

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in INGEGNERIA MECCANICA

Tesi di Laurea Magistrale

**Sviluppo di un modello multibody  
di un harmonic drive a fini  
diagnostici e prognostici**



**Politecnico  
di Torino**

**Relatore**

Prof. MASSIMO SORLI

PhD ANDREA DE MARTIN

Ing. ANDREA RAVIOLA

**Candidato**

CARMINE COSTANTINO

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

# Sommario

Le tecniche di diagnostica e prognostica (PHM) in campo robotico rappresentano un tema sempre più attuale in quanto un eventuale guasto (*failure*) imprevisto può causare una serie di eventi indesiderati. Infatti, non solo un fermo macchina improvviso può essere causa di perdite economiche, ma soprattutto nel campo della robotica collaborativa un comportamento non nominale del sistema può compromettere la salute e la sicurezza dell'operatore nelle vicinanze.

Pertanto, per analizzare questi aspetti ci si è concentrati sullo sviluppo di un modello *multibody* di un riduttore armonico (*Harmonic Drive*<sup>®</sup>) da inserire all'interno di un modello più di alto livello di un manipolatore UR5 della Universal Robots<sup>™</sup>, presente all'interno del laboratorio del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale del Politecnico di Torino.

In questa trattazione è stato usato un approccio multibody in cui sono stati analizzati nel dettaglio i singoli contatti e interazioni che avvengono all'interno del riduttore armonico, come il contatto tra denti adiacenti della Flexspline, il contatto Wave Generator e Flexspline, il contatto tra denti della Flexspline e Circular Spline. Tutto è stato studiato in modo da poter andare ad inserire in futuro delle modalità di guasto andando a cambiare determinati parametri come rigidità e smorzamenti all'interno del modello. In questo modo, rilevando un guasto del robot nella sua fase iniziale, è possibile monitorarne la crescita e programmare la sostituzione prima del verificarsi di comportamenti pericolosi.

In questo lavoro di tesi ci si è concentrati su una prima parte dello sviluppo del modello che consiste nel calcolo delle condizioni iniziali del sistema, rappresentato dal riduttore armonico, le quali sono state calcolate andando a modellare in ambiente *MATLAB-Simulink*<sup>™</sup> l'inserimento del Wave Generator all'interno della Flexspline.

Infine, sono riportati dei risultati, coerenti con quanto riscontrato in letteratura, ottenuti dalle simulazioni di tale modello.

# Indice

<b>Elenco delle tabelle</b>	VIII
<b>Elenco delle figure</b>	IX
<b>Acronimi &amp; Simboli</b>	XIV
<b>1 Introduzione</b>	1
1.1 Prognostics and Health Management (PHM)	4
1.1.1 Approcci diagnostici e prognostici	7
<b>2 Caso studio del robot collaborativo UR5</b>	9
2.1 Motore elettrico e scudo	12
2.2 Riduttore	13
2.3 Sensori	15
2.3.1 Encoder ottico	15
2.3.2 Encoder magnetico	16
2.4 Freno meccanico	16
<b>3 Il componente Harmonic Drive®</b>	18
3.1 Principio di funzionamento	23
3.2 Profili dei denti	28
3.2.1 Profilo trapezoidale	28
3.2.2 Profilo ad evolvente	28
3.2.3 Profilo cicloidale	29
3.2.4 Profilo a doppio arco	30
3.3 Analisi del riduttore armonico HFUS-25-2SH	31
3.3.1 Dimensioni Wave Generator	32
3.3.2 Dimensioni della Flexspline	37
3.3.3 Dimensioni Circular Spline	39
3.4 Modalità di guasto di un riduttore armonico	41
3.4.1 Frattura alla base del dente	43

3.4.2	Frattura del dente . . . . .	44
3.4.3	Frattura nella sezione posteriore del dentatura della Flexspline . . . . .	45
3.4.4	Frattura nella sezione d'uscita della Flexspline . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Analisi dello stato dell'arte</b> . . . . .	<b>47</b>
4.1	Approccio seguito per la stesura del modello <i>multibody</i> di un riduttore armonico . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Modello di inserimento del Wave Generator</b> . . . . .	<b>55</b>
5.1	Equilibrio dinamico sul singolo dente della Flexspline . . . . .	56
5.2	Interazione tra Wave Generator e Flexspline . . . . .	59
5.2.1	Determinazione del punto di contatto tra Wave Generator e Flexspline . . . . .	61
5.2.2	Scomposizione di $(x_i, y_i)$ e $(\dot{x}_i, \dot{y}_i)$ lungo la direzione normale N al Wave Generator . . . . .	65
5.2.3	Forze scambiate tra il Wave Generator e la Flexspline . . . . .	66
5.2.4	Scomposizione di $F_{WG,FS_i}$ lungo $(X_0, Y_0)$ . . . . .	67
5.3	Forze scambiate tra denti adiacenti della Flexspline . . . . .	69
5.3.1	Scomposizione di $\dot{x}_i$ e $\dot{y}_i$ nei quattro quadranti $(i, i + 1)$ . . . . .	73
5.3.2	Scomposizione di $\dot{x}_i$ e $\dot{y}_i$ nei quattro quadranti $(i, i - 1)$ . . . . .	74
5.3.3	Scomposizione di $F_{i+1}$ lungo $(X_0, Y_0)$ . . . . .	75
5.3.4	Scomposizione di $F_{i-1}$ lungo $(X_0, Y_0)$ . . . . .	76
5.4	Coppia $C_{F_i}$ di richiamo alla deformazione della Flexspline da cerchio ad ellisse . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Risultati del modello di inserimento del Wave Generator</b> . . . . .	<b>81</b>
6.1	Posizioni $x_i$ e $y_i$ dei singoli denti della Flexspline . . . . .	84
6.2	Forza di contatto $F_{WG,FS}$ tra Wave Generator e Flexspline . . . . .	87
6.3	Forze $F_{i+1}$ e $F_{i-1}$ scambiate tra denti adiacenti della Flexspline . . . . .	90
6.4	Forza di richiamo flessionale $F_F$ . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Future implementazioni per un modello completo di un harmonic drive</b> . . . . .	<b>95</b>
7.1	Coppia di richiamo torsionale $C_{R_i}$ della Flexspline . . . . .	95
7.1.1	Scomposizione della forza di richiamo torsionale $F_{R_i}$ lungo $(X_0, Y_0)$ . . . . .	99
7.2	Rotazione del Wave Generator . . . . .	102
7.3	Analisi di equilibrio del Wave Generator . . . . .	105
7.4	Condizioni di ingranamento con la Circular Spline . . . . .	111
7.5	Accoppiamento tra Circular Spline e albero d'uscita . . . . .	115

<b>8 Conclusioni e sviluppi futuri</b>	117
<b>A File CAD-Harmonic Drive® HFUS-25-2SH</b>	120
<b>Bibliografia</b>	123

# Elenco delle tabelle

2.1	Specifiche principali per il cobot UR5. . . . .	10
2.2	Coppia massima per le diverse taglie del cobot UR5. . . . .	11
2.3	Parametri stimati dei motori elettrici. . . . .	12
2.4	Modelli dei riduttori armonici presenti nel cobot UR5 e relativi parametri fisici. . . . .	14
3.1	Risultati delle misurazioni sul componente Wave Generator di un riduttore armonico HFUS-25-2SH. . . . .	34
3.2	Proprietà del componente Wave Generator di un riduttore armonico HFUS-25-2SH. . . . .	36
3.3	Proprietà del componente Flexspline di un riduttore armonico HFUS-25-2SH. . . . .	38
3.4	Risultati delle misurazioni sul componente Flexspline di un riduttore armonico HFUS-25-2SH. . . . .	38
3.5	Proprietà del componente Circular Spline di un riduttore armonico HFUS-25-2SH. . . . .	39
3.6	Risultati delle misurazioni sul componente Circular Spline di un riduttore armonico HFUS-25-2SH. . . . .	40
3.7	FMECA dei guasti di un riduttore armonico. . . . .	42
6.1	Parametri utilizzati per la simulazione del modello. . . . .	83
6.2	Posizionamento dei denti principali della Flexspline. . . . .	83
6.3	Valori di forza massima $F_{WG,FS_{max}}$ al variare della deformazione massima $w_0$ imposta dal Wave Generator [86]. . . . .	88
7.1	Rigidezze torsionali del componente Flexspline. . . . .	96

# Elenco delle figure

1.1	Robot collaborativo UR5 di Universal Robots presente nei laboratori del Dipartimento di Ingegneria Meccanica ed Aerospaziale del Politecnico di Torino. . . . .	3
1.2	Schema logico dell'integrazione di diagnostica e prognostica. . . . .	6
2.1	Modelli di cobot della Universal Robots. . . . .	10
2.2	Robot collaborativo UR5 di Universal Robots con rappresentazione schematica dei componenti principali. . . . .	11
2.3	Vista del giunto dall'alto, dopo aver rimosso encoders e centralina elettronica ( <i>a sinistra</i> ); Vista dall'alto di rotore e avvolgimenti dello statore ( <i>a destra</i> ). . . . .	13
2.4	Riduttore armonico HFUS-25-2SH. . . . .	14
2.5	Encoder ottico presente su un giunto di taglia 3 di un UR5. . . . .	15
2.6	Vista dall'alto del giunto di taglia 3 di un UR5 ( <i>a sinistra</i> ) e particolare dell'encoder magnetico ( <i>a destra</i> ). . . . .	16
2.7	Vista dall'alto del giunto di taglia 3 di un UR5 ( <i>a sinistra</i> ) e particolare del solenoide con pin freno meccanico ( <i>a destra</i> ). . . . .	17
3.1	Componenti principali di un riduttore armonico. . . . .	19
3.2	Riduttori armonici con forme diverse di Flexspline: di tipo "cup type" ( <i>a sinistra</i> ); di tipo "silk hat" ( <i>al centro</i> ); di tipo "pancake type" ( <i>a destra</i> ). . . . .	20
3.3	Montaggio dei componenti del riduttore armonico presente nel manipolatore UR5. . . . .	20
3.4	Assemblaggio componenti Harmonic Drive. . . . .	22
3.5	Schematizzazione di un rotismo epicicloidale. . . . .	23
3.6	Rappresentazione schematica del principio di funzionamento di un riduttore armonico con l'albero d'uscita posto sulla Flexspline. . . . .	25
3.7	Profilo a doppio arco: parametri caratteristici ( <i>a sinistra</i> ); denti della Flexspline con profilo a doppio arco ( <i>a destra</i> ). . . . .	30
3.8	Schematizzazione rappresentativa di un Wave Generator. . . . .	32

3.9	Angolo di conicità ( <i>coning angle</i> ) di un riduttore armonico. . . . .	33
3.10	Coefficienti $c_1$ e $c_2$ per il calcolo del momento d'inerzia di un anello sottile ellittico. . . . .	35
3.11	Dimensioni principali della Flexspline indeformata. . . . .	37
3.12	Dimensioni principali della Circular Spline. . . . .	40
3.13	Flexspline con frattura alla base dei denti (a) e usura lungo i fianchi dei denti (b). . . . .	43
3.14	Definizione generale di backup ratio. . . . .	45
3.15	Rottura catastrofica di una Flexspline. . . . .	46
4.1	Rappresentazione schematica di modelli di riduttori armonici. . . . .	50
4.2	Rappresentazione schematica del modello di contatto usato nelle diverse interfacce del riduttore armonico. . . . .	52
4.3	Sistemi di riferimento adottati per la descrizione del modello <i>multi-body</i> del riduttore armonico. . . . .	54
5.1	Diagramma di corpo libero del dente <i>i-esimo</i> della Flexspline. . . . .	57
5.2	Schema di assemblaggio dei tre componenti principali di un riduttore armonico. . . . .	59
5.3	Modello di contatto tra Wave Generator e Flexspline ( <i>a sinistra</i> ); Direzione della forza $F_{WG,FS_i}$ scambiata tra Wave Generator e Flexspline ( <i>a destra</i> ). . . . .	60
5.4	Angoli principali riferiti al Wave Generator. . . . .	63
5.5	Andamento della differenza tra direzione radiale (R) e direzione normale (N) al Wave Generator. . . . .	64
5.6	Scomposizione lungo la direzione normale nei diversi quadranti. . . . .	65
5.7	Scomposizione della forza di contatto tra Wave Generator e Flexspline lungo il sistema di riferimento $(X_0, Y_0)$ . . . . .	67
5.8	Modello di contatto tra denti consecutivi della Flexspline. . . . .	69
5.9	Stima della rigidezza di contatto fra denti consecutivi della Flexspline. . . . .	70
5.10	Inclinazioni delle congiugenti tra il singolo dente $i$ con il dente $i+1$ e $i-1$ . . . . .	71
5.11	Scomposizione delle velocità $\dot{x}_i$ e $\dot{y}_i$ del singolo dente della Flexspline lungo il sistema di riferimento $(X_0, Y_0)$ . . . . .	73
5.12	Scomposizione delle velocità $\dot{x}_i$ e $\dot{y}_i$ del singolo dente della Flexspline lungo il sistema di riferimento $(X_0, Y_0)$ . . . . .	74
5.13	Scomposizione della forza di contatto $F_{i+1}$ tra i denti adiacenti $i$ e $i+1$ della Flexspline lungo il sistema di riferimento fisso $(X_0, Y_0)$ . . . . .	75
5.14	Scomposizione della forza di contatto $F_{i-1}$ tra i denti adiacenti $i$ e $i-1$ della Flexspline lungo il sistema di riferimento fisso $(X_0, Y_0)$ . . . . .	76

5.15	Schematizzazione della coppia flessione $C_{F_i}$ agente sul singolo dente $i$ ( <i>a sinistra</i> ); verifica angolo $\eta_i$ ( <i>a destra</i> ). . . . .	78
5.16	Schematizzazione delle forze flessionali $F_{F_{i+1}}$ e $F_{F_i}$ agente sul singolo dente $i+1$ e $i$ rispettivamente ( <i>a sinistra</i> ); schematizzazione molla di torsione $K_{F_i}$ che modella la coppia flessione $C_{F_i}$ ( <i>a destra</i> ). . . . .	80
6.1	Implementazione del modello di inserimento del Wave Generator in ambiente Simulink <sup>TM</sup> . . . . .	81
6.2	Posizioni $(x_i, y_i)$ dei denti della Flexspline dopo l'inserimento del Wave Generator ( <i>a sinistra</i> ); su grafico polare ( <i>a destra</i> ). . . . .	85
6.3	Variazione delle coordinate $(x_i, y_i)$ dei denti della Flexspline prima e dopo l'inserimento del Wave Generator ( <i>a sinistra</i> ); su grafico polare ( <i>a destra</i> ). . . . .	86
6.4	Differenza tra le posizioni $(x_i, y_i)$ dei denti della Flexspline calcolati tramite il modello di inserimento del Wave Generator e le posizioni approssimate $(x_p, y_p)$ calcolate con le coordinate polari. . . . .	86
6.5	Forze scambiate tra Wave Generator e Flexspline per ogni dente della Flexspline ( <i>a sinistra</i> ); andamento qualitativo delle forze scambiate tra Wave Generator e Flexspline ( <i>a destra</i> ). . . . .	87
6.6	Forze scambiate tra Wave Generator e Flexspline in letteratura. . . . .	88
6.7	Spostamento relativo tra Wave Generator e Flexspline. . . . .	90
6.8	Forze scambiate tra i denti adiacenti della Flexspline ( <i>a sinistra</i> ); distanza $\delta$ tra denti adiacenti della Flexspline prima e dopo l'inserimento del Wave Generator ( <i>a destra</i> ). . . . .	91
6.9	Deformazione tra due denti adiacenti in un harmonic drive con Wave Generator a quattro camme. . . . .	91
6.10	Componenti delle forze di richiamo flessionale $F_{F_i}$ e $F_{F_{i+1}}$ ( <i>a sinistra</i> ); su grafico polare ( <i>a destra</i> ). . . . .	93
6.11	Risultante delle forze di richiamo flessionale $F_{F_i}$ e $F_{F_{i+1}}$ ( <i>a sinistra</i> ); su grafico polare ( <i>a destra</i> ). . . . .	94
7.1	Direzioni principali per il calcolo della forza di richiamo elastico dovuto alla rigidità torsionale della Flexspline ( <i>a sinistra</i> ); posizioni angolari del singolo dente della Flexspline durante la rotazione del Wave Generator ( <i>a destra</i> ). . . . .	97
7.2	Scomposizione lungo la perpendicolare alla direzione radiale nei diversi quadranti. . . . .	99
7.3	Scomposizione della forza di richiamo elastico $F_{R_i}$ della Flexspline lungo il sistema di riferimento $(X_0, Y_0)$ . . . . .	101
7.4	Diagramma di corpo libero del dente $i$ -esimo della Flexspline con l'introduzione ( <i>in rosso</i> ) della forza di richiamo torsionale $F_{R_i}$ . . . . .	101

7.5	Rotazione del Wave Generator. . . . .	105
7.6	Diagramma di corpo libero del Wave Generator ( <i>a sinistra</i> ); particolare sul singolo dente <i>i-esimo</i> in esame ( <i>a destra</i> ). . . . .	106
7.7	Direzione radiale (R), direzione normale (N) e direzione tangente (T) nei diversi punti di contatto $P_i$ tra Wave Generator e Flexspline. . . . .	107
7.8	Processo di ingranamento di un riduttore armonico. . . . .	111
7.9	Verifica della condizione di ingranamento, come specificato nell'equazione (7.35). . . . .	113
7.10	Equilibrio alla rotazione della Circular Spline. . . . .	116
A.1	Sezione 2D di un riduttore armonico HFUS-25-2SH . . . . .	121
A.2	TAVOLA 2D di un riduttore armonico HFUS-25-2SH. . . . .	122

# Acronimi & Simboli

## **Acronimi**

**ANN** Artificial Neural Network

**CBM** Condition Based Maintenance

**CS** Circular Spline

**DDM** Data Driven Model

**FEM** Finite Element Method

**FMEA** Failure Mode and Effects Analysis

**FMECA** Failure Mode, Effects, and Criticality Analysis

**FS** Flexspline

**FTA** Fault Tree Analysis

**HMM** Hidden Markov Model

**MTBF** Mean Time Between Failure

**PDF** Probability Density Function

**PHM** Prognostics and Health Management

**PLC** Programmable Logic Controller

**RC** Rim Crack

**RPN** Risk Priority Number

**RUL** Remaining Useful Life

**SVM** Support Vector Machine

**TBM** Time Based Maintenance

**TC** Tooth Crack

**TCP** Tool Center Point

**WG** Wave Generator

## **Simboli**

**a** semiasse maggiore del Wave Generator

**A** sezione trasversale tra denti adiacenti della Flexspline

**b** semiasse minore del Wave Generator

**b<sub>CS</sub>** lunghezza denti della Circular Spline

**b<sub>FS</sub>** lunghezza dei denti della Flexspline

**b<sub>R</sub>** backup ratio

**c<sub>CS</sub>** coefficiente di smorzamento torsionale della Circular Spline

**C<sub>F</sub>** coppia di richiamo flessionale

**c<sub>F<sub>FS</sub></sub>** coefficiente di smorzamento flessionale della Flexspline

**c<sub>i</sub>** coefficiente di smorzamento del singolo dente della Flexspline

**c<sub>T<sub>FS</sub></sub>** coefficiente di smorzamento torsionale della Flexspline

**c<sub>tooth</sub>** coefficiente di smorzamento tra denti adiacenti della Flexspline

**c<sub>WG</sub>** coefficiente di smorzamento del Wave Generator

**c<sub>WG,FS</sub>** coefficiente di smorzamento tra Wave Generator e Flexspline

**d<sub>b</sub>** diametro corpo volvente

**E** modulo elastico

**f<sub>0</sub>** fattore di correzione in funzione del tipo di lubrificante e del tipo di cuscinetto

**f<sub>1</sub>** fattore di correzione per il tipo di cuscinetto scelto

$\mathbf{F}_{\mathbf{F}_i}$  Forza di richiamo flessionale  
 $\mathbf{F}_{\mathbf{fr}_{\mathbf{WG,FS}}}$  forza d'attrito tra Wave Generator e Flexspline  
 $\mathbf{F}_{\mathbf{i}+1}, \mathbf{F}_{\mathbf{i}-1}$  forze scambiate tra denti adiacenti  
 $\mathbf{f}_n$  frequenza naturale del sistema  
 $\mathbf{F}_{\mathbf{R}_i}$  forza di richiamo torsionale  
 $\mathbf{F}_{\mathbf{t}_i}$  forza scambiata tra i denti della Flexspline e della Circular Spline  
 $\mathbf{f}_{\mathbf{WG,FS}}$  coefficiente d'attrito tra la pista esterna del Wave Generator e la Flexspline  
 $\mathbf{h}_{\mathbf{CS}}$  altezza dei denti della Circular Spline  
 $\mathbf{h}_{\mathbf{FS}}$  altezza dei denti della Flexspline  
 $\mathbf{J}_{\mathbf{ball}_i}$  momento di inerzia di un singolo corpo volvente del Wave Generator  
 $\mathbf{J}_{\mathbf{CS}}$  momento di inerzia della Circular Spline  
 $\mathbf{J}_{\mathbf{FS}}$  momento di inerzia della Flexspline  
 $\mathbf{J}_{\mathbf{hub}}$  momento di inerzia della parte interna del Wave Generator  
 $\mathbf{J}_{\mathbf{ring}}$  momento di inerzia della pista esterna del Wave Generator  
 $\mathbf{J}_{\mathbf{WG}}$  momento di inerzia del Wave Generator  
 $\mathbf{K}_{\mathbf{FFS}}$  rigidezza flessionale della Flexspline  
 $\mathbf{K}_{\mathbf{TFS}}$  rigidezza torsionale della Flexspline  
 $\mathbf{K}_{\mathbf{tooth}}$  rigidezza elastica tra denti adiacenti della Flexspline  
 $\mathbf{K}_{\mathbf{WG,FS}}$  rigidezza elastica di contatto tra Wave Generator e Flexspline  
 $\mathbf{l}$  lunghezza tra la sezione d'ingresso e la flangia della Flexspline  
 $\mathbf{L}$  lunghezza della congiungente tra denti adiacenti della Flexspline  
 $\mathbf{L}_{\mathbf{B}}$  lunghezza alla base dei denti della Flexspline  
 $\mathbf{L}_{\mathbf{FS}}$  lunghezza totale della Flexspline  
 $\mathbf{l}_{\mathbf{WG}}$  profondità pista esterna del Wave Generator  
 $\mathbf{m}$  modulo dei denti della Flexspline

$\mathbf{m}_{\text{CS}}$  massa Circular Spline  
 $\mathbf{m}_{\text{FS}}$  massa Flexspline  
 $\mathbf{m}_i$  massa del singolo dente della Flexspline  
 $\mathbf{m}_{\text{N}}$  pendenza della retta normale al Wave Generator  
 $\mathbf{m}_{\text{WG}}$  massa Wave Generator  
 $\text{N}$  numero colpi volventi del Wave Generator  
 $\mathbf{p}_{\text{B}}$  passo base dei denti della Flexspline  
 $\mathbf{R}(\vartheta_{\text{WG}})$  matrice di rotazione  
 $\mathbf{r}_{0\text{FS}}$  raggio interno della Flexspline indeformata  
 $\mathbf{r}_{0\text{WG}}$  raggio indeformato della pista esterna del Wave Generator  
 $\mathbf{r}_{\text{aCS}}$  raggio di testa dei denti della Circular Spline  
 $\mathbf{r}_{\text{aFS}}$  raggio di testa dei denti della Flexspline  
 $\mathbf{r}_{\text{eCS}}$  raggio esterno della Circular Spline  
 $\mathbf{r}_{\text{eWG}}$  raggio interno della pista esterna del Wave Generator  
 $\mathbf{r}_{\text{iCS}}$  raggio interno della Circular Spline  
 $\mathbf{r}_{\text{iWG}}$  raggio interno della pista interna del Wave Generator  
 $\mathbf{r}_{\text{m}_b}$  raggio medio della posizione dei corpi volventi del Wave Generator  
 $\mathbf{r}_{\text{mCS}}$  raggio medio dei denti della Circular Spline  
 $\mathbf{r}_{\text{mFS}}$  raggio medio dei denti della Flexspline  
 $\mathbf{r}_{\text{shaft}}$  raggio interno albero motore  
 $\mathbf{s}_{\text{boss}}$  spessore della flangia della Flexspline  
 $\mathbf{s}_{\text{eWG}}$  spessore pista esterna del Wave Generator  
 $\mathbf{s}_{\text{iWG}}$  spessore pista interna del Wave Generator  
 $\mathbf{s}_{\text{rimCS}}$  bordo (rim) della Circular Spline  
 $\mathbf{s}_{\text{rimFS}}$  spessore rime della Flexspline

$\mathbf{T}_{\text{CS}}$  coppia in uscita sulla Circular Spline  
 $\mathbf{T}_{\text{fWG}}$  coppia d'attrito del Wave Generator  
 $\mathbf{T}_{\text{FS}}$  coppia in uscita sulla Flexspline  
 $\mathbf{T}_{\text{in}}$  coppia motrice  
 $\mathbf{T}_{\text{R}}$  coppia resistente  
 $\mathbf{T}_{\text{WG}}$  coppia in ingresso sul Wave Generator  
 $\mathbf{T}_{\text{WG,FS}}$  coppia tra Wave Generator e Flexspline  
 $\mathbf{w}$  deformazione del Wave Generator  
 $\dot{\mathbf{w}}$  velocità di deformazione del Wave Generator  
 $\mathbf{w}_0$  deformazione massima del Wave Generator  
 $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$  posizione del singolo dente della Flexspline indeformata  
 $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$  posizioni del singolo dente della Flexspline deformata  
 $\dot{\mathbf{x}}_i, \dot{\mathbf{y}}_i$  velocità del singolo dente della Flexspline deformata  
 $\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p$  posizione dei denti della Flexspline in coordinate polari  
 $\mathbf{x}_{\text{WG}}, \mathbf{y}_{\text{WG}}$  coordinate del profilo ellittico del Wave Generator  
 $Z_{\text{CS}}$  numero di denti Circular Spline  
 $Z_{\text{FS}}$  numero di denti Flexspline  
 $\alpha_{\text{N}}$  inclinazione retta normale al Wave Generator  
 $\alpha_{\text{R}}$  inclinazione retta radiale al Wave Generator  
 $\alpha_{\text{T}}$  inclinazione retta tangenziale al Wave Generator  
 $\beta$  angolo di pressione  
 $\gamma_i$  differenza tra la direzione radiale e la direzione normale al Wave Generator  
 $\delta_0$  distanza tra denti adiacenti della Flexspline indeformata  
 $\delta_{i+1}, \delta_{i-1}$  distanza tra denti adiacenti della Flexspline deformata  
 $\Delta_{\text{WG,FS}}$  deformazione del punto di contatto tra Wave Generator e Flexspline

$\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}$  inclinazione della congiungente tra denti adiacenti della Flexspline deformata

$\eta_i$  rotazione subita dalla congiunte tra denti adiacenti della Flexspline

$\vartheta_{\mathbf{CS}}$  posizione angolare della Circular Spline

$\dot{\vartheta}_{\mathbf{CS}}$  velocità angolare della Circular Spline

$\ddot{\vartheta}_{\mathbf{CS}}$  accelerazione angolare della Circular Spline

$\vartheta_{\mathbf{FS}}$  posizione angolare della Flexspline

$\dot{\vartheta}_{\mathbf{FS}}$  velocità angolare della Flexspline

$\ddot{\vartheta}_{\mathbf{FS}}$  accelerazione angolare della Flexspline

$\vartheta_{\mathbf{WG}}$  posizione angolare della Wave Generator

$\dot{\vartheta}_{\mathbf{WG}}$  velocità angolare della Wave Generator

$\ddot{\vartheta}_{\mathbf{WG}}$  accelerazione angolare della Wave Generator

$\mu_{\mathbf{WG,FS}}$  coefficiente d'attrito tra i denti della Flexspline e della Circular Spline

$\nu_0$  viscosità cinematica del lubrificante

$\rho_i$  raggio vettore del singolo dente della Flexspline

$\tau$  rapporto di trasmissione

$\varphi_i$  deformazione angolare della Flexspline

$\psi_0$  posizione angolare del singolo dente della Flexspline indeformata

$\psi_i$  posizione angolare del singolo dente della Flexspline deformata

# Capitolo 1

## Introduzione

Negli ultimi anni, l'intero settore produttivo ha subito una notevole evoluzione grazie all'introduzione di tecnologie innovative. In questo scenario molte compagnie hanno dovuto gestire la complessità dei loro prodotti, i loro ridotti ciclo vita, la forte richiesta di personalizzazione voluta dai clienti, la necessità di entrare subito sul mercato e la crescente competizione internazionale. Per far fronte a queste sfide, le aziende sono alla costante ricerca di processi produttivi flessibili e in grado di adattarsi alle esigenze di produzione. Si richiede, quindi, che vi sia una grande cooperazione tra i sistemi automatizzati e il lavoro umano. Infatti, gli alti livelli competitivi di molte industrie manifatturiere sono stati raggiunti investendo nella ricerca di tecnologie innovative (e.g. miglioramenti nella robotica, intelligenza artificiale e machine learning) [1].

Nell'ambito della robotica, tutto ciò ha portato allo sviluppo di una nuova generazione di robot in grado di collaborare a contatto e in sicurezza con gli esseri umani. I *robot collaborativi (cobot)* sono caratterizzati dal fatto che la zona di lavoro tra robot e operatore si sovrappone, creando uno spazio comune senza l'esigenza di barriere protettive. Gli obiettivi dei cobot sono di migliorare l'ergonomia di lavoro dell'operatore e, nello stesso tempo, aumentare sicurezza, qualità e produttività durante le fasi di produzione. In questo modo si riescono a combinare le migliori qualità dei robot, quali capacità di carico ed efficienza, con quelle tipiche umane, come capacità cognitive e di adattamento, con l'obiettivo di avere un ambiente di lavoro produttivo, flessibile e sicuro. In generale, l'aiuto del robot collaborativo risulta necessario durante lavori monotoni e in cui è richiesto un prolungato sforzo fisico. L'operatore può così collaborare con il robot quando necessario oppure focalizzarsi su altre mansioni in modo da migliorare la produttività generale [2].

Tuttavia, un robot collaborativo può essere considerato come sicuro finché funziona in condizioni nominali, ma ciò non può essere garantito in caso di guasto o di qualsiasi deviazione dalle sue specifiche di progetto. Poiché questi manipolatori

sono in grado di condividere il proprio spazio di lavoro con un operatore umano, il loro guasto potrebbe non solo causare dei fermi macchina imprevisti e, di conseguenza, perdite economiche, ma anche compromettere la sicurezza del personale che lavora nelle immediate vicinanze. Pertanto, le tecniche di *Prognostics and Health Management (PHM)* potrebbero essere utilizzate per ottimizzare la pianificazione della manutenzione del robot e prevenire eventi indesiderati e guasti imprevisti. Rilevando un guasto del robot nella sua fase iniziale, è possibile monitorarne la crescita e programmare la sostituzione della macchina difettosa prima del verificarsi di qualsiasi comportamento pericoloso [3].

Per garantire il corretto funzionamento di un cobot, pianificandone il movimento e controllandone la posizione, bisogna avere accesso ad un dettagliato modello matematico dell'intero braccio robotico.

Un modello accurato in grado di descrivere non solo cinematicamente, ma anche dinamicamente il comportamento dell'intero braccio robotico UR5, è stato proposto in [4]. Tuttavia, questo modello non è in grado di analizzare il comportamento del robot in presenza di guasti o malfunzionamenti. Di recente, in [5] è stato introdotto un modello *high-fidelity* del robot UR5 a fini diagnostici e prognostici. Lo scopo di questo modello è quello di descrivere nel dettaglio i singoli componenti che caratterizzano il robot collaborativo, in modo da analizzarne il comportamento in condizioni non nominali. La descrizione del comportamento del robot UR5 rappresenta un tema su cui molti ricercatori focalizzano il loro interesse [6, 7]. Infatti, è largamente impiegato in ambiente accademico e presente all'interno dei laboratori del Politecnico di Torino, come riportato in figura 1.1, per diverse attività di ricerca.

Pertanto, in questa trattazione si è deciso di continuare il lavoro di modellazione del manipolatore andando ad analizzare nel dettaglio uno dei suoi componenti fondamentali che è rappresentato dal *riduttore armonico*. Tale approccio ha lo scopo di svilupparne un modello fisico, descritto nel dettaglio all'interno del capitolo 5, sempre più preciso e fedele alla realtà, per ottenere segnali in grado di ben approssimare il comportamento reale del riduttore installato sul manipolatore. Inoltre, un modello *high-fidelity* permetterà di simulare la presenza di guasti all'interno del componente e poter sviluppare algoritmi diagnostici e prognostici in merito. Tale scelta è stata motivata dall'importanza che tale componente ricopre all'interno di un braccio robotico. Un robot riesce a gestire dei guasti elettronici in quanto i segnali elettrici sono collegati a sensori in cui sono impostati dei valori di soglia oltre ai quali la centralina di controllo restituisce un errore e ferma il robot per questioni di sicurezza. I guasti meccanici, invece, non sono immediatamente rilevabili dal robot il quale cerca di compensarli. Per esempio, l'usura tra i suoi componenti o la presenza eventuale di cricche porta ad un aumento d'attrito tra i giunti del robot che gli algoritmi di controllo cercano di compensare fornendo maggiore corrente



**Figura 1.1:** Robot collaborativo UR5 di Universal Robots presente nei laboratori del Dipartimento di Ingegneria Meccanica ed Aerospaziale del Politecnico di Torino.

ai giunti. In questo scenario il robot non riesce ad attivare lo stop di emergenza, sebbene sia ancora in grado di muoversi. Tuttavia esso lavora in condizioni non nominali, in cui le sue prestazioni non sono più garantite. Tutto ciò, in base al tipo di applicazione, può portare al verificarsi di scarti nella produzione, dovuti ad un errato movimento del robot, a guasti impreveduti o ad eventi pericolosi sull'ambiente di lavoro. Inoltre la mancanza in letteratura di modelli in grado di descrivere il comportamento di un riduttore armonico in presenza di guasti o malfunzionamenti è stato un altro motivo per il quale si è scelti di continuare ad approfondire questo argomento. Per un'analisi più dettagliata dello stato dell'arte circa la modellazione di riduttori armonici si rimanda al capitolo 4.

Nonostante lo specifico caso studio, la seguente trattazione ha comunque una validità generale, essendo applicabile a qualsiasi tipologia di riduttori armonici in diversi campi e applicazioni. Grazie ai suoi notevoli vantaggi, come un elevato rapporto di trasmissione, backlash quasi nullo, dimensioni compatte e peso ridotto,

i riduttori armonici hanno trovato un largo impiego nei seguenti settori [8]:

- **Robotica, manipolazione e automazione:** robot industriali, robot collaborativi (cobots), SCARA e Delta Robots, robot umanoidi, manipolazione e automazione;
- **Meccanica:** macchine utensili, macchine di misura, macchine per l'imballaggio;
- **Tecnologia medicinale:** robot chirurgici, diagnostica per immagini, automazione di laboratorio, microscopio operativo, esoscheletri;
- **Industria aerospaziale:** meccanismi aerospaziali, robotica aerospaziale, esplorazione spaziale, rover, controlli di volo, unità di attuazione;
- **Ambienti speciali:** tecnologia militare, vuoto e criogenia.

Siccome i riduttori armonici rappresentano un componente fondamentale dei sistemi elettromeccanici elencati, anche un leggero degrado delle sue prestazioni potrebbe avere un grande impatto sul suo corretto funzionamento.

Inoltre, tale modello può essere usato sia da sé, oppure essere integrato in un modello Matlab-Simulink™ di un braccio robotico [5] in modo da valutare gli effetti dei guasti a livelli macroscopici (e.g. variazioni della posa del *Tool Center Point*) e del relativo comportamento dinamico del robot invece che a livello del riduttore armonico, su cui spesso non si ha accesso.

## 1.1 Prognostics and Health Management (PHM)

L'obiettivo della manutenzione è quello di proteggere le funzioni di un sistema durante il suo ciclo vita. In genere, le manutenzioni effettuate su un prodotto possono essere di tipo reattivo o preventivo. Le prime si basano sulla riparazione del prodotto a guasto avvenuto. Questo tipo di strategia presenta alcune problematiche come il rischio di malfunzionamenti improvvisi, problemi di sicurezza durante la produzione e il rischio di ottenere prodotti non correttamente assemblati. Le seconde, invece, si basano sulla gestione del sistema attraverso intervalli di tempo prestabili, le quali potrebbero avere dei costi troppo elevati [9].

Con lo sviluppo di tecniche diagnostiche sempre più avanzate, si sta passando da un tipo di manutenzione temporale, *time-based maintenance (TBM)*, ad un tipo di manutenzione su condizione, *condition-based maintenance (CBM)*, in cui le misure preventive da attuare si basano sul rilevamento di segnali che possono presagire la nascita di guasti e malfunzionamenti.

Il modo più efficiente ed efficace per ridurre le probabilità di guasto, di disservizi e i costi di manutenzione è attraverso la manutenzione di tipo CBM, sfruttando l'utilizzo della prognostica [9].

Per avere sistemi di produzione sempre più efficaci e versatili a causa della sempre più crescenti e dinamiche richieste di mercato, è opportuno dotarsi di tecniche in grado di monitorare in tempo reale lo stato dei componenti di un sistema di produzione in modo da supportarlo nelle decisioni di manutenzioni. In quest'ottica si sono diffuse le tecniche di PHM (*Prognostics and Health Management*). Il loro obiettivo è proprio quello di fornire supporto alle decisioni da prendere durante il ciclo di vita di un prodotto[10].

Le tecniche di PHM rientrano nell'approccio di manutenzione su condizione (CBM) in quanto la capacità di ottenere delle previsioni di guasto sempre più accurate permette di limitare le probabilità di rottura di un componente. Esse integrano al loro interno:

- **aspetti diagnostici** in grado di rilevare e isolare guasti o rotture;
- **aspetti prognostici** per predire lo stato di salute del sistema e stimarne la vita utile residua, Remaining Useful Life (RUL)<sup>1</sup>, basandosi sulle condizioni di salute del sistema in tempo reale oppure sfruttando dati storici a disposizione [11].

La prognostica si basa sulla consapevolezza che alcuni componenti possono arrivare a rottura dopo un periodo di degradazione. Tuttavia, stimando correttamente questo intervallo di tempo è possibile prevenire il totale malfunzionamento del sistema e ridurre i costi di riparazione [12]. In questo modo le tecniche PHM cercano di prevedere e mitigare i guasti che possono verificarsi in un sistema, cercando di ottimizzarne la manutenzione e ridurre i costi durante il suo ciclo vita [11].

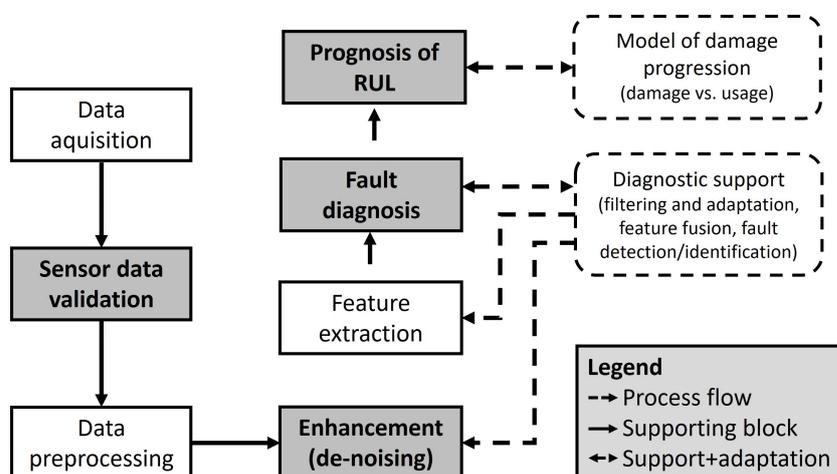
In figura 1.2 è mostrato un esempio di integrazione dei metodi diagnostici e prognostici all'interno di un sistema di manutenzione di tipo CBM/PHM. Qui è possibile distinguere le seguenti fasi:

1. **Pre-processing dei dati raccolti:** i sensori producono i segnali utili a descrivere lo stato di salute del sistema. Tuttavia i dati raccolti potrebbero essere affetti da rumore o disturbi esterni. Pertanto si procede con operazioni di *denoising* cercando di migliorare la qualità dei dati raccolti;

---

<sup>1</sup>rappresenta il tempo o ciclo che intercorre tra il rilevamento di un guasto incipiente e il raggiungimento di una condizione inaccettabile per il funzionamento di un prodotto o processo.

2. **Estrazione indici di salute (feature):** analisi e caratterizzazione dei dati raccolti per selezionare ed estrarre degli indicatori di salute (*health features*) che costituiscono la base per una accurata diagnosi dei guasti (*fault*) ed una affidabile prognosi delle rotture (*failure*) al fine di stimare la vita utile residua (RUL) del sistema;
3. **Costruzione del modello:** modellazione, in questo caso basata sulla fisica del componente/sistema critico, che faciliterà una migliore comprensione della fisica dei meccanismi di guasto e dei loro tempi di propagazione;
4. **Validazione del modello:** in modo da capire se il modello è accurato e può descrivere bene l'evoluzione di un guasto nel sistema, confrontando i risultati ottenuti con i dati sperimentali raccolti.



**Figura 1.2:** Schema logico dell'integrazione di diagnostica e prognostica [11].

## Diagnostica

Le tecniche diagnostiche si basano sulla capacità di rilevare guasti incipienti, chiamati *fault*. Questi tipi di guasti rappresentano il primo passo in cui un sistema inizia a degradarsi, lavorando in condizioni non nominali. Il mancato rilevamento di una *fault* può far degenerare le condizioni di funzionamento di un sistema o di un componente fino al raggiungimento di una rottura o guasto critico, classificato come *failure*.

## Prognostica

Come anticipato, la prognostica è un insieme di tecniche e algoritmi che servono a stimare la vita utile residua di un componente in modo da migliorare la scelta di manutenzione da effettuare su di esso. Le tecniche prognostiche rappresentano il passo successivo agli schemi diagnostici. La prognostica è tuttora un settore in via di sviluppo dal momento che presenta ancora alcune criticità come la mancanza di una metodologia verificata e standardizzata, in parte dovuta alla mancanza di dati sperimentali, alta variabilità di condizioni operative e sistemi in continua evoluzione. Tuttavia, la prognostica è uno dei campi più promettenti tra le tecniche PHM in termini di aspetti benefici apportati.

Siccome la previsione di avvenimenti futuri è legata a molti fattori incerti, la prognostica è da considerare come un processo probabilistico in cui la previsione della RUL viene rappresentata da una funzione densità di probabilità (*Probability density function* - PDF). Essa sarà, quindi, la base di partenza per stabilire i tempi e i modi con cui effettuare la manutenzione. Pertanto, una delle grandi sfide della prognostica è legata ai limiti di accuratezza e precisione che caratterizzano la stima basata su condizioni della RUL. Alcune modalità di rottura possono essere caratterizzate da un certo livello di casualità fisica, ciò contribuisce ad aumentare gli errori intrinseci nei processi prognostici, causando imperfezioni nei segnali rilevati, il processo di essi e la conseguente estrazione di *feature*. In alcuni casi la prognostica potrebbe non essere del tutto fattibile a causa della natura altamente imprevedibile di una modalità di rottura [13]. Inoltre, rotture multiple possono compromettere la capacità di stimare la RUL [14].

### 1.1.1 Approcci diagnostici e prognostici

Le metodologie PHM per la diagnosi di *fault* e la prognosi di *failure* adottano approcci basati sull'esperienza umana, su modelli fisici o digitali, su set di dati ed eventi storici.

L'approccio **Data-Driven Models (DDM)** crea una relazione non lineare tra i segnali in input e quelli in output senza utilizzare modelli fisici. Il vantaggio di questo tipo di approccio è che può essere applicato a qualsiasi livello, dal sistema

generale fino al singolo componente. Gli algoritmi prognostici che si basano su un approccio DDM riescono a creare dei modelli direttamente dai dati a disposizione. Essi sfruttano l'utilizzo del *machine learning* e del riconoscimento di schemi (*pattern*) statistici [15]. Le tecniche di *machine learning* includono al loro interno *Artificial Neural Networks* (ANNs), logica fuzzy, *Support Vector Machine* (SVM) e modelli di Markov nascosti (Hidden Markov Model - HMM), mentre le tecniche statistiche si basano sia modelli parametrici che non parametrici [15]. Tuttavia gli approcci basati sulla statistica (Manutenzione Centrata sull’Affidabilità, probabilità bayesiana) tendono ad ignorare le correlazioni che intercorrono tra i vari dati [16]. I metodi DDM spesso producono modelli di guasto basati su reti neurali che devono essere addestrate attraverso dati in grado di rappresentare guasti previsti che in alcuni casi risultano essere irreperibili oltre che difficili da validare [17].

Infatti, in un robot il *Mean Time Between Failures* (MTBF) è nell’ordine delle decine di migliaia di ore [18]. Questo causa una mancanza di dati provenienti da unità difettose, che incide negativamente sulle prestazioni dei DDM [3, 19].

Dall’altro lato, l’approccio prognostico **Physics Based Models (PBMs)**, anche conosciuto come **prognostica Model-based**, riesce a sopperire alla mancanza di dati storici a disposizione andando a sfruttare i vari segnali in ingresso che gli permettono di estrarre delle feature su cui produrre una stima della RUL sulla base delle condizioni di usura di un componente [13]. Questo tipo di approccio, che comporta la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie, combina le condizioni operative effettive per calcolare il danno accumulato e prevedere la RUL del prodotto. Il vantaggio dei metodi basati sulla fisica del componente è la capacità di isolarne la causa principale e i meccanismi di guasto. Tuttavia, è necessario che il personale altamente qualificato sia in possesso di informazioni sufficienti su un prodotto (ad es. condizioni operative) e sui suoi meccanismi di guasto per applicare tali metodi [17].

Per il caso studio di questa trattazione un approccio di tipo ibrido, sfruttando sia i vantaggi dei modelli *model-based* che dei modelli DDM, potrebbe migliorare notevolmente la capacità di previsione dei guasti e la stima della vita utile residua. Lo scopo dello sviluppo di un modello *multibody* come copia digitale di un riduttore armonico è proprio quello di simulare la presenza di alcuni guasti al suo interno. I dati ottenuti saranno poi integrati all’interno di un modello più ampio di un manipolatore robotico da cui ottenere segnali che descrivono il comportamento del robot in condizioni non nominali. Tali segnali faranno da database per i modelli DDM su cui eseguire il processo di selezione delle *feature*, a loro volta propedeutiche alla stima della RUL.

## Capitolo 2

# Caso studio del robot collaborativo UR5

I cobot<sup>1</sup> della Universal Robots<sup>2</sup> sono una serie di bracci robotici a sei gradi di libertà leggeri, veloci, sicuri, versatili e facili da programmare. Queste caratteristiche li hanno resi particolarmente diffusi sia in ambiente accademico per attività di ricerca che in ambito industriale soprattutto per le operazioni di manipolazione e posizionamento di oggetti (*pick & place*). Esistono diversi modelli appartenenti alla famiglia Universal Robots: UR3, UR5, UR10 e UR16. Essi si differenziano per sbraccio e capacità di carico, indicata attraverso l'ultima cifra della sigla, come mostrato in figura 2.1 [20].

Il braccio robotico UR5 permette di automatizzare compiti ripetitivi e impegnativi con carichi fino a 5 kg con un raggio d'azione di 850 mm. Queste elevate prestazioni sono raggiunte dal robot nonostante il suo ridotto ingombro (circa 20 kg di peso per un'impronta alla base di 149 mm) [21]. Il cobot UR5, grazie alle sue caratteristiche, sintetizzate nella tabella 2.1, risulta particolarmente adatto per attività come lucidatura, avvitatura, stampaggio ad iniezione, confezionamento e pallettizzazione, analisi di laboratorio, incollaggio e dosatura, asservimento macchine, prelievo e posizionamento, assemblaggio e controllo qualità [22].

---

<sup>1</sup>I cobot della Universal Robots sono conformi allo standard ISO 10218-1:2006.

<sup>2</sup>Universal Robots è un produttore danese di bracci robotici collaborativi (*cobots*), fondata nel 2005. Nel 2008 Universal Robots introduce sul mercato il primo cobot. Ad oggi può contare su un'intera famiglia di diversi cobot (UR3, UR5, UR10, UR16) sfruttati da diverse aziende per automatizzare e rendere più flessibili i loro processi produttivi con un rapido ritorno d'investimento.



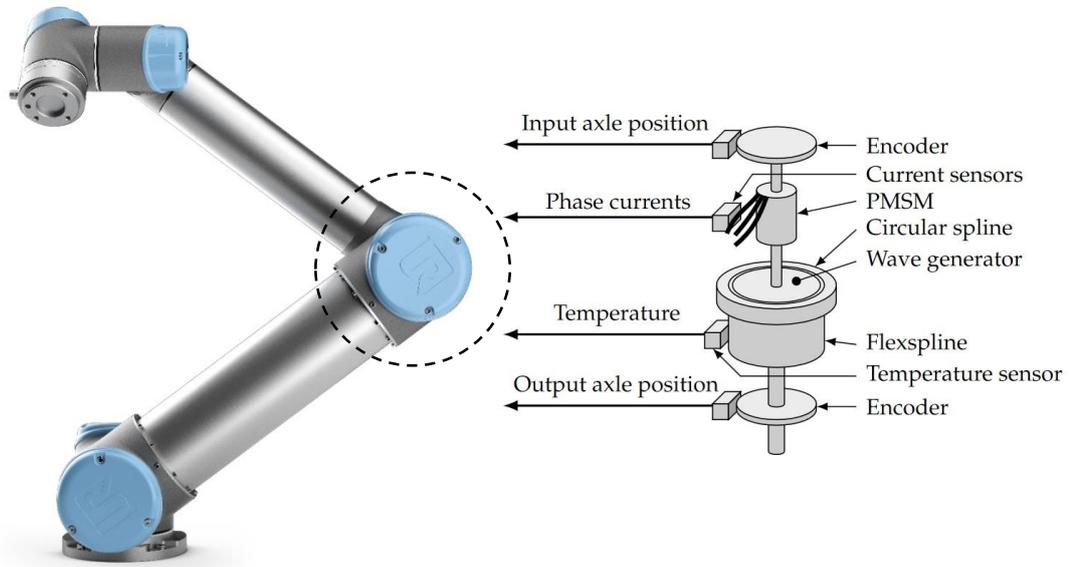
**Figura 2.1:** Modelli di cobot della Universal Robots [20].

**Tabella 2.1:** Specifiche principali per il cobot UR5 [6, 21, 22].

UR5	
Sbraccio [mm]	850
Payload [kg]	5
Impronta [mm]	Ø149
Peso [kg]	18,4

Il robot collaborativo UR5 è un braccio robotico formato da 6 giunti: base, spalla, gomito, polso 1, polso 2, polso 3. Ogni giunto è composto, come schematizzato in figura 2.2, da:

- **attuatore elettrico:** costituito da un servomotore elettrico sincrono a magneti permanenti (Permanent Magnet Synchronous Motors-PMSM);
- **riduttore armonico:** costituito da Wave Generator, Flexspline e Circular Spline, si veda il capitolo 3 per maggiori dettagli su questo componente;
- **sensoristica:** sensori di posizione, velocità, corrente e di temperatura.



**Figura 2.2:** Robot collaborativo UR5 di Universal Robots con rappresentazione schematica dei componenti principali del singolo giunto [6, 23, 24].

Il servomotore elettrico fornisce velocità elevate e basse coppie come input, mentre la trasmissione, costituita dal riduttore armonico, fornisce velocità basse e coppie elevate come output. Nella tabella 2.2 sono mostrati i massimi valori di coppia, forniti dal produttore, raggiunti per ogni giunto del robot UR5.

**Tabella 2.2:** Coppia massima per le diverse taglie del cobot UR5 [25].

Giunti UR5	Taglia giunto	Coppia massima [Nm]
Base, Spalla, Gomito	Taglia 3	150
Polso 1, 2, 3	Taglia 1	28

Ad ogni giunto è associata una specifica taglia, che per i robot collaborativi della Universal Robots possono variare da taglia 0 a taglia 4. Nel caso in esame, si hanno solo due taglie di giunti: taglia 1 per i giunti polso 1, polso 2, polso 3 e taglia 3 per i giunti base, spalla, gomito. Di conseguenza, si ottengono solo due valori massimi di coppia in uscita da ogni giunto relativi alla rispettiva taglia, pari a 28 Nm per i giunti di taglia 1 e 150 Nm per i giunti di taglia 3.

Nelle sezioni seguenti saranno descritti nel dettaglio i singoli componenti che caratterizzano un giunto del robot collaborativo UR5.

## 2.1 Motore elettrico e scudo

Tutti i giunti del robot collaborativo UR5 sono alimentati da motori ad azionamento diretto prodotti da Kollmorgen Corp. e appartenenti alla serie *KBM frameless*<sup>TM</sup> [26, 27]. Si tratta di motori elettrici sincroni brushless in corrente alternata (AC) a magneti permanenti (PMSM) che Universal Robots è riuscita a incorporare direttamente negli assi delle articolazioni senza la necessità di carcasse addizionali. Così facendo, il robot stesso assume la funzione della carcassa motore, mentre il riduttore serve simultaneamente come supporto primario del rotore. Questa serie di motori è stata scelta da Universal Robots anche per l'impiego al loro interno di materiali di altissima qualità, come i magneti permanenti a terre rare, che permettono di raggiungere elevate densità di coppia e ridurre le perdite termiche. In questo modo è stato possibile integrare il motore all'interno del giunto del robot. Il tutto, unito anche alla compattezza del riduttore armonico, permette di avere un organo di trasmissione senza elementi superflui, quindi diminuendo gli ingombri e il peso dell'intero sistema [28].

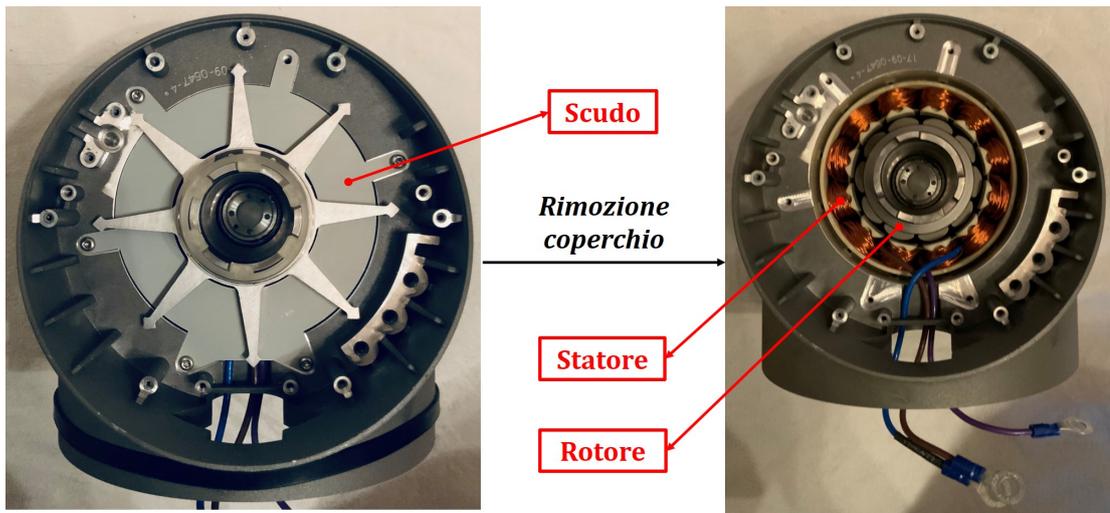
Universal Robots afferma che i motori utilizzati sono stati personalizzati insieme a Kollmorgen. Altre ricerche in fase di sviluppo mostrano come i motori TBM siano più simili a quelli montati all'interno del giunto come quello mostrato in figura 2.3, in cui è stato riscontrato che i motori della serie KBM risultino leggermente più grandi rispetto alla sede del giunto stesso del cobot UR5. Pertanto, è stato ipotizzato che sia stata utilizzata la serie TBM all'interno dei cobot UR5.

I dati caratteristici dei motori elettrici utilizzati sono sintetizzati in tabella 2.3 [26]. In cui è riportata la coppia continuativa di servizio ( $T_{cs}$ ), il momento d'inerzia dell'albero motore ( $J_m$ ), la coppia d'attrito statica ( $T_C$ ) e la costante di attrito viscoso ( $f_v$ ).

**Tabella 2.3:** Parametri stimati dei motori elettrici [26, 27].

Giunto UR5	$T_{cs}$ [Nm]	$J_m$ [kg m <sup>2</sup> ]	$T_C$ [Nm]	$f_v$ [Nm s/rad]
Base, Spalla, Gomito	2,87	$8,8 \times 10^{-5}$	$7,4 \times 10^{-2}$	$6,6 \times 10^{-5}$
Polso 1, 2, 3	1,41	$2,0 \times 10^{-5}$	$3,4 \times 10^{-2}$	$3,4 \times 10^{-5}$

In figura 2.3 si evidenzia anche la presenza di uno *scudo*, il quale permette di separare e proteggere l'elettronica e i sensori dagli avvolgimenti dello statore e dal rotore del motore elettrico.



**Figura 2.3:** Vista del giunto dall'alto, dopo aver rimosso encoders e centralina elettronica (a sinistra); Vista dall'alto di rotore e avvolgimenti dello statore (a destra).

## 2.2 Riduttore

La presenza di un riduttore armonico all'interno di un giunto robotico deriva dalle sue particolari caratteristiche in grado di avere un elevato rapporto di trasmissione pur mantenendo ingombro e peso ridotti. In questo modo è possibile ridurre le elevate velocità di rotazione fornite dal motore elettrico in ingresso al giunto e aumentare la coppia sull'albero d'uscita, garantendo una elevata capacità di carico e una trasmissione fluida e accurata.

I riduttori armonici sono impiegati in diversi altri manipolatori robotici come Kuka LWR, FANUC LR Mate 200i, Yaskawa Motoman HP3J, DLR 7 DOF robot e Mitsubishi PA-10 [6].

Come evidenziato precedentemente, il robot UR5 è costituito da giunti di due taglie diverse, taglia 1 e taglia 3. Per ognuna di essa si riscontra un modello diverso di riduttore armonico adottato:

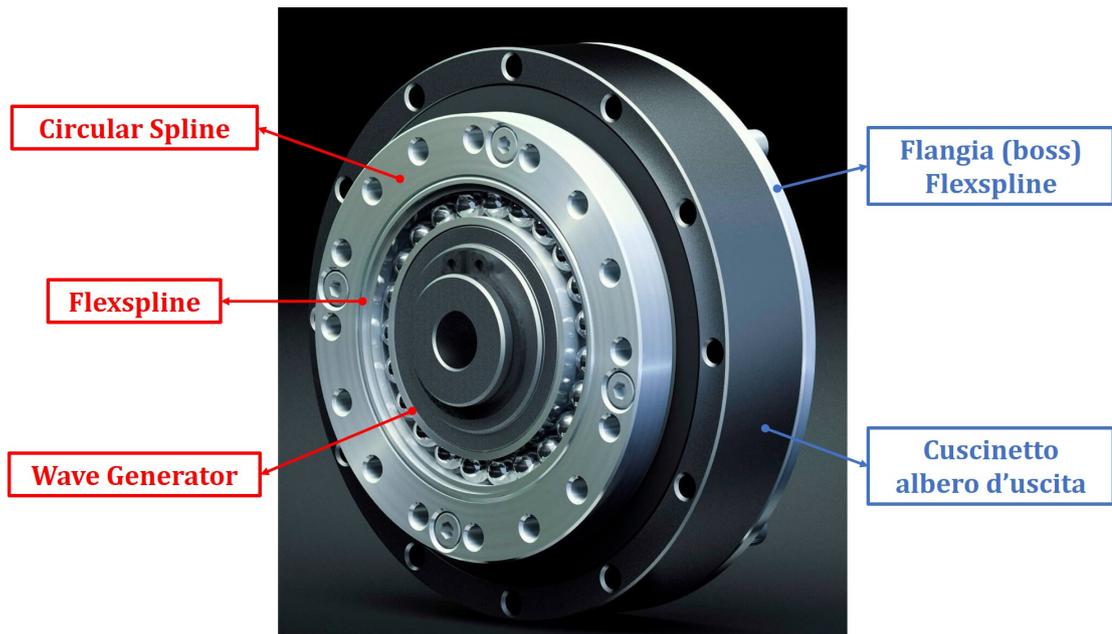
- il modello HFUS-25-2SH per i giunti di taglia 3 (base, spalla, gomito);
- il modello HFUS-14-2SH per i giunti di taglia 1 (polso 1, polso 2, polso 3).

In tabella 2.4 sono riportati i modelli di riduttore armonico montati nei giunti del robot UR5 in base alle rispettive taglie con alcuni dei loro parametri stimati: coppia d'attrito coulombiana ( $T_C$ ), momento d'inerzia  $J_r$ , rendimento ( $\eta$ ) [27].

**Tabella 2.4:** Modelli dei riduttori armonici presenti nel cobot UR5 e relativi parametri fisici [27].

Giunti UR5	Riduttore	$T_C$ [Nm]	$J_r$ [kg m <sup>2</sup> ]	$\eta$
Base, Spalla, Gomito	HFUS-25-2SH	0,069	$1,07 \times 10^{-4}$	0,75
Polso 1, 2, 3	HFUS-14-2SH	0,029	$0,19 \times 10^{-4}$	0,75

Le informazioni di tipo dimensionale e prestazionale dei relativi riduttori armonici possono essere parzialmente ricavate dal catalogo fornito dal produttore, Harmonic Drive AG [29]. In figura 2.4 è mostrato il riduttore armonico HFUS-25-2SH montato all'interno dei giunti base, spalla, gomito di taglia 3. Esso è del tutto analogo al modello HFUS-14-2SH montato nei giunti di taglia 1 in termini di componenti ed interazioni tra essi, mentre differisce dal quest'ultimo in termini di dimensioni e prestazioni. Il modello HFUS-25-2SH sarà oggetto di una approfondita analisi sia dimensionale che prestazionale nel capitolo 3, ed è stato preso come riferimento per lo sviluppo di un modello *multibody* di un generico riduttore armonico, analizzato nel dettaglio all'interno del capitolo 7.

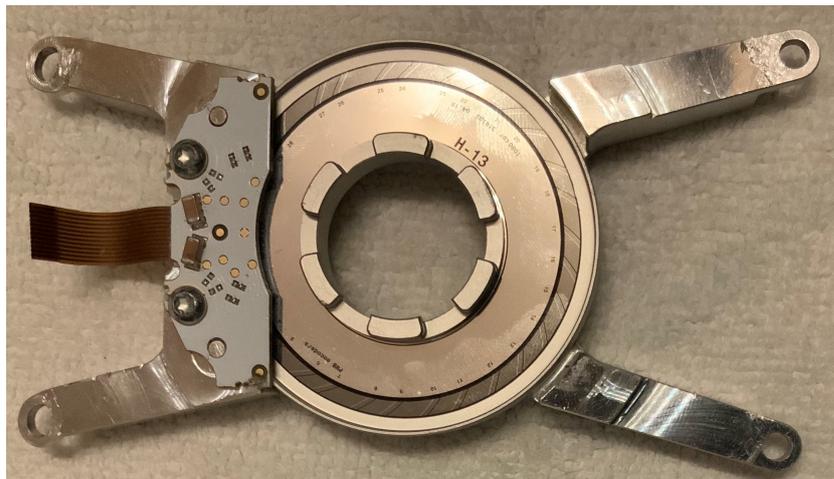
**Figura 2.4:** Riduttore armonico HFUS-25-2SH [30].

## 2.3 Sensori

La posizione, la velocità dei singoli giunti e la corrente dei singoli motori, come detto in precedenza, sono acquisite mediante dei sensori. Solitamente encoder magnetico per la posizione del giunto, encoder ottico per la velocità del motore ed un sensore effetto Hall per la corrente, che chiudono i relativi anelli del sistema di controllo del singolo giunto. Tutti i segnali elettrici vengono convogliati all'interno della PCB (*Printed circuit board*), che rappresenta il sistema di controllo del singolo giunto. Essa comunica con l'unità di controllo del robot, ovvero il centro di controllo primario del manipolatore. Un guasto in questi componenti causa letture errate e di conseguenza errori nel controllo.

### 2.3.1 Encoder ottico

Un encoder ottico, prodotto da PWB encoders, solidale all'albero motore del giunto, si occupa di misurare la velocità dell'albero motore e chiudere il relativo anello di retroazione. Il sensore mostrato in figura 2.5 è montato su un giunto di taglia 3 dei robot collaborativi di Universal Robots, presente quindi all'interno del cobot UR5 in esame.



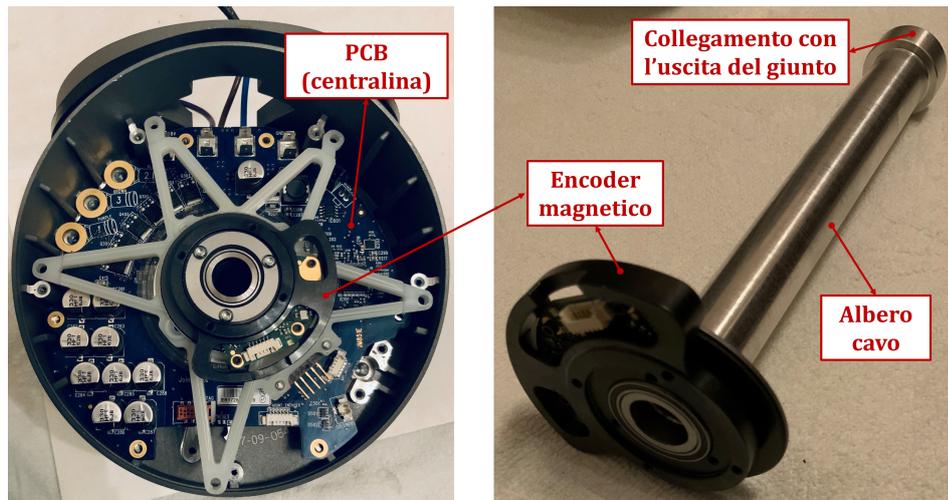
**Figura 2.5:** Encoder ottico presente su un giunto di taglia 3 di un UR5.

Le sue caratteristiche principali sono: 1080 counts per revolution (CPR) e 318 lines per inch (LPI).

### 2.3.2 Encoder magnetico

La posizione angolare del giunto è misurata attraverso encoder magnetici assoluti, un esempio è riportato in figura 2.6, prodotti da Renishaw™ [31]. L'encoder magnetico è posto a valle del riduttore in modo da tenere conto di eventuali giochi e limitare gli errori sistematici, garantendo al robot una ripetibilità di  $\pm 0,1\text{mm}$ .

Per fare in modo di avere tutti i sensori da una parte, l'encoder magnetico è calettato ad un albero cavo solidale all'uscita del riduttore che attraversa l'intero giunto. In questo modo si ottiene un giunto più compatto e pulito.

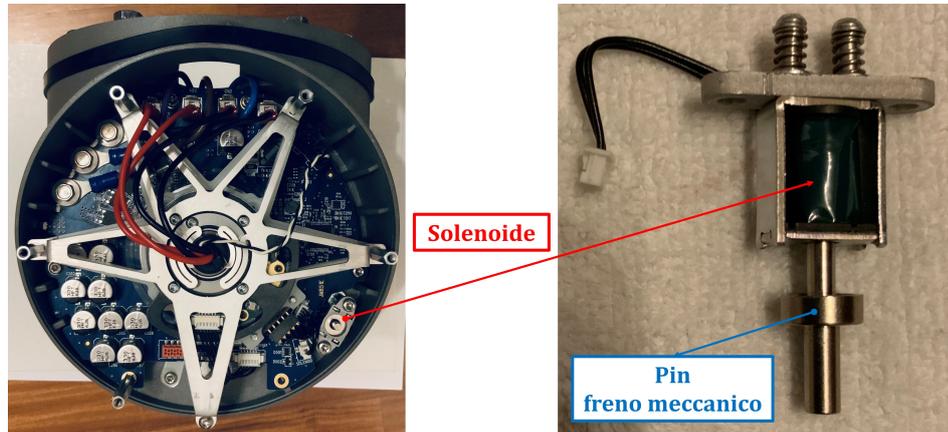


**Figura 2.6:** Vista dall'alto del giunto di taglia 3 di un UR5 (a sinistra) e particolare dell'encoder magnetico (a destra).

### 2.4 Freno meccanico

L'anello del freno meccanico è calettato sul rotore del motore elettrico in ingresso al sistema di trasmissione del giunto. Si nota, quindi, come Universal Robots abbia scelto di montare il freno meccanico lato motore e non lato riduttore all'uscita del giunto. Questa scelta è motivata dalle basse coppie, generate lato motore, che permettono di montare un freno più piccolo rispetto alle coppie elevate, riscontrate all'uscita del giunto. In più, il montaggio del freno lato motore, una volta attivato, è in grado di bloccare la rotazione del giunto in uno spazio ristretto. Questo è dovuto alla rotazione minore che si riscontra in uscita dal giunto rispetto a quella effettuata dall'albero motore in ingresso a causa dell'elevato rapporto di trasmissione, pari a 101, del riduttore armonico.

Il solenoide posto all'interno del freno meccanico, come mostrato in figura 2.7, serve per l'attivazione e il successivo rilascio dei freni di emergenza che bloccano il giunto del robot. Per motivi di sicurezza, tali sistemi sono attivi (*freni armati*) di default e vengono sganciati alimentando il solenoide ad una tensione di 24 V. Tuttavia, non è previsto un feedback di avvenuto sgancio del freno.



**Figura 2.7:** Vista dall'alto del giunto di taglia 3 di un UR5 (*a sinistra*) e particolare del solenoide con pin freno meccanico (*a destra*).

## Capitolo 3

# Il componente Harmonic Drive<sup>®</sup>

Il riduttore armonico o *strain wave gear*, noto soprattutto attraverso il nome commerciale *Harmonic Drive*<sup>®1</sup>, fu introdotto e brevettato per la prima volta nel 1955 negli Stati Uniti da C.W. Musser per applicazioni aerospaziali [32–34]. Grazie al suo particolare tipo di ingranamento, questo meccanismo permette di ottenere elevati rapporti di riduzione con ingombro e peso contenuti. Siccome l'harmonic drive ha un comportamento in parte diverso rispetto ai riduttori convenzionali, si apre una nuova area di interesse e di studio.

Esso presenta caratteristiche prestazionali sia superiori che inferiori rispetto ai convenzionali sistemi di trasmissione. Tra i vantaggi che caratterizzano i riduttori armonici ci sono:

- ingranamento simultaneo di più coppie di denti in presa che garantisce un'operazione fluida e silenziosa;
- assenza di *backlash* che permette un preciso trasferimento del moto;
- elevato rapporto di riduzione in un singolo stadio, si possono raggiungere valori di rapporti di trasmissione  $\tau = 800$  [35];
- elevata efficienza;
- dimensioni contenute con design compatto;
- ampio campo di possibili configurazioni di funzionamento.

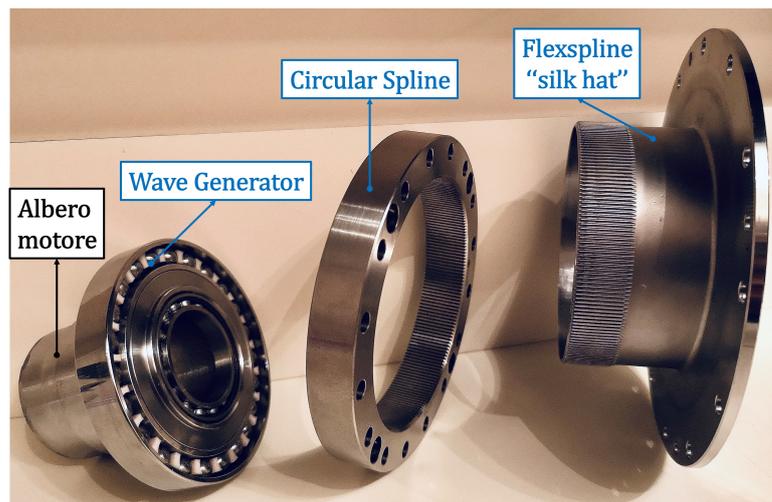
---

<sup>1</sup>è un marchio registrato da Harmonic Drive Systems Inc.

Tra gli svantaggi bisogna considerare:

- rottura a fatica dovuta alla sollecitazione ciclica che subisce il componente elastico e sottile (*Flexspline*);
- interferenza tra i profili dei denti. A causa delle loro ridotte dimensioni, è necessario un minimo errore di posizionamento per avere problemi di inceppamento;
- vibrazioni, risonanze, attrito e non linearità relative agli smorzamenti strutturali.

Gli harmonic drive sono dei particolari riduttori di velocità che si basano su una periodica deformazione elastica di un componente (*Flexspline*) invece che su un ingranamento tra corpi rigidi, come avviene nei riduttori tradizionali. In questo modo, si riesce a trasferire il moto e la potenza agli altri elementi della trasmissione con cui è collegato. I riduttori armonici sono composti da tre componenti principali, mostrati in blu nella figura 3.1.



**Figura 3.1:** Componenti principali di un riduttore armonico.

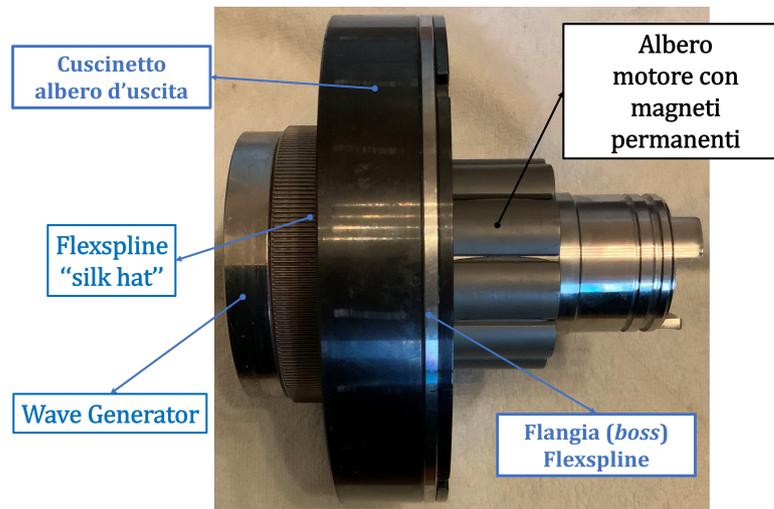
Tali componenti sono:

- **Flexspline:** componente flessibile d'acciaio a forma di cilindro circolare a parete sottile (possono essere di tipo "cup type", "silk hat", "pancake type", come mostrato in figura 3.2).



**Figura 3.2:** Riduttori armonici con forme diverse di Flexspline: di tipo "cup type" (a sinistra); di tipo "silk hat" (al centro); di tipo "pancake type" (a destra) [36].

Il riduttore armonico, montato all'interno del cobot UR5 e scelto come punto di partenza in questa trattazione per lo sviluppo di un suo modello *multibody*, possiede al suo interno una Flexspline di tipo "silk hat". Questa scelta permette di avere un riduttore molto performante e una flangia posteriore, mostrata in figura 3.3, che rappresenta una perfetta superficie di montaggio all'interno della carcassa del cobot UR5.



**Figura 3.3:** Montaggio dei componenti del riduttore armonico presente nel manipolatore UR5.

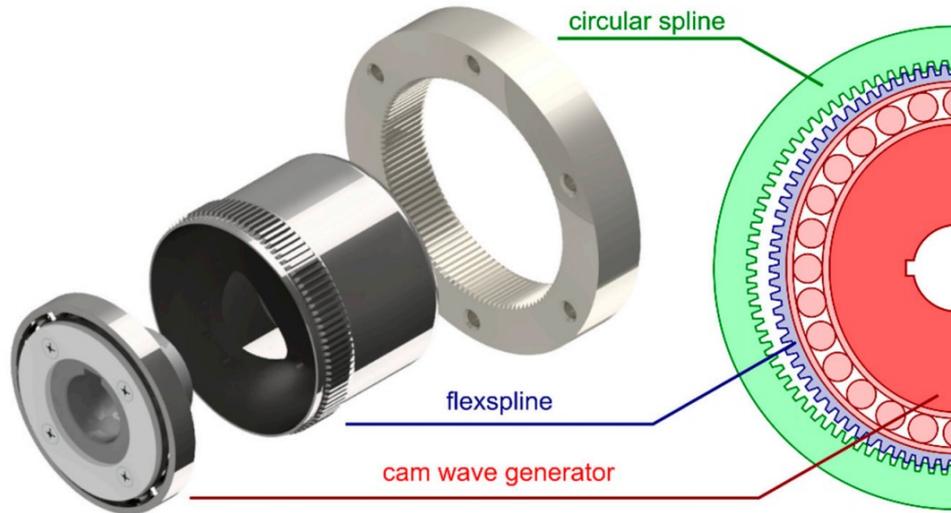
Una Flexspline di tipo “cup type” è utilizzata in applicazioni in cui è richiesto un ridotto ingombro pur mantenendo delle prestazioni elevate. In ultimo, una Flexspline di tipo “pancake type” è utilizzata in applicazioni in cui è necessario limitare i costi dei singoli componenti e non sono richieste elevate prestazioni, come l’assenza del backlash [36]. Qualsiasi tipo di Flexspline presenta una deformabilità nella sezione d’ingresso, detta anche sezione aperta, in cui viene inserito il Wave Generator, mentre mantiene una forma circolare nella sezione d’uscita su cui, in genere, è collegato l’albero d’uscita. Tutti i tipi di Flexspline hanno una dentatura esterna nella zona d’ingresso. Quando il Wave Generator è inserito all’interno della Flexspline, il bordo sottile di questa assume la forma ellittica imposta dal Wave Generator;

- **Circular Spline:** anello (o corona) rigido con dentatura interna, la quale ingrana con quella esterna della Flexspline lungo l’asse maggiore della forma ellittica del Wave Generator. La Circular Spline ha, molto spesso, due denti in più [37] rispetto alla Flexspline ed, in genere, è fissa rispetto alla carcassa del giunto. Tuttavia, nel caso studio del manipolatore UR5 la Flexspline è fissa rispetto al giunto, mentre la Circular Spline è collegata all’uscita. Ciò permette di raggiungere un rapporto di trasmissione di 101, anziché di 100, come nel caso generico di Circular Spline fissa;
- **Wave Generator:** è composto da un cuscinetto a sfere montato su un anello (*hub*) ellittico. In genere è calettato direttamente sull’albero motore posto all’ingresso del riduttore armonico. Quando è inserito all’interno della Flexspline, la rotazione dell’anello interno genera, alle estremità del suo asse maggiore, una coppia di onde di deformazione che si propagano lungo la pista esterna del cuscinetto, permettendo alla dentatura esterna della Flexspline di ingranare con la dentatura interna della Circular Spline. Questo permette di avere circa il 30% di denti in presa simultaneamente durante la fase d’ingranamento [35, 38].

In figura 3.4 è schematizzato il montaggio dei tre componenti principali di un harmonic drive: *Wave Generator*, *Flexspline* e *Circular Spline*.

Per ricavare il rapporto di trasmissione  $\tau$  del riduttore armonico è necessario stabilire la funzione che ogni singolo componente andrà a svolgere durante il funzionamento. Nel caso del robot collaborativo UR5 si ottiene la seguente configurazione:

- **Input:** Wave Generator;
- **Output:** Circular Spline;
- **Fisso:** Flexspline.



**Figura 3.4:** Assemblaggio componenti Harmonic Drive [39].

Stabilito, quindi, il ruolo di ogni componente, è possibile ricavare il rapporto di trasmissione  $\tau$ , utilizzando l'equazione (3.1) fornita dal catalogo del produttore [29]:

$$\tau = \frac{Z_{CS}}{Z_{CS} - Z_{FS}} = \frac{202}{202 - 200} = 101 \quad (3.1)$$

Dove:

$Z_{FS} = 200$  è il numero di denti della Flexspline;

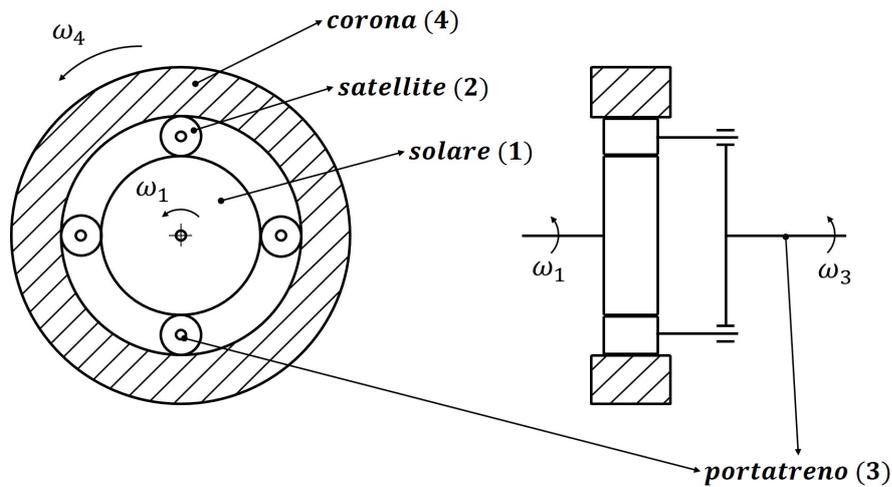
$Z_{CS} = Z_{FS} + 2 = 202$  è il numero di denti della Circular Spline.

Dall'equazione (3.1) si deduce che il rapporto di trasmissione del riduttore armonico in esame è di:  $\tau = 101$ . Questo valore, relativamente elevato, lo rende ideale per applicazioni di manipolazione robotica.

Inoltre, esistono altri modi possibili di configurazioni di montaggio consultabili attraverso il catalogo del produttore del riduttore armonico [29]. Un esempio tipico è quello in cui si tiene fissa la Circular Spline, mentre la Flexspline diventa l'elemento mobile su cui calettare l'albero d'uscita del giunto robotico. In questo caso, il rapporto di trasmissione risulta essere pari a 100.

### 3.1 Principio di funzionamento

Il riduttore armonico può essere considerato come un caso particolare di rotismo epicicloidale. In figura 3.5 è riportato un esempio di rotismo epicicloidale in cui la ruota 1 e la ruota 4 hanno assi fissi e rappresentano rispettivamente il *solare* e la *corona*. Queste due ruote possono ingranare con una o più ruote 2 ad assi mobili dette *satelliti*. Gli assi dei satelliti sono portati in rotazione da un terzo elemento chiamato *portatreno* con asse coincidente a quello del solare. I rotismi epicicloidali differiscono da quelli ordinari per avere più di un grado di libertà [40].



**Figura 3.5:** Schematizzazione di un rotismo epicicloidale.

Il riduttore armonico differisce a sua volta da un tradizionale rotismo epicicloidale per l'assenza del solare e la presenza di solo due ruote: un satellite ( $S$ ) ed una corona esterna ( $F$ ), rappresentata dalla Circular Spline. Il moto in ingresso è affidato al portatreno ( $P$ ), funzione svolta dal Wave Generator, mentre il moto in uscita è ciò che distingue i vari tipi di rotismi epicicloidale non convenzionali. In generale, l'albero dell'utilizzatore deve avere un asse fisso rispetto al telaio del riduttore, ovvero alla corona esterna fissa. Ciò che caratterizza un riduttore armonico è la capacità di trasformare il moto planetario del satellite, quindi una combinazione di moto di rivoluzione e di rotazione, ad un asse fisso rispetto al telaio, in modo da poter collegare l'albero d'uscita. Questo viene fatto sfruttando la deformabilità del componente flessibile *Flexspline*.

Usando la formula di Willis, è possibile scrivere il rapporto di trasmissione del rotismo in un sistema di riferimento solidale al portatreno ( $P$ ). Questo rapporto di trasmissione noto come *rapporto di trasmissione del rotismo epicicloidale reso*

ordinario (cioè ad assi fissi), è detto anche *tau di Willis*  $\tau_W$  [41, 42]:

$$\tau_W = \frac{\omega_S - \omega_P}{\omega_F - \omega_P} = \frac{Z_F}{Z_S} \quad (3.2)$$

Dove:

$\omega_S$  [rad/s] è la velocità angolare del satellite ( $S$ );

$\omega_P$  [rad/s] è la velocità angolare del portatreno ( $P$ );

$\omega_F$  [rad/s] è la velocità angolare della corona esterna ( $F$ );

$Z_F$  è il numero di denti della corona esterna ( $F$ );

$Z_S$  è il numero di denti del satellite ( $S$ ).

Spesso nei riduttori armonici si preferisce usare la configurazione in cui si tiene fissa la corona esterna, ovvero ponendo  $\omega_F = 0$ , perciò dalla (3.2) si ottiene che:

$$\frac{\omega_S}{\omega_P} = 1 - \frac{Z_F}{Z_S} = \frac{Z_S - Z_F}{Z_S} \quad (3.3)$$

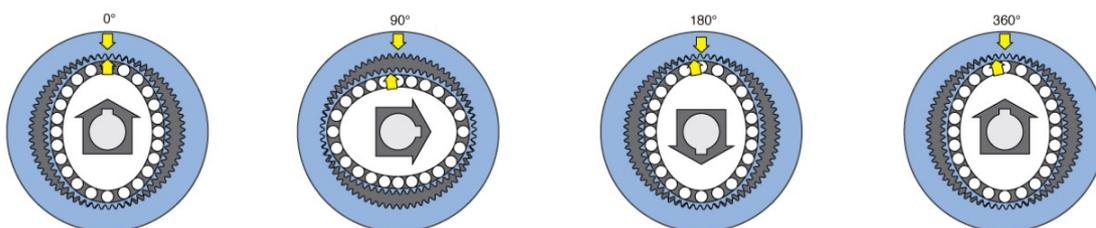
In questo modo si annulla uno dei due gradi di libertà del riduttore ed è possibile ricavare il rapporto di trasmissione  $\tau$  del riduttore rispetto ad un sistema di riferimento fisso, che sarà il rapporto tra le velocità angolari di albero motore ed albero utilizzatore:

$$\tau = \frac{\omega_P}{\omega_S} = \frac{Z_S}{Z_S - Z_F} = \frac{Z_{FS}}{Z_{FS} - Z_{CS}} < 0 \quad (3.4)$$

In questo modo si ottiene un rapporto di trasmissione  $\tau$  negativo, indicando come albero motore e albero utilizzatore ruotino in verso opposto. L'equazione (3.4) è la stessa riportata all'interno del catalogo [29] del riduttore armonico utilizzato nel cobot UR5 nella configurazione in cui si sceglie di tenere la Circular Spline fissa e l'output sulla Flexspline. Sempre dalla (3.4) si nota come, per ottenere alti rapporti di trasmissione, è necessario avere un elevato numero di denti  $Z_{FS}$  sulla Flexspline e piccole differenze  $Z_{FS} - Z_{CS}$  tra i denti della Flexspline e della Circular Spline.

La Flexspline assume la forma ellittica del Wave Generator inserito al suo interno, deformandosi radialmente. Inserita nella Circular Spline, a causa della forma ellittica assunta, si hanno due regioni di contatto l'una opposta all'altra lungo l'asse maggiore dell'ellisse. Durante la rotazione dell'albero motore, l'anello flessibile possiede una pulsazione in direzione radiale dovuta alla deformazione indotta dal cuscinetto ellittico. Proprio a causa di queste pulsazioni, al Wave Generator ed al riduttore nel suo complesso vengono rispettivamente dati i nomi di

generatore d'onda e di riduttore armonico [41]. La deformazione si sposta lungo la Flexspline come un'onda (*wave*), da qui il nome di riduttore armonico (*strain wave gearing*). La differenza di denti tra Flexspline e Circular Spline genera una rotazione del sistema pari all'angolo sotteso ad un dente della Flexspline ogni rotazione di 180° del Wave Generator. Quindi, ad ogni rotazione completa di 360° del Wave Generator corrisponde una rotazione della Flexspline pari all'angolo sotteso a due denti della Flexspline, come rappresentato in figura 3.6. In base alla configurazione di montaggio dei riduttori armonici scelta da Universal Robots per i suoi manipolatori, la Flexspline è il componente fisso, mentre la Circular Spline rappresenta l'elemento mobile su cui calettare l'albero d'uscita che ruota in direzione concorde al Wave Generator.



**Figura 3.6:** Rappresentazione schematica del principio di funzionamento di un riduttore armonico con l'albero d'uscita posto sulla Flexspline [43].

Siccome le dentature della Flexspline e della Circular Spline hanno lo stesso passo, l'ingranamento avverrà su un numero di denti uguale per entrambi i componenti. Quando il Wave Generator avrà compiuto un giro completo saranno stati interessati nell'ingranamento tutti gli  $Z_{CS}$  denti della Circular Spline e tutti gli  $Z_{FS}$  denti della Flexspline. Dal momento che la Flexspline possiede solitamente un numero di denti pari a  $Z_{FS} = Z_{CS} - 2$ , essa sarà rimasta indietro di due denti dopo un giro completo del Wave Generator. Pertanto quando il Wave Generator percorrerà  $Z_{FS}$  giri, la Flexspline ne compirà  $Z_{FS} - Z_{CS} = -2$  giri [44]. Da qui, è possibile ricavare il rapporto di riduzione come:

$$\tau = \frac{\dot{\vartheta}_{WG}}{\dot{\vartheta}_{FS}} = \frac{Z_{FS}}{Z_{FS} - Z_{CS}} < 0 \quad (3.5)$$

Dove la (3.5) ricorda il rapporto di riduzione di un generico riduttore armonico ricavato attraverso la formula di Willis nella (3.4). Pertanto, per i tre componenti si ottiene che:

$$\vartheta_{WG} = (\tau + 1)\vartheta_{CS} - \tau\vartheta_{FS} \quad (3.6)$$

dove:

$\vartheta_{WG}$  [rad] è la rotazione del Wave Generator;

$\vartheta_{CS}$  [rad] è la rotazione della Circular Spline;

$\vartheta_{FS}$  [rad] è la rotazione della Flexspline.

In modo del tutto analogo si ottiene la relazione tra le velocità angolari dei tre componenti come:

$$\dot{\vartheta}_{WG} = (\tau + 1)\dot{\vartheta}_{CS} - \tau\dot{\vartheta}_{FS} \quad (3.7)$$

dove:

$\dot{\vartheta}_{WG}$  [rad/s] è la velocità angolare del Wave Generator;

$\dot{\vartheta}_{CS}$  [rad/s] è la velocità angolare della Circular Spline;

$\dot{\vartheta}_{FS}$  [rad/s] è la velocità angolare della Flexspline.

La relazione (3.7) mostra come, considerando la Circular Spline come elemento fisso, la Flexspline ruoti  $\tau$  volte più lentamente ed in direzione opposta rispetto al Wave Generator. Quando, invece, è la Flexspline ad essere fissa, si nota come la Circular Spline ruoti  $(\tau + 1)$  volte più lentamente e nella stessa direzione del Wave Generator. Sfruttando la conservazione dell'energia e ipotizzando che non vi siano perdite di potenza tra input ed output, è possibile ottenere la relazione tra coppia in ingresso e coppia in uscita, in cui il riduttore si comporta come un moltiplicatore di coppia:

$$T_{WG} = \frac{1}{(\tau + 1)}T_{CS} = -\frac{1}{\tau}T_{FS} \quad (3.8)$$

dove:

$T_{WG}$  [N m] è la coppia in ingresso sul Wave Generator;

$T_{CS}$  [N m] è la coppia in uscita sulla Circular Spline;

$T_{FS}$  [N m] è la coppia in uscita sulla Flexspline.

La relazione (3.8) mostra come, fissando la Circular Spline, si ottiene una coppia in uscita sulla Flexspline  $\tau$  volte maggiore di quella in ingresso al Wave Generator, mentre fissando la Flexspline, si ottiene una coppia in uscita sulla Circular Spline  $(\tau + 1)$  volte maggiore rispetto a quella in ingresso al Wave Generator [38].

Nel caso in esame del cobot UR5, la Flexspline è l'elemento fisso del riduttore armonico, in cui  $\vartheta_{FS} = \dot{\vartheta}_{FS} = 0$  e la  $T_{FS}$  diventa una reazione vincolare. Perciò, le relazioni (3.6), (3.7) e (3.8) diventano:

$$\begin{cases} \vartheta_{WG} &= (\tau + 1)\vartheta_{FS} \\ \dot{\vartheta}_{WG} &= (\tau + 1)\dot{\vartheta}_{FS} \\ T_{WG} &= \frac{1}{\tau + 1}T_{FS} \end{cases} \quad (3.9)$$

Tuttavia, le equazioni (3.9) non sono sufficienti a descrivere il reale comportamento dinamico del riduttore. Esse, infatti, descrivono un'ideale relazione lineare tra input e output. La presenza di rigidzze dei componenti, di fenomeni di isteresi e di errori cinematici fanno sì che tra l'output e l'input vi sia una relazione non lineare [45]. Pertanto è necessario sviluppare un nuovo modello che tenga conto di tutti gli aspetti dinamici non lineari e che sia in grado di simulare la presenza di eventuali guasti che possono insorgere in un riduttore armonico. Per una descrizione più dettagliata del modello si faccia riferimento al Capitolo 5 e al Capitolo 7.

## 3.2 Profili dei denti

La scelta del profilo del dente da adottare all'interno di un riduttore armonico si ripercuote sul numero di denti simultaneamente in presa e, di conseguenza, sulla capacità di sopportare un carico maggiore a parità di posizionamento. Negli anni molti sono stati i profili studiati e adottati, ognuno con le sue caratteristiche. Si è partiti dal profilo più semplice, come quello trapezoidale [32, 34], per poi passare al profilo più diffuso tra i sistemi di ingranamento, il profilo ad evolvente [46–51]. Fino ai profili più recenti, come il profilo a doppio arco con tangente comune [52–55] e il profilo cicloidale [56], che cercano di migliorare alcune delle criticità che si possono riscontrare all'interno dei profili tradizionali [35]. Per aiutare i produttori di riduttori armonici a migliorare i loro prodotti e ottimizzare il profilo dei denti, sono stati proposti dei metodi ottici, basati sul principio del periscopio, che catturano diverse immagini durante l'ingranamento al variare della velocità e del carico applicato [57]. In questo modo è possibile catturare la traiettoria di ingranamento di un singolo dente e ottimizzarne il profilo per garantire il corretto contatto tra denti ed evitare il fenomeno del *backlash*. Tuttavia questo studio trascura l'attrito che si genera durante il contatto tra denti della Flexspline e denti della Circular Spline. In più non tiene conto delle deformazioni subite dalla Flexspline al variare della velocità di rotazione in ingresso e del carico applicato [58].

Tutte questi fenomeni saranno, invece, considerate all'interno del modello *multibody* del riduttore armonico che sarà descritto nel dettaglio più avanti nella trattazione nel Capitolo 5 e nel Capitolo 7.

### 3.2.1 Profilo trapezoidale

Il profilo trapezoidale è stato il primo profilo adottato per la sintesi dei denti di un riduttore armonico dallo suo stesso inventore C. W. Musser [32, 34]. Sebbene risulti il più semplice e il più facile da introdurre all'interno di modelli per descrivere il comportamento del riduttore, esso presenta alcune criticità come la bassa capacità di carico, basso numero di denti in presa e rischio di interferenze tra i denti della Flexspline e i denti della Circular Spline. Tutto ciò influisce negativamente sulla vita utile dell'intero sistema.

### 3.2.2 Profilo ad evolvente

Per sopperire alle problematiche derivanti dal profilo trapezoidale, si è subito passati all'utilizzo del più tradizionale profilo ad evolvente [46–51]. Nonostante i miglioramenti nella capacità di carico e la riduzione degli sforzi nella zona di ingranamento, nel profilo ad evolvente resta lo stesso il problema dell'interferenza tra denti. Per limitare il fenomeno dell'interferenza è stato proposto di ridurre

lo spessore nella parte alta del dente [46]. Questa modifica sebbene migliori alcune caratteristiche relative all'interferenza tra denti, porta ad una riduzione di capacità di carico con il rischio di raggiungere carichi critici (*ratcheting torque*). Per risolvere il problema delle interferenze, senza inficiare sulla capacità di carico, è stato proposto di modificare la tradizionale forma ellittica del Wave Generator con una a camme, composta da archi circolari ed ellittici [47]. In [48] è stata fatta un'analisi FEM per valutare quale profilo generasse meno sforzi nella Flexspline. Altri, invece, hanno ottimizzato i parametri del profilo del dente in modo che l'ingranamento avvenga su tutto lo spessore del dente. In questo modo sono stati aumentati del 4 % i denti in presa e ridotto del 41,9 % le forze di contatto durante l'ingranamento [49]. Analisi statistiche, come tecniche di *Robust Design*, mostrano come l'adozione di moduli dei denti di 0.1 mm aumentino la capacità di carico, mentre quest'ultima è del tutto insensibile all'angolo di pressione e al fattore di correzione dei denti che porta ad una diminuzione dell'errore cinematico. In questo studio è stato anche notato come il fenomeno del *pitting* avviene dopo un lungo periodo di funzionamento dal momento che le forze generate nel contatto tra denti sono relativamente inferiori rispetto agli sforzi che si generano alla base del dente a causa della flessione [50]. Inoltre è stato riscontrato come la diminuzione dell'angolo di pressione, da 27 a 16 dei denti porta ad un miglioramento in termini di rigidità torsionale, da  $6,36 \times 10^4$  Nm/rad a  $6,54 \times 10^4$  Nm/rad ed a un aumento dell'area di contatto tra i denti durante l'ingranamento, dal 12% a 14% di denti in presa, portando ad una riduzione degli sforzi nella Flexspline, da 638 MPa a 590 MPa. Un angolo di pressione pari a  $17^\circ$  rappresenta il valore minimo affinché non si verifichi il fenomeno dell'interferenza tra denti della Flexspline e denti della Circular Spline [51].

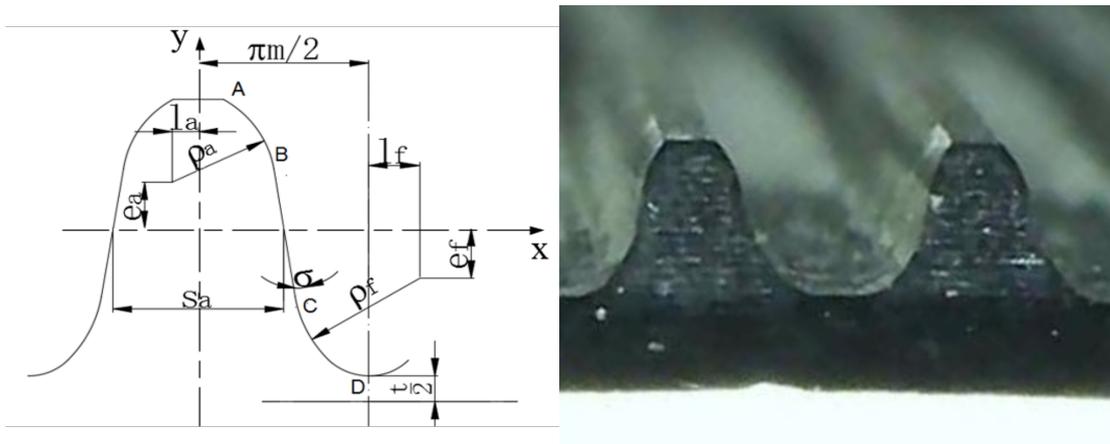
Nonostante i miglioramenti e il basso costo di produzione del profilo ad evolvente, si è comunque provato a studiare nuovi tipi di profili che possano aumentare il numero di denti in presa, aumentando la qualità dell'ingranamento.

### 3.2.3 Profilo cicloidale

Sebbene non sia il profilo più utilizzato nei riduttori, trova largo impiego in meccanismi come orologi e pompe volumetriche, come i *gerotor*, il profilo cicloidale permette un corretto ingranamento tra denti della Flexspline e della Circular Spline. In più, attraverso l'adozione di questo profilo, opportunamente ottimizzato, è possibile aumentare il numero di denti in presa simultaneamente [56].

### 3.2.4 Profilo a doppio arco

Il profilo a doppio arco è uno dei nuovi tipi di profilo introdotti per risolvere il problema delle interferenze e aumentare il numero di denti in presa, ma anche per facilitarne il processo produttivo [52–55]. Come schematizzato in figura 3.7, un profilo a doppio arco è composto da tre segmenti: un segmento ad arco convesso ( $\widehat{AB}$ ), un segmento ad arco concavo ( $\widehat{CD}$ ) e un segmento di retta ( $\overline{BC}$ ) tangente ad entrambi i segmenti ad arco. Questo tipo di profilo è adottato anche all'interno del riduttore armonico presente nel robot collaborativo UR5 come riportato sempre in figura 3.7.



**Figura 3.7:** Profilo a doppio arco: parametri caratteristici (a sinistra) [55]; denti della Flexspline con profilo a doppio arco (a destra).

La forma del profilo a doppio arco permette di avere una continuità di contatto tra i denti della Flexspline e della Circular Spline, durante tutta la fase di ingranamento, maggiore rispetto ad altri tipi di profilo del dente. In questo modo, si ottiene un maggior numero di coppie di denti in presa simultaneamente con conseguente miglioramento della capacità di carico in quanto distribuito contemporaneamente su più denti [52].

Tuttavia il profilo a doppio arco, se non opportunamente ottimizzato, potrebbe indurre maggiori sollecitazioni sulla Flexspline rispetto ad altri tipi di profili, come quello ad evolvente [48]. Tutto ciò è da tenere in considerazione quando si vanno a valutare le modalità di guasto più frequenti che possono verificarsi in un riduttore armonico, che sono approfondite in questa trattazione nel paragrafo 3.4.

### 3.3 Analisi del riduttore armonico HFUS-25-2SH

Per sviluppare un modello di un riduttore armonico preciso e accurato, è necessario che vengano utilizzati al suo interno dei parametri in grado di rappresentarne il più fedelmente possibile le caratteristiche fisiche. Alcuni parametri, come i momenti di inerzia, per essere calcolati necessitano di una misurazione dettagliata dei singoli componenti del riduttore armonico.

Il riduttore armonico modello HFUS-25-2SH prodotto da Harmonic Drive AG [30] è stato scelto come punto di partenza per lo sviluppo del modello *multibody*. Come mostrato in precedenza nella tabella 2.4, esso è montato all'interno dei giunti di taglia 3 (base, spalla, gomito) del robot collaborativo UR5 di Universal Robots, presente nei laboratori del Politecnico di Torino. Tali giunti rappresentano i componenti più utilizzati all'interno di un manipolatore industriale, soprattutto per operazioni di *pick&place* in cui i giunti del polso hanno spostamenti più contenuti. Pertanto si è deciso di basare lo sviluppo del modello proposto partendo dai componenti più critici. In più, essendo in possesso di un giunto smontato di taglia 3, analizzato nel capitolo 2, è possibile effettuare delle misurazioni dirette sul componente ed ottenere maggiori informazioni di quelle di norma fornite da catalogo [29], come lo spessore della Flexspline, l'altezza dei denti e altro, che servono per il corretto sviluppo del modello.

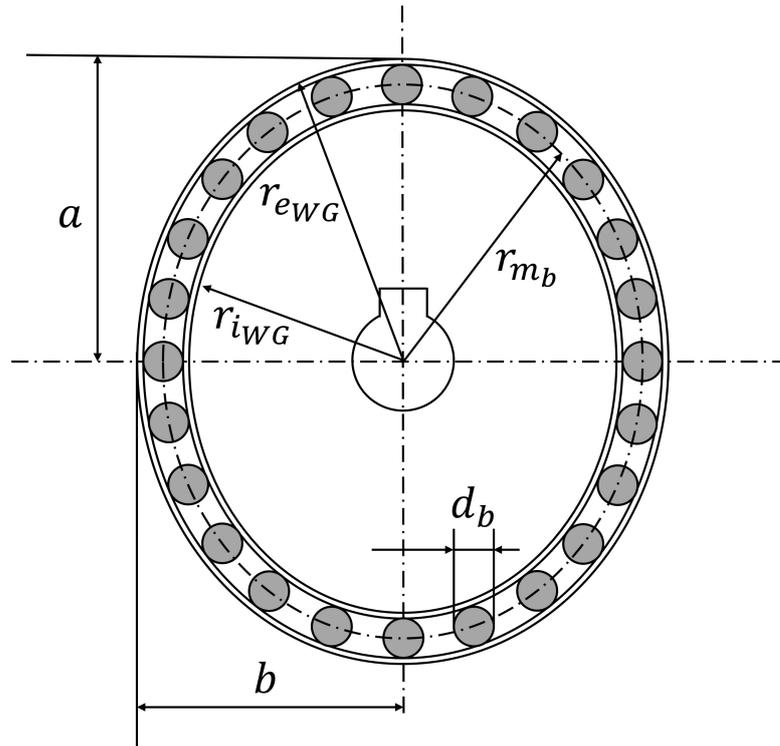
Le misurazioni dei singoli componenti del riduttore armonico sono state effettuate mediante l'ausilio di un calibro centesimale e dei relativi modelli CAD forniti dal produttore [59], in questo caso da Harmonic Drive SE. Sebbene le misurazioni effettuate attraverso il calibro siano più suscettibili ad errori di misurazione<sup>2</sup>, i modelli CAD non sono in grado di descrivere alcuni dettagli dei singoli componenti per via delle forme complesse e delle piccole dimensioni (forma ellittica del Wave Generator, altezza e profilo denti della Flexspline e della Circular Spline). Per questi motivi, si è data maggiore affidabilità alle misurazioni ottenute manualmente con il calibro e usato i modelli CAD solo come verifica di ingombri generali dei componenti. Per una panoramica dei modelli CAD 3D consultati e delle relative messe in tavola 2D si consulti l'appendice A.

---

<sup>2</sup>le dimensioni analizzate, soprattutto quelle relative ai denti della Flexspline e della Circular Spline, sono dell'ordine del decimo di millimetro

### 3.3.1 Dimensioni Wave Generator

Il Wave Generator è un componente caratterizzato da una forma ellittica, responsabile della deformazione del componente flessibile Flexspline [60]. Per effettuare le misurazioni su di esso è necessario distinguere tre sotto elementi, come schematizzato in figura 3.8: una parte interna (*hub*) ellittica, un cuscinetto con corpi volventi sferici e una pista esterna deformabile. Durante le misurazioni è stato

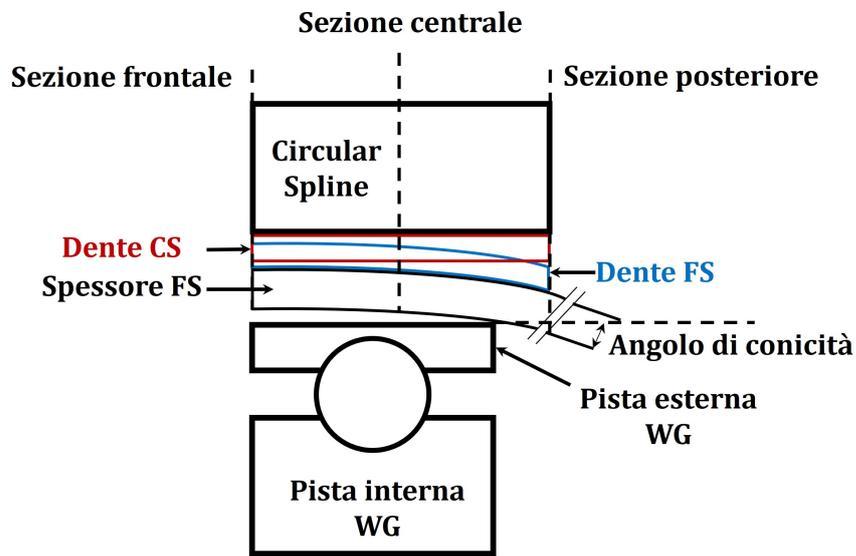


**Figura 3.8:** Schematizzazione rappresentativa<sup>3</sup> di un Wave Generator [61].

possibile riscontrare una tipica problematica che affligge i riduttori armonici, ovvero l'angolo di conicità (*coning angle*). Come schematizzato in figura 3.9 è possibile notare come il Wave Generator deformi radialmente la Flexspline, a causa della sua forma ellittica. Tuttavia, tale deformazione non assume lo stesso valore lungo la direzione assiale della Flexspline. Si passa da una maggiore deformazione radiale sulla sezione frontale, posta in ingresso, diminuendo in direzione assiale passando dalla sezione centrale fino ad assumere il valore minimo sulla sezione posteriore.

<sup>3</sup>per chiarezza espositiva e di rappresentazione, anche se le dimensioni  $r_{ewg}$ ,  $r_{iwg}$ ,  $r_{mb}$ , sono misurate lungo l'asse maggiore del Wave Generator, esse sono disposte in diverse posizioni dell'ellisse, come riportate in figura 3.8.

In questo modo la Flexspline assume, nella zone d'ingresso, un forma a cono in direzione assiale. Questa problematica può essere causa di una errata misurazione in quanto le grandezze dirette radialmente variano a seconda del punto in cui sono state misurate assialmente. Infatti si nota come i denti della Flexspline ingranano con quelli della Circular Spline maggiormente nella sezione frontale rispetto alla sezione posteriore. Inoltre, ciò può causare una distribuzione delle forze di ingranamento non omogenea, andando a creare delle zone maggiormente sollecitate e, quindi, aumentare l'usura tra i denti in presa. In più tale fenomeno può essere causa di un'intensificazione delle tensioni nella sezione posteriore [49]. Nel sezione 3.4 relativa alle modalità di guasto è possibile approfondire nel dettaglio questi aspetti.



**Figura 3.9:** Angolo di conicità (*coning angle*) di un riduttore armonico [3].

Sfruttando le misurazioni relative al componente *Wave Generator*, schematizzate in figura 3.8 e sintetizzate in tabella 3.1, è possibile stimare il momento di inerzia complessivo  $J_{WG}$  del Wave Generator calcolato come somma di tre contributi:

$$J_{WG} = J_{hub} + \sum_{i=1}^N J_{ball_i} + J_{ring} \quad (3.10)$$

Dove:

$J_{hub}$  [kg m<sup>2</sup>] è il momento d'inerzia della parte interna del Wave Generator.

$J_{ball_i}$  [kg m<sup>2</sup>] è il momento d'inerzia di un singolo corpo volvente del Wave Generator;

$J_{ring}$  [kg m<sup>2</sup>] è il momento d'inerzia della pista esterna del Wave Generator;

**Tabella 3.1:** Risultati delle misurazioni sul componente Wave Generator di un riduttore armonico HFUS-25-2SH.

Grandezza misurata	Notazione	Valore misurato
Corpi volventi	$N$	23
Raggio indeformato pista esterna	$r_{0WG}$	30,65 mm
Raggio interno pista esterna*	$r_{eWG}$	29,4 mm
Raggio medio sfere*	$r_{m_b}$	26,67 mm
Diametro sfera	$d_b$	5,47 mm
Spessore pista esterna	$s_{eWG}$	1,6 mm
Profondità pista esterna	$l_{WG}$	9 mm
Raggio interno pista interna*	$r_{iWG}$	22,45 mm
Spessore pista interna	$s_{iWG}$	1,5 mm
Raggio interno albero motore	$r_{shaft}$	16,2 mm
Semiassse maggiore	$a$	31 mm
Semiassse minore	$b$	30,33 mm

\*Grandezze misurate lungo l'asse maggiore del Wave Generator.

Il contributo della parte interna del Wave Generator è stato calcolato come il momento d'inerzia di un cilindro cavo ellittico [62]:

$$J_{hub} = \frac{1}{2}m_{hub} \left( (r_{iWG} + s_{iWG})^2 + r_{shaft}^2 \right) \quad (3.11)$$

Il contributo dei corpi volventi del cuscinetto all'interno del Wave Generator è stato calcolato come il momento d'inerzia di  $N = 23$  sfere ad una distanza  $r_{m_b}$  dall'asse di rotazione [63]:

$$J_{ball_i} = \frac{2}{5}m_b r_b^2 + m_b r_{m_b}^2 \quad (3.12)$$

$$J_{ball} = \sum_{i=1}^N J_{ball_i} \quad (3.13)$$

Il contributo della pista esterna è stato calcolato come il momento d'inerzia di un anello ellittico sottile [62]:

$$J_{ring} = m_{ring} a^2 c_3 \quad (3.14)$$

in cui  $c_3$  rappresenta un coefficiente moltiplicativo che tiene conto dell'eccentricità causata dalla forma ellittica del Wave Generator rispetto al caso di un anello sottile

circolare. Esso è espresso come:

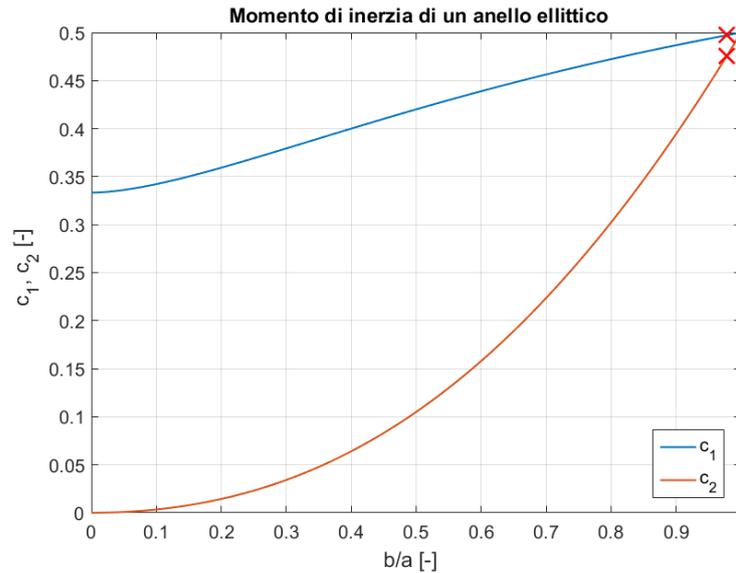
$$c_3 = c_1 + c_2 \quad (3.15)$$

dove:

$$c_1 = \frac{\int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) \sin^2 \vartheta \right]^{1/2} \sin^2 \vartheta d\vartheta}{\int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) \sin^2 \vartheta \right]^{1/2} d\vartheta} \quad (3.16a)$$

$$c_2 = \frac{\frac{b^2}{a^2} \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) \cos^2 \vartheta \right]^{1/2} \sin^2 \vartheta d\vartheta}{\int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) \sin^2 \vartheta \right]^{1/2} d\vartheta} \quad (3.16b)$$

che assumono un andamento descritto in figura 3.10.



**Figura 3.10:** Coefficienti  $c_1$  e  $c_2$  per il calcolo del momento d'inerzia di un anello sottile ellittico.

Per un'ellisse, si hanno rapporti di  $b/a < 1$ , da cui si ottengono  $c_1 < 0,5$  e  $c_2 < 0,5$ , che inseriti nella (3.15) danno un  $c_3 < 1$ , il quale verrà usato nella (3.14).

Inoltre, si può notare come per un rapporto di  $b/a = 1$ , ovvero nel caso di una circonferenza, si ottengono un  $c_1 = 0,5$  e un  $c_2 = 0,5$  che inseriti nella (3.15) danno un  $c_3 = 1$ . Ovvero, la (3.14) diventa il momento d'inerzia di un disco sottile.

Nel caso in esame del Wave Generator si ottiene un rapporto  $b/a = 0,978$ , che rappresenta una eccentricità del Wave Generator relativamente piccola, ma sufficiente per garantire il corretto funzionamento del riduttore armonico. Come si evincerà più avanti nella trattazione e in particolare nella sezione 7.4, nella zona di ingranamento le grandezze in gioco sono relativamente piccole, pertanto piccole variazioni possono risultare estremamente importanti. Il rapporto  $b/a$  appena calcolato, inserito nelle equazioni (3.16), porta ad un  $c_1 = 0.497$  e un  $c_2 = 0.476$ . Si ricava, pertanto, un  $c_3 = 0.973$ . È possibile, quindi, calcolare la (3.14) ed infine l'equazione (3.10) che stima il momento d'inerzia  $J_{WG}$  del Wave Generator, sintetizzato insieme ad altre sue proprietà nella tabella 3.2.

**Tabella 3.2:** Proprietà del componente Wave Generator di un riduttore armonico HFUS-25-2SH.

$f_0$	$f_1$	$\nu_0$ (25 °C)	$f_{WG-FS}$	Densità	Massa	$J_{WG}$
[-]	[-]	[mm <sup>2</sup> /s]	[-]	[kg/m <sup>3</sup> ]	[kg]	[kg m <sup>2</sup> ]
1,5	0,0005	80	0,07	7 500	0,1527	$8,12 \times 10^{-5}$

Dove:

$f_0$  [-] è un fattore in funzione del tipo di lubrificante e della tipologia di cuscinetto usato [63];

$f_1$  [-] è un fattore in funzione del tipo di cuscinetto usato [63];

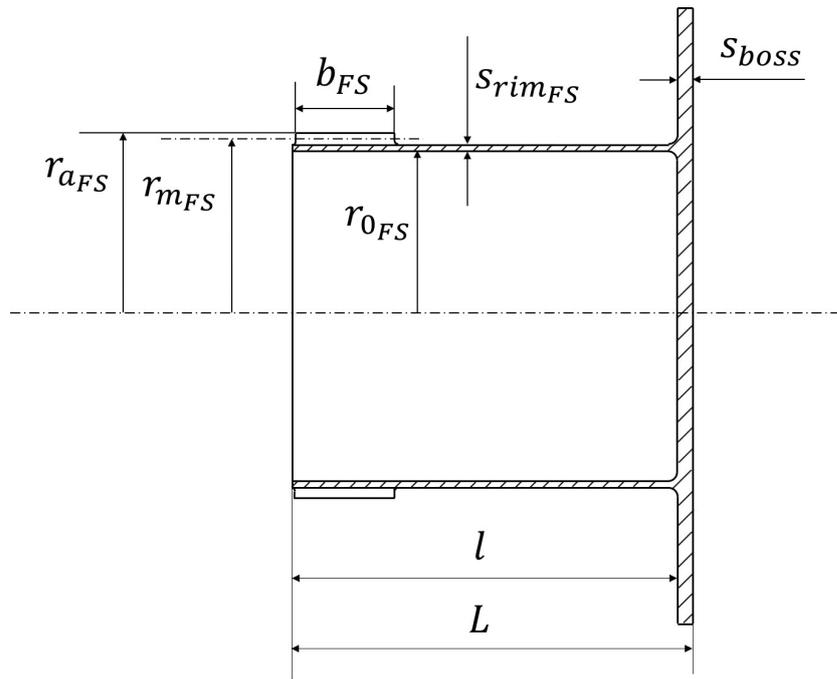
$\nu_0$  [mm<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>] è la viscosità cinematica del lubrificante alla temperature d'esercizio di 25 °C [64];

$f_{WG-FS}$  [-] è il coefficiente d'attrito tra la pista esterna del Wave Generator e la Flexspline [29].

Per la scelta del tipo lubrificante, si è fatto affidamento a quanto suggerito dal catalogo del produttore del riduttore armonico [29]. In cui, per il modello HFUS-25-2SH in esame è proposto l'utilizzo del grasso a base di litio, denominato *SK-1A*. Esso presenta un campo di esercizio da 0 °C a 80°C, un *drop point* di 197 °C ed è caratterizzato da un colore giallo [29]. Tuttavia, ai fini della stesura del modello, in particolare nelle equazioni (7.32), sarà necessario considerare la viscosità cinematica dell'olio contenuto nel grasso, pari a 80 mm<sup>2</sup>/s [64], e non quella del grasso pari a 265-295 mm<sup>2</sup>/s a 25 °C.

### 3.3.2 Dimensioni della Flexspline

La Flexspline è un componente caratterizzato da una forma circolare quando non è deformata. In queste condizioni sono state effettuate le relative misurazioni, come schematizzate in figura 3.11 e sintetizzate in tabella 3.4. Questo componente risulta relativamente meno complicato per la misurazione di alcune sue dimensioni rispetto al Wave Generator, sebbene alcune di esse risentano del problema dell'angolo di conicità (*coning angle*). Infatti si può notare come alcune dimensioni risultino paragonabili a quelle rilevate attraverso il relativo modello CAD. Si veda Appendice A per maggiori dettagli.



**Figura 3.11:** Dimensioni principali della Flexspline indeformata.

Dalle misurazioni ottenute si possono ricavare alcune proprietà che caratterizzano la Flexspline, sintetizzate in tabella 3.3, come il suo momento d'inerzia  $J_{FS}$ . Queste saranno utilizzate più avanti nella trattazione durante la descrizione del modello *multibody*, descritto nel dettaglio nel Capitolo 5. Per il calcolo del momento d'inerzia  $J_{FS}$ , la Flexspline è stata considerata come un cilindro a parete sottile con estremità aperte, di raggio  $(r_{0FS} + s_{rimFS})$  e massa  $m_{FS}$  con la presenza, su una delle estremità, di una dentatura esterna, ottenendo che:

$$J_{FS} = m_{FS}(r_{0FS} + s_{rimFS})^2 \quad (3.17)$$

in cui:

$m_{FS}$  [kg] è la massa della Flexspline.

La Flexspline, essendo un componente flessibile, è composta da un materiale diverso agli altri due componenti, Wave Generator e Circular Spline, che caratterizzano i riduttori armonici. Infatti, si può notare come essa abbia una densità diversa, riportata in tabella 3.3, da cui è stata ricavata la massa  $m_{FS}$  della Flexspline.

**Tabella 3.3:** Proprietà del componente Flexspline di un riduttore armonico HFUS-25-2SH.

Densità [kg/m <sup>3</sup> ]	Modulo elastico [GPa]	Massa [kg]	$J_{FS}$ [kg m <sup>2</sup> ]
7850	210	0,038	$3,72 \times 10^{-5}$

**Tabella 3.4:** Risultati delle misurazioni sul componente Flexspline di un riduttore armonico HFUS-25-2SH.

Grandezza misurata	Notazione	Valore ottenuto
Numero denti Flexspline	$Z_{FS}$	200
Raggio Flexspline indeformata	$r_{0FS}$	30,65 mm
Spessore <i>rim</i>	$s_{rimFS}$	0,8 mm
Raggio di testa	$r_{aFS}$	31,95 mm
Altezza denti	$h_{FS}$	0,5 mm
Raggio medio denti	$r_{mFS}$	31,7 mm
Lunghezza denti	$b_{FS}$	11,6 mm
Spessore boss	$s_{boss}$	3,3 mm
Lunghezza ingresso-boss	$l$	30,8 mm
Lunghezza Flexspline	$L_{FS}$	34,1 mm
Lunghezza alla base dei denti*	$L_B$	0,56 mm

\*valore stimato ottenuto approssimando il profilo dei denti della Flexspline come trapezoidale.

### 3.3.3 Dimensioni Circular Spline

La Circular Spline è un componente rigido a forma circolare. Le sue dimensioni, schematizzate in figura 3.12 e sintetizzate in tabella 3.6, durante la fasi di ingranamento restano invariate.

Per questo componente, le misurazioni ottenute mediante l'ausilio del calibro centesimale sono molto simili a quelle rilevate attraverso il relativo modello CAD fornito dal produttore [30]. Si veda Appendice A per maggiori dettagli.

Siccome nel robot UR5 è usata una configurazione di montaggio in cui è fissa la Flexspline e non la Circular Spline, ai fini della stesura del modello *multibody* è necessario procedere al calcolo del suo momento d'inerzia  $J_{CS}$ . Per tale calcolo, sintetizzato nella tabella 3.5, la Circular Spline è stata considerata come un tubo cilindrico con pareti spesse ed estremità aperte, di raggio interno  $r_{iCS}$ , raggio esterno  $r_{eCS}$ , lunghezza  $b_{CS}$  e massa  $m_{CS}$  con la presenza di una dentatura interna, ottenendo che:

$$J_{CS} = \frac{1}{2}m_{CS}(r_{eCS} + r_{iCS})^2 \quad (3.18)$$

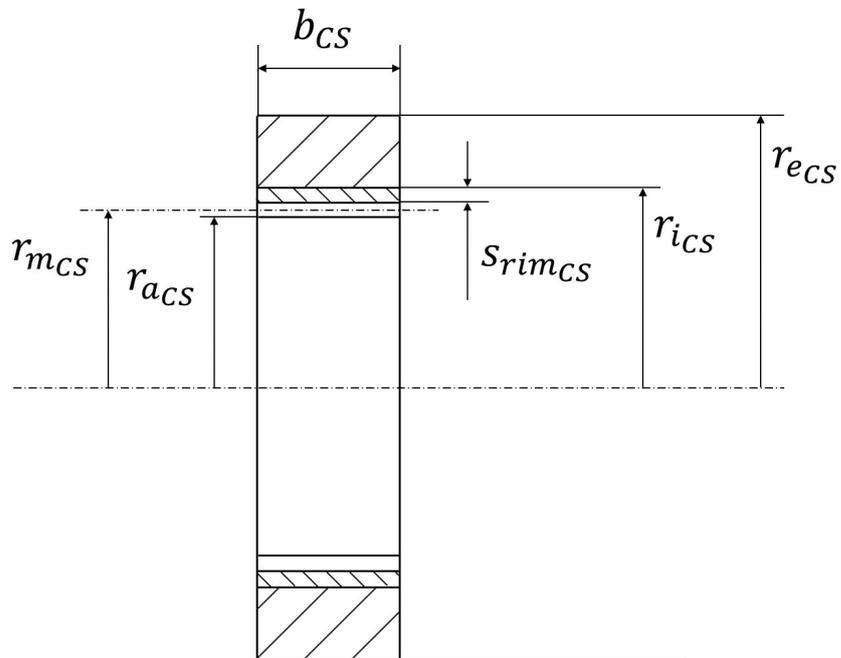
in cui:

$m_{CS}$  [kg] è la massa della Circular Spline.

Per il calcolo della massa  $m_{CS}$  della Circular Spline è stato considerato lo stesso materiale del Wave Generator e, di conseguenza, la stessa densità.

**Tabella 3.5:** Proprietà del componente Circular Spline di un riduttore armonico HFUS-25-2SH.

Densità [kg/m <sup>3</sup> ]	Modulo elastico [GPa]	Massa [kg]	$J_{CS}$ [kg m <sup>2</sup> ]
7 500	210	0,595	$5,44 \times 10^{-3}$



**Figura 3.12:** Dimensioni principali della Circular Spline.

**Tabella 3.6:** Risultati delle misurazioni sul componente Circular Spline di un riduttore armonico HFUS-25-2SH.

Grandezza misurata	Notazione	Valore ottenuto
Numero denti Circular Spline	$Z_{CS}$	202
Raggio esterno	$r_{eCS}$	42,5 mm
Raggio interno	$r_{iCS}$	33,5 mm
Bordo ( <i>rim</i> )	$s_{rimCS}$	1 mm
Lunghezza dente	$b_{CS}$	13 mm
Altezza dente	$h_{CS}$	0,6 mm
Raggio di testa	$r_{aCS}$	31,95 mm
Raggio medio denti	$r_{mCS}$	32,15 mm

### 3.4 Modalità di guasto di un riduttore armonico

I riduttori armonici rappresentano uno dei componenti fondamentali all'interno di un manipolatore robotico. Un guasto ad un suo elemento può compromettere il funzionamento dell'intero sistema. Pertanto è necessario evidenziare quali siano le modalità più critiche e frequenti che si possono verificare al suo interno. Uno studio basato sull'analisi FMECA (Failure Modes, Effect and Criticality Analysis), come quello sintetizzato in tabella 3.7, permette di stabilire attraverso un indice, chiamato *Risk Priority Number* (RPN), quali siano i guasti da tenere maggiormente in considerazione [3, 65]. Tale indice rappresenta una caratterizzazione del rischio ( $RPN = 1 \div 1000$ ) di ciascuna causa di ogni modo di guasto ed è calcolato come:

$$RPN = S \cdot O \cdot D \quad (3.19)$$

in cui:

- **Indice di severità (Severity) S:** è un valore ( $S = 1 \div 10$ ) associato con un effetto per un dato modo di guasto. Può variare da effetti che non hanno alcun impatto sul sistema (1) fino ad effetti pericolosi o non conformità con regolamenti e senza preavvisi (10);
- **Indice di probabilità (Occurrence) O:** è un valore ( $O = 1 \div 10$ ) associato alla frequenza, nota o stimata, del modo di guasto e delle sue cause. Può variare da probabilità remote (1) a probabilità molto frequenti (10);
- **Indice di Rilevabilità (Detection) D:** è un valore ( $D = 1 \div 10$ ) associato alla probabilità di rilevabilità dei modi/cause di guasto in accordo con criteri definiti. Può variare da probabilità quasi certe di rilevare una causa di guasto (1) fino a una remota possibilità di controllare una modalità di guasto (10) [66]. Tali valori si basano sulla possibilità di rilevare i guasti senza smontare le parti di un robot collaborativo. In questo modo la capacità di rilevare i guasti deriva dall'analisi delle vibrazioni dei segnali e dai dati direttamente ottenuti dal manipolatore.

Per una maggiore e migliore comprensione di tutte le possibili criticità, come guasti al Wave Generator, usura denti, lubrificazione e pitting, che possono compromettere il normale funzionamento di un riduttore armonico si faccia riferimento a [3, 65].

**Tabella 3.7:** FMECA dei guasti di un riduttore armonico.

<b>Modalità di guasto</b>	<b>Effetti</b>	<b>S</b>	<b>O</b>	<b>D</b>	<b>RPN</b>
Usura interfaccia WG-FS	Contaminazione lubrificante, perdite di efficienza, aumento dello slittamento tra WG-FS	3	10	6	180
Cricca sezione posteriore	Vibrazioni, rottura dell'intero riduttore	9	2	9	162
Degradazione lubrificante	Usura, aumento del carico assiale sul Wave Generator	2	10	8	160
Usura denti	Backlash, vibrazioni, distribuzione del carico non simmetrica, contaminazione del lubrificante	3	10	4	120
Cricca alla base del dente	Eccessive vibrazioni, perdita di efficienza	7	4	4	112
Cricca flangia Flexspline	Vibrazioni, riduzione della rigidezza torsionale, perdita di efficienza	4	3	9	108
Cricca alla testa del dente	Vibrazioni, perdita di efficienza	2	5	9	90
Pitting	Contaminazione e degradazione del lubrificante, usura	1	10	9	90
Usura Wave Generator	Vibrazioni, contaminazione lubrificante, perdita di efficienza	2	7	6	84
Cricca nella Flexspline	Eccessive vibrazioni, distribuzione del carico non simmetrica, perdita di efficienza e accuratezza, rottura completa della Flexspline	9	1	4	36
Buckling	Perdita di elasticità della Flexspline, eccessive vibrazioni e usura	9	1	1	9
Ratcheting	Perdita di coassialità tra Flexspline e Circular Spline, vibrazioni, usura	7	1	1	7

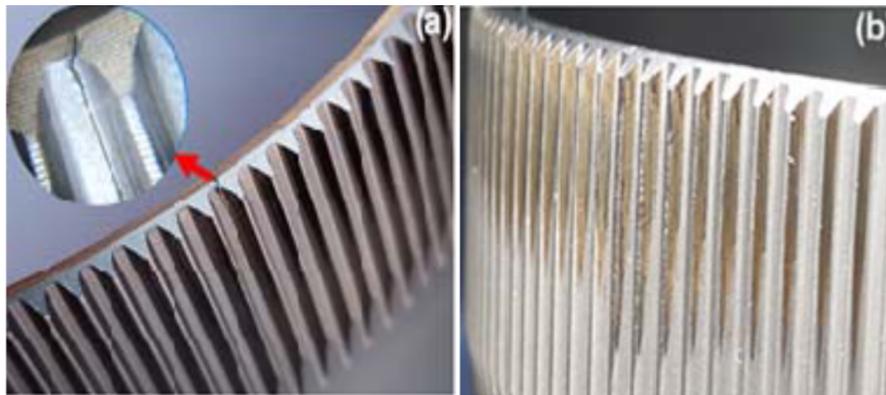
### 3.4.1 Frattura alla base del dente

Una delle principali cause di rottura dei riduttori armonici è la rottura a fatica della Flexspline a causa della deformazione periodica subita dal Wave Generator [49, 67].

Un primo approccio per verificare la presenza di eventuali cricche nel riduttore è quello di analizzare le vibrazioni che esso produce. Questo metodo si basa sul fatto che il dente compromesso da un cricca potrebbe produrre vibrazioni tali da andare a sollecitare le frequenze di risonanza del sistema [68].

La direzione di propagazione di una cricca e i suoi effetti dipendono dal punto in cui essa si è generata. Esistono zone all'interno dei componenti del riduttore in cui vi è maggiore probabilità che una cricca possa nucleare. Esse sono: base del dente della Flexspline, dente della Flexspline, sezione posteriore della dentatura della Flexspline e sezione d'uscita della Flexspline.

Secondo uno studio condotto da [67], la zona più sollecitata si trova alla base dei denti della Flexspline. In figura 3.13 è visibile una frattura avvenuta alla base del dente e l'usura che si genera lungo i fianchi dei denti a causa del materiale asportato nella zona di frattura. La causa della nucleazione di cricche in questa zona è dovuta principalmente alle elevate velocità di deformazione a cui è sottoposta dal Wave Generator, come suggeriscono anche le morfologie metallografiche della frattura [67].



**Figura 3.13:** Flexspline con frattura alla base dei denti (a) e usura lungo i fianchi dei denti (b) [67].

### 3.4.2 Frattura del dente

Dopo essersi formata, la cricca può proseguire in due diverse direzioni: all'interno del dente (Tooth Crack-TC), oppure nel bordo della Flexspline (Rim Crack-TC). La prima direzione rappresenta la condizione meno critica dal momento che il sistema continua a funzionare, seppure non in condizioni ottimali. La seconda direzione è, invece, da evitare, poiché potrebbe portare ad una rottura catastrofica della Flexspline, compromettendo irreversibilmente il funzionamento del riduttore. I fattori che influenzano la direzione di avanzamento della cricca sono: spessore alla base del dente, posizione e orientazione iniziale della cricca. Per valutare gli effetti di questi fattori, si adotta un parametro, chiamato *backup ratio*, schematizzato in figura 3.14 e definito come:

$$b_R = \frac{s_{rim_{FS}}}{h_{FS}} \quad (3.20)$$

dove:

$s_{rim_{FS}}$  è lo spessore alla base del dente della Flexspline;

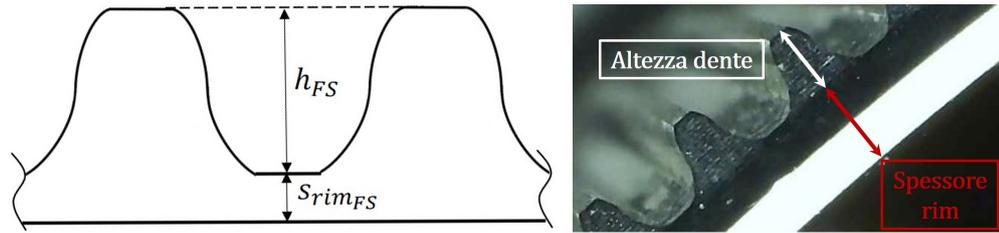
$h_{FS}$  è l'altezza del dente della Flexspline.

I risultati sperimentali [69–71] dimostrano che:

- $b_R > 1$ : la cricca si sviluppa all'interno del dente, indipendentemente dalla sua posizione e orientazione iniziale;
- $0,4 < b_R \leq 1$ : la cricca potrebbe seguire entrambe le direzioni, più la posizione iniziale è lontana dal dente più vi è la probabilità che la cricca si propaghi alla base dente dente, portando ad una rottura catastrofica;
- $b_R \leq 0,4$ : la cricca si propaga nel bordo della Flexspline con conseguente rottura catastrofica, indipendentemente dalla sua posizione e orientazione iniziale [69–71].

Altri fattori che possono favorire la propagazione della cricca alla base del dente sono: riduzione di rigidità della Flexspline, angoli di pressioni maggiori di 20° [70]. Per minimizzare del tutto il rischio di avere una frattura alla base del dente, in [70] consigliano di adottare all'interno del riduttore un  $b_R \geq 1,3$ . Nei robot collaborativi UR5, Universal Robots sfrutta riduttori armonici nei giunti base, spalla, gomito, in cui la Flexspline possiede, in base alle misurazioni ottenute in tabella 3.4, uno spessore alla base del dente  $s_{rim_{FS}} = 0,8$  e un'altezza dei denti  $h_{FS} = 0,5$ . Per cui si ottiene un backup ratio pari a:

$$b_R = \frac{s_{rim_{FS}}}{h_{FS}} = \frac{0,8}{0,5} = 1,6 \quad (3.21)$$



**Figura 3.14:** Definizione generale di backup ratio  $b_R = s_{rim_{FS}}/h_{FS}$  [70] (a sinistra), backup ratio per il riduttore armonico HFUS-25-2SH (a destra).

Questa scelta progettuale dovrebbe evitare la propagazione di cricche nel bordo della Flexspline e di conseguenza di rotture catastrofiche.

### 3.4.3 Frattura nella sezione posteriore del dentatura della Flexspline

Lo stato di tensione all'interno della Flexspline tende a diminuire dalla sezione di ingresso alla sezione d'uscita, in direzione assiale. Nella zona di ingresso della Flexspline, dove avviene l'ingranamento, si hanno elevate frequenze e ampiezze di deformazione, mentre decrescono nella zona finale dove termina la dentatura ed inizia la parete della Flexspline. Tuttavia, è probabile che si verifichi una rottura a fatica nella sezione di interfaccia fra zona dentata e non della Flexspline dove lo stato di tensione è amplificato dal salto di spessore [72].

A causa della problematica legata all'angolo di conicità, introdotto nel paragrafo 3.3.1, è possibile che nella sezione posteriore della dentatura della Flexspline, schematizzata in figura 3.9, si verifichi un'intensificazione degli sforzi tale da portare a rottura a fatica la Flexspline [49]. Un esempio di tale guasto è riportato in figura 3.15. L'angolo di conicità porta a modificare la zona di contatto tra Wave Generator e Flexspline. Tale zona non si sviluppa lungo tutta la profondità della pista esterna del Wave Generator, ma solo lungo un bordo lungo la sezione posteriore della Flexspline. In questo modo solo la sezione frontale della Flexspline subirà la deformazione imposta dal Wave Generator, adottando una forma ellittica, mentre la sezione posteriore rimarrà di forma circolare.



**Figura 3.15:** Rottura catastrofica di una Flexspline [73].

#### **3.4.4 Frattura nella sezione d'uscita della Flexspline**

Un'altra zona in cui è possibile avere una rottura critica della Flexspline è rappresentata dalla sezione d'uscita. Questa risulta essere interessata sia dalla deformazione imposta alla Flexspline dal Wave generato che dal carico posto in uscita. Quest'ultimo, in particolare, contribuisce ad aumentare lo sforzo di taglio sulla Flexspline favorendo la propagazione di una eventuale cricca. Tutto ciò porta ad una riduzione della rigidità torsionale della Flexspline, peggiorando la precisione del giunto su cui è installato il riduttore armonico [74].

## Capitolo 4

# Analisi dello stato dell'arte

Grazie alle loro particolari caratteristiche, come elevato rapporto di trasmissione, peso ed ingombro ridotti e backlash quasi nullo, i riduttori armonici sono stati oggetto di numerosi studi durante il corso degli anni. Molti ricercatori hanno seguito diversi approcci in modo da proporre modelli in grado di comprendere il funzionamento di un riduttore armonico e di descrivere nel dettaglio alcune sue caratteristiche.

In genere, i modelli proposti in letteratura seguono i seguenti approcci:

1. modelli molto accurati nel descrivere una caratteristica in particolare del riduttore armonico, ma del tutto isolato dall'ambiente esterno. Spesso trascurando anche le fonti di carico provenienti dall'esterno, focalizzando l'attenzione solo sui carichi generati internamente al riduttore armonico [64, 75].
2. modelli generali in grado di descrivere il comportamento di tutto il sistema in cui il riduttore armonico è inserito. Tuttavia, in questo caso il riduttore è considerato come una scatola nera (*black box*), trascurando tutte le interazioni cinematiche e dinamiche che avvengono al suo interno.

Seguendo il primo tipo di approccio, sono stati sviluppati modelli molto dettagliati in grado di descrivere alcune proprietà che caratterizzano i riduttori armonici come errore cinematico, isteresi, rigidità non lineari, attrito tra i denti nella zona di ingranamento [76–78].

Con un approccio analogo, ci sono una serie di modelli FEM (*Finite Element Method*) che riescono a descrivere nel dettaglio lo stato di tensione dell'interno riduttore armonico anche in presenza di eventuali carichi esterni [74, 79–82]. Tuttavia, questo tipo di approccio non permette di integrare il modello di riduttore sviluppato in altri modelli ad alto livello di sistemi più complessi. Un esempio è il modello

sviluppato per studiare il comportamento di un robot collaborativo UR5 a fini diagnostici e prognostici [5].

Attraverso le analisi FEM [37] è possibile ottenere anche dei valori cinematici dei riduttori armonici, come il rapporto tra la deformazione subita dalla Flexspline lungo il semiasse maggiore e quella lungo il semiasse minore di circa 1,3. Inoltre, è stato confermato come la differenza ideale di denti tra Flexspline e Circular Spline sia pari a due. In più, gli stessi studi mostrano come sia possibile stimare la forza massima scambiata nella zona di ingranamento affinché questa non superi i valori critici di tensione dovuta alla flessione nella Flexspline. La parte inferiore del dente risulta essere una delle zone maggiormente sollecitate, infatti essa rappresenta una delle zone in cui potrebbe nucleare un'eventuale cricca. Questa situazione in particolare può essere descritta dal modello proposto in questa trattazione, andando a monitorare dei valori di controllo, come il rapporto di trasmissione che non dovrebbe essere considerato costante a priori.

Un'altra analisi FEM [83] permette, oltre ad analizzare la distribuzione degli sforzi all'interno della Flexspline, la verifica dell'ingranamento che avvenga senza interferenza sotto varie condizioni e la verifica della rigidità torsionale. Infatti è stato verificato come la riduzione dell'angolo di pressione migliori la rigidità torsionale, da  $6,36 \times 10^4$  Nm/rad a  $6,56 \times 10^4$  Nm/rad, così come aumenta la zona di ingranamento, da 24 a 28 denti, riducendo di conseguenza gli sforzi che si generano alla base dei denti della Flexspline, da 640 MPa a 590 MPa. In più, si è ottenuto come un angolo di pressione di  $16^\circ$  sia il più piccolo in modo da non generare interferenze tra i denti della Flexspline e della Circular Spline.

Attraverso le analisi FEM è possibile verificare come la lunghezza della Flexspline sia uno dei parametri che influisce sul suo stato di tensione e di deformazione. Si ottiene, quindi, che lo sforzo circonferenziale sia inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza della Flexspline [82].

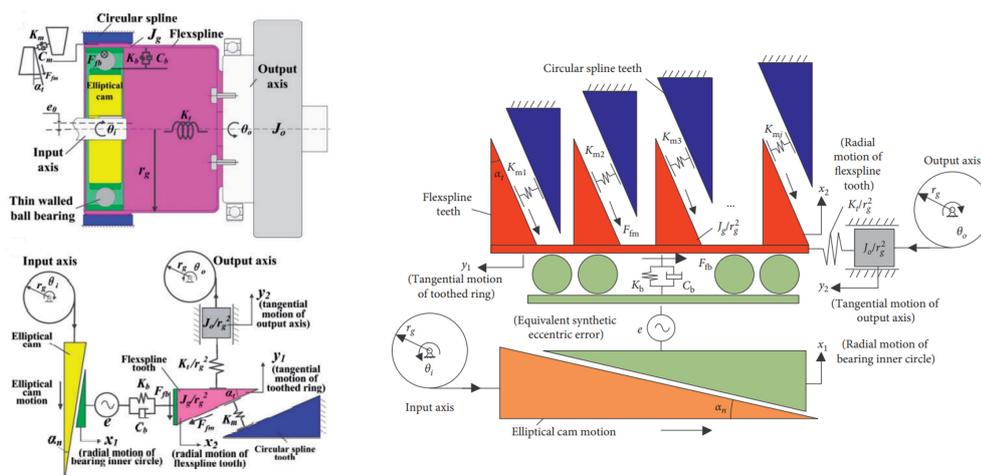
Seguendo un approccio fenomenologico [45], che non richiede la conoscenza delle cinematiche e geometrie interne, è stato possibile stimare i parametri di un banco prova con cui verificare la presenza di quattro comportamenti tipici di riduttore armonico: attrito viscoso non lineare, rigidità non lineari, fenomeni di isteresi e errori cinematici. Il sistema è stato descritto attraverso il modello di Maxwell, mettendo in parallelo una serie di resistenze e capacità equivalenti. Tuttavia, considerare il riduttore armonico come una scatola nera, trascurando per esempio la geometria dei denti in presa oppure la cinematica del Wave Generator per verificare le dissipazioni di energia, non permette di stimare i parametri corretti dei componenti del riduttore, come la rigidità dei denti, in modo da modificarli per

descrivere l'eventuale presenza di difetti e ottenere segnali in uscita in condizioni degradate.

Molte delle ricerche appena menzionate cercano di prevedere il comportamento dinamico di un riduttore armonico ai fini di modelli di controllo del sistema, ma non focalizzano l'attenzione sulle interazioni che avvengono tra i componenti interni del riduttore, come il contatto tra Wave Generator e Flexspline oppure il contatto tra denti della Flexspline e della Circular Spline. Tali modelli, in genere, si basano su equazioni empiriche oppure sull'interpolazione di dati sperimentali. Per tale motivo questi modelli sono estremamente influenzati dalla scelta dei dati sperimentali. Pertanto, non permettono di migliorare le caratteristiche dinamiche sia in fase di modellazione che di produzione. In più tale impostazione è insufficiente per gli studi di diagnostica e prognostica del riduttore in quanto non è possibile inserire al loro interno l'eventuale presenza di *fault* in modo da prevederne lo sviluppo temporale e studiarne il loro effetto sul comportamento globale del sistema.

Uno dei primi modelli che ha cercato di descrivere il comportamento dinamico di un riduttore armonico è stato quello proposto in [78]. Qui viene analizzata solo l'interazione che avviene tra Wave Generator e Flexspline e l'attrito nella zona d'ingranamento per simulare il comportamento globale del riduttore. Tuttavia, per fare ciò è stato adattato un modello a cunei equivalenti per descrivere il moto di ingranamento tra i denti Flexspline e Circular Spline. Questa approssimazione, sebbene riesca a cogliere alcuni fenomeni come l'attrito nella zona d'ingranamento, descrive l'intero processo d'ingrandimento attraverso l'equivalente di una singola coppia di denti in presa, avente le proprietà tipiche di più denti in presa. In questo modo si trascura l'effetto che possono avere più coppie di denti in presa simultaneamente. In più con tale approccio non è possibile verificare e analizzare l'eventuale presenza di una cricca su un singolo dente poiché il suo effetto sarebbe distribuito su tutti gli altri. Per questi motivi, esso non è in grado di valutare eventuali presenze di difetti in modo da ottenere segnali simulati in condizioni non nominali.

Per cercare di migliorare il modello appena citato, in [64] è proposta una versione rivista, schematizzata in figura 4.1, che cerca di descrivere il comportamento dinamico di un riduttore armonico, considerando tutte le interazioni che avvengono al suo interno. Per fare ciò sono stati presi in considerazione le rigidità dei componenti principali di un riduttore armonico, ovvero Wave Generator, Flexspline e Circular Spline. Quindi si introduce la rigidità torsionale della Flexspline, la rigidità radiale del Wave Generator e la rigidità d'ingranamento per i denti di Flexspline e Circular Spline. In più è descritto sia l'attrito all'interno del Wave Generator che



**Figura 4.1:** Rappresentazione schematica di modelli di riduttori armonici: modello proposto in [64] (*a sinistra*) e modello rivisitato da [75] (*a destra*).

l'attrito che si genera nella zone d'ingranamento in modo da rappresentarne l'andamento non lineare e in funzione della velocità di rotazione. L'errore cinematico è inoltre modellato come un'ulteriore eccentricità del riduttore armonico. Sebbene tale modello riesca a cogliere alcune caratteristiche del riduttore e a descrivere il funzionamento in condizioni nominali, risultare essere comunque non adatto a i fini diagnostici e prognostici.

Una delle approssimazioni che molti modelli [38, 45, 64, 76, 77] di riduttori armonici introducono è l'ipotesi di rapporto di trasmissione noto a priori e costante. In questo modo è possibile legare in maniera diretta le relazioni di input e output. Tuttavia tale valore è il risultato di tutte le interazioni, sia cinematiche che dinamiche, che avvengono all'interno del riduttore. In più tale approssimazione non permette di valutare gli effetti di presenza di *fault*, in quanto la loro presenza andrebbe ad alterare le prestazioni e le interazioni modificandone il risultato finale. Pertanto tale approssimazione non può essere adattata per lo sviluppo di un modello ai fini diagnostici e prognostici.

Nel modello introdotto in questa trattazione, sebbene il rapporto di trasmissione sia un valore noto a priori da catalogo [29], sarà uno dei risultati ottenuti in modo da valutarne gli andamenti durante il funzionamento nominale e gli effetti che la presenza di un guasto può avere su di esso. In più tale valore dipende anche dal carico esterno applicato in quanto influisce sulle singole interazioni interne al riduttore da cui poi verificare il reale rapporto di trasmissione. Nel modello sviluppato in [64] l'ingranamento risulta essere non influenzato dalla presenza di

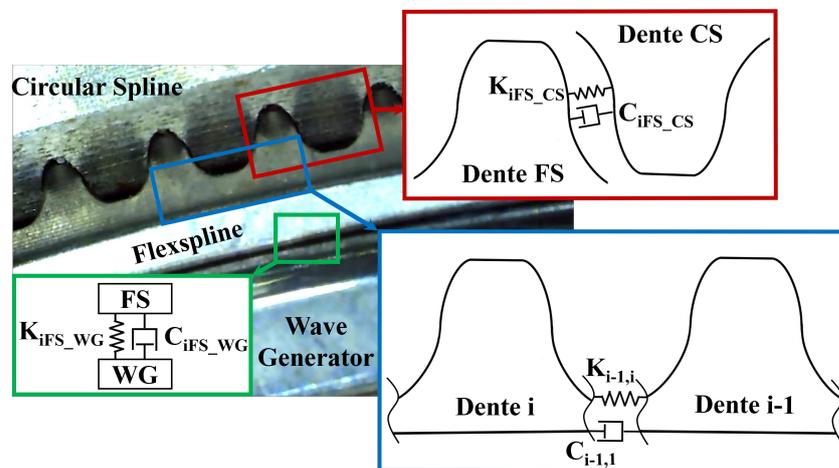
un carico esterno. Uno dei vantaggi che introduce il modello proposto in questa trattazione è quella di andare a descrivere le proprietà dinamiche ad ogni singola interazione. Un esempio è rappresentato dalla rigidità di contatto la quale è diversa per ogni coppia di dente in presa. In altri modelli spesso tale valore è mediato su tutti i denti in presa. In questo modo non è possibile andare a valutare gli effetti di una eventuale cricca che potrebbe instaurarsi su un singolo dente. Una grandezza mediata andrebbe a dividere tale effetto su più elementi, non permettendo di essere più significativa e di potere valutare gli andamenti nel tempo di tale *fault*. Pertanto l'assunzione di grandezze mediate su tutto il componente non è adatto per i fini di questa trattazione. Infatti ogni grandezza fisica individuata sarà diversa per ogni singola interazione in modo da valutare gli effetti di un guasto in questa zona.

Un modello accurato introdotto in [64], ripreso da [75], considera alcune interazioni all'interno del riduttore. Tuttavia, il livello di dettaglio non risulta essere ancora sufficiente nel descrivere la propagazione di eventuali guasti che si possono verificare nel riduttore. Infatti, in questo modello appena citato, le forze scambiate nella zona di ingranamento tra i denti della Flexspline e della Circular Spline sono stimate attraverso un valore medio di rigidità di contatto. Siccome sulla Flexspline si ha una distribuzione asimmetrica del carico [84], questa approssimazione non permette la descrizione accurata del corretto ingranamento di ogni singola coppia di denti in presa. Condizione che sarà fondamentale per le analisi PHM sul componente Harmonic Drive®.

## 4.1 Approccio seguito per la stesura del modello *multibody* di un riduttore armonico

Entrambi gli approcci per la stesura di modelli per i riduttori armonici risultano essere validi agli scopi di descrizione di funzionamento generale e ideale del componente. Tuttavia, non permettono di sviluppare modelli in grado di descrivere nel dettaglio le singole interazioni che avvengono al suo interno in modo da prevedere possibili criticità in caso di malfunzionamenti o guasti e studiarne il comportamento in tali condizioni non nominali.

In figura 4.2 è schematizzato il livello di dettaglio utilizzato all'interno di questa trattazione per simulare il comportamento di guasti che maggiormente si verificano in un riduttore armonico.



**Figura 4.2:** Rappresentazione schematica del modello di contatto usato nelle diverse interfacce del riduttore armonico [3].

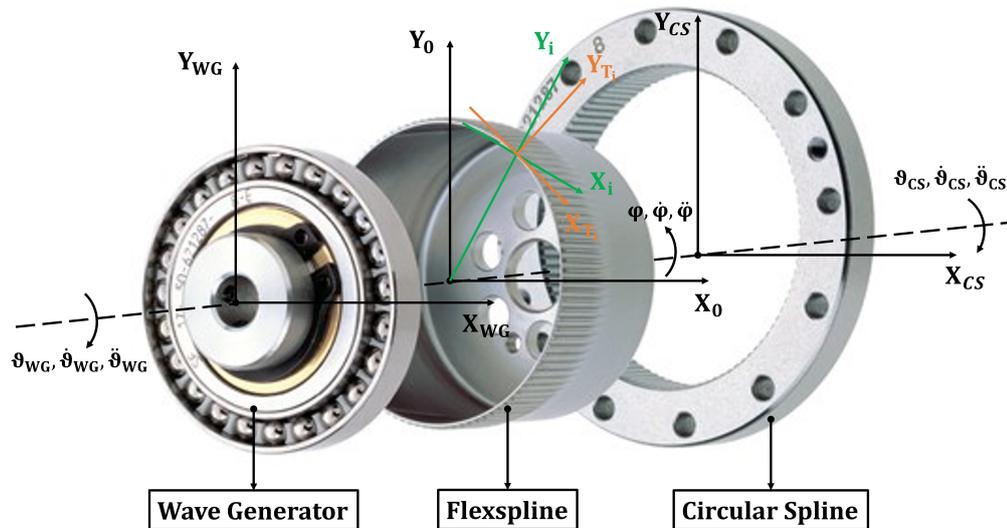
Il modello proposto analizza nel dettaglio le interazioni che avvengono in tre zone principali:

- **In verde:** modello del contatto dell'interfaccia tra Wave Generator e Flexspline.
- **In rosso:** modello del contatto dell'interfaccia tra dente della Flexspline e dente della Circular Spline.
- **In blu:** modello del contatto dell'interfaccia tra il singolo dente  $i$  della Flexspline con quello precedente  $i-1$  e successivo  $i+1$ .

In questo modo è possibile modellare ogni interazione come un sistema massa-molla-smorzatore ( $m-k-c$ ). Pertanto, sarà necessario formulare tutte le relative equazioni di equilibrio che interessano le singole interfacce individuate. In più, bisognerà stabilire in modo opportuno tutte le rigidità e gli smorzamenti utilizzati per descrivere le zone di contatto. La struttura di questo modello permette, quindi, la possibilità di simulare la presenza di eventuali guasti, come per esempio cricche o usura dei denti, che si possono instaurare. Una cricca nella Flexspline può essere simulata, per esempio, andando a ridurre o, in certi casi, annullare la rigidità  $K_{i-1,i}$  [85]. Una frattura all'interno del dente  $i$ -esimo può essere simulata, invece, andando a modificare la rigidità di ingranamento  $K_{i_{FS-CS}}$ .

Per analizzare il modello *multibody*, utilizzato per descrivere nel dettaglio il comportamento fisico di un riduttore armonico, si ricorre a cinque sistemi di riferimento, schematizzati in figura 4.3:

1.  $(\mathbf{X}_{\mathbf{WG}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{WG}})$ , sistema di riferimento mobile relativo al Wave Generator;
2.  $(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ , sistema di riferimento fisso relativo alla sezione deformata della Flexspline, rappresenta anche il sistema di riferimento di un osservatore esterno al riduttore armonico;
3.  $(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)$ , sistema di riferimento mobile relativo al punto di contatto  $P_i$  tra Wave Generator e Flexspline;
4.  $(\mathbf{X}_{\mathbf{T}_i}, \mathbf{Y}_{\mathbf{T}_i})$ , sistema di riferimento mobile relativo al dente  $i$ -esimo della Flexspline ruotato rispetto a  $(X_i, Y_i)$  in quanto la forma ellittica della Flexspline deformata impone che la direzione normale al dente  $i$ -esimo non coincida con la direzione radiale passante per  $P_i$ ;
5.  $(\mathbf{X}_{\mathbf{CS}}, \mathbf{Y}_{\mathbf{CS}})$ , sistema di riferimento mobile relativo alla Circular Spline, il quale ruota in senso concorde alla rotazione del Wave Generator.



**Figura 4.3:** Sistemi di riferimento adottati per la descrizione del modello *multibody* del riduttore armonico.

La modellazione del riduttore armonico in ambiente Matlab-Simulink<sup>TM</sup> è stata basata sulla descrizione delle caratteristiche fisiche dei componenti e delle interazioni scambiate nelle singole interfacce. Questa trattazione prevede di analizzare le interazioni che avvengono nelle zone di interfaccia, precedentemente descritte, per ogni singolo dente  $i$  della Flexspline. Pertanto, le grandezze in esame saranno descritte da vettori di lunghezza pari al numero di denti  $Z_{FS} = 200$  della Flexspline presente nel riduttore armonico HFUS-25-2SH utilizzato come base di partenza per lo sviluppo del modello *multibody*. Tali vettori rappresentano, quindi, i segnali in ingresso ai singoli blocchi Simulink<sup>TM</sup> utilizzati per modellare le singole zone di interfaccia. Questo approccio permette di agire e modificare il singolo elemento del vettore. Infatti, nel caso sia necessario agire su un singolo dente  $i$ -esimo, per esempio andando a modificarne la rigidezza di ingranamento nel caso sia presente una cricca al suo interno, è possibile intervenire sul singolo elemento  $i$ -esimo del vettore utilizzato per descrivere la grandezza fisica corrispondente da modificare.

Si ricorda che, sebbene il modello sia stato sviluppato a partire dal riduttore armonico HFUS-25-2SH presente all'interno dei primi tre giunti (base, spalla, gomito) del robot collaborativo UR5, esso ha comunque una validità generale. Per adattarlo ad altre taglie di riduttori armonici, è sufficiente cambiare i dati che caratterizzano il diverso riduttore, in termini di dimensioni e proprietà fisiche, su uno script MATLAB<sup>TM</sup> sviluppato per rendere eseguibile il relativo modello Simulink<sup>TM</sup>.

## Capitolo 5

# Modello di inserimento del Wave Generator

Come evidenziato nel capitolo 1, è necessario sviluppare un modello *multibody* che riesca a descrivere cinematicamente e dinamicamente ogni interazione tra i componenti presenti all'interno del riduttore armonico. In questo modo, sarà possibile simulare la presenza di guasti in un riduttore armonico e il loro effetto sulle grandezze di uscita. Questa nuova tipologia di modello sarà successivamente inserito all'interno di un modello più completo dell'intero robot collaborativo UR5 con l'obiettivo di valutare l'effetto di un guasto al riduttore di un giunto sul comportamento globale della macchina. Ciò risulta essere possibile in quanto il modello del robot collaborativo, simile a quello proposto in [5], è stato concepito in modo da essere modulare. Infatti è possibile sostituire ogni singolo sottosistema con versioni più dettagliate in modo da migliorare le prestazioni dell'intero sistema. In questo modo, è possibile sostituire il sottosistema di motoriduttore semplificato introdotto, il quale comprende solo il rapporto di trasmissione e il rendimento, in cui il rapporto di trasmissione è noto a priori, con il modello *multibody* sviluppato nel seguito della trattazione.

Si va a simulare l'inserimento del Wave Generator partendo da una Flexspline indeformata di forma circolare che viene deformata nel tempo in una sezione ellittica andando a variare, a velocità di deformazione  $\dot{w}$  costate e ad ogni passo di integrazione, le dimensioni dei semiassi maggiori e minori del Wave Generator attraverso la deformazione  $w$ . In questo modo si passa gradualmente da una sezione circolare ad una ellittica della Flexspline e, risolvendo le equazioni di equilibrio sui singoli denti in base alle forze scambiate nelle singole interfacce del sistema, si è in grado di calcolare la posizione finale dei denti della Flexspline deformata, lo stato di tensione della Flexspline e le forze scambiate tra le singole interfacce di Wave

Generator e Flexspline.

Il modello dell'inserimento del Wave Generator descritto in questo capitolo sarà utilizzato per il calcolo delle condizioni iniziali, come la posizione assunta dai denti della Flexspline a seguito dell'inserimento del Wave Generator, di un modello completo di riduttore armonico. Tale modello completo verrà sviluppato in studi futuri e nel capitolo 7 vengono trattati teoricamente i contributi da integrare nel presente modello di inserimento del Wave Generator, in modo da descrivere il funzionamento del riduttore armonico in condizioni operative.

Le relazioni saranno ricavate rispetto ad un sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$ , solidale alla Flexspline.

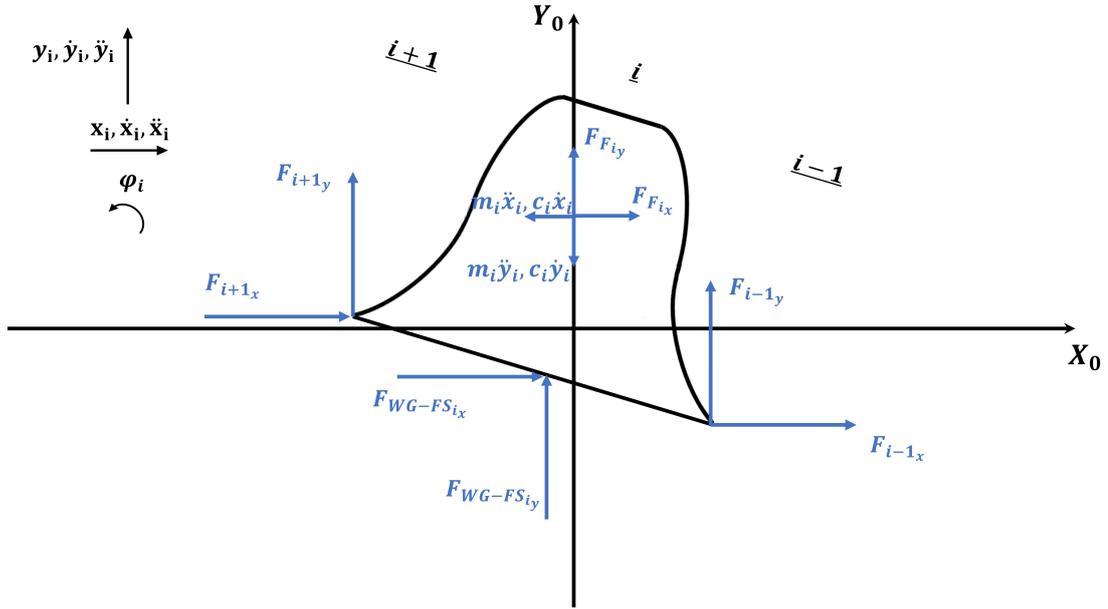
Come input del modello si utilizza la velocità di deformazione  $\dot{w}$  costante. Integrando tale velocità è possibile ricavare la deformazione  $w$  con cui si va a modificare il profilo del Wave Generator, mentre la deformazione della Flexspline è conseguenza delle forze scambiate con il Wave Generator e delle equazioni di equilibrio sui singoli denti. La deformazione  $w$  rappresenta l'eccentricità della forma ellittica del Wave Generator al tempo  $t$  fino ad arrivare a  $w_0$ , pari a 0,35 mm, che rappresenta la massima deformazione raggiunta lungo il semiasse maggiore, come schematizzato in figura 5.2. In questo modo si impone una deformazione al profilo del Wave Generator che, attraverso il contatto molla e smorzatore, va a deformare la Flexspline. Così facendo si impone uno spostamento noto al Wave Generator, ma non alla Flexspline. Pertanto, le posizioni dei singoli denti della Flexspline saranno ricavate dalle equazioni di equilibrio al dente, si veda la sezione 5.1 per maggiori dettagli.

Le coordinate dei singoli denti della Flexspline,  $x_i$  e  $y_i$ , sono date risolvendo le equazioni di equilibrio al dente andando ad integrare due volte nel tempo le relative accelerazioni  $\ddot{x}_i$  e  $\ddot{y}_i$ . All'inizio queste sono pari a  $x_0$  e  $y_0$ , ricavate attraverso le equazioni 5.5, dato che la Flexspline è originariamente una circonferenza. In più, in questo istante la posizione del singolo dente e del punto di contatto con il Wave Generator coincidono.

## 5.1 Equilibrio dinamico sul singolo dente della Flexspline

Con il livello di dettaglio adottato per la stesura del modello di inserimento del Wave Generator, il singolo dente della Flexspline rappresenta l'elemento centrale su cui agiscono le principali interazioni che avvengono in un riduttore armonico. Prima di ricavare le equazioni di equilibrio del singolo dente, si suddivide la Flexspline in tanti piccoli elementi pari al numero di denti della Flexspline stessa, ovvero  $Z_{FS} = 200$ .

In prima approssimazione, si considera il singolo dente come puntiforme, quindi si trascura la sua geometria. Questa approssimazione è stata fatta per semplificare i calcoli dato che ciò non influenza i risultati ottenuti in quanto questo modello è utilizzato per ottenere le condizioni iniziali per un successivo modello completo di riduttore armonico in cui si dovrà tenere conto della geometria dei denti in modo da descrivere correttamente il principio di ingranamento tra Flexspline e Circular Spline, come descritto nel paragrafo 7.4. Successivamente si potrà andare ad approfondire la geometria del dente ed introdurre nel modello il profilo più utilizzato negli harmonic drive in commercio (profilo ad evolvente, profilo a doppio arco, profilo cicloidale).



**Figura 5.1:** Diagramma di corpo libero del dente *i-esimo* della Flexspline.

In base al diagramma di corpo libero in figura 5.1, si ottengono le equazioni di equilibrio alla traslazione lungo il sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$ . Di seguito sono riportati i versi positivi delle forze, mentre i moduli delle singole componenti sono ricavati nei paragrafi seguenti.

Equilibrio alla traslazione orizzontale lungo  $X_0$ :

$$m_i \ddot{x}_i + c_i \dot{x}_i = F_{F_{i_x}} + F_{i-1_x} + F_{WG-FS_{i_x}} + F_{i+1_x} \quad (5.1)$$

Equilibrio alla traslazione verticale lungo  $Y_0$ :

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i = F_{F_{i_y}} + F_{i-1_y} + F_{WG-FS_{i_y}} + F_{i+1_y} \quad (5.2)$$

L'equazione (5.1) riscritta, come di seguito, in funzione dell'accelerazione orizzontale  $\ddot{x}_i$  e integrata due volte nel tempo, permette di calcolare la velocità orizzontale  $\dot{x}_i$  e

la posizione orizzontale  $x_i$  del dente  $i$ -esimo in esame, in seguito alla deformazione subita dalla Flexspline al passaggio del Wave Generator:

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m_i} \left( F_{F_{i_x}} + F_{i-1_x} + F_{WG-FS_{i_x}} + F_{i+1_x} - c_i \dot{x}_i \right) \quad (5.3)$$

L'equazione (5.2) riscritta, come di seguito, in funzione dell'accelerazione verticale  $\ddot{y}_i$  e integrata due volte nel tempo, permette di calcolare la velocità angolare  $\dot{y}_i$  e la posizione verticale  $y_i$  del dente  $i$ -esimo in esame, in seguito alla deformazione subita dalla Flexspline al passaggio del Wave Generator:

$$\ddot{y}_i = \frac{1}{m_i} \left( F_{F_{i_y}} + F_{i-1_y} + F_{WG-FS_{i_y}} + F_{i+1_y} - c_i \dot{y}_i \right) \quad (5.4)$$

Dove:

$F_{WG-FS_i}$  [N] è la forza di contatto scambiata tra Wave Generator e Flexspline diretta in direzione normale all'ellisse (inclinata di  $\alpha_{N_i}$  rispetto all'asse orizzontale del sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$ ), descritta nel paragrafo 5.2;

$F_{i-1}$  [N] è la forza elastica scambiata fra il dente  $i$  e  $i - 1$  (dente precedente) che tiene conto della deformazione dell'elemento di Flexspline in seguito al passaggio della forma ellittica del Wave Generator, descritta nel paragrafo 5.3;

$F_{i+1}$  [N] è la forza elastica scambiata fra il dente  $i$  e  $i + 1$  (dente successivo) che tiene conto della deformazione dell'elemento di Flexspline in seguito al passaggio della forma ellittica del Wave Generator, descritta nel paragrafo 5.3;

$c_i$  [Ns/m] è il coefficiente di smorzamento del dente  $i$ -esimo, pari a 0.01Ns/m;

$F_{F_i}$  [N] è la forza di richiamo flessionale dovuta al passaggio da forma circolare ad ellittica della Flexspline, descritta nel paragrafo 5.4;

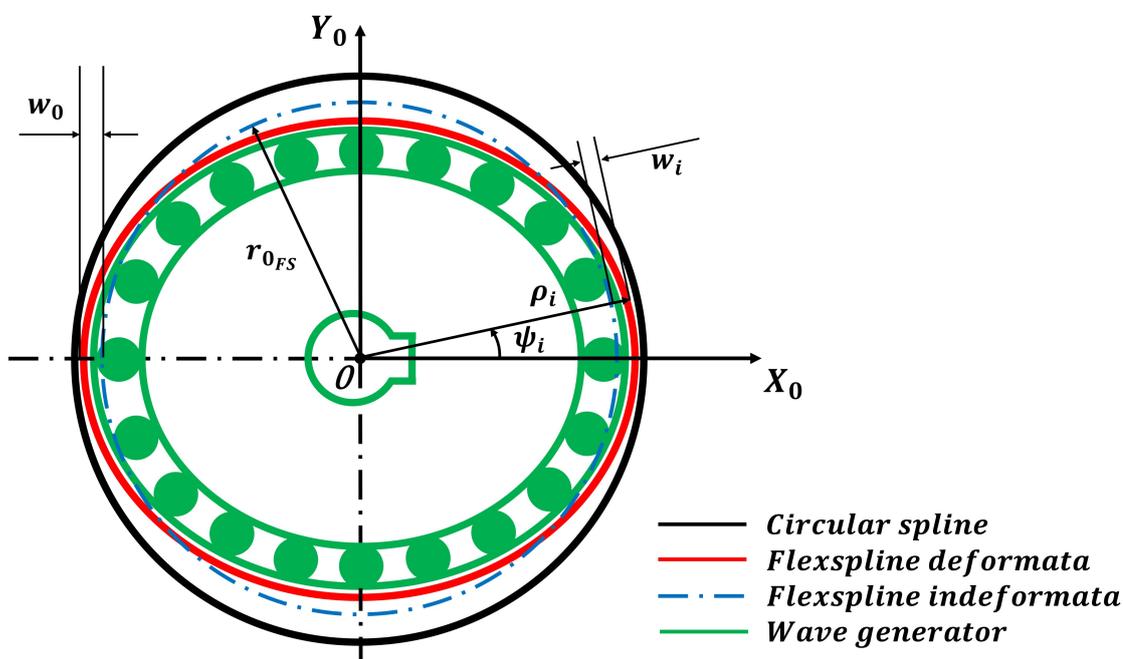
$m_i$  [kg] è la massa del dente  $i$ -esimo.

Inoltre, in questo modello, è stato adottato un valore di massa  $m_i$  pari a 50 volte il valore reale in modo da usare un passo temporale più grande e, quindi, avere tempi di simulazioni ridotti. Questo perché si deve tenere conto della frequenza naturale del sistema  $f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_i}{m_i}}$ . In questo caso si hanno masse  $m_i$  molto piccole e rigidezze equivalenti del sistema  $K_i$  molto elevate, quindi frequenze naturali  $f_n$  molto elevate. Ciò implica che per descrivere correttamente la dinamica del sistema si dovrebbe ricorrere ad un passo di integrazione molto piccolo. Questo si risolve aumentando la massa dei singoli denti. Ciò non ha molta influenza sul sistema perché le singole masse sono relativamente piccole e il loro contributo è solo sulle forze di inerzia ( $m_i \ddot{x}_i$  e  $m_i \ddot{y}_i$ ).

## 5.2 Interazione tra Wave Generator e Flexspline

Una delle prime zone all'interno del riduttore armonico che devono essere analizzate nel dettaglio per poter descrivere il comportamento cinematico e dinamico dell'intero sistema è rappresentata dall'interfaccia tra Wave Generator e Flexspline.

I denti della Flexspline, pari a  $Z_{FS} = 200$  nel caso analizzato, sono suddivisi equamente sull'angolo giro quando essa è in condizioni non deformate, quindi ogni dente si troverà ad una specifica posizione indeformata. Quando si inserisce il Wave Generator all'interno della Flexspline, quest'ultima subirà un cambio di forma imposta dal Wave Generator, passando da una forma circolare ad una ellittica, come mostrato in figura 5.2. Ciò permetterà ai denti della Flexspline di poter ingranare e trasmettere il moto con i denti della Circular Spline.



**Figura 5.2:** Schema di assemblaggio dei tre componenti principali di un riduttore armonico.

Le coordinate del profilo del Wave Generator o dei denti della Flexspline in condizioni non deformate (coincidono in condizioni iniziali) risultano essere:

$$\begin{cases} x_0 = r_{0_{FS}} \sin(\psi_0) & (5.5a) \\ y_0 = r_{0_{FS}} \cos(\psi_0) & (5.5b) \end{cases}$$

in cui  $\psi_0$  è definito come:

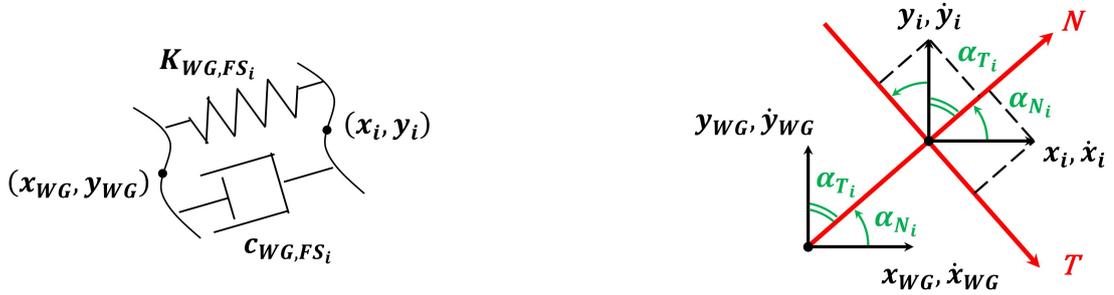
$$\psi_0 = \left[ 0 : \frac{2\pi}{Z_{FS}} : 2\pi \left( 1 - \frac{1}{Z_{FS}} \right) \right] \quad (5.6)$$

con:

$\psi_0$  [rad] misurato partendo dall'asse orizzontale fisso  $X_0$  in verso antiorario.

Con la deformazione radiale  $w$  si va a deformare il profilo del Wave Generator, non direttamente del dente della Flexspline, altrimenti sarebbe come andare ad imprimere il moto al dente e non ottenerlo dalle relative equazioni di equilibrio. Pertanto, non si terrebbe conto dello spostamento del dente lungo l'ellisse nel passaggio tra circonferenza ed ellisse e, inoltre, sarebbe come tenere conto solo della deformazione radiale e non di quella circonferenziale.

Il contatto tra Wave Generator e Flexspline è modellato come un contatto molla-smorzatore avente rigidezza elastica  $K_{WG,FS_i}$  e smorzamento  $c_{WG,FS_i}$ , come schematizzato in figura 5.3. Durante il contatto si genera una forza  $F_{WG,FS_i}$ , scambiata lungo la direzione perpendicolare all'ellisse (inclinata di  $\alpha_{N_i}$  rispetto all'asse orizzontale fisso  $X_0$ ).



**Figura 5.3:** Modello di contatto tra Wave Generator e Flexspline (a sinistra); Direzione della forza  $F_{WG,FS_i}$  scambiata tra Wave Generator e Flexspline (a destra).

### 5.2.1 Determinazione del punto di contatto tra Wave Generator e Flexspline

Per il calcolo delle forze scambiate tra Wave Generator e Flexspline e dirette in direzione normale e tangenziale rispetto all'ellisse che, in quell'istante di tempo, descrive il profilo del Wave Generator in fase di deformazione bisogna considerare il punto di intersezione tra una retta passante per i denti della Flexspline, aventi coordinate  $x_i$  e  $y_i$ , e perpendicolare al profilo dell'ellisse. In questo modo per ogni dente della Flexspline e per ogni punto si ha la certezza di descrivere un contatto normale alla superficie dell'ellisse tramite un contatto molla-smorzatore.

I valori di semiasse maggiore  $a$  e semiasse minore  $b$  della forma ellittica del Wave Generator sono aggiornati ad ogni istante di tempo avendo imposto la velocità  $\dot{w}$  di deformazione del cerchio costante, ottenendo il profilo del Wave Generator come:

$$\begin{cases} a = r_{0_{FS}} + w & (5.7a) \\ b = r_{0_{FS}} - w & (5.7b) \end{cases}$$

Per determinare il reale punto di contatto tra Wave Generator e Flexspline è necessario risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{x_{WG}^2}{a^2} + \frac{y_{WG}^2}{b^2} = 1, & (5.8a) \\ y_i = (x_i - x_{WG}) \underbrace{\frac{a^2 x_{WG}}{b^2 y_{WG}}}_{m_N} + y_{WG}. & (5.8b) \end{cases}$$

in cui l'equazione (5.8a) rappresenta il profilo ellittico del Wave Generator che si sta deformando, mentre l'equazione (5.8b) rappresenta la retta passante per il singolo dente  $(x_i, y_i)$  e normale al profilo ellittico del Wave Generator, dove  $m_N$  ne rappresenta la pendenza.

Dal sistema di equazioni (5.8) si hanno due equazioni in due incognite  $(x_{WG}, y_{WG})$  del Wave Generator in fase di deformazione.

Partendo dall'equazione (5.8b) si ricava l'espressione in funzione di  $y_{WG}$ . Dopodiché si sostituisce l'espressione ottenuta nell'equazione (5.8a) per ricavare l'espressione in funzione di  $x_{WG}$ . Infine, dopo una serie di passaggi algebrici si ottiene l'equazione:

$$Ax_{WG}^4 + Bx_{WG}^3 + Dx_{WG}^2 - Ex_{WG} - F = 0 \quad (5.9)$$

in cui:

$$\begin{cases} A = a^2 + b^2 - 2a^2b^2 & (5.10a) \\ B = 2a^2x_i(b^2 - a^2) & (5.10b) \\ C = a^4x_i^2 & (5.10c) \\ D = C + b^2a^2y_i^2 - a^2A & (5.10d) \\ E = a^2B & (5.10e) \\ F = a^2C & (5.10f) \end{cases}$$

Una volta risolta l'equazione (5.9), il risultato sarà sostituito in (5.8a) in modo da ottenere le coordinate  $(x_{WG}, y_{WG})$  del punto di contatto tra Wave Generator e Flexspline.

Siccome l'equazione (5.9) non è risolvibile analiticamente, è stata implementata in un blocco Simulink™ attraverso la funzione *fsolve* che la risolve per via numerica. Sono indicate, come punto di partenza della soluzione, le coordinate del punto di intersezione fra i denti della Flexspline e il Wave Generator (retta passante per  $(x_i, y_i)$  e l'origine del sistema di riferimento fisso  $X_0, Y_0$ ) e la deformazione  $w$  in quel dato istante di tempo, da cui è possibile ricavare i semiassi maggiori e minori,  $a$  e  $b$ , dell'ellisse che descrive il profilo del Wave Generator in fase di deformazione. Tuttavia, questa funzione rallenta notevolmente la simulazione, pertanto è stato seguito un approccio differente.

Per evitare problemi di rallentamenti durante la simulazione della soluzione dell'equazione (5.9) a causa dell'utilizzo della funzione *interpretata*, è stata considerata l'intersezione tra ellisse, descritta dalle coordinate polari, e retta passante per il singolo dente  $(x_i, y_i)$  e l'origine  $(0, 0)$  non più normale all'ellisse, ma inclinata di  $\psi_i$ . Le coordinate polari sono:

$$\begin{cases} x_{WG} = a \cos \psi_i \\ y_{WG} = b \sin \psi_i \end{cases} \quad (5.11)$$

in cui:

$$\psi_i = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \quad (5.12)$$

L'errore commesso con questo tipo di approccio risulta essere accettabile in quanto i denti della Flexspline sono molto vicini al Wave Generator e, inoltre, l'eccentricità del Wave Generator è relativamente bassa, pertanto il reale punto di intersezione sulla direzione normale tende a degenerare sulla direzione radiale.

Per discriminare soluzioni positive o negative, si utilizza l'angolo  $\psi_i$  in modo da capire in quale quadrante ci si sta riferendo e dare il segno opportuno a  $x_{WG}$  e  $y_{WG}$

del profilo del Wave Generator. Siccome l'angolo  $\psi_i$  è stato ricavato in Simulink™ attraverso la funzione  $atan2$ , il suo output è stato opportunamente modificato in modo da ottenere che  $0 \leq \psi_i \leq 2\pi$ .

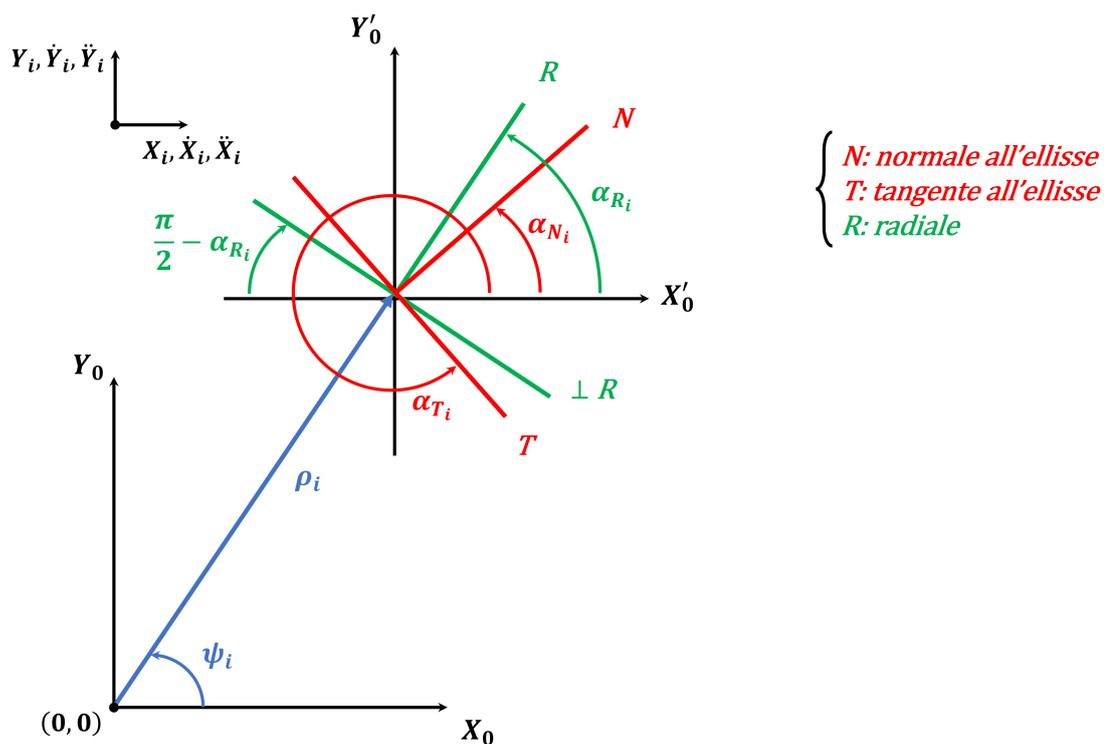
Dalle coordinate dei punti di contatto  $(x_{WG}, y_{WG})$  tra Wave Generator e Flexspline che saranno molto prossime a quelle dei denti della Flexspline, è possibile calcolare gli angoli, schematizzati in figura 5.4, secondo cui scomporre le forze per l'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale del dente.

Angolo che descrive la direzione radiale (R), da cui si identifica la posizione del dente  $i$ -esimo:

$$\alpha_{R_i} = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right) = \psi_i \quad (5.13)$$

raggio vettore dente  $i$ -esimo:

$$\rho_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad (5.14)$$

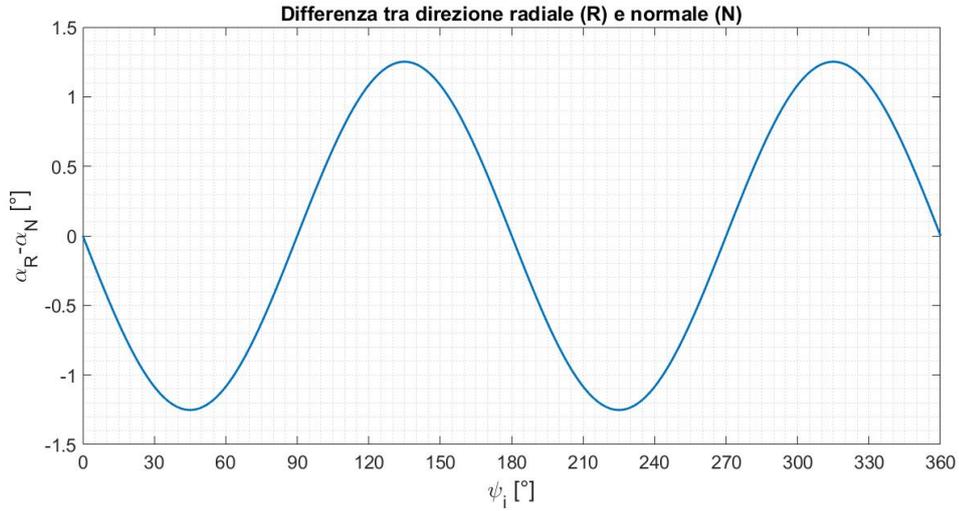


**Figura 5.4:** Angoli principali riferiti al Wave Generator.

Poiché il punto di contatto è situato su un'ellisse, la direzione normale al profilo in deformazione del Wave Generator non coincide con la direzione radiale in quanto

dipende dal valore assunto dai due semiassi in un dato istante di tempo. Sebbene tale differenza sia relativamente piccola, come riportato in figura 5.5, è comunque da tenere in considerazione per una corretta analisi e scomposizione delle grandezze prese in esame.

Angolo che descrive la direzione normale all'ellisse (N):



**Figura 5.5:** Andamento della differenza tra direzione radiale (R) e direzione normale (N) al Wave Generator.

$$\alpha_{N_i} = \arctan\left(\frac{a^2 y_i}{b^2 x_i}\right) \quad (5.15)$$

Angolo che descrive la direzione tangenziale all'ellisse (T):

$$\alpha_{T_i} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{N_i} \quad (5.16)$$

Gli angoli appena ricavati risultano definiti con una funzione continua nel seguente intervallo:

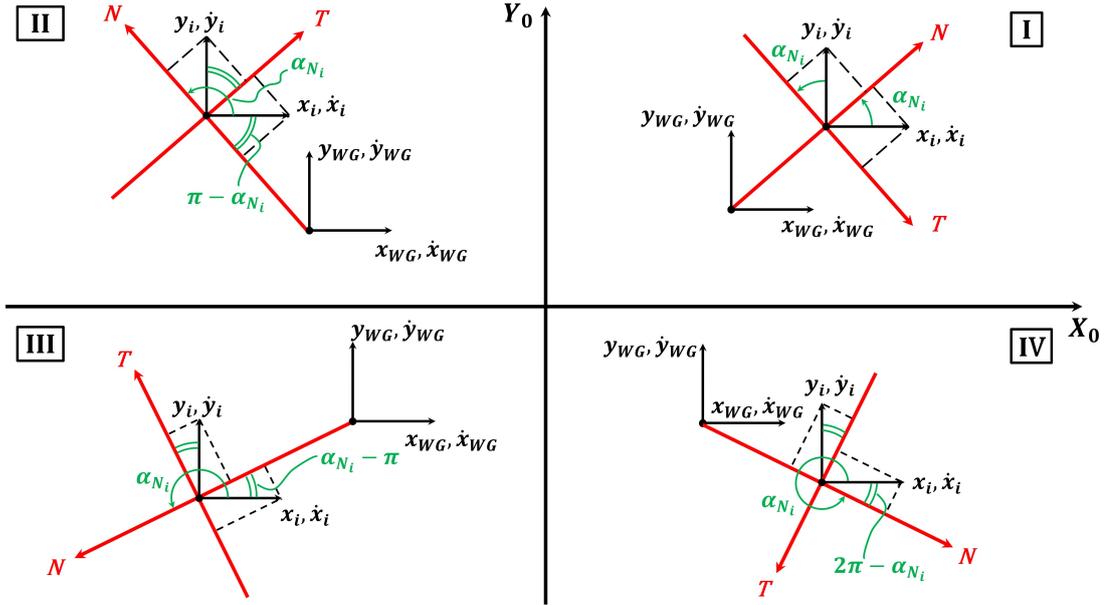
$$0 \leq \alpha_{R_i}, \alpha_{N_i}, \psi_0, \psi_i \leq 2\pi \quad (5.17)$$

per ottenere ciò e per evitare il salto che genera la funzione *atan2* in quanto definita nell'intervallo  $(-\pi, \pi]$  è necessario applicare la seguente correzione:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha + 2\pi & \text{se } \alpha < 0 \\ \psi = \psi + 2\pi & \text{se } \psi < 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

## 5.2.2 Scomposizione di $(x_i, y_i)$ e $(\dot{x}_i, \dot{y}_i)$ lungo la direzione normale N al Wave Generator

Per il calcolo dell'interazione con il Wave Generator è necessario scomporre lungo la direzione normale N, sfruttando gli archi associati, come schematizzato in figura 5.6, la posizione  $(x_i, y_i)$  e la velocità  $(\dot{x}_i, \dot{y}_i)$  del singolo dente *i-esimo*. Le velocità, inoltre, saranno usate nella sezione 7.1 per il calcolo della forza di richiamo torsionale della



**Figura 5.6:** Scomposizione lungo la direzione normale nei diversi quadranti.

Flexspline.

Per ogni quadrante è possibile ricavare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x_i \cos(\alpha_{N_i}) + y_i \sin(\alpha_{N_i}) & \text{se } 0 \leq \alpha_{N_i} < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5.19a)$$

$$\begin{cases} -x_i \cos(\pi - \alpha_{N_i}) + y_i \sin(\pi - \alpha_{N_i}) & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq \alpha_{N_i} < 2\pi \end{cases} \quad (5.19b)$$

$$\begin{cases} -x_i \cos(\alpha_{N_i} - \pi) - y_i \sin(\alpha_{N_i} - \pi) & \text{se } 2\pi \leq \alpha_{N_i} < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (5.19c)$$

$$\begin{cases} x_i \cos(2\pi - \alpha_{N_i}) - y_i \sin(2\pi - \alpha_{N_i}) & \text{se } \frac{3\pi}{2} \leq \alpha_{N_i} < 2\pi \end{cases} \quad (5.19d)$$

Sfruttando gli archi associati si ottiene sempre l'espressione (5.19a) in tutti i quattro quadranti.

Con un processo del tutto analogo a quanto appena ricavato dalle relazioni (5.19) è possibile ricavare la proiezione delle velocità,  $\dot{x}_i$  e  $\dot{y}_i$ , del singolo dente lungo la

direzione normale N, ottenendo per ogni quadrante la seguente relazione:

$$\dot{x}_i \cos(\alpha_{N_i}) + \dot{y}_i \sin(\alpha_{N_i}) \quad (5.20)$$

### 5.2.3 Forze scambiate tra il Wave Generator e la Flexspline

Considerando che lungo la direzione normale N all'ellisse si ha che:

$$\cos(\alpha_{T_i}) = \sin(\alpha_{N_i}) \quad (5.21)$$

è possibile ricavare lo spostamento relativo tra Wave Generator e Flexspline in tale direzione come:

$$\underbrace{x_{WG} \cos(\alpha_{N_i}) + y_{WG} \sin(\alpha_{N_i})}_{\text{spostamento WG}} - \underbrace{x_i \cos(\alpha_{N_i}) + y_i \sin(\alpha_{N_i})}_{\text{spostamento FS}} \quad (5.22)$$

Da quest'ultima equazione è possibile calcolare la forza di contatto tra Wave Generator e Flexspline, andando a scrivere l'equazione di equilibrio lungo la direzione normale N:

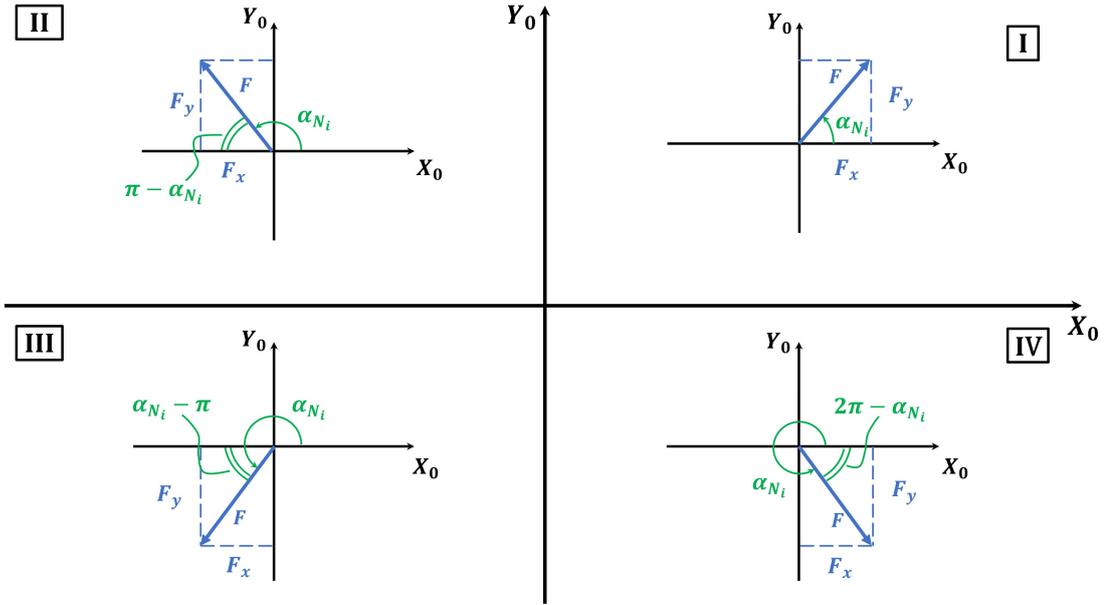
$$F_{WG,FS_i} = K_{WG,FS_i} [(x_{WG} - x_i) \cos(\alpha_{N_i}) + (y_{WG} - y_i) \sin(\alpha_{N_i})] + c_{WG,FS_i} [(\dot{x}_{WG} - \dot{x}_i) \cos(\alpha_{N_i}) + (\dot{y}_{WG} - \dot{y}_i) \sin(\alpha_{N_i})] \quad (5.23)$$

In generale, per i sistemi reali vale che  $|K \cdot z| \geq |c \cdot \dot{z}|$ , con  $z$ ,  $\dot{z}$  spostamenti e velocità generiche. In questo modo si evitano instabilità nelle simulazioni dovute al fatto che se si ha un contatto con velocità alta allora si ha un gradino di forza e di conseguenza la componente di smorzamento potrebbe essere superiore a quella elastica.

La forza  $F_{WG,FS_i}$  è definita positiva nel caso in cui il dente della Flexspline tende a compenetrare il Wave Generator, quindi si ha una forza repulsiva sul dente. Inoltre,  $F_{WG,FS_i}$  può assumere solo valori maggiori di zero perché, se il dente si allontana dal Wave Generator, allora non si ha una forza di richiamo che agisce sul dente per riportarlo a contatto con il Wave Generator. Si introduce una saturazione  $\Delta$  di posizione tra Wave Generator e Flexspline: se  $\Delta > 0$  si ha una forza scambiata perché c'è compenetrazione, altrimenti non si ha nessuna forza scambiata tra Wave Generator e Flexspline.

### 5.2.4 Scomposizione di $F_{WG,FS_i}$ lungo $(X_0, Y_0)$

Affinché la forza scambiata tra Wave Generator e Flexspline possa essere confrontata con le altre grandezze che agiscono sul singolo dente della Flexspline, è necessario avere le proiezioni lungo un sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$ , facendo attenzione alle varie configurazioni assunte nei vari quadranti, come mostrato in figura 5.7.



**Figura 5.7:** Scomposizione della forza di contatto tra Wave Generator e Flexspline lungo il sistema di riferimento  $(X_0, Y_0)$ .

Nel primo quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = F \cos(\alpha_N) \\ F_y = F \sin(\alpha_N) \end{cases} \quad (5.24)$$

Nel secondo quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = -F \cos(\pi - \alpha_N) = F \cos(\alpha_N) \\ F_y = F \sin(\pi - \alpha_N) = F \sin(\alpha_N) \end{cases} \quad (5.25)$$

Nel terzo quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = -F \cos(\alpha_N - \pi) = -F \cos(\pi - \alpha_N) = F \cos(\alpha_N) \\ F_y = F \sin(\alpha_N - \pi) = F \sin(\pi - \alpha_N) = F \sin(\alpha_N) \end{cases} \quad (5.26)$$

Nel quarto quadrante vale che:

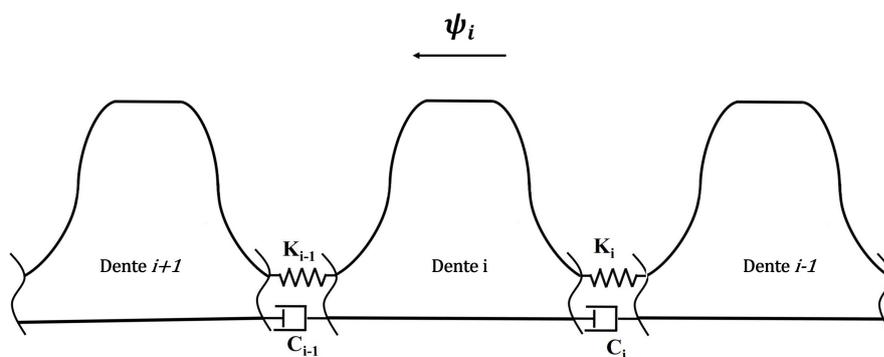
$$\begin{cases} F_x = F \cos(2\pi - \alpha_N) = F \cos(\alpha_N) \\ F_y = F \sin(2\pi - \alpha_N) = -F \sin(\alpha_N) \end{cases} \quad (5.27)$$

Quindi è possibile dedurre che la scomposizione lungo il sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$  vale:

$$\begin{cases} F_{WG,FS_{ix}} = F_{WG,FS_i} \cos(\alpha_{N_i}) \\ F_{WG,FS_{iy}} = F_{WG,FS_i} \sin(\alpha_{N_i}) \end{cases} \quad (5.28)$$

### 5.3 Forze scambiate tra denti adiacenti della Flexspline

Ogni singolo dente  $i$ -esimo della Flexspline è collegato alla base dei denti adiacenti lungo lo spessore della Flexspline. Come schematizzato in figura 5.8, ai fini della stesura del modello, è stata considerata l'interfaccia tra dente  $i$ -esimo e dente successivo  $i+1$  modellata attraverso la rigidità  $K_i$  e lo smorzamento  $c_i$ , analogamente bisogna considerare l'interfaccia tra dente  $i$ -esimo e dente precedente  $i-1$  modellata attraverso la rigidità  $K_{i-1}$  e lo smorzamento  $c_{i-1}$ . In questo modo, sarà possibile calcolare la deformazione subita alla base del dente lungo la congiungente tra denti adiacenti e, grazie al livello di dettaglio di questa modellazione, considerare un'eventuale cricca che potrebbe instaurarsi alla base del dente, andando a modificare la relativa rigidità di contatto.



**Figura 5.8:** Modello di contatto tra denti consecutivi della Flexspline.

La rigidità di contatto tra due denti consecutivi è stata calcolata come la rigidità assiale di una trave incastrata come schematizzato in figura 5.9, ottenendo:

$$K = \frac{EA}{L} = \frac{E s_{\text{rim}_{\text{FS}}} b_{\text{FS}}}{p_B - L_B} = 5,12 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (5.29)$$

dove:

$E$  [N/m<sup>2</sup>] è il modulo elastico del materiale della Flexspline;

$A$  [m<sup>2</sup>] è la sezione trasversale dello spessore di Flexspline tra due denti adiacenti;

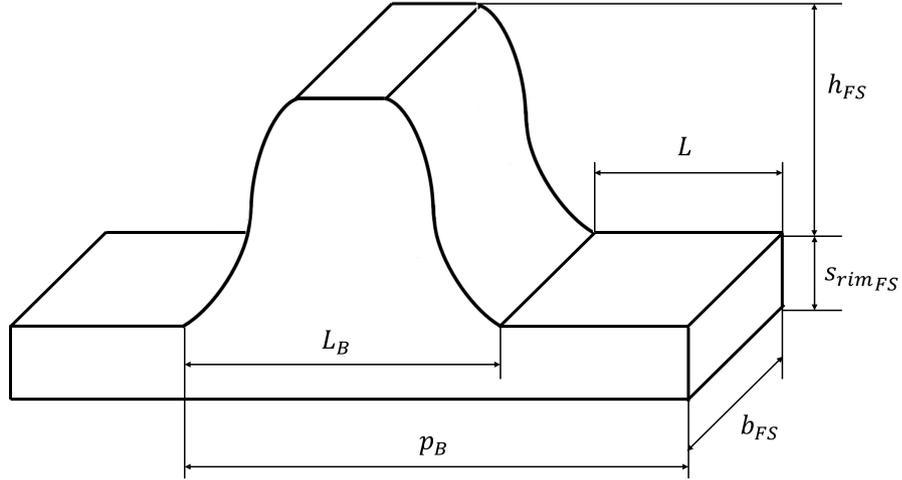
$L$  [m] è la lunghezza della congiungente tra due denti adiacenti ;

$s_{\text{rim}_{\text{FS}}}$  [m] è lo spessore della Flexspline alla base del dente, riportato nella tabella 3.4;

$b_{FS}$  [m] è la lunghezza del dente della Flexspline, riportata nella tabella 3.4;

$p_B$  [m] è il passo base dei denti della Flexspline, ricavato attraverso l'equazione 5.30;

$L_B$  [m] è la lunghezza alla base dei denti della Flexspline, riportata nella tabella 3.4.



**Figura 5.9:** Stima della rigidezza di contatto fra denti consecutivi della Flexspline.

Il passo base  $p_B$  è stato ricavato come di seguito:

$$p_B = \frac{2\pi r_{0FS}}{Z_{FS}} = \frac{2\pi 30,65}{200} = 9,63 \times 10^{-4} \text{m} \quad (5.30)$$

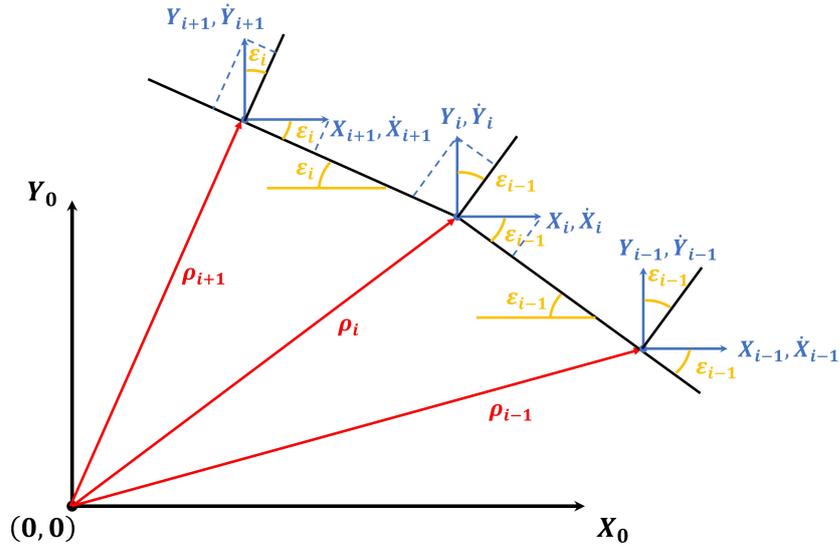
dove:

$r_{0FS}$  [m] è il raggio di base dei denti della Flexspline, pari anche al raggio interno non deformato  $r_{0FS}$  della Flexspline, riportato in tabella 3.4.

Le forze scambiate tra denti adiacenti agiscono lungo le rette congiungenti le coppie di denti  $i-1, i$  e  $i, i+1$ , le quali devono successivamente essere scomposte secondo il sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$  facendo riferimento al dente  $i$ -esimo. La congiungente tra  $i$  e  $i+1$  è inclinata di:

$$\begin{cases} \varepsilon_i = \arctan\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right) \\ \varepsilon_i = \arctan\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right) + 2\pi & \text{se } \varepsilon_i < 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

La congiungente tra  $i$  e  $i-1$  è inclinata di  $\varepsilon_{i-1}$  e la si ottiene dalla permutazione di  $\varepsilon_i$ .



**Figura 5.10:** Inclinazioni delle congiungenti tra il singolo dente  $i$  con il dente  $i+1$  e  $i-1$ .

Dalla rappresentazione di figura 5.10 si nota come i contributi di velocità del singolo dente  $\dot{x}_i$  e  $\dot{y}_i$  vadano sottratti fra loro nella scomposizione lungo la congiungente fra denti adiacenti, ottenendo che:

$$\begin{cases} V_{rel+} = V_{i+1} - V_i \\ V_{rel-} = V_{i-1} - V_i \end{cases} \quad (5.32)$$

Così facendo se  $V_{rel\pm} > 0$ , i due denti si stanno allontanando, quindi si hanno forze di contatto positive di richiamo secondo quanto riportato sul diagramma di corpo libero del dente, mostrato in precedenza in figura 5.1.

La forza scambiata tra i denti  $i$  e  $i+1$  risulta essere:

$$F_{i+1} = K_i \left[ \underbrace{\sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}}_{\delta_{i+1}} - \delta_0 \right] c_i \underbrace{[(\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) \cos(\varepsilon_i) + (\dot{y}_i - \dot{y}_{i+1}) \sin(\varepsilon_i)]}_{V_{rel+} = V_{i+1} - V_i} \quad (5.33)$$

in cui:

$\delta_{i+1}$  [m] è la distanza tra i denti  $i$  e  $i+1$  della Flexspline in condizioni deformate (ellisse);

$\delta_0$  [m] è la distanza tra i denti  $i$  e  $i+1$  della Flexspline in condizioni non deformate (circonferenza), calcolate in modo analogo alla distanza  $\delta_{i+1}$ .

Analogamente la forza scambiata tra i denti  $i$  e  $i-1$  risulta essere:

$$F_{i-1} = K_{i-1} \left[ \underbrace{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}_{\delta_{i-1}} - \delta_0 \right] \quad (5.34)$$

$$c_{i-1} \underbrace{[(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) \cos(\varepsilon_{i-1}) + (\dot{y}_i - \dot{y}_{i-1}) \sin(\varepsilon_{i-1})]}_{V_{rel-} = V_{i-1} - V_i}$$

in cui:

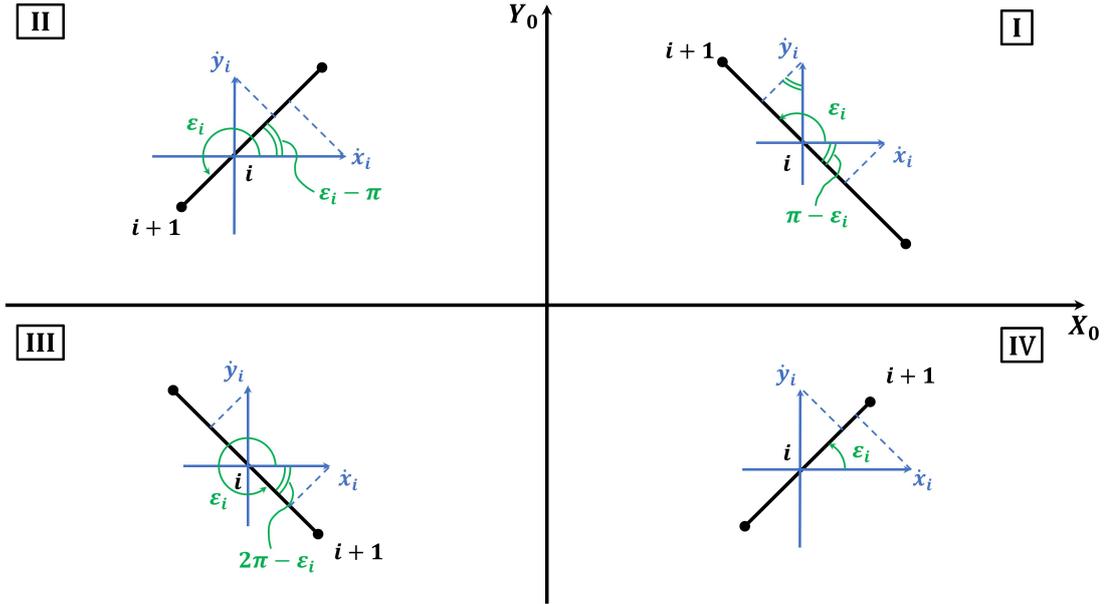
$\delta_{i-1}$  [m] è la distanza tra i denti  $i$  e  $i-1$  della Flexspline in condizioni deformate (ellisse);

$\delta_0$  [m] è la distanza tra i denti  $i$  e  $i-1$  della Flexspline in condizioni non deformate (circonferenza), calcolate in modo analogo alla distanza  $\delta_{i-1}$ .

$K_{i-1}$  e  $c_{i-1}$  si ottengono con una permutazione dei vettori contenenti  $K_i$  e  $c_i$ .

### 5.3.1 Scomposizione di $\dot{x}_i$ e $\dot{y}_i$ nei quattro quadranti ( $i, i+1$ )

Per poter ricavare la forza di contatto scambiata tra i denti  $i$  e  $i+1$  della Flexspline in condizioni deformate (ellisse), è necessario riportare le velocità  $\dot{x}_i$  e  $\dot{y}_i$  del singolo dente lungo la congiunte tra i due denti adiacenti, inclinata di  $\varepsilon_i$  rispetto all'asse orizzontale  $X_0$  e come schematizzato in figura 5.11. Inoltre è da precisare come la direzione della congiunte sia stata presa in modo tale da ricavare forze di richiamo.



**Figura 5.11:** Scomposizione delle velocità  $\dot{x}_i$  e  $\dot{y}_i$  del singolo dente della Flexspline lungo il sistema di riferimento  $(X_0, Y_0)$ .

$$\begin{cases} -\dot{x}_i \cos(\pi - \varepsilon_i) + \dot{y}_i \sin(\pi - \varepsilon_i) & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq \varepsilon_i < 2\pi \end{cases} \quad (5.35a)$$

$$\begin{cases} -\dot{x}_i \cos(\varepsilon_i - \pi) - \dot{y}_i \sin(\varepsilon_i - \pi) & \text{se } 2\pi \leq \varepsilon_i < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (5.35b)$$

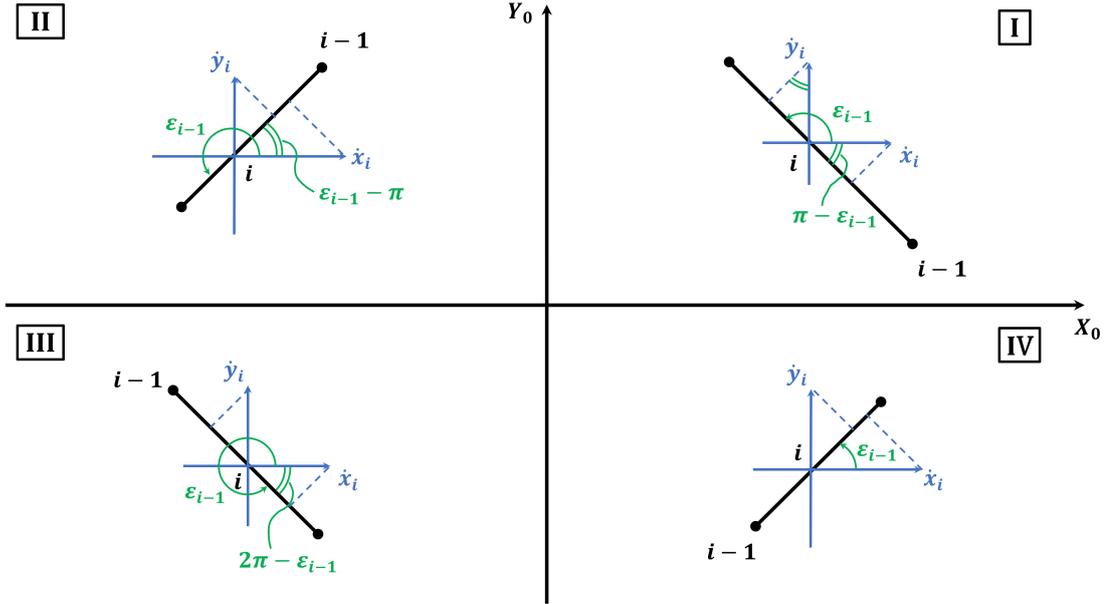
$$\begin{cases} \dot{x}_i \cos(2\pi - \varepsilon_i) - \dot{y}_i \sin(2\pi - \varepsilon_i) & \text{se } \frac{3\pi}{2} \leq \varepsilon_i < 2\pi \end{cases} \quad (5.35c)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_i \cos(\varepsilon_i) + \dot{y}_i \sin(\varepsilon_i) & \text{se } 0 \leq \varepsilon_i < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5.35d)$$

Usando gli archi associati, si ricava sempre la stessa scomposizione in tutti e quattro i quadranti, quindi è possibile usare sempre la stessa formula (5.35d) in ogni punto, che è quella che si ottiene dal quarto quadrante, in cui  $0 \leq \varepsilon_i < \frac{\pi}{2}$ .

### 5.3.2 Scomposizione di $\dot{x}_i$ e $\dot{y}_i$ nei quattro quadranti ( $i, i-1$ )

Per poter ricavare la forza di contatto scambiata tra i denti  $i$  e  $i-1$  della Flexspline in condizioni deformate (ellisse), è necessario riportare le velocità  $\dot{x}_i$  e  $\dot{y}_i$  del singolo dente lungo la congiunte tra i due denti adiacenti, inclinata di  $\varepsilon_{i-1}$  rispetto all'asse orizzontale  $X_0$  e come schematizzato in figura 5.12. Inoltre è da precisare come la direzione della congiunte sia stata presa in modo tale da ricavare forze di richiamo.



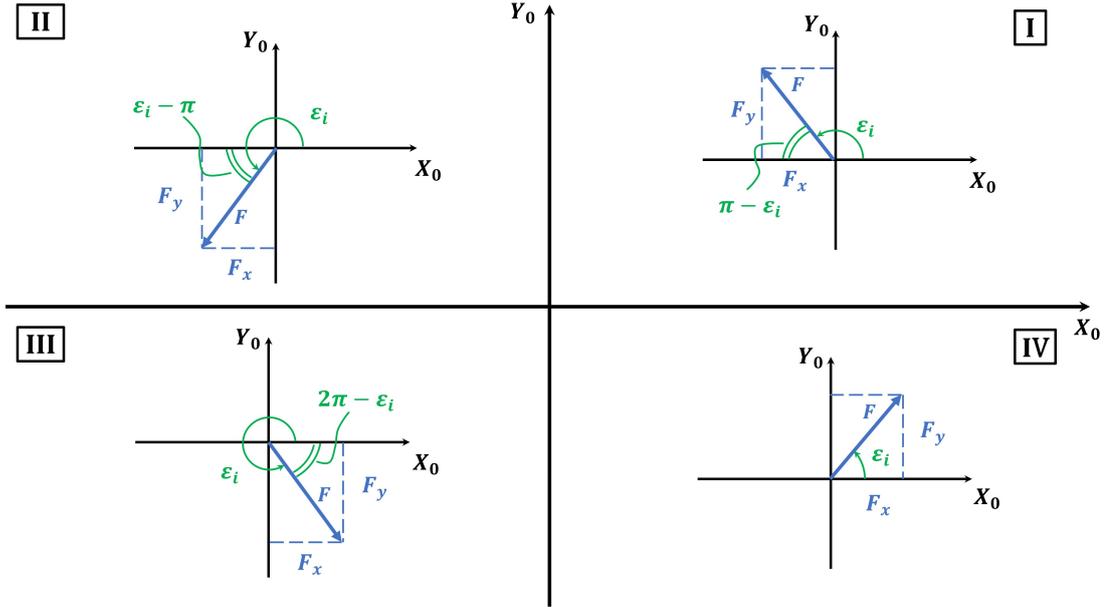
**Figura 5.12:** Scomposizione delle velocità  $\dot{x}_i$  e  $\dot{y}_i$  del singolo dente della Flexspline lungo il sistema di riferimento  $(X_0, Y_0)$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_i \cos(\pi - \varepsilon_{i-1}) - \dot{y}_i \sin(\pi - \varepsilon_{i-1}) & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq \varepsilon_{i-1} < 2\pi & (5.36a) \\ \dot{x}_i \cos(\varepsilon_{i-1} - \pi) + \dot{y}_i \sin(\varepsilon_{i-1} - \pi) & \text{se } 2\pi \leq \varepsilon_{i-1} < \frac{3\pi}{2} & (5.36b) \\ -\dot{x}_i \cos(2\pi - \varepsilon_{i-1}) + \dot{y}_i \sin(2\pi - \varepsilon_{i-1}) & \text{se } \frac{3\pi}{2} \leq \varepsilon_{i-1} < 2\pi & (5.36c) \\ -\dot{x}_i \cos(\varepsilon_{i-1}) - \dot{y}_i \sin(\varepsilon_{i-1}) & \text{se } 0 \leq \varepsilon_{i-1} < \frac{\pi}{2} & (5.36d) \end{cases}$$

Usando gli archi associati, si ricava sempre la stessa scomposizione in tutti e quattro i quadranti, quindi è possibile usare sempre la stessa formula (5.36d) in ogni punto, che è quella che si ottiene dal quarto quadrante, in cui  $0 \leq \varepsilon_{i-1} < \frac{\pi}{2}$ .

### 5.3.3 Scomposizione di $F_{i+1}$ lungo $(X_0, Y_0)$

Per poter ricavare l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale (5.1) e l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale (5.2) del singolo dente  $i$  della Flexspline in condizioni deformate (ellisse), è necessario riportare le forze di contatto  $F_{i+1}$  con il dente adiacente  $i+1$  lungo il sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$ , come schematizzato in figura 5.13.



**Figura 5.13:** Scomposizione della forza di contatto  $F_{i+1}$  tra i denti adiacenti  $i$  e  $i+1$  della Flexspline lungo il sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$ .

Nel primo quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = -F \cos(\pi - \varepsilon) = F \cos(\varepsilon) \\ F_y = F \sin(\pi - \varepsilon) = F \sin(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.37)$$

Nel secondo quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = -F \cos(\varepsilon - \pi) = -F \cos(\pi - \varepsilon) = F \cos(\varepsilon) \\ F_y = -F \sin(\varepsilon - \pi) = F \sin(\pi - \varepsilon) = F \sin(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.38)$$

Nel terzo quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = F \cos(2\pi - \varepsilon) = F \cos(\varepsilon) \\ F_y = -F \sin(2\pi - \varepsilon) = -F \sin(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.39)$$

Nel quarto quadrante vale che:

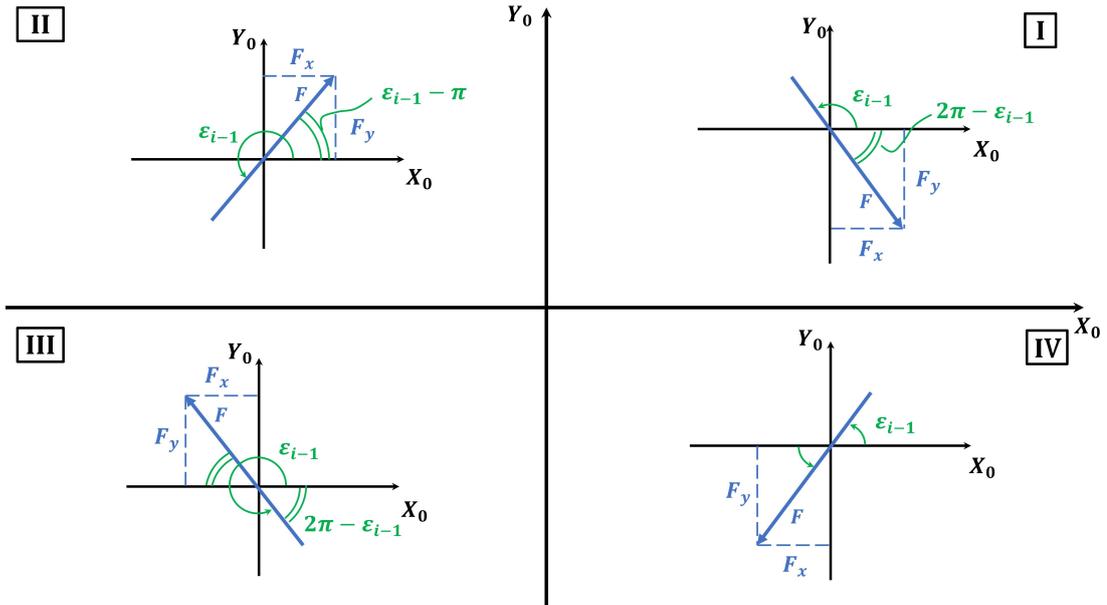
$$\begin{cases} F_x = F \cos(\varepsilon) \\ F_y = F \sin(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.40)$$

Quindi è possibile dedurre che la scomposizione della forza  $F_{i-1}$  lungo il sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$  vale::

$$\begin{cases} F_{i+1_x} = F_{i+1} \cos(\varepsilon_i) \\ F_{i+1_y} = F_{i+1} \sin(\varepsilon_i) \end{cases} \quad (5.41)$$

### 5.3.4 Scomposizione di $F_{i-1}$ lungo $(X_0, Y_0)$

Per poter ricavare l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale (5.1) e l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale (5.2) del singolo dente  $i$  della Flexspline in condizioni deformate (ellisse), è necessario riportare le forze di contatto  $F_{i-1}$  con il dente adiacente  $i-1$  lungo il sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$ , come schematizzato in figura 5.14.



**Figura 5.14:** Scomposizione della forza di contatto  $F_{i-1}$  tra i denti adiacenti  $i$  e  $i-1$  della Flexspline lungo il sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$ .

Nel primo quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = F \cos(\pi - \varepsilon) = -F \cos(\varepsilon) \\ F_y = -F \sin(\pi - \varepsilon) = -F \sin(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.42)$$

Nel secondo quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = F \cos(\varepsilon - \pi) = F \cos(\pi - \varepsilon) = -F \cos(\varepsilon) \\ F_y = F \sin(\varepsilon - \pi) = -F \sin(\pi - \varepsilon) = -F \sin(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.43)$$

Nel terzo quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = -F \cos(2\pi - \varepsilon) = -F \cos(\varepsilon) \\ F_y = F \sin(2\pi - \varepsilon) = -F \sin(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.44)$$

Nel quarto quadrante vale che:

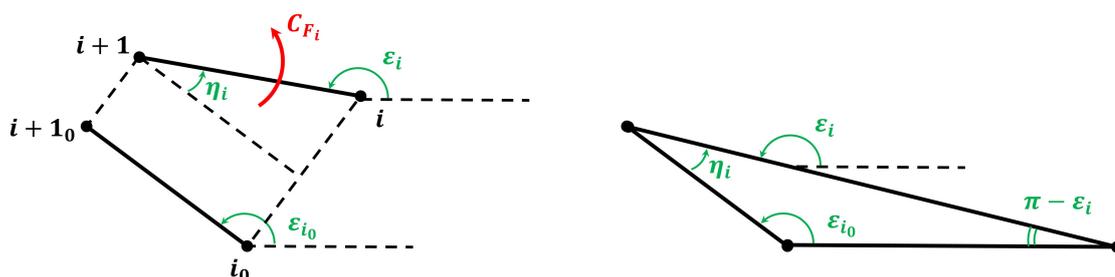
$$\begin{cases} F_x = -F \cos(\varepsilon) \\ F_y = -F \sin(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.45)$$

Quindi è possibile dedurre che la scomposizione della forza  $F_{i-1}$  lungo il sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$  vale:

$$\begin{cases} F_{i-1x} = -F_{i-1} \cos(\varepsilon_{i-1}) \\ F_{i-1y} = -F_{i-1} \sin(\varepsilon_{i-1}) \end{cases} \quad (5.46)$$

## 5.4 Coppia $C_{F_i}$ di richiamo alla deformazione della Flexspline da cerchio ad ellisse

Per ricavare la forza di richiamo flessione  $F_{F_i}$  della Flexspline per riportarla in condizione iniziali (Flexspline non deformata=circonferenza) si considera la presenza di una coppia flessionale  $C_{F_i}$  che agisce sui singoli denti, schematizzata in figura 5.15. Poiché ogni dente  $i$  è collegato a sinistra e a destra con il dente successivo ( $i + 1$ ) e con quello precedente ( $i - 1$ ), si avrà che su ogni dente  $i$  agiranno due forze flessionali  $F_F$ , come schematizzato in figura 5.16. Esse derivano dalle coppie flessionali  $C_F$  generate con i denti adiacenti che fanno in modo di riportare la congiunte fra i singoli denti nella stessa orientazione che avevano prima dell'inserimento del Wave Generator, quindi in condizione di Flexspline non deformata. Questa componente di forza serve a descrivere il contatto della Flexspline con il Wave Generator in modo che nascano delle forze tra i due componenti, altrimenti si avrebbe solo un'equivalente ad una catena che si adatta a diverse forme (cerchio e ellisse), ma che non scambia mai forze con il Wave Generator perché è come se la Flexspline/catena fosse semplicemente appoggiata sul Wave Generator. Ciò è dovuto al fatto che la circonferenza della Flexspline non deformata ha lo stesso perimetro dell'ellisse, quindi senza quest'ultimo contributo, a regime dopo l'inserimento del Wave Generator, non ci sarebbero forze scambiate con la Flexspline.



**Figura 5.15:** Schematizzazione della coppia flessione  $C_{F_i}$  agente sul singolo dente  $i$  (a sinistra); verifica angolo  $\eta_i$  (a destra).

L'inclinazione del segmento che congiunge i denti  $i$  e  $i + 1$  è l'angolo  $\varepsilon_i$ , calcolato nell'equazione (5.31), mentre l'angolo  $\varepsilon_{i-1}$  viene ottenuto permutando  $\varepsilon_i$ . Questi angoli vengono confrontati con quelli nelle condizioni nominali di Flexspline non deformata:

$$\varepsilon_{i_0} = \arctan \left( \frac{y_{0_{i+1}} - y_{0_i}}{x_{0_{i+1}} - x_{0_i}} \right) \quad (5.47)$$

a cui si aggiunge sempre  $2\pi$  se  $\varepsilon_{0_i} < 0$ .

L'angolo  $\varepsilon_{i-1_0}$  viene ottenuto permutando  $\varepsilon_{i_0}$ .

Quindi è possibile ricavare un angolo:

$$\eta_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i_0} \quad (5.48)$$

che descrive di quanto è ruotato il segmento che unisce i denti  $i$  e  $i + 1$  rispetto alle condizioni iniziali di Flexspline non deformata. In figura 5.15 è possibile verificare la definizione di tale angolo:

$$\begin{aligned} (\pi - \eta_i) + \eta_i + \varepsilon_{i_0} &= \pi \\ \eta_i &= \varepsilon_i - \varepsilon_{i_0} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Analogamente per il collegamento tra il dente  $i$  e  $i-1$  si ha un angolo:

$$\eta_{i-1} = \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-1_0} \quad (5.50)$$

che descrive di quanto è ruotato il segmento che unisce i denti  $i$  e  $i - 1$  rispetto alle condizioni iniziali di Flexspline non deformata.

Tuttavia, in questo contributo di forza si considera solo l'effetto della rotazione del segmento che unisce due denti adiacenti, non della sua traslazione rispetto alle condizioni nominali altrimenti si andrebbe a considerare anche un contributo che viene descritto dalla forza di richiamo torsionale  $F_{R_i}$  dovuta alla rigidità torsionale della Flexspline, introdotta nel paragrafo 7.1.

A questo punto è possibile definire la coppia da applicare all'elementino che unisce il dente  $i$  e il dente  $i+1$  per farlo ruotare di  $\eta_i$  come:

$$C_{F_i} = K_{F_i}\eta_i + c_{F_i}\dot{\eta}_i \quad (5.51)$$

dove:  $\dot{\eta}_i = \dot{\varepsilon}_i - \dot{\varepsilon}_{0_i}$ , con  $\dot{\varepsilon}_{0_i} = 0$  perché all'inizio il sistema è in quiete.

$F_{F_{i+1_+}}$  e  $F_{F_{i_+}}$  sono le forze di richiamo, schematizzate in figura 5.16, che generano una coppia di forze in grado di bilanciare la coppia  $C_{F_i}$ :

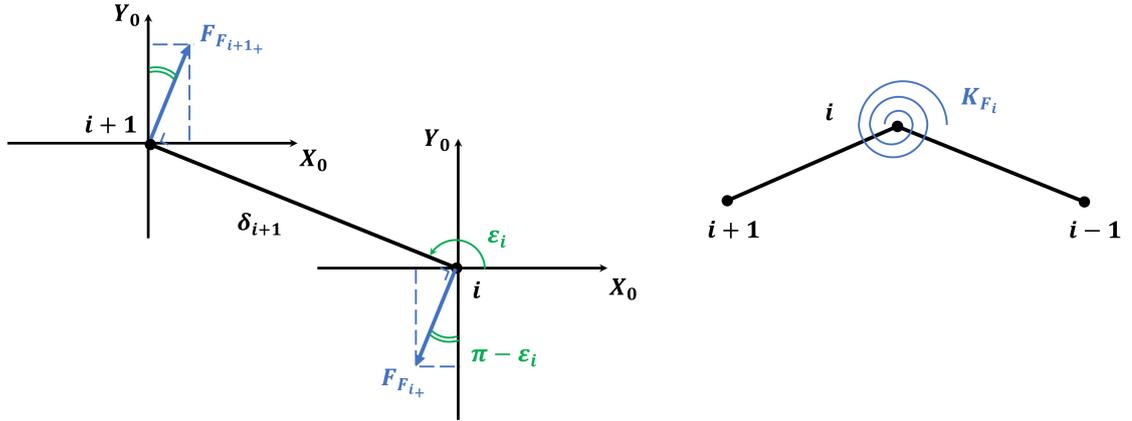
$$F_{F_{i_+}} = F_{F_{i+1_+}} = \frac{C_{F_i}}{\delta_{i+1}} \quad (5.52)$$

con:

$F_{F_{i_+}}$  [N] è la forza flessionale agente sul dente  $i$  derivante dall'interazione con  $i + 1$ ;

$F_{F_{i+1_+}}$  [N] è forza flessionale agente sul dente  $i + 1$  derivante dall'interazione con  $i$ ;

$\delta_{i+1}$  [m] è la congiungente tra il denti  $i$  e  $i+1$ , già calcolato nella sezione 5.3 per il calcolo delle forze scambiate fra denti adiacenti.



**Figura 5.16:** Schematizzazione delle forze flessionali  $F_{F_{i+1+}}$  e  $F_{F_{i+}}$  agente sul singolo dente  $i+1$  e  $i$  rispettivamente (a sinistra); schematizzazione molla di torsione  $K_{F_i}$  che modella la coppia flessione  $C_{F_i}$  (a destra).

Scomponendo le forze lungo il sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$  in modo da inserirle nelle equazioni di equilibrio al dente, si ottiene che:

$$\begin{cases} F_{F_{ix}} = -F_{F_{i+}} \sin(\pi - \epsilon_i) = -F_{F_{i+}} \sin(\epsilon_i) \\ F_{F_{iy}} = -F_{F_{i+}} \cos(\pi - \epsilon_i) = F_{F_{i+}} \cos(\epsilon_i) \end{cases} \quad (5.53)$$

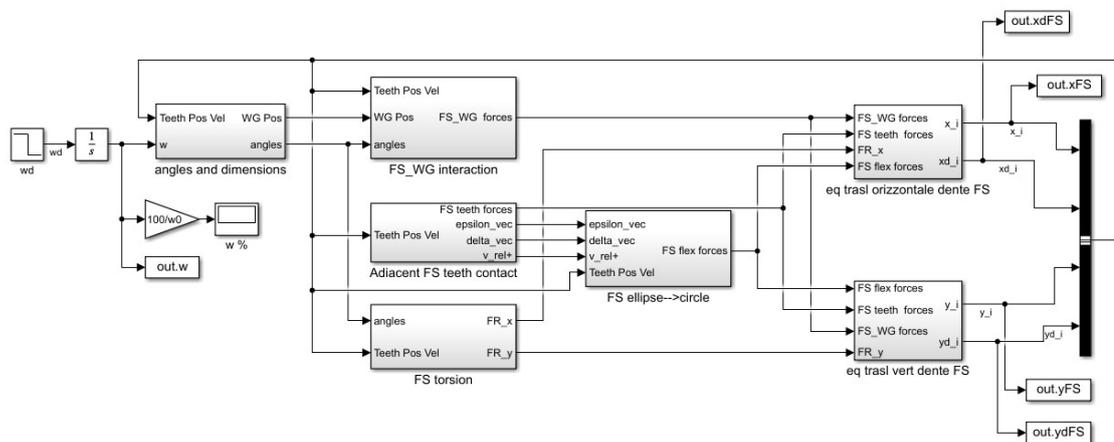
Per il calcolo di  $\eta_i$  si inseriscono gli stessi controlli che si hanno per  $\varphi_i$ ,  $\alpha_{R_i}$ ,  $\alpha_{N_i}$ ,  $\epsilon_i$ , in modo da evitare errori nel calcolo delle differenze degli angoli quando c'è il salto causato dalla funzione  $atan2$  nel confronto degli angoli fra 0 e  $2\pi$ .

Attualmente il coefficiente di smorzamento  $c_{F_i}$  è stato posto uguale a zero, quindi non si tiene conto del contributo di  $\dot{\eta}_i$ .

## Capitolo 6

# Risultati del modello di inserimento del Wave Generator

Di seguito verranno mostrati e commentati i risultati ottenuti dalle simulazioni del modello di inserimento del Wave Generator all'interno della Flexspline, descritto teoricamente nel capitolo 5 e implementato in ambiente MATLAB/Simulink™, come mostrato in figura 6.1. Per tali risultati, non avendo la possibilità di essere validati sperimentalmente, si sono confrontati con quanto presente in letteratura.



**Figura 6.1:** Implementazione del modello di inserimento del Wave Generator in ambiente Simulink™.

Questi risultati sono stati ottenuti andando a simulare il modello di inserimento del Wave Generator in ambiente MATLAB/Simulink<sup>TM</sup> con:

- **passo di integrazione:**  $\text{sim}_{\text{step}} = 10^{-5}$  s;
- **tempo di simulazione:**  $t_{\text{sim}} = 0,05$  s;
- **solver per la simulazione:** *ode14x* di MATLAB/Simulink<sup>TM</sup>.

Il tempo di simulazione è stato scelto relativamente breve perché in modo da avere sia una simulazione rapida e sia perché non si è interessati al transitorio, ma alle grandezze a regime.

Il modello è stato implementato in ambiente Simulink<sup>TM</sup>, come riportato in figura 6.1, attraverso i seguenti blocchi:

- **Input:** velocità di deformazione  $\dot{w}$  costante che va a zero, attraverso la funzione gradino, dopo un tempo di  $t_{\text{sim}}/10$ ;
- **angoli e dimensioni:** in cui si calcolano le coordinate  $(x_{WG}, y_{WG})$  del profilo del Wave Generator e gli angoli  $\alpha_{N_i}$ ,  $\psi_i$ ,  $\varphi_i$  utilizzati nel modello, come riportato le paragrafo 5.2.1;
- **interazione FS-WG:** in cui si calcola la forza di contatto  $F_{WG,FS}$  tra Wave Generator e Flexspline, attraverso l'equazione (5.23);
- **contatto tra denti adiacenti FS:** in cui si calcolano le forze  $F_{i+1}$  e  $F_{i-1}$  scambiate tra denti adiacenti della Flexspline, attraverso le equazioni (5.33) e (5.34) rispettivamente;
- **torsione FS:** in cui si calcola la forza di richiamo torsionale  $F_{R_i}$ , attraverso l'equazione (7.2). Tuttavia esso sarà implementato in studi futuri per lo sviluppo del modello completo di un riduttore armonico;
- **FS da ellisse a cerchio:** in cui si calcola la forza di richiamo flessionale  $F_F$ , attraverso l'equazione (5.52);
- **equilibrio traslazione orizzontale dente FS:** in cui si calcola la posizione  $x_i$  e la velocità  $\dot{x}_i$  del singolo dente della Flexspline, attraverso l'equazione (5.3);
- **equilibrio traslazione verticale dente FS:** in cui si calcola la posizione  $y_i$  e la velocità  $\dot{y}_i$  del singolo dente della Flexspline, attraverso l'equazione (5.4).

I valori delle posizioni  $(x_i, y_i)$  e delle velocità  $(\dot{x}_i, \dot{y}_i)$  dei singoli denti della Flexspline, ricavate attraverso gli ultimi due blocchi, sono riportati al blocco iniziale (*angoli e dimensioni*) in modo da calcolare i valori al passo d'integrazione successivo.

I valori di rigidezza sono stati stimati sia con quanto visto in letteratura, sia adattati in modo che rispettassero la fisica del problema in modo da ottenere dei risultati in linea con quanto presente in letteratura. I valori dei coefficienti di smorzamento sono stati confrontati con quelli tipici dei sistemi meccanici.

Per maggiori dettagli sui valori utilizzati, come le misure di grandezza dei singoli componenti del riduttore armonico, si faccia riferimento al paragrafo 3.3.

**Tabella 6.1:** Parametri utilizzati per la simulazione del modello.

Parametri	Notazione	Valore numerico
Rigidezza tra denti adiacenti FS	$K_{\text{tooth}}$	$5 \times 10^9$ Nm
Smorzamento tra denti adiacenti FS	$c_{\text{tooth}}$	$1 \times 10^{-2}$ Ns/m
Rigidezza di contatto tra WG e FS	$K_{WG,FS}$	$1 \times 10^8$ Nm
Smorzamento tra WG e FS	$c_{WG,FS}$	$1 \times 10^{-2}$ Ns/m
Rigidezza torsionale FS	$K_{TFS}$	$3,05 \times 10^5$ Nm/rad
Smorzamento torsionale FS	$c_{TFS}$	$1 \times 10^{-2}$ Nms/rad
Rigidezza flessionale FS	$K_{FFS}$	$4 \times 10^2$ Nm/rad
Smorzamento flessionale FS	$c_{FFS}$	$1 \times 10^{-2}$ Nms/rad
Smorzamento dente FS	$c_{iFS}$	$1 \times 10^{-2}$ Ns/m

Nel seguente capitolo, per maggiore chiarezza, si ricordi il posizionamento dei denti principali di riferimento della Flexspline, come riportato in tabella 6.2.

**Tabella 6.2:** Posizionamento dei denti principali della Flexspline.

Numero dente	Posizione angolare	Posizione semiasse
0	$0^\circ$	semiasse maggiore positivo ( $a > 0$ )
51	$90^\circ$	semiasse minore positivo ( $b > 0$ )
100	$180^\circ$	semiasse maggiore negativo ( $a < 0$ )
151	$270^\circ$	semiasse minore negativo ( $b < 0$ )

## 6.1 Posizioni $x_i$ e $y_i$ dei singoli denti della Flexspline

Uno dei risultati principali, riportati in figura 6.2, della simulazione del modello di inserimento del Wave Generator è rappresentato dalla posizione  $(x_i, y_i)$  assunta da ogni singolo dente della Flexspline dopo l'inserimento al suo interno del Wave Generator. I valori ottenuti dalla simulazione, andando a risolvere le relative equazioni (5.1) e (5.2) di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale rispettivamente, saranno poi usati come valori di input per iniziare la simulazione del modello completo di un riduttore armonico, svolto in lavori futuri.

Per comprendere al meglio tali risultati, si riporta in figura 6.3 la differenza delle posizioni  $(x_i, y_i)$  assunte dal singolo dente della Flexspline dopo l'inserimento del Wave Generator con le posizioni  $(x_0, y_0)$  assunte prima dell'inserimento del Wave Generator, ovvero con la Flexspline non ancora deformata in un'ellisse. Si nota come la posizione massima di circa 31 mm, corrispondente alla somma tra il raggio indeformato  $r_{0_{FS}} = 30,65$  mm della Flexspline e la deformazione massima  $w_0 = 035$  mm, lungo l'asse orizzontale fisso  $X_0$  sia maggiore rispetto alla posizione massima raggiunta lungo l'asse verticale  $Y_0$ . Ciò porterà, come descritto più avanti nel paragrafo 6.2, lungo il semiasse minore, a non avere contatto tra Wave Generator e Flexspline a causa dell'elasticità di quest'ultima e, di conseguenza, a non avere forza scambiata, come mostrato in figura 6.5. Questo fenomeno, evidenziato anche dal grafico polare in figura 6.3, è in parte dovuto all'aver posizionato il semiasse maggiore  $a$  del Wave Generator, in fase di stesura del modello, lungo l'asse orizzontale fisso  $X_0$ . In questo modo, il raggio vettore  $\rho_i$  che collega il singolo dente della Flexspline al centro di rotazione del Wave Generator aumenta lungo il semiasse maggiore, mentre diminuisce lungo il semiasse minore, rispetto alle condizioni iniziali in cui il Wave Generator non è stato ancora inserito all'interno della Flexspline che, in questa fase, ha una forma circolare.

In figura 6.4, si confrontano le posizioni  $(x_i, y_i)$  del singolo dente, ottenute dalle relative equazioni di equilibrio, con quelle approssimate ottenute dalle coordinate polari  $x_p, y_p$ . Le coordinate polari sono:

$$\begin{cases} x_p = a \cos \psi_i \\ y_p = b \sin \psi_i \end{cases} \quad (6.1)$$

in cui  $\psi_i$  è definito come:

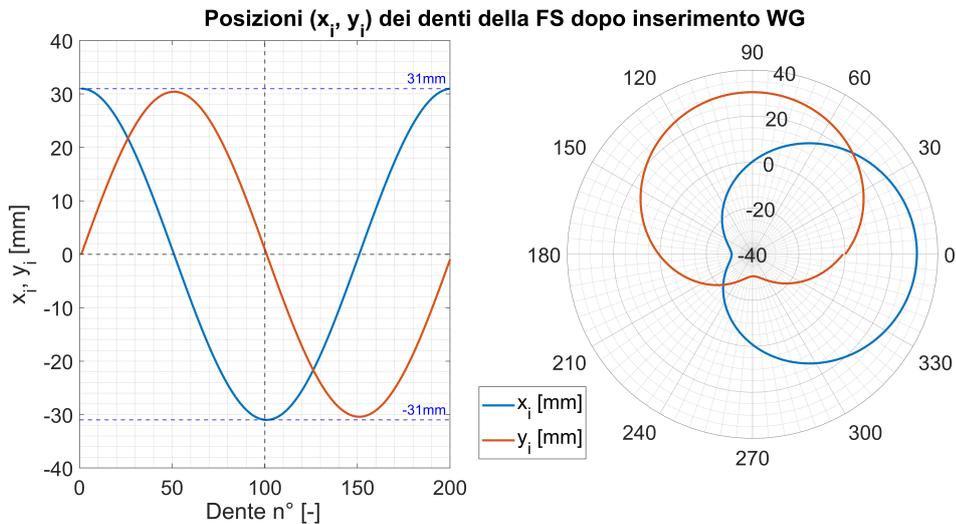
$$\psi_i = \left[ 0 : \frac{2\pi}{Z_{FS}} : 2\pi \left( 1 - \frac{1}{Z_{FS}} \right) \right] \quad (6.2)$$

con:

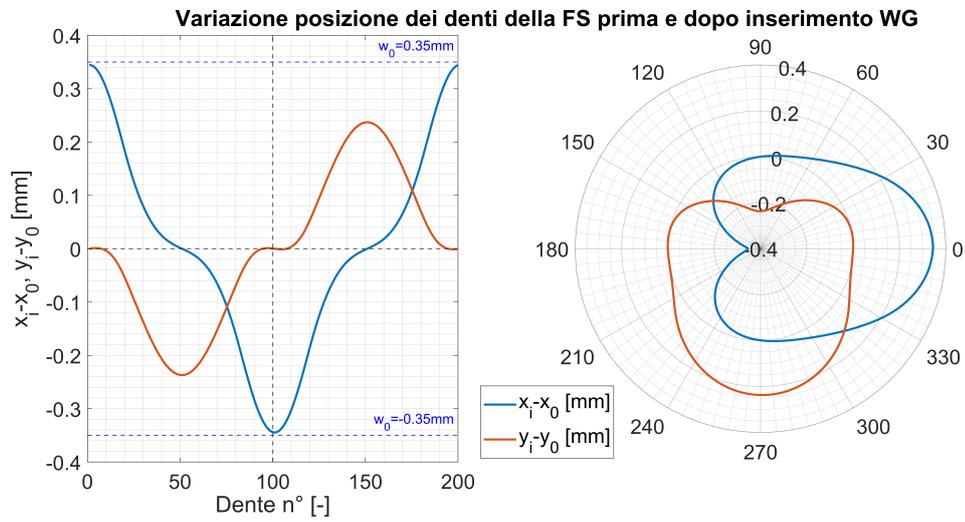
$\psi_i$  [rad] misurato partendo dall'asse orizzontale fisso  $X_0$  in verso antiorario.

Come mostrato in figura 6.4, tra i due approcci vi è una differenza fra le coordinate dei singoli denti fino a circa 0,15mm. Questo perché attraverso le coordinate polari è come se si andasse a considerare solo la deformazione radiale e non circonferenziale. Infatti lungo il semiasse maggiore i due approcci sono pressoché identici in quanto in questa zona la posizione è quasi del tutto dovuta alla deformazione  $w$  imposta dal Wave Generator. Tuttavia è possibile notare come appena ci si allontani da questa zona i due approcci differiscono. Questo è dovuto al fatto le posizioni  $(x_i, y_i)$  calcolate con le relative equazioni di equilibrio riescono a cogliere l'effetto di tutte le altre interazioni che ci sono sul singolo dente, come le forze scambiate tra denti adiacenti e le forze di richiamo flessione  $F_F$ . Sebbene la differenza in termini assoluti può sembrare piccola, in realtà le grandezze in gioco sono tutte molto piccole, di conseguenza piccole variazioni possono fare la differenza. Infatti, considerando che i denti della Flexspline hanno un'altezza di circa 0,5 mm, avere uno spostamento di 0,15 mm può andare a cambiare del tutto le condizioni di ingranamento, come il numero di denti in presa simultaneamente.

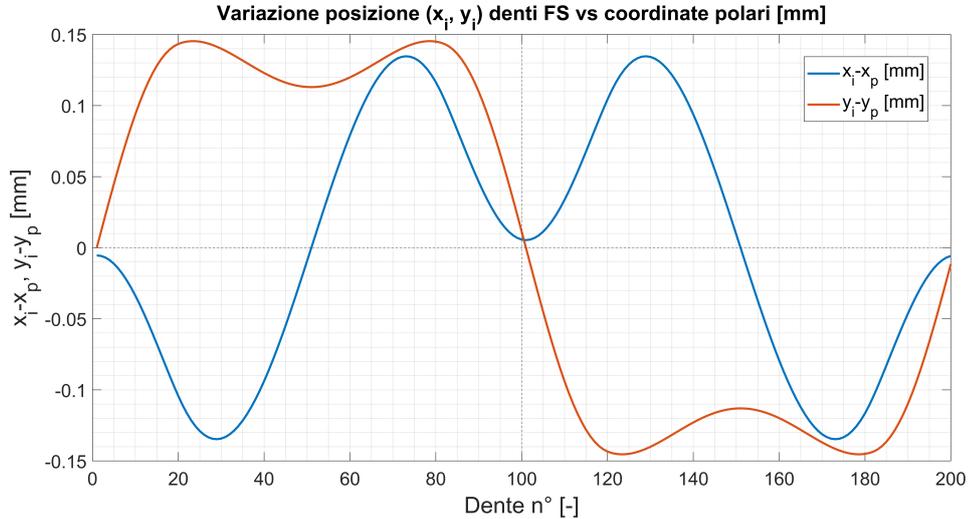
Questo dimostra come la risoluzione delle equazioni di equilibrio sul singolo dente permettono di ottenere la corretta posizione in modo da andare a valutare le successive interazioni, come le condizioni di ingranamento che verranno approfondite nel paragrafo 7.4.



**Figura 6.2:** Posizioni  $(x_i, y_i)$  dei denti della Flexspline dopo l'inserimento del Wave Generator (a sinistra); su grafico polare (a destra).



**Figura 6.3:** Variazione delle coordinate  $(x_i, y_i)$  dei denti della Flexspline prima e dopo l'inserimento del Wave Generator (a sinistra); su grafico polare (a destra).

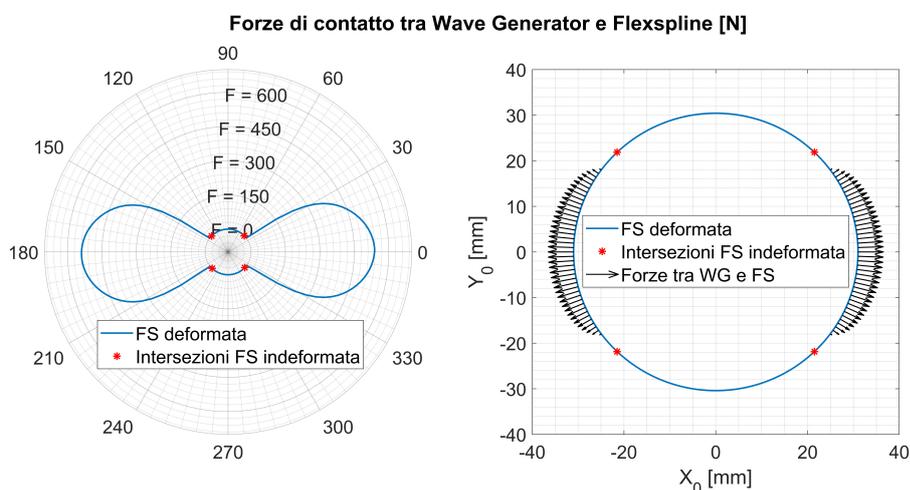


**Figura 6.4:** Differenza tra le posizioni  $(x_i, y_i)$  dei denti della Flexspline calcolati tramite il modello di inserimento del Wave Generator e le posizioni approssimate  $(x_p, y_p)$  calcolate con le coordinate polari.

## 6.2 Forza di contatto $F_{WG,FS}$ tra Wave Generator e Flexspline

Come descritto nel dettaglio nel paragrafo 5.2, quando si inserisce il Wave Generator all'interno della Flexspline tra i due componenti nasce una forza di contatto  $F_{WG,FS}$ , scambiata lungo la direzione perpendicolare all'ellisse (inclinata di  $\alpha_{N_i}$  rispetto all'asse orizzontale fisso  $X_0$ ) e ricavate attraverso l'equazione (5.23).

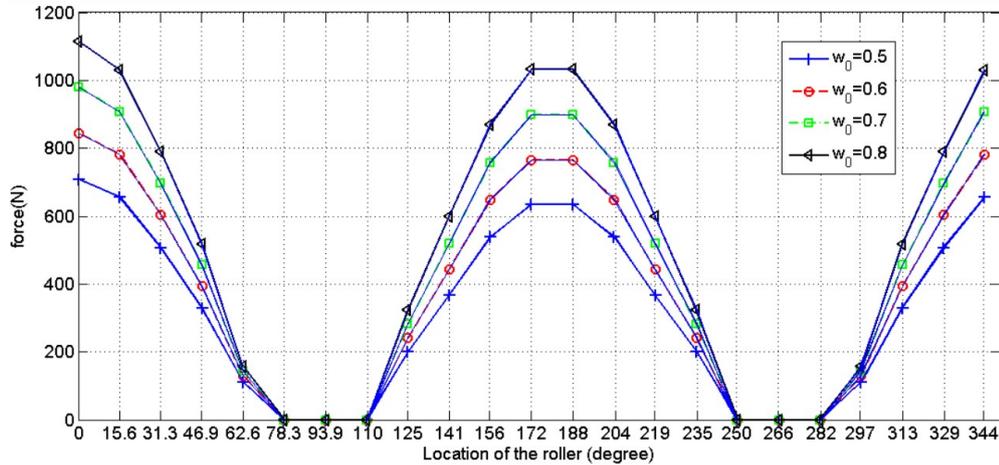
La distribuzione delle forze scambiate tra Wave Generator e Flexspline assume un andamento simile alla deformazione  $w$  imposta dal Wave Generator. In particolare, come mostrato in figura 6.5, la forza  $F_{WG,FS}$  assume valori massimi di circa 538 N lungo il semiasse maggiore  $a$  del Wave Generator.



**Figura 6.5:** Forze scambiate tra Wave Generator e Flexspline per ogni dente della Flexspline (*a sinistra*); andamento qualitativo delle forze scambiate tra Wave Generator e Flexspline (*a destra*).

In questa zona, la forza  $F_{WG,FS}$  di repulsione, agente sul dente della Flexspline che tende a compenetrare nella Wave Generator, è massima. In più, lungo l'asse minore  $b$  la forza ha valore nullo in quanto in questa zona si ha una deformazione  $w$  negativa, il che porta a non avere nessun carico scambiato tra Wave Generator e Flexspline, come anticipato già nel paragrafo 6.1. Ciò è in linea con le aspettative in quanto in questo caso il dente della Flexspline si allontana dal Wave Generator e su di esso non agisce nessuna forza di richiamo per riportarlo sul Wave Generator. Tale andamento è stato riscontrato anche in uno studio proposto da [86] in cui, come mostrato in figura 6.6, si evidenzia come la forza applicata sui corpi volventi

all'interno del Wave Generator aumenti con l'aumentare della deformazione  $w$  imposta dal Wave Generator, con un aumento maggiore nelle zone in cui tale valore è già elevato. Inoltre, si ottengono valori nulli nei pressi del semiasse minore.



**Figura 6.6:** Forze scambiate tra Wave Generator e Flexspline in letteratura [86].

In tabella 6.3 si riporta, dai dati forniti dalla figura 6.6, l'andamento della forza massima  $F_{WG,FS_{max}}$  scambiata tra Wave Generator e Flexspline lungo il semiasse maggiore  $a$  al variare della deformazione massima  $w_0$  imposta dal Wave Generator.

**Tabella 6.3:** Valori di forza massima  $F_{WG,FS_{max}}$  al variare della deformazione massima  $w_0$  imposta dal Wave Generator [86].

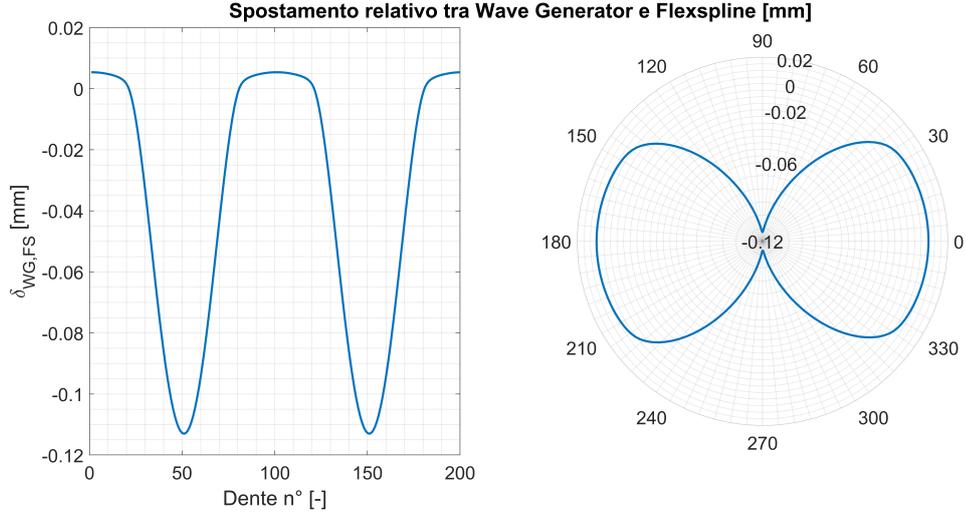
$w_0$ [mm]	0,8	0,7	0,6	0,5	0,35	0,35
$F_{WG,FS_{max}}$ [N]	1 114,8	980,8	845,3	708,4	506,8	538,8 (simulato)

Analizzando la tabella 6.3, si nota come vi sia una proporzionalità diretta tra la forza  $F_{WG,FS_{max}}$  e la deformazione  $w_0$ . Infatti ogni decremento di 0,1 mm di deformazione massima  $w_0$  corrisponde un decremento della forza massima di circa 134 N. In questo modo è stato possibile ricavare il valore di forza quando è imposta una deformazione massima di 0,35 mm, come nel caso del riduttore armonico HFUS-25-2SH preso come riferimento per la stesura del modello di inserimento del Wave Generator. Pertanto, si ottiene un valore di 506,8 N. Tale valore viene confrontato con quello ricavato dalle simulazione del modello di inserimento del Wave Generator sviluppato nel capitolo 5, da cui è stato ottenuto un valore di 538,8 N. Questo confronto dimostra come i due valori siano paragonabili in termini di

ordine di grandezza ottenuti. La leggera discrepanza che si ottiene tra i due valori potrebbe essere da imputare al diverso riduttore armonico preso come riferimento dall'articolo in letteratura [86]. Ciò potrebbe influire su alcune caratteristiche del materiale, come le rigidità, e giustificare il leggero scostamento. In più, attività di *tuning* dei parametri del modello di questa trattazione, come la rigidità di contatto  $K_{WG,FS}$  tra Wave Generator e Flexspline, in lavori futuri potrebbero andare a migliorare i valori di forza  $F_{WG,FS}$  ottenuti. In più, in questa trattazione si calcola la forza di contatto tra Wave Generator e Flexspline, mentre nell'articolo si calcolano le forze che agiscono sui corpi volventi del cuscinetto presente nel Wave Generator. Tuttavia, ciò rappresenta il metodo migliore a disposizione per validare i risultati ottenuti dal modello proposto in questa trattazione.

Per una maggiore comprensione di come tale forza vari lungo il Wave Generator è stato plottato un andamento polare, come mostrato in figura 6.5, in cui la forza di contatto  $F_{WG,FS}$  tra Wave Generator e Flexspline vari lungo il semiasse maggiore fino a circa le intersezioni tra la forma circolare della Flexspline indeformata e la sua forma ellittica quando è deformata, mentre è nulla lungo il semiasse minore dove non c'è contatto tra Wave Generator e Flexspline. Si può notare come l'andamento sia in linea con quanto riscontrato in letteratura [87], in cui il massimo valore di forza si raggiunge a  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , ovvero lungo il semiasse maggiore, mentre si ottiene il valore minimo pari a zero lungo il semiasse minore. In più, è possibile notare come la forze decresca rapidamente dopo circa  $30^\circ$  dal semiasse maggiore.

Dalla figura 6.7, è possibile notare l'andamento della deformazione  $\Delta_{WG,FS}$  subita dal punto di contatto tra Wave Generator e Flexspline. Esso presenta un andamento del tutto simile a quello della forza di contatto  $F_{WG,FS}$  in quanto quest'ultimo è ottenuto andando a moltiplicare la deformazione  $\Delta_{WG,FS}$  per la relativa rigidità di contatto  $K_{WG,FS}$  tra Wave Generator e Flexspline. Tuttavia, la deformazione  $\Delta_{WG,FS}$  può assumere valori sia positivi che negativi in quanto il punto di contatto tende sia a compenetrare all'interno del Wave Generator che ad allontanarsi. Quando  $\Delta_{WG,FS} > 0$  si ha una forza scambiata  $F_{WG,FS} > 0$  perché c'è compenetrazione, altrimenti non si ha nessuna forza scambiata tra Wave Generator e Flexspline, come descritto anche nel Capitolo 5 all'interno del paragrafo 5.2. Questo è in linea con quanto riscontrato anche nel paragrafo 6.1 in cui lungo il semiasse minore la Flexspline non risulta essere in contatto con il Wave Generator.



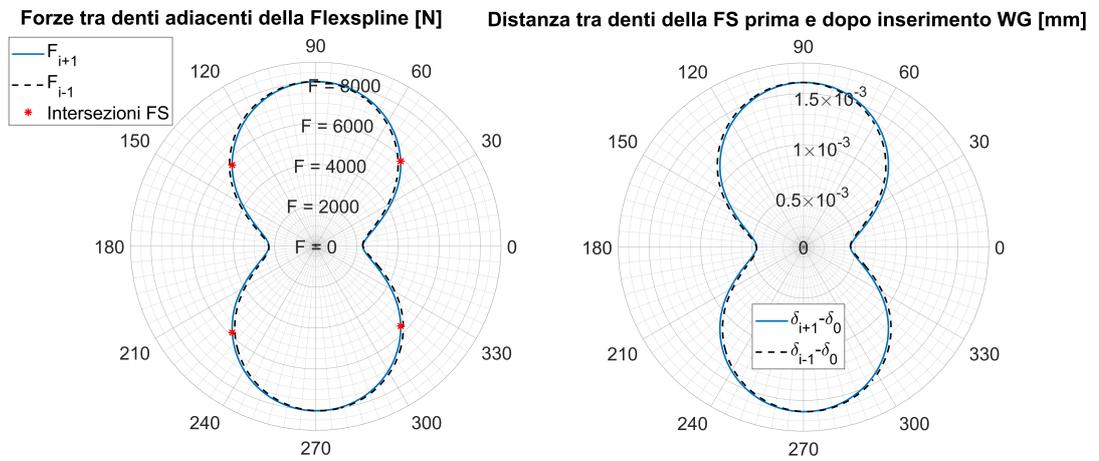
**Figura 6.7:** Spostamento relativo tra Wave Generator e Flexspline.

### 6.3 Forze $F_{i+1}$ e $F_{i-1}$ scambiate tra denti adiacenti della Flexspline

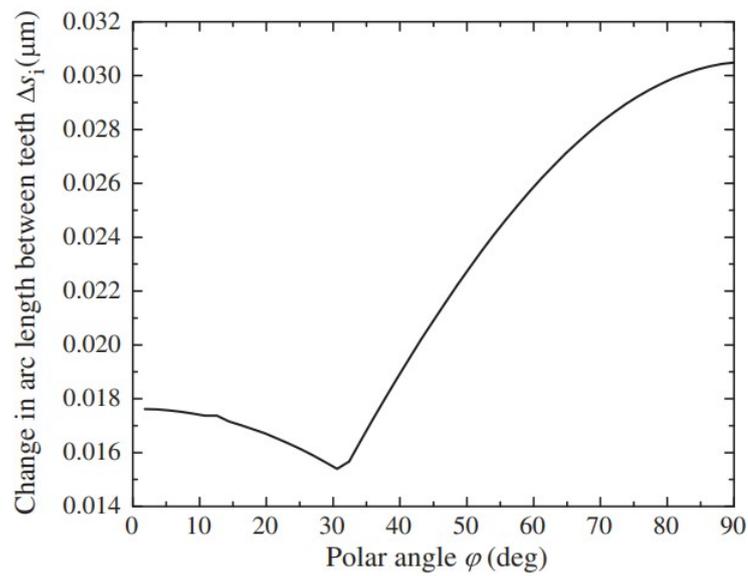
Ogni singolo dente della Flexspline, quando quest'ultima assuma la forma ellittica in seguito all'inserimento del Wave Generator, è sottosto ad una forza  $F_{i+1}$  con il dente successivo  $i+1$  e una forza  $F_{i-1}$  con il dente precedente  $i-1$ , dirette lungo le loro congiungenti. Tali valori di forza ottenuti dalla simulazione del modello di inserimento del Wave Generator, attraverso le equazioni (5.33) e (5.34) rispettivamente, sono mostrati in figura 6.8.

Le forze  $F_{i+1}$  e  $F_{i-1}$  mostrano andamenti e valori simili, raggiungendo dei valori massimi di forza di circa 8000 N lungo il semiasse minore  $b$  e dei valori minimi di circa 2300 N lungo il semiasse maggiore  $a$ .

Sempre dalla figura 6.8, si nota, inoltre, che le deformazioni  $\delta_{i+1}$  e  $\delta_{i-1}$  tra denti adiacenti assumono il valore massimo lungo il semiasse minore  $b$ . Ciò è congruente anche con l'andamento delle forza  $F_{i+1}$  e  $F_{i-1}$  scambiate tra denti adiacenti. In più, i valori ottenuti dimostrano come, sebbene la Flexspline sia un componente flessibile, l'elevata rigidità  $K_{\text{tooth}}$  tra denti adiacenti, riportata in tabella 6.1, fa sì che le deformazioni sia nell'ordine dei micrometri. Lo stesso andamento della deformazione subita dai denti adiacenti della Flexspline è stato riscontrato in [89], come mostrato in figura 6.9. Infatti si nota come la variazione maggiore della lunghezza dell'arco che congiunge i denti adiacenti si verifica a  $90^\circ$ , ovvero lungo il semiasse minore. Inoltre, si nota come vi sia una deformazione minima intorno ai  $30^\circ$ , ma ciò è dovuto al tipo di Wave Generator scelto dallo studio presente in letteratura.



**Figura 6.8:** Forze scambiate tra i denti adiacenti della Flexspline (*a sinistra*); distanza  $\delta$  tra denti adiacenti della Flexspline prima e dopo l’inserimento del Wave Generator (*a destra*).



**Figura 6.9:** Deformazione tra due denti adiacenti in un harmonic drive con Wave Generator a quattro camme [89].

Facendo un confronto dell'andamento ottenuto, in figura 6.6, della forza di contatto  $F_{WG,FS}$  tra Wave Generator e Flexspline, con quello ottenuto, in figura 6.8, per le forze  $F_{i+1}$  e  $F_{i-1}$  scambiate tra denti adiacenti, si nota come quest'ultimo sia ruotato di  $90^\circ$ , ovvero lungo il semiasse minore. Inoltre, tenuto conto che in questo modello non si è simulato l'ingranamento e, quindi, non si hanno ancora i valori di forza scambiati tra i singoli denti della Flexspline con quelli della Circular Spline, si nota come anche nel tratto in cui non avviene l'ingranamento, ovvero lungo il semiasse minore, ci possono essere delle forze  $F_{i+1}$  e  $F_{i-1}$  tra denti adiacenti della Flexspline elevate che possono contribuire al propagare di un'eventuale cricca. Quindi, questo primo risultato del modello di inserimento del Wave Generator suggerisce che, anche quando il dente non sta ingranando, è possibile che ci sia un contributo di forze che vada a peggiorare l'eventuale difetto insorto.

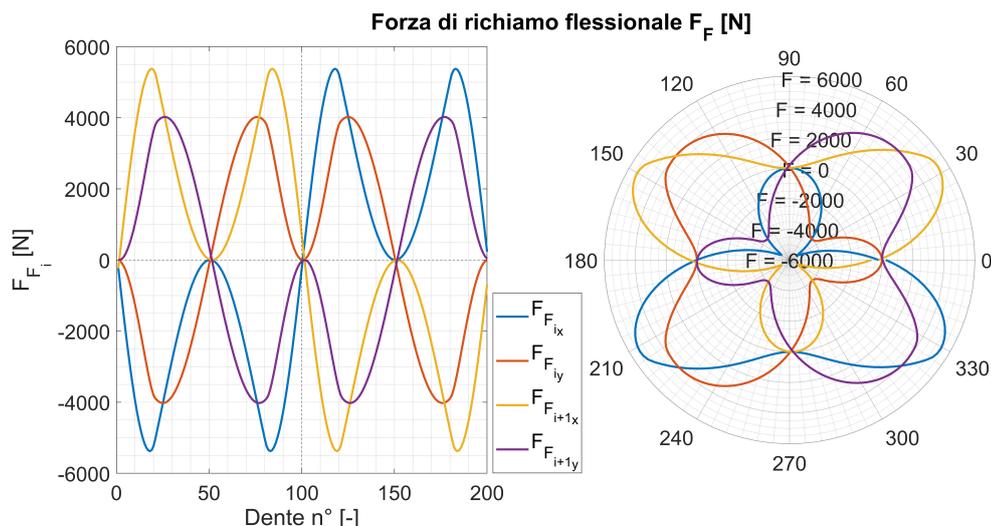
Idealmente, se la Flexspline venisse deformata ellitticamente in modo da ricalcare il profilo del Wave Generator, allora questa assumerebbe una forma esattamente ellittica e il suo perimetro coinciderebbe con quello della condizione indeformata, pari a 192,59 mm, sapendo che il perimetro dell'ellisse è calcolato come:

$$\text{perimetro ellisse} \simeq 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad (6.3)$$

Tuttavia, come si è visto nel paragrafo 6.1, la Flexspline non assume la stessa forma ellittica del Wave Generator. Prendendo il suo semiasse maggiore come la posizione lungo  $X_0$  del dente 0, pari a 31 mm, e il suo semiasse minore come la posizione lungo  $Y_0$  del dente 51, pari a 30,4 mm, è possibile ottenere il nuovo perimetro della Flexspline, attraverso l'equazione 6.3, che risulta essere pari a 192,90 mm. Ciò si traduce in una differenza di perimetro tra le condizioni indeformate e deformate di 0,31 mm, ovvero dello 0,1609%. Tale fenomeno è stato riscontrato anche in [88], in cui attraverso un'analisi agli elementi finiti (*FEA - Finite Element Analysis*) è stato possibile calcolare il perimetro della Flexspline in condizioni indeformate e deformate attraverso gli spostamenti radiali e tangenziali dei singoli denti. Da tale analisi si evince come la variazione di perimetro sia dello 0,0084% senza carico applicato sul riduttore armonico e dello 0,0143% con carico di 800 Nm.

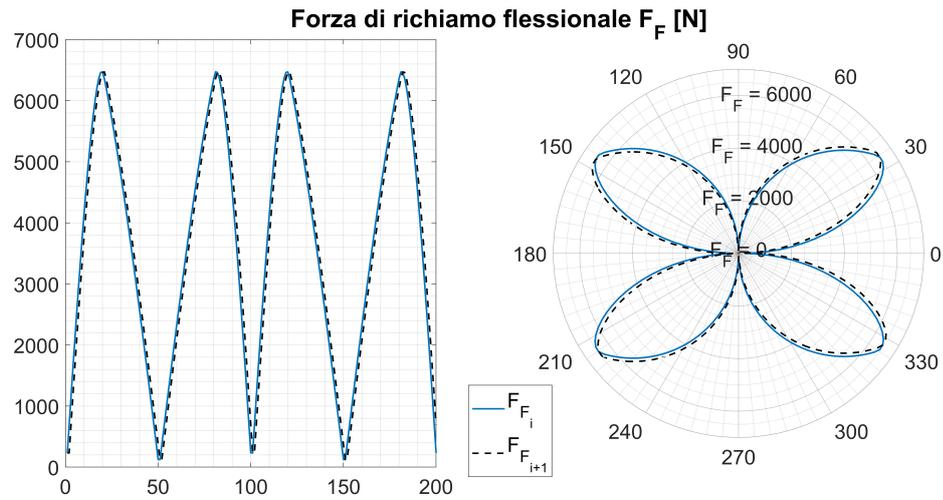
## 6.4 Forza di richiamo flessionale $F_F$

Come specificato nel paragrafo 5.4, le forze di richiamo flessionale derivano dalla coppia di richiamo  $C_{F_i}$  per riportare la Flexspline da condizioni deformate (ellisse) a condizioni non deformate (cerchio). Siccome le forze di richiamo flessionale generano una coppia di forze in grado di bilanciare la coppia  $C_{F_i}$ , ci si aspetta che esse abbiano dei valori uguali ed opposti. I valori ottenuti dalla simulazione del modello di inserimento del Wave Generator sono riportati in figura 6.4.



**Figura 6.10:** Componenti delle forze di richiamo flessionale  $F_{F_i}$  e  $F_{F_{i+1}}$  (a sinistra); su grafico polare (a destra).

Come ci si aspettava, in figura 6.10, si nota come la forza  $F_{F_{ix}}$  (in blu) sia uguale ed opposta alla forza  $F_{F_{i+1x}}$  (in giallo). Analogamente per le forze  $F_{F_{iy}}$  (in arancione) e  $F_{F_{i+1y}}$  (in viola). Avendo le componenti uguali ed opposte, allora anche le relative risultanti saranno uguali in modulo, ma opposte in verso. Tuttavia, essendo già state considerate col verso corretto nel diagramma di corpo libero, descritto nel paragrafo 5.4, esse avranno lo stesso modulo e verso, come mostrato in figura 6.11. In questo modo sarà possibile generare una coppia di forze in grado di bilanciare la coppia  $C_{F_i}$ . Inoltre, si nota come a  $45^\circ$  le componenti di forza lungo  $X_0$  e  $Y_0$  siano identiche, mentre sono nulle lungo il semiasse maggiore e minore. Quest'ultimo risultato si spiega col fatto che in queste zone l'inclinazione della congiunte tra due denti adiacenti è molto prossima a quella in condizioni non deformate. In più, come schematizzato in figura 5.16, si verifica che nel terzo quadrante sia  $F_{F_{ix}}$  che  $F_{F_{iy}}$  risultano essere negative, mentre nel primo quadrante sia  $F_{F_{i+1x}}$  che  $F_{F_{i+1y}}$  risultano essere positive.



**Figura 6.11:** Risultante delle forze di richiamo flessionale  $F_{F_i}$  e  $F_{F_{i+1}}$  (a sinistra); su grafico polare (a destra).

Infine, le forze di contatto  $F_{i+1}$  e  $F_{i-1}$  tra denti adiacenti insieme alle forze di richiamo flessionale  $F_F$  contribuiscono a non far raggiungere, fedelmente, alla Flexspline la forma ellittica imposta dal Wave Generator, come già evidenziato, nel paragrafo 6.1, dai risultati delle posizioni  $(x_i, y_i)$  del singolo dente.

## Capitolo 7

# Future implementazioni per un modello completo di un harmonic drive

Nel capitolo 5 si è descritti nel dettaglio il modello dell'inserimento del Wave Generator all'interno della Flexspline. Nel capitolo 6 sono stati riportati i risultati di tale modello, con lo scopo di ottenere le condizioni iniziali che verranno implementate in un modello completo di riduttore armonico. Di seguito saranno descritte le future implementazioni necessarie per la stesura di un modello completo di riduttore armonico, come la coppia di richiamo torsionale  $C_{R_i}$  della Flexspline, la rotazione del Wave Generator, l'ingranamento tra Flexspline e Circular Spline e il collegamento di quest'ultima con l'albero d'uscita al giunto del manipolatore.

### 7.1 Coppia di richiamo torsionale $C_{R_i}$ della Flexspline

Per il montaggio dei suoi riduttori armonici, Universal Robots ha scelta una configurazione in cui la Circular Spline rappresenti il componente mobile su cui calettare l'albero d'uscita di un giunto robotico. La Flexspline, invece, è fissa rispetto al giunto. Ciò è caratterizzato dal contributo della rigidezza torsionale della Flexspline che permette al giunto di esercitare una coppia di reazione sulla Flexspline in modo da mantenerla fissa. Pertanto, la rigidezza torsionale  $K_T$  è un fattore importante per garantire un accurato posizionamento e controllo del robot. Infatti uno studio [90] condotto attraverso analisi FEM dimostra come la zona di contatto tra denti della Flexspline e denti della Circular Spline aumenti con

l'aumentare del carico applicato all'uscita. Questo porta ad un aumento di denti in presa simultaneamente che si traduce in un aumento di rigidità torsionale.

È importante capire la deformazione dell'elementino di Flexspline rispetto alle condizioni deformate. Ciò è dovuto alla rotazione del Wave Generator oppure alla presenza di un carico che tende a distorcere l'elementino di Flexspline. La rigidità torsionale  $K_T$  della Flexspline assume valori diversi in base al carico torsionale a cui è sottoposta. Pertanto, si ha un risposta non lineare del riduttore che genera fenomeni di isteresi [76, 91–93] della Flexspline, i quali non saranno presi in considerazioni ma lasciati a lavori futuri. Il catalogo del riduttore armonico HFUS-25-2SH in esame [29] suggerisce di adottare una funzione lineare a tratti per descrivere tale comportamento ed è espressa come:

$$\begin{cases} K_{T_i} = K_{T_1} & \text{se } T \leq T_1 \\ K_{T_i} = K_{T_2} & \text{se } T_1 < T \leq T_2 \\ K_{T_i} = K_{T_3} & \text{se } T > T_2 \end{cases} \quad (7.1)$$

Dove:

$T_1, T_2$  [Nm] sono dei valori limiti di coppia definiti dal produttore;

$K_{T_1}, K_{T_2}, K_{T_3}$  [Nm/rad] sono i valori di rigidità torsionale che può assumere la Flexspline.

I valori sopra citati sono sintetizzati in tabella 7.1.

**Tabella 7.1:** Rigidezze torsionali del componente Flexspline [29].

$\mathbf{T_1}$	$\mathbf{T_2}$	$\mathbf{K_{T_1}}$	$\mathbf{K_{T_2}}$	$\mathbf{K_{T_3}}$
[Nm]	[Nm]	[Nm/rad]	[Nm/rad]	[Nm/rad]
14	48	$31 \times 10^3$	$50 \times 10^3$	$57 \times 10^3$

La forza di richiamo elastico  $F_{R_i}$  sul singolo dente dovuta alla rigidità torsionale  $K_T$  della Flexspline può essere modellata come:

$$F_{R_i} = \frac{K_{T_i} \cdot \varphi_i + c_{T_i} \cdot \dot{\varphi}_i}{\rho_i} \quad (7.2)$$

in cui:

$K_{T_i} \cdot \varphi_i + c_{T_i} \cdot \dot{\varphi}_i$  [Nm] è la coppia di richiamo elastico  $C_{R_i}$  dovuta alla rigidità torsionale della Flexspline;

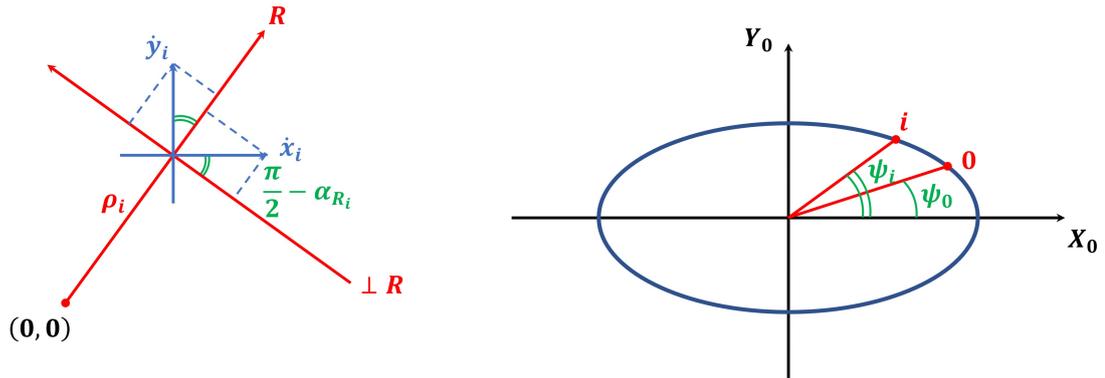
$\varphi_i$  [rad] è la deformazione angolare del dente *i-esimo* rispetto alle condizioni iniziali di Flexspline deformata dopo il solo inserimento del Wave Generator ( $\psi_0$ ). Tuttavia, in questo caso  $\psi_0$  non è lo stesso calcolato in condizioni non deformate, ovvero con la forma circolare della Flexspline, ma è il risultato ottenuto dalla simulazione del modello d'inserimento del Wave Generator descritto nel capitolo 5.

La forza di richiamo torsionale  $F_{R_i}$  appena calcolata è diretta perpendicolarmente al raggio vettore  $\rho_i$  del singolo dente, quindi inclinata di  $\frac{\pi}{2} - \alpha_{R_i}$  rispetto all'orizzontale, come schematizzato in figura 7.1.

La deformazione angolare può essere ricavata:

$$\varphi_i = \psi_i - \psi_0 \quad (7.3)$$

in cui  $\psi_i$  e  $\psi_0$  sono le posizioni angolari lungo la Flexspline deformata del singolo dente con il Wave Generator in rotazione e dopo l'inserimento del Wave Generator, rispettivamente.



**Figura 7.1:** Direzioni principali per il calcolo della forza di richiamo elastico dovuto alla rigidità torsionale della Flexspline (*a sinistra*); posizioni angolari del singolo dente della Flexspline durante la rotazione del Wave Generator (*a destra*).

Analogamente è possibile ricavare la velocità di deformazione angolare:

$$\dot{\varphi}_i = \dot{\psi}_i - \dot{\psi}_0 \quad (7.4)$$

con:

$\dot{\psi}_0 = 0$  perché all'inizio (condizioni iniziali) il sistema è in quiete.

Considerando un moto circolare si ottiene che:

$$\dot{\psi}_i = \frac{V_{R_i}}{\rho_i} \quad (7.5)$$

in cui:

$\rho_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$  [m] è il raggio vettore del singolo dente;

$V_{R_i}$  [m/s] è la velocità periferica del dente *i-esimo*, diretta perpendicolarmente a  $\rho_i$ , quindi inclinata di  $\pi/2 - \alpha_{R_i}$  rispetto all'asse orizzontale  $X_0$ .

Siccome tale velocità è diretta in direzione perpendicolare alla direzione radiale (R), è necessario proiettare le velocità  $\dot{x}_i$   $\dot{y}_i$  del singolo dente, ricavate dalle relative equazioni di equilibrio, lungo tale direzione come di seguito:

$$\begin{aligned} V_{R_i} &= -\dot{x}_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{R_i}\right) + \dot{y}_i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{R_i}\right) = \\ &= -\dot{x}_i \sin(\alpha_{R_i}) + \dot{y}_i \cos(\alpha_{R_i}) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Pertanto, la coppia di richiamo  $C_{R_i} > 0$  ha verso antiorario, ma nel diagramma di corpo libero al dente *i-esimo* la si riporta in verso opposto in modo che la forza  $F_{R_i} > 0$  tenda a riportare *i* verso 0.

Per il calcolo, invece, della forza di richiamo elastico  $F_{R_i}$  dovuta alla rigidità torsionale della Flexspline, analizzata nel dettaglio all'interno della sezione 7.1, è necessario proiettare la posizione  $(x_i, y_i)$  e la velocità  $(\dot{x}_i, \dot{y}_i)$  del singolo dente *i-esimo* lungo la direzione radiale (R) e lungo la direzione opposta alla perpendicolare alla direzione radiale (R), come schematizzato in figura 7.2. In questo modo  $\psi_i$  e  $\dot{\psi}_i$  sono positive in verso antiorario.

Per ogni quadrante è possibile ricavare le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -x_i \sin(\alpha_{R_i}) + y_i \cos(\alpha_{R_i}) & \text{se } 0 \leq \alpha_{R_i} < \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (7.7a)$$

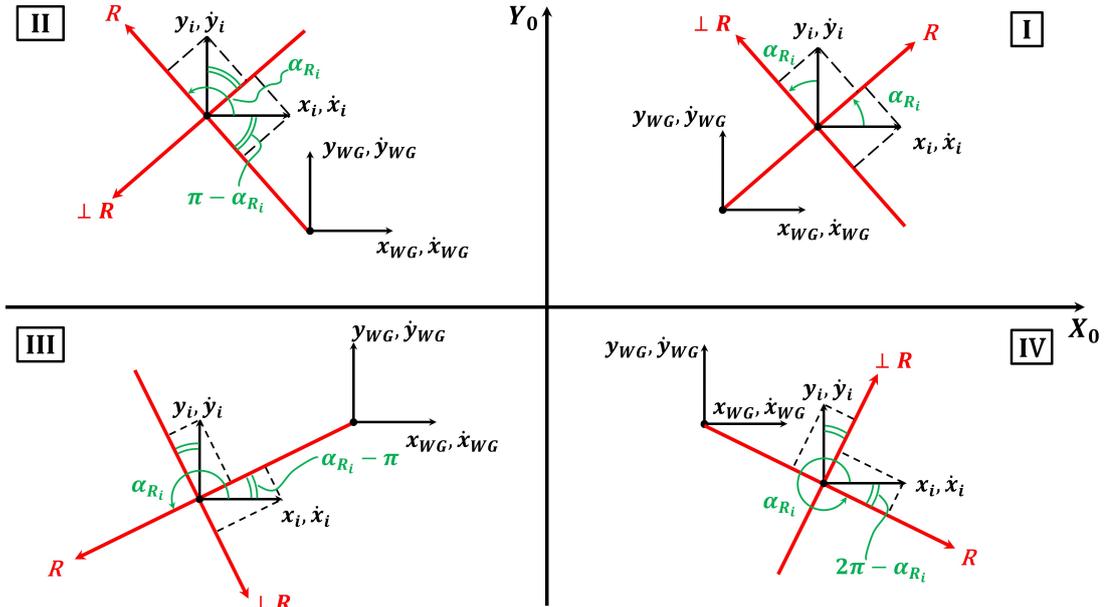
$$\left\{ \begin{array}{ll} -x_i \sin(\pi - \alpha_{R_i}) - y_i \cos(\pi - \alpha_{R_i}) & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq \alpha_{R_i} < 2\pi \end{array} \right. \quad (7.7b)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_i \sin(\alpha_{R_i} - \pi) - y_i \cos(\alpha_{R_i} - \pi) & \text{se } 2\pi \leq \alpha_{R_i} < \frac{3\pi}{2} \end{array} \right. \quad (7.7c)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_i \sin(2\pi - \alpha_{R_i}) + y_i \cos(2\pi - \alpha_{R_i}) & \text{se } \frac{3\pi}{2} \leq \alpha_{R_i} < 2\pi \end{array} \right. \quad (7.7d)$$

Sfruttando gli archi associati si ottiene sempre l'espressione (7.7a) in tutti i quattro quadranti.

Con un processo del tutto analogo a quanto appena ricavato dalle relazioni (7.7) è



**Figura 7.2:** Scomposizione lungo la perpendicolare alla direzione radiale nei diversi quadranti.

possibile ricavare la proiezione delle velocità del singolo dente lungo la direzione opposta alla perpendicolare della direzione radiale ( $R$ ), ottenendo per ogni quadrante la seguente relazione:

$$-\dot{x}_i \sin(\alpha_{R_i}) + \dot{y}_i \cos(\alpha_{R_i}) \quad (7.8)$$

### 7.1.1 Scomposizione della forza di richiamo torsionale $F_{R_i}$ lungo $(X_0, Y_0)$

Per poter ricavare l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale (5.1) e l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale (5.2) del singolo dente  $i$  della Flexspline in condizioni deformate (ellisse), è necessario riportare le forze di richiamo  $F_{R_i}$  dovuta alla rigidità torsionale della Flexspline lungo il sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$ , come schematizzato in figura 7.3.

Nel primo quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = F \sin(\alpha_R) \\ F_y = -F \cos(\alpha_R) \end{cases} \quad (7.9)$$

Nel secondo quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = F \cos\left(\alpha_R - \frac{\pi}{2}\right) = F \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_R\right) = F \sin(\alpha_R) > \\ F_y = F \sin\left(\alpha_R - \frac{\pi}{2}\right) = -F \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_R\right) = -F \cos(\alpha_R) \end{cases} \quad (7.10)$$

Nel terzo quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = -F \sin(\alpha_R - \pi) = F \sin(\pi - \alpha_R) = F \sin(\alpha_R) \\ F_y = F \cos(\alpha_R - \pi) = F \cos(\pi - \alpha_R) = -F \cos(\alpha_R) \end{cases} \quad (7.11)$$

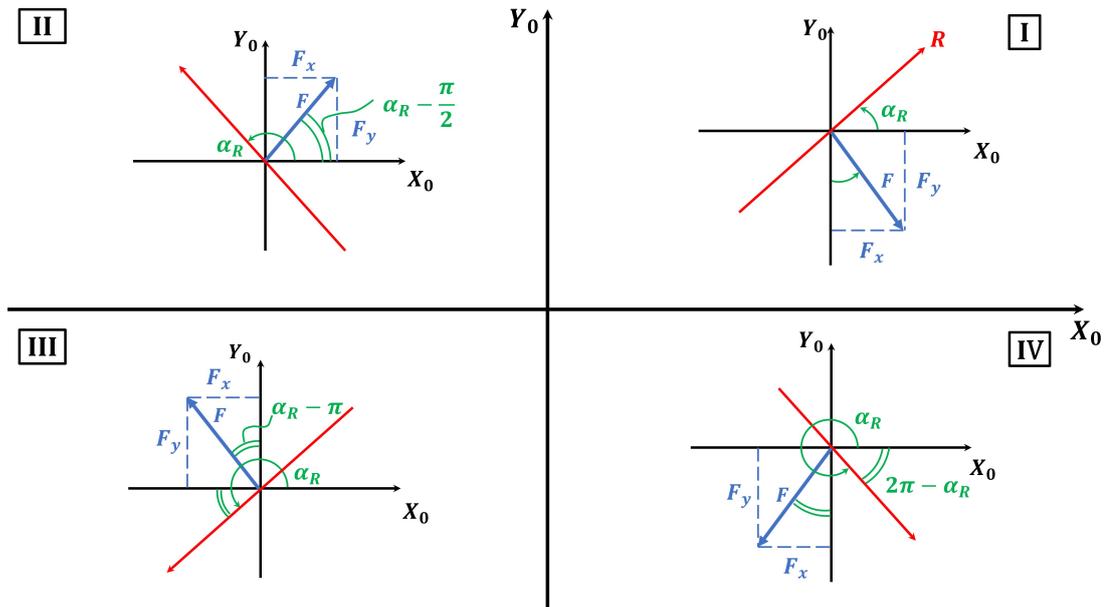
Nel quarto quadrante vale che:

$$\begin{cases} F_x = -F \sin(2\pi - \alpha_R) = F \sin(\alpha_R) \\ F_y = -F \cos(2\pi - \alpha_R) = -F \cos(\alpha_R) \end{cases} \quad (7.12)$$

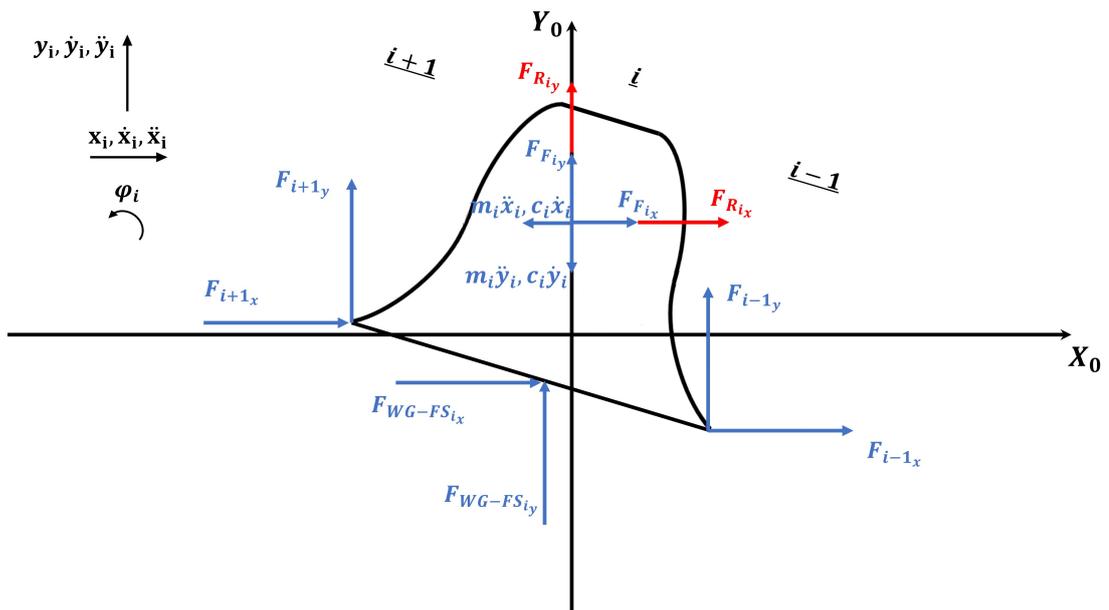
Quindi è possibile dedurre che la scomposizione della forza  $FR_i$  lungo il sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$  vale:

$$\begin{cases} F_{R_{ix}} = F_{R_i} \sin(\alpha_{R_i}) \\ F_{R_{iy}} = -F_{R_i} \cos(\alpha_{R_i}) \end{cases} \quad (7.13)$$

Scomponendo la forza di richiamo torsionale  $F_{R_i}$  lungo  $(X_0, Y_0)$  è possibile ottenere le relative proiezioni  $F_{R_{ix}}$  e  $F_{R_{iy}}$  che vanno aggiunte al diagramma di corpo libero del singolo dente  $i$  ricavato nella sezione 5.1, il quale viene modificato come rappresentato in figura 7.4.



**Figura 7.3:** Scomposizione della forza di richiamo elastico  $F_{R_i}$  della Flexspline lungo il sistema di riferimento  $(X_0, Y_0)$ .



**Figura 7.4:** Diagramma di corpo libero del dente  $i$ -esimo della Flexspline con l'introduzione (in rosso) della forza di richiamo torsionale  $F_{R_i}$ .

## 7.2 Rotazione del Wave Generator

Rispetto al modello dell'inserimento del Wave Generator in cui il punto di contatto con la Flexspline resta invariato, in questo caso esso cambia ad ogni istante di tempo a causa della rotazione del Wave Generator. Quando il Wave Generator inizia a ruotare, ovvero a trasmettere moto e coppia agli altri componenti del riduttore armonico, per ricavare il punto di contatto con la Flexspline non è possibile sommare  $\theta_{WG} + \psi_i$  per ogni dente. Ciò porta a spostare i denti della Flexspline lungo l'ellisse data dal Wave Generator che però non ruota, ma ha sempre la stessa orientazione (semiasse maggiore lungo  $X_0$  nel caso in esame). Inoltre i denti della Flexspline devono oscillare attorno ad una posizione a causa della rotazione del Wave Generator, ma non ruotare intorno all'asse di rotazione del Wave Generator in quanto la Flexspline è fissa e solidale al giunto.

Non è, inoltre, possibile moltiplicare le coordinate del Wave Generator per una matrice di rotazione:

$$R(\vartheta_{WG}) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{WG}) & \sin(\vartheta_{WG}) \\ -\sin(\vartheta_{WG}) & \cos(\vartheta_{WG}) \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Sebbene in questo modo si avrebbe un corretto spostamento delle coordinate dei punti del Wave Generator, facendolo ruotare, si commetterebbero errori nel calcolo delle forze di contatto  $F_{WG,FS}$  scambiate con la Flexspline. Infatti si andrebbe a misurare la distanza fra due punti (Wave Generator e Flexspline) che non sono più vicini tra loro, in quanto quelli del Wave Generator si spostano con esso, mentre quelli della Flexspline sono vincolati a muoversi leggermente intorno a una data posizione dato che la Flexspline è fissa.

Una possibile soluzione è ricalcolare le intersezioni tra i singoli denti della Flexspline  $(x_i, y_i)$  con il Wave Generator ruotato, andando a calcolare l'equazione dell'ellisse del Wave Generator ruotata, risolvendo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{[x_{WG} \cos(\vartheta_{WG}) + y_{WG} \sin(\vartheta_{WG})]^2}{a^2} + \frac{[-x \sin(\vartheta_{WG}) + y \cos(\vartheta_{WG})]^2}{b^2} = 1 & (7.15a) \\ y_{WG} = \tan(\psi_i)x_{WG} & (7.15b) \end{cases}$$

in cui l'equazione (7.15a) rappresenta l'equazione della forma ellittica del Wave Generator ruotato. Anche in questo caso, attraverso l'equazione (7.15b) si considera l'intersezione con una retta passante per  $(x_i, y_i)$  diretta in direzione radiale e non in direzione normale come dovrebbe essere a rigore. In questo modo si evita la risoluzione di equazioni che andrebbero ad appesantire la simulazione e, inoltre, si

evitano possibili forme indeterminate come divisioni per zero.

L'intersezione del sistema di equazioni (7.20) darà due soluzioni (due punti di intersezione) e sarà necessario scegliere quella con  $x_{WG} > 0$  se  $-\frac{\pi}{2} \leq \psi_i \leq \frac{\pi}{2}$  e  $x_{WG} < 0$  viceversa, in modo da cogliere il punto sul Wave Generator più vicino al dente della Flexspline in analisi.

Per la soluzione di  $x_{WG}$ , si utilizza il calcolo simbolico introdotto nel relativo script MATLAB attraverso l'ambiente *syms* e successivamente si risolve l'equazione in funzione di  $x_{WG}$  attraverso il comando *solve*, ottenendo l'espressione:

$$\frac{ab}{\sqrt{A_1 + B_1 + C_1 + D_1 - E_1 + F_1}} \quad (7.16)$$

in cui:

$$\begin{cases} A_1 = b^2 \cos^2(\vartheta_{WG}) & (7.17a) \\ B_1 = a^2 \sin^2(\vartheta_{WG}) & (7.17b) \\ C_1 = a^2 \tan^2(\psi_i) \cos^2(\vartheta_{WG}) & (7.17c) \\ D_1 = b^2 \tan^2(\psi_i) \sin^2(\vartheta_{WG}) & (7.17d) \\ E_1 = 2a^2 \tan(\psi_i) \cos(\vartheta_{WG}) \sin(\vartheta_{WG}) & (7.17e) \\ F_1 = 2b^2 \tan(\psi_i) \cos(\vartheta_{WG}) \sin(\vartheta_{WG}) & (7.17f) \end{cases}$$

Per il calcolo di  $y_{WG}$  si sfrutta l'equazione della retta (7.15b) una volta noto  $x_{WG}$ , tranne quando  $x_i = 0$  ( $\psi_i = \pi/2$  o  $\psi_i = 3/2\pi$ ) poiché in questo  $\tan(\psi_i) = \infty$ , quindi bisogna sostituire  $x_{WG} = 0$  nell'equazione dell'ellisse ruotato e ricavare  $y_{WG}$  il cui segno viene discriminato a seconda del valore di  $\psi_i$ , ottenendo l'espressione:

$$\frac{ab\sqrt{A_2 + B_2 - C_2 - D_2 - E_2 + F_2 - G_2}}{A_2 + B_2} \quad (7.18)$$

in cui:

$$\begin{cases} A_2 = a^2 \cos^2(\vartheta_{WG}) & (7.19a) \\ B_2 = b^2 \sin^2(\vartheta_{WG}) & (7.19b) \\ C_2 = x_{WG}^2 \cos^4(\vartheta_{WG}) & (7.19c) \\ D_2 = x_{WG}^2 \sin^4(\vartheta_{WG}) & (7.19d) \\ E_2 = 2x_{WG}^2 \cos^2(\vartheta_{WG}) \sin^2(\vartheta_{WG}) & (7.19e) \\ F_2 = a^2 x_{WG} \cos(\vartheta_{WG}) \sin(\vartheta_{WG}) & (7.19f) \\ G_2 = b^2 x_{WG} \cos(\vartheta_{WG}) \sin(\vartheta_{WG}) & (7.19g) \end{cases}$$

Quando  $\vartheta_{WG} = 0$ , si ricade nel caso usato nel modello di inserimento del Wave Generator in cui si applica lo stesso ragionamento, ma usando le coordinate polari:

$$\begin{cases} x_{WG} = a \cos(\psi_i) \\ y_{WG} = b \sin(\psi_i) \end{cases} \quad (7.20a)$$

$$(7.20b)$$

le quali non possono essere applicate al caso generale in quanto risultano essere valide solo se il semiasse maggiore  $a$  è diretto lungo  $X_0$  e  $b$  lungo  $Y_0$ .

Tuttavia, avendo inserito la rotazione del Wave Generator, è fondamentale aggiornare il valore di  $\alpha_{N_i}$  perché non si può continuare ad usare quelli usati per il modello di inserimento del Wave Generator in quanto cambiando l'orientazione dell'ellisse, cambia anche la direzione normale ad esso e, quindi, il valore istantaneo di  $\alpha_{N_i}$ .

Per fare questo si usa la formula generale:

$$\alpha_{N_{WG}} = \arctan\left(\frac{a^2 y_{i_{WG}}}{b^2 x_{i_{WG}}}\right) \quad (7.21)$$

con cui viene calcolato  $\alpha_{N_{WG}}$  nel sistema di riferimento solidale al Wave Generator ( $X_{WG}, Y_{WG}$ ) in rotazione (verde), descritto in figura 7.5. Questa formula vale in questo caso perché si ha sempre l'equazione di un'ellisse con l'asse maggiore lungo l'asse  $X_{WG}$ . Per il calcolo di quest'angolo bisogna però calcolare le intersezioni tra Wave Generator e Flexspline ( $x_{i_{WG}}, y_{i_{WG}}$ ), andando a ruotare le coordinate ( $x_i, y_i$ ) dei singoli denti della Flexspline nel sistema di riferimento dell'ellisse. Per fare questo si usa la matrice di rotazione  $R(\vartheta_{WG})$  attorno all'asse  $Z_0$  già usata per la rotazione dell'ellisse, ottenendo:

$$\begin{bmatrix} x_{i_{WG}} \\ y_{i_{WG}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{WG}) & \sin(\vartheta_{WG}) \\ -\sin(\vartheta_{WG}) & \cos(\vartheta_{WG}) \end{bmatrix}}_{R(\vartheta_{WG})} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Una volta calcolato  $\alpha_{N_{WG}}$ , si ricava che:

$$\alpha_{N_i} = \alpha_{N_{WG}} + \vartheta_{WG} \quad (7.23)$$

Un esempio di calcolo di  $\alpha_{N_i}$ , noto  $\alpha_{N_{WG}}$  e  $\vartheta_{WG}$  (rotazione antioraria del Wave Generator), può essere il seguente:

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta_{WG} = \alpha_{N_{WG}} - \underbrace{\frac{3}{2}\pi + 2\pi - \alpha_{N_i}}_{\frac{\pi}{2}} \quad (7.24)$$

in cui semplificando  $\pi/2$  ad ambo i membri si riottiene che:

$$\alpha_{N_i} = \alpha_{N_{WG}} + \vartheta_{WG}$$

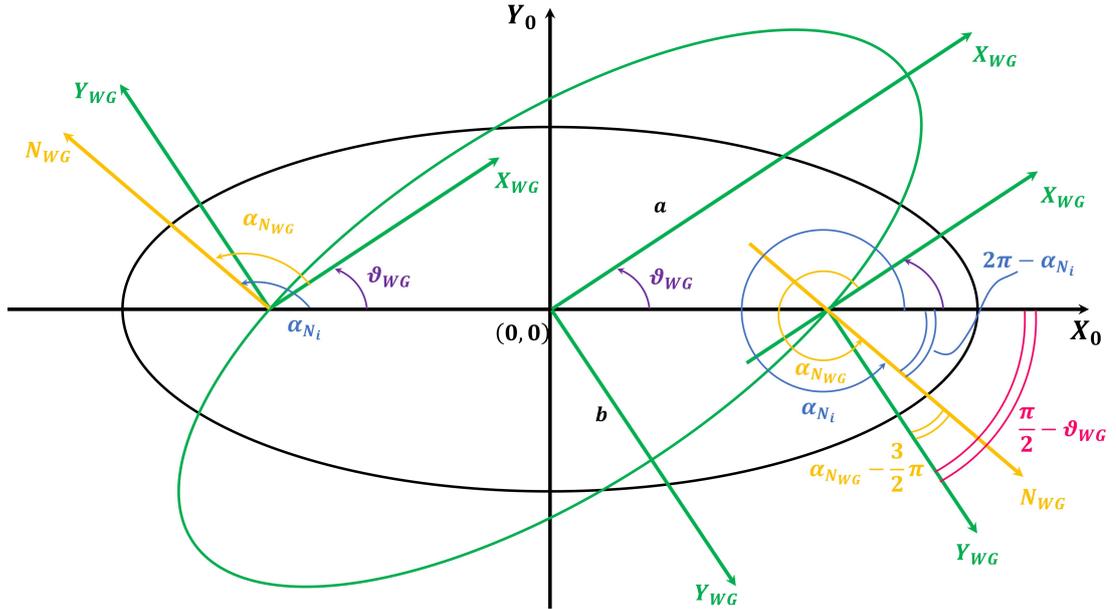


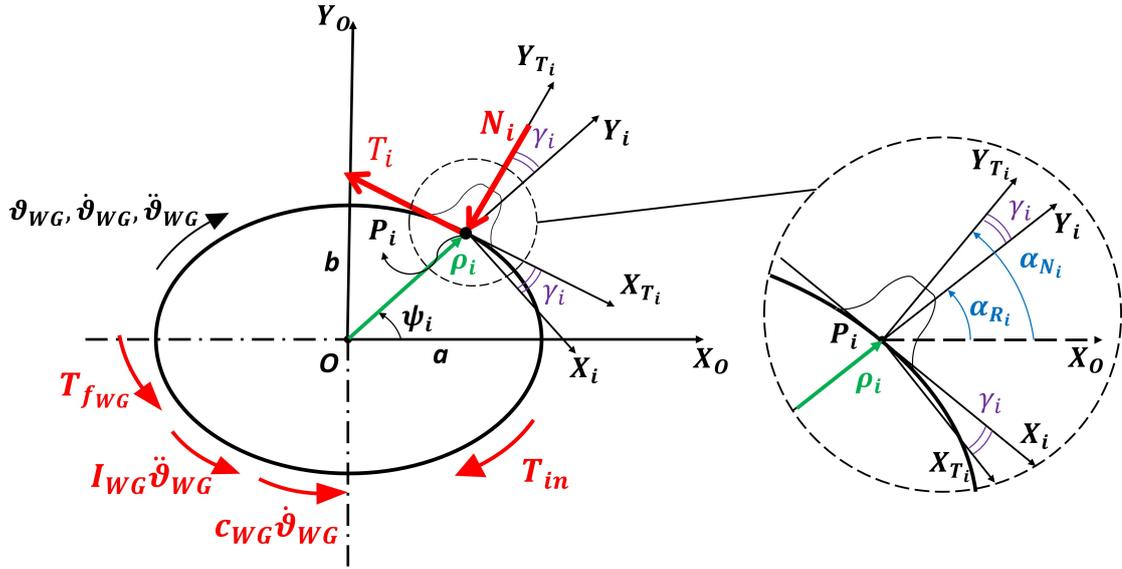
Figura 7.5: Rotazione del Wave Generator.

### 7.3 Analisi di equilibrio del Wave Generator

Il Wave Generator rappresenta il primo elemento della catena cinematica del riduttore armonico, in quanto è direttamente accoppiato al motore elettrico presente nel giunto del robot collaborativo UR5. Quindi, il Wave Generator trasferisce la velocità angolare  $\dot{\vartheta}_{WG}$  e la coppia motrice  $T_{in}$  del motore elettrico, che vengono fornite dalla logica di controllo del robot per poter eseguire la traiettoria desiderata.

Il Wave Generator è un particolare tipo di cuscinetto a forma ellittica che, una volta inserito all'interno della Flexspline, entra in contatto, attraverso la sua pista esterna, con la parte interna della Flexspline. Come suggerisce il suo stesso nome, durante la rotazione, esso costringe periodicamente la Flexspline ad assumere una forma ellittica, che, in condizioni indeformate assume una conformazione circolare.

In figura 7.6 è rappresentata la posizione di un generico punto di contatto  $P_i$  all'interfaccia tra Wave Generator e Flexspline, e in corrispondenza del singolo dente  $i$ -esimo della Flexspline. Esso è individuato dal raggio vettore  $\rho_i$  e dall'angolo  $\psi_i$ , misurato a partire dall'asse verticale del sistema di riferimento fisso  $(X_0, Y_0)$ . Pertanto, l'interfaccia tra Wave Generator e Flexspline è stata discretizzata attraverso  $Z_{FS}$  punti di contatto  $P_i$ , ovvero pari al numero di denti  $Z_{FS}$  della Flexspline in esame. Di conseguenza si avranno dei vettori di  $Z_{FS}$  elementi utilizzati per descrivere il raggio vettore  $\rho_i$  e l'angolo  $\psi_i$ , in modo da individuare il punto di contatto  $P_i$  relativo al singolo dente  $i$ -esimo della Flexspline. In tale zona si generano, come mostrate in figura 7.6, le forze di contatto:



**Figura 7.6:** Diagramma di corpo libero del Wave Generator (*a sinistra*); particolare sul singolo dente *i-esimo* in esame (*a destra*).

$F_{WG,FS}$  [N] diretta in direzione normale;

$F_{fr_{WG,FS}}$  [N] diretta in direzione tangenziale alla pista esterna del Wave Generator.

Le due forze di contatto,  $F_{WG,FS}$  e  $F_{fr_{WG,FS}}$ , sono legate tra di loro attraverso la seguente relazione:

$$F_{fr_{WG,FS}} = \mu_{WG,FS} F_{WG,FS} \quad (7.25)$$

In cui il termine  $\mu_{WG,FS}$  rappresenta il coefficiente d'attrito che si genera all'interfaccia tra Wave Generator e Flexspline, a cui è stato assegnato un valore di 0,07, come suggerito dal catalogo del riduttore armonico in esame e da alcuni articoli in letteratura [29, 85]. Altri articoli riportano dei valori di circa 0,01 [84].

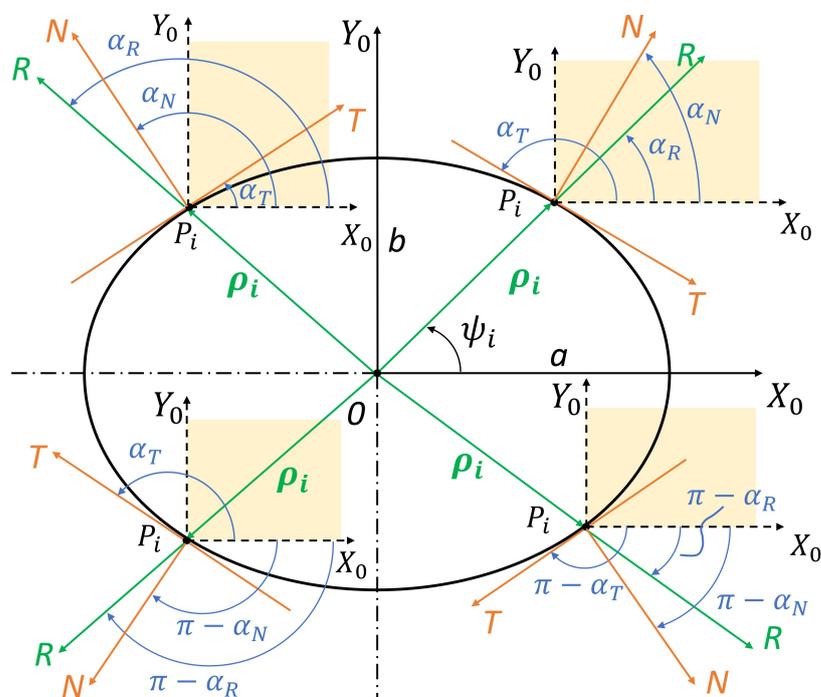
Per poter formulare l'equazione di equilibrio alla rotazione del Wave Generator si ricorre all'ausilio del diagramma di corpo libero, schematizzato in figura 7.6. Da cui si nota la presenza di un angolo  $\gamma_i$ :

$$\gamma_i = \alpha_{Ri} - \alpha_{Ni} \quad (7.26)$$

L'angolo  $\gamma_i$  esprime la differenza che si genera, nel caso di un'ellisse<sup>1</sup>, tra la direzione radiale (retta che passa per il centro di rotazione  $O$  e il punto di contatto  $P_i$ , inclinata

<sup>1</sup>Nel caso di una circonferenza, la direzione radiale coincide con la direzione normale, pertanto si avrebbe un angolo  $\gamma_i = 0$ .

di  $\alpha_{R_i}$ ) e la direzione normale alla superficie ellittica del Wave Generator (retta normale alla superficie ellittica nel punto di contatto  $P_i$ , inclinata di  $\alpha_{N_i}$ ), come schematizzate in figura 7.7.



**Figura 7.7:** Direzione radiale (R), direzione normale (N) e direzione tangente (T) nei diversi punti di contatto  $P_i$  tra Wave Generator e Flexspline.

Pertanto, per avere delle forze perpendicolari a  $\rho_i$ , che rappresenta il braccio per il calcolo della coppia scambiata all'interfaccia tra Wave Generator e Flexspline, è necessario riportare le forze  $F_{WG,FS}$  e  $F_{frWG,FS}$  su un sistema di riferimento mobile  $(X_i, Y_i)$ , ruotato di  $\gamma_i$  rispetto al sistema di riferimento mobile  $(X_{T_i}, Y_{T_i})$  relativo al dente  $i$ -esimo. L'angolo  $\gamma_i$  assume, come evidenziato in figura 5.5, un andamento sia positivo che negativo al variare della posizione angolare  $\psi_i$  del punto di contatto  $P_i$  tra Wave Generator e Flexspline. Ciò è dovuto all'utilizzo in ambiente Matlab-Simulink<sup>TM</sup> della funzione `atan2`, la quale rappresenta una variazione dell'arcotangente, restituendo un valore compreso nell'intervallo  $(-\pi, \pi]$  anziché  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Pertanto, è necessario prenderne il valore assoluto in modo da avere una corretta scomposizione delle forze  $F_{WG,FS}$  e  $F_{frWG,FS}$ .

Quindi, la coppia che si genera tra Wave Generator e Flexspline per il singolo dente *i-esimo*, considerando la relazione (7.26) tra  $\alpha_{R_i}$  e  $\alpha_{N_i}$ , risulta essere:

$$T_{FS_i} = \rho_i [F_{WG,FS} \sin(|\gamma_i|) + F_{fr_{WG,FS}} \cos(|\gamma_i|)] \quad (7.27)$$

Dall'equazione (7.27), sommando il contributo di tutti i 200 punti di contatto  $P_i$  tra Wave Generator e Flexspline, si ottiene la coppia totale scambiata tra Wave Generator e Flexspline come:

$$T_{FS} = \sum_{i=1}^{Z_{FS}} \rho_i [F_{WG,FS} \sin(|\gamma_i|) + F_{fr_{WG,FS}} \cos(|\gamma_i|)] \quad (7.28)$$

dove:

$Z_{FS}$  [-] è pari al numero di denti della Flexspline.

Sul Wave Generator agisce anche una coppia d'inerzia dovuta al suo momento d'inerzia  $J_{WG}$ , si veda il paragrafo 3.3 per maggiori dettagli circa le modalità di calcolo e il valore ottenuto. Per il valore del coefficiente di smorzamento  $c_{WG}$  si veda la tabella 3.2 e il paragrafo 3.3 per le relative modalità di calcolo.

Facendo riferimento alla figura 7.6, l'equazione di equilibrio alla rotazione del Wave Generator può essere scritta come di seguito:

$$T_{in} = T_{f_{WG}} + T_{FS} + J_{WG} \ddot{\vartheta}_{WG} + c_{WG} \dot{\vartheta}_{WG} \quad (7.29)$$

La (7.29) riscritta, come di seguito, in funzione dell'accelerazione angolare  $\ddot{\vartheta}_{WG}$  e integrata due volte nel tempo, permette di calcolare la velocità angolare  $\dot{\vartheta}_{WG}$  e la posizione angolare  $\vartheta_{WG}$  del Wave Generator:

$$\ddot{\vartheta}_{WG} = \frac{1}{J_{WG}} (T_{in} - T_{f_{WG}} - T_{FS} - c_{WG} \dot{\vartheta}_{WG}) \quad (7.30)$$

in cui:

$T_{in}$  [N m] è la coppia in ingresso data dal motore;

$T_{FS}$  [N m] è la coppia scambiata all'interfaccia tra Wave Generator e Flexspline, calcolata secondo l'equazione (7.28);

$T_{f_{WG}}$  [N m] è la coppia d'attrito all'interno del Wave Generator;

$J_{WG}$  [kg m<sup>2</sup>] è il momento d'inerzia del Wave Generator, riportato in tabella 3.2;

$c_{WG}$  [Ns/rad] è il coefficiente di smorzamento del cuscinetto, riportato in tabella 3.2;

$\ddot{\vartheta}_{WG}$  [rad/s<sup>2</sup>] è l'accelerazione angolare del Wave Generator rispetto ad un sistema di riferimento fisso ( $X_0, Y_0$ ). Dalle specifiche tecniche del produttore (Universal Robots) del robot collaborativo UR5 e dal software di programmazione del robot *URSIM* [21, 24] si ricava che all'uscita del giunto si ha un valore limite di accelerazione angolare pari a  $\pm 2292^\circ/s^2$ . Pertanto sul Wave Generator, considerando il rapporto di trasmissione previsto di  $\tau = 101$ , si un valore limite di circa  $\pm 229200^\circ/s^2$ , ovvero di circa  $\pm 4000$  rad/s<sup>2</sup>;

$\dot{\vartheta}_{WG}$  [rad/s] è la velocità angolare del Wave Generator rispetto ad un sistema di riferimento fisso ( $X_0, Y_0$ ). Dalle specifiche tecniche del produttore (Universal Robots) del robot collaborativo UR5 e dal software di programmazione del robot *URSIM* [21, 24] si ricava che all'uscita del giunto si ha un valore limite di velocità angolare pari a  $\pm 180^\circ/s$ . Pertanto sul Wave Generator, considerando il rapporto di trasmissione previsto di  $\tau = 101$ , si un valore limite di circa  $\pm 18000^\circ/s$ , ovvero di circa  $\pm 314,16$  rad/s.

La coppia totale di attrito  $T_{f_{WG}}$  può essere espressa come somma di due contributi [63]:

$$T_{f_{WG}} = (T_0 + T_1) \times 10^{-3} \quad [\text{N m}] \quad (7.31)$$

Contributo di coppia d'attrito in funzione della velocità di rotazione<sup>2</sup>  $\dot{\vartheta}_{WG}$  del Wave Generator, misurata in giri al minuto (*rpm*):

$$\begin{cases} T_0 = f_0(\nu \cdot |\dot{\vartheta}_{WG}|)^{2/3} d_M^3 10^{-7} \cdot \text{sign} \dot{\vartheta}_{WG} \quad [\text{N mm}] & \text{se } |\nu \cdot \dot{\vartheta}_{WG}| \geq 2000 \\ T_0 = f_0 160 d_M^3 10^{-7} \cdot \text{sign} \dot{\vartheta}_{WG} \quad [\text{N mm}] & \text{se } |\nu \cdot \dot{\vartheta}_{WG}| < 2000 \end{cases} \quad (7.32a)$$

$$(7.32b)$$

Si nota come l'equazione (7.32a) corrisponde al modello d'attrito formulato da Palmgren per stimare la coppia d'attrito che si genera in un cuscinetto [94], usato in diversi articoli per la modellazione più o meno dettagliata di un riduttore armonico [64, 75].

Contributo di coppia d'attrito in funzione del carico esercitato sui corpi volventi dei cuscinetti presenti all'interno del Wave Generator:

$$T_1 = f_1 P_1 d_{m_b} \quad (7.33)$$

Dove:

---

<sup>2</sup>per evitare problemi numerici in Simulink™ legati allo *zero-crossing* della funzione segno della velocità di rotazione è preferibile sostituirla con la funzione  $\tanh(\dot{\vartheta}_{WG}/0,001)$

$f_0$  [-] è un fattore in funzione del tipo di lubrificante e della tipologia di cuscinetto usato, descritto nella sezione 3.3.1 e riportato in tabella 3.2;

$f_1$  [-] è un fattore in funzione della tipologia di cuscinetto usato, descritto nella sezione 3.3.1 e riportato in tabella 3.2;

$\nu$  [ $\text{mm}^2 \text{s}^{-1}$ ] è la viscosità cinematica del lubrificante alla temperatura d'esercizio, riportata in tabella 3.2. Tuttavia le equazioni (7.32) sono valide nel caso di lubrificazione ad olio. Pertanto per il caso in esame è stata considerata la viscosità cinematica dell'olio contenuto nel grasso, pari a  $80 \text{mm}^2/\text{s}$  [64], anziché quella del grasso SK-1A;

$P_1$  [N] è il carico equivalente, funzione del carico radiale ed assiale, applicato al cuscinetto per il calcolo della coppia d'attrito. Tuttavia, essendo un modello 2D, non si prende in considerazione nessun carico assiale sul cuscinetto. Anche se verrà considerato in futuri studi, in quanto l'angolo di conicità che si forma tra la Flexspline e la Circular Spline va ad agire su una componente assiale. Pertanto, è stato considerato come carico radiale  $\sum_{i=1}^{ZFS} N_i$ ;

$d_{m_b}$  [mm] è il diametro medio dei cuscinetti, ovvero la distanza dal centro di un corpo volvente all'asse di rotazione del Wave Generator, riportato in tabella 3.1.

Dall'equazione (7.29) di equilibrio alla rotazione del Wave Generator possono essere, quindi, ricavati i segnali d'uscita: l'accelerazione angolare  $\ddot{\vartheta}_{WG}$ , la velocità angolare  $\dot{\vartheta}_{WG}$  e la posizione angolare  $\vartheta_{WG}$  del Wave Generator. Il segnale di ingresso, rappresentato dalla coppia motrice  $T_{in}$  del motore elettrico, è fornito dalla logica di controllo del giunto per poter eseguire la traiettoria comandata ed ottenere, così, il percorso utensile desiderato.

## 7.4 Condizioni di ingranamento con la Circular Spline

La forma ellittica della Flexspline, imposta dal Wave Generator, permette ai suoi denti di ingranare con quelli della Circular Spline. L'ingranamento avviene lungo i due estremi dell'asse maggiore del Wave Generator, portando in contatto più coppie di denti simultaneamente. Tale numero di coppie di denti non può essere stabilito a priori, ma deve essere ricavato dalle simulazioni del modello *multibody*. Ciò è dovuto all'elasticità dei componenti che rendono tale numero variabile nel tempo, soprattutto in presenza di eventuali carichi esterni sull'albero d'uscita [84, 90]. In più, il numero di denti in presa influisce sulla rigidezza complessiva del riduttore. Infatti analisi sperimentali mostrano come la rigidezza torsionale sia funzione del carico applicato in uscita [95]. Essa aumenta con l'aumentare del carico attraverso una relazione non lineare, come descritto più nel dettaglio nel paragrafo 7.1. In genere, il numero di coppie di denti in presa simultaneamente in un riduttore armonico oscilla tra il 25% e il 35% del totale di coppie di denti [35, 38]. Tuttavia queste non presentano lo stesso grado di ingranamento a parità di carico. Esistono coppie di denti che ingranano completamente, altre parzialmente, mentre alcune sono del tutto non accoppiate. Per questo è stato necessario analizzare nel dettaglio la condizione per cui si verifichi il corretto e totale ingranamento tra i denti della Flexspline e quelli della Circular Spline. In figura 7.8 è schematizzato il processo di ingranamento che avviene in un riduttore armonico in cui si evidenziano le principali zone di ingranamento.

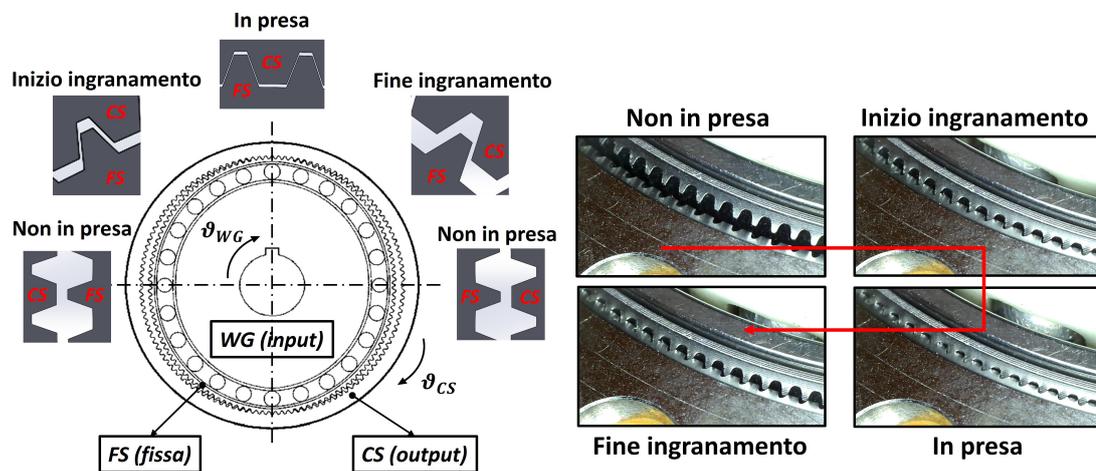


Figura 7.8: Processo di ingranamento di un riduttore armonico.

Si nota una zona, lungo il semi-asse minore del Wave Generator, in cui non vi è alcun contatto tra i denti della Flexspline e della Circular Spline, definita come

*non in presa*. Una zona, lungo il semiasse maggiore del Wave Generator, in cui vi è totale contatto e dove può avvenire l'interazione tra denti della Flexspline e Circular Spline, definita come *in presa*, permettendo alla Circular Spline di poter ruotare, con velocità  $\dot{\vartheta}_{CS}$ , in direzione concorde al Wave Generator. Infine ci sono delle zone in cui l'ingranamento sta per iniziare oppure è appena terminato, definite come *inizio ingranamento* e *fine ingranamento* rispettivamente.

Considerate le ridotte dimensioni dei corpi in gioco e della complessità geometrica dovuta al profilo a doppio arco adottato dal riduttore armonico in esame, non è immediato stabilire la condizione tale per cui l'ingranamento è appena iniziato o terminato. Pertanto, in questa trattazione, in prima approssimazione, si considerano le dentature della Flexspline e della Circular Spline come delle ruote dentate a denti dritti i cui denti seguano un profilo ad evolvente, per le quali valgono le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \frac{h}{2.25} \\ r_p = r_e - m \\ r_p = r_e + m \\ r_f = r_p \cos(\beta) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{per ingranamento esterno} \\ \text{per ingranamento interno} \end{array} \quad \begin{array}{l} (7.34a) \\ (7.34b) \\ (7.34c) \\ (7.34d) \end{array}$$

dove:

$h$  [m] è l'altezza dei denti;

$m$  [m] è il modulo dei denti;

$r_e$  [m] è il raggio esterno, corrispondente al raggio di testa dei denti;

$r_p$  [m] è il raggio primitivo;

$r_f$  [m] è il raggio fondamentale;

$\beta$  [rad] è l'angolo di pressione.

Bisogna tenere in considerazione che, nel caso di un riduttore armonico, l'ingranamento è basato su un moto di traslazione piuttosto che di rotazione come nel caso di ruote dentate con profilo ad evolvente. Molti articoli in letteratura, infatti, ricorrono al modello dei cunei equivalenti per descrivere l'ingranamento di un riduttore armonico [64, 75, 78]. Per questo motivo si è trovato un compromesso, basandosi anche su ciò che si è riscontrato in letteratura sulla percentuale di coppie di denti contemporaneamente in presa in un harmonic drive. Inoltre come evidenziato in figura 7.9, non è sufficiente che il raggio di testa  $r_{aFS}$  della Flexspline superi il raggio di testa  $r_{aCS}$  della Circular Spline affinché inizi l'ingranamento, ma anzi è necessario che si superi il raggio fondamentale  $r_{fCS}$  dei denti della Circular

Spline. Ciò è in parte dovuto al profilo trapezoidale utilizzato per la trattazione, mentre nella realtà la geometria adottata, profilo a doppio arco, necessita di una condizione più stringente. Pertanto si verifica la condizione di corretto ingranamento in un sistema di riferimento  $(X_{WG}, Y_{WG})$  relativo al Wave Generator attraverso la seguente relazione:

$$\underbrace{\rho_i + s_{rim_{FS}} + h_{FS}}_{r_{a_{FS}}: \text{contributo statico}} \geq \underbrace{(r_{a_{CS}} + m)}_{r_{f_{CS}}} \cos(\beta) \quad (7.35)$$

in cui:

$\rho_i$  [m] è la distanza del singolo dente  $i$ -esimo dal centro di rotazione del Wave Generator. Esso tiene conto anche delle deformazioni (contributo dinamico) subite dal singolo dente, in quanto è ottenuto a partire dalle coordinate del singolo dente  $x_i$  e  $y_i$ , a sua volta ricavate dalle relative equazioni di equilibrio in direzione  $X_0$  e  $Y_0$ ;

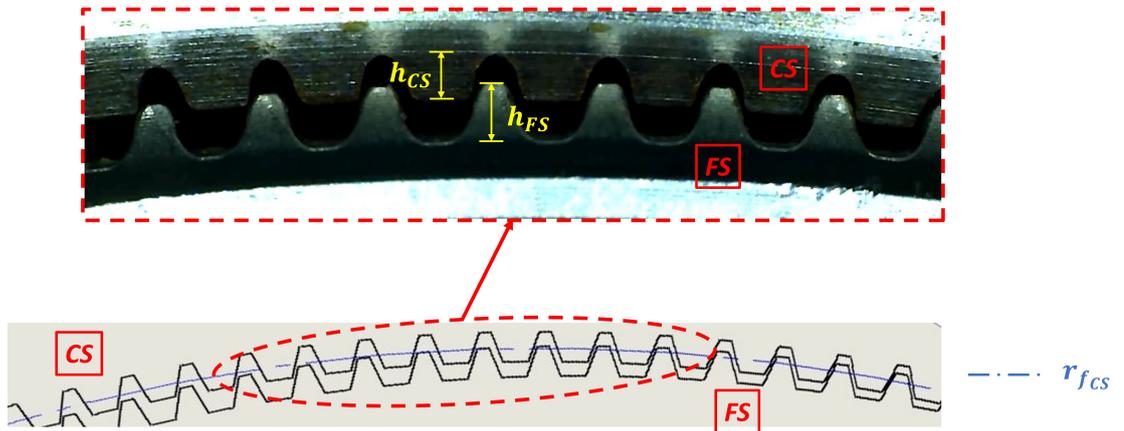
$s_{rim_{FS}}$  [m] è lo spessore della Flexspline alla base del dente, riportato in tabella 3.4;

$h_{FS}$  [m] è l'altezza dei denti della Flexspline, riportato in tabella 3.4;

$r_{a_{FS}}$  [m] è il raggio di testa dei denti della Flexspline, riportato in tabella 3.4;

$r_{a_{CS}}$  [m] è il raggio di testa dei denti della Circular Spline, riportato in tabella 3.6;

$r_{f_{CS}}$  [m] è il raggio fondamentale dei denti della Circular Spline.



**Figura 7.9:** Verifica della condizione di ingranamento, come specificato nell'equazione (7.35).

L'equazione (7.35) può essere riscritta, come di seguito, in modo da calcolare la distanza  $\Delta r_{CS}$  che rappresenta di quanto il raggio di testa  $r_{a_{FS}}$  del singolo dente della Flexspline superi il raggio fondamentale  $r_{f_{CS}}$  dei denti della Circular Spline.

$$\Delta r_{CS} = \rho_i + s_{rim_{FS}} + h_{FS} - (r_{a_{CS}} + m) \cos(\beta) \geq 0 \quad (7.36)$$

In questo modo è possibile ottenere la condizione in cui il dente della Flexspline è in posizione tale da poter ingranare correttamente con il dente della Circular Spline e scambiarsi le relative forze di contatto.

Solo se la condizione (7.36) è soddisfatta viene trasmessa forza alla Circular Spline. Per il calcolo della forza scambiata tra Flexspline e Circular Spline dovranno essere fatti dei ragionamenti più complessi per capire anche da che lato il dente ingrana in modo da tenere conto della deformazione torsionale della Flexspline.

## 7.5 Accoppiamento tra Circular Spline e albero d'uscita

Universal Robots ha scelto, per i suoi manipolatori, di adottare una configurazione in cui la Flexspline sia fissa e la Circular Spline rappresenti il componente mobile su cui calettare l'albero d'uscita di un giunto robotico. In questo modo sarà possibile ottenere il moto in uscita dal giunto sotto forma di rotazione angolare  $\vartheta_{CS}$  con direzione concorde alla rotazione angolare  $\vartheta_{WG}$  del Wave Generator in ingresso al giunto. Per ricavare il moto in uscita è necessario, pertanto, andare a considerare tutte le interazioni che subisce la Circular Spline con gli elementi ad essa collegati, ovvero Flexspline e albero d'uscita. L'equazione di equilibrio alla rotazione della Circular Spline collegata all'albero di uscita risulta essere:

$$\sum_{i=1}^{Z_{FS}} [(F_{t_i} \cos \beta_i - \mu_{CS,FS} F_{t_i} \sin \beta_i) r_{CS}] - T_R = J_{CS} \ddot{\vartheta}_{CS} + c_{CS} \dot{\vartheta}_{CS} \quad (7.37)$$

L'equazione (7.37) riscritta, come di seguito, in funzione dell'accelerazione angolare  $\ddot{\vartheta}_{CS}$  e integrata due volte nel tempo, permette di calcolare la posizione angolare  $\vartheta_{CS}$  della Circular Spline e, di conseguenza, l'albero di uscita ad essa collegata.

$$\ddot{\vartheta}_{CS} = \frac{1}{J_{CS}} \cdot \sum_{i=1}^{Z_{FS}} [(F_{t_i} \cos \beta_i - \mu_{CS,FS} F_{t_i} \sin \beta_i) r_{pCS}] - T_R - c_{CS} \dot{\vartheta}_{CS} \quad (7.38)$$

Dove:

$Z_{FS}$  è pari al numero di denti della Flexspline;

$F_{t_i}$  [N] è la forza scambiata con il dente della Flexspline durante l'ingranamento. Come riportato nel paragrafo 7.4, nel caso in cui i denti della Flexspline e della Circular Spline non siano in contatto, il contributo della forza  $F_{t_i}$  sarà nullo;

$\beta_i$  [rad] è l'angolo di pressione dei denti della Circular Spline;

$\mu_{CS,FS}$  è il coefficiente d'attrito che si genera tra i denti della Circular Spline e i denti della Flexspline;

$r_{pCS}$  [m] è il raggio primitivo della Circular Spline;

$T_R$  [Nm] è la coppia resistente dovuta al carico applicato sull'albero d'uscita;

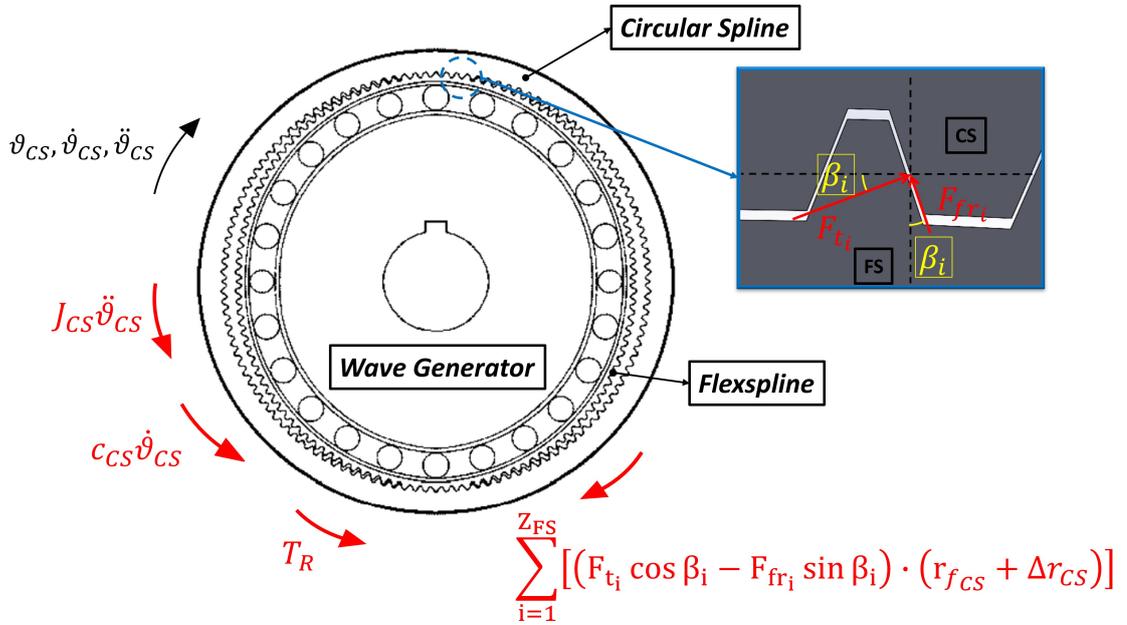
$J_{CS}$  [kg m<sup>2</sup>] è il momento d'inerzia della Circular Spline, riportato in tabella 3.5;

$c_{CS}$  [Nm s/rad] è lo smorzamento torsionale della Circular Spline;

$\ddot{\vartheta}_{CS}$  [rad/s<sup>2</sup>] è l'accelerazione angolare dell'albero d'uscita;

$\dot{\vartheta}_{CS}$  [rad/s] è la velocità angolare dell'albero d'uscita;

$\vartheta_{CS}$  [rad] è la posizione angolare dell'albero di uscita.



**Figura 7.10:** Equilibrio alla rotazione della Circular Spline.

Una volta ricavata la posizione angolare  $\vartheta_{CS}$  dell'albero d'uscita, attraverso l'equazione (7.38), sarà possibile rapportarla alla rotazione  $\vartheta_{WG}$  del Wave Generator, in modo da monitorare il rapporto di trasmissione del sistema. Esso potrà essere usata come valore di controllo per valutare il corretto settaggio dei parametri fisici introdotti nel modello per descrivere la dinamica dei corpi a contatto.

## Capitolo 8

# Conclusioni e sviluppi futuri

Il riduttore armonico rappresenta uno dei componenti più critici all'interno di un manipolatore robotico. Ciò è dovuto all'incapacità del robot di rilevare la presenza di eventuali difetti su questo componente, che cerca di compensare. Per ovviare ciò, si è proceduto con lo studio di un modello preliminare, attraverso un approccio Model-based, in modo da descrivere il suo comportamento e sopperire alla mancanza di dati in letteratura per poter allenare i successivi modelli Data Driven, per estrarre delle *feature* con cui produrre una stima della vita utile residua sulla base delle condizioni di usura del componente.

Dopo aver descritto il funzionamento del riduttore armonico HFUS-25-2SH, preso come riferimento e presente nei primi tre giunti del cobot UR5 di Universal Robots scelto come caso studio, insieme alla misura delle sue grandezze fondamentali, alle modalità di guasto simulabili con questo approccio e alla mancanza di modelli in letteratura in grado di permettere questo tipo di analisi, si è proceduto con la stesura del modello di inserimento del Wave Generator. Tale modello è stato simulato andando a considerare come input la velocità di deformazione costante che integrata permette di ricavare la deformazione con cui si va a modificare il profilo del Wave Generator, mentre la deformazione della Flexspline è conseguenza delle forze scambiate con il Wave Generator, modellate attraverso sistemi molla-smorzatore, e delle equazioni di equilibrio sui singoli denti. Pertanto, è stato possibile ricavare la relativa forza di contatto e le forze scambiate tra denti adiacenti della Flexspline, notando una buona corrispondenza con quanto presente in letteratura, sia dal punto di vista dei valori ottenuti che della distribuzione. Inoltre, sono state ricavate le forze di richiamo flessionale che si generano in seguito alla variazione di forma subita dalla Flexspline nel passaggio da circonferenza ad ellisse a causa dell'inserimento del Wave Generator, rilevando dei risultati in linea con le aspettative.

Un risultato degno di nota è rappresentato dal fatto che la Flexspline non assume esattamente la forma ellittica del Wave Generator, in quanto il contatto con quest'ultimo avviene solo lungo il semiasse maggiore e non lungo il semiasse

minore. Infatti lungo il semiasse maggiore è stato possibile riscontrare i valori massimi della forza di contatto tra di essi. Lungo il semiasse minore, invece, si riscontrano i valori massimi delle forze scambiate tra denti adiacenti e le forze di richiamo flessionale. Questo risultato suggerisce come anche in una zona in cui non c'è ingranamento, ovvero lungo il semiasse minore, potrebbero esserci delle forze elevate tale da andare a propagare l'eventuale presenze di cricche.

Le posizioni  $(x_i, y_i)$  dei singoli denti della Flexspline, calcolate con questo modello preliminare, possono essere utilizzate come condizioni iniziali per la stesura del modello completo di riduttore armonico, al quale bisognerà aggiungere altre considerazioni e contributi che in questa trattazione sono stati trascurati dal punto di vista della simulazione, ma che sono stati comunque approfonditi dal punto di vista teorico, come:

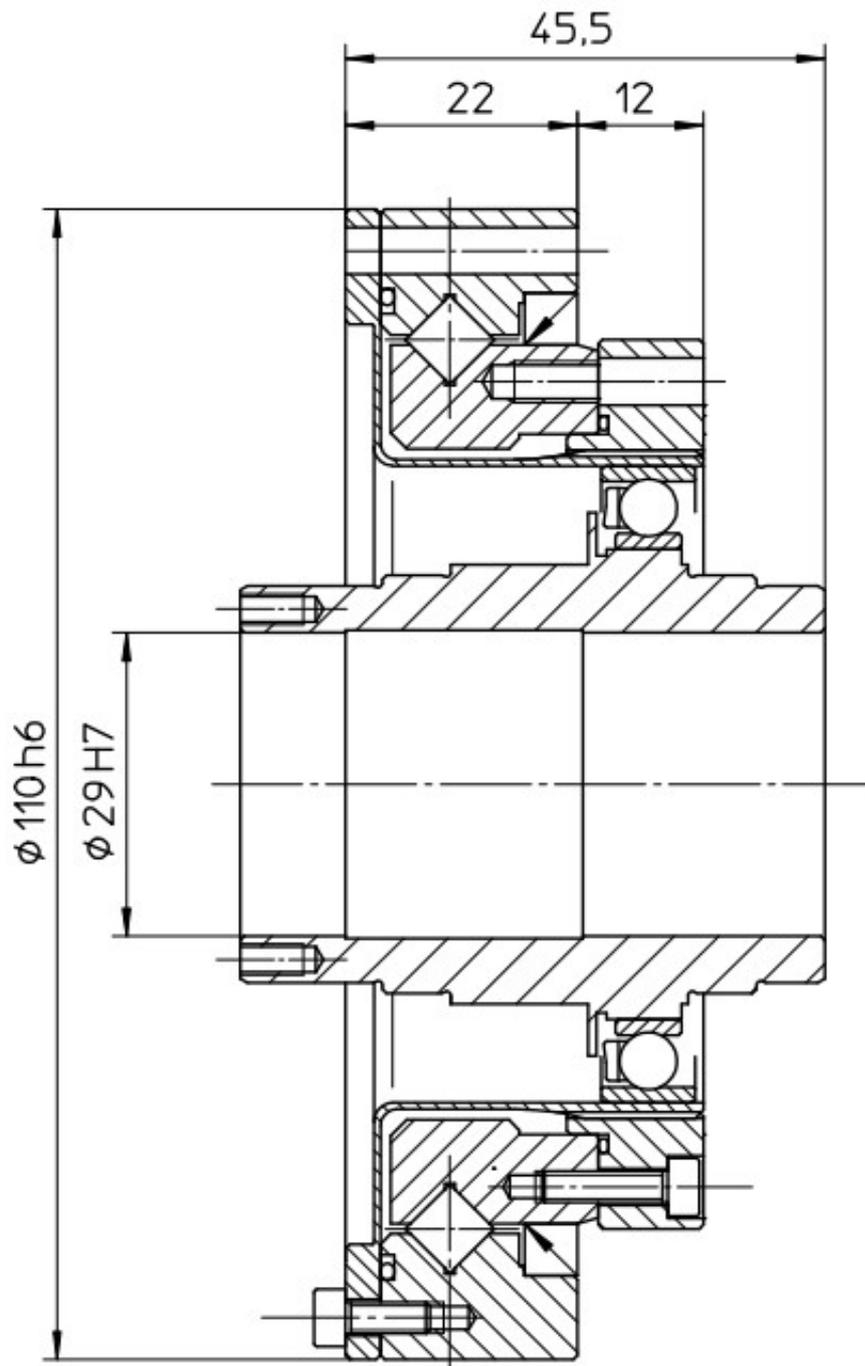
- **coppia di richiamo torsionale  $C_{R_i}$  della Flexspline:** dovuta alla rigidità torsionale della Flexspline, non solo è importante perché il suo contributo permette al giunto di esercitare una coppia di reazione su di essa in modo da mantenerla fissa, ma perché è un parametro che può influire sui numeri di denti in presa simultaneamente soprattutto al variare del carico applicato in uscita [90];
- **rotazione del Wave Generator:** in quanto durante il funzionamento del riduttore armonico il punto di contatto tra Wave Generator e Flexspline varia ad ogni istante di tempo, mentre nel caso in esame resta invariato;
- **analisi di equilibrio del Wave Generator:** siccome rappresenta il primo elemento della catena cinematica è importante analizzare tale componente soprattutto dal punto di vista dell'efficienza, andando a descrivere, con un modello d'attrito dettagliato, la coppia d'attrito che potrebbe generarsi al suo interno;
- **condizioni di ingranamento:** rappresenta la condizione con cui stabilire il numero esatto di denti in presa sia in assenza di carico esterno che in sua presenza. Sarà necessario, inoltre, analizzare l'esatta geometria del profilo del dente, come la geometria a doppio arco, e l'eventuale presenza di backlash tra i denti in presa, mentre al momento è stato considerato un profilo trapezoidale. Soprattutto in presa di difetti, tale condizione rappresenta un passaggio fondamentale con cui analizzare le prestazioni del sistema in condizioni non nominali;
- **accoppiamento tra Circular Spline e albero d'uscita:** con cui analizzare l'effettiva coppia trasmessa in uscita dal giunto robotico in modo da verificare il reale rapporto di trasmissione che il riduttore è in grado di soddisfare sia in condizioni nominali che degradate.

In questo modo sarà possibile ottenere una versione completa del riduttore armonico durante il suo funzionamento per poterlo inserire all'interno di un modello di più alto livello dell'intero manipolatore robotico. Con questo nuovo modello sarà possibile andare successivamente ad aggiungere l'eventuale presenza di difetti su un componente, per esempio andando a ridurre la relativa rigidità che lo caratterizza, in modo da simularne gli effetti e prevederne le conseguenze. In più, sarà necessaria una campagna sperimentale in grado di verificare i risultati ottenuti e in modo da tarare al meglio i parametri che caratterizzano il modello come i valori di rigidità e di smorzamenti utilizzati nelle varie interazioni.

Il modello proposto, grazie al suo livello di dettaglio, può essere utilizzato anche per andare a studiare la distribuzione delle tensioni all'interno dei componenti oltre che a fini diagnostici e prognostici. Tuttavia, essendo la prognostica uno dei campi più promettenti tra le tecniche PHM in termini di aspetti benefici apportati, si aprono molti scenari di utilizzo in modo da ridurre i costi di manutenzione e aumentare la sicurezza dell'operatore presente nelle vicinanze del manipolatore.

## Appendice A

# File CAD-Harmonic Drive<sup>®</sup> HFUS-25-2SH



**Figura A.1:** Sezione 2D di un riduttore armonico HFUS-25-2SH [29].



# Bibliografia

- [1] Robert Bogue. «Europe continues to lead the way in the collaborative robot business». In: *Industrial Robot: An International Journal* (2016) (cit. a p. 1).
- [2] Ana C Simões, António Lucas Soares e Ana C Barros. «Drivers impacting cobots adoption in manufacturing context: A qualitative study». In: *International Scientific-Technical Conference MANUFACTURING*. Springer. 2019, pp. 203–212 (cit. a p. 1).
- [3] Andrea Raviola, Andrea De Martin, Roberto Guida, Giovanni Jacazio, Stefano Mauro e Massimo Sorli. «Harmonic Drive Gear Failures in Industrial Robots Applications: An Overview». In: *PHM Society European Conference*. Vol. 6. 1. 2021, pp. 11–11. DOI: <https://doi.org/10.36001/phme.2021.v6i1.2849> (cit. alle pp. 2, 8, 33, 41, 52).
- [4] Parham M Kebria, Saba Al-Wais, Hamid Abdi e Saeid Nahavandi. «Kinematic and dynamic modelling of UR5 manipulator». In: *2016 IEEE international conference on systems, man, and cybernetics (SMC)*. IEEE. 2016, pp. 004229–004234 (cit. a p. 2).
- [5] Roberto Guida, Massimo Sorli, Stefano Mauro, Andrea De Martin e Andrea Raviola. «Sviluppo di un modello high-fidelity del robot UR5 a fini diagnostici e prognostici= Development of a high-fidelity model of the UR5 robot for diagnostic and prognostic purposes». Politecnico di Torino, 2020 (cit. alle pp. 2, 4, 48, 55).
- [6] Emil Madsen. «Joint Dynamics and Adaptive Feedforward Control of Lightweight Industrial Robots». In: (2020) (cit. alle pp. 2, 10, 11, 13).
- [7] Jan Tommy Gravdahl. «Force estimation in robotic manipulators: Modeling, simulation and experiments». Tesi di dott. Citeseer, 2014 (cit. a p. 2).
- [8] Harmonic Drive AG. *Harmonic Drive: Prodotti in uso*. 2021. URL: <https://harmonicdrive.de/it/applicazioni> (cit. a p. 4).

- [9] Ranganath Kothamasu, Samuel H Huang e William H VerDuin. «System health monitoring and prognostics—a review of current paradigms and practices». In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 28.9-10 (2006), pp. 1012–1024. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00170-004-2131-6> (cit. alle pp. 4, 5).
- [10] Patrick W. Kalgren, Carl S. Byington, Michael J. Roemer e Matthew J. Watson. «Defining PHM, A Lexical Evolution of Maintenance and Logistics». In: *2006 IEEE Autotestcon*. 2006, pp. 353–358. DOI: [10.1109/AUTEST.2006.283685](https://doi.org/10.1109/AUTEST.2006.283685) (cit. a p. 5).
- [11] Canh Ly, Kwok Tom, Carl S. Byington, Romano Patrick e George J. Vachtsevanos. «Fault diagnosis and failure prognosis for engineering systems: A global perspective». In: *2009 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering*. 2009, pp. 108–115. DOI: [10.1109/COASE.2009.5234094](https://doi.org/10.1109/COASE.2009.5234094) (cit. alle pp. 5, 6).
- [12] Zhigang Tian, Daming Lin e Bairong Wu. «Condition based maintenance optimization considering multiple objectives». In: *Journal of Intelligent Manufacturing* 23.2 (2012), pp. 333–340. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10845-009-0358-7> (cit. a p. 5).
- [13] M.J. Roemer, E.O. Nwadiogbu e G. Bloor. «Development of diagnostic and prognostic technologies for aerospace health management applications». In: *2001 IEEE Aerospace Conference Proceedings (Cat. No.01TH8542)*. Vol. 6. 2001, 3139–3147 vol.6. DOI: [10.1109/AERO.2001.931331](https://doi.org/10.1109/AERO.2001.931331) (cit. alle pp. 7, 8).
- [14] S.J. Engel, B.J. Gilmartin, K. Bongort e A. Hess. «Prognostics, the real issues involved with predicting life remaining». In: *2000 IEEE Aerospace Conference. Proceedings (Cat. No.00TH8484)*. Vol. 6. 2000, 457–469 vol.6. DOI: [10.1109/AERO.2000.877920](https://doi.org/10.1109/AERO.2000.877920) (cit. a p. 7).
- [15] Bo Sun, Shengkui Zeng, Rui Kang e Michael Pecht. «Benefits analysis of prognostics in systems». In: *2010 Prognostics and System Health Management Conference*. 2010, pp. 1–8. DOI: [10.1109/PHM.2010.5413503](https://doi.org/10.1109/PHM.2010.5413503) (cit. a p. 8).
- [16] *Real-Time Diagnostics, Prognostics and Health Management for Large-Scale Manufacturing Maintenance Systems*. Vol. ASME 2008 International Manufacturing Science and Engineering Conference, Volume 2. International Manufacturing Science and Engineering Conference. Ott. 2008, pp. 85–94. DOI: [10.1115/MSEC\\_ICMP2008-72511](https://doi.org/10.1115/MSEC_ICMP2008-72511) (cit. a p. 8).
- [17] Gregory W Vogl, Brian A Weiss e Moneer Helu. «A review of diagnostic and prognostic capabilities and best practices for manufacturing». In: *Journal of Intelligent Manufacturing* 30.1 (2019), pp. 79–95. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10845-016-1228-8> (cit. a p. 8).

- [18] Mohd Amin Abd Majid e Fauzi Fudzin. «Study on robots failures in automotive painting line». In: *Asian Res. Publishing Netw.* 12.1 (2017), pp. 62–67 (cit. a p. 8).
- [19] *Accuracy Degradation Analysis for Industrial Robot Systems*. Vol. Volume 3: Manufacturing Equipment and Systems. International Manufacturing Science and Engineering Conference. Giu. 2017. DOI: [10.1115/MSEC2017-2782](https://doi.org/10.1115/MSEC2017-2782) (cit. a p. 8).
- [20] Techvitas. *UR5/UR5e Collaborative Robot*. URL: <https://www.techvitas.com/en/ur5-ur5e/> (cit. alle pp. 9, 10).
- [21] Universal Robots. *UR5 Specifiche tecniche*. 2015. URL: [https://www.universal-robots.com/media/50600/ur5\\_it.pdf](https://www.universal-robots.com/media/50600/ur5_it.pdf) (cit. alle pp. 9, 10, 109).
- [22] Universal Robots. *Il futuro è collaborativo*. 2021. URL: <https://www.alumotion.eu/wp-content/uploads/2015/03/UR-brochure-ITA.pdf> (cit. alle pp. 9, 10).
- [23] Emil Madsen, Oluf Skov Rosenlund, David Brandt e Xuping Zhang. «Comprehensive modeling and identification of nonlinear joint dynamics for collaborative industrial robot manipulators». In: *Control Engineering Practice* 101 (2020), p. 104462. ISSN: 0967-0661. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2020.104462> (cit. a p. 11).
- [24] Universal Robots. *UR5 Manuale Utente*. 2021. URL: <https://www.universal-robots.com/download/manuals-cb-series/user/ur5/315/user-manual-ur5-cb-series-sw315-italian-it/> (cit. alle pp. 11, 109).
- [25] Universal Robots. *Max. joint torques*. 2021. URL: <https://www.universal-robots.com/articles/ur/robot-care-maintenance/max-joint-torques/> (cit. a p. 11).
- [26] Kollmorgen Corp. *Kollmorgen Frameless Motor Selection Guide*. 2013. URL: [https://www.kollmorgen.com/sites/default/files/public\\_downloads/kbm\\_e.pdf](https://www.kollmorgen.com/sites/default/files/public_downloads/kbm_e.pdf) (cit. a p. 12).
- [27] Paolo Boscarì, Roberto Caracciolo, Dario Richiedi e Alberto Trevisani. «Energy optimization of functionally redundant robots through motion design». In: *Applied Sciences* 10.9 (2020), p. 3022 (cit. alle pp. 12–14).
- [28] Kollmorgen Corp. *Better Motors for More Options*. 2021. URL: <https://www.kollmorgen.com/en-us/service-and-support/knowledge-center/success-stories/direct-drives-in-lightweight-robots/> (cit. a p. 12).
- [29] Harmonic Drive AG. *Engineering data HFUS-2UH/2SO/2SH–Harmonic Drive*. 2018. URL: [https://harmonicdrive.de/fileadmin/user\\_upload/ED\\_HFUS-2UH-SO-SH\\_E\\_1019645\\_12\\_2018\\_V02.pdf](https://harmonicdrive.de/fileadmin/user_upload/ED_HFUS-2UH-SO-SH_E_1019645_12_2018_V02.pdf) (cit. alle pp. 14, 22, 24, 31, 36, 50, 96, 106, 121).

- [30] Harmonic Drive SE. *Unità HFUS-2UH/2SO/2SH*. 2021. URL: <https://harmonicdrive.de/it/prodotto/riduttori-con-cuscinetto-di-uscita/hfus-2uh-2so-2sh> (cit. alle pp. 14, 31, 39, 122).
- [31] Renishaw plc. *AksIM<sup>®</sup> supports Universal Robots for smart factory automation*. 2017. URL: <http://resources.renishaw.com/en/download/case-study-universal-robots-ur-aksim-supports-universal-robots-for-smart-factory-automation--90024> (cit. a p. 16).
- [32] CW Musser. «Strain Wave Gearing. US Patent, 2906143». In: (1959) (cit. alle pp. 18, 28).
- [33] Musser C Walton. *Spline and rotary table*. US Patent 2,959,065. Nov. 1960 (cit. a p. 18).
- [34] CW Musser. «The harmonic drive breakthrough in mechanical drive design». In: *Machine Design* 32.8 (1960), pp. 160–170 (cit. alle pp. 18, 28).
- [35] Bikash Routh. «Design aspects of harmonic drive gear and performance improvement of its by problems identification: A review». In: *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1943. 1. AIP Publishing LLC. 2018, p. 020016 (cit. alle pp. 18, 21, 28, 111).
- [36] Harmonic Drive LLC. *Component Sets*. 2021. URL: <https://www.harmonicdrive.net/products/component-sets> (cit. alle pp. 20, 21).
- [37] *Derivation of Kinematic Relations and Finite Element Stress Analysis of Flexspline in a Harmonic Drive Gear Box*. Vol. ASME 2010 10th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, Volume 4. Engineering Systems Design and Analysis. Lug. 2010, pp. 455–463. DOI: [10.1115/ESDA2010-24567](https://doi.org/10.1115/ESDA2010-24567) (cit. alle pp. 21, 48).
- [38] Timothy Douglas Tuttle. «Understanding and modeling the behavior of a harmonic drive gear transmission». Tesi di dott. Massachusetts Institute of Technology, 1992 (cit. alle pp. 21, 26, 50, 111).
- [39] Adam Kalina, Aleksander Mazurkow, Waldemar Witkowski, Bartłomiej Wierzba e Mariusz Oleksy. «Properties of Elasto-Hydrodynamic Oil Film in Meshing of Harmonic Drive Gears». In: *Materials* 14.5 (2021), p. 1194 (cit. a p. 22).
- [40] Carlo Ferraresi e Terenziano Raparelli. *Meccanica applicata*. Clut, 2007 (cit. a p. 23).
- [41] Giovanni Jacazio e Bruno Piombo. *Meccanica applicata alle macchine*. Levrotto & Bella, 1994 (cit. alle pp. 24, 25).
- [42] Giorgio Diana. *Appunti di meccanica applicata alle macchine*. Spiegel, 1994 (cit. a p. 24).

- [43] Harmonic Drive LLC. *Speed Reducers for Precision Motion Control Harmonic Drive*<sup>®</sup>. 2020. URL: [https://www.harmonicdrive.net/\\_hd/content/documents1/reducer\\_catalog.pdf](https://www.harmonicdrive.net/_hd/content/documents1/reducer_catalog.pdf) (cit. a p. 25).
- [44] Ettore Funaioli, Alberto Maggiore e Umberto Meneghetti. *Lezioni di meccanica applicata alle macchine*. Pàtron, 2005 (cit. a p. 25).
- [45] Curt Preissner, Thomas J Royston e Deming Shu. «A high-fidelity harmonic drive model». In: *Journal of dynamic systems, measurement, and control* 134.1 (2012) (cit. alle pp. 27, 48, 50).
- [46] K. Kondo e J. Takada. «Study on Tooth Profiles of the Harmonic Drive». In: *Journal of Mechanical Design* 112.1 (mar. 1990), pp. 131–137. ISSN: 1050-0472. DOI: [10.1115/1.2912570](https://doi.org/10.1115/1.2912570) (cit. alle pp. 28, 29).
- [47] Rathindranath Maiti. «A Novel Harmonic Drive With Pure Involute Tooth Gear Pair ». In: *Journal of Mechanical Design* 126.1 (mar. 2004), pp. 178–182. ISSN: 1050-0472. DOI: [10.1115/1.1637659](https://doi.org/10.1115/1.1637659) (cit. alle pp. 28, 29).
- [48] Oguz Kayabasi e Fehmi Erzincanli. «Shape optimization of tooth profile of a flexspline for a harmonic drive by finite element modelling». In: *Materials & Design* 28.2 (2007), pp. 441–447. ISSN: 0261-3069. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2005.09.009> (cit. alle pp. 28–30).
- [49] Huimin Dong, Zhengdu Zhu, Weidong Zhou e Zhi Chen. «Dynamic Simulation of Harmonic Gear Drives Considering Tooth Profiles Parameters Optimization.» In: *JCP* 7.6 (2012), pp. 1429–1436 (cit. alle pp. 28, 29, 33, 43, 45).
- [50] Dennis León, Nelson Arzola e Andrés Tovar. «Statistical analysis of the influence of tooth geometry in the performance of a harmonic drive». In: *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 37.2 (2015), pp. 723–735. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-014-0197-0> (cit. alle pp. 28, 29).
- [51] Yi-Cheng Chen, Yun-Hao Cheng, Jui-Tang Tseng e Kun-Ju Hsieh. «Study of a harmonic drive with involute profile flexspline by two-dimensional finite element analysis». In: *Engineering Computations* (2017). DOI: <https://doi.org/10.1108/EC-03-2017-0086> (cit. alle pp. 28, 29).
- [52] Xiaoxia Chen, Yusheng Liu, Jingzhong Xing, Shuzhong Lin e Wei Xu. «The parametric design of double-circular-arc tooth profile and its influence on the functional backlash of harmonic drive». In: *Mechanism and Machine Theory* 73 (2014), pp. 1–24. ISSN: 0094-114X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2013.10.003> (cit. alle pp. 28, 30).

- [53] GuiHua Wu e XiaoJiang Peng. «Load Distribution among the Teeth of Flexspline of Harmonic Drive with Double Circular-arc Tooth Profile». In: *Proceedings of the 2015 4th International Conference on Computer, Mechatronics, Control and Electronic Engineering*. Atlantis Press, 2015/11, pp. 1083–1086. ISBN: 978-94-6252-110-0. DOI: <https://doi.org/10.2991/iccmcee-15.2015.204> (cit. alle pp. 28, 30).
- [54] Yazhen Wang, Jiacheng Shen, Shuaihong Yu e Huihui Yue. «A Design Approach of Double-Circular-Arc Common-Tangent Tooth Profile for Harmonic Drive with Twice Conjugated Meshing». In: *2019 11th International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics (IHMSC)*. Vol. 2. 2019, pp. 185–188. DOI: [10.1109/IHMSC.2019.10139](https://doi.org/10.1109/IHMSC.2019.10139) (cit. alle pp. 28, 30).
- [55] Guangsheng Chen, Huanhuan Li e Yang Liu. «Double-arc harmonic gear profile design and meshing analysis for multi-section conjugation». In: *Advances in Mechanical Engineering* 11.5 (2019), p. 1687814019850656. DOI: [10.1177/1687814019850656](https://doi.org/10.1177/1687814019850656) (cit. alle pp. 28, 30).
- [56] Yun-Peng Yao, Xiao-Xia Chen e Jing-Zhong Xing. «Complex cycloidal tooth profile of circular spline in harmonic drive and its optimal fitting research». In: *Journal of Industrial and Production Engineering* 34.1 (2017), pp. 1–8. DOI: [10.1080/21681015.2016.1174162](https://doi.org/10.1080/21681015.2016.1174162) (cit. alle pp. 28, 29).
- [57] DongHui Ma, JiaNing Wu e ShaoZe Yan. «A method for detection and quantification of meshing characteristics of harmonic drive gears using computer vision». In: *Science China Technological Sciences* 59.9 (2016), pp. 1305–1319 (cit. a p. 28).
- [58] Donghui Ma, Rui Wang, Pengfei Rao, Ruomin Sui e Shaoze Yan. «Automated Analysis of Meshing Performance of Harmonic Drive Gears Under Various Operating Conditions». In: *IEEE Access* 6 (2018), pp. 68137–68154. DOI: [10.1109/ACCESS.2018.2872797](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2872797) (cit. a p. 28).
- [59] Harmonic Drive SE. *Unità HFUS-2UH/2SO/2SH*. 2021. URL: <https://harmonicdrive.de/it/prodotto/riduttori-con-cuscinetto-di-uscita/hfus-2uh-2so-2sh> (cit. a p. 31).
- [60] P Folega. «Analysis of stress state of toothed ring of flexspline by means the BEM». In: *Science and Engineering* 59.1 (2013), pp. 40–45 (cit. a p. 32).
- [61] Fanjie Li, Xiaopeng Li, Yajing Guo e Dongyang Shang. «Analysis of Contact Mechanical Characteristics of Flexible Parts in Harmonic Gear Reducer». In: *Shock and Vibration* 2021 (). DOI: <https://doi.org/10.1155/2021/5521320> (cit. a p. 32).

- [62] Physics LibreTexts. *Ellipses and Ellipsoids*. 2020. URL: [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical\\_Mechanics/Book%3A\\_Classical\\_Mechanics\\_\(Tatum\)/02%3A\\_Moments\\_of\\_Inertia/2.20%3A\\_Ellipses\\_and\\_Ellipsoids](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Book%3A_Classical_Mechanics_(Tatum)/02%3A_Moments_of_Inertia/2.20%3A_Ellipses_and_Ellipsoids) (cit. a p. 34).
- [63] Harald Meerkamm. *Technical pocket guide*. Schaeffler Technologies AG & Company KG, 2018 (cit. alle pp. 34, 36, 109).
- [64] Chuang Zou, Tao Tao, Gedong Jiang, Xuesong Mei e Junhui Wu. «A harmonic drive model considering geometry and internal interaction». In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 231.4 (2017), pp. 728–743 (cit. alle pp. 36, 47, 49–51, 109, 110, 112).
- [65] Marco Scriboni, Massimo Sorli, Stefano Mauro, Andrea De Martin e Andrea Raviola. «FMECA and FTA analysis for industrial and collaborative robots». Politecnico di Torino, 2020 (cit. a p. 41).
- [66] Rossetto Massimo. «FMEA, FMECA, FTA». In: *Sperimentazione e Affidabilità delle Costruzioni Meccaniche - Politecnico di Torino* (2020) (cit. a p. 41).
- [67] Jianlin Zheng e Wei Yang. «Failure analysis of a flexspline of harmonic gear drive in STC industrial robot: Microstructure and stress distribution». In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Vol. 452. 4. IOP Publishing. 2018, p. 042148 (cit. a p. 43).
- [68] Wenyi Wang. «Early detection of gear tooth cracking using the resonance demodulation technique». In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 15.5 (2001), pp. 887–903 (cit. a p. 43).
- [69] DG LEWICKI e R BALLARINI. «Effect of rim thickness on gear crack propagation path». In: *Journal of mechanical design* 119.1 (1997), pp. 88–95 (cit. a p. 44).
- [70] David G Lewicki. «Gear Crack Propagation Path Studies-Guidelines for Ultra-Safe Design». In: *Journal of the American Helicopter Society* 47.1 (2002), pp. 64–72 (cit. alle pp. 44, 45).
- [71] F Curà, A Mura e C Rosso. «Investigation about crack propagation paths in thin rim gears». In: *Frattura ed Integrità Strutturale* 8.30 (2014), pp. 446–453 (cit. a p. 44).
- [72] Huimin Dong, Delun Wang e Kwun-Lon Ting. «Kinematic effect of the compliant cup in harmonic drives». In: *Journal of Mechanical Design* 133.5 (2011) (cit. a p. 45).

- [73] Jonathan Drew Smith, Andrew J. Nick, Jason M. Schuler, Andrew Kennett e R. Peter Dillon. «Cryobotics: Extreme Cold Environment Testing of Strain Wave Gear Sets». In: *2019 IEEE Aerospace Conference*. 2019, pp. 1–10. DOI: [10.1109/AERO.2019.8742009](https://doi.org/10.1109/AERO.2019.8742009) (cit. a p. 46).
- [74] Shuting Li. «Diaphragm stress analysis and fatigue strength evaluation of the flex-spline, a very thin-walled spur gear used in the strain wave gearing». In: *Mechanism and Machine Theory* 104 (2016), pp. 1–16. ISSN: 0094-114X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.05.020> (cit. alle pp. 46, 47).
- [75] Xian Zhang, Tao Tao, Gedong Jiang, Xuesong Mei e Chuang Zou. «A Refined Dynamic Model of Harmonic Drive and Its Dynamic Response Analysis». In: *Shock and Vibration* 2020 (2020) (cit. alle pp. 47, 50, 51, 109, 112).
- [76] Rached Dhaouadi, Fathi H Ghorbel e Prasanna S Gandhi. «A new dynamic model of hysteresis in harmonic drives». In: *IEEE Transactions on Industrial electronics* 50.6 (2003), pp. 1165–1171 (cit. alle pp. 47, 50, 96).
- [77] T.D. Tuttle e W. Seering. «Modeling a harmonic drive gear transmission». In: *[1993] Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1993, 624–629 vol.2. DOI: [10.1109/ROBOT.1993.291889](https://doi.org/10.1109/ROBOT.1993.291889) (cit. alle pp. 47, 50).
- [78] T.D. Tuttle e W.P. Seering. «A nonlinear model of a harmonic drive gear transmission». In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 12.3 (1996), pp. 368–374. DOI: [10.1109/70.499819](https://doi.org/10.1109/70.499819) (cit. alle pp. 47, 49, 112).
- [79] W Ostapski e I Mukha. «Stress state analysis of harmonic drive elements by FEM». In: *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences* (2007), pp. 115–123 (cit. a p. 47).
- [80] Hui Min Dong, Zheng Du Zhu e Yao Lu. «Dynamic Simulation of Harmonic Drives Based on FEM». In: *Innovation Manufacturing and Engineering Management*. Vol. 323. Advanced Materials Research. Trans Tech Publications Ltd, set. 2011, pp. 28–33. DOI: [10.4028/www.scientific.net/AMR.323.28](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.323.28) (cit. a p. 47).
- [81] Jacek Pacana, Waldemar Witkowski e Jacek Mucha. «FEM analysis of stress distribution in the hermetic harmonic drive flexspline». In: *Strength of Materials* 49.3 (2017), pp. 388–398. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11223-017-9879-z> (cit. a p. 47).
- [82] Shuang Wang, Gedong Jiang, Xuesong Mei, Chuang Zou, Xian Zhang e Hao Zhang. «A rapid stress calculation method for short flexspline harmonic drive». In: *Engineering Computations* (2019). DOI: <https://doi.org/10.1108/EC-08-2018-0364> (cit. alle pp. 47, 48).

- [83] Yi-Cheng Chen, Yun-Hao Cheng, Jui-Tang Tseng e Kun-Ju Hsieh. «Study of a harmonic drive with involute profile flexspline by two-dimensional finite element analysis». In: *Engineering Computations* (2017). DOI: <https://doi.org/10.1108/EC-03-2017-0086> (cit. a p. 48).
- [84] Chuang Zou, Tao Tao, Gedong Jiang e Xuesong Mei. «Deformation and stress analysis of short flexspline in the harmonic drive system with load». In: *2013 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. IEEE. 2013, pp. 676–680 (cit. alle pp. 51, 106, 111).
- [85] P Bridgeman, M Jansson, EW Roberts, M Schulke e A Tvaruzka. «The Performance and Life of Fluid-Lubricated Harmonic Drive® Gears». In: *Proceedings of the 16th European Space Mechanisms and Tribology Symposium, Bilbao, Spain*. 2015, pp. 23–25 (cit. alle pp. 53, 106).
- [86] Bindi You e Jianmin Wen. «Load Distribution Calculation of Flexible Ball Bearing with Elliptical Cam Wave Generator». In: *Proceedings of the 2016 International Conference on Mechanics, Materials and Structural Engineering*. Atlantis Press, 2016/03, pp. 49–55. ISBN: 978-94-6252-187-2. DOI: <https://doi.org/10.2991/icmmse-16.2016.9> (cit. alle pp. 87–89).
- [87] Ying Xiong, Yongsheng Zhu e Ke Yan. «Load Analysis of Flexible Ball Bearing in a Harmonic Reducer». In: *Journal of Mechanical Design* 142.2 (ott. 2019). 022302. ISSN: 1050-0472. DOI: [10.1115/1.4044325](https://doi.org/10.1115/1.4044325) (cit. a p. 89).
- [88] Xiaoxia Chen, Shuzhong Lin e Jingzhong Xing. «The investigation of elongation of the neutral line in harmonic drive». In: *2010 International Conference On Computer Design and Applications*. Vol. 4. IEEE. 2010, pp. V4–383 (cit. a p. 92).
- [89] Xiaoxia Chen, Yusheng Liu, Jingzhong Xing, Shuzhong Lin e Ming Ma. «A novel method based on mechanical analysis for the stretch of the neutral line of the flexspline cup of a harmonic drive». In: *Mechanism and Machine Theory* 76 (2014), pp. 1–19. ISSN: 0094-114X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.01.014> (cit. alle pp. 90, 91).
- [90] F-E Rhéaume, H Champlaud e Z Liu. «Understanding and modelling the torsional stiffness of harmonic drives through finite-element method». In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 223.2 (2009), pp. 515–524. DOI: [10.1243/09544062JMES949](https://doi.org/10.1243/09544062JMES949) (cit. alle pp. 95, 111, 118).
- [91] Ting Tang, Hang Jia, Junyang Li, Jiayu Wang e Xingyu Zeng. «Modeling of Transmission Compliance and Hysteresis Considering Degradation in a Harmonic Drive». In: *Applied Sciences* 11.2 (2021). ISSN: 2076-3417. DOI: [10.3390/app11020665](https://doi.org/10.3390/app11020665) (cit. a p. 96).

- [92] Hongwei Zhang, Saleh Ahmad e Guangjun Liu. «Modeling of Torsional Compliance and Hysteresis Behaviors in Harmonic Drives». In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 20.1 (2015), pp. 178–185. DOI: [10.1109/TMECH.2014.2311382](https://doi.org/10.1109/TMECH.2014.2311382) (cit. a p. 96).
- [93] Nenad M. Kircanski e Andrew A. Goldenberg. «An Experimental Study of Nonlinear Stiffness, Hysteresis, and Friction Effects in Robot Joints with Harmonic Drives and Torque Sensors». In: *The International Journal of Robotics Research* 16.2 (1997), pp. 214–239. DOI: [10.1177/027836499701600207](https://doi.org/10.1177/027836499701600207) (cit. a p. 96).
- [94] Arvid Palmgren. «Ball and roller bearing engineering». In: *Philadelphia: SKF Industries Inc* (1959) (cit. a p. 109).
- [95] Jianfeng Ma, Chao Li, Yingchao Luo e Lingli Cui. «Simulation of meshing characteristics of harmonic reducer and experimental verification». In: *Advances in Mechanical Engineering* 10.3 (2018), p. 1687814018767494. DOI: [10.1177/1687814018767494](https://doi.org/10.1177/1687814018767494) (cit. a p. 111).