

POLITECNICO DI TORINO

COLLEGIO DI INGEGNERIA CIVILE



CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

STATO LIMITE ULTIMO PER FLESSIONE E PRESSOFLESSIONE: EFFETTO DEL CONFINAMENTO

Relatore

Prof. Ing. Marano Giuseppe Carlo

Candidato

Pellegrino Francesca

29 MARZO 2022

a Daniela

Ringraziamenti

Prima di proseguire con la mia tesi, vorrei dedicare qualche riga a tutte le persone che mi sono state vicine in questo lungo percorso, a tratti burrascoso, grazie alle quali le difficoltà incontrate non sono sembrate così invalicabili.

Un ringraziamento va al mio relatore Marano, per avermi supportata in questi mesi, fornendomi il materiale utile alla stesura dell'elaborato, e con il quale ho potuto stringere un rapporto professionale fin dal terzo anno di Ingegneria, anno in cui ho conseguito la Laurea Triennale.

A mamma e papà, le mie stelle fisse, che hanno sempre creduto in me e che mi hanno permesso di intraprendere questo percorso, spronandomi a dare il massimo in ogni occasione e a non mollare mai, neanche nei momenti più difficili. Grazie per tutto il sostegno e per avermi reso la persona che sono.

A mia sorella Angelica e a Niccolò, ormai parte della famiglia, presenti nei momenti importanti e sempre pronti a farmi svagare nei periodi più faticosi.

A Serena, in primis perché le avevo promesso dei ringraziamenti personali, in secundis per l'amica incredibile che è, con la quale ho già in progetto una magnifica verandina in cui ripenseremo ad ogni singolo attimo trascorso insieme, ricordandole costantemente che grazie a lei ho imparato a prendere la vita sempre con un sorriso.

Ad Annalisa, compagna di avventure e di merende, nonché amica speciale, che non rifiuta mai una gita fuori porta o una pizza improvvisata. Grazie per ogni momento e per tutti i preziosi consigli che hai sempre saputo darmi.

Ad Eleonora, presente fin dal primo giorno di questa grande avventura universitaria, la compagna migliore con cui ho potuto condividere risate, pianti, scleri, ma soprattutto straordinari momenti. Mi hai dato la forza sempre, anche quando sembrava che non ce ne fosse più.

A Michela, l'amica di una vita, con cui sono cresciuta e con cui il tempo per una chiacchierata non basta mai.

Ad Andrea, che mi ha fatto ricredere su quanto dicono, che succede sempre qualcosa di inaspettatamente bello per chi ha la pazienza di aspettare.

A Paolo, compagno di corso e amico speciale che, con il suo amore per l'inglese, ha fatto in modo che non lo odiassi così tanto, senza di te sicuramente sarei ancora ferma alla prima videolezione di "Bridges", consapevole di non riuscire a seguire più di 5 minuti senza distrarmi e chiudere tutto. Grazie per il tuo infinito sostegno e per avermi ricordato tutte le scadenze, senza di te seriamente non sarei qui.

A Carlo e Carlo, che hanno reso i miei ultimi soggiorni torinesi un po' meno malinconici e che ci sono sempre stati, specialmente nel momento del bisogno.

Alla mia coiquilina Eleonora, con cui ho condiviso momenti e tramonti meravigliosi, e ai miei quasi-coinquilini Lorenzo e Alberto che, pur sapendo a cosa sarebbero andati incontro, non hanno avuto timore ad accettare di condividere casa con me (ringraziate il Covid-19).

A Lorenzo, con cui, oltre alle risate e agli innumerevoli dubbi sui corsi universitari, ho potuto condividere la mia passione per i gattini coccolosi e che, nonostante tutto, c'è sempre stato.

Ai miei amici, ad Eugenio, Alina, Liliane, Davide S., Stefano, Davide C., Matteo, Daniele, Gabriele, Oscar, Francesco, Alberto, Alessio, Alessandro, Giulia, Federico F., Federico M., Fabiana, Aurora, Ilaria F. e Ilaria S., sempre presenti ad ogni mio ritorno a casa.

A tutti gli amici conosciuti in questi 5 lunghi anni di vita torinese, a Gabriele, Martina, Teresa, Carlo V., Luigi, Francesco, Luca, Marco, Lorena, Lorenzo P., Filippo, Antonello, Costanza, Fabrizio e Lido, e agli infiniti amici dell'aula studio, salentini e non, che, oltre a rendere le immense giornate di studio meno noiose, mi hanno fatto capire bene cosa vuol dire "vivere una vita universitaria".

Grazie a tutti per esserci sempre stati.



Abstract

Negli ultimi anni si è diffusa progressivamente la necessità di progettare strutture capaci di far fronte ad eventi sismici, accettando il rischio di un possibile danneggiamento, ma con la consapevolezza che siano in grado di sviluppare grandi deformazioni anelastiche strettamente correlate a notevoli dissipazioni di energia.

I criteri della progettazione civile odierna si basano, quindi, sul garantire una resistenza strutturale adeguata all'edificio e, al contempo, un'opportuna duttilità. La duttilità è alla base della dissipazione energetica e viene conseguita mediante tecniche appropriate, tra cui quella del confinamento.

Con il presente elaborato si vuole mettere in evidenza come il confinamento del calcestruzzo comporti degli effetti benefici in questi termini: produce un aumento di duttilità e un contemporaneo incremento di resistenza.

La prima parte sarà dedicata alla descrizione generale del calcestruzzo armato, quindi dei materiali costituenti e dei legami costitutivi analitici, fino ad arrivare all'analisi di elementi soggetti a sollecitazione di flessione e pressoflessione.

La parte successiva sarà destinata agli effetti del confinamento e, inoltre, verrà delineata cronologicamente l'evoluzione dei vari modelli comportamentali del calcestruzzo confinato, ideati da numerosi ricercatori a partire dagli inizi del XX secolo fino al giorno d'oggi.

Infine, sarà sviluppato un programma di calcolo in grado di valutare lo Stato Limite Ultimo per flessione e pressoflessione di elementi in calcestruzzo armato eventualmente confinati, in modo da sottolineare e quantificare gli effetti del confinamento. La valutazione di tali effetti sarà realizzata mediante un confronto diretto tra i risultati grafici ottenuti attraverso la creazione del codice informatico. Nel caso di confinamento, inoltre, sarà proposto un ulteriore modello costitutivo del calcestruzzo, opportunamente analizzato, che è in grado di descriverne il comportamento in maniera continuativa.

Indice

1	Introduzione	12
1.1	Stati Limite	14
1.1.1	Stati Limite Ultimi	15
1.1.2	Stati Limite di Esercizio	15
1.2	Progettazione sismica	17
1.2.1	Performance-based Design	17
1.2.2	Gerarchia delle Resistenze	18
2	Calcestruzzo armato	19
2.1	Calcestruzzo	20
2.1.1	Componenti del calcestruzzo	20
2.1.2	Caratteristiche del calcestruzzo	26
2.2	Acciaio	35
2.3	Legame costitutivo	38
2.3.1	Curvatura	39
2.3.2	Tipologie di rottura	40
2.3.3	Comportamento a rottura di una trave inflessa in c.a.	41
2.3.4	Ipotesi di base	44
2.4	Modelli costitutivi analitici	46
2.4.1	Calcestruzzo	46
2.4.2	Acciaio	49
2.5	Analisi di una trave in CA	51
2.5.1	Flessione Retta	54
2.5.2	Flessione Retta Composta	58
3	Calcestruzzo armato confinato	63
3.1	Effetto del confinamento	63
3.2	Duttilità	68
3.2.1	Livelli di duttilità	69
3.2.2	Verifiche di duttilità	72
3.3	Analisi storica dei modelli costitutivi	77
3.3.1	Hognestad (1951)	81
3.3.2	Chan (1955)	82
3.3.3	Roy e Sozen (1964)	82
3.3.4	Bertero e Felippa (1964)	83
3.3.5	Soliman e Yu (1968)	84
3.3.6	Kent e Park (1971)	86
3.3.7	Sargin (1971)	89
3.3.8	Vallenas, Bertero e Popov (1977)	89

3.3.9	Park, Priestely e Gill (1979)	92
3.3.10	Sheikh e Uzumeri (1982)	93
3.3.11	Scott e Park (1982)	96
3.3.12	Mander e Priestley (1984)	96
3.3.13	Yong, Nour e Nawy (1988)	104
3.3.14	Saatcioglu e Razvi (1992)	106
3.4	Modello costitutivo proposto	114
3.4.1	Codice del programma	118
3.5	Sezione rettangolare	122
3.5.1	Analisi adimensionale	124
3.5.2	Equilibrio alla traslazione orizzontale	128
3.5.3	Equilibrio alla rotazione	133
4	Programma	135
4.1	Calcestruzzo armato	136
4.1.1	Diagramma di flusso	136
4.1.2	Fase di lettura	137
4.1.3	Fase di analisi e computazione numerica	138
4.1.4	Fase di stampa	139
4.1.5	Codice del programma	140
4.1.6	Risultati grafici	144
4.2	Calcestruzzo armato confinato	149
4.2.1	Diagramma di flusso	149
4.2.2	Fase di lettura	150
4.2.3	Fase di analisi e computazione numerica	151
4.2.4	Fase di stampa	152
4.2.5	Codice del programma	153
4.2.6	Risultati grafici	158
4.3	Calcestruzzo armato confinato: modello proposto	167
4.3.1	Diagramma di flusso	167
4.3.2	Fase di lettura	168
4.3.3	Fase di analisi e computazione numerica	169
4.3.4	Fase di stampa	170
4.3.5	Codice del programma	171
5	Conclusioni	173
6	Bibliografia	177
7	Sitografia	180

Elenco delle figure

1	Distribuzione teorica di Füller	23
2	Variazione della resistenza del calcestruzzo in funzione del rapporto a/c	24
3	Slump test	26
4	Classe di esposizione in funzione delle condizioni ambientali	27
5	Classi di resistenza del calcestruzzo	28
6	Variazione della risposta del calcestruzzo in funzione della resistenza	28
7	Controlli di accettazione su provini standard di calcestruzzo	29
8	Variazione della percentuale di ritiro in funzione del tempo	33
9	Variazione della deformazione in funzione del tempo di applicazione del carico	34
10	Diagramma tensione-deformazione di una barra di acciaio in trazione	37
11	Trave inflessa: valutazione della curvatura	39
12	Diagramma momento-curvatura di una trave in c.a. inflessa	41
13	Punto A - Prima della fessurazione	42
14	Punto C - Dopo la fessurazione, prima della plasticizzazione	43
15	Punto R - Rottura	44
16	Legame “parabola-rettangolo”	47
17	Legame “triangolo-rettangolo”	48
18	Legame “stress-block”	48
19	Legami costitutivi dell'acciaio	49
20	Requisiti acciaio B450C	50
21	Campi di rottura: ipotesi di acciaio elastico perfettamente plastico a duttilità illimitata	53
22	Risultanti delle tensioni interne di una trave inflessa doppiamente armata	54
23	Flessione semplice retta: esempio di abaco per sezioni rettangolari in calcestruzzo, doppiamente armate e con classe di resistenza minore di C50/60	56
24	Valori numerici di ω e m_{rd} al variare di μ e ξ (esempio)	57
25	Risultanti delle tensioni interne di una trave doppiamente armata soggetta a pressoflessione	58
26	Domini di interazione per sezioni rettangolari in calcestruzzo, dop- piamente armate e con classe di resistenza minore di C50/60	60
27	Dominio di interazione per un valore di ω fissato	61
28	Dominio di interazione semplificato	62
29	Traslazione del cerchio di Mohr per effetto del confinamento	64
30	Esempi di confinamento	64
31	Modelli $\sigma - \epsilon$ per il calcestruzzo confinato	65

32	Livelli di confinamento	67
33	Verifiche di duttilità (<i>NTC18</i>): diagramma di flusso	72
34	Momento-curvatura: fattore di duttilità di curvatura	74
35	Modello costitutivo per calcestruzzo confinato e non confinato: tipo parabola-rettangolo	75
36	Modello costitutivo per calcestruzzo confinato e non confinato: EN 1998-2, Annex E	75
37	Modelli sviluppati per il calcestruzzo confinato	79
38	Modelli sviluppati per il calcestruzzo confinato	80
39	Modello di Hognestad (1951)	81
40	Relazione sforzo-deformazione: effetto della spaziatura	82
41	Modello di Roy e Sozen (1964)	83
42	Modello di Soliman e Yu (1968)	84
43	Modello di Kent e Park (1971)	86
44	Modello di Kent e Park: influenza dell'armatura trasversale	87
45	Confronto tra le relazioni analitiche e i risultati sperimentali	89
46	Modello di Vallenias, Bertero e Popov (1977)	90
47	Modello di Park, Priestely e Gill (1979)	92
48	Modello di Sheikh e Uzumeri (1982)	93
49	Modello di Scott e Park (1982) - Modello modificato di Kent e Park	96
50	Mander e Priestley (1984)	97
51	Nucleo di calcestruzzo effettivamente confinato da staffe circolari	99
52	Nucleo di calcestruzzo effettivamente confinato da staffe rettangolari	99
53	Equilibrio delle forze alla traslazione orizzontale	100
54	Equilibrio delle forze alla traslazione orizzontale: (a) nella direzione x, (b) nella direzione y	103
55	Determinazione di f'_{cc} (staffe rettangolari)	103
56	Modello di Yong, Nour e Nawy (1988)	104
57	Forze agenti su una sezione circolare	107
58	Distribuzione della pressione laterale (sezione quadrata)	108
59	Distribuzione della pressione laterale con diversa configurazione di armatura	108
60	Distribuzione della pressione laterale (sezione rettangolare)	108
61	Distribuzione della pressione laterale sull'elemento tridimensionale	109
62	Distribuzione della pressione laterale effettiva, equivalente e media	110
63	Modello di Saatcioglu e Razvi (1992)	111
64	Tabella di riepilogo dei parametri influenti	113
65	Legame costitutivo del calcestruzzo confinato	115
66	Legame costitutivo proposto per il calcestruzzo confinato al variare di ψ_{σ}	118

67	Flow-chart: definizione della tensione del modello costitutivo proposto	119
68	Legame tensione-deformazione (a)	121
69	Legame tensione-deformazione (b)	121
70	Legame tensione-deformazione (c)	122
71	Legame tensione-deformazione (d)	122
72	Flessione semplice - Sezione rettangolare di cemento armato confinato	123
73	Rottura bilanciata: diagramma delle deformazioni	125
74	Dominio ξ	126
75	Diagramma delle forze agenti in una sezione soggetta a pressoflessione	128
76	Flow-chart: verifica allo SLU per flessione semplice e pressoflessione (assenza di confinamento)	136
77	Flessione semplice: combinazione 1 (caso non confinato)	144
78	Flessione semplice: combinazione 2 (caso non confinato)	145
79	Flessione semplice: combinazione 3 (caso non confinato)	145
80	Pressoflessione: combinazione 1 (caso non confinato)	146
81	Pressoflessione: combinazione 2 (caso non confinato)	147
82	Pressoflessione: combinazione 1 (caso non confinato) adimensionale	147
83	Pressoflessione: combinazione 2 (caso non confinato) adimensionale	148
84	Flow-chart: verifica allo SLU per flessione semplice e pressoflessione (presenza di confinamento)	149
85	Flessione semplice: combinazione 1 (caso confinato)	159
86	Flessione semplice: combinazione 2 (caso confinato)	159
87	Flessione semplice: combinazione 3 (caso confinato)	160
88	Flessione semplice: combinazione 4 (caso confinato)	160
89	Pressoflessione: combinazione 1 (caso confinato)	162
90	Pressoflessione: combinazione 2 (caso confinato)	162
91	Pressoflessione: combinazione 3 (caso confinato)	163
92	Pressoflessione: combinazione 4 (caso confinato)	163
93	Pressoflessione: combinazione 1 (caso confinato) adimensionale	164
94	Pressoflessione: combinazione 2 (caso confinato) adimensionale	164
95	Pressoflessione: combinazione 3 (caso confinato) adimensionale	165
96	Pressoflessione: combinazione 4 (caso confinato) adimensionale	165
97	Flow-chart: verifica allo SLU per flessione semplice e pressoflessione (presenza di confinamento - modello proposto)	167

1 Introduzione

Lo scopo dell'elaborato è studiare gli effetti indotti dalla presenza del confinamento negli elementi strutturali, come travi e pilastri, e valutare l'influenza che esso può avere sulla verifica agli Stati Limite Ultimi per flessione semplice e pressoflessione.

A partire dal XX secolo, furono eseguiti molteplici studi sul calcestruzzo armato confinato che permisero di dimostrare come il confinamento producesse effetti benefici sugli elementi strutturali in termini di resistenza e duttilità: in presenza di armatura di confinamento si assiste, infatti, ad un incremento di entrambi i valori.

Per quanto riguarda la resistenza, grazie alla tecnica del confinamento l'elemento strutturale sarà in grado di far fronte ad azioni sollecitanti di entità superiore a quelle tollerabili dall'elemento privo di confinamento, poiché si manifesterà un incremento della capacità resistente. Questo risultato viene conseguito attraverso l'utilizzo di opportune armature di contenimento nelle quali, a seguito dell'applicazione di una forza di compressione monoassiale, si svilupperanno sforzi di trazione che provocheranno la conseguente nascita di uno stato di compressione triassiale sul nucleo di calcestruzzo.

Anche la duttilità subisce un incremento dovuto al confinamento poiché è strettamente correlata alla resistenza dell'elemento. Nel capitolo relativo alle verifiche di duttilità verrà spiegato come questa sia legata alla curvatura della sezione e, quindi, al momento resistente. Essendo alla base della dissipazione energetica, la duttilità è uno dei parametri principali della progettazione odierna, che si basa sul concetto di creare strutture capaci di far fronte ad eventi sismici, accettando il rischio di un eventuale danneggiamento, ma con la consapevolezza che sia possibile dissipare una grande quantità di energia e sviluppare grandi deformazioni anelastiche. Per questo motivo verrà riposta molta attenzione sul concetto di duttilità e su tutto ciò che ne consegue.

Per quanto riguarda la stesura dell'elaborato, nella prima parte verrà descritto il calcestruzzo armato in generale, riponendo attenzione ai materiali da cui è composto e ai legami costitutivi analitici proposti dalla normativa per la verifica agli Stati Limite Ultimi, fino ad arrivare all'analisi di elementi soggetti a sollecitazione di flessione e pressoflessione.

La parte successiva sarà dedicata agli effetti del confinamento e ad un'analisi cronologica dell'evoluzione dei vari modelli comportamentali del calcestruzzo con-

finato, ideati da numerosi ricercatori a partire dagli inizi del XX secolo fino al giorno d'oggi. Inoltre, verrà proposto un nuovo modello continuo a tre parametri concepito per descrivere il comportamento del calcestruzzo in caso di confinamento.

Infine, sarà sviluppato un programma di calcolo in grado di eseguire la verifica allo Stato Limite Ultimo per flessione e pressoflessione di elementi in calcestruzzo armato eventualmente confinati, in modo da sottolineare e quantificare gli effetti del confinamento.

Per una corretta analisi, la premessa fondamentale da fare è che i presupposti e i metodi utilizzati siano conformi a quanto riportato nelle “Norme Tecniche per le Costruzioni” (NTC 2018): queste forniscono i criteri generali di sicurezza, precisano le operazioni da seguire e impiegare nel progetto, definiscono le caratteristiche dei materiali e dei prodotti e, più in generale, si occupano degli aspetti legati alla sicurezza delle opere ingegneristiche.

Le “Norme Tecniche per le Costruzioni” sono emesse ai sensi delle leggi 5 novembre 1971, n. 1086, e 2 febbraio 1974, n. 64, così come riunite nel Testo Unico per l'Edilizia di cui al DPR 6 giugno 2001, n. 380, e dell'art. 5 del DL 28 maggio 2004, n. 136, convertito in legge, con modificazioni, dall'art. 1 della legge 27 luglio 2004, n. 186 e ss. mm. ii.

1.1 Stati Limite

La sicurezza e le prestazioni di un'opera strutturale devono essere valutate in base al raggiungimento dello stato limite che può verificarsi durante la sua vita nominale. Lo stato limite è definito come il periodo di tempo durante il quale la struttura, o parte di essa, può essere adoperata per lo scopo a cui è stata destinata, a condizione che venga soggetta a manutenzione ordinaria.

Con il termine “stato limite” si intende la condizione oltre la quale l'opera non risponde più alle esigenze per cui è stata concepita; le “Norme Tecniche per le Costruzioni” distinguono questo in due categorie: lo *stato limite ultimo* (SLU), che definisce la situazione estrema, e lo *stato limite di esercizio* (SLE), che si riferisce alle normali condizioni d'uso.

Inoltre, le *NTC18* stabiliscono che la struttura debba soddisfare i seguenti requisiti:

- *sicurezza nei confronti degli stati limite ultimi*: capacità di evitare crolli, perdite di equilibrio e dissesti gravi, totali o parziali, che possano compromettere l'incolumità delle persone o comportare la perdita di beni oppure provocare gravi danni ambientali e sociali o mettere fuori servizio l'opera;
- *sicurezza nei confronti degli stati limite di esercizio*: capacità di garantire le prestazioni previste per le condizioni di esercizio;
- *sicurezza antincendio*;
- *durabilità*: capacità della costruzione di rimanere in servizio per un periodo di tempo almeno pari alla sua vita utile, con un appropriato livello di manutenzione;
- *robustezza*: capacità di far fronte ad eventi eccezionali o a conseguenze di errori umani senza danni ad essi sproporzionati.

1.1.1 Stati Limite Ultimi

Gli stati limite ultimi rappresentano le situazioni più pericolose nei confronti della struttura e della sicurezza delle persone. Sono solitamente causati da eventi eccezionali di rilevante entità, come incendi, terremoti, esplosioni, fatica per azioni ripetute, effetti del tempo, i quali, a loro volta, possono originare effetti come:

- perdita di equilibrio della struttura o di una sua parte, considerati come corpi rigidi;
- spostamenti o deformazioni eccessive;
- raggiungimento della massima capacità di parti di strutture, collegamenti e fondazioni;
- raggiungimento della massima capacità della struttura nel suo insieme;
- raggiungimento di una condizione di cinematismo irreversibile;
- raggiungimento di meccanismi di collasso nei terreni;
- rottura di membrature e collegamenti per fatica;
- rottura di membrature e collegamenti per altri effetti dipendenti dal tempo;
- instabilità di parti della struttura o del suo insieme.

Il superamento degli stati limite ultimi ha un carattere irreversibile e viene definito “collasso”. In realtà bisogna specificare che, sebbene la struttura diventi inutilizzabile, è sempre necessario garantire la salvaguardia delle vite umane: si parla, quindi, di “collasso senza crollo”.

1.1.2 Stati Limite di Esercizio

Gli stati limite di esercizio rappresentano, invece, le condizioni oltre le quali la struttura non è più in grado di assolvere le funzioni iniziali definite da progetto. Questi stati limite si possono identificare con:

- deformazioni eccessive;
- fessurazioni eccessive o premature;
- degrado o corrosione;

- spostamenti eccessivi senza perdita di equilibrio;
- vibrazioni eccessive.

In questo caso, gli stati limite possono avere un carattere reversibile, nel caso in cui fosse possibile eliminare gli elementi danneggiati senza pregiudicare l'intera costruzione, o irreversibile, quando i danni sono permanenti e non possono essere eliminati senza compromettere la stabilità globale della struttura.

1.2 Progettazione sismica

In ambito sismico, le *NTC18* introducono due principi fondamentali che rivoluzionano notevolmente il modo di progettare. Questi sono:

- “Performance-based Design”, che presuppone di progettare la struttura in relazione alle prestazioni che si vogliono ottenere dell’opera;
- “Capacity Design” (o *Gerarchia delle Resistenze*), che prevede di stabilire in che modo la struttura raggiunge uno stato limite, cioè definire il percorso di formazione delle cerniere plastiche che portano al collasso globale della struttura, una volta raggiunto il valore di capacità portante.

Solitamente, le strutture intelaiate sono quelle che si prestano meglio a beneficiare di questo criterio e, in tal caso, il principio si traduce con il concetto di trave debole-pilastro forte: si garantiscono delle risorse maggiori ai pilastri in modo che entrino in campo plastico solo dopo aver sfruttato tutte le resistenze residue degli altri elementi, in particolar modo delle travi.

In tal modo, si elimina il concetto di progettare considerando il confronto tra azione e resistenza. Il parametro principale diventa lo spostamento, in quanto ragionare in termini di resistenza comporterebbe la creazione di strutture con dimensioni considerevoli per poter mantenere la risposta in campo elastico. Inoltre, l’azione sismica è di tipo indiretto, cioè non impone delle forze alla struttura, bensì degli spostamenti alla base.

1.2.1 Performance-based Design

Come è già stato detto, con il “Performance-based Design” vengono stabiliti gli stati limite in termini di prestazione che la struttura, nella sua interezza, deve soddisfare. Per la progettazione sismica, le *NTC18* identificano quattro stati limite: due di esercizio e due ultimi.

Gli stati limite di esercizio sono:

- *Stato Limite di Operatività* (SLO): in seguito ad un evento sismico l’intera struttura, che comprende gli elementi strutturali, quelli non strutturali e gli impianti, non deve subire danneggiamenti ed interruzioni d’uso rilevanti;
- *Stato Limite di Danno* (SLD): in seguito ad un evento sismico l’intera struttura, che comprende gli elementi strutturali, quelli non strutturali e gli impianti, può tollerare danni limitati che non compromettano la salvaguardia

degli utenti e la capacità di rigidità e di resistenza nei confronti di azioni verticali e orizzontali, garantendone l'uso immediato malgrado il danneggiamento di parte delle apparecchiature.

Gli stati limite ultimi sono:

- *Stato Limite di salvaguardia della Vita (SLV)*: in seguito ad un evento sismico la struttura è sottoposta a numerose rotture degli elementi secondari ed impiantistici e a notevoli danni strutturali. A questo viene correlata una perdita rilevante di rigidità nei confronti delle azioni orizzontali, garantendo comunque un margine di sicurezza nei confronti del collasso, mentre si mantiene una percentuale di resistenza e rigidità per le azioni verticali;
- *Stato Limite di prevenzione del Collasso (SLC)*: in seguito ad un evento sismico la struttura è sottoposta a notevoli rotture degli elementi secondari ed impiantistici e a considerevoli danni strutturali. L'opera è in grado di garantire un margine di sicurezza per azioni verticali che però risulta essere limitato nei confronti di quelle orizzontali.

1.2.2 Gerarchia delle Resistenze

Come già detto, la *Gerarchia delle Resistenze* permette di stabilire in che modo un complesso strutturale raggiunga un determinato stato limite, definendo quindi il percorso di formazione delle cerniere plastiche che portano al collasso generale della struttura.

Nella progettazione è sempre necessario garantire che i meccanismi di collasso duttili precedano quelli fragili e, per fare ciò, bisogna sfruttare il principio sopraindicato.

Questo principio consiste nell'assegnare una resistenza distinta ai vari elementi strutturali, in modo tale che il collasso di alcuni anticipi quello degli elementi che implicano un cedimento critico della struttura nei confronti dell'intero collasso. In una struttura, gli elementi da salvaguardare sono, ad esempio, i pilastri: per impedirne una rottura prematura, ad essi viene conferita una resistenza maggiore rispetto a quella delle travi collegate.

Le cerniere plastiche, che si originano in base al percorso che viene definito tramite la *Gerarchia delle Resistenze*, si sviluppano in particolari zone definite "dissipative": in queste aree insorgono deformazioni anelastiche che determinano, nell'elemento strutturale, il passaggio da un comportamento di tipo lineare ad uno non lineare.

2 Calcestruzzo armato

Il calcestruzzo armato, comunemente definito come cemento armato, è un materiale molto diffuso nell'ambito delle costruzioni e la sua invenzione risale alla metà dell'Ottocento. Questo materiale, costituito da calcestruzzo e armatura d'acciaio, viene impiegato per la realizzazione di opere strutturali come edifici, ponti, coperture ed ossature portanti in generale, ma anche per creare manufatti come muri di sostegno e simili.

Il principio fondamentale su cui si basa il calcestruzzo armato è l'unione di due elementi completamente diversi tra loro, ma che, combinati in maniera opportuna secondo le regole definite dalle *NTC18*, permettono di ottenere il massimo valore prestazionale dell'opera.

Infatti, da una parte si trova il calcestruzzo, materiale relativamente economico e tipico delle costruzioni tradizionali, che presenta una rilevante resistenza a compressione, ma ha il difetto di possedere una scarsa resistenza a trazione, dall'altra si trova l'acciaio, sottoforma di barre lisce o ad aderenza migliorata, che vengono annegate nella matrice cementizia nelle zone in cui vi è la necessità di sopperire agli elevati sforzi di trazione presenti nel calcestruzzo.

La collaborazione di questi materiali totalmente differenti tra loro si spiega tenendo in considerazione che l'aderenza che nasce tra i due elementi è tale da trasmettere le tensioni dal calcestruzzo all'acciaio, così da garantire una sopportazione degli sforzi maggiore, e che entrambi i coefficienti di dilatazione termica sono fondamentalmente uguali.

Questa composizione eterogenea, quindi, è in grado di massimizzare la capacità resistente e deformativa dell'elemento strutturale, permettendo di sfruttare la capacità di resistenza a compressione del calcestruzzo e quella a trazione dell'acciaio.

2.1 Calcestruzzo

Il calcestruzzo è un conglomerato artificiale ottenuto dalla combinazione di aggregati con diversa granulometria, come sabbia e ghiaia, legati tra loro tramite una pasta di cemento, cioè grazie alla capacità legante di una miscela di acqua e polvere di cemento. Al fine di migliorarne le caratteristiche e le proprietà finali, è possibile aggiungere additivi chimici o aggiunte minerali.

Inizialmente l'impasto risulta essere fluido ma, con il tempo, si irrigidisce così da sviluppare le caratteristiche meccaniche che caratterizzeranno il risultato finale. Dato che la qualità del prodotto dipende specialmente dal dosaggio e dall'impiego dei vari componenti presenti, anche per il calcestruzzo è necessaria un'adeguata progettazione; per questo motivo le *NTC18* impongono dei limiti particolari ad alcuni parametri che possono modificare le caratteristiche della miscela come:

- diametro massimo dell'aggregato;
- classe di consistenza (*lavorabilità*);
- classe di resistenza (*resistenza meccanica*);
- classe di esposizione (*durabilità*);
- rapporto acqua/cemento.

2.1.1 Componenti del calcestruzzo

Come è stato detto in precedenza, il calcestruzzo è un conglomerato di cemento, acqua, aggregati ed eventuali additivi chimici o aggiunte minerali.

Il *cemento* è un composto inorganico che viene finemente macinato e, successivamente, messo a contatto con l'acqua in modo da produrre una pasta cementizia fluida che solidifica progressivamente mantenendo lo stesso volume iniziale.

Questa pasta, definita anche "boiaccia", è in grado di legare tra loro gli aggregati di diverse dimensioni grazie alle sue proprietà di adesione e coesione; per tale motivo il cemento rientra nella classe dei cosiddetti "leganti idraulici".

Le reazioni che si sviluppano dalla combinazione di questi due elementi sono note come "reazioni di idratazione"; queste trasformazioni chimico-fisiche permettono lo sviluppo della presa e dell'indurimento. A seguito di questi fenomeni, la miscela fluida si addensa in un unico blocco monolitico, il quale sarà in grado di conservare

compattezza e resistenza meccanica, anche se immerso in acqua.

In base alla combinazione della boiaccia con gli inerti, si può ottenere:

- *malta cementizia*, nel caso in cui la boiaccia fosse miscelata con un aggregato fino, come la sabbia;
- *conglomerato cementizio*, nel caso in cui la boiaccia fosse miscelata con aggregati di varie dimensioni, come sabbia, ghiaietto o ghiaia;
- *calcestruzzo armato*, nel caso in cui vengano inseriti tondini di acciaio nella matrice di calcestruzzo.

Il cemento si ricava tramite la cottura di una miscela di argilla e calcare ad alte temperature e, in base alla composizione e alle proprietà meccaniche, come resistenza e durezza, le *NTC18* ne identificano cinque varietà principali:

- Tipo I, Cemento Portland;
- Tipo II, Cemento Portland composito;
- Tipo III, Cemento d'altoforno;
- Tipo IV, Cemento pozzolanico;
- Tipo V, Cemento composito.

Inoltre, in base alla finezza di macinazione e alla composizione chimica del cemento, vengono definite sei classi di resistenza normalizzata a 28 giorni, in cui si considerano anche le classi di resistenza iniziale a 2-7 giorni, identificate come ordinaria (N) ed elevata (R). Pertanto, le classi di resistenza sono:

- Classe 32,5 N;
- Classe 32,5 R;
- Classe 42,5 N;
- Classe 42,5 R;
- Classe 52,5 N;
- Classe 52,5 R.

I valori, espressi in MPa, indicano la resistenza compressione ultima che devono possedere i provini cubici preparati in modalità standard con rapporto a/c pari a 0,5 e rapporto sabbia/cemento pari a 3.

Gli *aggregati*, definiti anche inerti, sono minerali granulari di origine rocciosa, necessari per assicurare elevate resistenze meccaniche, maggiore durabilità e minore deformabilità al prodotto. Rappresentano l'ossatura del conglomerato e ne costituiscono circa il 70% dell'intero volume. Possono essere di vario tipo e si differenziano in aggregati naturali, artificiali e di frantumazione. Anche in questo caso le *NTC18* impongono alcune regole per la scelta del tipo di inerte e per le lavorazioni a cui devono essere sottoposti. In particolare, il diametro massimo:

- deve essere minore di 5 mm dell'interferro;
- deve essere inferiore o uguale ai $\frac{3}{4}$ dello spessore del copriferro;
- deve essere inferiore o uguale a $\frac{1}{4}$ della sezione minima strutturale.

In relazione al diametro medio si identificano aggregati fini (come la sabbia, con diametro inferiore a 4 mm) e grossi (come il ghiaietto e la ghiaia, con diametro superiore a 4 mm). La qualità del conglomerato dipende, oltre che dalle proprietà degli inerti stessi, anche dalla composizione granulometrica: infatti, è di fondamentale importanza garantire la presenza di diverse classi dimensionali nella miscela e assicurarsi che la curva granulometrica considerata rientri nella *Distribuzione teorica di Fuller* (fig. 1), governata dalla legge

$$p = 100 \left(\frac{d}{D} \right)^a \quad (1)$$

dove p è la percentuale di aggregato passante attraverso un setaccio con larghezza della maglia pari a d , D è il diametro massimo dell'inerte e a è una costante. In questo modo si garantisce la presenza di un volume minimo di vuoti tra i granuli, il quale verrà poi riempito dalla boiaccia, che sarà in grado di fornire la giusta coesione tra i vari aggregati.

Per quanto riguarda le proprietà, gli inerti devono essere omogenei, puliti, devono mostrare un'adeguata resistenza meccanica, superiore a quella della boiaccia, e non devono essere gelivi, cioè devono evitare di sfaldarsi se sottoposti a temperature tali da provocare la formazione di ghiaccio in condizioni sature. La gelività è strettamente correlata alla porosità degli aggregati. Inoltre, gli inerti non devono contenere forme chimiche come solfati, che possono portare alla formazione dell'ettringite, o come cloruri, che comportano il rischio di

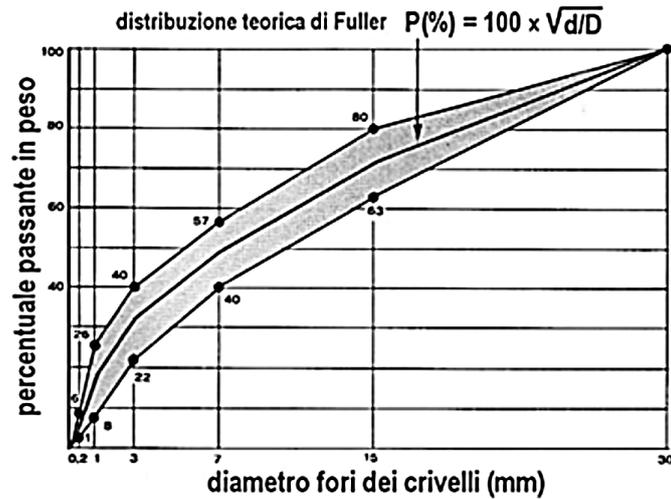


Figura 1: Distribuzione teorica di Füller

corrosione delle barre d'armatura.

Le proprietà meccaniche del calcestruzzo si sviluppano grazie ai fenomeni di presa ed indurimento, i quali hanno luogo da reazioni chimiche tra acqua e cemento. Gli inerti non partecipano all'idratazione, ma permettono di evitare un ritiro eccessivo del conglomerato durante questi fenomeni.

Altra componente indispensabile del calcestruzzo è l'*acqua*, che è necessaria per idratare il cemento permettendo lo sviluppo delle reazioni chimiche. La sua quantità è di fondamentale importanza perché influenza ampiamente le caratteristiche di resistenza meccanica del prodotto finale, ma anche la sua qualità è significativa: l'acqua, infatti, deve essere limpida, priva di sali e non aggressiva.

Il valore ideale del rapporto acqua/cemento (a/c) sarebbe quello che prende il nome di "rapporto stechiometrico", cioè $a/c = 0,28$, che rappresenta la quantità teorica di acqua necessaria per la completa idratazione di un grammo di cemento. Nella realtà, però, questo valore non è sufficiente per il fatto che, essendo presenti altri elementi nella miscela, risulterebbe impossibile che ogni particella di cemento entrasse a contatto con una di acqua e, inoltre, l'impasto risulterebbe difficile da lavorare, data la sua scarsa fluidità.

Per questi motivi, le *NTC18* definiscono un intervallo di valori accettabili in modo da assicurare una buona lavorabilità e, al contempo, un'adeguata resistenza meccanica al prodotto finale. L'eccessivo impiego di acqua nell'impasto porta ad un aumento del ritiro, provocando uno sviluppo di porosità che condiziona negativamente la resistenza del calcestruzzo, mentre una ridotta quantità d'acqua, come già

detto, implica una scarsa lavorabilità e tempi di posa e trattamento del prodotto finale strettamente limitati. Perciò è fondamentale che il rapporto acqua/cemento rientri in un range di valori ben preciso. Questo intervallo di valori è compreso tra 0,3 e 0,8 e i valori ottimali si trovano tra 0,5 e 0,7.

Nella figura 2 viene rappresentata la variazione della resistenza media R_{cm} del calcestruzzo in funzione del rapporto a/c e del periodo di stagionatura.

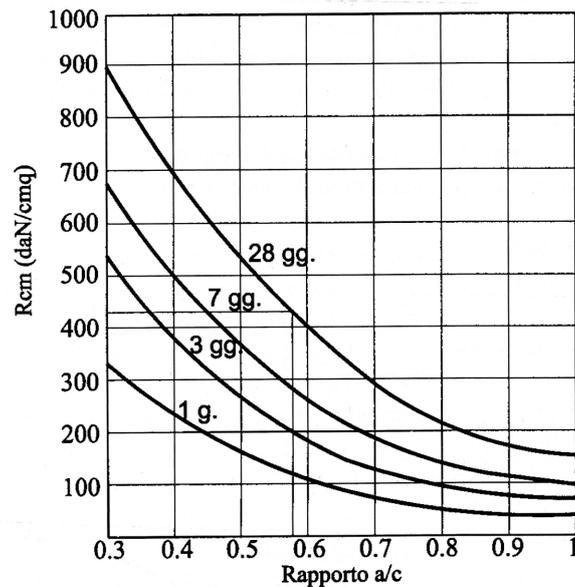


Figura 2: Variazione della resistenza del calcestruzzo in funzione del rapporto a/c

Per convenzione, le caratteristiche meccaniche del calcestruzzo si attribuiscono ad una stagionatura di 28 giorni.

In casi particolari, inoltre, è possibile servirsi di *additivi chimici* e/o *aggiunte minerali*, che permettono di:

- migliorare la lavorabilità;
- accelerare o ritardare il fenomeno di presa;
- impermeabilizzare;
- ottenere diverse colorazioni del prodotto finale;
- aumentare il volume durante la presa.

In generale, quindi, questi elementi permettono di modificare e migliorare le prestazioni del calcestruzzo, sia quando si trova allo stato fresco, sia quando risulta indurito.

Per quanto riguarda gli *additivi chimici*, si parla di sostanze disciolte in acqua che vengono aggiunte all'impasto per modificare le caratteristiche del calcestruzzo fresco o indurito, attraverso la loro azione fisico-chimica. In base alla caratteristica che si vuole variare, come, ad esempio, la lavorabilità, la presa o l'indurimento, gli additivi si possono distinguere in:

- fluidificanti;
- superfluidificanti;
- acceleranti;
- ritardanti;
- aeranti;
- stabilizzanti;
- impermeabilizzanti;
- viscosizzanti;
- antiritiro.

Le *aggiunte minerali*, invece, sono sostanze liquide o polverose che vengono addizionate al calcestruzzo solo se non ne compromettono la resistenza e la durezza, nonché l'indurimento del cemento e la protezione contro la corrosione.

La loro classificazione viene fatta o in base a come si comportano chimicamente nell'impasto cementizio e al loro effetto nel calcestruzzo, oppure in relazione alla loro composizione chimica. Si possono avere:

- aggiunte minerali quasi inattive (tipo I);
- aggiunte minerali reattive pozzolaniche (tipo II);
- aggiunte minerali reattive idrauliche latenti.

2.1.2 Caratteristiche del calcestruzzo

Il calcestruzzo può essere classificato in base alle sue caratteristiche oppure in base alla sua composizione. Nel primo caso vengono definite tutte le proprietà, specificandone i requisiti richiesti, in modo tale da ottenere un prodotto che risulti essere conforme a ciò che è stato prestabilito da progetto.

Una delle caratteristiche fondamentali è la *lavorabilità*, espressa in termini di *classe di consistenza*, necessaria per individuare il giusto “mix design” da utilizzare in una specifica opera strutturale.

Per definirla viene eseguita una prova di abbassamento, detta anche “slump test”, mediante il *cono di Abrams*. Inizialmente, la prova prevede di introdurre un campione di calcestruzzo fresco all’interno del cono, il quale viene posto su una superficie liscia, rigida, non assorbente e umida. Successivamente, viene eseguito il costipamento: ogni strato, che ha uno spessore pari ad $1/3$ dell’altezza totale, viene compattato uniformemente con 25 colpi attraverso l’uso di un pestello. Infine, si rimuove il cono sollevandolo con attenzione in direzione verticale e si misura l’abbassamento S prodotto da questo sollevamento. Il valore, ottenuto come differenza tra l’altezza nominale dello stampo ($h_m = 300\text{ mm}$) e quella del punto più alto del campione (h_s), permette di distinguere sei classi di consistenza:

- S1: *consistenza umida*, si verifica un abbassamento di 10-40 mm;
- S2: *consistenza plastica*, si verifica un abbassamento di 50-90 mm;
- S3: *consistenza semifluida*, si verifica un abbassamento di 100-150 mm;
- S4: *consistenza fluida*, si verifica un abbassamento di 160-210 mm;
- S5: *consistenza superfluida*, si verifica un abbassamento maggiore o uguale di 220 mm;
- SCC: si verifica un abbassamento maggiore di 600 mm.

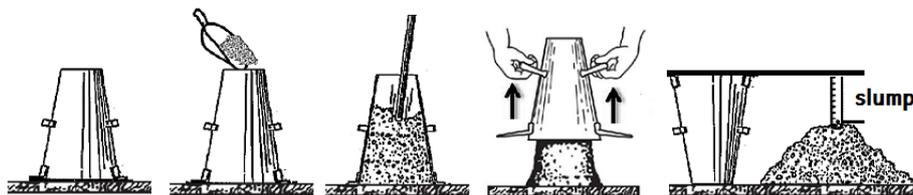


Figura 3: Slump test

Altrettanto importante è la *durabilità*, definita tramite la *classe di esposizione*, la quale rappresenta la capacità che possiede una struttura nel mantenere le funzioni per cui è stata progettata per tutta la vita utile, senza sostanziali perdite e considerando sempre una manutenzione ordinaria.

Le cause del degrado possono essere di tipo fisico, chimico e meccanico; perciò, la durabilità può dipendere da:

- combinazioni delle azioni;
- condizioni ambientali;
- sensibilità delle armature.

Pertanto, per assicurare un'adeguata durabilità, gli elementi in calcestruzzo devono godere di un'elevata resistenza agli agenti fisici e chimici legati all'ambiente e alla tipologia di impiego.

Condizioni ambientali	Classe di esposizione
Ordinarie	X0, XC1, XC2, XC3, XF1
Aggressive	XC4, XD1, XS1, XA1, XA2, XF2, XF3
Molto aggressive	XD2, XD3, XS2, XS3, XA3, XF4

Figura 4: Classe di esposizione in funzione delle condizioni ambientali

Per quanto riguarda la *resistenza a compressione*, questa rappresenta una delle caratteristiche più importanti del calcestruzzo e viene valutata in MPa.

Si esprime in termini di *resistenza caratteristica* R_{ck} , che rappresenta il valore al di sotto del quale, da un punto di vista probabilistico, si trova il 5% del totale di tutti i possibili valori di resistenza misurati sul calcestruzzo esaminato.

La sua valutazione viene fatta tramite delle prove a compressione monoassiale eseguite su provini cubici e/o cilindrici di dimensioni standard, preparati considerando un rapporto a/c pari a 0,5, a seguito di un periodo di maturazione di 28 giorni. Generalmente, i provini cilindrici presentano un'altezza di 300 mm e un diametro di 150 mm, mentre in quelli cubici lo spigolo ha una lunghezza compresa tra i 150 e i 200 mm.

Il calcestruzzo, quindi, può essere classificato in base alla *classe di resistenza*, indicata con la lettera C , che fa riferimento alla resistenza caratteristica cilindrica f_{ck} e a quella cubica R_{ck} . Questi due valori, che rappresentano le tensioni di rottura dei provini, sono legati mediante la seguente relazione:

$$f_{ck} = 0,83 R_{ck} \quad (2)$$

La discrepanza tra le due grandezze dipende principalmente dalla forma che possiedono i provini, cioè se risultano essere tozzi (provini cubici) o, contrariamente, snelli (provini cilindrici) poiché, in base alla loro geometria, risentono diversamente degli sforzi tangenziali che nascono all'interfaccia tra il provino e la macchina di prova, e quindi gli effetti del confinamento saranno differenti. In particolare, a parità di condizioni, all'aumentare dell'altezza del provino diminuisce la sua resistenza a compressione. Ciò che si deduce facilmente dalla relazione, quindi, è che la resistenza caratteristica cilindrica risulti sempre essere minore di quella cubica (circa del 15-20%).

Classe di resistenza
C8/10
C12/15
C16/20
C20/25
C25/30
C30/37
C35/45
C40/50
C45/55
C50/60
C55/67
C60/75
C70/85
C80/95
C90/105

Figura 5: Classi di resistenza del calcestruzzo

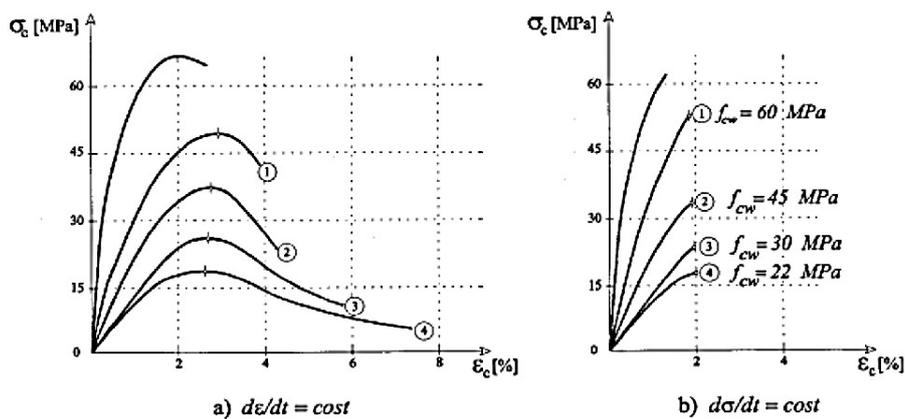


Figura 6: Variazione della risposta del calcestruzzo in funzione della resistenza

I parametri che influenzano maggiormente la resistenza a compressione sono:

- rapporto acqua/cemento;
- classe di resistenza del cemento;
- quantità di cemento;
- quantità e tipo di aggiunte minerali;
- composizione granulometrica;
- durezza dei granuli;
- costipazione;
- post-trattamento.

La Normativa impone, inoltre, due controlli di accettazione da eseguire sui campioni standard prodotti a partire dalla miscela di calcestruzzo fresco utilizzata per il getto in opera, in modo da accertarne l'idoneità:

- controllo di tipo *A*, riferito ad un quantitativo di calcestruzzo minore o uguale a $300 m^3$;
- controllo di tipo *B*, riferito ad un quantitativo di calcestruzzo maggiore o uguale a $1500 m^3$.

Ad ogni $100 m^3$ di getto di miscela omogenea corrisponde un prelievo per cui devono essere verificate le seguenti relazioni:

Controllo di tipo A	Controllo di tipo B
$R_{c,min} \geq R_{ck} - 3,5$	
$R_{cm28} \geq R_{ck} + 3,5$ (N° prelievi: 3)	$R_{cm28} \geq R_{ck} + 1,48 s$ (N° prelievi ≥ 15)

Figura 7: Controlli di accettazione su provini standard di calcestruzzo

dove

- $R_{c,min}$ è la minore resistenza di prelievo [MPa];
- R_{cm28} è la resistenza media di prelievo [MPa];

- s è lo scarto quadratico medio.

Nel caso di strutture esistenti, è possibile ricavare il valore della resistenza a compressione del calcestruzzo indurito attraverso metodi di prova non distruttivi o mediante il prelievo diretto di carote, in cui è necessario porre particolare attenzione alle modalità di estrazione.

In quest'ultimo caso, il controllo di accettazione prevede, innanzitutto, la valutazione della resistenza cubica e/o cilindrica media di progetto, ottenuta a partire dai valori caratteristici dei provini standard:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \quad [MPa] \quad (3)$$

$$R_{cm} = R_{ck} + 10 \quad [MPa] \quad (4)$$

Successivamente, è necessario definire i valori di rottura relativi alle carote estratte dalla struttura, i quali dovranno essere riconvertiti mediante opportuni coefficienti correttivi siccome i risultati ricavati non coincidono con quelli che si otterrebbero da un provino cilindrico realizzato durante il getto.

Una volta determinato il valore medio in sito f_{sm} , si ricava il valore equivalente cubico mediante la seguente relazione:

$$R_{sm} = f_{sm} F_c / 0,83 \quad [MPa] \quad (5)$$

in cui F_c rappresenta il fattore correttivo che dipende dalle dimensioni del provino.

Tabella 1: Variazione del fattore F_c

H/D	2	1,75	1,50	1,25	1,00
F_c	1	0,99	0,97	0,94	0,91

Secondo la Normativa, la verifica risulta essere soddisfatta quando:

$$R_{sm} \geq 0,85 R_{cm} \quad (6)$$

Il diagramma in figura 6 mette in evidenza la variazione della risposta del calcestruzzo in funzione della propria resistenza; in particolare, maggiore è la resistenza, minore sarà la deformazione a rottura raggiunta dall'elemento.

Per quanto riguarda il *modulo elastico*, a causa dell'evidente non linearità per il calcestruzzo viene assunto quello *istantaneo*, che si ricava considerando la retta secante tra la tensione nulla e $0,40 f_{cm}$ nel diagramma tensione-deformazione, ottenuto tramite apposite prove sperimentali.

Anche in questo caso, durante la progettazione è possibile definirne un valor medio, espresso in MPa:

$$E_{cm} = 22000 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,3} \quad (7)$$

Riguardo al *coefficiente di Poisson*, in base allo stato di sollecitazione si possono assumere valori compresi tra 0, per calcestruzzo fessurato, e 0,2 per quello non fessurato, mentre per il *coefficiente di dilatazione termica*, in mancanza di dirette prove sperimentali, si può considerare un valore medio pari a $10 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Al contrario della resistenza a compressione, quella a *trazione* risulta essere sempre molto bassa, ma rappresenta comunque un parametro fondamentale perché da essa dipende la valutazione della deformabilità e della fessurazione degli elementi strutturali. La resistenza a trazione può essere determinata attraverso tre diverse tipologie di prova:

- prova di trazione diretta;
- prova di trazione indiretta, detta anche prova brasiliana o “splitting test”;
- prova di trazione per flessione.

In fase di progetto è possibile considerare come resistenza a trazione semplice del calcestruzzo il valor medio pari a:

$$f_{ctm} = 0,3 f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad \text{per classi} \leq C50/60 \quad (8)$$

$$f_{ctm} = 2,12 \ln \left[1 + \frac{f_{cm}}{10} \right] \quad \text{per classi} > C50/60 \quad (9)$$

Nel caso di flessione, in mancanza di prove sperimentali dirette, si assume un valor medio della resistenza a trazione pari a:

$$f_{cfm} = 1,2 f_{ctm} \quad (10)$$

Durante il fenomeno di presa, come detto in precedenza, si sviluppano reazioni di idratazione che portano ad un graduale irrigidimento della pasta cementizia, con una contemporanea riduzione della lavorabilità della miscela. Successivamente avviene l'indurimento, che si considera completato entro i primi 28 giorni, cioè nel periodo dopo il quale è stato sviluppato almeno il 90% della resistenza meccanica. Parallelamente a questi fenomeni, si riscontra una diminuzione di volume dovuta alla progressiva perdita dell'acqua in eccesso: questo evento prende il nome di *ritiro* ed è indipendente dalla condizione di carico a cui è sottoposto l'elemento strutturale.

Il ritiro può essere estremamente dannoso perché produce la nascita di sforzi di trazione, talvolta molto elevati, che provocano l'insorgere di fessure più o meno rilevanti, le quali inducono un degrado precoce delle strutture.

L'entità del ritiro può dipendere da diversi fattori:

- dal grado di umidità dell'ambiente nel momento della stagionatura;
- dalla quantità d'acqua presente nella miscela;
- dalla superficie del getto esposta all'aria.

L'irrigidimento che si verifica immediatamente dopo il getto, quando il calcestruzzo si trova ancora in fase plastica, è indicato come *ritiro plastico* (o a breve termine) ed è causato dalla perdita d'acqua superficiale, mentre quello che avviene durante la fase di indurimento è definito come *ritiro idraulico* (o a lungo termine) e si manifesta durante tutta la vita del conglomerato, con velocità decrescente nel tempo.

Quest'ultimo si può distinguere in:

- ritiro *autogeno*, dovuto a cause interne al calcestruzzo, cioè all'idratazione del cemento, e si verifica durante l'indurimento senza provocare variazioni termiche e igrometriche;
- ritiro da *essiccamento*, dovuto a cause esterne al calcestruzzo e si manifesta durante la stagionatura per effetto dell'evaporazione dell'acqua contenuta nel conglomerato.

Nel caso in cui le strutture si trovino in un ambiente con umidità relativa permanente maggiore del 95%, il ritiro può essere considerato pari a zero.

In figura 8 viene rappresentata la curva della percentuale di ritiro per calcestruzzi stagionati in funzione del tempo, considerando un'umidità relativa compresa tra il 50% e il 70%.

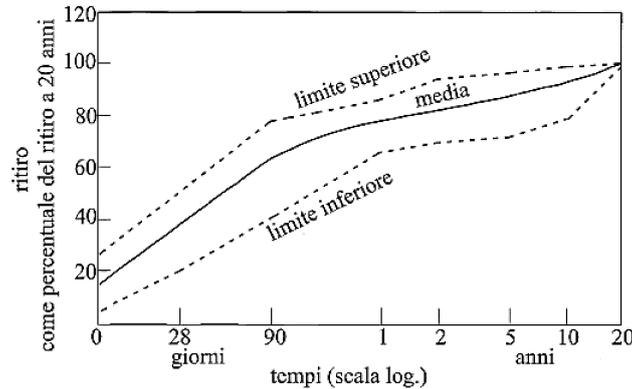


Figura 8: Variazione della percentuale di ritiro in funzione del tempo

Infine, se soggetto ad un carico costante di compressione, un elemento di calcestruzzo isotropo ed omogeneo può subire due tipi di deformazione:

- *elastica*: deformazione reversibile, che si sviluppa a partire dall'istante iniziale t_0 e permane fino all'eliminazione del carico;
- *viscosa*: deformazione che incrementa nel tempo, ma che non può essere considerata completamente reversibile.

Una volta eliminato il carico, vengono recuperate solo le deformazioni reversibili, mentre persisterà una deformazione residua dovuta alla viscosità del calcestruzzo.

Questa, nell'ipotesi di viscosità lineare ($\sigma_c \leq 0,45f_{ck}(t_0)$), può essere valutata mediante l'espressione:

$$\epsilon_v(t, t_0) = \phi(t, t_0) \epsilon_e(t_0) \quad (11)$$

dove:

- ϕ rappresenta il *coefficiente di viscosità lineare* al tempo t relativo all'istante iniziale t_0 ;
- ϵ_v è la deformazione viscosa;
- ϵ_e è la deformazione elastica.

L'essenza delle deformazioni viscosi dipende soprattutto dall'intensità delle azioni di lunga durata e dall'invecchiamento del calcestruzzo nell'istante della loro applicazione.

In figura 9 viene mostrato come variano le deformazioni in funzione del tempo di applicazione del carico.

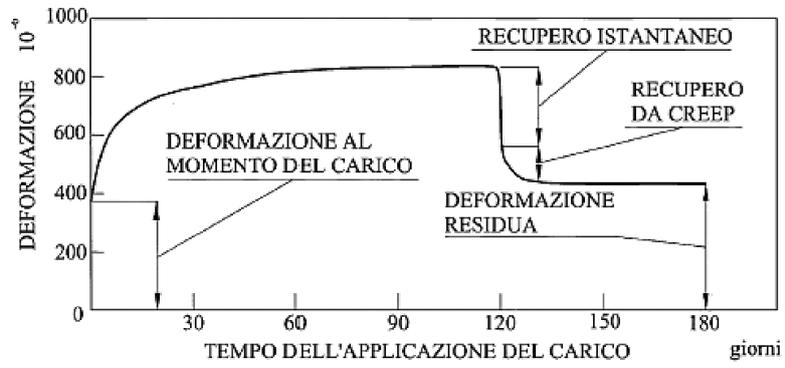


Figura 9: Variazione della deformazione in funzione del tempo di applicazione del carico

2.2 Acciaio

Dato che l'acciaio d'armatura influenza fortemente la risposta di una costruzione in cemento armato, è fondamentale progettare un'adeguata ripartizione geometrica delle barre e sceglierne la tipologia più adatta allo scopo.

Le caratteristiche meccaniche dell'acciaio, infatti, come il modulo di elasticità, la tensione di snervamento e la deformazione ultima a rottura, condizionano ampiamente lo stato tensionale e deformativo del complesso e vengono ricavate mediante prove di trazione che mettono in evidenza una risposta ben diversa da quella del calcestruzzo.

Da un punto di vista chimico, l'acciaio è una lega ferrosa costituita principalmente da ferro e carbonio, i quali vengono combinati tra loro mediante opportune percentuali. Solitamente, per il c.a. ordinario si utilizzano acciai di tipo dolce, cioè con un quantitativo di carbonio molto basso (tra lo 0,25% e lo 0,4%) aggiungendo, durante la fase di produzione, quantità limitate di altri elementi, in modo da migliorarne le proprietà meccaniche. Tipicamente, con basse quantità di carbonio la resistenza meccanica e la fragilità tendono a diminuire, mentre la duttilità e la saldabilità aumentano.

Per quanto riguarda la produzione, l'acciaio viene creato in stabilimento e, in base a come viene lavorato, si possono ottenere: barre, rotoli, reti e tralicci. Normalmente, nel cemento armato ordinario le armature si trovano sottoforma di barre, dette anche "tondini". Queste presentano sezioni circolari, di diametri differenti, e superfici laterali esterne contrassegnate da particolari nervature ottenute per zigrinatura che hanno la funzione di migliorarne l'aderenza: si parla, quindi, di "barre ad aderenza migliorata".

Per le costruzioni in cemento armato, le *NTC18* prevedono l'utilizzo esclusivo di due tipologie di acciaio: B450C e B450A. Entrambe presentano gli stessi valori nominali delle tensioni caratteristiche di snervamento ($f_{y,nom} = 450 \text{ N/mm}^2$) e a rottura ($f_{t,nom} = 540 \text{ N/mm}^2$). La differenza sostanziale tra queste due tipologie deriva dalle modalità di produzione: l'acciaio B450C subisce un processo di laminazione a caldo, viceversa, il B450A è sottoposto ad una trafilatura a freddo. Per cui, l'acciaio B450C possiede una duttilità superiore rispetto al B450A e mostra allungamenti a rottura maggiori.

Nella progettazione, gli elementi strutturali sono caratterizzati da due serie di armature:

- *longitudinali* (dette "correnti"): presenti sia in zona tesa che in quella com-

pressa, vengono collocate in parallelo rispetto all'asse dell'elemento e cooperano con il calcestruzzo nell'assorbire gli sforzi di flessione o pressoflessione. In zona tesa, data la limitata resistenza a trazione del calcestruzzo, l'armatura ha la funzione di assorbire totalmente gli sforzi di trazione, mentre in zona compressa il compito principale è quello di garantire una maggiore duttilità all'elemento. Queste barre sono prodotte con un acciaio di tipo B450C;

- *trasversali* (dette "staffe"): presentano un diametro minore delle barre longitudinali, sono disposte trasversalmente rispetto all'asse e assumono una triplice funzione: permettono di mantenere nella giusta posizione i correnti durante tutto il periodo di getto, sopportano gli sforzi di taglio a cui è soggetto l'elemento e limitano la lunghezza di libera inflessione delle armature longitudinali compresse, evitandone l'instabilità per carichi di punta. Solitamente, in questo caso viene adoperato un acciaio di tipo B450A.

Uno dei maggiori problemi che può insorgere negli elementi in cemento armato è quello legato alla *corrosione* delle barre di armatura. Questo fenomeno, che generalmente non dovrebbe svilupparsi in quanto le armature vengono accuratamente protette dal copriferro, nasce quando si manifesta il processo di carbonatazione, cioè quando l'ambiente interno alla pasta cementizia, caratterizzato da un'elevata alcalinità iniziale dovuta ai processi di idratazione, subisce una riduzione del pH a causa della diffusione di CO_2 o della presenza di ioni cloruro.

Di conseguenza, questo fenomeno comporta una riduzione della sezione resistente delle armature e il distacco del copriferro, a causa della formazione e successiva espansione della ruggine. Per tale motivo, è sempre necessaria una corretta progettazione dello spessore del copriferro, in funzione dell'aggressività dell'ambiente in cui viene edificata l'opera strutturale.

Riguardo alle caratteristiche meccaniche, come detto in precedenza, il comportamento del materiale viene valutato sperimentalmente attraverso delle prove di trazione eseguite su tondini di acciaio opportunamente preparati.

Queste prove consistono nell'andare a sollecitare a trazione la barra, determinando per ogni incremento di carico il corrispondente allungamento: è possibile, quindi, ottenere un diagramma in cui viene descritto il comportamento dell'acciaio in funzione delle tensioni e delle deformazioni.

Considerando il grafico di figura 10 si osserva che nel primo tratto il materiale si comporta in maniera pressoché lineare fino al raggiungimento della tensione di snervamento, la quale contraddistingue il passaggio da un andamento elastico lineare ad una fase in cui si ha comportamento plastico: da questo punto in poi si verificheranno incrementi significativi di deformazione per tensioni che crescono con velocità inferiori rispetto a quelle del tratto precedente. Infine, una volta

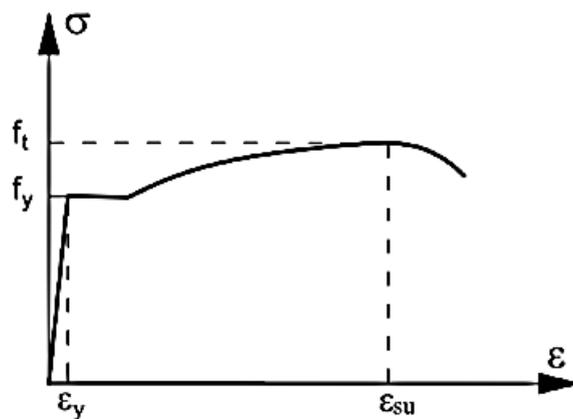


Figura 10: Diagramma tensione-deformazione di una barra di acciaio in trazione

raggiunto il valore di picco della tensione, segue un tratto instabile che segna la rottura del provino e al quale corrisponde la deformazione ultima dell'elemento. Tale comportamento sperimentale può essere approssimato mediante due modelli costitutivi analitici: il primo è quello *elastico perfettamente plastico*, mentre il secondo è quello *bilineare con incrudimento*.

Nel secondo caso, viene posto un limite alla deformazione ultima e all'allungamento dell'acciaio che, di conseguenza, ne limita la massima tensione sviluppabile. Un'analisi più dettagliata di questi modelli viene sviluppata nel capitolo 2.4.2.

2.3 Legame costitutivo

Il legame costitutivo del calcestruzzo armato viene determinato per via sperimentale, mediante, ad esempio, prove di flessione eseguite sugli elementi strutturali stessi.

Per le applicazioni numeriche, però, è fondamentale esprimere questo legame tramite delle relazioni analitiche semplificate, che vengono definite in funzione dell'intensità delle tensioni e delle deformazioni.

In questi elementi strutturali, inoltre, si possono osservare diversi stadi di comportamento, per ognuno dei quali viene valutato un modello matematico differente.

Considerando, quindi, il caso di una trave in calcestruzzo armato sottoposta ad una sollecitazione di flessione, per descriverne il comportamento a rottura non è possibile servirsi della teoria elastica valutata per le travi composte da materiali isotropi ed omogenei. Per tale motivo, è stata formulata un'apposita teoria che consente di valutarne la resistenza a flessione ultima, che verrà poi utilizzata per le verifiche di sicurezza.

In questo caso, la determinazione del diagramma *momento-curvatura* risulta più articolata, in quanto coinvolge il comportamento a rottura di entrambi i materiali, l'acciaio e il calcestruzzo, caratterizzati da leggi costitutive totalmente diverse.

2.3.1 Curvatura

Prima di analizzare il comportamento di una trave soggetta ad azioni flettenti, è necessario definire il concetto di curvatura: questo parametro è di fondamentale importanza perché da esso dipende la duttilità, strettamente connessa alla capacità dissipativa di una struttura.

Per la valutazione della curvatura χ , si consideri un concio infinitesimo di lunghezza pari a dx estrapolato da una trave inflessa, come mostrato in figura 11.

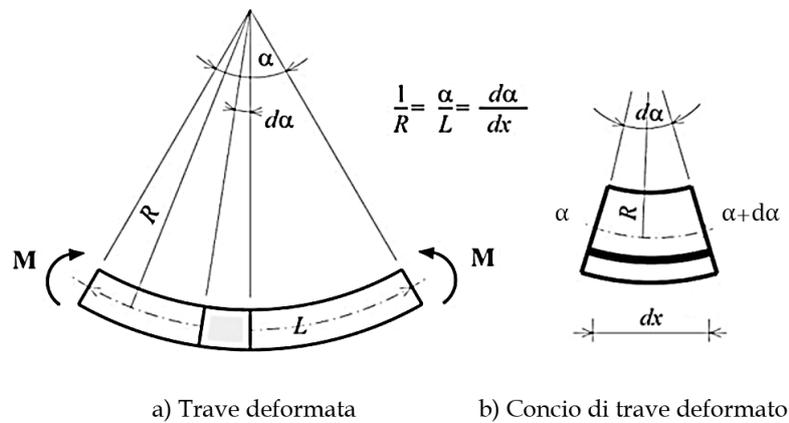


Figura 11: Trave inflessa: valutazione della curvatura

La faccia sinistra del concio risulta essere inclinate di un angolo α , mentre quella destra di un angolo $\alpha + d\alpha$. La curvatura viene definita dal rapporto tra la differenza fra le due rotazioni e la distanza che separa le due sezioni:

$$\chi = \frac{d\alpha}{dx} \quad (12)$$

Dall'analisi dimensionale, si nota come la curvatura sia pari all'inverso di una lunghezza e quindi si potrà anche esprimere nel seguente modo:

$$\chi = \frac{1}{R} \quad (13)$$

dove R rappresenta il raggio del cerchio osculatore della deformata nel punto preso in esame.

Nel caso di sezioni in cemento armato, la curvatura viene valutata a partire dal diagramma delle deformazioni come rapporto tra la deformazione del calcestruzzo compresso e l'altezza dell'asse neutro.

2.3.2 Tipologie di rottura

Una trave in cemento armato può giungere a rottura in diversi modi, in relazione al numero e alla disposizione delle armature longitudinali, appositamente progettate in modo da assicurare resistenze maggiori. Le tipologie di rottura che si possono verificare sono:

- *rottura duttile*: raggiunta per snervamento dell'acciaio teso con successivo schiacciamento del calcestruzzo; questo tipo di rottura mostra sempre segnali premonitori, come grandi deformazioni dell'acciaio e ampie fessurazioni del calcestruzzo;
- *rottura bilanciata*: raggiunta per contemporaneo schiacciamento del calcestruzzo e snervamento dell'acciaio;
- *rottura fragile*: raggiunta per schiacciamento del calcestruzzo, che provoca un cedimento prematuro, mentre l'acciaio si trova ancora in fase elastica; le deformazioni sono minime e non si hanno segni premonitori.

2.3.3 Comportamento a rottura di una trave inflessa in c.a.

Per valutare il comportamento a rottura di una trave inflessa in cemento armato, si consideri la trave armata longitudinalmente, in semplice appoggio e soggetta a due carichi concentrati disposti simmetricamente, in modo tale da garantire la pura flessione nella parte centrale. Questa è la configurazione tipica della “prova di flessione su 4 punti” e i risultati ottenuti vengono analizzati tramite il diagramma *momento-curvatura* (fig. 12).

Incrementando gradualmente il carico esterno, partendo da un valore iniziale nullo fino a raggiungere quello finale che provoca la rottura dell’elemento, è possibile identificare tre diverse fasi che caratterizzano il comportamento delle travi.

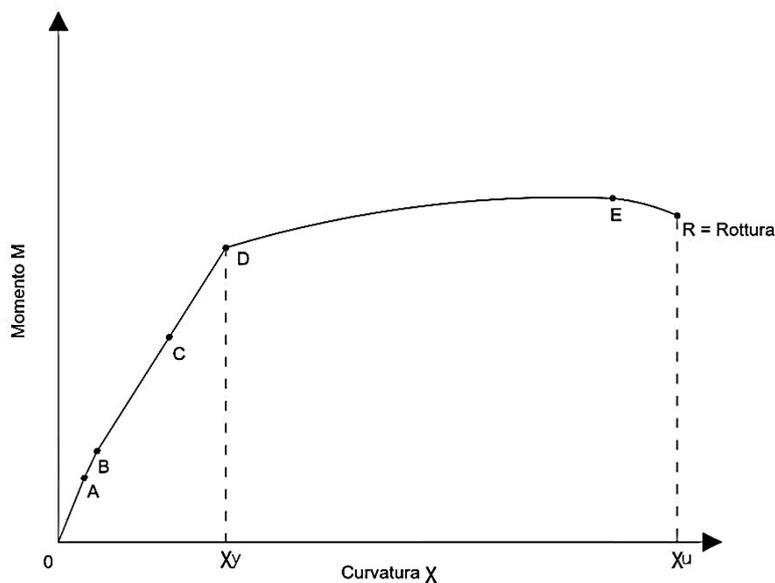


Figura 12: Diagramma momento-curvatura di una trave in c.a. inflessa

STADIO I

Per valori di carico molto bassi, il calcestruzzo non presenta fessure in zona tesa e la sezione della trave risulta essere interamente reagente: le deformazioni sono impercettibili e la massima tensione positiva non supera la resistenza a trazione dell’elemento. Perciò, per il calcestruzzo si considera un comportamento elastico lineare sia in compressione sia in trazione, assumendo in entrambi i casi lo stesso valore del modulo di elasticità.

Ovviamente, dato che in trazione il calcestruzzo mostra un comportamento non lineare, queste ipotesi risultano chiaramente approssimate: per compensarle, si assume una resistenza a trazione f_{cf} per gli elementi inflessi superiore a quella pura f_{ct} , a cui corrisponderà una deformazione maggiore, in grado di riprodurre più adeguatamente il reale comportamento della trave.

Questo tipo di comportamento è associato al modello di *Navier*, in cui è possibile esprimere l'andamento delle tensioni mediante un diagramma bitriangolare o a farfalla (fig. 12, punto **A**). Tipicamente, questo modello viene adoperato per calcolare il valore della sollecitazione che provoca la rottura dell'elemento per trazione.

Per l'acciaio, invece, il comportamento risulta essere elastico lineare, sia in trazione sia in compressione.

Con un aumento progressivo del carico, si perviene al momento di prima fessurazione M_1 , che nasce quando la tensione positiva σ_{ct} raggiunge la massima resistenza a trazione per flessione del calcestruzzo f_{cf} (fig. 12, punto **B**).

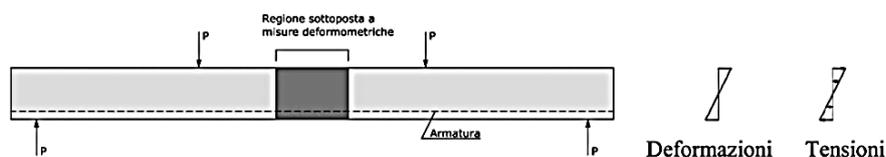


Figura 13: Punto A - Prima della fessurazione

STADIO II

Incrementando ulteriormente il carico, se la trave è sufficientemente armata, una volta superato il valore del momento M_1 sorgono le prime fessure in zona tesa: queste, estendendosi progressivamente sull'intera sezione, implicano un cambiamento radicale nel comportamento e nella rigidità della trave.

In questa fase l'asse neutro si sposta verso l'alto, il calcestruzzo manifesta una resistenza a compressione solo nelle zone integre e non trasmette più alcuna tensione di trazione.

Pertanto, fino a quando le tensioni e le deformazioni sono lontane dai corrispettivi valori di rottura, per il calcestruzzo compresso è possibile ipotizzare un comportamento elastico lineare, trascurando totalmente la sua resistenza a trazio-

ne. Questa assunzione è valida finché $\sigma_{c,max} = 0,60f_{ck}$, cioè fino ad una tensione massima pari al 60% della resistenza cilindrica di compressione.

Per quanto riguarda le tensioni di trazione, quindi, una volta superato il relativo valore massimo, queste vengono completamente assorbite dall'acciaio di armatura a causa della formazione delle lesioni nel calcestruzzo che ne impediscono la trasmissione.

Il comportamento dell'acciaio, anche in questo caso, può essere rappresentato tramite un modello elastico lineare, valido fino al raggiungimento della tensione di snervamento $\sigma_{s,max}$.

Quindi, se le deformazioni non risultano eccessive, il diagramma delle tensioni può essere ancora considerato lineare e, per carichi moderati, il comportamento coincide con quello che si manifesta in una trave soggetta a carichi di servizio (fig. 12, punto **C**). Questo stadio si conclude con la plasticizzazione dell'acciaio (fig. 12, punto **D**).

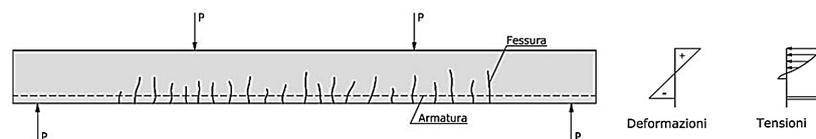


Figura 14: Punto C - Dopo la fessurazione, prima della plasticizzazione

STADIO III

Se la trave è debolmente armata, l'ampiezza delle fessure cresce in modo incontrollato, l'asse neutro continua a spostarsi verso l'alto e, contemporaneamente, la rigidità diminuisce fino ad annullarsi. Pertanto, a causa delle elevate deformazioni, bisogna tener conto dell'andamento non lineare del legame tensione-deformazione del calcestruzzo. Per quanto riguarda la resistenza a trazione, anche in questo caso viene trascurata.

Se, invece, la trave è armata in modo tale da assicurare una certa duttilità, si assiste ad una rottura di tipo duttile e il collasso perviene quando l'acciaio teso raggiunge lo snervamento (fig. 12, punto **R**).

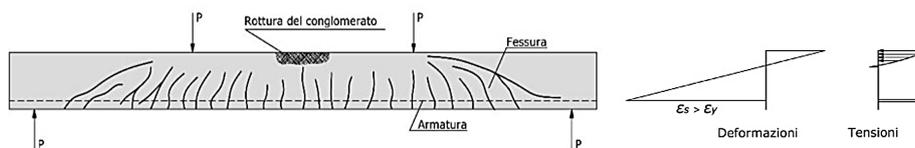


Figura 15: Punto R - Rottura

2.3.4 Ipotesi di base

Per la trattazione delle verifiche allo stato limite ultimo e la valutazione delle resistenze di calcolo di una sezione di calcestruzzo armato soggetta a flessione semplice o a pressoflessione, le *NTC18* impongono di adottare le seguenti ipotesi semplificative nei riguardi dell'acciaio e del calcestruzzo:

1. *“Le sezioni trasversali piane restano piane dopo la deformazione”.*

Grazie a questa ipotesi è possibile ammettere un rapporto di proporzionalità tra le deformazioni longitudinali delle fibre e la relativa distanza dall'asse neutro della sezione, dato che la variazione di ϵ è di tipo lineare.

2. *“La deformazione di un'armatura aderente sia tesa che compressa è la stessa del conglomerato circostante”.*

In questa maniera viene garantita la perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo ($\epsilon_c = \epsilon_s$), cioè viene assicurata la collaborazione tra i due materiali a seguito dell'applicazione dei carichi.

3. *“La distribuzione delle tensioni nel conglomerato e nell'armatura ordinaria si ricavano dai diagrammi tensione-deformazione dei materiali”.*
4. *“La resistenza a trazione del conglomerato viene trascurata ($f_{ctd} = 0$)”.*
5. *“Il conglomerato perviene alla rottura quando la sua deformazione raggiunge un valore limite”.*
6. *“L'acciaio perviene a rottura quando la sua deformazione raggiunge la sua capacità ultima”.*

Le ultime due ipotesi permettono di identificare un insieme di valori di deformazioni critiche che comportano il raggiungimento della crisi nel calcestruzzo o nell'armatura. A queste deformazioni limite corrisponderanno, per una data geometria della sezione e per un quantitativo di armatura prestabilito, una coppia

di sollecitazioni N e M , i cui valori rappresentano le resistenze di calcolo. Queste sollecitazioni caratteristiche vengono dedotte tramite le relazioni che legano le tensioni con le deformazioni, cioè tramite i legami costitutivi, e attraverso equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione eseguite a partire dalle distribuzioni tensionali del calcestruzzo e delle armature sulla sezione.

2.4 Modelli costitutivi analitici

La risposta che mostra un elemento in cemento armato nei confronti di un determinato stato di sollecitazione viene definita principalmente da come reagiscono i materiali di cui è costituito a quel particolare insieme di sforzi.

Per tale motivo, è necessario definire dei modelli analitici approssimativi che permettano un'analisi semplificata ma che, allo stesso tempo, siano in grado di riprodurre, per quanto possibile, il reale comportamento di ciascun materiale.

Nel caso di strutture in cemento armato, le *NTC18* propongono alcuni modelli sia per il calcestruzzo, sia per l'acciaio.

2.4.1 Calcestruzzo

Per quanto riguarda il calcestruzzo compresso, le *NTC18* individuano tre modelli semplificati che possono essere utilizzati nel caso di verifica allo SLU.

Prima di elencarli, tuttavia, è opportuno definire alcuni valori di deformazione necessari alla valutazione di questi diagrammi. Per classi di resistenza minori o uguali a C50/60, si assumono le seguenti deformazioni:

$$\begin{aligned}\epsilon_{c2} &= 0,20\% & \epsilon_{cu} &= 0,35\% \\ \epsilon_{c3} &= 0,175\% & \epsilon_{c4} &= 0,07\%\end{aligned}$$

Inoltre, la resistenza a compressione del calcestruzzo f_{cd} viene ricavato dalla resistenza cilindrica caratteristica f_{ck} mediante la seguente espressione:

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (14)$$

dove:

- α_{cc} è il coefficiente riduttivo per le resistenze di lunga durata, pari a 0,85;
- γ_c è il coefficiente di sicurezza parziale, pari a 1,5.

I legami costitutivi per il calcestruzzo sono i seguenti:

- a) legame “parabola-rettangolo”: è il modello che viene adottato più frequentemente ed è anche il più realistico, perché considera la non linearità del comportamento del calcestruzzo fin dal principio.

Il primo tratto, rappresentato tramite un ramo di parabola, cresce fino a

raggiungere una deformazione pari a ϵ_{c2} , dopodiché la tensione assume un valore costante massimo fino alla deformazione ultima.

Il limite ϵ_{cu} è relativo alle sezioni parzializzate, cioè quelle che sono in parte compresse e in parte tese. Nel caso di sezioni soggette a compressione semplice, viene assunto come limite di deformazione il valore ϵ_{c2} .

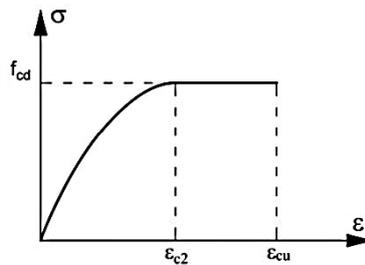


Figura 16: Legame “parabola-rettangolo”

È possibile descriverlo analiticamente attraverso le seguenti espressioni:

$$\sigma(\epsilon) = f_{cd} \left[2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{c2}} \right) - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{c2}} \right)^2 \right] \quad \text{per } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{c2}$$

$$\sigma(\epsilon) = f_{cd} \quad \text{per } \epsilon_{c2} \leq \epsilon \leq \epsilon_{cu}$$

- b) legame “triangolo-rettangolo” (o elasto-plastico): viene spesso utilizzato nel caso di analisi agli elementi finiti. Tuttavia, nel caso si abbia a che fare con sistemi monodimensionali, non presenta particolari vantaggi rispetto al modello precedentemente descritto. Il modello è caratterizzato da un primo tratto in cui si verifica una crescita lineare della tensione fino a raggiungere una deformazione pari a ϵ_{c3} , dopodiché, come prima, assume un valore costante massimo fino alla deformazione ultima ϵ_{cu} .

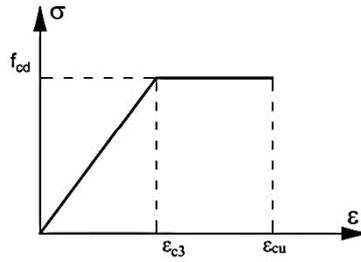


Figura 17: Legame “triangolo-rettangolo”

Analiticamente si può descrivere tramite le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \sigma(\epsilon) &= f_{cd} \frac{\epsilon}{\epsilon_{c3}} && \text{per } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{c3} \\ \sigma(\epsilon) &= f_{cd} && \text{per } \epsilon_{c3} \leq \epsilon \leq \epsilon_{cu} \end{aligned}$$

- c) legame “rettangolare” (o “stress-block”): dal punto di vista applicativo è il modello più semplice e, anche se non risulta essere troppo realistico, rappresenta una buona approssimazione del legame “parabola-rettangolo”. La tensione viene considerata costante per un tratto che inizia da un valore di deformazione pari a ϵ_{c4} e termina alla deformazione ultima ϵ_{cu} .

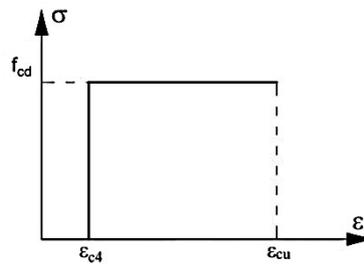


Figura 18: Legame “stress-block”

In termini analitici può essere descritto mediante le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \sigma(\epsilon) &= 0 && \text{per } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{c4} \\ \sigma(\epsilon) &= f_{cd} && \text{per } \epsilon_{c4} \leq \epsilon \leq \epsilon_{cu} \end{aligned}$$

2.4.2 Acciaio

Per quanto riguarda l'acciaio, le *NTC18* propongono due modelli che possono essere impiegati nelle analisi allo SLU: quello elastico perfettamente plastico e quello bilineare con incrudimento.

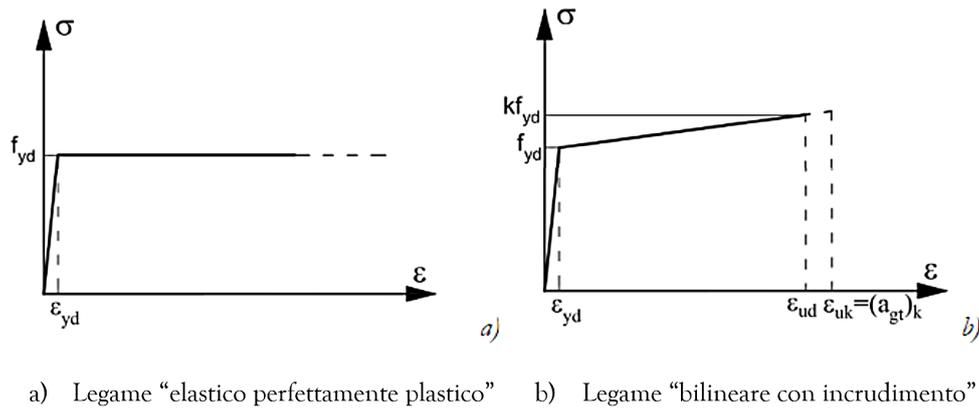


Figura 19: Legami costitutivi dell'acciaio

Entrambi i modelli sono rappresentativi del reale comportamento dell'acciaio.

Nel caso di legame “elastico perfettamente plastico”, si può osservare un tratto iniziale lineare crescente fino alla deformazione ϵ_{yd} dipendente dalla tensione di snervamento f_{yd} e, successivamente, segue un tratto infinito a tensione costante pari a f_{yd} .

L'altro legame si differenzia per il fatto di possedere due rami linearmente crescenti: il primo è analogo a quello che si trova nel modello elasto-plastico perfetto, mentre il secondo è caratterizzato da un aumento delle tensioni proporzionale al *rapporto di incrudimento* k fino ad un valore di picco correlato alla deformazione ultima ϵ_{ud} . In questo caso, quindi, viene posto un limite alla deformazione e, di conseguenza, anche alla tensione massima che può sviluppare il materiale. La deformazione limite, definita ϵ_{ud} , viene valutata come:

$$\epsilon_{ud} = 0,9 \epsilon_{uk} = (A_{gt})_k \quad (15)$$

Inoltre, sperimentalmente si può dimostrare che per diversi tipi di acciaio, che presentano una percentuale di carbonio costituente variabile, la pendenza del tratto elastico rimane costante mentre varia il tratto a comportamento plastico.

Per la caratterizzazione di un acciaio, è necessario definire alcuni parametri fondamentali, cioè:

- tensione di snervamento $f_{y,nom} = 450 \text{ N/mm}^2$;
- tensione di rottura $f_{t,nom} = 540 \text{ N/mm}^2$;
- deformazione ultima ϵ_{ud} ;
- rapporto di incrudimento $k = f_{t,nom} / f_{y,nom}$;
- modulo elastico (praticamente costante per tutti gli acciai) pari a 210 GPa.

Nel caso di acciaio B450C, i requisiti imposti dalle *NTC18* vengono riportati nel seguito.

Caratteristiche		Requisiti	Frittale (%)
Tensione caratteristica di snervamento	f_{yk}	$\geq f_{y,nom}$	5.0
Tensione caratteristica a carico massimo	f_{tk}	$\geq f_{t,nom}$	5.0
	$(f_t/f_y)_k$	$\geq 1,15$ $< 1,35$	10.0
	$(f_y/f_{ynom})_k$	$\leq 1,25$	10.0
Allungamento	$(A_{gt})_k$	$\geq 7,5\%$	10.0
Diametro del mandrino per prove di piegamento a 90° e successivo raddrizzamento senza cricche:	$\phi < 12 \text{ mm}$	4 ϕ	
	$12 \leq \phi \leq 16 \text{ mm}$	5 ϕ	
	per $16 < \phi \leq 25 \text{ mm}$	8 ϕ	
	per $25 < \phi \leq 40 \text{ mm}$	10 ϕ	

Figura 20: Requisiti acciaio B450C

Ai fini delle verifiche di sicurezza allo stato limite ultimo, il valore di progetto di resistenza dell'acciaio viene valutato attraverso un coefficiente parziale di sicurezza $\gamma_s = 1,15$ per cui si ottiene:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (16)$$

e, di conseguenza, la deformazione al limite elastico viene valutata come:

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (17)$$

2.5 Analisi di una trave in CA

In una struttura, la trave rappresenta l'elemento in grado di trasferire i carichi gravanti su di essa, compreso il peso proprio, in modo tale da garantire sempre, sezione per sezione, un equilibrio tra l'azione dei carichi e delle reazioni vincolari e lo stato tensionale interno, le cui risultati equivalgono alle caratteristiche delle sollecitazioni.

Quando l'unica sollecitazione presente nella sezione è il momento flettente M , si parla di trave soggetta a *flessione semplice*. Tuttavia, nella maggior parte dei casi, il momento flettente si manifesta con due componenti valutate rispetto agli assi principali d'inerzia della sezione che, solitamente, si assumono coincidenti con gli assi di riferimento x e y : in questo caso si parla di *flessione deviata* e i momenti flettenti agenti sono definiti come M_x e M_y .

Nel caso in cui la sezione fosse sollecitata da uno sforzo normale eccentrico N , invece, si presenta il fenomeno della *flessione deviata composta*. Lo sforzo normale, che agisce nel centro di pressione P differente dal baricentro G della sezione, comporta la nascita di due momenti flettenti M_x e M_y , dovuti alla presenza di un'eccentricità e in entrambe le direzioni. I momenti sono calcolati come segue:

$$M_x = Ne_y \quad (18)$$

$$M_y = Ne_x \quad (19)$$

in cui l'eccentricità e è pari alla distanza tra il centro di pressione P e il baricentro della sezione G , valutata in entrambe le direzioni.

Qualora fosse presente un'eccentricità in una sola direzione, e quindi qualora nascesse una sola componente di momento flettente M_x o M_y , si parla di *flessione retta composta*: in questo caso, il centro di pressione P giace su uno dei due assi di simmetria della sezione.

Infine, è possibile distinguere due tipologie di flessione composta: *tensoflessione* o *trazione eccentrica*, nel caso in cui lo sforzo normale fosse di trazione, e *pressoflessione* o *compressione eccentrica*, nel caso in cui lo sforzo normale fosse di compressione.

La verifica allo stato limite ultimo è soddisfatta quando risulta valida la seguente disuguaglianza, sezione per sezione:

$$S_d \leq R_d \quad (20)$$

in cui S_d rappresenta la sollecitazione di calcolo agente, mentre R_d è il corrispondente valore della resistenza di calcolo.

Qualora nella sezione agisca solo uno sforzo normale centrato, bisognerà verificare che:

$$N_{Sd} \leq N_{Rd} \quad (21)$$

Negli altri casi, le condizioni di verifica vengono espresse nei seguenti modi:

$$(M_{Sdx}, N_{Sd}) \leq R_2(M_{Rdx}, N_{Rd}) \quad (22)$$

$$(M_{Sdy}, N_{Sd}) \leq R_3(M_{Rdy}, N_{Rd}) \quad (23)$$

$$(M_{Sdx}, M_{Sdy}, N_{Sd}) \leq R_4(M_{Rdx}, M_{Rdy}, N_{Sd}) \quad (24)$$

in cui R_2 , R_3 e R_4 sono funzioni che definiscono i *domini di interazione* e rappresentano delle curve nel piano (M, N) , nel caso di R_2 e R_3 , o delle superfici, nel caso di R_4 .

La capacità ultima di una sezione viene definita a partire dai valori limite di deformazione, i quali, supponendo l'acciaio a duttilità infinita, vengono delimitati esclusivamente dal comportamento calcestruzzo. Questi limiti permettono di identificare i campi di rottura riportati in figura 21.

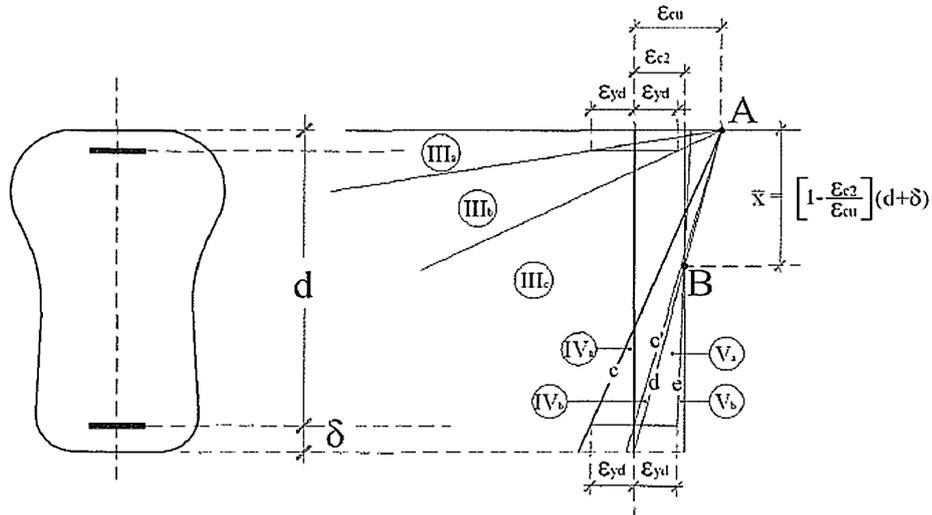


Figura 21: Campi di rottura: ipotesi di acciaio elastico perfettamente plastico a duttilità illimitata

Dalla figura 21 è possibile individuare cinque campi di rottura, a loro volta suddivisi in ulteriori sottogruppi, tutti identificati da differenti fasci di rette aventi come polo il punto A o il punto B.

Per garantire una corretta valutazione delle resistenze di calcolo bisogna considerare un ultimo aspetto di fondamentale importanza: per ciascuna sezione, è necessario conoscere l'effettiva distribuzione delle tensioni normali agenti sulla generica fibra, in modo tale da poter valutare le risultati delle forze a cui saranno applicate le condizioni di equilibrio in termini di traslazione e di rotazione.

2.5.1 Flessione Retta

Per l'analisi della flessione retta, si consideri una trave in cemento armato a sezione rettangolare, come quella riportata in figura 22, che presenta una base b e un'altezza h , dotata di due armature A_s e $A'_s = \mu A_s$ (dove μ rappresenta la percentuale di armatura compressa), collocate rispettivamente in zona tesa e compressa.

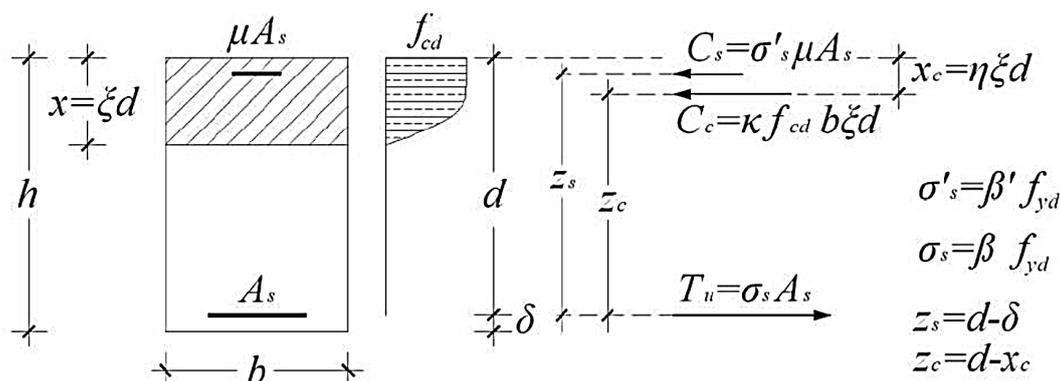


Figura 22: Risultanti delle tensioni interne di una trave inflessa doppiamente armata

Gli unici campi di rottura accettabili, in questo caso, sono il III e il IV, i quali sono contraddistinti da un asse neutro interno alla sezione.

Come detto in precedenza, nel caso di flessione retta l'asse di sollecitazione corrisponde ad uno degli assi di simmetria della sezione e l'asse neutro risulta essere ortogonale ad esso. Conoscere la posizione dell'asse neutro è indispensabile perché permette la corretta valutazione della forza agente sul calcestruzzo compresso.

Trascurando la resistenza a trazione del calcestruzzo, a seguito dell'applicazione di un'azione flettente in una generica sezione della trave si svilupperanno delle tensioni interne, le cui risultanti sono:

- C_c : risultante di compressione del calcestruzzo compresso;
- C_s : risultante di compressione dell'armatura compressa;
- T_u : risultante di trazione dell'armatura tesa.

Queste vengono valutate mediante un'equazione di equilibrio alla traslazione.

$$T_u = C_s + C_c \quad (25)$$

$$\sigma_s A_s = \sigma'_s \mu A_s + \kappa f_{cd} \xi b d \quad (26)$$

$$\beta f_{yd} A_s = \beta' f_{yd} \mu A_s + \kappa f_{cd} \xi b d \quad (27)$$

in cui

- β e β' rappresentano i coefficienti di sforzo delle armature, sono cioè i parametri che permettono di definire il livello tensionale, rispetto a f_{yd} , delle armature tese e compresse, rispettivamente;
- ξ è il coefficiente che esprime la posizione dell'asse neutro ed è valutato come $\frac{x}{d}$, con x altezza della zona compressa;
- κ rappresenta il coefficiente di riempimento ed è pari a $\frac{C_c}{f_{cd} \xi d}$.

Introducendo il *rapporto meccanico* di armatura tesa $\omega = \frac{A_s}{bd} \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$, l'equilibrio alla traslazione si può esprimere in termini adimensionalizzati:

$$\beta \omega = \beta' \mu \omega + \kappa \xi \quad (28)$$

Il momento resistente di calcolo M_{Rd} viene ricavato attraverso un'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al baricentro dell'armatura tesa.

$$M_{Rd} = C_s z_s + C_c z_c = \sigma'_s \mu A_s z_s + \kappa f_{cd} \xi b d z_c \quad (29)$$

Introducendo il *momento resistente adimensionalizzato* $m_{Rd} = \frac{M_{Rd}}{bd^2 f_{cd}}$, l'equilibrio alla rotazione si può esprimere come:

$$m_{Rd} = \beta' \mu \omega (1 - \lambda) + \kappa (\xi - \eta \xi^2) \quad (30)$$

in cui

- λ è il coefficiente che esprime la posizione dell'armatura ed è pari a $\frac{\delta}{d}$, con δ spessore del copriferro;
- η è il coefficiente di posizione della forza risultante di compressione C_c ed è valutato come $\frac{x_c}{x}$, con x_c distanza tra il punto di applicazione di C_c e il lembo maggiormente compresso.

Con l'aiuto alle equazioni di equilibrio (28) e (30) e considerando le equazioni di congruenza interna, che permettono di supporre un andamento lineare delle deformazioni sezionali, si può risolvere il problema della flessione semplice retta per una trave a sezione rettangolare doppiamente armata.

In base alla configurazione della sezione, e quindi in base ai valori attribuiti ai diversi parametri, è possibile ottenere degli abachi e delle tabelle utili al progetto dell'armatura e alla verifica delle sezioni rettangolari.

L'utilizzo di questi abachi è, tuttavia, limitante: per garantire la loro validità è necessario considerare una classe di resistenza del calcestruzzo non superiore a C50/60 e il legame costitutivo adottato per l'acciaio deve essere quello elastoplastico perfetto.

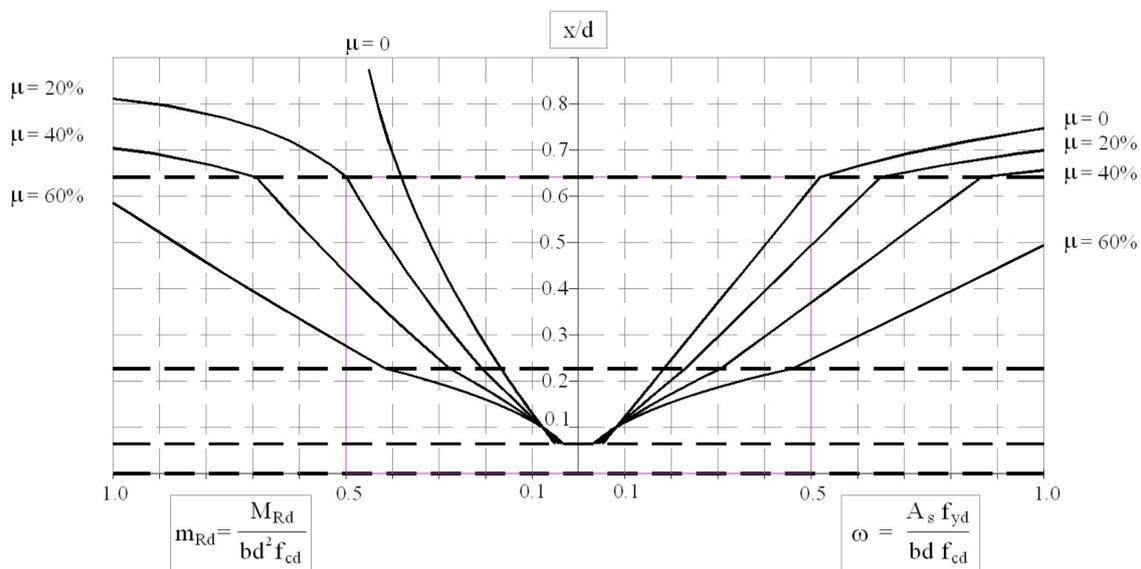


Figura 23: Flessione semplice retta: esempio di abaco per sezioni rettangolari in calcestruzzo, doppiamente armate e con classe di resistenza minore di C50/60

L'abaco riportato in figura 23 permette di correlare tra loro i parametri ξ , ω e m_{rd} e consente di identificare due differenti famiglie di curve al variare di μ : la curva individuata da $\mu = 0$ corrisponde al caso di sezione rettangolare semplicemente armata.

Sull'asse delle ascisse sono riportati, rispettivamente a sinistra e a destra, il momento adimensionalizzato m_{rd} e la percentuale meccanica di armatura ω , mentre sull'asse delle ordinate è riportata la profondità dell'asse neutro ξ in condizioni di crisi. Le linee tratteggiate orizzontali identificano i limiti relativi ai differenti

campi di rottura (in questo caso, partendo dall'alto si ritrova il campo IV, poi il IIIc, IIIb e infine il IIIa).

Infine, la tabella riportata in figura 24, contiene i valori ricavati dalla lettura dell'abaco, che permettono un'analisi numerica del problema.

x/d	$\mu=0$		$\mu=20\%$		$\mu=40\%$		$\mu=60\%$		$\mu=80\%$		$\mu=100\%$		
	ω	mrd	ω	mrd	ω	mrd	ω	mrd	ω	mrd	ω	mrd	
0,0200	0,0162	0,0161	0,0135	0,0136	0,0116	0,0119	0,0101	0,0106	0,0090	0,0096	0,0081	0,0088	IIIa
0,0400	0,0324	0,0318	0,0270	0,0270	0,0231	0,0235	0,0202	0,0209	0,0180	0,0189	0,0162	0,0173	
0,0641	0,0519	0,0505	0,0433	0,0428	0,0371	0,0372	0,0325	0,0330	0,0268	0,0298	0,0260	0,0272	
0,0800	0,0648	0,0626	0,0594	0,0578	0,0549	0,0538	0,0511	0,0503	0,0477	0,0472	0,0447	0,0446	IIIb
0,1000	0,0810	0,0776	0,0810	0,0776	0,0810	0,0776	0,0810	0,0776	0,0810	0,0776	0,0810	0,0776	
0,1200	0,0971	0,0923	0,1033	0,0978	0,1103	0,1041	0,1183	0,1113	0,1276	0,1197	0,1384	0,1294	
0,1400	0,1133	0,1067	0,1262	0,1183	0,1425	0,1329	0,1635	0,1518	0,1917	0,1773	0,2318	0,2134	
0,1600	0,1295	0,1209	0,1496	0,1390	0,1770	0,1637	0,2168	0,1994	0,2795	0,2559	0,3935	0,3585	
0,1800	0,1457	0,1348	0,1733	0,1596	0,2137	0,1960	0,2786	0,2544	0,4004	0,3640	0,7110	0,6436	
0,2000	0,1619	0,1484	0,1972	0,1802	0,2521	0,2296	0,3494	0,3172	0,5692	0,5150	1,5338	1,3832	
0,2268	0,1836	0,1663	0,2295	0,2076	0,3059	0,2764	0,4589	0,4141	0,9178	0,8271	/	/	IIIc
0,2400	0,1943	0,1749	0,2429	0,2186	0,3238	0,2915	0,4857	0,4372	0,9714	0,8743	/	/	
0,2600	0,2105	0,1877	0,2631	0,2351	0,3508	0,3140	0,5262	0,4719	1,0524	0,9454	/	/	
0,2800	0,2267	0,2003	0,2833	0,2513	0,3778	0,3363	0,5667	0,5063	1,1333	1,0163	/	/	
0,3000	0,2429	0,2126	0,3036	0,2672	0,4048	0,3583	0,6071	0,5404	1,2143	1,0868	/	/	
0,3200	0,2590	0,2246	0,3238	0,2829	0,4317	0,3800	0,6476	0,5743	1,2952	1,1571	/	/	
0,3400	0,2752	0,2363	0,3440	0,2982	0,4587	0,4015	0,6881	0,6079	1,3762	1,2272	/	/	
0,3600	0,2914	0,2478	0,3643	0,3134	0,4857	0,4226	0,7286	0,6412	1,4571	1,2969	/	/	
0,3800	0,3076	0,2590	0,3845	0,3282	0,5127	0,4436	0,7690	0,6743	1,5381	1,3664	/	/	
0,4000	0,3238	0,2699	0,4048	0,3428	0,5397	0,4642	0,8095	0,7071	1,6190	1,4356	/	/	
0,4200	0,3400	0,2806	0,4250	0,3571	0,5667	0,4846	0,8500	0,7396	1,7000	1,5046	/	/	
0,4400	0,3562	0,2910	0,4452	0,3711	0,5937	0,5047	0,8905	0,7719	1,7810	1,5733	/	/	
0,4600	0,3724	0,3011	0,4655	0,3849	0,6206	0,5246	0,9310	0,8038	1,8619	1,6417	/	/	
0,4800	0,3886	0,3110	0,4857	0,3984	0,6476	0,5441	0,9714	0,8356	1,9429	1,7098	/	/	
0,5000	0,4048	0,3206	0,5060	0,4117	0,6746	0,5634	1,0119	0,8670	2,0238	1,7777	/	/	
0,5500	0,4452	0,3434	0,5565	0,4436	0,7421	0,6105	1,1131	0,9444	2,2262	1,9462	/	/	
0,6000	0,4857	0,3645	0,6071	0,4738	0,8095	0,6559	1,2143	1,0202	2,4286	2,1131	/	/	
0,6200	0,5019	0,3725	0,6274	0,4854	0,8365	0,6736	1,2548	1,0500	2,5095	2,1793	/	/	
0,6414	0,5193	0,3807	0,6491	0,4975	0,8654	0,6923	1,2981	1,0817	2,5963	2,2500	/	/	

Figura 24: Valori numerici di ω e m_{rd} al variare di μ e ξ (esempio)

2.5.2 Flessione Retta Composta

La verifica a flessione retta composta di una trave viene sviluppata mediante un confronto diretto tra il campo delle sollecitazioni di calcolo, formato dalle coppie di valori M_{Sd} e N_{Sd} , e quello limite delle resistenze, formato dalle coppie M_{Rd} e N_{Rd} , che permettono di identificare i cosiddetti “domini di interazione”.

Come prima, si consideri una trave in cemento armato a sezione rettangolare, che presenta una base b e un'altezza h , dotata di due armature A_s e $A'_s = \mu A_s$, collocate rispettivamente in zona tesa e compressa, come riportato in figura 25.

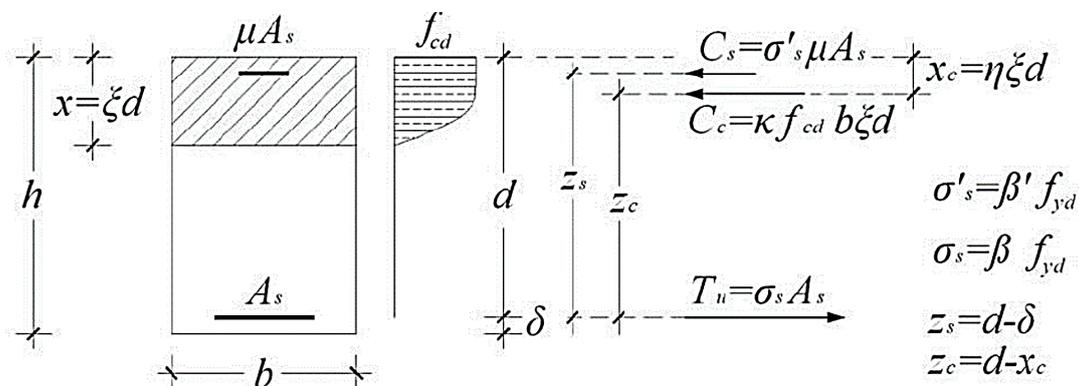


Figura 25: Risultanti delle tensioni interne di una trave doppiamente armata soggetta a pressoflessione

L'analisi viene sviluppata a partire dalla definizione dei valori di deformazione della sezione: viene determinata la posizione dell'asse neutro, corrispondente ad una particolare modalità di rottura, poi si valuta il diagramma delle tensioni dipendente da quello delle deformazioni e dalle leggi costitutive dei materiali e, infine, vengono adoperate le equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione, in modo tale da ricavare l'insieme delle coppie di punti (M_{Rd}, N_{Rd}) appartenenti alla frontiera del dominio di interazione.

Una volta definita la curva di interazione, la verifica allo SLU per pressoflessione consisterà esclusivamente nel controllare che una qualsiasi coppia di sollecitazioni agenti (M_{Sd}, N_{Sd}) , identificata da un punto, sia compresa nel dominio.

Anche in questo caso, a seguito dell'applicazione dell'azione, in una generica sezione della trave si svilupperanno delle tensioni interne, le cui risultanti sono:

- C_c : risultante di compressione del calcestruzzo compresso;

- C_s : risultante di compressione dell'armatura compressa;
- T_u : risultante di trazione dell'armatura tesa.

Lo sforzo normale resistente N_{Rd} viene ricavato mediante un equilibrio alla traslazione di tutte le forze risultanti.

$$N_{Rd} = C_s + C_c - T_u = \beta' f_{yd} \mu A_s + \kappa f_{cd} \xi b d - \beta f_{yd} A_s \quad (31)$$

Introducendo lo *sforzo normale adimensionalizzato* $n_{Rd} = \frac{N_{Rd}}{b d f_{cd}}$, è possibile esprimere l'equilibrio alla traslazione come:

$$n_{Rd} = \kappa \xi + \omega (\mu \beta' - \beta) \quad (32)$$

Il momento resistente di calcolo M_{Rd} , invece, viene ricavato attraverso un'equazione di equilibrio alla rotazione attorno all'asse baricentrico.

$$M_{Rd} = C_s \frac{d - \delta}{2} + C_c \left(\frac{h}{2} - x_c \right) + T_u \frac{d - \delta}{2} \quad (33)$$

$$M_{Rd} = \beta' f_{yd} \mu A_s \frac{d - \delta}{2} + \kappa f_{cd} \xi b d \left(\frac{h}{2} - \eta \xi d \right) + \beta f_{yd} A_s \frac{d - \delta}{2} \quad (34)$$

Introducendo il *momento adimensionalizzato* $m_{Rd} = \frac{M_{Rd}}{b d^2 f_{cd}}$, è possibile riscrivere l'equilibrio alla rotazione come:

$$m_{Rd} = \kappa \left(\frac{1 + \lambda}{2} \xi - \eta \xi^2 \right) + \omega (\mu \beta' + \beta) \frac{1 - \lambda}{2} \quad (35)$$

L'insieme delle coppie di valori resistenti appena definiti permette di ottenere la curva di interazione utile al confronto tra azioni e resistenze necessario per la verifica a pressoflessione. Il dominio di interazione, tuttavia, non è univoco: al variare del rapporto meccanico ω si ottengono diverse curve di interazione, come riportato in figura 26.

Anche in questo caso, l'utilizzo dei domini di interazione è limitante: per garantire la validità, infatti, è necessario considerare una classe di resistenza del calcestruzzo inferiore a C50/60 e il legame costitutivo utilizzato per l'acciaio deve essere quello elasto-plastico perfetto.

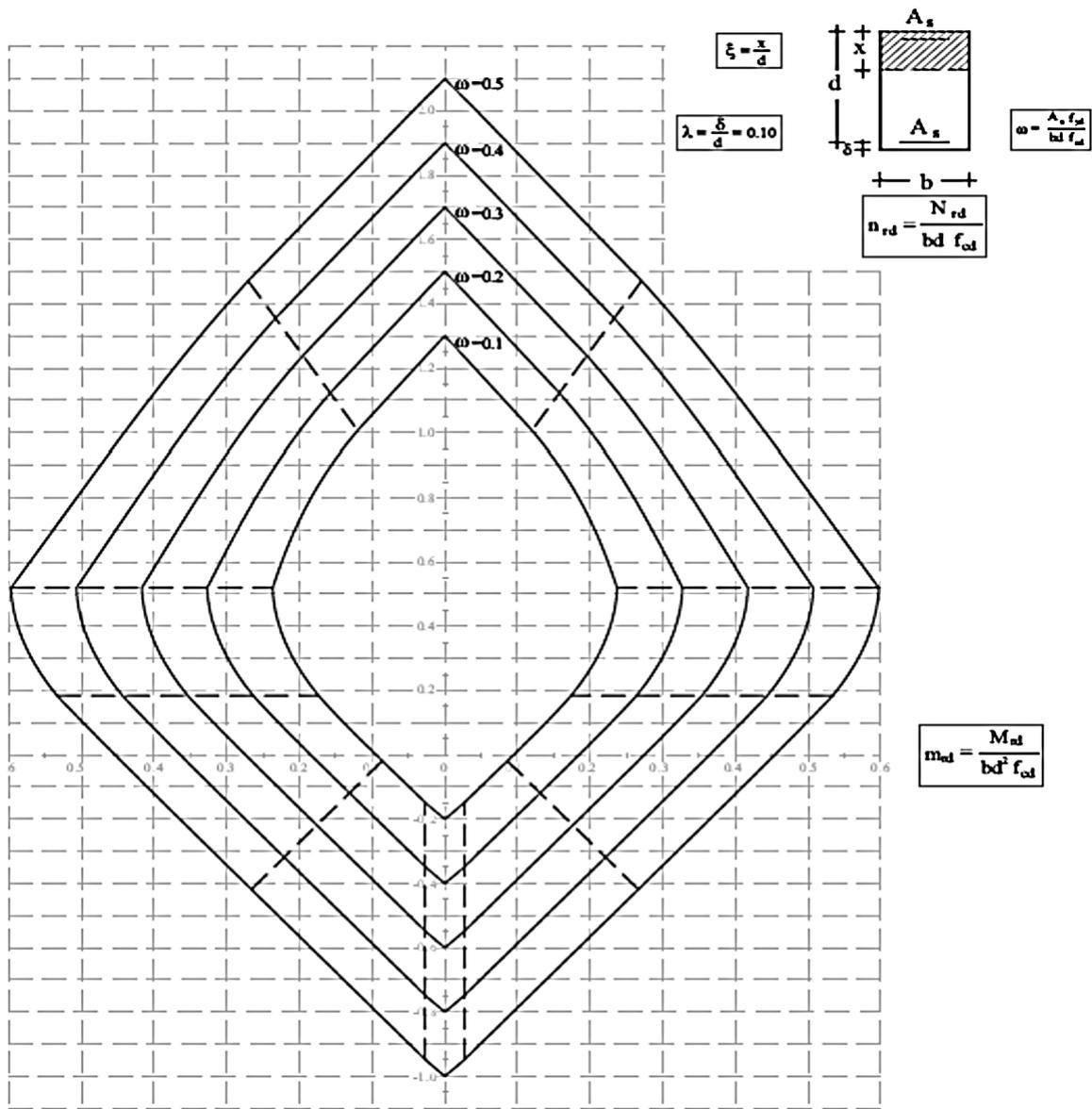


Figura 26: Domini di interazione per sezioni rettangolari in calcestruzzo, doppiamente armate e con classe di resistenza minore di C50/60

Fissando un certo valore di ω , è possibile individuare i punti che delimitano i vari campi di rottura, come mostrato in figura 27.

Osservando il grafico si nota facilmente come un aumento di sforzo normale N comporti rotture sempre meno duttili, a favore di quelle fragili. Inoltre, è possibile osservare che il punto di ascissa M_{max} (punto **B**) normalmente non coincide

con la sollecitazione di flessione semplice (punto **A**) e l'insieme delle coppie (M , N), caratterizzate dalla stessa eccentricità si trovano tutte sulla medesima retta uscente dall'origine.

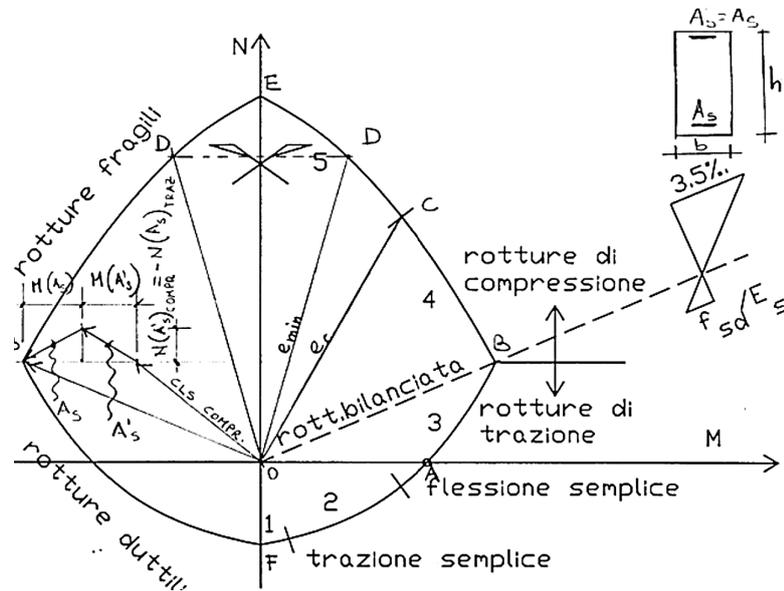


Figura 27: Dominio di interazione per un valore di ω fissato

Per comprendere al meglio il grafico risulta vantaggioso definire alcuni punti caratteristici:

- Punto **A**: che corrisponde alla rottura per flessione semplice;
- Punto **B**: che corrisponde alla rottura bilanciata;
- Punto **E**: che corrisponde alla rottura per compressione semplice;
- Punto **F**: che corrisponde alla rottura per trazione semplice.

Ammissa la convessità delle curve, sia in trazione che in compressione, è possibile ricorrere all'utilizzo di domini semplificati per risolvere il problema della flessione retta composta. Questi sono ricavati a partire dalla definizione di alcuni punti fondamentali, tra i quali si suppone un andamento lineare.

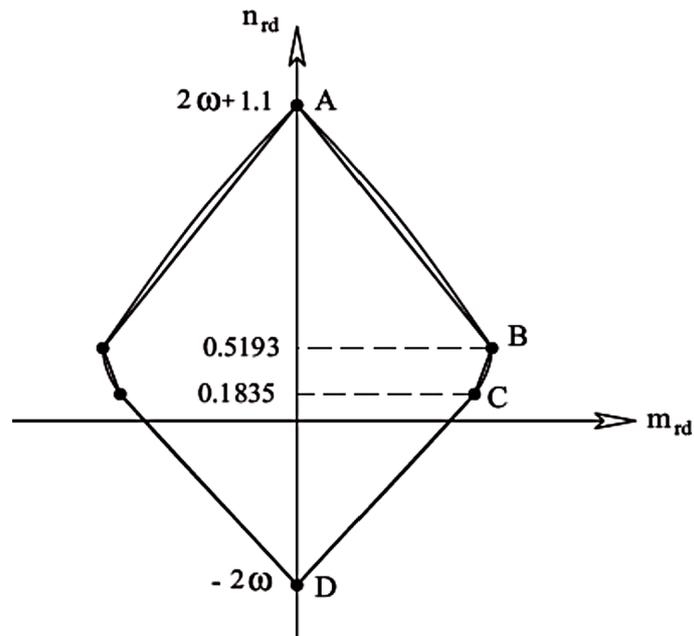


Figura 28: Dominio di interazione semplificato

Come prima, i punti significativi sono:

- Punto **A**: che corrisponde alla rottura per compressione semplice;
- Punto **B**: che corrisponde alla rottura bilanciata;
- Punto **C**: che corrisponde alla rottura con armatura compressa al limite elastico;
- Punto **D**: che corrisponde alla rottura per trazione semplice.

3 Calcestruzzo armato confinato

Al fine di incrementare la resistenza e, specialmente, la duttilità degli elementi in cemento armato è possibile servirsi del confinamento.

Questo viene ottenuto mediante l'impiego di armature trasversali le quali, oltre a garantire una buona resistenza al taglio, contribuiscono significativamente al miglioramento della duttilità strutturale per due motivi principali: alterano il comportamento del calcestruzzo, favorendone un aumento di resistenza e di duttilità, e contrastano l'instabilizzazione dei correnti longitudinali nel caso in cui le sezioni raggiungessero curvature notevoli.

Il confinamento, quindi, produce un aumento della duttilità a livello sezionale con successivo incremento a livello globale.

3.1 Effetto del confinamento

Per incrementare la resistenza a compressione di un materiale, il confinamento si avvale di un principio elementare chiamato "effetto Poisson": tale effetto è definito dalla comparsa di deformazioni laterali a seguito dell'applicazione di un carico assiale. Quindi, oltre alla deformazione di trazione o di compressione, si manifesterà, rispettivamente, un'ulteriore contrazione o dilatazione laterale.

Il risultato a cui si perviene applicando una pressione laterale ad un elemento che si trova in uno stato di compressione è che la massima tensione relativa alla rottura risulterà essere superiore a quella che si otterrebbe nel caso di provino non confinato. Pertanto, in uno stato di tensione triassiale, la pressione laterale permette di assicurare un notevole miglioramento del comportamento lungo la direzione di applicazione del carico. Per quanto riguarda le altre proprietà meccaniche, si possono considerare invariate.

Da un punto di vista teorico, è possibile valutare l'effetto del confinamento mediante lo studio dei *cerchi di Mohr*. La figura 29 mette in evidenza quello che si verifica nel caso in cui fosse presente una tensione laterale σ_2 non nulla.

Si nota come il cerchio di Mohr subisca una traslazione verso destra senza incorrere in variazioni di diametro: ciò significa che il provino sarà capace di tollerare uno sforzo di compressione σ_1 maggiore prima di pervenire a rottura a seguito del raggiungimento della massima tensione tangenziale accettabile τ_{max} .

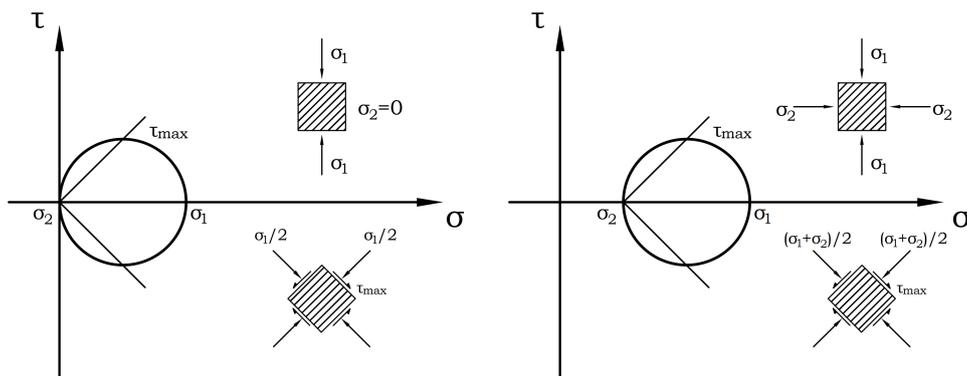


Figura 29: Traslazione del cerchio di Mohr per effetto del confinamento

Come detto in precedenza, il confinamento si consegue attraverso l'impiego di armature trasversali, cioè tramite staffe chiuse e legature interne, che vengono annegate nel calcestruzzo e che sono in grado di opporsi alle deformazioni laterali, raggiungendo la relativa tensione di snervamento.

Nella pratica, l'effetto benefico del confinamento insorge a seguito dello sviluppo delle deformazioni trasversali, incrementate dalla graduale fessurazione interna del calcestruzzo. L'armatura trasversale, quindi, offre un *confinamento passivo* che accresce in relazione allo stato di deformazione laterale. L'efficienza di tale fenomeno è influenzata principalmente dalla disposizione delle staffe, dal loro diametro e dalle connessioni tra le barre longitudinali.

In aggiunta, è necessario sottolineare come l'effetto confinante si concentri prevalentemente in prossimità dei tiranti trasversali e negli spigoli delle staffe e come il volume effettivo di calcestruzzo sottoposto a confinamento sia inferiore a quello totale. Il volume esterno all'armatura trasversale, cioè il copriferro, si trova in uno stato non confinato e quindi, nel caso in cui le deformazioni presenti fossero maggiori di quelle limite, non può essere tenuto in conto nel calcolo della resistenza.

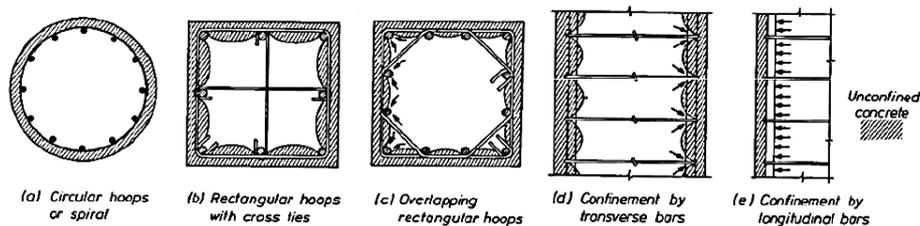


Figura 30: Esempi di confinamento

In assenza di indicazioni più accurate e di validi modelli matematici, le *NTC18* consentono di adoperare la relazione rappresentata in figura 31 per valutare il comportamento del calcestruzzo confinato, in cui si evidenzia un incremento della resistenza caratteristica $f_{ck,c}$ e della deformazione ultima $\epsilon_{cu2,c}$.

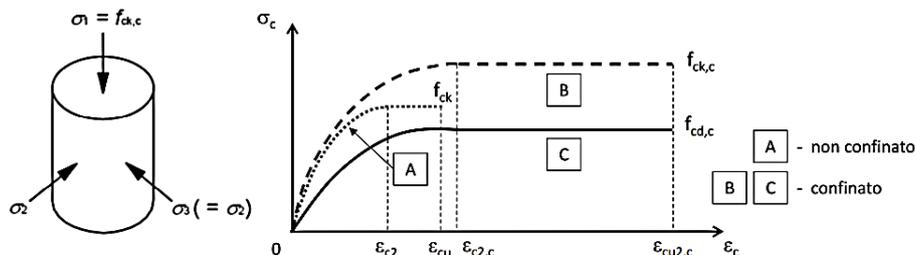


Figura 31: Modelli $\sigma - \epsilon$ per il calcestruzzo confinato

I valori della deformazione e della resistenza caratteristica del calcestruzzo confinato vengono definiti tramite le seguenti relazioni:

$$\epsilon_{c2,c} = \epsilon_{c2} \left(\frac{f_{ck,c}}{f_{ck}} \right)^2 \quad (36)$$

$$\epsilon_{cu2,c} = \epsilon_{cu} + 0,2 \frac{\sigma_2}{f_{ck}} \quad (37)$$

$$f_{cd,c} = \alpha_{cc} \left(\frac{f_{ck,c}}{\gamma_c} \right) \quad (38)$$

$$f_{ck,c} = f_{ck} \left(1,0 + 5,0 \frac{\sigma_2}{f_{ck}} \right) \quad \text{per } \sigma_2 \leq 0,05 f_{ck} \quad (39)$$

$$f_{ck,c} = f_{ck} \left(1,125 + 2,5 \frac{\sigma_2}{f_{ck}} \right) \quad \text{per } \sigma_2 > 0,05 f_{ck} \quad (40)$$

La *pressione efficace di confinamento* σ_2 può essere valutata mediante la seguente espressione:

$$\sigma_2 = \alpha \sigma_l \quad (41)$$

dove:

- α rappresenta il *coefficiente di efficacia* ($\alpha \leq 1$) ed è pari al rapporto tra il volume del calcestruzzo adeguatamente confinato $V_{c,eff}$ e quello del solo elemento di calcestruzzo V_c depurato dall'armatura longitudinale;

- σ_l rappresenta la *pressione di confinamento* dovuta alle armature trasversali.

In base alla geometria della sezione, è possibile esprimere i due parametri mediante formulazioni differenti.

a) Sezioni rettangolari

La *pressione laterale* σ_l viene definita per entrambe le direzioni principali della sezione tramite delle valutazioni di equilibrio sul nucleo di calcestruzzo confinato. Le relazioni ottenute sono:

$$\sigma_{l,x} = \frac{A_{st,x} f_{yk,st}}{b_y s} \qquad \sigma_{l,y} = \frac{A_{st,y} f_{yk,st}}{b_x s} \qquad (42)$$

dove $A_{st,x}$ e $A_{st,y}$ rappresentano le aree complessive delle staffe nelle direzioni parallele a quelle principali x e y , rispettivamente, b_x e b_y indicano le dimensioni del nucleo di calcestruzzo confinato, s è il passo delle staffe e $f_{yk,st}$ è la tensione caratteristica dell'acciaio delle armature trasversali.

Una volta valutate le pressioni in entrambe le direzioni, si ricava il valore della *pressione laterale equivalente* σ_l come:

$$\sigma_l = \sqrt{\sigma_{l,x} \sigma_{l,y}} \qquad (43)$$

Per quanto riguarda il *coefficiente di efficienza* α , questo è definito tramite il prodotto di due termini: uno proporzionale al passo delle staffe e l'altro relativo alla loro disposizione nel piano della sezione. Si ottiene quindi:

$$\alpha = \alpha_s \alpha_n \qquad (44)$$

in cui

$$\alpha_s = \left[1 - \frac{s}{2b_x}\right] \left[1 - \frac{s}{2b_y}\right] \qquad (45)$$

$$\alpha_n = 1 - \sum_n \left(\frac{b_i^2}{6b_x b_y}\right) \qquad (46)$$

dove n è il numero complessivo delle barre longitudinali contenute da staffe o legature, mentre b_i è la distanza tra due barre successive contenute.

b) Sezioni circolari

In questo caso, la *pressione laterale* σ_l viene definita con la seguente relazione:

$$\sigma_l = \frac{2 A_{st} f_{yk,st}}{D_0 s} \quad (47)$$

dove A_{st} rappresenta l'area della sezione dell'armatura trasversale, mentre D_0 indica il diametro del nucleo di calcestruzzo confinato.

Per quanto riguarda il *coefficiente di efficienza* α , anche in questo caso viene definito come:

$$\alpha = \alpha_s \alpha_n \quad (48)$$

in cui

$$\alpha_s = \left[1 - \frac{s}{2D_0} \right]^\beta \quad (49)$$

$$\alpha_n = 1 \quad (50)$$

Pertanto, riassumendo, l'incremento di duttilità e di resistenza che si verifica a causa del confinamento laterale dipende dalla pressione σ_2 , la quale, a sua volta, viene influenzata dall'area delle staffe, dal loro passo e dal volume di calcestruzzo adeguatamente confinato. Inoltre, le relazioni riportate precedentemente mettono in evidenza come la geometria dell'armatura trasversale influenzi largamente il confinamento: in particolare, le staffe circolari permettono di ottenere un effetto confinante maggiore rispetto a quelle rettangolari, dato che l'azione esercitata da esse risulta uniforme.

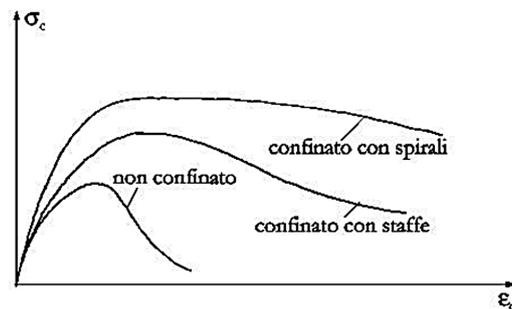


Figura 32: Livelli di confinamento

3.2 Duttività

Il motivo principale per cui è importante analizzare la duttilità di un'opera strutturale, cercando costantemente di incrementarne il valore, è associato alla capacità che può avere quella determinata struttura di assorbire e di dissipare energia a seguito di eventi sismici di rilevante entità.

Questa capacità influenza notevolmente la risposta strutturale: in particolare, in base all'energia dissipata durante un sisma, le strutture possono reagire mantenendo un comportamento elastico oppure entrando in campo anelastico.

La differenza sostanziale tra i due comportamenti è che nel primo caso, a seguito dell'azione sismica, non è ammesso un danneggiamento eccessivo della struttura, ciò significa che l'opera deve essere progettata in modo tale che nessun elemento costituente entri in crisi: per assicurare questo, la struttura dovrà possedere una resistenza ultima elevata e, quindi, presenterà dimensioni notevoli che comportano un incremento smodato dei costi di costruzione.

Nel secondo caso, invece, si accetta che la struttura subisca danni a seguito di eventi sismici violenti: si parla di opere "sismo-resistenti" o "dissipative", cioè di strutture progettate adottando particolari criteri che permettono la massimizzazione della capacità di dissipare energia, senza dover richiedere resistenze eccessive agli elementi strutturali, limitandone perciò le dimensioni.

La progettazione in zona sismica, quindi, si basa proprio su questo principio: sfruttare le risorse che possiede una struttura oltre il limite elastico, in modo da garantire una certa resistenza ad azioni sismiche eccessive senza subire danni irreversibili.

A tal proposito, in presenza di eventi sismici, viene messo in evidenza come la conservazione di una costruzione in calcestruzzo armato non potrà essere assegnata unicamente alla resistenza del complesso strutturale o del singolo materiale, ma sarà assicurata anche dalla nascita di deformazioni plastiche, più o meno rilevanti, che però non comprometteranno la stabilità globale dell'opera.

3.2.1 Livelli di duttilità

Nella progettazione sismica, la duttilità strutturale viene indicata con μ e può essere valutata a due livelli principali, locale e globale, distinti ulteriormente in base a ciò che si sta analizzando.

In particolare, è possibile definire i seguenti livelli di duttilità:

- *duttilità del materiale* μ_ϵ , valutata in termini di deformazione;
- *duttilità della sezione* μ_φ , valutata in termini di curvatura;
- *duttilità dell'elemento strutturale* μ_δ , valutata in termini di rotazione;
- *duttilità della struttura* μ_Δ , valutata in termini di spostamento.

La definizione del parametro μ è fondamentale nella progettazione di un'opera perché permette di avere un'idea sufficientemente chiara della capacità dissipativa della struttura già nelle prime fasi. Bisogna, tuttavia, tenere in conto che questa capacità non è solo funzione del livello di duttilità, ma è anche influenzata da altri fattori, come le modalità di realizzazione dei vari elementi strutturali, l'applicazione dei dettagli costruttivi, la disposizione e la quantità delle cerniere plastiche che possono svilupparsi e la deformazione plastica richiesta alle cerniere.

Pertanto, per definire la resistenza di una struttura all'evento sismico in termini globali, le *NTC18* impongono di adottare un *fattore di struttura* q , che risulta essere funzione di μ e che tiene in considerazione l'influenza esercitata dagli altri fattori. Nella progettazione, questo parametro è indispensabile perché permette di definire il cosiddetto "spettro di risposta di progetto", ricavato riducendo le ordinate dello "spettro di risposta elastico".

Duttilità del materiale

A livello di materiale, la duttilità rappresenta l'attitudine a subire deformazioni plastiche evitando una riduzione eccessiva dello sforzo. Questa si ottiene come rapporto tra la deformazione presente e quella di snervamento, cioè:

$$\mu_\epsilon = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_y} \quad (51)$$

Per quanto riguarda l'acciaio, questo materiale risulta essere estremamente duttile, al contrario del calcestruzzo che necessita di grandi livelli di confinamento per garantire un'adeguata duttilità in compressione. Come detto in precedenza, il confinamento si ricava attraverso l'impiego di staffe di contenimento nelle zone critiche, disposte considerando opportune regole di dettaglio. In particolare, la prima staffa non deve distare più di 5 cm dal filo pilastro, mentre le altre vengono collocate con un passo inferiore al valore minore tra:

- $\frac{1}{4}$ dell'altezza utile della sezione trasversale;
- 175 mm (per CD "A") e 225 mm (per CD "B");
- $6 \Phi_{min}$ e $8 \Phi_{min}$ delle barre longitudinali considerate nelle verifiche, rispettivamente per CD "A" e CD "B";
- 24Φ delle armature trasversali.

Duttilità della sezione

Analizzando il livello sezionale, il legame costitutivo viene espresso in termini di momento-curvatura, pertanto, la duttilità rappresenta l'abilità di far fronte a grandi richieste di curvatura in campo plastico, evitando di incorrere in una diminuzione sproporzionata del momento resistente. Questa si ottiene come rapporto tra la curvatura ultima e quella al limite elastico, cioè:

$$\mu_{\varphi} = \frac{\chi_u}{\chi_y} \quad (52)$$

Solitamente, nel caso di sezioni in calcestruzzo armato, χ_y è correlata allo snervamento dell'acciaio, mentre χ_u si ottiene una volta raggiunta la deformazione ultima a compressione del calcestruzzo.

La duttilità sezionale viene influenzata dal valore del carico assiale applicato e dal quantitativo di armatura longitudinale e trasversale. Nel caso di elevato quantitativo di staffe, se disposte adeguatamente nella sezione, si ottiene un aumento del confinamento con conseguente incremento di duttilità.

Duttilità dell'elemento strutturale

Per quanto riguarda l'elemento, la duttilità rappresenta la capacità di gestire spostamenti o rotazioni in campo plastico, impedendo un decremento eccessivo

della forza o del momento resistente. Questa si ottiene come rapporto tra lo spostamento ultimo e quello allo snervamento, cioè:

$$\mu_\delta = \frac{\delta_u}{\delta_y} \quad (53)$$

Normalmente, nel caso di calcestruzzo armato, lo spostamento al limite elastico è associato allo snervamento dell'acciaio d'armatura e allo spostamento ultimo a rottura relativo al calcestruzzo, oppure all'instabilizzazione o alla rottura dell'armatura.

Il suo valore è influenzato dalla duttilità sezionale e dalla dimensione delle cerniere plastiche, cioè, dall'estensione della zona in cui si ha un comportamento non lineare, a partire da quella critica.

Anche in questo caso, la duttilità dipende dal carico assiale e dal quantitativo di armatura: maggiore è il carico applicato, maggiore sarà l'instabilità dell'elemento. Tuttavia, con un confinamento adeguato, si può avere una riduzione dell'instabilità delle barre longitudinali a favore della duttilità.

Duttilità della struttura

Per quanto riguarda la duttilità strutturale, questa è correlata allo spostamento dell'intera struttura in campo non lineare, che si verifica successivamente ad un'azione sismica, senza imbattersi in esagerate riduzioni della forza resistente.

La duttilità strutturale si ricava dal rapporto tra lo spostamento ultimo e quello al limite elastico, con riferimento ad un punto significativo della struttura, cioè:

$$\mu_\Delta = \frac{d_u}{d_y} \quad (54)$$

Tipicamente, lo spostamento al limite elastico è correlato a quello relativo tra i piani della struttura corrispondente alla formazione delle cerniere plastiche, mentre la condizione ultima coincide con l'origine del cinematismo di collasso.

3.2.2 Verifiche di duttilità

In presenza di un'azione sismica, le *NTC18* hanno reso obbligatorio eseguire le verifiche di duttilità sia per gli elementi primari, che per quelli secondari, nel caso in cui la struttura fosse progettata considerando il comportamento dissipativo, quindi assumendo un valore del fattore di struttura $q > 1,5$.

Questa verifica può essere condotta in due diverse modalità: *esplicita*, cioè ragionando in termini di domanda e capacità, valutando quindi se la struttura sia in grado di garantire un certo quantitativo di risorse plastiche per gestire la richiesta dell'azione sismica, ed *implicita*, cioè applicando le regole di dettaglio costruttivo corrispondenti a ciascun elemento considerato.

L'intero procedimento di verifica richiesto dalle *NTC18* può essere riassunto attraverso il diagramma di flusso mostrato in figura 33.

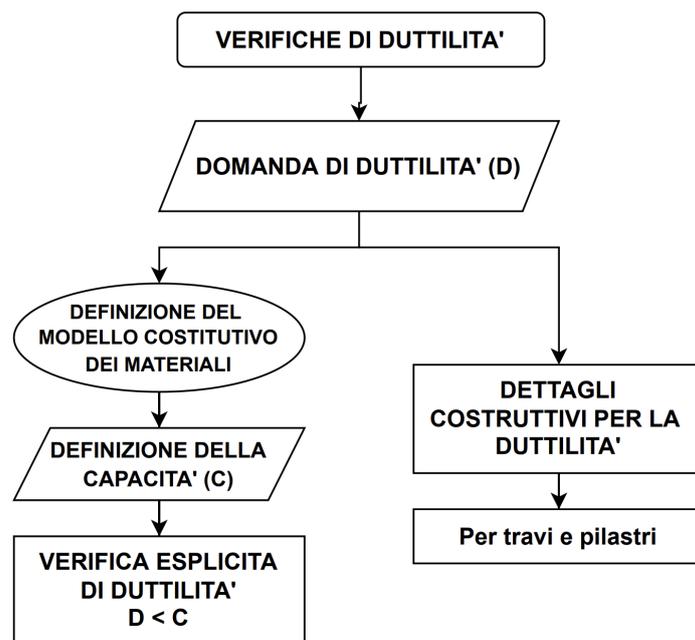


Figura 33: Verifiche di duttilità (*NTC18*): diagramma di flusso

Il fattore di duttilità legato alla domanda viene espresso in termini di curvatura $\mu_{\Phi,Ed}$ e di spostamento $\mu_{d,Ed}$: questi valori sono utilizzati, rispettivamente, per le verifiche locali e globali. Nel caso di analisi lineari, la valutazione di $\mu_{\Phi,Ed}$ viene

fatta considerando lo SLC e differenziando le strutture flessibili ($T_1 \geq T_C$) da quelle rigide ($T_1 < T_C$):

$$\mu_{\Phi,Ed} = 1,2 (2q_0 - 1) \quad \text{per } T_1 \geq T_C \quad (55)$$

$$\mu_{\Phi,Ed} = 1,2 \left[1 + 2(q_0 - 1) \frac{T_c}{T_1} \right] \quad \text{per } T_1 < T_C \quad (56)$$

dove T_1 rappresenta il periodo fondamentale della costruzione, T_C è legato allo spettro di progetto e indica l'inizio del tratto a velocità costante e q_0 è il valore base del fattore di struttura.

Per quanto riguarda $\mu_{d,Ed}$, questo viene valutato allo SLV mediante le seguenti espressioni:

$$\mu_{d,Ed} = q \quad \text{per } T_1 \geq T_C \quad (57)$$

$$\mu_{d,Ed} = 1 + (q - 1) \frac{T_c}{T_1} \quad \text{per } T_1 < T_C \quad (58)$$

in cui q , che rappresenta il fattore di comportamento pari $q_0 K_r$, potrebbe risultare inferiore a q_0 per la presenza del fattore riduttivo K_r ($K_r = 1$ per le costruzioni regolari in altezza, mentre $K_r = 0,8$ per quelle irregolari).

Il legame tra $\mu_{\Phi,Ed}$ e $\mu_{d,Ed}$ è dato da:

$$\mu_{\Phi,Ed} = 2\mu_{d,Ed} - 1 \quad (59)$$

La capacità, invece, viene definita dalla normativa come il rapporto tra la curvatura ultima Φ_u e quella convenzionale di prima plasticizzazione Φ_{yd} :

$$\mu_{\Phi} = \frac{\Phi_u}{\Phi_{yd}} \quad (60)$$

La curvatura di prima plasticizzazione Φ_{yd} viene valutata come:

$$\Phi_{yd} = \frac{M_{Rd}}{M'_{yd}} \Phi'_{yd} \quad (61)$$

dove Φ'_{yd} rappresenta la minore tra la curvatura corrispondente alla deformazione ϵ_{c2} (solitamente pari allo 0,2%) e quella corrispondente allo snervamento dell'acciaio teso, M_{Rd} indica il momento resistente allo SLU della sezione mentre M'_{yd} è quello corrispondente alla curvatura Φ'_{yd} .

La curvatura di prima plasticizzazione Φ_{yd} viene determinata assumendo un diagramma elasto-plastico perfetto per schematizzare il legame momento-curvatura: dalla figura 34 si osserva che la curvatura Φ_{yd} , legata a M_{Rd} , è strettamente correlata alla rigidezza secante per il punto (Φ'_{yd}, M'_{yd}) e che il valore Φ'_{yd} risulta sempre inferiore a Φ_{yd} .

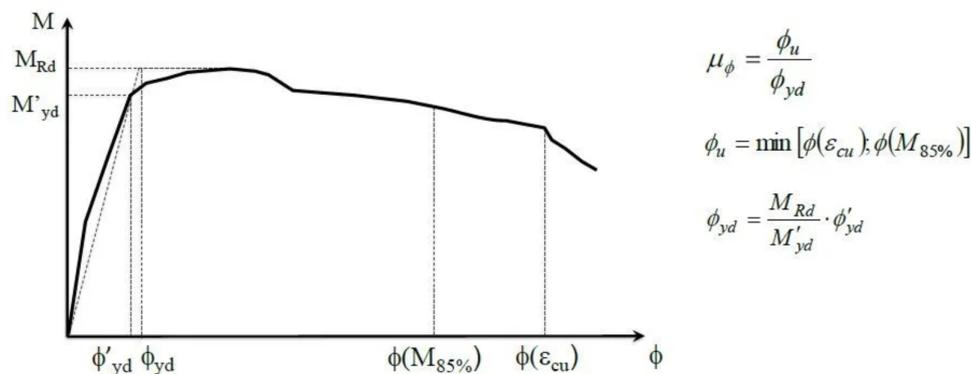


Figura 34: Momento-curvatura: fattore di duttilità di curvatura

Per tenere in considerazione il confinamento, le *NTC18* propongono due legami costitutivi differenti riportati nelle figure 35 e 36.

Il primo modello si basa sulla legge tipo “parabola-rettangolo” e mette in evidenza che nel caso di calcestruzzo confinato si raggiungono dei valori di deformazione maggiori rispetto al caso non confinato.

Il secondo, ripreso dall’annesso E dell’EC8, presenta un primo ramo ascendente parabolico a cui ne segue uno di softening oltre il picco. Le relazioni che ne descrivono l’andamento si basano su quelle proposte da Popovics nel 1973 e successivamente riprese da Mander et al. nel 1988.

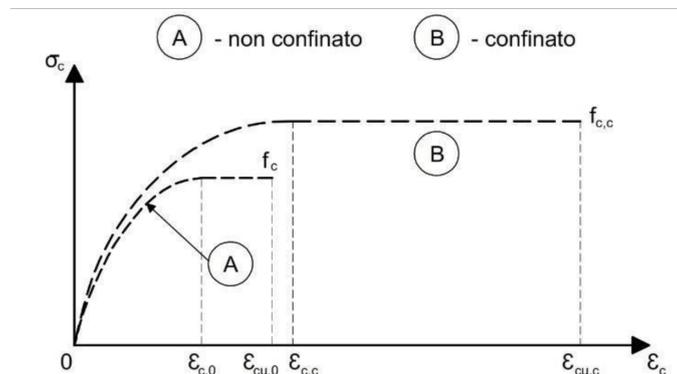


Figura 35: Modello costitutivo per calcestruzzo confinato e non confinato: tipo parabola-rettangolo

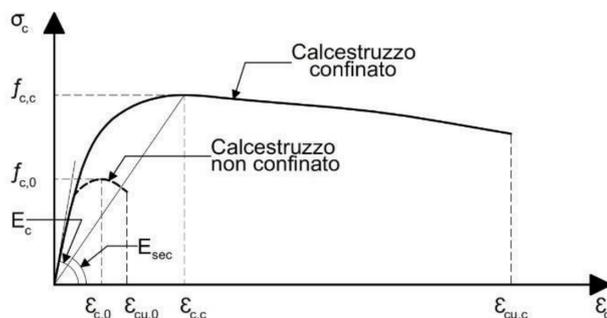


Figura 36: Modello costitutivo per calcestruzzo confinato e non confinato: EN 1998-2, Annex E

La verifica di duttilità, in termini espliciti, risulta essere soddisfatta se la capacità della struttura è maggiore della domanda, cioè se vale la seguente disequazione:

$$\mu_{\Phi} = \mu_{\Phi}(N_{Ed}) \geq \mu_{\Phi,Ed} \quad (62)$$

$$M_{Rd} = M_{Rd}(N_{Ed}) \geq M_{Ed} \quad (63)$$

Queste disequazioni sottolineano come il momento resistente, e quindi anche la curvatura, siano influenzate dallo sforzo normale agente (N_{Ed}): in particolare, un aumento di sforzo normale produce un conseguente incremento del momento flettente.

Per quanto riguarda il metodo implicito, la verifica si considera soddisfatta se vengono rispettate le regole di dettaglio costruttivo relative a ciascun elemento strutturale. In particolare, le *NTC18* definiscono le relazioni riportate in seguito nel caso di elementi trave e pilastro.

Per le travi vengono imposte le seguenti limitazioni alle barre di armatura longitudinali, indipendenti dalla domanda di duttilità μ_Φ :

$$\frac{1,4}{f_{yk}} < \rho < \rho' + \frac{3,5}{f_{yk}} \quad \text{nelle zone critiche} \quad (64)$$

$$\rho' \geq 0,5\rho \quad \text{nelle zone critiche} \quad (65)$$

$$\rho' \geq 0,25\rho \quad \text{su tutta la trave} \quad (66)$$

in cui ρ e ρ' esprimono le percentuali geometriche di armatura tesa e compressa, rispettivamente.

Per i pilastri, la normativa definisce la seguente relazione che esprime il quantitativo di armatura trasversale da garantire per soddisfare la verifica, dipendente dalla domanda di duttilità μ_Φ e dallo sforzo normale adimensionalizzato agente ν_d :

$$\alpha \omega_{wwd} \geq 30 \mu_\Phi \nu_d \epsilon_{sy} \frac{b_c}{b_0} - 0,0035 \quad (67)$$

in cui ϵ_{sy} rappresenta la deformazione a snervamento dell'acciaio teso, b_c indica la larghezza minima della sezione trasversale, mentre b_0 quella del nucleo confinato e ω_{wwd} è il rapporto meccanico di armatura trasversale ed è espresso come $\omega_{wwd} = \rho_{ww} \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$.

Normalmente, se vengono rispettate le condizioni sopraccitate, la verifica risulta essere implicitamente soddisfatta.

In alcune circostanze, però, la sola verifica del rispetto delle regole di dettaglio risulta essere meno cautelativa rispetto a quella esplicita: in particolare, ciò può accadere nel caso di verifica delle travi secondarie. Questo può essere dedotto a partire da un'analisi parametrica [6], basata sulla definizione di parametri come il quantitativo di armatura trasversale e lo sforzo normale adimensionalizzato, eseguendo un confronto tra i risultati ottenuti mediante verifica esplicita ed implicita.

3.3 Analisi storica dei modelli costitutivi

Da quasi un secolo la valutazione del comportamento di elementi in calcestruzzo confinato risulta oggetto di molteplici studi.

Le prime ricerche, che costituiscono il punto di partenza per i modelli matematici sviluppati successivamente, vennero svolte da Richart et al. (1928), considerando un confinamento generato da una pressione uniforme idrostatica. I risultati ottenuti dimostrarono che la resistenza a compressione e la corrispondente deformazione longitudinale del calcestruzzo potessero essere valutate attraverso le seguenti relazioni semplificate:

$$f'_{cc} = f'_{co} + k_1 f_1 \quad (68)$$

$$\epsilon_{cc} = \epsilon_{co} \left(1 + k_2 \frac{f_1}{f'_{co}} \right) \quad (69)$$

dove f'_{cc} rappresenta la resistenza a compressione del calcestruzzo confinato dalla pressione laterale f_1 , ϵ_{cc} è la corrispondente deformazione, f'_{co} indica la resistenza del calcestruzzo non confinato e ϵ_{co} è la relativa deformazione. Infine, k_1 e k_2 sono coefficienti che dipendono dalla miscela del calcestruzzo e da f_1 .

I primi studi furono condotti su provini di piccola scala, caricati concentricamente e in maniera monotona, spesso in assenza di armatura longitudinale: tipicamente venivano adoperate macchine di prova a carico controllato e a basse velocità. I risultati ottenuti venivano utilizzati per prevedere il comportamento degli elementi in condizioni sismiche.

Studi più recenti, invece, furono realizzati su unità di dimensioni più realistiche, ma senza simulazione delle azioni sismiche.

Grazie a ricercatori come Mander (1984), Sheikh e Uzumeri (1982) e Vallenas (1977), che effettuarono numerose prove su campioni in scala reale, fu possibile dimostrare che il confinamento risultava essere migliore se:

- l'armatura trasversale fosse inserita con una spaziatura relativamente ravvicinata;
- fossero incluse staffe supplementari sovrapposte o legami trasversali;
- le barre longitudinali fossero distribuite in maniera adeguata lungo il perimetro;

- fosse aumentato o il volume dell'armatura trasversale rispetto a quello del calcestruzzo o la resistenza allo snervamento dell'armatura trasversale;
- fossero usate spirali o staffe circolari anziché quelle rettangolari.

Fino al 1980, i parametri fondamentali necessari alla valutazione del comportamento di elementi confinati sottoposti a prove di carico e alla definizione dei modelli costitutivi analitici, erano:

- la geometria dei provini;
- il carico applicato durante la prova;
- il diametro e il passo delle staffe.

Solo dopo le ricerche svolte dagli studiosi Sheikh e Uzumeri, nel 1980, si scoprì che il problema fosse influenzato da due ulteriori variabili: la disposizione delle staffe e la distribuzione delle barre longitudinali.

Negli anni a seguire, ricercatori come Mander et al. (1988), Yong, Nour e Nawy (1988) e Razvi e Saatcioglu (1992) idearono modelli analitici in grado di descrivere al meglio il comportamento degli elementi confinati. I campi di applicazione di questi modelli risultano essere più ampi rispetto ai precedenti: infatti, possono essere validi per colonne che presentano sezioni rettangolari, quadrate e circolari. Il modello sviluppato da Mander et al. (1988) è sicuramente il più importante, ma anche quello di Razvi e Saatcioglu (1992), che prevede la definizione di una pressione laterale equivalente dipendente dalla disposizione delle staffe, ha avuto grande rilevanza.

In seguito, viene riportata la descrizione di alcuni modelli matematici proposti fino ad oggi, ottenuti tramite prove eseguite principalmente su colonne quadrate o rettangolari, che permettono di esprimere il comportamento del calcestruzzo confinato. Prima di questo, viene allegata una tabella riassuntiva dei vari modelli trattati (vedi figure 37 e 38).

I modelli analizzati risultano idonei allo studio di calcestruzzi a normale resistenza, mentre non sono ritenuti validi per quelli ad alta resistenza, dal momento che sono inclini a fornire una stima eccessiva dell'incremento di essa e della duttilità.

AUTORE	ANNO	DESCRIZIONE MODELLO
Hognestad	1951	La curva σ - ϵ assume, inizialmente, un andamento parabolico fino al raggiungimento del valore di tensione massima $f_c = 0,85 f_{ck}$, a cui corrisponde la deformazione $\epsilon_{co} = 0,2\%$. Successivamente, il comportamento può essere descritto da una relazione linearmente decrescente fino ad un valore di tensione $\sigma = 0,85 f_c$, a cui corrisponde la deformazione $\epsilon_{cu} = 0,38\%$.
Chan	1955	La campagna sperimentale, condotta su provini di geometria differente, evidenzia come il confinamento produca un effetto benefico in termini di resistenza e deformazione: in particolare, nel caso di calcestruzzo confinato da staffe rettangolari, si assiste ad un incremento di resistenza di oltre il 50% e ad un aumento di deformazione ultima di circa il 500%.
Roy e Sozen	1964	La relazione σ - ϵ è di tipo bilineare: il primo tratto è linearmente crescente fino ad un valore di tensione pari a f'_c corrispondente ad una deformazione dello 0,2%, mentre il secondo decresce sempre in maniera lineare. Le prove condotte mettono in evidenza il fatto che la duttilità del calcestruzzo confinato dipende principalmente dal passo delle staffe.
Bertero e Felippa	1964	Gli studi, basati sui risultati di Roy e Sozen (1964), mettono in evidenza un netto incremento di resistenza per il calcestruzzo confinato, dal 13% al 26% a seconda del volume di armatura trasversale. Anche nei riguardi della duttilità si osserva un notevole incremento con la combinazione di armature longitudinali e staffe.
Soliman e Yu	1968	La curva σ - ϵ è suddivisa in tre tratti: inizialmente presenta un andamento parabolico fino ad un valore di tensione massima σ_{max} , a cui corrisponde la deformazione ϵ_{ce} . Successivamente, si osserva un tratto a tensione costante che si mantiene invariato fino alla deformazione ϵ_{cs} , oltre la quale il comportamento può essere descritto da una relazione linearmente decrescente.
Kent e Park	1971	Il modello rappresenta una generalizzazione di quello ideato da Hognestad (1951). La curva σ - ϵ è suddivisa in tre regioni: la prima presenta un andamento parabolico fino alla resistenza cilindrica massima f'_c a cui corrisponde una deformazione ϵ_{co} pari a 0,2%, successivamente il comportamento è linearmente decrescente fino al raggiungimento di una tensione pari a $0,20 f'_c$ e, infine, si mantiene costante. Questo modello trascura l'incremento di resistenza del calcestruzzo, ma tiene in conto l'aumento di duttilità dovuto alla presenza delle staffe di confinamento.
Sargin	1971	La campagna sperimentale, condotta applicando carichi concentrici ed eccentrici a provini di uguale geometria ma diversa tipologia di confinamento, mostra come la resistenza media del calcestruzzo sia circa il 98% della resistenza cilindrica nel primo caso, mentre nel secondo risulta pari al 100%.
Vallenas, Bertero e Popo	1977	La campagna sperimentale è condotta su provini aventi le stesse dimensioni, ma differente quantitativo di armatura longitudinale e trasversale. I risultati mostrano un aumento di oltre il 20% della resistenza del calcestruzzo confinato e un ulteriore miglioramento medio del 7% nel caso in cui vengano aggiunte le armature longitudinali. La curva σ - ϵ è suddivisa in tre tratti: il primo presenta un andamento parabolico, successivamente il comportamento è linearmente decrescente e, infine, si mantiene costante.
Park, Priestely e Gill	1979	Il modello, che rappresenta una variazione di quello proposto da Kent e Park (1971), permette di tenere in considerazione l'aumento della resistenza e della deformazione del calcestruzzo confinato. La curva σ - ϵ assume un andamento parabolico e, successivamente, il comportamento può essere descritto da una relazione linearmente decrescente.
Sheikh e Uzumeri	1982	Il modello permette di tenere in considerazione la distribuzione dell'armatura longitudinale e la disposizione delle armature di confinamento del provino. Anche in questo modello è possibile distinguere diversi tratti: il primo è descritto da una legge parabolica fino alla deformazione ϵ_{c1} , il secondo è rappresentato da una tensione che si mantiene costante fino alla deformazione ϵ_{c2} ed è pari a f'_{cc} , mentre il terzo viene definito da un segmento di retta che decresce linearmente fino a raggiungere una tensione pari a $0,3f'_{cc}$.

Figura 37: Modelli sviluppati per il calcestruzzo confinato

AUTORE	ANNO	DESCRIZIONE MODELLO
Scott e Park	1982	Il modello permette di tenere in conto sia l'aumento di resistenza, sia quello di duttilità del calcestruzzo confinato. La curva σ - ϵ è simile a quella proposta da Kent e Park (1971): si identifica un primo tratto parabolico e un secondo linearmente decrescente. La novità di questo modello è che viene messo in evidenza l'incremento di resistenza dovuto al confinamento.
Mander e Priestley	1984	Rappresenta uno dei modelli più importanti e può essere adoperato per qualsiasi tipologia di sezione. Come novità si ha l'introduzione di una pressione laterale effettiva che tiene in considerazione il diverso metodo di confinamento. La curva che descrive il comportamento è continua, si basa su un'equazione proposta da Popovics (1973) e presenta un andamento inizialmente crescente fino alla deformazione ϵ_{cc} , oltre la quale si manifesta una decrescita.
Yong, Nour e Nawy	1988	Il modello viene descritto da una curva continua, inizialmente crescente fino alla deformazione ϵ_{cc} corrispondente al picco di tensione σ_c , successivamente, decrescente in maniera non lineare.
Saatcioglu e Razvi	1992	Può essere adoperato per qualsiasi tipologia di sezione e si basa sull'introduzione di una pressione laterale effettiva che tiene in considerazione il confinamento. La curva che descrive il comportamento può essere suddivisa in due tratti: il primo parabolico fino alla deformazione ϵ_1 , mentre il secondo linearmente decrescente.

Figura 38: Modelli sviluppati per il calcestruzzo confinato

3.3.1 Hognestad (1951)

Il modello sviluppato da Hognestad, nel 1951, è largamente utilizzato per rappresentare l'andamento della resistenza normale e per descrivere in maniera soddisfacente il comportamento del calcestruzzo confinato, come mostrato in figura 39. La curva $\sigma - \epsilon$ assume un andamento parabolico fino al picco e, successivamente, il comportamento può essere descritto con una relazione decrescente lineare. Solitamente, viene considerata una sollecitazione di compressione massima pari all'85% della resistenza cilindrica del calcestruzzo ($f_c = 0,85f_{ck}$) a cui corrisponde una deformazione (ϵ_{co}) pari a 0,2%.

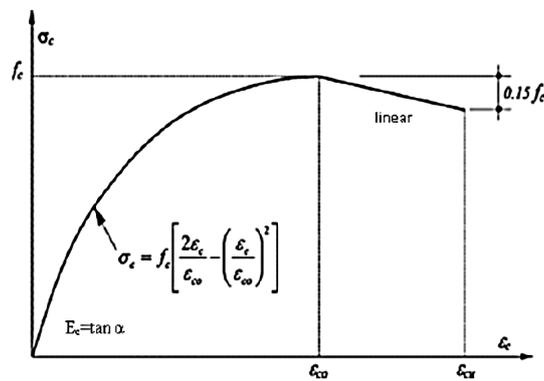


Figura 39: Modello di Hognestad (1951)

Il modulo elastico può essere valutato come:

$$E_c = \tan(\alpha) = 126800 + 460f_c \quad [kgf/cm^2] \quad (70)$$

mentre il ramo di parabola che descrive il comportamento prima del picco, può essere determinato tramite la seguente relazione:

$$\sigma_c = f_c \left[\frac{2\epsilon_c}{\epsilon_{co}} - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{co}} \right)^2 \right] \quad (71)$$

Infine, si può notare che la deformazione ultima ϵ_{cu} , corrispondente alla tensione $0,85f_c$, è pari a 0,38%.

3.3.2 Chan (1955)

Nel 1955, il ricercatore Chan svolse alcune prove di carico su provini rettangolari e cilindrici di dimensioni note, confinati in modo differente.

Nel caso di confinamento con cerchiatura rettangolare, i risultati di Chan, confrontati con il calcestruzzo non confinato, mostrarono un aumento della resistenza di oltre il 50% e un aumento della deformazione ultima di circa il 500%. Inoltre, questi aumenti rappresentavano solo il 50% e il 70%, rispettivamente, di quelli ottenuti con un equivalente rinforzo a spirale.

Per determinare l'effetto confinante, Chan ignorò la distanza tra le staffe e considerò esclusivamente il rapporto volumetrico dell'acciaio di confinamento.

3.3.3 Roy e Sozen (1964)

Nel 1964, gli studiosi Roy e Sozen svilupparono una relazione bilineare idealizzata di sforzo-deformazione per il calcestruzzo confinato tramite una staffatura quadrata, a partire da prove effettuate su prismi composti da circa il 2% di acciaio in volume.

Questo esperimento si concluse ricavando che la duttilità del calcestruzzo confinato dipendeva strettamente dalla spaziatura dell'armatura di confinamento, mentre la dimensione delle staffe e la quantità di acciaio longitudinale influenzavano in maniera limitata le proprietà del calcestruzzo.

Osservando il diagramma riportato in figura 40 è, infatti, possibile notare come il passo delle staffe comporti una variazione della curva: minore è la distanza tra le armature di confinamento, maggiore sarà la resistenza dell'elemento.

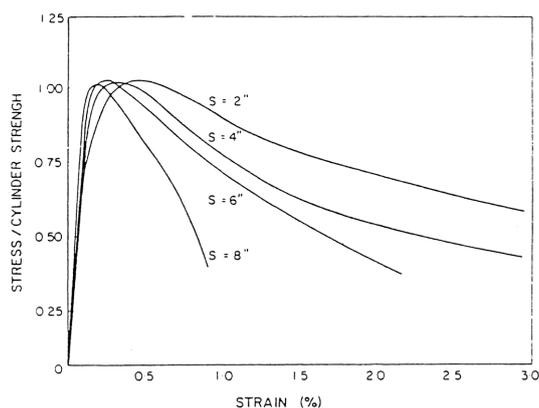


Figura 40: Relazione sforzo-deformazione: effetto della spaziatura

Dai risultati dei test si deduce, quindi, che la presenza di armatura trasversale aumenta la duttilità del calcestruzzo ma non la sua resistenza.

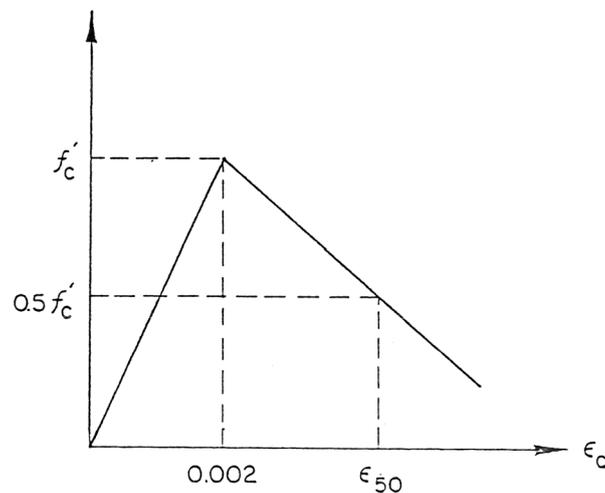


Figura 41: Modello di Roy e Sozen (1964)

Per quanto riguarda la relazione sforzo-deformazione, questa viene rappresentata in figura 41: come detto in precedenza, il comportamento può essere descritto mediante due rette, crescente nel primo tratto, fino ad una deformazione ϵ_c pari allo 0,2%, e decrescente nel secondo.

In quest'ultimo è possibile definire una deformazione ϵ_{50} , corrispondente ad una resistenza pari a $0,5 f'_c$, ottenuta come:

$$\epsilon_{50} = \frac{3}{4} \frac{\rho_s h}{s} \quad (72)$$

dove h rappresenta l'altezza totale dell'elemento, ρ_s è il rapporto tra il volume dell'armatura trasversale e quello del nucleo di calcestruzzo e s indica la distanza tra le staffe.

3.3.4 Bertero e Felippa (1964)

Sulla base degli studi condotti da Roy e Sozen, nel 1964, i ricercatori Bertero e Felippa riportarono i risultati ottenuti da prove di carico eseguite su provini di diverse dimensioni e armati con staffe quadrate e/o barre longitudinali.

Questi studi mostrarono un aumento di resistenza del calcestruzzo dal 13% al 26%,

a seconda del volume dell'armatura trasversale.

Si concluse che, al contrario delle staffe, le sole barre longitudinali non migliorarono la duttilità del calcestruzzo, mentre la combinazione di staffe e barre longitudinali ne fornirono un netto incremento.

3.3.5 Soliman e Yu (1968)

Nel 1968, i ricercatori Soliman e Yu eseguirono degli studi su elementi in calcestruzzo confinato soggetti a flessione, in modo da ricavare informazioni in merito alla relazione sforzo-deformazione.

Le prove di carico vennero condotte su provini aventi diverse dimensioni: i risultati ottenuti evidenziarono un aumento di resistenza del 28% nel caso di cerchiature rettangolari limitatamente distanziate.

La curva sforzo-deformazione proposta dai due ricercatori è mostrata nella figura 42 e le caratteristiche sono descritte nel seguito.

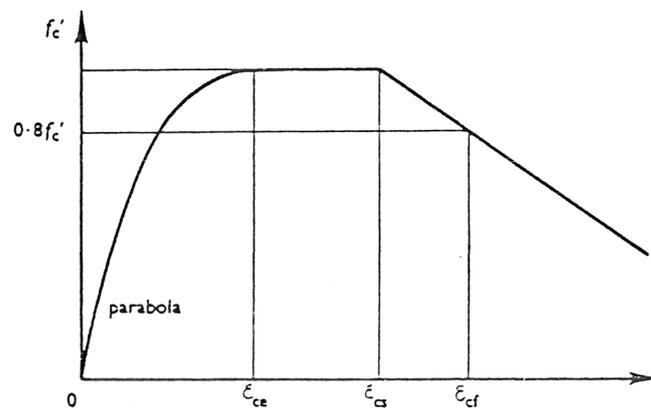


Figura 42: Modello di Soliman e Yu (1968)

Questo modello può essere suddiviso in tre regioni, ciascuna contraddistinta da un comportamento differente e limitata dai parametri indicati in seguito.

Il tratto iniziale, che si conclude con una deformazione ϵ_{ce} corrispondente al raggiungimento della resistenza cilindrica del calcestruzzo f'_c , è caratterizzato da un andamento parabolico. La deformazione ϵ_{ce} viene valutata come:

$$\epsilon_{ce} = (0,55 f'_c) \cdot 10^{-6} \quad (73)$$

Successivamente, si identifica un tratto in cui lo sforzo si mantiene costante fino alla deformazione ϵ_{cs} , valutata con la seguente relazione:

$$\epsilon_{cs} = 0,0025 (1 + q'') \quad (74)$$

Il tratto finale, invece, è contraddistinto da un comportamento linearmente decrescente ed è possibile identificare la deformazione ϵ_{cf} corrispondente all'80% della resistenza f'_c :

$$\epsilon_{cs} = 0,0045 (1 + 0,85 q'') \quad (75)$$

Infine, la tensione massima che si può sviluppare nel calcestruzzo confinato è pari a:

$$\sigma_{c,max} = 0,9 f'_c (1 + 0,05 q'') \quad (76)$$

Il parametro q'' viene espresso nel seguente modo:

$$q'' = \left(1,4 \frac{A_{cc}}{A_c} - 0,45 \right) \frac{A_s (s_0 - s)}{A_s s + 0,0028 B s^2} \quad (77)$$

in cui A_{cc} e A_c rappresentano, rispettivamente, l'area compressa di calcestruzzo confinato e quella di calcestruzzo privo di confinamento, A_s è l'area dell'armatura trasversale, B equivale alla larghezza del provino, s indica il passo delle staffe mentre s_0 rappresenta la spaziatura massima oltre la quale il confinamento risulta inefficace.

3.3.6 Kent e Park (1971)

Nel 1971, Kent e Park proposero un ulteriore modello, mostrato in figura 43, per valutare il comportamento del calcestruzzo confinato mediante staffe rettangolari. Questo rappresenta una generalizzazione del modello di Hognestad, poiché permette di descrivere in modo più completo la relazione di sforzo-deformazione dopo il picco.

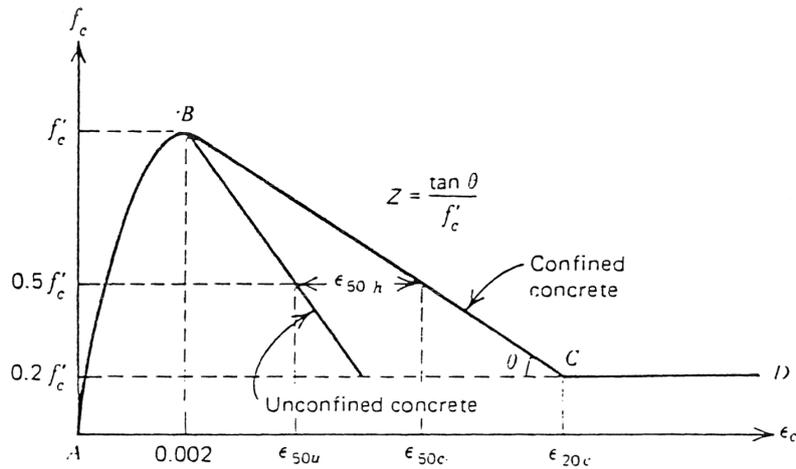


Figura 43: Modello di Kent e Park (1971)

Il legame è contraddistinto da tre diversi tratti: il primo presenta un andamento parabolico fino alla resistenza cilindrica massima f'_c [MPa] a cui corrisponde una deformazione ϵ_{co} pari a 0,2%, il secondo tratto mostra uno sviluppo linearmente decrescente fino al raggiungimento del 20% della resistenza f'_c , mentre il terzo è descritto da una retta contrassegnata da un valore di tensione pari al 20% di quella massima che si mantiene costante all'infinito.

Dalla figura 43 è, inoltre, possibile notare come il primo tratto non sia influenzato dalla presenza del confinamento e la legge analitica che ne descrive il comportamento è la seguente:

$$f_c = f'_c \left[\frac{2\epsilon_c}{\epsilon_{co}} - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{co}} \right)^2 \right] \quad \text{per } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{co} \quad (78)$$

Per quanto riguarda il secondo tratto, la relazione lineare tra sforzo e deformazione, ottenuta per via grafica valutando la deformazione corrispondente ad

una tensione di confinamento pari alla metà della resistenza massima, può essere espressa nel seguente modo:

$$\sigma_c = f'_c \left[1 - 0,5 \frac{\epsilon_c - \epsilon_{co}}{\epsilon_{50,c} - \epsilon_{50,h} - \epsilon_{co}} \right] \quad \text{per } \epsilon_{co} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{20,c} \quad (79)$$

Nel caso di calcestruzzo non confinato, la deformazione corrispondente al 50% di f'_c si ricava come:

$$\epsilon_{50,u} = \frac{3 + 0,29 f'_c}{145 f'_c - 1000} \quad (80)$$

Per sezioni quadrate, caratterizzate da un nucleo di calcestruzzo confinato di lato b , la seguente espressione permette di valutare la deformazione $\epsilon_{50,h}$:

$$\epsilon_{50,h} = \frac{3}{4} \rho_s \sqrt{\frac{b}{s}} \quad (81)$$

dove ρ_s è definito dal rapporto tra l'area delle armature trasversali A_{st} e quella del nucleo di calcestruzzo confinato.

L'influenza dell'armatura trasversale può essere valutata osservando la figura 44, in cui viene messo in evidenza come un incremento di staffatura produca un effetto benefico nei confronti della resistenza. All'aumentare del quantitativo di armatura trasversale, infatti, l'inclinazione del secondo ramo diminuisce fino a diventare orizzontale, provocando un conseguente aumento di resistenza.

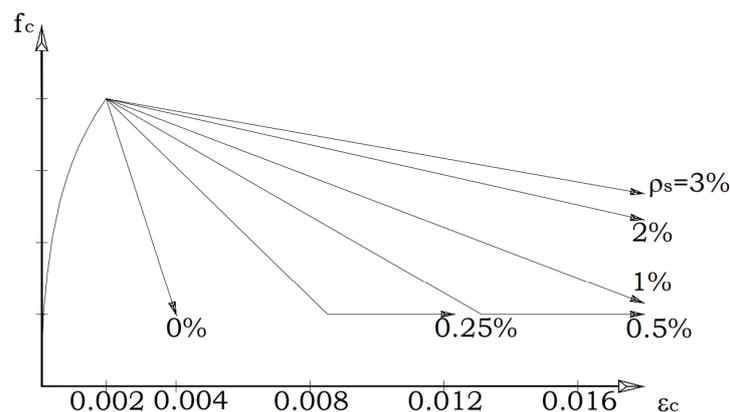


Figura 44: Modello di Kent e Park: influenza dell'armatura trasversale

Questo modello venne proposto sulla base di un'analisi di dati sperimentali esistenti. Esso incorpora molte caratteristiche introdotte dai ricercatori precedenti senza considerare, però, alcun aumento di resistenza del calcestruzzo confinato. Per quanto riguarda il ramo decrescente, questo venne sviluppato a partire dai risultati di Roy e Sozen (1964), Bertero e Felippa (1964) e Soliman e Yu (1968): è stato, infatti, assunto lineare e segue lo stesso andamento suggerito da Roy e Sozen.

Il modello di Kent e Park trascura, dunque, l'incremento di resistenza del calcestruzzo, ma tiene in conto l'aumento di duttilità dovuto alla presenza delle staffe di confinamento.

3.3.7 Sargin (1971)

Nel 1971, Sargin eseguì vari esperimenti su provini di uguale dimensione, privi di armature longitudinali, ma rinforzati lateralmente in maniera differente. Le prove vennero condotte applicando carichi concentrici ed eccentrici: nel primo caso, i risultati mostrarono come la resistenza media del calcestruzzo fosse circa il 98% della resistenza cilindrica, mentre nel secondo caso risultava essere pari al 100%.

Sargin operò un'analisi teorica dei propri risultati assumendo che l'incremento della resistenza del nucleo di calcestruzzo realmente confinato fosse 4,1 volte la pressione laterale e che i rinforzi laterali cedessero prima che venisse raggiunta la resistenza massima.

3.3.8 Vallenas, Bertero e Popov (1977)

Nel 1977, i ricercatori Vallenas, Bertero e Popov condussero prove di carico su una serie di colonne in cemento armato. Da un punto di vista geometrico, queste presentavano le stesse dimensioni, ciò che variava era la presenza, o assenza, delle armature longitudinali e la tipologia delle staffe di contenimento. Per alcune colonne i risultati evidenziarono un aumento di oltre il 20% della resistenza del nucleo di calcestruzzo e, inoltre, venne dimostrato come l'aggiunta di armature longitudinali avesse un effetto benefico nei confronti della resistenza: in particolare, si ottenne un miglioramento medio del 7%.

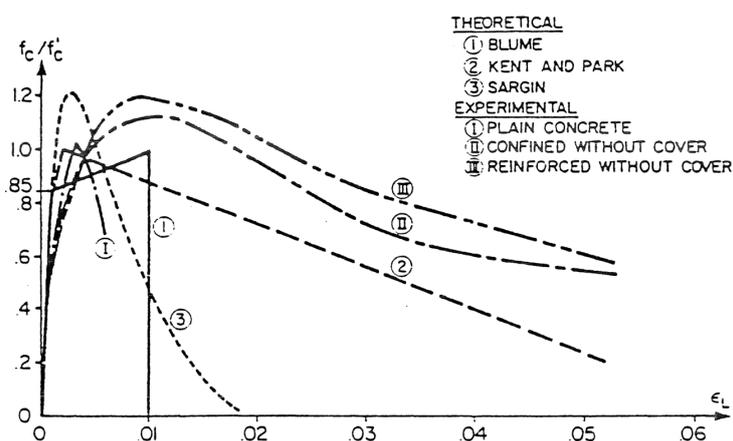


Figura 45: Confronto tra le relazioni analitiche e i risultati sperimentali

All'epoca nessuna delle curve esistenti era in grado di prevedere il comportamento ottenuto da queste prove (figura 45), perciò Vallenas, Bertero e Popov proposero una relazione sforzo-deformazione migliorata mostrata in figura 46.

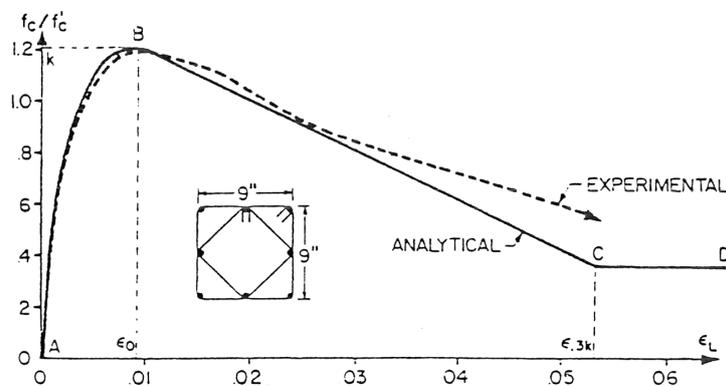


Figura 46: Modello di Vallenas, Bertero e Popov (1977)

Questo modello può essere descritto tramite tre diverse relazioni, ciascuna delle quali identifica un certo tipo di comportamento del calcestruzzo.

Il tratto iniziale (AB) è caratterizzato da un andamento parabolico. Il rapporto tra la tensione nel calcestruzzo f_c e la massima resistenza cilindrica f'_c viene valutata come:

$$\frac{f_c}{f'_c} = \frac{\left[\frac{E_c \epsilon_0}{f'_c} \left(\frac{\epsilon_L}{\epsilon_0} \right) - k \left(\frac{\epsilon_L}{\epsilon_0} \right)^2 \right]}{1 + \left[\frac{E_c \epsilon_0}{k f'_c} - 2 \right] \left(\frac{\epsilon_L}{\epsilon_0} \right)} \quad \text{per } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_0 \quad (82)$$

in cui

$$\epsilon_0 = 0,0024 + 0,006 \left(1 - \frac{0,734 s}{h} \right) \frac{\rho_s f_{yh}}{\sqrt{f'_c}} \quad (83)$$

e k , che rappresenta il rapporto tra la massima tensione sviluppata nel calcestruzzo confinato e la resistenza cilindrica, si ricava come:

$$k = 1 + 0,1096 \left(1 - 0,24 \frac{s}{h} \right) \frac{\left(\rho_s + \frac{\phi_s}{\phi_l} \rho \right) f_{yh}}{\sqrt{f'_c}} \quad (84)$$

Inoltre, E_c rappresenta il modulo di elasticità del calcestruzzo tangente nell'origine [MPa], f_{yh} è la resistenza allo snervamento dell'armatura di confinamento [MPa], s indica il passo delle staffe [mm], h rappresenta la dimensione caratteristica dell'elemento confinato [mm], ρ esprime il rapporto volumetrico dell'armatura longitudinale mentre ρ_s quello dell'armatura trasversale e ϕ_l e ϕ_s indicano, rispettivamente, il diametro delle barre longitudinali e delle staffe.

Il tratto successivo (BC) è rappresentato da un segmento di retta con andamento linearmente decrescente fino al raggiungimento di una tensione pari al 30% di quella massima. La relazione viene definita come segue:

$$\frac{f_c}{f'_c} = k \left[1 - Z \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_L}{\epsilon_0} - 1 \right) \right] \quad (85)$$

dove Z equivale a:

$$Z = \frac{0,5}{\frac{3}{4} \rho_s \sqrt{\frac{h}{s}} + \left(\frac{3+0,29f'_c}{145f'_c-1000} \right) - 0,002} \quad (86)$$

Il tratto finale, invece, viene descritto da una retta che presenta un valore costante di tensione pari al 30% di quella massima e viene descritto nel modo seguente:

$$\frac{f_c}{f'_c} = 0,3 k \quad (87)$$

3.3.9 Park, Priestely e Gill (1979)

Nel 1979, Park, Priestley e Gill proposero una variazione della relazione sforzo-deformazione di Kent e Park (1971), in modo da tenere in considerazione l'aumento della resistenza del calcestruzzo e della deformazione alla sollecitazione massima $K f'_c$, con

$$K = 1 + \rho_s \frac{f_{yh}}{f'_c} \quad (88)$$

Il modello proposto è rappresentato in figura 47 e le relazioni che governano la curva sforzo-deformazione sono riportate nel seguito.

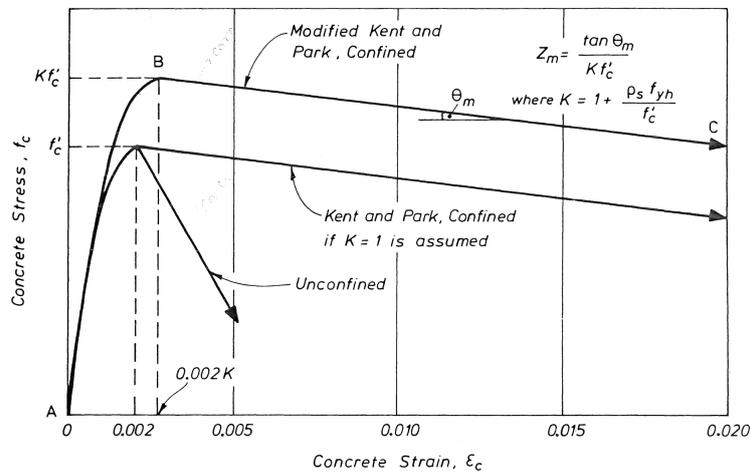


Figura 47: Modello di Park, Priestely e Gill (1979)

In questo modello è possibile osservare due tratti distinti: il primo (AB) è definito da un ramo di parabola che si sviluppa fino ad una deformazione pari a $0,002K$. La relazione che descrive l'andamento è:

$$f_c = K f'_c \left[\frac{2\epsilon_c}{0,002K} - \left(\frac{\epsilon_c}{0,002K} \right)^2 \right] \quad \text{per } \epsilon_c \leq 0,002K \quad (89)$$

Il secondo tratto (BC), invece, è evidenziato da un andamento lineare decrescente e viene espresso da:

$$f_c = K f'_c [1 - Z_m(\epsilon_c - 0,002K)] \quad \text{per } \epsilon_c > 0,002K \quad (90)$$

dove

$$Z_m = \frac{0,5}{\frac{3}{4} \rho_s \sqrt{\frac{h}{s}} + \left(\frac{3+0,29f'_c}{145f'_c-1000} \right) - 0,002K} \quad (91)$$

Gli autori considerano che la tensione massima, $K f'_c$, si sviluppi ad una deformazione di picco pari a $0,002K$: questa scelta è basata sul fatto che la parabola che definisce la regione AB mantenga lo stesso modulo di elasticità iniziale, indipendentemente dal valore di K .

3.3.10 Sheikh e Uzumeri (1982)

Nel 1982 i due ricercatori, Sheikh e Uzumeri, presentarono un modello costitutivo per descrivere il comportamento del calcestruzzo confinato di colonne a sezione quadrata, il quale permetteva di tenere in considerazione la distribuzione dell'armatura longitudinale e la disposizione delle armature di confinamento della colonna.

La campagna sperimentale, condotta applicando una compressione assiale monotona alle colonne, evidenziò come l'utilizzo di staffe quadrate, poste a distanza ravvicinata, aumentasse la resistenza e la duttilità del calcestruzzo confinato. Inoltre, anche la disposizione delle barre longitudinali lungo il perimetro del nucleo confinato comportava un aumento dell'efficienza del confinamento. Il modello proposto viene rappresentato in figura 48 e l'efficienza del confinamento può essere espressa mediante le equazioni riportate in seguito.

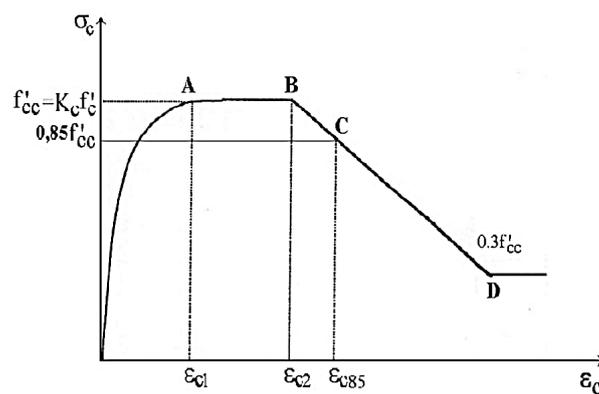


Figura 48: Modello di Sheikh e Uzumeri (1982)

La resistenza a compressione del calcestruzzo confinato f'_{cc} [MPa] viene ricavata come:

$$f'_{cc} = K_c f'_c \quad (92)$$

in cui K_c rappresenta il fattore di confinamento e indica l'incremento della resistenza dovuto alla presenza delle armature trasversali, mentre f'_c è la resistenza cilindrica del calcestruzzo a compressione.

Il fattore K_c si ottiene dalla seguente espressione:

$$K_c = 1 + \frac{b_0^2}{140P_{cc}} \left[\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{5,5b_0^2} \right) \left(1 - \frac{s}{2b_0} \right) \right] \sqrt{\rho_{st} f_{yk}} \quad (93)$$

dove b_i rappresenta la distanza laterale tra le barre di armatura longitudinali [mm], mentre b_0 è la dimensione del provino di calcestruzzo [mm], s indica il passo delle staffe [mm] e ρ_{st} è il rapporto volumetrico di armatura trasversale.

Prima di precisare le relazioni analitiche che descrivono il modello, è necessario definire la forza di compressione assiale P_{cc} applicata ai provini di calcestruzzo confinato:

$$P_{cc} = f'_c A_{cc} \quad (94)$$

dove A_{cc} rappresenta l'area del nucleo confinato di calcestruzzo.

Anche in questo modello è possibile distinguere diversi tratti: il primo viene descritto mediante una legge parabolica fino alla deformazione ϵ_{c1} , il secondo è rappresentato da una tensione che si mantiene costante fino alla deformazione ϵ_{c2} ed è pari a quella di compressione massima del calcestruzzo confinato f'_{cc} , mentre il terzo viene definito da un segmento di retta che decresce linearmente fino a raggiungere una tensione pari a $0,3f'_{cc}$. Una volta raggiunta, la tensione si mantiene costante all'infinito.

Le deformazioni necessarie all'analisi del modello sono ricavate attraverso le espressioni definite nel seguito. Quella che delimita la fine del tratto parabolico, cioè ϵ_{c1} , si ottiene come:

$$\epsilon_{c1} = 80 K_c f'_c \cdot 10^{-6} \quad (95)$$

Per quanto riguarda la deformazione ϵ_{c2} , questa viene ricavata come:

$$\epsilon_{c2} = \epsilon_{c1} \left[1 + \frac{248}{b_i} \left[1 - 5 \left(\frac{s}{b_0} \right)^2 \right] \frac{\rho_{st} f_{yk}}{\sqrt{f_c}} \right] \quad (96)$$

Infine, la deformazione corrispondente all'85% della resistenza f'_{cc} è pari a:

$$\epsilon_{c85} = 0,225 \rho_{st} \sqrt{\frac{b_0}{s}} + \epsilon_{c2} \quad (97)$$

Le relazioni analitiche che descrivono il modello sono:

$$\sigma_{cc} = f'_{cc} \left[\frac{2\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^2 \right] \quad \text{per } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c1} \quad (98)$$

$$\sigma_{cc} = K_c f'_{cc} \quad \text{per } \epsilon_{c1} < \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \quad (99)$$

$$\sigma_{cc} = f'_{cc} [1 - Z(\epsilon_c - \epsilon_{c2})] \quad \text{per } \epsilon_c > \epsilon_{c2} \quad (100)$$

dove Z risulta pari a:

$$Z = \frac{0,5}{\frac{3}{4} \rho_{st} \sqrt{\frac{b_0}{s}}} \quad (101)$$

I provini utilizzati negli esperimenti condotti da Sheikh e Uzumeri, di dimensioni più realistiche rispetto a quelli adottati in precedenza, hanno evidenziato in maniera chiara il miglioramento della resistenza e della duttilità dovuto al confinamento.

Nel modello riportato in figura 48, come già detto in precedenza, si osserva un plateau plastico dovuto all'utilizzo di staffe ad alto limite di snervamento ($f_{yh}=520$ o 700 MPa). Questo nasce dal fatto che, quando il calcestruzzo perviene alla sua massima resistenza, l'acciaio si trova ancora al di sotto del limite di snervamento, permettendo così un aumento della pressione di confinamento e quindi della deformazione longitudinale e laterale.

3.3.11 Scott e Park (1982)

Nel 1982, Scott e Park testarono dei campioni quasi a grandezza naturale basati su colonne di edifici reali: modificarono le equazioni ottenute da Kent e Park (1971), in modo da tenere in conto sia dell'aumento di resistenza e sia di quello di duttilità.

Il modello ottenuto dai due ricercatori è riportato in figura 49.

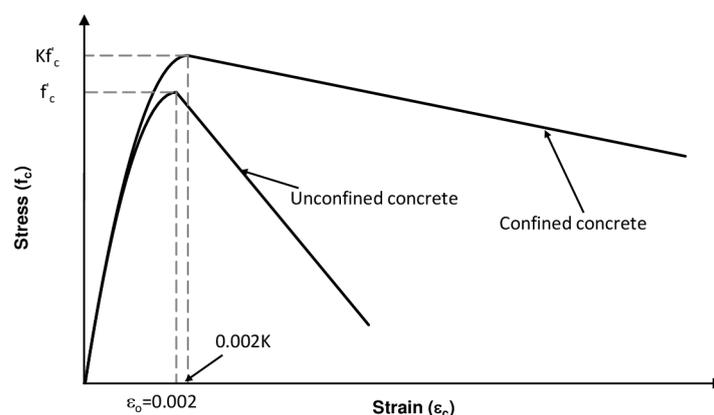


Figura 49: Modello di Scott e Park (1982) - Modello modificato di Kent e Park

Osservando il modello si nota come l'andamento di entrambe le curve sia simile a quello proposto da Kent e Park (1971): in entrambi i casi, infatti, si identifica un primo tratto parabolico mentre il secondo è linearmente decrescente. La differenza sostanziale tra i due modelli è che, in quello di Scott e Park, viene messo in evidenza l'incremento di resistenza dovuto al confinamento dipendente dal fattore K .

3.3.12 Mander e Priestley (1984)

A partire dal 1984, i ricercatori Mander e Priestley, svilupparono un modello teorico utile ad analizzare e a valutare il comportamento di elementi in calcestruzzo armato confinato soggetti a carichi di compressione monoassiale. Da un punto di vista costruttivo, la sezione di calcestruzzo può essere confinata in qualsiasi modo: con cerchiature a spirale, circolari o rettangolari e, eventualmente, possono essere adoperate legature trasversali supplementari. Per tenere in considerazione la diversa tipologia di confinamento, viene definita una pressione laterale

effettiva dipendente dalla disposizione delle armature longitudinali e trasversali.

Il modello comportamentale suggerito dagli autori è rappresentato in figura 50 e si basa su un'equazione proposta da Popovics nel 1973.

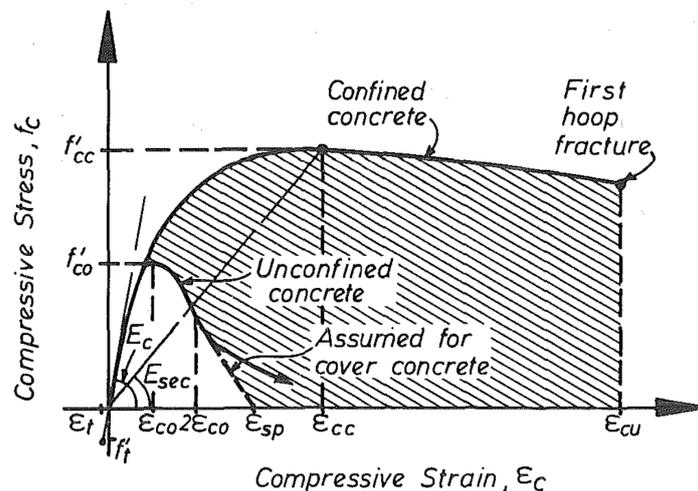


Figura 50: Mander e Priestley (1984)

Nel caso di prova di carico quasi statica, lo sforzo longitudinale di compressione del calcestruzzo f_c può essere ottenuto come:

$$f_c = \frac{f'_{cc} x r}{r - 1 + x^r} \quad (102)$$

dove f'_{cc} rappresenta la massima resistenza a compressione del calcestruzzo confinato, x è pari al rapporto tra la deformazione longitudinale a compressione del calcestruzzo ϵ_c e ϵ_{cc} , cioè quella corrispondente alla massima resistenza f'_{cc} , e r è funzione del rapporto tra moduli di elasticità.

$$x = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cc}} \quad (103)$$

$$\epsilon_{cc} = \epsilon_{co} \left[1 + 5 \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right] \quad (104)$$

in cui f'_{co} e ϵ_{co} indicano la resistenza a compressione del calcestruzzo non confinato e la corrispettiva deformazione.

Inoltre

$$r = \frac{E_c}{E_c - E_{c,sec}} \quad (105)$$

dove E_c rappresenta il modulo di elasticità del calcestruzzo non confinato, mentre $E_{c,sec}$ è quello secante. Tali moduli, espressi in MPa, sono ricavati come segue:

$$E_c = 5000\sqrt{f'_{co}} \quad (106)$$

$$E_{c,sec} = \frac{f'_{cc}}{\epsilon_{cc}} \quad (107)$$

Per individuare la pressione laterale effettiva dovuta al confinamento viene utilizzato un approccio analogo a quello impiegato da Sheikh e Uzumeri (1982).

Le armature trasversali, soggette a trazione a causa dell'espansione laterale del calcestruzzo compresso, inducono sforzi di compressione al nucleo confinato: la massima pressione nasce proprio qui, cioè nella zona in cui le tensioni risultano essere interamente sviluppate.

A seguito delle indagini sperimentali, gli autori dimostrarono come il confinamento realizzato mediante l'impiego di staffe circolari fosse più efficace rispetto a quello ottenuto con le staffe rettangolari: questa differenza può essere intuita facilmente osservando le figure 51 e 52 in cui si nota che, nel caso di staffe circolari, si sviluppa una pressione uniformemente distribuita su tutto il nucleo confinato, mentre, con le staffe di forma rettangolare, il confinamento produce un'azione concentrata in corrispondenza delle armature longitudinali. Oltre a ciò, un ulteriore parametro che influenza l'effetto del confinamento è l'interasse tra le staffe: maggiore è il passo tra le armature trasversali, minore risulta essere l'azione confinante.

La pressione laterale effettiva f'_l dovuta al confinamento viene valutata come:

$$f'_l = f_l k_e \quad (108)$$

dove f_l indica la tensione laterale sviluppata dalle staffe, che si presume sia uniformemente distribuita sull'intera area del nucleo di calcestruzzo, mentre k_e rappresenta il coefficiente di efficacia del confinamento e si calcola come:

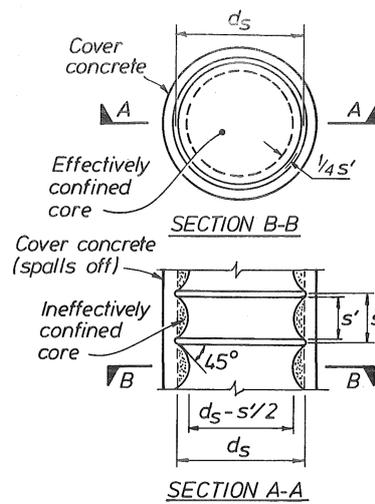


Figura 51: Nucleo di calcestruzzo effettivamente confinato da staffe circolari

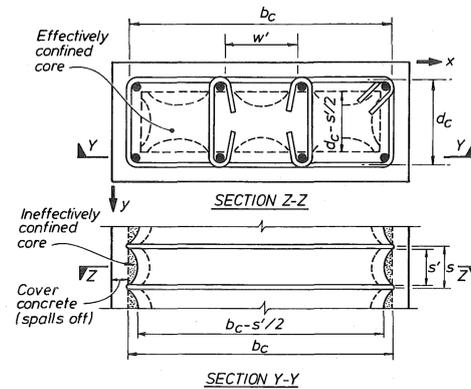


Figura 52: Nucleo di calcestruzzo effettivamente confinato da staffe rettangolari

$$k_e = \frac{A_e}{A_{cc}} \quad (109)$$

in cui A_e è l'area del nucleo di calcestruzzo efficacemente confinato, mentre A_{cc} si ottiene da:

$$A_{cc} = A'_c(1 - \rho_{cc}) \quad (110)$$

con ρ_{cc} che esprime il rapporto tra l'area di armatura longitudinale e quella di calcestruzzo confinato dalle staffe e A'_c che rappresenta l'area di calcestruzzo individuata dalla linea media dell'armatura trasversale.

Nel caso di armatura di confinamento circolare, si ottengono le seguenti relazioni:

$$A_e = \frac{\pi}{4} \left(d_s - \frac{s'}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} d_s^2 \left(1 - \frac{s'}{2d_s} \right)^2 \quad (111)$$

$$A_{cc} = \frac{\pi}{4} d_s^2 (1 - \rho_{cc}) \quad (112)$$

$$k_e = \frac{\left(1 - \frac{s'}{2d_s} \right)^2}{1 - \rho_{cc}} \quad (113)$$

dove s' indica la distanza netta verticale tra le staffe, mentre d_s rappresenta il diametro dell'armatura trasversale.

Nell'ipotesi in cui la pressione laterale f_l sia tale da far sopraggiungere lo snervamento nelle staffe, può valere il seguente equilibrio alla traslazione:

$$2f_{yh}\omega_{sp} = f_l s d_s \quad (114)$$

dove ω_{sp} rappresenta l'area dell'armatura trasversale, s indica il passo delle staffe e f_{yh} indica la tensione di snervamento di quest'ultime.

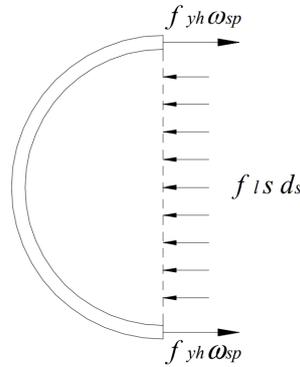


Figura 53: Equilibrio delle forze alla traslazione orizzontale

Sviluppando i calcoli si ottiene che la pressione laterale risulta essere equivalente a:

$$f_l = \frac{1}{2} \rho_s f_{yh} \quad (115)$$

dove ρ_s esprime il rapporto tra il volume delle staffe e quello del calcestruzzo confinato, assunto pari a $\frac{4\omega_{sp}}{d_s s}$.

Infine, la pressione laterale effettiva f'_l è ottenuta da:

$$f'_l = \frac{1}{2} k_e \rho_s f_{yh} \quad (116)$$

Per poter valutare la resistenza a compressione f_{cc} del calcestruzzo confinato, viene adoperato un modello costitutivo che coinvolge una specifica superficie di rottura per sollecitazioni multiassiali di compressione: questa è la superficie a “cinque parametri” sviluppata da William e Warnke (1975).

Nel caso di confinamento con staffe circolari, che garantiscono una pressione uniformemente distribuita all'intero nucleo di calcestruzzo, la resistenza a compressione del calcestruzzo confinato è data dalla seguente relazione:

$$f'_{cc} = f'_{co} \left(-1,254 + 2,254 \sqrt{1 + \frac{7,94 f'_l}{f'_{co}}} - 2 \frac{f'_l}{f'_{co}} \right) \quad (117)$$

in cui f'_{co} è la resistenza a compressione del calcestruzzo non confinato.

Nel caso di confinamento con staffe rettangolari, la valutazione di f'_{cc} è più complessa. Innanzitutto, è necessario definire l'area del nucleo di calcestruzzo confinato sul piano orizzontale posto ad una distanza media tra le armature trasversali:

$$A_e = \left(b_c d_c - \sum_{i=1}^n \frac{w_i'^2}{6} \right) \left(1 - \frac{s'}{2b_c} \right) \left(1 - \frac{s'}{2d_c} \right) \quad (118)$$

dove

$$A_i = \sum_{i=1}^n \frac{w_i'^2}{6} \quad (119)$$

rappresenta l'area di calcestruzzo non confinato nel medesimo piano, b_c e d_c ($b_c \geq d_c$) indicano le dimensioni del nucleo valutate a partire dalla linea d'asse delle armature longitudinali, w_i' esprime la distanza netta tra due barre adiacenti e n è il numero totale delle barre.

Con riferimento alle equazioni (109) e (110) si può esprimere il coefficiente k_e come:

$$k_e = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{w_i'^2}{6b_c d_c}\right) \left(1 - \frac{s'}{2b_c}\right) \left(1 - \frac{s'}{2d_c}\right)}{(1 - \rho_{cc})} \quad (120)$$

Successivamente, è necessario introdurre i rapporti di armatura nelle due direzioni:

$$\rho_{sx} = \frac{A_{sx}}{s d_c} \quad (121)$$

$$\rho_{sy} = \frac{A_{sy}}{s b_c} \quad (122)$$

in cui A_{sx} e A_{sy} rappresentano le aree totali di armatura trasversale nelle due direzioni.

Anche in questo caso, vale l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$f_{yh} A_{sx} = f_{lx} s d_c \quad (123)$$

$$f_{yh} A_{sx} = f_{lx} s b_c \quad (124)$$

da cui è possibile ricavare:

$$f_{lx} = \rho_{sx} f_{yh} \quad (125)$$

$$f_{ly} = \rho_{sy} f_{yh} \quad (126)$$

e quindi le relative pressioni laterali di confinamento effettive:

$$f_{lx} = k_e \rho_{sx} f_{yh} \quad (127)$$

$$f_{ly} = k_e \rho_{sy} f_{yh} \quad (128)$$

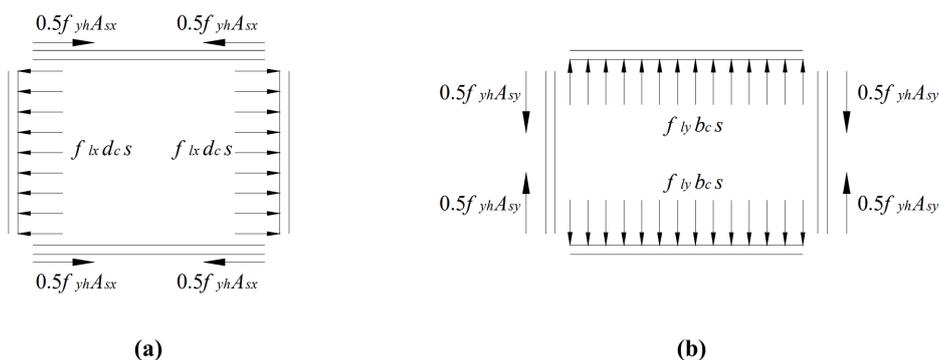


Figura 54: Equilibrio delle forze alla traslazione orizzontale: (a) nella direzione x, (b) nella direzione y

Nel caso di confinamento con armature trasversali rettangolari, la resistenza a compressione del calcestruzzo confinato f'_{cc} si ottiene in maniera grafica, adoperando le curve di figura 55.

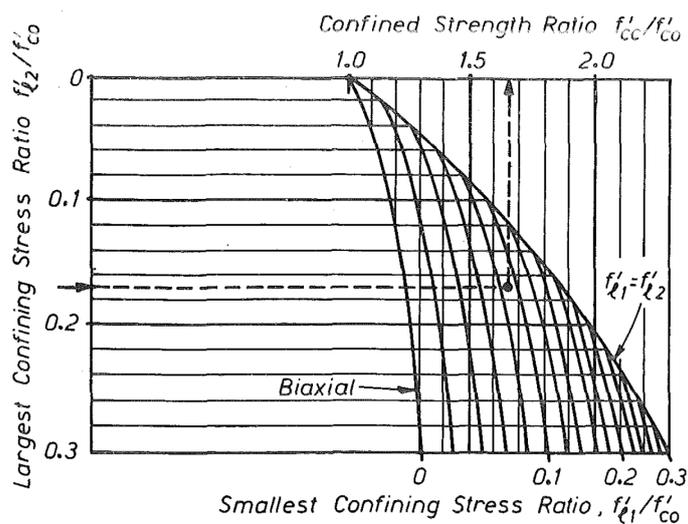


Figura 55: Determinazione di f'_{cc} (staffe rettangolari)

3.3.13 Yong, Nour e Nawy (1988)

Il modello proposto da Yong, Nour e Nawy, del 1988, può essere applicato esclusivamente per colonne a sezione quadrata e viene mostrato in figura 56.

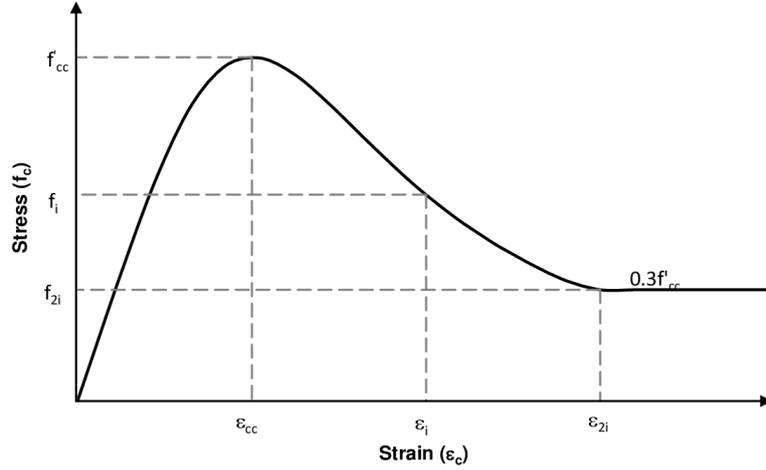


Figura 56: Modello di Yong, Nour e Nawy (1988)

Come per i modelli precedenti, anche in questo caso è possibile esprimere la resistenza del calcestruzzo confinato in funzione di quella dell'elemento non confinato, cioè:

$$f_{cc} = f_c k_s \quad (129)$$

dove k_s rappresenta il fattore di incremento della resistenza ed è pari a

$$k_s = 1 + 0,11 \left(1 - \frac{0,254s}{h''} \right) \left(\rho_{st} + \frac{n_{st} \phi_{st}}{0,31496s \phi_{long}} \rho_{cc} \right) \frac{f_{yk}}{\sqrt{f_c}} \quad (130)$$

dove h'' rappresenta la distanza tra le staffe.

Per quanto riguarda la deformazione del calcestruzzo non confinato ϵ_c , gli autori propongono di adoperare un valore pari a 0,00265. Questo è utile per la valutazione di ϵ_{cc} , cioè della deformazione che si sviluppa in presenza di confinamento, che dipende dalla stessa ϵ_c e dall'aumento della resistenza:

$$\epsilon_{cc} = \epsilon_c + \frac{0,0035 \left(1 - \frac{0,734s}{h''} \right) (145 \rho_{st} f_{yk})^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{145 f_c}} \quad (131)$$

Il modulo elastico del calcestruzzo viene valutato come:

$$E_c = 36,78 w_c^{1,5} \sqrt{f_c} \quad (132)$$

in cui w_c indica la densità del calcestruzzo.

Definiti tutti i parametri, è possibile esprimere le equazioni che identificano la curva proposta dagli autori, in base al valore di deformazione considerato.

Per $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{cc}$, la tensione σ_{cc} è pari a:

$$\sigma_{cc} = f_{cc} \frac{A \frac{\epsilon}{\epsilon_{cc}} + B \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{cc}} \right)^2}{1 + (A - 2) \frac{\epsilon}{\epsilon_{cc}} + (B + 1) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{cc}} \right)^2} \quad (133)$$

Quando $\epsilon > \epsilon_{cc}$, la tensione è pari al valore massimo tra i due riportati in seguito:

$$\sigma_{cc} = f_{cc} \frac{C \frac{\epsilon}{\epsilon_{cc}} + D \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{cc}} \right)^2}{1 + (C - 2) \frac{\epsilon}{\epsilon_{cc}} + (D + 1) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{cc}} \right)^2} \quad (134)$$

$$\sigma_{cc} = 0,30 f_{cc} \quad (135)$$

I coefficienti che entrano in gioco sono definiti nel modo seguente:

$$A = E_c \frac{\epsilon_{cc}}{f_{cc}} \quad (136)$$

$$B = \left[\frac{(A - 1)^2}{0,55} \right] - 1 \quad (137)$$

$$C = \frac{(\epsilon_{2i} - \epsilon_i)}{\epsilon_{cc}} \left[\frac{\epsilon_{2i} E_i}{(f_{cc} - f_i)} - \frac{4\epsilon_i E_{2i}}{(f_{cc} - f_{2i})} \right] \quad (138)$$

$$D = (\epsilon_i - \epsilon_{2i}) \left[\frac{E_i}{(f_{cc} - f_i)} - \frac{4E_{2i}}{(f_{cc} - f_{2i})} \right] \quad (139)$$

con

$$f_i = f_{cc} \left[0,25 \left(\frac{f_c}{f_{cc}} \right) + 0,4 \right] \quad (140)$$

$$\epsilon_i = k_s \left[1,4 \left(\frac{\epsilon_{cc}}{k_s} \right) + 0,0003 \right] \quad (141)$$

$$f_{2i} = f_{cc} \left[0,0025 \left(\frac{f_c}{1000} \right) - 0,065 \right] \geq 0,3f_{cc} \quad (142)$$

$$\epsilon_{2i} = 2\epsilon_i - \epsilon_{cc} \quad (143)$$

$$E_i = \frac{f_i}{\epsilon_i} \quad (144)$$

$$E_{2i} = \frac{f_{2i}}{\epsilon_{2i}} \quad (145)$$

3.3.14 Saatcioglu e Razvi (1992)

Nel 1992, i ricercatori Saatcioglu e Razvi condussero diversi studi su provini di calcestruzzo armato confinato, in modo da ricavare informazioni riguardo alla curva sforzo-deformazione. Il modello proposto venne sviluppato a seguito di una campagna sperimentale che prevedeva prove di compressione monoassiale su provini di geometrie differenti, e si basa sulla definizione di una pressione laterale di confinamento effettiva che nasce per opera delle staffe.

Una volta applicata la forza di compressione in direzione longitudinale, nel provino si sviluppano deformazioni nella medesima direzione che comporterebbero la nascita di dilatazioni trasversali, limitate, però, dalla presenza delle staffe. In questo modo il provino risulta sottoposto ad uno stato di sollecitazione triassiale costituito da compressione monoassiale e pressione laterale.

Nel caso di materiale elastico lineare e isotropo, sottoposto ad uno stato di sollecitazione monoassiale e triassiale, si può definire la seguente relazione:

$$\frac{-\mu f_{u2}}{E} = \frac{f_{t1} - \mu(f_{t2} + f_{t1})}{E} \quad (146)$$

con

$$f_{t2} = f_{u2} + k'_1 f_{t1} \quad (147)$$

$$k'_1 = \frac{1 - \mu}{\mu} \quad (148)$$

dove k'_1 è funzione del coefficiente di Poisson μ , E è il modulo di elasticità, mentre f_{u2} , f_{t1} e f_{t2} rappresentano gli sforzi che si sviluppano in condizioni monoassiali e triassiali nelle due direzioni.

Considerando l'equazione (147), è possibile esprimere la resistenza a compressione del calcestruzzo confinato come segue:

$$f'_{cc} = f'_{c0} + k_1 f_l \quad (149)$$

dove f'_{cc} e f'_{c0} rappresentano, rispettivamente, le resistenze del calcestruzzo confinato e non confinato, mentre k_1 è funzione, come prima, del coefficiente di Poisson. Questa espressione risulta idonea nel caso in cui la pressione laterale agente sul nucleo di calcestruzzo fosse uniforme.

Sezioni circolari

Per sezioni circolari, l'equazione (149) risulta valida poiché la pressione laterale che si sviluppa è uniformemente distribuita sull'intero perimetro del nucleo. Questa pressione viene definita mediante l'uso delle equazioni cardinali della statica, considerando l'equilibrio alla traslazione delle forze definite in figura 57.

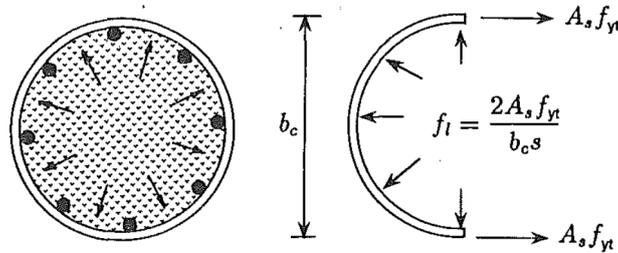


Figura 57: Forze agenti su una sezione circolare

Sezioni quadrate e rettangolari

Per le sezioni quadrate e rettangolari, la valutazione della pressione di confinamento è più complessa. Per far fronte al problema, viene definita una pressione laterale equivalente dipendente dalla distribuzione della pressione stessa: osservando le figure 58, 59 e 60, è possibile notare come questa non sia uniformemente

distribuita sull'intera lunghezza, bensì risulta essere maggiore dove sono presenti le barre longitudinali e minore nelle zone tra esse. Pertanto, è possibile dedurre che l'azione confinante è intimamente collegata alla rigidità flessionale dell'armatura trasversale, e quindi alla sua dimensione e alla configurazione della sezione.

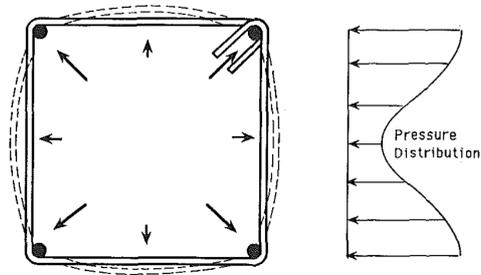


Figura 58: Distribuzione della pressione laterale (sezione quadrata)

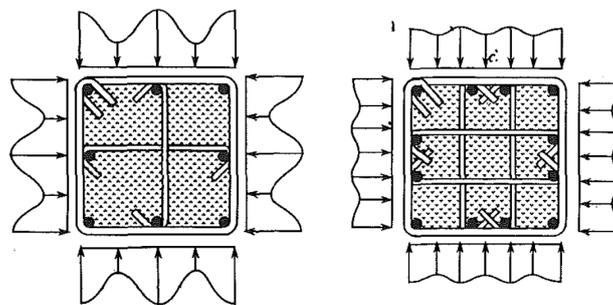


Figura 59: Distribuzione della pressione laterale con diversa configurazione di armatura

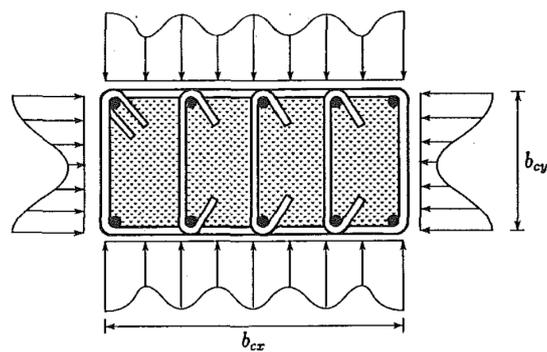


Figura 60: Distribuzione della pressione laterale (sezione rettangolare)

Il ragionamento, ovviamente, deve essere esteso all'intero elemento tridimensionale: in tal caso, la distribuzione delle pressioni può essere approssimata a quella riportata in figura 61, in cui si osserva una variazione lungo l'altezza del provino.

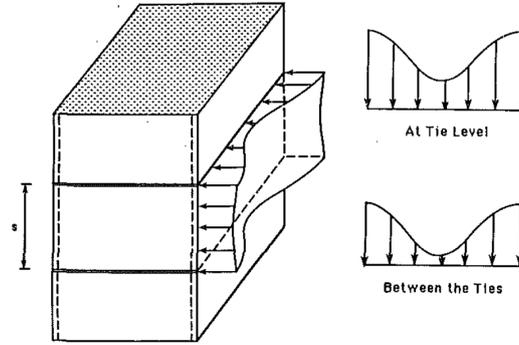


Figura 61: Distribuzione della pressione laterale sull'elemento tridimensionale

L'equazione che esprime la resistenza a compressione del calcestruzzo è:

$$f'_{cc} = f'_{c0} + k_1 f_{le} \quad (150)$$

con

$$k_1 = 6,7(f_{le})^{-0,17} \quad (151)$$

La pressione laterale di confinamento f_{le} non corrisponde a quella media, bensì risulta essere inferiore ad essa e viene ricavata come:

$$f_{le} = k_2 f_l \quad (152)$$

in cui f_l rappresenta la pressione laterale media di confinamento, mentre k_2 è un coefficiente riduttivo. Questi parametri sono ottenuti come:

$$f_l = \frac{\sum A_s f_{yt} \sin \alpha}{b_c s} \quad (153)$$

$$k_2 = 0,26 \sqrt{\left(\frac{b_c}{s}\right) \left(\frac{b_c}{s_l}\right) \left(\frac{1}{f_l}\right)} \leq 1 \quad (154)$$

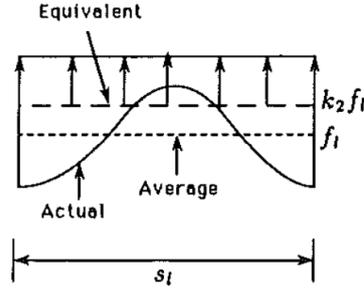


Figura 62: Distribuzione della pressione laterale effettiva, equivalente e media

dove s indica il passo delle staffe, s_l rappresenta la distanza tra le armature longitudinali e b_c è la base della sezione.

Nel caso di sezioni rettangolari, è necessario valutare la pressione laterale nelle due diverse direzioni, f_{lex} e f_{ley} , con la componente relativa al lato lungo dominante rispetto a quella del lato corto. Una volta definite, la pressione laterale equivalente viene calcolata come:

$$f_{le} = \frac{f_{lex}b_{cx} + f_{ley}b_{cy}}{b_{cx} + b_{cy}} \quad (155)$$

dove b_{cx} e b_{cy} sono le dimensioni del nucleo di calcestruzzo confinato.

Le pressioni laterali di confinamento nelle due direzioni sono definite nel modo seguente:

$$f_{lex} = 2f_{lx}k_{2x} \quad (156)$$

$$f_{ley} = 2f_{ly}k_{2y} \quad (157)$$

mentre i coefficienti riduttivi k_{2x} e k_{2y} sono pari a:

$$k_{2x} = 0,26 \sqrt{\left(\frac{b_{cx}}{s}\right) \left(\frac{b_{cx}}{s_{lx}}\right) \left(\frac{1}{f_{lx}}\right)} \leq 1 \quad (158)$$

$$k_{2y} = 0,26 \sqrt{\left(\frac{b_{cy}}{s}\right) \left(\frac{b_{cy}}{s_{ly}}\right) \left(\frac{1}{f_{ly}}\right)} \leq 1 \quad (159)$$

con s_{lx} e s_{ly} pari alle distanze tra le barre longitudinali in direzione x e y, rispettivamente.

Il modello proposto da Saatcioglu e Razvi (1992), riportato in figura 63, mette in evidenza l'incremento di deformabilità e di resistenza nel caso di confinamento del calcestruzzo.

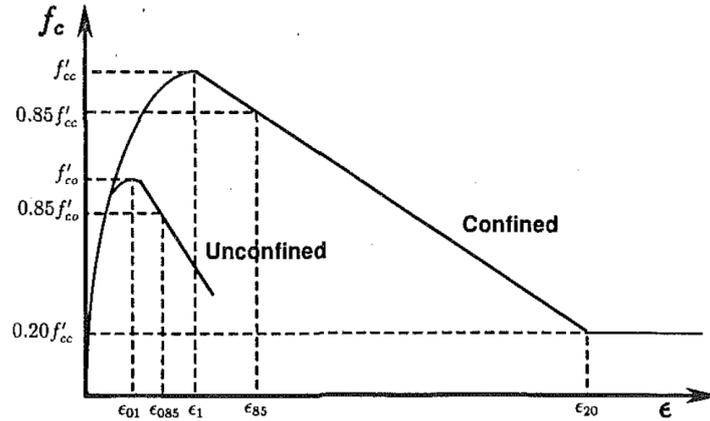


Figura 63: Modello di Saatcioglu e Razvi (1992)

La resistenza massima f'_{cc} del calcestruzzo confinato è pari a:

$$f'_{cc} = f'_{c0} \left[1 + \left(\frac{k_1 f_{le}}{f'_{c0}} \right) \right] \quad (160)$$

A partire dalle deformazioni della sezione non confinata, è possibile valutare i corrispettivi valori relativi all'elemento confinato. La deformazione ϵ_1 , proporzionale al picco di resistenza in caso di confinamento, viene valutata come:

$$\epsilon_1 = \epsilon_{01}(1 + 5K) \quad (161)$$

con $K = \frac{k_1 f_{le}}{f'_{c0}}$ e ϵ_{01} pari alla deformazione corrispondente al picco di resistenza del provino di calcestruzzo non confinato.

Per quanto riguarda la deformazione ϵ_{85} , proporzionale all'85% della resistenza massima f'_{cc} dell'elemento confinato, è possibile definire la seguente relazione:

$$\epsilon_{85} = \epsilon_{085} + 260\rho\epsilon_1 \quad (162)$$

dove $\rho = \frac{\sum A_s s}{s(b_{cx} + b_{cy})}$, mentre ϵ_{085} , in mancanza di dati sperimentali, può essere considerato pari a 0,00306 e indica la deformazione corrispondente a $0,85f'_{c0}$, cioè all'85% della resistenza massima del calcestruzzo in condizioni non confinate.

La curva $\sigma - \epsilon$ è suddivisa in due tratti che possono essere espressi mediante le relazioni riportate in seguito. Il primo, valido per $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_1$, presenta un andamento parabolico definito da:

$$\sigma_{cc} = f'_{cc} \left[2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_1} \right) - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_1} \right)^2 \right] \quad (163)$$

Quando $\epsilon > \epsilon_1$, l'andamento è linearmente decrescente e la tensione è pari al valore massimo tra i due riportati in seguito:

$$\sigma_{cc} = f'_{cc} \left[1 - 0,15 \frac{\epsilon - \epsilon_1}{\epsilon_{85} - \epsilon_1} \right] \quad (164)$$

$$\sigma_{cc} = 0,20 f'_{cc} \quad (165)$$

Di seguito viene riportata una tabella di riepilogo in cui sono messi in evidenza i parametri che influenzano maggiormente i modelli comportamentali analizzati in termini di tensione massima, deformazione relativa alla tensione massima e deformazione ultima. I parametri sono: il diametro, il passo, lo snervamento e la configurazione delle staffe, il numero e la configurazione delle barre longitudinali. La tabella richiama i modelli più importanti tra quelli descritti in precedenza.

AUTORE	PARAMETRI	Φ staffe	Passo staffe	Snerv. staffe	Config. staffe	n barre long.	Config. barre
Bertero e Felippa (1964)	Tensione di picco	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Deformazione al picco	✓	✓	✓	✓	-	-
	Deformazione ultima	✓	✓	✓	✓	-	-
Kent e Park (1971)	Tensione di picco	-	-	-	-	-	-
	Deformazione al picco	-	-	-	-	-	-
	Deformazione ultima	✓	✓	-	✓	-	-
Sheikh e Uzumeri (1982)	Tensione di picco	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Deformazione al picco	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Deformazione ultima	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Scott e Park (1982)	Tensione di picco	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Deformazione al picco	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Deformazione ultima	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Mander e Priestley (1984)	Tensione di picco	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Deformazione al picco	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Deformazione ultima	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Yong, Nour e Nawy (1988)	Tensione di picco	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Deformazione al picco	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Deformazione ultima	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Saatcioglu e Razvi (1992)	Tensione di picco	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Deformazione al picco	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Deformazione ultima	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Figura 64: Tabella di riepilogo dei parametri influenti

3.4 Modello costitutivo proposto

Come sottolineato in precedenza, anche nel caso di calcestruzzo armato confinato è possibile definire dei modelli meccanici di calcolo continui che siano in grado di analizzare il comportamento sezionale e che permettano di individuare i domini di interazione *sforzo normale-momento flettente* ($N-M$).

La determinazione di questi modelli è utile perché permette di eliminare il problema legato alle discontinuità tipiche dei legami proposti dalla Normativa: tali modelli, infatti, non possono essere espressi tramite un'unica legge, ma vengono descritti per tratti.

Il modello proposto per la valutazione del comportamento del calcestruzzo armato confinato viene espresso tramite la seguente relazione:

$$\sigma(\epsilon) = \alpha \epsilon^\eta e^{(-\beta\epsilon)} \quad (166)$$

dove α , β e η rappresentano dei parametri incogniti determinati attraverso ulteriori formulazioni ottenute in seguito.

Rappresentando la (166) mediante un piano cartesiano, in cui in ascissa si riportano i valori di ϵ normalizzati rispetto a ϵ_u , mentre in ordinata quelli di σ normalizzati rispetto a σ_{max} , si ottiene il diagramma riportato in figura 67. Quando la pressione di confinamento viene a mancare, cioè nel caso di elementi in calcestruzzo non confinato, il legame costitutivo degenera in quello parabolico-rettangolare, che solitamente viene adoperato per il calcestruzzo armato ordinario nelle verifiche agli stati limite ultimi.

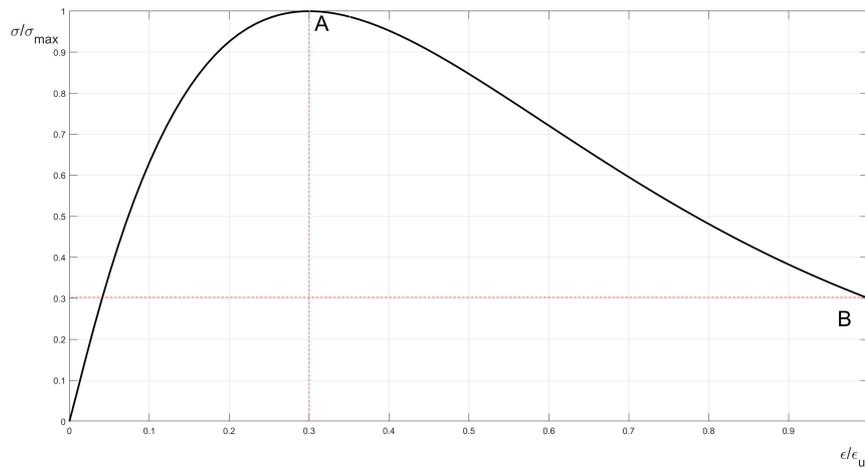


Figura 65: Legame costitutivo del calcestruzzo confinato

Dalla figura 67 è possibile individuare due punti di controllo, A e B, i quali rappresentano, rispettivamente, il massimo valore di tensione e di deformazione.

Punto	σ	ϵ
A	σ_{max}	ϵ_{max}
B	σ_u	ϵ_u

Il massimo valore di tensione σ_{max} si ottiene quando la derivata prima di (166) si annulla, cioè quando:

$$\frac{d}{d\epsilon}\sigma(\epsilon) = 0 \quad (167)$$

svolgendo i calcoli si ricava:

$$\alpha \epsilon^{\eta-1} e^{(-\beta\epsilon)} (\eta - \beta\epsilon) = 0 \quad (168)$$

se si pone $\epsilon = \epsilon_{max}$, è possibile dedurre una prima relazione con cui si può definire il parametro incognito β :

$$\epsilon_{max} = \frac{\eta}{\beta} \quad (169)$$

di conseguenza:

$$\beta = \frac{\eta}{\epsilon_{max}} \quad (170)$$

Considerando nuovamente $\epsilon = \epsilon_{max}$ e la relazione (170), si ottiene, quindi, il valore di tensione massima σ_{max} :

$$\sigma_{max} = \alpha \epsilon_{max}^{\eta} e^{-\eta} \quad (171)$$

da cui si ricava una seconda relazione con cui è possibile determinare il parametro incognito α :

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\epsilon_{max}^{\eta}} e^{\eta} \quad (172)$$

Imponendo le condizioni relative al punto B, cioè quelle ultime (ϵ_u, σ_u) , la (166) può essere riscritta nel seguente modo:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_{max}}{\epsilon_{max}^{\eta}} \epsilon_u^{\eta} e^{[\eta(1 - \frac{\epsilon_u}{\epsilon_{max}})]} \quad (173)$$

Per semplificare la formulazione, è possibile introdurre nuovi parametri ψ_{σ} e ψ_{ϵ} , ottenuti dalle seguenti relazioni:

$$\psi_{\sigma} = \frac{\sigma_u}{\sigma_{max}} \leq 1 \quad (174)$$

$$\psi_{\epsilon} = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_{max}} \geq 1 \quad (175)$$

in questo modo la (173) diventa:

$$\psi_{\sigma} = \psi_{\epsilon}^{\eta} e^{[\eta(1 - \psi_{\epsilon})]} \quad (176)$$

Questa equazione può essere risolta tramite l'uso dei logaritmi:

$$\log(\psi_{\sigma}) = \log(\psi_{\epsilon}^{\eta}) + \log(e^{[\eta(1 - \psi_{\epsilon})]}) \quad (177)$$

da cui si ottiene:

$$\log(\psi_{\sigma}) = \eta [\log(\psi_{\epsilon}) + 1 - \psi_{\epsilon}] \quad (178)$$

cioè:

$$\eta = \frac{\log(\psi_\sigma)}{[\log(\psi_\epsilon) + 1 - \psi_\epsilon]} \quad (179)$$

Dato che α e β dipendono dal parametro η , una volta ricavato sarà semplice definire le restanti incognite del problema.

Si riassumono in seguito le formulazioni relative ai parametri η , α e β :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\log(\psi_\sigma)}{[\log(\psi_\epsilon) + 1 - \psi_\epsilon]} \\ \alpha &= \frac{\sigma_{\eta}^{max}}{\epsilon_{max}^{\eta}} e^{\eta} \\ \beta &= \frac{\eta}{\epsilon_{max}} \end{aligned}$$

Inoltre, in base al valore che assume ψ_σ , è possibile rappresentare l'involuppo delle curve che definiscono il legame costitutivo proposto per il calcestruzzo confinato.

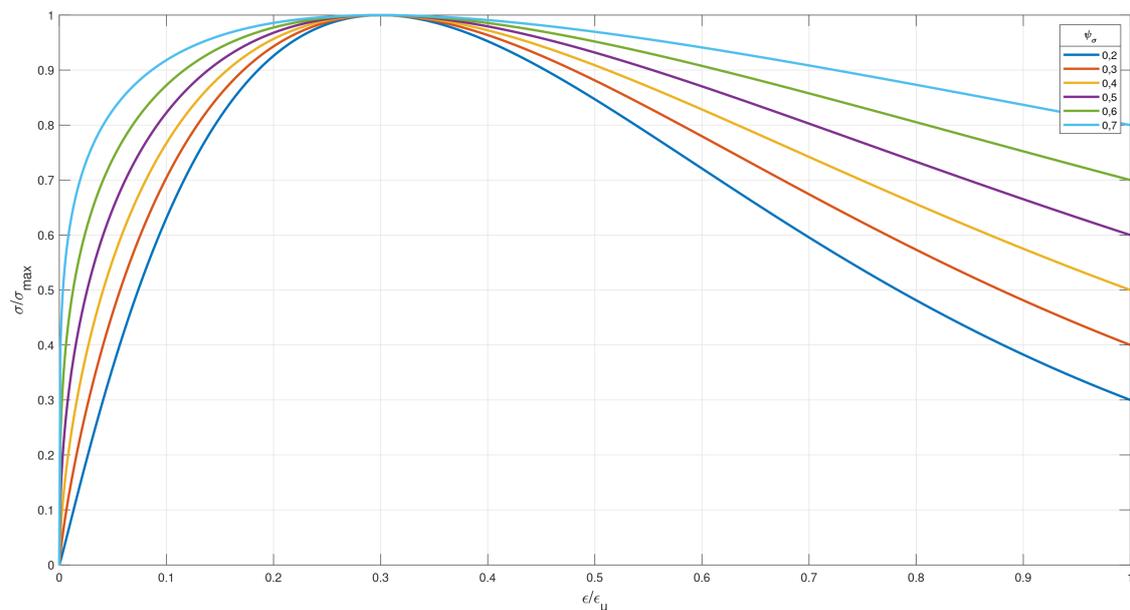


Figura 66: Legame costitutivo proposto per il calcestruzzo confinato al variare di ψ_σ

3.4.1 Codice del programma

Di seguito viene riportato il codice *Python* creato per rappresentare il modello costitutivo definito in precedenza nel caso di confinamento. La potenza di tale modello risiede nel fatto che è espresso da una legge continua, il che permette di eliminare il problema relativo alle discontinuità tipiche dei modelli proposti da normativa.

Il diagramma di flusso considerato per la stesura del codice è riportato in figura 67. I parametri che entrano in gioco sono:

- ϵ_u che indica la deformazione ultima del calcestruzzo confinato;
- σ_{max} che rappresenta la resistenza massima del calcestruzzo confinato;
- r_1 e r_2 , che esprimono, rispettivamente, il rapporto tra la deformazione massima e quella ultima e quello tra la tensione ultima e la massima.

Il programma è in grado di valutare la deformazione massima ϵ_{max} e la tensione ultima σ_u . Inoltre, vengono calcolati i parametri che definiscono il modello η , α e β , utilizzati per determinare la tensione σ in funzione della deformazione ϵ , inizialmente nulla e poi incrementata fino ad un valore pari a ϵ_u .

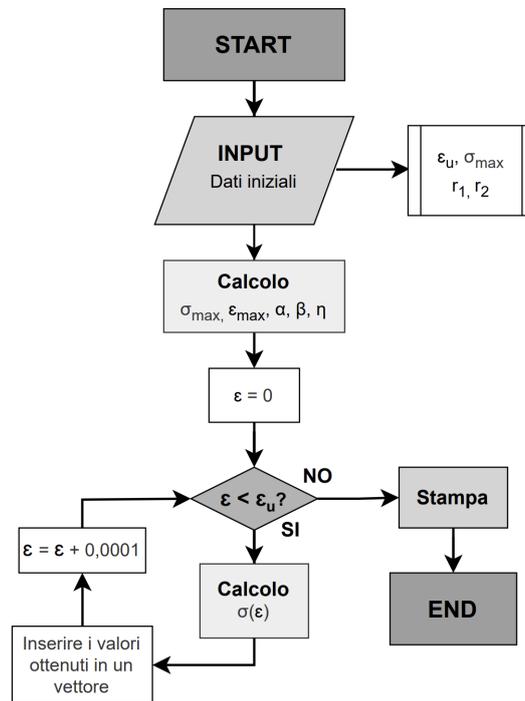


Figura 67: Flow-chart: definizione della tensione del modello costitutivo proposto

Di seguito sono riportati alcuni esempi ottenuti adottando un valore costante di deformazione ultima $\epsilon_u = 0,0035$ e di tensione massima $\sigma_{max} = 14,1$ MPa e variando i rapporti r_1 e r_2 :

- a) $r_1 = 0,57$ e $r_2 = 0,80$;
- b) $r_1 = 0,30$ e $r_2 = 0,30$;
- c) $r_1 = 0,30$ e $r_2 = 0,50$;
- d) $r_1 = 0,30$ e $r_2 = 0,80$.

DIAGRAMMA TENSIONE-DEFORMAZIONE (MODELLO PROPOSTO)

```
# Importo librerie
import math
import numpy
import matplotlib.pyplot as plt

# Dati iniziali richiesti all'utente
epsilon_ultima = float (input ('Inserire il valore della deformazione ultima  $\epsilon_u$ : '))
sigma_max = float (input ('Inserire il valore della tensione massima  $\sigma_{max}$ , in MPa: '))
r1 = float (input ('Inserire il rapporto tra la deformazione massima e quella ultima: '))
r2 = float (input ('Inserire il rapporto tra la tensione ultima e quella massima: '))

# CALCOLO PARAMETRI

# Calcolo deformazione massima calcestruzzo
epsilon_max = r1*epsilon_ultima

# Calcolo resistenza ultima calcestruzzo
sigma_ultima= sigma_max*r2

# Calcolo parametri del modello
eta = math.log(sigma_ultima/sigma_max)/(math.log(epsilon_ultima/epsilon_max)+ 1 -
epsilon_ultima/epsilon_max)
alpha = sigma_max*math.exp(eta)/epsilon_max**eta
beta = eta/epsilon_max

# Inizializzo variabili
sigma = 0
epsilon = 0

# Inizializzo liste
sigma_lista = []
epsilon_lista = []

# Ciclo definizione valori singoli di omega
for epsilon in numpy.arange (0, epsilon_ultima, 0.00001):

# Calcolo rapporto meccanico di armatura tesa
sigma = alpha*(epsilon**(eta))*math.exp(-beta*epsilon)

# Inserimento valori singoli di omega e mrd nelle relative liste
sigma_lista.append(sigma)
epsilon_lista.append(epsilon)

# Stampa grafici
plt.plot (epsilon_lista, sigma_lista)
plt.show()
```

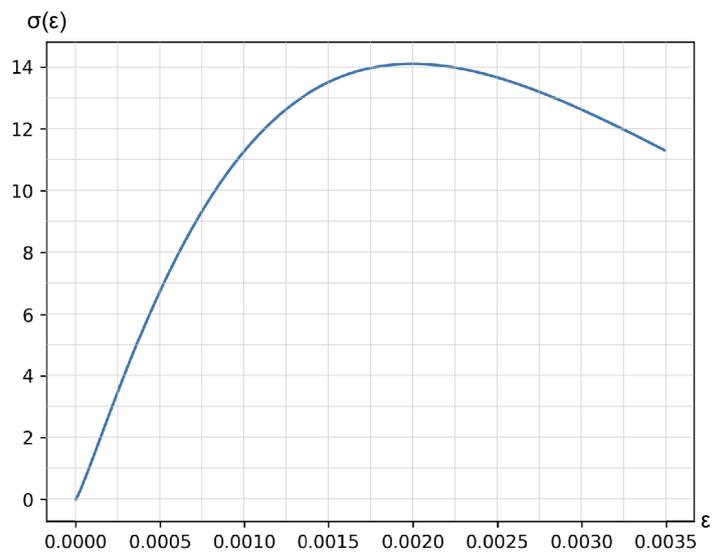


Figura 68: Legame tensione-deformazione (a)

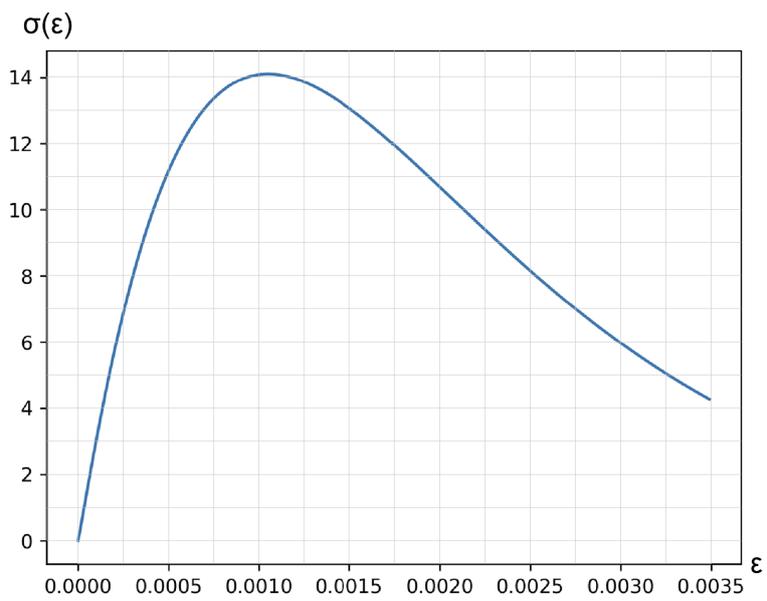


Figura 69: Legame tensione-deformazione (b)

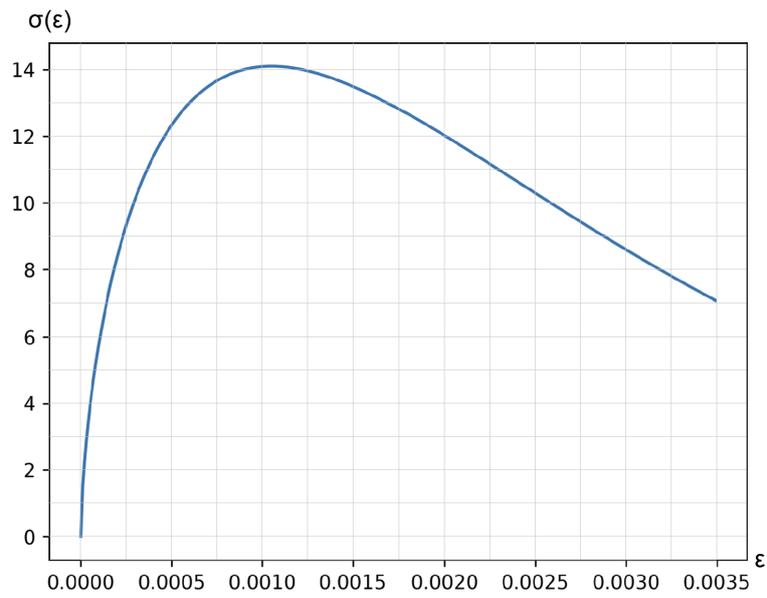


Figura 70: Legame tensione-deformazione (c)

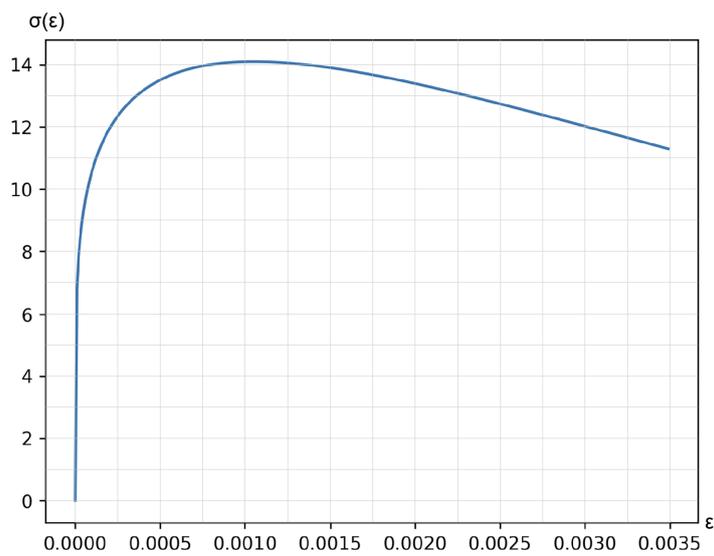


Figura 71: Legame tensione-deformazione (d)

3.5 Sezione rettangolare

Si passa ora ad analizzare il caso di una sezione rettangolare di cemento armato confinato sottoposta a flessione semplice.

Considerando la figura 72, assumendo l'ipotesi di deformazione piana e adottando per l'acciaio un modello elasto-plastico incrudente, è possibile determinare i due parametri incogniti del problema relativo alla flessione e di quello attinente alla pressoflessione mediante l'impiego delle equazioni di equilibrio.

Nel caso di flessione semplice, i parametri incogniti saranno il valore del momento flettente resistente ultimo M_{Rd} e la posizione dell'asse neutro x_c rispetto al lembo compresso, in questo caso quello superiore, da cui sarà possibile ricavare il rapporto meccanico di armatura ω .

Per quanto riguarda il problema della pressoflessione, invece, verranno ricavati i valori adimensionali resistenti dello sforzo normale e del momento flettente (n_{rd} , m_{rd}), tramite i quali sarà possibile ottenere le curve di interazione che identificano i domini di resistenza.

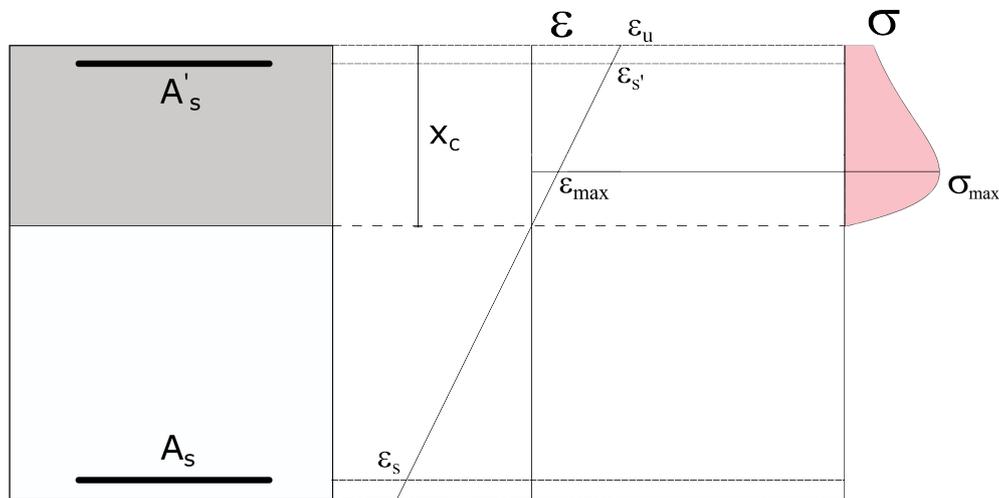


Figura 72: Flessione semplice - Sezione rettangolare di cemento armato confinato

In questa configurazione A_s e A'_s rappresentano rispettivamente l'area dell'acciaio inferiore (in trazione) e quella dell'acciaio superiore (in compressione), la larghezza della sezione viene definita come b , l'altezza geometrica come d , mentre l'altezza utile, anche detta meccanica, che rappresenta la distanza tra il lembo compresso superiore della sezione e l'armatura tesa inferiore, viene indicata con h . Altri parametri da definire sono δ e δ' che rappresentano gli spessori del copriferro, valutati come la distanza tra l'armatura tesa e il lembo inferiore e quella tra l'armatura compressa e il lembo superiore.

Si definisce, inoltre, il rapporto geometrico per entrambe le armature, con-

siderando che queste sono proporzionali tra loro a meno di un parametro μ pari a $\frac{A'_s}{A_s}$.

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (180)$$

$$\rho' = \frac{A'_s}{bd} = \mu\rho \quad (181)$$

3.5.1 Analisi adimensionale

Prima di analizzare il problema in termini di equazioni di equilibrio, è utile introdurre i parametri adimensionalizzati, in modo da semplificarne la trattazione. Innanzitutto, si definisce l'asse neutro adimensionalizzato ξ come

$$\xi = \frac{x_c}{h} \quad (182)$$

in cui x_c esprime il livello dell'asse neutro rispetto al lembo compresso, mentre h rappresenta l'altezza utile della sezione.

Successivamente si ricavano i valori adimensionalizzati del copriferro Φ e Φ' come

$$\Phi = \frac{\delta}{d} \quad (183)$$

$$\Phi' = \frac{\delta'}{d} \quad (184)$$

in cui δ e δ' rappresentano gli spessori del copriferro, mentre d è l'altezza geometrica della sezione.

Nel caso particolare di rottura bilanciata della sezione, che si verifica quando il calcestruzzo raggiunge la sua deformazione ultima ($\epsilon_c = \epsilon_u$) e, contemporaneamente, l'acciaio teso perviene a snervamento ($\epsilon_s = \epsilon_y$), è possibile ricavare il valore dell'asse neutro adimensionalizzato ξ' tramite una semplice analisi geometrica. La configurazione in esame viene illustrata in figura 73.

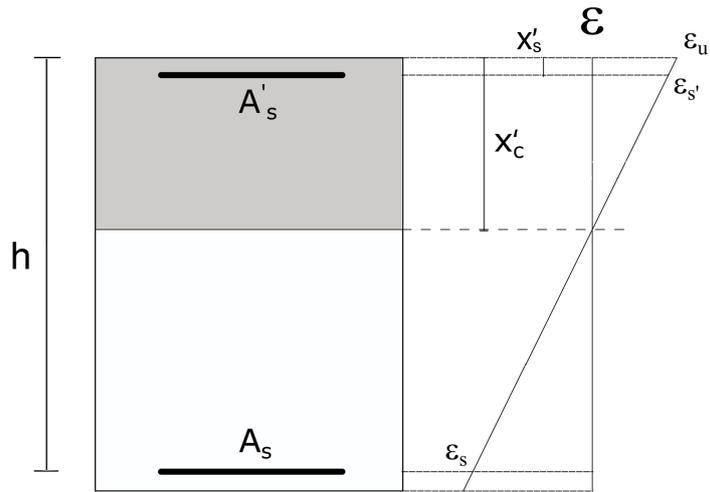


Figura 73: Rottura bilanciata: diagramma delle deformazioni

Tramite il criterio di similitudine dei triangoli, è possibile scrivere:

$$\frac{x'_c}{\epsilon_u} = \frac{h - x'_c}{\epsilon_y} \quad (185)$$

evidenziando la variabile x'_c

$$x'_c = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_y} (h - x'_c) \quad (186)$$

e introducendo il parametro ψ_ϵ , si ricava

$$x'_c = h\psi_\epsilon - x'_c\psi_\epsilon \quad (187)$$

che, raccogliendo a fattore comune, può essere riscritta come

$$x'_c(1 + \psi_\epsilon) = h\psi_\epsilon \quad (188)$$

sommando $\delta\psi_\epsilon$ ad ambo i membri, si ottiene

$$x'_c(1 + \psi_\epsilon) = (h\psi_\epsilon + \delta\psi_\epsilon) - \delta\psi_\epsilon \quad (189)$$

cioè

$$x'_c(1 + \psi_\epsilon) = d\psi_\epsilon - \delta\psi_\epsilon \quad (190)$$

dato che $h + \delta = d$. Dividendo entrambi i membri per $d\psi_\epsilon$ si ottiene

$$\frac{x'_c(1 + \psi_\epsilon)}{d\psi_\epsilon} = 1 - \frac{\delta}{d} \quad (191)$$

esprimendo $\xi' = \frac{x'_c}{d}$ e $\Phi = \frac{\delta}{d}$ l'equazione (191) si può riscrivere come

$$\xi' \frac{(1 + \psi_\epsilon)}{\psi_\epsilon} = 1 - \Phi \quad (192)$$

da cui si ricava

$$\xi' = (1 - \Phi) \frac{\psi_\epsilon}{(1 + \psi_\epsilon)} \quad (193)$$

Il parametro ξ può assumere i valori definiti nel seguente intervallo:

$$\xi \in \left[\frac{h}{d}; 0 \right] \Rightarrow \xi \in [1 - \Phi; 0] \quad (194)$$

Da un punto di vista grafico, il dominio può essere rappresentato come in figura 74.

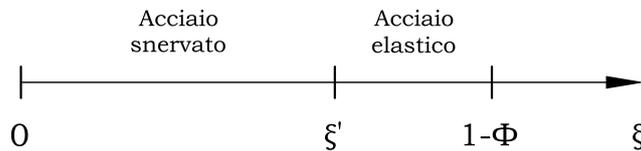


Figura 74: Dominio ξ

Con riferimento alla figura 74 si può osservare che, se ξ assume valori compresi tra $[0; \xi']$, l'acciaio di armatura risulta essere snervato, al contrario, se ξ è compreso nell'intervallo $[\xi'; 1 - \Phi]$, le deformazioni che nascono nelle armature sono ancora di natura elastica.

A tal proposito è possibile definire un parametro γ che permette di tenere in considerazione questa distinzione di campo. Può assumere i seguenti valori:

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{se } |\epsilon_s(\xi)| \geq \epsilon_y \\ \frac{\epsilon_s(\xi)E_s}{f_{yd}} & \text{se } |\epsilon_s(\xi)| < \epsilon_y \end{cases} \quad (195)$$

Nel caso in cui l'acciaio teso si trovi in campo elastico è necessario valutare la deformazione $\epsilon_s(\xi)$, in modo da poter definire, di conseguenza, il parametro γ . Per la risoluzione si utilizza sempre un approccio geometrico, in cui si sfrutta la similitudine dei triangoli.

Come prima, si ricava il valore di deformazione $\epsilon_s(\xi)$ tramite la proporzione

$$\frac{\epsilon_u}{x_c} = \frac{\epsilon_s}{h - x_c} \quad (196)$$

quindi

$$\epsilon_s = \epsilon_u \left(\frac{h}{x_c} - 1 \right) \quad (197)$$

cioè

$$\epsilon_s(\xi) = \epsilon_u \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \quad (198)$$

La relazione (197) può essere riscritta come

$$\epsilon_s = \epsilon_u \left(\frac{h + \delta}{x_c} - \frac{\delta}{x_c} - 1 \right) \quad (199)$$

cioè

$$\epsilon_s = \epsilon_u (\xi - \Phi - 1) \quad (200)$$

A questo punto, considerando la (195), nel caso di $|\epsilon_s(\xi)| < \epsilon_y$, e la (200), è possibile esprimere il fattore γ come

$$\gamma(\xi) = \frac{\epsilon_u E_s}{f_{yd}} (\xi - \Phi - 1) \quad (201)$$

e introducendo il parametro $\nu = \frac{\epsilon_u E_s}{f_{yd}}$, si ottiene

$$\gamma(\xi) = \nu (\xi - \Phi - 1) \quad (202)$$

3.5.2 Equilibrio alla traslazione orizzontale

L'analisi viene condotta esprimendo l'equilibrio alla traslazione orizzontale di tutte le forze che nascono sulla sezione (figura 75).

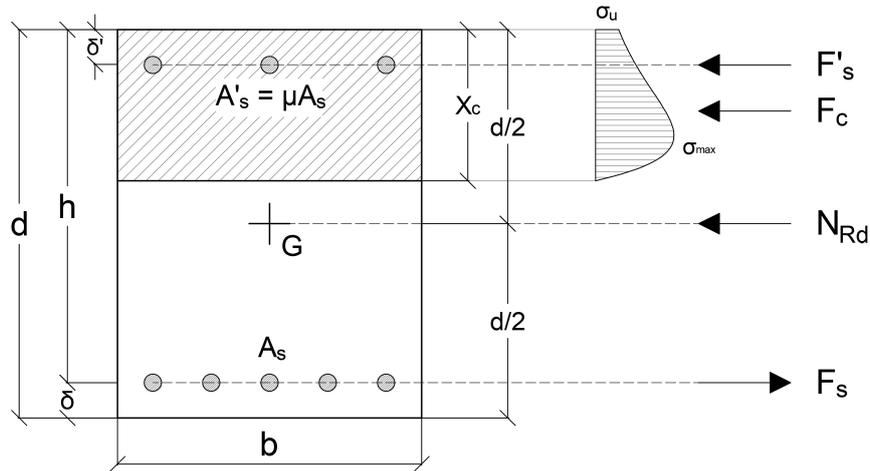


Figura 75: Diagramma delle forze agenti in una sezione soggetta a pressoflessione

Nel caso di flessione semplice lo sforzo normale $N_{Rd} = 0$, quindi l'equilibrio sarà dato da:

$$F_c + F'_s - F_s = 0 \quad (203)$$

dove F_s e F'_s rappresentano, rispettivamente, le forze che nascono nell'armatura tesa e in quella compressa e sono valutate nel seguente modo:

$$F_s = A_s \sigma_s \quad (204)$$

$$F'_s = A'_s \sigma'_s \quad (205)$$

a loro volta, σ_s e σ'_s sono proporzionali alla tensione di snervamento dell'acciaio f_{yd} , a meno del fattore riduttivo γ . Come è stato visto nel paragrafo 3.5.1, questo fattore varia in base allo stato deformativo in cui si trovano le armature, cioè se, una volta sollecitate, rientrano nel campo elastico oppure risultano essere snervate. Si esprimono quindi:

$$\sigma_s = f_{yd} \gamma(x_c) \quad (206)$$

$$\sigma'_s = f_{yd} \gamma'(x_c) \quad (207)$$

in relazione alla deformazione dell'acciaio $\epsilon_s(x_c)$, il fattore γ assume i seguenti valori:

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{se } |\epsilon_s(x_c)| \geq \epsilon_{yd} \\ \frac{\epsilon_s(x_c)E_s}{f_{yd}} & \text{se } |\epsilon_s(x_c)| < \epsilon_{yd} \end{cases} \quad (208)$$

Per quanto riguarda F_c , questa rappresenta la forza che nasce nella porzione di calcestruzzo reagente, cioè quella di base b e di altezza pari a x_c . Considerando che il momento flettente ultimo M_r si ottiene per ϵ_u e che nel calcestruzzo $\epsilon_c(0) = \epsilon_u$, la forza di compressione agente si ottiene come:

$$F_c = b \int_0^{x_c} \sigma[\epsilon(x)] dx \quad (209)$$

Assumendo sempre l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, come viene rappresentato in figura 72, si ottiene che $\frac{x-x_c}{\epsilon(x)} = \frac{x_c}{\epsilon_u}$, quindi:

$$\epsilon(x) = \epsilon_u \left(1 - \frac{x}{x_c} \right) \quad (210)$$

e, introducendo la variabile $z = \epsilon_u(1 - \frac{x}{x_c})$, è possibile esprimere la derivata dx come:

$$dx = - \left(\frac{x_c}{\epsilon_u} \right) dz \quad (211)$$

inoltre, per $x = 0$ si ha $z = \epsilon_u$, mentre per $x = x_c$ si ha $z = 0$, quindi l'equazione (209) diventa:

$$F_c = \frac{bx_c}{\epsilon_u} \int_0^{\epsilon_u} \sigma(z) dz \quad (212)$$

e definendo

$$\Psi(\epsilon_u) = \int_0^{\epsilon_u} \sigma(z) dz \quad (213)$$

l'equazione di equilibrio (203) assume la seguente forma:

$$\frac{bx_c}{\epsilon_u} \Psi(\epsilon_u) + A'_s \sigma'_s - A_s \sigma_s = 0 \quad (214)$$

Dividendo la (214) per bd , si può esprimere l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale nei seguenti termini

$$\frac{\xi}{\epsilon_u} \Psi(\epsilon_u) + \rho(\mu\sigma'_s - \sigma_s) = 0 \quad (215)$$

Considerando nuovamente la figura 72, è possibile dedurre le relazioni per esprimere le deformazioni di entrambe le armature:

$$\epsilon_s = \epsilon_u \left(\frac{h}{x_c} - 1 \right) \quad (216)$$

$$\epsilon'_s = \epsilon_u \left(1 - \frac{x'_s}{x_c} \right) \quad (217)$$

Con riferimento alle equazioni (206) e (207), dividendo il tutto per $\sigma_{max} = f_{cd}$ e ricordando che $\omega = \rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$, è possibile riscrivere l'equazione (215) in funzione di ω , γ e γ' :

$$\frac{\xi}{\epsilon_u \sigma_{max}} \Psi(\epsilon_u) + \omega(\mu\gamma' - \gamma) = 0 \quad (218)$$

da cui si può dedurre la posizione dell'asse neutro adimensionalizzata ξ risolvendo la seguente equazione:

$$\xi = \frac{\epsilon_u \sigma_{max}}{\Psi(\epsilon_u)} \omega(\gamma - \mu\gamma') \quad (219)$$

Il valore di $\Psi(\epsilon_u)$ si ottiene dalla soluzione dell'integrale (213), che può essere risolto facendo riferimento alla relazione (67)

$$\int \alpha x^\eta e^{(-\beta x)} dx = \alpha (-x^{\eta+1}) (\beta x)^{-(\eta+1)} \Gamma(\eta + 1, \beta x) \quad (220)$$

e quindi

$$\Psi(\epsilon_u) = \int_0^{\epsilon_u} \alpha z^\eta e^{(-\beta z)} dz \quad (221)$$

cioè

$$\Psi(\epsilon_u) = \frac{1}{\beta} [\alpha \epsilon_u^\eta (\beta \epsilon_u)^{-\eta} [\Gamma(\eta + 1) - \Gamma(\eta + 1, \beta \epsilon_u)]] \quad (222)$$

dove la funzione $\Gamma(z)$ è definita come

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (223)$$

mentre quella incompleta $\Gamma(a, z)$ è

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (224)$$

Con riferimento alle equazioni (212), (213) e (221) si può esprimere F_c come

$$F_c = \frac{bx_c}{\epsilon_u} \int_0^{\epsilon_u} \alpha z^\eta e^{(-\beta z)} dz \quad (225)$$

cioè

$$F_c = \frac{bx_c}{\epsilon_u} \Psi(\epsilon_u) \quad (226)$$

Richiamando l'equazione (229), è possibile ottenere il parametro ω come

$$\omega = \frac{\xi \Psi(\epsilon_u)}{\epsilon_u \sigma_{max} (\gamma(\xi) - \mu \gamma'(\xi))} \quad (227)$$

Nel caso di pressoflessione $N_{Rd} \neq 0$, pertanto, con riferimento alla figura 75, l'equazione di equilibrio alla traslazione (203) assume la seguente forma:

$$N_{Rd} = F_c + F'_s - F_s \quad (228)$$

dove, come prima, F_s e F'_s rappresentano, rispettivamente, le forze che nascono nell'armatura tesa e in quella compressa, F_c esprime la forza che si origina nella porzione di calcestruzzo reagente, cioè quella di base b e di altezza pari a x_c , mentre N_{Rd} indica lo sforzo normale resistente della sezione.

Dividendo l'equazione (228) per $bd\sigma_{max}$, con $\sigma_{max} = f_{cd}$, si può esprimere l'equilibrio in termini adimensionali:

$$n_{rd} = \frac{\xi}{\epsilon_u \sigma_{max}} \Psi(\epsilon_u) + \omega(\mu\gamma' - \gamma) \quad (229)$$

ricordando che lo sforzo normale adimensionalizzato è pari a $n_{rd} = \frac{N_{Rd}}{bd f_{cd}}$.

3.5.3 Equilibrio alla rotazione

Nel caso di flessione, l'analisi procede esprimendo l'equilibrio alla rotazione di tutte le forze riportate in figura 75, escludendo lo sforzo normale N_{Rd} perché è nullo, rispetto all'asse neutro, in modo da definire il valore del momento flettente resistente ultimo M_{Rd} . Si ottiene:

$$M_{Rd} = \int_0^{x_c} bx\sigma(x)dx + F'_s(x_c - \delta') - F_s(h - x_c - \delta) \quad (230)$$

in cui

$$\int_0^{x_c} bx\sigma(x)dx = b \int \alpha x^{\eta+1} e^{(-\beta x)} dx = \alpha (-x_c^{\eta+2}) (\beta x_c)^{-(\eta+2)} \Gamma(\eta + 2, \beta x_c) \quad (231)$$

perciò il momento resistente M_{Rd} sarà dato dalla seguente espressione

$$M_{Rd} = \alpha (-x_c^{\eta+2}) (\beta x_c)^{-(\eta+2)} \Gamma(\eta + 2, \beta x_c) + F'_s(x_c - \delta') - F_s(h - x_c - \delta) \quad (232)$$

Per ottenere il valore adimensionale m_{rd} è sufficiente dividere ambo i membri per $bd^2\sigma_{max}$, con $\sigma_{max} = f_{cd}$.

Nel caso di pressoflessione, invece, l'analisi viene condotta esprimendo l'equilibrio alla rotazione di tutte le forze riportate in figura 75 rispetto al baricentro G della sezione, cioè nel punto di applicazione di N_{Rd} : in questo modo lo sforzo normale non rientra nell'equazione di equilibrio. Il momento flettente resistente ultimo M_{Rd} sarà, quindi, definito come:

$$M_{Rd} = F_c z_c + F'_s z'_s - F_s z_s \quad (233)$$

dove z_c , z'_s e z_s rappresentano, rispettivamente, le distanze del punto di applicazione delle risultanti delle forze F_c , F'_s e F_s rispetto al baricentro G della sezione.

Per quanto riguarda i bracci delle forze F'_s e F_s , questi risultano pari a:

$$z'_s = \frac{d}{2} - \delta' \quad (234)$$

$$z_s = \frac{d}{2} - \delta \quad (235)$$

La valutazione del braccio z_c , invece, è più complessa: dato che la relazione tensione-deformazione viene definita da una funzione continua, bisognerà ragionare in termini di integrale, tenendo a mente, però, che il braccio è riferito al baricentro G della sezione e non alla posizione dell'asse neutro.

Tuttavia, per rendere la trattazione più semplice, è possibile ragionare in termini discreti, cioè si può pensare di suddividere la curva tensione-deformazione in n tratti infinitesimi, di base dx e altezza pari alla tensione media relativa al tratto infinitesimo considerato, ognuno dei quali sottenderà una certa area corrispondente ad una quota parte della forza di compressione totale F_c .

Pertanto, analizzando il secondo membro dell'equazione (233), il risultato del primo termine sarà dato dalla sommatoria, per i che va da 1 a n , del prodotto tra l'area infinitesima relativa al tratto in esame e il braccio corrispondente. Infine, considerando $n \rightarrow \infty$, la sommatoria si trasformerà in un integrale.

Anche in questo caso, il valore adimensionale m_{rd} si ottiene dividendo entrambi i membri per $bd^2\sigma_{max}$, con $\sigma_{max} = f_{cd}$.

4 Programma

L'obiettivo di tale tesi è la realizzazione di un codice informatico che consente di implementare un algoritmo capace di svolgere la verifica agli stati limite ultimi per sezioni rettangolari in cemento armato soggette a flessione semplice o a pressoflessione, eventualmente confinate.

La stesura del codice è stata conseguita mediante l'impiego del linguaggio di programmazione ad alto livello "Python" ed è possibile riassumere le diverse fasi in cui si articola il progetto in: fase di lettura, fase di analisi e computazione numerica e fase di stampa.

Per tenere in considerazione e valutare gli effetti del confinamento, viene eseguito un confronto diretto tra i risultati grafici ottenuti da due programmi differenti: il primo, elaborato per la conclusione del ciclo di studi triennale in Ingegneria Civile, permette di analizzare le sezioni in cemento armato ordinario prive di confinamento, mentre il secondo consente di valutarne il comportamento nel caso in cui quest'ultimo fosse presente.

La sezione definita nell'analisi è dotata di dimensioni geometriche e di grandezze meccaniche note, grazie alle quali sarà possibile creare opportuni abachi di verifica, come quelli riportati nel capitolo 2.5.

Infine, l'ultima parte sarà dedicata all'ideazione di un codice in grado di valutare lo stato limite ultimo di sezioni rettangolari in cemento armato basandosi sul modello proposto al capitolo 3.4. Tuttavia, in questa tesi sarà riportato solo il codice per la valutazione di ω essendo, il modello, ancora in fase di analisi.

4.1 Calcestruzzo armato

4.1.1 Diagramma di flusso

La scrittura del codice è stata realizzata seguendo lo schema logico mostrato in figura 76, in cui, passo dopo passo, vengono evidenziate le operazioni compiute dal programma. Inoltre, sono state definite apposite funzioni che, richiamate all'occorrenza, rendono il programma il più chiaro e ordinato possibile.

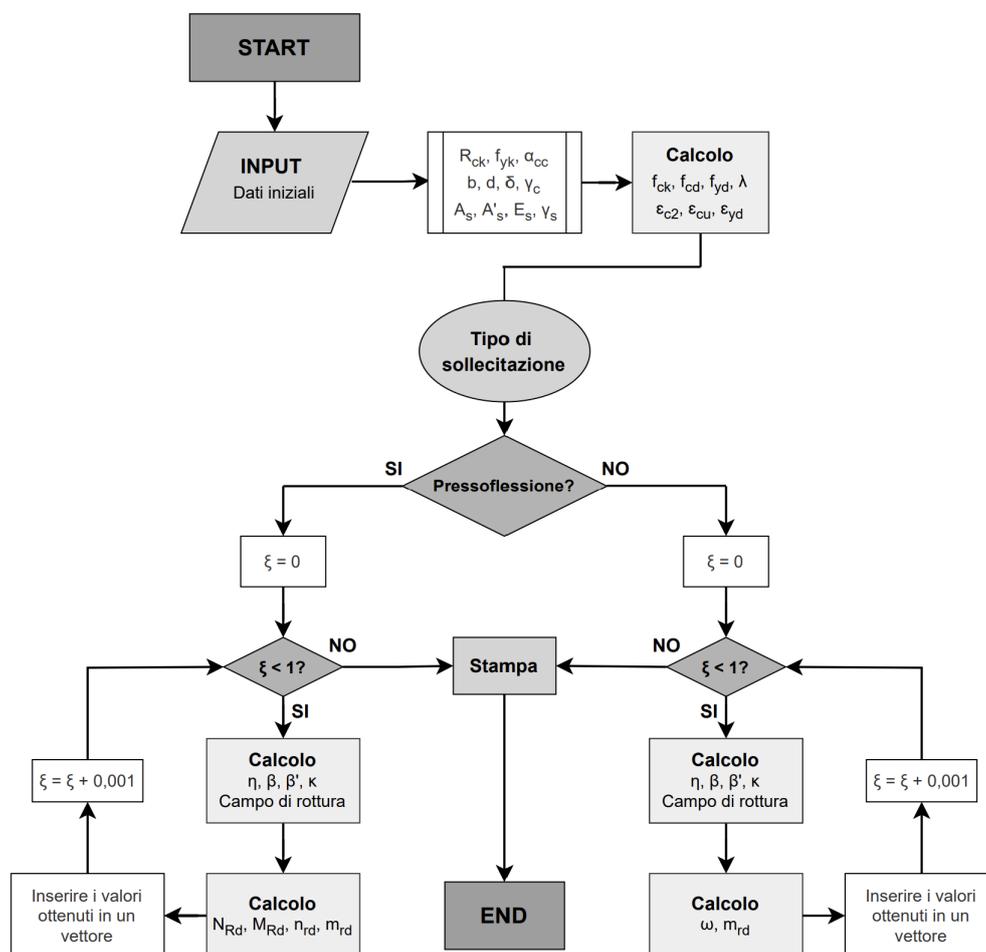


Figura 76: Flow-chart: verifica allo SLU per flessione semplice e pressoflessione (assenza di confinamento)

4.1.2 Fase di lettura

La prima fase è quella di lettura, in cui il programma riceve in input un file di lunghezza finita contenente tutti i dati relativi alle proprietà meccaniche della sezione di calcestruzzo armato e questo, essendo formato da un numero limitato di elementi, verrà letto in un'unica operazione. All'interno si trovano i seguenti parametri:

- resistenza caratteristica allo snervamento dell'acciaio f_{yk} ;
- modulo elastico dell'acciaio E_s ;
- coefficiente parziale di sicurezza dell'acciaio γ_s ;
- coefficiente parziale di sicurezza del calcestruzzo γ_c ;
- coefficiente riduttivo per le resistenze di lunga durata α_{cc} .

L'acciaio considerato per ogni sezione è quello da cemento armato indicato dalle *NTC18*, cioè il B450C, e il legame costitutivo associato è quello “elastico perfettamente plastico”, definito nel capitolo 2.4.2. Per quanto riguarda il calcestruzzo, invece, il legame considerato è il “parabola-rettangolo” che permette una valutazione più realistica del comportamento sezionale ed è descritto nel capitolo 2.4.1.

Nello stesso momento il programma riceverà, sempre in input, un altro file di dimensione indefinita, che contiene i parametri necessari al completamento della caratterizzazione meccanica e geometrica della sezione esaminata. All'interno si trovano i seguenti parametri:

- resistenza a compressione caratteristica cubica R_{ck} ;
- base della sezione b ;
- altezza utile, o meccanica, d ;
- spessore del copriferro δ ;
- area di acciaio in zona tesa A_s ;
- area di acciaio in zona compressa A'_s .

Al contrario del primo file, questo viene letto riga per riga, analizzando, pertanto, una sola sezione alla volta.

4.1.3 Fase di analisi e computazione numerica

In questa fase vengono esaminate tutte le possibili configurazioni che può assumere l'asse neutro per ciascuna sezione analizzata, in modo da ottenere il corretto diagramma di verifica. Il ragionamento viene svolto in termini adimensionalizzati, cioè considerando il valore adimensionale della posizione dell'asse neutro ξ , inizialmente posto uguale a zero e successivamente incrementato fino a raggiungere il valore massimo unitario, cioè $\xi = 1$.

Per agevolare la scrittura del codice, viene valutato il coefficiente di posizione dell'armatura λ , dato dal rapporto tra lo spessore del copriferro δ e l'altezza utile della sezione d .

Inoltre, per garantire un corretto funzionamento del programma, è necessario determinare un insieme di parametri utili all'analisi computazionale e alla concretizzazione di tale abaco. Le grandezze definite sono:

- la resistenza a compressione caratteristica cilindrica del calcestruzzo f_{ck} ;
- la resistenza a compressione di progetto del calcestruzzo f_{cd} ;
- la tensione di snervamento di progetto dell'acciaio f_{yd} ;
- la deformazione allo snervamento di progetto dell'acciaio ϵ_{yd} ;
- le deformazioni del calcestruzzo ϵ_{c2} e ϵ_{cu} .

Per quanto riguarda le deformazioni del calcestruzzo, sono state realizzate funzioni idonee alla definizione di entrambi i valori in base alla resistenza caratteristica cubica R_{ck} del calcestruzzo, distinguendo i casi in cui essa sia minore o maggiore di 60 MPa.

Determinati i parametri sopraccitati, si può proseguire con l'identificazione dei campi di rottura dipendenti dall'asse neutro adimensionalizzato ξ : nel nostro caso, vengono considerati i campi IIIa, IIIb, IIIc e IV. Per ciascun campo analizzato si ricaveranno specifici valori del coefficiente di posizione della risultante di compressione η , del coefficiente di riempimento κ e dei coefficienti β e β' relativi allo sforzo nelle armature.

Questi parametri sono di fondamentale importanza per la creazione dell'abaco di verifica: infatti, nel caso di flessione semplice, consentono di determinare

il rapporto meccanico di armatura tesa ω e il momento flettente adimensionalizzato m_{Rd} , i quali poi, combinati con il parametro ξ , permetteranno di ottenere il grafico atteso di verifica. Lo stesso avviene per una trave soggetta a pressoflessione: in questo caso, però, le grandezze ricavate saranno lo sforzo normale adimensionalizzato n_{Rd} e il momento flettente adimensionalizzato m_{Rd} .

4.1.4 Fase di stampa

In quest'ultima fase, le grandezze ω , m_{Rd} e n_{Rd} ottenute al variare della posizione dell'asse neutro adimensionalizzato ξ vengono raccolte in diversi vettori di informazione: questo permette di acquisire un numero rilevante di dati utili alla concretizzazione dell'abaco di verifica. L'acquisizione di dati si interrompe nel momento in cui ξ , inizializzato a zero, raggiunge il valore unitario.

Il passo finale, pertanto, consisterà nella stampa a video dell'abaco di verifica relativo alla sezione esaminata, attribuendo così un senso grafico ai risultati ricavati dalle formule matematiche.

Per quanto riguarda il problema della flessione semplice, le curve ottenute saranno pressoché simili a quelle riportate in figura 23, mentre, nel caso di pressoflessione, il dominio ricavato presenterà un andamento analogo a quelli mostrati in figura 26.

4.1.5 Codice del programma

```
# ASSENZA DI CONFINAMENTO

# Importo librerie
import numpy
import matplotlib.pyplot as plt

# Dati iniziali come richiesta all'utente (per interfaccia grafica)
Rck = float (input ('Inserire il valore della resistenza a compressione caratteristica del
provino cubico Rck, in MPa: '))
b = float (input ('Inserire il valore della base della sezione b, in mm: '))
d = float (input ('Inserire il valore dell\' altezza utile della sezione d, in mm: '))
As = float (input ('Inserire il valore dell\'area di armatura in zona tesa As, in mm^2: '))
As1 = float (input ('Inserire il valore dell\'area di armatura in zona compressa As\', in mm^2:
'))
delta = float (input ('Inserire il valore del copriferro  $\delta$ , in mm: '))

# Dati iniziali come lettura di un file .txt
#file_input = open('fileinput.txt', 'r')
#for line in file_input:
#    riga = file_input.readlines()
#    print(riga)
#file_input.close()

# CALCOLO DATI

# Calcolo fck ricavandolo da Rck
fck = 0.83*Rck

# Coefficiente riduttivo per resistenze di lunga durata
alpha_cc = 0.85

# Coefficiente parziali di sicurezza
gamma_c = 1.5
gamma_s = 1.15

# Resistenza di snervamento caratteristica
fyk = 450 # in MPa

# Modulo di Young dell'acciaio
Es = 210000 # in MPa

# Calcolo valori di progetto
fcd = (alpha_cc/gamma_c)*float(fck)
fyd = fyk/gamma_s

# Calcolo coefficiente di posizione dell'armatura
lamb = delta / d

# Calcolo di calcolo dell'acciaio
epsilon_yd = fyd / Es

# DEFINIZIONE DEFORMAZIONI

# Definizione funzione determinazione epsilon_c2
def epc2 (a):
    if a <= 60:
        ep_c2 = 2/1000
    elif a > 60:
        ep_c2 = 2/1000 + 0.0085/100*(fck - 50)**0.53
    return ep_c2
```

```

# Defizione funzione valore di epsilon_cu
def epcu (a):
    if a <= 60:
        ep_cu = 3.5/1000
    elif a > 60:
        ep_cu = 0.26/100 + 3.5/100* ((90 - fck)/100)**4
    return ep_cu

# DEFINIZIONE SOLLECITAZIONE

# Presenza o meno di Pressoflessione e definizione delle sollecitazioni presenti
flag = input (('Presenza di Pressoflessione? Scrivere \'T\' se vero o \'F\' se falso: '))

# Presenza di Pressoflessione, ricaviamo mrd e nrd
if flag == 'T' or flag == 't':

    # Inizializzo variabili
    Nrd = 0
    nrd = 0
    Mrd = 0
    mrd = 0

    # Inizializzo liste
    nrd_lista = []
    mrd_lista = []
    Nrd_lista = []
    Mrd_lista = []

    # Ciclo definizione valori singoli di nrd e mrd ricavando campo di rottura
    for csi in numpy.arange (0, 1, 0.001):

        # Richiamo funzioni per definizione epc2 e epcu
        epsilon_c2 = float(epc2(Rck))
        epsilon_cu = float(epcu(Rck))

        # Campo IIIa
        if csi >= 0 and csi < ((lamb * epsilon_cu) / (epsilon_cu + epsilon_yd)):
            eta = (6 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_cu * epsilon_c2 + epsilon_c2 ** 2) / (
                12 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_c2 * epsilon_cu)
            k = 1 - epsilon_c2 / (3 * epsilon_cu)
            beta = 1
            beta1 = -1

        # Campo IIIb
        elif csi >= ((lamb * epsilon_cu) / (epsilon_cu + epsilon_yd)) and csi < (
            lamb * epsilon_cu) / (epsilon_cu - epsilon_yd):
            eta = (6 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_cu * epsilon_c2 + epsilon_c2 ** 2) / (
                12 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_c2 * epsilon_cu)
            k = 1 - epsilon_c2 / (3 * epsilon_cu)
            beta = 1
            beta1 = (epsilon_cu / epsilon_yd) * ((csi - lamb) / csi)

        # Campo IIIc
        elif csi >= ((lamb * epsilon_cu) / (epsilon_cu - epsilon_yd)) and (epsilon_cu /
            (epsilon_cu + epsilon_yd)):
            eta = (6 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_cu * epsilon_c2 + epsilon_c2 ** 2) / (
                12 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_c2 * epsilon_cu)
            k = 1 - epsilon_c2 / (3 * epsilon_cu)
            beta = 1
            beta1 = 1

```

```

# Campo IV
elif csi >= (epsilon_cu / (epsilon_cu + epsilon_yd)) and csi < 1 + lamb:
    eta = (6 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_cu * epsilon_c2 + epsilon_c2 ** 2) / (
        12 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_c2 * epsilon_cu)
    k = 1 - epsilon_c2 / (3 * epsilon_cu)
    beta = (epsilon_cu / epsilon_yd) * ((1 - csi) / csi)
    beta1 = 1

# Calcolo omega
omega = As*fyd/(b*d*fcd)

# Calcolo sforzo normale resistente di progetto
Nrd = k*fcd*b*d*csi + beta1*fyd*As1 - beta*fyd*As

# Calcolo sforzo normale resistente di progetto adimensionalizzato
nrd = Nrd/(b*d*fcd)

# Calcolo momento flettente resistente di progetto
Mrd = k*fcd*b*d*csi*((d+delta)/2 - eta*csi*d) + beta1*fyd*As1*(d-delta)/2 +
    beta*fyd*As*(d-delta)/2

# Calcolo momento flettente resistente di progetto adimensionalizzato
mrd = k*((1+lamb)*csi/2 - eta*csi**2) + omega*(As1*beta1/As + beta)*(1-lamb)/2

# Inserimento di mrd e nrd nelle rispettive liste
nrd_lista.append(nrd)
mrd_lista.append(mrd)
Nrd_lista.append(Nrd)
Mrd_lista.append(Mrd)

# Stampa grafici
plt.plot (mrd_lista, nrd_lista)
plt.plot (Mrd_lista, Nrd_lista)
plt.show()

# Presenza di Flessione semplice, ricaviamo omega e mrd
elif flag == 'F' or flag == 'f':

    # Inizializzo variabili
    omega = 0
    mrd = 0

    # Inizializzo liste
    omega_lista = []
    mrd_lista = []
    csi_lista = []

    # Ciclo definizione valori singoli di nrd e mrd ricavando campo di rottura
    for csi in numpy.arange (0, 1, 0.001):

        # Richiamo funzioni per definizione epc2 e epcu
        epsilon_c2 = float(epc2(Rck))
        epsilon_cu = float(epcu(Rck))

        # Campo IIIa
        if csi >= 0 and csi < ((lamb * epsilon_cu) / (epsilon_cu + epsilon_yd)):
            eta = (6 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_cu * epsilon_c2 + epsilon_c2 ** 2) / (
                12 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_c2 * epsilon_cu)
            k = 1 - epsilon_c2 / (3 * epsilon_cu)
            beta = 1
            beta1 = -1

```

```

# Campo IIIb
elif csi >= ((lamb * epsilon_cu) / (epsilon_cu + epsilon_yd)) and csi < (
(lamb * epsilon_cu) / (epsilon_cu - epsilon_yd)):
eta = (6 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_cu * epsilon_c2 + epsilon_c2 ** 2) / (
12 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_c2 * epsilon_cu)
k = 1 - epsilon_c2 / (3 * epsilon_cu)
beta = 1
beta1 = (epsilon_cu / epsilon_yd) * ((csi - lamb) / csi)

# Campo IIIc
elif csi >= ((lamb * epsilon_cu) / (epsilon_cu - epsilon_yd)) and (epsilon_cu /
(epsilon_cu + epsilon_yd)):
eta = (6 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_cu * epsilon_c2 + epsilon_c2 ** 2) / (
12 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_c2 * epsilon_cu)
k = 1 - epsilon_c2 / (3 * epsilon_cu)
beta = 1
beta1 = 1

# Campo IV
elif csi >= (epsilon_cu / (epsilon_cu + epsilon_yd)) and csi < 1 + lamb:
eta = (6 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_cu * epsilon_c2 + epsilon_c2 ** 2) / (
12 * epsilon_cu ** 2 - 4 * epsilon_c2 * epsilon_cu)
k = 1 - epsilon_c2 / (3 * epsilon_cu)
beta = (epsilon_cu / epsilon_yd) * ((1 - csi) / csi)
beta1 = 1

# Calcolo rapporto meccanico di armatura tesa omega
omega = (k*csi)/(beta - beta1*As1/As)

# Calcolo momento flettente resistente di progetto adimensionalizzato
mrd = beta1*As1/As*omega*(1 - lamb) + k*(csi - eta*csi**2)

# Inserimento valori singoli di omega e mrd nelle relative liste
omega_lista.append(omega)
mrd_lista.append(mrd)
csi_lista.append(csi)

# Stampa grafici
plt.plot (omega_lista, csi_lista)
plt.plot (mrd_lista, csi_lista)
plt.show()

else:
print ('ERRORE, rispondere con \"T\" o \"F\"')

```

4.1.6 Risultati grafici

L'analisi è stata condotta prendendo come riferimento una sezione rettangolare di calcestruzzo ($R_{ck} = 30$ MPa) caratterizzata dalle seguenti dimensioni:

- $b = 300$ mm;
- $d = 350$ mm;
- $\delta = 35$ mm.

Il legame costitutivo considerato per il calcestruzzo è il *parabola-rettangolo*, mentre per l'acciaio si considera un comportamento *elastico perfettamente plastico*.

FLESSIONE SEMPLICE

Nel caso di flessione semplice e in assenza di confinamento, ciò che viene fatto variare è il quantitativo di armatura in zona compressa: in questo modo si ottengono curve differenti in base al valore che assume $\mu = A'_s/A_s$. L'armatura tesa, invece, si mantiene costante ed è pari a $A_s = 770$ mm² (5 Φ 14).

I risultati forniti dal programma sono riportati nei grafici seguenti: in questo caso si ricavano le curve di ω e m_{rd} in funzione di ξ .

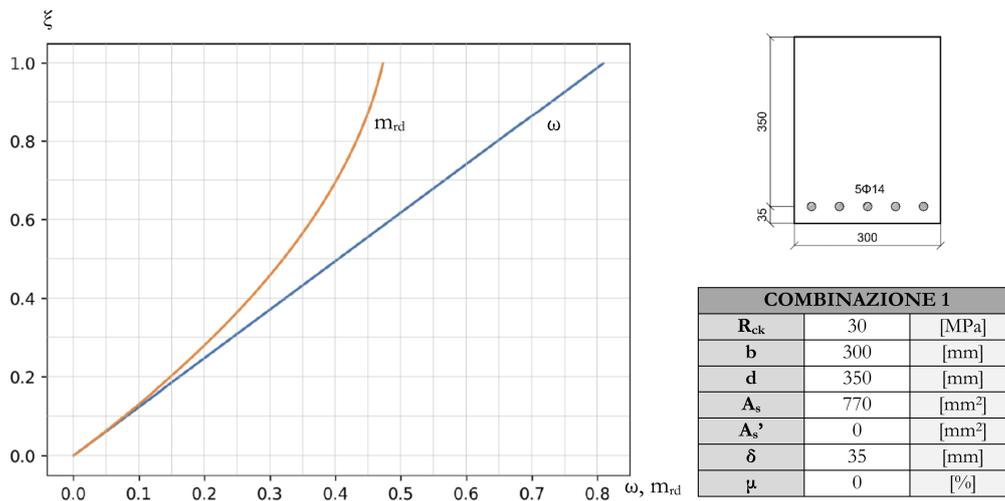


Figura 77: Flessione semplice: combinazione 1 (caso non confinato)

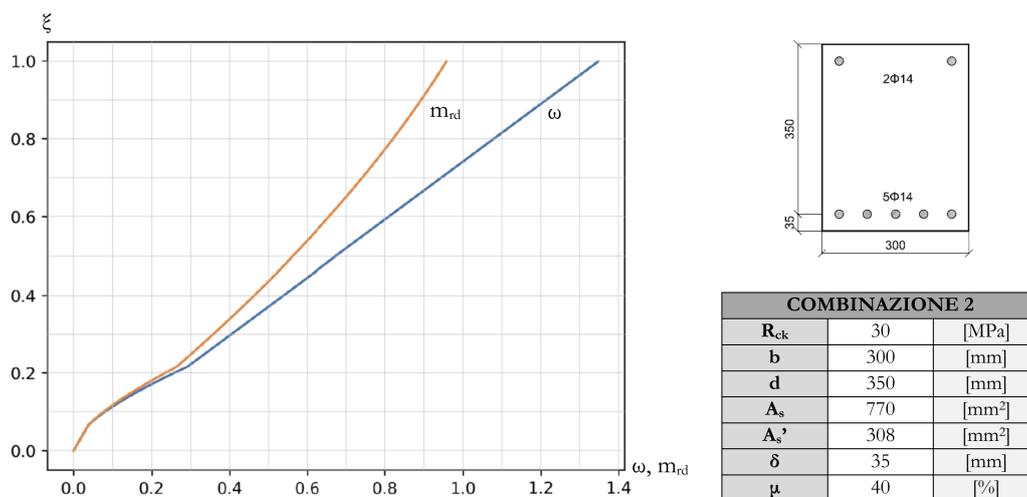


Figura 78: Flessione semplice: combinazione 2 (caso non confinato)

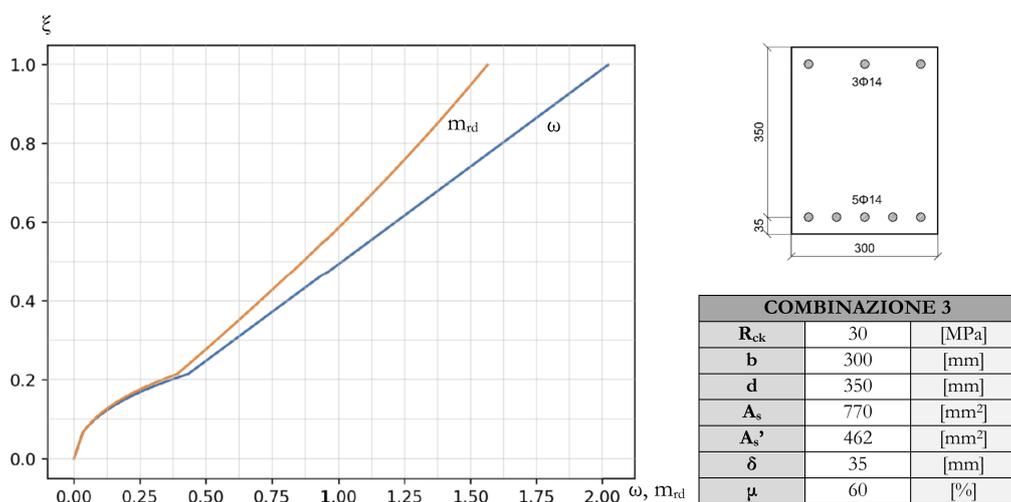


Figura 79: Flessione semplice: combinazione 3 (caso non confinato)

Dai grafici si nota come, per $\mu = 0$, ω assume un andamento linearmente crescente con ξ mentre m_{rd} cresce in maniera esponenziale. Aumentando l'armatura in zona compressa, invece, in un primo momento le curve sono descritte da una legge parabolica (campo IIIb) e, successivamente, assumono lo stesso andamento conseguito per $\mu = 0$ (campo IIIc).

Inoltre, a parità di ξ , i valori di ω e m_{rd} risultano maggiori per valori di armatura compressa A_s' via via crescenti.

PRESSOFLESSIONE

Nel caso di pressoflessione, invece, si ottengono le curve in funzione di N_{Rd} e M_{Rd} [N/mm²] che definiscono una porzione del dominio di interazione relativo alla sezione esaminata. I risultati vengono espressi anche in termini adimensionali, cioè considerando i valori adimensionalizzati dello sforzo normale e del momento flettente (n_{rd} , m_{rd}).

Per l'analisi si considera una sezione simmetricamente armata con le medesime dimensioni di quella definita in precedenza.

In questo caso vengono fatti variare entrambi i quantitativi di armatura: inizialmente si considerano 2Φ14 in ognuna delle due zone, successivamente vengono inserite ulteriori barre fino a raggiungere una configurazione composta da 4Φ14 sia in zona tesa, sia in quella compressa.

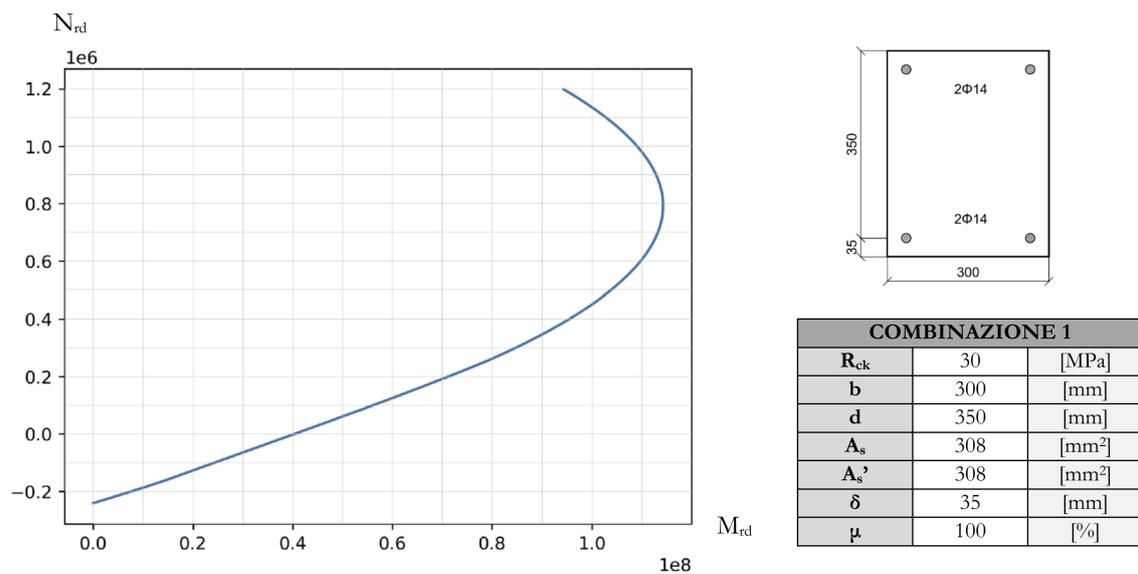


Figura 80: Pressoflessione: combinazione 1 (caso non confinato)

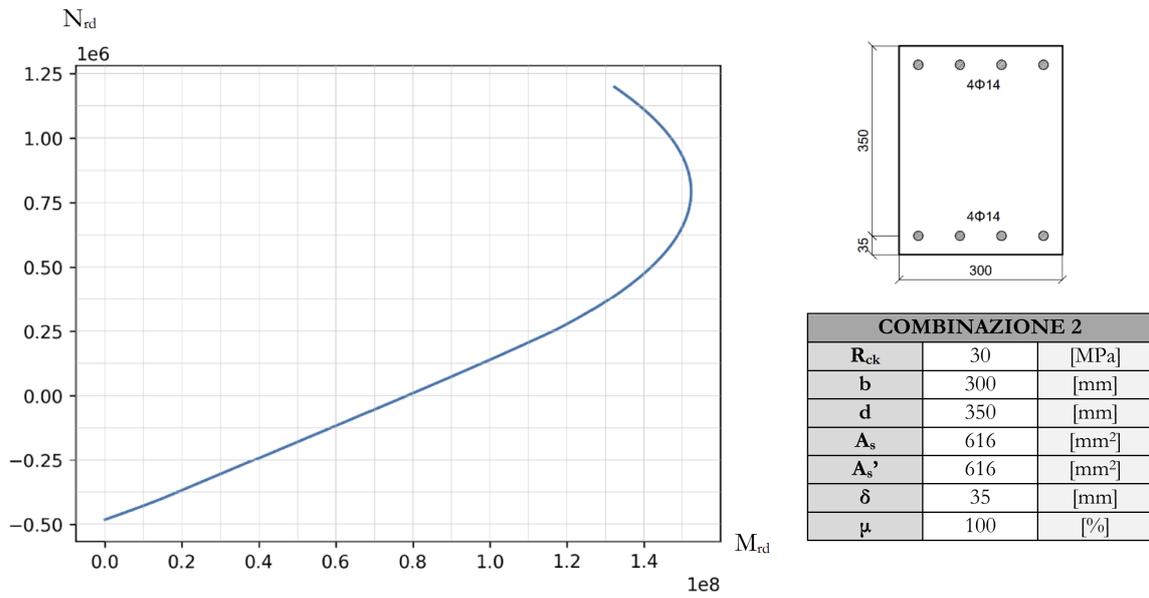


Figura 81: Pressoflessione: combinazione 2 (caso non confinato)

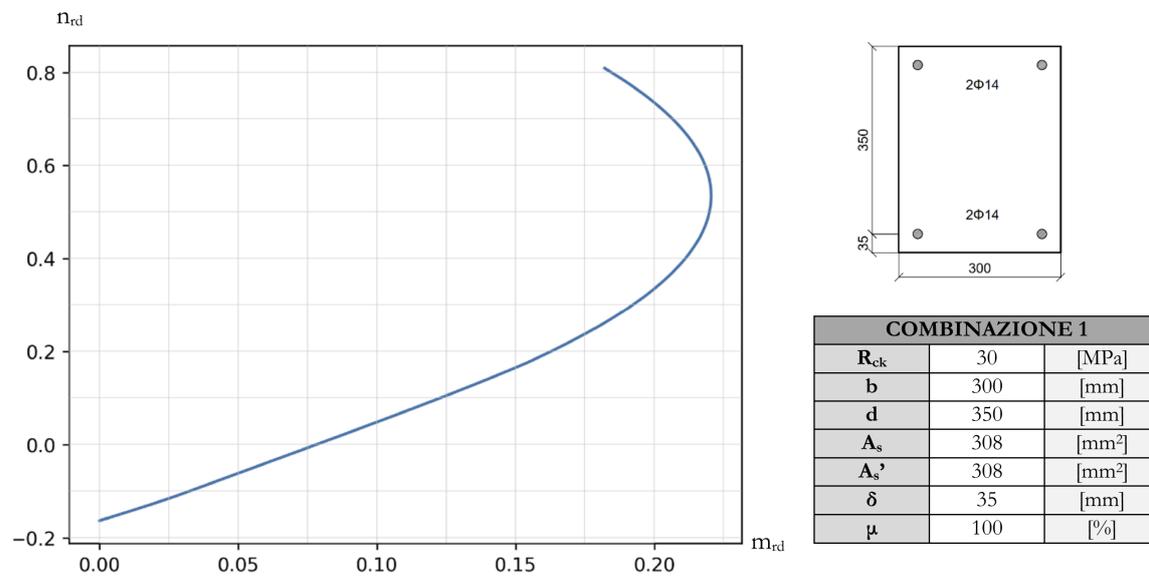


Figura 82: Pressoflessione: combinazione 1 (caso non confinato) adimensionale

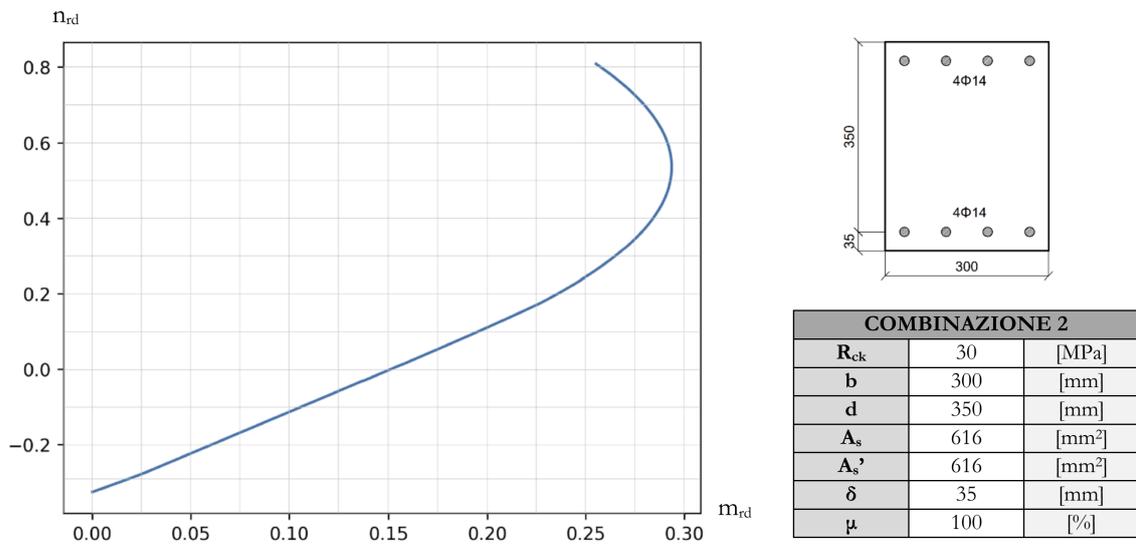


Figura 83: Pressoflessione: combinazione 2 (caso non confinato) adimensionale

Dai grafici si osserva come un aumento di armatura comporti un netto incremento dei valori resistenti di sforzo normale e momento flettente e, quindi, una dilatazione del dominio di interazione, permettendo alla sezione di avere una resistenza maggiore alle sollecitazioni.

4.2 Calcestruzzo armato confinato

4.2.1 Diagramma di flusso

Anche nel caso di confinamento, la stesura del codice è stata realizzata seguendo lo schema logico mostrato in figura 84, che evidenzia le operazioni eseguite dal programma.

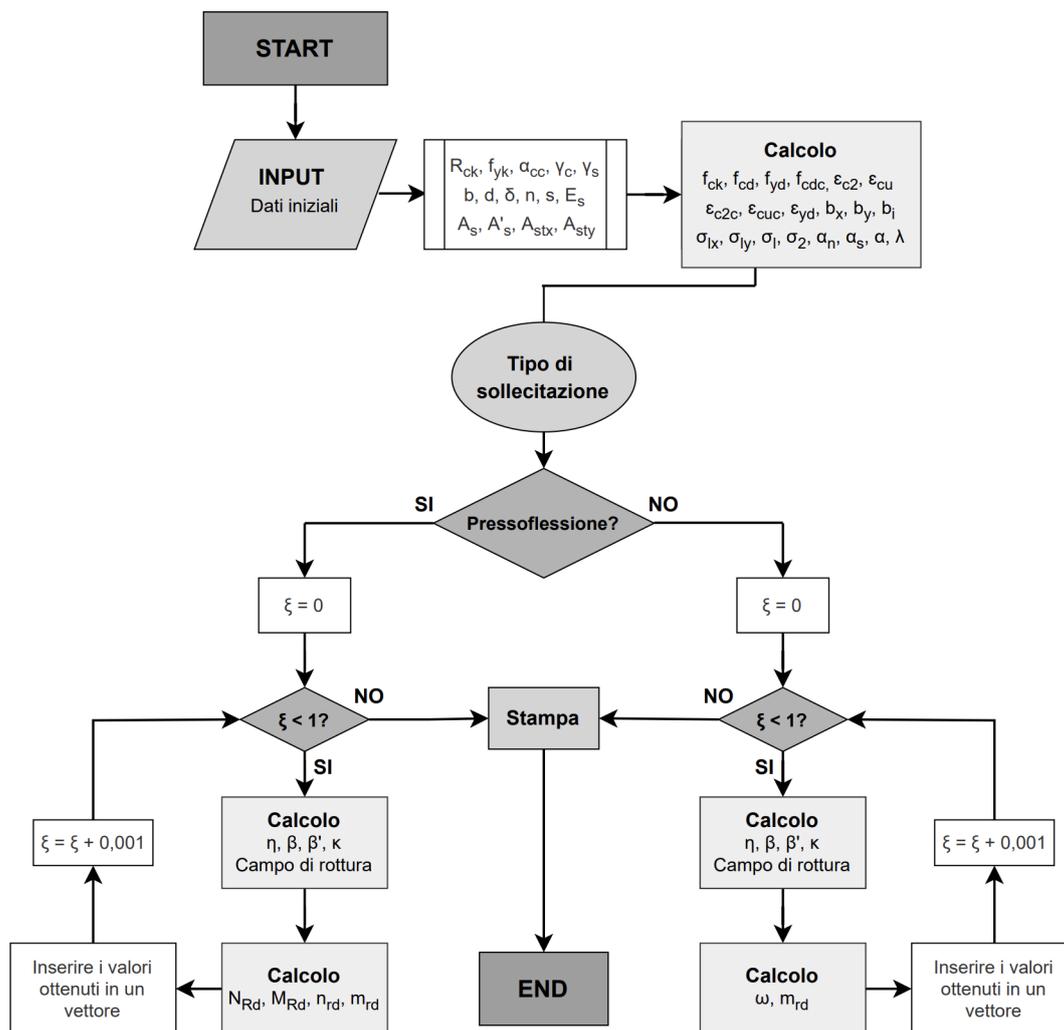


Figura 84: Flow-chart: verifica allo SLU per flessione semplice e pressoflessione (presenza di confinamento)

4.2.2 Fase di lettura

Come prima, la fase iniziale è quella di lettura, in cui il programma riceve in input un file di dimensione finita che racchiude tutti i dati relativi alle proprietà meccaniche della sezione e questo, essendo formato da un numero limitato di elementi, verrà letto in un'unica operazione. All'interno si trovano i seguenti parametri:

- resistenza caratteristica allo snervamento dell'acciaio f_{yk} ;
- modulo elastico dell'acciaio E_s ;
- coefficiente parziale di sicurezza dell'acciaio γ_s ;
- coefficiente parziale di sicurezza del calcestruzzo γ_c ;
- coefficiente riduttivo per le resistenze di lunga durata α_{cc} .

Anche in questo caso, l'acciaio considerato è quello da cemento armato indicato dalle *NTC18*, cioè il B450C, e il legame costitutivo adottato è quello “elastico perfettamente plastico”, definito nel capitolo 2.4.2. Per quanto riguarda il calcestruzzo, invece, il legame considerato è il “parabola-rettangolo” che permette una valutazione più realistica del comportamento sezionale ed è descritto nel capitolo 2.4.1. Nel caso di confinamento, però, il legame risulterà amplificato rispetto al caso non confinato: in particolare, si avranno valori di deformazione e resistenza maggiori.

Nello stesso momento, il programma riceverà in input un ulteriore file di dimensione indefinita, contenente i parametri necessari al compimento della caratterizzazione meccanica e geometrica della sezione analizzata. All'interno si trovano i seguenti parametri:

- resistenza a compressione caratteristica cubica R_{ck} ;
- base della sezione b ;
- altezza utile, o meccanica, d ;
- spessore del copriferro δ ;
- area di acciaio in zona tesa A_s ;
- area di acciaio in zona compressa A'_s ;

- il numero delle barre longitudinali n ;
- area delle staffe in direzione x $A_{st,x}$;
- area delle staffe in direzione y $A_{st,y}$;
- passo delle staffe s .

Al contrario del primo file, questo viene letto riga per riga, analizzando una sola sezione alla volta.

4.2.3 Fase di analisi e computazione numerica

In questa fase, come nel caso precedente, vengono analizzate tutte le possibili configurazioni assunte dall'asse neutro per ciascuna sezione esaminata, in modo da ottenere il giusto diagramma di verifica. Il ragionamento è svolto in termini adimensionalizzati, cioè considerando il valore adimensionale della posizione dell'asse neutro ξ , inizialmente nullo e successivamente incrementato fino al valore massimo unitario, cioè $\xi = 1$.

Per facilitare la scrittura del codice, viene determinato il coefficiente di posizione dell'armatura λ , dato dal rapporto tra lo spessore del copriferro δ e l'altezza utile della sezione d .

Inoltre, per garantire l'esatto funzionamento del programma, è necessario valutare un insieme di parametri utili all'analisi computazionale e alla realizzazione dell'abaco di verifica. Le grandezze calcolate sono:

- la resistenza a compressione caratteristica cilindrica del calcestruzzo f_{ck} ;
- la resistenza a compressione di progetto del calcestruzzo non confinato f_{cd} ;
- la tensione di snervamento di progetto dell'acciaio f_{yd} ;
- la deformazione allo snervamento di progetto dell'acciaio ϵ_{yd} ;
- le deformazioni del calcestruzzo non confinato ϵ_{c2} e ϵ_{cu} ;
- le dimensioni, in entrambe le direzioni, del nucleo di calcestruzzo confinato b_x e b_y ;
- l'interasse tra le barre longitudinali b_i ;

- le pressioni di confinamento, in entrambe le direzioni, agenti sul nucleo di calcestruzzo confinato σ_{lx} e σ_{ly} ;
- la pressione di confinamento totale σ_l ;
- i coefficienti α_s , α_n e α ;
- la pressione efficace di confinamento σ_2 ;
- la resistenza a compressione di progetto del calcestruzzo confinato $f_{cd,c}$;
- le deformazioni del calcestruzzo confinato $\epsilon_{c2,c}$ e $\epsilon_{cu,c}$.

Determinati tutti i parametri menzionati, si può procedere con l'identificazione dei campi di rottura dipendenti dal valore di ξ : nel nostro caso, vengono considerati i campi IIIa, IIIb, IIIc e IV. Per ogni campo analizzato si otterranno specifici valori del coefficiente di posizione della risultante di compressione η , del coefficiente di riempimento κ e dei coefficienti β e β' relativi allo sforzo nelle armature.

Questi parametri sono fondamentali per la realizzazione dell'abaco di verifica: infatti, nel caso di flessione semplice, permettono di valutare il rapporto meccanico di armatura tesa ω e il momento flettente adimensionalizzato m_{Rd} , i quali poi, messi in relazione con il parametro ξ , consentiranno di ottenere il grafico di verifica. Lo stesso avviene nel caso di pressoflessione: qui, però, le grandezze valutate saranno lo sforzo normale adimensionalizzato n_{Rd} e il momento flettente adimensionalizzato m_{Rd} .

4.2.4 Fase di stampa

In questa fase conclusiva, le variabili ω , m_{Rd} e n_{Rd} ottenute al variare di ξ vengono raccolte in diversi vettori di informazione: questo permette di registrare un numero elevato di dati utili alla realizzazione dell'abaco di verifica. L'acquisizione di dati si interrompe quando ξ , inizializzato a zero, raggiunge il valore unitario.

Il passo finale, di conseguenza, consisterà nella stampa a video dell'abaco di verifica relativo alla sezione analizzata, conferendo così un senso grafico ai risultati ottenuti dalle formule matematiche.

Per quanto riguarda il problema della flessione semplice, le curve ricavate saranno paragonabili a quelle riportate in figura 23, mentre, nell'altro caso, il diagramma ottenuto sarà comparabile a quelli mostrati in figura 26.

4.2.5 Codice del programma

```
# PRESENZA DI CONFINAMENTO

# Importo librerie
import math
import numpy
import matplotlib.pyplot as plt

# Dati iniziali come richiesta all'utente (per interfaccia grafica)
Rck = float (input ('Inserire il valore della resistenza a compressione caratteristica del
provino cubico Rck, in MPa: '))
b = float (input ('Inserire il valore della base della sezione b, in mm: '))
d = float (input ('Inserire il valore dell\'altezza utile della sezione d, in mm: '))
As = float (input ('Inserire il valore dell\'area di armatura in zona tesa As, in mm^2: '))
As1 = float (input ('Inserire il valore dell\'area di armatura in zona compressa As\', in mm^2:
'))
delta = float (input ('Inserire il valore del copriferro  $\delta$ , in mm: '))
n = float (input ('Inserire il numero delle barre longitudinali n: '))
Ast_x = float (input ('Inserire il valore dell\'area delle staffe in direzione x Ast_x, in mm^2:
'))
Ast_y = float (input ('Inserire il valore dell\'area delle staffe in direzione y Ast_y, in mm^2:
'))
s = float (input ('Inserire il valore del passo delle staffe s, in mm: '))

# Dati iniziali come lettura di un file .txt
#file_input = open('fileinput.txt', 'r')
#for line in file_input:
#    riga = file_input.readlines()
#    print(riga)
#file_input.close()

# CALCOLO DATI

# Calcolo fck ricavandolo da Rck
fck = 0.83*Rck

# Coefficiente riduttivo per resistenze di lunga durata
alpha_cc = 0.85

# Coefficiente parziali di sicurezza
gamma_c = 1.5
gamma_s = 1.15

# Resistenza di snervamento caratteristica
fyk = 450 # in MPa

# Resistenza di snervamento caratteristica staffe
fyk_st = 450 # in MPa

# Modulo di Young dell'acciaio
Es = 210000 # in MPa

# Calcolo valori di progetto
fcd = (alpha_cc/gamma_c)*float(fck)
fyd = fyk/gamma_s

# Calcolo coefficiente di posizione dell'armatura
lamb = delta / d

# Calcolo di calcolo dell'acciaio
epsilon_yd = fyd / Es
```

```

# Calcolo bx e by e interasse barre longitudinali bi
bx = b - 2*delta
by = (d + delta) - 2*delta
bi = (b - 2*delta)/(n - 1)

# Calcolo sigma laterale x e y
sigma_lx = (Ast_x*fyk_st)/(by * s)
sigma_ly = (Ast_y*fyk_st)/(bx * s)

# Calcolo sigma laterale
sigma_l = math.sqrt(sigma_lx * sigma_ly)

# Calcolo alpha_s e alpha_n
alpha_s = (1-(s/(2*bx)))*(1-(s/(2*by)))
alpha_n = 1 - n * ((bi**2)/(6*bx*by))

# Calcolo alpha
alpha = alpha_s * alpha_n

# Calcolo sigma_2
sigma2 = alpha * sigma_l

# Deformazioni dell'elemento non confinato
if Rck <= 60:
    ep_c2 = 2/1000
elif Rck > 60:
    ep_c2 = 2/1000 + 0.0085/100*(fck - 50)**0.53

if Rck <= 60:
    ep_cu = 3.5/1000
elif Rck > 60:
    ep_cu = 0.26/100 + 3.5/100* ((90 - fck)/100)**4

# Calcolo parametri dell'elemento confinato
if sigma2 <= 0.05*fck:
    fck_c = fck * (1 + 5 *(sigma2/fck))
elif sigma2 > 0.05*fck:
    fck_c = fck * (1.125 + 2.5 *(sigma2/fck))

# Resistenza di progetto calcestruzzo confinato
fcd_c = alpha_cc * (fck_c/gamma_c)

# Deformazioni calcestruzzo confinato
ep_cu_c = ep_cu + 0.2 * (sigma2/fck)
ep_c2_c = ep_c2 * ((fck_c/fck)**2)

# DEFINIZIONE SOLLECITAZIONE

# Presenza o meno di Pressoflessione e definizione delle sollecitazioni presenti
flag = input (('Presenza di Pressoflessione? Scrivere \'T\' se vero o \'F\' se falso: '))

# Presenza di Pressoflessione, ricaviamo mrd e nrd
if flag == 'T' or flag == 't':

    # Inizializzo variabili
    Nrd = 0
    nrd = 0
    Mrd = 0
    mrd = 0

```

```

# Inizializzo liste
nrd_lista = []
mrd_lista = []
Nrd_lista = []
Mrd_lista = []

# Ciclo definizione valori singoli di nrd e mrd ricavando campo di rottura
for csi in numpy.arange (0, 1, 0.001):

    # Campo IIIa
    if csi >= 0 and csi < ((lamb * ep_cu_c) / (ep_cu_c + epsilon_yd)):
        eta = (6 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_cu_c * ep_c2_c + ep_c2_c ** 2) / (
            12 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_c2_c * ep_cu_c)
        k = 1 - ep_c2_c / (3 * ep_cu_c)
        beta = 1
        beta1 = -1

    # Campo IIIb
    elif csi >= ((lamb * ep_cu_c) / (ep_cu_c + epsilon_yd)) and csi < (
        (lamb * ep_cu_c) / (ep_cu_c - epsilon_yd)):
        eta = (6 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_cu_c * ep_c2_c + ep_c2_c ** 2) / (
            12 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_c2_c * ep_cu_c)
        k = 1 - ep_c2_c / (3 * ep_cu_c)
        beta = 1
        beta1 = (ep_cu_c / epsilon_yd) * ((csi - lamb) / csi)

    # Campo IIIc
    elif csi >= ((lamb * ep_cu_c) / (ep_cu_c - epsilon_yd)) and (ep_cu_c / (ep_cu_c +
        epsilon_yd)):
        eta = (6 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_cu_c * ep_c2_c + ep_c2_c ** 2) / (
            12 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_c2_c * ep_cu_c)
        k = 1 - ep_c2_c / (3 * ep_cu_c)
        beta = 1
        beta1 = 1

    # Campo IV
    elif csi >= (ep_cu_c / (ep_cu_c + epsilon_yd)) and csi < 1 + lamb:
        eta = (6 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_cu_c * ep_c2_c + ep_c2_c ** 2) / (
            12 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_c2_c * ep_cu_c)
        k = 1 - ep_c2_c / (3 * ep_cu_c)
        beta = (ep_cu_c / epsilon_yd) * ((1 - csi) / csi)
        beta1 = 1

    # Calcolo omega
    omega = As*fyd/(b*d*fcd_c)

    # Calcolo sforzo normale resistente di progetto
    Nrd = k*fcd_c*b*d*csi + beta1*fyd*As1 - beta*fyd*As

    # Calcolo sforzo normale resistente di progetto adimensionalizzato
    nrd = Nrd/(b*d*fcd_c)

    # Calcolo momento flettente resistente di progetto
    Mrd = k*fcd_c*b*d*csi*((d+delta)/2 - eta*csi*d) + beta1*fyd*As1* (d-delta)/2 +
        beta*fyd*As*(d-delta)/2

    # Calcolo momento flettente resistente di progetto
    mrd = k*((1+lamb)*csi/2 - eta*csi**2) + omega*(As1*beta1/As + beta)*(1-lamb)/2

```

```

# Inserimento di mrd e nrd nelle rispettive liste
nrd_lista.append(nrd)
mrd_lista.append(mrd)
Nrd_lista.append(Nrd)
Mrd_lista.append(Mrd)

# Stampa grafici
plt.plot (mrd_lista, nrd_lista)
plt.plot (Mrd_lista, Nrd_lista)
plt.show()

# Presenza di Flessione semplice, ricaviamo omega e mrd
elif flag == 'F' or flag == 'f':

# Inizializzo variabili
omega = 0
mrd = 0

# Inizializzo liste
omega_lista = []
mrd_lista = []
csi_lista = []

# Ciclo definizione valori singoli di nrd e mrd ricavando campo di rottura
for csi in numpy.arange (0, 1, 0.001):

# Campo IIIa
if csi >= 0 and csi < ((lamb * ep_cu_c) / (ep_cu_c + epsilon_yd)):
eta = (6 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_cu_c * ep_c2_c + ep_c2_c ** 2) / (
12 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_c2_c * ep_cu_c)
k = 1 - ep_c2_c / (3 * ep_cu_c)
beta = 1
beta1 = -1

# Campo IIIb
elif csi >= ((lamb * ep_cu_c) / (ep_cu_c + epsilon_yd)) and csi < (
(lamb * ep_cu_c) / (ep_cu_c - epsilon_yd)):
eta = (6 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_cu_c * ep_c2_c + ep_c2_c ** 2) / (
12 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_c2_c * ep_cu_c)
k = 1 - ep_c2_c / (3 * ep_cu_c)
beta = 1
beta1 = (ep_cu_c / epsilon_yd) * ((csi - lamb) / csi)

# Campo IIIc
elif csi >= ((lamb * ep_cu_c) / (ep_cu_c - epsilon_yd)) and (ep_cu_c / (ep_cu_c +
epsilon_yd)):
eta = (6 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_cu_c * ep_c2_c + ep_c2_c ** 2) / (
12 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_c2_c * ep_cu_c)
k = 1 - ep_c2_c / (3 * ep_cu_c)
beta = 1
beta1 = 1

# Campo IV
elif csi >= (ep_cu_c / (ep_cu_c + epsilon_yd)) and csi < 1 + lamb:
eta = (6 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_cu_c * ep_c2_c + ep_c2_c ** 2) / (
12 * ep_cu_c ** 2 - 4 * ep_c2_c * ep_cu_c)
k = 1 - ep_c2_c / (3 * ep_cu_c)
beta = (ep_cu_c / epsilon_yd) * ((1 - csi) / csi)
beta1 = 1

```

```

# Calcolo rapporto meccanico di armatura tesa omega
omega = (k*csi)/(beta - beta1*As1/As)

# Calcolo momento flettente resistente di progetto adimensionalizzato
mrd = beta1*As1/As*omega*(1 - lamb) + k*(csi - eta*csi**2)

# Inserimento valori singoli di omega e mrd nelle relative liste
omega_lista.append(omega)
mrd_lista.append(mrd)
csi_lista.append(csi)

# Stampa grafici
plt.plot (omega_lista, csi_lista)
plt.plot (mrd_lista, csi_lista)
plt.show()

else:
    print ('ERRORE, rispondere con \"T\" o \"F\"')

```

4.2.6 Risultati grafici

Anche in questo caso, l'analisi è stata condotta con riferimento ad una sezione rettangolare di calcestruzzo ($R_{ck} = 30$ MPa) caratterizzata dalle seguenti dimensioni:

- $b = 300$ mm;
- $d = 350$ mm;
- $\delta = 35$ mm;
- $A_{st} = 50,5$ mm² ($\Phi 8$).

Il legame costitutivo considerato per il calcestruzzo è il *parabola-rettangolo*, mentre per l'acciaio si considera un comportamento *elastico perfettamente plastico*. Dato che è presente il confinamento, sia le deformazioni, sia la resistenza del calcestruzzo risulteranno maggiori rispetto al caso non confinato: di conseguenza, il legame *parabola-rettangolo* avrà un'estensione maggiore.

FLESSIONE SEMPLICE

Nel caso di flessione semplice e in presenza di confinamento, i parametri del problema che vengono fatti variare sono il passo delle staffe e il quantitativo di armatura in zona compressa: come prima, si ottengono curve differenti in base al valore che assume $\mu = A'_s/A_s$. L'armatura tesa, invece, si mantiene costante ed è pari a $A_s = 770$ mm² ($5\Phi 14$).

Nell'analisi si considerano due passi di staffe: 87,5 mm e 50 mm. Questi valori vengono definiti nel rispetto della normativa riguardo ai dettagli costruttivi; in particolare, il passo massimo deve essere il minore tra:

- $d/4$;
- $8\Phi_{long}$;
- $24\Phi_{st}$;
- 175 mm.

I risultati forniti dal programma sono riportati nei grafici seguenti: anche nel caso di calcestruzzo confinato si ricavano le curve di ω e m_{rd} in funzione di ξ .

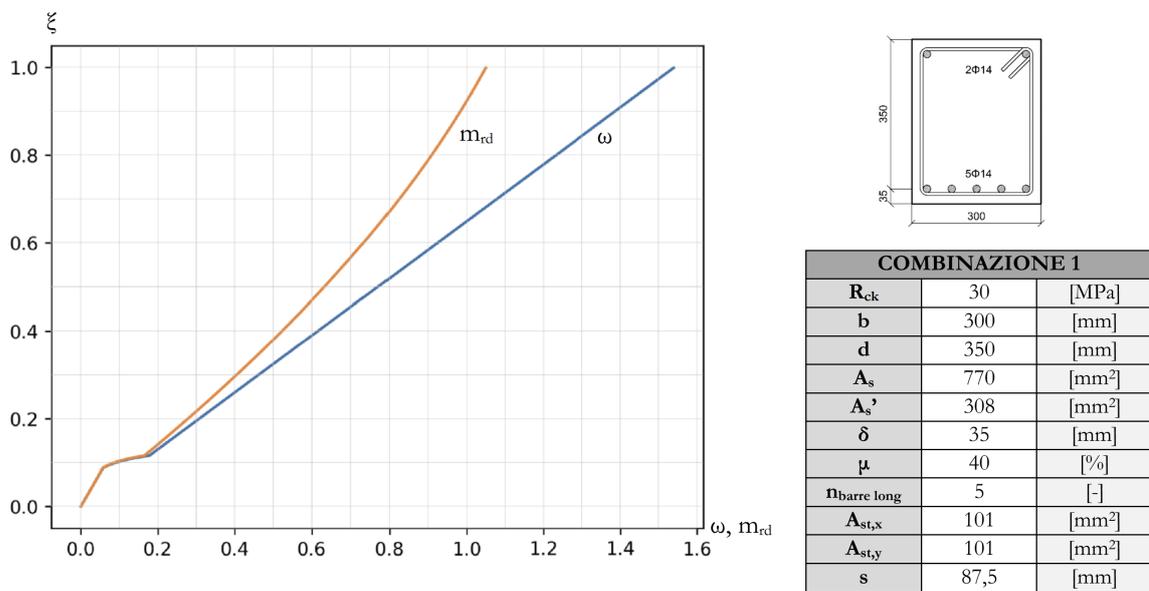


Figura 85: Flessione semplice: combinazione 1 (caso confinato)

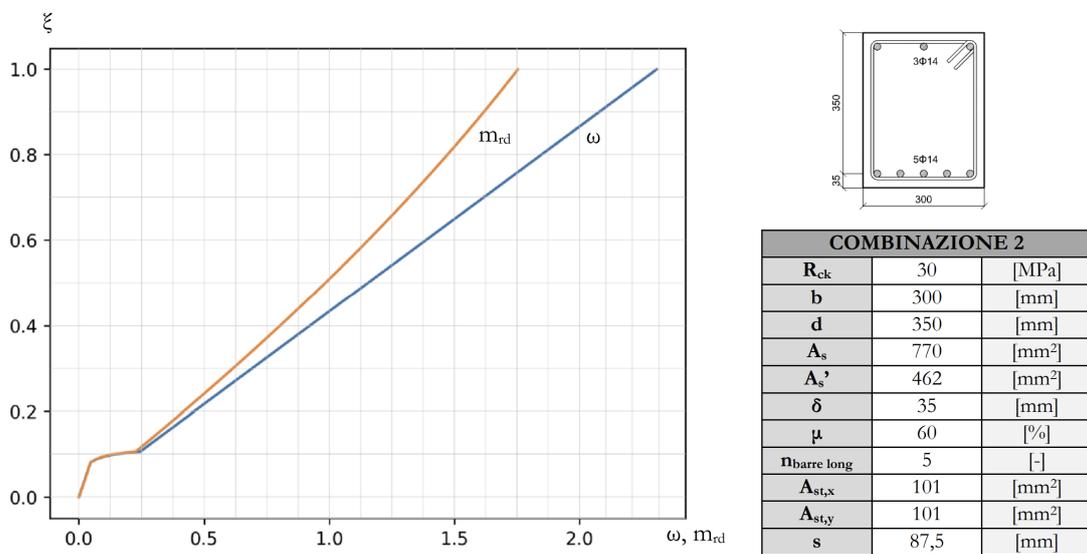
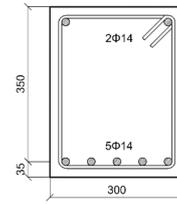
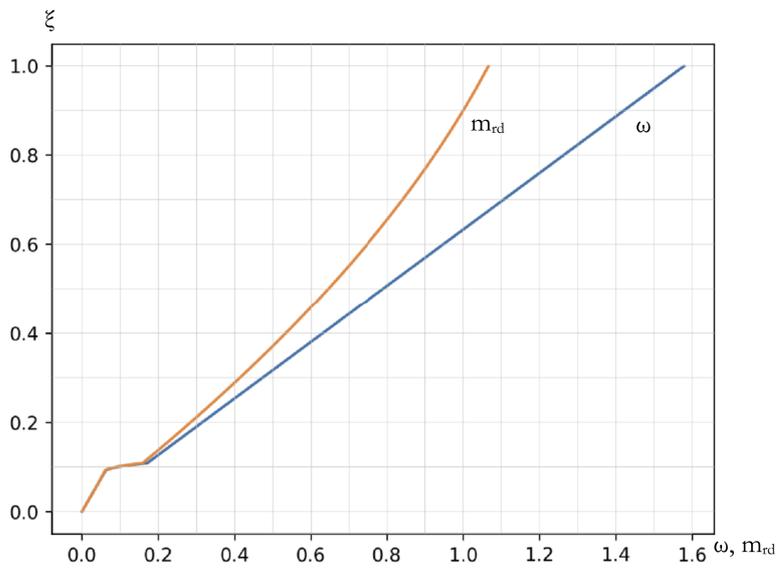
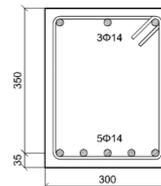
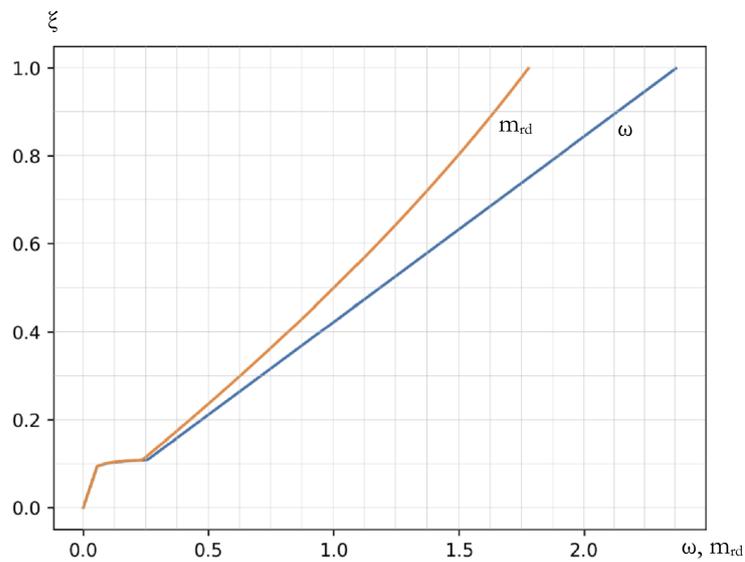


Figura 86: Flessione semplice: combinazione 2 (caso confinato)



COMBINAZIONE 3		
R_{ck}	30	[MPa]
b	300	[mm]
d	350	[mm]
A_s	770	[mm ²]
A_s'	308	[mm ²]
δ	35	[mm]
μ	40	[%]
$n_{barre\ long}$	5	[-]
$A_{st,x}$	101	[mm ²]
$A_{st,y}$	101	[mm ²]
s	50	[mm]

Figura 87: Flessione semplice: combinazione 3 (caso confinato)



COMBINAZIONE 4		
R_{ck}	30	[MPa]
b	300	[mm]
d	350	[mm]
A_s	770	[mm ²]
A_s'	462	[mm ²]
δ	35	[mm]
μ	60	[%]
$n_{barre\ long}$	5	[-]
$A_{st,x}$	101	[mm ²]
$A_{st,y}$	101	[mm ²]
s	50	[mm]

Figura 88: Flessione semplice: combinazione 4 (caso confinato)

Anche nel caso di confinamento, dai grafici è possibile notare come, per $\mu = 0$, ω assume un andamento linearmente crescente con ξ mentre m_{rd} cresce in maniera esponenziale. Aumentando l'armatura in zona compressa, in un primo momento le curve sono descritte da una legge parabolica (campo IIIb) e, successivamente, assumono lo stesso andamento conseguito per $\mu = 0$ (campo IIIc).

Inoltre, a parità di ξ , i valori di ω e m_{rd} risultano maggiori per valori di armatura compressa A'_s via via crescenti.

Infine, si può osservare che il passo delle staffe è ininfluenza nella valutazione di ω e m_{rd} .

PRESSOFLESSIONE

Nel caso di pressoflessione, come detto in precedenza, si ottengono delle curve dipendenti da N_{Rd} e M_{Rd} [N/mm²] che definiscono un settore del dominio di interazione relativo alla sezione analizzata. Anche per il confinamento, i risultati vengono espressi in termini adimensionali, cioè considerando i valori adimensionizzati dello sforzo normale e del momento flettente (n_{rd} , m_{rd}).

Per l'analisi si considera una sezione simmetricamente armata con le medesime dimensioni di quella definita in precedenza.

Anche in questo caso vengono fatti variare entrambi i quantitativi di armatura: inizialmente si considerano 2 Φ 14 in ognuna delle due zone, successivamente vengono inserite ulteriori barre fino a raggiungere una configurazione composta da 4 Φ 14 sia in zona tesa, sia in quella compressa.

Inoltre, come prima, si considerano due passi delle staffe differenti: 87,5 mm e 50 mm.

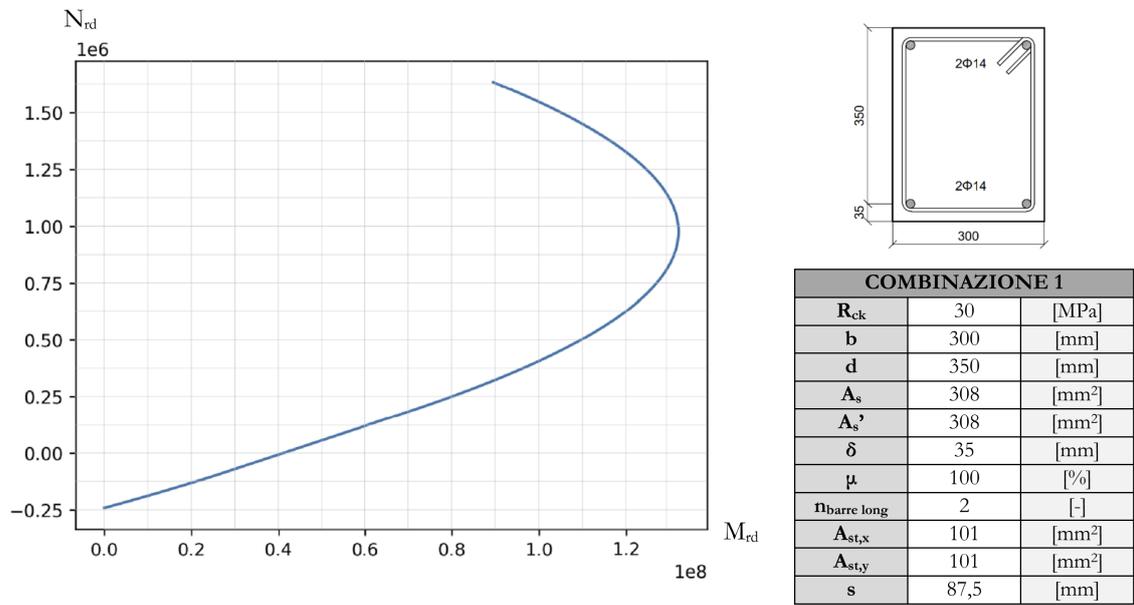


Figura 89: Pressoflessione: combinazione 1 (caso confinato)

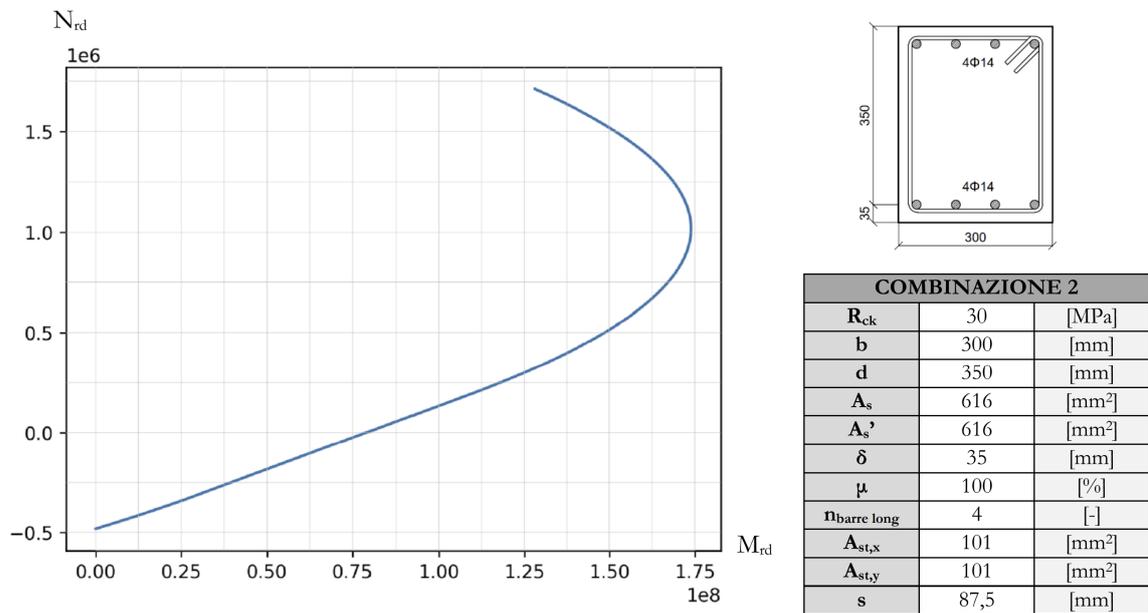


Figura 90: Pressoflessione: combinazione 2 (caso confinato)

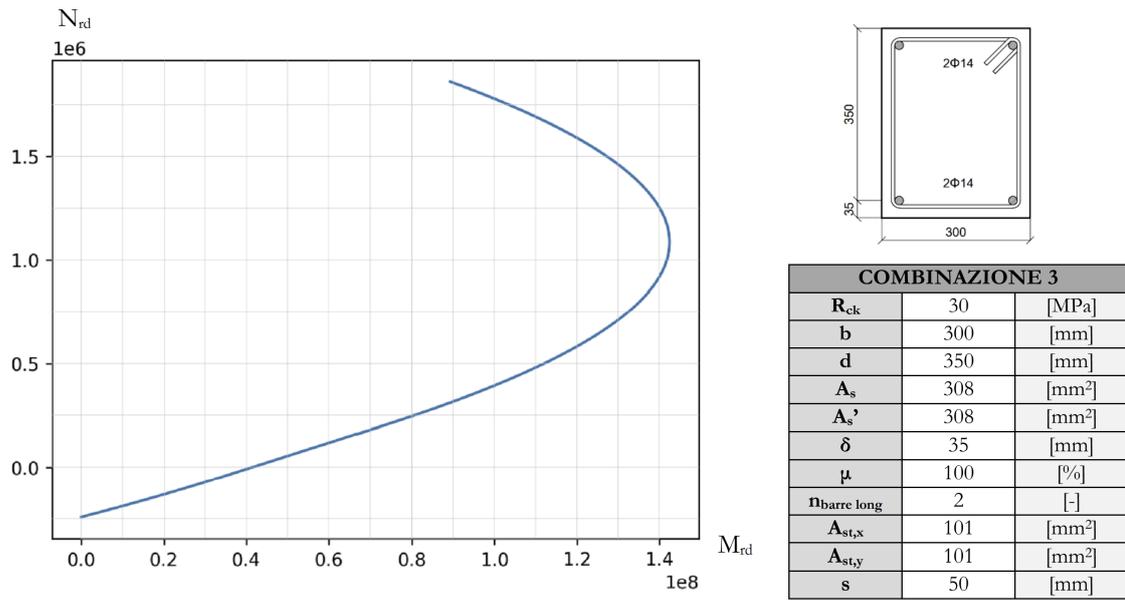


Figura 91: Pressoflessione: combinazione 3 (caso confinato)

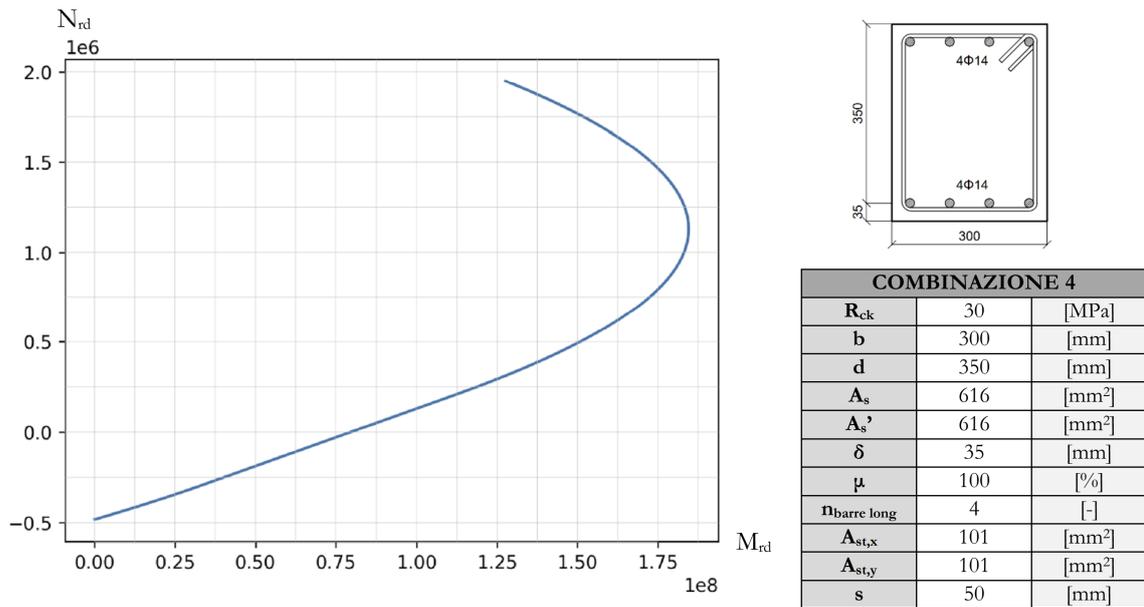


Figura 92: Pressoflessione: combinazione 4 (caso confinato)

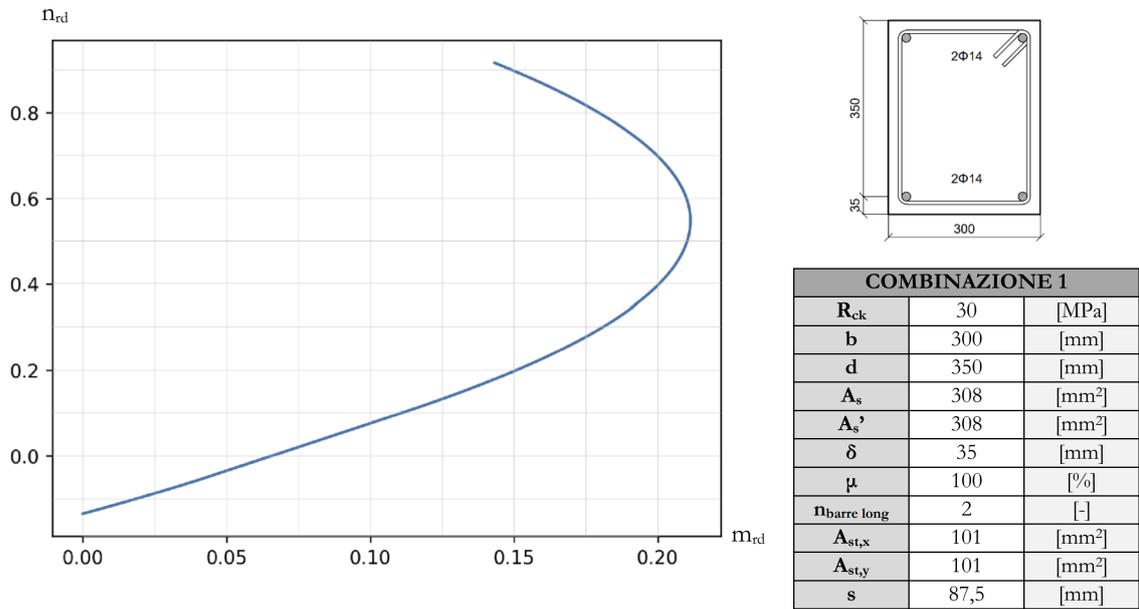


Figura 93: Pressoflessione: combinazione 1 (caso confinato) adimensionale

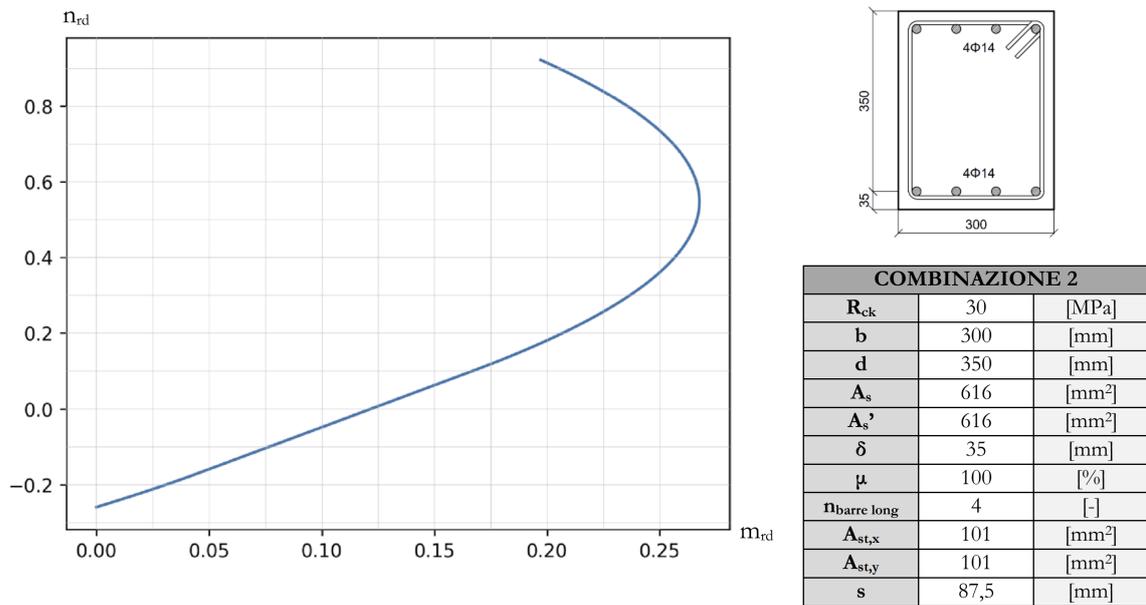


Figura 94: Pressoflessione: combinazione 2 (caso confinato) adimensionale

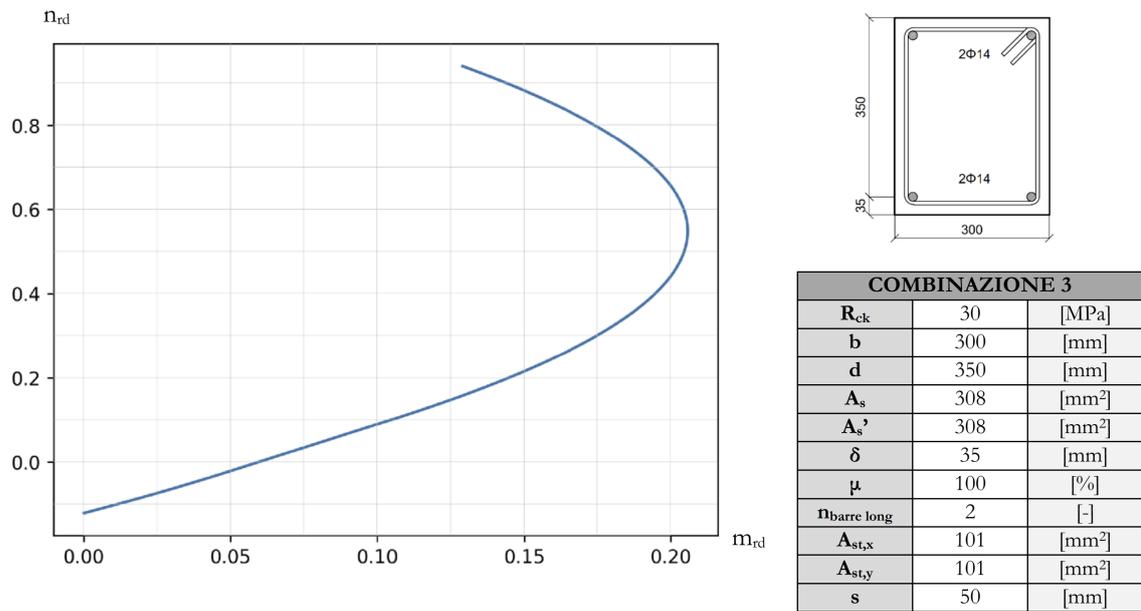


Figura 95: Pressoflessione: combinazione 3 (caso confinato) adimensionale

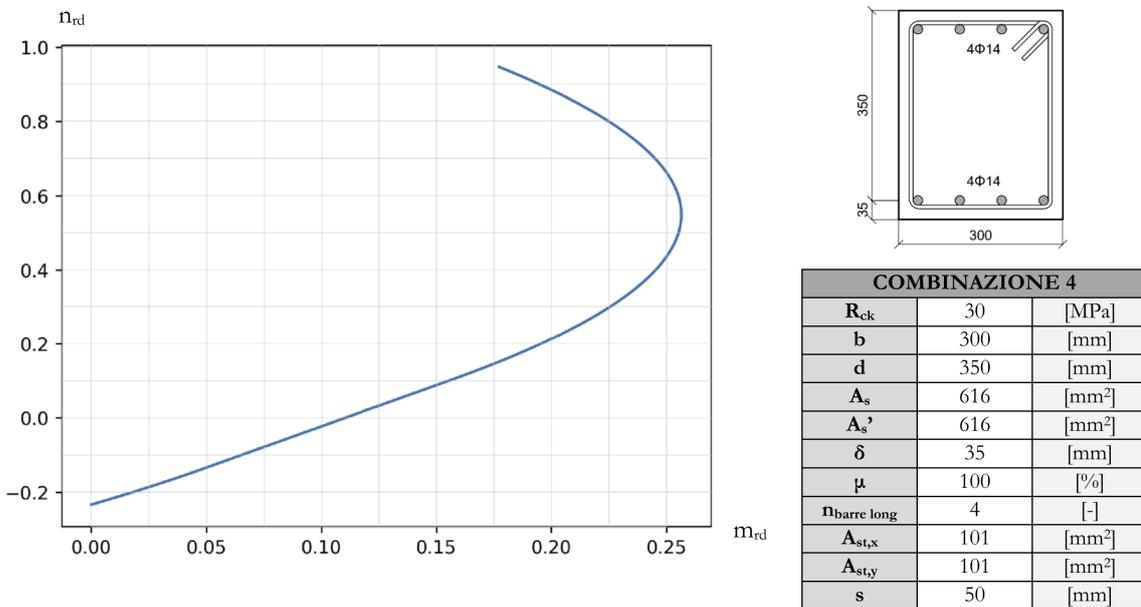


Figura 96: Pressoflessione: combinazione 4 (caso confinato) adimensionale

Dai grafici si osserva come un aumento di armatura comporti un netto incremento dei valori resistenti di sforzo normale e momento flettente e, quindi, una dilatazione del dominio di interazione, permettendo alla sezione di avere una resistenza maggiore alle sollecitazioni.

4.3 Calcestruzzo armato confinato: modello proposto

4.3.1 Diagramma di flusso

Anche in questo caso, è stato ideato un codice considerando il modello proposto nel caso di confinamento, basato sul diagramma di flusso rappresentato in figura 97, il quale mette in evidenza le operazioni eseguite dal programma.

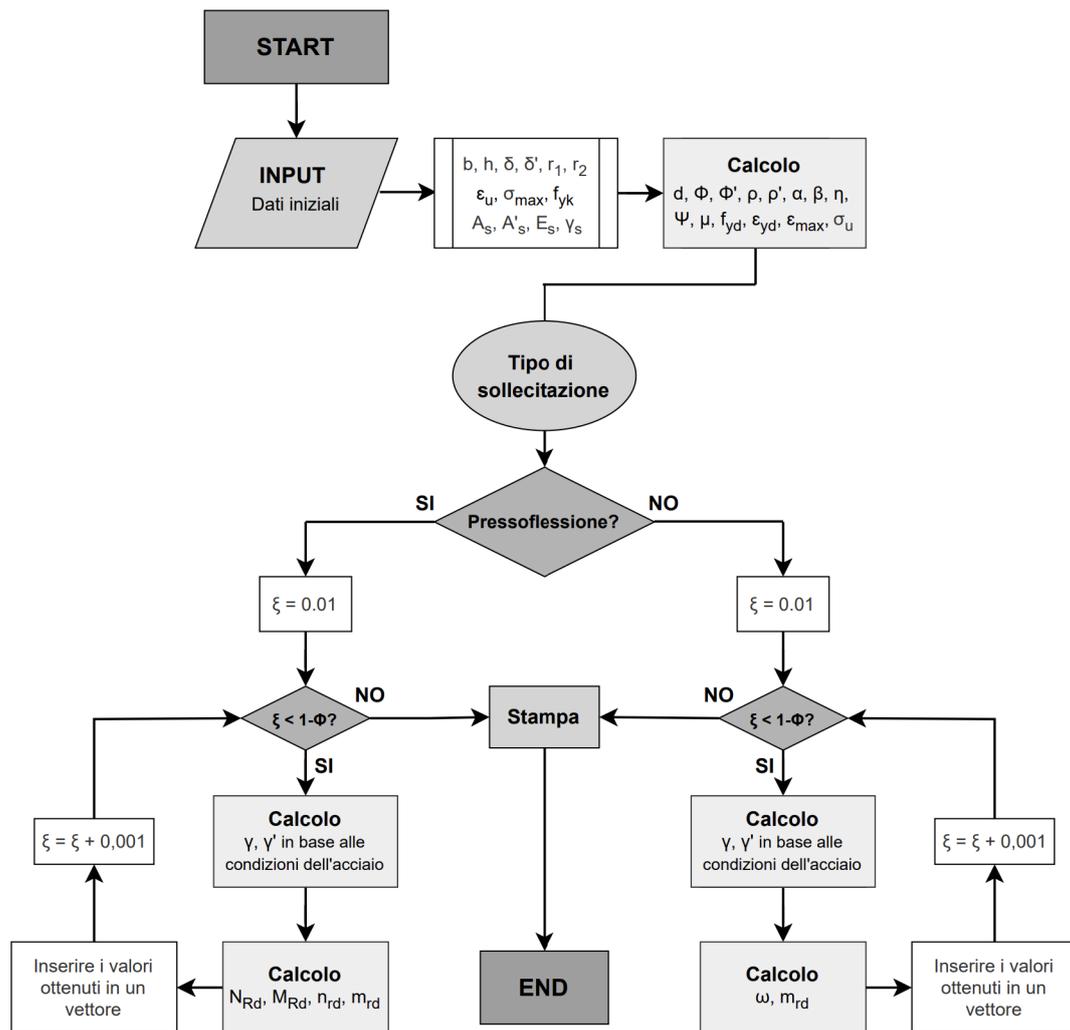


Figura 97: Flow-chart: verifica allo SLU per flessione semplice e pressoflessione (presenza di confinamento - modello proposto)

4.3.2 Fase di lettura

Come detto nei casi precedenti, la prima fase è quella di lettura: il programma riceve in input un file di lunghezza finita che include i dati relativi alle proprietà meccaniche della sezione di calcestruzzo armato e che verrà letto in un'unica operazione. All'interno si trovano i seguenti parametri:

- resistenza caratteristica allo snervamento dell'acciaio f_{yk} ;
- modulo elastico dell'acciaio E_s ;
- coefficiente parziale di sicurezza dell'acciaio γ_s .

L'acciaio considerato per ogni sezione è sempre il B450C e il legame costitutivo associato è quello "elasto-plastico incrudente", definito nel capitolo 2.4.2.

Per quanto riguarda il calcestruzzo, invece, il legame considerato è quello riportato e analizzato nel capitolo 3.4, che tiene in conto della presenza del confinamento. Questo modello, essendo continuo, permette di eliminare il problema legato alla discontinuità tra le diverse funzioni che caratterizzano, ad esempio, il legame "parabola-rettangolo" impiegato in precedenza: nel nostro caso, infatti, il modello può essere descritto attraverso l'impiego di un'unica funzione.

Tuttavia, ciò che deve essere attentamente valutato è la condizione in cui si trovano le barre di armatura sia in zona tesa, sia in quella compressa: è necessario, pertanto, stabilire se esse si trovano ancora in campo elastico o se risultano snervate.

Il programma, inoltre, riceverà un altro file in input di dimensione indefinita, contenente i parametri necessari al completamento della caratterizzazione geometrica e meccanica della sezione sotto esame. All'interno si trovano i seguenti parametri:

- base della sezione b ;
- altezza utile, o meccanica, h ;
- area di acciaio in zona tesa A_s ;
- area di acciaio in zona compressa A'_s ;
- spessore del copriferro in zona tesa δ ;
- spessore del copriferro in zona compressa δ' ;
- tensione massima sul calcestruzzo confinato σ_{max} ;

- deformazione ultima del calcestruzzo confinato ϵ_u ;
- rapporto tra la deformazione massima e quella ultima r_1 ;
- rapporto tra la tensione ultima e quella massima r_2 .

Al contrario del primo file, questo viene letto riga per riga, esaminando, perciò, una sola sezione alla volta.

4.3.3 Fase di analisi e computazione numerica

Anche in tal caso, questa fase prevede l'analisi dell'insieme delle plausibili configurazioni assunte dall'asse neutro per ciascuna sezione, in modo da ricavare l'esatto diagramma di verifica. Come prima, il ragionamento viene condotto in termini adimensionalizzati, cioè considerando il valore adimensionale della posizione dell'asse neutro ξ , inizializzato a zero e, successivamente, incrementato fino a raggiungere il valore massimo del dominio definito dalla teoria, cioè $\xi = 1 - \Phi$.

Per assicurare un regolare funzionamento del programma, bisogna valutare alcuni parametri utili all'analisi computazionale e alla compilazione dell'abaco di verifica. Le grandezze calcolate sono:

- la tensione ultima del calcestruzzo confinato σ_u ;
- la deformazione massima del calcestruzzo confinato ϵ_{max} ;
- l'altezza totale della sezione d ;
- gli spessori adimensionalizzati del copriferro Φ e Φ' ;
- i rapporti geometrici di entrambe le armature ρ e ρ' ;
- il rapporto tra le armature μ ;
- la tensione di snervamento di progetto dell'acciaio f_{yd} ;
- la deformazione allo snervamento di progetto dell'acciaio ϵ_{yd} ;
- i parametri che governano il modello costitutivo del calcestruzzo α , β e η ;
- la funzione $\Psi(\epsilon_u)$.

Una volta determinati i parametri sopraccitati, è necessario verificare le condizioni in cui si trova sia l'acciaio teso, sia quello compresso. La valutazione consiste in un confronto diretto tra la deformazione effettiva delle barre di acciaio tese ϵ_s (o compresse ϵ'_s) e quella allo snervamento ϵ_{yd} .

Le deformazioni, che si considerano piane sull'intera sezione, vengono calcolate ricorrendo alla similitudine dei triangoli: le deformazioni dell'acciaio, infatti, sono proporzionali a quelle del calcestruzzo.

Pertanto, in base alla condizione in cui si trova l'acciaio, i coefficienti di sforzo delle armature γ e γ' assumeranno valori differenti.

Questi parametri sono indispensabili per la realizzazione dell'abaco di verifica: nel caso di flessione semplice, permettono di determinare il rapporto meccanico di armatura tesa ω e il momento flettente adimensionalizzato m_{Rd} , i quali poi, combinati con il parametro ξ , consentiranno di ricavare il grafico di verifica previsto. Lo stesso vale per la pressoflessione: in questo caso, però, le grandezze ricavate saranno lo sforzo normale adimensionalizzato n_{Rd} e il momento flettente adimensionalizzato m_{Rd} .

4.3.4 Fase di stampa

Come nei casi precedenti, in questa fase, le grandezze ω , m_{Rd} e n_{Rd} ottenute al variare di ξ sono raccolte in differenti vettori di informazione: in questo modo è possibile acquisire un numero considerevole di dati utili alla realizzazione dell'abaco. L'inserimento di dati si interrompe nel momento in cui ξ , inizialmente uguale a zero, raggiunge il valore $1 - \Phi$.

Infine verrà stampato a video l'abaco di verifica relativo alla sezione esaminata: in questo modo si attribuirà un senso grafico ai risultati ottenuti dalla trattazione analitica.

Essendo, il modello, ancora in fase di sperimentazione, viene riportato solo il codice, sviluppato a partire dalla teoria del capitolo 3.4, utile alla definizione del rapporto meccanico di armatura tesa ω .

4.3.5 Codice del programma

```
# VALUTAZIONE DI OMEGA CON IL MODELLO PROPOSTO IN PRESENZA DI CONFINAMENTO

# Importo librerie
import math
import numpy
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy
import scipy.special as sc

# Dati iniziali richiesti all'utente
b = float(input('Inserire il valore della base della sezione b [mm]: '))
h = float(input('Inserire il valore dell\'altezza utile della sezione h [mm]: '))
As = float(input('Inserire il valore dell\'area di armatura in zona tesa As [mm^2]: '))
As1 = float(input('Inserire il valore dell\'area di armatura in zona compressa A\'s [mm^2]: '))
delta = float(input('Inserire il valore del copriferro per acciaio teso  $\delta$  [mm]: '))
delta_primo = float(input('Inserire il valore del copriferro per acciaio compresso  $\delta$ \'' [mm]: '))
epsilon_ultima = float(input('Inserire il valore della deformazione ultima  $\epsilon_u$  [-]: '))
sigma_max = float(input('Inserire il valore della tensione massima  $\sigma_{max}$  [MPa]: '))
r1 = float(input('Inserire il rapporto tra la deformazione massima e quella ultima: '))
r2 = float(input('Inserire il rapporto tra la tensione ultima e quella massima: '))

# Consideriamo le deformazioni del calcestruzzo epsilon_max = 0.002 e epsilon_ultima = 0.0035 del parabola-rettangolo
# Con questi valori, il rapporto epsilon_max/epsilon_ultima = 0.57
# Consideriamo un rapporto sigma_ultima/sigma_max = 0.8
# Considero sigma_max = fcd

# CALCOLO DATI

# Coefficiente parziali di sicurezza acciaio
gamma_s = 1.15

# Resistenza allo snervamento caratteristica acciaio
fyk = 450 # in MPa

# Modulo di Young dell'acciaio
Es = 210000 # in MPa

# Calcolo resistenza allo snervamento di progetto acciaio
fyd = fyk/gamma_s

# Calcolo deformazione allo snervamento dell'acciaio
epsilon_yd = fyd / Es

# Calcolo resistenza ultima calcestruzzo
sigma_ultima= sigma_max*r2

# Calcolo deformazione massima calcestruzzo
epsilon_max = r1*epsilon_ultima

# Calcolo altezza sezione
d = h + delta

# Calcolo copriferri adimensionalizzati
phi = delta / h
phi_primo = delta_primo / h

# Calcolo rapporto armature
mu = As1/As

# Calcolo rapporto geometrico armature
ro = As / (b*d)
ro_primo = As1 / (b*d)
```

CALCOLO PARAMETRI MODELLO

```
eta = math.log(sigma_ultima/sigma_max)/(math.log(epsilon_ultima/epsilon_max)+ 1 -
epsilon_ultima/epsilon_max)
alpha = sigma_max*math.exp(eta)/epsilon_max**eta
beta = eta/epsilon_max
psi = 1/beta * (alpha*epsilon_ultima**eta*(beta*epsilon_ultima)**(-1*eta)*(math.gamma(eta+1)-
sc.gammainc(eta+1,beta*epsilon_ultima)))
```

```
#Inizializzo variabili
omega = 0
```

```
#Inizializzo liste
omega_lista = []
csi_lista = []
```

CALCOLO OMEGA

```
# Ciclo definizione valori singoli di omega
```

```
for csi in numpy.arange (0.01, 1-phi, 0.001):
```

```
    # Calcolo epsilon_s e epsilon_s_primo
    epsilon_s = epsilon_ultima*((1/csi) -1)
    epsilon_s_primo = epsilon_ultima*(1 - (delta_primo/(csi*h)))
```

```
    # Condizione sull'acciaio teso
    if epsilon_s < epsilon_yd:
        gamma = epsilon_s*Es/fyd
    else:
        gamma = 1
```

```
    # Condizione sull'acciaio compresso
    if epsilon_s_primo < epsilon_yd:
        gamma_primo = epsilon_s_primo*Es/fyd
    else:
        gamma_primo = 1
```

```
    # Calcolo rapporto meccanico di armatura tesa
    omega = (csi*psi)/(epsilon_ultima*sigma_max*(gamma-(mu*gamma_primo)))
```

```
# Inserimento valori singoli di omega nelle relative liste
```

```
omega_lista.append(omega)
csi_lista.append(csi)
```

```
# Stampa grafici
```

```
plt.plot (omega_lista, csi_lista)
plt.show()
```

5 Conclusioni

L'obiettivo primario di tale tesi è la valutazione degli effetti provocati dal confinamento su sezioni in cemento armato, in termini di resistenza e di duttilità. Questa valutazione viene effettuata mediante un confronto diretto tra i risultati ottenuti attraverso la creazione di un codice informatico: esso consente di implementare un algoritmo capace di svolgere la verifica agli stati limite ultimi per sezioni rettangolari in cemento armato soggette a flessione semplice o a pressoflessione, valutando, quindi, gli effetti dovuti ad un eventuale confinamento.

Come detto inizialmente, e come dimostrato in questa tesi, la presenza di confinamento produce degli effetti benefici sull'elemento: comporta, infatti, un aumento di duttilità e un contemporaneo incremento di resistenza.

Per tale motivo i criteri della progettazione civile odierna mirano ad un impiego sempre maggiore di elementi confinati: in questo modo si garantisce all'edificio una resistenza strutturale adeguata e, al contempo, un'opportuna duttilità, parametro base della dissipazione energetica. Progettare strutture in grado di dissipare un notevole quantitativo di energia significa creare edifici capaci di far fronte ad eventi sismici di rilevante entità, accettando il rischio di un possibile danneggiamento, ma con la consapevolezza che essi possano sviluppare grandi deformazioni anelastiche a cui corrispondono valori di resistenza non eccessivamente elevati: in questo modo vengono privilegiati i meccanismi di rottura duttili piuttosto che quelli fragili.

Dopo un'accurata descrizione del calcestruzzo armato, quindi dei materiali da cui è formato e dei legami costitutivi proposti in letteratura, anche nel caso di un eventuale confinamento, è stato presentato un modello costitutivo a tre parametri capace di esprimere il comportamento del calcestruzzo confinato. La potenza di questo modello risiede nella sua continuità: esso, infatti, viene descritto da un'unica funzione dipendente dal valore di deformazione e da tre parametri attentamente valutati in maniera analitica. A differenza degli altri modelli, quindi, i problemi legati alla discontinuità dei tratti delimitati da specifici valori di deformazione vengono a mancare.

Inoltre, così come è stato fatto per il calcestruzzo non confinato, anche nel caso di confinamento sono stati valutati i parametri fondamentali per la risoluzione del problema legato alla flessione e alla pressoflessione tramite la definizione delle equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione. A differenza dell'approccio di normativa, in questo caso non è possibile ricorrere alla definizione dei campi di rottura e quindi è necessaria una continua valutazione delle condizioni delle arma-

ture al variare del parametro ξ .

Come già anticipato, lo scopo principale dell'elaborato risiede nella valutazione degli effetti del confinamento. Questa analisi è stata realizzata attraverso la creazione di un codice informatico in grado di calcolare i parametri essenziali per la risoluzione dei problemi flessionali e di pressoflessione. Lo studio è stato condotto considerando una serie di sezioni rettangolari in cemento armato con uguali dimensioni geometriche e stessa classe di resistenza, ma con diversi quantitativi di armatura longitudinale e trasversale. Dato che il modello proposto è ancora in fase di sperimentazione, l'analisi è stata eseguita considerando il modello "parabola-rettangolo" definito da normativa.

In primo luogo, è stato esaminato il problema flessionale: nel caso di calcestruzzo non confinato sono state analizzate tre sezioni rettangolari con diverso quantitativo di armatura compressa. I risultati grafici ottenuti sono approssimabili a quelli riportati in normativa, in cui sono messi in relazione i valori di ξ , ω e m_{rd} . Allo stesso modo sono state analizzate due sezioni in calcestruzzo armato confinato: anche in questo caso è stata fatta variare l'area di armatura compressa e, in più, il passo delle staffe.

L'analisi ha evidenziato che:

- l'aumento dell'armatura in zona compressa produce, a parità di ξ , un incremento di ω e m_{rd} in entrambi i casi;
- la presenza dell'armatura di confinamento genera valori maggiori di ω e m_{rd} rispetto al caso in cui essa fosse assente;
- nel caso di confinamento, il passo delle staffe s non influenza i valori di ω e m_{rd} perché, essendo entrambi i valori divisi per $f_{cd,c}$, il parametro s , strettamente correlato alla resistenza, non entra in gioco. Ovviamente questo non succederebbe se venissero considerati i valori reali e non quelli adimensionali.

Successivamente, è stato valutato il problema relativo alla pressoflessione: nel caso di calcestruzzo non confinato sono state analizzate due sezioni rettangolari con diverso quantitativo di armatura tesa e compressa. Anche in questo caso i risultati grafici ricavati sono pressoché simili a quelli riportati in normativa. Le coppie di valori (n_{rd} , m_{rd}) ottenute dall'analisi permettono di identificare i domini di interazione delle varie sezioni. Allo stesso modo sono state esaminate altre due sezioni in calcestruzzo armato confinato: anche in questo caso sono state fatte variare entrambe le aree di armatura e, come prima, anche il passo delle staffe.

In questo caso, l'analisi ha mostrato come:

- la presenza dell'armatura di confinamento comporta una diminuzione dei valori adimensionali (n_{rd} , m_{rd}), questo perché aumenta la resistenza del calcestruzzo $f_{cd,c}$ con cui vengono adimensionalizzati i parametri;
- per lo stesso motivo, una riduzione del passo delle staffe provoca una diminuzione dei valori adimensionali (n_{rd} , m_{rd});
- il contrario si verifica se si considerano i valori dimensionali: la presenza delle staffe comporta un'amplificazione del dominio di interazione e, per di più, una riduzione del passo s produce un ulteriore incremento di sforzo normale e momento flettente (N_{Rd} , M_{Rd}).

Per tutti i casi, inoltre, sono stati calcolati i valori di deformazione, nonché quelli di resistenza massima a compressione: così facendo è possibile comprendere ancora più chiaramente gli effetti del confinamento. Il tutto viene riportato nelle tabelle sottostanti.

FLESSIONE SEMPLICE	ASSENZA DI CONFINAMENTO		
	ϵ_{c2} [-]	ϵ_{cu} [-]	f_{cd} [MPa]
Combinazione 1 ($\mu = 0$)	0,002	0,0035	14,11
Combinazione 2 ($\mu = 0,4$)	0,002	0,0035	14,11
Combinazione 3 ($\mu = 0,6$)	0,002	0,0035	14,11

FLESSIONE SEMPLICE	PRESENZA DI CONFINAMENTO		
	$\epsilon_{c2,c}$ [-]	$\epsilon_{c2,u}$ [-]	$f_{cd,c}$ [MPa]
Combinazione 1 ($\mu = 0,4$ e $s = 87,5$ mm)	0,0031	0,0139	17,71
Combinazione 2 ($\mu = 0,6$ e $s = 87,5$ mm)	0,0031	0,0139	17,71
Combinazione 3 ($\mu = 0,4$ e $s = 50$ mm)	0,0039	0,0249	19,65
Combinazione 4 ($\mu = 0,6$ e $s = 50$ mm)	0,0039	0,0249	19,65

PRESSOFLESSIONE	ASSENZA DI CONFINAMENTO		
	ϵ_{c2} [-]	ϵ_{cu} [-]	f_{cd} [MPa]
Combinazione 1	0,002	0,0035	14,11
Combinazione 2	0,002	0,0035	14,11

PRESSOFLESSIONE	PRESENZA DI CONFINAMENTO		
	$\epsilon_{c2,c}$ [-]	$\epsilon_{c2,u}$ [-]	$f_{cd,c}$ [MPa]
Combinazione 1 ($s = 87,5$ mm)	0,0029	0,0117	16,99
Combinazione 2 ($s = 87,5$ mm)	0,0031	0,0137	17,67
Combinazione 3 ($s = 50$ mm)	0,0036	0,0203	18,85
Combinazione 4 ($s = 50$ mm)	0,0039	0,0246	19,59

Queste tabelle evidenziano come, in presenza di confinamento, sia le deformazioni, sia le resistenze massime del calcestruzzo risultano sempre maggiori rispetto a quelle ottenute nel caso non confinato.

Dato che i risultati ottenuti dall'analisi sono compatibili con la teoria e con quanto viene riportato in normativa, è possibile concludere la trattazione affermando che il codice ideato risulta essere efficace per la valutazione degli effetti del confinamento.

6 Bibliografia

- [1] D. M. 17 gennaio 2018, *Aggiornamento delle Norme tecniche per le costruzioni*, Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti, G.U. n. 42 del 20 febbraio 2018, Supplemento Ordinario n. 8, (NTC18).
- [2] D. M. 14 gennaio 2008, *Norme tecniche per le costruzioni*, Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti, G.U. n. 29 del 4 febbraio 2008, Supplemento Ordinario n. 30, (NTC08).
- [3] Circolare Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti 21 gennaio 2019, n. 7, *Istruzioni per l'applicazione dell'Aggiornamento delle "Norme tecniche per le costruzioni"*, G.U. 11 febbraio 2019, n. 35, s.o.
- [4] Circolare Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti 2 febbraio 2009 n. 617. *Istruzioni per l'applicazione delle Nuove norme tecniche per le costruzioni* di cui al D.M. 14 gennaio 2008, approvata dal Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici.
- [5] Bertero, V.V., and Felippa, C. [1964], "*Discussion of 'Ductility of Concrete', by H.E.H. Roy and M.A. Sozen*", Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE- ACI, Miami, Nov. 1964, pp. 227-234.
- [6] Boscolo Bielo M. [2020], *Prontuario delle costruzioni* (I edizione), Grafill S.r.l., Palermo.
- [7] Chan, W.W.L. [1955], "*The Ultimate Strength and Deformation of Plastic Hinges in Reinforced Concrete Frameworks*", Magazine of Concrete Research, Vol. 7, No. 21, Nov. 1955, pp. 121-132.
- [8] Cosenza E., Manfredi G., Pecce M. [2015], *Strutture in cemento armato, basi della progettazione* (II edizione), Ulrico Hoepli Editore.
- [9] Ghersi A. [2010], *Il cemento armato* (II edizione), Dario Flaccovio Editore.
- [10] Gill, W.O., Park, R., and Priestley, M.J.N.[1979], "*Ductility of Rectangular Reinforced Concrete Columns With Axial Load*", Research Report 79-1, Department of Civil Engineering, University of Canterbury, February 1979.
- [11] Hognestad, E. [1951], "*A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members*", Bulletin Series No. 399, Univ. of Illinois Engrg. Experimental Station, Urbana, 111.

- [12] Hognestad, E., Hanson, N.W., and McHenry, D. [1955], “*Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design*”, ACI Journal, Proceedings Vol. 52, No. 12, Dec. 1955, pp. 455-579.
- [13] Kent D.C., Park R. [1971], “*Flexural members with confined concrete*”, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, ST7, July 1971, pp. 1969-1990.
- [14] Mander J.B., Priestley M.J.N., Park R. [1984], “*Seismic design of bridge piers*”. Research Report n° 84-2, University of Canterbury, New Zealand.
- [15] Mander J.B., Priestley M.J.N., Park R. [1988], “*Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete*”, Journal of Structural Engineering, Vol. 114, n°8, pp. 1804-1825.
- [16] Mander J.B., Priestley M.J.N., Park R. [1988], “*Observed stress-strain behavior of confined concrete*”, Journal of Structural Engineering, Vol. 114, n°8, pp. 1827-1849.
- [17] Mezzina M., *Costruire con il cemento armato*, UTET Libreria, Torino.
- [18] Mezzina M. [2013], *Fondamenti di tecnica delle costruzioni*, De Agostini Scuola S.p.A., Novara.
- [19] Park, R., Priestley, M. J. N., and Gill, W. D. [1982], “*Ductility of square-confined concrete columns*”, J. Struct. Div., ASCE, 108, n°4, pp. 929-950.
- [20] Popovics S. [1973], “*A numerical approach to the complete stress-strain curves for concrete*”, Cement and Concr. Res., Vol. 3, n° 5, pp. 583-599.
- [21] Razvi, S. R., and Saatcioglu, M. [1989], “*Confinement of reinforced concrete columns with welded wire fabric*”, ACI Struct. J., 85° 5, 615-623.
- [22] Razvi S, Saatcioglu M., “*Confinement model for high-strength concrete*”, Journal Structural Engineering, ASCE 1999; 125 n° 3:281–8.
- [23] Richart, F. E., Brandtzaeg, A., and Brown, R. L. [1928], “*A study of the failure of concrete under combined compressive stresses*”, Bulletin 185, Univ. of Illinois Engineering Experimental Station, Champaign, 111.
- [24] Richart, F. E., Brandtzaeg, A., and Brown, R. L. [1929], “*The failure of plain and spirally reinforced concrete in compression*”, Bulletin 190, Univ. of Illinois Engineering Experimental Station, Champaign, 111.
- [25] Roy, H. E. H., and Sozen, M.A. [1963], “*A Model to Simulate the Responses of Concrete to Multi-Axial Loading*”, Structural Research Series No.268, Civil Engineering Studies, University of Illinois, Urbana, June 1963.

- [26] Roy, H. E. H., and Sozen, M.A. [1964], “*Ductility of Concrete*”, Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE- ACI, Miami, Nov. 1964, pp. 2130-224.
- [27] Saatcioglu, M., and Razvi, S. R. [1991], “*Analytical model for confined concrete*”, Research Report No. 9101, Dept. of Civ. Engrg., Univ. of Ottawa, Ottawa, Canada.
- [28] Sargin, M. [1971], “*Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections*”, Study No. 4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Canada, pp. 167.
- [29] Sargin, M., Ghosh, S.K., and Handa, U.K. [1971], “*Effects of Lateral Reinforcement Upon the Strength and Deformation Properties of Concrete*”, Magazine of Concrete Research, Vol. 28, No.75-76, June-Sept. 1971, pp. 99-110.
- [30] Scott B.D., Park R. [1982], Priestley M.J.N., “*Stress-strain behavior of concrete confined by overlapping hoops at low and high strain rates*”. ACI Journal, Jan.-Feb. 1982.
- [31] Sheikh S.A.[1978], “*Effectiveness of Rectangular Ties as Confinement Steel in Reinforced Concrete Columns*”, Ph.D. Thesis, University of Toronto, Canada.
- [32] Sheikh S.A., Uzumeri S.M. [1980], “*Strength and ductility of tied concrete columns*”, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 106, n° 5, pp. 1079-1102.
- [33] Sheikh, S. A. [1982], “*A comparative study of confinement models*”, ACI J., 79° 4, 296-305.
- [34] Soliman, M.T.M., Yu, C.W. [1967], “*The Flexural Stress-Strain Relationship of Concrete Confined by Rectangular Transverse Reinforcement*”, Magazine of Concrete Research, Vol. 19, No. 61, Dec. 1967, pp. 223-238.
- [35] Vallenias J.M., Bertero V.V., Popov E.P. [1977], “*Concrete Confined by Rectangular Hoops and Subjected to Axial Load*”, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley, U.S.A., Report No. UCB/EERC-77/13, August 1977, 114 pp.
- [36] Yong, Y. K., Nour, M. G., Nawy, E. G. [1988], “*Behavior of Laterally Confined High-Strength Concrete under Axial Loads*”, Journal of the Structural Division, ASCE, V. 114, No. ST2, Feb. 1988, pp. 332-351.

7 Sitografia

- [1] *Python*, www.python.org, www.py4e.com, www.stackoverflow.com
- [2] *Acciaio*, <https://it.wikipedia.org/wiki/Acciaio>
- [3] *Armatura (edilizia)*, [https://it.wikipedia.org/wiki/Armatura_\(edilizia\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Armatura_(edilizia))
- [4] *Calcestruzzo*, <https://it.wikipedia.org/wiki/Calcestruzzo>
- [5] *Stato limite*, https://it.wikipedia.org/wiki/Stato_limite
- [6] *NTC 2018: domanda e capacità in termini di duttilità in curvatura di elementi in c.a.*, <https://www.ingenio-web.it/33659-ntc-2018-domanda-e-capacita-in-termini-di-duttilita-in-curvatura-di-elementi-in-ca?fbclid=IwAR1S4ePRWjXf4oeKoFzJjdgQoUjDS4Qz4Q54EELHLW0-cnU9srdqrsxBj4Q>
- [7] Furcolo N., *Calcestruzzo armato*, <https://biblus.acca.it/focus/calcestruzzo-armato-cemento-armato/>
- [8] Furcolo N., *Calcestruzzo confinato*, <https://biblus.acca.it/focus/calcestruzzo-confinato-verifiche-di-duttilita-e-dettagli-di-duttilita-esempi-pratici/>
- [9] Furcolo N., *Duttilità e NTC 2018, come eseguire le nuove verifiche*, <https://biblus.acca.it/focus/duttilita-e-ntc-2018/>
- [10] De Pisapia M., *“Calcestruzzo confinato: come realizzarlo utilizzando staffe e legature”*, <https://www.marcodepisapia.com/calcestruzzo-confinato-staffe-legature-ntc2018/>
- [11] De Pisapia M., *“Duttilità di curvatura delle sezioni in cemento armato: la nuova verifica delle NTC2018”*, <https://www.marcodepisapia.com/duttilita-di-curvatura-ntc-2018/>