POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea

Sviluppo e analisi di una piattaforma digitale per la simulazione della strategia in opzioni finanziare

Relatore
prof. Alessandro Fiori
Co-relatore
dott. Marco Rossi

Candidato
Maria Carolina Palescandolo

Anno Accademico 2020-2021

A mia nonna Mimma

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il Prof. Fiori, relatore di questa tesi, per la disponibilità e cordialità mostrata durante il percorso di sviluppo della tesi, e il Dott. Rossi, co-relatore di questa tesi, per l'attenzione e la dedizione mostrata durante i nostri confronti sulle funzionalità da includere nella piattaforma.
Vorrei inoltre ringraziare i miei familiari, in particolare i miei nonni Melina, Mimma e Toni e mio zio Toto per aver sempre creduto fortemente nelle mie capacità ed avermi mostrato la loro vicinanza, sostegno e interesse durante tutto il mio percorso di studi un ringraziamento speciale va ai miei genitori che hanno reso possibile la mia formazione scolastica e universitaria, supportandomi e sostenendomi sempre in tutte le mie scelte e i miei desideri.
Vorrei estendere i miei ringraziamenti a tutti gli amici che sono stati accanto a me in questo percorso, le mie amiche di Perugia, le Winx e le Spaccone, per avermi sempre mostrato il loro bene nonostante la distanza, il loro sostegno nelle situazioni complicate e per essere sempre state presenti per me con costanza, le altre due Winx di Milano, Chiara e Costanza, per il supporto dimostratomi in questi ultimi mesi di stesura della tesi, per i nostri confronti e i nostri scambi che mi fanno sentire sempre accolta, i miei amici di Torino, Giulia, Martina, Nicola, Sara, Simona e tutto il gruppo del Petricolae, per aver condiviso con me questi anni universitari, per aver sempre saputo dimostrare pazienza durante i periodi più stressanti in sessione d'esami e per avermi sempre ascoltata con affetto. Infine ringrazio Gabriele per la pazienza e la gentilezza dimostratemi durante i miei esami e nel periodo della stesura di questa tesi, offrendomi sempre uno sguardo positivo sul mio lavoro ed essendo sempre pronto ad aiutarmi nel momento del bisogno.

Sommario

Questo elaborato è dedicato all'esposizione e all'analisi degli algoritmi utilizzati per la progettazione e lo sviluppo di una piattaforma digitale dotata di diverse funzioni di supporto ai trader nella scelta della strategia di investimento in opzioni finanziarie e nell'analisi delle attività sottostanti alle opzioni. L'obiettivo della tesi è quello di descrivere i procedimenti che sono stati utilizzati per la creazione delle diverse funzioni della piattaforma motivandone la scelta e, al contempo, mostrare al lettore l'utilità di tali funzioni nell'ottica dell'impiego della piattaforma da parte dell'utente.
Diverse fonti sono state utilizzate per la realizzazione della tesi, il libro di Hull[1] è stato il principale riferimento per lo sviluppo degli argomenti teorici riguardanti gli strumenti finanziari, invece, diversi sono i paper che rappresentano le fonti di informazioni a partire dalle quali sono stati implementati gli algoritmi alla base del funzionamento della piattaforma.
I codici sono stati implementati nel linguaggio di programmazione *Python* tramite il software *Visual Studio Code*, invece, per realizzare i grafici, è stata utilizzata la libreria *React.js*.
, L'elaborato è organizzato secondo la suddivisione in sei capitoli:

- il primo capitolo è dedicato ad un'introduzione generale al contesto del trading in opzioni;
- il secondo capitolo è dedicato alla descrizione delle principali funzionalità offerte dalla piattaforma;
- il terzo capitolo è dedicato a descrivere gli strumenti finanziari, quali opzioni e contratti futures, fornendo una descrizione matematica delle loro proprietà e del loro funzionamento;
- nel quarto capitolo è presente una descrizione accurata dei procedimenti utilizzati per sviluppare le funzionalità della piattaforma, le quali si concretizzano principalmente nella realizzazione di grafici suddivisi in visualizzazioni relative all'andamento dei sottostanti ai contratti ed in visualizzazoni utili alla valutazione delle performance della strategia in opzioni selezionata dall'utente;
- il quinto capitolo è dedicato a descrivere i possibili ulteriori sviluppi da implementare nella piattaforma;
- il sesto capitolo è dedicato all'esposizione delle conclusioni.

Indice

Elenco delle figure 11

1 Introduzione 13

2 Descrizione della piattaforma 15
2.1 Competitor . . . 19
2.1.1 Fiuto Beta . . . 19
2.1.2 OptionVue . . . 20

3 Richiami teorici 21
3.1 Introduzione alle opzioni . . . 21
3.1.1 Opzioni call . . . 21
3.1.2 Opzioni put . . . 23
3.2 Introduzione ai contratti futures . . . 24
3.2.1 Futures options . . . 26
3.3 Le greche . . . 27
3.3.1 Delta di un future . . . 27
3.3.2 Delta di un'opzione . . . 27
3.3.3 Theta di un'opzione . . . 28
3.3.4 Rho . . . 29
3.3.5 Vega . . . 29
3.3.6 Gamma . . . 30
3.3.7 Vanna . . . 31
3.3.8 Vomma . . . 31
3.4 Il valore temporale di un'opzione . . . 32
3.5 La volatilità implicita . . . 32

4 Sviluppo ed analisi dei grafici 33
4.1 Grafici relativi alla valutazione dell'andamento del mercato . . . 33
4.1.1 Andamento storico del prezzo del sottostante . . . 33
4.1.2 Volatilità storica del sottostante . . . 34
4.1.3 Open interest . . . 36
4.2 Grafici relativi alla scelta e valutazione della strategia in opzioni . . . 39
4.2.1 Profit . . . 39

4.2.2 Le greche 41
4.3 Calcolo della volatilità implicita 45

5 Prossimi sviluppi 47

6 Conclusioni 51

Elenco delle figure

3.1 Long call profit 23
3.2 Short call profit 23
3.3 Long put profit 25
3.4 Short put profit 25
4.1 Andamento storico del prezzo dell'indice *S&P 500* 33
4.2 Volatilità storica del prezzo dell'indice *S&P 500* 35
4.3 Open interest dello stock *Apple Inc.* al giorno 19/11/2021 relativo a opzioni con scadenza alla fine del mese 36
4.4 Variazione dell'open interest dello stock *Apple Inc.* al giorno 19/11/2021 relativo a opzioni con scadenza alla fine del mese 36
4.5 Open interest breakdown associato dello stock *Apple Inc.* al giorno 19/11/2021 relativo a opzioni con scadenza alla fine del mese 37
4.6 Open interest pressure associato dello stock *Apple Inc.* al giorno 19/11/2021 relativo a opzioni con scadenza alla fine del mese 38
4.7 Profitto di una posizione long call sull'indice *S&P 500* 41
4.8 Delta associato a una posizione long call sull'indice *S&P 500* 42
4.9 Rho di una posizione long call sull'indice *S&P 500* 43
4.10 Vega di una posizione long call sull'indice *S&P 500* 44
4.11 Gamma di una posizione long call sull'indice *S&P 500* 44
4.12 Vanna di una posizione long call sull'indice *S&P 500* 45
4.13 Vomma di una posizione long call sull'indice *S&P 500* 46

Capitolo 1

Introduzione

La stesura di questa tesi di laurea è incentrata sulla descrizione dello sviluppo di una piattaforma digitale di supporto all'attività di trading in opzioni, le quali sono degli strumenti ampiamente diffusi e utilizzati nei mercati finanziari che stanno acquisendo una rilevanza crescente negli ultimi anni. Di fatti le opzioni sono contratti derivati la cui caratteristica principale è che i titolari possono acquistare o vendere un titolo a un prezzo predeterminato [9].
Nel tempo gli attori dei mercati finanziari, mercati in cui le persone negoziano titoli e derivati a bassi costi di transazione, hanno iniziato a utilizzare varie piattaforme di trading con la caratteristica principale di poter inviare rapidamente gli ordini al mercato. Questi sistemi sono utilizzati a scopi esecutivi mentre per quanto riguarda gli obiettivi di analisi del mercato, previsione dell'andamento del sottostante e valutazione della propria strategia dovrebbe essere effettuata utilizzando opportune piattaforme.
Nell'ambito del trading sui derivati le piattaforme che consentono un'analisi della strategia, soprattutto tramite l'utilizzo di strumenti visivi come grafici e indicatori, non sono ampiamente disponibili, molto spesso le piattaforme sono vendute a un prezzo di abbonamento elevato, non accessibile ai nuovi attori del mercato.Inoltre le suddette piattaforme spesso mancano di elementi utili per la valutazione della strategia e la valutazione dell'andamento del mercato con una visione globale ma offrendo solo una visione parziale, obbligando così gli utenti a utilizzare strumenti e piattaforme diverse contemporaneamente. Infine la gran parte delle piattaforme di supporto all'analisi della strategia sui derivati presenta problemi di portabilità con i nuovi sistemi operativi essendo dei sofware obsoleti e utilizzando delle interfacce grafiche poco facili da utilizzare.
La piattaforma presentata in questa tesi è stata ideata allo scopo di rispondere alle esigenze dei trader che operano nel mercato dei derivati. L'obiettivo principale è quello di fornire uno strumento facilmente accessibile a tutti gli attori del mercato delle opzioni, tramite la sua gratuità o, ove nel caso non sia possibile fornire uno strumento gratuito, tramite un basso costo di iscrizione o abbonamento, fruibile inoltre attraverso il web per ovviare ai problemi di compatibilità con i sistemi operativi.
Un altro obiettivo alla base dello sviluppo della piattaforma è la possibilità di un utilizzo agevole da parte dell'utente, rendendo le funzionalità offerte nella piattaforma chiare e intuitive.

Infine la necessità dei trader di strumenti per la contemporanea analisi del mercato e della strategia selezionata che forniscano una visione di insieme più completa possibile è il fattore che ha guidato lo sviluppo della piattaforma nella scelta e nello sviluppo delle funzionalità offerte da essa per risultare uno strumento utile ai trader nella scelta del proprio investimento in opzioni.

Capitolo 2

Descrizione della piattaforma

Questo capitolo è dedicato alla descrizione della piattaforma, vengono elencate le motivazioni sottostanti la scelta della creazione della piattaforma e vengono descritte le funzionalità offerte al fine di fornire al lettore una prima visione generale e più completa possibile della piattaforma e del suo meccanismo di utilizzo.

La piattaforma è stata realizzata allo scopo di fornire sostegno ai trader nelle fasi che compongono la scelta della strategia in opzioni. Le opzioni sono contratti derivati, ovvero strumenti finanziari il cui valore dipende dal prezzo di un'attività sottostante.
La motivazione sottostante la scelta delle funzionalità offerte della piattaforma è la possibilità di fornire uno strumento che racchiuda in sé varie funzionalità di supporto ai trader per la scelta e valutazione della strategia in opzioni, le quali non sono presenti congiuntamente in altre piattaforme presenti ad oggi nel mercato.
Di seguito verranno presentate e descritte le principali funzionalità offerte dalla piattaforma.
La piattaforma offre: la possibilità di selezionare il sottostante su cui l'utente vuole costruire la propria strategia di investimento, la presentazione di grafici utili per valutare l'andamento del mercato che rappresentano il percorso del prezzo del sottostante utili e la volatilità storica del sottostante, la presenza di grafici che rappresentano l'open interest e i volumi dei contratti scambiati nel mercato sul sottostante selezionato, la presentazione della chain di opzioni sul sottostante selezionato suddivisa in base alle diverse scadenze dei contratti, la possibilità di calcolare la volatilità implicita e il valore temporale delle opzioni sul sottostante selezionato che sono state scelte per comporre la propria strategia, la simulazione del profitto della strategia selezionata e la visualizzazione delle greche ad essa associate.
Le principali funzionalità vengono fornite all'utente tramite grafici a cui è associata l'opzione di salvataggio sul personal computer dell'utente, la scelta dell'utilizzo dei grafici è stata presa per offrire all'utente una visione chiara e facilmente interpretabile della situazione attuale del mercato e della strategia che egli desidera intraprendere.

Una volta selezionato il sottostante la piattaforma offre la possibilità di visualizzare la chain opzioni con quotazioni aggiornate giornalmente.

Una chain di opzioni è una tabella che rappresenta le opzioni che si possono negoziare sul titolo sottostante.

I dati sui titoli sottistanti e sulle chain di opzioni vengono scaricati ad intervalli regolari di circa 15 minuti dalle pagine web delle seguenti piattaforme di scambio:

- Chicago Mercantile Exchange (CME), un'azienda operante nel mercato finanziario statunitense che si occupa di scambiare contratti futures e opzioni operante a Chicago, New York e Londra tramite piattaforme di trading online;
- Chicago Board Options Exchange (CBOE), la più grande borsa di opzioni statunitensi operante a Chicago;
- EUREX Exchange (EUREX), una borsa internazionale che offre principalmente il commercio di strumenti derivati europei, il più grande mercato europeo per i contratti futures e per le opzioni.

I sottostanti delle opzioni appartengono a diverse categorie: stock, indici azionari, futures su commodity, futures su indici e futures su bond.
Di seguito vengono presentati e definiti i sottostanti selezionati e le loro tipologie.

Definizione 1 *Uno stock è un titolo azionario, ovvero un titolo finanziario che rappresenta il possesso di una quota della proprietà di una società per azioni.*

Definizione 2 *Uno share, o azione, è l'unità minima in cui viene suddiviso il capitale sociale di una società per azioni.*

Definizione 3 *La capitalizzazione di mercato di un'azienda viene calcolata tramite la moltiplicazione del prezzo di un'azione per il numero di azioni in circolazione nel mercato, e rappresenta il valore dell'azienda.*

I sottostanti appartenenti alla categoria stock inclusi nella piattaforma sono le seguenti società statunitensi ad alta capitalizzazione, leader dei loro rispettivi settori: *Apple Inc.*, *Microdoft Corp.*, *Tesla Inc.*, *Google Inc.*, *Amazon*, *Facebook Inc.* e *Intel Corp.*

Di seguito è presentata un'introduzione ai sottostanti appartenenti alla categoria degli indici azionari.

Definizione 4 *Un indice azionario rappresenta la sintesi del valore di un portafoglio di titoli azionari, i movimenti dell'indice approssimano la valorizzazione dei titoli compresi nel portafoglio al trascorrere del tempo. Gli investitori possono valutare l'andamento generale di uno o più mercati azionari guardando la performance di un indice*

Gli indici che sono stati inclusi nella piattaforma sono:

- *S&P 500*, o *Standard & Poor's 500 Index*, realizzato nel 1957, è un indice ponderato in base alla capitalizzazione di mercato di 500 aziende leader le cui azioni sono negoziate pubblicamente negli Stati Uniti, il peso di ogni azienda nell'indice è calcolato come la capitalizzazione di mercato dell'azienda divisa per la capitalizzazione dell'indice. L'indice è considerato uno dei migliori indicatori delle azioni statunitensi a grande capitalizzazione [11];

- *S&P 500 Voaltility Index*, inaugurato nel 1992, l'indice di volatilità rappresenta una misura dell'aspettativa di volatilità del mercato azionario basata sulle opzioni dell'indice *S&P 500*, il prezzo quotato di ogni opzione rappresenta l'aspettativa del mercato della volatilità per i successivi 30 giorni. A differenza di altri indici di mercato, l'*S&P 500 Voaltility Index* non può essere comprato o venduto direttamente ma è negoziato tramite contratti derivati;

- *DAX*, acronimo di *Deutscher Aktien-Index* inaugurato nel 1987, replica l'andamento di 40 titoli a maggiore capitalizzazione e volume di negoziazione che operano sulla Borsa di Francoforte, l'indice è considerato il riferimento per la valutazione dell'economia tedesca. È calcolato sulla base della capitalizzazione flottante (la quantità di azioni della società che gli investitori possono commerciare nel mercato secondario);

- *EuroStoxx 50*, creato nel 1998, l'indice replica l'andamento delle 50 società a maggior capitalizzazione nei paesi dell'Eurozona, la ponderazione delle aziende che compongono l'indice è determinata dalla loro capitalizzazione di mercato, quindi le aziende con capitalizzazione più elevata hanno un peso maggiore nell'indice.

I restanti sottostanti inseriti nella piattaforma sono contratti futures, anch'essi contratti derivati il cui valore dipende dal prezzo di un'attività sottostante, la descrizione accurata dei contratti futures e del loro funzionamento è lasciata al Capitolo 3.
Le tipologie di sottostanti dei contratti futures sono: indici azionari, commodity e bond. Tra gli indici sottostanti ai contratti futures, oltre agli indici sopracitati, sono stati inseriti anche:

- *Russell 2000*, un indice composto da 2000 aziende statunitensi a piccola capitalizzazione. Viene spesso utilizzato come titolo di riferimento per analizzare l'andamento delle piccole imprese in America;

- *Nasdaq-100*, un indice azionario che comprende le maggiori 100 imprese non-finanziarie quotate nel mercato *Nasdaq*, il peso delle diverse società che compongono l'indice è basato sulla loro capitalizzazione di mercato;

- *Vstoxx* l'indice si basa sui prezzi in tempo reale delle opzioni sull'indice *Euro Stoxx 50* e riflette le aspettative di mercato sulla volatilità.

Definizione 5 *Una commodity è un bene offerto senza differenze qualitative sul mercato ed la merce è la stessa indipendentemente da chi la produce.*

Le commodity incluse nella piattaforma sono gold e *crude oil*,i dati sui futures e sulle chain di opzioni su futures delle suddette commodity sono stati scaricati dalla piattaforma di CME.

Un altro sottostante è l'*Euro Bund* un contratto futures assegnato dalla Germania, che rappresenta i titoli di stato tedeschi con scadenza in 10 anni. I titoli di stato sono bond emessi dallo Stato per finanziare il proprio debito pubblico. Di seguito si riporta la definizione di bond.

Definizione 6 *Un bond, o obbligazione, è un titolo di credito a cui è associata una scadenza in cui il possessore ha il diritto al rimborso del capitale prestato all'emittente più un interesse sul capitale.*

Per ogni sottostante la piattaforma mette a disposizione:

- il grafico storico dell'andamento del sottostante nell'ultimo anno;
- il grafico della volatilità storica;
- il grafico della volatilità implicita e della sua variazione;
- il grafico dell'open interest e della sua variazione;
- i grafici relativi alla distribuzione dell'open interest;

I suddetti grafici verranno descritti più approfonditamente nel Capitolo 4.

Oltre ai grafici, una volta selezionato il sottostante, la piattaforma mette a disposizione tutti gli strike disponibili e tutte le scadenze delle opzioni componenti la chain su tale sottostante. Questo tipo di visualizzazione offre all'utente i seguente dettagli relativi ai contratti presentati:

- la tipologia, call o put;
- la suddivizoione in opzioni *in-the-money* o *out-of-the-money*;
- i prezzi d'esercizio;
- la data di scadenza;
- la posizione assunta (la quantità comprata o venduta dell'opzione in considerazione);
- il prezzo bid (il prezzo al quale i compratori sono disposti ad acquistare l'opzione);
- il prezzo ask (il prezzo al quale i venditori sono disposti a vendere l'opzione);
- il prezzo last (l'ultimo prezzo osservato a cui è stata venduta l'opzione);
- il valore temporale;
- la volatilità implicita.

Le scadenze prese in considerazione sono di tipo mensile e settimanale e le tipologie di esercizio sono europeo e americano.
La posizione assunta su ciascuna opzione viene inserita da tastiera dall'utente e viene inserita in maniera automatica nella strategia andando a comporre un portafoglio virtuale, successivamente il salvataggio della strategia avviene in maniera automatica rendendo così possibile effettuare un'analisi di tipo *what-if*.
All'interno della simulazione *what-if* è possibile visualizzare i grafici del profitto e delle greche associate al portafoglio di opzioni, in modo da avere l'esatta rappresentazione

grafica della strategia, tali grafici vengono aggiornati ogni qual volta viene modificata un'opzione nella strategia.
Per quanto concerne le opzioni che compongono la strategia è possibile simularne la compravendita modificandone il premio, infatti a volte il prezzo last presentato nella chain non è aggiornato siccome i dati vengono aggiornati ogni 15 minuti e di conseguenza può essere utile per l'utente modificarlo in maniera tale da rispecchiare il prezzo a cui egli vuole vendere o comprare l'opzione in accordo con lo stato attuale delle quotazioni, una volta modificato il prezzo dell'opzione anche il grafico del profitto verrà aggiornato modificandosi tramite un atraslazione verticale in accordo al valore del premio inserito.
Oltre alla simulazione della compravendita vi è una funzionalità aggiuntiva che permette di simulare la chiusura di una o più posizioni sulle opzioni tramite l'inserimento da tastiera del prezzo di chiusura al quale l'opzione viene venduta o comprata (a seconda che la posizione iniziale sia di tipo lungo o corto), l'utile guadangnato o la perdita ottenuta verrà visualizzata sul portafoglio e, anche in questo caso, il grafico del profitto verrà aggiornato in base all'utile o alla perdita.

2.1 Competitor

In questa sezione vengono presentati i principali competitor, che offrono prodotti simili alla piattaforma presentata nella tesi. In particolare i principali concorrenti sono: *FiutoBeta*, *OptionRuler* e *OptionVue*.
Di seguito verranno descritte le caratteristiche offerte dai competitor, evidenziando come si discostano dalle funzionalità offerte dalla piattaforma in oggetto.

2.1.1 Fiuto Beta

Fiuto Beta è un software gratuito sviluppato da PlayOptions srl che permette l'analisi dei sottostanti e offre le chain di opzioni sui sottostanti selezionati.
Per quanto riguarda l'analisi del sottostante il software offre una visione dell'andamento del suo prezzo, della volatilità storica, dell'open interest e dei volumi dei contratti scambiati sul sottostante.
Per quanto riguarda l'analisi della strategia in opzioni il software consente la visualizzazione del grafico profitto e riporta il valore delle greche associate ad ogni opzione.
Fiuto Beta offre inoltre opportune sezioni con varie funzionalità, una sezione è dedicata alla possibilità di ricerca di strategie in opzioni predeterminate da applicare al sottostante selezionato, una sezione è dedicata al calcolo delle greche e della volatilità implicita attraverso la presentazione di una finestra in cui l'utente può inserire i parametri dell'opzione che vuole valutare, una sezione dedicata al monitoraggio dell'andamento globale del capitale inserito nel portafoglio e alla visualizzazione della performance di tutte le strategie attive.

Sebbene il software racchiuda in sé varie funzionalità vi sono alcune lacune rispetto alla piattaforma oggetto dell'elaborato, in particolare Fiuto Beta non offre grafici relativi

alla distribuzione cumulativa dell'open interest, le greche vengono visualizzate solo come valore numerico, non è quindi possibile analizzare il loro andamento come funzioni del prezzo del sottostante, i valori alcune greche essenziali per la costruzione della strategia in opzioni, come vanna e vomma, non vengono visualizzati, infine i dati delle chain non vengono aggiornati automaticamente ma solo tramite riavvio dell'applicazione.

2.1.2 OptionVue

OptionVue è un software ideato per il trading in opzioni include alcune importanti caratteristiche come una matrice di opzioni, dei grafici altamente personalizzabili e strumenti per trovare la migliore strategia di investimento in opzioni.
La matrice di opzioni coincide con la chain di opzioni ed è utile per guardare le opzioni esistenti per ogni sottostante, vengono mostrati tutti i dati di prezzo, il premio, la volatilità e alcune greche rilevanti.
La possibilità di cercare più date e prezzi d'esercizio e aprire nuove posizioni per la strategia di opzioni corrente è offerta dal sotware.
A partire dalle posizioni aperte il software calcola profitti e perdite visualizzati tramite da alcuni grafici avanzati e consente il confronto con altre strategie di opzioni. Infine, è presente uno strumento, TradeFinder, dedito alla scansione di diverse strategie di opzioni con il fine di trovare la strategia migliore corrispondente ad alcune condizioni iniziali e filtri.
Tra gli aspetti negativi di *OptionVue* si può menzionare che non offre una sezione dedicata all'analisi del prezzo del sottostante, le greche vanna e vomma non vengono mostrate.

In generale, *OptionVue* è adatto per i trader di opzioni esperti ed è una piattaforma molto costosa, con il canone per il software con versione di base che parte da 1000$ all'anno senza l'aggiornamento dei dati e senza la presenza dei moduli accessori.

Capitolo 3

Richiami teorici

Questo capitolo è dedicato alla descrizione matematica delle opzioni e dei contratti futures, gli strumenti finanziari alla base dell'utilizzo della piattaforma.
Nella prima parte vengono definite le opzioni, le possibili diverse tipologie di opzioni, i contratti futures e il payoff associato ai contratti in opzioni e ai contratti futures.
La seconda sezione è dedicata alla descrizione delle greche, strumenti di misurazione del rischio indispensabili per la creazione della strategia in opzioni. Infine la terza parte è dedicata alla descrizione della volatilità implicita, un concetto fondamentale per poter effettuare strategie di trading in opzioni.

3.1 Introduzione alle opzioni

Le opzioni sono strumenti finanziari il cui valore deriva dal prezzo di un'attività sottostante, proprio per questo vengono classificati come contratti derivati.
Le opzioni, a differenza degli altri contratti derivati, conferiscono all'acquirente il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare o vendere una certa quantità dell'attività sottostante a fronte di un pagamento di un premio, per un periodo di tempo prefissato.
In base alla tipologia di esercizio le opzioni possono essere classificate in due categorie principali, le opzioni americane e le opzioni europee. Le opzioni americane possono essere esercitate in qualsiasi momento fino alla data di scadenza. Le opzioni europee possono essere esercitate solo alla data di scadenza, sono quindi più rischiose rispetto a quelle americane e, proprio per questa caratteristica, hanno un prezzo più basso rispetto alle americane.
Le opzioni si suddividono, inoltre, in due tipologie, call e put.
Di seguito verranno descritte le caratteristiche delle opzioni europee.

3.1.1 Opzioni call

Un'opzione call conferisce all'acquirente il diritto di comprare l'attività sottostante a un prezzo predeterminato, il cosiddetto prezzo di esercizio o prezzo strike, dietro pagamento di un premio al venditore dell'opzione [2].

L'acquirente dell'opzione detiene una posizione lunga, *long call*, mentre il venditore detiene una posizione corta, *short call*.
Nel caso delle opzioni europee se a scadenza il prezzo dell'attività sottostante è maggiore del prezzo d'esercizio, in tal caso l'opzione viene detta *in the money*, all'acquirente converrà esercitare l'opzione comprando il sottostante al prezzo d'esercizio e rivendendolo immediatamente sul mercato al prezzo di mercato. Se a scadenza il prezzo del sottostante è minore del prezzo di esercizio, in tal caso l'opzione viene detta *out of the money*, oppure il prezzo del sottostante è uguale al prezzo di esercizio, in tal caso l'opzione viene detta *at the money*, all'acquirente non converrà esercitare l'opzione.
A titolo esemplificativo consideriamo un esempio di acquisto di un'opzione tratto da [1].
Si consideri la situazione di un investitore che acquista un'opzione call europea con un prezzo strike di 100$ per acquistare 100 azioni di un certo titolo. Supponiamo che l'attuale prezzo del titolo sia 98$, che la data di scadenza dell'opzione sia tra 4 mesi e che il prezzo di un'opzione per acquistare un'azione sia di 5$. L'investimento iniziale è di 500$. Poiché l'opzione è europea, l'investitore può esercitare il suo diritto solo alla data di scadenza. Se il prezzo delle azioni alla data di scadenza sarà inferiore a 100$, l'investitore sceglierà chiaramente di non esercitare (non ha senso comprare per 100$ un'azione che ha un valore di mercato inferiore a 100$). In queste circostanze, l'investitore perderà l'intero investimento iniziale di 500$. Se, invece, il prezzo del titolo sarà superiore a 100$, l'opzione sarà esercitata. Si supponga, per esempio, che il prezzo del titolo sia di 115$ alla data di scadenza. Esercitando l'opzione, l'investitore sarebbe in grado di comprare 100 azioni a 100$ per azione e rivenderle immediatamente, realizzando un guadagno di 1500$ (ignorando i costi di transazione), sottraendo il costo dell'opzione, il profitto netto per l'investitore sarebbe di 1000$.
Per le opzioni europee è spesso utile definire il profitto alla data di scadenza.
Sia T la data di scadenza dell'opzione, sia S_T il prezzo del sottostante al tempo T, sia K il prezzo strike e sia C il prezzo dell'opzione, allora il profitto alla scadenza di una posizione long call sarà:

$$P_{long\ call} = \begin{cases} S_T - K - C, & \text{se } S_T > K, \\ -C, & \text{se } S_T \leq K. \end{cases} \tag{3.1}$$

Il profitto di una posizione lunga su un'opzione call con prezzo strike pari a 700$, dimensione del contratto pari a uno share del sottostante e prezzo 150$ è rappresentato nella Figura 3.1 al variare dei possibili valori del sottostante alla data di scadenza.

Analogamente il profitto alla scadenza di una posizione short call sarà:

$$P_{short\ call} = \begin{cases} -S_T + K + C, & \text{se } S_T > K, \\ +C, & \text{se } S_T \leq K. \end{cases} \tag{3.2}$$

Il profitto di una posizione corta su un'opzione call con prezzo strike pari a 700$, dimensione del contratto pari a uno share del sottostante e prezzo 150$ è rappresentato nella Figura 3.2 al variare dei possibili valori del sottostante alla data di scadenza.

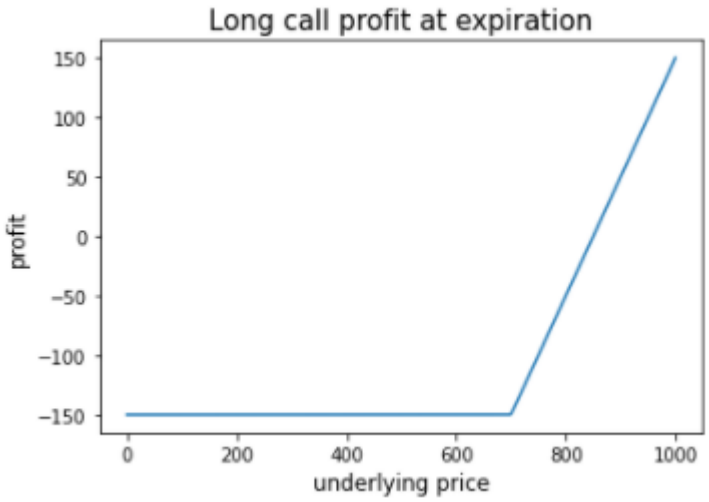

Figura 3.1. Long call profit

Figura 3.2. Short call profit

3.1.2 Opzioni put

Un'opzione put conferisce all'acquirente il diritto di vendere al venditore dell'opzione il titolo sottostante a un prezzo predeterminato, a fronte del pagamento al venditore di un premio [2].
L'acquirente dell'opzione detiene una posizione lunga, *long put*, mentre il venditore detiene una posizione corta, *short put*.
Nel caso di un'opzione europea se alla data di scadenza il prezzo dell'attività sottostante è

inferiore al prezzo d'esercizio, in tal caso l'opzione viene detta *in the money*, l'acquirente può esercitare l'opzione acquistando l'attività nel mercato azionario al prezzo di mercato, inferiore al prezzo d'esercizio, e rivendendola al prezzo strike. Se a scadenza il prezzo del sottostante è maggiore o uguale al prezzo d'esercizio, l'opzione è *out of the money* o *at the money*, l'acquirente non eserciterà l'opzione.
Riportiamo un esempio tratto da [1].
Si consideri un investitore che acquista un'opzione put europea con un prezzo d'esercizio di 70$ per vendere 100 azioni di un certo titolo. Si supponga che il prezzo corrente del titolo sia di 65$ e che il prezzo di un'opzione per vendere un'azione sia di 7$.
L'investimento iniziale è 700$. Poiché l'opzione è europea, sarà esercitata solo se il prezzo delle azioni è inferiore a 70$ alla data di scadenza.
Si supponga che il prezzo delle azioni sia di 55$ in tale data. L'investitore può comprare 100 azioni a 55$ per azione e, vendere le stesse azioni a 70$ per realizzare un guadagno di 1500$ (i costi di transazione sono ignorati). Quando il costo iniziale di 700$ dell'opzione viene preso in considerazione, il profitto netto dell'investitore è di 800$.
Se il prezzo finale delle azioni è superiore a 70$, l'opzione put scade senza valore e l'investitore perde l'investimento iniziale.
Analogamente alle opzioni call, si può definire il profitto alla data di scadenza per le opzioni put.
Sia T la data di scadenza dell'opzione, sia S_T il prezzo del sottostante al tempo T, sia K il prezzo strike e sia P il prezzo dell'opzione, allora il profitto alla scadenza di una posizione long put sarà:

$$P_{long\ put} = \begin{cases} -P, & \text{se } S_T > K, \\ K - S_T - P, & \text{se } S_T \leq K. \end{cases} \tag{3.3}$$

Il profitto di una posizione lunga su un'opzione put con prezzo strike pari a 700$, dimensione del contratto pari a uno share del sottostante e prezzo 150$ è rappresentato nella Figura 3.3 al variare dei possibili valori del sottostante alla data di scadenza.

Analogamnete il profitto alla scadenza di una posizione short put sarà:

$$P_{short\ put} = \begin{cases} +P, & \text{se } S_T > K, \\ -K + S_T + P, & \text{se } S_T \leq K. \end{cases} \tag{3.4}$$

Il profitto di una posizione corta su un'opzione put con prezzo strike pari a 700$, dimensione del contratto pari a uno share del sottostante e prezzo 150$ è rappresentato nella Figura 3.4 al variare dei possibili valori del sottostante alla data di scadenza.

3.2 Introduzione ai contratti futures

Secondo [1] un contratto futures è un accordo sull'acquisto o sulla vendita di un'attività in una certa data futura e ad un prezzo prefissato.

In un contratto futures ci sono sempre due controparti, la parte che ha accettato di comprare l'attività sottostante ha una posizione lunga, *long futures position*, la parte che

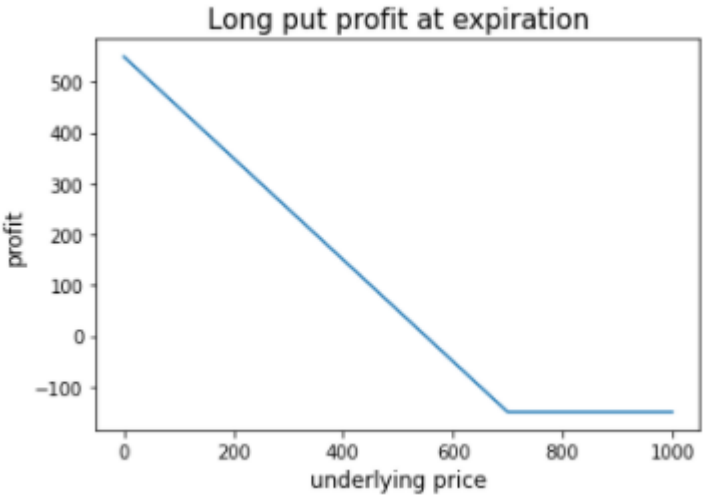

Figura 3.3. Long put profit

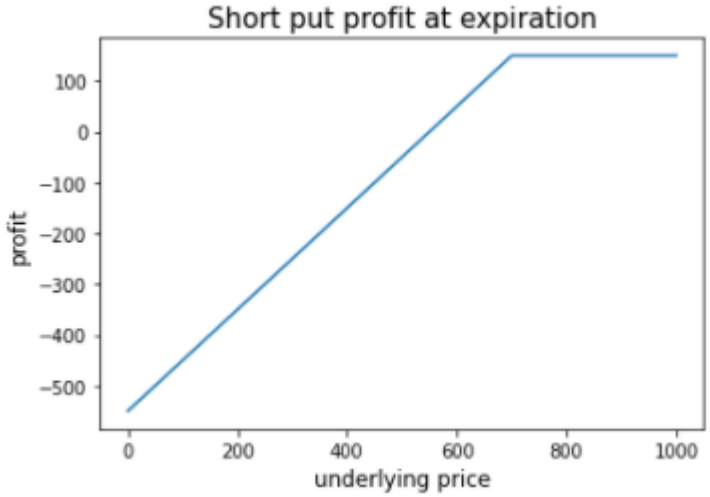

Figura 3.4. Short put profit

ha accettato di vendere l'attività sottostante ha una posizione corta, *short futures position*.
I contratti futures sono normalmente scambiati in borsa e, proprio per questo, affinché la negoziazione sia possibile, i contratti hanno delle caratteristiche standard; inoltre, siccome le due parti del contratto non si conoscono necessariamente, la borsa fornisce anche un meccanismo di garanzia.
Una gamma molto vasta di materie prime e attività finanziarie costituiscono le attività

sottostanti ai vari contratti. Le attività finanziarie includono indici azionari, valute e obbligazioni del Tesoro.

Il prezzo concordato viene detto *futures price* ed è determinato dalle leggi della della domanda e dell'offerta.
Il prezzo futures è stabilito in maniera tale che il valore iniziale del contratto futures sia zero.
Per un contratto futures su un'attività che fornisce un rendimento da dividendi al tasso q, il cui prezzo al tempo t è denotato con $S(t)$, e, denotando il tempo che rimane alla maturità del contratto futures con T si può dimostrare che il prezzo futures, denotato con $F(t)$, vale:

$$F(t) = S(t)e^{(r-q)T}. \tag{3.5}$$

I contratti futures sono negoziati giornalmente, quando cambia il prezzo futures avvengono i flussi di cassa giornalieri ed il contratto viene riscritto in maniera tale che il valore del futures alla fine di ogni giornata sia zero.
Il guadagno, o la perdita, di ciascuna delle due parti del contratto è determinato dal cambiamento del prezzo futures relativo al giorno in cui viene stipulato il contratto e al giorno in cui viene chiuso.
Denotando con T la maturità del contratto, sia $F(t)$ il prezzo futures calcolato al tempo t per il contratto che matura al tempo T, sia $F(s)$ il prezzo futures corrente al tempo s, $s \geq t$, dove s è il tempo in cui si vuole valutare il contratto.
Il valore di una posizione long su un contratto futures al tempo s è dato da:

$$V_{long}(s) = F(s) - F(t). \tag{3.6}$$

Il valore di una posizione short su un contratto futures al tempo s è dato da:

$$V_{short}(s) = F(t) - F(s). \tag{3.7}$$

3.2.1 Futures options

Secondo [1] un'opzione su futures è il diritto, ma non l'obbligo, di stipulare un contratto futures a un un certo prezzo futures entro una certa data.
In particolare, un'opzione call su futures è il diritto di entrare in un contratto futures con una posizione lunga a un certo prezzo. Se un'opzione call futures viene esercitata, il detentore acquisisce una posizione lunga nel contratto futures sottostante e un importo in contanti pari alla differenza tra il più recente prezzo futures e il prezzo d'esercizio.
un'opzione put su futures è il diritto di entrare in un contratto futures con una posizione corta a un certo prezzo. Se viene esercitata un'opzione put su futures, il titolare acquisisce una posizione corta nel contratto future sottostante più un importo in contanti pari alla differenza tra il prezzo d'esercizio e il prezzo futures più recente.

3.3 Le greche

In questa sezione verranno illustrate le greche e il loro utilizzo.
Le greche sono strumenti che permettono di misurare il rischio che deriva dall'assunzione di una posizione in strumenti derivati, come le opzioni. Ogni greca è quindi una misura di rischio che permette di determinare la sensitività del prezzo del derivato rispetto alla variazione di un determinato fattore di rischio, dal quale il valore del derivato dipende.
L'utilità delle greche risiede appunto nella possibilità di utilizzarle per ridurre il rischio nella posizione assunta, raggiungendo il valore di esposizione ai fattori di rischio desiderato.
Le greche più utilizzate sono *delta*, *gamma*, *theta*, *rho*, *vega*, *vanna* e *vomma*, esse sono delle derivate al primo e al secondo ordine.

3.3.1 Delta di un future

Il prezzo futures su un sottostante che paga un dividend yield continuo è definito nell'equazione. 3.5 Il valore di una posizione lunga su un contratto futures è definito nell'equazione 3.6.
Andando a sostituire l'equazione 3.5 in 3.6 si ottiene

$$V_{long}(s) = S(s)e^{(r-q)T} - S(t)e^{(r-q)T}, \tag{3.8}$$

dove T indica la maturità del contratto, s è l'istante di tempo di in cui si vuole calcolare il valore del contratto con $s > t$. Osserviamo che il valore del contratto è lineare nel prezzo spot con fattore $e^{(r-q)T}$ e la sua derivata rispetto al prezzo del sottostante è pari a $e^{(r-q)T}$. Di conseguenza il delta corrispondente a una posizione lunga su un futures è pari a $e^{(r-q)T}$ ed il delta associato a una posizione corta su un contratto futures è pari a $-e^{(r-q)T}$.

3.3.2 Delta di un'opzione

Il *delta* di un'opzione è definito come il tasso di cambiamento nel prezzo dell'opzione rispetto al prezzo dell'attività sottostante. Sia V il valore dell'opzione, sia S il prezzo dello strumento sottostante, allora il *delta* è definito come:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \tag{3.9}$$

Esso può quindi essere rappresentato come la pendenza della curva che mette in relazione il prezzo dell'opzione con il prezzo del bene sottostante, nota come la curva del *payoff at now*.

Il delta associato a una posizione lunga su un'opzione call oppure a una posizione corta su un'opzione put è un numero compreso tra 0 e 1 e il delta associato ad una posizione corta su un'opzione call oppure a una posizione lunga su un'opzione put è un numero compreso tra -1 e 0, per queste sue caratteristiche viene naturale l'interpretazione del valore assoluto del delta come un'approssimazione della probabilità dell'opzione di scadere *in the money*. Di conseguenza le opzioni call *at the money* avranno un delta vicino a 0.5

e le opzioni put *at the money* avranno un delta vicino a -0.5.

Il delta è una greca essenziale al fine dell'esecuzione di strategie di delta hedging, in cui si cerca di ridurre a zero il delta della propria posizione al fine di essere indifferenti a piccole variazioni nel prezzo del sottostante.
Di seguito viene riportato un esempio tratto da [1].
Supponiamo che il delta di un'opzione call su uno stock sia 0.6, questo significa che se il prezzo del sottostante cambia di una piccola quantità allora il prezzo dell'opzione cambia di circa il 60% di quella quantità.
Supponiamo che il prezzo dell'azione sia 100$ e che ogni contratto di opzione abbia una dimensione di 100 unità, che denotiamo con n_{shares}.
Un investitore ha venduto 20 opzioni call, denotiamo tale numero con $n_{contracts}$, la posizione dell'investitore può essere coperta comprando $\Delta \times n_{shares} \times n_{contracts} = 0.6 \times 100 \times 20 = 1200$ unità dello stock.
In tal modo se il prezzo delle azioni salisse di 1$, il guadagno sulle azioni acquistate sarebbe pari a 1200$ ed il prezzo delle opzioni salirebbe di $\Delta \times 1\$ = 0.6\$$, producendo una perdita pari a $0.6\$ \times 2000 = 1200\$$.
Analogamente se il prezzo dello stock scendesse di 1$ la perdita sulle azioni sarebbe pari a 1200$ e il guadagno sulle opzioni sarebbe di 1200$, dovuto ad un abbassamento del prezzo delle stesse.
Vediamo quindi come il guadagno sulla posizione in azioni tende a compensare la perdita sulla posizione in opzioni e viceversa. Questa strategia viene detta*delta neutral*.

In generale il delta di un portafoglio composto da opzioni o altri derivati, che dipendono da una singola attività il cui prezzo è S, vale

$$\Delta_P = \frac{\partial \Pi}{\partial S}, \tag{3.10}$$

dove Π è il valore del portafoglio.
Essendo la derivata un operatore lineare risulta che il delta di un portafoglio può essere calcolato a partire dai delta delle posizioni individuali nel portafoglio come

$$\Delta_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i, \tag{3.11}$$

dove w_i, per $i = 1, ..., n$, è la posizione sul derivato i all'interno del portafoglio.

3.3.3 Theta di un'opzione

Il theta rappresenta il tasso di variazione del valore dell'opzione rispetto allo scorrere del tempo.

Il theta solitamente è negativo per le posizioni lunghe sulle opzioni call e put, e positivo per le posizioni corte sulle opzioni call e put corte, ad eccezione per le opzioni put profondamente *in-the-money*. Ciò accade perché, mentre il tempo passa, se tutte le altre

variabili rimangono fisse, l'opzione tende a perdere valore.
Il theta non è lo stesso tipo di parametro di copertura del delta. C'è incertezza sul il prezzo futuro delle azioni, ma non c'è incertezza sul passare del tempo. Ha senso coprirsi contro i cambiamenti del prezzo dell'attività sottostante, ma non ha senso coprirsi contro il passaggio del tempo. Nonostante questo, molti trader considerano il theta come un'utile statistica descrittiva per un portafoglio.

In generale il theta di un portafoglio di opzioni misura la sensibilità del valore del portafoglio rispetto allo scorrere del tempo. Il theta è a volte indicato come il decadimento temporale del portafoglio.
Il theta totale per un portafoglio di opzioni può essere determinato sommando i theta per ogni singola posizione.

$$\Theta_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \Theta_i, \tag{3.12}$$

dove w_i, per $i = 1, ..., n$, indica la posizione sul derivato i all'interno del portafoglio.

3.3.4 Rho

Il rho misura la sensitività del valore dell'opzione rispetto al tasso d'interesse *risk-free*.

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}. \tag{3.13}$$

Il rho viene espresso come la quantità di denaro per unità del sottostante che il valore dell'opzione perderebbe o acquisterebbe se il tasso d'interesse variasse dell'1% per anno.

Solitamente il valore di un'opzione è meno sensibile ai cambiamenti del tasso di interesse *risk-free* rispetto alle variazioni degli altri parametri che lo determinano, proprio per questo motivo il rho viene utilizzato poco rispetto alle altre greche.

Il rho di un portafoglio viene calcolato come la somma dei rho delle posizioni individuali componenti il portafoglio.

$$\rho_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \rho_i, \tag{3.14}$$

dove w_i, per $i = 1, ..., n$, indica la posizione sul derivato i all'interno del portafoglio.

3.3.5 Vega

Il valore di un derivato è suscettibile a variazioni a dei movimenti di volatilità, i cambiamenti di volatilità rappresentano quindi un fattore di rischio per il valore di un'opzione.
Il vega di un'opzione misura la sensitività del prezzo dell'opzione rispetto alle variazioni di volatilità del sottostante.

$$\mathcal{V} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}. \tag{3.15}$$

Il vega viene solitamente espresso come la quantità di denaro per share del sottostante che il valore dell'opzione guadagnerà o perderà al variare della volatilità di un punto percentuale. Sia le opzioni call sia le opzioni put guadagnano valore con l'aumento della volatilità.
Se i mercati sono altamente volatili il vega assume tipicamente valori grandi in termini assoluti. Se il vega tende a zero allora la volatilità ha un modesto impatto sul valore dell'opzione.

Il vega di un portafoglio è definito come la sensitività del valore del portafoglio rispetto alla volatilità.

$$\mathcal{V}_P = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}. \tag{3.16}$$

Se il vega è molto positivo o molto negativo allora il valore del portafoglio è sarà molto sensibile a variazioni, anche piccole, della volatilità. Se, invece, il vega è prossimo allo zero allora le il valore del portafoglio sarà poco sensibile a variazioni di volatilità.
Il vega di un portafoglio può essere modificato aggiungendo posizioni su opzioni, ad esempio, se $\mathcal{V}$ è il vega associato al portafoglio e $\mathcal{V}_T$ è il vega associato ad un'opzione finanziaria, includendo nel portafoglio una posizione in $-\mathcal{V}/\mathcal{V}_T$ il portafoglio diventa vega neutrale.

3.3.6 Gamma

La gamma di un'opzione misura il tasso di variazione del delta rispetto ai movimenti del prezzo del sottostante.

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}. \tag{3.17}$$

Se gamma è piccola il delta cambia lentamente al variare del prezzo del sottostante. Se, invece, gamma è molto positiva o molto negativa il delta è molto sensibile alle variazioni del prezzo del sottosante.
Solitamente gamma è più grande per le opzioni *at the money* e diminuisce man mano che si va *in the money* o *out of the money*. Le opzioni *at the money* di breve durata hanno valori di gamma molto alti, il che significa che il valore della posizione del titolare dell'opzione è molto sensibile ai cambiamenti del prezzo del sottostante.

La gamma di un portafoglio è la derivata seconda del valore del portafoglio rispetto al prezzo del sottostante.

$$\Gamma_P = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta_P}{\partial S}, \tag{3.18}$$

gamma rappresenta la convessità del valore del portafoglio, visto come funzione del prezzo del sottostante.
Nelle strategie di hedging, quando un trader cerca di effettuare una copertura utilizzando il delta di un portafoglio, può anche cercare di neutralizzare la gamma del portafoglio, poiché ciò renderebbe la copertura efficace su un più ampio intervallo di movimenti del prezzo del sottostante.

3.3.7 Vanna

La vanna è una derivata al secondo ordine del valore dell'opzione, rispetto al prezzo spot sottostante e rispetto alla volatilità.
Matematicamente equivale alla sensitività del delta dell'opzione rispetto alla volatilità, o, in alternativa, la sensitività di vega rispetto al prezzo dello strumento sottostante.

$$Vanna = \frac{\partial \Pi^2}{\partial S \partial \sigma} = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S}. \tag{3.19}$$

Vanna può essere un'utile sensibilità da monitorare quando si mantiene un portafoglio con copertura delta o vega, poiché vanna serve per anticipare i cambiamenti dell'efficacia di una copertura delta al variare della volatilità oppure per prevedere l'efficacia di una copertura vega al variare del prezzo spot del sottostante.
Vanna ha solitamente un valore positivo per le opzioni call è negativo per le opzioni put, proprio perché, se la volatilità implicita aumenta, allora aumenta la probabilità delle opzioni di scadere *in the money*, e questo è sinonimo di un aumento del valore assoluto del delta.

3.3.8 Vomma

Il vomma è usato per misurare il tasso di cambiamento di vega al variare della volatilità implicita, è quindi una derivata al secondo ordine del valore dell'opzione rispetto alla volatilità.

$$Vomma = \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma}. \tag{3.20}$$

L'utilizzo del vomma è importante per una buona riuscita di strategie basate sulla volatilità. Siccome il vega misura di quanto varia il valore della strategia al variare di un punto di volatilità, il vomma misura di quanto varia la dimensione del vega al variare della volatilità.
Un valore positivo per vomma indica che un aumento di un punto percentuale della volatilità si tradurrà in un aumento del vega della posizione sull'opzione e, conseguentemente, in un aumento del valore dell'opzione, il che è dimostrato dalla convessità di vega.
Il vomma è più alto per le opzioni *out of the money* che per le opzioni *at the money*, che hanno un valore di vomma molto basso. Questo significa che quando la volatilità implicita cambia, il vega delle opzioni *at the money* non cambierà tanto quanto le opzioni quelle delle opzioni *out of the money*. Il vega rimarrà abbastanza costante per le opzioni *at the money*. Le opzioni *out of the money* hanno un alto vomma perché un aumento della volatilità implicita rende più probabile che possano finire *in the money*.
Se il valore di vomma è negativo allora un aumento di un punto percentuale della volatilità si tradurrà in una diminuzione del vega, e quindi il prezzo dell'opzione aumenterà di poco.

In generale, gli investitori con posizioni lunghe dovrebbero cercare un valore alto e positivo per vomma, mentre gli investitori con posizioni corte dovrebbero cercare un valore negativo di vomma.

3.4 Il valore temporale di un'opzione

Il valore temporale di un'opzione è una componente del prezzo dell'opzione, il premio, infatti, può essere scisso in due contributi, il valore temporale e il valore intrinseco.
Il valore intrinseco di un'opzione è il valore che avrebbe se scadesse in quel preciso istante.
Il valore temporale si ottiene come differenza tra il prezzo dell'opzione e il valore intrinseco, e misura la probabilità che si verifichi un movimento favorevole nel prezzo del sottostante prima della scadenza.

Il premio di un'opzione *out of the money* coincide con il suo valore temporale.
Maggiore sarà la probabilità che l'opzione scada *in the money* e maggiore sarà il valore temporale dell'opzione.

3.5 La volatilità implicita

Secondo [4] il valore della volatilità implicita per una data opzione è il valore che si dovrebbe inserire in un modello di prezzo delle opzioni per generare l'attuale prezzo di mercato di un'opzione, note le altre variabili del modello (le variabili note sono il prezzo del sottostante, i giorni alla scadenza, il tasso d'interesse, il prezzo di esercizio dell'opzione e il prezzo del titolo sottostante).
In altre parole, la volatilità implicita si basa sui prezzi di mercato attuali delle opzioni e rappresenta le aspettative del mercato sulla volatilità futura del sottostante.
È quindi una misura del movimento di prezzo atteso che un'azione potrebbe subire in un determinato periodo di tempo. Più la volatilità è grande e maggiore è il potenziale per un grande movimento nel sottostante.[3] La differenza nella volatilità implicita tra i prezzi d'esercizio tra le opzioni su un dato sottostante offre ai trader l'opportunità di selezionare la strategia da utilizzare. Solitamente si utilizzano strategie basate sull'acquisto delle opzioni quando la volatilità è bassa (le opzioni sono economiche) e sulla vendita delle suddette quando la volatilità è alta (le opzioni sono costose), siccome queste strategie hanno una maggiore probabilità di riuscita rispetto alle strategie opposte, basate sul comprare quando la volatilità è alta e vendere quando la volatilità è bassa.

Capitolo 4

Sviluppo ed analisi dei grafici

In questo capitolo verranno presentati i grafici presenti nella piattaforma, il procedimento con cui sono stati sviluppati e la loro utilità ai fini dell'analisi del mercato e della valutazione delle strategie che l'utente vuole implementare.

4.1 Grafici relativi alla valutazione dell'andamento del mercato

4.1.1 Andamento storico del prezzo del sottostante

Il grafico storico del sottostante serve per rappresentare l'andamento del presso del sottostante in un dato periodo di tempo.
Il Figura 4.1 si può osservare il grafico dell'andamento dell'indice *S&P 500*, le date sono rappresentate in corrispondenza delle ascisse mentre il valore dell'indice è rappresentato sulle ordinate.

Figura 4.1. Andamento storico del prezzo dell'indice *S&P 500*

La tipologia di grafico utilizzata è un grafico a candele, dove ogni candela corrisponde all'andamento giornaliero del sottostante. In particolare ogni candela rappresenta il prezzo

di apertura, il prezzo di chiusura, il prezzo massimo e il prezzo minimo del sottostante nella giornata di riferimento nel seguente modo:

- se il prezzo di apertura del sottostante è inferiore a quello di chiusura il colore della candela è verde, il prezzo di apertura è rappresentato dal lato inferiore della candela e il prezzo di chiusura è rappresentato dal lato superiore della candela;
- se il prezzo di apertura del sottostante è superiore a quello di chiusura il colore della candela è rosso, il prezzo di apertura è rappresentato dal lato superiore della candela e il prezzo di chiusura è rappresentato dal lato inferiore della candela;
- se il massimo raggiunto dal sottostante durante la giornata è superiore sia al prezzo di chiusura sia al prezzo di apertura si aggiunge un tratto nella parte superiore della candela, che arriva fino al prezzo massimo raggiunto;
- se il minimo prezzo raggiunto dal sottostante durante la giornata è inferiore sia al prezzo di chiusura sia al prezzo di apertura si aggiunge un tratto nella parte inferiore della candela, che arriva fino al prezzo minimo raggiunto.

Più è ampio le rettangolo verde, tanto maggiore sarà la variazione positiva del prezzo nella giornata.
Più le linee che vanno a toccare i minimi e massimi di giornata sono lunghe, e maggiore sarà la volatilità e l'incertezza sul prezzo del sottostante.
Se il titolo sale e se lo fa con una maggioranza di candele verdi allora il titolo è molto forte e la tendenza del mercato sarà rialzista.
Nel caso in cui invece l'andamento sia ribassista, si noterà una maggioranza di candele rosse.

4.1.2 Volatilità storica del sottostante

La volatilità storica del sottostante, anche conosciuta come volatilità statistica, è una misura delle fluttuazioni del prezzo del sottostante in un determinato periodo di tempo.
Sia P_i il prezzo del sottostante nel giorno i, il rendimento del sottostante al giorno i, denotando con R_i è definito nel seguente modo:

$$R_i = \log\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right). \tag{4.1}$$

Sia μ_N la media dei rendimenti calcolata su una finestra temporale di N giorni, allora la volatilità storica del prezzo del sottostante relativa a una finestra temporale di N giorni, denotata con σ_N vale:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(R_i - \mu_N)^2}{N-1}}\sqrt{252} \tag{4.2}$$

Tre ampiezze distinte della finestra temporale sono state considerate, la prima corrispondente a 21 giorni di trading, la seconda corrispondente a 42 giorni di trading e la terza corrispondente a 63 giorni di trading.

Traslando la finestra temporale di un giorno è possibile ottenere il valore di volatilità storica su base giornaliera del sottostante. In particolare, ogni giorno viene considerata una finestra temporale di ampiezza N contenente il giorno corrente e gli $N - 1$ giorni precedenti.
La Figura 4.2 mostra le volatilità dell'indice *S&P 500* espressa in punti percentuali, corrispondenti alle finestre 21 giorni di trading, 42 giorni di trading e 63 giorni di trading. La

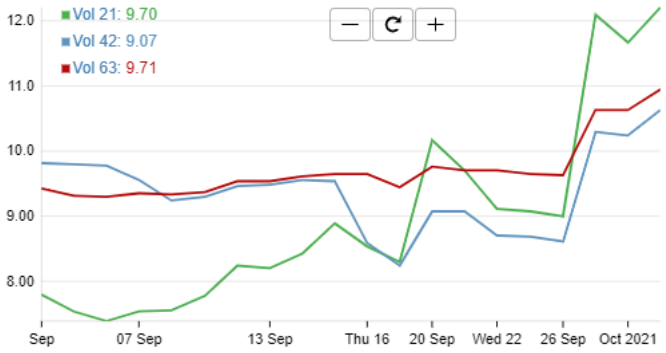

Figura 4.2. Volatilità storica del prezzo dell'indice *S&P 500*

volatilità aumenta all'aumentare del movimento del prezzo del sottostante, rimane invece bassa quando il prezzo rimane pressoché costante.
Anche il tempo va tenuto in considerazione nello studio del comportamento della volatilità in quanto, se il prezzo di un sottostante aumenta in maniera graduale nel corso del tempo, la volatilità non subisce variazioni. Se, invece, l'aumento di prezzo avviene in modo repentino, allora la volatilità aumenterà.

Secondo [10] più il valore di volatilità storica è alto e più un titolo si considera rischioso. Una bassa volatilità deriva dal poco movimento del titolo, che può essere sinonimo di sicurezza ma in base alle proprie strategie anche di poca probabilità di guadagni.
La volatilità storica non è utilizzata come predizione per la volatilità futura del mercato ma fa da base di riferimento rispetto alla volatilità implicita, per cui si considerano le variazioni tra queste due per determinare come agire e valutare le opzioni, i cui valori cambiano in vista di questi movimenti.

In questo contesto assume un ruolo importante il concetto di "mean reversion", una teoria secondo cui nel tempo la volatilità implicita del prezzo del sottostante tenderà a tornare al valore medio di riferimento.
Per cui, al fine di valutare i prezzi delle opzioni, si osserva il discostamento della volatilità implicita dalla volatilità storica, quando questo è ampio si cerca di vendere o comprare opzioni poiché i premi risultano sopravvalutati o sottovalutati.

4.1.3 Open interest

L'open interest relativo a una giornata di trading rappresenta il numero di contratti derivati in circolazione nel mercato non ancora liquidati alla fine della giornata.
Poiché a ogni contratto corrispondono due posizioni, una lunga e una corta, quindi per ogni posizione lunga esite una posizione corta e viceversa, l'open interest viene definito anche come numero totale di posizioni lunge aperte o numero totale di posizioni corte aperte nel mercato.

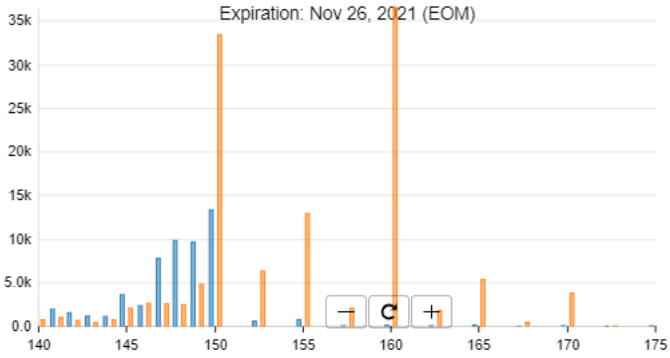

Figura 4.3. Open interest dello stock *Apple Inc.* al giorno 19/11/2021 relativo a opzioni con scadenza alla fine del mese

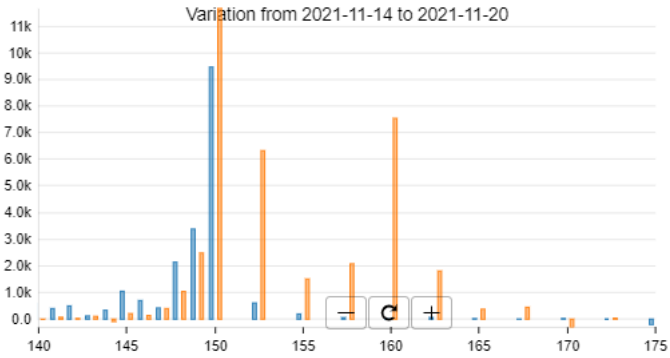

Figura 4.4. Variazione dell'open interest dello stock *Apple Inc.* al giorno 19/11/2021 relativo a opzioni con scadenza alla fine del mese

Nelle Figure 4.3 e 4.4 sono mostrati i grafici dell'open interest e della sua variazione relativi alle opzioni sul sottostante *Apple Inc.*. I suddetti grafici sono utili ai trader per valutare il cambiamento della partecipazione nel mercato.

Di seguito sono elencati dei casi possibili di andamento dell'open interest a cui sono associate delle interpretazioni dell'andamento del mercato [14].

- se i prezzi dei contratti sul sottostante aumentano e l'open interest totale sale allora del denaro nuovo sta entrando nel mercato, segnalando la presenza di nuovi compratori;
- se i prezzi dei contratti sul sottostante aumentano ma l'open interest scende significa che il denaro sta uscendo dal mercato;
- se i prezzi dei contratti sul sottostante scendono e l'open interest aumenta allora un nuovo flusso di denaro sta entrando nel mercato con vendite allo scoperto;
- se i prezzi dei contratti sul sottostante scendono e l'open interest scende allora il movimento è stato causato da vendite delle posizioni lunghe. Questa configurazione preannuncia indica un possibile esaurimento del downtrend e nel momento in cui le vendite saranno esaurite.

Oltre ai grafici dell'open interest e della sua variazione il grafico della Open interest breakdown e il grafico Open interest pressure sono stati realizzati e rappresentati nelle Figure 4.5 e4.6.

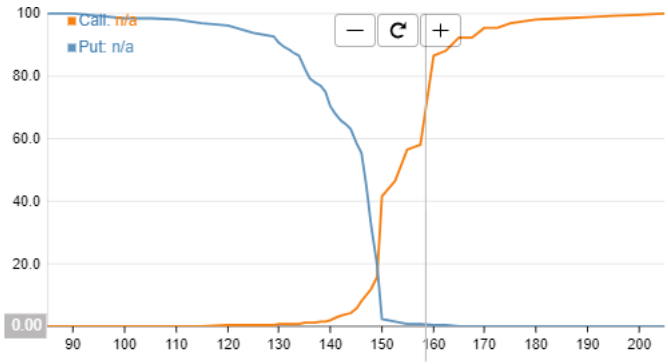

Figura 4.5. Open interest breakdown associato dello stock *Apple Inc.* al giorno 19/11/2021 relativo a opzioni con scadenza alla fine del mese

I grafici sono stati realizzati a partire dalla distribuzione cumulativa dell'open interest distintamente per le opzioni call e put.
Nel grafico 4.5 viene rappresentata, distintamente per opzioni call e put con scadenza alla fine del mese la distribuzione dell'open interest su tali opzioni, in particolare per ogni strike viene rappresentata con una linea blu la percentuale di contratti put aperti su strike superiori allo strike corrente rispetto al totale dei contratti put aperti e con una linea arancione la percentuale di contratti call aperti su strike inferiori allo strike corrente rispetto al totale di contratti call aperti, la linea verticale, infine, indica attuale il prezzo del sottostante.

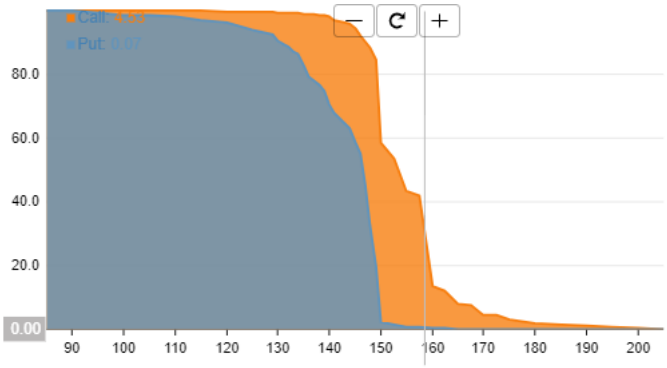

Figura 4.6. Open interest pressure associato dello stock *Apple Inc.* al giorno 19/11/2021 relativo a opzioni con scadenza alla fine del mese

nel grafico 4.6 l'area in blu rappresenta per ogni strike la percentuale di contratti put aperti su strike superiori allo strike corrente rispetto al totale dei contratti put aperti e l'area arancione rappresenta la percentuale di contratti call aperti su strike superiori allo strike corrente rispetto al totale di contratti call aperti, relativamente alle opzioni che scadono alla fine del mese, la linea verticale, invece, indica attuale il prezzo del sottostante.

L'assunzione sottostante all'interpretazione dei grafici è che l'istituzionale venda contratti call e put per incassare i premi e che tenda ad avere una posizione rialzista sul prezzo del sottostante, di conseguenza se la percentuale di opzioni put *out of the money* è molto alta il mercato sarà privo di rischio sui contratti put, perché incasserà quasi tutti i premi, ma mano che il prezzo del sottostante sale le call tendono a diventare *in the money*, e ciò comporta un rischio per l'istituzionale che si ritrova a dover coprire le posizioni call scoperte con dei contratti futures. Invece, se il prezzo del sottostante scende, la percentuale di *put in the money* aumenterà costringendo l'istituzionale a coprirsi tramite contratti futures mentre le call *out of the money* aumenteranno senza bisogno di essere coperte.
Questi grafici andrebbero quindi sempre accostati al grafico dell'open interest sui futures per capire la movimentazione monetaria dell'istituzionale.
In condizioni normali di mercato la percentuale di opzioni put *in the money* è minore o uguale al 40% del totale e la percentuale di opzioni call *in the money* è minore o uguale al 40% del totale.
Quando queste percentuali di opzioni *in the money* vengono superate si verificano condizioni particolari del mercato, se la percentuale di call *out of the money* è molto maggiore della percentuale di put *in the money* questo è considerato un segnale ribassista, analogamente, se la percentuale di call *out of the money* è molto minore della percentuale di put *in the money* questo è considerato un segnale rialzista.

4.2 Grafici relativi alla scelta e valutazione della strategia in opzioni

In questa sezione verranno presentati e spiegati i grafici creati per la valutazione della propria strategia in opzioni.

4.2.1 Profit

Il grafico del profitto rappresenta il profitto *at now* ed il profitto *at expiration* che corrispondono al profitto corrente e al profitto alla scadenza ottenuti dalla scelta della strategia in opzioni. I profitto at now e il profitto alla scadenza sono tracciati al variare del prezzo del sottostante.

La formula di Black and Scholes per le opzioni su stock, commodity e indici e la formula di Black nel caso delle opzioni su futures e obbligazioni sono state utilizzate per tracciare il grafico del profitto *at now*.
Le ipotesi alla base del modello di Black-Scholes-Merton, dal quale sono ottenute le formule sopracitate, sono le seguenti:

1. il prezzo del sottostante segue un moto browniano geometrico;
2. è possibile la vendita allo scoperto del sottostante e dello strumento derivato;
3. non sono presenti opportunità d'arbitraggio;
4. il sottostante e lo strumento derivato sono scambiati sul mercato in tempo continuo;
5. non ci sono costi di transazione, tassazione, né frizioni di altro tipo nel mercato;
6. vige la perfetta divisibilità di tutte le attività finanziarie;
7. il tasso d'interesse privo di rischio r è costante e uguale per tutte le scadenze.

Tramite la formula di Black Scholes è possibile ottenere il prezzo di non arbitraggio per un'opzione di tipo europeo come funzione delle seguenti variabili:

- il prezzo del sottostante, denotato con S_t;
- il prezzo di esercizio dell'opzione, denotato con K ;
- il tasso d'interesse privo di rischio, denotato con r;
- il tasso di dividendo istantaneo, denotato con q;
- la voaltilità del sottostante, denotato con σ;
- la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard, denotato con $N(\cdot)$;

e

$$d_1 = \frac{ln\frac{S_t}{K} + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{4.3}$$

Per un'opzione call, con scadenza T il prezzo al tempo t è dato da

$$C(S_t, t) = e^{-q(T-t)} S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2). \tag{4.4}$$

Per un'opzione put, con scadenza T il prezzo al tempo t è dato da

$$P(S_t, t) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - e^{-q(T-t)} S_t N(-d_1). \tag{4.5}$$

La formula di Black è simile alla precedente, la differenza in questo caso è che il sottostante è un contratto futures o un'obbligazione, il cui prezzo al tempo t è denotato con F_t.
Il prezzo di un'opzione call con scadenza T e prezzo d'esercizio K vale:

$$C(F_t, t) = e^{-r(T-t)}\big(F_t N(d_1) - K N(d_2)\big), \tag{4.6}$$

dove r è il tasso di interesse privo di rischio, $N(\cdot)$ denota la funzione di ripartizione associata alla distribuzione normale standard e

$$d_1 = \frac{ln\frac{F_t}{K} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{4.7}$$

Il prezzo di un'opzione put con scadenza T e prezzo d'esercizio K vale:

$$P(F_t, t) = e^{-r(T-t)}\big(K N(-d_2) - F_t N(-d_1)\big). \tag{4.8}$$

Avendo illustrato le formule per il calcolo del prezzo di non arbitraggio delle opzioni europee, è possibile ora definire il profitto *at now* per le opzioni europee come funzione del sottostante.
Sia $F(S_0,0)$ il prezzo teorico ottenuto tramite le formule di Black and Scholes e di Black

$$F(S_0,0) = \begin{cases} C(S_0,0), & \text{se l'opzione è di tipo call,} \\ P(S_0,0), & \text{se l'opzione è di tipo put.} \end{cases}$$

Sia c il premio dell'opzione e sia N la dimensione del contratto, allora il profitto *at now* per una posizione lunga in un'opzione europea vale:

$$P_{long}(S_0) = N\big(F(S_0,0) - c\big), \tag{4.9}$$

ed il profitto *at now* per una posizione corta in un'opzione europea vale:

$$P_{short}(S_0) = N\big(c - F(S_0,0)\big). \tag{4.10}$$

Il profitto *at now* dell'intera strategia è ottenuto come la somma dei singoli profitti *at now* associati ad ogni opzione all'interno della strategia.
Infine, imponendo che la vita residua dell'opzione con la prossima scadenza sia nulla, si ottiene il profitto *at expiration* che coincide con il profitto definito nell'equazione 3.1.1 e nell'equazione 3.1.1 nel caso di una posizione lunga su una call e di una posizione corta su una call rispettivamente, e coincide con il profitto definito nell'equazione 3.1.2 e nell'equazione 3.1.2 nel caso di una posizione lunga e di una posizione corta su una put rispettivamente.
Il profitto *at expiration* dell'intera strategia è ottenuto come la somma dei singoli profitti *at expiration* associati a ogni opzione all'interno della strategia.

La Figura 4.7 mostra il profitto *at now* ed il profitto*at expiration* associato a una strategia che consiste in una posizione lunga su una call sull'indice *S&P 500* il cui premio è pari a 134$, il prezzo strike è pari a 4365$, il prezzo del sottostante è pari a 4392$, vita residua pari a due settimane e dimensione del contratto pari a 100$. Il profitto è mostrato al variare del prezzo del sottostante.

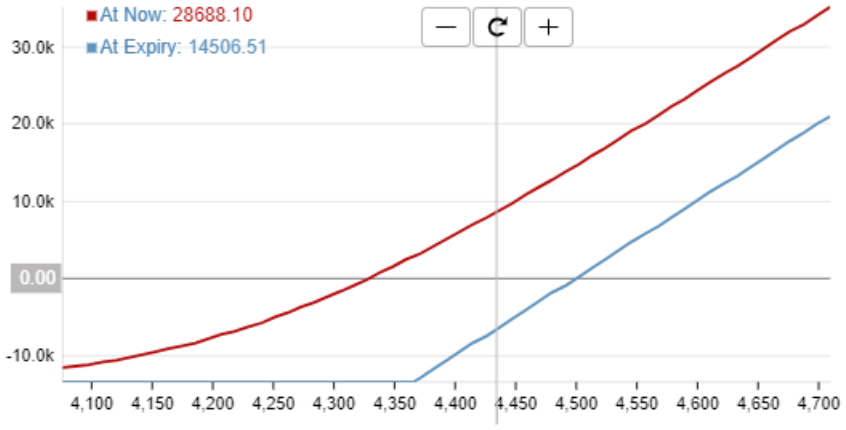

Figura 4.7. Profitto di una posizione long call sull'indice *S&P 500*

4.2.2 Le greche

Per ottenere i grafici delle greche, illustrate al variare del prezzo del sottostante, l'espressione di ogni greca come funzione del prezzo del sottostante è stata ricavata dal modello di Black-Scholes-Merton, separatamente per le opzioni di tipo call e di tipo put.
Di seguito verranno elencate le espressioni delle greche per le opzioni europee come funzione dei seguenti parametri:

- il tasso di dividendo annuale, denotato con q;
- la durata residua dell'opzione, denotata con T;

- la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard, denotata con Φ;
- la denistà della distribuzione normale standard, denotata con ϕ;
- il tasso d'interesse privo di rischio, denotato con r;
- d_1 e d_2 definiti nell'equazione 4.2.1
- il prezzo del sottostante, denotato con S se il sottostante è uno stock una commodity o un indice, deontato con F se il sottostante è un futures o un bond;
- la volatilità dell'opzione, denotata con σ;

Per un'opzione call, il cui sottostante è uno stock, un indice o una commodity, si può dimostrare che:

$$\Delta_{call} = e^{-qT}\Phi(d_1), \tag{4.11}$$

Per quanto riguarda le opzioni put, con sottostante uno stock, un indice o una commodity, si può dimostrare che il delta associato a un'opzione put vale:

$$\Delta_{put} = -e^{-qT}\Phi(-d_1). \tag{4.12}$$

Quando il sottostante è un futures o un bond il delta vale:

$$\Delta_{call} = e^{-rT}\Phi(d_1), \tag{4.13}$$

$$\Delta_{put} = -e^{-rT}\Phi(-d_1). \tag{4.14}$$

La Figura 4.8 mostra il delta associato a una posizione lunga su una call sull'indice *S&P 500* il cui premio è pari a 134$, il prezzo strike è pari a 4365$, il prezzo del sottostante è pari a 4392$ e vita residua pari a due settimane. I possibili valori di delta sono rappresentati sull'asse delle ordinate come funzione del prezzo del sottostante, mostrato sulle ascisse.

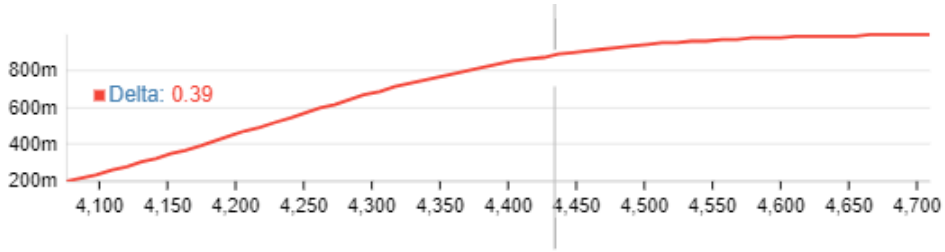

Figura 4.8. Delta associato a una posizione long call sull'indice *S&P 500*

Per un'opzione call, il cui sottostante è uno stock, un indice o una commodity, si può dimostrare che il rho vale:

$$\rho_{call} = KTe^{-rT}\Phi(d_2), \tag{4.15}$$

analogamente per un'opzione put, il cui sottostante è uno stock, un indice o una commodity, di tipo europeo vale:

$$\rho_{put} = -KTe^{-rT}\Phi(-d_2). \tag{4.16}$$

Quando il sottostante è un futures o un bond il rho vale:

$$\rho_{call} = -Te^{-rT}\big(F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\big), \tag{4.17}$$

$$\rho_{put} = -Te^{-rT}\big(K\Phi(-d_2) - F\Phi(-d_1)\big). \tag{4.18}$$

La Figura 4.9 mostra il rho associato a una posizione lunga su una call sull'indice *S&P 500* il cui premio è pari a 134$, il prezzo strike è pari a 4365$, il prezzo del sottostante è pari a 4392$ e vita residua pari a due settimane. I possibili valori di rho sono rappresentati sull'asse delle ordinate come funzione del prezzo del sottostante, mostrato sulle ascisse.

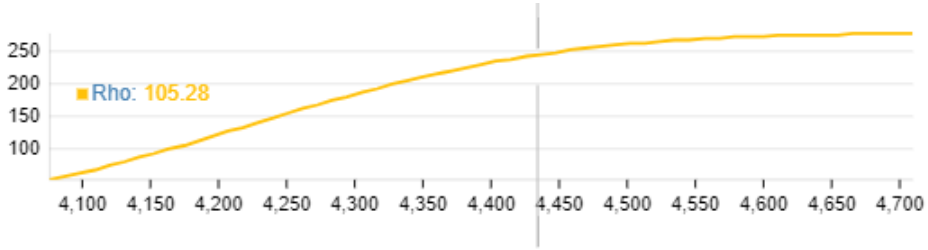

Figura 4.9. Rho di una posizione long call sull'indice *S&P 500*

Per le opzioni call e put, il cui sottostante è uno stock, un indice o una commodity, si può dimostrare che il vega vale:

$$\mathcal{V} = Se^{-qT}\phi(d_1)\sqrt{T}. \tag{4.19}$$

Quando il sottostante è un futures o un bond il vega vale:

$$\mathcal{V} = Fe^{-rT}\phi(d_1)\sqrt{T}. \tag{4.20}$$

La Figura 4.10 mostra il vega associato a una posizione lunga su una call sull'indice *S&P 500* il cui premio è pari a 134$, il prezzo strike è pari a 4365$, il prezzo del sottostante è pari a 4392$ e vita residua pari a due settimane. I possibili valori di vega sono rappresentati sull'asse delle ordinate come funzione del prezzo del sottostante, mostrato sulle ascisse.

Per le opzioni call e put, il cui sottostante è uno stock, un indice o una commodity, si può dimostrare che il gamma vale:

$$\Gamma = e^{-qT}\frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}. \tag{4.21}$$

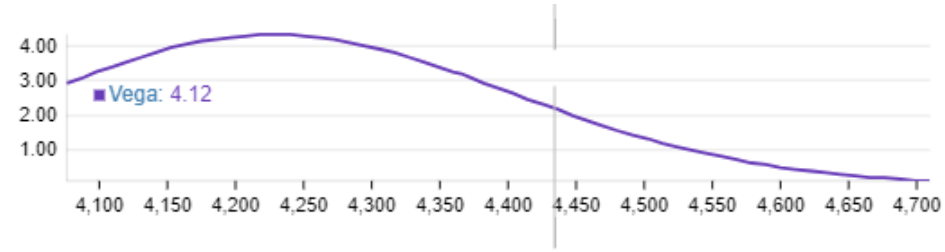

Figura 4.10. Vega di una posizione long call sull'indice *S&P 500*

Quando il sottostante è un futures o un bond il gamma vale:

$$\Gamma = e^{-rT}\frac{\phi(d_1)}{F\sigma\sqrt{T}}. \tag{4.22}$$

La Figura 4.11 mostra il gamma associato a una posizione lunga su una call sull'indice *S&P 500* il cui premio è pari a 134$, il prezzo strike è pari a 4365$, il prezzo del sottostante è pari a 4392$ e vita residua pari a due settimane. I possibili valori di gamma sono rappresentati sull'asse delle ordinate come funzione del prezzo del sottostante, mostrato sulle ascisse.

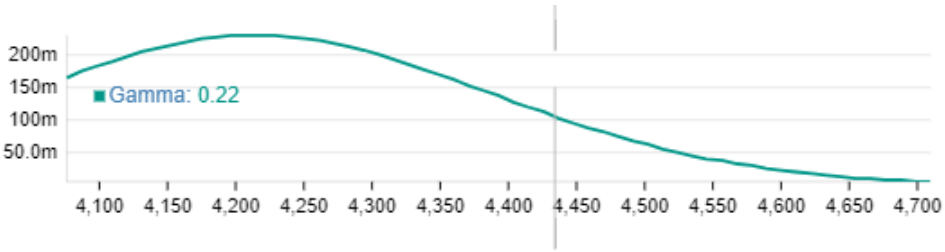

Figura 4.11. Gamma di una posizione long call sull'indice *S&P 500*

Per le opzioni call e put, il cui sottostante è uno stock, un indice o una commodity, si può dimostrare che il vanna vale:

$$Vanna = -e^{-rT}\phi(d_1)\frac{d_2}{\sigma}. \tag{4.23}$$

Quando il sottostante è un futures o un bond il vanna vale:

$$Vanna = -e^{-rT}\phi(d_1)\frac{d_2}{\sigma}. \tag{4.24}$$

La Figura 4.12 mostra il vanna associato a una posizione lunga su una call sull'indice *S&P 500* il cui premio è pari a 134$, il prezzo strike è pari a 4365$, il prezzo del sottostante è

pari a 4392$ e vita residua pari a due settimane. I possibili valori di vanna sono rappresentati sull'asse delle ordinate come funzione del prezzo del sottostante, mostrato sulle ascisse.

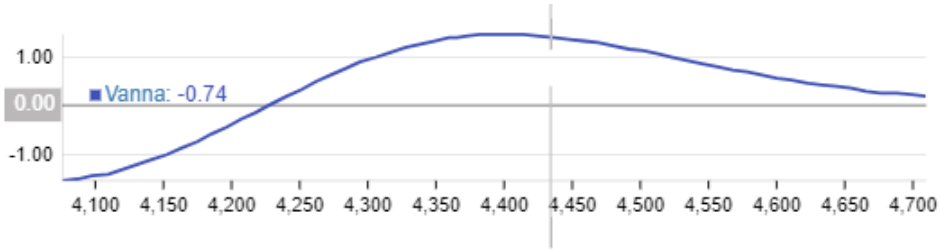

Figura 4.12. Vanna di una posizione long call sull'indice *S&P 500*

Infine per le opzioni call e put, il cui sottostante è uno stock, un indice o una commodity, si può dimostrare che il vomma vale:

$$Vomma = Se^{-qT}\phi(d_1)\sqrt{T}\frac{d_1 d_2}{\sigma}, \tag{4.25}$$

Quando il sottostante è un futures o un bond il vomma vale:

$$Vomma = Fe^{-rT}\phi(d_1)\sqrt{T}\frac{d_1 d_2}{\sigma}. \tag{4.26}$$

La Figura 4.13 mostra il vomma associato a una posizione lunga su una call sull'indice *S&P 500* il cui premio è pari a 134$, il prezzo strike è pari a 4365$, il prezzo del sottostante è pari a 4392$ e vita residua pari a due settimane. I possibili valori di vomma sono rappresentati sull'asse delle ordinate come funzione del prezzo del sottostante, mostrato sulle ascisse.

4.3 Calcolo della volatilità implicita

Un elemento necessario per la valutazione della strategia è la conoscenza della volatilità implicita delle opzioni componenti la strategia.
L'algoritmo per il calcolo della volatilità implicita utilizzato è disponibile nella libreria "py_lets_be_rational" il cui codice è basato sul paper [5].
La scelta di tale algoritmo è stata determinata dalla necessità di trovare un trade-off tra efficienza computazionale e accuratezza nel calcolo della volatilità implicita, i seguenti algoritmi sono stati precedentemente testati e successivamente esclusi:

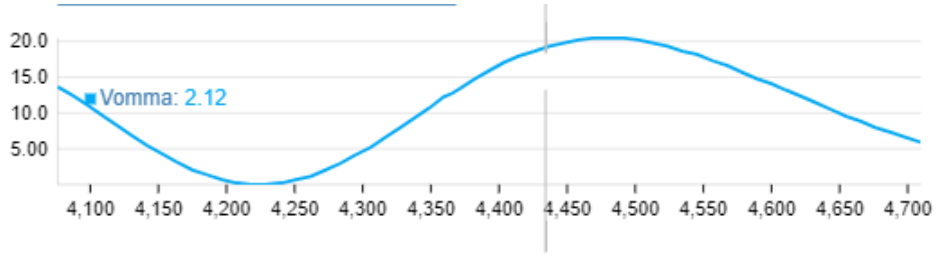

Figura 4.13. Vomma di una posizione long call sull'indice *S&P 500*

- il metodo adattivo di sovra-rilassamento successivo descritto da Minqiang e Kyuseok [6];
- il metodo iterativo di Newton;
- risoluzione all'indietro dell'equazione di Black Scholes per la volatilità a partire dal prezzo di negoziazione delle opzioni.

L'algoritmo utilizzato per il calcolo della volatilità si basa su metodo di Householder al terzo ordine, una procedura iterativa che permette di calcolare le radici di una funzione obiettivo a partire da una stima iniziale della volatilità.

Data una funzione obiettivo $g(\sigma)$, e una stima iniziale σ_0, allora la n+1-esima iterazione del metodo di Householder al terzo ordine è data da

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \nu_n \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}\gamma_n\nu_n}{1 + \nu_n(\gamma_n + \frac{1}{6}\delta_n\nu_n)} \tag{4.27}$$

dove

$$\nu_n := -\frac{g(\sigma_n)}{g'(\sigma_n)} \qquad \gamma_n := \frac{g''(\sigma_n)}{g'(\sigma_n)} \qquad \delta_n := \frac{g'''(\sigma_n)}{g'(\sigma_n)}. \tag{4.28}$$

Il grado di convergenza del metodo di Householder è pari a 4.
Si può dimostrare infatti che se la funzione obiettivo g è continua e differenziabile fino all'ordine $d+1$ e σ è uno zero di g ma non è uno zero di g' allora l'iterata x_n nel vicinato di σ soddisfa:

$$|x_{n+1} - \sigma| \leq K|x_n - \sigma|^{d+1}, \textit{per qualche } K \geq 0. \tag{4.29}$$

Quindi l'iterata converge alla radice della funzione obiettivo con grado $d+1$, se la stima iniziale x_0 è sufficientemente vicina a alla radice.

Capitolo 5

Prossimi sviluppi

Il modello di Black-Scholes-Merton, dal quale dipendono i grafici del profitto e delle greche delle opzioni, presenta dei limiti di applicabilità. Tra questi limiti vi è il fatto che le ipotesi sottostanti il modello sono considerate molto restrittive, in particolare l'assunzione della volatilità costante, infatti evidenze empiriche hanno dimostrato come questa ipotesi non sia plausibile ma, nonostante ciò, il modello continua a essere molto utilizzato al giorno d'oggi.
Un possibile miglioramento futuro è l'introduzione di un modello dove la volatilità varia nel tempo.
Un altro importante limite del modello di Black-Scholes-Merton è la sua specifica progettazione per la valutazione delle opzioni europee, il modello risulta quindi di difficile implementazione per tipologie di esercizio non europee, come le opzioni americane, che sono state incluse nella piattaforma accanto alle opzioni europee.

Le opzioni americane sono caratterizzate dalla possibilità di esercizio in qualunque momento durante la vita del contratto, quindi prima della scadenza. Questa caratteristica rende una posizione lunga su un'opzione americana meno rischiosa rispetto a una posizione lunga su un'opzione europea e, di conseguenza, il prezzo delle opzioni americane a parità di parametri rispetto alle opzioni europee, è maggiore rispetto a quest'ultime.
Dalla precedente osservazione ne consegue che la valutazione del prezzo delle opzioni americane, così come il calcolo della volatilità implicita e delle greche, necessita di una formulazione diversa da quella derivante dal modello di Black-Scholes-Merton, la formulazione dovrebbe prevedere l'utilizzo di modelli di pricing specifici per le opzioni americane.
L'argomento del pricing delle opzioni americane sta avendo ampio riscontro nella letteratura al giorno d'oggi, sono stati proposti vari modelli per la valutazione del prezzo delle opzioni americane, da modelli numerici come il modello binomiale o trinomiale al Metodo Quadratico di Barone-Adesi e Whaley [7], fino a modelli più complessi basati su simulazione Montecarlo.
I modelli basati su simulazione Montecarlo sono attualmente i più accurati e moderni, essi prevedono la generazione di una serie di possibili scenari di andamento del prezzo del titolo sottostante all'opzione, ovvero la generazione di possibili percorsi seguiti dal prezzo del sottostante durante la vita dell'opzione, discretizzando la vita residua dell'opzione

in istanti di tempo, in seguito si determinano tutti i possibili payoff associati ai prezzi alla scadenza del sottostante, questi payoff vengono infine attualizzati per determinate il prezzo dell'opzione al tempo corrente, definito come il valore atteso secondo la misura di probabilità neutrale al rischio del payoff futuro.
La misura di probabilità neutrale al rischio si basa sull'ipotesi che tutte le attività finanziare abbiamo il medesimo tasso di rendimento, indipendentemente dalla loro rischiosità, sebbene l'assunzione non sia veritiera, l'utilizzo della misura neutrale al rischio nella valutazione del prezzo dei derivati consente comunque di determinate l'espressione per il prezzo di non arbitraggio.
I modelli basati su simulazioni Montecarlo, sebbene siano molto accurati, non sono implementabili nella piattaforma, in quanto, data la loro caratteristica di generazione di scenari di prezzo, sono computazionalmente molto costosi e la loro implementazione renderebbe il processo di generazione del grafico del payoff e delle greche troppo lento, vi è quindi la necessità di una valutazione del prezzo delle opzioni americane tramite l'utilizzo di un'espressione in forma chiusa.
Il modello Bjerksund-Stensland è stato individuato come modello da implementare nella piattaforma, proprio perché è un modello di pricing a forma chiusa e permette di avere dei risultati più accurati rispetto agli altri modelli di valutazione del prezzo delle opzioni tramite un'espressione un forma chiusa. Il modello è progettato specificamente per calcolare il valore delle opzioni con tipologia di esercizio americano, esso si può applicare alle opzioni si sottostanti con un dividendo continuo, utile nel caso delle opzioni su indici, in il tasso di dividendo può essere ottenuto tramite l'approssimazione nel continuo dei dividendi dei singoli titoli che compongono il paniere rappresentato dall'indice, un tasso di dividendo costante e dividendi discreti, utile nel caso delle opzioni su stock e su commodity, i cui costi di stoccaggio possono essere interpretati come dividendi negativi.
Il modello di Bjerksund-Stensland è stato sviluppato nel 1993 dai norvegesi Petter Bjerksund e Gunnar Stensland ed è utilizzato dagli investitori per generare una stima del momento migliore per esercitare un'opzione americana [12].

Di seguito vengono riassunti i principali passi su cui si basa l'approssimazione di Bjerksund-Stensland [8].
L'approssimazione di Bjerksund e Stensland permette di ottenere il valore di un'opzione call americana condizionato a una strategia di esercizio anticipato che si verifica quando il prezzo del sottostante colpisce dal basso un confine piatto X, $X > K$ detto prezzo di attivazione, dove K denota il prezzo strike.
Data questa strategia di esercizio fattibile ma non ottimale, la call americana si traduce in:

1. un'opzione call up-and-out europea con barriera knock-out X, strike K e data di scadenza T.

2. un rimborso $X - K$ che viene ricevuto alla data di knock-out se l'opzione viene eliminata prima della data di scadenza.

Definizione 7 *Un'opzione up-and-out è un tipo di opzione a barriera knock-out che cessa di esistere quando il prezzo del titolo sottostante sale sopra un livello di prezzo specifico,*

chiamato prezzo barriera.
Un'opzione knock-out scade senza valore se il sottostante raggiunge un certo prezzo, limitando i profitti per il titolare e limitando le perdite per chi scrive. Per un'opzione knock-out se il bene sottostante raggiunge la barriera in qualsiasi momento durante la vita dell'opzione, l'opzione viene eliminata e non tornerà in vigore. Non importa se il sottostante torna al di sotto dei livelli pre-knock-out [13].

L'approssimazione del valore di un'opzione call americana è data da

$$c = \alpha S^{\beta} - \alpha\phi(S,T,\beta,X,X) + \phi(S,T,1,X,X) - \phi(S,T,1,K,X) - K\phi(S,T,0,X,X) + K\phi(S,T,0,K,X), \tag{5.1}$$

dove

$$\alpha = (X-K)X^{-\beta}, \tag{5.2}$$

$$\beta = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{b}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}. \tag{5.3}$$

La funzione $\phi(S,T,\gamma,H,X)$ è definita come

$$\phi(S,T,\gamma,H,X) = E_0\Big[e^{-rT}S_T^{\gamma}I(S_T \le H)I(\sup_{\tau\in[0,T]} S_T < X)\Big], \tag{5.4}$$

dove $I(\cdot)$ è la funzione indicatrice.
I primi due termini dell'equazione 5.1 rappresentano il valore della componente di sconto mentre i restanti quattro termini rappresentano il valore della call europea up-and-out.
Il prezzo d'attivazione X è definito come

$$X = B_0 + (B_\infty - B_0)(1 - e^{h(T)}), \tag{5.5}$$

$$h(T) = -(bT + 2\sigma\sqrt{T})\left(\frac{B_0}{B_\infty - B_0}\right), \tag{5.6}$$

$$B_0 = K\frac{\beta}{\beta - 1}, \quad B_\infty = \max\left(K, \frac{r}{r-b}\right). \tag{5.7}$$

Se $S > X$, è ottimale esercitare l'opzione immediatamente e il suo valore deve essere uguale al valore intrinseco di $S - X$. D'altra parte se $b \ge r$ non è mai ottimale esercitare l'opzione call americana prima della scadenza, e il suo valore può essere ottenuto tramite la formula di Black-Scholes.

Una strategia che segue un confine di esercizio anticipato come la precedente è una strategia fattibile, ma non ottimale. Di conseguenza, il valore ottenuto seguendo questa strategia rappresenta un limite inferiore al vero valore dell'opzione.

Il modello Bjerksund-Stensland è in grado di effettuare calcoli complessi in maniera rapida e quindi più efficiente rispetto ad altri metodi di valutazione del prezzo delle opzioni americane.
Il modello però presenta dei limiti, uno di questi è il fatto che non è in grado di fornire la strategia di esercizio ottimale a causa delle stime che utilizza nei calcoli.

Capitolo 6

Conclusioni

Come espresso nell'introduzione della tesi l'obiettivo seguito nello sviluppo della piattaforma è stato quello di fornire uno strumento di facile accesso ai trader su derivati finanziari e di supporto alle loro analisi.
Attualmente la piattaforma è disponibile online, l'utente può registrasi e proseguire nella scelta dei contratti che andranno a comporre il suo portafoglio, i grafici per l'analisi del mercato e della strategia vengono resi disponibili in un tempo breve.
Si può quindi concludere che le principali funzionalità di supporto ai trader siano state realizzate, come prefissato inizialmente.

Bibliografia

[1] John C. Hull. *Options, futures and other derivatives*. Persn, 2019.

[2] F. Arnaboldi, C. Marchesi and M.Noera. *Sistema finanziario. 30434 Sistema finanziario*. McGraw Hill Education, 2019.

[3] J. L. Lord. *Time spreads*. Randomwalktrading, 2007.

[4] J. Kaeppel. *The option trader's guide to probability, volatility, and timing*. John Wiley & Sons, 2002.

[5] P. Jackel. *Let's be rational*. Wilmott, 2016.

[6] L. Minqiang and L. Kyuseok. *An Adaptive Successive Over-Relaxation Method for Computing the Black-Scholes Implied Volatility*. Quantitative Finance, 2007.

[7] G. Barone-Adesi and R. E. Whaley. *Efficient analytic approximation of american option values*. Journal of Finance, 1987.

[8] P. Bjerksund and G. Stensland. *Closed form valuation of american option*. Norwegian School of Economics and Business Administration. Department of Finance and Management Science,2002.

Sitografia

[9] https://www.investopedia.com/articles/active-trading/040915/guide-option-trading-strategies-beginners.asp.

[10] mytradingway, 2019. https://www.mytradingway.it/blog/la-volatilita-implicita-e-la-volatilita-storica.

[11] https://www.investopedia.com/terms/s/sp500.asp.

[12] https://www.investopedia.com/terms/b/bjerksundstensland-model.asp.

[13] https://www.investopedia.com/terms/u/up-and-outoption.asp.

[14] https://www.filippoangeloni.com/open-interest-che-cose-e-come-interpretarlo.