



**Politecnico  
di Torino**

**Politecnico di Torino**

Corso di Laurea

A.a. 2020/2021

Sessione di Laurea Dicembre 2021

# **Metodologie di monitoraggio in tempo reale delle strutture aeronautiche**

Shape sensing per un velivolo UAV

Relatore:

Prof. Marco Gherlone

Correlatori:

Prof. Marco Esposito

Prof. Massimiliano Mattone

Ing. Daniele Camatti

Candidati:

Filippo Valoriani



A questo Istante,  
ai miei Genitori  
a mia Sorella  
ad Asia.

## Sommario

Lo *shape sensing* è la ricostruzione del campo di spostamenti di una struttura partendo da misure discrete delle deformazioni sulla sua superficie, utile al fine di conoscere la deformata della struttura e monitorarne lo stato di salute. Questo studio mostra come è possibile ricostruire la deformata della semiala di un drone in tempo reale, utilizzando delle misure di deformazione estratte dai pannelli del dorso.

L'elaborato presenta una breve introduzione sui tre principali metodi per lo shape sensing: *iFEM*, *Ko's displacement theory*, *Modal Method*.

L'UAV esaminato è un convertiplano con un'apertura alare di 2,4 metri e un peso massimo al decollo di 12 chilogrammi. Tale drone è in grado di decollare e atterrare verticalmente come un multirottore, mentre nella fase di crociera si comporta come un velivolo ad ala fissa, dove la propulsione è garantita da un'elica spingente installata sulla parte posteriore della fusoliera. La semiala è composta di diversi componenti, quali: longheroni e centine realizzati in balsa, pannelli che compongono il dorso e il ventre in composito fibra di vetro e due longheroni tubolari in composito fibra di carbonio che permettono la continuità dei longheroni in balsa attraverso la fusoliera, quest'ultimi sono collegati ai pannelli attraverso una schiuma polimerica. L'orientazione degli strati di entrambi i compositi è assunta essere  $[0/45/ - 45/90/0]^{\circ}s$ .

La semiala studiata è stata discretizzata mediante elementi finiti: la geometria è stata importata da un pre-esistente CAD comprendente solo le superfici esterne. Il modello è stato migliorato tramite misure manuali in laboratorio sulla semiala che hanno permesso di aggiungere longheroni e centine. Per le analisi FEM le caratteristiche dei materiali sono state importate da letteratura basandosi sulle osservazioni fatte in laboratorio, essendo ignoti i valori reali delle rigidità e densità. Si è proposto un metodo per la correzione delle proprietà dei materiali al fine di avvicinarsi a quelle reali, metodo basato su prove in laboratorio e analisi di sensitività delle stesse tramite FEM. Tramite i software XFOIL e AVL si è cercato di risalire ai carichi aerodinamici effettivi da applicare per l'analisi CAE. Un'analisi modale ed una statica sono state eseguite per ottenere le forme modali e le deformazioni necessarie al metodo modale e al metodo di Ko.

Nel capitolo risultati si confronta la ricostruzione della deformata ottenuta dal metodo di Ko e da quello modale, evidenziando come quest'ultimo offra risultati migliori e più promettenti. Sul metodo modale si è sviluppato un algoritmo genetico per l'ottimizzazione della posizione degli estensimetri. Si osserva come il suo utilizzo permetta di ridurre notevolmente il numero di estensimetri pur mantenendo un'alta accuratezza. Infine si ipotizza una possibile installazione sul velivolo reale per una prova in volo.

## Abstract

Shape sensing is the reconstruction of the displacement field of a structure from some discrete surface strain measurements, useful in order to know the deformation of the structure and monitor its health. This study shows how it is possible to recreate the deflection of a drone's wing during its flight in real time, starting by measures of strain on the upper panel of the half wing.

The paper presents a brief introduction to the three main methods for shape sensing: iFEM, *Ko's displacement theory*, *Modal Method*.

The UAV under review is a tiltrotor with two and a half meters of wingspan and an maximum take of weight of twelve kilograms. Such drone is able to take off and land vertically as a multi-rotor, while in the cruise phase it behaves as a fixed-wing aircraft, where propulsion is provided by a pushing propeller installed on the rear part of the fuselage. The half wing is made up of many parts, which are: ribs and spars made of balsa, dorsal and ventral skin made of fiberglass composite and two short spars made of carbon fiber composite attached to panels with a polymeric foam. Carbon fiber composite spars help to connect the wing to the fuselage. Orientation of composite sheets is assumed to be  $[0/45/-45/90/0]^s$ , for both fiberglass and carbon composites.

The studied wing has been discretized by finite elements: the geometry has been imported from a pre-existing CAD including only the external surfaces. The model has been improved by manual measurements in the laboratory on the wing, which allowed to add spars and ribs. For the FEM analysis the material characteristics were imported from literature based on the observations made in the laboratory, being unknown the exact values of real stiffness and density. A method has been proposed for the correction of the material properties in order to get closer to the real ones, method based on laboratory tests and sensitivity analysis of the same by FEM. Through XFOIL and AVL software we tried to determine the actual aerodynamic loads to be applied for the analysis. Once the model was completed a modal and a static analysis were performed to obtain the modal shapes and strains needed for the modal method and the Ko's theory.

In the results chapter we compare the deformation reconstruction obtained by Ko's method and the modal method, highlighting how the latter offers better and more promising results. A genetic algorithm has been developed on the modal method for the optimization of the strain gauge position. It is observed how its use allows to significantly reduce the number of strain gauges while maintaining high accuracy. Finally, a possible installation on the real aircraft for a flight test is hypothesized.

# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	<b>3</b>
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduzione shape sensing</b>	<b>6</b>
1.1 Metodi di ricostruzione della deformata	7
1.1.1 Inverse FEM	7
1.1.2 Teoria dello spostamento di Ko	9
1.1.3 Modal Method	13
<b>2 Modello FE e sensitività</b>	<b>21</b>
2.1 Convertiplano UAV	21
2.2 Modello elementi finiti	22
2.2.1 Modelli preliminari	23
2.3 Caratteristiche meccaniche incognite	26
2.4 Analisi di sensitività	29
2.4.1 Obiettivo sensitività	32
<b>3 Risultati</b>	<b>35</b>
3.1 Teoria di Ko	35
3.1.1 Determinazione asse neutro	35
3.1.2 Test	38
3.2 Metodo Modale	41
3.2.1 Procedura con elementi finiti	41
3.2.2 Ottimizzazione della posizione degli estensimetri	42
3.2.3 Algoritmi Genetici	44
3.3 test: condizioni di volo	47
3.3.1 Risultati FEM	49
3.3.2 Risultati Ko	51
3.3.3 Risultati MM	53
<b>4 Conclusioni</b>	<b>58</b>

<b>Nomenclatura</b>	<b>60</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>60</b>

# Elenco delle figure

1.1	Cassone e apparecchiature per i sensori FBG, Team ICARUS PoliT0	7
1.2	Velivolo Helios [16]	10
1.3	Semiala con sistema di riferimento [11]	11
1.4	Cassone alare in-strumentato con due file di estensimetri [16]	13
2.1	Convertiplano, PROS3	22
2.2	Dettaglio della semiala, laboratorio	22
2.3	CAD semiala Solidworks©	23
2.4	Posizione centine e longheroni marcate con nastro adesivo	23
2.5	Semiala con mesh fitta, solo Quad4	24
2.6	Particolare dei longheroni tubolari	25
2.7	Semiala con mesh Paver	26
2.8	Semiala con mesh definitiva	27
2.9	Diagramma di flusso per analisi di sensitività	33
3.1	Semiala con linee di misura per teoria di Ko	35
3.2	Profilo alare, forma costante lungo la semiala	36
3.3	Assi neutri e linee di misura per Ko	37
3.4	Semiala FE, test del metodo di Ko	39
3.5	Deformazioni per metodo di Ko - carico semplice	39
3.6	Confronto deflessioni e torsione metodo di Ko - carico semplice	40
3.7	Diagramma di flusso per il metodo modale	43
3.8	Esempio: output algoritmo genetico MATLAB	45
3.9	Diagramma di flusso per l'algoritmo genetico	46
3.10	Confronto dei tempi: combinazioni semplici - algoritmo genetico	48
3.11	Diagrammi taglio e momento per la semiala	50
3.12	Semiala FE, test metodo modale	50
3.13	Semiala deformata statica FEM	51
3.14	Confronto deflessioni e torsione metodo di Ko - carico aerodinamico	52
3.15	Energia forme modali	54
3.16	Forme modali utilizzate	55
3.17	GA, asintoto dell'errore minimo	56

3.18 GA - Scelta estensimetri . . . . . 57

# Elenco delle tabelle

2.1	Specifiche ICON V2 . . . . .	21
2.2	Confronto fra mesh . . . . .	28
2.3	materiali dei componenti . . . . .	29
2.4	Proprietà dei materiali di partenza . . . . .	29
2.5	Variazione valori nominali . . . . .	31
2.6	Tabella iterazioni . . . . .	31
2.7	Coeff. sensitività prima forma modale . . . . .	32
2.8	Codifica variabili per sensitività . . . . .	33
3.1	Equazioni piani neutri - carico semplice . . . . .	38
3.2	Stazione per metodo di Ko . . . . .	38
3.3	Risultati test metodo di Ko . . . . .	41
3.4	Numero di combinazioni semplici e tempi . . . . .	47
3.5	Dati aerodinamica semiala e tagli . . . . .	49
3.6	Equazioni piani neutri - carico aerodinamico . . . . .	52
3.7	Risultati test metodo di Ko . . . . .	53
3.8	Energia delle forme modali . . . . .	53
3.9	Errori di diverse combinazioni di forme modali, MM . . . . .	54
3.10	GA - Elementi più frequenti . . . . .	57
4.1	Confronto metodi per shape sensing . . . . .	58

# Capitolo 1

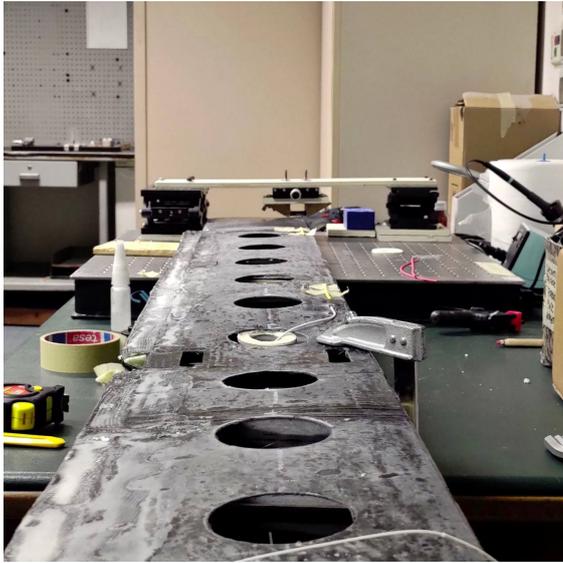
## Introduzione shape sensing

Lo *shape sensing* è la ricostruzione del campo di spostamenti di una struttura a partire da misure discrete delle deformazioni sulla superficie [11].

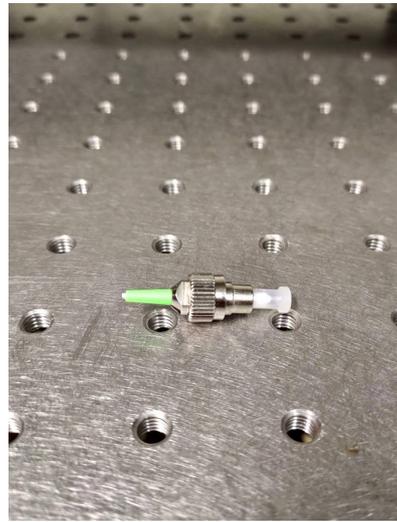
La conoscenza della deformata di una struttura può essere utile in molti casi. Per esempio, la valutazione in tempo reale del campo di spostamento è importante per poter implementare un sistema di controllo per tutti i dispositivi che utilizzano il morphing [8]. Utilizzando superfici di controllo morphing è possibile ottimizzare la progettazione di alcuni componenti, riducendone il numero di parti e i loro spessori. Conoscere il campo di deformazione di una struttura permette di monitorarne lo stato di salute e ottimizzarne i cicli di manutenzione. Queste deformazioni possono essere misurate con degli estensimetri elettrici o con una rete di sensori in fibra ottica. Il vantaggio di utilizzare sensori in fibra ottica è che attualmente tali, sensori basati sul reticolo di Bragg, consentono numerose misure in molteplici punti della struttura con un aumento di peso minimo [3].

I tesisti Giuseppe Impicciatore e Marco Bertucelli, in collaborazione con il Team ICARUS PoliTO, hanno realizzato un sistema di fibre ottiche e sensori FBG che permettono di avere informazioni sulla deformazione del cassone alare del loro velivolo. Queste vengono incollate al cassone e collegate, con una serie di connettori, a una centralina che ne raccoglie i dati (figura 1.1). Questi ultimi vengono poi utilizzati per determinare quali parti del velivolo siano maggiormente a rischio di rottura a fatica e necessitino di maggior manutenzione.

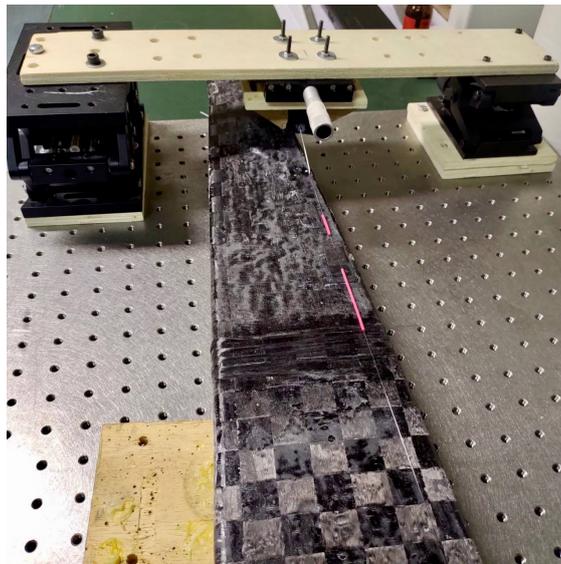
Esposito e Gherlone introducono in [7] i tre principali metodi per lo shape sensing: l'*inverse FEM*, la *Ko's displacement theory*, ed il *modal method*, al fine di approfondire l'ottimizzazione del posizionamento dei sensori di deformazione su di un cassone alare in composito soggetto a flessione e torsione. Vengono infine esposte delle osservazioni relative all'accuratezza dei metodi e al numero di sensori richiesti.



(a) Cassone alare, dorso



(b) Connettori



(c) Cassone alare, ventre

Figura 1.1: Cassone e apparecchiature per i sensori FBG, Team ICARUS PoliTO

## 1.1 Metodi di ricostruzione della deformata

### 1.1.1 Inverse FEM

Tessler e Spangler nel 2002 hanno sviluppato un metodo agli elementi finiti inverso basato sulla minimizzazione di un funzionale di classe  $C^\infty$  [26]. Il funzionale utilizza dei termini ricavati col metodo dei minimi quadrati interpolando le

deformazioni sugli elementi e quelle misurate. La formulazione generale viene presentata e applicata ad una struttura a parete sottile deformata a taglio in [27, 28].

Si consideri il dominio  $\Omega$  di una struttura che deve essere discretizzato utilizzando elementi mono-, bi-, o tri-dimensionali. Il campo di spostamenti a cui è sottoposta la struttura può essere definito dal vettore  $[u_x(\mathbf{x}), u_y(\mathbf{x}), u_z(\mathbf{x})]^T$  nel sistema di coordinate cartesiane  $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$ . A seconda della teoria strutturale utilizzata, il vettore di spostamento può essere espresso in termini di variabili cinematiche  $u(x)$ . Queste variabili cinematiche possono essere interpolate all'interno di ogni elemento finito utilizzando delle funzioni di forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^e = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{q}^e \quad (1.1)$$

dove  $\{N\}$  è la matrice delle funzioni di forma e  $[q^e]$  è il vettore dei gradi di libertà nodali. Il vettore delle deformazioni è completamente definito da un insieme di  $K$  misure di deformazione indipendenti,  $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$  ( $k = 1, \dots, K$ ). Usando l'equazione 1.1 e le relazioni lineari fra spostamenti e deformazioni possiamo riscrivere le deformazioni in funzione dei gradi di libertà nodali

$$\varepsilon(\mathbf{u}^e) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{q}^e \quad (1.2)$$

dove la matrice  $\{B\}$  contiene le derivate delle funzioni di forma.

L'approccio *iFEM* si basa sulla minimizzazione di un funzionale definito, per ogni elemento, come l'errore ai minimi quadrati fra le deformazioni analitiche (equazione 1.2) e le corrispondenti misurate sperimentalmente,  $\varepsilon^\varepsilon = \{\varepsilon_k^\varepsilon\}$  ( $k = 1, \dots, K$ ). Queste ultime misurate per mezzo di estensimetri, rosette o altri tipi di sensori per deformazioni. Per un singolo elemento, il funzionale dell'errore,  $\Phi^e$ , è definito come la somma delle  $\Phi_k^e$  riferite alle  $k$ -esime misure moltiplicate per dei pesi

$$\Phi^e(\mathbf{u}^e) = \|\varepsilon(\mathbf{u}^e) - \varepsilon^\varepsilon\|^2 \quad (1.3)$$

$$\Phi^e(\mathbf{u}^e) \equiv \sum_{k=1}^K \lambda_k^e w_k^e \Phi_k^e \quad (1.4)$$

dove

- $\Phi_k^e$  corrisponde alla  $k$ -esima componente di deformazione, calcolato attraverso  $n$  misure discrete locali;

$$\Phi_k^e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\varepsilon_{k(i)}(\mathbf{u}^e) - \varepsilon_{k(i)}^\varepsilon]^2 \quad (k = 1, \dots, K) \quad (1.5)$$

- $w_k^e$  è un coefficiente dimensionale che garantisce che i termini dell'equazione 1.4 sommandosi abbiano le giuste dimensioni fisiche;
- $\lambda_k^e$  è un coefficiente adimensionale che può assumere diversi valori con lo scopo di rinforzare (= 1) o indebolire (=  $1 \times 10^{-4}$ ) la correlazione fra deformazioni analitiche e misurate sperimentalmente.

Il coefficiente  $\lambda_k^e$  gioca un ruolo fondamentale nell'*iFEM*, in quanto permette che l'approccio sia applicabile anche in quei casi dove le deformazioni sperimentali sono note con un insufficiente livello di accuratezza. Il funzionale dell'elemento  $\Phi^e(\mathbf{u}_e)$  è minimizzato rispetto ai gradi di libertà ignoti  $\mathbf{q}^e$

$$\frac{\partial \Phi^e(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{q}^e} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{a}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{b}^e \quad (1.6)$$

durante la trasformazione è possibile passare da un sistema di riferimento locale ad uno globale, assemblando i contributi delle varie matrici otteniamo

$$\mathbf{A} \mathbf{q} = \mathbf{b} \quad (1.7)$$

dove la matrice  $[A]$  dipende dalla posizione dei sensori di deformazione e dalle funzioni di forma, mentre il vettore  $[b]$  dipende dalle misure sperimentali delle deformazioni. Si introducono le condizioni al contorno geometriche sugli spostamenti per prevenire spostamenti di corpo rigido, dopodiché i gradi di libertà possono essere calcolati invertendo l'equazione 1.7,  $\mathbf{q} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ . Per piccoli spostamenti la matrice  $A$  viene invertita una sola volta, mentre il vettore  $b$  viene ricalcolato ad ogni acquisizione delle deformazioni.

Dal momento che nella definizione del potenziale ci si avvale solo delle relazioni deformazioni-spostamenti, l'*iFEM* non richiede la conoscenza di nessuna proprietà dei materiali o del carico applicato. È applicabile sia per condizioni statiche che dinamiche, senza richiedere nessuna informazione riguardo lo smorzamento o l'inerzia dei materiali.

## 1.1.2 Teoria dello spostamento di Ko

La teoria dello spostamento di Ko, Richards e Fleischer [15]KoWilliamL2007DT-fl è stata sviluppata per valutare la deflessione dell'ala dell'*ultralightweight Helios flying wing* (figura 1.2). Questo velivolo presenta un'apertura alare molto estesa ( $\approx 77 \text{ m}$ ) caratterizzata da una notevole flessibilità, arrivando fino a  $10 \text{ m}$  di deflessione massima. A seguito di una rottura del velivolo avvenuta a mezz'aria, probabilmente a causa di oscillazioni non smorzate dell'ala, i progettisti hanno messo a punto questo metodo che consentisse ai piloti di mantenere sotto controllo la deflessione dell'ala.

Partendo dall'equazione del momento per una trave a sezione costante incastrata l'approccio consente di ricostruire la deformata tramite delle relazioni

che esprimono gli spostamenti in funzione delle deformazioni, la teoria viene poi sviluppata anche per differenti condizioni al contorno e per strutture più complesse: piastre o travi rastremate [16].



Figura 1.2: Velivolo Helios [16]

### Dimostrazione

Consideriamo la struttura incastrata a forma di semiala in figura 1.3, la piastra appartiene al piano  $x - y$ .

I tratti marcati, riferiti alla coordinata  $s$ , rappresentano il percorso lungo il quale sono misurate le deformazioni  $\varepsilon_{ss}$ . Ci sono  $(N + 1)$  posizioni dove le deformazioni sono misurate,  $s_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ), con  $s_0$  e  $s_N$  rispettivamente all'incastro e al tip della trave. Le deformazioni misurate sono denotate con  $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_{ss}(s_i)$ . Seguendo le assunzioni della teoria di Eulero-Bernoulli per la flessione pura, è possibile legare le deformazioni longitudinali alle derivate seconde della deflessione, eq. 1.8.

$$\varepsilon_{ss}(s) = -zw_{,ss}(s) \quad (1.8)$$

dove  $z$  è la distanza fra i sensori e l'asse neutro. Se assumiamo che la distanza dall'asse neutro sia costante per ogni posizione di misura,  $z = c = cost$ , otteniamo

$$w_{,ss} = \frac{\varepsilon_{ss}(s)}{c} \quad (1.9)$$

La deformazione longitudinale è misurata in  $(N + 1)$  posizioni discrete ed è assunta variare linearmente fra una misura e la successiva.

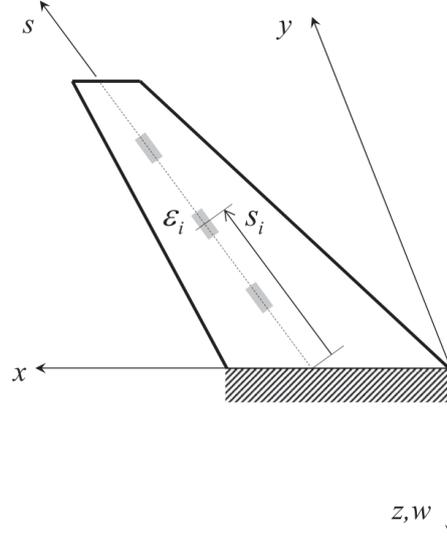


Figura 1.3: Semiala con sistema di riferimento [11]

$$\begin{aligned} \epsilon(s) &= \epsilon_{i-1} - (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{s - s_{i-1}}{\Delta \ell} \\ s_{i-1} < s < s_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$\Delta \ell = s_i - s_{i-1}$  è la distanza che separa due sensori. Per ragioni pratiche è difficile misurare le deformazioni al tip e in all'incastro, si può comunque rimediare a tale problema ponendo  $\epsilon_n = 0$  e interpolando  $\epsilon_0$  con le misure di deformazione in prossimità dell'incastro.

L'equazione 1.8 può essere risolta tramite una doppia integrazione, con le deformazioni esplicitate come nell'eq. 1.10 su ogni intervallo, si considerino le condizioni al contorno corrispondenti all'incastro e la continuità della deflessione e della rotazione ad ogni punto di misura. Procediamo con la risoluzione come formulata in [16].

**Equazione della pendenza** - La pendenza,  $\tan \theta(x)$  può essere ottenuta dall'integrazione dell'equazione 1.9, con costante di integrazione determinata per permettere la continuità della funzione fra due stazioni adiacenti.

$$\tan \theta(s) = \underbrace{\int_{s_{i-1}}^s \frac{d^2 w}{ds^2} ds}_{\text{Incremento pendenza}} + \underbrace{\tan \theta_{i-1}}_{\text{continuità}} = \int_{s_{i-1}}^s \frac{\epsilon(s)}{c} ds + \tan \theta_{i-1} \quad s_{i-1} \leq s \leq s_i \quad (1.11)$$

$\tan \theta_{i-1}$  è la pendenza nella stazione adiacente  $s_{i-1}$ . Sostituendo l'equazione della deformazione 1.10 in quella appena scritta 1.11 otteniamo

$$\tan \theta_i = \frac{\Delta \ell}{2c} (\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i) + \tan \theta_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.12)$$

Quando  $i = 1$ ,  $\tan \theta_{i-1} = \tan \theta_0 = 0$  per una trave incastrata.

**Equazione della deflessione** - La deflessione  $w(s)$  può essere ottenuta dall'integrazione dell'equazione 1.11, con costante di integrazione determinata per permettere la continuità della funzione fra due stazioni adiacenti.

$$w(s) = \int_{s_{i-1}}^s \tan \theta(s) ds + w_{i-1} = \underbrace{\int_{s_{i-1}}^s \int_{s_{i-1}}^s \frac{\varepsilon(s)}{c} ds ds}_{\text{Incremento deflessione}} + \underbrace{\int_{s_{i-1}}^s \tan \theta_{i-1} ds}_{\text{Deflessione a s causata da } \theta_{i-1}} + w_{i-1} \quad (1.13)$$

$s_{i-1} \leq s \leq s_i$

Sostituendo l'equazione 1.10 nell'equazione 1.13 appena vista ed integrando due volte rispetto ad  $x$ , otteniamo la deflessione nella stazione  $x_i$

$$w_i = \frac{\Delta \ell^2}{6c} (2\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i) + w_{i-1} + \Delta \ell \tan \theta_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.14)$$

Dove  $i = 1$ ,  $w_0 = \tan \theta_0 = 0$ . Corrisponde alla deflessione della stazione di radice, essendo incastrata = 0.

### Rastremazione e torsione

La deflessione, definita per ogni stazione, descritta nell'equazione 1.14 è valida nel caso di travi incastrate con sezione costante. In [16] viene descritto come poter estendere tale metodo a sistemi con differenti condizioni al contorno, a piastre o travi rastremate e come considerare il contributo della torsione.

Nel caso di travi leggermente rastremate anche la distanza dall'asse neutro  $c \rightarrow c(x)$  diventa una funzione della coordinata  $x$ , l'equazione 1.11 può essere modificata e risolta. Dopo vari passaggi e alcune semplificazioni l'equazione che descrive la deflessione diventa

$$w_i = \frac{\Delta \ell^2}{6c_{i-1}} \left[ \left( 3 - \frac{c_i}{c_{i-1}} \right) \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i \right] + w_{i-1} + \Delta \ell \tan \theta_{i-1} \quad \frac{c_i}{c_{i-1}} \rightarrow 1 \quad (1.15)$$

Nel caso in cui  $c_i = c_{i-1} = c$  l'equazione ridiventa la 1.14 vista precedentemente.

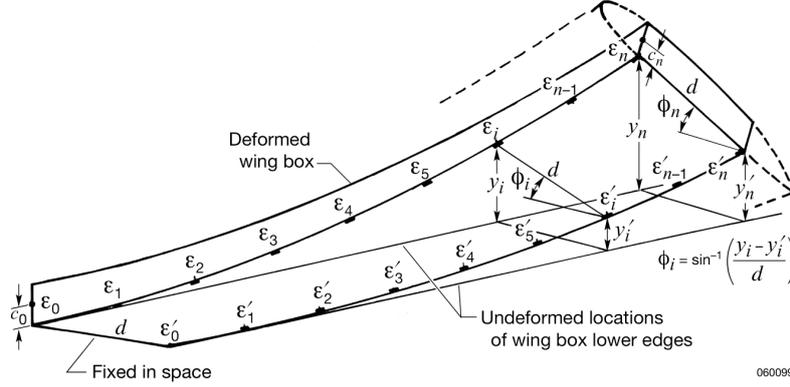


Figura 1.4: Cassone alare in-strumentato con due file di estensimetri [16]

Si consideri il cassone alare in figura 1.4 che più si avvicina al nostro caso studio. Le due file di estensimetri posti a coppie alla stessa distanza da radice permettono di valutare anche l'angolo  $\Phi$  generato dalla torsione

$$\beta_i = \sin^{-1} \left( \frac{w_i - w'_i}{d} \right) \quad (1.16)$$

dove  $(w_i, w'_i)$  sono le coordinate degli estensimetri appartenenti alle due file e  $d$  è la distanza che separa due stazioni alla stessa  $x$ . L'angolo  $\Phi_i$  permette di correggere le deformazioni (equazione 1.17) da inserire nelle equazioni 1.15 o 1.14.

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i}{\cos \Phi_i \cos \gamma} \quad (1.17)$$

### 1.1.3 Modal Method

I primi lavori nello sviluppo di un algoritmo che permettesse di ricostruire un campo di spostamento a partire da delle deformazioni sono stati svolti da Kirby III et al. in [14]. L'approccio utilizzato prevedeva un'integrazione diretta della relazione deformazioni-spostamenti, con una rappresentazione polinomiale del campo di deformazioni, questo approccio è stato dimostrato con successo per una trave.

Bernasconi e Ewins hanno dimostrato come degli estensimetri possono essere utilizzati per determinare le forme modali in termini di deformazioni, normalizzate rispetto alla massa, da test modali. Allo stesso modo di come gli accelerometri vengono utilizzati per determinare le forme modali in termini di spostamento [2]. Ispirati dal lavoro di Bernasconi e Ewins per la ricostruzione del campo di deformazioni modali, Foss e Haugse per primi hanno proposto il concetto di *Algoritmo di Trasformazione Modale* per recuperare gli spostamenti dalle deformazioni e

dalle caratteristiche modali della struttura. Nonostante le considerazioni sulla meccanica fossero una parte importante sullo sviluppo dell'algoritmo, la trasformazione modale fu presentata come una formulazione ai minimi quadrati. Foss e Haugse hanno applicato il metodo ad una piastra semplicemente appoggiata dove le proprietà modali sono state ricavate da test modali in laboratorio. Le deformazioni sono state misurate sperimentalmente quando la piastra era sottoposta ai carichi statici, l'algoritmo è stato sviluppato per calcolare con successo la deformata in termini di spostamento per le condizioni di carico testate. Sono state effettuate anche delle valutazioni analitiche sul metodo, non pubblicate. In [9] è riportato un approccio sperimentale, con uno studio sull'influenza del numero e della posizione dei sensori sull'accuratezza del metodo, e sugli effetti dei rumori di fondo sulle misure e sui risultati.

Possiamo dunque riassumere dicendo che il *Modal Method*, sviluppato all'inizio da [9, 19], è in grado di ricostruire il campo di spostamento di una qualsiasi struttura utilizzando le sue forme modali e alcune misure delle deformazioni in punti localizzati. Il campo di deformazione è espresso in termini di funzioni di forma note, le forme modali in termini di deformazione, e di pesi incogniti, le coordinate modali. Le coordinate modali sono calcolate adattando il campo di deformazione ricostruito a quello proveniente dalle misure locali delle deformazioni. Una volta che tutto il campo di deformazione è approssimato, si può comporre il campo di spostamento attraverso le relazioni deformazioni-spostamenti. Lo studio di Bogert, Haugse e Gehrki ha incluso anche un criterio per la selezione delle forme modali più adatte all'applicazione del metodo, discusso qui nella sezione 1.1.3. Il criterio di selezione si basa sulla valutazione dell'energia di deformazione di ciascuna forma modale. Rapp et al. [20] ha esaminato in modo approfondito l'influenza del numero e della posizione degli estensimetri sull'accuratezza del metodo, ha evidenziato l'importanza della posizione delle misure soprattutto quando si utilizza un piccolo numero di misurazioni discrete della deformazione.

## Dimostrazione

Il metodo modale per lo *shape sensing* si basa sulla conoscenza delle forme modali della struttura sotto investigazione, un modello agli elementi finiti ci permette di ottenere queste informazioni [3]. L'algoritmo proposto da Foss e Haugse in [9] fa uso delle caratteristiche modali della struttura. Sia il campo di spostamenti che quello di deformazione possono essere espressi in funzione delle *coordinate modali*  $\mathbf{q}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}_d \mathbf{q} \quad (1.18)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{\Phi}_s \mathbf{q} \quad (1.19)$$

dove  $[w]$  è il vettore dei gradi di libertà spostamento,  $[\varepsilon]$  è il vettore delle deformazioni discrete,  $[\Phi_d]$  è la matrice delle forme modali in termini di spostamento e  $[\Phi_s]$  è la matrice delle forme modali in termini di deformazioni. Più precisamente le  $i$ -esime colonne della matrice  $[\Phi_s]$  corrispondono al vettore deformazione associato alla  $i$ -esima forma modale. Il vettore delle coordinate modali  $[q]$  contiene dei fattori di scala che moltiplicano ognuno un autovettore, ogni fattore stabilisce quanto quella forma modale contribuisce alla risposta del sistema.

Le matrici modali in termini di spostamenti e di deformazioni possono essere estratte da una analisi agli elementi finiti, difficilmente possono essere estratte partendo da un modello sperimentale. Principalmente si ha difficoltà nel determinare  $[\Phi_s]$ . In quanto le eccitazioni modali che solitamente si applicano causano deformazioni troppo piccole, perciò è richiesto un alto livello di accuratezza che non sempre è raggiungibile dal sistema di misura [9].

Dall'equazione 1.19 è possibile esprimere le coordinate modali in funzione degli spostamenti

$$\mathbf{q} = \Phi_s^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.20)$$

Sostituendo quindi la 1.20 nella 1.18 otteniamo

$$\mathbf{w} = \Phi_d \Phi_s^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.21)$$

Questo ci permette di ottenere una relazione per gli spostamenti in funzione della matrice modale e del vettore deformazioni. Poiché in situazioni reali è improbabili che il numero di deformazioni disponibili ( $S$ ) sia uguale al numero di forme modali calcolate ( $M$ ), il metodo ha a che fare con matrici non quadrate. Questo problema è superabile con l'uso di un approccio ai minimi quadrati mediante la formulazione della matrice pseudo-inversa di Moore-Penrose. Possiamo riscrivere l'equazione 1.20

$$\mathbf{q} = (\Phi_s^T \Phi_s)^{-1} \Phi_s^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.22)$$

e sostituendo nella 1.21

$$\mathbf{w} = \Phi_d (\Phi_s^T \Phi_s)^{-1} \Phi_s^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.23)$$

Nel caso in cui  $S < M$  il problema ammette infinite soluzioni, con  $S > M$  il numero di equazioni è maggiore del numero di incognite ed il problema può essere risolto con il metodo dei minimi quadrati [17].

### Criterio di selezione modale

La limitazione sul numero di modi da mantenere, guidata dal numero di estensimetri disponibili ( $S > M$ ), impone la necessità di trovare un criterio di selezione dei modi. È fondamentale che i modi conservati siano in grado di rappresentare la deformazione statica della struttura sottoposta ai carichi di nostro interesse.

Seguendo la procedura descritta da Bogert, Haugse e Gehrki in [3], è possibile calcolare attraverso i minimi quadrati quanto le coordinate modali si adattano alla soluzione statica, considerando un numero limitato di modi ( $M_r$ ), e successivamente costruire la relativa matrice modale dei soli modi mantenuti:  $\{\Phi_{dr}\}$ . Pseudo invertendo la matrice  $\{\Phi_{dr}\}$  nell'equazione 1.18 otteniamo la possibilità di computare il vettore delle coordinate modali approssimato  $[q_r]$  che meglio approssima, secondo il criterio dei minimi quadrati, la deformata statica  $[w]$  utilizzando solo alcuni modi.

$$\mathbf{q}_r = (\Phi_{dr}^T \Phi_{dr})^{-1} \Phi_{dr}^T \mathbf{w} \quad (1.24)$$

Utilizzando il vettore delle coordinate modali approssimate è possibile scrivere dall'equazione 1.18 il vettore spostamento  $[w_r]$  dei soli modi mantenuti.

$$\mathbf{w}_r = \Phi_{dr} \mathbf{q}_r \quad (1.25)$$

La rappresentazione modale della soluzione statica può essere scritta come la sommatoria dei contributi di ciascun modo

$$\mathbf{w}_r = \sum_{i=1}^{M_r} \Phi_{dr_i} q_{r_i} \quad (1.26)$$

dove  $[\Phi_{dr_i}]$  è la  $i$ -esima colonna della matrice  $\{\Phi_{dr}\}$  e  $q_{r_i}$  è la  $i$ -esima coordinata modale. Il contributo quindi della  $i$ -esima forma modale alla rappresentazione modale totale è

$$\mathbf{w}_{r_i} = \Phi_{dr_i} q_{r_i} \quad (1.27)$$

l'energia di deformazione associata con alla  $i$ -esima rappresentazione modale della deformata statica è

$$E_{r_i} = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{r_i}^T \mathbf{K} \mathbf{w}_{r_i} \quad (1.28)$$

dove  $[\mathbf{K}]$  è la matrice rigidezza. Sostituendo 1.27 nell'energia di deformazione 1.28

$$E_{r_i} = \frac{1}{2} q_{r_i}^T \Phi_{dr_i}^T \mathbf{K} \Phi_{dr_i} q_{r_i} \quad (1.29)$$

se le forme modali sono normalizzate rispetto alla matrice di massa

$$\Phi_{dr_i}^T \mathbf{K} \Phi_{dr_i} = \omega_i^2 \quad (1.30)$$

dove  $\omega_i$  è la pulsazione naturale associata all' $i$ -esimo modo, l'equazione 1.29 diventa

$$E_{r_i} = \frac{1}{2} \omega_i^2 q_{r_i}^2 \quad (1.31)$$

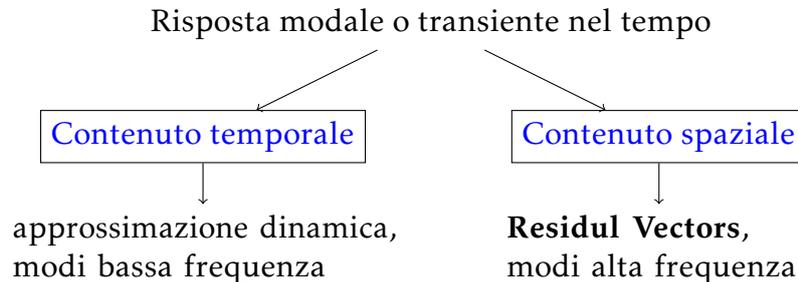
confrontando l'energia di deformazione di ogni modo con l'energia di deformazione totale dovuta alla deformata statica

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{K} \mathbf{w} \quad (1.32)$$

è possibile valutare quanto ogni modo e la somma dei modi scelti sia in grado di rappresentare la deformata statica. Tutto ciò porta alla creazione di un criterio per la selezione dei modi basato sull'energia di deformazione.

### Residual Vectors

Tipicamente, solo un sottoinsieme di tutte le forme modali di una struttura viene computato per essere utilizzato in una soluzione di risposta modale. Anche se i modi calcolati possono presentare la maggior parte del contenuto dinamico della struttura, l'omissione dei modi a frequenza più alta può portare a errori nella previsione della risposta, perché i modi a frequenza più alta possono contribuire a migliorare la rappresentazione della deformata della struttura. I residual vectors sono forme modali di spostamento determinate sulla base della risposta statica della struttura a determinati carichi. [25]



I Residual Vectors sono stati per la prima volta introdotti da Dickens, Nakagawa e Wittbrodt e Rose in [5, 21]. Le forme modali utilizzate per ricostruire la deformata quando il metodo modale è applicato, vengono estese ai residual vectors per tenere conto delle forme tagliate. Dickens, Nakagawa e Wittbrodt propose di costruire una forma modale statica che rispettasse le condizioni al contorno imposte dal carico applicato. Rose costruì una forma statica basati sulle condizioni al contorno, partendo però dalla parte statica dei carichi dinamici. Dal momento che i residual vectors sono trattati come forme modali, hanno una massa modale associata, una rigidità, uno smorzamento ed una pulsazione. Con l'aggiunta di uno smorzamento artificiale il loro effetto nella risposta può essere più o meno attenuato.

Wijker in [29] espone i due principali metodi per la costruzione dei residual vectors: quello di Dickens e quello di Rose. Ma i residual vectors estratti tramite il

metodo di Dickens offrono più vantaggi in termini di costruzione e implementazione dei vettori ed accuratezza dei risultati [22, 5]. Inoltre è il metodo utilizzato da Nastran [25]. Si riporta di seguito la trattazione del metodo di Dickens presentata in [29].

### Metodo di Dickens

Il problema agli autovalori di un sistema non smorzato a  $n$  gradi di libertà può essere scritto come

$$([K] - \omega_i^2 [M]) \{\phi_i\} = \{0\} \quad (1.33)$$

Con  $[K]$  e  $[M]$  matrici di rigidezza e di massa,  $[\phi_i]$  autovettore corrispondente alla pulsazione  $\omega_i$ , è la forma modale  $i$ -esima.

$$[K] \{\Phi_i\} = \omega_i^2 [M] \{\phi_i\} \quad (1.34)$$

Il vettore della forze modale può essere espresso come

$$[F_i] = [K] \{\phi_i\} \eta_i \quad (1.35)$$

$[F_i]$  è il vettore contenete le componenti delle forze rispetto all' $i$ -esima forma modale, mentre  $\eta_i$  è la  $i$ -esima coordinata modale. Utilizzando la 1.34 diventa

$$[F_i] = \omega_i^2 [M] \{\phi_i\} \eta_i \quad (1.36)$$

La forza totale statica è

$$[F] = [K] x = [K] [\Phi] [\eta] \quad (1.37)$$

Premoltiplicando per  $[\Phi]^T$

$$[\Phi]^T [F] = [\Phi]^T [K] [\Phi] [\eta] \quad (1.38)$$

Sfruttando l'ortogonalità delle forme modali rispetto alle matrici di massa e rigidezza, possiamo scrivere che

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = \langle \omega_i^2 m_i \rangle \quad [\Phi]^T [M] [\Phi] = \langle m_i \rangle \quad (1.39)$$

$\langle \omega_i^2 m_i \rangle$  e  $\langle m_i \rangle$  stanno a rappresentare due matrici diagonali dove i termini sulla diagonale corrispondono rispettivamente alla rigidezza modale  $\frac{k_i}{m_i} = \omega_i^2 \rightarrow k_i = \omega_i^2 m_i$  o alla massa modale  $m_i$ .

L'equazione 1.38 può essere riscritta come

$$[\eta] = \langle \omega_i^2 m_i \rangle^{-1} [\Phi]^T [F] \quad (1.40)$$

per una generalizzata coordinata  $\eta_i$  diventa

$$\eta_i = \frac{1}{\omega_i^2 m_i} \{\phi_i\} [F] \quad (1.41)$$

Sostituendo la 1.41, appena scritta, nella 1.36 la forza statica modale  $[F_i]$  diventa

$$[F_i] = \omega_i^2 [M] \{\phi_i\} \eta_i = [F_i] = \omega_i^2 [M] \{\phi_i\} \frac{1}{\omega_i^2 m_i} [\phi_i] [F] = \frac{1}{m} [M] \{\phi_i\} (\{\phi_i\}^T [F]) \quad (1.42)$$

La sommatoria di tutte le forze modali  $\sum_i [F_i]$  corrisponde a

$$\sum_i [F_i] = [M] [\Phi] \langle m_i \rangle^{-1} [\Phi]^T [F] \quad (1.43)$$

Se non tutti i modi sono presi in considerazione, allora il vettore dei carichi residuo  $[F_{res}]$  è

$$[F_{res}] = [F] - \sum_i [F_i] = ([I] - [M] [\Phi] \langle m \rangle^{-1} [\Phi]^T) [F] \quad (1.44)$$

Se la matrice delle forme modali  $[\Phi]$  è completa, allora  $[\Phi]^{-1}$  e  $[M]^{-1}$  esistono, e con

$$([\Phi]^T [M] [\Phi])^{-1} = \langle m_i \rangle^{-1} = [\Phi]^{-1} [M]^{-1} [\Phi]^{-T} \quad (1.45)$$

L'Equazione 1.44 diventa

$$[F_{res}] = ([I] - [M] [\Phi] [\Phi]^{-1} [M]^{-1} [\Phi]^{-T} [\Phi]^T) [F] = 0 \quad (1.46)$$

È possibile a questo punto costruire il vettore spostamento  $[x_{res}]$  basato sul vettore delle forze  $[F_{res}]$

$$[K] [x_{res}] = [F_{res}] \quad (1.47)$$

con

$$[F_{res}] = ([I] - [M] [\Phi] [m]^{-1} [\Phi]^T) [F] \quad (1.48)$$

La matrice di rigidità è invertibile in quanto sono state applicate le opportune condizioni al contorno che impediscano gli spostamenti di corpo rigido. Il vettore  $[x_{res}]$  può essere ortogonalizzato rispetto alla matrice delle forme modali  $[\Phi]$  e indicato con  $\{\phi_{res}\}$ . Questo può essere fatto seguendo la procura di Dickens

$$[\tilde{K}] = [x_{res}]^T [K] [x_{res}] \quad [\tilde{M}] = [x_{res}]^T [KM] [x_{res}] \quad (1.49)$$

Risolvendo il problema agli autovalori come posto in 1.33

$$[\tilde{K}]\{\psi\} = \langle \lambda \rangle [\tilde{M}]\{\psi\} \quad (1.50)$$

e inoltre

$$\{\phi_{res}\} = [x_{res}]\{\psi\} \quad (1.51)$$

La matrice delle forme modali  $[\Phi]$  è incrementata con l'aggiunta della forma modale  $\{\phi_{res}\}$ , questo darà vita ad una nuova matrice contenete le forme modali  $[\Psi]$

$$[\Psi] = \left[ [\Phi] \quad \vdots \quad [x_{res}] \right] \quad (1.52)$$

La matrice  $[\Psi]$  è usata per la ricostruzione della risposta dinamica. Il sistema lineare dinamico ad *ndof* è rappresentato dalla seguente equazione in forma matriciale

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{F\} \quad (1.53)$$

Una volta disaccoppiate le equazioni il sistema può essere espresso come segue

$$x(t) = [\Psi][\eta(t)] \quad (1.54)$$

## Capitolo 2

# Modello FE e sensitività

### 2.1 Convertiplano UAV

ICON V2 è il convertiplano (figura 2.1) messo a disposizione dall'azienda [PROS3](#)<sup>1</sup> dell'Ingegnere Daniele Camatti. La struttura è in materiale composito, così come anche i bracci di sostentamento che collegano l'ala alla coda a  $\Lambda$ . Tale UAV ha la caratteristica di poter decollare a punto fisso, come un drone multi rotore, grazie a 4 eliche montate sui bracci di sostentamento. Durante la fase di volo rettilineo invece il velivolo è spinto da un elica montata sul retro della fusoliera, mentre le altre 4 sono disattivate. Il drone è progettato per poter svolgere sia le missioni di aerofotogrammetria che di ricerca e soccorso. In tabella 2.1 le principali peculiarità.

ICON V2	
Apertura alare	2.4 m
Lunghezza	0.9 m
Peso max al decollo	12 Kg
Cellula	composito
Motori	5, brushless

Tabella 2.1: Specifiche ICON V2

In figura 2.2 una foto della semiala in laboratorio smontata del velivolo, il nastro adesivo è stato utilizzato come guida per indicare la posizione delle centine e dei longheroni. Su questo sono state prese le misure per ricostruire la struttura nel modello agli elementi finiti.

---

<sup>1</sup><https://www.pros3.eu/convertiplani/>



Figura 2.1: Convertiplano, PROS3



Figura 2.2: Dettaglio della semiala, laboratorio

## 2.2 Modello elementi finiti

Al fine di determinare le forme modali è necessario la costruzione di un modello FE della struttura da analizzare, è importante che geometrie e proprietà dei materiali rispecchino il più possibile le caratteristiche reali.

Per la modellazione della geometria si è partite da un CAD della semiala pre-esistente che comprendeva solo il dorso e il ventre della semiala (figura 2.3), quindi si sono individuate manualmente le posizioni delle componenti interne:

longheroni e centine, comprese dei loro spessori (figura 2.4). Infine con le informazioni raccolte si è generato un CAD completo della semiala comprendente tutte le componenti, si è scelto di lavorare con Patran©.

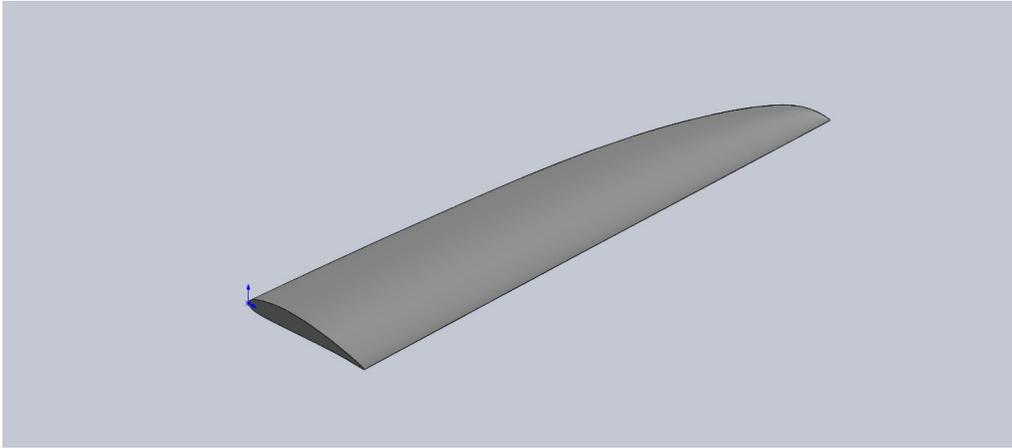


Figura 2.3: CAD semiala Solidworks©

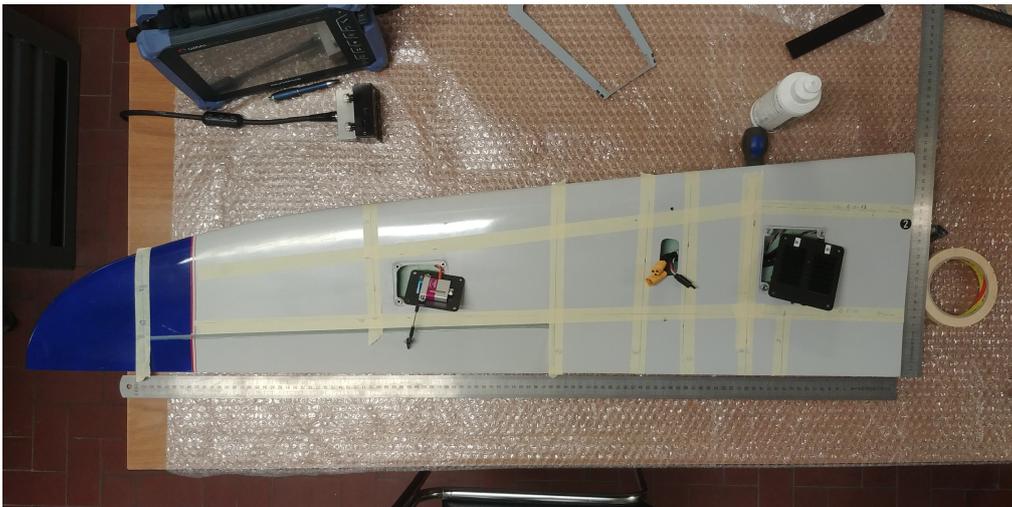


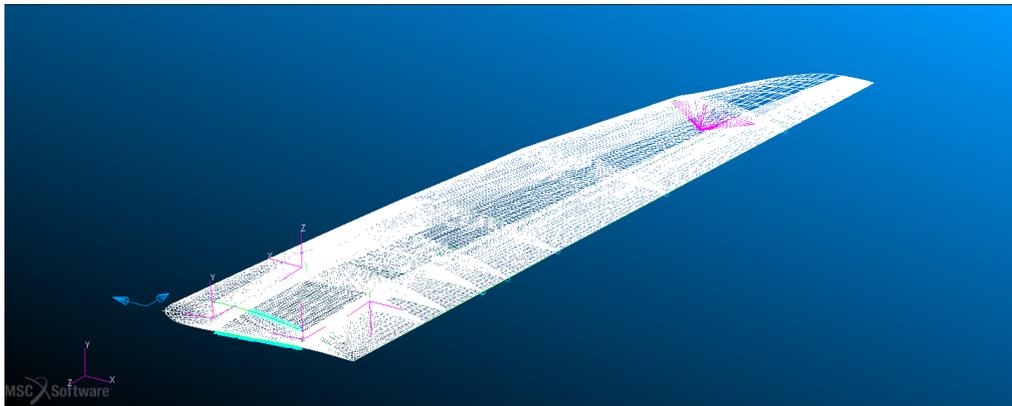
Figura 2.4: Posizione centine e longheroni marcate con nastro adesivo

## 2.2.1 Modelli preliminari

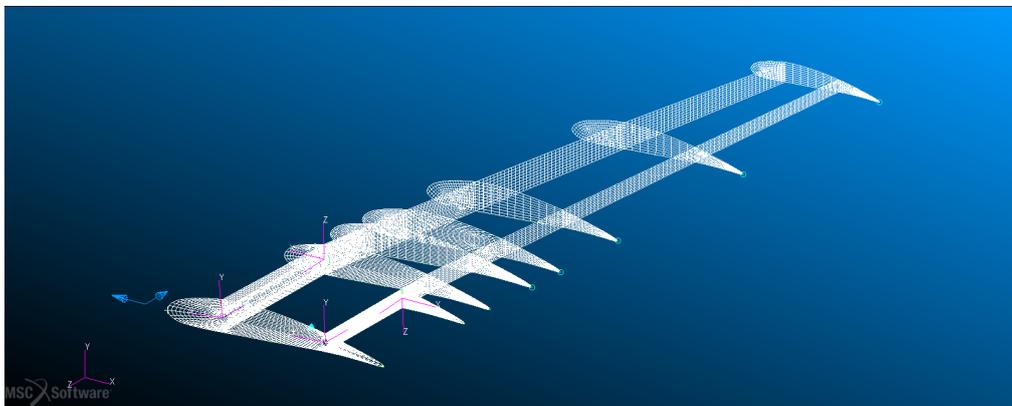
Per giungere al modello agli elementi finiti definitivo si è passati attraverso vari CAD costruiti e meshati diversamente. Infatti, date le numerosi componenti interne, anche di piccole dimensioni, sono state eseguite delle semplificazioni al fine di diminuire il numero di gradi di libertà complessivi.

### Mesh: solo Quad4 IsoMesh

Il modello più accurato ottenuto è quello in figura 2.5, il modello conta 42736 nodi e 43783 elementi, tutti gli elementi sono elementi piani a 4 nodi (Quad4). Una discretizzazione tanto precisa è necessaria se si vuole cercare di avere elementi il più uniformi possibili. In questo modello si è scelto di modellare i longheroni tubolari con delle superfici (figura 2.6), questo ha comportato la nascita di superfici piccole che per poter essere accuratamente discretizzate richiedono elementi a loro volta piccoli ( $4mm \times 1mm$ ), la creazione di questi elementi forza quindi il resto della mesh ad assumere dimensioni ridotte per potervisi collegare.



(a) *semiala intera*



(b) *particolare centine e longheroni*

Figura 2.5: Semiala con mesh fitta, solo Quad4

### Mesh: Quad4 + Tria3 Paver

Lasciando invariata la mesh sui longheroni tubolari, si è cercato di ridurre il numero di elementi per le restanti superfici. In prossimità dei longheroni si è

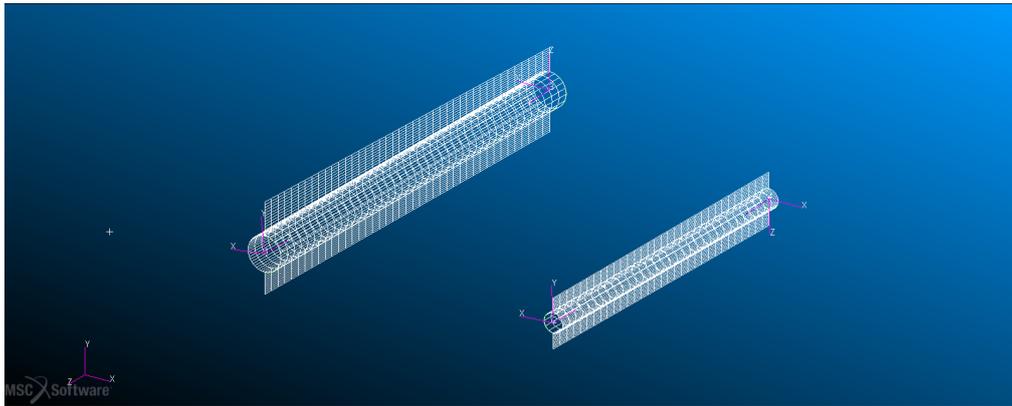


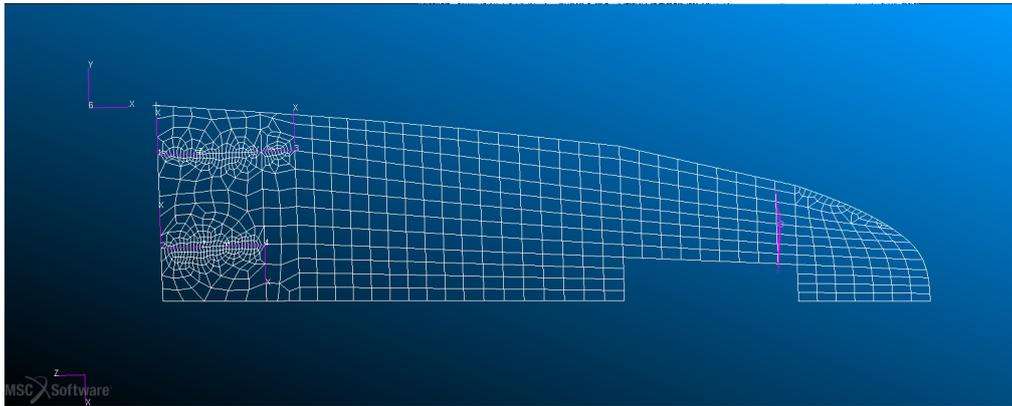
Figura 2.6: Particolare dei longheroni tubolari

utilizzato uno schema Paver che permette di infittire la mesh solo localmente per poi passare ad uno schema più ampio, si vede il risultato in figura 2.7. Gli elementi Tria3 sono stati utilizzati nelle estremità delle centine vicino ai bordi di uscita e di attacco, dove la forma molto appuntita non permette di generare elementi quadrati (figura 2.7). Nonostante questa configurazione abbia permesso di abbassare il numero di nodi a 3677 e quello di elementi a 4068, è stata abbandonata. In quanto gli elementi sul dorso, molto importanti per simulare le misure sperimentali, risultano troppo distorti con sistemi di riferimento non orientati tutti allo stesso modo, l'incertezza nell'utilizzare le deformazioni da qui estratte nel metodo modale è troppo alta, sarebbe inoltre difficile riuscire ad applicare un estensimetro in tale direzione in una prova in laboratorio.

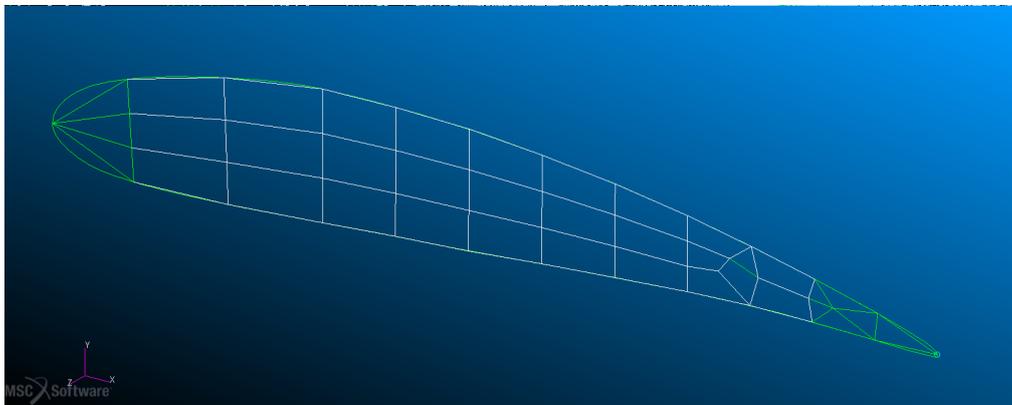
### Mesh definitiva

Nel modello definitivo è stato raggiunto il giusto compromesso fra buona rappresentazione del modello reale e numero di gradi di libertà. Il grande cambiamento apportato a questo modello è quello di modellare i longheroni tubolari non più come superfici, bensì come geometrie monodimensionali. Il modello completo conta 1500 nodi e 1726 elementi, si sono mantenuti elementi triangolari per le estremità delle centine e aggiunti elementi Bar2 per i longheroni tubolari, risultato mostrato in figura 2.8 a pagina 27

Il numero ridotto di elementi e nodi di questo modello comporta un grande vantaggio. Soprattutto rispetto al primo modello, questo permette di esportare dei report da Patran contenenti i valori di spostamenti e deformazioni per tutti i nodi ed elementi. Lo stesso procedimento, con modelli più discretizzati, comporterebbero la generazione di matrici molto grandi, che una volta importate in MATLAB gestiremmo con maggiore difficoltà.



(a) Dorso semiala



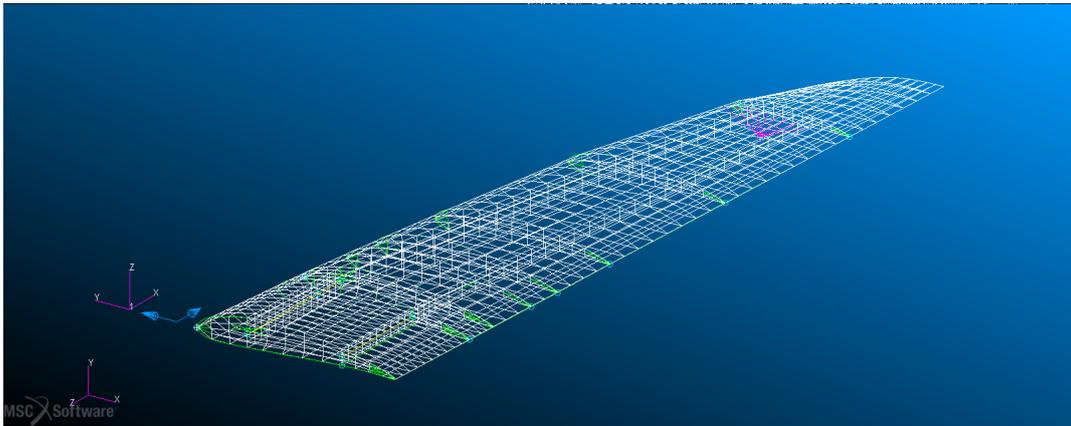
(b) Centina con mesh Tria3

Figura 2.7: Semiala con mesh Paver

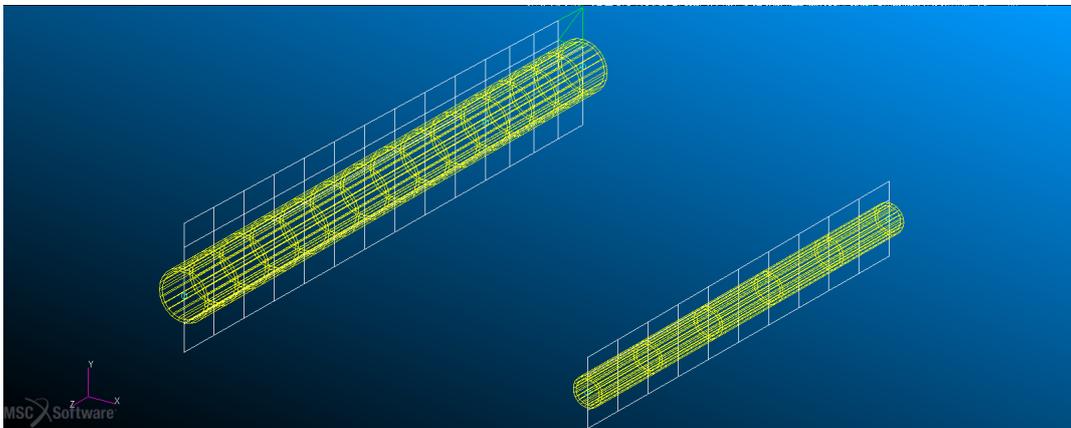
Nella tabella 2.2, considerando la semiala incastrata sulla centina di radice, si riporta un confronto delle frequenze proprie e della freccia massima nei tre casi appena descritti. Nonostante la notevole approssimazione del modello definitivo le frequenze sono perfettamente comparabili ai due modelli meglio discretizzati, in particolare se si tiene conto che nel metodo modale le forme modali mantenute sono la prima e la seconda, oltre al residual vector. Le differenze riguardo la freccia massima non sono del tutto confrontabili, in quanto il punto di applicazione del carico, se pur di poco, cambia per ogni modello.

### 2.3 Caratteristiche meccaniche incognite

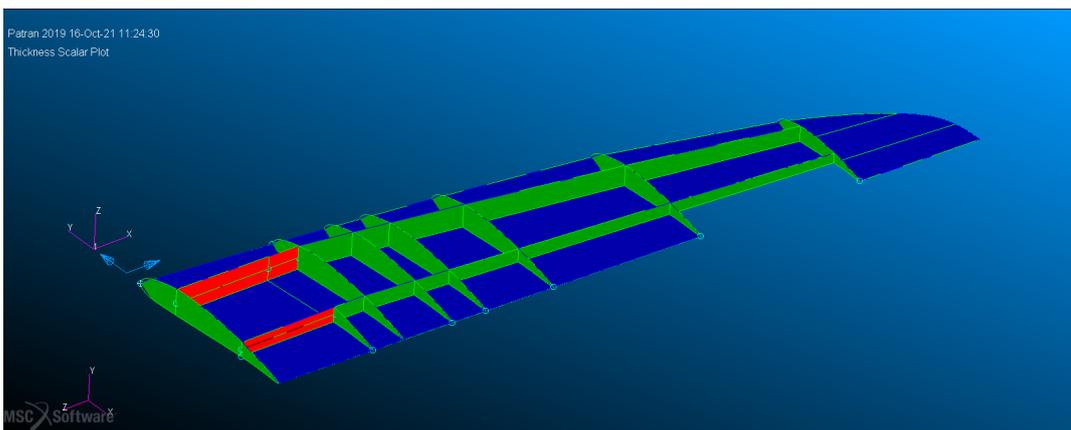
Le caratteristiche meccaniche e inerziali esatte dei materiali costituenti la nostra semiala sono ignote. Da osservazioni in laboratorio siamo riusciti a risalire al tipo di materiali, ma senza avere certezze sulle loro proprietà. Per questa tesi, e i



(a) Semiala completa



(b) Particolare dei longheroni tubolari



(c) Spessori: *balsa*, *schiuma + comp.carb*, *comp.vetro*

Figura 2.8: Semiala con mesh definitiva

Mesh con beam	Mesh Paver	Mesh Iso Accurata
Frequenze [Hz]		
44.5	44.5	45.2
178.1	178.4	180.6
237.7	239.1	242.8
298.4	299.2	301.5
347.2	341.8	349.6
417.8	347.8	421.7
474.4	405.9	448.3
530.6	474.7	470.3
559.9	531.4	527.8
597.3	566.1	550.7
Freccia massima [mm]		
0.371	0.370	0.363

Tabella 2.2: Confronto fra mesh

risultati che verranno mostrati, le caratteristiche meccaniche sono state importate dalla letteratura cercando di rispecchiare il più possibile la realtà fisica della semiala. Di seguito si propone un metodo per cercare di risalire, con sufficiente accuratezza, ai valori incogniti reali delle caratteristiche meccaniche, tramite prove sperimentali in laboratorio e analisi di sensitività.

Noti i materiali di cui è composta sono necessari alcuni esperimenti al fine di determinare le proprietà dei tre materiali (balsa [30] e due compositi [4]) che compongono la semiala. Si riportano di seguito in tabella 2.3 i componenti, con indicazioni sui materiali e sugli spessori, informazione che corrisponde anche alle proprietà con cui si descrive il modello FE in figura 2.8. Idealmente per ciascuno dei materiali, ortotropo, sarebbe necessario determinare 10 proprietà, infattibile in quanto comporterebbe un numero di prove eccessivo.

Si cerca quindi in letteratura informazioni riguardanti i materiali per avere una base di partenza su cui lavorare, se ne sono estratti i dati presenti nella tabella 2.4 nella pagina successiva. Successivamente, le prove sperimentali, assieme alle analisi di sensitività, permetterebbero di correggere questi valori al fine di far incontrare i risultati delle prove sperimentali con quelli ottenuti tramite analisi FEM.

Nella tabella 2.4 nella pagina seguente è presente un quarto materiale: la schiuma, questa permette di collegare il longherone tubolare in carbonio al rivestimento, si assumono i suoi valori noti come in tabella. I parametri da determinare il più accuratamente possibile sono 6:

- $E_1$  e  $\rho$  fibra di vetro (rivestimento);

Componente	Materiale	spessore [mm]
Dorso e Ventre	composito vetro	1.6
Centine	balsa	3
Longheroni	balsa	3
Longheroni tubo attacco fus.	comp. carbonio + schiuma	1 + 5

Tabella 2.3: materiali dei componenti

- $E_1$  e  $\rho$  fibra di carbonio (longheroni);
- $E_1$  e  $\rho$  balsa (centine e longheroni).

Le prove sperimentali statiche e dinamiche pensate sono:

1. pesatura longheroni in carbonio  $\rightarrow$  densità longherone;
2. prova di flessione su tre punti di uno dei due longheroni  $\rightarrow E$  longherone;
3. pesatura semiala senza longheroni in carbonio;
- 4-5-6. prova modale free free sulla semiala senza longheroni con misura di almeno 3 frequenze proprie  $\rightarrow$  si determinano le 4 incognite mancanti.

	comp. fibra vetro fibra: S2-449 UD	comp. fibra carbonio fibra: AS4 UD	balsa	schiuma
E1 [MPa]	47712	104556	1900	36
E2	12997	7339	50	
G12	4723	4826	40	14
G13	4723	4826	40	
G23	4723	4826	40	
$\nu_{12}$ [-]	0.115	0.335	0.490	
$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	1.15	1.27	0.08	0.018

Tabella 2.4: Proprietà dei materiali di partenza

## 2.4 Analisi di sensitività

L'Analisi di Sensitività di un modello matematico è quel processo che studia la variazione del risultato (output) in funzione della variazione dei parametri che intervengono nel modello stesso (input) [10]. L'analisi di sensitività permette di

valutare quali fattori di input sono più influenti sull'output e quali sono invece da trascurare. I valori dei parametri di input del modello vengono perturbati (singolarmente, a gruppi o contemporaneamente) all'interno di un fissato campo di variazione al fine di valutare l'effetto sull'output e quindi la sensitività sulla risposta del modello. Nel nostro caso le analisi avranno lo scopo di capire

- quali fattori hanno un effetto predominante sulla risposta e quindi corretti per far incontrare i risultati numerico - sperimentale;
- quali parametri influiscono in maniera minima sulla risposta e possono essere trascurati nella fase di correzione.

Seguiremo una procedura COE: *change everything at once* (cambiare tutti una volta) che segue quindi tutte le possibili combinazioni tra i livelli che ogni variabile può assumere e il numero di variabili in gioco. Sfrutteremo a tale scopo il modello FE della semiala. Prendiamo come esempio la semiala *senza i longheroni tubolari in carbonio* in condizioni completamente libere, senza nessun vincolo, di cui si vuole analizzare la prima frequenza propria.

1. **Codifica delle variabili** - Si definisce un intervallo di variazione all'interno del quale far variare le nostre variabili in input, si sono scelti **due livelli**: massimo e minimo corrispondenti al valore nominale della proprietà  $\pm 3\%$  (tabella 2.5);
2. **Tabella delle iterazioni** - Si definisce la tabella delle combinazioni, ovvero la tabella dove su ogni riga compare il valore (massimo=1 o minimo=-1) che quella variabile deve assumere per quella analisi. Dopo aver eseguito ogni analisi si associa ad ogni relazione il valore dell'output. In questo caso avremo 4 variabile con due livelli ciascuna, corrispondenti ad un numero di combinazioni:  $n_{comb} = 2^4 = 16$  (tabella 2.6);
3. determinazione dei **coefficienti del modello approssimato**. Esprimiamo l'output in funzione di alcuni coefficienti che moltiplicano le variabili in input, eq. 2.1. Il coefficiente di ciascuna variabile corrisponde alla media dei valori di output dove quella variabile compare con il valore massimo fratto la media degli output dove compare con il valore minimo, il tutto dimezzato 2.2;

$$y = b_0 + A \cdot X_1 + B \cdot X_2 + C \cdot X_3 + D \cdot X_4 \quad (2.1)$$

$$b_0 = \bar{f} \quad (2.2)$$

$$A = \left[ \frac{\bar{f}_{X_1=1}}{\bar{f}_{X_1=-1}} \right] / 2 \quad B = \left[ \frac{\bar{f}_{X_2=1}}{\bar{f}_{X_2=-1}} \right] / 2 \quad C = \left[ \frac{\bar{f}_{X_3=1}}{\bar{f}_{X_3=-1}} \right] / 2 \quad D = \left[ \frac{\bar{f}_{X_4=1}}{\bar{f}_{X_4=-1}} \right] / 2$$

		-3%		+3%	simbolo var
E1 balsa	[MPa]	1843	1900	1957	$X_1$
$\rho$ balsa	$[\frac{\text{tonn}}{\text{mm}^3}] \times 10^{-10}$	1.55	1.60	1.65	$X_2$
E1 UD vetro	[MPa]	42930	47700	52470	$X_3$
$\rho$ vetro	$[\frac{\text{tonn}}{\text{mm}^3}] \times 10^{-10}$	7.86	8.10	8.34	$X_4$

Tabella 2.5: Variazione valori nominali

simbolo	E1 balsa $X_1$	$\rho$ balsa $X_2$	E1 UD vetro $X_3$	$\rho$ vetro $X_4$	1° frequenza f
caso 1	-1	-1	-1	-1	188.75
caso 2	1	-1	-1	-1	188.99
caso 3	-1	1	-1	-1	188.54
caso 4	1	1	-1	-1	188.78
caso 5	-1	-1	1	-1	192.72
caso 6	1	-1	1	-1	192.97
caso 7	-1	1	1	-1	192.51
caso 8	1	1	1	-1	192.76
caso 9	-1	-1	-1	1	183.44
caso 10	1	-1	-1	1	183.67
caso 11	-1	1	-1	1	183.24
caso 12	1	1	-1	1	183.48
caso 13	-1	-1	1	1	187.30
caso 14	1	-1	1	1	187.54
caso 15	-1	1	1	1	187.10
caso 16	1	1	1	1	187.34

Tabella 2.6: Tabella iterazioni

#### 4. diagrammi di iterazione e calcolo del residuo

I coefficienti del modello approssimato ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ) una volta normalizzati rispetto al minimo prendono il nome di **coefficienti di sensitività** e ci forniscono una chiara idea di quanto quella variabile influisca nella risposta del modello. Maggiore è il valore del coefficiente, maggiore sarà l'influenza della variabile corrispondente nella risposta del sistema.

**Questo ci è utile per capire come correggere i coefficienti di rigidezza e le densità, sia dal punto di vista quantitativo che qualitativo, al fine di eguagliare i risultati sperimentali con quelli numerici.**

Nel caso della prima forma modale i coefficienti di sensitività sono mostrati

nella tabella 2.7, da cui si osserva che il composito in fibra di vetro, costituente i pannelli dorsali e ventrali, svolge un ruolo preponderante nella determinazione della frequenza, coerente in quanto la prima forma modale è una forma di flessione fuori dal piano. Il segno dei coefficienti indica una proporzionalità diretta o inversa, essendo le frequenze proporzionali al rapporto  $f \propto \frac{K}{M}$  si può affermare che le rigidzze avranno una proporzionalità diretta mentre un aumento della densità comporterà una diminuzione dell'output.

	$b_0$	A E1 balsa	B $\rho$ balsa	C E1 UD vetro	D $\rho$ vetro
	188.1	0.121	-0.102	1.960	-2.682
normalizzati		1	-1	19	-26

Tabella 2.7: Coeff. sensitività prima forma modale

L'analisi di sensitività come appena visto richiede molteplici analisi FEM eseguite re iterativamente, si consideri anche il fatto che ogni set-up sperimentale richiede la sua analisi di sensitività per verificare quali variabili hanno più importanza in tale prova. Si sono raccolti tali risultati numerici grazie a un codice, scritto in *MATLAB* [23], che ha permesso di eseguire numerose analisi re iterativamente. In figura 2.9 è mostrato un diagramma di flusso che riassume il funzionamento del codice *MATLAB*. In breve

- Si forniscono i parametri ed il loro intervallo di variazione;
- il programma codifica le variabile e costruisce la tabella delle iterazioni;
- modifica il *file.bdf* e lancia l'analisi con Nastran;
- il *file.f06* restituito da Nastran viene letto e vengono salvati i risultati di interesse, nel caso dell'esempio sopra le frequenze proprie;
- il ciclo esegue tante iterazioni quante sono le possibili combinazioni, ovvero fino a giungere all'ultima riga della tabella di iterazione, a quel punto i risultati salvati vengono processati e il programma si chiude.

### 2.4.1 Obiettivo sensitività

L'obbiettivo dell'analisi di sensitività è quello di riuscire a quantificare il valore delle proprietà meccaniche incognite. Si espone di seguito il ragionamento che potrebbe condurci a ciò.

Le variabili incognite sono 6 (E1 balsa-UD vetro-carbonio,  $\rho$  balsa-UD vetro-carbonio) le prove sperimentali in laboratorio necessarie sono quindi 6, come le

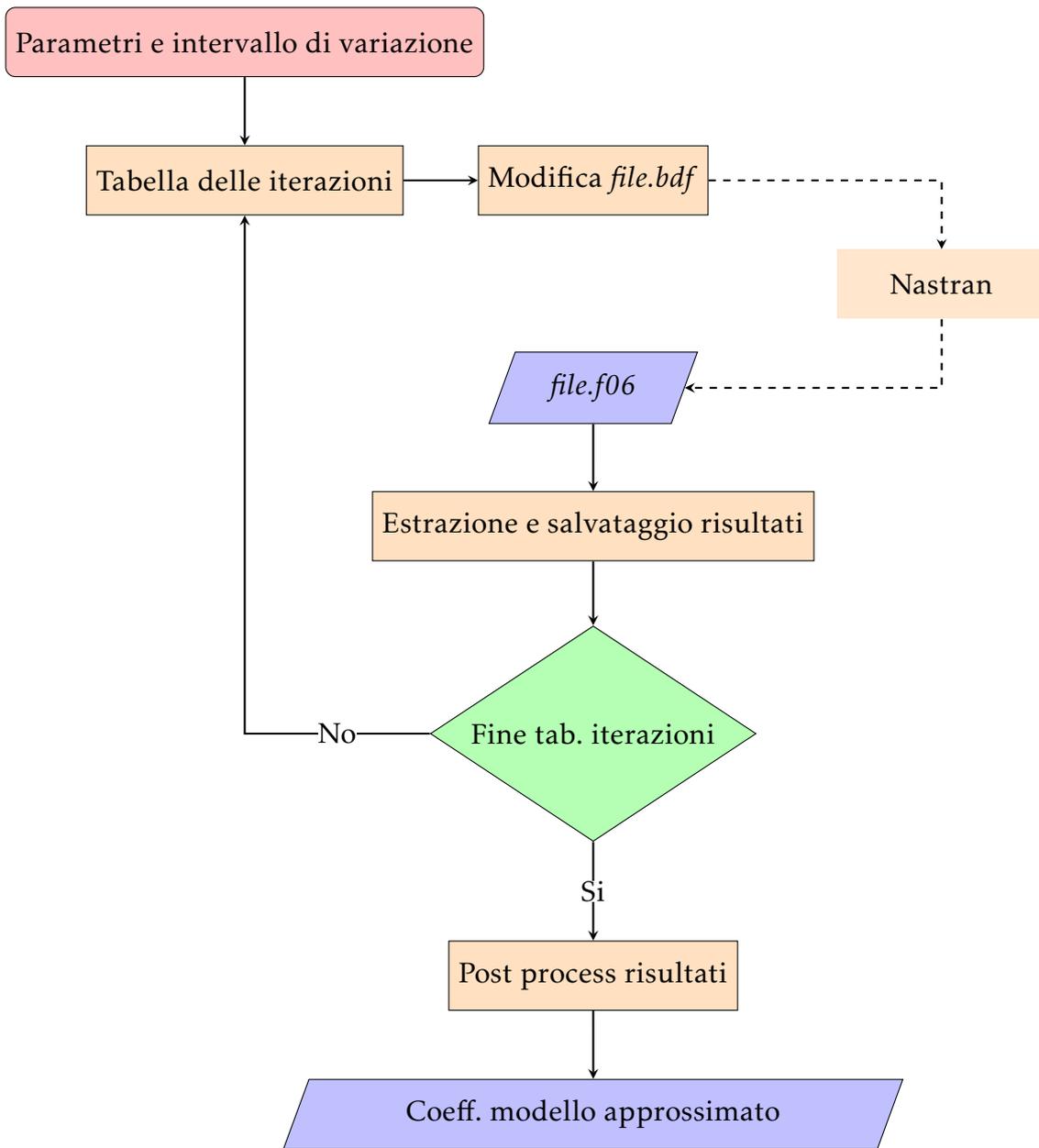


Figura 2.9: Diagramma di flusso per analisi di sensitività

E1 balsa	$\rho$ balsa	E1 UD vetro	$\rho$ vetro	E1 carb	$\rho$ carbo
$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$

Tabella 2.8: Codifica variabili per sensitività

analisi di sensitività dei corrispondenti modelli FE. Codificate le variabili, come mostrato in tabella 2.8, lo scopo è quello di ottenere un output in funzione dei coefficienti determinati tramite l'analisi di sensitività, dove le incognite saranno le variabili codificate  $X_i$ , presentato nell'equazione 2.1 e in modo generalizzato di seguito

$$Output_i = b_{0i} + A_i \cdot X_1 + B_i \cdot X_2 + C_i \cdot X_3 + D_i \cdot X_4 + E_i \cdot X_5 + F_i \cdot X_6 \quad (2.3)$$

$Output_i$  è il valore esatto misurato nella prova in laboratorio, gli altri coefficienti derivano dall'analisi di sensitività. Scritto in forma matriciale diventa

$$[COF][X] = [Out] - [b_0] \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & F_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & F_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 & E_5 & F_5 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 & E_6 & F_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Out_1 \\ Out_2 \\ Out_3 \\ Out_4 \\ Out_5 \\ Out_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} b_{01} \\ b_{02} \\ b_{03} \\ b_{04} \\ b_{05} \\ b_{06} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Le prove sperimentali che non prevedono interazioni con alcune proprietà meccaniche avranno i corrispondenti coefficienti nulli nella matrice. Le variabili codificate una volta determinate ci permetteranno di scalare i valori nominali scelti arbitrariamente, tabella 2.4 a pagina 29.

$$\mathbf{X} = \mathbf{COF}^{-1}(\mathbf{Out} - \mathbf{b}_0) \quad (2.6)$$

# Capitolo 3

# Risultati

## 3.1 Teoria di Ko

Si è testato il metodo di Ko sulla nostra semiala prendendo come misure di deformazione ( $\varepsilon_{ss}$ ) le deformazioni su alcuni elementi del modello FE. In figura 3.1 è mostrato il dorso della semiala con due linee, su ogni linea è presente un simbolo rappresentante la stazione di misura di una deformazione.

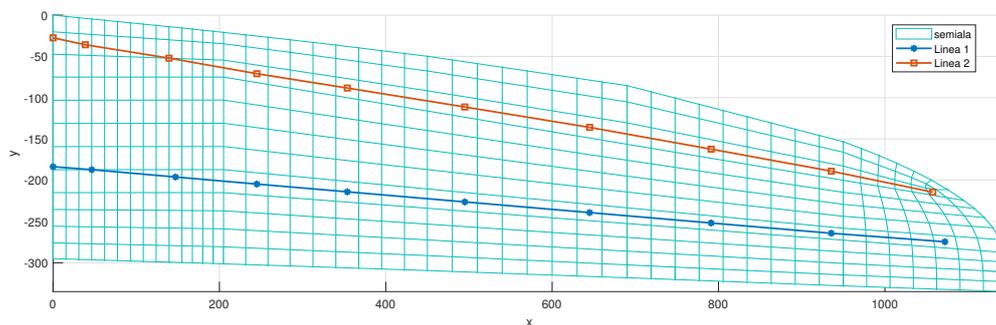


Figura 3.1: Semiala con linee di misura per teoria di Ko

Le due linee hanno lo stesso numero di estensimetri posti alla medesima distanza  $x$  dalla radice, questa accortezza ci permetterà di valutare la torsione.

### 3.1.1 Determinazione asse neutro

Nella trattazione di Ko [16] il parametro  $c$  è indicato come metà dell'altezza della sezione, nel suo caso avendo un longherone tubolare utilizza  $c = r$ , con  $r$  raggio della sezione cilindrica. Nel nostro caso si è scelto di utilizzare  $c$  come distanza dei sensori dall'asse neutro, la complicazione ricade nel fatto che l'asse neutro è variabile per ogni sezione estensimetrata e soprattutto è ignoto. La

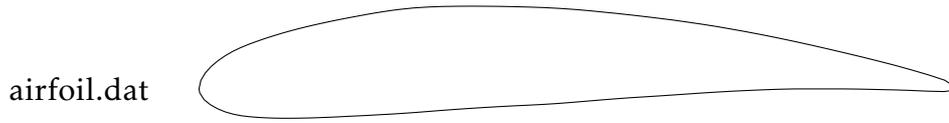


Figura 3.2: Profilo alare, forma costante lungo la semiala

geometria della sezione della semiala (figura 3.2) risulta complessa e l'asse neutro di difficile determinazione.

Prendendo come esempio la prova finale di Ardillo [1] si procede con la determinazione dell'asse neutro partendo dalla formula di Navier 3.1, supponendo di trovarci in assi principali d'inerzia

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z + \frac{M_x}{I_x}y \quad (3.1)$$

con  $N$  forza normale applicata alla sezione,  $M$  momenti flettenti e  $A, I$  componenti geometriche legate alle aree. Trovandoci in assi principali la tensione normale in una sezione qualsiasi della semiala sarà una funzione lineare nelle coordinate su cui giace la sezione, fissato  $x \rightarrow \sigma_{xx}(y, z)$ .

Essendo di difficile determinazione i coefficienti geometrici si svincolano tali coefficienti dal loro significato fisico, riscrivendo l'equazione come

$$\sigma_{xx} = b_1 + b_2y + b_3z \quad (3.2)$$

dove  $b_1, b_2$  e  $b_3$  sono i coefficienti incogniti da determinare, la procedura è la seguente:

1. per una data sezione si estraggono dal modello FE 3 misure di  $\sigma_{xx}$ ;
2. note le coordinate di dove prelevate le misure otteniamo un sistema di 3 equazioni in 3 incognite;

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx1} \\ \sigma_{xx2} \\ \sigma_{xx3} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

3. si determinano i coefficienti per quella determinata sezione;

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \quad (3.4)$$

4. si sostituiscono i coefficienti nell'equazione 3.2 e ponendo  $\sigma_{xx} = 0$  otteniamo l'equazione di un piano, costante in  $x$ . L'intersezione di questo piano con la sezione di interesse ci restituisce l'asse neutro.

Nel nostro caso abbiamo scelto tre sezioni posizionate rispettivamente ad una distanza dall'incastro di 0, 245 e 645 millimetri, corrispondenti a tre stazioni sulle quali poi verranno misurate anche le deformazioni. Come intuibile otterremo quindi le equazioni di tre piani, si è scelto di mediare i coefficienti di piani adiacenti per ottenere un piano medio da utilizzare per tutte le sezioni appartenenti a quella porzione di semiala. In aiuto la figura 3.3 per una più facile comprensione

- **Piano neutro 1 - 2**, ottenuto mediando i coefficienti della stazione 1 con quelli della stazione 2. La  $c$  dei punti di misura posizionati fra radice e  $s = 244.9 \text{ mm}$ , sarà determinata misurando la distanza da questo piano;
- **piano neutro 2 - 3**, ottenuto mediando i coefficienti della stazione 2 con quelli della stazione 3. La  $c$  dei punti di misura posizionati fra  $s = 245 \text{ mm}$  e  $s = 644.9 \text{ mm}$ , sarà determinata misurando la distanza da questo piano;
- **piano neutro 3 - tip**, si utilizzano i coefficienti della terza stazione. La  $c$  dei punti di misura posizionati fra  $s = 645 \text{ mm}$  e il tip, sarà determinata misurando la distanza da questo piano.

La distanza  $c$  della stazione dal piano neutro è definita dall'equazione 3.5, siano  $P(x_p, y_p, z_p)$  un punto nel piano (stazione) e  $b_0x + b_2y + b_3z + b_1 = 0$  l'equazione di un piano. I coefficienti dei 3 piani sono esposti nella tabella 3.1. Le coordinate risultanti delle stazioni sono mostrate nella tabella 3.2.

$$c_i = \frac{|0 \cdot x_p + b_2 \cdot y_p + b_3 \cdot z_p + b_1|}{\sqrt{0^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (3.5)$$

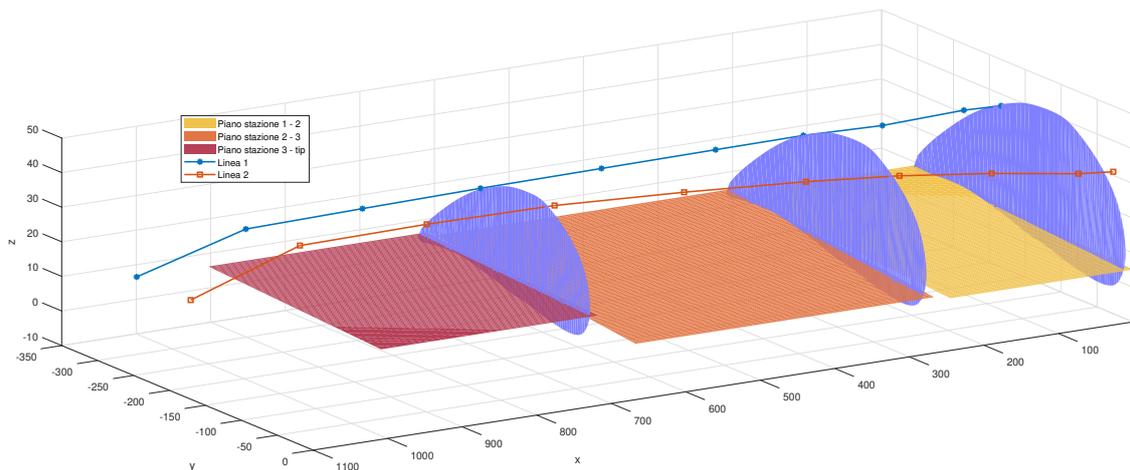


Figura 3.3: Assi neutri e linee di misura per Ko

	$b_0$	$b_2$	$b_3$	$b_1$
piano 1-2	0	-0.00144	-0.0866	0.444
piano 2-3	0	-0.00257	-0.0999	0.283
piano 3-tip	0	-0.00126	-0.0944	0.568

Tabella 3.1: Equazioni piani neutri - carico semplice

stazione	distanza radice $x$ [mm]	Linea 1		Linea 2	
		$s_1$	$c_1$	$s_2$	$c_2$
0	0	0	20.3	0	14.8
1	40	46.6	20.3	39.6	14.7
2	147	147.7	18.4	141.7	19.6
3	245	245.9	18.0	248.8	17.6
4	354	355.1	19.7	358.9	20.5
5	495	496.8	17.7	502.0	19.7
6	645	647.4	15.5	654.1	18.1
7	791	794.0	10.6	802.5	13.0
8	936	939.0	8.33	949.4	9.06
9	1070	1076	1.92	1074	5.09

Tabella 3.2: Stazione per metodo di Ko

### 3.1.2 Test

Facendo sempre riferimento alla disposizione degli estensimetri come in figura 3.1 si è applicata la procedura di Ko. Le deformazioni impiegate sono state estratte con un'analisi FEM, raccogliendo le deformazioni negli elementi e nodi opportuni.

Le posizioni degli estensimetri corrispondono a posizioni sul dorso della semiala. In figura 3.4 è mostrata la semiala con i carichi e il vincolo. Il vincolo corrisponde ad un incastro della centina di radice, i carichi sono due forze applicate sull'ultima centina con intensità leggermente diversa per creare un minimo di torsione. Alcuni gruppi nell'immagine sono stati disattivati per migliorare la visualizzazione delle forze.

In figura 3.5 sono presenti le misure delle deformazioni per le due linee estratte dal modello FE. **Le stesse misure di deformazioni, medesimi valori nei medesimi elementi, sono state utilizzate come input per il metodo modale.**

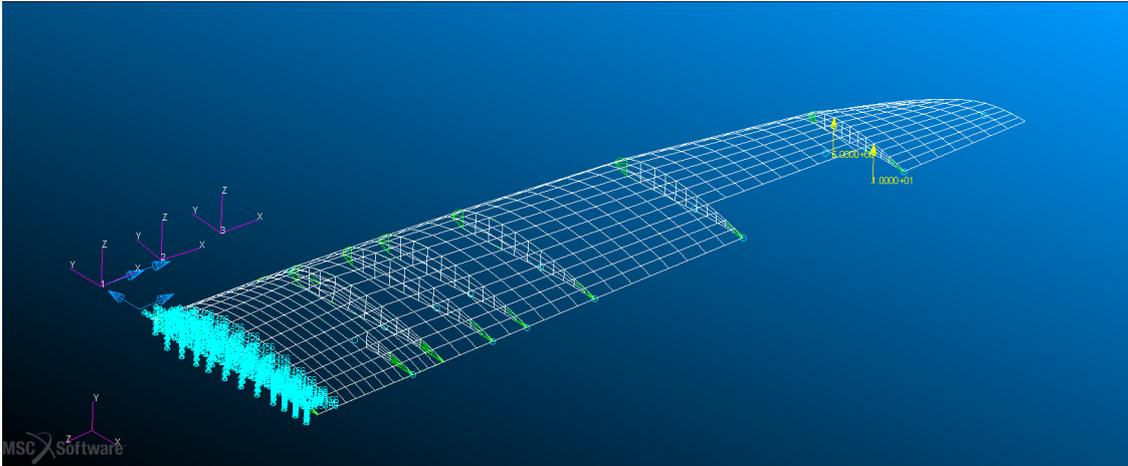


Figura 3.4: Semiala FE, test del metodo di Ko

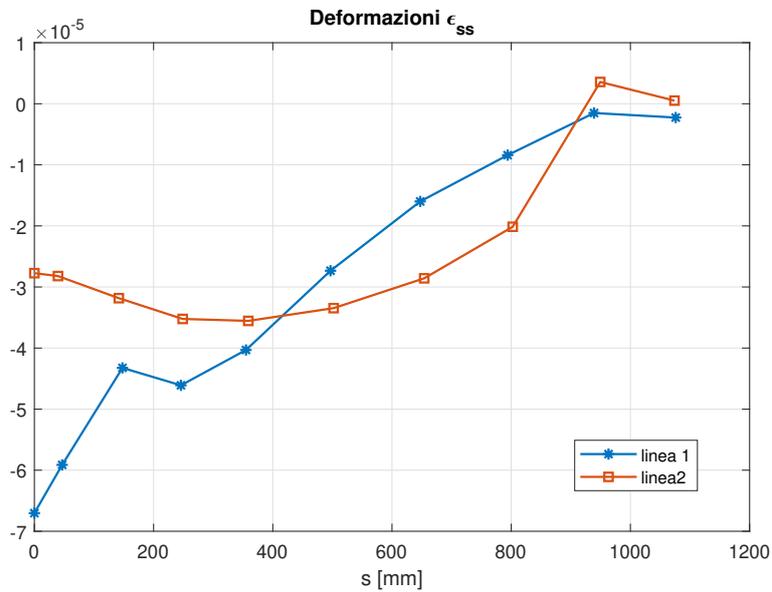


Figura 3.5: Deformazioni per metodo di Ko - carico semplice

## Risultati

Nelle figure 3.6 si mostra il confronto fra le deflessioni e la torsione ottenute con la teoria di Ko e quelle estratte nei medesimi punti con un'analisi FEM. Le torsioni sono state valutate con l'eq. 1.16 a partire dalle deflessioni.

Nella tabella 3.3 sono riportati i risultati con un confronto fra il metodo di Ko e il MM.  $L\%ERMS_{w/\beta}$ , equazione 3.6 a pagina 43, ci restituisce un'idea dell'accuratezza dei metodi, confrontando le deflessioni estratte dai metodi in determinati punti, con le deflessioni estratte nei medesimi punti provenienti dall'analisi FEM.

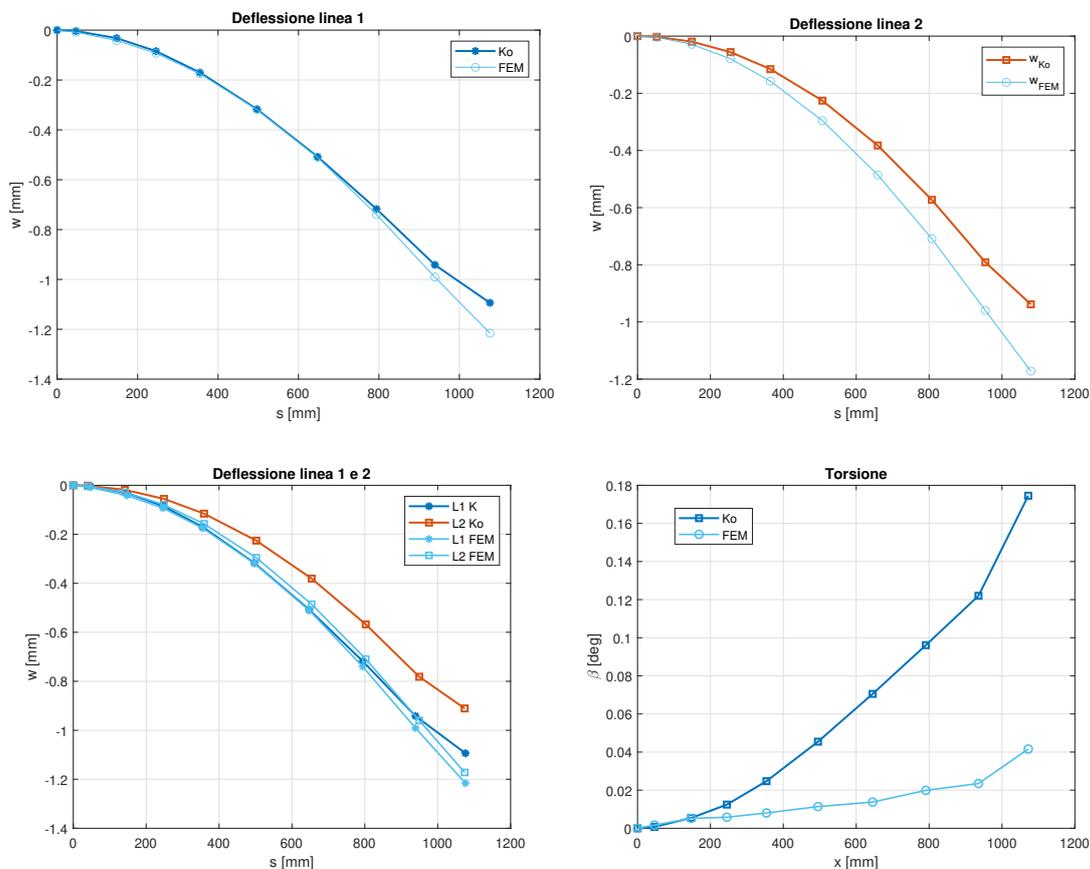


Figura 3.6: Confronto deflessioni e torsione metodo di Ko - carico semplice

Ricordiamo che le deformazioni utilizzate come input per il MM e KO sono le medesime provenienti dai medesimi punti, 20 misure in totale.

Valutando il lavoro svolto per giungere ai seguenti risultati se ne traggono le seguenti conclusioni

1. **Accuratezza** - utilizzando le stesse misure di deformazione nel metodo modale l'errore risultante è minore;
2. **asse neutro** - la deflessione calcolata con Ko sembra molto influenzata dal valore di  $c$  che non è però determinabile con sufficiente accuratezza, oltre ad un procedimento macchinoso;
3. **deformazione alla radice** - la deflessione è anche molto influenzata dalla deformazione misurata nel punto di incastro. Da noi ottenuta tramite una regressione lineare dei valori prossimi a radice, difficilmente determinabile in laboratorio;

4. **torsione** - un errore anche ridotto sulle deflessione, potrebbero propagarsi in un errore importante per quanto riguarda la torsione.

	Ko		MM	
	Linea 1	Linea 2	senza RV	con RV
$\%ERMS_w$	3.488	10.04	0.479	0.356
$\%ERMS_\beta$	148		9.774	8.779

Tabella 3.3: Risultati test metodo di Ko

## 3.2 Metodo Modale

### 3.2.1 Procedura con elementi finiti

La procedura generale per l'implementazione del metodo modale mediante l'utilizzo degli elementi finiti si articola in sei punti, nel diagramma di flusso 3.7 viene illustrato il procedimento.

1. **Analisi statica** - La struttura viene discretizzata mediante elementi finiti ed effettuata un'analisi statica che ci fornirà sia il vettore delle deformazioni che quello degli spostamenti. Le deformazioni sono misurate nel centro degli elementi, mentre per spostamenti si intendono le tre traslazioni secondo assi cartesiani di ogni nodo. Gli spostamenti verranno utilizzati alla fine come termini di comparazione;
2. **Analisi dinamica** - Utilizzando la medesima discretizzazione si estraggono le forme modali in termini di spostamento e deformazione tramite un'analisi modale e le rispettive pulsazioni. Spostamenti corrispondenti ai nodi, deformazioni ai centri cella. Il numero di forme modali estratte deve essere sufficientemente grande da contenere le forme modali che meglio rappresentino la deformata statica della struttura, meglio sceglierne un numero alto (20) e successivamente utilizzare solo quelle utili;
3. **Selezione modale** - Questo passaggio permette di considerare solo le forme modali che contribuiscono significativamente alla risposta. Per sceglierle, come visto nella sezione 1.1.3, si fanno delle osservazioni sull'energia elastica di deformazione statica e le energie elastiche delle varie forme modali, cercando la migliore combinazione di forme modali che si avvicinino a rappresentare la totalità dell'energia statica. Il codice sviluppato in MATLAB mantiene le forme modali, con energia decrescente, la cui somma raggiunge almeno il

90% dell'energia statica, a queste si aggiunge poi una forma extra calcolata da Nastran©: *residual vector*, a pagina 17;

4. **Calcolo della matrice trasformazione** - Passaggio più oneroso dal punto di vista computazionale, questo calcolo può essere semplificato in quanto:

- si conosce il numero di modi, quindi di colonne, delle matrici  $\{\Phi_d\}$  e  $\{\Phi_s\}$  da mantenere;
- nella matrice  $\{\Phi_d\}$  si possono mantenere solo le righe corrispondenti ai nodi dei quali si vuole la risposta in spostamento;
- per lo stesso ragionamento nella matrice  $\{\Phi_s\}$  si mantengono solo le righe corrispondenti alle deformazioni misurate.

5. **Applicazione della trasformazione modale con deformazioni analitiche**

- Il metodo modale è applicato utilizzando le deformazioni provenienti dall'analisi statica. Si utilizzano le deformazioni corrispondenti ai centri cella dove poi presumibilmente saranno applicati gli estensimetri durante la prova sperimentale, gli spostamenti risultanti vengono confrontati con quelli estratti inizialmente dall'analisi statica. L'errore calcolato dal confronto permette di determinare dove meglio sia misurare le deformazioni, permette anche di capire quanto, una volta effettuata la prova di laboratorio, dell'errore sia da attribuire alla misura delle deformazioni sperimentali e quanto al metodo. Se per la determinazione degli spostamenti utilizzassimo tutte le deformazioni provenienti dalla statica e le matrici  $\{\Phi_d\}$  e  $\{\Phi_s\}$  nella loro interezza, l'errore di comparazione degli spostamenti sarà prossimo ad un valore nullo, in quanto provengono dallo stesso modello matematico;

6. **Applicazione della trasformazione modale con deformazioni misurate** - posizionando opportunamente gli estensimetri si determinano gli spostamenti, l'errore derivante dalla loro comparazione con gli spostamenti analitici sarà la somma di un errore analitico e di uno di misura.

### 3.2.2 Ottimizzazione della posizione degli estensimetri

Come visto in precedenza è importante scegliere le forme modali che meglio possano rappresentare la deformata della struttura. Nella prova sperimentale è anche importante scegliere dove posizionare gli estensimetri, avendone presumibilmente in numero limitato, in modo che essi possano misurare le deformazioni che meglio permettano di ricostruire le forme modali selezionate.

L'obiettivo dell'ottimizzazione è quello di minimizzare il *root mean square percent error* fra gli spostamenti in direzione trasversale del modello FEM ad alta

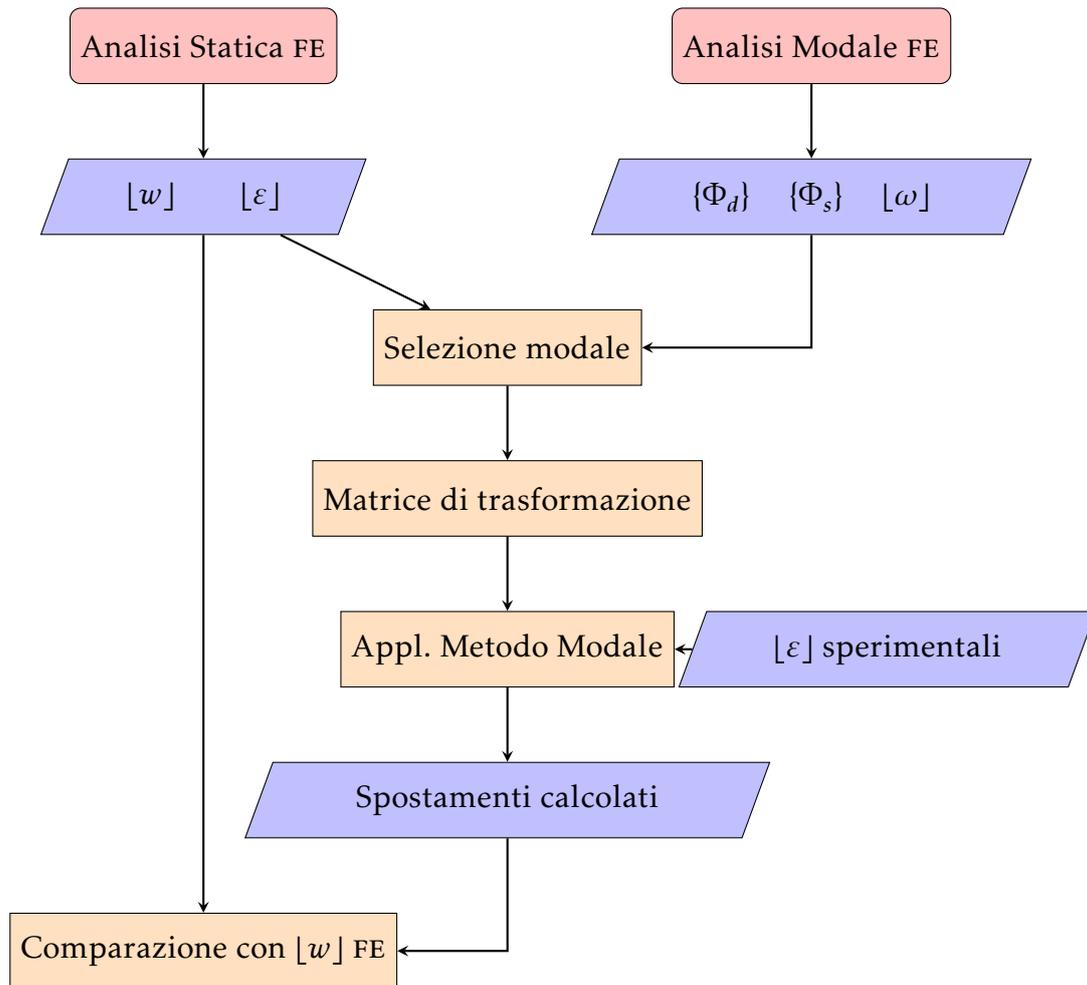


Figura 3.7: Diagramma di flusso per il metodo modale

fedeltà ( $w^{ref}$ ) e quelli ricostruiti con il metodo modale ( $w$ ) [7]

$$\%ERMS_w = 100 \times \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i - w_i^{ref}}{w_{max}^{ref}} \right)^2} \quad (3.6)$$

dove  $w_{max}^{ref}$  è il massimo valore di spostamento trasversale,  $n$  corrisponde al numero di nodi dei quali si confronta lo spostamento.

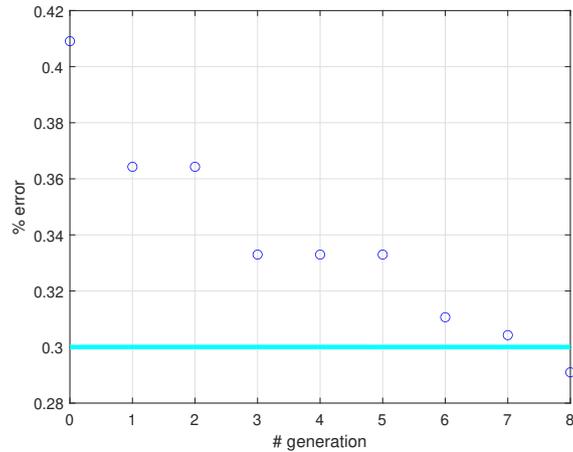
Per la determinazione della posizione migliore degli estensimetri si è utilizzato un algoritmo genetico scritto in MATLAB [24]. Si riassume in pochi punti il funzionamento del codice aiutandoci con il diagramma di flusso 3.9 a pagina 46, mentre in figura 3.8 si mostra un possibile output del codice, ottenuto con 5 estensimetri ed una soglia massima dell'errore pari a 0.3 punti percentuale.

1. **Generazione soluzioni casuali** - In maniera del tutto random si generano delle possibili configurazioni di sensori, queste apparterranno alla generazione 0;
2. **Fitness function** - Per ogni configurazione si procede con il metodo modale, gli spostamenti risultanti da ognuna vengono confrontati con quelli del modello accurato per determinare %ERMS. La nostra fitness function è l'equazione 3.6;
3. **Decisione** - se almeno una delle precedenti configurazioni rispetta il requisito di accuratezza (errore al di sotto di una soglia), questa sarà la nostra configurazione migliore: usciamo del programma. Se le configurazioni non rispettano il requisito e non abbiamo raggiunto la generazione massima: si continua;
4. **Selezione** - Si selezionano le configurazioni con l'errore più basso e le si copia nella generazione successiva;
5. **Crossover** - Le altre configurazioni, della prossima generazione, vengono generate *incrociando* quelle di questa generazione, la possibilità di una configurazione di *riprodursi* è più alta tanto quanto più piccolo sarà il suo errore. Oltre queste, ogni nuova generazione ha due configurazione generata casualmente totalmente nuove;
6. **Mutazione** - Per alcune configurazioni vengono rimossi o aggiunti dei sensori, al fine di avere tutte le configurazioni con lo stesso numero di estensimetri, numero scelto dall'utente. Tutte le generazioni hanno lo stesso numero di individui. La nuova generazione viene reindirizzata al punto 2 ed il processo ricomincia.

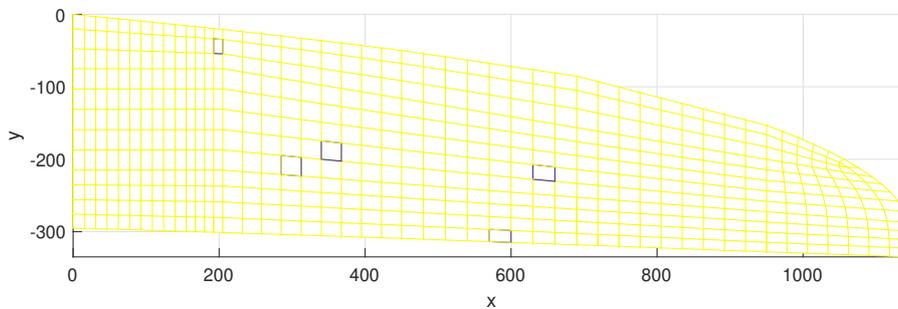
### 3.2.3 Algoritmi Genetici

Gli algoritmi genetici esulano completamente dagli argomenti trattati in questa tesi, ciò nonostante se ne vuole dare una breve introduzione con particolare rilievo alle potenzialità di questi algoritmi.

Gli algoritmi genetici, GAs, sono una tecnica euristica di ricerca o ottimizzazione di soluzioni, originariamente ispirati al principio Darwiniano dell'evoluzione, la selezione naturale. Un GA utilizza una versione altamente astratta dei processi evolutivi per sviluppare soluzioni a determinati problemi, problemi di cui non si conosce la presenza di una soluzione univoca oppure cercarla con metodi di combinazione semplice richiederebbe tempi enormi. Ogni soluzione è generalmente caratterizzata da una stringa binaria ed una fitness, quest'ultima è un numero reale che misura quanto la soluzione sia buona [18].



(a) Errore minimo per ogni generazione



(b) Posizione degli estensimetri

Figura 3.8: Esempio: output algoritmo genetico MATLAB

I GAs furono proposti per la prima volta da Holland et al. [13] come mezzo per trovare buone soluzioni a problemi che altrimenti sarebbero stati computazionalmente intrattabili. Il Teorema dello Schema di Holland [13], e la relativa ipotesi di *Building Block* [12], hanno fornito una base teorica e concettuale per la progettazione di GAs efficienti. Lo sviluppo ed il successo dei GAs ha contribuito ad aumentare l'interesse nei confronti di approcci computazionali basati su fenomeni naturali, ad ora sono solo una delle branche dell'intelligenza computazionale, come *Neural Networks*, *Ant Colony Optimisation*, *Particle Swarm Optimisation* e *Artificial Immunology* [6]. Le strategie di evoluzione si sono sviluppate indipendentemente dai GAs all'incirca nello stesso periodo, alla fine dei '60. Sebbene con origine distinta i due campi si sono sviluppati assieme, ad oggi spesso si fa riferimento ad entrambe come algoritmi genetici.

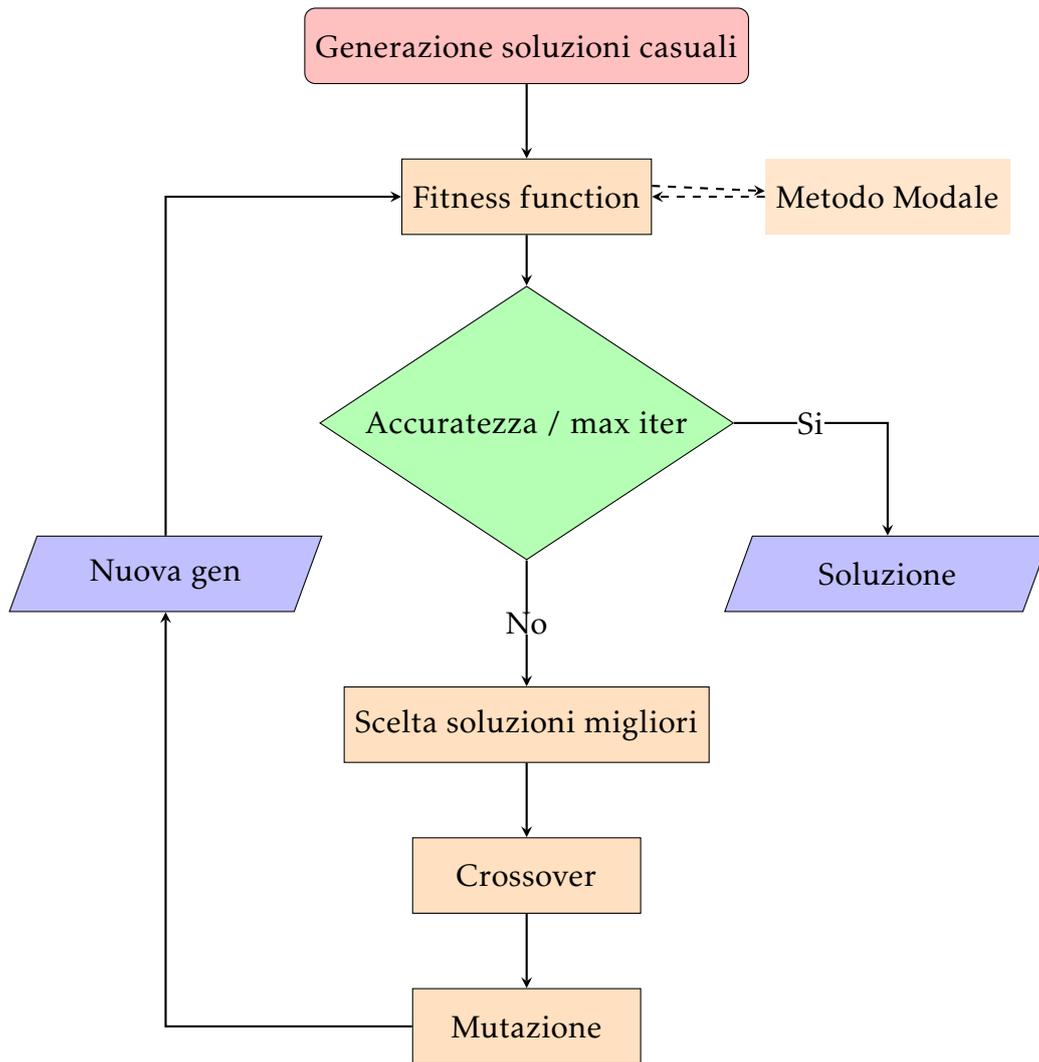


Figura 3.9: Diagramma di flusso per l'algoritmo genetico

### Caso studio

Gli elementi del modello FE sul dorso della semiala, dove saranno posizionati gli estensimetri, sono 525. Per ogni elemento si considerano le deformazioni sul piano in direzione longitudinale e trasversale, si hanno quindi potenzialmente  $n = 525 \cdot 2 = 1050$  possibili posizioni per gli estensimetri. Considerando di avere a disposizione  $k$  estensimetri, con  $k \leq n$ , è possibile calcolare il numero di *combinazioni semplici* con la formula del coefficiente binomiale 3.7

$$C_{(n,k)} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3.7)$$

Si misura il tempo necessario per eseguire l'algoritmo del metodo modale una sola volta, prendendo in considerazione  $k$  estensimetri senza nessuna ottimizzazione genetica. Moltiplicando il tempo ottenuto per il numero di possibili combinazioni con quel numero di estensimetri, si ottiene il tempo totale che impiegheremmo se volessimo provare tutte le combinazioni senza nessun tipo di ottimizzazione (tabella<sup>1</sup> 3.4).

$k$	$C_{(n,k)}$	$t \times \text{una comb. [ms]}$	$T = t \cdot C$
1	1050	2.076	2.18 secondi
2	$5.51 \times 10^5$	2.448	22 min + 28 sec
3	$1.92 \times 10^8$	1.975	4 gg + 9.5 ore
5	$1.05 \times 10^{13}$	2.103	702 anni + 1 mese
10	$4.30 \times 10^{23}$	2.410	328 miliardi di anni
15	$1.44 \times 10^{33}$	2.550	/
20	$9.09 \times 10^{41}$	2.816	/
50	$1.15 \times 10^{86}$	19.33	/
70	$2.42 \times 10^{110}$	30.85	/
100	$1.08 \times 10^{142}$	38.91	/
150	$3.65 \times 10^{185}$	58.08	/
200	$3.41 \times 10^{220}$	76.22	/

Tabella 3.4: Numero di combinazioni semplici e tempi

All'aumentare del numero di estensimetri il tempo necessario a esaminare tutte le combinazioni aumenta polinomialmente, **l'algoritmo genetico riesce invece a mantenere l'aumento del tempo lineare all'aumentare del numero di estensimetri** (figura 3.10). Si noti bene come l'andamento dei tempi  $t$ , per una singola combinazione, aumenti linearmente con  $k$ , questo per rimarcare che l'esplosione dei tempi di calcolo non è legata a difficoltà computazionali intrinseche al metodo modale, bensì proprio al numero di combinazioni.

### 3.3 test: condizioni di volo

Le condizioni di carico e vincolo adottate in questa prova sono il più possibile riconducibili alle condizioni che il velivolo potrebbe incontrare in volo reale. Il velivolo in questione è il convertiplano mostrato in figura 2.1 a pagina 22, studiato nelle condizioni di volo orizzontale rettilineo.

<sup>1</sup>cpu: intel(R) core(TM) i7-5500U 2.40GHz, ram: 16Gb, MATLAB R2019b

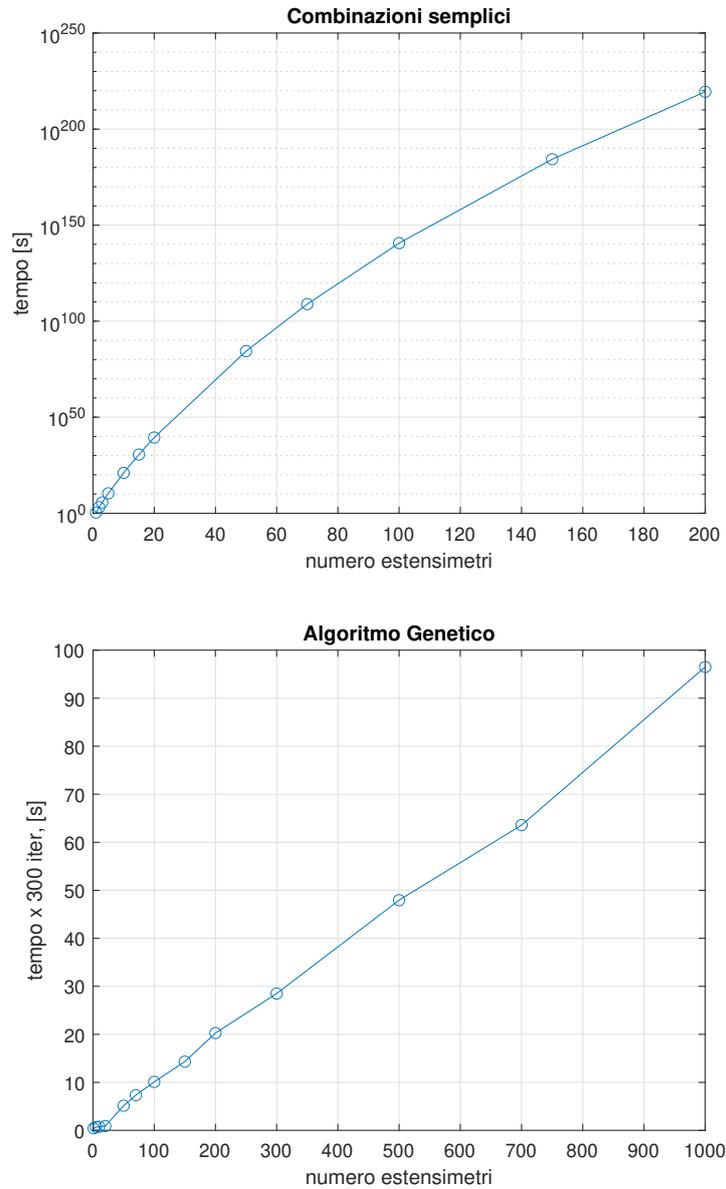


Figura 3.10: Confronto dei tempi: combinazioni semplici - algoritmo genetico

Il profilo dell'ala [3.2 a pagina 36](#) è stato analizzato con il metodo dei pannelli tramite il software [XFOIL](#)<sup>2</sup> per un Reynolds di  $Re = 5 \times 10^5$ . La polare del profilo, assieme alla geometria dell'ala, sono stati importanti sul software [AVL](#)<sup>3</sup>, che ci ha

<sup>2</sup>Author: Mark Drela, Harold Youngren. <https://web.mit.edu/drela/Public/web/xfoil/>

<sup>3</sup>Author: Mark Drela, Harold Youngren. <http://web.mit.edu/drela/Public/web/avl/>

permesso di estrarre i coefficienti aerodinamici delle sezioni di interesse.

Noto il peso massimo del velivolo al decollo ( $MTOW = 12\text{kg}$ ) si sono scelti arbitrariamente dei parametri di volo che ci permettessero il sostentamento di quest'ultimo:  $TAS = 33\text{m/s}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $n_{cont} = 1.1$ . Per AVL si sono definite 8 sezioni, per ognuna si sono recuperati i coefficienti di portanza, resistenza e il  $C.P.x/c$ , coeff. utile per la determinazione del centro di pressione. Le 8 sezioni corrispondono alle posizioni delle centine, in tabella 3.5 vi sono i dati di maggiore interesse: coefficienti aerodinamici e forze risultanti da applicare per ogni sezione.

$y$ centina [mm]	$C_L$	$C_D$	$T_z$ [N]	$T_y$ [N]
155	0.359	0.0134	10.2	-0.435
205	0.362	0.0129	3.03	-0.1272
285	0.363	0.0128	4.79	-0.195
340	0.364	0.0127	-7.66	-0.131
450	0.364	0.0127	6.33	-0.254
690	0.36	0.0129	12.7	-0.519
950	0.359	0.0129	11.2	-0.471
1118	0.339	0.0145	1.23	-0.046

Tabella 3.5: Dati aerodinamica semiala e tagli

Nella tabella 3.5 sono anche mostrate i carichi in direzione trasversale  $z$  ed orizzontale  $x$ , applicati nei centri di pressione delle rispettive sezioni, centine. I carichi sono applicati come forze concentrate in un nodo, corrispondente al centro di pressione, collegato ai nodi esterni della centina tramite degli elementi rigidi RBE3. In figura 3.11 si mostrano i diagrammi di taglio e momento sulla semiala che confermano la corrispondenza fra carico reale e carico applicato. In figura 3.12 la semiala con i particolare dei carichi e dei vincoli, alcune parti sono nascoste per una migliore visualizzazione.

### 3.3.1 Risultati FEM

Nella figura 3.13 si possono osservare la deformata statica della semiala ai carichi aerodinamici e le corrispettive deformazioni sul dorso. Le deformazioni mostrate appartengono allo strato superficiale del composito costituente il dorso (layer 10) nella direzione  $x$  del sistema di riferimento degli elementi, approssimativamente corrisponde alla direzione parallela all'apertura alare.

Dalla visualizzazione delle deformazione si nota come la presenza delle centine possa rendere complicata la scelta delle linee di misura per il metodo di Ko. In quanto queste ultime possono compromettere la linearità delle deformazioni lungo la linea di misura, condizione necessaria per la teoria. Le deformazioni

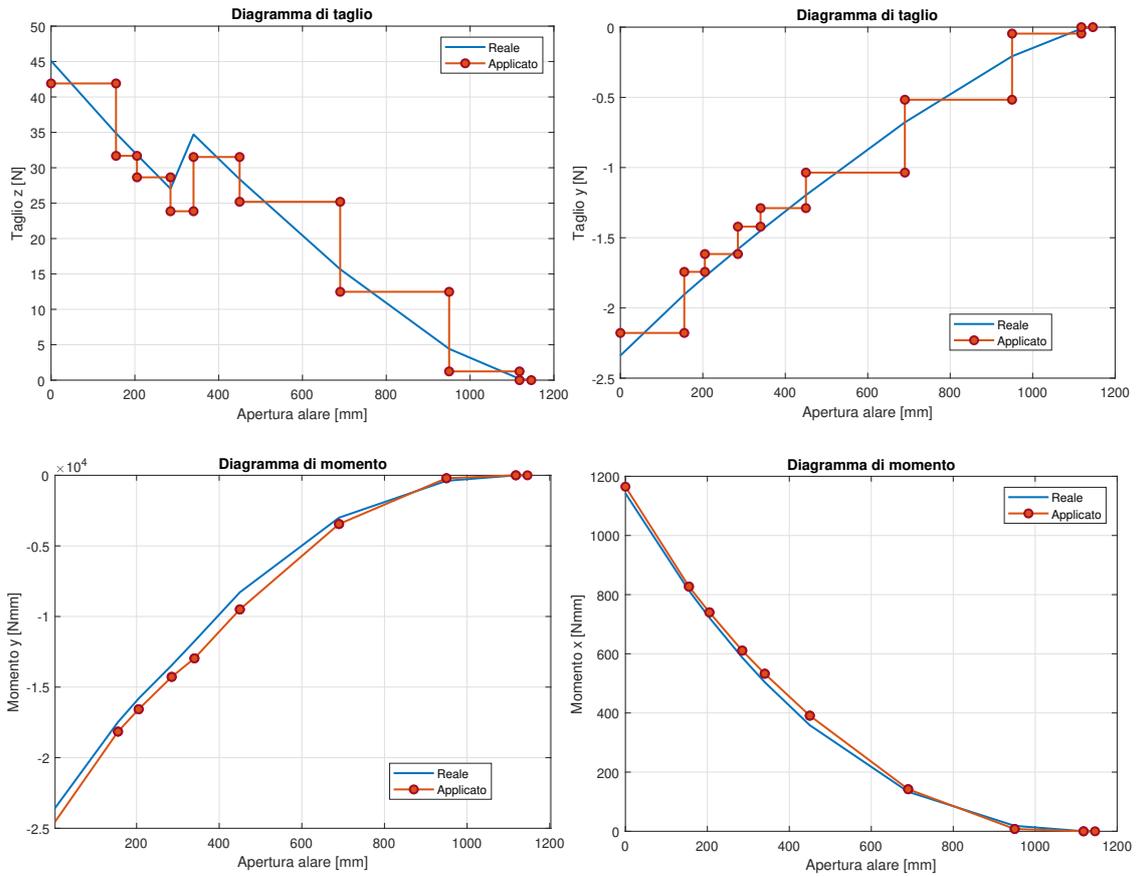


Figura 3.11: Diagrammi taglio e momento per la semiala

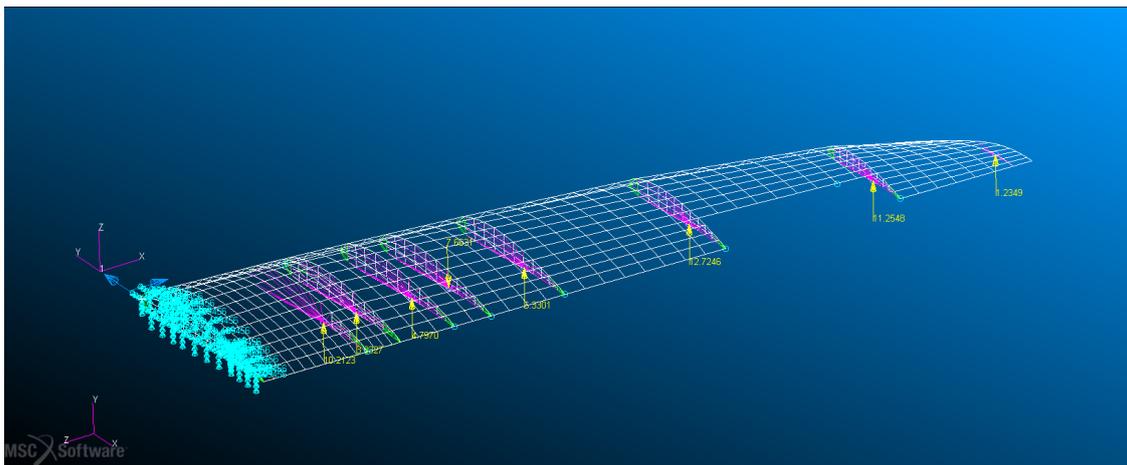
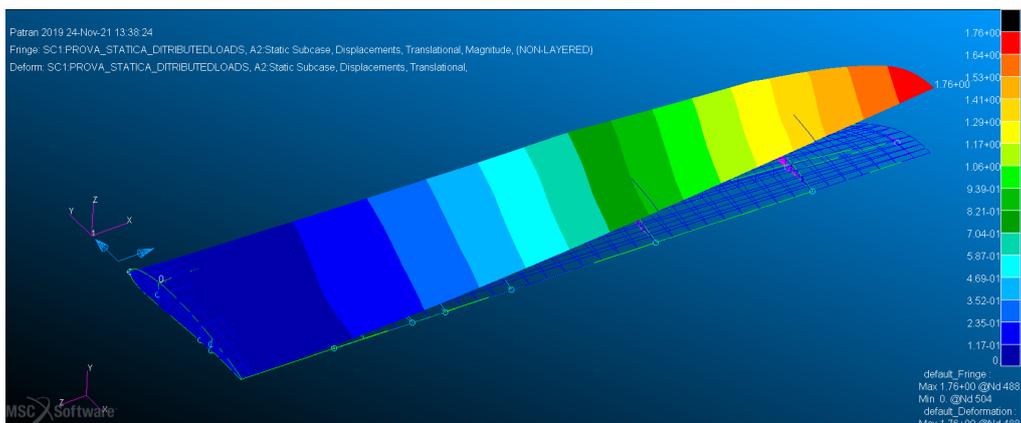


Figura 3.12: Semiala FE, test metodo modale



(a) Deformata - spostamenti

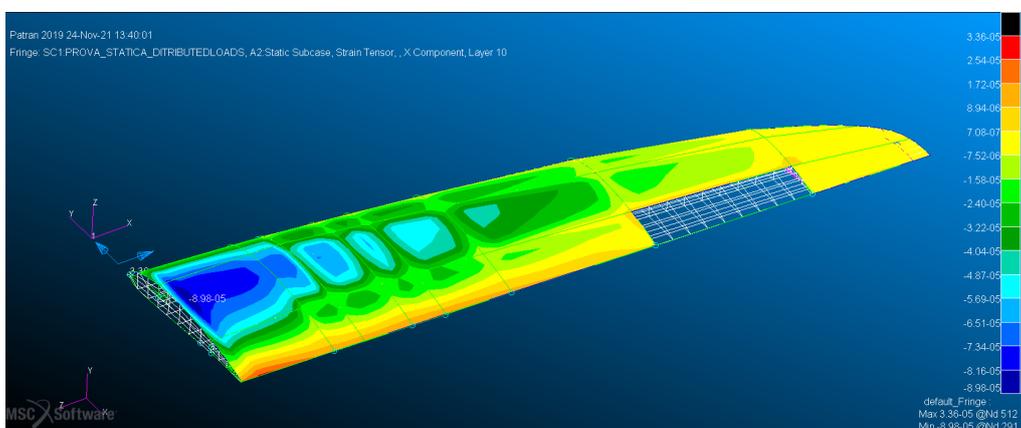
(b)  $\varepsilon_{xx}$  nel sistema di riferimento  $ijk$ , dorso

Figura 3.13: Semiala deformata statica FEM

raffigurata mostrano il campo di deformazioni complessivo da cui attingere per le misure utilizzate nei metodi di Ko e MM confrontati in seguito.

### 3.3.2 Risultati Ko

Anche per questa condizione di carico si procede con un confronto fra il metodo di Ko e il MM, come mostrato nella sezione a pagina 35 è stato necessario ricalcolare i piani contenenti gli assi neutri essendo questi dipendenti dal carico. I nuovi coefficienti sono riportati nella tabella 3.6, graficamente i piani appaiono impercettibilmente diversi da quelli mostrati nella figura 3.3 a pagina 37. Le linee di misura rimangono le medesime.

Come operato anche precedentemente, le misure di deformazione estratte dalle due linee sono state utilizzate sia nel metodo di Ko che nel MM. Nelle figure 3.14 si riportano i risultati dei due metodi confrontati con i valori di deflessione

	$b_0$	$b_2$	$b_3$	$b_1$
piano 1-2	0	-0.00128	-0.119	0.746
piano 2-3	0	-0.00295	-0.112	0.298
piano 3-tip	0	-0.00108	-0.0878	0.546

Tabella 3.6: Equazioni piani neutri - carico aerodinamico

estratti col FEM. Il confronto fra i due metodi, tabella 3.7, non mostra particolari cambiamenti rispetto alla precedente condizione di carico. Il MM continua a mostrare una maggiore precisione riguardo le deflessioni, stupisce l'errore relativo alla torsione che appare meglio rappresentata da Ko. Complessivamente i risultati del MM sono più soddisfacenti in quanto permettono una più accurata rappresentazione globale della deformata della struttura.

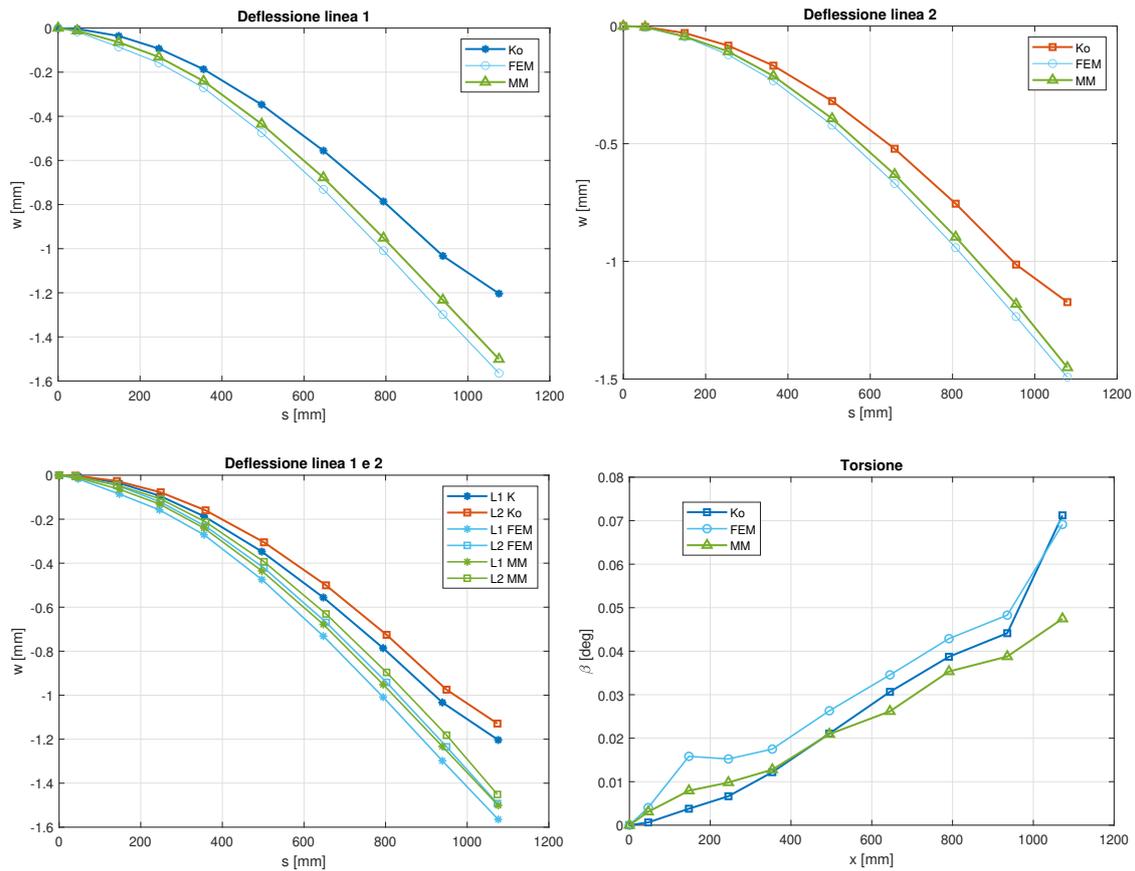


Figura 3.14: Confronto deflessioni e torsione metodo di Ko - carico aerodinamico

	Ko		MM	
	Linea 1	Linea 2	senza RV	con RV
$\%ERMS_w$	11.27	11.52	0.831	0.774
$\%ERMS_\beta$	8.429		12.05	13.19

Tabella 3.7: Risultati test metodo di Ko

### 3.3.3 Risultati MM

#### Selezione dei modi

Si fanno alcune osservazione sulla scelta delle forme modali da utilizzare per ricostruire la deformata della semiala. È importante per la scelta dei modi valutare l'energia di ciascuno, in figura 3.15 sono riportati i dati relativi all'energia trasportata da ogni modo in percentuale rispetto all'energia statica totale, la scala è logaritmica per meglio confrontare le forme, ma la quasi totalità dell'energia è rappresentata, prevedibilmente, dalla prima forma modale in quanto molto simile alla deformata statica. I modi scelti sono il primo, il secondo, e il residual vector (21-esimo) figura 3.16 a pagina 55, nella tabella 3.8 sono presenti i dati accurati di questi 3 modi.

Joule		
E. tot statica	15.012	
forma modale	E. forma	% E. rappresentata
1	14.7	98.1
2	0.0619	0.412
21	0.1068	0.712
totale scelti	14.9	99.27

Tabella 3.8: Energia delle forme modali

È interessante notare come la selezione dei modi non consente solo di diminuire le dimensione delle matrici, ma migliora anche l'accuratezza dei risultati: escludendo quei modi che niente hanno in comune con la deformata statica. In tabella 3.9 vi sono gli errori misurati con diverse combinazioni di modi. A prescindere dal numero di modi utilizzati si sono impiegate, per tutte le combinazioni, le stesse 4 misure di deformazione scelte tramite algoritmo genetico. **Un aumento dei modi, e quindi dell'energia rappresentata, non comporta obbligatoriamente un aumento dell'accuratezza.**

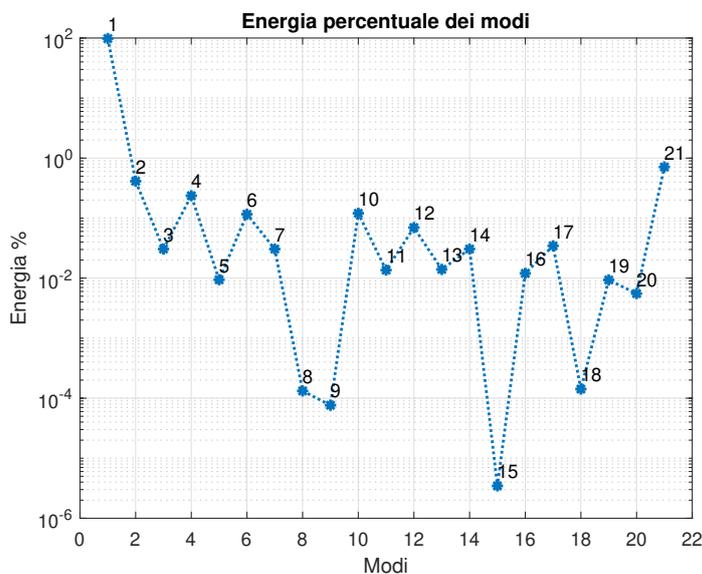


Figura 3.15: Energia forme modali

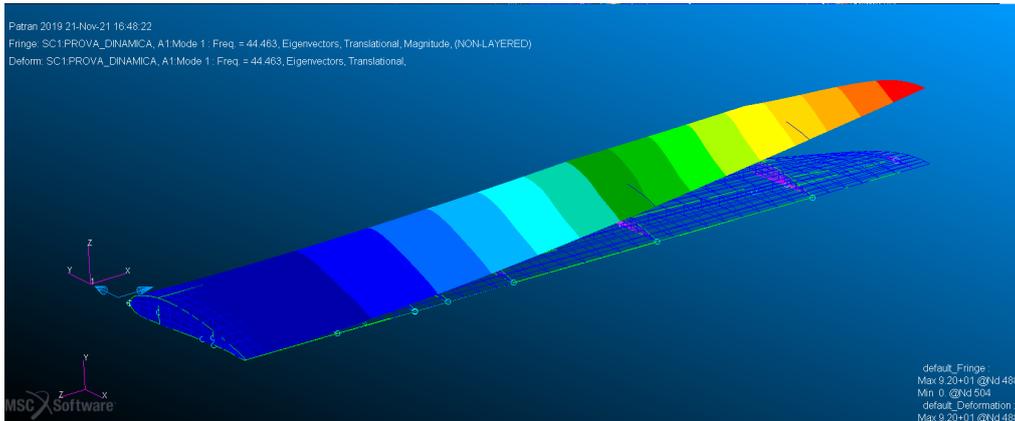
modi scelti	% E. rappresentata	% $ERMS_w$
1	98.14	1.740
1:5	98.83	37.33
1, 2, 21	99.27	0.3841
1:3, 21	99.30	0.3763
1:5, 21	99.54	34.30
1:21	$\approx 100$	41.59

Tabella 3.9: Errori di diverse combinazioni di forme modali, MM

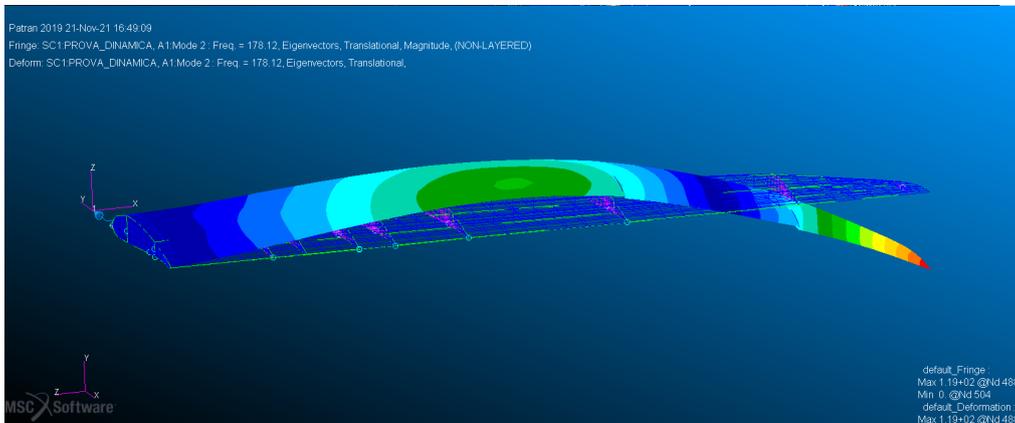
### GA - posizione estensimetri

L'algoritmo genetico permette di scegliere il numero di estensimetri da applicare e di ottimizzarne la posizione sul dorso della semiala. La figura 3.17 è stata ottenuta mediando i valori dell'accuratezza restituita dal GA variando il numero di estensimetri e il numero di membri di cui ogni generazione è formata. Se ne traggono le seguenti conclusioni:

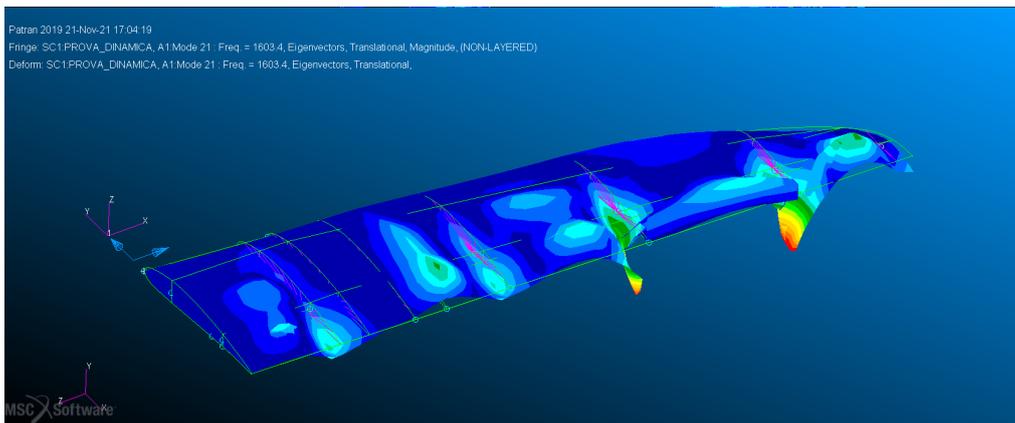
1. Con un numero molto ridotto di estensimetri, anche rispetto al metodo di Ko, si ottengono ottimi valori di accuratezza;
2. si raggiunge un asintoto, molto velocemente, nell'errore minimo. In pratica si può stimare un numero di estensimetri ideale, per ottenere una buona accuratezza, oltre il quale non è più vantaggioso andare;



(a) primo modo, 44.5 Hz



(b) secondo modo, 178 Hz



(c) residual vector, 1603 Hz

Figura 3.16: Forme modali utilizzate

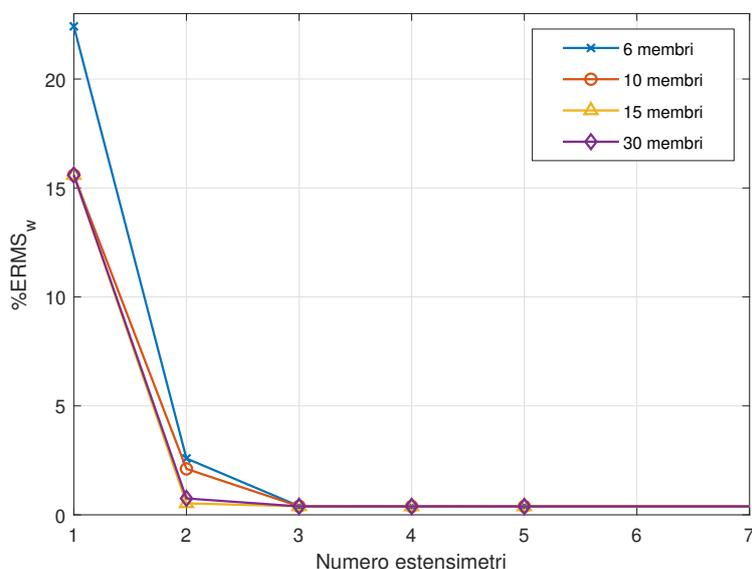


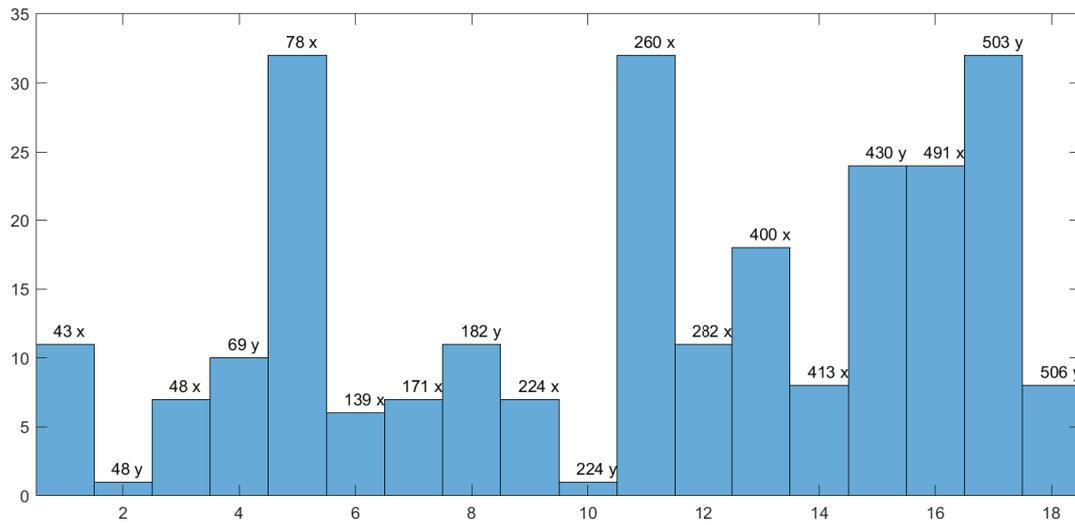
Figura 3.17: GA, asintoto dell'errore minimo

3. aumentare il numero di membri di cui è composta ogni generazione porta a convergenza più velocemente, anche se questo comporta un aumento del tempo necessario per ogni iterazione.

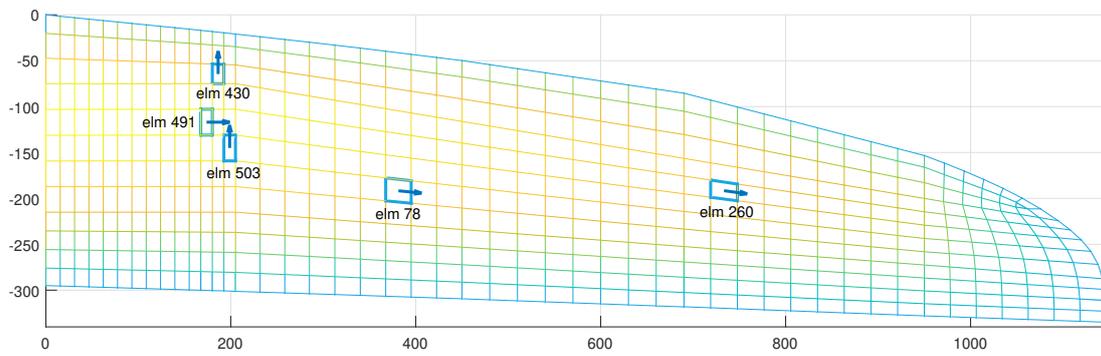
L'accuratezza molto alta anche con pochi estensimetri è legata probabilmente al fatto che la prima forma modale corrisponde quasi esattamente alla deformata statica della struttura, osservabile nell'immagine [3.13 a pagina 51](#).

Dalle osservazioni precedenti si procede all'analisi finale scegliendo 5 estensimetri ed un numero di membri per ogni generazione di 20 componenti. Si ripete il GA più volte per verificare se vi sono degli estensimetri che vengono scelti più frequentemente di altri. Questo passaggio non è strettamente necessario, in quanto gli estensimetri estratti da un ciclo del GA riescono già a garantire l'accuratezza indicata come output. Se per esempio, dopo un ciclo di ottimizzazione si ottengono degli estensimetri che ci forniscono un'accuratezza non soddisfacente, sarebbe sufficiente rieseguire l'algoritmo, ricordando sempre che vi è un asintoto nell'errore minimo ottenibile. L'istogramma [3.18](#) restituisce un'idea di quali sono gli elementi scelti più volte per la loro misura di deformazione,  $x$  e  $y$  rappresentano rispettivamente le misure in direzione longitudinale o orizzontale rispetto all'apertura alare.

Per concludere possiamo affermare che sembra esserci una combinazione ideale di 5 estensimetri che permette di avere un basso errore con un basso numero di sensori richiesti. I sensori migliori sono raccolti in tabella [3.10](#),  $x$  e  $y$  sono le direzioni di misura nel sistema di riferimento solidale con l'elemento. Sarebbero delle ottime posizioni per un'applicazione di shape sensing in volo.



(a) Istogramma degli estensimetri scelti



(b) Semiala con i 5 est. prescelti

Figura 3.18: GA - Scelta estensimetri

Estensimetri ideali	
ID elm	direzione
78	x
260	x
503	y
430	y
491	x
$\%ERMS_w$	0.3838

Tabella 3.10: GA - Elementi più frequenti

## Capitolo 4

# Conclusioni

Rielaborando le conclusioni presentate in [7, 11] e i risultati da noi ottenuti sul nostro modello, si sono riassunti nella tabella 4.1 i principali vantaggi e svantaggi dei tre principali metodi per lo shape sensing.

	PRO	CONTRO
iFEM	migliore accuratezza. non richiede la conoscenza di nessuna proprietà dei materiali: rigidità, proprietà inerziali o di smorzamento, non richiede la conoscenza del carico applicato	raggiunge l'accuratezza migliore, ma richiede più estensimetri rispetto agli altri due metodi
Ko	non richiede la conoscenza delle proprietà del materiale. Fornisce gli spostamenti nei punti esatti di misura delle deformazioni. Richiede meno estensimetri	fornisce solo la componente di spostamento trasversale. Macchinoso per strutture con geometrie complicate
MM	miglior rapporto tra accuratezza e numero di estensimetri richiesti. Si raggiunge un valore di accuratezza asintotico all'aumentare delle misure di deformazione	richiede la conoscenza delle caratteristiche modali (proprietà dei materiali) e del carico applicato

Tabella 4.1: Confronto metodi per shape sensing

Dal nostro studio si conclude che utilizzando un basso numero di estensimetri il metodo più adatto per la ricostruzione della deformata della semiala è il **Metodo**

**Modale.** Per i seguenti motivi:

1. Il numero di estensimetri a nostra disposizione è basso (5-6 estensimetri), ciò esclude quasi automaticamente l'ifem che richiede un numero di estensimetri molto alto. Soprattutto se, come in questo caso, la struttura da discretizzare non ha una geometria semplice;
2. con quel numero di estensimetri l'accuratezza ottenuta dal MM è migliore rispetto alla teoria di Ko, riesce meglio a ricostruire la deformata;
3. l'approccio del metodo di Ko per la semiala risulta eccessivamente complicato e con pesanti incertezze:
  - l'asse neutro varia per ogni sezione di misura, ciò rende necessario la conoscenza del carico e degli stress nel modo più accurato possibile in alcuni punti. Inoltre come visto complica notevolmente la procedura, rendendo necessaria la determinazioni di piani neutri medi;
  - difficile stabilire linee rettilinee di misura che consentano di avere un andamento lineare delle deformazioni.
4. L'algoritmo alla base del MM si presta bene allo sviluppo di un algoritmo genetico per l'ottimizzazione della posizione degli estensimetri;
5. l'utilizzo dei residual vectors, garantisce un'ottima flessibilità al metodo modale, rendendolo valido anche in situazioni di carico complesse.

# Nomenclatura

## Parametro

$[\dots]$	vettore colonna
$[\dots]$	matrice quadrata
$\{\dots\}$	matrice di dimensioni qualsiasi
$\langle \dots \rangle$	matrice diagonale
<hr/>	
$[K]$	matrice di rigidezza
$[M]$	matrice di massa
$\{\Phi\}$	matrice delle forme modali, spostamenti
$[\phi_i]$ o $\{\phi_i\}$	forma modale $i$ -esima
$\eta$ o $q$	coordinata modale
$\omega$	pulsazione
$\varepsilon$	deformazione
$w$	spostamento trasversale
$\bar{f}$	media dei valori in $f$
<hr/>	
$E_i$	coefficiente di rigidezza in direzione $i$
$G_{ij}$	coefficiente di rigidezza a taglio in direzione $ij$
$\nu_{ij}$	coefficiente di Poisson
$\rho$	densità
<hr/>	
FE	Finite Elements
FEM	Finite Element method
MM	Metodo Modale
iFEM	Inverse FEM
RV	residual vectors
GA	genetic algorithm
UAV	Unmanned aerial vehicle

# Bibliografia

- [1] Michele Ardillo e Marco Gherlone. *Prova finale: shape sensing della semiala di un prototipo da competizione*. 2018.
- [2] O. Bernasconi e D.J. Ewins. «Application of strain modal testing to real structures». In: *6th International Modal Analysis Conference*. Vol. 2. 1988, pp. 1453–1464.
- [3] Philip Bogert, Eric Haugse e Ralph Gehrki. «Structural shape identification from experimental strains using a modal transformation technique». In: *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. 2003, p. 1626.
- [4] Department Of Defense. «Composite Materials HANDBOOK. Polymer Matrix Composites Materials Properties». In: 2 of 5. MIL-HDBK-17-2F (giu. 2002).
- [5] JM Dickens, JM Nakagawa e MJ Wittbrodt. «A critique of mode acceleration and modal truncation augmentation methods for modal response analysis». In: *Computers & Structures*. Vol. 62. 6. Lockheed Martin Missiles e Space, Box 3504, Sunnyvale, CA 94088-3504, U.S.A., 1997, pp. 985, 998.
- [6] Andries P Engelbrecht. *Computational intelligence: an introduction*. John Wiley & Sons, 2007.
- [7] Marco Esposito e Marco Gherlone. «Composite wing box deformed-shape reconstruction based on measured strains: Optimization and comparison of existing approaches». In: *Aerospace Science and Technology* 99 (2020), p. 105758. ISSN: 1270-9638. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105758>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1270963819324538>.
- [8] Rolf Evenblij et al. «Shape sensing for morphing structures using fiber Bragg grating technology». In: *Smart Intelligent Aircraft Structures (SARISTU)*. Springer, 2016, pp. 471–491.
- [9] GC Foss e ED Haugse. «Using modal test results to develop strain to displacement transformations». In: *Proceedings of the 13th international modal analysis conference*. Feb. 1995, pp. 112–118.

- 
- [10] G. Frulla. «Appunti del corso: Modelli sperimentali e Analisi di Sensitività». In: (2020).
- [11] Marco Gherlone, Priscilla Cerracchio e Massimiliano Mattone. «Shape sensing methods: Review and experimental comparison on a wing-shaped plate». eng. In: *Progress in aerospace sciences* 99 (2018), pp. 14–26. ISSN: 0376-0421.
- [12] David E Goldberg. *Genetic algorithms*. Pearson Education India, 2006.
- [13] John Henry Holland et al. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT press, 1992.
- [14] George C Kirby III et al. «Strain-based shape estimation algorithms for a cantilever beam». eng. In: *Proceedings of SPIE*. Vol. 3041. 1. Bellingham WA: SPIE, 1997, pp. 788–798. ISBN: 0819424544.
- [15] William L Ko, W. Lance Richards e Van Tran Fleischer. *Applications of Ko Displacement Theory to the Deformed Shape Predictions of the Doubly-Tapered Ikhana Wing*. eng. NASA Dryden Flight Research Center, Edwards, California, 2009.
- [16] William L Ko, Van t Tran e W. L Richards. *Displacement Theories for In-Flight Deformed Shape Predictions of Aerospace Structures*. eng. 2007.
- [17] Li Li et al. «Structural Shape Reconstruction of FBG Flexible Plate Using Modal Superposition Method». In: *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Vol. 58226. American Society of Mechanical Engineers. 2017, V008T12A038.
- [18] John McCall. «Genetic algorithms for modelling and optimisation». In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 184.1 (2005). Special Issue on Mathematics Applied to Immunology, pp. 205–222. ISSN: 0377-0427. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.07.034>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042705000774>.
- [19] Attilio C Pisoni et al. «Displacements in a vibrating body by strain gage measurements». In: *Proceedings-SPIE the International Society for Optical Engineering*. Citeseer. 1995, pp. 119–119.
- [20] Stephan Rapp et al. «Displacement field estimation for a two-dimensional structure using fiber Bragg grating sensors». In: *Smart Materials and Structures* 18.2 (2009), p. 025006.
- [21] Ted Rose. «Using residual vectors in MSC Nastran dynamic analysis to Improve accuracy». In: mar. 1991.
- [22] Nicolas Roy e Alain Girard. «Impact of residual modes in structural dynamics». In: *Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing 2005*. A cura di Karen Fletcher. Vol. 581. ESA Special Publication. Gen. 2005, p. 52.1.

- [23] *Script MATLAB per analisi sensitività*. URL: [https://github.com/FValo/sensitivity\\_Matlab.git](https://github.com/FValo/sensitivity_Matlab.git) (visitato il 19/07/2021).
- [24] *Script MATLAB per Metodo Modale con ottimizzazione estensimetri mediante algoritmo genetico*. URL: [https://github.com/FValo/git\\_tutorial.git](https://github.com/FValo/git_tutorial.git) (visitato il 15/10/2021).
- [25] SIEMENS. *Basic Dynamic: Analysis User's Guide*. 2014.
- [26] A. Tessler e J. Spangler. «An inverse FEM for application to structural health monitoring». In: *14th US National Congress of Theoretical and Applied Mechanics*. Giu. 2002.
- [27] Alexander Tessler e Jan L. Spangler. «A least-squares variational method for full-field reconstruction of elastic deformations in shear-deformable plates and shells». In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194.2 (2005). Selected papers from the 11th Conference on The Mathematics of Finite Elements and Applications, pp. 327–339. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.03.015>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782504003342>.
- [28] Alexander Tessler et al. *Real-time characterization of aerospace structures using onboard strain measurement technologies and inverse finite element method*. Rapp. tecn. NATIONAL AERONAUTICS e SPACE ADMINISTRATION HAMPTON VA LANGLEY RESEARCH CENTER, 2011.
- [29] Jaap Wijker. *Mechanical vibrations in spacecraft design*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 2004. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-08587-5>.
- [30] Chao Wu et al. «Mechanical properties of a balsa wood veneer structural sandwich core material». eng. In: *Construction & building materials* 265 (2020), p. 120193. ISSN: 0950-0618.