

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

**Tailoring aeroelastico di strutture
composite con angolo di laminazione
variabile**



**Politecnico
di Torino**

Relatore
prof. Enrico Zappino
Correlatore:
prof. Marco Petrolo

Candidato
Massimiliano ORLANDI
matricola: s267669

ANNO ACCADEMICO 2021 – 2022

Sommario

Il tailoring aeroelastico consiste nella progettazione di superfici portanti in materiale composito, andando ad utilizzare una disposizione delle fibre che migliori le prestazioni dal punto di vista aeroelastico, ovvero che eviti il più possibile la comparsa di instabilità aeroelastiche, quali la divergenza e il flutter. Questi sono quindi fenomeni da evitare perché porterebbero deformazioni molto grandi, che porterebbero alla rottura della struttura.

Un primo obiettivo è quello di verificare l'accuratezza dei modelli strutturali utilizzati per diversi modelli, via via più complessi utilizzando dei riferimenti bibliografici per confrontare i risultati. In secondo luogo, si vogliono mettere in luce le prestazioni aeroelastiche e strutturali di modelli in materiale composito a fibre curvilinee (VAT).

Nell'ambito di questa tesi vengono presentati dal punto di vista teorico i modelli strutturali e aerodinamici che vengono poi sfruttati per le analisi aeroelastiche. Per quanto riguarda il modello strutturale viene utilizzata la Carrera Unified Formula (CUF) per il raffinamento di elementi beam che costituiscono il modello, mentre per il modello aerodinamico si adotta un metodo ai pannelli chiamato Doublet Lattice Method. Per eseguire le analisi aeroelastiche il modello strutturale e il modello aerodinamico vengono accoppiati tramite l'utilizzo di un metodo di spline, dopodiché si risolve l'equazione aeroelastica attraverso il PK-Method. Per diversi modelli di piastra vengono fatte analisi statiche e dinamiche andando a variare il numero di nodi del modello e quindi i suoi gradi di libertà, oppure alternando un modello Layer Wise a uno di tipo Equivalent Single Layer. Le analisi sono state fatte anche cambiando le proprietà del materiale: prima isotropo, poi ortotropo con fibre rettilinee e infine introducendo le fibre curvilinee. Le analisi dinamiche permettono di ottenere frequenze e modi propri della struttura importanti per studiarne la rigidità e fare un'analisi preliminare sul flutter. In seguito, vengono fatte le analisi aeroelastiche per diversi modelli, con lo scopo di trovare la velocità di flutter e di divergenza rappresentative della stabilità aeroelastica di una struttura.

Quello che si è osservato è che laminati VAT hanno il vantaggio di abbinare zone in cui le fibre sono parallele al bordo d'attacco e zone in cui le fibre sono inclinate di 45° : questo permette di ottenere una buona rigidità sia a flessione che a torsione, cosa che porta vantaggi dal punto di vista aeroelastico, senza penalizzare le prestazioni strutturali. Infine, è stato verificato che l'utilizzo della CUF, per costruire il modello strutturale, permette di ridurre il costo computazionale rispetto a modelli agli elementi finite tridimensionali mantenendo comunque un'alta accuratezza.

Ringraziamenti

Questa tesi, per me, rappresenta la fine di un percorso impegnativo e tortuoso, durato sei anni e costituito da tante piccole esperienze, anche contrapposte, che mi hanno formato. Ci sono stati fallimenti, grandi soddisfazioni, momenti di sconforto e gioie per i traguardi raggiunti.

Il Politecnico mi ha formato come ingegnere, ma mi ha insegnato tanto anche dal punto di vista umano: ho imparato che molte volte gli ostacoli che all'inizio ci appaiano insormontabili, si possono superare con impegno e dedizione.

È bello a questo punto ringraziare le persone che mi sono state vicino durante questo percorso e non solo. Innanzitutto, ringrazio mia mamma e mio papà che mi hanno sempre sostenuto sia moralmente che economicamente, donandomi sempre il meglio.

Ringrazio i miei relatori, il professor Enrico Zappino e il professor Marco Petrolo per la loro guida preziosa e la grande disponibilità che hanno sempre dimostrato durante questo lavoro.

Ringrazio poi la mia Unità, con cui ho un legame di amicizia e fratellanza che so che rimarrà per sempre, grazie a Fede, Gax, Edo, Milans, Dibi, Barco, Richi e Mattia.

Ringrazio Dani, Paul e gli altri miei compagni di corso che spesso mi hanno aiutato in mille modi a superare le difficoltà incontrate durante il mio percorso di studi e con cui ho condiviso tante giornate per cercare di imparare a essere dei bravi ingegneri.

Grazie a Francesco, perché in questi anni di università abbiamo rafforzato un'amicizia di lunghissima data e grazie per i tuoi fantastici aneddoti che spesso mi rallegrano la serata.

Indice

1	Introduzione	7
1.1	Il problema aeroelastico	7
1.2	Aeroelasticità Statica	8
1.3	Tailoring Aeroelastico	9
1.4	Aeroelasticità Dinamica	10
1.5	Variable Angle Tow	11
1.5.1	Produzione di un laminato VAT	12
1.6	Obiettivi	13
2	Modello Strutturale	15
2.1	Principio degli Spostamenti Virtuali (PVD)	15
2.2	Carrera Unified Formula	16
2.2.1	Assemblaggio	18
2.2.2	Adattamento della CUF a diversi modelli	18
2.2.3	Espansioni in serie per la CUF	19
3	Modello Aeroelastico	23
3.1	Divergenza in un profilo bidimensionale	23
3.2	Flutter	25
3.3	Modello Aerodinamico	27
3.3.1	Vortex Lattice Method	28
3.3.2	Doublet Lattice Method	29
3.4	Il metodo spline	30
3.4.1	Pendenza degli spostamenti ai Control Point	32
3.5	PK-Method	33
3.6	Analisi Aeroelastica	34
3.6.1	Analisi Modale	34
4	Risultati numerici	37
4.1	Assessment per analisi statica	37
4.2	Assessment per analisi dinamica	41
4.3	Analisi statica di una trave in materiale composito	43
4.4	Analisi dinamica di una trave VAT	45
4.5	Analisi dinamica di una piastra VAT multilayer	48
4.6	Analisi aeroelastica di una piastra isotropa	52

4.7	Analisi aeroelastica di un laminato in composito	56
4.8	Analisi aeroelastica di una lamina VAT	59
4.9	Analisi aeroelastica di un cassone alare	62
4.9.1	Analisi dinamica	64
4.9.2	Analisi di Flutter	67
4.10	Analisi di un cassone alare realistico	69
Bibliografia		83

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Il problema aeroelastico

L'aeroelasticità è definita come la scienza che studia la mutua interazione tra le forze aerodinamiche, elastiche e inerziali che agiscono su una struttura. I problemi aeroelastici non esisterebbero se le strutture aeronautiche fossero perfettamente rigide, al contrario quasi tutti i velivoli presentano una struttura con una flessibilità non trascurabile e che dà origine ai diversi fenomeni aeroelastici. Più precisamente, i fenomeni aeroelastici derivano da quelle particolari deformazioni strutturali che originano delle forze aggiuntive sulla struttura stessa. Queste forze aggiuntive, a loro volta, producono delle deformazioni aggiuntive che possono smorzarsi fino a raggiungere un punto di equilibrio oppure divergere fino alla rottura della struttura.

Hodges e Pierce [2011](#) presentano l'aeroelasticità come l'unione di tre discipline:

- **Aerodinamica:** consiste nel calcolo delle forze che agiscono su un corpo immerso in un flusso
- **Elasticità:** calcola come si deforma un corpo elastico sottoposto a un certo carico
- **Dinamica:** introduce l'effetto delle forze inerziali

Queste sono anche i tre vertici del *triangolo di Collar*, il quale ci permette di portare altre definizioni riguardanti l'aeroelasticità. Come si osserva in Figura [1.1](#) l'interazione tra le forze elastiche e aerodinamiche permette uno studio di aeroelasticità statica. In figura viene riportato il termine *Divergence* che è la più importante instabilità in aeroelasticità statica. Se invece studiamo l'interazione tra forze inerziali e forze elastiche, rimaniamo all'interno della dinamica strutturale. Considerando, invece tutte e tre le tipologie di forze si porta avanti uno studio di aeroelasticità dinamica. L'instabilità dinamica più importante in campo aeroelastico e anche quella che può portare a un evento catastrofico, è il *flutter*.

È interessante notare che già agli inizi della storia dell'aviazione i fenomeni aeroelastici avevano un peso. I fratelli *Wright* utilizzarono una deformazione controllata delle ali sul *Wright Flyer* nel 1903 per ottenere una buona manovrabilità laterale e rendere il velivolo stabile. Inoltre, i velivoli biplano erano i più diffusi fino agli anni '30 proprio perché la doppia ala era la soluzione più semplice e conveniente per ottenere una buona rigidezza

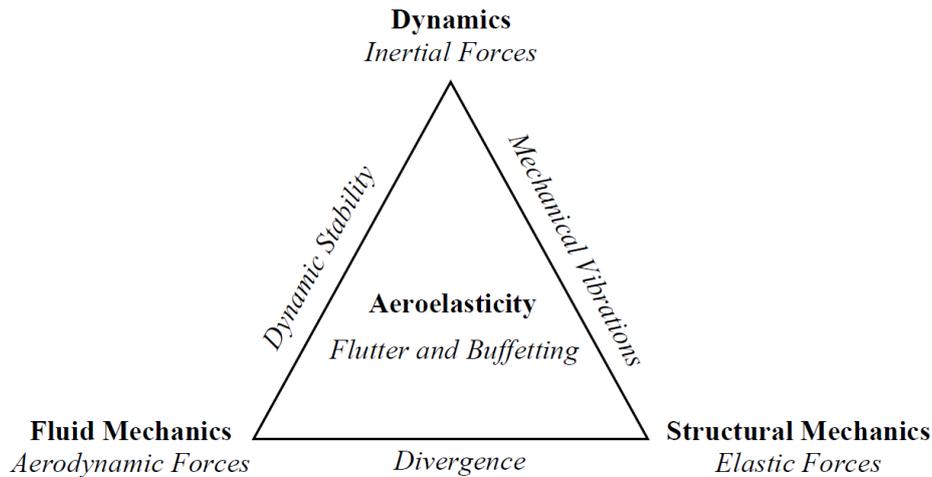


Figura 1.1: Triangolo di Collar

torsionale ed evitare la divergenza. Come si riporta in Bisplinghoff, Ashley e Halfman 2013 il primo caso documentato di flutter su un velivolo coinvolse l'*Handley Page O/400* nel 1916. La coda e la fusoliera andavano incontro a forti oscillazioni e si scoprì che queste due parti avevano due principali modi di vibrare a bassa frequenza. Uno dei due modi causava un'oscillazione antisimmetrica degli *elevators* destro e sinistro. Il secondo modo invece provocava una torsione della fusoliera. Venne quindi scoperto, che l'accoppiamento tra i due modi era la causa delle oscillazioni divergenti, perciò per risolvere il problema venne imposto come requisito di progetto che i due elevator, destro e sinistro, fossero collegati da una trave rigida, che legasse le deflessioni delle due superfici mobili.

Problemi aeroelastici relativi all'ala iniziarono a presentarsi con l'abbandono della configurazione biplano in favore di quella monoplano che aveva una minore rigidità torsionale. Un primo esempio fu il *Fokker D-8*, già utilizzato durante la prima guerra mondiale, che fin dai primi voli andò incontro a diversi failure catastrofici dell'ala. Dopo alcune accurate misurazioni delle deflessioni, si osservò che i tip dell'ala aumentavano di molto la loro incidenza quando la struttura era sotto carico ed era proprio questa la causa degli eventi catastrofici.

1.2 Aeroelasticità Statica

Come è intuibile dal nome, l'aeroelasticità statica è lo studio dell'interazione tra carichi aerodinamici e deformazioni elastiche escludendo dalla trattazione le forze inerziali. Questo significa che il tempo non è presente come variabile indipendente e che le forze aerodinamiche sono derivate da risultati di flusso stazionario. La più importante instabilità statica in aeroelasticità è detta *divergenza* e, per fissate condizioni di volo, si verifica per velocità maggiori di una certa velocità limite detta velocità di divergenza. Nello specifico, in condizione di divergenza, i carichi aerodinamici deformano la semiala in un modo da far aumentare ancora i carichi aerodinamici, che a loro volta fanno aumentare le deformazioni

che alla fine portano alla rottura della struttura. L'esempio più comune che può verificarsi è una semiala, che sottoposta a un carico di portanza, va in torsione facendo aumentare l'incidenza della semiala che nuovamente fa crescere la portanza. L'entità della torsione dipende naturalmente dalla velocità di volo, perciò esisterà una velocità da non superare per cui le deformazioni sono sufficientemente grandi da arrivare a rottura.

Un altro fenomeno riguardante l'aeroelasticità statica fu osservato per la prima volta nel 1927, sul velivolo inglese *Bristol Bagshot*. Man mano che la velocità aumentava si registrava una diminuzione dell'efficacia degli alettoni fino ad arrivare a un comportamento di questi ultimi, opposto a quello atteso. Questo significa che per una pressione dinamica sufficientemente alta, la portanza non aumenta più, anzi tende a diminuire, all'aumentare della deflessione della superficie mobile. La causa è da ricercare nell'aumento del modulo del momento aerodinamico che tende a far picchiare la porzione di semiala considerata. Questo fenomeno aeroelastico è detto *inversione dei comandi*, spesso esso non porta a un incidente catastrofico, ma è comunque importante tenerne conto nel progetto per evitarlo e assicurare al pilota una buona risposta dei comandi.

1.3 Tailoring Aeroelastico

Nel paper di Christine V Jutte e Bret K Stanford [2014](#) si presenta una panoramica dello stato attuale del Tailoring Aeroelastico e delle sue potenzialità.

Due dei principali obiettivi nel progetto della struttura dell'ala sono la riduzione del peso e l'aumento dell'*aspect ratio* per ridurre la resistenza indotta. Un'ala snella, quindi con un alto aspect ratio, per cui si è anche minimizzato il peso è più propensa ad andare incontro ad instabilità aeroelastica, per questa ragione il tailoring aeroelastico diventa importante per l'ottimizzazione delle strutture moderne.

Il tailoring aeroelastico è la progettazione di un'ala utilizzando materiali compositi, che essendo ortotropi permettono di ottimizzare le prestazioni aeroelastiche, ma anche ottenere specifici comportamenti in termini di rigidità e resistenza. In pratica, l'utilizzo di materiali compositi permette di avere una rigidità che differisce lungo tre direzioni ortogonali tra loro, da cui si può ottenere un certo accoppiamento flesso-torsionale che eviti che l'ala progettata vada incontro a instabilità aeroelastiche.

Facendo riferimento alla figura [1.2](#) si definisce la *primary stiffness direction* della semiala come il luogo dei punti dove la struttura presenta una maggiore rigidità a flessione. L'asse di riferimento è invece l'asse elastico della struttura convenzionale. Quando la *primary stiffness direction* è spostata in avanti rispetto all'asse di riferimento si crea un accoppiamento flesso-torsionale che tende ad abbassare il bordo d'attacco (*wash-out*). Se al contrario la *primary stiffness direction* è inclinata verso poppa si crea un accoppiamento flesso-torsionale che tende ad alzare il bordo d'attacco (*wash-in*).

In figura [1.2](#) vengono indicati i diversi vantaggi dell'inclinare l'asse di primary stiffness verso la parte anteriore o posteriore. In particolare, per un'ala in wash-out si tende a evitare la divergenza, mentre per un'ala in wash-in si previene il flutter.

Una degli esempi più rilevanti riguardante il tailoring aeroelastico è il *Grumman X-29*, velivolo sperimentale che ha la particolarità di avere un angolo di freccia negativo (*Forward Sweep*) ed è stato reso stabile proprio grazie all'utilizzo di diversi strati di materiale composito per costruire l'ala.

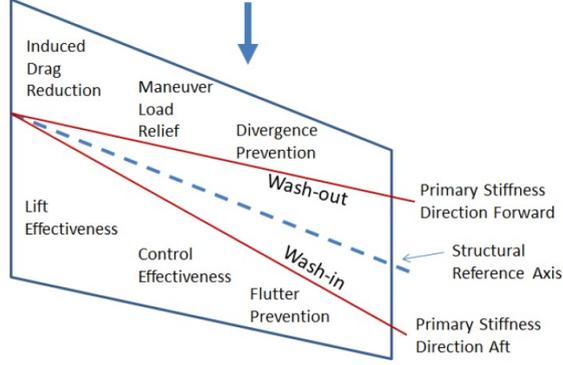


Figura 1.2: Effetti di una diversa inclinazione della primary stiffness direction, figura proveniente da Christine V Jutte e Bret K Stanford 2014

Per una generica semiala sappiamo che quando viene caricata con un carico distribuito di portanza tende a flettere verso l'alto, ma questa flessione avrà effetti diversi sulla torsione a seconda che la freccia sia positiva o negativa. Vale a dire, che nel caso di freccia negativa la flessione dà come conseguenza un aumento di incidenza e questo crea instabilità, ovvero la condizione di divergenza si verificherà a velocità relativamente basse.

Per mostrare più precisamente gli effetti dell'ala a freccia cominciamo col definire θ come la variazione di incidenza *streamwise* a causa della deformazione elastica. Definiamo poi una prima coppia di vettori $\hat{\mathbf{a}}_1$ e $\hat{\mathbf{a}}_2$ nella direzione dell'asse y body e del vento, rispettivamente. La seconda coppia di vettori è $\hat{\mathbf{b}}_1$ e $\hat{\mathbf{b}}_2$ ed è ottenuta ruotando $\hat{\mathbf{a}}_1$ e $\hat{\mathbf{a}}_2$ dell'angolo di freccia Λ

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}_1 &= \cos(\Lambda)\hat{\mathbf{a}}_1 + \sin(\Lambda)\hat{\mathbf{a}}_2 \\ \hat{\mathbf{b}}_2 &= -\sin(\Lambda)\hat{\mathbf{a}}_1 + \cos(\Lambda)\hat{\mathbf{a}}_2\end{aligned}\quad (1.1)$$

A questo punto si può scrivere la torsione attorno all'asse y come somma di due contributi:

$$\theta = \left(\bar{\theta}\hat{\mathbf{b}}_1 + \frac{dw}{dy}\hat{\mathbf{b}}_2 \right) \cdot \hat{\mathbf{a}}_1 = \bar{\theta} \cos(\Lambda) - \frac{dw}{dy} \sin(\Lambda) \quad (1.2)$$

Il primo contributo è dato dalla torsione attorno all'asse \bar{y} , che è l'asse elastico della semiala, mentre il secondo contributo è la flessione attorno alla direzione definita dal vettore $\hat{\mathbf{b}}_2$. Dall'equazione 1.2 osserviamo che se la freccia è positiva $\Lambda > 0$ la flessione contribuisce a diminuire la torsione della semiala, al contrario se la freccia è negativa $\Lambda < 0$ abbiamo un incremento di torsione che rende instabile la configurazione.

1.4 Aeroelasticità Dinamica

Come detto in precedenza i fenomeni aeroelastici possono essere statici oppure dinamici. In questa sezione si parlerà di aeroelasticità dinamica facendo particolare attenzione all'instabilità dinamica più importante e critica: il *flutter*. Si può definire il flutter aeroelastico

come un'instabilità dinamica associata all'interazione tra carichi aerodinamici, forze elastiche e inerziali che produce oscillazioni non smorzate. Quello che succede durante il flutter è che le forze aerodinamiche interagiscono con i modi propri della struttura alimentando delle oscillazioni che tendono a crescere di ampiezza fino ad essere distruttive per la struttura. In ambito aeronautico, il fenomeno del flutter interessa principalmente le superfici portanti, quindi in fase di progetto bisognerà fare attenzione a evitare l'instabilità di flutter per tutte le condizioni di volo previste. La velocità di flutter U_F è definita come la minima velocità al quale una certa struttura che vola a una certa quota e a una certa temperatura, manifesta oscillazioni puramente armoniche. Allora volare alla velocità U_F costituirà la condizione di stabilità neutra. Ne consegue che per velocità minori della velocità di flutter $U < U_F$ le oscillazioni strutturali tenderanno ad affievolirsi dato che il sistema è stabile, al contrario, per velocità maggiori $U > U_F$ potranno presentarsi oscillazioni divergenti.

Un'altra instabilità dinamica è il *buffeting* che consiste in vibrazioni transitorie ad alta frequenza di componenti strutturali dovute a degli impulsi aerodinamici prodotti dalla scia a valle delle semiali, delle nacelles e altri componenti del velivolo. Quello che può succedere è che l'impennaggio orizzontale riceve dalle semiali o dalle nacelles un flusso sporcato, con un alto livello di turbolenza che quindi dà l'innescò a delle vibrazioni strutturali.

1.5 Variable Angle Tow

I materiali compositi sono molto diffusi e utilizzati nel settore aerospaziale perché presentano un'ottima resistenza specifica e rigidità e una buona vita a fatica. Tradizionalmente, i materiali compositi sono costituiti da fibre rettilinee orientate con un certo angolo e immerse in una matrice. Le fibre avranno una maggiore rigidità della matrice che invece, è importante per diminuire il peso del materiale. A causa del fatto che la rigidità dipende dalla direzione considerata, variando l'angolo delle fibre varia il comportamento flesso-torsionale.

Negli ultimi anni però, grazie alla disponibilità di nuove tecnologie manifatturiere, è stato possibile produrre materiali compositi con fibre che seguono una traiettoria arbitraria fissata in fase di progettazione. Se da un lato è più complesso produrre materiali compositi con fibre curvilinee (VAT), dall'altro può diventare conveniente per ottenere un particolare comportamento della struttura.

L'utilizzo di uno specifico angolo di laminazione, quindi rimanendo nel caso di fibre rettilinee, può portare ad ottenere alte prestazioni da un certo punto di vista, andando però a penalizzare altri aspetti. L'esempio più comune è quello del laminato a $\pm 45^\circ$ con cui si può ottenere un'alta rigidità torsionale, ma basse performance a flessione. Invece, come viene riportato in A. Viglietti, E. Zappino e E. Carrera 2019, l'utilizzo di un laminato VAT permette un maggiore controllo della rigidità della struttura anche in accordo con i carichi che deve sostenere ed evita l'introduzione di discontinuità nella struttura che ci sarebbero se l'angolo delle fibre avesse una variazione improvvisa.

A questo proposito, Stodieck et al. 2013 pubblicarono uno studio che illustra i vantaggi in termini aeroelastici nell'utilizzo di VAT rispetto alle fibre unidirezionali. L'indagine è stata svolta per una piastra rettangolare incastrata a una estremità. La piastra considerata è un laminato simmetrico con 8 strati per il quale si assume che gli spostamenti siano continui da uno strato all'altro. Vengono inoltre previsti dei carichi aerodinamici quasi

stazionari usando la *strip theory* che permette una variabilità continua dei carichi lungo l'apertura alare.

Viene quindi effettuato uno studio parametrico per studiare le proprietà strutturali e aeroelastiche per diversi laminati VAT. Si prevede che i quattro strati interni siano a fibre unidirezionali inclinate di 45° , mentre i quattro strati più esterni siano ad angolo di fibre variabile linearmente dalla radice (T_0) al tip (T_1) della piastra. Lo studio consiste proprio nel far variare gli angoli T_0 e T_1 , in modo indipendente, in un range tra -45° e $+45^\circ$.

Una prima considerazione che viene fatta è che grazie al VAT è possibile ottenere un asse elastico non rettilineo, infatti può risultare conveniente avere un asse elastico che curva in avanti quando si è vicini al tip della piastra in modo da dare un'alta rigidità torsionale al tip senza sacrificare la rigidità flessionale verso la radice. Sappiamo però che la rigidità torsionale è legata alla velocità di divergenza: se le fibre curveranno verso il bordo di fuga la velocità di divergenza diminuirà fino a essere anche minore della velocità di flutter, mentre se curvano verso il bordo d'attacco la velocità di divergenza diventerà sufficientemente alta da essere al di fuori di un eventuale involuppo di volo.

Discorso diverso per la condizione di flutter: essa si verifica a velocità più basse quando le fibre sono dirette lungo la direzione *spanwise*, questo perché in queste condizioni è facilitata la coalescenza tra il I modo flessionale e il I modo torsionale. D'altra parte, aumentando l'angolo delle fibre inizia ad aumentare la velocità di flutter fino ad arrivare al valore massimo di 67 m/s per il seguente laminato VAT: $Root[-45 \ 45 \ -45 \ 45]_s/Tip[-27 \ 27 \ -45 \ 45]_s$, mentre la velocità di flutter per il laminato unidirezionale $[-45 \ 45 \ -45 \ 45]_s$ è di 59 m/s . In conclusione, è possibile aumentare del 14% la velocità di flutter grazie all'utilizzo del laminato VAT.

1.5.1 Produzione di un laminato VAT

Kim, Potter e Weaver 2012 sottolineano che il metodo di produzione più diffuso per i compositi VAT rimane il cosiddetto Automated Fibre Placement (AFP). Questa tecnica consiste nel deporre e stirare delle matasse pre-impregnate dette *'slit tape'* lungo un percorso curvilineo. Questo processo di produzione, però porta con sé dei difetti di produzione come il *fiber wrinkling*, ma anche vuoti lasciati dalle fibre, detti *tow gaps* oppure sovrapposizioni, *tow overlap*. Nello specifico, la testa AFP ruota e stende le fibre utilizzando una deformazione per flessione nel piano e questo porta a buckling nella parte interna del tracciato curvo, mentre porta a trazione all'esterno del tracciato. Inoltre, si definisce un percorso di riferimento, come guida per la deposizione delle fibre, che man mano viene traslato per riempire tutto il pannello di materiale composito. Questo però, porta ai difetti di produzione già citati: *tow gaps* e *tow overlaps*.

Quando si parla di variazione lineare dell'angolo delle fibre utilizzando lo *shifting method*, ovvero il metodo appena descritto, si utilizza la seguente notazione per indicare il percorso delle fibre:

$$\phi \pm \langle T_0 | T_1 \rangle \quad (1.3)$$

Ovvero l'angolo delle fibre θ nel generico punto del pannello è:

$$\theta(x') = \phi + (T_1 - T_0) \frac{|x'|}{d} + T_0 \quad (1.4)$$

Dove con T_0 si indica l'angolo di inclinazione delle fibre in un certo punto di riferimento A . ϕ è invece la rotazione del sistema di riferimento delle fibre $x' - y'$ rispetto al sistema di riferimento globale $x - y$. Infine T_1 è l'orientazione delle fibre alla distanza d dal punto A .

Negli ultimi anni, si è cercato di ridurre i difetti di produzione descritti in precedenza e a questo proposito si è sviluppata una tecnica innovativa chiamata *Continuous Tow Shearing* (CTS). Nella tecnica tradizionale AFP la testa ruota attorno al suo asse verticale mentre deposita le fibre e utilizza una in-plane deformation per ottenere le fibre curve. Nel CTS invece, si applica continuamente uno sforzo di taglio alle fibre che riescono quindi ad adattare il loro raggio di curvatura e ad evitare sovrapposizioni o spazi vuoti.

1.6 Obiettivi

Questa tesi si articola in una serie di analisi statiche, dinamiche e aeroelastiche su diversi modelli con l'obiettivo di verificarne l'accuratezza e di studiare il comportamento di diversi tipi di strutture con particolare attenzione alle strutture composite con fibre curvilinee. Il cuore di questa tesi sarà quindi studiare il comportamento aeroelastico di alcune strutture mettendo in luce le differenze nelle prestazioni di diverse laminazioni.

Per eseguire queste analisi bisogna innanzitutto costruire un modello aeroelastico, in pratica costituito dall'unione tra un modello strutturale e uno aerodinamico. Per il modello strutturale si sfrutta la Carrera Unified Formula per poter affinare modelli più semplici come la trave o la piastra. Il modello aerodinamico è invece costruito sfruttando il *Doublet Lattice Method* che divide con una griglia l'intera superficie aerodinamica e assegna a ogni quadrilatero una doppietta proporzionale al salto di pressione.

Capitolo 2

Modello Strutturale

2.1 Principio degli Spostamenti Virtuali (PVD)

Nell'ambito delle strutture aeronautiche è possibile studiare il comportamento di una struttura da diversi punti di vista, svolgendo diversi tipi di analisi. Di seguito, la descrizione del problema verrà fatta utilizzando il principio degli spostamenti virtuali (PVD). Il primo tipo di analisi è quello della risposta statica che considera l'effetto delle forze elastiche e dei carichi esterni. Allora dovranno bilanciarsi il lavoro interno e il lavoro dei carichi esterni:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \quad (2.1)$$

Il lavoro interno è definito dalle tensioni e dalle deformazioni in un corpo generico di volume V perciò si può scrivere:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.2)$$

Introducendo quindi l'approssimazione agli elementi finiti esprimiamo il lavoro interno utilizzando la matrice di rigidezza K e il vettore degli spostamenti nodali U :

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.3)$$

D'altra parte il lavoro dei carichi esterni, che in ambito aeroelastico sarà il lavoro dei carichi aerodinamici, può essere espresso come:

$$\delta L_{ext} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (2.4)$$

Da cui otteniamo che

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.5)$$

Per cui si può ricavare il vettore degli spostamenti U che è l'incognita del problema.

Se invece, si vuole svolgere lo studio dal punto di vista della dinamica strutturale, si devono considerare le forze inerziali e le forze elastiche. Lo studio prende il nome di *Free Vibration Analysis* e permette di ottenere le frequenze e i modi propri della struttura. Il PVD nel caso dinamico e in assenza di carichi esterni si esprime come:

$$\delta L_{int} = -\delta L_{ine} \quad (2.6)$$

Il lavoro delle forze inerziali, dimensionalmente è il prodotto tra massa, accelerazione e spostamento, allora è immediato scrivere:

$$\delta L_{ine} = \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.7)$$

Dove $\ddot{\mathbf{u}}$ indica il vettore spostamento derivato due volte rispetto al tempo. Utilizzando nuovamente l'approssimazione *FEM* possiamo scrivere:

$$\delta L_{ine} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \quad (2.8)$$

A questo punto sfruttando l'equazione 2.6 si ottiene:

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = -\delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \quad (2.9)$$

Infine,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = 0 \quad (2.10)$$

Il terzo e ultimo caso considera tutti e tre i tipi di lavoro: inerziale, elastico e esterno. Perciò scriviamo

$$\delta L_{int} + \delta L_{ine} = \delta L_{ext} \quad (2.11)$$

Sostituendo con le definizioni precedenti:

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (2.13)$$

2.2 Carrera Unified Formula

Nell'ambito di questa tesi, viene utilizzato un approccio basato sulla *Carrera Unified Formulation* (CUF), presentato in modo completo da Erasmo Carrera 2014, che permette di derivare matrici e vettori degli elementi finiti in termini di nuclei fondamentali. In modo intuitivo, si può dire che la CUF ha lo scopo di migliorare l'accuratezza dei modelli trave e piastra aumentando relativamente poco il costo computazionale e mantenendo un numero di gradi di libertà più basso rispetto ai modelli 3D agli elementi finiti.

Per entrare nello specifico della CUF prendiamo in esame una trave incastrata a un estremo e libera nell'altro, con l'asse y passante per l'asse della trave come rappresentato in Figura 2.1

Il modello più semplice di trave sarebbe un modello unidimensionale in cui lo spostamento è funzione solo di y , quindi è costante sull'intera sezione trasversale. Volendo però, aumentare l'accuratezza si utilizza un modello tridimensionale che quindi consideri che lo spostamento è variabile sia lungo l'asse, ma anche sul piano xz : $u_y = u_y(x, y, z)$, così da poter descrivere anche il comportamento di una generica sezione della trave.

Per iniziare a descrivere la CUF, diciamo che si può esprimere il campo di spostamenti nelle tre direzioni come prodotto di due funzioni: una che descriva gli spostamenti sulla generica sezione e l'altra che li descriva lungo l'asse y .

$$\mathbf{u} = f(x, z) \cdot g(y) \quad (2.14)$$

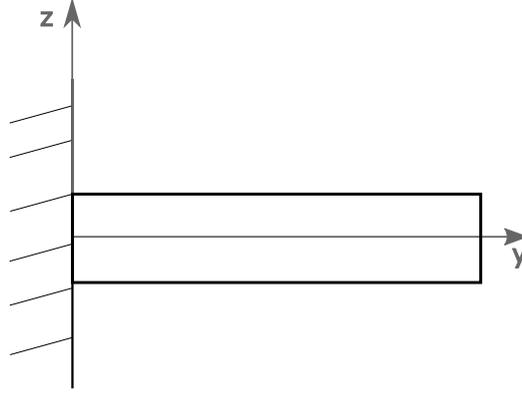


Figura 2.1: modello di trave

Per approssimare gli spostamenti lungo l'asse y si possono usare le funzioni di forma $N_i(y)$, tipiche della formulazione agli elementi finiti, mentre si utilizzano i coefficienti $u_i(x, z)$ per descrivere gli spostamenti sulla sezione. A questo punto, l'approssimazione che si fa è dire che gli spostamenti sulla sezione sono esprimibili come una sommatoria di funzioni moltiplicati per gli spostamenti modali:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(x, z) &= F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{\tau i} \\ &= F_1(x, z)\mathbf{u}_{\tau 1} + F_2(x, z)\mathbf{u}_{\tau 2} + \dots + F_M(x, z)\mathbf{u}_{\tau M} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Perciò il campo di spostamenti è espresso come:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = N_i(y)F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.16)$$

Introduciamo ora lo spostamento virtuale utilizzando l'indice s al posto di τ e j al posto di i :

$$\delta \mathbf{u} = N_j(y)F_s(x, z)\delta \mathbf{u}_{sj} \quad (2.17)$$

E con lo scopo di ricavare il lavoro interno scriviamo i vettori di tensione e deformazione:

$$\boldsymbol{\epsilon}(x, y, z) = \mathbf{b}N_i(y)F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) = \mathbf{C}\mathbf{b}N_i(y)F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.19)$$

E la deformazione virtuale:

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}(x, y, z) = \mathbf{b}N_j(y)F_s(x, z)\delta \mathbf{u}_{sj} \quad (2.20)$$

Avendo indicato con \mathbf{b} la matrice 6×3 degli operatori differenziali, costruita in modo da legare gli spostamenti e le deformazioni. Tale matrice viene esplicitata nell'equazione 2.21.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Inoltre, \mathbf{C} è la matrice 6×6 che contiene le caratteristiche di rigidità del materiale, provenienti dalla legge di Hooke che lega tensione e deformazione.

Per definizione il lavoro interno è:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.22)$$

Quindi utilizzando le equazioni 2.19 e 2.20 giungiamo alla scrittura finale:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \int_V [N_j(y) F_s(x, z) \mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{b} N_i(y) F_\tau(x, z)] dV \mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.23)$$

L'integrale di volume appena scritto è una matrice 3×3 e viene chiamata *fundamental nucleus* e indicata con $\mathbf{k}^{\tau s i j}$. Il lavoro interno è quindi:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{k}^{\tau s i j} \mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.24)$$

2.2.1 Assemblaggio

Utilizzando la CUF l'assemblaggio delle matrici è un'operazione facilmente implementabile in un codice per il calcolatore. Il procedimento consiste in quattro loop sui quattro indici definiti in precedenza τ, s, i, j e per ogni combinazione di questi indici viene calcolato lo specifico *fundamental nucleus*. Per la complessità del problema, però avremo diversi tipi di matrici da assemblare: sapendo che ogni nucleo fondamentale è una matrice 3×3 , esso va ad assemblarsi con la matrice del nodo costruita facendo variare τ e s , ovvero gli indici delle funzioni definite sulla sezione trasversale nel caso di modello di trave raffinata. Il passo successivo è costruire la matrice degli elementi facendo variare gli indici i e j che definiscono ciascun nodo dell'elemento considerato. Infine, eseguendo il ciclo su ogni elemento si arriva alla costruzione della matrice di rigidità globale. La Figura 2.2 è uno schema del procedimento di assemblaggio delle matrici.

2.2.2 Adattamento della CUF a diversi modelli

Ricordiamo che il campo di spostamenti per un modello 1D, è definito lungo l'asse dalle funzioni di forma $N_i(y)$ e dalle funzioni $F_\tau(x, z)$ sulla sezione trasversale.

$$\mathbf{u} = N_i(y) F_\tau(x, z) \mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.25)$$

Nell'ambito della CUF si ha la possibilità di estendere la trattazione precedente anche ad altri modelli strutturali come la piastra, attuando delle semplici modifiche. Le funzioni di forma saranno costruite in modo diverso a seconda della dimensione del modello:

- $1D \rightarrow N_i(y)$
- $2D \rightarrow N_i(x, y)$
- $3D \rightarrow N_i(x, y, z)$

In modo complementare si modificheranno le funzioni F_τ :

- $1D \rightarrow F_\tau(x, z)$

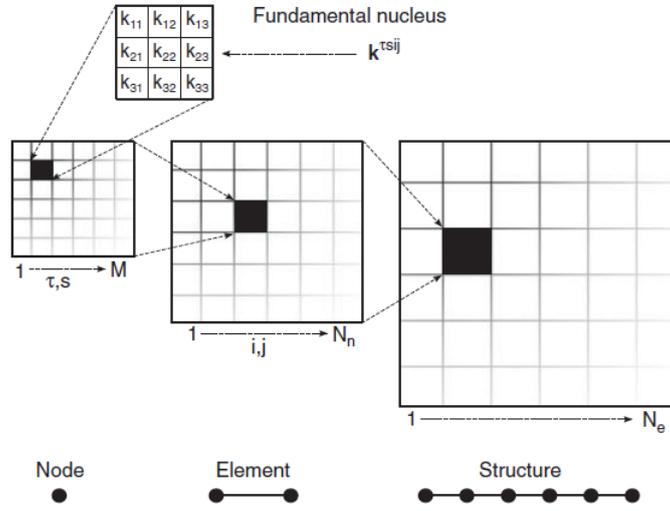


Figura 2.2: Schema per l'assemblaggio delle matrici. Immagine presa dal libro di Erasmo Carrera 2014

- $2D \rightarrow F_\tau(z)$
- $3D \rightarrow 1$

Quindi, ad esempio per una piastra, si usa un modello agli elementi finiti sulla superficie di riferimento, perciò i nodi FEM saranno sul piano xy , mentre lungo lo spessore z vengono utilizzate le funzioni $F_\tau(z)$ per descrivere gli spostamenti. Allora, in questo caso, il vettore degli spostamenti viene scritto così:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = N_i(x, y)F_\tau(z)\mathbf{u}_{\tau i} \quad (2.26)$$

2.2.3 Espansioni in serie per la CUF

All'interno della struttura della CUF possiamo implementare diversi modelli con diversi gradi di accuratezza, che vanno a definire la serie di funzioni F_τ . Due sono le scelte più comuni:

- Espansione di Taylor (TE)
- Espansione di Lagrange (LE)

La differenza concettuale più importante tra i due modelli è che l'espansione di Lagrange ci permette di usare un approccio *Layer Wise*, ovvero dà la possibilità di modellizzare ogni layer del materiale composito con uno o più elementi. Al contrario, l'espansione di Taylor modella la sezione con un'unica funzione continua.

Utilizzare un modello unidimensionale con espansione di Taylor significa definire gli spostamenti come un'espansione in serie in cui compaiono x e z elevati a una certa potenza:

$$\begin{cases} u_x = u_{x1} + xu_{x2} + zu_{x3} + \dots + x^m z^n u_{xi} \\ u_y = u_{y1} + xu_{y2} + zu_{y3} + \dots + x^m z^n u_{yi} \\ u_z = u_{z1} + xu_{z2} + zu_{z3} + \dots + x^m z^n u_{zi} \end{cases} \quad (2.27)$$

L'espansione di Taylor adottata avrà quindi ordine N (TE N), dove N è l'ordine massimo del polinomio adottato per descrivere il campo di spostamenti. Per chiarezza specifichiamo che *TE 1* prevederà le tre seguenti funzioni F_τ : $F_1 = 1$, $F_2 = x$, $F_3 = z$. Mentre, ad esempio, *TE 2* prevede 6 funzioni F_τ , saranno quindi da includere nell'espansione anche i seguenti termini: $F_4 = x^2$, $F_5 = xz$, $F_6 = z^2$.

All'interno dei modelli TE vengono inclusi come casi particolari i modelli di trave di Eulero Bernoulli e di Timoshenko, indicati rispettivamente con *TE -1* e *TE 0*.

Per la trave di Eulero Bernoulli (EBBT) vengono fatte le seguenti ipotesi:

1. La sezione trasversale è rigida nel suo piano
2. La sezione può ruotare nel piano xy senza deformarsi
3. La sezione rimane perpendicolare all'asse della trave

Allora si può scrivere il campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u_x = u_{x1}(y) \\ u_y = u_{y1}(y) + \phi_z(y)x + \phi_x(y)z \\ u_z = u_{z1}(y) \end{cases} \quad (2.28)$$

Dove ϕ_z e ϕ_x sono rispettivamente, la rotazione attorno all'asse z e all'asse x . La terza ipotesi, però implica che $\gamma_{yz} = \gamma_{xy} = 0$. Questo ci permette di riscrivere le rotazioni ϕ :

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = u_{y,x} + u_{x,y} = \phi_z + u_{x1,y} = 0 \\ \gamma_{yz} = u_{y,z} + u_{z,y} = \phi_x + u_{z1,y} = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Perciò il campo di spostamenti diventa:

$$\begin{cases} u_x = u_{x1} \\ u_y = u_{y1} - u_{x1,y}x + u_{z1,y}z \\ u_z = u_{z1} \end{cases} \quad (2.30)$$

D'altra parte per il modello trave di Timoshenko (TBT) viene meno un'ipotesi formulata in Eulero-Bernoulli: la sezione della trave può ruotare liberamente anche senza essere perpendicolare all'asse: $\gamma_{xy} \neq 0$ $\gamma_{yz} \neq 0$

Perciò viene mantenuta la linearità per quanto riguarda lo spostamento lungo y , ma le rotazioni ϕ_z ϕ_x non sono vincolate da nessuna condizione:

$$\begin{cases} u_x = u_{x1} \\ u_y = u_{y1} + \phi_z x + \phi_x z \\ u_z = u_{z1} \end{cases} \quad (2.31)$$

Per un modello LE, le funzioni dell'espansione in serie F_τ coincidono con i polinomi di Lagrange. Solitamente i polinomi di Lagrange sono definiti in termini di coordinate normalizzate, perché rispetto alle coordinate fisiche danno alcuni vantaggi. Le coordinate normalizzate, definite in modo che la sezione sia contenuta tra -1 e 1, permettono più facilmente l'utilizzo dei polinomi di Lagrange e la loro successiva integrazione. Per riportare un esempio semplice, ma che fa capire la struttura del modello LE, si riportano i polinomi di Lagrange per una sezione a quattro nodi (L4)

$$F_\tau = \frac{1}{4}(1 + \alpha\alpha_\tau)(1 + \beta\beta_\tau) \quad \tau = 1,2,3,4 \quad (2.32)$$

Avendo chiamato α e β le coordinate normalizzate, mentre α_τ e β_τ sono le coordinate dei nodi. Un secondo tipo di *LE model*, che useremo più spesso nell'ambito di questa tesi, è quello che adotta nove nodi (L9) ed è descritto dalle seguenti espansioni:

$$\begin{aligned} F_\tau &= \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(\beta^2 + \beta\beta_\tau) \quad \tau = 1,3,5,7 \\ F_\tau &= \frac{1}{2}\beta_\tau^2(\beta^2 + \beta\beta_\tau)(1 - \alpha^2) + \frac{1}{2}\alpha_\tau^2(\alpha^2 + \alpha\alpha_\tau)(1 - \beta^2) \quad \tau = 2,4,6,8 \\ F_\tau &= (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2) \quad \tau = 9 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Di conseguenza, il campo di spostamenti con un modello a nove nodi (L9) è:

$$\begin{cases} u_x &= F_1u_{x1} + F_2u_{x2} + \dots + F_9u_{x9} \\ u_y &= F_1u_{y1} + F_2u_{y2} + \dots + F_9u_{y9} \\ u_z &= F_1u_{z1} + F_2u_{z2} + \dots + F_9u_{z9} \end{cases} \quad (2.34)$$

Dove le incognite $u_{x1}, u_{x2}, \dots, u_{z9}$ sono le tre componenti di spostamento di ogni nodo definito dal modello. Un vantaggio nel modello LE è che i gradi di libertà del modello agli elementi finiti sono gli spostamenti fisici dei nodi e questo mantiene un alto livello di accuratezza e aderenza alla realtà.

Capitolo 3

Modello Aeroelastico

3.1 Divergenza in un profilo bidimensionale

Consideriamo l'esempio esplicativo riportato da Hodges e Pierce 2011 di un modello di un profilo generico a un grado di libertà, per cui è prevista solo la rotazione θ attorno a un punto O attraverso una molla torsionale di rigidità k . Scrivendo quindi l'equilibrio dei momenti attorno al punto O posizionato a una distanza x_o dal bordo d'attacco si può scrivere:

$$M_{ac} + L(x_o - x_{ac}) - W(x_o - x_{cg}) - k\theta = 0 \quad (3.1)$$

Dove M_{ac} è il momento aerodinamico attorno all'*aerodynamic center* che è posizionato alla distanza x_{ac} dal bordo d'attacco. L invece è la portanza agente sul profilo e W è il peso. Per proseguire la trattazione possiamo esprimere il momento aerodinamico e la portanza nel seguente modo:

$$M_{ac} = qScC_{Mac} \quad (3.2)$$

$$L = qSC_{L\alpha}\alpha \quad (3.3)$$

Dove abbiamo indicato con q la pressione dinamica, con S la superficie in pianta, con C_{Mac} il coefficiente di momento, con $C_{L\alpha}$ la pendenza della curva di portanza in funzione dell'incidenza α . Inoltre, quest'ultima può essere espressa come somma di un'incidenza dell'ala rigida e un'incidenza data dalla torsione θ . Allora l'equazione 3.1 può essere riscritta nella forma:

$$qScC_{Mac} + qSC_{L\alpha}(\alpha_R + \theta)(x_o - x_{ac}) - W(x_o - x_{cg}) = k\theta \quad (3.4)$$

Ora possiamo facilmente ricavare la torsione θ

$$\theta = \frac{qScC_{Mac} + qSC_{L\alpha}\alpha_R(x_o - x_{ac}) - W(x_o - x_{cg})}{k - qSC_{L\alpha}(x_o - x_{cg})} \quad (3.5)$$

Dall'equazione 3.5 notiamo che sotto una particolare condizione, il denominatore può tendere a zero e quindi far tendere la torsione a infinito $\theta \rightarrow \infty$. La condizione appena citata è la condizione di divergenza e si verifica quando

$$k - qSC_{L\alpha}(x_o - x_{ac}) = 0 \quad (3.6)$$

Da ciò si ricava la pressione dinamica di divergenza

$$q_D = \frac{k}{SC_{L\alpha}(x_o - x_{ac})} \quad (3.7)$$

E dato che la pressione dinamica è definita come $q = 1/2\rho_\infty U^2$, allora è immediato ricavare la velocità di divergenza

$$U_D = \sqrt{\frac{2k}{\rho_\infty SC_{L\alpha}(x_o - x_{ac})}} \quad (3.8)$$

Affinché questa velocità esista deve essere ovviamente un numero reale positivo, perciò deve valere:

$$x_o - x_{ac} > 0 \quad (3.9)$$

Ovvero il punto attorno a cui avviene la torsione deve essere posteriore all'*aerodynamic center*. Se invece il punto x_o è anteriore all'*aerodynamic center*, allora non esiste una velocità di divergenza e il sistema è stabile per qualsiasi velocità. Dalla relazione 3.8 si nota anche che la velocità di divergenza è funzione della densità dell'aria che investe il profilo, più precisamente la velocità di divergenza aumenta con la quota di volo.

Vogliamo ora ottenere una relazione che leghi in modo diretto l'angolo di torsione θ e la pressione dinamica q e per fare ciò facciamo delle ipotesi che ci permettano di semplificare l'equazione 3.5. Ipotesi:

- Il profilo è simmetrico e questo implica che $C_{Mac} = 0$
- Il centro di taglio coincide con il baricentro: $x_o \equiv x_{ac}$

Si ottiene quindi che:

$$\theta = \frac{qSC_{L\alpha}\alpha_R(x_o - x_{ac})}{k - qSC_{L\alpha}(x_o - x_{ac})} \quad (3.10)$$

Ora dividendo numeratore e denominatore per $qSC_{L\alpha}(x_o - x_{ac})$ e utilizzando l'equazione 3.7 si giunge alla relazione cercata

$$\theta = \frac{\alpha_R}{q_D/q - 1} \quad (3.11)$$

Sapendo che la variazione di portanza per effetto della torsione θ è:

$$\Delta L = qSC_{L\alpha}\theta \quad (3.12)$$

E invece la portanza data dall'incidenza della semiala rigida è

$$L_{rig} = qSC_{L\alpha}\alpha_R \quad (3.13)$$

Si può riscrivere l'equazione 3.11 per esprimere la variazione di portanza in funzione della pressione dinamica

$$\frac{\Delta L}{L_{rig}} = \frac{q/q_D}{1 - q/q_D} \quad (3.14)$$

A questo punto può essere utile diagrammare $\Delta L/L_{rig}$ in funzione di q/q_D utilizzando l'equazione 3.14.

Dalla Figura 3.1 notiamo che l'incremento di portanza ΔL è una grandezza sempre crescente all'aumentare di q e in particolare, si osserva che per $q/q_D > 0.7$ la torsione elastica e il conseguente aumento di portanza sono molto importanti e potrebbero anche portare a rottura.

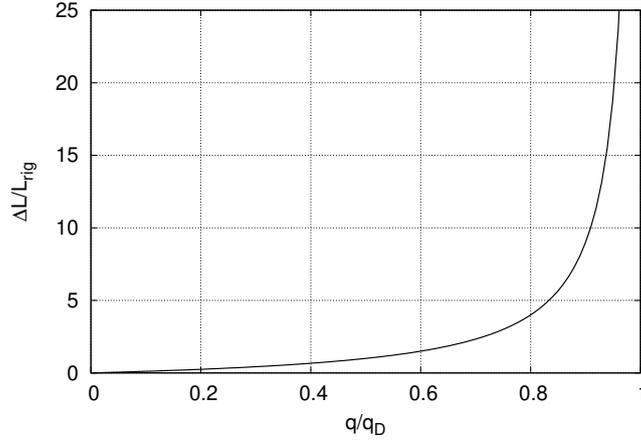


Figura 3.1: Andamento della portanza per torsione al variare della pressione dinamica

3.2 Flutter

A questo punto consideriamo un esempio semplice che ci permetta di mostrare come si svolge un'analisi di flutter di un modello con due gradi di libertà. Il modello adottato è costituito da un profilo alare generico, rigido che si può muovere nel piano per mezzo di una molla torsionale e una traslazionale. Sul profilo possiamo distinguere quattro punti importanti:

- P: punto attraverso cui passa l'asse elastico
- C: centro di massa
- Q: *aerodynamic center*
- T: punto posto a 3/4 della corda, utile per i metodi a superfici portanti

Inoltre per definire la posizione di *C* e *P* si utilizzano i parametri adimensionali *e*, *a*. Quindi la distanza di *C* e di *P* dal bordo d'attacco saranno rispettivamente:

$$\begin{aligned} x_c &= (1 + e)b \\ x_p &= (1 + a)b \end{aligned} \quad (3.15)$$

Con *b* che rappresenta la metà della corda del profilo considerato. La rigidità della molla traslazionale è k_h , mentre di quella torsionale è k_θ . Per ricavare le equazioni del moto sfruttiamo le equazioni di Lagrange che richiedono la scrittura dell'energia potenziale e cinetica. L'energia potenziale deriva dall'energia elastica delle due molle che si esprime come:

$$P = \frac{1}{2}k_h h^2 + \frac{1}{2}k_\theta \theta^2 \quad (3.16)$$

Per l'energia cinetica, invece dobbiamo prima esprimere la velocità del baricentro:

$$\mathbf{V}_C = -\dot{h}\hat{\mathbf{i}}_2 + b\dot{\theta}(a - e)\hat{\mathbf{b}}_2 \quad (3.17)$$

Dove il primo termine indica la velocità del punto P, mentre il secondo termine rappresenta la velocità di rotazione del punto P attorno al punto C, infatti la distanza tra i due è $r = (a - e)b$. L'espressione per l'energia cinetica è:

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{V}_C \cdot \mathbf{V}_C + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 \quad (3.18)$$

Utilizzando quindi l'equazione 3.17 e ipotizzando che θ sia sufficientemente piccolo da poter confondere il versore $\hat{\mathbf{b}}_2$ con il versore $\hat{\mathbf{i}}_2$ l'energia cinetica diventa:

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + b^2x_\theta^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{h}\dot{\theta}bx_\theta) + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 \quad (3.19)$$

Che per comodità può essere riscritta sfruttando l'uguaglianza tra momenti di inerzia $I_P = I_C + mb^2x_\theta^2$

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + 2\dot{h}\dot{\theta}x_\theta b) + \frac{1}{2}I_P\dot{\theta}^2 \quad (3.20)$$

Per ricavare le forze generalizzate dei due gradi di libertà consideriamo il lavoro compiuto dalla portanza e dal momento aerodinamico. Per fare ciò scriviamo prima lo spostamento dell'*aerodynamic center* Q:

$$\delta p_Q = -\delta h\hat{\mathbf{i}}_2 + (1/2 + a)b\delta\theta\hat{\mathbf{b}}_2 \quad (3.21)$$

Quindi il lavoro virtuale dei carichi aerodinamici è:

$$\delta W = L \left[-\delta h + \left(\frac{1}{2} + a \right) b\delta\theta \right] + M_{1/4}\delta\theta \quad (3.22)$$

E le forze generalizzate sono:

$$\begin{aligned} Q_h &= -L \\ Q_\theta &= \left(\frac{1}{2} + a \right) bL + M_{1/4} \end{aligned} \quad (3.23)$$

A questo punto riportiamo le equazioni di Lagrange che ci permettono di arrivare all'equazione del moto:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(K - P)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial(K - P)}{\partial q_i} = 0 \quad (3.24)$$

In cui q_i è il grado di libertà i-esimo. Perciò, avendo considerato un sistema a due gradi di libertà, avremo il seguente sistema di due equazioni del moto:

$$\begin{cases} m\ddot{h} + bx_\theta m\ddot{\theta} + k_h h = -L \\ mbx_\theta \ddot{h} + I_P \ddot{\theta} + k_\theta \theta = M_{1/4} + b\left(\frac{1}{2} + a\right)L \end{cases} \quad (3.25)$$

Nel caso di modello aerodinamico stazionario valgono le seguenti uguaglianze:

$$L = 2\pi\rho_\infty U^2 \theta b \quad M_{1/4} = 0 \quad (3.26)$$

Mentre in modelli più complessi $L = f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{h}, \ddot{h})$ e questo ci permette di dire che le equazioni del moto rimangono delle equazioni differenziali ordinarie e omogenee.

In generale quindi, le equazioni del moto in forma matriciale saranno esprimibili in questo modo:

$$[M + M_a]\ddot{\mathbf{x}} + [C_a]\dot{\mathbf{x}} + [K + K_a]\mathbf{x} = 0 \quad (3.27)$$

Dove \mathbf{x} è il vettore dei gradi di libertà, M è la matrice di massa, C è la matrice di smorzamento e K è la matrice di rigidità. Il pedice a indica invece che sono termini derivanti dai carichi aerodinamici.

La relazione 3.27, essendo un sistema di equazioni differenziali omogenee deve essere risolta con un problema agli autovalori. Si dice quindi che la soluzione sarà nella forma: $x = \bar{x}e^{\lambda t}$ e derivando rispetto al tempo e sostituendo nell'equazione 3.27 si ottiene:

$$[(M + M_a)\lambda^2 + C_a\lambda + (K + K_a)]\bar{x}e^{\lambda t} = 0 \quad (3.28)$$

A questo punto si ricava il polinomio caratteristico facendo il determinante della matrice e uguagliandolo a zero: $\det[] = 0$. Le incognite sono gli autovalori complessi λ_i . La condizione per cui si presenta il fenomeno del flutter è che almeno uno degli autovalori ha parte reale positiva, mantenendo parte immaginaria non nulla.

$$\lambda_i = \lambda_{Ri} \pm \lambda_{Ii} \quad (3.29)$$

Questo perché la parte reale dell'autovalore rappresenta lo smorzamento, mentre la parte immaginaria rappresenta le oscillazioni. Nello specifico:

- se $\lambda_R < 0$ le oscillazioni sono smorzate
- se $\lambda_R = 0$ il moto del sistema è puramente armonico
- se $\lambda_R > 0$ le oscillazioni sono amplificate: siamo in condizione di flutter

Inoltre, sappiamo che gli autovalori dipendono dalla velocità di volo e di solito si osserva che aumentando la velocità le frequenze di oscillazione di due gradi di libertà iniziano ad avvicinarsi. La condizione di flutter si verifica quando avviene la coalescenza di due frequenze di oscillazione. Quest'ultima però non è una regola fissa perché può accadere, con modelli aerodinamici non stazionari, che si presenti il flutter anche quando due modi di vibrare hanno frequenze simili, ma non c'è una vera coalescenza.

3.3 Modello Aerodinamico

Per eseguire delle analisi aeroelastiche bisogna definire, oltre al modello strutturale, anche un modello aerodinamico e in un secondo momento far dialogare i due modelli in modo che i risultati ottenuti tengano conto della mutua influenza tra carichi aerodinamici e deformazioni elastiche della struttura.

La teoria utilizzata nell'ambito di questa tesi è il *Doublet Lattice Method*, che viene descritta dettagliatamente nella tesi di dottorato del prof. Petrolo 2011. Le ipotesi che caratterizzano questa teoria sono le seguenti:

- Le superfici portanti sono modellizzate come superfici infinitamente sottili su cui vengono poste delle singolarità

- La viscosità viene trascurata
- L'effetto dello spessore viene trascurato
- Le condizioni al contorno, ovvero le condizioni di tangenza del flusso, vengono imposte su un punto caratteristico di ogni pannello detto *control point*
- Viene risolto un sistema di equazioni lineari algebriche per determinare l'intensità delle singolarità

A questo punto è importante legare la componente normale della velocità (normalwash velocity) al salto di pressione su ogni pannello per poter poi conoscere quanto valgono i carichi aerodinamici sulla struttura. Questo legame in realtà deriva dall'equazione del potenziale aerodinamico linearizzato, di cui si trova una descrizione completa in Blair 1992.

Definendo W come il normalwash perpendicolare a una superficie oscillante, ΔP come il salto di pressione, possiamo scrivere le seguenti relazioni per introdurre delle grandezze adimensionali:

$$w = \frac{W}{V} \quad \Delta p = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \quad (3.30)$$

Dove ρ_∞ è la densità dell'aria, e V_∞ è la velocità di free stream. Nel caso di moto armonico si può scrivere:

$$w = \bar{w}e^{i\omega t} \quad \Delta p = \overline{\Delta p}e^{i\omega t} \quad (3.31)$$

Allora la componente normale della velocità, in un punto di coordinate x, y dovute al salto di pressione Δp nel punto ξ, η sarà data dalla seguente equazione:

$$\bar{w} = \frac{1}{8\pi} \int_A \overline{\Delta p} K(x_0, y_0, \omega, M) dA \quad (3.32)$$

Dove K è la funzione kernel del potenziale di accelerazione che dipende dalla pulsazione ω , dal numero di Mach e dalla distanza (x_0, y_0) , quest'ultima definita come:

$$x_0 = x - \xi \quad y_0 = y - \eta \quad (3.33)$$

3.3.1 Vortex Lattice Method

A questo punto è bene fare una precisazione: il Vortex Lattice Method (VLM) è un metodo che può essere utilizzato per il calcolo della parte stazionaria del modello aerodinamico, mentre il DLM è adatto al calcolo dell'aerodinamica instazionaria. Il VLM, come il DLM, modella le superfici portanti come delle lamine infinitamente sottili su cui vengono poste delle singolarità di tipo vortice, nell'ambito del VLM, o doppietta, nell'ambito del DLM, per poter calcolare la distribuzione di portanza e la resistenza indotta. Più precisamente la superficie viene divisa in un certo numero di pannelli quadrilateri e a ogni pannello viene assegnato un vortice a ferro di cavallo (horseshoe vortex) di una certa intensità e posizionato nel *load point*, ovvero a un quarto della lunghezza della corda.

L'equazione chiave per il VLM è la seguente:

$$a_{ij}^\Gamma = [\mathbf{V}_j^i]^T \cdot \mathbf{n}_i \quad (3.34)$$

Dove si è indicato con \mathbf{V}_j^i la velocità indotta nel *control point* del pannello *i*-esimo a causa dal vortice posizionato sul pannello sorgente *j*-esimo. Inoltre, a_{ij}^Γ viene detto coefficiente di influenza e \mathbf{n}_i è il versore ortogonale al pannello *i*.

La condizione di tangenza deve essere imposta per ogni pannello della superficie considerata in modo che il flusso rimanga sempre tangente ad essa. Assumendo che la direzione del flusso indisturbato a monte sia parallela all'asse *x*, per il pannello *i* la condizione di tangenza viene scritta in questo modo:

$$a_{i1}^\Gamma \Gamma_1 + a_{i2}^\Gamma \Gamma_2 + \dots + a_{iN}^\Gamma \Gamma_N + V_\infty \mathbf{i}^T \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad (3.35)$$

Dove $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ sono le circuitazioni degli *N* pannelli sorgente e \mathbf{i} è il versore parallelo all'asse *x*. Allora assumendo l'ipotesi di piccole perturbazioni, possiamo scrivere:

$$\mathbf{i}^T \cdot \mathbf{n}_i = \sin \alpha_i = -\frac{dZ_{i\text{loc}}}{dx} \quad (3.36)$$

È immediato osservare che $-\frac{dZ_{i\text{loc}}}{dx}$ è uguale alla componente normale della velocità al pannello *i*, perciò possiamo riscrivere l'equazione 3.35 come:

$$a_{i1}^\Gamma \Gamma_1 + a_{i2}^\Gamma \Gamma_2 + \dots + a_{iN}^\Gamma \Gamma_N = V_\infty w_i \quad (3.37)$$

Il salto di pressione a cavallo di un pannello è una grandezza importante della teoria di VLM e DLM, quindi è bene utilizzare la relazione che lega la circuitazione del pannello sorgente *j* con il relativo salto di pressione:

$$\Gamma_j = \frac{1}{2} V_\infty \Delta x_j \Delta p_j \quad (3.38)$$

Allora la condizione al contorno di tangenza per il pannello *i*-esimo verrà scritta come:

$$\frac{1}{2} \Delta x_1 a_{i1}^\Gamma \Delta p_1 + \frac{1}{2} \Delta x_2 a_{i2}^\Gamma \Delta p_2 + \dots + \frac{1}{2} \Delta x_N a_{iN}^\Gamma \Delta p_N = w_i \quad (3.39)$$

3.3.2 Doublet Lattice Method

Il *Doublet Lattice Method* è un metodo agli elementi finiti per la risoluzione dell'integrale che definisce la *normalwash velocity* per quanto concerne la sua componente istazionaria. Seguendo l'esautiva trattazione riportata da Rodden, Taylor e McIntosh 1998, si può scrivere l'equazione 3.32 in forma matriciale:

$$\{w\} = [D] \{\Delta p\} \quad (3.40)$$

Dove $[D]$ è una matrice chiamata *normalwash factor* e ogni suo elemento ha la seguente forma:

$$D_{ij} = \frac{\Delta x_j}{8\pi} \int_{-e_j}^{+e_j} K_{ij} d\eta_j \quad (3.41)$$

Avendo indicato con e_j la metà della lunghezza del pannello *j*-esimo in direzione η_j che è la coordinata locale del pannello in direzione spanwise.

Per quanto detto in precedenza, la matrice $[D]$ sarà somma di un contributo stazionario, derivante dal VLM, e da uno instazionario:

$$\begin{aligned} D_{ij} &= D_{0,ij} + D_{1,ij} \\ D_{0,ij} &= \frac{1}{2} \Delta x_j a_{ij}^\Gamma \end{aligned} \quad (3.42)$$

E il termine instazionario sarà pari a:

$$D_{1,ij} = \frac{\Delta x_j}{8\pi} \int_{-e_j}^{+e_j} \frac{K_1 e^{-i\omega x_0/V_\infty} - K_{10}}{r^2} T_1 d\eta_j \quad (3.43)$$

Dove r è la distanza tra il punto di ricezione e la posizione della doppietta del pannello sorgente. La trattazione di Rodden, Taylor e McIntosh 1998 prosegue approssimando il numeratore con un polinomio di quarto grado in η_j :

$$Q_1(\eta_j) = A_1 \eta_j^2 + B_1 \eta_j + C_1 + D_1 \eta_j^3 + E_1 \eta_j^4 \approx (K_1 e^{-i\omega x_0/V_\infty} - K_{10}) T_1 \quad (3.44)$$

Ne consegue che abbiamo bisogno di cinque equazioni per trovare le cinque incognite A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 . Allora si eguaglia il polinomio Q_1 alla funzione approssimata in cinque punti appartenenti al pannello j -esimo:

$$Q_1(-e_j), Q_1(-e_j/2), Q_1(0), Q_1(e_j/2), Q_1(e_j) \quad (3.45)$$

Così possiamo giungere alla relazione per il *normalwash factor* instazionario $D_{1,ij}$:

$$\begin{aligned} D_{1ij} &= \frac{\Delta x_j}{8\pi} \left[(y_i^2 A_1 + y_i B_1 + C_1 + y_i^3 D_1 + y_i^4 E_1) F \right. \\ &\quad \left. + \left(y_i A_1 + \frac{1}{2} B_1 + \frac{3}{2} y_i^2 D_1 + 2 y_i^3 E_1 \right) \ln \frac{(y_i - e_j)^2}{(y_i + e_j)^2} \right. \\ &\quad \left. + 2 e_j (A_1 + 2 y_i D_1 + (3 y_i^2 + e_j^2/3) E_1) \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.4 Il metodo spline

Il sistema della superficie portante è diviso in un certo numero di pannelli, detti anche *wing segments*. Ogni wing segment è una superficie aerodinamica di forma trapezoidale, per cui si può definire un sistema di riferimento locale accanto a quello globale.

Ricordiamo che il sistema di riferimento globale ha l'asse x parallelo alla velocità di free stream, l'asse y parallelo alla direzione dell'apertura alare con verso rivolto al tip della semiala destra. Invece, il sistema di riferimento locale si definisce per il generico wing segment S e ha l'asse x^S parallelo alla velocità di free stream, l'asse y^S parallelo all'asse y globale se l'angolo di diedro è nullo e ha l'origine nel vertice del pannello che è più vicino alla radice della semiala e più vicino al *leading edge*. Uno schema dei due sistemi di coordinate è riportato in figura 3.2

Ogni pannello è associato ad alcuni punti della struttura dove sono definiti gli spostamenti. Questi punti prendono il nome di *Pseudo Structural Points*, i quali devono essere

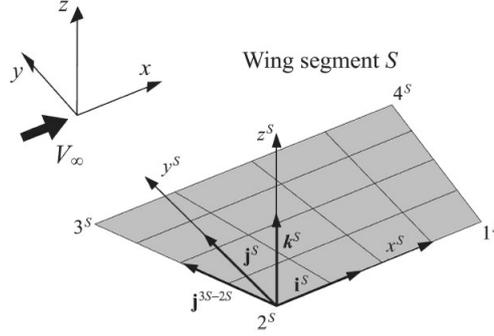


Figura 3.2: Schema dei sistemi di riferimento globale e locale, ripreso dalla tesi di Petrolo 2011

definiti sul piano della pannellatura aerodinamica. Invece, gli spostamenti vengono calcolati sfruttando il modello strutturale, e poi vengono utilizzati come input per calcolare la pendenza degli spostamenti verticali sui control point di ogni pannello attraverso la *Infinite Plane Spline* (IPS), teoria che viene presentata dettagliatamente in HARDER e DESMARAIS 1972.

L'equazione chiave per la IPS per ogni Pseudo Structural Point i -esimo, è la seguente:

$$Z_{i,loc}^S = a_0^S + a_1^S x_{i,loc}^S + a_2^S y_{i,loc}^S + \sum_{j=1}^{N_{PS}^S} F_j (r_{ij,loc}^S)^2 \ln(r_{ij,loc}^S)^2 \quad (3.47)$$

Dove $Z_{i,loc}^S$ è la coordinata z nel sistema di riferimento locale del Wing Segment S nella sua configurazione deformata. F_j è un carico normalizzato, agente nel j -esimo punto, mentre $(r_{ij,loc}^S)^2$ è la distanza, in coordinate locali tra lo Pseudo Structural Point i e j :

$$(r_{ij,loc}^S)^2 = (x_{i,loc}^S - x_{j,loc}^S)^2 + (y_{i,loc}^S - y_{j,loc}^S)^2 \quad (3.48)$$

Assieme all'equazione 3.47 anche le seguenti equazioni di equilibrio devono essere soddisfatte:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_{PS}^S} F_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^{N_{PS}^S} F_j x_{j,loc}^S &= 0 \\ \sum_{j=1}^{N_{PS}^S} F_j y_{j,loc}^S &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Perciò si costituisce un sistema di equazioni che in forma matriciale può essere scritto così:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{loc}^{S*} &= \mathbf{G}^S \cdot \mathbf{P}^S \\ \mathbf{P}^S &= [\mathbf{G}^S]^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{loc}^{S*} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Per una descrizione completa delle matrici appena introdotte si può consultare il lavoro di Petrolo 2011, ma rimanendo sintetici si può dire che \mathbf{Z}_{loc}^{S*} è un vettore di dimensioni $(3 + N_{PS}^S) \times 1$ che contiene tre elementi nulli, più le deformazioni lungo z di ogni Pseudo Structural Point, mentre \mathbf{P}^S è il vettore incognito che contiene sia i coefficienti a_0, a_1, a_2 , sia i carichi agenti in ogni Structural Point.

3.4.1 Pendenza degli spostamenti ai Control Point

Come detto in precedenza la condizione al contorno di tangenza viene imposta ai control point. Allora, lo scopo della seguente trattazione è quella di legare gli spostamenti nodali alla derivata dello spostamento verticale nei control point.

Siano X_k e Y_k le coordinate locali del k-esimo control point, possiamo riscrivere l'equazione di spline come:

$$Z_k^S(X_k^S, Y_k^S) = a_0^S + a_1^S X_k^S + a_2^S Y_k^S + \sum_{j=1}^{N_{PS}^S} F_j (R_{kj}^S)^2 \ln(R_{kj}^S)^2 \quad (3.51)$$

Quindi eseguendo la derivata in x

$$\frac{\partial Z_k^S}{\partial x^S}(X_k^S, Y_k^S) = a_1^S + \sum_{j=1}^{N_{PS}^S} F_j \frac{\partial}{\partial x^S} [(R_{kj}^S)^2 \ln(R_{kj}^S)^2] \quad (3.52)$$

L'equazione appena scritta vale per ogni control point, perciò si può costituire un sistema composto da N_{AP} equazioni. Per brevità viene scritto in forma matriciale:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_k^S}{\partial x^S} = \mathbf{D}^S \cdot \mathbf{P}^S \quad (3.53)$$

Essendo \mathbf{P}^S la matrice dei coefficienti della spline ricavata nell'equazione 3.50 possiamo scrivere:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_k^S}{\partial x^S} = \mathbf{D}^S \cdot [\mathbf{G}^S]^{-1} \cdot \mathbf{Z}^{S*} \quad (3.54)$$

Dato che le prime tre righe di \mathbf{Z}^{S*} sono degli zeri è possibile eliminare le prime tre colonne della matrice $[\mathbf{G}^S]^{-1}$, rinominando quest'ultima come \mathbf{S}^S . Allora l'equazione 3.54, diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_k^S}{\partial x^S} = \mathbf{D}^S \cdot \mathbf{S}^S \cdot \mathbf{Z}^S \quad (3.55)$$

Dove \mathbf{Z}^S è lo stesso vettore degli spostamenti verticali, ma privato dei tre elementi nulli: ha perciò dimensione $N_{PS} \times 1$.

A questo punto bisogna legare il vettore degli spostamenti verticali degli structural points \mathbf{Z}^S con il vettore degli spostamenti di ogni grado di libertà definendo la matrice \mathbf{Y}^S :

$$\mathbf{Z}^S = \mathbf{Y}^S \cdot \mathbf{U} \quad (3.56)$$

Attraverso semplici passaggi algebrici si può quindi giungere alla scrittura finale:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_k^S}{\partial x^S} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} \quad (3.57)$$

Dove $\frac{\partial \mathbf{Z}_k^S}{\partial x^S}$ è un vettore di dimensioni $N_{AP} \times 1$, mentre \mathbf{U} ha dimensioni $N_{DOF} \times 1$. Una volta calcolati gli spostamenti del modello strutturale, l'equazione precedente, derivata dal metodo di spline, ci permette di trovare le derivate degli spostamenti verticali ai control point e quindi di imporre le condizioni al contorno per tutto il sistema.

3.5 PK-Method

L'equazione aeroelastica, che deve essere risolta per studiare il fenomeno del flutter, è la seguente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_a[\mathbf{x}(t)] \quad (3.58)$$

in cui $\mathbf{x}(t)$ è il vettore spostamento, \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} sono rispettivamente le matrici di massa, di smorzamento e di rigidità, mentre \mathbf{F}_a è la matrice delle forze aerodinamiche. Poiché queste forze sono tipicamente instazionarie, l'equazione appena scritta non è di immediata risoluzione, perciò avremo bisogno di particolari metodi per studiare come si comporta la struttura. Il metodo presentato di seguito e anche il più diffuso, è il *PK-Method* che viene presentato nell'articolo di HASSIG 1971.

Bisogna innanzitutto riscrivere l'equazione 3.58 utilizzando le matrici generalizzate:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \phi^T \mathbf{F}_a[\mathbf{q}(t)] \quad (3.59)$$

Dove ϕ è una matrice che contiene un certo numero di modi propri della struttura. A questo punto, imponendo una soluzione esponenziale del tipo $q = \bar{q}e^{\lambda t}$ si giunge a una nuova scrittura dell'equazione aeroelastica:

$$\left[\frac{V_\infty^2}{b^2} \tilde{\mathbf{M}}p^2 + \frac{V_\infty}{b} \tilde{\mathbf{C}}p + \tilde{\mathbf{K}} - \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \tilde{\mathbf{Q}}(p) \right] \mathbf{q}(p) = 0 \quad (3.60)$$

Dove p è un parametro complesso adimensionale definito come:

$$p = \frac{b}{V_\infty} \lambda = \frac{\lambda_R b}{V_\infty} + i \frac{\omega b}{V_\infty} = \gamma k + ik \quad (3.61)$$

in cui si è indicato con b la lunghezza di riferimento, pari a metà della corda e si sono introdotti due nuovi importanti parametri: γ è un rateo di decadimento delle oscillazioni e k è la frequenza ridotta. Tramite operazioni algebriche si osserva che il *decay rate* si può scrivere come:

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \quad (3.62)$$

Nell'ambito del PK-Method per risolvere l'equazione 3.60 si adotta un'ipotesi semplificativa che consiste nel prevedere, per i termini aerodinamici, solo oscillazioni armoniche:

$$\left[\frac{V_\infty^2}{b^2} \tilde{\mathbf{M}} p^2 + \frac{V_\infty}{b} \tilde{\mathbf{C}} p + \tilde{\mathbf{K}} - \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \tilde{\mathbf{Q}}(ik) \right] \mathbf{q}(p) = 0 \quad (3.63)$$

A questo punto si attua un metodo iterativo, partendo da un valore di k di tentativo si può impostare il problema agli autovalori così da trovare il parametro p che darà un nuovo valore di frequenza ridotta. Si ripetono queste operazioni fino ad arrivare a convergenza e trovare il valore finale di p per una fissata velocità, che permette di conoscere la pulsazione ω del sistema e lo smorzamento.

3.6 Analisi Aeroelastica

A questo punto è bene fare un riepilogo dal punto di vista concettuale delle operazioni che sono necessarie per eseguire un'analisi aeroelastica:

- Creazione del modello strutturale tramite il classico metodo agli elementi finiti oppure con l'utilizzo della CUF. Questo include la definizione di geometria, proprietà del materiale e mesh strutturale
- Esecuzione della free vibration analysis: risoluzione del problema agli autovalori che permette di trovare le frequenze e i modi propri
- Costruzione del modello aerodinamico con un metodo ai pannelli, quale il VLM per l'aerodinamica stazionaria, e il DLM per l'aerodinamica instazionaria. Ogni pannello darà un contributo alla definizione del campo di pressione attorno alla struttura.
- Si definisce una spline che legghi il modello strutturale con quello aerodinamico in modo da studiare la mutua influenza tra deformazioni e carichi aerodinamici.
- Con Nastran si risolve l'equazione differenziale aeroelastica con il *PK-Method* dopo aver ricavato le matrici generalizzate per ottenere un risparmio del costo computazionale
- La risoluzione dell'equazione aeroelastica permette di ottenere un certo numero di autovalori per diverse velocità, così da studiare la stabilità del sistema e capire a che velocità si presenta il fenomeno del flutter.

In figura 3.3 si riporta, in modo schematico, la procedura per eseguire un'analisi aeroelastica.

3.6.1 Analisi Modale

Nelle prossime righe vengono descritti in modo più dettagliato i passaggi matematici necessari per eseguire la free vibration analysis, utilizzando l'analisi modale e definendo le matrici generalizzate. Come già detto in precedenza l'equazione matriciale di partenza per la free vibration analysis è la seguente:

$$[M_{ij}]\{\ddot{x}_i\} + [K_{ij}]\{x_i\} = 0 \quad (3.64)$$

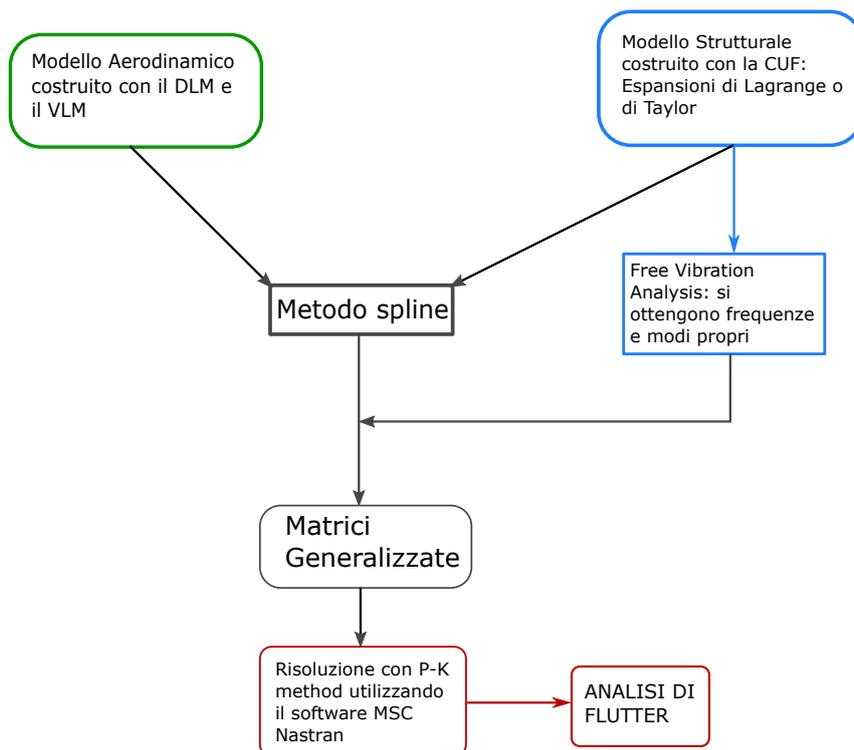


Figura 3.3: Diagramma rappresentativo della procedura che porta a un'analisi di flutter

L'equazione appena scritta descrive un sistema libero, ovvero senza forzanti e che è caratterizzato da uno smorzamento nullo o trascurabile. Si può allora ipotizzare una soluzione puramente armonica: $x_i = \bar{x}_i e^{i\omega t}$. Allora sostituendo nell'equazione 3.64 si ottiene:

$$-\omega^2 [M_{ij}] \{\bar{x}_i\} + [K_{ij}] \{\bar{x}_i\} = 0 \quad (3.65)$$

che rappresenta un problema agli autovalori con N_{DOF} gradi di libertà. Per un modello di una struttura reale, i gradi di libertà sono un numero molto elevato perciò si vuole ridurre il numero delle incognite per diminuire anche il costo computazionale, pur mantenendo una buona accuratezza.

Per fare ciò si esegue un'analisi modale, che si basa sulla seguente ipotesi: la risposta libera del sistema può essere descritta dalla somma dei modi propri di vibrare, ovvero:

$$\{\bar{x}_i\} = \sum_{i=1}^{N_{DOF}} \phi_j^{(i)} \eta_j(t) = [\Phi_{ij}] \{\eta_j(t)\} \quad (3.66)$$

dove $\{\phi_j^{(i)}\}$ è l'autovettore i -esimo e $\eta_j(t)$ è un'ampiezza modale. Inoltre, la matrice $[\Phi_{ij}]$, detta *matrice modale* è costruita in modo che ogni colonna è un autovettore $\{\phi_j^{(i)}\}$. Il primo vantaggio dell'analisi modale è che nell'equazione 3.66, la sommatoria può essere troncata a un numero di termini m , che sono il numero di modi propri considerati.

A questo punto, si sostituisce l'equazione 3.66 nell'equazione delle vibrazioni libere, effettuando così una trasformazione delle coordinate:

$$[M_{ij}][\Phi_{ij}]\{\ddot{\eta}_j\} + [K_{ij}][\Phi_{ij}]\{\eta_j\} = 0 \quad (3.67)$$

Dato che la matrice modale è costituita dagli autovettori del sistema, è possibile usarla per diagonalizzare la matrice di massa e di rigidezza, così da semplificare ulteriormente la risoluzione del sistema. Moltiplicando l'equazione precedente per $[\Phi_{ij}]^T$ si ottiene:

$$[\Phi_{ij}]^T[M_{ij}][\Phi_{ij}]\{\ddot{\eta}_j\} + [\Phi_{ij}]^T[K_{ij}][\Phi_{ij}]\{\eta_j\} = 0 \quad (3.68)$$

Da cui possiamo definire le matrici di massa e di rigidezza generalizzate:

$$\begin{aligned} [\Phi_{ij}]^T[M_{ij}][\Phi_{ij}] &= \tilde{\mathbf{M}} \\ [\Phi_{ij}]^T[K_{ij}][\Phi_{ij}] &= \tilde{\mathbf{K}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Per quanto detto prima, $\tilde{\mathbf{M}}$ e $\tilde{\mathbf{K}}$ sono due matrici quadrate, diagonali con dimensione $m \times m$, con m numero di modi.

Capitolo 4

Risultati numerici

In questo capitolo vengono riportate le analisi svolte nell'ambito di questa tesi. In particolare vengono eseguite analisi statiche, dinamiche e aeroelastiche adottando i diversi modelli strutturali descritti in precedenza, con lo scopo di verificare il livello di accuratezza di ognuno. La maggior parte delle analisi sono state eseguite utilizzando il programma sviluppato dal gruppo di ricerca MUL2.

4.1 Assessment per analisi statica

Il primo caso preso in considerazione è una trave di materiale isotropo incastrata a un'estremità e libera all'altra. Il materiale utilizzato ha le proprietà riportate in tabella 4.1.

E [GPa]	ν	ρ [kg/m ³]
73	0.3	2700

Tabella 4.1: Proprietà del materiale

La trave ha sezione costante rettangolare con larghezza $b = 0.2$ m e altezza $h = 0.01$ m, la lunghezza è invece di $L = 1$ m. Si può osservare uno schema della trave descritta in figura 4.1. Il sistema di riferimento ha l'origine sulla sezione di incastro, ha l'asse y passante lungo l'asse della trave e l'asse z normale alla superficie superiore della trave. A meno che non sia esplicitamente specificato, il sistema di riferimento rimarrà lo stesso anche nelle prossime analisi.

La trave è inoltre sottoposta a un carico concentrato all'estremità libera $P = -100$ N, ovvero la forza è applicata nel punto di coordinate $x = 0.0$ m $y = 1.0$ m $z = 0.005$ m con verso opposto all'asse z .

Per quanto riguarda la definizione del modello, si è voluto discretizzare la trave in 10 elementi FEM B4, ovvero elementi *beam* costituiti da 4 nodi. Quindi i nodi lungo l'asse saranno 31, poiché alcuni sono in condivisione tra due elementi.

Dal punto di vista operativo, il software ha bisogno in input diversi file di testo, perciò ci sarà un file che conterrà la definizione dei 31 nodi, la loro posizione nel sistema di

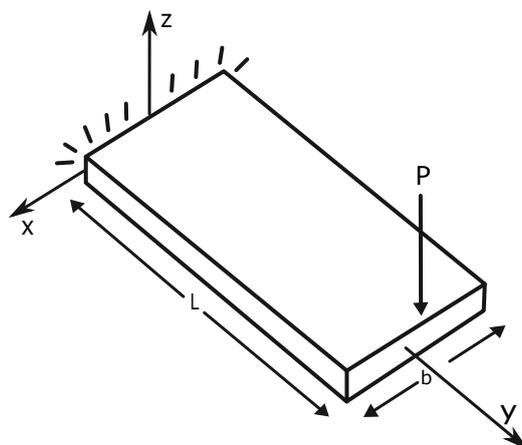


Figura 4.1: Schema della trave presa in esame, con relativo sistema di riferimento

riferimento globale, ma anche l'indicazione del modello adottato (TE o LE model) sulla sezione in corrispondenza di quel nodo. Un secondo file riporterà invece la *connectivity* degli elementi FEM. Similmente, per la definizione della sezione trasversale, ci sarà un file che riporta la posizione di ogni nodo definito e un altro file che riporta la *connectivity* degli elementi sulla sezione.

Saranno poi, necessari altri file di input per definire le proprietà del materiale, la laminazione e il tipo di analisi da effettuare. Un altro file importante è quello relativo alle *Boundary Conditions* in cui sono specificati i vincoli sugli spostamenti e le forze applicate alla struttura.

Prima di lanciare la simulazione, però è ancora richiesto di indicare a quali risultati siamo interessati. Nella nostra analisi richiediamo che sia creato il file *ParaView* e che vengano forniti i risultati numerici di tensioni, deformazioni e spostamenti in particolari punti di interesse. In questa prima analisi statica le grandezze vengono calcolate nei seguenti due punti:

- PNT 1 $\rightarrow x = 0.0 \ y = 1.0 \ z = 0.0$
- PNT 2 $\rightarrow x = 0.0 \ y = 0.0 \ z = 0.0050$

Allora, eseguendo l'analisi per diversi modelli strutturali si ottengono i risultati in Tabella 4.2, ricordando che TE è l'acronimo di *Taylor Expansion* che è seguito da un intero che indica l'ordine dell'espansione in serie. LE invece, sta per *Lagrange Expansion* e per identificare il modello si scrive quanti elementi sono previsti sulla sezione e quanti nodi per ogni elemento. Da notare che invece la prima riga riporta i risultati per un modello analitico ricavati alla fine di questa sezione.

La seconda colonna poi riporta i *Degree Of Freedom* totali per i diversi modelli strutturali che danno una prima indicazione del costo computazionale della simulazione. Per quanto riguarda lo spostamento u_z del punto 1, che poi equivale alla massima deflessione della trave, notiamo che i diversi risultati non si discostano molto tra loro se non per i due casi in cui si adottano elementi a 4 nodi che introducono una maggiore rigidità. Infatti, ipotizzando che il modello 2L9 sia il più accurato e misurando gli scostamenti degli altri

Modello	DOF	PNT 1	PNT 2
		u_z [m]	σ_{yy} [MPa]
analitico	/	-2.7397E-02	30.0
EBBT	155	-2.73972E-02	29.9939
TBT	155	-2.73990E-02	29.9940
TE1	279	-2.73990E-02	29.9940
TE2	558	-2.58329E-02	32.4125
TE3	930	-2.67062E-02	40.9993
TE4	1395	-2.67664E-02	40.3382
1L4	372	-2.03858E-02	22.2946
2L4	558	-2.04746E-02	31.9946
1L9	837	-2.67103E-02	40.9869
2L9	1395	-2.67223E-02	40.2269

Tabella 4.2: Risultati dell'analisi statica di una trave isotropa

modelli rispetto a quest'ultimo, osserviamo in Tabella 4.3 che i *TE models* di basso ordine presentano errori del 2 – 3 %, mentre l'errore relativo per i due modelli Q4 sale al 23 %.

D'altra parte si osserva che gli scostamenti per le tensioni σ_{yy} sono generalmente maggiori, questo significa che per avere dei buoni risultati sulle tensioni vicino all'incastro bisogna adottare dei modelli con un sufficiente numero di gradi di libertà come *TE 3* oppure *1L9*

	errore % u_z	errore % σ_y
EBBT	-2.526	-25.438
TBT	-2.532	-25.438
TE1	-2.532	-25.438
TE2	3.329	-19.426
TE3	0.060	1.920
TE4	-0.165	0.277
1L4	23.712	-44.578
2L4	23.380	-20.465
1L9	0.045	1.889
2L9	0.000	0.000

Tabella 4.3: Scostamenti percentuali relativi rispetto al modello lagrangiano 2L9

Per avere un'idea qualitativa sulla distribuzione di tensione σ_{yy} e sugli spostamenti di una trave soggetta a un carico concentrato applicato a un'estremità, si può osservare la figura 4.2. Più precisamente, misurando la σ_{yy} in diversi punti lungo la trave si nota che lontano dall'incastro la variazione è lineare e infatti è ben descritta anche dai modelli classici, al contrario vicino all'incastro il campo di tensioni è più complesso e non lineare. In figura 4.3 si può osservare la distribuzione di tensione σ_{yy} lungo la trave confrontando il modello classico di trave di Eulero-Bernoulli e uno più raffinato con i polinomi di Lagrange: *1L9*.

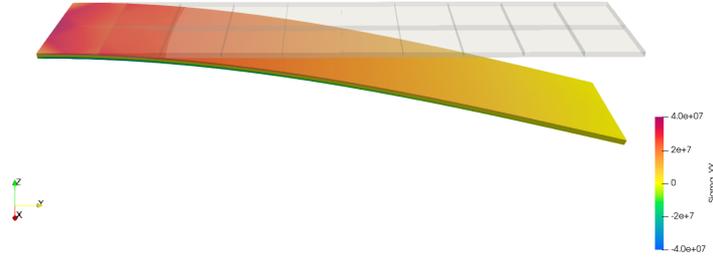


Figura 4.2: Mappa della tensione σ_{yy} e deformazione della trave per un carico concentrato applicato a un'estremità

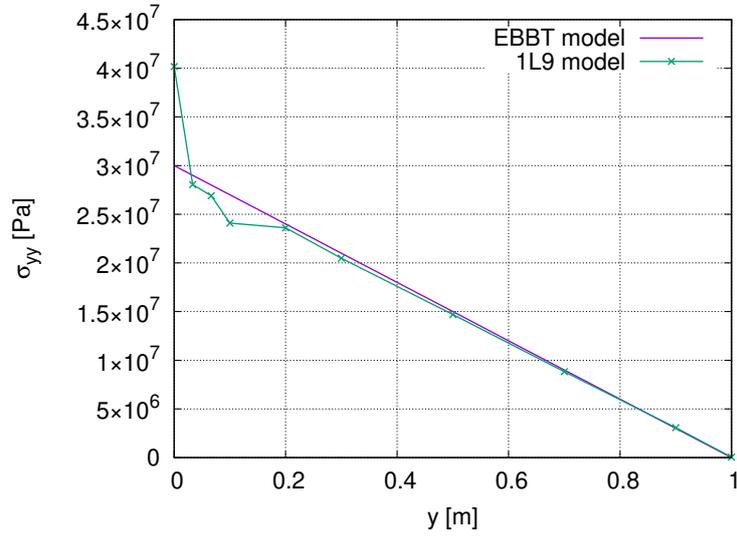


Figura 4.3: Andamento delle σ_{yy} per un modello classico di trave e un modello raffinato

A questo punto, può essere interessante trovare la soluzione analitica della freccia massima per il modello di trave a sbalzo, quindi unidimensionale e confrontarla con i risultati ottenuti in precedenza. Partiamo dalla relazione che lega la curvatura della trave e il momento flettente:

$$\frac{d^2 u_z}{dy^2} = \frac{M(y)}{EI_x} \quad (4.1)$$

Ma sapendo che la derivata del momento flettente è il taglio:

$$\frac{d}{dy} \left(EI_x \frac{d^2 u_z}{dy^2} \right) = T(y) \quad (4.2)$$

A questo punto ipotizzando che il momento di inerzia e il modulo di Young siano costanti

lungo y , si possono portare fuori dalla derivata:

$$EI_x \frac{d^3 u_z}{dy^3} = T(y) \quad (4.3)$$

Allora integriamo in y per trovare lo spostamento u_z

$$u_z(y) = \frac{Px^2}{6EI_x} (3L - y) \quad (4.4)$$

Perciò all'estremità ci sarà la deflessione massima che varrà:

$$u_z(L) = \frac{PL^3}{3EI_x} \quad (4.5)$$

Ricordando che il momento di inerzia, nel nostro caso di sezione rettangolare, vale $I_x = bh^3/12$ allora è immediato calcolare lo spostamento $u_z(L)$

$$u_z(L) = -2.7397 \cdot 10^{-2} m \quad (4.6)$$

Si osserva quindi che il risultato ottenuto con questo calcolo analitico è uguale a quello ottenuto tramite software imponendo l'utilizzo del modello classico di Eulero-Bernoulli.

4.2 Assessment per analisi dinamica

In questa seconda fase sono state portate avanti delle analisi dinamiche dette *Free Vibration Analysis*, con lo scopo di trovare i modi propri della struttura con le relative frequenze. È bene sottolineare che eventuali carichi inseriti nei file di input non vengono considerati dal software proprio per il tipo di analisi che stiamo eseguendo che tiene conto solo delle forze elastiche e delle forze inerziali della struttura. Inoltre, è stata mantenuta la stessa geometria e lo stesso materiale definito nella precedente sezione. Le uniche modifiche da apportare ai file di input riguardano il numero che identifica il tipo di analisi, 103 in questo caso, e il numero intero che identifica il numero di autovalori da calcolare. Questo numero corrisponde anche al numero di modi propri della struttura di cui si vuole tenere conto e di cui vogliamo ottenere la frequenza. Nelle nostre analisi è stato impostato a 10.

Il software quindi, darà in output un file di testo contenente le frequenze proprie, ma anche un file *.vtk* da aprire in *ParaView* che ci permette di sapere quale modo è associato a ogni frequenza. Come si osserva dalla Figura 4.4 il software *ParaView* ci mostra qualitativamente come si deforma la trave per le diverse frequenze proprie, potendo anche impostare a piacere l'ampiezza dell'oscillazione.

In Tabella 4.4 vengono riportate le frequenze dei primi 10 modi propri avendo utilizzato un modello con un'alta accuratezza, quale il *2L9*.

D'altra parte si nota che, utilizzando un modello TE con espansioni di basso ordine, alcuni modi torsionali non vengono rilevati dall'analisi. In particolare si osserva in tabella 4.6 che per il modello TE 1, il primo modo torsionale è a una frequenza molto alta: $f = 806Hz$, mentre per il modello LE2Q9, i modi torsionali rilevati sono 3 e a frequenze più basse: $f_I = 84.65Hz$ $f_{II} = 259.0$ $f_{III} = 447.9Hz$.

Per la loro importanza nell'analisi di flutter, vengono riportate, in tabella 4.5 le frequenze del primo modo torsionale nei diversi modelli. Osservando la tabella si può dedurre che

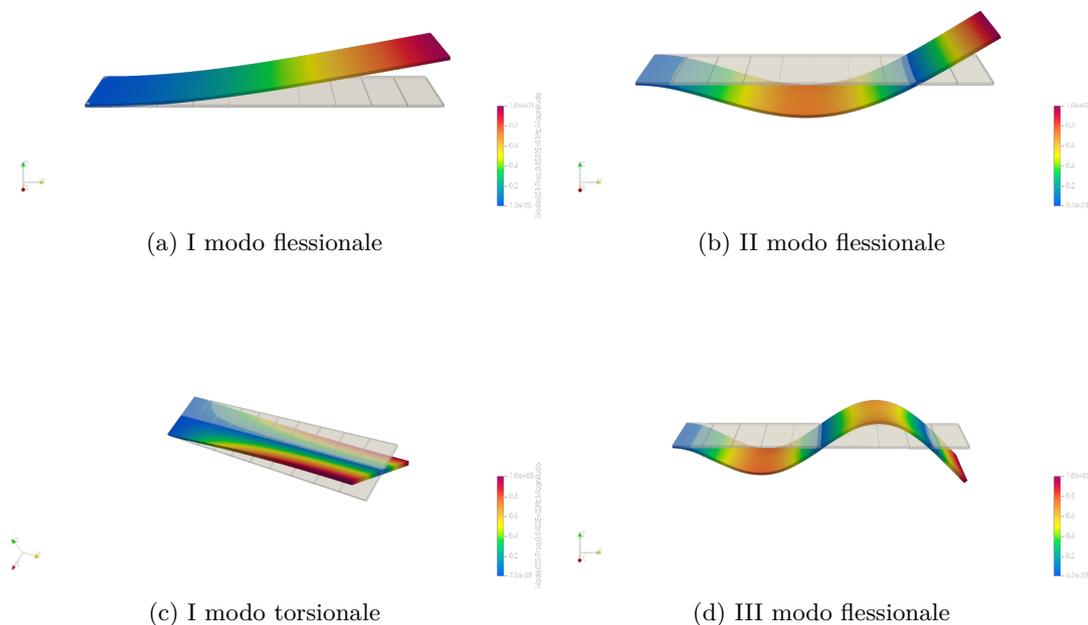


Figura 4.4: Modi propri di vibrare della struttura

2L9		
Modo n°	f [Hz]	
1	8.537	I Flessionale attorno a x
2	53.42	II Flessionale attorno a x
3	84.65	I Torsionale
4	149.79	III Flessionale attorno a x
5	163.85	I Flessionale attorno a z
6	259.01	II Torsionale
7	294.36	IV Flessionale attorno a x
8	447.91	III Torsionale
9	487.92	V Flessionale attorno a x
10	659.43	IV Torsionale

Tabella 4.4: Modi propri e frequenze associate con un modello 2L9

i modelli di *Eulero-Bernoulli*, di *Timoshenko* e il modello *TE1* non sono adatti all'utilizzo in un'analisi di flutter anche in questo esempio più semplice, a causa del fatto che non riescono a descrivere bene il comportamento a torsione della trave.

Per completezza riportiamo in tabella 4.7 le frequenze dei primi 10 modi per i diversi modelli cinematici adottati.

In figura 4.5 viene fatto un confronto grafico riportando tutte le frequenze dei primi

Modello	Frequenza [Hz]
EBBT	/
TBT	/
TE 1	806.18
TE 2	85.225
TE 3	84.811
TE 4	84.563
1L4	85.225
2L4	85.215
1L9	84.822
2L9	84.652

Tabella 4.5: Frequenze del I modo torsionale

TE 1		
Modo n°	f [Hz]	
1	8.399	I Flessionale attorno a x
2	52.61	II Flessionale attorno a x
3	147.22	III Flessionale attorno a x
4	163.53	I Flessionale attorno a z
5	288.22	IV Flessionale attorno a x
6	475.88	V Flessionale attorno a x
7	709.95	VI Flessionale attorno a x
8	806.18	I Torsionale
9	894.91	II Flessionale attorno a z
10	990.29	VII Flessionale attorno a x

Tabella 4.6: Modi propri e frequenze associate con un modello TE 1

modi per ogni modello cinematico utilizzato. Tenendo a mente che, minore è la frequenza propria, minore sarà la rigidezza del modello, infatti:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.7)$$

Si osserva in particolare, che i modelli con elementi $L4$ introducono una maggiore rigidezza nella struttura rispetto agli altri modelli e la causa è da ricercare nel basso numero di nodi su ogni sezione.

4.3 Analisi statica di una trave in materiale composito

In questa sezione si vuole prendere come riferimento l'analisi svolta da E. Carrera, E. Zappino e Li 2018, come verifica sulla bontà dei risultati ottenuti nell'ambito di questo lavoro. L'analisi in questione riguarda sempre una trave incastrata a un'estremità, ma

	EBBT	TBT	TE 1	TE 2	TE 3	TE 4	1L4	2L4	1L9	2L9
DOF	155	155	279	558	930	1395	372	558	837	1395
Modo 1	8.40	8.40	8.40	8.70	8.54	8.53	9.74	9.72	8.54	8.54
Modo 2	52.63	52.61	52.61	54.26	53.43	53.36	60.99	60.86	53.43	53.42
Modo 3	147.35	147.22	147.22	85.23	84.81	84.56	85.23	85.22	84.82	84.65
Modo 4	166.70	163.53	163.53	153.01	149.82	149.61	170.63	166.52	149.84	149.79
Modo 5	288.66	288.22	288.22	164.37	163.82	163.78	171.55	170.27	164.37	163.85
Modo 6	477.05	475.88	475.88	261.91	259.50	258.76	261.91	261.85	259.62	259.01
Modo 7	712.49	709.94	709.94	300.84	294.42	293.85	333.97	333.27	294.47	294.36
Modo 8	995.15	894.91	806.18	456.38	448.85	447.54	456.38	456.21	449.24	447.91
Modo 9	999.88	990.29	894.91	497.74	488.03	486.75	551.25	550.09	488.14	487.92
Modo 10	1299.93	1299.93	990.29	678.17	661.02	658.96	678.17	677.78	661.88	659.43

Tabella 4.7: frequenze dei primi 10 modi propri per i diversi modelli

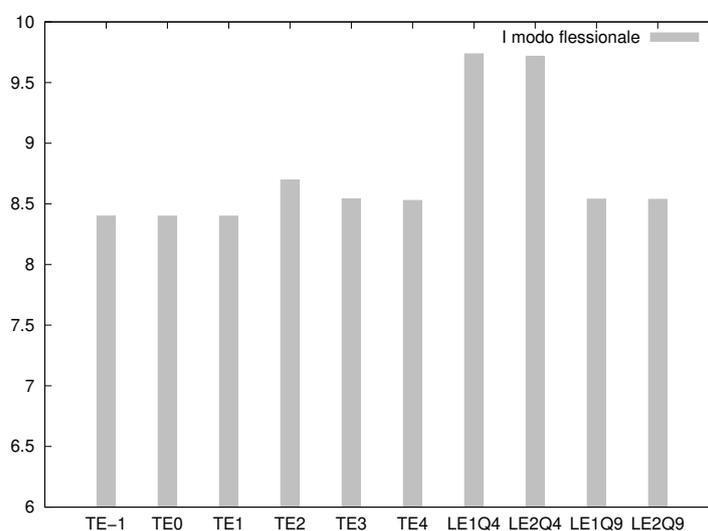


Figura 4.5: Confronto tra le frequenze dei primi modi flessionali

questa volta la geometria è diversa e il materiale è ortotropo. La trave è composta da 8 *layer* in cui si alternano due diversi materiali con le proprietà riportate in tabella 4.8.

Dal punto di vista della geometria, la trave è lunga $b = 0.09 \text{ m}$ e la sua sezione rettangolare, mostrata in figura 4.6, ha base $a = 0.001 \text{ m}$ e altezza $h = 0.01$. Lungo l'asse invece, si mantiene una discretizzazione in 10 elementi B_4 che corrispondono a 31 nodi equispaziati. La trave è caricata all'estremo libero con una forza concentrata diretta verso il basso e con un modulo di $P = 0.2 \text{ N}$.

I punti in cui sono state valutate le tensioni sulla struttura sono:

- $A \rightarrow (0, 0, \frac{h}{2})$
- $B \rightarrow (0, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})$
- $C \rightarrow (0, \frac{b}{2}, 0)$

	E_L [GPa]	E_T [GPa]	ν_{LT}	G_{LT} [GPa]
Materiale 1	30	1	0.25	0.5
Materiale 2	5	1	0.25	0.5

Tabella 4.8: Proprietà dei due materiali della trave in composito

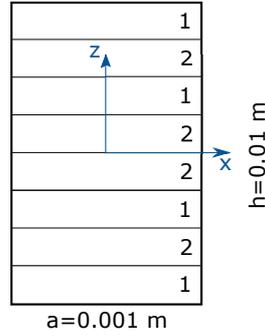


Figura 4.6: Rappresentazione della sezione della trave in materiale composito

Un quarto punto, all'estremità libera della trave, viene dedicato alla misura dello spostamento verticale: $E \rightarrow (0, b, 0)$

A questo punto vengono svolte le analisi statiche per diversi modelli cinematici: LE e TE models di diverso ordine. Per la cinematica di Lagrange vengono usati 8 elementi $L9$, uno per ogni layer della trave, ottenendo così una sezione discretizzata con 51 nodi, dato che 21 nodi sono in comune tra due elementi adiacenti. Per quanto riguarda le espansioni di Taylor invece, vengono eseguite le analisi con serie di ordine 2, 3, 4 e 5.

Dai risultati riportati in Tabella 4.9 si osserva subito che la σ_{yy} misurata nel punto B rimane pressoché inalterata anche con diversi modelli cinematici. Si nota inoltre, che lo spostamento verticale u_z è leggermente maggiore in modulo nei modelli ad alto numero di gradi di libertà, anche se tra $TE2$ e $8L9$ lo scostamento è solamente del 2 %.

Discorso diverso si deve fare per le tensioni vicino all'incastro: si osserva che con un modello $TE 2$ si ottiene una σ_{yy} decisamente più bassa rispetto al caso con il modello di Lagrange, poiché il campo di tensioni è complesso e necessita di un alto numero di gradi di libertà per essere descritto.

Nella prima parte della tabella 4.9 sono stati riportati i risultati provenienti dall'articolo di riferimento: si può osservare che essi sono molto vicini a quelli ottenuti nel presente lavoro. Dato che i modelli utilizzati sono gli stessi ci si poteva aspettare anche risultati uguali, invece le piccole differenze possono essere state prodotte dal tipo di correzione adottata per lo shear locking.

4.4 Analisi dinamica di una trave VAT

In questa sezione sono state condotte delle analisi di vibrazioni libere per una lamina in materiale composito a fibre curvilinee (VAT) utilizzando come riferimento bibliografico l'articolo di Viglietti, Zappino e Carrera 2019. La piastra è costituita da un singolo strato

Modello	σ_{yy} [MPa] $A(0,0, \frac{h}{2})$	σ_{yy} [kPa] $B(0, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})$	$\sigma_{yz} \times 10^4$ [Pa] $C(0, \frac{b}{2}, 0)$	$u_z \times 10^{-2}$ [mm] $E(0, b, 0)$	DOF
E. Carrera, E. Zappino e Li 2018					
8L9	1.689	729.6	-2.794	-3.049	4743
TE2	1.460	729.6	-1.999	-2.985	558
TE3	1.597	729.6	-2.822	-3.029	930
TE4	1.597	729.6	-2.822	-3.033	1395
TE5	1.671	729.7	-2.750	-3.034	1953
8L9	1.7166	730.16	-2.79207	-3.0551	4743
TE2	1.4610	730.13	-2.00558	-2.9922	558
TE3	1.6097	730.15	-2.82127	-3.0353	930
TE4	1.6096	730.14	-2.82125	-3.0391	1395
TE5	1.6957	730.25	-2.74996	-3.0402	1953

Tabella 4.9: Risultati ottenuti nei punti richiesti e con i diversi modelli cinematici

di materiale composito con le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
 E_L = 50 \text{ GPa} \quad E_T = E_Z = 10 \text{ GPa} \quad G_{LZ} = G_{TZ} = G_{LT} = 5 \text{ GPa} \\
 \nu_{LZ} = \nu_{TZ} = \nu_{LT} = 0.25 \quad \rho = 1700 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

La geometria della piastra è la seguente: ha larghezza $a = 0.2 \text{ m}$, lunghezza $L = 1 \text{ m}$ e spessore $t = 0.01 \text{ m}$. L'angolo di laminazione delle fibre varia linearmente e passa da 0° all'incastro, ovvero sono parallele all'asse y , fino ad arrivare a 90° all'estremo libero. Vale a dire che l'angolo delle fibre segue la seguente equazione:

$$\theta(y) = 0 + \frac{y}{L} 90
 \tag{4.9}$$

In figura 4.7 viene rappresentato uno schema della trave in esame con la laminazione VAT appena descritta.

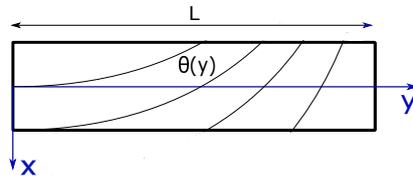


Figura 4.7: Schema della trave VAT presa in esame con disposizione delle fibre

Il software con cui vengono condotte le analisi prevede l'utilizzo di laminati VAT tramite la lettura di un file di input, denominato *FIELDS.dat*, in cui si specifica la funzione che determina il posizionamento delle fibre sul laminato.

In questa prima parte si costruisce la sezione con il modello cinematico 4L9, ovvero utilizzando 4 elementi di Lagrange a 9 nodi ciascuno, disposti come in figura 4.8.

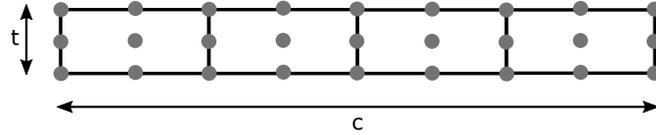


Figura 4.8: Schema della sezione della lamina con quattro elementi L9

Vengono quindi svolte diverse Free Vibration Analysis facendo variare il numero di elementi lungo l'asse y e per una valutazione sulla convergenza del modello e per una verifica sulla bontà delle nostre analisi. I risultati ottenuti utilizzando 5, 10, 15, 30, 60 elementi B3 lungo l'asse y sono riportati in tabella 4.10. Si può osservare che se si adotta il modello con meno gradi di libertà, il modello 5B3, solo i primi 6 modi sono ben descritti, visto l'alto scostamento che invece c'è per le frequenze dei modi più alti con i modelli più raffinati. Nella stessa tabella, nell'ultima colonna a destra, viene inserita una soluzione di riferimento riportata da Viglietti, Zappino e Carrera 2019, ottenuta da un modello tridimensionale agli elementi finiti utilizzando una mesh $5 \times 40 \times 3$ con elementi esaedro a 27 nodi (H27).

Sezione 4L9						
Modello	5B3	10B3	15B3	30B3	60B3	600H27
DOF	891	1701	2511	4941	9801	18711
Modo 1	6.62	6.58	6.57	6.57	6.57	6.56
Modo 2	35.57	34.02	33.76	33.63	33.61	33.61
Modo 3	58.86	57.28	57.02	56.90	56.88	56.70
Modo 4	105.78	94.71	92.95	92.09	91.98	91.94
Modo 5	124.83	124.68	124.66	124.65	124.64	124.62
Modo 6	166.50	159.29	157.73	156.89	156.77	156.40
Modo 7	243.97	192.53	186.64	183.91	183.53	183.34
Modo 8	304.28	280.73	275.16	271.78	271.26	270.74
Modo 9	389.52	329.80	315.10	308.84	308.00	307.52
Modo 10	490.27	419.20	408.15	401.45	400.38	399.53
Modo 11	529.73	507.72	472.84	458.00	456.01	455.43
Modo 12	741.86	527.19	526.98	526.89	526.87	526.77
Modo 13	852.69	583.35	561.57	549.69	547.82	546.52
Modo 14	871.64	729.42	662.58	632.45	628.35	627.84
Modo 15	1136.73	786.90	739.99	718.16	714.89	713.13

Tabella 4.10: Frequenze dei primi 15 modi per una trave VAT, variando il numero di elementi lungo l'asse, sezione costruita con elementi 4L9

Oltre agli elementi B3 viene fatta anche una breve verifica sull'utilizzo degli elementi B4. I risultati riportati in tabella 4.11 mostrano che già il modello 10B4 riesce ad avere un'alta accuratezza sulla previsione delle frequenze proprie.

Sezione 4L9			
Modello	10B4	20B4	60B4
DOF	2511	4941	14661
Modo 1	6.57	6.57	6.57
Modo 2	33.62	33.61	33.61
Modo 3	56.90	56.88	56.88
Modo 4	92.01	91.97	91.96
Modo 5	124.65	124.64	124.64
Modo 6	156.83	156.77	156.75
Modo 7	183.68	183.51	183.49
Modo 8	271.59	271.25	271.20
Modo 9	308.53	307.97	307.90
Modo 10	401.25	400.36	400.25
Modo 11	457.69	455.94	455.78
Modo 12	526.92	526.88	526.86
Modo 13	549.67	547.81	547.58
Modo 14	632.71	628.24	627.89
Modo 15	718.44	714.88	714.49

Tabella 4.11: Frequenze dei primi 15 modi con una variazione del numero di elementi B4 lungo l’asse della trave.

In questa seconda parte invece si fa variare il modello cinematico sulla sezione trasversale, mentre si mantiene lo stesso numero di elementi lungo l’asse della trave, ovvero 10 elementi B3. In tabella 4.12 viene mostrato l’effetto sulle frequenze dell’innalzamento del grado dell’espansione di Taylor. Come già spiegato in precedenza i modelli classici di trave (Eulero-Bernoulli e Timoshenko) adottano delle ipotesi stringenti e delle semplificazioni che non permettono di descrivere i modi torsionali e neanche gli accoppiamenti flesso-torsionali. D’altra parte, per espansioni di grado 2 o maggiore, si trovano dei modi aggiuntivi che diventano importanti poi per eseguire delle analisi di flutter che siano aderenti alla realtà.

In tabella 4.13 troviamo invece un raffinamento della sezione andando ad aumentare gli elementi di Lagrange. Si osserva però un debole incremento dell’accuratezza nonostante si arrivi a quadruplicare il numero dei gradi di libertà nel caso del modello più raffinato. Si può concludere che è sufficiente un modello con pochi elementi di Lagrange L9 per ottenere un buon grado di accuratezza in questo caso relativamente semplice di trave a *single layer*.

4.5 Analisi dinamica di una piastra VAT multilayer

In questa sezione si prosegue nelle analisi dinamiche di piastre in materiale VAT andando però a complicare un po’ il modello per avvicinarci a un’applicazione reale in ambito aeronautico.

Si studia una piastra quadrata di lato $a = b = 1 \text{ m}$, considerando due casi con diverso spessore: $t = 0.01 \text{ m}$ e $t = 0.1 \text{ m}$. La piastra è inoltre costituita da tre strati, ognuno con

Modello su asse y 10B3						
Modello	EBBT	TBT	TE 1	TE 2	TE 3	TE 4
DOF	189	189	189	378	630	945
Modo 1	7.22	7.22	7.22	6.65	6.58	6.58
Modo 2	35.04	34.94	34.93	34.34	34.05	34.01
Modo 3	96.80	96.13	96.09	59.43	57.71	57.42
Modo 4	142.97	137.52	136.14	96.16	94.90	94.63
Modo 5	193.27	190.82	190.72	125.57	124.74	124.69
Modo 6	330.13	323.43	323.23	166.78	160.31	159.58
Modo 7	515.78	500.44	429.04	197.35	193.39	192.37
Modo 8	657.71	548.72	500.06	300.63	283.25	281.29
Modo 9	760.23	729.66	541.73	342.96	332.06	329.49
Modo 10	936.30	873.43	729.03	460.29	425.04	420.28
Modo 11	1073.13	1018.46	737.83	535.10	511.36	507.11
Modo 12	1465.57	1252.96	1017.38	523.89	527.74	527.35
Modo 13	1685.49	1418.38	1220.23	651.74	594.83	584.98
Modo 14	1690.62	1565.04	1286.86	752.29	735.63	729.22
Modo 15	2477.18	2075.30	1417.79	872.17	808.34	788.90

Tabella 4.12: Frequenze dei primi 15 modi variando il grado dell'espansione di Taylor

Modello su asse y 10B3					
Modello	2L9	4L9	6L9	8L9	10L9
DOF	945	2511	2457	3213	3969
Modo 1	6.58	6.58	6.58	6.58	6.58
Modo 2	34.06	34.02	34.01	34.01	34.01
Modo 3	57.53	57.28	57.12	57.02	56.96
Modo 4	94.88	94.71	94.66	94.63	94.62
Modo 5	124.78	124.68	124.67	124.67	124.67
Modo 6	159.87	159.29	158.92	158.68	158.53
Modo 7	193.03	192.53	192.35	192.25	192.19
Modo 8	281.88	280.73	280.05	279.64	279.38
Modo 9	330.85	329.80	329.41	329.21	329.09
Modo 10	421.19	419.20	418.08	417.45	417.06
Modo 11	509.37	507.72	507.13	506.84	506.67
Modo 12	528.28	527.19	527.06	527.03	527.02
Modo 13	586.62	583.35	581.72	580.86	580.36
Modo 14	732.06	729.42	728.32	727.79	727.48
Modo 15	871.25	786.90	783.95	782.67	782.02

Tabella 4.13: Frequenze dei primi 15 modi mettendo a confronto diversi modelli cinematici con espansioni di Lagrange

una certa disposizione delle fibre che rispettano l'equazione seguente:

$$\theta(y) = 2(T_1 - T_0)\frac{|y|}{a} + T_0 \quad (4.10)$$

Uno schema della piastra presa in esame è rappresentata in figura 4.9, dove si osserva che T_0 e T_1 sono gli angoli di orientamento delle fibre, rispettivamente al centro e agli spigoli della piastra. Inoltre, per definire la laminazione adottata in ogni strato viene usata questa forma $\langle T_0, T_1 \rangle$.

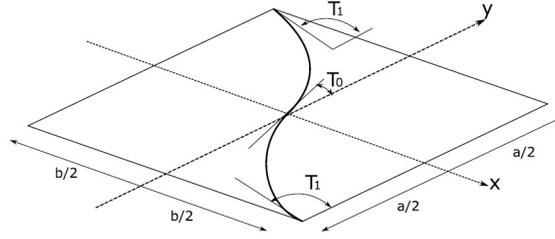


Figura 4.9: Schema della piastra quadrata multilayer ripresa dall'articolo di Viglietti, Zappino e Carrera 2019

Vengono analizzate due laminazioni differenti:

- laminazione a: $\langle 0^\circ, 45^\circ \rangle \langle -45^\circ, -60^\circ \rangle \langle 0^\circ, 45^\circ \rangle$
- laminazione b: $\langle 90^\circ, 45^\circ \rangle \langle 60^\circ, 30^\circ \rangle \langle 90^\circ, 45^\circ \rangle$

Le proprietà del materiale sono costanti nei tre strati e sono le seguenti:

$$E_L = 173 \text{ GPa} \quad E_T = E_Z = 7.2 \text{ GPa} \quad G_{LT} = G_{LZ} = G_{TZ} = 3.76 \text{ GPa} \quad (4.11)$$

$$\nu = 0.29 \quad \rho = 1540 \text{ kg/m}^3$$

Per descrivere la piastra viene usato un approccio *Layer Wise*, ovvero si utilizzano le espansioni di Lagrange. Lungo l'asse y sono presenti 10 elementi B3, mentre sulla sezione vengono utilizzati 10 elementi L9 per ogni strato, per un totale di 30 elementi. Ogni elemento è quindi costituito da 9 nodi e considerando che la sezione è formata da 30 elementi e che molti nodi sono in condivisione tra più elementi, i nodi sulla sezione sono 147. Da ciò ne consegue che i gradi di libertà dell'intero modello sono 9261.

Inoltre, si vuole vedere come influisce sui risultati la variazione delle condizioni al contorno. Vengono quindi condotte le analisi nel caso in cui tutti e quattro i lati della piastra sono incastrati e nel caso di lati liberi.

Come riferimento bibliografico si prende l'articolo di Viglietti, Zappino e Carrera 2019 in cui vengono anche riportati i risultati per un modello 3D agli elementi finiti con $20 \times 20 \times 3$ elementi del tipo *H27*. Quindi viene preso come riferimento un modello con un'ottima accuratezza, ma un alto costo computazionale dato dall'alto numero di gradi di libertà: circa 95000.

Osservando le frequenze ottenute riportate nelle tabelle 4.14-4.15-4.16-4.17 si può innanzitutto notare un'ottima vicinanza tra i risultati derivanti dal modello con espansioni

Modo	CLAMPED <0, 45> <-45,-60> <0,45>			
	t=0.01 m		t=0.1 m	
	LE Model	3D Model	LE Model	3D Model
1	94.44	92.65	609.79	607.24
2	135.36	131.50	903.63	897.04
3	206.40	196.86	1216.04	1208.40
4	247.05	239.23	1328.41	1314.14
5	287.67	276.76	1469.33	1458.18
6	307.89	286.34	1774.84	1753.52
7	361.64	342.84	1931.36	1916.57
8	433.83	395.43	1930.15	1904.91
9	476.36	436.74	2113.88	2096.64

Tabella 4.14: Frequenze dei primi 9 modi nel caso di piastra quadrata con lati incastrati e laminazione a

Modo	FREE <0, 45> <-45,-60> <0,45>			
	t=0.01 m		t=0.1 m	
	LE Model	3D Model	LE Model	3D Model
1	22.53	22.26	200.85	200.28
2	27.32	27.04	257.10	256.20
3	55.03	54.39	465.16	462.22
4	77.71	75.73	661.13	657.30
5	94.80	93.65	759.03	754.14
6	114.76	113.60	863.08	858.41
7	115.66	112.99	894.21	887.09
8	140.64	137.56	1015.21	1009.03
9	166.68	159.39	1122.93	1122.09

Tabella 4.15: Frequenze dei primi 9 modi nel caso di piastra quadrata con lati liberi e laminazione a

di Lagrange e il modello 3D agli elementi finiti. Questo ci fa concludere che il modello su cui si è eseguita l'analisi ha una buona accuratezza anche nel caso di laminati VAT più complessi. Da notare però che nel caso di piastra più sottile i risultati si discostano leggermente di più rispetto al caso di piastra spessa, anche se l'errore relativo rimane comunque al di sotto di pochi punti percentuali.

A questo punto può essere importante confrontare i risultati tra i due tipi di laminazione a parità di condizioni al contorno. Si nota che la laminazione *a* presenta frequenze maggiori, che equivalgono a maggiore rigidità, nel caso di lati liberi. D'altra parte per il caso di lati incastrati, si osservano frequenze più alte quando si considera la laminazione *b*. La laminazione *a* è simile a una laminazione $[+45^\circ - 45^\circ + 45^\circ]$ e questo fa ottenere una maggiore rigidità rispetto alla laminazione *b* quando la piastra ha i lati liberi.

Da notare inoltre, che quando si esegue l'analisi dinamica nel caso di lati liberi, i primi

Modo	FREE <90, 45> <60,30> <90,45>			
	t=0.01 m		t=0.1 m	
	LE Model	3D Model	LE Model	3D Model
1	19.61	19.54	182.02	181.46
2	24.25	24.09	230.43	230.06
3	44.31	44.12	392.43	391.74
4	62.99	62.11	561.63	560.02
5	64.81	64.35	559.04	557.96
6	93.29	91.76	764.02	760.90
7	101.01	99.11	837.75	834.15
8	111.26	110.19	879.58	877.64
9	135.06	133.05	987.54	986.12

Tabella 4.16: Frequenze dei primi 9 modi nel caso di piastra quadrata con lati liberi e laminazione b

Modo	CLAMPED <90, 45> <60,30> <90,45>			
	t=0.01 m		t=0.1 m	
	LE Model	3D Model	LE Model	3D Model
1	114.32	113.02	672.68	670.27
2	148.92	145.21	909.02	904.11
3	223.15	212.99	1270.07	1264.63
4	279.60	269.67	1301.02	1291.94
5	303.80	292.70	1441.95	1433.44
6	332.45	315.84	1690.37	1678.67
7	381.32	358.88	1904.58	1883.04
8	425.44	393.29	1943.18	1931.44
9	507.54	465.73	1950.88	1947.36

Tabella 4.17: Frequenze dei primi 9 modi nel caso di piastra quadrata con lati incastrati e laminazione b

sei modi di vibrare hanno frequenza nulla, infatti la piastra ha sei gradi di libertà: tre di traslazione e tre di rotazione. Allora il settimo modo è stato riportato come primo modo nelle tabelle precedenti.

4.6 Analisi aeroelastica di una piastra isotropa

In questa prima parte viene condotta un'analisi di flutter su un modello molto semplice di piastra isotropa. La parte di costruzione del modello viene fatta sia con Femap che con l'eseguibile messo a disposizione dal gruppo di ricerca MUL2 così da verificarne l'accuratezza.

Come riferimento bibliografico viene preso l'articolo di Petrolo 2012, in cui la piastra presa in esame ha le seguenti caratteristiche geometriche: lunghezza $L = 0.305 \text{ m}$, corda $c = 0.076 \text{ m}$, spessore $t = 0.001 \text{ m}$. Il materiale, come detto, è isotropo e ha le seguenti proprietà: modulo elastico $E = 73.8 \text{ GPa}$, modulo di taglio $G = 27.6 \text{ GPa}$, densità $\rho = 2768 \text{ kg/m}^3$.

In Femap viene quindi creata la superficie con le dimensioni appena riportate, su cui viene introdotta una semplice mesh strutturale con elementi quadrati di dimensione 0.03175 m . Per continuare nella creazione del modello strutturale bisogna definire le caratteristiche del materiale che saranno poi da assegnare al modello nella definizione delle sue proprietà. Definendo le proprietà è anche possibile inserire lo spessore della piastra che nel nostro caso è costante e pari a t . Il passo successivo è definire le condizioni al contorno bloccando la traslazione in tutte e tre le direzioni di uno dei due lati corti della piastra.

La seconda parte del *pre-processing* consiste invece nella creazione del modello aerodinamico. Esso consiste in una pannellatura sovrapposta al modello strutturale. Per una verifica sulla convergenza dei risultati vengono eseguite le analisi con tre diverse pannellature: 2×5 , 4×10 , 8×20 . Sempre all'interno dello stesso menù si può definire la spline che va a collegare il modello strutturale con il modello aerodinamico così da tenere conto della mutua influenza tra deformazioni e carichi aerodinamici. Nel momento in cui si vuole creare la spline bisogna indicare a quali gruppi strutturali e a quali box aerodinamici si fa riferimento: nel nostro caso dovremo selezionare tutti gli elementi appartenenti alla piastra. Inoltre si dovrà selezionare il metodo della spline che in questa analisi, è l'*Infinite Plate Spline* (IPS).

Femap è un programma di *pre- e post-processing* per le analisi agli elementi finiti, perciò c'è bisogno di un solutore esterno per eseguire le analisi dal punto di vista computazionale e nell'ambito di questa tesi è stato utilizzato *MSC Nastran*. A questo punto viene eseguita per prima un'analisi dinamica per trovare i modi propri e le relative frequenze della struttura in esame i cui valori vengono riportati in tabella 4.18.

Modello	Femap	TE 2	TE 3	TE 4	4L9
DOF	1728	1098	1830	2745	4941
1	9.14	9.52	9.19	9.18	9.17
2	57.07	59.55	57.41	57.37	57.32
3	71.45	73.82	73.00	72.98	72.96
4	160.16	167.15	161.31	161.20	161.04
5	220.57	230.63	226.01	225.84	225.69
6	315.00	327.77	317.92	317.59	317.15
7	387.35	413.12	398.88	398.18	397.73
8	522.09	541.99	528.29	527.56	526.52
9	581.17	657.25	601.91	600.20	599.24
10	652.64	634.03	654.05	653.62	653.56

Tabella 4.18: Modi propri di una lamina piana isotropa per diversi modelli strutturali

La seconda analisi che è stata fatta è l'analisi di flutter. Prima del suo avvio, viene richiesta la definizione di diversi parametri e impostazioni. Per come abbiamo costruito

il modello imponiamo una simmetria rispetto al piano xz . In seguito, si inseriscono la lunghezza e la densità di riferimento i cui valori sono rispettivamente, pari alla corda $c = 0.076 m$ e alla densità al livello del mare $\rho = 1.225 kg/m^3$. Viene poi richiesto di definire una funzione, attraverso una serie di punti, che leghi la frequenza ridotta con il numero di Mach. Nella nostra analisi si è deciso di non considerare l'effetto della compressibilità perciò i valori inseriti sono i quelli in tabella 4.19.

k	0.0001	0.001	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0
M	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabella 4.19: Legame tra frequenza ridotta k e numero di Mach M

Bisogna poi scegliere il metodo di risoluzione dell'equazione aeroelastica e per questa analisi è stato scelto il PKNL-Method. Successivamente si inseriscono tutti i valori di velocità alla quale si vuole ricercare l'autovalore di ogni modo, nello specifico si sono scelti 35 valori di velocità compresi tra $4 m/s$ e $140 m/s$. Insieme a ciò si è scelto di mantenere costante e pari al valore di riferimento la densità dell'aria in free stream. Arrivati a questo punto si può avviare l'analisi di flutter, per cui come primo passaggio viene creato il file `.bdf` da Femap, un file testuale contenente tutte le caratteristiche del modello. Dopodiché questo file viene preso in input da Nastran per compilarlo e eseguire l'analisi vera e propria.

Il file in output in cui troviamo i risultati è quello con l'estensione `.f06`. Esso è un file di testo al cui interno troviamo prima un breve riassunto del modello su cui è stata fatta l'analisi, mentre nella seconda parte vengono riportati, per ogni modo, i risultati relativi all'analisi di flutter per tutti gli step di velocità richiesti. Nello specifico le colonne stampate riporteranno i valori di frequenza ridotta k , il suo reciproco, la densità ρ , il numero di Mach e la velocità in input, seguite dalle colonne di output che riportano lo smorzamento, la frequenza e l'autovalore complesso. Le frequenze e il parametro di smorzamento presenti in questo file di testo vengono riportati nei grafici 4.10-4.11 nel caso di pannellatura aerodinamica 8×20 , così da avere un'idea sulla stabilità della struttura alle diverse velocità.

Ricordiamo che la velocità di flutter è la velocità per cui lo smorzamento è nullo, ovvero è la velocità critica di passaggio da oscillazioni smorzate a oscillazioni amplificate. Allora viene fatta un'interpolazione lineare tra l'ultima velocità che ha damping negativo e la prima con damping positivo così da ottenere la velocità di flutter. Viene poi eseguita l'operazione analoga anche per le frequenze. In tabella 4.20 vengono riportati i risultati per diverse mesh aerodinamiche dove si osserva una differenza non trascurabile tra i risultati, questo significa che per avere un'alta accuratezza dovremmo scegliere una pannellatura aerodinamica di 8×20 , oppure anche più raffinata.

Mesh aerodinamica	2×5	4×10	8×20
Frequenza di flutter [Hz]	46.98	41.26	39.79
Velocità di flutter [m/s]	59.93	64.80	66.58

Tabella 4.20: Frequenze e velocità di flutter per diverse mesh aerodinamiche

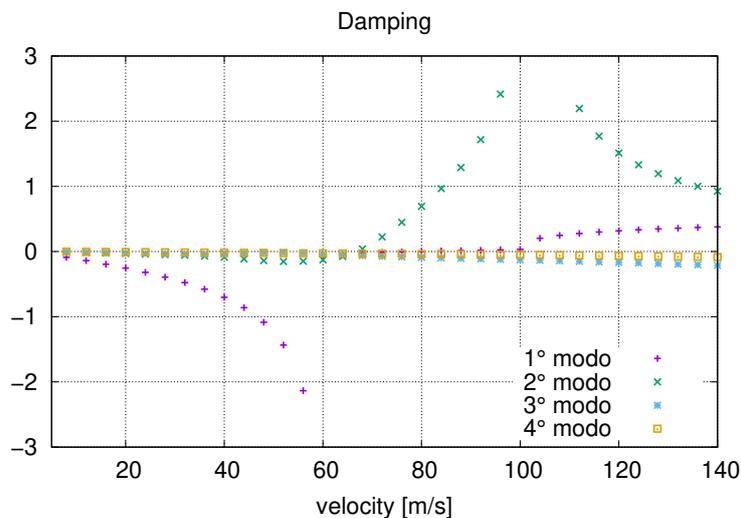


Figura 4.10: Parametro di smorzamento al variare della velocità per i primi quattro modi per una lamina isotropa, con mesh aerodinamica 8×20

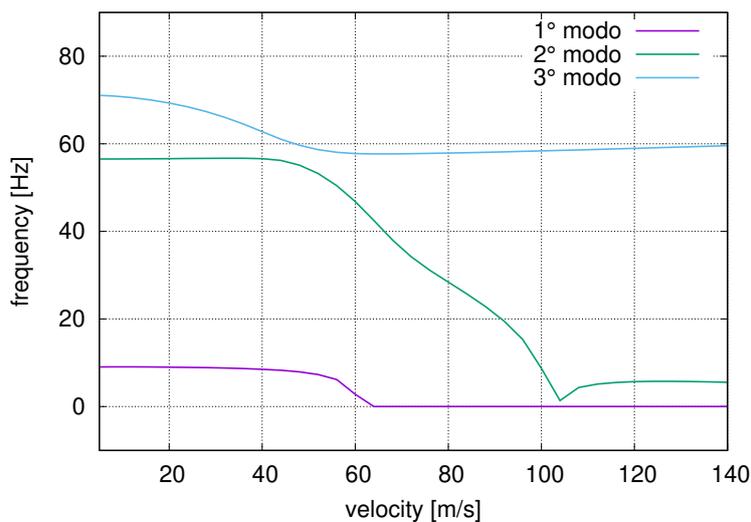


Figura 4.11: Frequenze dei primi quattro modi al variare della velocità per una lamina isotropa, con mesh aerodinamica 8×20

Lo stesso modello di piastra costruito in Femap viene anche definito nei file di input per il software creato dal gruppo di ricerca MUL2, così da fare una verifica anche nell'ambito delle analisi di flutter. In prima battuta si può eseguire un'analisi dinamica con una procedura analoga a quelle fatte in precedenza. I risultati ottenuti con diversi raffinamenti della sezione trasversale vengono riportati in tabella 4.18. Si noti che non viene eseguita un'analisi con TE al primo ordine perché abbiamo già verificato che non è in grado di descrivere i modi torsionali, cosa invece fondamentale per l'analisi di flutter.

Per proseguire con l'analisi di flutter è stato necessario modificare il software di MUL2 in modo che leggesse in input un nuovo file di testo, chiamato *NASTRAN_FLUTTER.dat*. In questo file viene richiesto l'inserimento della densità di riferimento in free stream, mantenuta a 1.225 kg/m^3 , l'inserimento delle caratteristiche geometriche della lamina, il numero di pannelli aerodinamici, che viene fissato a 4×10 per le seguenti analisi e infine bisogna scrivere come variano densità, velocità e numero di Mach.

Un'altra variazione importante nell'utilizzo del software riguarda la scrittura del file di post-processing: per l'analisi di flutter bisogna inserire una serie di punti, appartenenti alla lamina, in cui si misura lo spostamento del modello strutturale che andrà ad influire sulle forze del modello aerodinamico. Quindi, il numero di punti e la loro disposizione deve essere appropriata per descrivere al meglio i modi di vibrare della struttura. In pratica, questi punti vanno a definire la spline di cui si è già parlato in precedenza.

Eseguendo quindi il software di MUL2 viene creato un file *.dat* che sarà il file in input al solutore MSC Nastran, in cui sono riportate tutte le caratteristiche del modello aeroelastico, le caratteristiche di rigidità, massa e smorzamento, gli step di velocità, Mach e densità dell'aria. Infine come output di Nastran troveremo nuovamente un file *.f06* in cui potremo leggere il damping e la frequenza per ogni modo di vibrare e a ogni step di velocità.

A questo punto è stato possibile fare un'analisi di convergenza dei diversi modelli strutturali per quanto riguarda la velocità e la frequenza di flutter: i risultati sono riportati in tabella 4.21. In questo caso semplice di lamina isotropa si osserva che anche un modello non complesso come il TE 3 riesce a calcolare con alta accuratezza sia la velocità che la frequenza di flutter.

Si nota inoltre, una buona corrispondenza tra i risultati ottenuti con il software commerciale *Femap* e i risultati ricavati con il codice sviluppato dal gruppo MUL2.

Modello	TE 2	TE 3	TE 4	4L9
Frequenza di flutter [Hz]	43.29	41.94	41.93	41.90
Velocità di flutter [m/s]	65.95	65.28	65.28	65.26

Tabella 4.21: Velocità e frequenze di flutter di diversi modelli strutturali, con pannellatura aerodinamica 4×10

Vengono riportati anche i grafici per la frequenza e lo smorzamento nelle figure 4.12-4.13 per il modello lagrangiano 4L9 e si osserva che sono molto simili e sovrapponibili ai grafici costruiti con i risultati derivanti dall'analisi con *Femap*.

4.7 Analisi aeroelastica di un laminato in composito

Il passo successivo viene fatto eseguendo un'analisi aeroelastica per un laminato in materiale composito a fibre rettilinee. Come riferimento bibliografico e per la comparazione dei risultati, viene preso l'articolo di Bret K. Stanford, Christine V. Jutte e Chauncey Wu 2014.

Le proprietà del materiale per la piastra presa in esame sono riportate in tabella 4.22.

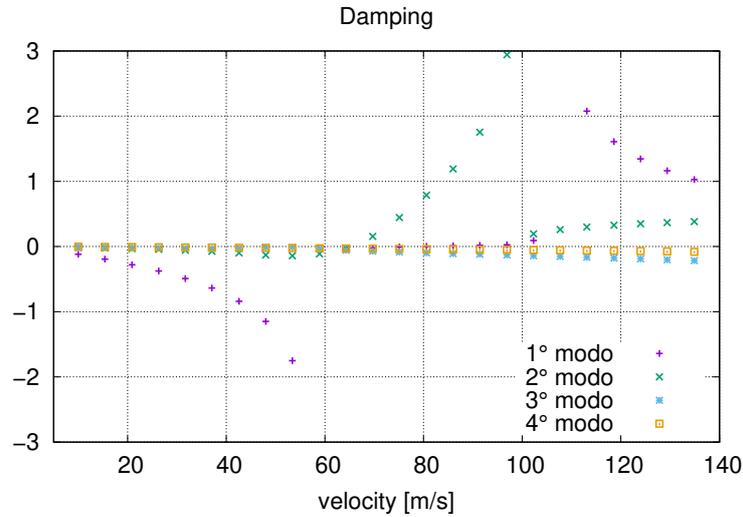


Figura 4.12: Smorzamento dei primi quattro modi al variare della velocità per una lamina con una sezione descritta da 4 elementi L9

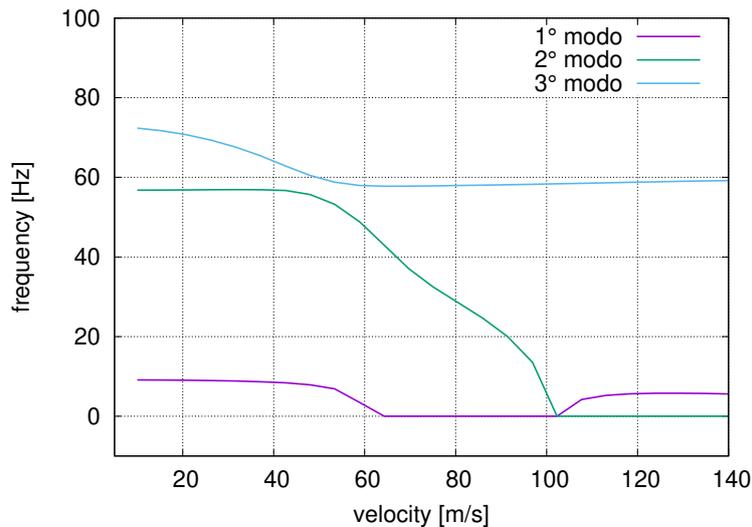


Figura 4.13: Frequenze dei primi quattro modi al variare della velocità per una lamina con una sezione descritta da 4 elementi L9

Le caratteristiche geometriche della piastra sono le seguenti: la corda, ovvero il lato corto della piastra è $c = 76.2 \text{ mm}$, mentre la lunghezza è $a = 305 \text{ mm}$. Analogamente a una semiala, la piastra è completamente incastrata alla sua radice.

Inoltre, il laminato è composto da sei strati, perciò si è deciso di utilizzare un approccio Layer Wise sfruttando le espansioni di Lagrange. In particolare, la sezione viene descritta con 24 elementi L9, 4 per ogni strato. Lungo l'asse invece, il modello è costituito da 20 elementi B4

Modulo di Young	$E_L = 98.0 \text{ GPa}, E_T = E_Z = 7.9 \text{ GPa}$
Coefficiente di Poisson	$\nu_{LT} = \nu_{LZ} = \nu_{TZ} = 0.28$
Modulo di Taglio	$G_{LT} = G_{LZ} = G_{TZ} = 5.6 \text{ GPa}$
spessore di un singolo strato	$t_p = 0.134 \text{ mm}$
densità	$\rho = 1520 \text{ kg/m}^3$

Tabella 4.22: Proprietà del materiale che costituisce la lamina

Nell'articolo di riferimento viene eseguita un'ottimizzazione tramite algoritmo genetico per trovare la laminazione simmetrica che massimizzi la velocità di flutter, si ottiene quindi un laminato con i seguenti angoli: $[39.3^\circ/133.2^\circ/129.3^\circ]_s$. La convenzione sugli angoli è la stessa di quella adottata in precedenza: l'angolo delle fibre è nullo quando sono parallele all'asse y , mentre è positivo per una rotazione antioraria. In figura 4.14 si può osservare la direzione delle fibre per ogni strato.

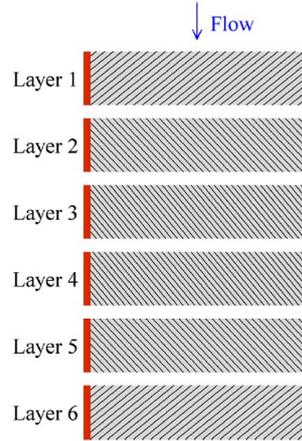


Figura 4.14: Schema del laminato con la direzione delle fibre per ogni strato, riportato da Bret K. Stanford, Christine V. Jutte e Chauncey Wu 2014

Prima dell'analisi aeroelastica, possiamo eseguire una free vibration analysis, così da trovare le frequenze dei primi 10 modi propri del laminato, che sono stati riportati in tabella 4.23. Le frequenze di questi primi modi dovranno corrispondere alle frequenze dei primi modi trovati con l'analisi aeroelastica quando la velocità è sufficientemente bassa, cioè tendente a zero.

Eseguendo l'analisi aeroelastica, prevedendo 35 step di velocità nel range $V = 5 - 95 \text{ m/s}$, si osserva la comparsa del fenomeno del flutter per il 2° modo. In tabella 4.24 troviamo i risultati.

La differenza rispetto ai risultati del riferimento bibliografico può essere data dai diversi modelli strutturali adottati: nell'articolo si riporta che la mesh strutturale è costituita da 12×48 quadrati, ognuno dei quali è diviso in due elementi piastra triangolari. Invece, la pannellatura aerodinamica per il DLM è 12×48 sia nel riferimento bibliografico che in questo lavoro.

Modo	24L9 DoF: 21411
1	5.81
2	35.99
3	71.78
4	103.55
5	208.55
6	218.44
7	350.71
8	374.48
9	470.15
10	545.50

Tabella 4.23: Primi dieci modi per il laminato a 6 strati

Modello	24L9	bibliographic ref.
Frequenza di flutter [Hz]	28.28	≈ 27
Velocità di flutter [m/s]	42.78	45.98

Tabella 4.24: Velocità e frequenza di flutter confrontandoli con il riferimento di Bret K. Stanford, Christine V. Jutte e Chauncey Wu [2014](#)

Come accennato in precedenza l'analisi aeroelastica permette di studiare la variazione delle frequenze e dello smorzamento dei primi modi, al variare della velocità. Le figure [4.15-4.16](#) ne danno una rappresentazione per il caso in esame.

Per uno studio più completo della stabilità aeroelastica, è bene calcolare a che velocità si presenta il fenomeno della divergenza. La divergenza è un'instabilità statica quindi si manifesterà quando la frequenza è nulla e quando lo smorzamento è positivo: nel nostro caso essa si presenta per il primo modo e alla velocità $V_{div} = 80.28 \text{ m/s}$. Dato che la velocità di divergenza è maggiore della velocità di flutter sarà solo quest'ultima che limiterà un ipotetico inviluppo di volo.

4.8 Analisi aeroelastica di una lamina VAT

In questa sezione si procede con delle analisi per studiare la stabilità aeroelastica di una lamina con fibre curvilinee, confrontando diversi modelli strutturali e prendendo come riferimento bibliografico l'articolo di Stodieck et al. [2013](#). La piastra presa in esame in queste analisi ha caratteristiche molto simili a quella della sezione precedente: ha un lato completamente incastrato e l'altro lato libero e le proprietà del materiale sono le stesse di quelle in tabella [4.22](#).

Le dimensioni invece, sono le seguenti: il lato lungo della piastra, analoga alla semi-apertura alare è $s = 305 \text{ mm}$, mentre la corda è $c = 76.2 \text{ mm}$. Inoltre, il laminato è composto da 8 strati e quindi lo spessore totale è $t_{tot} = 1072 \text{ mm}$.

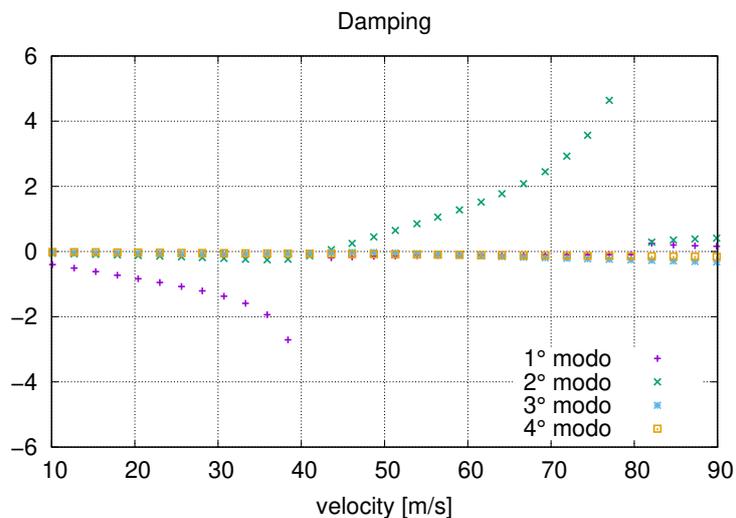


Figura 4.15: Andamento del parametro di smorzamento al variare della velocità per i primi quattro modi per una lamina in composito

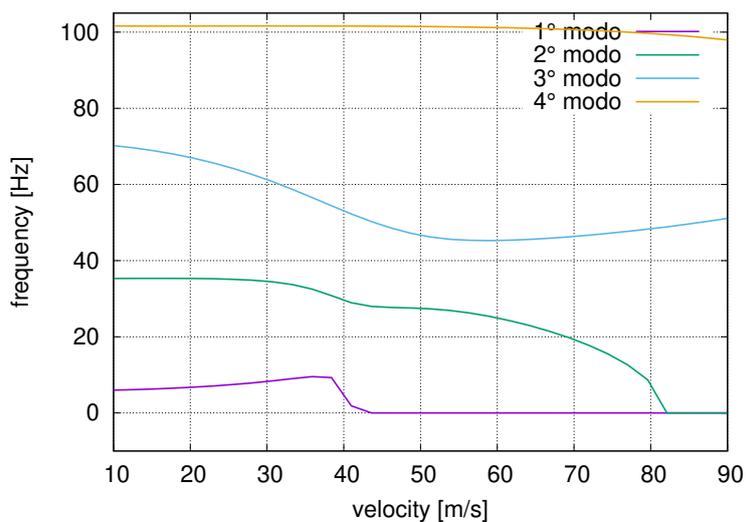


Figura 4.16: Andamento delle frequenze dei primi quattro modi al variare della velocità per una lamina in composito

La laminazione è simmetrica e l'angolo delle fibre varia linearmente lungo l'apertura. Gli angoli delle fibre dei quattro strati più esterni vengono scelti in modo da massimizzare la velocità di flutter: $Root [-45^\circ 45^\circ - 45^\circ 45^\circ]_s$ $Tip [-27^\circ 27^\circ - 45^\circ 45^\circ]_s$.

Il modello strutturale costruito per questa analisi ha 20 elementi $B4$ lungo l'asse y , mentre per la sezione si adotta prima un modello Layer Wise con quattro elementi $L9$ per ogni strato per un totale di 32 elementi $L9$. Invece, per le successive analisi si adottano i modelli che sfruttano le espansioni di Taylor, ovvero: $TE2$ $TE3$ $TE4$. In tabella 4.25

vengono riportate le frequenze dei primi modi della piastra VAT ricavate con la classica *Free Vibration Analysis*.

Modello	32L9	TE 2	TE 3	TE 4
DOF	27999	1098	1830	2745
Modo 1	7.94	8.88	8.02	7.95
Modo 2	53.59	59.17	54.13	53.70
Modo 3	93.18	96.80	93.55	93.37
Modo 4	157.49	170.40	159.55	157.86
Modo 5	278.32	290.88	280.28	279.19
Modo 6	316.72	335.59	321.77	317.80
Modo 7	480.36	493.25	489.36	487.56
Modo 8	486.97	507.52	485.99	482.66
Modo 9	528.84	555.62	538.32	531.22
Modo 10	684.95	756.21	715.34	686.62

Tabella 4.25: Frequenze dei primi 10 modi di una lamina VAT

Dal punto di vista aerodinamico invece, il nostro modello è costituito da una pannelatura 12×48 , mentre si mantiene nullo il numero di Mach e costante la densità dell'aria pari a $\rho_\infty = 1.225 \text{ kg/m}^3$.

D'altra parte, l'articolo di riferimento Stodieck et al. [2013](#), adotta la *Strip Theory* per definire delle forze aerodinamiche *quasi stazionarie*. Il differenziale della portanza e del momento aerodinamico per una striscia di larghezza infinitesima dy sono:

$$\begin{aligned}
 dL &= \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c a_w \left(\frac{\dot{w}}{V_\infty} + \theta \right) dy \\
 dM &= \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2 \left[e a_w \left(\frac{\dot{w}}{V_\infty} + \theta \right) + M_{\dot{\theta}} \frac{\dot{\theta} c}{4V_\infty} \right] dy
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

in cui a_w è la derivata aerodinamica della portanza rispetto all'incidenza, mentre \dot{w} è la velocità delle deflessioni in direzione z .

Proseguendo con l'analisi aeroelastica si possono ottenere la velocità e la frequenza di flutter: in tabella [4.26](#) sono riportati questi risultati per i modelli già citati. Da cui si può concludere che in questo caso è sufficiente un modello TE 3 per rimanere vicini al risultato in bibliografia.

Data la maggiore complessità di queste analisi è stato riportato il tempo di calcolo che è diventato significativo. Da notare che nel caso di modello strutturale TE4 il tempo necessario per l'analisi è molto più alto che nel caso di approccio Layer Wise, anche se i gradi di libertà sono decisamente maggiori in quest'ultimo caso. Questo accade, perché, anche durante le analisi con espansioni di Taylor, il codice si serve del modello lagrangiano con 32 elementi, definendo per ogni elemento un polinomio che poi dovrà essere integrato.

Per osservare invece, come cambia la smorzamento e la frequenza di oscillazione della struttura alle diverse velocità per i primi quattro modi, si sono riportate le figure [4.17-4.18](#). Osservando il grafico relativo alle frequenze si nota che sono i modi 2 e 3 quelli che tendono alla coalescenza e quindi a originare il fenomeno del flutter. Inoltre, il 2° e il 3° modo sono

Modelli	32L9	TE 2	TE 3	TE 4	Stodieck ref.
$V_{flutter}$ [m/s]	66.83	65.24	67.16	67.01	67.0
$f_{flutter}$ [Hz]	41.36	44.00	41.81	41.53	/
CPU time [s]	173	76	337	1145	/

Tabella 4.26: Velocità e frequenza di flutter per diversi modelli a confronto con il risultato riportato in Stodieck et al. 2013

rispettivamente, un modo flessionale e uno torsionale che quindi tendono con più facilità ad accoppiarsi e a generare delle vibrazioni che si auto-alimentano.

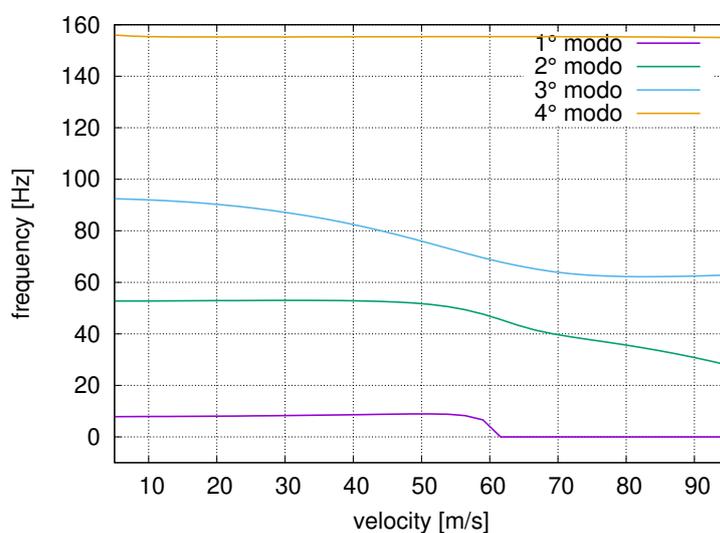


Figura 4.17: Frequenze dei primi quattro modi al variare della velocità per la piastra in esame con il modello 32L9 sulla sezione e 20B4 lungo l'asse y

4.9 Analisi aeroelastica di un cassone alare

In questa sezione si vuole eseguire un'analisi aeroelastica di un cassone alare con laminazione VAT, passando per delle verifiche sul modello strutturale. Queste verifiche vengono svolte prendendo come riferimento l'articolo di A. Viglietti, E. Zappino e E. Carrera 2019 e riproducendo alcune free vibration analysis presenti all'interno dell'articolo per fare un confronto sui risultati.

Il cassone alare preso in esame presenta una sezione rettangolare in parete sottile di altezza $h = 0.13$ m, larghezza $a = 0.30$ m e spessore $t = 0.01$ m. La lunghezza del cassone è invece $L = 2.0$ m. Sono poi previste due centine, una posta a metà della lunghezza del cassone e l'altra alla sua estremità. Entrambe sono di spessore $t = 0.01$ m e con una laminazione $-45^\circ / +45^\circ$. In figura 4.19 si osserva una rappresentazione del modello descritto.

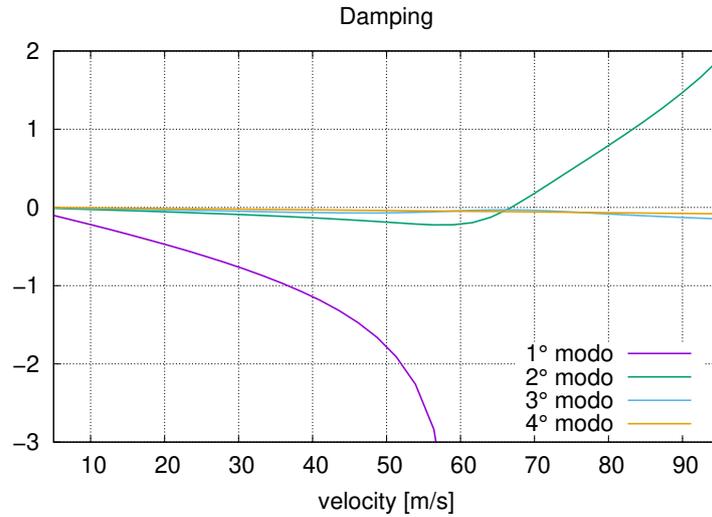


Figura 4.18: Smorzamento al variare della velocità per la piastra in esame con il modello 32L9 sulla sezione e 20B4 lungo l'asse y

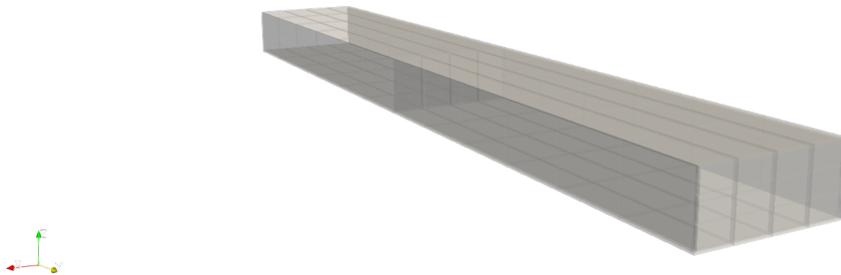


Figura 4.19: Modello del cassone alare

Le proprietà del materiale sono le seguenti: Modulo di Young $E_L = 50.0 \text{ GPa}$, $E_T = E_Z = 10.0 \text{ GPa}$, Coefficiente di Poisson $\nu_{LT} = \nu_{LZ} = \nu_{TZ} = 0.25$, Modulo di Taglio $G_{LT} = G_{LZ} = G_{TZ} = 5.0 \text{ GPa}$.

La sezione relativa alla *skin*, è costruita con 28 elementi L9, organizzati in due strati. La disposizione degli elementi può essere osservata in figura 4.20. Le centine, invece sono state costruite entrambe con 12 elementi L9, in modo che i nodi esterni combaciassero con i nodi della parete interna della *skin*. Mentre lungo l'asse del cassone alare vengono utilizzati 14 elementi B3: 12 di uguale lunghezza più 2 in corrispondenza delle centine.

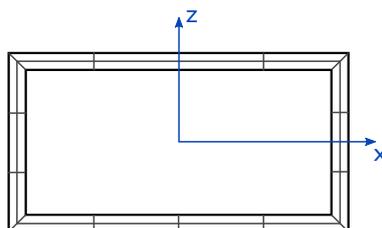


Figura 4.20: Schema della sezione del cassone alare con suddivisione in elementi

4.9.1 Analisi dinamica

Si prende in esame per prima, la laminazione a 0° , ovvero con le fibre rivolte verso l'asse y e si ricavano come al solito, le frequenze dei primi dieci modi propri della struttura, che vengono riportate in tabella 4.27. Si osserva, sia per questa laminazione che per quelle successive, che per alcuni modi non è stata riportata la forma modale né la frequenza del riferimento bibliografico: questo perché sono modi relativi ai pannelli.

La piccola differenza che c'è tra le frequenze riportate nell'articolo e quelle ricavate nell'ambito di questa tesi sono probabilmente dovute a delle lievi differenze nel modello strutturale. Nell'articolo di riferimento sono stati usati 6 elementi $B3$ lungo l'asse del cassone e le centine sono state modellizzate in modo diverso: come delle aste con un asse perpendicolare all'asse del cassone, con 4 elementi $B3$. Per queste differenze è anche diverso il numero di gradi di libertà del modello: 12810 per il nostro modello, 6666 per quello del riferimento bibliografico.

	Laminazione $0^\circ/0^\circ$		
	14B3	reference	Scostamento %
Modo 1: $1 - B_{yz}$	36.40	36.12	0.77
Modo 2: $1 - B_{xy}$	70.26	69.72	0.78
Modo 3: $1 - T$	153.71	153.06	0.42
Modo 4: $2 - B_{yz}$	162.09	163.22	0.69
Modo 5:	236.63		
Modo 6:	240.11		
Modo 7: $3 - B_{yz}$	273.04	272.27	0.28
Modo 8:	293.96		
Modo 9: $2 - B_{xy}$	309.82	308.99	0.27
Modo 10:	310.64		

Tabella 4.27: Primi dieci modi del cassone alare, con laminazione a 0° , a confronto con i risultati di A. Viglietti, E. Zappino e E. Carrera 2019

In tabella 4.28 vengono anche riportate le frequenze dei primi dieci modi della struttura nel caso di laminazione con fibre inclinate a $\pm 45^\circ$. Come ci aspettavamo i modi flessionali hanno frequenze più basse rispetto al caso di fibre a 0° , d'altra parte con le fibre inclinate a 45° si ottiene una maggiore rigidità torsionale.

Modo	Laminazione 45°/ – 45°		
	14B3	reference	
1	21.90	21.82	1 <i>Bending yz</i>
2	42.38	42.26	1 <i>Bending xy</i>
3	127.84	128.38	2 <i>Bending yz</i>
4	229.50	229.19	1 <i>Torsional</i>
5	242.08	242.22	2 <i>Bending xy</i>
6	285.45	287.18	3 <i>Bending yz</i>
7	291.16		
8	292.76		
9	334.36	341.98	2 <i>torsional</i>
10	344.26		

Tabella 4.28: Primi dieci modi del cassone alare, con laminazione a 45°, a confronto con i risultati di A. Viglietti, E. Zappino e E. Carrera [2019](#)

L'ultima laminazione con fibre rettilinee presa in esame è la laminazione 90°/0°, vale a dire che le fibre sono orientate nello strato esterno in direzione spanwise, mentre nello strato interno in direzione streamwise. Le frequenze dei primi dieci modi con questa laminazione sono riportati in tabella [4.29](#).

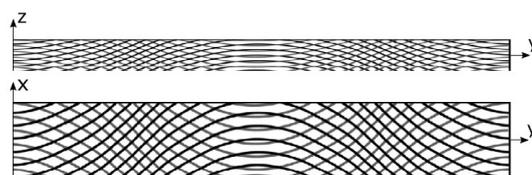
Modo	Laminazione 0°/90°		
	14B3	Reference	
1	30.07	29.84	1 - B attorno a x
2	57.48	57.03	1 - B attorno a z
3	147.94	148.26	2 - B attorno a x
4	153.64	153.07	1 - T
5	275.95	274.98	2 - B attorno a z
6	294.62	295.33	3 - B attorno a x
7	319.30		
8	320.41		
9	351.67		
10	357.49		

Tabella 4.29: Primi dieci modi del cassone alare, con laminazione a 0°/90°, messi a confronto con quelli di A. Viglietti, E. Zappino e E. Carrera [2019](#)

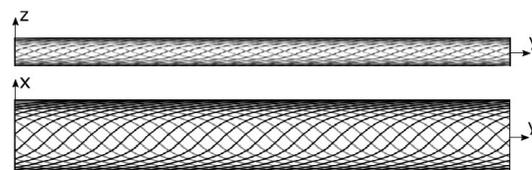
Eseguendo invece le free vibration analysis per la stessa struttura, ma con laminazione VAT si ripropongono due casi riportati nell'articolo di riferimento che sono i seguenti:

- Case 1: Panels e Webs $\rightarrow \frac{\pi}{4} \sin(\pi y)$
- Case 5: Panels $\rightarrow \frac{\pi}{8} (1 + \cos(6.667\pi x))$, Webs $\rightarrow \frac{\pi}{8} (1 + \cos(15.386\pi z))$

In figura [4.21](#) si può osservare graficamente la disposizione delle fibre per i due casi considerati.



(a) Case 1



(b) Case 5

Figura 4.21: Schema delle laminazioni VAT considerate, preso da A. Viglietti, E. Zappino e E. Carrera [2019](#)

I risultati per il *case 1* sono riportati in tabella [4.30](#), mentre quelli relativi al *case 5* sono riportati in tabella [4.31](#). Per entrambe le laminazioni VAT si osserva che la prima frequenza torsionale assume valori intermedi rispetto ai casi di laminazione a 0° e a 45° . Da notare, però che alcune frequenze trovate per il *case 5* si discostano maggiormente dai risultati in bibliografia.

Modo	Laminazione VAT Case 1		
	14B3	Reference	
1	27.45	27.31	1 - B attorno a x
2	53.22	52.95	1 - B attorno a z
3	160.41	161.27	2 - B attorno a x
4	201.44	201.09	1 - T
5	275.22		
6	280.39		
7	285.22	285.11	3 - B attorno a x
8	304.73	304.38	2 - B attorno a z
9	319.84		
10	335.21		

Tabella 4.30: Primi dieci modi del cassone alare, con laminazione VAT case 1 con il riferimento bibliografico A. Viglietti, E. Zappino e E. Carrera [2019](#)

Laminazione VAT Case 5				
Modo	14B3	Reference	Errore %	
1	31.98	31.72	0.83	1 - B attorno a x
2	64.72	60.83	6.39	1 - B attorno a z
3	165.19	165.63	0.27	2 - B attorno a x
4	195.84	198.10	1.14	1 - T
5	265.28			
6	267.99			
7	291.22	295.11	1.32	3 - B attorno a x
8	314.37			
9	322.50			
10	332.17	312.25	6.38	2 - B attorno a z

Tabella 4.31: Primi dieci modi del cassone alare, con laminazione VAT case 5 con il riferimento bibliografico A. Viglietti, E. Zappino e E. Carrera 2019

4.9.2 Analisi di Flutter

In questa seconda parte invece, si eseguono le analisi di flutter per le diverse laminazioni presentate in precedenza. I risultati sono riportati in tabella 4.32 e si osserva subito che le velocità trovate sono estremamente alte. Questo è causato dal fatto che la struttura considerata è decisamente più tozza rispetto ai cassoni alari reali. Possiamo comunque osservare che grazie all'utilizzo della laminazione VAT *case 1* è possibile ritardare il flutter rispetto al caso con laminazione a 45° .

Nelle figure 4.22 - 4.23 vengono riportati lo smorzamento e le frequenze al variare della velocità per la laminazione a con fibre inclinate a 45° . In particolare si può osservare che le frequenze del 4° e del 7° modo tendono ad avvicinarsi e questo è un tipico meccanismo che tende a portare all'instabilità di flutter, che infatti si verifica per il 7° modo.

Laminazione	$90^\circ/0^\circ$	$45^\circ/-45^\circ$	VAT Case 1	VAT Case 5
Velocità flutter [m/s]	1297.26	860.71	909.49	817.53
Frequenza flutter [Hz]	262.11	267.79	248.47	243.04

Tabella 4.32: Velocità e frequenze di flutter per diverse laminazioni del cassone alare

Anche per la laminazione $0^\circ/90^\circ$ vengono riportati i grafici dello smorzamento e della frequenza nelle figure 4.24 - 4.25.

Si osserva che il 4° modo, che è quello torsionale, aumenta la sua frequenza all'aumentare della velocità fino a coalescere con l'ottavo modo e quindi originare il flutter, che però avviene a una velocità molto elevata, maggiore che nel caso delle altre laminazioni.

I grafici relativi invece alla laminazione VAT case 1 sono riportati nelle figure 4.26 - 4.27, che come al solito rappresentano la variazione dello smorzamento e della frequenza con la velocità per alcuni modi più rilevanti.

Per ultimi abbiamo i grafici per la laminazione VAT case 5, nelle figure 4.28 - 4.29. Dove si osserva che il flutter avviene a velocità un po' più bassa rispetto alle altre laminazione,

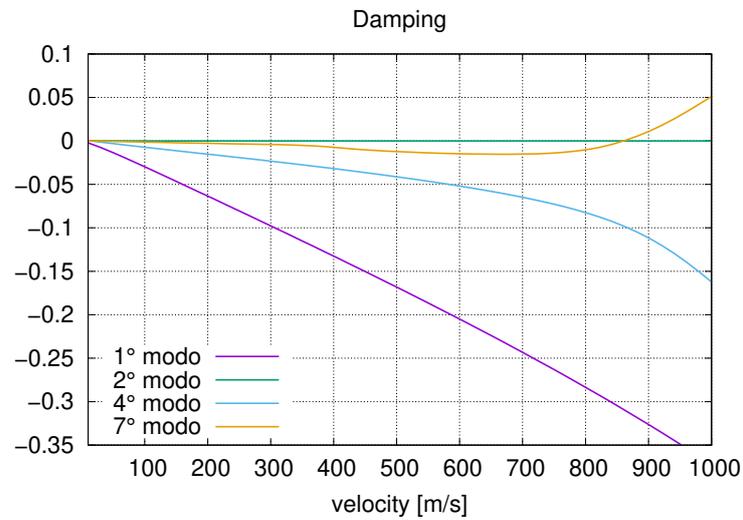


Figura 4.22: Parametro di smorzamento di alcuni modi propri del cassone alare nel caso di laminazione a $\pm 45^\circ$

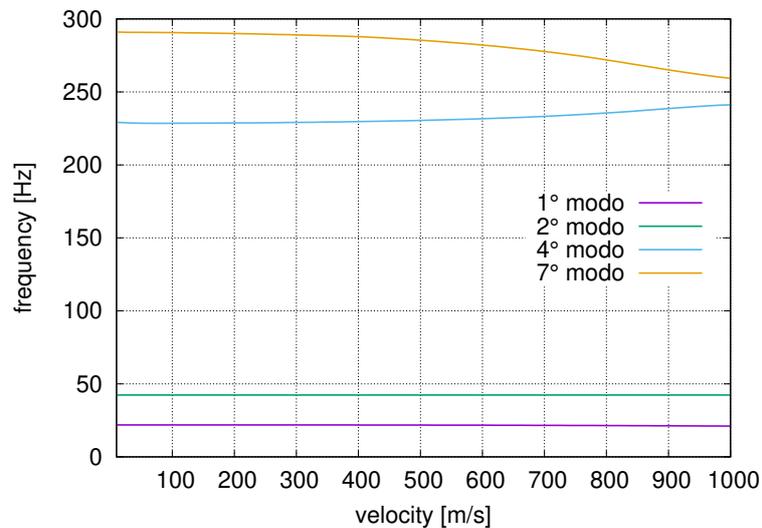


Figura 4.23: Frequenze di alcuni modi propri del cassone alare con laminazione a $\pm 45^\circ$

ma si verifica nuovamente per il 6° modo, che è un modo di vibrare dei pannelli: questo significa che l'instabilità non deriva da un fenomeno di oscillazione globale, bensì da un fenomeno locale.

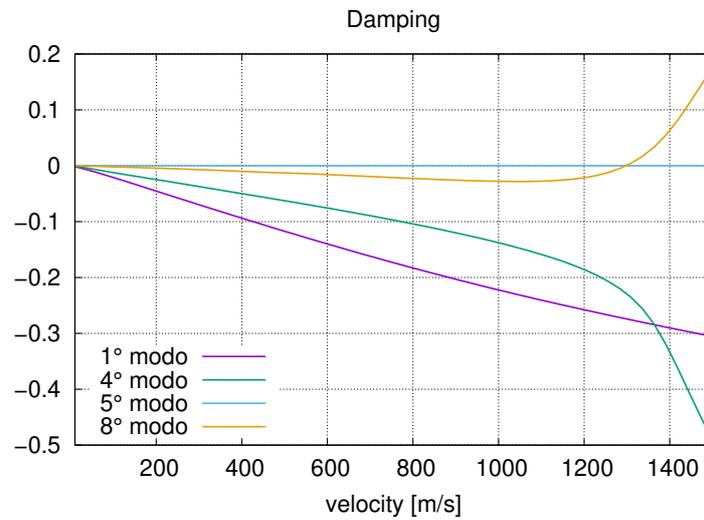


Figura 4.24: Smorzamento di alcuni modi propri del cassone alare nel caso di laminazione a $0^\circ/90^\circ$

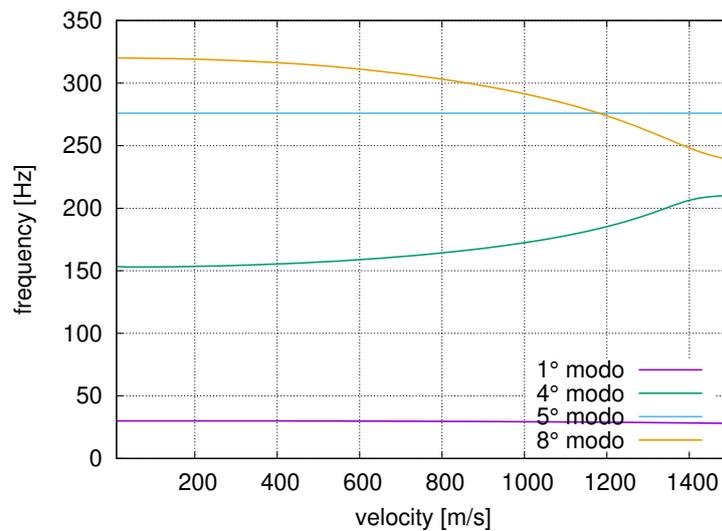


Figura 4.25: Frequenze di alcuni modi propri del cassone alare con laminazione a $0^\circ/90^\circ$

4.10 Analisi di un cassone alare realistico

Nella precedente sezione si è studiato un cassone alare ripreso dalla bibliografia che però si è rivelato essere una struttura decisamente più tozza rispetto alle strutture reali. Anche solo osservando la prima frequenza flessionale per le diverse laminazioni si poteva dedurre che la struttura considerata era troppo rigida rispetto ai cassone alari reali che invece hanno una prima frequenza flessionale tipicamente sotto i 10 Hz . Perciò in questa sezione, si eseguiranno delle analisi aeroelastiche di un cassone alare con alcune caratteristiche simili

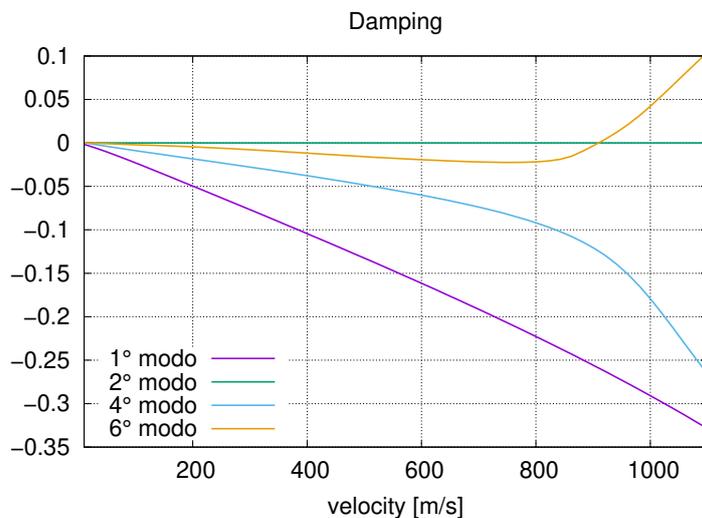


Figura 4.26: Smorzamento di alcuni modi propri del cassone alare nel caso di laminazione VAT case 1

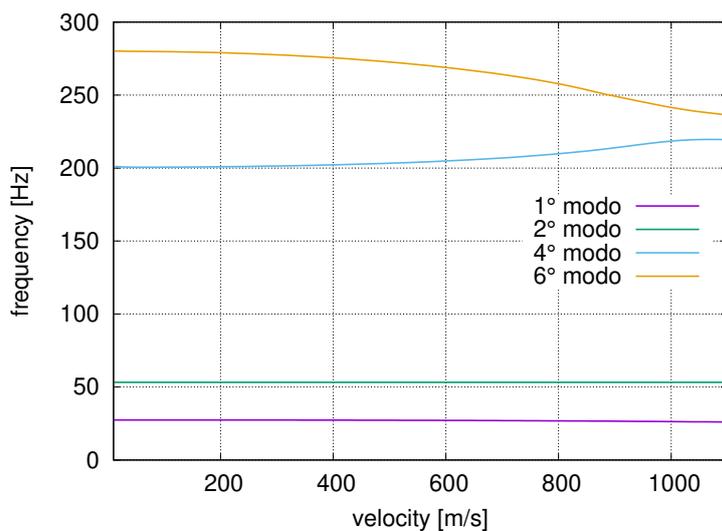


Figura 4.27: Frequenze di alcuni modi propri del cassone alare con laminazione VAT case 1

al precedente, ma con una geometria molto più snella.

Le caratteristiche geometriche del cassone sono le seguenti: lunghezza $L = 6.0 \text{ m}$, altezza della sezione $h = 0.13 \text{ m}$ e larghezza della sezione $a = 0.30 \text{ m}$. La struttura è ovviamente in parete sottile, ma questa volta distinguiamo due spessori diversi: lo spessore di longheroni e anime è $t_l = 2 \text{ mm}$, mentre lo spessore dei pannelli è $t_p = 1 \text{ mm}$. Inoltre, data la maggiore lunghezza del cassone alare, si è reso necessario aggiungere delle centine: vengono previste sei centine, distanziate ognuna 1 m dall'altra. Ogni centina ha spessore $t_c = 0.5 \text{ cm}$ e due

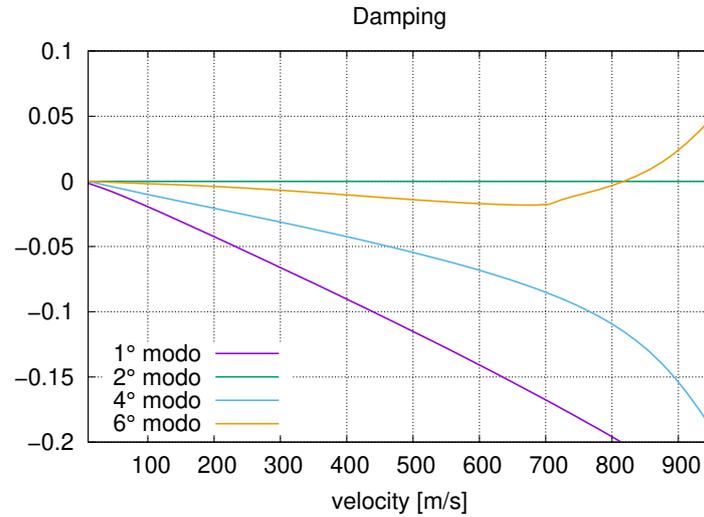


Figura 4.28: Smorzamento di alcuni modi propri del cassone alare nel caso di laminazione VAT case 5

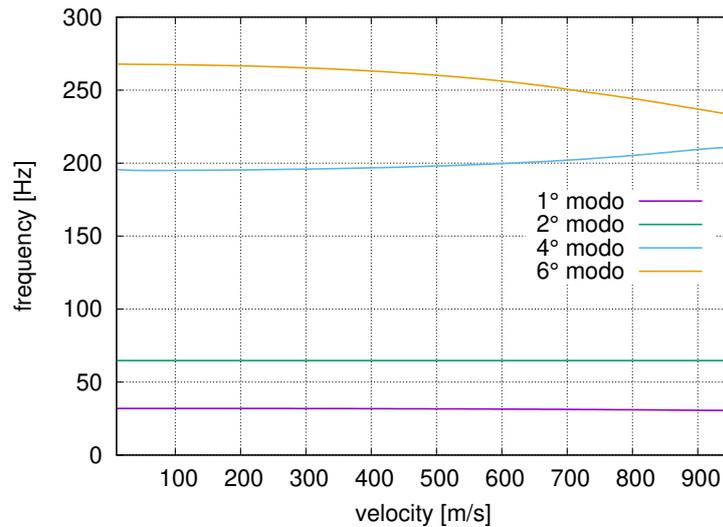


Figura 4.29: Frequenze di alcuni modi propri del cassone alare con laminazione VAT case 5

strati di laminazione in composito con fibre a $+45^\circ / -45^\circ$.

Per avvicinarci ancora di più a un caso reale, viene aumentata la larghezza della pannellatura aerodinamica, questo perché nella realtà i carichi aerodinamici si distribuiscono su tutta la semiala e non solo sul cassone alare. Allora la pannellatura aerodinamica ha le seguenti caratteristiche: 12×48 pannelli, corda alare $c = 0.5 \text{ m}$ e apertura $s = 6.0 \text{ m}$.

Una problematica sorta durante le analisi aeroelastiche del cassone alare è la presenza di modi relativi ai pannelli anche a frequenze non troppo elevate. Questo interferisce sullo

studio globale dell’instabilità aeroelastica, perciò per ovviare al problema si sono posti i punti per l’interpolazione solamente in corrispondenza delle centine.

Infine, va sottolineato che il modello strutturale e quindi la discretizzazione in elementi è mantenuta la stessa della sezione precedente: 12 elementi B3 di uguale lunghezza lungo l’asse y , più un elemento B3 per centina e 28 elementi L9 sulla sezione per la skin.

Per prima cosa viene eseguita l’analisi dinamica per le laminazioni $0^\circ/90^\circ$, $+45^\circ/-45^\circ$ e le due laminazioni VAT presentate nella sezione precedente. I risultati vengono riportati in tabella 4.33. Come prima, dove viene riportata la frequenza senza un’ulteriore indicazione è perché il modo è relativo ai pannelli. Osservando invece, le prime frequenze flessionali, si può dedurre che la laminazione che dà la maggiore rigidità a flessione è la laminazione VAT case 5.

Modo	$0^\circ/90^\circ$		$+45^\circ/-45^\circ$		VAT case 1		VAT case 5	
1	3.17	$1 - B_{yz}$	2.29	$1 - B_{yz}$	2.90	$1 - B_{yz}$	3.37	$1 - B_{yz}$
2	7.01	$1 - B_{xy}$	5.09	$1 - B_{xy}$	6.38	$1 - B_{xy}$	6.90	$1 - B_{xy}$
3	19.31	$2 - B_{yz}$	14.30	$2 - B_{yz}$	18.03	$2 - B_{yz}$	20.68	$2 - B_{yz}$
4	41.20	$2 - B_{xy}$	31.36	$2 - B_{xy}$	38.88	$2 - B_{xy}$	41.32	$2 - B_{xy}$
5	45.92	$1 - T$	39.60	$3 - B_{yz}$	49.42	$3 - B_{yz}$	55.24	$3 - B_{yz}$
6	51.53	$3 - B_{yz}$	74.26	$1 - T$	63.42	$1 - T$	57.24	$1 - T$
7	82.94		75.12	$4 - B_{yz}$	76.03		72.82	
8	84.43		77.48		77.56		74.47	
9	87.22		78.87		80.60		77.53	
10	92.38	$4 - B_{yz}$	81.41		85.59		82.48	
11	91.81		84.92	$3 - B_{xy}$	90.87	$4 - B_{yz}$	89.77	
12	98.85		85.44		93.22		97.33	$4 - B_{yz}$
13	104.75	$3 - B_{xy}$	91.18		102.61	$3 - B_{xy}$	98.99	
14	108.07		98.65		103.15		105.47	$3 - B_{xy}$

Tabella 4.33: Modi e frequenze proprie per il nuovo cassone alare per le diverse laminazioni

Procedendo poi con l’analisi aeroelastica si è osservato che la struttura non va incontro al fenomeno del flutter all’interno del regime subsonico, mentre si verifica solamente la divergenza. In tabella 4.34 osserviamo i risultati per le diverse laminazioni. Si può notare subito che le laminazioni $+45^\circ/-45^\circ$ e VAT case 1 danno le maggiori velocità di divergenza, ma dalle precedenti analisi dinamiche sappiamo che non hanno una buona rigidità a flessione. D’altra parte la laminazione VAT case 5 permette di aumentare la velocità di divergenza dell’ 8 % rispetto alla laminazione $0^\circ/90^\circ$, ottenendo anche ottime caratteristiche a flessione.

Modello: 18 B3, 28 L9				
Laminazione	$0^\circ/90^\circ$	$+45^\circ/-45^\circ$	VAT case 1	VAT case 5
$V_{div} [m/s]$	254.94	287.75	287.50	274.21

Tabella 4.34: Velocità di divergenza per il nuovo cassone alare con le diverse laminazioni

A questo punto si vogliono confrontare i risultati del modello costruito utilizzando le espansioni di Taylor del quarto ordine (TE 4) con i risultati ottenuti con il modello di riferimento con espansioni di Lagrange. Diventa infatti importante verificare l'accuratezza di questi modelli anche per strutture di una certa complessità. In tabella 4.35 troviamo le velocità di divergenza per i due modelli, prendendo di esempio una laminazione unidirezionale e una VAT. Ciò che si nota è che la discrepanza è comunque piccola, nonostante per il TE 4 si utilizzino appena 1/10 dei gradi di libertà rispetto al modello LE. Notiamo però, che per la laminazione VAT l'errore percentuale è maggiore a causa della maggiore complessità della laminazione rispetto al caso $\pm 45^\circ$.

	+45° / - 45°		VAT case 1	
Modello	LE	TE 4	LE	TE 4
DOF	17430	1665	17430	1665
$V_{div} [m/s]$	287.75	291.16	287.50	294.76
errore %	1.18		2.52	

Tabella 4.35: Confronto delle velocità di divergenza tra i modelli LE e TE 4

Per completezza vengono riportati i grafici di smorzamento e frequenza per le diverse laminazioni prese in esame nelle figure 4.30 - 4.31 - 4.32 - 4.33 - 4.34 - 4.35 - 4.36 - 4.37. Nei diversi grafici relativi al damping, si osserva che per tutte e quattro le laminazioni è il primo modo, quello flessionale attorno a x, che va in divergenza.

Osservando i grafici delle frequenze, si nota che nel range di velocità tra i 50 m/s e i 100 m/s a seconda della laminazione, il primo modo inizia ad avere frequenza nulla, che significa che non presenta oscillazioni. A quel punto l'autovalore complesso si "sdoppierà" in due autovalori reali e all'aumentare della velocità, solo uno dei due autovalori diventerà positivo e a quel punto si verificherà la divergenza.

Nelle figure 4.30-4.31 si osserva che il modo 1 - B_{xy} , che consiste in una oscillazione nel piano xy, mantiene uno smorzamento nullo e una frequenza costante alle diverse velocità. Ciò accade perché è un modo che non contribuisce a far variare l'incidenza aeroelastica e quindi anche i carichi aerodinamici non ne sono influenzati.

Nelle figure 4.38 - 4.39 si può osservare come si deforma il cassone alare nel caso di laminazione VAT case 5 per quattro modi propri rilevanti: in ordine viene riportato il I, II, III modo flessionale attorno a x e il I modo torsionale. È interessante notare che il 5° modo, principalmente è un modo flessionale, ma che presenta anche una piccola componente torsionale, questo accade per l'accoppiamento flesso-torsionale introdotto dalla laminazione.

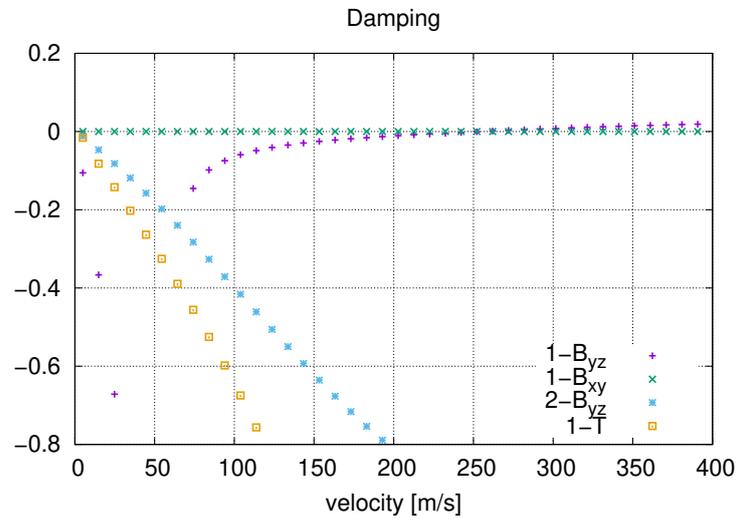


Figura 4.30: Smorzamento di alcuni modi propri del nuovo cassone alare nel caso di laminazione $0^\circ/90^\circ$

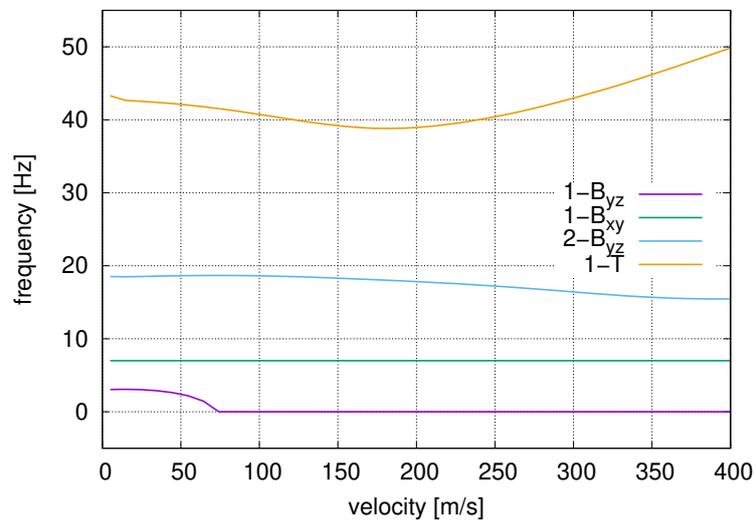


Figura 4.31: Frequenze di alcuni modi propri del nuovo cassone alare con laminazione $0^\circ/90^\circ$

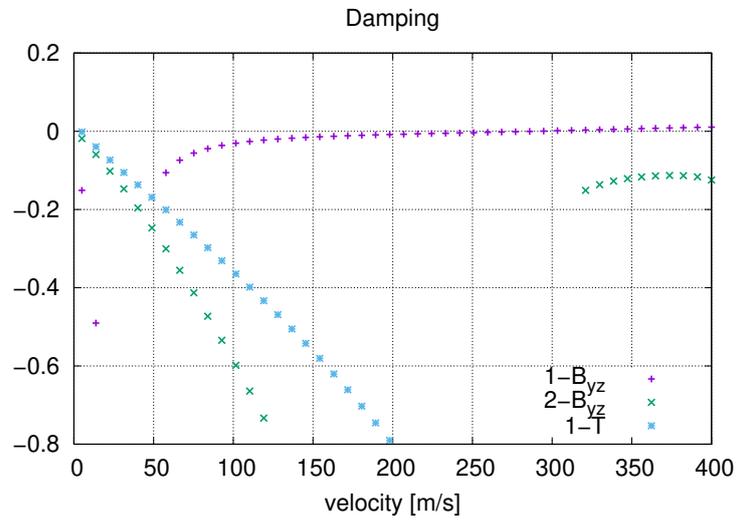


Figura 4.32: Smorzamento di alcuni modi propri del nuovo cassone alare nel caso di laminazione $\pm 45^\circ$

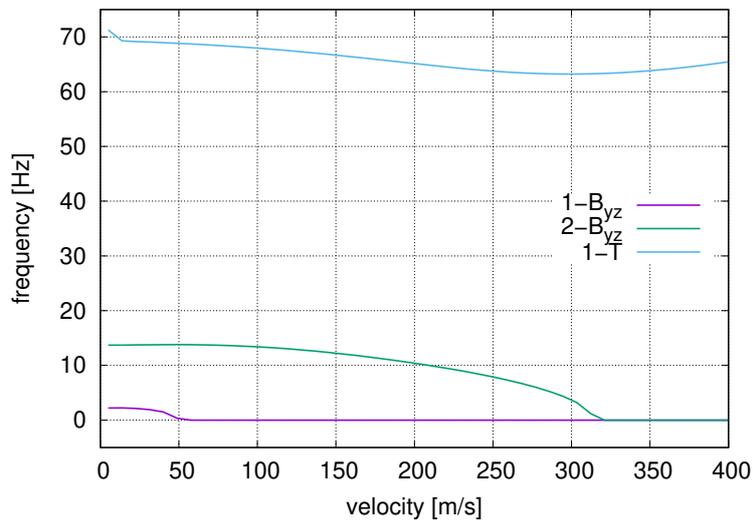


Figura 4.33: Frequenze di alcuni modi propri del nuovo cassone alare con laminazione $\pm 45^\circ$

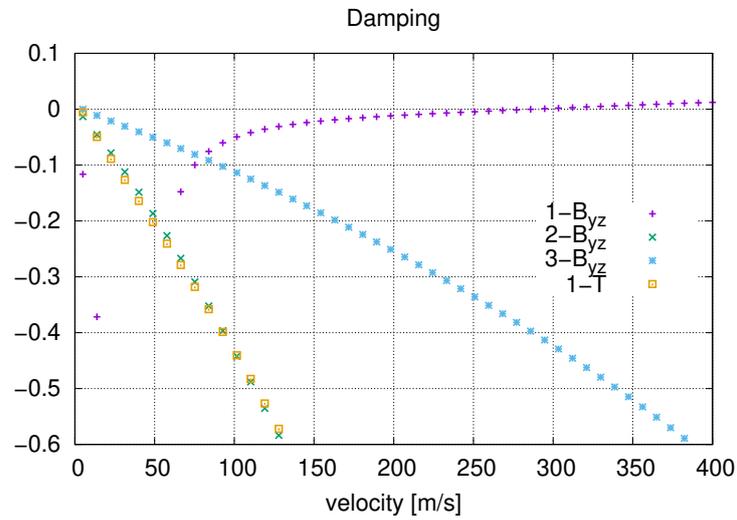


Figura 4.34: Smorzamento di alcuni modi propri del nuovo cassone alare nel caso di laminazione VAT case 1

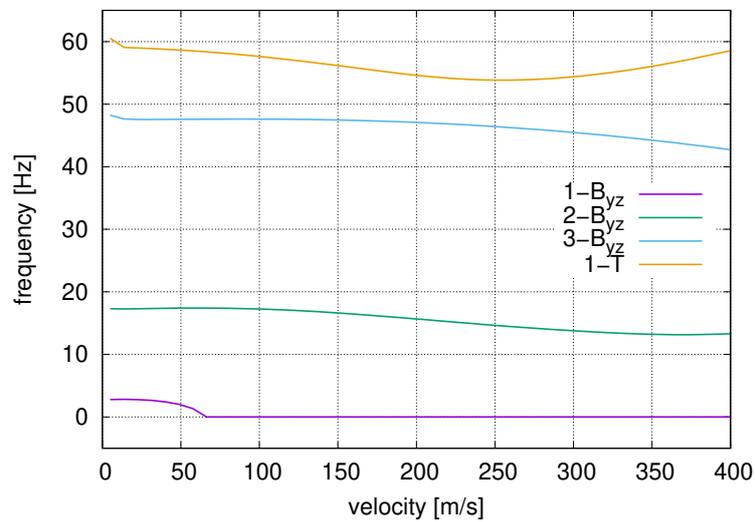


Figura 4.35: Frequenze di alcuni modi propri del nuovo cassone alare con laminazione VAT case 1

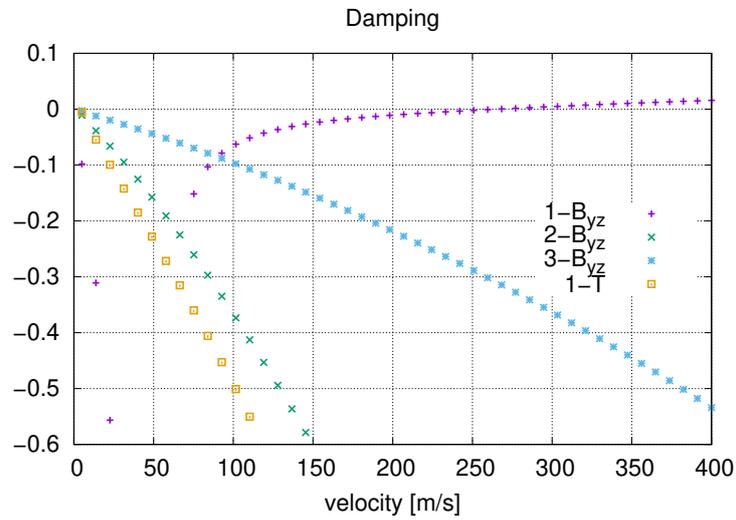


Figura 4.36: Smorzamento di alcuni modi propri del nuovo cassone alare nel caso di laminazione VAT case 5

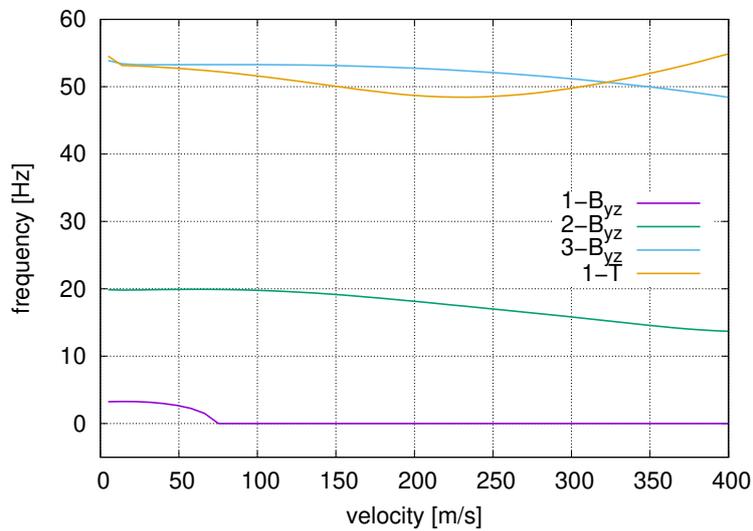
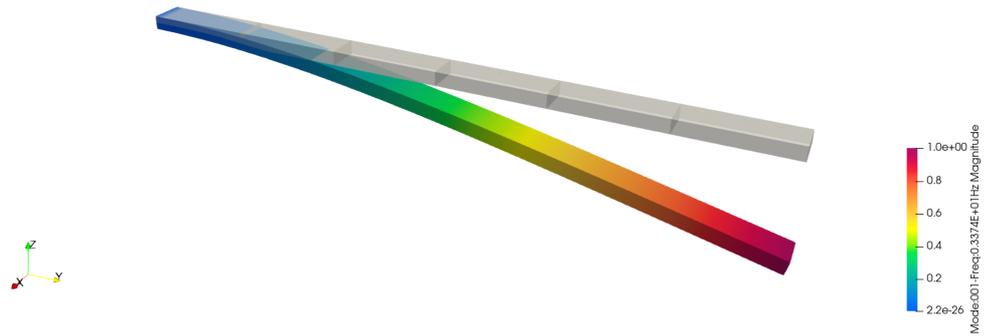
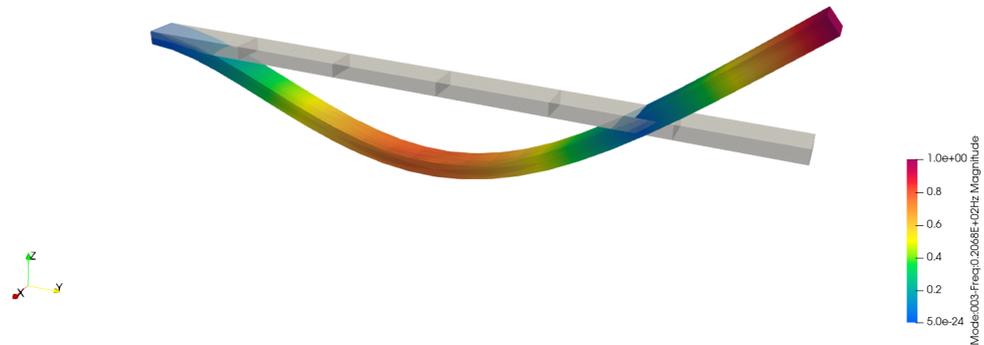


Figura 4.37: Frequenze di alcuni modi propri del nuovo cassone alare con laminazione VAT case 5



(a) Modo 1

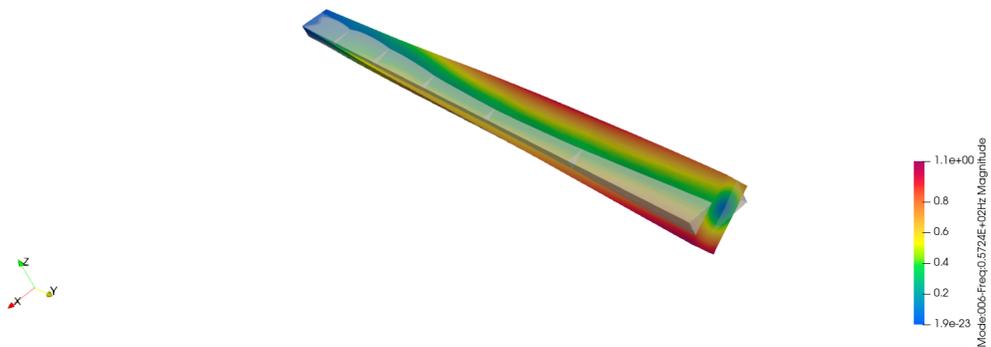


(b) Modo 3

Figura 4.38: Rappresentazione del 1° e 3° modo del nuovo cassone alare con laminazione VAT case 5



(a) Modo 5



(b) Modo 6

Figura 4.39: Rappresentazione del 5° e 6° modo del nuovo cassone alare con laminazione VAT case 5

Conclusioni

Nell'ambito di questo lavoro sono state fatte diverse analisi statiche, dinamiche e aeroelastiche per svariati modelli con crescente complessità con lo scopo di verificare l'accuratezza del modello adottato che sfrutta la Carrera Unified Formulation. La prima sezione consiste in un'analisi statica e dinamica di una semplice trave isotropa, descritta con diversi modelli TE e LE. Si è osservato che si ottengono risultati attendibili con un modello TE almeno del 2° ordine oppure adottando un modello LE con elementi L9.

Si è poi eseguita un'analisi statica di una trave in materiale composito, osservando in particolare come variavano la tensione all'incastro e lo spostamento massimo a seconda del modello adottato. Data la presenza di 8 layer, si è osservato che per ottenere risultati accurati bisogna adottare un modello TE 5 oppure 8 elementi L9 sulla sezione.

Nella sezione seguente è stata eseguita un'analisi dinamica su una trave VAT, con una variazione lineare dell'angolo delle fibre, da 0° a 90°. Questa volta si sono confrontate le prime 15 frequenze proprie di diversi modelli che differivano per numero di elementi B3 lungo l'asse della trave. Dai risultati ottenuti si può concludere che già con 10 elementi B3 si ottiene una buona accuratezza per i modi propri più importanti. Facendo invece variare il modello relativo alla sezione si è potuto concludere che è necessario almeno un TE 3 model per poter stimare con precisione le più importanti frequenze proprie.

Si è poi passato all'analisi dinamica di una piastra VAT a 3 layer così da verificare che anche per un caso più complesso è possibile adottare un modello LE e trovare valori di frequenze proprie aderenti ai modelli 3D agli elementi finiti.

In seguito sono state fatte diverse analisi aeroelastiche per strutture man mano più complesse. Una prima analisi su una semplice piastra isotropa è stata utile per verificare che il software di MUL2 permettesse di trovare la velocità e la frequenza di flutter con buona accuratezza rispetto ai risultati trovati con Femap. Vengono poi eseguite analisi aeroelastiche su un laminato in composito e un laminato VAT con i rispettivi riferimenti bibliografici. Dai risultati ottenuti si può concludere che per il laminato VAT a 8 layer si possono ottenere dei buoni risultati in termini di frequenze proprie e velocità di flutter quando si utilizza un modello di Lagrange con 32 elementi L9 oppure si utilizza un modello TE 4.

Infine vengono eseguite alcune analisi aeroelastiche su un cassone alare per diverse laminazioni, sia con fibre rettilinee che con angolo di laminazione variabile. Le analisi sono state eseguite prima per un cassone alare ripreso dalla bibliografia, in modo da avere un riferimento per le frequenze proprie della struttura, mentre in un secondo momento è stato modificato il cassone alare per renderlo più snello e quindi più vicino alle applicazioni reali.

Dai risultati ottenuti si è osservato che l'utilizzo della laminazione VAT case 5 permette

di ottenere una buona rigidezza della struttura sia a flessione che a torsione, che è un significativo vantaggio rispetto ai laminati con fibre rettilinee. Queste buone prestazioni strutturali sono anche accompagnate da un aumento della velocità di divergenza rispetto alla laminazione $0^\circ/90^\circ$. In realtà la laminazione $\pm 45^\circ$ è quella che permette di avere la velocità di divergenza più alta, ma ha il grosso svantaggio di avere una bassa rigidezza flessionale. Per questo diventa conveniente adottare un'opportuna laminazione VAT: essa permette di ottenere buone prestazioni strutturali senza penalizzare nessun aspetto.

Il lavoro di questa tesi potrebbe essere portato avanti facendo delle analisi aeroelastiche di semiali reali in laminato VAT con un certo profilo NACA, per studiare in quel caso specifico, l'influenza della laminazione sulla velocità di flutter e sulla velocità di divergenza.

Inoltre, per un'ulteriore verifica del modello strutturale basato sulla CUF si potrebbero eseguire delle analisi aeroelastiche di un cassone alare sia con Femap che con il software di MUL2 così da studiare lo scostamento nella velocità di flutter e di divergenza anche per le strutture più complesse.

Bibliografia

- Bisplinghoff, R.L., H. Ashley e R.L. Halfman (2013). *Aeroelasticity*. Dover Books on Aeronautical Engineering. Dover Publications. ISBN: 9780486132433. URL: <https://books.google.it/books?id=D1G14IWHjyUC>.
- Blair, Max (1992). *A Compilation of the Mathematics Leading to the Doublet Lattice Method*. eng.
- Carrera, E., E. Zappino e G. Li (2018). «Finite element models with node-dependent kinematics for the analysis of composite beam structures». In: *Composites Part B: Engineering* 132, pp. 35–48. ISSN: 1359-8368. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.08.008>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836817304985>.
- Carrera, Erasmo (2014). *Finite Element Analysis of Structures Through Unified Formulation*. eng. Chichester: John Wiley Sons, Incorporated. ISBN: 1-119-94121-0.
- HARDER, ROBERT L. e ROBERT N. DESMARAIS (1972). «Interpolation using surface splines.» In: *Journal of Aircraft* 9.2, pp. 189–191. DOI: [10.2514/3.44330](https://doi.org/10.2514/3.44330). eprint: <https://doi.org/10.2514/3.44330>. URL: <https://doi.org/10.2514/3.44330>.
- HASSIG, HERMANN J. (1971). «An approximate true damping solution of the flutter equation by determinant iteration.» In: *Journal of Aircraft* 8.11, pp. 885–889. DOI: [10.2514/3.44311](https://doi.org/10.2514/3.44311). eprint: <https://doi.org/10.2514/3.44311>. URL: <https://doi.org/10.2514/3.44311>.
- Hodges, Dewey H. e G. Alvin Pierce (2011). *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. 2^a ed. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press. DOI: [10.1017/CB09780511997112](https://doi.org/10.1017/CB09780511997112).
- Jutte, Christine V e Bret K Stanford (2014). *Aeroelastic tailoring of transport aircraft wings: state-of-the-art and potential enabling technologies*. National Aeronautics e Space Administration, Langley Research Center.
- Kim, Byung Chul, Kevin Potter e Paul M. Weaver (2012). «Continuous tow shearing for manufacturing variable angle tow composites». In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 43.8, pp. 1347–1356. ISSN: 1359-835X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.02.024>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X12000929>.
- Petrolo, Marco (2011). *Advanced aeroelastic models for the analysis of lifting surfaces made of composite materials / Marco Petrolo ; rel. Erasmo Carrera*. eng. Torino.
- (2012). «Advanced 1D structural models for flutter analysis of lifting surfaces». In: *International Journal of Aeronautical and Space Sciences* 13.2, pp. 199–209.

- Rodden, William P., Paul F. Taylor e Samuel C. McIntosh (1998). «Further Refinement of the Subsonic Doublet-Lattice Method». In: *Journal of Aircraft* 35.5, pp. 720–727. DOI: [10.2514/2.2382](https://doi.org/10.2514/2.2382). eprint: <https://doi.org/10.2514/2.2382>. URL: <https://doi.org/10.2514/2.2382>.
- Stanford, Bret K., Christine V. Jutte e K. Chauncey Wu (2014). «Aeroelastic benefits of tow steering for composite plates». In: *Composite Structures* 118, pp. 416–422. ISSN: 0263-8223. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.08.007>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822314003973>.
- Stodieck, Olivia et al. (2013). «Improved aeroelastic tailoring using tow-steered composites». eng. In: *Composite structures* 106, pp. 703–715. ISSN: 0263-8223.
- Viglietti, A, E Zappino e E Carrera (2019). «Analysis of variable angle tow composites structures using variable kinematic models». eng. In: *Composites. Part B, Engineering* 171, pp. 272–283. ISSN: 1359-8368.
- (2019). «Free vibration analysis of variable angle-tow composite wing structures». In: *Aerospace Science and Technology* 92, pp. 114–125. ISSN: 1270-9638. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.05.068>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1270963819304730>.