POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Matematica per l'Ingegneria

Tesi di Laurea Magistrale

Uno studio preliminare della meccanica della crescita volumetrica formulata secondo la teoria gradiente di Gurtin e Anand dei fenomeni anelastici



RelatoriCandidatoProf. Alfio GrilloGiuseppe AuricchioDr. Salvatore Di StefanoDott. Alessandro Giammarinifirma dei relatorifirma del candidato.....Anno Accademico 2021-2022

A mia mamma Rosa per avermi trasmesso una passione e quindi donato un sogno

A mio papà Alfonso per avermi insegnato i giusti valori e la determinazione

Sommario

L'obiettivo centrale di questa Tesi è quella di presentare le equazioni della dinamica per una classe di corpi continui che possiedono una struttura interna libera di evolvere. Seguendo un approccio sistematico, basato sul linguaggio matematico tipico della Geometria Differenziale, sulla decomposizione moltiplicativa BKL e sul concetto di grado della teoria, abbiamo determinato il sistema di equazioni dinamiche, dedotto a partire dal Principio dei Lavori Virtuali. Ciò ha permesso di individuare, da un lato, le leggi che governano l'evoluzione "macroscopica" del corpo (ossia quelle che stabiliscono il moto) e, dall'altro, le equazioni dinamiche che descrivono l'evoluzione della sua microstruttura. Il modello finale, presentato in questa Tesi, effettua l'analisi per una teoria di primo gradiente sia sul moto che sulle deformazioni anelastiche associate alla presenza di crescita e rimodellamento. Ciò ha consentito di individuare le condizioni al contorno per il problema dinamico che scaturisce da queste ipotesi. Inoltre, uno studio basato sulla Teoria del Legame Costitutivo è stata condotto per chiudere le equazioni dinamiche in maniera fisicamente sensata, ponendo una particolare attenzione sul principio di oggettività e sullo studio della dissipazione.

L'interesse per gli argomenti trattati in questa Tesi consiste principalmente nel tentativo di formalizzare e di comprendere alcuni problemi studiati in ambito biomeccanico, riadattando una classe di strumenti inizialmente concepiti per descrivere fenomeni anelastici in materiali non viventi. In particolare, la nostra attenzione è rivolta alla modellizzazione di fenomeni di crescita (variazione di massa) e di rimodellamento (variazione delle proprietà strutturali) di una determinata classe di tessuti biologici, ossia a processi che avvengono in concomitanza a trasformazioni strutturali dei tessuti in cui essi hanno luogo. Inoltre, i problemi ai valori iniziali e al contorno ottenuti possono stimolare la ricerca nel contesto dell'Analisi Numerica e, più in particolare, della Meccanica Computazionale, con lo scopo di completare, con la giusta validazione scientifica, i risultati teorici esposti. Riteniamo che tale prospettiva possa consentire di fornire previsioni sull'evoluzione dei sistemi fisici studiati, ossia corpi continui dotati di microstruttura interna, a partire da ipotesi modellistiche che possono essere gradualmente complicate per studiare effetti di ordine superiore.

Il lavoro svolto conduce un'analisi sulla dinamica di corpi continui dotati di microstruttura partendo dai concetti e dalle definizioni di base della Meccanica dei Continui e giungendo alla formulazione di un modello di *primo gradiente* nelle deformazioni anelastiche per la descrizione di fenomeni di crescita e rimodellamento di una determinata classe di tessuti biologici. La teoria a partire dalla quale la Tesi prende forma è quella sviluppata nell'articolo "A theory of strain-gradient plasticity for isotropic, plastically irrotational materials. Part II: Finite deformations" di M. E. Gurtin e L. Anand, pubblicato nel 2005 nell'"International Journal of Plasticity, vol. 21, pp. 2297–2318".

Il presente manoscritto si inserisce in una linea di ricerca attualmente seguita da Alfio Grillo, Salvatore Di Stefano e Alessandro Giammarini.

Ringraziamenti

Mi è doveroso dedicare questo spazio del mio elaborato alle persone che hanno contribuito, con il loro instancabile supporto, alla realizzazione dello stesso.

In primis, un ringraziamento speciale al mio relatore, il Professore A. Grillo, per la sua immensa pazienza, per i suoi indispensabili consigli, per le conoscenze trasmesse durante tutto il percorso di stesura dell'elaborato.

Ringrazio infinitamente i miei genitori che mi hanno sempre sostenuto, appoggiando ogni mia decisione, fin dalla scelta del mio percorso di studi.

Ringrazio affettuosamente mio fratello G. Auricchio per avermi pazientemente aiutato nella preparazione degli esami di matematica più impegnativi della mia carriera.

Grazie anche al mio correlatore S. Di Stefano e A. Giammarini per i loro preziosi consigli e per avermi suggerito puntualmente le giuste modifiche da apportare alla mia Tesi.

Infine, dedico questa Tesi a me stesso, ai miei sacrifici e alla mia tenacia che mi hanno permesso di arrivare fin qui.

Indice

El	Elenco delle figure				
1	Intr	oduzione	11		
2	Ric	hiami di cinematica dei mezzi continui	15		
	2.1	Configurazione e Moto	15		
	2.2	Introduzione al Tensore Gradiente di Deformazione	21		
	2.3	Campi Vettoriali	26		
	2.4	Tensore Metrico	27		
	2.5	Introduzione alla Teoria della Plasticità	29		
3	Ric	hiami di dinamica dei mezzi continui	35		
	3.1	Bilancio di Massa: forma spaziale o Euleriana	35		
		3.1.1 Bilancio di massa: forma Lagrangiana e forma materiale	36		
	3.2	Equazioni dinamiche	38		
		3.2.1 Il Principio delle Potenze Virtuali	40		
		3.2.2 Forma Materiale	42		
4	Il fe	enomeno di crescita e di rimodellamento descritti da un modello di			
	grad	do zero	45		
	4.1	Bilancio di massa con crescita e distorsioni anelastiche	45		
	4.2	Equazioni dinamiche: crescita e rimodellamento	46		
		4.2.1 Il Principio dei Lavori Virtuali: teoria di grado zero	47		
	4.3	Dissipazione	48		
	4.4	Metodo di Coleman e Noll	52		
	4.5	Tensore di Eshelby	52		
	4.6	Dissipazione residua e legame costitutivo di $Y_{\mathrm{R,d}}$	56		
		4.6.1 Dissipazione residua nello stato naturale	57		
	4.7	Oggettività	58		
	4.8	Indipendenza dal piazzamento di riferimento e covarianza rispetto a rota-			
		zioni dello stato naturale	59		
	4.9	Conclusioni sulle ipotesi costitutive	60		
		4.9.1 Generalizzazione del modello al caso $\mathbf{Z}_{\nu} \neq 0 \dots \dots \dots$	63		

5	Il fenomeno di crescita e di rimodellamento descritti da un modello di				
	prin	no gradiente	65		
	5.1	Il Principio dei Lavori Virtuali: teoria di primo gradiente	66		
	5.2	Dissipazione dell'energia	67		
	5.3	Metodo di Coleman e Noll rivisitato	70		
	5.4	Espressione costitutiva dell'energia libera di Helmholtz e tensore di Burgers	71		
	5.5	Principio delle Potenze Virtuali riferito allo stato naturale e sistema dinamico	76		
	5.6	Considerazioni finali sulla dissipazione residua	79		
	5.7	Effetti dissipativi di ordine superiore	82		
		5.7.1 Metodo di Coleman e Noll rivisitato	84		
		5.7.2 Dissipazione residua nello stato naturale	85		
6	Pre	parazione di un benchmark	89		
7	Dise	cussione dei risultati ottenuti e conclusione	95		

Elenco delle figure

2.1	Figura 1	16
2.2	Figura 2	30
2.3	Figura 3	31
2.4	Figura 4	32

"[...]force is any circumstance of which the consequence is motion."

[E. MACH, "The Science of Mechanics"]

"The essence of mathematics lies in its freedom."

[G. CANTOR]

"A mathematician who is not also something of a poet will never be a complete mathematician."

[K. WEIERSTRASS]

Capitolo 1 Introduzione

La finalità di questa Tesi è quella di presentare alcuni concetti della Meccanica dei Continui utilizzando un linguaggio tipico della Geometria Differenziale. A tal proposito, le equazioni della dinamica dei problemi di seguito trattati sono state dedotte a partire dal Principio dei Lavori Virtuali [Epstein and Segev, 1980, Marsden and Hughes, 1983, Di Carlo and Quiligotti, 2002, Gurtin, 2001, 2004, Gurtin and Anand, 2005a,b,c, Gurtin et al., 2010, Del Piero, 2009, 2012], piuttosto che da leggi di bilancio scritte in forma integrale (si veda, ad esempio, Truesdell and Toupin [1960], Truesdell and Noll [1965], Eringen [1980], Marsden and Hughes [1983], Liu [2002]). Questa strategia permette, da un lato, di condurre lo studio della dinamica dei corpi continui partendo da una formulazione che, in letteratura, è nota come debole e, dall'altro, di chiarire il concetto di dualità, che è alla base della definizione di forze generalizzate, dette "configurazionali" [Jammer, 1963, Gurtin, 2001, Gurtin and Anand, 2005a, Gurtin et al., 2010, Del Piero, 2020]. Per completare tale quadro teorico sono stati utilizzati alcuni concetti fondazionali della Teoria del Legame Costitutivo [Truesdell and Toupin, 1960, Truesdell and Noll, 1965, Eringen, 1980, Marsden and Hughes, 1983, Liu, 2002], che risultano indispensabili per chiudere le equazioni dinamiche in maniera fisicamente sensata.

L'interesse per gli argomenti trattati nel seguito nasce principalmente per formalizzare e comprendere alcuni problemi studiati in ambito biomeccanico, riadattando una classe di strumenti nati per descrivere fenomeni anelastici in materiali non viventi. Si vedano, ad esempio, le formulazioni della Teoria della Plasticità proposte da Simo and Hughes [1998], Drucker [2008], Mićunović [2009], Gurtin et al. [2010].

Nonostante la generalità dell'analisi presentata in questa tesi, esistono numerosi modelli di attuale ricerca su cui la teoria proposta si basa, tra cui la descrizione di materiali elasto-plastici [Cermelli et al., 2001, Drucker, 2008, Mićunović, 2009, Gurtin et al., 2010], la costruzione di materiali innovativi realizzati con una specifica struttura interna (metamateriali) [Seppecher et al., 2016, Seppecher and Abdoul-Anziz, 2018, Seppecher et al., 2019, Rizzi et al., 2021] e, in particolare, l'analisi di fenomeni biologici legati alla crescita dei tessuti [Epstein and Maugin, 2000, Lubarda and Hoger, 2002, Di Carlo and Quiligotti, 2002, Garikipati et al., 2004, Goriely, 2017].

Si sottolinea, inoltre, che i problemi ai valori iniziali e al contorno che otterremo nei prossimi capitoli possono stimolare la ricerca nel contesto dell'Analisi Numerica e, più in particolare, della Meccanica Computazionale, con lo scopo di completare, con la giusta validazione scientifica, i risultati teorici esposti. Riteniamo che tale prospettiva possa consentire di fornire previsioni sull'evoluzione dei sistemi fisici studiati, ossia corpi continui dotati di microstruttura interna, a partire da ipotesi modellistiche che possono essere gradualmente complicate per studiare effetti di ordine superiore.

Nel contesto sopra delineato, basandoci su principii fisici fondamentali, ci proponiamo l'obiettivo più specifico di presentare in maniera sistematica la modellizzazione di materiali dotati di una microstruttura interna libera di evolvere. In particolare, la nostra attenzione è rivolta alla crescita (variazione di massa) e al rimodellamento (variazione delle proprietà strutturali) [Fung, 1990, 1991, 1995, Taber, 1995] di una determinata classe di tessuti biologici, ossia a processi che avvengono in concomitanza a trasformazioni strutturali dei tessuti in cui essi hanno luogo. Per realizzare questo proposito, l'impiego del linguaggio della Geometria Differenziale ci appare naturale, poiché esso rende manifesto il fatto che alcuni fenomeni legati all'evoluzione della microstruttura dei materiali conducono necessariamente a geometrie non Euclidee [Kröner, 1959, Kondo, 1964, Kröner, 1968, Stojanović, 1972, Yavari and Goriely, 2012b,a, Goriely, 2017, Cleja-Tigoiu, 2021]. Queste ultime, che, com'è noto, sono ampiamente utilizzate nella Teoria della Relatività Generale, ritrovano nel contesto biomeccanico in esame un'ulteriore collocazione scientifica e possono essere "rilanciate" come strumenti naturali per affrontare i principali fenomeni microstrutturali alla base della crescita e del rimodellamento.

Osserviamo che in letteratura esistono numerose trattazioni che adottano una formulazione "non geometrica" della meccanica dei processi anelastici. Ad esempio, questo è il caso dei lavori di Gurtin and Anand [2005a,b,c], che, però, contengono il messaggio fisico che noi vogliamo "tradurre" con il linguaggio della Geometria Differenziale. Precisiamo, a tal proposito, che il compito che ci siamo dati non si limita ad un mero esercizio di stile, ma si ripropone di mettere i concetti di alcuni lavori da noi esaminati nella veste che riteniamo più appropriata. Nel far ciò, dobbiamo precisare che il filone di ricerca che stiamo seguendo è stato aperto in passato da altri autori (si veda, ad esempio, Cleja-Tigoiu [2021]).

Questa Tesi è suddivisa come segue: nel Capitolo 2, presentiamo la cinematica dei corpi continui, richiamando, in primo luogo, alcuni concetti di base della Meccanica dei Continui, e, successivamente, introducendo quelli legati alla trattazione di corpi dotati di microstruttura, come ad esempio la decomposizione di Bilby-Kröner-Lee (decomposizione BKL). Nel Capitolo 3 si approfondiscono gli aspetti legati alla dinamica dei corpi continui discutendo la formulazione Euleriana (o spaziale) e quella Lagrangiana (o materiale) del bilancio di massa e del bilancio di forze in senso "classico", cercando di chiarire il concetto di forza e quello di grado della teoria, e presentando il Principio dei Lavori Virtuali. Nel Capitolo 4 viene descritta una prima estensione della dinamica per corpi dotati di microstruttura, utilizzando una "teoria di grado 0" [Di Carlo and Quiligotti, 2002] per la variabile microstrutturale. In particolare, in questa sede, sono esposti i concetti alla base della Teoria del Legame Costitutivo, che verranno ripresi e approfonditi nelle sezioni successive. Nel Capitolo 5 si riformula il Principio dei Lavori Virtuali per una teoria di *primo gradiente* nelle deformazioni anelastiche e, coerentemente con questo approccio, si estende il legame costitutivo. A tal proposito vengono proposti due modelli, che differiscono tra loro per gli effetti dissipativi considerati. Infine, nel Capitolo 6 viene formulato un problema *benchmark* che potrà essere utile per future indagini numeriche sull'argomento.

Capitolo 2

Richiami di cinematica dei mezzi continui

2.1 Configurazione e Moto

In Meccanica dei Continui esiste la distinzione tra corpi *monofasici* e *multifasici*: i primi permettono la descrizione matematica di corpi costituiti da un unico materiale, mentre i secondi sono caratterizzati dalla co-esistenza di materiali diversi o in differenti stati di aggregazione, ciascuno con le proprie caratteristiche fisiche.

Nei prossimi capitoli verrà esposta una descrizione della cinematica valida per i corpi monofasici. Questa scelta, da un lato, permette di presentare i risultati generali della Meccanica dei Continui nella maniera più semplice possibile e, dall'altro, consente di introdurre il formalismo matematico, che seguirà le regole della *Geometria Differenziale*.

Definizione 2.1.1 (Configurazione di un corpo monofasico [Marsden and Hughes, 1983, Epstein, 2010]).

In Meccanica dei Continui, un corpo è trattato come una varietà differenziabile tipicamente indicata con il simbolo \mathscr{B} .

Considerata la natura astratta della varietà differenziabile, è opportuno immergere \mathscr{B} in uno spazio adeguato. Per formulare la cinematica di base di un corpo continuo, è sufficiente immergerlo nel cosiddetto *spazio Euclideo tridimensionale*, che possieda la struttura di spazio affine [Epstein, 2010]. Nel seguito, indicheremo tale spazio con \mathscr{S} .

Definizione 2.1.2 (Piazzamento di riferimento [Truesdell and Toupin, 1960, Truesdell and Noll, 1965]).

Dato il corpo \mathscr{B} , è possibile eseguire una *localizzazione* o *piazzamento* in \mathscr{S} . In questo modo si individua la varietà di punti $\mathscr{B}_{\mathrm{R}} \subset \mathscr{S}$, detta *configurazione di riferimento* o *piazzamento di riferimento*. Per fare ciò, si definisce un mappa $\kappa_{\mathrm{R}} : \mathscr{B} \to \mathscr{B}_{\mathrm{R}}$, che deve essere localmente invertibile e tale da conservare la topologia del corpo \mathscr{B} .

Definizione 2.1.3 (Moto [Marsden and Hughes, 1983]). In Meccanica dei Continui, dato un intervallo temporale $\mathscr{I} \subset \mathbb{R}$, il *moto* χ è una famiglia



Figura 2.1. Rappresentazione schematica della procedura di localizzazione e del moto.

a un parametro (il tempo) di *embedding* (che potremmo tradurre con*conficcamenti*) dei punti di \mathscr{B}_{R} (e quindi di \mathscr{B}) in \mathscr{S} , ovvero $\chi(\cdot, t) : \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \to \mathscr{S}$, con $t \in \mathscr{I}$. Attraverso il moto è possibile definire la *configurazione corrente* del corpo, indicata come \mathscr{B}_t , ed identificata attraverso l'immagine dei punti \mathscr{B}_{R} , ossia $\mathscr{B}_t = \chi(\mathscr{B}_{\mathrm{R}}, t)$, con $t \in \mathscr{I}$.

Osservazione (Proprietà del moto [Marsden and Hughes, 1983]).

In questa sede, senza perdita di generalità per la trattazione seguente, si supporrà che $\chi \in C^2(\mathscr{B}_{\mathbb{R}} \times \mathscr{I})$, dove $\mathscr{I} \subset \mathbb{R}$ è l'intervallo temporale considerato. Tale ipotesi gioca un ruolo importante per la buona positura, nella cosiddetta *forma forte*, dei problemi ai valori iniziali e al contorno che caratterizzano la dinamica del corpo. Nelle prossime sezioni, invece, quando si introdurrà la *forma debole* dei problemi considerati, sarà possibile richiedere a χ una minore regolarità.

Si noti, inoltre, che l'applicazione $\chi(\cdot, t) : \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \to \mathscr{S}$ è iniettiva per costruzione, ma non suriettiva. Ciò nonostante, si può definire *la restrizione all'immagine* di $\chi(\cdot, t)$, ossia l'applicazione $\check{\chi}(\cdot, t) : \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \to \mathscr{B}_t$, definita come $\check{\chi}(\cdot, t) = \kappa_t \circ \kappa_{\mathbf{R}}^{-1}$.

Oltre ai punti del piazzamento di riferimento e del piazzamento attuale, indicati con $X \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ e $x \in \mathscr{B}_t$, un concetto fondamentale nella Meccanica dei Continui è il concetto di *vettore tangente*. I vettori tangenti sono vettori che vivono in uno spazio vettoriale "attaccato" ai punti X di $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ e x di \mathscr{B}_t . In Geometria Differenziale, i vettori tangenti sono introdotti a partire dalla definizione, su una data varietà, di curve di classe C^1 . Ad esempio, considerando il piazzamento di riferimento del corpo, $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, un punto $X \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ e

una curva avente sostegno contenuto in $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, rappresentazione parametrica $c : \mathscr{D} \to \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, dove \mathscr{D} è un opportuno intervallo reale, e scegliendo c in modo tale che $c(s_0) = X$, essendo $s_0 \in \mathscr{D}$ un valore fissato del parametro, si individua con $c'(s_0) =: \mathbf{W}$ il vettore tangente a $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ in X [Marsden and Hughes, 1983]. La totalità dei vettori tangenti così definiti costituisce lo spazio tangente a $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ in X, che si indica con $T_X \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$.

Osservazione (Intrinsecità di punti e vettori).

I punti e i vettori tangenti sono enti intrinseci, che possono essere rappresentati in vari modi, in base alla scelta del sistema di coordinate più opportuno.

Consideriamo adesso il piazzamento di riferimento \mathscr{B}_{R} , un punto generico $X \in \mathscr{B}_{R}$ e un intorno di X che supponiamo di ricoprire con un sistema di coordinate cartesiane (Z^1, Z^2, Z^3) associate alla base canonica $\{\mathfrak{E}_I(X)\}_{I=1}^3$. Introduciamo, quindi, un sistema di coordinate generalizzate (ad esempio, cilindriche o sferiche), indicato con (X^1, X^2, X^3) , e definiamo le funzioni di passaggio di coordinate, $Z^I = \Phi^I(X^1, X^2, X^3)$, per I = 1,2,3. Così facendo, è possibile trovare la base "naturale" dello spazio tangente rispetto al nuovo sistema di coordinate, ossia

$$\boldsymbol{E}_{A}(X) = \sum_{I=1}^{3} \frac{\partial \Phi^{I}}{\partial X^{A}} (X^{1}, X^{2}, X^{3}) \boldsymbol{\mathfrak{E}}_{I}(X).$$
(2.1)

I vettori $\{E_A(X)\}_{A=1}^3$ così definiti costituiscono la base in coordinate generalizzate di $T_X \mathscr{B}_R$. Si noti che, in generale, tale base può dipendere dal punto, non essere ortogonale né normalizzata, e non essere dimensionalmente omogenea (si veda l'Esempio 2.1.1 coordinate cilindriche). Inoltre, si osservi che nel seguito, con un lieve abuso di notazione, impiegheremo le scritture $E_A(X) \in E_A(X^1, X^2, X^3)$, per ogni A = 1,2,3, considerandole equivalenti tra loro. Il lieve abuso di notazione discende dal fatto che, a rigore, nella prima scrittura i vettori di base sono definiti come dipendenti dal punto $X \in \mathscr{B}_R$, mentre, nella seconda scrittura, essi sono espressi in funzione delle coordinate impiegate per rappresentare il punto X.

Osservazione.

È importante osservare che, mentre i vettori della base $\{\mathbf{\mathfrak{E}}_{I}(X)\}_{I=1}^{3}$ associata al sistema di coordinate cartesiane, benché attaccati al punto $X \in \mathscr{B}_{R}$, possono essere ritenuti indipendenti da X, i vettori della base $\{\mathbf{E}_{A}(X)\}_{A=1}^{3}$ associata al sistema di coordinate generali (X^{1}, X^{2}, X^{3}) sono variabili da punto a punto. Ciò è dovuto al fatto che, fissati arbitrariamente due punti $X_{(1)}, X_{(2)} \in \mathscr{B}_{R}^{1}$, con $X_{(1)} \neq X_{(2)}$, e considerate le basi $\{\mathbf{\mathfrak{E}}_{I}(X_{(1)})\}_{I=1}^{3}$ e $\{\mathbf{\mathfrak{E}}_{I}(X_{(2)})\}_{I=1}^{3}$, è possibile ottenere $\{\mathbf{\mathfrak{E}}_{I}(X_{(2)})\}_{I=1}^{3}$ effettuando un trasporto parallelo di $\{\mathbf{\mathfrak{E}}_{I}(X_{(1)})\}_{I=1}^{3}$ lungo il segmento di retta che congiunge $X_{(1)}$ con $X_{(2)}$. In tal modo, il modulo (che è unitario per basi ortonormali), la direzione ed il verso di ciascun vettore di $\{\mathbf{\mathfrak{E}}_{I}(X_{(2)})\}_{I=1}^{3}$ coincidono con quelli di $\{\mathbf{\mathfrak{E}}_{I}(X_{(1)})\}_{I=1}^{3}$. Tale risultato, invece, non vale per le basi $\{\mathbf{E}_{A}(X_{(1)})\}_{A=1}^{3}$ e $\{\mathbf{E}_{A}(X_{(2)})\}_{A=1}^{3}$.

¹Si noti che i pedici (1) e (2) *non* sono indici, bensì "etichette" per individuare i punti considerati. Per distinguere graficamente gli indici dalle etichette numeriche indichiamo queste ultime utilizzando parentesi tonde a pedice.

Esempio 2.1.1 (Coordinate cilindriche).

Scelti il sistema di coordinate cartesiane $(Z^1, Z^2, Z^3) \in \mathbb{R}^3$ ed il sistema di coordinate cilindriche $(X^1, X^2, X^3) = (R, \Theta, Z) \in [0, +\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}, \text{ con } Z \equiv Z^3, \text{ la funzione di passaggio di coordinate è data da$

$$Z^{1} = \Phi^{1}(R, \Theta, Z) = R \cos \Theta, \qquad (2.2a)$$

$$Z^{2} = \Phi^{2}(R, \Theta, Z) = R \sin \Theta, \qquad (2.2b)$$

$$Z^3 = \Phi^3(R, \Theta, Z) = Z, \qquad (2.2c)$$

mentre la matrice di passaggio di base ha i propri elementi definiti come

$$M^{I}{}_{A}(R,\Theta,Z) := \left[D\Phi(R,\Theta,Z)\right]^{I}{}_{A} \equiv \frac{\partial\Phi^{I}}{\partial X^{A}}(R,\Theta,Z), \qquad I, A = 1,2,3, \qquad (2.3)$$

cosicché risulti

$$[\boldsymbol{M}(R,\Theta,Z)] = [D\Phi(R,\Theta,Z)] = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0\\ -R\sin\Theta & R\cos\Theta & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
 (2.4)

Avendo calcolato esplicitamente le derivate $\partial_A \Phi^I(R, \Theta, Z)$, è possibile determinare i vettori della base naturale nel sistema di coordinate cilindriche per mezzo della formula (2.1), ottenendo:

$$\boldsymbol{E}_1(R,\Theta,Z) = \cos\Theta \,\boldsymbol{\mathfrak{E}}_1 + \sin\Theta \,\boldsymbol{\mathfrak{E}}_2,\tag{2.5a}$$

$$\boldsymbol{E}_2(R,\Theta,Z) = -R\sin\Theta\,\boldsymbol{\mathfrak{E}}_1 + R\cos\Theta\,\boldsymbol{\mathfrak{E}}_2,\tag{2.5b}$$

$$\boldsymbol{E}_3(R,\Theta,Z) = \boldsymbol{\mathfrak{E}}_3,\tag{2.5c}$$

In Geometria Differenziale si utilizza una convenzione notazionale che permette di distinguere a prima vista l'ente geometrico con cui si sta lavorando. Tale categorizzazione dipende essenzialmente dal modo in cui si trasformano le grandezze considerate. Per i vettori tangenti abbiamo le seguenti regole (si vedano, ad esempio, Marsden and Hughes [1983], Epstein [2010]):

- La Equazione (2.1) illustra il modo in cui si trasformano i *vettori di base* a seguito di un cambio di coordinate. Come visto, essi seguono la legge di trasformazione lineare descritta dalla matrice di passaggio delle coordinate M. Pertanto, gli indici che enumerano i vettori della base sono detti *covarianti* e vengono messi a pedice.
- Le componenti di un generico vettore tangente $\boldsymbol{W} \in T_X \mathscr{B}_R$ si trasformano con la matrice inversa \boldsymbol{M}^{-1} , che ha componenti $[\boldsymbol{M}^{-1}]^A{}_I$, con A, I = 1,2,3. Infatti, indicando con \tilde{W}^I le componenti di \boldsymbol{W} rispetto alla base canonica $\{\boldsymbol{\mathfrak{C}}_I(X)\}_{I=1}^3$ [Marsden and Hughes, 1983] e con W^A quelle rispetto alla base generalizzata $\{\boldsymbol{E}_A(X)\}_{A=1}^3$, abbiamo che,

$$\boldsymbol{W} = \sum_{I=1}^{3} \tilde{W}^{I} \boldsymbol{\mathfrak{E}}_{I}(X) = \sum_{A=1}^{3} W^{A} \boldsymbol{E}_{A}(X), \qquad (2.6)$$

ed utilizzando la (2.1) si può scrivere

$$\sum_{A=1}^{3} W^{A} \left[\sum_{I=1}^{3} M^{I}{}_{A} \mathfrak{E}_{I}(X) \right] = \sum_{I=1}^{3} \left[\sum_{A=1}^{3} M^{I}{}_{A} W^{A} \right] \mathfrak{E}_{I}(X) = \sum_{I=1}^{3} \tilde{W}^{I} \mathfrak{E}_{I}(X),$$

da cui segue la relazione

$$W^{A} = \sum_{I=1}^{3} [M^{-1}]^{A}{}_{I} \tilde{W}^{I}.$$
 (2.7)

Per questa ragione gli indici dei vettori sono detti *controvarianti*. Essi, convenzionalmente, sono messi ad apice.

Osservazione.

Da quanto riportato precedentemente si evince l'importanza rivestita dal modo in cui si trasformano le entità geometriche. Sottolineiamo che la conoscenza di tale proprietà permette di identificare correttamente il tipo di grandezza su cui si sta lavorando, senza alcuna ambiguità. Si noti che tale filosofia accompagnerà tutta la trattazione presente in questo scritto.

Da questo punto in avanti, a meno che non sia strettamente necessario, impiegheremo la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti, il che permette di omettere il simbolo di sommatoria. Coerentemente, specificheremo i casi in cui, in una data espressione, la ripetizione degli indici non implica una somma.

Definizione 2.1.4 (Covettori [Marsden and Hughes, 1983]).

Un covettore è una applicazione lineare definita come $\boldsymbol{\alpha} : T_X \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \to \mathbb{R}$. Come tale, un covettore è esso stesso elemento di uno spazio lineare, che prende il nome di *spazio cotan*gente ed è indicato con $T_X^* \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. Lo spazio $T_X^* \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ coincide con lo spazio delle applicazioni lineari da $T_X \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ in \mathbb{R} , ossia $T_X^* \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \equiv \mathscr{L}(T_X \mathscr{B}_{\mathbf{R}}, \mathbb{R})$, ed è quindi lo spazio duale a $T_X \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$.

Dato un covettore $\boldsymbol{\alpha} \in T_X^* \mathscr{B}_R$, e applicandolo ad un vettore tangente $\boldsymbol{W} \in T_X \mathscr{B}_R$, la linearità permette di scrivere:

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{\alpha}(W^{A}\boldsymbol{E}_{A}(X)) = W^{A}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{E}_{A}(X)).$$
(2.8)

Se poniamo, per definizione,

$$\alpha_A(X) := \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{E}_A(X)) \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

allora vale la seguente scrittura,

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{W}) = W^{A} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{E}_{A}(X)) = W^{A} \alpha_{A}(X).$$
(2.10)

Come i vettori, anche i covettori possono essere espressi come combinazioni lineari di elementi di base, che prendono il nome di *covettori di base*. Una base di covettori è detta *base duale* (o *base dello spazio duale*).

Definizione 2.1.5 (Base Duale).

I covettori di base sono indicati con $\mathbf{E}_X^A \equiv \mathbf{E}^A(X) : T_X \mathscr{B}_R \to \mathbb{R}$, per ogni A = 1,2,3(si dimostra, infatti, che la dimensione dello spazio $T_X^* \mathscr{B}_R$ coincide con quella di $T_X \mathscr{B}_R$). Per alleggerire la notazione, a meno che non sia strettamente necessario esplicitare l'associazione dei covettori al punto X, scriveremo semplicemente $\mathbf{E}^A \equiv \mathbf{E}_X^A \equiv \mathbf{E}^A(X)$, per ogni A = 1,2,3. Coerentemente con questa notazione, possiamo definire il generico \mathbf{E}^A , con A = 1,2,3, facendo riferimento al modo in cui esso estrae la componente A-esima del vettore su cui si svolge l'operazione, cioè

$$E^{A}(W) =: W^{A}, \qquad A = 1, 2, 3.$$
 (2.11)

Dalla (2.11), sfruttando la linearità di E^A , si ha che

$$\boldsymbol{E}^{A}(\boldsymbol{W}) = W^{B} \boldsymbol{E}^{A}(\boldsymbol{E}_{B}), \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}^{A}(\boldsymbol{E}_{B}) = \delta^{A}{}_{B}. \tag{2.12}$$

Utilizzando (2.11) nella (2.10), otteniamo

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{W}) = \alpha_A(X)W^A = \alpha_A(X)\boldsymbol{E}^A(\boldsymbol{W}), \qquad \boldsymbol{W} \in T_X \mathscr{B}_R.$$
(2.13)

In altre parole, per ogni covettore $\boldsymbol{\alpha} \in T_X^* \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, è valida la decomposizione

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_A(X)\boldsymbol{E}^A,\tag{2.14}$$

dove i coefficienti $\alpha_1(X)$, $\alpha_2(X)$ e $\alpha_3(X)$ sono tutti reali e definiti dalla (2.9), mentre $\{\boldsymbol{E}^A\}_{A=1}^3$ è la base dei covettori che genera lo spazio cotangente $T_X^*\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$.

Osservazione (Notazione equivalente per l'azione di un covettore su un vettore). Osserviamo che è spesso vantaggioso introdurre come notazione equivalente a quella impiegata in Equazione (2.8) la semplice giustapposizione di un covettore ad un vettore. Pertanto, dati un covettore $\boldsymbol{\alpha} \in T_X^* \mathscr{B}_R$ ed un vettore $\boldsymbol{w} \in T_X \mathscr{B}_R$, si può scrivere:

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{W} = \alpha_A W^A. \tag{2.15}$$

Esempio 2.1.2 (Differenziale di funzioni scalari [De Marco, 1999, Epstein, 2010]). Data una funzione $f: \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, il differenziale di f è l'applicazione lineare definita dalla formula

$$df(X): T_X \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \to \mathbb{R}, \qquad df(X)(\mathbf{W}) = \frac{\partial f}{\partial X^A}(X) \mathbf{E}^A(\mathbf{W}), \quad \mathbf{W} \in T_X \mathscr{B}_{\mathbf{R}}.$$
 (2.16)

Se, per ogni A = 1,2,3, introduciamo la funzione ausiliaria $i^A : \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ tale che, fissato un sistema di coordinate, $i^A(X)$ estragga la A-esima coordinata che individua X, cioè $i^A(X) = X^A$, allora possiamo scrivere

$$d\iota^{A}(X)(\boldsymbol{W}) = \frac{\partial\iota^{A}}{\partial X^{B}}(X)\boldsymbol{E}^{B}(\boldsymbol{W}) = \delta^{A}{}_{B}\boldsymbol{E}^{B}(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{E}^{A}(\boldsymbol{W}), \qquad (2.17)$$

dove è stata impiegata l'identità $\partial_B i^A(X) = \delta^A{}_B$, essendo $\delta^A{}_B$ la Delta di Kronecker.

In virtù dei risultati ottenuti, si ottiene:

$$df(X)(\boldsymbol{W}) = \frac{\partial f}{\partial X^A}(X)d\iota^A(X)(\boldsymbol{W}).$$
(2.18)

Poiché la Equazione (2.18) deve valere per ogni $W \in T_X \mathscr{B}_R$, essa può essere riscritta

$$df(X) = \frac{\partial f}{\partial X^A}(X)d\iota^A(X), \qquad (2.19)$$

avendo effettuato le identificazioni

$$df(X) \equiv df(X)(\cdot), \qquad (2.20)$$

$$d\iota^A(X) \equiv d\iota^A(X)(\,\cdot\,) \equiv \boldsymbol{E}^A. \tag{2.21}$$

Inoltre, poiché la Equazione (2.19) è verificata in ogni X in cui f è differenziabile, si può anche porre

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial X^A} \,\mathrm{d}\iota^A.\tag{2.22}$$

Osserviamo che la Equazione (2.21) permette di esprimere il generico covettore di base $E^A \in T^*_X \mathscr{B}_R$ come il differenziale, valutato in X, della corrispondente funzione ausiliaria $di^A(X)$. Pertanto, anche per un generico covettore $\alpha \in T^*_X \mathscr{B}_R$, troviamo la rappresentazione alternativa,

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_A(X) \mathrm{d}\iota^A(X). \tag{2.23}$$

Solitamente, in letteratura, in virtù della identificazione $X^A = i^A(X)$, si trova la scrittura $dX^A \equiv di^A(X)$, da cui segue la notazione "più compatta"

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_A(X) \mathrm{d}X^A. \tag{2.24}$$

Definizione 2.1.6 (Fibrato tangente e fibrato cotangente [Marsden and Hughes, 1983, Epstein, 2010]).

Si chiama fibrato tangente, $T\mathscr{B}_{\rm R},$ l'unione disgiunta degli spazi tangenti $T_X\mathscr{B}_{\rm R},$ ossia

$$T\mathscr{B}_{\mathrm{R}} = \bigcup_{X \in \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \left(\{X\} \times T_X \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \right) = \bigsqcup_{X \in \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} T_X \mathscr{B}_{\mathrm{R}}.$$
 (2.25)

Analogamente, si chiama *fibrato cotangente*, $T^*\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, l'unione disgiunta degli spazi cotangenti $T^*_X\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, ossia

$$T^*\mathscr{B}_{\mathrm{R}} = \bigcup_{X \in \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} (\{X\} \times T^*_X \mathscr{B}_{\mathrm{R}}) = \bigsqcup_{X \in \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} T^*_X \mathscr{B}_{\mathrm{R}}.$$
 (2.26)

2.2 Introduzione al Tensore Gradiente di Deformazione

La notazione adottata in questa e nelle seguenti segue in larga parte quella introdotta in Federico et al. [2016, 2019].

Definizione 2.2.1 (Tensore gradiente di deformazione).

Assegnato il moto $\chi : \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \times \mathscr{I} \to \mathscr{S}$ e fissata la coppia $(X, t) \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \times \mathscr{I}$, si definisce tensore gradiente di deformazione il tensore a due punti dato dalla mappa tangente del moto al tempo t:

$$\mathbf{F}(X,t): T_X \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \to T_x \mathscr{S}, \qquad x = \chi(X,t).$$
 (2.27)

Inoltre, fissate le basi $\{\boldsymbol{e}_a(x)\}_{a=1}^3 \in \{\boldsymbol{E}_A(X)\}_{A=1}^3$, e le basi duali $\{\boldsymbol{e}^a(x)\}_{a=1}^3 \in \{\boldsymbol{E}^A(X)\}_{A=1}^3$, le componenti di $\boldsymbol{F}(X,t)$ sono definite dalla espressione

$$[\mathbf{F}(X,t)]^a{}_A = \frac{\partial \chi^a}{\partial X^A}(X,t). \tag{2.28}$$

Osservazione (Tensore a due punti [Marsden and Hughes, 1983, Epstein, 2010]).

Il tensore gradiente di deformazione è un tensore a due punti perché collega lo spazio tangente al punto $X \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, ossia $T_X \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, allo spazio tangente al punto $x \in \mathscr{S}$, cioè $T_x \mathscr{S}$, con $x = \chi(X, t)$.

Osservazione (Rappresentazione del gradiente di deformazione Marsden and Hughes [1983], Epstein [2010]).

La rappresentazione del tensore gradiente di deformazione $\mathbf{F}(X,t)$ si espleta con l'utilizzo delle componenti $[\mathbf{F}(X,t)]^{a}{}_{A}$ come coefficienti di una decomposizione di $\mathbf{F}(X,t)$ in un'opportuna base tensoriale, cioè

$$\boldsymbol{F}(X,t) = [\boldsymbol{F}(X,t)]^a{}_A \,\boldsymbol{e}_a(\chi(X,t)) \otimes \boldsymbol{E}^A(X). \tag{2.29}$$

Definizione 2.2.2 (Cambio di Misura dei Volumi [Marsden and Hughes, 1983]). All'istante $t \in \mathscr{I}$, il passaggio dalla configurazione corrente \mathscr{B}_t a quella di riferimento \mathscr{B}_R

richiede di cambiare la misura di volume. La relazione che lega la misura di Lebesgue di volume dv(x), associata a \mathscr{B}_t , con la misura di Lebesgue di volume dV(X) in \mathscr{B}_R è

$$dv(x) = J(X,t)dV(X), \qquad x = \chi(X,t), \tag{2.30}$$

 $\operatorname{con} J(X,t) = \det \boldsymbol{F}(X,t) > 0.$

Osservazione (Segno di J [Eringen, 1980]).

Per una deformazione arbitraria, il segno di J(X, t) non è necessariamente positivo. Infatti, è possibile assegnare deformazioni che non preservano l'orientazione degli assi del sistema di riferimento scelto per $T_X \mathscr{B}_R$. In tali casi, la relazione tra le misure di volume dV(X) e $dv(\chi(X,t))$ deve scriversi come dv(x) = |J(X,t)| dV(X), con $x = \chi(X,t)$. Tuttavia, nella totalità delle deformazioni studiate in questa Tesi, si ipotizza *a priori* che l'orientazione degli assi sia preservata nelle trasformazioni da $T_X \mathscr{B}_R$ a $T_x \mathscr{B}_t$. Questa ipotesi permette di omettere il valore assoluto nella relazione (2.30).

Osservazione (Grandezze Scalari e Pseudo-scalari).

Un grandezza fisica è detta *scalare* rispetto ad una data classe di trasformazioni se essa rimane invariata pur essendo soggetta ad una trasformazione che appartiene alla classe assegnata. Nel contesto fisico di questa Tesi, una grandezza scalare è, ad esempio, la

temperatura, poiché essa resta invariata sia nella trasformazione, rappresentata dal moto, $X \mapsto x = \chi(X, t)$, sia per trasformazioni di osservatore applicate a \mathscr{B}_t . Infatti, se indichiamo con $\theta : \mathscr{B}_t \times \mathscr{I} \to \mathbb{R}^+$ la descrizione *euleriana* della temperatura assoluta ristretta a \mathscr{B}_t per un dato $t \in \mathscr{I}$, eseguire la trasformazione $X \mapsto x = \chi(X, t)$ ammonta ad eseguire la composizione di funzioni $\theta(\cdot, t) \circ \chi(\cdot, t) : \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^+$, che ha come unico effetto l'introduzione di una nuova funzione, $\Theta(\cdot, t) := \theta(\cdot, t) \circ \chi(\cdot, t)$, che, valutata in un punto $X \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, restituisce la medesima temperatura $\theta(x, t)$, in cui sia $x = \chi(X, t)$. Si ha, quindi, $\Theta(X, t) = \theta(x, t)$. Grandezze di questo tipo si chiamano *intensive*.

A differenza di quanto visto per la temperatura, la densità di massa di un corpo, di seguito indicata con $\rho: \mathscr{B}_t \times \mathscr{I} \to \mathbb{R}_0^+$, non è una grandezza scalare nel senso discusso sopra. Essa, infatti, è una funzione coinvolta in un cambio di misure, giacché, facendo riferimento, ad esempio, a \mathscr{B}_t , permette di passare dalla misura di Lebesgue di volume, dv(x), alla misura di massa $dm(x,t) = \rho(x,t)dv(x)$, come risultato del Teorema di Radon-Nikodym [Rudin, 1970]. Pertanto, per riportare questa relazione alla configurazione di riferimento, è necessario effettuare sia la composizione con la mappa $\chi(\cdot, t) : \mathscr{B}_R \to \mathscr{I}$ sia la moltiplicazione di tutta l'espressione del cambiamento di misura per il determinante del gradiente di deformazione, ossia

$$dM(X,t) := \varrho(\chi(X,t),t)J(X,t)dV(X)$$

= $\varrho_{R}(X,t)dV(X) = dm(\chi(X,t),t),$ (2.31)

avendo indicato con dM(X,t) la misura di massa associata alla configurazione di riferimento \mathscr{B}_R e con

$$\varrho_{\mathbf{R}}(X,t) := J(X,t)\varrho(\chi(X,t),t), \qquad (2.32)$$

la densità di massa espressa per unità di volume di \mathscr{B}_{R} . In particolare, l'espressione (2.32) prende il nome di *trasformazione di Piola* della densità di massa.

Osserviamo che le grandezze fisiche che sono soggette a trasformazioni dello stesso tipo di quelle mostrate nella Equazione (2.32) sono dette *estensive*, data la presenza del determinante del gradiente di deformazione, vengono chiamate grandezze pseudo-scalari.

Definizione 2.2.3 (Funzione tempo universale [Marsden and Hughes, 1983]).

La funzione $\mathcal{T}: \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \times \mathscr{I} \to \mathscr{I}$, definita dalla legge $\mathcal{T}(X, t) = t$, è detta funzione tempo universale [Marsden and Hughes, 1983]. Essa permette di esprimere correttamente le composizioni del moto. Infatti, considerando a titolo di esempio la descrizione Euleriana di una data funzione scalare $f: \mathscr{B}_t \times \mathscr{I} \to \mathbb{R}$, si può scrivere

$$f(x,t) = f(\chi(X,t), \mathcal{T}(X,t)) = [f \circ (\chi, \mathcal{T})](X,t) = f_{(L)}(X,t),$$

$$\Rightarrow \quad f_{(L)} := f \circ (\chi, \mathcal{T}) : \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \times \mathscr{I} \to \mathbb{R},$$
(2.33)

identificando con $f_{(L)}$ la descrizione Lagrangiana di f.

Definizione 2.2.4 (Inverso del tensore gradiente di deformazione).

Il tensore inverso del gradiente di deformazione, $\mathbf{F}(X,t) : T_X \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \to T_x \mathscr{S}$, è dato da $\mathbf{F}^{-1}(x,t) : T_x \mathscr{B}_t \to T_X \mathscr{B}_{\mathrm{R}}$, con $X = [\chi(\cdot,t)]^{-1}(x)$, essendo $T_x \mathscr{B}_t$ lo spazio tangente a \mathscr{B}_t in x.

Si noti che, per tener conto delle dipendenze di F^{-1} quando è necessario ridefinire tale tensore in funzione dei punti di $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, si eseguono le composizioni

$$\mathbf{F}^{-1}(x,t) = \mathbf{F}^{-1}(\chi(X,t),\mathcal{T}(X,t)) = [\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi,\mathcal{T})](X,t).$$
(2.34)

Definizione 2.2.5 (Tensore identità spaziale [Federico and Grillo, 2012, Federico, 2015, Federico and Grillo, 2017]).

Il tensore *identità spaziale* $i(x): T_x \mathscr{S} \to T_x \mathscr{S}$ trasforma un generico vettore w di $T_x \mathscr{S}$ in se stesso, ossia

$$\boldsymbol{i}(x)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}.\tag{2.35}$$

Tale proprietà può essere dimostrata esprimendo i(x) come $i(x) = \delta^a{}_b e_a(x) \otimes e^b(x)$ e osservando la seguente catena di uguaglianze:

$$\boldsymbol{i}(x)\boldsymbol{w} = [\delta^{a}{}_{b}\boldsymbol{e}_{a}(x)\otimes\boldsymbol{e}^{b}(x)][w^{c}\boldsymbol{e}_{c}(x)] = \delta^{a}{}_{b}w^{c}\boldsymbol{e}_{a}(x)[\boldsymbol{e}^{b}(x)\boldsymbol{e}_{c}(x)]$$
$$= [\delta^{a}{}_{b}\delta^{b}{}_{c}w^{c}]\boldsymbol{e}_{a}(x) = [\delta^{a}{}_{c}w^{c}]\boldsymbol{e}_{a}(x) = w^{a}\boldsymbol{e}_{a}(x) = \boldsymbol{w}, \qquad (2.36)$$

dove, secondo quanto anticipato in Equazione (2.15), abbiamo adottato la notazione $e^b(x)e_c(x) = e^b(x)(e_c(x)) = \delta^b_c$, ossia la notazione "con la giustapposizione", per indicare l'azione del covettore di base $e^b(x)$ sul vettore di base $e_c(x)$.

Notiamo che, per ogni istante di tempo t, il tensore di identità spaziale i(x) è ottenibile come

$$\boldsymbol{i}(x) = \boldsymbol{F}(X,t)\boldsymbol{F}^{-1}(x,t), \quad \text{con } x = \chi(X,t).$$
(2.37)

Definizione 2.2.6 (Tensore identità materiale).

Il tensore identità materiale $I(X) : T_X \mathscr{B}_R \to T_X \mathscr{B}_R$ è definito in maniera analoga al tensore di identità spaziale, cosicché si ha I(X)W = W, per ogni $W \in T_X \mathscr{B}_R$, e

$$I(X)W = [\delta^{A}{}_{B} E_{A}(X) \otimes E^{B}(X)][W^{C} E_{C}(X)]$$

= $\delta^{A}{}_{B}W^{C} E_{A}(X)[E^{B}(X)E_{C}(X)]$
= $[\delta^{A}{}_{B}\delta^{B}{}_{C}W^{C}]E_{A}(X) = [\delta^{A}{}_{C}W^{C}]E_{A}(X)$
= $W^{A} E_{A}(X) = W.$ (2.38)

Inoltre, come per il tensore di identità spaziale, fissato t arbitrariamente, possiamo porre

$$\boldsymbol{I}(X) = \boldsymbol{F}^{-1}(x,t)\boldsymbol{F}(X,t), \quad \text{con } x = \chi(X,t).$$
(2.39)

Osservazione (Proprietà del tensore identità).

Dalle definizioni date dei tensori identità spaziale e materiale segue che ciascuno di essi è indipendente dal tempo. Tuttavia, in molti casi di interesse computazionale, sarà necessario eseguire la derivata in tempo di espressioni in cui figurano i(x) e I(X). A tal proposito, è possibile ridefinire *formalmente* i tensori di identità spaziale e materiale come funzioni costanti del tempo. Ciò dà senso alle scritture

$$\partial_t \boldsymbol{i}(x,t) = \mathbf{0}(x,t), \qquad \quad \partial_t \boldsymbol{I}(X,t) = \mathbf{0}(X,t).$$
(2.40)

Definizione 2.2.7 (Trasposto del tensore gradiente di deformazione [Federico and Grillo, 2012, Federico et al., 2016]).

In questa Tesi, chiamiamo trasposto del gradiente di deformazione $\mathbf{F}(X,t): T_X \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \to T_x \mathscr{S}$, con $x = \chi(X,t)$, il tensore $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(x,t): T_x^* \mathscr{S} \to T_X^* \mathscr{B}_{\mathrm{R}}$, con $X = [\chi(\cdot,t)]^{-1}(x)$. In componenti si ha

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(x,t) = [\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(x,t)]_{A}{}^{a}\boldsymbol{E}^{A}(X) \otimes \boldsymbol{e}_{a}(x).$$
(2.41)

Analogamente a quanto visto per F^{-1} , si ha

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(x,t) = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\chi(X,t),\mathcal{T}(X,t)) = [\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \circ (\chi,\mathcal{T})](X,t).$$
(2.42)

Si osservi che, in diversi testi, il tensore da noi denotato $F^{T}(x,t)$ è detto "aggiunto" [Marsden and Hughes, 1983].

Definizione 2.2.8 (Inverso del trasposto del gradiente di deformazione).

Il tensore inverso del trasposto del gradiente di deformazione $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(x,t) : T_x^* \mathscr{S} \to T_X^* \mathscr{B}_{\mathrm{R}}$, con $X = [\chi(\cdot,t)]^{-1}(x)$, è indicato con $\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}(X,t) : T_X^* \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \to T_x^* \mathscr{S}$, con $x = \chi(X,t)$. In componenti si ha

$$\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}(X,t) = [\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}(X,t)]_a{}^A \boldsymbol{e}^a(x) \otimes \boldsymbol{E}_A(X).$$
(2.43)

Definizione 2.2.9 (Trasposto dei tensori identità spaziale e materiale).

Seguendo il formalismo di Federico and Grillo [2012], Federico [2012, 2015], Federico et al. [2016], Federico and Grillo [2017], il tensore identità spaziale trasposto $i^{\mathrm{T}}(x) : T_x^* \mathscr{S} \to T_x^* \mathscr{S}$ è definito in maniera analoga a $i(x) \in I(X)$, ed è ottenibile come

$$i^{\mathrm{T}}(x) = F^{-\mathrm{T}}(X,t)F^{\mathrm{T}}(x,t), \quad \text{con } X = [\chi(\cdot,t)]^{-1}(x).$$
 (2.44)

Esso trasforma un generico covettore spaziale $\boldsymbol{\omega}$ di $T_x^* \mathscr{S}$ in se stesso, ossia

$$\boldsymbol{i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}.\tag{2.45}$$

Tale proprietà può essere dimostrata esprimendo $\boldsymbol{i}^{\mathrm{T}}(x)$ come

$$\boldsymbol{i}^{\mathrm{T}}(x) = \delta_a^{\ b} \, \boldsymbol{e}^a(x) \otimes \boldsymbol{e}_b(x), \qquad (2.46)$$

e osservando la seguente catena di uguaglianze:

$$\boldsymbol{i}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{\omega} = [\delta_a{}^b \boldsymbol{e}^a(x) \otimes \boldsymbol{e}_b(x)][\omega_c \boldsymbol{e}^c(x)] = \delta_a{}^b \omega_c \boldsymbol{e}^a(x)[\boldsymbol{e}_b(x)\boldsymbol{e}^c(x)]$$
$$= [\delta_a{}^b \delta_b{}^c \omega_c]\boldsymbol{e}^a(x) = [\delta_a{}^c \omega_c]\boldsymbol{e}^a(x) = \omega_a \boldsymbol{e}^a(x) = \boldsymbol{\omega}.$$
(2.47)

Allo stesso modo, poniamo $I^{T}(X) : T_{X}^{*} \mathscr{B}_{R} \to T_{X}^{*} \mathscr{B}_{R}$ per il trasposto del tensore identità materiale, che possiamo anche esprimere come

$$\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}(X) = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}(X,t), \quad \mathrm{con} \ x = \chi(X,t).$$
(2.48)

Esso trasforma un generico covettore materiale α di $T_X^*\mathscr{B}_R$ in se stesso, ossia

$$\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}(X)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}.\tag{2.49}$$

Tale proprietà può essere dimostrata esprimendo $\mathbf{I}^{\mathrm{T}}(X)$ mediante la rappresentazione $\mathbf{I}^{\mathrm{T}}(X) = \delta_A{}^B \mathbf{E}^A(X) \otimes \mathbf{E}_B(X)$ e osservando la seguente catena di uguaglianze:

$$I^{T}(X)\boldsymbol{\alpha} = [\delta_{A}{}^{B}\boldsymbol{E}^{A}(X) \otimes \boldsymbol{E}_{B}(X)][\alpha_{C}\boldsymbol{E}^{C}(X)]$$

$$= \delta_{A}{}^{B}\alpha_{C}\boldsymbol{E}^{A}(X)[\boldsymbol{E}_{B}(X)\boldsymbol{E}^{C}(X)]$$

$$= [\delta_{A}{}^{B}\delta_{B}{}^{C}\alpha_{C}]\boldsymbol{E}^{A}(X) = [\delta_{A}{}^{C}\alpha_{C}]\boldsymbol{E}^{A}(X)$$

$$= \alpha_{A}\boldsymbol{E}^{A}(X) = \boldsymbol{\alpha}.$$
 (2.50)

2.3 Campi Vettoriali

Definizione 2.3.1 (Campo Vettoriale Marsden and Hughes [1983]).

Un'applicazione $\boldsymbol{w}: \mathscr{S} \to T\mathscr{S}$ è detta campo vettoriale spaziale e, per ogni $x \in \mathscr{S}$, restituisce un elemento del fibrato tangente spaziale, ossia $x \to (x, \boldsymbol{w}_x)$, con $\boldsymbol{w}_x \in T_x \mathscr{S}$. Analogamente, un'applicazione $\boldsymbol{W}: \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \to T\mathscr{B}_{\mathrm{R}}$ è detta campo vettoriale materiale

e, per ogni $X \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, restituisce un elemento del fibrato tangente materiale, ossia $X \to (X, \mathbf{W}_X)$ con $\mathbf{W}_X \in T_X \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$.

Definizione 2.3.2 (Velocità [Marsden and Hughes, 1983]).

Per ogni $t \in \mathscr{I}$, il campo vettoriale spaziale $v(\cdot, t) : \mathscr{S} \to T\mathscr{S}$ è detto *campo di velocità* istantanea spaziale (o Euleriana). È possibile esprimere la velocità spaziale del corpo \mathscr{B}_t in termini di punti del piazzamento di riferimento \mathscr{B}_R . Si ottiene, così, il campo di velocità istantanea Lagrangiana, ottenuta mediante la composizione

$$\boldsymbol{v}_{(\mathrm{L})} = \boldsymbol{v} \circ (\chi, \mathcal{T}) \equiv \partial_t \chi. \tag{2.51}$$

Vale, dunque, la catena di uguaglianze

$$\boldsymbol{v}(x,t) = \boldsymbol{v}(\chi(X,t),t) = \boldsymbol{v}_{(\mathrm{L})}(X,t) = \partial_t \chi(X,t).$$
(2.52)

Definizione 2.3.3 (Derivata Sostanziale [Marsden and Hughes, 1983]).

Data una grandezza scalare (o pseudo-scalare) spaziale, definita come $f : \mathscr{S} \times \mathscr{I} \to \mathbb{R}$, si chiama *derivata sostanziale* di f la seguente operazione:

$$D_t f(x,t) = \partial_t f(x,t) + [\operatorname{grad} f(x,t)] \boldsymbol{v}(x,t).$$
(2.53)

Nella precedente equazione il $\operatorname{grad} f(x, t)$ è da intendersi come un differenziale (1-forma) a cui si applica il vettore velocità.

Osservazione (Composizione di moto).

Come abbiamo già visto, l'introduzione della funzione tempo universale \mathcal{T} permette di effettuare agevolmente le composizioni necessarie per "riportare" una data grandezza fisica al piazzamento di riferimento e permette, quindi, di eseguire rigorosamente le derivate delle grandezze considerate. In particolare, data la grandezza scalare spaziale $f : \mathscr{S} \times \mathscr{I} \to \mathbb{R}$, e la sua forma Lagrangiana $f_{(L)} : \mathscr{B}_{R} \times \mathscr{I} \to \mathbb{R}$, data da $f_{(L)} = f \circ (\chi, \mathcal{T})$, la derivata parziale di $f_{(L)}$ rispetto al tempo si ottiene come

$$\frac{\partial f_{(\mathrm{L})}}{\partial t} = \left[\frac{\partial f}{\partial x^a} \circ (\chi, \mathcal{T})\right] \frac{\partial \chi^a}{\partial t} + \left[\frac{\partial f}{\partial \mathcal{T}} \circ (\chi, \mathcal{T})\right] \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t}.$$
(2.54)

Osservando che $\partial_t \chi^a = v^a \circ (\chi, \mathcal{T})$, allora si ha

$$\frac{\partial f_{(\mathrm{L})}}{\partial t} = \left[\frac{\partial f}{\partial x^{a}}\circ(\chi,\mathcal{T})\right] \left[v^{a}\circ(\chi,\mathcal{T})\right] + \frac{\partial f}{\partial\mathcal{T}}\circ(\chi,\mathcal{T}) \\
= \left\{\frac{\partial f}{\partial x^{a}}v^{a} + \frac{\partial f}{\partial\mathcal{T}}\right\}\circ(\chi,\mathcal{T}) = D_{t}f\circ(\chi,\mathcal{T}).$$
(2.55)

2.4 Tensore Metrico

Definizione 2.4.1 (Tensore metrico spaziale Marsden and Hughes [1983], Felsager [1998], Federico and Grillo [2017]).

Il tensore metrico spaziale è un'applicazione $\boldsymbol{g}_x : T_x \mathscr{S} \times T_x \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ definita per ogni $x \in \mathscr{S}$ secondo la regola $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in T_x \mathscr{S} \times T_x \mathscr{S} \to \boldsymbol{g}_x(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in \mathbb{R}$. Per definizione il tensore metrico è definito positivo e pertanto induce una norma che consente di misurare i vettori del fibrato tangente:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{g}_x}^2 = \boldsymbol{g}_x(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}). \tag{2.56}$$

Osservazione (Proprietà del tensore metrico).

La rappresentazione del tensore metrico può essere ricavata a partire dalla bilinearità di g_x , ossia osservando che

$$\boldsymbol{g}_{x}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{g}_{x}(u^{a}\boldsymbol{e}_{a},w^{b}\boldsymbol{e}_{b}) = u^{a}w^{b}\boldsymbol{g}_{x}(\boldsymbol{e}_{a},\boldsymbol{e}_{b}) = g_{ab}u^{a}w^{b}, \qquad (2.57)$$

dove sono stati definiti i coefficienti $g_{ab} := \boldsymbol{g}_x(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b)$. Inoltre, poiché le componenti dei vettori $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{w}$ possono essere riscritte come $u^a = \boldsymbol{e}^a(\boldsymbol{u}) \in w^b = \boldsymbol{e}^b(\boldsymbol{w})$, si deduce che

$$\boldsymbol{g}_x = g_{ab} \boldsymbol{e}^a(x) \otimes \boldsymbol{e}^b(x). \tag{2.58}$$

Poiché il tensore metrico è simmetrico per costruzione, delle sue nove componenti $\{g_{ab}\}_{a,b=1}^3$ solo sei sono indipendenti.

Osservazione (Metriche Euclidee e metriche di Riemann).

Notiamo che, quando la metrica è euclidea, le componenti del tensore metrico sono individuate dalla formula

$$g_{ab} = \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^a} \delta_{ij} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^b}.$$
(2.59)

dove le funzioni Φ^i , per i = 1,2,3, sono le componenti di un generico cambio di coordinate che descrive il passaggio dalle coordinate cartesiane a coordinate generalizzate, come ad esempio quelle polari, mentre i simboli δ_{ij} enumerano, per i, j = 1,2,3, le componenti di matrice del tensore metrico Euclideo. Tali componenti sono nulle per $i \neq j$ ed uguali a 1 per i = j. In particolare, la Equazione (2.59) permette di identificare una classe di equivalenza di metriche Euclidee.

Osservando la Equazione (2.58), si nota che è anche possibile assegnare g_x attraverso l'introduzione di sei funzioni indipendenti, tali che la matrice associata a g_x , ossia proprio $[g_{ab}]_{a,b=1}^3$, sia simmetrica e definita positiva. In tal caso, però, le sei funzioni introdotte non sono necessariamente riconducibili ad un cambio di coordinate, cosicché la Equazione (2.59) non è più necessariamente valida, e la metrica è detta non Euclidea o Riemanniana [Marsden and Hughes, 1983, Epstein, 2010, Yavari and Goriely, 2012a].

Osservazione (Isomorfismo musicale [Federico et al., 2016]). Esiste un altro modo di definire il tensore metrico, ossia come applicazione lineare da $T_x \mathscr{S}$ in $T_x^* \mathscr{S}$ data da

$$\mathbf{g}_x: T_x \mathscr{S} \to T_x^* \mathscr{S}, \quad \mathbf{g}_x := g_{ab} \, \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b,$$
(2.60a)

$$\boldsymbol{u} \in T_x \mathscr{S} \mapsto \boldsymbol{\mathfrak{g}}_x(\boldsymbol{u}) \equiv \boldsymbol{\mathfrak{g}}_x \boldsymbol{u} = g_{ab} \boldsymbol{e}^a(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{e}^b = (g_{ab} u^a) \boldsymbol{e}^b \in T_x^* \mathscr{S}, \qquad (2.60b)$$

cosicché $\mathbf{g}_x \mathbf{u} = (g_{ab}u^a)\mathbf{e}^b$ è quell'unica applicazione lineare su $T_x \mathscr{S}$ (essa, infatti, è un elemento di $T_x^* \mathscr{S}$) ottenuta valutando \mathbf{g}_x in $\mathbf{u} \in T_x \mathscr{S}$. Osserviamo che, per costruzione, e coerentemente con quanto scritto sin adesso, vale la seguente uguaglianza:

$$\boldsymbol{g}_{x}\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{g}_{x}(\boldsymbol{u},\,\cdot\,): T_{x}\mathscr{S} \to \mathbb{R}.$$
(2.61)

In particolare, si può porre

$$\boldsymbol{u}^{\flat} := \boldsymbol{\mathfrak{g}}_{x} \boldsymbol{u} = (g_{ab} u^{a}) \boldsymbol{e}^{b} \in T_{x}^{*} \mathscr{S}, \qquad (2.62)$$

e tale che $\boldsymbol{u}^{\flat}(\boldsymbol{w}) = g_{ab}u^{a}w^{b}$, per ogni $\boldsymbol{w} \in T_{x}\mathscr{S}$. Il covettore $\boldsymbol{u}^{\flat} \in T_{x}^{*}\mathscr{S}$, detto duale di $\boldsymbol{u} \in T_{x}\mathscr{S}$, è univocamente determinato e le sue componenti sono date da $(\boldsymbol{u}^{\flat})_{b} = g_{ab}u^{a} = g_{ba}u^{a}$, dove l'ultima scrittura discende direttamente dalla simmetria del tensore metrico.

L'introduzione di \mathbf{g}_x permette di definire il tensore metrico inverso $\mathbf{g}_x^{-1}: T_x^*\mathscr{S} \to T_x\mathscr{S}$, che consente di individuare un vettore a partire da un covettore. Infatti, fissato $\boldsymbol{\alpha} \in T_x^*\mathscr{S}$, si definisce $\boldsymbol{\alpha}^{\sharp} := \mathbf{g}_x^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) \in T_x\mathscr{S}$.

Osserviamo, infine, che, a rigore, $\boldsymbol{\alpha}^{\sharp}$ dovrebbe essere definito come un elemento dello spazio biduale $T_x^{**}\mathscr{S}$, essendo quest'ultimo lo spazio delle applicazioni lineari da $T_x^*\mathscr{S}$ in \mathbb{R} . Tuttavia, grazie alla *riflessività* di $T_x\mathscr{S}$, che è uno spazio vettoriale di dimensione finita, $T_x^{**}\mathscr{S}$ coincide con $T_x\mathscr{S}$ stesso. Tale proprietà si evince osservando che, per ogni $\boldsymbol{\beta} \in T_x^*\mathscr{S}$, si può scrivere $\boldsymbol{\alpha}^{\sharp}(\boldsymbol{\beta}) =: \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}^{\sharp})$. Per approfondimenti sul concetto generale di riflessività si rimanda, ad esempio, a Brezis [1986], mentre per contestualizzare la riflessività nell'ambito della Geometria Differenziale si rimanda a Epstein [2010].

Si utilizza il termine *isomorfismo musicale* [Federico et al., 2016] per indicare le proprietà matematiche discusse: data una nota musicale, il simbolo " \flat " la abbassa di un semitono, mentre il simbolo " \sharp " la innalza di un semitono. In analogia, il simbolo " \flat " abbassa l'indice, portandolo da controvariante e covariante, il simbolo " \sharp " lo innalza, passando da covariante a controvariante.

Osserviamo che, benché a rigore sarebbe necessario distinguere nella trattazione g_x da g_x , con un lieve abuso di notazione impiegheremo il simbolo g_x , supponendo chiaro dal contesto il significato da attribuire al simbolo impiegato.

Definizione 2.4.2 (Tensore metrico materiale [Marsden and Hughes, 1983]).

Il tensore metrico materiale è un'applicazione $G_X : T_X \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \times T_X \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ definita per ogni $X \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ secondo la regola $(U, W) \in T_X \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \times T_X \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \to G_X(U, W) \in \mathbb{R}$. Esso possiede tutte le proprietà del tensore metrico spaziale.

Definizione 2.4.3 (Tensore destro di Cauchy-Green [Marsden and Hughes, 1983]). Il tensore destro di Cauchy-Green è definito dalla formula

$$\boldsymbol{C}(X,t) := [\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \circ (\chi, \mathcal{T})](X,t)(\boldsymbol{g}_{x} \circ \chi(X,t))\boldsymbol{F}(X,t) = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{g}_{x}(x)\boldsymbol{F}(X,t).$$
(2.63)

In componenti,

$$C_{AB} \equiv [F^{\mathrm{T}} \circ (\chi, \mathcal{T})]_A{}^a (g_x \circ \chi)_{ab} F^b{}_B = (g_x \circ (\chi))_{ab} F^a{}_A F^b{}_B.$$
(2.64)

Osservazione.

Il tensore destro di Cauchy-Green è il *pull-back* del tensore metrico spaziale [Marsden and Hughes, 1983]. Infatti considerando $\boldsymbol{u}_x =: \boldsymbol{F}(X,t)\boldsymbol{U}_X$ con $x = \chi(X,t)$, si ha che

$$\|\boldsymbol{u}_{x}\|_{\boldsymbol{g}_{x}}^{2} = g_{ab}u^{a}u^{b} = g_{ab}F^{a}{}_{A}U^{A}F^{b}{}_{B}U^{B} = \{g_{ab}F^{a}{}_{A}F^{b}{}_{B}\}U^{A}_{X}U^{B}_{X}$$
$$= C_{AB}(X,t)U^{A}_{X}U^{B}_{X} = \|\boldsymbol{U}_{X}\|_{\boldsymbol{C}(X,t)}^{2}.$$
(2.65)

2.5 Introduzione alla Teoria della Plasticità

Il moto χ è un ente cinematico che permette di descrivere cambiamenti di forma e di volume. Nei problemi di meccanica dei continui, esso è adatto a descrivere fenomeni elastici. Per estendere la trattazione a comportamenti *plastici* o *elasto-plastici*, è opportuno introdurre nuovi gradi di libertà per tenere conto delle variazioni *microstrutturali* del materiale durante l'evoluzione. Tali aspetti non possono essere risolti solo dal moto perché esso da informazioni solo su ciò che è visibile. Certi materiali, infatti, a seguito di opportune sollecitazioni esterne subiscono un *riarrangiamento strutturale*, spesso irreversibile. Come riferimento ai lavori sulla plasticità "classica" rimandiamo a Cermelli et al. [2001], Drucker [2008], Mićunović [2009], Gurtin et al. [2010], mentre per i fenomeni anelastici in ambito biomeccanico rimandiamo a Epstein and Maugin [2000], Lubarda and Hoger [2002], Di Carlo and Quiligotti [2002], Garikipati et al. [2004], Grillo et al. [2012, 2015, 2016], Goriely [2017], Ramírez-Torres et al. [2018], Di Stefano et al. [2018], Crevacore et al. [2019], Grillo et al. [2019a,b].

Esempio 2.5.1 (Comportamento elasto-plastico [Mićunović, 2009]).

Considerando una prova di carico uniassiale eseguita su un mezzo continuo elasto-plastico, si osserva il seguente comportamento, rappresentato nella Figura 2.2:

- inizialmente si ha una regione dove il comportamento è elastico. Nel grafico sforzodeformazione $\sigma - \varepsilon$ il comportamento è lineare;
- successivamente, raggiunto il *punto di snervamento* σ_s , ha luogo una deformazione plastica durante la quale le proprietà elastiche del materiale cambiano. In tale regione, si nota un allontanamento dal comportamento lineare tra $\sigma \in \varepsilon$, con una diminuzione delle proprietà elastiche del materiale. Eseguendo una prova di scarico, il materiale si trova nella configurazione in cui a sforzo nullo è presente una deformazione diversa da zero, corrispondente alla componente plastica della deformazione;
- se continuiamo a sforzare il materiale si potrebbe assistere al fenomeno di *strizione*, accompagnato spesso dalla rottura del materiale.

Esempio 2.5.2 (Esempio introduttivo al concetto di spazio rilassato).

Per capire come descrivere fenomeni in cui si assiste a *riarrangiamenti strutturali* del materiale, è interessante considerare il seguente esempio concettuale proposto da Goriely [Goriely, 2017]:



Figura 2.2. Grafico sforzo-deformazione per una prova di carico uniassiale di un materiale elasto-plastico: prima del punto di snervamento, la relazione tra sforzo e deformazione è lineare con pendenza pari al modulo di Young (regime elastico). Oltre questa soglia l'andamento cambia significativamente (regime elasto-plastico) e la deformazione ϵ è costituita da un contributo elastico, $\epsilon_{\rm e}$, reversibile, e da uno plastico, $\epsilon_{\rm p}$, che, al contrario, rappresenta un cambiamento microstrutturale irreversibile [Mićunović, 2009].

- Immaginiamo di avere una sezione di arteria cava dissecata come configurazione di riferimento, cioè \mathscr{B}_{R} . In particolare supponiamo che essa non sia soggetta ad alcun tipo di carico esterno.
- Nella configurazione corrente \mathscr{B}_t , l'arteria è soggetta a tutte le forze coinvolte durante il processo di trasporto del sangue, ovvero forze gravitazionali, variazioni di pressione e forze di contatto su superfici interne ed esterne. Il passaggio \mathscr{B}_R a \mathscr{B}_t è descritto dal moto χ .
- La configurazione di riferimento \mathscr{B}_{R} , nonostante priva di carichi esterni, possiede sforzi interni. In altre parole, il materiale non è rilassato e, pertanto, non è nel suo *stato naturale* (in letteratura, ci si riferisce a questo stato anche come "ground state"). Per affermare ciò è sufficiente osservare il comportamento dell'arteria nel momento in cui si esegue un taglio sulla superficie. Quello che si vede è il materiale



che tende ad aprirsi spontaneamente, evolvendo verso una configurazione "rilassata", dove gli sforzi interni diminuiscono sino ad annullarsi.

Figura 2.3. Una rappresentazione dell'esempio introduttivo al concetto di spazio rilassato. Si può osservare come il passaggio dalla configurazione "rilassata" dell'arteria tagliata a quella ottenuta tramite il moto χ non è possibile solo tramite una funzione continua. Figura ridisegnata e adattata prendendo spunto da Goriely [2017]

Il processo descritto consente di approfondire la nozione di spazio rilassato, indicato comunemente con il simbolo $\mathcal{N}_X(t)$, che sarà centrale nel resto del lavoro. Il fatto che non siano presenti sforzi esterni non significa che il materiale sia *stress-free*. Inoltre eseguire un taglio sull'arteria è un fenomeno non descrivibile attraverso un moto regolare χ . Ciò nonostante è possibile descrivere il rilassamento del materiale attraverso un'applicazione che agisce dal fibrato tangente della configurazione di riferimento a quello della configurazione rilassata.

Definizione 2.5.1 (Decomposizione BKL [Mićunović, 2009]).

La decomposizione BKL (per esteso Bilby-Kröner-Lee) è una decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione F che permette di risolvere distintamente le componenti elastiche e anelastiche della deformazione. In particolare, si ha

$$\boldsymbol{F}(X,t) = \boldsymbol{F}_{e}(X,t)\boldsymbol{K}(X,t), \qquad (2.66)$$

dove $\mathbf{K}(X,t): T_X \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \to \mathscr{N}_X(t) \in \mathbf{F}_{\mathbf{e}}(X,t): \mathscr{N}_X(t) \to T_x \mathscr{B}_t$, con $x = \chi(X,t)$. Lo spazio tangente $\mathscr{N}_X(t)$ è chiamato stato naturale e rappresenta lo stato del materiale in totale assenza di sforzo.



Figura 2.4. Decomposizione BKL per un generico corpo \mathscr{B} . In questa figura si vede come la decomposizione BKL agisca sul generico spazio tangente $T_X \mathscr{B}_R$, attaccato al punto $X \in \mathscr{B}_R$, e in particolare di come lo stato naturale $\mathscr{N}_X(t)$ non sia altro che una collezione delle immagini di spazi tangenti attraverso la mappa K. Figura ridisegnata e adattata prendendo riferimento dalle lezioni del corso di Dottorato *Metodi Variazionali in Biomeccanica*, tenute dal Prof. A. Grillo nell'ambito del Dottorato di Ricerca in "Matematica Pura e Applicata" (Politecnico di Torino e Università degli Studi di Torino) e da Di Stefano et al. [2018].

Osservazione.

Lo spazio rilassato $\mathscr{N}_X(t)$ è uno spazio vettoriale tangente attaccato al punto $X \in \mathscr{B}_R$ che dipende dall'istante temporale considerato. Infatti, esso è da intendersi come il risultato di un processo di scarico elastico eseguito su un *intorno* del punto della configurazione attuale $x \in \mathscr{B}_t$. Eseguendo tale operazione per ogni punto si ottiene una collezione di spazi tangenti rilassati, che insieme formano la cosiddetta *configurazione rilassata* (anche se non si tratta di una vera e propria configurazione), ossia un'insieme di punti a cui sono associati spazi tangenti rilassati la cui struttura dipende dal tempo e che sono ottenuti dal processo di scarico elastico di intorni di punti della configurazione attuale \mathscr{B}_t . Infine si osserva l'operazione di scarico elastico è descritta dell'applicazione $\mathbf{F}_e^{-1}(x,t) : T_x \mathscr{B}_t \to \mathscr{N}_X(t)$, con $X = [\chi(\cdot,t)]^{-1}(x)$.

Osservazione (Proprietà di F_{e} e di K).

Da un punto di vista fisico si nota che la decomposizione BKL permette di separare i processi elastici, quantificati da $F_{\rm e}$, da quelli anelastici, descritti da K.

Dal punto di vista matematico è interessante notare che, mentre il gradiente di deformazione F è ottenuto dal moto χ , né K né $F_{\rm e}$ possono essere scritti come mappe tangenti di un moto. In altri termini, non esiste un moto il cui gradiente di deformazione dia come risultato K o $F_{\rm e}$. Tale proprietà in generale non è vera neanche localmente. Ulteriori approfondimenti su questa tematica possono essere trovati, ad esempio, in M. Dolfin [2008].

Definizione 2.5.2 (Tensore di Cauchy-Green elastico).

Dato il tensore di Cauchy-Green C, e la decomposizione BKL $F = F_e K$, si definisce il tensore

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}} =: [\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}} \circ (\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\mathcal{T}})] \boldsymbol{g} \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{K}^{-1}, \qquad (2.67)$$

dove si è usata la relazione $F_{\rm e} = F K^{-1}$.

Osservazione (Ulteriori considerazioni fisiche).

Il moto χ può essere ottenuto risolvendo l'equazione di bilancio di impulso. Invece, per determinare i coefficienti di \mathbf{K} , sono necessarie nuove equazioni che permettano di descrivere l'evoluzione della struttura interna del corpo considerato. Si noti, inoltre, che la configurazione generalizzata del problema è descritta dalla coppia $\mathcal{C} = (\chi, \mathbf{K})$, che equivale a 12 funzioni scalari. Queste ultime, in assenza di vincoli e/o di condizioni particolari (come, ad esempio, quelle eventualmente riconducibili alla simmetria di una data grandezza tensoriale), sono indipendenti. D'altra parte, in presenza di vincoli, una variazione virtuale della configurazione, data da $\delta \mathcal{C} = (\delta \chi, \delta \mathbf{K})$, deve essere compatibile con i vincoli assegnati.

Capitolo 3

Richiami di dinamica dei mezzi continui

In questo capitolo vengono esposti alcuni concetti di base della dinamica dei corpi continui per una teoria "classica". In particolare, verrà discusso il *bilancio di massa*, nella sua forma spaziale (o Euleriana) e materiale (o Lagrangiana), e successivamente verrà ricavato il *sistema dinamico*, nella sua forma spaziale e materiale, a partire dal *Principio delle Potenze Virtuali*. Inoltre, sarà introdotto il concetto di *grado della teoria*. Di seguito sono indicate alcune fonti per ulteriori approfondimenti [Truesdell and Toupin, 1960, Jammer, 1963, Lanczos, 1970, Epstein and Segev, 1980, Eringen, 1980, Marsden and Hughes, 1983, Gurtin, 2001, Di Carlo and Quiligotti, 2002, Gurtin, 2004, Gurtin and Anand, 2005a,b,c, Del Piero, 2009, Gurtin et al., 2010, Del Piero, 2012, Forte et al., 2019].

3.1 Bilancio di Massa: forma spaziale o Euleriana

In questa sezione viene analizzato il bilancio di massa nel caso classico, cioè senza considerare il fenomeno di crescita con distorsioni anelastiche. Indicando la porzione di spazio occupata la corpo al tempo $t \in \mathscr{I}$ con $\mathscr{B}(t) \equiv \mathscr{B}_t \subset \mathscr{S}$, definiamo la massa del corpo come [Marsden and Hughes, 1983]

$$\mathcal{M}(\mathscr{B}(t), t) = \int_{\mathscr{B}(t)} \varrho(x, t) \,\mathrm{dv}(x), \tag{3.1}$$

dove ϱ è la densità di massa.

Una formulazione globale della conservazione di massa, può essere espressa come

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}}{\mathrm{d}t}\left(\mathscr{B}(t),t\right) = 0. \tag{3.2}$$

Denotando con $\mathscr{C}(t) \subset \mathscr{B}(t)$ una generica regione del corpo tale che la sua frontiera $\partial \mathscr{C}(t)$ sia una superficie materiale, possiamo applicare il teorema di Reynolds [Eringen, 1980, Cermelli et al., 2005] per eseguire la procedura di localizzazione. In particolare vale

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}}{\mathrm{d}t}(\mathscr{C}(t),t) = \int_{\mathscr{C}(t)} \left[\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho \boldsymbol{v})\right](x,t) \,\mathrm{dv}(x),\tag{3.3}$$

dove \boldsymbol{v} indica il campo di velocità spaziale del corpo. Grazie all'arbitrarietà di $\mathscr{C}(t)$ è possibile localizzare l'equazione di bilancio di massa come segue:

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{3.4}$$

La Equazione (3.4) viene detta *forma conservativa* del bilancio di massa. Essa, però, può essere anche riscritta nella cosiddetta *forma non conservativa*, come

$$\partial_t \rho + (\operatorname{grad} \rho) \boldsymbol{v} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D_t \rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$
(3.5)

Le Equazioni (3.4) e (3.5) costituiscono scritture tra loro equivalenti della forma locale Euleriana del bilancio di massa. In particolare, osserviamo che, nella (3.5), il termine ρ div \boldsymbol{v} tiene conto delle variazioni di volume dovute al moto.

3.1.1 Bilancio di massa: forma Lagrangiana e forma materiale

In questa sezione viene discussa la *descrizione Lagrangiana* e quella *materiale* del bilancio di massa. Per far ciò, procediamo definendo le seguenti grandezze materiali:

$$\varrho_{(\mathrm{L})} := \varrho \circ (\chi, \mathcal{T}), \qquad \boldsymbol{v}_{(\mathrm{L})} \equiv \boldsymbol{V} := \boldsymbol{v} \circ (\chi, \mathcal{T}), \tag{3.6}$$

dove abbiamo introdotto il simbolo V per indicare la velocità Lagrangiana al fine di agevolare la notazione nei calcoli futuri.

Come visto nella Equazione (2.55), si può dimostrare la validità della seguente relazione:

$$\partial_t \varrho_{(\mathrm{L})} = D_t \varrho \circ (\chi, \mathcal{T}). \tag{3.7}$$

Inoltre, utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte, e supponendo che il moto χ sia di classe C^2 su $\mathscr{B}_{\mathrm{R}} \times \mathscr{I}$, possiamo calcolare le componenti gradiente di velocità [Marsden and Hughes, 1983]:

$$V^{a}_{;A} \equiv [\operatorname{Grad} \boldsymbol{V}]^{a}_{A} = \frac{\partial V^{a}}{\partial X^{A}} + (\gamma^{a}_{db} \circ \chi) V^{d} F^{b}_{A}$$

$$= \left[\frac{\partial v^{a}}{\partial x^{b}} \circ (\chi, \mathcal{T}) \right] F^{b}_{A} + (\gamma^{a}_{db} \circ \chi) V^{d} F^{b}_{A}$$

$$= \left[\frac{\partial v^{a}}{\partial x^{b}} \circ (\chi, \mathcal{T}) + (\gamma^{a}_{db} \circ \chi) [v^{d} \circ (\chi, \mathcal{T})] \right] F^{b}_{A}$$

$$= [(\operatorname{grad} \boldsymbol{v}) \circ (\chi, \mathcal{T})]^{a}_{b} F^{b}_{A}$$

$$= [v^{a}_{;b} \circ (\chi, \mathcal{T})] F^{b}_{A}. \qquad (3.8)$$

Riconosciamo che i termini $[(\operatorname{grad} \boldsymbol{v}) \circ (\chi, \mathcal{T})]^a{}_b$, con a, b = 1, 2, 3, sono le componenti della derivata covariante di \boldsymbol{v} , composte con la coppia (χ, \mathcal{T}) .

Invertendo la relazione (3.8) si ottiene

$$v^{a}_{;b} \circ (\chi, \mathcal{T}) = V^{a}_{;A} [\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathcal{T})]^{A}_{b} = \dot{F}^{a}_{A} [\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathcal{T})]^{A}_{b}, \qquad (3.9)$$

dal momento che sussiste anche l'identità $\dot{F} \equiv \text{Grad}V$ e la notazione \dot{F} indica la derivata parziale di F rispetto al tempo, ossia $\dot{F} := \partial_t F$.
Osservazione (Derivata temporale del gradiente di deformazione).

Per dimostrare la relazione $\dot{F} \equiv \text{Grad}V$, è sufficiente effettuare la derivata parziale di F rispetto al tempo e verificare che risulti uguale al terzo membro della catena di uguaglianze riportate in Equazione (3.8). A tal proposito, ricordiamo le uguaglianze ausiliarie

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_a}{\partial x^b} = \gamma^d{}_{ab}\,\boldsymbol{e}_d, \quad \gamma^d{}_{ab}(x) = \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial x^a \partial x^b}(x) \frac{\partial (\Phi^{-1})^d}{\partial z^i}(\Phi(x)), \tag{3.10a}$$

$$\frac{\partial}{\partial X^{A}}[\boldsymbol{e}_{a}\circ\chi] = \left(\frac{\partial\boldsymbol{e}_{a}}{\partial x^{b}}\circ\chi\right)\frac{\partial\chi^{b}}{\partial X^{A}} = [\gamma^{d}{}_{ab}\circ\chi][\boldsymbol{e}_{d}\circ\chi]F^{b}{}_{A}, \qquad (3.10b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{e}_a \circ \boldsymbol{\chi}] = \left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_a}{\partial x^b} \circ \boldsymbol{\chi}\right) \frac{\partial \boldsymbol{\chi}^b}{\partial t} = [\gamma^d{}_{ab} \circ \boldsymbol{\chi}][\boldsymbol{e}_d \circ \boldsymbol{\chi}]V^b, \qquad (3.10c)$$

dove tutti gli indici vanno da 1 a 3 e le funzioni $\gamma^{d}{}_{ab}$ sono dette simboli di Christoffel, e deriviamo F parzialmente rispetto al tempo, ottenendo

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial}{\partial t} (F^{a}{}_{A}[\boldsymbol{e}_{a} \circ \chi] \otimes \boldsymbol{E}^{A}) = \frac{\partial F^{a}{}_{A}}{\partial t} [\boldsymbol{e}_{a} \circ \chi] \otimes \boldsymbol{E}^{A} + \left[F^{a}{}_{A} \left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_{a}}{\partial x^{b}} \circ \chi \right) \otimes \boldsymbol{E}^{A} \right] \frac{\partial \chi^{b}}{\partial t} \\ = \frac{\partial F^{a}{}_{A}}{\partial t} [\boldsymbol{e}_{a} \circ \chi] \otimes \boldsymbol{E}^{A} + (\gamma^{d}{}_{ab} \circ \chi) F^{a}{}_{A} V^{b} [\boldsymbol{e}_{d} \circ \chi] \otimes \boldsymbol{E}^{A} \\ = \left[\frac{\partial F^{a}{}_{A}}{\partial t} + (\gamma^{a}{}_{db} \circ \chi) F^{d}{}_{A} V^{b} \right] [\boldsymbol{e}_{a} \circ \chi] \otimes \boldsymbol{E}^{A}.$$
(3.11)

Infine, osserviamo che la somma dei termini tra parentesi quadra nell'ultima espressione in Equazione (3.11) è identica al terzo membro della Equazione (3.8) in virtù del fatto che i simboli di Christoffel sono, per il problema studiato, simmetrici nei due indici "bassi".

Essendo interessati alla riscrittura della divergenza del campo di velocità, abbiamo

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} \circ (\boldsymbol{\chi}, \mathcal{T}) = \boldsymbol{v}^{a}_{;a} \circ (\boldsymbol{\chi}, \mathcal{T}) = \boldsymbol{V}^{a}_{;A} [\boldsymbol{F}^{-1} \circ (\boldsymbol{\chi}, \mathcal{T})]^{A}_{a}$$
$$= \operatorname{Tr} \{ (\operatorname{Grad} \boldsymbol{V}) [\boldsymbol{F}^{-1} \circ (\boldsymbol{\chi}, \mathcal{T})] \}$$
$$= \operatorname{Tr} \{ \dot{\boldsymbol{F}} [\boldsymbol{F}^{-1} \circ (\boldsymbol{\chi}, \mathcal{T})] \}, \qquad (3.12)$$

dove è stato introdotto l'operatore traccia per usare una notazione più compatta. Inoltre, è possibile scrivere il gradiente materiale del campo di velocità Lagrangiana come

$$\operatorname{Grad} \boldsymbol{V}(X,t) = V^{a}_{;A}(X,t) \boldsymbol{e}_{a}(\chi(X,t)) \otimes \boldsymbol{E}^{A}(X).$$
(3.13)

Teorema 3.1.1 ([Marsden and Hughes, 1983]).

Dato il gradiente di deformazione \mathbf{F} e detta $J = \det \mathbf{F} > 0$ la deformazione volumetrica (o componente volumetrica della deformazione), allora vale la seguente relazione

$$\dot{J} = J \operatorname{Tr} \{ \dot{\boldsymbol{F}} [\boldsymbol{F}^{-1} \circ (\chi, \mathcal{T})] \} = J(\operatorname{div} \boldsymbol{v}) \circ (\chi, \mathcal{T}).$$
(3.14)

Dimostrazione.

La dimostrazione si basa sulla seguente catena di uguaglianze:

$$\dot{J} = J \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} : \dot{\boldsymbol{F}} = J \operatorname{Tr} \{ \dot{\boldsymbol{F}} [\boldsymbol{F}^{-1} \circ (\chi, \mathcal{T})] \} = J(\operatorname{div} \boldsymbol{v}) \circ (\chi, \mathcal{T}).$$
(3.15)

Componendo la forma Euleriana del bilancio di massa (3.5) con la coppia (χ, \mathcal{T}), ossia

$$\{D_t \rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}\} \circ (\chi, \mathcal{T}) = 0, \qquad (3.16)$$

e utilizzando le relazioni dedotte (3.7) e (3.14) si ottiene la seguente espressione:

$$\dot{\varrho}_{(\mathrm{L})} + \varrho_{(\mathrm{L})} \frac{\dot{J}}{J} = 0,$$
 (3.17)

avendo posto $\dot{\varrho}_{(L)} \equiv \partial_t \varrho_{(L)}$. Infine, manipolando ulteriormente la (3.17), si ricava l'equazione di bilancio di massa in *forma materiale*:

$$J\dot{\varrho}_{(\mathrm{L})} + \dot{J}\varrho_{(\mathrm{L})} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{J\varrho_{(\mathrm{L})}} = 0.$$
 (3.18)

Definizione 3.1.1 (*Pull-back* di ρ [Marsden and Hughes, 1983]).

La trasformazione di Piola o *pull-back* di ρ è un funzione $\rho_{\mathbf{R}} : \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \times \mathscr{I} \to \mathbb{R}^+$ definita come segue:

$$\varrho_{\mathbf{R}} := J \varrho_{(\mathbf{L})} \equiv J[\varrho \circ (\chi, \mathcal{T})].$$
(3.19)

Tale grandezza rappresenta la densità di massa espressa per unità di volume di $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$.

In virtù dell'introduzione della densità $\rho_{\rm R}$, il bilancio di massa (3.18) diventa

$$\dot{\varrho}_{\rm R} = 0. \tag{3.20}$$

Osservazione.

Si noti che la relazione (3.20) implica l'esistenza di una funzione $\varrho_{o}: \mathscr{B}_{R} \to \mathbb{R}^{+}$ tale che

$$\varrho_{\rm R}(X,t) = \varrho_{\rm o}(X), \qquad (3.21)$$

per ogni $t \in \mathscr{I}$. Pertanto, nel caso in cui valga la relazione (3.20), la densità di massa ϱ , cioè la densità di massa del corpo \mathscr{B}_t , è calcolabile a partire dalla conoscenza della distribuzione di massa nel piazzamento di riferimento \mathscr{B}_{R} , ϱ_{o} , ed del moto, χ , attraverso la relazione

$$\varrho \circ (\chi, \mathcal{T}) = \frac{\varrho_{\mathrm{R}}}{J} \qquad \Longrightarrow \qquad \varrho(x, t) = \varrho(\chi(X, t), t) = \frac{\varrho_{\mathrm{o}}(X)}{J(X, t)}. \tag{3.22}$$

Questa osservazione è tratta dal corso di Dottorato *Metodi Variazionali in Biomeccanica*, tenute dal Prof. A. Grillo nell'ambito del Dottorato di Ricerca in "Matematica Pura e Applicata" (Politecnico di Torino e Università degli Studi di Torino).

3.2 Equazioni dinamiche

Seguendo un filone di letteratura che sta prendendo sempre più piede [Germain, 1972, Di Carlo and Quiligotti, 2002, Gurtin et al., 2010, Del Piero, 2020], anche in questo elaborato il concetto di *forza* è inteso in senso generalizzato e segue i principi della Meccanica Razionale valido per corpi continui. Esso, dunque, è slegato dal concetto di vettore applicato, tipico della fisica Newtoniana. Qui, le equazioni di bilancio di forze sono espresse

nella loro forma debole a partire dal *Principio dei Lavori Virtuali* o, equivalentemente, dal *Principio delle Potenze Virtuali*, si veda [Noll, 1974, Epstein and Segev, 1980, Del Piero, 2009, Gurtin et al., 2010].

Per mettere luce sul concetto di forza è opportuno considerare gli *spostamenti virtuali* oppure alternativamente le *velocità virtuali*. Nella meccanica dei continui classica, tali enti geometrici vivono nei fibrati tangenti $T\mathscr{S}$ o $T\mathscr{B}_{R}$, e rappresentano variazioni virtuali degli enti cinematici associati con il corpo. Inoltre, in presenza di *vincoli* imposti sul sistema fisico, le *variazioni virtuali* devono essere compatibili con tutti i *vincoli* attivi.

Una questione fondamentale dell'approccio alla Meccanica basato sul Principio dei Lavori Virtuali è che il concetto di forza appare definibile in maniera naturale come "funzionale lineare e continuo definito sullo spazio delle velocità—o degli spostamenti—virtuali" [Di Carlo and Quiligotti, 2002]. In gergo matematico, spostamenti e velocità virtuali sono spesso detti funzioni test. Il risultato che la forza "restituisce" quando è applicata ad una velocità, o ad uno spostamento, virtuale è una densità di potenza, o di lavoro, a seconda della formulazione che si sta seguendo.

Per completare il quadro teorico è necessario effettuare una opportuna scelta delle forze, che dipende certamente dal fenomeno fisico esaminato nonché dalla accuratezza del modello matematico con cui lo si vuole descrivere. In altri termini, la ricerca delle forze discende dal *legame costitutivo del modello* e dal *grado della teoria fisica*. Al fine di chiarire quest'ultimo concetto, si possono prendere in considerazione, ad esempio, i seguenti casi:

- Teoria di grado 0 [Cermelli et al., 2001, Di Carlo and Quiligotti, 2002]. Supponiamo che in una data teoria (vedremo che le teorie "classiche" della crescita e del rimodellamento rientrano in questo caso) l'ente cinematico da cui dipende la fisica del modello è il campo tensoriale \boldsymbol{K} che figura nella decomposizione BKL (si veda la Equazione (2.66)). In queste teorie, si introducono forze generalizzate rappresentabili come campi tensoriali duali alle variazioni virtuali di \boldsymbol{K} , che indicheremo nel seguito con $\delta \boldsymbol{K}$. Pertanto, poiché si ha $\delta \boldsymbol{K}(X,t) : T_X \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \to \mathscr{N}_X(t)$, una forza generalizzata duale a $\delta \boldsymbol{K}(X,t)$ deve essere del tipo $\boldsymbol{Y}(X,t) : T_X^* \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \to \mathscr{N}_X^*(t)$, avendo indicato con $\mathscr{N}_X^*(t)$ lo spazio duale di $\mathscr{N}_X(t)$. Di conseguenza, la densità di lavoro virtuale, per unità di volume di \mathscr{B}_{R} , compiuto da $\boldsymbol{Y}(X,t)$ su $\delta \boldsymbol{K}(X,t)$ è data da (omettendo le dipendenze dai punti e dal tempo per semplicità notazionale) $\boldsymbol{Y} : \delta \boldsymbol{K} = Y_{\alpha}{}^{A}(\delta \boldsymbol{K})^{\alpha}{}_{A} = \mathrm{Tr}\{\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\delta \boldsymbol{K}\}.$
- Teoria di grado 1. Considerando il contesto tipico della Meccanica dei Continui "classica", gli enti cinematici da cui dipende la fisica di un dato modello sono $(\delta\chi, \operatorname{Grad}\delta\chi)$. In tal caso, le forze generalizzate sono costituite da quelle che compiono lavoro virtuale su $\delta\chi$, come le forze di volume esterne al corpo $\boldsymbol{f} : \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \times \mathscr{I} \to T^*\mathscr{I}$ (si pensi, ad esempio, alla forza di gravità), per le quali la densità di lavoro virtuale è data da $\boldsymbol{f}\delta\chi = f_a(\delta\chi)^a$, e da quelle che compiono lavoro virtuale su $\operatorname{Grad}\delta\chi$, come il primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, che conducono al lavoro virtuale $\boldsymbol{P} : \operatorname{Grad}\delta\chi = P_a{}^A(\delta\chi)^a_{;A} = \operatorname{Tr}\{[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \circ (\chi, \mathcal{T})]\operatorname{Grad}\delta\chi\}$. Si noti che entrambe le densità di lavoro virtuale qui riportate sono da considerasi per unità di volume di \mathscr{B}_{R} .

Osservazione (Grado della teoria e accuratezza del modello).

Con riferimento alla Meccanica dei Continui "classica", ed escludendo fenomeni di trasformazione strutturale quali quelli imputabili a crescita e rimodellamento, è interessante notare come il grado della teoria sia determinante nella risoluzione delle interazioni coinvolte nel processo dinamico. Le teorie di grado 0 consentono la descrizione di forze volumetriche mentre le teorie di grado 1 aggiungono le forze di contatto superficiali. Infine le teorie di grado 2 riescono a risolvere anche effetti dovuti alle forze di linea. Come si può capire da questa spiegazione, maggiore è il grado della teoria, maggiore sarà il numero di forze e fenomeni che si riuscirà ad includere nella formulazione del problema. Ulteriori approfondimenti su questo argomento sono riscontrabili in Del Piero [2009, 2012, 2020], Steigmann [2021], Dell'Isola et al. [2022], Fedele [2022].

Osservazione (Ulteriore categorizzazione delle forze [Podio-Guidugli, 2001, Di Carlo and Quiligotti, 2002]).

Una volta chiarito il concetto di forza generalizzata ed il suo legame con il grado della teoria è possibile dare la seguente caratterizzazione:

- forze esterne: dipendono dalla fenomenologia del processo e dalle interazioni del corpo con il mondo esterno, e possono essere volumetriche, di superficie o di linea. Esse sono da considerarsi note, almeno in linea di principio, e annoverano, tra di esse, anche le forze legate all'inerzia.
- forze interne: dipendono dal materiale considerato e sono stabilite, come vedremo più avanti, da opportune *ipotesi costitutive*.

3.2.1 Il Principio delle Potenze Virtuali

L'approccio seguito in questa Tesi impiega tanto il *Principio dei Lavori Virtuali* quanto il *Principio delle Potenze Virtuali*, a seconda della "convenienza" con cui possono essere scritte le equazioni di interesse [Germain, 1972, Noll, 1974, Epstein and Segev, 1980, Di Carlo and Quiligotti, 2002, Del Piero, 2009, Gurtin et al., 2010].

In questa sezione optiamo per il *Principio delle Potenze Virtuali*. Per formularlo, indichiamo con \boldsymbol{u} la velocità virtuale il campo vettoriale spaziale $\boldsymbol{u} : \mathscr{B}_t \to T\mathscr{S}$, ossia tale che, per ogni $x \in \mathscr{B}_t, \boldsymbol{u}(x) \in T_x \mathscr{S}$. Definiamo, rispettivamente, la potenza virtuale interna $\mathcal{W}_v^{(int)}$ e potenza virtuale esterna $\mathcal{W}_v^{(ext)}$, per una teoria di grado 1 rispetto al moto, come:

$$\mathcal{W}_{\mathbf{v}}^{(\mathrm{int})}(\boldsymbol{u}) := \int_{\mathscr{B}(t)} \boldsymbol{f}^{(\mathrm{int})} \boldsymbol{u} \, \mathrm{dv} + \int_{\mathscr{B}(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{grad} \boldsymbol{u} \, \mathrm{dv}, \qquad (3.23a)$$

$$\mathcal{W}_{\mathbf{v}}^{(\text{ext})}(\boldsymbol{u}) := \int_{\mathscr{B}(t)} \boldsymbol{f}^{(\text{ext})} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\mathbf{v} + \int_{\partial_{\mathbf{N}} \mathscr{B}(t)} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\mathbf{a}, \qquad (3.23b)$$

dove $\mathbf{f}^{(\text{int})}$ e $\mathbf{f}^{(\text{ext})}$ sono la densità di forza interna ed esterna individuate per dualità. Inoltre, $\partial \mathscr{B}_{N}(t)$ indica il bordo di Neumann dove agisce la forzante $\boldsymbol{\tau}$ imposta dalle condizioni al bordo. Osserviamo anche che con questa formulazione il tensore degli sforzi di Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ appare naturalmente come duale di grad \boldsymbol{u} . Teorema 3.2.1 (Teorema di Germain [Germain, 1972]).

Imponendo una sovrapposizione di moto rigido, la potenza virtuale interna $\mathcal{W}_v^{(int)}$ deve rimanere invariata. Questo principio esclude la possibilità che due osservatori diversi sperimentino una fisica differente.

Effettuando la trasformazione $u \to \tilde{u} = qu + c$ sulle velocità virtuali, deve valere

$$\mathcal{W}_{\mathbf{v}}^{(\text{int})}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{W}_{\mathbf{v}}^{(\text{int})}(\tilde{\boldsymbol{u}}). \tag{3.24}$$

La conseguenza di questo teorema è che

- 1. la forza interna è nulla, $\boldsymbol{f}^{(\text{int})} = \boldsymbol{0};$
- 2. il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}(x,t) = [\boldsymbol{\sigma}(x,t)]_a^b \boldsymbol{e}^a(x) \otimes \boldsymbol{e}_b(x)$, deve essere tale che il tensore $\boldsymbol{\sigma}^{\sharp} = \boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$ sia simmetrico, cioè $\boldsymbol{\sigma}^{\sharp} = [\boldsymbol{\sigma}^{\sharp}]^{\mathrm{T}}$.

Osservazione (Considerazione fisica).

Notiamo che i risultati presentati sono di validità generale e discendono da una richiesta fondamentale della fisica, ovvero l'oggettività della potenza virtuale interna. In questo modo è stata imposta la classe di osservatori che sperimentano la stessa fisica, ovvero una classe di equivalenza sulle trasformazioni di Galileo.

Teorema 3.2.2 (Principio delle Potenze Virtuali [Gurtin et al., 2010]).

Durante un atto di moto la potenza virtuale interna è uguale alla potenza virtuale esterna:

$$\mathcal{W}_{\mathbf{v}}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{W}_{\mathbf{v}}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{u}). \tag{3.25}$$

Osservazione.

Il problema fisico può essere riformulato nel seguente modo: trovare il campo di moto χ compatibile con l'equazione (3.25).

Il teorema di Germain permette di semplificare le espressioni (3.23a) e (3.23b). Considerando ciò, l'equazione (3.25), può essere esplicitata nel seguente modo:

$$\int_{\mathscr{B}(t)} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \boldsymbol{u} \, \mathrm{dv} = \int_{\mathscr{B}(t)} \boldsymbol{f}^{(\operatorname{ext})} \boldsymbol{u} \, \mathrm{dv} + \int_{\partial_{\mathrm{N}} \mathscr{B}(t)} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{u} \, \mathrm{da}.$$
(3.26)

Per ottenere la forma forte dell'equazione (3.26) bisogna svolgere opportunamente alcuni passaggi. Inizialmente integriamo per parti il termine a primo membro, ottenendo

$$\int_{\mathscr{B}(t)} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}) \,\mathrm{dv} - \int_{\mathscr{B}(t)} (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{u} \,\mathrm{dv} = \int_{\mathscr{B}(t)} \boldsymbol{f}^{(\mathrm{ext})}\boldsymbol{u} \,\mathrm{dv} + \int_{\partial_{\mathrm{N}}\mathscr{B}(t)} \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{u} \,\mathrm{da}.$$
(3.27)

Applicando al primo termine del primo membro il teorema della divergenza (Gauss-Green) e separando i contributi di volume e di superficie, si ottiene:

$$\int_{\partial \mathscr{B}(t)} (\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}) \boldsymbol{n} \, \mathrm{da} - \int_{\partial_{\mathrm{N}} \mathscr{B}(t)} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{u} \, \mathrm{da} = \int_{\mathscr{B}(t)} (\mathrm{div} \boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{u} \, \mathrm{dv} + \int_{\mathscr{B}(t)} \boldsymbol{f}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{u} \, \mathrm{dv}.$$
(3.28)
41

Dato che le velocità virtuali sono nulle sul bordo di Dirichlet, ossia $\boldsymbol{u} \equiv 0$ su $\partial_{\mathrm{D}} \mathscr{B}(t)$, e che vale l'identità $(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u})\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}$, si ricava:

$$\int_{\partial_{\mathbf{N}}\mathscr{B}(t)} [(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{\tau}] \boldsymbol{u} \, \mathrm{da} = \int_{\mathscr{B}(t)} [(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{f}^{(\mathrm{ext})}] \boldsymbol{u} \, \mathrm{dv}.$$
(3.29)

Per l'arbitrarietà della scelta delle velocità virtuali \boldsymbol{u} , che ricordiamo essere funzioni test, possiamo individuare la forma forte associata al problema (3.26), ricavando il seguente sistema di equazioni dinamiche:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}^{(\operatorname{ext})} = \boldsymbol{0} & \text{in } \mathscr{B}(t) \\ \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{0} & \text{su } \partial_{\mathrm{N}}\mathscr{B}(t). \end{cases}$$
(3.30)

3.2.2 Forma Materiale

=

Come quanto fatto per il bilancio di massa, anche per il Principio delle Potenze Virtuali è possibile individuare una formulazione rispetto alla configurazione materiale. Richiamando l'espressione della potenza virtuale interna (3.23a), con $\mathbf{f}^{(\text{int})} = \mathbf{0}$ per il Teorema di Germain, ed esterna (3.23b), elenchiamo le trasformazioni nel riferimento delle grandezze coinvolte:

- in virtù della relazione $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}(\chi(X,t)) = (\boldsymbol{u} \circ \chi)(X,t)$, definiamo $\boldsymbol{U} \equiv \boldsymbol{u} \circ \chi$. Esso dipende dal tempo per la presenza del moto che sposta i punti di $\mathscr{B}(t)$. Inoltre per ogni $t \in \mathscr{I}, \boldsymbol{U}(\cdot,t) : \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \to T\mathscr{S} \in \boldsymbol{U}(X,t) = \boldsymbol{u}(\chi(X,t)) \in T_{\chi(X,t)}S;$
- il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}(x,t) = \boldsymbol{\sigma}(\chi(X,t),\mathcal{T}(X,t)) = [\boldsymbol{\sigma} \circ (\chi,\mathcal{T})](X,t)$, quindi si definisce $\boldsymbol{\sigma}_{(L)} := \boldsymbol{\sigma} \circ (\chi,\mathcal{T})$. Inoltre per ogni $t \in \mathscr{I}, \, \boldsymbol{\sigma}_{(L)}(\cdot,t) : \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \to T^*\mathscr{S} \times T\mathscr{S}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{(\mathrm{L})}(X,t) = \boldsymbol{\sigma}(\chi(X,t),\mathcal{T}(X,t)) \in T^*_{\chi(X,t)}\mathscr{S} \times T_{\chi(X,t)}\mathscr{S};$
- il gradiente spaziale della velocità virtuale $\operatorname{grad} \boldsymbol{u}(x)$, a seguito della composizione con il moto, diventa:

$$[\operatorname{Grad} \boldsymbol{U}]^{a}{}_{A} = U^{a}{}_{;A} = (u^{a}{}_{;b} \circ \chi)F^{b}{}_{A} = [\operatorname{grad} \boldsymbol{u} \circ \chi]^{a}{}_{b}F^{b}{}_{A}$$
(3.31)

$$\Rightarrow \qquad [\operatorname{grad} \boldsymbol{u} \circ \chi]^a{}_b = [\operatorname{Grad} \boldsymbol{U}]^a{}_A [\boldsymbol{F}^{-1} \circ (\chi, \mathcal{T})]^A{}_b; \tag{3.32}$$

• la forza esterna $\mathbf{f}^{(\text{ext})}(x,t) = [\mathbf{f}^{(\text{ext})} \circ (\chi, \mathcal{T})](X,t) =: \mathbf{f}^{(\text{ext})}_{(\text{L})}(X,t)$. Tuttavia, a rigore, la forza è una quantità fisica estensiva (pseudo-vettoriale) e per questo la vera trasformazione porta al seguente risultato

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \coloneqq J\boldsymbol{f}_{(\mathrm{L})}^{(\mathrm{ext})} = J\boldsymbol{f}^{(\mathrm{ext})} \circ (\chi, \mathcal{T}), \qquad (3.33)$$

dove compare J che deriva dal cambio misura (si veda avanti la potenza virtuale esterna). In particolare, per ogni $t \in \mathscr{I}$, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})}(\cdot,t) : \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \to T^*\mathscr{I}$ e $\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})}(X,t) = J(X,t)\boldsymbol{f}^{(\mathrm{ext})}(\chi(X,t),\mathcal{T}(X,t)) \in T_{\chi(X,t)}S;$

• Per quanto riguarda τ , varrà una relazione del tipo $\tau da = \tau_R da_R$, che sarà motivata più avanti con un'osservazione.

Riscriviamo la potenza virtuale interna rispetto alla configurazione di riferimento:

$$\mathcal{W}_{\mathbf{v}}^{(\text{int})}(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathscr{B}(t)} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \boldsymbol{u} \, \mathrm{dv} = \int_{\mathscr{B}_{\mathbf{R}}} [\boldsymbol{\sigma}_{(\mathrm{L})}]_{a}{}^{b} [\operatorname{Grad} \boldsymbol{U}]^{a}{}_{A} [\boldsymbol{F}^{-1} \circ (\chi, \mathcal{T})]^{A}{}_{b} J \, \mathrm{dV} = \\ = \int_{\mathscr{B}_{\mathbf{R}}} J[\boldsymbol{\sigma}_{(\mathrm{L})}]_{a}{}^{b} [\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}]_{b}{}^{A} [\operatorname{Grad} \boldsymbol{U}]^{a}{}_{A} \, \mathrm{dV} = \int_{\mathscr{B}_{\mathbf{R}}} [\boldsymbol{P}]_{a}{}^{A} [\operatorname{Grad} \boldsymbol{U}]^{a}{}_{A} \, \mathrm{dV}, \quad (3.34)$$

dove $[\mathbf{P}]_a{}^A \equiv J[\boldsymbol{\sigma}_{(\mathrm{L})}]_a{}^b[\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}]_b{}^A$ è il primo tensore di Piola-Kirchhoff, per il quale si osserva che vale $\mathbf{P}(X,t) : T_X^* \mathscr{B}_{\mathrm{R}} \to T_{\chi(X,t)}^* \mathscr{S}$. Pertanto definiamo la potenza virtuale interna materiale $\hat{\mathcal{W}}_{\mathrm{V}}^{(\mathrm{int})}$ come segue:

$$\hat{\mathcal{W}}_{v}^{(\text{int})}(\boldsymbol{U}) = \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{P} : \text{Grad}\boldsymbol{U} \, \mathrm{dV}.$$
(3.35)

Per quanto riguarda la potenza virtuale esterna si ottiene:

$$\mathcal{W}_{v}^{(\text{ext})}(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathscr{B}(t)} \boldsymbol{f}^{(\text{ext})} \boldsymbol{u} \, dv + \int_{\partial_{N} \mathscr{B}(t)} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{u} da =$$

$$= \int_{\mathscr{B}_{R}} [\boldsymbol{f}^{(\text{ext})} \circ (\boldsymbol{\chi}, \mathcal{T})] (\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\chi}) J \, dV + \int_{\partial_{N} \mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{\tau}_{R} \boldsymbol{U} \, da_{R} =$$

$$= \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{f}_{R}^{(\text{ext})} \boldsymbol{U} \, dV + \int_{\partial_{N} \mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{\tau}_{R} \boldsymbol{U} \, da_{R}. \qquad (3.36)$$

da cui si ricava l'espressione della potenza virtuale esterna materiale,

$$\hat{\mathcal{W}}_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{ext})}(\boldsymbol{U}) = \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{U} \,\mathrm{dV} + \int_{\partial_{\mathrm{N}} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \boldsymbol{U} \,\mathrm{da}_{\mathrm{R}}.$$
(3.37)

Osservazione (Trasformazione da τ da a $\tau_{\rm R}$ da_R [Marsden and Hughes, 1983, Bonet and Wood, 2008]).

Nella Equazione (3.37) è stata utilizzata la relazione $\tau da = \tau_R da_R$, pur senza giustificarla. Per ricavare questa relazione si può fare ricorso alla formula di Nanson, che definisce il cambio di misura delle superfici orientate,

$$[\boldsymbol{N}]_A \operatorname{da}_{\mathrm{R}} = J^{-1} [\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \circ (\chi, \mathcal{T})]_A{}^a [\boldsymbol{n} \circ (\chi, \mathcal{T})]_a \operatorname{da}, \qquad (3.38)$$

e il cambio di misura inverso,

$$[\boldsymbol{n} \circ (\boldsymbol{\chi}, \mathcal{T})]_a \,\mathrm{da} = J[\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}]_a{}^A [\boldsymbol{N}]_A \,\mathrm{da}_{\mathrm{R}}.$$
(3.39)

Omettendo le composizioni, si può pensare di moltiplicare due elementi di area tra loro. Si moltiplica a sinistra la Equazione (3.39) per il tensore metrico inverso g^{-1} ,

$$[\boldsymbol{g}^{-1}]^{ba}[\boldsymbol{n}]_a \,\mathrm{da} = [\boldsymbol{g}^{-1}]^{ba} J[\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}]_a{}^A[\boldsymbol{N}]_A \,\mathrm{da}_\mathrm{R}, \qquad (3.40)$$

e moltiplicando per $[\mathbf{n}]_b$ da si ottiene:

$$[\boldsymbol{n}]_{b}[\boldsymbol{g}^{-1}]^{ba}[\boldsymbol{n}]_{a}(\mathrm{da})^{2} = J[\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}]_{b}{}^{B}[\boldsymbol{N}]_{B}[\boldsymbol{g}^{-1}]^{ba}J[\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}]_{a}{}^{A}[\boldsymbol{N}]_{A}(\mathrm{da}_{\mathrm{R}})^{2}.$$
(3.41)

Dato che $\|\boldsymbol{n}(x,t)\|_{\boldsymbol{g}^{-1}}^2 = 1$, il primo membro si riduce a

$$[\boldsymbol{n}]_{b}[\boldsymbol{g}^{-1}]^{ba}[\boldsymbol{n}]_{a}(\mathrm{da})^{2} = \|\boldsymbol{n}(x,t)\|_{\boldsymbol{g}^{-1}}^{2}(\mathrm{da})^{2} = (\mathrm{da})^{2}.$$
(3.42)

Il secondo membro invece diventa

$$J^{2}[\mathbf{N}]_{B}[\mathbf{F}^{-1}]^{B}{}_{b}[\mathbf{g}^{-1}]^{ba}[\mathbf{F}^{-T}]_{a}{}^{A}[\mathbf{N}]_{A}(\mathrm{da}_{R})^{2}$$

= $J^{2}[\mathbf{N}]_{B}[\mathbf{C}^{-1}]^{BA}[\mathbf{N}]_{A}(\mathrm{da}_{R})^{2}.$ (3.43)

Da tali espressioni è possibile ricavare il seguente risultato [Bonet and Wood, 2008]

$$(\mathrm{da})^{2} = J^{2}[\boldsymbol{N}]_{B}[\boldsymbol{C}^{-1}]^{BA}[\boldsymbol{N}]_{A}(\mathrm{da}_{\mathrm{R}})^{2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{da} = J\sqrt{[\boldsymbol{N}]_{B}[\boldsymbol{C}^{-1}]^{BA}[\boldsymbol{N}]_{A}}\,\mathrm{da}_{\mathrm{R}},$$
(3.44)

oppure alternativamente

$$da = J \sqrt{Tr} [\boldsymbol{C}^{-1} (\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N})] da_{R}.$$
(3.45)

In conclusione troviamo

$$\boldsymbol{\tau} \operatorname{da} = \boldsymbol{\tau} \circ (\chi, \mathcal{T}) J \sqrt{\operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N})]} \operatorname{da}_{\mathrm{R}} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \operatorname{da}_{\mathrm{R}}.$$
 (3.46)

Il Principio delle Potenze Virtuali, nella sua forma materiale, può essere espresso come segue:

$$\hat{\mathcal{W}}_{\mathbf{v}}^{(\text{int})}(\boldsymbol{U}) = \hat{\mathcal{W}}_{\mathbf{v}}^{(\text{ext})}(\boldsymbol{U}).$$
(3.47)

Come fatto in precedenza nel caso spaziale, partendo dalla forma debole si può procedere nel tentativo di individuare la relativa forma forte del bilancio di impulso nella forma materiale. In particolare vale quanto segue:

$$\int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{P} : \operatorname{Grad} \boldsymbol{U} \mathrm{dV} = \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{U} \, \mathrm{dV} + \int_{\partial_{\mathrm{N}} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \boldsymbol{U} \, \mathrm{da}_{\mathrm{R}},$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \operatorname{Div}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}) \, \mathrm{dV} - \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} (\operatorname{Div} \boldsymbol{P}) \boldsymbol{U} \, \mathrm{dV} = \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{U} \, \mathrm{dV} + \int_{\partial_{\mathrm{N}} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \boldsymbol{U} \, \mathrm{da}_{\mathrm{R}},$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\partial \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}) \boldsymbol{N} \, \mathrm{da}_{\mathrm{R}} - \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} (\operatorname{Div} \boldsymbol{P}) \boldsymbol{U} \, \mathrm{dV} = \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{U} \, \mathrm{dV} + \int_{\partial_{\mathrm{N}} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \boldsymbol{U} \, \mathrm{da}_{\mathrm{R}},$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\partial_{\mathrm{N}} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{P} \boldsymbol{N}) \boldsymbol{U} \, \mathrm{da}_{\mathrm{R}} - \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} (\operatorname{Div} \boldsymbol{P}) \boldsymbol{U} \, \mathrm{dV} = \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{U} \, \mathrm{dV} + \int_{\partial_{\mathrm{N}} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \boldsymbol{U} \, \mathrm{da}_{\mathrm{R}}. \quad (3.48)$$

La prima equazione è una riscrittura esplicita della (3.47), la seconda è ottenuta integrando per parti il termine a primo membro e la terza applicando il teorema della divergenza. L'ultima è una riscrittura dell'equazione precedente dove è stato rimosso il bordo di Dirichlet e manipolata la funzione integranda utilizzando il risultato $(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N})\boldsymbol{U}$. In questo modo si ottiene:

$$\int_{\partial_{\mathrm{N}}\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}}) \boldsymbol{U} \,\mathrm{d}\mathbf{a}_{\mathrm{R}} = \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} [\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} + \mathrm{Div}\boldsymbol{P}] \boldsymbol{U} \,\mathrm{dV}, \qquad (3.49)$$

che, per l'arbitrarietà delle funzioni test, porta al sistema di equazioni dinamiche:

$$\begin{cases} \text{Div} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{f}_{\text{R}}^{(\text{ext})} = \boldsymbol{0} & \text{in } \mathscr{B}_{\text{R}}, \\ \boldsymbol{P} \boldsymbol{N} = \boldsymbol{\tau}_{\text{R}} & \text{su } \partial_{\text{N}} \mathscr{B}_{\text{R}}. \end{cases}$$
(3.50)

Capitolo 4

Il fenomeno di crescita e di rimodellamento descritti da un modello di grado zero

Nel seguente capitolo si farà principalmente riferimento all'ambiente modellistico formulato da Grillo et al. [2021], e ripreso da Licari [2021], e alle lezioni del corso di dottorato *Metodi Variazionali in Biomeccanica*, tenute dal Prof. A. Grillo nell'ambito del Dottorato di Ricerca in "Matematica Pura e Applicata" (Politecnico di Torino e Università degli Studi di Torino).

4.1 Bilancio di massa con crescita e distorsioni anelastiche

Lo studio di fenomeni biologici di crescita prevede la presenza di sorgenti di massa le quali modellizzano l'apporto o lo smaltimento di nutrienti provenienti dall'esterno. In biologia, questo processo può avvenire, ad esempio, a seguito del trasporto di nutrienti per irrorazione sanguigna compiuta dai capillari adiacenti al tessuto, oppure attraverso una iniezione esterna. Il risultato di tali processi è la presenza di una sorgente di massa che compare a secondo membro dei bilanci (3.5) (in forma spaziale) ed (3.20) (in forma materiale). Il significato fisico del termine sorgente è da intendersi come il risultato medio di processi dinamici che agiscono ad una scala inferiore rispetto alla dinamica di crescita del tessuto. Mostriamo adesso come il bilancio di massa si modifica per tener conto di termini di sorgente e/o di pozzo. Per fare ciò partiamo dal bilancio di massa spaziale (3.5), tenendo conto della presenza del termine sorgente, indicato con γ . Pertanto scriviamo

$$D_t \varrho + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \gamma. \tag{4.1}$$

Riferendo questa equazione nella forma materiale, si ricava,

$$\dot{\varrho}_{\rm R} = \Gamma, \tag{4.2}$$

dove $\Gamma = J\gamma \circ (\chi, \mathcal{T})$. Richiamando la decomposizione BKL, definita dalla Equazione (2.66), osserviamo che

$$\varrho_{\rm R} = J\varrho \circ (\chi, \mathcal{T}) = J_{\rm e} J_{\rm K} \varrho \circ (\chi, \mathcal{T}), \tag{4.3}$$

e definiamo,

$$\varrho_{\nu} := J_{\mathbf{e}} \varrho \circ (\chi, \mathcal{T}), \tag{4.4}$$

dove ϱ_{ν} rappresenta la densità di massa per unità di volume dello stato naturale del corpo, ossia quello associato a $\mathcal{N}_X(t)$, per ogni $X \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. Per quanto detto, notiamo che vale la relazione $\varrho_{\mathbf{R}} = J_{\mathbf{K}} \varrho_{\nu}$, che inserita nella (4.2), porta alla seguente scrittura:

$$\dot{J}_{\rm K}\varrho_{\nu} + J_{\rm K}\dot{\varrho}_{\nu} = \Gamma. \tag{4.5}$$

Imponendo la conservazione della densità di massa riferita allo stato naturale, $\dot{\varrho}_{\nu} = 0$, si ottiene

$$\dot{J}_{\rm K}\varrho_{\nu} = \Gamma. \tag{4.6}$$

Data l'identità cinematica,

$$\dot{J}_{\rm K} = \frac{\partial J_{\rm K}}{\partial \boldsymbol{K}} : \dot{\boldsymbol{K}} = J_{\rm K} \boldsymbol{K}^{-\rm T} : \dot{\boldsymbol{K}} = J_{\rm K} {\rm Tr}[\boldsymbol{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{K}}], \qquad (4.7)$$

troviamo la condizione seguente [Grillo et al., 2021]:

$$J_{\rm K} {\rm Tr}[\mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}}] \varrho_{\nu} = \Gamma, \qquad \Rightarrow \qquad {\rm Tr}[\mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}}] = \frac{\Gamma}{J_{\rm K} \varrho_{\nu}}.$$
 (4.8)

Questo risultato ha delle importanti conseguenze nello studio della trattazione poiché, dato Γ (eventualmente assegnato fenomenologicamente), il descrittore cinematico K, qualunque esso sia, deve essere compatibile con la (4.8).

4.2 Equazioni dinamiche: crescita e rimodellamento

Come discusso nella Sezione 2.5, i fenomeni anelastici interessano l'evoluzione della microstruttura del materiale. Ad esempio la crescita dei tessuti biologici è tipicamente caratterizzata dalla presenza di distorsioni anelastiche. In questo sistema fisico la variabile cinematica χ non è più sufficiente a descrivere l'evoluzione del corpo dal momento che non tiene conto delle variazioni microstrutturali. Avendo in mente la decomposizione BKL, notiamo come il tensore \boldsymbol{K} risulti un ente cinematico con nove gradi di libertà. Come accennato alla fine della Sezione 2.5, la configurazione di tali sistemi sarà descritta dalla coppia (χ, \boldsymbol{K}), con un totale di dodici gradi di libertà per il sistema continuo, di cui tre descrivono la forma del corpo e nove sono legati alla *microstruttura* del materiale.

Assumendo di lavorare nel piazzamento di riferimento $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, consideriamo gli spostamenti virtuali δ_{χ} al posto delle velocità virtuali U, e proponiamo una versione del *Principio dei Lavori Virtuali* [Di Carlo and Quiligotti, 2002, Del Piero, 2009, Gurtin et al., 2010, Grillo et al., 2015, 2017, 2019a, Penta et al., 2020, Grillo et al., 2021], per giungere infine alle equazioni dinamiche locali. Come per il modello senza crescita, il tipo di spostamenti virtuali sarà dettato dalle ipotesi costitutive e dal grado della teoria. In questo capitolo studiamo una teoria di primo gradiente per il moto, utilizzando gli spostamenti virtuali $\delta\chi$, Grad $\delta\chi$, e di grado 0 per la componente microstrutturale, considerando $\delta \mathbf{K}$. In questo modo si possono descrivere, da un lato, le interazioni di volume e gli effetti di bordo che interessano il moto, dall'altro, le interazioni di volume che coinvolgono la microstruttura del materiale. Nel prossimo capitolo è investigato un modello basato sulla teoria di primo gradiente per le variazioni di struttura interna. In questo caso si deve includere la variazione virtuale Grad $\delta \mathbf{K}$, che permette di risolvere gli effetti di bordo che caratterizzano la microstruttura del materiale. Tale approccio consentirà, come vedremo, di imporre sul bordo di Neumann (libero) una condizione al contorno anche per gli effetti microstrutturali.

4.2.1 Il Principio dei Lavori Virtuali: teoria di grado zero

Rimanendo fedeli all'approccio utilizzato precedentemente, notiamo che le forze individuate per *dualità* degli enti cinematici, sono:

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \div \delta \chi, \qquad \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \div \delta \chi, \qquad \boldsymbol{P} \div \mathrm{Grad} \delta \chi, \tag{4.9a}$$

$$\boldsymbol{Y} \div \delta \boldsymbol{K}, \qquad \boldsymbol{Z} \div \delta \boldsymbol{K}.$$
 (4.9b)

dove il simbolo ÷ esprime la relazione di dualità tra l'ente dinamico e quello cinematico. Nell'equazione (4.9a) compare la forza volumetrica esterna $f_{\rm R}^{\rm (ext)}$, la forzante agente sul bordo di Neumann $\tau_{\rm R}$ e il primo tensore di Piola-Kirchhoff P, già presenti nel caso classico. Nella equazione (4.9b), si notano le forze configurazionali Y interna ed Z esterna, duali alla variazione δK .

Invocando il teorema di Germain, da cui $\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{int})} = \boldsymbol{0}$, il Principio dei Lavori Virtuali può essere applicato esprimendo il lavoro virtuale interno $\mathcal{W}_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{int})}$, con la seguente forma

$$\mathcal{W}_{v}^{(\text{int})}(\delta\chi,\delta\boldsymbol{K}) = \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{P} : \operatorname{Grad}\delta\chi \,\mathrm{dV} + \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{Y} : \delta\boldsymbol{K} \,\mathrm{dV}, \qquad (4.10)$$

ed il lavoro virtuale esterno $\mathcal{W}_v^{(ext)}$, come

$$\mathcal{W}_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{ext})}(\delta\chi,\delta\boldsymbol{K}) = \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \delta\chi \,\mathrm{dV} + \int_{\partial_{\mathrm{N}}\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \delta\chi \,\mathrm{da}_{\mathrm{R}} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Z} : \delta\boldsymbol{K} \,\mathrm{dV}.$$
(4.11)

Invocando il Principio dei Lavori Virtuali (3.25) e svolgendo nuovamente i calcoli presentati nel capitolo precedente, descritti dalla Equazione (3.48), si arriva alla seguente scrittura:

$$\int_{\partial_{N}\mathscr{B}_{R}} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{\tau}_{R}) \delta \chi \, da_{R} = \int_{\mathscr{B}_{R}} [\boldsymbol{f}_{R}^{(\text{ext})} + \text{Div}\boldsymbol{P}] \delta \chi \, dV + \int_{\mathscr{B}_{R}} (\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Y}) : \delta \boldsymbol{K} \, dV.$$
(4.12)

Grazie all'arbitrarietà degli spostamenti virtuali $\delta \chi \in \delta \mathbf{K}$, si ottiene il sistema di equazioni dinamiche nella forma locale:

$$\begin{cases} \operatorname{Div} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\operatorname{ext})} = \boldsymbol{0} & \operatorname{in} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}, \\ \boldsymbol{P} \boldsymbol{N} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} & \operatorname{su} \partial_{\mathrm{N}} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}, \\ \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y} & \operatorname{in} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}. \end{cases}$$
(4.13)

Osservazione (Forze esterne e interne).

Esiste una grande differenza tra le forze esterne e quelle interne: le prime sono assegnabili in linea di principio mediante relazioni note che la esprimono in funzione di $(\chi, F, K, \dot{\chi}, \ddot{\chi}, \dot{K}, \ddot{K})$, e dipendono dalle caratteristiche del sistema fisico in esame, quali la fenomenologia di tali forze, il tipo di interazione tra il corpo ed il mondo esterno o interazioni tra il moto χ e la struttura interna K. Dall'altra parte, le forze interne sono sconosciute e la loro espressione dipende dal *legame costitutivo* che viene proposto per modellizzare il materiale. Qualunque legame costitutivo venga ipotizzato, questo deve essere coerente con gli assiomi della *teoria generale del legame costitutivo* (si veda, ad esempio, Eringen [1980]). Nel seguito ci soffermeremo su due di tali assiomi, che sono il principio di *oggettività materiale* e quello per il quale il legame costitutivo deve essere compatibile con il Secondo Principio della Termodinamica.

4.3 Dissipazione

Esistono diverse formulazioni del Secondo Principio della Termodinamica, tra cui ricordiamo quella di Clausius (si veda, ad esempio, Fabrizio and Morro [1987]), solitamente utilizzata per trasformazioni termodinamiche cicliche, e quella di Clausius-Duhem, esprimibile in forma globale e locale (si veda, ad esempio, Eringen [1980], Marsden and Hughes [1983], Liu [2002]). Nel seguito, prendendo spunto da Gurtin et al. [2010], ci baseremo su una formulazione meccanica del principio di Clausius-Duhem, che condurrà ad una disuguaglianza che definisce la dissipazione del sistema in esame e che dovrà essere soddisfatta dal legame costitutivo imposto.

La dissipazione totale di energia del corpo $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ è definita come:

$$\int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \mathcal{D}_{\mathrm{R}} \mathrm{d} \mathrm{V} \ge 0. \tag{4.14}$$

Tale quantità deve essere sempre non negativa per non violare il Secondo Principio della Termodinamica e, inoltre, deve valere per qualunque regione di punti del corpo \mathscr{B}_{R} . Dunque scelta arbitrariamente una parte del corpo $\mathscr{P}_{R} \subset \mathscr{B}_{R}$, fissa nel tempo, scriviamo

$$\int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \mathcal{D}_{\mathrm{R}} \, \mathrm{d}\mathrm{V} := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \psi_{\mathrm{R}} \, \mathrm{d}\mathrm{V} + \underbrace{\int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{V} \, \mathrm{d}\mathrm{V} + \int_{\partial \mathscr{P}_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}) \boldsymbol{V} \, \mathrm{d}\mathrm{a}_{\mathrm{R}} + \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Z} : \dot{\boldsymbol{K}} \, \mathrm{d}\mathrm{V},}_{\mathrm{potenza netta}}$$
(4.15)

dove $\psi_{\mathbf{R}}$ è la densità di energia libera di Helmholtz per unità di volume del piazzamento di riferimento $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, ottenuta effettuando un *pull-back* della ψ (grandezza pseudo-scalare), densità di energia libera di Helmholtz per unità di volume del piazzamento attuale \mathscr{B}_t , mediante la relazione

$$\psi_{\mathbf{R}} = J[\psi \circ (\chi, \mathcal{T})]. \tag{4.16}$$

Dalla (4.14), si ricava

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \psi_{\mathrm{R}} \,\mathrm{d}\mathrm{V} \leq \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{V} \,\mathrm{d}\mathrm{V} + \int_{\partial \mathscr{P}_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}) \boldsymbol{V} \,\mathrm{d}\mathrm{a}_{\mathrm{R}} + \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Z} : \boldsymbol{K} \,\mathrm{d}\mathrm{V}.$$

$$(4.17)$$

Ora dato che \mathscr{P}_{R} è fissa nel tempo, ossia è una superficie materiale, è possibile scambiare la derivata temporale con il segno di integrale ottenendo il seguente risultato:

$$\int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \dot{\psi}_{\mathrm{R}} \, \mathrm{dV} \leq \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{V} \, \mathrm{dV} + \int_{\partial \mathscr{P}_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{PN}) \boldsymbol{V} \, \mathrm{da}_{\mathrm{R}} + \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Z} : \dot{\boldsymbol{K}} \, \mathrm{dV}.$$
(4.18)

Il secondo membro può essere manipolato in modo da semplificare l'espressione. Utilizzando il teorema di Gauss-Green ed impiegando la prima e la terza equazione del sistema dinamico (4.13), si ottiene

$$\int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \dot{\psi}_{\mathrm{R}} \, \mathrm{dV} \leq \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{V} \, \mathrm{dV} + \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \mathrm{Div}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}) \, \mathrm{dV} + \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Z} : \dot{\boldsymbol{K}} \, \mathrm{dV}$$

$$= \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} [\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} + \mathrm{Div}\boldsymbol{P}] \boldsymbol{V} \, \mathrm{dV} + \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{P} : \mathrm{Grad}\boldsymbol{V} \, \mathrm{dV} + \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Y} : \dot{\boldsymbol{K}} \, \mathrm{dV}$$

$$= \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{P} : \mathrm{Grad}\boldsymbol{V} \, \mathrm{dV} + \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Y} : \dot{\boldsymbol{K}} \, \mathrm{dV}. \tag{4.19}$$

Localizzando l'ultima espressione si ricava la disuguaglianza di Clausius-Duhem in forma locale:

$$\hat{\psi}_{\mathrm{R}} \leq \boldsymbol{P} : \mathrm{Grad}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{Y} : \boldsymbol{K},$$
(4.20)

che può essere riscritta come,

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = -\dot{\psi}_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{P} : \mathrm{Grad}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{Y} : \dot{\boldsymbol{K}} \ge 0.$$
(4.21)

Il termine $\boldsymbol{Y}: \boldsymbol{K}$ può essere riscritto come:

$$\boldsymbol{Y}: \dot{\boldsymbol{K}} = \operatorname{Tr}[\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{K}}] = \operatorname{Tr}[\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{K}}] = \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}: \boldsymbol{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}}: \boldsymbol{\Lambda}, \quad (4.22)$$

dove $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}} := \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{\Lambda} := \boldsymbol{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{K}}.$

Osservazione (Cambio di Notazione).

Il cambio di notazione da \mathbf{K} a $\mathbf{\Lambda}$ porta numerosi vantaggi concettuali nella trattazione. In particolare, si nota che nella nuova forma esso è concettualmente analogo all'usuale gradiente di velocità spaziale $\mathbf{l} = \mathbf{\dot{F}}[\mathbf{F}^{-1} \circ (\chi, \mathcal{T})]$ ottenuto effettuando un *push-forward* di $\mathbf{\dot{F}}$. Nel nostro caso invece $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{\dot{K}}$ rappresenta il "*pull-back*" di $\mathbf{\dot{K}}$, dove le virgolette indicano che l'operazione che trasforma $\mathbf{\dot{K}}$ in $\mathbf{\Lambda}$ non è associata ad un moto. Oltre a questa analogia, notiamo che la trasformazione permette di uniformare gli indici, trasformando il tensore a due punti $\mathbf{\dot{K}}$ in un tensore da $T\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ in se stesso. Questa caratteristica si nota dal fatto che gli indici sono tutti dello stesso tipo (nel caso specifico sono indici materiali, dunque maiuscoli). Il grande vantaggio è che tensori con indici dello stesso tipo possono essere *simmetrizzati* con una procedura opportuna. Per procedere nella trattazione è opportuno stabilire le ipotesi costitutive del modello sulla energia libera di Helmholtz $\psi_{\rm R}$. Notiamo che è possibile (talvolta preferibile) effettuare la scelta costitutiva sulla densità di energia libera di Helmholtz riferita alla configurazione rilassata, ψ_{ν} , ovvero espressa per unità di misura dello stato naturale del materiale. In questo modo la dipendenza costitutiva è riferita alle proprietà del materiale nella configurazione stress-free. Notiamo che, usando la relazione $J = J_{\rm e} J_{\rm K}$ valida per il teorema di Binet, si può esprimere $\psi_{\rm R}$ come segue:

$$\psi_{\mathbf{R}} = J[\psi \circ (\chi, \mathcal{T})] = J_{\mathbf{e}} J_{\mathbf{K}} [\psi \circ (\chi, \mathcal{T})].$$
(4.23)

Definiamo ora la ψ_{ν} , con la formula:

$$\psi_{\nu} = J_{e}[\psi \circ (\chi, \mathcal{T})] \qquad \Rightarrow \qquad \psi_{R} = J_{K}\psi_{\nu}. \tag{4.24}$$

La ricerca dell'espressione costitutiva per ψ_{ν} prevede di stabilire inizialmente le variabili costitutive indipendenti. Nel nostro modello di crescita, consideriamo la seguente lista:

$$\mathcal{V}_{\rm ci} := (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}). \tag{4.25}$$

Dall'altra parte troviamo le variabili costitutive dipendenti, contenute nella lista:

$$\mathcal{V}_{\rm cd} := (\psi_{\rm R}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Y}). \tag{4.26}$$

Poiché uno degli assiomi della teoria generale del legame costitutivo, detto assioma di equipresenza, si veda Eringen [1980], richiede che ciascuna delle variabili costitutive dipendenti sia a priori funzione di tutte le variabili costitutive indipendenti, poniamo:

$$\psi_{\mathbf{R}} \equiv \mathcal{F}^{\psi_{\mathbf{R}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}), \qquad (4.27a)$$

$$\boldsymbol{P} \equiv \mathcal{F}^{\boldsymbol{P}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}), \qquad (4.27b)$$

$$\boldsymbol{Y} \equiv \mathcal{F}^{\boldsymbol{Y}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}). \tag{4.27c}$$

dove è stata introdotta la mappa ausiliaria $\mathfrak{X} : \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \times \mathscr{I} \to \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, definita come $\mathfrak{X}(X, t) = X$, e la mappa di tempo universale \mathcal{T} , si veda la Definizione 2.2.3.

Riprendendo la dissipazione residua \mathcal{D}_{R} alla luce della definizione (4.24) e della relazione costitutiva (4.27a), possiamo esplicitare il termine

$$\dot{\psi}_{\mathrm{R}} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \sharp\right) : \dot{\boldsymbol{F}} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \sharp\right) : \dot{\boldsymbol{K}} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \sharp\right) : \ddot{\boldsymbol{K}} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathcal{X}} \circ \sharp\right) \underbrace{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}}_{=0} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathcal{T}} \circ \sharp\right) \underbrace{\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t}}_{=1},$$

$$(4.28)$$

dove il simbolo \sharp indica la lista delle dipendenze, $\sharp = (F, K, K, \mathfrak{X}, \mathcal{T})$. Inserendo la relazione descritta nella Equazione (4.28) nella Equazione (4.21), si ricava:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \boldsymbol{\sharp}\right) : \dot{\boldsymbol{F}} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\sharp}\right) : \dot{\boldsymbol{K}} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \boldsymbol{\sharp}\right) : \ddot{\boldsymbol{K}}$$
50

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathcal{T}}\circ \sharp\right) + \boldsymbol{P}: \dot{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}}: \boldsymbol{K}^{-1}\dot{\boldsymbol{K}} \ge 0.$$
(4.29)

Raggruppando i termini simili si ottiene,

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ \mathcal{F}^{\boldsymbol{P}} \circ \sharp - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \sharp \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{F}} + \left\{ \mathcal{F}^{\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}}} \circ \sharp - \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \sharp \right) \right\} : \boldsymbol{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{K}} + - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \sharp \right) : \ddot{\boldsymbol{K}} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathcal{T}} \circ \sharp \right) \ge 0,$$
(4.30)

dove per il primo tensore di Piola-Kirchhoff è stata impiegata la relazione (4.27b), si è posto $\mathbf{Y}_{\mathrm{R}} = \mathcal{F}^{\mathbf{Y}_{\mathrm{R}}} \circ \mathbf{\sharp} = \mathbf{K}^{\mathrm{T}}[\mathcal{F}^{\mathbf{Y}} \circ \mathbf{\sharp}]$ ed è stata utilizzata l'identità:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\sharp}\right) : \dot{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\sharp}\right) : \boldsymbol{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{K}}.$$
(4.31)

Osservazione (Ulteriori ipotesi modellistiche).

Esistono tre principali classi di fenomeni che posso essere descritti dalla teoria proposta:

- crescita e rimodellamento, in cui si verifica un riarrangiamento della struttura interna del materiale, e ciò può avvenire per mezzo di stimoli chimici, elettrici e meccanici. In fenomeni di rimodellamento la configurazione, ed in particolare l'ente cinematico K si muove su una varietà generalizzata fissa nel tempo [Maugin, 2009, Epstein, 2009];
- deterioramento legato all'invecchiamento, in cui il materiale cambia le proprietà meccaniche nel tempo. In questo caso la varietà su cui evolve la configurazione evolve nel tempo [Maugin, 2009, Epstein, 2009];
- transizioni di fase, in cui le proprietà del materiale subiscono una vera e propria trasformazione anziché evolvere con continuità. Per questi fenomeni è necessario ricorrere a teorie gradiente [Maugin, 2009, Epstein, 2009, Ciarletta et al., 2012, Ciarletta and Ben Amar, 2012, Ciarletta and Maugin, 2011].

Nel seguito di questo elaborato supporremo di trattare esclusivamente fenomeni del primo tipo. Da questa ipotesi segue l'eliminazione della variabile \mathcal{T} dagli argomenti delle variabili costitutive dipendenti (4.26). Ciò si traduce nella seguente richiesta:

$$\psi_{\mathrm{R}} = \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}) = \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \mathfrak{X}), \qquad (4.32a)$$

$$\boldsymbol{P} = \mathcal{F}^{\boldsymbol{P}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}) = \mathcal{G}^{\boldsymbol{P}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \mathfrak{X}), \qquad (4.32b)$$

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{F}^{\boldsymbol{Y}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}) = \mathcal{G}^{\boldsymbol{Y}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \mathfrak{X}).$$
(4.32c)

La nuova lista delle dipendenze verrà indicata con il simbolo $\boldsymbol{\natural} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}).$

In virtù della scelta costitutiva descritta nell'osservazione precedente è possibile modificare l'espressione della dissipazione residua (4.31), imponendo la relazione

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathcal{T}} \circ \sharp\right) \equiv 0. \tag{4.33}$$

In particolare avendo in mente le relazioni (4.32a),(4.32b),(4.32c), si può scrivere

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{P}} \circ \boldsymbol{\natural} - \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \boldsymbol{\natural} \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{F}} + \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{Y}} \circ \boldsymbol{\natural} - \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\natural} \right) \right\} : \boldsymbol{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{K}} - \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \boldsymbol{\natural} \right) : \ddot{\boldsymbol{K}} \ge 0$$
(4.34)

4.4 Metodo di Coleman e Noll

Invocando il metodo di Coleman e Noll, osserviamo che, poiché le variabili \dot{F} e \ddot{K} , non sono state dichiarate né come variabili costitutive indipendenti, né come variabili costitutive dipendenti, esse possono essere variate in maniera del tutto *arbitraria*, e di conseguenza possono essere scelte in modo tale da rendere \mathcal{D}_{R} negativa, il che è inaccettabile. Inoltre, \mathcal{D}_{R} può essere ridefinita come una funzione lineare nelle variabili \dot{F}, \ddot{K} , e quindi, al fine di garantire la non-negatività di \mathcal{D}_{R} , si richiede che i coefficienti di ciascuna di tali variabili siano identicamente nulli. In questo modo si ottengono le relazioni:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{P}} \circ \boldsymbol{\natural} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \boldsymbol{\natural}, \tag{4.35a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \boldsymbol{\natural} = \boldsymbol{0}. \tag{4.35b}$$

La prima rappresenta una vera e propria legge costitutiva e implica che il materiale evolve in regime elastico. La seconda esprime il fatto che la grandezza $\mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}$ non è dipendente dalla quantità $\dot{\mathbf{K}}$ e quindi che esiste una funzione $\mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}$ tale che $\mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathfrak{X}) = \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ$ $(\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}}, \mathfrak{X}).$

4.5 Tensore di Eshelby

A seguito dell'applicazione del metodo di Coleman e Noll, la dissipazione (4.34) diviene:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ -\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\natural} \right) + \mathcal{G}^{\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}}} \circ \boldsymbol{\natural} \right\} : \boldsymbol{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{K}} \ge 0, \qquad (4.36)$$

che, in vista della (4.35b), può essere espressa come,

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ -\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat} \right) + \mathcal{G}^{\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}}} \circ \boldsymbol{\natural} \right\} : \boldsymbol{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{K}} \ge 0, \qquad (4.37)$$

dove il simbolo \flat , indica la lista ridotta di variabili $\flat = (F, K, \mathfrak{X})$.

Osservazione (Dipendenza funzionale di \boldsymbol{P}). Si nota che la relazione

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{P}} \circ \boldsymbol{\natural} = \frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \boldsymbol{\flat}$$
(4.38)

implica che esiste una funzione $\mathcal{H}^{\mathbf{P}}$ tale che $\mathbf{P} = \mathcal{H}^{\mathbf{P}} \circ \flat = \mathcal{G}^{\mathbf{P}} \circ \natural$, da cui deriva che il primo tensore di Piola-Kirchhoff non dipende da $\dot{\mathbf{K}}$. Si noti che per la grandezza \mathbf{Y}_{R} non vale lo stesso risultato.

Proseguiamo la trattazione definendo la parte dissipativa di $Y_{\rm R}$,

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,d}} := -\underbrace{\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat}\right)}_{=:\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,en}}} + \mathcal{G}^{\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}}} \circ \boldsymbol{\natural}. \tag{4.39}$$

Osservando la Equazione (4.39), si nota la richiesta di formulare un'espressione costitutiva per la funzione $\mathcal{H}^{\psi_{R}}$. In particolare, in questa sede, consideriamo la seguente ipotesi:

$$\psi_{\mathrm{R}} = \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}) = \hat{\psi}_{\mathrm{R}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) = J_{\mathrm{K}}[\hat{\psi}_{\nu} \circ (\boldsymbol{F}\boldsymbol{K}^{-1})], \qquad (4.40)$$

dove, nell'ultima uguaglianza, $\hat{\psi}_{\nu}$ è funzione dalla deformazione elastica $F_{\rm e} = FK^{-1}$. Tale assunzione ci consente di eseguire i seguenti passaggi per il calcolo di $Y_{\rm R,en}$, [Di Carlo and Quiligotti, 2002]:

$$[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,en}}]_{A}{}^{B} = (\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}})_{A}{}^{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B}} \circ \flat \right) = (\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}})_{A}{}^{\alpha} \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{\mathrm{R}}}{\partial [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) \right).$$
(4.41)

Osservando che

$$\frac{\partial \hat{\psi}_{\mathbf{R}}}{\partial [\mathbf{K}]^{\alpha}{}_{B}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) = \frac{\partial J_{\mathbf{K}}}{\partial [\mathbf{K}]^{\alpha}{}_{B}} [\hat{\psi}_{\nu} \circ (\mathbf{F}\mathbf{K}^{-1})] + J_{\mathbf{K}} \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{\nu}}{\partial [\mathbf{F}_{\mathbf{e}}]^{a}{}_{\beta}} \circ (\mathbf{F}\mathbf{K}^{-1}) \right] \frac{\partial ([\mathbf{F}]^{a}{}_{D}[\mathbf{K}^{-1}]^{D}{}_{\beta})}{\partial [\mathbf{K}]^{\alpha}{}_{B}}.$$
(4.42)

Utilizzando la regola di derivazione del determinante di un tensore si ottiene l'identità

$$\frac{\partial J_{\rm K}}{\partial [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B}} = J_{\rm K}(\boldsymbol{K}^{-{\rm T}})_{\alpha}{}^{B}, \qquad (4.43)$$

che, inserita nella (4.41), restituisce

$$[\mathbf{Y}_{\mathrm{R,en}}]_{A}{}^{B} = (\mathbf{K}^{\mathrm{T}})_{A}{}^{\alpha} \left\{ (\mathbf{K}^{-\mathrm{T}})_{\alpha}{}^{B} [\hat{\psi}_{\mathrm{R}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K})] \right\}$$

+ $(\mathbf{K}^{\mathrm{T}})_{A}{}^{\alpha} \left\{ J_{\mathrm{K}} \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{\nu}}{\partial [\mathbf{F}_{\mathrm{e}}]^{a}{}_{\beta}} \circ (\mathbf{F}\mathbf{K}^{-1}) \right] [\mathbf{F}]^{a}{}_{D} \frac{\partial [\mathbf{K}^{-1}]^{D}{}_{\beta}}{\partial [\mathbf{K}]^{\alpha}{}_{B}} \right\}.$ (4.44)

Notiamo che è possiamo calcolare la derivata di K^{-1} rispetto a K partendo dalla relazione

$$[\boldsymbol{I}]^{D}{}_{N} = [\boldsymbol{K}^{-1}]^{D}{}_{\gamma}[\boldsymbol{K}]^{\gamma}{}_{N}, \qquad (4.45)$$

e derivandola rispetto a \boldsymbol{K}

$$0 = \frac{\partial [\boldsymbol{I}]^{D}{}_{N}}{\partial [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B}} = \frac{\partial [\boldsymbol{K}^{-1}]^{D}{}_{\gamma}}{\partial [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B}} [\boldsymbol{K}]^{\gamma}{}_{N} + [\boldsymbol{K}^{-1}]^{D}{}_{\gamma}\frac{\partial [\boldsymbol{K}]^{\gamma}{}_{N}}{\partial [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B}}$$
$$= \frac{\partial [\boldsymbol{K}^{-1}]^{D}{}_{\gamma}}{\partial [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B}} [\boldsymbol{K}]^{\gamma}{}_{N} + [\boldsymbol{K}^{-1}]^{D}{}_{\gamma}\delta^{\gamma}{}_{\alpha}[\delta^{\mathrm{T}}]{}_{N}{}^{B},$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial [\boldsymbol{K}^{-1}]^{D}{}_{\gamma}}{\partial [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B}} [\boldsymbol{K}]^{\gamma}{}_{N} = -[\boldsymbol{K}^{-1}]^{D}{}_{\alpha}\delta^{B}{}_{N}.$$
(4.46)

Moltiplicando ambo i membri per $[\pmb{K}^{-1}]^N{}_\beta$ a destra si ottiene,

$$\frac{\partial [\boldsymbol{K}^{-1}]^{D}{}_{\gamma}}{\partial [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B}} [\boldsymbol{K}]^{\gamma}{}_{N} [\boldsymbol{K}^{-1}]^{N}{}_{\beta} = -[\boldsymbol{K}^{-1}]^{D}{}_{\alpha} \delta^{B}{}_{N} [\boldsymbol{K}^{-1}]^{N}{}_{\beta}, \qquad (4.47)$$

ricavando la relazione cercata,

$$\frac{\partial [\boldsymbol{K}^{-1}]^{D}{}_{\beta}}{\partial [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B}} = -[\boldsymbol{K}^{-1}]^{D}{}_{\alpha}[\boldsymbol{K}^{-1}]^{B}{}_{\beta} = -[\boldsymbol{K}^{-1}]^{D}{}_{\alpha}[\boldsymbol{K}^{-1}]_{\beta}{}^{B}.$$
(4.48)

Osservazione (Notazione segno diadico).

Si noti che possiamo scrivere la relazione appena trovata in maniera più compatta introducendo la seguente notazione:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{K}^{-1}}{\partial \boldsymbol{K}}\right]_{\boldsymbol{\beta} \alpha \boldsymbol{\alpha}}^{D \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}} = -\left[\boldsymbol{K}^{-1}\underline{\otimes}\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}}\right]_{\boldsymbol{\beta} \alpha \boldsymbol{\alpha}}^{D \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}} := -\left[\boldsymbol{K}^{-1}\right]_{\boldsymbol{\alpha}}^{D}\left[\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}}\right]_{\boldsymbol{\beta}}^{B}, \quad (4.49)$$

dove il prodotto diadico con sottosegno $\underline{\otimes}$ è un prodotto diadico dove vengono associati il primo e il terzo indice ed il secondo e il quarto. Notiamo che esiste anche il prodotto diadico con soprasegno $\overline{\otimes}$, il quale associa il primo e il quarto indice ed il secondo e il terzo indice.

Inserendo la relazione (4.48) nella Equazione (4.44), troviamo la seguente espressione

$$[\mathbf{Y}_{\mathrm{R,en}}]_{A}{}^{B} = [\hat{\psi}_{\mathrm{R}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K})](\mathbf{I}^{\mathrm{T}})_{A}{}^{B} - [\mathbf{K}^{\mathrm{T}}]_{A}{}^{\alpha} \left\{ J_{\mathrm{K}} \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{\nu}}{\partial [\mathbf{F}_{\mathrm{e}}]^{a}{}_{\beta}} \circ (\mathbf{F}_{\mathrm{e}}) \right] [\mathbf{F}]^{a}{}_{D} [\mathbf{K}^{-1}]^{D}{}_{\alpha} [\mathbf{K}^{-1}]^{B}{}_{\beta} \right\},$$
(4.50)

che, trasponendo $[\pmb{K}^{-1}]^D{}_\alpha$ e spostandolo a sinistra fuori dalla parentesi graffa, ci consente di ricavare

$$[\mathbf{Y}_{\mathrm{R,en}}]_{A}{}^{B} = [\hat{\psi}_{\mathrm{R}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K})](\mathbf{I}^{\mathrm{T}})_{A}{}^{B} - [\mathbf{K}^{\mathrm{T}}]_{A}{}^{\alpha} [\mathbf{K}^{-\mathrm{T}}]_{\alpha}{}^{D} \left\{ J_{\mathrm{K}} \left[\frac{\partial \hat{\psi}_{\nu}}{\partial [\mathbf{F}_{\mathrm{e}}]^{a}{}_{\beta}} \circ (\mathbf{F}_{\mathrm{e}}) \right] [\mathbf{F}]^{a}{}_{D} [\mathbf{K}^{-1}]^{B}{}_{\beta} \right\}.$$
(4.51)

A questo punto possiamo spostare $[{\pmb F}]^a{}_D$ fuori dalla parentesi graffa, ricavando la seguente espressione,

$$[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,en}}]_{A}{}^{B} = [\hat{\psi}_{\mathrm{R}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K})](\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}})_{A}{}^{B}$$

$$-[\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}]_{A}{}^{a}\left\{J_{\mathrm{K}}\left[\frac{\partial\hat{\psi}_{\nu}}{\partial[\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}]^{a}{}_{\beta}}\circ(\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}})\right][\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}}]_{\beta}{}^{B}\right\}.$$
(4.52)

Utilizzando ora la (4.35a), si può dimostrare la validità della relazione,

$$\left[\hat{\boldsymbol{P}}\circ(\boldsymbol{F},\boldsymbol{K})\right]_{a}{}^{B} \equiv \left[\frac{\partial\hat{\psi}_{\mathrm{R}}}{\partial[\boldsymbol{F}]^{a}{}_{B}}\circ(\boldsymbol{F},\boldsymbol{K})\right] = J_{\mathrm{K}}\left[\frac{\partial\hat{\psi}_{\nu}}{\partial[\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}]^{a}{}_{\beta}}\circ(\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}})\right] [\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}}]_{\beta}{}^{B}, \qquad (4.53)$$

che, inserita nella Equazione (4.52), porta all'espressione finale

$$[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,en}}]_{A}{}^{B} = \psi_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}})_{A}{}^{B} - [\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}]_{A}{}^{a}[\boldsymbol{P}]_{a}{}^{B}, \qquad (4.54)$$

che può essere espressa in forma compatta come segue,

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,en}} = \psi_{\mathrm{R}} \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}.$$
(4.55)

Definizione 4.5.1 (Tensore di Eshelby).

Il tensore definito dall'equazione (4.55) prende il nome di tensore di Eshelby e viene generalmente definito come

$$\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{H}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) := [\hat{\psi}_{\mathrm{R}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K})] \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \bigg[\frac{\partial \hat{\psi}_{\mathrm{R}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) \bigg].$$
(4.56)

Tale tensore descrive la parte non dissipativa della forza configurazionale duale alle variazioni di K. In particolare, riprendendo la (4.39), vale la decomposizione

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,d}} + \boldsymbol{H}, \tag{4.57}$$

dove il tensore di Eshelby H rappresenta la parte non dissipativa di $Y_{\rm R}$ e quindi poniamo $Y_{\rm R,en} \equiv H$.

Osservazione (Significato Fisico del Tensore di Eshelby¹).

Il tensore di Eshelby è il tensore degli sforzi duale al cambio di configurazione interno del materiale e rappresenta una forza in senso generalizzato. Per comprendere al meglio il significato fisico di tale tensore è possibile fare la seguente analogia. Considerando il volume specifico $1/\rho$, analogo scalare $\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \in \mathbf{F}$, la relazione (4.56), in questo caso, diventa

$$\hat{\psi}_{\mathrm{R}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{\psi}_{\mathrm{R}}}{\partial (1/\rho)} = \hat{\psi}_{\mathrm{R}} + \frac{1}{\rho} \underbrace{\left(\rho^2 \frac{\partial \hat{\psi}_{\mathrm{R}}}{\partial \rho}\right)}_{=P} = \hat{\psi}_{\mathrm{R}} + \frac{1}{\rho} P = G.$$
(4.58)

dove P è la pressione e G è la energia libera di Gibbs. Da questa analogia si capisce che il tensore di Eshelby è l'equivalente tensoriale dell'energia libera di Gibbs. Inoltre il tensore di Eshelby presenta delle analogie anche con il tensore degli sforzi di Maxwell [Maugin et al., 1992, Maugin, 1993].

¹Si fa riferimento alle lezioni del corso di dottorato *Metodi Variazionali in Biomeccanica*, tenute dal Prof. A. Grillo nell'ambito del Dottorato di Ricerca in "Matematica Pura e Applicata" (Politecnico di Torino e Università degli Studi di Torino)

Osservazione (Generalizzazione del modello [Grillo et al., 2019a]).

In questa osservazione si nota che è possibile generalizzare il modello considerando una *nuova energia* che prevede la presenza di una energia di *auto-interazione* (si veda, ad esempio, [Madeo et al., 2015]), ossia

$$\hat{\mathcal{W}}_{\mathrm{R}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) = \hat{\psi}_{\mathrm{R}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) + \hat{\mathcal{U}} \circ \boldsymbol{K}.$$
(4.59)

In modelli di questo tipo, il tensore di Eshelby si modifica come segue

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\hat{\mathcal{W}}_{\mathrm{R}}}{\partial\boldsymbol{K}}\circ(\boldsymbol{F},\boldsymbol{K})\right) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{st}} + \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\hat{\mathcal{U}}}{\partial\boldsymbol{K}}\circ(\boldsymbol{K})\right) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{eff}}$$
(4.60)

dove \boldsymbol{H}_{st} è il tensore di Eshelby standard definito dalla equazione (4.56), mentre \boldsymbol{H}_{eff} indica il tensore di Eshelby *effettivo*, che tiene conto anche della *auto-interazione*.

4.6 Dissipazione residua e legame costitutivo di $Y_{\rm R,d}$

Come visto nella sezione 4.4, il metodo di Coleman e Noll consente di semplificare la dissipazione (4.34) nell'espressione (4.37). Inoltre nel paragrafo precedente abbiamo introdotto il tensore di Eshelby \boldsymbol{H} , ricavando la decomposizione (4.57). Avendo questo in mente, diremo che, nelle ipotesi modellistiche fatte, il Secondo Principio della Termodinamica è soddisfatto se è soddisfatta la seguente condizione sulla *dissipazione residua* [Mićunović, 2009, Grillo et al., 2016, 2019b]:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = [\hat{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{R},\mathrm{d}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}})] : \boldsymbol{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{K}} \ge 0.$$
(4.61)

Per quanto detto, siamo interessati a trovare un'espressione costitutiva di $Y_{\mathrm{R,d}} \circ (F, K, \dot{K})$, in modo che sia compatibile il Secondo Principio della Termodinamica espresso in forma meccanica dalla condizione (4.61).

Osservazione (Uniformità materiale).

Nel formulare la teoria costitutiva ricorriamo alla prescrizione di Epstein and Maugin [2000], Epstein and Elżanowski [2007], Epstein [2010] della "uniformità materiale" secondo la quale deve essere possibile risolvere le disomogeneità materiali attraverso la dipendenza di $\mathbf{Y}_{\mathrm{R,d}}$ da \mathbf{K} soltanto. In altre parole per le $\mathbf{Y}_{\mathrm{R,d}}$ non c'è una dipendenza diretta dal punto bensì soltanto indiretta, dal momento che le variabili costitutive indipendenti ($\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}}$) sono definite su punti della configurazione di riferimento. Per quanto detto in questa osservazione si è omessa la dipendenza dalla mappa ausiliaria \mathfrak{X} nella Equazione (4.61).

In letteratura è possibile trovare numerosi esempi in cui tale scelta viene compiuta nel tentativo di rendere la forma residua della dissipazione quadratica in Λ , in modo tale da soddisfare automaticamente la (4.61). Osserviamo, tuttavia, che questo metodo è stato superato grazie allo sforzo di diversi autori quale ad esempio la *critica* di Eringen [1980].

Per fare luce su quanto detto, mostriamo un modo di procedere più rigoroso. Supponendo di studiare la forma residua della dissipazione in un intorno dell'equilibrio, è lecito supporre di sviluppare in Λ . Supponendo

$$\mathbf{Y}_{\mathrm{R,d}} = a\mathbf{G}\mathbf{\Lambda}\mathbf{G}^{-1}, \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{R}} = a\mathbf{G}\mathbf{\Lambda}\mathbf{G}^{-1} : \mathbf{\Lambda}\mathbf{G}\mathbf{\Lambda}\mathbf{G}^{-1} \ge 0, \qquad (4.62)$$

dove a > 0.

Un esempio classico tratto dalla termodinamica standard è la legge di Fourier. Infatti in tal caso si ha una dissipazione residua del tipo

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = -\boldsymbol{q} \cdot \nabla T \ge 0, \tag{4.63}$$

dove T è la temperatura assoluta e il flusso di calore \boldsymbol{q} viene posto uguale a $\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{\lambda}\nabla T$, essendo $\boldsymbol{\lambda}$ un tensore del secondo ordine semidefinito positivo che rappresenta la conducibilità termica del materiale. Un altro esempio è la dissipazione nel caso di processi di diffusione con $\mathcal{D}_{\rm R} = -\boldsymbol{j} \cdot \nabla \mu \geq 0$, dove μ è il potenziale chimico per unità di massa di una data sostanza e $\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{M}\nabla \mu$ è il flusso di massa di Fick, in cui \boldsymbol{M} è detto tensore di mobilità. Questa osservazione è stata tratta dalle lezioni del corso di dottorato *Metodi Variazionali in Biomeccanica*.

4.6.1 Dissipazione residua nello stato naturale

In questo paragrafo studiamo la dissipazione residua nello stato naturale. A tal proposito notiamo la possibilità di riferire la condizione (4.61), scritta in termini di grandezze materiali, allo stato naturale. Per fare ciò procediamo ridefinendo la parte dissipativa $Y_{\rm R,d}$ nel seguente modo:

$$\boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}} := \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_{\mathrm{R},\mathrm{d}} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}.$$
(4.64)

Tale quantità rappresenta la parte dissipativa di Y_{ν} , ottenuta effettuando un "pushforward" di $Y_{\rm R,d}$, moltiplicandolo a destra per $K^{\rm T}$, a sinistra per $K^{-\rm T}$ e dividendo per $J_{\rm K}$. In questo modo otteniamo un tensore che trasforma elementi da $\mathcal{N}_X^*(t)$ in se stesso. Inoltre, possiamo individuare una nuova rate unicamente definita nello stato naturale analogamente a quanto visto per Λ , si veda l'Osservazione 4.3. In particolare, definiamo il tasso di distorsioni anelastiche riferito allo stato "naturale", indicato con $L_{\rm K}$, come

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} := \dot{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{K}^{-1}, \tag{4.65}$$

osservando che questa rate rappresenta un tensore che trasforma elementi da $\mathcal{N}_X(t)$ in se stesso. In questo modo possiamo dimostrare la seguente riscrittura della dissipazione residua (4.61):

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,d}} : \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,d}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\dot{\boldsymbol{K}}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,d}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\dot{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K})$$

= $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,d}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\underbrace{\dot{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}^{-1}}_{=\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}}) = \boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,d}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \ge 0,$ (4.66)

dove si è utilizzata la proprietà di invarianza della traccia per permutazioni cicliche. Osservando l'ultimo membro della espressione (4.66) e richiamando la definizione (4.64), arriviamo alla seguente riscrittura della dissipazione residua

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \ge 0. \tag{4.67}$$

In particolare, l'espressione (4.67) ci consente di individuare la dissipazione residua riferita allo stato naturale [Epstein and Maugin, 2000, Lubarda, 2004, Ganghoffer, 2010, Giverso

and Preziosi, 2012, Grillo et al., 2012, Liu et al., 2014], ossia per unità di volume dello stato naturale, come

$$\mathcal{D}_{\nu} := \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \ge 0.$$
(4.68)

Osservazione (Evoluzione di K [Di Carlo and Quiligotti, 2002, Grillo et al., 2019a, 2021]).

Come visto nella sezione 4.2 l'evoluzione della microstruttura del materiale è descritta dalla terza equazione del sistema dinamico (4.13). Notando che $Y_{\rm R} = Y_{\rm R,d} + H$, si può scrivere l'equazione dinamica Y = Z in forma materiale come segue,

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R,d}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}) + \hat{\boldsymbol{H}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) = \boldsymbol{Z}_{\mathrm{R}}, \qquad (4.69)$$

con $Z_{\rm R} := K^{\rm T} Z$. L'equazione appena presentata descrive l'evoluzione della variabile cinematica K e va risolta insieme alle altre equazioni del sistema (4.13).

Notiamo infine che l'equazione (4.69) può essere trasformata in termini di quantità definite sullo stato naturale del materiale, divenendo

$$\boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}) + \hat{\boldsymbol{H}}_{\nu} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) = \boldsymbol{Z}_{\nu}, \qquad (4.70)$$

dove $\hat{\boldsymbol{H}}_{\nu} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) := \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}} [\hat{\boldsymbol{H}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K})] \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{Z}_{\nu} := \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{Z}_{\mathrm{R}} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}.$

4.7 Oggettività

In Meccanica dei Continui, così come in qualsiasi ramo della Fisica, le leggi che di volta in volta vengono studiate sono scritte rispetto ad un osservatore. Ciò riguarda anche le leggi costitutive, che, componendosi con il gradiente di deformazione, F, sono formulate da un dato osservatore. Affinché, però, esse abbiano senso fisico, è necessario che, a seguito di un cambio di osservatore, ciascuna di esse si trasformi coerentemente con la natura stessa della propria definizione. Supponiamo, quindi, di cambiare osservatore. Seguendo Marsden and Hughes [1983], ciò significa sovrapporre al moto χ un moto rigido $\xi(\cdot, t) : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$, dato da $\xi(x,t) = \mathbf{Q}(t)[x-x_0] + x_0$ per ogni tempo t, in cui x_0 è un punto fissato di \mathscr{S} e Q(t) è, per ogni t, un tensore ortogonale di rotazione propria. Pertanto, χ , oltre ad essere regolare per costruzione, risulti anche tale da preservare l'orientazione degli assi del sistema di riferimento associato all'osservatore di partenza. Dalla definizione di $\xi(\cdot,t)$ segue che $\xi(x,t) = \tilde{x} \in \mathscr{S}$ e che la mappa tangente $T\xi(x,t) \equiv Q(t) : T_x \mathscr{S} \to T_{\tilde{x}} \mathscr{S}$ è il tensore di rotazione propria. Da ciò segue anche che il tensore gradiente di deformazione si trasforma come $F(X,t) \mapsto \dot{F}(X,t) = T\xi(\chi(X,t),t)F(X,t) = Q(t)F(X,t)$. Da questa legge di trasformazione discende che, per effetto di un cambio di osservatore, il primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, che alla luce delle ipotesi costitutive effettuate sino adesso può essere scritto come

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\boldsymbol{P}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}), \tag{4.71}$$

si trasforma secondo l'espressione

$$\tilde{\boldsymbol{P}}(X,t) = \boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{g}^{-1}(x)\boldsymbol{P}(X,t)$$
58

$$= \boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{g}^{-1}(x)\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{F}(X,t),\boldsymbol{K}(X,t))$$
$$= \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{F}(X,t),\boldsymbol{K}(X,t)).$$
(4.72)

L'energia libera di Helmholtz, invece, essendo uno pseudo-scalare, si trasforma come

$$\psi_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{F}(X,t),\boldsymbol{K}(X,t)) = |\det \boldsymbol{Q}(t)| \psi_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{F}(X,t),\boldsymbol{K}(X,t))
= \hat{\psi}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{F}(X,t),\boldsymbol{K}(X,t)),$$
(4.73)

perché si ha $|\det Q(t)| = 1$. Per garantire l'oggettività, è necessario che l'espressione costitutiva che definisce l'energia libera di Helmholtz dipenda da F attraverso il tensore di Cauchy C.

Diverso è il discorso per grandezze tensoriali riferite allo stato naturale, poiché esse non possono variare per sovrapposizioni del moto rigido ξ a χ . Infatti, si ha che

$$\hat{\boldsymbol{Y}}_{\nu,\mathrm{d}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}) = \check{\boldsymbol{Y}}_{\nu,\mathrm{d}} \circ (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}).$$

$$(4.74)$$

Si noti che, anche il questo caso, la dipendenza da F passa attraverso la dipendenza da C.

4.8 Indipendenza dal piazzamento di riferimento e covarianza rispetto a rotazioni dello stato naturale

Unitamente all'oggettività materiale, si richiede che le equazioni riferite allo stato naturale siano indipendenti dal piazzamento di riferimento scelto. Seguendo Grillo et al. [2021], che a propria volta rielabora concetti espressi da Epstein and Maugin [2000], al fine di soddisfare tale richiesta è sufficiente esprimere la relazione costitutiva per $\boldsymbol{Y}_{\nu,d}$ come

$$\check{\boldsymbol{Y}}_{\nu,\mathrm{d}} \circ (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}) = \bar{\boldsymbol{Y}}_{\nu,\mathrm{d}} \circ (\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}, \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}).$$
(4.75)

Infine, seguendo Grillo et al. [2021], introduciamo un tensore di rotazione dello stato naturale $\mathcal{N}_X(t)$, ossia $\mathcal{R} : \mathcal{N}_X(t) \to \tilde{\mathcal{N}}_X(t)$, tale che

$$\boldsymbol{K} \to \tilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{\mathcal{R}}\boldsymbol{K},$$
 (4.76)

da cui seguono le leggi di trasformazione

$$\boldsymbol{C}_{e} \to \tilde{\boldsymbol{C}}_{e} = \tilde{\boldsymbol{K}}^{-T} \boldsymbol{C} \tilde{\boldsymbol{K}}^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-T} \boldsymbol{K}^{-T} \boldsymbol{C} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-T} \boldsymbol{C}_{e} \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-1}, \qquad (4.77)$$

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \to \tilde{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{K}}} \tilde{\boldsymbol{K}}^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{R}} \dot{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{R}} \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-1}.$$
 (4.78)

La covarianza richiesta per la grandezza $\bar{Y}_{\nu,d}$, si esprime chiedendo che valga la relazione:

$$\bar{\boldsymbol{Y}}_{\nu,\mathrm{d}} \circ (\tilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{e}}, \tilde{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}) = \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-\mathrm{T}}[\bar{\boldsymbol{Y}}_{\nu,\mathrm{d}} \circ (\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}, \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}})]\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathrm{T}}.$$
(4.79)

4.9 Conclusioni sulle ipotesi costitutive

In questa sezione verranno dedotte le conclusioni che derivano dalle ipotesi costitutive fatte. In particolare, riprendiamo l'espressione della dissipazione residua [Epstein and Maugin, 2000, Lubarda, 2004, Ganghoffer, 2010, Giverso and Preziosi, 2012, Grillo et al., 2012, Liu et al., 2014]:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} = J_{\mathrm{K}} \mathrm{Tr}[\boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}] \ge 0, \qquad (4.80)$$

che può essere anche riespressa come:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = J_{\mathrm{K}}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1}\boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}}:\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}) \ge 0, \qquad (4.81)$$

dove si è utilizzata la simmetria di $C_{\rm e}$. Riprendendo l'equazione dinamica per K riferita allo stato naturale (4.70), ossia

$$\boldsymbol{H}_{\nu} + \boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}} = \boldsymbol{Z}_{\nu},\tag{4.82}$$

notiamo che, se $Z_{\nu} = 0$, allora $Y_{\nu,d} = -H_{\nu}$ Cermelli et al. [2001]. In particolare, segue che se il materiale è isotropo allora H_{ν} è simmetrico [Marsden and Hughes, 1983, Simo and Hughes, 1998, Grillo et al., 2016, 2017]. Tuttavia indipendentemente dal fatto che il materiale sia isotropo o meno, esistono due tensori legati ad H_{ν} che sono sempre simmetrici. Infatti, abbiamo che

$$\boldsymbol{H}_{\nu} = \psi_{\nu} \boldsymbol{I}_{\nu}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{e}} \mathbf{S}_{\nu} \tag{4.83}$$

dove \mathbf{S}_{ν} è un tensore simmetrico, definito da $\mathbf{S}_{\nu} = (\mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{K}^{\mathrm{T}})/J_{\mathrm{K}}$, con \mathbf{S} che è il secondo tensore di Piola-Kirchhoff [Marsden and Hughes, 1983] definito dalla formula,

$$\mathbf{S} = 2\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial \boldsymbol{C}} \circ (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{K})\right). \tag{4.84}$$

Dunque si possono definire i due tensore simmetrici legati a H_{ν} come:

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1}\boldsymbol{H}_{\nu} := \psi_{\nu}\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1} - \mathbf{S}_{\nu} \qquad \boldsymbol{H}_{\nu}\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}} := \psi_{\nu}\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\mathbf{S}_{\nu}\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}. \tag{4.85}$$

La conseguenza di ciò è che anche $C_{e}^{-1}Y_{\nu,d}$ nella (4.81) è simmetrico e quindi possiamo scrivere:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1} \boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}} : \mathrm{sym}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}} \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}) \ge 0.$$
(4.86)

Nelle ipotesi fatte ($\mathbf{Z}_{\nu} = \mathbf{0}$) la dissipazione residua elimina la parte antisimmetrica di $C_{\rm e} \mathbf{L}_{\rm K}$. Questo risultato ci induce a formulare una *espressione costitutivo* del seguente tipo [Licari, 2021]:

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1}\boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}} = \mathbb{T}_{\nu} : \mathrm{sym}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}).$$

$$(4.87)$$

Osservando che $[C_e L_K]_{\alpha\gamma} = [C_e]_{\alpha\beta} [L_K]^{\beta}_{\gamma}$ ha due indici covarianti, deduciamo che il tensore del quarto ordine \mathbb{T}_{ν} deve avere quattro indici controvarianti, ovvero $\{[\mathbb{T}_{\nu}]^{\alpha\beta\gamma\delta}\}$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1,2,3$. Richiamando la *teoria di Walpole* sui tensori del quarto ordine (si veda, ad esempio, [Walpole, 1984]), se il materiale è isotropo, è rappresentabile con solo due gradi di libertà, con la formula

$$\mathbb{T}_{\nu} = a_{\nu} \mathbb{V}_{\nu}^{\sharp} + 2b_{\nu} \mathbb{S}_{\nu}^{\sharp}, \tag{4.88}$$

dove $a_{\nu}, b_{\nu} \geq 0$ sono coefficienti, $\mathbb{V}_{\nu}^{\sharp}$ è un tensore che estrae la parte volumetrica dei tensori, mentre $\mathbb{S}_{\nu}^{\sharp}$ è chiamato *simmetrizzatore* ed estrae la parte simmetrica del tensore. L'espressione di questi tensori è la seguente [Walpole, 1984]

$$\mathbb{V}_{\nu}^{\sharp} = \frac{1}{3} \boldsymbol{C}_{e}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}_{e}^{-1}, \qquad \mathbb{S}_{\nu}^{\sharp} = \frac{1}{2} [\boldsymbol{C}_{e}^{-1} \underline{\otimes} \boldsymbol{C}_{e}^{-1} + \boldsymbol{C}_{e}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{C}_{e}^{-1}].$$
(4.89)

Svolgendo i calcoli si ottiene che

$$C_{e}^{-1}\boldsymbol{Y}_{\nu,d} = a_{\nu} \mathbb{V}_{\nu}^{\sharp} : \operatorname{sym}(\boldsymbol{C}_{e}\boldsymbol{L}_{K}) + 2b_{\nu} \mathbb{S}_{\nu}^{\sharp} : \operatorname{sym}(\boldsymbol{C}_{e}\boldsymbol{L}_{K})$$

$$= \frac{a_{\nu}}{3} \boldsymbol{C}_{e}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}_{e}^{-1} : \operatorname{sym}(\boldsymbol{C}_{e}\boldsymbol{L}_{K})$$

$$+ \frac{2b_{\nu}}{2} [\boldsymbol{C}_{e}^{-1} \underline{\otimes} \boldsymbol{C}_{e}^{-1} + \boldsymbol{C}_{e}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{C}_{e}^{-1}] : \operatorname{sym}(\boldsymbol{C}_{e}\boldsymbol{L}_{K}) = \cdots =$$

$$= \frac{a_{\nu}}{3} \operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1} \operatorname{sym}(\boldsymbol{C}_{e}\boldsymbol{L}_{K})] \boldsymbol{C}_{e}^{-1} + 2b_{\nu} \boldsymbol{C}_{e}^{-1} \operatorname{sym}(\boldsymbol{C}_{e}\boldsymbol{L}_{K}) \boldsymbol{C}_{e}^{-1}. \quad (4.90)$$

Pertanto, inserendo la (4.90) nella dissipazione residua (4.86), si ottiene [Licari, 2021],

$$\mathcal{D}_{\nu} \equiv \frac{\mathcal{D}_{\mathrm{R}}}{J_{\mathrm{K}}} = \frac{a_{\nu}}{3} \mathrm{Tr}[\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1} \mathrm{sym}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}})]\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1} : \mathrm{sym}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}) + 2b_{\nu}\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1} \mathrm{sym}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}})\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1} : \mathrm{sym}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}) = \frac{a_{\nu}}{3} \{ \mathrm{Tr}[\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1} \mathrm{sym}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}})] \}^{2} + 2b_{\nu}\mathrm{Tr}[\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1} \mathrm{sym}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}})\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1} \mathrm{sym}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}})] \ge 0.$$
(4.91)

Per semplicità notazionale introduciamo la nuova variabile

$$\mathbf{A} := \operatorname{sym}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}), \tag{4.92}$$

e scomponiamo \mathbf{A} nella sua parte sferica e deviatorica

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\boldsymbol{C}_{e}^{-1} \mathbf{A}) \boldsymbol{C}_{e} + \tilde{\mathbf{A}}$$
(4.93)

moltiplicando a sinistra per $C_{\rm e}^{-1}$,

$$\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\mathbf{A})\boldsymbol{I}_{\nu} + \boldsymbol{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}$$
(4.94)

ed eseguendo la traccia si trova

$$\operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\mathbf{A}] = \frac{1}{3}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\mathbf{A})3 + \operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}].$$
(4.95)

Semplificando ricaviamo la relazione

$$\operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}] = 0. \tag{4.96}$$

È possibile dunque riscrivere la dissipazione residua (4.91), come segue

$$\mathcal{D}_{\nu} = \frac{a_{\nu}}{3} \{ \operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1}\mathbf{A}] \}^{2} + 2b_{\nu} \operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1}\mathbf{A}] \ge 0$$
(4.97)

e scomponendo ${\bf A}$ nel secondo addendo della disequazione si ha

$$\mathcal{D}_{\nu} = \frac{a_{\nu}}{3} \{ \operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\mathbf{A}] \}^{2} + 2b_{\nu} \operatorname{Tr} \left\{ \boldsymbol{C}_{e}^{-1} \left[\frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\mathbf{A}) \boldsymbol{C}_{e} + \tilde{\mathbf{A}} \right] \boldsymbol{C}_{e}^{-1} \left[\frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\mathbf{A}) \boldsymbol{C}_{e} + \tilde{\mathbf{A}} \right] \right\} \ge 0, \quad (4.98)$$

che diventa

$$\mathcal{D}_{\nu} = \frac{a_{\nu}}{3} \{ \operatorname{Tr}[\mathbf{C}_{e}^{-1}\mathbf{A}] \}^{2} + 2b_{\nu}\operatorname{Tr}\left\{ \left[\frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\mathbf{C}_{e}^{-1}\mathbf{A}) \mathbf{I}_{\nu} + \mathbf{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}} \right] \left[\frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\mathbf{C}_{e}^{-1}\mathbf{A}) \mathbf{I}_{\nu} + \mathbf{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}} \right] \right\} \\ = \frac{a_{\nu}}{3} \{ \operatorname{Tr}[\mathbf{C}_{e}^{-1}\mathbf{A}] \}^{2} + 2b_{\nu}\operatorname{Tr}\left\{ \frac{1}{9} [\operatorname{Tr}(\mathbf{C}_{e}^{-1}\mathbf{A})]^{2}\mathbf{I}_{\nu} + \frac{2}{3} \operatorname{Tr}(\mathbf{C}_{e}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}} \right\} \\ = \frac{a_{\nu}}{3} \{ \operatorname{Tr}[\mathbf{C}_{e}^{-1}\mathbf{A}] \}^{2} + 2b_{\nu}\left\{ \frac{1}{9} [\operatorname{Tr}(\mathbf{C}_{e}^{-1}\mathbf{A})]^{2} + 0 + \operatorname{Tr}[\mathbf{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}] \right\} \\ = \frac{a_{\nu} + 2b_{\nu}}{3} \{ \operatorname{Tr}[\mathbf{C}_{e}^{-1}\mathbf{A}] \}^{2} + 2b_{\nu}\operatorname{Tr}[\mathbf{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}] \ge 0.$$
(4.99)

Dunque la forma finale della dissipazione residua è costituita dalla somma di due termini,

$$\mathcal{D}_{\nu} = \frac{a_{\nu} + 2b_{\nu}}{3} \{ \operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\mathbf{A}] \}^{2} + 2b_{\nu} \operatorname{Tr}\left[\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right] \ge 0, \qquad (4.100)$$

dove $\{\text{Tr}[\mathbf{C}_{e}^{-1}\mathbf{A}]\}^{2} \geq 0$ e lo zero della disuguaglianza è raggiunto eventualmente in situazioni stazionarie dove $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Nei fenomeni di crescita ciò può verificarsi quando il tessuto è in assenza di nutrimento, si veda il bilancio di massa (4.8). Per quanto riguarda il secondo termine contenuto in (4.100), notiamo che possiamo riscriverlo come

$$\operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}] = \tilde{\mathbf{A}}^{\sharp} : \tilde{\mathbf{A}} \ge 0, \qquad (4.101)$$

dove $\tilde{\mathbf{A}}^{\sharp}$ è ottenuto dualizzando $\tilde{\mathbf{A}}$ rispetto alla metrica indotta da $C_{\rm e}$. La positività dipende dal fatto che la nuova espressione ha una struttura si prodotto scalare e dunque esso rappresenta una norma nella metrica indotta.

Riprendendo la (4.100), notiamo che la richiesta di positività si riduce nella condizione sufficiente,

$$a_{\nu} + 2b_{\nu} \ge 0, \qquad b_{\nu} \ge 0.$$
 (4.102)

Tali coefficienti rappresentano una sorta di viscosità e possono eventualmente annullarsi in casi particolari, come quello di rottura. Questi risultati sono ripresi dalle lezioni del corso di dottorato *Metodi Variazionali in Biomeccanica*, tenute dal Prof. A. Grillo nell'ambito del Dottorato di Ricerca in "Matematica Pura e Applicata" (Politecnico di Torino e Università degli Studi di Torino).

4.9.1 Generalizzazione del modello al caso $Z_{\nu} \neq 0$

Nel caso in cui $\mathbf{Z}_{\nu} \neq \mathbf{0}$, allora non vale la relazione $\mathbf{Y}_{\nu,d} = -\mathbf{H}_{\nu}$ e pertanto non valgono gli argomenti che hanno portato alla (4.86), dato che $\mathbf{Y}_{\nu,d}$ non è simmetrico in generale. Riprendendo la (4.81),

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1} \boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}} : \boldsymbol{C}_{\mathrm{e}} \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \ge 0, \qquad (4.103)$$

avendo in mente l'espressione costitutiva (4.87), ne formuliamo una nuova del tipo,

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1}\boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}} = \mathbb{T}_{\nu}: \boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}},\tag{4.104}$$

dove questa volta il tensore \mathbb{T}_{ν} è definito come

$$\mathbb{T}_{\nu} = a_{\nu} \mathbb{V}_{\nu}^{\sharp} + 2b_{\nu} \mathbb{S}_{\nu}^{\sharp} + 2c_{\nu} \mathbb{A}_{\nu}^{\sharp}.$$

$$(4.105)$$

In questo caso i termini $\mathbb{V}_{\nu}^{\sharp}, \mathbb{S}_{\nu}^{\sharp}$ sono definiti come nella (4.89), mentre $\mathbb{A}_{\nu}^{\sharp}$ rappresenta l'antisimmetrizzatore [Walpole, 1984, Licari, 2021], ed è espresso dalla relazione:

$$\mathbb{A}_{\nu}^{\sharp} = \frac{1}{2} [\boldsymbol{C}_{e}^{-1} \underline{\otimes} \boldsymbol{C}_{e}^{-1} - \boldsymbol{C}_{e}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{C}_{e}^{-1}].$$
(4.106)

Per ragioni di semplicità si introduce la variabile $L^* = C_e L_K$ e si esplicita la (4.104),

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1}\boldsymbol{Y}_{\nu,\mathrm{d}} = (a_{\nu}\mathbb{V}\nu^{\sharp} + 2b_{\nu}\mathbb{S}_{\nu}^{\sharp} + 2c_{\nu}\mathbb{A}_{\nu}^{\sharp}): \boldsymbol{L}^{*}.$$
(4.107)

Svolgendo i calcoli si ricava

$$C_{e}^{-1}\boldsymbol{Y}_{\nu,d} = a_{\nu}\mathbb{V}_{\nu}^{\sharp}: \boldsymbol{L}^{*} + 2b_{\nu}\mathbb{S}_{\nu}^{\sharp}: \boldsymbol{L}^{*}$$

$$= \frac{a_{\nu}}{3}C_{e}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}_{e}^{-1}: \boldsymbol{L}^{*}$$

$$+ \frac{2b_{\nu}}{2}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}_{e}^{-1} + \boldsymbol{C}_{e}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{C}_{e}^{-1}]: \boldsymbol{L}^{*}$$

$$+ \frac{2c_{\nu}}{2}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}_{e}^{-1} - \boldsymbol{C}_{e}^{-1} \overline{\otimes} \boldsymbol{C}_{e}^{-1}]: \boldsymbol{L}^{*} = \cdots =$$

$$= \frac{a_{\nu}}{3}\mathrm{Tr}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\boldsymbol{L}^{*}]\boldsymbol{C}_{e}^{-1}$$

$$+ 2b_{\nu}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\mathrm{sym}\{\boldsymbol{L}^{*}\}\boldsymbol{C}_{e}^{-1} + 2b_{\nu}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\mathrm{skew}\{\boldsymbol{L}^{*}\}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}. \qquad (4.108)$$

Ora inserendo la (4.108) nella dissipazione residua (4.103) si ottiene:

$$\mathcal{D}_{\nu} \equiv \frac{\mathcal{D}_{\mathrm{R}}}{J_{\mathrm{K}}} = \frac{a_{\nu}}{3} \mathrm{Tr}[\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1}\boldsymbol{L}^{*}]\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{-1} : \boldsymbol{L}^{*}$$

$$+2b_{\nu}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\operatorname{sym}(\boldsymbol{L}^{*})\boldsymbol{C}_{e}^{-1}:\boldsymbol{L}^{*}+2c_{\nu}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\operatorname{skew}(\boldsymbol{L}^{*})\boldsymbol{C}_{e}^{-1}:\boldsymbol{L}^{*}$$
$$=\frac{a_{\nu}}{3}\{\operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\boldsymbol{L}^{*}]\}^{2}$$
$$+2b_{\nu}\operatorname{sym}(\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\boldsymbol{L}^{*}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}):\boldsymbol{L}^{*}+2c_{\nu}\operatorname{skew}(\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\boldsymbol{L}^{*}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}):\boldsymbol{L}^{*}\geq0.$$
(4.109)

dove nell'ultima riga si è utilizzata la proprietà

$$C_{\rm e}^{-1} \text{skew}(\boldsymbol{L}^*) C_{\rm e}^{-1} = C_{\rm e}^{-1} \left(\frac{\boldsymbol{L}^* - [\boldsymbol{L}^*]^{\rm T}}{2} \right) C_{\rm e}^{-1}$$
$$= \left(\frac{C_{\rm e}^{-1} \boldsymbol{L}^* C_{\rm e}^{-1} - [C_{\rm e}^{-1} \boldsymbol{L}^* C_{\rm e}^{-1}]^{\rm T}}{2} \right) = \text{skew}(C_{\rm e}^{-1} \boldsymbol{L}^* C_{\rm e}^{-1}).$$
(4.110)

Riprendendo l'espressione (4.109), notiamo che nel secondo e nel terzo termine, possiamo filtrare L^* dalla sua parte antisimmetrica per il primo, e dalla parte simmetrica nel secondo. In questo modo si ricava

$$\mathcal{D}_{\nu} = \frac{a_{\nu}}{3} \{ \operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\boldsymbol{L}^{*}] \}^{2} + 2b_{\nu}\operatorname{sym}(\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\boldsymbol{L}^{*}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}) : \operatorname{sym}(\boldsymbol{L}^{*}) + 2c_{\nu}\operatorname{skew}(\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\boldsymbol{L}^{*}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}) : \operatorname{skew}(\boldsymbol{L}^{*}) = \frac{a_{\nu}}{3} \{ \operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\boldsymbol{L}^{*}] \}^{2} + 2b_{\nu}\operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\operatorname{sym}(\boldsymbol{L}^{*})\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\operatorname{sym}(\boldsymbol{L}^{*})] + 2c_{\nu}\operatorname{Tr}\{\boldsymbol{C}_{e}^{-1}[\operatorname{skew}(\boldsymbol{L}^{*})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\operatorname{skew}(\boldsymbol{L}^{*}) \} \ge 0.$$
(4.111)

Per le considerazioni che hanno portato alla espressione (4.101), notiamo che

$$\operatorname{Tr}[\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\operatorname{sym}(\boldsymbol{L}^{*})\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\operatorname{sym}(\boldsymbol{L}^{*})] = [\operatorname{sym}(\boldsymbol{L}^{*})]^{\sharp} : \operatorname{sym}(\boldsymbol{L}^{*}) \ge 0, \qquad (4.112a)$$

$$\operatorname{Tr}\{\boldsymbol{C}_{e}^{-1}[\operatorname{skew}(\boldsymbol{L}^{*})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{e}^{-1}\operatorname{skew}(\boldsymbol{L}^{*})\} = [\operatorname{skew}(\boldsymbol{L}^{*})]^{\sharp} : \operatorname{skew}(\boldsymbol{L}^{*}) \ge 0.$$
(4.112b)

Pertanto concludiamo che, sotto le ipotesi fatte, la (4.81) è soddisfatta se i coefficienti soddisfano le seguenti relazioni

$$a_{\nu} + 2b_{\nu} \ge 0,$$
 $b_{\nu} \ge 0,$ $c_{\nu} \ge 0.$ (4.113)

Questi risultati sono ripresi dalle lezioni del corso di dottorato *Metodi Variazionali in Biomeccanica*, tenute dal Prof. A. Grillo nell'ambito del Dottorato di Ricerca in "Matematica Pura e Applicata" (Politecnico di Torino e Università degli Studi di Torino).

Capitolo 5

Il fenomeno di crescita e di rimodellamento descritti da un modello di primo gradiente

Il materiale di questo capitolo è una rielaborazione degli articolo di Cermelli and Gurtin [2001], Gurtin and Anand [2005a], Del Piero [2009] al fine di estendere la trattazione per includere il fenomeno della crescita, che non è stato considerato nei lavori precedentemente citati.

In questo capitolo viene trattato il modello di crescita con una teoria di primo gradiente anche per la variabile microstrutturale K. Per fare ciò ripercorreremo la trattazione svolta nel capitolo precedente, apportando e sottolineando le dovute modifiche, seguendo lo schema logico già adottato: saranno presentate la nuova versione del principio delle potenze virtuali e la discussione sugli assiomi costitutivi, tra cui in particolare il Secondo Principio della Termodinamica. Come accennato all'inizio del Capitolo 3, una teoria di primo gradiente per K permette di risolvere e includere nella dinamica effetti di bordo legati alla microstruttura. Questo consentirà di individuare condizioni al contorno anche per le variabili microstrutturali.

Le forze generalizzate sono individuabili a partire dalla relazione di dualità con gli enti cinematici che descrivono il sistema fisico. Come fatto nel capitolo precedente, si vedano le Equazioni (4.9a), (4.9b), elenchiamo le forze generalizzate esplicitando la relazione di dualità:

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \div \delta \chi, \qquad \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \div \delta \chi, \qquad \boldsymbol{P} \div \mathrm{Grad} \delta \chi, \tag{5.1a}$$

$$\boldsymbol{Y} \div \delta \boldsymbol{K}, \qquad \boldsymbol{Z} \div \delta \boldsymbol{K}, \qquad \boldsymbol{T} \div \delta \boldsymbol{K}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{Y}} \div \operatorname{Grad} \delta \boldsymbol{K}.$$
 (5.1b)

Nella (5.1a) figurano le forze duali allo spostamento virtuale $\delta \chi$, tra cui è presente la forze esterna $\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})}$ (la forza interna è nulla in virtù del teorema di Germain e non viene considerata a questo punto della trattazione), e la forze di superficie agente sul bordo di Neumann $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}}$; poi c'è la forza interna duale alla variazione virtuale Grad $\delta \chi$, che corrisponde al primo tensore di Piola-Kirchhoff \boldsymbol{P} . Nella (5.1b) sono presenti le forze generalizzate duali

alle variazioni della microstruttura, descritte dalla variazione $\delta \mathbf{K}$, tra cui elenchiamo la forza interna \mathbf{Y} , la forza esterna \mathbf{Z} , la forza di superficie \mathbf{T} agente sul bordo di Neumann, eventualmente diverso da quello su cui agisce $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}}$; inoltre introduciamo la forza interna generalizzata, legata alla variazione $\mathrm{Grad}\delta \mathbf{K}$, indicata con il simbolo $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$, rappresentabile per componenti nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}} = [\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB}\boldsymbol{\epsilon}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{E}_{A} \otimes \boldsymbol{E}_{B}.$$
(5.2)

5.1 Il Principio dei Lavori Virtuali: teoria di primo gradiente

Nel seguito di questo paragrafo viene discusso il principio delle potenze virtuali, punto di partenza per la descrizione di fenomeni di crescita dei tessuti biologici. Pertanto viene investigato un modello che si basa sulla teoria di primo gradiente sia per il moto $(\delta\chi, \text{Grad}\delta\chi)$ che per le variazioni della microstruttura $(\delta \mathbf{K}, \text{Grad}\delta \mathbf{K})$, consentendo di risolvere interazioni che il modello proposto precedentemente non era in grado di "vedere", come ad esempio le interazioni di bordo generalizzate legate alla microstruttura [Di Carlo and Quiligotti, 2002, Del Piero, 2009, Gurtin et al., 2010, Grillo et al., 2015, 2017, 2019a, Penta et al., 2020, Grillo et al., 2021]. Con l'obiettivo di applicare il principio dei lavori virtuali, diamo l'espressione del lavoro virtuale interno $\mathcal{W}_{v}^{(int)}$ [Gurtin and Anand, 2005a, Del Piero, 2009],

$$\mathcal{W}_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{int})}(\delta\chi,\delta\boldsymbol{K}) = \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{P} : \mathrm{Grad}\delta\chi \mathrm{dV} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Y} : \delta\boldsymbol{K} \mathrm{dV} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} : \mathrm{Grad}\delta\boldsymbol{K} \mathrm{dV}.$$
(5.3)

A seguire diamo l'equazione che definisce il lavoro virtuale esterno $\mathcal{W}_{v}^{(ext)}$,

$$\mathcal{W}_{v}^{(ext)}(\delta\chi,\delta\boldsymbol{K}) = \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{f}_{R}^{(ext)} \delta\chi dV + \int_{\Gamma_{1}} \boldsymbol{\tau}_{R} \delta\chi da_{R} + \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{Z} : \delta\boldsymbol{K} dV + \int_{\Gamma_{2}} \boldsymbol{T} : \delta\boldsymbol{K} da_{R},$$
(5.4)

dove Γ_1 e Γ_2 corrispondono rispettivamente al bordo di Neumann relativo alla forza $\boldsymbol{\tau}_R$ e a quello associato alla forza \boldsymbol{T} .

Invocando il Principio dei Lavori Virtuali, richiediamo che l'equazione

$$\mathcal{W}_{v}^{(\text{int})}(\delta\chi,\delta\boldsymbol{K}) = \mathcal{W}_{v}^{(\text{ext})}(\delta\chi,\delta\boldsymbol{K})$$
(5.5)

sia valida per ogni spostamento virtuale ($\delta \chi, \delta \mathbf{K}$) compatibile con eventuali vincoli. Esplicitando la (5.5) con i lavori virtuali (5.3) e (5.4) si ottiene l'espressione

$$\int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{P} : \operatorname{Grad} \delta \chi \mathrm{dV} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Y} : \delta \boldsymbol{K} \mathrm{dV} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{\mathcal{Y}} : \operatorname{Grad} \delta \boldsymbol{K} \mathrm{dV}$$
$$= \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \delta \chi \mathrm{dV} + \int_{\Gamma_{1}} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \delta \chi \mathrm{da}_{\mathrm{R}} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Z} : \delta \boldsymbol{K} \mathrm{dV} + \int_{\Gamma_{2}} \boldsymbol{T} : \delta \boldsymbol{K} \mathrm{da}_{\mathrm{R}}.$$
(5.6)

Osservando il primo membro (lavoro virtuale interno) notiamo la presenza di due termini che, grazie al teorema di *Gauss-Green*, possono essere manipolati ed espressi nel seguente modo:

$$\int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{P} : \mathrm{Grad}\delta\chi \mathrm{dV} = \int_{\partial\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{PN}) \delta\chi \mathrm{da}_{\mathrm{R}} - \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \mathrm{Div}\boldsymbol{P} : \delta\chi \mathrm{dV}, \qquad (5.7a)$$

$$\int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \mathcal{\mathcal{Y}}: \operatorname{Grad} \delta \mathbf{K} \mathrm{dV} = \int_{\partial \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} (\mathcal{\mathcal{Y}} \mathbf{N}) : \delta \mathbf{K} \mathrm{da}_{\mathrm{R}} - \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \operatorname{Div} \mathcal{\mathcal{Y}} : \delta \chi \mathrm{dV}.$$
(5.7b)

Inserendo queste relazioni nel Principio dei Lavori Virtuali si ottiene:

$$\int_{\partial \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}) \delta \chi \mathrm{da}_{\mathrm{R}} - \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \mathrm{Div}\boldsymbol{P} : \delta \chi \mathrm{dV} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Y} : \delta \boldsymbol{K} \mathrm{dV} \\
+ \int_{\partial \mathscr{B}_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{\mathcal{Y}}\boldsymbol{N}) : \delta \boldsymbol{K} \mathrm{da}_{\mathrm{R}} - \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \mathrm{Div}\boldsymbol{\mathcal{Y}} : \delta \chi \mathrm{dV} \\
= \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \delta \chi \mathrm{dV} + \int_{\Gamma_{1}} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \delta \chi da_{\mathrm{R}} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Z} : \delta \boldsymbol{K} \mathrm{dV} + \int_{\Gamma_{2}} \boldsymbol{T} : \delta \boldsymbol{K} da_{\mathrm{R}}. \quad (5.8)$$

Dato che gli spostamenti virtuali $\delta \chi$ e δK sono nulli sul rispettivi bordo di Dirichlet, è lecito cambiare l'insieme di integrazione dei termini di bordo, passando opportunamente da $\partial \mathscr{B}_{R}$ a Γ_{1} e Γ_{2} . Effettuando tale operazione e raggruppando i vari termini si ottiene:

$$\int_{\Gamma_{1}} [(\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}) - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}}] \delta \chi \mathrm{da}_{\mathrm{R}} + \int_{\Gamma_{2}} [(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\boldsymbol{N}) - \boldsymbol{T}] : \delta \boldsymbol{K} \mathrm{da}_{\mathrm{R}}$$
$$= \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} [\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} + \mathrm{Div}\boldsymbol{P}] \delta \chi \mathrm{dV} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} [\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Y} + \mathrm{Div}\boldsymbol{\mathcal{Y}}] : \delta \boldsymbol{K} \mathrm{dV}.$$
(5.9)

Le equazioni dinamiche in forma forte possono essere individuate annullando indipendentemente i coefficienti delle variazioni virtuali, in virtù della loro arbitrarietà. In particolare si ricava il seguente sistema di equazioni dinamiche:

$$\begin{cases} \operatorname{Div} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\operatorname{ext})} = \boldsymbol{0} & \operatorname{in} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}, \\ \boldsymbol{P} \boldsymbol{N} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} & \operatorname{su} \Gamma_{1}, \\ \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Y} + \operatorname{Div} \boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{0} & \operatorname{in} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}, \\ \boldsymbol{\mathcal{Y}} \boldsymbol{N} = \boldsymbol{T} & \operatorname{su} \Gamma_{2}. \end{cases}$$
(5.10)

5.2 Dissipazione dell'energia

In questa sezione approcciamo la trattazione legata alla ipotesi costitutiva del Secondo Principio della Termodinamica e, in particolare, i risultati presentati sono una rielaborazione dei lavori di Gurtin et al. [2010], Gurtin and Anand [2005a], Del Piero [2009]. Per questa ragione proponiamo la versione meccanica della disuguaglianza di Clausius-Duhem con le modifiche introdotte. Procediamo come visto nella Sezione 4.3 scegliendo arbitrariamente una parte del corpo $\mathscr{P}_{R} \subset \mathscr{B}_{R}$, fissa nel tempo, e definiamo

$$\int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \mathcal{D}_{\mathrm{R}} \mathrm{d} \mathrm{V} \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \psi_{\mathrm{R}} \mathrm{d} \mathrm{V} + \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{V} \mathrm{d} \mathrm{V} + \int_{\Gamma_{1}} (\boldsymbol{P} \boldsymbol{N}) \boldsymbol{V} \mathrm{d} \mathrm{a}_{\mathrm{R}} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \dot{\boldsymbol{K}} \mathrm{d} \mathrm{V} + \int_{\Gamma_{2}} (\boldsymbol{\mathcal{Y}} \boldsymbol{N}) : \dot{\boldsymbol{K}} \mathrm{d} \mathrm{a}_{\mathrm{R}} \geq 0.$$
(5.11)

Dalla richiesta di non-negatività (4.14), si ricava

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \psi_{\mathrm{R}} \mathrm{d}\mathrm{V} \leq \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{V} \mathrm{d}\mathrm{V} + \int_{\Gamma_{1}} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}) \boldsymbol{V} \mathrm{d}\mathrm{a}_{\mathrm{R}} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Z} : \dot{\boldsymbol{K}} \mathrm{d}\mathrm{V} + \int_{\Gamma_{2}} (\boldsymbol{\mathcal{Y}}\boldsymbol{N}) : \dot{\boldsymbol{K}} \mathrm{d}\mathrm{a}_{\mathrm{R}}.$$
(5.12)

Ora dato che \mathscr{P}_{R} è fissa nel tempo, è possibile scambiare la derivata temporale con il segno di integrale ottenendo la seguente espressione:

$$\int_{\mathscr{P}_{\mathrm{R}}} \dot{\psi}_{\mathrm{R}} \mathrm{dV} \leq \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{V} \mathrm{dV} + \int_{\Gamma_{1}} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}) \boldsymbol{V} \mathrm{da}_{\mathrm{R}} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{Z} : \dot{\boldsymbol{K}} \mathrm{dV} + \int_{\Gamma_{2}} (\boldsymbol{\mathcal{Y}}\boldsymbol{N}) : \dot{\boldsymbol{K}} \mathrm{da}_{\mathrm{R}}.$$
(5.13)

Il secondo membro può essere manipolato utilizzando il teorema di Gauss-Green ottenendo

$$\int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{f}_{R}^{(\text{ext})} \boldsymbol{V} dV + \int_{\mathscr{B}_{R}} \text{Div}(\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{V}) dV + \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{Z} : \dot{\boldsymbol{K}} dV + \int_{\mathscr{B}_{R}} \text{Div}(\dot{\boldsymbol{K}} : \boldsymbol{\mathcal{Y}}) dV \\
= \int_{\mathscr{B}_{R}} [\underbrace{\boldsymbol{f}_{R}^{(\text{ext})} + \text{Div}\boldsymbol{P}}_{=\boldsymbol{0}}] \boldsymbol{V} dV + \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{P}: \text{Grad} \boldsymbol{V} dV + \int_{\mathscr{B}_{R}} [\underbrace{\boldsymbol{Z} + \text{Div}\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{=\boldsymbol{Y}}]: \dot{\boldsymbol{K}} dV + \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}: \text{Grad} \dot{\boldsymbol{K}} dV \\
= \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{P}: \text{Grad} \boldsymbol{V} dV + \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{Y}: \dot{\boldsymbol{K}} dV + \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}: \text{Grad} \dot{\boldsymbol{K}} dV, \quad (5.14)$$

dove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta utilizzando la prima e la terza equazione del sistema dinamico (5.10). Riprendendo l'equazione (5.13) con le opportune modifiche, ricaviamo la disuguaglianza della dissipazione nella forma locale:

$$\dot{\psi}_{\mathrm{R}} \leq \boldsymbol{P} : \mathrm{Grad}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{Y} : \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\mathcal{Y}} : \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}.$$
 (5.15)

Per procedere nella trattazione è opportuno stabilire le ipotesi costitutive del modello sulla energia libera di Helmholtz $\psi_{\rm R}$. Notiamo che è possibile (talvolta preferibile) effettuare la scelta costitutiva sulla densità di energia libera di Helmholtz riferita alla configurazione rilassata, ψ_{ν} , ovvero espressa per unità di misura dello stato naturale del materiale. In questo modo la dipendenza costitutiva è riferita alle proprietà del materiale nella configurazione stress-free. Richiamando la definizione di ψ_{ν} , (4.24), procediamo con la dichiarazione delle variabili costitutive indipendenti, ricadendo così nell'ambiente costitutivo della trattazione di Gurtin and Anand [2005a]:

$$\mathcal{V}_{ci} := (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \text{Grad}\boldsymbol{K}). \tag{5.16}$$

Osservazione (Grado della teoria e scelta delle variabili costitutive).

È interessante osservare come nelle teorie di grado 1 il termine $\operatorname{Grad} K$ deve comparire nelle lista delle variabili costitutive indipendenti. Questa caratteristica si evince anche nel Principio dei Lavori Virtuali con la presenza del prodotto di dualità tra \mathcal{Y} e $\operatorname{Grad} \delta K$, mostrando uno stretto legame con il grado della teoria scelto.

Osservazione (Effetti dissipativi della microstruttura).

Per tenere conto degli effetti dissipativi prodotti dalla dinamica della microstruttura è opportuno includere le derivate temporali delle variabili costitutive indipendenti. Come visto, tali effetti dissipativi si manifestano anche nella teoria di grado 0 per la variabile microstrutturale e sono strettamente collegati con la scelta di introdurre nella lista (4.25) la variabile $\dot{\mathbf{K}}$. Nelle teorie di grado 1 è possibile tenere conto di ulteriori fenomeni dissipativi, verificatosi ad una scala inferiore, i quali compaiono nel momento in cui includiamo Grad $\dot{\mathbf{K}}$ nella lista delle variabili costitutive indipendenti. L'analisi di questi effetti dissipativi verrà discussa solo successivamente in una sezione a parte, rimanendo fedeli all'approccio di questo elaborato e procedendo per passi intermedi. Per il momento escludiamo la variabile costitutiva Grad $\dot{\mathbf{K}}$ dalla lista (5.16).

Le variabili costitutive dipendenti in questo caso diventano:

$$\mathcal{V}_{cd} := (\psi_{R}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}). \tag{5.17}$$

Invocando l'assioma di equi-presenza, tutte le variabili costitutive dipendenti devono dipendere a priori dalla stessa lista di variabili costitutive indipendenti. Dunque si ha:

$$\psi_{\mathrm{R}} \equiv \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}), \qquad (5.18a)$$

$$\boldsymbol{P} \equiv \mathcal{F}^{\boldsymbol{P}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \text{Grad}\boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}), \qquad (5.18b)$$

$$\boldsymbol{Y} \equiv \mathcal{F}^{\boldsymbol{Y}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \text{Grad}\boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}), \qquad (5.18c)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}} \equiv \mathcal{F}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}), \qquad (5.18d)$$

in cui $\mathfrak X$ è la mappa ausiliaria e $\mathcal T$ è la mappa di tempo universale, introdotta nella Definizione 2.2.3.

Avendo in mente la dissipazione di energia (5.15), scriviamo

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = -\dot{\psi}_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{P} : \mathrm{Grad}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{Y} : \dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\mathcal{Y}} : \mathrm{Grad}\dot{\boldsymbol{K}} \ge 0.$$
(5.19)

Alla luce della relazione costitutiva (5.18a), possiamo esplicitare la derivata temporale della energia libera

$$\dot{\psi}_{\mathrm{R}} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \sharp\right) : \dot{\boldsymbol{F}} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \sharp\right) : \dot{\boldsymbol{K}} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \sharp\right) : \ddot{\boldsymbol{K}} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \sharp\right) : \operatorname{Grad} \dot{\boldsymbol{K}} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathfrak{X}} \circ \sharp\right) \underbrace{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}}_{=0} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathcal{T}} \circ \sharp\right) \underbrace{\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t}}_{=1}, \quad (5.20)$$

dove il simbolo # indica la lista delle dipendenze

$$\sharp = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}).$$

Inserendo la Equazione (5.20) nella (5.15), si ricava:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \sharp\right) : \dot{\boldsymbol{F}} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \sharp\right) : \dot{\boldsymbol{K}} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \sharp\right) : \ddot{\boldsymbol{K}} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \sharp\right) : \mathrm{Grad}\dot{\boldsymbol{K}} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathcal{T}} \circ \sharp\right) + \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{Y} : \dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\mathcal{Y}} : \mathrm{Grad}\dot{\boldsymbol{K}}.$$
(5.21)

Raggruppando i termini simili della dissipazione (5.21) ed esplicitando le dipendenze funzionali delle variabili dipendenti $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ si ricava la seguente espressione

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ \mathcal{F}^{\boldsymbol{P}} \circ \sharp - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \sharp \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{F}} + \left\{ \mathcal{F}^{\boldsymbol{Y}} \circ \sharp - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \sharp \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{K}} + \left\{ \mathcal{F}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ \sharp - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \sharp \right) \right\} : \mathrm{Grad} \, \dot{\boldsymbol{K}} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \sharp \right) : \ddot{\boldsymbol{K}} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathcal{T}} \circ \sharp \right).$$
(5.22)

La scelta modellistica di considerare fenomeni di crescita e rimodellamento piuttosto che quelli di deterioramento (si veda la Osservazione 4.3) permette di eliminare la variabile \mathcal{T} dalla lista delle variabili costitutive indipendenti. Questo ci consente di scrivere le seguenti relazioni:

$$\psi_{\mathbf{R}} = \mathcal{F}^{\psi_{\mathbf{R}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}) = \mathcal{G}^{\psi_{\mathbf{R}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}),$$
(5.23a)

$$\boldsymbol{P} = \mathcal{F}^{\boldsymbol{P}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}) = \mathcal{G}^{\boldsymbol{P}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}),$$
(5.23b)

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{F}^{\boldsymbol{Y}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}) = \mathcal{G}^{\boldsymbol{Y}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}),$$
(5.23c)

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}} = \mathcal{F}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}) = \mathcal{G}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}, \mathfrak{X}).$$
(5.23d)

Tale lista verrà indicata con il simbolo $\boldsymbol{\natural} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \text{Grad}\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\mathfrak{X}})$. In virtù di tale ipotesi modellistica è possibile modificare la dissipazione residua, imponendo la relazione,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathcal{T}} \circ \sharp\right) = 0.$$
(5.24)

In particolare avendo in mente le relazioni (5.23a),(5.23b),(5.23c),(5.23d), si può scrivere

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{\mathcal{P}}} \circ \sharp - \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \sharp \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{F}} + \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{Y}} \circ \sharp - \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \sharp \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{K}} \\ + \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ \sharp - \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \sharp \right) \right\} : \mathrm{Grad} \dot{\boldsymbol{K}} - \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \sharp \right) : \ddot{\boldsymbol{K}} \ge 0.$$
(5.25)

5.3 Metodo di Coleman e Noll rivisitato

In questa sezione il metodo di Coleman e Noll individua le seguenti variabili che non sono state dichiarate né come variabili costitutive indipendenti, né come variabili costitutive dipendenti, che, nel nostro caso, sono date da \dot{F}, \ddot{K} e Grad \dot{K} , ed elimina i coefficienti di tali variabili in modo da escludere l'eventualità che $\mathcal{D}_{\rm R}$ diventi negativa. Infatti $\mathcal{D}_{\rm R}$ può essere ridefinita come una funzione lineare nelle variabili \dot{F}, \ddot{K} e Grad \dot{K} , e quindi, al fine di garantire la non-negatività di $\mathcal{D}_{\rm R}$ si richiede che i coefficienti di ciascuna di tali variabili siano identicamente nulli. In questo modo si ottengono le relazioni:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{P}} \circ \boldsymbol{\natural} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \boldsymbol{\natural}, \qquad (5.26a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \boldsymbol{\natural} = \boldsymbol{0}, \tag{5.26b}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ \boldsymbol{\natural} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\natural}.$$
(5.26c)

La (5.26a) e la (5.26c) permettono di definire $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ costitutivamente per derivazione della forma costitutiva della energia libera di Helmholtz generalizzata $\mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}$. Si noti che tali risultati discendono dal fatto di non aver dichiarato $\dot{\boldsymbol{F}}$ e Grad $\dot{\boldsymbol{K}}$ come variabili costitutive indipendenti. La Equazione (5.26b) esprime il fatto che la grandezza $\mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}$ non è dipendente dalla quantità $\dot{\boldsymbol{K}}$ e quindi che esiste una funzione $\mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}$ tale che

$$\psi_{\mathrm{R}} = \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}, \mathfrak{X}) = \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}, \mathfrak{X}).$$
(5.27)

A seguito dell'applicazione del metodo di Coleman e Noll, la dissipazione (5.25) diviene:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{Y}} \circ \boldsymbol{\natural} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat} \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{K}} \ge 0,$$
(5.28)

dove il simbolo \flat , indica la lista ridotta di variabili $\flat = (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \text{Grad}\mathbf{K}, \mathfrak{X}).$

Osservazione.

Si noti che le relazioni

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{P}} \circ \boldsymbol{\natural} = \frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \boldsymbol{\flat}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ \boldsymbol{\natural} = \frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat}$$
(5.29)

implicano l'esistenza di due funzioni \mathcal{H}^{P} e $\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}$ tali che

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{P}} \circ \boldsymbol{\natural} = \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\boldsymbol{P}} \circ \boldsymbol{\flat}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ \boldsymbol{\natural} = \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ \boldsymbol{\flat}.$$
(5.30)

Pertanto si ha che le variabili costitutive dipendenti $P \in \mathcal{Y}$ non dipendono da \dot{K} . Si noti che per la grandezza Y non vale la stessa considerazione.

5.4 Espressione costitutiva dell'energia libera di Helmholtz e tensore di Burgers

Nella Sezione 4.5 è stata dichiarata l'ipotesi costitutiva (4.40) sulle energie libere di Helmholtz $\psi_{\rm R} e \psi_{\nu}$, specificando che, nelle teorie di grado zero per la variabile microstrutturale $\boldsymbol{K}, \psi_{\nu}$ può essere espressa costitutivamente mediante una funzione di $\boldsymbol{F}_{\rm e}$ soltanto. Nelle teorie di primo gradiente, seguendo quando fatto da Gurtin and Anand [2005a], è possibile formulare la seguente ipotesi costitutiva:

$$\psi_{\mathrm{R}} = \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}, \mathfrak{X}) = \hat{\psi}_{\mathrm{R}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K})$$
$$= \hat{\psi}_{\mathrm{R},1} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) + \hat{\psi}_{\mathrm{R},2} \circ (\boldsymbol{K}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K})$$
$$= J_{\mathrm{K}} \Big[\hat{\psi}_{\nu,1} \circ (\boldsymbol{F}\boldsymbol{K}^{-1}) + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}} \Big], \qquad (5.31)$$

dove il contributo $\hat{\psi}_{\nu,1}$ rappresenta l'energia elastica definita anche nel capitolo precedente dalla relazione (4.40) ed il termine $\hat{\psi}_{\nu,2}$ è un termine energetico aggiuntivo che dipende

dalle variabili costitutive indipendenti $(\mathbf{K}, \operatorname{Grad} \mathbf{K})$ attraverso il cosiddetto tensore di Burgers, indicato in questa sede con il simbolo \mathfrak{G} e definito come

$$\boldsymbol{\mathfrak{G}} := \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \boldsymbol{K} \mathrm{Grad} \boldsymbol{K}. \tag{5.32}$$

Tale risultato è dimostrato da Cermelli and Gurtin [2001], e si basa sul fatto che \mathfrak{G} rappresenta l'unica grandezza, ottenibile combinando le variabili (\mathbf{K} , Grad \mathbf{K}), indipendente dal piazzamento di riferimento e covariante per rotazione dello stato naturale $\mathscr{N}_X(t)$. In particolare, riportiamo il risultato tratto dall'articolo di Cermelli and Gurtin [2001]:

Teorema 5.4.1 (Teorema di Invarianza [Cermelli and Gurtin, 2001]).

Data una funzione costitutiva del tipo $\mathcal{F} \circ (\mathbf{K}, \operatorname{Grad} \mathbf{K})$, essa è indipendente dal piazzamento di riferimento \mathscr{B}_{R} se e solo se può essere riformulata come una funzione costitutiva composta con il tensore di Burgers \mathfrak{G} , ossia se esiste una funzione costitutiva \mathcal{K} tale che

$$\mathcal{F} \circ (\boldsymbol{K}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}) = \mathcal{K} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}.$$
(5.33)

Nel seguito di questo paragrafo verranno descritte le proprietà principali del tensore di Burgers \mathfrak{G} , come ad esempio il suo significato fisico, la sua rappresentazione tensoriale, le proprietà di trasformazione per mezzo di cambiamenti di sistemi di riferimento locali e la legge che ne descrive l'evoluzione temporale.

- Significato fisico: il tensore di Burgers rappresenta una misura delle *incompatibilità* geometriche. Se $\tilde{\boldsymbol{n}}$ è il covettore normale che individua il piano tangente ad una superficie "riportata" allo spazio rilassato, Π , il vettore $\mathfrak{G}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{n}}$ rappresenta il vettore di Burgers associato a tale piano (per approfondimenti si veda Cermelli and Gurtin [2001]).
- Il tensore di Burgers è definito dalla formula:

$$\boldsymbol{\mathfrak{G}} := \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \boldsymbol{K} \mathrm{Curl} \boldsymbol{K}, \qquad [\boldsymbol{\mathfrak{G}}]^{\alpha\beta} = \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{A} \epsilon^{ACB} [\boldsymbol{K}]^{\beta}{}_{B;C}.$$
(5.34)

• Un cambio di riferimento locale "compatibile" è espresso dalla trasformazione, regolare e biettiva, dei punti $X \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ in punti $Z = Z(X) \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. La relazione inversa è data da $X = \mathfrak{X}(Z)$, che permette di ottenere la catena di uguaglianze:

$$\chi(X) = \chi(\mathfrak{X}(Z)) = [\chi \circ \mathfrak{X}](Z) = \hat{\chi}(Z).$$
(5.35)

Denotando con \hat{D} lo Jacobiano rispetto alle nuove coordinate, definiamo $\hat{D}\mathfrak{X}(Z) :=$ H e osserviamo che, grazie alla regola di derivazione delle funzioni composte, si ottiene (si veda [Cermelli and Gurtin, 2001])

$$[\hat{\boldsymbol{F}}]^{a}{}_{A} = [\hat{D}\hat{\chi}]^{a}{}_{A} = \frac{\partial\hat{\chi}^{a}}{\partial Z^{A}} = \left[\frac{\partial\chi^{a}}{\partial X^{B}}\circ\mathfrak{X}\right]\frac{\partial\mathfrak{X}^{B}}{\partial Z^{A}} = \left[[\boldsymbol{F}]^{a}{}_{B}\circ\mathfrak{X}\right]\boldsymbol{H}^{B}{}_{A}.$$
(5.36)
Considerando la decomposizione moltiplicativa,

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \underbrace{[\boldsymbol{F}_{e} \circ \boldsymbol{\mathfrak{X}}]}_{\hat{\boldsymbol{F}}_{e}} \underbrace{[\boldsymbol{K} \circ \boldsymbol{\mathfrak{X}}] \boldsymbol{H}}_{\hat{\boldsymbol{K}}}, \qquad (5.37)$$

si evincono le leggi di trasformazione (si veda [Cermelli and Gurtin, 2001])

$$\boldsymbol{F} \rightarrow \hat{\boldsymbol{F}} = (\boldsymbol{F} \circ \mathfrak{X}) \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{F} \rightarrow \hat{\boldsymbol{F}}_{e} = \boldsymbol{F}_{e} \circ \mathfrak{X}, \quad \boldsymbol{K} \rightarrow \hat{\boldsymbol{K}} = (\boldsymbol{K} \circ \mathfrak{X}) \boldsymbol{H}.$$
 (5.38)

Per mostrare l'invarianza del tensore di Burgers $\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \circ \mathfrak{X}$ consideriamo il calcolo in componenti di Grad \hat{K} ,

$$[\hat{\boldsymbol{K}}]^{\alpha}{}_{A;B} = ([\boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{C} \circ \boldsymbol{\mathfrak{X}}] [\boldsymbol{H}]^{C}{}_{A})_{;B}$$

$$= [\boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{C;D} \circ \boldsymbol{\mathfrak{X}}] \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\mathfrak{X}}^{D}}{\partial \boldsymbol{Z}^{B}}}_{[\boldsymbol{H}]^{D}{}_{B}} [\boldsymbol{H}]^{C}{}_{A} + [\boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{C} \circ \boldsymbol{\mathfrak{X}}] [\boldsymbol{H}]^{C}{}_{A;B}.$$

$$(5.39)$$

Grazie a quest'ultima espressione possiamo calcolare agilmente le componenti di $\hat{\operatorname{Curl}}\hat{K}$,

$$[\hat{\operatorname{Curl}}\hat{\boldsymbol{K}}]^{A\alpha} = \hat{\varepsilon}^{ACB} [\hat{\boldsymbol{K}}]^{\alpha}{}_{B;C}$$
$$= \hat{\varepsilon}^{ACB} [\boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{D;E} \circ \mathfrak{X}] [\boldsymbol{H}]^{E}{}_{C} [\boldsymbol{H}]^{D}{}_{B}$$
$$+ \hat{\varepsilon}^{ACB} [\boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{D} \circ \mathfrak{X}] [\boldsymbol{H}]^{D}{}_{B;C}.$$
(5.40)

Notando che $\boldsymbol{H} = \hat{D} \boldsymbol{\mathfrak{X}}$ è il gradiente di una funzione regolare, si ha che $\hat{Curl} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$, ossia

$$\hat{\varepsilon}^{ACB} \left[\boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{D} \circ \boldsymbol{\mathfrak{X}} \right] \left[\boldsymbol{H} \right]^{D}{}_{B;C} = 0.$$
(5.41)

In questo modo il termine $\hat{Curl}\hat{K}$ si semplifica, ottenendo

$$[\hat{\mathrm{Curl}}\hat{\boldsymbol{K}}]^{A\alpha} = \hat{\varepsilon}^{ACB} \left[\boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{D;E} \circ \mathfrak{X} \right] \left[\boldsymbol{H} \right]^{E}{}_{C} \left[\boldsymbol{H} \right]^{D}{}_{B}$$
(5.42)

Moltiplicando la Equazione (5.42) a sinistra per \hat{K} si ottiene:

$$[\hat{\boldsymbol{K}}]^{\gamma}{}_{A}[\hat{\operatorname{Curl}}\hat{\boldsymbol{K}}]^{A\alpha} = [\boldsymbol{K} \circ \mathfrak{X}]^{\gamma}{}_{F}[\boldsymbol{H}]^{F}{}_{A}\hat{\varepsilon}^{ACB}[\boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{D;E} \circ \mathfrak{X}][\boldsymbol{H}]^{E}{}_{C}[\boldsymbol{H}]^{D}{}_{B}, \qquad (5.43)$$

e raggruppando opportunamente i termini si ricava la seguente espressione:

$$[\hat{\boldsymbol{K}}]^{\gamma}{}_{A}[\hat{\operatorname{Curl}}\hat{\boldsymbol{K}}]^{A\alpha} = [\boldsymbol{K} \circ \mathfrak{X}]^{\gamma}{}_{F} \{ \hat{\varepsilon}^{ACB}[\boldsymbol{H}]^{F}{}_{A}[\boldsymbol{H}]^{E}{}_{C}[\boldsymbol{H}]^{D}{}_{B} \} [\boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{D;E} \circ \mathfrak{X}].$$
(5.44)

Abbiamo evidenziato il termine tra le parentesi graffe al fine di mostrare la proprietà

$$\varepsilon^{FED} \det[\boldsymbol{H}] = \hat{\varepsilon}^{ACB} [\boldsymbol{H}]^{F}{}_{A} [\boldsymbol{H}]^{E}{}_{C} [\boldsymbol{H}]^{D}{}_{B}, \qquad (5.45)$$

che rappresenta la legge di trasformazione della 3-forma di Levi-Civita tra la configurazione trasformata e quella di partenza [Felsager, 1998]. Sostituendo si ottiene il

risultato chiave per la dimostrazione dell'invarianza di \mathfrak{G} , ossia [Cermelli and Gurtin, 2001, Gurtin and Anand, 2005a]

$$[\hat{\boldsymbol{K}}]^{\gamma}{}_{A} [\hat{\operatorname{Curl}} \hat{\boldsymbol{K}}]^{A\alpha} = [\boldsymbol{K} \circ \mathfrak{X}]^{\gamma}{}_{F} \left\{ \varepsilon^{FED} \det[\boldsymbol{H}] \right\} [\boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{D,E} \circ \mathfrak{X}]$$

$$= \det[\boldsymbol{H}] [(\boldsymbol{K} \operatorname{Curl} \boldsymbol{K}) \circ \mathfrak{X}]^{\gamma \alpha}$$

$$= \det[\boldsymbol{H}] J_{\mathrm{K}} \left[\frac{1}{J_{\mathrm{K}}} (\boldsymbol{K} \operatorname{Curl} \boldsymbol{K}) \circ \mathfrak{X} \right]^{\gamma \alpha}.$$

$$(5.46)$$

Per concludere la dimostrazione ci basta osservare che $\hat{J}_K = J_K \det[\mathbf{H}]$. Dividendo ambo i membri per tale quantità ricaviamo quanto volevasi dimostrare:

$$\hat{\boldsymbol{\mathfrak{G}}} = \frac{1}{\hat{J}_{K}} (\hat{\boldsymbol{K}} \hat{\mathrm{Curl}} \hat{\boldsymbol{K}})^{\gamma \alpha} = \left[\frac{1}{J_{K}} (\boldsymbol{K} \mathrm{Curl} \boldsymbol{K})^{\gamma \alpha} \circ \mathfrak{X} \right] = \boldsymbol{\mathfrak{G}} \circ \mathfrak{X}.$$
(5.47)

• Mostriamo la covarianza del tensore di Burgers per rotazioni proprie dello stato naturale. A tal proposito consideriamo le grandezze tensoriali

$$C_{\rm e} = F_{\rm e}^{\rm T} g F_{\rm e} = K^{-{\rm T}} C K^{-1}, \qquad L_{\rm K} = \dot{K} K^{-1}, \qquad (5.48)$$

e osserviamo che, effettuando una rotazione della configurazione microstrutturale attraverso il tensore invertibile $\mathcal{R} : \mathcal{N}_X(t) \to \mathcal{N}_X(t)$, costante in tempo e in spazio, valgono

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{e} = \tilde{\boldsymbol{K}}^{-T} \boldsymbol{C} \tilde{\boldsymbol{K}}^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-T} \boldsymbol{K}^{-T} \boldsymbol{C} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-T} \boldsymbol{C}_{e} \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-1}, \qquad (5.49a)$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} = \tilde{\boldsymbol{K}}\tilde{\boldsymbol{K}}^{-1} = \mathcal{R}\dot{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}^{-1}\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\mathcal{R}^{-1}.$$
(5.49b)

Inoltre, il tensore di Burgers, definito dalla Equazione (5.34), a seguito della rotazione si trasforma come

$$\tilde{\boldsymbol{\mathfrak{G}}} = \frac{1}{\tilde{J}_{\mathrm{K}}} \tilde{\boldsymbol{K}} \mathrm{Curl} \tilde{\boldsymbol{K}} = \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \mathcal{R} \boldsymbol{K} \mathrm{Curl}(\boldsymbol{K}) \mathcal{R}^{\mathrm{T}} = \mathcal{R} \boldsymbol{\mathfrak{G}} \mathcal{R}^{\mathrm{T}}.$$
(5.50)

dove si è utilizzato che det $\mathcal{R} = 1$, avendo considerato una rotazione propria dello stato naturale.

- Per valutare l'evoluzione in tempo del tensore di Burgers \mathfrak{G} consideriamo la derivata temporale di \mathfrak{G} ,

$$\dot{\boldsymbol{\mathfrak{G}}} = -\frac{\dot{J}_{\mathrm{K}}}{(J_{\mathrm{K}})^2} \boldsymbol{K} \mathrm{Curl} \boldsymbol{K} + \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \dot{\boldsymbol{K}} \mathrm{Curl} \boldsymbol{K} + \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \boldsymbol{K} \mathrm{Curl} \dot{\boldsymbol{K}}.$$
(5.51)

Utilizzando l'identità

$$\dot{J}_{\rm K} = J_{\rm K} {\rm Tr}[\dot{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{K}^{-1}] = J_{\rm K} {\rm Tr}[\boldsymbol{L}_{\rm K}], \qquad (5.52)$$

e la relazione $\dot{K} = L_{\rm K} K$ si riesce a riscrivere la (5.51) come

$$\dot{\boldsymbol{\mathfrak{G}}} = -\frac{\mathrm{Tr}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}]}{J_{\mathrm{K}}}\boldsymbol{K}\mathrm{Curl}\boldsymbol{K} + \frac{1}{J_{\mathrm{K}}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}\mathrm{Curl}\boldsymbol{K} + \frac{1}{J_{\mathrm{K}}}\boldsymbol{K}\mathrm{Curl}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}].$$
(5.53)

Nella Equazione (5.53) l'ultimo termine a destra può essere ulteriormente manipolato in componenti come segue:

$$[\operatorname{Curl}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}]]^{A\beta} = \varepsilon^{ACB} \left(\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}\right)^{\beta}{}_{B;C} = \varepsilon^{ACB} \left([\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}]^{\beta}{}_{\alpha}[\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B}\right)_{;C}$$
$$= \varepsilon^{ACB} [\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}]^{\beta}{}_{\alpha;C} [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B} + \varepsilon^{ACB} [\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}]^{\beta}{}_{\alpha}[\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B;C}$$
$$=: [\operatorname{Curl}_{\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}} [\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}]]^{A\beta} + \left[\operatorname{Curl}_{\boldsymbol{K}} [\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}]^{\mathrm{T}}\right]^{A\beta}, \qquad (5.54)$$

dove abbiamo introdotto la definizione

$$\left[\operatorname{Curl}_{\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}]\right]^{A\beta} := \varepsilon^{ACB} [\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}]^{\beta}{}_{\alpha;C} [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{B}.$$
(5.55)

Inoltre inserendo la (5.54) nella (5.53), si trova l'espressione

$$\dot{\boldsymbol{\mathfrak{G}}} = -\mathrm{Tr}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}]\boldsymbol{\mathfrak{G}} + \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathfrak{G}} + \frac{1}{J_{\mathrm{K}}}\boldsymbol{K}\mathrm{Curl}\boldsymbol{K}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}]^{\mathrm{T}} + \frac{1}{J_{\mathrm{K}}}\boldsymbol{K}\mathrm{Curl}_{\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}].$$
(5.56)

In conclusione l'evoluzione del tensore di Burgers è data dalla formula:

$$\dot{\boldsymbol{\mathfrak{G}}} = -\mathrm{Tr}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}]\boldsymbol{\mathfrak{G}} + [\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathfrak{G}} + \boldsymbol{\mathfrak{G}}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}})^{\mathrm{T}}] + \frac{1}{J_{\mathrm{K}}}\boldsymbol{K}\mathrm{Curl}_{\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}].$$
(5.57)

Osservazione (Derivata di Truesdell).

Osservando attentamente la Equazione (5.57), si capisce che \mathfrak{G} è composta da vari contributi: un termine legato alla variazione di volume, $\operatorname{Tr}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}]\mathfrak{G}$, tipico degli enti dinamici pseudo-tensoriali (grandezza estensiva); poi notiamo il termine [$\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\mathfrak{G} + \mathfrak{G}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}})^{\mathrm{T}}$], che rappresenta la *derivata di Lie*, ovvero la *derivata oggettiva* dei tensori del secondo ordine (per grandezze intensive); infine l'ultimo termine ha significato di sorgente. Manipolando l'espressione (5.57), giungiamo alla riscrittura

$$\underbrace{\dot{\mathfrak{G}} + \operatorname{Tr}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}]\mathfrak{G} - \left[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\mathfrak{G} + \mathfrak{G}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}})^{\mathrm{T}}\right]}_{=:\dot{\mathfrak{G}}} = \frac{1}{J_{\mathrm{K}}}\boldsymbol{K}\operatorname{Curl}_{\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}].$$
(5.58)

Nella (5.58) il primo membro è per definizione la derivata di Truesdell del tensore di Burgers, indicata in questa sede come $\mathring{\mathfrak{G}}$. Così facendo otteniamo

$$\overset{\circ}{\mathfrak{G}} = \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \boldsymbol{K} \mathrm{Curl}_{\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}} [\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \boldsymbol{K}].$$
(5.59)

Notiamo infine che l'utilizzo della derivata di Truesdell sottolinea la natura del termine di sorgente. In questo modo l'evoluzione oggettiva del tensore di Burgers dipende da un termine generalmente diverso da zero. Questo significa che durante l'evoluzione oggettiva del tensore in esame c'è una "forza" che introduce o toglie \mathfrak{G} impedendo la conservazione oggettiva del tensore stesso (richiesta ottenuta dalla condizione $\mathfrak{G} = \mathbf{0}$).

5.5 Principio delle Potenze Virtuali riferito allo stato naturale e sistema dinamico

In questa sezione viene riformulato il Principio delle Potenze Virtuali, seguendo un approccio simile a quello impiegato da Gurtin and Anand [2005a], Del Piero [2009]. Pertanto riprendiamo l'espressione

$$\mathcal{W}_{v}^{(\text{int})}(\boldsymbol{U}, \bar{\boldsymbol{K}}) = \int_{\mathscr{B}_{R}} \left(\boldsymbol{P} : \text{Grad}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{Y} : \bar{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\mathcal{Y}}: \text{Grad}\bar{\boldsymbol{K}} \right) dV,$$
(5.60)

dove \bar{K} indica la velocità virtuale associata a K, la cui trattazione come funzione test è concettualmente analoga a quella dello spostamento virtuale δK , utilizzato nella sezione 5.1. La notazione introdotta consente di distinguere la velocità virtuale \bar{K} da quella associata alla evoluzione effettiva del corpo, K (si veda la procedura svolta da Gurtin and Anand [2005a] nel paragrafo 4.1). Inoltre, introduciamo la velocità virtuale $\bar{L}_{\rm K} = \bar{K}K^{-1}$, definita interamente nello stato naturale. Pertanto moltiplichiamo per $K^{-1}K$ ottenendo

$$\mathcal{W}_{v}^{(\text{int})}(\boldsymbol{U}, \bar{\boldsymbol{K}}) = \int_{\mathscr{B}_{R}} [\boldsymbol{P}: \text{Grad}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{Y}: (\underbrace{\bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}^{-1}}_{\equiv \bar{\boldsymbol{L}}_{K}} \boldsymbol{K}) + \boldsymbol{\mathcal{Y}}: \text{Grad}(\underbrace{\bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}^{-1}}_{\equiv \bar{\boldsymbol{L}}_{K}} \boldsymbol{K})] \text{dV}.$$
(5.61)

Utilizzando la seguente proprietà,

$$\boldsymbol{Y}: (\bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}) = \mathrm{Tr}[\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}] = \mathrm{Tr}[\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}] = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}: \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}, \qquad (5.62)$$

e, richiamando la relazione $J_{\rm K} \boldsymbol{Y}_{\nu} = \boldsymbol{Y} \boldsymbol{K}^{\rm T}$, scriviamo

$$\mathcal{W}_{v}^{(\text{int})}(\boldsymbol{U}, \bar{\boldsymbol{K}}) = \int_{\mathscr{B}_{R}} [\boldsymbol{P} : \text{Grad}\boldsymbol{U} + J_{K}\boldsymbol{Y}_{\nu} : \bar{\boldsymbol{L}}_{K} + \boldsymbol{\mathcal{Y}}: \text{Grad}(\bar{\boldsymbol{L}}_{K}\boldsymbol{K})] dV.$$
(5.63)

Per quanto riguarda il termine legato a Grad \dot{K} , è opportuno manipolarlo in componenti nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}: \operatorname{Grad}(\bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}) = [\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB}([\bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}]^{\alpha}{}_{\beta}\boldsymbol{K}^{\beta}{}_{A})_{;B}$$

= $[\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB}[\bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}]^{\alpha}{}_{\beta;B}\boldsymbol{K}^{\beta}{}_{A} + [\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB}[\bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}]^{\alpha}{}_{\beta}\boldsymbol{K}^{\beta}{}_{A;B},$ (5.64)

e definendo per componenti le nuove grandezze, indicate con $\mathcal{F} \in \Xi$,

$$J_{\mathrm{K}}[\boldsymbol{\mathcal{F}}]_{\alpha}{}^{\beta B} := [\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB}[\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}]_{A}{}^{\beta} \qquad J_{\mathrm{K}}[\boldsymbol{\Xi}]_{\alpha}{}^{\beta} := [\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB}\boldsymbol{K}^{\beta}{}_{A;B}, \tag{5.65}$$

si ricava la seguente espressione della potenza virtuale interna:

$$\mathcal{W}_{v}^{(\text{int})}(\boldsymbol{U}, \bar{\boldsymbol{K}}) = \int_{\mathscr{B}_{R}} \{\boldsymbol{P} : \text{Grad}\boldsymbol{U} + J_{K}[(\boldsymbol{Y}_{\nu} + \boldsymbol{\Xi}) : \bar{\boldsymbol{L}}_{K} + \boldsymbol{\mathcal{F}}: \text{Grad}\bar{\boldsymbol{L}}_{K}]\} dV.$$
(5.66)

Definendo la nuova grandezza $\Psi := Y_{\nu} + \Xi$, ottiene l'espressione della potenza virtuale interna cercata:

$$\mathcal{W}_{v}^{(\text{int})}(\boldsymbol{U}, \bar{\boldsymbol{K}}) = \int_{\mathscr{B}_{R}} \{\boldsymbol{P} : \text{Grad}\boldsymbol{U} + J_{K}[\boldsymbol{\Psi} : \bar{\boldsymbol{L}}_{K} + \boldsymbol{\mathcal{F}}: \text{Grad}\bar{\boldsymbol{L}}_{K}] \} dV.$$
(5.67)

Analogamente si procede per modificare l'espressione della potenza virtuale esterna:

$$\mathcal{W}_{v}^{(\text{ext})}(\boldsymbol{U}, \bar{\boldsymbol{K}}) = \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{f}_{R}^{(\text{ext})} \boldsymbol{U} dV + \int_{\Gamma_{1}} \boldsymbol{\tau}_{R} \boldsymbol{U} da_{R} + \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{Z} : \bar{\boldsymbol{K}} dV + \int_{\Gamma_{2}} \boldsymbol{T} : \bar{\boldsymbol{K}} da_{R}.$$
(5.68)

Per trovare l'espressione desiderata è sufficiente in questo caso utilizzare la proprietà della traccia, similmente a quanto fatto nella Equazione (5.62) per passare da \mathbf{Y} a \mathbf{Y}_{ν} . In questo modo otteniamo l'espressione finale,

$$\mathcal{W}_{v}^{(\text{ext})}(\boldsymbol{U}, \bar{\boldsymbol{K}}) = \int_{\mathscr{B}_{R}} \boldsymbol{f}_{R}^{(\text{ext})} \boldsymbol{U} dV + \int_{\Gamma_{1}} \boldsymbol{\tau}_{R} \boldsymbol{U} da_{R} + \int_{\mathscr{B}_{R}} J_{K} \boldsymbol{Z}_{\nu} : \bar{\boldsymbol{L}}_{K} dV + \int_{\Gamma_{2}} J_{K} \boldsymbol{T}_{\nu} : \bar{\boldsymbol{L}}_{K} da_{R}, \qquad (5.69)$$

dove $J_{\mathrm{K}} \mathbf{Z}_{\nu} := \mathbf{Z} \mathbf{K}^{\mathrm{T}} \in J_{\mathrm{K}} \mathbf{T}_{\nu} := \mathbf{T} \mathbf{K}^{\mathrm{T}}$. Richiamando il Principio delle Potenze Virtuale, ovvero richiesta $\mathcal{W}_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{K}}) = \mathcal{W}_{\mathrm{v}}^{(\mathrm{int})}(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{K}})$ per ogni coppia $(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{K}})$, si ottiene

$$\int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{U} \mathrm{dV} + \int_{\Gamma_{1}} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \boldsymbol{U} \mathrm{da}_{\mathrm{R}} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{Z}_{\nu} : \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} \mathrm{dV} + \int_{\Gamma_{2}} J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{T}_{\nu} : \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} \mathrm{da}_{\mathrm{R}}$$
$$= \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \{\boldsymbol{P} : \mathrm{Grad} \boldsymbol{U} + J_{\mathrm{K}} [\boldsymbol{\Psi} : \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} + \boldsymbol{\mathcal{F}} : \mathrm{Grad} \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}] \} \mathrm{dV}.$$
(5.70)

Effettuando le integrazione per parti nel secondo membro della (5.70) si ottiene

$$\int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \{\boldsymbol{P} : \operatorname{Grad} \boldsymbol{U} + J_{\mathrm{K}}[\boldsymbol{\Psi} : \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} + \boldsymbol{\mathcal{F}}: \operatorname{Grad} \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}] \} \mathrm{dV} \\
= \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \{\operatorname{Div}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}) - (\operatorname{Div}\boldsymbol{P})\boldsymbol{U} \} \mathrm{dV} \\
+ \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \{J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\Psi} : \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} + \operatorname{Div}(\bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}: J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}}) - \operatorname{Div}(J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}}): \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} \} \mathrm{dV}.$$
(5.71)

Utilizzando il teorema di Gauss-Green si ricava

$$\int_{\mathscr{B}_{R}} \{\operatorname{Div}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}) - (\operatorname{Div}\boldsymbol{P})\boldsymbol{U}\} \mathrm{dV} \\
+ \int_{\mathscr{B}_{R}} \{J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\Psi} : \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} + \operatorname{Div}(\bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} : J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}}) - \operatorname{Div}(J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}}) : \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}\} \mathrm{dV} \\
= \int_{\partial \mathscr{B}_{R}} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N})\boldsymbol{U} \mathrm{da}_{\mathrm{R}} - \int_{\mathscr{B}_{R}} (\operatorname{Div}\boldsymbol{P})\boldsymbol{U} \mathrm{dV} \\
+ \int_{\partial \mathscr{B}_{R}} [\bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} : (J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}})]\boldsymbol{N} \mathrm{da}_{\mathrm{R}} + \int_{\mathscr{B}_{R}} [J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\Psi} - \operatorname{Div}(J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}})] : \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} \mathrm{dV}. \quad (5.72)$$

Osservando che U e $\bar{L}_{\rm K}$ sono nulle sui rispettivi bordi di Dirichlet, possiamo cambiare i domini di integrazione dei termini di bordo nella (5.72), che inserita nella (5.70) dà luogo a

$$\int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} \boldsymbol{U} \mathrm{dV} + \int_{\Gamma_{1}} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} \boldsymbol{U} \mathrm{da}_{\mathrm{R}} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{Z}_{\nu} : \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} \mathrm{dV} + \int_{\Gamma_{2}} J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{T}_{\nu} : \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}} \mathrm{da}_{\mathrm{R}}$$
77

$$= \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}) \boldsymbol{U} da_R - \int_{\mathscr{B}_R} (\text{Div}\boldsymbol{P}) \boldsymbol{U} dV + \int_{\Gamma_2} [(J_K \boldsymbol{\mathcal{F}}) \boldsymbol{N}] : \bar{\boldsymbol{L}}_K da_R + \int_{\mathscr{B}_R} [J_K \boldsymbol{\Psi} - \text{Div}(J_K \boldsymbol{\mathcal{F}})] : \bar{\boldsymbol{L}}_K dV, \qquad (5.73)$$

e raggruppiamo i vari termini nel seguente modo:

$$\int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} (\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{ext})} + \mathrm{Div}\boldsymbol{P})\boldsymbol{U}\mathrm{dV} + \int_{\mathscr{B}_{\mathrm{R}}} [J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{Z}_{\nu} - J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\Psi} + \mathrm{Div}(J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}})] : \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}\mathrm{dV}$$
$$= \int_{\Gamma_{1}} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}})\boldsymbol{U}\mathrm{da}_{\mathrm{R}} + \int_{\Gamma_{2}} [(J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}})\boldsymbol{N} - J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{T}_{\nu}] : \bar{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{K}}\mathrm{da}_{\mathrm{R}}.$$
(5.74)

A questo punto, per l'arbitrarietà delle velocità virtuali, si ricava il sistema dinamico:

$$\begin{cases} \operatorname{Div} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}^{(\operatorname{ext})} = \boldsymbol{0} & \operatorname{in} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}, \\ \boldsymbol{P} \boldsymbol{N} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} & \operatorname{su} \Gamma_{1}, \\ \boldsymbol{Z}_{\nu} - \boldsymbol{\Psi} + J_{\mathrm{K}}^{-1} \operatorname{Div}(J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{\mathcal{F}}) = \boldsymbol{0} & \operatorname{in} \mathscr{B}_{\mathrm{R}}, \\ (J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{\mathcal{F}}) \boldsymbol{N} = J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{T}_{\nu} & \operatorname{su} \Gamma_{2}, \end{cases}$$
(5.75)

dove le prime due equazioni sono uguali a quelle del sistema (5.10) e descrivono il moto del corpo nella configurazione di riferimento $\mathscr{B}_{\rm R}$, le ultime due sono state modificate in modo da essere riferite a grandezze definite interamente nello stato naturale. Si noti che vi è una differenza rispetto ai risultati di Gurtin and Anand [2005a] perché tali autori assumono $J_{\rm K} = 1$.

Equivalenza dei sistemi dinamici

In riferimento ai sistemi di equazioni dinamiche (5.10) e (5.75), è possibile mostrare la loro equivalenza. Per fare ciò è sufficiente concentrarsi sulle ultime due equazioni dei sistemi dal momento che le prime due sono identiche. Mostriamo la validità della seguente equivalenza

$$\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Y} + \text{Div}\boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{0} \qquad \iff \qquad \boldsymbol{Z}_{\nu} - \boldsymbol{\Psi} + J_{\text{K}}^{-1}\text{Div}(J_{\text{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}}) = \boldsymbol{0}.$$
 (5.76)

Partendo dalla equazione di sinistra, procediamo moltiplicando a destra per il tensore \mathbf{K}^{T} , ottenendo

$$\boldsymbol{Z}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} + (\mathrm{Div}\boldsymbol{\mathcal{Y}})\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}.$$
 (5.77)

Ricordando che $J_{\rm K} \mathbf{Z}_{\nu} = \mathbf{Z} \mathbf{K}^{\rm T}$ e $J_{\rm K} \mathbf{Y}_{\nu} = \mathbf{Y} \mathbf{K}^{\rm T}$, possiamo riscrivere l'espressione precedente nel seguente modo:

$$J_{\rm K} \boldsymbol{Z}_{\nu} - J_{\rm K} \boldsymbol{Y}_{\nu} + ({\rm Div} \boldsymbol{\mathcal{Y}}) \boldsymbol{K}^{\rm T} = \boldsymbol{0}.$$
(5.78)

Concentrandoci ora sull'ultimo termine del primo membro e lavorando per componenti, si nota la possibilità di utilizzare la regola di Leibniz come segue:

$$([\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB})_{;B}[\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}]_{A}{}^{\beta} = ([\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB}[\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}]_{A}{}^{\beta})_{;B} - [\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB}([\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}]_{A}{}^{\beta})_{;B} = ([\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB}[\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}]_{A}{}^{\beta})_{;B} - [\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB}([\boldsymbol{K}]{}^{\beta}{}_{A})_{;B}.$$
(5.79)

Notiamo che il primo termine è per definizione uguale $\text{Div}(J_{\text{K}}\mathcal{F})$, mentre il secondo corrisponde esattamente alla grandezza $J_{\text{K}}\Xi$. Pertanto si ricava la seguente relazione

$$(\text{Div}\boldsymbol{\mathcal{Y}})\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} = \text{Div}(J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}}) - J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\Xi},$$
 (5.80)

che, inserita nella (5.78), porta al risultato cercato:

$$J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{Z}_{\nu} - J_{\mathrm{K}}(\boldsymbol{Y}_{\nu} + \boldsymbol{\Xi}) + \mathrm{Div}(J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}}) = \boldsymbol{0}, \qquad (5.81)$$

dove ricordiamo che $\Psi = Y_{\nu} + \Xi$.

Viceversa, partendo dall'equazione a destra della (5.76), notiamo la possibilità di utilizzare la relazione (5.80) per ottenere

$$\boldsymbol{Z}_{\nu} - \boldsymbol{\Psi} + J_{\mathrm{K}}^{-1}(\mathrm{Div}\boldsymbol{\mathcal{Y}})\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{0}, \qquad (5.82)$$

che può essere riscritta come segue

$$\boldsymbol{Z}_{\nu} - (\boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Xi}) + J_{\mathrm{K}}^{-1} (\mathrm{Div} \boldsymbol{\mathcal{Y}}) \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}.$$
 (5.83)

Osservando che $Y_{\nu} = \Psi - \Xi$, si ottiene:

$$\boldsymbol{Z}_{\nu} - \boldsymbol{Y}_{\nu} + J_{\mathrm{K}}^{-1}(\mathrm{Div}\boldsymbol{\mathcal{Y}})\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}, \qquad (5.84)$$

e, esplicitando le relazioni $\boldsymbol{Z}_{\nu} = J_{\mathrm{K}}^{-1} \boldsymbol{Z} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$ e $\boldsymbol{Y}_{\nu} = J_{\mathrm{K}}^{-1} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$, si arriva alla seguente equazione:

$$J_{\mathrm{K}}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} - J_{\mathrm{K}}^{-1}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} + J_{\mathrm{K}}^{-1}(\mathrm{Div}\boldsymbol{\mathcal{Y}})\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}.$$
 (5.85)

Fattorizzando a destra il tensore (non singolare) $\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$ e moltiplicando per J_{K} , ricaviamo

$$\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Y} + \operatorname{Div} \boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{0}. \tag{5.86}$$

Per quanto riguarda l'equivalenza della quarta equazione dei sistemi (5.10) e (5.75), essa si basa essenzialmente sulla validità della seguente espressione,

$$J_{\rm K} \boldsymbol{\mathcal{F}} \boldsymbol{N} = (\boldsymbol{\mathcal{Y}} \boldsymbol{N}) \boldsymbol{K}^{\rm T}, \qquad (5.87)$$

che può essere mostrata facilmente per componenti. Pertanto si nota che

$$\mathcal{F}N = T_{\nu} \iff (\mathcal{Y}N)K^{\mathrm{T}} = TK^{\mathrm{T}} \iff (\mathcal{Y}N) = T,$$
 (5.88)

concludendo così la dimostrazione dell'equivalenza dei sistemi dinamici (5.10) e (5.75).

5.6 Considerazioni finali sulla dissipazione residua

Riprendiamo la discussione sulla disuguaglianza residua, espressa dalla disequazione (5.28) ricavata con l'applicazione del metodo di Colemann e Noll nella Sezione 5.2. Ricordiamo inoltre che tale metodo ha permesso di determinare le relazioni costitutive (5.26a), (5.26b)

e (5.26c). Per quanto detto nella Sezione 5.3 l'energia libera di Helmholtz può essere espressa nel seguente modo:

$$\hat{\psi}_{\mathrm{R}}\circ(\boldsymbol{F},\boldsymbol{K},\mathrm{Grad}\boldsymbol{K}) = J_{\mathrm{K}} \Big[\hat{\psi}_{\nu,1}\circ(\boldsymbol{F}\boldsymbol{K}^{-1}) + \hat{\psi}_{\nu,2}\circ\left(\frac{1}{J_{\mathrm{K}}}\boldsymbol{K}\mathrm{Curl}\boldsymbol{K}\right) \Big].$$
(5.89)

Le considerazioni avanzate nel paragrafo precedente inoltre suggeriscono di riscrivere la disuguaglianza residua (5.28), esprimendola nel seguente modo:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{Y}} \circ \natural - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \flat \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{K}} = \left\{ \underbrace{\boldsymbol{Y} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}}_{=J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{Y}_{\nu}} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \flat \right) \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \right\} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \ge 0.$$
(5.90)

A questo punto è opportuno svolgere la derivata della energia libera di Helmholtz (5.89) rispetto alla variabile K. Procediamo nel seguente modo:

$$\frac{\partial \hat{\psi}_{\mathrm{R}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}) = \frac{\partial J_{\mathrm{K}}}{\partial \boldsymbol{K}} (\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}})
+ J_{\mathrm{K}} \left[\left(\frac{\partial \hat{\psi}_{\nu,1}}{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}} \circ \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} \right) : \frac{\partial (\boldsymbol{F}\boldsymbol{K}^{-1})}{\partial \boldsymbol{K}} + \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{\nu,2}}{\partial \boldsymbol{\mathfrak{G}}} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}} \right) : \frac{\partial (\frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \boldsymbol{K} \mathrm{Curl} \boldsymbol{K})}{\partial \boldsymbol{K}} \right].$$
(5.91)

Ricordando la proprietà

$$\frac{\partial J_{\rm K}}{\partial \boldsymbol{K}} = J_{\rm K} \boldsymbol{K}^{-\rm T} \tag{5.92}$$

e utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte, si ottiene:

$$\frac{\partial \hat{\psi}_{\mathrm{R}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}) = J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}} (\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}) + J_{\mathrm{K}} \left[\left(\frac{\partial \hat{\psi}_{\nu,1}}{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}} \circ \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} \right) : \frac{\partial (\boldsymbol{F}\boldsymbol{K}^{-1})}{\partial \boldsymbol{K}} + \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{\nu,2}}{\partial \boldsymbol{\mathfrak{G}}} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}} \right) : \frac{\partial (\frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \boldsymbol{K} \mathrm{Curl} \boldsymbol{K})}{\partial \boldsymbol{K}} \right].$$
(5.93)

Notiamo ora che il secondo termine è identico a quello calcolato nella Sezione 4.5 e in particolare riprendendo la Equazione (4.55), si deduce che:

$$J_{\rm K}\left[\left(\frac{\partial\hat{\psi}_{\nu,1}}{\partial \boldsymbol{F}_{\rm e}}\circ\boldsymbol{F}_{\rm e}\right):\frac{\partial(\boldsymbol{F}\boldsymbol{K}^{-1})}{\partial\boldsymbol{K}}\right] = -\boldsymbol{K}^{-{\rm T}}\boldsymbol{F}^{\rm T}\boldsymbol{P}.$$
(5.94)

Per quanto riguarda l'ultimo termine procediamo nel seguente modo. Si definisce prima la grandezza:

$$\boldsymbol{R}_{\nu} := \frac{\partial \hat{\psi}_{\nu,2}}{\partial \boldsymbol{\mathfrak{G}}} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}, \qquad [\boldsymbol{R}_{\nu}]_{\alpha\beta} := \frac{\partial \hat{\psi}_{\nu,2}}{\partial [\boldsymbol{\mathfrak{G}}]^{\alpha\beta}} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}. \tag{5.95}$$

In questo modo, il termine in esame diventa:

$$J_{\mathrm{K}}\left[\left(\frac{\partial\hat{\psi}_{\nu,2}}{\partial\boldsymbol{\mathfrak{G}}}\circ\boldsymbol{\mathfrak{G}}\right):\frac{\partial\left(\frac{1}{J_{\mathrm{K}}}\boldsymbol{K}\mathrm{Curl}\boldsymbol{K}\right)}{\partial\boldsymbol{K}}\right] = J_{\mathrm{K}}\left(\boldsymbol{R}_{\nu}:\frac{\partial\left(\frac{1}{J_{\mathrm{K}}}\boldsymbol{K}\mathrm{Curl}\boldsymbol{K}\right)}{\partial\boldsymbol{K}}\right).$$
(5.96)

Lavoriamo adesso in componenti per trovare il risultato della derivazione:

$$[\mathbf{R}_{\nu}]_{\alpha\beta} \frac{\partial \left(J_{\mathrm{K}}^{-1}[\mathbf{K}]^{\alpha}{}_{A}[\operatorname{Curl}\mathbf{K}]^{A\beta}\right)}{\partial [\mathbf{K}]^{\gamma}{}_{B}} = \\ = [\mathbf{R}_{\nu}]_{\alpha\beta} \frac{\partial (J_{\mathrm{K}}^{-1})}{\partial [\mathbf{K}]^{\gamma}{}_{B}} [\mathbf{K}]^{\alpha}{}_{A}[\operatorname{Curl}\mathbf{K}]^{A\beta} + [\mathbf{R}_{\nu}]_{\alpha\beta}J_{\mathrm{K}}^{-1}\frac{\partial ([\mathbf{K}]^{\alpha}{}_{A})}{\partial [\mathbf{K}]^{\gamma}{}_{B}}[\operatorname{Curl}\mathbf{K}]^{A\beta} \\ = [\mathbf{R}_{\nu}]_{\alpha\beta} \left(-J_{\mathrm{K}}^{-1}[\mathbf{K}^{-\mathrm{T}}]_{\gamma}{}^{B}\right) [\mathbf{K}]^{\alpha}{}_{A}[\operatorname{Curl}\mathbf{K}]^{A\beta} + [\mathbf{R}_{\nu}]_{\alpha\beta}J_{\mathrm{K}}^{-1}\delta^{\alpha}{}_{\gamma}\delta^{B}{}_{A}[\operatorname{Curl}\mathbf{K}]^{A\beta} \\ = -[\mathbf{R}_{\nu}]_{\alpha\beta} \left(J_{\mathrm{K}}^{-1}[\mathbf{K}^{-\mathrm{T}}]_{\gamma}{}^{B}\right) [\mathbf{K}]^{\alpha}{}_{A}[\operatorname{Curl}\mathbf{K}]^{A\beta} + [\mathbf{R}_{\nu}]_{\gamma\beta}J_{\mathrm{K}}^{-1}[\operatorname{Curl}\mathbf{K}]^{B\beta} \\ = -(\mathbf{R}_{\nu}:\mathfrak{G})[\mathbf{K}^{-\mathrm{T}}]_{\gamma}{}^{B} + [\mathbf{R}_{\nu}]_{\gamma\beta}[\mathfrak{G}^{\mathrm{T}}]^{\beta\delta}[\mathbf{K}^{-\mathrm{T}}]_{\delta}{}^{B}.$$
(5.97)

In forma compatta si trova la seguente espressione:

$$J_{\mathrm{K}}\left[\boldsymbol{R}_{\nu}:\frac{\partial\left(J_{\mathrm{K}}^{-1}\boldsymbol{K}\mathrm{Curl}\boldsymbol{K}\right)}{\partial\boldsymbol{K}}\right] = J_{\mathrm{K}}\left[-\left(\boldsymbol{R}_{\nu}:\boldsymbol{\mathfrak{G}}\right)\boldsymbol{I}_{\nu}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{\nu}\boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}},\qquad(5.98)$$

dove $\mathbf{I}_{\nu}^{\mathrm{T}}$ è l'identità trasposta della configurazione rilassata, definita come $\mathbf{I}_{\nu}^{\mathrm{T}} : \mathcal{N}_{X}^{*}(t) \rightarrow \mathcal{N}_{X}^{*}(t)$. I conti svolti possono essere riassunti dalla formula seguente:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat} \end{pmatrix} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_{\mathrm{R}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}) \end{bmatrix} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} = J_{\mathrm{K}} \{ [(\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}) - (\boldsymbol{R}_{\nu} : \boldsymbol{\mathfrak{G}})] \boldsymbol{I}_{\nu}^{\mathrm{T}} - J_{\mathrm{K}}^{-1} \boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{\nu} \boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\mathrm{T}} \}.$$
(5.99)

Inserendo quanto ottenuto nella (5.90), si ricava:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ J_{\mathrm{K}} \boldsymbol{Y}_{\nu} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat} \right) \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \right\} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}$$

= $J_{\mathrm{K}} \left\{ \boldsymbol{Y}_{\nu} - \left[(\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}) - (\boldsymbol{R}_{\nu} : \boldsymbol{\mathfrak{G}}) \right] \boldsymbol{I}_{\nu}^{\mathrm{T}} \right\} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}$
+ $J_{\mathrm{K}} \left\{ J_{\mathrm{K}}^{-1} \boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{R}_{\nu} \boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\mathrm{T}} \right\} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \ge 0.$ (5.100)

Ricordando la relazione $\mathbf{Y}_{\nu} = \Psi - \mathbf{\Xi}$, si nota che $[\mathbf{\Xi}]_{\alpha}{}^{\beta} = J_{\mathrm{K}}{}^{-1}[\mathbf{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB}\mathbf{K}{}^{\beta}{}_{A;B}$. Il calcolo delle componenti di $\mathbf{\mathcal{Y}}$ può essere svolto partendo dalla relazione costitutiva (5.26c) attraverso la catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB} &= \frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathbf{R}}}}{[\partial \mathrm{Grad} \boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{AB}} \circ \flat = J_{\mathbf{K}} \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{\nu,2}}{\partial [\boldsymbol{\mathfrak{G}}]^{\gamma\delta}} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\gamma\delta}}{\partial \boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{A;B}} \\ &= J_{\mathbf{K}} [\boldsymbol{R}_{\nu}]_{\gamma\delta} \frac{\partial (J_{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C} \varepsilon^{CED} \boldsymbol{K}^{\delta}{}_{D;E})}{\partial \boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{A;B}} = [\boldsymbol{R}_{\nu}]_{\gamma\delta} \boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C} \varepsilon^{CED} \frac{\partial \boldsymbol{K}^{\delta}{}_{D,E}}{\partial \boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{A;B}} \\ &= [\boldsymbol{R}_{\nu}]_{\gamma\delta} \boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C} \varepsilon^{CED} \delta^{\delta}{}_{\alpha} [\delta^{\mathrm{T}}]_{D}{}^{A} [\delta^{\mathrm{T}}]_{E}{}^{B} = [\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}}]_{\alpha\gamma} \boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C} \varepsilon^{CBA}. \end{aligned}$$
(5.101)

In sintesi, i conti svolti portano dunque alla seguente espressione

$$[\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB} = [\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}}]_{\alpha\gamma}\boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C}\varepsilon^{CBA}; \qquad (5.102)$$

da cui si ricava:

$$\boldsymbol{\Xi}]_{\alpha}^{\beta} = J_{\mathrm{K}}^{-1} [\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}^{AB} \boldsymbol{K}^{\beta}{}_{A;B} = J_{\mathrm{K}}^{-1} [\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}}]_{\alpha\gamma} \boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C} \varepsilon^{CBA} \boldsymbol{K}^{\beta}{}_{A;B} = [\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}}]_{\alpha\gamma} \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C} \varepsilon^{CBA} \boldsymbol{K}^{\beta}{}_{A;B} = [\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}}]_{\alpha\gamma} [\boldsymbol{\mathfrak{G}}]^{\gamma\beta}.$$
(5.103)

che informa compatta si scrive

ſ

$$\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathfrak{G}}. \tag{5.104}$$

Dunque riprendendo la (5.100) e apportando le dovute modifiche si ottiene:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = J_{\mathrm{K}} \{ \boldsymbol{\Psi} - [(\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}) - (\boldsymbol{R}_{\nu} : \boldsymbol{\mathfrak{G}})] \boldsymbol{I}_{\nu}^{\mathrm{T}} + J_{\mathrm{K}}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} - (\boldsymbol{R}_{\nu} \boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathfrak{G}}) \} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \ge 0.$$
(5.105)

A questo punto, proponiamo la decomposizione $\Psi = \Psi_{en} + \Psi_d$, dove

$$\Psi_{\mathrm{en}} := [(\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}) - (\boldsymbol{R}_{\nu} : \boldsymbol{\mathfrak{G}})] \boldsymbol{I}_{\nu}^{\mathrm{T}} - J_{\mathrm{K}}^{-1} \boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{R}_{\nu} \boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathfrak{G}}),$$
(5.106)

rappresenta la parte non dissipativa di Ψ . Pertanto troviamo la dissipazione residua

$$\mathcal{D}_{\nu} \equiv J_{\mathrm{K}}^{-1} \mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \Psi_{\mathrm{d}} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \ge 0.$$
(5.107)

5.7 Effetti dissipativi di ordine superiore

In questa sezione viene analizzata un'estensione del modello precedente che tiene conto di effetti dissipativi di ordine superiore. Pertanto riprendiamo l'equazione di Clausius-Duhem in forma locale (5.15) e dichiariamo Grad \dot{K} tra le variabili costitutive (5.16), ossia

$$\mathcal{V}_{ci} := (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \text{Grad}\boldsymbol{K}, \text{Grad}\boldsymbol{K}).$$
(5.108)

Per quanto riguarda le variabili costitutive dipendenti, esse rimangono le stesse della lista (5.17) e le loro dipendenze funzionali sono

$$\psi_{\rm R} \equiv \mathcal{F}^{\psi_{\rm R}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \text{Grad}\boldsymbol{K}, \text{Grad}\boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}), \qquad (5.109)$$

$$\boldsymbol{P} \equiv \mathcal{F}^{\boldsymbol{P}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \text{Grad}\boldsymbol{K}, \text{Grad}\boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}), \qquad (5.110)$$

$$\boldsymbol{Y} \equiv \mathcal{F}^{\boldsymbol{Y}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}, \operatorname{Grad} \dot{\boldsymbol{K}}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}), \qquad (5.111)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}} \equiv \mathcal{F}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \operatorname{Grad} \boldsymbol{K}, \operatorname{Grad} \dot{\boldsymbol{K}}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}).$$
(5.112)

Avendo in mente il risultato (5.15), riportiamo la dissipazione di energia

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = -\dot{\psi}_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{P} : \mathrm{Grad}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{Y} : \dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\mathcal{Y}} : \mathrm{Grad}\dot{\boldsymbol{K}} \ge 0.$$
(5.113)

Alla luce della relazione costitutiva (5.109), possiamo esplicitare la derivata temporale di $\psi_{\rm R}$

$$\dot{\psi}_{\mathrm{R}} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \sharp\right) : \dot{\boldsymbol{F}} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \sharp\right) : \dot{\boldsymbol{K}} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \sharp\right) : \ddot{\boldsymbol{K}}$$
82

$$+ \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \sharp\right) \vdots \operatorname{Grad} \boldsymbol{\dot{K}} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{\dot{K}}} \circ \sharp\right) \vdots \operatorname{Grad} \boldsymbol{\ddot{K}} \\ + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathfrak{X}} \circ \sharp\right) \underbrace{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}}_{=0} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathcal{T}} \circ \sharp\right) \underbrace{\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t}}_{=1},$$
(5.114)

dove il simbolo \sharp indica la lista delle dipendenze,

$$\sharp = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{K}}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}, \mathfrak{X}, \mathcal{T}).$$

Inserendo quanto ottenuto nella (5.113), si ricava:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \sharp\right) : \dot{\boldsymbol{F}} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \sharp\right) : \dot{\boldsymbol{K}} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \sharp\right) : \ddot{\boldsymbol{K}} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \sharp\right) : \mathrm{Grad}\boldsymbol{K} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \sharp\right) : \mathrm{Grad}\boldsymbol{K} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathcal{T}} \circ \sharp\right) + \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{Y} : \dot{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{\mathcal{Y}}: \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}.$$
(5.115)

Raggruppando i termini simili della Equazione (5.115) ed esplicitando le dipendenze funzionali si ottiene,

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ \mathcal{F}^{\boldsymbol{P}} \circ \sharp - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \sharp \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{F}} + \left\{ \mathcal{F}^{\boldsymbol{Y}} \circ \sharp - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \sharp \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{K}} \\ + \left\{ \mathcal{F}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ \sharp - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \sharp \right) \right\} : \mathrm{Grad}\boldsymbol{K} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \sharp \right) : \mathrm{Grad}\boldsymbol{K} \\ - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \sharp \right) : \boldsymbol{K} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial t} \circ \sharp \right), \tag{5.116}$$

Effettuando la *scelta modellistica* legata a fenomeni di *crescita e rimodellamento* piuttosto che quelli di *deterioramento* (si veda la Osservazione 4.3), possiamo eliminare la variabile \mathcal{T} dalla lista delle variabili costitutive dipendenti, ovvero

$$\psi_{\mathrm{R}} = \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ \sharp = \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ \natural, \qquad (5.117a)$$

$$\boldsymbol{P} = \mathcal{F}^{\boldsymbol{P}} \circ \boldsymbol{\sharp} = \mathcal{G}^{\boldsymbol{P}} \circ \boldsymbol{\natural}, \tag{5.117b}$$

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{F}^{\boldsymbol{Y}} \circ \boldsymbol{\sharp} = \mathcal{G}^{\boldsymbol{Y}} \circ \boldsymbol{\natural}, \tag{5.117c}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ \boldsymbol{\boldsymbol{\sharp}} = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ \boldsymbol{\boldsymbol{\xi}}, \tag{5.117d}$$

Dove il simbolo \natural indica la lista $\natural = (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}}, \text{Grad}\mathbf{K}, \text{Grad}\dot{\mathbf{K}}, \mathfrak{X})$. In virtù di tale ipotesi modellistica è possibile modificare la dissipazione (5.116), imponendo la relazione,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathcal{T}} \circ \sharp\right) = 0. \tag{5.118}$$

In particolare, avendo in mente le espressioni (5.117a), (5.117b), (5.117c) e (5.117d), si può scrivere

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{P}} \circ \natural - \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \natural \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{F}} + \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{Y}} \circ \natural - \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \natural \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{K}} \\ + \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ \natural - \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \natural \right) \right\} : \mathrm{Grad} \dot{\boldsymbol{K}} \\ - \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad} \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \sharp \right) : \mathrm{Grad} \ddot{\boldsymbol{K}} - \left(\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \natural \right) : \ddot{\boldsymbol{K}} \ge 0$$
(5.119)

5.7.1 Metodo di Coleman e Noll rivisitato

Il metodo di Coleman e Noll individua le variabili che non sono state dichiarate né come variabili costitutive indipendenti, né come variabili costitutive dipendenti, e ne elimina i coefficienti in modo da escludere l'eventualità che $\mathcal{D}_{\rm R}$ diventi negativa. Nel nostro caso le variabili non dichiarate sono \dot{F} , \ddot{K} e Grad \ddot{K} . In questo modo si ottengono le relazioni:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{P}} \circ \boldsymbol{\natural} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \boldsymbol{\natural}, \qquad (5.120a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \boldsymbol{\natural} = \boldsymbol{0}. \tag{5.120b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{\psi_{\mathbf{R}}}}{\partial \mathrm{Grad} \dot{\boldsymbol{K}}} \circ \boldsymbol{\natural} = \boldsymbol{0}. \tag{5.120c}$$

La (5.120a) è una legge costitutiva. La (5.120b) e la (5.120c) esprime la indipendenza della grandezza $\mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}}$ dalle variabili $\dot{\mathbf{K}}$ e Grad $\dot{\mathbf{K}}$. Ciò si traduce nella esistenza di una funzione $\mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}$ tale che

$$\psi_{\mathrm{R}} = \mathcal{G}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}, \mathfrak{X}) = \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}, \mathfrak{X}).$$

A seguito dell'applicazione del metodo di Coleman e Noll, la dissipazione $\left(5.119\right)$ diviene

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{Y}} \circ \boldsymbol{\natural} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat} \right) \right\} : \dot{\boldsymbol{K}} + \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \circ \boldsymbol{\natural} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat} \right) \right\} : \mathrm{Grad} \dot{\boldsymbol{K}} \ge 0,$$
(5.121)

dove il simbolo \flat , indica la lista ridotta di variabili $\flat = (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \text{Grad}\mathbf{K}, \mathfrak{X}).$

Osservazione.

Si nota che la relazione

$$\boldsymbol{P} = \mathcal{G}^{\boldsymbol{P}} \circ \boldsymbol{\natural} = \frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ \boldsymbol{\flat}, \qquad (5.122)$$

implica che $\mathcal{G}^{\mathbf{P}} \circ \natural = \mathcal{H}^{\mathbf{P}} \circ \flat$, da cui deriva che la variabile costitutiva dipendente \mathbf{P} non dipende nè da \mathbf{K} nè da Grad \mathbf{K} . Per le grandezze $\mathbf{Y} \in \mathbf{\mathcal{Y}}$, in questo caso, non valgono le stesse considerazioni.

5.7.2 Dissipazione residua nello stato naturale

In questa sezione finale mostriamo come ricondurre la dissipazione residua (5.121) allo stato naturale. Per fare questo è opportuno ricordare l'espressione costitutiva dell'energia libera di Helmholtz definita dalla equazione (5.89). Oltre a questo sarà necessario esprimere le variabili cinematiche $\dot{\mathbf{K}}$ e Grad $\dot{\mathbf{K}}$ in termini di $\mathbf{L}_{\rm K}$ e di Grad $\mathbf{L}_{\rm K}$. A tal proposito riscriviamo la espressione (5.121) ricordando che $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{L}_{\rm K}\mathbf{K}$. Operando in questo modo ed omettendo la dipendenza funzionale delle variabili costitutive dipendenti, si ricava la disuguaglianza seguente:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ \boldsymbol{Y} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat} \right) \right\} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \boldsymbol{K} + \left\{ \boldsymbol{\mathcal{Y}} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad} \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat} \right) \right\} : \mathrm{Grad}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \boldsymbol{K}) \ge 0.$$
(5.123)

Utilizzando la proprietà della traccia, il primo termine può essere riscritto

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ \boldsymbol{Y}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat}\right) \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \right\} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} + \left\{ \boldsymbol{\mathcal{Y}} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad}\boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat}\right) \right\} : \mathrm{Grad}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K}) \ge 0.$$
(5.124)

ed utilizzando la relazione (5.99), si ottiene la scrittura

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = J_{\mathrm{K}} \{ \boldsymbol{Y}_{\nu} - [(\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}) - (\boldsymbol{R}_{\nu} : \boldsymbol{\mathfrak{G}})] \boldsymbol{I}_{\nu}^{\mathrm{T}} + J_{\mathrm{K}}^{-1} \boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{R}_{\nu} \boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\mathrm{T}} \} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} + \left\{ \boldsymbol{\mathcal{Y}} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial \mathrm{Grad} \boldsymbol{K}} \circ \boldsymbol{\flat} \right) \right\} : \mathrm{Grad}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \boldsymbol{K}) \ge 0.$$
(5.125)

Il secondo contributo può essere esplicitato osservando la Equazione (5.101). Pertanto notiamo che

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}^{\psi_{\mathrm{R}}}}{\partial [\mathrm{Grad}\boldsymbol{K}]^{\beta}{}_{CB}} \circ \flat \right) = J_{\mathrm{K}} \left(\frac{\partial \hat{\psi}_{\nu,2}}{\partial [\boldsymbol{\mathfrak{G}}]^{\alpha\gamma}} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\alpha\gamma}}{\partial \boldsymbol{K}^{\beta}{}_{C;B}}$$
$$= [\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}_{\nu}]_{\beta\alpha} [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{A} \epsilon^{ABC}.$$
(5.126)

Conseguentemente possiamo scrivere:

$$\{\underbrace{\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\beta}^{CB} - [\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}}]_{\beta\alpha}[\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{A}\epsilon^{ABC}}_{=:\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\beta}^{CB}}\}[\operatorname{Grad}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K})]^{\beta}{}_{CB} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\beta}^{CB}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K})^{\beta}{}_{C;B}$$
(5.127)

Esplicitando la derivata utilizzando la regola di Leibniz si ricava:

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\beta}{}^{CB}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{K})^{\beta}{}_{C,B} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\beta}{}^{CB}[(\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}})^{\beta}{}_{\gamma,B}\boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C} + (\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}})^{\beta}{}_{\gamma}\boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C,B}].$$
(5.128)

Richiamando la legge di trasformazione della 3-forma di Levi-Civita,

$$J_{\rm K} \epsilon^{\alpha \delta \gamma} = \epsilon^{ABC} \boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{A} \boldsymbol{K}^{\delta}{}_{B} \boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C}, \qquad (5.129)$$

si ricava

$$J_{\rm K}^{-1} \epsilon^{ABC} \boldsymbol{K}^{\alpha}{}_{A} = \epsilon^{\alpha \delta \gamma} [\boldsymbol{K}^{-1}]^{B}{}_{\delta} [\boldsymbol{K}^{-1}]^{C}{}_{\gamma}.$$
(5.130)

In questo modo troviamo una riscrittura della grandezza ${\cal Q}$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\beta}^{CB} = \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\beta}^{CB} - (\boldsymbol{R}_{\nu})_{\alpha\beta} [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{A} \epsilon^{ABC} = \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\beta}^{CB} - J_{\mathrm{K}} (\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}})_{\beta\alpha} \epsilon^{\alpha\delta\gamma} [\boldsymbol{K}^{-1}]^{B}{}_{\delta} [\boldsymbol{K}^{-1}]^{C}{}_{\gamma}, \qquad (5.131)$$

che può essere espressa tramite una rappresentazione alternativa

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\beta}^{CB} = \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\beta}^{CB} - J_{\mathrm{K}}(\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}})_{\beta\alpha} [\boldsymbol{K}^{-1} \times \boldsymbol{K}^{-1}]^{\alpha BC}.$$

In particolare, osservando il secondo membro della Equazione (5.128), consideriamo

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\beta}{}^{CB}\boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C} = \underbrace{\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\beta}{}^{CB}\boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C}}_{\equiv J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\beta}{}^{\gamma B}} - J_{\mathrm{K}}(\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}})_{\beta\alpha}\epsilon^{\alpha\delta\gamma}[\boldsymbol{K}^{-1}]^{B}{}_{\delta}, \qquad (5.132)$$

dove si nota che $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\beta}{}^{CB}\boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C} = \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\beta}{}^{CB}[\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}]_{C}{}^{\gamma} = J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\beta}{}^{\gamma B}$. Effettuando una permutazione ciclica degli indici della forma di Levi-Civita, si ottiene

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\beta}{}^{CB}[\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}]_{C}{}^{\gamma} = J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\beta}{}^{\gamma B} - J_{\mathrm{K}}(\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}})_{\beta\alpha}\epsilon^{\gamma\alpha\delta}[\boldsymbol{K}^{-1}]^{B}{}_{\delta}$$
$$= J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\beta}{}^{\gamma B} - J_{\mathrm{K}}(\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{K}^{-1}){}^{\gamma}{}_{\beta}{}^{B}.$$
(5.133)

Introducendo l'operazione left-trasposed, definito sui tensori del terzo ordine come

$$[(\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{K}^{-1})^{LT}]_{\beta}{}^{\gamma B} := (\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{K}^{-1})^{\gamma}{}_{\beta}{}^{B}, \qquad (5.134)$$

otteniamo la scrittura

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\beta}{}^{CB}\boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C} \equiv \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\beta}{}^{CB}[\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}]_{C}{}^{\gamma} = J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\beta}{}^{\gamma B} - J_{\mathrm{K}}[(\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{K}^{-1})^{LT}]_{\beta}{}^{\gamma B}.$$
(5.135)

Riprendendo la Equazione (5.128), ne consideriamo il secondo termine a secondo membro. In particolare, si ha

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\beta}{}^{CB}\boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C,B} = \underbrace{\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\beta}{}^{CB}\boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C,B}}_{\equiv J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\Xi}_{\beta}{}^{\gamma}} - J_{\mathrm{K}}(\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}})_{\beta\alpha} \underbrace{\frac{1}{J_{\mathrm{K}}}[\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{A}\boldsymbol{\epsilon}^{ABC}\boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C,B}}_{\equiv\boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\alpha\gamma}}, \tag{5.136}$$

dove sono state evidenziate le definizioni delle grandezze $J_{\rm K} \Xi$ e \mathfrak{G} che compaiono nella equazione. In questo modo si ottiene

$$\mathcal{Q}_{\beta}{}^{CB}\boldsymbol{K}^{\gamma}{}_{C,B} = J_{\mathrm{K}}\boldsymbol{\Xi}_{\beta}{}^{\gamma} - J_{\mathrm{K}}(\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathfrak{G}})_{\beta}{}^{\gamma}.$$
(5.137)

Inserendo le equazioni (5.135) ed (5.137) nella dissipazione residua (5.125), ed utilizzando opportunamente la (5.128), si deduce quanto segue:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} = J_{\mathrm{K}} \{ \boldsymbol{Y}_{\nu} - [(\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}) - (\boldsymbol{R}_{\nu} : \boldsymbol{\mathfrak{G}})] \boldsymbol{I}_{\nu}^{\mathrm{T}}$$

$$86$$

$$+J_{\mathrm{K}}^{-1}\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{R}_{\nu}\boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\mathrm{T}}\}:\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}+J_{\mathrm{K}}\left\{\boldsymbol{\Xi}-\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathfrak{G}}\right\}:\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}$$
$$+J_{\mathrm{K}}\left\{\boldsymbol{\mathcal{F}}-[(\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{K}^{-1})^{LT}]\right\}:\mathrm{Grad}\boldsymbol{L}_{\mathrm{K}}\geq0.$$
(5.138)

Raggruppando opportunamente i termini si ricava

$$\mathcal{D}_{\nu} \equiv J_{\mathrm{K}}^{-1} \mathcal{D}_{\mathrm{R}} = \left\{ (\boldsymbol{Y}_{\nu} + \boldsymbol{\Xi}) - [(\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}) - (\boldsymbol{R}_{\nu} : \boldsymbol{\mathfrak{G}})] \boldsymbol{I}_{\nu}^{\mathrm{T}} + J_{\mathrm{K}}^{-1} \boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} - (\boldsymbol{R}_{\nu} \boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathfrak{G}}) \right\} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} + \left\{ \boldsymbol{\mathcal{F}} - [(\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{K}^{-1})^{LT}] \right\} : \operatorname{Grad} \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \geq 0.$$
(5.139)

Ricordando la relazione $\Psi = Y_{\nu} + \Xi$, scriviamo

$$\mathcal{D}_{\nu} = \left\{ \Psi - \left[(\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{e} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}) - (\boldsymbol{R}_{\nu} : \boldsymbol{\mathfrak{G}}) \right] \boldsymbol{I}_{\nu}^{\mathrm{T}} + J_{\mathrm{K}}^{-1} \boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} - (\boldsymbol{R}_{\nu} \boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathfrak{G}}) \right\} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} + \left\{ \boldsymbol{\mathcal{F}} - \left[(\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{K}^{-1})^{LT} \right] \right\} : \operatorname{Grad} \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \ge 0.$$
(5.140)

Infine, introducendo le decomposizioni $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}_{en} + \boldsymbol{\Psi}_{d}$ e $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{en} + \boldsymbol{\mathcal{F}}_{d}$, e definendo

$$\Psi_{\text{en}} := [(\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{\text{e}} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}) - (\boldsymbol{R}_{\nu} : \boldsymbol{\mathfrak{G}})]\boldsymbol{I}_{\nu}^{\text{T}} - J_{\text{K}}^{-1}\boldsymbol{K}^{-\text{T}}\boldsymbol{F}^{\text{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}^{\text{T}} + (\boldsymbol{R}_{\nu}\boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\text{T}} + \boldsymbol{R}_{\nu}^{\text{T}}\boldsymbol{\mathfrak{G}})$$
(5.141a)

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\text{en}} := [(\boldsymbol{R}_{\nu}^{\text{T}} \times \boldsymbol{K}^{-1})^{LT}] \ge 0, \qquad (5.141\text{b})$$

si ricava la dissipazione residua dell'energia

$$\mathcal{D}_{\nu} = \Psi_{\mathrm{d}} : \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} + \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{d}} : \operatorname{Grad} \boldsymbol{L}_{\mathrm{K}} \ge 0.$$
 (5.142)

Capitolo 6 Preparazione di un benchmark

L'obiettivo di questo capitolo è quello di fornire le basi modellistiche per la formulazione di un *benchmark*. Per fare ciò utilizzeremo il sistema di equazioni dinamiche (5.10), ricavato nella Sezione 5.1, con il fine di impostare le equazioni del modello, sulla base di ipotesi che permettono di semplificare la trattazione.

Ipotesi del benchmark

Il nostro modello è sviluppato a partire dalle seguenti ipotesi:

1. Sfericità di K: questa assunzione consente di semplificare notevolmente la complessità del sistema dinamico, riducendo il numero di variabili che definiscono il tensore K, passando da 9 a 1. In particolare, supponiamo la validità della seguente espressione:

$$\boldsymbol{K} = \lambda \boldsymbol{I} \qquad [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{A} = \lambda \delta^{\alpha}{}_{A}, \qquad (6.1)$$

dove λ rappresenta la variabile incognita del nostro modello. Si noti che la Equazione (6.1) costituisce di fatto una restrizione della classe di sistemi che possono essere studiati dalla teoria investigata in questa Tesi. Nonostante ciò, osserviamo che l'ipotesi descritta dalla Equazione (6.1) è coerente con il sistema fisico che si intende simulare numericamente, ossia la crescita di un tessuto biologico. Infatti, il tensore sferico definito nella Equazione (6.1) descrive un processo di dilatazione (o restrizione), di cui λ rappresenta il fattore di espansione (o restringimento) lungo una generica direzione ed è adimensionale.

2. Dipendenza unidirezionale di λ : questa ipotesi consente di ridurre il numero di variabili spaziali da cui dipende λ , ossia poniamo con un lieve abuso di notazione

$$\lambda(X^1, X^2, X^3; t) = \lambda(X^1; t), \tag{6.2}$$

dove (X^1, X^2, X^3) rappresentano le coordinate dello spazio rispetto ad un determinato sistema di riferimento e t è il tempo. Da questa ipotesi discende direttamente il seguente risultato:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial X^1} \equiv \lambda_{,1} =: \lambda', \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial X^2} \equiv \lambda_{,2} = 0 \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial X^3} \equiv \lambda_{,3} = 0, \tag{6.3}$$

In particolare, distinguiamo la derivata spaziale di λ da quella temporale, indicando la prima con λ' , e la seconda con $\dot{\lambda}$.

Mostriamo ora quali sono le conseguenze che scaturiscono dalle ipotesi definite dalle Equazioni (6.1),(6.2). Nello specifico siamo interessati a calcolare il *tensore di Burgers* \mathfrak{G} , definito nella Equazione (5.34) ed il tensore \mathcal{Y} , espresso in componenti dalla (5.102). Pertanto consideriamo il temine GradK che scriviamo nel seguente modo:

$$[\operatorname{Grad} \boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{A1} \equiv [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{A,1} = \lambda' \delta^{\alpha}{}_{A} = \begin{bmatrix} \lambda' & 0 & 0\\ 0 & \lambda' & 0\\ 0 & 0 & \lambda' \end{bmatrix}, \qquad (6.4a)$$

$$[\operatorname{Grad} \boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{A2} = [\operatorname{Grad} \boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{A3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
 (6.4b)

In questo modo possiamo calcolare le componenti di $\operatorname{Curl} K$ come segue:

$$[\operatorname{Curl} \boldsymbol{K}]^{A\beta} = \varepsilon^{ACB} [\boldsymbol{K}]^{\beta}{}_{B,C} = \varepsilon^{A1B} [\boldsymbol{K}]^{\beta}{}_{B,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda'\\ 0 & \lambda' & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

dove sono state impiegate le Equazioni (6.4a) e (6.4b) ed utilizzate le proprietà dei simboli di Levi-Civita, ossia che essi siano identicamente nulli se almeno due indici coincidono e che $\varepsilon^{213} = -1$, $\varepsilon^{312} = 1$.

Calcoliamo ora le componenti del tensore di Burgers ${\mathfrak G},$ che ricaviamo nel seguente modo:

$$[\boldsymbol{\mathfrak{G}}]^{\alpha\beta} = \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} [\boldsymbol{K}]^{\alpha}{}_{A} [\operatorname{Curl} \boldsymbol{K}]^{A\beta} = \frac{1}{\lambda^{3}} \lambda \delta^{\alpha}{}_{A} \varepsilon^{A1B} \lambda' \delta^{\beta}{}_{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\lambda'}{\lambda^{2}}\\ 0 & \frac{\lambda'}{\lambda^{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$
(6.6)

Passiamo ora al calcolo delle componenti di \mathcal{Y} . Per fare ciò è opportuno ricavare il tensore \mathbf{R}_{ν} , definito dalla Equazione (5.95), e pertanto effettuiamo la seguente ipotesi per $\psi_{\nu 2}$:

$$\psi_{\nu 2}(\mathfrak{G}) := \frac{k}{2} \eta \mathfrak{G} \eta : \mathfrak{G}, \qquad (6.7)$$

dove $k \in \mathbb{R}^+$ è una costante e η è il tensore metrico di $\mathcal{N}_X(t)$, rappresentabile, in questa sede, come il tensore identità, ossia

$$[\boldsymbol{\eta}]_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
 (6.8)

È possibile dimostrare la seguente espressione,

$$\boldsymbol{R}_{\nu} := \frac{\partial \psi_{\nu 2}}{\partial \boldsymbol{\mathfrak{G}}} = k \, \boldsymbol{\eta} \, \boldsymbol{\mathfrak{G}} \, \boldsymbol{\eta}, \tag{6.9}$$

che, grazie alle ipotesi fatte, diventa:

$$[\mathbf{R}_{\nu}]_{\alpha\beta} = k [\boldsymbol{\eta} \, \boldsymbol{\mathfrak{G}} \, \boldsymbol{\eta}]_{\alpha\beta} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\lambda'}{\lambda^2}\\ 0 & \frac{\lambda'}{\lambda^2} & 0 \end{bmatrix}.$$
(6.10)

Ricordando la definizione di $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$, (5.102), si può procede con il calcolo delle sue componenti. In particolare, notiamo che, ai fini di questa trattazione, è sufficiente calcolare le componenti $[\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}^{A1}$, con $\alpha, A = 1,2,3$, dato che nella terza equazione del sistema dinamico (5.10), il termine $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ compare sotto il simbolo di divergenza, annullando i contributi $[\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}^{A2}$ e $[\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}^{A3}$, per $\alpha, A = 1,2,3$.

$$[\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{A1} = [\boldsymbol{R}_{\nu}^{\mathrm{T}}]_{\alpha\gamma}[\boldsymbol{K}]^{\gamma}{}_{C}\varepsilon^{C1A} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\lambda'}{\lambda^{2}}\\ 0 & -\frac{\lambda'}{\lambda^{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

avendo trasposto la matrice definita nella (6.10) e dato una rappresentazione matriciale del simbolo di Levi-Civita ε^{C1A} , per C, A = 1,2,3. Svolgendo opportunamente i prodotti tra matrici si ottiene

$$[\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}^{A1} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\lambda'}{\lambda} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\lambda'}{\lambda} \end{bmatrix}.$$
 (6.12)

In conclusione, consideriamo la divergenza di $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$,

$$([\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{AB})_{,B} \equiv ([\boldsymbol{\mathcal{Y}}]_{\alpha}{}^{A1})_{,1} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{\lambda'}{\lambda})' & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{\lambda'}{\lambda})' \end{bmatrix} \equiv k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\ln\lambda)'' & 0 \\ 0 & 0 & (\ln\lambda)'' \end{bmatrix}.$$
(6.13)

Concludiamo questa sezione mostrando il calcolo di \boldsymbol{Y}_{en} . Ciò può essere fatto considerando la Equazione (5.106) e la relazione $\boldsymbol{Y}_{\nu} = \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Xi}$. In particolare da queste equazioni segue la validità della seguente espressione

$$\boldsymbol{Y}_{en} \equiv J_{K}\boldsymbol{Y}_{\nu,en}\boldsymbol{K}^{-T} := J_{K}(\boldsymbol{\Psi}_{en} - \boldsymbol{\Xi})\boldsymbol{K}^{-T}$$

$$= J_{K}\{[(\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{e} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}) - (\boldsymbol{R}_{\nu} : \boldsymbol{\mathfrak{G}})]\boldsymbol{I}_{\nu}^{T}$$

$$- J_{K}^{-1}\boldsymbol{K}^{-T}\boldsymbol{F}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}^{T} + \boldsymbol{R}_{\nu}\boldsymbol{\mathfrak{G}}^{T}\}\boldsymbol{K}^{-T}$$

$$\equiv \lambda^{2}\{[(\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{e} + \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}}) - (\boldsymbol{R}_{\nu} : \boldsymbol{\mathfrak{G}})]\boldsymbol{I}$$

$$- J_{K}^{-1}\boldsymbol{K}^{-T}\boldsymbol{F}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}^{T} + \boldsymbol{R}_{\nu}\boldsymbol{\mathfrak{G}}^{T}\}\boldsymbol{I}, \qquad (6.14)$$

dove si è utilizzata la relazione $J_{\rm K} = \lambda^3$, $\mathbf{K}^{-\rm T} \equiv \lambda^{-1} \mathbf{I}$ e abbiamo sostituito $\mathbf{I}_{\nu}^{\rm T}$ con \mathbf{I} per semplicità, non essendo interessati agli aspetti geometrici in questa sede. Pertanto, sulla base della Equazione (6.7), osserviamo che

$$\lambda^{2} \hat{\psi}_{\nu,2} \circ \boldsymbol{\mathfrak{G}} = \lambda^{2} \frac{k}{2} \operatorname{Tr} \left[\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{G} \right] = \lambda^{2} \frac{k}{2} \operatorname{Tr} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda'}{\lambda^{2}} \\ 0 & -\frac{\lambda'}{\lambda^{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda'}{\lambda^{2}} \\ 0 & \frac{\lambda'}{\lambda^{2}} & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
91

$$= \lambda^{2} \frac{k}{2} \operatorname{Tr} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[\frac{\lambda'}{\lambda^{2}}\right]^{2} & 0 \\ 0 & 0 & \left[\frac{\lambda'}{\lambda^{2}}\right]^{2} \end{bmatrix} \right\} = \lambda^{2} \frac{k}{2} 2 \left[\frac{\lambda'}{\lambda^{2}}\right]^{2}$$
$$= k \left[\frac{\lambda'}{\lambda}\right]^{2} \equiv k \left[(\ln\lambda)'\right]^{2}.$$
(6.15)

Inoltre, grazie alla relazione (6.10), si nota che

$$\lambda^{2}(\boldsymbol{R}_{\nu}:\boldsymbol{\mathfrak{G}}) = \lambda^{2}k \operatorname{Tr}\left[\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{G}\right] = \lambda^{2}k \operatorname{Tr}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\lambda'}{\lambda^{2}}\\ 0 & -\frac{\lambda'}{\lambda^{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\lambda'}{\lambda^{2}}\\ 0 & \frac{\lambda'}{\lambda^{2}} & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= k \operatorname{Tr}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \left[\frac{\lambda'}{\lambda}\right]^{2} & 0\\ 0 & 0 & \left[\frac{\lambda'}{\lambda}\right]^{2} \end{bmatrix} \right\} = 2k \left[\frac{\lambda'}{\lambda}\right]^{2} \equiv 2k[(\ln\lambda)']^{2}. \tag{6.16}$$

Consideriamo il termine nella (6.14) che tiene conto degli effetti elastici e, richiamando la Equazione (4.56), osserviamo che possiamo definire il tensore $\hat{H}_1 \circ (F, K)$ come

$$\hat{\boldsymbol{H}}_{1} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) := [\hat{\psi}_{\mathrm{R},1} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K})] \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \bigg[\frac{\partial \hat{\psi}_{\mathrm{R},1}}{\partial \boldsymbol{F}} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) \bigg], \qquad (6.17)$$

dove $\hat{\psi}_{R,1} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K})$ è definita nella Equazione (5.31). Richiamando la Equazione (4.70), definiamo la grandezza corrispettiva nello stato naturale come

$$\hat{\boldsymbol{H}}_{\nu,1} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) := \frac{1}{J_{\mathrm{K}}} \boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}} [\hat{\boldsymbol{H}}_{1} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K})] \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}.$$
(6.18)

In questo modo si può identificare la relazione

$$\lambda^{2}[(\hat{\psi}_{\nu,1} \circ \boldsymbol{F}_{e})\boldsymbol{I} - J_{K}^{-1}\boldsymbol{K}^{-T}\boldsymbol{F}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}^{T}] \equiv \lambda^{2}\hat{\boldsymbol{H}}_{\nu,1} \circ(\boldsymbol{F},\boldsymbol{K}), \qquad (6.19)$$

ed, infine,

$$\lambda^{2} \boldsymbol{R}_{\nu} \boldsymbol{\mathfrak{G}}^{\mathrm{T}} = \lambda^{2} k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda'}{\lambda^{2}} \\ 0 & \frac{\lambda'}{\lambda^{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda'}{\lambda^{2}} \\ 0 & -\frac{\lambda'}{\lambda^{2}} & 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [(\ln\lambda)']^{2} & 0 \\ 0 & 0 & [(\ln\lambda)']^{2} \end{bmatrix}.$$
(6.20)

Conseguentemente, inserendo questi risultati nella (6.14), osserviamo che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}_{\text{en}} = &\lambda^{2} \hat{\boldsymbol{H}}_{\nu,1} \circ (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}) + k \begin{bmatrix} [(\ln\lambda)']^{2} & 0 & 0\\ 0 & [(\ln\lambda)']^{2} & 0\\ 0 & 0 & [(\ln\lambda)']^{2} \end{bmatrix} \\ -& 2k \begin{bmatrix} [(\ln\lambda)']^{2} & 0 & 0\\ 0 & [(\ln\lambda)']^{2} & 0\\ 0 & 0 & [(\ln\lambda)']^{2} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & [(\ln\lambda)']^{2} & 0\\ 0 & 0 & [(\ln\lambda)']^{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$=\lambda^{2}\hat{\boldsymbol{H}}_{\nu,1}\circ(\boldsymbol{F},\boldsymbol{K})-k\begin{bmatrix} [(\ln\lambda)']^{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
 (6.21)

-.

Considerando la relazione costitutiva sulla parte dissipativa di \boldsymbol{Y} ,

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{d}} := a \dot{\boldsymbol{K}} = a \dot{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{I} \equiv a \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda} \end{bmatrix}, \qquad (6.22)$$

dove $\dot{\lambda}$ è la derivata temporale di λ e chiediamo che *a* sia non-negativo in modo da non violare la disuguaglianza della dissipazione (5.107), ossia $a \geq 0$. Con un lieve abuso di notazione identifichiamo $\mathbf{H}_{\nu} \equiv \hat{\mathbf{H}}_{\nu,1} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K})$ e assumiamo che \mathbf{H}_{ν} e \mathbf{Z} siano isotropi con la definizione dei tensori

$$\boldsymbol{H}_{\nu} := \begin{bmatrix} H_{\nu 1} & 0 & 0\\ 0 & H_{\nu 2} & 0\\ 0 & 0 & H_{\nu 3} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Z} := \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0\\ 0 & Z_2 & 0\\ 0 & 0 & Z_3 \end{bmatrix}.$$
(6.23)

e riscriviamo la (6.21),

$$\boldsymbol{Y}_{en} = \lambda^{2} \boldsymbol{H}_{\nu} - k \begin{bmatrix} [(\ln\lambda)']^{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda^{2} H_{\nu 1} - k [(\ln\lambda)']^{2} & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{2} H_{\nu 2} & 0\\ 0 & 0 & \lambda^{2} H_{\nu 3} \end{bmatrix}.$$
(6.24)

Riportiamo la Equazione (4.13), esplicitando la decomposizione di Y,

$$\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Y}_{en} - \boldsymbol{Y}_{d} + \text{Div}\boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{0}, \qquad (6.25)$$

e, utilizzando le equazioni (6.13), (6.22), (6.23)
e(6.24)nella Equazione (6.25), otteniamo infine

$$\begin{bmatrix} Z_1 - \lambda^2 H_{\nu 1} & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 - \lambda^2 H_{\nu 2} & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 - \lambda^2 H_{\nu 3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \left[(\ln \lambda)' \right]^2 - a\dot{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -a\dot{\lambda} + k(\ln \lambda)'' & 0 \\ 0 & 0 & -a\dot{\lambda} + k(\ln \lambda)'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
(6.26)

In questo modo si identificano le equazioni dinamiche di questo benchmark

$$\begin{cases} Z_1 - \lambda^2 H_{\nu 1} + k \left[(\ln \lambda)' \right]^2 - a\dot{\lambda} = 0, \\ Z_2 - \lambda^2 H_{\nu 2} - a\dot{\lambda} + k (\ln \lambda)'' = 0, \\ Z_3 - \lambda^2 H_{\nu 3} - a\dot{\lambda} + k (\ln \lambda)'' = 0. \end{cases}$$
(6.27)

Imponendo opportune condizioni al bordo e assegnando una condizione iniziale è possibile calcolare la soluzione del sistema (6.27).

Capitolo 7

Discussione dei risultati ottenuti e conclusione

In questa sezione elenchiamo schematicamente i risultati ottenuti durante lo svolgimento di questa Tesi. Ricordiamo che gli argomenti trattati in questa Tesi sono di interesse in ambito biomeccanico. In particolare, la nostra attenzione è rivolta alla modellizzazione di fenomeni di crescita (variazione di massa) e di rimodellamento (variazione delle proprietà strutturali) di una determinata classe di tessuti biologici, ossia a processi che avvengono in concomitanza a trasformazioni strutturali dei tessuti in cui essi hanno luogo. Essi sono stati trattati riadattando una classe di strumenti inizialmente concepiti per descrivere fenomeni anelastici in materiali non viventi formulati ad esempio da Gurtin and Anand [2005a].

Di seguito riportiamo gli obiettivi raggiunti:

- 1. Formulazione basata sul linguaggio della *Geometria Differenziale*. In particolare, estensione dei risultati conseguiti da Gurtin and Anand [2005a] con *formalismo covariante*.
- 2. Applicazione del *Principio delle Potenze Virtuali* per la descrizione di *fenomeni anelastici*, e in particolare quelli legati alla *crescita*, con un modello di *primo gradiente* nel moto e nelle distorsioni anelastiche.
- 3. Applicazione della *Teoria del Legame Costitutivo* e considerazioni sulla *dissipazione* e sulla *oggettività*.
- 4. Riadattamento della trattazione svolta da Gurtin and Anand [2005a] per modelli di crescita. In particolare, abbiamo considerato $J_{\rm K} \neq 1$ e $C_{\rm e}L_{\rm K}$ non simmetrico.
- 5. Preparazione di un *benchmark* con ipotesi di crescita *sferica* con dipendenza *unidirezionale*.

Sulla base del lavoro svolto in questa Tesi, proponiamo alcuni possibili sviluppi:

- 1. Simulazione numerica del benchmark proposto.
- 2. Definizione di nuovi benchmark, considerando ad esempio una crescita trasversalmente isotropa o isotropa anziché sferica.
- 3. Preparazione di un benchmark che tenga conto di *effetti dissipativi di ordine superiore*, come quelli prodotti dalle forze generalizzate duali a Grad $L_{\rm K}$ (si veda la Sezione 5.7).
- 4. Ulteriori *considerazioni teoriche* sulla geometria del problema, lavorando ad esempio su spazi con una *torsione* non nulla, ossia sulle cosiddette *varietà di Weitzenböck* Goriely [2017].
- 5. Ulteriori considerazioni teoriche sulle trasformazioni di invarianza della fisica, con il fine di identificare le cosiddette simmetrie di gauge. A tal proposito sarebbe interessante considerare il limite di un approccio analitico che consenta di formulare il problema in forma variazionale, a partire dalla definizione della Lagrangiana e della Azione.

Bibliografia

- J. Bonet and R. D. Wood. Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. Cambridge University Press, New York, 2008. doi: 10.1017/CBO9780511755446.
- H. Brezis. Analisi Funzionale Teoria e Applicazioni. Liguori Editore, 1986. ISBN 88-207-1501-5.
- P. Cermelli and M. E. Gurtin. On the characterization of geometrically necessary dislocations in finite plasticity. Report 00-CNA-005, National Science Foundation, 2001.
- P. Cermelli, E. Fried, and S. Sellers. Configurational stress, yield and flow in rateindependent plasticity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 457:1447–1467, 2001. doi: 10.1098/ rspa.2001.0786.
- P. Cermelli, E. Fried, and M. E. Gurtin. Transport relations for surface integrals arising in the formulation of balance laws for evolving fluid interfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, 544(1):339, nov 2005. doi: 10.1017/s0022112005006695.
- P. Ciarletta and M. Ben Amar. Pattern formation in fiber-reinforced tubular tissues: Folding and segmentation during epithelial growth. *Journal of the Mechanics and Physics* of Solids, 60:525–537, 2012. doi: 10.1016/j.jmps.2011.11.004.
- P. Ciarletta and G. A. Maugin. Elements of a finite strain-gradient thermomechanical theory for material growth and remodeling. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46:1341–1346, 2011. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.07.004.
- P. Ciarletta, D. Ambrosi, and G. A. Maugin. Mass transport in morphogenetic processes: A second gradient theory for volumetric growth and material remodeling. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60:432–450, 2012. doi: 10.1016/j.jmps.2011.11.011.
- S. Cleja-Tigoiu. Differential geometry approach to continuous model of micro-structural defects in finite elasto-plasticity. *Symmetry*, 13(12):1–20, 2021. doi: 10.3390/sym13122340.
- E. Crevacore, S. Di Stefano, and A. Grillo. Coupling among deformation, fluid flow, structural reorganisation and fibre reorientation in fibre-reinforced, transversely isotropic biological tissues. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 111:1–13, may 2019. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.022.

- G. De Marco. Analisi Due secondo corso di analisi matematica teoria ed esercizi–. Zanichelli (seconda edizione), 1999.
- G. Del Piero. On the method of virtual power in continuum mechanics. Journal Of Mechanics Of Materials And Structures, 4(2):281–292, 2009. doi: 10.2140/jomms.2009. 4.281.
- G. Del Piero. On the method of virtual power in the mechanics of non-classical continua, November 2012.
- G. Del Piero. On classical continuum mechanics, two-scale continua, and plasticity. Mathematics and Mechanics of Complex Systems, 8(3):201–231, 2020. doi: 10.2140/memocs.2020.8.201.
- F. Dell'Isola, S. R. Eugster, R. Fedele, and P. Seppecher. Second-gradient continua: From lagrangian to eulerian and back. *Mathematics and Mechanics of Solids*, In stampa:1–36, 2022. doi: 10.1177/10812865221078822.
- A. Di Carlo and S. Quiligotti. Growth and balance. Mechanics Research Communications, 29(6):449–456, nov 2002. doi: 10.1016/s0093-6413(02)00297-5.
- S. Di Stefano, Ariel Ramírez-Torres, Raimondo Penta, and Alfio Grillo. Self-influenced growth through evolving material inhomogeneities. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 106:174–187, nov 2018. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.003.
- J. Drucker. *Plasticity Theory*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2008.
- M. Epstein. The split between remodelling and aging. International Journal of Non-Linear Mechanics, 44(6):604–609, jul 2009. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2009.02.005.
- M. Epstein. The geometric language of continuum mechanics. Cambridge University Press, 2010. doi: 10.1017/CBO9780511762673.
- M. Epstein and M. Elżanowski. Material Inhomogeneities and their Evolution A Geometric Approach. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2007. doi: 10.1007/978-3-540-72373-8.
- M. Epstein and G. A. Maugin. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies. International Journal of Plasticity, 16(7-8):951–978, jun 2000. doi: 10.1016/ s0749-6419(99)00081-9.
- M. Epstein and R. Segev. Differentiable manifolds and the principle of virtual work in continuum mechanics. J. Math. Phys., 21:1243–1245, 1980.
- A. C. Eringen. Mechanics of Continua. Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.
- M. Fabrizio and A. Morro. *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1987.

- R. Fedele. Piola's approach to the equilibrium problem for bodies with second gradient energies. part i: First gradient theory and differential geometry. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 34:445–474, 2022. doi: 10.1007/s00161-021-01064-6.
- S. Federico. Covariant formulation of the tensor algebra of non-linear elasticity. Int. J. Nonlinear Mech., 47:273–284, 2012. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.06.007.
- S. Federico and A. Grillo. Elasticity and permeability of porous fibre-reinforced materials under large deformations. *Mechanics of Materials*, 44:58–71, 2012. doi: 10.1016/j. mechmat.2011.07.010.
- S. Federico and A. Grillo. Linear elastic composites with statistically oriented spheroidal inclusions. In *Micromechanics and Nanomechanics of Composite Solids*, pages 307–346. Springer International Publishing, jul 2017. doi: 10.1007/978-3-319-52794-9_11.
- S. Federico, A. Grillo, and R. Segev. Material description of fluxes in terms of differential forms. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 28:379–390, 2016.
- S. Federico, M. F. Alhasadi, and A. Grillo. Eshelby's inclusion theory in light of noether's theorem. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 7(3):247–285, dec 2019. doi: 10.2140/memocs.2019.7.247.
- Salvatore Federico. Some remarks on metric and deformation. Mathematics and Mechanics of Solids, 20(5):522–539, 2015. doi: 10.1177/1081286513506432.
- B. Felsager. Geometry, Particles, and Fields. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1998. ISBN 0-387-98267-1.
- S. Forte, L. Preziosi, and M. Vianello. Meccanica dei Continui. Springer, 2019.
- Y. C. Fung. Biomechanics. Motion, flow, stress, and growth. Springer, New York, 1990. doi: 10.1007/978-1-4419-6856-2.
- Y. C. Fung. What are the residual stresses doing in our blood vessels? Annals of Biomedical Engineering, 19(3):237–249, may 1991. doi: 10.1007/bf02584301.
- Y. C. Fung. Stress, strain, growth, and remodeling of living organisms. In *Theoretical, Experimental, and Numerical Contributions to the Mechanics of Fluids and Solids*, pages 469–482. Birkhäuser Basel, 1995. doi: 10.1007/978-3-0348-9229-2_25.
- J. F. Ganghoffer. On eshelby tensors in the context of the thermodynamics of open systems: application to volumetric growth. *International Journal of Engineering Science*, 48(12):2081–2098, 2010. doi: 10.1016/j.ijengsci.2010.04.003.
- K. Garikipati, E. M. Arruda, K. Grosh, H. Narayanan, and S. Calve. A continuum treatment of growth in biological tissue: the coupling of mass transport and mechanics. J. Mech. Phys. Solids, 52:1595–1625, 2004. doi: 10.1016/j.jmps.2004.01.004.
- P. Germain. Sur l'application de la méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. C. R. Acad. Sci. A, 274:1051–1055, 1972.

- C. Giverso and L. Preziosi. Modelling the compression and reorganization of cell aggregates. *Math. Med. Biol.*, 29(2):181–204, 2012. doi: 10.1093/imammb/dqr008.
- Alain Goriely. The Mathematics and Mechanics of Biological Growth. Springer New York, 2017. doi: 10.1007/978-0-387-87710-5.
- A. Grillo, S. Federico, and G. Wittum. Growth, mass transfer, and remodeling in fiberreinforced, multi-constituent materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47:388–401, 2012. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.09.026.
- A. Grillo, G. Wittum, A. Tomic, and S. Federico. Remodelling in statistically oriented fibre-reinforced materials and biological tissues. *Math. Mech. Solids*, 20(9):1107–1129, 2015. doi: 10.1177/1081286513515265.
- A. Grillo, R. Prohl, and G. Wittum. A poroplastic model of structural reorganisation in porous media of biomechanical interest. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 28:579–601, 2016. doi: 10.1007/s00161-015-0465-y.
- A. Grillo, R. Prohl, and G. Wittum. A generalised algorithm for anelastic processes in elastoplasticity and biomechanics. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 22(3):502–527, 2017. doi: 10.1177/1081286515598-661.
- A. Grillo, S. Di Stefano, and S. Federico. Growth and remodelling from the perspective of noether's theorem. *Mechanics Research Communications*, 97:89–95, apr 2019a. doi: 10.1016/j.mechrescom.2019.04.012.
- A. Grillo, S. Di Stefano, A. Ramírez-Torres, and M. Loverre. A study of growth and remodeling in isotropic tissues, based on the anand-aslan-chester theory of strain-gradient plasticity. *GAMM-Mitteilungen*, page e201900015, may 2019b. doi: 10.1002/gamm. 201900-15.
- A. Grillo, S. Di Stefano, and et al. A variational theory of volumetric growth based on the "modified" vakonomic dynamics. *In preparation*, 2021.
- M. E. Gurtin. On a framework for small-deformation viscoplasticity: Free energy, microforces, strain gradients. *International Journal Of Plasticity*, 19(1):47–90, 2001. doi: 10.1016/S0749-6419(01)00018-3.
- M. E. Gurtin. A gradient theory of small-deformation isotropic plasticity that accounts for the burgers vector and for dissipation due to plastic spin. *Journal Of Mechanics* and Physics of Solids, 52(11):2545–2568, 2004. doi: 10.1016/j.jmps.2004.04.010.
- M. E. Gurtin and L. Anand. A theory of strain-gradient plasticity for iso- tropic, plastically irrotational materials. part ii: Finite deformations. *International Journal of Plasticity*, 21:2297–2318, 2005a. doi: 10.1016/j.ijplas.2005.01.006.
- M. E. Gurtin and L. Anand. A theory of strain-gradient plasticity for isotropic, plastically irrotational materials. part i: Small deformations. *Journal Of Mechanics and Physics* of Solids, 7(53):1624–1649, 2005b. doi: 10.1016/j.jmps.2004.12.008.

- M. E. Gurtin and L. Anand. The decomposition $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{e}\mathbf{F}^{p}$, material symmetry, and plastic irrotationality for solids that are isotropic-viscoplastic or amorphous. *International Journal Of Plasticity*, 21(9):1686–1719, 2005c. doi: 10.1016/j.ijplas.2004.11.007.
- M. E. Gurtin, E. Fried, and L. Anand. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge University Press, 2010. doi: 10.1017/CBO9780511762956.
- M. Jammer. Concepts of Force: A Study in the Foundations of Dynamics. Harvard University Press, 1963.
- K. Kondo. On the analytical and physical foundations of the theory of dislocations and yielding by the differential geometry of continua. *International Journal of Engineering Science*, 2(3):219–251, 1964. doi: 10.1016/0020-7225(64)90022-9.
- E. Kröner. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 4(1):273–334, jan 1959. doi: 10.1007/ bf00281393.
- E. Kröner. Mechanics of Generalized Continua. Springer, 1968.
- C. Lanczos. The Variational Principles of Mechanics. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1970.
- V. Licari. Considerazioni sulla possibilità di formulare alcune leggi evolutive della crescita volumetrica di aggregati cellulari come equazioni dinamiche di teorie meccaniche dei processi anelastici. Tesi di Laurea. Politecnico di Torino, 2021.
- I-Shih Liu. Continuum Mechanics. Springer, 2002.
- Y. Liu, H. Zhang, Y. Zheng, S. Zhang, and B. Chen. A nonlinear finite element model for the stress analysis of soft solids with a growing mass. *International Journal of Solids* and Structures, 51(17):2964–2978, 2014. ISSN 0020-7683. doi: https://doi.org/10.1016/ j.ijsolstr.2014.04.010.
- V.A. Lubarda and A. Hoger. On the mechanics of solids with a growing mass. International Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 39:4627–4664, 2002. doi: 10.1016/ S0020-7683(02)00352-9.
- Vlado A Lubarda. Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics . Applied Mechanics Reviews, 57(2):95–108, 04 2004. ISSN 0003-6900. doi: 10.1115/1.1591000.
- S. Preston M. Dolfin, V. Ciancio. Uniform materials and the multiplicative decomposition of the deformation gradient in finite elasto-plasticity. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 33(3):1–26, 2008. doi: 10.1515/JNETDY.2008.009.
- A. Madeo, P. Neff, I. D. Ghiba, L. Placidi, and G. Rosi. Wave propagation in relaxed micromorphic continua: modeling metamaterials with frequency band-gaps. *Continuum Mechanics Thermodynamics*, 27:551–570, 2015. doi: 10.1007/s00161-013-0329-2.

- J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. Methematical Foundations of Elasticity. Prentice-Hall, 1983.
- G. A. Maugin. Material Inhomogeneities in Elasticity. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 1993. doi: 10.1007/978-1-4899-4481-8.
- G. A. Maugin. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials. Journal of Mechanics of Materials and Structures, 4(4):731–741, 2009. doi: 10.2140/jomms. 2009.4.731.
- G. A. Maugin, M. Epstein, and C. Trimarco. Pseudomomentum and material forces in inhomogeneous materials (application to the fracture of electromagnetic materials in electromagnetoelastic fields). *International Journal of Solids and Structures*, 29(14/15): 1889–1900, 1992.
- M. Mićunović. Thermomechanics of Viscoplasticity. Springer New York, 2009. doi: 10.1007/978-0-387-89490-4.
- W. Noll. The Foundations of Mechanics and Thermodynamics: selected papers. Springer, 1974.
- R. Penta, L. Miller, A. Grillo, A. Ramírez-Torres, P. Mascheroni, and R. Rodríguez-Ramos. Porosity and Diffusion in Biological Tissues. Recent Advances and Further Perspectives. In:Constitutive Modelling of Solid Continua. Springer, 2020.
- P. Podio-Guidugli. Configurational balances via variational arguments. Interface Free Bound., 3:323–332, 2001. doi: 10.4171/IFB/39.
- A. Ramírez-Torres, S. Di Stefano, A. Grillo, R. Rodríguez-Ramos, J. Merodio, and R.Penta. An asymptotic homogenization approach to the microstructural evolution of heterogeneous media. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 106:245–257, nov 2018. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2018.06.012.
- G. Rizzi, M. Collet, F. Demore, B. Eidel, P. Neff, and A. Madeo. Exploring metamaterials' structures through the relaxed micromorphic model: Switching an acoustic screen into an acoustic absorber. *Frontiers in Materials*, 7, 2021. ISSN 2296-8016. doi: 10.3389/ fmats.2020.589701.
- W. Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, 1970. ISBN 0-07-054234-1.
- P. Seppecher and H. Abdoul-Anziz. Strain gradient and generalized continua obtained by homogenizing frame lattices. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 6(3): 213–250, 2018. doi: 10.2140/memocs.2018.6.213.
- P. Seppecher, A. Madeo, and F. Dell'Isola. Cauchy tetrahedron argument applied to higher contact interactions. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 219(3):1305–1341, 2016. doi: 10.1007/s00205-015-0922-6.

- P. Seppecher, F. Dell'Isola, J.-J. Alibert, T. Lekszycki, and R. Grygoruk. Pantographic metamaterials: an example of mathematically driven design and of its technological challenges. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 31(4):851–884, 2019. doi: 10.1007/s00161-018-0689-8.
- J.C. Simo and T.J.R. Hughes. Computational Inelasticity. Springer, New York, 1998. doi: 10.1007/b98904.
- D.J. Steigmann. Gradient plasticity in isotropic solids. Mathematics and Mechanics of Solids, 2021. doi: 10.1177/10812865211050212.
- R. Stojanović. Nonlinear Thermo Elasticity. Springer, 1972.
- L.A. Taber. Biomechanics of growth, remodeling, and morphogenesis. Appl. Mech. Rev., 48(8):487, 1995. doi: 10.1115/1.3005109.
- C. Truesdell and W. Noll. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Springer, 1965.
- C. Truesdell and R. A. Toupin. The Classical Field Theories. Springer, 1960.
- L. J. Walpole. Fourth-rank tensors of the thirty-two crystal classes: Multiplication tables. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 391:149–179, 1984. doi: 10.1098/rspa.1984.0008.
- A. Yavari and A. Goriely. Riemann–cartan geometry of nonlinear dislocation mechanics. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 205(1):59–118, 2012a. doi: 10.1007/ s00205-012-0500-0.
- A. Yavari and A. Goriely. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects. Proc. R. Soc. A, 468:3902–3922, 2012b. doi: 10.1098/rspa.2012.0342.