POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

# Analisi di Traiettorie a Bassa Spinta per Rimozione di Detriti Spaziali

Orbite LEO Circolari Perturbate da J2


**Relatore**
Prof. Casalino Lorenzo

**Candidato**
Martella Donato


Dicembre 2021

# Abstract

Nel presente elaborato sono proposti dei metodi per una rapida stima del costo di una trasferta a bassa spinta, mirata alla rimozione di detriti spaziali in orbita bassa. Si considerano orbite LEO circolari con inclinazioni simili. L'ottimizzazione del $\Delta V$, basata sulla minimizzazione del consumo di propellente, è affiancata dallo sfruttamento dell'effetto J2 a supporto della riduzione dei costi di missione. Il tempo di trasferta è prefissato, il che rende le soluzioni analitiche ricavate particolarmente interessanti per il calcolo preliminare dei costi per la rimozione di grandi sequenze di detriti. I risultati, comparati con soluzioni ottenute con metodi di ottimizzazione indiretta, offrono un buon compromesso tra accuratezza e costo computazionale.

# Indice

# Capitolo 1

# Introduzione

Il numero di oggetti orbitanti attorno alla Terra è in fase di crescita esponenziale dagli albori dell'esplorazione spaziale, sia a causa dell'aumento repentino del numero di lanci sia a causa della cosiddetta sindrome di Kessler, ovvero il fenomeno di produzione a cascata di detriti in seguito alle innumerevoli collisioni degli oggetti in orbita. La fitta presenza di questi detriti rappresenta una seria minaccia per il futuro dei lanci nello spazio, in particolar modo per le orbite di maggior interesse, come le LEO, GEO, Molniya, etc., e recenti studi hanno dimostrato la necessità di rimuovere almeno 5 detriti all'anno per arrestarne l'esponenziale moltiplicazione. In caso contrario, il rischio di incorrere in impatti con conseguenze disastrose tra detriti e satelliti o veicoli (talvolta con umani a bordo) diventerebbe sempre più concreto.

Una possibile soluzione è rappresentata dalla mera rimozione attiva di questi oggetti attraverso delle missioni in cui un chaser possa intercettare una determinata sequenza di detriti target e modificarne l'orbita per consentirne un rientro sicuro in atmosfera (ad esempio una strategia efficace consiste nell'installare un kit propulsivo su ogni target), affiancata da stringenti normative sul deorbit in sicurezza obbligatorio per i futuri satelliti dismessi. Le strategie di rimozione trattate nel presente elaborato e le relative teorie appositamente sviluppate sono principalmente indicate per detriti di grandi dimensioni, come gli stadi superiori dei lanciatori, e l'idea di fondo per una missione di questo tipo è di effettuare quanti più rendez vous possibili, nei limiti di fattibilità e convenienza, a cascata dal k-esimo al (k+1)-esimo detrito in una sequenza prestabilita. La possibilità di effettuare più di una singola rimozione con lo stesso S/C costituirebbe un considerevole vantaggio dal punto di vista dei costi di missione ed è stato inoltre dimostrato che con le attuali tecnologie è plausibile rimuovere dai 4 agli 8 detriti all'anno [7]. In questo contesto l'utilizzo della propulsione elettrica, e quindi della bassa spinta, potrebbe rappresentare una valida alternativa alla propulsione chimica in termini di ulteriore contenimento dei costi sul propellente, a patto che siano ammissibili durate di missione ben più grandi.

Le possibili sequenze di detriti da rimuovere sono numerosissime, ma indipendentemente dal numero di target da rimuovere con una singola missione è opportuno considerare dei cluster di orbite accomunate da altitudini e inclinazioni simili a cui fare riferimento per snellire tutte le possibili combinazioni. Inoltre tali cluster esistono in quanto sono già note le principali orbite utilizzate per gli scopi utili all'uomo (ad esempio eliosincrone e Molniya) e di conseguenza sono anche prioritarie nel processo di messa in sicurezza tramite ADR (Active Debris Removal). Nel presente elaborato, ad esempio, sono trattate principalmente orbite LEO (Low Earth Orbit) circolari ($e = 0$). Il parametro orbitale che presenta maggiori problematiche da questo punto di vista è la RAAN (Right Ascension of Ascending Node): la non sfericità della Terra introduce delle perturbazioni sugli oggetti orbitanti e in particolare la perturbazione più consistente è dovuta alla maggiore concentrazione di massa nella fascia equatoriale. L'effetto di quest'ultima è modellato attraverso l'armonica zonale J2, la quale in funzione di altitudine, inclinazione ed eccentricità dell'orbita è in grado di stimare la variazione nel tempo di parametri orbitali come RAAN, $\omega$(argomento del periastro), etc. D'altro canto l'effetto di J2 non è da considerarsi esclusivamente svantaggioso, in quanto in determinate condizioni può essere sfruttata la differenza di precessione tra le orbite di chaser e target per ottenere l'allineamento.
Nella presente tesi è stato affrontato il problema della stima del costo in termini di $\Delta V$ per il rendez vous di una coppia di oggetti su orbite LEO circolari con inclinazione e altitudine simili, fissato a priori il tempo di trasferta. L'obiettivo principale è di trovare un buon compromesso tra precisione e velocità di calcolo, per poi consentire una riduzione del costo computazionale su scala più ampia nel processo di selezione delle sequenze di target più favorevoli.
La base teorica di partenza è costituita da una teoria di calcolo approssimato del $\Delta V$ di trasferimento tra due orbite circolari, basata sulla teoria della spinta continua di Edelbaum, nella cui analisi viene opportunamente integrato l'effetto di J2 [5][6]. Tale teoria implementa una trasferta a 3 archi del tipo *thrust-coast-thrust*, assumendo che le manovre siano impulsive. Il presente elaborato propone delle possibili soluzioni approssimate per affrontare lo step successivo, ovvero andare a considerare le manovre come non impulsive (bassa spinta continua). In quest'ottica, una volta implementata e sperimentata la teoria ad archi impulsivi sul calcolatore (MATLAB), partendo dai risultati ottenuti segue una fase di rimodellazione delle equazioni con lo scopo di considerare gli effetti introdotti dalle manovre a bassa spinta sui 3 archi della trasferta e il conseguente impatto sulla componente benefica di J2. L'accuratezza delle stime è stata verificata attraverso l'utilizzo di codici che implementano un'ottimizzazione indiretta del problema [4].

# Capitolo 2

# Modello dinamico

## 2.1 Parametri orbitali

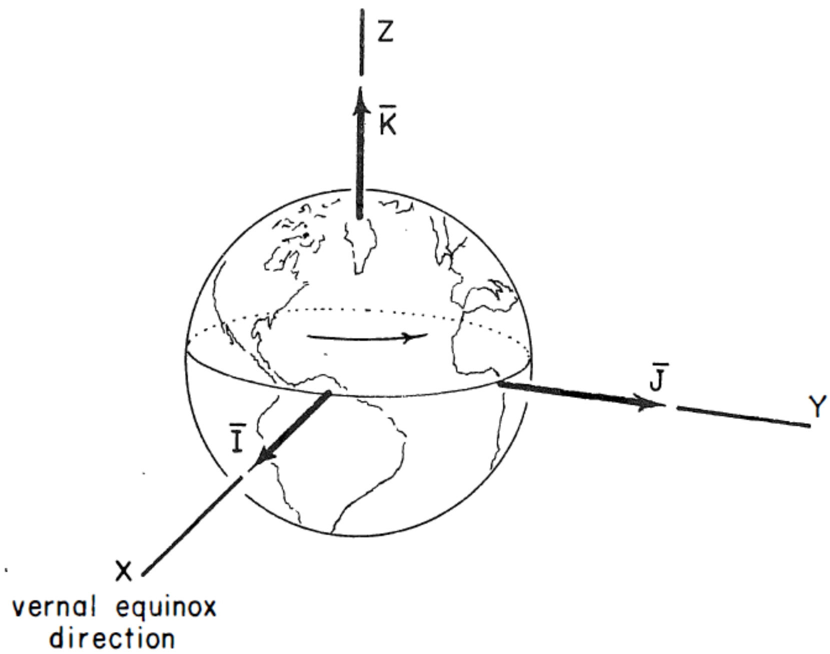



Figura 2.1:
*Bate, Muller, White, "Fundamentals of Astrodynamics"*

Nel corso dell'intera trattazione sarà utilizzato il sistema di riferimento geocentrico-equatoriale, la cui origine coincide con il centro della Terra (Fig.2.1). Il piano fondamentale è il piano dell'equatore, l'asse $x$ è parallelo alla linea degli equinozi con verso positivo in direzione dell'equinozio vernale, $z$ coincide con l'asse di rotazione con verso positivo in direzione della stella polare, $y$ completa la terna ortogonale.

$I$, $K$, $J$ sono i rispettivi versori. [1]
Considerando dunque un sistema di coordinate geocentrico-equatoriale, i parametri orbitali sono 5 grandezze indipendenti fra loro in grado di descrivere grandezza, forma e orientamento di un'orbita, più una sesta grandezza per identificare la posizione del satellite lungo la sua traiettoria ad un determinato istante. Essi sono (Fig.2.2):

- **a**, semiasse maggiore, una costante che definisce la grandezza dell'orbita;
- **e**, eccentricità, una costante che definisce la forma dell'orbita;
- **i**, inclinazione, l'angolo compreso tra il versore $K$ e il vettore momento angolare, o, in altre parole, l'angolo compreso tra il piano $IJ$ e il piano in cui si sviluppa l'orbita;
- $\Omega$, longitudine del nodo ascendente, l'angolo, nel piano fondamentale, tra il versore $I$ e il punto di intersezione tra traiettoria ascendente in direzione nord e piano fondamentale (piano dell'equatore), misurato in senso antiorario;
- $\omega$, argomento del periastro, l'angolo nel piano orbitale tra il nodo ascendente e il periastro, misurato in direzione del moto del satellite;
- $\nu$, anomalia vera, l'angolo nel piano orbitale tra il periastro e la posizione del satellite ad un determinato istante, misurato in direzione del moto.

Risulta evidente che per determinate orbite alcuni di questi parametri perdono di significato:

- in caso di orbita circolare viene meno il riferimento del periastro, si definisce quindi $u = \omega + \nu$;
- in caso di orbita equatoriale viene meno il nodo ascendente, si definisce quindi $\Pi = \Omega + \omega$, longitudine del periastro;
- in caso di orbita circolare equatoriale, si definisce $l = \Omega + \omega + \nu$, longitudine vera. [1]

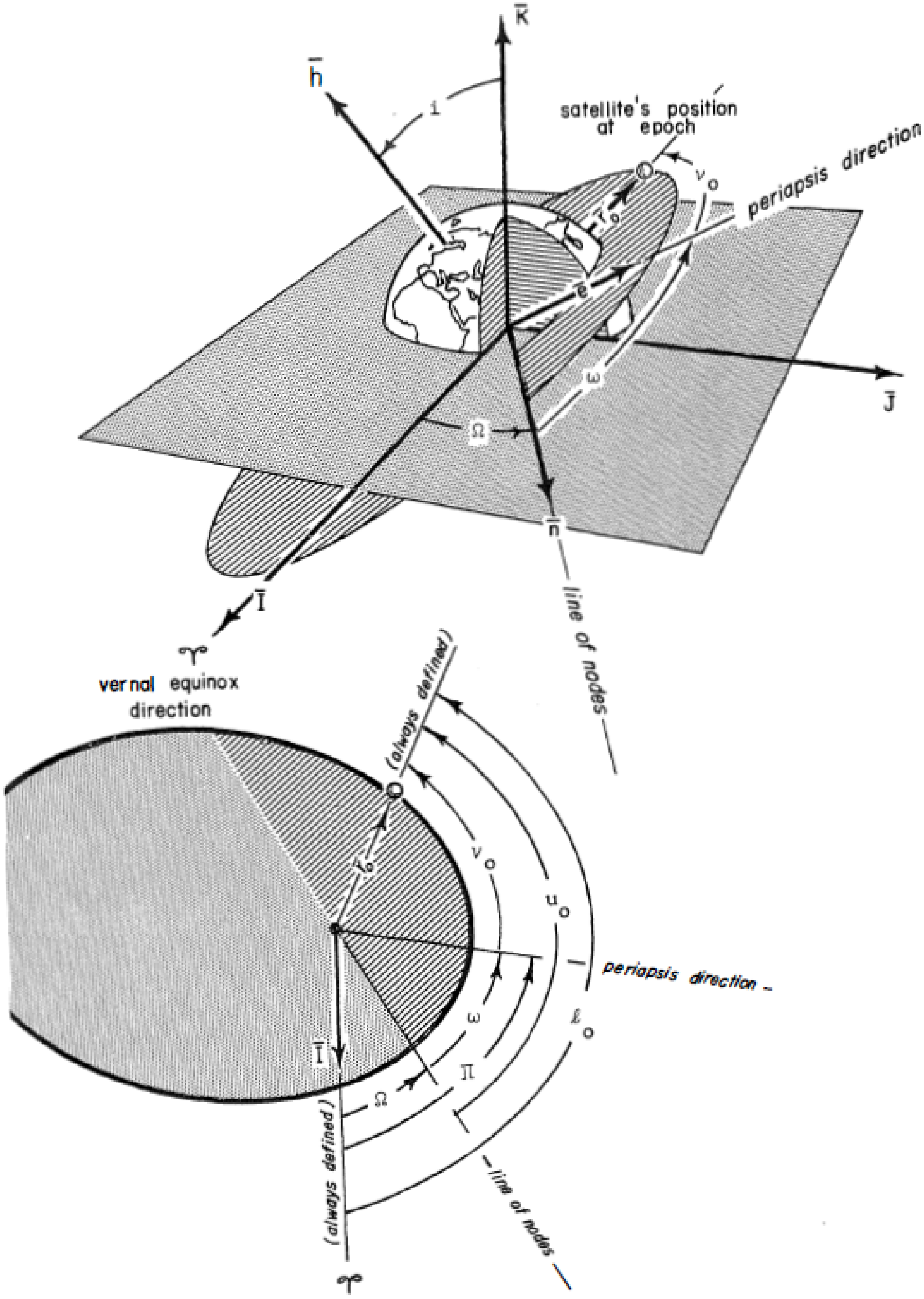



Figura 2.2:
*Bate, Muller, White, "Fundamentals of Astrodynamics"*

## 2.2 Perturbazioni di orbite LEO dovute alla non sfericità della Terra

La Terra non è sferica e il suo centro di gravità non coincide con il centro di massa. Questa caratteristica diventa trascurabile a grandi distanze, ma in orbita bassa introduce delle perturbazioni sulla traiettoria sia periodiche che secolari. Saranno considerate solo le secolari in questo elaborato e i due effetti principali sono la regressione della linea dei nodi e la rotazione della linea degli absidi (solo per orbite non circolari). La prima consiste in una rotazione del piano dell'orbita sull'asse di rotazione terrestre, la seconda in una rotazione dell'asse maggiore nel piano dell'orbita in direzione concorde o discorde al moto a seconda dell'inclinazione.
Nel presente elaborato sarà considerata solo la regressione della linea dei nodi, in quanto è la più impattante ed è presente anche in caso di orbite circolari. La perturbazione su $\omega$ infatti è trascurabile per orbite quasi circolari. La causa fisica principale del suddetto effetto è la maggiore concentrazione di massa nella fascia equatoriale, la quale introduce sostanzialmente una debole coppia rispetto al centro della Terra che agisce sul satellite. Si può schematizzare questo fenomeno come mostrato in Fig.2.3, approssimando idealmente l'eccesso di massa con una "cintura" che avvolge la Terra all'equatore. [1]

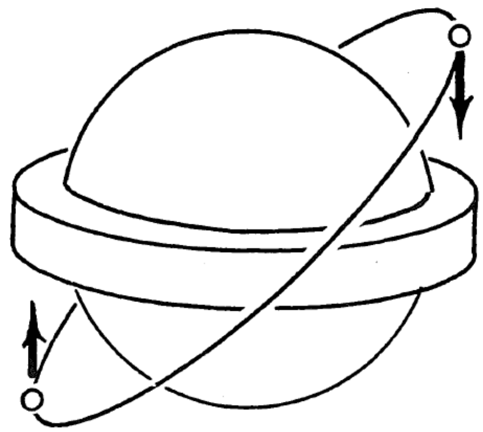


Figura 2.3:
*Bate, Muller, White, "Fundamentals of Astrodynamics"*

Esistono dei sistemi di riferimento, come il WGS84, che adottando un modello ellissoidale contemplano peculiarità come lo schiacciamento ai poli, l'equatore come un'ellisse, con relativo sbilanciamento di massa, asimmetria, etc. Per il modello a sfera si può scrivere il potenziale gravitazionale terrestre nella forma semplificata

$\Phi = \frac{\mu}{r}$, ma tale espressione risulta troppo approssimativa in questo caso, perdendo informazioni sul campo gravitazionale locale. Risulta più accurato adottare la forma geoide, ovvero la superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre che meglio si adatta, nel senso dei minimi quadrati, al livello medio del mare. Dalla formula di Vinti, si può esprimere il potenziale gravitazionale come:

$$\Phi = \frac{\mu}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_n \sin L\right] \tag{2.1}$$

dove $\mu$ è il parametro gravitazionale, $J_n$ sono dei coefficienti determinati sperimentalmente, $R_E$ è il raggio della Terra, $P_n$ polinomi di Legendre, $L$ latitudine geocentrica. Tra tutti i coefficienti $J_n$ il più importante è $J_2 = 1.0826 \cdot 10^{-3}$, che modella essenzialmente la forma ellissoidale con schiacciamento ai poli. Secondo per ordine di importanza è $J_3 = -2.54 \cdot 10^{-6}$, che modella l'asimmetria di distribuzione di massa tra i due emisferi. Si può ben notare che J3 è 3 ordini di grandezza inferiore rispetto a J2 e i restanti coefficienti sono via via più piccoli. È giustificata dunque la scelta di considerare solo il contributo di J2 all'interno della presente trattazione. Possiamo a questo punto esprimere la regressione della linea dei nodi come segue:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}\left(\frac{R_E}{p}\right)^2 n J_2 \cos i \tag{2.2}$$

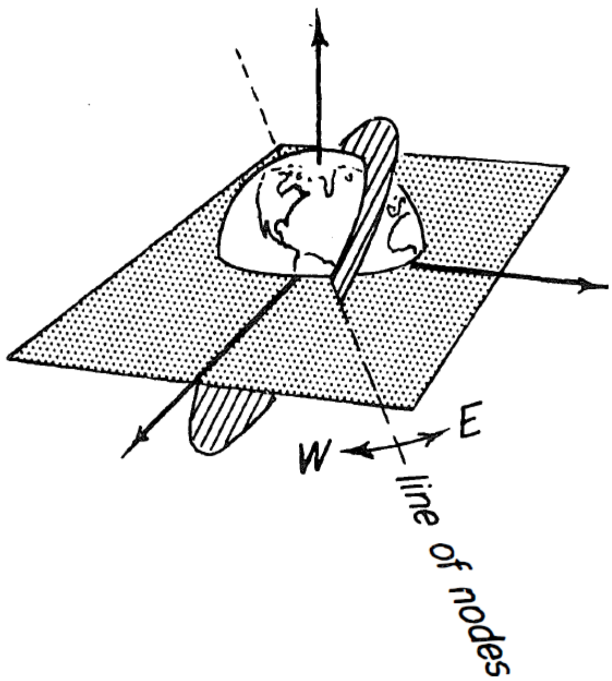



Figura 2.4:
*Bate, Muller, White, "Fundamentals of Astrodynamics"*

dove $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ è la velocità angolare media, $p = a(1-e^2)$ è il semilatus-rectum. $\dot{\Omega}$ è inversamente proporzionale al semiasse maggiore, confermando che le orbite LEO sono le più influenzate da questo fenomeno. Inoltre:

- $0 < i < \frac{\pi}{2}$ (orbita diretta) $\Rightarrow$ Regressione (verso ovest);
- $\frac{\pi}{2} < i < \pi$ (orbita retrograda) $\Rightarrow$ Precessione (verso est).

Per completezza sono riportate le relazioni che esprimono la perturbazione di J2 su $\omega$ (rotazione della linea degli absidi) e $M$:

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4}\left(\frac{R_E}{p}\right)^2 n J_2 (5\cos^2 i - 1) \tag{2.3}$$

$$\dot{M} = n + \frac{3}{4}\left(\frac{R_E}{p}\right)^2 n J_2 \sqrt{1-e^2}(3\cos^2 i - 1) \tag{2.4}$$

## 2.3 Manovre con propulsione elettrica

La propulsione elettrica è caratterizzata da spinte molto basse e tempi lunghi, motivo per cui, a differenza della chimica, l'ipotesi di manovra impulsiva non è valida. La ricerca della migliore traiettoria per raggiungere un'orbita diversa da quella di partenza, fissati i tempi iniziale e finale, diventa complessa e non risolvibile analiticamente. Sotto opportune ipotesi è possibile ricorrere a teorie approssimate, derivanti dal più generale modello di Gauss. Nella presente trattazione si fa riferimento alla teoria semplificata di Edelbaum, caratterizzata dalle seguenti ipotesi:

- orbite quasi circolari $\Rightarrow r \approx a \approx p; \quad e \approx 0; \quad V^2 = \frac{\mu}{r}$;
- $E \approx \nu \approx M$;
- piccole variazioni di inclinazione $\Rightarrow \Delta i \approx 0; \quad \cos\Delta i \approx 1; \quad \sin\Delta i \approx 0$;
- spinte/accelerazioni molto piccole e costanti $\Rightarrow \frac{T}{m} \ll \frac{\mu}{r^2}$;
- $A_V \approx A_T \ll \frac{\mu}{r^2}, \quad A_R \ll \frac{\mu}{r^2} (accelerazione radiale verso l'esterno), \quad A_W \ll \frac{\mu}{r^2}$.

dove $p$ è il semilatus-rectum, $E$ anomalia eccentrica, $M = E - e\sin E$ anomalia media (Fig.2.5).

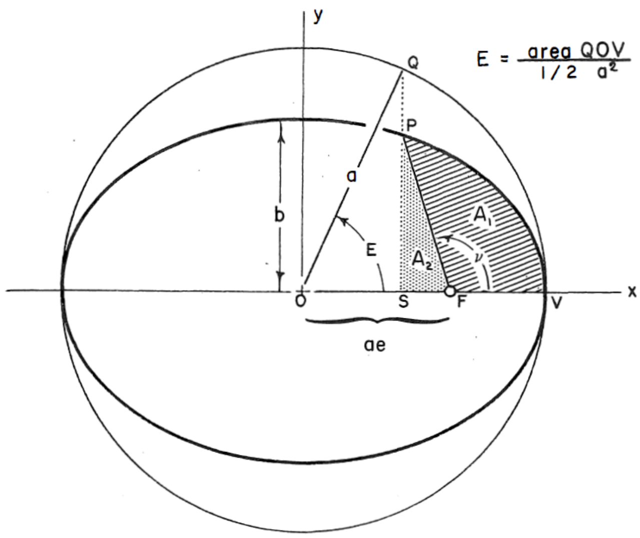
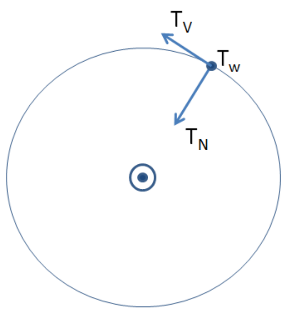



Figura 2.5:
*Bate, Muller, White, "Fundamentals of Astrodynamics"*

La variazione della velocità è graduale e conduce ad una descrizione, da parte dello S/C, di una traiettoria a spirale.
Defiendo $\gamma$ il vettore dei parametri orbitali:

$$\gamma = [a, e, i, \Omega, \omega, M] \Rightarrow \quad \dot{\gamma} = f\left(\gamma, \frac{T}{m}\right)$$

in cui $T$ ha 3 componenti di spinta:




- $T_V \parallel V$, che varia l'energia dell'orbita, introducendo variazioni su $a$, $e$ e $\omega$;
- $T_N \perp V$, che introduce variazioni su $e$ e $\omega$, non incide sull'energia dell'orbita;
- $T_W$, che varia $i$ e $\Omega$.

Indicando con $\alpha$ l'angolo nel piano dell'orbita tra la direzione della spinta e la sua componente tangenziale, $\beta$ l'angolo tra la direzione della spinta e la sua componente fuori dal piano (Fig.2.6):

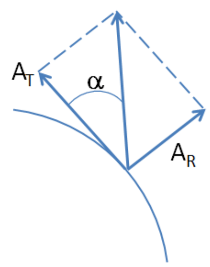



Figura 2.6

$$\begin{cases} T_V = T\cos\alpha\cos\beta \\ -T_N = T_R = T\sin\alpha\cos\beta \\ T_W = T\sin\beta \end{cases}$$

Le equazioni planetarie di Gauss, che descrivono le variazioni temporali dei parametri orbitali, attraverso le ipotesi di Edelbaum si scrivono come:

$$\dot{a} = 2\frac{T_V a}{mV}$$

$$\dot{e} = \left(2\cos\nu\frac{T_V}{m} - \sin\nu\frac{T_N}{m}\right)\frac{1}{V}$$

$$\dot{\omega} = -\dot{\Omega} + \left(2\sin\nu\frac{T_V}{m} + \cos\nu\frac{T_N}{m}\right)\frac{1}{Ve}$$

$$\dot{i} = \cos(\omega+\nu)\frac{T_W}{mV}$$

$$\dot{\Omega} = \sin(\omega+\nu)\frac{T_W}{miV}$$

$$\dot{M} = \dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

Inoltre per orbite circolari non inclinate i termini $\Omega$ e $\omega$ perdono di significato e il sistema si riduce sopprimendo le equazioni di $\dot{\Omega}$ e $\dot{\omega}$.
Consideriamo ora il tipo di manovra a cui si farà sempre riferimento nei successivi paragrafi, ovvero la variazione combinata di $a$ ed $i$.
La distinta variazione di $a$ e $i$ prevede rispettivamente che $\alpha = \beta = 0$ e $\beta = \pm 90°$.

Dunque in caso di manovra combinata si conserva la condizione $\alpha = 0$, mentre $\beta$ deriva dalla massimizzazione dell'espressione:

$$\dot{a} + k\dot{i}$$

in cui $k$ è una costante dipendente dal valore di $\Delta a$ e $\Delta i$ desiderato. La suddetta espressione è equivalente a:

$$\tan\beta = k\cos(\omega + \nu) \tag{2.5}$$

da cui si evince che la migliore condizione sarebbe avere $\beta$ grande ai nodi e piccolo agli antinodi. L'integrazione dell'equazione 2.5 sull'intero periodo di un'orbita richiede il calcolo di integrali ellittici; con perdite decisamente trascurabili in accuratezza (Fig.2.7), si può effettuare un'approssimazione che prevede:

$$\begin{cases} \bar{\beta} > 0 & \text{se} \quad \cos(\omega+\nu) > 0 \\ \bar{\beta} < 0 & \text{se} \quad \cos(\omega+\nu) < 0 \end{cases}$$

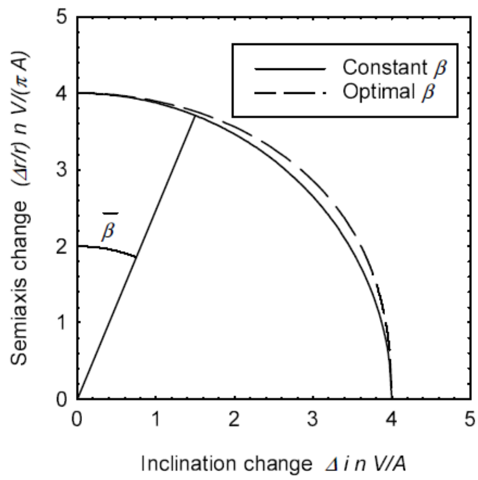



Figura 2.7

con $\bar{\beta}$ costante nell'intero periodo della singola orbita. Integrando su una singola rivoluzione si ricavano le variazioni di $a$ ed $i$, mentre $\Omega$ e $\omega$ sono assunte costanti. Per ottenere le variazioni tipicamente richieste per una missione di rendez-vous sono necessarie molteplici rivoluzioni e la linearizzazione su $\beta$ consente di estendere il calcolo semplicemente unendo le soluzioni dei singoli giri. A questo punto l'obiettivo è di ottimizzare $\beta$ per ogni rivoluzione; si procede ipotizzando che la traiettoria sia sempre quasi circolare e che $\beta$ sia costante durante ogni rivoluzione. Le equazioni del moto possono essere riformulate esprimendo le variazioni di inclinazione e tempo in funzione della velocità $V$:

$$\frac{di}{dV} = 2\frac{\tan\beta}{\pi V} \tag{2.6}$$

$$\frac{dt}{dV} = \frac{1}{A\cos\beta} \tag{2.7}$$

Ottimizzazione:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{di}{dV} + k\frac{dt}{dV}\right) = 0$$

da cui si ricava:

$$V\sin\beta = cost \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{V_0}{V}\sin\beta_0 \tag{2.8}$$

oppure, poichè $V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$,

$$\frac{\sin\beta}{\sqrt{r}} = \frac{\sin\beta_0}{\sqrt{r_0}} \tag{2.9}$$

Dalla soluzione ottimale si evince che quando V è grande, ovvero a raggi bassi, conviene avere $\beta$ piccolo e viceversa. Dunque l'accelerazione fuori dal piano, $A_W$, cresce man mano che lo S/C si allontana dalla Terra.
Il costo della manovra combinata $(a, i)$ si calcola come:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 - 2V_0V_f\cos(\pi\frac{\Delta i}{2}) + V_f^2} \tag{2.10}$$

valida per $\Delta i < 2\,rad\,(114.6°)$ [2] [3].

# Capitolo 3

# Stima del $\Delta V$

Nel presente capitolo è illustrata la teoria sulla quale è basato il calcolo preliminare del costo in termini di $\Delta V$ di una trasferta a bassa spinta tra una coppia di oggetti in orbite LEO circolari, tenendo conto del contributo di J2 e di come massimizzarne l'effetto benefico per ridurre il costo di cambio di piano. Il tempo di trasferta è fissato a priori.
Il modello di propagazione adottato è caratterizzato da alcune semplificazioni:

- il semiasse maggiore delle orbite di maggior interesse è abbastanza grande da poter trascurare con buona approssimazione la resistenza atmosferica;
- sono considerate solo perturbazioni secolari dovute alla non sfericità della Terra, in particolare lo schiacciamento ai poli e la forma ellissoidale;
- si assume che l'unico parametro affetto da perturbazione sia $\Omega$.

a cui si affiancano le ipotesi di:

- orbite LEO circolari ($e = 0$);
- fasamento per il rendez vous trascurabile, quindi si trascurano $\omega$ e $M$;
- piccole variazioni di $a$, $i$ e $\Omega$.

## 3.1 Effetto di J2

Degli effetti introdotti da J2 il più rilevante è la perturbazione sulla RAAN ($\Omega$); di fatto la perturbazione su $\omega$ o $M$ (anomalia media) è trascurabile in prima approssimazione, sia perchè le orbite in questione sono circolari sia per via delle molteplici rivoluzioni che deve compiere il chaser prima di effettuare il rendez vous, le quali garantiscono la possibilità di adoperare opportuni aggiustamenti con limitato impatto sul $\Delta V$ atti a superare il problema dello sfasamento.

Se si considera l'effetto di J2 come unica fonte di perturbazione della RAAN, per una data orbita con $a$ (semiasse maggiore), $e$ (eccentricità) e $i$ (inclinazione) costanti, si richiama l'equazione 2.2 scritta nella forma:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{J_2 \cos i}{(1-e^2)^2}\left(\frac{R_E}{a}^2\right) \tag{3.1}$$

dove $\mu$ è il parametro gravitazionale terrestre, $R_E$ raggio della Terra all'equatore. Per orbite circolari o quasi circolari $\dot{\Omega}$ dipende solo da $a$ ed $i$ e per piccole variazioni di $a$ ed $i$ (come nel caso di traiettorie a bassa spinta), differenziando l'equazione 3.1 si ottiene la seguente forma che lega il rateo di variazione di $\Omega$ nel tempo al variare di $a$ ed $i$: [5][6]

$$\frac{\Delta\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} = -\frac{7}{2}\frac{\Delta a}{a} - \tan i \cdot \Delta i \tag{3.2}$$

## 3.2 Approccio di Edelbaum

Il problema principale del modello di Edelbaum è che non considera il cambiamento di RAAN del piano orbitale e di conseguenza le perturbazioni relative. Infatti per Edelbaum il costo di una trasferta tra orbite circolari con manovra combinata su altitudine e inclinazione si può scrivere come (2.10):

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 - 2V_0V_f\cos(\pi\frac{\Delta i}{2}) + V_f^2} \tag{3.3}$$

dove $V_0$ e $V_f$ sono rispettivamente le velocità circolari delle orbite iniziale e finale. Per piccole variazioni di inclinazione è possibile ottenere una forma ulteriormente semplificata:

$$\Delta V = V_0\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\Delta i\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{2a_0}\right)^2} \tag{3.4}$$

Questa semplice equazione evidenzia come sotto opportune ipotesi è possibile ottenere un'espressione di facile gestione dal punto di vista dei calcoli e dà un'idea della struttura che idealmente si vorrebbe ottenere, una volta integrata nella manovra combinata la variazione di $\Omega$, per l'espressione finale. Inoltre è possibile notare come in 3.4 sono posti in evidenza in maniera distinta i contributi al $\Delta V$ del $\Delta a$ e del $\Delta i$. [5]
In quest'ottica risulta comodo partire proprio dall'analisi dei singoli contributi delle variazioni dei parametri orbitali, i quali per piccole variazioni di $a$, $i$ e $\Omega$ si possono

scrivere nelle seguenti forme semplificate:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta V_a}{V_0} = \dfrac{\Delta a}{2a_0} \\ \dfrac{\Delta V_i}{V_0} = \dfrac{\pi}{2}\Delta i \\ \dfrac{\Delta V_\Omega}{V_0} = \dfrac{\pi}{2}\sin i_0(\Delta\Omega + \Delta\Omega_{J2}) \end{cases} \tag{3.5}$$

dove $\Delta\Omega_{J2}$ rappresenta la relativa variazione di RAAN causata dalla perturbazione nel lasso di tempo della trasferta. A seconda del suo segno il suo contributo può essere benefico o meno.
Nel successivo paragrafo è illustrato il metodo approssimato con cui è possibile assemblare questi tre contributi.

## 3.3 Costo approssimato di una trasferta con durata limitata

Oggetti su orbite differenti sono soggetti a diversi $\dot{\Omega}$. Dunque, in generale, essendo le manovre sul cambio di piano tipicamente le più costose, in assenza di limitazioni sulla durata della trasferta la strategia migliore sarebbe quella di attendere il naturale allineamento delle orbite. Ma in presenza di limitazioni sul tempo, imposte ad esempio dai requisiti di ottimo della sequenza di detriti scelta per la missione, questo approccio presenta notevoli limiti di versatilità ed è necessario trovare un metodo che ottimizzi il $\Delta V$ a tempo fisso.
Sia $t$ la durata imposta della trasferta tra il k-esimo e il (k+1)-esimo detrito. In accordo all'analisi effettuata nel precedente paragrafo, si possono scrivere le tre manovre in gioco come segue:

$$x = \frac{\pi}{2}(\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t))\sin i_0 V_0 \tag{3.6}$$

$$y = \frac{a_{k+1} - a_k}{2a_0}V_0 \tag{3.7}$$

$$z = \frac{\pi}{2}(i_{k+1} - i_k)V_0 \tag{3.8}$$

dove $a_0 = \dfrac{a_{k+1} + a_k}{2}$, $i_0 = \dfrac{i_{k+1} + i_k}{2}$ e $V_0 = \sqrt{\dfrac{\mu}{a_0}}$, mentre $x, y$ e $z$ sono rispettivamente $\Delta V_\Omega, \Delta V_a$ e $\Delta V_i$.
Nella presente analisi approssimata è considerata una trasferta del tipo *thrust-coast-thrust*, in cui il primo impulso effettua un parziale di $x, y$ e $z$ e il secondo impulso

effettua la manovra di aggiustamento finale, dopo il contributo di J2 ottenuto nell'arco intermedio. Affinchè il modello di Edelbaum possa essere valido è necessario che la durata della trasferta sia predominante rispetto ai tempi di spinta; per tale ragione in prima approssimazione le manovre sono considerate impulsive. In seguito si vedrà come invece considerando le manovre non impulsive sarà cruciale contenerne la durata in rapporto al tempo totale.
È possibile quindi scrivere la manovra combinata del primo arco (arco A), sfruttando degli opportuni coefficienti di parzializzazione $s_x, s_y$ e $s_z$ [5][6]:

$$\Delta V_A = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} \tag{3.9}$$

Si noti che ai coefficienti non sono associate delle limitazioni e i loro valori saranno determinati in seguito all'ottimizzazione della manovra. In particolare $s_y$ e $s_z$ ricoprono un ruolo fondamentale per determinare le variazioni di $a$ e $i$ che meglio ottimizzino il contributo di J2. Quest'ultimo è modellabile nel seguente modo:

$$\Delta x = m s_y y + n s_z z \tag{3.10}$$

in cui $m = \frac{\pi}{2}(7\dot{\Omega}_0)\sin i_0 \cdot t$, $n = \tan i_0 \dot{\Omega}_0 \sin i_0 \cdot t$ e $\dot{\Omega}_0 = \frac{\dot{\Omega}_{k+1} + \dot{\Omega}_k}{2}$. $m$ e $n$ sono ottenuti combinando opportunamente le equazioni (3.2), (3.7) e (3.8) (una trattazione più dettagliata è presentata nel paragrafo 5.1).
Considerando il contributo di J2 tradotto in $\Delta x$, si scrive la manovra combinata del terzo arco (arco B) come:

$$\Delta V_B = \sqrt{(x + \Delta x - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \tag{3.11}$$

e quindi:

$$\Delta V = \Delta V_A + \Delta V_B = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} + \sqrt{(x + \Delta x - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \tag{3.12}$$

A questo punto l'attenzione si sposta sul trovare i valori dei coefficienti $s_x, s_y$ e $s_z$ che vadano a minimizzare il $\Delta V$. Per tale scopo si può procedere annullando le derivate parziali del $\Delta V$ rispetto ai coefficienti e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta V}{\partial s_x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Delta V}{\partial s_y} = 0 \\ \dfrac{\partial \Delta V}{\partial s_z} = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

In realtà non è affatto banale trovare una soluzione in forma chiusa al problema così come è posto. Risulta invece particolarmente efficace adottare un'approssimazione che prevede di considerare il quadrato dei termini presenti nell'equazione (3.12), trascurando i relativi doppi prodotti:

$$\Delta V_A^2+\Delta V_B^2 = (s_x x)^2+(s_y y)^2+(s_z z)^2+(x+\Delta x-s_x x)^2+(y-s_y y)^2+(z-s_z z)^2 \tag{3.14}$$

Risolvendo il nuovo sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\Delta V_A^2+\Delta V_B^2)}{\partial s_x} = 2x(2xs_x - mys_y - nzs_z - x) = 0 \\ \dfrac{\partial(\Delta V_A^2+\Delta V_B^2)}{\partial s_y} = 2y(-mxs_x + 2ys_y + m^2ys_y + mnzs_z - y + mx) = 0 \\ \dfrac{\partial(\Delta V_A^2+\Delta V_B^2)}{\partial s_z} = 2z(-nxs_x + mnys_y + 2zs_z + n^2zs_z - z + nx) = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

si ottengono le espressioni:

$$s_x = \frac{2x+my+nz}{(4+m^2+n^2)x} \tag{3.16}$$

$$s_y = -\frac{2mx - y(4+n^2)+mnz}{y(8+2m^2+2n^2)} \tag{3.17}$$

$$s_z = -\frac{2nx+mny-z(4+m^2)}{z(8+2m^2+2n^2)} \tag{3.18}$$

# Capitolo 4

# Risultati modello con manovre impulsive

Si considerino i dati contenuti nella seguente tabella:

| | Caso 1 | | Caso 2 | |
|---|---|---|---|---|
| **Dati** | **Orbita iniziale** | **Orbita finale** | **Orbita iniziale** | **Orbita finale** |
| Altitudine [km] | 800 | 900 | 779.3 | 733.8 |
| Inclinazione [deg] | 98 | 99 | 98.64 | 97.45 |
| RAAN iniziale [deg] | 0 | 10 | 137.59 | 138.05 |

Tabella 4.1

## 4.1 1° caso

Per una durata della trasferta $t = 75,76,77,...,125$ giorni, si ottengono i seguenti risultati:

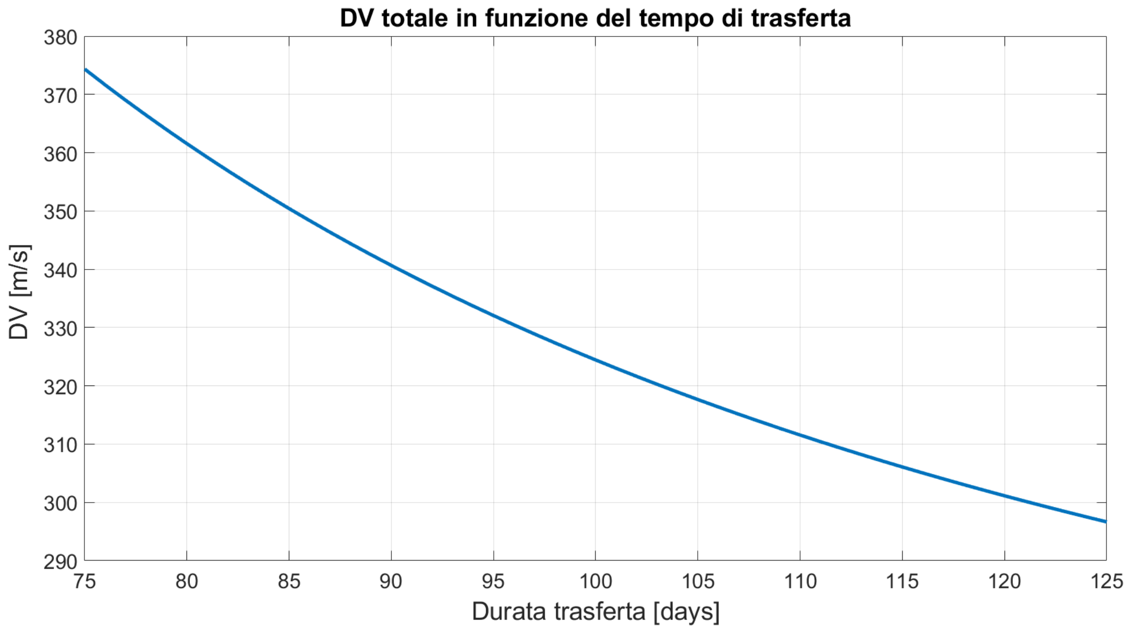



Figura 4.1

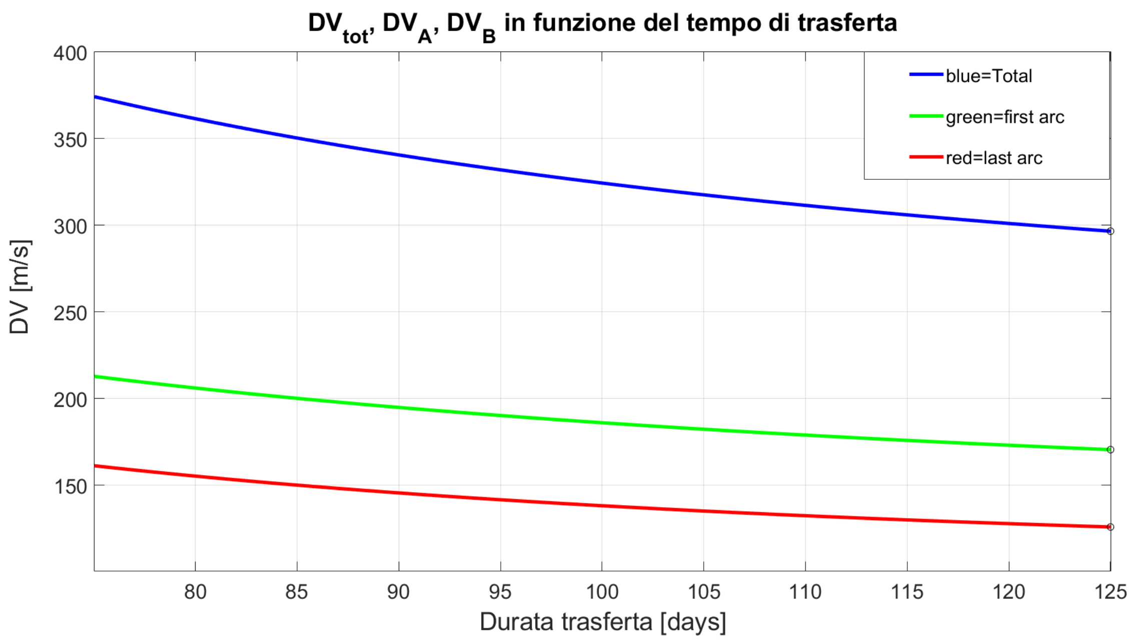



Figura 4.2

Per tutti e tre i $\Delta V$ l'andamento è decrescente in funzione del tempo, indice del fatto che il contributo apportato da J2 è benefico e tanto maggiore quanto più grande è la durata dell'arco intermedio di parcheggio. Di fatto, osservando attentamente i dati di partenza, si può notare che entrambe le orbite sono retrograde ($\frac{\pi}{2} < i < \pi$), dunque le rispettive RAAN sono soggette a precessione (verso est); ma nonostante l'altitudine del chaser sia inferiore e tende quindi ad avere un $\dot{\Omega}$ più grande rispetto al target, l'inclinazione tende a generare l'effetto contrario. L'effetto complessivo è un allontanamento graduale dei piani delle orbite. L'orbita di parcheggio raggiunta dopo l'impulso A sfrutta l'effetto J2 per invertire questo andamento ed è tanto più efficace quanto maggiore è il tempo di permanenza su quest'orbita.

## 4.2 2° caso

Per una durata della trasferta $t$ = 5,6,7, ...,25 giorni, si ottengono i seguenti risultati:

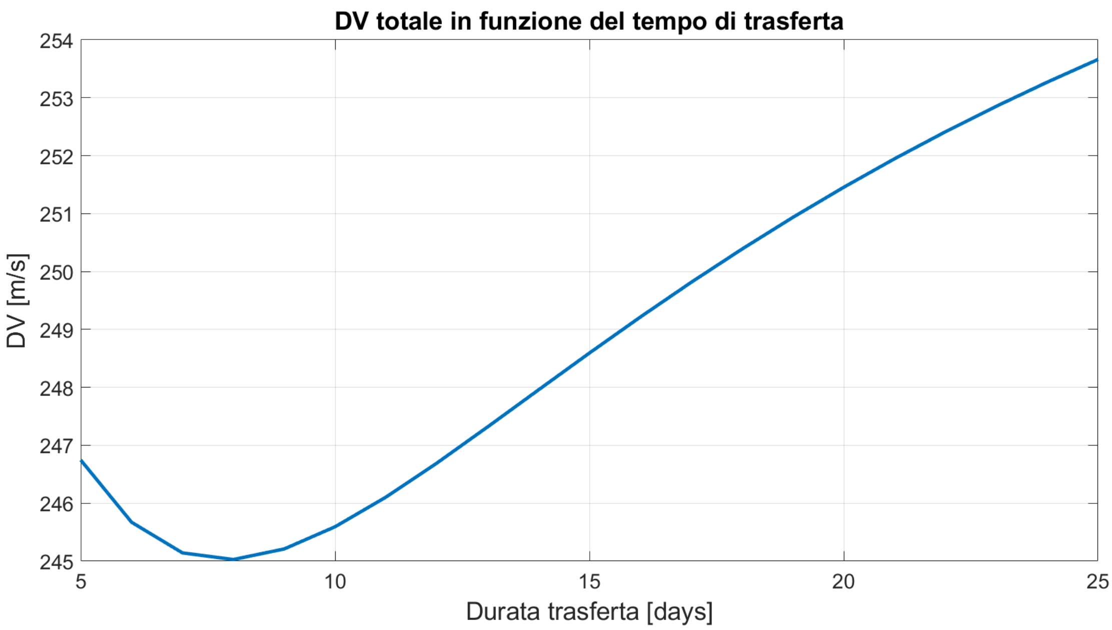



Figura 4.3

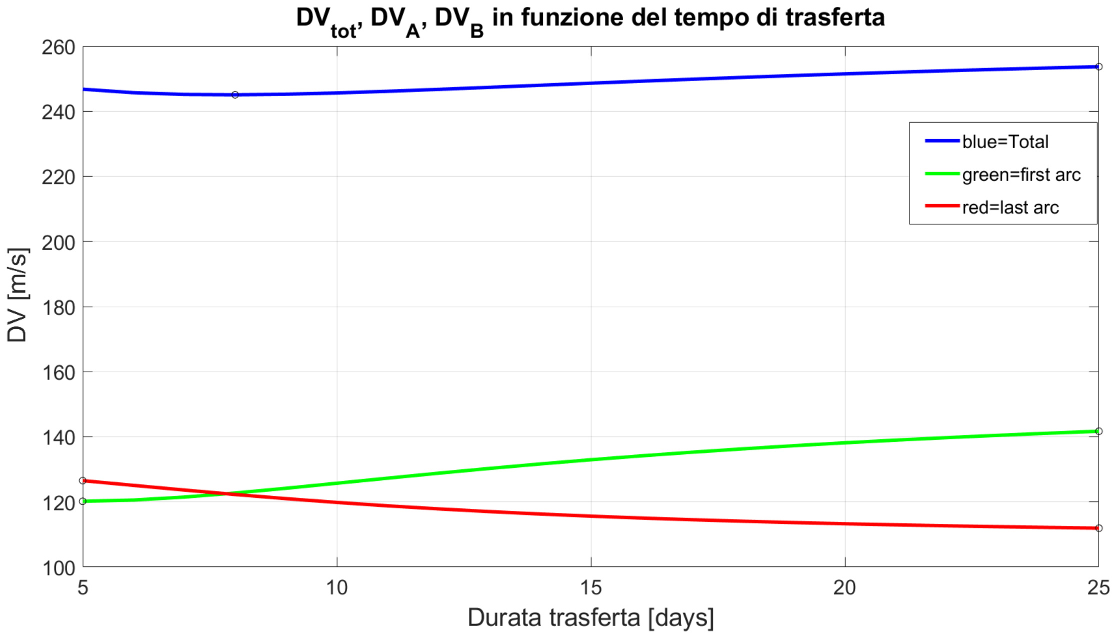



Figura 4.4

A differenza del primo caso, i tre andamenti sono diversi tra loro. In particolare il $\Delta V_{tot}$, dopo una riduzione iniziale, tende ad aumentare al crescere di t. Di fatto, analizzando più attentamente i dati del secondo caso, il $\Delta\Omega$ da colmare è relativamente piccolo e di conseguenza superato un valore critico (pari a 8 giorni in questo caso) l'effetto di J2 non è totalmente benefico. Ciò si riflette sull'andamento di $\Delta V_A$, la cui crescita indica che l'orbita di parcheggio migliore avrà dei $\Delta a$ e $\Delta i$ via via più grandi. Anche in questo caso le orbite sono retrograde con relativa precessione della RAAN, ma in questo caso il $\Delta\Omega$ tende a diminuire nel tempo. Dunque tempi di trasferta troppo grandi implicano un aumento del $\Delta V$, scaturito dalla necessità di rallentare proporzionalmente il $\dot{\Omega}_{relativo}$ sfruttando un'orbita di parcheggio via via più onerosa da raggiungere.

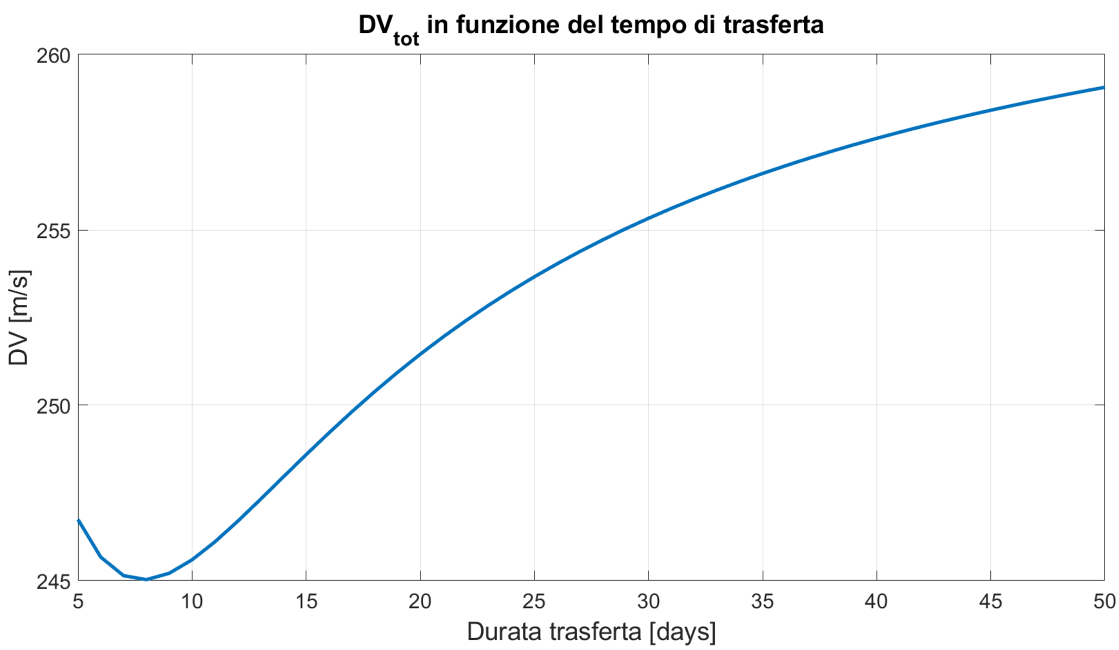
# Capitolo 5

# Effetto della bassa spinta

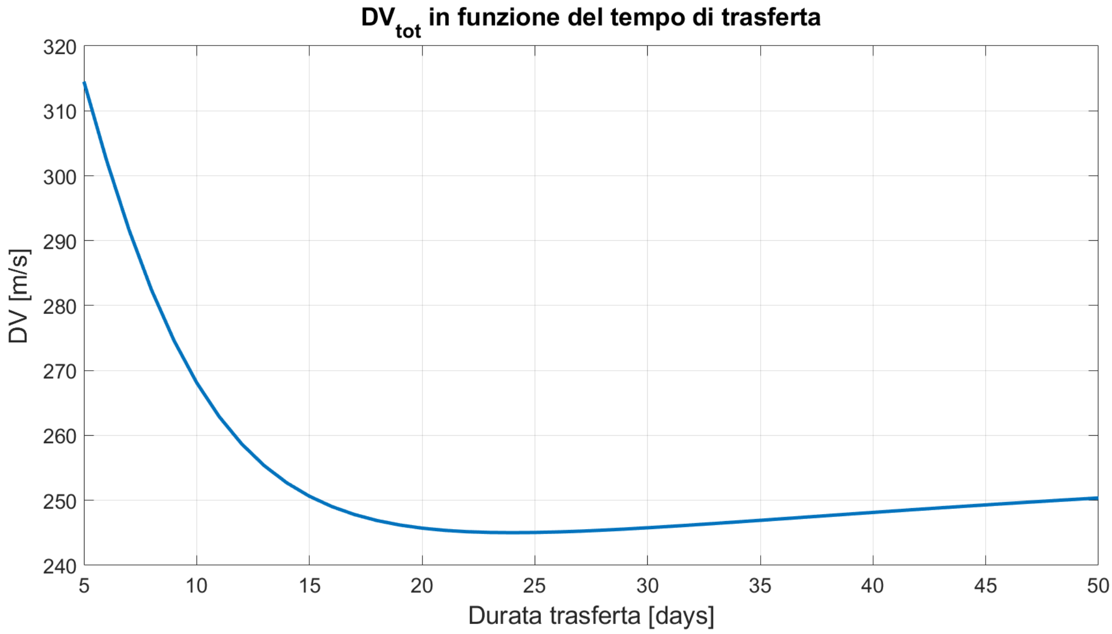
Si considerino i dati del 2° caso (4.1) e i relativi risultati contenuti in 4.3 e 4.4. Si può notare che il valore del $\Delta V$ rimane circa costante ($\Delta V \approx 250\,m/s$). Ma sfruttando la semplice relazione:

$$\Delta V = \frac{T}{m}t \tag{5.1}$$

una massa ipotetica $m = 1000\,kg$, spinta $T = 100\,mN$, si ricava un tempo di spinta $t_{spinta} \approx 29$ giorni. Si è pensato allora di estendere la durata della missione a 50 giorni, ottenendo:




e per mantenere un $\Delta V \approx 250\,m/s$ è stato cambiato il valore di RAAN iniziale del target da 138.05 a 139 deg, ottenendo:




Nello specifico, per $t = 50\,days$:

- $\Delta V = 250.371\,m/s$;
- $\Delta V_A = 137.769\,m/s$;
- $\Delta V_B = 112.602\,m/s$;
- $\Delta a_A = 22.445\,km$;
- $\Delta a_B = -67.945\,km$;
- $\Delta i_A = -0.669°$;
- $\Delta i_B = -0.521°$;
- $\Delta \Omega_A = -0.026°$;
- $\Delta \Omega_B = -0.026°$.

Per ottenere questi risultati è stato sfruttato il metodo approssimato descritto nel precedente capitolo, in cui compare l'equazione (3.10) $\Delta x = ms_y y + ns_z z$. Quest'ultima approssima le manovre come impulsive, ma in questo caso il tempo di spinta (29 giorni) non è trascurabile rispetto al tempo totale (50 giorni). Si cerca a questo punto di ricavare un'equazione simile che tenga conto anche degli archi di spinta. Per farlo è necessario osservare in modo più approfondito com'è stata ricavata (3.10).

## 5.1 Contributo di J2 al $\Delta V$

Partiamo con analizzare nel dettaglio l'equazione 3.10 $\Delta x = ms_y y + ns_z z$.
Si consideri il sistema di equazioni costituito da 3.6 e 3.2:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}\Big(\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t)\Big)\sin i_0 \cdot V_0 \\ \frac{\Delta\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} = -\frac{7}{2}\frac{\Delta a}{a} - \tan i \cdot \Delta i \end{cases} \tag{5.2}$$

dove $i_0 = \frac{i_k(t_0) + i_{k+1}(t_0)}{2}$ e $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0}}$.

$$\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t) = \Omega_{k+1}(t_0) - \Omega_k(t_0) + \Delta\Omega_{J2}(t)$$

con $\Delta\Omega_{J2}(t) = t(\dot{\Omega}_{k+1}(t_0) - \dot{\Omega}_k(t_0))$, supponendo che la perturbazione di J2 sia l'unico contributo a $\dot{\Omega}$. $x$ definisce il costo in termini di $\Delta V$ per compensare il $\Delta\Omega(t) = \Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t)$ affinchè avvenga l'allineamento. Tale costo può essere annullato agendo opportunamente su altitudine e inclinazione dell'orbita di partenza, causando così un $\Delta\dot{\Omega}$ sulla velocità relativa tra chaser e target.

$$\dot{\Omega}_{rel} = \dot{\Omega}_{chaser}(t_0) + \Delta\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_{target} \tag{5.3}$$

$$\Delta\Omega(t) = t\Delta\dot{\Omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}\Delta\dot{\Omega}t\sin i_0 \cdot V_0 \\ \Delta\dot{\Omega} = -\frac{7}{2}\frac{\Delta a_A}{a_{0A}}\dot{\Omega}_{0A} - \tan i_{0A}\Delta i_A\dot{\Omega}_{0A} \end{cases}$$

in cui $\Delta a_A = a_k(t_A) - a_k(t_0)$, $\Delta i_A = i_k(t_A) - i_k(t_0)$, $a_{0A} = \frac{a_k(t_A) + a_k(t_0)}{2}$, $i_{0A} = \frac{i_k(t_A) + i_k(t_0)}{2}$, $\dot{\Omega}_{0A} = \frac{\dot{\Omega}_k(t_0) + \dot{\Omega}_k(t_A)}{2}$; con il pedice "A" sono indicati i valori dopo il primo arco di spinta.
Andando a sostituire si ottiene:

$$x = -[\frac{\pi}{2}\frac{7}{2}V_0\frac{\Delta a_A}{a_{0A}}\dot{\Omega}_{0A}\sin i_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\tan i_{0A} \cdot \Delta i_A\dot{\Omega}_{0A}V_0\sin i_0 \cdot t]$$

Richiamando le relazioni (3.7) e (3.8):

$$\begin{cases} y = \frac{\Delta a}{2a_0}V_0 \\ z = \frac{\pi}{2}\Delta i V_0 \end{cases}$$

e specificandole per il primo arco di spinta:

$$\begin{cases} s_y y = \dfrac{\Delta a_A}{2a_{0A}} V_0 \\ s_z z = \dfrac{\pi}{2} \Delta i_A V_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -[m(s_y y) + n(s_z z)]$$

con $m = \dfrac{\pi}{2}(7\dot{\Omega}_{0A}) \sin i_0 \cdot t$, $n = \tan i_{0A} \dot{\Omega}_{0A} \sin i_0 \cdot t$. Imponendo come condizione al contorno che l'effetto di J2 possa da solo compensare il disallineamento delle RAAN, ovvero:

$$x + \Delta x = 0$$

$$\Rightarrow \Delta x = m(s_y y) + n(s_z z)$$

Nel caso in cui le manovre non siano impulsive non vale più l'equazione (5.3):

$$\dot{\Omega}_{rel} = \dot{\Omega}_{chaser}(t_0) + \Delta\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_{target}$$

in quanto il $\Delta\dot{\Omega}$ dipende dal tempo e varia durante tutto l'arco di spinta.

## 5.2 Approssimazione degli archi di spinta

### 5.2.1 Strategia 1 (Spinta Finita)

#### Arco A (*thrust*)

Secondo questa strategia approssimiamo il $\Delta\dot{\Omega}$ del primo arco con un valore costante pari al valore medio tra gli estremi dell'arco, ovvero 0 e il $\Delta\dot{\Omega}$ del caso impulsivo:

$$\Delta\dot{\Omega}_A = \frac{\Delta\dot{\Omega}}{2}$$

$$t_A = \frac{\Delta V_A}{T} m$$

$$x_A = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\dot{\Omega}}{2} t_A \sin i_0 \cdot V_0$$

Analogamente a quanto fatto prima:

$$x_A = -[m_A(s_y y) + n_A(s_z z)]$$

con $m_A = \dfrac{\pi}{4}(7\dot{\Omega}_{0A}) \sin i_0 \cdot t_A$, $n = \dfrac{1}{2} \tan i_{0A} \dot{\Omega}_{0A} \sin i_0 \cdot t_A$.

$$\Rightarrow \Delta x_A = [m_A(s_y y) + n_A(s_z z)] \tag{5.4}$$

### Arco AB (*coast*)

Nel secondo arco il valore di $\Delta\dot{\Omega}$ è costante perchè non c'è spinta e coincide con il valore del caso impulsivo:

$$\Delta\dot{\Omega}_{AB} \equiv \Delta\dot{\Omega}$$

$$t_{AB} = t - t_{spinta}$$

$$x_{AB} = \frac{\pi}{2}\Delta\dot{\Omega}t_{AB}\sin i_0 \cdot V_0$$

$$x_{AB} = -[m_{AB}(s_y y) + n_{AB}(s_z z)]$$

con $m_{AB} = \dfrac{\pi}{2}(7\dot{\Omega}_{0A})\sin i_0 \cdot t_{AB}$, $n = \tan i_{0A}\dot{\Omega}_{0A}\sin i_0 \cdot t_{AB}$.

$$\Rightarrow \Delta x_{AB} = [m_{AB}(s_y y) + n_{AB}(s_z z)] \tag{5.5}$$

### Arco B (*thrust*)

Avviene la seconda manovra, che nel caso impulsivo darebbe:

$$\Delta\dot{\Omega}' = -\frac{7}{2}\frac{\Delta a_B}{a_{0B}}\dot{\Omega}_{0B} - \tan i_{0B}\Delta i_B\dot{\Omega}_{0B}$$

Come per il primo arco, cerchiamo un valore medio:

$$\Delta\dot{\Omega}_B = \Delta\dot{\Omega} + \frac{\Delta\dot{\Omega}'}{2}$$

$$t_B = \frac{\Delta V_B}{T}m$$

$$x_B = \frac{\pi}{2}\Delta\dot{\Omega}_B t_B\sin i_0 \cdot V_0$$

$$x_B = -[m_B(s_y y) + n_B(s_z z)] - [m'_B(y - s_y y) + n'_B(z - s_z z)]$$

con $m_B = \dfrac{\pi}{2}(7\dot{\Omega}_{0A})\sin i_0 \cdot t_B$, $n_B = \tan i_{0A}\dot{\Omega}_{0A}\sin i_0 \cdot t_B$, $m'_B = \dfrac{\pi}{4}(7\dot{\Omega}_{0B})\sin i_0 \cdot t_B$, $n'_B = \dfrac{1}{2}\tan i_{0B}\dot{\Omega}_{0B}\sin i_0 \cdot t_B$.

$$\Rightarrow \Delta x_B = [m_B(s_y y) + n_B(s_z z)] + [m'_B(y - s_y y) + n'_B(z - s_z z)] \tag{5.6}$$

Per continuare lo sviluppo del presente modello approssimato, consideriamo nuovamente i dati dell'ultimo caso analizzato:

| **Dati** | **Orbita iniziale** | **Orbita finale** |
|---|---|---|
| $a$ [km] | 779.3 | 733.8 |
| $i$ [deg] | 98.64 | 97.45 |
| $\Omega$ iniziale [deg] | 137.59 | 139 |
| t [days] | 0 | 50 |
| | $m = 1000\,kg$ | |
| | $T = 100\,mN$ | |

Si ottiene:

- caso impulsivo $\Rightarrow x = -904.9709\,m/s$; $\quad \Delta x_{ch} = 894.3811\,m/s$

$$x + \Delta x_{ch} = -10.5898\,m/s$$

- caso non impulsivo $\Rightarrow \Delta x_A = 140.8539\,m/s$; $\quad \Delta x_{AB} = 382.1049\,m/s$; $\quad \Delta x_B = 270.3527\,m/s$

$$\Delta x_{el} = \Delta x_A + \Delta x_{AB} + \Delta x_B = 793.3114\,m/s$$

$$x + \Delta x_{el} = -111.6595\,m/s$$

dove con $\Delta x_{ch}$ e $\Delta x_{el}$ si intendono rispettivamente i $\Delta x$ dei casi impulsivo e non. Nel caso impulsivo lo scarto tra $x$ e $\Delta x$ è compensato dall'introduzione di una componente del $\Delta V$ non nulla tale da impartire una variazione a $\Omega$; di fatti compare un termine $sx$ e il $\Delta V_{tot}$ si può scrivere come (3.12):

$$\Delta V = \Delta V_A + \Delta V_B = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} + \sqrt{(x + \Delta x_{ch} - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2}$$

con

$$sx = 0.0059$$

$$sy = -0.4933$$

$$sz = 0.5625$$

Nel caso con **spinta finita** lo scarto è maggiore in valore assoluto. Ciò è dovuto al fatto che la propulsione elettrica è più "lenta", nel senso che occorre un transitorio temporale della durata di diversi giorni per raggiungere l'orbita ottimale per beneficiare al massimo dell'effetto di J2, attenuato di conseguenza rispetto al caso impulsivo. Ne consegue dunque che il $\Delta V_{tot}$ dovrà essere più grande. In quest'ottica si possono seguire 2 differenti approcci, ovvero:

- introdurre un contributo supplementare al $\Delta V_x$;
- andare a "correggere" l'effetto di J2 variando opportunamente $sx$, $sy$, $sz$, $m$, $n$ e di conseguenza i valori di **a** e **i** negli archi di spinta.

Con il primo approccio, assumendo di fornire il $\Delta V_x$ mancante nell'ultimo arco di spinta, l'espressione del $\Delta V_{tot}$ diventa:

$$\Delta V = \Delta V_A + \Delta V_B = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} + \sqrt{(x + \Delta x_{el} - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2}$$

ottenendo così un $\Delta V_{tot} = 292.5737\, m/s (> 250.371$ del caso impulsivo).
Di gran lunga più interessante è il secondo approccio, con il quale si vanno a ricalcolare i coefficienti $s_x, s_y \,\mathrm{e}\, s_z$ in analogia a quanto descritto nel precedente capitolo:

- $$\frac{\partial(\Delta V_A^2 + \Delta V_B^2)}{\partial s_x} = 0$$
  $$2x(2s_x x - x - \Delta x) = 0$$
  con $\Delta x = \Delta x_A + \Delta x_{AB} + \Delta x_B = m_A(s_y y) + n_A(s_z z) + m_{AB}(s_y y) + n_{AB}(s_z z) + m_B(s_y y) + n_B(s_z z) + m'_B(y - s_y y) + n'_B(z - s_z z)$. Introducendo $m_{tot} = m_A + m_{AB} + m_B - m'_B$ e $n_{tot} = n_A + n_{AB} + n_B - n'_B$, si ricava l'espressione:
  $$2s_x x - x - m_{tot} s_y y - n_{tot} s_z z - m'_B y - n'_B z = 0 \tag{5.7}$$

- $$\frac{\partial(\Delta V_A^2 + \Delta V_B^2)}{\partial s_y} = 0$$
  $$2y(2s_y y - y + m_{tot} x - m_{tot} s_x x + m_{tot} \Delta x) = 0$$
  $$2s_y y - y + m_{tot} x - m_{tot} s_x x + m_{tot}^2 s_y y + m_{tot} n_{tot} s_z z + m_{tot} m'_B y + m_{tot} n'_B z = 0 \tag{5.8}$$

- $$\frac{\partial(\Delta V_A^2 + \Delta V_B^2)}{\partial s_z} = 0$$
  $$2z(-n_{tot} x s_x + m_{tot} n_{tot} y s_y + 2z s_z + n_{tot}^2 z s_z - z + n_{tot} x + n_{tot} m'_B y + n_{tot} n'_B z) = 0$$
  $$-n_{tot} x s_x + m_{tot} n_{tot} y s_y + 2z s_z + n_{tot}^2 z s_z - z + n_{tot} x + n_{tot} m'_B y + n_{tot} n'_B z) = 0 \tag{5.9}$$

Mettendo a sistema le equazioni (5.7), (5.8) e (5.9) si possono ricavare i nuovi valori di $s_x$, $s_y$, $s_z$:

$$\begin{bmatrix} 2x & -m_{tot} y & -n_{tot} z \\ -m_{tot} x & (2y + m_{tot}^2 y) & m_{tot} n_{tot} z \\ -n_{tot} x & m_{tot} n_{tot} y & (2z + n_{tot}^2 z) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + m'_B y + n'_B z \\ y - m_{tot} x - m_{tot} m'_B y - m_{tot} n'_B z \\ z - n_{tot} x - n_{tot} m'_B y - n_{tot} n'_B z \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema, i nuovi valori sono:

$$sx = 0.0115$$

$$sy = -0.9204$$
$$sz = 0.5870$$

con i quali si ricavano i nuovi $\Delta V$, $\Delta V_A$, $\Delta V_B$, $t_A$, $t_{AB}$, $t_B$ e le relative variazioni dei parametri $a$, $i$ e $\Omega$. Si riapplica a questo punto il metodo iterativamente fino a convergenza. In questo caso specifico sono state sufficienti 10 iterazioni, da cui si è ottenuto:

$$\Delta V = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} + \sqrt{(x + \Delta x_{el} - s_x x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} = 256.6473\, m/s$$

### 5.2.2 Strategia 2 (manovre impulsive per approssimare gli archi a bassa spinta)

La seconda strategia consiste nel modellare gli archi propulsi come se fossero impulsivi. In quest'ottica dunque, il primo arco propulso, la cui durata è pari a $t_A = \dfrac{\Delta V_A}{T} m$, è modellato nel seguente modo:

- un periodo di attesa sull'orbita di partenza pari a metà arco, quindi $t_A/2$;
- impulso A;
- periodo di attesa sulla nuova orbita per la seconda metà di arco.
- periodo di attesa sulla medesima orbita della stessa durata dell'arco AB della strategia a spinta finita;
- periodo di attesa sulla medesima orbita per la prima metà dell'arco B, quindi $t_B/2$;
- impulso B.

Il secondo arco propulso è modellato in maniera del tutto analoga al primo. Si può notare a questo punto che l'arco di attesa effettivo ha una durata maggiore del caso a spinta finita, in quanto si aggiungono i contributi degli archi propulsi sull'orbita raggiunta dopo la spinta A, per cui $t_{coast} = t - \dfrac{t_A}{2} - \dfrac{t_B}{2} > t_{AB}$.
Consideriamo ad esempio il caso:

| **Dati** | **Orbita iniziale** | **Orbita finale** |
|---|---|---|
| $a$ [km] | 779.3 | 733.8 |
| $i$ [deg] | 98.64 | 97.45 |
| $\Omega$ iniziale [deg] | 137.59 | 139 |
| t [days] | 0 | 50 |
| | $m = 1000\, kg$ | |
| | $T = 100\, mN$ | |

I due tempi di spinta valgono:

$$t_A = 15.9455\, days$$

$$t_B = 13.0326\, days$$

**Arco A (*thrust*)**

Si divide l'arco a metà:

- la prima metà dell'arco dura esattamente $t_A/2 = 7.9727\, days$. In questa fase gli unici parametri orbitali che variano sono le RAAN di chaser e target in seguito alla perturbazione di J2:

$$\Omega_k(\frac{t_A}{2}) = 145.5620°$$

$$\Omega_{k+1}(\frac{t_A}{2}) = 146.0360°$$

- in seguito al primo impulso (A) variano $a_k$, $i_k$ e $\Omega_k$. La manovra è assunta come impulsiva, per cui la seconda metà dell'arco A non è altro che un'attesa della durata di $t_A/2 = 7.9727\, days$ sulla nuova orbita.

**Arco AB (*coast*)**

Arco di attesa sull'orbita generata dall'impulso A con durata $t_{AB} = t - t_{spinta} = 21\, days$.

**Arco B (*thrust*)**

- la prima metà dell'arco dura esattamente $t_B/2 = 6.5163\, days$ e l'orbita di attesa non è cambiata.

- si da l'impulso B, in seguito al quale si raggiungono altitudine e inclinazione dell'orbita target. Per tale ragione l'effetto di J2 su chaser e target ora è identico; dunque l'impulso deve anche dare il $\Delta\Omega$ necessario per l'allineamento, in quanto l'arco di attesa finale della durata $t_B/2 = 6.5163\, days$ non causerà variazioni di RAAN tra chaser e target.

Si evince che si può trattare il problema secondo il modello impulsivo ma con una trasferta di durata $t_{new} = t - \frac{t_A}{2} - \frac{t_B}{2} = 35.51\, days$, in cui i dati al tempo $t_0$ sono sostituiti con quelli al tempo $t_A/2$. Come risultato si ottiene $\Delta V = 256.5208\, m/s$.

## 5.3 Risultati

In questo paragrafo sono presentati i risultati in maniera più dettagliata dell'applicazione delle strategie di calcolo descritte finora. Al caso a cui si è fatto riferimento nel corso dell'intera trattazione è affiancato, a titolo di esempio e per confronto, un secondo caso i cui dati sono identici ad esclusione della massa $m = 20\,kg$, della spinta $T = 1\,mN$, della RAAN iniziale del target $\Omega_{k+1} = 140.5°$ e del tempo di trasferta, scelti volutamente per dare come risultato $\Delta V \approx 250\,m/s$.

| | **Caso 1** | | **Caso 2** | |
|---|---|---|---|---|
| **Dati** | **Orbita iniziale** | **Orbita finale** | **Orbita iniziale** | **Orbita finale** |
| Altitudine [km] | 779.3 | 733.8 | 779.3 | 733.8 |
| Inclinazione [deg] | 98.64 | 97.45 | 98.64 | 97.45 |
| RAAN iniziale [deg] | 137.59 | 139 | 137.59 | 140.5 |
| t [days] | 0 | 50 | 0 | 100 |
| | $m = 1000\,kg$<br>$T = 100\,mN$ | | $m = 20\,kg$<br>$T = 1\,mN$ | |

Tabella 5.1

Nel caso 2 $t_{spinta} = \dfrac{\Delta V}{T} m = 58\,days$.
Tabelle con i risultati dettagliati per i due casi considerati:

- Caso 1, $t = 50\,days$, $t_{spinta} = 29\,days$

| **Modello** | Impulsivo | Spinta finita | Spinta approx. imp. |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{\Delta V}$ [m/s] | 250.370 | 256.647 | 256.521 |
| $\mathbf{\Delta V_A}$ [m/s] | 137.769 | 145.603 | 145.920 |
| $\mathbf{\Delta V_B}$ [m/s] | 112.602 | 111.044 | 110.601 |
| $\mathbf{\Delta a_A}$ [km] | 22.445 | 42.828 | 42.235 |
| $\mathbf{\Delta a_B}$ [km] | -67.945 | -88.328 | -87.735 |
| $\mathbf{\Delta i_A}$ [deg] | -0.669 | -0.700 | -0.702 |
| $\mathbf{\Delta i_B}$ [deg] | -0.521 | -0.490 | -0.488 |
| $\mathbf{\Delta \Omega_A}$ [deg] | -0.026 | -0.052 | -0.053 |
| $\mathbf{\Delta \Omega_B}$ [deg] | -0.026 | -0.052 | -0.053 |
| | | $t_A = 16\,days$<br>$t_B = 13\,days$ | |

Tabella 5.2

- Caso 2, $t = 100\,days$, $t_{spinta} = 58\,days$

| **Modello** | Impulsivo | Spinta finita | Spinta approx. imp. |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{\Delta V}$ [m/s] | 250.160 | 256.464 | 256.311 |
| $\mathbf{\Delta V_A}$ [m/s] | 137.625 | 145.906 | 146.215 |
| $\mathbf{\Delta V_B}$ [m/s] | 112.536 | 110.558 | 110.095 |
| $\mathbf{\Delta a_A}$ [km] | 22.267 | 44.271 | 43.653 |
| $\mathbf{\Delta a_B}$ [km] | -67.767 | -89.7706 | -89.153 |
| $\mathbf{\Delta i_A}$ [deg] | -0.669 | -0.702 | -0.704 |
| $\mathbf{\Delta i_B}$ [deg] | -0.521 | -0.488 | -0.486 |
| $\mathbf{\Delta \Omega_A}$ [deg] | -0.013 | -0.027 | -0.027 |
| $\mathbf{\Delta \Omega_B}$ [deg] | -0.013 | -0.027 | -0.027 |
| | | $t_A = 31.86\,days$<br>$t_B = 26.05\,days$ | |

Tabella 5.3

Si può subito notare come i valori dei $\Delta V$ dei modelli a bassa spinta siano maggiori rispetto al modello impulsivo, confermando le aspettative, ovvero la ridotta permanenza sull'arco di attesa AB genera una perdita che si traduce in un aumento del $\Delta V$. In tal senso sono particolarmente esplicative le discrepanze nei $\Delta a_A$, $\Delta i_A$ e $\Delta\Omega_A$: si assiste in entrambi i casi ad un aumento di questi valori nei modelli a bassa spinta, indice della necessità di rallentare maggiormente $\dot{\Omega}_{relativo}$ per via del transitorio temporale introdotto dagli archi di spinta.
La validità dei risultati è confermata da soluzioni ottenute attraverso l'implementazione su calcolatore di teorie di ottimizzazione indiretta per la stima del costo di una trasferta perturbata da J2 tra due orbite LEO circolari [4]. In particolare il modello a ottimizzazione indiretta fornisce come risultati per il primo caso $\Delta V = 246.63\,m/s$ con un $t_{spinta} = 28.25\,days$, per il secondo caso $\Delta V = 248.3\,m/s$ con un $t_{spinta} = 57.29\,days$.
L'errore relativo è quindi inferiore al 5% con un costo computazionale medio di circa $0.1\,s$ per ottenere contemporaneamente le soluzioni del modello impulsivo e dei due modelli a bassa spinta su un comune pc portatile (64-bit Intel i7 2.6 GHz processor).
Il compromesso tra costo computazionale e precisione di calcolo è dunque più che accettabile e rende le soluzioni trovate particolarmente appetibili in un contesto di preselezione delle possibili sequenze ottimali di rimozione di detriti in una singola missione.

## 5.4 Osservazioni

Osserviamo che se si aumenta l'intensità della spinta, si ridurrà la durata dell'arco propulso ($t = \frac{\Delta V}{T} m$) e di conseguenza la trasferta sarà sempre più simile a quella impulsiva. Considerando ad esempio gli stessi dati dei due esempi precedenti, ma aumentando considerevolmente i valori di spinta a $T = 1\,N$ e $T = 10\,mN$ rispettivamente, si ottiene:

| | Caso 1 | | Caso 2 | |
|---|---|---|---|---|
| **Modello** | Impulsivo | Spinta finita | Impulsivo | Spinta finita |
| $\mathbf{\Delta V}$ [m/s] | 250.371 | 250.271 | 250.160 | 250.058 |
| $\mathbf{\Delta V_A}$ [m/s] | 137.769 | 137.572 | 137.625 | 137.424 |
| $\mathbf{\Delta V_B}$ [m/s] | 112.602 | 112.698 | 112.536 | 112.633 |
| $\mathbf{\Delta a_A}$ [km] | 22.445 | 22.003 | 22.267 | 21.815 |
| $\mathbf{\Delta a_B}$ [km] | -67.945 | -67.503 | -67.767 | -67.315 |
| $\mathbf{\Delta i_A}$ [deg] | -0.669 | -0.669 | -0.669 | -0.668 |
| $\mathbf{\Delta i_B}$ [deg] | -0.521 | -0.522 | -0.521 | -0.522 |
| $\mathbf{\Delta \Omega_A}$ [deg] | -0.026 | -0.026 | -0.013 | -0.013 |
| $\mathbf{\Delta \Omega_B}$ [deg] | -0.026 | -0.026 | -0.013 | -0.013 |

Tabella 5.4

dove questa volta i tempi di spinta valgono rispettivamente 3 e $5.79\,days$. Si può ben notare la somiglianza di risultati per tutti i parametri considerati.

Conducendo diversi test su differenti tipologie di dati orbitali e tempi di trasferta è stato osservato che le soluzioni dei modelli approssimati a bassa spinta tendono ad essere molto simili per piccole variazioni di $\Omega$ in gioco. Per $\Delta\Omega_0 > 2°$ in valore assoluto, la differenza tra i risultati tende ad aumentare; in particolare il gap è più sensibile in caso di orbite tendenti ad allontanarsi per l'effetto di J2. I risultati maggiormente influenzati da questo punto di vista sono quelli derivanti dal modello a spinta bassa approssimata con impulsi, i quali divergono in maniera più consistente verso valori maggiori. Di contro il modello a spinta finita offre delle sovrastime rispetto all'impulsivo meno divergenti, con errore relativo contenuto (tipicamente $\approx 5\%$), confermando un'adeguata validità dal punto di vista dei risultati.

# Capitolo 6

# Conclusioni

Nel presente elaborato è stato affrontato il problema del calcolo del costo in termini di $\Delta V$ della trasferta con propulsione elettrica tra una coppia di orbite LEO circolari influenzate dalle perturbazioni introdotte dalla non sfericità della Terra. L'argomento si colloca nel problema più ampio di ricerca e ottimizzazione delle sequenze di detriti spaziali di grandi dimensioni (ad esempio stadi superiori dei lanciatori o satelliti dismessi) più favorevoli, ad una determinata epoca, per una missione ADR (*Active Debris Removal*) multitarget. Una missione di questo tipo prevede dunque una serie di trasferte in successione tra le orbite della sequenza di detriti selezionata, effettuate da un chaser con lo scopo ottenere il rendez vous con il k-esimo target e, in seguito a un prefissato transitorio temporale di servizio (durante il quale ad esempio può essere installato un sistema propulsivo sul detrito), manovrare per raggiungere il (k+1)-esimo. Emerge che alla base del processo di selezione dei target vi è la conoscenza del costo delle singole trasferte e sebbene sia certamente utile disporre dei $\Delta V$ esatti, l'elevato costo computazionale richiesto apre le porte alla ricerca di metodi approssimativi che garantiscano comunque un'elevata precisione di calcolo ma con costi computazionali ridotti.
Tra i vari parametri che entrano in gioco nell'ottimizzazione, un ruolo di spicco è ricoperto dal tempo di trasferta. Quest'ultimo infatti è strettamente legato sia alle condizioni temporali di ottimo imposte dalla sequenza sia dalla condizione di ottimo del $\Delta V$ della trasferta stessa, che a sua volta è legato all'ottimizzazione della sequenza. In linea di massima si individuano due problemi principali: il calcolo e l'ottimizzazione del $\Delta V$ a tempo minimo, il calcolo e la minimizzazione del $\Delta V$ a tempo fissato. Nella presente tesi è stato affrontato quest'ultimo caso.
Nel processo di snellimento dei possibili target candidati entra in gioco anche una componente arbitraria di selezione di cluster di detriti accomunati da parametri orbitali simili. In quest'ottica, nel presente trattato si è scelto di analizzare traiettorie tra orbite LEO quasi circolari con altitudine e inclinazione simili, introducendo la componente perturbativa sulla RAAN derivante dall'effetto J2.
Nella prima fase della trattazione viene illustrata la teoria di riferimento per orbite

circolari soggette a bassa spinta continua (Edelbaum [3][2]), a cui è affiancato il modello dinamico che esprime le perturbazioni derivanti da J2. La teoria di Edelbaum, di contro, parte proprio dal presupposto di considerare la RAAN costante durante la manovra. Segue dunque la discussione di una teoria approssimata, derivata da recenti studi [5][6], specializzata per orbite LEO circolari, la quale integra nella stima semplificata del $\Delta V$ di trasferimento tra due orbite con piccole variazioni di semiasse maggiore e inclinazione il contributo dell'effetto di J2. Tale teoria considera una trasferta a tre archi del tipo *thrust-coast-thrust*, assumendo che le manovre siano impulsive. Partendo dai risultati di questo modello e analizzando a fondo le equazioni che descrivono il contributo di J2, si è cercato di modificarne l'efficacia andando ad escludere l'ipotesi di manovre impulsive a favore di manovre a bassa spinta (tipiche della propulsione elettrica). Sono proposti due modelli approssimati, entrambi caratterizzati dall'introduzione nelle equazioni del tempo di spinta. Sfruttando le stime dei $\Delta V$ degli archi propulsi del modello impulsivo, si ricavano i due tempi di spinta necessari, funzione di massa e intensità di spinta dello S/C, che definiscono le durate degli archi propulsi. Ne consegue che la durata effettiva sull'orbita di parcheggio è ridotta e di conseguenza l'effetto ottimale di J2. L'idea di fondo è di includere nel computo dell'effetto benefico derivante da J2 sull'orbita di parcheggio il contributo degli archi di spinta, il quale seppur minore rispetto al modello impulsivo è comunque presente, e allo stesso tempo cercare una nuova orbita di parcheggio ottimale. La prima strategia propone di modellare il contributo degli archi propulsi con un $\dot{\Omega}_{J2}$ pari alla media dei valori che esso assume a inizio e fine arco. La seconda strategia propone di approssimare l'arco propulso con un modello a gradino equivalente, ovvero sostituendo la costante e distribuita bassa spinta con un impulso collocato a metà orbita.
I risultati ottenuti sono stati confrontati con soluzioni derivanti dall'applicazione di modelli con ottimizzazione indiretta [4], dimostrando un'adeguata precisione (errori relativi attorno al 5%) e un' eccellente velocità di calcolo ($< 0.1\,s$).

# Bibliografia


[1] Roger R. Bate, Donald D. Mueller e Jerry E. White. *Fundamentals of Astrodynamics*. New York: Dover Publications, 1971.

[2] Lorenzo Casalino e Guido Colasurdo. "Improved Edelbaum's Approach to Optimize Low Earth/Geostationary Orbits Low-Thrust Transfers". In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 30.5 (2007), pp. 1504–1511. DOI: 10.2514/1.28694.

[3] Theodore N. Edelbaum. "Propulsion Requirements for Controllable Satellites". In: *ARS Journal* 31.8 (1961), pp. 1079–1089. DOI: 10.2514/8.5723.

[4] Casalino Lorenzo e Forestieri Andrea. "Approximate Optimal LEO Transfers with J2 Perturbation and Dragsail". In: ().

[5] Hong-Xin Shen. "Explicit Approximation for J2-Perturbed Low-Thrust Transfers Between Circular Orbits". In: *Journal of Guidance Control Dynamics* 44.8 (ago. 2021), pp. 1525–1531. DOI: 10.2514/1.G005415.

[6] Hong-Xin Shen e Lorenzo Casalino. "Simple $\Delta V$ Approximation for Optimization of Debris-to-Debris Transfers". In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 58.2 (2021), pp. 575–580. DOI: 10.2514/1.A34831.

[7] Hong-Xin Shen, Tian-Jiao Zhang, Lorenzo Casalino e Dario Pastrone. "Optimization of Active Debris Removal Missions with Multiple Targets". In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 55.1 (2018), pp. 181–189. DOI: 10.2514/1.A33883.