



POLITECNICO DI TORINO

Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica

MODELLI MULTIFISICI DI SUPPORTI LUBRIFICATI

Candidato: Giulia Buzzoni 244287

Relatore: Federico Colombo

Correlatori: Luigi Lentini

Andrea Trivella

Anno accademico 2020/2021

Abstract

Grazie alle loro caratteristiche i cuscinetti lubrificati sono utilizzati in svariate applicazioni al fine di ridurre l'attrito che scaturisce a seguito del moto relativo tra due superfici.

L'implementazione di modelli numerici è una delle principali tecniche utilizzate al fine di predire o determinare quelle che sono le caratteristiche di queste tipologie di supporti. Nonostante i convenzionali modelli numerici che utilizzano le equazioni di Reynolds risultino essere sufficientemente accurati, le odierne applicazioni industriali richiedono dei livelli di precisione sempre maggiori. Al fine di ottenere risultati con maggiori accuratezze che tengano conto delle molteplici interazioni fisiche che coinvolgono i cuscinetti (come ad esempio gli effetti termici, gli effetti legati alla rugosità superficiale e/o alle deformazioni strutturali) è necessario adottare dei modelli più sofisticati.

A tal fine COMSOL Multiphysics è uno strumento che consente facilmente di considerare in contemporanea tutte le differenti fisiche in gioco per ogni modello, producendo risultati accurati e affidabili.

In questa tesi si vuole proporre a scopo didattico l'implementazione numerica di differenti modelli di cuscinetti: cuscinetti idrodinamici radiali (studiati nei casi mono e bidimensionali) e il modello di un pattino pneumostatico. Lo studio dei cuscinetti idrodinamici è stato sviluppato al fine di poter prendere dimestichezza con il software di simulazione e capire quelle che sono le caratteristiche funzionali dei supporti lubrificati: distribuzioni di pressione, temperatura, capacità di carico e consumo. Inoltre, sono stati effettuati studi parametrici per valutare l'effetto della viscosità del lubrificante e vari parametri geometrici.

Il modello di pattino pneumostatico riguarda una geometria circolare con fori di alimentazione semplici. Lo scopo principale dello studio è stato quello di valutare l'influenza di diversi tipi di interazione multifisica sulle prestazioni del cuscinetto stesso. In particolare, è stato valutato l'effetto della forma del meato, della rugosità superficiale e delle deformazioni scaturite a seguito dell'applicazione di carichi esterni.

Indice

1. Cuscinetto idrodinamico radiale a scorrimento	6
1.1. Teoria	6
1.1.1. Lubrificazione idrodinamica	7
1.1.2. Soluzione analitica	10
1.1.3. Distribuzione di temperatura	13
1.2. Definizione del modello	17
1.2.1. Geometria	17
1.2.2. Parametri e variabili	18
1.2.3. Equazioni e condizioni al contorno	19
1.3. Visualizzazione dei risultati	20
1.3.1. Confronto soluzione analitica e numerica	20
1.3.2. Distribuzione di pressione caso 2D	22
1.3.3. Capacità di carico e forze di attrito.....	24
1.3.4. Distribuzione di temperatura	25
2. Cuscinetto idrodinamico radiale cilindrico	28
2.1. Teoria	28
2.1.1. Lubrificazione idrodinamica	29
2.1.2. Cavitazione	30
2.2. Definizione del modello	32
2.2.1. Geometria	32
2.2.2. Parametri e variabili	32
2.2.3. Equazioni e condizioni al contorno	33
2.3. Visualizzazione dei risultati	34

2.3.1.	Modello 3D.....	34
2.3.2.	Modello 2D.....	35
2.3.3.	Modello 1D.....	38
3.	Pattino pneumostatico.....	41
3.1.	Teoria	41
3.1.1.	Modello numerico	42
3.1.2.	Soluzione analitica.....	44
3.2.	Definizione del modello	46
3.2.1.	Geometria	46
3.2.2.	Materiali	47
3.2.3.	Parametri e variabili	47
3.2.4.	Funzioni.....	47
3.2.5.	Equazioni e condizioni al contorno	48
3.2.6.	Mesh e studio del problema.....	49
3.2.7.	Post-processing.....	50
3.3.	Visualizzazione dei risultati	50
3.3.1.	Confronto soluzione analitica.....	50
3.3.2.	Variazione della forma del meato.....	51
	Conclusioni	54

1. Cuscinetto idrodinamico radiale a scorrimento

Come primo esercizio introduttivo alla risoluzione di problemi multifisici mediante l'ausilio del software Comsol Multiphysics viene modellato un cuscinetto idrodinamico radiale a scorrimento con lubrificazione a film sottile.

A partire dalle equazioni fondamentali della meccanica dei fluidi si ricava l'equazione di Reynolds bidimensionale nella sua forma più generale, per poi semplificarla nei casi specifici. Si determina inoltre l'equazione dell'energia in forma termodinamica con lo scopo di determinare la distribuzione di temperatura all'interno del meato.

L'obiettivo è mettere in relazione la fluidodinamica per il caso di film di fluido sottile con la termodinamica, ricavando un campo di pressione che consente di determinare i valori di temperatura.

1.1. Teoria

Si consideri un cuscinetto a scorrimento come schematizzato in figura 2.1. Uno strato sottile di fluido lubrificante scorre nella regione compresa tra due superfici ravvicinate in movimento.

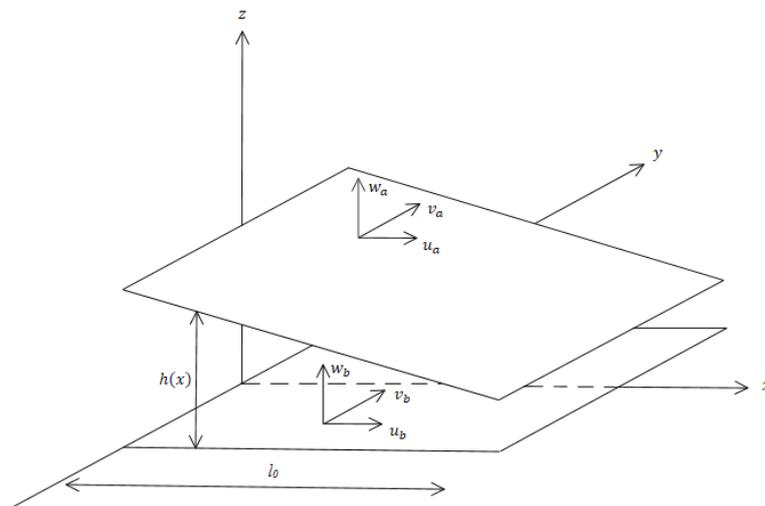


Figura 1.1: Schema generico di un cuscinetto idrodinamico radiale a scorrimento

Sia h l'altezza del film di fluido interposto tra due superfici lunghe l_0 . Si definiscano u le componenti della velocità in direzione x , v le componenti lungo y e w quelle in direzione z .

1.1.1. Lubrificazione idrodinamica

Le prime ipotesi che occorre effettuare sono di fluido Newtoniano, film di fluido sottile ($h/l_0 \ll 1$) e fluido non inerziale, che varranno sempre.

Per un fluido Newtoniano vale la seguente relazione per le forze di taglio:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (2.1)$$

Con τ la forza di taglio per unità di superficie [N/m^2], μ la viscosità [Pa s] e $\dot{\gamma}$ la velocità dello sforzo di taglio [$1/\text{s}$], che può essere dimostrato essere uguale a

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\Delta w}{\Delta x} \quad (2.2)$$

Le forze di taglio agenti sui piani xz e yz sono rispettivamente:

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.3a)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.3b)$$

Ipotizzando un film di fluido sottile, ovvero $h/l_0 \ll 1$, le espressioni di τ si semplificano come segue:

$$\tau_{xz} \cong \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.4a)$$

$$\tau_{yz} \cong \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.4b)$$

In quanto:

$$\frac{\partial u}{\partial z} \gg \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \gg \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.5b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} \gg \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.5c)$$

Per un elementino di fluido nel piano xz si scriva l'equilibrio delle forze, trascurando come da ipotesi quelle di inerzia. Si ottiene la relazione seguente.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.6)$$

Integrando l'equazione (2.6) lungo z tra 0 e h si ottiene l'espressione di $u(z)$, imponendo come condizioni al contorno $u = u_b$ per $z = 0$ e $u = u_a$ per $z = h$.

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - zh) + u_a \frac{z}{h} + u_b \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (2.7)$$

Il primo termine è indotto dalla pressione ed è di tipo parabolico, a differenza del secondo e del terzo che rappresentano un contributo dovuto alle forze di taglio di tipo lineare.

Si definisce ora la portata volumetrica lungo x per unità di larghezza, espressa in $[m^2/s]$.

$$q_x = \int_0^h u \, dz \quad (2.8)$$

Sostituendo l'espressione (2.7) nella (2.8):

$$q_x = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u_a + u_b}{2} h \quad (2.9)$$

Il contributo della pressione a secondo membro è detto flusso di Poiseuille, quello indotto dagli sforzi di taglio flusso di Couette.

Svolgendo passaggi analoghi a quanto appena fatto si può ricavare q_y ovvero la portata volumetrica in direzione y per unità di lunghezza:

$$q_y = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.10)$$

Note le espressioni delle portate volumetriche è possibile ricavare l'equazione di continuità, per il caso monodimensionale (2.11) e per quello bidimensionale (2.12).

$$\begin{aligned} \rho q_x \Delta y - \left(\rho q_x + \frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y &= \frac{d}{dt} (\rho h) \Delta x \Delta y \\ -\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} &= \frac{d}{dt} (\rho h) \end{aligned} \quad (2.11a)$$

$$-\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} = \frac{d}{dt}(\rho h) \quad (2.11b)$$

L'espressione non ancora nota che deve essere ricavata è dh/dt , che dipende dalle velocità delle superfici.

Si consideri una geometria con superficie inferiore piana e superiore inclinata.

Consideriamo separatamente i contributi delle velocità alla variazione di volume. In primis valutiamo il solo l'incremento di volume dovuto alle velocità verticali w_a e w_b , rispettivamente della superficie superior e inferiore:

$$\Delta V_w = (w_a - w_b)\Delta t \Delta x \Delta y \quad (2.12)$$

Da notare come una velocità della superficie superiore maggiore di quella inferiore comporti un incremento dell'altezza del meato nel tempo e viceversa.

Avendo assunto la superficie inferiore piana, ovvero parallela alle componenti di velocità orizzontali, u_b non ha effetto su h , a differenza di u_a il cui contributo è:

$$\Delta V_u = -u_a \Delta t \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y \quad (2.13)$$

$$\text{Caso 1D:} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\Delta V}{\Delta x \Delta y \Delta t} = w_a - w_b - u_a \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.14a)$$

$$\text{Caso 2D:} \quad \frac{dh}{dt} = w_a - w_b - u_a \frac{\partial h}{\partial x} - v_a \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.14b)$$

Sostituendo le espressioni (2.9), (2.10) e (2.14b) nell'equazione della continuità (2.11b) si ottiene l'equazione di Reynolds in forma differenziale, nella sua forma più generale.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{(u_a + u_b)}{2} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \frac{(v_a + v_b)}{2} h \right) = \\ = \rho \left(w_a - w_b - u_a \frac{\partial h}{\partial x} - v_a \frac{\partial h}{\partial y} \right) + h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nel caso di lubrificazione idrodinamica si lavora con fluido incomprimibile, ovvero sotto le ipotesi di $\rho = cost$ e $\partial \rho / \partial t = 0$.

Viene ora riscritta l'equazione di Reynolds per un fluido incomprimibile con le velocità relative:

$$U = u_a - u_b \quad (2.16)$$

$$V = v_a - v_b \quad (2.17)$$

$$W = w_a - w_b \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{V}{2} \frac{\partial h}{\partial y} = W \quad (2.19)$$

Con una ulteriore ipotesi di velocità non nulle solo in direzione x , l'equazione (2.19) viene semplificata come segue:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - h(u_a + u_b) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.20)$$

1.1.2. Soluzione analitica

La risoluzione dell'equazione di Reynolds bidimensionale alle derivate parziali (2.20) è possibile solo per via numerica: il confronto tra la soluzione analitica e numerica è possibile invece nel caso monodimensionale. Vogliamo dunque ricavare l'equazione di Reynolds del caso monodimensionale ed in forma adimensionale, per semplicità.

Al fine di adimensionalizzare la relazione bisogna identificare quelle che sono le variabili indipendenti (x, y) e dipendenti $(h(x, y), p(x, y))$ all'interno dell'equazione e successivamente normalizzarle rispetto a dei parametri di riferimento che potranno essere scelti in maniera arbitraria in maniera da ridurre il più possibile il numero di coefficienti che compariranno all'interno della versione adimensionale dell'equazione di partenza:

$$X = \frac{x}{x_r} \quad Y = \frac{y}{y_r} \quad H = \frac{h}{h_r} \quad P = \frac{p}{p_r}$$

x_r, y_r, h_r e p_r sono i parametri di riferimento rispetto ai quali si effettua la normalizzazione delle rispettive variabili dimensionali x, y, h e p .

$$\frac{1}{x_r} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{h_r^3 p_r}{6\mu x_r} H^3 \frac{\partial P}{\partial X} - h_r(u_a + u_b) H \right) + \frac{1}{y_r} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{h_r^3 p_r}{6\mu y_r} H^3 \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 0 \quad (2.21)$$

Dalla precedente espressione si nota subito che, al fine di semplificare la relazione risulta utile scegliere $y_r = x_r$:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{h_r^3 p_r}{6\mu x_r} H^3 \frac{\partial P}{\partial X} - h_r(u_a + u_b) H \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{h_r^3 p_r}{6\mu x_r} H^3 \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 0 \quad (2.22)$$

A questo punto, moltiplicando l'equazione per $6\mu x_r / h_r^3 p_r$ comparirà un termine dato dal prodotto di valori di riferimento e parametri di ingresso, che essendo delle quantità

costanti, danno luogo ad un gruppo adimensionale $\Pi_1 = 6\mu x_r(u_a + u_b)/h_r^2 p_r$ a cui è possibile assegnare arbitrariamente un valore:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{6\mu x_r}{h_r^2 p_r} (u_a + u_b) H \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = \frac{6\mu x_r}{h_r^2 p_r} (u_a + u_b) \frac{\partial H}{\partial X} \quad (2.23)$$

Assegnando a Π_1 un valore unitario è possibile ricavare una seconda relazione tra il parametro di riferimento p_r e le altre costanti:

$$p_r = \frac{6\mu x_r (u_a + u_b)}{h_r^2} \quad (2.24)$$

Scelti come valori di riferimento $x_r = L$, $h_r = s_h$, tutti valori di riferimento risulteranno essere definiti:

$$x_r = L \quad y_r = x_r = L \quad h_r = h_2 \quad p_r = \frac{6\mu L (u_a + u_b)}{h_2^2}$$

L'equazione finale risulterà essere, oltre che adimensionale, indipendente dai parametri di ingresso.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = \frac{\partial H}{\partial X} \quad (2.24)$$

Dopo aver ottenuto l'equazione adimensionale del caso bidimensionale andiamo a riportarla su un piano monodimensionale per risolverla analiticamente, ricavando l'espressione della pressione.

Definiamo un nuovo parametro adimensionale indice dell'inclinazione del cuscinetto:

$$\alpha = \frac{h_1}{h_2} \quad (2.25)$$

$$h(x) = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{L} x = h_2 \left(\alpha - \alpha \frac{x}{L} + \frac{x}{L} \right) \quad (2.26)$$

L'equazione di Reynolds monodimensionale ma non ancora adimesionalizzata la si ottiene semplificando la (2.20):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} - \frac{Uh}{2} \right) = 0 \quad (2.27)$$

Le variabili adimensionali da utilizzare sono lo spostamento adimensionale X e l'altezza adimensionale del meato del fluido H , riportate di seguito.

$$X = \frac{x}{L} \quad (2.28)$$

$$H = \frac{h}{h_2} \quad (2.29)$$

$$H(X, \alpha) = \alpha + (1 - \alpha)X \quad (2.30)$$

Si ottiene così l'equazione adimensionale di Reynolds per il caso 1D:

$$\frac{d}{dX} \left(H^3 \frac{dP}{dX} - H \right) = 0 \quad (2.31)$$

Il primo integrale è una costante, che corrisponde ad una portata adimensionale:

$$H^3 \frac{dP}{dX} - H = -Q_x \quad (2.32)$$

I passaggi riportati di seguito conducono alla definizione della portata adimensionale:

$$Q_x = -H^3 \frac{dP}{dX} + H = - \left(\frac{h}{h_2} \right)^3 L \frac{d}{dx} \left(\frac{ph_2^2}{6\mu UL} \right) + \frac{h}{h_2} = - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \frac{2}{h_2 U} + \frac{Uh}{2} \frac{2}{Uh_2}$$

$$Q_x = q_x \frac{2}{Uh_2} \quad (2.33)$$

Integriamo l'equazione (2.31).

$$P(X, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \frac{X}{H(X, \alpha)} - \frac{Q_x}{2\alpha^2} \frac{1}{1 - \alpha} \left(1 - \frac{\alpha^2}{H^2} \right) \quad (2.34)$$

1.1.3. Distribuzione di temperatura

Al fine di determinare il comportamento termico del fluido, è necessario introdurre una relazione che leghi il suo comportamento dinamico con gli effetti dello scambio termico, la quale consenta di determinare la distribuzione di temperatura nel fluido, considerando nota la distribuzione di pressione.

Per ricavare l'espressione differenziale dell'equazione dell'energia è necessario considerare un approccio di tipo lagrangiano. Si consideri un elemento di flu

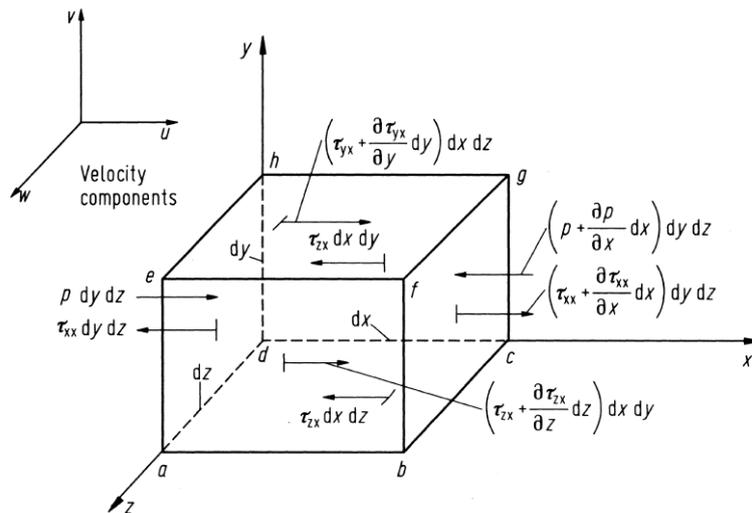


Figura 1.2: Bilancio di potenza per un elemento di fluido infinitesimo

Notare che nell'immagine sopra riportata il sistema di riferimento si presenta ruotato di 90° in senso antiorario attorno alla direzione x per semplicità di rappresentazione.

L'equazione dell'energia implica il principio fisico di conservazione dell'energia: ciò significa che in un sistema chiuso l'energia trasferita al sistema deve essere conservata. Occorre perciò considerare che la derivata materiale dell'energia interna totale ϵ del volumetto moltiplicata per la sua massa infinitesima $\delta m = \rho \delta x \delta y \delta z$ sia uguale alla potenza netta termica $\delta \dot{Q}$ e meccanica $\delta \dot{L}$ agente sul volumetto:

$$\rho \delta x \delta y \delta z \frac{D\epsilon}{Dt} = \delta \dot{Q} + \delta \dot{L} \quad (2.35)$$

Trascurando la presenza di reazioni chimiche che fungono da sorgenti interne di potenza termica, il volumetto scambierà la potenza termica solo attraverso le sue superfici e quindi per conduzione. Quindi scrivendo il bilancio della potenza meccanica e termica scambiata associata alle sole componenti lungo la direzione x si ottiene:

$$\begin{aligned}
& -k \frac{\partial T}{\partial x} \delta y \delta z - \left[-k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \delta x \right) \right] \delta y \delta z + pu \delta y \delta z - \left[pu + \frac{\partial(pu)}{\partial x} \delta x \right] \delta y \delta z - \tau_{xx} u \delta y \delta z \\
& + \left[\tau_{xx} u + \frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} \delta x \right] \delta y \delta z - \tau_{zx} u \delta x \delta y + \left[\tau_{zx} u + \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} \delta z \right] \delta x \delta y \\
& - \tau_{yx} v \delta x \delta z + \left[\tau_{yx} v + \frac{\partial(\tau_{yx} v)}{\partial y} \delta y \right] \delta x \delta z \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z - \frac{\partial(pu)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} \delta x \delta y \\
& + \frac{\partial(\tau_{yx} u)}{\partial y} \delta y \delta x \delta z
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Ripetendo per le altre direzioni:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z - \frac{\partial(pv)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial(\tau_{yy} v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial(\tau_{zy} v)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \\
& + \frac{\partial(\tau_{xy} v)}{\partial x} \delta y \delta x \delta z
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \delta z \right) \delta y \delta x - \frac{\partial(pw)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial(\tau_{zz} w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial(\tau_{xz} w)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \\
& + \frac{\partial(\tau_{yz} w)}{\partial y} \delta y \delta x \delta z
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Sommiamo tutti i contribute.

$$\begin{aligned}
\rho \frac{D\epsilon}{Dt} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] - \left[\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \right] \\
&+ \left[\frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz} w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx} u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yy} v)}{\partial y} \right. \\
&+ \left. \frac{\partial(\tau_{yz} w)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zy} v)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zz} w)}{\partial z} \right]
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Ipotizzando che il coefficiente di conducibilità termica k sia costante ed esprimendo l'energia interna totale come somma dell'energia interna del fluido (e_i) e della sua energia cinetica ($U^2/2$), l'equazione dell'energia totale si presenta come di seguito.

$$\begin{aligned}
\rho \frac{D \left(e_i + \frac{U^2}{2} \right)}{Dt} &= k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \right] \\
&+ \left[\frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz} w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx} u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yy} v)}{\partial y} \right. \\
&+ \left. \frac{\partial(\tau_{yz} w)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zy} v)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zz} w)}{\partial z} \right]
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Si può scrivere l'equazione in forma vettoriale, dove $\underline{U} = [u \ v \ w]$ è il vettore delle componenti di velocità e $[\tau]$ il tensore degli sforzi.

$$\rho \frac{D \left(e_i + \frac{U^2}{2} \right)}{Dt} = k \nabla \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\underline{U} \cdot p[I]) + \nabla \cdot (\underline{U} \cdot [\tau]) \quad (2.41)$$

È possibile dimostrare che:

$$\nabla \cdot (\underline{U} \cdot p[I]) = p \nabla \cdot \underline{U} + \nabla p \cdot \underline{U} \quad (2.42)$$

$$\nabla \cdot (\underline{U} \cdot [\tau]) = \nabla \underline{U} : [\tau] + \underline{U} \cdot (\nabla \cdot [\tau]) \quad (2.43)$$

Sviluppando questi prodotti è osservabile come questi due termini contengano un contributo di tipo meccanico e uno di tipo termodinamico.

Ragionando sul fatto che i termini di natura meccanica si esprimono come il prodotto di una forza per una velocità e che invece i termini termodinamici sono indipendenti dalla velocità con cui muove il fluido è possibile considerare la natura fisica delle due espressioni. I termini $-\nabla p \cdot \underline{U}$ e $\underline{U} \cdot (\nabla \cdot [\tau])$ sono dei termini di natura meccanica, perché rappresentano la potenza prodotta dalle forze di superficie quando la particella fluida si muove con una certa velocità \underline{U} . Infatti, si nota come questi termini varino al variare del modulo della velocità. Invece, i termini $p \nabla \cdot \underline{U}$ e $\nabla \underline{U} : [\tau]$ non dipendono dalla velocità assoluta del fluido \underline{U} , ma solamente dal suo gradiente $\nabla \underline{U}$ quando il fluido è comprimibile, mentre risultano legati solo al suo stato termodinamico quando il fluido considerato è incomprimibile ($\nabla \cdot \underline{U} = 0$). In particolare, nel caso comprimibile, $\nabla \underline{U} : [\tau]$ rappresenta il termine legato alle irreversibilità prodotte a causa dell'attrito viscoso che agisce sulla particella fluida quando si muove all'interno del campo di moto.

Dato che l'energia totale del fluido ϵ è data dalla somma della sua energia interna e_i e della sua energia cinetica $U^2/2$ è possibile separare questi due contributi combinando linearmente l'equazione di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Infatti quest'ultima moltiplicata per il vettore velocità \underline{U} costituisce l'equazione di conservazione dell'energia meccanica.

$$\underline{U} \cdot \rho \frac{D \underline{U}}{Dt} = \underline{U} \cdot \rho \underline{g} - \underline{U} \cdot \nabla p + \underline{U} \cdot (\nabla \cdot [\tau]) \quad (2.44a)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{D \left(\frac{U^2}{2} \right)}{Dt} = & -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} - w \frac{\partial p}{\partial z} + u \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ & + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.44b)$$

Sottraendo la (2.44b) all'equazione di conservazione dell'energia totale (2.40) si ottiene l'equazione di conservazione dell'energia termodinamica.

$$\begin{aligned} \rho \frac{D(e_i)}{Dt} = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] - p \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} \\ + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Considerando $e_i = c_p T$ si può riscrivere la (2.45) in forma vettoriale.

$$\rho c_p \frac{D(T)}{Dt} = k \nabla^2 T - p(\nabla \cdot \underline{U}) + [\tau]:\nabla \underline{U} \quad (2.46)$$

Introduciamo le equazioni costitutive dei fluidi newtoniani:

$$[\tau] = (\lambda \nabla \cdot \underline{U})[\mathbf{I}] + [\mu(\nabla \underline{U} + \nabla \underline{U}^T)] \quad (2.47)$$

L'equazione scalare quindi diventa:

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{D(T)}{Dt} = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] - p \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.48a)$$

dove $(\lambda \nabla \cdot \underline{U})[\mathbf{I}]:\nabla \underline{U} + [\mu(\nabla \underline{U} + \nabla \underline{U}^T)]:\nabla \underline{U}$ rappresenta la potenza dissipata dalle forze viscosive e viene indicata con Φ .

$$\rho c_p \frac{D(T)}{Dt} = -k \nabla^2 T - p(\nabla \cdot \underline{U}) + \Phi \quad (2.48b)$$

Ricordando ora l'ipotesi di film sottile che implica le relazioni (2.5a), (2.5b), (2.5c) e considerando la relazione di Stokes $\lambda = -2/3\mu$, l'equazione scalare semplificata al caso bidimensionale risulta essere:

$$\rho c_p \frac{D(T)}{Dt} = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.49)$$

Nell'ipotesi di uno studio di tipo stazionario:

$$-k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.50)$$

Si può notare come il termine a secondo membro coincide con l'argomento dell'integrale della potenza dissipata specifica dovuta alle forze di attrito: rappresenta dunque una potenza dissipata dovuta agli attriti viscosi per unità di volume.

1.2. Definizione del modello

L'equazione di riferimento per la fluidodinamica da implementare in Comsol Multiphysics viene ricavata dalla (2.19) ottenendo la seguente equazione differenziale di Reynolds semplificata.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{U}{2} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.51)$$

Consideriamo la geometria in figura 2.1. Le semplificazioni applicate all'equazione di Reynolds si riferiscono ad un modello di pattino con superficie superiore inclinata e stazionaria, con $u_a = 0$. La superficie piana inferiore possiede invece una velocità u_b e ne consegue che $U = u_b$ corrisponda alla velocità relativa. Le componenti della velocità lungo le altre direzioni sono considerate nulle.

L'obiettivo è ottenere la distribuzione di pressione e temperatura dello strato di fluido a $z = 0$ e determinare parametri quali capacità di carico, forza di attrito e potenza dissipata.

Vengono realizzati sia un modello bidimensionale che uno monodimensionale, entrambi in condizioni di studio stazionario.

1.2.1. Geometria

È vantaggioso modellare il cuscinetto nel piano xy e definire l'altezza con la funzione analitica $h(x)$. Ricaviamo l'espressione di $h(x)$ considerando $h = h_1$ a $x = 0$ e $h = h_2$ a $x = L$.

$$h(x) = h_1 + (h_2 - h_1) \frac{x}{L} \quad (2.52a)$$

Definendo come parametro di progetto $a = h_1 - h_2$, indice dell'inclinazione del pattino, si può riscrivere l'equazione sopra come segue.

$$h(x) = h_2 + a \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (2.52b)$$

Per il caso 1D la geometria da implementare consiste semplicemente in una linea con centro nell'origine, corrispondente alla mezzzeria della superficie inferiore.

Per la geometria 2D si sfrutta invece in maniera efficiente la simmetria del cuscinetto realizzandone il modello di una sola metà: andiamo a definire un'area rettangolare di lunghezza L e larghezza $B/2$. È importante definire il centro del sistema di coordinate come da figura 2.1, per essere sulla linea di simmetria del modello e poter successivamente specchiare i risultati.

1.2.2. Parametri e variabili

Occorre stabilire arrivati a questo punto quali siano le grandezze da definire utili alla risoluzione delle equazioni alle derivate parziali e quali variabili calcolare note le distribuzioni.

I parametri geometrici sono i primi da inserire e consentono di definire il dominio e altezza del meato identificata dall'equazione (2.52). I successivi sono quelli necessari a definire gli argomenti q_x e q_y dell'equazione di Reynolds (2.51) e quelli per l'equazione termodinamica (2.50).

Vengono ricavate a tal fine le seguenti espressioni, valutate per $z = 0$ e in accordo con le assunzioni delle velocità.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h - \frac{U}{h} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} h \quad (2.54)$$

Altre variabili che è utile conoscere ai fini pregoettuali sono τ, f, P_w , immediatamente calcolabili una volta nota la distribuzione di pressione.

L'espressione per la forza di taglio $[N/m^2]$ è valutata sulla superficie superiore ed inferiore, partendo dall'equazione (2.4a) e derivando la (2.7).

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (2z - h) + \frac{u_a - u_b}{h} \quad (2.53)$$

$$\tau_{xz}|_{z=0} = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{u_a - u_b}{h} = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{U}{h} \quad (2.54)$$

$$\tau_{xz}|_{z=h} = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{u_a - u_b}{h} = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{U}{h} \quad (2.55)$$

La forza di attrito f [N] causata dal trascinamento del fluido tra due superfici in moto relativo si ottiene integrando lo stress di taglio sulle due superfici.

$$f = \int_A \tau_{xz} dA \quad (2.56)$$

La potenza dissipata specifica dovuta a tali forze di attrito è calcolata come segue:

$$\begin{aligned} \phi &= \int_0^h \left(\tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz = \int_0^h \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) dz \\ \phi &= \frac{h^3}{12\mu} \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right) + \mu \frac{(u_b - u_a)^2 + (v_b - v_a)^2}{h} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Integrando ϕ [W/m^2] sulla superficie dello strato di fluido nel piano xy si ottiene la potenza dissipata complessiva [W] per questo modello.

$$P_w = \int_A \left(\frac{h^3}{12\mu} \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right) + \mu \frac{U^2}{h} \right) dx dy \quad (2.58)$$

La capacità di carico è definita infine come l'integrale della distribuzione di pressione nel meato.

$$w = \int_0^L \int_0^B p(x, y) dx dy \quad (2.59)$$

1.2.3. Equazioni e condizioni al contorno

Le equazioni da inserire nel programma e che Comsol dovrà risolvere sono state riportate a titolo riassuntivo qui sotto. La (2.27) è da utilizzarsi per il modello 1D mentre le altre due per il modello multifisico bidimensionale.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} - \frac{Uh}{2} \right) = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{U}{2} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.51)$$

$$-k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.50)$$

Per ogni equazione occorre applicare le opportune condizioni al contorno. Per la pressione sono veramente semplici: è considerata trascurabile sul perimetro del dominio (Dirichlet $P=0$) mentre laddove occorre indicare una simmetria si impone una condizione di flusso nullo.

Per la distribuzione di temperatura serve fare qualche considerazione più dettagliata. Al bordo di ingresso si applichi una condizione di Dirichlet, nota la temperatura del fluido entrante pari a quella ambiente.

$$T = T_{amb} \text{ per } x = 0$$

Per tutta la lunghezza della geometria attraversata dal fluido è presente un flusso di calore convettivo indotto dalla differenza di temperatura tra lo strato di fluido e l'ambiente circostante. Definendo il flusso di calore uscente dal dominio è possibile scrivere la seguente espressione, dove h indica il coefficiente termico di convezione naturale dell'aria [$\text{W}/\text{m}^2\text{K}$].

$$n \cdot (k \nabla T) = h \cdot T_{amb} \text{ per } y = \frac{B}{2}, y = -\frac{B}{2}$$

Considerando poi che il flusso del fluido prosegue anche all'esterno della geometria considerata, sul bordo di uscita si ha uno scambio termico unicamente conduttivo, in un caso come questo in cui non è presente irraggiamento. Questa condizione si traduce nell'annullamento dello scambio termico convettivo.

$$n \cdot (k \nabla T) = 0, \text{ per } x = L$$

1.3. Visualizzazione dei risultati

1.3.1. Confronto soluzione analitica e numerica

Applicando all'equazione (2.24) le condizioni al contorno per la pressione definite in precedenza è stato possibile ottenere l'espressione per la distribuzione di pressione come funzione dei parametri adimensionali X ed α .

$$Q_x = \frac{2\alpha}{(1 + \alpha)} \quad (2.60)$$

$$P(X, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \frac{X}{H} - \frac{1}{(1 + \alpha)} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 - \alpha} \left(1 - \frac{\alpha^2}{H^2} \right) \quad (2.61)$$

$$P(X, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \frac{X}{\alpha + (1 - \alpha)X} - \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 - \alpha^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{[\alpha + (1 - \alpha)X]^2} \right) \quad (2.62)$$

Quest'ultima caricata nel programma sotto forma di funzione analitica, viene plottata a confronto con la relativa soluzione numerica, ottenuta dalla risoluzione dell'equazione (2.27), in figura 2.3.

Da notare è che la soluzione numerica è dimensionale, dunque per effettuare un'analisi comparativa occorre mettere a grafico i valori ottenuti da Comsol divisi per il valore della pressione di riferimento (2.24).

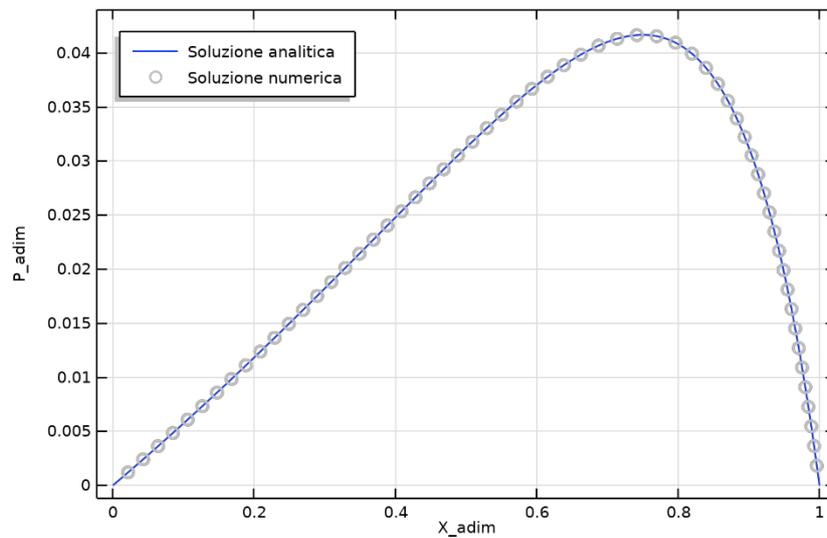


Figura 1.3: Confronto soluzione analitica e numerica caso 1D

Osserviamo come i due risultati coincidano perfettamente, provando l'equivalenza dei due metodi di risoluzione. Inoltre la distribuzione della pressione non presenta il massimo nel centro: si può dimostrare ponendo l'espressione $dP/dX = 0$, derivabile dalla (2.62), come il valore di pressione massima e ascissa della posizione dipendano infatti unicamente da α .

$$X_{Pmax} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \quad (2.63)$$

$$P_{max} = \frac{\alpha - 1}{4\alpha(\alpha + 1)} \quad (2.64)$$

1.3.2. Distribuzione di pressione caso 2D

Dalla risoluzione numerica dell'equazione di Reynolds del modello bidimensionale si è ottenuta la distribuzione di pressione seguente: i valori del caso monodimensionale possono essere ripresi anche in questo grafico, leggendo l'intensità di pressione unicamente per l'ordinata $y = 0$.

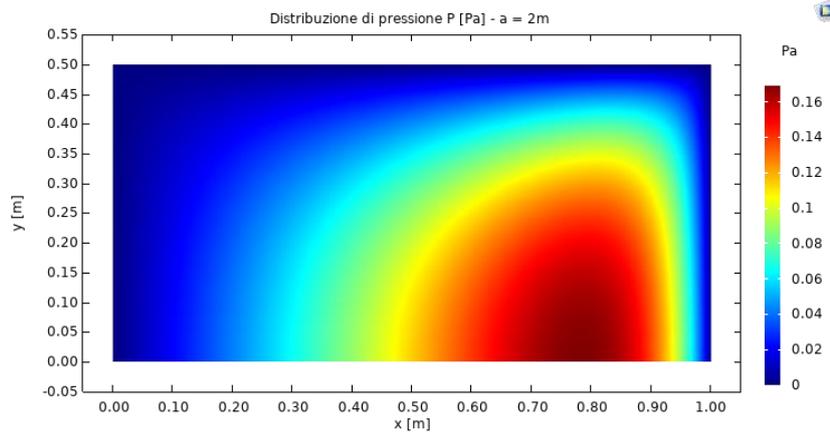


Figura 1.4: Distribuzione di pressione caso 2D

Un'altra tipologia di grafico 2D che si può rappresentare si ottiene con il comando Height Expression: l'altezza del grafico indica l'intensità della pressione per ogni punto del dominio.

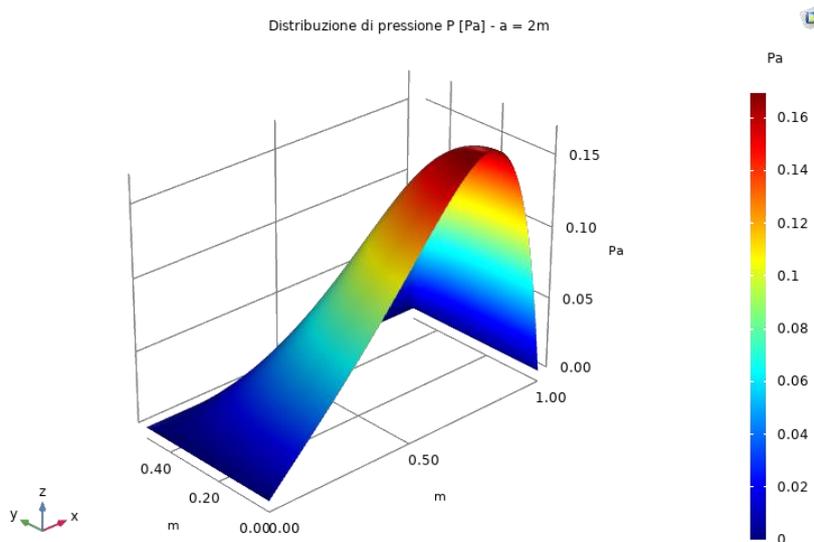


Figura 1.5: Distribuzione di pressione caso 2D con Height Expression

Occorre ricordarsi che il dominio originario per semplicità computazionale è stato diviso ed i risultati ottenuti fanno riferimento alla sola metà superiore. È possibile specchiare la distribuzione di pressione definendo gli estremi della linea di specchiatura, visualizzando i risultati per l'intero dominio.

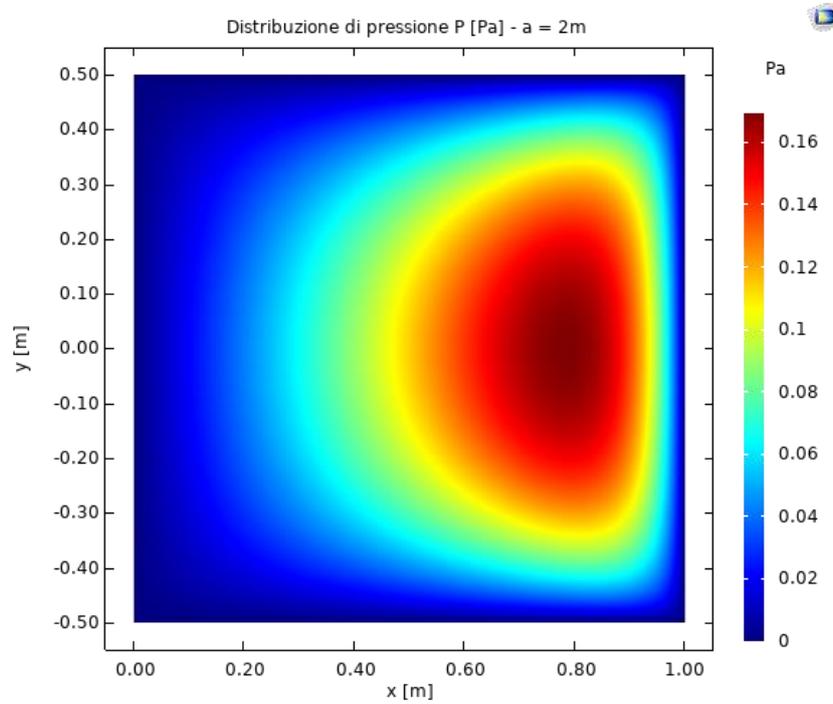


Figura 1.6: Distribuzione di pressione specchiata caso 2D

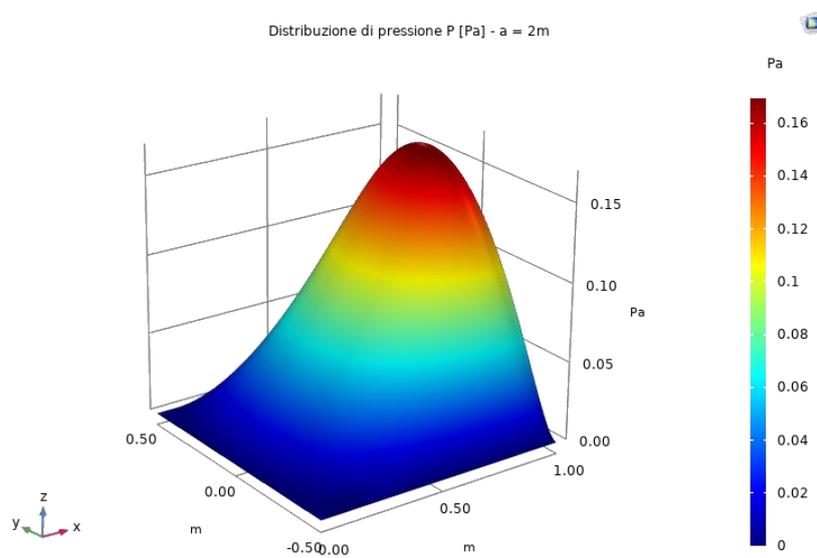


Figura 1.7: Distribuzione di pressione specchiata caso 2D Height Expression

1.3.3. Capacità di carico e forze di attrito

L'importanza di valutare grandezze quali capacità di carico, forze di attrito e potenza dissipata è legata al poter osservare come esse si modificano al variare di un parametro di interesse. Il parametro che abbiamo scelto di far variare in questo caso è l'inclinazione della superficie superiore del cuscinetto, rappresentata dalla grandezza a .

In fase di definizione dello studio che Comsol deve effettuare è possibile specificare un range per un parametro, il quale verrà fatto variare con un passo scelto entro tale intervallo: come risultato Comsol risolve numericamente le PDE per tutti i valori indicati.

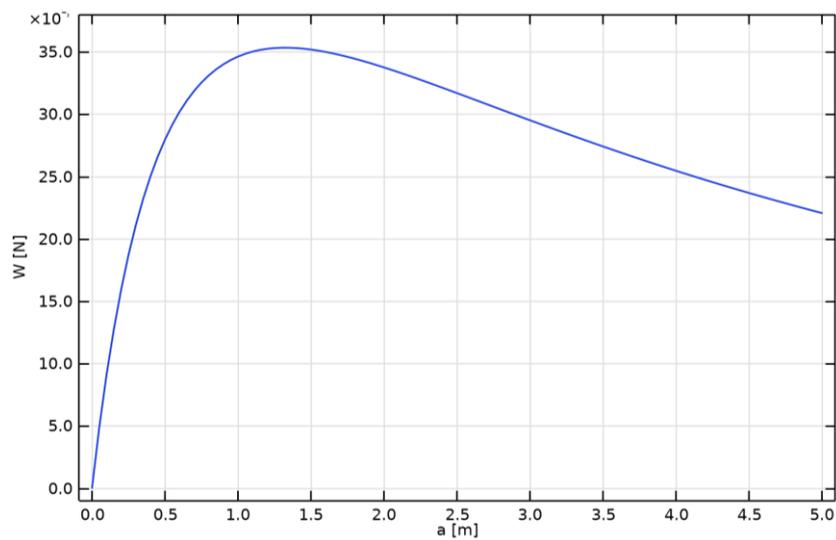


Figura 1.8: Capacità di carico del cuscinetto al variare della sua inclinazione

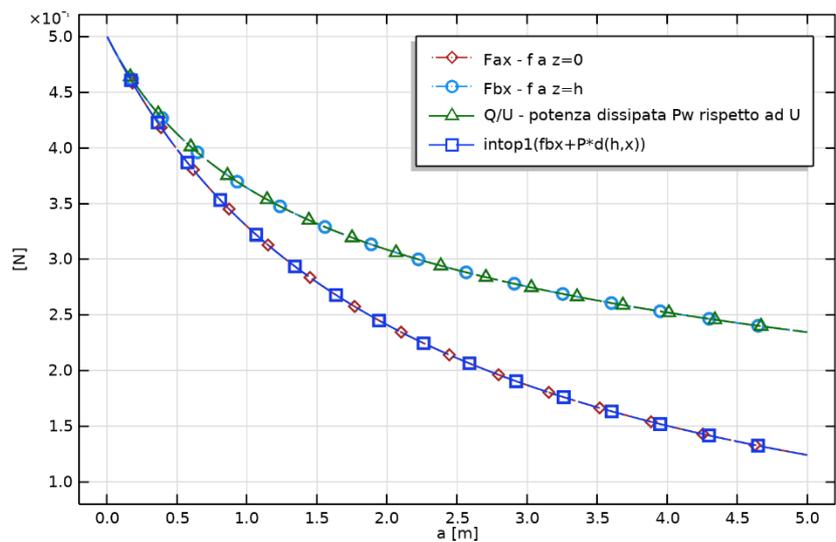


Figura 1.9: Confronto delle forze di attrito al variare dell'inclinazione del cuscinetto

Leggendo i grafici notiamo come la capacità di carico presenti un massimo, ad indicare che esiste un valore ottimale di inclinazione che massimizza il carico sopportabile dal cuscinetto.

In figura 2.9 è riportato un confronto tra le forze di attrito calcolate: si indichino con Fax la $\tau_{xz}|_{z=0}$, con Fbx la $\tau_{xz}|_{z=h}$ e con Q la potenza dissipata. Innanzitutto si nota come le forze di attrito decrescono all'aumentare dell'inclinazione del pattino. La forza di attrito generata dalla superficie superiore in movimento è superiore di quella presente a $z = 0$ e rapportandola alla potenza dissipata fratto la velocità [$W = N m/s$] esse coincidono. È quindi il moto della superficie inclinata a generare una dissipazione di energia. Il quarto caso riportato a grafico serve invece a mostrare il termine per il quale differiscono i due adamenti delle forze di attrito, dimostrabile applicando l'integrazione per parti.

$$\int_A \left(-\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{U}{h} \right) dx dy = \int_A \left(\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{U}{h} + p \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dy \quad (2.65)$$

$$\int_0^L \frac{\partial(ph)}{\partial x} dx = 0 \quad (2.66)$$

La (2.66) risulta verificata con le condizioni al contorno in vigore, che stabiliscono una pressione trascurabile sul perimetro esterno.

1.3.4. Distribuzione di temperatura

Il campo di temperatura viene risolto dal software in due distinti casi, il primo considerando in via approssimativa costante la viscosità dinamica del lubrificante e il secondo implementando l'espressione della viscosità (2.67). Per applicazioni che non generano una pressione idrodinamica molto elevata (GPa) la viscosità è rappresentata da una funzione esponenziale decrescente della temperatura.

$$\mu_{LUB}(T) = \mu_{ref} e^{-\alpha_V(T-T_{ref})} \quad (2.67)$$

$$\alpha_V = \frac{\ln\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)}{T_2 - T_1} \quad (2.68)$$

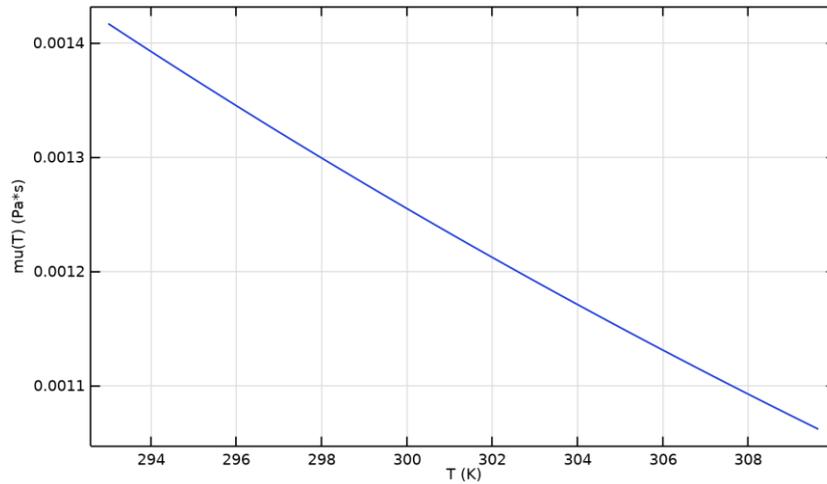


Figura 1.10: Andamento della viscosità in funzione della temperatura

È inoltre interessante eseguire lo studio al variare della velocità U , potendo così osservare come una sua variazione influenzi notevolmente i valori di temperatura attesi, nonché conseguentemente i valori della viscosità. L'andamento di μ fissato il lubrificante (figura 2.10) rimane invariato indipendentemente dal valore di velocità.

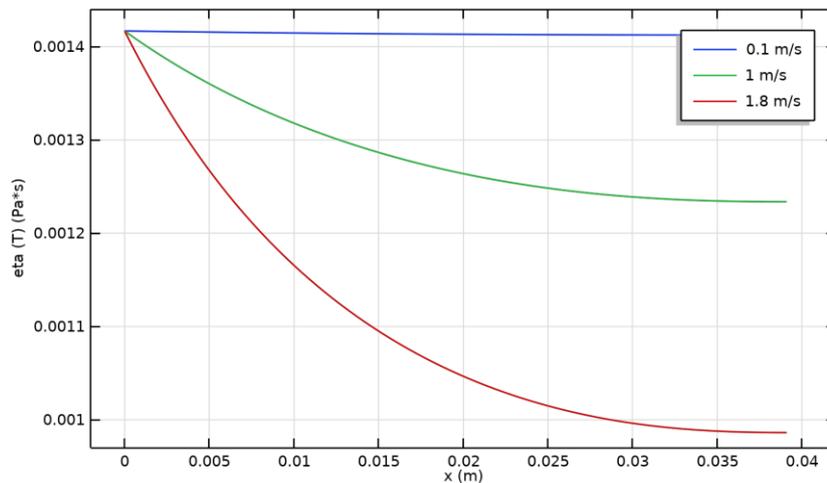


Figura 1.11: Viscosità lungo l'ascissa del dominio al variare della velocità U

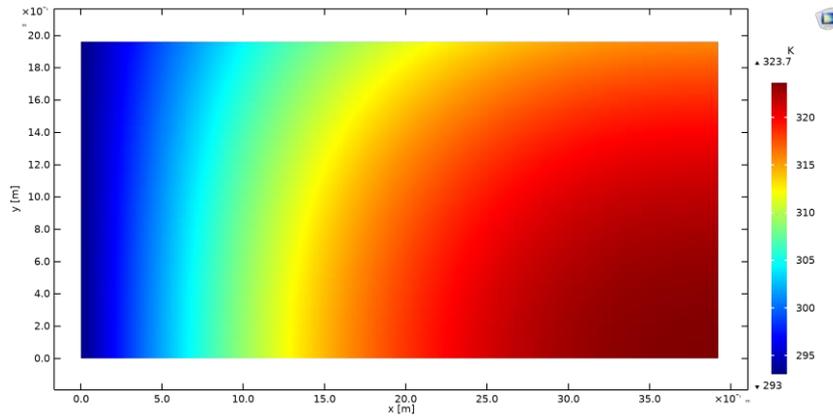


Figura 1.12: Distribuzione di temperatura con ipotesi di viscosità costante e $U=1.8\text{m/s}$

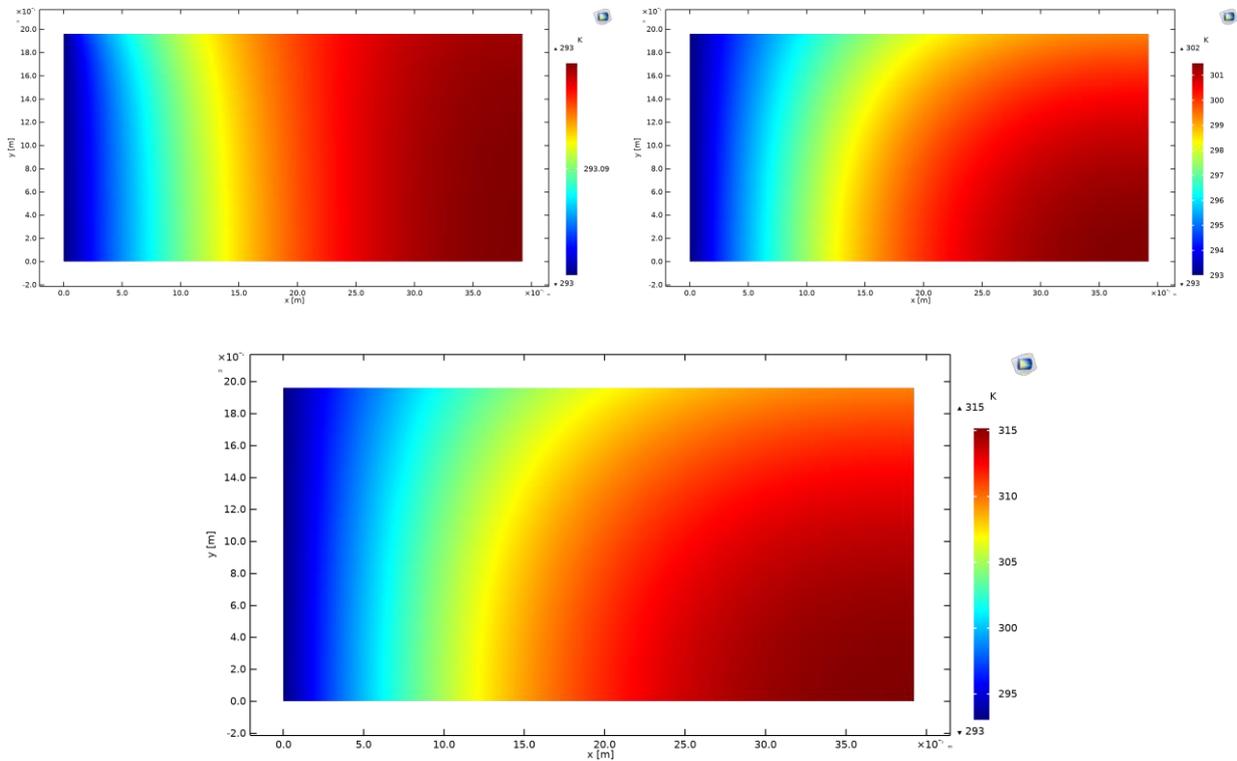


Figura 1.13: Distribuzione di temperatura con viscosità dipendente dalla temperatura per i valori di $U=0.1\text{m/s}$, $U=1\text{m/s}$, $U=1.8\text{m/s}$

Confrontando le distribuzioni di temperatura a parità di velocità si nota come i valori siano più elevati approssimando la viscosità ad un valore costante. Infatti nella realtà all'aumentare della temperatura il valore della viscosità diminuisce esponenzialmente e si riduce il valore del termine sorgente per la PDE da risolvere. In figura 2.13 si può apprezzare un incremento dell'aumento di temperatura del lubrificante all'aumentare della velocità U della superficie superiore del cuscinetto.

2. Cuscinetto idrodinamico radiale cilindrico

Il secondo modello presentato è di un cuscinetto idrodinamico radiale, costituito da un albero cilindrico che ruota all'interno di una boccola con interposto del lubrificante. Lo schema di riferimento è riportato in figura 3.1 nella sezione trasversale e assiale: il meato tra l'albero e la sede è volutamente esagerato.

Con riferimento alle equazioni già ricavate si vuole definire l'equazione di Reynolds per questo modello di cuscinetto con lo scopo di risolvere numericamente l'equazione in Comsol e determinare la distribuzione di pressione, tenendo in considerazione anche il fenomeno della cavitazione. Lo studio viene inoltre svolto in funzione dell'eccentricità del cuscinetto. Occorre precisare che l'equazione di Reynolds di riferimento che si ottiene nei due casi è sempre la stessa, cambiano semplicemente le coordinate in cui viene espressa.

2.1. Teoria

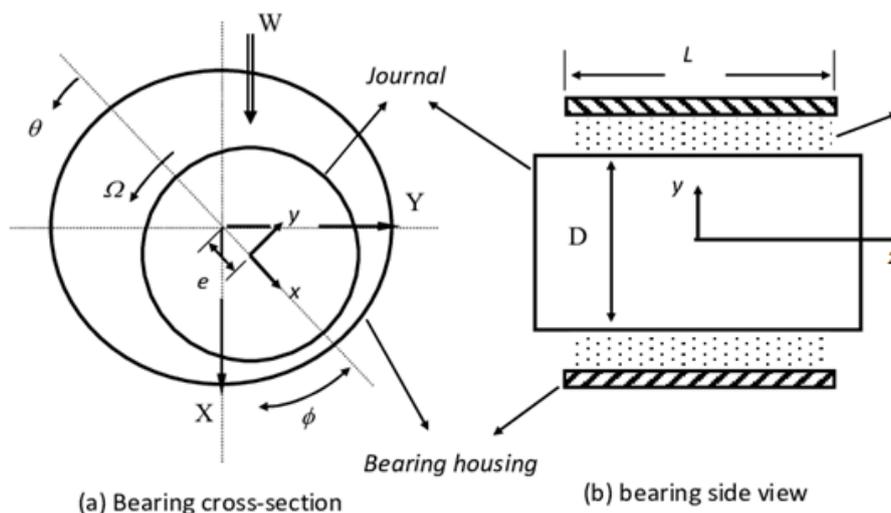


Figura 2.1: Schema di un cuscinetto idrodinamico radiale cilindrico

Si definiscano i parametri geometrici di eccentricità e e gioco radiale C .

$$e = |O_B - O_J| \quad (3.1)$$

$$C = R_B - R_J \quad (3.2)$$

L'ipotesi di base considerata è di meato sottile per il quale vale la relazione $C \ll R$. Infatti per queste tipologie di cuscinetti il rapporto C/R è dell'ordine dei millesimi.

Si vuole esprimere l'altezza del meato come funzione dell'angolo θ .

$$h = C + e \cos(\theta) \quad (3.3)$$

Le altre ipotesi applicate sono di lubrificazione con fluido incomprimibile, fluido newtoniano e studio di tipo stazionario.

2.1.1. Lubrificazione idrodinamica

Analogamente a quanto fatto per il modello precedente per ricavare l'equazione di Reynolds occorre partire definendo l'equazione di continuità.

$$\frac{\partial}{R\partial\theta}(\rho q_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho q_z) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) = 0 \quad (3.4)$$

Nell'equazione (3.4) ρq_θ rappresenta la portata in massa lungo la direzione circonferenziale mentre ρq_z in direzione assiale. Le espressioni delle portate volumetriche si ricavano adattando le espressioni (2.9) e (2.10) trovate in precedenza.

$$q_\theta = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{R\partial\theta} + \frac{R\Omega}{2} h \quad (3.5)$$

$$q_z = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.6)$$

Sostituendo la (3.5) e la (3.6) nell'equazione di continuità (3.4) si ottiene l'equazione di Reynolds generale per un Journal Bearing, valida nel dominio $-\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2}$.

$$\frac{\partial}{R\partial\theta} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\Omega}{2} \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) \quad (3.7)$$

Occorre adesso esplicitare i termini a secondo membro. Sotto l'ipotesi di fluido incomprimibile la densità può essere semplificata dall'equazione. Deriviamo l'equazione (3.3) rispetto a θ e al tempo.

$$\frac{\partial h}{\partial\theta} = -e \sin\theta \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \dot{e} \cos\theta - e \sin\theta \dot{\theta} \quad (3.9)$$

Dall'equazione (3.9) si osserva come e e θ non siano variabili indipendenti ma cambiano col tempo in quanto il centro dell'albero O_J non è fisso. Tuttavia siamo in un caso di studio di tipo stazionario, quindi questo contributo è nullo.

Si introduce infine una nuova grandezza definita rapporto di eccentricità:

$$\varepsilon = \frac{e}{C} \quad (3.10)$$

L'equazione di Reynolds per il modello di Journal Bearing è la seguente.

$$\frac{\partial}{R\partial\theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{R\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\frac{\Omega}{2} C \varepsilon \sin\theta \quad (3.11)$$

Per questo cuscinetto non vi è soluzione analitica ma solo numerica, tuttavia vi sono due casi semplificati per i quali è possibile ricavare analiticamente la distribuzione della pressione.

Nel caso di journal bearing infinitamente lungo ($L/D \gg 1$) la portata volumetrica in direzione assiale può essere trascurata, mentre per un cuscinetto infinitamente corto ($L/D \ll 1$) si può trascurare quella in direzione circonferenziale.

2.1.2. Cavitazione

La distribuzione della pressione che si ottiene risolvendo numericamente l'equazione di Reynolds non è fisicamente corretta. Ricalca infatti l'andamento di $\sin\theta$ restituendo valori di pressioni negative nell'intervallo $[\pi, 2\pi]$, cosa di fatto non possibile in quanto quando la pressione raggiunge il valore della tensione di vapore del liquido lubrificante si manifesta cavitazione con la creazione di bolle nel meato. Per tale ragione occorre includere nel modello il fenomeno della cavitazione.

La condizione implementata è descritta in [1] e si basa sul concetto che nelle regioni dove è presente cavitazione la distribuzione della frazione di massa è incognita mentre la distribuzione di pressione è nota, al contrario delle zone senza cavitazione dove si conosce la frazione di massa ma non la distribuzione di pressione. Si applica un cambiamento di variabili dove sia la frazione di massa f sia la pressione P sono sostituite da una nuova variabile ξ . L'equazione di Reynolds modificata viene risolta per ξ e si possono poi ottenere con le funzioni inverse f e P per l'intero dominio.

Per la maggior parte delle applicazioni dove la pressione idrodinamica arriva a valori molto più alti della pressione di cavitazione è possibile assumere la pressione di cavitazione uguale a zero. Dividiamo il meato nelle due zone descritte:

- Meato integro, dove P è incognita ($P > 0$) e f è nota ($f = 1$);
- Regione con cavitazione, dove P è nota ($P = 0$) e f è incognita ($0 < f < 1$).

Effettuiamo il cambio di variabile:

$$P = (\xi \geq 0)\xi \quad (3.12a)$$

$$f = 1 + (\xi < 0)c_f\xi \quad (3.12b)$$

dove $(\xi \geq 0)$ e $(\xi < 0)$ sono espressioni booleane. Per semplicità tale algoritmo verrà applicato ad un modello monodimensionale di cuscinetto infinitamente lungo caricato staticamente. Semplifichiamo la (3.7), passando dalla coordinata circonferenziale θ alla coordinata cartesiana $x = \theta R$: il dominio corrisponde ora alla circonferenza presente a $z = 0$. Abbiamo anche sostituito la velocità angolare con quella tangenziale $U = \Omega R$. L'espressione che ritroviamo è esattamente la (2.27) del modello precedente, con applicata la frazione di massa.

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{h^3 f dp}{12\mu dx} + \frac{Uhf}{2} \right) = 0 \quad (3.13)$$

La corrispondente equazione adimensionale risulta:

$$\frac{d}{dX} \left(-\frac{H^3 f dP}{12\tilde{\mu} dX} + \frac{Hf}{2} \right) = 0 \quad (3.14)$$

con $X = \frac{x}{R}$, $H = \frac{h}{c}$, $P = \frac{pc^2}{\mu_0 U R}$, $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$. Sostituiamo l'algoritmo di cavitazione:

$$\frac{d}{dX} \left(-\frac{H^3 f(\xi \geq 0) d\xi}{\tilde{\mu} dX} + 6Hf \right) = 0 \quad (3.15)$$

Come è possibile approfondire nell'articolo [1] la soluzione di tale equazione di Reynolds viene stabilizzata numericamente scegliendo un valore ottimale per la costante di trasformazione c_f , altrimenti si osserverebbero delle oscillazioni della soluzione nella zona in cui è presente cavitazione.

$$c_f = \frac{H^2}{3\tilde{\mu}h_e} \quad (3.16)$$

h_e rappresenta la dimensione media degli elementi della mesh.

2.2. Definizione del modello

Per questa tipologia di cuscinetto vengono realizzati a sua volta tre modelli: un modello tridimensionale semplice al quale non si applica il fenomeno della cavitazione, un modello bidimensionale in cui viene applicata una funzione booleana per approssimare a zero i valori di pressione negativa (irrealistici nella zona di cavitazione) ed infine un modello monodimensionale per mettere a confronto la risoluzione mediante algoritmo con stabilizzazione numerica.

La boccola viene assunta fissa, mentre l'albero ruota con velocità U con una eccentricità e rispetto alla sede.

2.2.1. Geometria

Il cuscinetto 3D viene modellato utilizzando il comando di Comsol per la realizzazione dei cilindri, definendo il centro nell'origine degli assi. È sufficiente definire poi il raggio R ed l'altezza L .

La geometria bidimensionale viene rappresentata "svolgendo" il cilindro: risulta in un rettangolo di altezza L e lunghezza $2\pi R$.

Il modello 1D sarà invece un segmento di lunghezza $2\pi R$: corrisponderà alla circonferenza svolta valutata a $L/2$.

2.2.2. Parametri e variabili

Dopo aver definito come prima cosa i parametri geometrici bisogna definire le variabili: la prima di tutte è definire l'angolo θ in funzione delle coordinate presenti in Comsol, che sono appunto cartesiane. Dovremo utilizzare $\arctan(y/x)$ nel caso 3D oppure un semplice rapporto x/R quando la circonferenza è stesa. Poi vi sono anche l'eccentricità, la velocità angolare, il gioco radiale e la viscosità.

Si procede con l'aggiungere l'altezza del meato (3.3), la velocità tangenziale di componenti $(-\Omega R \sin\theta, \Omega R \cos\theta)$, e la capacità di carico, la cui espressione viene ripresa dalla (2.59).

$$W = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (3.17)$$

$$F_x = \int_0^L \int_{-\pi R}^{\pi R} p \cos\theta \, dx \, dy \quad (3.18a)$$

$$F_x = \int_0^L \int_{-\pi R}^{\pi R} p \sin\theta \, dx \, dy \quad (3.18b)$$

Nel modello 1D si ricorda di implementare anche la costante di trasformazione, le equazioni (3.12a) e (3.12b) e che le grandezze inserite sono quelle adimensionali.

2.2.3. Equazioni e condizioni al contorno

L'equazione di riferimento per il modello 2D è la (3.11), che può essere inserita nel programma come una PDE generale, ricordandosi che stiamo lavorando nel piano (x, y) .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -\frac{\Omega}{2} C \varepsilon \sin\theta \quad (3.19)$$

Per il caso monodimensionale l'equazione di riferimento è invece la (3.15).

$$\frac{d}{dX} \left(-\frac{H^3 f(\xi \geq 0)}{\bar{\mu}} \frac{d\xi}{dX} + 6Hf \right) = 0 \quad (3.15)$$

Ogni qualvolta si inserisce un'equazione da risolvere occorre specificare nome e unità di misura della variabile dipendente rispetto alla quale il software risolverà l'equazione: per la (3.19) è p mentre per la (3.15) è ξ .

Nel caso di utilizzo invece del modulo *tffs* predefinito di Comsol occorre selezionare che si vuole utilizzare l'equazione di Reynolds e occorrerà specificare lo spessore delle pareti del cilindro rappresentato dall'altezza del meato e le componenti della velocità tangenziale.

Infine per poter integrare l'equazione di Reynolds bisogna definire le appropriate condizioni al contorno, definite come una pressione ambiente trascurabile in entrata e in uscita dal dominio ed una condizione di continuità in direzione circonferenziale.

$$p \left(z = -\frac{L}{2} \right) = p \left(z = \frac{L}{2} \right) = p_{amb} \sim 0$$

$$p(\theta = 0) = p(\theta = 2\pi)$$

2.3. Visualizzazione dei risultati

2.3.1. Modello 3D

Il modello di cuscinetto idrodinamico radiale tridimensionale realizzato con la modellazione di un cilindro ed il modulo del *thin film flow shell* di Comsol hanno prodotto gli andamenti di pressione riportati di seguito.

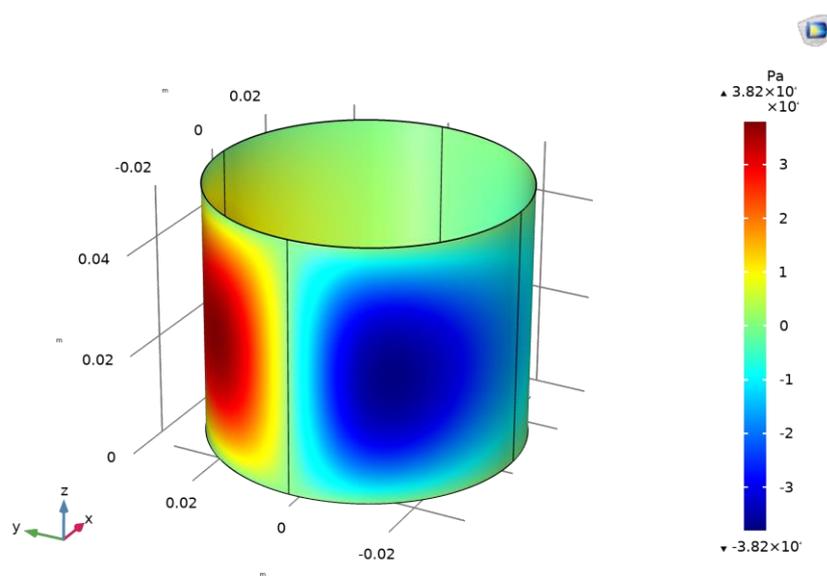


Figura 2.2: Distribuzione di pressione journal bearing

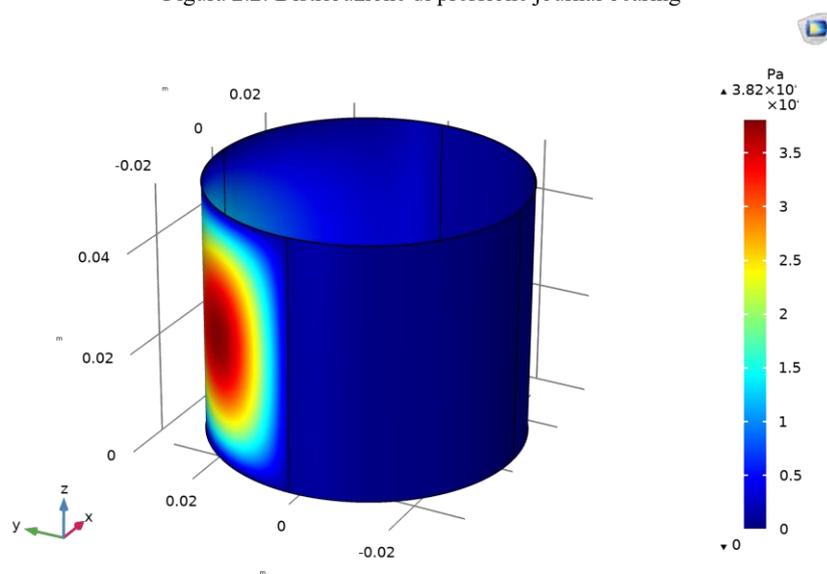


Figura 2.3: Distribuzione di pressione journal bearing con cavitazione

Utilizzando il modulo del tffs è sufficiente spuntare una voce affinché il modello tenga in considerazione anche il fenomeno della cavitazione: in figura 2.3 si nota l'assenza di valori di pressione negativi.

2.3.2. Modello 2D

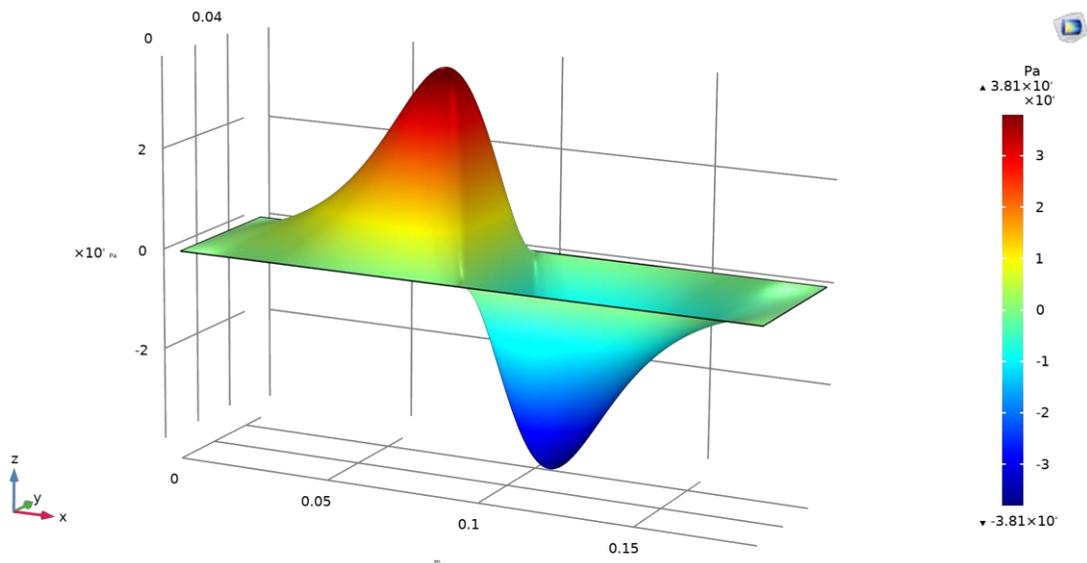


Figura 2.4: Distribuzione di pressione journal bearing modello 2D

Per il modello 2D sono state implementate le equazioni partendo da una generica equazione differenziale alle derivate parziali e si può notare come valori numerici di pressione e andamento corrispondano nei due metodi di realizzazione del modello. Per inserire nel modello il fenomeno della cavitazione è stata utilizzata una funzione booleana che consente di porre nulli i valori della distribuzione di pressione laddove essi siano negativi.

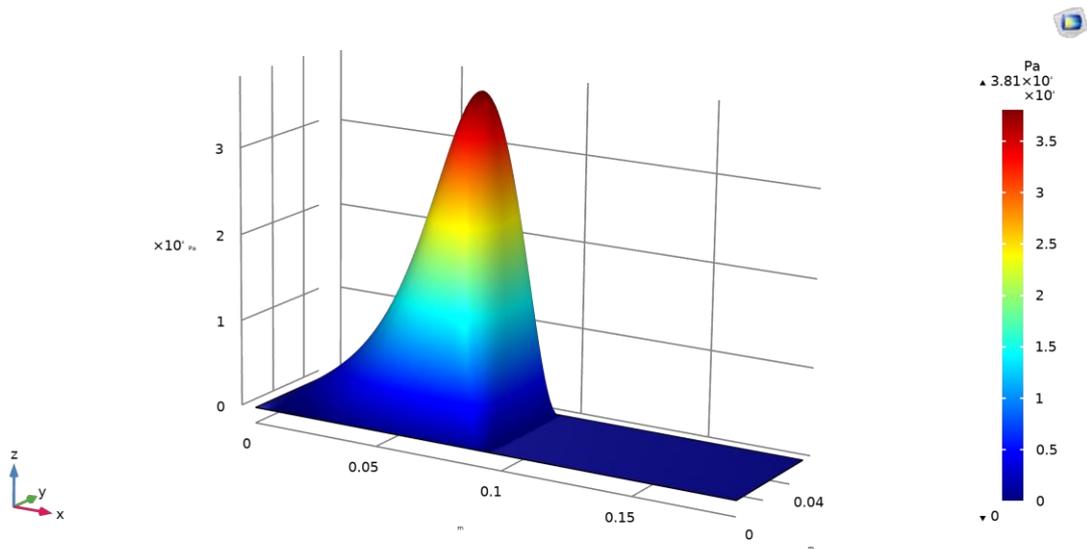


Figura 2.5: Distribuzione di pressione journal bearing con cavitazione modello 2D

Lo studio è stato inoltre effettuato facendo variare il rapporto di eccentricità: all'aumentare di ε ovviamente l'altezza del meato varia i suoi valori aumentando il suo valore massimo e riducendo la sua altezza minima, ma sempre seguendo l'andamento della funzione coseno.

Per valori di ε crescenti la capacità di carico del cuscinetto aumenta dovuto all'incremento dei valori del campo di pressione.

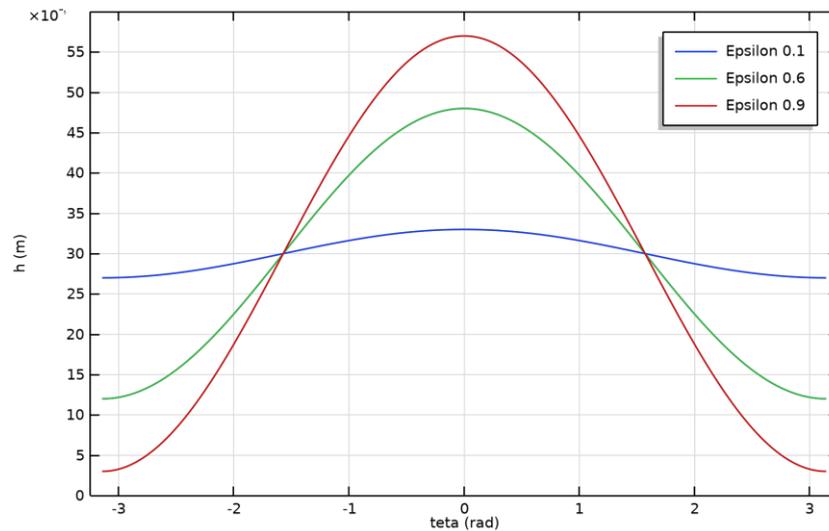


Figura 2.6: Altezza del meato di un journal bearing al variare di ε

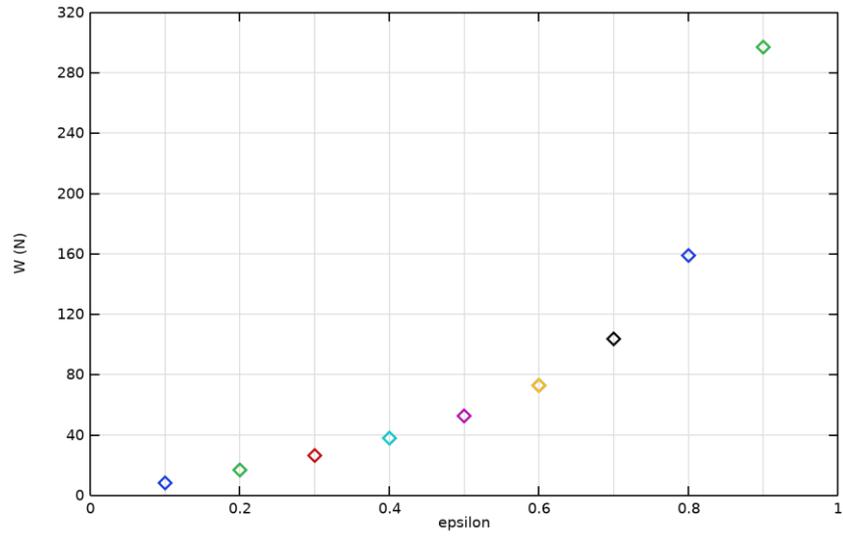


Figura 2.7. Capacità di carico di un journal bearing al variare di ϵ

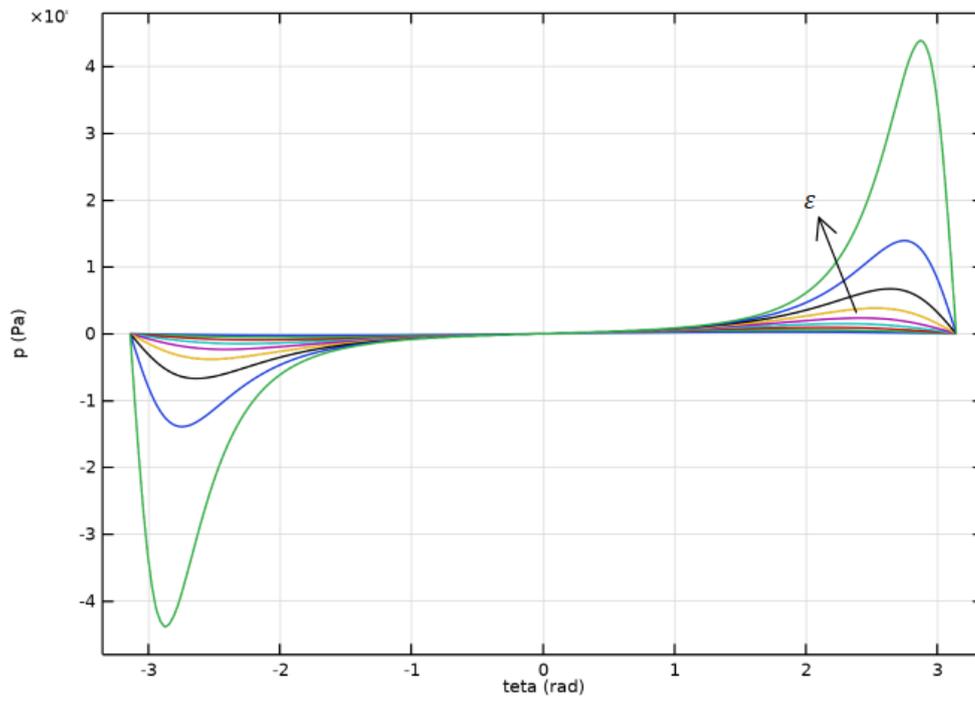


Figura 2.8: Distribuzione di pressione di un journal bearing per $z=L/2$ al variare di ϵ

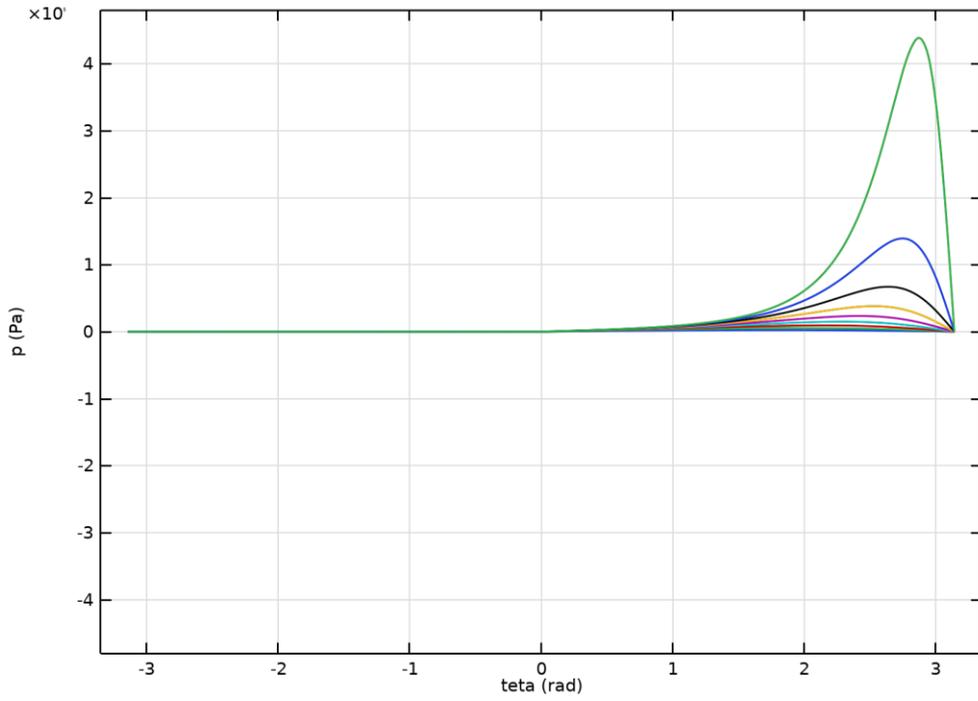


Figura 2.9: Distribuzione di pressione con cavitazione per un journal bearing a $z=L/2$ al variare di ϵ

2.3.3. Modello 1D

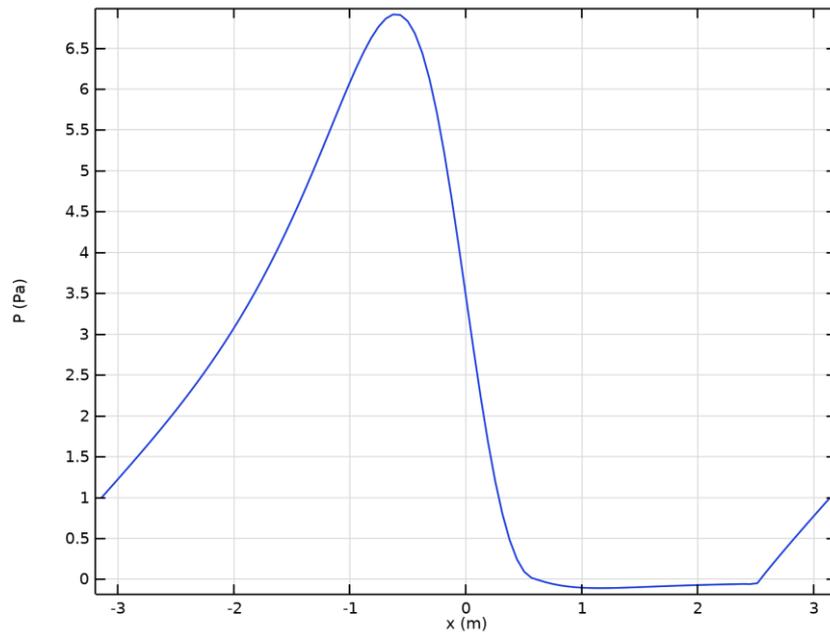


Figura 2.10: Distribuzione di pressione per un journal bearing modello 1D con cavitazione e stabilizzazione numerica

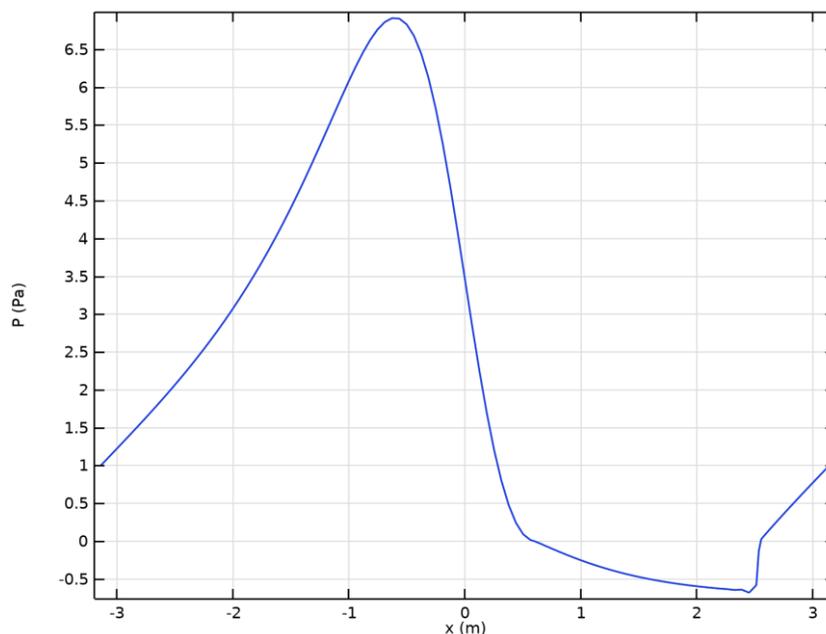


Figura 2.11: Distribuzione di pressione per un journal bearing modello 1D con cavitazione senza stabilizzazione numerica

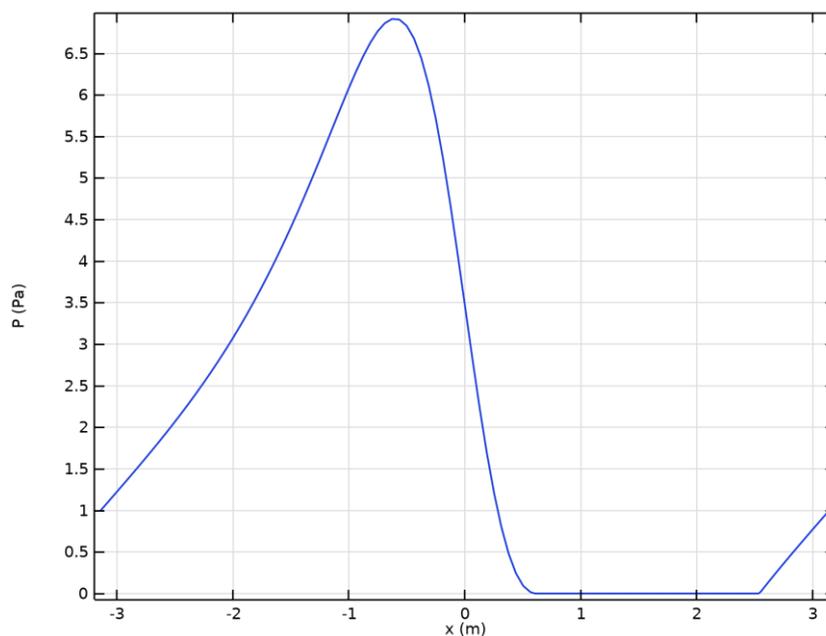


Figura 2.12: Distribuzione di pressione per un journal bearing modello 1D con cavitazione e funzione booleana $(P \geq 0) * P$

In figura 2.12 è stato riportato il metodo utilizzato anche per il modello 2D per la cavitazione e si può notare come si avvicini comunque molto alla risoluzione con stabilizzazione numerica proposta in figura 2.10: la risoluzione invece dell'equazione di Reynolds con il modello della cavitazione ma senza stabilizzazione numerica si può

osservare come presenti dei valori di pressione ancora negativi che si discostano dal modello reale.

3. Pattino pneumostatico circolare

L'ultimo modello di cuscinetto che è stato realizzato è di un pattino pneumostatico circolare ad aria. Si prende a riferimento il lavoro [2] con l'idea di creare un modello con una geometria che consenta anche una soluzione di tipo analitico.

Lo scopo è mettere in relazione la fluidodinamica con la meccanica dei solidi creando un modello multifisico che verrà risolto per differenti condizioni: si vogliono mettere a confronto i risultati ottenuti considerando il pattino dapprima rigido e poi deformabile al variare della geometria della superficie inferiore del pattino (piatta, rugosa, inclinata, concava).

3.1. Teoria

Si consideri un pattino circolare con geometria riportata nella figura sottostante, che presenta un solo foro di alimentazione. Il pattino viene analizzato in condizioni statiche in presenza di una pressione di alimentazione P_s di 0.4 MPa. Si definisca come *Gap* l'altezza del meato misurata come differenza tra la posizione del pattino piano quando vi è o meno un'alimentazione attiva.

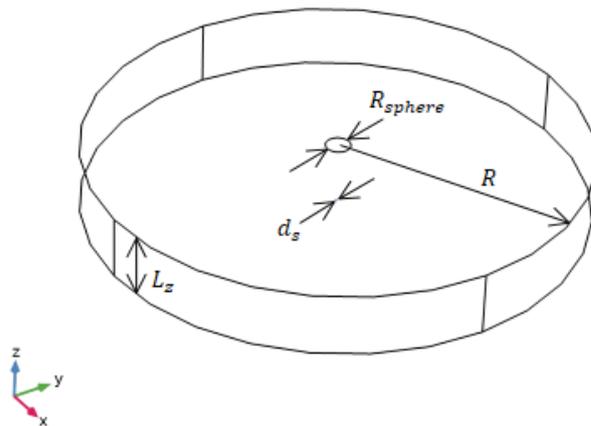


Figura 3.1: Schema pattino pneumostatico circolare con un foro di alimentazione

La definizione delle equazioni che governano il modello del pattino ad aria deve prendere in considerazione, oltre alla fisica del meato sottile rappresentata dall'equazione di Reynolds, anche la teoria degli ugelli. Si consideri infatti assimilabile ad un ugello il canale di collegamento tra il foro di alimentazione sulla faccia superiore e quello di uscita al di sotto del pattino. Nota la pressione e la temperatura di alimentazione occorre, utilizzando le formule degli ugelli messe in relazione con l'equazione di Reynolds, calcolare gli effettivi valori di pressione p_c in corrispondenza del foro d_s .

Solo dopo aver risolto il modello con un primo studio e trovato la pressione p_c è possibile usare il risultato del modello fluidodinamico come valore iniziale per il modello che considera la meccanica dei solidi ovvero la deformabilità del materiale.

3.1.1. Modello numerico

Il flusso di aria d'alimentazione in ingresso al meato viene definito come:

$$G_{hole} = c_d \frac{\pi d_s^2}{4} \frac{p_s}{\sqrt{R_g T_s}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\bar{p}^{\frac{2}{k}} - \bar{p}^{\frac{k+1}{k}} \right)} \quad (4.1)$$

$$\bar{p} = \begin{cases} \frac{p_c}{p_s}, & \frac{p_c}{p_s} > b = 0.528 \\ \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, & \frac{p_c}{p_s} \leq b = 0.528 \end{cases}$$

dove $\pi d_s^2/4$ è l'area trasversale dell'ugello di alimentazione, p_s e T_s sono la pressione e la temperatura di alimentazione del pattino, k e R_g sono il rapporto tra i calori specifici e la costante dei gas specifici del lubrificante, c_d è un coefficiente di scarico dato dalla formula (4.2).

$$c_d = 0.95 \left(1 - e^{-0.82 \frac{h}{d_s}} \right) (1 - 0.3 e^{-0.001 Re}) \quad (4.2)$$

dove

$$Re = \frac{4G}{\pi \mu d_s} \quad (4.3)$$

e μ è la viscosità dell'aria.

L'equazione di Reynolds per lubrificazione a meato sottile viene questa volta indicata per un fluido comprimibile. Si fa dunque riferimento all'equazione (2.15) che viene

semplificata come segue, non essendo il pattino o la superficie al di sotto del meato in movimento.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.4)$$

Il modulo del *thin film flow* in Comsol esprime l'equazione di Reynolds modificata nella forma:

$$\nabla \cdot (hp\mathbf{v}_{ave}) = 0 \quad (4.5)$$

dove p è la pressione locale del meato di aria (assunto in ogni nodo della mesh), h è l'altezza del meato e \mathbf{v}_{ave} è la velocità media locale del fluido.

$$\mathbf{v}_{ave} = v_{ave,x}\hat{\mathbf{i}} + v_{ave,y}\hat{\mathbf{j}} \quad (4.6)$$

Le componenti di \mathbf{v}_{ave} corrispondono alla portata volumetrica per unità di lunghezza (q_x, q_y) divise per l'altezza del meato:

$$v_{ave,x} = \frac{1}{h} \int_0^h u(z) dz = \frac{q_x}{h} \quad (4.7a)$$

$$v_{ave,y} = \frac{1}{h} \int_0^h v(z) dz = \frac{q_y}{h} \quad (4.7b)$$

Le condizioni al contorno per l'equazione di Reynolds sono pressione ambiente al bordo inferiore del pattino e una pressione pari a p_c sul bordo di uscita dell'ugello.

Per mettere ora in relazione le due parti del modello occorre considerare che la pressione all'uscita del foro di alimentazione corrisponde a quella in ingresso al meato: viene dunque aggiunta un'equazione globale di continuità.

$$G_{hole} - G_{gap} = 0 \quad (4.8)$$

$$G_{gap} = \oint_{\Gamma} (\rho h \mathbf{v}_{ave}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad (4.9)$$

dove Γ indica il bordo attraverso il quale il flusso entra ed $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale al bordo.

Queste equazioni devono essere risolte considerando un fattore di scala di 10^{10} dovuto all'enorme disparità nell'ordine di grandezza dei valori di portata rispetto a quelli di pressione p_c che devono essere calcolati. Il valore iniziale per la risoluzione di queste equazioni non lineari è stato assunto pari a $0.999 p_s$.

3.1.2. Soluzione analitica

Partendo dall'equazione di continuità per un elementino infinitesimo di cuscinetto si sfrutta la simmetria del problema che permette di definire che non vi sono variazioni lungo la direzione circonferenziale.

$$\begin{aligned}
 -\left(q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr\right)(r + dr)d\vartheta + q_r r d\vartheta &= 0 \\
 q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} r &= 0 \\
 \frac{\partial(q_r \cdot r)}{\partial r} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Riprendendo l'equazione (2.6) ricavata dall'equilibrio delle forze possiamo scrivere:

$$\frac{\partial p_r}{\partial r} = \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \tag{4.11}$$

Integrando due volte la (4.11) e imponendo come condizioni al contorno $u_r(0) = 0$ e $u_r(h) = 0$ si ottiene la (4.12).

$$u_r(z) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_r}{\partial r} \frac{z^2}{2} - \frac{\partial p_r}{\partial r} \frac{h}{2\mu} z \tag{4.12}$$

Si metta adesso a sistema l'equazione di continuità (4.10), la (4.12) e la definizione di portata volumetrica (2.8):

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{\partial(q_r \cdot r)}{\partial r} = 0 \\
 &u_r(z) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_r}{\partial r} \frac{z^2}{2} - \frac{\partial p_r}{\partial r} \frac{h}{2\mu} z \\
 &q_r = \int_0^h \rho u(z) dz
 \end{aligned} \right. \tag{4.13}$$

Otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Ph^3 r}{12\mu R_g T} \frac{\partial p_r}{\partial r} \right) = 0 \tag{4.14}$$

Integriamo la (4.14) una volta e si ottiene la (4.15) e poi una seconda volta (4.16) applicando la condizione di pressione ambiente al raggio R e di pressione P_c al raggio R_s .

$$\frac{Ph^3r}{12\mu R_g T} \frac{\partial p_r}{\partial r} = C \quad (4.15)$$

$$\int_{P_c}^{P_a} \frac{Ph^3 \partial p_r}{12\mu R_g T} = C \int_{R_s}^R \frac{\partial r}{r} \quad (4.16)$$

Dalla (4.16) si ottiene:

$$C = \frac{(P_a^2 - P_c^2)h^3}{24\mu R_g T \cdot \ln\left(\frac{R}{R_s}\right)} \quad (4.17)$$

Uguagliamo la (4.15) e la (4.17) e poi integriamo.

$$\frac{Ph^3r}{12\mu R_g T} \frac{\partial p_r}{\partial r} = \frac{(P_a^2 - P_c^2)h^3}{24\mu R_g T \cdot \ln\left(\frac{R}{R_s}\right)} \quad (4.18)$$

$$\int_{R_s}^r P \partial p_r = \frac{(P_a^2 - P_c^2)}{2 \cdot \ln\left(\frac{R}{R_s}\right)} \int_{R_s}^r \frac{\zeta}{\partial \zeta} \quad (4.19)$$

$$P(r) = P_c \sqrt{1 - \left(1 - \frac{P_a^2}{P_c^2}\right) \frac{\ln\left(\frac{r}{R_s}\right)}{\ln\left(\frac{R}{R_s}\right)}} \quad (4.20)$$

Il campo della pressione ricavato analiticamente è stato ottenuto nell'equazione (4.20). Tuttavia resta ancora l'incognita di P_c che deve essere ricavata introducendo la teoria degli ugelli. Occorre ricavare l'espressione della portata nei due casi ed eguagliarle.

Ricaviamo la portata per unità di lunghezza secondo la definizione:

$$\begin{aligned} G &= \int_0^{2\pi} \int_{R_s}^R q_r r \, dr d\vartheta = \int_0^{2\pi} \int_{R_s}^R \frac{Ph^3r}{12\mu R_g T} \frac{\partial p_r}{\partial r} \, dr d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{R_s}^R \frac{(P_a^2 - P_c^2)h^3}{24\mu R_g T \cdot \ln\left(\frac{R}{R_s}\right)} \, dr d\vartheta = \frac{\pi h^3 (P_c^2 - P_a^2)}{12\mu R_g T \cdot \ln\left(\frac{R}{R_s}\right)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Uguagliamo ora la (4.21) con la (4.1).

$$c_d \frac{\pi d_s^2}{4} \frac{P_s}{\sqrt{R_g T_s}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\bar{p}^{\frac{2}{k}} - \bar{p}^{\frac{k+1}{k}} \right)} = \frac{\pi h^3 (P_c^2 - P_a^2)}{12 \mu R_g T \cdot \ln \left(\frac{R}{R_s} \right)}$$

$$P_c^2 = P_a^2 + c_d \frac{12 \mu \sqrt{R_g T_s} P_s \cdot \ln \left(\frac{R}{R_s} \right) R_s^2}{h^3} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\bar{p}^{\frac{2}{k}} - \bar{p}^{\frac{k+1}{k}} \right)} \quad (4.22)$$

Utilizzando assieme la (4.20) e la (4.22) è possibile ora calcolare iterativamente la distribuzione di pressione $P(r)$. In Comsol Multiphysics è possibile creare una funzione analitica funzione delle sole variabili r e P_c e ottenere un valore di pressione sul piano xz confrontabile con quello della soluzione del *tffs*.

3.2. Definizione del modello

Nell'implementazione del modello come abbiamo detto all'inizio si vogliono definire diverse condizioni per la superficie inferiore del pattino a contatto col lubrificante. Non verranno creati molteplici modelli uno per ogni caso ma semplicemente verrà definita una differente altezza del meato nel *tffs*, sia essa con delle asperità per indicare una superficie rugosa, oppure concava o inclinata. La geometria è quindi una sola. I risultati di tutte le simulazioni saranno inoltre presenti all'interno di un solo file per poter essere facilmente confrontati.

3.2.1. Geometria

Con riferimento alla figura (4.1) la geometria è costituita da un cilindro e presenta due fori, uno sulla superficie superiore e uno su quella inferiore, che vengono rappresentati con due circonferenze. Per realizzare le circonferenze in Comsol occorre realizzare due piani di lavoro, uno per $z = 0$ e uno per $z = L_z$ e su tali piani disegnare i cerchi.

Occorre inoltre ricordarsi di porre il centro del cilindro in corrispondenza dell'origine degli assi.

3.2.2. Materiali

A differenza dei modelli precedenti definiamo qui i materiali dalla libreria di Comsol. Attribuiamo l'alluminio 3003-H18 come materiale per il pattino (dominio) e applichiamo invece l'aria come fluido che lambisce tutte le superfici del pattino, non solo la faccia inferiore dove l'aria rappresenta il lubrificante.

3.2.3. Parametri e variabili

I primi parametri da definire sono logicamente quelli necessari alla costruzione della geometria (si prenda a riferimento la figura 4.2). Altri parametri legati alla geometria sono poi i coefficienti che verranno usati per la definizione delle differenti forme del meato. Vi sono poi i dati riferiti al lubrificante quali k , R_g e il valore b di pressione critica, la pressione e la temperatura di alimentazione e il Gap , che corrisponderà all'altezza del meato in caso di pattino semplice piatto.

Con riferimento all'equazione (4.9) vengono definite la portata in ingresso, valutando l'integrale sul bordo πd_s e moltiplicandolo per l'altezza media del meato, e la portata in uscita, eseguendo l'integrale sul bordo a raggio R . Nel definire queste variabili si esprime la densità in funzione della pressione assoluta richiamata dalla risoluzione dell'equazione di Reynolds. Analogo procedimento per le componenti della velocità.

Vi fosse stato più di un foro per trovare la portata complessiva in ingresso sarebbe stato necessario sommare i contributi calcolati per ciascun foro di alimentazione.

Definiamo poi l'espressione di Re (4.3) e del coefficiente di scarico c_d (4.2) per il quale il valore di h viene assunto come media dell'altezza del meato al bordo di diametro d_s .

Ultima variabile da inserire è la capacità di carico, che corrisponde come visto nella (2.59) all'integrale sulla superficie inferiore del campo di pressione.

3.2.4. Funzioni

La prima funzione da definire è la (4.1) per la portata dell'ugello. Viene espressa come funzione a tratti (*piecewise*) con argomento P_c che varia tra la pressione ambiente e quella di alimentazione. La velocità del fluido in uscita dall'ugello viene definita analogamente, utilizzando l'equazione seguente.

$$v_{hole} = c_d \sqrt{R_g T_s} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(1 - \bar{p}^{\frac{k-1}{k}}\right)} \quad (4.23)$$

$$\bar{p} = \begin{cases} \frac{p_c}{p_s}, & \frac{p_c}{p_s} > b = 0.528 \\ \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}, & \frac{p_c}{p_s} \leq b = 0.528 \end{cases}$$

Con una funzione analitica si definisce invece il coefficiente di scarico c_d come da equazione (4.2), con Re fatto variare tra 0 e 500.

Si crea una funzione *random* per generare dei numeri casuali da 0 e 1: viene utilizzata per una funzione analitica che descrive la rugosità della superficie inferiore secondo la formulazione sotto riportata.

$$Gap + random(x, y)[\mu m] \quad (4.24)$$

Altre due funzioni analitiche servono per rappresentare una superficie concava (mediante l'equazione di un paraboloide di rotazione con $a = b$) ed una inclinata (in cui in questo caso di pattino circolare $L = B = 2R$):

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} * concavità[\mu m] \quad (4.25)$$

$$\frac{tilt2 - tilt1}{L}x + \frac{tilt2 + tilt1}{B}y + Gap \quad (4.26)$$

Ovvio utilizzo per l'ultima funzione analitica da creare è per la valutazione della pressione valutata analiticamente utilizzando le equazioni (4.20) e (4.22).

3.2.5. Equazioni e condizioni al contorno

Le equazioni utilizzate da Comsol nel modulo del *thin film flow shell* per l'equazione di Reynolds ridotta sono state descritte nelle equazioni dalla (4.4) alla (4.7b). Come valore di h_w ovvero di spessore del meato verranno inserite una alla volta le espressioni *Gap* per il caso di pattino piatto, la (4.24) per rappresentare una superficie inferiore con una certa rugosità e non perfettamente liscia, la (4.25) per modellare un meato concavo e la (4.26) per indicare un meato inclinato. Ogni qual volta l'espressione di h_w muta occorre svolgere una simulazione e salvare sotto forma di tabella i risultati ottenuti.

Le condizioni al contorno applicate sono quelle viste fino ad ora con P_c al bordo di ingresso del fluido nel meato (condizione di *inlet*) e una pressione ambiente trascurabile sul bordo esterno di uscita (condizione di *outlet*). Occorre anche aggiungere un'equazione globale della (4.8) affinché il software possa ricavare iterativamente il valore della P_c richiamata. Si ricorda che tale equazione deve essere moltiplicata per un fattore 10^{10} per ottenere risultati coerenti.

Per aggiungere al modello la deformabilità del pattino occorre inserire il modulo *solid mechanics* di Comsol. Per il nostro studio si scelga un materiale isotropico. Si definiscono poi come condizioni al contorno un vincolo sul bordo di raggio R_{sphere} e un carico sulla superficie inferiore dove è presente una pressione P corrispondente al risultato del modulo *tffs*.

3.2.6. Mesh e studio del problema

L'ultimo step prima di risolvere il modello consiste nella realizzazione della mesh. Si vuole far notare al lettore che se non utilizzata una mesh estremamente fine lo studio potrebbe non arrivare a convergenza.

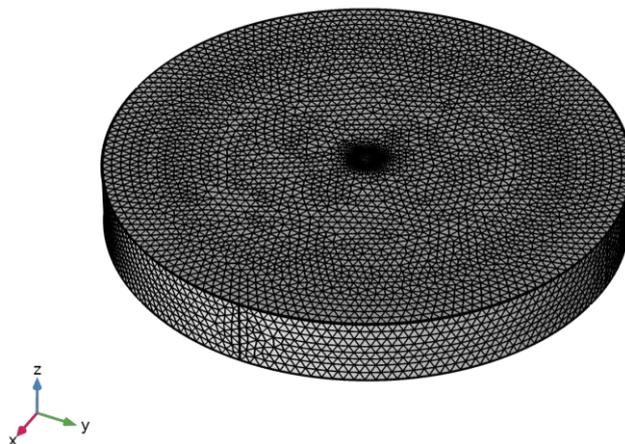


Figura 3.2: Mesh del pattino pneumostatico circolare con un foro di alimentazione

Per studiare il modello si realizzano due studi distinti, entrambi stazionari. Il primo risolve unicamente il modulo della fluidodinamica e i risultati ottenuti sono quindi relativi ad un pattino indeformato, mentre il secondo risolve in cascata il modulo *tffs* e *solid*, ottenendo i risultati per un pattino deformabile.

Entrambi gli studi vengono svolti utilizzando il comando di *auxiliary sweep* consentendo di far variare il parametro *Gap* e di osservare come varieranno le variabili del modello.

3.2.7. Post-processing

Ogni volta che si termina una simulazione è bene salvare i risultati altrimenti alla simulazione successiva questi ultimi verranno sovrascritti. Occorre creare un elenco di variabili salvate sotto la voce *global evaluation*: ad ogni analisi si andranno a valutare queste grandezze e a salvarle in una nuova tabella. Concluse tutte le simulazioni si possono rappresentare a grafico le grandezze da tutte le tabelle salvate.

3.3. Visualizzazione dei risultati

3.3.1. Confronto soluzione analitica

La soluzione analitica, come visto al punto 3.2.4. è stata definita come una funzione analitica: viene riportato l'andamento della pressione ottenuto mediante il modulo del tffs sull'intero dominio e la funzione analitica invece solo per un raggio compreso tra R_s ed R . Osservando i valori massimi nella legenda e gli andamenti della pressione proiettati sul piano xz le curve corrispondono quasi perfettamente.

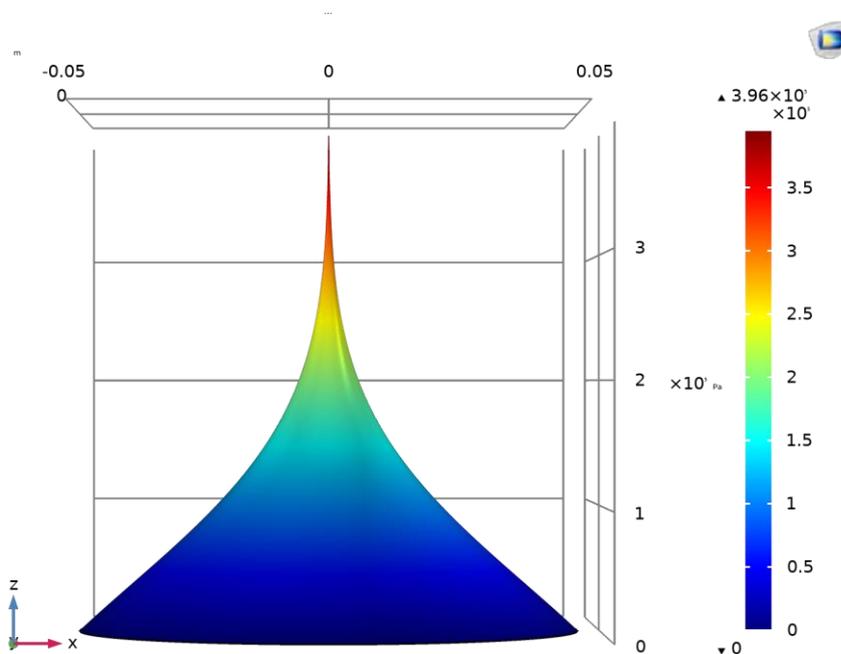


Figura 3.3: Distribuzione di pressione pattino pneumostatico rigido con meato piatto

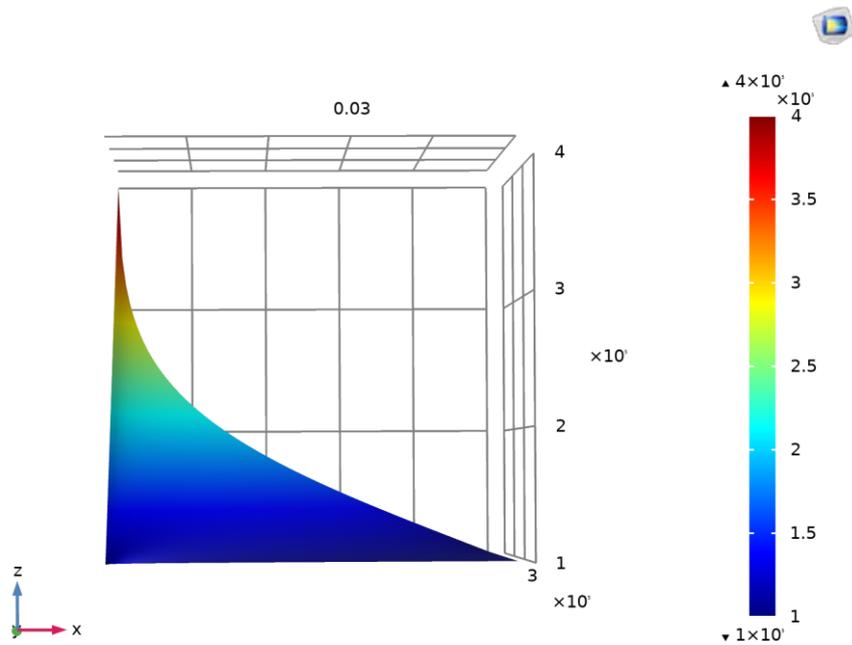


Figura 3.4: Distribuzione di pressione analitica per un pattino pneumostatico rigido con meato piatto

3.3.2. Variazione della forma del meato

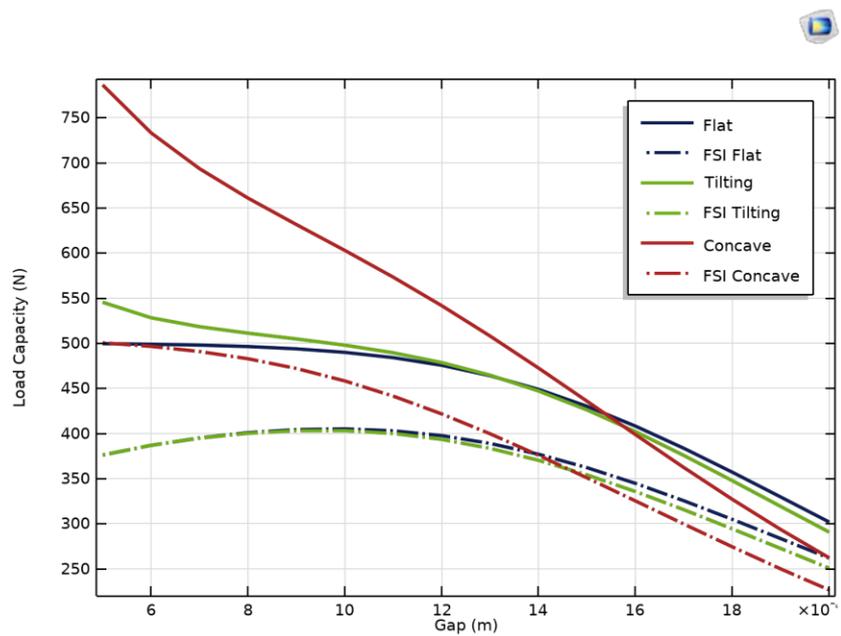


Figura 3.5: Capacità di carico di un pattino pneumostatico funzione dell'altezza e della forma del meato

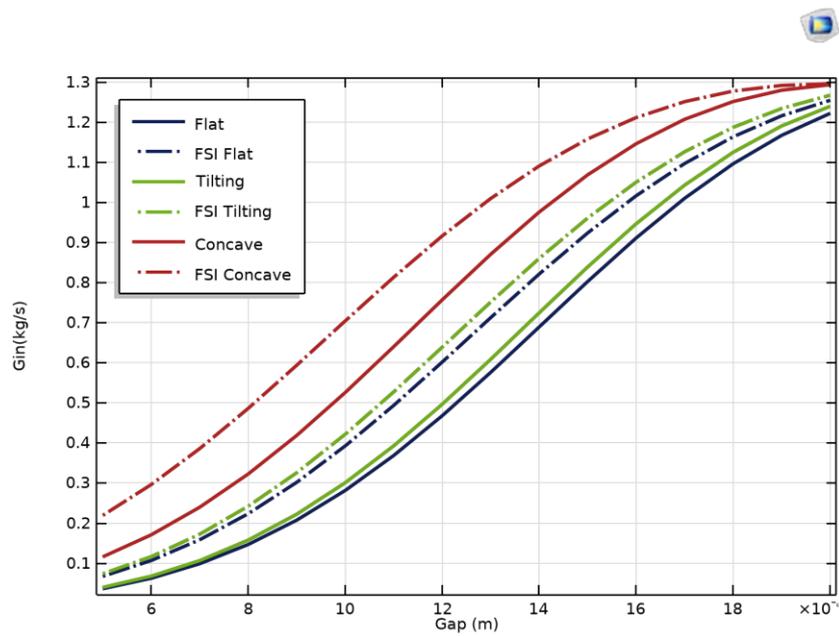


Figura 3.6: Flusso d'aria in ingresso al meato di un pattino pneumostatico funzione della sua altezza e forma

I risultati delle capacità di carico in caso di superficie rugosa vengono riportati nel grafico sottostante e come si può notare le curve sono molto vicine, quasi sovrapponibili, a quelle di un semplice pattino piano: non sono state riportate in figura 3.5 per non appesantire la rappresentazione.

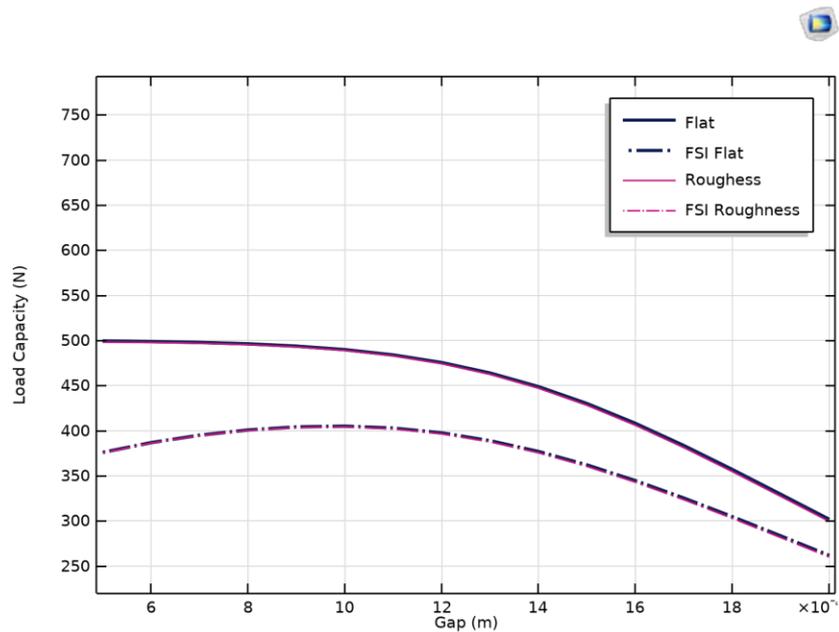


Figura 3.7: Confronto capacità di carico per un pattino pneumostatico liscio e con rugosità

Si osservi come l'inclinazione del meato non abbia teoricamente quasi influenza sulle prestazioni del pattino: ciò si può spiegare in quanto la distribuzione di pressione viene modificata solo localmente mantenendo inalterate le caratteristiche globali.

Il modello dunque con un meato concavo presenta le migliori performance ed anche il più elevato flusso d'aria in ingresso al meato.

Osservando le curve per pattini rigidi e deformabili si può notare come le deformazioni introdotte grazie ad approccio multifisico riducano significativamente le capacità di carico, producendo una simulazione più accurata e realistica.

L'immagine riportata sotto mostra per il pattino pneumostatico con meato concavo la deformazione e le tensioni calcolate con Von Mises, che è stato possibile osservare essere maggiori che per il caso con meato piatto.

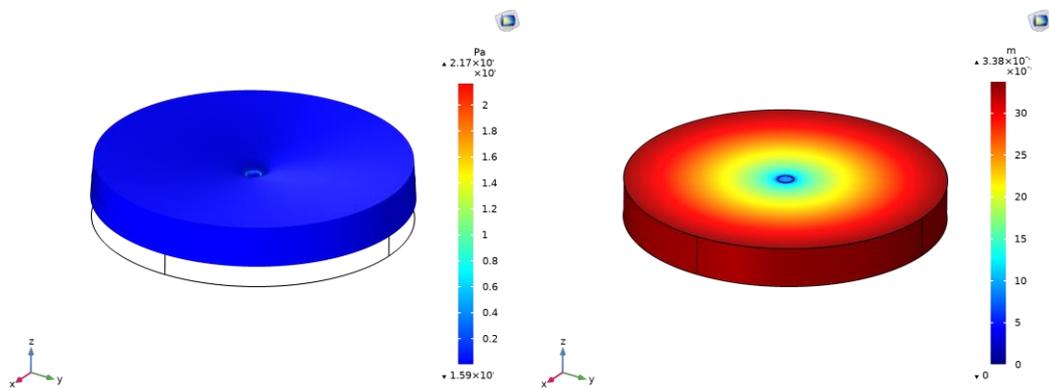


Figura 3.8: Stress e deformazioni per un pattino pneumostatico circolare con meato di forma concava

Dalla figura 3.8 si nota anche la corretta applicazione della condizione di vincolo.

Conclusioni

Questo lavoro di tesi ha mostrato come sia possibile mediante l'utilizzo di Comsol Multiphysics mettere in relazione la fluidodinamica e l'equazione di conservazione dell'energia termodinamica, ma anche la fluidodinamica e la meccanica dei solidi.

È stato dimostrato come le soluzioni analitiche benchè possibili solo per modelli semplificati ricalchino i risultati del software in queste situazioni.

Degli studi condotti ci siamo soffermati particolarmente sul modello di pattino pneumostatico. È stato possibile osservare che all'aumentare del valore di altezza del meato i valori di distribuzione di pressione e di conseguenza di capacità di carico diminuiscono. Al contrario la velocità del fluido nel meato aumenta moltissimo all'aumentare dell'altezza del film, dipendenza deducibile anche dalla figura 2.6, che mostra la stessa tendenza per la portata di aria: le due grandezze sono infatti direttamente proporzionali. I valori di deformazione diminuiscono anch'essi all'aumentare dell'altezza del meato di lubrificante e conseguentemente gli strss calcolati.

È stato infine dimostrato come la forma del meato oltre che la sua altezza influenzi le performance del modello e che un meato di tipo concavo consente di ottenere le migliori prestazioni.

Bibliografia

- [1] Shivam Alakhramsing, Ron van Ostayen and Rob Eling, “*Thermo-Hydrodynamic Analysis of a Plain Journal Bearing on the Basis of a New Mass Conserving Cavitation Algorithm*”, *Lubricants*, vol. 3, pp. 256-280, 2015
- [2] L. Lentini, F. Colombo, A. Trivella, T. Raparelli and V. Viktorov, “*Multi-Physical Simulation of Aerostatic Bearings*”,
https://www.comsol.co.in/paper/download/855421/Lentini_.Multi-physical%20%20simulation%20of%20aerostatic%20bearingsdocx.pdf
- [3] Tobias Hultqvist, Master’s Thesis “*Journal Bearing Design Tool, time-dependent analysis of bearing film thickness, power loss and load*”, 2016
- [4] San Andrés, L. Modern Hydrodynamic Lubrication Theory, Class Notes (~500 pages) pdf files (Notes 0-16), <https://oaktrust.library.tamu.edu/handle/1969.1/93197>
- [5] B.J. Hamrock, Fundamentals of fluid film lubrication, New York:McGraw-Hill, 1994
- [6] Stefano Morosi, PhD Thesis “*From Hybrid to Actively-Controlled gas Lubricated Bearings – Theory and Experiment*”, DCAMM Special Report No.S137, September 2011
- [7] Marco Saltarelli, Tesi di laurea “*Modellazione termo-elasto-idrodinamica di un cuscinetto reggispinta a film d’olio*”, 2010
- [8] S. Zhang, D.B. Bogy, “*A heat transfer model for thermal fluctuations in a thin slider/disk air bearing*”, *International journal of heat and mass transfer* 42, pp. 1791-1800, 1999

APPENDICE: GUIDA UTENTE

Viene ora illustrata la metodologia generale per l'implementazione di un modello in Comsol Multiphysics.

Creazione Modello

Iniziare aprendo *New Model* e selezionando *Model Wizard*.

- i. **Dimensione spazio.** Si presenta qui la scelta dello spazio dimensionale in cui lavorare: è possibile scegliere tra 1D, 2D, 3D.
- ii. **Modello fisico.** Selezionare la fisica di riferimento. Facendo riferimento ad una equazione generica alle derivate parziali occorre scegliere *Mathematics*, *PDE Interfaces* e *General Form PDE*. Poi cliccare su *Add*. Analogamente è possibile scegliere il modulo specifico per la risoluzione dell'equazione di Reynolds selezionando *Fluid Flow*, *Thin-Film Flow*, *Thin-Film Flow, Shell (tffs)*. Per introdurre nel modello la deformabilità di quest'ultimo scegliere *Structural Mechanics*, *Solid Mechanics (solid)*.
- iii. **Tipologia di studio.** Continuare su *Study*: se il modello studiato è un caso stazionario scegliere ora *Stationary* e premere *Done*. Nell'ambiente di lavoro è stato ora creato sulla sinistra un *Model Builder*.

Controllare sempre che tutte le opzioni avanzate siano selezionate in Comsol. Nel *Model Builder*, tasto destro sull'icona con l'occhio (*Show More Options*) e selezionare tutte le opzioni.

Definizioni Globali

Nel gruppo *Global definition* nel *Model Builder* vengono immagazzinati parametri, variabili e funzioni con uno scopo globale.

- i. **Parametri.** Come primo step occorre aggiungere i parametri sotto *Global Definitions, Parameters*: per ognuno indicare *Name* e *Expression* come indicato di seguito.
- ii. **Variabili.** Con il percorso *Global Definitions, Variables* è possibile definire delle variabili anch'esse globali.

Componente

Sotto il nodo *Component 1* si definiscono le caratteristiche specifiche di un componente del modello. In generale si possono realizzare differenti componenti e applicare ad ognuno caratteristiche proprie. Ciò che tutti i modelli avranno in comune saranno le definizioni globali. Negli esercizi visti è stato sempre definito un solo componente.

- i. **Variabili.** In *Component 1, Definitions, Variables* si aggiungano le variabili necessarie per poter implementare ad esempio l'equazione di Reynolds, necessarie quindi a risolvere la fisica del modello.

- ii. **Funzioni ed operatori matematici.** È possibile definire delle funzioni selezionando *Component 1, Definitions, Functions, Analytic/Piecewise etc.* Per definire inoltre alcune variabili come ad esempio la capacità di carico occorre definire prima l'operatore integrale come *Component 1, Definitions, Non Local Couplings, Integration*. Oltre all'integrazione è possibile definire anche operatori quali *Average, Minimum, Maximum*.
- iii. **Geometria.** Definiamo a seguire la geometria del dominio: *Component 1, Geometry*, tasto destro e scegliamo la geometria da rappresentare. Impostare le dimensioni compilando la finestra che appare e assicurarsi che la posizione del componente sia posizionata dove desiderato rispetto al sistema di riferimento. Terminare la creazione della geometria con *Build All Objects*, posto in alto.
- iv. **Materiale.** È possibile scegliere un materiale dalla libreria di Comsol ed in particolar modo assegnare differenti materiali per il dominio e le sue superfici/bordi. *Component 1, Materials, Add Material from Library*, selezionare il materiale desiderato e cliccare su *Add to Component*. Nella finestra *Settings* alla voce *Geometric entity level* scegliere se il materiale viene applicato al dominio, ad una superficie, ad un bordo o ad un punto.
- v. **Fisica del modello.** Aprire *General Form PDE (g)*, oppure la fisica che abbiamo aggiunto, sotto *Component 1* nel *Model Builder*: nella finestra *Settings* che si è aperta occorre specificare le variabili dipendenti che Comsol dovrà ricavare sotto *Dependent Variables, Field Name, Number of Dependent Variables* e *Dependent Variables*. Correggere poi le unità di misura sotto la voce *Units*.
In *Domain Selection* assicurarsi che sia selezionata la corretta geometria come dominio di calcolo.
Aprendo la fisica del componente alla voce *Equation* viene mostrata l'equazione così come deve essere fornita a Comsol.

$$e_a \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = f$$

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

Nella figura sopra viene mostrata l'equazione alle derivate parziali come costruita da Comsol. Per ottenere ad esempio l'equazione di Reynolds occorre definire e_a , d_a ed f nulli e sotto *Conservative Flux* inserire i termini di flusso q_x e q_y . Così l'equazione corrisponderà a quella seguente:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0$$

- vi. **Condizioni al contorno.** Cliccando col tasto destro sulla fisica del modello è possibile trovare le differenti condizioni al contorno che è possibile

aggiungere. Ve ne sono poi alcune tra quali *Initial Values* che sono sempre presenti.

È possibile scegliere ad esempio condizioni al contorno di Dirichlet scegliendo *Dirichlet Boundary Condition* dal tasto destro: selezionare i bordi rimanenti interessati e definirne *Prescribed Value*.

- vii. **Mesh.** Tramite la finestra *Mesh 1* nel *Model Builder* nel nodo *Component 1*, cliccando su *Build All*, verrà generata una mesh triangolare automatica, la cui dimensione può essere modificata nella tendina sotto *Element Size*.

Risoluzione Modello

Selezionare il nodo *Study 1* e premere *Compute*. Comsol risolverà il problema e spuntando la casella *Generate Default Plots* genererà in automatico un grafico del campo di pressione. Se si vuole risolvere il modello al variare di un determinato parametro è possibile selezionare *Auxiliary Sweep* procedendo come segue: *Study 1, Step 1: Stationary, Settings, Study extensions, Auxiliary Sweep*. Selezionare dalla tendina il nome del parametro ed in *Parameter value list* indicare *range (a,b,p)* con a e b gli estremi dell'intervallo e p il passo.

È possibile aggiungere più di uno studio andando su *Add study* e proseguendo come visto all'inizio.

Visualizzazione risultati

La sezione *Results* consente al termine delle analisi svolte di visualizzare i risultati, esportare dati ed immagini.

- i. **Global evaluation.** Se vogliamo valutare e conoscere i risultati delle variabili che abbiamo inserito nel programma dobbiamo andare su *Results, Derived Values, Global evaluation*. Nella finestra che compare in *Expressions* si possono aggiungere le grandezze da valutare. Cliccare dunque in alto a sinistra *Evaluate*: verrà creata una tabella contenente i nostri dati. Per ogni simulazione effettuata è possibile cliccare *Evaluate, New table* e rinominarla e non si sovrascrivono in questo modo i risultati.
- ii. **1D Plot Group.** *Results, tasto destro, 1D Plot Group, tasto destro, Global oppure Table Graph*. Questo è il percorso che consente di mettere a grafico una variabile in funzione di un parametro o rappresentare direttamente i dati presenti in una tabella, scegliendo la colonna opportuna.
- iii. **2D Plot Group.** Tasto destro su *Results* nel *Model Builder* e poi selezionare *2D Plot Group*. Tasto destro nuovamente sulla nuova voce creata e selezionare *Surface*, nelle cui impostazioni sotto dicitura *Expression* viene indicata la variabile che verrà plottata.
Nelle impostazioni del grafico è possibile andare ad aggiungere poi la legenda degli assi, titolo del grafico, scegliere i colori e molto altro. Un'altra tipologia di grafico 2D che si può rappresentare si ottiene con tasto destro su *Surface* e poi *Height Expression*: l'altezza del grafico indica l'intensità della grandezza rappresentata per ogni punto della superficie.

Procedimenti simili si hanno per la creazione grafici 1D e 3D sempre cliccando col tasto destro su *Results*: ovviamente in base alla tipologia di modello realizzato saranno disponibili differenti grafici.

- iv. **Specchiatura risultati.** Occorre ricordarsi che se il dominio originario per semplicità computazionale è stato diviso È possibile specchiare i risultati andando su *Datasets*, tasto destro su *More 2D Datasets* e poi *Mirror 2D*. Occorre specificare gli estremi della linea di specchiatura. Un nuovo grafico può essere quindi realizzato con gli stessi passaggi visti al punto precedente selezionando come origine dati *Mirros 2D 1*.