



**Politecnico  
di Torino**

**Politecnico di Torino**

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

# **Adattamento griglie CFD attraverso il metodo delle variabili aggiunte**

Produzione di un codice per il post-processing e l'adattamento

Candidato:

**Giovanni Polizzi**

Matricola S275535

Relatore:

**Professor Francesco Larocca**

Correlatore:

**Dott. Andrea Ferrero**

Anno Accademico 2020–2021

# Ringraziamenti

Vorrei ringraziare, innanzitutto, la mia famiglia per il supporto incondizionato e l'affetto con cui mi hanno aiutato nell'affrontare il mio percorso di studi. Vorrei poi ringraziare i miei amici e colleghi con i quali ho condiviso momenti indimenticabili. Un ringraziamento va al Professor Larocca per avermi dato la possibilità di svolgere questo lavoro di tesi e al Professor Ferrero per avermi seguito e consigliato, con pazienza e disponibilità, durante l'attività.

Vorrei, infine, ringraziare HPC@polito per aver fornito le risorse di calcolo necessarie per lo svolgimento del lavoro.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Basi teoriche e ambiente di sviluppo</b>	<b>4</b>
2.1	Modello fluidodinamico e discretizzazione numerica . . . . .	4
2.2	Impostazione problema dell'aggiunto . . . . .	5
2.3	Ambiente GMSH . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Caso di studio</b>	<b>9</b>
3.1	Definizione caso di studio . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Adattamento Griglia</b>	<b>14</b>
4.1	Rigenerazione griglia . . . . .	14
4.2	Spostamento nodi . . . . .	24
4.3	Raffinamento locale . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Raccolta risultati</b>	<b>44</b>
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>49</b>
<b>A</b>	<b>Descrizione codice</b>	<b>52</b>
A.1	Subroutine "connect" . . . . .	52
A.2	Subroutine "sol-read" . . . . .	53
A.3	Funzione "bar1" . . . . .	53
A.4	Funzione "bar2" . . . . .	53
A.5	Funzione "reord" . . . . .	54
A.6	Subroutine "media" . . . . .	54
A.7	Subroutine "Scrittura_pos" . . . . .	54
A.8	Subroutine "norma" . . . . .	54
A.9	Funzione "tvec" . . . . .	55

A.10 Subroutine "norma10" . . . . .	55
A.11 Subroutine "Raff_local" . . . . .	56

# Elenco delle figure

2.1	Esempio formato .pos . . . . .	8
3.1	Dominio di interesse . . . . .	10
3.2	Profilo NACA-0012 geometria GMSH . . . . .	10
3.3	Griglia base, dettaglio intorno profilo . . . . .	11
3.4	Linee iso-Mach . . . . .	12
3.5	Numero di Mach . . . . .	12
3.6	Aggiunto $\rho$ . . . . .	13
4.1	Adattamento base gradiente . . . . .	15
4.2	Adattamento base residuo . . . . .	16
4.3	Adattamento base aggiunto . . . . .	16
4.4	Linee iso-Mach, griglia gradienti . . . . .	17
4.5	Campo Mach, griglia gradienti . . . . .	18
4.6	Linee iso-Mach, griglia residui . . . . .	18
4.7	Campo Mach, griglia residui . . . . .	19
4.8	Linee iso-Mach, griglia aggiunti . . . . .	19
4.9	Campo Mach, griglia aggiunti . . . . .	20
4.10	Griglia residui, II giro . . . . .	20
4.11	Griglia aggiunti, II giro . . . . .	21
4.12	Linee iso-Mach, griglia residui II giro . . . . .	21
4.13	Campo Mach, griglia residui II giro . . . . .	22
4.14	Linee iso-Mach, griglia aggiunti II giro . . . . .	22
4.15	Campo Mach, griglia aggiunti II giro . . . . .	23
4.16	Griglia spostamento: base residui, indicatore residui . . . . .	24
4.17	Linee iso-Mach: base residui, indicatore residui . . . . .	25
4.18	Campo Mach: base residui, indicatore residui . . . . .	25
4.19	Griglia spostamento: base aggiunto, indicatore aggiunto . . . . .	26

4.20	Linee iso-Mach: base aggiunto, indicatore aggiunto . . . . .	26
4.21	Campo Mach: base aggiunto, indicatore aggiunto . . . . .	27
4.22	Griglia spostamento: base gradiente, indicatore gradiente . . . . .	27
4.23	Linee iso-Mach: base gradiente, indicatore gradiente . . . . .	28
4.24	Campo Mach: base gradiente, indicatore gradiente . . . . .	28
4.25	Griglia spostamento: base residui, indicatore residui II giro . . . . .	29
4.26	Griglia spostamento: base aggiunti, indicatore aggiunti II giro . . . . .	29
4.27	Linee iso-Mach: base aggiunto, indicatore aggiunto II giro . . . . .	30
4.28	Campo Mach: base aggiunto, indicatore aggiunto II giro . . . . .	30
4.29	Linee iso-Mach: base residui, indicatore residui II giro . . . . .	31
4.30	Campo Mach: base residui, indicatore residui II giro . . . . .	31
4.31	Griglia raffinamento aggiunti, primo passo . . . . .	33
4.32	Griglia raffinamento residui, primo passo . . . . .	34
4.33	Griglia raffinamento gradienti, primo passo . . . . .	34
4.34	Linee iso-Mach: raffinamento aggiunti, primo passo . . . . .	35
4.35	Campo Mach: raffinamento aggiunti, primo passo . . . . .	35
4.36	Linee iso-Mach: raffinamento residui, primo passo . . . . .	36
4.37	Campo Mach: raffinamento residui, primo passo . . . . .	36
4.38	Linee iso-Mach: raffinamento gradienti, primo passo . . . . .	37
4.39	Campo Mach: raffinamento gradienti, primo passo . . . . .	37
4.40	Griglia raffinamento aggiunti, secondo passo . . . . .	38
4.41	Griglia raffinamento residui, secondo passo . . . . .	38
4.42	Griglia raffinamento gradienti, secondo passo . . . . .	39
4.43	Linee iso-Mach: raffinamento aggiunti, secondo passo . . . . .	39
4.44	Campo Mach: raffinamento aggiunti, secondo passo . . . . .	40
4.45	Linee iso-Mach: raffinamento residui, secondo passo . . . . .	40
4.46	Campo Mach: raffinamento residui, secondo passo . . . . .	41
4.47	Linee iso-Mach: raffinamento gradienti, secondo passo . . . . .	41
4.48	Campo Mach: raffinamento gradienti, secondo passo . . . . .	42
5.1	Confronto rigenerazione e gradienti . . . . .	44
5.2	Andamento raffinamento . . . . .	45
5.3	Andamento spostamento . . . . .	46
5.4	Andamento spostamento, dettaglio aggiunti-residui . . . . .	47
5.5	Andamento spostamento, dettaglio gradienti . . . . .	47

## **Sommario**

Il presente lavoro di tesi ha come obiettivo lo sviluppo di un codice per la generazione di griglie di calcolo CFD in ambiente GMSH, attraverso l'utilizzo del metodo delle variabili aggiunte. Verranno presentate le basi teoriche di tale tipo di adattamento, quali sono i vantaggi che esso comporta rispetto a differenti metodi, il modello di calcolo fluidodinamico utilizzato nei casi di studio e l'implementazione del codice per la generazione delle mesh adattate utilizzando i dati di output del calcolo fluidodinamico, con l'utilizzo di diverse strategie di ri-generazione e modifica delle mesh. Verranno presentati infine i risultati dell'applicazione su un caso di studio ed un confronto tra le griglie risultanti ottenute con i diversi metodi adoperati.

# Capitolo 1

## Introduzione

L'utilizzo della fluidodinamica computazionale è oggi largamente diffuso nei più svariati ambiti tecnici. Grazie al miglioramento delle prestazioni di calcolo delle macchine, simulazioni sempre più complesse possono essere condotte in modo efficace e risultano accessibili e relativamente economiche. Tuttavia affrontare problemi su grandi scale, specialmente in regimi di moto complessi, può generare problematiche per le quali si richiede un'attenta gestione delle risorse. In quest'ottica è sempre vivo l'interesse per l'ottimizzazione delle griglie di calcolo e lo studio dell'adattamento delle mesh risulta particolarmente interessante, in quanto impatta direttamente sul costo computazionale, sui tempi di calcolo e sulla fedeltà dell'approssimazione, influenzando notevolmente sull'efficacia e sull'efficienza della simulazione numerica.

Per l'adattamento delle griglie di calcolo possono essere utilizzati diversi approcci. Un primo metodo potrebbe essere quello di utilizzare un raffinamento *uniforme* della griglia, ovvero una riduzione della dimensione degli elementi in tutto il dominio in esame in modo da ridurre gli errori di discretizzazione. Tale approccio non risulta essere conveniente poichè tende a sovrarefinire delle zone del dominio dove non si avrebbe necessità di raffinamento, incrementando inutilmente il costo computazionale del calcolo. Si preferisce, dunque, applicare un adattamento localizzato della griglia, il quale può essere effettuato utilizzando differenti strategie:

- Adattamento *Feature-based*: Questo tipo di adattamento viene guidato attraverso caratteristiche del campo di moto, quali i gradienti o la curvatura della soluzione.

- Adattamento *Residual-based*: Questo tipo di adattamento viene guidato attraverso la stima del residuo, ottenibile sostituendo nelle PDE che descrivono il comportamento del flusso la soluzione approssimata con il metodo dei volumi finiti. In generale è possibile utilizzare stime di errore alternative per raffinare la griglia dove questi sono massimi.
- Addensamento *Adjoint-based*: Questo tipo di adattamento prevede il calcolo delle variabili aggiunte per correggere l'indicatore del residuo e pesare lo stesso in funzione di una variabile obiettivo.

I metodi di tipo *Feature-based* sono largamente utilizzati, tuttavia non sempre risultano convenienti in quanto possono generare decadimenti nell'approssimazione numerica [1]; ad esempio qualora all'interno del campo di moto fossero presenti degli urti, questi polarizzerebbero il raffinamento della griglia a causa dei forti gradienti, impedendo l'adattamento in altre zone del dominio. Tali metodi possono essere utilizzati nel caso si fosse interessati a studiare approfonditamente una zona del dominio nella quale si ha una forte influenza della *feature* utilizzata per l'adattamento, rendendo però necessaria una conoscenza *a priori* del campo fluidodinamico. Metodi del tipo *Residual-based* permettono, invece, di guidare l'adattamento in base all'output del calcolo CFD e non richiedono dunque conoscenze pregresse sul campo di moto, in quanto utilizzano una misura diretta dell'accuratezza del calcolo per migliorare la stessa attraverso il raffinamento della griglia. I metodi *Adjoint-based* permettono di estendere ulteriormente tali vantaggi, attraverso un'analisi di sensitività per una funzione obiettivo (e.g. portanza, resistenza) la quale permette di guidare il raffinamento della griglia non nei punti dove il residuo spaziale è maggiore in termini assoluti, ma dove questo ha maggiore influenza sul calcolo della funzione obiettivo. Tale approccio ha grandi potenzialità non solo nella fase di analisi e validazione di configurazioni già definite e in particolare nell'adattamento delle griglie di calcolo su tali configurazioni, ma permette di guidare ed automatizzare l'ottimizzazione del progetto fluidodinamico, affrontando una minimizzazione vincolata della funzione obiettivo in ragione di un set di variabili di progetto, col vantaggio di ridurre notevolmente il costo di calcolo svincolando l'analisi dal numero di variabili di design [2]. Ai fini del lavoro di tesi sarà affrontato esclusivamente l'aspetto relativo al raffinamento delle griglie.

Individuata la metodologia per guidare l'adattamento della griglia è possibile rigenerare quest'ultima, producendo *ex novo* una mesh basata sulle informazioni ricavate dalla soluzione approssimata delle equazioni fluidodinamiche, oppure modificare la griglia già esistente muovendo i nodi della stessa in modo da addensarli ove richiesto (*r-refinement*) o ancora aggiungere localmente nuovi nodi per aumentare la definizione della mesh (*h-refinement*). Nel presente lavoro è stato adottato principalmente il primo approccio, attraverso due differenti strategie di rigenerazione, sebbene venga proposta una possibile alternativa basata sullo spostamento dei nodi. Viene infine proposta un'ulteriore strategia per il raffinamento locale della griglia attraverso il dimezzamento della dimensione degli elementi.

## Capitolo 2

# Basi teoriche e ambiente di sviluppo

### 2.1 Modello fluidodinamico e discretizzazione numerica

Il modello fluidodinamico utilizzato nei test effettuati è costituito dalle equazioni di Eulero, che consentono di descrivere il comportamento di flussi compressibili trascurando gli effetti diffusivi [5]. In un caso bidimensionale le equazioni scritte nella forma conservativa sono

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j(E + P)) = 0 \quad (2.3)$$

I termini  $\rho, P, E, u, v$  sono, rispettivamente, la densità, la pressione, l'energia totale e le componenti cartesiane di velocità e costituiscono le variabili fluidodinamiche  $\mathbf{Q} = \{\rho, P, E, u, v\}$ ; esse sono espresse in forma adimensionale. Il problema è chiuso con l'aggiunta dell'equazione di stato

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (2.4)$$

dove  $\gamma = 1.4$  è il rapporto dei calori specifici per il flusso considerato.

La risoluzione numerica delle equazioni è affidata ad un codice di calcolo parallelo che implementa una discretizzazione spaziale delle equazioni attraverso il metodo *Discontinuous Galerkin*, il quale combina i vantaggi dei metodi agli elementi finiti, in particolare la loro elevata accuratezza nella discretizzazione spaziale, e ai volumi finiti, in particolare la possibilità di definire i flussi numerici in accordo con i fenomeni fisici considerati [5]. La discretizzazione temporale è implementata attraverso diversi metodi: quello utilizzato nel caso di studio è in particolare il metodo di Eulero implicito. All'interno del codice è implementato infine il calcolo dei residui delle variabili conservative per la valutazione dell'errore di discretizzazione e la risoluzione del sistema delle variabili aggiunte fluidodinamiche, utilizzando come funzione obiettivo  $f$  la resistenza.

## 2.2 Impostazione problema dell'aggiunto

In questa sezione viene presentato il modello matematico del problema dell'aggiunto, secondo la trattazione Lagrangiana. Tale trattazione è largamente diffusa in quanto evidenzia la connessione con i problemi di ottimizzazione vincolata per i quali, come detto, l'approccio delle variabili aggiunte introduce numerosi vantaggi [3].

Posti  $\mathbf{R}$  il vettore dei residui spaziali per le equazioni discrete,  $\mathbf{D}$  il vettore delle variabili di design,  $\mathbf{X}$  il vettore dei nodi della griglia computazionale e  $\mathbf{Q}$  il vettore delle variabili fluidodinamiche è possibile definire la funzione lagrangiana  $L$

$$L(\mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{X}, \mathbf{Q}, \Lambda_f, \Lambda_g) = f(\mathbf{D}, \mathbf{X}, \mathbf{Q}) + \Lambda_f \mathbf{R}(\mathbf{D}, \mathbf{X}, \mathbf{Q}) + \Lambda_g (\mathbf{K}\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\text{surf}}) \quad (2.5)$$

La funzione  $f(\mathbf{D}, \mathbf{X}, \mathbf{Q})$  è la funzione obiettivo, gli operatori  $\Lambda_f$  e  $\Lambda_g$  sono i vettori dei moltiplicatori di Lagrange, o delle variabili aggiunte, relativi rispettivamente alle equazioni di campo e alle equazioni di movimento della griglia; quest'ultime nella formulazione proposta soddisfano l'equazione elastica lineare  $\mathbf{K}\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\text{surf}} = 0$ , dove  $\mathbf{K}$  è la matrice di rigidità della griglia e  $\mathbf{X}_{\text{surf}}$  le posizioni dei nodi di bordo. In questo modo è possibile adattare la griglia alla modifica della geometria dettata dall'ottimizzazione del progetto fluidodinamico [2] [4].

Si procede dunque a derivare la funzione  $L$  rispetto alle variabili di progetto  $\mathbf{D}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{D}} = & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{D}} + \left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{D}} \right]^T \Lambda_f + \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{D}} \right]^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Q}} + \left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{Q}} \right]^T \Lambda_f \right\} + \\ & + \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{D}} \right]^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} + \left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right]^T \Lambda_f + \Lambda_g^T \mathbf{K} \right\} - \Lambda_g \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{D}} \right]_{\text{surf}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

L'espressione precedente, poiché le variabili aggiunte sono arbitrarie, può essere linearizzata imponendo che i termini in parentesi graffa siano nulli. Questo porta alle seguenti formulazioni

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{Q}} \right]^T \Lambda_f = - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Q}} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{K}^T \Lambda_g = - \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} + \left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right]^T \Lambda_f \right\} \quad (2.8)$$

Tali espressioni sono dette equazioni aggiunte discrete, rispettivamente per il campo di moto (2.7) e per la griglia (2.8).

Risolvendo il sistema di equazioni (2.3) è possibile ricavare il vettore delle variabili aggiunte  $\Lambda_f$ , che possono essere utilizzate per pesare il vettore dei residui  $\mathbf{R}$  così da ottenere un output utile per il raffinamento della griglia. Infatti, sempre dalla (2.3), è possibile dedurre per confronto

$$\Lambda_f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}} \quad (2.9)$$

L'equazione (2.5) evidenzia come le variabili aggiunte permettano di fornire una stima dell'influenza che il residuo esercita sulla funzione obiettivo, permettendo dunque di utilizzare le stesse come indicatore per pilotare l'adattamento della griglia ottimizzandolo in ragione della funzione richiesta.

Attraverso la (2.4) è possibile calcolare il vettore delle variabili aggiunte di griglia  $\Lambda_g$  dopo aver calcolato  $\Lambda_f$ , per completare poi attraverso la (2.2) linearizzata l'analisi di sensitività della funzione goal e l'ottimizzazione del progetto fluidodinamico [2]. Come detto tutto ciò esula dagli obiettivi della presente analisi.

### 2.3 Ambiente GMSH

Per la generazione delle griglia di calcolo si è fatto uso del software GMSH, un software open source per la creazione di mesh tridimensionali con capacità CAD integrate in modo da poter creare facilmente la geometria del problema in esame. GMSH permette di creare ed editare facilmente i propri file attraverso linguaggio e formati nativi. Per il lavoro di tesi sono state utilizzate delle griglie non strutturate bidimensionali: il software procede alla generazione della mesh in maniera "gerarchica", suddividendo le entità geometriche create in elementi 1D e in seguito generando la griglia bidimensionale attraverso un algoritmo *divide-and-conquer* e questa viene ulteriormente modificata fino ad ottenere la mesh finale [6].

L'algoritmo di GMSH consente di pilotare la generazione della mesh imponendo la dimensione locale degli elementi, assegnando alle entità geometriche (in particolare ai punti) una dimensione caratteristica oppure definendo dei *Size Fields* che permettono una definizione parametrica del campo da usare per definire la mesh (e.g. distanza da determinate entità geometriche, funzioni analitiche); attraverso i *Size Fields* è stata ottenuta la mesh grezza utilizzata come base per l'adattamento (inserire riferimento). Per rigenerare la griglia di calcolo si fa uso delle capacità di post-processing del software, il quale permette di utilizzare le mappe scalari che consentono la visualizzazione del campo di moto all'interno di GMSH come *background mesh*, ovvero utilizzare i valori scalari contenuti in tali mappe per definire la dimensione della mesh in tutti i punti del dominio: in questo modo è possibile rigenerare la griglia utilizzando i dati di output del calcolo fluidodinamico. Tali mappe

## 2.3 Ambiente GMSH

---

vengono prodotte nel formato nativo *.pos*, che è strutturato con una serie di vettori costituiti da una sigla che identifica la tipologia di elemento, le coordinate dei nodi che lo costituiscono e i valori scalari associati a quei nodi. Viene proposto un esempio della struttura del file nella figura seguente

```
$PostFormat
1.4 file-type data-size
$EndPostFormat
$View
view-name nb-time-steps
nb-scalar-points nb-vector-points nb-tensor-points
nb-scalar-lines nb-vector-lines nb-tensor-lines
nb-scalar-triangles nb-vector-triangles nb-tensor-triangles
nb-scalar-quadrangles nb-vector-quadrangles nb-tensor-quadrangles
nb-scalar-tetrahedra nb-vector-tetrahedra nb-tensor-tetrahedra
nb-scalar-hexahedra nb-vector-hexahedra nb-tensor-hexahedra
nb-scalar-prisms nb-vector-prisms nb-tensor-prisms
nb-scalar-pyramids nb-vector-pyramids nb-tensor-pyramids
nb-scalar-lines2 nb-vector-lines2 nb-tensor-lines2
nb-scalar-triangles2 nb-vector-triangles2 nb-tensor-triangles2
nb-scalar-quadrangles2 nb-vector-quadrangles2 nb-tensor-quadrangles2
nb-scalar-tetrahedra2 nb-vector-tetrahedra2 nb-tensor-tetrahedra2
nb-scalar-hexahedra2 nb-vector-hexahedra2 nb-tensor-hexahedra2
nb-scalar-prisms2 nb-vector-prisms2 nb-tensor-prisms2
nb-scalar-pyramids2 nb-vector-pyramids2 nb-tensor-pyramids2
nb-text2d nb-text2d-chars nb-text3d nb-text3d-chars
time-step-values
< scalar-point-value > ... < vector-point-value > ...
  < tensor-point-value > ...
< scalar-line-value > ... < vector-line-value > ...
  < tensor-line-value > ...
< scalar-triangle-value > ... < vector-triangle-value > ...
  < tensor-triangle-value > ...
< scalar-quadrangle-value > ... < vector-quadrangle-value > ...
```

Figura 2.1: Esempio formato *.pos*

# Capitolo 3

## Caso di studio

### 3.1 Definizione caso di studio

I test per valutare il funzionamento del codice sono stati effettuati su un caso di studio largamente utilizzato in letteratura, ovvero l'analisi del flusso attorno ad un profilo NACA-0012. Questo profilo permette, al variare delle condizioni a monte, di ottenere differenti tipologie di campo di moto e, data l'abbondanza di dati sperimentali e numerici ad esso relativi, costituisce il caso di studio ideale per la validazione di codici numerici.

Si considera dunque un profilo NACA-0012 investito da un flusso inviscido con le seguenti condizioni:

- $M_\infty = 0.8$
- Angolo d'incidenza  $\alpha = 1.25^\circ$

La geometria del profilo viene importata in GMSH per la generazione della griglia grezza usata come base per gli adattamenti. Per la generazione di quest'ultima sono stati imposti i *Size Field Attractor* e *Boundary Layer*, così da generare una griglia più fitta nell'intorno del profilo. Viene inoltre definito il bordo circolare del dominio di interesse.

Di seguito vengono raffigurate la geometria del profilo e la griglia grezza usata come base per il raffinamento, una griglia non strutturata mista, formata da elementi 2D triangolari e quadrati.

### 3.1 Definizione caso di studio

---

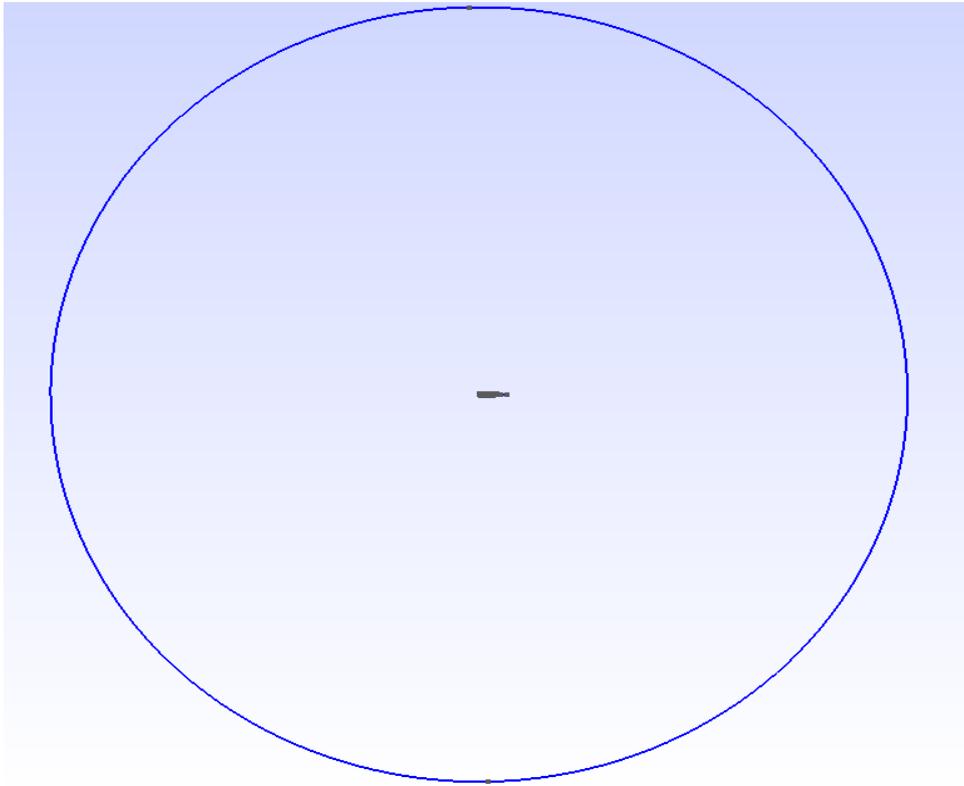


Figura 3.1: Dominio di interesse

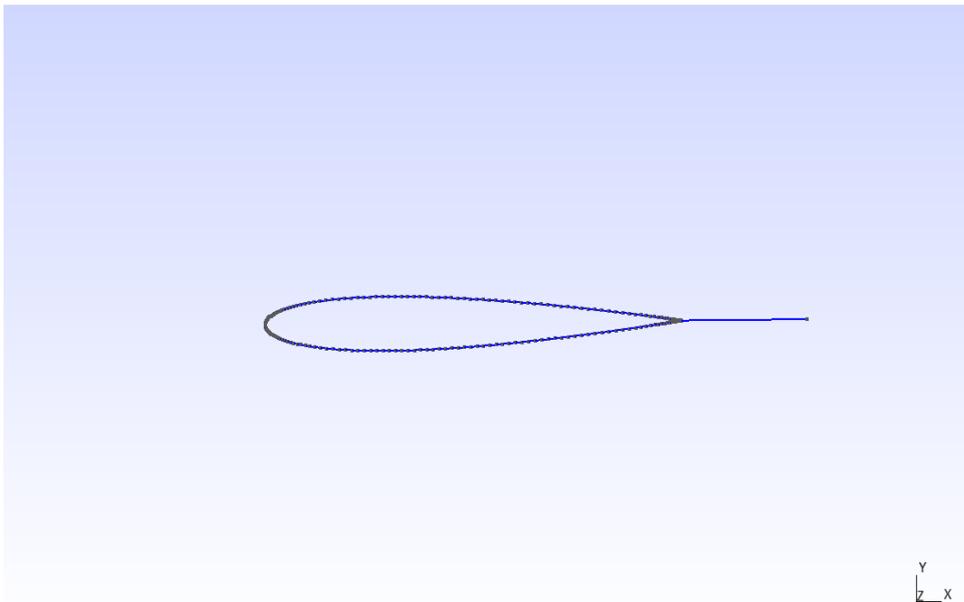


Figura 3.2: Profilo NACA-0012 geometria GMSH

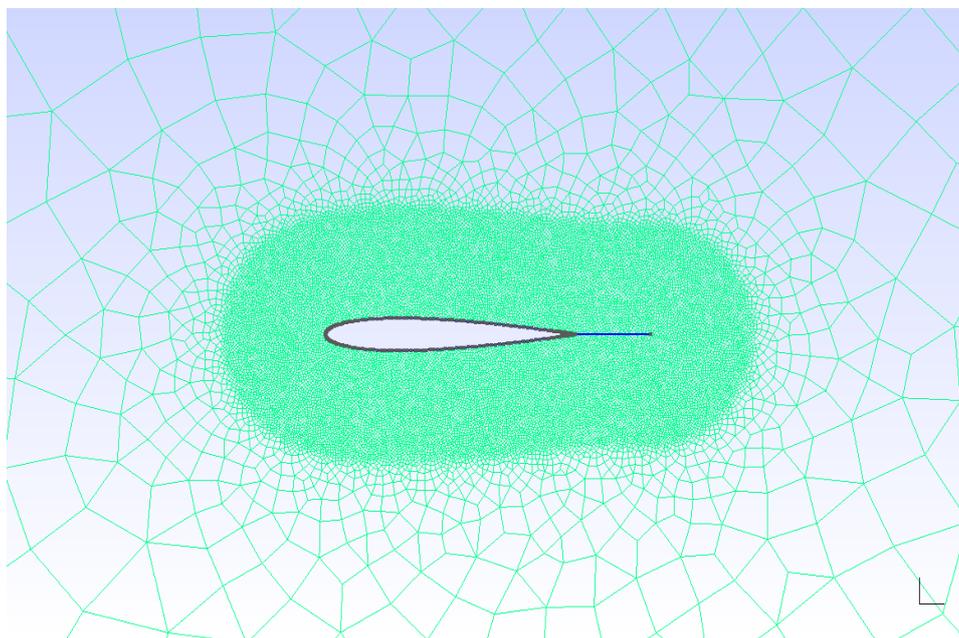


Figura 3.3: Griglia base, dettaglio intorno profilo

Sulla griglia grezza viene effettuato un primo calcolo CFD; i risultati ottenuti da questo calcolo iniziale vengono utilizzati per pilotare la rigenerazione della griglia. Di seguito vengono mostrate le curve isolivello per il numero di Mach e il campo della variabile aggiunta della densità  $\rho$ ; è possibile attraverso queste visualizzazioni valutare il flusso transonico attorno al profilo ed individuare le strutture d'urto sul dorso e sul ventre dello stesso. Vengono inoltre calcolati i coefficienti  $C_L$  e  $C_D$ .

### 3.1 Definizione caso di studio

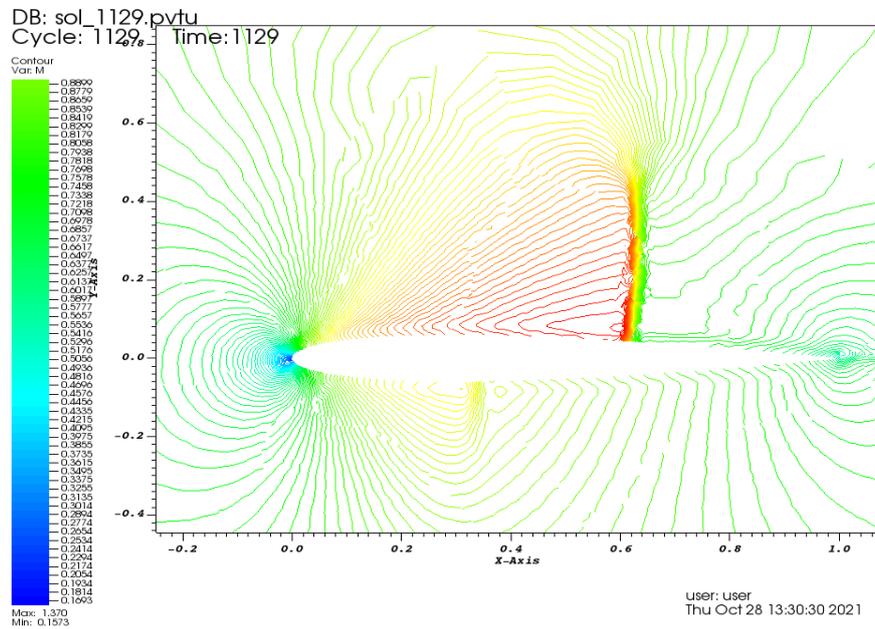


Figura 3.4: Linee iso-Mach

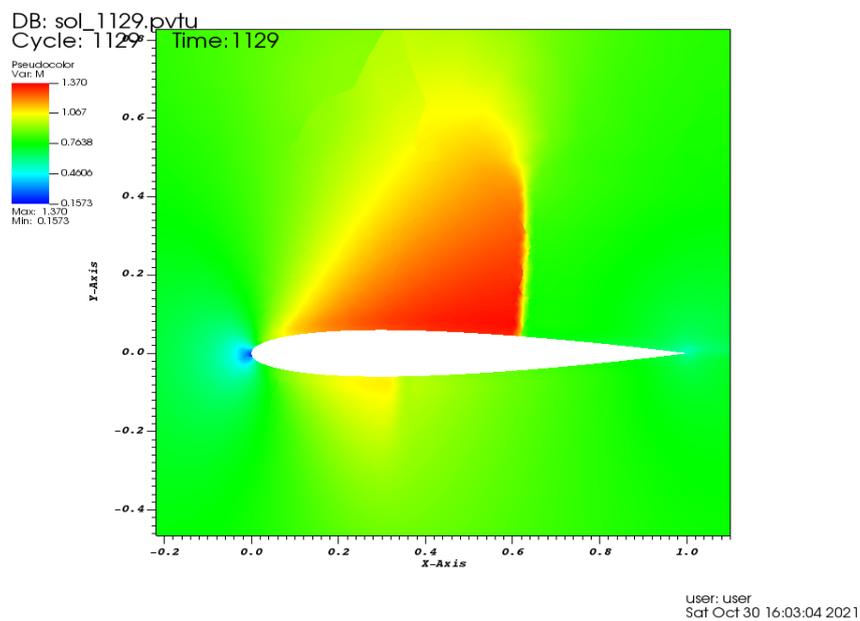


Figura 3.5: Numero di Mach

### 3.1 Definizione caso di studio

---

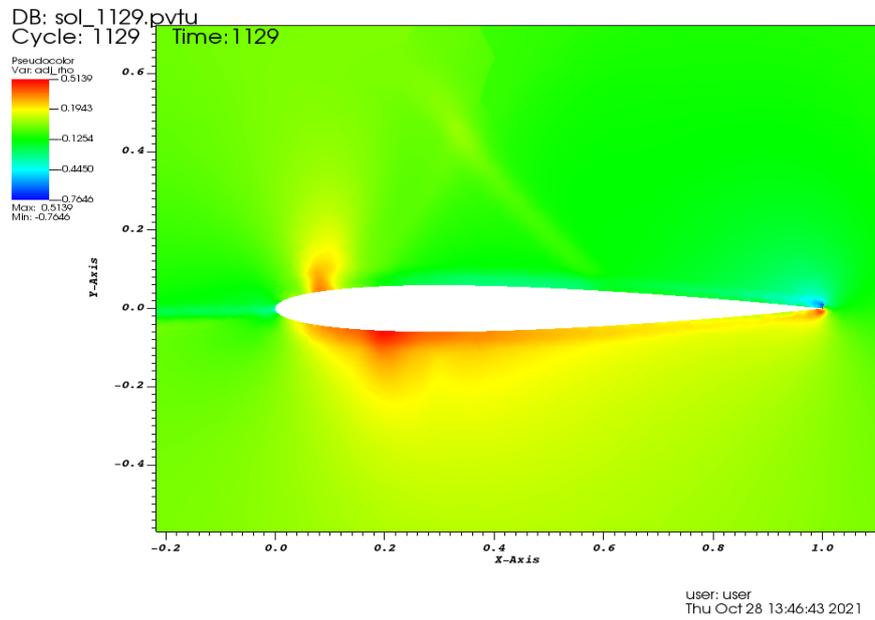


Figura 3.6: Aggiunto  $\rho$

## Capitolo 4

# Adattamento Griglia

In questo capitolo vengono riportate le diverse strategie di adattamento applicate insieme ad una breve descrizione di come queste sono state implementate e i risultati ottenuti. Una descrizione approfondita del codice è presente nell'appendice A.

### 4.1 Rigenerazione griglia

La prima strategia utilizzata per l'adattamento della griglia è la rigenerazione della stessa attraverso i risultati del calcolo CFD sulla griglia grezza. Dall'output del calcolo fluidodinamico sono presi i valori delle variabili negli elementi e, attraverso una media, vengono valutati tali valori nei nodi della griglia così da poter generare il campo scalare da usare come background mesh in GMSH (secondo il file modello in figura 2.1). L'adattamento viene pilotato attraverso l'utilizzo della norma dei residui, della norma dei residui pesati con le variabili aggiunte e attraverso i gradienti della densità  $\rho$  in modo da confrontare i risultati con diversi indicatori. Ai vettori nodali delle norme viene applicata una funzione di correzione, di seguito riportata, in modo da avere una dimensione locale della griglia minima dove è massimo il valore della norma dell'indicatore, mantenendo limitate le dimensioni estremali degli elementi

$$C(x) = a * \frac{1}{\tanh(x) * (1 + x^b) * (|x - c| + 1)} \quad (4.1)$$

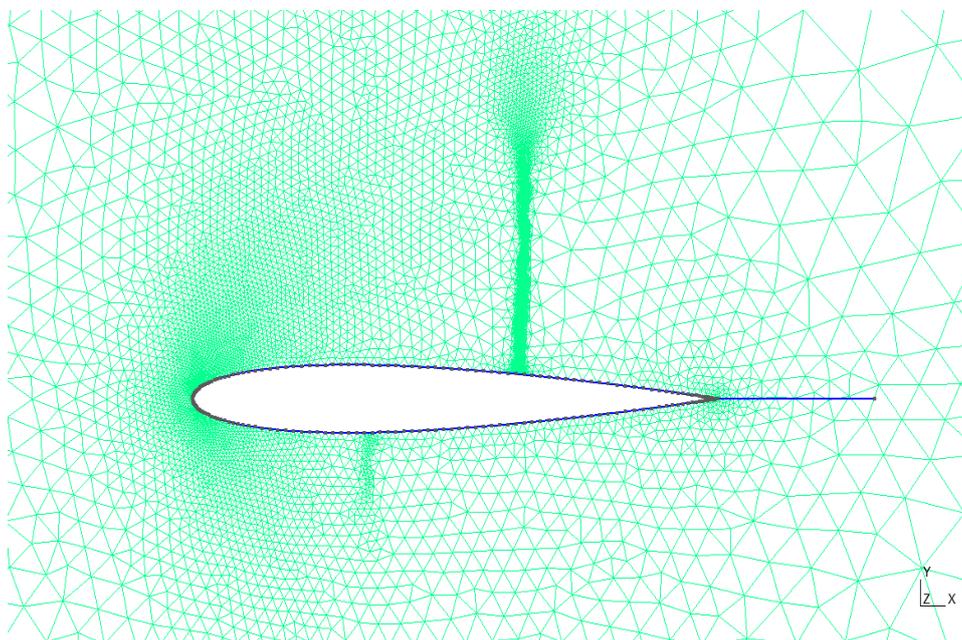


Figura 4.1: Adattamento base gradiente

$a, b, c$  sono dei coefficienti numerici che variano a seconda del caso studiato, in modo da mantenere inalterati gli ordini di grandezza degli elementi (tabella 4.1). Nelle figure 4.1, 4.2 e 4.3 sono rappresentate le griglie ottenute con la rigenerazione; si nota che nella griglia ricavata utilizzando come indicatore i gradienti è presente un addensamento nella zona dell'urto sul ventre del profilo, al contrario di ciò che accade nel caso dei residui e dei residui pesati. Sembra quindi che, con questo livello di griglia di partenza, l'errore indotto dall'urto sul ventre sia meno significativo rispetto ad altre strutture presenti nel flusso. Nella griglia dei residui invece si evidenzia un addensamento dei nodi in scia al profilo e nella zona dell'urto superiore, in corrispondenza della variazione della dimensione degli elementi nella griglia iniziale (figura 3.3); disuniformità nella griglia iniziale possono peggiorare l'approssimazione numerica e una griglia adattata attraverso i residui può risentire di ciò, al contrario degli altri due casi nei quali si ha una minore sensibilità, in particolare nel caso delle variabili aggiunte grazie alla pesatura del residuo che mitiga l'addensamento.

Vengono a questo punto effettuati nuovamente i calcoli sulle nuove griglie per valutare i coefficienti aerodinamici e il campo di moto, il quale viene mostrato nelle seguenti figure.

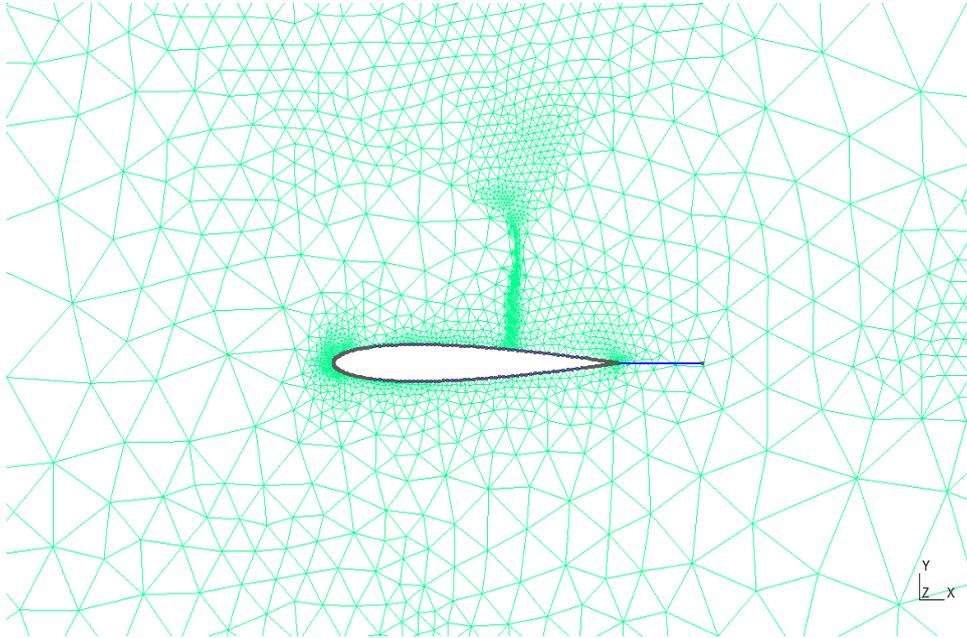


Figura 4.2: Adattamento base residuo

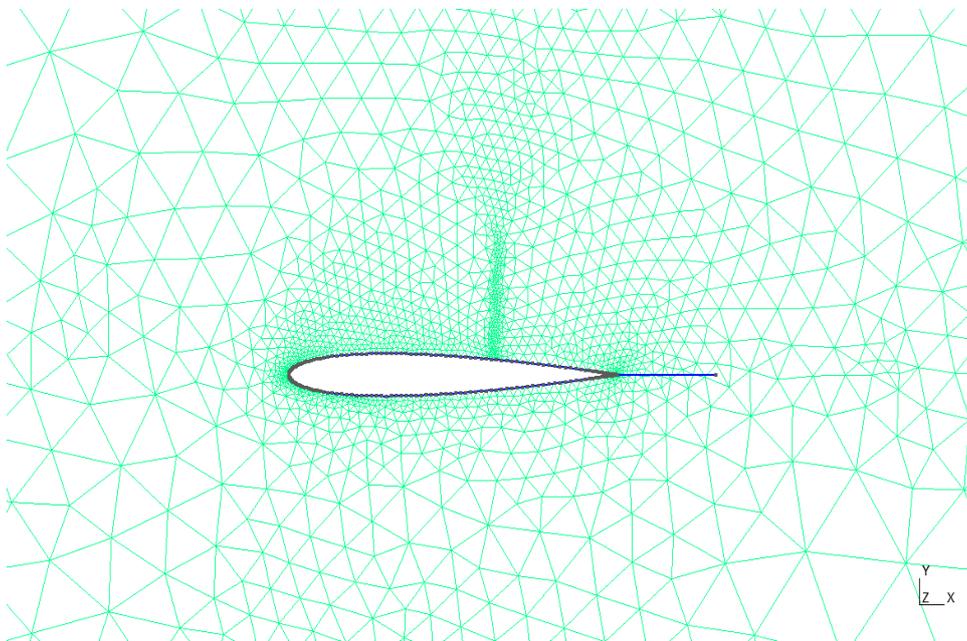


Figura 4.3: Adattamento base aggiunto

## 4.1 Rigenerazione griglia

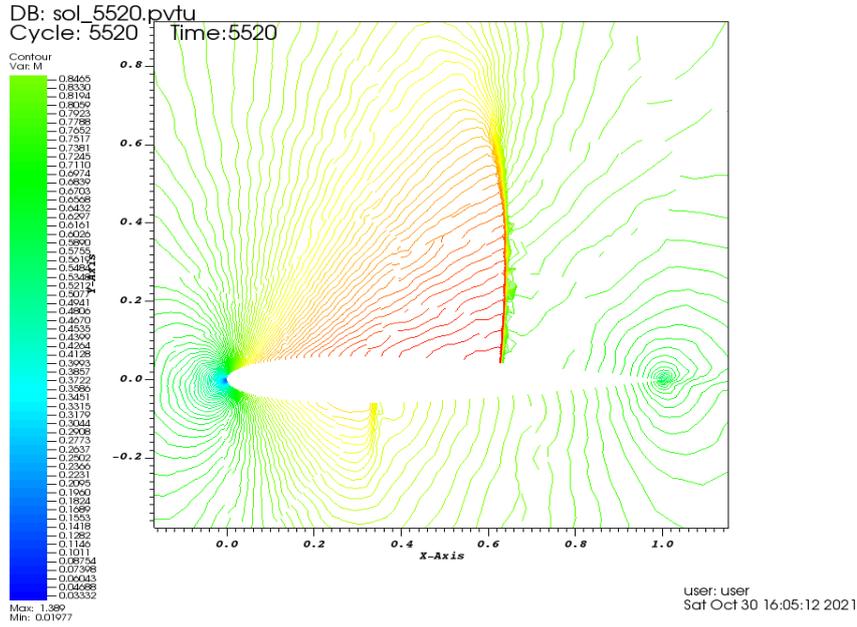


Figura 4.4: Linee iso-Mach, griglia gradienti

Si può notare come nel caso dei gradienti la griglia sia fortemente addensata nei pressi degli urti, i quali vengono catturati in maniera ottimale e appaiono piuttosto sottili. Tuttavia l'addensamento non è ugualmente efficace in altre zone del dominio, ad esempio al bordo d'attacco, e ciò si traduce in una minore accuratezza nel calcolo del  $C_D$  (tabella 4.1). Nella griglia dei residui l'addensamento locale tende inoltre a diffondere l'urto, evidenziando nuovamente la dipendenza dalla griglia iniziale. Anche nella griglia degli aggiunti è possibile notare l'elevato spessore della discontinuità sul dorso dovuto ad un minore raffinamento della griglia. I risultati vengono poi utilizzati per impostare una nuova rigenerazione della griglia (II giro), utilizzando l'indicatore adottato nella rigenerazione precedente: si può notare come l'addensamento presente nella prima griglia adattata con i residui permane e viene esteso eseguendo una nuova iterazione del processo

## 4.1 Rigenerazione griglia

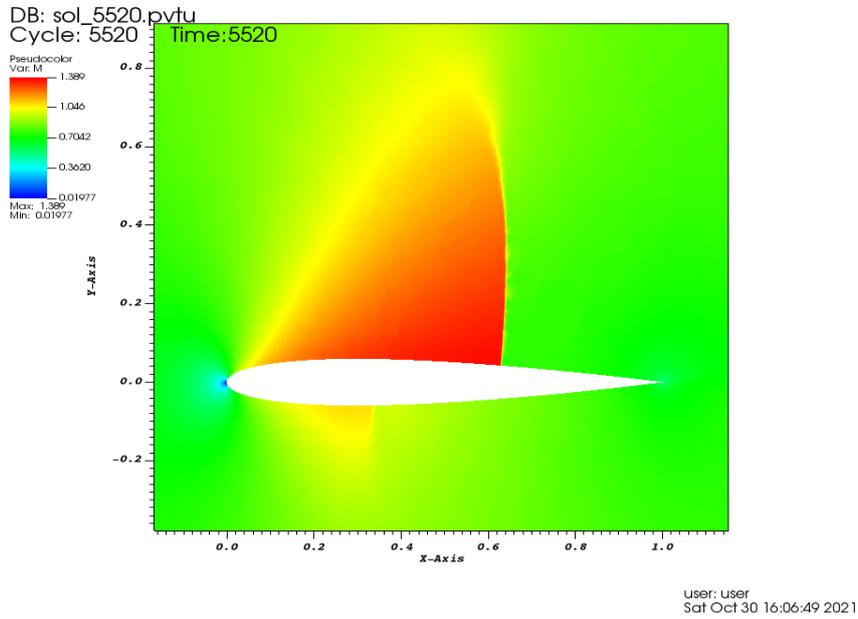


Figura 4.5: Campo Mach, griglia gradienti

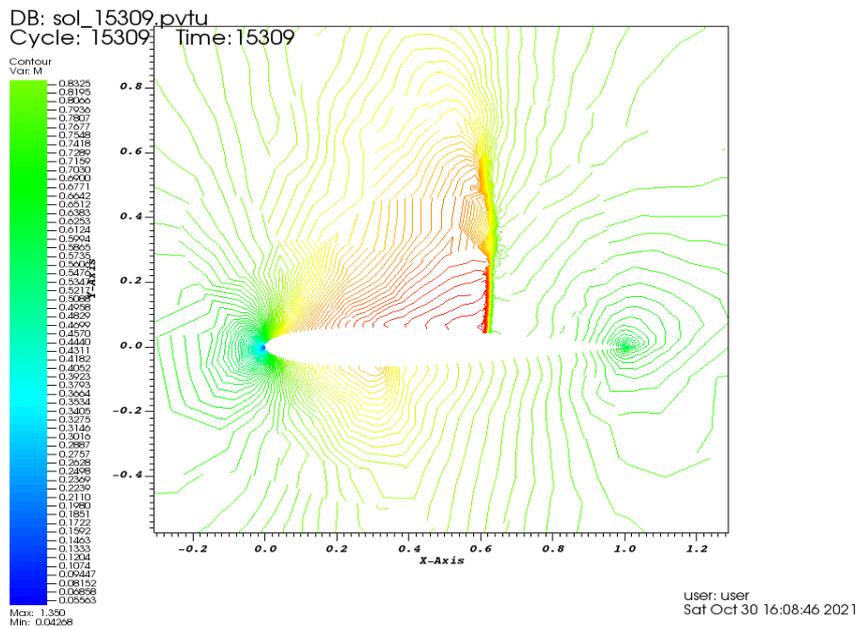


Figura 4.6: Linee iso-Mach, griglia residui

## 4.1 Rigenerazione griglia

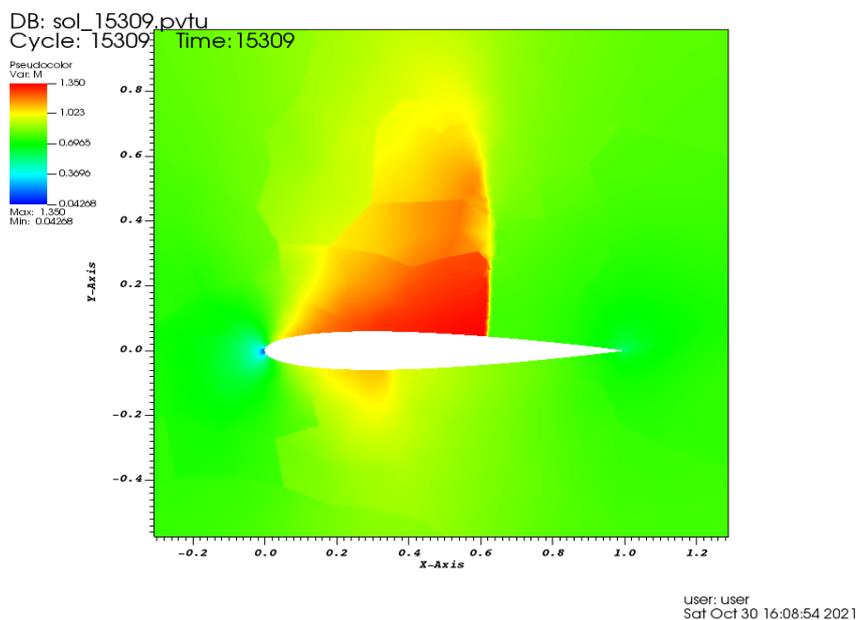


Figura 4.7: Campo Mach, griglia residui

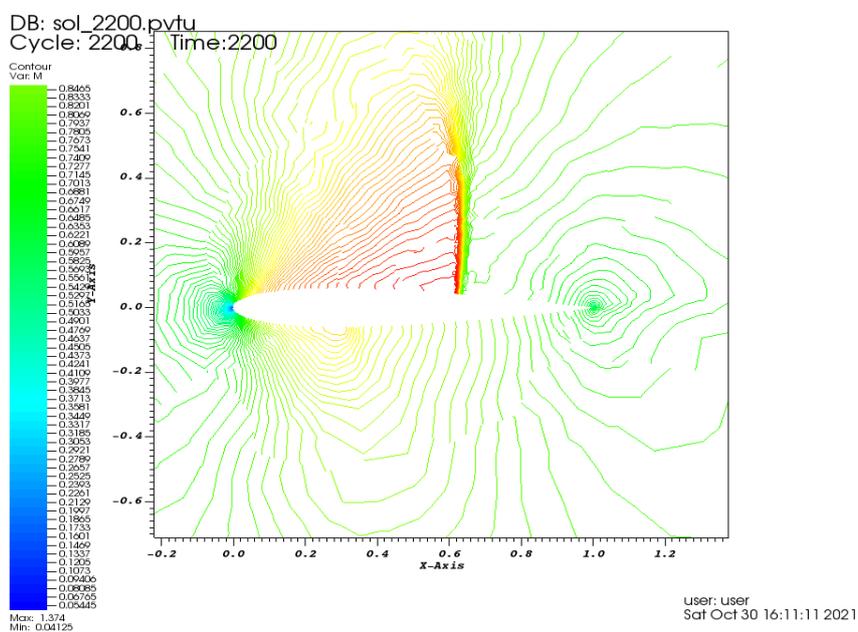


Figura 4.8: Linee iso-Mach, griglia aggiunti

## 4.1 Rigenerazione griglia

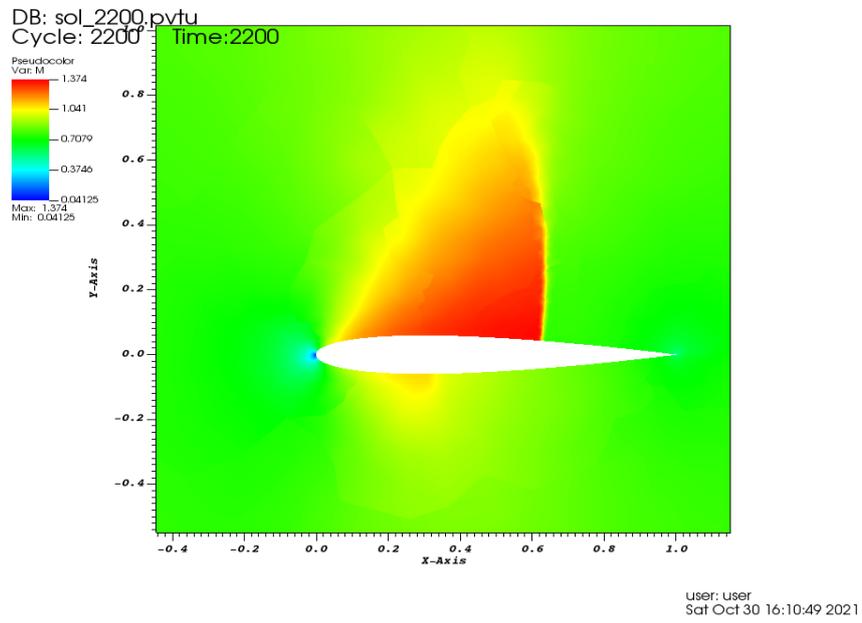


Figura 4.9: Campo Mach, griglia aggiunti

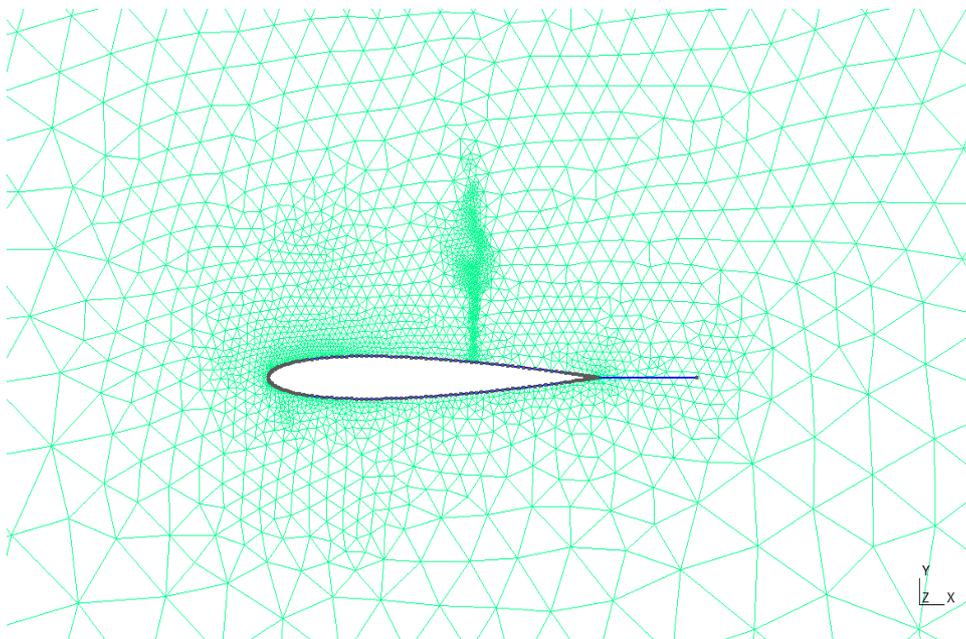


Figura 4.10: Griglia residui, II giro

## 4.1 Rigenerazione griglia

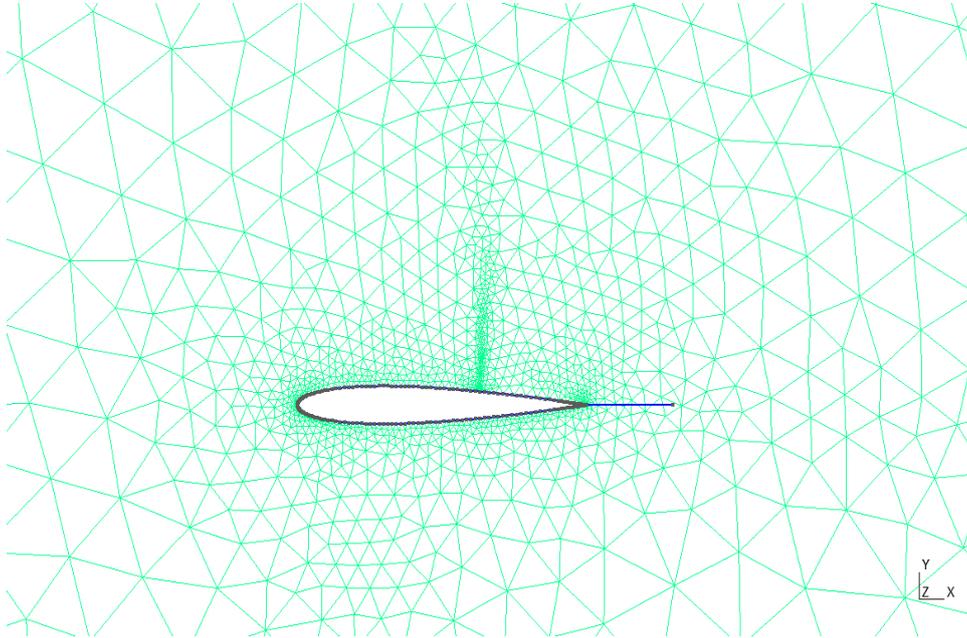


Figura 4.11: Griglia aggiunti, II giro

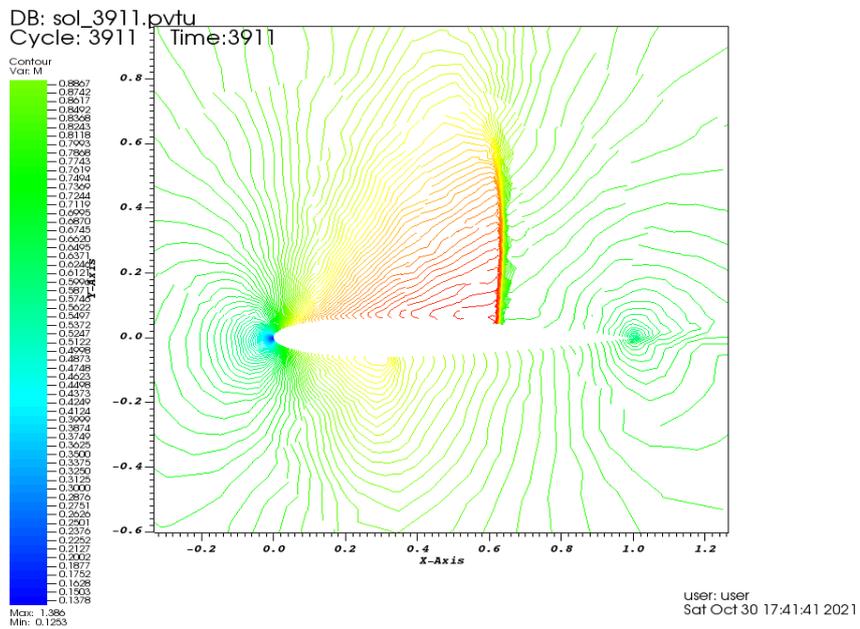


Figura 4.12: Linee iso-Mach, griglia residui II giro

## 4.1 Rigenerazione griglia

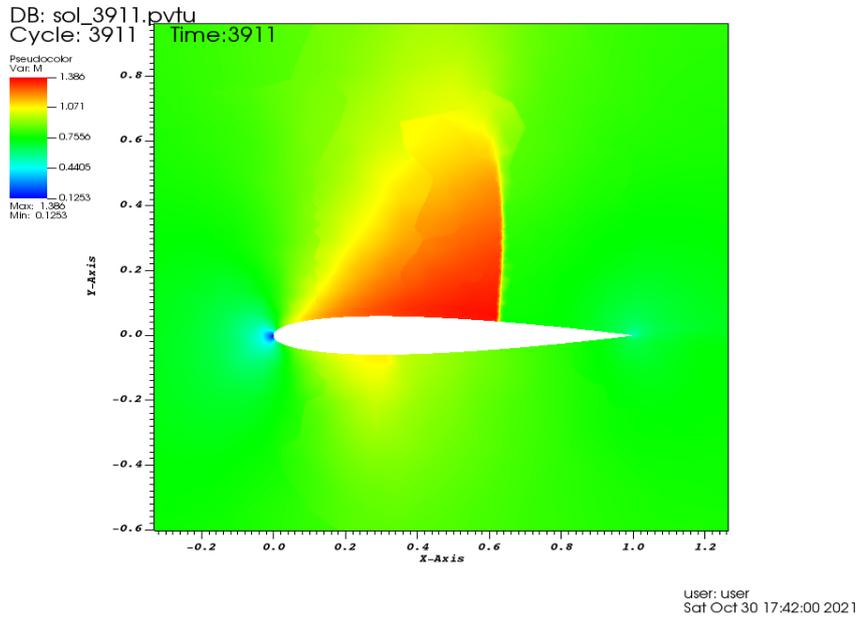


Figura 4.13: Campo Mach, griglia residui II giro

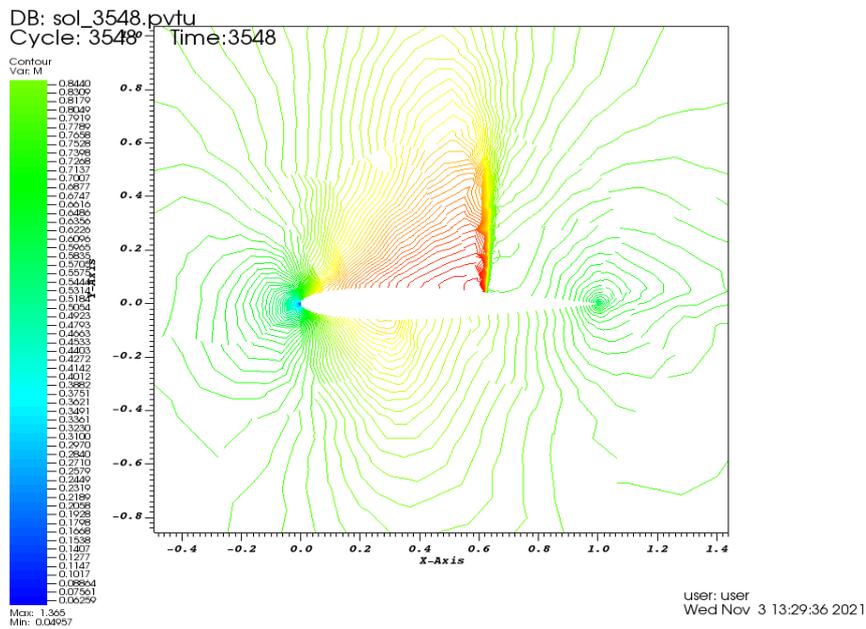


Figura 4.14: Linee iso-Mach, griglia aggiunti II giro

## 4.1 Rigenerazione griglia

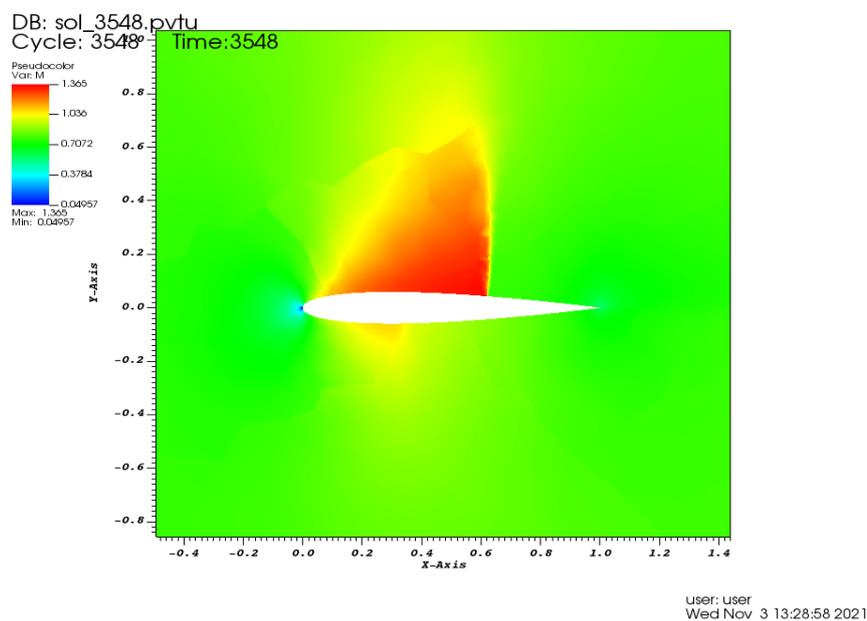


Figura 4.15: Campo Mach, griglia aggiunti II giro

<i>Griglia</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
Gradienti	0.025	-0.5	0.1
Residui(I)	0.01	-0.4	<i>x</i>
Aggiunti(I)	0.007	-0.65	<i>x</i>
Residui(II)	0.015	-0.38	0.1
Aggiunti(II)	0.01	-0.65	0.1

Tabella 4.1: Coefficienti funzione correzione

<i>Griglia</i>	<i>Nodi</i>	<i>Res</i>	$C_L$	$C_D(\times 10^{-2})$
Grezza	23018	6.9e-06	0.32501131861474730	2.2992122250459039
Gradienti	9581	9.91e-06	0.33986864254080845	2.1894259044104979
Residui(I)	3065	3.96e-06	0.31295428806240688	2.2450368139020772
Aggiunti(I)	3087	9.91e-06	0.33390409757864903	2.3423745800274641
Residui(II)	4546	9.91e-06	0.33433942881807871	2.2818099622798866
Aggiunti(II)	2211	9.91e-06	0.31740473517122086	2.2943927660784222

Tabella 4.2: Risultati numerici rigenerazione

## 4.2 Spostamento nodi

La seconda strategia utilizzata per l'adattamento della griglia è quella dello spostamento dei nodi, in modo da alterare la dimensione degli elementi senza rigenerare interamente la griglia. In particolare si individuano i nodi nei quali è massimo l'indicatore d'adattamento (residuo o residuo pesato) e si avvicinano i nodi ad esso accoppiati. I nodi di bordo vengono mantenuti fissi ed è scelta per l'adattamento una quota fissa (*fixed fraction*) di nodi pari al 10% del numero di nodi totali della griglia base. Questa strategia ha il vantaggio di essere facilmente implementabile e di mantenere costante il numero di nodi della mesh, tuttavia è fortemente dipendente dalla griglia iniziale e molto lenta nell'adattare la stessa, a causa della limitazione sullo spostamento dei nodi che, qualora eccessivo, potrebbe generare sovrapposizioni tra gli elementi. L'applicazione è dunque preferibile su delle griglie già inizialmente adattate come seconda iterazione, o su griglie grezze uniformi; perciò in questa sezione verranno riportati i risultati ottenuti utilizzando come griglie di base quelle ricavate dalla rigenerazione descritta nella relativa sezione (figure 4.2-4.3)

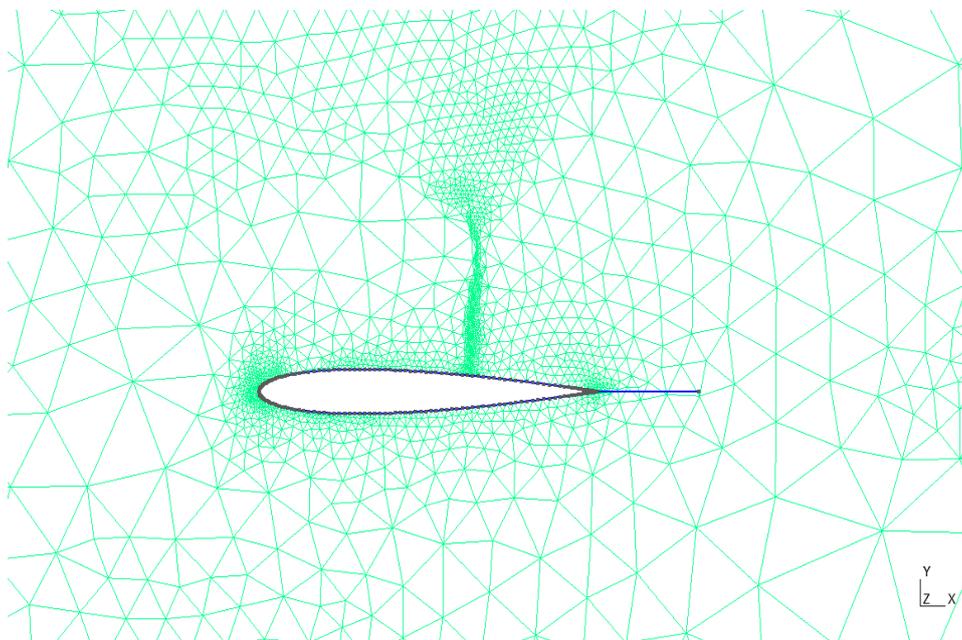


Figura 4.16: Griglia spostamento: base residui, indicatore residui

## 4.2 Spostamento nodi

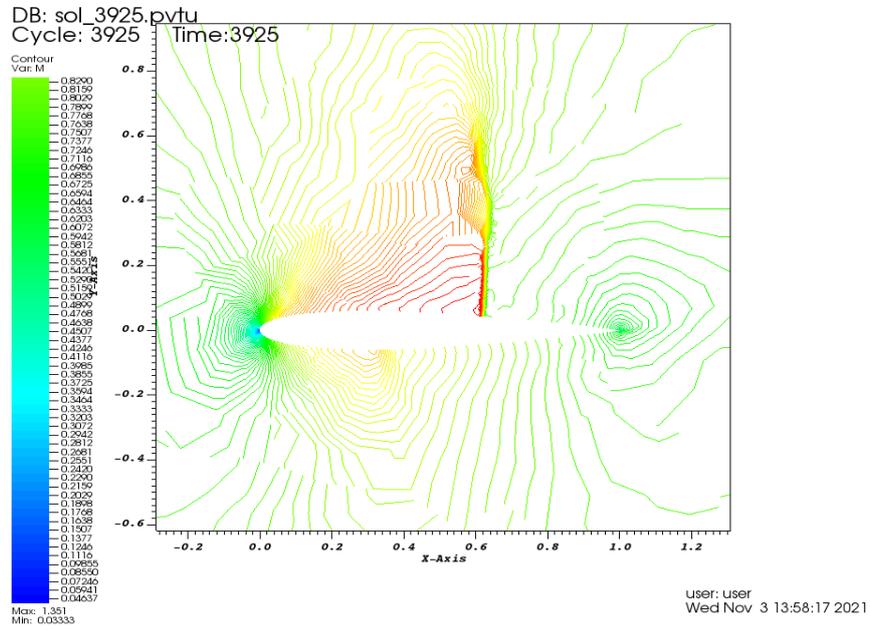


Figura 4.17: Linee iso-Mach: base residui, indicatore residui

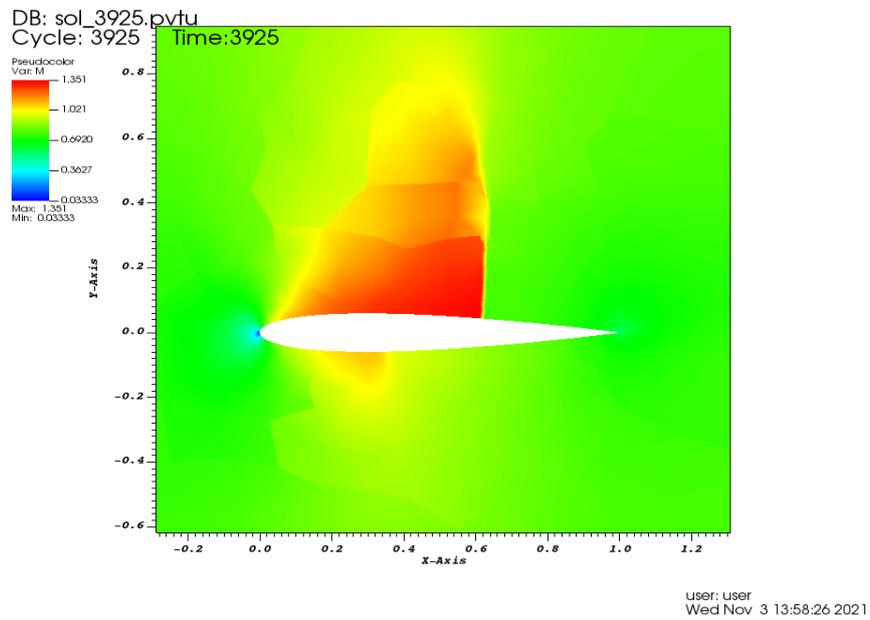


Figura 4.18: Campo Mach: base residui, indicatore residui

## 4.2 Spostamento nodi

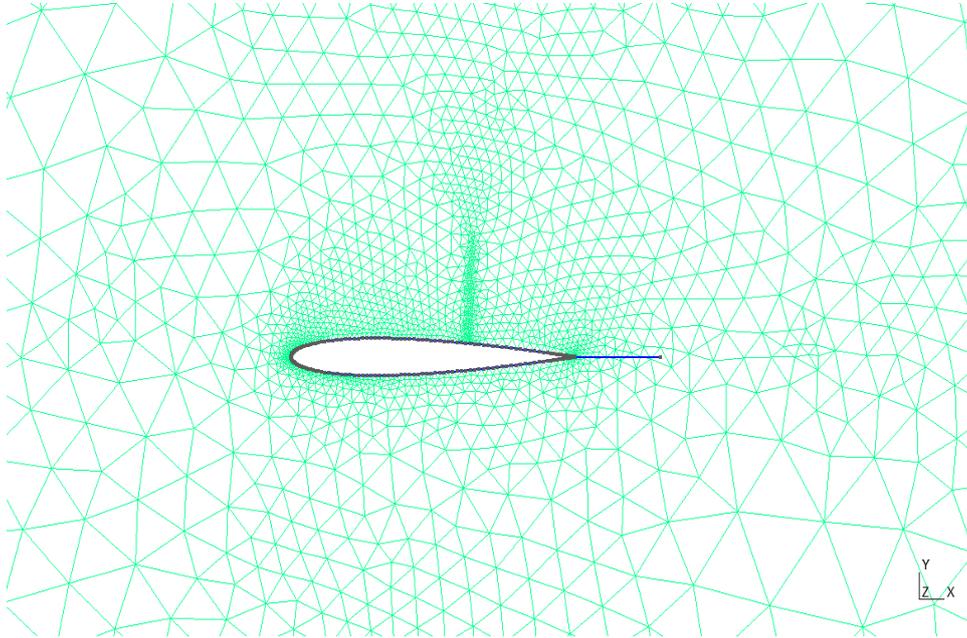


Figura 4.19: Griglia spostamento: base aggiunto, indicatore aggiunto

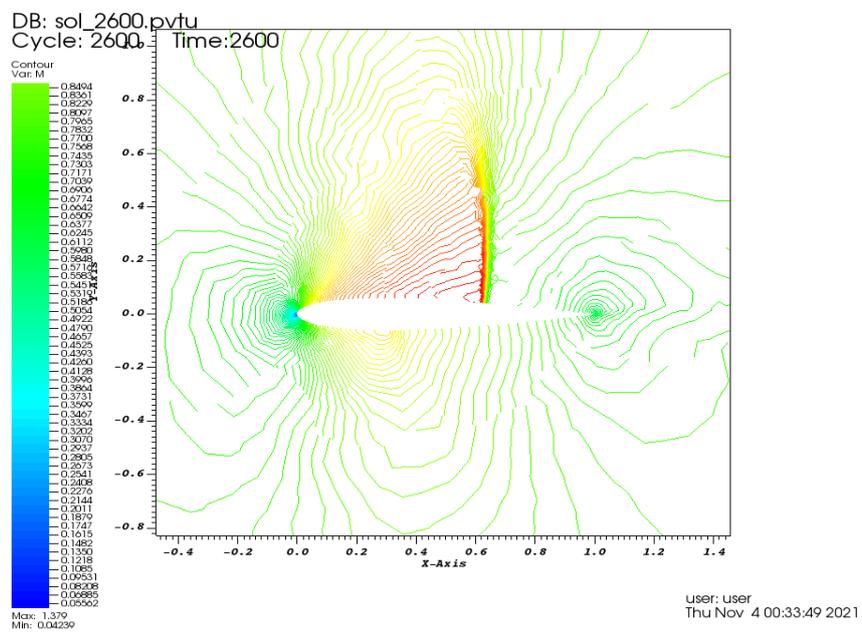


Figura 4.20: Linee iso-Mach: base aggiunto, indicatore aggiunto

## 4.2 Spostamento nodi

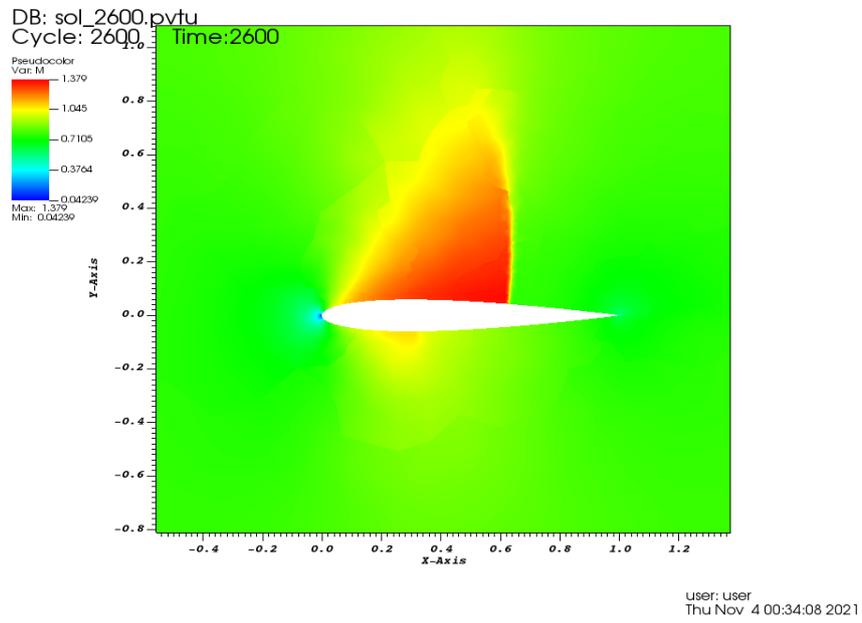


Figura 4.21: Campo Mach: base aggiunto, indicatore aggiunto

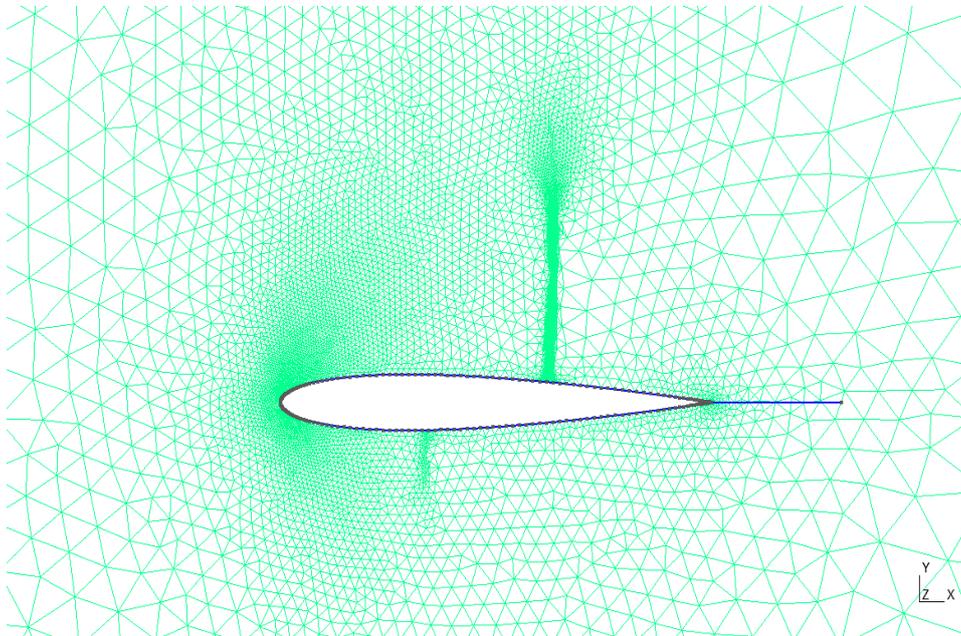


Figura 4.22: Griglia spostamento: base gradiente, indicatore gradiente

## 4.2 Spostamento nodi

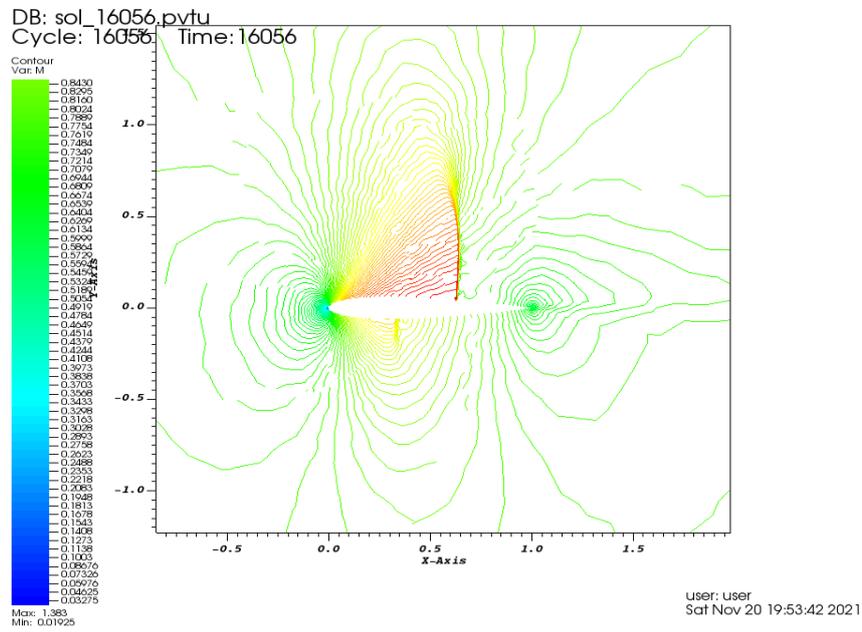


Figura 4.23: Linee iso-Mach: base gradiente, indicatore gradiente

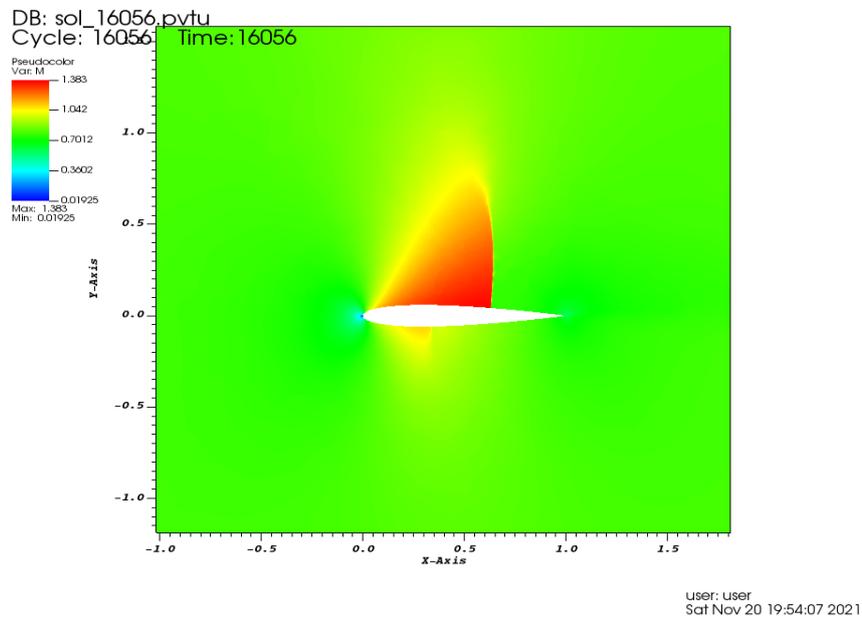


Figura 4.24: Campo Mach: base gradiente, indicatore gradiente

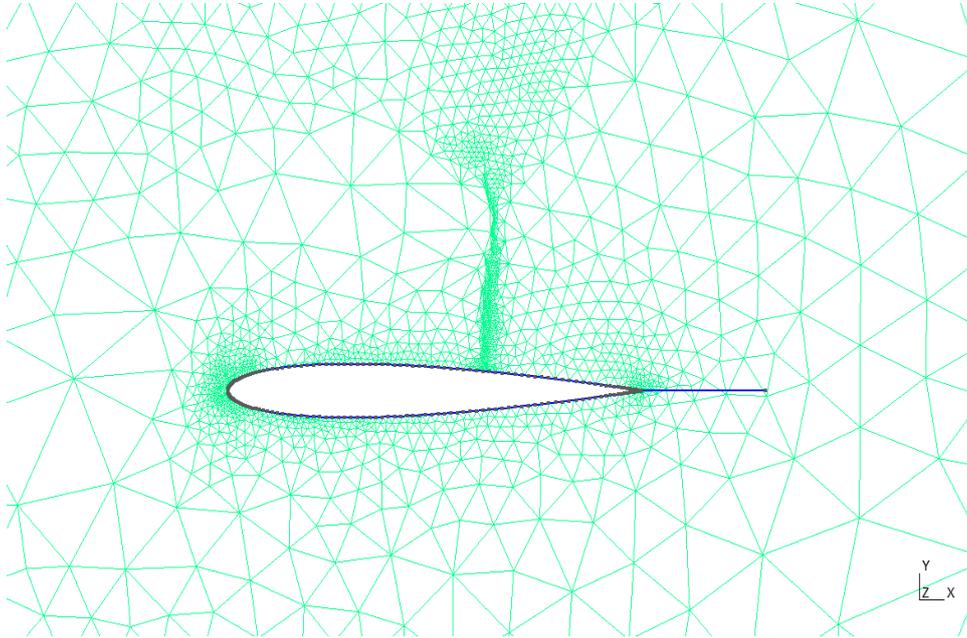


Figura 4.25: Griglia spostamento: base residui, indicatore residui II giro

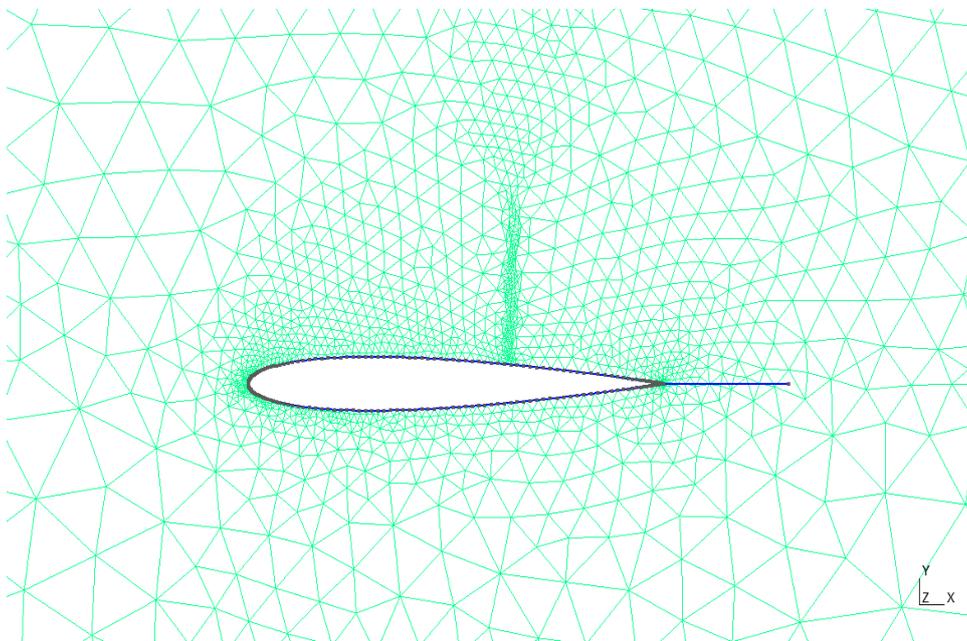


Figura 4.26: Griglia spostamento: base aggiunti, indicatore aggiunti II giro

## 4.2 Spostamento nodi

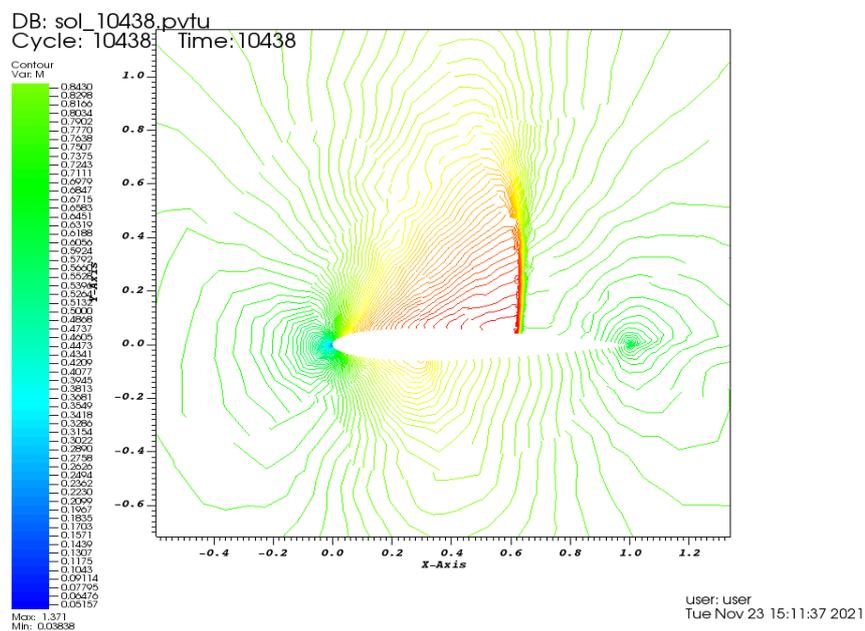


Figura 4.27: Linee iso-Mach: base aggiunto, indicatore aggiunto II giro

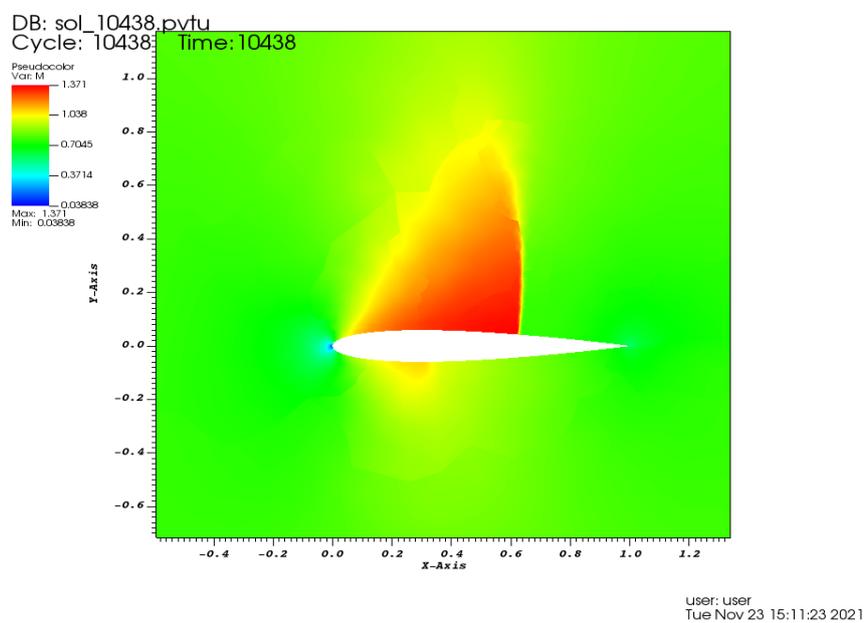


Figura 4.28: Campo Mach: base aggiunto, indicatore aggiunto II giro

## 4.2 Spostamento nodi

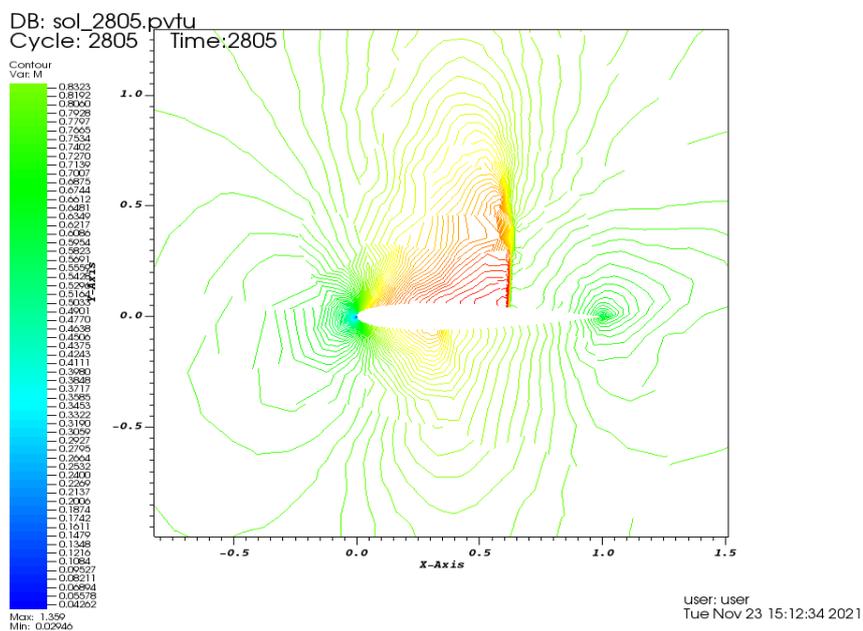


Figura 4.29: Linee iso-Mach: base residui, indicatore residui II giro

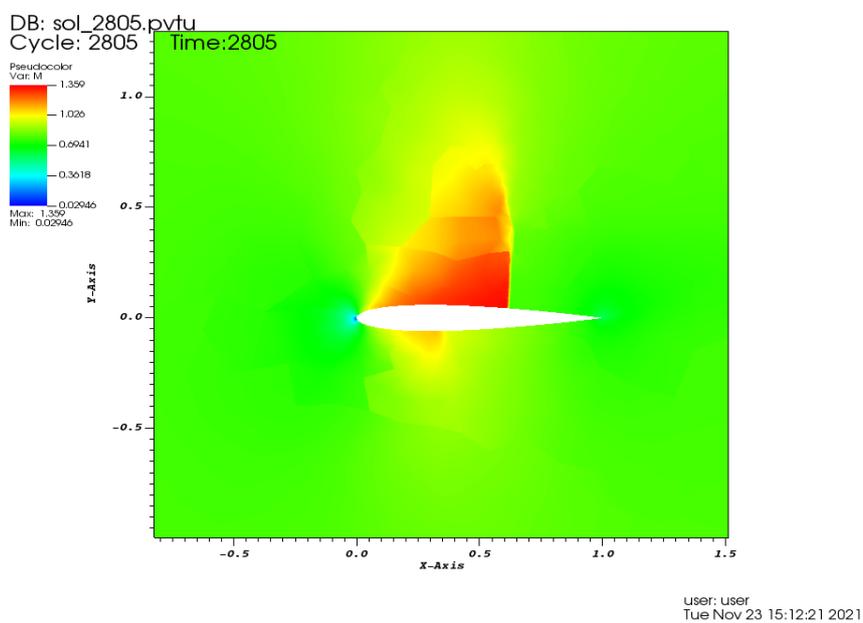


Figura 4.30: Campo Mach: base residui, indicatore residui II giro

### 4.3 Raffinamento locale

Il campo di moto in tutti casi studiati risulta simile a quanto ottenuto nei primi adattamenti; infatti, come descritto precedentemente, la griglia rimane simile a quella di base. Nel caso dei gradienti ci si limita ad una singola iterazione in quanto, già da una successiva ripetizione, gli spostamenti devono essere fortemente ridotti per evitare di generare sovrapposizioni, ottenendo delle variazioni minime rispetto al caso precedente. Il raffinamento locale dovuto allo spostamento dei nodi permette, comunque, di ridurre la diffusione delle discontinuità con un conseguente spessore ridotto degli urti; è infatti in queste zone del dominio che si concentra l'addensamento essendo massimo l'indicatore usato per il raffinamento.

<i>Griglia</i>	<i>Nodi</i>	<i>Res</i>	$C_L$	$C_D(\times 10^{-2})$
Residui(I)	3065	3.96e-06	0.31295428806240688	2.2450368139020772
Aggiunti(I)	3087	9.91e-06	0.33390409757864903	2.3423745800274641
Morph-res(I)	3065	9.64e-06	0.31226732803029017	2.2431895645583642
Morph-adj(I)	3087	8.83e-06	0.33429105951171378	2.3444526906914176
Morph-grad(I)	9581	9.40e-06	0.340599336457459	2.1882919472793610
Morph-res(II)	3065	8.91e-06	0.309624253700158	2.2284332815009526
Morph-adj(II)	3087	3.27e-06	0.33380036258874068	2.3533712021419025

Tabella 4.3: Risultati numerici spostamento

### 4.3 Raffinamento locale

L'ultima strategia utilizzata è quella del raffinamento locale della griglia. Il metodo è simile allo spostamento dei nodi. Anche in questo caso vengono identificate le celle con il valore massimo dell'indicatore, tuttavia, a differenza di quanto fatto precedentemente, non si agisce sulla griglia modificando la posizione dei nodi ma si altera la dimensione degli elementi, dimezzandola dove si individuano i maggiori residui o residui pesati. Per far ciò si utilizza il file *.pos* dal quale sono state prodotte le griglie rigenerate (figure 4.2-4.3) e si alterano i valori scalari dimezzandoli per gli elementi individuati così da raffinare localmente la griglia. Ciò conduce ad un aumento delle dimensioni della mesh e ci si attende un miglioramento della precisione del calcolo. Vengono effettuati, a partire dalle griglie rigenerate, più iterazioni del processo.

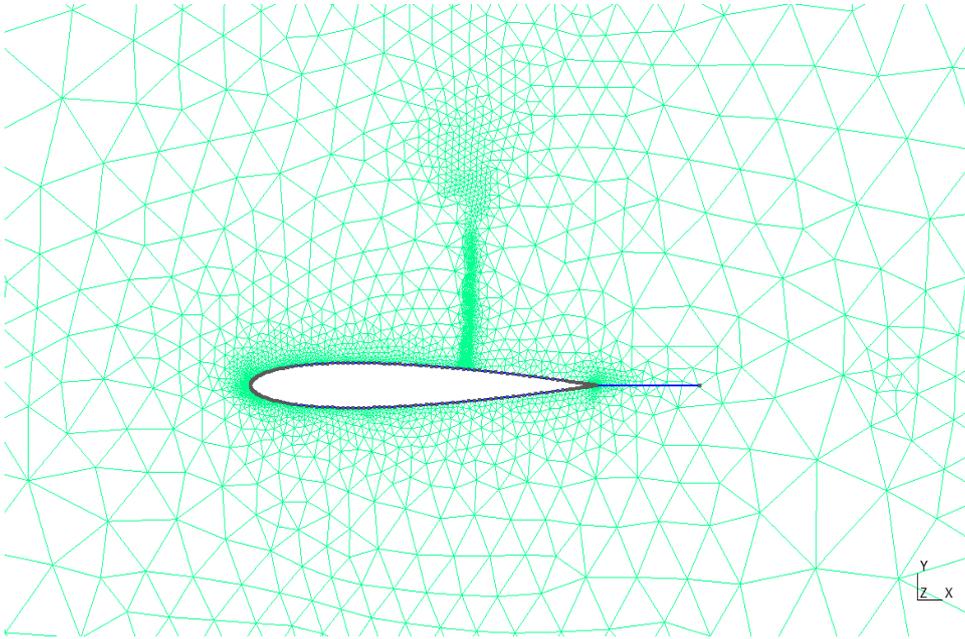


Figura 4.31: Griglia raffinamento aggiunti, primo passo

A differenza del caso precedente questa volta viene scelto il 20% dei nodi con indicatore massimo; poiché la dimensione della griglia aumenta ad ogni iterazione il numero di nodi adattati aumenta di conseguenza ad ogni passo. Vengono ora presentati le griglie e i risultati ottenuti

Il raffinamento locale nel caso dei residui genera una zona poco addensata nella struttura d'urto sul dorso del profilo; ciò può essere dovuto al numero di nodi individuati per il raffinamento e all'algoritmo di generazione usato dal software GMSH (Frontal-Delunay [6]). Ulteriori iterazioni non presentano tale problema e quindi la configurazione viene accettata come primo passo del processo. I risultati del campo di moto sono ovviamente influenzati da ciò, come si evince dalla diffusione dell'urto evidenziata nella figura 4.26.

Il raffinamento nel caso dei gradienti genera una griglia fortemente addensata nella zona di espansione sul dorso del profilo, tuttavia non varia molto la valutazione del  $C_D$  rispetto alla griglia dei gradienti precedentemente ottenuta con metodo rigenerativo.

La seconda iterazione evidenzia forti addensamenti nella zona dell'urto

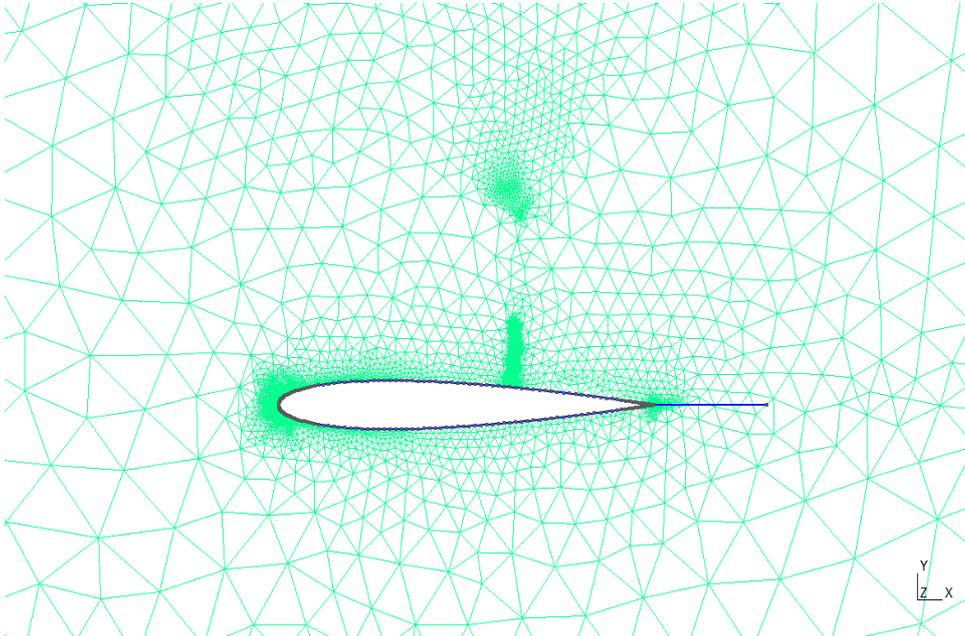


Figura 4.32: Griglia raffinamento residui, primo passo

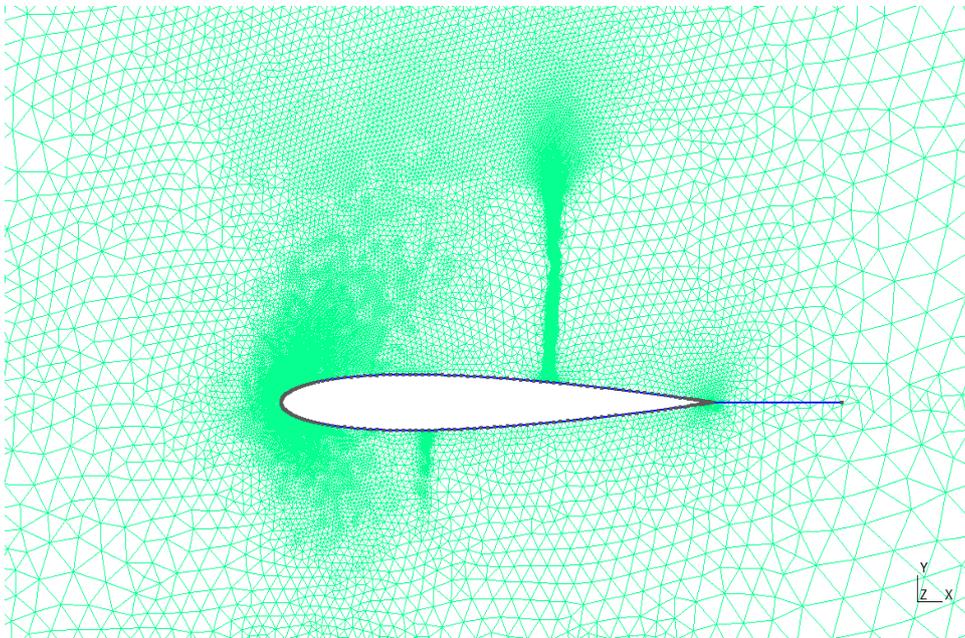


Figura 4.33: Griglia raffinamento gradienti, primo passo

4.3 Raffinamento locale

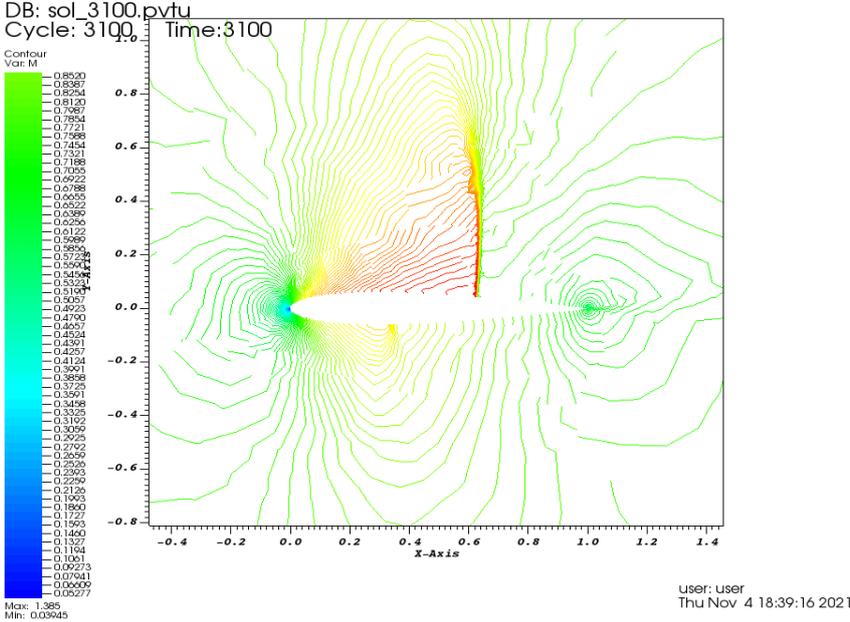


Figura 4.34: Linee iso-Mach: raffinamento aggiunti, primo passo

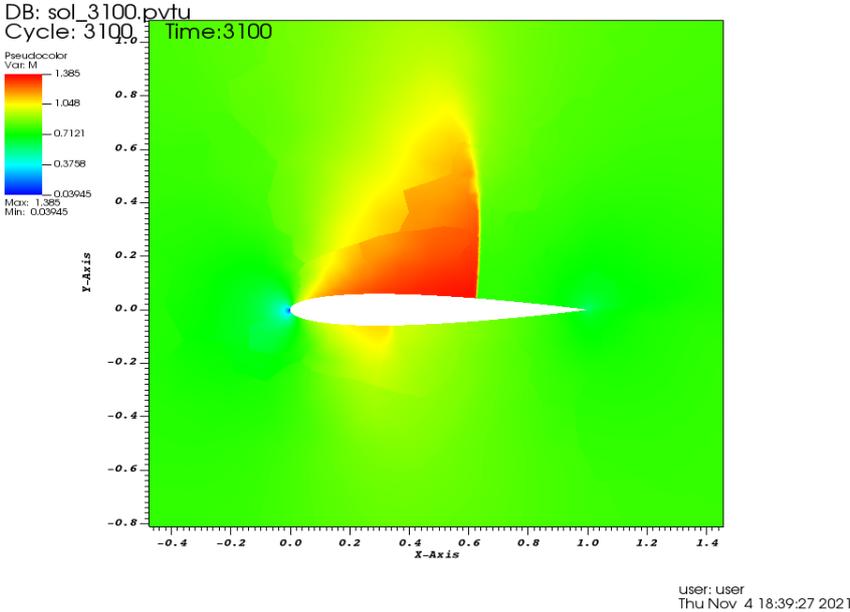


Figura 4.35: Campo Mach: raffinamento aggiunti, primo passo

### 4.3 Raffinamento locale

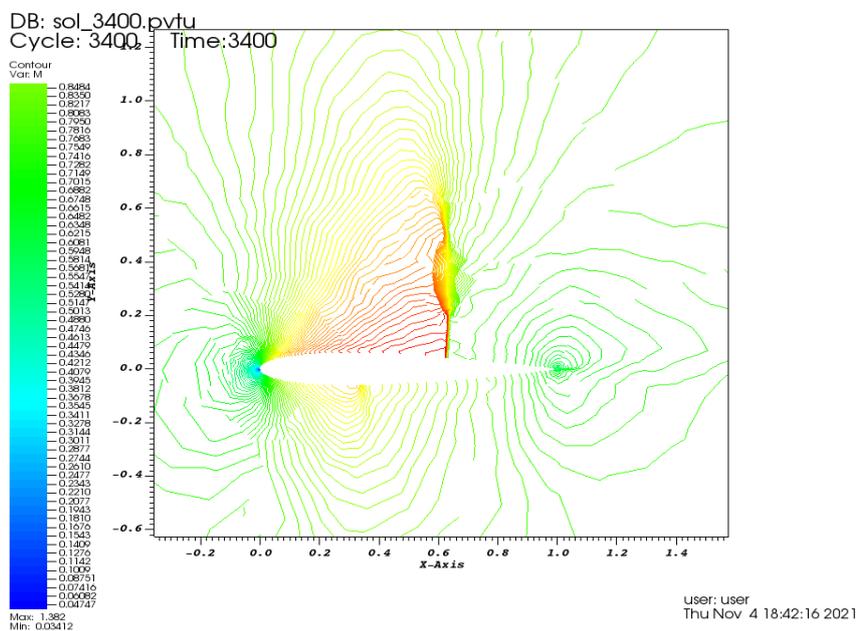


Figura 4.36: Linee iso-Mach: raffinamento residui, primo passo

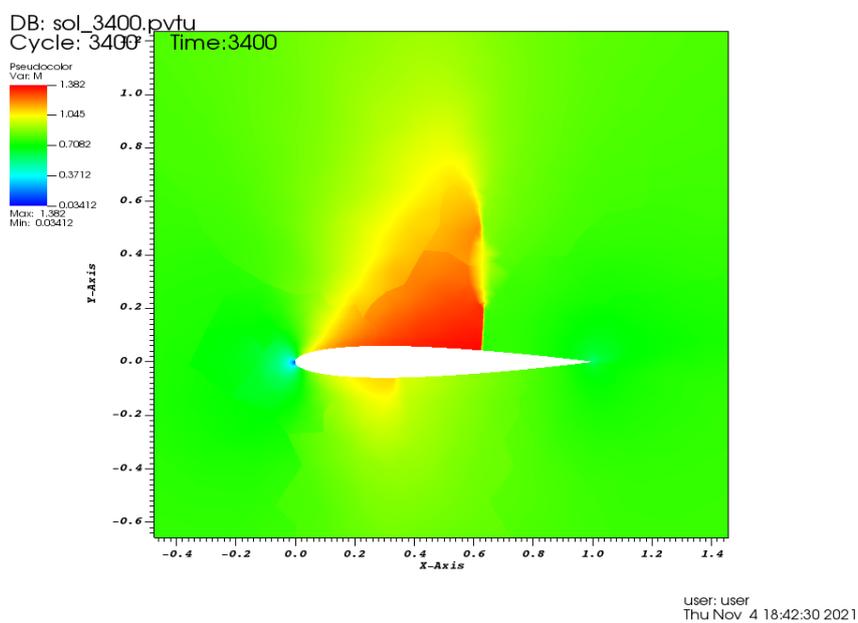


Figura 4.37: Campo Mach: raffinamento residui, primo passo

### 4.3 Raffinamento locale

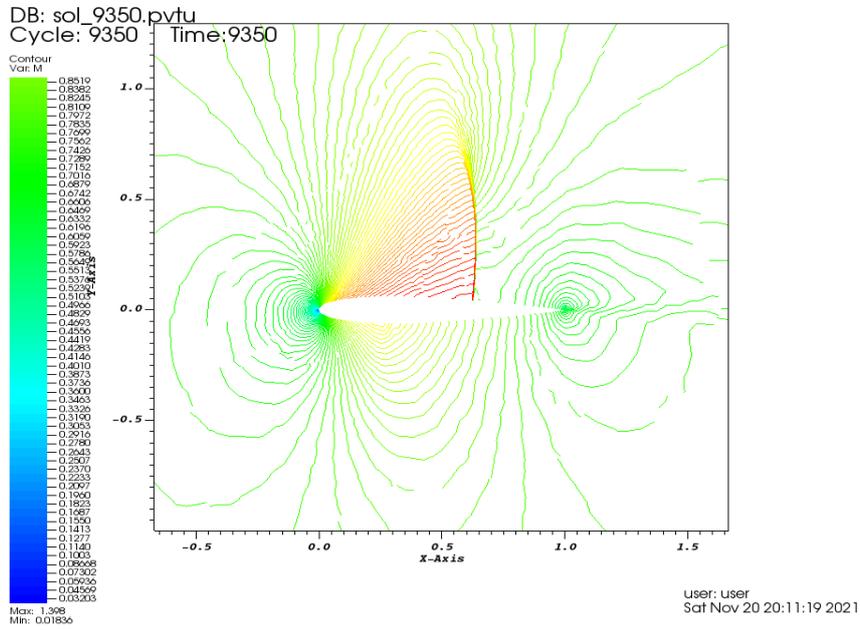


Figura 4.38: Linee iso-Mach: raffinamento gradienti, primo passo

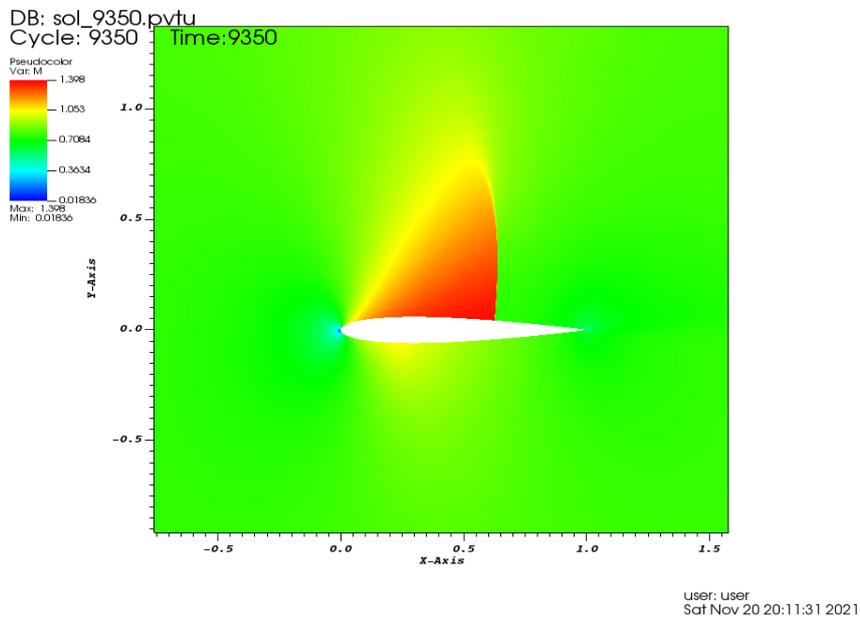


Figura 4.39: Campo Mach: raffinamento gradienti, primo passo

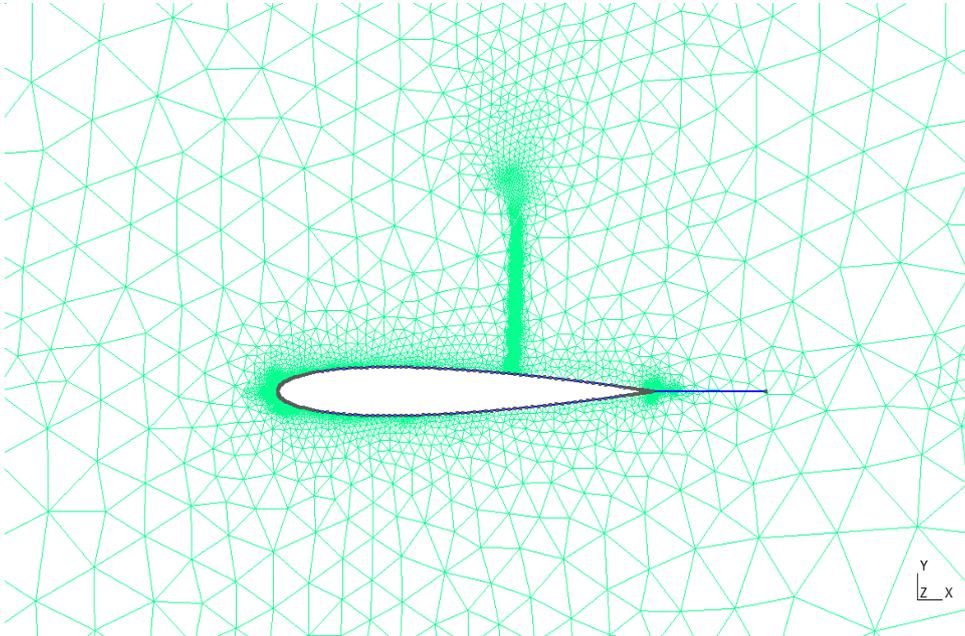


Figura 4.40: Griglia raffinamento aggiunti, secondo passo

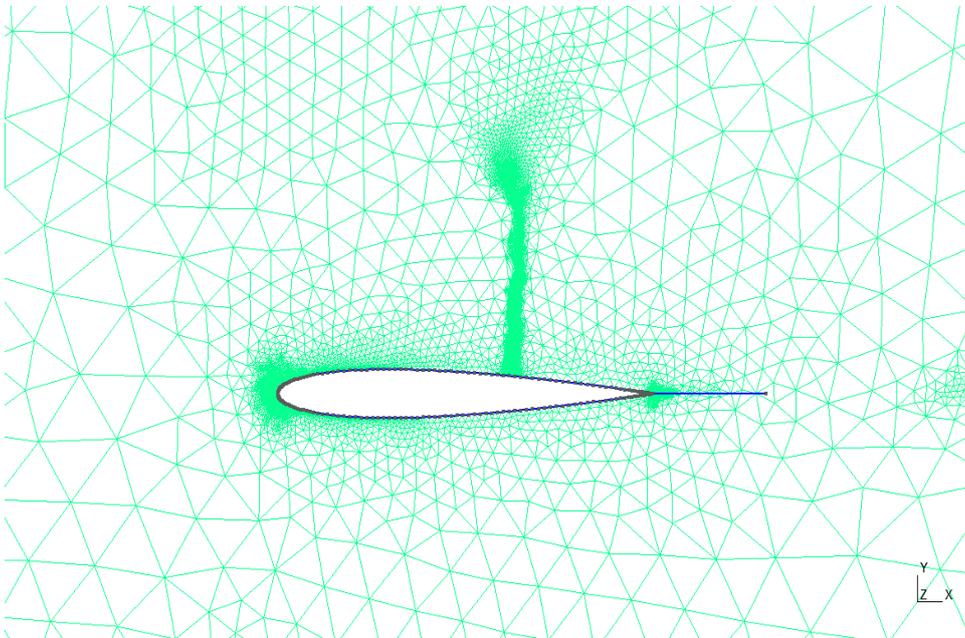


Figura 4.41: Griglia raffinamento residui, secondo passo

### 4.3 Raffinamento locale

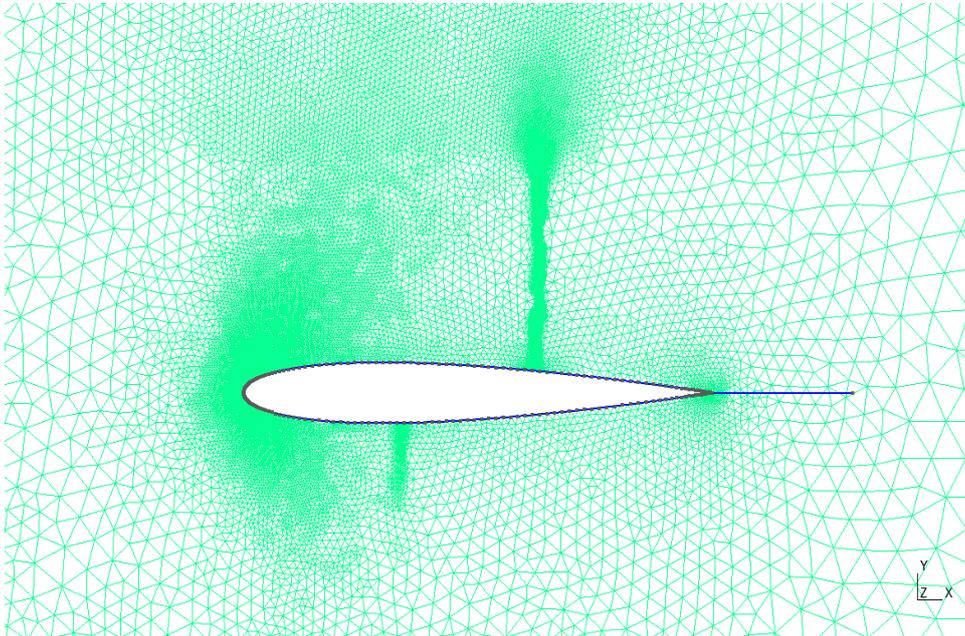


Figura 4.42: Griglia raffinamento gradienti, secondo passo

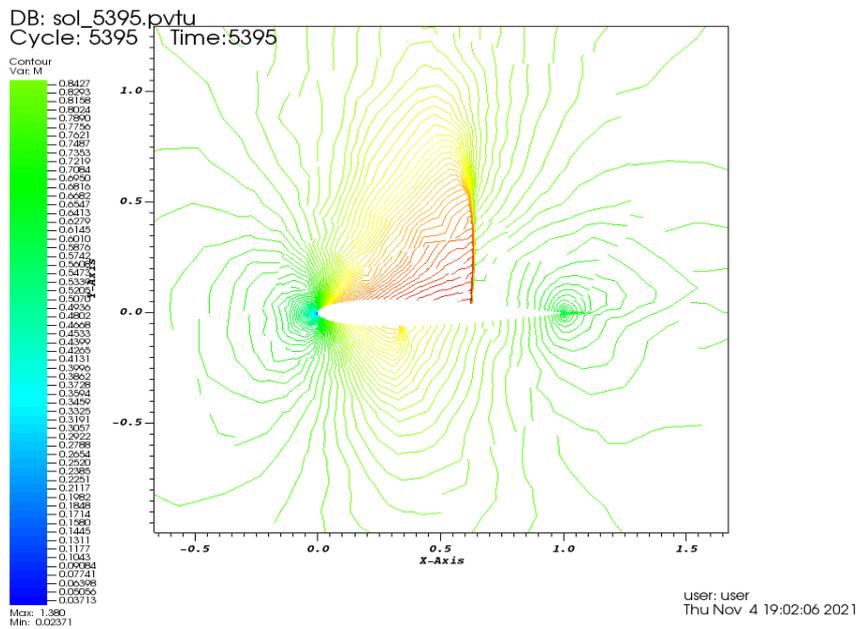


Figura 4.43: Linee iso-Mach: raffinamento aggiunti, secondo passo

### 4.3 Raffinamento locale

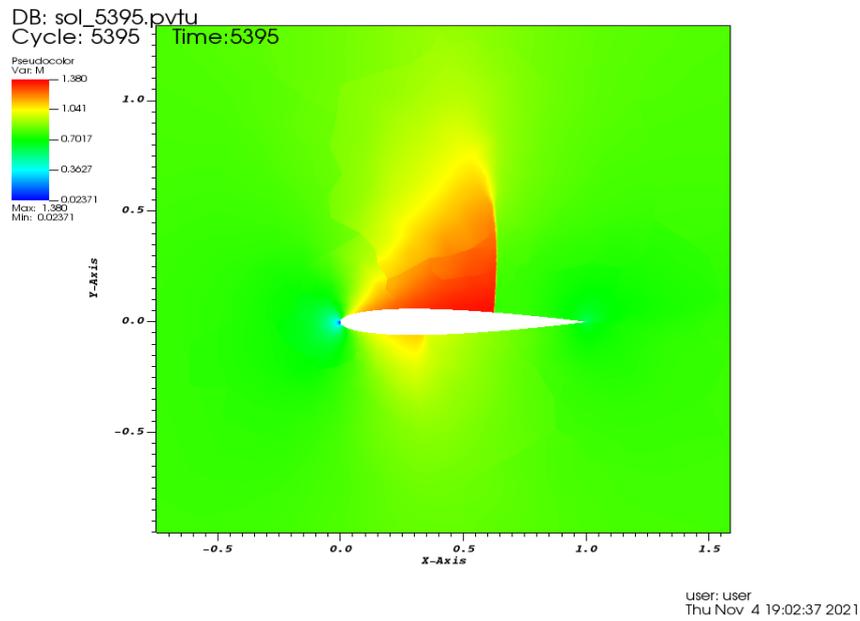


Figura 4.44: Campo Mach: raffinamento aggiunti, secondo passo

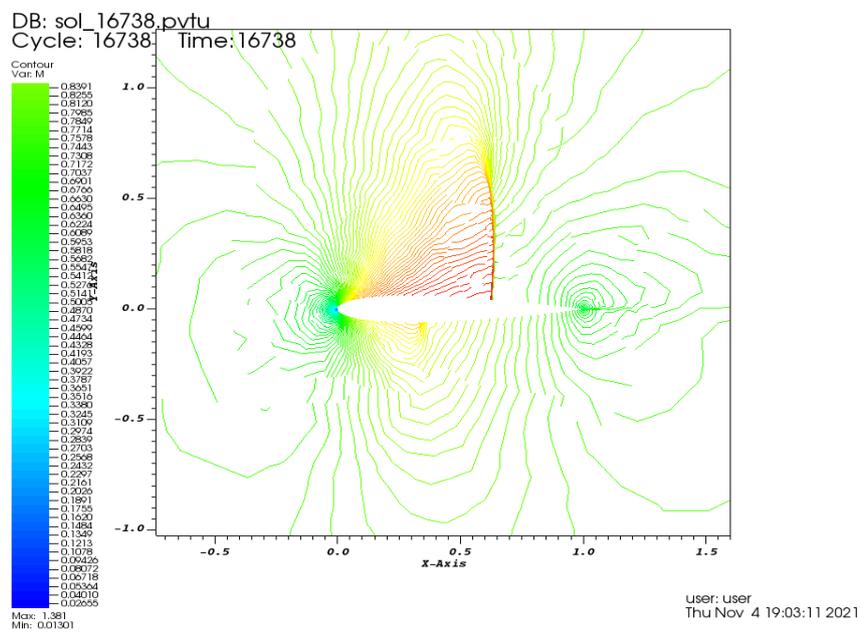


Figura 4.45: Linee iso-Mach: raffinamento residui, secondo passo

### 4.3 Raffinamento locale

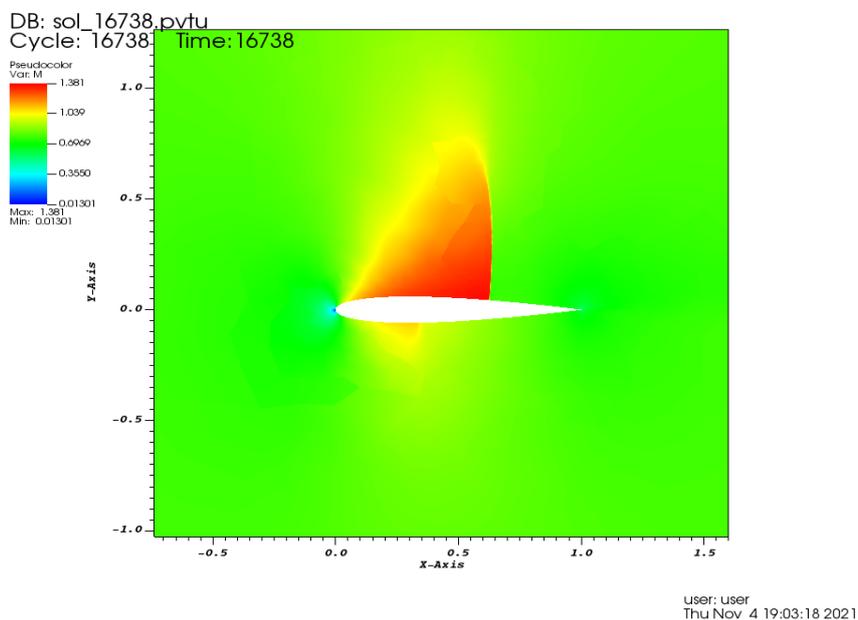


Figura 4.46: Campo Mach: raffinamento residui, secondo passo

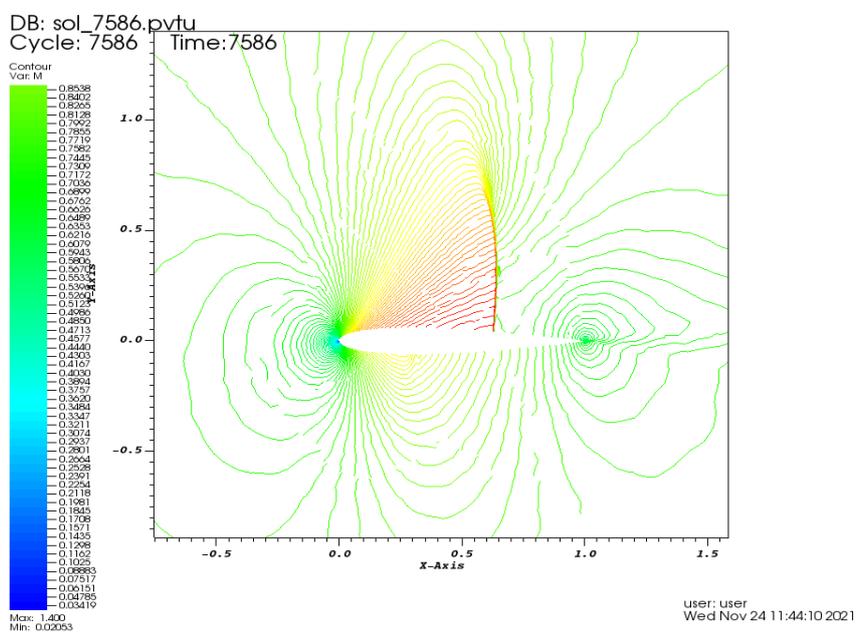


Figura 4.47: Linee iso-Mach: raffinamento gradienti, secondo passo

### 4.3 Raffinamento locale

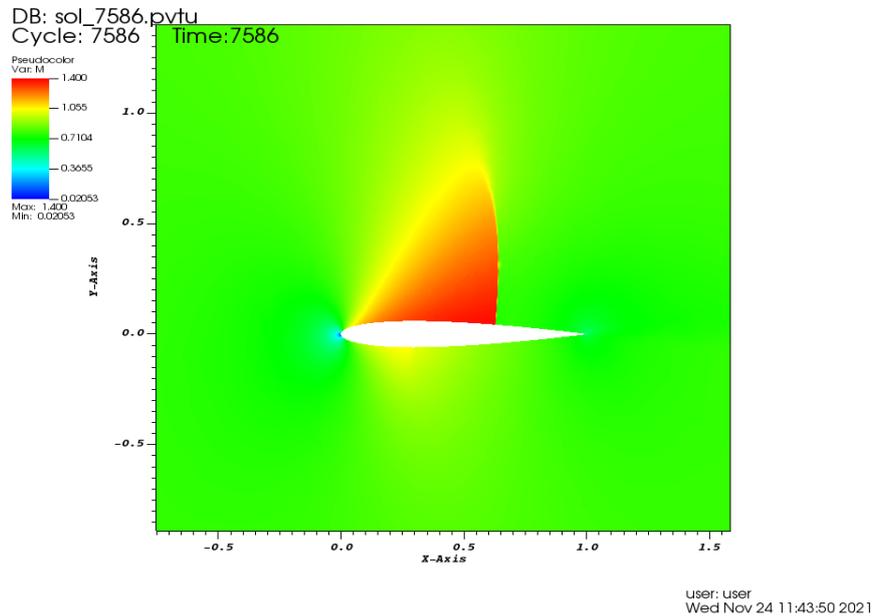


Figura 4.48: Campo Mach: raffinamento gradienti, secondo passo

sul dorso ma anche nell'intorno del bordo d'attacco e di fuga del profilo. L'adattamento con le variabili aggiunte genera, inoltre, un raffinamento maggiore nei pressi della superficie del profilo rispetto ai residui. In entrambi i casi la cattura numerica dell'urto sul dorso è notevolmente migliorata e la diffusione ridotta, così come migliore è la cattura dell'urto sul ventre, soprattutto rispetto ai risultati della rigenerazione (figure 4.6, 4.8). Un'ulteriore iterazione sulla griglia dei gradienti, già di dimensioni notevoli e fortemente raffinata, porta ad un piccolo aumento del numero dei nodi della griglia ed un aumento del valore di  $C_D$ .

### 4.3 Raffinamento locale

---

<i>Griglia</i>	<i>Nodi</i>	<i>Res</i>	$C_L$	$C_D(\times 10^{-2})$
Residui(I)	15300	3.96e-06	0.31295428806240688	2.2450368139020772
Aggiunti(I)	2061	9.91e-06	0.33390409757864903	2.3423745800274641
Gradienti(I)	9581	9.91e-06	0.33986864254080845	2.1894259044104979
Raff-adj(I)	2553	8.92e-06	0.32825391002143534	2.2275319037824346
Raff-res(I)	8983	9.63e-06	0.32715093865816652	2.2932738781603748
Raff-grad(I)	35397	9.75e-06	0.373723876627435	2.1812739013525290
Raff-adj(II)	5395	9.47e-06	0.32246325640514373	2.2101909735376270
Raff-res(II)	16738	9.93e-06	0.32859964764324318	2.2172648381712574
Raff-grad(II)	37881	9.91e-06	0.374666630144807	2.1951592742621769

Tabella 4.4: Risultati numerici raffinamento

## Capitolo 5

# Raccolta risultati

In questo capitolo vengono raccolti e presentati i risultati ottenuti con i diversi adattamenti proposti. In particolare vengono riportati i valori del  $C_D$  in funzione di  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ , dove  $N$  è il numero di punti della griglia. I valori ottenuti vengono confrontati con il valore di  $C_D$  di riferimento  $C_D = 0.02273646$  [7]. Viene scelto come riferimento il  $C_D$  in quanto il sistema delle variabili aggiunte è relativo alla funzione obiettivo resistenza. In questo modo è possibile confrontare le prestazioni dei diversi metodi di adattamento.

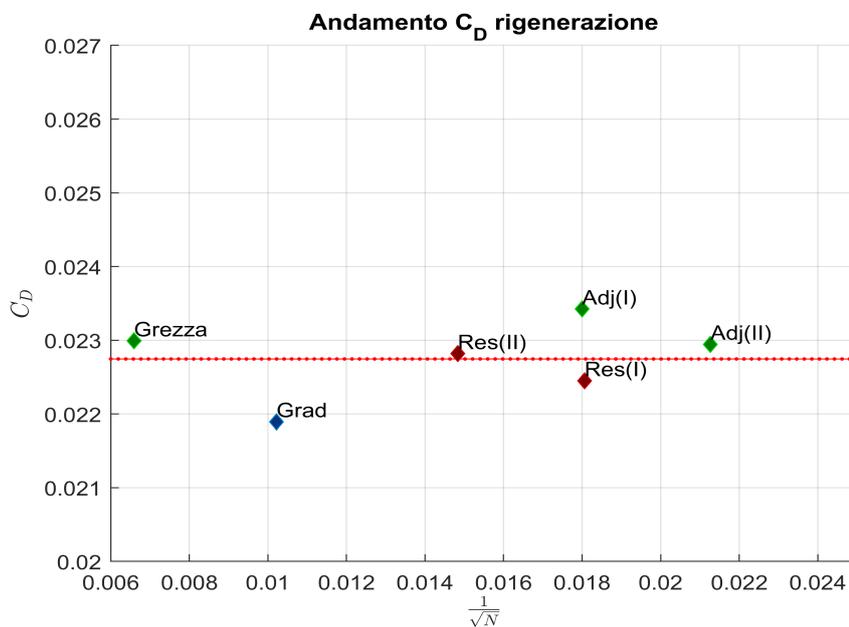


Figura 5.1: Confronto rigenerazione e gradienti

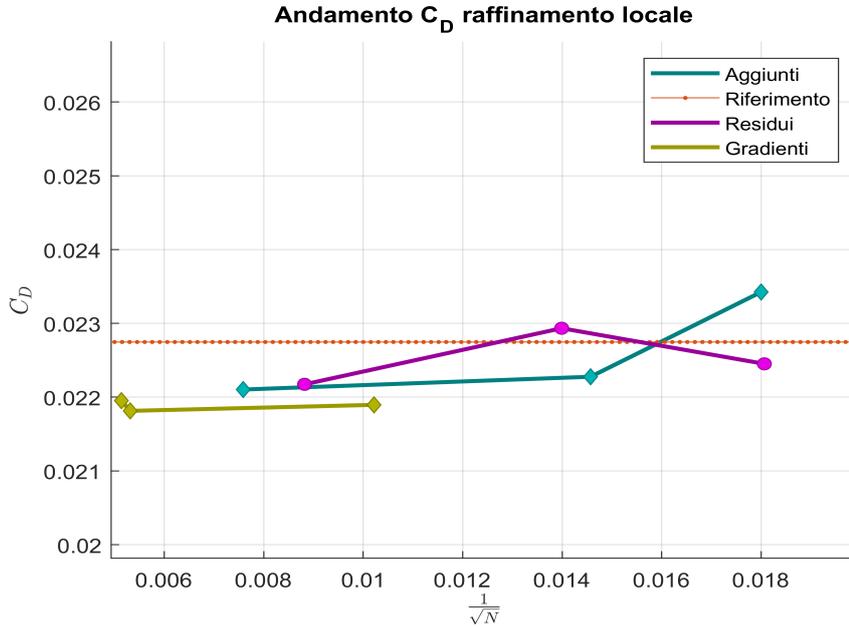


Figura 5.2: Andamento raffinamento

Nella figura 5.1 sono riportati i dati relativi al metodo di rigenerazione e alla griglia adattata secondo i gradienti, confrontati con il valore di riferimento. Si nota, in particolare, il vantaggio nell'utilizzo di un metodo *output based* rispetto a un metodo *features based*; già con una singola rigenerazione, utilizzando i residui come indicatore, si ottiene un valore di  $C_D$  più vicino al riferimento rispetto a quanto ricavato dalla griglia dei gradienti, utilizzando inoltre un numero inferiore di punti. Il valore ottenuto con una prima rigenerazione utilizzando le variabili aggiunte è invece comparabile a quello ottenuto attraverso i gradienti, tuttavia il risultato, anche in questo caso, è ottenuto con un numero di punti di griglia inferiore. Un'ulteriore iterazione del metodo permette di ottenere una precisione ancora maggiore; nel caso dei residui ciò avviene con un aumento delle dimensioni della griglia mentre nel caso delle variabili aggiunte con una riduzione del numero di punti della mesh e, conseguentemente, del costo computazionale richiesto per il calcolo.

In figura 5.2 sono riportati i dati relativi al raffinamento locale e l'andamento all'aumentare del numero di nodi  $N$ ; si nota come, a partire dalle griglie inizialmente rigenerata, un aumento dei nodi con dimezzamento locale porti ad una riduzione di  $C_D$  con tutti gli indicatori, con valori che si attestano leggermente al di sotto del riferimento e con un numero di punti

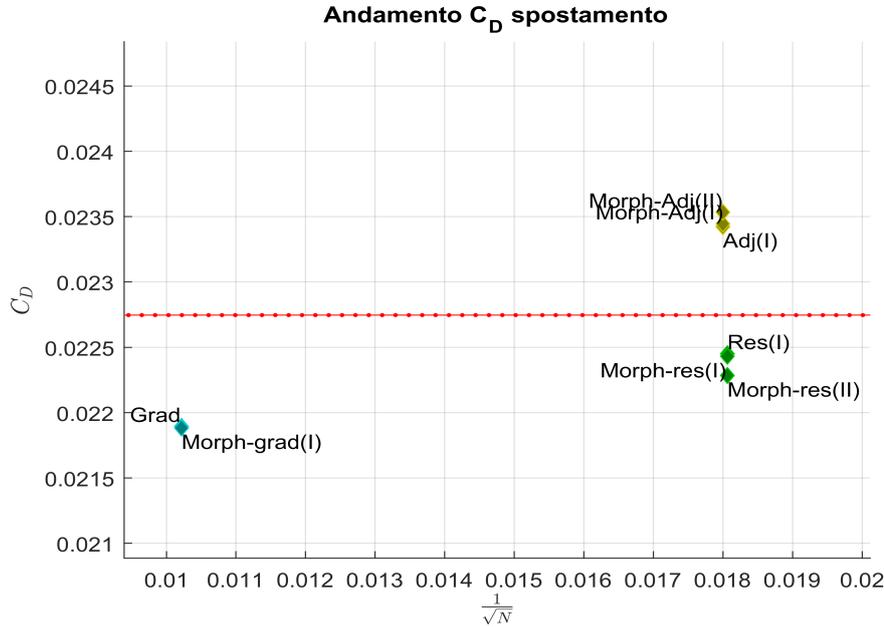


Figura 5.3: Andamento spostamento

maggiore per la seconda iterazione del metodo seguendo l'indicatore delle variabili aggiunte rispetto ai residui, mentre nel caso dei gradienti si nota una piccola variazione del coefficiente di resistenza. In tutti i casi, tuttavia, un raffinamento delle griglie rigenerate non sembra migliorare la precisione del calcolo e dunque aumentare il numero di nodi della griglia non porta ad una situazione più vantaggiosa rispetto all'adattamento eseguito attraverso la prima strategia.

L'ultima strategia relativa allo spostamento dei nodi è riportata nelle figure 5.3, 5.4 e 5.5; anche in questo caso dopo una singola iterazione non si evidenziano miglioramenti rispetto al metodo rigenerativo, tuttavia vengono mantenute inalterate le dimensioni della griglia. Una seconda iterazione porta, per tutti gli indicatori, ad un allontanamento dei valori del  $C_D$  rispetto al riferimento, con valori simili ai risultati dell'iterazione precedente.

Per completare l'analisi dei risultati è importante considerare le condizioni al bordo imposte al problema; nel riferimento [[7]], dal quale è estrapolato il valore di  $C_D$  per il confronto, le condizioni di bordo sulla corrente indisturbata ad infinito vengono poste ad una distanza di 1000 corde (corda unitaria). Nel caso di studio si è invece utilizzato un bordo del dominio

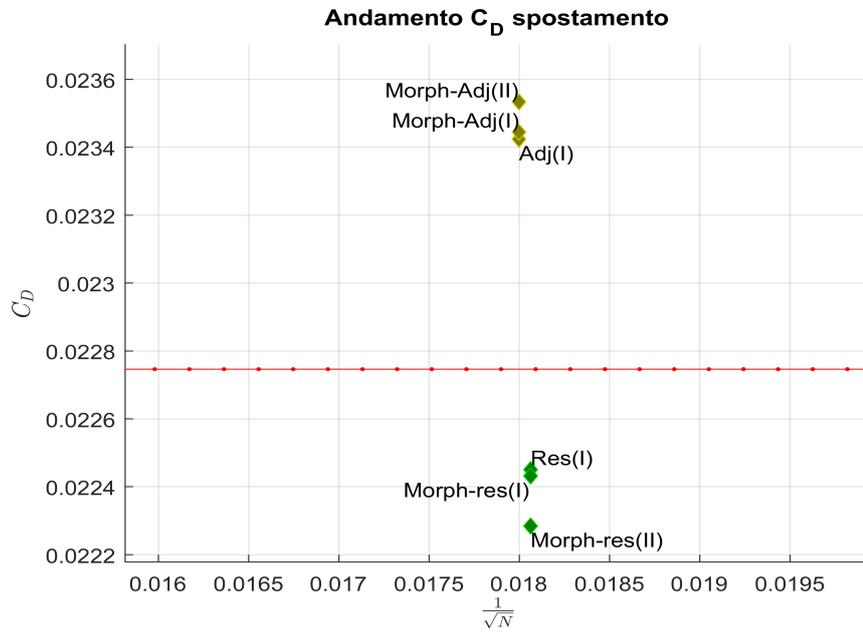


Figura 5.4: Andamento spostamento, dettaglio aggiunti-residui

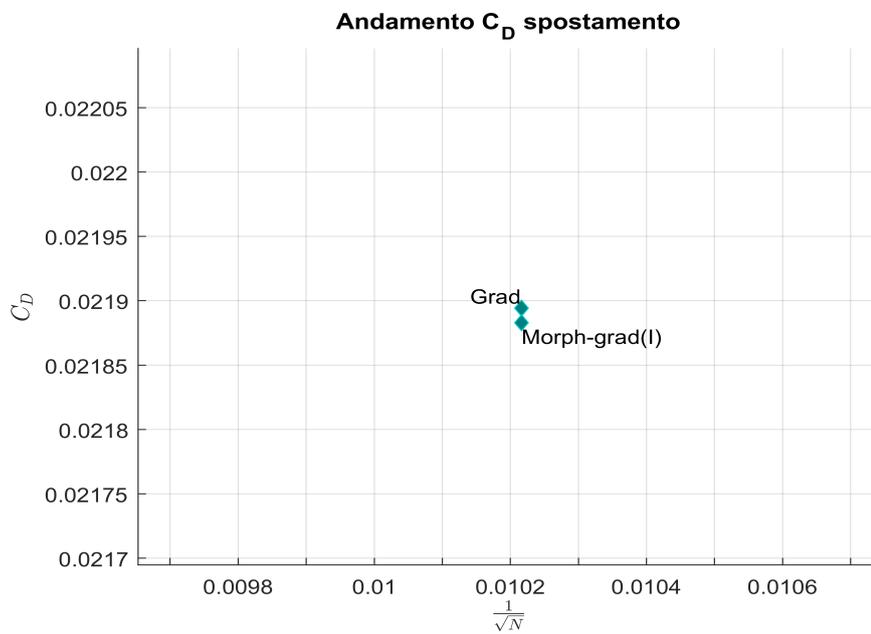


Figura 5.5: Andamento spostamento, dettaglio gradienti

posto ad una distanza di 20 corde. Nel caso transonico in esame la zona del dominio subsonica a monte del profilo è influenzata dalla presenza del corpo stesso (zona ellittica del campo) e, poiché non è materialmente possibile individuare una distanza infinita dal corpo dove definire le condizioni di flusso indisturbato, è necessario imporre le stesse ad una distanza finita dal corpo introducendo un'approssimazione in quanto, nel bordo del dominio, le condizioni del flusso sono, in realtà, già influenzate dal profilo. Aumentare la distanza dal corpo migliora sicuramente l'approssimazione ma aumenta le dimensioni della griglia. La differenza tra i risultati ottenuti dopo gli adattamenti della griglia e il valore di riferimento può essere in parte riconducibile alla definizione delle condizioni al bordo.

## Capitolo 6

# Conclusioni

Alla luce dei risultati ottenuti l'applicazione della strategia rigenerativa risulta essere la più efficace ed evidenzia i vantaggi di un adattamento *output based*; i risultati relativi all'adattamento attraverso le variabili aggiunte sono soddisfacenti e consentono una riduzione delle dimensioni della griglia e dei tempi di calcolo, anche in confronto all'adattamento tramite residui. Tale vantaggio potrebbe essere ancora più evidente applicando l'adattamento a campi di moto e geometrie più complesse.

Le altre strategie applicate non ottengono invece lo stesso successo; l'applicazione dei metodi di raffinamento e spostamento non migliora le prestazioni del calcolo numerico rispetto a quanto ottenuto con la rigenerazione. Applicare dunque un ulteriore raffinamento ad una griglia già inizialmente adattata non risulta conveniente, ma è possibile ipotizzare diversi metodi di applicazione delle strategie di spostamento e raffinamento. In particolare si potrebbe testare l'adattamento attraverso lo spostamento su griglie grezze uniformi, che non abbiano forti addensamenti iniziali come la griglia grezza utilizzata nel caso di studio e che permetta dunque un addensamento locale mantenendo inalterata la dimensione degli elementi nel resto del dominio. Un'applicazione di questo tipo può essere ipotizzata anche nel caso della strategia di raffinamento, tuttavia in questo caso l'implementazione del metodo dovrà essere modificata poiché, nella trattazione proposta, il dimezzamento della dimensione degli elementi è effettuato agendo sul valore scalare relativo alla dimensione degli elementi all'interno del file di *post-processing* in ambiente GMSH e, quindi, sull'output dell'adattamento rigenerativo. Per applicare il dimezzamento locale su una griglia grezza si potrebbe generare

una *background mesh* uniforme creando un apposito file *.pos* o in alternativa variare la metodologia usata per il raffinamento, suddividendo gli elementi attraverso l'aggiunta di nuovi nodi di griglia (*h-refinement*) [8].

Un ulteriore possibile sviluppo del presente lavoro potrebbe essere la modifica della strategia di spostamento dei nodi attraverso una formulazione agli elementi finiti che permetta di calcolare il vettore degli spostamenti nodali in funzione dell'indicatore designato, il quale assume il ruolo di forzante del sistema [9]; ciò permetterebbe di alterare la risposta della mesh variando le caratteristiche di rigidità assegnate e il comportamento dei nodi di estremità che, con le opportune condizioni al bordo, potrebbero essere liberi di muoversi lungo i limiti del dominio.

Oltre alle possibili modifiche delle strategie di adattamento è auspicabile, come già suggerito, l'applicazione del codice a differenti casi di studio in modo da avere una più ampia panoramica delle prestazioni. Si può pensare di modificare la geometria del problema in esame, con lo studio ad esempio di flussi interni o dell'interazione dei profili; si può pensare di variare il modello fluidodinamico utilizzando le equazioni di Navier-Stokes complete introducendo gli effetti viscosi in modo da valutare quali conseguenze questi abbiano sull'adattamento della griglia o ancora introdurre dei modelli di turbolenza con i medesimi obiettivi. Si può modificare il sistema delle variabili aggiunte variando la funzione obiettivo, ad esempio ottimizzando l'adattamento in relazione alla portanza del profilo, o ancora estendere l'implementazione a casi di studio tridimensionali. La numerosità dei possibili casi di studio non permette la trattazione all'interno del presente lavoro ma fornisce ampi margini per lo studio, l'applicazione e lo sviluppo futuro del codice.

# Bibliografia

- [1] Roy, Christopher J., *Strategies for Driving Mesh Adaptation in CFD*, AIAA 2009-1302, 2009.
- [2] Nielsen, Eric J., *Adjoint-Based Algorithms for Adaptation and Design Optimization on Unstructured Grids*, NASA Langley research center, 2005.
- [3] Giles, Michael B. e Pierce, Niles A., *An introduction to the adjoint approach to design*, 2000
- [4] Nielsen, Eric J., *Aerodynamic design sensitivities on an unstructured mesh using the Navier-Stokes equations and a discrete adjoint formulation*, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998
- [5] Ferrero, Andrea, *Computational fluid dynamics for aerospace propulsion systems: an approach based on discontinuous finite elements*, Politecnico di Torino, 2015
- [6] Geuzaine, Christophe e Remacle, Jean-François, *GMSH reference manual*, 2017
- [7] May, Georg e Woopen, Michael, *2nd International Workshop on High-Order CFD Methods. Test Case C1.3: Steady Flow over the NACA0012 Airfoil*, RWTH Aachen, 2013
- [8] May, Georg, Woopen, Michael e Schütz, Jochen, *Adjoint-Based Error Estimation and Mesh Adaptation for Hybridized Discontinuous Galerkin Methods*, RWTH Aachen, 2014
- [9] Frunzulica, Florin, *Adaptive Method Using Controlled Grid Deformation*, INCAS BULLETIN, Volume 3, Issue 3/ 2011

# Appendice A

## Descrizione codice

In questa appendice verranno descritte in maniera più dettagliata le funzioni e le subroutine implementate nel codice di post-processing, a completamento della descrizione presente all'interno dei capitoli relativi alle varie strategie.

### A.1 Subroutine "connect"

Questa subroutine permette la lettura del file *.msh*<sup>1</sup> e di immagazzinare informazioni in esso contenute sui nodi e la relativa posizione, sugli elementi della griglia, sulla loro tipologia e sui nodi che li costituiscono e permette, infine, di salvare una matrice di corrispondenza; quest'ultima specifica per ogni nodo quali sono gli elementi che condividono il nodo stesso. Dopo aver salvato le informazioni sulla posizione dei nodi e sulla connettività elemento-nodi, rispettivamente nelle matrici *mat\_nodi* ed *elementi*, viene verificato quante volte un singolo nodo compare all'interno della matrice *elementi* in modo da valutare quanti elementi condividono quel nodo. Per ogni nodo viene salvato il risultato nel vettore occorrenze. Viene dunque allocata la matrice *corrisp(num\_nodi X max(occorrenze))* che conterrà, per ogni nodo, gli elementi che lo condividono, lasciando nulle le entrate della matrice qualora un generico nodo abbia un numero di elementi condivisi inferiore al massimo delle occorrenze, non avendo i nodi lo stesso numero di elementi che li condividono. Al termine della subroutine viene generato il vettore contenente i baricentri degli elementi attraverso la funzione *bar1* (sezione A.3)

---

<sup>1</sup>Per approfondimenti sui file di griglia si veda [6]

## A.2 Subroutine "sol-read"

Questa subroutine permette la lettura del file di soluzione CFD, salvando i valori delle variabili valutate negli elementi, che serviranno per calcolare le stesse nei nodi. La soluzione viene in questo caso suddivisa in 15 parti, ognuna contenente le informazioni relative ad un sottodominio del campo in esame; viene dunque impostato un ciclo *do* per la lettura di tutte le parti, all'interno del quale vengono effettuate le operazioni di lettura delle variabili e delle matrici  $mat\_nodi\_sol(num\_nodi\_sol \times 3)$  e  $con(num\_cel \times 4)$ , contenenti rispettivamente le posizioni dei nodi e la matrice di connectivity degli elementi presenti nel sottodominio descritto dallo specifico file di soluzione. Vengono salvati, per ogni sottodominio, il numero di punti (nodi) e il numero di celle, oltre ai vettori contenenti i valori delle variabili, ognuno di dimensioni pari al numero di celle. Al termine della subroutine viene generato il vettore contenente i baricentri degli elementi attraverso la funzione *bar2* (sezione A.4) e viene utilizzata la funzione *reord* (sezione A.5)

## A.3 Funzione "bar1"

Questa funzione permette di calcolare i baricentri degli elementi. Vengono forniti in input le matrici delle posizioni dei nodi e la matrice di connectivity elemento-nodo; la funzione fornisce in output la matrice dei baricentri, che contiene le coordinate del baricentro degli elementi in esame. Questa funzione segue gli indici degli elementi relativi al file *.msh* e permette dunque il calcolo della matrice dei baricentri globali  $bar\_global (num\_elementi \times 3)$ .

## A.4 Funzione "bar2"

Questa funzione permette di calcolare i baricentri degli elementi. Vengono forniti in input le matrici delle posizioni dei nodi e la matrice di connectivity elemento-nodo; la funzione fornisce in output la matrice dei baricentri, che contiene le coordinate del baricentro degli elementi in esame. Questa funzione segue gli indici degli elementi relativi al file soluzione e permette dunque il calcolo della matrice dei baricentri locali  $bar\_local (num\_cel \times 3)$ .

## A.5 Funzione "reord"

Questa funzione permette di assegnare ad ogni posizione dei vettori delle variabili globali il valore della soluzione ottenuto dal corrispondente elemento all'interno del file soluzione. La corrispondenza viene verificata attraverso un confronto delle posizioni dei baricentri, ottenute dalle funzioni *bar1* e *bar2*.

## A.6 Subroutine "media"

La subroutine *media* permette di valutare il valore delle variabili sui nodi della griglia. Questi valori saranno poi utilizzati per generare la mappa scalare da usare come background mesh. Ottenuti i vettori globali delle variabili fluidodinamiche e, dunque, il valore della variabile in ogni elemento viene effettuata un'operazione di media sfruttando le informazioni di corrispondenza tra nodo ed elemento fornite dalla subroutine *connect*, in particolare la matrice *corrisp* e il vettore *occorrenze*.

## A.7 Subroutine "Scrittura\_pos"

La subroutine *Scrittura\_pos* permette la scrittura dei file .pos usando le variabili nodali precedentemente calcolate. La struttura di tali file è riportata in figura 2.1. Il file è semplicemente costituito da una serie di vettori costituiti da una sigla che identifica la tipologia di elemento, le coordinate dei nodi che lo costituiscono e i valori scalari associati a quei nodi; questi sono estrapolati dai valori nodali calcolati in *media*. Per individuare le tipologie di elemento si fa uso degli indici salvati nella subroutine *connect*.

## A.8 Subroutine "norma"

La subroutine *norma* permette di effettuare la correzione delle variabili nodali in modo da generare un campo scalare da utilizzare come *background mesh* in GMSH. In questa sezione viene calcolata la norma dei residui relativi alle variabili fluidodinamiche  $Q$  (sezione 2.2) e la norma dei residui pesati con le rispettive variabili aggiunte, così da ottenere un singolo indicatore con il quale raffinare la griglia. Viene poi applicata la funzione di

correzione (equazione 4.1) così da generare i vettori contenenti le dimensioni locali della griglia, con i quali effettuare la scrittura dei file *.pos* utilizzando l'implementazione sviluppata nella subroutine *Scrittura\_pos*.

## A.9 Funzione "tbvec"

La funzione *tbvec* permette di individuare i nodi nei quali è massima la variabile di interesse, salvando nel vettore *top* gli indici di tali nodi. La lunghezza di questo vettore è pari a *nodi10*, ovvero il 10% del numero totale di nodi. Alla funzione viene fornito il vettore nodale della variabile, ed ogni elemento di tale vettore viene confrontato con il vettore *res10(nodi10)* inizializzato a zero: se la variabile è maggiore di uno dei valori di *res10* viene individuata la posizione del valore minimo del vettore e in tale posizione viene salvato il valore della variabile in esame. Nella stessa posizione del vettore *top* viene salvato l'indice del nodo.

## A.10 Subroutine "norma10"

Nella subroutine *norma10* si effettua lo spostamento dei nodi. Individuati i nodi da "addensare" si procede sfruttando le matrici *elementi* e *corrisp* calcolate nella funzione *connect* per individuare i nodi collegati al nodo di interesse, i quali saranno spostati in modo da avvicinarli o allontanarli al nodo. Nella matrice *corrisp* si trova la corrispondenza tra un generico nodo e gli elementi che lo contengono: entrando nella riga con indice pari agli elementi del vettore *top* è possibile individuare gli elementi che contengono un nodo *top*; le entrate corrispondenti a tale riga permettono di entrare nella matrice *elementi* e valutare quali nodi costituiscono tali elementi e scorrere gli stessi: se l'entrata della matrice *elementi* che viene valutata non è nulla, cosa che accade se l'elemento non è quadrangolare, non corrisponde al vettore *top* considerato e non appartiene al bordo, ovvero l'elemento considerato non è un elemento 1D, il nodo viene inserito all'interno del vettore dei nodi accoppiati *nodo\_acc* la cui dimensione è due volte il massimo valore delle occorrenze: infatti un generico nodo *top* può essere accoppiato al più a tale numero di nodi. Viene inoltre effettuato un controllo così da evitare di includere più volte un singolo nodo qualora questo fosse condiviso da due elementi. Nel vettore *prom* viene inoltre salvato il numero di nodi accoppiato al

generico top. A questo punto si modificano le coordinate dei nodi accoppiati, generando una nuova matrice delle coordinate nodali *mat\_nodi\_morph*: per ogni nodo accoppiato viene valutata la distanza dal nodo top lungo la coordinata x ed y e un quarto di tale distanza viene aggiunta o sottratta alla coordinata corrispondente del nodo accoppiato, a seconda che questo si trovi a destra o sinistra del nodo top (per la coordinata x), sopra o sotto di esso (per la coordinata y).

### A.11 Subroutine "Raff\_local"

Questa subroutine permette di variare la dimensione degli elementi della griglia agendo sui valori scalari della *background mesh* ottenuta dalla rigenerazione. Dopo aver effettuato il calcolo sulla griglia adattata vengono individuati gli elementi col valore maggiore dei residui o residui pesati attraverso la funzione *tvec\_elem*, la quale è identica alla funzione *tvec*, con la differenza di effettuare i cicli sugli elementi anziché i nodi, in modo da generare il vettore *top* contenente gli indici degli elementi di interesse. Poiché la mappa scalare a cui si fa riferimento per l'adattamento è relativa alla griglia grezza bisogna individuare una corrispondenza tra gli elementi top individuati e i corrispettivi nella griglia grezza, così da individuare in quali nodi effettuare il raffinamento. Per far ciò si va a cercare, per ogni elemento top, l'elemento topologicamente più vicino sulla griglia grezza: per far ciò, si costruisce il vettore *vicino*, della stessa lunghezza di *top*, e si individuano gli elementi di interesse valutando, per ogni elemento top, la distanza del corrispondente baricentro dal baricentro di un generico elemento della griglia iniziale. La distanza minore tra tutti gli elementi della griglia iniziale permette di individuare l'indice del vicino, il quale verrà salvato nel vettore corrispondente. A questo punto vengono modificati i valori dei vettori nodali delle variabili pilota, ovviamente solo nelle posizioni dei nodi appartenenti agli elementi vicini, che possono essere individuati avendo salvato la matrice degli elementi. Il dimezzamento viene effettuato solamente una volta, evitando di dimezzare due volte il valore relativo ad eventuali nodi condivisi da elementi vicini. La funzione termina con la scrittura del file *.pos* contenente la nuova mappa scalare, la quale avrà una struttura analoga a quella del primo raffinamento, ma dei valori raffinati nelle posizioni individuate dal calcolo CFD. Vengono inoltre salvati in file i nuovi vettori nodali

per procedere ad un ulteriore raffinamento, mentre le altre matrici (elementi, baricentri e nodi) non vengono alterate perché fanno sempre riferimento alla griglia iniziale.