



**Politecnico  
di Torino**

# **POLITECNICO DI TORINO**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Sviluppo di un modello semi-analitico per l'analisi dell'interazione  
dinamica tra pantografo e catenaria**

Relatore:

Prof. Stefano Marchesiello

Ing. Dario Anastasio

Laureando:

Alessio Germinario

# Indice

<b>ABSTRACT</b>	<b>3</b>
<b>INTRODUZIONE</b>	<b>4</b>
<b>1 MODELLO CON CARICHI VIAGGIANTI</b>	<b>6</b>
1.1 Configurazione statica	7
1.2 Analisi dinamica	9
1.3 Variazioni	12
1.3.1 Variazione dell'intensità del carico viaggiante $F_0$	13
1.3.2 Variazione del pretensionamento $T_w$	14
1.3.3 Variazione della velocità $v_0$	16
<b>2 MODELLO CON PANTOGRAFO AD 1 GDL</b>	<b>19</b>
2.1 Analisi dinamica	20
2.2 Confronto tra modelli	25
2.2.1 Confronto modello carico viaggiante e modello 1 GDL	25
2.2.2 Confronto con il penalty method	28
2.3 Analisi con secondo pantografo	33
<b>3 MODELLO FILO DI CONTATTO-FUNE PORTANTE</b>	<b>41</b>
3.1 Confronto modello filo di contatto–fune portante con modello a parametri distribuiti	54
<b>CONCLUSIONI</b>	<b>65</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>67</b>

# Abstract

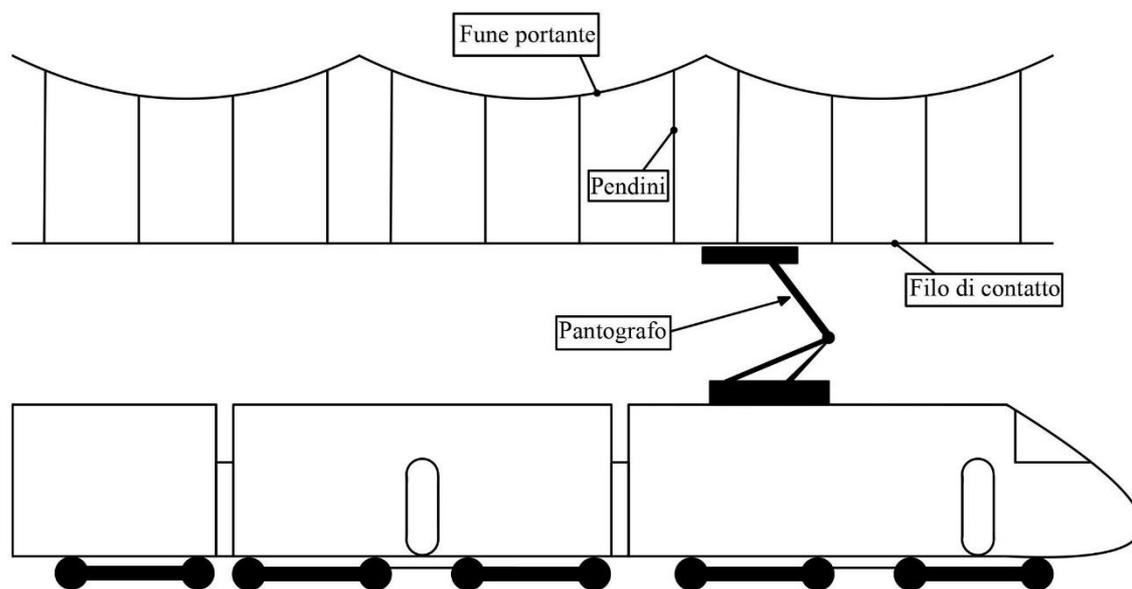
Una delle principali criticità dei sistemi ferroviari riguarda l'assorbimento di potenza elettrica dal filo di contatto per mezzo dei pantografi posti sulla sommità dei convogli. Al fine di poter realizzare soluzioni che possano ridurre le perdite di contatto, principale causa di usura, risulta fondamentale sviluppare un modello matematico in grado, quanto più coerentemente alla realtà possibile, di descrivere l'interazione dinamica tra pantografo, filo di contatto e fune portante, quest'ultimi comunemente indicati con il termine "catenaria". Nel presente lavoro di tesi sono stati descritti tre modelli, di complessità crescente, ottenuti mediante un approccio semi-analitico, sfruttando l'analisi modale. In particolare il primo modello è semplicemente composto dal filo di contatto, approssimato ad una trave di Eulero-Bernoulli con un carico assiale di trazione, e da uno o più carichi viaggianti di modulo costante. Nel secondo modello sono stati introdotti la presenza dei pantografi a contatto diretto con la catenaria e lo smorzamento proporzionale per il filo di contatto. Nell'ultimo modello sono stati implementati la fune portante, anch'essa approssimata ad una trave di Eulero-Bernoulli con un carico assiale di trazione, i pendini, che collegano filo e fune, e i pali di sostegno. Per ciascun modello sono stati realizzati confronti con risultati ottenuti in studi precedenti al fine di poterlo validare. Sono state inoltre realizzate analisi sull'influenza dei diversi parametri utilizzati, come il numero di modi considerati, il pretensionamento del filo di contatto, l'ampiezza della discretizzazione spaziale e/o temporale e il numero di pantografi/carichi viaggianti presenti nel modello.

# Introduzione

L'analisi dell'interazione tra pantografo e catenaria ferroviaria rappresenta una delle vie seguite al fine di individuare soluzioni progettuali innovative a problematiche ormai ben note. Uno dei principali vincoli posti alla massima velocità raggiungibile dai veicoli ferroviari riguarda la capacità di garantire la trasmissione di potenza elettrica in modo continuo, senza interruzioni dovute al distacco tra il pantografo, posto sulla sommità dei convogli ferroviari, e il filo di contatto. Tale distacco è accompagnato dalla formazione di un arco elettrico tra pantografo e filo di contatto. È questa una delle principali cause dell'usura del sistema.

Dal momento che uno studio su prototipi sarebbe di difficile realizzazione dal punto di vista economico e non solo, la realizzazione di un modello matematico rappresenta un'ottima alternativa. È in quest'ottica che si pone lo studio qui proposto, cercando di sviluppare modelli via via più complessi attingendo a studi precedentemente condotti. I modelli sono stati sviluppati seguendo un approccio quanto più possibile analitico, ricorrendo a metodi numerici nel solo caso dell'integrazione numerica.

Al fine di avere una più chiara comprensione del sistema in esame se ne riporta di seguito una rappresentazione schematica (figura 1).



**Figura 1:** Rappresentazione schematica del sistema pantografo-catenaria

Dalla figura 1 si possono notare i componenti principalmente considerati. Essi sono il pantografo, collocato sulla sommità dei convogli ferroviari, il filo di contatto dal quale il pantografo assorbe la potenza elettrica, supportato dalla fune portante attraverso i pendini. Il pantografo è generalmente composto da più bracci al quale è collegato un pattino, sulla

cui lunghezza si ha il contatto con la catenaria. Al pantografo è generalmente applicato un carico verticale al fine di mantenerne il contatto con la catenaria sopra di esso.

Il sistema è realizzato in modo tale che il punto di contatto esplori una buona parte della lunghezza del pattino, così da evitare la rapida usura di un singolo punto. Nel seguente studio non è stato considerato lo spostamento orizzontale del punto di contatto, volendo focalizzare l'attenzione sullo spostamento verticale.

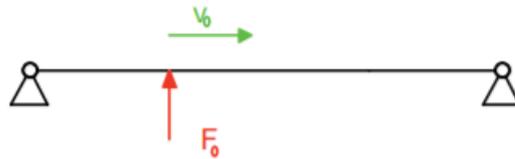
I pendini e la fune portante sono posti ad un'altezza tale da rendere il filo di contatto più lineare possibile. Per migliorare questa configurazione il filo di contatto, così come la fune portante, sono sottoposti ad un pretensionamento assiale.

Il sistema così descritto risulta sottoposto a notevoli vibrazioni, in particolare quando si raggiungono velocità elevate.

# 1 Modello con carichi viaggianti

Il primo problema affrontato riguarda l'introduzione del secondo pantografo e l'analisi dei suoi effetti sul comportamento dinamico del sistema.

Il sistema è stato in un primo momento semplificato, considerando soltanto il filo di contatto, semplicemente poggiato, lungo 20m e con sezione di 150mm<sup>2</sup>. I due pantografi sono stati sostituiti da due carichi viaggianti di intensità costante di 200N, che si muovono alla stessa velocità costante di 250km/h e distanti 200m l'un l'altro.



**Figura 1.1:** Schema filo di contatto e carico viaggiante

È stato utilizzato un modello continuo per il filo di contatto, coerentemente a quanto fatto nello studio precedente di Strauss [1], in particolare la teoria della trave snella di Eulero-Bernoulli, il cui comportamento è descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E I_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - T_w v \right) = f(x, t) \quad (1)$$

dove  $\rho$  è la densità del materiale,  $A$  è la sezione,  $v$  è lo spostamento verticale della trave,  $E$  è il modulo elastico del materiale considerato,  $I_y$  è il momento d'inerzia della sezione trasversale della trave,  $T_w$  è il pretensionamento del filo di contatto ed  $f(x, t)$  è la forzante. Nel caso considerato questa ha la seguente espressione:

$$f(x, t) = F_0 \delta(x - v_0 t) + F_0 \delta(x - l_0 - v_0 t) - \rho A g \quad (2)$$

dove  $F_0$  è la forza di modulo costante,  $\delta$  è la distribuzione delta di Dirac.

Si riportano di seguito i dati utilizzati:

Grandezza	Modulo	Unità di misura
l	20	m
$\rho$	8940	kg/m <sup>3</sup>
E	110	GPa
A	150	mm <sup>2</sup>
I <sub>y</sub>	2082.43	mm <sup>4</sup>
l <sub>0</sub>	200	m
T <sub>w</sub>	20	kN
F <sub>0</sub>	200	N
v <sub>0</sub>	250	km/h
dt	0.0016	s

**Tabella 1.1:** Dati del sistema pantografo e filo di contatto

## 1.1 Configurazione statica

Prima di poter analizzare il comportamento dinamico del sistema è necessario calcolare la deformazione dovuta al peso proprio del filo di contatto. Di conseguenza l'equazione differenziale (1) diventa:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - T_w v \right) = -\rho Ag \quad (3)$$

La soluzione è ottenuta sommando la soluzione dell'omogenea associata all'integrale particolare. Quest'ultimo è il seguente:

$$v_{ip} = \frac{\rho Ag}{2T_w} x^2 \quad (4)$$

Per quanto riguarda l'omogenea associata, essa è:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - T_w v \right) = 0 \quad (5)$$

Ne consegue che la soluzione è del tipo:

$$v_{oa} = e^{\lambda x} \quad (6)$$

Con  $\lambda$  autovalore non ancora determinato. Sostituendo nell'equazione omogenea associata (5) si ottiene il polinomio caratteristico seguente:

$$EI_y \lambda^4 - T_w \lambda^2 = 0 \quad (7)$$

Si ottengono così quattro autovalori, ovvero:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = -\lambda_4 = \sqrt{\frac{T_w}{EI_y}} \quad (8)$$

Per cui la soluzione dell'omogenea associata è:

$$v_{oa} = A_1 + A_2x + A_3e^{\sqrt{\frac{T_w}{EI_y}}x} + A_4e^{-\sqrt{\frac{T_w}{EI_y}}x} \quad (9)$$

Mentre la soluzione completa è:

$$v = A_1 + A_2x + A_3e^{\sqrt{\frac{T_w}{EI_y}}x} + A_4e^{-\sqrt{\frac{T_w}{EI_y}}x} + \frac{\rho Ag}{2T_w}x^2 \quad (10)$$

Per determinare le costanti  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_4$  occorre applicare le condizioni al contorno, che per una trave semplicemente poggiata sono le seguenti:

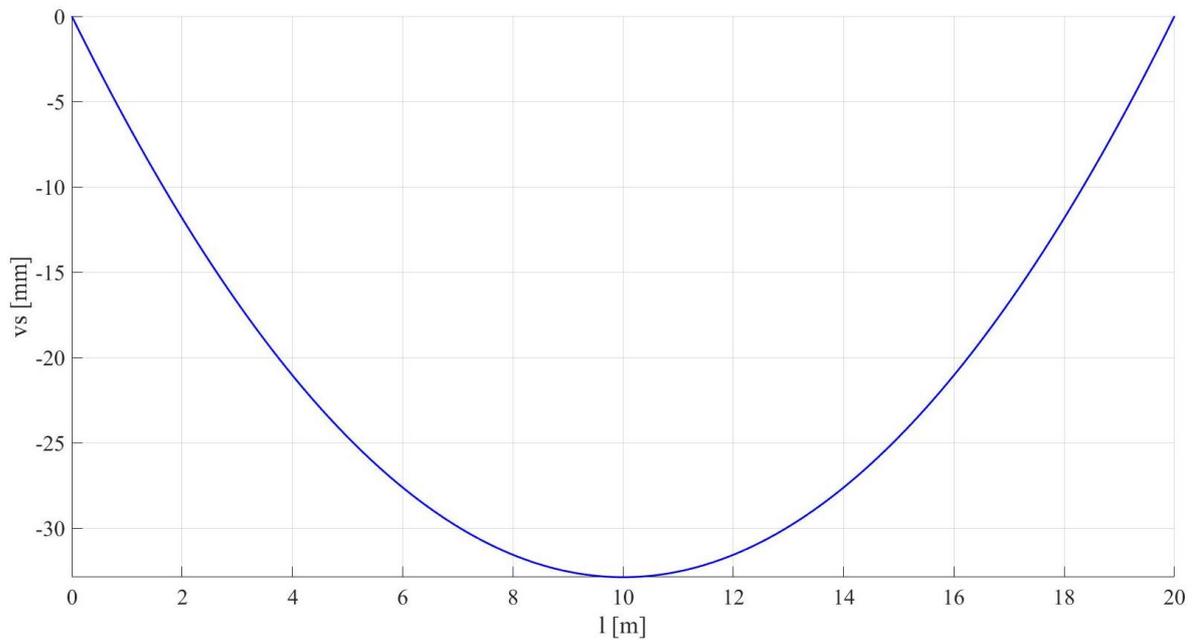
$$\begin{cases} v(x=0)=0 \\ v(x=l)=0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x=0)=0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x=l)=0 \end{cases} \quad (11)$$

Corrispondenti a spostamenti e momenti nulli in corrispondenza dei vincoli.

La soluzione completa è la seguente:

$$v = \frac{\rho Agl}{2T_w} \left( - \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{T_w}{EI_y}}} + \frac{1}{2} \right) e^{\sqrt{\frac{T_w}{EI_y}}(x-l)} + \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{T_w}{EI_y}}} - \frac{1}{2} \right) e^{-\sqrt{\frac{T_w}{EI_y}}(x-l)} \right) + \frac{\rho Ag}{2T_w}x^2 \quad (12)$$

Il cui grafico è riportato di seguito.



**Figura 1.2:** Deformazione statica del filo di contatto

## 1.2 Analisi dinamica

A questo punto è possibile passare alla dinamica del sistema.

Per poter trovare la soluzione dell'equazione differenziale è necessario ricorrere al teorema di espansione:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_i(t) \quad (13)$$

Dove  $\Phi_i$  sono le autofunzioni, o forme modali, mentre le  $\eta_i$  sono le coordinate modali. Nell'analisi in esame sono stati considerati i primi 10 modi, dal momento che considerarne un numero maggiore non comporta un miglioramento dei risultati ottenuti, dilatando invece i tempi di calcolo. Per cui lo spostamento verticale è:

$$v(x, t) \cong \sum_{i=1}^{10} \Phi_i(x) \eta_i(t) \quad (14)$$

In questa fase le forme modali sono espresse da sinusoidi, come tipicamente avviene per la trave appoggiata-appoggiata, cioè:

$$\Phi_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \quad i \in \mathbb{N} \quad (15)$$

Ne consegue che le pulsazioni naturali  $\omega_i$  sono calcolabili, seguendo [1], con la seguente formula:

$$\omega_i = \frac{i\pi}{1} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A} \left(\frac{i\pi}{1}\right)^2 + \frac{T_w}{\rho A}} \quad (16)$$

A questo punto è possibile procedere con il disaccoppiamento modale, calcolando le masse modali  $m_i$  e le rigidezze modali  $k_i$ :

$$m_i = \int_0^1 \rho A \Phi_i(x)^2 dx = \frac{\rho A l}{2} \quad (17)$$

$$k_i = \int_0^1 EI_y \frac{\partial^4 \Phi_i(x)}{\partial x^4} \Phi_i(x) - T_w \frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} \Phi_i(x) dx = m_i \omega_i \quad (18)$$

Analogamente è possibile calcolare le forze generalizzate  $f_i$ :

$$f_i(t) = \int_0^1 \Phi_i(x) f(x, t) dx = F_0 \sin\left(\frac{i\pi}{1} v_0 t\right) + F_0 \sin\left(\frac{i\pi}{1} v_0 \left(t - \frac{l_0}{v_0}\right)\right) \quad (19)$$

È infine possibile calcolare le coordinate modali  $\eta_i$  tramite l'integrale di convoluzione, seguendo [2]:

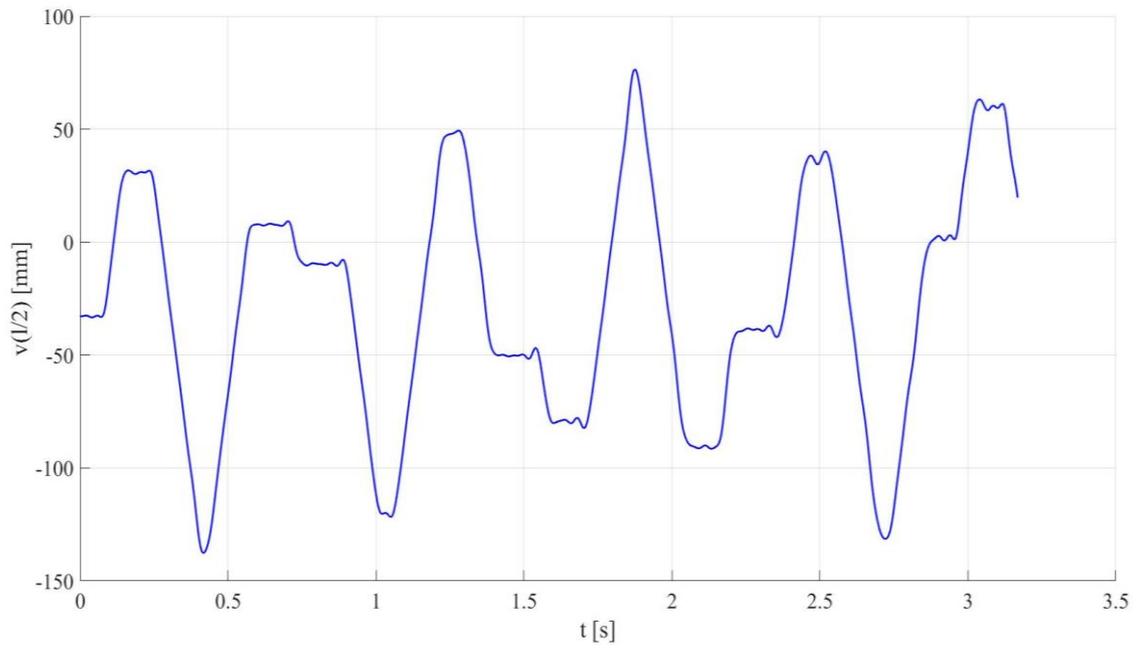
$$\eta_i = \int_0^t h_i(\tau) f_i(t - \tau) d\tau \quad (20)$$

Dove  $h_i$  è la  $i$ -esima risposta all'impulso applicato ad un sistema non smorzato:

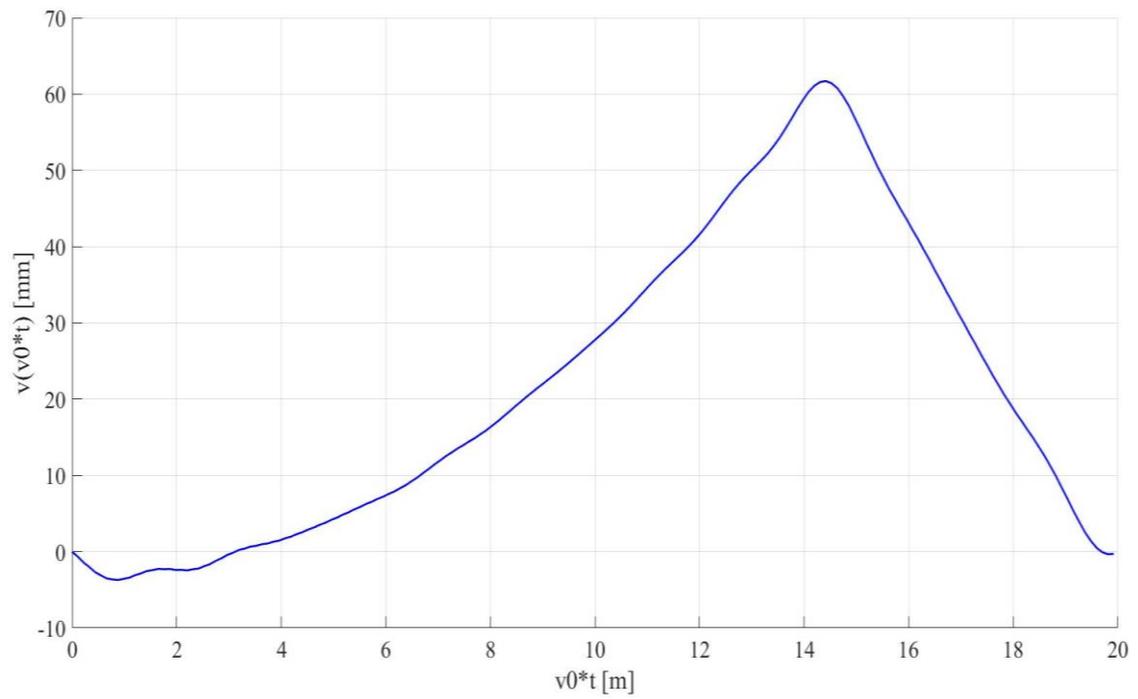
$$h_i(\tau) = \frac{\sin(\omega_i \tau)}{m_i \omega_i} \quad (21)$$

Nel codice MATLAB realizzato, l'integrale di convoluzione è stato risolto utilizzando la funzione "conv", già implementata nelle librerie del programma.

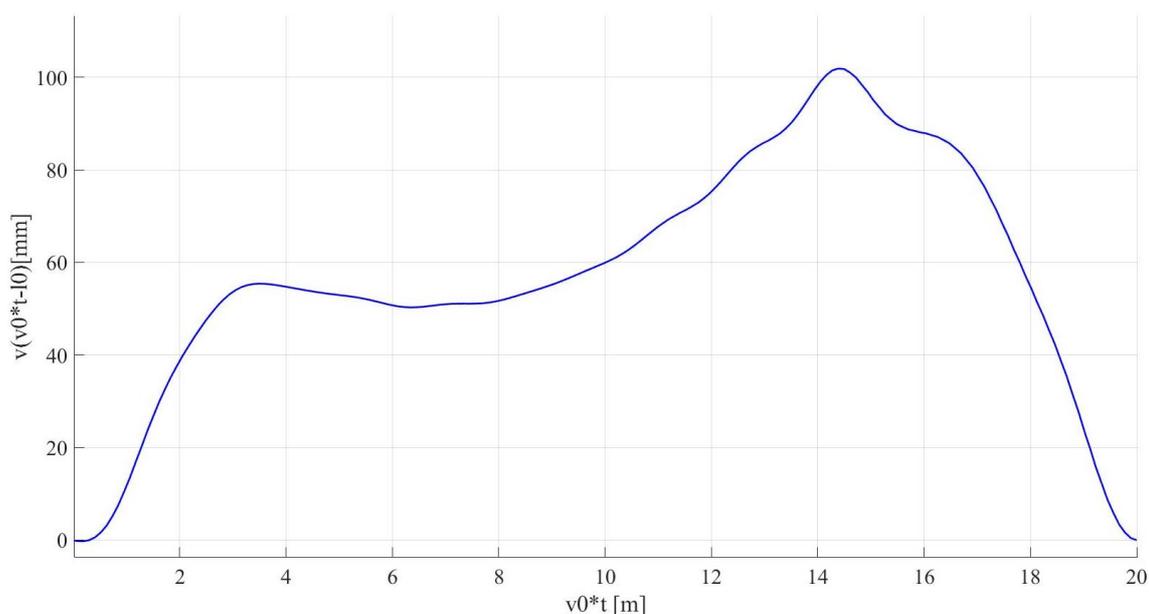
A questo punto è possibile sfruttare il principio di sovrapposizione per ottenere la risposta completa del sistema ai due carichi viaggianti e alla forza peso. Sono di seguito riportate le figure dello spostamento della mezzeria in funzione del tempo (figura 1.3) e gli spostamenti visti dai pantografi/carichi viaggianti (figure 1.4 e 1.5).



**Figura 1.3:** Spostamento della mezzeria del filo di contatto



**Figura 1.4:** Spostamento in corrispondenza del primo pantografo/carico viaggiante



**Figura 1.5:** Spostamento in corrispondenza del secondo pantografo/carico viaggiante

In merito alla figura 1.3, il primo carico viaggiante raggiunge la mezzeria intorno all'istante 0.144s, mentre supera la campata a 0.288s. Segue la risposta libera del sistema, fino all'istante 2.88s, quando il secondo carico raggiunge l'inizio della campata. Ciò significa che il massimo spostamento registrato, a circa 1.8s, è il risultato della sovrapposizione delle onde riflesse e non dell'effetto diretto del primo o secondo carico. Per quanto riguarda gli spostamenti in corrispondenza dei pantografi/carichi viaggianti (figure 1.4 e 1.5) risulta evidente che lo spostamento causato dal secondo pantografo sia maggiore di circa 40mm.

## 1.3 Variazioni

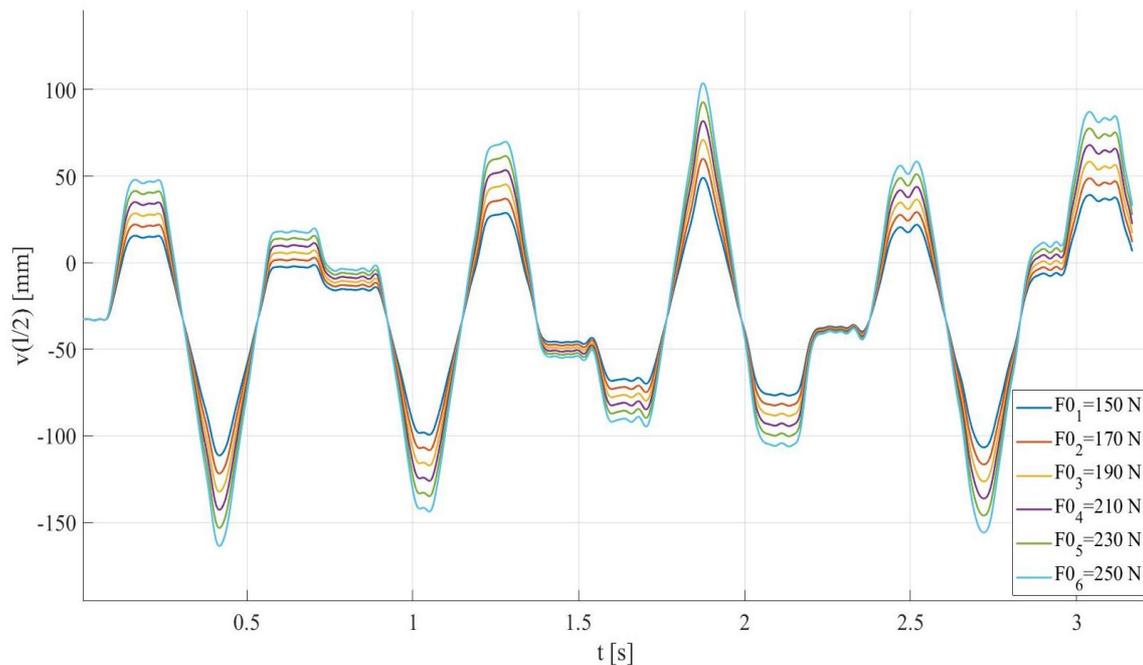
Sono di seguito riportati casi in cui sono state apportate variazioni ad alcuni dati, in intervalli plausibili, prendendo come riferimenti la normativa EN 50318 [3] e l'articolo "Adoption of different pantographs' preloads to improve multiple collection and speed up existing lines" [4].

I valori presi in esame sono:

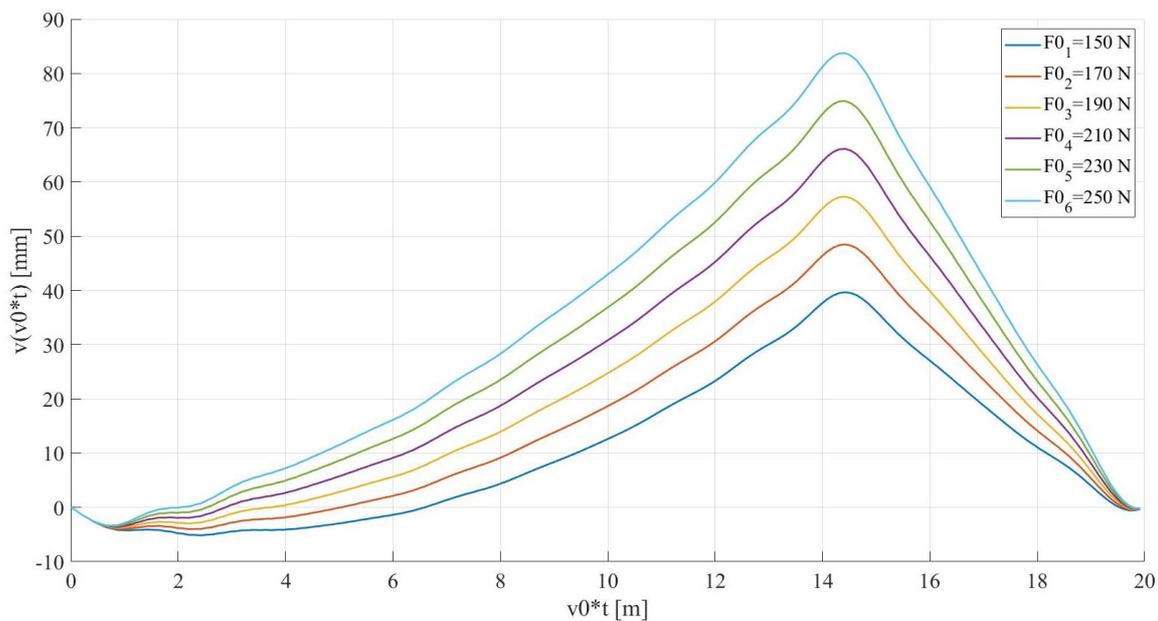
- l'intensità del carico viaggiante  $F_0$ ;
- l'intensità della forza di pretensionamento del filo di contatto  $T_w$ ;
- la velocità di spostamento del carico  $v_0$ .

### 1.3.1 Variazione dell'intensità del carico viaggiante $F_0$

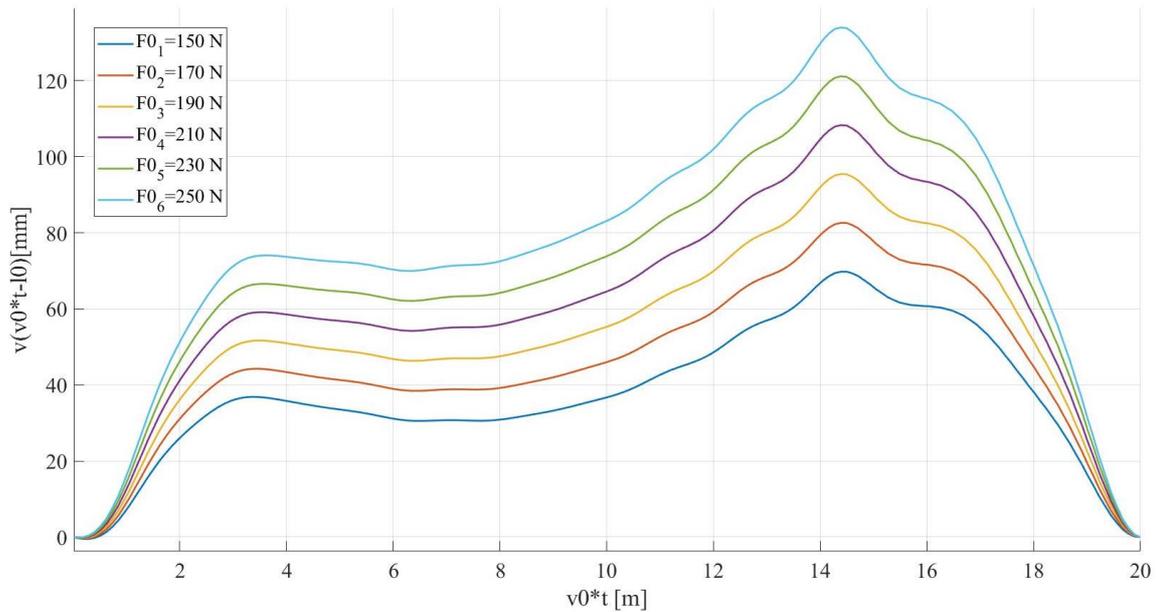
La prima variazione analizzata riguarda l'intensità del carico viaggiante  $F_0$ , per la quale sono stati considerati 6 diversi valori nell'intervallo (150;250) N.



**Figura 1.7:** Spostamenti in corrispondenza della mezzeria



**Figura 1.8:** Spostamenti in corrispondenza del primo carico



**Figura 1.9:** Spostamenti in corrispondenza del secondo carico

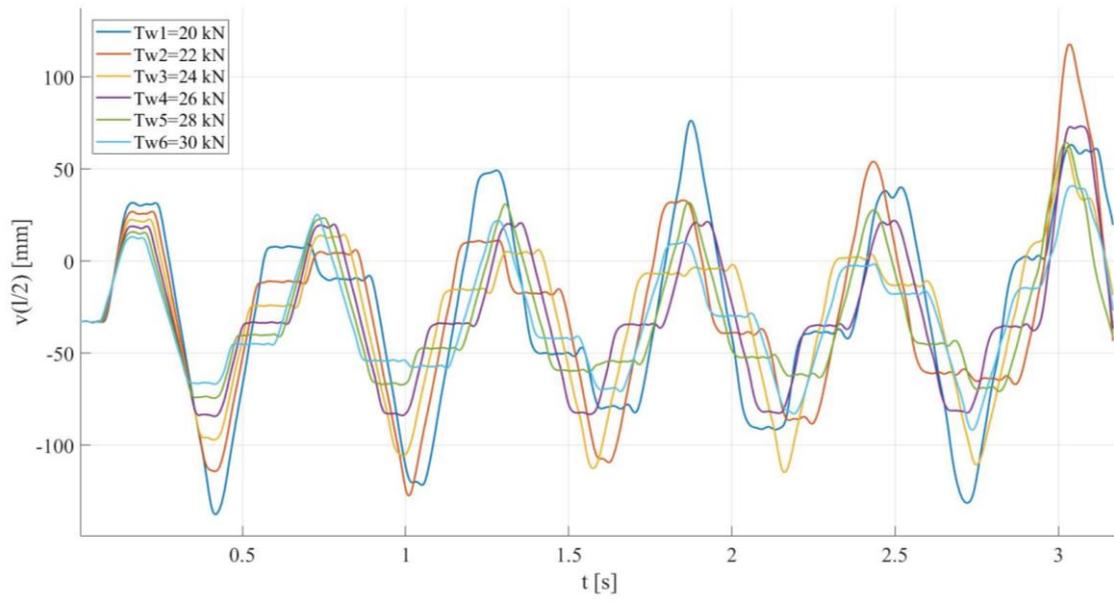
Risulta evidente osservando la figura 1.7 come, variando il carico, l'effetto sia un aumento, in termini di valore assoluto, degli spostamenti, mantenendo ovviamente picchi e valli nei medesimi punti del filo di contatto. Si è passato infatti dal un valore massimo dello spostamento in corrispondenza del primo carico di 39.66mm per il carico di 150N ad un valore di 83.76mm per una forza di 250N.

Per il secondo carico invece, si è passati da 69.72mm a 134mm, per gli stessi due rispettivi moduli delle forze precedentemente citati.

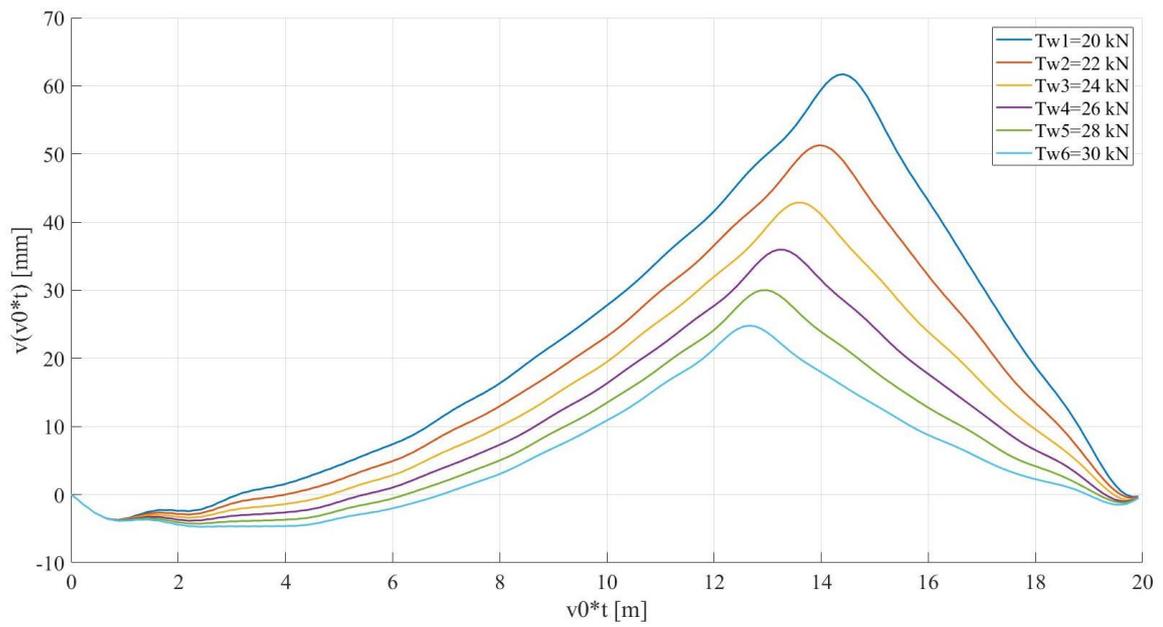
Mentre per la mezzeria, si è passati da uno spostamento di 49.13mm ad uno di 103.8mm.

### 1.3.2 Variazione del pretensionamento $T_w$

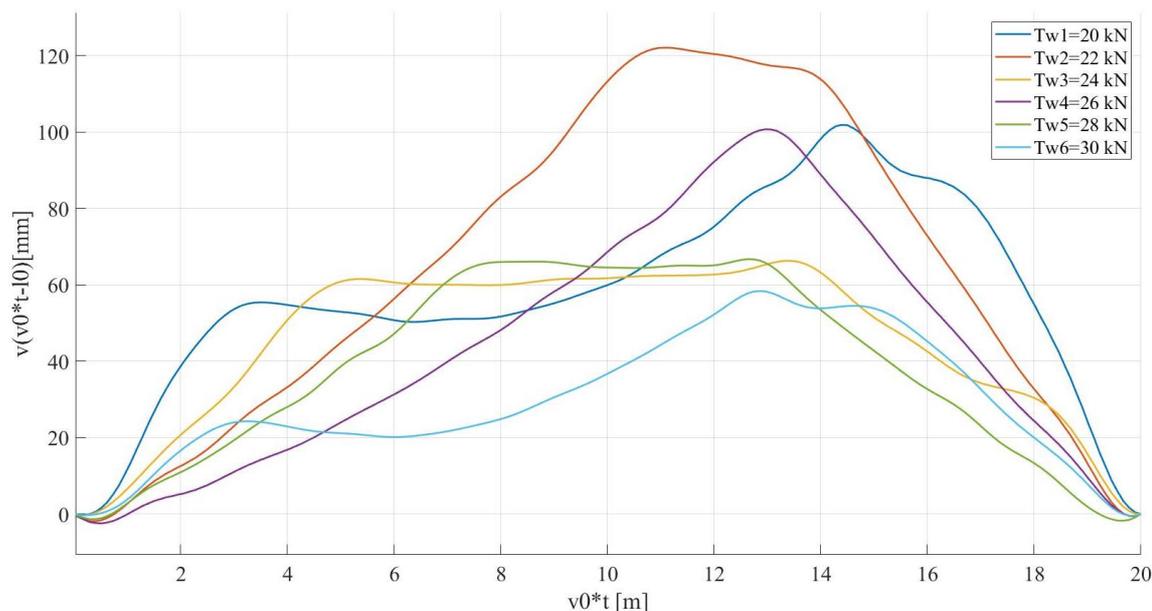
Successivamente si è studiato l'effetto della variazione della forza di pretensionamento  $T_w$ , prendendo 6 valori differenti nell'intervallo (20;30)kN.



**Figura 1.10:** Spostamenti in corrispondenza della mezzeria



**Figura 1.11:** Spostamenti in corrispondenza del primo carico

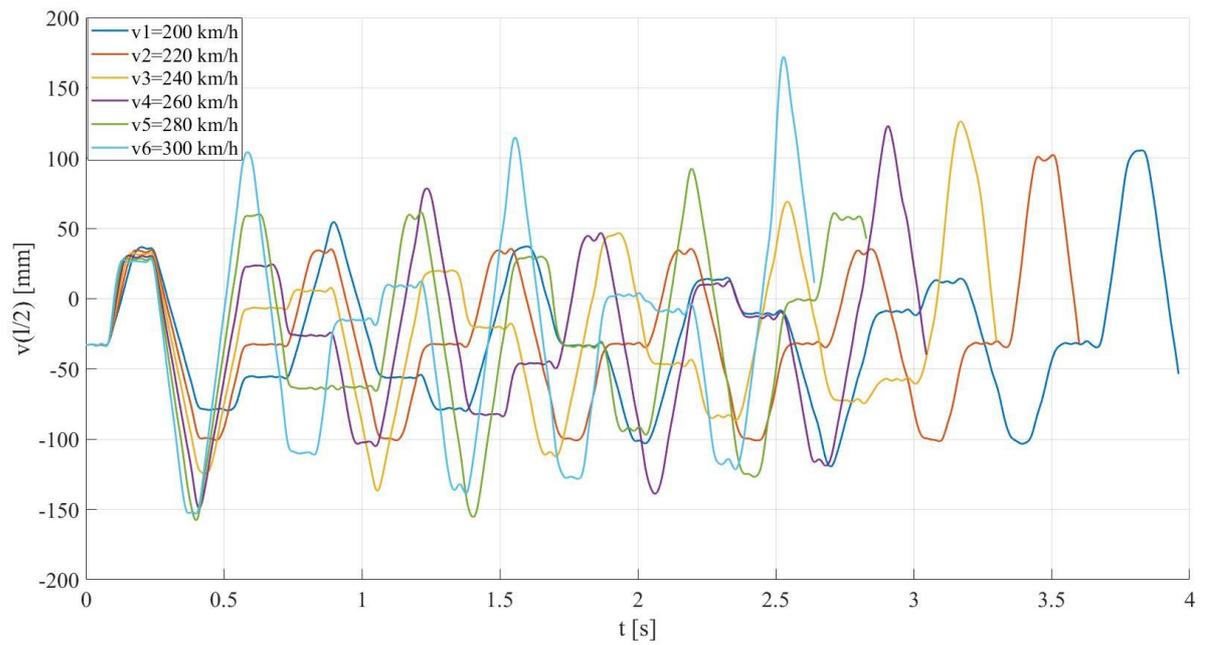


**Figura 1.12:** Spostamenti in corrispondenza del secondo carico

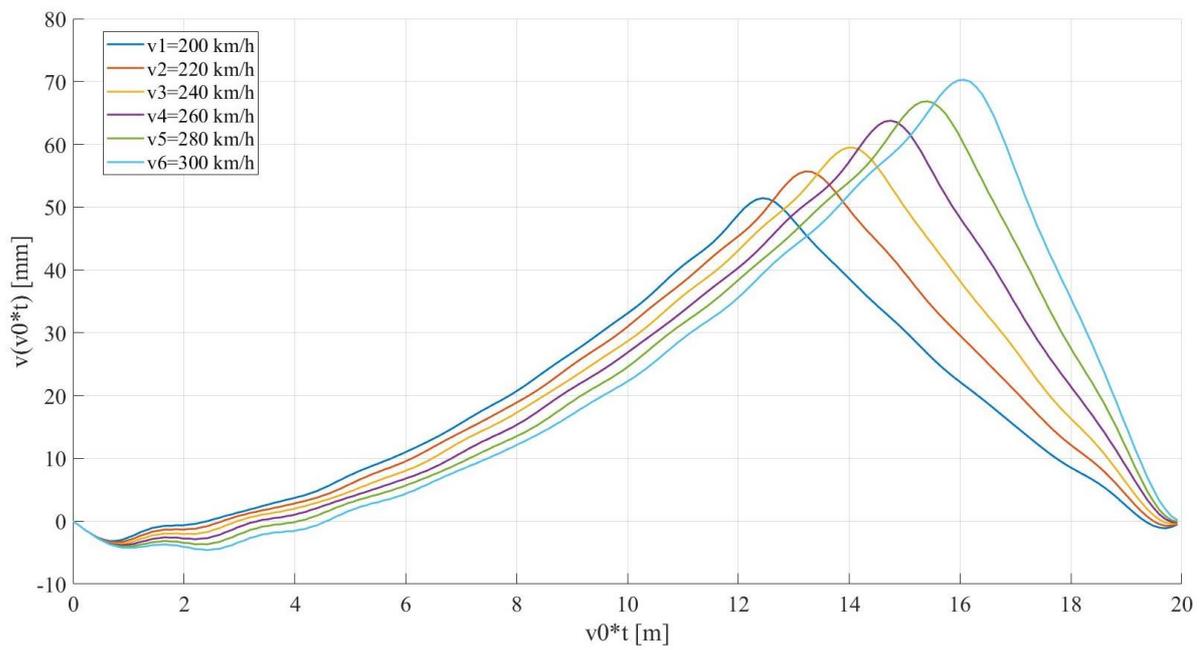
In questo caso non è così evidente l'effetto del pretensionamento. Osservando la figura 1.10, fino a circa 0.5s gli spostamenti minori (in modulo) si hanno con valori del pretensionamento elevati, mentre per gli istanti successivi gli spostamenti non hanno un andamento monotono. Il maggior spostamento della mezzeria si ha nel caso del valore del pretensionamento pari a 22kN poco dopo i 3s, raggiungendo un valore di circa 118mm. Ciò comporta che il comportamento globale al variare del pretensionamento non ha un andamento determinabile a priori. Risulta apprezzabile, osservando la figura 1.11, la variazione della posizione del picco dello spostamento in corrispondenza del primo carico rispetto al tempo all'aumentare del pretensionamento, mentre non lo è per il secondo carico, com'è osservabile dalla figura 1.12.

### 1.3.3 Variazione della velocità $v_0$

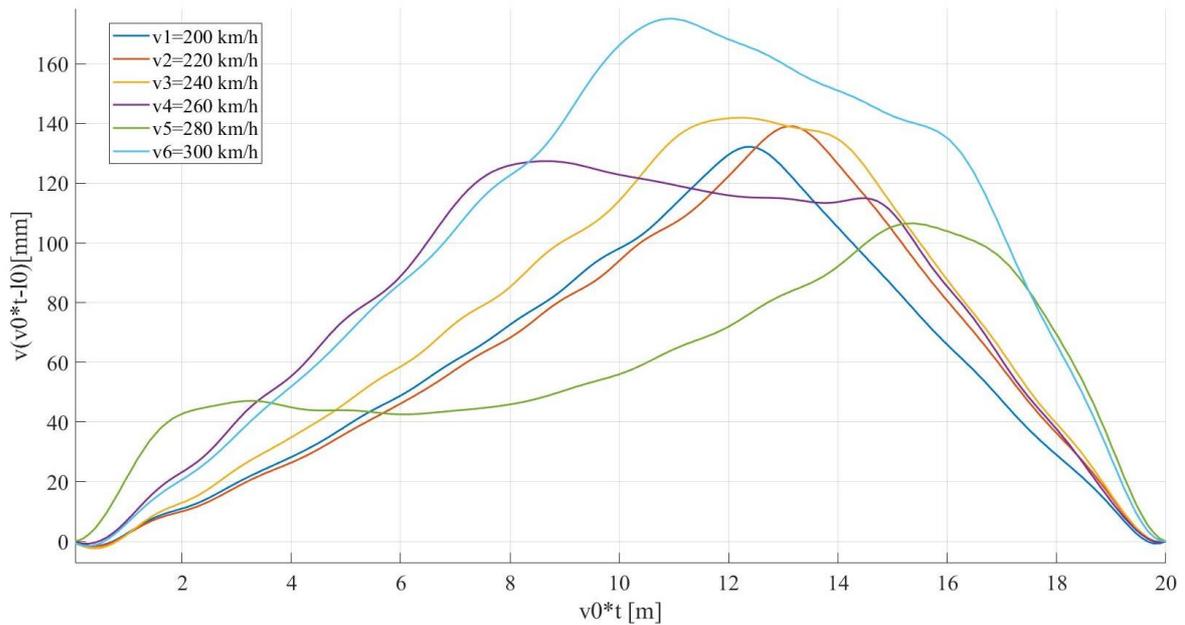
Come ultima variazione si è studiato l'effetto della velocità di avanzamento dei carichi sugli spostamenti del filo di contatto, prendendo in esame 6 diverse velocità nell'intervallo (200;300)km/h.



**Figura 1.13:** Spostamenti in corrispondenza della mezzeria



**Figura 1.14:** Spostamenti in corrispondenza del primo carico

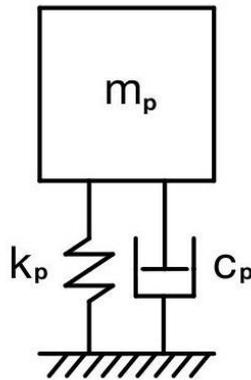


**Figura 1.15:** Spostamenti in corrispondenza del secondo carico

L'osservazione più immediata ed ovvia riguarda il fatto che la campata di 20m venga percorsa in un tempo sempre più breve all'aumentare della velocità. Meno ovvio risulta il fatto che per la velocità massima analizzata, ovvero 300km/h, si ha un notevole incremento del picco degli spostamenti della mezzeria intorno a 0.5s, passando da 7.62mm per la velocità di 250km/h a 104mm circa per la velocità massima. Ma il massimo spostamento della mezzeria, osservando la figura 1.13, si ha per la velocità 300km/h, pari a circa 172mm. Dalla figura 1.14 si può notare come all'aumentare della velocità di avanzamento del carico viaggiante, si abbia un incremento del valore massimo dello spostamento in corrispondenza del primo carico viaggiante, cosa non vera per il secondo, come si può notare dalla figura 1.15. Per il secondo carico, infatti, si hanno valori di spostamenti decisamente maggiori per la velocità di 300km/h, arrivando a circa 175mm, ma riducendo di appena 20km/h si ha il valore più basso tra i massimi dei diversi casi. Questo potrebbe essere dovuto al fatto che la velocità di propagazione delle onde nel filo di contatto non dipenda dalla velocità di avanzamento, per cui il carico si troverà in posizioni in cui si sovrappongono contributi "distruttivi" delle onde riflesse, aventi la conseguenza appunto di ridurre lo spostamento del filo di contatto.

## 2 Modello con pantografo ad 1 GDL

Successivamente si è sostituito il carico viaggiante con un modello semplificato del pantografo ad 1 grado di libertà, ovvero il ben noto modello massa-molla-smorzatore riportato in figura 2.1.



**Figura 2.1:** Sistema massa-molla-smorzatore adottato per il pantografo

Si sottolinea che il vincolo utilizzato per il contatto tra pantografo e filo di contatto non prevede la presenza di una rigidità di contatto, per cui non è possibile che si verifichi il distacco del pantografo dal filo.

Per mantenere continuità con il modello precedente, i dati sono stati mantenuti inalterati, pur aggiungendo ovviamente quelli riguardanti il pantografo. Tuttavia, in un primo momento, si è proceduto all'implementazione di un solo pantografo.

Grandezza	Modulo	Unità di misura
$l$	20	m
$\rho$	8940	kg/m <sup>3</sup>
$E$	110	GPa
$A$	150	mm <sup>2</sup>
$I_y$	2082.43	mm <sup>4</sup>
$l_0$	200	m
$T_w$	20	kN
$F_0$	200	N
$v_0$	250	km/h
$m_p$	20	kg
$c_p$	15	Ns/m
$k_p$	20000	N/m
$dt$	0.0003168	s

**Tabella 2.1:** Dati del sistema pantografo e filo di contatto

## 2.1 Analisi dinamica

L'introduzione della dinamica del pantografo nel modello complica le equazioni di equilibrio. Seguendo l'approccio descritto in "A Galerkin Approach for Modelling the Pantograph-Catenary Interaction" [5], si riportano le equazioni del moto del sistema:

$$\rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_y \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - T_w v(x,t) \right) = f(x,t) \quad (22)$$

$$m_p \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + c_p \frac{dz(t)}{dt} + k_p z(t) = -m_p g + P - \lambda(t) \quad (23)$$

$$f(x,t) = \lambda(t) \delta(x - v_0 t) - \rho A g \quad (24)$$

$$\begin{cases} P - m_p g = F_0 \\ v(x_0, t) = z(t) \\ x_0 = v_0 t \end{cases} \quad (25)$$

L'equazione (22) risulta identica alla (1), mentre la (23) introduce la dinamica del pantografo, dove  $z(t)$  è lo spostamento verticale del pantografo,  $P$  la forza costante applicata al pantografo e  $\lambda(t)$  la forza scambiata tra pantografo e catenaria. Anche in questo caso, come per il modello precedente, lo spostamento del pantografo è reso matematicamente dal delta di Dirac, come si può notare dall'equazione (24). Particolare attenzione va posta alle condizioni (25), in particolare il legame tra lo spostamento verticale del pantografo  $z$  e lo spostamento verticale della catenaria  $v$ , che rappresenta il vincolo tra pantografo e catenaria. Si precisa che la deformazione statica del filo di contatto risulta inalterata rispetto al modello precedente, non avendo apportato modifiche, mentre la configurazione statica del pantografo è stata trascurata dal momento che non rappresenta un valore realistico del pantografo e non ha effetti diretti sulla dinamica del sistema complessivo.

Risulta fondamentale l'aggiunta della deformazione statica del filo di contatto in quanto, attraverso la dinamica del pantografo, influenza notevolmente il comportamento del sistema.

Si riportano di seguito i passaggi analitici fondamentali che hanno portato alle equazioni finali, in particolare il teorema di espansione, il vincolo pantografo-catenaria scelto, e le sue derivate nel tempo.

$$v(x,t) = v_s(x) + v_d(x,t) = v_s(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_i(t) \quad (26)$$

Sostituendo la (26) nella (25), e poi derivandola due volte si ottiene:

$$z(t) = v_s(v_0 t) + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(v_0 t) \eta_i(t) \quad (27)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = v_0 \frac{dv_s(v_0 t)}{dx} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( v_0 \frac{d\Phi_i(v_0 t)}{dx} \eta_i(t) + \Phi_i(v_0 t) \frac{d\eta_i(t)}{dt} \right) \quad (28)$$

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = v_0^2 \frac{d^2 v_s(v_0 t)}{dx^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( v_0^2 \frac{d^2 \Phi_i(v_0 t)}{dx^2} \eta_i(t) + 2v_0 \frac{d\Phi_i(v_0 t)}{dx} \frac{d\eta_i(t)}{dt} + \Phi_i(v_0 t) \frac{d^2 \eta_i(t)}{dt^2} \right) \quad (29)$$

Per quanto riguarda l'equazione (22), seguono le stesse operazioni svolte per il caso precedente, ovvero premoltiplicare ogni elemento per  $\Phi_j(x)$  e successivamente integrare sulla lunghezza della campata, si ottengono gli stessi termini  $m_i$  e  $k_i$  del caso precedente. Nel seguito l'espansione modale verrà troncata al decimo modo, analogamente al caso precedente. Sostituendo il vincolo pantografo-catenaria (27) e le sue derivate (28) e (29), e introducendo l'equazione della dinamica del pantografo (23) nell'equazione della dinamica del filo di contatto (22) si è in grado di descrivere la dinamica dell'intero sistema, ottenendo quanto segue:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{10} \left( \int_0^1 \rho A \Phi_i(x)^2 dx \frac{d^2 \eta_i(t)}{dt^2} + \Phi_i(v_0 t) \sum_{j=1}^{\infty} m_p \Phi_j(v_0 t) \frac{d^2 \eta_j(t)}{dt^2} + \right. \\ & + \Phi_i(v_0 t) \left( \sum_{j=1}^{\infty} 2m_p v_0 \frac{d\Phi_j(v_0 t)}{dx} \frac{d\eta_j(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty} c_p \Phi_j(v_0 t) \frac{d\eta_j(t)}{dt} \right) + \left( \int_0^1 EI_y \Phi_i(x) \frac{d^4 \Phi_i(x)}{dx^4} dx + \right. \\ & - \int_0^1 T_w \Phi_i(x) \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} dx \left. \right) \eta_i(t) + \Phi_i(v_0 t) \left( \sum_{j=1}^{\infty} m_p v_0^2 \frac{d^2 \Phi_j(v_0 t)}{dx^2} \eta_j(t) + \right. \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} c_p v_0 \frac{d\Phi_j(v_0 t)}{dx} \eta_j(t) + \sum_{j=1}^{\infty} k_p \Phi_j(v_0 t) \eta_j(t) \left. \right) = \sum_{i=1}^{10} \left( \Phi_i(v_0 t) \left( F_0 + \right. \right. \\ & \left. \left. - m_p v_0^2 \frac{d^2 v_s(v_0 t)}{dx^2} - c_p v_0 \frac{dv_s(v_0 t)}{dx} - k_p v_s(v_0 t) \right) \right) \quad (30) \end{aligned}$$

Osservando gli indici è possibile ricavare le matrici di massa, smorzamento e rigidità modali di dimensioni  $n \times n$ , con  $n$  il numero di modi scelti.

$$M_{ii} = \int_0^1 \rho A \Phi_i(x)^2 dx \quad (31)$$

$$K_{ii} = \int_0^1 EI_y \Phi_i(x) \frac{d^4 \Phi_i(x)}{dx^4} dx - \int_0^1 T_w \Phi_i(x) \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} dx \quad (32)$$

Al fine di rendere il modello più realistico, è stato introdotto uno smorzamento proporzionale per quanto riguarda il filo di contatto:

$$C_{ii} = \alpha M_{ii} + \beta K_{ii} \quad (33)$$

Si riportano di seguito i valori scelti di  $\alpha$  e  $\beta$  (tabella 2.2).

Grandezza	Modulo
$\alpha$	0.0125
$\beta$	0.0001

**Tabella 2.2:** Dati smorzamento proporzionale

Come si può notare, la principale differenza rispetto al caso precedente, oltre alla maggior complessità, consiste nella presenza di prodotti “incrociati” delle autofunzioni, ovvero di termini che, utilizzando una rappresentazione matriciale, risultano essere disposti al di fuori della diagonale principale, e generalmente diversi da zero, in quanto le autofunzioni non sono perpendicolari.

$$M_{ij} = \Phi_i(v_0 t) m_p \Phi_j(v_0 t) \quad (34)$$

$$C_{ij} = \Phi_i(v_0 t) 2m_p v_0 \frac{d\Phi_j(v_0 t)}{dx} + \Phi_i(v_0 t) c_p \Phi_j(v_0 t) \quad (35)$$

$$K_{ij} = \Phi_i(v_0 t) m_p v_0^2 \frac{d^2\Phi_j(v_0 t)}{dx^2} + \Phi_i(v_0 t) c_p v_0 \frac{d\Phi_j(v_0 t)}{dx} + \Phi_i(v_0 t) k_p \Phi_j(v_0 t) \quad (36)$$

Le matrici di massa, smorzamento e rigidità così ottenute risultano essere, inoltre, tempo varianti.

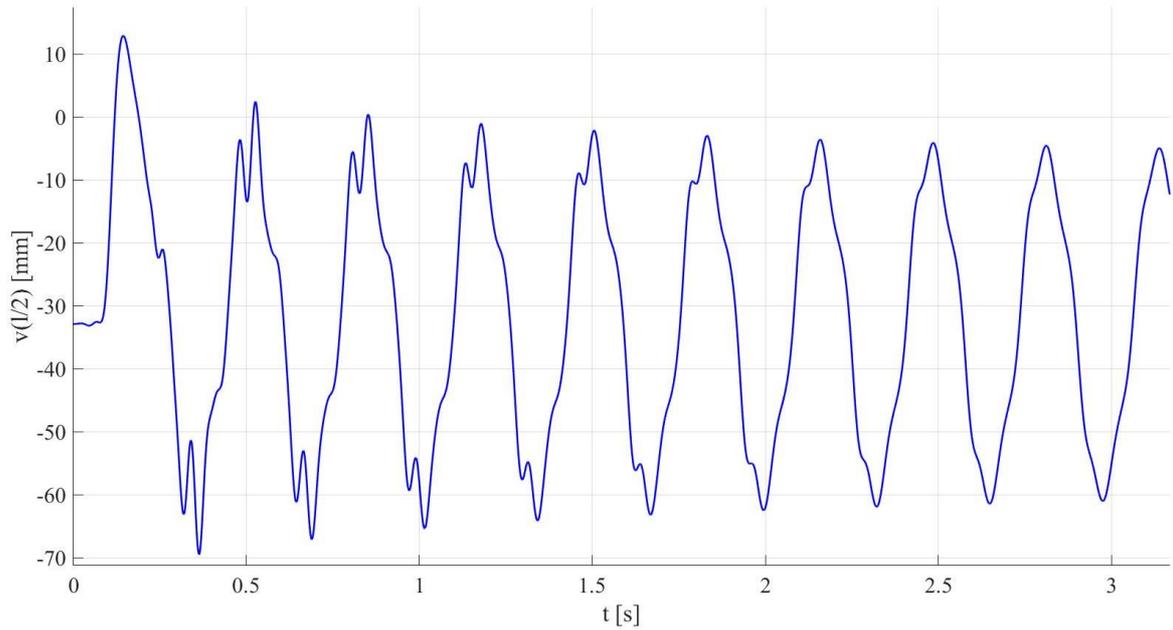
Questa sostanziale differenza ha comportato l'impossibilità di utilizzare l'integrale di convoluzione, come nel modello precedente, ma ha richiesto l'impiego di un integratore numerico. Nel caso specifico si è ricorso al metodo di Newmark-beta, ampiamente collaudato in studi precedenti [6]. Il metodo di Newmark viene utilizzato per i sistemi lineari tempo-invarianti, ovvero per quei sistemi per i quali è valido il principio di sovrapposizione degli effetti ed i cui parametri non dipendono dal tempo [7]. Nel caso in esame la seconda condizione non è verificata, per cui è risultato necessario introdurre delle iterazioni, confrontando la massima differenza tra la risposta calcolata allo step precedente e quella calcolata nell'iterazione corrente con una tolleranza opportunamente scelta. Nella tabella 2.3 seguente sono riportati i parametri riguardanti l'integratore numerico.

Grandezza	Modulo
$\beta$	1/4
$\gamma$	1/2
tol	$10^{-8}$

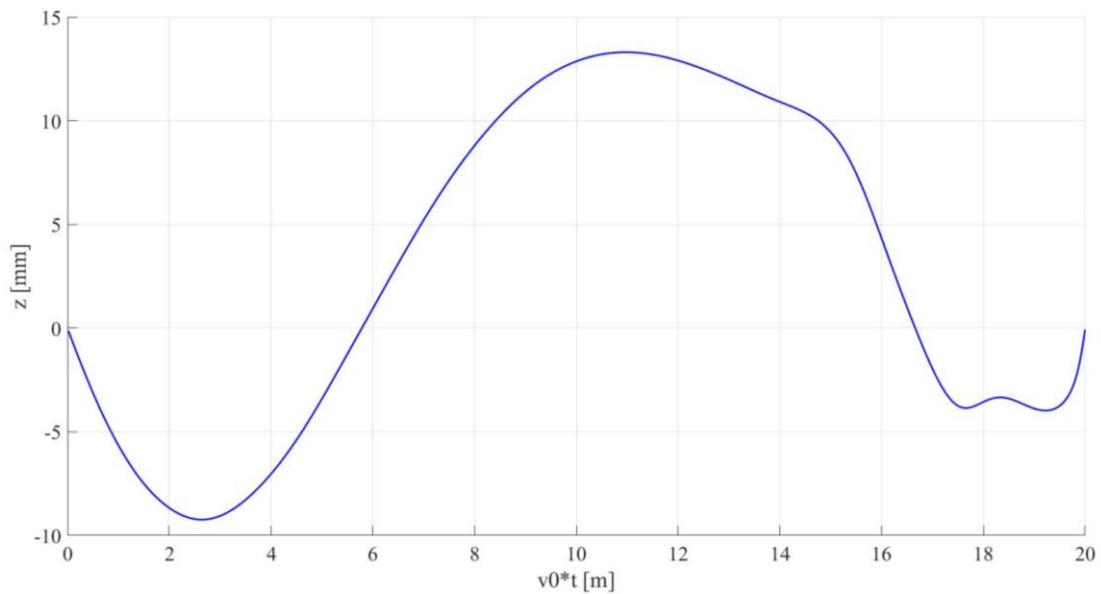
**Tabella 2.3:** Dati dell'integratore numerico

Si riportano di seguito i diagrammi dello spostamento della mezzeria del filo di contatto nel tempo (figura 2.2), di spostamento, velocità e accelerazione visti dal pantografo (figure 2.3,

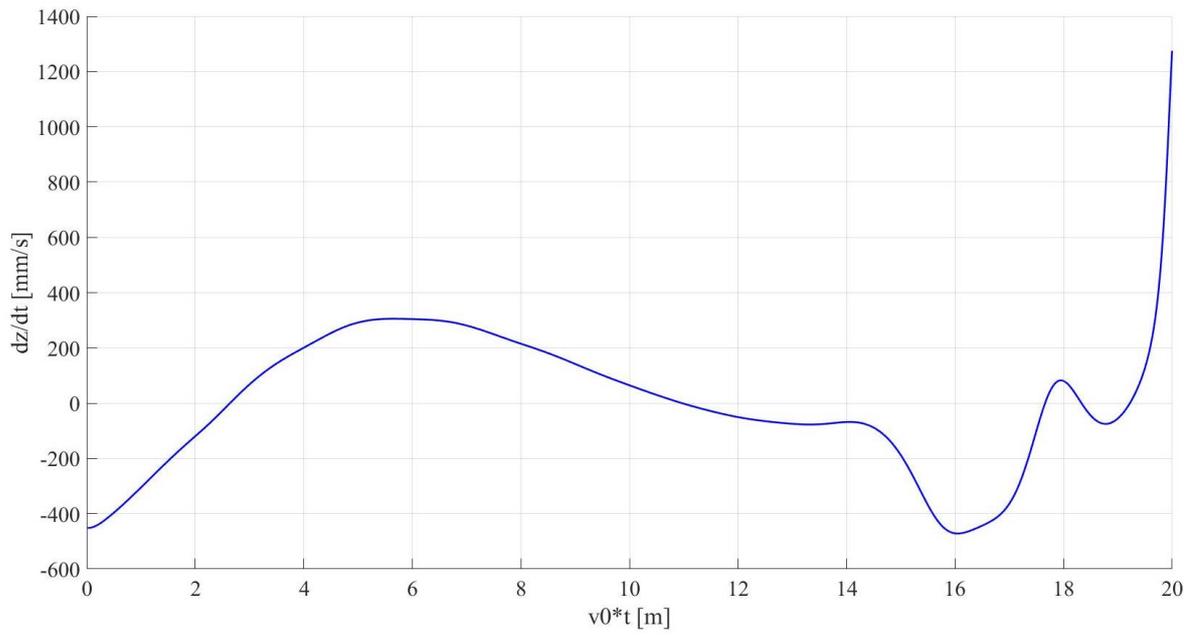
2.4 e 2.5) e, essendo stati in grado di introdurre una dinamica del pantografo, anche l'andamento della forza di contatto (figura 2.6).



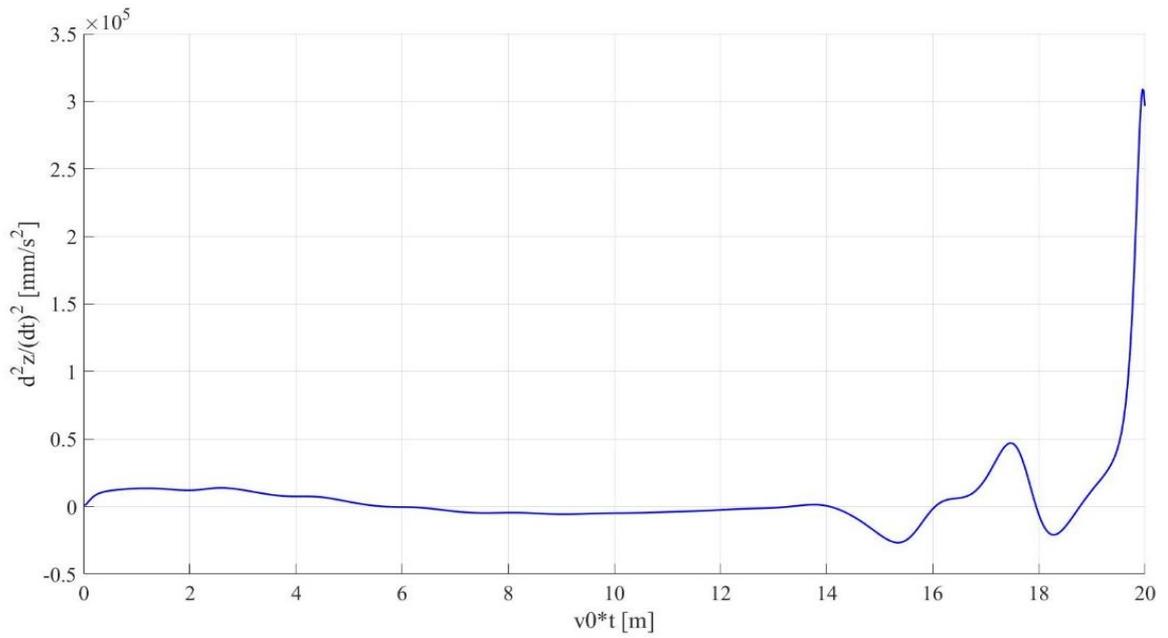
**Figura 2.2:** Spostamento della mezziera del filo di contatto



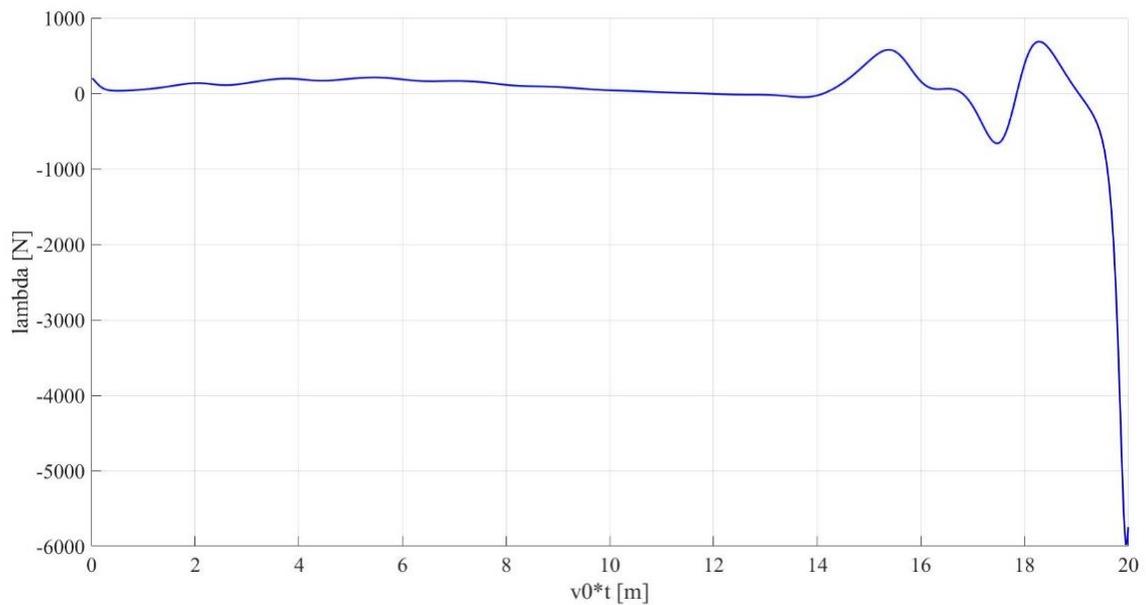
**Figura 2.3:** Spostamento in corrispondenza del pantografo



**Figura 2.4:** Velocità del pantografo



**Figura 2.5:** Accelerazione del pantografo



**Figura 2.6:** Forza di contatto

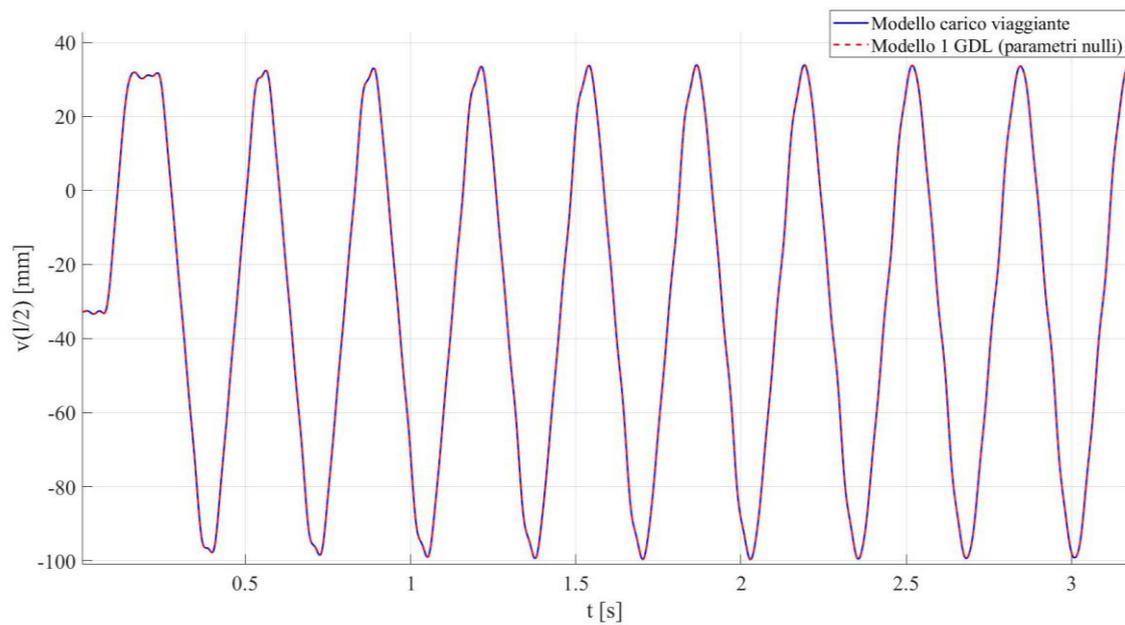
Rilevanti considerazioni si possono fare sulla forza di contatto, in particolare si può notare come sia maggiormente governata dall'inerzia del pantografo. Va precisato che le zone molto prossime alla fine della campata, in particolare per accelerazione e forza, presentano picchi (in termini assoluti) troppo elevati, probabilmente a causa degli effetti dei vincoli posti al filo di contatto.

## 2.2 Confronto tra modelli

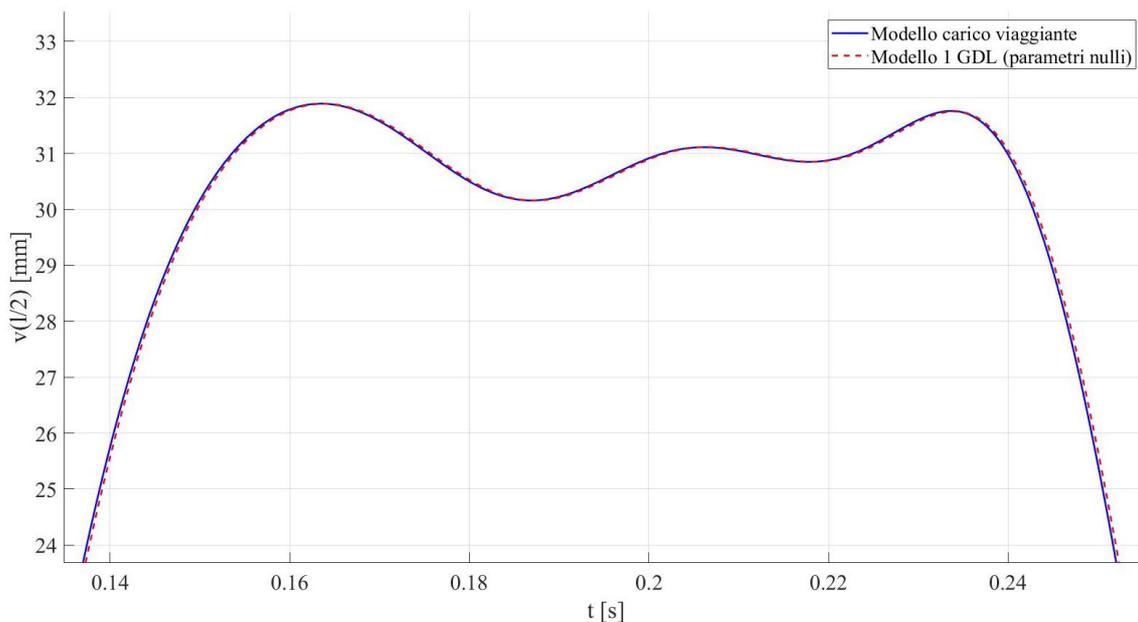
Al fine di verificare l'attendibilità del modello e validarlo, si è proceduto a realizzare due confronti. Il primo tra i due modelli descritti finora, cioè quello con il carico viaggiante e quello con il pantografo ad 1 GDL. Il secondo confronto è stato svolto con un modello nel quale si utilizza il penalty method per riprodurre il vincolo pantografo-catenaria [8].

### 2.2.1 Confronto modello carico viaggiante e modello 1 GDL

Sono stati posti i parametri riguardanti il pantografo del secondo modello, ovvero massa, rigidità e smorzamento, e lo smorzamento proporzionale del filo di contatto pari a zero, riconducendoci così al caso precedente, ovvero carico viaggiante. Così facendo ci si aspetterebbe che i risultati siano sovrapponibili, al netto di eventuali errori di approssimazione.

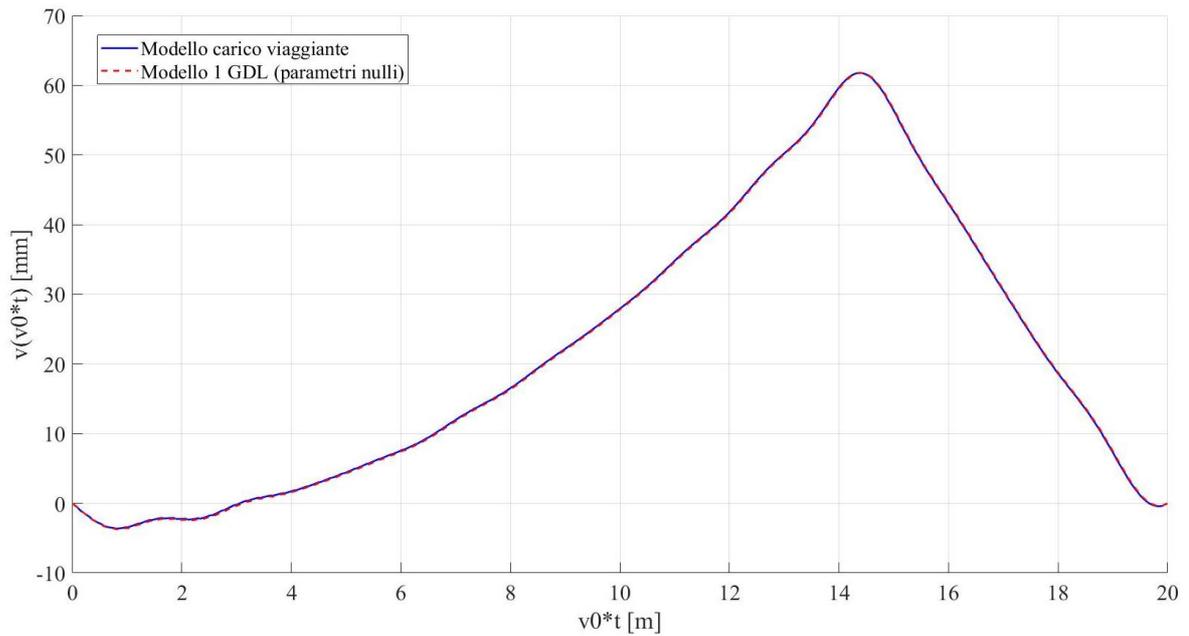


**Figura 2.7:** Confronto spostamenti mezzeria del filo di contatto



**Figura 2.8:** Ingrandimento confronto spostamenti mezzeria

Come si può osservare dalla figura 2.7 le deformazioni sembrano perfettamente sovrapponibili, ma osservando attentamente l'ingrandimento riportato in figura 2.8 si può notare una sorta di traslazione dei due plot, di entità comunque trascurabile, probabilmente imputabile alla differenza di procedimento risolutivo, rispettivamente integrale di convoluzione per il modello con carico viaggiante e metodo di Newmark-beta per il modello con pantografo ad 1 GDL.

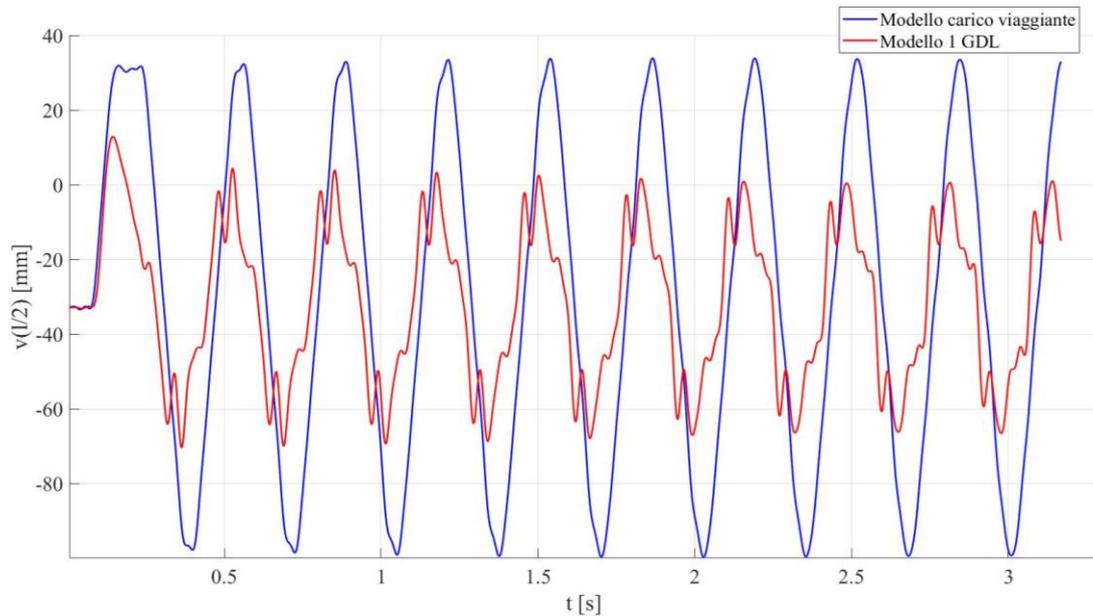


**Figura 2.9:** Confronto spostamenti in corrispondenza di carichi

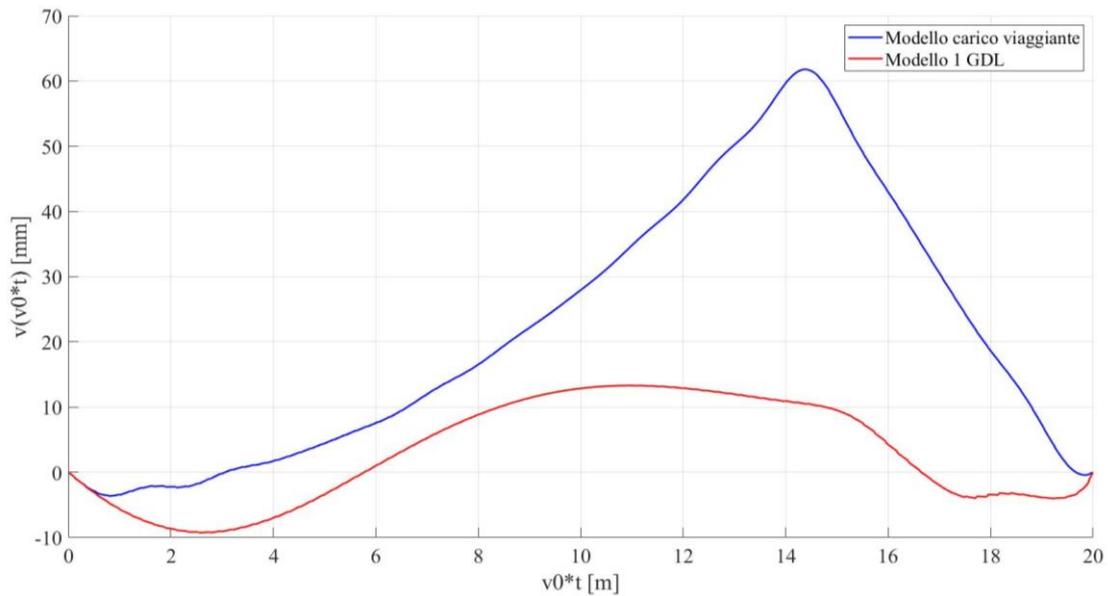
Analoghe considerazioni si possono fare osservando la figura 2.9.

È dunque possibile affermare che non risultano evidenti eventuali errori o differenze sostanziali tra i due modelli per quanto riguarda il solo metodo risolutivo.

Può risultare interessante confrontare i risultati dei due modelli completi, ponendo i parametri del pantografo ai valori riportati nella tabella 2.1, limitatamente ad un solo pantografo/carico viaggiante.



**Figura 2.10:** Confronto spostamenti mezzerie



**Figura 2.11:** Confronto spostamenti in corrispondenza dei carichi

Risulta evidente dalle figure 2.10 e 2.11 che la presenza del pantografo riduca notevolmente l'ampiezza degli spostamenti, pur conservando l'andamento circa periodico. Tuttavia va ribadito che il tipo di vincolo utilizzato non prevede la possibilità di distacco del pantografo dal filo di contatto, per cui gli spostamenti potrebbero risultare maggiori qualora questa possibilità fosse resa possibile.

### 2.2.2 Confronto con il penalty method

Per verificare che anche i parametri riguardanti il pantografo siano correttamente considerati nel modello, si è proceduto al confronto con i risultati riportati da Collina e Bruni [8]. In particolare si è considerato una massa viaggiante, che si muove a velocità costante, vincolata al filo di contatto attraverso una rigidità di contatto. Il filo di contatto è privo di smorzamento proporzionale. Si precisa che nel caso in esame non è stata considerato l'effetto della gravità, che come sottolineato precedentemente ha effetti importanti sulla dinamica del sistema. È stato, inoltre, mantenuto il numero di modi finora considerato, ovvero 10.

Una breve precisazione sull'approccio seguito per il vincolo pantografo-catenaria da Collina e Bruni risulta utile per una maggior comprensione.

Nello studio sopracitato, al contrario di quanto fatto nel modello precedentemente esposto, si è seguito il "penalty method" per la formulazione del vincolo, che in sostanza consiste in un'approssimazione per mezzo di due coefficienti numerici degli effetti dovuti alla posizione relativa e alla velocità relativa tra pantografo e filo di contatto. Ne consegue che i due coefficienti rappresentano rispettivamente rigidità e smorzamento in un sistema massa-molla-smorzatore.

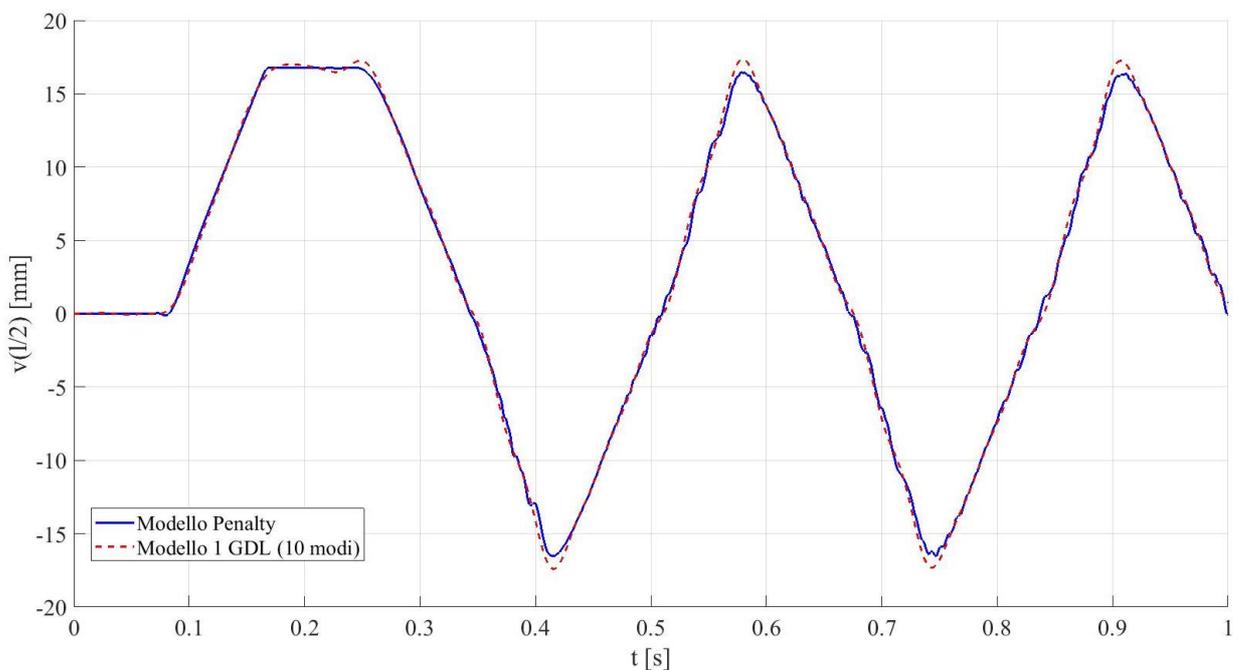
Risulta dunque evidente che non è presente un diretto effetto dell'inerzia del pantografo sul comportamento dinamico della catenaria, al contrario di quanto accade nel modello in esame ad 1 grado di libertà, come evidenziato a fine capitolo 2.1.

Si riporta di seguito una tabella con i dati utilizzati per entrambi i modelli.

Grandezza	Modulo	Unità di misura
$l$	60	m
$\rho$	9000	kg/m <sup>3</sup>
$E$	1.9	GPa
$A$	150	mm <sup>2</sup>
$I_y$	7162	mm <sup>4</sup>
$l_0$	200	m
$T_w$	20	kN
$F_0$	50	N
$v_0$	216	km/h
$m_p$	3	kg
$c_p$	0	Ns/m
$k_p$	0	N/m
$dt$	0.0003168	s

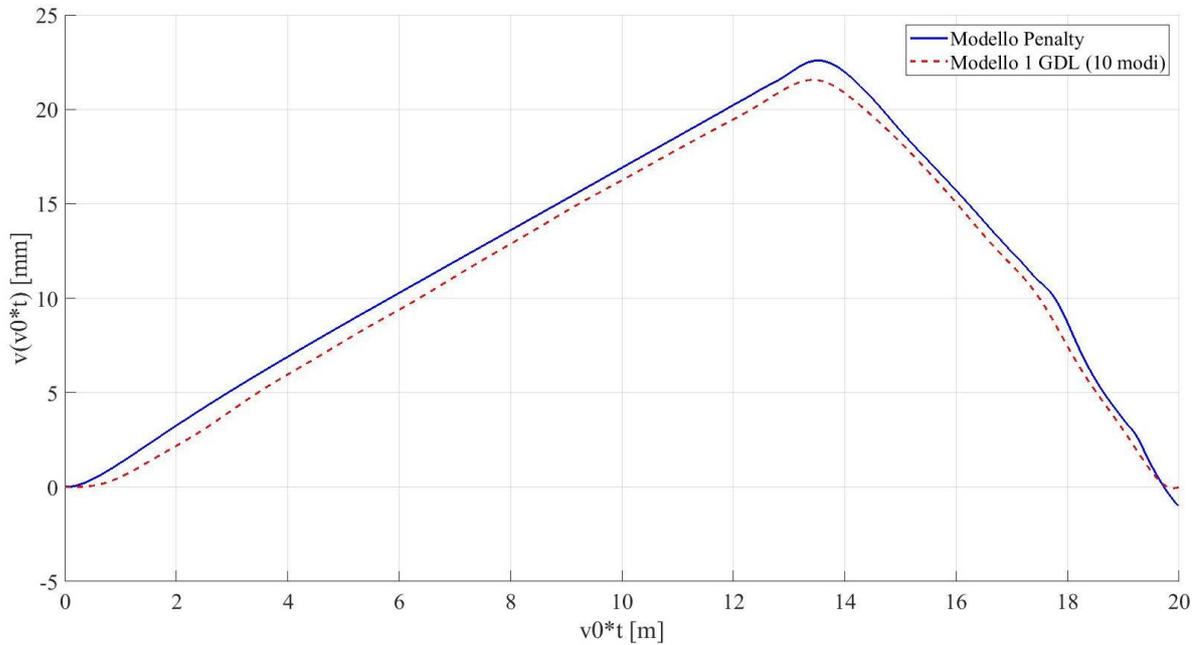
**Tabella 2.2:** Dati del sistema pantografo e filo di contatto

Si riportano di seguito i diagrammi di confronto ottenuti.



**Figura 2.12:** Confronto spostamenti mezzzeria

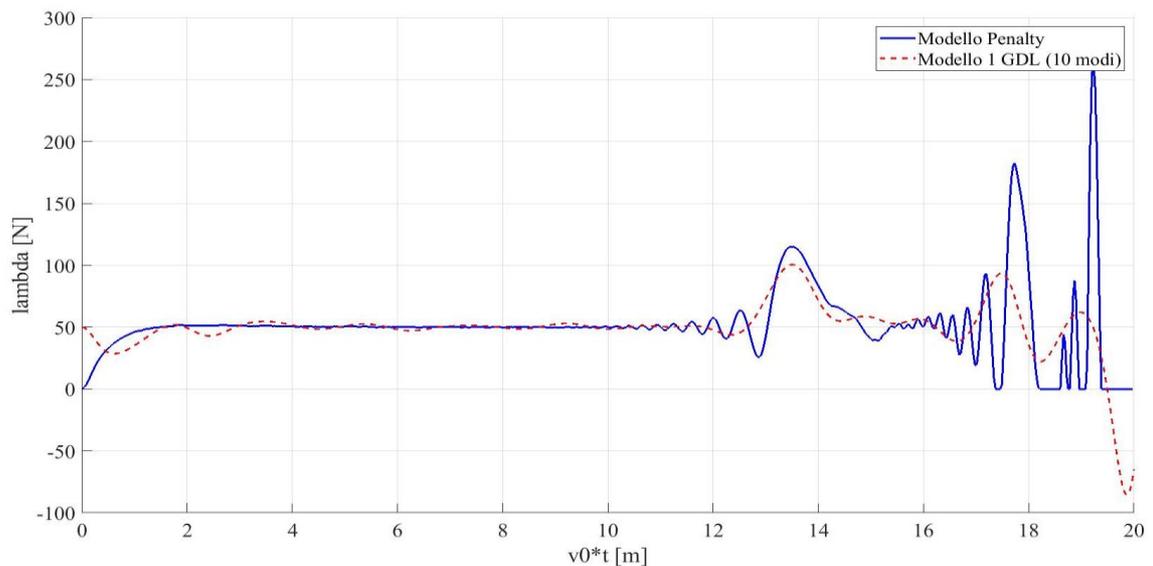
Osservando la figura 2.12, che confronta gli spostamenti della mezzeria del filo di contatto per i rispettivi modelli, risulta con una discreta approssimazione evidente la sovrapposibilità degli andamenti, ed una certa prossimità dei valori massimi e minimi assunti dagli spostamenti verticali.



**Figura 2.13:** Confronto spostamenti in corrispondenza del carico

Analoghe considerazioni possono essere fatte osservando gli spostamenti della catenaria in corrispondenza del carico viaggiante, riportati nella figura 2.13, dove si ha una buona sovrapposizione dei due grafici.

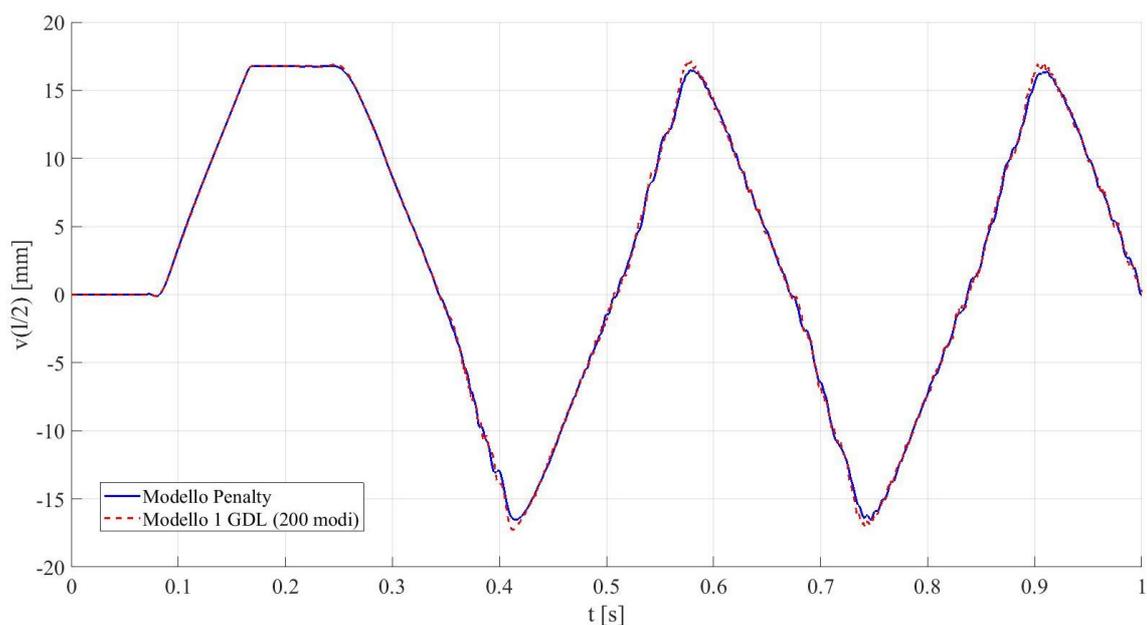
Ben diversa è la situazione per quanto riguarda la forza di contatto, di cui si riporta il confronto nella figura 2.14 seguente.



**Figura 2.14:** Confronto forze di contatto

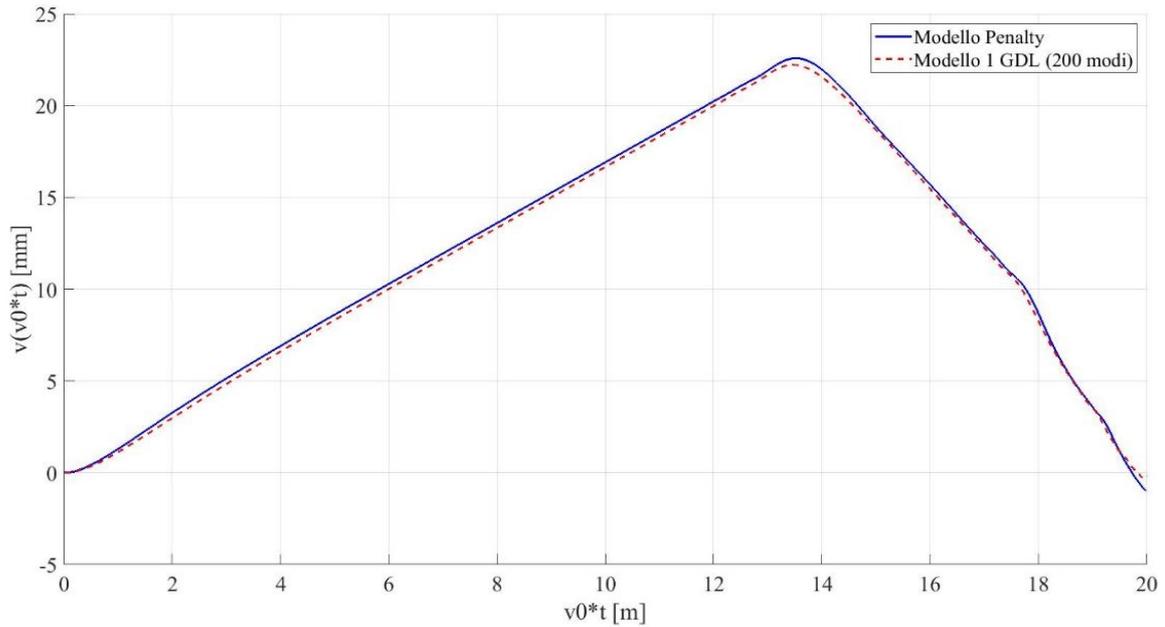
Risultano evidenti le differenze tra le forze di contatto stimate, sia in termini di valori massimi e minimi, sia in termini di andamenti. Il motivo, probabilmente, potrebbe essere imputabile alla differenza di approccio adottato per descrivere il vincolo di contatto pantografo-catenaria, al relativamente ridotto numero di elementi con cui è discretizzato il filo di contatto, oppure un numero di modi considerati troppo esiguo.

Si è proceduto così ad aumentare il numero di modi considerati, arrivando a 200 modi, ottenendo i seguenti risultati.



**Figura 2.15:** Confronto spostamenti mezzeria

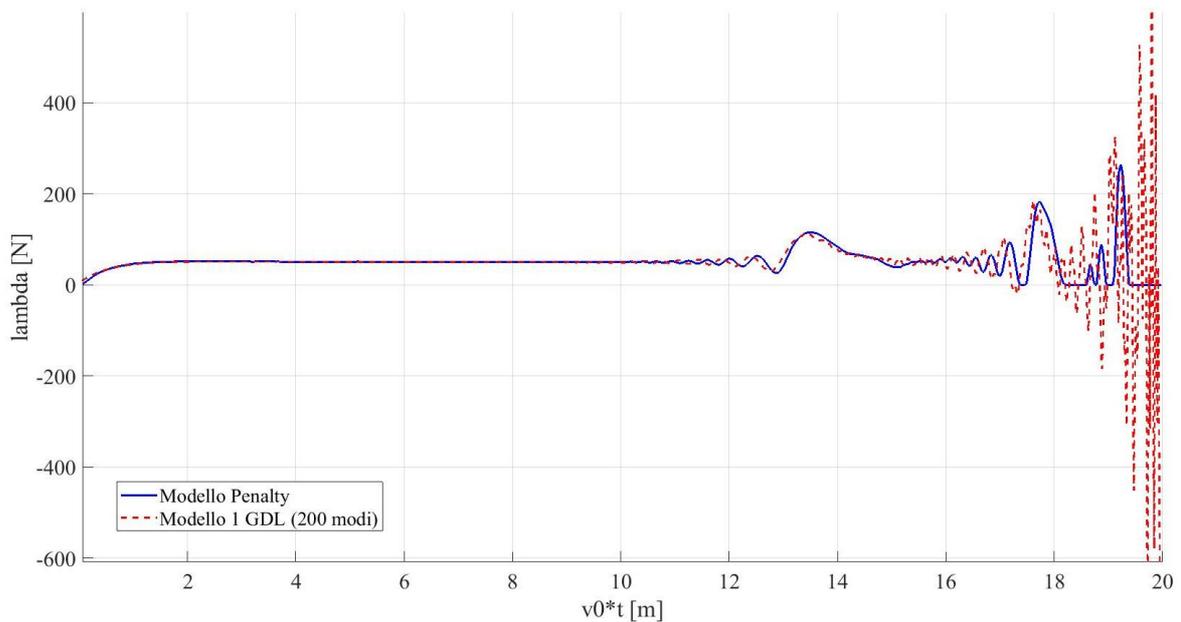
Dalla figura 2.15, nella quale sono confrontati gli spostamenti della mezzeria dei due modelli, risulta notevole il miglioramento del modello ad 1 GDL rispetto al caso in cui erano stati considerati soltanto 10 modi, dal momento che i due grafici risultano praticamente sovrapposti, pur conservando delle differenze a circa 0,7s, 1,2s e 1,7s.



**Figura 2.16:** Confronto spostamenti masse viaggianti

Se dalla figura 2.15 sembrerebbe quasi assente un'eventuale differenza tra i modelli, dalla figura 2.16 è evidente una minima differenza degli spostamenti, probabilmente imputabile alla maggior rigidità del vincolo di contatto tra pantografo e catenaria del modello analizzato in questa tesi.

Si riporta di seguito il confronto delle forze di contatto (figura 2.17).



**Figura 2.17:** Confronto forze di contatto

Dal confronto delle due forze, l'andamento, quanto meno fino a circa 14 m, è piuttosto sovrapponibile, indicando quindi l'importante contributo delle frequenze più elevate. Ad 1s, quando la massa viaggiante giunge alla fine della campata, si riscontra ancora una volta il

problema riscontrato precedentemente, ovvero che, probabilmente, a causa dei vincoli posti agli estremi della campata, la forza di contatto assume valori molto elevati, in modulo, per poter avere spostamenti e velocità congruenti al vicolo stesso. Tuttavia, tralasciando questo particolare problema, l'andamento degli istanti successivi a 0.7s, ovvero circa 14 m, è notevolmente differente, come si può notare dalla figura 2.17.

Tali differenze sono riconducibili non solo, come già menzionato, alle differenze nel tipo di vincolo e i parametri che essi riguardano, ma anche ad un diverso valore dell'intervallo temporale su cui viene praticata l'integrazione numerica. Posso essere riconducibili alle differenze dell'integratore numerico, che pur trattandosi per entrambi i modelli di Newmark-beta, nel modello con il penalty method non è stata inclusa alcuna iterazione per giungere a convergenza, dal momento che non sono presenti parametri tempo-dipendenti.

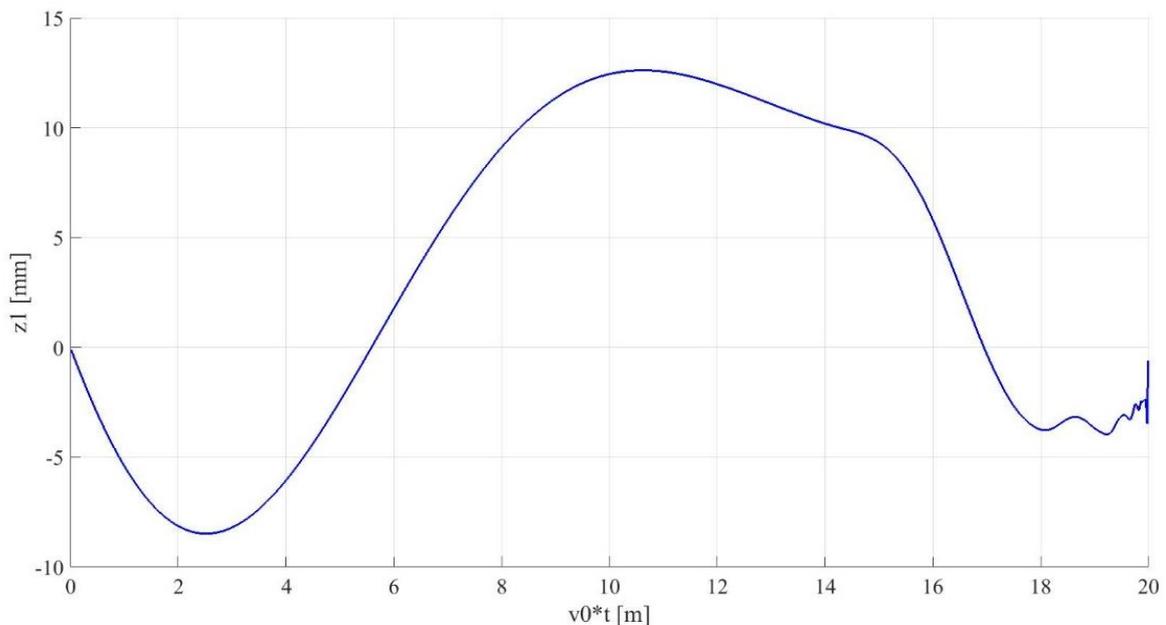
In ogni caso, limitatamente agli andamenti degli spostamenti, non sono riscontrabili sostanziali differenze, per cui è possibile confermare l'assenza, o quanto meno la trascurabilità, di eventuali errori sul modello.

## 2.3 Analisi con secondo pantografo

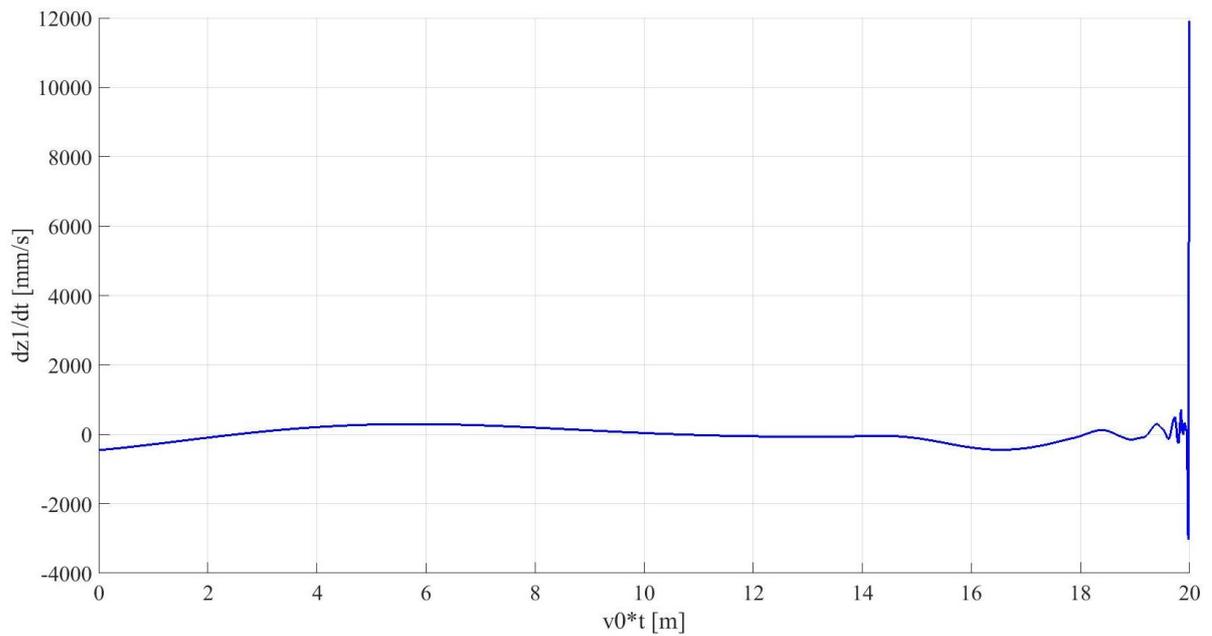
A questo punto è stato possibile introdurre il secondo pantografo, avente gli stessi parametri di massa, rigidità, smorzamento e carico applicato del primo pantografo, posto ad una distanza di 200m dal primo.

I dati utilizzanti sono i medesimi di quelli utilizzati all'inizio del corrente capitolo, al fine di assicurare una continuità e un corretto confronto tra i risultati. L'unica eccezione risulta essere il numero di modi considerati, pari a 200 modi.

Si riportano di seguito i grafici riguardanti il primo carico.

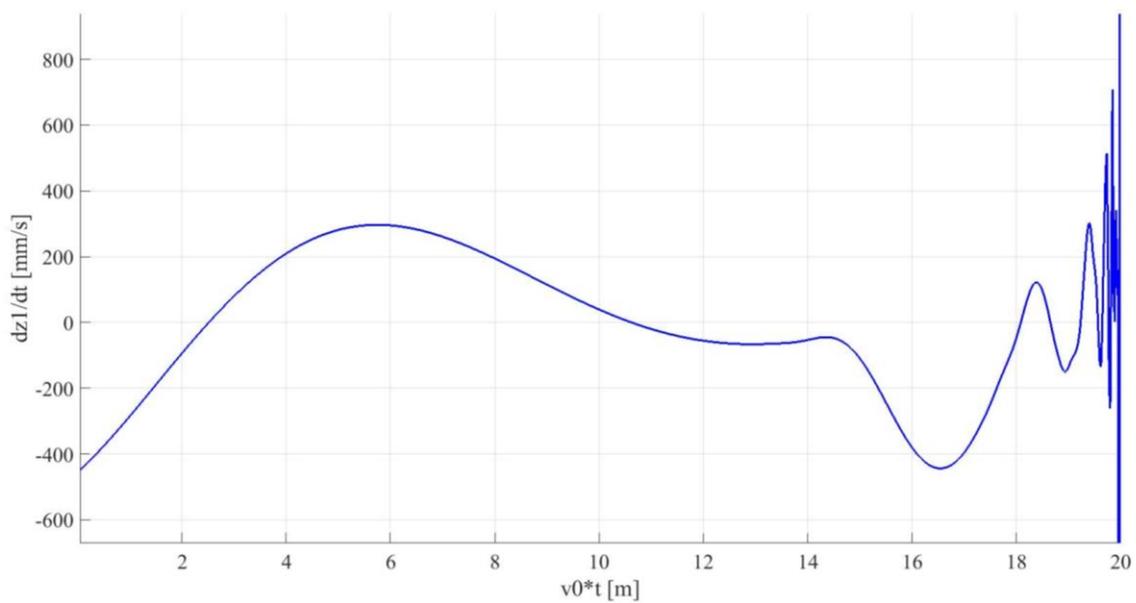


**Figura 2.18:** Spostamento in corrispondenza del primo pantografo

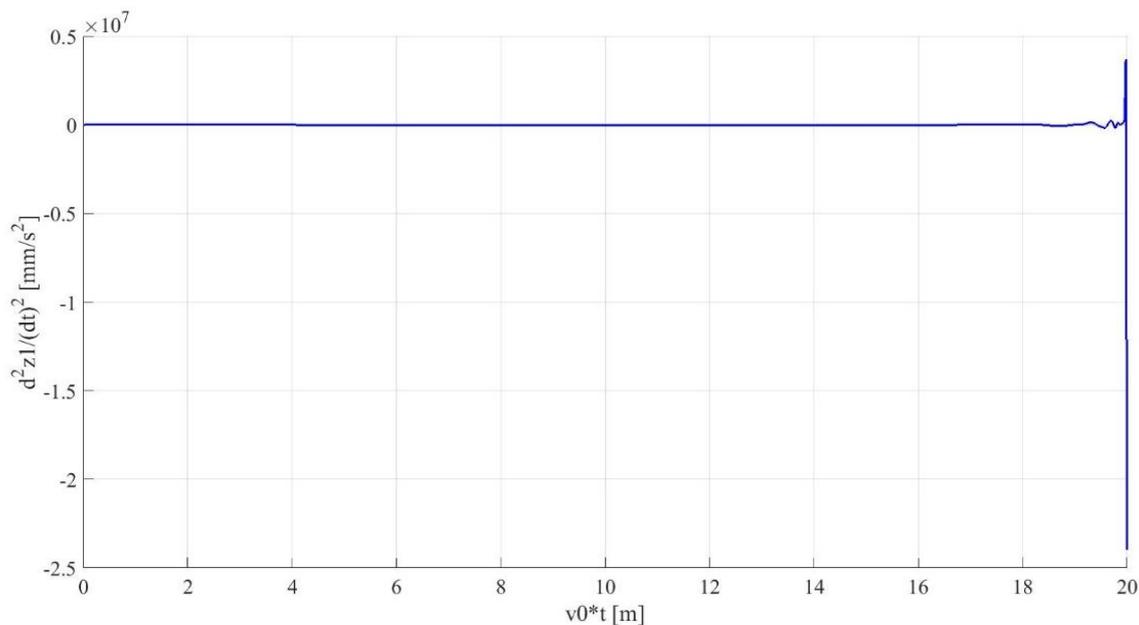


**Figura 2.19:** Velocità del primo pantografo

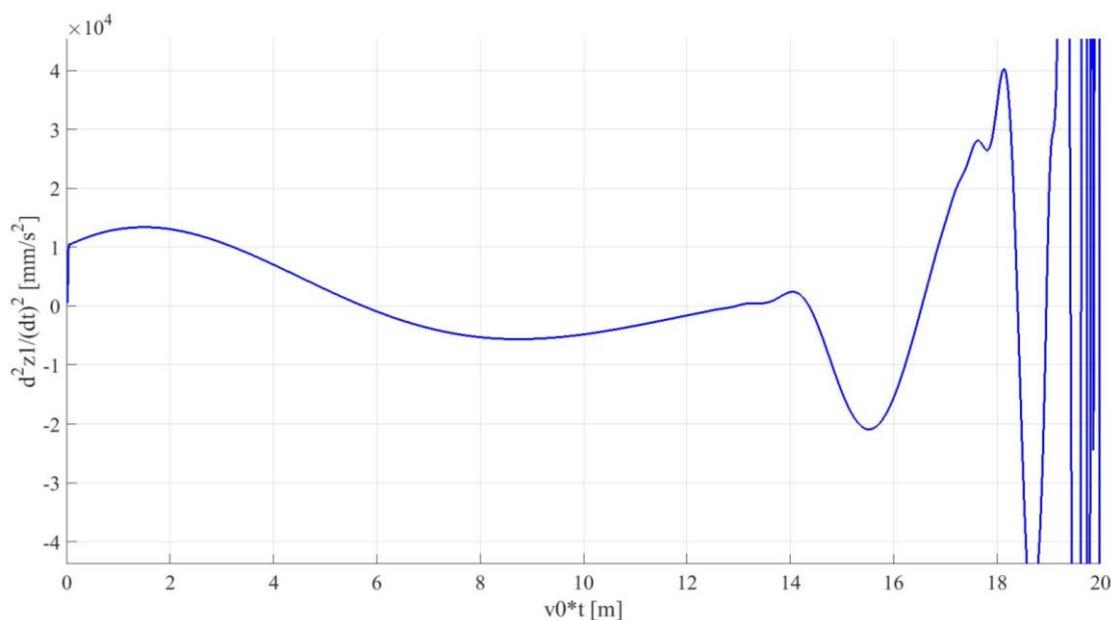
Dal momento che si ripresenta il problema già citato della zona prossima al vincolo del filo di contatto, si riportano gli ingrandimenti dei grafici dove il picco nasconderebbe l'andamento intermedio plottato.



**Figura 2.20:** Ingrandimento del grafico della velocità del primo pantografo

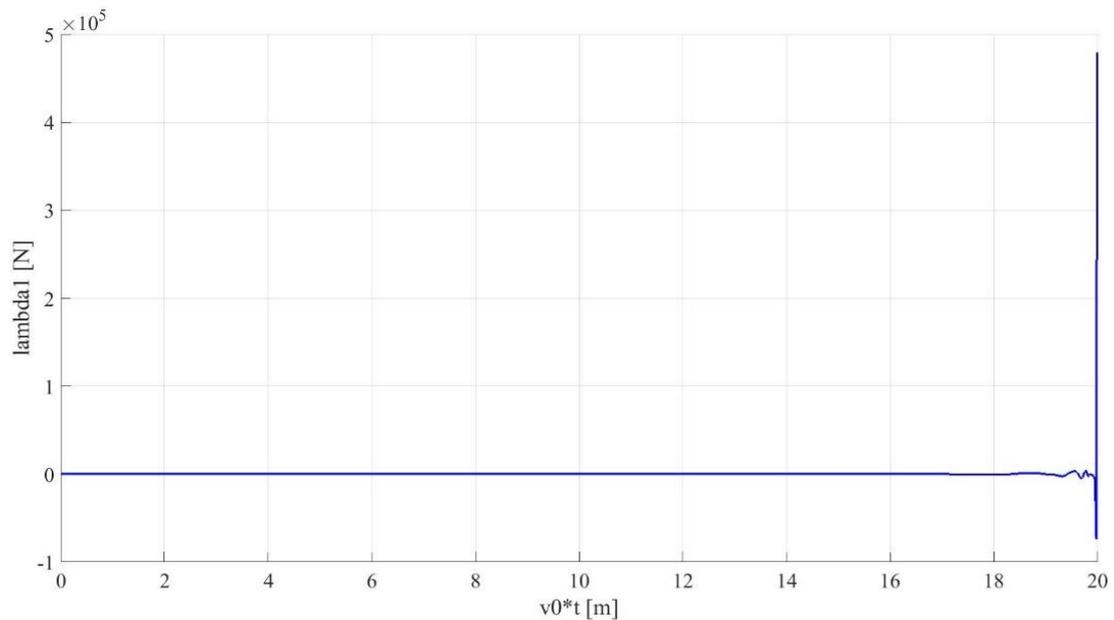


**Figura 2.21:** Accelerazione del primo pantografo

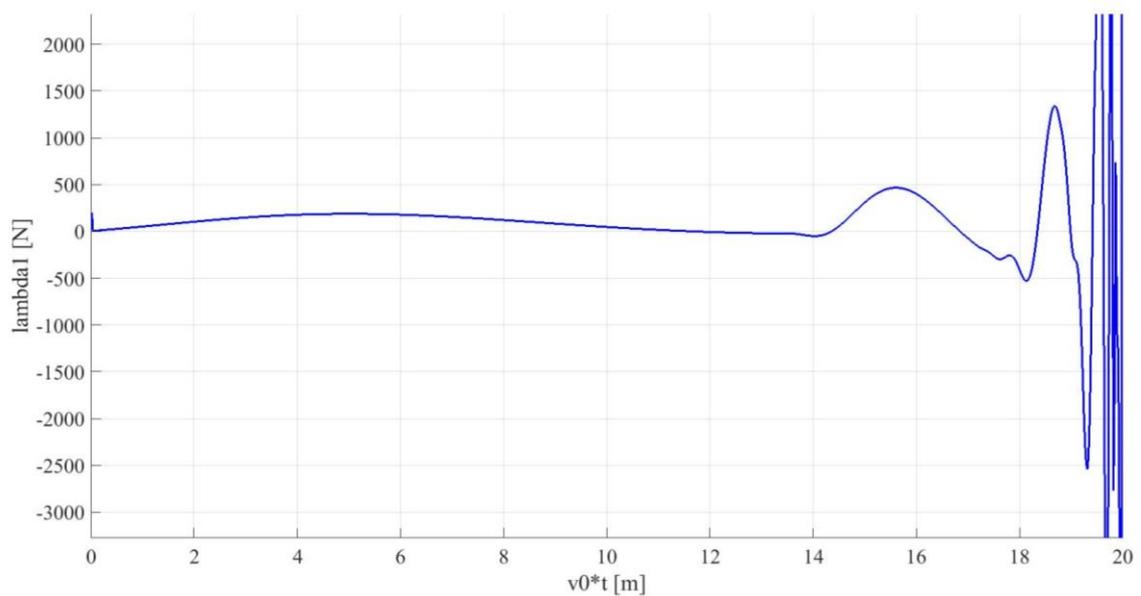


**Figura 2.22:** Ingrandimento del grafico dell'accelerazione del primo pantografo

Confrontando con i plot osservati all'inizio del corrente capitolo (figure 2.2, 2.3 e 2.4) con quelli sopra riportato (figure 2.18, 2.20 e 2.22), si possono osservare differenze sia in termini di ampiezza che in termini di andamento per quanto riguarda lo spostamento e la velocità del primo pantografo. Tali differenze sono riconducibili al numero di modi considerati notevolmente maggiore. Per quanto riguarda l'accelerazione, invece, non sono riscontrabili sostanziali differenze, conservando il “picco”, in questo caso in verso opposto, all'istante temporale in cui il pantografo si trova all'estremo destro del filo di contatto. Esso, come già ipotizzato, potrebbe essere riconducibile al tipo di vincolo riguardante il contatto del pantografo con il filo di contatto imposto per l'analisi.



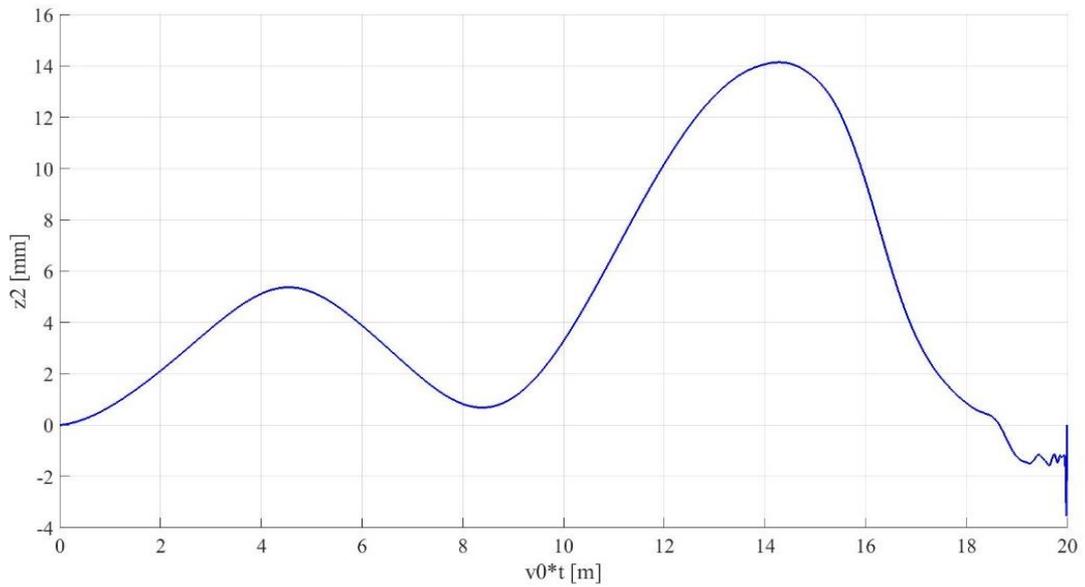
**Figura 2.23:** Forza di contatto del primo pantografo



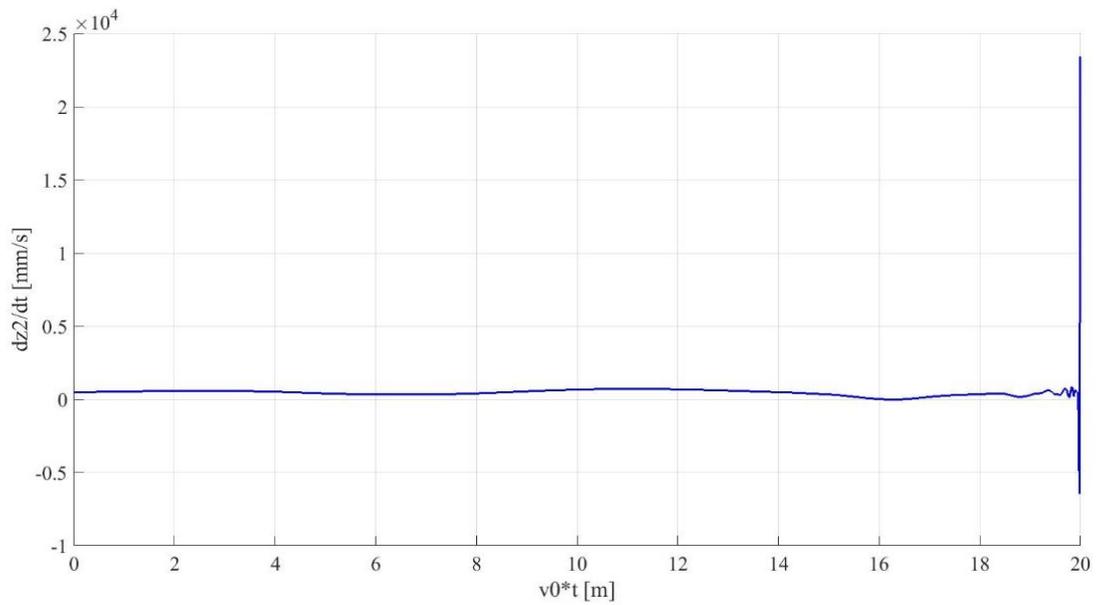
**Figura 2.24:** Ingrandimento del grafico della forza di contatto del primo pantografo

Analogamente alle considerazioni fatte precedentemente, il contributo principale alla forza di contatto è dovuta all'accelerazione del pantografo, conseguentemente il "picco" di accelerazione dell'ultimo istante temporale è presente anche sul plot della forza di contatto. È apprezzabile come il modulo della forza di contatto, al di sotto dei 18 m, sia inferiore a 500N per sostanzialmente l'intero spostamento del pantografo.

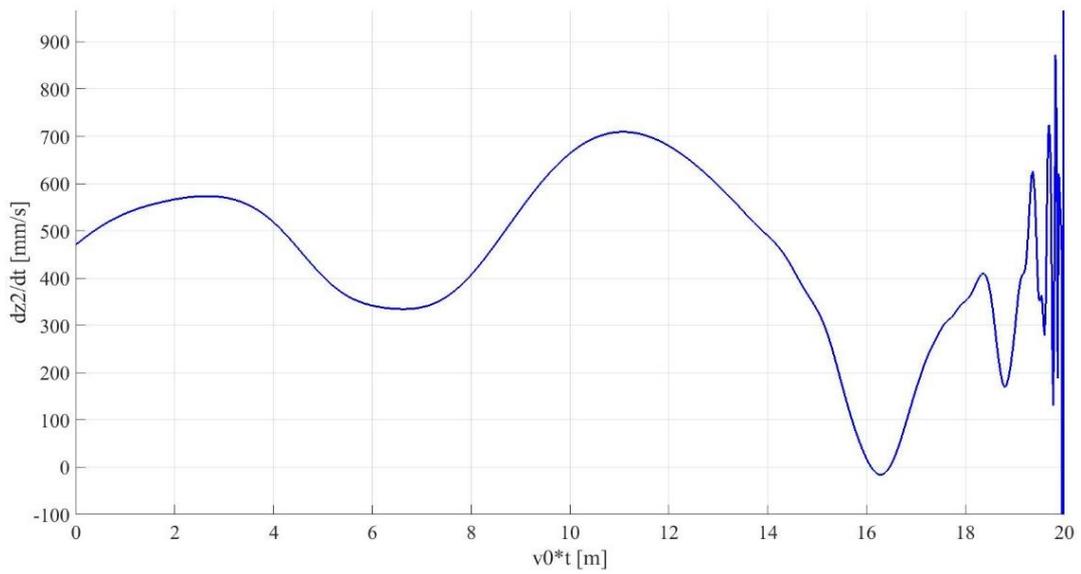
Ben diversa è la situazione per il secondo pantografo, in quanto percorre il filo di contatto in una configurazione che rispecchia la risposta libera del sistema. Si riportano di seguito i plot ottenuti.



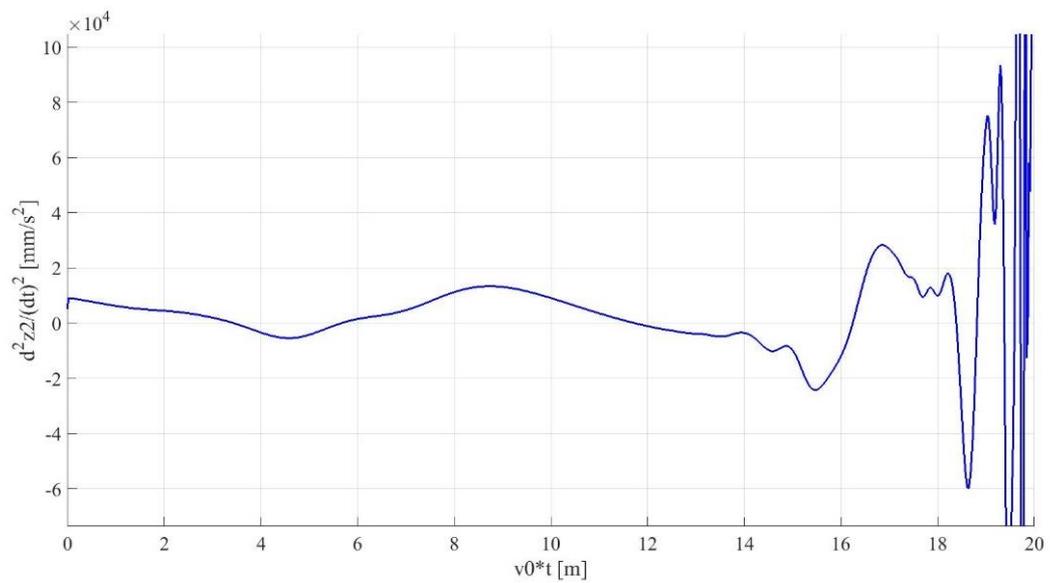
**Figura 2.25:** Spostamenti in corrispondenza del secondo pantografo



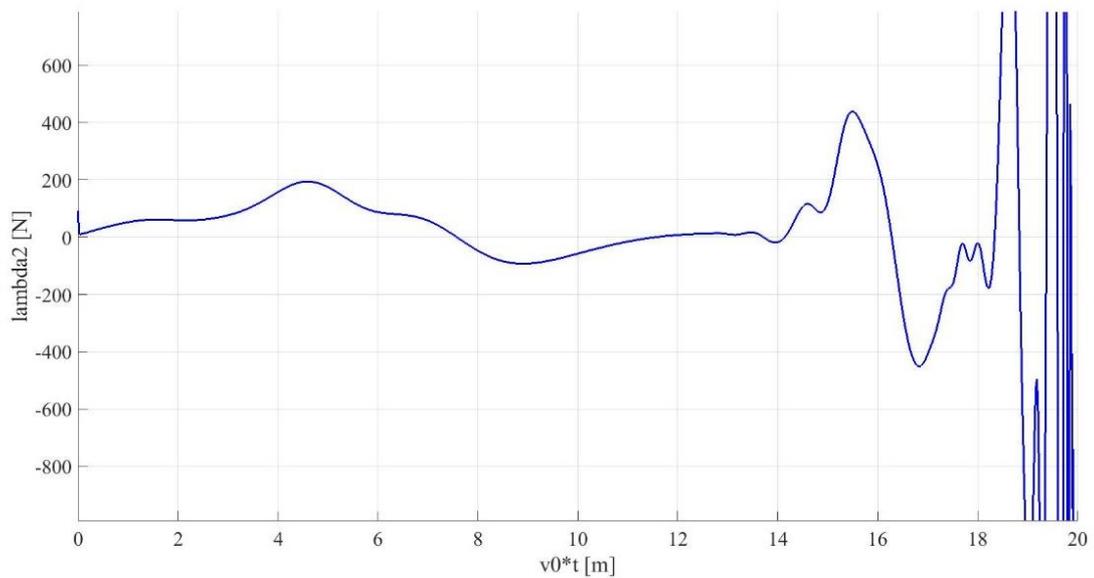
**Figura 2.26:** Velocità del secondo pantografo



**Figura 2.27:** Ingrandimento del grafico della velocità del secondo pantografo



**Figura 2.28:** Ingrandimento del grafico dell'accelerazione del secondo pantografo



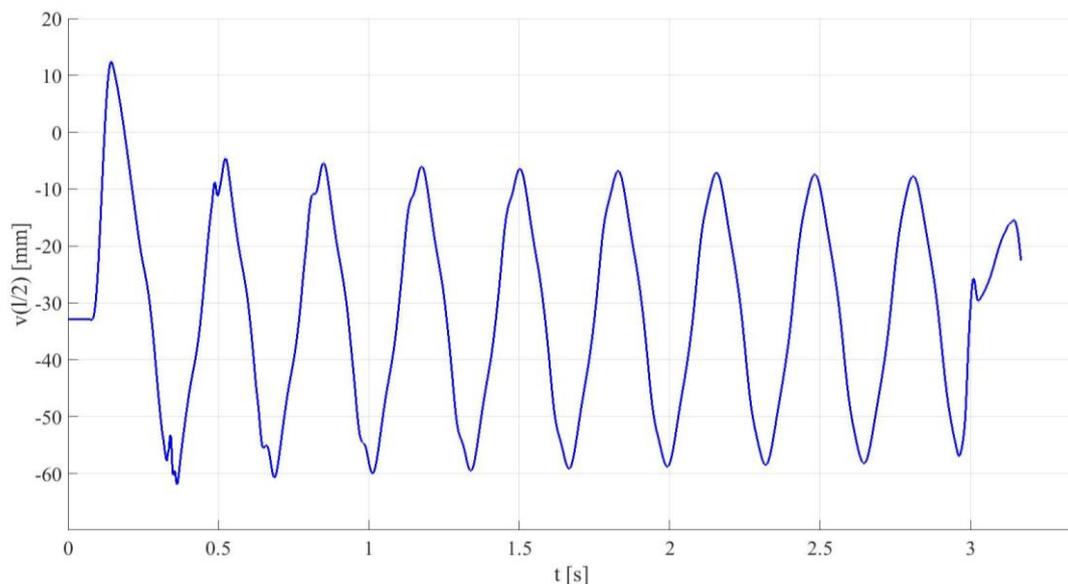
**Figura 2.29:** Ingrandimento del grafico della forza di contatto del secondo pantografo

Risulta evidente dalla figura 2.25 che lo spostamento del secondo pantografo raggiunge un valore massimo maggiore, pari a circa 15mm, ma resta sostanzialmente nel medesimo intervallo delle deformazioni del primo pantografo.

Analoghe considerazioni si possono fare sulla velocità del secondo pantografo (figura 2.27), anch'essa limitata nello stesso intervallo del primo.

Analogamente a quanto accade per il primo pantografo, la forza di contatto del secondo pantografo (figura 2.29) è limitata nell'intervallo  $\pm 500\text{N}$ , pur trascurando gli effetti di bordo.

Per completezza si riporta di seguito (figura 2.30) l'andamento degli spostamenti della mezzeria del filo di contatto nel tempo.



**Figura 2.30:** Spostamenti mezzeria

Si può facilmente riconoscere l'istante in cui il secondo pantografo giunge alla mezzeria, subito dopo i 3s, così come l'effetto dello smorzamento proporzionale sulla risposta, che riduce le oscillazioni di ampiezza più contenuta sovrapposte a quella che si potrebbe definire "principale".

### 3 Modello filo di contatto-fune portante

Nell'ultimo modello si è aggiunta la dinamica della fune portante, collegata al filo di contatto per mezzo dei pendini, così come è stata introdotta la possibilità di aumentare il numero di campate considerate, seguendo quanto fatto nel già citato studio di Sorrentino et al. [6]. Il numero maggiore di campate è stato introdotto inserendo delle giunzioni per mezzo di pali, sia per il filo di contatto che per la fune portante.

Si riporta di seguito una rappresentazione schematica del modello (figura 3.1).

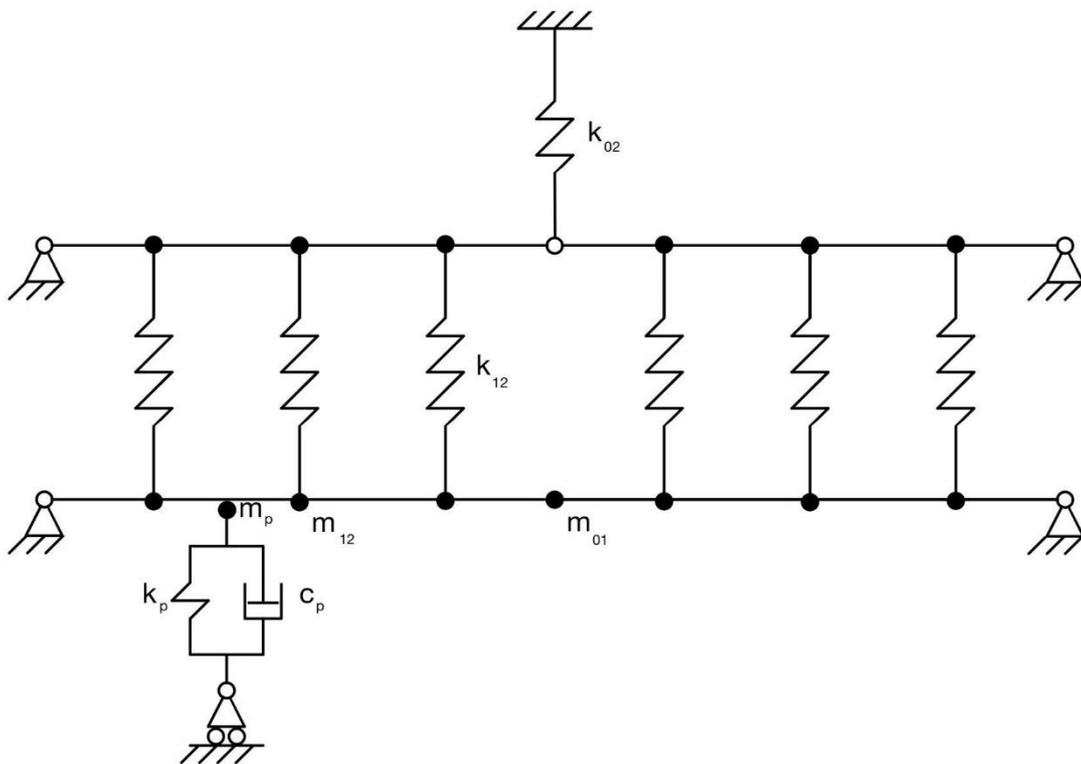


Figura 3.1: Rappresentazione schematica del modello

Si precisa che il palo della fune portante è reso per mezzo di una rigidezza  $k_{02}$ , mentre per il filo di contatto con una massa concentrata  $m_{01}$ . I pendini, collegando il filo di contatto alla fune portante, sono rappresentati come rigidezze  $k_{12}$ . Non cambia il modo in cui è modellato il pantografo, ed è, infatti, rappresentato sostanzialmente allo stesso modo della figura 2.1. Si riporta di seguito una tabella (tabella 3.1) contenente i parametri e le grandezze scelte, precisando che si è cercata una continuità con i parametri presenti nell'articolo [6] seguito.

Grandezza	Modulo	Unità di misura
$l_1$	60	m
$\rho_{FC}$	10171	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_{FP}$	8061	kg/m <sup>3</sup>
E	120	GPa
A	132.7	mm <sup>2</sup>
$I_y$	1402	mm <sup>4</sup>
$l_0$	200	m
$T_{wFC}$	20	kN
$T_{wFP}$	16	kN
$F_0$	200	N
$v_0$	300	km/h
$m_{01}$	0.33	kg
$k_{02}$	$10^{10}$	N/m
$m_{12}$	0.2	kg
$k_{12}$	$10^5$	N/m
$m_p$	20	kg
$c_p$	15	Ns/m
$k_p$	20000	N/m
dt	0.000277	s

**Tabella 3.1:** Dati del sistema pantografo, filo di contatto e fune portante

Si evidenzia che il pedice FC fa riferimento alle grandezze riguardanti il filo di contatto, mentre il pedice FP a quelle della fune portante. Analogamente, il pedice P, come già visto per il modello con pantografo ad 1 GDL, si riferisce ai parametri del pantografo. Si precisa, inoltre, che l'intervallo temporale dt è scelto in funzione della frequenza maggiore considerata, al fine di minimizzare l'errore introdotto dalla discretizzazione e dall'integrazione numerica. Il valore riportato in tabella 3.1 è quello corrispondente ad un numero di modi considerati pari a 480, corrispondente a circa 370 Hz.

Risulta fondamentale a questo punto riportare le equazioni del modello che, data la maggior complessità, verranno sviluppate nel modo più chiaro possibile, riportando quanti più passaggi analitici necessari.

Si riportano, per cominciare, le equazioni differenziali riguardanti il filo di contatto (37), la fune portante (38) e il pantografo (39). Si ricorda che le prime due derivano dalla teoria della trave di Eulero-Bernoulli, mentre la terza dal ben noto sistema massa-molla-smorzatore.

$$\rho_{FC}A \frac{\partial^2 v_{FC}(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_y \frac{\partial^2 v_{FC}(x,t)}{\partial x^2} - T_{wFC} v_{FC}(x,t) \right) + \sum_{h=1}^H \left( m_{12} \frac{\partial^2 v_{FC}(x,t)}{\partial t^2} + k_{12} (v_{FC}(x,t) + v_{FP}(x,t)) \right) \delta(x - x_h) + \sum_{k=1}^K m_{01} \frac{\partial^2 v_{FC}(x,t)}{\partial t^2} \delta(x - x_k) = f(x,t) \quad (37)$$

$$\rho_{FP}A \frac{\partial^2 v_{FP}(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_y \frac{\partial^2 v_{FP}(x,t)}{\partial x^2} - T_{wFP} v_{FP}(x,t) \right) + \sum_{h=1}^H \left( m_{12} \frac{\partial^2 v_{FP}(x,t)}{\partial t^2} + k_{12} (v_{FP}(x,t) + v_{FC}(x,t)) \right) \delta(x - x_h) + \sum_{k=1}^K k_{02} v_{FP}(x,t) \delta(x - x_k) = -\rho_{FP} A_{FP} g \quad (38)$$

$$m_p \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + c_p \frac{dz(t)}{dt} + k_p z(t) = -m_p g + P - \lambda(t) \quad (39)$$

Confrontando l'equazione (37) con la medesima riferita al modello precedente (22), la parte che differisce riguarda ovviamente l'aggiunta dei pendini e dei pali, introdotti tramite i termini delle sommatorie con pedice h e pedice k rispettivamente. Al fine di rendere la puntualità dell'effetto dei pendini e dei pali, si è nuovamente ricorso alla distribuzione  $\delta$  di Dirac, rispetto alla posizione dei pendini  $x_h$  e dei pali  $x_k$ . Per la posizione dei K pali, ovviamente essa dipenderà dal numero di campate considerate, mentre per gli H pendini si è scelto il seguente vettore posizione: (5 10.5 17 23.5 30 36.5 43 49.5 55).

Questo vettore è ripetuto su ogni campata considerata.

Per quanto riguarda l'equazione (39), non sono presenti differenze rispetto a quella del modello precedente (23).

A questo punto si definiscono la forzante del filo di contatto (40), la semplificazione del modulo della forza applicata al pantografo (41), e il vincolo di contatto tra pantografo e filo di contatto (42).

$$f(x,t) = \lambda(t) \delta(x - v_0 t) - \rho_{FC} A g \quad (40)$$

$$P - m_p g = F_0 \quad (41)$$

$$v_{FC}(x_0, t) = z(t) \quad (42)$$

Anche in questo caso non sono presenti differenze rispetto al modello precedente.

Si ricorda l'equazione per la posizione del pantografo (43).

$$x_0 = v_0 t \quad (43)$$

Segue il già citato teorema di espansione, sia per il filo di contatto (44), che per la fune portante (45).

$$v_{FC}(x,t) = v_{FC_s}(x) + v_{FC_d}(x,t) = v_{FC_s}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{1i}(t) \quad (44)$$

$$v_{FP}(x,t) = v_{FP_s}(x) + v_{FP_d}(x,t) = v_{FP_s}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{2i}(t) \quad (45)$$

Sostituendo la (44) nell'equazione del vincolo (42) si ottiene l'equazione dello spostamento verticale del pantografo (46).

$$z(t) = v_{FC_s}(v_0 t) + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(v_0 t) \eta_{1i}(t) \quad (46)$$

Derivando l'equazione così ottenuta si ha:

$$\frac{dz(t)}{dt} = v_0 \frac{dv_{FCs}(v_0 t)}{dx} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( v_0 \frac{d\Phi_i(v_0 t)}{d(v_0 t)} \eta_{1i}(t) + \Phi_i(v_0 t) \frac{d\eta_{1i}(t)}{dt} \right) \quad (47)$$

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = v_0^2 \frac{d^2 v_{FCs}(v_0 t)}{dx^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( v_0^2 \frac{d^2 \Phi_i(v_0 t)}{d(v_0 t)^2} \eta_{1i}(t) + 2v_0 \frac{d\Phi_i(v_0 t)}{d(v_0 t)} \frac{d\eta_{1i}(t)}{dt} + \Phi_i(v_0 t) \frac{d^2 \eta_{1i}(t)}{dt^2} \right) \quad (48)$$

Sostituendo le equazioni (41), (46), (47) e (48) nella (39) si ottiene la formulazione della forza di contatto (49).

$$\begin{aligned} \lambda(t) = & F_0 - m_p \left( v_0^2 \frac{d^2 v_{FCs}(v_0 t)}{dx^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( v_0^2 \frac{d^2 \Phi_i(v_0 t)}{d(v_0 t)^2} \eta_{1i}(t) + 2v_0 \frac{d\Phi_i(v_0 t)}{d(v_0 t)} \frac{d\eta_{1i}(t)}{dt} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \Phi_i(v_0 t) \frac{d^2 \eta_{1i}(t)}{dt^2} \right) \right) - c_p \left( v_0 \frac{dv_{FCs}(v_0 t)}{dx} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( v_0 \frac{d\Phi_i(v_0 t)}{d(v_0 t)} \eta_{1i}(t) + \Phi_i(v_0 t) \frac{d\eta_{1i}(t)}{dt} \right) \right) + \\ & -k_p (v_{FCs}(v_0 t) + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(v_0 t) \eta_{1i}(t)) \end{aligned} \quad (49)$$

A questo punto si sostituiscono le equazioni (44) e (45) nelle (37) e (38), e semplificando la statica, che pur è un problema non banale, si ottengono le equazioni (50) e (51).

$$\begin{aligned} \rho_{FC} A \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{1i}(t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E I_y \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{1i}(t)}{\partial x^2} - T_{wFC} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{1i}(t) \right) + \\ + \sum_{h=1}^H \left( m_{12} \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{1i}(t)}{\partial t^2} + k_{12} (\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{1i}(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{2i}(t)) \right) \delta(x - x_h) + \\ + \sum_{k=1}^K m_{01} \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{1i}(t)}{\partial t^2} \delta(x - x_k) = \lambda(t) \delta(x - v_0 t) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \rho_{FP} A \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{2i}(t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E I_y \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{2i}(t)}{\partial x^2} - T_{wFP} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{2i}(t) \right) + \\ + \sum_{h=1}^H \left( m_{12} \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{2i}(t)}{\partial t^2} + k_{12} (\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{2i}(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{1i}(t)) \right) \delta(x - x_h) + \\ + \sum_{k=1}^K k_{02} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{2i}(t) \delta(x - x_k) = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Si nota a questo punto che le derivate spaziali e temporali non hanno effetto sulle  $\eta$  e  $\Phi$  rispettivamente, per cui è possibile invertire l'ordine tra sommatorie e derivate, ottenendo le equazioni (52) e (53).

$$\begin{aligned} \rho_{FC} A \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \frac{\partial^2 \eta_{1i}(t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E I_y \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} \eta_{1i}(t) - T_{wFC} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{1i}(t) \right) + \\ + \sum_{h=1}^H \left( m_{12} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \frac{\partial^2 \eta_{1i}(t)}{\partial t^2} + k_{12} (\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{1i}(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{2i}(t)) \right) \delta(x - x_h) + \\ + \sum_{k=1}^K m_{01} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \frac{\partial^2 \eta_{1i}(t)}{\partial t^2} \delta(x - x_k) = \lambda(t) \delta(x - v_0 t) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned}
& \rho_{\text{FP}} A \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \frac{\partial^2 \eta_{2i}(t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E I_y \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} \eta_{2i}(t) - T_{\text{wFP}} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{2i}(t) \right) + \\
& + \sum_{h=1}^H \left( m_{12} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \frac{\partial^2 \eta_{2i}(t)}{\partial t^2} + k_{12} (\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{2i}(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{1i}(t)) \right) \delta(x - x_h) + \\
& + \sum_{k=1}^K k_{02} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_{2i}(t) \delta(x - x_k) = 0
\end{aligned} \tag{53}$$

Si moltiplicano per  $\Phi_i$  le (52) e (53), e si integrano sull'intera lunghezza delle campate L.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_0^L \rho_{\text{FC}} A \Phi_i(x)^2 dx \frac{\partial^2 \eta_{1i}(t)}{\partial t^2} + \int_0^L \left( E I_y \Phi_i(x) \frac{\partial^4 \Phi_i(x)}{\partial x^4} - T_{\text{wFC}} \Phi_i(x) \frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} \right) dx \eta_{1i}(t) + \right. \\
& + \sum_{h=1}^H \left( m_{12} \Phi_i(x_h)^2 \frac{\partial^2 \eta_{1i}(t)}{\partial t^2} + k_{12} (\Phi_i(x_h)^2 \eta_{1i}(t) - \Phi_i(x_h)^2 \eta_{2i}(t)) \right) + \\
& \left. + \sum_{k=1}^K m_{01} \Phi_i(x_k)^2 \frac{\partial^2 \eta_{1i}(t)}{\partial t^2} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(v_0 t) \lambda(t)
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_0^L \rho_{\text{FP}} A \Phi_i(x)^2 dx \frac{\partial^2 \eta_{2i}(t)}{\partial t^2} + \int_0^L \left( E I_y \Phi_i(x) \frac{\partial^4 \Phi_i(x)}{\partial x^4} - T_{\text{wFP}} \Phi_i(x) \frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} \right) dx \eta_{2i}(t) + \right. \\
& + \sum_{h=1}^H \left( m_{12} \Phi_i(x_h)^2 \frac{\partial^2 \eta_{2i}(t)}{\partial t^2} + k_{12} (\Phi_i(x_h)^2 \eta_{2i}(t) - \Phi_i(x_h)^2 \eta_{1i}(t)) \right) + \\
& \left. + \sum_{k=1}^K k_{02} \Phi_i(x_k)^2 \eta_{2i}(t) \right) = 0
\end{aligned} \tag{55}$$

Si sostituisce l'equazione della forza di contatto (49) nella (54).

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_0^L \rho_{\text{FC}} A \Phi_i(x)^2 dx \frac{\partial^2 \eta_{1i}(t)}{\partial t^2} + \int_0^L \left( E I_y \Phi_i(x) \frac{\partial^4 \Phi_i(x)}{\partial x^4} - T_{\text{wFC}} \Phi_i(x) \frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} \right) dx \eta_{1i}(t) + \right. \\
& + \sum_{h=1}^H \left( m_{12} \Phi_i(x_h)^2 \frac{\partial^2 \eta_{1i}(t)}{\partial t^2} + k_{12} (\Phi_i(x_h)^2 \eta_{1i}(t) - \Phi_i(x_h)^2 \eta_{2i}(t)) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^K m_{01} \Phi_i(x_k)^2 \frac{\partial^2 \eta_{1i}(t)}{\partial t^2} \Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(v_0 t) \left( F_0 - m_p \left( v_0^2 \frac{d^2 v_{\text{FC}_s}(v_0 t)}{dx^2} + \right. \right. \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \left( v_0^2 \frac{d^2 \Phi_j(v_0 t)}{d(v_0 t)^2} \eta_{1j}(t) + 2 v_0 \frac{d\Phi_j(v_0 t)}{d(v_0 t)} \frac{d\eta_{1j}(t)}{dt} + \Phi_j(v_0 t) \frac{d^2 \eta_{1j}(t)}{dt^2} \right) \Big) - c_p \left( v_0 \frac{dv_{\text{FC}_s}(v_0 t)}{dx} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \left( v_0 \frac{d\Phi_j(v_0 t)}{d(v_0 t)} \eta_{1j}(t) + \Phi_j(v_0 t) \frac{d\eta_{1j}(t)}{dt} \right) \right) - k_p (v_{\text{FC}_s}(v_0 t) + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(v_0 t) \eta_{1j}(t)) \Big)
\end{aligned} \tag{56}$$

A questo punto è possibile passare ad una notazione vettoriale e matriciale, quindi passando da un numero infinito di modi considerati ad uno finito. Si ricavano le matrici di massa e rigidezza per il filo di contatto (57 e 59) e per la fune portante (58 e 60).

$$M_{1ii} = \int_0^L \rho_{\text{FC}} A \Phi_i(x)^2 dx + \sum_{h=1}^H m_{12} \Phi_i(x_h)^2 + \sum_{k=1}^K m_{01} \Phi_i(x_k)^2 \tag{57}$$

$$M_{2ii} = \int_0^L \rho_{\text{FP}} A \Phi_i(x)^2 dx + \sum_{h=1}^H m_{12} \Phi_i(x_h)^2 \tag{58}$$

$$K_{1ii} = \int_0^L \left( EI_y \Phi_i(x) \frac{\partial^4 \Phi_i(x)}{\partial x^4} - T_{wFC} \Phi_i(x) \frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} \right) dx \quad (59)$$

$$K_{2ii} = \int_0^L \left( EI_y \Phi_i(x) \frac{\partial^4 \Phi_i(x)}{\partial x^4} - T_{wFP} \Phi_i(x) \frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} \right) dx + \sum_{k=1}^K k_{02} \Phi_i(x_k)^2 \quad (60)$$

Si precisa che a causa della presenza dei pendini, gli spostamenti verticali del filo di contatto e della fune portante risultano accoppiati, per cui saranno presenti anche termini fuori dalla diagonale, in merito alla rigidezza, che nella formulazione matriciale completa della struttura, si troveranno sulle diagonali minori con la seguente formula.

$$K_{hii} = \sum_{h=1}^H k_{12} \Phi_i(x_h)^2 \quad (61)$$

Si è introdotto, come fatto già per il modello precedente, lo smorzamento proporzionale, sia per il filo di contatto (62) che per la fune portante (63).

$$C_{1ij} = \alpha M_{1ij} + \beta K_{1ij} \quad (62)$$

$$C_{2ij} = \alpha M_{2ij} + \beta K_{2ij} \quad (63)$$

Si riportano di seguito i valori scelti di  $\alpha$  e  $\beta$  (tabella 3.2).

Grandezza	Modulo
$\alpha$	0.02
$\beta$	$10^{-6}$

**Tabella 3.2:** Dati smorzamento proporzionale

Per quanto riguarda i termini di massa, rigidezza e smorzamento dovuti al pantografo, hanno la stessa forma del modello precedente (34, 35 e 36). Sono riportate di seguito con il pedice 1 per sottolineare che, questi termini, sono presenti nella parte delle matrici che riguarda il filo di contatto.

$$M_{1ij}(t) = \Phi_i(v_0 t) m_p \Phi_j(v_0 t) \quad (64)$$

$$C_{1ij}(t) = \Phi_i(v_0 t) 2m_p v_0 \frac{d\Phi_j(v_0 t)}{dx} + \Phi_i(v_0 t) c_p \Phi_j(v_0 t) \quad (65)$$

$$K_{1ij}(t) = \Phi_i(v_0 t) m_p v_0^2 \frac{d^2 \Phi_j(v_0 t)}{dx^2} + \Phi_i(v_0 t) c_p v_0 \frac{d\Phi_j(v_0 t)}{dx} + \Phi_i(v_0 t) k_p \Phi_j(v_0 t) \quad (66)$$

Si riporta, inoltre, l'equazione della forzante (67).

$$f_i(t) = \Phi_i(v_0 t) \left( F_0 - m_p v_0^2 \frac{d^2 v_{FC_s}(v_0 t)}{dx^2} - c_p v_0 \frac{dv_{FC_s}(v_0 t)}{dx} - k_p v_{FC_s}(v_0 t) \right) \quad (67)$$

Risulta evidente il contributo già menzionato della deformazione statica del filo di contatto alla forzante.

Dunque, mettendo in un'unica matrice di massa la (57) e la (58), si ottiene quanto segue.

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{1ii} & 0 \\ 0 & M_{2ii} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Analogamente per la matrice di smorzamento, con la (62) e la (63).

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1ii} & 0 \\ 0 & C_{2ii} \end{bmatrix} \quad (69)$$

In merito alla matrice di rigidità, oltre ai contributi della diagonale principale (59) e (60), vanno anche considerate le sopracitate componenti delle diagonali minori (61).

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{1ii} + K_{hii} & -K_{hii} \\ -K_{hii} & K_{2ii} + K_{hii} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Quindi si precisa anche il vettore delle storie temporali  $\eta$ .

$$\{\eta(t)\} = \begin{Bmatrix} \eta_{1i}(t) \\ \eta_{2i}(t) \end{Bmatrix} \quad (71)$$

Dunque si riportano tutte le matrici ed i vettori in un'unica equazione matriciale (72).

$$[M]\{\ddot{\eta}(t)\} + [C]\{\dot{\eta}(t)\} + [K]\{\eta(t)\} = \begin{Bmatrix} f_i(t) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{1ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{\ddot{\eta}(t)\} - \begin{bmatrix} C_{1ii} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{\dot{\eta}(t)\} + \begin{bmatrix} K_{1ii} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{\eta(t)\} \quad (72)$$

Essendo, come già detto precedentemente, gli spostamenti verticali del filo di contatto e della fune portante accoppiati, risulta necessario passare alle coordinate generalizzate, al fine di disaccoppiare le equazioni. Si risolve quindi l'autoproblema e si ottiene la matrice degli autovettori, distinguendo tra quelli riguardanti il filo di contatto ( $[\Psi]$ ) e quelli riguardanti la fune portante ( $[\zeta]$ ). Quindi si ottengono le coordinate generalizzate con la seguente equazione (73).

$$\begin{Bmatrix} \eta_{1i}(t) \\ \eta_{2i}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} \{\xi(t)\} \quad (73)$$

Sostituendo la (73) nella (72) e premoltiplicando per la trasposta della matrice degli autovettori, si ottiene l'equazione matriciale e vettoriale (74).

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T [\mathbf{M}] \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} \{\ddot{\xi}(t)\} + \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T [\mathbf{C}] \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} \{\dot{\xi}(t)\} + \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T [\mathbf{K}] \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} \{\xi(t)\} = \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f_i(t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \\
& - \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} \{\ddot{\xi}(t)\} - \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1ii} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} \{\dot{\xi}(t)\} + \\
& - \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1ii} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} \{\xi(t)\}
\end{aligned} \tag{74}$$

A questo punto è possibile formulare le matrici modali di massa (75), smorzamento (76), rigidità (77) e il vettore delle forze generalizzate (78).

$$[\bar{\mathbf{M}}(t)] = \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T [\mathbf{M}] \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} \tag{75}$$

$$[\bar{\mathbf{C}}(t)] = \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T [\mathbf{C}] \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1ii} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} \tag{76}$$

$$[\bar{\mathbf{K}}(t)] = \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T [\mathbf{K}] \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1ii} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix} \tag{77}$$

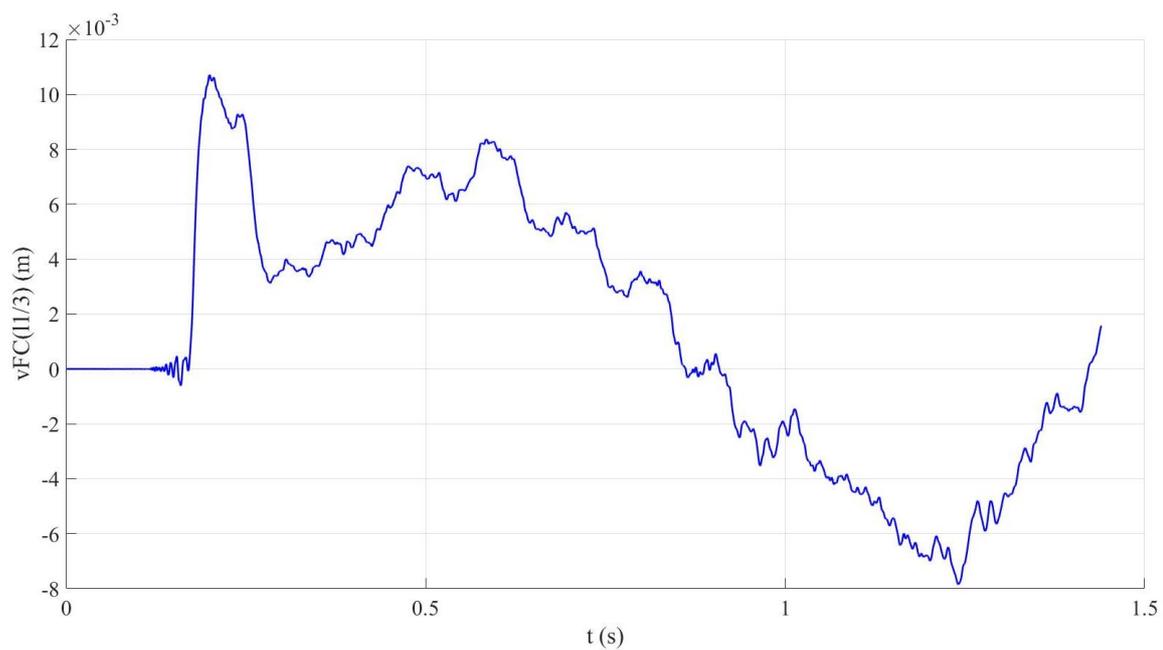
$$\{\bar{f}(t)\} = \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\zeta] \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f_i(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{78}$$

Risulta evidente, come già per il modello precedente, che le matrici sono tempo-varianti, per cui è necessario ricorrere ancora una volta all'integratore numerico Newmark-beta. Nella tabella 3.3 seguente sono riportati i dati utilizzati nell'integrazione.

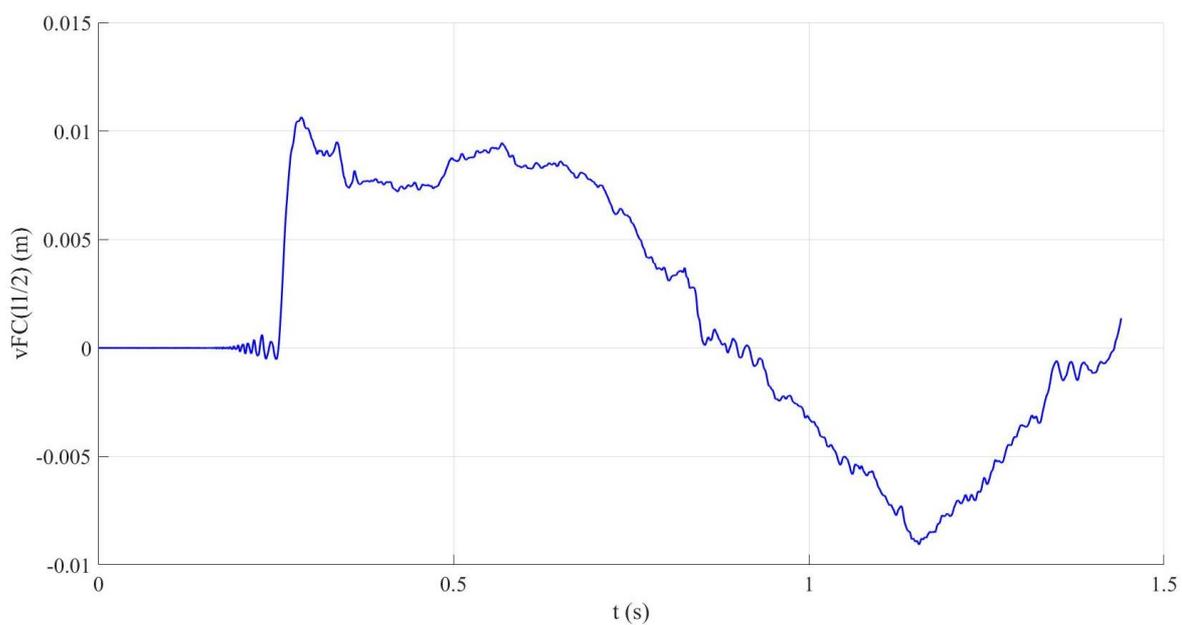
Grandezza	Modulo
$\beta$	1/4
$\gamma$	1/2
tol	$10^8$

**Tabella 3.3:** Dati dell'integratore numerico

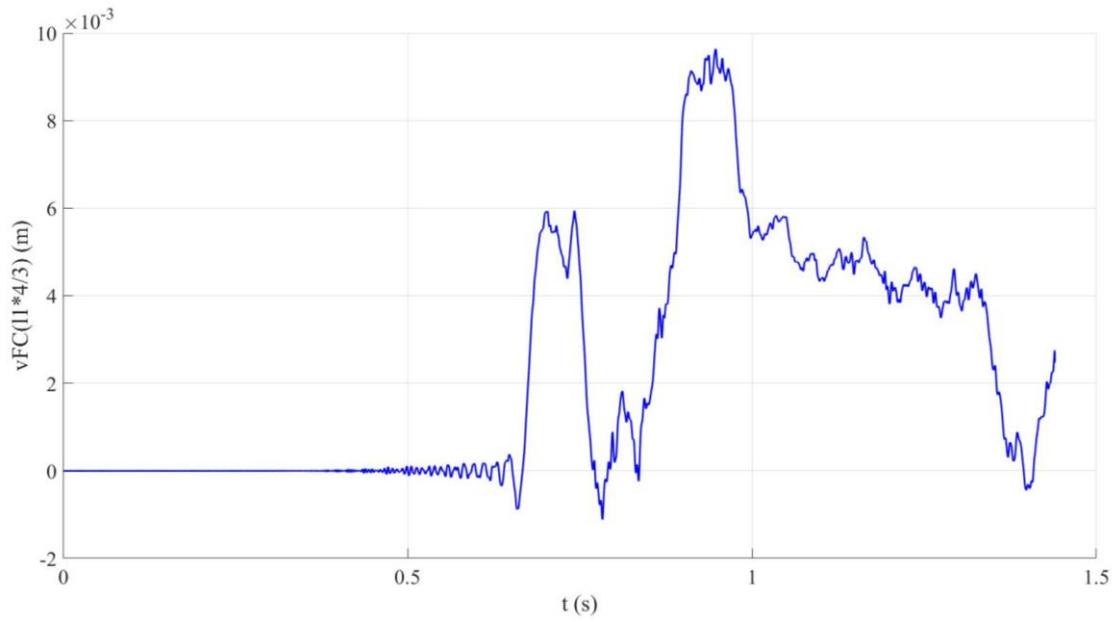
Si riportano di seguito i grafici ottenuti con i dati riportati, in particolare 480 modi considerati e 2 campate. Non è stata implementata, tuttavia, la deformazione statica del sistema. Prima di tutto si riportano gli spostamenti del filo di contatto (figure 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5) e della fune portante (figure 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9).



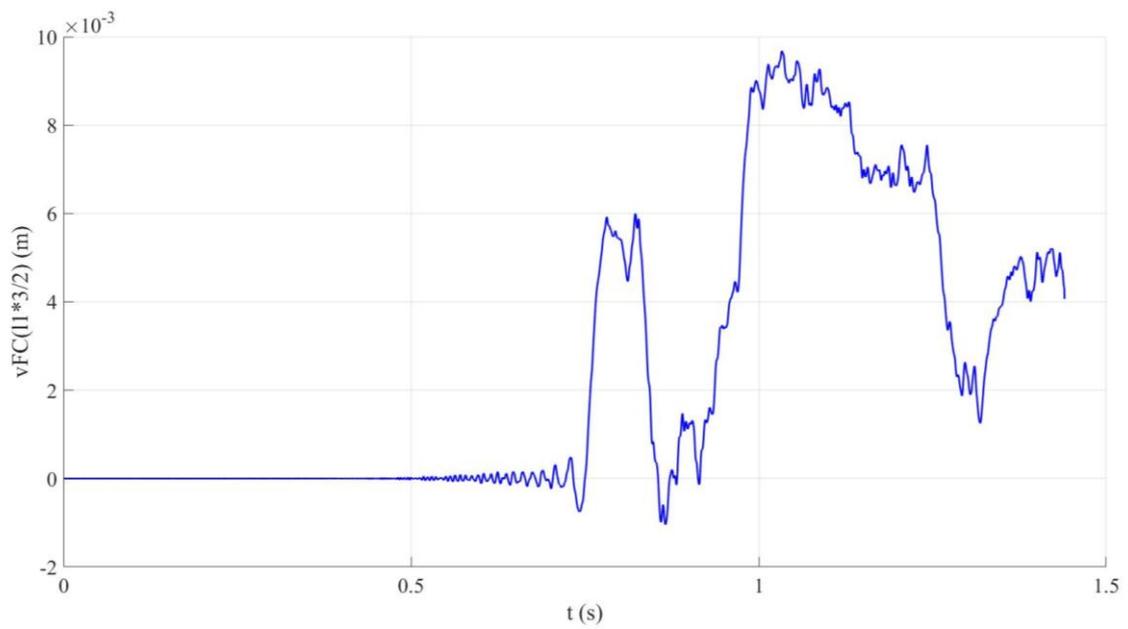
**Figura 3.2:** Spostamento filo di contatto ad 1/3 della prima campata



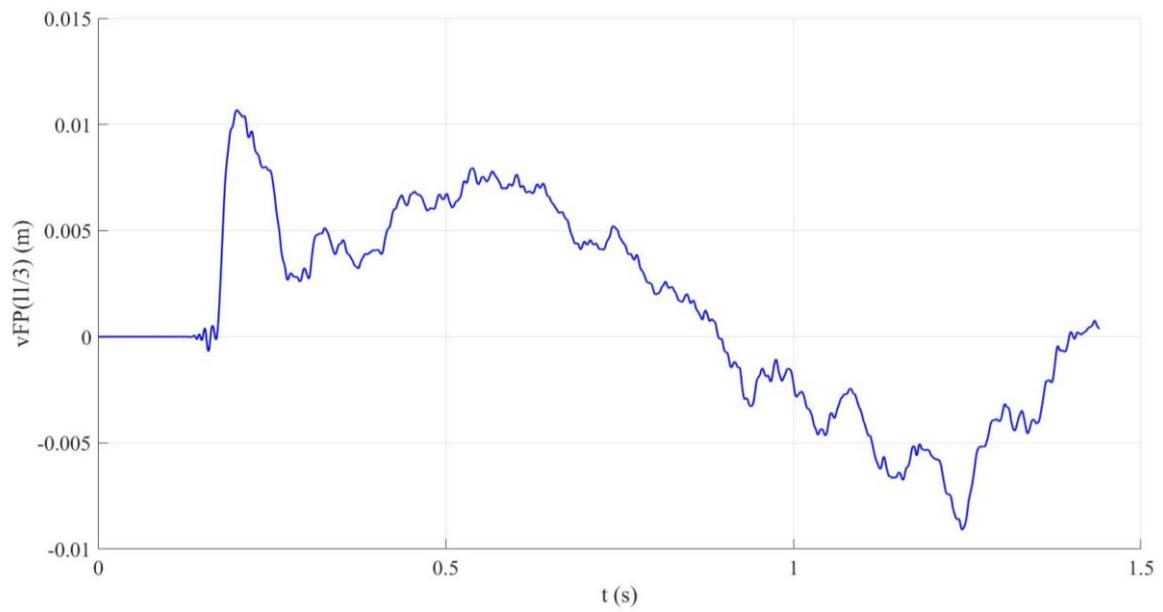
**Figura 3.3:** Spostamento filo di contatto ad 1/2 della prima campata



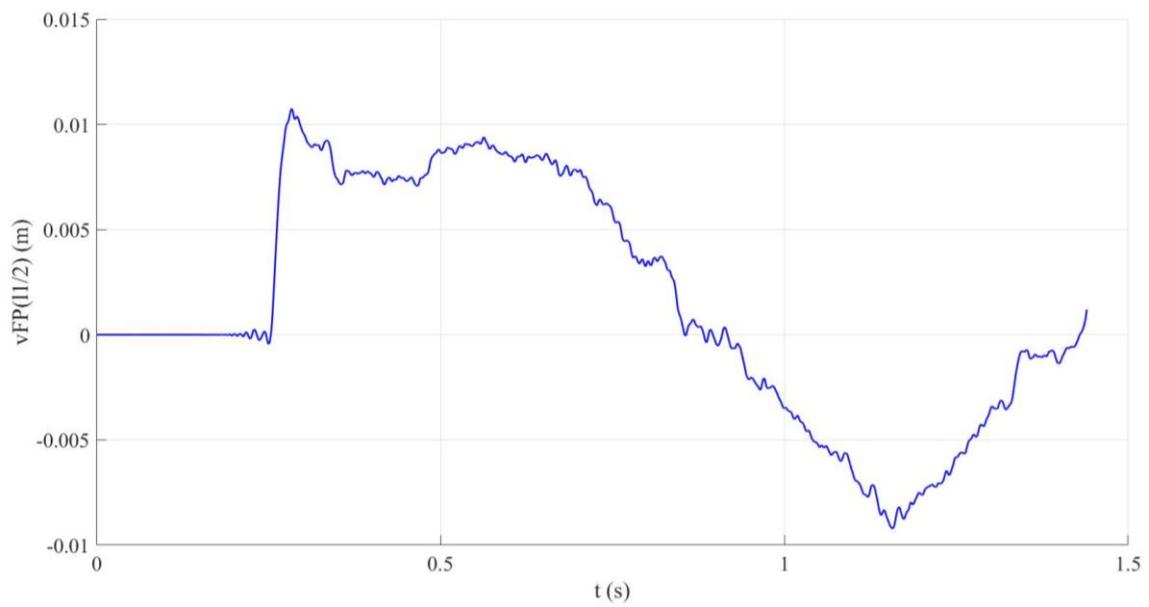
**Figura 3.4:** Spostamento filo di contatto ad 1/3 della seconda campata



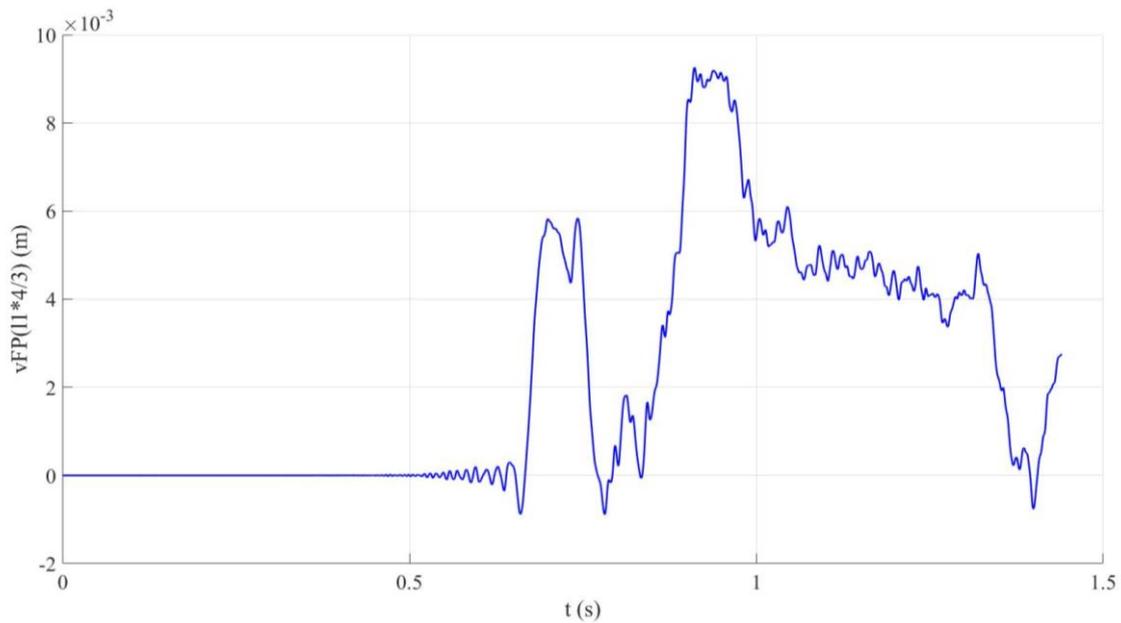
**Figura 3.5:** Spostamento filo di contatto ad 1/2 della seconda campata



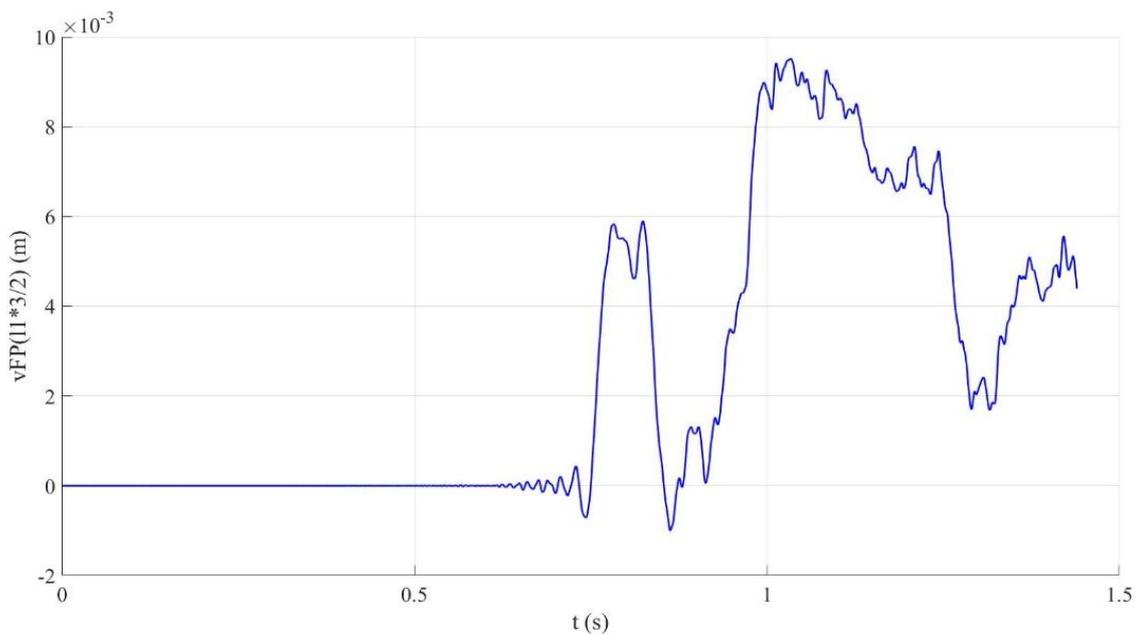
**Figura 3.6:** Spostamento fune portante ad 1/3 della prima campata



**Figura 3.7:** Spostamento fune portante ad 1/2 della prima campata

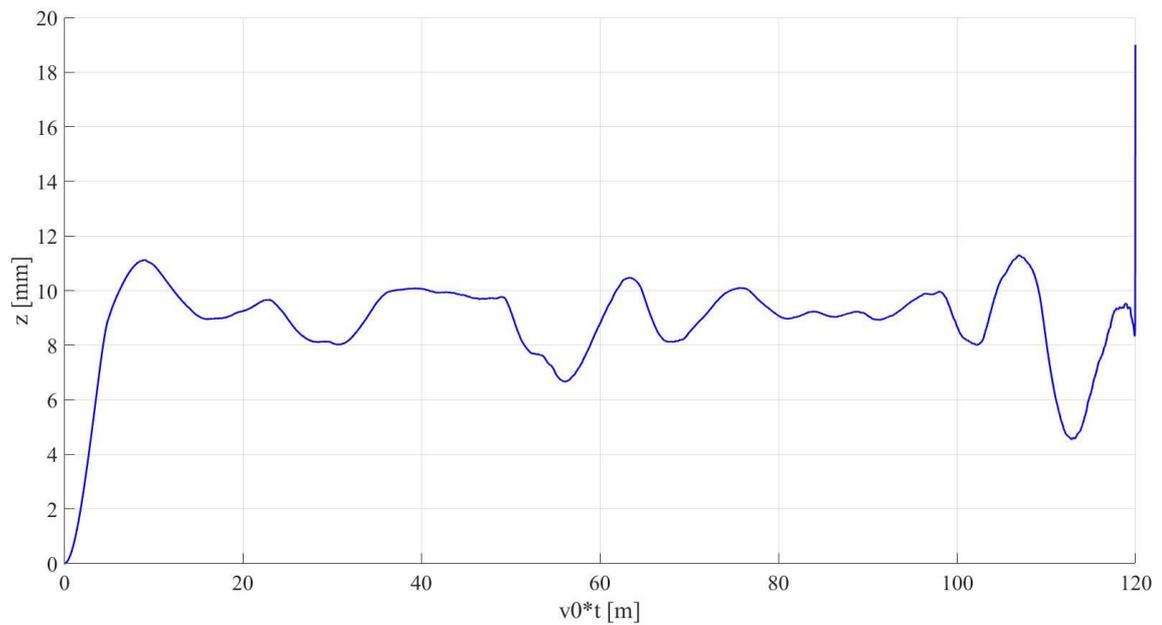


**Figura 3.8:** Spostamento fune portante ad 1/3 della seconda campata



**Figura 3.9:** Spostamento fune portante ad 1/2 della seconda campata

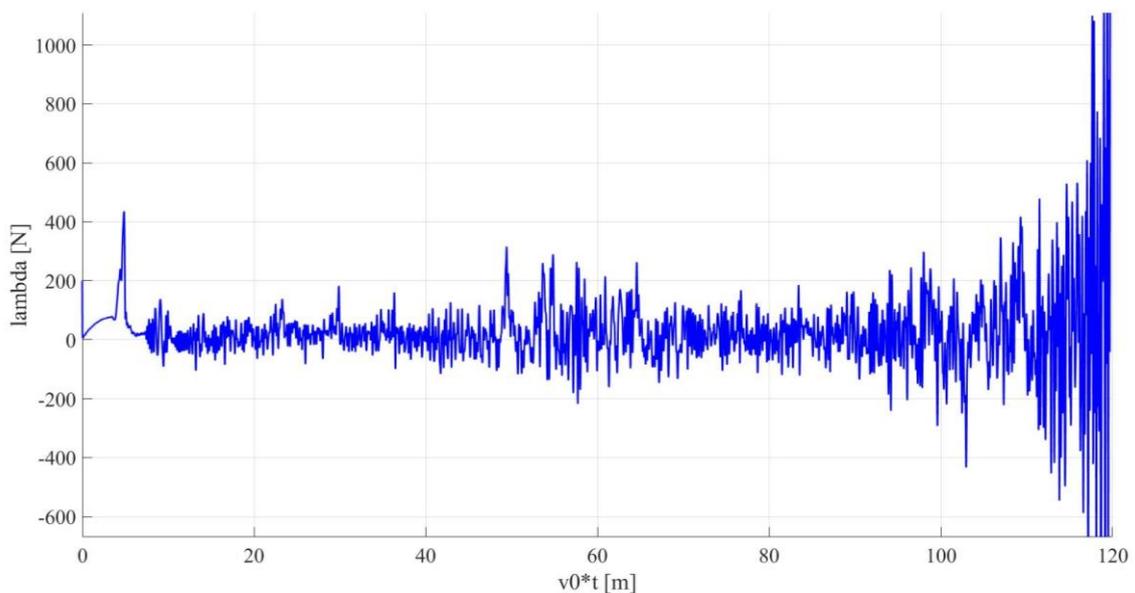
A differenza del modello precedente, si è scelto di osservare oltre allo spostamento della mezzeria, anche i punti ad 1/3 di ciascuna campata. Confrontando gli andamenti degli spostamenti della fune portante e del filo di contatto, sembrerebbe non esserci differenza, dal momento che persino i valori degli spostamenti sono sostanzialmente identici. Ciononostante sono presenti delle differenze, in particolare osservando le figure 3.5 e 3.9. Altre considerazioni possono essere fatte guardando gli spostamenti in corrispondenza del pantografo.



**Figura 3.10:** Spostamento in corrispondenza del pantografo

Il pantografo non supera i 12mm di spostamento verticale, se si trascurano gli ormai noti effetti di bordo dovuti al vincolo della fune portante. Gli spostamenti risultano, inoltre, contenuti in un intervallo di ampiezza piuttosto contenuta.

Si riporta per completezza il grafico della forza di contatto  $\lambda$ , che tuttavia presenta valori molto elevati nella zona prossima alla fine della seconda campata.



**Figura 3.11:** Forza di contatto in corrispondenza del pantografo

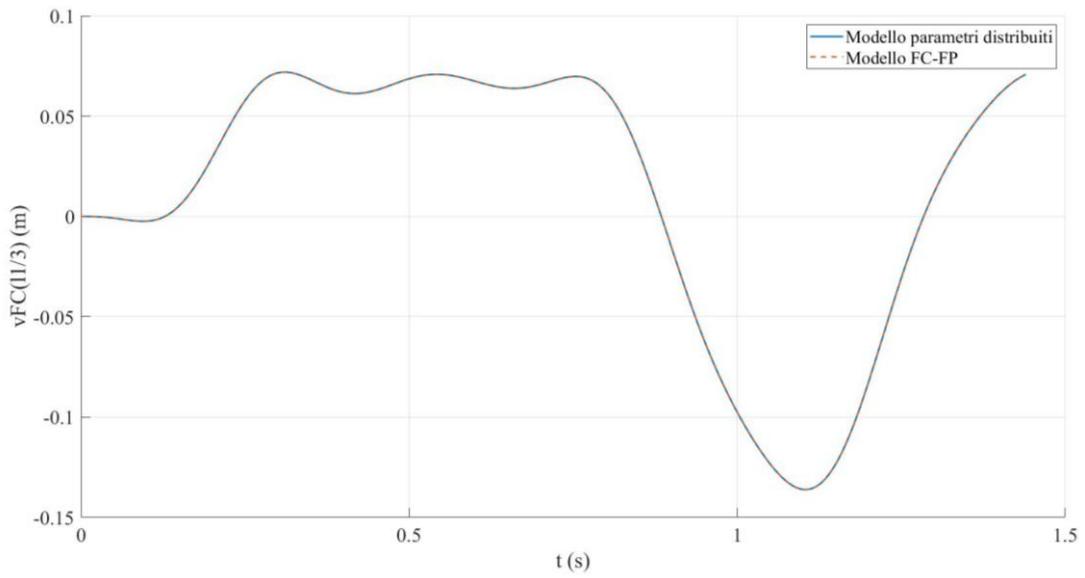
L'unica considerazione constatabile dalla figura 3.11 è l'intervallo all'interno del quale la forza di contatto varia, che fino a 100m raggiunge un massimo di 435N ed un minimo di

circa -291N. Negli ultimi 10m i valori della forza di contatto sono troppo elevati, a causa del già citato effetto del vincolo del filo di contatto. Al fine di verificare che l'introduzione della fune portante, dei pendini e del numero maggiore di campate non comporti errori, si è proceduto al confronto del modello filo di contatto - fune portante con il modello dell'articolo di Sorrentino et al. [6].

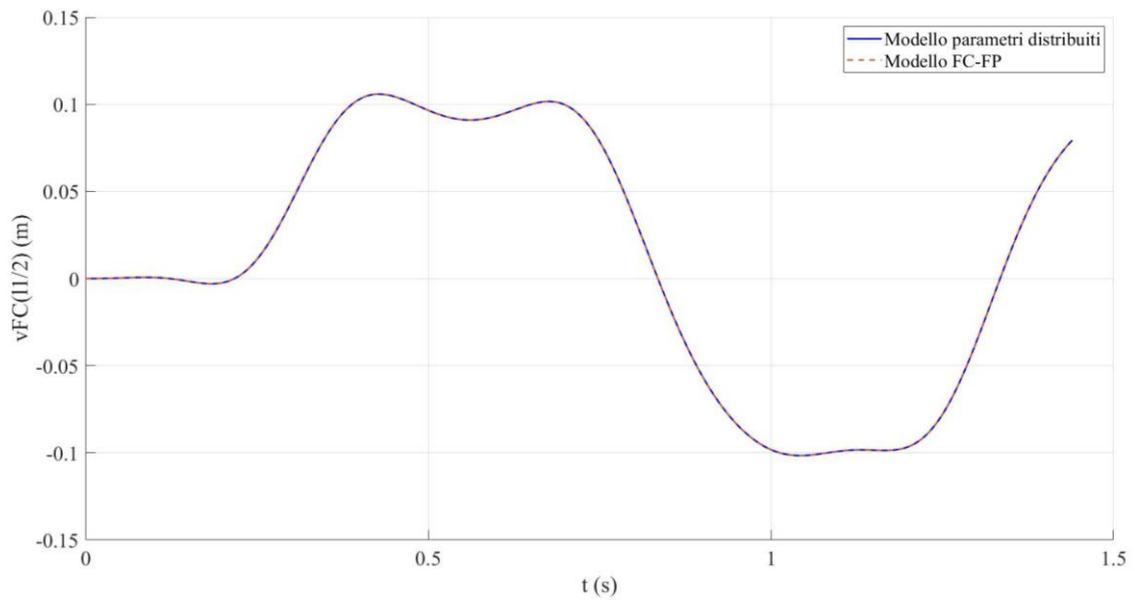
### **3.1 Confronto modello filo di contatto–fune portante con modello a parametri distribuiti**

Nello studio “Distributed parameter and finite element models for wave propagation in railway contact lines” svolto da Sorrentino et al. [6] si è proposto un modello a parametri distribuiti del filo di contatto collegato alla fune portante tramite i pendini, comparato con i risultati ottenuti per mezzo di un modello FEM. Questo sistema è stato sottoposto a diverse situazioni di carico differenti, quali una forza a gradino non viaggiante, una forza di tipo armonico non viaggiante e, caso di nostro interesse, con un carico di modulo costante ma viaggiante. Si tratta sostanzialmente del medesimo tipo di carico analizzato nel capitolo 1. Per avere un appropriato confronto, i parametri riguardanti il pantografo, per cui massa, rigidità e smorzamento, sono stati posti a zero. Si è ottenuto così un semplice carico viaggiante. Nell'articolo è stata considerata una configurazione della catenaria non sottoposta all'azione del peso proprio, di conseguenza anche nel modello in esame in questa tesi è stata trascurata la gravità. Inoltre non è stato implementato lo smorzamento proporzionale.

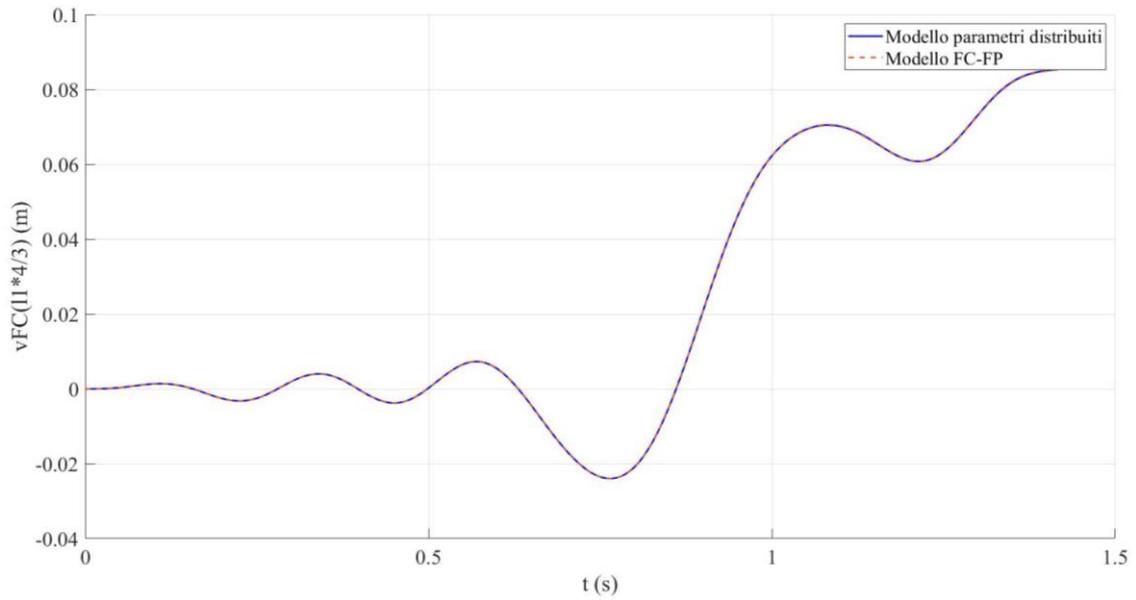
Come era stato notato già precedentemente, la scelta dei modi era fondamentale per l'ottenimento di risultati attendibili. Così sono stati svolti confronti con un diverso numero di modi, passando da 1 a 480, valore oltre il quale i tempi di calcolo diventano eccessivamente prolungati. Dal momento che un numero troppo esiguo non restituisce spostamenti apprezzabili sull'intera lunghezza delle campate, si riportano i grafici ottenuti con 10 modi e 2 campate, mantenendo le stesse grandezze riportate nella tabella 3.1. Analogamente a quanto detto nel paragrafo precedente, il confronto è stato fatto sia sulla mezziera delle due campate che ad 1/3. Si riportano di seguito i grafici riguardanti gli spostamenti del filo di contatto (figure 3.12, 3.13, 3.14 e 3.15). In particolare in blu continuo i risultati del modello dell'articolo, denominato “Modello parametri distribuiti”, mentre in rosso tratteggiato i risultati del modello in esame, con il nome di “Modello FC-FP”.



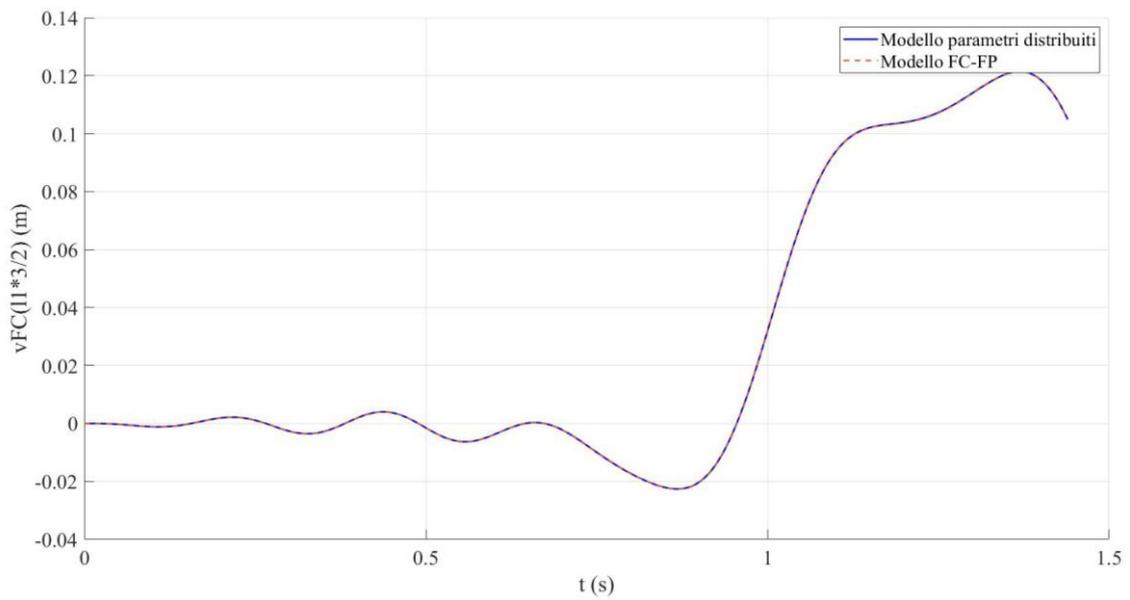
**Figura 3.12:** Confronto spostamenti filo di contatto ad 1/3 della prima campata



**Figura 3.13:** Confronto spostamenti filo di contatto ad 1/2 della prima campata

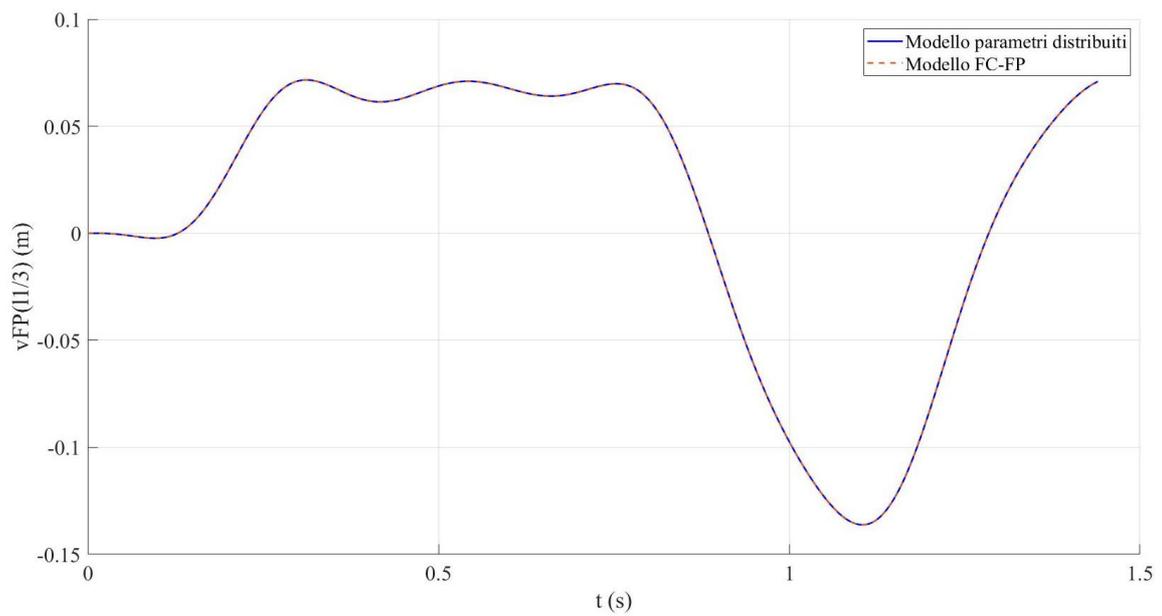


**Figura 3.14:** Confronto spostamenti filo di contatto ad 1/3 della seconda campata

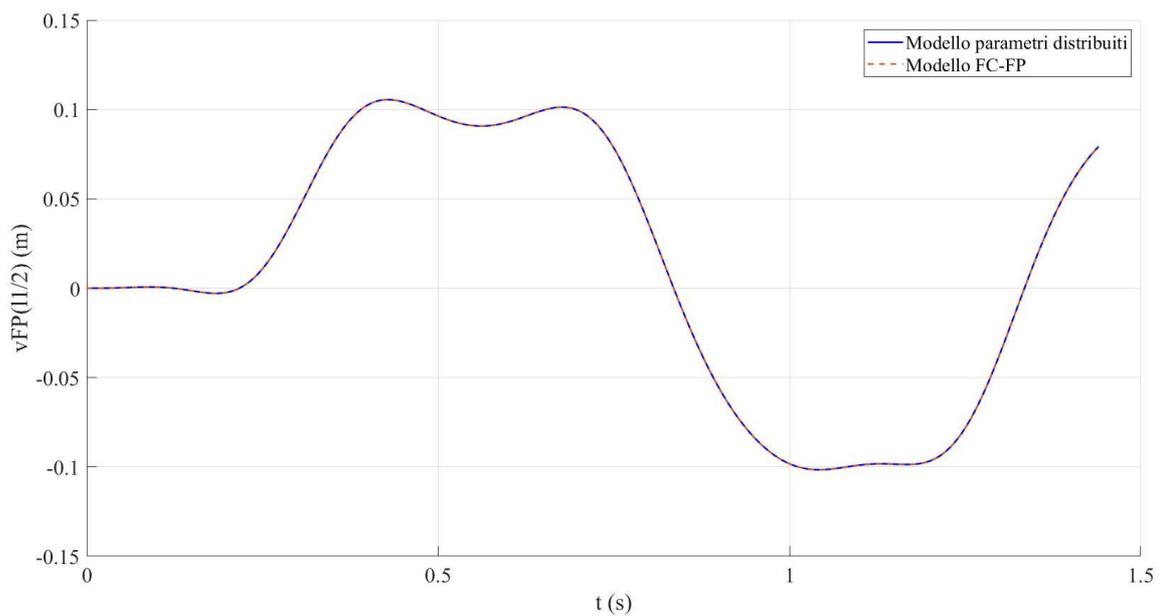


**Figura 3.15:** Confronto spostamenti filo di contatto ad 1/2 della seconda campata

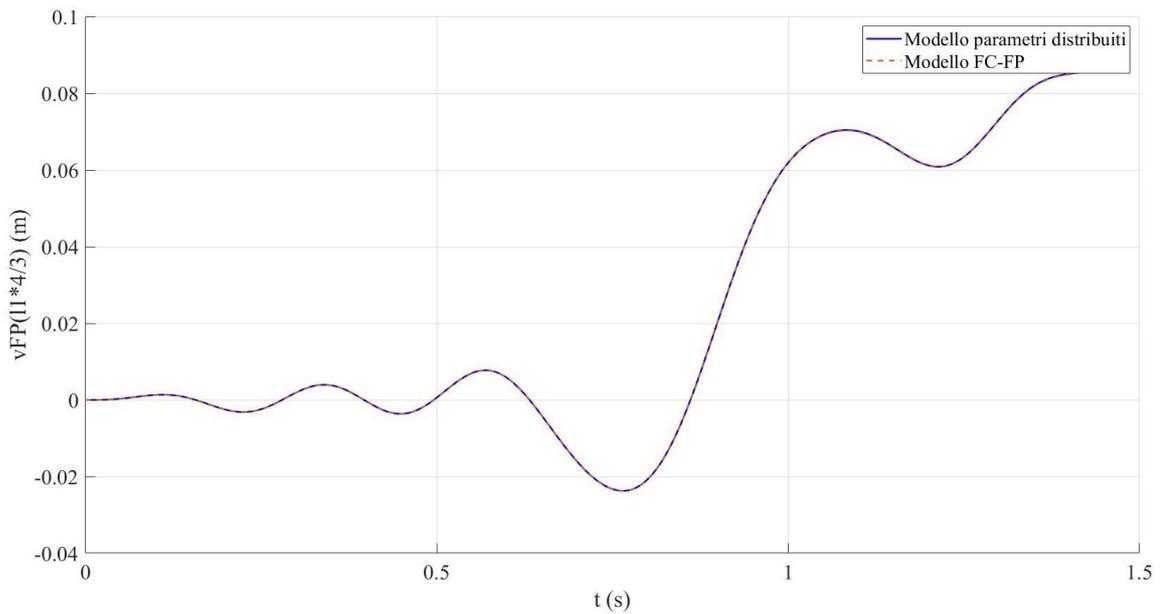
Seguono i grafici degli spostamenti, nei medesimi punti sopra citati, per la fune di contatto (figure 3.16, 3.17, 3.18 e 3.19).



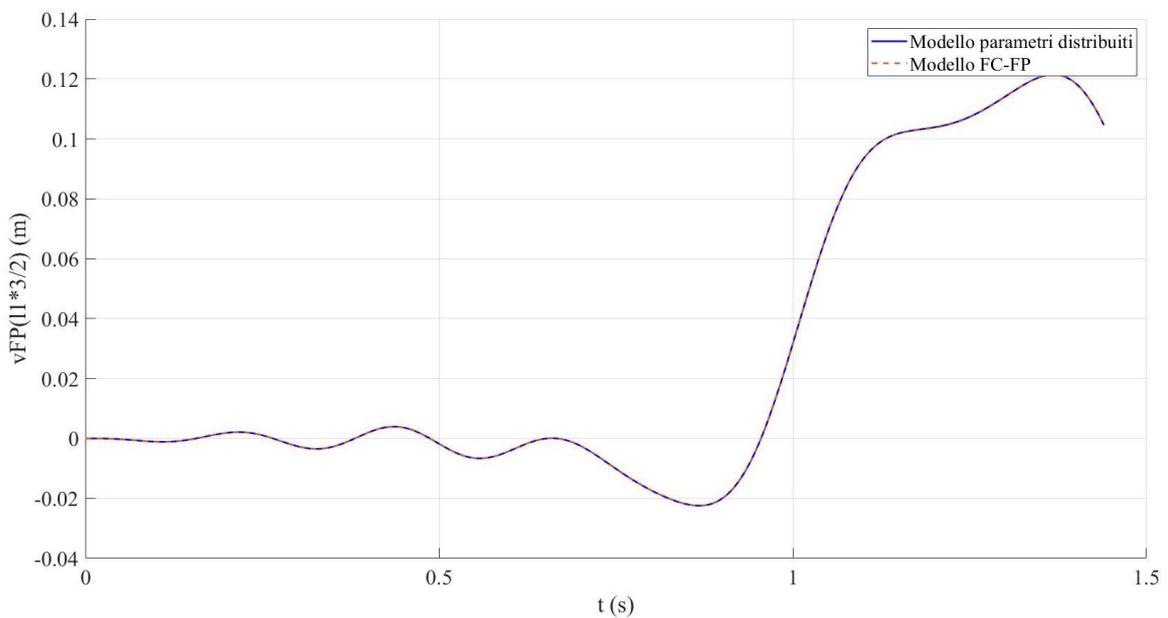
**Figura 3.16:** Confronto spostamenti fune portante ad  $1/2$  della prima campata



**Figura 3.17:** Confronto spostamenti fune portante ad  $1/3$  della prima campata



**Figura 3.18:** Confronto spostamenti fune portante ad 1/3 della seconda campata



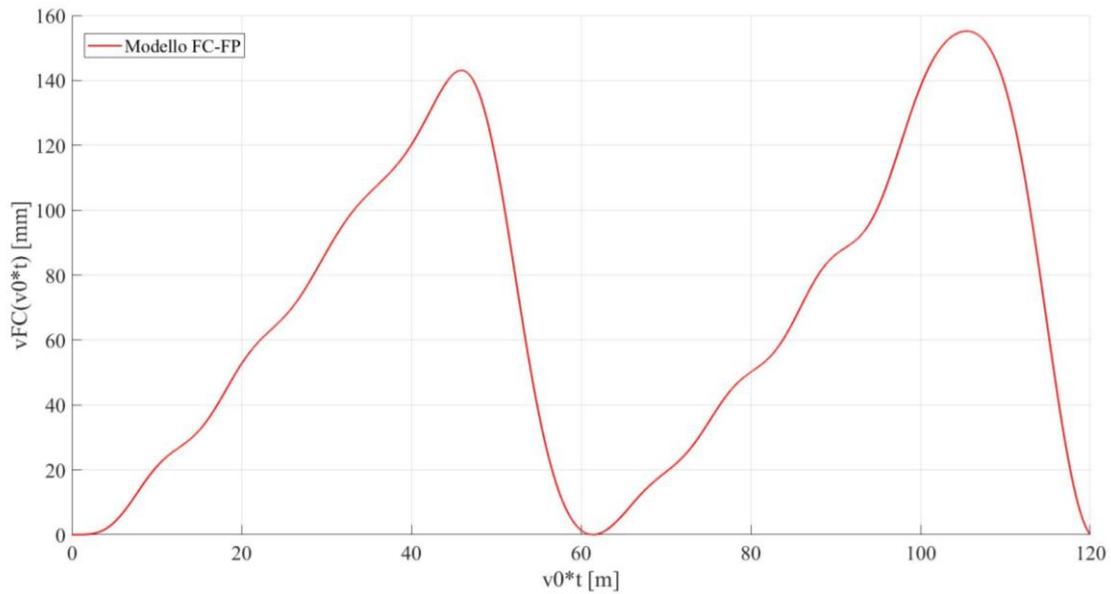
**Figura 3.19:** Confronto spostamenti fune portante ad 1/2 della seconda campata

Risulta evidente l’ottima sovrapposizione degli spostamenti, coerentemente al fatto che i parametri utilizzati nei due modelli sono identici e si è utilizzato lo stesso integratore numerico. Si sottolinea una differenza. Nel modello studiato in questa tesi le matrici diagonali sopra espresse con le equazioni (57), (58), (59) e (60) sono state calcolate risolvendo numericamente l’integrazione sull’intera lunghezza, così come numericamente

sono state calcolate tutte le derivate presenti nelle equazioni (59), (60), (65) e (66). Questo, pur avendo introdotto degli errori di approssimazione, è stato fatto in base alla scelta di poter cambiare, in qualsiasi momento e in modo semplice, le funzioni  $\Phi_i$ , ovvero le sinusoidi tipicamente scelte per le travi appoggiate-appoggiate.

Da tale confronto risulta evidente che l'errore numerico introdotto sia sostanzialmente trascurabile.

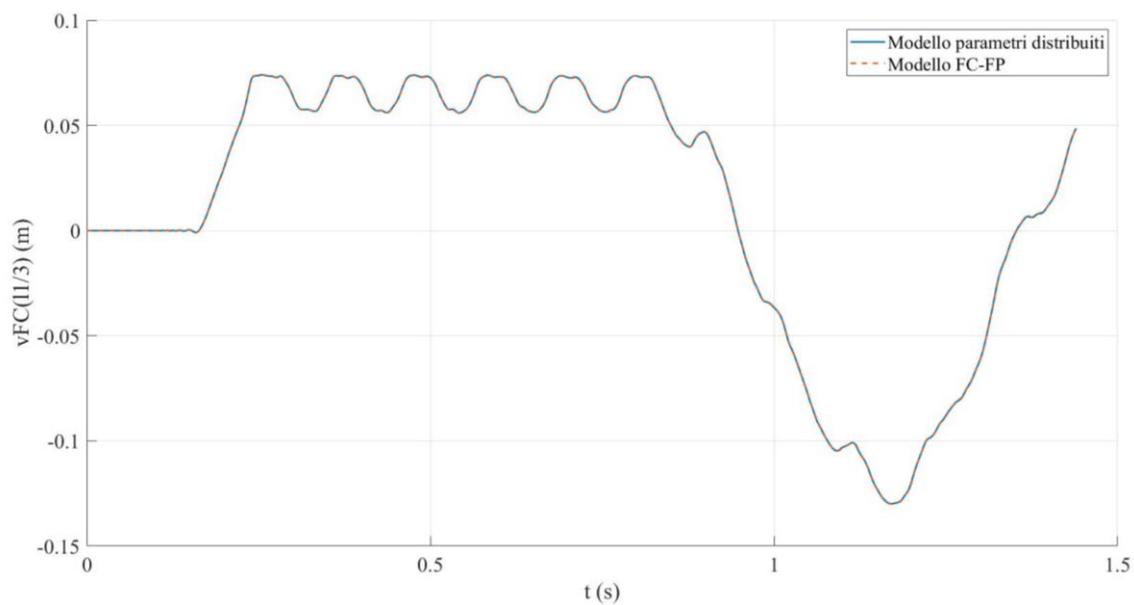
Per completezza si riporta il grafico dello spostamento in corrispondenza del carico viaggiante per il solo modello FC-FP (figura 3.20).



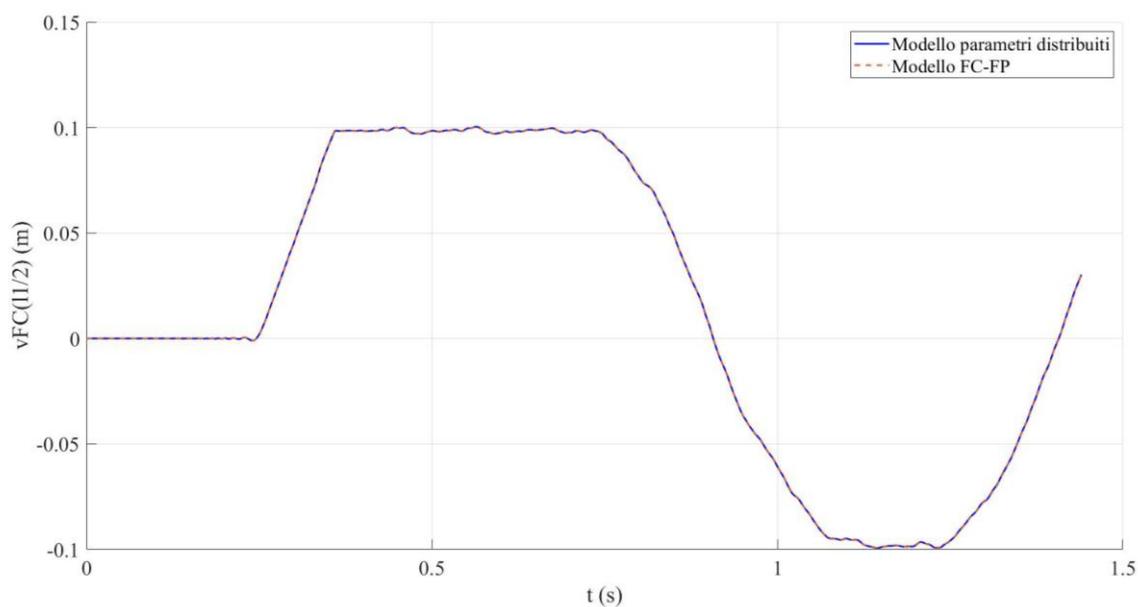
**Figura 3.20:** Spostamenti filo di contatto in corrispondenza del carico viaggiante

Diversamente dalla figura 3.10, dalla 3.20 è particolarmente comprensibile dove si trovi il pantografo, o meglio carico viaggiante in questo caso, durante il moto, anche senza osservare l'asse delle ascisse. Va osservata, tuttavia, la differenza delle ampiezze dei due casi, visto che lo spostamento a 60m, punto di congiunzione delle due campate, nella figura 3.10 si raggiungono gli 8mm circa con uno spostamento massimo dello stesso ordine di grandezza, mentre dalla figura 3.20 è difficile riconoscere che si tratti di circa 2mm, quando lo spostamento massimo è circa 155mm.

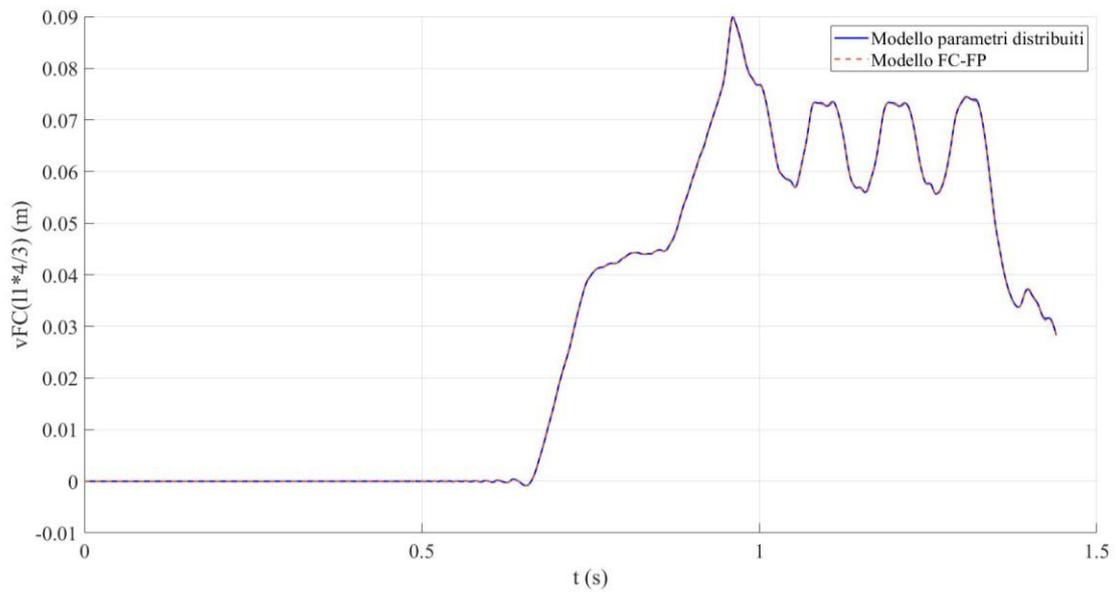
Per sottolineare l'elevato contributo di un numero maggiore di modi considerati, si riportano di seguito medesimi grafici sopra ripostati, calcolati però considerando 480 forme modali.



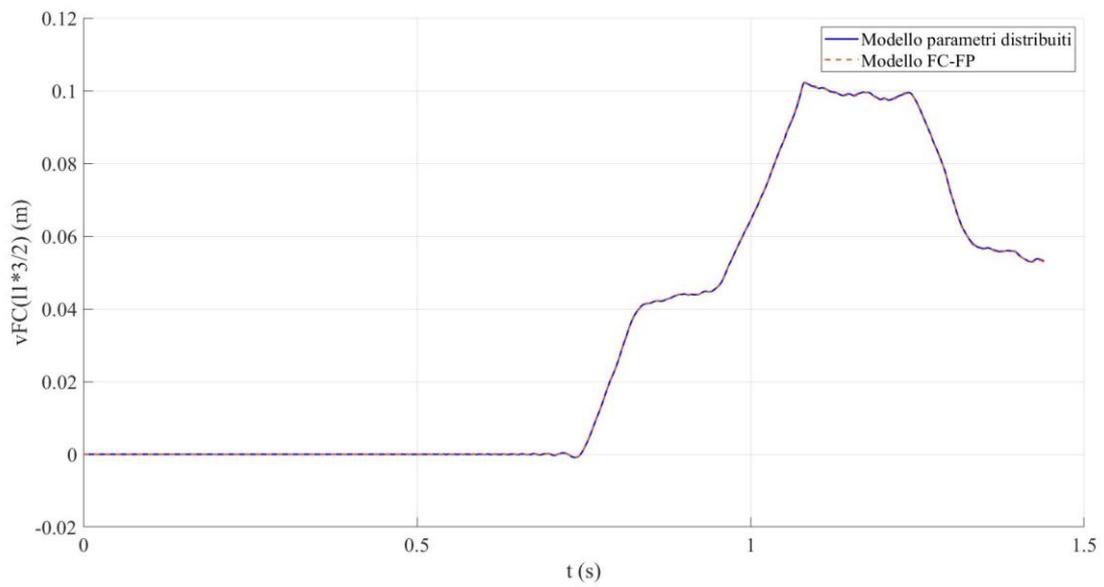
**Figura 3.21:** Confronto spostamenti filo di contatto ad 1/3 della prima campata



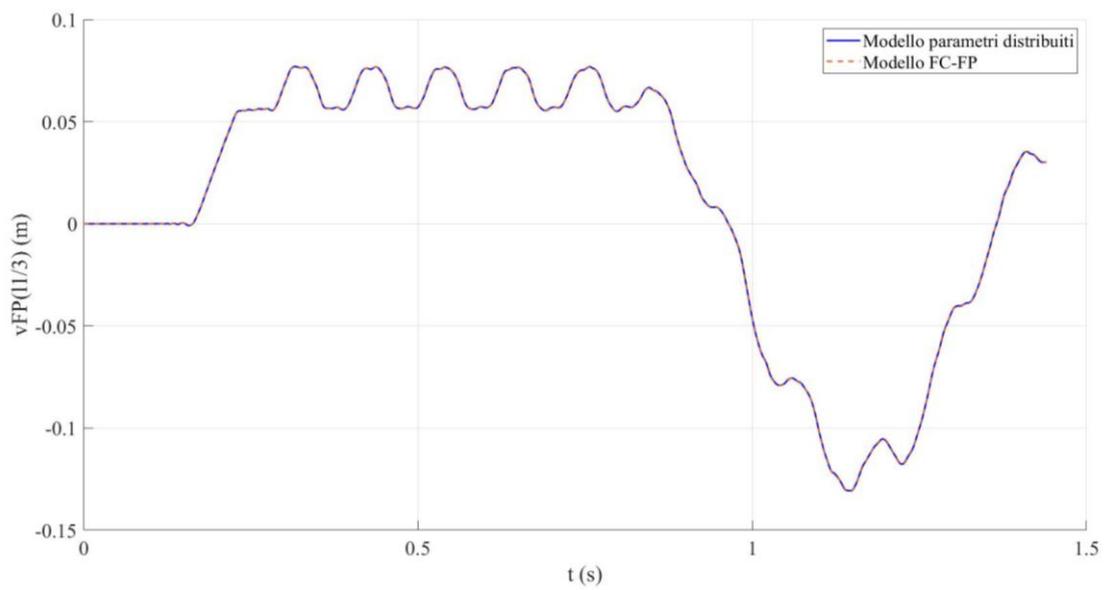
**Figura 3.22:** Confronto spostamenti filo di contatto ad 1/2 della prima campata



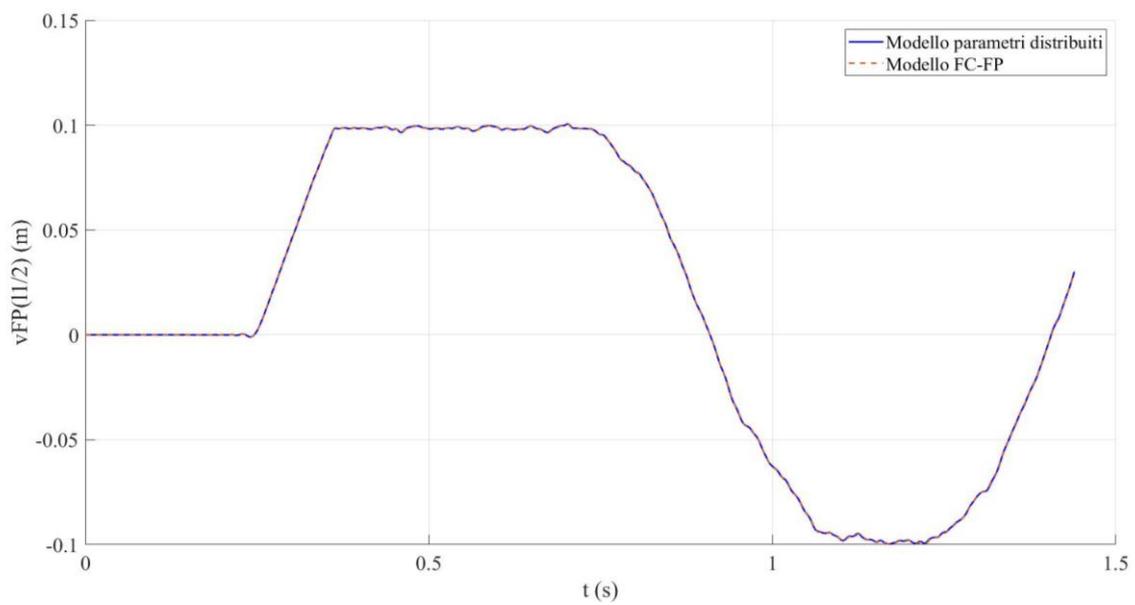
**Figura 3.23:** Confronto spostamenti filo di contatto ad 1/3 della seconda campata



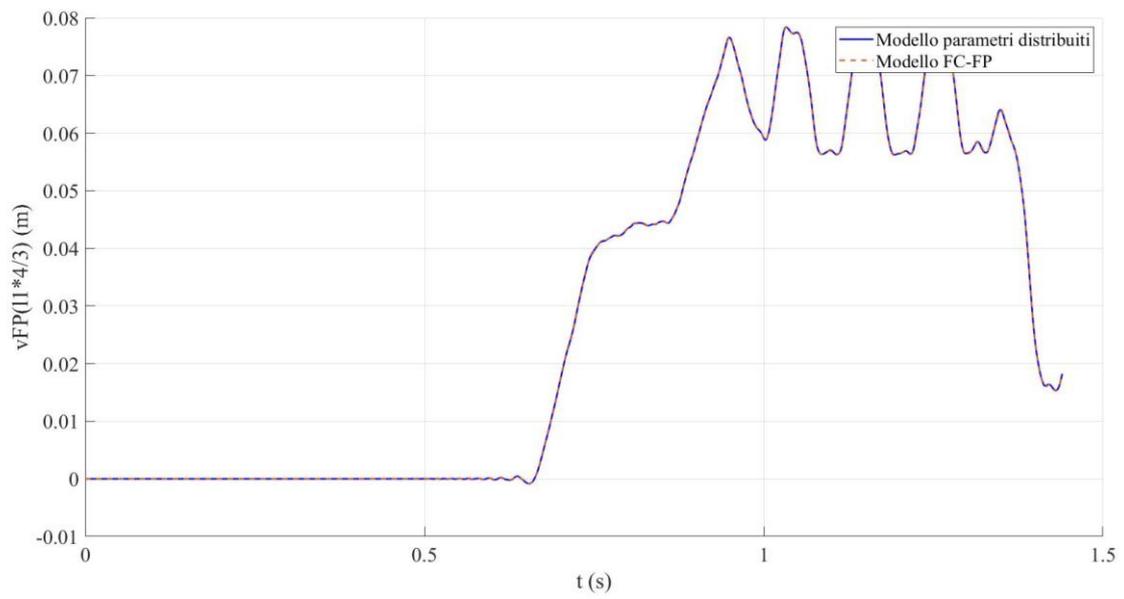
**Figura 3.24:** Confronto spostamenti filo di contatto ad 1/2 della seconda campata



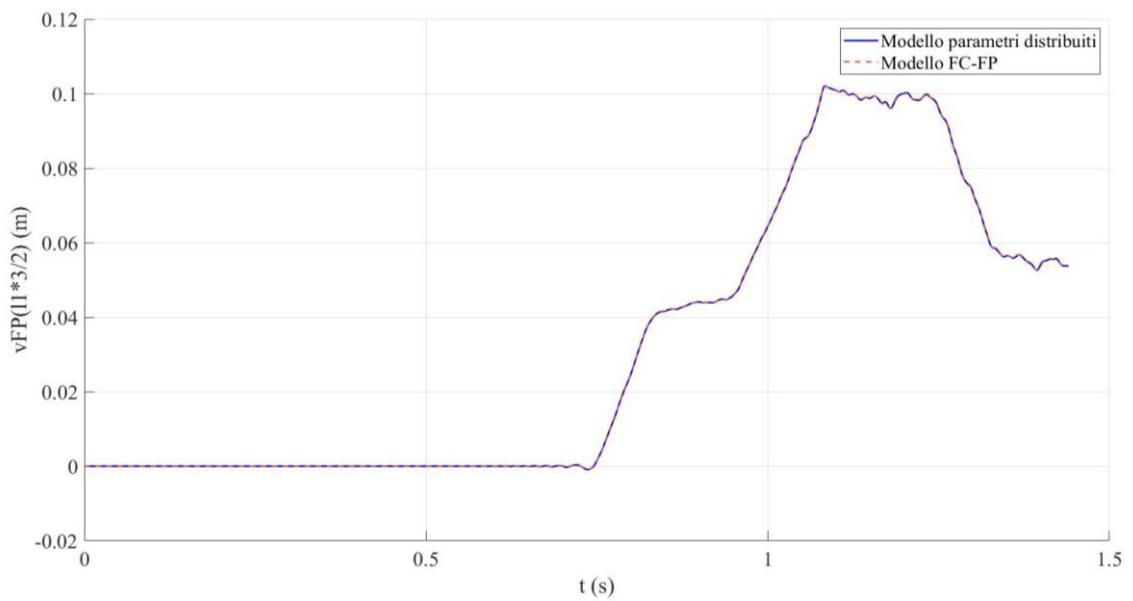
**Figura 3.25:** Confronto spostamenti fune portante ad 1/3 della prima campata



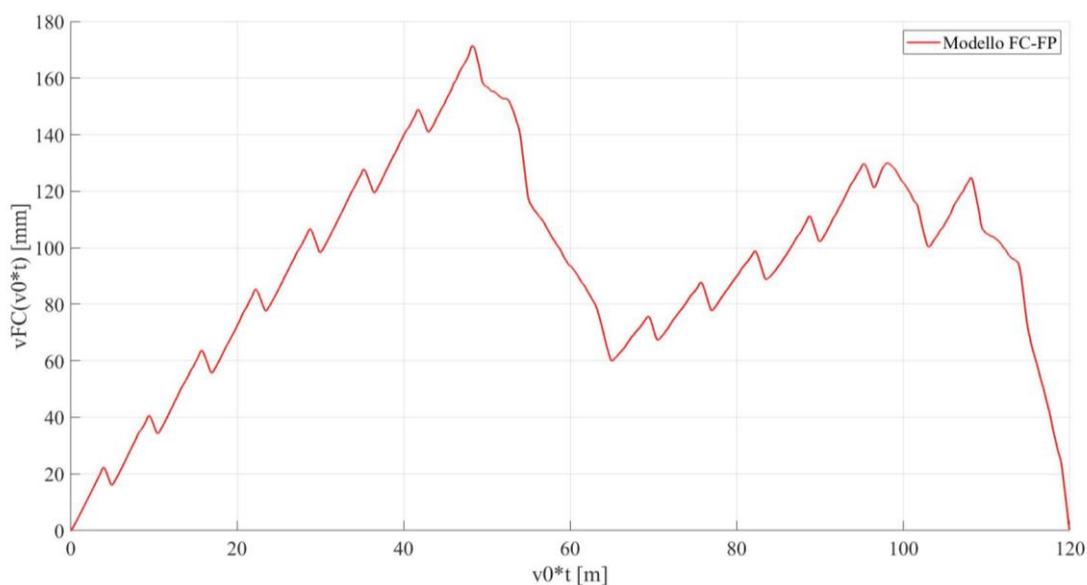
**Figura 3.26:** Confronto spostamenti fune portante ad 1/2 della prima campata



**Figura 3.27:** Confronto spostamenti fune portante ad 1/3 della seconda campata



**Figura 3.28:** Confronto spostamenti fune portante ad 1/2 della seconda campata



**Figura 3.29:** Spostamenti filo di contatto in corrispondenza del carico viaggiante

Anche per questo elevato numero di modi considerati, si ha un'ottima sovrapposizione dei risultati per i due modelli, per cui è possibile escludere, con sufficiente confidenza, errori dovuti alle introduzioni sopra descritte ed anche accettare l'entità dell'errore numerico introdotto.

La constatazione più evidente, in particolare guardando gli spostamenti del filo di contatto (figure 3.21, 3.22, 3.23 e 3.24) e gli spostamenti della fune portante (figure 3.25, 3.26, 3.27 e 3.28) consiste nel fatto che l'aver considerato un maggior numero di forme modali abbia reso gli spostamenti meno "morbidi".

Anche in questo caso, come osservato per tutte le figure dalla 3.2 alla 3.9, gli spostamenti del filo di contatto hanno sostanzialmente la stessa ampiezza e lo stesso andamento degli spostamenti della fune portante, con delle minime differenze.

Interessante risulta la figura 3.29, dove il profilo "seghettato" è la conseguenza diretta dei pendini, collocati in corrispondenza delle "valli" del profilo. Ovviamente nei circa 10m prossimi alla fine di ciascuna campata non si osservano "valli" apprezzabili, pur essendoci dei pendini, a causa dell'effetto preponderante della rigidità del palo posto a 60m e del vincolo posto alla fine del filo di contatto.

# Conclusioni

Nello sviluppo riportato in questo lavoro di tesi sono stati realizzati diversi modelli, di complessità crescente, apportando a ciascun modello miglioramenti trasmessi a quelli successivi.

Il primo modello analizzato era caratterizzato da una semplice trave sottile semplicemente appoggiata che simulava il comportamento del filo di contatto. Tale trave è stata studiata con la teoria della trave di Eulero-Bernoulli e considerando come forzante due carichi viaggianti. Conseguentemente sono stati valutati gli effetti di diversi valori dei parametri in gioco sulla dinamica del problema.

Nel secondo modello si è introdotta la dinamica del pantografo, modellato come un sistema massa-molla-smorzatore ad 1 grado di libertà. Questa introduzione ha comportato la gestione di matrici tempo-varianti, che ha implicato la necessità di ricorrere ad un integratore numerico. Al fine di verificare che l'introduzione della dinamica del pantografo fosse corretta, si è proceduto al confronto con casi di studio precedentemente svolti. Dalle analisi svolte su questo modello si è come persino la deformazione statica della catenaria abbia un'influenza sulla dinamica globale del sistema.

Nell'ultimo modello studiato è stata posta estrema attenzione e accuratezza nella definizione e sviluppo delle equazioni del sistema. L'implementazione della fune portante, collegata al filo per mezzo dei pendini, con l'aggiunta di più campate, ha comportato un notevole impegno nella formulazione delle equazioni. Si è proceduto, anche in questo caso, alla validazione del modello confrontandolo con risultati noti.

Il sistema si è rivelato tanto complesso da risultare impossibile individuare soluzioni puramente analitiche della statica, che come sottolineato precedentemente, svolge un ruolo importante per la descrizione della dinamica del pantografo.

Per questo un ulteriore passo in avanti circa questo sviluppo potrebbe essere l'utilizzo di un modello FEM per la soluzione del problema statico, venendo purtroppo meno al proposito di uno sviluppo semi-analitico.

Sempre nell'ottica del miglioramento del modello, per quanto riguarda il lato catenaria, si potrebbe includere il fenomeno dello "slackening", il quale si verifica quando i pendini non esibiscono più un comportamento a trazione ma a compressione, in seguito ad uno spostamento verticale del sistema di ampiezza rilevante. Non potendo offrire resistenza a compressione la loro rigidità diventa virtualmente nulla, ottenendo così un comportamento non lineare.

Per quanto riguarda i miglioramenti dal lato del pantografo, sarebbe possibile considerare modelli con un numero maggiore di gradi di libertà, coerentemente con strade già percorse in altri studi, e osservare come si comporta il sistema con più pantografi a contatto.

Si potrebbe, infine, sviluppare un diverso tipo di vincolo che simuli il contatto tra pantografo e catenaria al fine di poter prevedere anche la possibilità del distacco, utilizzando, ad esempio, il già citato "penalty method".



# Bibliografia

- [1] ALESSANDRO STRAUSS, Development of numerical models for the dynamic analysis of pantograph-catenary interaction
- [2] GIANCARLO GENTA, Vibration Dynamics and Control
- [3] BS EN 50318, Railway applications – Current collection systems – Validation of simulation of the dynamic interaction between pantograph and overhead contact line
- [4] GIUSEPPE BUCCA, MARCO CARNEVALE, ANDREA COLLINA, ALAN FACCHINETTI, LARS DRUGGE, PER-ANDERS JÖNSSON, SEBASTIAN STICHEL, Adoption of different pantographs’ preloads to improve multiple collection and speed up existing lines
- [5] JOHN MARTIN, STEPHEN DUNCAN, A Galerkin Approach for Modelling the Pantograph-Catenary Interaction
- [6] SILVIO SORRENTINO, DARIO ANASTASIO, ALESSANDRO FASANA, STEFANO MARCHESIELLO, Distributed parameter and finite element models for wave propagation in railway contact lines
- [7] “Sistema dinamico lineare stazionario”, [https://it.wikipedia.org/wiki/Sistema\\_dinamico\\_lineare\\_stazionario](https://it.wikipedia.org/wiki/Sistema_dinamico_lineare_stazionario)
- [8] ANDREA COLLINA, STEFANO BRUNI, Numerical Simulation of Pantograph-Overhead Equipment Interaction