



**Politecnico  
di Torino**

## Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

A.a. 2020/2021

Sessione di Laurea Dicembre 2021

# **Modelli di trasmissione a variazione continua con cinghia in polimero per analisi dinamica**

Relatori:

Prof. Mauro VELARDOCCHIA

Prof. Elvio BONISOLI

Ing. Antonio TOTA

Candidati:

Alessandro FARINA



Si ringraziano per la gentile collaborazione che ha reso possibile il presente lavoro: i Relatori Professori Mauro Velardocchia ed Elvio Bonisoli e l'Ingegnere Antonio Tota per la costante consulenza, i Capitani Marco Trevisi e Federico Pinto per la cordiale ospitalità, il Tenente Gianmatteo Cannavacciuolo per l'iniziativa nel tema, il Geometra Marco Farina per il supporto grafico e tutti quanti hanno contribuito a vario titolo con il loro sostegno.



# Sommario

Studi pregressi sulla modellazione e il controllo di Trasmissioni a Variazione Continua .....	6
Introduzione .....	6
Impieghi.....	6
Principio di funzionamento.....	6
Modellazione dinamica di CVT a cinghia .....	9
Controllo per CVT .....	21
Conclusioni.....	24
Sviluppo di un modello dinamico per CVT a cinghia in polimero .....	25
Introduzione .....	25
Modellazione .....	25
Schema del modello.....	25
Variabili d’ingresso .....	26
Equazioni di equilibrio dinamico .....	27
Funzionamento del modello .....	28
Variabili di uscita.....	31
Coppia resistente alla motrice.....	31
Analisi di sensibilità.....	32
Analisi di sensibilità allo smorzamento.....	32
Analisi di sensibilità alla massa .....	33
Conclusioni.....	34
Bibliografia.....	35
Indice delle figure.....	40

# Studi pregressi sulla modellazione e il controllo di Trasmissioni a Variazione Continua

## Introduzione

### Impieghi

Di fronte alle crescenti necessità di riduzione delle emissioni di gas serra, le trasmissioni a variazione continua (*Continuously Variable Transmissions*, CVT) suscitano particolare interesse come tecnologia in grado di abbassare i consumi di carburante nell'ambito automobilistico: si ritiene infatti che questo tipo di tecnologia permetta di realizzare un accoppiamento migliore delle condizioni di funzionamento del motore con la varietà di accelerazioni richieste dal guidatore. Tuttavia, per raggiungere tali ambiziosi traguardi, è necessaria una comprensione dettagliata delle interazioni dinamiche in un sistema CVT, cosicché un controllo efficiente possa superare le perdite realmente esistenti [1].

Come si è detto, la possibilità di variare con continuità il rapporto di trasmissione rende le CVT particolarmente appetibili sotto l'aspetto dell'efficienza grazie alla loro capacità di superare alcuni dei principali limiti dei sistemi di trasmissione tradizionali discreti. Le cosiddette CVT a due vie ("split-way") permettono di ampliare il campo di variazione del rapporto di velocità, a prezzo di una perdita di efficienza legata al maggior ricircolo di potenza nel variatore, oppure l'esatto opposto [53]. Si tratta di soluzioni largamente praticate che consistono nel separare il flusso di potenza del gruppo propulsore e convogliarne la maggior parte attraverso rotismi ordinari o epicicloidali. Ciò consente di sfruttare entrambi i principali vantaggi delle CVT (ampliamento del cambio di variazione del rapporto di velocità e miglioramento dell'efficienza) se non simultaneamente, almeno grazie a diverse modalità di funzionamento, selezionate tramite l'inserimento di frizioni [54].

In veicoli a bassa potenza, trovano invece spazio CVT a puleggia espandibile con cinghie trapezoidali in gomma ("rubber V-belt CVT"), dove è possibile trasmettere potenza senza forti spinte assiali grazie all'elevato coefficiente di attrito del materiale. Ciò consente la trasmissione di potenza con attuatori puramente meccanici che non necessitano di alimentazione esterna. Inoltre, l'apertura delle CVT, cioè l'ampiezza tra massimo e minimo rapporto di trasmissione, può essere modificata con l'impiego di trasmissioni "split-way" con due linee in parallelo di cui una a velocità costante e l'altra con un rapporto costante. Tali caratteristiche li rendono molto interessanti per la realizzazione di trasmissioni a regolazione automatica [52].

### Principio di funzionamento

Lo schema di base di una CVT si compone di due pulegge di diametro variabile, collegate tra loro da un dispositivo in grado di trasmettere potenza, come appunto una cinghia o una catena. Ciascuna puleggia ha una flangia scanalata ("*sheave*") mobile in direzione assiale. La cinghia (o la catena) può subire spostamenti radiali e tangenziali a seconda delle condizioni di carico che determinano le spinte assiali sulle pulegge. Ciò determina una variazione con continuità del rapporto di trasmissione [1].

Per le applicazioni a potenza ridotta, la puleggia motrice è spesso regolata grazie a un sistema di rulli eccentrici: all'aumentare della velocità, questi esercitano una forza sulle rampe curve della flangia mobile tale da spingere la cinghia su diametri esterni. La puleggia condotta, invece, è regolata da una molla elicoidale in compressione e da una serie di guide, elicoidali anch'esse, che trasformano la coppia esterna in spinta assiale sulla flangia mobile: in questo modo, all'aumentare della coppia resistente, la flangia si sposta assialmente verso l'interno e il diametro su cui si viene a trovare la cinghia aumenta.

L'insieme di queste componenti determina il punto di funzionamento. Ne risulta una trasmissione automatica controllata in velocità all'ingresso e in coppia all'uscita [52].

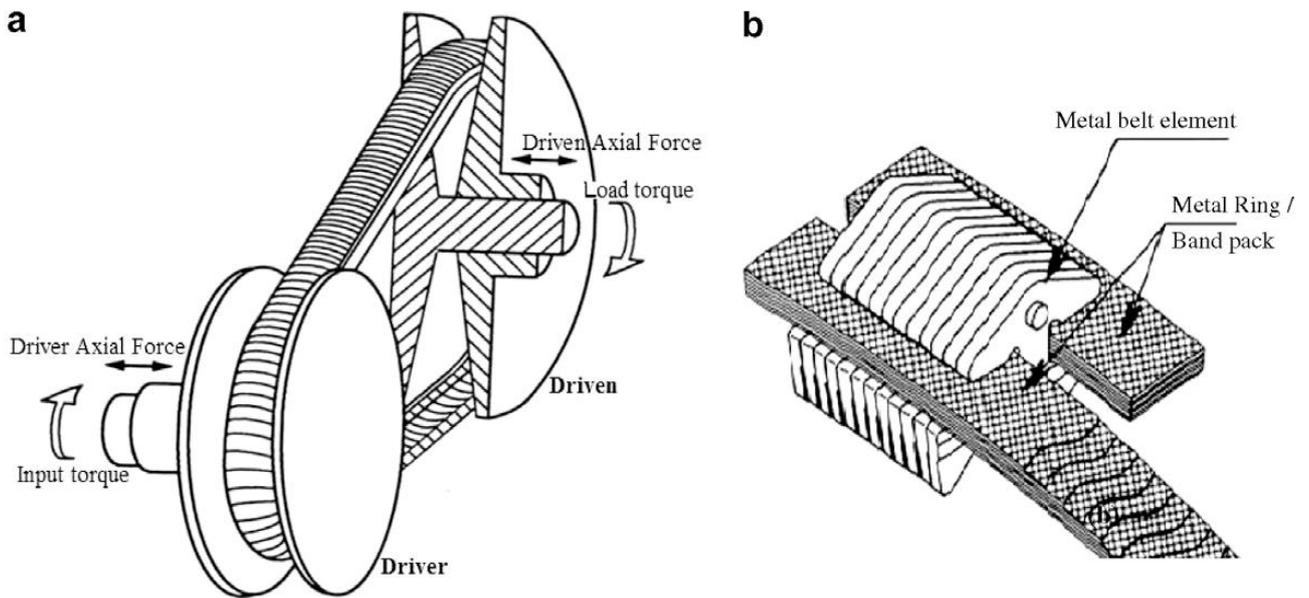


Figura 1. CVT a cinghia metallica trapezoidale ("V-belt CVT"): (a) schema, (b) struttura della cinghia [10].

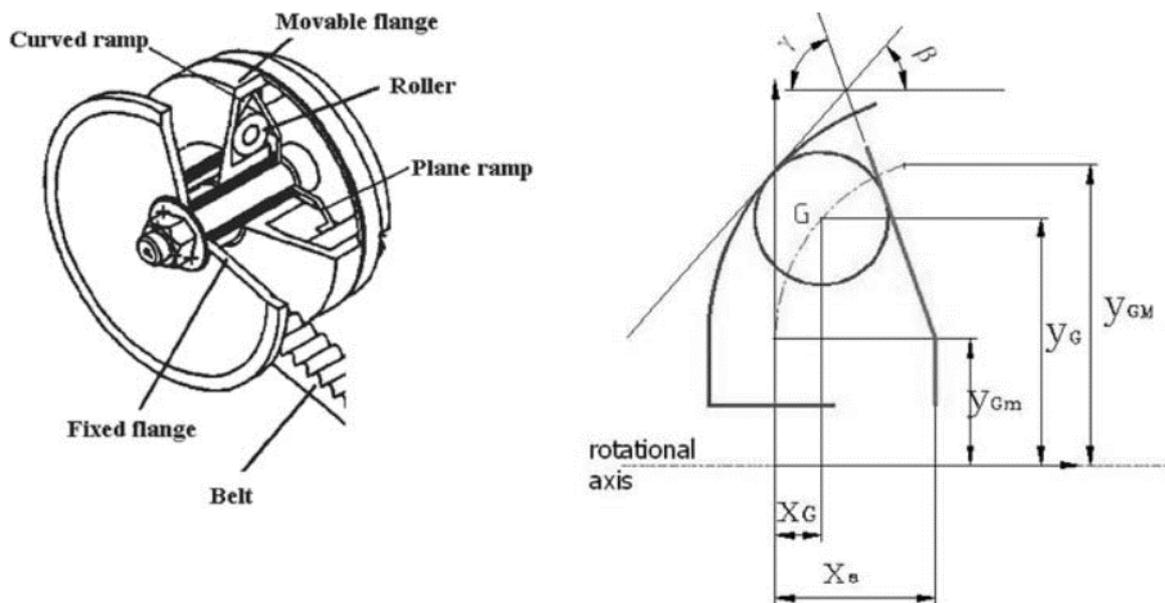


Figura 2. Regolatore a massa centrifuga [52].

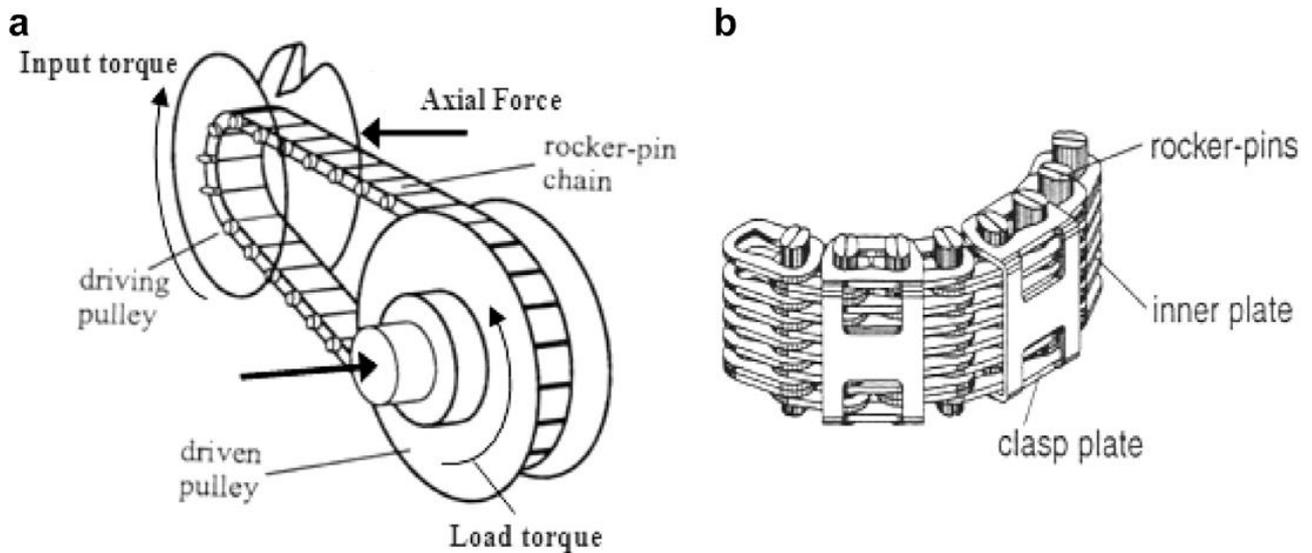


Figura 3. Trasmissione CVT a catena: (a) schema, (b) struttura della catena [12] [75].

Una differenza sostanziale nel comportamento di CVT a cinghia, sia essa metallica o in polimero, rispetto a quelli a catena è la diversa distribuzione delle forze di contatto tra questa e le pulegge. Infatti, diversamente dalle CVT a cinghia, in quelle a catena tale distribuzione è discontinua, il che porta a impatti nel momento in cui la catena accede o abbandona la puleggia. Tale caratteristica provoca l'instaurarsi di fenomeni di eccitazione, fortemente legati all'azione dei giunti della catena stessa, a cui fanno seguito vibrazioni che si ripercuotono sulle intere prestazioni dinamiche della trasmissione.

In ogni caso, la capacità di trasmissione di coppia di tali sistemi fa ampio affidamento sulle caratteristiche dell'area di contatto tra cinghia (o catena) e puleggia e ne è fortemente influenzata, giustificando la loro categorizzazione come trasmissioni a frizione ("*friction-limited drives*").

## Modellazione dinamica di CVT a cinghia

Gran parte degli studi condotti finora sulla modellazione di CVT a cinghia consiste in modelli stazionari basati sui principi di equilibrio quasi-statico.

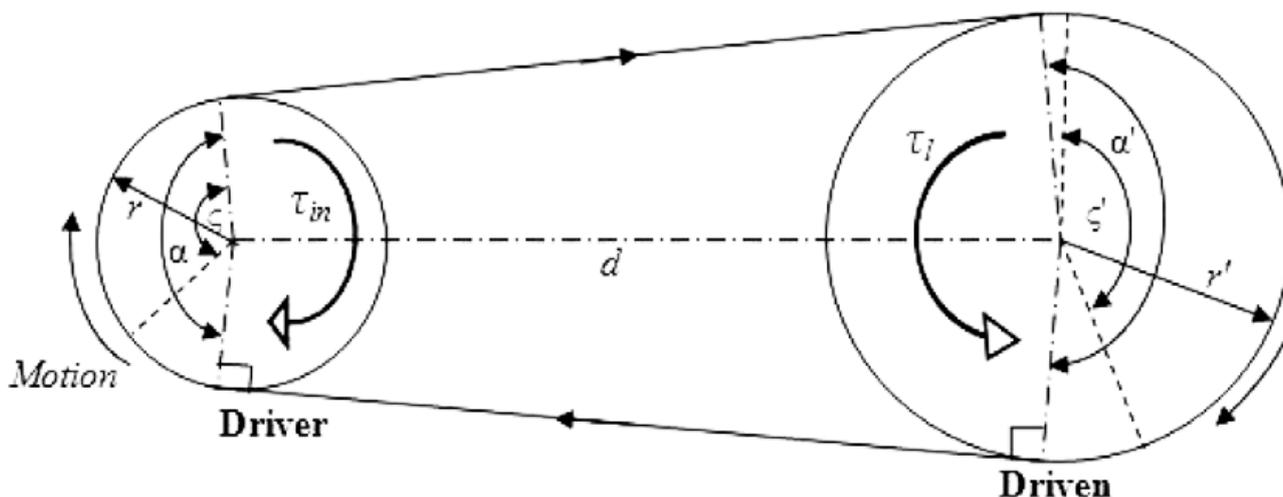


Figura 4. Descrizione geometrica di una CVT a cinghia [1].

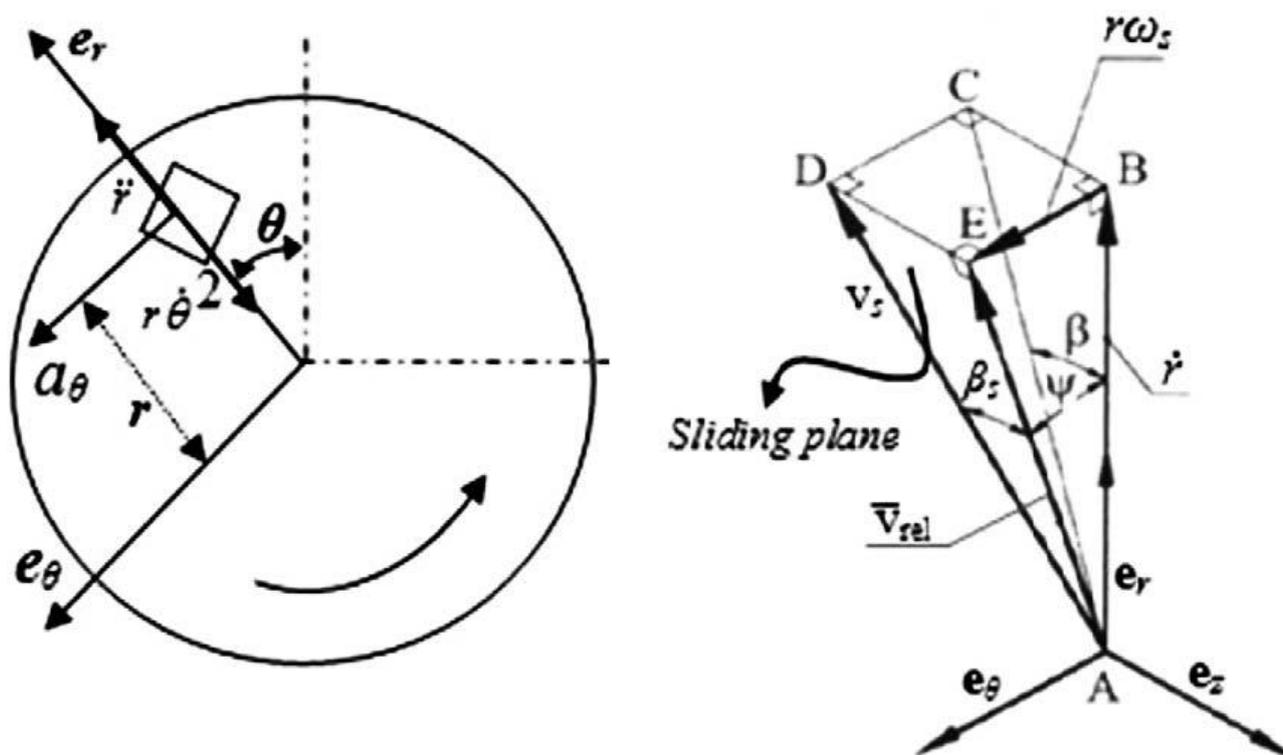


Figura 5. Descrizione cinematica di un elemento della cinghia lungo l'avvolgimento della puleggia [1].

Alcuni studi [2][3], per descrivere l'attrito tra la cinghia e la puleggia, fanno uso di un angolo di slittamento variabile ("variable sliding angle approach") in modo da tenere conto degli spostamenti radiali e tangenziali della cinghia. Il primo, in particolare, considera l'influenza della rigidità flessionale; tuttavia, l'inerzia è considerata solo per quanto riguarda gli effetti centripeti. Da quanto si afferma, a seguito della flessione, la cinghia non seguirebbe più un moto rettilineo dopo aver abbandonato la puleggia; per lo stesso motivo, l'arco di contatto si restringerebbe rispetto a quello

nominale, consentendo una maggiore capacità di trazione. Lo studio dimostra la grande influenza della rigidità flessionale sul comportamento della cinghia, dal momento che variazioni repentine della curvatura possono cambiare la direzione delle forze di attrito con forti ripercussioni sulla coppia trasmissibile.

Questo lavoro ha trovato una soluzione in forma chiusa [4] grazie ad un approccio matematico approssimato, che giunge a risultati in buona sostanza concordi.

Altrove [5], è stato analizzato lo slittamento di una CVT a cinghia in polimero, sulla base di parametri come scorrimento ("*creep*"), adattamento ("*compliance*"), deflessione di taglio ("*shear deflection*"), e rigidità flessionale ("*flexural rigidity*") della cinghia, nonché situazioni di incastro ("*wedge*") legate a incorretto accoppiamento di cinghia e puleggia. Nonostante l'utilizzo di analisi ad elementi finiti per determinare deflessioni di taglio e condizioni di aderenza intermittente, in questo studio, come nei precedenti, non si tiene conto di effetti d'inerzia, condizioni di carico e variazioni radiali sullo slittamento.

Un altro studio [6] ha considerato l'effetto dell'asimmetria ("*skewness*") e della deflessione nelle flange delle pulegge, imputabile ai giochi nelle guide della parte mobile, che amplierebbe o accorcerebbe la sede, agendo sul comportamento della cinghia. I risultati mostrano una debole influenza per piccole asimmetrie, mentre al crescere di queste ultime si riscontra un incremento sensibile delle forze assiali in applicazioni con coppie modeste.

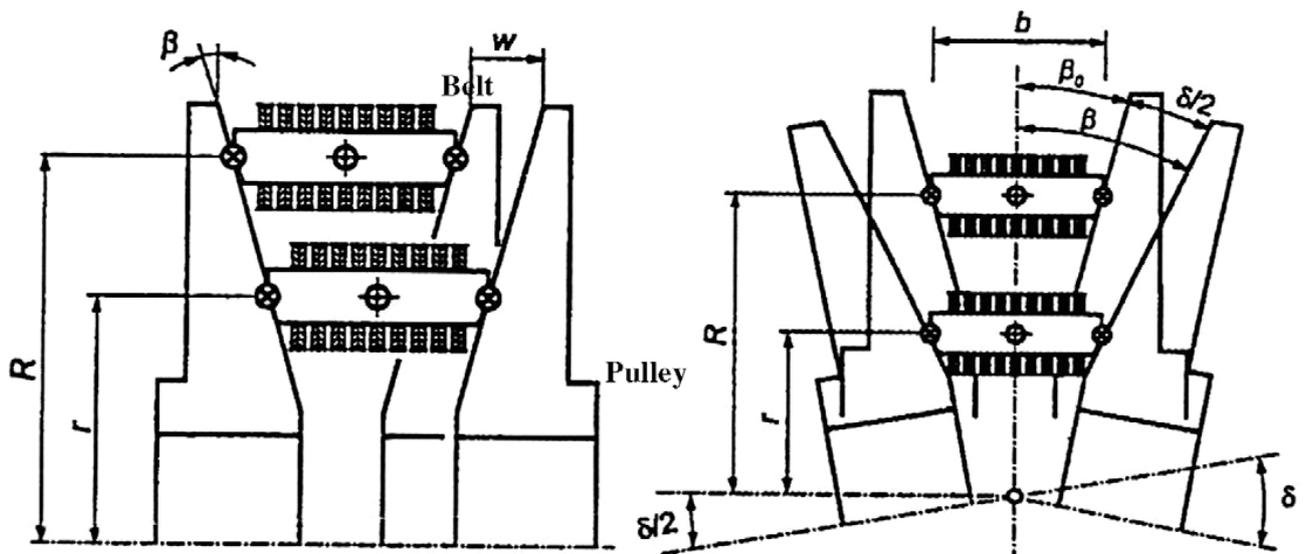


Figura 6. Modello di deformazione della puleggia: (a) deformazione assiale; (b) comportamento asimmetrico della puleggia ("*skewness*") [27].

Altrove [7], si è studiato il comportamento transitorio durante il cambio di rapporto, con risultati sensibilmente differenti da quelli in condizioni stazionarie. Vengono anche proposte soluzioni approssimate in forma chiusa per il calcolo semplificato delle caratteristiche operative del variatore.

Sulla base dei precedenti risultati, un lavoro congiunto [8] ha sviluppato un modello del terzo ordine per cinghie trapezoidali ("*V-belt*"), senza considerare effetti di inerzia e flessionali, introducendo il concetto di contatto "simil-adesivo" ("*adhesive-like*"): la cinghia non aderirebbe alle pareti della puleggia lungo l'intero arco di contatto, bensì attraverserebbe una regione di slittamenti relativi a velocità minima, con traiettoria quasi circolare e tensione approssimativamente costante.

Nel caso di CVT a cinghia metallica, sono stati anche analizzati i risultati sotto l'effetto della flessione della puleggia [9], considerando rigida la cinghia ai fini della modellazione. Applicando il concetto di spostamenti virtuali, si sono ottenute traiettorie approssimate della cinghia, distribuzione delle

tensioni, spinte assiali e slittamenti. Stando a quanto si afferma, l'influenza della flessione della puleggia è rilevante ai raggi esterni, mentre si fa trascurabile per le traiettorie più interne, per le quali si suggerisce un modello misto al fine di descrivere le dinamiche di deformazione elastica sia della cinghia che della puleggia.

Il concetto di deformazione e inceppamento ("*wedging*") elastico è stato utilizzato per analizzare la meccanica di cinghie trapezoidali in polimero [10]. Lo studio, dallo scopo primario di analizzare la traiettoria della cinghia, coinvolge la distribuzione di tensione e la penetrazione della cinghia. A tale scopo si trascurano effetti di inerzia e flessionali, nonché di Poisson. La deformazione della cinghia è stata correlata alle forze assiali, incorporando l'elasticità trasversale e usando equazioni forza-deformazione. Si sono così ottenute soluzioni in forma chiusa in grado di approssimare il comportamento del sistema cinghia-puleggia.

La teoria della lubrificazione elastoidrodinamica ("*elastohydrodynamic lubrication theory*") è stata usata per modellare l'attrito tra cinghie trapezoidali metalliche e puleggia [11], studiando le perdite dovute all'azione di incastro della cinghia. Tuttavia, nel modello trovano posto ipotesi poco realistiche quali distribuzione uniforme delle tensioni, nonché archi di carico e scarico uniformi lungo gli avvolgimenti della puleggia. Al solito si trascurano, oltre agli effetti inerziali, anche variazioni di velocità legate a carichi di deformazione o compressione.

Ancora nel caso di cinghie trapezoidali in metallo, con l'impiego di tecniche numeriche, è stato possibile ricavare equazioni di equilibrio globale a partire da quelle di ciascun elemento [13]. Per farlo, si è ipotizzato che gli elementi della cinghia siano costantemente in compressione, che le fasce ("*bands*") siano sempre in tensione e rigide, così come le pulegge. Si è osservato che la trasmissione della coppia avviene ad opera solo di alcune parti dell'arco di contatto; inoltre, mentre le fasce di acciaio agevolerebbero la trasmissione di potenza a bassi rapporti di trasmissione, la ostacolerebbero in quelli più elevati. Anche qui, applicando un modello semplificato di deformazione della puleggia, si è riscontrato un incremento con essa delle forze assiali, a parità di carico di coppia.

Sono state altresì analizzate le variazioni nella tensione delle fasce, la forza di compressione sui segmenti, così come le pressioni di serraggio ("*clamping pressures*") necessarie ad evitare forti slittamenti della cinghia [14]. A seguito dell'inserimento di un modello approssimato di deformazione della puleggia, si è studiata l'influenza della flessibilità della puleggia sul comportamento dinamico. Il confronto tra modello numerico e dati sperimentali ha restituito buoni risultati per quanto riguarda la forza di tensione sulle fasce, mentre non è stato altrettanto preciso sulla forza di compressione.

Per indagare il comportamento di cinghie metalliche dal punto di vista analitico e sperimentale, è stata proposta una relazione tra rapporto di trasmissione, coppia richiesta e forza assiale tale da calcolare lo slittamento [15][16]. I risultati hanno dimostrato che una parte rilevante dello slittamento dipende dalla capacità di trasmissione della coppia del lato condotto. Anche in questo caso, si sono trascurati gli effetti di inerzia e flessionali e si è considerata costante la tensione della fascia.

Anche la velocità di scorrimento elastico di cinghie trapezoidali in polimero ha trovato un'indagine analitica e sperimentale [17]. Questa dipenderebbe non solo dalle caratteristiche strutturali della cinghia, ma anche da quelle operative della CVT, oltre a influenzare la capacità della trasmissione di trasferire coppia. Infatti, il cambiamento di velocità della cinghia, che si realizza tra il lato motore (più veloce) e quello condotto (più lento) avverrebbe in ragione dello scorrimento elastico lungo l'arco di avvolgimento della puleggia, nel verso del moto sul lato condotto e in verso opposto su quello motore. Secondo lo studio, la velocità di scorrimento elastico sarebbe linearmente dipendente dalla potenza trasferita e andrebbe incontro ad una variazione esponenziale lungo l'arco di scorrimento.

Per quanto riguarda la caratteristica di microslittamento ("*microslip*") nel caso di cinghie trapezoidali metalliche in compressione ("*metal pushing V-belt*"), dovuto alla redistribuzione di vuoti tra i suoi elementi, un importante studio dimostrerebbe l'esistenza di aree dal diverso comportamento all'interno

della cinghia [18]. Tale fenomeno si verificherebbe soltanto in presenza di spazi tra gli elementi che vanno a distribuirsi omogeneamente nella parte non sottoposta a compressione. In particolare, la trasmissione effettiva di coppia sarebbe dovuta solo alla parte in compressione, mentre quella in tensione rimane inattiva. In quest'ultima zona, si è inoltre osservata una distribuzione pressoché uniforme della tensione nelle fasce.

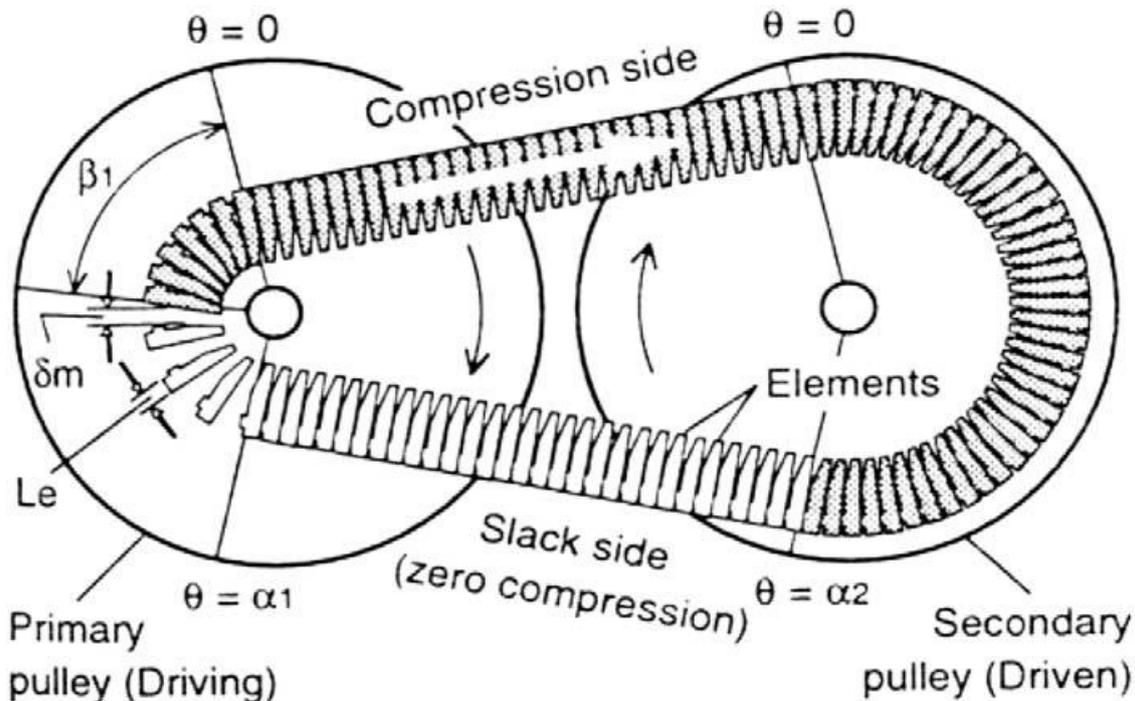


Figura 7. Meccanismo di slittamento dovuto alla redistribuzione dei vani tra gli elementi in una CVT a cinghia metallica [18].

Uno altro lavoro in questo senso [19], condotto sulla relazione tra slittamenti permessi ed efficienza, ha dimostrato che le alte forze di serraggio necessarie ad annullare del tutto lo slittamento riducono l'efficienza delle CVT a cinghia metallica in compressione. Lo stesso studio ha indagato la relazione tra slittamenti e coppia trasmissibile attraverso il coefficiente di trazione ("traction coefficient"), un parametro di sintesi della coppia trasmissibile: si è osservato che questo aumenta con lo slittamento in regime di microslittamenti, ma diminuisce quando lo slittamento supera un certo valore. Il coefficiente di trazione non sarebbe influenzato tanto da pressione di serraggio e velocità della puleggia, quanto dal rapporto di trasmissione, mentre l'efficienza dipenderebbe anche da quest'ultimo, oltre che dal serraggio.

Uno studio condotto sulla distribuzione delle forze assiali [20] ha rivelato sperimentalmente che la forza di spinta non è uniforme lungo l'arco di contatto, neppure quando si applica la sola tensione iniziale senza trasferimento di potenza, bensì è massima al punto di uscita e aumenta con il carico trasmesso, a qualunque rapporto di trasmissione. Si è inoltre notato che tale forza di spinta è solitamente maggiore sulla puleggia più piccola.

Un modello particolarmente accurato di CVT a cinghia trapezoidale, comprendente gli effetti inerziali e le deformazioni della cinghia è stato invece sviluppato per analizzare efficienza e perdite durante i cambi di rapporto di trasmissione, continui o discreti, rivelando forti perdite durante i transitori di cambiata [21].

La misura sperimentale delle forze di contatto tra cinghia trapezoidale metallica e le flange della puleggia [22] ha rilevato una variazione nella forma dell'arco di avvolgimento, legata a forza di serraggio e coppia trasmessa. In particolare, si è ipotizzato che una deformazione asimmetrica della puleggia porti ad archi di avvolgimento non coassiali con la puleggia stessa. Per quanto riguarda la distribuzione delle



trasmissione di coppia si verifica solo in virtù della zona in compressione, mentre l'altra non vi contribuisce. Oltre a ciò, si è osservata una sezione di discontinuità sulla puleggia motrice, che separa l'arco attivo da quello privo di compressione. Viceversa, lungo il contatto della puleggia condotta è stato riscontrato un fenomeno di "onda di espansione" (*"expansion wave"*), che vede la crescita degli spazi tra gli elementi della cinghia sul settore inattivo.

La dinamica che si instaura durante cambiate rapide e lente è stata analizzata con due differenti approcci nella modellazione degli attriti tra cinghia e puleggia: uno coulombiano e uno visco-plastico [30]. Il primo ha restituito buoni risultati per quanto riguarda manovre lente, dunque in fase di scorrimento, ma non ne ha forniti di altrettanto soddisfacenti nelle rapide dinamiche che instaurano la fase di slittamento; il secondo, invece, ha previsto con precisione il comportamento della CVT non solo durante la fase di scorrimento, ma anche nel transitorio tra le due. Nello studio si propongono anche semplici relazioni tra velocità di cambiata (*"shift speed"*) e forza di serraggio, velocità delle pulegge, e coppia richiesta.

Studi successivi a completamento di [28] hanno indagato l'influenza di deformazione della puleggia sui meccanismi di cambiata per CVT a cinghia metallica [31][32]. Di nuovo si è ipotizzato un modello di attrito coulombiano, mentre si sono trascurati gli effetti di flessione della cinghia; si sono assunti angoli di avvolgimento sufficientemente prossimi a 180°; per il modello di deformazione della puleggia ci si è rifatti a quello presentato in [27] e si sono ipotizzate omogenee; si sono al solito trascurati gli effetti inerziali salvo per le accelerazioni centripete. Tenendo in considerazione le deformazioni della puleggia, ci si aspettava che l'attrito coulombiano restituisse risultati aderenti in entrambe le modalità: di scorrimento e di slittamento; inoltre, si riteneva che le distribuzioni di pressione e tensione non dipendessero dalla flessione della puleggia in condizioni stazionarie, ma soltanto dal rapporto di trasmissione. Al contrario, il modello ha dimostrato che il transitorio di risposta in una CVT è fortemente influenzato dalle deformazioni della puleggia; si è potuto inoltre osservare che la velocità con cui varia il rapporto di trasmissione aumenta al diminuire della rigidità della puleggia. Peraltro, il modello si è dimostrato in grado di prevedere correttamente l'influenza della velocità angolare su quella di variazione del rapporto di trasmissione. Lo studio ha messo in luce una dipendenza pressoché lineare tra velocità di cambiata e il logaritmo del rapporto delle forze di serraggio sulla puleggia (*"pulley clamping force ratio"*).

Diversi studi condotti concordano nell'attribuire un ruolo di rilievo nella trasmissione della coppia alla tensione sviluppata nelle fasce, oltre che alla compressione degli elementi della cinghia; suggeriscono inoltre una distribuzione non uniforme delle tensioni lungo l'avvolgimento della puleggia, contrariamente quanto spesso ipotizzato in precedenza. In particolare, un'indagine sperimentale a tal proposito [33] è tornata ad osservare la presenza di settori attivi e non sulla puleggia motrice, avanzando però l'ipotesi che la tensione sulle fasce sia responsabile anche del 40-45% della coppia trasmessa in alcune condizioni: lo studio spiega la distribuzione delle tensioni lungo le fasce con la velocità relativa tra queste e gli elementi. Si osserva inoltre una diminuzione della tensione in corrispondenza della puleggia più piccola nel verso del moto della cinghia. L'effetto di tale distribuzione è di ostacolare la trasmissione di coppia ad alti rapporti di trasmissione e in quelli bassi facilitarla, giustificando in questo modo quanto già osservato in [13]. Tale fenomeno può arrivare al punto che, a bassi rapporti di trasmissione, la tensione sulle fasce è responsabile dell'intera coppia trasferita.

Un'analisi sperimentale condotta su una CVT a rapporto costante ha misurato le forze che agiscono sugli elementi nelle varie direzioni in condizioni di basse velocità e forze di serraggio ridotte [34]. Si è osservata una distribuzione non uniforme delle forze normali agli elementi lungo gli archi di contatto. In particolare, si è tornati ad osservare picchi all'ingresso e all'uscita delle pulegge e la presenza di settori attivi e non per rapporti di trasmissione più elevati. La forza normale per elemento si è dimostrata inferiore sulla puleggia con angolo di avvolgimento superiore.

Un modello numerico ha permesso di calcolare le distribuzioni di forze in condizioni stazionarie per confrontarle con i risultati sperimentali precedenti [35]. La cinghia trapezoidale è descritta da un modello a parametri concentrati dotato di tre tipi di molle e due diverse interfacce: una tra elemento e puleggia e una tra l'anello e l'elemento, al fine di descriverne gli attriti.

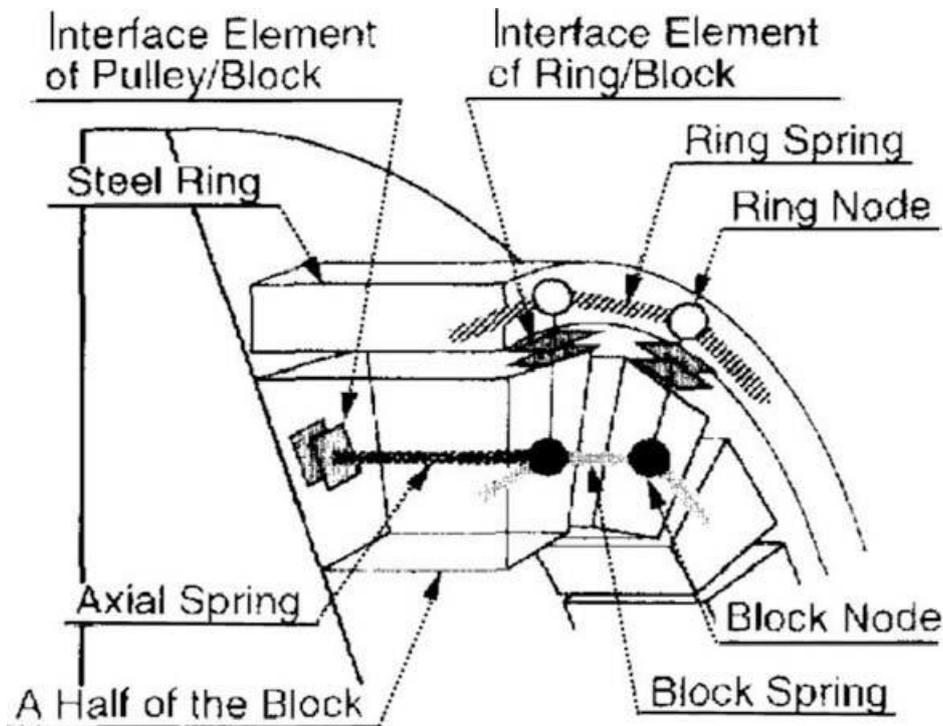


Figura 9. Figura 10. Modello a parametri concentrati di una CVT a cinghia metallica [35].

In uno studio successivo [36], l'impianto sperimentale precedente è stato utilizzato per registrare le forze in atto in una CVT a cinghia metallica al variare del rapporto di trasmissione. Va tuttavia osservato che non esistono modelli teorici per nessuno dei precedenti studi [33][34][35][36] e l'osservazione svolta a basse velocità ha impedito di tener conto di deformazioni ed effetti inerziali.

Per lo studio del trasferimento di potenza in CVT a cinghia trapezoidale metallica in compressione non solo in condizioni stazionarie, ma anche durante i transitori tra diversi rapporti di trasmissione, è stato sviluppato un modello numerico dotato di fasce a tensione non uniforme e comprensivo delle interazioni dinamiche tra fasce, elementi e pulegge [37]. Si è osservato che, in condizioni di *overdrive*, ovvero quando il raggio di ingranamento sul lato condotto è minore di quello sul lato motore, la potenza trasmessa dalle fasce è negativa, in maniera in parte analoga a quanto già visto in conseguenza della distribuzione disomogenea delle tensioni sulle fasce. In questa condizione, gli elementi della cinghia trasmettono una potenza superiore al valore nominale per reggere il carico richiesto. Si è inoltre osservata una forte crescita nella spinta richiesta per variare il rapporto di trasmissione in transitorio rispetto al caso stazionario. Inoltre, il rapporto di spinta ("*thrust ratio*"), ovvero il rapporto tra le spinte assiali sul lato motore e condotto, subisce un leggero incremento all'aumentare dell'attrito, modellato come coulombiano, tra cinghia e puleggia. Al solito, lo studio ha trascurato gli effetti di flessione e inerzia della cinghia. Dai grafici riportati in figura, emerge il concorso di fasce ed elementi nella trasmissione di coppia (il rapporto di velocità indicato è calcolato come rapporto tra i raggi di ingranamento di puleggia condotta e motrice).

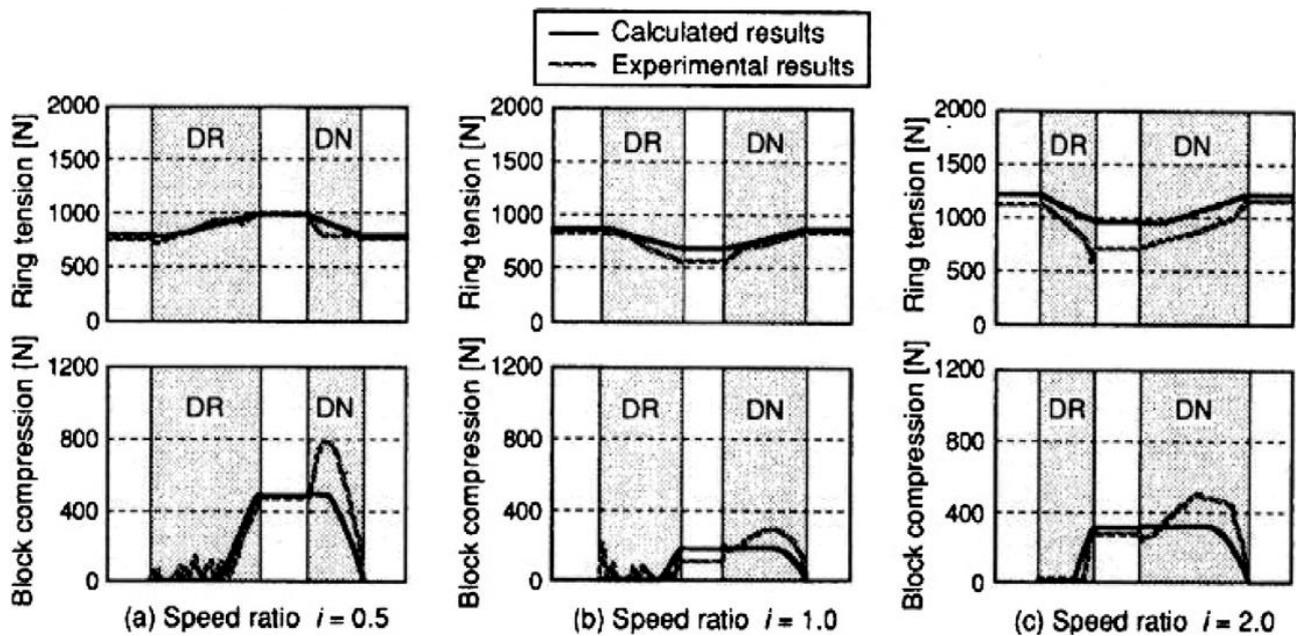


Figura 10. Andamenti nel tempo delle forze di tensione e compressione in condizioni stazionarie per differenti rapporti di velocità [37].

Il gradiente di cambiata (*“shifting gradient”*) è un parametro adimensionale definito come l’incremento di raggio di un elemento giacente radialmente su una puleggia per unità di distanza percorsa dall’elemento stesso. Da prove sperimentali [38][39] è risultato che tale parametro non è influenzato né dalla velocità della puleggia, né dal rapporto di coppia (*“torque ratio”*), definito come rapporto tra coppia trasmessa e quella massima trasmissibile, sebbene sia la forza di spinta che la velocità di scivolamento influenzino il coefficiente medio di frizione (*“mean coefficient of friction”*). Il gradiente di cambiata ha dimostrato una certa dipendenza dalla spinta della puleggia e dall’andamento del raggio: in particolare, si è osservato un suo incremento all’aumentare della spinta quando il raggio di ingranamento aumenta e, viceversa, una sua diminuzione con un incremento di spinta della puleggia e raggio di ingranamento in diminuzione; in altre parole, in presenza di un incremento della spinta della puleggia, il gradiente di cambiata segue l’andamento del raggio di ingranamento. Si noti che lo studio non tiene conto dell’influenza delle forze di tensione e compressione della cinghia sul gradiente di cambiata.

In uno studio successivo [40], si è analizzato il meccanismo di cambiata del variatore, andando a caratterizzare l’attrito tra elementi e puleggia, concludendo che il gradiente di cambiata è determinato anche dalla tensione dell’anello e dalla compressione degli elementi, oltre che dalla deformazione elastica degli elementi a seguito della spinta della puleggia. Da indagini sperimentali, è risultato che il coefficiente di attrito stimato per il fluido della CVT non è costante nell’intero campo operativo, ma dipende da grandezze quali le velocità di scivolamento (*“sliding speed”*) relative tra elementi e puleggia, la direzione dello scivolamento, nonché la pressione agente sul fianco (*“V-surface”*) della cinghia.

Allo scopo di determinare il comportamento in transitorio di un elemento della cinghia nel suo tragitto dall’ingresso all’uscita delle pulegge, è stato sviluppato un modello dinamico dettagliato per CVT a cinghia metallica trapezoidale in compressione, tenendo in considerazione anche l’accoppiamento inerziale dovuto ai moti radiale e tangenziale della cinghia, nonché l’interazione tra fasce ed elementi [41][42][43]. La flessibilità della puleggia è stata modellata come in [21], mentre si sono trascurati gli effetti di flessione dovuti al moto della cinghia. Per il contatto tra cinghia e pulegge si è fatto ricorso non solo ad un tipico attrito coulombiano continuo, ma anche a modelli matematici e analitici tali da realizzare differenti condizioni operative, quali attrito statico (*“stiction”*), lubrificazione e così via. Dallo studio emerge chiaramente che le prestazioni dinamiche di una CVT, soprattutto in fatto di slittamento e coppia trasmissibile, dipendono anche da forze inerziali, oltre che dalla configurazione e dalle condizioni di carico. Per quanto riguarda il settore inattivo delle fasce, si può osservare che differisce da

quello degli elementi, con conseguente formazione di sezioni di urto all'interfaccia tra questi, ovvero tra il settore attivo e la regione di avvolgimento sulla puleggia. Al fine di inquadrare le diverse prestazioni in transitori dinamici, l'immagine riportata dagli autori rappresenta un diagramma di corpo libero della cinghia trapezoidale metallica.

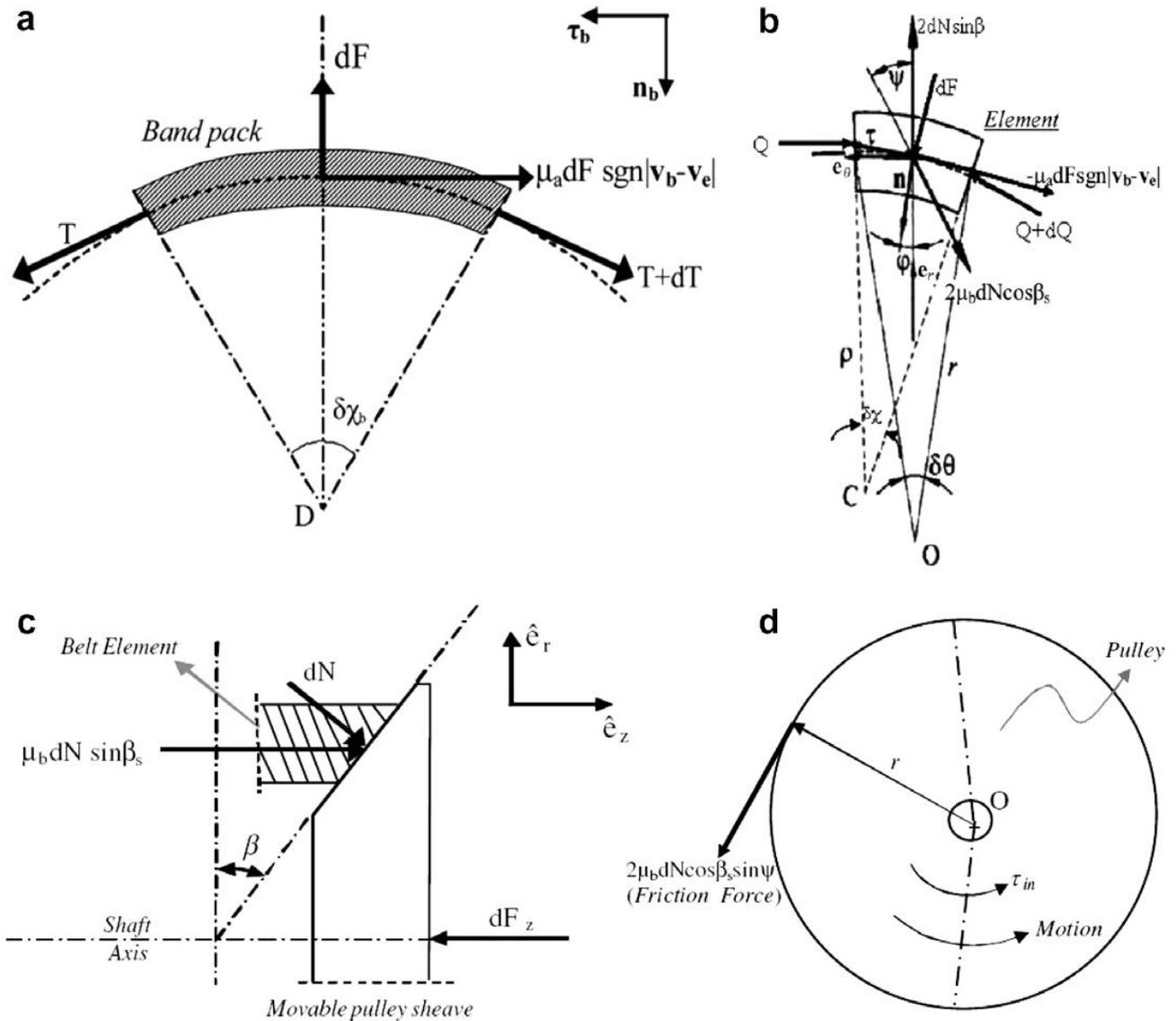


Figura 11. Diagrammi di corpo libero di una CVT a cinghia trapezoidale metallica: (a) forze sulle fasce; (b) forze sugli elementi della cinghia; (c) forze sul piatto scanalato della puleggia; (d) coppie sulla puleggia condotta [43].

In alcuni di essi [41][44], ci si è occupati di stabilire una serie plausibile di condizioni operative iniziali per avviare il trasferimento di coppia in una CVT. Per individuarle, vista la natura fortemente nonlineare del sistema, si è reso necessario un opportuno meccanismo di ricerca, basato su un algoritmo genetico (GA), la cui efficienza è stata validata a confronto con i risultati generati da un *design of experiment* (DOE). La funzione obiettivo da ottimizzare è stata individuata nella coppia trasmissibile dalla CVT.

Il comportamento di microslittamento e il suo regime operativo sono stati studiati grazie ad un modello stazionario per cinghie metalliche trapezoidali a compressione, per verificarne la dipendenza da coppie e forze assiali [45]. Come già altrove [18], lo slittamento è stato imputato alla distribuzione non omogenea degli spazi tra gli elementi, legata alla formazione di settori inattivi. Il modello si è rivelato in grado di prevedere la massima coppia trasmissibile senza che la cinghia vada incontro a forti slittamenti. Il campo di lavoro delle forze assiali è stato altresì identificato, compreso tra la spinta minima per iniziare la trasmissione di coppia e la massima spinta assiale che la CVT può sopportare prima di

incorrere in slittamento. Per farlo, si è ricorsi a simulazioni della spinta assiale e delle coppie con rapporto di trasmissione variabile. L'immagine riportata pone l'accento sull'influenza degli effetti inerziali sulle prestazioni dinamiche della CVT.

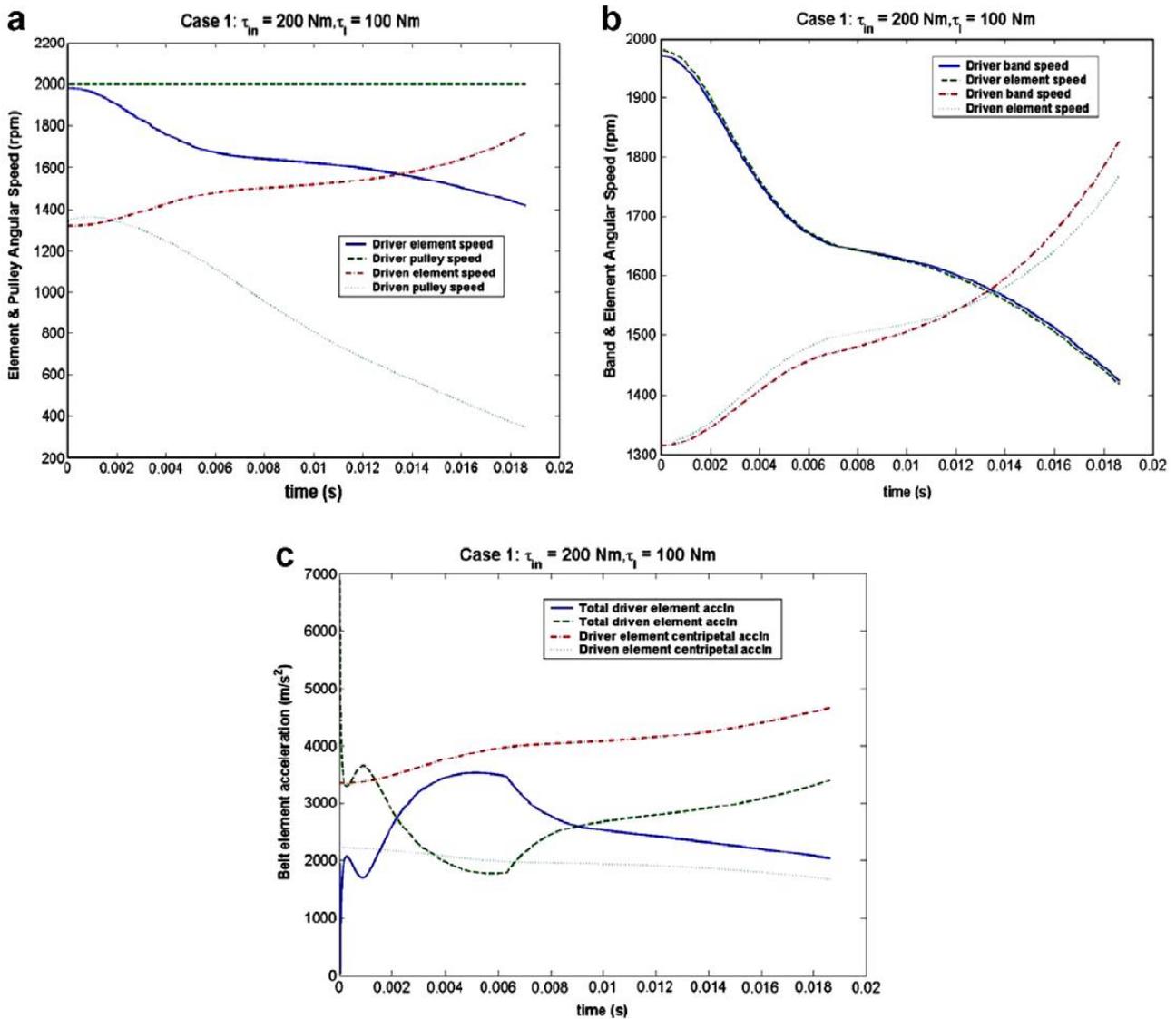


Figura 12. Andamenti temporali da modello di CVT a cinghia: (a) velocità di pulegge ed elementi; (b) velocità di elementi e fasce; (c) accelerazione degli elementi della cinghia [43].

L'aspetto delle perdite meccaniche legate a CVT a cinghia metallica è stato analizzato tramite l'impiego di opportuni modelli matematici [46]. Tra le ipotesi adottate, c'è la distribuzione uniforme del carico tra le fasce, mentre si trascurano gli attriti radiali salvo nelle aree di accesso e uscita dalle pulegge. Le principali cause di perdita di coppia sono state individuate negli slittamenti relativi tra le fasce e tra queste e gli elementi, nonché tra questi ultimi e le pulegge. Oltre a queste, si sono sviluppati altri due modelli di perdita legati all'attraversamento degli archi di avvolgimento da parte degli elementi. Si è infatti potuto osservare che la deformazione delle pulegge produce da un lato l'ingresso e l'uscita degli elementi al di fuori degli stessi punti di progetto, con conseguenti perdite per incastro ("wedge loss"), dall'altro l'eccessiva penetrazione della cinghia rispetto al raggio di ingranamento di progetto e relative perdite di penetrazione ("penetration loss"). Anche lo slittamento tangenziale è stato analizzato sulla base della stessa teoria della redistribuzione degli spazi tra elementi. Oltre a ciò, è stato valutato l'effetto di altre fonti di inefficienze, quali trascinamento di tenute e cuscinetti ("seal and bearing drag"), pompaggio ("pump"), trascinamento di frizioni ("clutch drag"), ingranamento ("meshing"), perdite fluidodinamiche ("churning") e per ventilazione ("windage"). In condizioni stazionarie, si osserva che a

basse velocità, si hanno perdite più contenute con alti rapporti di trasmissione, mentre il contrario avviene ad alte velocità. Tale fenomeno è almeno in parte da imputarsi alla riduzione nel primo caso delle perdite per pompaggio, mentre nel secondo prevalgono le perdite di coppia della cinghia e della trasmissione. Per quanto riguarda la dipendenza dal carico, si nota un aumento delle prime da esso dipendente, sebbene in condizioni di basso rapporto di trasmissione e carico nullo se ne verificano di addirittura superiori rispetto alla condizione di pieno carico.

Un'analisi complessiva condotta sull'efficienza di differenti tipi di trasmissione (manuale, automatica e a variazione continua) ha indagato i meccanismi di perdita più rilevanti per ciascuna di esse [47]. In particolare, nel caso delle CVT, una rilevante causa di inefficienza risiederebbe nelle elevate pressioni richieste dall'attuazione delle flange delle pulegge. Lo stesso lavoro suggerisce diversi tipi di attuatori idraulici per migliorarne le prestazioni. Uno studio successivo [48] prende in considerazione diverse tipologie di CVT per analizzarne meccanica, forze in gioco ed efficienze. Per quanto riguarda quelli a cinghia in compressione, vi si riconosce l'importanza di resistenza in trazione delle fasce e quella a cedimento trasversale degli elementi della cinghia, nonché la rilevanza dei fenomeni dinamici all'interno delle fasce. Infatti, la trasmissione della coppia viene qui imputata alle forze di spinta degli elementi oltre che agli attriti tra questi e le fasce.

Un confronto imparziale tra diverse configurazioni di CVT è stato reso possibile grazie allo sviluppo di modelli matematici sulla base della letteratura esistente [49]. Mettendone a confronto l'efficienza a parità di punto di funzionamento, le CVT con cinghia in polimero si sono rivelate complessivamente le più efficienti.

Le vibrazioni a cui una CVT è soggetta in fase di variazione del rapporto di trasmissione sono state studiate dal punto di vista analitico e sperimentale sulla base del moto caratteristico del sistema [50]. Diverse proprietà delle frequenze proprie sono così venute alla luce: un loro abbassamento in entrambi i lati della cinghia all'aumentare della velocità, un incremento con la tensione della cinghia in condizioni stazionarie, una diminuzione con l'aumento della velocità di trasporto.

Da un'analisi sulle vibrazioni autoindotte in CVT a cinghia trapezoidale condotta attraverso modelli molto semplificati, sono emerse alcune dipendenze dalla caratteristica di attrito [51]. In particolare, soprattutto quelle con gradiente negativo rispetto alla velocità relativa, sarebbero responsabili di fenomeni autoeccitanti nella cinghia, mentre sarebbero la caratteristica di attrito e l'elasticità della puleggia a determinare l'area di lavoro dove le vibrazioni si verificano. L'aumento della rigidità della puleggia, pur diminuendo le vibrazioni sulla cinghia, non è riuscito ad eliminarle del tutto.

Uno studio [52] su CVT a puleggia espandibile con cinghie trapezoidali in polimero per applicazioni a bassa potenza ha ricavato nuove equazioni per la spinta assiale. Ha inoltre introdotto un nuovo metodo per la progettazione dell'attuatore in grado di mantenere i valori di coppia quanto più vicini possibile a quelli richiesti, in tutto il campo operativo. Il modello si è rivelato uno strumento efficiente per l'analisi e la progettazione di CVT del tipo in questione.

Uno studio [53] su CVT a due vie ("split-ways") ha permesso di ricondurre l'efficienza (sotto opportune ipotesi) a pochi semplici parametri di progetto, detti "aperture", attraverso il principio dei lavori virtuali. La formulazione dell'efficienza così ottenuta ha dimostrato una soddisfacente accuratezza rispetto ai risultati sperimentali, tanto più notevole se si tiene conto della sua semplicità. Altri studi hanno confermato il ruolo primario di questo parametro nell'efficienza della CVT, fornendo indicazioni preliminari per il layout della trasmissione in fase di progetto [54], nonché di analisi [55].

Per quanto riguarda il caso particolare di CVT a cinghia in polimero, un interessante lavoro [74] ha sviluppato un modello di variatore a parametri concentrati per determinare l'andamento dinamico del rapporto di trasmissione. Lo studio, attraverso un'opportuna discretizzazione della cinghia, ha sviluppato una modellazione semplice ed efficace della sua rigidità flessionale, ma anche di fenomeni assiali come spinte, deformazioni di Poisson e attrito sui fianchi con la puleggia. Il confronto con dati

sperimentali ne ha dimostrato l'accuratezza sia in campo stazionario che in transitorio. I risultati così ottenuti si prestano inoltre come base per un controllo efficiente della trasmissione.

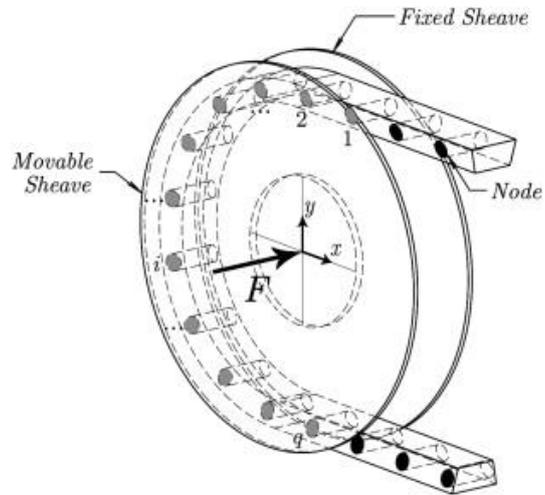


Figura 13. Dscretizzazione della cinghia in nodi [74].

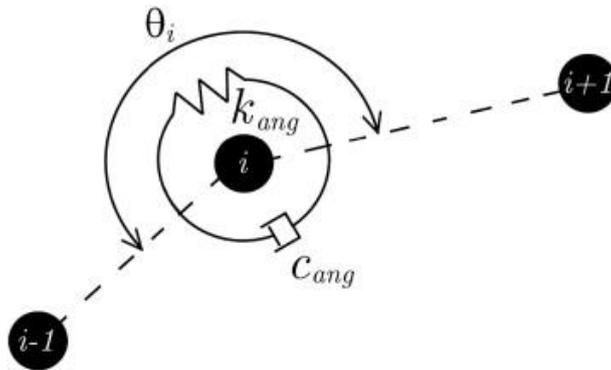


Figura 14. Modellazione della rigidità flessionale della cinghia [74].



Un altro controllo integrato sviluppato tenendo conto delle coppie d'inerzia legate ai transitori nella variazione del rapporto di trasmissione, oltre che delle perdite del gruppo propulsore, ha fatto uso di algoritmi di compensazione per ridurre il ritardo nella risposta di coppia dato dal rapporto della CVT [52]. I risultati dimostrano che l'algoritmo di compensazione in velocità del motore ha avuto migliori risultati nel mantenerlo vicino al punto di ottimo, rispetto a quello in coppia.

Un'indagine sperimentale sulla caratteristica di risposta in CVT per veicoli ibridi in parallelo (HEV) ha sviluppato un algoritmo di controllo del rapporto di trasmissione integrato con l'attuatore idraulico [60]. Da simulazioni "hardware-in-the-loop" è emerso un miglioramento delle prestazioni del motore in presenza di un controllo in retroazione, con guadagni variabili a seconda dell'incremento o diminuzione del rapporto di trasmissione e di quello della CVT. Si è inoltre tenuto conto delle nonlinearità nelle caratteristiche di controllo delle valvole idrauliche e delle interazioni dinamiche tra cinghia e puleggia. I risultati hanno messo in luce l'importanza di una spinta ottimale sulle pulegge, infatti, come in parte già visto in [19], una diminuzione delle forze di serraggio sulle pulegge porta ad un incremento dell'efficienza, ma a prezzo di una maggiore usura legata all'aumento degli slittamenti.

Per minimizzare le forze di serraggio e al contempo scongiurare slittamenti usuranti, è stato sviluppato un controllo Proporzionale-Integrale (PI) [61][62] fondato su un modello di slittamento linearizzato, con guadagni valutati in base a velocità ("*primary speed*"), rapporto di trasmissione ("*ratio*") e slittamento. Tale controllo, tuttavia, presenta il forte limite di essere stato sviluppato per condizioni quasi-statiche, rispondendo dunque meno bene in presenza di transitori dinamici.

Un controllo del gruppo propulsore a due ingressi e due uscite [63], sviluppato considerando un motore ad accensione comandata connesso direttamente alla CVT con l'impiego di modelli semplificati, ha fornito dei buoni risultati in termini di risparmio di combustibile, riuscendo a ridurre le deviazioni dai valori ottimali anche in presenza di transitori.

Per sistemi CVT-motore con regimi di potenze elevate, nel caso di motori in funzione per tempi prolungati, è stato impiegato un approccio di linearizzazione con risposta di stato ("*state-feedback linearization*") per mantenersi in prossimità della curva di ottimo [64].

Alcuni studi sulle strategie di controllo integrate [65][66] sono arrivate a designare tre diversi approcci possibili all'ottimizzazione dei consumi. Il primo, detto "involuppo di velocità" ("*speed envelope*"), individua l'area operativa desiderabile della CVT tra due curve sul diagramma di velocità motore-veicolo, ottenendo un effetto benefico sui consumi grazie alla riduzione della velocità del motore in condizioni di crociera. La seconda, "binario unico" ("*single track*"), prevede di portare il più velocemente possibile la coppia del motore al picco della curva di efficienza ( $\Omega$ ) e regolare il rapporto di trasmissione per ottenere il punto di funzionamento desiderato. La terza ed ultima, "fuori pista" ("*off-the-beaten track*"), regola il rapporto di trasmissione con continuità sulla base di due o più traiettorie associate a diversi stili di guida, e raggiunge il punto di funzionamento desiderato in base alle condizioni di accelerazione. Per avvalorare questo studio dalle metodologie euristiche, sono stati impiegati modelli dinamici semplificati di CVT tali da indagare le strategie di controllo effettivamente ottimali [67].

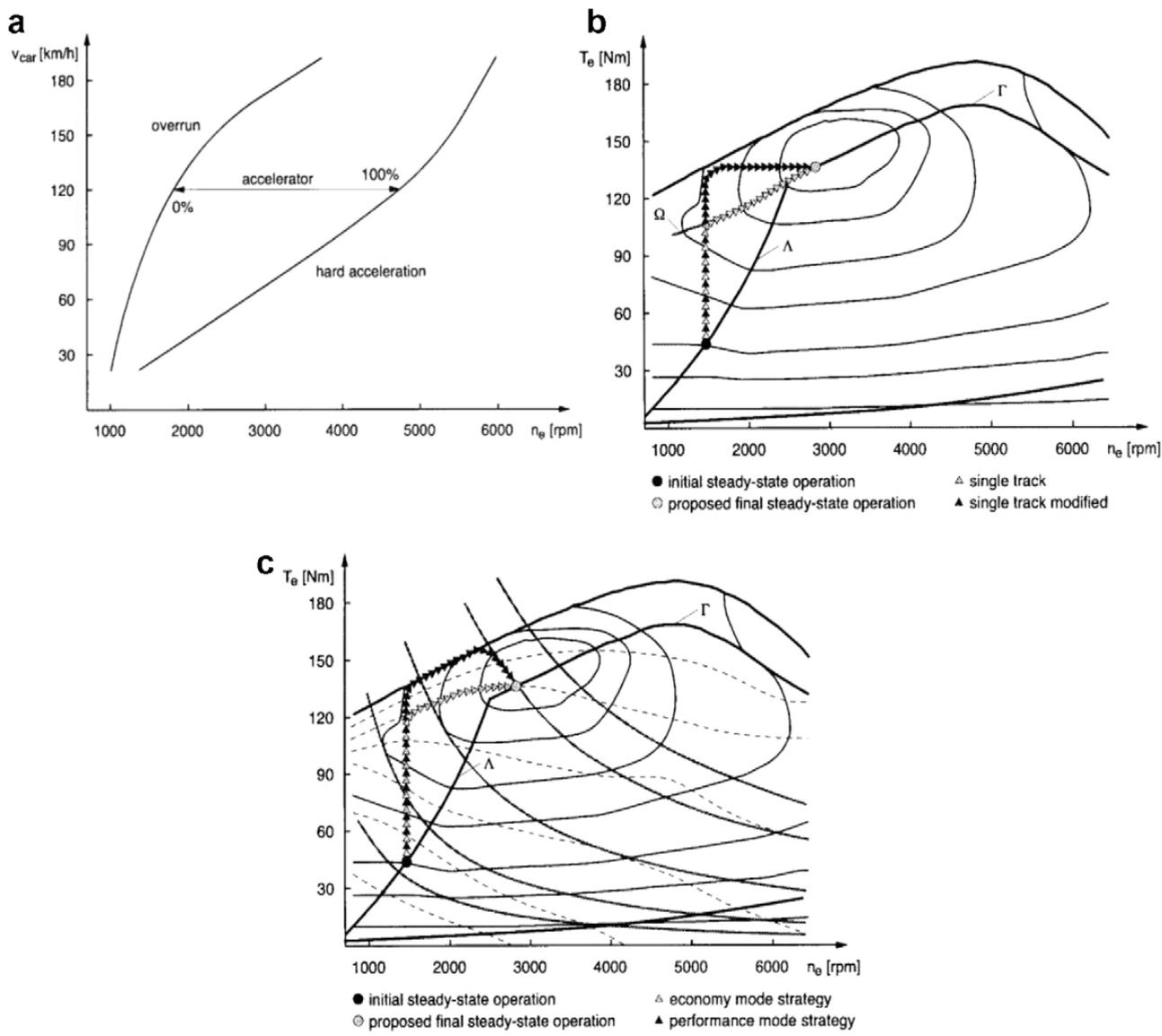


Figura 16. Strategie di controllo di CVT: (a) "a inviluppo di velocità"; (b) "binario unico"; (c) "fuori pista" [66].

L'importanza di una corretta pressione esercitata sulla cinghia in relazione a slittamenti ed efficienza ha spinto a considerare il controllo di pressione sulla linea ("line pressure control") un parametro essenziale al fine di accelerare la risposta della CVT. L'impiego di un algoritmo, applicato a modelli dinamici semplificati, ha permesso di individuare il livello di pressione ottimale per raggiungere la migliore velocità di cambiata [68].

Altri algoritmi di controllo si sono basati sull'inseguimento da parte della CVT di un certo profilo del rapporto di trasmissione [69]; oppure hanno sviluppato modelli che mettono in relazione la dinamica del rapporto di trasmissione con il controllo idraulico [70]; altri sono arrivati ad un modello di controllo a due gradi di libertà a partire da un sistema con ritardo del primo ordine, a cui hanno applicato un primo metodo di controllo  $\mu$ -synthesis, abbinato ad uno predittivo [71].

Risultati sperimentali hanno dimostrato l'efficacia di controlli in logica fuzzy in termini di velocità e robustezza rispetto a quelli usuali di tipo Proporzionale-Integrale-Derivativo (PID) [72].

Un sistema di controllo della pressione sviluppato a partire dalle caratteristiche stazionarie della valvola sull'attuatore primario ha suggerito l'impiego di algoritmi lineari (PID) per le CVT controllate in pressione, riservando logiche di controllo nonlineari adattive a quelle regolate in portata [73].

## Conclusioni

Nonostante le sue capacità come strumento per il miglioramento dell'efficienza, le prestazioni delle CVT potrebbero non aver ancora espresso tutto il loro potenziale nella produzione su vasta scala. Forti limiti sono ancora presenti per quanto riguarda consumi e prestazioni; inoltre, i controlli spesso non sono ancora abbastanza accurati da restituire la dinamica desiderata in fase di cambio del rapporto di trasmissione. I modelli esposti fin qui si differenziano per ipotesi e grado di complessità, oltre che per l'obiettivo della loro indagine; tuttavia, molto resta da fare al fine di ottenere una comprensione più approfondita di questi sistemi che possa portare a miglioramenti nelle loro prestazioni.

Visto il ruolo determinante dell'attrito nel funzionamento di questo tipo di trasmissione, c'è ampio spazio di ulteriore indagine sui meccanismi che lo caratterizzano, anche in rapporto al controllo attivo delle vibrazioni.

I fenomeni inerziali e i transitori dinamici rivestono un ruolo importante nelle prestazioni del CVT; tuttavia, molti dei modelli precedenti lavorano in condizioni quasi-statiche che li trascurano almeno in parte. Lo sviluppo di modelli che tengano conto di questi effetti è una base essenziale per lo sviluppo di controlli in grado di restituire prestazioni soddisfacenti.

La rigidità flessionale e le deformazioni della cinghia possono spesso essere, in prima approssimazione, trascurabili rispetto a quelle della puleggia. Le forti nonlinearità introdotte dal comportamento di quest'ultima sono ritenute responsabili di buona parte dei fenomeni di slittamento che limitano la coppia trasmissibile, e pertanto richiedono ulteriori analisi per comprenderne e modellarne con precisione le caratteristiche.

Nonostante esistano numerosi modelli anche molto complessi per i CVT, in grado di scendere a fondo nel dettaglio di questo tipo di trasmissione, essi si rivelano impossibili da implementare nello sviluppo di un controllo efficace del CVT. Ciò evidenzia l'importanza allo stato attuale di modelli a livello di sistema ("*system-level model*") che siano in grado non solo di fornire una rappresentazione accurata delle dinamiche reali, ma che possano costituire la base per un sistema di controllo rapido ed affidabile, in grado di valutare con sufficiente precisione le condizioni di slittamento e, di conseguenza, le forze assiali e le coppie da applicare [1].

# Sviluppo di un modello dinamico per CVT a cinghia in polimero

## Introduzione

La seguente parte del lavoro si propone di sviluppare un semplice modello dinamico di trasmissione a variazione continua in grado di fornire risultati qualitativi sul comportamento delle principali grandezze a fronte di sollecitazioni dinamiche provenienti dal motore.

In particolare, il modello è rivolto all'analisi di CVT a cinghia in polimero impiegati su veicoli fuoristrada (*All Terrain Vehicles*) anche da competizione che impiegano tale tipo di trasmissione.

Sulla base di queste premesse, il lavoro procede con l'analisi di sensibilità su parametri ritenuti ignoti in sede di modellazione (coefficiente di smorzamento caratteristico della cinghia) o notevolmente variabili (massa del veicolo).

Nonostante l'introduzione delle numerose ipotesi semplificative discusse più avanti, si ritiene che tale modello sia comunque idoneo a restituire risultati in qualche modo rappresentativi del reale andamento delle grandezze dinamiche considerate negli scenari descritti.

## Modellazione

### Schema del modello

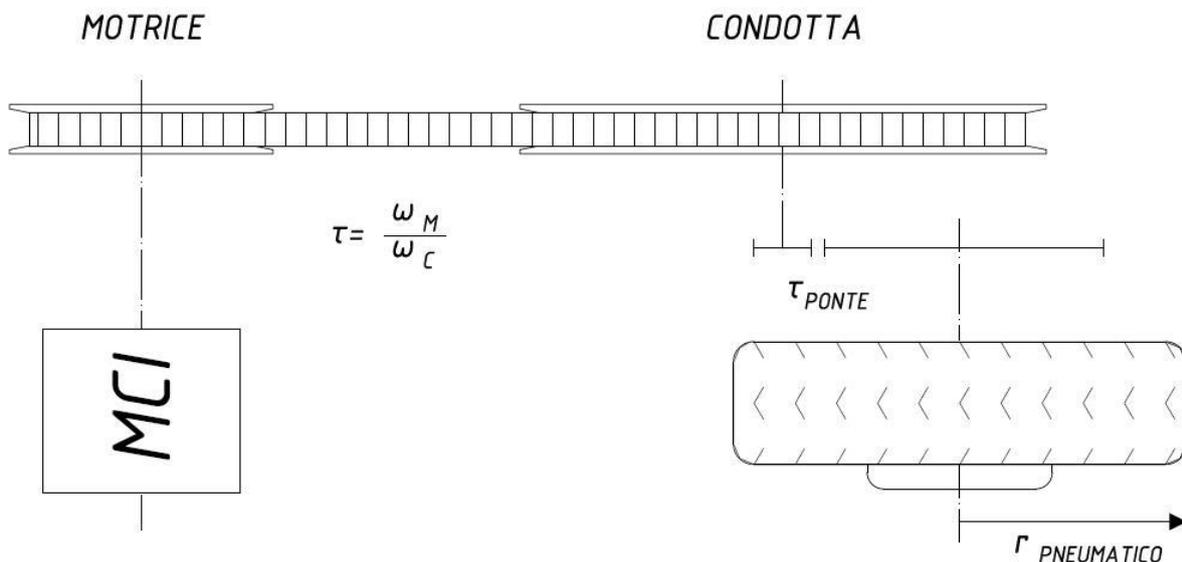


Figura 17. Schema della trasmissione semplificata.

Per le finalità del presente lavoro, la trasmissione del veicolo è stata schematizzata come in figura.

Si noti che il Motore a Combustione Interna trasmette potenza direttamente alla puleggia motrice, mentre tra la condotta e le ruote è stato inserito il rapporto di trasmissione finale al ponte del differenziale. I rotismi che sono solitamente interposti a monte o a valle del variatore sono qui trascurati per una maggiore generalità della trasmissione.

Il rendimento della trasmissione è stato ipotizzato, con evidente intento semplificativo, costante. Tuttavia, a tal proposito, si rimanda agli ottimi lavori riportati in bibliografia (su tutti, [53], [54], [55]) che consentono una valutazione semplice ed accurata del rendimento di questo tipo di trasmissione, nonché dei rotismi che vi sono tipicamente abbinati, sulla base di poche grandezze di progetto.

### Variabili d'ingresso

Il controllo del rapporto di trasmissione in un cambio a variazione continua può avvenire in diversi modi. Come si è detto, esistono trasmissioni in grado di regolarsi in modo automatico su un certo rapporto di trasmissione in base alla velocità del motore e alla coppia resistente riscontrata dalle ruote [52].

Più spesso, quando si vuole esercitare un controllo puntuale del rapporto di trasmissione, o anche solo avvalersi di strategie di controllo personalizzabili e meno dipendenti da parametri fissati una volta per tutte, la scelta del rapporto di trasmissione avviene per mezzo di attuatori elettrici o idraulici. Tali dispositivi applicano una forza assiale ai piatti mobili delle pulegge, il cui equilibrio con l'altra forza assiale, sviluppata sui fianchi della cinghia dalla sua deformazione, ne determina lo spostamento radiale desiderato per realizzare un certo rapporto di trasmissione.

Tuttavia, i meccanismi di controllo del rapporto di trasmissione e le loro dinamiche assiali esulano dagli scopi del presente lavoro. Per questo motivo, si è qui scelto di analizzare il funzionamento del variatore a fronte di altre grandezze di controllo.

In particolare, il presente modello realizza il rapporto di trasmissione desiderato stabilendo direttamente gli effettivi raggi di ingranamento delle pulegge con la cinghia, senza tenere conto delle forze assiali da imporre sulle prime, per le quali si rimanda alle fonti in bibliografia (tra le altre, [14] [15] [16] [45] [52]).

Inoltre, le analisi di sensibilità svolte riguardano il comportamento della trasmissione in assenza di transitori di cambiata (per i quali si rimanda altresì alle fonti che l'hanno analizzato, segnatamente [7] [21] [22] [28] [29] [30] [31] [32] [37], ma anche altre). Pertanto, i raggi su cui la cinghia si trova a scorrere sono considerati, da qui in avanti, parametri costanti della trasmissione.

Si è scelto invece di affidare il ruolo di forzante alla coppia erogata dal motore alla puleggia motrice ( $C_M$ ), il cui andamento nel tempo costituisce la variabile d'ingresso del modello.

## Equazioni di equilibrio dinamico

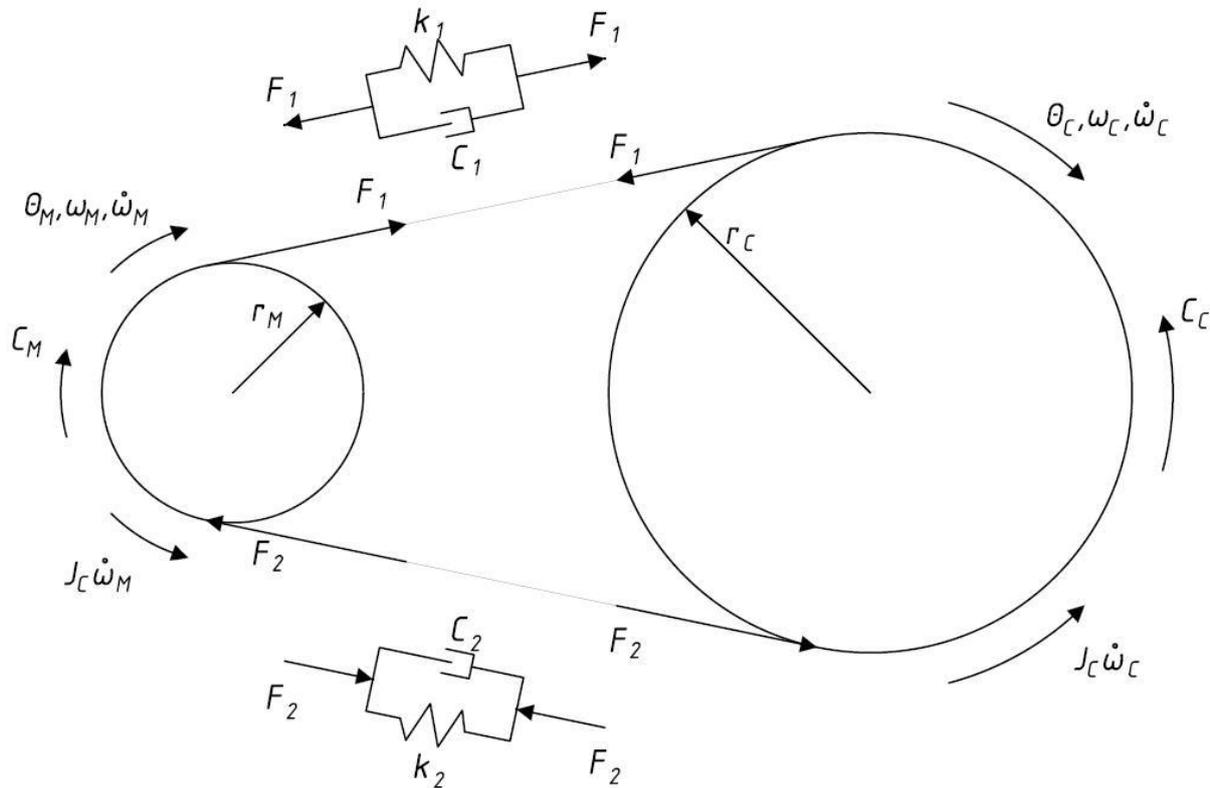


Figura 18. Diagramma di corpo libero del variatore.

Il modello sviluppato si basa sull'imposizione dell'equilibrio dinamico al variatore, considerato nelle sue parti fondamentali: la puleggia motrice, quella condotta, e la cinghia che le collega.

Su quest'ultima, sono state adottate le ipotesi semplificative più forti, tese ad una descrizione elementare del suo comportamento, pur mantenendone le caratteristiche essenziali in termini di effetti dinamici. Una prima ipotesi è stata considerare la massa della cinghia trascurabile a confronto di quella delle pulegge: su tale base, gli unici effetti inerziali presenti nel sistema sono stati imputati a queste ultime. Inoltre, per quanto riguarda le sue caratteristiche dinamiche, la cinghia stessa è stata assimilata ad un elemento a parametri concentrati: ciascun tratto compreso tra le due pulegge è stato rappresentato come un sistema molla-smorzatore, mentre gli archi di avvolgimento attorno alle pulegge sono stati considerati parte delle stesse.

Si è quindi scomposto il sistema nei suoi quattro componenti per come è stato schematizzato, si sono realizzati i loro Diagrammi di Corpo Libero e vi si è imposto l'equilibrio.

La puleggia motrice è soggetta a:

- Coppia motrice alla puleggia motrice;
- Coppia d'inerzia della motrice;
- Forza esercitata dalla cinghia nel tratto cedente;
- Forza esercitata dalla cinghia nel tratto traente.

Imponendo l'equilibrio dinamico, si ottiene la relazione:

$$(F_1 + F_2)r_M + C_M - J_M\dot{\omega}_M = 0$$

Analogamente, sulla puleggia condotta agiscono:

- Coppia resistente alla puleggia condotta;
- Coppia d'inerzia della condotta;
- Forza esercitata dalla cinghia nel tratto cedente;
- Forza esercitata dalla cinghia nel tratto traente.

Dal loro equilibrio dinamico, si ottiene la relazione:

$$(F_1 + F_2)r_C + C_C + J_C\dot{\omega}_C = 0$$

Dalla cinematica del sistema, inoltre, si ricavano facilmente le relazioni:

$$F_1 = k_1(\theta_C r_C - \theta_M r_M) + c_1(\omega_C r_C - \omega_M r_M)$$

$$F_2 = k_2(\theta_C r_C - \theta_M r_M) + c_2(\omega_C r_C - \omega_M r_M)$$

Funzionamento del modello

### **Condizioni iniziali**

Le condizioni iniziali imposte al modello rappresentano il suo stato prima dell'applicazione della forzante (coppia in ingresso). Per determinarle in modo che siano coerenti tra loro, si è partiti dall'imposizione della velocità iniziale del veicolo:

$$\dot{x}_0 = 10.0 \text{ km/h}$$

Dalla cinematica del sistema, si ricava la velocità della puleggia condotta in tali condizioni:

$$\omega_{C0} = \frac{\dot{x}_0}{R_p} \tau_f \approx 37.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Dove ( $R_p$ ) indica il raggio dello pneumatico, noto sempre dalle specifiche del veicolo e considerato costantemente indeformato, mentre ( $\tau_f$ ) indica il rapporto finale al ponte del differenziale, qui ipotizzato sulla base di valori tipici:

$$R_p = 0.280 \text{ m}$$

$$\tau_f = 3.80$$

Per risalire alla velocità della puleggia motrice, è necessario ipotizzare un rapporto di trasmissione iniziale. In questo caso si è scelto di imporlo pari al massimo rapporto di trasmissione realizzabile dal variatore, ovvero quello in condizioni di velocità massima del motore e del veicolo.

Dai dati riportati per il veicolo in questione, si ottiene la velocità massima del veicolo:

$$\dot{x}_{MAX} = 110 \text{ km/h}$$

Dalla cinematica del sistema, la velocità massima della puleggia condotta è data da:

$$\omega_{C MAX} = \frac{\dot{x}_{MAX}}{R_p} \tau_f \approx 415 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Inoltre, se si ipotizza che la massima velocità del motore sia quella per cui questo eroga la massima potenza, sempre dai dati del veicolo si ottiene:

$$\omega_{M MAX} = 7250 \text{ rpm} \approx 760 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Pertanto, dalla definizione del rapporto di trasmissione massimo, si ottiene:

$$\tau_{MAX} = \frac{\omega_{M MAX}}{\omega_{C MAX}} \approx 1.83 = \tau_0$$

È quindi possibile determinare la velocità iniziale della puleggia motrice in tali condizioni come:

$$\omega_{M 0} = \omega_{C 0} \cdot \tau_0 \approx 69.0 \frac{rad}{s}$$

La coppia di partenza erogata dal motore prima della sollecitazione imposta deve essere fissata in modo da compensare le forze di resistenza all'avanzamento:

$$F_{RES 0} = f_0 mg + f_2 v_0^2 R_P$$

Dove ( $f_0, f_2$ ) rappresentano due coefficienti di resistenza all'avanzamento fissati sulla base di valori tipici, mentre ( $m$ ) rappresenta la massa del veicolo (variabile da una simulazione all'altra) e ( $g$ ) l'accelerazione di gravità:

$$f_0 = 0.0135$$

$$f_2 = 0.47 \frac{N s^2}{m^2}$$

$$g = 9.81 m/s^2$$

È possibile ricavare la coppia resistente corrispondente come:

$$C_{RES} = F_{RES} \cdot R_P$$

Si risale quindi tramite la cinematica dei rapporti di trasmissione alla coppia resistente alla puleggia motrice:

$$C_{M RES 0} = \frac{C_{RES}}{\tau_f \tau_0} = C_{M 0}$$

Dove ( $C_{M 0}$ ) indica la coppia motrice erogata nelle condizioni iniziali, posta pari alla coppia resistente riportata alla motrice in modo da realizzare condizioni iniziali stazionarie.

Imponendo le condizioni stazionarie alle equazioni di equilibrio dinamico delle due pulegge, si ottengono le relazioni:

$$(F_{1 0} + F_{2 0})r_{M 0} + C_{M 0} = 0$$

$$(F_{2 0} + F_{1 0})r_{C 0} + C_{C 0} = 0$$

Inoltre:

$$F_{1 0} = k_1(\theta_{C 0}r_{C 0} - \theta_{M 0}r_{M 0}) + c_1(\omega_{C 0}r_{C 0} - \omega_{M 0}r_{M 0})$$

$$F_{2 0} = k_2(\theta_{C 0}r_{C 0} - \theta_{M 0}r_{M 0}) + c_2(\omega_{C 0}r_{C 0} - \omega_{M 0}r_{M 0})$$

Tuttavia, si noti che:

$$\tau_0 = \frac{\omega_{M 0}}{\omega_{C 0}} = \frac{r_{C 0}}{r_{M 0}}$$

$$\omega_{M 0} = \frac{r_{C 0}}{r_{M 0}} \omega_{C 0}$$

Pertanto, sostituendo:

$$c_{1,2} \left( \omega_{C_0} r_{C_0} - \frac{r_{C_0}}{r_{M_0}} \omega_{C_0} r_{M_0} \right) = 0$$

Valgono dunque le relazioni:

$$F_{10} = k_1 (\theta_{C_0} r_{C_0} - \theta_{M_0} r_{M_0})$$

$$F_{20} = k_2 (\theta_{C_0} r_{C_0} - \theta_{M_0} r_{M_0})$$

Sostituendo nelle equazioni di equilibrio dinamico in condizioni stazionarie si ottengono

$$(\theta_{C_0} r_{C_0} - \theta_{M_0} r_{M_0}) (k_1 + k_2) r_{M_0} + C_{M_0} = 0$$

$$(\theta_{C_0} r_{C_0} - \theta_{M_0} r_{M_0}) (k_1 + k_2) r_{C_0} + C_{C_0} = 0$$

Le due costanti elastiche della cinghia possono essere viste come rigidità in serie rispetto ad una equivalente rigidità complessiva della cinghia. Quest'ultima è nota sulla base di valori reperibili in letteratura [74]:

$$k_{cinghia} = 1.16 \times 10^6 \text{ N/m}$$

Se si ipotizza che le due rigidità siano uguali tra loro, si può scrivere:

$$k_1 = k_2 = 2k_{cinghia}$$

Dunque:

$$k_1 + k_2 = 4k_{cinghia}$$

Dal momento che la scelta di un valore iniziale di un angolo dipende all'altro, si è scelto di usare come riferimento quello sulla motrice:

$$\theta_{M_0} = 0$$

Scegliendo quindi una qualunque delle due equazioni da risolvere, si ottiene, ad esempio:

$$\theta_{C_0} = -\frac{C_{M_0}}{r_{M_0} r_{C_0} 4k_{cinghia}} \approx -2.51 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

Sono ora note tutte le condizioni iniziali necessarie.

### **Coppia motrice ( $C_M$ )**

L'ingresso del modello è costituito dall'andamento nel tempo della coppia motrice. Nel caso in questione, si è esaminata la risposta del sistema ad un gradino di coppia.

La coppia è stata stimata dalle condizioni di massima potenza riportate nelle specifiche del veicolo:

$$C_M = 170 \text{ Nm}$$

La sollecitazione avviene all'istante:

$$t = 3 \text{ s}$$

### **Momenti d'inerzia ( $J_{M,C}$ )**

Il momento d'inerzia della puleggia motrice è stato stimato sulla base di valori tipici:

$$J_M = 0.3 \text{ kg/m}^2$$

Quello associato alla puleggia condotta è stato invece calcolato come:

$$J_C = \frac{mR_p^2 + 4J_{ruota}}{\tau_f}$$

Dove ( $J_{ruota}$ ) rappresenta il momento d'inerzia di ciascuna ruota ed è stato stimato sulla base di valori tipici:

$$J_{ruota} = 0.5 \text{ N/m}^2$$

### **Raggi delle pulegge ( $r_{M,C}$ )**

I raggi di ingranamento realizzati dalle pulegge del variatore su cui la cinghia si trova a rotolare sono stati fissati su valori arbitrari compatibili con le caratteristiche del veicolo e della condizione di utilizzo:

$$r_M = 60.0 \text{ mm}$$

$$r_C = 120 \text{ mm}$$

### Variabili di uscita

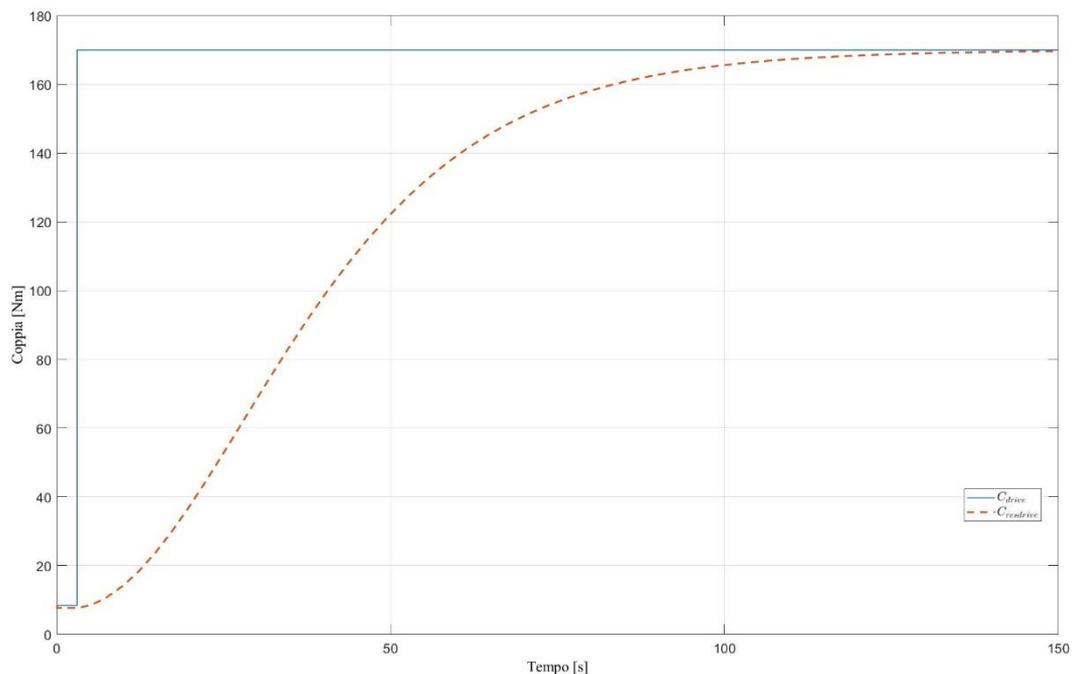
A fronte della sollecitazione fornita dalla coppia motrice, il sistema restituisce un gran numero di grandezze che costituiscono oggetto potenziale di valutazione. Nel presente lavoro, alcune di queste sono state scelte per descrivere il comportamento del sistema in quanto considerate maggiormente significative ai fini dell'analisi dinamica.

I risultati considerano l'andamento nel tempo di:

- Coppia resistente riportata alla puleggia motrice;
- Velocità angolare della puleggia motrice;
- Velocità angolare della puleggia condotta;
- Accelerazione angolare della puleggia motrice;
- Accelerazione angolare della puleggia condotta;
- Forza longitudinale sul tratto traente della cinghia;
- Forza longitudinale sul tratto cedente della cinghia;
- Differenza nell'angolo di rotazione tra le due pulegge.

### Coppia resistente alla motrice

A titolo di verifica della corretta impostazione del modello, è stato diagrammato l'andamento della coppia resistente, riportata alla puleggia motrice, rispetto all'impulso di coppia motrice.



Come evidenziato dall'immagine, la coppia resistente tende a portarsi al livello di quella motrice, confermando le aspettative sul comportamento reale della trasmissione.

## Analisi di sensibilità

### Analisi di sensibilità allo smorzamento

Il parametro di smorzamento della cinghia è stato oggetto di un'analisi di sensibilità al fine da un lato di valutarne gli effetti dinamici sul funzionamento della trasmissione, dall'altro di stimarne un valore plausibile, dal momento che si è trattato di un parametro ignoto per la modellazione.

Altre analisi dinamiche disponibili in letteratura [74] hanno infatti fornito delle stime dello smorzamento, ma valutandolo in maniera diversa, ad esempio in abbinamento alla rigidità flessionale della cinghia, che invece esula dagli scopi del presente lavoro.

Pertanto, si è andati a valutare la risposta del sistema, a fronte della sollecitazione di coppia motrice già vista, in presenza di diversi valori di smorzamento. La valutazione è stata effettuata sulle grandezze sopra menzionate, ritenute di maggior rappresentatività degli effetti dinamici.

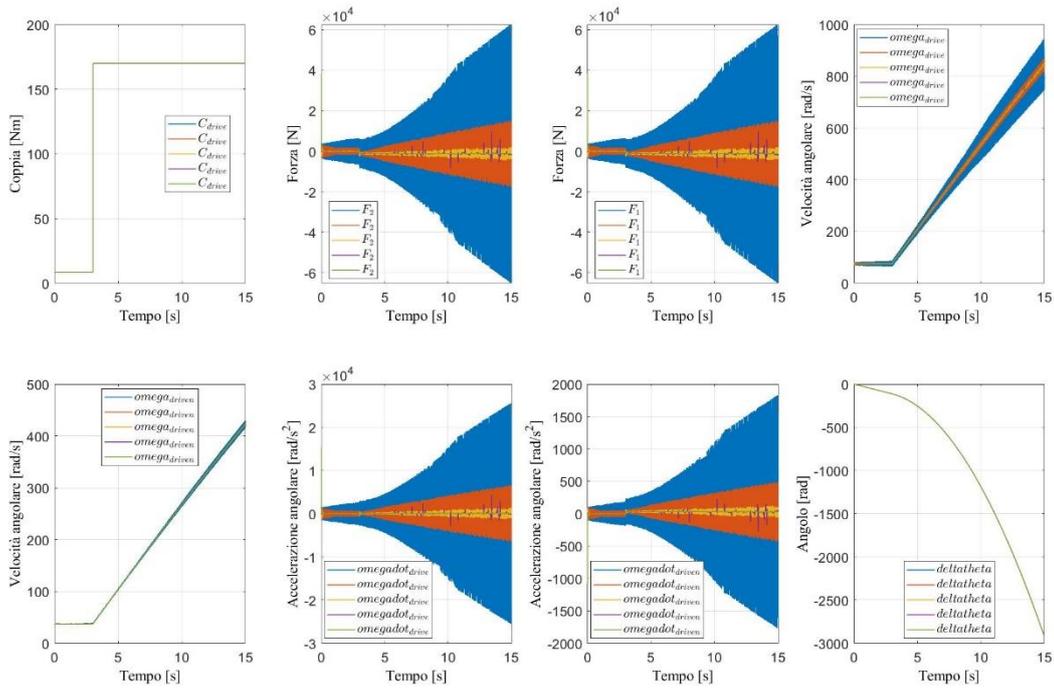
I valori di smorzamento considerati sono stati:

$$c_{cinghia} = [5 \ 50 \ 500 \ 5000 \ 50000] \text{ N/(m/s)}$$

Si è quindi assunto che i due smorzamenti presenti nel modello possano essere considerati uguali e in serie, pertanto vale la relazione:

$$c_{1,2} = 2c_{cinghia}$$

Nella simulazione è stato scelto un parametro di massa fisso tra quelli che sarebbero stati oggetto dell'analisi di sensibilità seguente.



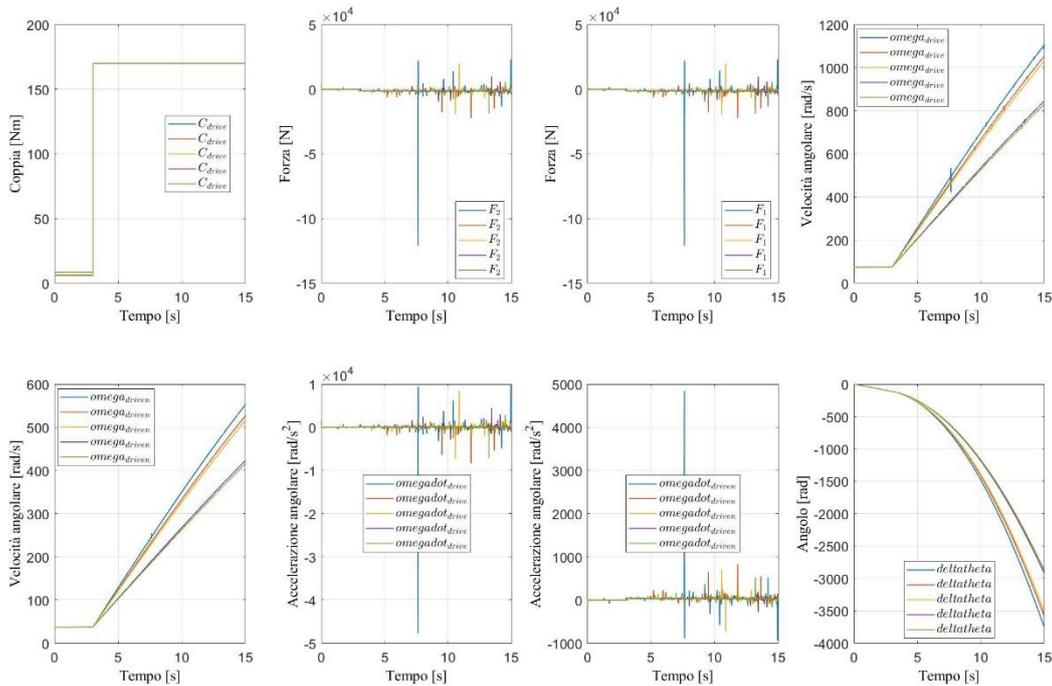
### Analisi di sensibilità alla massa

Pur non essendo un parametro ignoto nel sistema, la massa è stata oggetto di un'analoga analisi di sensibilità per via della sua notevole variabilità a seconda delle condizioni del veicolo. Sono state infatti riconosciute almeno cinque configurazioni della massa del veicolo, con incrementi quasi del 50%.

Le masse considerate per l'analisi di sensibilità sono state:

$$m = [1075 \ 1150 \ 1185 \ 1545 \ 1580] \text{ kg}$$

Come già per la precedente analisi di sensibilità, lo smorzamento è stato fissato ad uno dei valori precedenti.



## Conclusioni

Il modello, per come è stato sviluppato sin qui, ha restituito risultati soddisfacenti e compatibili con le condizioni di funzionamento del sistema, evidenziando la rilevanza di alcune variabili negli effetti dinamici sulla trasmissione.

Tuttavia, molto resta ancora da fare per ottenere dati non già qualitativi, ma accurati anche dal punto di vista degli effettivi valori. Le fonti riportate nel presente lavoro propongono infatti numerosi spunti di approfondimento per lo sviluppo di modelli che tengano conto delle grandezze qui trascurate o assunte costanti. In particolare, vista la sua forte aderenza al tipo di veicolo che si è qui approfondito, si segnalano le utili proposte introdotte in [74], che coniugano semplicità ed efficacia in un approccio discretizzato.

## Bibliografia

- [1] N. Srivastava, I. Haque, A review on belt and chain continuously variable transmissions (CVT): Dynamics and control, *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier, 2009.
- [2] G. Gerbert, Force and slip behavior in V-belt drives, *Acta Polytechnica Scandinavica, Mechanical Engineering Series*, No. 67, Lund Technical University, Lund, Sweden, 1972; G. Gerbert, Metal V-belt mechanics, in: *ASME Design Automation Conference, Advances in Design Automation*, ASME Paper No. 84-DET-227, Boston, MA, 1984, 9p.
- [3] G. Gerbert, Metal V-belt mechanics, in: *ASME Design Automation Conference, Advances in Design Automation*, ASME Paper No. 84-DET-227, Boston, MA, 1984, 9p.
- [4] W.S. Worley, J.P. Dolan, Closed-form approximations to the solution of V-belt force and slip equations, *ASME Journal of Mechanical Design* 107 (2) (1985) 292–300.
- [5] G. Gerbert, Belt slip – a unified approach, *ASME Journal of Mechanical Design* 118 (3) (1996) 432–438.
- [6] G. Gerbert, Skew V-belt pulleys, in: *Proceedings of the International Conference on Continuously Variable Power Transmission*, Paper No. 101 (9636259), Japanese Society of Automotive Engineers, Yokohama, Japan, September 11–12, 1996, pp. 1–9.
- [7] F. Sorge, Transient mechanics of V-belt variators, in: *2004 International Continuously Variable and Hybrid Transmission Congress*, Paper No. 04CVT-45, San Francisco, USA, September 23–25, 2004.
- [8] G. Gerbert, F. Sorge, Full sliding adhesive-like contact of V-belts, *ASME Journal of Mechanical Design* 124 (4) (2002) 706–712.
- [9] F. Sorge, Influence of pulley bending on metal V-belt mechanics, in: *Proceedings of the International Conference on Continuously Variable Power Transmission*, Japanese Society of Automotive Engineers, Paper No. 102 (9636268), Yokohama, Japan, September 11–12, 1996, pp. 9–15.
- [10] F. Sorge, A qualitative–quantitative approach to V-belt mechanics, *ASME Journal of Mechanical Design* 118 (1996) 15–21.
- [11] J.D. Micklem, D.K. Longmore, C.R. Burrows, Modelling of the steel pushing V-belt continuously variable transmission, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 208 (1) (1994) 13–27.
- [12] N. Srivastava, I. Haque, Clearance and friction induced dynamics of chain CVT drives, *Multibody System Dynamics* 19 (3) (2008) 255–280.
- [13] A. Karam, D. Play, A discrete analysis of metal V-belt drive, in: *ASME Proceedings of the 1992 International Power Transmission and Gearing Conference*, Scottsdale, AZ, USA, vol. 43, Part 1, September 13–16, 1992, pp. 319–327.
- [14] H. Asayama, J. Kawai, A. Tonohata, M. Adachi, Mechanism of metal pushing belt, *JSAE Review* 16 (2) (1995) 137–143.
- [15] H. Kim, J. Lee, Analysis of belt behavior and slip characteristics for a metal V-belt CVT, *Mechanism and Machine Theory* 29 (6) (1994) 865–876;

- [16] H. Lee, H. Kim, Analysis of primary and secondary thrust for a metal CVT, Part 1: new formula for speed ratio–torque–thrust relationship considering band tension and block compression, in: Transmission and Driveline Symposium, SAE Paper No. 2000-01-0841, SAE special publication (SP-1522), 2000, pp. 117–125.
- [17] G. Massouros, Elastic creep velocity of V-belts, in: ASME Spring National Design Engineering Conference and Show, Paper No. 87-DE-10, Chicago, IL, USA, March 1987.
- [18] D. Kobayashi, Y. Mabuchi, Y. Katoh, A study on the torque capacity of a metal pushing V-belt for CVTs, in: SAE Transmission and Driveline Systems Symposium, SAE Paper No. 980822, vol. 1324, 1998, pp. 31–39.
- [19] B. Bonsen, T.W.G.L. Klaassen, K.G.O. van de Meerakker, M. Steinbuch, P.A. Veenhuizen, Analysis of slip in a continuously variable transmission, in: Proceedings of IMECE'03, 2003 ASME International Mechanical Engineering Congress, Paper No. IMECE2003-41360, Washington, DC, USA, vol. 72, No. 2, November 15–21, 2003, pp. 995–1000.
- [20] S. Amijima, T. Fujii, H. Matsuoka, E. Ikeda, Study on axial force and its distribution of a new CVT belt for cars, International Journal of Vehicle Design 13 (2) (1992) 168–181.
- [21] D. Sferra, E. Pennestri, P.P. Valentini, F. Baldascini, Dynamic simulation of a metal-belt CVT under transient conditions, in: Proceedings of the ASME 2002 Design Engineering Technical Conference, Paper No. DETC02/MECH-34228, Montreal, Canada, vol. 5A, September 29–October 2, 2002, pp. 261–268.
- [22] T. Ide, H. Tanaka, Contact force distribution between pulley sheave and metal pushing V-belt, Proceedings of CVT 2002 Congress, vol. 1709, VDI Berichte, Düsseldorf, Germany, 2002, pp. 343–355.
- [23] T. Ide, A. Udagawa, R. Kataoka, Simulation approach to the effect of ratio changing speed of a metal V-belt CVT on the vehicle response, Vehicle System Dynamics 24 (1995) 377–388.
- [24] T. Ide, H. Uchiyama, R. Kataoka, Experimental investigation on shift speed characteristics of a metal V-belt CVT, in: Proceedings of the International Conference on Continuously Variable Power Transmission, Japanese Society of Automotive Engineers, Paper No. 109 (9636330), Yokohama, Japan, September 11–12, 1996, pp. 59–64.
- [25] M. Bullinger, F. Pfeiffer, Elastic modelling of bodies and contacts in continuous variable transmissions, Multibody System Dynamics 13 (2) (2005) 175–194.
- [26] M. Bullinger, F. Pfeiffer, An elastic model of a metal V-belt CVT, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM) 2 (2003) 112–113.
- [27] H. Sattler, Efficiency of metal chain and V-belt CVT, in: Proceedings of the International Congress on Continuously Variable Power Transmission CVT'99, Eindhoven, The Netherlands, September 16–17, 1999, pp. 99–104.
- [28] G. Carbone, L. Mangialardi, G. Mantriota, Theoretical model of metal V-belt drives during ratio changing speed, ASME Journal of Mechanical Design 123 (1) (2000) 111–117.
- [29] G. Carbone, L. Mangialardi, G. Mantriota, Influence of clearance between plates in metal pushing V-belt dynamics, ASME Journal of Mechanical Design 124 (3) (2002) 543–557.
- [30] G. Carbone, L. Mangialardi, G. Mantriota, EHL visco-plastic friction model in CVT shifting behaviour, International Journal of Vehicle Design 32 (3/4) (2003) 333–357.

- [31] G. Carbone, L. Mangialardi, G. Mantriota, The influence of pulley deformations on the shifting mechanism of metal belt CVT, *ASME Journal of Mechanical Design* 127 (1) (2005) 103–113.
- [32] G. Carbone, L. Mangialardi, B. Bonsen, C. Tursi, P.A. Veenhuizen, CVT dynamics: theory and experiments, *Mechanism and Machine Theory* 42 (4) (2007) 409–428.
- [33] T. Fujii, T. Kurokawa, S. Kanehara, A study of a metal pushing V-belt type CVT. Part 2: compression force between metal blocks and ring tension, *SAE Transactions* (1993) 1000–1009. Paper No. 930667.
- [34] S. Kanehara, T. Fujii, T. Kitagawa, A study of a metal pushing V-belt type CVT (Part 3: what forces act on metal blocks?), *SAE Transactions* (1994) 942–952. Paper No. 940735.
- [35] Y. Fushimi, S. Kanehara, T. Fujii, A numerical approach to analyze the power transmitting mechanisms of a metal pushing V-belt type CVT, *SAE Transactions* (1996) 161–172. Paper No. 960720.
- [36] T. Kitagawa, T. Fujii, S. Kanehara, A study of a metal pushing V-Belt type CVT (Part 4: forces act on metal blocks when the speed ratio is changing), *SAE Transactions* (1995) 1344–1353. Paper No. 950671.
- [37] S. Kuwabara, T. Fujii, S. Kanehara, Power transmitting mechanism of CVT using a metal V-Belt and load distribution in the steel ring, *SAE Transactions* (1998) 49–59. Paper No. 980824.
- [38] S. Kanehara, T. Fujii, O. Fujimura, Characterization of a CVT using a metal V-belt at transitional states, in: *Proceedings of the International Conference on Continuously Variable Power Transmissions, CVT'99*, Eindhoven, The Netherlands, September 16–17, 1999, pp. 58–64.
- [39] O. Fujimura, K. Okubo, T. Fujii, S. Kanehara, Shifting mechanism and variation of frictional coefficients for CVT using metal pushing V-belts, in: *Transmission and Driveline Symposium*, SAE Paper No. 2000-01-0840, SAE special publication (SP-1522), 2000, pp. 107–116.
- [40] R. Kataoka, K. Okubo, T. Fujii, S. Kanehara, A study on a metal pushing V-belt type CVT – a novel approach to characterize the friction between blocks and a pulley, and shifting mechanisms, *SAE Transactions* (2002) 49–59. Paper No. 2002-01-0697.
- [41] N. Srivastava, I. Haque, On the transient dynamics of a metal pushing V-belt CVT at high speeds, *International Journal of Vehicle Design* 37 (1) (2005) 46–66.
- [42] N. Srivastava, I. Haque, Transient dynamics of metal V-belt CVT: effects of pulley flexibility and friction characteristic, *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 2 (1) (2007) 86–97.
- [43] N. Srivastava, I. Haque, Transient dynamics of metal V-belt CVT: effects of band pack slip and friction characteristic, *Mechanism and Machine Theory* 43 (4) (2008) 459–479.
- [44] N. Srivastava, V.Y. Blouin, I.U. Haque, Using genetic algorithms to identify initial operating conditions for a transient CVT model, in: *2004 ASME International Mechanical Engineering Congress*, Paper No. IMECE2004-61999, Anaheim, CA, USA, vol. 73, No. 1, Part A, November 13–19, 2004, pp. 317–328.
- [45] N. Srivastava, I.U. Haque, On the operating regime of a metal pushing V-belt CVT under steady state microslip conditions, in: *2004 International Continuously Variable and Hybrid Transmission Congress*, Paper No. 04CVT-11 (2004-34-2851), San Francisco, USA, September 23–25, 2004.

- [46] S. Akehurst, An investigation into the loss mechanisms associated with a pushing metal V-belt continuously variable transmission, PhD Thesis, University of Bath, School of Mechanical Engineering, 2001.
- [47] M.A. Kluger, D.M. Long, An overview of current automatic, manual and continuously variable transmission efficiencies and their projected future improvements, SAE Transactions (1999) 653–658. Paper No. 1999-01-1259.
- [48] M.A. Kluger, D.A. Fussner, An overview of current CVT mechanisms, forces and efficiencies, in: SAE Transmission and Driveline Systems Symposium (SP-1241), Paper No. 970688, Detroit, MI, USA, 1997, pp. 81–88.
- [49] T. Singh, S.S. Nair, A mathematical review and comparison of continuously variable transmissions, SAE Transactions (1992) 1–10. Paper No. 922107.
- [50] Y.Y. Chung, C.K. Sung, Belt vibration of a continuously variable transmission (CVT) during speed-ratio change, Journal of Chinese Society of Mechanical Engineers 18 (5) (1997) 407–414.
- [51] W. Lebrecht, F. Pfeiffer, H. Ulbrich, Analysis of self-induced vibrations in a pushing V-belt CVT, in: 2004 International Continuously Variable and Hybrid Transmission Congress, Paper No. 04CVT-32, San Francisco, USA, September 23–25, 2004.
- [52] M. Cammalleri, A new approach to the design of a speed-torque controlled rubber V-belt variator, Proc. IMechE Vol. 219 Part D: J. Automobile Engineering, pp 1413–1427.
- [53] M. Cammalleri, Efficiency of Split-Way CVT's. A simplified model, SAE Technical paper 2007-24-0133.
- [54] Marco Cammalleri, Dario Rotella, Functional design of power-split CVTs: An uncoupled hierarchical optimized model, Mechanism and Machine Theory 116 (2017) 294–309.
- [55] Dario Rotella, Marco Cammalleri, Direct analysis of power-split CVTs: A unified method, Mechanism and Machine Theory 121 (2018) 116–127.
- [56] T. Kim, H. Kim, Performance of integrated engine-CVT control considering powertrain loss and CVT response lag, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering 216 (7) (2002) 545–553.
- [57] T. Takiyama, S. Morita, Analysis of improvement of fuel consumption by engine-CVT consolidated control, in: Proceedings of AVEC'96, International Symposium on Advanced Vehicle Control, June 1996, pp. 1159–1167.
- [58] T. Takiyama, Engine-CVT-A/F consolidated control using decoupling control theory, JSAE Review 22 (1) (2001) 9–14.
- [59] M. Yasuoka, M. Uchida, S. Katakura, T. Yoshino, An integrated control algorithm for an SI engine and a CVT, in: Transmission and Driveline Symposium, Paper No. 1999-01-0752, SAE Special Publications (SP-1440), 1999, pp. 155–160.
- [60] H. Yeo, C.H. Song, C.S. Kim, H.S. Kim, Hardware in the loop simulation of hybrid vehicle for optimal engine operation by CVT ratio control, International Journal of Automotive Technology 5 (3) (2004) 201–208.
- [61] B. Bonsen, R.J. Pulles, S.W.H. Simons, M. Steinbuch, P.A. Veenhuizen, Implementation of a slip controlled CVT in a production vehicle, in: Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Control Applications, Toronto, Canada, August 28–31, 2005, pp. 1212–1217.

- [62] B. Bonsen, T.W.G.L. Klaassen, R.J. Pulles, S.W.H. Simons, M. Steinbuch, P.A. Veenhuizen, Performance optimization of the push-belt CVT by variator slip control, *International Journal of Vehicle Design* 39 (3) (2005) 232–256.
- [63] S. Liu, A.G. Stefanopoulou, Effects of control structure on performance of an automotive powertrain with a continuously variable transmission, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 10 (5) (2002) 701–708.
- [64] L. Guzzella, A.M. Schmid, Feedback linearization of spark-ignition engines with continuously variable transmissions, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 3 (1) (1995) 54–60.
- [65] S. Liu, B. Paden, Survey of today's CVT controls, in: *Proceedings of the 1997 IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, vol. 5, December 10–12, 1997, pp. 4738–4743.
- [66] R. Pfiffner, L. Guzzella, Optimal operation of CVT-based powertrains, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 11 (11) (2001) 1003–1021.
- [67] R. Pfiffner, L. Guzzella, C.H. Onder, Fuel-optimal control of CVT powertrains, *Control Engineering Practice* 11 (3) (2003) 329–336.
- [68] H. Lee, H. Kim, Improvement of fuel economy by shift speed control for a metal belt continuously variable transmission, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering* 216 (9) (2002) 741–749.
- [69] P. Setlur, J.R. Wagner, D.M. Dawson, B. Samuels, Nonlinear control of a continuously variable transmission (CVT), *IEEE Transactions of Control Systems Technology* 11 (1) (2003) 101–108.
- [70] D.C. Foley, N. Sadegh, E.J. Barth, G.J. Vachtsevanos, Model identification and backstepping control of a continuously variable transmission system, in: *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, Arlington, VA, USA, vol. 6, June 25–27, 2001, pp. 4591–4596.
- [71] K. Adachi, Y. Ochi, K. Kanai, Development of CVT control system and its use for fuel-efficient operation of engine, *Asian Journal of Control* 8 (3) (2006) 219–226.
- [72] T. Kim, H. Kim, J. Yi, H. Cho, Ratio control of metal belt CVT, in: *Transmission and Driveline Symposium*, SAE Paper No. 2000-01-0842, SAE Special Publications (SP-1522), 2000.
- [73] W. Ryu, J. Nam, Y. Lee, H. Kim, Model based control for a pressure control type CVT, *International Journal of Vehicle Design* 39 (3) (2005) 175–188.
- [74] G. Julió, J.-S. Plante, An experimentally-validated model of rubber-belt CVT mechanics, *Mechanism and Machine Theory* 46 (2011) 1037–1053.
- [75] J. Srnik, F. Pfeiffer, Dynamics of CVT chain drives, *International Journal of Vehicle Design* 22 (1/2) (1999) 54–72.

## Indice delle figure

Figura 1. CVT a cinghia metallica trapezoidale ("V-belt CVT"): (a) schema, (b) struttura della cinghia [10].	7
Figura 2. Regolatore a massa centrifuga [52].	7
Figura 3. Trasmissione CVT a catena: (a) schema, (b) struttura della catena [12] [75].	8
Figura 4. Descrizione geometrica di una CVT a cinghia [1].	9
Figura 5. Descrizione cinematica di un elemento della cinghia lungo l'avvolgimento della puleggia [1].	9
Figura 6. Modello di deformazione della puleggia: (a) deformazione assiale; (b) comportameto asimmetrico della puleggia ("skewness") [27].	10
Figura 7. Meccanismo di slittamento dovuto alla redistribuzione dei vani tra gli elementi in una CVT a cinghia metallica [18].	12
Figura 8. Distribuzione delle forze di contatto tra cinghia e puleggia in assenza di carico per differenti forze di serraggio (assiali) [22].	13
Figura 9. Figura 10. Modello a parametri concentrati di una CVT a cinghia metallica [35].	15
Figura 10. Andamenti nel tempo delle forze di tensione e compressione in condizioni stazionarie per differenti rapporti di velocità [37].	16
Figura 11. Diagrammi di corpo libero di una CVT a cinghia trapezoidale metallica: (a) forze sulle fasce; (b) forze sugli elementi della cinghia; (c) forze sul piatto scanalato della puleggia; (d) coppie sulla puleggia condotta [43].	17
Figura 12. Andamenti temporali da modello di CVT a cinghia: (a) velocità di pulegge ed elementi; (b) velocità di elementi e fasce; (c) accelerazione degli elementi della cinghia [43].	18
Figura 13. Dsicretizzazione della cinghia in nodi [74].	20
Figura 14. Modellazione della rigidezza flessionale della cinghia [74].	20
Figura 15. Caratteristica operativa tipica di un CVT [56].	21
Figura 16. Strategie di controllo di CVT: (a) "a involuppo di velocità"; (b) "binario unico"; (c) "fuori pista" [66].	23
Figura 17. Schema della trasmissione semplificata.	25
Figura 18. Diagramma di corpo libero del variatore.	27