Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale
A.a. 2020/2021
Sessione di Laurea Dicembre 2021

Analisi "global/local" di strutture spaziali dispiegabili in materiale composito

Relatori:
Prof. Erasmo Carrera
Prof. Alfonso Pagani

Correlatori:
Ing. Alberto Racionero Sanchez-Majano
Ing. Riccardo Augello

Candidato:
Domenico Andrea Iannotta

A tutte le persone che mi hanno supportato in questo percorso

Abstract

L'obiettivo di questo lavoro è quello di proporre un approccio innovativo di tipo "global/local" per lo studio di strutture dispiegabili in materiale composito. L'utilizzo di questo metodo, inoltre, permetterà di oltrepassare le criticità legate ai codici di calcolo commerciali, i cui limiti verranno messi in evidenza. Verrà utilizzato il plug-in MUL2@GL, sviluppato come un codice stand-alone presso il Politecnico di Torino e basato sulla Formulazione Unificata di Carrera (CUF), assieme a Femap, un software agli elementi finiti sviluppato da Siemens. Per mostrare le potenzialità del plug-in, si presterà particolare attenzione alle problematiche che maggiormente caratterizzano i compositi, tra cui quelle legate al free-edge, al concetto di failure ed ai C_z^0 requirements. Si farà riferimento a varie strutture in composito, le quali verranno studiate in campo lineare, prima da un punto di vista globale e, successivamente, attraverso un'analisi locale, in corrispondenza delle zone considerate critiche. Nello specifico, inizialmente verrà analizzato un Triangular Rollable And Collapsible (TRAC) boom, successivamente si procederà con l'analisi di un tape-spring hinge, ed infine verrà effettuato lo studio di un Telescopic Tubular Mast (TTM).

Indice

Elenco delle figure

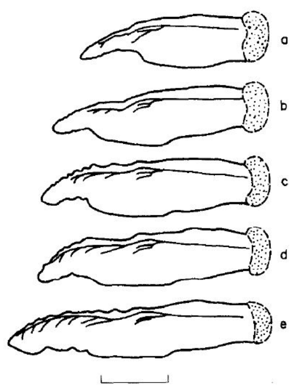
Capitolo 1

Introduzione

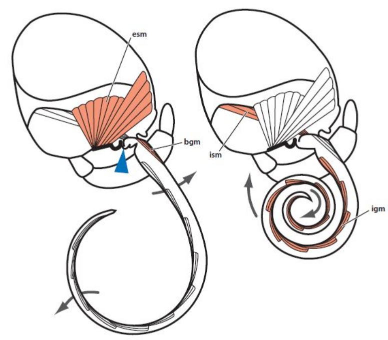
Con il termine “strutture dispiegabili” si fa riferimento ad una particolare tipologia di strutture che sono in grado di modificare autonomamente la loro forma, passando quindi da una configurazione compatta (ovvero “ripiegata”), ad una configurazione estesa (cioè “dispiegata”). La trasformazione dalla configurazione ripiegata a quella dispiegata prende il nome di “dispiegamento”, mentre la trasformazione opposta viene chiamara “ritrazione”.
Esempi relativi a questa tipologia di strutture possono essere osservati sia in natura che in ambito ingegneristico. In particolare, la progettazione di strutture dispiegabili da parte dell'uomo ha avuto un ruolo di primaria importanza nell'ambiente aeronautico e, successivamente in quello spaziale. In entrambi questi campi, infatti, è strettamente necessario disporre di strutture caratterizzate da volumi che non eccedano un limite massimo: basti pensare ai lanciatori, caratterizzati da una capienza limitata per ospitare il payload, o, più semplicemente, agli aerei di linea, la cui fusoliera ha un volume limitato. In questi casi, quindi, le strutture dispiegabili possono rappresentare una valida soluzione, ipotizzando, ad esempio, di utilizzarle nella loro configurazione ripiegata durante le fasi critiche (come il lancio o il rientro in orbita), per poi dispiegarle al momento opportuno.
Nelle sezioni seguenti vengono quindi riportati alcuni esempi di strutture dispiegabili, sia in natura che in ingegneria, mettendo successivamente in evidenza i loro vantaggi, nonchè le principali problematiche legate al loro studio ed alla loro progettazione.

1.1 Strutture Dispiegabili in Natura

In questa sezione vengono brevemente riportati alcuni esempi di strutture dispiegabili presenti in natura. É proprio in natura, infatti, che possono essere osservate le strutture dispiegabili più antiche: esse hanno permesso lo sviluppo di organismi, garantendo molto spesso la riduzione della minima energia necessaria per sopravvivere. Ad esempio, un organismo potrebbe avere la necessità di immagazzinare una struttura in situazioni pericolose o per ridurre l'inerzia in modo che la locomozione possa essere più efficace con uno sforzo muscolare ridotto.
Questo meccanismo è usato dalle locuste, che sono in grado di espandere le loro ali attraverso un processo che si divide in due fasi (Figura 1.1a). In questo caso viene sfruttato un sistema idraulico che permette il dispiegamento delle ali grazie alla pressione esercitata dal sangue, come spiegato da A. E. Glaser e J. F. V. Vincent [2]. Un esempio simile è quello relativo alla proboscide dei lepidotteri (Figura 1.1b): si tratta di una struttura che assume una forma piatta, arrotolata a spirale, in fase di riposo, e che può essere estesa tramite un sistema che sfrutta forze idrauliche, elastiche e muscolari [23].
Ci sono molti meccanismi realizzati tramite l'articolazione di parti rigide (Figura 1.2): gran parte della zoologia morfologica e biomeccanica classica si occupa della loro descrizione e clas-



(a) Dispiegamento dell'ala di una locusta.



(b) Proboscide di un lepidottero.

Figura 1.1: Due esempi di strutture dispiegabili osservabili in natura.

sificazione [4]. Tra questi meccanismi è possibile ricordare la mascella del serpente, che può dislocarsi per ottenere un'apertura estremamente ampia, vari sistemi per la deposizione delle uova degli insetti e per il dispiegamento dei loro arti. La forma più semplice di meccanismo ha quattro barre incernierate l'una all'altra: questo sistema è stato esaurientemente analizzato in una serie di articoli di Muller, che lo ha utilizzato per spiegare il funzionamento della bocca di molte specie di pesci [9].
Il termine "Biomimetica" fa riferimento all'idea di utilizzare concetti presenti in natura, al fine di proiettarli nel mondo ingegneristico, con l'obiettivo di progettare sistemi e meccanismi utili per l'essere umano. Al giorno d'oggi si è ancora lontani dal completo raggiungimento di questo risultato, ma le similitudini tra il mondo ingegneristico e quello biologico sono sempre più diffuse. Ad esempio, strutture simili alle proboscidi delle farfalle sono ampiamente utilizzate in ambito aerospaziale e vengono generalmente indicate con il nome "tape springs" (anche se in realtà non è possibile affermare che questi ultimi siano stati sviluppati copiando idee presenti in natura) [12]. Come verrà spiegato in seguito, i tape springs sono strutture generalmente costituite da lunghe strisce di materiale composito, che nella loro configurazione compatta sono arrotolate attorno a delle bobine. Uno dei problemi principali di queste strutture, riguarda la loro instabilità nella configurazione ripiegata (diversamente dalla loro corrispondente biologica, che invece è stabile in questa configurazione).

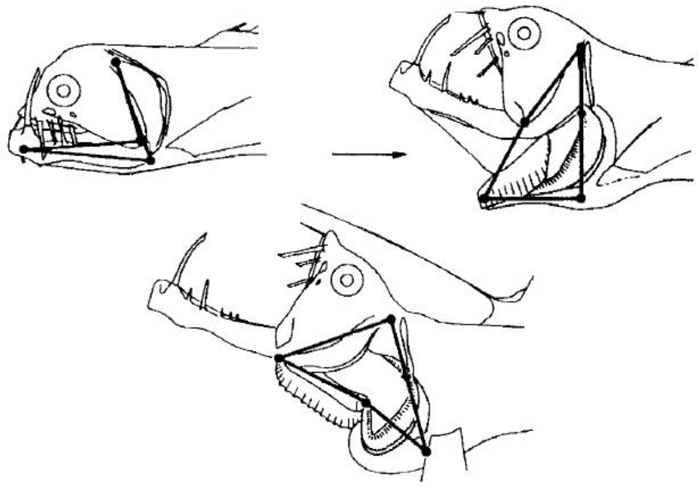
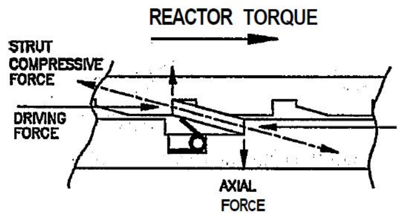


Figura 1.2: Meccanismo di apertura della bocca di una rana pescatrice.

1.2 Strutture Dispiegabili in Ingegneria

Come già anticipato in precedenza, le strutture dispiegabili, nel corso degli anni sono diventate sempre più diffuse in ingegneria. In questo campo, infatti, esse permettono di ottenere una consistente riduzione della massa, del volume e di conseguenza del costo di un sistema: si tratta di vantaggi non trascurabili nel caso in cui l'obiettivo sia quello di sviluppare un prodotto che dovrà necessariamente essere competitivo sul mercato ed in grado di soddisfare le necessità di chi lo acquista. In questa sezione, quindi, vengono illustrate le principali strutture dispiegabili progettate dall'uomo, ponendo particolare attenzione a quelle utilizzate in ambito aerospaziale, dove i requisiti strutturali di massa e volume, sono in genere più restrittivi rispetto a quelli incontrati in altri ambiti.
Un meccanismo piuttosto semplice, che permette di dispiegare delle appendici da un corpo principale, è il giunto meccanico, costituito da una cerniera accoppiata ad una molla di torsione. La molla di torsione forza la rotazione della cerniera, guidando il dispiegamento e mantenendo la struttura completamente dispiegata una volta che la cerniera raggiunge il suo fine corsa (si tratta di un sistema molto diffuso per il dispiegamento delle antenne, come mostrato in Figura 1.3a) [25]. Talvolta è necessario utilizzare un meccanismo che consenta alla struttura di ruotare in un'unica direzione, impedendo che eventuali forze esterne applicate su di essa la riportino nella configurazione ripiegata. Per questo motivo molto spesso vengono utilizzati dei diodi meccanici: si tratta di cerniere che permettono la rotazione in un'unica direzione. Essi sono costituiti da uno statore (fissato alla struttura principale) ed un rotore (in grado di ruotare rispetto alla struttura principale) su cui è montata l'appendice che si vuole dispiegare. Internamente sono presenti delle piastrine collocate in delle apposite cavità e caricate con delle molle di compressione in modo da essere spinte verso la parete superiore. La forma seghettata di questa parete permette la rotazione in un unico verso, impedendola invece nel verso opposto [6].

(a) Giunto meccanico utilizzato per il dispiegamento di un'antenna.



(b) Rappresentazione grafica della struttura interna di un diodo meccanico.

Figura 1.3: Rappresentazione di un giunto meccanico e di un diodo meccanico.

Una nuova tecnologia dei materiali, che è stata recentemente introdotta nel campo delle strutture dispiegabili, si basa sugli EMC (Elastic Memory Composite). Si tratta di una particolare tipologia di materiali compositi rinforzati con fibre, costituiti da una matrice in resina polimerica caratterizzata da proprietà di memoria di forma. Al di sopra della temperatura di transizione vetrosa (Tg), questi materiali possono essere deformati facilmente e quindi portati nella loro configurazione ripiegata. Successivamente essi possono essere conservati in questa configurazione attraverso un raffreddamento al di sotto della temperatura Tg. Nel momento in cui si vuole

ottenere il dispiegamento, è possibile sfruttare la proprietà di shape memory facendo aumentare la temperatura al di sopra del valore Tg, in modo che il materiale possa riacquisire la sua geometria originale. Oltre a permettere la realizzazione di strutture ultraleggere, questa tecnologia permette di raggiungere elevate efficienze di impacchettamento, garantendo allo stesso tempo delle soddisfacenti proprietà fisiche e meccaniche. Bisogna però assicurarsi di avere a disposizione una fonte di calore sufficientemente potente, che sia in grado di riscaldare adeguatamente il materiale al momento opportuno (in ambito spaziale possono essere utilizzati dei sistemi a concentrazione solare, che permettono di trasformare la radiazione solare in energia termica). Una delle problematiche principali riguardanti gli EMC risiede nella difficoltà di sviluppare dei modelli analitici che siano in grado di prevedere il comportamento del materiale considerato, descritto dai dati ottenuti tramite test sperimentali. Per questo motivo si sta cercando di perseguire un approccio multidisciplinare gerarchico basato su modelli microstrutturali per raggiungere un livello di comprensione più elevato per questa nuova tecnologia dei materiali. Tuttavia, questi sistemi sono ancora nelle prime fasi di sviluppo e richiedono del tempo prima che siano pronti per il volo spaziale e che i loro potenziali vantaggi possano essere sfruttati appieno [15].
Le strutture di tipo inflatable rappresentano una tecnologia caratterizzata da un'elevata applicabilità in ambito spaziale (ad esempio per lo sviluppo di pannelli solari, sistemi di comunicazione, habitat umani come mostrato in Figura 1.4, ecc.). Queste strutture sfruttano una membrana (spesso costituita da più strati) che viene dispiegata attraverso un processo di gonfiaggio basato sull'aumento della pressione interna, generalmente ottenuto tramite l'iniezione di gas. La membrana presenta un'elevata flessibilità, dovuta alla sua ridotta rigidezza flessionale, che però permette di ripiegare facilmente la struttura durante la fase di lancio, ottenendo così delle elevate efficienze di impacchettamento. Dopo aver raggiunto l'orbita desiderata, la struttura può essere dispiegata tramite pressurizzazione interna in modo da raggiungere una rigidezza opportuna. Nel caso in cui la missione spaziale abbia una durata di pochi giorni, in genere non è necessario rafforzare la struttura con un sistema di irrigidimento. Per qualsiasi applicazione spaziale a lungo termine, invece, è necessario disporre di una struttura gonfiabile irrigidita. Questo è necessario perché si potrebbero sviluppare delle perdite di gas dovute all'impatto di micrometeoriti o detriti spaziali sulla membrana. I meccanismi di irrigidimento più diffusi si basano su laminati in alluminio, iniezione di schiuma, laminati compositi termoplastici, hydrogel rigidization e molti altri metodi [14].

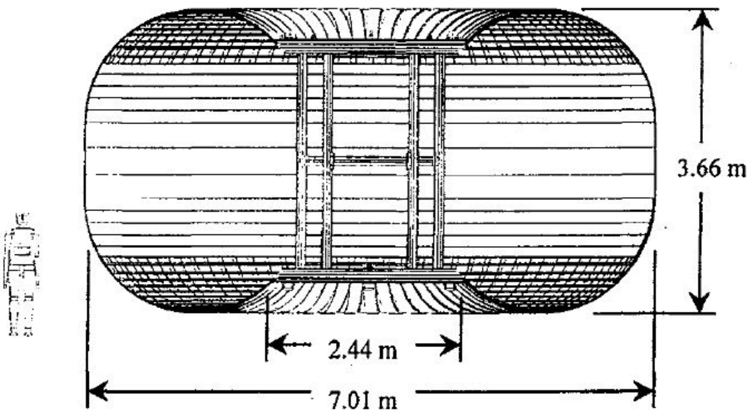


Figura 1.4: Sezione trasversale del TransHab SDU-1.

É bene ricordare che negli ultimi decenni la dimensione dei componenti e, in generale, dei sistemi spaziali, ha subito una notevole riduzione. Per assecondare questo andamento, caratterizzato da un sempre più accentuato processo di miniaturizzazione, l'industria spaziale si è orientata verso lo sviluppo di nuovi metodi di minimizzazione dei volumi, che permettessero di agevolare specialmente lo sviluppo degli smallsat (ovvero quei satelliti caratterizzati da una massa inferiore ai 500 kg). Si pensa infatti che in futuro questa categoria di satelliti riuscirà ad acquisire delle prestazioni paragonabili, se non superiori, a quelle dei satelliti più grandi. Mentre le dimensioni dell'avionica e degli strumenti di bordo si sono ridotte, alcuni componenti satellitari, che richiedono la raccolta o la riflessione di fotoni o radiazioni elettromagnetiche, devono necessariamente rimanere grandi (ad esempio i pannelli solari, le antenne di comunicazione e le vele solari) [44]. Per soddisfare queste necessità, i deployable booms sono stati introdotti nell'industria spaziale, acquisendo un ruolo di primaria importanza all'interno di essa. I deployable booms, anche chiamati deployable masts, sono ripiegati attraverso un meccanismo di arrotolamento e possono essere dispiegati in modo da acquisire una forma simile a quella di un'asta, attraverso un sistema che ricorda quello di un metro a nastro. Generalmente, queste strutture presentano una sezione trasversale curva nella loro configurazione dispiegata: questa caratteristica permette di aumentare la rigidezza del boom. Quando invece vengono arrotolate, queste strutture diventano curve nella direzione longitudinale, mentre la sezione trasversale si appiattisce.

La tipologia più diffusa di deployable booms è quella dei tape springs. Questi ultimi possono essere descritti come delle strisce elastiche in parete sottile, la cui sezione trasversale forma un arco di circonferenza con raggio di curvatura R e sottende un certo angolo α. I tape springs mostrano un comportamento altamente non lineare quando sono sollecitati con un momento flettente. Tale andamento può essere messo in evidenza sia tramite prove sperimentali, che attravesto analisi numeriche (nella Figura 1.5 la linea continua rappresenta le analisi numeriche, mentre i simboli $\times$ e $+$ si riferiscono alle misurazioni sperimentali, rispettivamente durante la fase di carico e scarico). Si osserva un brusco cambiamento nella geometria della struttura quando il momento applicato assume dei valori critici (Figura 1.6), come indicato da K. A. Seffen e S. Pellegrino [11].

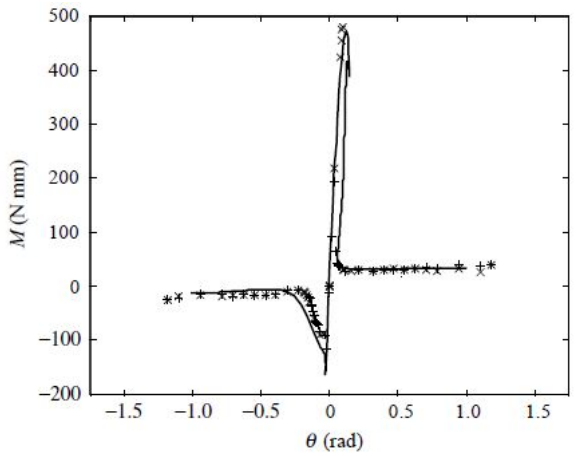
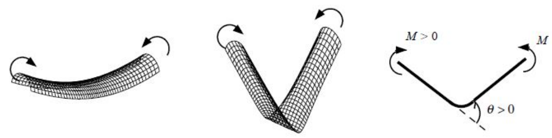
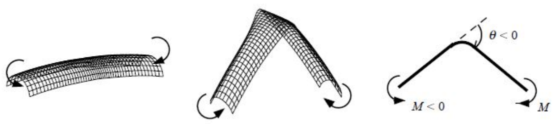


Figura 1.5: Andamento del momento (M) in funzione dell'angolo di deflessione (θ) per un tape spring.



(a) Momento positivo.



(b) Momento negativo.

Figura 1.6: Convenzione dei segni per un tape spring.

I tape springs, inoltre, sono in grado di dispiegarsi grazie al rilascio dell'energia di deformazione elastica immagazzinata nella loro configurazione ripiegata. A seconda dell'entità di questa energia, essi possono essere definiti instabili, bistabili o neutralmente stabili. É importante tenere conto del fatto che quando queste strutture sono conservate nella configurazione ripiegata per molto tempo, generalmente si verifica un rilassamento viscoelastico che porta alla riduzione dell'energia elastica immagazzinata e quindi all'aumento della stabilità del sistema [46].

Un'altra tipologia di deployable booms, sono gli STEM (Storable Tubular Extendible Member). Inventati in Canada nel 1960, essi sono simili ai tape springs, con la differenza che sottendono un angolo maggiore rispetto a questi ultimi, formando una struttura tubolare, caratterizzata da una sovrapposizione di 50° o più (il che significa che la sezione trasversale eccede l'angolo giro, come è possibile osservare in Figura 1.7). Avendo entrambi una sezione trasversale aperta, sia i tape springs che gli STEM hanno una bassa rigidezza torsionale, anche se i secondi sono caratterizzati da rigidezze assiali e tangenziali più elevate, a causa della maggiore estensione della sezione stessa.
Un'ulteriore variante è rappresentata dai CTM (Collapsible Tube Mast), costituiti da due gusci flessibili sottili di forma biconvessa legati ai bordi mediante saldatura a resistenza (come mostrato in Figura 1.8). Il vantaggio principale di questa variante è la maggiore rigidezza torsionale, ottenuta grazie all'utilizzo di una sezione chiusa (anche se essa è più difficile da fabbricare e genera delle tensioni maggiori nella configurazione ripiegata). Lo spessore di tutte queste strutture è sufficientemente piccolo da garantire una deformazione puramente elastica quando vengono piegate e, naturalmente, l'immagazzinamento di una grande quantità di energia di deformazione elastica nella configurazione ripiegata. È necessario assicurare che questa energia venga rilasciata in modo controllato durante il dispiegamento [16].

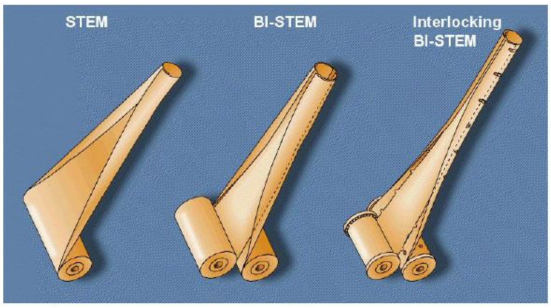


Figura 1.7: Varie tipologie di STEM booms.

Figura 1.8: Varie tipologie di CTM booms.

1.2.1 TRAC Booms

L'obiettivo principale di questo lavoro è quello di analizzare delle strutture in composito, quindi si è scelto di descrivere in modo più approfondito le tipologie di strutture che verranno studiate: la prima tra queste prende il nome di TRAC boom. Il Triangular Rollable And Collapsible (TRAC) boom fu inventato dai ricercatori dello US AirForce Research Laboratory più di dieci anni fa ed è caratterizzato da una sezione trasversale costituita da due flange curve collegate in corrispondenza del loro lembo superiore tramite un setto verticale (come si osserva in Figura 1.9), in modo da generare una forma simile a quella di un triangolo (da cui deriva il nome del boom). Questa tipologia di boom è stata utilizzata in tre diverse missioni per effettuare dimostrazioni relative alle vele solari: NanoSail-D [22], LightSail-1 [29] e LightSail-2 [45]. Pur avendo una rigidezza torsionale piuttosto limitata, dovuta alla sezione aperta della struttura, i TRAC booms sono caratterizzati da una rigidezza flessionale 10 volte più alta rispetto ai CTM booms e 34 volte più alta rispetto agli STEM booms. Infatti lo sforzo richiesto per appiattire le flange di un TRAC boom è inferiore rispetto a quello degli altri boom, consentendo l'utilizzo di materiali più spessi per la progettazione delle flange. Di conseguenza, la combinazione di materiali più spessi ed una sezione trasversale più ampia si traduce in un boom con una rigidezza flessionare superiore. Il materiale impiegato, il raggio di curvatura delle flange ed il loro spessore determinano lo sforzo necessario per appiattire la sezione trasversale. Un raggio di curvatura delle flange più piccolo, porta ad un boom più rigido ma, se esso è troppo piccolo, il materiale rischia di arrivare a rottura nella configurazione ripiegata. Al contrario, un raggio molto grande corrisponde ad una più piccola rigidezza flessionale della struttura. Quindi molto spesso è necessario effettuare un trade off in modo da trovare la miglior combinazione tra materiale, spessore e raggio delle flange che permetta di ottenere una rigidezza flessionale sufficientemente elevata ed, allo stesso tempo, di non oltrepassare il limite di rottura del materiale nella configurazione ripiegata [27].

(a) Sezione trasversale di un TRAC boom. (b) Rappresentazione grafica di un TRAC boom.

Figura 1.9: TRAC boom.

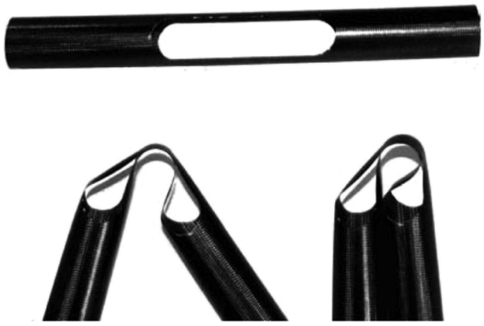
Molteplici studi sono stati condotti (sia da un punto di vista sperimentale che numerico) con la finalità di valutare il comportamento a flessione dei TRAC booms. Una sfida nello studio delle strutture realizzate con compositi ultrasottili è che le proprietà dei materiali e le prestazioni strutturali sono strettamente correlate al processo di produzione attraverso il quale esse sono costruite. Generalmente, quando il boom viene sollecitato a flessione, possono essere osservati due regimi. Il primo regime è caratterizzato da un andamento lineare di pre-buckling che persiste fino a quando il momento applicato non raggiunge un valore critico. In prossimità di questo valore si generano dei piccoli rigonfiamenti localizzati che riducono la rigidezza flessionale del boom. Successivamente, il secondo regime è caratterizzato da un comportameno stabile di post-buckling, che dura fino al collasso della struttura. É importante sottolineare che durante la fase di post-buckling la struttura è in grado di sopportare momenti fino a quattro volte più elevati rispetto a quello critico misurabile alla fine della fase di pre-buckling. Inoltre si è osservato che il comportamento del boom è completamente reversibile, sia nel primo che nel secondo regime, prima del punto di buckling collapse (questa è una caratteristica particolarmente utile nel caso in cui si abbia intenzione di sottoporre il boom a carichi ciclici) [60].
Sono inoltre stati condotti degli studi di ottimizzazione delle prestazioni dei TRAC booms, finalizzati all'aumento del valore dei momenti flettenti di buckling [50] [49]. Il principale limite degli approcci numerici utilizzati per progettare nuovi materiali o strutture in condizioni non testate è rappresentato dal costo computazionale che cresce notevolmente nel caso in cui nasca la necessità di confrontare più configurazioni, con la finalità di scegliere la migliore.

1.2.2 Tape-spring Hinges

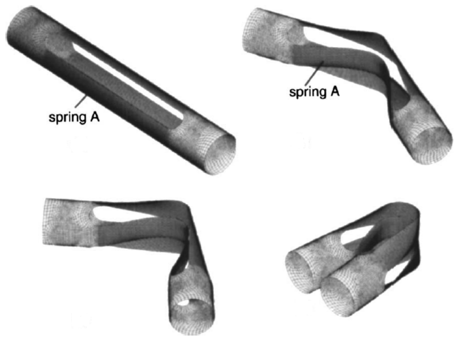
I tape springs possono essere sfruttati per generare altri tipi di strutture, come ad esempio i tape-spring hinges. Si tratta di cerniere autobloccanti ed in grado di dispiegarsi autonomamente, utili per il dispiegamento dei pannelli solari in ambiente spaziale. Analizzando gli svariati lavori che studiano i tape-spring hinges, è possibile affermare che questa tipologia di strutture si suddivide in due categorie:

- Forme tubolari: in questo caso si considera una struttura a forma di tubo, su cui vengono ritagliati degli slot in modo da facilitare il ripiegamento/dispiegamento. Per questa categoria, le configurazioni più diffuse sono quelle caratterizzate da 2 o 3 slot ([26], [20]), come si osserva in Figura 1.10.

- Forme non tubolari: in questo caso si considerano 2, 3 o più tape springs, posizionati in modo da generare varie configurazioni. Un esempio di questa categoria di strutture è osservabile in Figura 1.11 [57].



(a) 2 slots.



(b) 3 slots.

Figura 1.10: Tape-spring hinges tubolari.

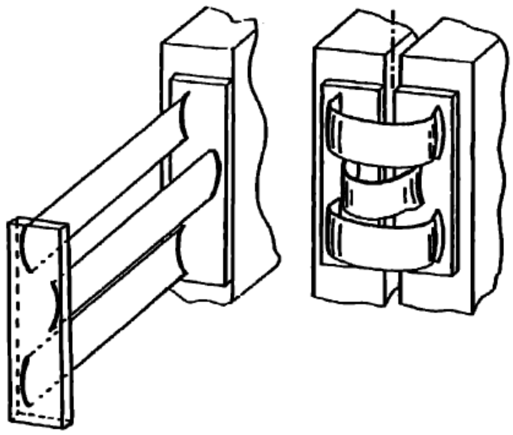


Figura 1.11: Esempio di tape-spring hinge non tubolare costituito da 3 tape springs.

L'utilità di queste strutture è stata già messa in evidenza in svariate missioni spaziali. Ad esempio, nella missione ESA Mars Express, è stato utilizzato un tape-spring hinge tubolare per implementare il sistema di dispiegamento dell'antenna di MARSIS (Mars Advanced Radar for Subsurface and Ionosphere Sounding). Essendo costituite da tape springs, queste cerniere non presentano un comportamento completamente lineare, tuttavia esse sono progettate in modo che la loro deformazione durante la fase di ripiegamento sia completamente elastica. Spesso queste strutture sono studiate attraverso dei test a flessione, in modo da valutare il loro comportamento in campo lineare, il valore del momento di picco e, successivamente, l'andamento in campo non lineare. Generalmente, come per i tape springs classici, anche per i tape-spring hinges si nota un andamento circa lineare per deformazioni sufficientemente piccole. Dopo il raggiungimento del momento di picco, si osserva un salto che porta ad un valore più basso del momento flettente e che rimane circa costante all'aumentare della deformazione. Questo andamento è facilmente osservabile in Figura 1.12, dove è stato riportato il grafico che mette in relazione il momento flettente con la rotazione nel caso di una cerniera non tubolare costituita da 3 tape springs. Inoltre, nel caso in cui la struttura non sia assialsimmetrica (come negli esempi riportati nelle Figure 1.10b e 1.11), si ha un comportamento diverso a seconda del verso in cui viene applicato il momento flettente. É bene notare che per questa tipologia di strutture, il momento di picco è un parametro molto importante: da un lato si è interessati a fare in modo che il suo valore sia sufficientemente elevato per evitare che la cerniera si ripieghi sotto l'azione di sollecitazioni esterne. Bisogna tuttavia evitare valori di picco troppo elevati perché questi rischierebbero di danneggiare i materiali e non garantire una chiusura agevole della struttura nel caso in cui essa dovesse essere ripiegata. Anche per i tape-springs hinges, i parametri

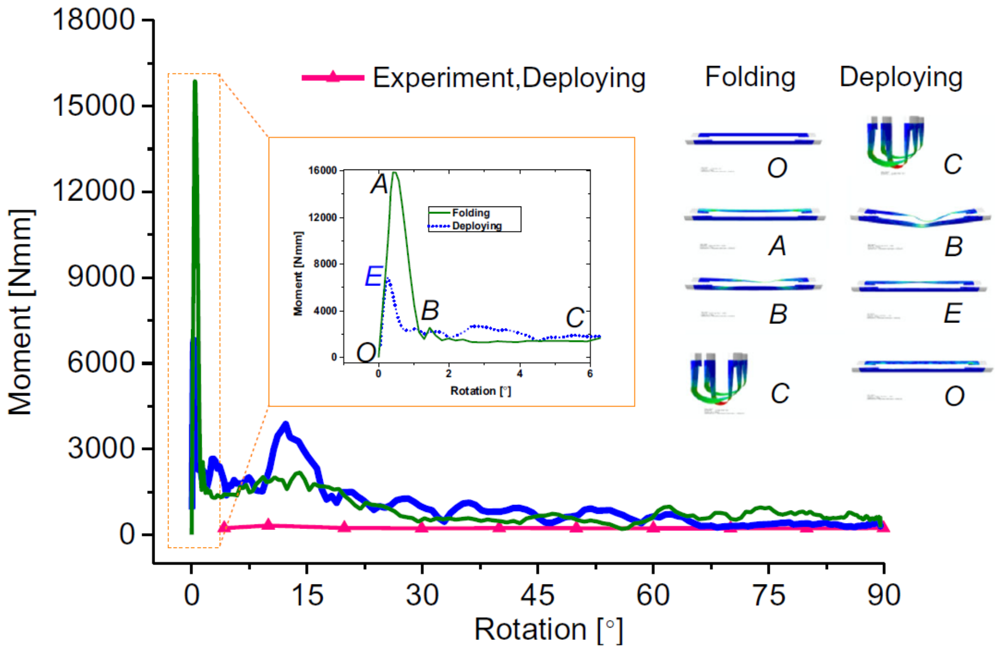


Figura 1.12: Andamento del momento flettente in funzione della rotazione nel caso di una cerniera non tubolare costituita da 3 tape springs.

geometrici rivestono un ruolo fondamentale, in quanto influenzano fortemente il comportamento meccanico di queste strutture. Spesso accade che le caratteristiche geometriche influenzino delle proprietà meccaniche che risultano essere in contrasto tra loro, quindi in questi casi si ricorre ad un processo di ottimizzazione multi-obiettivo (generalmente condotto mediante un approccio numerico) per risolvere il problema. Anche in queste situazioni, come già osservato per i TRAC boom, il costo computazionale delle analisi numeriche rappresenta il principale ostacolo nei confronti del processo di ottimizzazione della struttura.

1.2.3 Telescopic Tubular Mast

A differenza delle due strutture descritte nelle sottosezioni 1.2.1 e 1.2.2, i TTM (Telescopic Tubular Mast) sono generalmente utilizzati nel caso di applicazioni geometricamente più estese. Per fare un esempio, è possibile considerare lo scudo solare del James Webb Space Telescope (JWST). Il JWST è un telescopio spaziale a raggi infrarossi che verrà utilizzato per studiare la forma e la composizione chimica dell'universo, ma anche l'evoluzione di galassie, stelle e pianeti. Il suo lancio è previsto per la fine del 2021 e viene considerato come il più grande telescopio mai inviato nello spazio. Esso è costituito principalmente da 4 elementi: un Optical Telescope Element (OTE), un Integrated Science Instrument Module (ISIM), uno spacecraft ed un sunshield [19]. Lo scudo solare è un sottosistema il cui obiettivo è quello di proteggere gli strumenti scientifici (tra cui rilevatori e filtri) e gli specchi del telescopio spaziale. Questo scudo

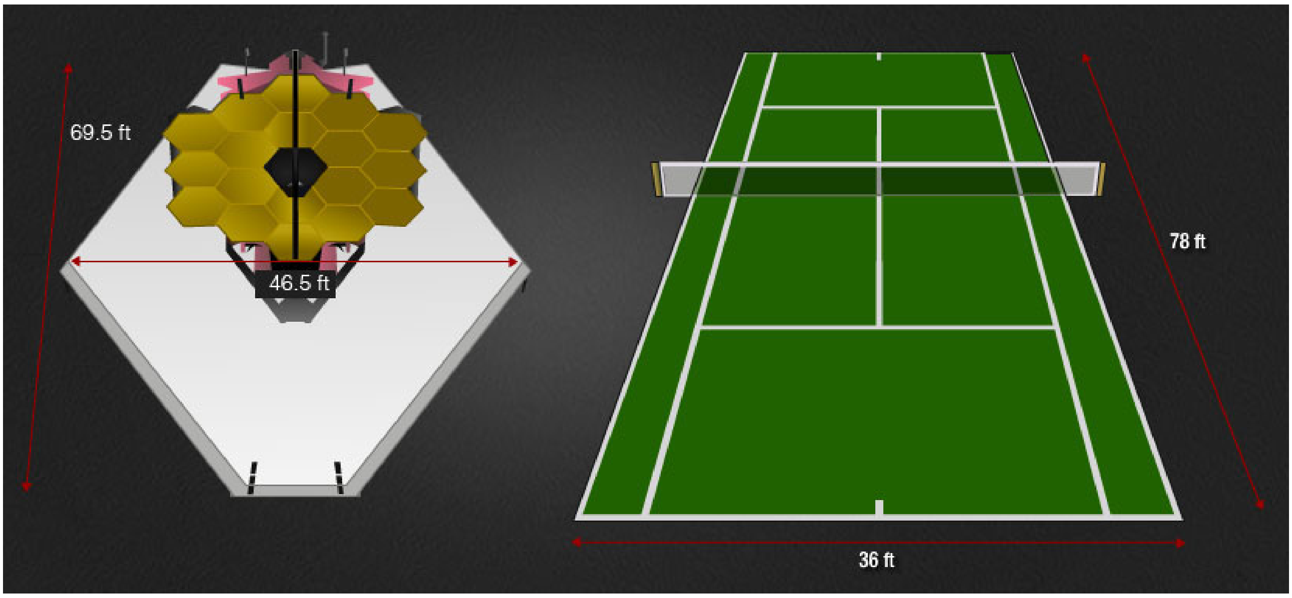
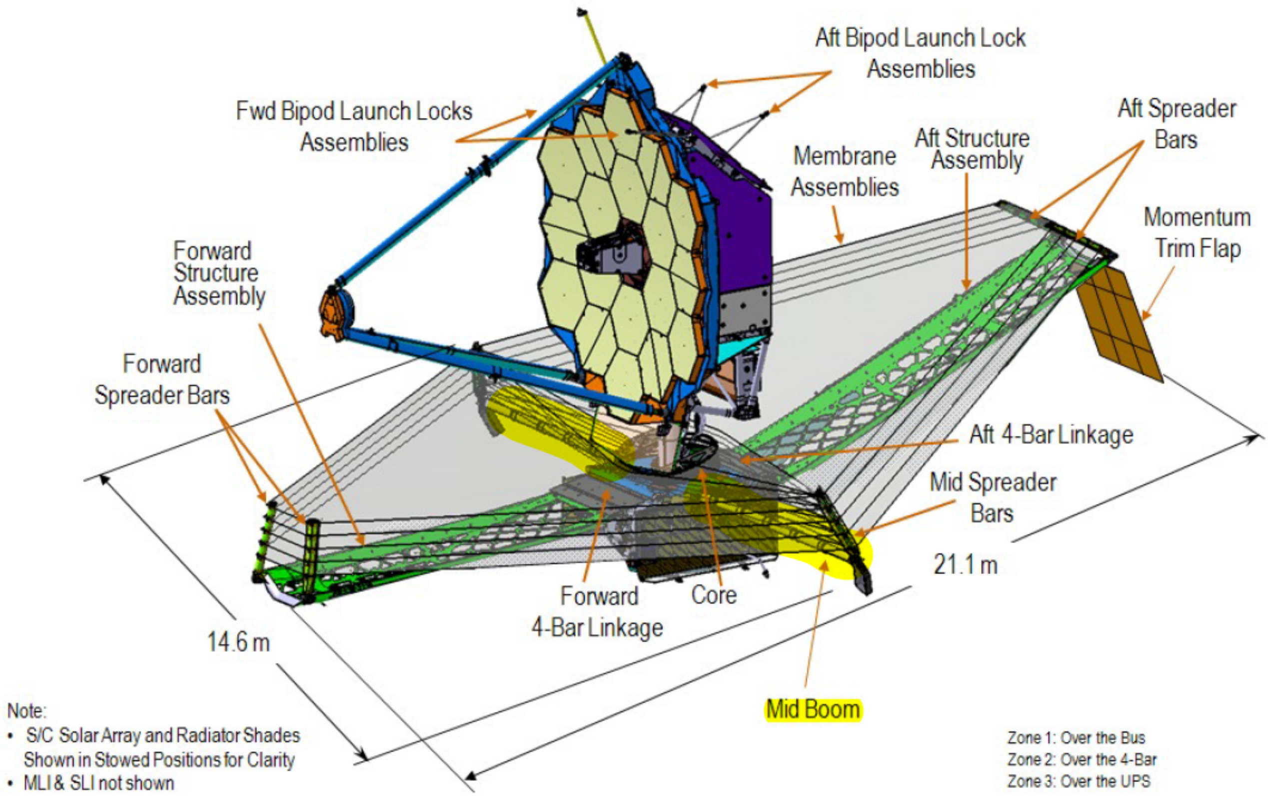


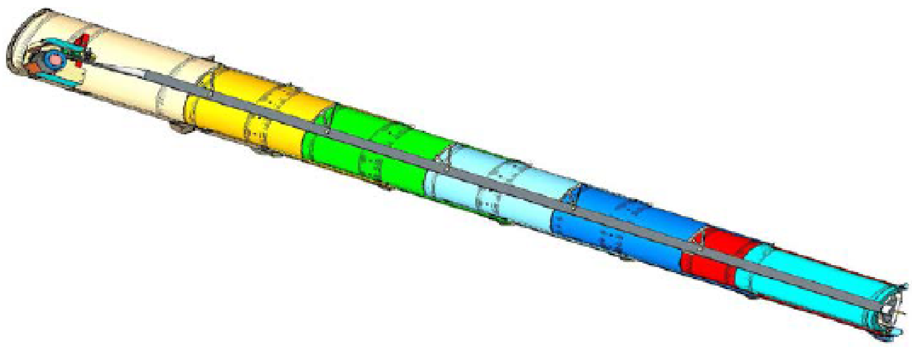
Figura 1.13: Confronto tra lo scudo solare del JWST ed un campo da tennis.

è costituito da cinque membrane in Kepton della dimensione di 14 $m \times 21$ m ed è il sottosistema più esteso in termini di area (basti pensare che la sua estensione si avvicina a quella di un campo da tennis, come si osserva in Figura 1.13 [61]). I TTM svolgono un ruolo fondamentale per il dispiegamento dello scudo solare del JWST: in particolare vengono utilizzati due boom telescopici (che in questo caso prendono il nome di Mid-Boom Assemblies o MBAs), come si osserva in Figura 1.14, per garantire il dispiegamento del sunshield lungo il suo lato più corto [43].

I Telescopic Tubular Mast sono delle strutture costituite da una serie di cilindri concentrici che generalmente possono essere dispiegati o ritratti tramite un attuatore posizionato alla base della struttura stessa [30] [8]. Per fare un esempio, una struttura di tipo TTM è stata utilizzata nel nanosatellite QuakeSat, per l'estensione di un magnetometro (in questo caso però si ha a che fare con dimensioni geometriche molto più piccole rispetto a quelle che caratterizzano il JWST). Utilizzando dei materiali compositi per produrre le sezioni tubolari, è possibile ottenere una struttura sufficientemente rigida e leggera, utilizzabile in ambito aerospaziale. Il vantaggio di queste strutture sta nel fatto che esse sfruttano un sistema di dispiegamento relativamente semplice, sono costituite da un numero limitato di componenti e sono resistenti ai failure strutturali dovuti all'impatto con micrometeoriti o altri corpi spaziali. Un meccanismo di dispiegamento molto utilizzato prevede l'utilizzo di uno Storable Tubular Extendible Member (STEM) azionato tramite un motore che lo spinge contro l'estremità dell'ultima sezione tubolare. Queste sezioni, inizialmente ripiegate l'una dentro l'altra, vengono estratte consecutivamente, a partire da quella con diametro minimo. Lo STEM è costituito da una sezione a "C" in metallo che viene appiattita in modo che esso possa essere arrotolato su una bobina. Il tubo più interno, collegato all'estremità dello STEM, viene estratto per primo: dopo essere stato estratto completamente, esso si collega alla prima sezione cilindrica che lo avvolge, tramite dei piccoli perni conici che sono distribuiti circonferenzialmente nell'anello di irrigidimento posizionato all'estremità inferiore di ciascun tubo. I perni sono caricati radialmente verso l'esterno da piccole molle, in modo da accoppiarsi con i fori rastremati all'estremità superiore di ciascun tubo adiacente più grande. Per ritrarre un singolo tubo, i suoi perni di chiusura vengono ritratti mediante un sistema di rampe. Nel Capitolo 6 viene analizzato un TTM sviluppato dalla Astro Space, azienda che si è anche occupata della produzione dei MBAs utilizzati per il JWST.



(a) James Webb Space Telescope.



(b) Mid-Boom Assembly.

Figura 1.14: Rappresentazione grafica del JWST e dei due TTM (evidenziati in giallo nella figura superiore) utilizzati per il dispiegamento dello scudo solare.

Capitolo 2

Metodi agli Elementi Finiti Avanzati per Strutture in Composito

Analizzare una struttura significa valutare la sua risposta quando essa è sottoposta all'azione di vincoli e carichi esterni. Generalmente, l'obiettivo principale è quello di valutare gli spostamenti, le deformazioni e le tensioni in ogni punto della struttura, in modo da verificare che essa sia in grado di funzionare correttamente durante la sua vita operativa. I carichi che agiscono su una struttura possono essere statici o dinamici: i primi sono costanti nel tempo, mentre i secondi sono caratterizzati da un andamento variabile nel tempo (questi ultimi, a loro volta, si suddividono in carichi periodici ed aperiodici a seconda che abbiano o meno un pattern ripetitivo nel tempo). Lo studio dei carichi dinamici riveste un ruolo fondamentale in ambito spaziale, in quanto premette di valutare eventuali condizioni di risonanza che possono verificarsi durante la missione, nonché la risposta della struttura nel caso di possibili sollecitazioni a fatica. Per quanto riguarda le strutture spaziali, i carichi dinamici possono essere dovuti alla separazione di uno stadio, alla spinta dei propulsori del lanciatore, all'azione del campo vibro-acustico e così via. Nel caso dei carichi statici, invece, l'interesse principale è quello di verificare che nel dominio considerato non siano presenti regioni in cui viene superata la tensione di rottura o snervamento del materiale da cui è costituita la struttura. Inoltre, è anche necessario assicurarsi che la deformazione della struttura non sia tale da comprometterne il corretto funzionamento, e quindi che il suo valore sia contenuto nei limiti di specifica. I carichi statici e quasi-statici sono studiati per valutare le condizioni relative al trasporto aereo (o a terra) della struttura [32].
L'obiettivo di questo capitolo è qundi quello di introdurre le equazioni fondamentali per l'analisi delle strutture, evidenziando i pregi ed i difetti dei metodi generalmente utilizzati per la loro risoluzione.

2.1 Formulazione del Problema Elastico

In questa sezione viene riportato il procedimento che permette di arrivare alla scrittura delle equazioni su cui si basa l'analisi strutturale di un corpo 3D, considerando il caso di piccoli spostamenti, in un sistema di riferimento Cartesiano ortogonale (le cui coordinate sono indicate con x, y e z). La formulazione del problema elastico è stata effettuata seguendo il metodo riportato nelle reference [1], [36], [35], [38].
Viene preso in considerazione un corpo continuo tridimensionale D caratterizzato da un volume V ed una superficie S, vincolato in corrispondenza di alcune porzioni della superficie e sottoposto all'azione di carichi concentrati P, carichi lineari q, carichi di superficie p e carichi di volume g (come si può osservare in Figura 2.1). Lo stato di tensione in un generico punto del dominio

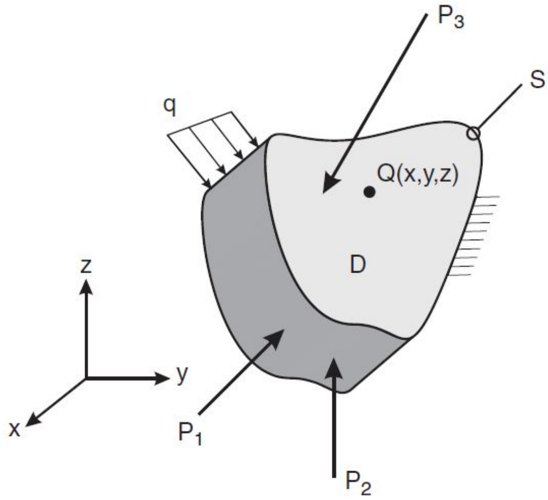


Figura 2.1: Dominio tridimensionale con vincoli e carichi applicati.

può essere espresso attraverso il tensore degli sforzi, che nel caso generale ha 9 componenti, come è anche possibile osservare dalla Figura 2.2:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Le componenti di $\boldsymbol{T}$ possono essere espresse nella forma σ_{ij}, dove il pedice i indica la direzione lungo la quale è diretto lo sforzo, mentre il pedice j indica la direzione normale alla faccia su cui agisce lo sforzo. Per il teorema di reciprocità di Cauchy, che deriva dalla scrittura delle

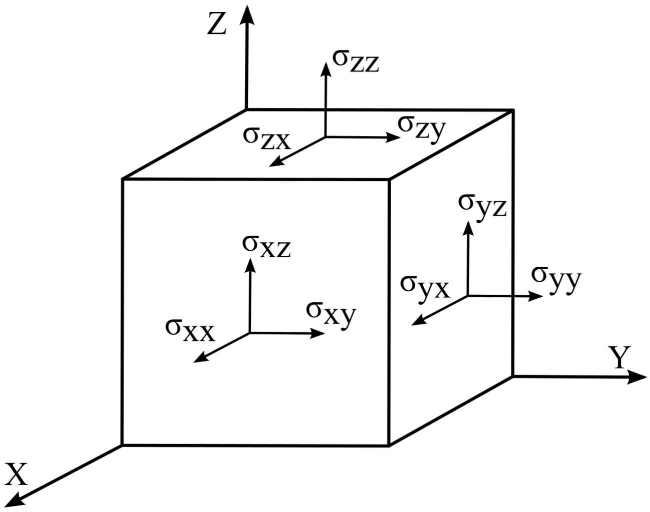


Figura 2.2: Rappresentazione grafica degli sforzi interni σ_{ij}.

equazioni di equilibrio alla rotazione, è possibile affermare che:

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau_{xy} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \tau_{xz} \\ \sigma_{zy} = \sigma_{yz} = \tau_{yz} \end{cases} \tag{2.2}$$

Di conseguenza, per formulare il problema elastico, si farà riferimento al vettore degli sforzi, che contiene 6 componenti

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}\} \tag{2.3}$$

2.1.1 Equazioni di Equilibrio

In ogni punto del dominio tridimensionale V, le componenti del vettore degli sforzi devono soddisfare le equazioni di equilibrio, che possono essere scritte nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = g_x \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = g_y \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = g_z \end{cases} \tag{2.4}$$

dove g_x, g_y e g_z indicano le componenti delle forze per unità di volume che agiscono sul corpo considerato (come, ad esempio, le forze di inerzia o il peso). Il sistema (2.4) può essere ottenuto scrivendo le equazioni di equilibrio alla traslazione lungo le 3 direzioni del sistema di riferimento, sfruttando le espansioni di Taylor degli sforzi scritte in un punto generico del dominio. Questo sistema di equazioni può anche essere scritto in forma matriciale

$$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{g} \tag{2.5}$$

dove $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{g}$ hanno la seguente forma:

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{g}^T = \{g_x, g_y, g_z\} \tag{2.7}$$

2.1.2 Condizioni al Contorno

Per tenere conto delle condizioni al contorno, la superficie del corpo può essere divisa in due parti: S_m è la porzione di superficie sulla quale valgono le condizioni al contorno di tipo

meccanico, mentre S_g è la porzione di superficie sulla quale valgono le condizioni al contorno di tipo geometrico.
Per quanto riguarda le condizioni al contorno meccaniche, è possibile affermare che in ogni punto appartenente alla superficie S_m, devono essere soddisfatte le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = p_x \\ \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z = p_y \\ \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z = p_z \end{cases} \tag{2.8}$$

dove $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ è il versore normale alla superficie S_m, mentre $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ è il vettore delle forze per unità di superficie applicate su S_m.
In corrispondenza della superficie S_g, valgono le condizioni al contorno geometriche, il che significa che gli spostamenti dei punti appartenenti a questa superficie sono noti:

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \tag{2.9}$$

dove $\boldsymbol{u}$ è il vettore degli spostamenti che, appunto, ha un andamento noto sulla superficie S_g

$$\boldsymbol{u}^T = \{u_x, u_y, u_z\} \tag{2.10}$$

2.1.3 Relazioni Geometriche

É possibile introdurre il vettore delle deformazioni, che presenta sei componenti come quello degli sforzi:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}\} \tag{2.11}$$

Nel caso della teoria dei piccoli spostamenti, si assume che la configurazione deformata della struttura non differisca eccessivamente da quella indeformata. In questo caso le deformazioni sono legate agli spostamenti attraverso le seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = u_{x,x} \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = u_{y,y} \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = u_{z,z} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x} = u_{x,z} + u_{z,x} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y} = u_{y,z} + u_{z,y} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} = u_{x,y} + u_{y,x} \end{cases} \tag{2.12}$$

Anche in questo caso è possibile scrivere il sistema di equazioni in forma compatta, ricordando la (2.6):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{u} \tag{2.13}$$

2.1.4 Legge di Hooke

Secondo la teoria dei piccoli spostamenti, le componenti del vettore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ possono essere ottenute come combinazione lineare delle componenti del vettore delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.14}$$

Invertendo la matrice $\boldsymbol{C}$, si ottiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\sigma} \tag{2.15}$$

dove $\boldsymbol{C}$ è la matrice dei coefficienti elastici di rigidezza, mentre $\boldsymbol{S}$, che rappresenta la sua inversa ($\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{S}$), è la matrice dei coefficienti elastici di cedevolezza. Scrivendo l'equazione (2.14) in forma estesa, si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

In realtà sia la matrice $\boldsymbol{C}$ che la matrice $\boldsymbol{S}$ sono simmetriche ed assumono una forma particolare a seconda del materiale preso in considerazione. Ad esempio, per i materiali ortotropi, che sono caratterizzati da tre piani di simmetia ortogonali tra loro, il numero di costanti elastiche indipendenti si riduce a 9, in quanto le matrici assumono la seguente forma (se si scelgono assi di riferimento 1, 2 e 3 paralleli ai piani di simmetria):

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

In particolare, è possibile esprimere i termini S_{ij} in funzione delle costanti ingegneristiche del materiale, secondo la seguente formulazione:

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Dove E_i sono i moduli di Young, G_{ij} sono i moduli di taglio e ν_{ij} sono i coefficienti di Poisson. Essendo la matrice simmetrica, è possibile scrivere:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.20}$$

I materiali trasversalmente isotropi rappresentano un caso particolare dei materiali ortotropi. Un materiale ortotropo, infatti, viene chiamato trasversalmente isotropo quando uno dei suoi piani principali è un piano di isotropia, cioè si verifica che in ogni punto è presente un piano su cui le proprietà meccaniche sono le stesse in ogni direzione. Alcuni compositi unidirezionali caratterizzati da fibre disposte secondo una matrice esagonale possono essere considerati trasversalmente isotropi (il piano perpendicolare alle fibre corrisponde al piano di isotropia). Questo è il caso dei compositi unidirezionali costituiti da fibre di vetro o carbonio disposte in una matrice di resina epossidica, che presentano un elevato rapporto di volume delle fibre. Per i materiali trasversalmente isotropi si dimostra che $E_2 = E_3$, $G_{12} = G_{13}$, $\nu_{12} = \nu_{13}$ [21].

2.1.5 Principio dei Lavori Virtuali: Forma Forte

Nei paragrafi precedenti sono state riportate tutte le equazioni di governo del problema elastico, secondo la teoria dei piccoli spostamenti. Nel complesso, sono presenti 15 incognite (ovvero 6 componenti di sforzo $\boldsymbol{\sigma}$, 6 componenti di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ e 3 spostamenti $\boldsymbol{u}$) e 15 equazioni (ovvero le equazioni di equilibrio (2.4), le condizioni al contorno (2.8) (2.9), le relazioni geometriche (2.12) e la legge di Hooke (2.14)). Attraverso delle opportune sostituzioni, tutte le equazioni di governo possono essere espresse secondo gli spostamenti, ovvero in funzione delle componenti del vettore $\boldsymbol{u}$, ottenendo così la formulazione del problema elastico per una struttura tridimensionale in termini di spostamento. É possibile raggiungere un risultato analogo sfruttando il principio dei lavori virtuali ("principle of virtual work", abbreviato in PVW), che può essere enunciato in questo modo: supponendo che il sistema meccanico sia in equilibrio sotto le forze applicate e i vincoli geometrici prescritti, si verifica che la somma di tutti i lavori virtuali svolti dalle forze esterne ed interne esistenti nel sistema, per qualsiasi spostamento virtuale infinitesimale arbitrario che soddisfa i vincoli geometrici prescritti, è pari a zero. Nel caso in cui il PVW sia utilizzato per la risoluzione del problema elastico, considerando gli spostamenti come incognite, esso può essere chiamato "principle of virtual displacements", abbreviato in PVD. Da un punto di vista matematico, il PVD può essere espresso con la seguente formula:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \tag{2.21}$$

dove L_{int} indica il lavoro elastico interno, L_{ext} indica il lavoro delle forze esterne e δ indica una variazione virtuale. Il lavoro interno può essere espresso con la formula seguente:

$$\delta L_{int} = \int_V \left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\delta\varepsilon_{zz} + \tau_{xz}\delta\varepsilon_{xz} + \tau_{yz}\delta\varepsilon_{yz} + \tau_{xy}\delta\varepsilon_{xy}\right) dV \tag{2.22}$$

Sfruttando la formulazione compatta, si ottiene:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \tag{2.23}$$

Sfruttando l'equazione (2.13) è possibile scrivere il lavoro interno in termini di spostamento:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta(\boldsymbol{bu})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta(\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b}^T) \boldsymbol{\sigma} dV \tag{2.24}$$

Per ottenere le equazioni in forma forte, è possibile procedere integrando per parti:

$$\int_V \delta(\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b}^T) \boldsymbol{\sigma} dV = -\int_V \delta\boldsymbol{u}^T (\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\sigma}) dV + \int_S \delta\boldsymbol{u}^T (\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}^T \boldsymbol{\sigma}) dS \tag{2.25}$$

dove $\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}$ è la matrice dei coseni direttori che contiene le componenti del versore normale alla superficie S in un generico punto P

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \\ 0 & 0 & n_z \\ n_z & 0 & n_x \\ 0 & n_z & n_x \\ n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Per quanto riguarda il lavoro delle forze esterne, esso è espresso come la somma di quattro contributi, derivanti da: forze di volume $\boldsymbol{g}$, che agiscono sul volume V, forze di superficie $\boldsymbol{p}$, che agiscono sulla superficie S, carichi lineari $\boldsymbol{q}$, che agiscono sulla linea L ed i carichi concentrati $\boldsymbol{P}$, in corrispondenza del punto Q. Quindi la formula è la seguente:

$$\delta L_{ext} = \int_V \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{g} dV + \int_S \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{p} dS + \int_L \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{q} dy + \delta\boldsymbol{u}_Q^T \boldsymbol{P} \tag{2.27}$$

Uguagliando la (2.25) e la (2.27) si ottiene la formulazione completa del PVD:

$$-\int_V \delta\boldsymbol{u}^T (\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\sigma}) dV + \int_S \delta\boldsymbol{u}^T (\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}^T \boldsymbol{\sigma}) dS = \int_V \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{g} dV + \int_S \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{p} dS + \int_L \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{q} dy + \delta\boldsymbol{u}_Q^T \boldsymbol{P} \tag{2.28}$$

Considerando la (2.28) è possibile uguagliare gli integrali calcolati sullo stesso dominio. Considerando gli integrali di volume, si ottengono le equazioni di equilibrio per un generico punto P all'interno del volume V:

$$-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{g} \tag{2.29}$$

Considerando, invece, gli integrali di superficie, si ottengono le condizioni al contorno meccaniche:

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}^T\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{p} \tag{2.30}$$

Estendendo le equazioni (2.29) e (2.30) si ottengono, rispettivamente, le equazioni (2.4) e (2.8). Attraverso la legge di Hooke (2.14) e le relazioni geometriche (2.13) è possibile esprimere le equazioni di equilibrio in termini di spostamenti:

$$-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{b}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \tag{2.31}$$

Questo permette di scrivere le equazioni di equilibrio in forma forte, introducendo la matrice $\boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \tag{2.32}$$

dove

$$\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{b} \tag{2.33}$$

Si nota che $\boldsymbol{k}$ è una matrice 3×3 contenente, quindi, 9 componenti:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Le componenti k_{ij} possono essere scritte in forma esplicita, conoscendo la matrice dei coefficienti elastici di rigidezza $\boldsymbol{C}$.
Quindi, è stato possibile ottenere le equazioni del problema elastico lineare in forma forte. Il termine "forte" si riferisce al fatto che la soluzione del problema deve soddisfare le equazioni in ogni punto del corpo continuo D. Una soluzione in forma chiusa, però, può essere ottenuta solo considerando geometrie e condizioni al contorno piuttosto semplici. Attraverso l'utilizzo del PVD è possibile ricavare una forma debole del problema che, pur introducendo un'approssimazione, permette generalmente di risolvere il problema nella maggior parte delle applicazioni.

2.1.6 Principio dei Lavori Virtuali: Forma Debole

Il PVD permette di esprimere le equazioni del problema elastico in forma debole, introducendo un'approssimazione che può essere rappresentata attraverso la seguente equazione:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{U} \tag{2.35}$$

Quindi per ottenere la forma debole, il campo di spostamento $\boldsymbol{u}$ può essere espresso in funzione degli spostamenti nodali, raggruppati nel vettore $\boldsymbol{U}$, attraverso una matrice $\boldsymbol{N}$ le cui componenti prendono il nome di "funzioni di forma". Per poter applicare questo tipo di formulazione è necessario considerare un numero finito di punti appartenenti al corpo D, chiamati "nodi", ed esprimere il campo di spostamento in funzione degli spostamenti in corrispondenza di questi punti. Per fare un esempio, è possibile considerare un dominio cubico e scegliere come nodi i punti in corrispondenza dei vertici del cubo, mentre è possibile considerare i polinomi di Lagrange come funzioni di forma. In questo caso si otterrebbero $N_{NE} = 8$ nodi, ma il ragionamento su cui si basa la formulazione debole è valido indipendentemente dal numero di nodi N_{NE}.
Il PVD può ancora essere scritto utilizzando la formula (2.21) e lo stesso vale per il lavoro interno, espresso nella (2.23). Il lavoro esterno può essere derivato dalle forze esterne secondo la formula

$$\delta L_{ext} = \delta \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{P} \tag{2.36}$$

dove $\boldsymbol{P}$ è il vettore delle forze nodali

$$\boldsymbol{P}^T = \{P_{x1}, P_{y1}, P_{z1}, P_{x2}, P_{y2}, P_{z2}, \dots, P_{xNE}, P_{yNE}, P_{zNE}\} \tag{2.37}$$

mentre $\boldsymbol{U}$ è il vettore degli spostamenti nodali

$$\boldsymbol{U}^T = \{u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{z2}, \dots, u_{xNE}, u_{yNE}, u_{zNE}\} \tag{2.38}$$

Entrambi i vettori hanno $3 \times N_{NE}$ componenti, in quanto sono stati considerati tre spostamenti per ogni nodo (uno per ogni asse del sistema di riferimento). L'equazione (2.35) può essere sostituita nelle relazioni geometriche (2.13) che a loro volta possono essere sostituite nella legge di Hooke (2.14), ottenendo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{N}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U} \tag{2.39}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U} \tag{2.40}$$

dove la matrice $\boldsymbol{B}$ è ottenuta applicando l'operatore differenziale $\boldsymbol{b}$ alla matrice delle funzioni di forma $\boldsymbol{N}$. Considerando che la variazione virtuale può essere scritta come

$$\delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{N} \delta \boldsymbol{U} \tag{2.41}$$

il lavoro interno è rappresentato dalla seguente equazione (tenendo conto del fatto che gli spostamenti nodali possono essere estratti dall'integrale in quanto costanti):

$$\delta L_{int} = \delta \boldsymbol{U}^T \left(\int_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B} dV \right) \boldsymbol{U} = \delta \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{U} \tag{2.42}$$

dove

$$\boldsymbol{K} = \int_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B} dV \tag{2.43}$$

è la matrice di rigidezza per un problema 3D secondo la forma debole. Sostituendo la (2.42) e la (2.36) nella (2.21), si ottiene

$$\delta \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{U} = \delta \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{P} \tag{2.44}$$

e, di conseguenza

$$\boldsymbol{K} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{P} \tag{2.45}$$

che rappresenta l'equazione di equilibrio in forma debole per un corpo solido.

2.2 Metodo degli Elementi Finiti

Il PVD, introdotto nella sezione precedente, può essere considerato come il principale strumento che permette di ricavare le equazioni su cui si basa il metodo degli elementi finiti ("finte element method", abbreviato in FEM). Il FEM nasce dalla necessità di sviluppare degli algoritmi in grado di risolvere, mediante una soluzione approssimata, delle equazioni differenziali alle derivate parziali, caratterizzate da specifiche condizioni al contorno. Storicamente è possibile ricordare due innovazioni fondamentali che hanno permesso lo sviluppo del FEM: quella matematica e quella tecnologica. L'innovazione tecnologica si basa sullo sviluppo di calcolatori capaci di risolvere problemi matematici in breve tempo, mentre l'innovazione matematica riguarda lo sviluppo di metodi in grado di ricavare una soluzione approssimata di un sistema di equazioni differenziali (uno tra questi è proprio il PVD).
Nato intorno al 1960, il FEM si basa sulla suddivisione del dominio di interesse, ad esempio una struttura, in un numero finito di sottodomini più semplici, chiamati "elementi". Ogni elemento è delimitato da un numero finito di punti, chiamati "nodi". L'idea alla base del FEM è quella di esprimere la soluzione del problema in ogni punto del dominio in funzione del valore in corrispondenza dei nodi che delimitano gli elementi con cui esso è stato discretizzato. Nel campo della meccanica strutturale, quindi, il campo di spostamento all'interno di una struttura, sarà espresso in funzione dello spostamento ai nodi che delimitano gli elementi di tale struttura. Le funzioni che legano il campo di spostamento agli spostamenti nodali prendono il nome di "funzioni di forma" e spesso corrispondono a dei polinomi algebrici. Fondamentalmente, il FEM può essere considerato un processo suddivisibile in tre step [24]:

1 Discretizzazione del dominio in una serie finita di elementi.

2 Calcolo della soluzione approssimata su ogni elemento, ricavata come combinazione lineare dei valori nodali tramite le funzioni di forma.

3 Assemblaggio dei vari elementi tramite relazioni algebriche e scrittura della soluzione complessiva del problema.

Bisogna inoltre tenere conto del fatto che attraverso il FEM vengono generalmente introdotte due tipologie di approssimazioni: una di tipo matematico ed una di tipo geometrico. L'approssimazione di tipo matematico deriva dall'utilizzo delle equazioni in forma debole, ovvero dalla necessità di utilizzare delle funzioni di forma per esprimere il campo di spostamento. L'approssimazione di tipo geometrico, invece, deriva dalla discretizzazione del dominio in una serie di elementi di forma più semplice. Infatti non è detto che gli elementi riescano ad approssimare correttamente le superfici del corpo (ad esempio nel caso in cui esse siano curve, come in Figura 2.3).

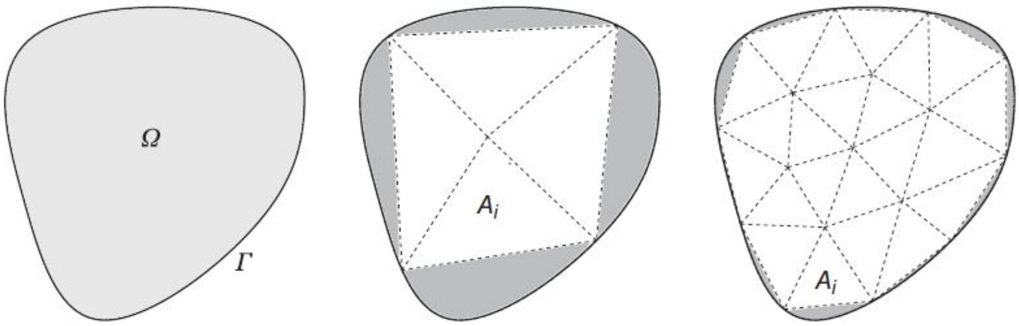


Figura 2.3: Discretizzazione di un dominio bidimensionale Ω tramite elementi finiti triangolari.

Generalmente l'errore legato all'approssimazione matematica può essere ridotto aumentando l'ordine delle funzioni di forma, mentre l'errore legato alla discretizzazione del dominio può essere ridotto aumentando il numero di elementi.

2.2.1 Asta sollecitata con carico assiale

Per mostrare un esempio piuttosto semplice relativo all'applicazione del FEM, è possibile prendere in considerazione il problema seguente. L'obiettivo è quello di calcolare il campo di spostamento in un'asta di materiale omogeneo e isotropo, sollecitata con un carico assiale costante distribuito $p(x) = p_0$ (come si osserva in Figura 2.4). L'asta ha lunghezza L, sezione trasversale A (costante lungo L), ed è incastrata in corrispondeza dell'estremo sinistro ($x = 0$), mentre è libera nell'estremo destro ($x = L$).

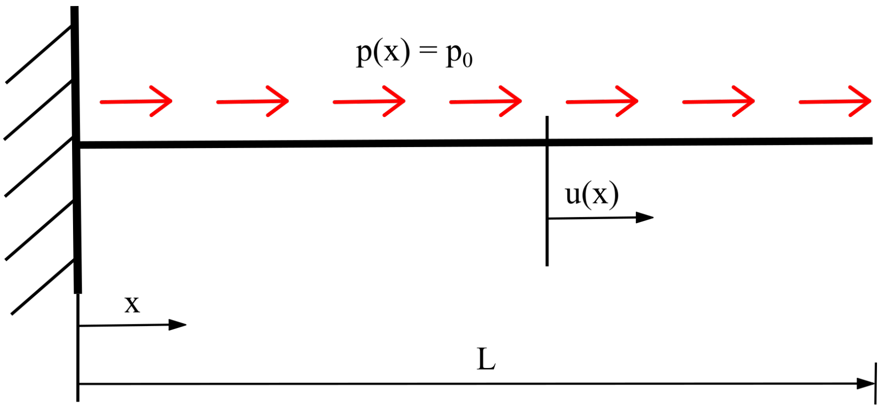


Figura 2.4: Rappresentazione di un'asta caricata assialmente.

In questo caso si ha a che fare con un dominio monodimensionale, quindi è possibile considerare degli spostamenti assiali ($u = u_x$). Per ricavare la soluzione esatta di questo problema è possibile ricordare le seguenti formule:

$$\frac{dN(x)}{dx} = -p(x)$$

dove $N(x)$ è il carico assiale in corrispondenza di una sezione a distanza x dall'estremità incastrata. Integrando si ottiene

$$N(x) = p_0(L - x)$$

$$\sigma(x) = \sigma_{xx}(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{p_0}{A}(L - x)$$

Essendo un problema monodimensionale, la legge di Hooke assume la forma

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_{xx}(x) = \frac{\sigma_{xx}(x)}{E} = \frac{p_0}{EA}(L - x)$$

dove E indica il modulo di Young dell'asta. Le relazioni geometriche diventano

$$\varepsilon_{xx}(x) = \frac{du_x(x)}{dx} = u_{x,x}$$

quindi, integrando

$$u(x) = u_x(x) = \frac{p_0 L^2 x}{EAL}\left(1 - \frac{x}{2L}\right) \tag{2.46}$$

Volendo risolvere questo problema con il metodo degli elementi finiti, è possibile considerare un singolo elemento (Figura 2.5), delimitato da due nodi, che copre tutto il dominio (in questo caso non si effettua una vera e propria approssimazione geometrica poiché il dominio ha una forma molto semplice). Quindi il campo di spostamento all'interno del dominio potrà essere espresso in funzione degli spostamenti assiali in corrispondenza dei nodi (indicati come U_1 ed U_2).

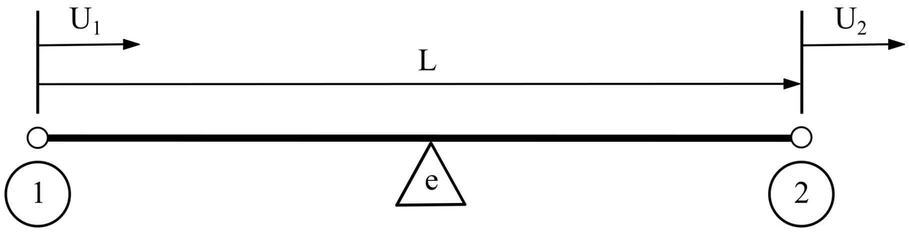


Figura 2.5: Rappresentazione dell'elemento "e".

É possibile scegliere come funzioni di forma dei polinomi di Lagrange lineari:

$$N_1(x) = L_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \tag{2.47}$$

$$N_2(x) = L_2(x) = \frac{x}{L} \tag{2.48}$$

Quindi si ottiene:

$$\boldsymbol{U}^T = \{U_1, U_2\}$$

$$\boldsymbol{N} = \{N_1(x), N_2(x)\}$$

$$u(x) = N_1(x)U_1 + N_2(x)U_2 = \boldsymbol{NU} = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{N}^T$$

In questo caso il lavoro interno corrisponde a

$$\delta L_{int} = \int_V \delta(u_{x,x})E(u_{x,x})dV = \int_0^L \delta(u_{x,x})E(u_{x,x})Adx = \delta\boldsymbol{U}^T\left(EA\int_0^L \boldsymbol{N}_{,x}^T\boldsymbol{N}_{,x}dx\right)\boldsymbol{U} \quad (2.49)$$

Confrontando la (2.49) con la (2.42), si nota che in questo caso

$$\boldsymbol{K} = EA\int_0^L \boldsymbol{N}_{,x}^T\boldsymbol{N}_{,x}dx \quad (2.50)$$

e, svolgendo i calcoli

$$\boldsymbol{K} = EA\int_0^L \begin{Bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{Bmatrix}\{-1/L,\ 1/L\}\,dx = EA\int_0^L \begin{bmatrix} 1/L^2 & -1/L^2 \\ -1/L^2 & 1/L^2 \end{bmatrix} dx =$$

$$= \boldsymbol{K} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

si ottiene la matrice di rigidezza dell'elemento e, che in questo caso corrisponde all'unico elemento utilizzato per discretizzare il dominio. Il lavoro esterno può essere calcolato considerando esclusivamente il contributo di p_0, unico carico agente sulla struttura:

$$\delta L_{ext} = \int_L p_0\delta(u_x)dl = \delta\boldsymbol{U}^T\int_0^L p_0\boldsymbol{N}^T dx \quad (2.52)$$

Confrontando la (2.52) con la (2.36), si nota che in questo caso il vettore dei carichi nodali assume la seguente forma:

$$\boldsymbol{P} = \int_0^L p_0\boldsymbol{N}^T dx \quad (2.53)$$

e, svolgendo i calcoli

$$\boldsymbol{P} = p_0\int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - x/L \\ x/L \end{Bmatrix} dx = \frac{p_0L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

É possibile notare che la matrice $\boldsymbol{K}$ è singolare ($det[\boldsymbol{K}] = 0$), quindi non può essere invertita e non è ancora possibile risolvere l'equazione di equilibrio $\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{P}$. Per procedere è necessario imporre le condizioni al contorno: è necessario imporre $U_1 = 0$ (in quanto il primo nodo si trova in corrispondenza dell'incastro, quindi il suo spostamento è nullo) ed introdurre il vettore $\boldsymbol{R}$ delle reazioni vincolari, che andrà sommato a quello dei carichi nodali. Il vettore $\boldsymbol{R}$ contiene le reazioni vincolari in corrispondenza dei nodi: è necessario ricordare che la reazione vincolare in corrispondenza del secondo nodo è nulla, in quanto esso è collocato sull'estremo libero.

$$\boldsymbol{R} = \left\{ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array} \right\} \tag{2.55}$$

Componendo le equazioni (2.49), (2.51), (2.54) e (2.55) si ottiene:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ U_2 \end{array} \right\} = \frac{p_0 L}{2} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} R_1 \\ 0 \end{array} \right\} \tag{2.56}$$

Risolvendo la (2.56) si ottiene $R_1 = -p_0 L$ ed $U_2 = \dfrac{p_0 L^2}{2EA}$. Quindi si ricava il campo di spostamento nella forma approssimata, semplicemente moltiplicando N_2 (indicato nella (2.48)) ed U_2:

$$u(x) = u_x(x) = \frac{p_0 L}{2EA} x \tag{2.57}$$

Confrontando la soluzione esatta (2.46) con quella approssimata (2.57) si nota che esse coincidono esclusivamente in corrispondenza dei nodi, mentre differiscono nei punti interni del dominio (Figura 2.6). Questo è dovuto al fatto che sono state scelte delle funzioni di forma lineari per approssimare una soluzione parabolica (cioè che corrisponde ad una funzione del secondo ordine rispetto alla variabile x).

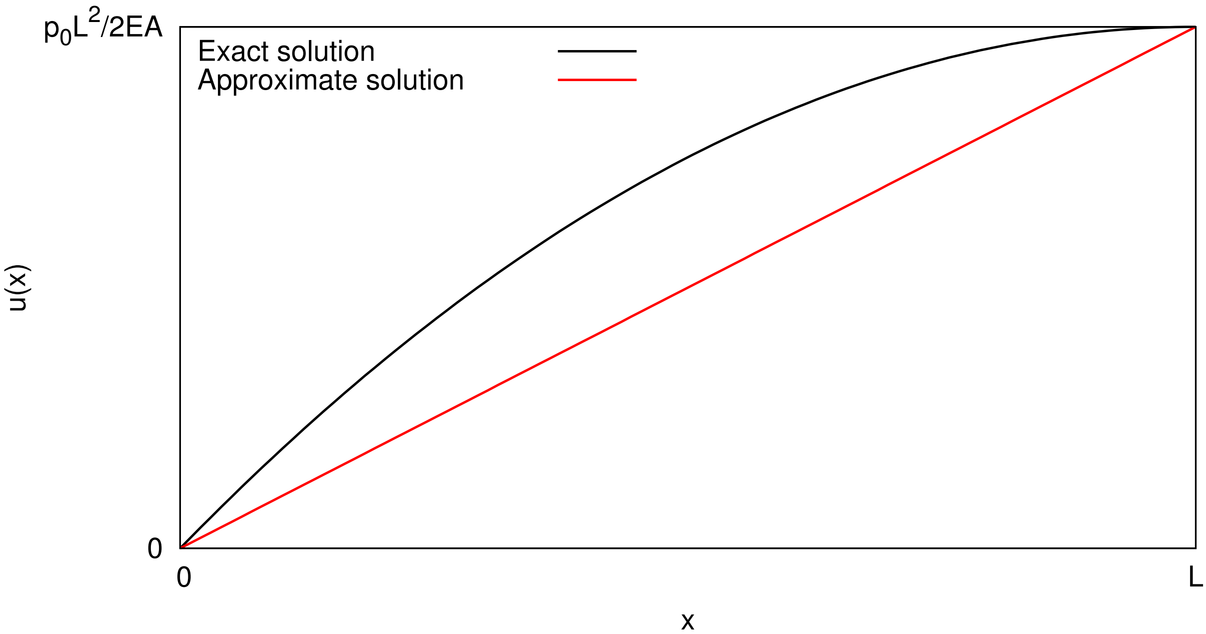


Figura 2.6: Confronto tra soluzione esatta (in nero) e soluzione approssimata (in rosso).

É possibile dimostrare che, scegliendo delle funzioni di forma paraboliche, si riesce ad ottenere una soluzione che corrisponde a quella esatta, annullando l'errore di approssimazione. In realtà nell'esempio precedente non è stato possibile apprezzare il processo di assemblaggio delle matrici di rigidezza degli elementi, in quanto è stato scelto un solo elemento. Quindi si può pensare di suddividere il dominio in due sottodomini in modo da ottenere due elementi, di lunghezza $L/2$ ciascuno, delimitati da due nodi ciascuno, come mostrato in Figura 2.7. Anche in questo caso vengono utilizzati dei polinomi di Lagrange lineari per approssumare lo spostamento assiale in ogni elemento.

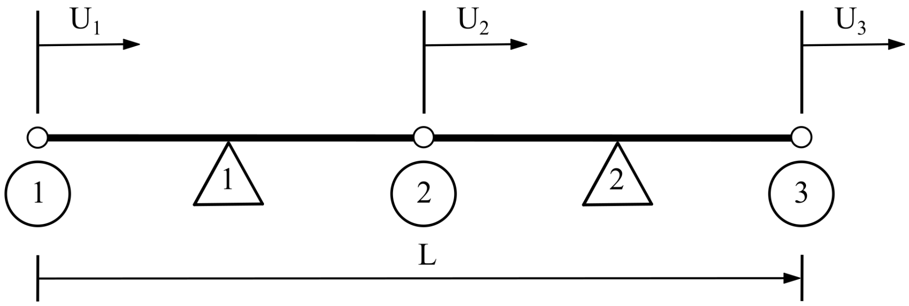


Figura 2.7: Discretizzazione del dominio attraverso 2 elementi.

Il procedimento riguardante il calcolo del lavoro esterno e di quello interno nei singoli sottodomini è analogo al caso precedente, dove era presente un solo elemento. Si suppone che i due elementi siano casatterizzati dalla stessa lunghezza ($L^{(1)} = L^{(2)} = L/2$), dalla stessa sezione trasversale ($A^{(1)} = A^{(2)} = A$) e dallo stesso modulo di Young ($E^{(1)} = E^{(2)} = E$) [1]. Svolgendo i calcoli (che qui non vengono riportati per alleggerire la trattazione) si ottiene:

$$\boldsymbol{U}^{(1)T} = \left\{U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right\}$$

$$\boldsymbol{U}^{(2)T} = \left\{U_1^{(2)}, U_2^{(2)}\right\}$$

$$\boldsymbol{K}^{(1)} = \boldsymbol{K}^{(2)} = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{(1)} = \boldsymbol{P}^{(2)} = \frac{p_0 L}{4}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right\}$$

Per assemblare i vettori degli spostamenti nodali, quelli dei carichi nodali e le matrici di rigidezza, è necessario imporre le condizioni di equilibrio e continuità ai nodi. L'equilibrio ai nodi viene imposto attraverso le seguenti relazioni:

$$P_1 = P_1^{(1)} \qquad P_2 = P_2^{(1)} + P_1^{(2)} \qquad P_3 = P_2^{(2)}$$

La congruenza ai nodi viene imposta attraverso le seguenti equazioni:

$$U_1 = U_1^{(1)} \qquad U_2 = U_2^{(1)} = U_1^{(2)} \qquad U_3 = U_2^{(2)}$$

[1]In questo caso l'apice indica l'elemento preso in considerazione.

Di conseguenza la matrice di rigidezza $\boldsymbol{K}$ complessiva della struttura si ottiene in questo modo:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{12}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{12}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

Quindi, introducendo le condizioni al contorno, si arriva ad ottenere l'equazione di equilibrio complessiva della struttura:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Risolvendo il sistema si ottiene che $\left\{ \begin{array}{c} U_2 \\ U_3 \end{array} \right\} = \dfrac{p_0 L^2}{8EA} \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right\}$ e che $R_1 = -p_0 L$. Di conseguenza la nuova soluzione approssimata è la seguente:

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{3p_0 L^2}{8EA} \dfrac{x}{L/2} & se \quad 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ u(x) = \dfrac{p_0 L^2}{8EA} \left(2 + \dfrac{x}{L/2} \right) & se \quad \dfrac{L}{2} < x < L \end{cases} \tag{2.58}$$

In Figura 2.8 viene riportato il confronto tra le 3 soluzioni: (2.46), (2.57) e (2.58).

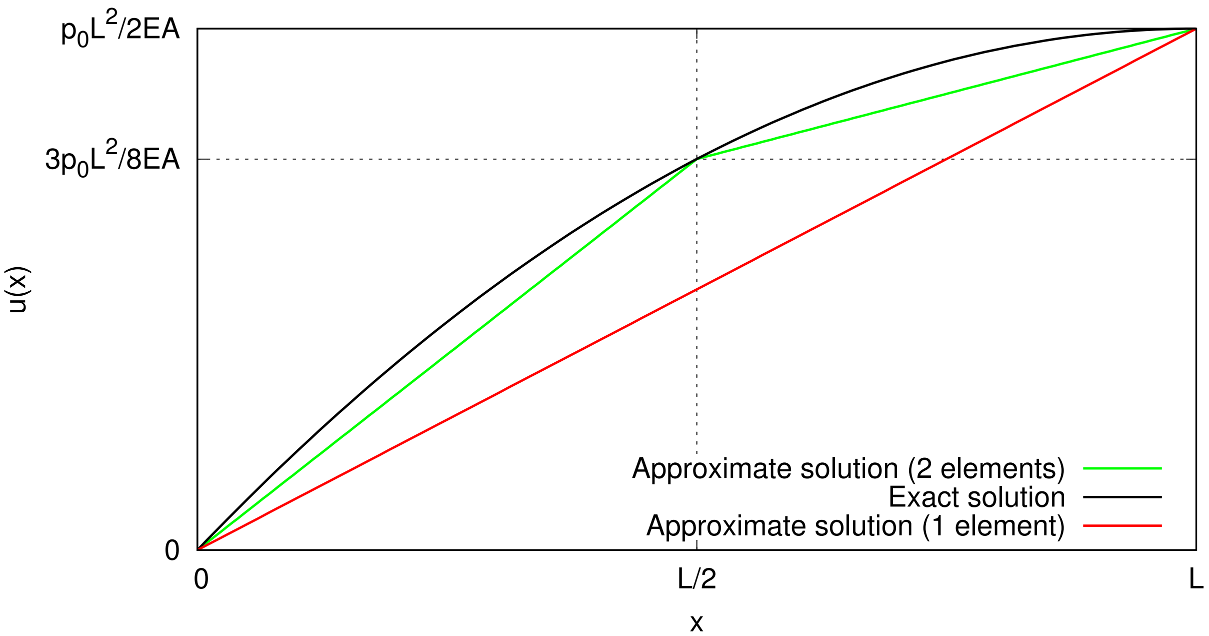


Figura 2.8: Confronto tra le varie soluzioni ottenute.

Si nota che la soluzione (2.58) si avvicina magiormente a quella esatta, in quanto è stato aggiunto un secondo elemento per la discretizzazione del dominio. La (2.58) e la (2.46), infatti, non solo sono uguali in corrispondenza degli estremi del dominio ($x = 0$ ed $x = L$), ma anche in corrispondenza del punto intermedio ($x = L/2$). Aumentando ulteriormente il numero di elementi la soluzione approssimata diventa sempre più vicina a quella esatta, a discapito del costo computazionale del problema che tende a crescere. Aumentando gli elementi, infatti, aumentano anche le dimensioni della matrice di rigidezza della struttura complessiva e, di conseguenza, le dimensioni del sistema che sarà necessario risolvere.

Capitolo 3

Approccio global/local

La valutazione degli spostamenti e delle tensioni all'interno della struttura può risultare piuttosto complicata, soprattutto se si considerano applicazioni reali che prevedono l'utilizzo di strutture composite. In questo caso, infatti, si verifica che il rapporto tra le dimensioni complessive della struttura e lo spessore di un singolo strato può raggiungere valori nell'ordine di 10^4. Per questo motivo è spesso necessario effettuare un trade-off tra accuratezza del modello e costo computazionale. Di conseguenza, specialmente nel caso delle strutture composite, vengono utilizzati degli elementi piastra bidimensionali che, pur riducendo il costo computazionale a causa delle assunzioni cinematiche sulle quali si basano, non permettono di ricavare uno stato di tensione tridimensionale (che invece è utile per prevedere eventuali condizioni di failure nei laminati). Inoltre, per mettere in evidenza gli effetti tipici che caratterizzano i laminati (come l'effetto zig-zag o quello di free edge) è necessario utilizzare degli elementi tridimensionali. Così facendo, però, il costo computazionale aumenterebbe eccessivamente: si stima che siano necessari almeno tre elementi solidi per ogni strato, il che implica che una piastra di dimensioni $1\,m$ X $1\,m$ richiederebbe circa 10^9 elementi solidi per essere discretizzata correttamente (considerando le caratteristiche tipiche dei laminati utilizzati in ambito aerospaziale).
Per ovviare a questo problema, è possibile sfruttare un approccio di tipo global/local, che permette di analizzare la struttura complessiva attraverso degli elementi piastra, ed allo stesso tempo di utilizzare una accuratezza maggiore in corrispondenza di elementi specifici del modello. Generalmente sono analizzati in modo più dettagliato quegli elementi considerati critici sulla base degli output derivanti dall'analisi globale. In questo modo si riesce ad ottenere un modello caratterizzato da un buon bilanciamento tra accuratezza e costo computazionale, in quanto, attraverso l'analisi locale di un singolo elemento, sarà possibile mettere in evidenza dei dettagli che inizialmente non emergono dalla sola analisi globale. In letteratura gli approcci di tipo global/local si suddividono principalmente in tre famiglie [53]:

1 Metodi che prevedono il raffinamento della mesh o delle funzioni di forma in corrispondenza delle regioni critiche: sono utili per risolvere problemi di convergenza in corrispondenza delle zone in cui si presentano delle singolarità. Permettono di collegare le regioni con mesh più grezze con quelle caratterizzare da mesh più raffinate.

2 Metodi di tipo multi-model che prevedono l'analisi di regioni specifiche della struttura con modelli matematici diversi. In questo caso sono presenti delle regioni della struttura che vengono discretizzate con elementi cinematicamente incompatibili tra loro. Per questo motivo è necessario assicurare la compatibilità degli spostamenti e delle tensioni in corrispondenza dell'interfaccia tra elementi differenti. Recentemente, questa tipologia di metodi global/local è stata integrata con la Formulazione Unificata di Carrera per lo studio di strutture composite.

3 Metodi dei super-elementi: prevedono che la struttura venga suddivisa in varie sezioni (chiamate appunto super-elementi) che vengono processate individualmente. Il processing di ogni super-elemento avviene tramite un insieme ridotto di matrici che rappresentano le proprietà del super-elemento.

Generalmente, per assicurare l'accoppiamento tra l'elemento che si vuole studiare nel dettaglio ed il resto della struttura, è possibile utilizzare gli output dell'analisi globale in modo da generare delle opportune condizioni al contorno. É possibile applicare due tipi di condizioni al contorno:

1 Condizioni al contorno meccaniche: l'applicazione di forze e momenti all'interfaccia rende indeterminato il problema statico. La struttura non è vincolata e, di conseguenza, la sua matrice di rigidezza è singolare. Questi tipi di problemi sono frequenti in campo aerospaziale e vengono risolti utilizzando una procedura nota in letteratura come "Inertia relief". Questa procedura, implementata da software commerciali come MSc-Nastran e Abaqus CAE, permette di simulare strutture non vincolate per le analisi statiche e dinamiche. Infatti, tenendo conto dei moti di corpo rigido della struttura, rimuove la singolarità della matrice di rigidezza in modo da poter risolvere il sistema algebrico finale.

2 Condizioni al contorno geometriche: l'applicazione di spostamenti e rotazioni all'interfaccia non richiede ulteriori procedure perché il sistema è vincolato. Questa è la ragione per cui le condizioni al contorno geometriche prevalgono nella maggior parte degli approcci global/local.

Nei capitoli successivi verranno analizzate varie strutture attraverso un approccio global/local che prevede lo svolgimento di due step: inizialmente viene effettuata una analisi statica lineare della struttura complessiva e, successivamente, si procede con l'analisi degli elementi considerati critici mediante l'utilizzo della Formulazione Unificata di Carrera (introdotta nella prossima sezione). In particolare verrà sfruttato il plug-in "MUL2@GL" in combinazione con il software agli elementi finiti "Femap".

3.1 Formulazione Unificata di Carrera

Nei casi più complessi, il processo di assemblaggio delle matrici di rigidezza dei singoli elementi risulta essere un passaggio critico per l'utilizzo del FEM. Volendo infatti utilizzare dei software per velocizzare lo svolgimento dei calcoli, è necessario implementare un procedimento che permetta di calcolare le matrici di rigidezza degli elementi e successivamente assemblarle in modo automatico. A tal proposito, viene introdotto un metodo che prende il nome di Formulazione Unificata di Carrera (Carrera Unified Formulation, CUF), che permette di ricavare le matrici di rigidezza delle strutture attraverso l'utilizzo di nuclei fondamentali [37].
Nel capitolo precedente sono stati svolti dei calcoli che hanno portato alla scrittura della matrice di rigidezza per un elemento asta, come indicato nella 2.51. É possibile giungere allo stesso risultato attraverso la seguente notazione indiciale:

$$u_x(x) = N_i(x)u_{x_i} = \sum_{i=1}^{N_{NE}} N_i(x)u_{x_i} = N_1 u_{x_1} + N_2 u_{x_2} + \cdots + N_{N_{NE}} u_{x_{N_{NE}}} \tag{3.1}$$

$$\delta u_x(x) = N_j(x)\delta u_{x_j} = \sum_{j=1}^{N_{NE}} N_j(x)\delta u_{x_j} = N_1 \delta u_{x_1} + N_2 \delta u_{x_2} + \cdots + N_{N_{NE}} \delta u_{x_{N_{NE}}} \tag{3.2}$$

dove l'indice i indica le quantità non virtuali, mentre l'indice j indica le variazioni virtuali. É importante notare che gli indici ripetuti stanno ad indicare una sommatoria ed N_{NE} indica il numero di nodi utilizzati. Utilizzando la stessa notazione per la deformazione:

$$\varepsilon = N_{i,x} u_{x_i} \tag{3.3}$$

$$\delta\varepsilon = N_{j,x} \delta u_{x_j} \tag{3.4}$$

Il lavoro virtuale interno può essere scritto sfruttando la (2.23), da cui si ottiene:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta\varepsilon E \delta\varepsilon dV = \delta u_{x_j} \left(\int_V N_{j,x} E N_{i,x} dV \right) u_{x_i} = \delta u_{x_j} k^{ij} u_{x_i} \tag{3.5}$$

dove

$$k^{ij} = \int_V N_{j,x} E N_{i,x} dV \tag{3.6}$$

è il nucleo fondamentale per un elemento asta. La formula generale del nucleo fondamentale (3.6), non dipende nè dal numero di nodi N_{NE} nè dalle funzioni di forma utilizzate (N_i e N_j). Attraverso la permutazione degli indici i e j sarà possibile calcolare le componenti che costituiscono la matrice di rigidezza dell'elemento asta. Questo sta a significare che, sostituendo nella (3.6) le stesse funzioni di forma utilizzate nell'esempio del paragrafo precedente, si ottiene la matrice di rigidezza indicata dalla (2.51). Lo stesso ragionamento può essere utilizzato per quanto riguarda il vettore dei carichi nodali che, ricordando la (2.53), può essere scritto nella seguente forma, per un elemento asta (in questo caso si considera un generico carico assiale che può variare lungo x):

$$P_j = \int_0^L p(x) N_j dx \tag{3.7}$$

Fino ad ora è stato considerato un campo di spostamento assiale (diretto lungo x) non dipendente dalla sezione trasversale dell'asta. Nel caso generale, il campo di spostamento può avere 3 componenti e può variare lungo ogni asse del sistema di riferimento ortogonale. Quindi, per oltrepassare le approssimazioni introdotte nel problema monodimensionale, è necessario effettuare questo passaggio:

$$u_x(x) \rightarrow \boldsymbol{u}(x,y,z) = \left\{ \begin{array}{c} u_x(x,y,z) \\ u_y(x,y,z) \\ u_z(x,y,z) \end{array} \right\}$$

Anche nel caso più generico, la CUF permette ancora di esprimere le matrici di rigidezza degli elementi attraverso l'utilizzo di nuclei fondamentali. Considerando ancora l'elemento asta, è bene notare che esso è caratterizzato da una dimensione (quella in direzione del suo asse) che risulta essere predominante rispetto alle altre due (quelle in direzione trasversale all'asse). Quindi è possibile pensare di utilizzare le funzioni di forma $N_i(x)$ per approssimare lo spostamento lungo la direzione predominante, e di introdurre delle funzioni di espansione

$F_\tau(y,z)$ per approssimare lo spostamento lungo le altre direzioni. In questo modo sarà possibile scrivere [2]:

$$\boldsymbol{u} = N_i(x)F_\tau(y,z)\boldsymbol{u}_{\tau i} = \left\{ \begin{array}{c} u_x(x,y,z) = N_i(x)F_\tau(y,z)u_{x_{\tau i}} \\ u_y(x,y,z) = N_i(x)F_\tau(y,z)u_{y_{\tau i}} \\ u_z(x,y,z) = N_i(x)F_\tau(y,z)u_{z_{\tau i}} \end{array} \right\} \tag{3.8}$$

Le variazioni virtuali, introducendo l'indice s, possono essere formulate in questo modo:

$$\delta\boldsymbol{u} = N_j(x)F_s(y,z)\delta\boldsymbol{u}_{sj} \tag{3.9}$$

In questo caso per valutare i vettori di deformazione e tensione, si applicano le matrici $\boldsymbol{b}$ (2.6) e $\boldsymbol{C}$ (2.16):

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z) = \boldsymbol{b}N_i(x)F_\tau(y,z)\boldsymbol{u}_{\tau i} \tag{3.10}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z) = \boldsymbol{b}N_j(x)F_s(y,z)\boldsymbol{u}_{sj} \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x,y,z) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{b}N_i(x)F_\tau(y,z)\boldsymbol{u}_{\tau i} \tag{3.12}$$

Ancora una volta, con la (2.23) è possibile scrivere il lavoro interno, che diventa:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}dV = \delta\boldsymbol{u}_{sj}^T \int_V \left[F_s(y,z)N_j(x)\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{b}N_i(x)F_\tau(y,z)\right] dV\boldsymbol{u}_{\tau i} =$$

$$= \delta\boldsymbol{u}_{sj}\boldsymbol{k}^{\tau sij}\boldsymbol{u}_{\tau i} \tag{3.13}$$

Visto che $\boldsymbol{b}^T$ è una matrice 3×6, $\boldsymbol{C}$ è una matrice 6×6 e $\boldsymbol{b}$ è una matrice 6×3, è possibile affermare che $\boldsymbol{k}^{\tau sij}$ sarà una matrice 3×3. Questo si verifica nel caso di campo di spostamento 3D, mentre, considerando uno spostamento monodimensionale come nell'esempio precedente, si ottiene che il nucleo fondamentale è uno scalare. Quindi $\boldsymbol{k}^{\tau sij}$ è il nucleo fondamentale della matrice di rigidezza della struttura complessiva e, ancora una volta, si nota che la sua forma non dipende dal numero di nodi e dalle funzioni di forma utilizzate per ogni elemento. Attraverso la permutazione degli indici τ, s, i e j, è possibile ottenere la matrice di rigidezza del singolo elemento e, successivamente quella dell'intera struttura.
Questo ragionamento può essere esteso al di fuori del campo riguardante le strutture monodimensionali, permettendo così anche lo studio di strutture 2D e 3D. Nel caso di strutture bidimensionali, infatti, sono presenti due direzioni predominanti rispetto alla terza (cioè rispetto allo spessore), mentre nel caso di strutture tridimensionali le 3 direzioni sono tutte caratterizzate circa dallo stesso ordine di grandezza. Quindi in questi due casi sarà necessario modificare il modo in cui sono definite le N_i e le F_τ, ma il ragionamento di base resta lo stesso (cioè quello di introdurre delle espansioni che permettano di descrivere lo spostamento lungo

[2] In generale è possibile utilizzare delle funzioni N_i ed F_τ diverse a seconda della direzione considerata, ma in questo caso sono state considerate uguali lungo tutte le direzioni.

le direzioni non predominanti). Di seguito viene riportata la forma delle funzioni nel caso di strutture 1D, 2D e 3D:

$$1D \rightarrow N_i(x), F_\tau(y,z) \rightarrow \boldsymbol{u}(x,y,z) = N_i(x)F_\tau(y,z)\boldsymbol{u}_{\tau i}$$

$$2D \rightarrow N_i(x,y), F_\tau(z) \rightarrow \boldsymbol{u}(x,y,z) = N_i(x,y)F_\tau(z)\boldsymbol{u}_{\tau i}$$

$$3D \rightarrow N_i(x,y,z), 1 \rightarrow \boldsymbol{u}(x,y,z) = N_i(x,y,z)\boldsymbol{u}_{\tau i}$$

Quindi la CUF facilita l'assemblaggio delle matrici, che potrà essere implementato attraverso un software opportuno. In particolare, sono necessari quattro cicli per arrivare a definire la matrice di rigidezza del singolo elemento: i cicli su τ ed s permettono di ottenere la matrice per una data coppia di i e j, mentre i cicli su i e j permettono di ottenere la matrice di rigidezza dell'elemento. Infine, il ciclo sugli elementi permette di ottenere la matrice di rigidezza complessiva della struttura, come è possibile osservare dalla Figura 3.1.

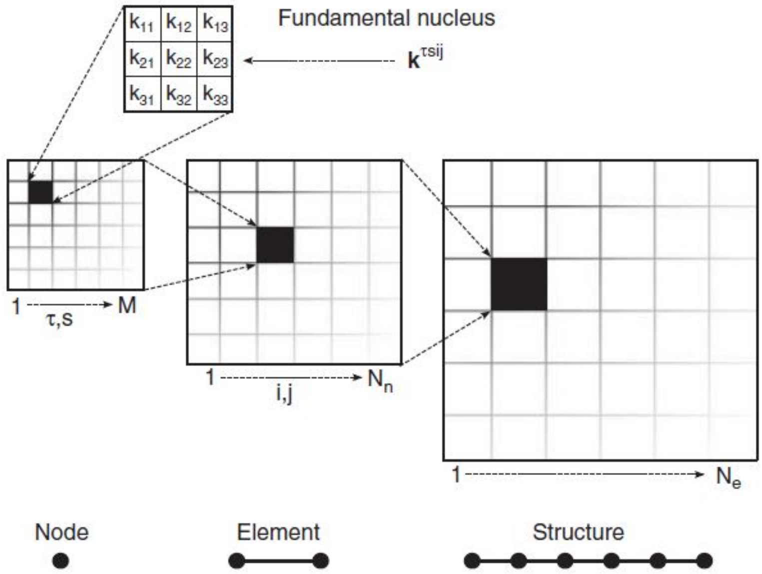


Figura 3.1: Rappresentazione schematica del processo di assemblaggio delle matrici secondo la Formulazione Unificata di Carrera.

3.2 MUL2@GL

Il software MUL2@GL è stato sviluppato come un codice stand-alone presso il Politecnico di Torino e può essere utilizzato come un plug-in per Femap ed Abaqus [54]. Il primo di questi due software agli elementi finiti verrà utilizzato per effettuare le simulazioni trattate nei capitoli successivi. Il plug-in permette di selezionare l'elemento critico da analizzare localmente (il quale generalmente dipende dall'esperienza di colui che utilizza il software) e di ricavare automaticamente la distribuzione delle tensioni 3D lungo lo spessore dell'elemento stesso. Per analizzare il singolo elemento, vengono sfruttate le condizioni al contorno geometriche ricavate dal modello globale. In particolare, gli spostamenti e le rotazioni in corrispondenza dei nodi che delimitano l'elemento vengono ricavate dal sistema di riferimento globale per poi essere interpolate lungo i bordi dell'elemento. Successivamente, la teoria di Mindlin è utilizzata per estrapolare le condizioni di spostamento adatte al modello layer-wise (LW) utilizzato dal software MUL2@GL (l'accoppiamento tra modello globale e modello locale della struttura è trattato in modo più approfondito nella sottosezione 3.2.2). Le altre informazioni (come ad esempio lo spessore, il materiale, la laminazione ecc.) vengono ricavate dall'ID dell'elemento.

3.2.1 Modelli ESL/LW

Generalmente, per analizzare le strutture multistrato, è possibile utilizzare i modelli equivalent single layer (ESL), oppure i modelli layer-wise (LW) [34] [39] [7].
Gli ESL considerano un numero di incognite indipendente dal numero di strati della struttura: in questo caso si considera un singolo strato, i cui coefficienti di rigidezza sono ottenuti tramite una media pesata delle rigidezze dei vari strati lungo lo spessore (da questa particolarità deriva il nome del modello stesso). In alcuni casi i modelli ESL sono in grado di descrivere in modo sufficientemente accurato la risposta globale del laminato, tuttavia questi modelli risultano spesso inadeguati per determinare il campo tridimensionale di tensione all'interno dei vari strati. Uno dei principali difetti di queste teorie sta nel fatto che esse non sono in grado di soddisfare i C_z^0 requirements, secondo i quali le tensioni trasversali e gli spostamenti devono essere continui lungo lo spessore z, per motivi di equilibrio e compatibilità. Il principale vantaggio dei modelli ESL risiede nella loro semplicità e nel loro ridotto costo computazionale (dovuto al limitato numero di variabili che vengono utilizzate): per queste loro caratteristiche, questi modelli sono spesso utilizzati nei software FEM commerciali. Generalmente, nel caso 2D, i modelli ESL si presentano nella seguente forma:

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = \boldsymbol{u}_0(x,y) + z\boldsymbol{u}_1(x,y) + z^2\boldsymbol{u}_2(x,y) + \cdots + z^N\boldsymbol{u}_N(x,y)$$

In questo caso è stata utilizzata un'espansione di Taylor (TE) di ordine N lungo lo spessore, in cui le F_τ sono espresse nella forma z^i $(i = 0, 1, \ldots, N)$. É bene sottolineare che, ad eccezione di $\boldsymbol{u}_0$, i coefficienti che compaiono nell'espansione non sono degli spostamenti, bensì rappresentano dei termini in grado di descrivere delle cinematiche di ordine superiore nella sezione (questo lo si nota anche effettuando una semplice analisi dimensionale dell'equazione precedente). Utilizzando la formulazione unificata, questa equazione può essere scritta come:

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = F_0(z)\boldsymbol{u}_0(x,y) + F_1(z)\boldsymbol{u}_1(x,y) + F_2(z)\boldsymbol{u}_2(x,y) + \cdots + F_N(z)\boldsymbol{u}_N(x,y)$$

dove N è l'ordine dell'espansione, quindi

$$F_0 = 1, \;\; F_1 = z, \;\; F_2 = z^2, \ldots, F_N = z^N$$

É possibile descrivere l'effetto zig-zag (che indica l'inversione di segno della derivata prima degli spostamenti passando da uno strato all'altro) sommando la funzione di Murakami.

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = \boldsymbol{u}_0(x,y) + z\boldsymbol{u}_1(x,y) + z^2\boldsymbol{u}_2(x,y) + \cdots + z^{N-1}\boldsymbol{u}_{N-1}(x,y) + (-1)^k\zeta_k\boldsymbol{u}_Z$$

dove $\zeta_k = 2z_k/h_k$ è una coordinata adimensionale del singolo strato: z_k ed h_k sono, rispettivamente, la coordinata fisica e lo spessore dello strato k-esimo. Di conseguenza $F_N = F_Z = (-1)^k\zeta_k$. La funzione di Murakami rappresenta un tentativo di catturare l'effetto zig-zag, strettamente collegato ai C_z^0 requirements, che generalmente non sono soddisfatti dalle teorie ESL. Nel caso 1D, invece, i modelli ESL sfruttano delle funzioni bidimensionali per approssimare la cinematica della sezione trasversale del composito ($F_\tau(y,z)$, supponendo che la sezione si trovi nel piano $y - z$). Ad esempio è possibile utilizzare dei polinomi di Taylor nella forma $y^i z^i$ (con $i = 0, 1, \ldots, N$). Considerando l'ordine di espansione $N = 2$, si ottiene:

$$\boldsymbol{u}(x, y, z) = \boldsymbol{u}_0(x) + y\boldsymbol{u}_1(x) + z\boldsymbol{u}_2(x) + y^2\boldsymbol{u}_3(x) + yz\boldsymbol{u}_4(x) + z^2\boldsymbol{u}_5(x)$$

Si osserva che le cinematiche descritte dai modelli TE sono di tipo gerarchico, in quanto l'ordine dei polinomi può essere incrementato sommando dei termini di ordine superiore a quelli già presenti. Di conseguenza, le espansioni di ordine superiore includono anche quelle di ordine inferiore. Quindi, utilizzando in modo graduale dei polinomi di grado superiore, è possibile effettuare uno studio sulla convergenza del metodo. Inoltre, i modelli TE sfruttano delle funzioni assunte a priori per rappresentare la cinematica della sezione, ma non la discretizzano, come invece accade per i modelli descritti in seguito, che sfruttano polinomi di Lagrange. É bene notare che per le teorie ESL il numero di incognite, che è indipendente dal numero di strati, dipende dall'ordine dell'espansione (N). Le teorie ESL possono essere considerate come un'estensione delle teorie classiche (CLTs): ad esempio nella teoria di Kirchoff si assume che gli spostamenti nel piano di una lastra piana siano funzioni lineari della coordinata z (lungo lo spessore), il che corrisponde all'ipotesi che viene effettuata con un'espansione ti Taylor di ordine $N = 1$. Alla luce di quanto detto sui i modelli ESL, è possibile capire il motivo per cui essi generalmente non sono in grado di soddisfare i C_z^0 requirements. Infatti questi modelli utilizzano una funzione continua e, a sua volta, con derivata continua, per approssimare lo spostamento lungo lo spessore. Nel momento in cui si ha a che fare con più strati caratterizzati da coefficienti elastici diversi tra loro, non è possibile assicurare la continuità delle tensioni trasversali all'interfaccia tra i vari strati (come si osserva in Figura 3.3). Quindi l'approccio ESL è utile per calcolare le grandezze globali della struttura (come, appunto, gli spostamenti), ma pecca nel calcolo delle grandezze derivate (come le tensioni).
Per quanto riguarda i modelli LW, invece, essi descrivono la cinematica di ogni strato in modo indipendente. In questo modo è possibile considerare ogni strato come una piastra indipendente, imponendo dei vincoli ad ogni interfaccia che permettano di soddisfare le condizioni di compatibilità degli spostamenti. Questo metodo permette di ottenere una migliore rappresentazione dei campi di spostamento e tensione all'interno della struttura, accettando però di sostenere un costo computazionale più elevato, a causa del fatto che il numero di incognite dipende dal numero di strati. Generalmente i modelli LW sono implementati sfruttando i polinomi di Lagrange (Lagrange expansion, LE):

$$\boldsymbol{u}^k = F_t\boldsymbol{u}_t^k + F_b\boldsymbol{u}_b^k$$

dove l'apice k indica il k-esimo strato, mentre i pedici t e b indicano, rispettivamente la superficie superiore e quella inferiore dello strato. Per semplicità è possibile considerare delle espansioni lineari, quindi, nel caso 2D:

$$F_t = \frac{1 + \zeta}{2}$$

$$F_b = \frac{1 - \zeta}{2}$$

dove ζ è una coordinata normalizzata lungo lo spessore ($-1 < \zeta < 1$). Di conseguenza, i valori degli spostamenti, in corrispondenza dell'interfaccia tra due strati adiacenti, sono considerati incogniti, il che permette di imporre delle condizioni di compatibilità:

$$\boldsymbol{u}_t^k = \boldsymbol{u}_b^{(k+1)} \tag{3.14}$$

Questo equivale ad imporre che lo spostamento in corrispondenza dell'estremità superiore dello strato k-esimo è uguale allo spostamento dell'estremità inferiore dello strato al di sopra di esso (ovvero dello strato k+1-esimo).
Considerando il caso 1D, invece, i modelli LW possono essere implementati sfruttando dei polinomi di Lagrange bidimensionali, per approssimare la cinematica della sezione trasversale. Ad esempio, in questo caso è possibile utilizzare dei polinomi di Lagrange bilineari a 4 nodi (L4), biquadratici a 9 nodi (L9) o bicubici a 16 nodi (L16). I polinomi di Lagrange bidimensionali possono essere ottenuti dal prodotto dei loro corrispondenti monodimensionali.
Il vantaggio legato all'utilizzo dei modelli LE risiede nella versatilità che li caratterizza. Infatti, attraverso l'utilizzo dei polinomi di Lagrange, è possibile discretizzare delle sezioni caratterizzate da geometrie arbitrarie. Inoltre, questi modelli permettono di studiare dei fenomeni di ordine superiore, attraverso il raffinamento della mesh in corrispondenza delle zone considerate critiche (questo è particolarmente importante per mettere in evidenza gli effetti di free-edge).
Nei metodi appena descritti, le tensioni vengono ricavate a posteriori mediante la legge di Hooke, quindi il soddisfacimento dei C_z^0 requirements non è garantito in un'analisi con un singolo step. Per soddisfare la compatibilità degli spostamenti e le condizioni di equilibrio senza ricorrere a dei metodi di postprocessing, è necessario introdurre delle assunzioni sul campo di tensione. Reissner ha introdotto una teoria (Reissner's mixed variational theorem, RMVT) che sfrutta delle assunzioni sulle tensioni trasversali, in modo da soddisfare completamente i C_z^0 requirements, a priori. Nello specifico, la RMVT prevede che le tensioni trasversali vengano considerate come delle incognite del problema meccanico ed introduce un campo che permetta di approssimarle, come per gli spostamenti nel caso 1D:

$$\boldsymbol{\sigma}_n^k(x, y, z) = G_\tau(x, z)\boldsymbol{\sigma}_{n\tau}^k(y)$$

Inoltre viene imposta una condizione sulle $\boldsymbol{\sigma}_n$, analoga a quella di compatibilità degli spostamenti:

$$\boldsymbol{\sigma}_{nt}^k = \boldsymbol{\sigma}_{nb}^{(k+1)} \tag{3.15}$$

La RMVT può essere sfruttata in combinazione la CUF, in modo da generare un modello LW utile per lo studio di strutture multistrato [52]. Per fare ciò, generalmente vengono utilizzati dei polinomi di Legendre bidimensionali. Nella loro forma monodimensionale, i polinomi di Legendre si presentano nella seguente forma:

$$L_0 = 1$$

$$L_1 = \varsigma$$

$$L_p = \frac{2p-1}{p}\varsigma L_{p-1}(\varsigma) - \frac{p-1}{p}L_{p-2}(\varsigma), \quad p = 2, 3, \ldots$$

Considerando questo set di polinomi, è possibile delle espansioni gerarchiche di Legendre (hierarchal Legendre expansions, HLEs). É previsto che le espansioni siano definite in un dominio parametrico del tipo $[-1; 1] \times [-1; 1]$ e successivamente mappate sulla sezione trasversale attraverso una trasformazione Jacobiana.

In realtà il software MUL2@GL sfrutta dei modelli LE. Nello specifico, considerando un modello bidimensionale, vengono utilizzati 4 nodi lungo lo spessore di ciascuno strato, in modo da ottenere dei polinomi di Lagrange cubici. L'andamento degli spostamenti attraverso lo spessore può essere rappresentato con qualsiasi livello di precisione desiderato, semplicemente aumentando il numero di elementi finiti unidimensionali (cioè strati numerici o virtuali) o aumentando l'ordine dei polinomi di interpolazione trasversali. Per quanto riguarda le funzioni utilizzate nel piano dell'elemento ($N_i(x, y)$), il plug-in sfrutta dei polinomi di Lagrange bicubici: lungo ogni lato dell'elemento sono disposti 4 nodi, a cui corrisponde un polinomio di Lagrange di terzo grado. In Figura 3.2 è possibile osservare graficamente i nodi delle funzioni $F_\tau(z)$ ed $N_i(x, y)$, utilizzate per approssimare il campo degli spostamenti, nel caso in cui venga considerato un singolo strato. Il calcolo di queste funzioni è riportato nell'Appendice A.

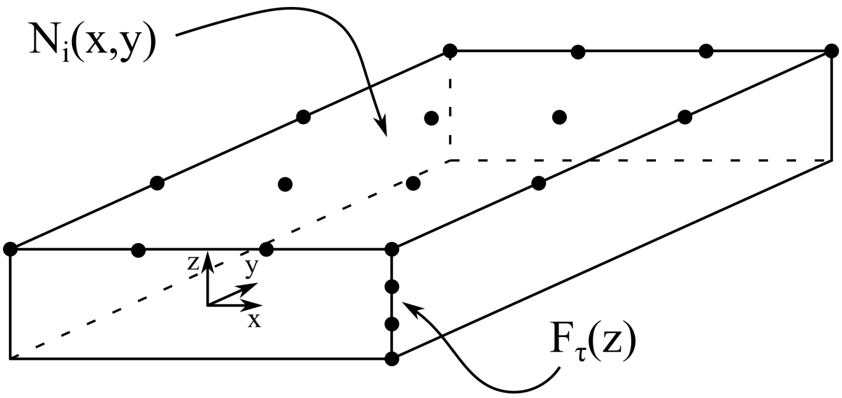
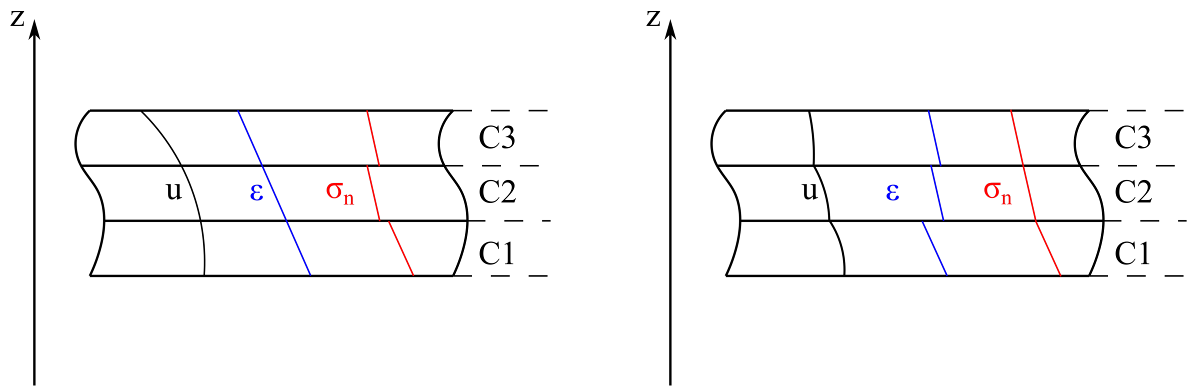


Figura 3.2: Rappresentazione schematica dei nodi di $F_\tau(z)$ ed $N_i(x, y)$, nel caso di un singolo strato.



(a) Esempio di un modello ESL.

(b) Esempio di un modello LW.

Figura 3.3: Confronto tra modelli ESL e modelli LW.

3.2.2 Applicazione delle Condizioni al Contorno

Come già anticipato in precedenza, il software sfrutta delle condizioni al contorno geometriche per accoppiare il modello locale con quello globale. Questa particolarità è dovuta al fatto che, da un punto di vista dell'accuratezza dei risultati, non vi sono differenze tra l'utilizzo di condizioni al contorno meccaniche o geometriche, sebbene l'applicazione delle seconde è molto più facile da implementare rispetto all'appicazione delle prime. Infatti per applicare le condizioni al contorno meccaniche è necessario introdurre un ulteriore modello matematico.

In Figura 3.4 è rappresentata una lastra piana già discretizzata con un numero finito di elementi rettangolari. É possibile prendere in considerazione due nodi (A e B) facenti parte dell'interfaccia tra modello locale (evidenziato in rosso) e modello globale. Dopo aver eseguito l'analisi statica sul modello globale, è possibile conoscere gli spostamenti e le rotazioni in corrispondenza di questi nodi: generalmente questa analisi può essere eseguita con un software FEM commerciale. Si ipotizza di prendere in considerazione un singolo elemento da analizzare localmente, costituito da due strati di uguale spessore. Come anticipato in precedenza, si sfruttano dei polinomi di Lagrange cubici lungo lo spessore (in questo caso un polinomio per ogni strato) e dei polinomi di Lagrange bicubici sul piano dell'elemento, per approssimare il campo degli spostamenti all'interno di esso. Per questo motivo sono stati rappresentati 7 nodi lungo lo spessore e 4 nodi lungo l'asse x dell'elemento. Infatti si ricorda che gli strati sono costituiti da 4 nodi ciascuno, ma hanno un nodo in comune in corrispondenza del quale è imposta una condizione di compatibilità degli spostamenti, come si osserva nell'equazione 3.14. Per semplicità sono stati rappresentati solo i nodi in corrispondenza della porzione di interfaccia, individuata dai nodi A e B, con il modello globale.
Attraverso l'utilizzo di funzioni di forma lineari, conoscendo gli spostamenti e le rotazioni dei nodi A e B, è possibile calcolare gli spostamenti e le rotazioni di tutti i nodi in corrispondenza del piano medio dell'elemento (rappresentati in blu nella Figura 3.4). Dopo aver calcolato gli spostamenti e le rotazioni per tutti i nodi del piano medio dell'elemento, in corrispondenza dell'interfaccia, è necessario usufruire di un metodo che permetta di estendere il calcolo a tutti i nodi dell'interfaccia (quindi anche quelli al di fuori del piano medio, indicati in nero). Inoltre bisogna tenere conto del fatto che i polinomi di Lagrange, nel contesto della CUF, possono essere utilizzati esclusivamente con i gradi di libertà di spostamento dei vari nodi. Quindi è necessario trovare un modo per trasformare i gradi di libertà rotazionali del modello globale in gradi di libertà puramente traslazionali, applicabili al modello locale. Per questo motivo, nel caso di modelli 2D come quelli analizzati in questo lavoro, si introduce il campo di spostamento di Reissner-Mindlin, che sfrutta gli spostamenti e le rotazioni dei nodi sul piano medio per calcolare gli spostamenti degli altri nodi all'interfaccia. Nello specifico vengono utilizzate le seguenti formule:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \tag{3.16}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\theta_x(x, y) \tag{3.17}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{3.18}$$

dove u_0, v_0, w_0, θ_x, θ_y e θ_z sono gli spostamenti e le rotazioni calcolati in corrispondenza dei nodi sul piano medio, all'interfaccia. Ad esempio, in Figura 3.4 viene estratto un nodo i-esimo da cui vengono calcolati, tramite le formule di Reissner-Midlin, gli spostamenti dei nodi al di sopra ed al di sotto di esso. Questo procedimento permette di calcolare gli spostamenti per tutti i nodi all'interfaccia, partendo dagli spostamenti e dalle rotazioni del piano medio.
É necessario considerare il fatto che l'applicazione di condizioni al contorno geometriche, per il modello locale, implica degli effetti dannosi per l'accuratezza della soluzione del problema statico locale. Tuttavia è possibile utilizzare dei metodi opportuni in modo da ridurre questi effetti. Ad esempio è possibile creare una zona di transizione che circonda il modello locale. In questo modo è possibile applicare le condizioni al contorno geometriche direttamente sulla zona di transizione, smorzando gli effetti negativi sul modello locale vero e proprio. Un metodo

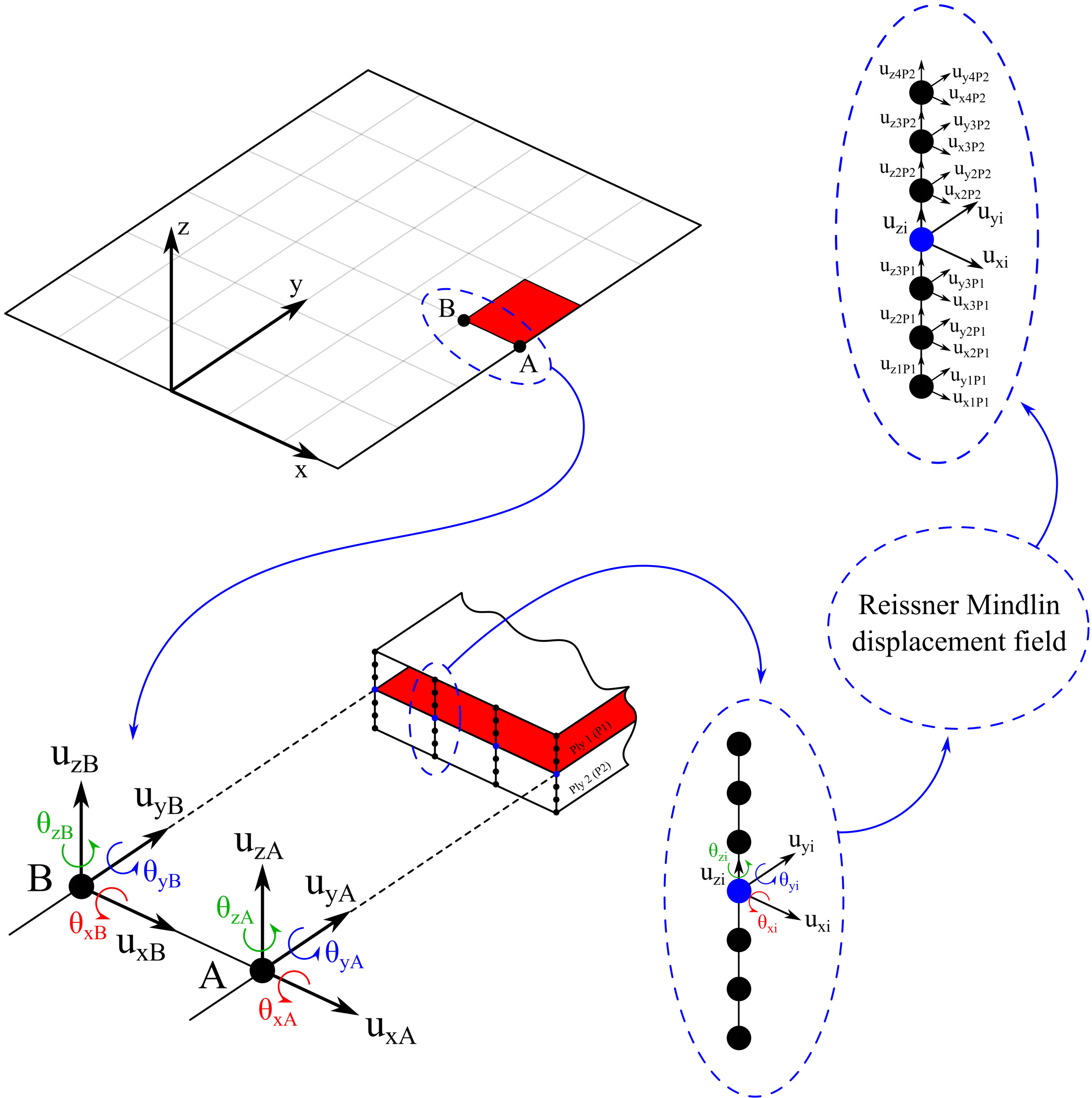


Figura 3.4: Procedimento di calcolo delle condizioni al contorno geometriche per il modello locale.

alternativo prevede l'utilizzo dei nodi di Chebyshev, in modo da infittire la mesh in prossimità dell'interfaccia, confinando gli effetti dannosi in questa zona.

3.2.3 Sistemi di Riferimento

Dopo aver identificato l'elemento da analizzare, il software MUL2@GL è in grado di fornire le tensioni e le deformazioni in tre diversi sistemi di riferimento, come si osserva in Figura 3.5:

1 Sistema di riferimento locale (indicato con il pedice L): l'asse x_L giace sul bordo delimitato dai primi due nodi (G1 ed G2) e punta verso il secondo nodo (G2). L'asse y_L è perpendicolare a x_L e giace nel piano individuato dall'elemento. L'asse z_L è perpendicolare agli altri due, secondo la regola della mano destra.

2 Sistema di riferimento materiale (indicato con il pedice M): l'asse x_M è diretto lungo le fibre del materiale (l'orientazione delle fibre è nota dalla scheda dell'elemento). L'asse y_M è perpendicolare a x_M e giace nel piano individuato dall'elemento. L'asse z_M è perpendicolare agli altri due, secondo la regola della mano destra. É importante sottolineare che questo sistema di riferimento dipende dall'orientazione delle fibre, di conseguenza esso può cambiare a seconda dello strato preso in considerazione.

3 Sistema di riferimento globale (indicato con il pedice G): dipende dal modello globale e dal modo in cui esso è stato implementato nel software agli elementi finiti.

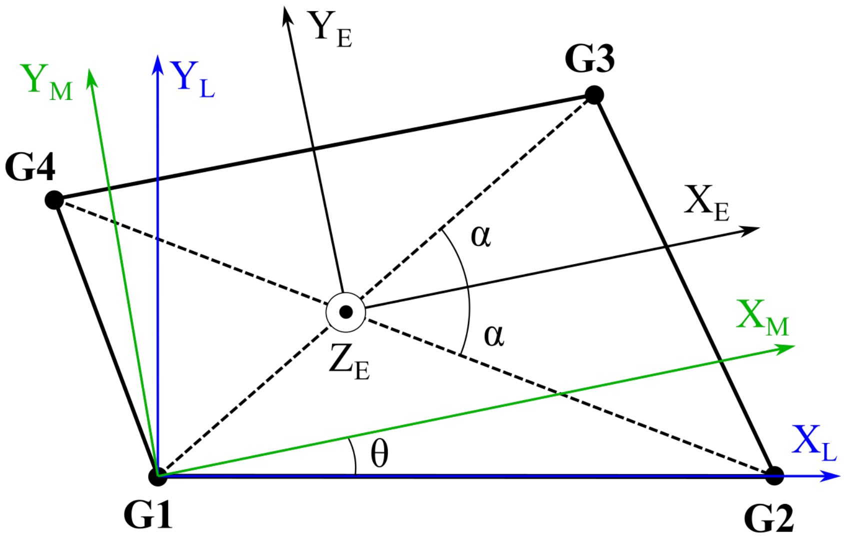


Figura 3.5: Sistemi di riferimento per l'elemento Nastran QUAD4.

Un altro importante sistema di riferimento è quello dell'elemento (indicato con il pedice E): si tratta del sistema di riferimento utilizzato da Nastran. L'asse x_E è la bisettrice dell'angolo 2α ed è diretto da G1 verso G2. L'asse y_E è perpendicolare a x_E (quindi giace nel piano individuato dall'elemento) ed è diretto da G1 verso G4. L'asse z_E è perpendicolare agli altri due nel verso definito dalla regola della mano destra.

3.3 Stati di Tensione 3D e Criteri di Failure

Come già anticipato in precedenza, generalmente le strutture dispiegabili sfruttano l'energia elastica accumulata per espandersi autonomamente e la loro rigidezza per assicurare il mantenimento della configurazione dispiegata, minimizzando l'utilizzo di ulteriori dispositivi esterni di bloccaggio. Una failure non controllata delle strutture dispiegabili potrebbe portare al fallimento dell'intera missione spaziale, quindi, trattandosi di tecnologie relativamente recenti nel campo aerospaziale, è necessario assicurarsi della loro affidabilità, per poterle utilizzare in modo sicuro ed efficace. Nello specifico è necessario verificare che il materiale (in genere un composito) riesca a sopportare le tensioni che si sviluppano all'interno di esso durante i processi di dispiegamento e ripiegamento, soprattutto nel campo delle grandi deformazioni.
I meccanismi di failure nei compositi possono essere considerati come fenomeni complessi, che non dipendono esclusivamente dal materiale, ma anche da caratteristiche geometriche come la sequenza degli strati e l'orientazione delle fibre. Per questo motivo le analisi sperimentali sono necessarie in questo campo, tuttavia, spesso risultano essere costose, sia in termini economici che temporali. Una valida alternativa ai test sperimentali è rappresentata dalle analisi agli elementi finiti: specialmente nel campo lineare, questa tipologia di analisi presenta il vantaggio di

essere notevolmente più rapida rispetto all'approccio sperimentale. L'approccio lineare, infatti, permette di sfruttare lo stato di tensione della struttura per valutare la probabilità di failure in ogni punto all'interno di essa. Per questo scopo vengono utilizzati dei criteri che permettono di calcolare degli indici di failure, in modo da monitorare lo stato della struttura e prevenire eventuali rotture inaspettate del materiale. Affinché non si verifichi alcun tipo di failure è necessario che tutti gli indici siano inferiori ad 1. In caso contrario è necessario modificare la geometria o il materiale della struttura, per fare in modo che essa sia in grado di sopportare le tensioni a cui sarà sottoposta durante la sua vita operativa.
Uno dei fattori che maggiormente influenzano l'accuratezza con cui i criteri sono in grado di prevedere possibili condizioni di failure, è rappresentato dalla qualità del campo di tensioni/deformazioni utilizzato per effettuare l'analisi. Per questo motivo è necessario utilizzare una teoria adeguata: ad esempio, le teorie classiche (classical laminate theories, CLTs) si basano su delle assunzioni che portano ad ottenere uno stato di tensione 2D. Tuttavia, l'utilizzo di uno stato di tensione bidimensionale, assieme ad una teoria di failure 2D, potrebbe portare a dei risultati che non sono soddisfacenti per la struttura ed il caso di carico considerati. Talvolta è necessario sviluppare un'analisi basata su un campo di tensione 3D, per prevedere in modo accurato il comportamento di un composito. Infatti le componenti di tensioni al di fuori del piano dell'elemento (ovvero le tensioni trasversali), spesso rivestono un ruolo importante per determinare la condizione di failure in un composito. In questo lavoro è previsto l'utilizzo della formulazione unificata di Carrera (Carrera Unified Formulation, CUF), per analizzare tre differenti tipologie di strutture dispiegabili. Questa teoria (trattata in modo più approfondito nella sezione 3.1) sfrutta degli elementi (ad esempio beam o shell) di ordine elevato, in modo da ricavare lo stato di tensione tridimensionale della struttura. In particolare, la CUF può essere utilizzata per sviluppare modelli 1D o 2D della struttura. Prendendo in considerazione una lastra piana, il modello CUF permette di utilizzare, lungo lo spessore, una discretizzazione indipendente rispetto a quella utilizzata nel piano della lastra stessa. Considerando, invece, un modello solido 3D, generalmente le discretizzazioni nelle tre direzioni non sono completamente indipendenti tra loro: questo può comportare ad un raffinamento della mesh anche lungo direzioni non desiderate e, di conseguenza, ad una notevole crescita del costo computazionale [51]. Attraverso uno stato di tensione tridimensionale, inoltre, è possibile mettere in evidenza degli aspetti che tipicamente caratterizzano le strutture composite (che generalmente non sono catturati dalle CLTs): tra questi è possibile ricordare gli effetti di free-edge, l'effetto zig-zag degli spostamenti ed il soddisfacimento dei C_z^0 requirements. Nelle reference [55] e [52], la formulazione unificata di Carrera viene utilizzata, rispettivamente, attraverso polinomi di Lagrange e di Legendre.
Nei capitoli successivi verranno condotte delle analisi di failure facendo riferimento a 3 criteri differenti: Hoffman, Hashin3D e LaRC05. Prima di procedere con la descrizione dei criteri ap-

Tabella 3.1: Valori massimi di tensione, utilizzati nelle formule dei vari criteri di failure.

X_T	Resistenza a trazione in direzione delle fibre
X_C	Resistenza a compressione in direzione delle fibre
Y_T	Resistenza a trazione in direzione perpendicolare alle fibre
Y_C	Resistenza a compressione in direzione perpendicolare alle fibre
XY	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre
XZ	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre
YZ	Resistenza a taglio trasversale alle fibre

pena elencati, è necessario introdurre i valori massimi di tensione che possono essere sopportati dal materiale, il cui significato è riassunto nella Tabella 3.1. Per calcolare gli indici di failure è necessario utilizzare le componenti di tensione nel sistema di riferimento materiale (indicato con il pedice M): si tratta di un sistema di riferimento il cui asse x è nella stessa direzione delle fibre (una descrizione più dettagliata è stata riportata nella sottosezione 3.2.3).

3.3.1 Hoffman

La formula per valutare il failure index per il criterio di Hoffman è indicata nella user's guide di Nastran [40]. Per un laminato ortotropo in uno stato di tensione 2D generico, è possibile scrivere:

$$FI_{Hoffman2D} = \left(\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}\right)\sigma_{xxM} + \left(\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}\right)\sigma_{yyM} +$$

$$+ \frac{\sigma_{xxM}^2}{X_T X_C} + \frac{\sigma_{yyM}^2}{Y_T Y_C} + \frac{\sigma_{xyM}^2}{S_L^2} - \frac{\sigma_{xxM}\sigma_{yyM}}{X_T X_C} \tag{3.19}$$

É bene notare che questa teoria prende in considerazione la differenza tra resistenza a trazione e resistenza a compressione attraverso dei termini lineari. L'equazione 3.19 (considerando $FI_{Hoffman2D} = 1$) definisce la superficie limite di Hoffman: si tratta di un ellissoide simmetrico rispetto al piano $\sigma_{xyM} = 0$. La condizione di failure si verifica nel caso in cui lo stato di tensione della struttura corrisponde ad un punto che si trova sulla superficie limite o al di fuori di essa. Il vantaggio di utilizzare questo criterio, rispetto al semplice confronto tra componenti di tensione e resistenze del materiale, sta nel fatto che esso tiene conto dei contributi di tutte le tensioni nel piano e, di conseguenza, può essere considerato interattivo. Quindi la failure può verificarsi anche se le singole tensioni sono inferiori rispetto al massimo valore ammissibile. Tuttavia, in questo caso il failure index calcolato è unico, in quanto non si tiene conto dei differenti modi di rottura che possono verificarsi nel materiale. Questo è uno dei principali difetti di questo criterio, in quanto a volte alcuni modi di rottura sono più importanti di altri.

3.3.2 Hashin3D

In questo criterio viene effettuata una distinzione tra i vari modi di rottura del materiale: tensione/compressione delle fibre e tensione/compressione della matrice. Di conseguenza è possibile calcolare 4 differenti indici di failure, le cui formule vengono riportate in seguito [3].

- Fiber failure (Tension):

$$FI_{FT,Hashin3D} = \left(\frac{\sigma_{xxM}^2}{X_T}\right)^2 + \frac{\sigma_{xyM}^2 + \sigma_{xzM}^2}{S_L^2} \tag{3.20}$$

- Fiber failure (Compression):

$$FI_{FC,Hashin3D} = \left(\frac{\sigma_{xxM}^2}{X_C}\right)^2 \tag{3.21}$$

- Matrix failure (Tension):

$$FI_{MT,Hashin3D} = \frac{(\sigma_{yyM}^2 + \sigma_{zzM}^2)}{Y_T^2} + \frac{\sigma_{yzM}^2 - \sigma_{yyM}\sigma_{zzM}}{S_T^2} + \frac{\sigma_{xyM}^2 + \sigma_{xzM}^2}{S_L^2} \tag{3.22}$$

- Matrix failure (Compression):

$$FI_{MC,Hashin3D} = \left[\left(\frac{Y_C}{2S_T}\right)^2 - 1\right]\left(\frac{\sigma_{yyM} + \sigma_{zzM}}{Y_C}\right) + \frac{(\sigma_{yyM} + \sigma_{zzM})^2}{4S_T^2} +$$

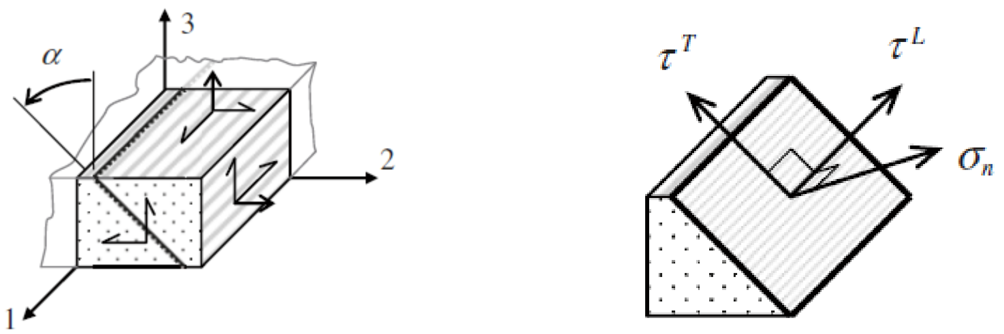
$$+ \frac{\sigma_{yzM}^2 - \sigma_{yyM}\sigma_{zzM}}{S_T^2} + \frac{\sigma_{xyM}^2 + \sigma_{xzM}^2}{S_L^2} \tag{3.23}$$

Si nota che gli indici di failure precedentemente elencati sono tutti interattivi, ad eccezione di $FI_{FC,Hashin3D}$, che contiene esclusivamente il contributo di σ_{xxM}^2. Rispetto al criterio di Hoffman, quello di Hashin3D risulta essere maggiormente appropriato per prevedere le condizioni di failure all'interno dei compositi, in quanto tiene conto delle tensioni trasversali, che giocano un ruolo fondamentale negli effetti di free edge. Inoltre è importante notare che l'identificazione del modo di rottura è utile per effettuare un'analisi progressiva di failure, per un materiale composito, attraverso il metodo degli elementi finiti. Questa procedura inizia attraverso una normale analisi FEM. Nel momento in cui la condizione di failure si verifica in alcuni elementi della struttura, per poter continuare l'analisi, è necessario conoscere il modo in cui questa failure si è verificata. Conoscendo queste informazioni sarà possibile apportare delle modifiche alla rigidezza della struttura o introdurre nuove superfici, in modo da procedere con una nuova analisi FEM ed individuare nuove condizioni di failure. Tutto ciò non sarebbe possibile con un criterio che non distingue i vari modi di failure.

3.3.3 LaRC05

Il criterio LaRC05 [31] è stato sviluppato nel contesto del Second World-Wide Failure Exercise (WWFE-II): si tratta di un'attività internazionale finalizzata a valutare le capacità predittive dei criteri di failure esistenti, nel caso di materiali compositi caratterizzati da uno stato di tensione tridimensionale. Come per il criterio Hashin3D, anche il LaRC05 effettua una distinzione tra i vari modi di rottura del materiale, con la differenza che in questo caso si pone maggiore attenzione ai fenomeni che si manifestano a livello micromeccanico. Si tratta di un criterio caratterizzato da una notevole evoluzione nel tempo (infatti LaRC02, LaRC03 e LaRC04 sono versioni precedenti del LaRC05), che a sua volta si basa su dei concetti fondamentali che sono stati estrapolati da altri criteri (come ad esempio quello di Mohr-Coulomb). Nello specifico, si fa riferimento a 3 possibili modi di rottura: Matrix Failure, Fibre Compression e Fibre Tension. Prendendo in considerazione la matrice, non viene effettuata una distinzione tra rottura per compressione o per trazione: si fa riferimento ad un'unico indice che tiene conto di entrambi gli effetti ($FI_{M,LaRC05}$). Inoltre è importante sottolineare che le resistenze associate alla failure della matrice del composito, non vengono considerate come proprietà del materiale, bensì come proprietà strutturali influenzate dalla laminazione e dallo spessore dei singoli strati. Di conseguenza, il failure index può essere definito in questo modo:

$$FI_{M,LaRC05} = \left(\frac{\tau_T}{S_T - \eta_T\sigma_N}\right)^2 + \left(\frac{\tau_L}{S_L - \eta_L\sigma_N}\right)^2 + \left(\frac{<\sigma_N>_+}{Y_T}\right)^2 \tag{3.24}$$



(a) Piano di frattura, inclinato di un angolo α rispetto allo spessore.

(b) Componenti di tensione che agiscono sul piano di frattura.

Figura 3.6: Rappresentazione del piano di frattura della matrice.

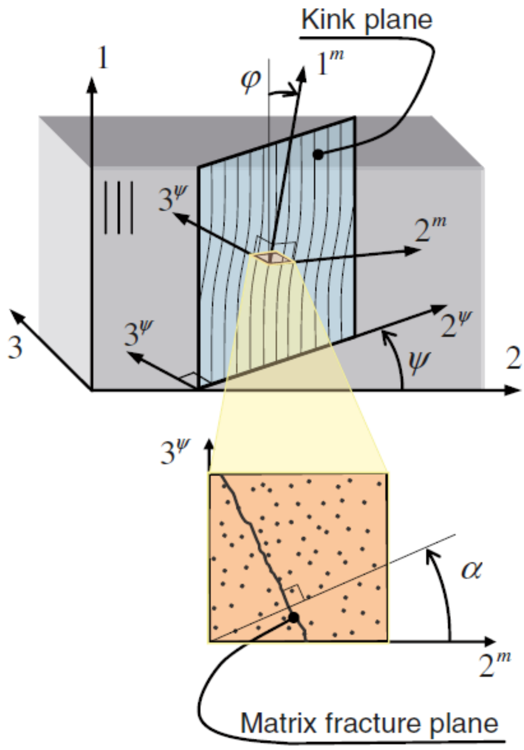


Figura 3.7: Rappresentazione dei sistemi di riferimento nel caso di kinking.

dove σ_N, τ_L e τ_T sono le tensioni nel potenziale piano di frattura e possono essere ottenute attraverso la rotazione delle tensioni nel sistema di riferimento delle fibre (materiale), come si osserva in Figura 3.6. I simboli η_T ed η_L sono dei coefficienti di attrito e tengono conto dell'effetto della pressione sul fenomeno di failure. In particolare essi fanno aumentare le corrispondenti resistenze a taglio nel caso di sforzo a compressione, mentre le riducono nel caso di sforzo a trazione. Infine il simbolo $< \cdot >_+$ sta ad indicare $< x >_+ = max\{0, x\}$.
Il modo di failure relativo alla compressione delle fibre tiene conto sia del fenomeno di splitting che del fenomeno di kinking. Nel primo caso si osserva la scissione dell'interfaccia tra le fibre e la matrice, generalmente accompagnata dalla rottura delle fibre stesse durante il processo di failure. Nel caso del kinking, invece, nascono delle kink-bands, ovvero regioni di spazio in cui si osserva un fenomeno di piegamento delle fibre. Le osservazioni sperimentali suggeriscono che le kink-bands sono precedute dalla failure della matrice e che il microbuckling delle fibre non è

necessariamente il fattore trainante per questo tipo di failure. Alla luce di ciò, si considera che il fenomeno di kinking nasce da una rottura disallineata a taglio della matrice, sotto l'effetto di un carico longitudinale a compressione. Inoltre, se la compressione longitudinale non ha un valore significativo, la rottura della matrice può determinare lo splitting delle fibre, senza necessariamente provocarne il kinking. L'indice che tiene conto del fenomeno di splitting è lo stesso che tiene conto del kinking:

$$FI_{KINK,LaRC05} = FI_{SPLIT,LaRC05} = \left(\frac{\tau_{23}^{m}}{S_T - \eta_T \sigma_2^m}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}^{m}}{S_L - \eta_L \sigma_2^m}\right)^2 + \left(\frac{< \sigma_2^m >_+}{Y_T}\right)^2 \quad (3.25)$$

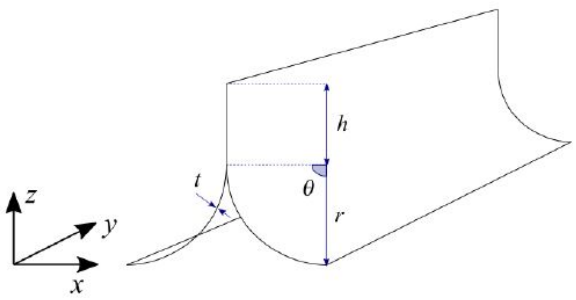
I due modi di failure si distinguono a seconda del valore dello sforzo di compressione longitudinale: $\sigma_1 \leq -X_C/2$ indica il kinking, mentre $\sigma_1 \geq -X_C/2$ indica lo splitting. Questa distinzione è importante per la propagazione della failure. L'apice "m" sta ad indicare il sistema di riferimento delle fibre piegate, come si osserva in Figura 3.7. Per effettuare la rotazione delle tensioni in questo sistema di riferimento è necessario conoscere l'angolo di kinking ψ, che indica l'inclinazione del kink-band plane rispetto alla direzione 2 perpendicolare alle fibre. Infine, per tenere conto della failure a tensione delle fibre, viene considerato il seguente indice:

$$FI_{FT,LaRC05} = \frac{< \sigma_{xxM} >_+}{X_T} \quad (3.26)$$

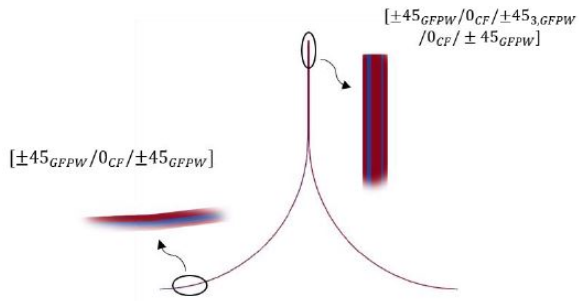
Capitolo 4

Analisi di un TRAC Boom in Composito

In questo capitolo viene riportato il processo attraverso il quale è stata analizzata una struttura dispiegabile di tipo TRAC boom in materiale composito. La struttura viene studiata in campo lineare attraverso l'utilizzo di Femap, un software agli elementi finiti che permette di effettuare l'analisi globale e, attraverso l'installazione del plug-in MUL2@GL, anche quella locale (il solutore utilizzato da Femap per l'analisi agli elementi finiti è Nastran). I risultati numerici verranno poi confrontati con i dati sperimentali e con quelli relativi ad un'analisi CUF lyer-wise non lineare, in modo da ottenere un quadro completo del comportamento della struttura (i set di dati sono riportati graficamente nella reference [59]).
Il modello geometrico a cui si fa riferimento è costituito da due flange curve, collegate tra loro tramite una parete verticale tangente ad entrambe. Come è possibile osservare dalla Figura 4.1a, ogni flangia descrive una porzione di superficie cilindrica con raggio $r = 12.7$ mm e sweep angle $\theta = 90°$ (θ indica l'angolo sotteso da ogni flangia). La parete verticale è caratterizzata da una lunghezza $h = 8$ mm e, nel complesso, il boom ha una lunghezza longitudinale di 500 mm.



(a) Geometria del TRAC boom.



(b) Laminazione del TRAC boom.

Figura 4.1: Caratteristiche del TRAC boom.

La struttura è stata realizzata utilizzando materiali compositi in fibra di carbonio (carbon fiber, CF) ed in fibra di vetro (glass fiber plain weave, GFPW), sfruttando la stessa sequenza di laminazione riportata in Figura 4.1b (maggiori dettagli sui materiali sono riportati nel paragrafo 2.1 della reference [60]). Si nota che per ciascuna flangia sono stati utilizzati 3 strati, con sequenza $[\pm 45_{GFPW}/0_{CF}/\pm 45_{GFPW}]$, mentre per il tratto verticale sono stati utilizzati 7 strati, con sequenza $[\pm 45_{GFPW}/0_{CF}/\pm 45_{GFPW}/\pm 45_{GFPW}/\pm 45_{GFPW}/0_{CF}/\pm 45_{GFPW}]$. Lo spessore degli strati e le proprietà dei materiali sono riportati in Tabella 4.1: si nota che la parete verticale ha uno spessore complessivo di 185 μm, mentre ogni flangia ha uno spessore totale di 80 μm. In corrispondenza della parete verticale, si nota che le stratificazioni relative alle flange sono unite tramite uno strato centrale in fibra di vetro. Questo aspetto è legato al processo di produzione della struttura, il quale prevede che le due flange vengano prodotte separatamente e, solo successivamente, unite tramite uno strato centrale di tipo $\pm 45_{GFPW}$ (la produzione avviene in autoclave tramite un processo a doppia polimerizzazione, descritto in modo più approfondito nel paragrafo 2.1 della reference [60]).

Tabella 4.1: Proprietà dei materiali.

	E_1 $[GPa]$	E_2 $[GPa]$	G_{12} $[GPa]$	ν_{12}	t $[\mu m]$
CF	128	6.5	7.6	0.35	30
$GFPW$	23.8	23.8	3.3	0.17	25

Per quanto riguarda lo studio sperimentale della struttura, si fa riferimento ad una configurazione che permette la rotazione delle sezioni alle estremità della struttura e la traslazione longitudinale di una delle due (come si può notare dalla Figura 4.2). Quindi entrambe le sezioni hanno solo un grado di libertà rotazionale libero (attorno ad x o z a seconda delle condizioni di carico), ed una sola delle due sezioni è in grado di traslare lungo l'asse y (una descrizione più approfondita del setup sperimentale è riportata nelle reference [60] e [59]).

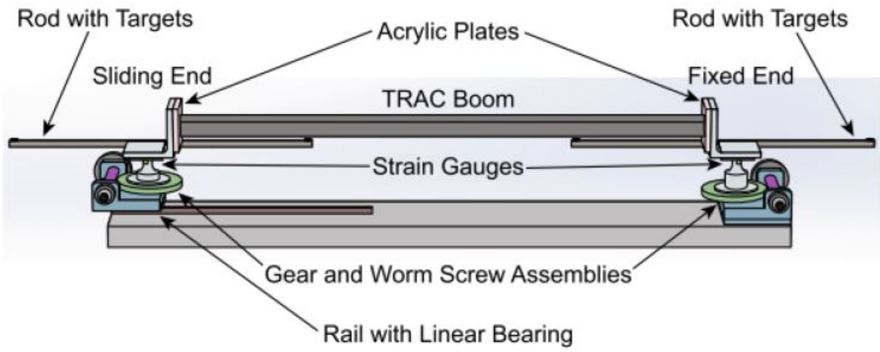


Figura 4.2: Setup sperimentale per prova a flessione.

4.1 Sviluppo del Modello Femap

La geometria della struttura è stata ottenuta attraverso l'estrusione della sezione trasversale lungo la direzione longitudinale, individuata dall'asse y. La sezione trasversale è stata ottenuta tramite due archi di circonferenza ed un tratto verticale, secondo la configurazione e le dimensioni riportate in Figura 4.1a.

Successivamente la struttura è stata discretizzata attraverso elementi di tipo "laminate plate" QUAD4. É stata utilizzata una spaziatura di 2 mm tra i nodi in direzione longitudinale, disponendo 20 elementi sulle estremità di ciascuna flangia e 4 elementi alle estremità della parete verticale (lo stesso tipo di discretizzazione è stato applicato in [60], quindi si tratta di un modello già validato). Infine sono stati aggiunti 2 elementi rigidi di tipo RBE2 in corrispondenza delle sezioni alle estremità (un elemento rigido per ogni sezione). Gli elementi RBE2 permettono di stabilire una connessione rigida tra un nodo indipendente, chiamato nodo "master" ed una serie di nodi dipendenti, chiamati "slave": si è scelto di collegare tutti i gradi di libertà, quindi sia quelli relativi alla traslazione (T_x, T_y, T_z) che quelli relativi alla rotazione (R_x, R_y, R_z). Per definire il nodo master, è stato scelto il baricentro della sezione, (calcolato tramite il software SolidWorks) la cui posizione si trova sull'asse di simmetria, ad una distanza di circa $8.47\,mm$ dalla base della sezione stessa (cioè dalla retta orizzontale inferiore tangente ad entrambe le flange). Per definire i nodi slave, sono stati scelti tutti gli altri nodi appartenenti alla sezione (45 per ogni sezione). Nel complesso sono stati creati 11000 elementi QUAD4 e 2 elementi RBE2, per un totale di 11002 elementi e 11799 nodi. Dopo aver creato i materiali, secondo i dati in Tabella 4.1, e gli strati, secondo la configurazione in Figura 4.1b, sono state create 2 proprietà degli elementi (una per gli elementi della parete verticale ed una per gli elementi delle flange). Successivamente è stato necessario unire i nodi in corrispondenza dei punti di contatto tra le flange e la parete verticale (infatti queste superfici sono state discretizzate separatamente, per questo motivo si sono generati dei nodi sovrapposti). In Figura 4.3 è rappresentato il modello Femap della struttura, dopo la definizione della geometria e la discretizzazione in elementi finiti. Successivamente è stata modificata l'orientazione del materiale, scegliendo la direzione $Y+$ per tutti gli elementi: in questo modo il software determina l'orientazione delle fibre valutando il loro angolo di inclinazione rispetto alla direzione $Y+$ (ad esempio un angolo di inclinazione delle fibre pari a 0° indica che esse sono dirette lungo l'asse Y).

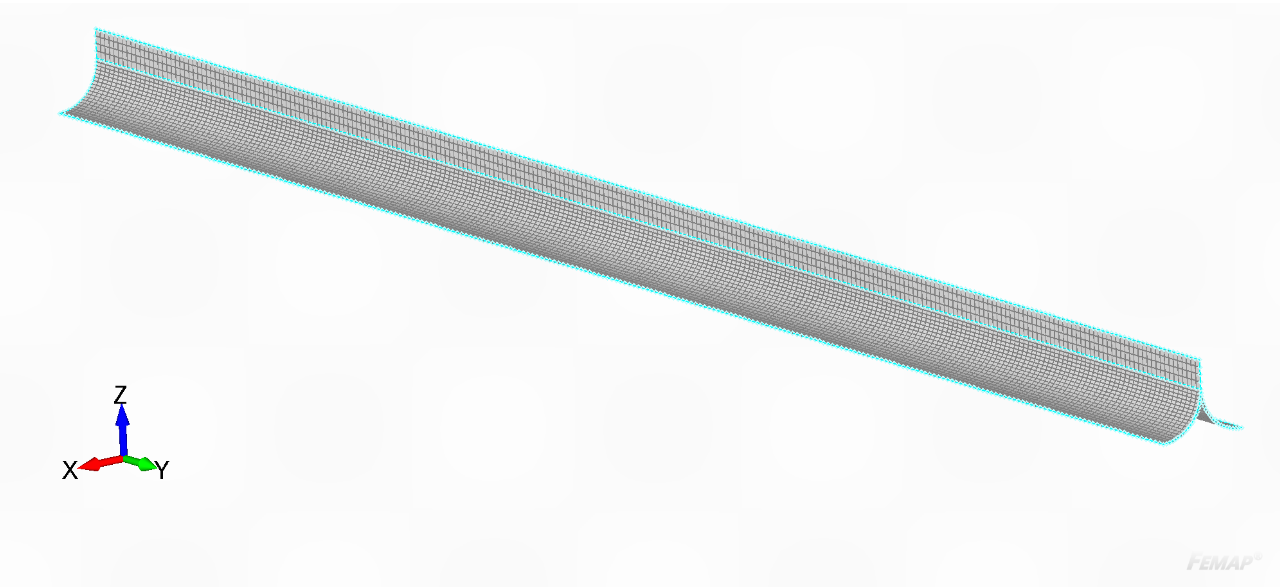


Figura 4.3: Modello Femap del TRAC boom.

In seguito sono stati imposti i vincoli ed i carichi che agiscono sulla struttura. Volendo effettuare delle prove a flessione con momenti diretti sia lungo l'asse x che lungo l'asse z, sono stati considerati due casi di carico e due casi di vincolo. Per quanto riguarda i gradi di libertà rotazionali, entrambe le sezioni non possono ruotare attorno alle direzioni perpendicolari al momento applicato, mentre sono libere di ruotare attorno alla direzione parallela a tale momento (quindi 2 rotazioni sono bloccate mentre la terza è libera). I gradi di libertà traslazionali della sezione di sinistra (quella con coordinata $y = 0$) sono tutti bloccati, indipendentemente dal momento applicato. La sezione di destra (quella con coordinata $y = 500\,mm$) è libera di traslare in direzione y, mentre non può traslare nelle altre 2 direzioni (x e z). I momenti flettenti sono stati applicati prima lungo l'asse x e, successivamente lungo l'asse z. In entrambi i casi sono stati applicati due momenti uguali in modulo ed opposti in verso in corrispondenza delle sezioni (quindi un momento per ogni sezione). É bene notare che, avendo creato degli elementi rigidi alle estremità della struttura, sia le condizioni di vincolo che quelle di carico sono state imposte in corrispondenza del nodo master di ciascun elemento. Queste condizioni di vincolo e di carico, schematizzate in Tabella 4.2, sono state scelte per riprodurre una situazione simile a

quella sperimentale.
Volendo studiare la struttura in campo lineare, sono state effettuate in totale 4 analisi, ovvero 2 analisi per ogni caso di carico considerato. Sono stati utilizzati i seguenti momenti: $M_x = +100\, Nmm$, $M_x = -300\, Nmm$, $M_z = +100\, Nmm$, $M_z = -100\, Nmm$. É bene notare che in questo caso M_x è considerato positivo quando la parete verticale è in compressione, mentre M_z è considerato positivo quando è rivolto verso il basso (cioè diretto nel verso opposto rispetto a quello individuato dell'asse z, in corrispondenza della sezione con coordinata $y = 500\, mm$).

Tabella 4.2: Condizioni di vincolo per le sezioni alle estremità della struttura, nelle due condizioni di carico considerate ($M_x = +100\ Nmm$, $M_x = -300\ Nmm$ e $M_z = \pm 100\ Nmm$).

	Sezione sx $y = 0$						Sezione dx $y = 500\, mm$					
	T_{x1}	T_{y1}	T_{z1}	R_{x1}	R_{y1}	R_{z1}	T_{x2}	T_{y2}	T_{z2}	R_{x2}	R_{y2}	R_{z2}
M_x	0	0	0	Free	0	0	0	Free	0	Free	0	0
M_z	0	0	0	0	0	Free	0	Free	0	0	0	Free

4.2 Risultati dell'Analisi Globale

Per poter osservare i risultati dell'analisi globale del TRAC boom, sono stati realizzati dei grafici (Figura 4.4 e Figura 4.5) che mettono a confronto gli output dell'analisi lineare con i dati derivanti da un'analisi sperimentale della struttura (nel caso della flessione attorno all'asse x sono anche stati considerati dei risultati derivanti da un'analisi CUF lyer-wise non lineare [59]). I grafici in questione rappresentano l'andamento del momento applicato (M_x o M_z) in funzione di un angolo di rotazione[3] α. L'angolo α è stato ottenuto sottraendo alla rotazione[4] della sezione in corrispondenza di $y = 500\ mm$ (α_c), la rotazione della sezione in corrispondenza di $y = 0$ (α_i). In realtà si nota che le rotazioni delle due sezioni sono uguali in modulo ed opposte in verso, infatti anche la deformata, per le condizioni vincolo e di carico imposte, risulta essere simmetrica. Quindi è possibile scrivere: $\alpha = \alpha_c - \alpha_i = 2\alpha_c = -2\alpha_i$.
Successivamente è stata calcolata la rigidezza flessionale (R) della struttura in campo lineare, intesa come il rapporto tra il momento applicato e la rotazione osservata:

$$R_x = \frac{M_x}{\alpha_x} \tag{4.1}$$

$$R_z = \frac{M_z}{\alpha_z} \tag{4.2}$$

Le rigidezze calcolate con i dati delle analisi numeriche e delle prove sperimentali sono riassunte in Tabella 4.3, dove è stato utilizzato il pedice + per indicare una rigidezza calcolata nel caso di momento positivo ed il pedice − nel caso di momento negativo. É bene sottolineare che in ciascuno dei tre casi le rigidezze sono state calcolate facendo riferimento al campo lineare.
Si nota che secondo i dati ottenuti con l'analisi lineare, la struttura risulta essere più rigida sia nel caso in cui venga applicato M_x che nel caso in cui venga applicato M_z. Inoltre, la struttura risulta essere mediamente più rigida nel caso della rotazione attorno ad x, rispetto al

[3] A seconda che ci si riferisca alla rotazione attorno ad x o a quella attorno a z, si utilizza, rispettivamente α_x o α_z.
[4] Le rotazioni in questione sono uguali per tutti i nodi appartenenti alla stessa sezione.

caso della rotazione attorno a z. Questo è dovuto al fatto che nel primo caso la parete verticale è sollecitata a trazione/compressione, ed è in grado di limitare maggiormente la deformazione dell'intera struttura, fornendo un maggior contributo all'assorbimento delle tensioni σ_{xx}. Nel secondo caso, invece, la parete verticale è sollecitata a flessione, il che limita la sua capacità di assorbimento dei carichi.

Tabella 4.3: Rigidezze flessionali del TRAC boom.

	$R_{x+}\,[Nmm]$	$R_{x-}\,[Nmm]$	$R_{z+}\,[Nmm]$	$R_{z-}\,[Nmm]$
Analisi lineare	21072	21072	12816	12816
Dati sperimentali	12969	16547	10497	9230
Analisi non lineare	13834	16254	/	/

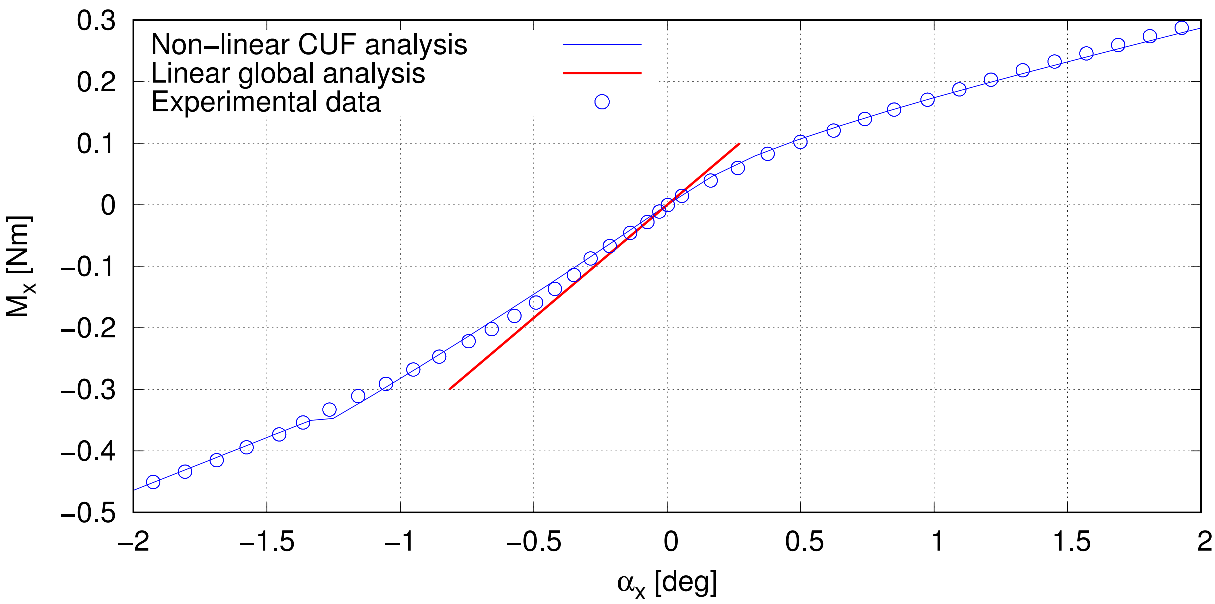


Figura 4.4: Momento flettente diretto lungo x, confronto tra analisi lineare, analisi non lineare e dati sperimentali.

Sono inoltre stati implementati dei grafici (Figura 4.6 e Figura 4.7) che indicano il discostamento dell'analisi lineare dai dati sperimentali e dall'analisi non lineare. É stato calcolato l'errore α_{err} inteso come il modulo della differenza tra la rotazione ottenuta dall'analisi lineare e la rotazione ottenuta con gli altri due metodi. I grafici descrivono quindi l'andamento di α_{err} in funzione del momento applicato alla struttura.
Si nota che per entrambe le condizioni (ovvero sia per M_x che per M_z), l'errore tende a crescere con l'aumentare del modulo del momento applicato. Questo è dovuto al fatto che il comportamento della struttura si discosta sempre di più da quello osservabile in campo lineare. In tutti i casi si nota che l'errore ha un'ordine di grandezza di $10^{-3}\,[rad]$ e tende ad annullarsi per un momento con modulo tendente allo zero.

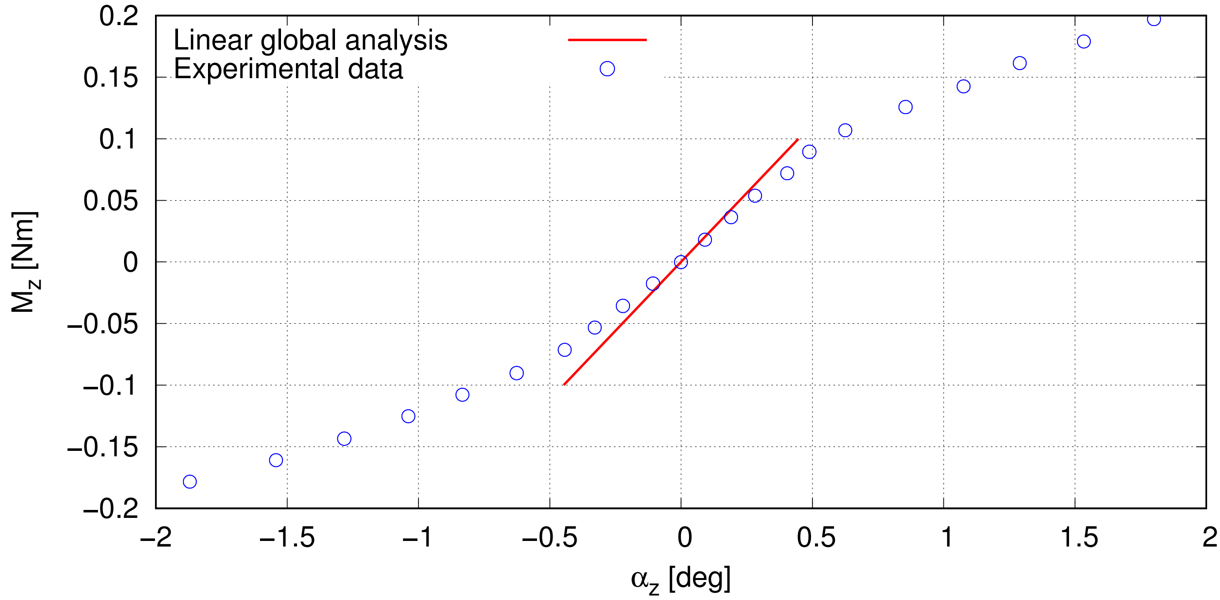


Figura 4.5: Momento flettente diretto lungo z, confronto tra analisi lineare e dati sperimentali.

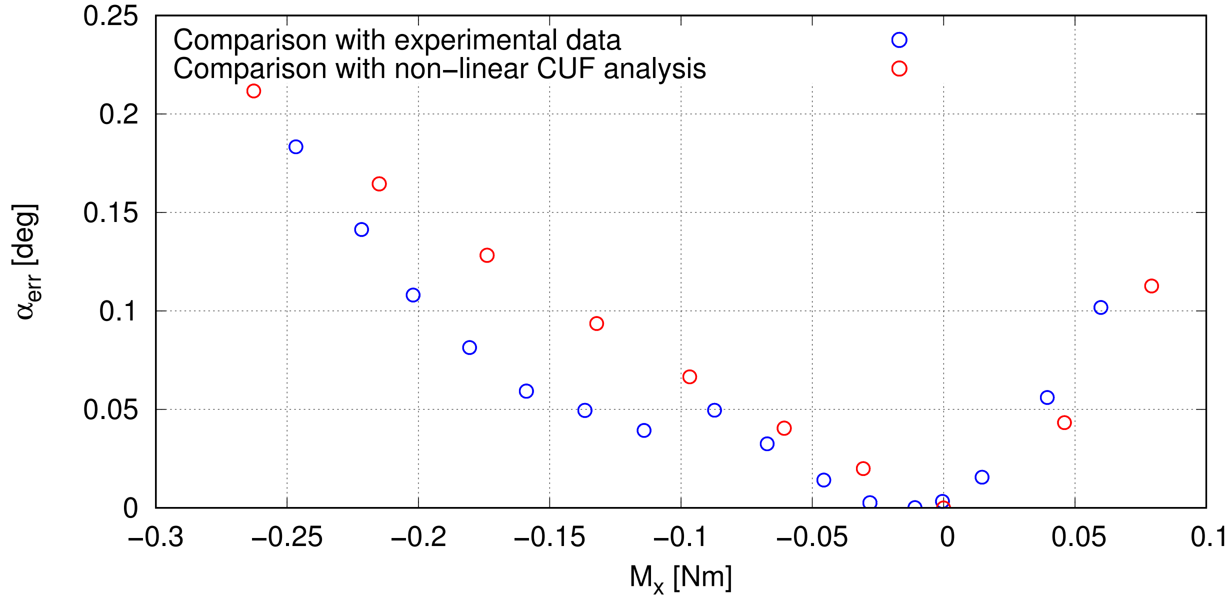


Figura 4.6: Andamento dell'errore in funzione di M_x.

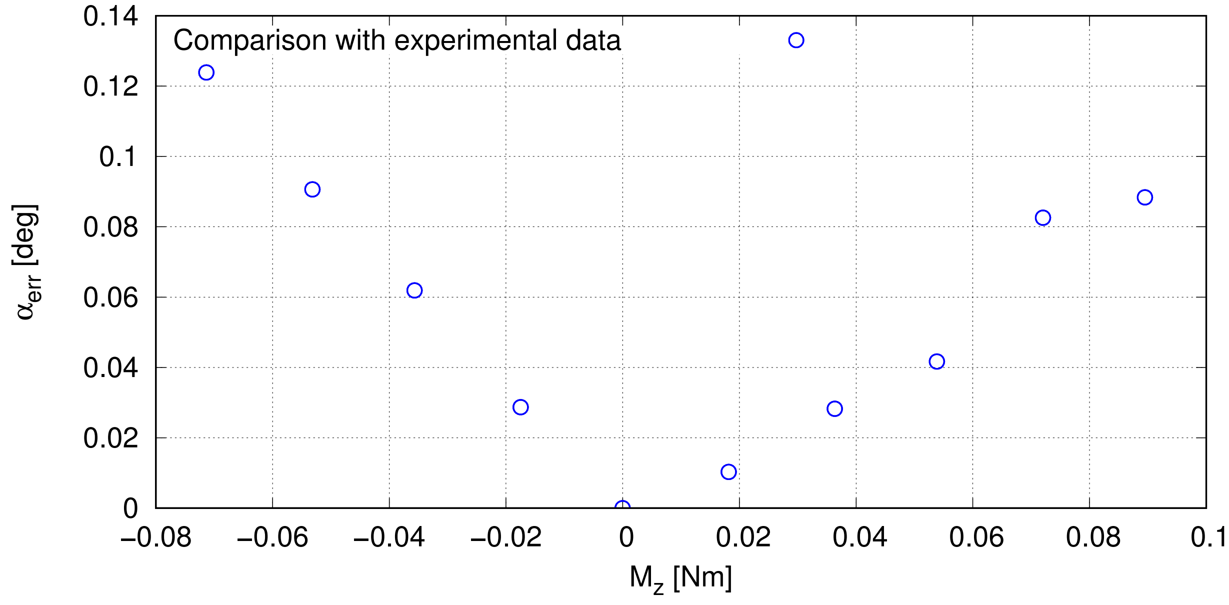


Figura 4.7: Andamento dell'errore in funzione di M_z.

4.3 Risultati dell'Analisi Locale

Dopo aver osservato il comportamento del TRAC boom sollecitato a flessione, sono state effettuate delle analisi locali sui singoli elementi che compongono la struttura, attraverso il plug-in MUL2@GL. Le analisi fanno riferimento al caso in cui la struttura è sollecitata con $M_x = +100\,Nmm$. Per scegliere gli elementi da analizzare sono stati considerati i grafici rappresentanti l'andamento della tensione principale massima in ciascuno strato (Figura 4.8). Si nota che i punti più sollecitati sono quelli in corrispondenza del lembo superiore della parete verticale e dei lembi liberi delle flange. In particolare si nota che gli elementi della parete verticale sono sollecitati a compressione, mentre gli elementi che costituiscono i lembi liberi delle flange sono sollecitati a trazione. Viene inoltre riportato solo il caso che mostra l'andamento della tensione principale nel primo strato dei vari elementi, in quanto si ottengono degli andamenti analoghi anche per gli altri strati (infatti si osserva che gli elementi più sollecitati sono

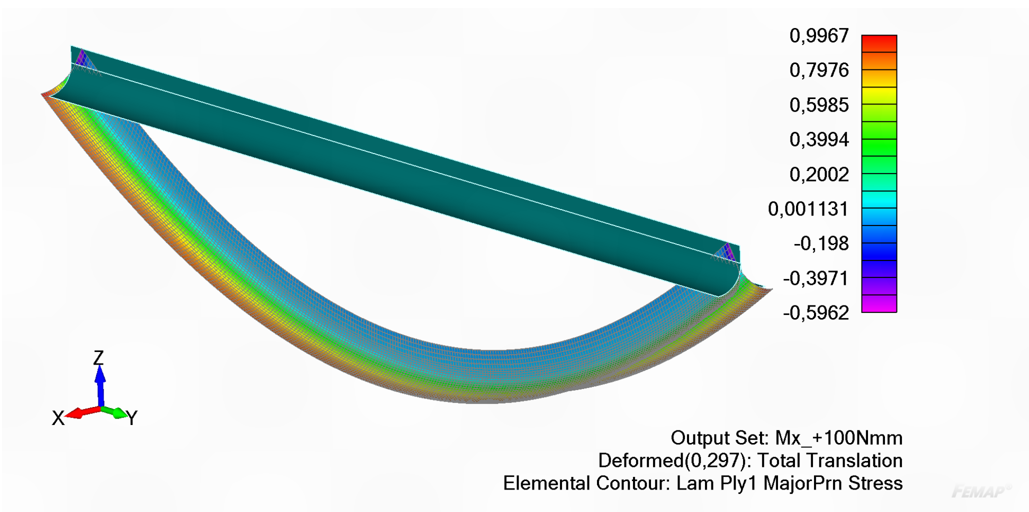


Figura 4.8: Andamento della massima tensione principale nel primo strato, $M_x = +100\,Nmm$.

sempre gli stessi).
Sono quindi stati scelti gli elementi 10460 e 7281, evidenziati in Figura 4.9. Il primo si trova sulla parete verticale, mentre il secondo si trova sulla flangia rivolta nello stesso verso indicato dall'asse X.

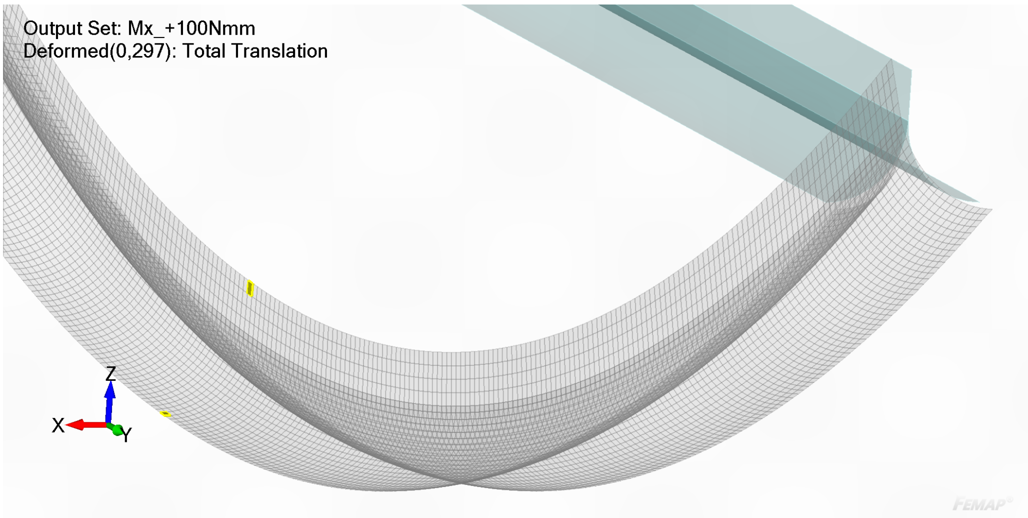
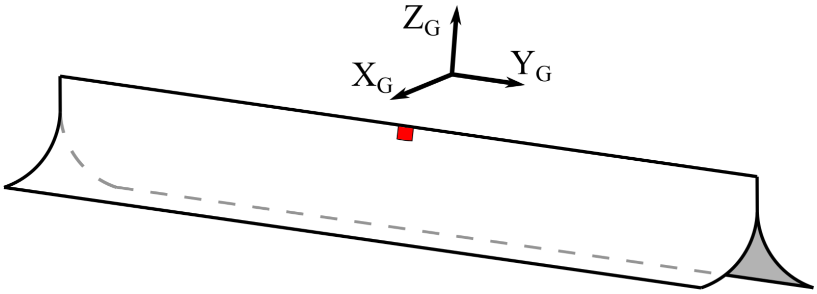


Figura 4.9: Elementi 10460 (in alto sulla parete verticale) e 7281 (in basso sulla flangia), entrambi evidenziati in giallo.

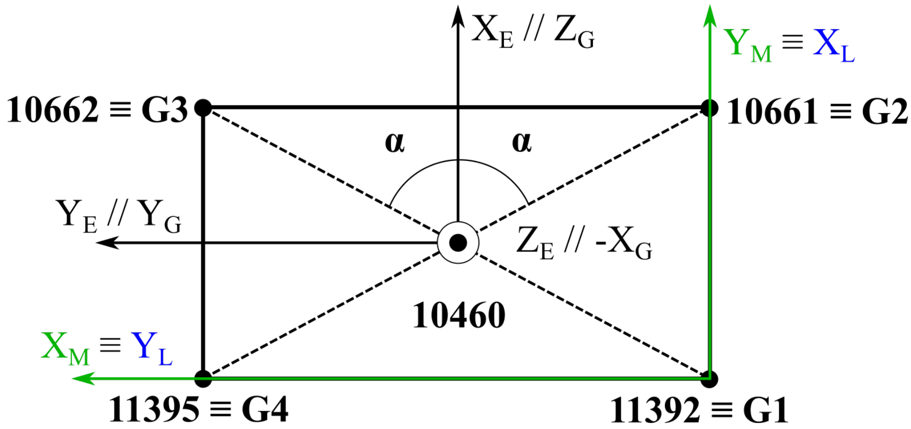
4.3.1 Elemento sulla parete verticale

Dopo aver utilizzato i file BDF ed OP2 (relativi all'analisi $M_x = +100\,Nmm$) come input del plug-in, ed aver indicato l'ID dell'elemento da analizzare (10460), è stato possibile implementare dei grafici che mostrano l'andamento delle tensioni e delle deformazioni all'interno dell'elemento stesso. I grafici sono stati tracciati per il sistema di riferimento globale e per quello materiale. Per poter effettuare dei confronti tra i grafici si è anche scelto di rappresentare i vari sistemi di riferimento per l'elemento 10460, come si osserva in Figura 4.10b (per maggiori informazioni sui sistemi di riferimento e sui pedici utilizzati si consiglia di consultare la sottosezione 3.2.3). Si nota che gli assi X_M, Y_L e Y_G sono paralleli tra loro. Lo stesso accade per gli assi Y_M, X_L Z_G. Infine Z_M, X_G e Z_L sono paralleli tra loro, ma Z_L ha verso discorde rispetto agli altri due, che invece hanno lo stesso verso. In realtà il sistema di riferimento materiale varia a seconda dello strato preso in considerazione, quindi nello schema è riportato solo il caso relativo agli strati CF (considerando gli strati GFPW il sistema materiale risulterebbe essere ruotato di 45° rispetto alla orientazione con cui è stato rappresentato).
Di seguito vengono riportati i grafici delle tensioni: nel sistema di riferimento materiale è stato effettuato un confronto tra i risultati Nastran e quelli MUL2@GL per le tensioni nel piano dell'elemento. Si nota che, nei casi in cui essi sono calcolati, i risultati di Nastran coincidono con quelli del software MUL2@GL. Sono quindi state effettuate le seguenti considerazioni, relative al sistema di riferimento materiale (per i pedici si usa la stessa convenzione dei sistemi di riferimento):

- σ_{xxM}: sia nel caso Nastran che nel caso MUL2@GL, le σ_{xxM} hanno valori negativi (infatti l'elemento risulta essere compresso), con modulo massimo in corrispondenza degli strati CF. Questo avviene perché questi strati sono caratterizzati da un modulo di Young in direzione delle fibre superiore rispetto agli strati GFPW ($E_{1_{CF}} > E_{1_{GFPW}}$). Questo comporta la presenza di una tensione normale di modulo maggiore negli strati CF rispetto agli strati GFPW.



(a) Collocazione dell'elemento 10460, sulla parete verticale (in rosso).



(b) Sistemi di riferimento per l'elemento 10460, sulla parete verticale.

Figura 4.10: Collocazione e sistemi di riferimento dell'elemento 10460, parete verticale.

- σ_{yyM}: in questo caso il modulo minimo della tensione viene raggiunto negli strati CF, in quanto il modulo di Young perpendicolare alle fibre è superiore negli strati GFPW ($E_{2_{CF}} < E_{2_{GFPW}}$). Questo comporta la presenza di una tensione normale di modulo maggiore negli strati GFPW rispetto agli strati CF.

- σ_{xyM}: valgono le stesse considerazioni fatte per σ_{yyM}. La σ_{xyM} raggiunge valori maggiori negli strati GFPW poiché sono caratterizzati da fibre inclinate rispetto all'asse Y_G.

Per quanto riguarda il sistema di riferimento globale, possono essere effettuati dei ragionamenti analoghi, considerando che in questo caso le tensioni massime in modulo sono raggiunte in quegli strati che presentano almeno una componente della fibra nella stessa direzione della tensione. Sempre considerando il sistema di riferimento globale, si nota che la σ_{xxG} assume l'andamento di σ_{zzM}. Infine, considerando il sistema di riferimento locale, si nota che σ_{xxL} assume l'andamento di σ_{zzG}, σ_{yyL} assume lo stesso andamento di σ_{yyG} e σ_{zzL} assume l'andamento di σ_{xxG}. Nella Tabella 4.4 viene evidenziata la relazione tra le varie σ prese in considerazione: quelle sulle stesse righe mostrano lo stesso andamento, mentre quelle sulle stesse colonne si riferiscono allo stesso sistema di riferimento (σ_{xxM} e σ_{yyM} non sono riportate poiché gli assi X_M ed Y_M ruotano a seconda dello strato).

Tabella 4.4: Relazioni tra le tensioni normali nei vari sistemi di riferimento.

Materiale	***Locale***	***Globale***
/	σ_{yyL}	σ_{yyG}
/	σ_{xxL}	σ_{zzG}
σ_{zzM}	σ_{zzL}	σ_{xxG}

Per quanto riguarda le tensioni trasversali (ovvero le componenti che non giacciono sul piano dell'elemento) e gli spostamenti, essi devono soddisfare i C_z^0 requirements, ovvero devono essere funzioni continue nella direzione z, quindi lungo lo spessore dell'elemento. Inoltre le tensioni trasversali dovrebbero annullarsi sulla faccia superiore e su quella inferiore, in quanto non sono applicati dei carichi su queste facce (queste caratteristiche delle tensioni trasversali per i compositi sono ampiamente discusse nella reference [17]). In realtà queste condizioni non sono perfettamente soddisfatte, tuttavia si osservano dei salti molto piccoli (dell'ordine di $10^{-4}\ N/mm^2$). Questi risultati potrebbero essere migliorati aumentando il numero di strati con cui è descritta la sezione nel modello local, senza dover apportare modifiche troppo elaborate nel modello Femap. In questo caso le tensioni trasversali non sono state riportate, perchè sono molto più piccole rispetto a quelle nel piano dell'elemento: questo è dovuto alla condizione di carico che prevede l'applicazione di un momento diretto lungo l'asse X_G. Il momento applicato, infatti sollecita gli elementi QUAD4 in termini di trazione/compressione, ma non in termini di taglio (come ad esempio si verificherebbe se fosse applicata una forza concentrata lungo X_G o Z_G).

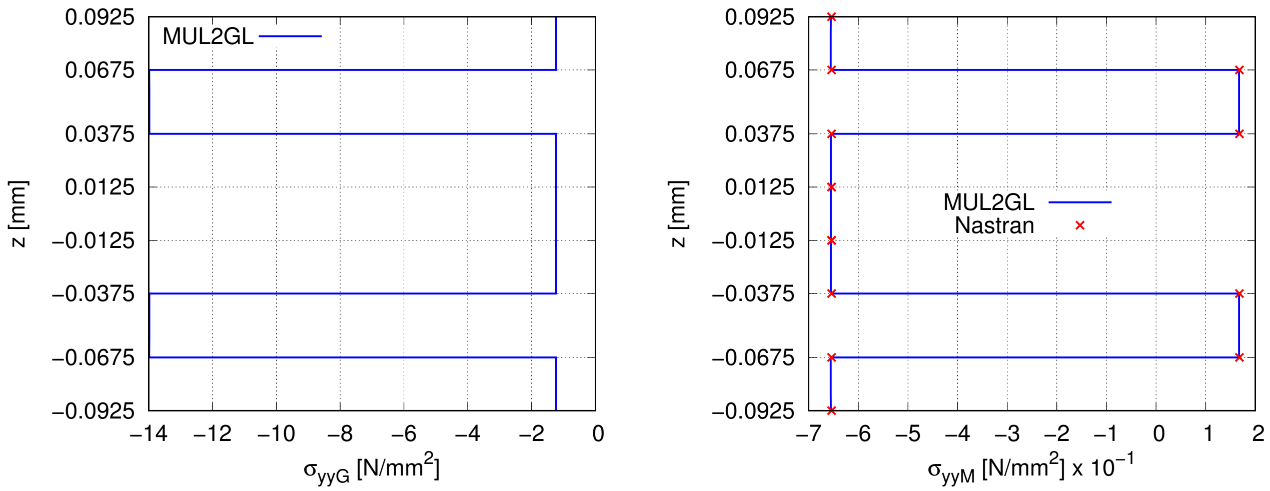


Figura 4.11: Andamento di σ_{yyG} e σ_{yyM} nel baricentro dell'elemento sulla parete verticale.

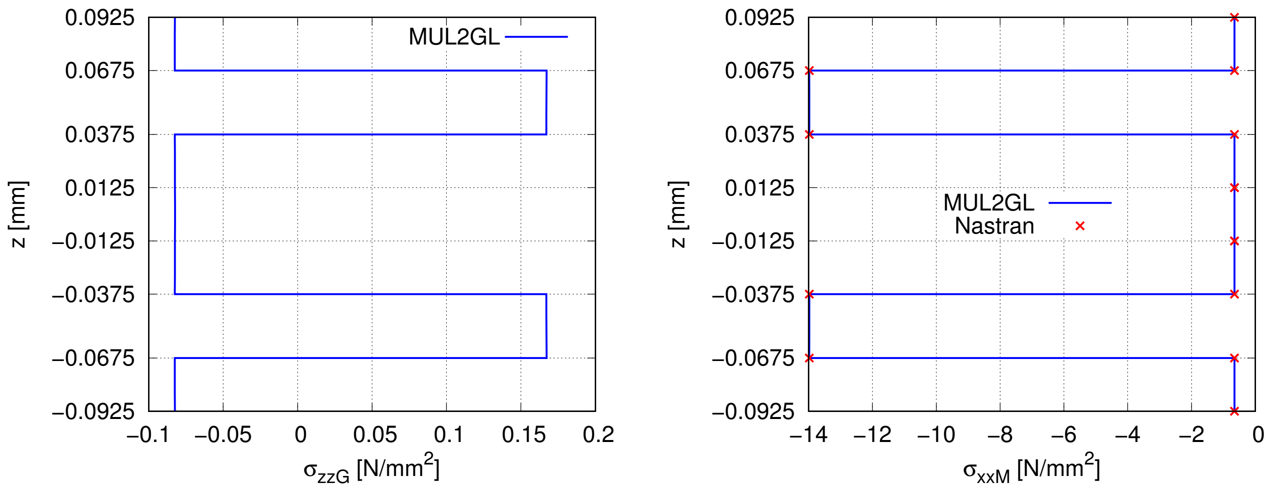


Figura 4.12: Andamento di σ_{zzG} e σ_{xxM} nel baricentro dell'elemento sulla parete verticale.

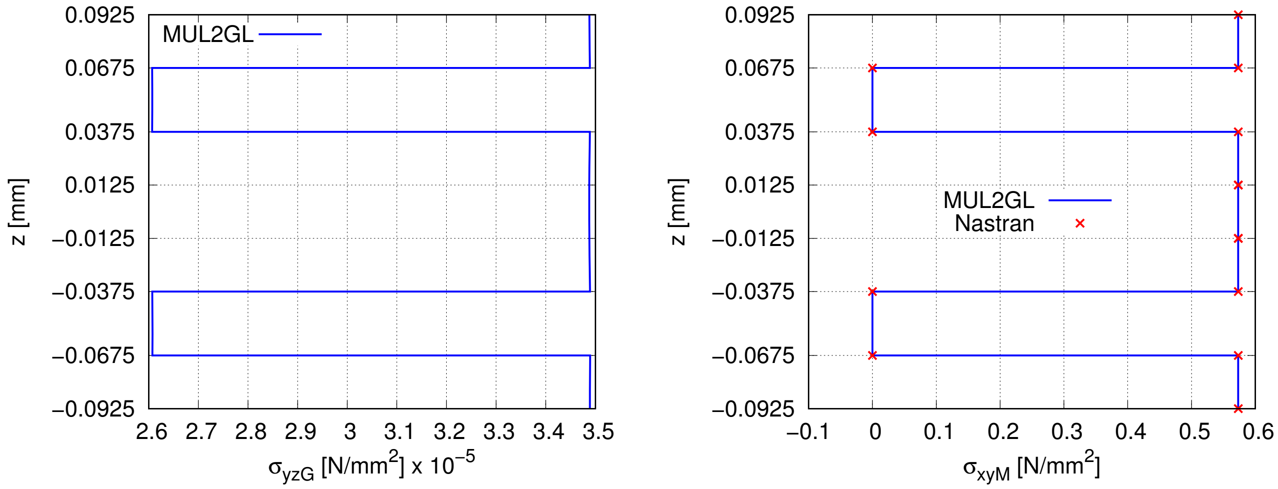


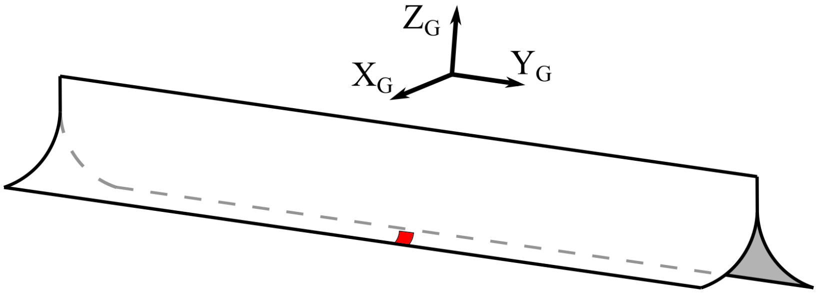
Figura 4.13: Andamento di σ_{yzG} e σ_{xyM} nel baricentro dell'elemento sulla parete verticale.

4.3.2 Elemento sulla flangia

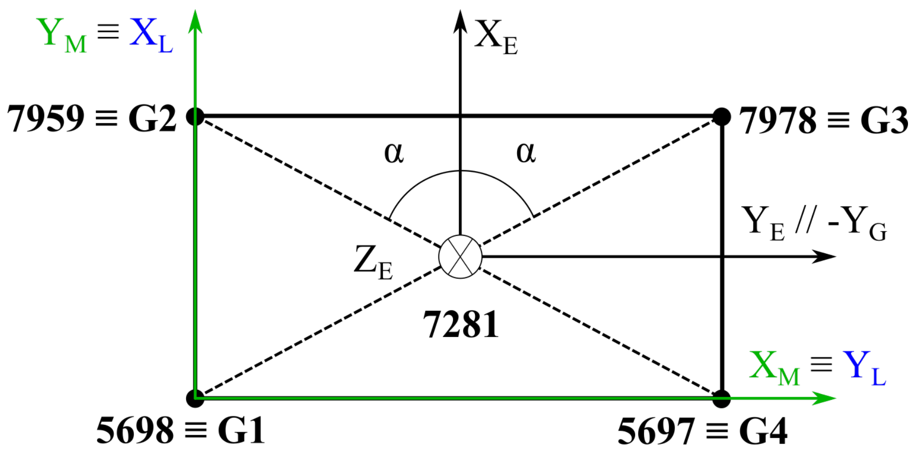
Dopo aver utilizzato i file BDF ed OP2 (relativi all'analisi $M_x = +100\,Nmm$) come input del plug-in, ed aver indicato l'ID dell'elemento da analizzare (7281), è stato possibile implementare dei grafici che mostrano l'andamento delle tensioni e delle deformazioni all'interno dell'elemento stesso. I grafici sono stati tracciati per il sistema di riferimento globale e per quello materiale. Per poter effettuare dei confronti tra i vari grafici si è anche scelto di rappresentare i vari sistemi di riferimento per l'elemento 7281, come si osserva in Figura 4.14b (per maggiori informazioni sui sistemi di riferimento e sui pedici utilizzati si consiglia di consultare la sottosezione 3.2.3). Si nota che gli assi X_M ed Y_L e Y_G sono paralleli tra loro (Y_G ha verso opposto rispetto agli altri due). Lo stesso accade per gli assi Y_M ed X_L (in questo caso non è possibile affermare che essi sono paralleli a X_G, perchè l'elemento è inclinato rispetto al piano definito da X_G ed Y_G). Infine Z_M e Z_L sono paralleli tra loro, ma hanno verso discorde (questi assi non sono paralleli a Z_G perchè l'elemento non è perpendicolare a quest'asse). In realtà il sistema di riferimento materiale varia a seconda dello strato preso in considerazione, quindi nello schema è riportato solo il caso relativo agli strati CF (considerando gli strati GFPW il sistema materiale risulterebbe essere ruotato di 45° rispetto alla orientazione con cui è stato rappresentato).
Di seguito vengono riportati i grafici delle tensioni: nel sistema di riferimento materiale è stato effettuato un confronto tra i risultati Nastran e quelli MUL2@GL per le tensioni nel piano dell'elemento. Si nota che, nei casi in cui essi sono calcolati, i risultati di Nastran coincidono con quelli del software MUL2@GL. Sono quindi state effettuate le seguenti considerazioni, relative al sistema di riferimento materiale (per i pedici si usa la stessa convenzione dei sistemi di riferimento):

- σ_{xxM}: sia nel caso Nastran che nel caso MUL2@GL, le σ_{xxM} hanno valori positivi (infatti l'elemento risulta essere sollecitato a trazione), con modulo massimo in corrispondenza dello strato CF. Questo avviene perché questo strato è caratterizzato da un modulo di Young in direzione delle fibre superiore rispetto agli strati GFPW ($E_{1_{CF}} > E_{1_{GFPW}}$). Questo comporta la presenza di una tensione normale di modulo maggiore negli strati CF rispetto agli strati GFPW.

- σ_{yyM}: in questo caso il modulo minimo viene raggiunto negli strati CF, in quanto il modulo di Young perpendicolare alle fibre è superiore negli strati GFPW ($E_{2_{CF}} < E_{2_{GFPW}}$).



(a) Collocazione dell'elemento 7281, sulla flangia (in rosso).



(b) Sistemi di riferimento per l'elemento 7281, sulla flangia.

Figura 4.14: Collocazione e sistemi di riferimento dell'elemento 7281, sulla flangia.

Questo comporta la presenza di una tensione normale di modulo maggiore negli strati GFPW rispetto agli strati CF.

- σ_{xyM}: valgono le stesse considerazioni fatte per σ_{yyM}. La σ_{xyM} raggiunge valori maggiori negli strati GFPW poiché sono caratterizzati da fibre inclinate rispetto all'asse Y_G.

Per quanto riguarda il sistema di riferimento globale, possono essere effettuati dei ragionamenti analoghi, considerando che in questo caso le tensioni massime in modulo sono raggiunte in quegli strati che presentano almeno una componente della fibra nella stessa direzione della tensione. Nel sistema di riferimento locale, infine, si nota che σ_{zzL} ha lo stesso andamento di σ_{zzM}. Nella Tabella 4.5 viene evidenziata la relazione tra le varie σ prese in considerazione: quelle sulle stesse righe mostrano lo stesso andamento, mentre quelle sulle stesse colonne si riferiscono allo stesso sistema di riferimento (σ_{xxM} e σ_{yyM} non sono riportate poiché gli assi X_M ed Y_M ruotano a seconda dello strato). In questo caso non sono state effettuate considerazioni su σ_{xxG} e σ_{zzG}, perché gli assi corrispondenti X_G e Z_G non giacciono sul piano dell'elemento, nè sono perpendicolari ad esso.

Tabella 4.5: Relazioni tra le tensioni normali nei vari sistemi di riferimento per l'elemento 7281.

Materiale	***Locale***	***Globale***
/	σ_{yyL}	σ_{yyG}
σ_{zzM}	σ_{zzL}	/

Per quanto riguarda le tensioni trasversali, valgono le stesse considerazioni effettuate per l'elemento sulla parete verticale. Le condizioni di continuità e di annullamento in corrispondenza della faccia superiore e di quella inferiore non sono perfettamente soddisfatte, tuttavia si osservano dei salti molto piccoli (sempre dell'ordine di $10^{-4}\, N/mm^2$). Questi risultati potrebbero essere migliorati aumentando il numero di strati con cui è descritta la sezione nel modello local, senza dover apportare modifiche troppo elaborate nel modello Femap. In questo caso le tensioni trasversali non sono state riportate, perchè sono molto più piccole rispetto a quelle nel piano dell'elemento (questo è dovuto alla condizione di carico).

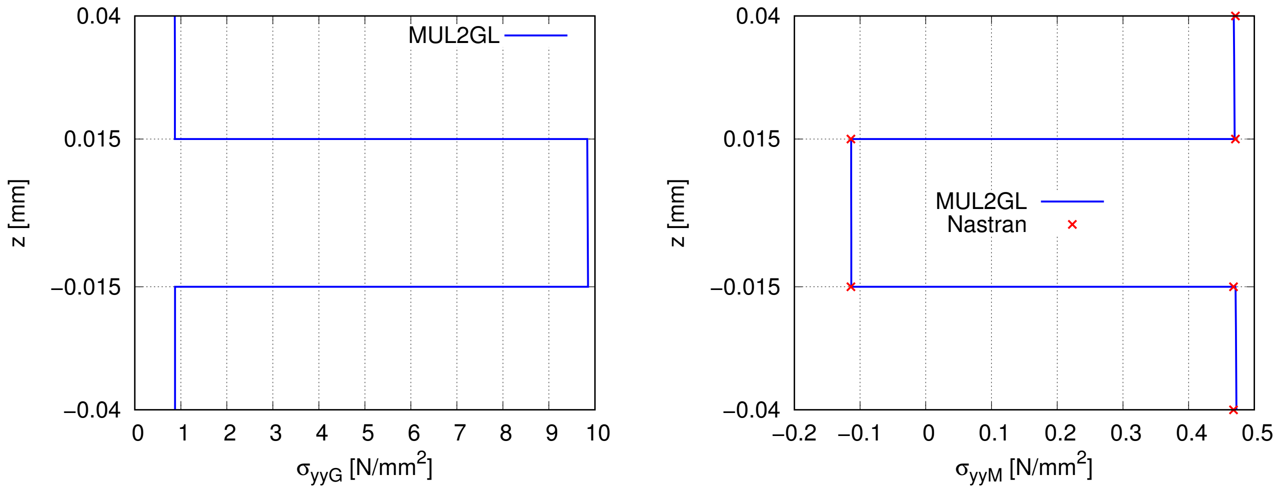


Figura 4.15: Andamento di σ_{yyG} e σ_{yyM} nel baricentro dell'elemento sulla flangia.

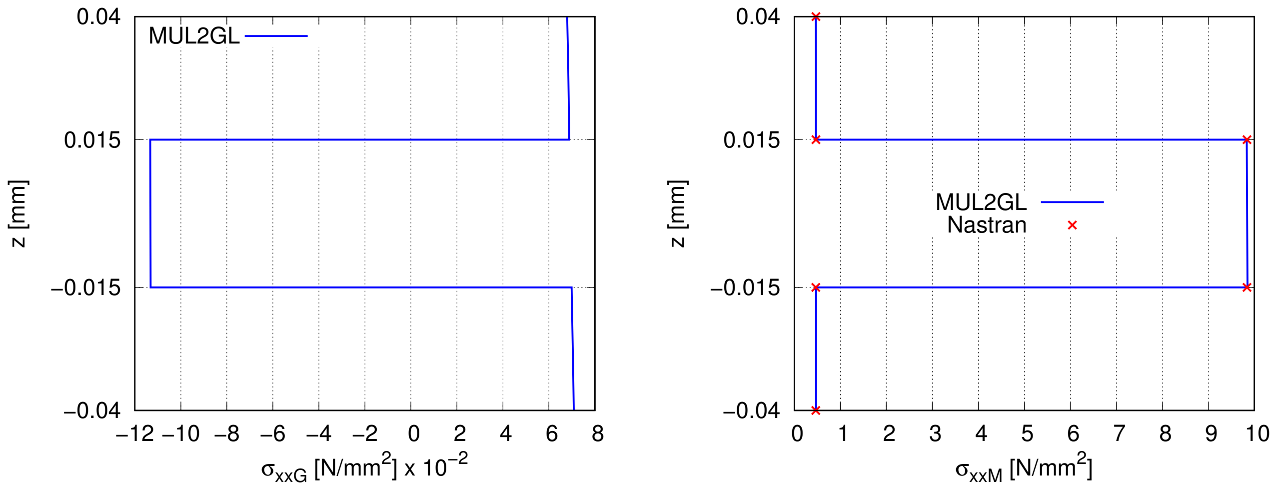


Figura 4.16: Andamento di σ_{xxG} e σ_{xxM} nel baricentro dell'elemento sulla flangia.

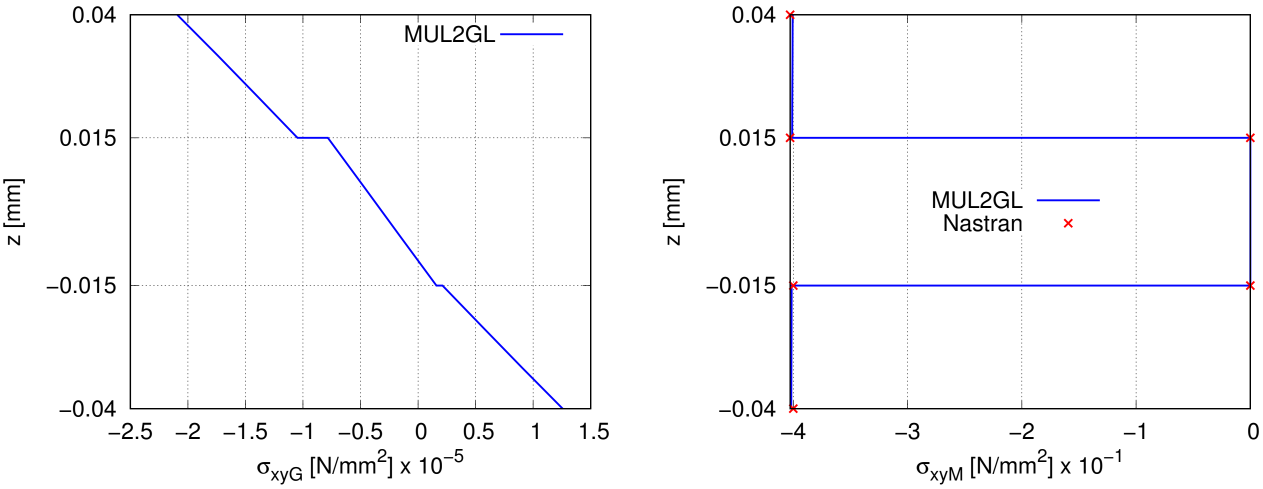


Figura 4.17: Andamento di σ_{xyG} e σ_{xyM} nel baricentro dell'elemento sulla flangia.

4.4 Effetto della Forza di Taglio

Per mettere in evidenza l'andamento delle tensioni trasversali si è scelto di applicare una forza concentrata di $1\,N$ diretta lungo l'asse Z_G, in corrispondenza del nodo master della sezione destra ($y = 500\,mm$). Per quanto riguarda i vincoli, invece, tutti i gradi di libertà della sezione sinistra ($y = 0$) sono stati bloccati, mentre la sezione su cui è applicato il carico è stata lasciata libera (come si osserva nella Tabella 4.6).
L'elemento sulla parete verticale giace nel piano $Y - Z$, quindi con il nuovo carico di taglio, diretto lungo Z_G, non si nota un aumento delle tensioni trasversali rispetto al caso precedente, dove invece la struttura veniva sollecitata con un momento flettente M_x (infatti per apprezzare le tensioni trasversali su questo elemento sarebbe necessario un carico di taglio diretto lungo l'asse X_G). Nel caso dell'elemento sulla flangia, invece, è possibile osservare un notevole aumento delle tensioni trasversali: per questo motivo si è scelto di riportare esclusivamente i grafici relativi a questo elemento, di cui si è già parlato nella sottosezione 4.3.2. In particolare sono state riportate le componenti trasversali di tensione relative ai sistemi di riferimento globale, materiale e locale.

Tabella 4.6: Condizioni di vincolo per le sezioni alle estremità della struttura, nella condizione di carico $T_z = 1\ N$.

	Sezione sx $y = 0$						Sezione dx $y = 500\,mm$					
	T_{x1}	T_{y1}	T_{z1}	R_{x1}	R_{y1}	R_{z1}	T_{x2}	T_{y2}	T_{z2}	R_{x2}	R_{y2}	R_{z2}
T_z	0	0	0	0	0	0	Free	Free	Free	Free	Free	Free

Le tensioni trasversali ottenute con il carico di taglio sono state confrontate con quelle relative al carico $M_x = +100\,Nmm$ utilizzato in precedenza. É stato quindi possibile osservare che nei due casi le tensioni hanno andamenti circa analoghi, con la differenza che nel caso in cui viene applicato il carico di taglio si raggiungono valori più elevati di almeno un ordine di grandezza. Come già anticipato in precedenza, i C_z^0 requirements non sono perfettamente soddisfatti, in quanto le tensioni non si annullano alle estremità e non sono continue all'interfaccia tra i vari strati. Per ottenere una migliore approssimazione delle tensioni trasversali, si è scelto di aumentare il numero di strati virtuali della struttura: questo non comporta delle variazioni per quanto riguarda l'analisi globale, ma permette di ottenere dei risultati più precisi nell'analisi locale. In particolare è stato raddoppiato il numero di strati virtuali, dimezzando lo spessore di ciascuno di essi. Generalmente, se il numero di strati virtuali corrisponde con il numero di strati fisici[5], il software MUL2@GL sfrutta dei polinomi di Lagrange cubici, ovvero 4 nodi lungo lo spessore di ciascuno strato. Raddoppiando il numero di strati virtuali[6], invece, si ottengono 8 nodi posizionati lungo lo spessore di ciascuno strato fisico, il che implica il raggiungimento di un livello di accuratezza maggiore. Questo effetto può essere osservato per σ_{zzG} e σ_{zzM}, dove i grafici dei due diversi livelli di approssimazione sono stati sovrapposti (il grafico di σ_{zzL} non è stato riportato perché coincide con quello di σ_{zzM}). Per le σ_{xz} e le σ_{yz}, invece, questo effetto risulta essere meno visibile ed i due grafici sembrano coincidere: in questi casi, quindi, è stato riportato esclusivamente un singolo grafico, rappresentativo di entrambi i livelli di approssimazione. In generale è possibile affermare che, raddoppiando il numero di strati virtuali, i salti delle σ tra due strati fisici adiacenti si riducono e che il livello di soddisfacimento dei C_z^0 requirements aumenta.

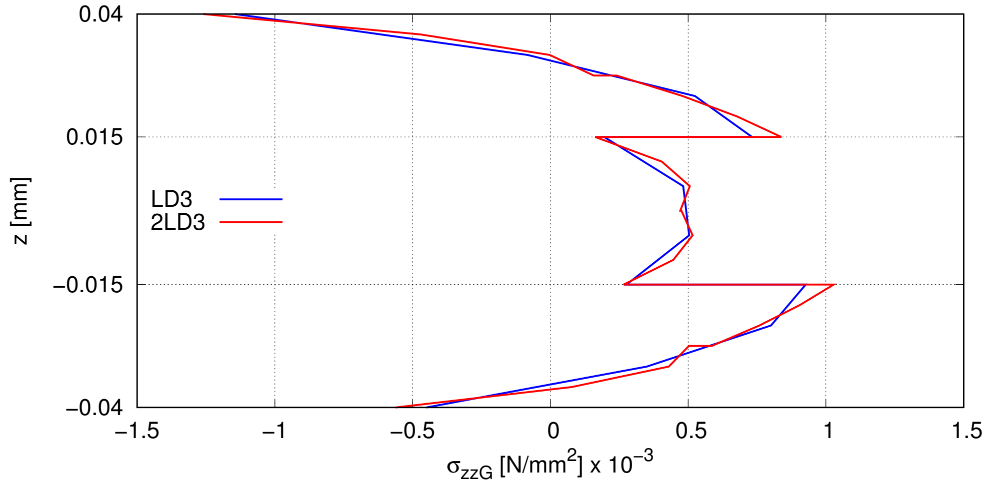


Figura 4.18: Andamento di σ_{zzG} nel baricentro dell'elemento sulla flangia.

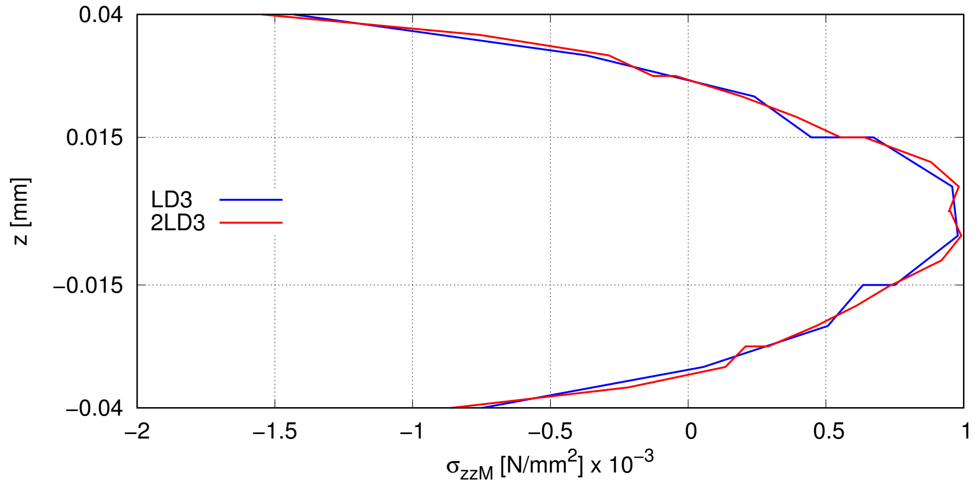


Figura 4.19: Andamento di σ_{zzM} nel baricentro dell'elemento sulla flangia.

[5]Nei grafici questa condizione è stata indicata con la sigla LD3, che indica che per ogni strato fisico è stato utilizzato un polinomio di Lagrange cubico.

[6]Nei grafici questa condizione è stata indicata con la sigla 2LD3, che indica che per ogni strato fisico sono stati utilizzati 2 polinomi di Lagrange cubici.

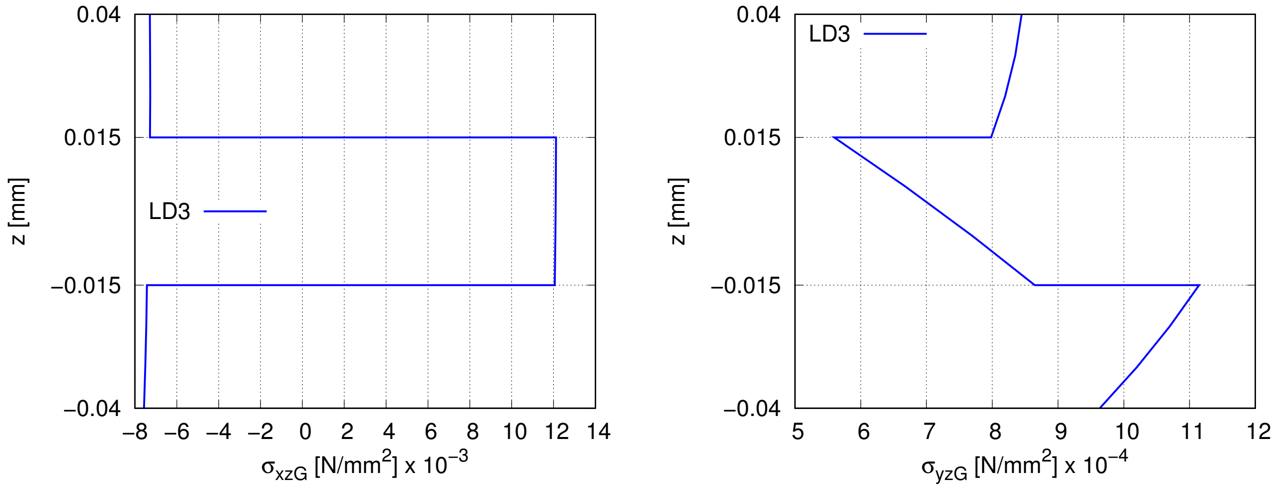


Figura 4.20: Andamento di σ_{xzG} e σ_{yzG} nel baricentro dell'elemento sulla flangia.

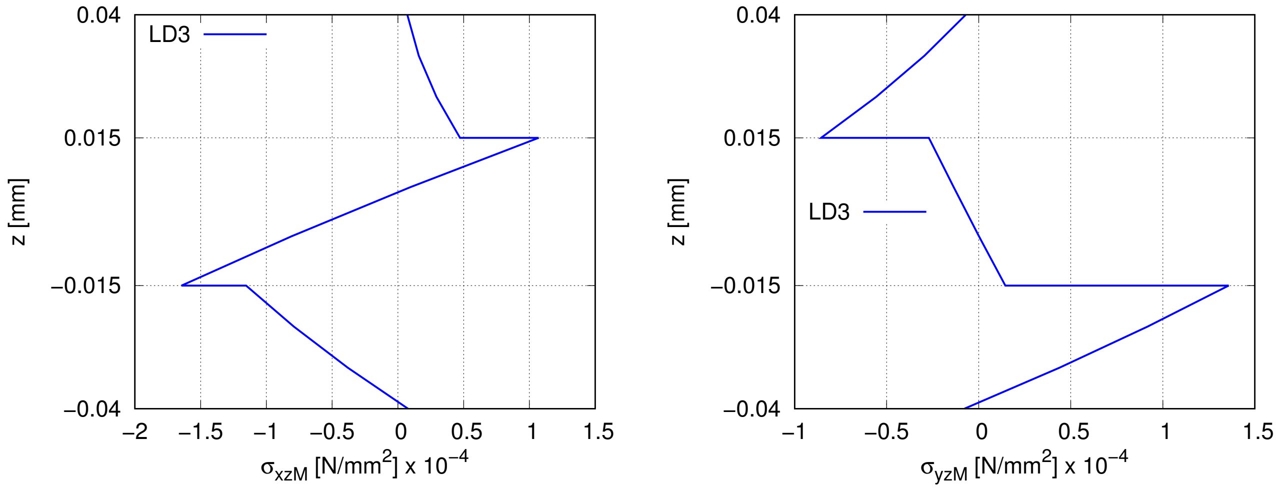


Figura 4.21: Andamento di σ_{xzM} e σ_{yzM} nel baricentro dell'elemento sulla flangia.

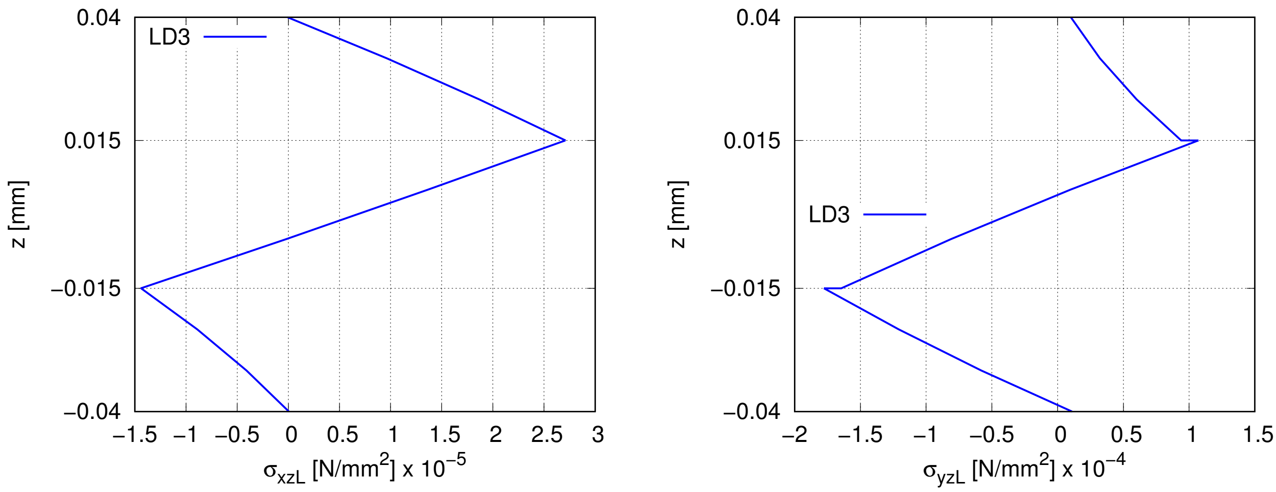


Figura 4.22: Andamento di σ_{xzL} e σ_{yzL} nel baricentro dell'elemento sulla flangia.

É bene sottolineare che, per quanto riguarda σ_{zz}, ci si aspetta che essa sia continua sia nel sistema materiale che in quello locale. Mentre ci si aspetta che σ_{xz} e σ_{yz} siano continue esclusivamente nel sistema di riferimento locale. Questo è dovuto al fatto che l'asse Z_G non è perfettamente perpendicolare al piano dell'elemento, quindi, nel calcolo delle tensioni trasversali, si tiene conto anche degli effetti di σ_{xx} e σ_{yy} che invece possono essere discontinue. Nel caso del sistema materiale, invece, la discontinuità di σ_{xz} e σ_{yz} è dovuta alla rotazione del sistema di riferimento lungo lo spessore. Nel sistema locale, che non ruota e giace nel piano dell'elemento, ci si aspetta che tutte e 3 le tensioni trasversali siano continue.
Anche nel caso dell'analisi a taglio sono state riportate le tensioni nel piano sia nel sistema di riferimento globale che in quello materiale. É stato utilizzato un modello con due strati virtuali per ogni strato fisico (2LD3) e, come già fatto in precedenza, i risultati del software MUL2@GL sono stati confrontati con quelli di Nastran nel sistema di riferimento materiale. Valgono le stesse considerazioni effettuate nella sottosezione 4.3.2, ed anche in questo caso si nota che mediamente σ_{yyG} e σ_{xxM} raggiungono valori più elevati delle altre tensioni: questo è dovuto al fatto che l'asse x del sistema di riferimento materiale (x_M) e l'asse y del sistema di riferimento globale (y_G) sono entrambi diretti lungo le fibre di carbonio dello strato intermedio, dove appunto vengono raggiunti i valori di picco.

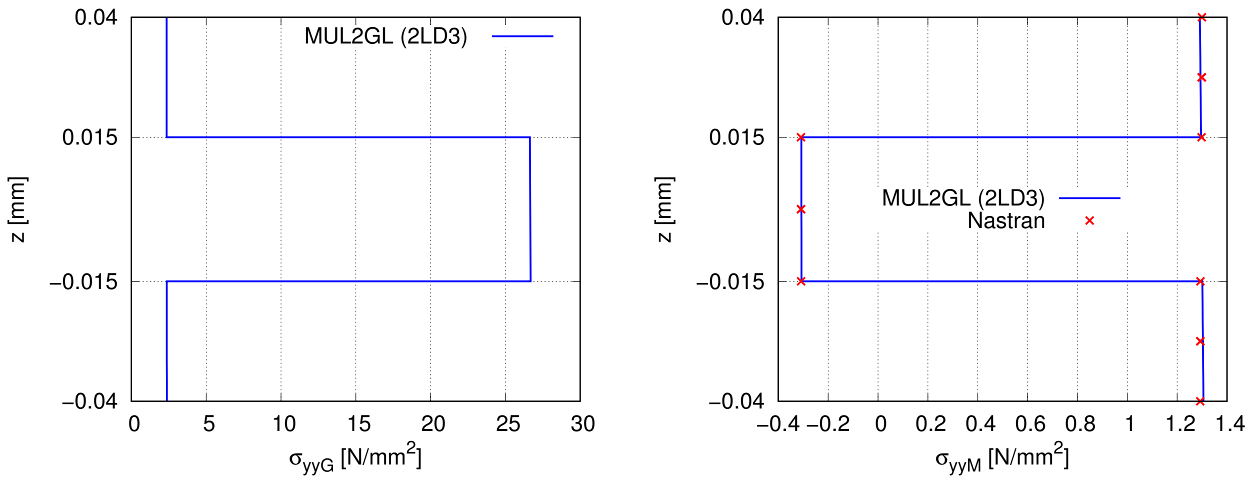


Figura 4.23: Andamento di σ_{yyG} e σ_{yyM} nel baricentro dell'elemento sulla flangia.

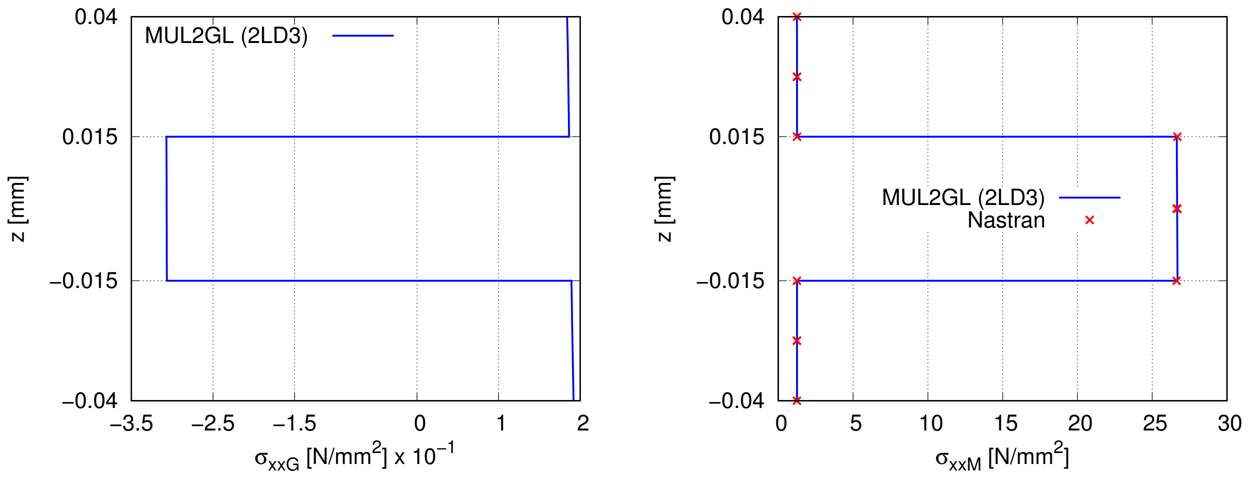


Figura 4.24: Andamento di σ_{xxG} e σ_{xxM} nel baricentro dell'elemento sulla flangia.

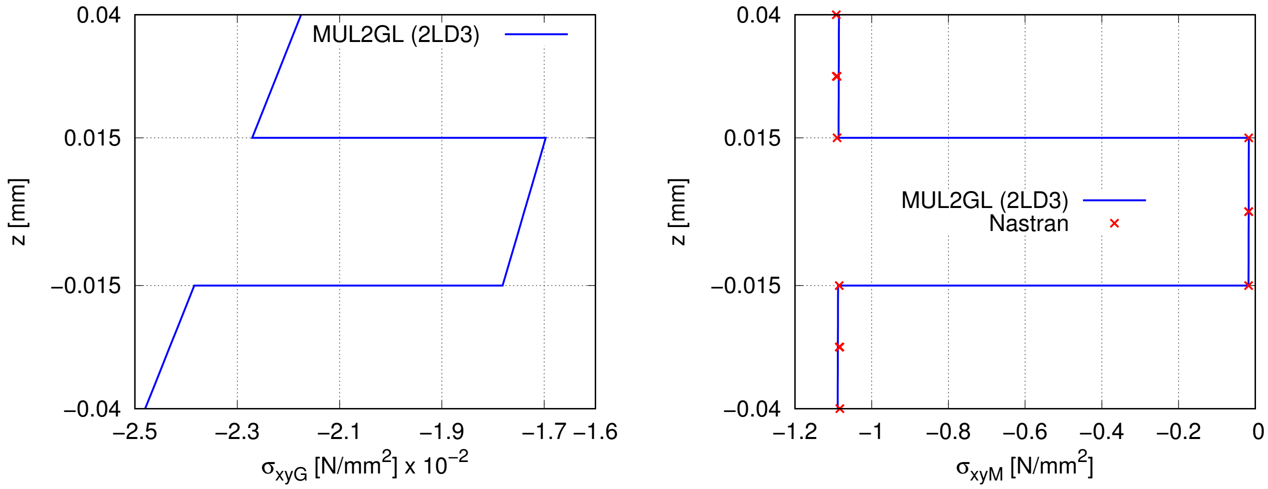


Figura 4.25: Andamento di σ_{xyG} e σ_{xyM} nel baricentro dell'elemento sulla flangia.

4.5 Analisi di Free-Edge

Una delle principali problematiche che caratterizzano le strutture composite è rappresentata dagli effetti di free edge [42] [18]. Questi effetti possono essere osservati in corrispondenza dei bordi liberi della struttura, generalmente quando essa viene sollecitata con un carico a trazione o a flessione. In particolare, questi fenomeni sono associati alla presenza di singolarità delle tensioni trasversali, all'interfaccia tra due strati con proprietà differenti. Questo è dovuto alla discontinuità del materiale all'interfaccia, alla conseguente differenza tra le proprietà elastiche degli strati, alla sollecitazione a trazione del bordo libero ed alle condizioni di equilibrio tra i vari strati. Si nota inoltre che l'effetto di free edge è circoscritto ad una zona limitata in prossimità del bordo libero: le perturbazioni tendono a decadere rapidamente con l'aumentare della distanza dal bordo, fino a scomparire oltre una distanza circa pari allo spessore del laminato. É bene sottolineare il fatto che quello di free edge, può essere considerato come un effetto critico per le strutture composite, in quanto comporta il raggiungimento di picchi di tensione che possono portare alla delaminazione del composito. Per individuare le singolarità delle tensioni trasversali sul free edge, è possibile adottare un metodo che prevede il confronto tra i risultati forniti da una mesh grezza e quelli forniti da una mesh raffinata, lungo lo spessore dell'elemento. Se si verifica che, infittendo la mesh (ad esempio aumentando il numero di nodi lungo lo spessore, come è stato fatto nella sottosezione 4.4), i picchi delle σ aumentano, è possibile affermare che non si arriva a convergenza e che quindi ci si trova di fronte ad una singolarità.
Per mettere in evidenza gli effetti di bordo libero nel caso del TRAC boom, si è scelto di applicare un carico a trazione diretto lungo l'asse Y_G. Per fare ciò, sono state modificate le condizioni di vincolo: la sezione a sinistra ($y = 0\ mm$) è stata incastrata, mentre quella a destra ($y = 500\ mm$) ha tutti i gradi di libertà bloccati, ad eccezione della traslazione lungo Y_G. In Tabella 4.7 vengono riassunte le condizioni di vincolo applicate nei nodi master delle

Tabella 4.7: Condizioni di vincolo per le sezioni alle estremità della struttura, nella condizione di carico $T_y = 1\ N$.

	Sezione sx $y = 0$						Sezione dx $y = 500\,mm$					
	T_{x1}	T_{y1}	T_{z1}	R_{x1}	R_{y1}	R_{z1}	T_{x2}	T_{y2}	T_{z2}	R_{x2}	R_{y2}	R_{z2}
T_y	0	0	0	0	0	0	0	Free	0	0	0	0

sezioni alle estremità, per questo caso di carico. Il carico a trazione è stato applicato nel nodo master della sezione di destra ($y = 500\ mm$) e corrisponde alla forza $T_y = 1\ N$. Dopo aver eseguito l'analisi globale della struttura, si è scelto di analizzare localmente l'elemento sulla parete verticale (10460) e quello sulla flangia (7281).
Di seguito vengono riportate solo le tensioni trasversali nel sistema di riferimento locale, dove questi effetti sono maggiormente visibili. In particolare, per ogni grafico è stato riportato un confronto tra le tensioni nel centroide dell'elemento e quelle sul bordo libero. In quest'ultimo caso si è scelto di aumentare il numero di strati virtuali per osservare l'influenza dell'infittimento della mesh (lungo lo spessore) sulle tensioni trasversali. Lungo il free edge sono quindi stati confrontati i risultati LD3, che indicano un singolo strato virtuale per ogni strato fisico, con quelli 5LD3, che indicano 5 strati virtuali per ogni strato fisico (e quindi 5 polinomi di Lagrange cubici lungo ogni strato fisico).

4.5.1 Elemento sulla parete verticale

Questo elemento è stato già descritto nella sottosezione 4.3.1. Per σ_{xzL} e σ_{yzL} si notano dei picchi di tensione in corrispondenza delle interfacce tra strati CF e strati GFPW. Nel caso di σ_{zzL}, invece, si notano dei picchi nel gradiente della tensione, sempre a ridosso delle intervacce tra CF e GFPW. É bene notare che, per le tre tensioni trasversali, i C_z^0 requirements sono pienamente soddisfatti, in quanto esse sono continue all'interfaccia tra i vari strati e si annullano alle estremità. In tutti e tre i casi si nota un forte discostamento tra la tensione nel centroide e quella sul bordo libero dell'elemento. Quintuplicando il numero di strati virtuali, si nota che vengono raggiunti picchi di tensione maggiori: questo è particolarmente evidente per σ_{xzL} e σ_{zzL}, dove è quindi possibile osservare delle singolarità. Per quanto riguarda σ_{yzL}, invece, si osserva che i risultati LD3 coincidono con quelli 5LD3, quindi non è possibile mettere in evidenza la presenza di una singolarità. Bisogna però considerare che σ_{yzL} è di gran lunga inferiore rispetto alle altre 2 (è più piccola di circa 5 ordini di grandezza). Questo è dovuto al fatto che la σ_{yzL} nasce per bilanciare la σ_{xyL} e garantire l'equilibrio nella direzione in cui è applicato il carico (Y_L). Tuttavia la σ_{xyL} è dovuta al diverso comportamento dei vari strati quando sono sottoposti a trazione. In questo caso però, avendo considerato una laminazione del tipo $[\pm 45_{GFPW}/0_{CF}/\pm 45_{GFPW}/\pm 45_{GFPW}/\pm 45_{GFPW}/0_{CF}/\pm 45_{GFPW}]$, gli strati non mostrano grandi differenze nella loro risposta al carico applicato, quindi σ_{xyL} è molto piccola, e di conseguenza lo sarà anche σ_{yzL}. Nel caso in cui venga considerata una laminazione che

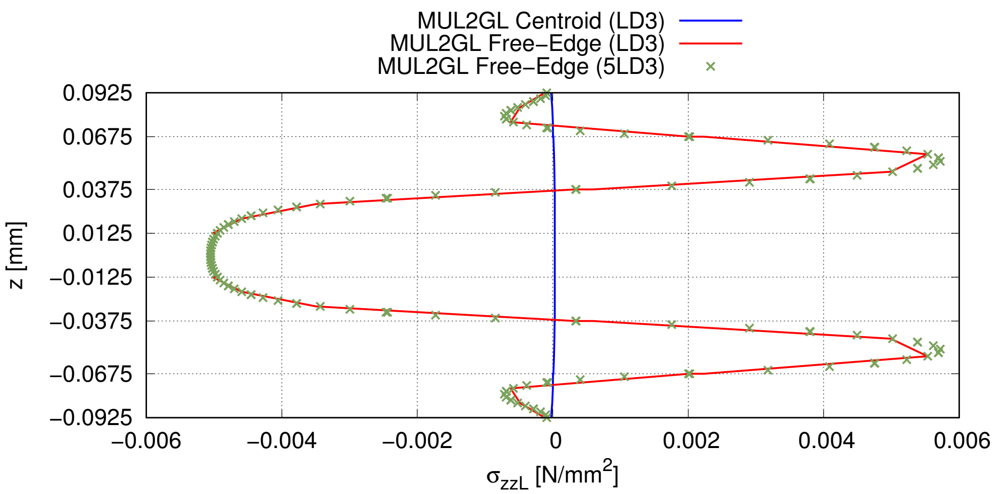


Figura 4.26: Andamento di σ_{zzL} nell'elemento sulla parete verticale.

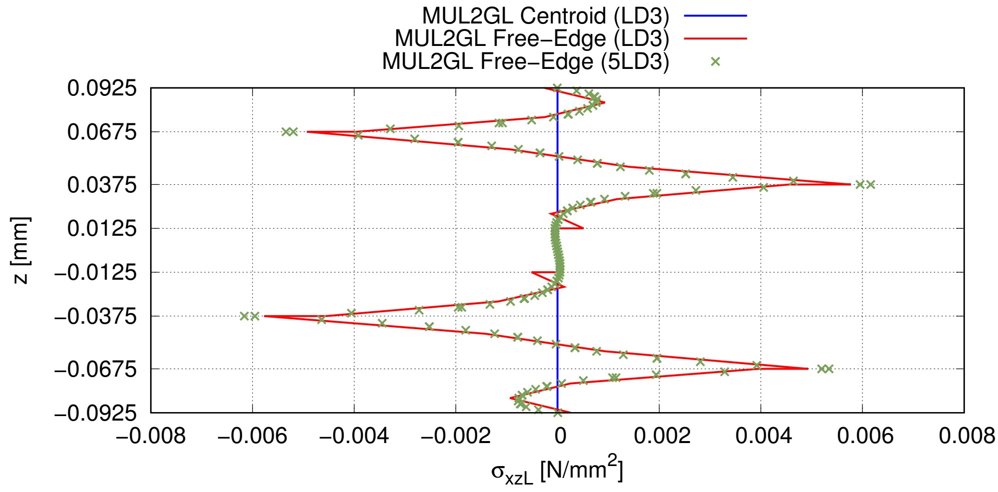


Figura 4.27: Andamento di σ_{xzL} nell'elemento sulla parete verticale.

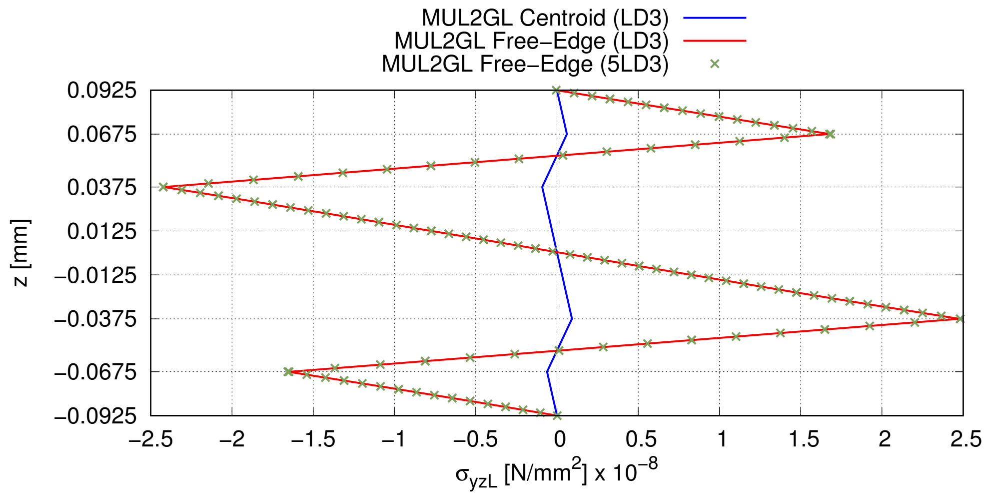


Figura 4.28: Andamento di σ_{yzL} nell'elemento sulla parete verticale.

alterna strati a $+45°$ con strati a $-45°$, la σ_{yzL} raggiungerebbe valori più elevati.
In conclusione, è possibile affermare che il software MUL2@GL è in grado di mettere in evidenza gli effetti di free edge, riuscendo a superare le limitazioni dell'analisi globale, che invece non riescono a cogliere questi fenomeni.

4.5.2 Elemento sulla flangia

Questo elemento è stato già descritto nella sottosezione 4.3.2. Anche in questo caso si notano dei picchi di tensione nella σ_{xzL}, in corrispondenza delle interfacce tra strati CF e strati GFPW. Nel caso di σ_{zzL}, invece, si notano dei picchi del gradiente della tensione, sempre a ridosso delle interfacce tra CF e GFPW. Come per l'elemento sulla parete verticale, anche in questo caso i C_z^0 requirements sono pienamente soddisfatti per le tre tensioni trasversali, in quanto esse sono continue all'interfaccia tra gli strati e si annullano alle estremità. In tutti e tre i casi si nota un forte discostamento tra la tensione nel centroide e quella sul bordo libero dell'elemento. Quintuplicando il numero di strati virtuali, si nota che vengono raggiunti picchi di tensione maggiori: questo è particolarmente evidente per σ_{xzL} e σ_{zzL}, dove è quindi possibile osservare delle singolarità. Per quanto riguarda σ_{yxL}, invece, si osserva che i risultati LD3 sono simili a

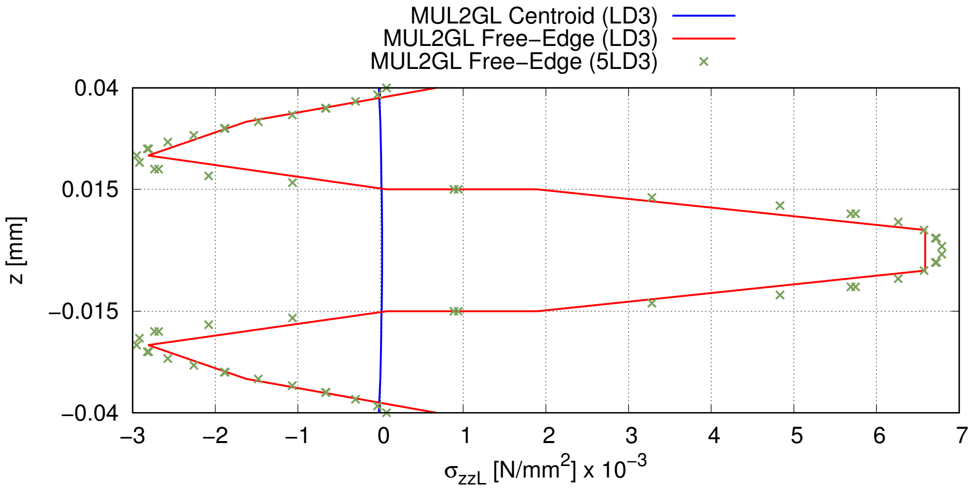


Figura 4.29: Andamento di σ_{zzL} nell'elemento sulla flangia.

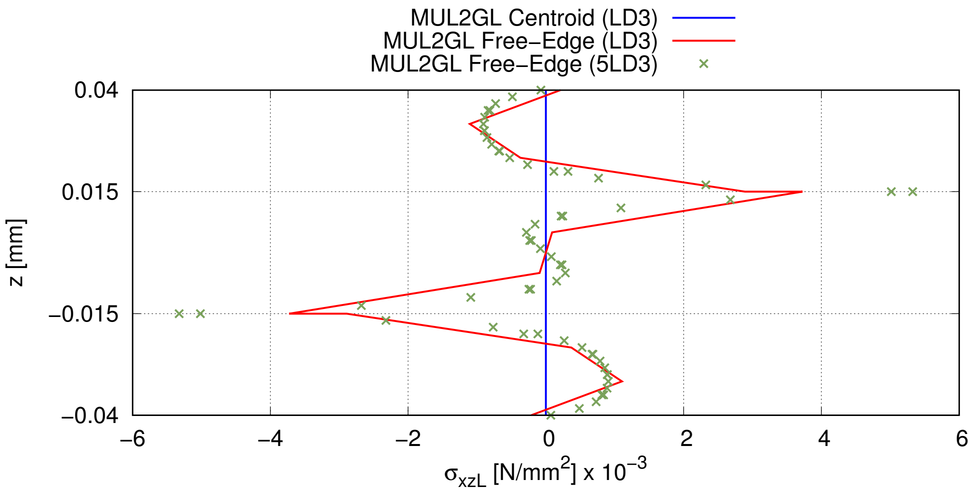


Figura 4.30: Andamento di σ_{xzL} nell'elemento sulla flangia.

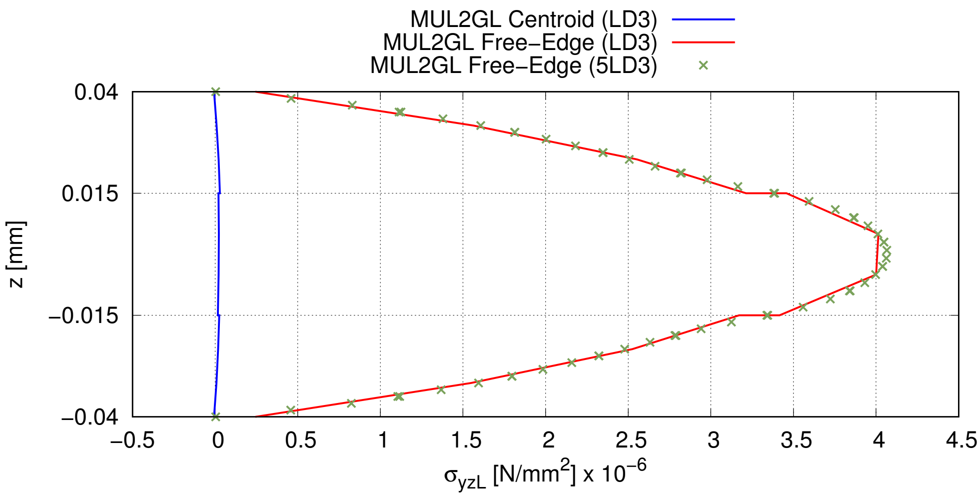


Figura 4.31: Andamento di σ_{yzL} nell'elemento sulla flangia.

quelli 5LD3, quindi non è possibile osservare la singolarità. Anche in questo caso σ_{yzL} è di gran lunga inferiore rispetto alle altre 2 (è più piccola di circa 3 ordini di grandezza, per la stessa motivazione spiegata nel paragrafo precedente).

4.6 Analisi di Failure

Nel caso del TRAC boom si è scelto di effettuare un'analisi di failure considerando un carico $T_y = 1\,N$. Con questo carico, facendo riferimento agli stessi elementi analizzati nelle sezioni precedenti, è possibile effettuare un confronto tra i valori assunti dagli indici di failure nel centroide e quelli assunti in corrispondenza del free-edge. Di conseguenza, si valuterà l'andamento degli indici di failure lungo lo spessore degli elementi 10460 (sulla parete verticale) e 7281 (sulla flangia), già descritti, rispettivamente, nelle sottosezioni 4.3.1 e 4.3.2. Per entrambi gli elementi sono stati considerati 3 criteri di failure: Hoffman, Hashin3D e LaRC05.
Per utilizzare i 3 criteri appena elencati, è necessario introdurre i valori massimi di tensione che possono essere sopportati dal materiale. Sono stati considerati due materiali simili a quelli utilizzati per il TRAC boom: per gli strati in fibra di carbonio è stato considerato il T800/924C, mentre per quelli in fibra di vetro è stato considerato il materiale E-glass/WSR618. Le proprietà dei materiali vengono riportate in Tabella 4.8 [58] ed in Tabella 4.9 [48].

Tabella 4.8: Proprietà meccaniche del T800/924C, utilizzate per le analisi di failure.

X_T	Resistenza a trazione in direzione delle fibre	2700 N/mm^2
X_C	Resistenza a compressione in direzione delle fibre	1650 N/mm^2
Y_T	Resistenza a trazione in direzione perpendicolare alle fibre	55 N/mm^2
Y_C	Resistenza a compressione in direzione perpendicolare alle fibre	225 N/mm^2
XY	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre	100 N/mm^2
XZ	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre	100 N/mm^2
YZ	Resistenza a taglio trasversale alle fibre	32.26 N/mm^2

Tabella 4.9: Proprietà meccaniche del E-glass/WSR618, utilizzate per le analisi di failure.

X_T	Resistenza a trazione in direzione delle fibre	452.37 N/mm^2
X_C	Resistenza a compressione in direzione delle fibre	312.69 N/mm^2
Y_T	Resistenza a trazione in direzione perpendicolare alle fibre	452.37 N/mm^2
Y_C	Resistenza a compressione in direzione perpendicolare alle fibre	312.69 N/mm^2
XY	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre	69.76 N/mm^2
XZ	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre	69.76 N/mm^2
YZ	Resistenza a taglio trasversale alle fibre	44.83 N/mm^2

Inoltre, è stato considerato che:

$$XY = XZ = S_L \tag{4.3}$$

dove S_L è la resistenza allo sforzo di taglio in direzione longitudinale alle fibre. Il valore YZ rappresenta invece la resistenza allo sforzo di taglio in direzione trasversale rispetto alle fibre ed è un valore piuttosto complicato da valutare sperimentalmente. Per questo motivo è stata utilizzata una formula che permette di approssimare tale valore:

$$YZ = S_T = \frac{Y_C}{2tan(2\phi_0)} \tag{4.4}$$

dove ϕ_0 è l'inclinazione del piano di frattura rispetto alla direzione dello spessore nel caso di compressione trasversale rispetto alle fibre. É stato considerato $\phi_0 = 53°$, un valore tipico dei materiali compositi [28], per entrambi i materiali. Per quanto riguarda il kinking angle è stato considerato $\psi = 25°$ per il materiale in fibra di carbonio [47], mentre $\psi = 45°$ per il quello in fibra di vetro [13].

4.6.1 Hoffman

Si osserva che, per entrambi gli elementi considerati, l'indice di failure relativo al criterio di Hoffman ($FI_{Hoffman2D}$) è mediamente più alto in corrispondenza del bordo libero rispetto che al centroide. Questo è principalmente dovuto all'andamento delle tensioni nel piano degli elementi, che generalmente raggiungono valori più elevati al free-edge. In particolare, osservando σ_{yyM}, si nota che essa assume valori più elevati al free-edge, in corrispondenza degli strati CF ed all'interfaccia tra strati CF e GFPW. L'andamento di $FI_{Hoffman2D}$ mette in evidenza che i materiali risultano essere maggiormente sollecitati in corrispondenza del bordo libero. Mediamente gli indici assumono valori maggiori negli strati CF, essendo questi ultimi caratterizzati da valori maggiori di σ_{xxM} e σ_{xyM}, rispetto agli strati GFPW. Inoltre, è possibile osservare che i valori degli indici in questione si mantengono ben al di sotto dell'unità e che quindi il criterio di Hoffman indica che non si verifica alcuna condizione di failure.

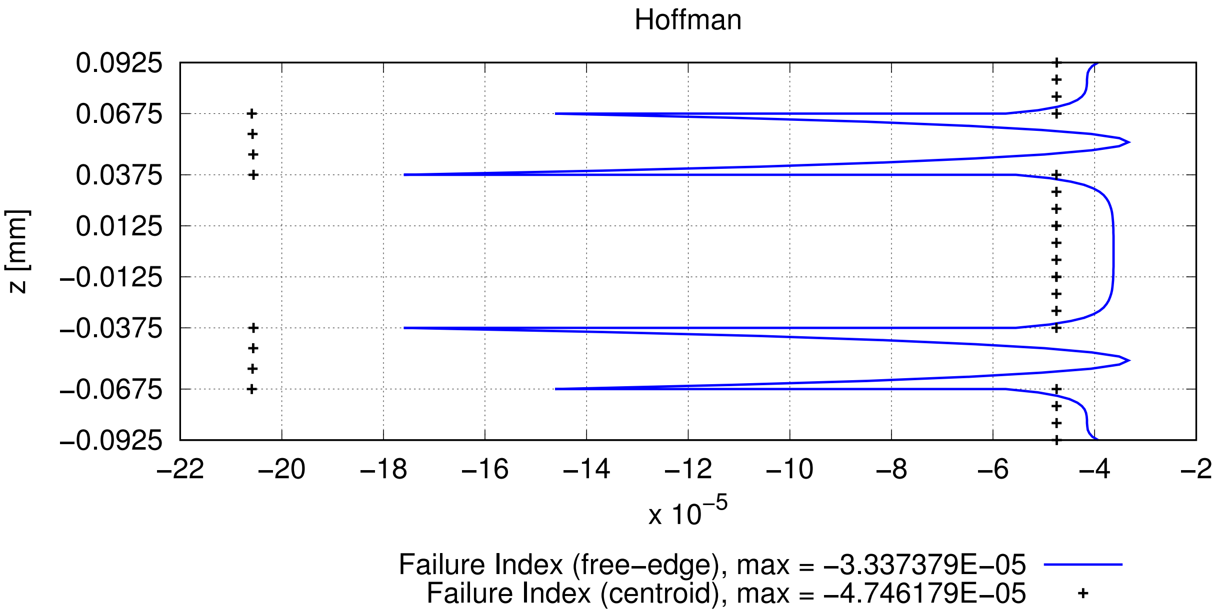


Figura 4.32: Andamento del $FI_{Hoffman2D}$ nell'elemento 10460, sulla parete verticale.

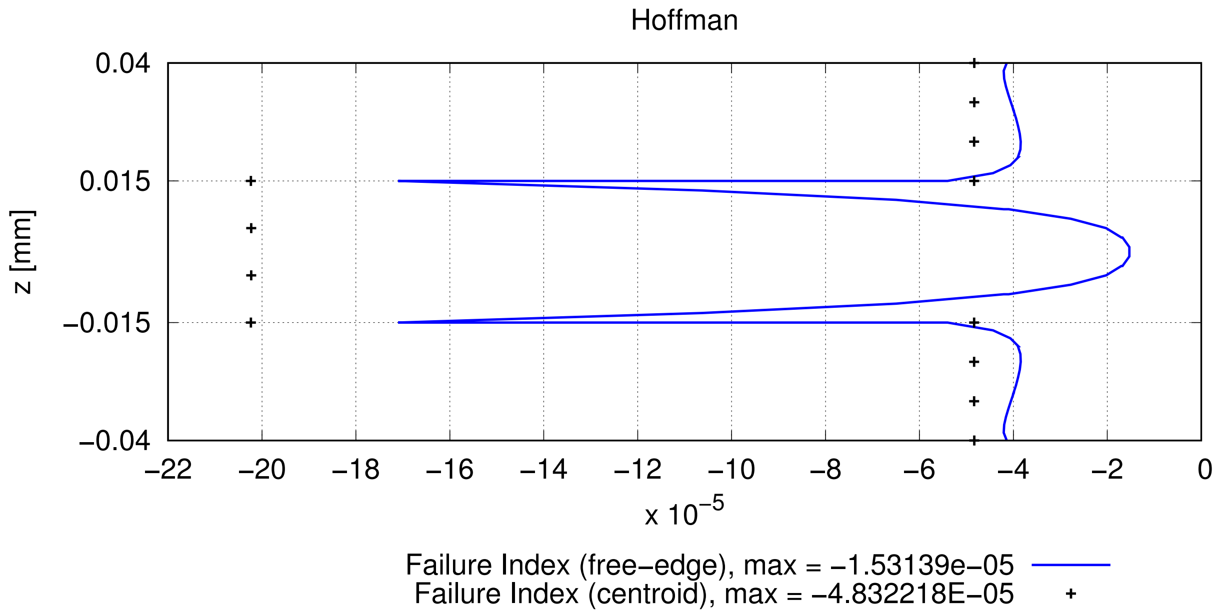


Figura 4.33: Andamento del $FI_{Hoffman2D}$ nell'elemento 7281, sulla flangia.

4.6.2 Hashin3D

Anche in questo caso, per entrambi gli elementi, gli indici calcolati in corrispondenza del free-edge, assumono valori mediamente superiori rispetto a quelli calcolati in corrispondenza del centroide. Questo è particolarmente evidente per gli strati GFPW, dove le tensioni trasversali assumono valori sensibilmente più altri sul bordo libero (considerando che nelle formule 3.20 e 3.22, questi termini compaiono al quadrato, quindi il segno delle tensioni non riveste un ruolo fondamentale). In questo caso vengono individuati esclusivamente i modi di rottura

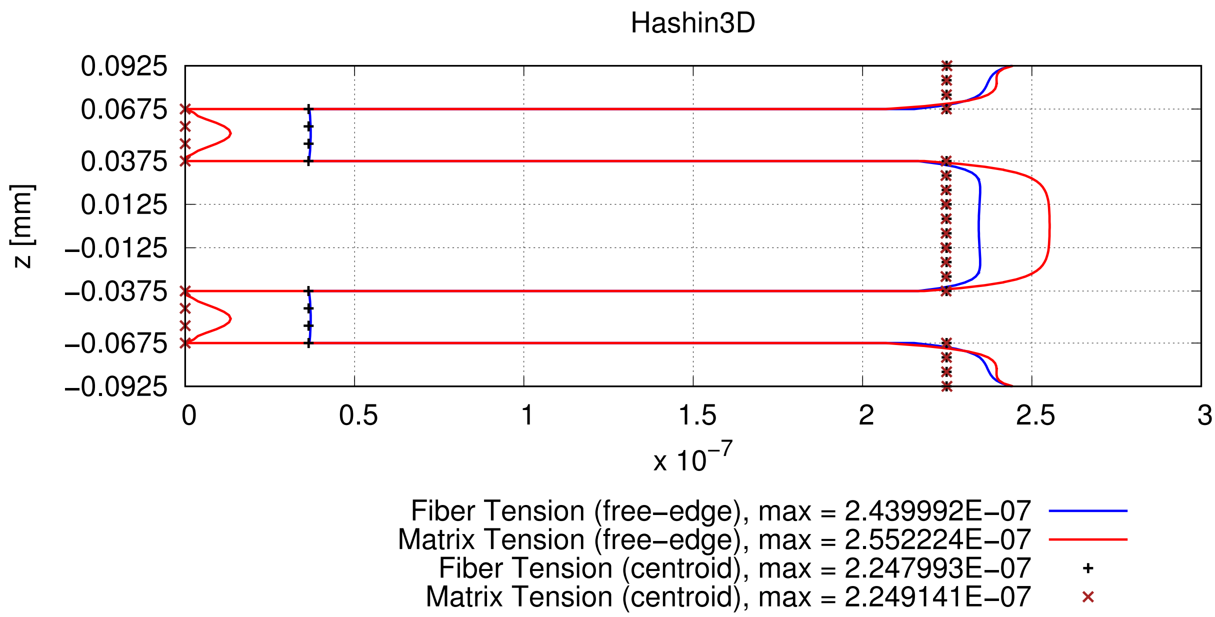


Figura 4.34: Andamento del $FI_{FT,Hashin3D}$ e $FI_{MT,Hashin3D}$ nell'elemento 10460, sulla parete verticale.

relativi alla tensione della matrice e delle fibre, in quanto entrambi gli elementi risultano essere

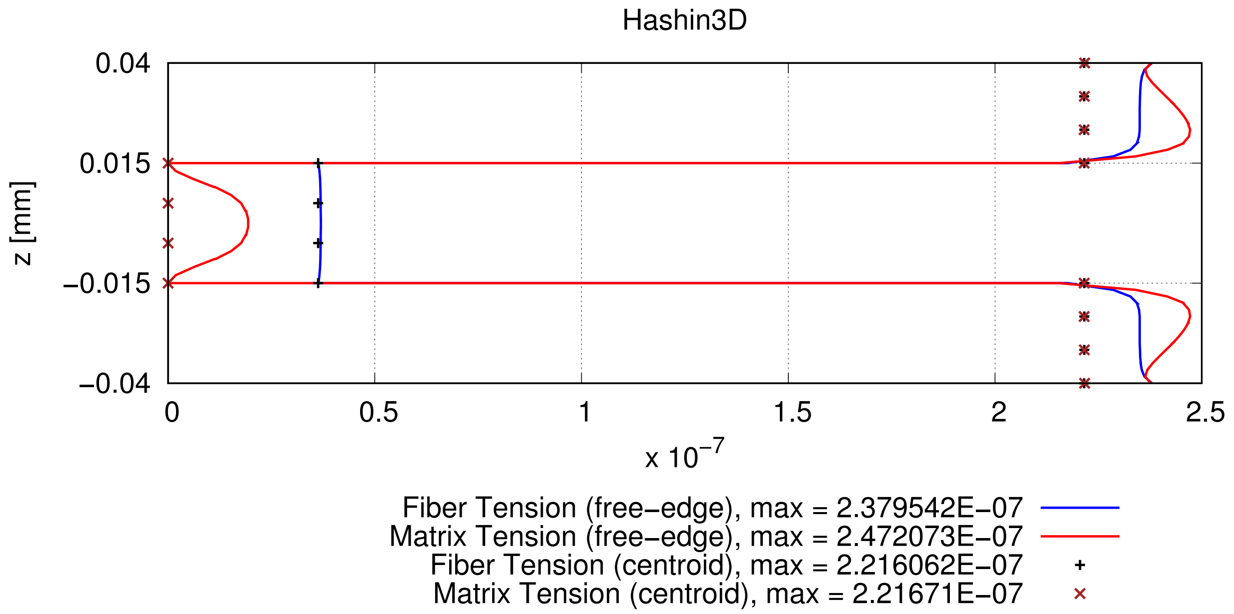


Figura 4.35: Andamento del $FI_{FT,Hashin3D}$ e $FI_{MT,Hashin3D}$ nell'elemento 7281, sulla flangia.

sollecitati a trazione. Si nota che i valori maggiori sono raggiunti dall'indice di failure relativo al modo di rottura associato alla sollecitazione a trazione della matrice, a causa del fatto che quest'ultima ha una resistenza inferiore rispetto alle fibre. Non sono presenti condizioni di failure, essendo gli indici di gran lunga inferiori all'unità.

4.6.3 LaRC05

Nelle Figure 4.36 e 4.38 è possibile osservare l'andamento degli indici relativi alla tensione delle fibre, per i due elementi considerati. Questi indici sono notevolmente più alti rispetto agli altri calcolati con il criterio LaRC05 (di circa 3 ordini di grandezza). In particolare, si nota come il valore massimo di $FI_{FT,LaRC05}$ venga raggiunto in corrispondenza degli strati in fibra di carbonio, essendo questi ultimi caratterizzati da fibre allineate con il carico applicato (cioè in direzione dell'asse y). Gli effetti di free-edge, tuttavia, sono maggiormente visibili considerando gli altri due indici: $FI_{SPLIT,LaRC05}$ e $FI_{M,LaRC05}$. Essi sono associati, rispettivamente, al modo di rottura della matrice ed al modo di rottura relativo allo split delle fibre. In particolare, $FI_{M,LaRC05}$ è caratterizzato da picchi che si manifestano in corrispondenza delle interfacce che separano gli strati in fibra di carbonio dagli strati in fibra di vetro, sul free edge. Di conseguenza è possibile affermare che la matrice degli strati in fibra di vetro si avvicina maggiormente alla condizione di failure in corrispondenza delle interfacce che separano gli strati costituiti da materiali differenti. Questo rispecchia l'andamento delle tensioni trasversali analizzate nelle sottosezioni 4.5.1 e 4.5.2, mettendo in evidenza la possibile delaminazione a cui può andare incontro il composito. Essendo gli elementi sollecitati a trazione ($\sigma_1 \geq -X_C/2$), $FI_{SPLIT,LaRC05}$ si riferisce alla condizione di split delle fibre: si nota che negli strati CF le fibre sono più sollecitate. Nel complesso, quindi, è possibile affermare che le fibre si avvicinano maggiormente alla condizione di failure negli strati CF, mentre la matrice è maggiormente sollecitata negli strati GFPW. Come già osservato per i due criteri precedenti (Hoffman e Hashin3D), anche in questo caso gli indici assumono valori notevolmente inferiori all'unità, quindi non si verifica nessuca condizione di failure: questo è dovuto al carico a trazione utilizzato per sollecitare la struttura. Il carico in questione è stato utilizzato per mettere in evidenza gli effetti di free-edge, ma non è rappresentativo della vita operativa della struttura.

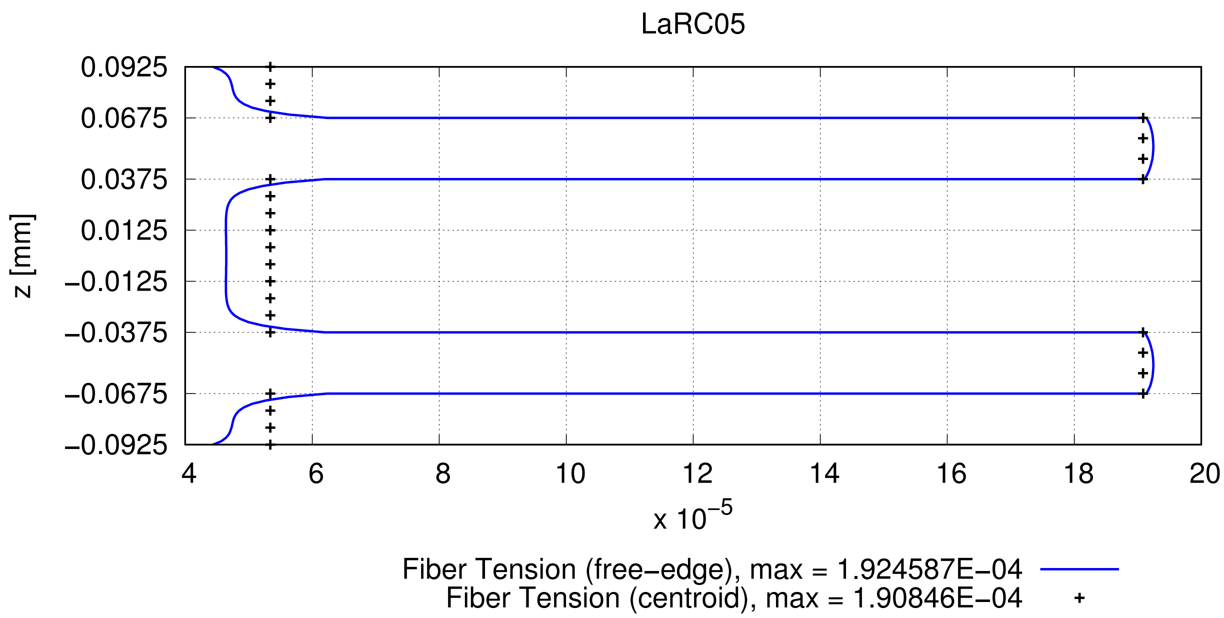


Figura 4.36: Andamento di $FI_{FT,LaRC05}$ nell'elemento 10460, sulla parete verticale.

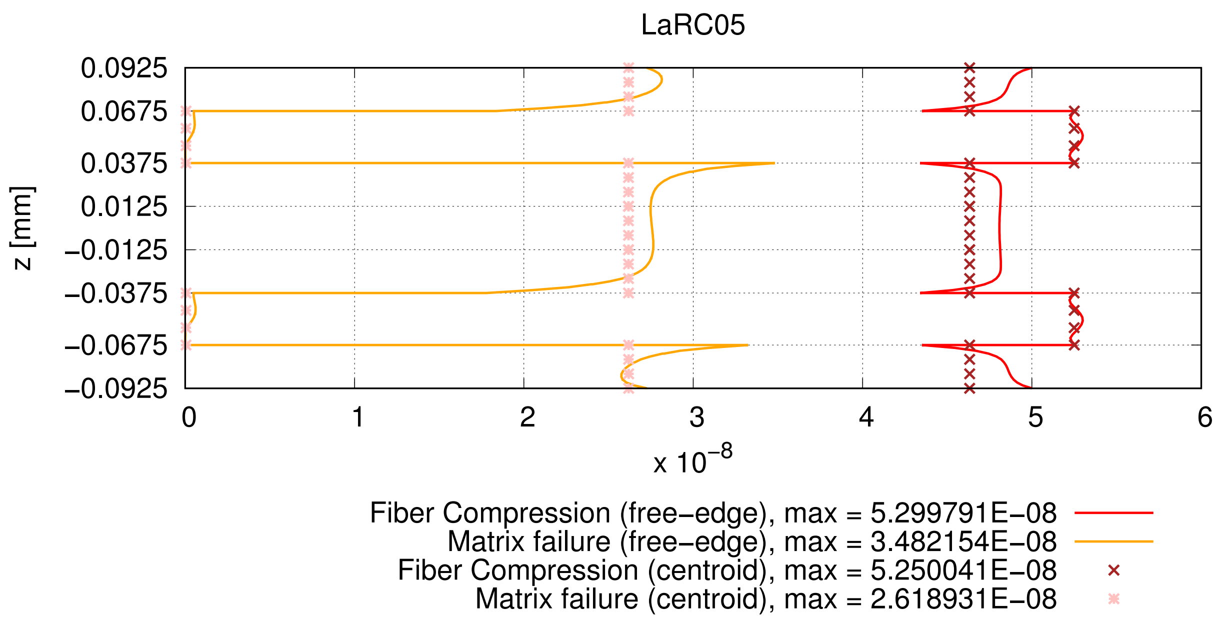


Figura 4.37: Andamento di $FI_{SPLIT,LaRC05}$ e $FI_{M,LaRC05}$ nell'elemento 7281, sulla flangia.

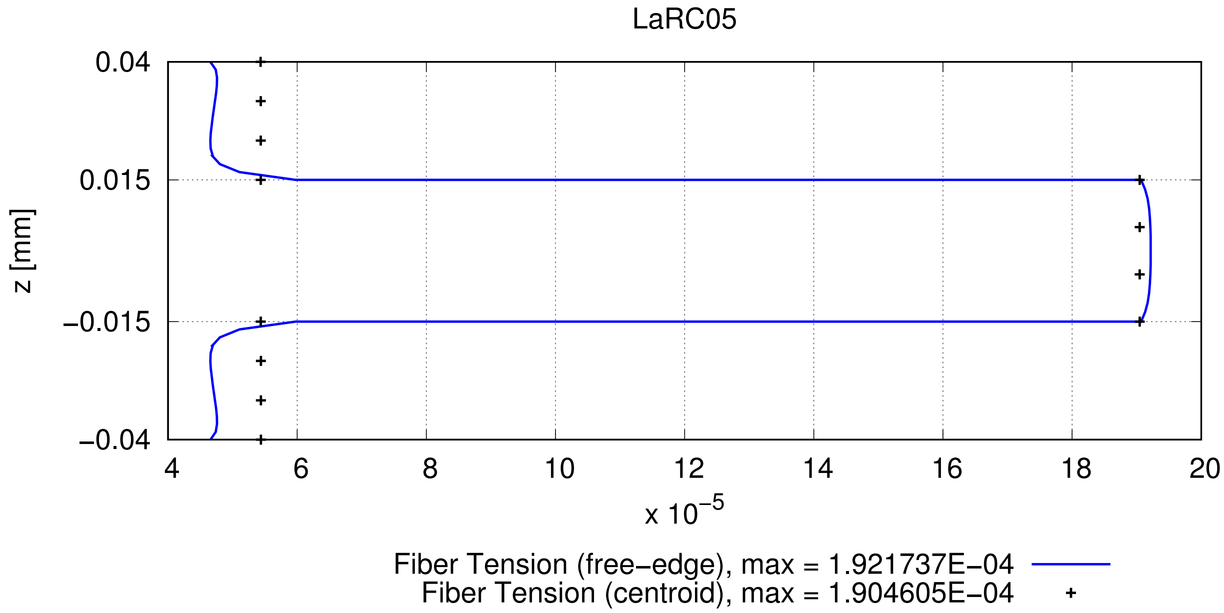


Figura 4.38: Andamento di $FI_{FT,LaRC05}$ nell'elemento 7281, sulla flangia.

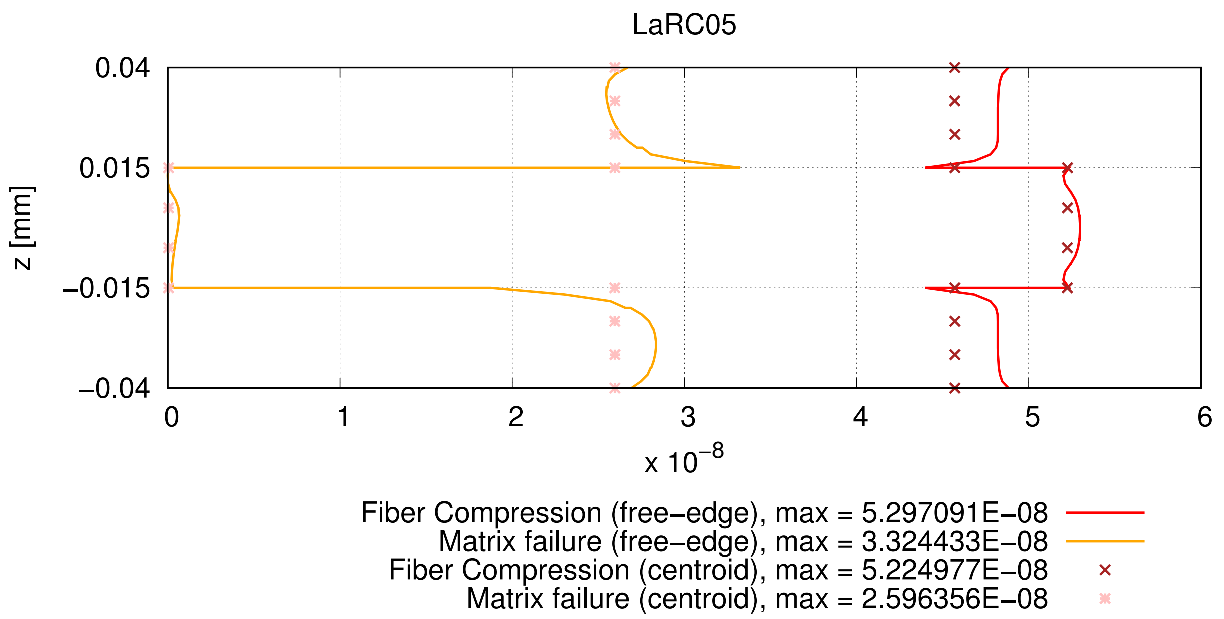
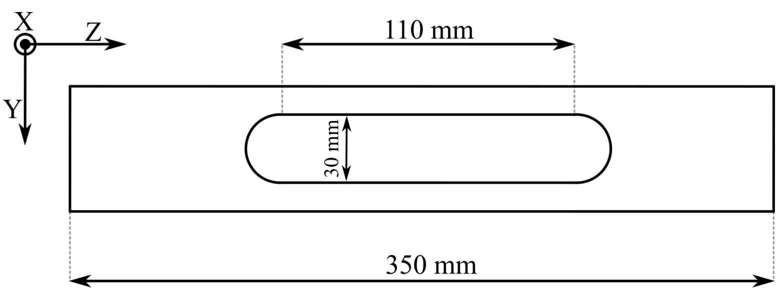


Figura 4.39: Andamento di $FI_{SPLIT,LaRC05}$ e $FI_{M,LaRC05}$ nell'elemento 7281, sulla flangia.

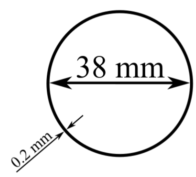
Capitolo 5

Analisi di un Tape-Spring Hinge in Composito

In questo capitolo viene riportato il procedimento con il quale è stata analizzata una struttura dispiegabile di tipo tape-spring hinge in materiale composito. Anche in questo caso la struttura viene prima studiata globalmente, in campo lineare, attraverso l'utilizzo di Femap e poi localmente con il plug-in MUL2@GL. I risultati dell'analisi globale verranno poi confrontati con quelli relativi ad un'analisi quasi statica non lineare eseguita con Abaqus/Explicit, in modo da ottenere un quadro completo del comportamento della struttura (i set di dati sono riportati graficamente nella reference [26]).
Il tape-spring hinge preso in considerazione è costituito da due tape springs, aventi una lunghezza di 140 mm ed una larghezza di 25 mm, separati da due slot con estremità semicircolari. Gli slot in questione hanno una lunghezza (intesa come la distanza che separa i centri delle due semicirconferenze) di 110 mm ed una larghezza di 30 mm. Complessivamente, il tape-spring hinge ha una lunghezza di 350 mm, un diametro interno di 38 mm ed uno spessore di 0.2 mm (come si osserva in figura 5.1).



(a) Vista frontale.



(b) Sezione trasversale.

Figura 5.1: Geometria del tape-spring hinge.

La struttura è stata realizzata utilizzando un tessuto costituito da fibre di carbonio (T300-1k) impregnate con resina epossidica (HexPly 913). Per modellare la struttura, sono stati considerati due strati con laminazione ± 45, dello spessore di 0.1 mm ciascuno (nella realtà si ha un unico strato da 0.2 mm). Le proprietà dei materiali vengono riportate nella Tabella 5.1.
Come per il TRAC boom, anche il tape-spring hinge è sottoposto ad uno studio sperimentale che prevede la sollecitazione della struttura a flessione. Quindi si prende in considerazione un apparato sperimentale costituito da due gear box, collegate alla struttura mediante due sostegni, come si osserva in Figura 5.2. Si nota che una delle due gear box è fissa, mentre l'altra è montata su un binario e può traslare lungo l'asse del tape-spring hinge. Di conseguenza en-

trambe le sezioni hanno un grado di libertà rotazionale libero (attorno ad x), ed una sola delle due sezioni è in grado di traslare lungo l'asse z: in questo modo è possibile applicare un momento diretto lungo l'asse x. Generalmente, prima di effettuare l'esperimento, viene utilizzata

Tabella 5.1: Proprietà dei materiali.

T300-1k/913 tow

$E_1\ N/mm^2$	159520
$E_2 = E_3\ N/mm^2$	11660
$G_{12} = G_{13}\ N/mm^2$	3813
$G_{23}\ N/mm^2$	3961
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.27
ν_{23}	0.47
$\rho\ kg/mm^3$	1.6×10^{-6}

HexPly 913 resin

$E_m\ N/mm^2$	3390
ν_m	0.41

la pratica del pinching, che consiste nello schiacciare leggermente i tape springs nella regione centrale, in modo da farli avvicinare ed evitare il raggiungimento di momenti a flessione troppo elevati, che potrebbero danneggiare la struttura stessa. In ogni caso l'effetto del pinching non è stato considerato nell'analisi agli elementi finiti, dove appunto la struttura è stata studiata a partire dalla sua configurazione indeformata.

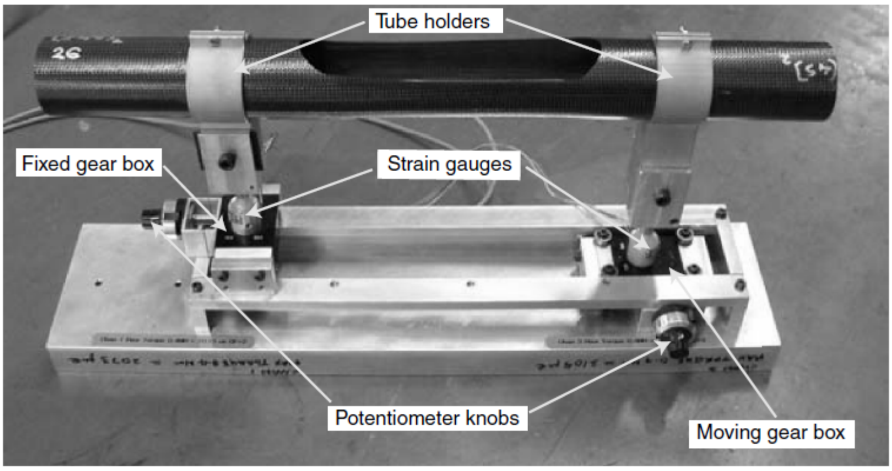


Figura 5.2: Setup sperimentale per prova a flessione.

5.1 Sviluppo del Modello Femap

In questo caso, essendo la geometria più complicata rispetto a quella del TRAC boom, il modello è stato realizzato in Solidworks, e solo successivamente importato in Femap. Attraverso l'estrusione della sezione trasversale lungo l'asse z, è stata ottenuta una superficie cilindrica, che successivamente è stata tagliata con delle asole in modo da formare i due slot vuoti nella regione centrale.
Successivamente la struttura è stata discretizzata attraverso elementi di tipo "laminate plate"

QUAD4 e TRI3. Non avendo a disposizione abbastanza informazioni per replicare la stessa mesh delle reference [26] e [41], si è scelto di procedere imponendo una dimensione media degli elementi di 2 mm. Successivamente sono stati aggiunti 2 elementi rigidi di tipo RBE2 in corrispondenza delle sezioni alle estremità (un elemento rigido per sezione): anche in questo caso si è scelto di collegare tutti i gradi di libertà di tutti i nodi sulla sezione al nodo master, posizionato in corrispondenza del baricentro della sezione stessa. Nel complesso sono stati creati 8311 elementi QUAD4, 4 elementi TRIA3 e 2 elementi RBE2, per un totale di 8317 elementi e 8531 nodi. A differenza del TRAC boom, in questo caso è stata creata un'unica proprietà per tutti gli elementi (che infatti presentano tutti le stesse caratteristiche) e non è stato necessario unire i nodi, perchè non si sono generati dei nodi sovrapposti. In Figura 5.3 è rappresentato il modello Femap della struttura, dopo la definizione della geometria e la discretizzazione in elementi finiti. Successivamente è stata modificata l'orientazione del materiale, scegliendo la direzione $Z+$ per tutti gli elementi.

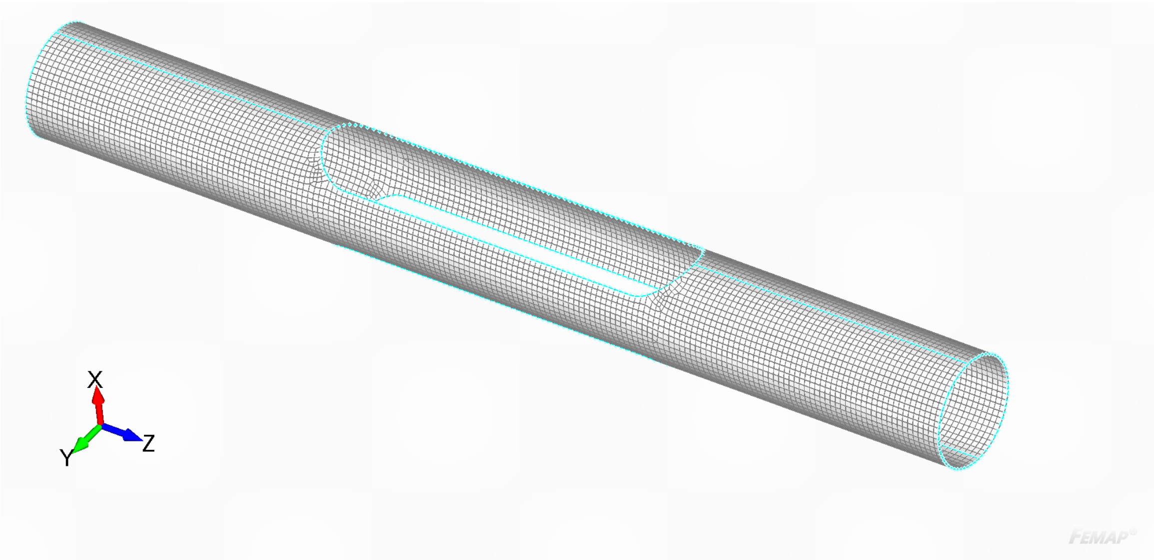


Figura 5.3: Modello Femap del tape-spring hinge.

In seguito sono stati imposti i vincoli ed i carichi che agiscono sulla struttura. In questo caso si è interessati ad effettuare delle prove a flessione con momenti diretti lungo l'asse x, quindi è stato considerato un unico caso di vincolo. Per quanto riguarda i gradi di libertà rotazionali, entrambe le sezioni non possono ruotare attorno agli assi y ed z, mentre sono libere di ruotare attorno all'asse x. I gradi di libertà traslazionali della sezione di sinistra ($z = 0$) sono tutti bloccati. La sezione di destra ($z = 350\ mm$) è libera di traslare in direzione z, mentre non può traslare nelle altre 2 direzioni (x ed y). Le condizioni di vincolo sono state imposte sui nodi master degli elementi rigidi, in modo da riprodurre una situazione simile a quella sperimentale, e sono riassunte in Tabella 5.2. In questo caso è stato sufficiente effettuare un'unica analisi, poiché la struttura è simmetrica, quindi il comportamento non cambia a seconda del verso del momento M_x.

Tabella 5.2: Condizioni di vincolo per le sezioni alle estremità della struttura, nella condizione di carico $M_x = 100\ Nmm$.

	Sezione sx $z = 0$						Sezione dx $z = 350\,mm$					
	T_{x1}	T_{y1}	T_{z1}	R_{x1}	R_{y1}	R_{z1}	T_{x2}	T_{y2}	T_{z2}	R_{x2}	R_{y2}	R_{z2}
M_x	0	0	0	Free	0	0	0	0	Free	Free	0	0

5.2 Risultati dell'Analisi Globale

Anche in questo caso, è stato realizzato un grafico (Figura 5.4) che permette di confrontare i risultati dell'analisi lineare, eseguita con Femap, con quelli di un'analisi quasi statica eseguita con Abaqus/Explicit (i dettagli relativi a quest'ultimo tipo di analisi sono riportati nella reference [26]). Questi grafici rappresentano l'andamento del momento applicato (M_x) in funzione dell'angolo di rotazione α_x. L'angolo è stato ottenuto sottraendo alla rotazione della sezione in corrispondenza di $z = 350\ mm$ (α_c), la rotazione della sezione in corrispondenza di $z = 0$ (α_i). Anche in questo caso, essendo le rotazioni delle due sezioni uguali in modulo ed opposte in verso, è possibile scrivere $\alpha = \alpha_c - \alpha_i = 2\alpha_c = -2\alpha_i$.
Successivamente è stata calcolata la rigidezza flessionale (R_x) della struttura in campo lineare, secondo la formula 4.1. Le rigidezze calcolate con i dati delle analisi numeriche sono riassunte in Tabella 5.3: in questo caso la rigidezza non dipende dal verso del momento applicato, in quanto la struttura è assialsimmetrica rispetto all'asse z. Confrontando le rigidezze, si nota che la struttura risulta essere più rigida nel caso dell'analisi quasi statica.

Tabella 5.3: Rigidezze flessionali del tape-spring hinge.

	$R_x\ [Nmm]$
Analisi lineare (Femap)	1.2650×10^5
Analisi quasi statica (Abaqus/Explicit)	1.9192×10^5

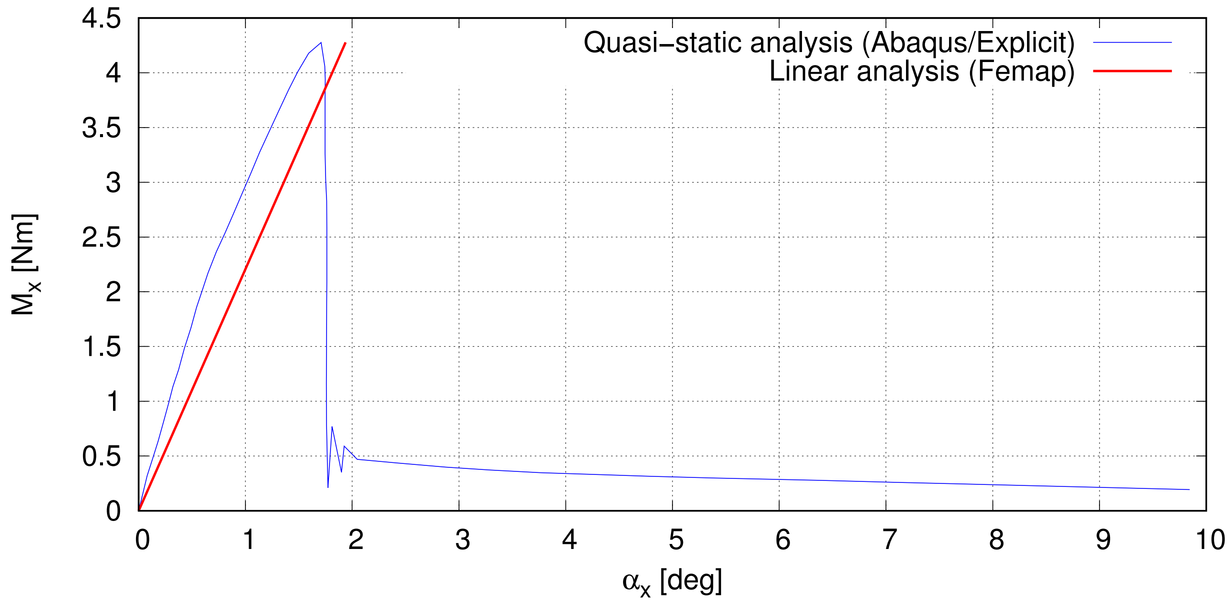


Figura 5.4: Momento flettente diretto lungo x, confronto tra analisi lineare e analisi quasi statica.

É stato inoltre implementato un grafico (Figura 5.5) che indica il discostamento dell'analisi lineare dai dati dell'analisi quasi statica. In questo caso l'andamento di α_{err} (la cui definizione è già stata fornita nella sezione 4.2) è caratterizzato da un tratto iniziale crescente, seguito da un tratto circa costante, alla fine del quale si nota un andamento decrescente. Questo è dovuto al fatto che il tape-spring hinge, diversamente dal TRAC boom, presenta un momento di picco, il cui valore corrisponde a circa 4278 Nmm (in corrispondenza di $\alpha_x = 1.8°$). Dopo questo picco si osserva un salto in seguito al quale viene raggiunto un momento di circa 67 Nmm, che rimane costante oltre i 20°. La Figura 5.4 fa riferimento al caso in cui non venga effettuato il pinching all'inizio della simulazione: si nota che, nel caso in cui venga considerato il pinching, il valore del momento di picco si riduce.

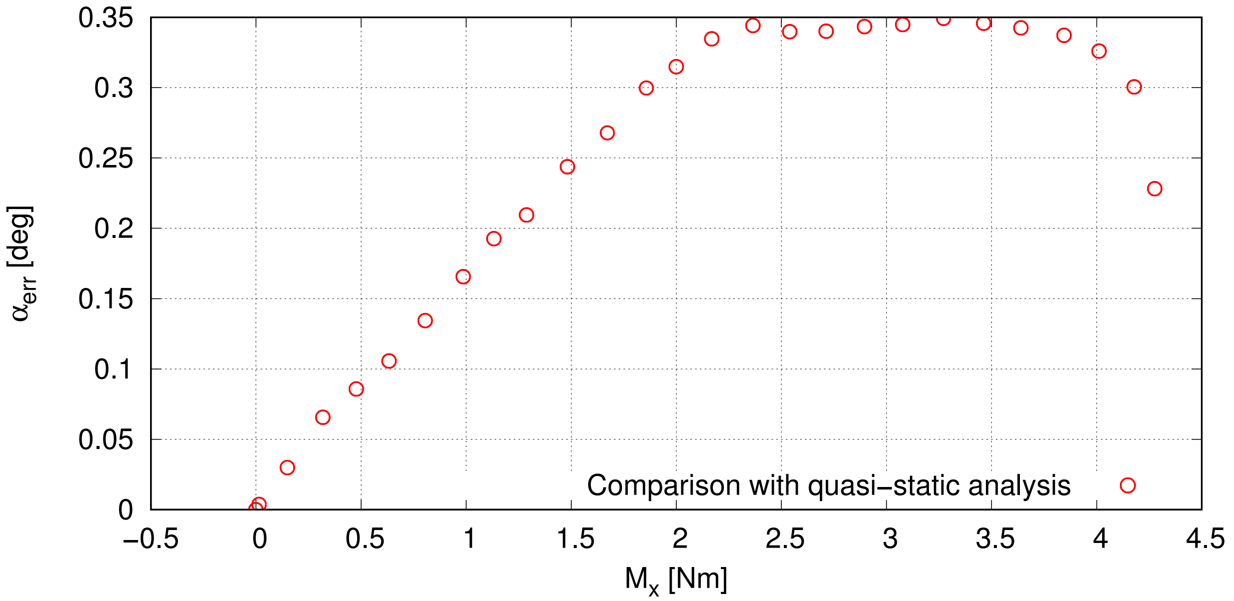


Figura 5.5: Andamento dell'errore in funzione di M_x.

5.3 Risultati dell'Analisi Locale

Per eseguire le analisi locali è stato considerato un momento $M_x = 100\ Nmm$. Come per il TRAC boom, dopo aver eseguito l'analisi globale della struttura, sono stati scelti due elementi da analizzare localmente attraverso il plug-in MUL2@GL. Prendendo in considerazione i grafici

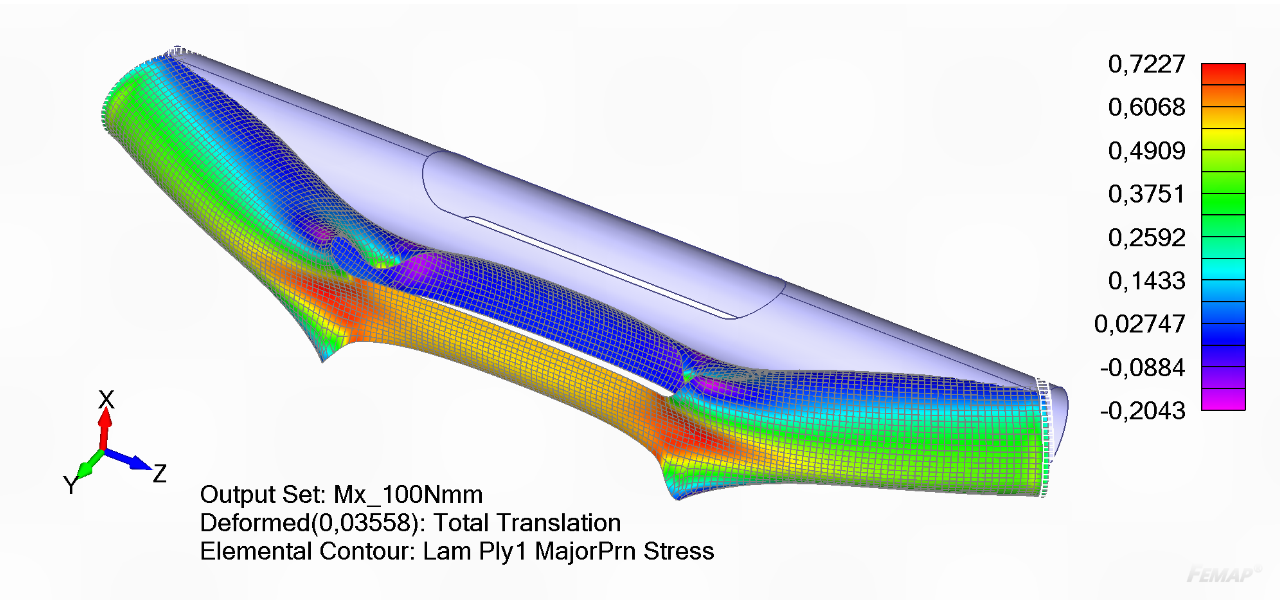


Figura 5.6: Andamento della massima tensione principale nel primo strato, $M_x = +100\,Nmm$.

rappresentanti l'andamento della tensione principale massima in ciascuno strato (Figura 5.6), si nota che i punti più sollecitati sono quelli che si trovano in corrispondenza del tape spring superiore. In particolare, sono stati scelti gli elementi 5055 e 5338, evidenziati in Figura 5.7. Il primo si trova nella zona centrale dell'estremità sinistra del tape spring superiore, mentre il secondo si trova sul bordo dello stesso tape spring, in prossimità dell'estremità dell'asola.

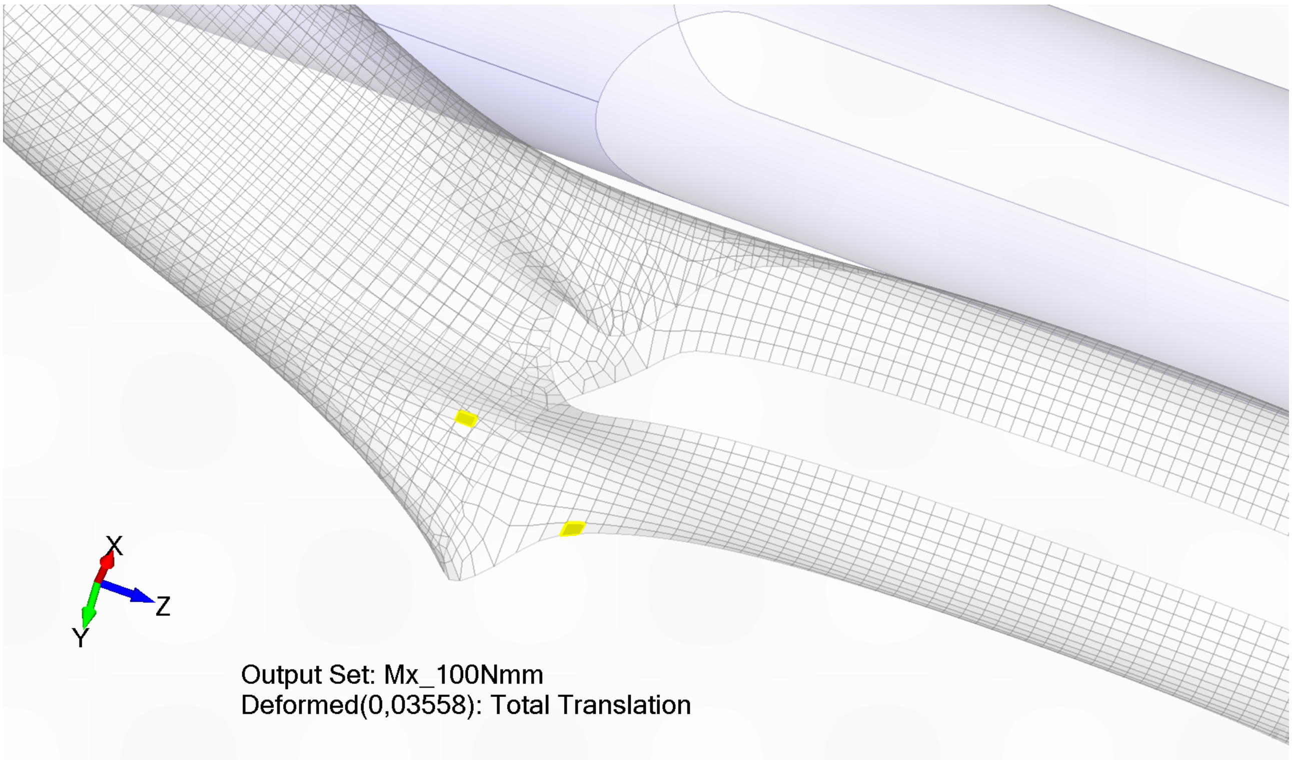
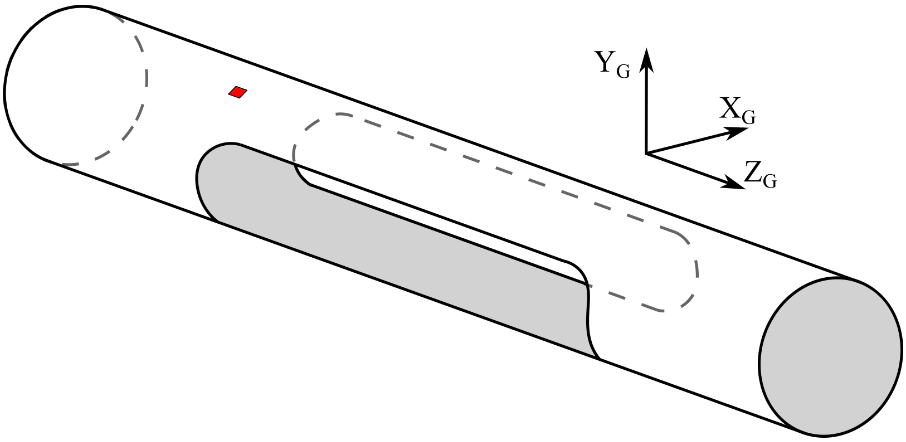


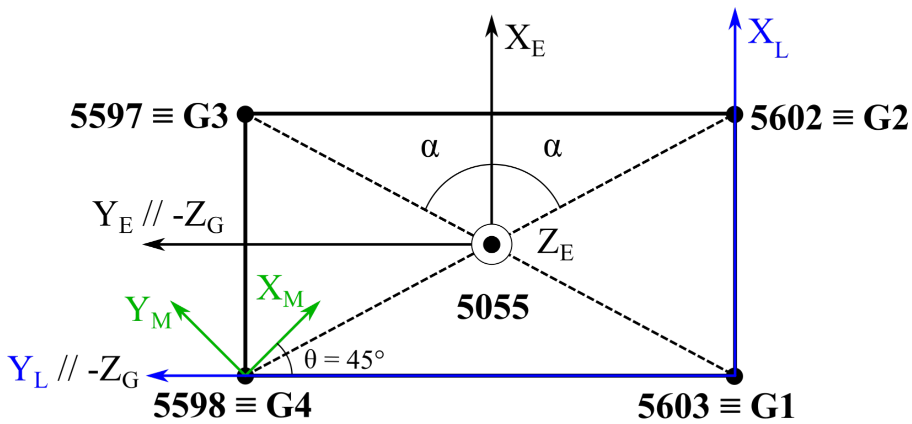
Figura 5.7: Elementi 5055 (più a sinistra, sull'estremità del tape spring) e 5338 (più a destra, sul bordo del tape spring, in prossimità dell'asola)

5.3.1 Elemento sulla regione centrale

Dopo aver seguito lo stesso procedimento descritto nella sottosezione 4.3.1, sono stati implementati dei grafici che mostrano l'andamento delle tensioni all'interno dell'elemento sulla regione centrale (il cui ID corrisponde a 5055). Come per il TRAC boom, per confrontare i vari grafici si è scelto di rappresentare i sistemi di riferimento dell'elemento 5055, come si osserva in Figura 5.8b (per maggiori informazioni sui sistemi di riferimento e sui pedici utilizzati si consiglia di consultare la sottosezione 3.2.3).
Si nota che gli assi del sistema di riferimento materiale non sono paralleli agli assi degli altri sistemi di riferimento, poiché in questo caso si considera una laminazione del tipo ± 45. Inoltre, gli assi del sistema di riferimento locale sono circa paralleli agli assi del sistema di riferimento dell'elemento: l'elemento preso in considerazione, infatti, non è perfettamente rettangolare, quindi non si può parlare di un parallelismo perfetto. Gli assi Y_L ed Y_E sono paralleli rispetto a Z_G, ma hanno verso opposto rispetto a quest'ultimo. Infine X_E ed X_L sono circa paralleli ad X_G, mentre Z_M, Z_L e Z_E sono paralleli tra loro, e circa paralleli a Y_G: anche in questo caso non si può parlare di un parallelismo perfetto, in quanto l'elemento, facendo parte della discretizzazione di una superficie cilindrica, è leggermente inclinato rispetto al piano $X_G - Z_G$. Di seguito vengono riportati i grafici delle tensioni: nel sistema di riferimento materiale è stato effettuato un confronto tra i risultati Nastran e quelli MUL2@GL per le tensioni nel piano dell'elemento. É bene notare che in questo caso i grafici non presentano discontinuità, in quanto gli strati



(a) Collocazione dell'elemento 5055, sulla regione centrale (in rosso).



(b) Sistemi di riferimento per l'elemento 5055, sulla regione centrale.

Figura 5.8: Collocazione e sistemi di riferimento dell'elemento 5055, regione centrale.

sono costituiti dallo stesso materiale. Sono quindi state effettuate le seguenti considerazioni, relative al sistema di riferimento materiale (per i pedici si usa la stessa convenzione dei sistemi di riferimento):

- σ_{xxM}: sia nel caso Nastran che nel caso MUL2@GL, le σ_{xxM} hanno valori positivi (le fibre risultano essere sollecitate a trazione), con un andamento crescente spostandosi dal secondo strato verso il primo.

- σ_{yyM}: Anche in questo caso, sia per i risultati di Nastran che per quelli di MUL2@GL, si ottengono valori positivi per entrambi gli strati, con un andamento crescente passando dal secondo al primo strato. Quindi, nel complesso, si nota che gli andamenti di σ_{xxM} e σ_{yyM} sono molto simili tra loro. Infatti è bene notare che, trattandosi di un tessuto, si verifica che $E_1 = E_2$, per entrambi gli strati.

- σ_{xyM}: in questo caso si hanno valori negativi. Nel caso Nastran, si nota un andamento decrescente dal primo strato verso il secondo, mentre, nel caso MUL2@GL, si nota un andamento opposto, cioè crescente, dal primo strato verso il secondo.

Considerando il sistema di riferimento globale, si nota che σ_{zzG} ha lo stesso andamento di σ_{yy_L}. Infine, passando al sistema di riferimento locale, si nota che σ_{zzL} ha lo stesso andamento di σ_{zzM}. Nella Tabella 5.4 viene evidenziata la relazione tra le varie σ prese in considerazione: quelle sulle stesse righe mostrano lo stesso andamento, mentre quelle sulle stesse colonne si riferiscono allo stesso sistema di riferimento (in questo caso non sono state effettuate considerazioni su σ_{xxG} e σ_{yyG}, perché gli assi corrispondenti X_G e Y_G non giacciono sul piano dell'elemento, nè sono perpendicolari ad esso). Anche in questo caso le tensioni trasversali non sono state riportate,

Tabella 5.4: Relazioni tra le tensioni normali nei vari sistemi di riferimento per l'elemento 5055.

Materiale	***Locale***	***Globale***
/	σ_{yyL}	σ_{zzG}
σ_{zzM}	σ_{zzL}	/

essendo di svariati ordini di grandezza più piccole rispetto alle tensioni nel piano. Per quanto riguarda i C_z^0 requirements, si ottengono dei risultati migliori rispetto a quanto osservato nel TRAC boom, infatti in questo caso i salti tra strati adiacenti sono nell'ordine di 10^{-6} N/mm^2.

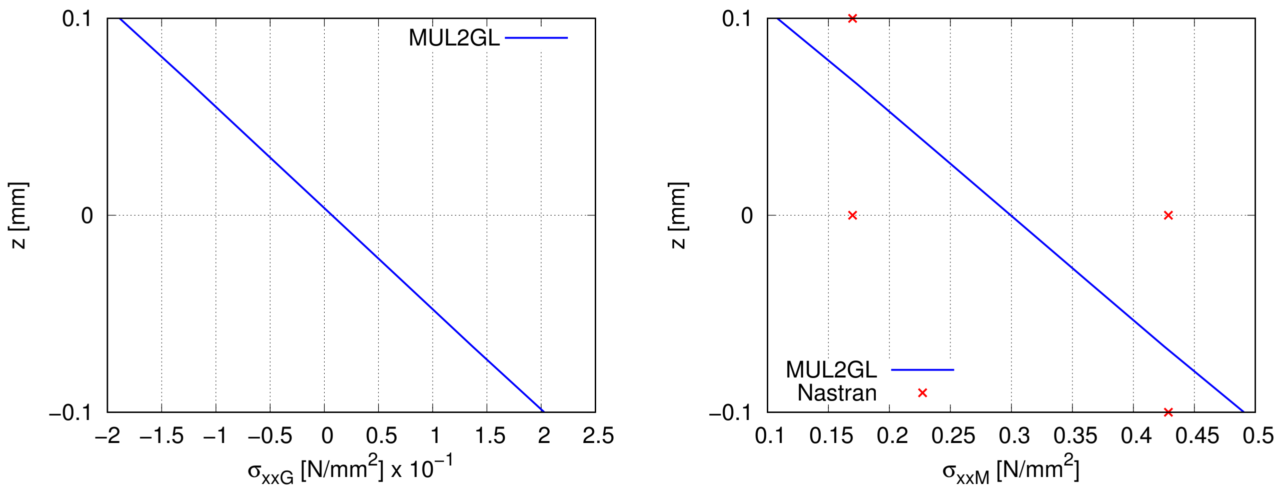


Figura 5.9: Andamento di σ_{xxG} e σ_{xxM} nel baricentro dell'elemento sulla regione centrale.

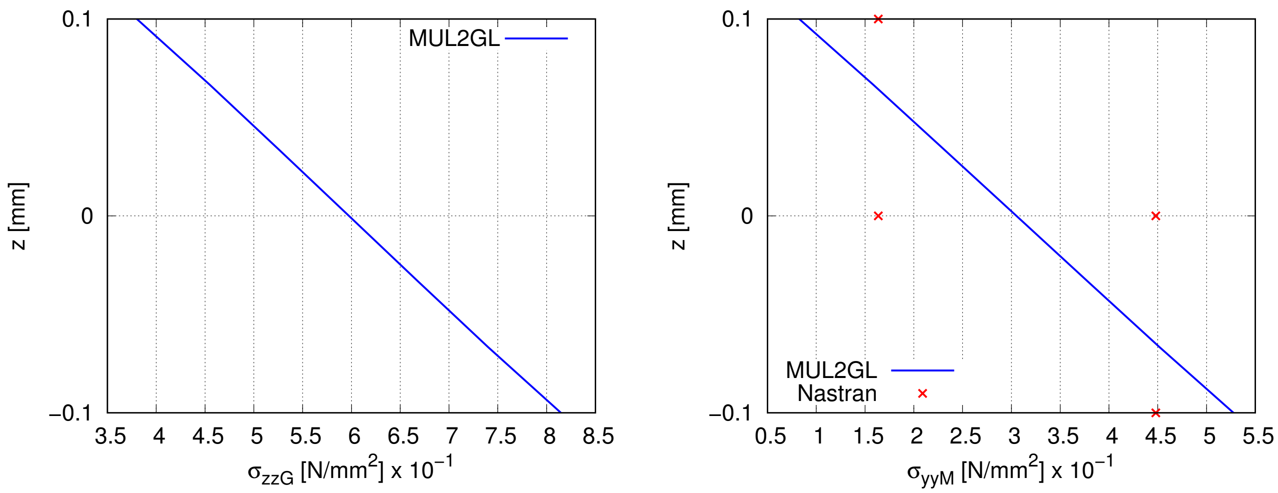
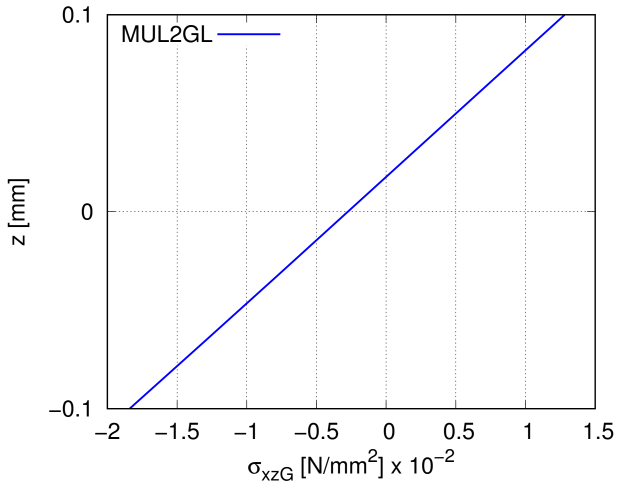


Figura 5.10: Andamento di σ_{zzG} e σ_{yyM} nel baricentro dell'elemento sulla regione centrale.



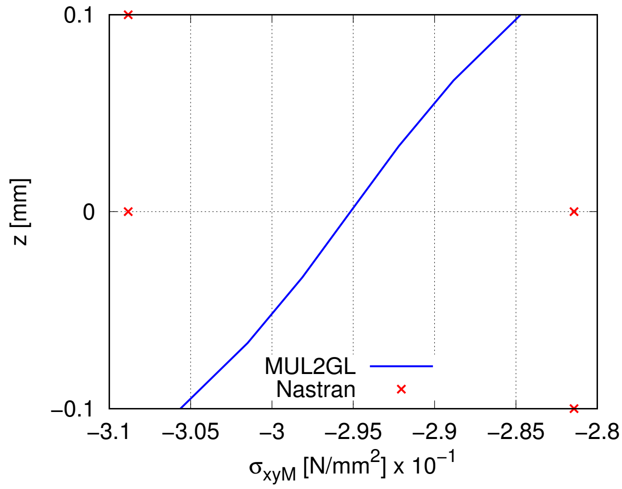


Figura 5.11: Andamento di σ_{xzG} e σ_{xyM} nel baricentro dell'elemento sulla regione centrale.

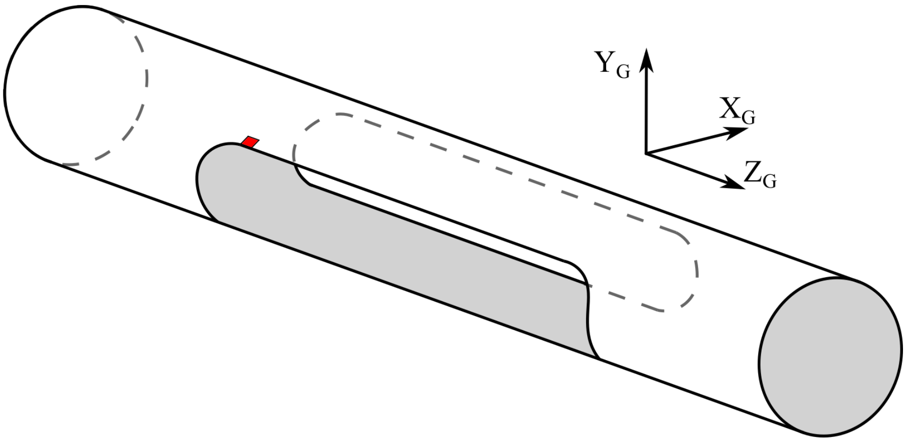
5.3.2 Elemento sul bordo

Dopo aver seguito lo stesso procedimento descritto nella sottosezione 4.3.1, sono stati implementati dei grafici che mostrano l'andamento delle tensioni all'interno dell'elemento sul bordo (il cui ID corrisponde a 5338). Come per il TRAC boom, per confrontare i vari grafici si è scelto di rappresentare i sistemi di riferimento dell'elemento 5338, come si osserva in Figura 5.12b (per maggiori informazioni sui sistemi di riferimento e sui pedici utilizzati si consiglia di consultare la sottosezione 3.2.3).
Si nota che gli assi del sistema di riferimento materiale non sono paralleli agli assi degli altri sistemi di riferimento, poiché in questo caso si considera una laminazione del tipo ±45. Inoltre, gli assi del sistema di riferimento locale sono circa paralleli agli assi del sistema di riferimento dell'elemento: l'elemento preso in considerazione, infatti, non è perfettamente rettangolare, quindi non si può parlare di un parallelismo perfetto. Gli assi X_L ed X_E sono paralleli rispetto a Z_G. Infine Y_E ed Y_L sono circa paralleli ad X_G, mentre Z_M, Z_L e Z_E sono paralleli tra loro, e circa paralleli a Y_G: anche in questo caso non si può parlare di un parallelismo perfetto, in quanto l'elemento, facendo parte della discretizzazione di una superficie cilindrica, è leggermente inclinato rispetto al piano $X_G - Z_G$.
Di seguito vengono riportati i grafici delle tensioni: nel sistema di riferimento materiale è stato effettuato un confronto tra i risultati Nastran e quelli MUL2@GL per le tensioni nel piano dell'elemento. É bene notare che in questo caso i grafici non presentano discontinuità, in quanto gli strati sono costituiti dallo stesso materiale. Sono quindi state effettuate le seguenti considerazioni, relative al sistema di riferimento materiale (per i pedici si usa la stessa convenzione dei sistemi di riferimento):

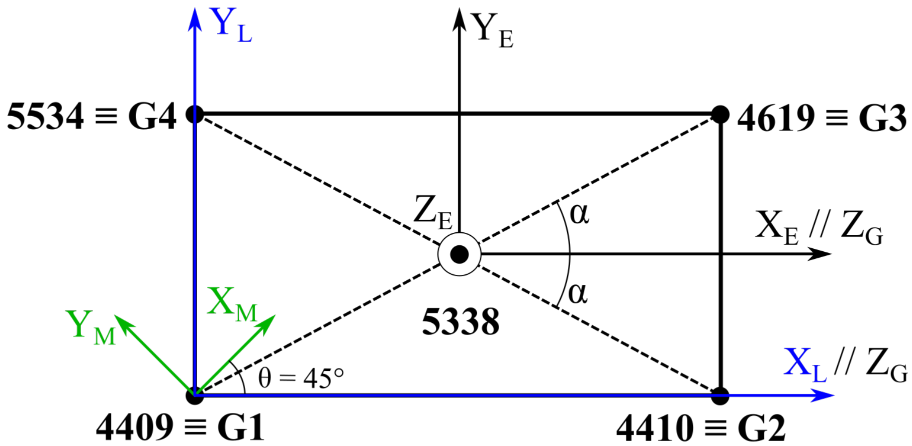
- σ_{xxM}: sia nel caso Nastran che nel caso MUL2@GL, le σ_{xxM} hanno valori positivi (le fibre risultano essere sollecitate a trazione), con un andamento crescente spostandosi dal secondo strato verso il primo.

- σ_{yyM}: Anche in questo caso, sia per i risultati di Nastran che per quelli di MUL2@GL, si ottengono valori positivi per entrambi gli strati, con un andamento crescente passando dal primo strato al secondo.

- σ_{xyM}: in questo caso si hanno valori negativi. Nel caso Nastran, si nota un andamento crescente dal primo strato verso il secondo, mentre, nel caso MUL2@GL, si nota un andamento opposto, cioè decrescente, dal primo strato verso il secondo.



(a) Collocazione dell'elemento 5338, sul bordo (in rosso).



(b) Sistemi di riferimento per l'elemento 5338, sul bordo.

Figura 5.12: Collocazione e sistemi di riferimento dell'elemento 5338, sul bordo.

Considerando il sistema di riferimento globale, si nota che σ_{zzG} ha lo stesso andamento di σ_{xx_L}. Infine, passando al sistema di riferimento locale, si nota che σ_{zzL} ha lo stesso andamento di σ_{zzM}. Nella Tabella 5.5 viene evidenziata la relazione tra le varie σ prese in considerazione: quelle sulle stesse righe mostrano lo stesso andamento, mentre quelle sulle stesse colonne si riferiscono allo stesso sistema di riferimento (in questo caso non sono state effettuate considerazioni su σ_{xxG} e σ_{yyG}, perché gli assi corrispondenti X_G e Y_G non giacciono sul piano dell'elemento, nè sono perpendicolari ad esso). Anche in questo caso le tensioni trasversali non sono state riportate,

Tabella 5.5: Relazioni tra le tensioni normali nei vari sistemi di riferimento per l'elemento 5338.

Materiale	***Locale***	***Globale***
/	σ_{xxL}	σ_{zzG}
σ_{zzM}	σ_{zzL}	/

essendo di svariati ordini di grandezza più piccole rispetto alle tensioni nel piano. Per quanto riguarda i C_z^0 requirements, si ottengono dei risultati migliori rispetto a quanto osservato nel TRAC boom, infatti in questo caso i salti tra strati adiacenti sono nell'ordine di 10^{-6} N/mm^2.

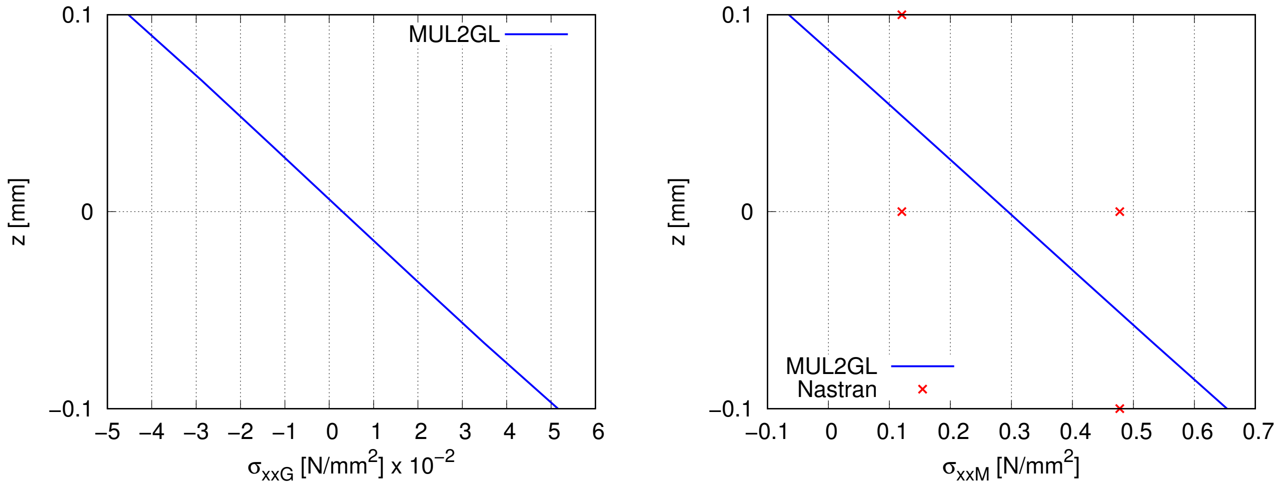


Figura 5.13: Andamento di σ_{xxG} e σ_{xxM} nel baricentro dell'elemento sul bordo.

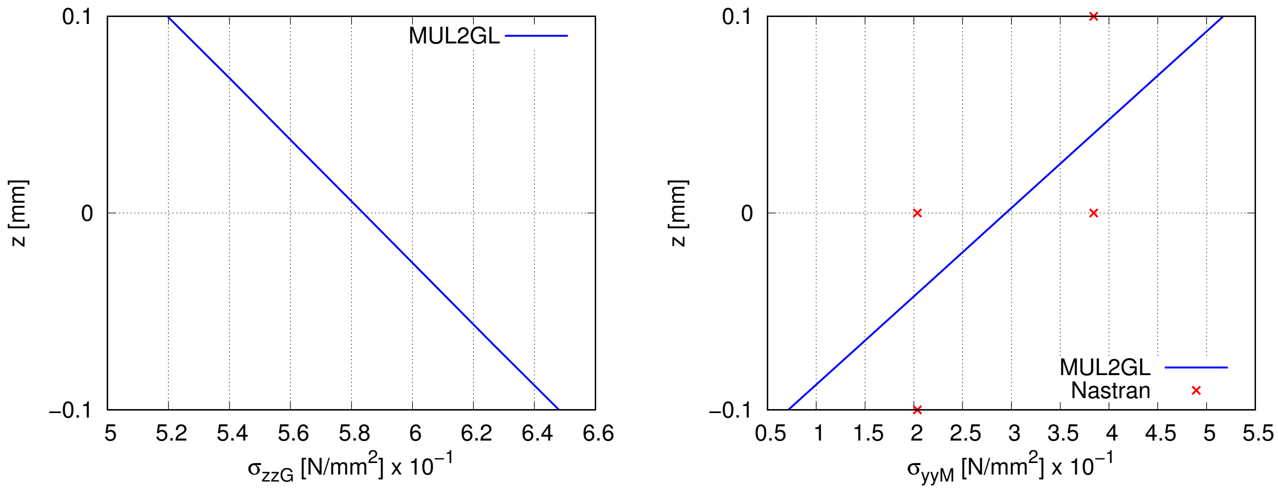


Figura 5.14: Andamento di σ_{zzG} e σ_{yyM} nel baricentro dell'elemento sul bordo.

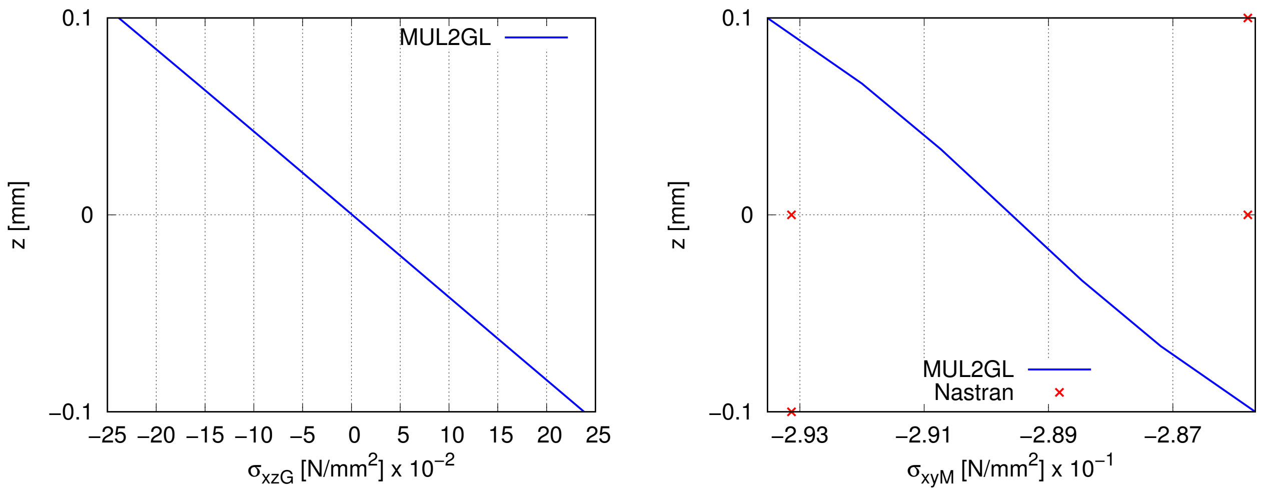


Figura 5.15: Andamento di σ_{xzG} e σ_{xyM} nel baricentro dell'elemento sul bordo.

5.4 Effetto della Forza di Taglio

Per mettere in evidenza l'andamento delle tensioni trasversali si è scelto di applicare una forza concentrata di 1N diretta lungo l'asse $-Y_G$, in corrispondenza del nodo master della sezione destra (z = 350mm). Per quanto riguarda i vincoli, invece, tutti i gradi di libertà della sezione sinistra (z = 0) sono stati bloccati, mentre la sezione su cui è applicato il carico è stata lasciata libera (come si osserva nella Tabella 5.6).
Diversamente dal TRAC boom, in questo caso nascono delle tensioni trasversali per entrambi gli elementi selezionati per l'analisi locale. Questo è dovuto al fatto che entrambi gli elementi in questione si trovano sulla parte superiore della forma cilindrica che costituisce il tape-spring hinge. Tuttavia, l'aumento delle tensioni trasversali può essere osservato più facilmente per l'elemento sulla regione centrale, in quanto quest'ultimo è meno inclinato rispetto al piano X-Z. Per questo motivo si è scelto di riportare i grafici relativi a tale elemento (5055): esso è stato già discusso nella sottosezione 5.3.1. In particolare sono state riportate le componenti trasversali di tensione relative ai sistemi di riferimento globale, materiale e locale.

Tabella 5.6: Condizioni di vincolo per le sezioni alle estremità della struttura, nella condizione di carico $T_y = 1\ N$.

	Sezione sx $z = 0$						Sezione dx $z = 350\,mm$					
	T_{x1}	T_{y1}	T_{z1}	R_{x1}	R_{y1}	R_{z1}	T_{x2}	T_{y2}	T_{z2}	R_{x2}	R_{y2}	R_{z2}
T_y	0	0	0	0	0	0	Free	Free	Free	Free	Free	Free

Dopo aver confrontato le tensioni locali relative al carico $M_x = +100\ Nmm$ con quelle relative al carico $T_y = 1\ N$, è stato possibile osservare che le tensioni trasversali sono superiori di almeno un ordine di grandezza, in quest'ultimo caso. Come già anticipato in precedenza, i C_z^0 requirements in questo caso sono maggiormente soddisfatti rispetto a quanto osservato per il TRAC boom. Tuttavia si è scelto comunque di raddoppiare il numero di strati virtuali, in modo da poter effettuare un confronto con il caso in cui gli strati fisici coincidono con quelli virtuali. Una descrizione più dettagliata del metodo degli strati virtuali è presente nella sezione 4.4. Per l'elemento sulla regione centrale del tape-spring hinge (5055), il confronto tra LD3 e 2LD3 è stato effettuato per tutte le tensioni riportate, ad eccezione di σ_{xyG}, dove i due grafici risultano essere coincidenti.
Effettivamente è possibile notare che σ_{xz} e σ_{yz} hanno un andamento parabolico e si annullano per $z = 0.1\ mm$ e $z = -0.1\ mm$ sia nel sistema di riferimento materiale che in quello locale. Inoltre, è possibile osservare dalla Figura 5.19 che all'aumentare del numero di strati virtuali i salti delle σ si riducono e che alle estremità vengono raggiunti dei valori più vicini allo zero. É stato anche aggiunto il caso 10LD3, caratterizzato dalla presenza di 10 polinomi di Lagrange cubici per ogni strato fisico (lo spessore di un singolo strato virtuale in questo caso corrisponde ad un decimo dello spessore di uno strato fisico). Questo ultimo caso è stato aggiunto per mettere in evidenza il fatto che i piccoli salti che si creano tra gli strati virtuali nel caso 2LD3 sono dovuti ad un effetto di natura numerica, che però tende a svanire aumentando i nodi lungo lo spessore. Diversamente dal TRAC boom, in questo caso non è stata effettuata un'analisi di free edge, in quanto gli elementi sono costituiti solamente da due strati dello stesso materiale: questa particolarità della struttura impedisce di ricavare dei risultati che mettano sufficientemente in evidenza gli effetti sul bordo libero.

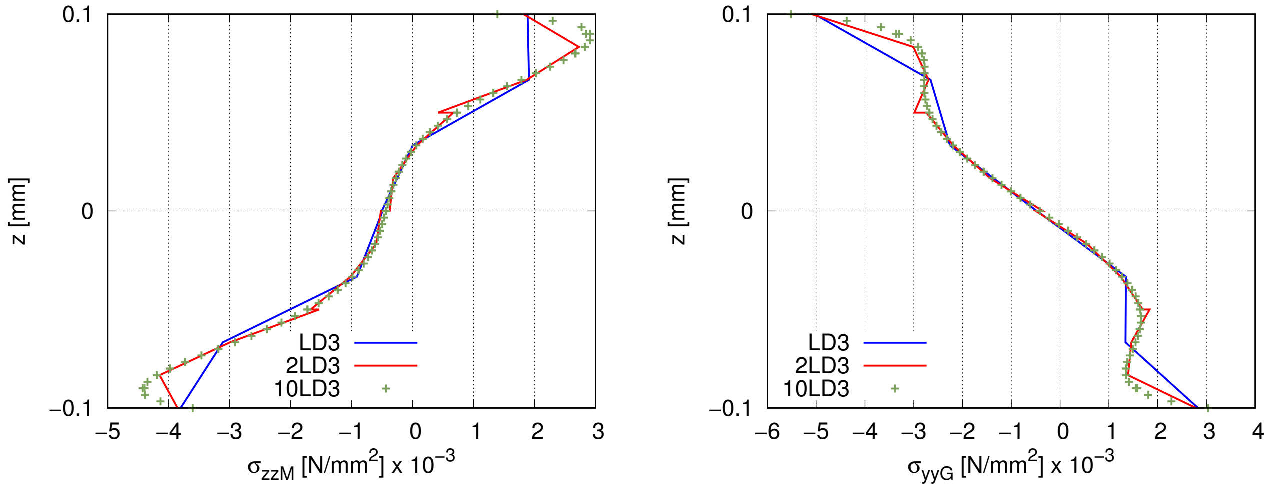


Figura 5.16: Andamento di σ_{zzM} e σ_{yyG} nel baricentro dell'elemento sulla regione centrale.

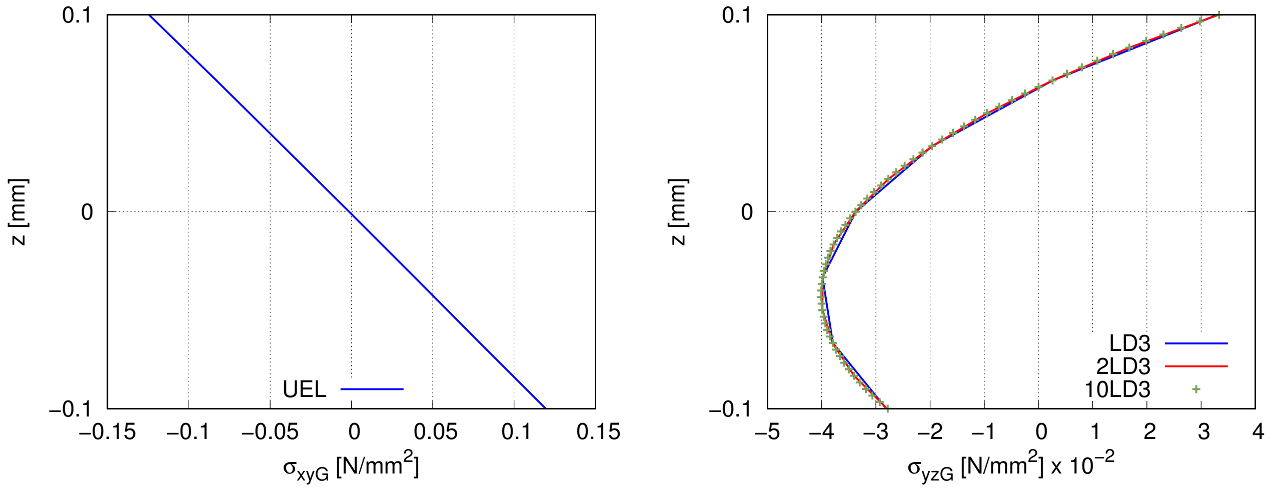


Figura 5.17: Andamento di σ_{xyG} e σ_{yzG} nel baricentro dell'elemento sulla regione centrale.

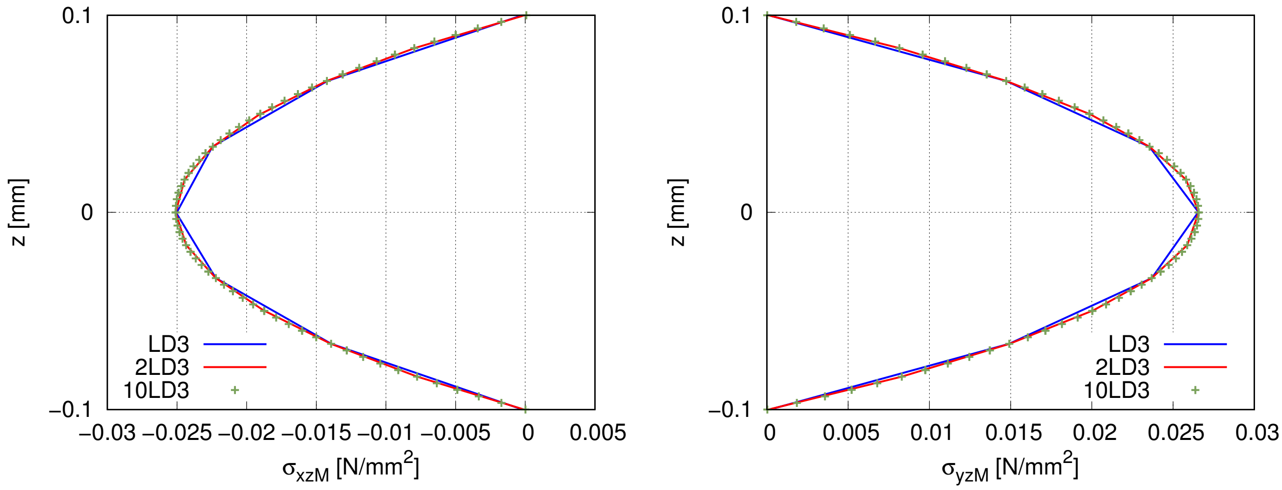


Figura 5.18: Andamento di σ_{xzM} e σ_{yzM} nel baricentro dell'elemento sulla regione centrale.

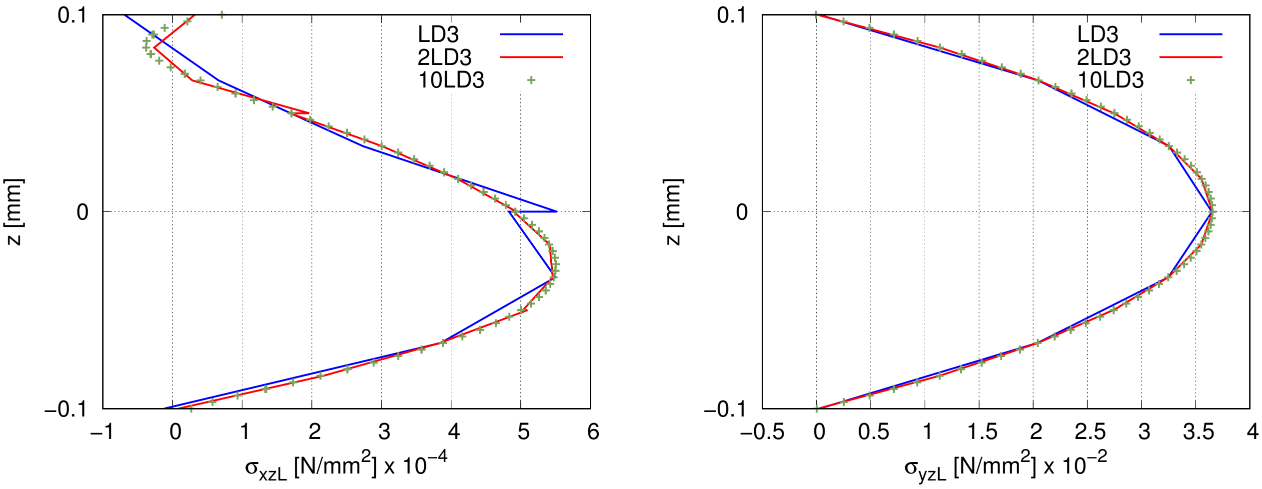


Figura 5.19: Andamento di σ_{xzL} e σ_{yzL} nel baricentro dell'elemento sulla regione centrale.

5.5 Analisi di Failure

Nel caso del tape-spring hinge si è scelto di considerare 3 criteri di failure: Hoffman, Hashin3D e LaRC05. Gli indici verranno calcolati nel caso di sollecitazione a flessione del tape-spring hinge, considerando un carico $M_x = 4278\ Nmm$. Questo carico corrisponde al massimo momento a cui viene sottoposta la struttura durante la fase di ripiegamento, nel caso in cui non venga applicato il pinching (pratica già descritta nella parte introduttiva del Capitolo 5), che permette di ridurre notevolmente il picco di M_x. Il carico considerato rappresenta quindi la condizione più restrittiva a cui può essere sottoposta la struttura ed è quindi il caso più interessante per effettuare un'analisi di failure. Nello specifico si farà riferimento all'andamento degli indici di failure lungo lo spessore dell'elemento 5055 (già descritto nella sottosezione 5.3.1), in corrispondenza del suo centroide.
Per utilizzare i 3 criteri elencati in precedenza, è necessario introdurre i valori massimi di tensione che possono essere sopportati dal materiale. Per il T300-1k/913 queste quantità sono riassunte in Tabella 5.7. Per quanto riguarda X_T, X_C, Y_T, Y_C e XY, le quantità sono state

Tabella 5.7: Proprietà meccaniche del T300-1k/913, utilizzate per le analisi di failure.

X_T	Resistenza a trazione in direzione delle fibre	2005 N/mm^2
X_C	Resistenza a compressione in direzione delle fibre	1335 N/mm^2
Y_T	Resistenza a trazione in direzione perpendicolare alle fibre	68 N/mm^2
Y_C	Resistenza a compressione in direzione perpendicolare alle fibre	198 N/mm^2
XY	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre	150 N/mm^2
XZ	Resistenza a taglio longitudinale alle fibre	150 N/mm^2
YZ	Resistenza a taglio trasversale alle fibre	28.39 N/mm^2

ricavate dalla reference [56]. Inoltre, sono state considerate le equazioni 4.3 e 4.4 per ricavare, rispettivamente, XZ e YZ. É stato considerato un valore di $\phi_0 = 53°$ per il materiale del tape-spring hinge [28]. Per quanto riguarda il kinking angle, nel caso del T300-1k/913 è stato considerato un angolo $\psi = 25°$ [28].

5.5.1 Hoffman

É facile osservare che i valori raggiunti lungo lo spessore dell'elemento sono di gran lunga al di sotto dell'unità, il che indica che la struttura è piuttosto lontana dalla rottura in corrispondenza dell'elemento 5055 (Figura 5.20). É interessante notare che nello strato inferiore $FI_{Hoffman2D}$

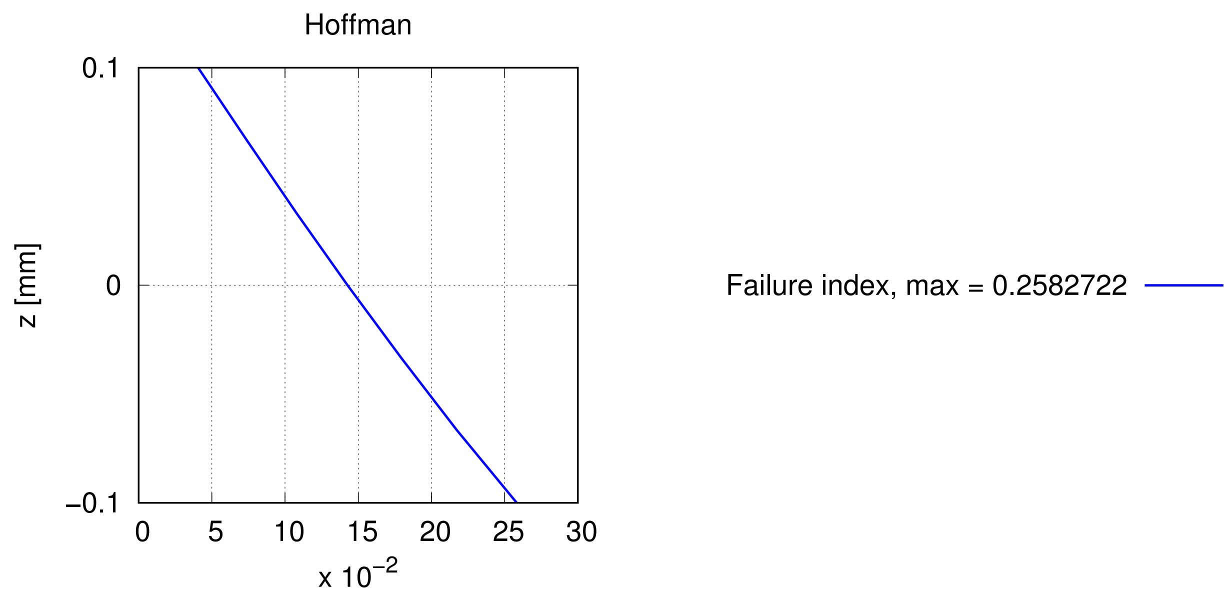


Figura 5.20: Andamento del $FI_{Hoffman2D}$ nell'elemento 5055, sulla regione centrale.

raggiunge valori circa 5 volte superiori rispetto allo strato superiore: questo comportamento rispecchia l'andamento delle tensioni nel piano dell'elemento, nel sistema di riferimento materiale (σ_{xxM}, σ_{yyM} e σ_{xyM}). Trattandosi di un'analisi lineare, l'andamento delle tensioni è uguale sia nel caso $M_x = 100\ Nmm$ che nel caso $M_x = 4278\ Nmm$: ciò che cambia sono i valori raggiunti da queste tensioni (saranno maggiori se il momento applicato cresce). In particolare, σ_{xxM} e σ_{yyM} raggiungono, nello strato inferiore, valori positivi circa 5 volte superiori rispetto allo strato sovrastante. Per quanto riguarda σ_{xyM}, invece, assume valori negativi in entrambi gli strati, ma in modulo maggiore nel primo strato rispetto al secondo.

5.5.2 Hashin3D

In Figura 5.21 sono riportati esclusivamente i grafici relativi alla tensione delle fibre ($FI_{FT,Hashin3D}$) e della matrice ($FI_{MT,Hashin3D}$). Questo è dovuto al fatto che, per il caso di carico considerato, l'elemento 5055 è sollecitato a trazione, quindi gli altri due indici relativi alla compressione delle fibre e della matrice sono pari a zero per entrambi gli strati. Si osserva che $FI_{MT,Hashin3D}$ è circa 2 ordini di grandezza più grande rispetto a $FI_{FT,Hashin3D}$, in termini di valore massimo. Questo è dovuto al fatto che nella formula di $FI_{MT,Hashin3D}$ compare il termine S_T^2 al denominatore. Essendo S_T la più piccola tra le resistenze del materiale (come si osserva in Tabella 5.7), si ottiene che l'indice relativo alla failure della matrice per tensione cresce, diventando più grande di quello relativo alla tensione delle fibre. Effettivamente questo risultato può essere già intuito preliminarmente all'analisi di failure, in quanto generalmente, in un composito, le fibre sono più resistenti a trazione rispetto alla matrice. Come già osservato per il criterio di Hoffman, anche in questo caso gli indici raggiungono valori maggiori nel primo strato, per le stesse motivazioni discusse in precedenza.

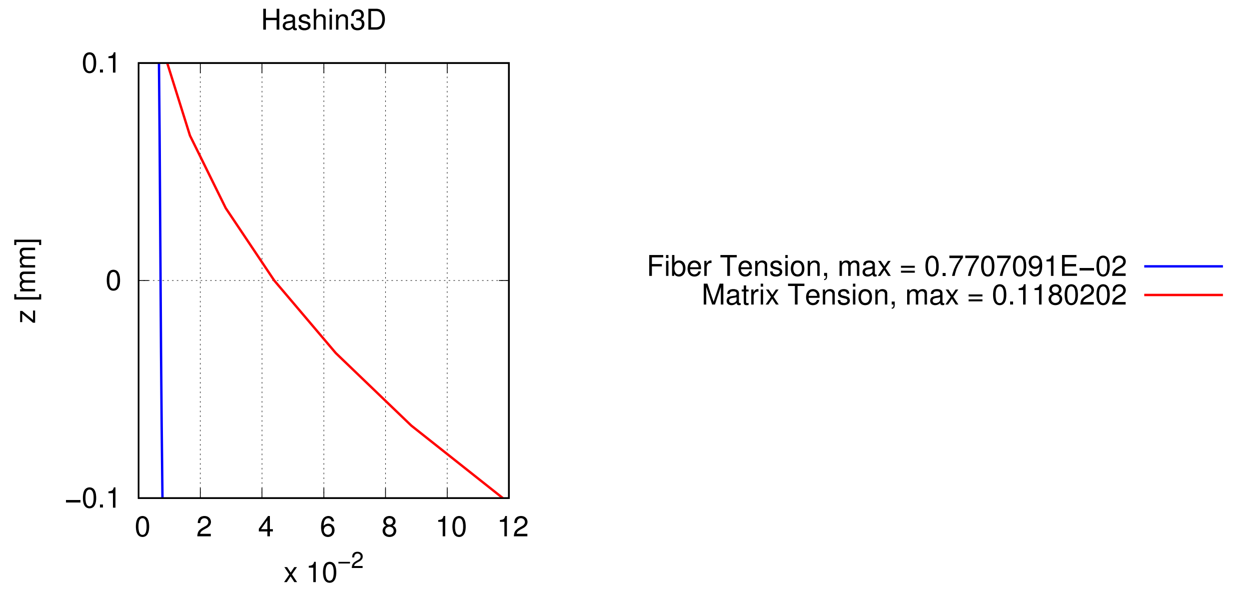


Figura 5.21: Andamento di $FI_{FT,Hashin3D}$ e $FI_{MT,Hashin3D}$ nell'elemento 5055, sulla regione centrale.

5.5.3 LaRC05

In Figura 5.22 è possibile osservare l'andamento dei failure index, calcolati secondo il criterio LaRC05, lungo lo spessore dell'elemento 5055. Si nota che in questo caso tutti gli indici hanno un andamento crescente spostandosi dallo strato superiore verso quello inferiore, inoltre si tratta sempre di valori notevolmente inferiori rispetto all'unità. Mediamente $FI_{FT,LaRC05}$ è l'indice più piccolo (come già indicato dal criterio Hashin3D), in quanto è costituito da un unico termine al denominatore del quale compare X_T, che è la resistenza maggiore tra quelle elencate in Tabella

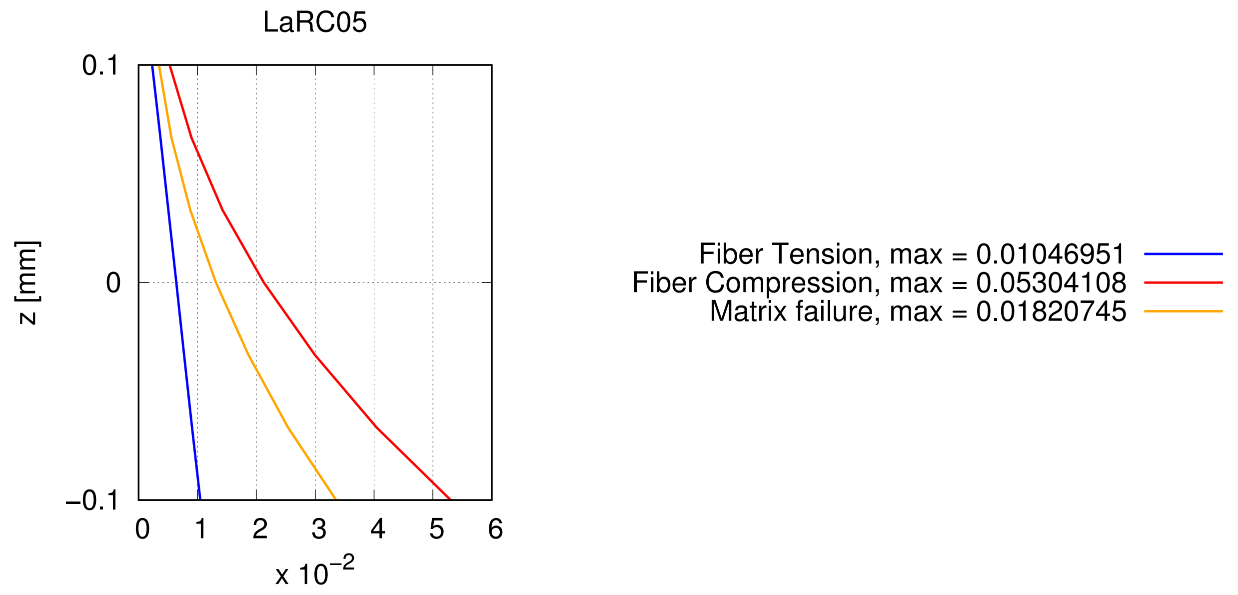


Figura 5.22: Andamento di $FI_{M,LaRC05}$, $FI_{SPLIT,LaRC05}$ ed $FI_{FT,LaRC05}$ nell'elemento 5055, sulla regione centrale.

5.7. Al di sopra di $FI_{FT,LaRC05}$ è possibile osservare $FI_{M,LaRC05}$, associato alla failure della matrice. Questo secondo indice assume valori superiori rispetto al primo, in quanto tiene conto dell'effetto degli sforzi di taglio sia in direzione longitudinale che trasversale rispetto al piano di frattura. Osservando i denominatori della 3.24, si nota che sono composti da resistenze con valore inferiore rispetto a X_T, oltretutto attenuate dell'effetto di η_T ed η_L, essendo l'elemento sollecitato a trazione. Considerando, infine, il failure index relativo alla compressione delle fibre, si nota che esso assume mediamente valori maggiori rispetto agli altri due. Essendo $\sigma_1 > -X_C/2$ in entrambi gli strati, questo indice fa riferimento al fenomeno di splitting delle fibre ($FI_{SPLIT,LaRC05}$). I termini della 3.25 sono simili a quelli della 3.24, con la differenza che nel primo caso vengono considerate le tensioni nel sistema di riferimento delle fibre piegate. Quindi è possibile affermare che il criterio LaRC05 mette in evidenza un modo di failure che non viene evidenziato negli altri due criteri: quello relativo allo splitting delle fibre in seguito alla rottura della matrice.

Capitolo 6

Analisi di un Telescopic Tubular Mast in Composito

In questo capitolo viene analizzato un Telescopic Tubular Mast (TTM), il cui modello Femap semplificato è stato sviluppato prendendo come riferimento una struttura analoga sviluppata dalla Astro Space [30]. Come per le strutture analizzate nei Capitoli 4 e 5, anche in questo caso viene effettuata, attraverso Femap, un'analisi globale lineare della struttura, seguita da un'analisi locale mediante il plug-in MUL2@GL. I risultati dell'analisi globale verranno paragonati con quelli relativi ad un'analisi non lineare riguardante il modello sviluppato dalla Astro Space, in modo da assicurarsi della validità del modello Femap, prima di procedere con l'analisi locale. É stato considerato un TTM costituito da 17 sezioni tubolari, escludendo la base fissa. Con un peso di circa 58 kg, la struttura dispiegata ha una lunghezza di 34.3 m (1350 in), che si riduce a soli 2.16 m (85 in) nella configurazione ripiegata, osservabile in Figura 6.1. Procedendo verso sezioni cilindriche sempre più interne, si osservano diametri sempre più piccoli. In particolare, la differenza tra i diametri di due tubi adiacenti è di 1.3 cm (0.5 in) ed il tubo più vicino alla base ha un diametro di 31.8 cm (per quanto riguarda il diametro della base, invece, è stato considerato un valore di 31.8 cm+1.3 cm = 33.1 cm). I 17 tubi che costituiscono il TTM hanno tutti la stessa lunghezza ($(34.3\ m - 2.16\ m)/17 = 1.89\ m$) e nella configurazione ripiegata sono coincidenti gli uni con gli altri: questo permette di minimizzare il numero di tubi, rendendo più stabile l'intera struttura. Nella configurazione dispiegata i tubi non si sovrappongono, ma sono adiacenti gli uni agli altri in modo da assicurare un design sufficientemente leggero. Per quanto riguarda i materiali utilizzati, è stato considerato il P75/934, le cui proprietà meccaniche sono riportate in Tabella 6.1 [10]: si tratta un composito in grafite comunemente utilizzato in ambito aerospaziale, la cui laminazione varia a seconda della sezione tubolare considerata (per ogni strato è stato considerato uno spessore di $0,127$ mm ovvero 0.005 in [5]). In Tabella 6.2, invece, sono riportate le laminazioni utilizzate per i vari tubi, con i rispettivi spessori: la numerazione dei tubi va da 0 a 17, dove il numero 0 indica la base fissa.

Tabella 6.1: Proprietà dei materiali.

P75/934

E_1 N/mm^2	243000
$E_2 = E_3$ N/mm^2	7200
$G_{12} = G_{13}$ N/mm^2	3930
G_{23} N/mm^2	2410
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.33
ν_{23}	0.49

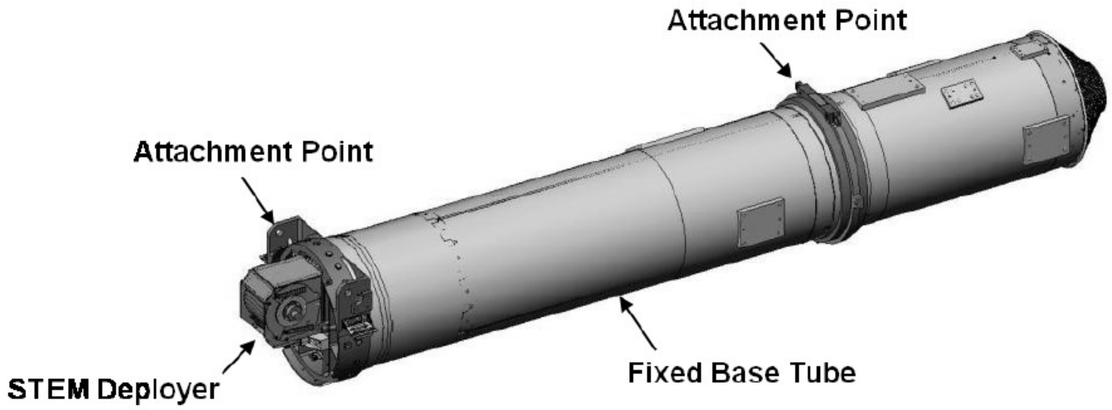


Figura 6.1: Rappresentazione del TTM nella configurazione ripiegata.

Tabella 6.2: Proprietà delle sezioni tubolari.

	Laminazione	**Spessore [mm]**
Primi 2 cilindri (0,1)	[+45/-45/-45/+45]	0.508
Cilindri centrali (2,...,16)	[+45/0/-45]	0.381
Ultimo cilindro (17)	[+45/-45/0/0/0/0/-45/+45]	1.016

6.1 Sviluppo del Modello Femap

Anche in questo caso, come per il tape-sring hinge, il modello è stato importato in Femap dopo essere stato sviluppato su Solidworks. Il processo che ha permesso di implementare la geometria, consiste nell'estrusione delle 18 superfici cilindriche, a partire dalla base del TTM. Le superfici sono state estruse in maniera sequenziale, in modo tale che la base del cilindro successivo giacesse sul piano individuato dall'estremità del cilindro precedente.
Successivamente la struttura è stata discretizzata attraverso elementi di tipo "laminate plate" QUAD4. Si è scelto di procedere disponendo 60 elementi lungo la circonferenza e 50 elementi in direzione longitudinale per ciascun cilindro. Successivamente sono stati aggiunti 19 elementi rigidi di tipo RBE2 in corrispondenza delle sezioni alle estremità e di tutte le sezioni intermedie in modo da collegare i vari cilindri tra di loro: anche in questo caso si è scelto di collegare tutti i gradi di libertà di tutti i nodi delle sezioni al nodo master, posizionato in corrispondenza del centro delle varie circonferenze. Nel complesso sono stati creati 54000 elementi QUAD4, 19 elementi RBE2, per un totale di 54019 elementi e 55136 nodi. Essendo lo spessore degli elementi variabile, è stato necessario creare 3 differenti proprietà, tuttavia non è stato necessario unire i nodi, non essendo presenti dei nodi sovrapposti. In Figura 6.2 è rappresentato il modello Femap della struttura, dopo la definizione della geometria e la discretizzazione in elementi finiti (non è possibile distinguere i singoli elementi a causa dell'estensione della struttura). Successivamente è stata modificata l'orientazine del materiale, scegliendo la direzione $X+$ per tutti gli elementi (che coincide con quella individuata dall'asse della struttura). In seguito sono stati imposti i vincoli ed i carichi che agiscono sul TTM. In questo caso vengono effettuate delle prove a taglio, quindi con delle forze orientate in direzione trasversale, in particolare lungo l'asse z. É stato considerato un unico caso di vincolo, in cui la sezione all'estrema sinistra ($x = 0$) è fissata, mentre quella di destra ($x = 34.3\ m$) è completamente libera. Le condizioni di vincolo sono state imposte sui nodi master degli elementi rigidi e sono riassunte in Tabella 6.3. In questo caso è sufficiente effettuare un'unica analisi, poiché la struttura è assialsimmetrica, quindi il comportamento non cambia a seconda della direzione della forza di taglio.

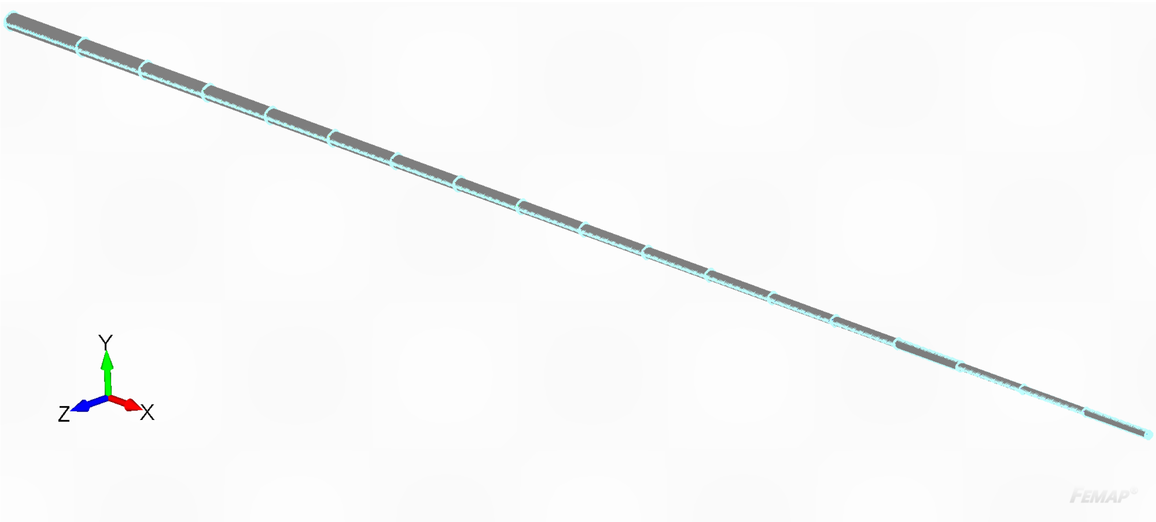


Figura 6.2: Modello Femap del TTM.

Tabella 6.3: Condizioni di vincolo per le sezioni alle estremità della struttura, nella condizione di carico $T_z = 1\ N$.

	Sezione sx $x = 0$						Sezione dx $x = 34.3\,m$					
	T_{x1}	T_{y1}	T_{z1}	R_{x1}	R_{y1}	R_{z1}	T_{x2}	T_{y2}	T_{z2}	R_{x2}	R_{y2}	R_{z2}
T_z	0	0	0	0	0	0	Free	Free	Free	Free	Free	Free

6.2 Risultati dell'Analisi Globale

É stato realizzato un grafico (Figura 6.3) che permette di confrontare i risultati dell'analisi lineare, eseguita con Femap, con quelli di un'analisi non lineare, i cui dettagli sono riportati nella reference [30]. In entrambi i casi non è stata considerata una condizione di precarico, che generalmente è utilizzata per simulare la presenza di un payload collegato al tip della struttura (come un pannello solare o uno scudo solare). Questi grafici rappresentano l'andamento della forza di taglio applicata (T_z) in funzione della deflessione al tip (δ_{tip}). Si nota che nella realtà il comportamento della struttura è prevalentemente non lineare, a causa della flessibilità degli elementi di collegamento tra le varie sezioni tubolari (la rigidezza aumenta se viene incrementato il carico applicato sui perni di collegamento). Successivamente è stata calcolata la rigidezza (R) della struttura secondo la formula:

$$R = \frac{T_z}{\delta_{tip}} \tag{6.1}$$

Nel caso dell'analisi non lineare tale rigidezza è stata calcolata considerando un punto sufficientemente vicino all'origine del grafico ($\delta_{tip} = 0.5568\ cm$), in modo da effettuare un confronto adeguato. Le rigidezze calcolate con i dati delle analisi numeriche sono riassunte in Tabella 6.4: confrontando le rigidezze, si nota che la struttura risulta essere più rigida nel caso dell'analisi lineare. Bisogna tuttavia considerare che nel caso non lineare la rigidezza cresce con l'aumentare del carico applicato, fino a diventare superiore rispetto a quella del caso lineare.
É stato inoltre implementato un grafico (Figura 6.4) che indica il discostamento dell'analisi lineare dai dati dell'analisi non lineare. In questo caso l'andamento di δ_{err} (la cui definizione è già stata fornita nella sezione 4.2) è caratterizzato da un pattern ripetitivo, in cui si alternano tratti crescenti, seguiti da tratti decrescenti. Questo è dovuto al fatto che il TTM presenta una rigidezza crescente con il taglio applicato.

Tabella 6.4: Rigidezze del TTM.

	$R\,[N/cm]$
Analisi lineare (Femap)	0.11388
Analisi non-lineare	0.10452

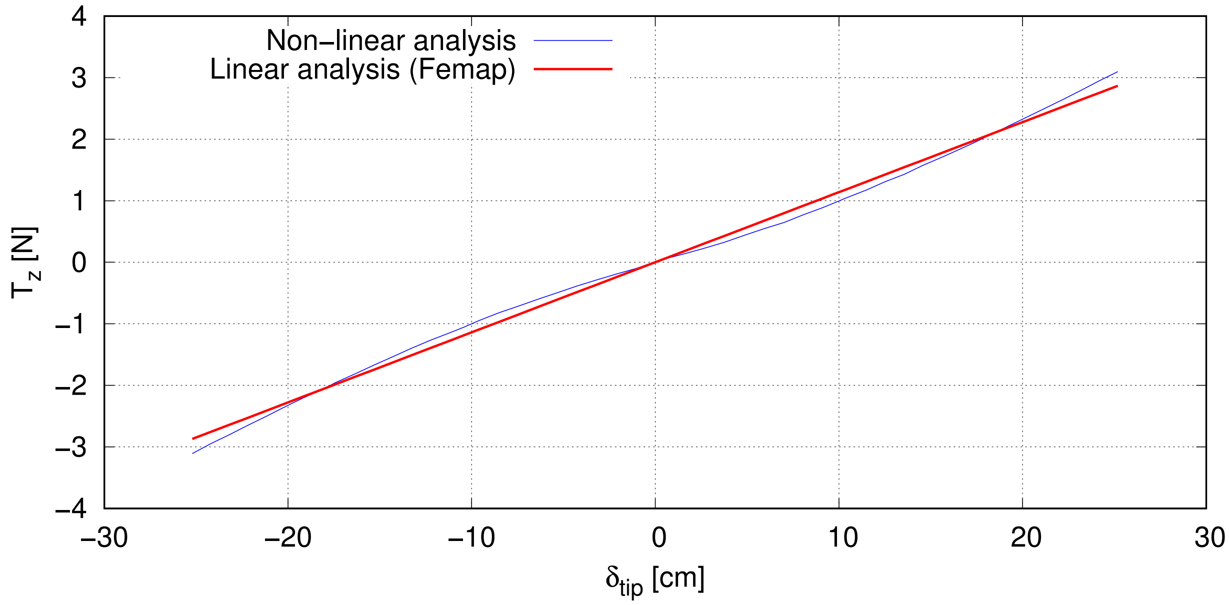


Figura 6.3: Forza di taglio diretta lungo z, confronto tra analisi lineare e analisi non lineare.

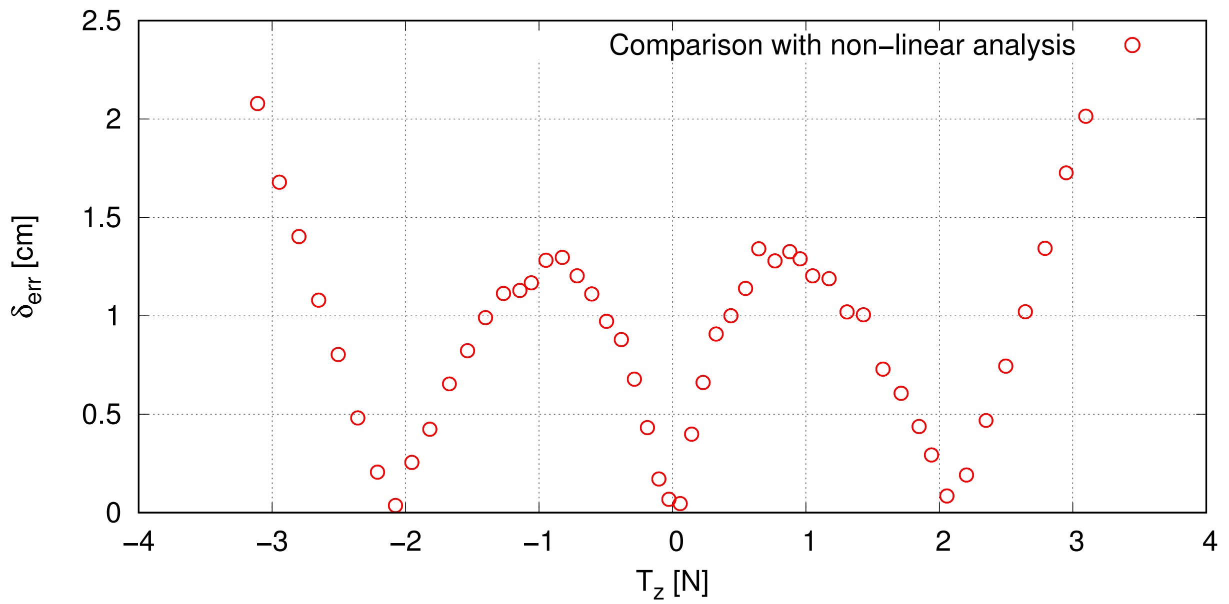


Figura 6.4: Andamento dell'errore in funzione di T_z.

6.3 Risultati dell'Analisi Locale

Per eseguire le analisi locali è stata considerata una forza di taglio $T_z = 1\ N$. In questo caso, avendo a disposizione tre proprietà diverse, si è scelto di prendere in considerazione tre elementi da analizzare localmente, ciascuno appartenente ad una delle regioni elencate nella Tabella 6.2. Nello specifico, prima verrà analizzato un elemento appartenente al cilindro 2, poi uno appartenente al cilindro 9 ed infine uno appartenente al cilindro 17. In tutti i casi verrà considerato un elemento sulla parte inferiore del cilindro ($Z-$), in modo che il piano dell'elemento sia circa parallelo al piano definito dagli assi X_G e Y_G (inoltre questi elementi risultano essere più sollecitati rispetto a quelli collocati nella parte superiore). In Figura 6.5 è riportata la deformata della struttura (si possono anche notare gli elementi RBE2 che separano le varie sezioni tubolari), mentre in Figura 6.6 sono rappresentate le 3 sezioni tubolari da cui sono stati estratti gli elementi.

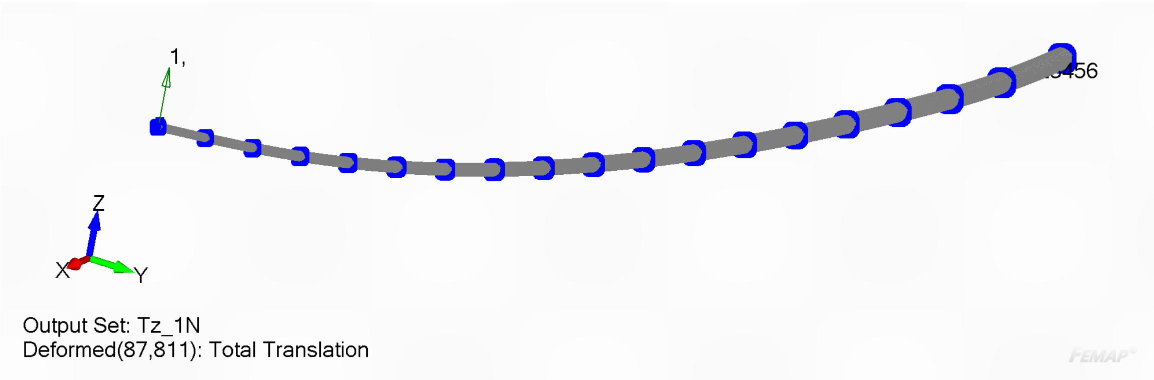


Figura 6.5: Deformazione del TTM in seguito all'applicazione del carico $T_z = 1\ N$.

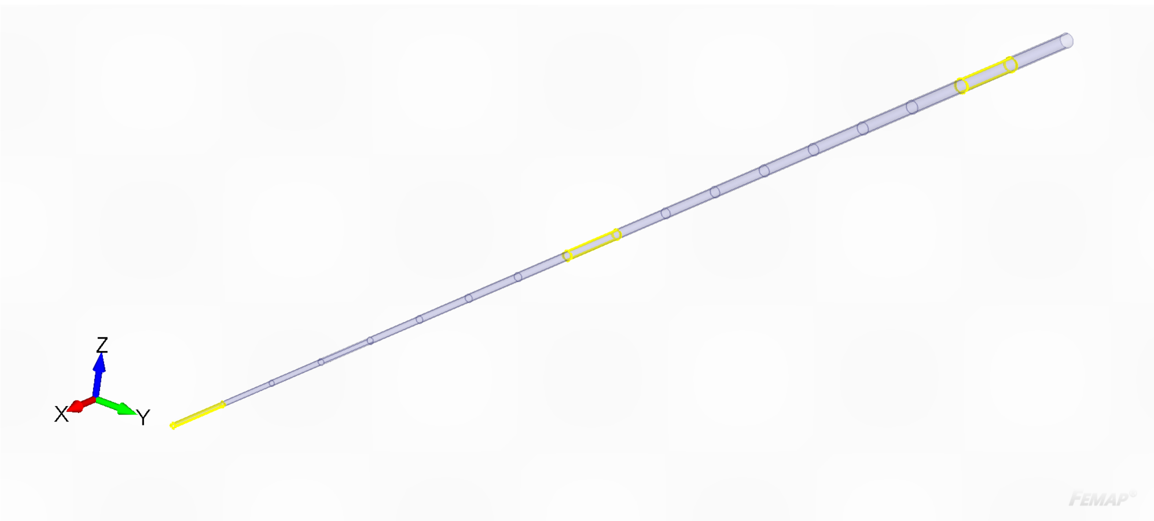
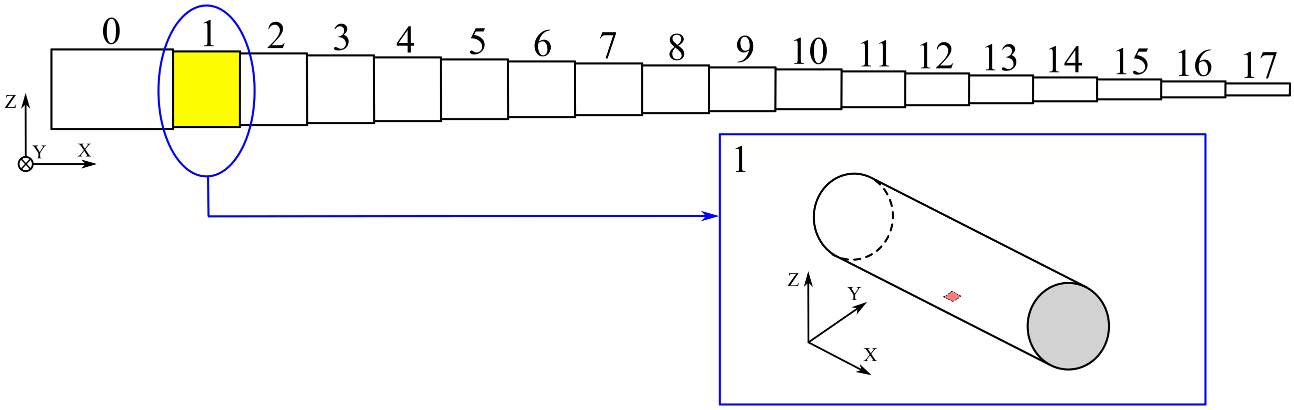


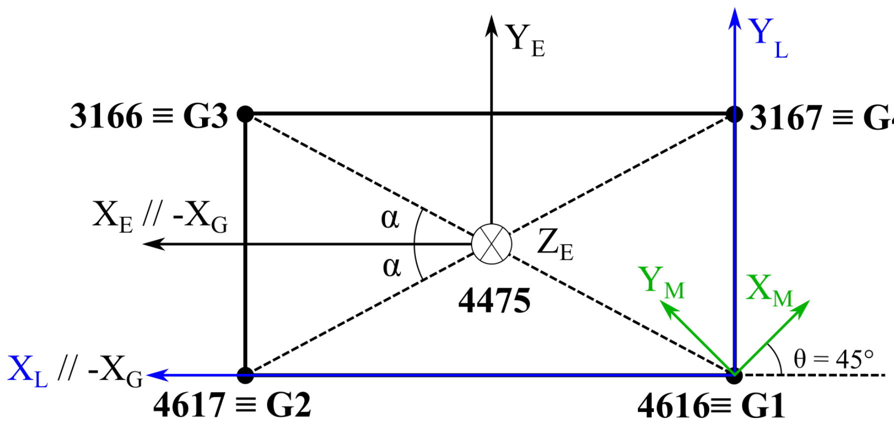
Figura 6.6: Cilindri (evidenziati in giallo) da cui sono stati estratti gli elementi per l'analisi locale.

6.3.1 Elemento sul cilindro 1, in prossimità della base fissa

Dopo aver seguito lo stesso procedimento descritto nella sottosezione 4.3.1, sono stati implementati dei grafici che mostrano l'andamento delle tensioni all'interno dell'elemento sul fondo del cilindro 1 (il cui ID corrisponde a 4475). Per confrontare i vari grafici si è scelto di rappresentare i sistemi di riferimento dell'elemento 4475, come si osserva in Figura 6.7b (per maggiori informazioni sui sistemi di riferimento e sui pedici utilizzati si consiglia di consultare la sottosezione 3.2.3).



(a) Collocazione dell'elemento 4475, sul fondo del cilindro 1 (in rosso).



(b) Sistemi di riferimento per l'elemento 4475, sul fondo del cilindro 1.

Figura 6.7: Collocazione e sistemi di riferimento dell'elemento 4475, sul fondo del cilindro 1.

Si nota che gli assi del sistema di riferimento materiale non sono paralleli agli assi degli altri sistemi di riferimento, poiché in questo caso si considera una laminazione del tipo $[+45/-45]_s$. In questo caso, diversamente da quanto affermato per il tape-spring hinge, gli assi del sistema di riferimento locale sono paralleli agli assi del sistema di riferimento dell'elemento: l'elemento preso in considerazione è infatti rettangolare. Gli assi X_L ed X_E, oltre ad essere paralleli tra loro, sono paralleli a X_G, ma hanno verso opposto rispetto a quest'ultimo. Infine Y_E ed Y_L, oltre ad essere paralleli tra loro, sono circa paralleli ad Y_G, mentre Z_M, Z_L e Z_E sono paralleli tra loro (Z_M ha verso opposto rispetto agli altri 2), e circa paralleli a Z_G: anche in questo caso non si può parlare di un parallelismo perfetto, in quanto l'elemento, facendo parte della discretizzazione di una superficie cilindrica, è leggermente inclinato rispetto al piano $X_G - Y_G$. In realtà il sistema di riferimento materiale varia a seconda dello strato preso in considerazione, quindi nello schema è riportato solo il caso relativo agli strati a +45°.
Di seguito vengono riportati i grafici delle tensioni: nel sistema di riferimento materiale è stato effettuato un confronto tra i risultati Nastran e quelli MUL2@GL per le tensioni nel piano dell'elemento. Sono quindi state effettuate le seguenti considerazioni, relative al sistema di riferimento materiale (per i pedici si usa la stessa convenzione dei sistemi di riferimento):

- σ_{xxM}: Nel caso Nastran, si nota un andamento circa costante, positivo ma molto vicino allo zero, che non riesce a cogliere i salti di tensione nel passaggio da +45° a −45°. Nel caso MUL2@GL, le σ_{xxM} hanno valori positivi (le fibre risultano essere sollecitate a trazione) per gli strati a −45°, mentre hanno valori negativi (le fibre risultano essere compresse) per gli strati a +45°.

- σ_{yyM}: Anche in questo caso, i risultati di Nastran indicano un andamento circa costante positivo. I risultati MUL2@GL, invece mostrano valori positivi per gli strati a +45° e valori negativi per gli strati a −45°. Quindi, nel complesso, è possibile osservare che l'elemento è compresso nella direzione +45°, mentre è sollecitato a trazione nella direzione −45° (si nota infatti che σ_{xxM} ha un andamento speculare rispetto a σ_{yyM}).

- σ_{xyM}: in questo caso si nota che i risultati Nastran coincidono con quelli MUL2@GL. Si osservano valori positivi per gli strati a −45° e negativi per gli strati a +45°.

Considerando il sistema di riferimento globale, si nota che σ_{xxG} ha lo stesso andamento di σ_{xxL}. Infine, passando al sistema di riferimento locale, si nota che σ_{zzL} ha lo stesso andamento di σ_{zzM}. Nella Tabella 5.4 viene evidenziata la relazione tra le varie σ prese in considerazione: quelle sulle stesse righe mostrano lo stesso andamento, mentre quelle sulle stesse colonne si riferiscono allo stesso sistema di riferimento (in questo caso non sono state effettuate considerazioni su σ_{zzG} e σ_{yyG}, perché gli assi corrispondenti Z_G e Y_G non giacciono sul piano dell'elemento, nè sono perpendicolari ad esso).

Tabella 6.5: Relazioni tra le tensioni normali nei vari sistemi di riferimento per l'elemento 4475.

Materiale	***Locale***	***Globale***
/	σ_{xxL}	σ_{xxG}
σ_{zzM}	σ_{zzL}	/

Avendo sollecitato la struttura con una forza di taglio, si è scelto di riportare anche le tensioni trasversali. Si nota che queste tensioni sono più piccole rispetto a quelle nel piano (di circa 4 ordini di grandezza), almeno per quanto riguarda i sistemi di riferimento materiale e locale. I C_z^0 requirements sono in parte soddisfatti, come si nota dalla Figura 6.12 dove sono presenti dei piccoli salti in corrispondenza dei punti in cui si ha un cambiamento di laminazione e si raggiungono valori poco distanti dallo zero sulle superfici superiore ed inferiore dell'elemento. É possibile correggere queste imperfezioni aumentando il numero di strati virtuali, in modo da aumentare il numero di nodi disposti lungo lo spessore e quindi utilizzare un numero superiore di polinomi di Lagrange cubici (LD3), come già dimostrato nelle sezioni 4.4 e 5.4.

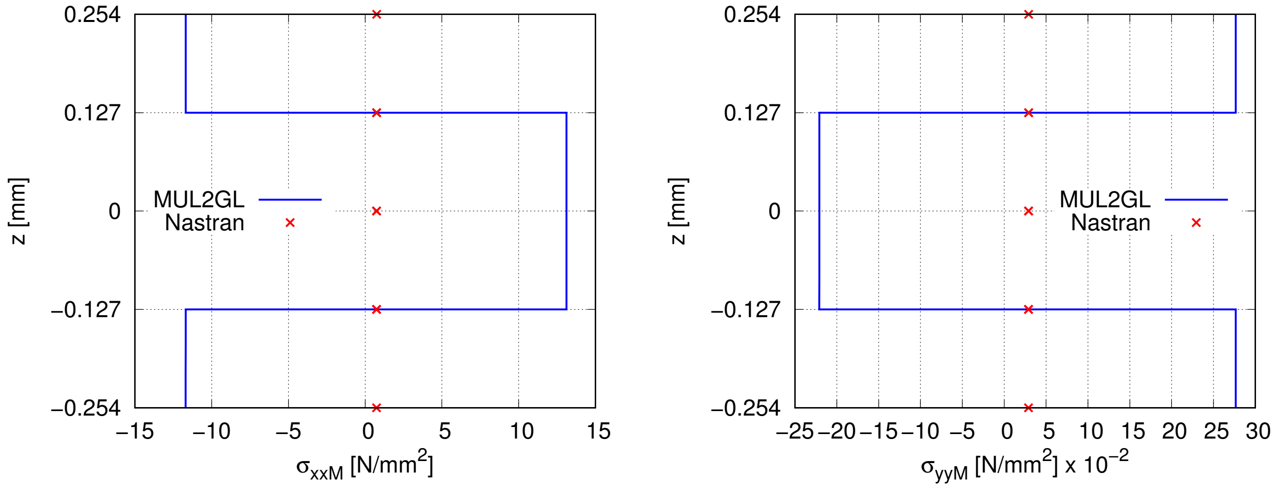


Figura 6.8: Andamento di σ_{xxM} e σ_{yyM} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 1.

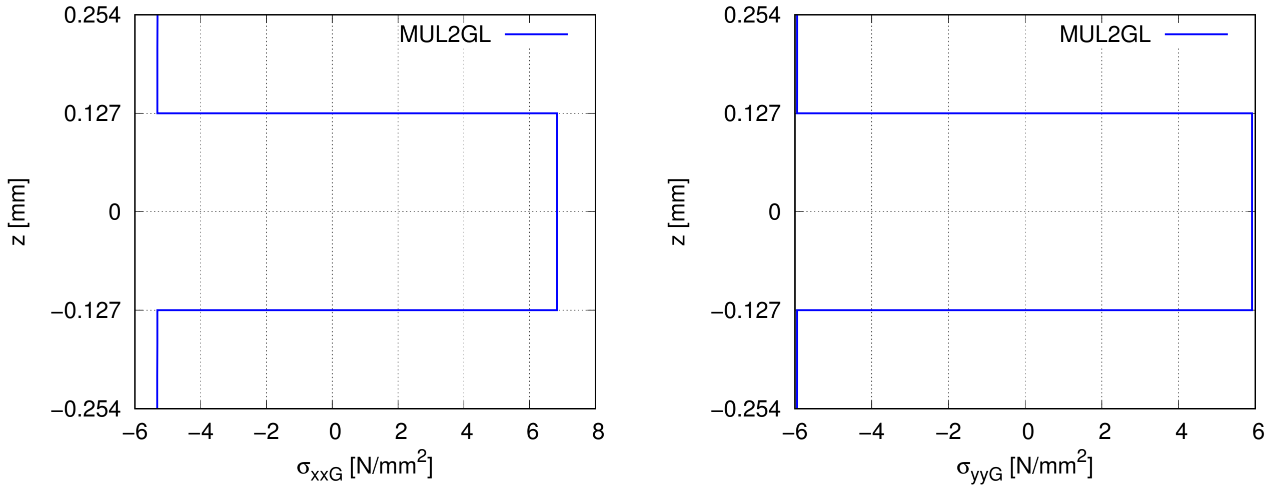


Figura 6.9: Andamento di σ_{xxG} e σ_{yyG} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 1.

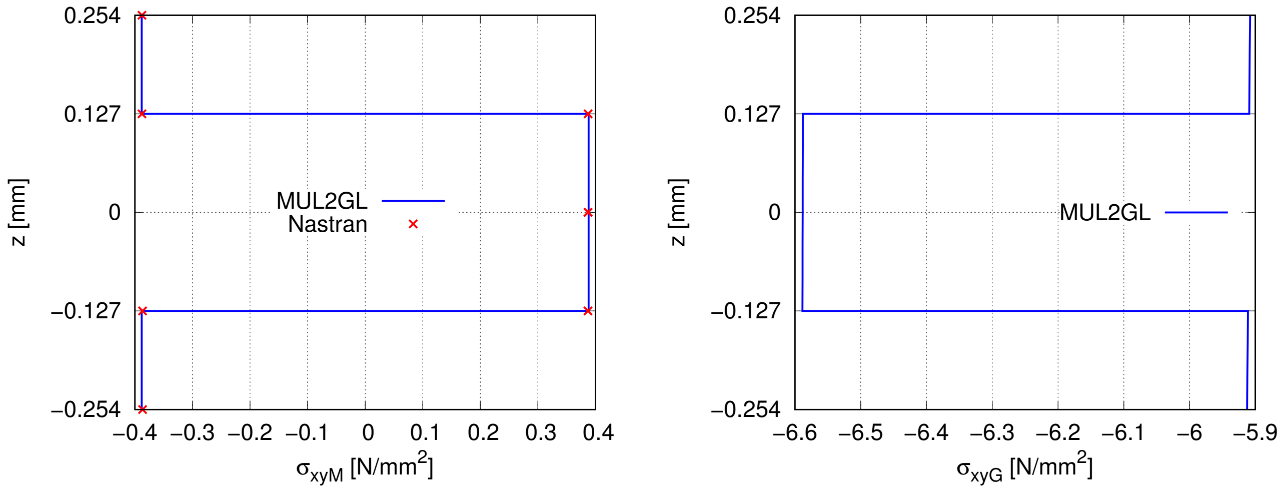


Figura 6.10: Andamento di σ_{xyM} e σ_{xyG} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 1.

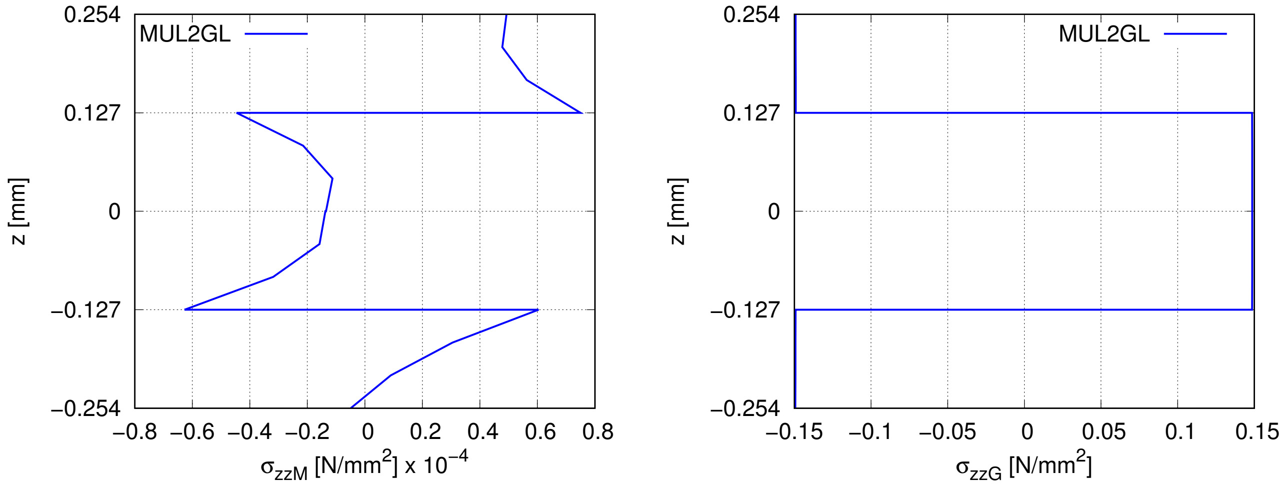


Figura 6.11: Andamento di σ_{zzM} e σ_{zzG} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 1.

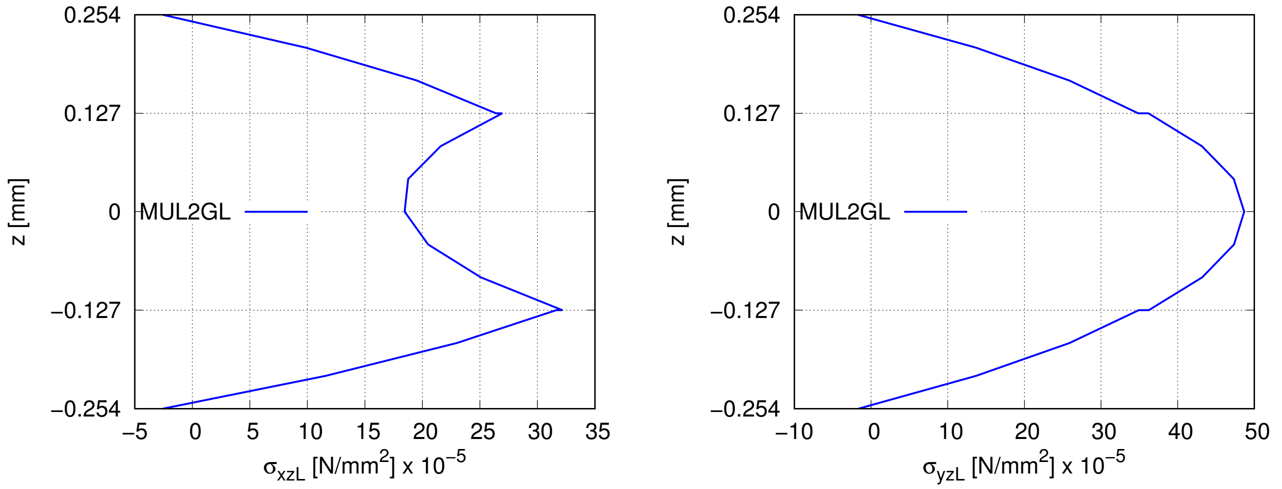


Figura 6.12: Andamento di σ_{xzL} e σ_{yzL} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 1.

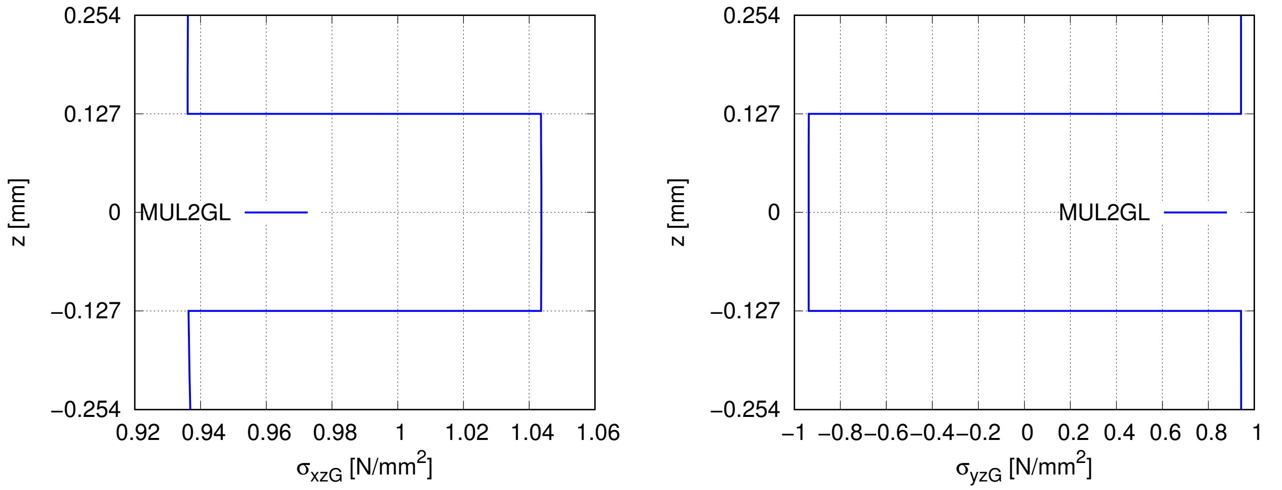


Figura 6.13: Andamento di σ_{xzG} e σ_{yzG} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 1.

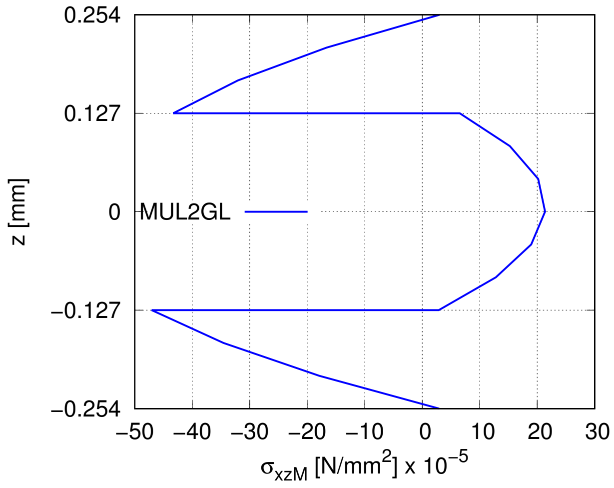


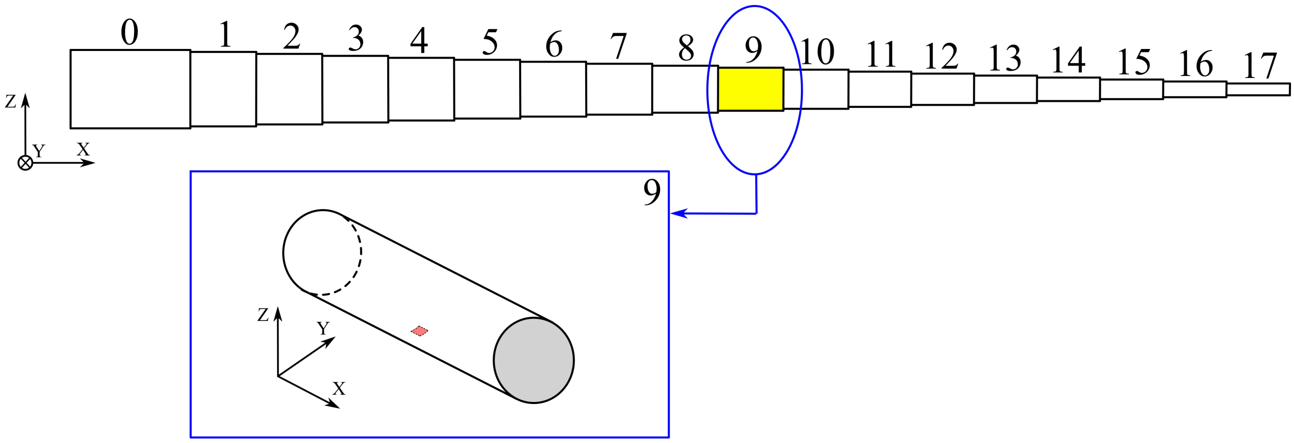
Figura 6.14: Andamento di σ_{xzM} e σ_{yzM} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 1.

6.3.2 Elemento sul cilindro 9, nella zona centrale della struttura

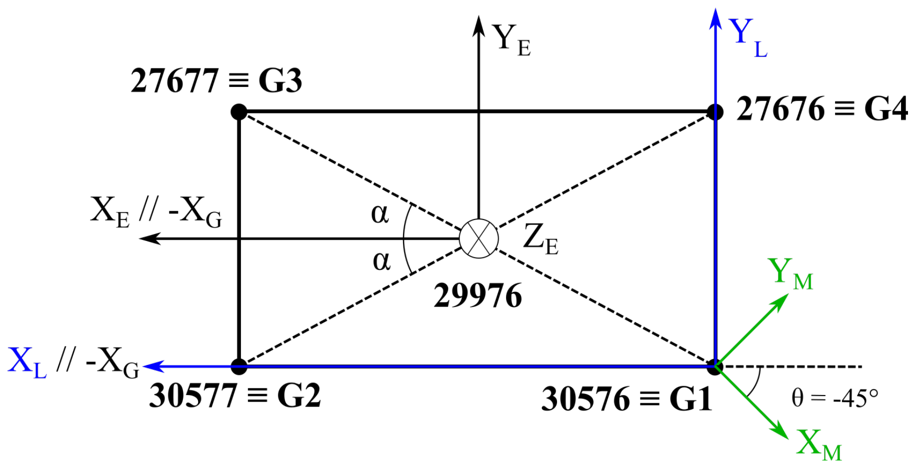
Dopo aver seguito lo stesso procedimento descritto nella sottosezione 4.3.1, sono stati implementati dei grafici che mostrano l'andamento delle tensioni all'interno dell'elemento sul fondo del cilindro 9 (il cui ID corrisponde a 29976). Per confrontare i vari grafici si è scelto di rappresentare i sistemi di riferimento dell'elemento 29976, come si osserva in Figura 6.15b (per maggiori informazioni sui sistemi di riferimento e sui pedici utilizzati si consiglia di consultare la sottosezione 3.2.3).
Si nota che gli assi del sistema di riferimento materiale non sono paralleli agli assi degli altri sistemi di riferimento, poiché in questo caso si considera una laminazione del tipo $[+45/0/-45]$ (sono paralleli solo per gli strati con laminazione 0°). In questo caso, diversamente da quanto affermato per il tape-spring hinge, gli assi del sistema di riferimento locale sono paralleli agli assi del sistema di riferimento dell'elemento: l'elemento preso in considerazione è infatti rettangolare. Gli assi X_L ed X_E, oltre ad essere paralleli tra loro, sono paralleli a X_G, ma hanno verso opposto rispetto a quest'ultimo. Infine Y_E ed Y_L, oltre ad essere paralleli tra loro, sono circa paralleli ad Y_G, mentre Z_M, Z_L e Z_E sono paralleli tra loro (Z_M ha verso opposto rispetto agli altri 2), e circa paralleli a Z_G: anche in questo caso non si può parlare di un parallelismo perfetto, in quanto l'elemento, facendo parte della discretizzazione di una superficie cilindrica, è leggermente inclinato rispetto al piano $X_G - Y_G$. In realtà il sistema di riferimento materiale varia a seconda dello strato preso in considerazione, quindi nello schema è riportato solo il caso relativo agli strati a −45°.
Di seguito vengono riportati i grafici delle tensioni: nel sistema di riferimento materiale è stato effettuato un confronto tra i risultati Nastran e quelli MUL2@GL per le tensioni nel piano dell'elemento. Sono quindi state effettuate le seguenti considerazioni, relative al sistema di riferimento materiale (per i pedici si usa la stessa convenzione dei sistemi di riferimento):

- σ_{xxM}: Nel caso Nastran, si nota un andamento circa costante, positivo ma molto vicino allo zero, che non riesce a cogliere i salti di tensione nel passaggio da ±45° a 0°. Nel caso MUL2@GL, le σ_{xxM} hanno valori positivi (le fibre risultano essere sollecitate a trazione) per gli strati a −45° e 0° (in quest'ultimo caso si osservano valori vicini allo zero), mentre hanno valori negativi (le fibre risultano essere compresse) per gli strati a +45°.

- σ_{yyM}: Anche in questo caso, i risultati di Nastran indicano un andamento circa costante. I risultati MUL2@GL, invece mostrano valori positivi per gli strati a +45° e valori nega-



(a) Collocazione dell'elemento 29976, sul fondo del cilindro 9 (in rosso).



(b) Sistemi di riferimento per l'elemento 29976, sul fondo del cilindro 9.

Figura 6.15: Collocazione e sistemi di riferimento dell'elemento 29976, sul fondo del cilindro 9.

tivi per gli strati a $-45°$ e $0°$ (in quest'ultimo caso si osservano valori vicini allo zero). Quindi, nel complesso, è possibile osservare che l'elemento è compresso nella direzione $+45°$, mentre è sollecitato a trazione nella direzione $-45°$ (si nota infatti che σ_{xxM} ha un andamento speculare rispetto a σ_{yyM}).

- σ_{xyM}: in questo caso si osservano valori positivi per gli strati a $-45°$ e negativi per gli strati a $+45°$ e $0°$.

Considerando il sistema di riferimento globale, si nota che σ_{xxG} ha lo stesso andamento di σ_{xxL}. Passando al sistema di riferimento locale, si nota che σ_{zzL} ha lo stesso andamento di σ_{zzM}. Infine, è possibile osservare che σ_{xxM} e σ_{xxL} hanno lo stesso andamento per gli strati a 0°, dove gli assi x dei due sistemi di riferimento sono paralleli tra loro (lo stesso vale per σ_{yyM} e σ_{yyL}). Nella Tabella 5.4 viene evidenziata la relazione tra le varie σ prese in considerazione: quelle sulle stesse righe mostrano lo stesso andamento, mentre quelle sulle stesse colonne si riferiscono allo stesso sistema di riferimento (in questo caso non sono state effettuate considerazioni su σ_{zzG} e σ_{yyG}, perché gli assi corrispondenti Z_G e Y_G non giacciono sul piano dell'elemento, nè sono perpendicolari ad esso).
Avendo sollecitato la struttura con una forza di taglio, si è scelto di riportare anche le tensioni trasversali. Si nota che queste tensioni sono più piccole rispetto a quelle nel piano (di circa 4 ordini di grandezza), almeno per quanto riguarda i sistemi di riferimento materiale e locale. I

Tabella 6.6: Relazioni tra le tensioni normali nei vari sistemi di riferimento per l'elemento 29976.

Materiale	***Locale***	***Globale***
σ_{xxM} (solo strati a 0°)	σ_{xxL}	σ_{xxG}
σ_{yyM} (solo strati a 0°)	σ_{yyL}	/
σ_{zzM}	σ_{zzL}	/

C_z^0 requirements sono in parte soddisfatti, come si nota dalla Figura 6.20 dove sono presenti dei piccoli salti in corrispondenza dei punti in cui si ha un cambiamento di laminazione e si raggiungono valori poco distanti dallo zero sulle superfici superiore ed inferiore dell'elemento. É possibile correggere queste imperfezioni aumentando il numero di strati virtuali, in modo da aumentare il numero di nodi disposti lungo lo spessore e quindi utilizzare un numero superiore di polinomi di Lagrange cubici (LD3), come già dimostrato nelle sezioni 4.4 e 5.4.

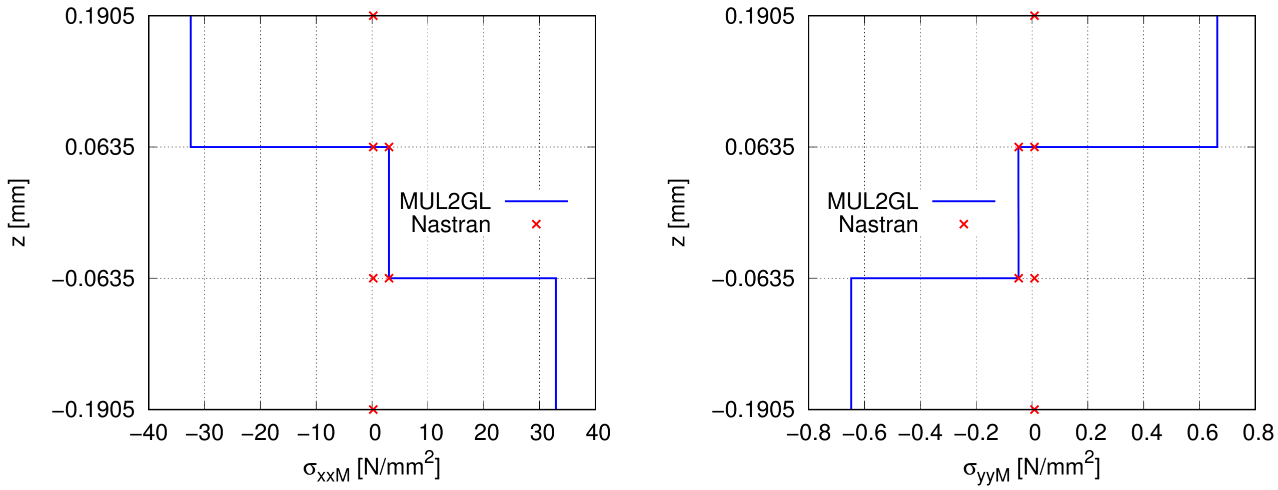


Figura 6.16: Andamento di σ_{xxM} e σ_{yyM} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

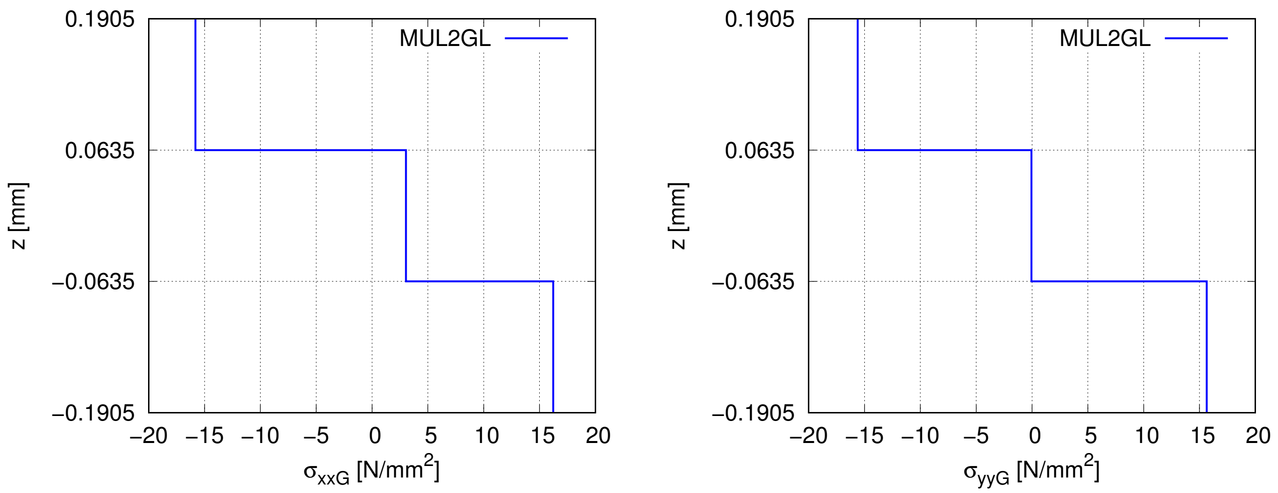


Figura 6.17: Andamento di σ_{xxG} e σ_{yyG} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

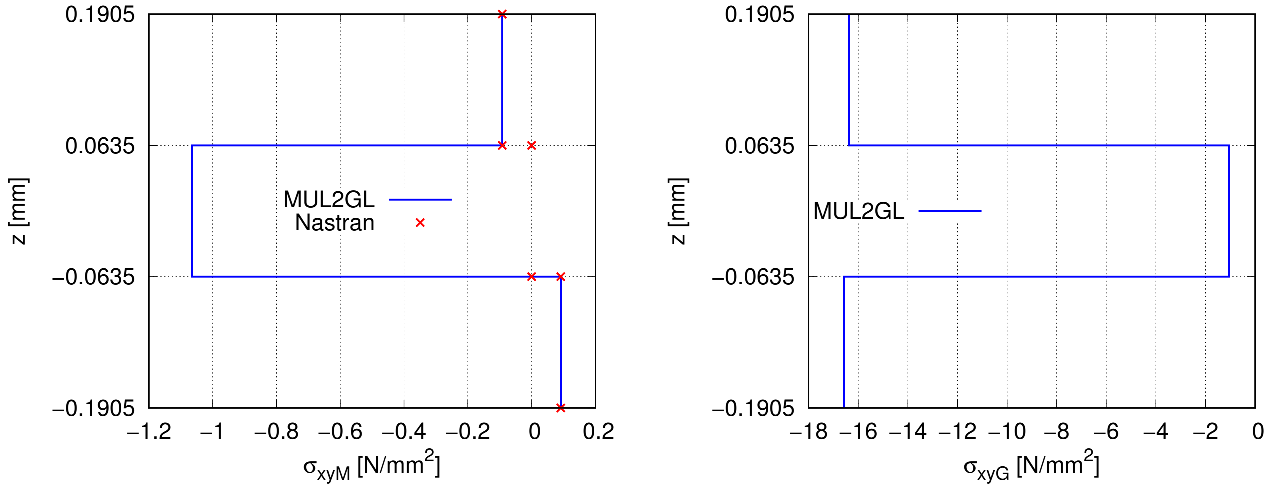


Figura 6.18: Andamento di σ_{xyM} e σ_{xyG} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

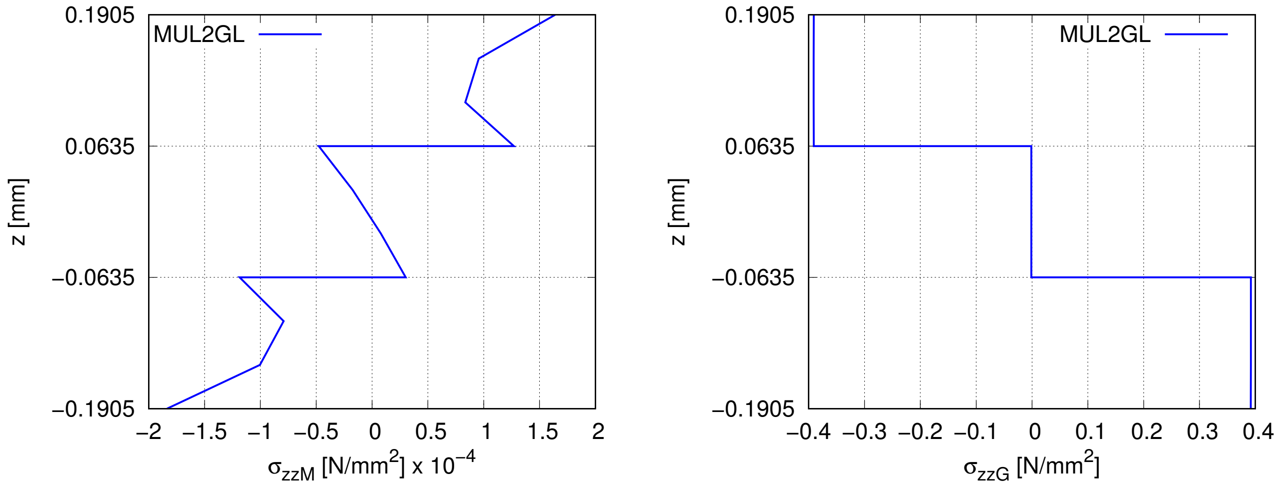


Figura 6.19: Andamento di σ_{zzM} e σ_{zzG} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

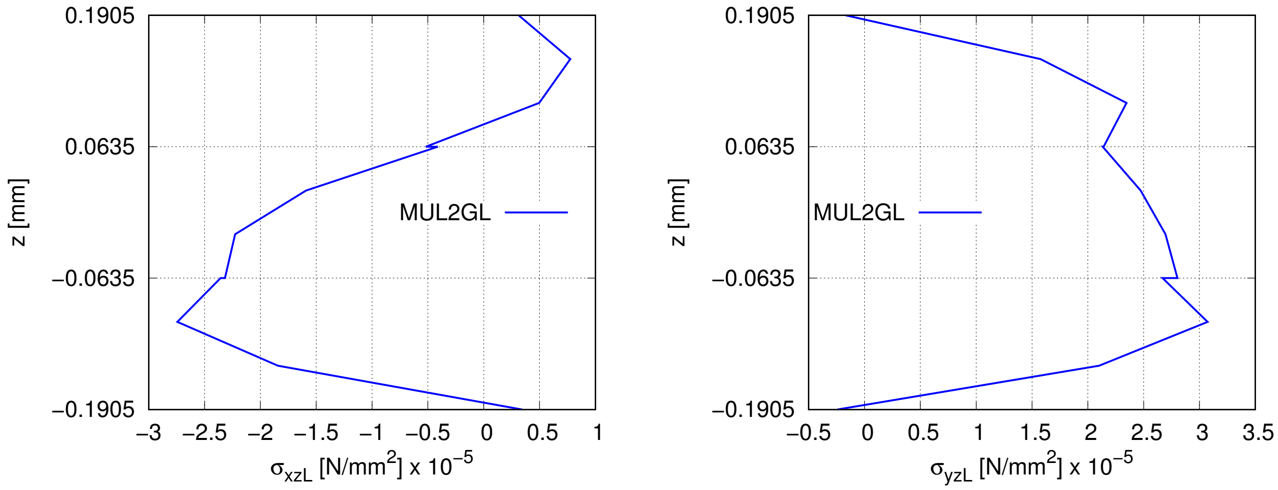


Figura 6.20: Andamento di σ_{xzL} e σ_{yzL} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

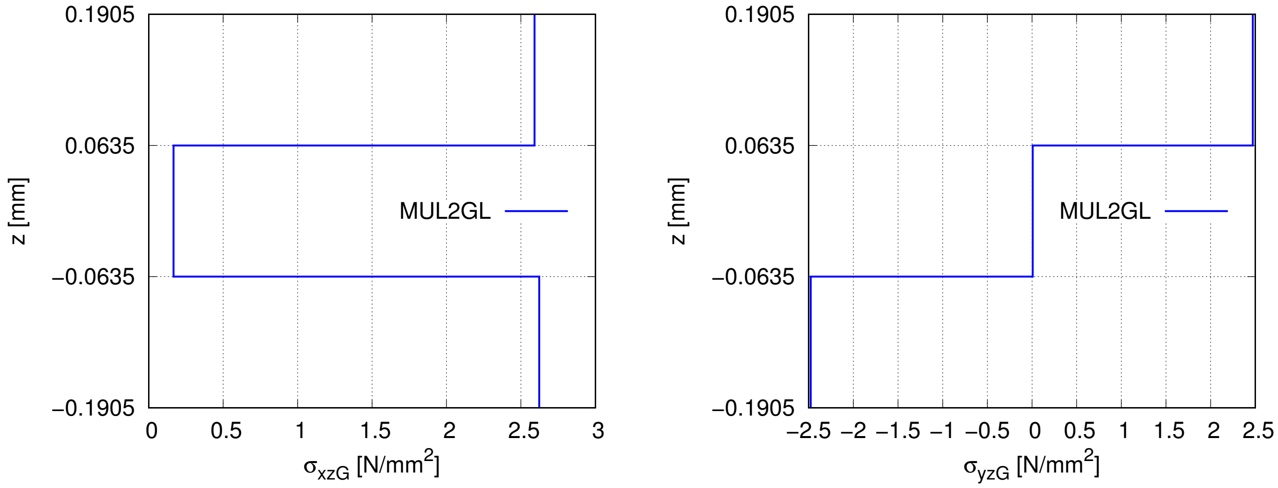


Figura 6.21: Andamento di σ_{xzG} e σ_{yzG} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

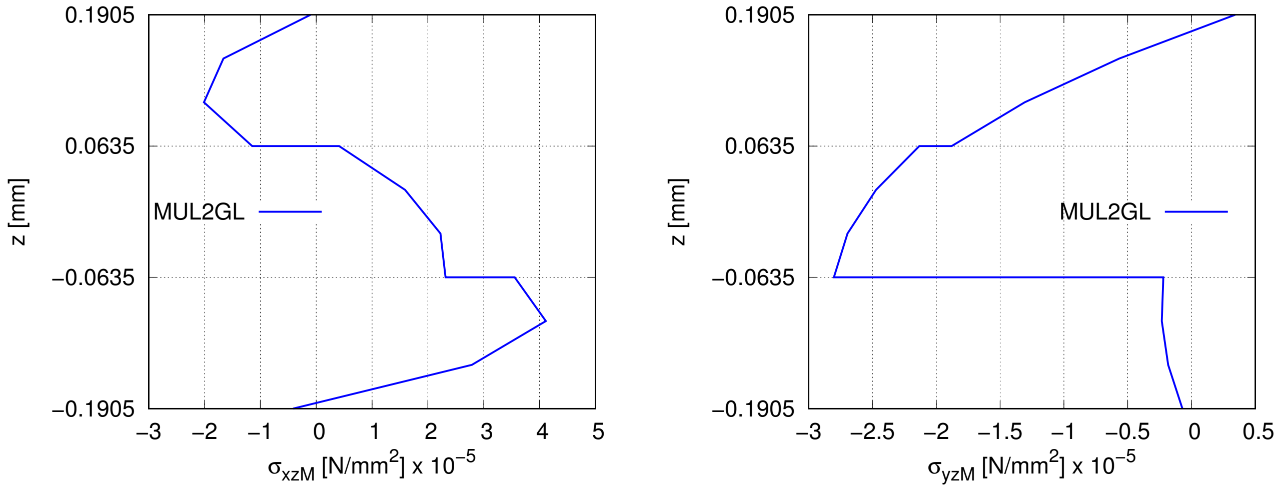
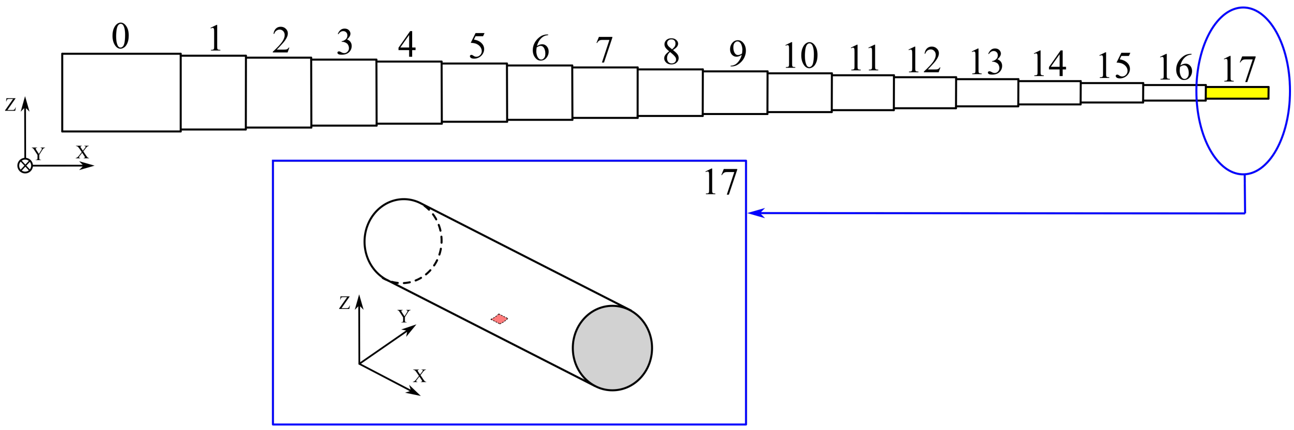


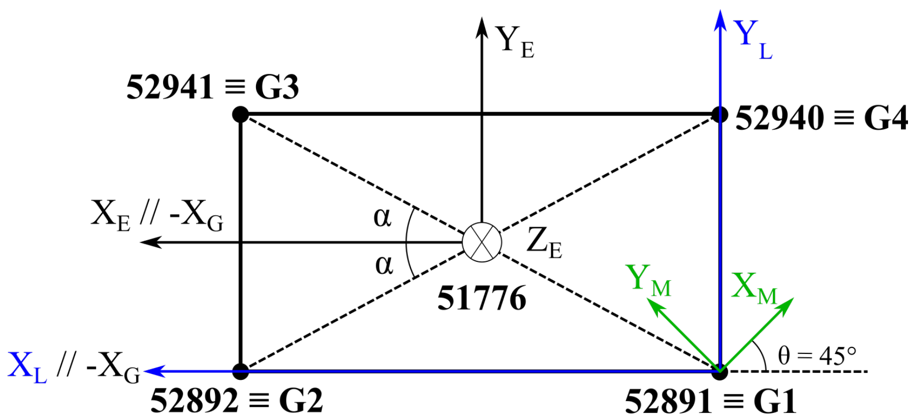
Figura 6.22: Andamento di σ_{xzM} e σ_{yzM} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

6.3.3 Elemento sul cilindro 17, al tip della struttura

Dopo aver seguito lo stesso procedimento descritto nella sottosezione 4.3.1, sono stati implementati dei grafici che mostrano l'andamento delle tensioni all'interno dell'elemento sul fondo del cilindro 17 (il cui ID corrisponde a 51776). Per confrontare i vari grafici si è scelto di rappresentare i sistemi di riferimento dell'elemento 51776, come si osserva in Figura 6.23b (per maggiori informazioni sui sistemi di riferimento e sui pedici utilizzati si consiglia di consultare la sottosezione 3.2.3).
Si nota che gli assi del sistema di riferimento materiale non sono paralleli agli assi degli altri sistemi di riferimento, poiché in questo caso si considera una laminazione del tipo $[+45/-45/0_2]_s$ (sono paralleli solo per gli strati con laminazione 0°). In questo caso, diversamente da quanto affermato per il tape-spring hinge, gli assi del sistema di riferimento locale sono paralleli agli assi del sistema di riferimento dell'elemento: l'elemento preso in considerazione è infatti rettangolare. Gli assi X_L ed X_E, oltre ad essere paralleli tra loro, sono paralleli a X_G, ma hanno verso opposto rispetto a quest'ultimo. Infine Y_E ed Y_L, oltre ad essere paralleli tra loro, sono



(a) Collocazione dell'elemento 51776, sul fondo del cilindro 17 (in rosso).



(b) Sistemi di riferimento per l'elemento 51776, sul fondo del cilindro 17.

Figura 6.23: Collocazione e sistemi di riferimento dell'elemento 51776, sul fondo del cilindro 17.

circa paralleli ad Y_G, mentre Z_M, Z_L e Z_E sono paralleli tra loro (Z_M ha verso opposto rispetto agli altri 2), e circa paralleli a Z_G: anche in questo caso non si può parlare di un parallelismo perfetto, in quanto l'elemento, facendo parte della discretizzazione di una superficie cilindrica, è leggermente inclinato rispetto al piano $X_G - Y_G$. In realtà il sistema di riferimento materiale

varia a seconda dello strato preso in considerazione, quindi nello schema è riportato solo il caso relativo agli strati a +45°.
Di seguito vengono riportati i grafici delle tensioni: nel sistema di riferimento materiale è stato effettuato un confronto tra i risultati Nastran e quelli MUL2@GL per le tensioni nel piano dell'elemento. Sono quindi state effettuate le seguenti considerazioni, relative al sistema di riferimento materiale (per i pedici si usa la stessa convenzione dei sistemi di riferimento):

- σ_{xxM}: Nel caso Nastran, si nota un andamento circa costante, molto vicino allo zero, che non riesce a cogliere i salti di tensione nel passaggio tra strati con laminazioni differenti. Nel caso MUL2@GL, le σ_{xxM} hanno valori positivi (le fibre risultano essere sollecitate a trazione) per gli strati a +45° , mentre hanno valori negativi (le fibre risultano essere compresse) per gli strati a −45°.

- σ_{yyM}: Anche in questo caso, i risultati di Nastran indicano un andamento circa costante. I risultati MUL2@GL, invece mostrano valori positivi per gli strati a −45° e valori negativi per gli strati a +45° . Quindi, nel complesso, è possibile osservare che l'elemento è compresso nella direzione −45°, mentre è sollecitato a trazione nella direzione +45° (si nota infatti che σ_{xxM} ha un andamento speculare rispetto a σ_{yyM}).

- σ_{xyM}: in questo caso si osservano valori positivi per gli strati a 0° e circa nulli per gli strati a +45° e −45°.

Considerando il sistema di riferimento globale, si nota che σ_{xxG} ha lo stesso andamento di σ_{xxL}. Passando al sistema di riferimento locale, si nota che σ_{zzL} ha lo stesso andamento di σ_{zzM}. Infine, è possibile osservare che σ_{xxM} e σ_{xxL} hanno lo stesso andamento per gli strati a 0°, dove gli assi x dei due sistemi di riferimento sono paralleli tra loro (lo stesso vale per σ_{yyM} e σ_{yyL}). Nella Tabella 5.4 viene evidenziata la relazione tra le varie σ prese in considerazione: quelle sulle stesse righe mostrano lo stesso andamento, mentre quelle sulle stesse colonne si riferiscono allo stesso sistema di riferimento (in questo caso non sono state effettuate considerazioni su σ_{zzG} e σ_{yyG}, perché gli assi corrispondenti Z_G e Y_G non giacciono sul piano dell'elemento, nè sono perpendicolari ad esso).

Tabella 6.7: Relazioni tra le tensioni normali nei vari sistemi di riferimento per l'elemento 51776.

Materiale	***Locale***	***Globale***
σ_{xxM} (solo strati a 0°)	σ_{xxL}	σ_{xxG}
σ_{yyM} (solo strati a 0°)	σ_{yyL}	/
σ_{zzM}	σ_{zzL}	/

Avendo sollecitato la struttura con una forza di taglio, si è scelto di riportare anche le tensioni trasversali. Si nota che queste tensioni sono più piccole rispetto a quelle nel piano (di circa 4 ordini di grandezza), almeno per quanto riguarda i sistemi di riferimento materiale e locale. I C_z^0 requirements sono in parte soddisfatti, come si nota dalla Figura 6.28 dove sono presenti dei piccoli salti in corrispondenza dei punti in cui si ha un cambiamento di laminazione e si raggiungono valori poco distanti dallo zero sulle superfici superiore ed inferiore dell'elemento. É possibile correggere queste imperfezioni aumentando il numero di strati virtuali, in modo da aumentare il numero di nodi disposti lungo lo spessore e quindi utilizzare un numero superiore di polinomi di Lagrange cubici (LD3), come già dimostrato nelle sezioni 4.4 e 5.4.

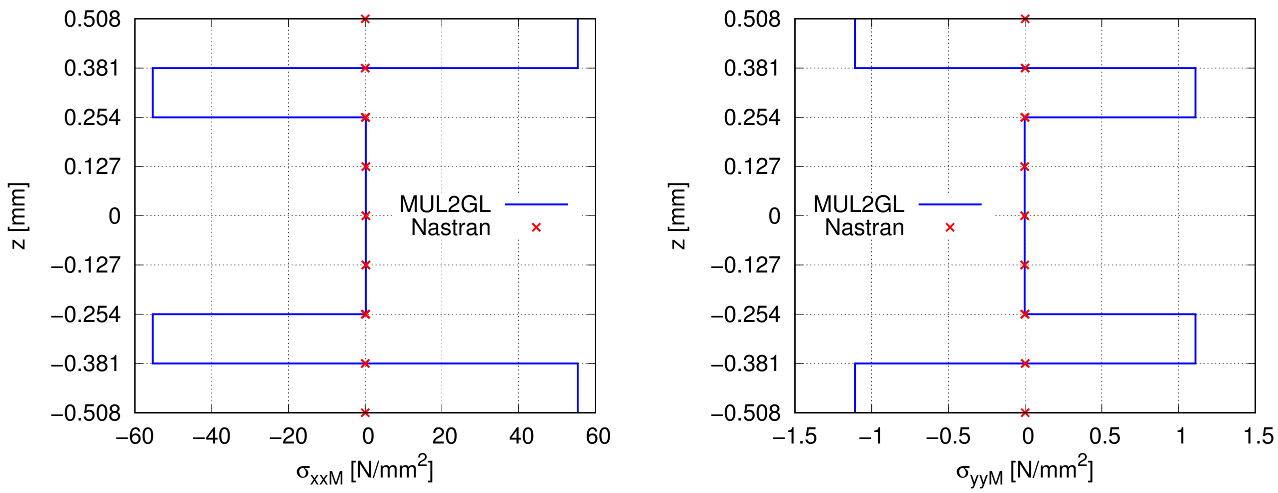


Figura 6.24: Andamento di σ_{xxM} e σ_{yyM} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

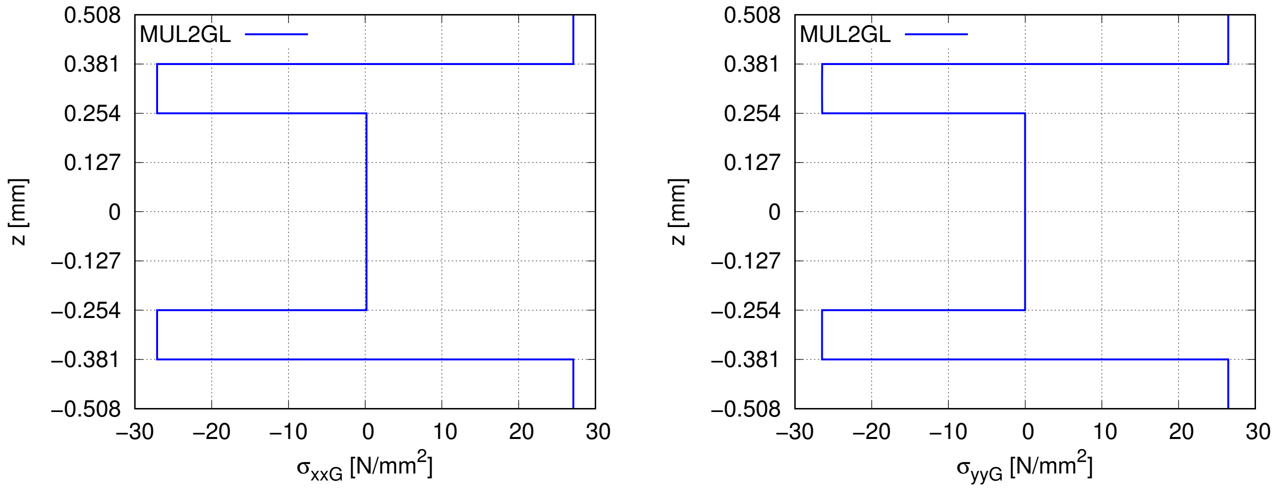


Figura 6.25: Andamento di σ_{xxG} e σ_{yyG} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

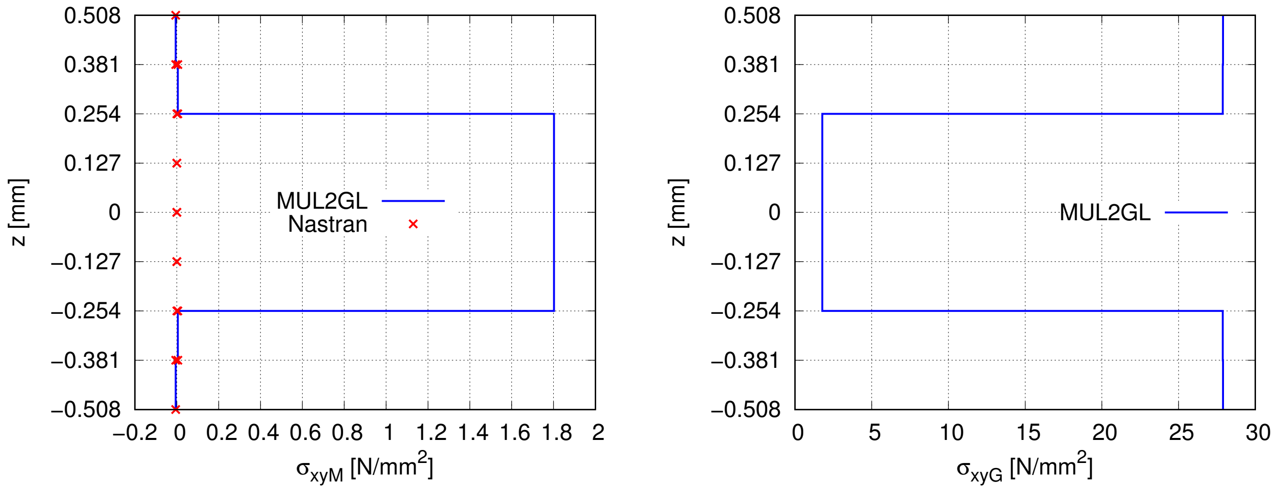


Figura 6.26: Andamento di σ_{xyM} e σ_{xyG} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

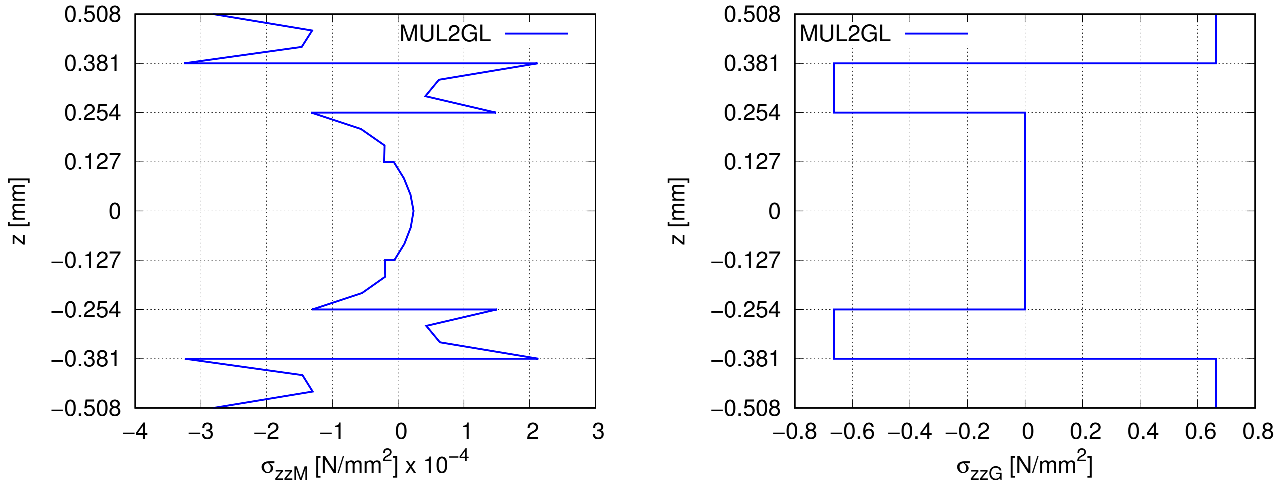


Figura 6.27: Andamento di σ_{zzM} e σ_{zzG} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

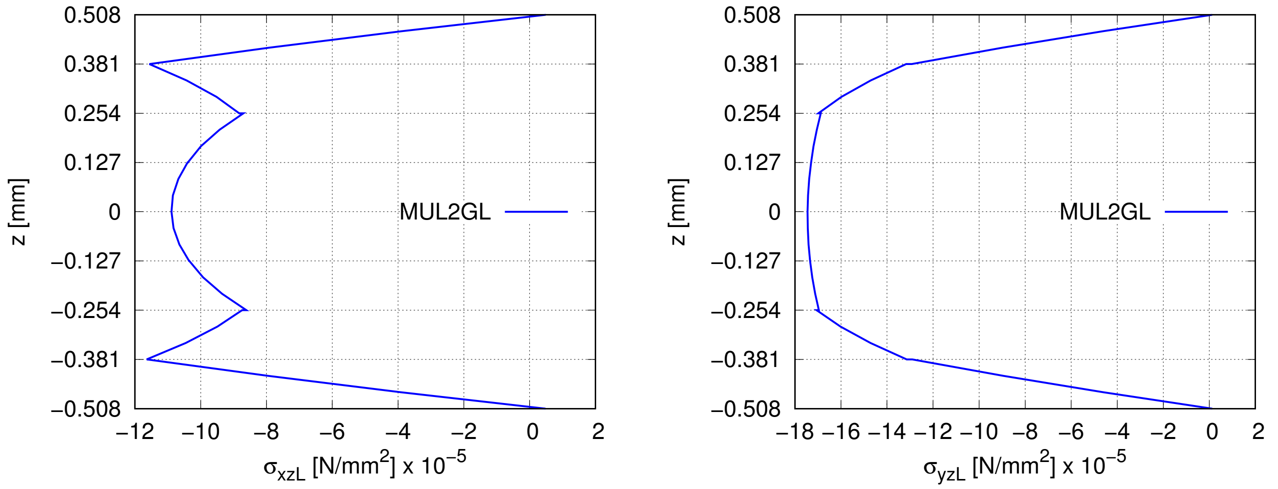


Figura 6.28: Andamento di σ_{xzL} e σ_{yzL} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

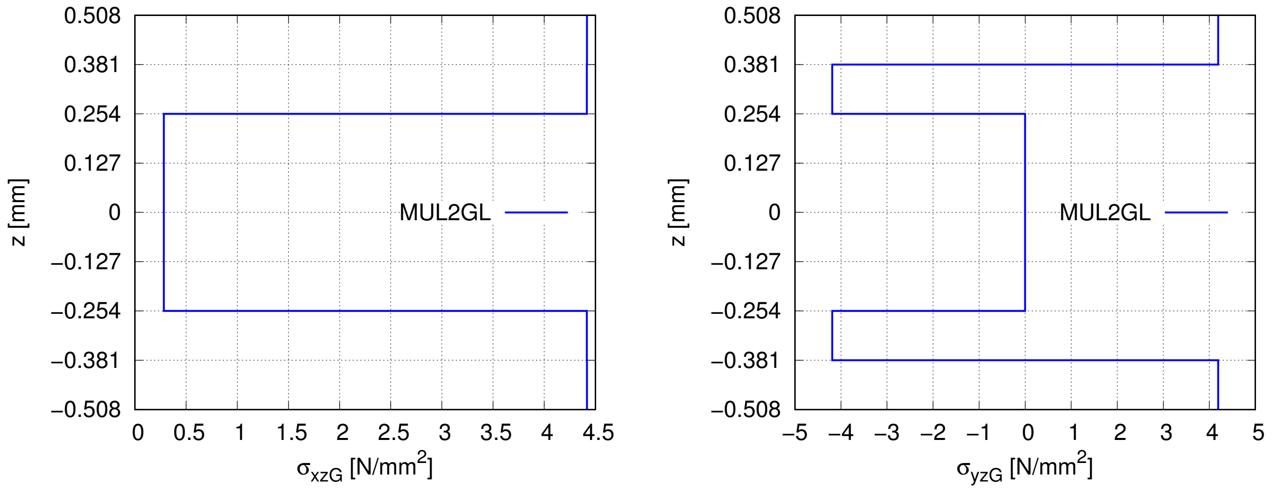


Figura 6.29: Andamento di σ_{xzG} e σ_{yzG} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

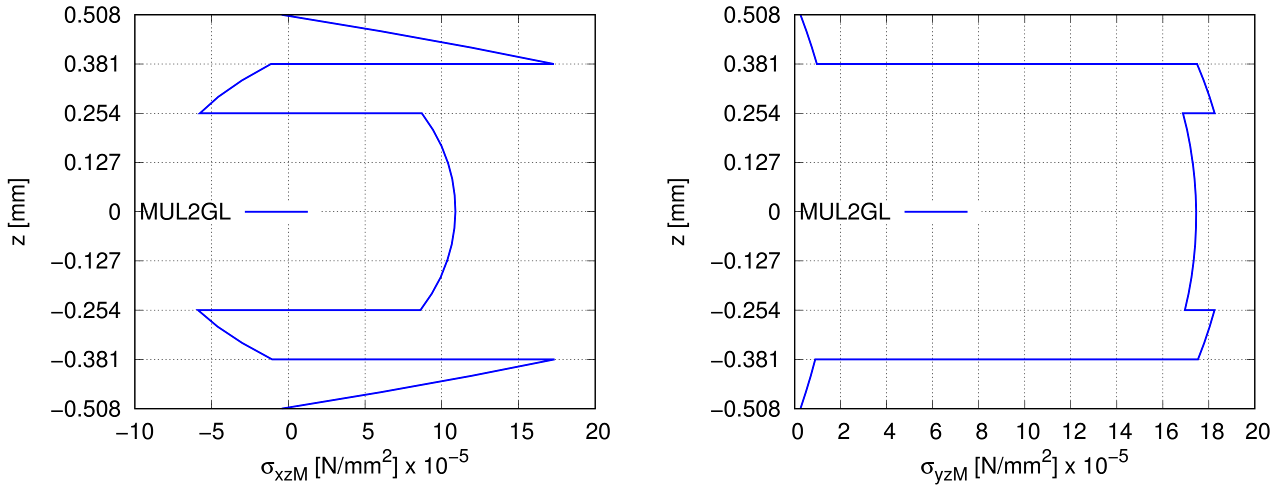


Figura 6.30: Andamento di σ_{xzM} e σ_{yzM} nel baricentro dell'elemento sul fondo del cilindro 9.

Il fatto che, nella maggior parte dei casi, Nastran individui un andamento delle tensioni circa costante, mette in evidenza le limitazioni di un modello ESL rispetto ad un modello LW. Infatti Nastran utilizza un modello ESL, in cui il numero di incognite è indipendente dal numero di strati della struttura. Il software MUL2@GL utilizza un modello CUF LW 2D, in cui la cinematica di ogni strato è descritta in modo indipendente. Quindi si osserva che, mentre il modello LW è in grado di cogliere i salti delle σ tra i vari strati del materiale, il modello ESL calcola un valore medio lungo lo spessore. Ulteriori informazioni riguardanti le differenze tra modelli ESL e LW sono riportate nella sottosezione 3.2.1. L'alternarsi di sollecitazioni a trazione e compressione tra strati a $+45°$ e $-45°$ mette in evidenza l'effetto di Poisson, che invece non poteva essere osservato nel sistema di riferimento materiale del tape-spring hinge.

Capitolo 7

Conclusioni

I risultati numerici ottenuti all'interno di questo lavoro confermano l'utilità dell'approccio global/local basato sulla Formulazione Unificata di Carrera. La molteplicità di modelli che possono essere utilizzati, rendono la CUF una teoria particolarmente versatile, che risulta essere in grado di adattarsi alla maggior parte dei problemi strutturali, sia all'interno che all'esterno del contesto prettamente aerospaziale. Infatti, nel corso delle analisi svolte nei capitoli precedenti, è stato utilizzato un modello LW 2D che sfrutta polinomi di Lagrange cubici lungo lo spessore e bicubici nel piano dell'elemento. Tuttavia nulla vieta di utilizzare modelli differenti che magari riescono ad adattarsi maggiormente ai problemi presi in considerazione. Ad esempio, un'alternativa potrebbe essere quella di utilizzare modelli ESL 2D, oppure modelli 1D, LW o ESL a seconda del dominio che si vuole analizzare e dell'accuratezza che si vuole ottenere nella soluzione del problema strutturale.

Il plug-in MUL2@GL ha permesso di mettere in evidenza le differenze tra i risultati ottenuti tramite un modello LW, CUF 2D ed i risultati ottenuti tramite Nastran, che generalmente si basano sull'utilizzo di una teoria classica. Nello specifico queste differenze risultano essere particolarmente evidenti per le tensioni trasversali (ricavate da Nastran attraverso il postprocessing), associate a dei fenomeni che tipicamente contraddistinguono i laminati rispetto alle altre strutture. Tra questi, è possibile ricordare gli effetti zig-zag degli spostamenti (a loro volta strettamente collegati al soddisfacimento dei C_z^0 requirements) e gli effetti di free-edge.

Per i C_z^0 requirements, sono state effettuate delle analisi per il TRAC boom ed il tape-spring hinge, che hanno messo in evidenza la capacità, da parte del plug-in, di ricavare delle soluzioni in cui questi requisiti sono maggiormente soddisfatti, come si osserva nei paragrafi 4.4 e 5.4. In queste analisi è stato anche messo in evidenza l'effetto del graduale raffinamento della mesh (ad esempio passando da modelli LD3 a modelli 2LD3, 3LD3 ecc.) lungo lo spessore degli elementi considerati, che ha portato ad una riduzione delle discontinuità delle tensioni trasversali. Questo conferma la versatilità del software, che permette di gestire in modo indipendente la mesh lungo lo spessore e quella nel piano dell'elemento.

Sempre per il TRAC boom, sono state implementate delle analisi di free-edge, che hanno messo in evidenza la differenza tra lo stato di tensione nel centroide del singolo elemento e quello ricavato in corrispondenza del suo bordo libero. Anche in questo caso l'operazione di raffinamento della mesh ha avuto un ruolo fondamentale per individuare le singolarità delle tensioni trasversali sul free-edge, cosa che non sarebbe stata assolutamente possibile utilizzando una teoria classica. In questo caso è stato anche effettuato un confronto tra i failure index nel centroide e quelli sul free edge. Si è notato che questi ultimi differiscono notevolmente, mettendo in evidenza una condizione di maggiore stress delle fibre e della matrice che costituiscono il materiale.

Le differenze tra il modello utilizzato dal plug-in MUL2@GL e quello utilizzato da Nastran,

sono maggiormente visibili per il tape-spring hinge ed il TTM, rispettivamente analizzati nel Capitolo 5 e nel Capitolo 6. In questi casi, infatti, si nota un discostamento maggiore per le tensioni calcolate nel piano dell'elemento. Sembrerebbe che Nastran non riesca a cogliere i salti di tensione nel passaggio da uno strato all'altro, limitandosi a calcolare un valore medio lungo lo spessore dell'elemento. Questo effetto è dovuto al modello ESL utilizzato dal software commerciale: come già descritto nel paragrafo 3.2.1, si tratta di un modello che effettua una media delle rigidezze tra i vari strati, in modo da racchiuderli in uno strato unico.
I vantaggi di un approccio global/local sono particolarmente apprezzabili per le strutture caratterizzate da una notevole estensione nello spazio, come il TTM descritto nel Capitolo 6. La necessità di discretizzare un dominio così complesso, rende arduo l'utilizzo di elementi solidi 3D. Questi elementi appesantirebbero notevolmente il calcolo a causa di un aumento del costo computazionale, che implicherebbe un notevole aumento dei tempi di analisi, soprattutto nel caso di analisi non lineari. Tuttavia, utilizzando degli elementi bidimensionali, si rischia di compromettere l'accuratezza dei risultati, che molto spesso è fondamentale per mettere in evidenza degli effetti di ordine superiore all'interno della struttura. Per ovviare a questo problema, è possibile sfruttare un approccio global/local, in modo da trovare un buon compromesso tra costo computazionale ed accuratezza dei risultati. Da questo punto di vista, l'indipendenza tra le mesh nelle varie direzioni, rappresenta un altro punto a favore dei modelli global/local, in quanto permette di migliorare ulteriormente il bilanciamento del modello e di adattarlo al caso di studio preso in considerazione.
Nel corso di questa tesi le analisi sono state effettuate esclusivamente in campo lineare, tuttavia è possibile estendere i risultati anche al caso non lineare. Per fare ciò è necessario adattare il plug-in MUL2@GL ai risultati derivanti da un'analisi non lineare eseguita con un software commerciale. Questo può quindi essere considerato come un punto di partenza per estendere, nel futuro, l'utilizzo del plug-in a casi più complessi.
Inoltre, è anche possibile estendere l'utilizzo della CUF al problema dinamico: lo stesso processo iterativo utilizzato per costruire la matrice di rigidezza, può essere utilizzato per costruire la matrice di massa della struttura. In questo caso, implementando il PVD, è necessario tenere conto anche degli effetti inerziali. Questo permette di ricavare le frequenze naturali ed i modi di vibrare della struttura, attraverso la risoluzione del problema dinamico.
Un ulteriore passo in avanti, che può essere effettuato nel contesto della CUF, riguarda l'estensione ai problemi di tipo multifield (multifield problems, MFPs), in cui si tiene conto anche del contributo relativo ad altri campi fisici [33]. Nello specifico, oltre al campo meccanico, si tiene conto anche dei campi magnetici, elettrici e termici. Si pensa infatti che in futuro, nel campo aerospaziale verranno utilizzate strutture multistrato, sottoposte all'azione di più campi, tra quelli elencati in precedenza. Ad esempio è possibile pensare di utilizzare materiali piezoelettrici o piezomagnetici, in grado di sviluppare campi elettromagnetici finalizzati a bilanciare gli effetti termomeccanici. Per effettuare delle analisi accurate nel contesto MFPs, è necessario tenere conto di alcuni requisiti che devono essere soddisfatti. In particolare è necessario scrivere le equazioni costitutive in una forma consistente, garantire l'accoppiamento tra i vari campi presi in considerazione, assicurare la continuità di alcune variabili d'interesse tra i vari strati ed utilizzare un modello cinematico sufficientemente avanzato per descrivere l'andamento delle variabili lungo lo spessore. Inoltre è necessario tenere conto del fatto che i campi presi in considerazione hanno nature differenti. Ad esempio il campo termico, essendo scalare, è isotropo per definizione, mentre il campo elettrico e quello magnetico, essendo vettoriali, possono essere isotropi o anisotropi. I carichi derivanti da questi campi sono differenti rispetto a quelli derivanti dal campo meccanico. Quindi i modelli normalmente utilizzati per descrivere i carichi meccanici all'interno di piastre, possono incontrare non poche difficoltà se utilizzati nel contesto MFPs. Anche in questo caso è possibile risolvere il problema attraverso il PVD,

o attraverso altre teorie come la RMVT, considerando l'accoppiamento tra le variabili di tutti i campi, oppure facendo riferimento a casi particolari in cui alcuni termini di accoppiamento vengono trascurati.

Appendice A

Calcolo delle F_τ e delle N_i per un singolo strato

Facendo riferimento alla Figura 3.2, è possibile calcolare le funzioni $N_i(x, y)$ ed $F_\tau(z)$ nel caso di un elemento con un singolo strato. In entrambi i casi è possibile sfruttare una formulazione isoparametrica, che permette di gestire dei domini di forma generica. Secondo questa formulazione, le variabili da cui dipendono le funzioni assumono valori nell'intervallo $[-1; 1]$. In Figura A.1 è rappresentato un dominio generico su cui possono essere calcolate le funzioni $F_\tau(z)$, che, nel caso del modello utilizzato in questa trattazione, corrisponde allo spessore dell'elemento. Tale spessore viene indicato come un valore generico t e si considera, inoltre, che l'origine del

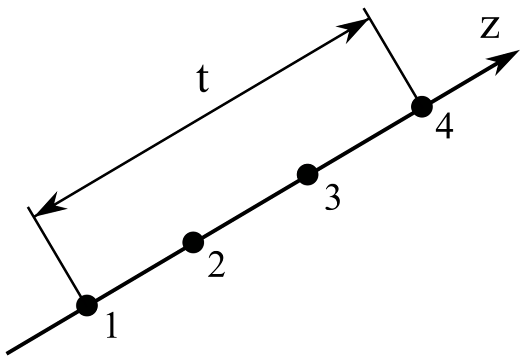


Figura A.1: Rappresentazione dei nodi associati ai polinomi di Lagrange lungo lo spessore (elemento LD3).

sistema di riferimento si trovi esattamente a metà dello spessore. In questo modo è possibile scrivere che

$$z_1 = -z_4$$

e che

$$z_2 = -z_3$$

Inoltre, essendo tutti i nodi equispaziati lungo lo spessore, è possibile effettuare le seguenti considerazioni:

$$z_4 = t/2$$

$$z_3 = t/6$$

Prendendo in considerazione il polinomio di Lagrange associato al nodo 1, è possibile affermare che esso corrisponde ad una funzione che ha un valore unitario nel nodo 1 e che si annulla in tutti gli altri nodi. Di conseguenza:

$$F_1(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_3)(z - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} =$$

$$F_1(z) = \frac{(z + z_3)(z - z_3)(z - z_4)}{(-2z_4)(-z_4 + z_3)(-z_4 - z_3)} =$$

$$F_1(z) = \frac{(z + t/6)(z - t/6)(z - t/2)}{(-t)(-t/3)(-2t/3)} =$$

$$F_1(z) = -\frac{9}{2t^3}(z + t/6)(z - t/6)(z - t/2)$$

Viene quindi introdotto un nuovo parametro, che può variare esclusivamente nell'intervallo $[-1; 1]$. Il parametro in questione viene chiamato $\tilde{z}$:

$$\tilde{z} = \frac{z}{t/2}$$

Quindi, moltiplicando e dividendo $F_1(z)$ per $t^3/8$:

$$F_1(\tilde{z}) = -\frac{9}{16}(\tilde{z} + 1/3)(\tilde{z} - 1/3)(\tilde{z} - 1) =$$

$$F_1(\tilde{z}) = -\frac{9}{16}(\tilde{z}^2 - 1/9)(\tilde{z} - 1) =$$

$$F_1(\tilde{z}) = \frac{1}{16}(1 - 9\tilde{z}^2)(\tilde{z} - 1) = L_1(\tilde{z}) \tag{A.1}$$

dove $L_1(\tilde{z})$ è il polinomio di Lagrange relativo al nodo 1.
Sfruttando lo stesso ragionamento e ripetendo dei calcoli analoghi a quelli appena effettuati, è possibile valutare le F_τ per gli altri nodi. I calcoli in questione non vengono riportati per alleggerire la trattazione, quindi si passa direttamente ai risultati finali:

$$F_2(\tilde{z}) = \frac{9}{16}(1 - \tilde{z}^2)(1 - 3\tilde{z}) = L_2(\tilde{z}) \tag{A.2}$$

$$F_3(\tilde{z}) = \frac{9}{16}(1 - \tilde{z}^2)(1 + 3\tilde{z}) = L_3(\tilde{z}) \tag{A.3}$$

$$F_4(\tilde{z}) = \frac{1}{16}(9\tilde{z}^2 - 1)(1 + \tilde{z}) = L_4(\tilde{z}) \tag{A.4}$$

Anche il calcolo delle funzioni di forma $N_i(x, y)$ si basa sullo stesso ragionamento. In Figura A.2 è rappresentato un dominio generico su cui possono essere calcolate tali funzioni, che, nel caso del modello utilizzato in questa trattazione, corrisponde al piano dell'elemento.

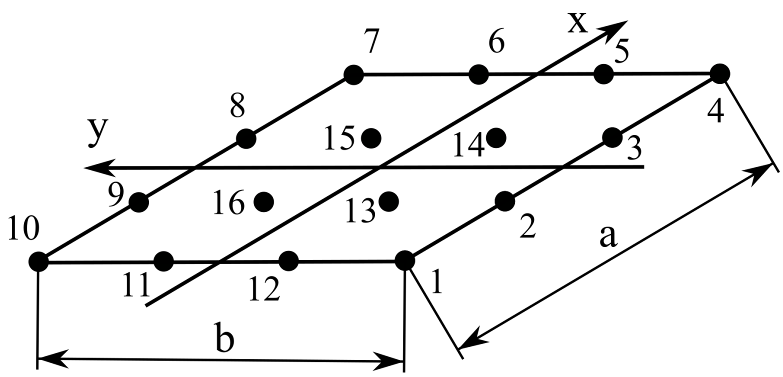


Figura A.2: Rappresentazione dei nodi associati ai polinomi di Lagrange bicubici nel piano dell'elemento.

Sia lungo la direzione x che lungo la direzione y è possibile utilizzare la formulazione isoparametrica per calcolare dei polinomi di Lagrange cubici, corrispondenti alle formule A.1, A.2, A.3 e A.4. Per fare ciò è necessario normalizzare le variabili x ed y, ottenendo $\tilde{x}$ ed $\tilde{y}$. Moltiplicando questi polinomi tra di loro, si ottengono le funzioni di forma $N_i(\tilde{x}, \tilde{y})$. Le dimensioni dell'elemento nel suo piano sono state indicate attraverso i valori generici a e b. Ipotizzando di numerare i nodi come in Figura A.2, è possibile scrivere:

$$N_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = L_1(\tilde{x})L_1(\tilde{y}) \tag{A.5}$$

$$N_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = L_2(\tilde{x})L_1(\tilde{y}) \tag{A.6}$$

$$N_3(\tilde{x}, \tilde{y}) = L_3(\tilde{x})L_1(\tilde{y}) \tag{A.7}$$

$$N_4(\tilde{x}, \tilde{y}) = L_4(\tilde{x})L_1(\tilde{y}) \tag{A.8}$$

$$N_5(\tilde{x}, \tilde{y}) = L_4(\tilde{x})L_2(\tilde{y}) \tag{A.9}$$

$$N_6(\tilde{x}, \tilde{y}) = L_4(\tilde{x})L_3(\tilde{y}) \tag{A.10}$$

$$N_7(\tilde{x}, \tilde{y}) = L_4(\tilde{x})L_4(\tilde{y}) \tag{A.11}$$

$$N_8(\tilde{x}, \tilde{y}) = L_3(\tilde{x})L_4(\tilde{y}) \tag{A.12}$$

$$N_9(\tilde{x},\tilde{y}) = L_2(\tilde{x})L_4(\tilde{y}) \tag{A.13}$$

$$N_{10}(\tilde{x},\tilde{y}) = L_1(\tilde{x})L_4(\tilde{y}) \tag{A.14}$$

$$N_{11}(\tilde{x},\tilde{y}) = L_1(\tilde{x})L_3(\tilde{y}) \tag{A.15}$$

$$N_{12}(\tilde{x},\tilde{y}) = L_1(\tilde{x})L_2(\tilde{y}) \tag{A.16}$$

$$N_{13}(\tilde{x},\tilde{y}) = L_2(\tilde{x})L_2(\tilde{y}) \tag{A.17}$$

$$N_{14}(\tilde{x},\tilde{y}) = L_3(\tilde{x})L_2(\tilde{y}) \tag{A.18}$$

$$N_{15}(\tilde{x},\tilde{y}) = L_3(\tilde{x})L_3(\tilde{y}) \tag{A.19}$$

$$N_{16}(\tilde{x},\tilde{y}) = L_2(\tilde{x})L_3(\tilde{y}) \tag{A.20}$$

In realtà questa formulazione può essere estesa al caso in cui l'elemento non abbia forma rettangolare. Infatti, la formulazione isoparametrica permette di descrivere elementi con geometrie arbitrarie. É sempre possibile effettuare una trasformazione che permetta di passare al dominio $[-1;1] \times [-1;1]$, a patto di conoscere la geometria di partenza.

Bibliografia

[1] K. Washizu. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Elsevier Science Ltd, 1968. ISBN: 9780080020204.

[2] A.E. Glaser e J.F.V. Vincent. «The autonomous inflation of insect wings». In: *Journal of Insect Physiology* 25.4 (1979), pp. 315–318. ISSN: 0022-1910. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1910(79)90019-2. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022191079900192.

[3] Z. Hashin. «Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites». In: *Journal of Applied Mechanics* 47.2 (giu. 1980), pp. 329–334. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.3153664. eprint: https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/47/2/329/5878334/329_1.pdf. URL: https://doi.org/10.1115/1.3153664.

[4] R. McNeill Alexander. *Animal Mechanics*. Blackwell Science, Incorporated, 1983. ISBN: 9780632009565.

[5] Rudy Lukez. «The use of graphite/epoxy composite structures in space applications». In: (1987).

[6] Frank Fitz. «High Capacity Freewheels for Torque Converter Applications». In: *SAE Technical Paper*. SAE International, mar. 1993. DOI: 10.4271/930914. URL: https://doi.org/10.4271/930914.

[7] J.N. Reddy. «An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates». In: *Composite Structures* 25.1 (1993), pp. 21–35. ISSN: 0263-8223. DOI: https://doi.org/10.1016/0263-8223(93)90147-I. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/026382239390147I.

[8] Mark Thomson. «Deployable and retractable telescoping tubular structure development». In: 1993.

[9] M. Muller. «A novel classifcation of planar 4-bar linkages and its application to the mechanical analysis of animal systems». In: (1996). DOI: 10.1098/rstb.1996.0065.

[10] Wang Zhang, W. Binienda e Marek-Jerzy Pindera. «Frictionless Contact of Multilayered Composite Half Planes Containing Layers With Complex Eigenvalues». In: (gen. 1998).

[11] K. A. Seffen e S. Pellegrino. «Deployment Dynamics of Tape Springs». In: *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 455.1983 (1999), pp. 1003–1048. ISSN: 13645021. URL: http://www.jstor.org/stable/53356.

[12] J.F.V. Vincent. «Deployable Structures in Nature: Potential for Biomimicking». In: *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part C-journal of Mechanical Engineering Science - PROC INST MECH ENG C-J MECH E* 214 (gen. 2000), pp. 1–10. DOI: 10.1243/0954406001522769.

[13] B Yang et al. «Bending, compression, and shear behavior of woven glass fiber–epoxy composites». In: *Composites Part B: Engineering* 31.8 (2000), pp. 715–721. ISSN: 1359-8368. DOI: https://doi.org/10.1016/S1359-8368(99)00052-9. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836899000529.

[14] Christopher HM Jenkins. *Gossamer spacecraft: membrane and inflatable structures technology for space applications*. American Institute of Aeronautics e Astronautics, 2001.

[15] M. Tupper et al. «Developments in elastic memory composite materials for spacecraft deployable structures». In: *2001 IEEE Aerospace Conference Proceedings (Cat. No.01TH8542)*. Vol. 5. 2001, pp. 2541–2547. DOI: 10.1109/AERO.2001.931215.

[16] S. Pellegrino. *Deployable Structures*. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Springer Vienna, 2002. ISBN: 9783211836859. URL: https://books.google.it/books?id=A8iIK5oUb-UC.

[17] Erasmo Carrera. «Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells ». In: *Applied Mechanics Reviews* 56.3 (mag. 2003), pp. 287–308. ISSN: 0003-6900. DOI: 10.1115/1.1557614. URL: https://doi.org/10.1115/1.1557614.

[18] Christian Mittelstedt e Wilfried Becker. «Interlaminar Stress Concentrations in Layered Structures: Part I - A Selective Literature Survey on the Free-Edge Effect since 1967». In: *Journal of Composite Materials* 38.12 (2004), pp. 1037–1062. DOI: 10.1177/0021998304040566. eprint: https://doi.org/10.1177/0021998304040566. URL: https://doi.org/10.1177/0021998304040566.

[19] John Nella et al. «James Webb Space Telescope (JWST) Observatory architecture and performance». In: *Optical, Infrared, and Millimeter Space Telescopes*. A cura di John C. Mather. Vol. 5487. International Society for Optics e Photonics. SPIE, 2004, pp. 576–587. DOI: 10.1117/12.548928. URL: https://doi.org/10.1117/12.548928.

[20] J. C. Yee e S. Pellegrino. «Composite Tube Hinges». In: *Journal of Aerospace Engineering* 18.4 (2005), pp. 224–231. DOI: 10.1061/(ASCE)0893-1321(2005)18:4(224). eprint: https://ascelibrary.org/doi/pdf/10.1061/%28ASCE%290893-1321%282005%2918%3A4%28224%29. URL: https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%290893-1321%282005%2918%3A4%28224%29.

[21] Isaac M Daniel et al. *Engineering mechanics of composite materials*. Vol. 1994. Oxford university press New York, 2006.

[22] Mark Whorton et al. «Nanosail-D: the first flight demonstration of solar sails for nanosatellites». In: (2008).

[23] Harald W. Krenn. «Feeding Mechanisms of Adult Lepidoptera: Structure, Function, and Evolution of the Mouthparts». In: *Annual Review of Entomology* 55.1 (2010). PMID: 19961330, pp. 307–327. DOI: 10.1146/annurev-ento-112408-085338. eprint: https://doi.org/10.1146/annurev-ento-112408-085338. URL: https://doi.org/10.1146/annurev-ento-112408-085338.

[24] JN Reddy. *An introduction to the finite element method*. Vol. 1221. McGraw-Hill New York, 2010.

[25] P. Fortescue, G. Swinerd e J. Stark. *Spacecraft Systems Engineering*. Wiley, 2011, pp. 500–501. ISBN: 9781119978367. URL: https://books.google.it/books?id=cCYP0rVR%5C_IEC.

[26] Chinthaka Mallikarachchi e Sergio Pellegrino. «Quasi-Static Folding and Deployment of Ultrathin Composite Tape-Spring Hinges». In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 48 (gen. 2011). DOI: 10.2514/1.47321.

[27] Thomas W Murphey e Jeremy Banik. *Triangular rollable and collapsible boom.* US Patent 7,895,795. Mar. 2011.

[28] Kabiri Ataabadi, S Ziaei-Rad e H Hosseini-Toudeshky. «Compression failure and fiber-kinking modeling of laminated composites». In: *Steel & Composite Structures* 12.1 (2012), pp. 53–72.

[29] Chris Biddy e Tomas Svitek. «LightSail-1 solar sail design and qualification». In: *Proceedings of the 41st Aerospace Mechanisms Symposium.* Jet Propulsion Lab., National Aeronautics e Space Administration Pasadena, CA. 2012, pp. 451–463.

[30] M. Mobrem e C. Spier. «Design and Performance of the Telescopic Tubular Mast». In: 2012.

[31] ST Pinho et al. «Material and structural response of polymer-matrix fibre-reinforced composites». In: *Journal of Composite Materials* 46.19-20 (2012), pp. 2313–2341. DOI: 10.1177/0021998312454478. eprint: https://doi.org/10.1177/0021998312454478. URL: https://doi.org/10.1177/0021998312454478.

[32] Adriano Calvi et al. *ECSS-E-HB-32-26A Spacecraft Mechanical Loads Analysis Handbook.* Feb. 2013.

[33] Erasmo Carrera et al. «Extension to Multifield Problems». In: *Finite Element Analysis of Structures Through Unified Formulation.* John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Cap. 16, pp. 323–349. ISBN: 9781118536643. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118536643.ch16. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118536643.ch16. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118536643.ch16.

[34] Erasmo Carrera et al. «Extension to Multilayered Structures». In: *Finite Element Analysis of Structures Through Unified Formulation.* John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Cap. 15, pp. 303–322. ISBN: 9781118536643. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118536643.ch15. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118536643.ch15. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118536643.ch15.

[35] Erasmo Carrera et al. «Fundamental Equations of 3D Elasticity». In: *Finite Element Analysis of Structures Through Unified Formulation.* John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Cap. 2, pp. 27–33. ISBN: 9781118536643. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118536643.ch2. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118536643.ch2. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118536643.ch2.

[36] Erasmo Carrera et al. «Introduction». In: *Finite Element Analysis of Structures Through Unified Formulation.* John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Cap. 1, pp. 1–26. ISBN: 9781118536643. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118536643.ch1. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118536643.ch1. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118536643.ch1.

[37] Erasmo Carrera et al. «Introduction to the Unified Formulation». In: *Finite Element Analysis of Structures Through Unified Formulation.* John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Cap. 5, pp. 51–69. ISBN: 9781118536643. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118536643.ch5. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118536643.ch5. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118536643.ch5.

[38] Erasmo Carrera et al. «The Displacement Approach via the PVD and FN for 1D, 2D and 3D Elements». In: *Finite Element Analysis of Structures Through Unified Formulation.* John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Cap. 6, pp. 71–86. ISBN: 9781118536643. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118536643.ch6. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118536643.ch6. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118536643.ch6.

[39] Erasmo Carrera et al. «Two-Dimensional Models with Physical Volume/Surface-Based Geometry and Pure Displacement Variables, the LE Class». In: *Finite Element Analysis of Structures Through Unified Formulation.* John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Cap. 12, pp. 253–260. ISBN: 9781118536643. DOI: https://doi.org/10.1002/9781118536643.ch12. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118536643.ch12. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118536643.ch12.

[40] Siemens Product Lifecycle Management Software Inc. *NX Nastran User's Guide.* 2014.

[41] H. M. Y. C. Mallikarachchi e S. Pellegrino. «Deployment Dynamics of Ultrathin Composite Booms with Tape-Spring Hinges». In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 51.2 (2014), pp. 604–613. DOI: 10.2514/1.A32401. eprint: https://doi.org/10.2514/1.A32401. URL: https://doi.org/10.2514/1.A32401.

[42] Christian Wenzel. «Local FEM Analysis of Composite Beams and Plates: Free-Edge effect and Incompatible Kinematics Coupling». In: 2014.

[43] J. Arenberg et al. «Status of the JWST sunshield and spacecraft». In: *Space Telescopes and Instrumentation 2016: Optical, Infrared, and Millimeter Wave.* A cura di Howard A. MacEwen et al. Vol. 9904. International Society for Optics e Photonics. SPIE, 2016, pp. 20–33. DOI: 10.1117/12.2234481. URL: https://doi.org/10.1117/12.2234481.

[44] W. Belvin et al. «Advanced Deployable Structural Systems for Small Satellites». In: set. 2016.

[45] Bruce Betts et al. «LightSail 2 : Controlled Solar Sailing Using a CubeSat». In: 2016.

[46] Alex Brinkmeyer, Sergio Pellegrino e Paul M. Weaver. «Effects of Long-Term Stowage on the Deployment of Bistable Tape Springs». English. In: *Journal of Applied Mechanics* 83.1 (gen. 2016). ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.4031618.

[47] Tae Jeong e Masahito Ueda. «Longitudinal Compressive Failure of Multiple-Fiber Model Composites for a Unidirectional Carbon Fiber Reinforced Plastic». In: *Open Journal of Composite Materials* 06 (gen. 2016), pp. 8–17. DOI: 10.4236/ojcm.2016.61002.

[48] Deng'an Cai et al. «Failure analysis of plain woven glass/epoxy laminates: Comparison of off-axis and biaxial tension loadings». In: *Polymer Testing* 60 (2017), pp. 307–320. ISSN: 0142-9418. DOI: https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2017.04.010. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142941817302611.

[49] Juan Fernandez. «Advanced Deployable Shell-Based Composite Booms for Small Satellite Structural Applications Including Solar Sails». In: gen. 2017.

[50] M.A. Bessa e S. Pellegrino. «Design of ultra-thin shell structures in the stochastic post-buckling range using Bayesian machine learning and optimization». In: *International Journal of Solids and Structures* 139-140 (2018), pp. 174–188. ISSN: 0020-7683. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.01.035. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768318300441.

[51] A.G. de Miguel et al. «Accurate evaluation of failure indices of composite layered structures via various FE models». In: *Composites Science and Technology* 167 (2018), pp. 174–189. ISSN: 0266-3538. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2018.07.031. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353818309710.

[52] A. G. de Miguel et al. «Accurate Evaluation of Interlaminar Stresses in Composite Laminates via Mixed One-Dimensional Formulation». In: *AIAA Journal* 56.11 (2018), pp. 4582–4594. DOI: 10.2514/1.J057189. eprint: https://doi.org/10.2514/1.J057189. URL: https://doi.org/10.2514/1.J057189.

[53] E. Carrera et al. «A global/local approach based on CUF for the accurate and efficient analysis of metallic and composite structures». In: *Engineering Structures* 188 (2019), pp. 188–201. ISSN: 0141-0296. DOI: https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.03.016. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029618337374.

[54] E. Carrera et al. «MUL2@GL user's manual». In: (2019). URL: http://www.mul2.polito.it/software/MUL2@GL/MUL2@GL_manual.pdf.

[55] A.G. de Miguel, A. Pagani e E. Carrera. «Free-edge stress fields in generic laminated composites via higher-order kinematics». In: *Composites Part B: Engineering* 168 (2019), pp. 375–386. ISSN: 1359-8368. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.03.047. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836819303713.

[56] Bowen Li, Hongling Ye e Yang Zhang. «Failure analysis of composite tube hinge and optimization design». In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 531 (set. 2019), p. 012062. DOI: 10.1088/1757-899X/531/1/012062.

[57] Hongling Ye et al. «Quasi-static analysis and multi-objective optimization for tape spring hinge». In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 60.6 (2019), pp. 2417–2430.

[58] Libin Zhao et al. «A post-buckling compressive failure analysis framework for composite stiffened panels considering intra-, inter-laminar damage and stiffener debonding». In: *Results in Physics* 13 (2019), p. 102205. ISSN: 2211-3797. DOI: https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102205. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S221137971930659X.

[59] Erasmo Carrera et al. «Advanced simulation ant testing of composite TRAC longerons». In: *71st International Astronautical Congress (IAC)* (2020). IAC-20,C2,2,8,x57045. URL: https://iafastro.directory/iac/paper/id/57045/summary/.

[60] Christophe Leclerc e Sergio Pellegrino. «Nonlinear elastic buckling of ultra-thin coilable booms». In: *International Journal of Solids and Structures* 203 (2020), pp. 46–56. ISSN: 0020-7683. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.06.042. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002076832030264X.

[61] NASA. *About Webb versus Hubble Telescope*. URL: https://jwst.nasa.gov/comparison_about.html.