



**Politecnico  
di Torino**

**Politecnico di Torino**

Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Aerospaziale

A.a. 2020/2021

Dicembre 2021

Tesi di Laurea Magistrale

# **Ottimizzazione di traiettorie per missioni verso asteroidi**

Relatore:

Prof. Lorenzo Casalino

Candidato:

Emanuele Vinella



# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	2
<b>Elenco delle tabelle</b>	4
<b>1 Introduzione</b>	5
1.1 Classificazione degli asteroidi .....	7
1.2 Esplorazione .....	8
1.3 Asteroid Mining .....	10
1.4 Asteroid Impact Avoidance .....	11
<b>2 Richiami di Meccanica del Volo – Principali manovre ad un impulso</b>	13
2.1 Manovre nel piano dell’orbita .....	13
2.1.1 Aggiustamento degli apsidi.....	13
2.2 Manovre fuori del piano dell’orbita.....	15
2.2.1 Cambiamento del piano orbitale .....	15
<b>3 Ottimizzazione di traiettorie spaziali</b>	17
3.1 Ottimizzazione indiretta.....	18
3.2 Teoria del controllo ottimale .....	18
3.3 Problema differenziale ai limiti .....	23
3.4 Principio del massimo di Pontryagin.....	27

<b>4</b>	<b>Definizione del problema</b>	<b>29</b>
	4.1 Equazioni di stato e variabili aggiunte.....	31
	4.2 Condizioni iniziali .....	34
	4.3 Condizioni al contorno .....	34
	4.4 Soluzione di tentativo .....	35
<b>5</b>	<b>Risultati</b>	<b>37</b>
	5.1 La ricerca di modelli.....	37
	5.1.1 Modello 1: asteroide 2012 BA35 .....	38
	5.1.2 Modello 2: asteroide 2015 VV .....	42
	5.1.3 Caso $\omega = 135^\circ$ per entrambi i modelli.....	45
	5.2 Confronto con il set di asteroidi.....	46
	<b>Conclusione</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>56</b>



## Sommario

L'interesse scientifico negli asteroidi è dovuto maggiormente al loro status di residui rimanenti dal processo di formazione del sistema solare interno. Poiché alcuni di questi oggetti possono collidere con la Terra, gli asteroidi sono importanti per aver modificato in passato, in maniera significativa, la biosfera della Terra e continueranno a farlo in futuro. La conoscenza dettagliata della loro composizione e struttura fornirà importanti informazioni sulla miscela chimica e le condizioni dalle quali la Terra si è formata 4.6 miliardi di anni fa. Inoltre, gli asteroidi potrebbero essere la chiave di come i mattoncini della vita siano stati trasportati sulla Terra.

È altresì importante considerare che gli asteroidi considerati potenzialmente più pericolosi per la Terra sono anche quelli che potrebbero essere più facilmente sfruttati per le materie prime. Gli asteroidi contengono una quantità significativa di materiali di valore, incluso minerali rari e metalli preziosi che possono essere estratti e trasportati sulla Terra per essere venduti. È stato stimato che la ricchezza mineraria residente nella fascia di asteroidi tra le orbite di Marte e Giove sarebbe equivalente a circa 100 miliardi di dollari per ogni persona sulla Terra oggi.

Per questi motivi, fin dagli anni Sessanta, furono vagliate possibilità per l'esplorazione degli asteroidi.

Vista la grande influenza che i consumi di propellente hanno sui costi di una missione spaziale, diventa fondamentale minimizzare la quantità di propellente necessaria alla manovra in modo da massimizzarne il payload. I processi di ottimizzazione delle traiettorie, quindi, rappresentano una metodologia abilitante per risolvere il problema.

# Elenco delle figure

1.1	Gli asteroidi del Sistema solare catalogati in base a dimensione e numero .....	5
1.2	Asteroidi classificati secondo inclinazione ed eccentricità .....	6
1.3	Lacune di Kirkwood – Distribuzione di asteroidi nella Fascia principale in funzione del semiasse maggiore .....	6
1.4	La Fascia principale e gli asteroidi troiani di Giove.....	7
1.2.1	Scoperte di asteroidi conosciuti.....	9
2.1.1	Innalzamento dell'apoastro .....	15
2.1.2	Innalzamento del periastro.....	15
2.2.1	Manovra di cambio del piano orbitale .....	16
5.1.1.1	Orbita di 2012 BA35 .....	38
5.1.1.2	Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per $\omega = 180^\circ$ .....	39
5.1.1.3	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ nelle tre durate per $\omega = 180^\circ$ .....	40
5.1.1.4	Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per $\omega = 90^\circ$ .....	41
5.1.1.5	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ nelle tre durate per $\omega = 90^\circ$ .....	41
5.1.2.1	Orbita di 2015 VV .....	42
5.1.2.2	Andamento del periastro e apoastro nelle quattro durate per $\omega = 180^\circ$ .....	43
5.1.2.3	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ nelle quattro durate per $\omega = 180^\circ$ .....	43
5.1.2.4	Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per $\omega = 90^\circ$ .....	44
5.1.2.5	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ nelle tre durate per $\omega = 90^\circ$ .....	44
5.1.3.1	Andamento del periastro e apoastro per $\omega = 135^\circ$ di 2012 BA35 .....	45
5.1.3.2	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ per $\omega = 135^\circ$ di 2012 BA35 .....	45
5.1.3.3	Andamento del periastro e apoastro per $\omega = 135^\circ$ di 2015 VV .....	46
5.1.3.4	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ per $\omega = 135^\circ$ di 2015 VV .....	46
5.2.1	Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 2015 BM510 .....	47
5.2.2	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ nelle tre durate per 2015 BM510 .....	47
5.2.3	Andamento del periastro e apoastro nelle quattro durate per 2016 VL3 .....	48
5.2.4	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ nelle quattro durate per 2016 VL3 .....	48
5.2.5	Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 2014 SD304 .....	49
5.2.6	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ nelle tre durate per 2014 SD304.....	49
5.2.7	Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 2015 TZ24 .....	50

5.2.8	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ nelle tre durate per 2015 TZ24.....	50
5.2.9	Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 2007 TF15.....	51
5.2.10	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ nelle tre durate per 2007 TF15 .....	51
5.2.11	Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 1996 XB27 .....	52
5.2.12	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ nelle tre durate per 1996 XB27 .....	52
5.2.13	Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 1998 KY26.....	53
5.2.14	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ nelle tre durate per 1998 KY26.....	53
5.2.15	Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 2001 AV43.....	54
5.2.16	Andamento degli angoli $\alpha$ e $\beta$ nelle tre durate per 2001 AV43 .....	54



## Elenco delle tabelle

5.1.1.1	Parametri orbitali di 2012 BA35 con $\omega = 180^\circ$ .....	38
5.1.1.2	Andamento della massa finale nelle tre durate .....	38
5.1.1.3	Parametri orbitali di 2012 BA35 con $\omega = 90^\circ$ .....	40
5.1.1.4	Andamento della massa finale nelle tre durate .....	40
5.1.2.1	Parametri orbitali di 2015 VV con $\omega = 180^\circ$ .....	42
5.1.2.2	Andamento della massa finale nelle quattro durate .....	42
5.1.2.3	Parametri orbitali di 2015 VV con $\omega = 90^\circ$ .....	43
5.1.2.4	Andamento della massa finale nelle tre durate .....	43
5.2.1	Parametri orbitali di 2015 BM510 .....	47
5.2.2	Parametri orbitali di 2016 VL3 .....	48
5.2.3	Parametri orbitali di 2014 SD304 .....	49
5.2.4	Parametri orbitali di 2015 TZ24 .....	50
5.2.5	Parametri orbitali di 2007 TF15.....	51
5.2.6	Parametri orbitali di 1996 XB27.....	52
5.2.7	Parametri orbitali di 1998 KY26.....	53
5.2.8	Parametri orbitali di 2001 AV43.....	54

# Capitolo 1

## Introduzione

Un asteroide è un piccolo corpo celeste simile per composizione ad un pianeta terrestre, generalmente privo di una forma sferica e atmosfera.

Il termine fu coniato per la prima volta nel 1802 dall'astronomo Sir William Herschel e significa dal greco "simile a stella".

Il primo oggetto, Cerere, fu scoperto nel 1801 dall'astronomo italiano Giuseppe Piazzi, direttore dell'Osservatorio astronomico di Palermo. Egli, infatti, scoprì un oggetto simile ad una stella, orbitante nella fascia tra Marte e Giove, e ne seguì lo spostamento durante molte notti. Un anno più tardi, Carl Friedrich Gauss utilizzò queste osservazioni per calcolarne l'orbita.

Nel sistema solare sono già stati numerati e catalogati oltre 600 000 asteroidi e probabilmente altre centinaia di migliaia (alcune stime superano il milione) attendono ancora di essere scoperti. L'asteroide più grande del sistema solare interno è Cerere, con un diametro di 900-1000 km. Al contrario, numerosi oggetti del sistema solare esterno, quali per esempio Eris, sono più grandi di Cerere.

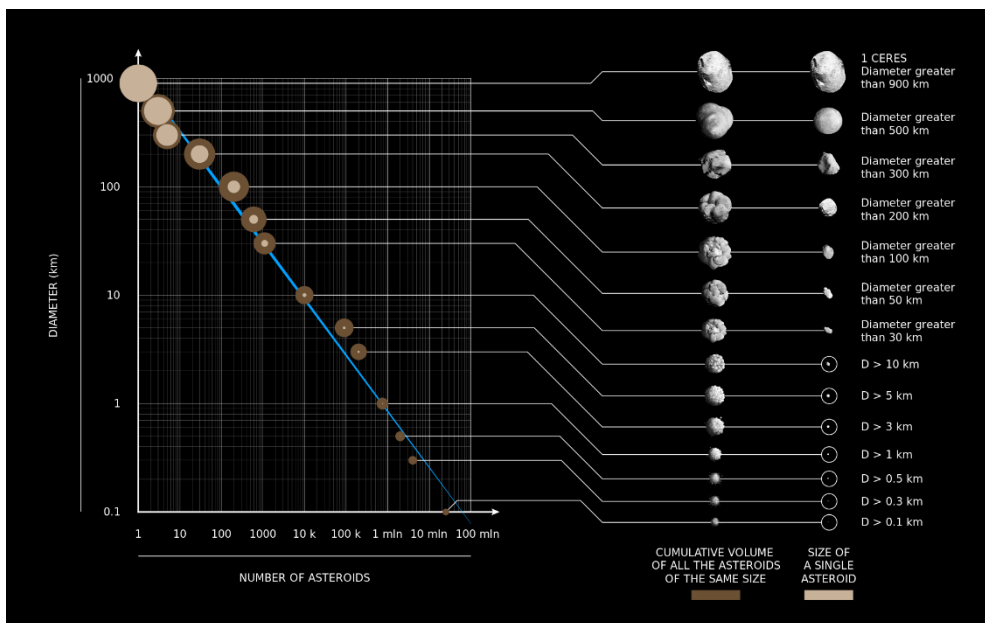


Figura 1.1: Gli asteroidi del Sistema solare catalogati in base a dimensione e numero

La maggior parte degli asteroidi orbita tra Marte e Giove, ad una distanza compresa tra 2 e 4 UA dal Sole, in una regione conosciuta come Fascia Principale e sono spesso caratterizzati da orbite ad elevata eccentricità.

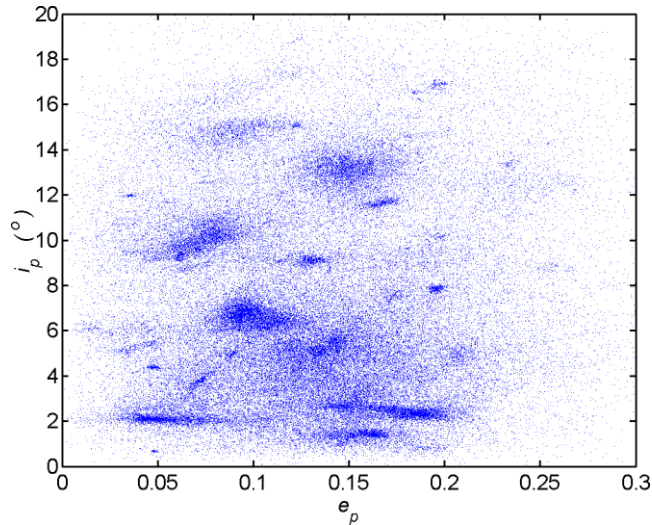


Figura 1.2: Asteroidi classificati secondo inclinazione ed eccentricità

Questi oggetti non potranno riunirsi a formare un pianeta, a causa delle forti perturbazioni gravitazionali del vicino pianeta Giove; queste stesse perturbazioni sono all'origine delle cosiddette lacune di Kirkwood, zone vuote dalla fascia dove gli asteroidi non possono orbitare, in quanto si troverebbero in risonanza orbitale con Giove e ne verrebbero presto espulsi.

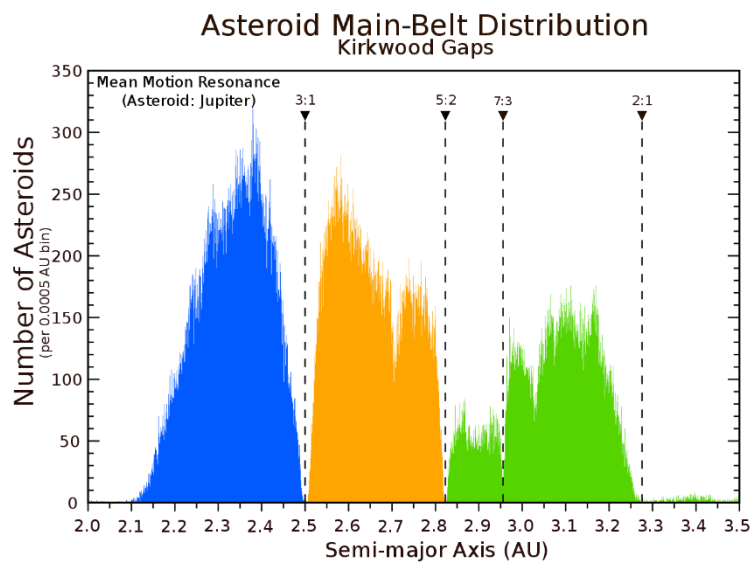


Figura 1.3: Lacune di Kirkwood – Distribuzione di asteroidi nella Fascia principale in funzione del semiasse maggiore

Un numeroso gruppo di asteroidi, oltre un migliaio, è costituito dai cosiddetti troiani. Questi asteroidi hanno orbite molto simili a quella di Giove. Sono suddivisi in due gruppi: uno precede Giove di 60 gradi nella sua orbita e l'altro lo segue ad una medesima distanza angolare. In altre parole, i troiani occupano due dei cinque punti lagrangiani del sistema Sole-Giove, l'L4 e l'L5, dove le orbite sono stabili.

I centauri, invece, orbitano attorno al Sole in mezzo ai pianeti giganti, quindi oltre l'orbita di Giove. Il primo scoperto di questa categoria fu Chirone, nel 1977, un asteroide di più di 100 km di diametro e il più grande della categoria. Si pensa che questi oggetti siano asteroidi o ex-comete che sono state espulse dalle loro orbite originali e immesse in orbite che le portano in regioni relativamente poco popolate dagli asteroidi tradizionali.

Le migliorate capacità dei moderni telescopi hanno permesso di estendere le nostre conoscenze sugli oggetti transnettuniani. Oggi vengono comunemente riconosciute tre grandi distribuzioni asteroidali oltre l'orbita di Nettuno: la fascia di Edgeworth-Kuiper, il disco diffuso e la nube di Oort.

La fascia di Kuiper è la sorgente di circa la metà delle comete che arrivano nel sistema interno. Le prime scoperte risalgono al 1992. Si conosce molto poco degli asteroidi della fascia di Kuiper, infatti, la loro classificazione e composizione chimica è per adesso materia di speculazioni.

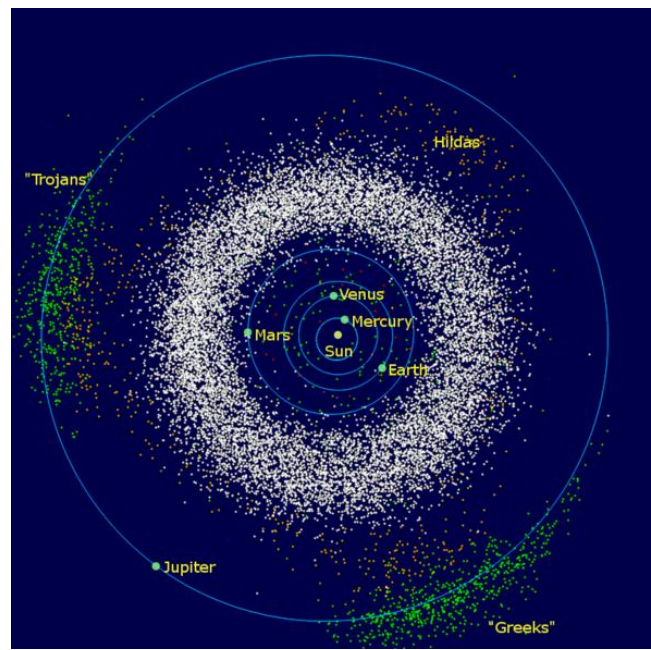


Figura 1.4: La Fascia principale (bianco) e gli asteroidi troiani di Giove (verde)

## 1.1 Classificazione degli asteroidi

Gli asteroidi sono classificati in tipi spettrali, che corrispondono alla composizione del materiale superficiale dell'asteroide.

- Asteroidi di **tipo C**: rappresentano circa il 75% degli asteroidi conosciuti. La C sta per "carbonacei". Sono estremamente scuri (albedo 0,03), simili alle meteoriti carbonacee. Questi asteroidi hanno all'incirca la stessa composizione del Sole, tranne l'idrogeno, l'elio e altri elementi volatili.
- Asteroidi di **tipo S**: rappresentano il 17% circa degli asteroidi conosciuti. La S sta per "silicio". Sono oggetti relativamente luminosi (albedo 0,1-0,22). Hanno una composizione metallica (principalmente silicati di nichel, ferro e magnesio).
- Asteroidi di **tipo M**: questa classe comprende quasi tutti gli altri asteroidi. La M sta per "metallico". Sono asteroidi piuttosto brillanti (albedo 0,1-0,18), sembrano fatti di nichel-ferro quasi puro.

Ci sono altri tipi di asteroidi, molto più rari:

- Asteroidi di tipo G: una suddivisione degli asteroidi di tipo C, spettralmente distinta per le differenze nell'assorbimento degli ultravioletti. Il principale rappresentante di questa classe è l'asteroide 1 Ceres.
- Asteroidi di tipo E: la E sta per enstatite e raccoglie asteroidi di ridotte dimensioni che orbitano principalmente nella parte interna della Fascia principale e che probabilmente hanno avuto origine dal mantello di asteroidi di grandi dimensioni, distrutti in tempi remoti.
- Asteroidi di tipo R: la R sta per (colore e spettro) rossastro.
- Asteroidi di tipo V: la V sta per Vesta, un grosso asteroide di cui si pensa che questi potrebbero esserne frammenti.

## 1.2 Esplorazione

Fin dagli anni Sessanta furono vagliate negli Stati Uniti possibilità per l'esplorazione degli asteroidi, il cui studio era ritenuto assai utile per la comprensione delle prime fasi della formazione dei pianeti. Proposte infatti erano state avanzate negli anni Settanta e prevedevano l'atterraggio su Eros o Vesta per il recupero di campioni ed il loro trasporto sulla Terra

Anche l'European Space Research Organization (ESRO) nello stesso periodo avanzò proposte di esplorazione degli asteroidi; in particolare suggerì il sorvolo di alcuni oggetti da parte di missioni dirette verso Giove.

Il primo studio *in loco* della fascia principale degli asteroidi avvenne nei primi anni Settanta, quando fu attraversata dalle sonde Pioneer 10 e 11 dirette verso il sistema solare esterno.

Tra gli anni Settanta ed ottanta, il miglioramento delle tecnologie di osservazione permise l'acquisizione di nuove informazioni sugli asteroidi. In questo periodo venne sviluppata una prima classificazione spettrale ed il numero di oggetti scoperti, anche con orbite prossime a quella della Terra, aumentò notevolmente.

La prima missione progettata nello specifico per lo studio di un asteroide fu la missione NEAR Shoemaker. Missione della durata di quattro anni, fu lanciata nel febbraio 1996 per raggiungere l'asteroide 433 Eros. Il suo obiettivo era quello di raccogliere immagini e acquisire dati sulle proprietà dell'asteroide come composizione, massa e proprietà della superficie.

La prima missione ad atterrare sulla superficie di un asteroide fu la missione Hayabusa lanciata nel 2003 dall'Agenzia Spaziale Giapponese (JAXA) per studiare l'asteroide 25143 Itokawa. Nel 2005 eseguì una manovra di atterraggio sulla superficie per raccogliere campioni per poi ripartire.

Ideata mentre la missione Hayabusa era ancora in attività, la missione Hayabusa 2, lanciata nel dicembre 2014, fu progettata con lo scopo di raggiungere l'asteroide 162173 Ryugu, studiarne le principali caratteristiche e prelevare, attraverso un braccio robotico, dei campioni di suolo da riportare successivamente sulla Terra. La capsula contenente i campioni è atterrata con successo nel dicembre 2020.

Degna di nota per ciò che concerne missioni di "sample return" è la missione OSIRIS-REx sviluppata dalla NASA e lanciata nel settembre 2016. L'obiettivo della missione era di ottenere un campione della superficie dell'asteroide 101955 Bennu e riportarlo sulla Terra. Dopo averne mappato la superficie per selezionare il sito da cui prelevare il campione, la sonda ha eseguito con successo la raccolta dello stesso attraverso un braccio robotico dell'ottobre 2020. Il ritorno sulla Terra è previsto per il settembre 2023.

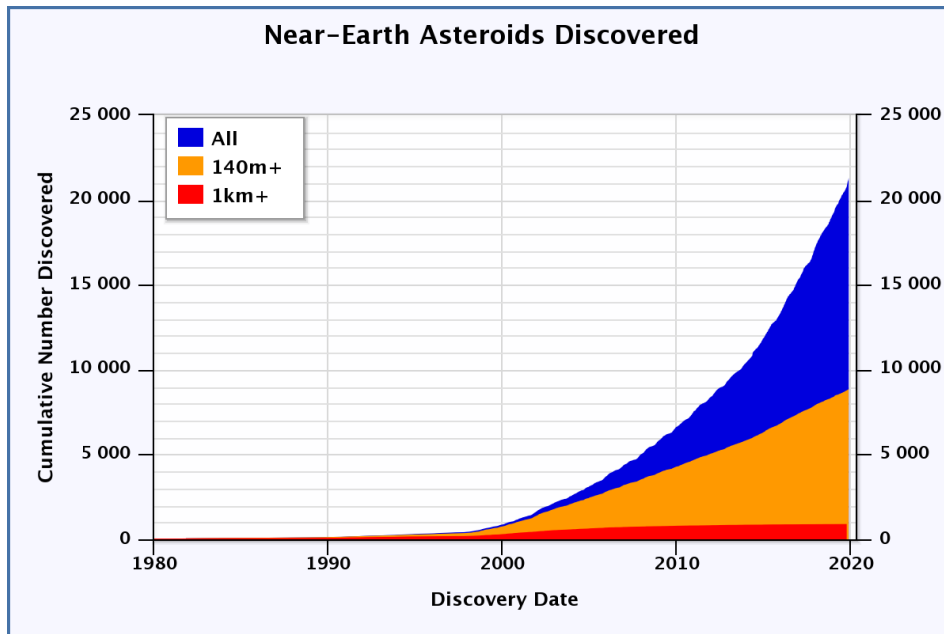


Figura 1.2.1: Scoperte di asteroidi conosciuti

### 1.3 Asteroid Mining

Per *industria mineraria spaziale* si intende l'ipotetico sfruttamento di materiali da asteroidi o altri pianeti minori incluso i NEO (near-Earth object).

La ricerca fatta da missioni di ricerca e "sample return" su asteroidi, come le complete Hayabusa e Hayabusa 2 e quella in corso OSIRIS-Rex, fornisce dati che potrebbero possibilmente permettere lo studio di attività mineraria su asteroidi, anche se quest'ultima non era il principale obiettivo di queste missioni.

Nel corso degli anni è inoltre emerso che possibilmente un elevato numero di troiani di Giove, sono come comete estinte e constano per la maggior parte di acqua sotto forma di ghiaccio. In maniera simile, le comete della famiglia di Giove, e possibilmente i NEO, potrebbero anch'essi fornire acqua.

Il processo di utilizzo delle risorse *in-situ*, utilizzando materie native allo spazio per propellente, gestione termica, scudo dalle radiazioni, potrebbe condurre ad una radicale riduzione dei costi sebbene sia ancora sconosciuto se questa riduzione dei costi riesca a compensare l'enorme investimento per le infrastrutture.

Un importante fattore da considerare nella selezione del target è l'economia orbitale, in particolare il cambio di velocità e il tempo di viaggio verso e dal target. Più materiale nativo estratto deve essere speso come propellente in traiettorie a  $\Delta V$  alto, quindi meno è il ritorno come payload.

Molti tipi di asteroidi sono stati identificati ma i 3 tipi principali includerebbero:

- Asteroidi di tipo C: hanno un'abbondanza alta di acqua e carbonio organico, fosforo e altri elementi chiave da utilizzare come fertilizzante che può essere utilizzato per crescere cibo;
- Asteroidi di tipo S: presenza scarsa di acqua ma contengono numerosi metalli, incluso nickel, cobalto e altri metalli più preziosi come oro, platino e rodio;
- Asteroidi di tipo M: sono rari ma contengono più di 10 volte la quantità di metallo degli asteroidi di tipo S.

Un altro argomento di discussione per la colonizzazione è il potenziale guadagno economico dall'industria mineraria spaziale. Gli asteroidi contengono una quantità significativa di materiali di valore, incluso minerali rari e metalli preziosi che possono essere estratti e trasportati sulla Terra per essere venduti.

Ad oggi, la qualità del minerale e il conseguente costo e massa degli strumenti richiesti per estrarli sono ignoti e possono solo essere speculati. Nel 1997 è stato speculato che un asteroide metallico relativamente piccolo con un diametro di circa 1.6 km conterrebbe più di 20 trilioni di dollari di metalli preziosi e industriali.

Al settembre 2016, ci sarebbero stati 711 asteroidi conosciuti con un valore superiore ai 100 trilioni di dollari.

## 1.4 Asteroid Impact Avoidance

Su una base giornaliera, la Terra è bombardata da tonnellate di materiale interplanetario. Molte di queste particelle in arrivo sono così piccole da essere distrutte nell'atmosfera terrestre prima che esse raggiungano la superficie. La grande maggior parte di tutto il materiale interplanetario che raggiunge la superficie terrestre si origina come frammenti di asteroidi che si sono scontrati l'uno con l'altro eoni fa. In un intervallo medio di circa 100 anni, ci si aspetta che asteroidi rocciosi o ferrosi più grandi di 50 metri raggiungano la superficie della Terra e causino disastri locali o producano maremoti capaci di inondare aree di bassa costa. In media, ogni centinaio di migliaia di anni circa, asteroidi più grandi di un miglio potrebbero causare disastri di scala globale. Un impatto provocato da un asteroide sufficientemente grande causerebbe, a seconda del sito d'impatto, tsunami massivi, piogge acide, molteplici incendi causati da piogge di detriti incandescenti che ritornerebbero sulla superficie dopo l'impatto e un "inverno d'impatto" causato dall'effetto di blocco dei raggi solari di una grande quantità di polvere rocciosa e altri detriti nella stratosfera. Circa 66 milioni di anni fa, una collisione tra un oggetto di circa 10 km di diametro e la Terra si pensa abbia prodotto il cratere Chicxulub e avrebbe innescato l'estinzione Cretaceo-Paleogene che ha portato, secondo la comunità scientifica, all'estinzione della maggior parte dei dinosauri. La probabilità che un asteroide colpisca la Terra e causi seri danni è molto remota ma le potenziali conseguenze devastanti di tale impatto suggeriscono che si dovrebbe studiare più attentamente i diversi tipi di asteroidi in modo da capire composizione, struttura, dimensione e traiettorie future.

La *asteroid impact avoidance* comprende i metodi necessari a dirottare via NEO su una potenziale rotta di collisione con la Terra in modo da prevenire eventi da impatto distruttivi.

Varie tecniche di collision avoidance hanno diversi trade-off come le prestazioni in generale, i costi, rischi e failure. Ci sono vari metodi per cambiare la rotta di un asteroide/cometa. Essi possono essere differenziati da vari tipi di attributi come il tipo di mitigazione (deflessione o frammentazione), fonte energetica (cinetica, elettromagnetica, gravitazionale, solare, termica o nucleare) e strategia d'approccio (intercetto, rendezvous o remote station).

Le strategie ricadono in due set basi: la frammentazione o il delay. La frammentazione si concentra sul rendere inoffensivo l'oggetto che impatta frammentandolo e disperdendo i frammenti in modo che manchino la Terra o che siano abbastanza piccoli da bruciare in atmosfera. Il delay sfrutta il fatto che sia la Terra che l'oggetto che impatta siano in orbita. Un impatto si verifica quando entrambi raggiungono lo stesso punto nello spazio allo stesso tempo, o più correttamente, quando qualche punto sulla superficie terrestre interseca l'orbita dell'oggetto impattante quando quest'ultimo arriva.

Ritardando o anticipando l'arrivo dell'oggetto impattante può, a seconda dell'esatta geometria dell'impatto, portare quest'ultimo a mancare la Terra.

Le strategie di collision avoidance possono anche essere divise in dirette o indirette e in quanto velocemente trasferiscono energia all'oggetto. I metodi diretti, come gli esplosivi nucleari, i kinetic impactors, intercettano rapidamente la traiettoria del bolide.



I metodi diretti sono preferiti perché sono generalmente meno costosi in tempo e denaro. I loro effetti possono essere immediati, salvando tempo prezioso. Questi metodi funzionerebbero per minacce a breve e lungo preavviso e sono efficaci contro oggetti solidi che possono essere direttamente spinti, ma nel caso dei kitenic impactors, non sono molto efficaci contro grandi libere pile aggregate di detriti.

I metodi indiretti, come i gravity tractors, sono più lenti. Richiedono il viaggio verso l'oggetto e successivamente richiedono più tempo per cambiare la traiettoria dell'asteroide giusto in tempo in modo che possa mancare la Terra.

## Capitolo 2

# Richiami di Meccanica del Volo – Principali Manovre ad un Impulso

Le manovre orbitali sono serie di operazioni effettuate allo scopo di variare l'orbita, compensare perturbazioni o errori in fase di ignizione, e possono essere effettuate mediante propulsione chimica o elettrica. Il costo di ogni manovra viene quantificato attraverso il parametro  $\Delta V$ , solitamente espresso in km/s. Le manovre possono essere catalogate in base al numero di impulsi, nel caso di singolo impulso è possibile effettuare:

- variazioni di quota, quindi aggiustamento del periastro o dell'apostro;
- variazioni di inclinazione;
- rotazioni della linea degli apsi, quindi variazioni di  $\omega$ ;
- manovre combinate.

Le manovre a più impulsi possono essere considerate come ripetizioni o combinazioni del caso singolo. Esempi sono dati dalla Trasferta di Hohmann e dal rifasamento dell'orbita.

In questo paragrafo verranno riportate le manovre ad un impulso principali, verranno invece omesse le manovre a due o tre impulsi o trasferimenti tra orbite a inclinazioni diverse perché non utili ai fini delle traiettorie analizzate.

## 2.1 Manovre nel piano dell'orbita

A causa di piccoli errori di quota, velocità e flight-path angle, l'orbita esatta desiderata può non essere raggiunta. Solitamente non è così problematico, ma se è contemplato un rendezvous o se, per qualche altra ragione, è richiesta un'orbita precisa, può essere necessario effettuare piccole correzioni di orbita. Questo può essere fatto applicando piccole variazioni di  $\Delta V$  in punti appropriati nell'orbita.

### 2.1.1 Aggiustamento degli apsi

Un modo molto efficace per cambiare l'altezza di un apside consiste nell'incrementare la velocità in quello opposto. In questo modo si varia il semiasse maggiore (e anche

l'eccentricità) senza variare la sua direzione. Se l'innalzamento è di  $\Delta z$ , allora la variazione di semiasse maggiore sarà:

$$\Delta a = \frac{\Delta z}{2} \quad (2.1.1)$$

Conoscendo il  $\Delta a$  richiesto, si può ricavare il  $\Delta z$  e da lì si può ricavare il  $V_2$  necessario e il  $\Delta V$ . Si noti che il  $\Delta V$  al periastro è molto efficace, mentre quello all'apoaastro è sconsigliato per via delle perdite per gravità. Una rappresentazione grafica di queste manovre è data dalle figure 2.1.1 e 2.1.2

Un'altra possibile dimostrazione può essere mostrata considerando la seguente equazione dell'energia, valida per tutte le orbite:

$$\varepsilon = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.1.2)$$

e risolvendo per  $V^2$  si ottiene:

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.1.3)$$

Si suppone di voler cambiare la velocità  $V$  in un punto dell'orbita lasciando  $r$  invariato. Differenziando ambo i lati dell'equazione, è possibile vedere l'effetto che  $\Delta V$  ha sul semiasse  $a$ :

$$VdV = \frac{\mu}{2a^2} da \quad (2.1.4)$$

che, per un'orbita quasi circolare diventa:

$$\frac{dV}{V} = \frac{da}{2a} \quad (2.1.5)$$

La variazione percentuale di semiasse maggiore è doppia rispetto alla variazione percentuale della velocità.

È possibile considerare la relazione generale mostrata dall'equazione (2.1.4) per piccoli ma finiti  $\Delta V$  applicati al periaastro all'apoaastro come:

$$\Delta h_a = \frac{4a^2}{\mu} V_p \Delta V_p$$

$$\Delta h_p = \frac{4a^2}{\mu} V_a \Delta V_a$$

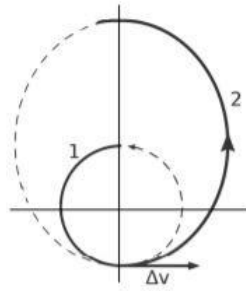


Figura 2.1.1: Innalzamento dell'apoastron

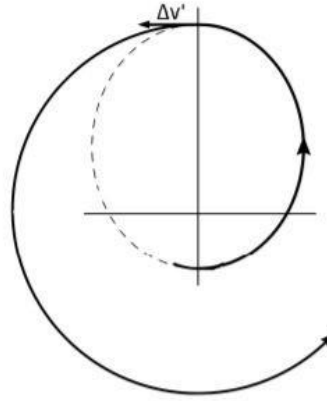


Figura 2.1.2: Innalzamento del periastron

## 2.2 Manovre fuori dal piano dell'orbita

Un cambio di velocità  $\Delta V$  che giace nel piano dell'orbita ne cambia la dimensione e forma, o può far ruotare la linea degli apsidali. Il cambiamento del piano orbitale necessita di un  $\Delta V$  con una componente perpendicolare al piano orbitale di partenza.

### 2.2.1 Cambiamento del piano orbitale

Se, dopo aver applicato un  $\Delta V$  finito, la velocità e il flight-path angle restano invariati, solo il piano dell'orbita si è modificato. La manovra avviene inoltre con un solo impulso a raggio, energia e momento angolare costanti ed è tipicamente conosciuta come “cambio di piano semplice”.

I moduli di  $V$ ,  $V_r$  e  $V_t$  restano costanti, varia solo la direzione di  $V_t$  nel piano tangente alle due orbite nel punto di manovra. Come è possibile osservare dalla figura, la velocità iniziale e finale sono identiche in modulo e, insieme al  $\Delta V$  richiesto, formano un triangolo isoscele. È possibile trovare il modulo di  $\Delta V$  applicando o la legge dei coseni o per via geometrica. Il costo della manovra, per orbite quasi circolari, è pari a:

$$\Delta V = 2V_t \sin \frac{\Delta\psi}{2} \tag{2.2.1}$$

dove  $\Delta\psi$  è l'angolo compreso tra la velocità tangenziale nell'orbita di partenza e la velocità tangenziale nell'orbita di arrivo. È necessario notare che il costo è direttamente proporzionale alla velocità orbitale. Si può osservare graficamente la strategia di manovra in figura nella pagina successiva:

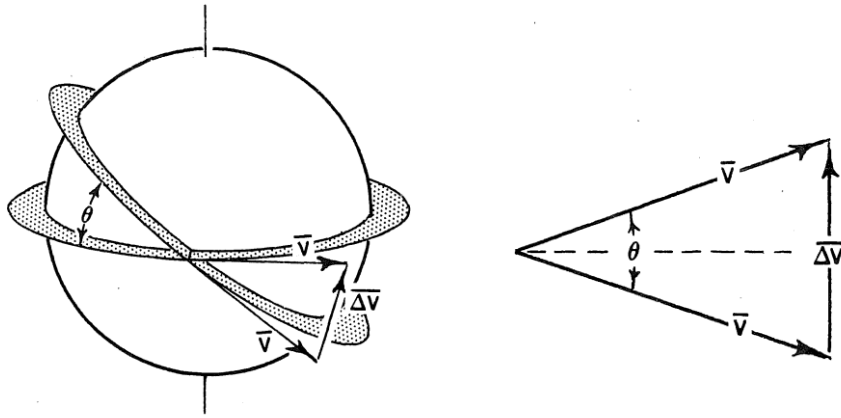


Figura 2.2.1: Manovra di cambio del piano orbitale

## Capitolo 3

# Ottimizzazione di traiettorie spaziali

La traiettoria del veicolo spaziale ha un grande peso sulla fattibilità e sul costo della missione. Ridurre al minimo, quindi, il consumo di propellente per portare a termine tutte le manovre necessarie durante l'esecuzione della missione risulta fondamentale per ridurre costi ed avere a disposizione più massa da dedicare al payload.

Per poter ottenere questi risultati occorre trovare un metodo di ottimizzazione efficace. Il problema consiste nel trovare una legge di controllo che renda massimo o minimo un determinato indice di controllo. Il consumo di propellente nel nostro caso dovrà essere minimo o, ugualmente, la massa finale al termine della missione dovrà essere massima. Per la ricerca di soluzioni significative il problema di ottimo viene risolto cercando delle soluzioni approssimate oppure tramite dei metodi numerici. Esistono tre metodi numerici:

- Metodi diretti, i quali permettono di ricavare la condizione di ottimo discretizzando la traiettoria in archi, ad ogni arco vengono associate delle funzioni di controllo che vengono descritte da un elevato numero di parametri. L'ottimizzazione di questi parametri avviene tramite tecniche NLP (Non Linear Programming).
- Metodi indiretti, che sfruttando i principi del calcolo variazionale, offrono un'elevata precisione numerica ed un importante contenuto teorico. Consentono, inoltre, di ottenere la soluzione ottimale con un numero limitato di parametri e tempi di calcolo limitati.
- Ed infine gli algoritmi evolutivi che partono da un ampio numero di soluzioni che evolvono verso la soluzione ottimale.

Verrà di seguito esaminata la teoria del controllo ottimale su cui si basa l'ottimizzazione indiretta.

### 3.1 Ottimizzazione indiretta

I metodi indiretti hanno un'alta precisione numerica e possono trovare una soluzione di ottimo con un limitato numero di parametri ed un limitato costo computazionale. Nonostante i vantaggi del metodo indiretto rispetto a quello diretto, esso include anche degli svantaggi.

Occorre derivare le espressioni analitiche rispetto alle condizioni necessarie, in quanto può risultare complicato, e l'intervallo di convergenza del programma può risultare alquanto piccolo, portando l'introduzione di variabili aggiunte per riuscire a risolvere il problema di ottimo. È anche importante notare come la capacità del programma di riuscire a raggiungere la soluzione numerica sia dipendente dalla soluzione tentativo che viene assegnata prima di iniziare la procedura.

## 3.2 Teoria del controllo ottimale

La teoria del controllo ottimale, basata sui principi del calcolo variazionale, viene qui descritta nella forma che più si adatta all'applicazione all'ottimizzazione di traiettorie spaziali e al metodo adottato per la soluzione del problema differenziale ai limiti che nasce dalla sua applicazione.

Il generico sistema a cui si applica la teoria del controllo ottimale è descritto da un vettore di variabili di stato  $x$ ; le equazioni differenziali che ne descrivono l'evoluzione tra gli istanti iniziale e finale (contorni esterni) sono funzioni di  $x$ , del vettore dei controlli  $u$  e della variabile indipendente  $t$  (tempo), e hanno la generica forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (3.2.1)$$

Nel particolare caso che si sta esaminando, è conveniente suddividere la traiettoria in un numero  $n$  di sottointervalli, o archi, all'interno di ciascuno dei quali le variabili siano continue. Il  $j$ -esimo intervallo inizia al tempo  $t_{(j-1)+}$  e termina al tempo  $t_{j-}$  e i valori che le variabili assumono ai suoi estremi sono  $x_{(j-1)+}$  e  $x_{j-}$  dove i segni  $-$  e  $+$  indicano rispettivamente i valori assunti subito prima o dopo il punto considerato: in questo modo è possibile tenere in conto le eventuali discontinuità delle variabili (ad esempio sono discontinue la velocità e la massa in seguito a una manovra impulsiva) e, al limite, anche del tempo (nel caso di flyby di un pianeta se il tempo di permanenza all'interno della sfera d'influenza non viene trascurato) che si applicano ai punti di giunzione tra i vari archi (contorni interni). Con questa formulazione è inoltre possibile (e, come si vedrà, conveniente) far assumere al secondo membro delle equazioni (3.2.1) espressioni diverse a seconda del sottointervallo considerato.

Sono inoltre imposte condizioni al contorno che, in generale, sono di tipo misto, cioè coinvolgono i valori delle variabili di stato e della variabile indipendente tempo sia ai contorni esterni che a quelli interni. Le condizioni imposte sono genericamente non-lineari e vengono espresse come:

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2.2)$$

Altri vincoli possono coinvolgere i controlli  $u$  e si descriverà nel seguito il particolare metodo che consente di tenerli in considerazione.

Il problema di ottimo si pone come la ricerca dei valori estremali (cioè massimi o minimi relativi) di un funzionale che, nella sua forma generale, è del tipo:

$$J = \varphi(x_{(j-1)_+}, x_{j-}, t_{(j-1)_+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} \Phi(x(t), u(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2.3)$$

Il funzionale  $J$  è la somma di due termini: la funzione  $\Phi$ , dipendente dai valori assunti dalle variabili e dal tempo ai contorni (interni ed esterni), e l'integrale esteso a tutta la traiettoria della funzione  $\Phi$ , che dipende dal tempo e dai valori assunti in ogni punto da variabili e controlli. Si noti che con l'introduzione di opportune variabili ausiliarie è sempre possibile ricondursi al caso  $\varphi = 0$  (formulazione di Lagrange) o  $\Phi = 0$  (formulazione di Mayer, qui preferita).

È utile riscrivere il funzionale introducendo i moltiplicatori di Lagrange, costanti  $\mu$  associati alle condizioni al contorno, e variabili  $\lambda$ , detti anche variabili aggiunte, associati alle equazioni di stato:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T (f - \dot{x})) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2.4)$$

dove il punto  $\dot{\phantom{x}}$  indica la derivata rispetto al tempo.

I due funzionali  $J$  e  $J^*$  dipendono dal tempo  $t$ , dalle variabili di stato  $x$  e dalle loro derivate  $\dot{x}$  (in particolare dai valori che il tempo e le variabili assumono agli estremi di ogni arco,  $t_j$  e  $x_j$ ) e dai controlli  $u$ . Ovviamente se condizioni al contorno ed equazioni di stato sono soddisfatte, i due funzionali e quindi i loro valori estremali coincidono. Integrando per parti per eliminare la dipendenza dalle derivate delle variabili  $\dot{x}$  si ottiene:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j (\lambda_{(j-1)_+}^T x_{(j-1)_+} - \lambda_{j-}^T x_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T - \dot{\lambda}^T x) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2.5)$$

e differenziando si ottiene la variazione prima del funzionale stesso  $\delta J^*$  (le parentesi quadre indicano una matrice):

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left( -H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)_+}} \right) \delta t_{(j-1)_+} + \\ & + \left( H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} + \left( \lambda_{(j-1)_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j-1)_+}} + \mu^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x_{(j-1)_+}} \right] \right) \delta x_{(j-1)_+} + \\ & + \left( -\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] \right) \delta x_{j-} + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} \left( \left( \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right) dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

dove si è definito l'Hamiltoniano  $H$  del sistema come:

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (3.2.7)$$



La condizione (necessaria) di ottimo prescrive la stazionarietà del funzionale e quindi l'annullarsi della sua variazione prima per qualunque scelta di variazioni  $\delta x, \delta u, \delta x_{(j-1)_+}, \delta x_{j-}, \delta t_{(j-1)_+}, \delta t_{j-}$  compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno.

L'introduzione di variabili e costanti aggiunte permette, con una loro opportuna scelta, di annullare contemporaneamente il coefficiente di ciascuna delle variazioni nell'espressione (3.6), assicurando quindi la stazionarietà del funzionale espressa dalla condizione  $\delta J^* = 0$ .

Annullando i coefficienti di  $\delta x$  e  $\delta u$  all'interno dell'integrale per ogni punto della traiettoria si ottengono, rispettivamente, le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (3.2.8)$$

e le equazioni algebriche per i controlli:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (3.2.9)$$

È interessante notare come le leggi di controllo (e come si vedrà anche le condizioni al contorno) siano formalmente indipendenti dal fatto di ricercare i massimi oppure i minimi di  $J$ .

Particolare attenzione deve essere prestata se uno dei controlli è soggetto a un vincolo, cioè deve appartenere a un dato dominio di ammissibilità (ad esempio il modulo della spinta deve essere compreso tra il valore minimo 0 e quello massimo  $T_{max}$ ; lo stesso dicasi per il coefficiente di portanza che presenta un limite superiore  $C_{Lmax}$ ). Non si considerano i casi, in cui il vincolo dipende dal tempo o dalle variabili di stato, ma solo quelli in cui esso è esplicito e costante, come nei casi illustrati in precedenza. In presenza di un tale vincolo, il valore ottimale del controllo in ogni punto della traiettoria è quello che, appartenendo al dominio di ammissibilità, rende massimo, se si ricercano i massimi di  $J$ , o minimo, se si ricercano i minimi, l'Hamiltoniano (3.2.7) in quel punto (Principio di Massimo di Pontryagin). Si hanno in pratica due possibilità:

- il valore ottimale del controllo è quello fornito dall'equazione (3.2.9) se rientra nel dominio di ammissibilità e quindi il vincolo non interviene in quel punto (controllo localmente "non vincolato");
- il valore ottimale è agli estremi del dominio, cioè il controllo assume il valore massimo o minimo, se quello fornito dall'equazione (3.2.9) non rientra nel dominio di ammissibilità (controllo "vincolato").

Un caso particolare si ha se l'Hamiltoniano è lineare rispetto a uno dei controlli soggetto a vincoli, in quanto nella corrispondente equazione (3.2.9) il controllo non compare esplicitamente e non può quindi essere determinato. Si hanno in questo caso ancora due possibilità (ci si riferisce al caso in cui  $J$  debba essere massimizzato):

- se nell'equazione (3.2.7) il coefficiente del controllo in questione è non nullo, allora  $H$  è massimizzato per il valore massimo del controllo se il coefficiente è positivo e minimo se è negativo (controllo bang-bang), in accordo con il Principio di Massimo di Pontryagin;
- se nell'equazione (3.2.7) il coefficiente del controllo in questione è identicamente nullo durante un intervallo finito di tempo (arco singolare), allora è necessario imporre l'annullamento di tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, fino a quando in una di esse non appare esplicitamente il controllo: il controllo ottimale viene quindi determinato ponendo uguale a zero quest'ultima derivata (è ben noto che l'ordine di derivazione necessario allo scopo è sempre pari e con la sua metà si indica l'ordine dell'arco singolare).

Per quanto riguarda le condizioni al contorno mancanti, è conveniente riferirsi al  $j$ -esimo contorno, scrivendo per questo le condizioni che derivano dal considerarlo come estremo finale del  $(j-1)$ -esimo sottointervallo o come estremo iniziale del  $j$ -esimo sottointervallo; annullando nell'ordine i coefficienti di  $\delta x_{j-}, \delta x_{j+}, \delta t_{j-}, \delta t_{j+}$  nell'espressione (3.2.6), si ottiene:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2.10)$$

$$\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j+}} + \mu^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x_{j+}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (3.2.11)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2.12)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (3.2.13)$$

dove i pedici  $j_-$  e  $j_+$  indicano i valori assunti rispettivamente subito prima e dopo il punto  $j$  (è necessario distinguere in quanto possono verificarsi, come si è detto, discontinuità nei punti di giunzione tra sottointervalli).

Le equazioni (3.2.10) e (3.2.12) non hanno significato all'inizio della traiettoria ( $j = 0$ ), mentre le equazioni (3.2.11) e (3.2.13) non ne hanno al suo termine ( $j = n$ ). Eliminando le costanti aggiunte  $\mu$  dalle equazioni (3.2.10)÷(3.2.13) si hanno le condizioni al contorno di ottimo del tipo:

$$\sigma(x_{(j-1)+}, x_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (3.2.14)$$

che, con le condizioni assegnate (3.2.2), completano il sistema differenziale dato dalle equazioni (3.2.1) e (3.2.8).

Considerando una generica variabile di stato  $x$ , se sottoposta a particolari condizioni al contorno, le equazioni (3.2.10) e (3.2.11) forniscono particolari condizioni di ottimo per la variabile aggiunta corrispondente  $\lambda_x$ :

- se la variabile di stato  $x$  è assegnata esplicitamente all'istante iniziale (il vettore delle condizioni imposte  $\chi$  contiene l'equazione  $x_0 - a = 0$  con  $a$  valore assegnato), sulla corrispondente variabile aggiunta non ci sono condizioni ( $\lambda_{x_0}$  "libera"); analoga situazione si ha al tempo finale se la variabile è lì assegnata;
- se il valore iniziale della variabile di stato  $x_0$  non compare né nella funzione  $\phi$  né nelle condizioni al contorno, la corrispondente variabile aggiunta è nulla all'istante iniziale ( $\lambda_{x_0} = 0$ ); anche in questo caso queste considerazioni si estendono a una analoga situazione al tempo finale;
- se una variabile di stato è continua e non assegnata al punto interno  $i$  ( $\chi$  contiene l'equazione  $x_{j+} = x_{j-}$ ), la corrispondente variabile aggiunta è anch'essa continua ( $\lambda_{x_{j+}} = \lambda_{x_{j-}}$ );
- se una variabile di stato è continua e assegnata esplicitamente a un contorno interno, ( $\chi$  contiene le equazioni  $x_{j+} = x_{j-} = a$ ), la corrispondente variabile aggiunta ha una discontinuità "libera", cioè il valore di  $\lambda_{x_{j+}}$  è indipendente da  $\lambda_{x_{j-}}$  e deve essere determinato dalla procedura di ottimizzazione.

Analogamente, se  $H$  non dipende esplicitamente dal tempo, anche le equazioni (3.2.12) e (3.2.13) forniscono, in alcuni casi, particolari condizioni al contorno:

- se il tempo iniziale  $t_0$  non compare esplicitamente né nelle condizioni al contorno né nella funzione  $\phi$ , l'Hamiltoniano è nullo all'istante iniziale ( $H_0 = 0$ ); analogamente l'Hamiltoniano si annulla al tempo finale se questo non interviene esplicitamente in  $\phi$  e  $\chi$ .
- se il tempo intermedio  $t_j$  non compare esplicitamente nella funzione  $\phi$ , (l'unica condizione in  $\chi$  che lo coinvolge è la continuità del tempo  $t_{j+} = t_{j-}$ ) l'Hamiltoniano è continuo in  $j$  ( $H_{j+} = H_{j-}$ );
- se il tempo  $t_j$  è esplicitamente assegnato, (in  $\chi$  compaiono le equazioni  $t_{j+} = t_{j-} = a$ ) l'Hamiltoniano ha in quel punto una discontinuità "libera".

### 3.3 Problema differenziale ai limiti

Il metodo indiretto adottato per l'ottimizzazione dei trasferimenti orbitali prevede l'applicazione della teoria del controllo ottimale al sistema di equazioni (3.2.1) che ha condizioni al contorno dipendenti dal tipo di orbite, tra cui la trasferta si svolge. La teoria del controllo ottimale formula un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti (BVP)

in cui alcuni dei valori iniziali delle variabili sono incogniti, come si è visto nel paragrafo precedente. La soluzione di questo problema consiste nel trovare quali valori iniziali consentono, integrando numericamente il sistema differenziale, di soddisfare tutte le condizioni al contorno, sia imposte che di ottimo.

Si descrive ora il metodo di risoluzione del BVP e come il problema di ottimo viene formulato in modo da adattarsi alle sue caratteristiche.

Come si è visto nel capitolo precedente, la teoria del controllo ottimale formula il problema di ottimo come un problema matematico soggetto a vincoli differenziali e algebrici.

Poiché alcuni valori iniziali delle variabili di stato e aggiunte sono incogniti, il problema di ottimo si traduce in un problema differenziale ai limiti (BVP), con le equazioni differenziali (3.2.1) e (3.2.8), in cui i controlli sono determinati dalle equazioni algebriche (3.2.9), supportate dalle condizioni al contorno imposte (3.2.2) e di ottimo (3.2.14). Il problema in esame presenta alcune particolarità:

- l'intervallo di integrazione è suddiviso in sottointervalli in cui le equazioni differenziali possono avere differente espressione;
- la durata di ciascun sottointervallo è in generale incognita;
- le condizioni al contorno possono essere non-lineari e coinvolgere i valori delle variabili sia ai contorni esterni sia a quelli interni;
- le variabili possono essere discontinue ai contorni interni e il loro valore dopo la discontinuità può essere incognito.

La principale difficoltà delle tecniche di ottimizzazione indirette è proprio la soluzione del problema ai limiti che emerge dalla loro applicazione: il metodo per la sua soluzione è quindi uno strumento indispensabile e inoltre ci deve essere corrispondenza tra le sue caratteristiche e quelle del problema in esame. La soluzione del BVP viene ottenuta riducendolo a una successione di problemi ai valori iniziali che viene portata alla convergenza secondo il metodo di Newton.

Per risolvere l'indeterminatezza della durata di ciascun sottointervallo, si ricorre, ai soli fini dell'integrazione, alla sostituzione della variabile indipendente  $t$  con una nuova variabile  $\varepsilon$  definita nel  $j$ -esimo sottointervallo attraverso la relazione:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (3.3.1)$$

dove  $\tau_j$  è la durata (in genere incognita) del sottointervallo. In questo modo i contorni interni ed esterni risultano fissati, grazie all'introduzione dei parametri incogniti  $\tau_j$ , e corrispondono a valori interi consecutivi della nuova variabile indipendente  $\varepsilon$ .

Per la descrizione del metodo, ci si riferisce al generico sistema di equazioni dato dalle (3.2.1) e (3.2.8) in cui ai controlli sono state sostituite le espressioni (3.2.9). Si ha perciò un problema differenziale nelle variabili, di stato e aggiunte, ora non più distinte,  $y = (x, \lambda)$ :

$$\frac{dy}{dt} = f^*(y, t) \quad (3.3.2)$$

Occorre però tenere in conto che, nel problema in esame, compaiono anche parametri costanti, quali ad esempio le durate dei sottointervalli  $\tau_j$  o i valori delle variabili dopo una discontinuità: è quindi utile riferirsi a un nuovo vettore  $z = (y, c)$  che contiene le variabili di stato e aggiunte e il nuovo vettore  $c$  dei parametri costanti.

Applicando il cambio di variabile indipendente, il sistema di equazioni differenziali assume la forma:

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = f(z, \varepsilon) \quad (3.3.3)$$

Esplicitando il secondo membro delle equazioni (3.3.3), per le variabili di stato e aggiunte si ha:

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{dy}{dt} \quad (3.3.4)$$

mentre per i parametri costanti si ha, ovviamente:

$$\frac{dc}{d\varepsilon} = 0 \quad (3.3.5)$$

Le condizioni al contorno sono genericamente espresse, senza distinguere tra condizioni imposte e di ottimo, come:

$$\psi(s) = 0 \quad (3.3.6)$$

dove  $s$  è un vettore che contiene i valori che le variabili assumono a ogni contorno (interno o esterno)  $\varepsilon = 0, 1, \dots, n$ , e i parametri incogniti.

$$s = (y_0, y_1, \dots, y_n, c) \quad (3.3.7)$$

I valori iniziali di alcune delle variabili sono in genere incogniti, e la ricerca della soluzione si traduce nel determinare, attraverso un procedimento iterativo, quali valori devono assumere per soddisfare le equazioni (3.3.6). La procedura viene descritta supponendo che nessuno dei valori iniziali sia noto. La  $r$ -esima iterazione inizia con l'integrazione delle equazioni (3.3.3) con i valori iniziali  $p^r$  trovati al termine della iterazione precedente.

Si fissa cioè:

$$z(0) = p^r \quad (3.3.8)$$

e si procedere all'integrazione delle equazioni lungo tutta la traiettoria tenendo in conto le eventuali discontinuità ai contorni interni (per iniziare la procedura, alla prima iterazione è necessario scegliere valori di tentativo  $p^1$ ). In ciascuno dei contorni si determina il valore delle variabili di stato e al termine dell'integrazione si calcola l'errore sulle condizioni al contorno  $\psi^r$  alla  $r$ -esima iterazione.

Una variazione  $\Delta p$  porta a variare l'errore sulle condizioni al contorno di una quantità che, tenendo in conto solo i termini del primo ordine, è pari a:

$$\Delta\psi = \left[ \frac{\partial\psi}{\partial p} \right] \Delta p \quad (3.3.9)$$

Dovendo annullare l'errore sulle condizioni al contorno (cioè volendo ottenere  $\Delta\psi = -\psi^r$ ), a ogni iterazione i valori iniziali vengono corretti di una quantità:

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[ \frac{\partial\psi}{\partial p} \right]^{-1} \psi^r \quad (3.3.10)$$

fino a che le condizioni al contorno (3.3.6) non siano verificate con la precisione voluta. La matrice che compare nell'equazione (3.3.10) è calcolata come prodotto di due matrici:

$$\left[ \frac{\partial\psi}{\partial p} \right] = \left[ \frac{\partial\psi}{\partial s} \right] \left[ \frac{\partial s}{\partial p} \right] \quad (3.3.11)$$

dove la prima può essere immediatamente ottenuta derivando le condizioni al contorno rispetto alle grandezze che vi compaiono. La seconda matrice, che contiene le derivate dei valori delle variabili ai contorni rispetto ai valori iniziali, cioè i valori che vengono assunti ai contorni ( $\varepsilon = 0, 1, \dots, n$ ) dalla matrice:

$$\left[ \frac{\partial z}{\partial p} \right] = [g(\varepsilon)] \quad (3.3.12)$$

è ottenuta integrando il sistema di equazioni differenziali che si ottiene derivando il sistema principale (3.3.3) rispetto a ciascuno dei valori iniziali:

$$[g] = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{\partial z}{\partial p} \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \right) \right] = \left[ \frac{\partial f}{\partial p} \right] \quad (3.3.13)$$

dove il punto  $\dot{\phantom{x}}$  indica ora la derivata rispetto alla nuova variabile indipendente  $\varepsilon$ . Esplicitando lo Jacobiano del sistema principale (3.3.3), l'equazione (3.3.13) assume la forma:

$$[g] = \left[ \frac{\partial f}{\partial z} \right] \left[ \frac{\partial z}{\partial p} \right] = \left[ \frac{\partial f}{\partial z} \right] [g] \quad (3.3.14)$$

Una particolarità dell'applicazione di questo metodo a problemi di ottimizzazione indiretta sono le proprietà di simmetria di alcuni termini dello Jacobiano, qui omesse. I valori iniziali per il sistema omogeneo (3.3.14) si hanno derivando la relazione (3.3.8); si ottiene così la matrice identica:

$$[g(0)] = \left[ \frac{\partial z(0)}{\partial p} \right] = [I] \quad (3.3.15)$$

È da notare che questo metodo consente di trattare anche discontinuità nelle variabili. Infatti, per una discontinuità nel punto  $i$ , è sufficiente aggiornare sia il vettore delle variabili  $z$  che la matrice  $g$  attraverso la relazione  $h$  che lega i valori delle variabili prima e dopo la discontinuità:

$$z_{i+} = h(z_{i-}) \quad (3.3.16)$$

$$[g_{i+}] = \left[ \frac{\partial h}{\partial z} \right] [g_{i-}] \quad (3.3.17)$$

(per questo motivo nel definire il vettore  $s$  non si è distinto tra i vettori  $y_{i+}$  e  $y_{i-}$ , in quanto l'uno è funzione nota, attraverso  $h$ , dell'altro e del vettore  $c$ ).

Ovviamente se alcuni dei valori iniziali delle variabili sono noti, il problema risulta semplificato in quanto il vettore  $p$  si riduce alla stima delle sole componenti incognite di  $z(0)$  e il vettore  $\psi$  alle sole condizioni al contorno non esplicitate al tempo iniziale.

La matrice che compare nell'equazione (3.3.10) può anche essere valutata numericamente: la sua  $i$ -esima riga si ottiene variando la  $i$ -esima componente di  $p$  di una quantità piccola  $\Delta p$  (tenendo fisse le altre) e quindi integrando le equazioni (3.3.3). È così possibile calcolare la variazione delle condizioni al contorno  $\Delta\psi(\Delta p)$  e, linearizzando, ottenere la riga corrispondente come  $\Delta\psi^T/\Delta p$ . Questa procedura consente in alcuni casi una più semplice e rapida soluzione del BVP (valori adatti per  $\Delta p$ , trovati empiricamente, sono dell'ordine di  $10^{-6}$ ÷ $10^{-7}$ ) ma non è sempre in grado di garantire la convergenza: la determinazione della matrice nell'equazione (3.3.10) è infatti meno accurata rispetto al suo calcolo attraverso la soluzione del sistema (3.3.14) e, vista la grande sensibilità del problema, le approssimazioni numeriche introdotte possono compromettere la convergenza.

Una simile procedura numerica può inoltre essere usata per il calcolo dello Jacobiano e della matrice  $[\partial\psi/\partial s]$ : si è però preferito mantenerne la valutazione analitica e utilizzare, nell'impostazione dei codici, i valori ottenuti numericamente per verificare, tramite il confronto con quelli forniti dalle espressioni analitiche dello Jacobiano e della matrice  $[\partial\psi/\partial s]$ , l'esattezza di queste espressioni.

L'integrazione di tutte le equazioni differenziali, sia per il sistema principale (3.3.3) che per quello omogeneo (3.3.14), viene svolta con un metodo a passo e ordine variabile basato sulle formule di Adams.

Negli esempi che seguiranno la precisione richiesta è pari a  $10^{-7}$  (si richiede cioè che l'errore massimo  $E_{max} = \max_i(\psi_i)$  sulle condizioni al contorno sia inferiore a questo valore).

La linearizzazione introdotta per il calcolo della correzione  $\Delta p$  data dall'equazione (3.3.10), da apportare ai valori iniziali di tentativo, introduce errori che possono compromettere la convergenza facendo aumentare anziché diminuire l'errore sulle condizioni al contorno: si sono presi quindi alcuni accorgimenti per migliorare la procedura.

- Per evitare di allontanarsi troppo dalla soluzione, la correzione apportata è in realtà una frazione di quella determinata, cioè:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p \quad (3.3.18)$$

con  $K_1 = 0.1 \div 1$ , valori determinati empiricamente durante le prime prove dei codici, a seconda che la soluzione di partenza sia relativamente lontana o vicina a quella cercata.

- Ad ogni iterazione, dopo che il nuovo vettore dei valori iniziali di tentativo  $p^{r+1}$  è stato determinato attraverso la (3.3.18) e si sono integrate le equazioni del moto, si confronta l'errore massimo sulle condizioni al contorno  $E_{max}^{r+1}$  con quello ottenuto all'iterazione precedente  $E_{max}^r$ : se l'errore massimo è inferiore ad un multiplo di quello precedente, cioè se  $E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r$ , si procede con la nuova iterazione. Poiché per convergere alla soluzione l'errore sulle condizioni al contorno può, nelle prime iterazioni, aumentare, il valore di  $K_2$  deve essere superiore all'unità: un valore  $K_2 = 2 \div 3$  garantisce buoni risultati.
- Se invece l'errore alla nuova iterazione è troppo grande rispetto al precedente, si procede alla bisezione della correzione apportata, dimezzandola: si integrano cioè le equazioni del moto con i valori di tentativo:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p / 2 \quad (3.3.19)$$

ripetendo quindi il confronto tra il nuovo errore massimo ottenuto e quello dell'iterazione precedente e, se necessario, ripetendo la bisezione. Si è fissato un numero massimo di cinque bisezioni, dopo di che il procedimento si arresta significando che la soluzione di tentativo scelta non è in grado di portare alla convergenza.

### 3.4 Principio del massimo di Pontryagin

Un apporto relativamente recente al calcolo delle variazioni è stato formulato dal matematico russo Pontryagin nel 1959, il quale ha enunciato un sistema di condizioni necessarie per l'ottimo sotto una forma particolarmente adatta per la soluzione di problemi connessi al controllo dei processi.

Fornire delle condizioni necessarie (che in quanto tali devono essere rispettate) consente di determinare abbastanza semplicemente una soluzione, la quale, soddisfacendole, è candidata ad essere ottima.

Ma una soluzione che soddisfa le condizioni necessarie non è detto che sia ottima (altrimenti sarebbero anche sufficienti, cosa che invece, in generale, non è). Pertanto, per poter affermare che una soluzione trovata, imponendo le condizioni necessarie fornite dal



teorema di Pontryagin, è effettivamente una soluzione ottima, serve un'analisi supplementare. Questo tipo di criteri spesso sotto il nome di Principio del Massimo.

Sia dato il problema di controllo nella forma di Lagrange e relativo all'intervallo di tempo  $[0; T]$ ;

$$\begin{array}{ll} \text{massimizza} & \int_0^T f_0(x(t), u(t), t) dt, \\ \text{soggetto a} & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ & u(t) \in \mathbb{R} \\ & x(0) = x^0 \end{array}$$

Per formulare le condizioni necessarie per l'ottimo si introduce la variabile aggiunta  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e si definisce la funzione hamiltoniana:

$$H(x, u, \lambda, t) = f_0(x, u, t) + \lambda f(x, u, t) \tag{3.4.1}$$

La funzione hamiltoniana è una combinazione lineare delle funzioni che caratterizzano il funzionale obiettivo e di quelle che entrano nella definizione delle equazioni del moto. Per ipotesi tali funzioni sono continue e dotate di derivate parziali prime continue in  $x$ , proprietà che vengono ereditate dalla funzione hamiltoniana.

**Teorema del massimo.** Sia  $u^*(t)$  un controllo ottimo continuo a tratti, definito sull'intervallo  $[0; T]$ , a cui sia associata la funzione di stato  $x^*(t)$ . Allora esiste una funzione continua di classe  $C^1$  a tratti  $\lambda(t)$  ( $\lambda: [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ ) tale che, per ogni  $t \in [0; T]$ , valgono le seguenti condizioni:

- i)  $u^*(t)$  massimizza  $H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t)$  per  $u \in \mathbb{R}$ ;
- ii) tranne che per i tempi  $t$  per cui  $u^*(t)$  è discontinua,  $\lambda(t)$  è differenziabile e

$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t)}{\partial x}$$

- iii)  $\lambda(T) = 0$ .

Ci si riferisce alla condizione (i) parlando di condizione di massimo, alla condizione (ii) di equazione aggiunta e alla condizione (iii) come equazione di trasversalità.

## Capitolo 4

# Definizione del problema

L'analisi preliminare delle traiettorie interplanetarie dei satelliti viene affrontata tipicamente considerando la massa del satellite puntiforme sotto l'influenza di un singolo corpo celeste, in modo che sia possibile utilizzare il modello dei due corpi per studiarne le traiettorie; in particolare, in prima analisi, viene di solito utilizzata l'approssimazione patched-conic.

Per descrivere le soluzioni ottimali per le traiettorie si utilizza un sistema di riferimento eliocentrico e si sfruttano le equazioni del problema dei due corpi per descrivere il moto del satellite. Le equazioni differenziali del moto sono:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (4.1)$$

$$\frac{dV}{dt} = g + \frac{T}{m} \quad (4.2)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (4.3)$$

dove  $r$  è il vettore posizione,  $V$  il vettore velocità,  $g$  è l'accelerazione gravitazionale, mentre la variazione della massa nel tempo viene espressa dal rapporto tra il vettore della spinta  $T$  e la velocità efficace di scarico.

Inoltre, è possibile introdurre l'Hamiltoniano, che viene definito dall'equazione (3.2.7):

$$H = \lambda_r^T V + \lambda_v^T g + T S_F \quad (4.4)$$

dove il coefficiente della spinta, chiamato comunemente, switching function, risulta:

$$S_F = \frac{\lambda_v^T T / T}{m} - \frac{\lambda_m q}{T} \quad (4.5)$$

La teoria del controllo ottimale fornisce le equazioni differenziali per le variabili aggiunte

e le condizioni al contorno per l'ottimo che dipendono dagli indici di prestazione e dalle condizioni al contorno applicate. Le variabili di controllo ottimizzate devono massimizzare  $H$  in ogni punto della traiettoria, in accordo con Principio di Massimo di Pontryagin (PMP). La direzione della spinta e il suo modulo sono tipicamente le variabili di controllo quindi, si deduce che la spinta deve essere parallela al vettore aggiunto velocità  $\lambda_V$ . La switching function diventa:

$$S_F = \frac{\lambda_V}{m} - \lambda_m \frac{q}{T} \quad (4.6)$$

e se dal sistema propulsivo risulta una velocità efficace di scarico costante, l'equazione diventa:

$$S_F = \frac{\lambda_V}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (4.7)$$

Il modulo della spinta resta come unica variabile di controllo.

Il modulo della spinta assume il suo valore massimo quando la switching function,  $S_F$ , è positiva ( $S_F > 0$ ), invece è nullo quando  $S_F$  è negativa ( $S_F < 0$ ), nuovamente, per massimizzare l'Hamiltoniano.

Si verifica la condizione di arco singolare quando  $S_F$  rimane uguale a zero durante un tempo finito; l'equazione non è sufficiente per decidere il modulo ottimale della spinta. Questo caso speciale coinvolge il volo atmosferico.

Inoltre, è possibile osservare che:

- $c = c_{ott} = 2m \lambda_m / \lambda_V$  se  $c_{min} < c_{ott} < c_{max}$
- $c = c_{min}$  se  $c_{ott} < c_{min}$
- $c = c_{max}$  se  $c_{ott} > c_{max}$

Quindi, si ha potenza massima se  $S_F > 0$  e potenza minima quando  $S_F < 0$ . Poiché  $S_F$  è minima se  $c$  assume il minimo valore ammissibile,  $S_F$  è sempre positiva se  $c$  non è limitato ( $c_{min} = 0$ ).

Se  $c = c_{ott}$ , si ha:

$$T = P \lambda_V / (m \lambda_m) \quad (4.8)$$

$$T/m = P \lambda_V / (m^2 \lambda_m) \quad (4.9)$$

e se non ci sono vincoli su  $c$ , si ha  $m^2 \lambda_m = cost$  e  $T/m \propto \lambda_V$ .

La PMP richiede la massimizzazione di  $S_F$ . Nel caso generale di  $c$  non costante, la funzione:

$$\bar{H} = T - \frac{m \lambda_m}{\lambda_V} q \quad (4.10)$$

deve essere massimizzata. È interessante notare che  $\bar{H}$  sia una combinazione lineare di  $T$  e  $q$ , e che dipende dal singolo parametro  $K = m\lambda_m/\lambda_v$ , che varia lungo la traiettoria. A qualunque punto della traiettoria dato,  $K$  è nota e deve essere cercato il livello di potenza che massimizza  $\bar{H}$ .

Per migliorare l'accuratezza del metodo numerico, la traiettoria viene suddivisa in archi in cui la spinta è massima e altri in cui la spinta è zero.

Il numero e l'ordine degli archi vengono assegnati a priori mentre le lunghezze temporali dei singoli archi sono sconosciute. Le condizioni al contorno per la condizione di ottimo impongono che la switching function  $SF$  sia uguale a zero nelle estremità di ogni arco di spinta.

La procedura numerica fornisce la soluzione di ottimo che corrisponde alla struttura della traiettoria assegnata a priori.

La soluzione viene poi controllata in accordo con il Principio di Massimo di Pontryagin, se il PMP viene violato vengono rimossi o inseriti archi di spinta o archi con spinta zero, tenendo in conto sempre il comportamento di  $SF$  per ottenere una soluzione migliore.

## 4.1 Equazioni di stato e variabili aggiunte

Nel corso della trattazione, si sceglie un sistema di riferimento inerziale basato sul piano equatoriale e si adottano perciò coordinate sferiche: la posizione del satellite è descritta dal raggio  $r$ , dalla longitudine  $\vartheta$  e dalla latitudine  $\phi$ :

$$\mathbf{r} = [r \ \vartheta \ \phi] \quad (4.1.1)$$

mentre la velocità, espressa in un sistema di riferimento locale, dalle componenti radiale (cioè verso lo Zenit)  $u$ , in direzione Est  $v$  e Nord  $w$ .

$$\mathbf{V} = [u, v, w] \quad (4.1.2)$$

Per quanto riguarda la velocità si è preferito proiettarne l'equazione differenziale in questo riferimento, e non in uno con un asse parallelo alla velocità stessa, per avere una più semplice relazione tra velocità relativa e assoluta. Proiettando le equazioni di stato nel riferimento scelto si ha:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (4.1.3)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{v}{r \cos \phi} \quad (4.1.4)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (4.1.5)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \quad (4.1.6)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \quad (4.1.7)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \quad (4.1.8)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (4.1.9)$$

dove  $\gamma$  e  $\psi$  sono gli angoli di elevazione (flight path angle) e di heading (misurati rispettivamente dal piano orizzontale, con angoli positivi verso l'alto, e in senso antiorario dal parallelo, con angoli positivi verso Nord) della velocità relativa  $\mathbf{V}_r$ , mentre  $\gamma_T$  e  $\psi_T$  sono gli stessi angoli per la spinta  $T$ .

Per orbite dirette ( $\cos \psi > 0$ ). Gli angoli  $\gamma$  e  $\psi$  dipendono solo dalle variabili di stato:

$$\sin \gamma = \frac{u}{V_r} \quad (4.1.10)$$

$$\cos \gamma \cos \psi = \frac{v - wr \cos \phi}{V_r} \quad (4.1.11)$$

$$\cos \gamma \sin \psi = \frac{w}{V_r} \quad (4.1.12)$$

dove il modulo della velocità relativa è pari a:

$$V_r = \sqrt{u^2 + (v - wr \cos \phi)^2 + w^2} \quad (4.1.13)$$

Gli angoli  $\gamma_T$  e  $\psi_T$  sono invece i controlli che determinano la direzione della spinta. Esplicitando l'espressione dell'Hamiltoniano, che non viene qui fornita per brevità, e annullandone le derivate parziali rispetto agli angoli  $\gamma_T$  e  $\psi_T$ , cioè:

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma_T} = 0 \quad (4.1.14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_T} = 0 \quad (4.1.15)$$

si ottengono i valori ottimali per gli angoli di spinta:

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (4.1.16)$$

$$\cos \gamma_T \cos \psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \quad (4.1.17)$$

$$\cos \gamma_T \sin \psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \quad (4.1.18)$$

dove:

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (4.1.19)$$

è il modulo del primer vector che è, come si era anticipato, parallelo alla direzione ottimale di spinta.

Le equazioni differenziali per le variabili aggiunte sono fornite dalle equazioni di Eulero-Lagrange. Si ottiene:

$$\dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2} \left[ \lambda_\vartheta \frac{v}{\cos \phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u \left( -\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \lambda_v (-uv + vw \tan \phi) + \lambda_w (-uw - v^2 \tan \phi) \right] \quad (4.1.20)$$

$$\dot{\lambda}_\vartheta = 0 \quad (4.1.21)$$

$$\dot{\lambda}_\phi = \frac{1}{r \cos^2 \phi} (-\lambda_\vartheta v \sin \phi - \lambda_v vw + \lambda_w v^2) \quad (4.1.22)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \quad (4.1.23)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left[ -\lambda_\vartheta \frac{1}{\cos \phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan \phi) + 2\lambda_w v \tan \phi \right] \quad (4.1.24)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} [-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan \phi + \lambda_w u] \quad (4.1.25)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_v \quad (4.1.26)$$

Le equazioni differenziali ottenute vengono inserite all'interno del sistema di equazioni differenziali.

## 4.2 Condizioni iniziali

Per effettuare le varie analisi delle traiettorie si è utilizzato un codice FORTRAN sviluppato per risolvere il problema di ottimo usando un processo iterativo. Il codice è stato usato per valutare la variazione della massa finale nell'intervallo considerato, in quest'ottica il problema di ottimo permette di trovare una strategia per cui la missione interplanetaria, in questo caso verso asteroidi, venga portata a termine con la massa finale massima e/o consumando meno propellente possibile.

Le traiettorie considerate sono relative a missioni con partenza, la Terra, e arrivo, un asteroide.

Quindi il codice ricava, in prima istanza i parametri orbitali della Terra e successivamente quelli dell'asteroide considerato.

Vengono identificate le variabili che sono:

$$N_y = [r, \theta, \varphi, u, v, w, \lambda_r, \lambda_\varphi, \lambda_w, \lambda_v, \lambda_w, \lambda_m, m] \quad (4.2.1)$$

La variabile  $\lambda_\vartheta$  viene omessa in quanto costante.

La dimensione totale del problema,  $N$ , racchiude il numero di variabili  $N_y$  e il numero dei parametri costanti, cioè:

$$k_p = [t_0, t_1, \lambda_\vartheta, t^*, V_{\infty_0}] \quad (4.2.2)$$

dove  $t_0$  è il tempo iniziale di partenza dalla Terra, mentre  $t_1$  è il tempo di arrivo sull'asteroide.

È possibile notare inoltre che la dimensione totale del problema è:

$$N = K + 1 \quad (4.2.3)$$

$$k_p = N - N_y \quad (4.2.4)$$

dove  $K$  è il numero di incognite.

È importante inoltre considerare il numero di fasi e il numero di intervalli,  $N_e$ , in cui è suddivisa ciascuna fase. In questa analisi è stata considerata un'unica fase che va quindi dalla partenza all'arrivo.

## 4.3 Condizioni al contorno

Successivamente sono definite le condizioni al contorno che possono essere esplicite o implicite:

- La condizione esplicita è unica ed è riferita alla variabile  $\lambda_m$  nel punto iniziale. Tale condizione stabilisce che  $\lambda_{m_0} = 1$ ;
- Le restanti variabili sono implicite, ciò significa che le condizioni al contorno coinvolgono più variabili. Il codice trova un errore in una condizione, che può essere, per esempio, posizione o velocità iniziale, e verifica che tale errore sia nullo.

Considerando di essere nel punto iniziale della fase, cioè alla partenza, si ha:

$$Er(1) = am_0 - m_{iniziale} \quad (4.3.1)$$

$$Er(2) = r - r_{iniziale} + R_{Terra} \quad (4.3.2)$$

$$Er(3) = \theta - \|\theta_{iniziale} - \theta_{Terra}\| \quad (4.3.3)$$

$$Er(4) = \varphi - \varphi_{iniziale} + \varphi_{Terra} \quad (4.3.4)$$

$$Er(5) = u - u_{iniziale} + u_{Terra} + \frac{\lambda_u}{\lambda_v} V_{\infty_0} \quad (4.3.5)$$

$$Er(6) = v - v_{iniziale} + v_{Terra} + \frac{\lambda_v}{\lambda_v} V_{\infty_0} \quad (4.3.6)$$

$$Er(7) = w - w_{iniziale} + w_{Terra} + \frac{\lambda_w}{\lambda_v} V_{\infty_0} \quad (4.3.7)$$

$$Er(15) = t - t_0 \quad (4.3.8)$$

$$Er(16) = V - V_{\infty_0} \quad (4.3.9)$$

dove  $am_0$  è la massa iniziale.

Nei casi oggetto di studio si ha  $V_{\infty_0} = 0$ .

Le medesime considerazioni in merito alle condizioni al contorno ed errori possono essere effettuate se ci si pone nel punto finale.

## 4.4 Soluzione di tentativo

Una volta definite le condizioni al contorno, per una corretta esecuzione del codice, è necessario fornire una soluzione di tentativo. Il primo passo che viene effettuato dal codice è stabilire, a valle, il numero di fasi da considerare in modo da definire successivamente il numero delle incognite  $K$ .



Se si ha un'unica fase, come in questo caso, le incognite saranno:

$$y = [t_0, t_1, \lambda_\vartheta, t^*, V_{\infty_0}, r, \theta, \varphi, u, v, w, \lambda_r, \lambda_\varphi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w, m] \quad (4.4.1)$$

dove  $t_0$  è il tempo iniziale alla partenza,  $t_1$  è il tempo all'arrivo,  $t^*$  è il parametro che sposta l'asteroide nella posizione più favorevole, in particolare, invece di calcolarne la sua posizione e velocità a  $t_1$ , si calcola a  $t_1 + t^*$  ed è quest'ultimo parametro ad essere ottimizzato in modo da ottenere, come detto in precedenza, l'asteroide nella posizione più favorevole. Le variabili  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  indicano la posizione iniziale e rappresentano rispettivamente il raggio, la longitudine e la latitudine in coordinate sferiche in un sistema di riferimento inerziale. La velocità viene espressa da  $u$  (componente radiale verso lo Zenit),  $v$  (componente in direzione Est) e  $w$  (componente in direzione Nord) in un sistema di riferimento locale.

Nella soluzione di tentativo si omette  $\lambda_{m_0}$  in quanto il suo valore è stato arbitrariamente fissato ad 1.

Attraverso i valori di tentativo, il codice esegue processi di integrazione e derivazione all'interno di sistemi di equazioni differenziali, ripetendoli finché non si raggiunge una soluzione convergente.

## Capitolo 5

# Risultati

Per ogni asteroide si è cercata una soluzione per missioni di durata 2, 3, 4 anni e di ogni durata sono stati considerati i tempi di partenza ottimizzati e le relative masse finali. In generale, è possibile osservare una certa tendenza: al variare della partenza e in funzione della durata, la massa cresce, tipicamente con un aumento a scalini. Se invece si fissa la durata, come in questa analisi e come mostrano gli esempi riportati successivamente, al variare della data di partenza, tipicamente è possibile trovare massimo per quanto riguarda la massa finale. Conseguentemente, una data un po' più grande o un po' più piccola, ne peggiora il valore. In realtà è possibile trovare due massimi e a seconda della soluzione di tentativo, è possibile ricadere sull'una o sull'altra.

Successivamente, per ogni asteroide, sono stati realizzati i grafici che mostrano l'evoluzione dei raggi di periastro e apoastro per le differenti durate e i grafici relativi l'andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  per le medesime durate. Gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  rappresentano gli angoli nel piano e fuori dal piano della spinta, cioè la spinta in direzione radiale ( $\alpha$ ) e fuori dal piano ( $\beta$ ) (Se  $\alpha = 0$ , la spinta è parallela alla velocità).

Dai grafici, in generale, è possibile evincere che le manovre sono essenzialmente cambi fuori e nel piano dell'orbita, in particolare: cambi al periastro e all'apoastro. In genere, se la missione richiede un forte cambio di periastro, con l'apoastro che risulta invece costante, si dovrà spingere soltanto a quest'ultimo.

### 5.1 La ricerca di modelli

Utile nella comprensione del comportamento delle traiettorie ottimizzate per vari asteroidi è stata la definizione di modelli significativi. In particolare, essi sono stati definiti variando il parametro  $\omega$ , cioè l'argomento del periastro, e lasciando invariati i restanti parametri. Sono stati considerati i seguenti casi:

- $\omega = 180^\circ$ ;
- $\omega = 90^\circ$

Al fine di comprendere meglio gli esempi seguenti, si fornisce di seguito la nomenclatura necessaria:

- $a$  = semiasse maggiore;
- $e$  = eccentricità;
- $i$  = inclinazione;
- $\omega$  = argomento del periastro;
- $\Omega$  = ascensione retta del nodo ascendente;
- $t_0$  = tempo di partenza;
- $m_f$  = massa finale

È inoltre importante precisare che le variabili sono adimensionate rispetto al raggio dell'orbita della Terra e la corrispondente velocità circolare, per cui il tempo di riferimento risulta tale da rendere il periodo della Terra uguale a  $2\pi$ .

### 5.1.1 Modello 1: asteroide 2012 BA35

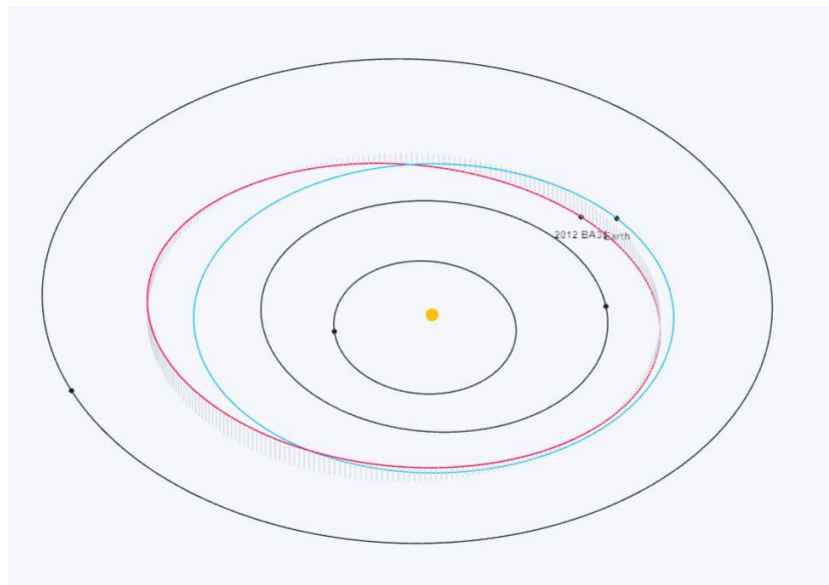


Figura 5.1.1.1: Orbita di 2012 BA35

- $\omega = 180^\circ$ :

Asteroide	$a$	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
2012 BA35	1.07179210	0.11772311	5.71453000	180.00000000	145.44219000

Tabella 5.1.1.1: Parametri orbitali di 2012 BA35 con  $\omega=180^\circ$

Anni	$t_0$	$m_f$	durata reale
2	137.011038	17.209034	0 – 12.566
3	137.692676	17.592815	0.8294 – 18.2091
4	137.972420	17.688351	0.9048 – 24.4795

Tabella 5.1.1.2: Andamento della massa finale nelle tre durate

La tabella 5.1.1.2 dimostra in maniera chiara le considerazioni in merito alla massa finale che sono state fatte precedentemente. Si può infatti notare un aumento progressivo della massa finale all'aumentare della durata della missione.

Nel caso di  $\omega = 180^\circ$ , quello che si dovrebbe avere, per la missione a tre anni, sono tre manovre uguali in cui si ha un cambio all'apoastro e al periaastro, a meno che il periaastro non sia vicino a 1, caso in cui entra anche in gioco l'eccentricità della Terra. Se il perielio è circa 1, poiché la Terra è un po' eccentrica, il raggio della Terra varia. Quindi è necessario aggiustare il perielio. Se l'orbita fosse circolare, non si avrebbero problemi. Quindi ci si aspetta tre archi più o meno uguali all'afelio e tre archi più o meno uguali al perielio, con il cambiamento del piano più o meno uguale tra i tre, in termini di  $\beta$ . E se si passa da tre a quattro anni, ci si aspetta il medesimo comportamento; e da tre a due anni la stessa cosa con archi più lunghi. Effettivamente, come si evince dai grafici seguenti, queste condizioni sono rispettate.

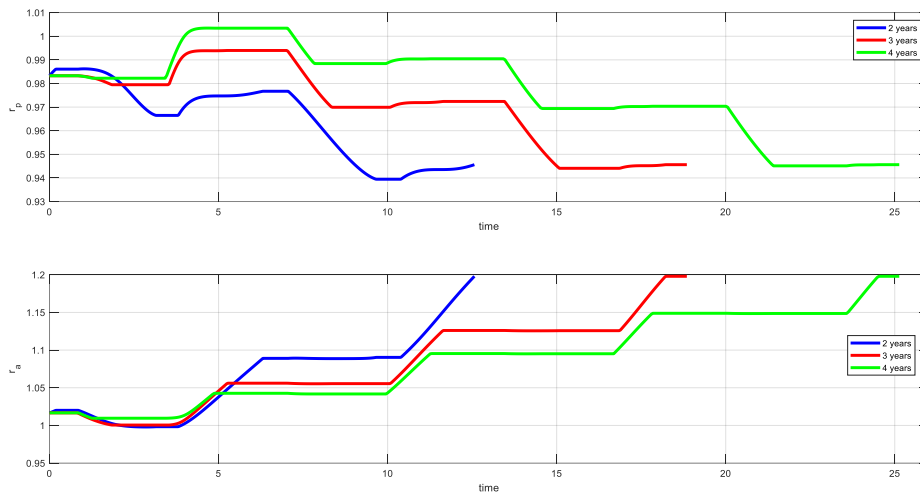


Figura 5.1.1.2: Andamento del periaastro e apoastro nelle tre durate per  $\omega = 180^\circ$

Come è possibile, infatti, osservare dalla figura 5.1.1.3,  $\beta$  è quasi sempre  $90^\circ$ . Ciò significa che si ha spinta quando si è vicino al nodo, quindi  $\beta$  grande, successivamente si utilizza quella componente relativamente piccola di spinta, poiché non si è esattamente a  $90^\circ$ , per cambiare l'orbita generando una spinta ad  $\alpha = 0$  quando si è al periaastro in modo da alzare l'apoastro e ad  $\alpha = 180^\circ$  agli altri.

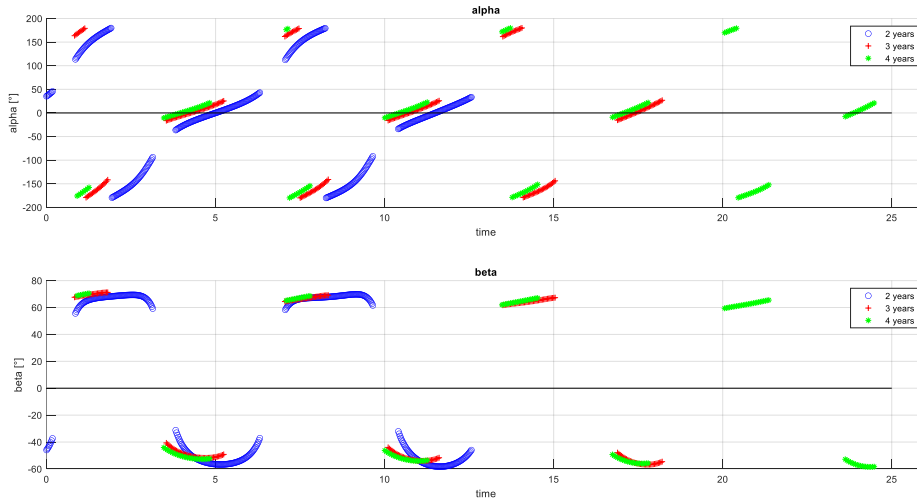


Figura 5.1.1.3: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  nelle tre durate per  $\omega = 180^\circ$

- $\omega = 90^\circ$ :

Asteroide	$a$	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
2012 BA35	1.07179210	0.11772311	5.71453000	90.00000000	145.44219000

Tabella 5.1.1.3: Parametri orbitali di 2012 BA35 con  $\omega=90^\circ$

Anni	$t_0$	$m_f$	durata reale
2	128.307899	17.207421	0 – 12.566
3	128.470506	17.313127	0 – 18.85
4	128.799999	17.326667	0 – 25.133

Tabella 5.1.1.4: Andamento della massa finale nelle tre durate

Se si considera invece il caso di  $\omega = 90^\circ$ , spingere in queste condizioni non cambia l'inclinazione, per cui, gli archi di spinta sono stesi e non concentrati ad apoastro e periastro. Essendo stesi, l'angolo  $\alpha$  con cui è necessario spingere cambia notevolmente. Quando si è al nodo, si ha circa  $\beta = 90^\circ$ , e dopo  $90^\circ$ , si ha  $\alpha = 0, 180^\circ$  e  $\beta = 0$ . Quindi in uno si deve cambiare l'inclinazione e nell'altro si può cambiare apoastro e periastro. Se le due manovre coincidono, è possibile effettuare una manovra combinata in modo da ottenere risparmio in quanto le componenti di velocità si sommano attraverso il Teorema di Pitagora; mentre se non coincidono, si deve spingere separatamente.

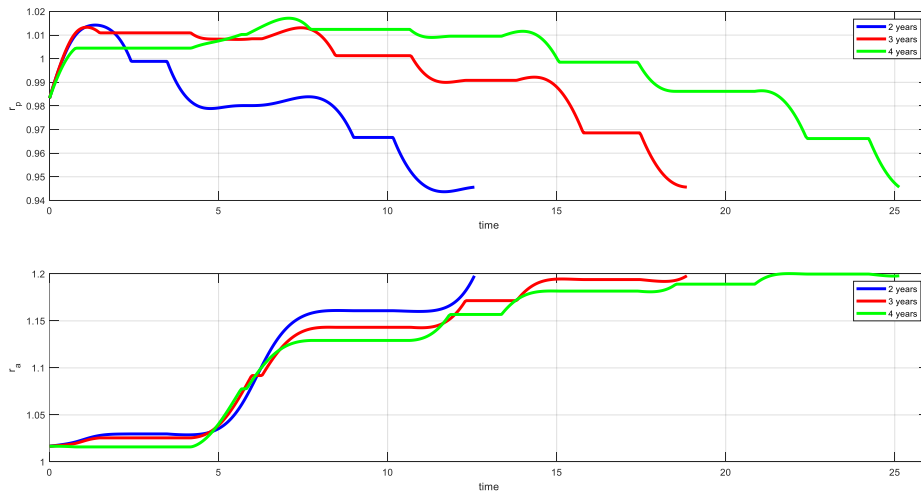


Figura 5.1.1.4: Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per  $\omega = 90$

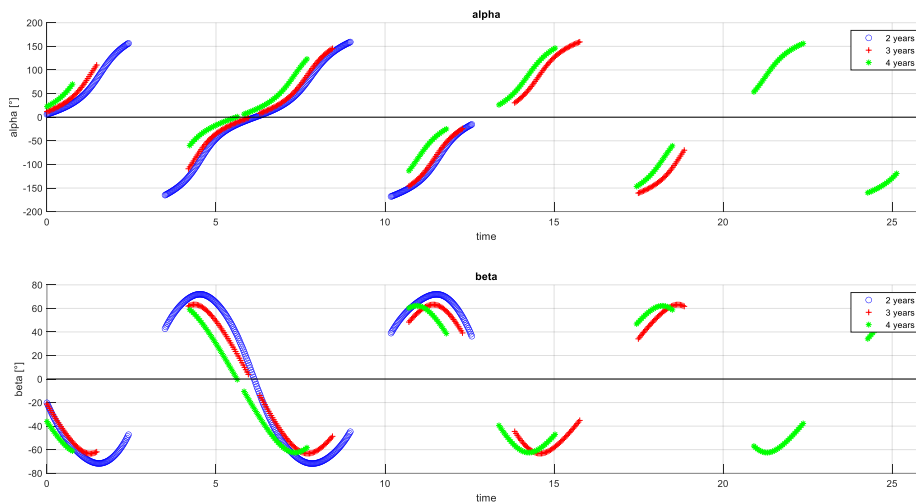


Figura 5.1.1.5: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  nelle tre durate per  $\omega = 90^\circ$

Per verificare l'ottimizzazione delle traiettorie del modello 1, si è preso in considerazione un secondo modello. Come è possibile osservare dai grafici riportati di seguito, il comportamento è analogo.

### 5.1.2 Modello 2: asteroide 2015 VV

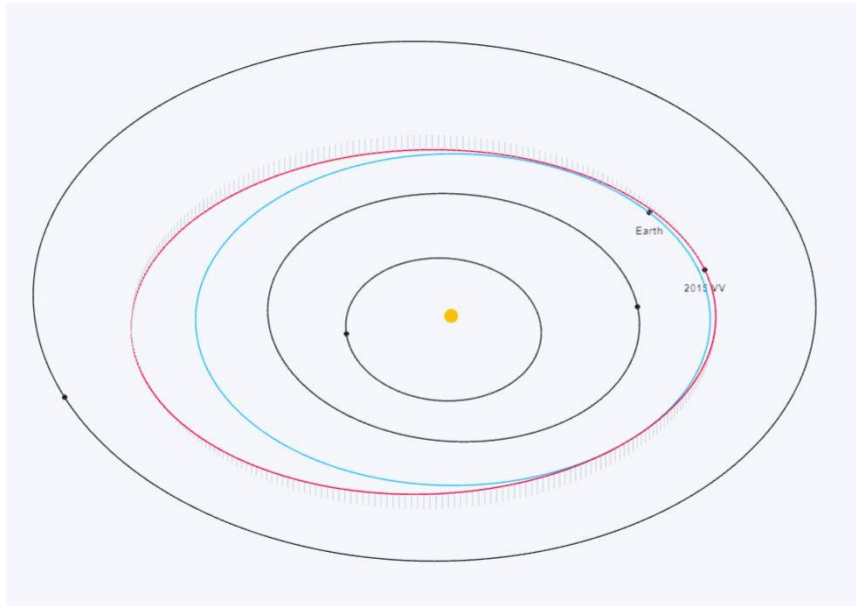


Figura 5.1.2.1: Orbita di 2015 VV

- $\omega = 180^\circ$

Asteroide	$a$	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
2015 VV	1.13658070	0.10459539	4.00704000	180.00000000	212.78419000

Tabella 5.1.2.1: Parametri orbitali di 2015 VV con  $\omega=180^\circ$

Anni	$t_0$	$m_f$	durata reale
2	129.622389	17.981285	0 – 12.566
2.5	129.739222	18.122017	0.0942 – 15.6138
3	129.973538	18.137838	0 – 18.85
4	130.099999	18.190453	0.0503 – 25.133

Tabella 5.1.2.2: Andamento della massa finale nelle quattro durate

Se si prende in considerazione il caso  $\omega = 180^\circ$ , le analisi risultanti sono le stesse effettuate per il modello 1. Vi è solo una variazione nell'angolo  $\alpha$  poiché se la manovra è corta, essa dovrà aggiustare il periastro con due piccole manovre di apoastro ( $\alpha = 180^\circ$ ), se il tempo a disposizione è maggiore, il periastro si aggiusta automaticamente insieme alle altre manovre. Per questi motivi è stata aggiunta la soluzione calcolata per due anni e mezzo. Un ulteriore prova del vantaggio delle manovre combinate è visibile nella Tabella 5.1.2.2. in cui, per manovre di più lunga durata, si ha un aumento della massa finale. Questo vantaggio, tuttavia, per missioni della durata di due anni, non è così rilevante in quanto gli archi di spinta sono più allungati.

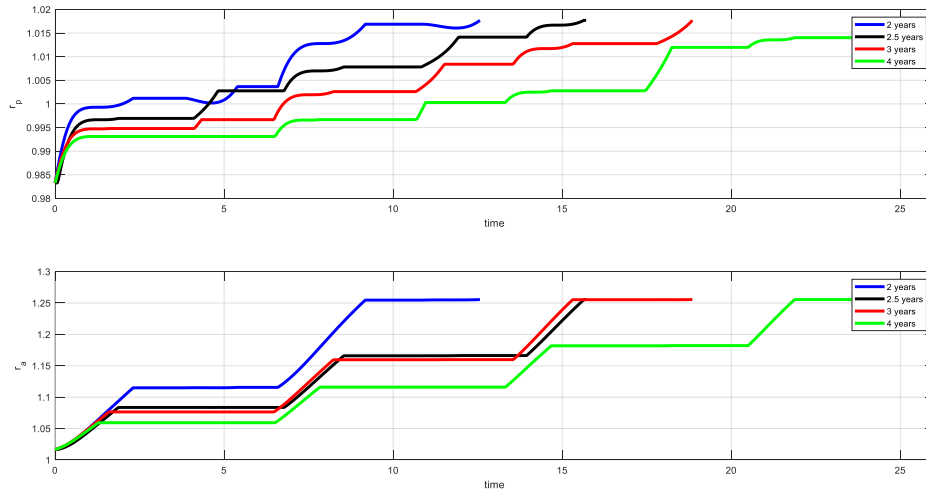


Figura 5.1.2.2: Andamento del periastro e apoastro nelle quattro durate per  $\omega = 180^\circ$

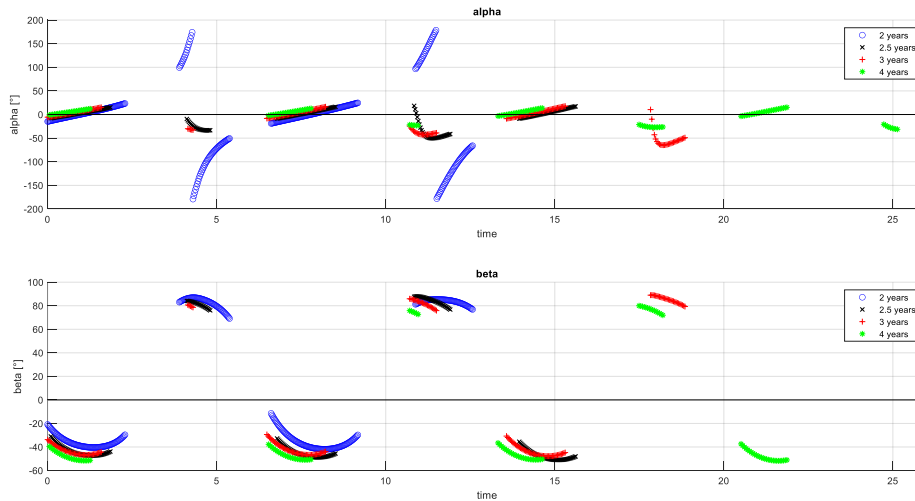


Figura 5.1.2.3: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  nelle quattro durate per  $\omega = 180^\circ$

- $\omega = 90^\circ$

Asteroidi	$a$	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
2015 VV	1.13658070	0.10459539	4.00704000	90.00000000	212.78419000

Tabella 5.1.2.3: Parametri orbitali di 2015 VV con  $\omega=90^\circ$

Anni	$t_0$	$m_f$	durata reale
2	126.713641	17.806709	0.5278 – 11.8623
3	127.370831	17.835639	0.4524 – 18.3222
4	127.939128	17.841014	0.1508 – 25.0325

Tabella 5.1.2.4: Andamento della massa finale nelle tre durate



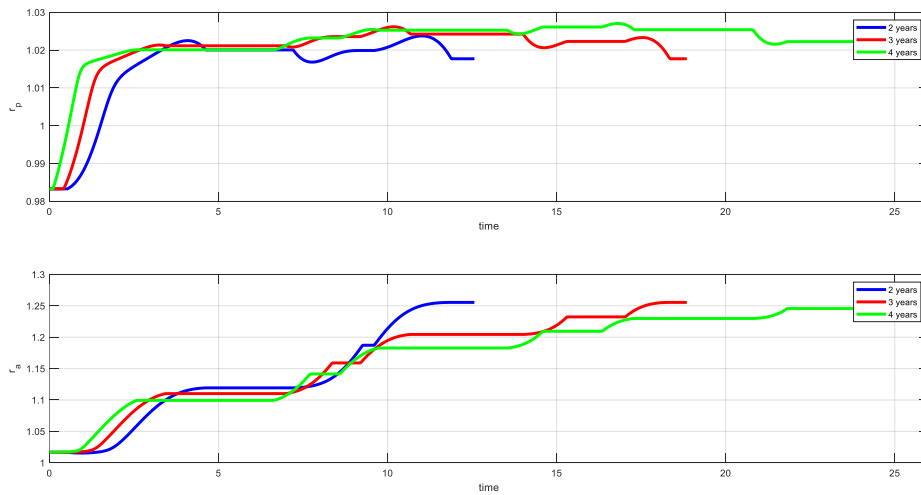


Figura 5.1.2.4: Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per  $\omega = 90^\circ$

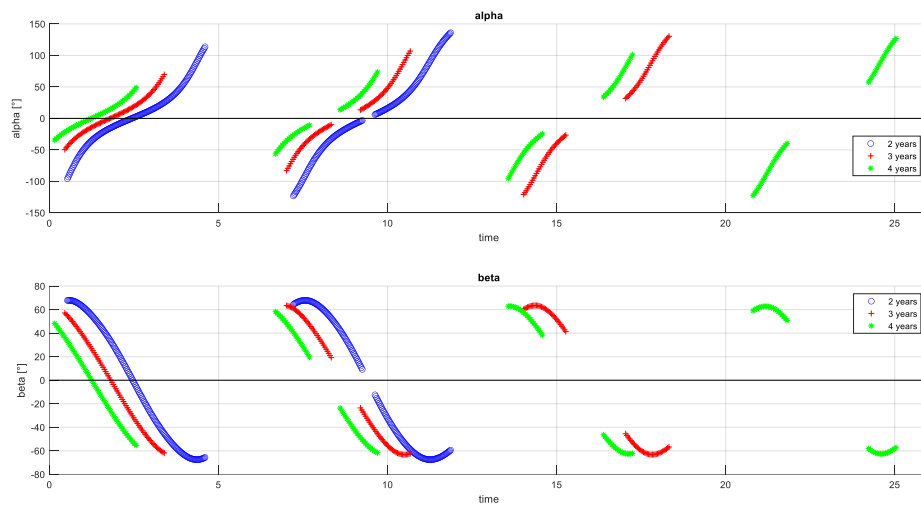


Figura 5.1.2.5: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  nelle tre durate per  $\omega = 90^\circ$

Come è possibile notare, nelle tabelle è stata inserita una colonna dedicata alla durata reale della missione, durata in cui è presente effettivamente spinta, espressa mediante tempo adimensionato. I dati numerici suggeriscono la presenza di piccoli coasting che tuttavia non influiscono in maniera significativa sull'andamento della missione.

### 5.1.3 Caso $\omega = 135^\circ$ per entrambi i modelli

Un'ulteriore prova che è stata effettuata per comprendere meglio il comportamento dei modelli è stata quella di trovare una soluzione, per le differenti durate, con  $\omega = 135^\circ$ . In questo caso, per entrambi i modelli, è possibile notare che il comportamento non differisce di molto da quello con  $\omega = 90^\circ$ .

▪ Modello 1:

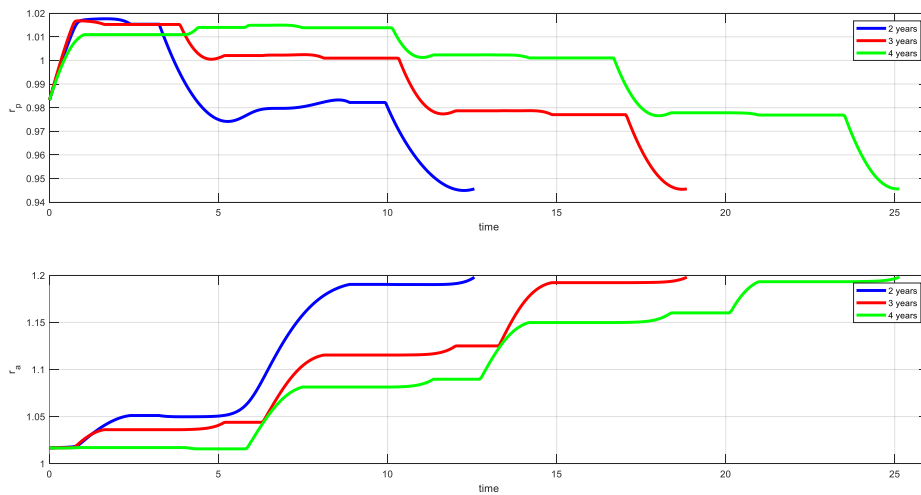


Figura 5.1.3.1: Andamento del periastro e apoastro per  $\omega = 135^\circ$  di 2012 BA35

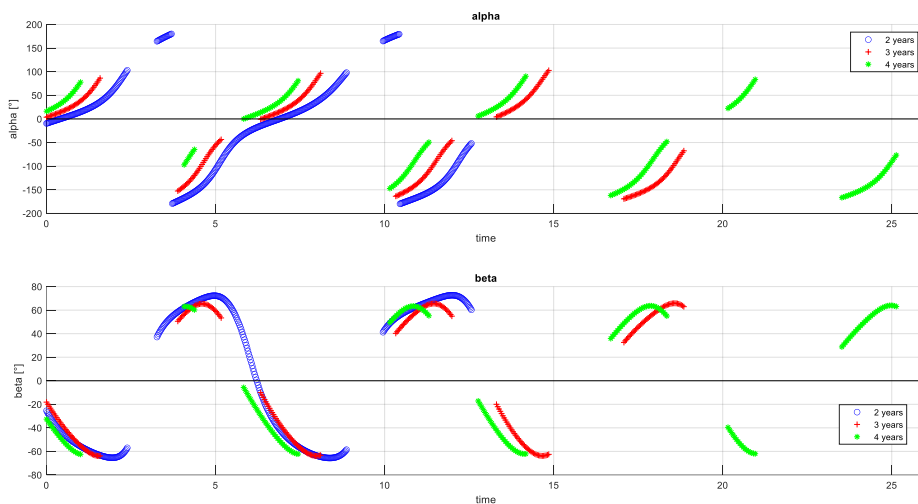


Figura 5.1.3.2: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  per  $\omega = 135^\circ$  di 2012 BA35

▪ Modello 2:

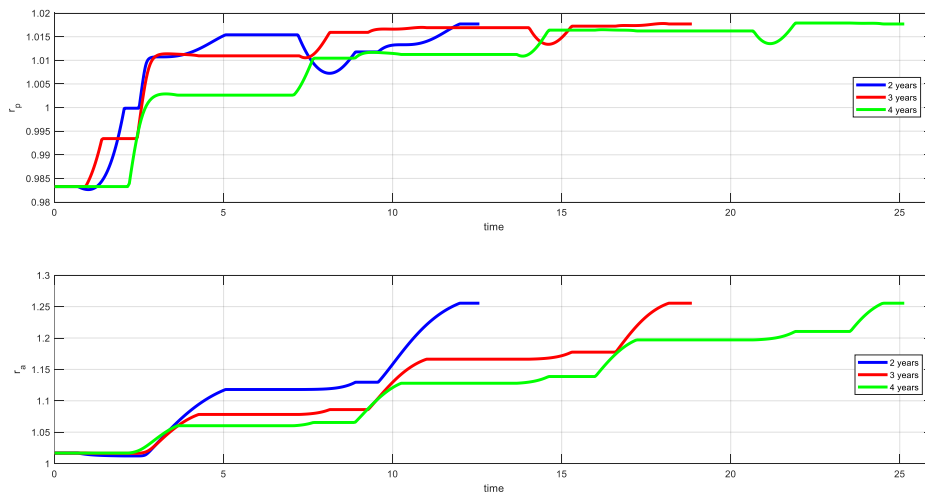


Figura 5.1.3.3: Andamento del periastro e apoastro per  $\omega = 135^\circ$  di 2015 VV

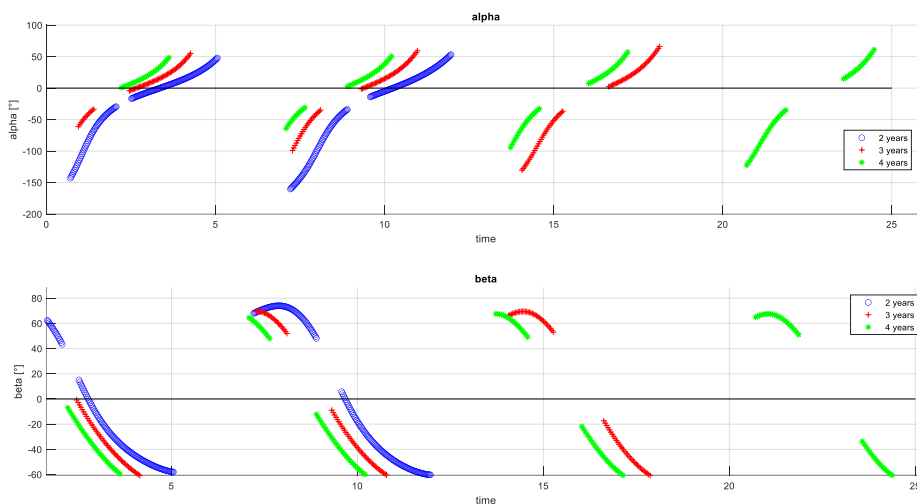


Figura 5.1.3.4: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  per  $\omega = 135^\circ$  di 2015 VV

## 5.2 Confronto con il set di asteroidi

Sono stati analizzati un set di asteroidi aventi caratteristiche differenti, in termini di parametri orbitali, comparandone il loro comportamento rispetto ai modelli precedentemente analizzati. Per una migliore comprensione, per ciascun asteroide, è stata riportata la tabella con i parametri orbitali e i grafici relativi all'andamento del periastro e apoastro, e l'andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ .

Per iniziare, si riportano i prototipi di asteroidi che hanno un comportamento simile al caso  $\omega = 180^\circ$ :

Asteroide	$a$	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
2015 BM510	0.94680840	0.12153342	1.58896000	357.34108000	267.87545000

Tabella 5.2.1: Parametri orbitali di 2015 BM510

Come si evince dalla Tabella 5.2.1, questo asteroide è caratterizzato da un  $\omega$  molto grande. Dai grafici riportati di seguito, è possibile notare l'analogo comportamento di archi più o meno uguali all'afelio e archi più o meno uguali al perielio, con il cambiamento del piano più o meno uguale in termini di  $\beta$ .

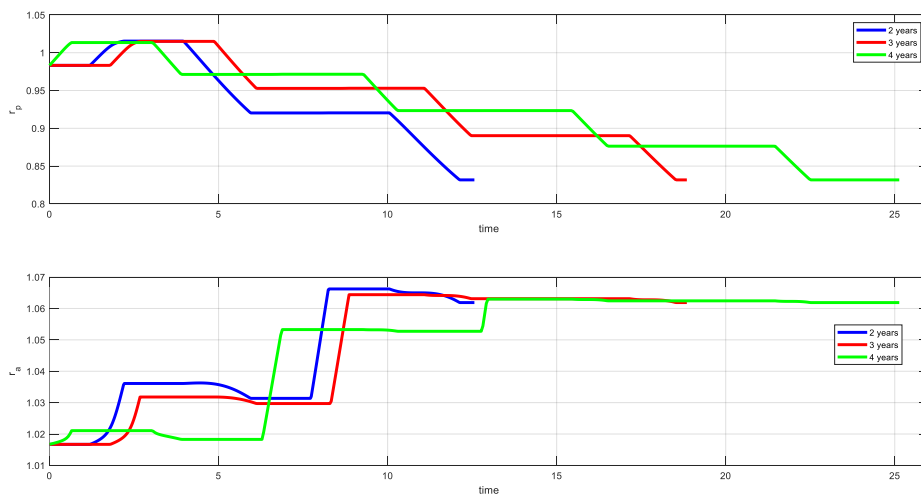


Figura 5.2.1: Andamento del periastro e apoaastro nelle tre durate per 2015 BM510

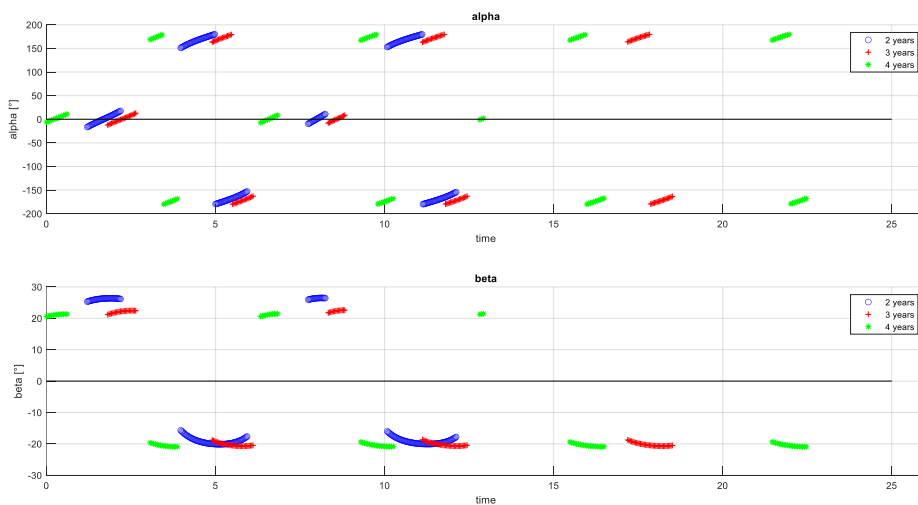


Figura 5.2.2: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  nelle tre durate per 2015 BM510

Asteroide	$a$	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
2016 VL3	1.29396390	0.15111723	2.16148000	21.45713000	55.79543000

Tabella 5.2.2: Parametri orbitali di 2016 VL3

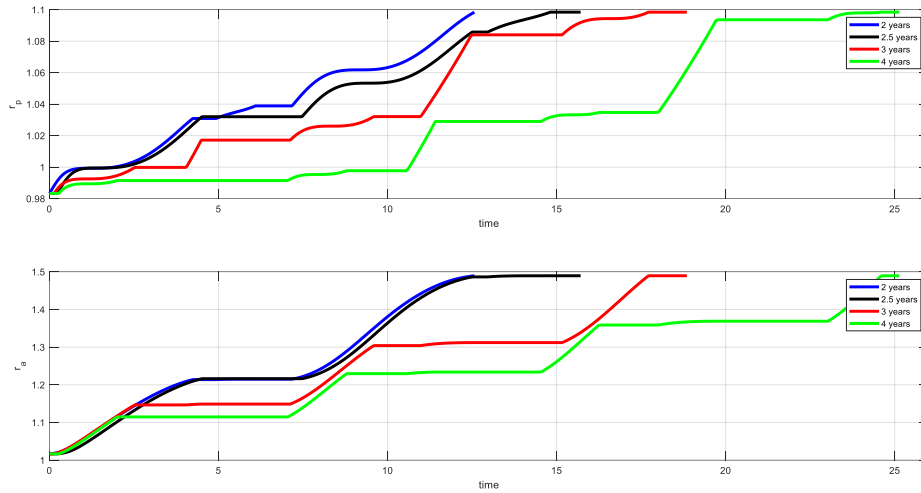


Figura 5.2.3: Andamento del periastro e apoastro nelle quattro durate per 2016 VL3

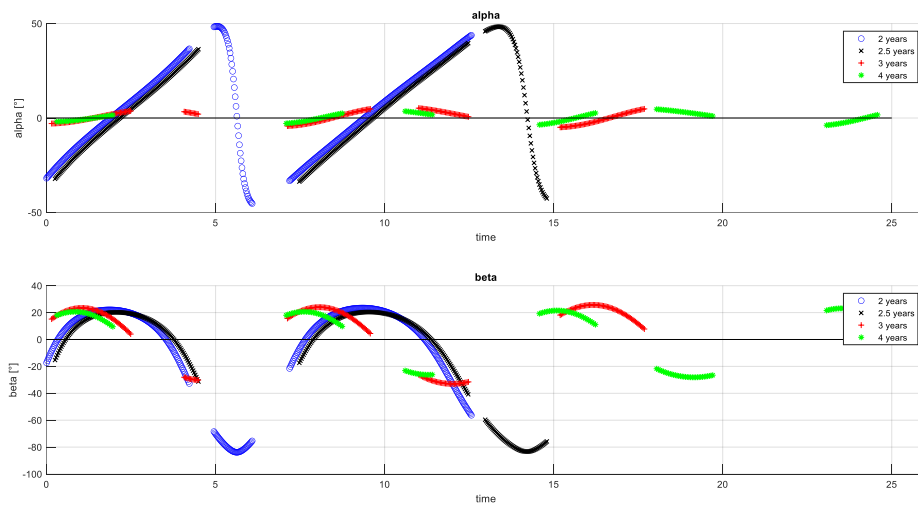


Figura 5.2.4: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  nelle quattro durate per 2016 VL3

Asteroide	$a$	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
2014 SD304	1.16788210	0.10838312	2.29384000	19.29891000	7.62817000

Tabella 5.2.3: Parametri orbitali di 2014 SD304

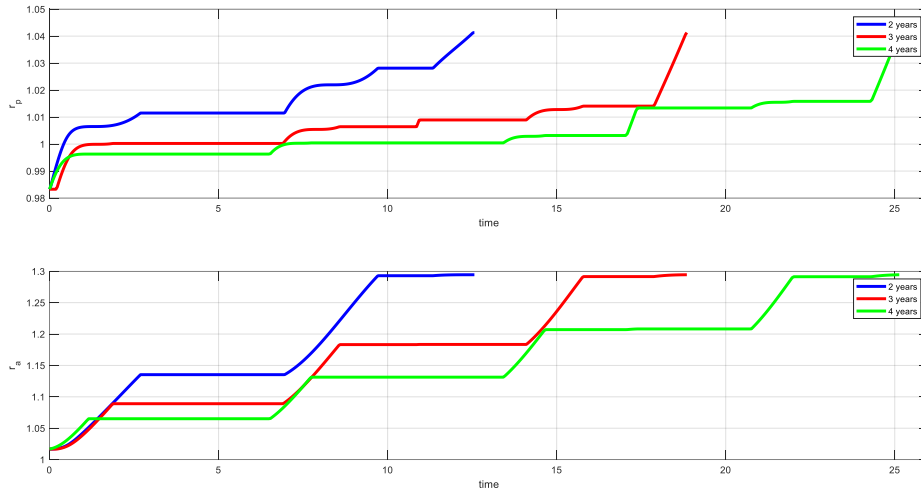


Figura 5.2.5: Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 2014 SD304

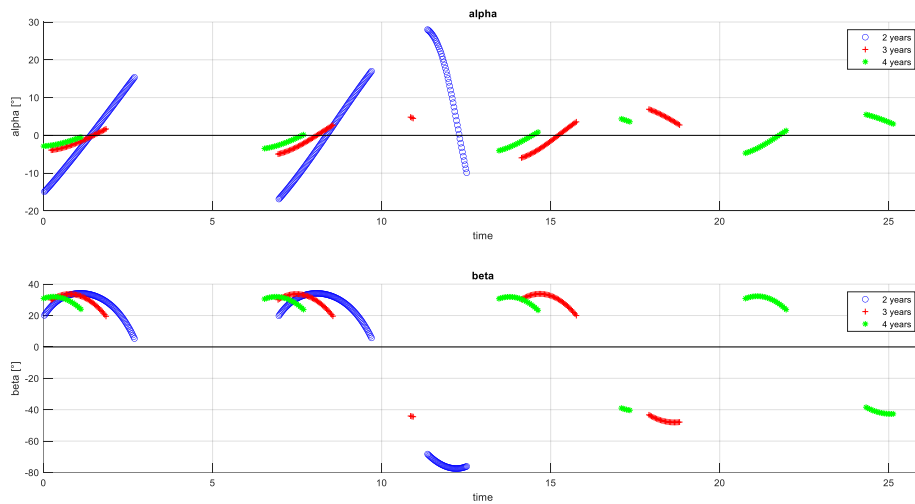


Figura 5.2.6: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  nelle tre durate per 2014 SD304

Asteroide	$a$	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
2015 TZ24	1.19149510	0.10043702	3.34998000	3.17384000	359.80345000

Tabella 5.2.4: Parametri orbitali di 2015 TZ24

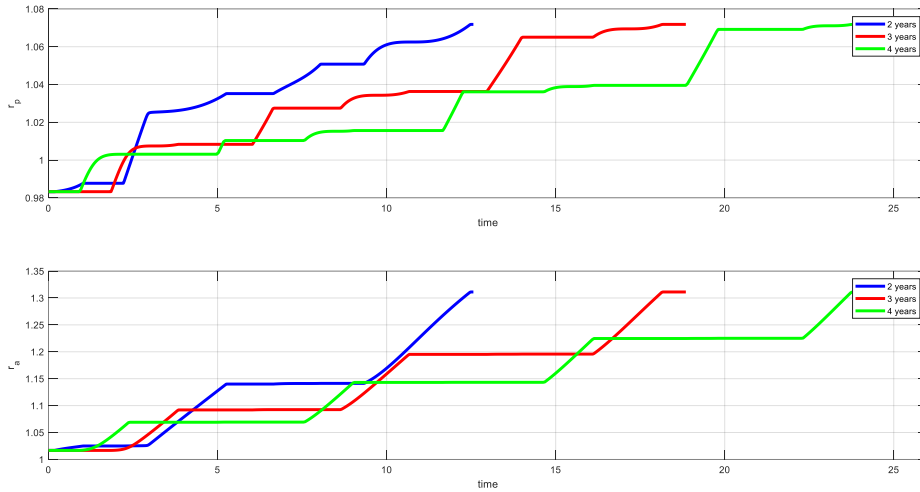


Figura 5.2.7: Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 2015 TZ24

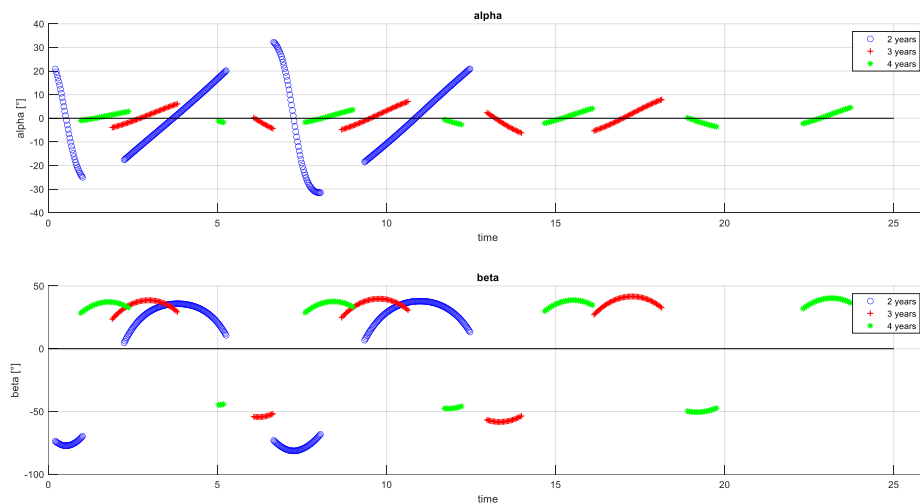


Figura 5.2.8: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  nelle tre durate per 2015 TZ24

Dal punto di vista dei parametri orbitali, gli asteroidi 2016 VL3, 2014 SD304 e 2015 TZ24 sono molto simili e presentano entrambi una  $\omega$  bassa. Analogamente al Modello 2, si riscontra una variazione nell'angolo  $\alpha$  importante nel caso di manovre a due anni, quindi manovre corta.

Si mostrano di seguito i prototipi di asteroidi che hanno un comportamento simile al caso  $\omega = 90^\circ$ :

Asteroide	$a$	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
2007 TF15	1.10884570	0.04478813	4.25325000	28.85938000	193.12490000

Tabella 5.2.5: Parametri orbitali di 2007 TF15

Come si evince dalla Tabella 5.2.5, questo asteroide è caratterizzato da una eccentricità  $e$ , e da  $\omega$  piccole da un'inclinazione alta.

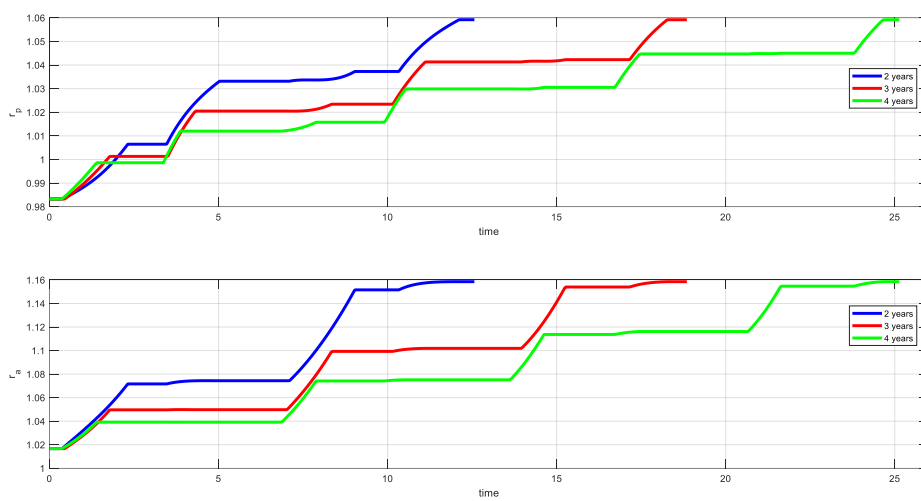


Figura 5.2.9: Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 2007 TF15

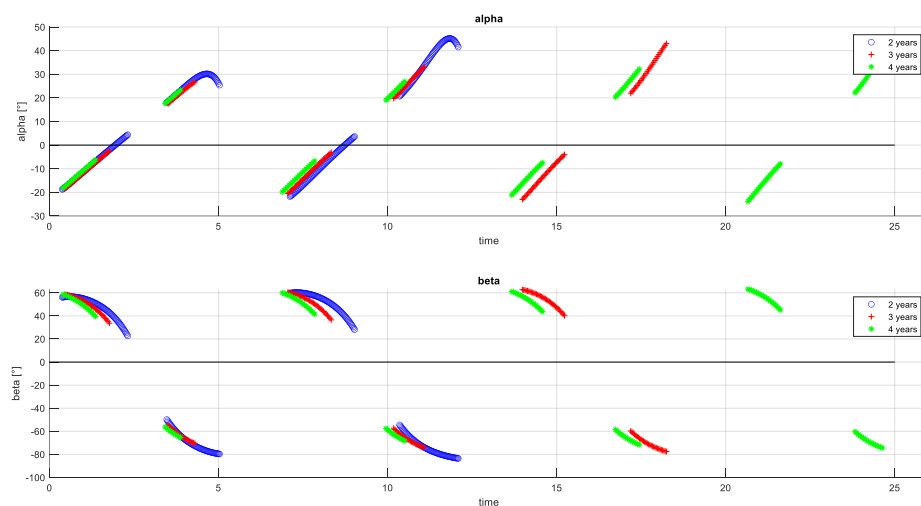


Figura 5.2.10: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  nelle tre durate per 2007 TF15



Asteroide	$a$	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
1996 XB27	1.18888300	0.05789328	2.46453000	58.18181000	179.41240000

Tabella 5.2.6: Parametri orbitali di 1996 XB27

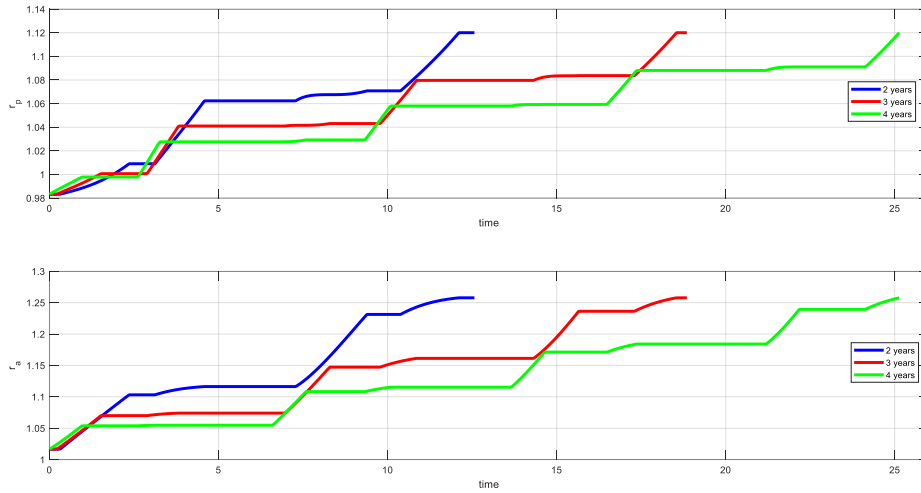


Figura 5.2.11: Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 1996 XB27

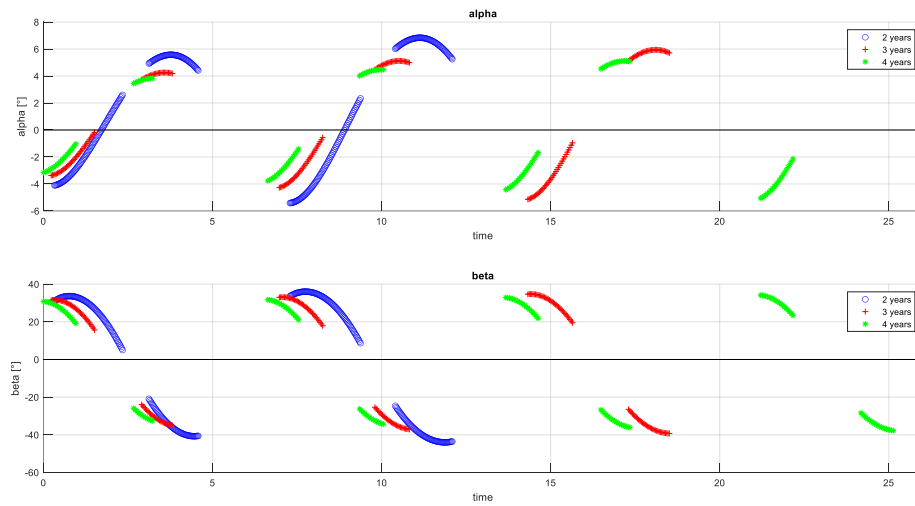


Figura 5.2.12: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  nelle tre durate per 1996 XB27

Asteroide	$a$	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
1998 KY26	1.23290220	0.20184140	1.48103000	209.36714000	84.36632000

Tabella 5.2.7: Parametri orbitali di 1998 KY26

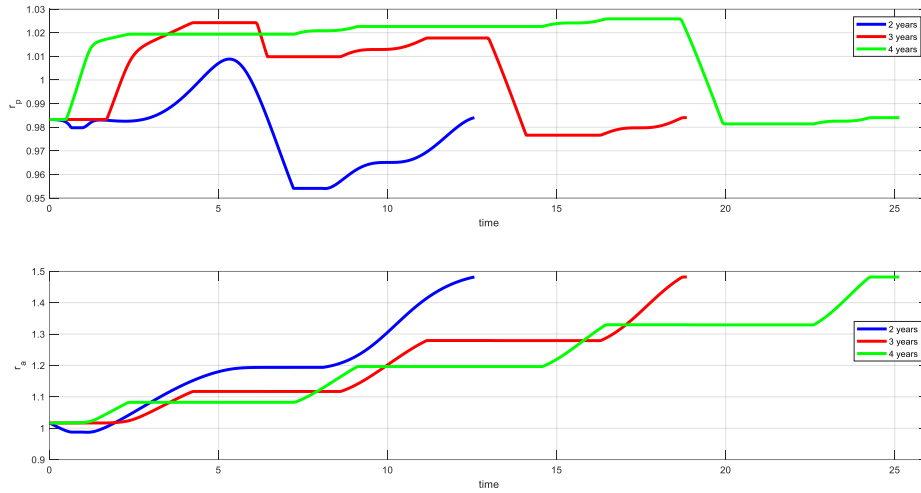


Figura 5.2.13: Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 1998 KY26

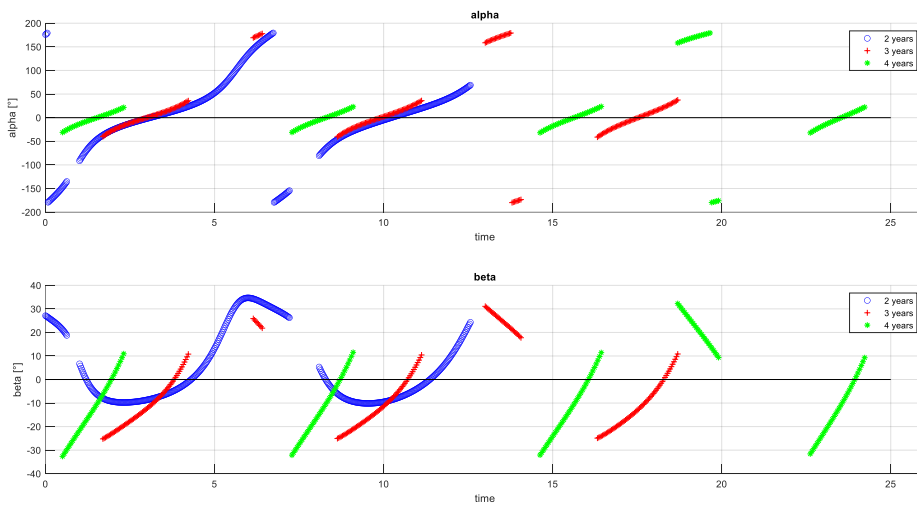


Figura 5.2.14: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  nelle tre durate per 1998 KY26

Asteroide	$a$	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
2001 AV43	1.28361150	0.24092093	0.20125000	51.31081000	20.50496000

Tabella 5.2.8: Parametri orbitali di 2001 AV43

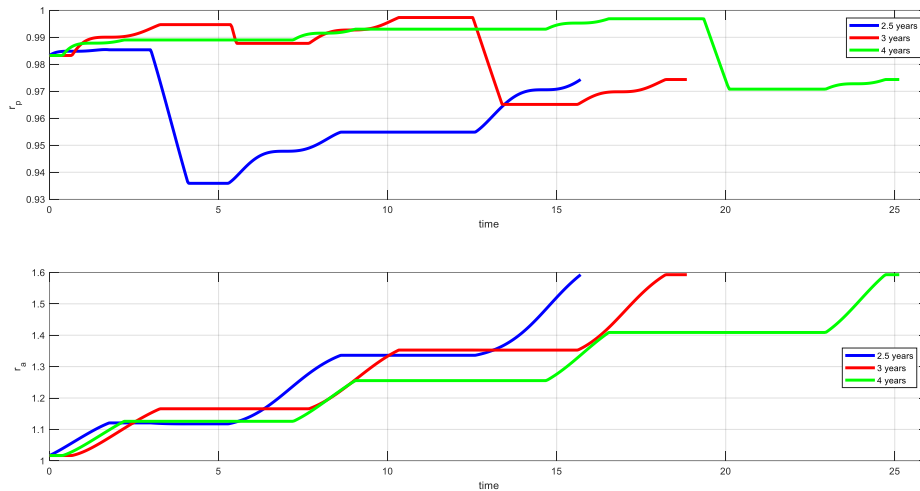


Figura 5.2.15: Andamento del periastro e apoastro nelle tre durate per 2001 AV43

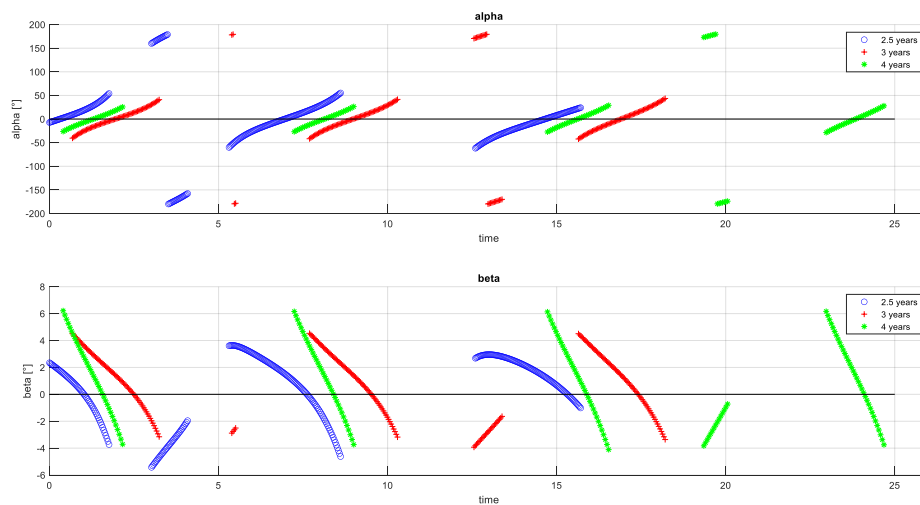


Figura 5.2.16: Andamento degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  nelle tre durate per 2001 AV43

Questi ultimi due casi risultano interessanti da osservare. Dal punto di vista dei parametri orbitali, l'asteroide 1998 KY26 ha una  $\omega$  media. Se si considerano i grafici degli angoli, è possibile notare che questa missione sembra separare i compiti, esclusa la durata due anni dove praticamente vi è sempre spinta. Ci sono archi per variare ad  $\alpha = 0$  dove  $\beta$  varia tra  $-30^\circ$  e zero, e quindi si cambia un po'  $i$ . Poi ci sono archi in cui essenzialmente si ha un cambio solo di  $i$  perché più conveniente. Questo tipo di strategia può dipendere dal fatto che  $i$  è piccola e quindi non è necessario spingere anche ai periastris. Analogamente per l'asteroide 2001 AV43 in quanto ha inclinazione  $i$  molto piccola, come è possibile vedere dalla Tabella 5.2.8.

# Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è stata quella di presentare un metodo sufficientemente accurato per l'analisi di traiettorie di missioni verso asteroidi. Mediante un codice FORTRAN è stato possibile risolvere il problema di ottimo attraverso un processo iterativo che non ha solo stimato il consumo di propellente necessario per le varie missioni, ma ha anche mostrato le manovre effettuate derivate dal processo di ottimizzazione

In prima analisi, come è possibile vedere dalle tabelle, è stato verificato l'aumento della massa finale al crescere della durata della missione. Più tempo è disponibile per portar a termine la missione, più propellente si riesce a risparmiare.

Lo studio ha condotto successivamente alla definizione di due modelli di asteroidi ottenuti variando il parametro orbitale  $\omega$ , ovvero l'argomento del periastro.

L'analisi dei grafici ha mostrato le principali tecniche di ottimizzazione della traiettoria, in particolare è stata riscontrata la presenza di essenzialmente due tipi di manovre: la manovra di aggiustamento degli apsi e la manovra di cambio di piano orbitale.

I grafici realizzati analizzando il comportamento del set di asteroidi hanno altresì evidenziato una certa tendenza a seguire i modelli precedentemente determinati.

In prospettiva di una prosecuzione di questo studio di tesi, occorre verificare l'attendibilità dei modelli applicando queste tecniche di ottimizzazione ad un set di asteroidi più ampio in modo da verificare anche la presenza di prototipi di asteroidi che non rientrano nelle categorie elencate in precedenza.

In aggiunta, in questo lavoro di tesi, la durata effettiva della missione e in particolare i fenomeni di coasting non hanno avuto un impatto rilevante sulla missione stessa indipendentemente dalla durata. Sarebbe interessante, infine, confrontare e verificare in che modo la soluzione si modifichi garantendo sempre spinta dalla partenza all'arrivo.

# Bibliografia

- [1] NASA, Jet Propulsion Laboratory, *Asteroids*
- [2] Viorel Badescu, *Asteroids, Prospective Energy and Material Resources*, Springer
- [3] Senem Çabuk, Nazim Çabuk, *Technological importance of asteroid mining*, 2019
- [4] Pablo Calla, Dan Fries, Chris Welch, *Asteroid mining with small spacecraft and its economic feasibility*, 2019
- [5] British National Space Center, *Report of the Task Force on potentially hazardous Near Earth Objects*, 2000
- [6] Gregory H. Canavan, Johndale Solem, *Interception of near-Earth objects*, 1992
- [7] Roger R. Bate, Donald D. Mueller, Jerry E. White, *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover Publications, 1971
- [8] Lorenzo Casalino, Matthew A. Vavrina, *Optimal power partitioning for electric thruster*, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, 2018
- [9] Lorenzo Casalino, *Ottimizzazione indiretta di traiettorie spaziali*
- [10] Lorenzo Casalino, *Equazioni in coordinate sferiche*
- [11] Boltyanskiĭ, V.G., Gamkrelidze, R.V., Pontryagin, L.S., *On the theory of optimal processes*, 1956
- [12] [https://ssd.jpl.nasa.gov/sb/why\\_asteroids.html](https://ssd.jpl.nasa.gov/sb/why_asteroids.html)
- [13] <https://en.wikipedia.org/wiki/Asteroid>
- [14] <https://sci.esa.int/web/rosetta/-/54342-missions-to-asteroids>
- [15] <https://airandspace.si.edu/exhibitions/exploring-the-planets/online/solar-system/asteroids/exploration.cfm>
- [16] <https://www.asteroidmission.org/objectives/mission-operations/>
- [17] [https://en.wikipedia.org/wiki/Asteroid\\_mining](https://en.wikipedia.org/wiki/Asteroid_mining)