

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica



Corso di Laurea Magistrale

Caratterizzazione dinamica di anelli O-Ring e analisi di stabilità di cuscinetti ad aria.

Relatore

Prof. Ing. Federico COLOMBO

Correlatore

Dr. Luigi LENTINI, PhD

Candidato

Giovanni GAROFALO

Ottobre 2021

Sommario

L'obiettivo del seguente lavoro di tesi è rappresentato dalla progettazione ed eventuale modifica di un banco prova esistente e valutazione da un punto di vista dinamico delle caratteristiche di elastomeri noti come O-Ring per aumentare la soglia di instabilità tipica di rotazione di rotori industriali supportati da cuscinetti a gas. L'attività condotta è ripartita come segue:

- Il **Capitolo 1** introduce i materiali polimerici e le loro caratteristiche;
- Il **Capitolo 2** delinea le caratteristiche chimiche e geometriche degli O-Ring;
- Il **Capitolo 3** analizza i metodi per ricavare le proprietà fisiche degli O-Ring;
- Il **Capitolo 4** definisce l'attività sperimentale seguita e i risultati ottenuti;
- Il **Capitolo 5** sfrutta i risultati ottenuti per valutare, numericamente, se è possibile aumentare la soglia di instabilità tipica a cui sono soggetti i rotori industriali supportati da cuscinetti a gas.

Non è stato possibile caratterizzare gli O-Ring a diverse temperature; studi precedenti [1] hanno confermato una perdita evidente di caratteristiche già per $T \geq 60^\circ\text{C}$; pertanto, è stato deciso di non proseguire in questa direzione, ma di operare secondo condizioni standard (SATP).

Ringraziamenti

A conclusione di questo ciclo formativo, ringrazio chi mi ha sostenuto durante l'intero percorso.

“Chi accoglie un beneficio con animo grato paga la prima rata del suo debito.”
(Lucio Anneo Seneca)

Indice

Elenco delle tabelle	VII
Elenco delle figure	VIII
Introduzione	1
1 Materiali polimerici	2
1.1 Struttura	2
1.2 Elastomeri	3
1.3 Degrado dei polimeri	5
1.4 Note di fine capitolo	6
1.4.1 Considerazioni tecnologiche	6
1.4.2 Considerazioni economiche ed ambientali	6
2 O-Ring	7
2.1 Funzione e applicazioni	8
2.2 Materiali: mescole standard	9
2.3 Metodi di fallimento	9
2.4 Criteri di progettazione e conservazione	11
2.4.1 Dimensionamento	11
2.4.2 Rugosità superficiale ed imperfezioni	12
2.4.3 Montaggio	13
2.4.4 Immagazzinamento	13
3 Caratterizzazione	14
3.1 Metodi di analisi	14
3.1.1 Metodo diretto	15
3.1.2 Metodo indiretto	24
4 Attività sperimentale	28
4.1 Modellazione del sistema	29

4.1.1	Analisi dinamica	29
4.2	Materiali e metodi	32
4.2.1	Modal Exciter Type 4824	32
4.2.2	Banco	33
4.2.3	Cella di carico	37
4.2.4	Massa sospesa non rotante	39
4.2.5	Sensori capacitivi	42
4.2.6	Forza esterna imprimibile	44
4.3	Risultati	48
4.3.1	Caratterizzazione Housing	48
4.3.2	Caratterizzazione O-Ring	52
5	Applicazioni per O-Ring: Cuscinetti a gas	68
5.1	Modellazione del sistema	72
5.1.1	Caratteristiche del sistema	74
5.1.2	Caratteristiche dinamiche	77
5.2	Stabilità del sistema	79
5.2.1	Incrementare la stabilità	87
	Conclusioni	97
A	Funzione di Risposta in Frequenza e Diagramma di Bode	98
A.0.1	Diagramma di Bode: Ampiezza	100
A.0.2	Diagramma di Bode: Fase	105
B	Metodo diretto: Effetti di squeeze e dimensione	108
C	Metodo diretto: Interpolazione lineare e caratteristiche	115
D	State Space: Intervallo di frequenza di interesse	118
E	Forza esercitabile da un eccitatore modale	120
F	Banco prova	122
G	Caratterizzazione Housing	127
H	Transfer Function Estimate/Coherence	129
H.0.1	Transfer Function Estimate	129
H.0.2	Coherence	131
	Bibliografia	132

Elenco delle tabelle

3.1	Coefficienti di interpolazione.	19
3.2	Rigidezza O-Ring Viton 75 NBR.	20
3.3	Smorzamento O-Ring Viton 75 NBR.	21
3.4	Rigidezza O-Ring Viton 90 NBR.	22
3.5	Smorzamento O-Ring Viton 90 NBR.	23
4.1	Alberi in esercizio.	39
4.2	Analisi statistica.	41
4.3	Caratteristiche Principali CapaNC DT CS05 [Ø8f7]. [18]	42
4.4	Rigidezza lamina singola.	45
4.5	Rigidezza singolo O-Ring Viton 70.	55
4.6	Smorzamento singolo O-Ring Viton 70.	55
4.7	Rigidezza singolo O-Ring Viton 75.	55
4.8	Smorzamento singolo O-Ring Viton 75.	55
4.9	Rigidezza singolo O-Ring Viton 80.	56
4.10	Smorzamento singolo O-Ring Viton 80.	56
4.11	Rigidezza singolo O-Ring Viton 90.	56
4.12	Smorzamento singolo O-Ring Viton 90.	56
4.13	Coefficienti di "regressione" (Viton 70, $\delta = 5\%$).	63
4.14	Dati di output (Viton 70, $\delta = 5\%$).	63
A.1	Conversione $ H $ - $ H _{dB}$	99

Elenco delle figure

1.1	Da sinistra verso destra: catena lineare, catena ramificata, catena reticolata. [3]	3
1.2	Curva carico-allungamento per elastomeri. [4]	4
1.3	Degrado atmosferico. [5]	5
2.1	Rappresentazione ISO 3601-1. [6]	7
2.2	Principio di funzionamento di un O-Ring. [7]	8
2.3	(a) Degrado chimico (b) Decompressione esplosiva. [9]	10
2.4	(a) Outgassing (b) Degrado termico. [9]	10
2.5	(a) Segni di flusso (b) Indentazioni). [7]	12
2.6	Da sinistra verso destra: (a) Compressione radiale interna (b) Compressione radiale esterna (c) Compressione assiale. [7]	13
3.1	O-Ring Viton 90 NBR ($\varnothing d_1 = 11mm, \varnothing d_2 = 1,78mm$): Effetto di δ su (a) Rigidezza (b) Smorzamento. [13]	16
3.2	O-Ring Viton 90 NBR ($\delta = 15\%$): Effetto di $\varnothing d_1, \varnothing d_2$ su (a) Rigidezza (b) Smorzamento. [13]	17
3.3	O-Ring Viton 90 NBR (a) Rigidezza k_{200} (b) Smorzamento c_{200} . [13]	18
3.4	O-Ring Viton 90 NBR (a) Rigidezza \bar{k}_{200} (b) Smorzamento \bar{c}_{200} . [13]	18
3.5	O-Ring Viton 90 NBR: interpolazione (a) \bar{k}_{200} (b) \bar{c}_{200} .	18
3.6	Rigidezza O-Ring Viton 75.	20
3.7	Smorzamento O-Ring Viton 75.	21
3.8	Rigidezza O-Ring Viton 90 NBR.	22
3.9	Smorzamento O-Ring Viton 90 NBR.	23
3.10	(a) Banco prova comune [12] (b) Banco prova attuale (DIMEAS).	24
3.11	Rigidezza: Effetto di (a) Materiale (b) Temperatura. [12]	25
3.12	Rigidezza: Effetto di (a) Ampiezza (b) Squeeze. [12]	25
3.13	(a) Schema O-Ring (b) Banco prova. [14]	26
3.14	(a) Rigidezza (b) Coefficiente di smorzamento. [14]	26
3.15	Banco prova. [15]	27
3.16	Effetti geometrici, δ su k_1, k_2 . [15]	27

4.1	(a) Sistema Base-Massa (b) Sfasamento.	29
4.2	(a) Sistema (b) Sistema semplificato.	30
4.3	Modal Exciter Type 4824. [16]	32
4.4	Banco.	33
4.5	Elemento di collegamento.	34
4.6	Elemento di collegamento.	35
4.7	Piastra di collegamento.	36
4.8	Assieme completo.	36
4.9	Kistler Type 9313AA1. [17]	37
4.10	(a) Rappresentazione (b) Schema di montaggio. [17]	38
4.11	Assieme di collegamento.	38
4.12	Albero in Ottone 58 CW614N (No.1 ÷ 4).	40
4.13	Albero No.2.	41
4.14	(a) Sensore comune (b) Sensore CapaNCdT. [18]	42
4.15	Variazione percentuale di segnale in base all'angolo di inclinazione (intervallo 0 ÷ 1°) del target per diverse distanze. [18]	43
4.16	Misura con target curvo. [18]	43
4.17	(a) Sensore (b) Montaggio. [18]	43
4.18	Trave Incastro - Bipendolo. [19]	44
4.19	(a) Trave piena (b) Modello completo.	45
4.20	Albero No.2, Viton 70 NBR ($\delta = 10\%$) (a) Sfasamento (b) Ampiezza.	46
4.21	Albero No.2, Viton 70 NBR ($\delta = 20\%$) (a) Sfasamento (b) Ampiezza.	46
4.22	$H(s) = F(s)$ (a) $\delta = 10\%$ (b) $\delta = 20\%$	47
4.23	Confronto Hann - Hamming Window in frequenza. [21]	49
4.24	Confronto $H(s) = \frac{y(s)}{F(s)}$ Housing.	51
4.25	Viton 70: $H(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$ ($\delta = 5 \div 20\%$).	53
4.26	Viton 75: $H(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$ ($\delta = 5 \div 20\%$).	53
4.27	Viton 80: $H(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$ ($\delta = 5 \div 20\%$).	54
4.28	Viton 90: $H(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$ ($\delta = 5 \div 20\%$).	54
4.29	Viton 70 ($\delta = 5 \div 20\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.	57
4.30	Viton 75 ($\delta = 5 \div 20\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.	57
4.31	Viton 80 ($\delta = 5 \div 20\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.	58
4.32	Viton 90 ($\delta = 5 \div 20\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.	58
4.33	Viton 70 ÷ 90 ($\delta = 5\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.	59
4.34	Viton 70 ÷ 90 ($\delta = 10\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.	59
4.35	Viton 70 ÷ 90 ($\delta = 15\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.	60
4.36	Viton 70 ÷ 90 ($\delta = 20\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.	60
4.37	"Regressione" lineare, k (Viton 70, $\delta = 5 \div 20\%$).	64
4.38	"Regressione" quadratica, c (Viton 70, $\delta = 5 \div 20\%$).	64

4.39	"Regressione" lineare, k (Viton 75, $\delta = 5 \div 20\%$)	65
4.40	"Regressione" quadratica, c (Viton 75, $\delta = 5 \div 20\%$)	65
4.41	"Regressione" lineare, k (Viton 80, $\delta = 5 \div 20\%$)	66
4.42	"Regressione" quadratica, c (Viton 80, $\delta = 5 \div 20\%$)	66
4.43	"Regressione" lineare, k (Viton 90, $\delta = 5 \div 20\%$)	67
4.44	"Regressione" quadratica, c (Viton 90, $\delta = 5 \div 20\%$)	67
5.1	Classificazione dei cuscinetti a gas. [24]	68
5.2	<i>Synchronous whirling</i> , $\omega = \Omega$. [26]	69
5.3	Analisi qualitativa della risposta sincrona del cuscinetto. [24]	70
5.4	Gradi di stabilità. [27]	71
5.5	Cuscinetto radiale (a) Modello generale (b) Notazione. [24]	72
5.6	Sistema Rotore-Cuscinetto con supporto rigido. [25]	74
5.7	Coefficiente adimensionale di rigidezza (a) K_{XX} (b) K_{XY} . [24]	78
5.8	Coefficiente adimensionale di smorzamento (a) C_{XX} (b) C_{XY} . [24]	78
5.9	Analisi di stabilità: $\text{Im}(\lambda) \simeq \nu$ (Rif. Figura 5.6).	81
5.10	Analisi di stabilità: $\text{Im}(\lambda) \simeq \nu$ (Rif. Figura 5.6).	81
5.11	Analisi di stabilità $\zeta = f(\sigma = 1)$ (Rif. Figura 5.6).	83
5.12	Analisi di stabilità adimensionale: $\frac{ K_{XY} }{C_{XX}} = f(\sigma, \Lambda)$. [24]	84
5.13	Analisi di stabilità adimensionale: $M_{crit} = \frac{F_r(2\Lambda)}{2\Lambda^2}$. [24]	85
5.14	Diagramma di stabilità (a) Rotore di Jeffcott (b) Type B.	86
5.15	Modello dinamico (a) Con supporto flessibile (b) Misto. [24]	87
5.16	Modello dinamico con supporto flessibile e smorzato. [24]	88
5.17	$H(s) = \frac{y_b(s)}{y(s)}$ ($\delta = 5 \div 20\%$) (a) Viton 70 (b) Viton 75.	91
5.18	$H(s) = \frac{y_b(s)}{y(s)}$ ($\delta = 5 \div 20\%$) (a) Viton 80 (b) Viton 90.	91
5.19	Stabilità: effetto di M_b , κ e ζ_n su K_e , C_e . [25]	92
5.20	(a) Cuscinetto supportato da un elastomero (b) $\frac{1}{4}$ Sezione. [32]	94
5.21	Confronto (a) $P_{alim.} = 0,5MPa$ (b) $P_{alim.} = 0,55MPa$. [32]	94
5.22	Diagramma di biforcazione (a) Asse x (b) Asse y . [32]	95
5.23	Diagramma di biforcazione (a) Asse x (b) Asse y . [32]	95
5.24	Orbita di un (a) Rotore rigido (b) Rotore smorzato. [32]	96
5.25	Orbita di un (a) Rotore rigido (b) Rotore smorzato. [32]	96
A.1	(a) $H(s) = \frac{1}{s+1}$: Ampiezza (b) $H(s) = \frac{1}{s+1}$: Asintoti.	100
A.2	$H(s) = \frac{10 \cdot (s+100)}{s+1}$	101
A.3	$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$: Ampiezza.	103
A.4	Luogo delle Radici: $H(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$. [33]	104
A.5	$H(s) = \frac{1}{s+1}$: Fase.	106
A.6	$H(s) = \frac{10^2 s}{(s+10)(s+100)}$: Fase.	106

Introduzione

A partire dalla seconda metà del Novecento, il campo dei materiali è stato rinnovato grazie all'avvento dei polimeri sintetici. tra le caratteristiche principali, è possibile annoverare il basso costo e la grande disponibilità. Inoltre, grazie ai continui miglioramenti dell'industria e dei processi, è ormai possibile controllare le proprietà con elevati gradi di precisione tali da superare omologhi prodotti naturali.

Tra di essi, è possibile annoverare gli O-Ring, anelli in materiale elastomerico caratterizzati da una sezione trasversale circolare. Essi vengono impiegati principalmente nel settore industriale. Il loro uso è particolarmente frequente come sistema di tenuta e come guarnizione per sistemi più o meno complessi. Sono progettati per essere inseriti in una scanalatura e compressi durante l'assemblaggio tra due o più parti, creando una tenuta tra le due interfacce.

Il primo brevetto dell'O-Ring è datato 1896 e depositato in Svezia. Il brevetto statunitense venne registrato nel 1936 e la proprietà intellettuale passò sotto il dominio dell'impresa Westinghouse. Considerato un componente fondamentale nella produzione di armamenti su larga scala durante la Seconda Guerra Mondiale, il governo statunitense consentì la produzione a più compagnie e imprese. Il suo inventore, al termine del conflitto, ricevette un risarcimento forfettario elevato. Per definire la ragione alla base della caratterizzazione degli O-Ring, è necessario effettuare una digressione: L'utilizzo dei cuscinetti a gas è vario (giroscopi, supporti, etc.) e ampiamente diffuso. L'impiego principale riguarda il supporto di rotori ad alta velocità. Il fluido impiegato permette di considerare l'applicazione isoterma e a basso livello di attrito. Ciò garantisce velocità di rotazione elevate per i rotori. Lo svantaggio principale riguarda la generazione, durante il moto, di moti vorticosi autoeccitati. L'instabilità che ne deriva limita le applicazioni. Alcuni autori hanno dimostrato che, se i cuscinetti sono montati su O-Ring elastomerici e la selezione dei valori di rigidità e smorzamento risulta corretta, tale configurazione diminuisce del fenomeno di instabilità sopracitato. A questo scopo, sono state valutate sperimentalmente le caratteristiche di alcuni O-Ring in prova in termini di rigidità e smorzamento, in funzione di diversi parametri (durezza Shore, caratteristiche geometriche, frequenza, etc.).

Capitolo 1

Materiali polimerici

I polimeri fanno riferimento ad una più grande famiglia materie plastiche, termine coniato agli inizi del XX secolo. Esse sono caratterizzate da molecole di grandi dimensioni (macromolecole), e la matrice può essere naturale o sintetica; inoltre, presentano bassi valori di densità, resistenza meccanica, rigidità e buona resistenza chimica. L'intervallo di temperatura di impiego è generalmente basso, non prevedendo applicazioni oltre $300 \div 350^\circ C$. Sono disponibili in molte forme e dimensioni e richiedono, in genere, poche lavorazioni secondarie. Sono molto vantaggiose dal punto di vista logistico e produttivo, dato che possono essere prodotte in serie, abbattendo drasticamente i costi. La maggior parte degli strumenti a cui fanno riferimento sono schiume, vernici, oggetti di uso quotidiano, etc. [2]

1.1 Struttura

Le proprietà dei polimeri dipendono, sostanzialmente, dalla struttura delle molecole (forma, grandezza, organizzazione all'interno della matrice). Essi sono caratterizzati dall'unione di più unità ripetitive (i.e., monomero) mediante processo di *polimerizzazione*, cioè formazione di collegamenti e successiva reticolazione tra più monomeri. I meccanismi di polimerizzazione possibili sono due:

- Polimerizzazione a stadi;
- Polimerizzazione a catena.

Al primo caso afferisce la polimerizzazione per condensazione; le molecole si accrescono fino a consumare uno dei reagenti. La reazione ha, come sottoprodotto di reazione, la condensazione di acqua. Nel secondo caso, a cui afferisce la polimerizzazione per addizione, il prodotto finale è dato dalla somma dei monomeri di partenza; la reazione ha velocità elevata e non prevede sottoprodotti di reazione.

Alcune caratteristiche fondamentali dei polimeri [3] sono elencate di seguito :

- Il peso molecolare, dato dalla somma dei singoli pesi dei monomeri all'interno della catena;
- Il grado di polimerizzazione, definito come il rapporto tra i pesi molecolari rispettivamente del polimero e dell'unità ripetitiva. Un grado più elevato, per tale parametro, corrisponde a maggiore viscosità e resistenza di flusso, caratterizzando la facilità di formatura e il costo complessivo di lavorazione;
- Il grado di polidispersità, il quale tiene conto della distribuzione dei pesi molecolari. Infatti, i polimeri presentano un peso molecolare variabile in rapporto alla lunghezza della catena che li costituisce.

Inoltre, a seconda del processo di formazione della catena, la configurazione delle macromolecole assume aspetti diversi, come noto da **Figura 1.1**.



Figura 1.1: Da sinistra verso destra: catena lineare, catena ramificata, catena reticolata. [3]

1.2 Elastomeri

Un elastomero è definito come un elemento capace di recuperare in modo sostanziale le dimensioni e la forma originale, cessato un eventuale carico esterno. Gli elastomeri sono rappresentati da una grande famiglia di polimeri amorfi, la quale:

- Presenta una bassa temperatura di transizione vetrosa T_G^1 [°C];
- Presenta un modulo elastico E [$\frac{N}{mm^2}$] relativamente basso;
- Presenta elevate capacità di deformazione.

La struttura di tali polimeri è altamente "attorcigliata"; la stessa, in presenza di carichi esterni opportunamente orientati, tende a essere linearizzata. La reticolazione può essere più o meno fitta, a seconda delle esigenze di impiego.

¹Caratteristica che definisce un netto cambiamento nel comportamento meccanico all'interno di un ristretto intervallo di temperatura. Se $T < T_G$, i segmenti della catena sono immobilizzati mentre, se $T > T_G$, il movimento è parzialmente possibile.

Infatti, la durezza caratteristica di tali elementi aumenta in relazione alla reticolazione delle catene polimeriche; è possibile valutarla mediante *durometro*².

Un'altra peculiarità degli elastomeri è rappresentata dalla perdita per isteresi in trazione o compressione. Considerando la **Figura 1.2**, la perdita di energia subita dall'elemento (rappresentata dall'area racchiusa dalla curva) viene convertita in calore, dissipando energia. La curva caratteristica è particolarmente ricercata in ambito dinamico, poiché è importante analizzare la capacità di assorbimento delle vibrazioni da parte del materiale.

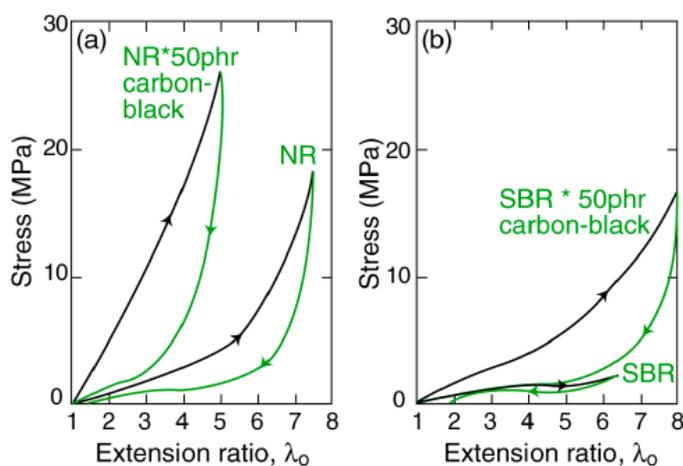


Figura 1.2: Curva carico-allungamento per elastomeri. [4]

I principali tipi di elastomeri sono, secondo quanto riportato in letteratura [2]:

- La gomma naturale, caratterizzata da scarsa resistenza ad oli, calore, ozono;
- Le gomme sintetiche, le quali presentano maggiore resistenza al calore, agli agenti chimici, etc. A tali categorie appartengono gli anelli di tenuta O-Ring;
- I siliconi, caratterizzati da elevata resistenza al calore a scapito di altre caratteristiche, come la resistenza statica e l'usura;
- I poliuretani, i quali possiedono ottime caratteristiche in termini di resistenza meccanica. Sono impiegati come tenute, guarnizioni, etc.

²Un durometro (e.g., Durometro Shore) è uno strumento che misura la durezza degli elastomeri e di certi polimeri termoplastici. Determina la profondità di sfondamento di un penetratore normalizzato, mediante applicazione di un carico sul campione. Rispetta la normativa DIN 53505, ISO 868, etc.

1.3 Degrado dei polimeri

Il degrado è di natura fisico-chimica. È possibile che una grande varietà di reazioni porti il materiale a degradarsi o alla rottura dei legami covalenti. tra i più comuni fenomeni di degrado [3], vi sono:

- Il rigonfiamento e la dissoluzione. Il primo è causato dalla diffusione di un liquido o di un soluto all'interno del polimero. Ciò causa l'allontanamento delle macromolecole, quindi un indebolimento dei legami. La dissoluzione è vista come il passo successivo al rigonfiamento, e il polimero viene visto come completamente solubile. Il processo è influenzato da temperatura e caratteristiche della struttura molecolare;
- La rottura di legame (i.e., separazione tra catene molecolari), causata da alcuni tipi di radiazione o reazioni chimiche. Le radiazioni sono in grado di rimuovere elettroni orbitali da determinati atomi secondo il processo di ionizzazione, portando a locali distribuzioni di gruppi atomici che coincidono con l'indebolimento del legame. Per proteggere i polimeri, è possibile aggiungere additivi stabilizzanti; sarebbe opportuno non sottoporre tali componenti a periodi di esposizione prolungata;
- Il degrado atmosferico, dovuto alla combinazione di più processi (e.g., ossidazione innescata dalle radiazioni solari).

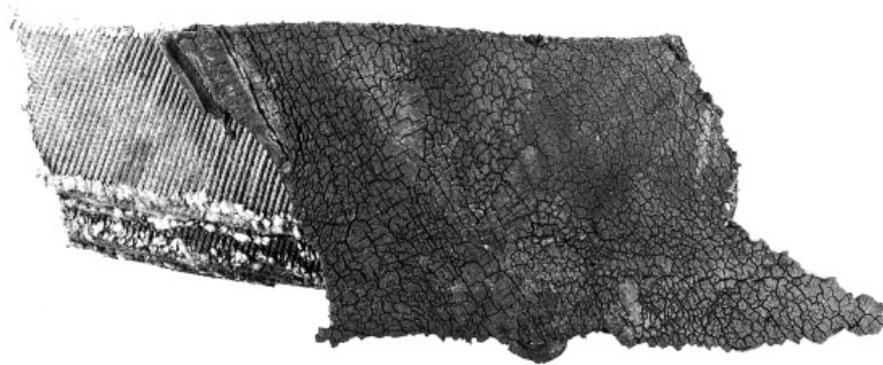


Figura 1.3: Degrado atmosferico. [5]

1.4 Note di fine capitolo

1.4.1 Considerazioni tecnologiche

Nella fabbricazione di un componente, i criteri di scelta dipendono soprattutto dalle prestazioni che lo stesso deve essere in grado di fornire. In secondo luogo, sono importanti le proprietà del materiale. La gestione del processo deve, idealmente, garantire una oculata gestione delle risorse necessarie alla fabbricazione del componente. Altri criteri considerano l'impatto sull'ambiente in contesti urbani e sociali. [3]

1.4.2 Considerazioni economiche ed ambientali

Uno degli aspetti più importanti nella progettazione dell'intera vita di un componente è il ritorno economico da parte dell'impresa che lo produce, considerando l'abbattimento dei costi e il posizionamento del prodotto sul mercato ad un prezzo appetibile per il consumatore, nel rispetto di legislazioni specifiche che salvaguardino l'ambiente e regolamentino l'utilizzo di prodotti potenzialmente tossici.

Nel lungo periodo, per garantire un utilizzo sostenibile delle risorse con i ritmi odierni, è necessario considerare la terra come un sistema virtualmente chiuso. Buona parte delle risorse presenti sul pianeta è limitata e, in alcuni casi, il reperimento di materie prime per la fabbricazione di un componente coinvolge più Paesi.

Il riciclo è una valida alternativa al processo di estrazione integrale, oltre che una componente economica fondamentale della vita di un prodotto. Da un punto di vista ambientale, sarebbe necessario che un prodotto fosse totalmente riciclabile o completamente biodegradabile. Se le condizioni lo consentono, il riciccolo di materiale all'interno del circuito produttivo può abbattere notevolmente i costi.

Buona parte dei polimeri sintetici è, per natura, inerte dal punto di vista chimico. Per questo, i polimeri vengono utilizzati in molteplici applicazioni e per le più svariate motivazioni (e.g., leggerezza). Il problema principale riguarda lo smaltimento di tali prodotti. Il riciclo risulta complicato anche in virtù dei riempitivi necessari a contrastare il degrado (i quali modificano, in maniera marcata o meno, le proprietà dell'oggetto). L'obiettivo principale è, quindi, rendere economicamente sostenibile il riciclo, attraverso una intensa attività di progettazione. [3]

Capitolo 2

O-Ring

Gli O-Ring sono elementi di tenuta caratterizzati da una sezione trasversale circolare. La semplicità della forma e le proprietà dei materiali con cui vengono prodotti rendono gli O-Ring uno degli elementi di tenuta più utilizzati in ambito industriale.

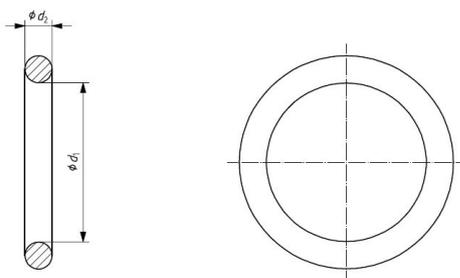


Figura 2.1: Rappresentazione ISO 3601-1. [6]

L'identificazione, secondo normativa ISO 3601-1 [6], è espressa come segue:

$$O - Ring - \overbrace{ISO3601 - 1}^{Norm.} - \overbrace{011A}^{S.Code} - \overbrace{7,65 \times 1,78}^{\phi d_1 \times \phi d_2} - \overbrace{S}^{Norm.}$$

È possibile distinguere, all'interno della precedente denominazione:

- Le normative di riferimento (i.e., ISO3601-1, ISO3601-3);
- Il codice di taglia (i.e., *Size Code*) e la classe di tolleranza ("A" o "B");
- Il diametro interno ϕd_1 , espresso in *mm*. A seconda del tipo di impiego, è buona norma non eccedere valori tipici di espansione e/o compressione (6% ϕd_1 di espansione nel serraggio di alberi, 3% ϕd_1 per serraggi in alloggiamenti);

- Il diametro di corda o di sezione $\varnothing d_2$, espresso in *mm*, la cui scelta è critica per l'azione di tenuta. Un rapporto ottimale tra sezione trasversale e profondità di scanalatura (i.e., *groove depth*) fornisce il precarico iniziale del diametro di corda in installazione.

Il diametro interno $\varnothing d_1$ viene misurato mediante inserto conico o strumenti ottici. Il diametro di corda $\varnothing d_2$ viene misurato mediante spessimetro a ridotta pressione di contatto (i.e., *thickness gauge*). Per quanto riguarda la durezza, strumenti ottici possono essere utilizzati anche in questo caso, a seconda della dimensione dell'O-Ring (norma di riferimento: DIN ISO 7619-1 Shore A o DIN ISO 48). [7]

2.1 Funzione e applicazioni

L'azione di tenuta degli O-Ring è dovuta, in larga parte, all'azione di compressione tra due interfacce di tenuta e alla sezione $\varnothing d_2$, come noto da **Figura 2.2**. Ciò garantisce, idealmente, il serraggio di parti in movimento relativo. Le forze risultanti da tale accoppiamento producono un precarico iniziale tra l'O-Ring e le interfacce di serraggio. La tenuta può essere di due tipi [8]:

- Statica, tipica di ambienti in cui sono presenti fluidi pericolosi. È assicurata la tenuta (e.g., in certe condizioni, un O-Ring può essere sottoposto a pressioni d'esercizio in continuo di circa $p = 1000\text{bar}$);
- Dinamica, tipica di ambienti in cui si instaura un movimento reciproco tra più parti in movimento (con pressioni massime di esercizio limitate a $p = 100\text{bar}$; oltre, è necessaria l'applicazione di anelli antiestrusione). Possono presentarsi brusche variazioni di pressione e gravi danni agli O-Ring.

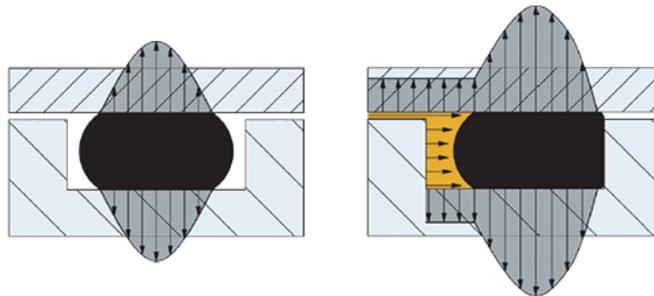


Figura 2.2: Principio di funzionamento di un O-Ring. [7]

2.2 Materiali: mescole standard

Nella scelta dell'elastomero di tenuta, è necessario considerare le caratteristiche del materiale, a seconda della situazione di impiego. Alcuni criteri di selezione considerano la resistenza in ambienti normalizzati (carburanti, acqua, atmosfera, etc.). Esistono, per ogni tipo di applicazione, mescole standard adatte a risolvere una vasta gamma di problematiche. Tra di esse, NBR è l'elastomero più usato. La ragione risiede nelle sue proprietà meccaniche e l'alta resistenza agli oli. A seconda dell'applicazione, il contenuto di acrilonitrile può variare nell'intervallo $18 \div 50\%$. Bassi livelli di acrilonitrile influenzano positivamente la flessibilità a basse temperature a scapito della resistenza ad agenti chimici aggressivi (oli, carburante). per ottenere delle proprietà bilanciate, il contenuto di ACN dovrebbe attestarsi attorno al 30%. Tra le altre caratteristiche presenti in letteratura [7], vi sono:

- Ottima resistenza chimica;
- Buona resistenza a lacerazione e usura;
- Ottima capacità di isolamento elettrico.

2.3 Metodi di fallimento

Sono numerose le ragioni per cui un elastomero di tenuta si degrada fino a rompersi. Uno dei fenomeni più frequenti è il rigonfiamento dell'elastomero. Gli elementi che influenzano questo tipo di degrado sono temperatura e pressione. La bassa temperatura determina la perdita di elasticità e l'indurimento dell'elastomero. È evidente che il funzionamento in continuo ad alta/bassa temperatura provochi il decadimento delle caratteristiche. Si manifestano, infatti, fenomeni superficiali irreversibili, fessurazioni e perdita di resistenza meccanica.

Vengono elencati alcuni tra i più frequenti metodi di fallimento [9]:

- *Abrasion*e, per cui l'elemento di tenuta mostra superfici frastagliate, piatte e parallele alla direzione del moto. Fattore correttivo: oculata progettazione dell'accoppiamento e condizioni di lavoro;
- *Compression Set*, per cui la sezione trasversale risulta appiattita a causa delle superfici di accoppiamento. È dovuto a eccessiva compressione da parte della struttura. Fattore correttivo: diminuzione del carico sull'elastomero;
- *Degrado chimico*, il quale determina crepe, macrovuoti, bolle etc. Fattore correttivo: utilizzo di un elastomero chimicamente più resistente;

- *Decompressione esplosiva*, dovuta all'assorbimento di gas e successiva escursione di pressione. Il gas assorbito dal materiale si libera in atmosfera. Fattore correttivo: diminuzione della variazione di pressione;
- *Estrusione*, per cui si assiste ad una vera e propria estrusione del materiale attraverso piccole fessure. Fattore correttivo: uso di backup rings;
- *Installazione*, dovuta alla incuria dell'operatore, il quale può inavvertitamente provocare danni alla struttura durante il montaggio. Fattore correttivo: migliorare le procedure di installazione;
- *Outgassing*, per cui l'elastomero presenta una diminuzione nella sezione. Dovuto principalmente ad elevati livelli di vuoto. Fattore correttivo: non utilizzare elastomeri facilmente plasticizzabili;
- *Degrado termico*, per cui l'elastomero può presentare delle cricche radiali, allocate nella zona più a contatto con l'elemento ad alta temperatura. Fattore correttivo: selezione di un O-Ring termicamente più stabile.



Figura 2.3: (a) Degrado chimico (b) Decompressione esplosiva. [9]



Figura 2.4: (a) Outgassing (b) Degrado termico. [9]

La prevenzione, attraverso un opportuno design del componente, selezione del materiale e manutenzione, può minimizzare il rischio di fallimento, riducendo costi operativi e aumentando la sicurezza. In alcuni casi, gli O-Ring falliscono a causa di una impropria scelta della mescola. Tale condizione può tradursi in pericolo per la salute delle persone e/o in miliardi di dollari di danni alle strutture.

2.4 Criteri di progettazione e conservazione

Per la corretta realizzazione del progetto della tenuta, occorre prendere in considerazione:

- Il tipo di tenuta da realizzare;
- Il dispositivo sul quale installare la tenuta;
- I fattori ambientali caratterizzanti l'esercizio;
- Le caratteristiche dell'O-Ring adatte a tale applicazione.

2.4.1 Dimensionamento

Per un opportuno dimensionamento, è bene fare riferimento alle norme e ai numerosi cataloghi aziendali esistenti. Criterio di progettazione critico è la deformazione imposta, determinata dalle condizioni di esercizio, e funzione del tipo di tenuta da realizzare. Essa è maggiore per tenute statiche mentre, per tenute dinamiche, l'attrito provoca un aumento di temperatura proporzionale allo schiacciamento iniziale. La lubrificazione della tenuta è necessaria per diminuire l'effetto della deformazione. Tra le caratteristiche necessarie al dimensionamento presenti in letteratura [8], è bene ricordare che:

- Il coefficiente di dilatazione termica $\beta_{Polimeri} \simeq 10 \cdot \beta_{Acciai}$;
- Il rigonfiamento R , provocato dal contatto con un fluido in normali condizioni di funzionamento, può essere dell'ordine del 10%.

Nel dimensionamento degli elastomeri di tenuta, è caratteristico il parametro di *Squeeze* da impostare, i.e., il livello di precompressione radiale, espresso in percentuale, al quale viene sottoposto l'O-Ring nel processo di accoppiamento con la struttura. Esso viene definito affrontato, più nel dettaglio, nel **Capitolo 3**. La deformazione della sezione trasversale "energizza" la matrice elastomerica, in modo simile alla compressione di una molla; La forza di contatto prodotta blocca il passaggio di liquidi, gas e polveri, impedendogli di fluire tra guarnizione e superficie di accoppiamento. Maggiore è la compressione, maggiore è la forza esercitata sulla superficie, quindi la tenuta.

Numerosi fattori includono [8]:

- Compression Set¹;
- Capacità di tenuta (stress meccanico);
- Danneggiamento dell'elastomero (attrito e usura).

Per quanto riguarda le tolleranze dimensionali, è possibile fare riferimento alla Norma DIN ISO 3601-1 classe B (ex. DIN 3771-1) per la misura della tolleranza sul diametro interno per O-Ring non normati [7]:

$$\Delta d_1 = \pm[(\varnothing d_1^{0,95} \cdot 0,009) + 0,11] \quad (2.1)$$

È possibile fare riferimento alla **Equazione 2.1** qualora non siano disponibili dati da catalogo.

2.4.2 Rugosità superficiale ed imperfezioni

È bene che la superficie sia la migliore ottenibile poichè l'attrito (funzione di schiacciamento, lubrificazione, etc.), generando calore, provoca una prematura usura della guarnizione. Per alcune applicazioni, attrito di primo distacco e affinità polimero-metallo possono determinare fenomeni di incollaggio. Un'altra caratteristica influente è rappresentata dalla durezza dell'elastomero. [8]

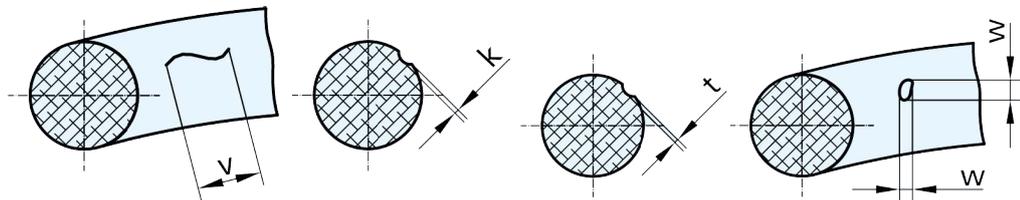


Figura 2.5: (a) Segni di flusso (b) Indentazioni). [7]

¹La forza di tenuta tende a decadere con il tempo. Tale fattore, espresso in percentuale, è una misura di questo decadimento. Quando il set di compressione raggiunge $\simeq 80\%$, la maggior parte degli O-Ring rischia di cedere perdendo, di fatto, la capacità di tenuta. [10]

2.4.3 Montaggio

La funzionalità e la durata di un O-Ring dipendono molto dalle modalità e dalla cura impiegate durante il montaggio. È possibile, a riguardo [8]:

- Evitare spigoli vivi e superfici scabre;
- Avere un O-Ring in buono stato di conservazione;
- Garantire sedi di montaggio lubrificate e/o ingrassate;

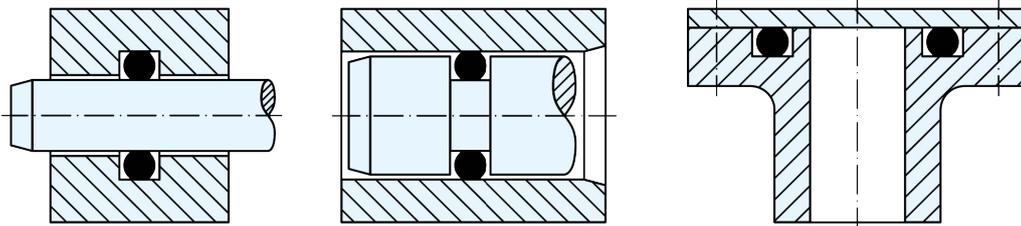


Figura 2.6: Da sinistra verso destra: (a) Compressione radiale interna (b) Compressione radiale esterna (c) Compressione assiale. [7]

2.4.4 Immagazzinamento

La vita degli O-Ring è principalmente legata all'esercizio, alla composizione della miscela e alla modalità di conservazione. È consigliabile [8]:

- Mantenere l'umidità relativa nell'intervallo $i_1 = 65 \div 75\%$;
- Mantenere la temperatura ambiente nell'intervallo $i_2 = 10 \div 15^\circ C$;
- Garantire protezione nei confronti di ossigeno e luce artificiale;

Inoltre, il luogo destinato all'immagazzinamento dovrebbe essere ventilato e lontano da azionamenti elettrici.

Capitolo 3

Caratterizzazione

3.1 Metodi di analisi

Le metodologie più comuni per la caratterizzazione dei supporti elastici sono:

- Il metodo diretto;
- Il metodo indiretto (BERM);

Il metodo diretto prevede la misurazione diretta di una forzante trasmessa direttamente dall'O-Ring in esercizio. Il metodo potrebbe risultare poco accurato, in virtù delle caratteristiche degli elementi esterni, i quali potrebbero influenzare la misura della rigidità e dello smorzamento. Per quanto riguarda il metodo indiretto, la caratterizzazione prevede la definizione di un sistema basato sulla misura di due spostamenti (Alloggiamento ed Albero), eventualmente riducibile ad un singolo grado di libertà. Per ottenere misurazioni adeguate, risulta necessario lavorare con sfasamenti di segnale compresi nell'intervallo $15 \div 165^\circ$ [11]. Questo richiede che la frequenza del test sia circa $1 \div 5$ volte la frequenza critica [12]. Inoltre, è necessario far sì che le frequenze di risonanza del componente in prova e dell'alloggiamento siano lontane tra loro. Ognuna di queste metodologie presuppone l'utilizzo di un banco prova, posto in diverse condizioni di eccitazione e/o temperatura. Entrambe vengono affrontate nelle sezioni successive (**Sezione 3.1.1** e **Sezione 3.1.2**).

Esistono diversi metodi non catalogabili come visto in precedenza. Alcuni valutano spostamenti non ciclici di un elastomero in prova (e.g., cadute, rimbalzi), altri prendono in considerazione la propagazione delle onde attraverso un elastomero per determinarne le proprietà dinamiche. Questi metodi sono limitati ad elevati valori di frequenza e a materiali con moderati livelli di smorzamento e, pertanto, non trattati in questo elaborato. [12]

3.1.1 Metodo diretto

In questo caso, l'O-Ring in prova è compresso tra una boccola, collegata allo *stinger* dell'eccitatore modale, e ad un albero (fissato ad un supporto). Una cella di carico è posta tra il supporto e l'intelaiatura fissa. Per mezzo di un eccitatore, viene applicato uno spostamento sinusoidale alla boccola. Lo spostamento viene rilevato tramite dei sensori montati sul supporto. I segnali provenienti dalla cella di carico e dai trasduttori di posizione vengono elaborati da un sistema di acquisizione.

Per garantire un comportamento lineare degli O-Ring, è necessario imporre una piccola ampiezza di eccitazione e definire quantitativamente il parametro Squeeze δ , già introdotto nella **Sezione 2.4.1**:

$$\delta = \left(1 - \frac{D_i - D_e}{2\phi}\right) \cdot 100 \quad (3.1)$$

Dove:

- ϕ è il diametro di corda dell'O-Ring, espresso in *mm*;
- D_i è il diametro interno dell'alloggiamento, espresso in *mm*;
- D_e è il diametro esterno dell'albero sul quale viene montato l'O-Ring, in *mm*.

La procedura [13] prevede temperatura costante ($T = 20^\circ C$), valutando la funzione di trasferimento $H(s) = \frac{F(s)}{x(s)}$. L'argomento, più nel dettaglio, è analizzato in **Appendice A**. Definito l'input (il denominatore), è possibile valutare l'output (il numeratore). Inoltre, È necessario che, per ogni livello di frequenza, il sistema venga regolato dal punto di vista dell'ampiezza. La funzione corrispondente è:

$$\frac{F(s)}{x(s)} = cs + k \quad (3.2)$$

Dove:

- k rappresenta la rigidezza, espressa in $\frac{N}{m}$;
- s rappresenta la variabile complessa di Laplace;
- c rappresenta la costante di smorzamento, espressa in $\frac{Ns}{m}$.

I termini sono ottenibili secondo **Equazione 3.3**:

$$k(\omega) = Re \left(\frac{F(i\omega)}{x(i\omega)} \right) \quad c(\omega) = Im \left(\frac{F(i\omega)}{x(i\omega)} \right) \quad (3.3)$$

I dati sperimentali hanno messo in evidenza la dipendenza sia dalla frequenza f che da δ . È stato preso in considerazione il processo di *curve fitting* per i dati disponibili su rigidezza e smorzamento degli anelli, risultando nella definizione di due funzioni matematiche esponenziali [13]:

$$k = A\omega^\alpha \quad (3.4)$$

$$c = B\omega^\beta \quad (3.5)$$

Tale procedura è stata applicata a diverse tipologie di O-Ring:

- Viton 75;
- Viton 90;
- Kalrez 4079;
- Kalrez 6375.

Una parte dei risultati viene esposta di seguito (**Figura 3.1**). Data una geometria fissata, la rigidezza aumenta all'aumentare della frequenza; vale il contrario per lo smorzamento; l'andamento è, indicativamente, lineare. Inoltre, entrambi aumentano all'aumentare di δd_1 e δd_2 , sebbene l'influenza di quest'ultimo sia trascurabile per elevati valori di δd_1 . Una parte del codice è consultabile in **Appendice B**.

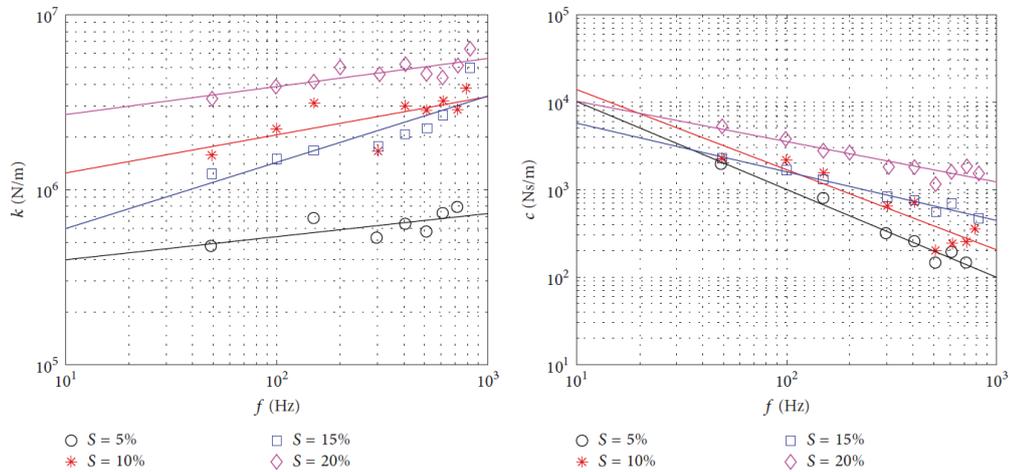


Figura 3.1: O-Ring Viton 90 NBR ($\delta d_1 = 11mm$, $\delta d_2 = 1,78mm$): Effetto di δ su (a) Rigidezza (b) Smorzamento. [13]

La **Figura 3.2** evidenzia, a parità di δ , il confronto tra le diverse geometrie. Se paragonati agli O-Ring Viton 75, gli O-Ring Viton 90 risultano essere più rigidi e dotati di capacità di smorzamento maggiore.

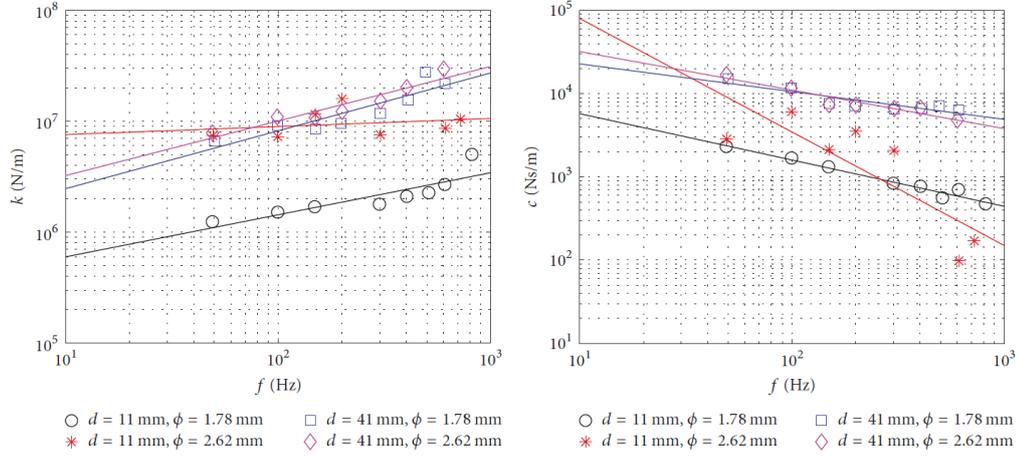


Figura 3.2: O-Ring Viton 90 NBR ($\delta = 15\%$): Effetto di $\varnothing d_1$, $\varnothing d_2$ su (a) Rigidezza (b) Smorzamento. [13]

Considerando che la sensibilità alla temperatura è molto alta, eventuali discrepanze sono accettabili. Inoltre, un montaggio incorretto potrebbe portare ad analisi falsate. Per limitare ciò, è possibile fare riferimento alla **Sezione 2.4.3**.

Infine, è stato sviluppato un modello matematico per valutare più accuratamente effetti di $\varnothing d_1$ e $\varnothing d_2$ e definire, in prima approssimazione, la rigidezza e il coefficiente di smorzamento di un elastomero di taglia generale [13]:

$$\bar{k}_{200} = \frac{k_{200}}{d \cdot \phi} \qquad \bar{c}_{200} = \frac{c_{200}}{d \cdot \phi} \qquad (3.6)$$

Dove:

- k_{200} , c_{200} sono rispettivamente i valori di rigidezza $[\frac{N}{m}]$ e smorzamento $[\frac{Ns}{m}]$ di un O-Ring ottenuti, mediante metodo diretto, per un valore di frequenza $f = 200Hz$ (**Figura 3.3**);
- $d = \varnothing d_1$ è il valore del diametro interno dell'elastomero, in mm ;
- $\phi = \varnothing d_2$ è il valore del diametro di corda dell'elastomero, in mm .

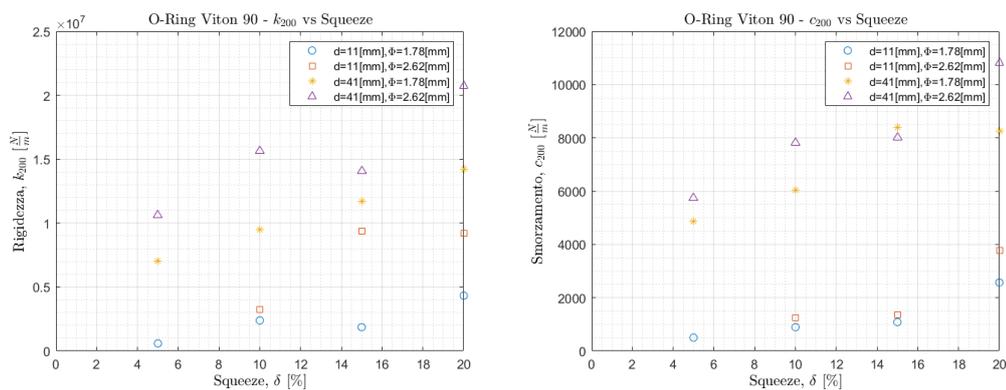


Figura 3.3: O-Ring Viton 90 NBR (a) Rigidezza k_{200} (b) Smorzamento c_{200} . [13]

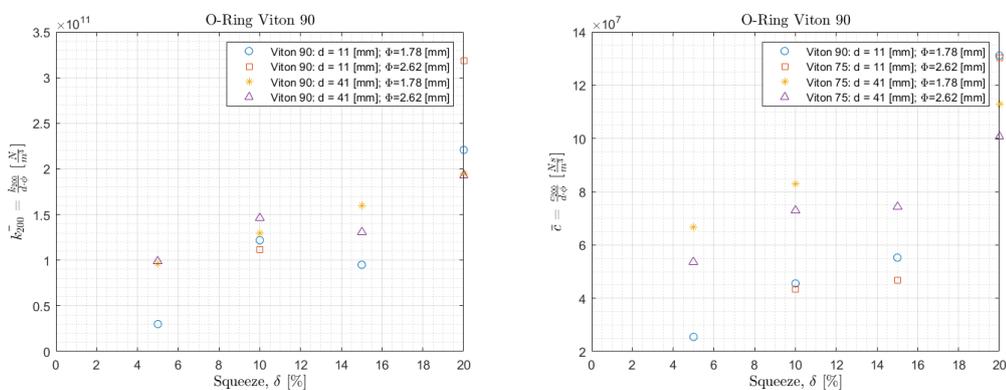


Figura 3.4: O-Ring Viton 90 NBR (a) Rigidezza \bar{k}_{200} (b) Smorzamento \bar{c}_{200} . [13]

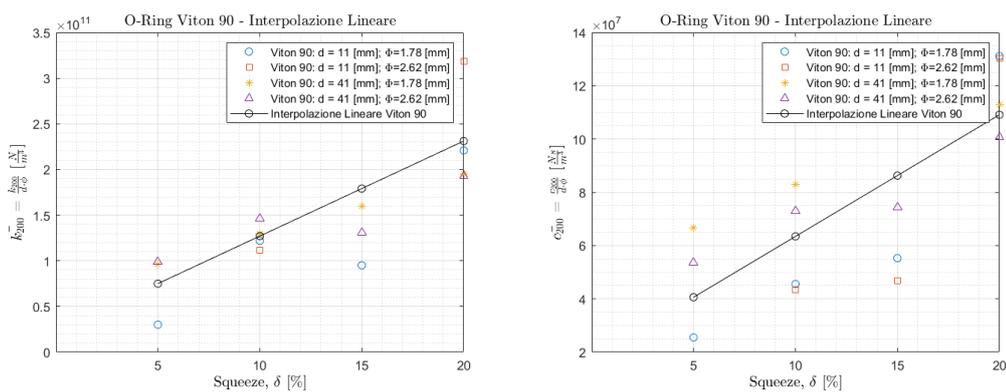


Figura 3.5: O-Ring Viton 90 NBR: interpolazione (a) \bar{k}_{200} (b) \bar{c}_{200} .

A partire dai valori presenti in **Figura 3.4**, è possibile interpolare i dati (**Figura 3.5**) mediante i comandi *polyfit* e *polyval* presenti in MATLAB®. Essi permettono di ottenere dei coefficienti polinomiali p_i tali da permettere la rappresentazione lineare dei termini \bar{k}_{200} , \bar{c}_{200} :

$$\bar{k}_{200} = p_1 + p_2\delta \qquad \bar{c}_{200} = p_3 + p_4\delta \qquad (3.7)$$

Di seguito, viene presentata la tabella dei coefficienti (**Tabella 3.1**).

Coefficienti p_i per \bar{k}_{200} , \bar{c}_{200}				
Categoria	p_1 [$\frac{MN}{m^3}$]	p_2 [$\frac{MN}{m^3}$]	p_3 [$\frac{Ns}{m^3}$]	p_4 [$\frac{Ns}{m^3}$]
Viton 75	22595	2610	$2,059 \cdot 10^7$	$1,800 \cdot 10^6$
Viton 90	22915	10412	$1,177 \cdot 10^7$	$0,457 \cdot 10^7$

Tabella 3.1: Coefficienti di interpolazione.

È ora possibile procedere a ritroso per ricavare i valori di rigidezza e smorzamento per una qualsiasi dimensione (e frequenza fissata, i.e., $f = 200Hz$) degli elastomeri, facenti riferimento alle categorie viste precedentemente:

$$k_{200} = \bar{k}_{200} \cdot d \cdot \phi \qquad c_{200} = \bar{c}_{200} \cdot d \cdot \phi \qquad (3.8)$$

Da cui, attraverso una proporzione, è possibile ricavare:

$$k_{\omega_x} = k_{200} \cdot \left(\frac{\omega_x}{200}\right)^\alpha \qquad c_{\omega_x} = c_{200} \cdot \left(\frac{\omega_x}{200}\right)^\beta \qquad (3.9)$$

ω_x è espresso in [$\frac{rad}{s}$] e, pertanto, deve essere convertito in [Hz]. I termini α , β , afferenti all'ultimo passaggio, sono stati ipotizzati ed ottimizzati in base ai dati disponibili in letteratura. Le figure seguenti mostrano, sulla base della procedura seguita, i risultati grafici e numerici approssimati per Viton 75 e Viton 90. I valori evidenziati sono adatti ad una prima stima di rigidezza e smorzamento; essi devono essere corroborati da risultati sperimentali per attestarne la veridicità e, eventualmente, correggerli. I valori ottenuti devono essere raddoppiati nel momento in cui vengono inseriti all'interno del modello dinamico presente in **Sezione 4.1.1**, poiché sono presenti due anelli O-Ring in parallelo nel modello reale. Il codice è consultabile in **Appendice C**. Successivamente, è necessario sintonizzare i parametri fino ad ottenere una buona convergenza tra il modello numerico e sperimentale.

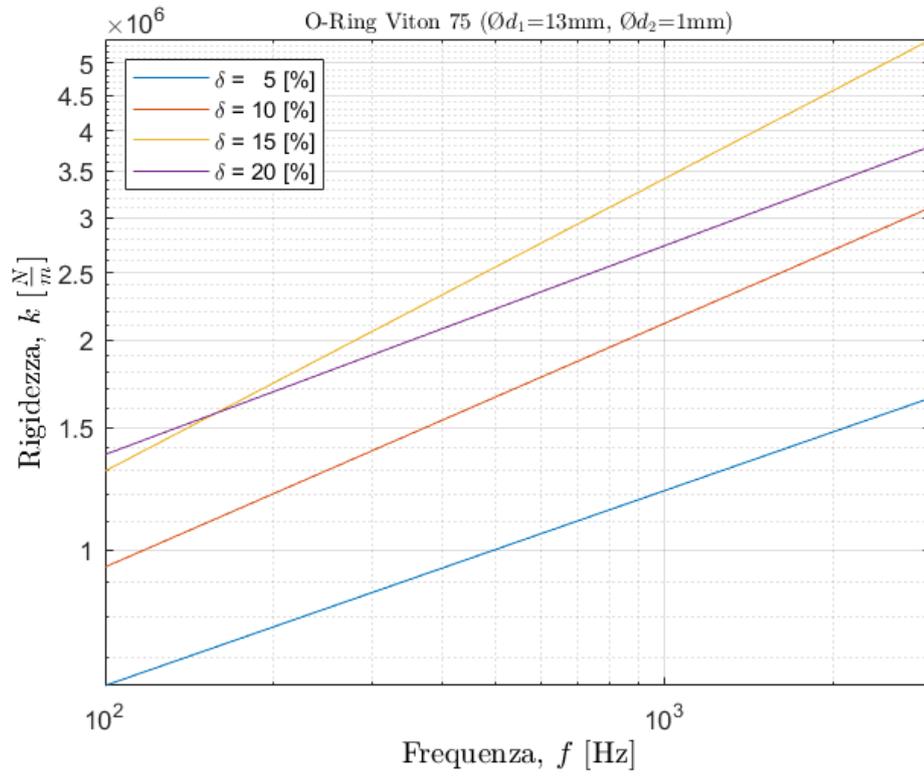


Figura 3.6: Rigidezza O-Ring Viton 75.

Viton 75 - $\varnothing d_1 = 13\text{mm}$, $\varnothing d_2 = 1\text{mm}$				
f [Hz]	k [$\frac{MN}{m}$] ($\delta=5\%$)	k [$\frac{MN}{m}$] ($\delta=10\%$)	k [$\frac{MN}{m}$] ($\delta=15\%$)	k [$\frac{MN}{m}$] ($\delta=20\%$)
1000	1,10	2,12	2,73	3,41
1500	1,21	2,44	3,09	4,05
2000	1,30	2,70	3,37	4,57
2500	1,38	2,91	3,60	5,02
3000	1,44	3,11	3,80	5,42

Tabella 3.2: Rigidezza O-Ring Viton 75 NBR.

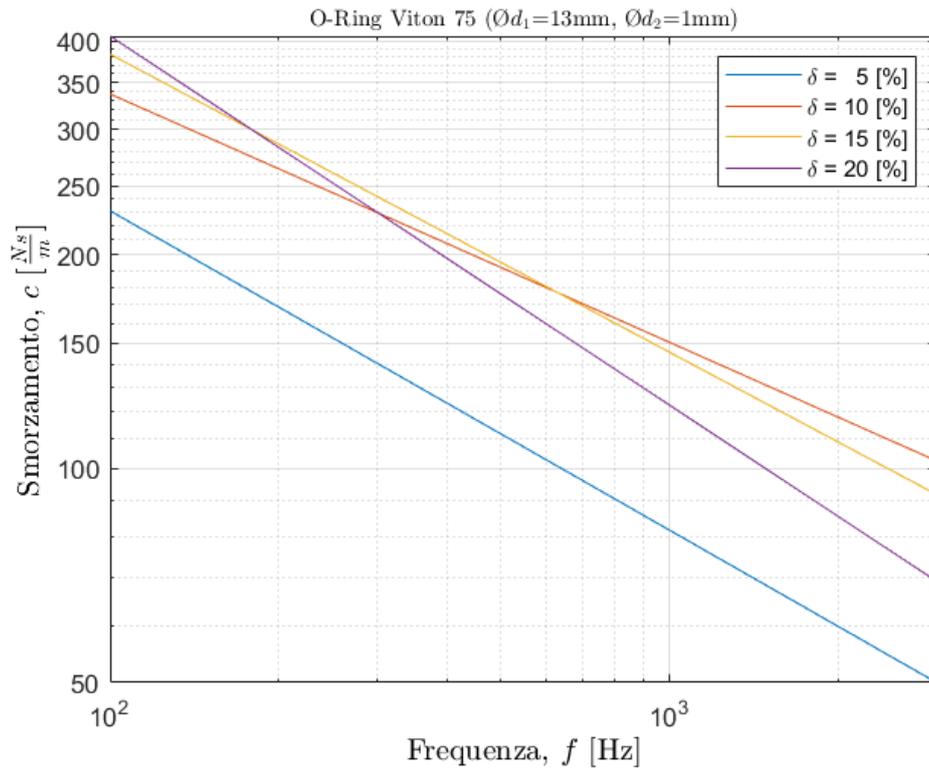


Figura 3.7: Smorzamento O-Ring Viton 75.

Viton 75 - $\varnothing d_1 = 13\text{mm}$, $\varnothing d_2 = 1\text{mm}$				
f [Hz]	c [$\frac{Ns}{m}$] ($\delta=5\%$)	c [$\frac{Ns}{m}$] ($\delta=10\%$)	c [$\frac{Ns}{m}$] ($\delta=15\%$)	c [$\frac{Ns}{m}$] ($\delta=20\%$)
1000	82	123	146	151
1500	68	100	123	131
2000	60	86	109	118
2500	54	76	99	109
3000	50	70	92	103

Tabella 3.3: Smorzamento O-Ring Viton 75 NBR.

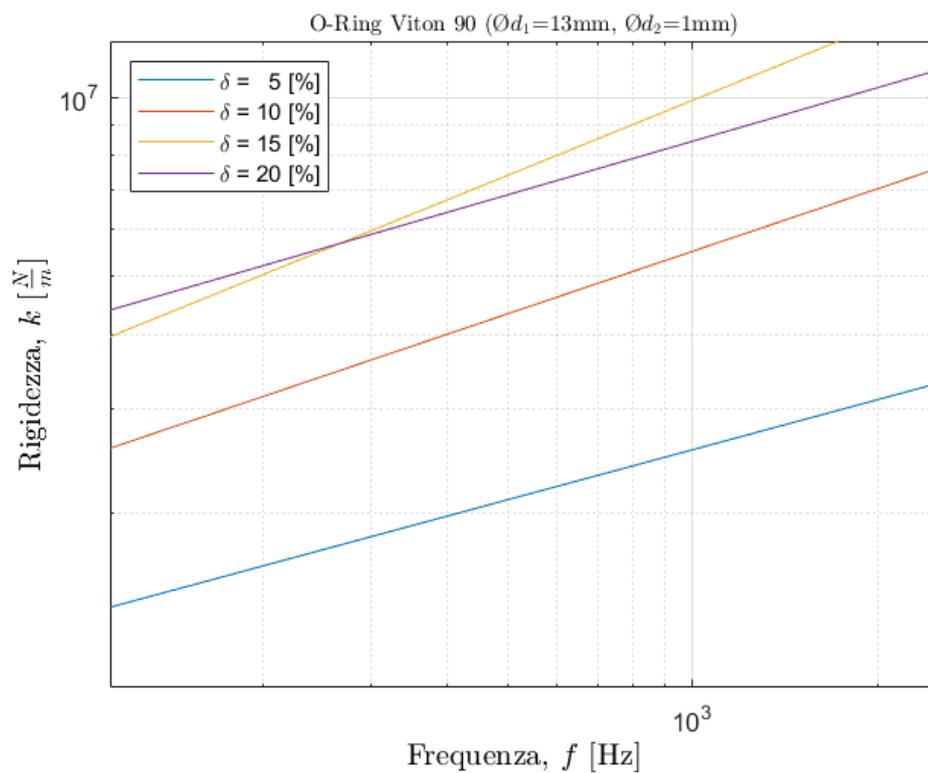


Figura 3.8: Rigidezza O-Ring Viton 90 NBR.

Viton 90 - $\varnothing d_1 = 13\text{mm}$, $\varnothing d_2 = 1\text{mm}$				
f [Hz]	k [$\frac{MN}{m}$] ($\delta=5\%$)	k [$\frac{MN}{m}$] ($\delta=10\%$)	k [$\frac{MN}{m}$] ($\delta=15\%$)	k [$\frac{MN}{m}$] ($\delta=20\%$)
1000	2,56	5,51	9,90	8,45
1500	2,86	6,35	11,74	9,54
2000	3,10	7,03	13,25	10,40
2500	3,30	7,60	14,55	11,12
3000	3,48	8,10	15,70	11,75

Tabella 3.4: Rigidezza O-Ring Viton 90 NBR.

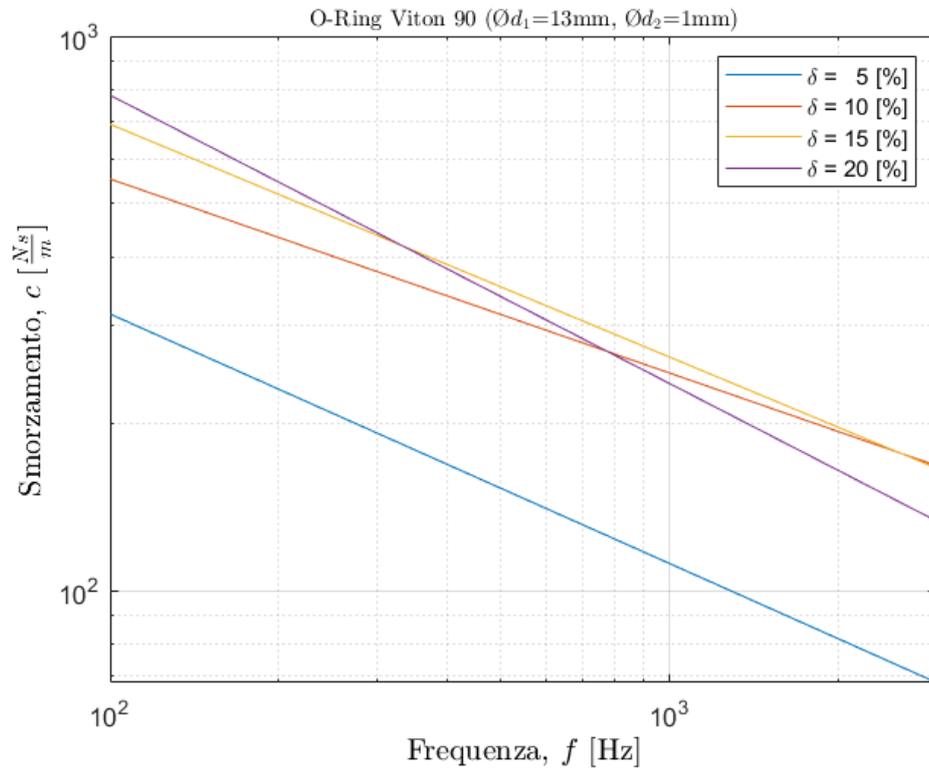


Figura 3.9: Smorzamento O-Ring Viton 90 NBR.

Viton 90 - $\varnothing d_1 = 13mm$, $\varnothing d_2 = 1mm$				
$f [Hz]$	$c [\frac{Ns}{m}] (\delta=5\%)$	$c [\frac{Ns}{m}] (\delta=10\%)$	$c [\frac{Ns}{m}] (\delta=15\%)$	$c [\frac{Ns}{m}] (\delta=20\%)$
1000	112	247	264	236
1500	93	214	222	191
2000	82	193	197	165
2500	74	179	179	147
3000	68	168	166	133

Tabella 3.5: Smorzamento O-Ring Viton 90 NBR.

3.1.2 Metodo indiretto

In questo caso, il metodo consente un ottimo controllo e flessibilità delle condizioni di prova. In **Figura 3.10** vengono presentate due diverse configurazioni.

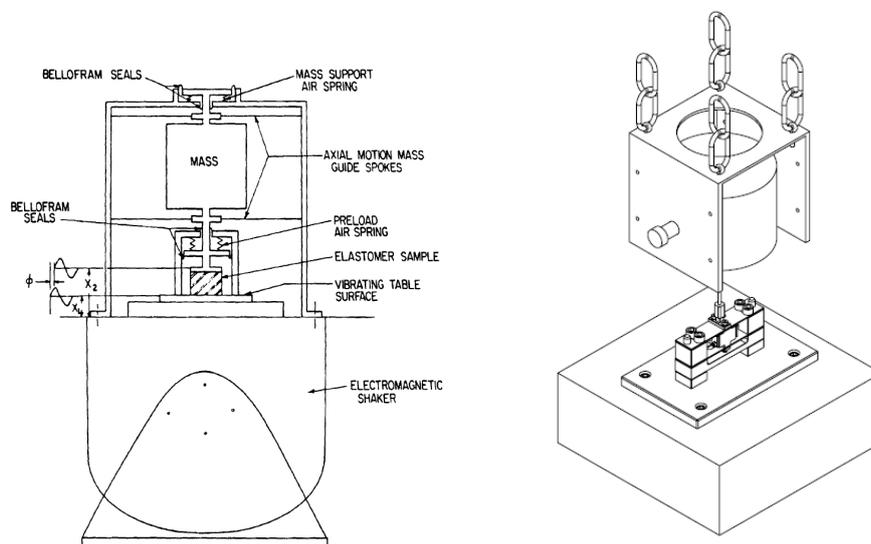


Figura 3.10: (a) Banco prova comune [12] (b) Banco prova attuale (DIMEAS).

Una corretta progettazione permette di condurre test efficaci su una vasta gamma di elastomeri per un ampio intervallo di frequenze, temperature e deformazioni. Generalmente, un banco prova di questo tipo è progettato per imporre vibrazioni uniassiali su un elastomero selezionato, campionando a frequenze di prova imposte e con precarichi di forza selezionati.

La selezione di una opportuna massa risonante, da abbinare alle proprietà del campione, consente ampiezze di vibrazione relativamente basse (fuori da condizioni di risonanza). Pertanto, le ampiezze massime sono limitate dalle caratteristiche dell'elastomero e dalla forza dell'eccitatore modale. È necessaria una certa quantità di precarico δ per garantire che il campione sia sempre a contatto con la massa eccitata. Movimenti non assiali della massa risonante possono manifestarsi come variazioni di ampiezza o angolo di fase tra i segnali o combinazione di entrambi.

Le figure seguenti (**Figura 3.11**, **Figura 3.12**) mostrano, all'aumentare della frequenza, i parametri più influenti sugli elastomeri mediante metodo indiretto.

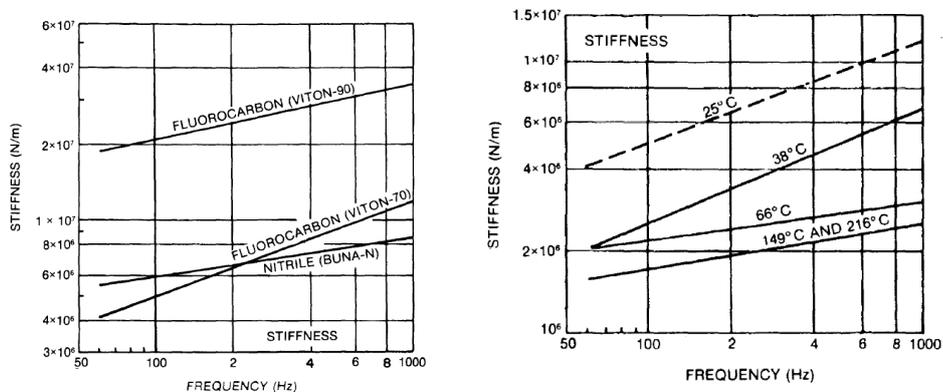


Figura 3.11: Rigidezza: Effetto di (a) Materiale (b) Temperatura. [12]

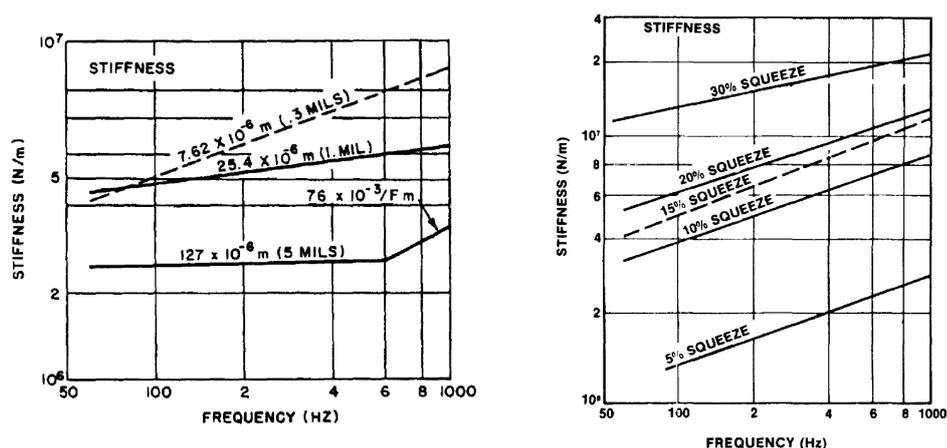


Figura 3.12: Rigidezza: Effetto di (a) Ampiezza (b) Squeeze. [12]

È possibile desumere come, all'aumentare della frequenza di eccitazione, il valore di rigidezza aumenta quasi sempre. La scelta del materiale e delle condizioni di temperatura risulta preponderante nella scelta dell'elastomero, se si vuole ottenere un certo grado di rigidezza in un intervallo di frequenza fissato.

Studi più recenti [14] hanno preso in considerazione una struttura del banco prova leggermente diversa per la caratterizzazione degli elastomeri (**Figura 3.13**).

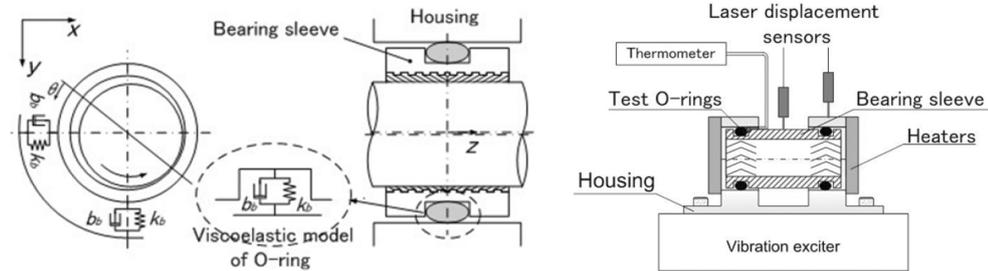


Figura 3.13: (a) Schema O-Ring (b) Banco prova. [14]

Sulla base degli elementi in prova, sono state sviluppate delle equazioni empiriche per la caratterizzazione degli O-Ring. I risultati in **Figura 3.14** evidenziano l'effetto del parametro δ sia sulla rigidezza che sul coefficiente di smorzamento all'aumentare della frequenza di eccitazione del banco.

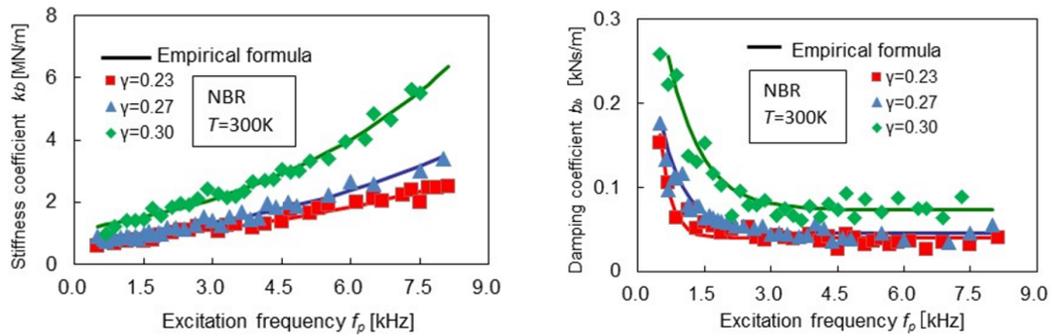


Figura 3.14: (a) Rigidezza (b) Coefficiente di smorzamento. [14]

In questo caso, la rigidezza aumenta all'aumentare di δ e della frequenza di lavoro. Nel caso in cui δ aumenti, anche il parametro di smorzamento aumenta; non vale lo stesso ragionamento in termini di frequenza (infatti, lo smorzamento diminuisce all'aumentare della frequenza).

Infine, viene presentato un altro esempio di sezione di banco prova (**Figura 3.15**). La struttura è costituita da due O-Ring, una massa vibrante ed un alloggiamento comprendente opportune scanalature per gli elastomeri. Un apparecchio impone alla struttura uno spostamento verticale sinusoidale, mentre tre sensori capacitivi registrano gli spostamenti che caratterizzano il sistema Housing - Albero.

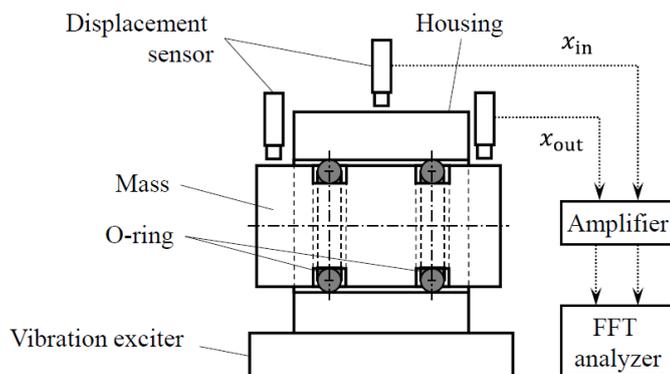


Figura 3.15: Banco prova. [15]

I risultati ottenuti [15] sono visibili in **Figura 3.16**. È possibile vedere come entrambi i valori k_1 , $c\omega$ aumentano all'aumentare della frequenza f . rispetto a quanto visibile per $c\omega$, sia la geometria che δ influenzano particolarmente la rigidezza k_1 .

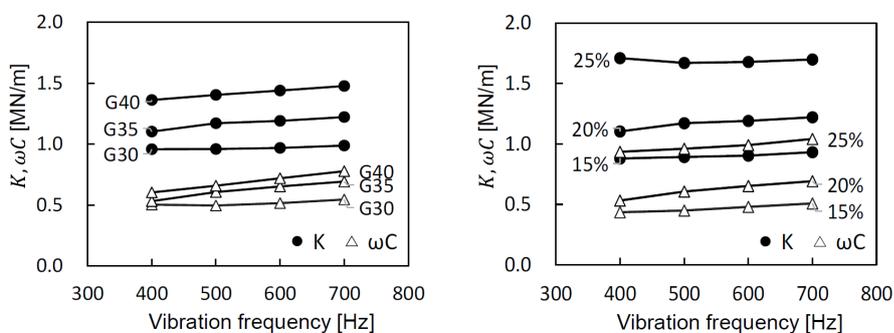


Figura 3.16: Effetti geometrici, δ su k_1 , k_2 . [15]

Capitolo 4

Attività sperimentale

L'intera attività (sia progettuale che sperimentale) è stata condotta presso i laboratori di meccanica (DIMEAS) del Politecnico di Torino. La progettazione del banco e il metodo preso in considerazione (**Sezione 3.1.2**) hanno fatto riferimento a studi presenti in letteratura. La messa in opera ha previsto la riprogettazione di alcune parti. Gli anelli di tenuta in esame presentano le seguenti caratteristiche:

- Diametro interno $\varnothing d_1 = 13mm$;
- Diametro di corda $\varnothing d_2 = 1mm$;
- Materiale NBR (Durezza SH=70 ÷ 90).

Valori tipici di precompressione radiale δ sono stati valutati nell'intervallo di misura 5 ÷ 20%. Il banco è dotato di alberi intercambiabili ed è possibile la caratterizzazione degli elastomeri in forno, in maniera tale da poter effettuare prove termiche, oltre che dinamiche. La modellazione del sistema e la componentistica di base vengono affrontate nelle sezioni seguenti.

4.1 Modellazione del sistema

4.1.1 Analisi dinamica

La fase iniziale dell'attività ha considerato una revisione della letteratura. Un sistema dinamico ideale può essere approssimato mediante un insieme finito di elementi capaci di immagazzinare energia potenziale e/o dissipare energia. Il numero di elementi necessario a descrivere il comportamento di un sistema è funzione di vari fattori (geometria, vincoli etc.). Nel caso di piccole vibrazioni, il sistema a parametri concentrati preso in considerazione è una rappresentazione adeguata.

Per definire correttamente la stabilità di un sistema (e quindi la efficacia di uno smorzatore), è possibile far riferimento al rapporto di smorzamento ζ , al decremento logaritmico δ_i , al fattore di perdita η , etc. Generalmente, lo smorzamento negli elastomeri è rappresentato dallo smorzamento isteretico, equivalente alla componente immaginaria della rigidità complessa k^* . Esso produce una forza dissipativa proporzionale allo spostamento (lo smorzamento viscoso, invece, è proporzionale alla velocità), sfasata di novanta gradi rispetto allo spostamento.

Nella definizione della risposta, è necessario precisare che in tutti i sistemi è presente uno smorzamento che causa la scomparsa, con il tempo, della soluzione generale. La soluzione particolare, invece, non diminuisce con il tempo; è, quindi, di primario interesse. Il procedimento seguente [12], afferente alla **Sezione 3.1.2** e basato sulla rappresentazione del sistema in **Figura 4.1**, permette di definire in maniera semplice ed immediata le caratteristiche di uno smorzatore in prova.

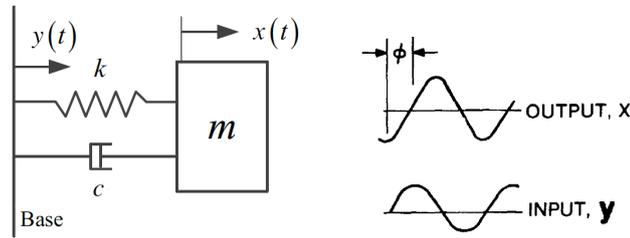


Figura 4.1: (a) Sistema Base-Massa (b) Sfasamento.

Sulla base delle proprietà del sistema, è possibile scrivere:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (4.1)$$

Le risposte possono essere scritte come:

$$y(t) = y_0 e^{i\omega t} \quad x(t) = x_0 e^{i\omega t} \quad (4.2)$$

Assunto uno sfasamento ϕ (**Figura 4.1b**) e impostate le seguenti condizioni:

$$c\omega = k_2 \qquad k = k_1 \qquad (4.3)$$

Inoltre¹:

$$k^* = k_1 + ik_2 = \frac{m\omega^2\alpha(\cos\phi - i\sin\phi)}{\alpha(\cos\phi - i\sin\phi) - 1} \qquad (4.5)$$

Dove $\alpha = \frac{A_2}{A_1}$ definisce il rapporto tra le ampiezze. Rigidezza e smorzamento, termini utilizzati nelle sezioni successive, sono presentati di seguito:

$$k_1 = m\omega^2 \left(\frac{\alpha^2 - \alpha \cos\phi}{\alpha^2 - 2\alpha \cos\phi + 1} \right) \qquad k_2 = m\omega^2 \left(\frac{\alpha \sin\phi}{\alpha^2 - 2\alpha \cos\phi + 1} \right) \qquad (4.6)$$

Per la caratterizzazione dello spostamento subito da un eventuale elastomero (interno al banco prova), è possibile definire [11]:

$$z = A_{O-Ring} = 2\sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\phi} \qquad (4.7)$$

È possibile modellare il sistema del laboratorio. Il sistema Housing (M) - Albero (m) può essere identificato e semplificato facendo riferimento alla **Figura 4.2**.

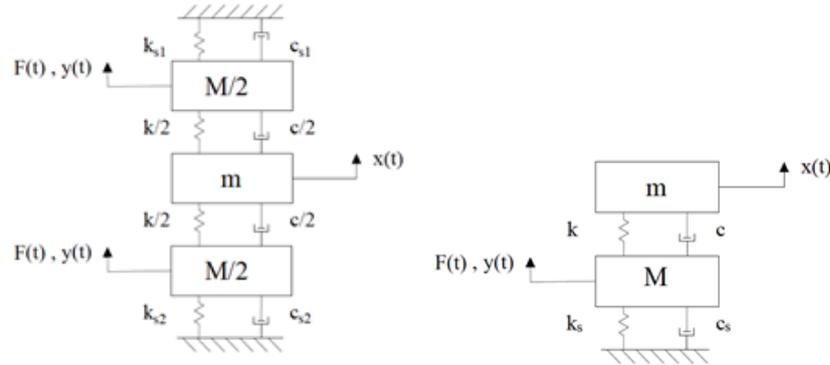


Figura 4.2: (a) Sistema (b) Sistema semplificato.

¹Il procedimento può essere valutato anche mediante:

$$x(t) = A_2 \sin(\omega t - \phi) \qquad y(t) = A_1 \sin(\omega t) \qquad (4.4)$$

Facendo riferimento a **Figura 4.2b**, k_s e c_s indicano la rigidezza e il fattore di smorzamento delle lamine (in parallelo) facenti parte dell'Alloggiamento; k e c indicano la rigidezza ed il fattore di smorzamento degli O-Ring (in parallelo). La risultante dei termini in parallelo è data dalla loro somma. I valori utilizzati per k , c fanno riferimento alla **Sezione 3.1.1**. Le equazioni del moto sono:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (4.8)$$

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky - c_s(\dot{x} - \dot{y}) - k_s(x - y) = F \quad (4.9)$$

Le risposte del sistema possono essere espresse secondo **Equazione 4.2**. Facendo riferimento a $s = i\omega$, è possibile ricavare $x(s)$:

$$x(s) = \frac{y(s)(cs + k)}{ms^2 + cs + k} \quad (4.10)$$

Per poi sostituire in **Equazione 4.9**:

$$Ms^2y(s) - \frac{(cs + k)^2y(s)}{ms^2 + cs + k} + (c + c_s)sy(s) + (k + k_s)y(s) = F(s) \quad (4.11)$$

A partire dai valori non trascurabili k_s , c_s , sono state considerate le relazioni:

$$\beta = \frac{M}{m} \quad \omega_n = \frac{k}{m} \quad \omega_s = \frac{k_s}{m} \quad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n \quad \frac{c_s}{m} = 2\zeta_s\omega_s \quad (4.12)$$

È possibile ottenere la rappresentazione di più funzioni di trasferimento. Tra le più rappresentative figurano $H(s) = \frac{y(s)}{F(s)}$, $H(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$, $H(s) = \frac{z(s)}{x(s)}$, $H(s) = \frac{z(s)}{F(s)}$. I risultati, ottenuti mediante modellazione numerica, sono relativi ad ipotesi basate su valori di rigidezza e coefficienti di smorzamento consultabili in letteratura. È necessario, pertanto, un confronto sperimentale per valutare la bontà delle approssimazioni.

4.2 Materiali e metodi

4.2.1 Modal Exciter Type 4824

Il sistema è progettato per ridurre al minimo il fenomeno della caduta di forza. Esso causato dal fatto che, in risonanza, le vibrazioni della struttura vengono amplificate. L'eccitatore, in questo caso, può accelerare l'applicazione della forza sulla struttura, senza che siano le vibrazioni della struttura stessa a guidare l'eccitatore. Il fenomeno indesiderato diminuisce al diminuire della massa dell'elemento mobile nell'eccitatore.

Lo strumento è caratterizzato dalla capacità di imprimere una forza nominale pari a $F = 100N$; è stato utilizzato un *push/pull stinger* tradizionale, normalmente connesso all'eccitatore modale mediante adattatore filettato. Il campo di frequenza applicativo per lo stinger è determinato da lunghezza, rigidità etc. In ambito dinamico, sono molteplici le ragioni per stimolare la struttura in esame, imprimendo un modesto valore di forza [16]:

- Livelli di forza elevati possono determinare un comportamento non lineare;
- Livelli di forza elevati richiedono eccitatori più grandi i quali, possedendo intrinsecamente armature più grandi, portano ad una maggiore caduta di forza in risonanza.

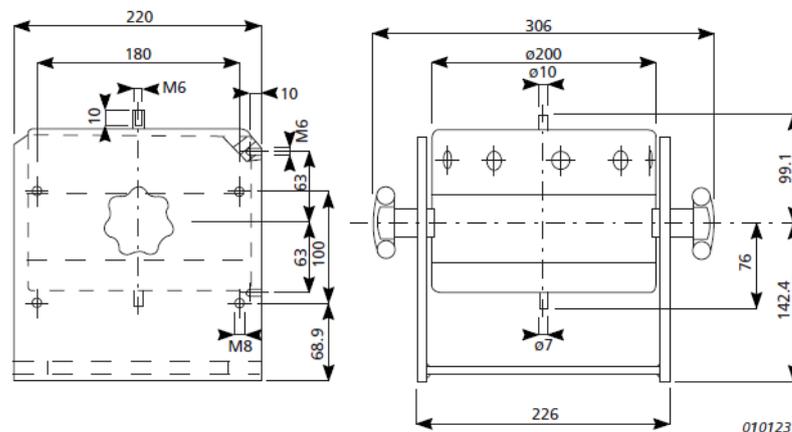


Figura 4.3: Modal Exciter Type 4824. [16]

L'eccitatore può essere posizionato a terra o in posizione relativa alla necessità di prova. Con riferimento all'attività sperimentale, esso è stato posizionato ad una altezza fissata da terra, mediante l'utilizzo di catene e golfari da inserire in appositi fori filettati. La caratterizzazione numerica dello strumento ha permesso di valutare la sua versatilità in relazione ai cambi strutturali associati al banco prova.

4.2.2 Banco

Il banco prova in uso (**Figura 4.4**) è composto da più elementi, descritti di seguito.

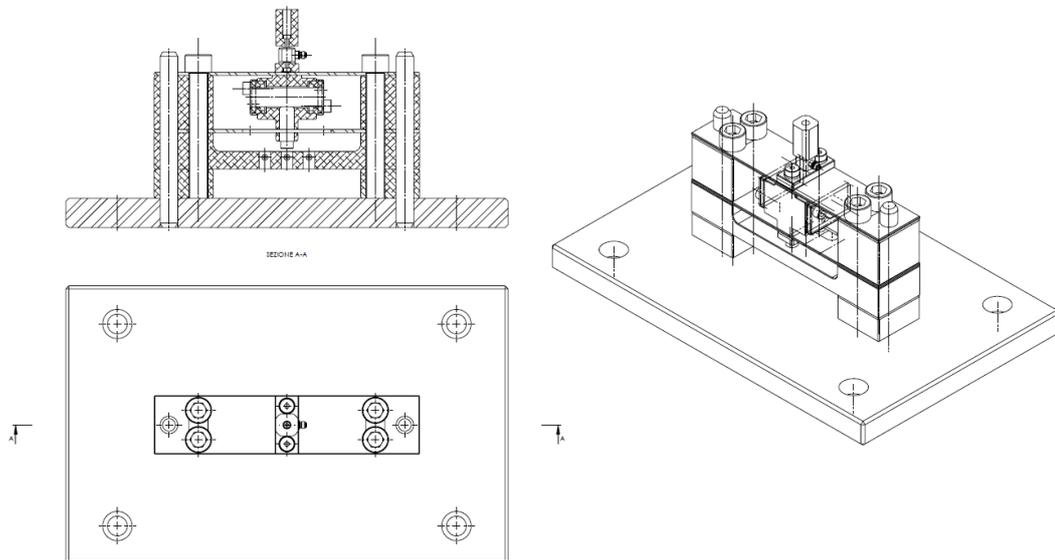


Figura 4.4: Banco.

L'elemento Housing (Alluminio EN-AW7075) contiene, alternativamente, gli alberi in esercizio accoppiati agli O-Ring. È progettato per essere fissato a due lamine tramite l'utilizzo di più viti. Un foro permette l'inserimento del sensore capacitivo atto alla misurazione dello spostamento verticale dell'albero.

Due coperchi dello stesso materiale dell'Housing sono accoppiati all'alloggiamento mediante fori laterali. Gli anelli vengono posizionati al loro interno. Un terzo foro (su entrambi i coperchi) permette l'inserimento di una termocoppia per l'esecuzione di prove dinamiche a temperatura controllata. Il valore δ necessario agli O-Ring può essere variato nell'intervallo $\delta = 5 \div 20\%$ grazie alla geometria di alberi diversi.

Durante le prove dinamiche, l'assieme può spostarsi solo in direzione verticale grazie anche all'azione combinata di due lamine in Acciaio armonico C67. Entrambe presentano spessore $s = 2\text{mm}$ e forniscono un certo grado di rigidità e smorzamento al sistema. Sono presenti dei fori che permettono il fissaggio al banco e il passaggio dei sensori capacitivi. Le loro caratteristiche vengono analizzate in **Sezione 4.2.1**.

Due basi di collegamento, rispettivamente superiore (**Figura 4.5**) e inferiore, sono accoppiate alle lamine di smorzamento, e permettono una sorta di "isolamento" dell'elemento Housing dal resto della struttura. Entrambe le basi presentano dei fori per il collegamento rigido all'alloggiamento. La base superiore è dotata di una sporgenza per la connessione alla cella di carico; la base inferiore è dotata di un foro necessario al sensore capacitivo, deputato alla misura dello spostamento dell'albero. Un dimensionamento opportuno permette il contatto su un'area quanto più piccola possibile, per evitare problemi inerenti alla rotazione della struttura.

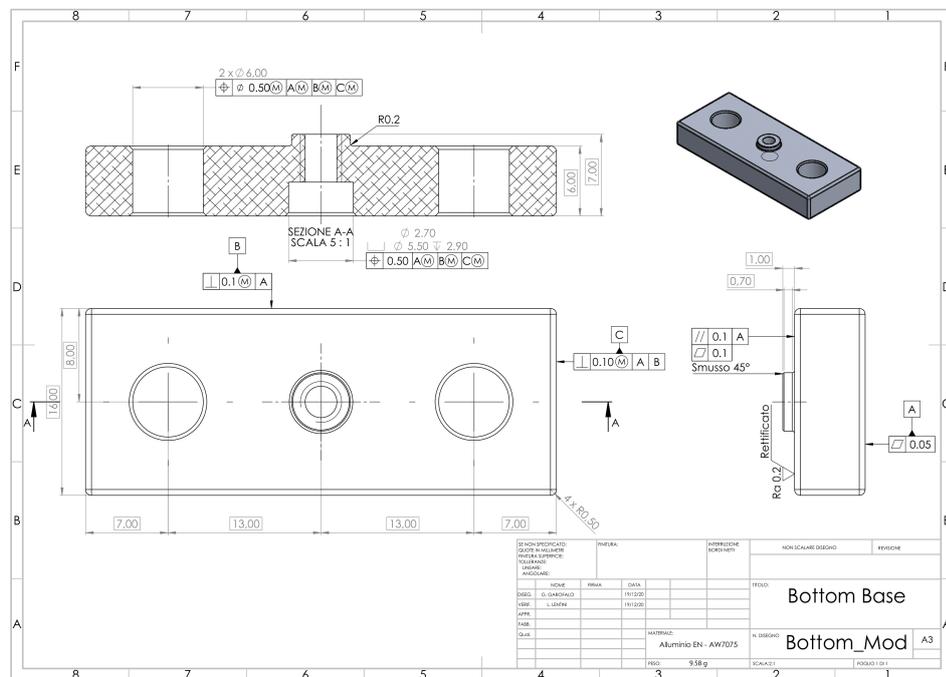


Figura 4.5: Elemento di collegamento.

È stato necessario progettare un altro elemento di collegamento (**Figura 4.6**) in Alluminio EN-AW7075 per valutare la forza impressa attraverso lo stinger al banco prova, a causa dell'incertezza dovuta a prove precedenti di acquisizione di segnale.

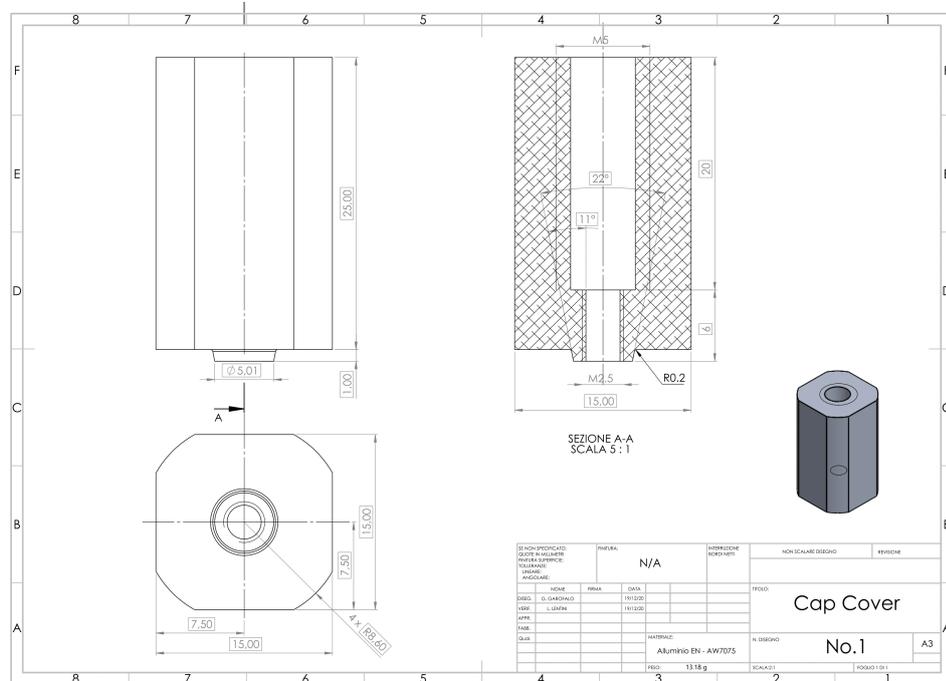


Figura 4.6: Elemento di collegamento.

Una mensola porta sonde (Alluminio EN-AW7075) permette di montare e fissare i sensori mediante sei fori (tre necessari ai sensori, tre necessari ai grani di fissaggio).

Nella parte inferiore del banco, sono presenti due flange di serraggio (Alluminio EN-AW7075) che collegano piastra e lamine di smorzamento. Inoltre, le flange generano uno spessore tale da permettere un facile collegamento ai sensori. Entrambe presentano un foro per la spine e un'asola per le viti di fissaggio al basamento.

Infine, una piastra (Acciaio AISI 420) permette il collegamento tra banco prova e il blocco di base (EN-GJL-100). Sono presenti più fori per rendere il collegamento saldo e garantire il posizionamento del banco rispetto alla piastra (**Figura 4.7**).

4.2.3 Cella di carico

I sensori di forza misurano forze statiche e quasi-statiche di compressione. Sono caratterizzati da elevata rigidezza e frequenza naturale. I principali rami applicativi sono pressatura, saldatura a punti, etc.

È stato necessario l'utilizzo di un sensore simile per valutare se l'eccitatore fosse in grado di imprimere un adeguato livello di forza nell'intervallo di frequenza considerato. Con riferimento alla **Figura 4.9**, il sensore utilizzato è precaricato assialmente tra un raccordo filettato di montaggio (5) e una piastra di base (4), attraverso la quale la forza di compressione è trasmessa a dei cristalli al quarzo (1) sensibili alla forza impressa. Il precarico è necessario per ottenere un buon grado di linearità del segnale in uscita. [17]

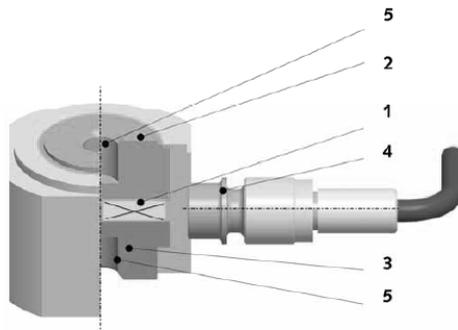


Figura 4.9: Kistler Type 9313AA1. [17]

I cristalli contenuti all'interno del sistema, sensibili al carico e alla direzione in cui viene applicato, generano un segnale proporzionale alla forza di compressione rilevata. La misurazione viene eseguita in ambito strettamente elastico, come risultato del principio di piezoelettricità². I sistemi piezoelettrici necessitano di numerosi accorgimenti. Misurazioni affidabili non sono possibili, qualora [17] :

1. Lo strumento presenti evidenti segni di danneggiamento;
2. Il sistema di acquisizione non registri alcun segnale in uscita.

²Proprietà di alcuni materiali cristallini di generare una differenza di potenziale se soggetti ad una sollecitazione meccanica (effetto piezoelettrico diretto).

È stato proposto uno schema di posizionamento del sensore secondo quanto riportato in **Figura 4.10a**.

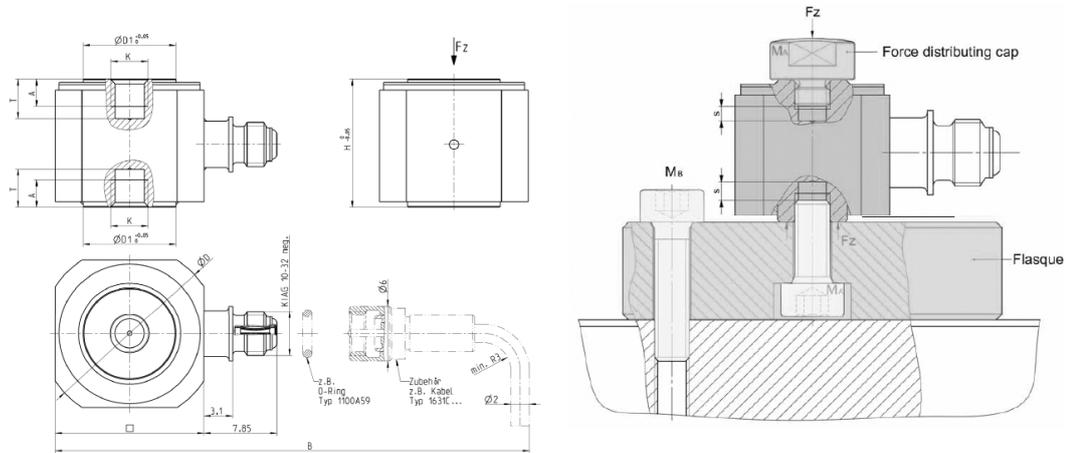


Figura 4.10: (a) Rappresentazione (b) Schema di montaggio. [17]

Considerando la mancanza di componenti adeguati, è stata necessaria la progettazione di un componente ad hoc per garantire un appoggio mediante il quale imprimere la forza al banco prova. In virtù della forma dell'oggetto, è stato necessario tornire la testa della vite **M2.5** utilizzata come fissaggio della base superiore del sensore (**Figura 4.11**).

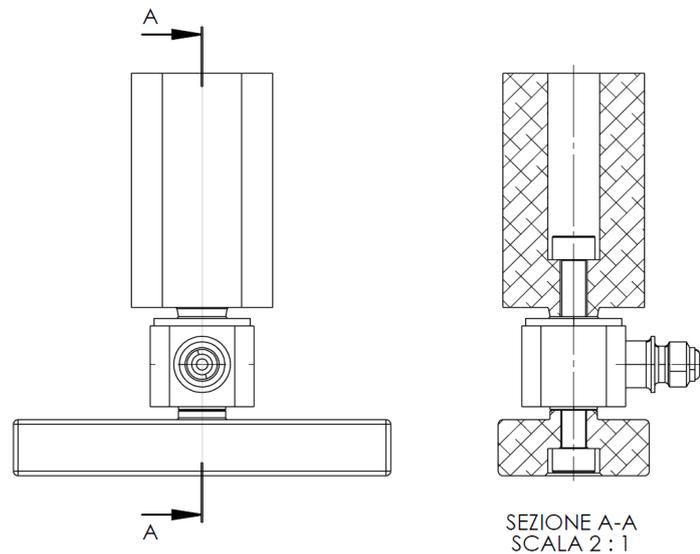


Figura 4.11: Assieme di collegamento.

4.2.4 Massa sospesa non rotante

Il metodo preso in considerazione (BERM) prevede, come già affrontato in **Sezione 3.1.2**, l'utilizzo di una massa sospesa non rotante. In **Tabella 4.1** vengono presentate le caratteristiche nominali delle masse rigide impiegate.

Elemento	Diametro $\varnothing d_s$ [mm]	Massa [kg]	Materiale
Albero No.1	12,9	0,0548	Ottone 58 CW614N
Albero No.2	13,0	0,0563	Ottone 58 CW614N
Albero No.3	13,1	0,0568	Ottone 58 CW614N
Albero No.4	13,2	0,0578	Ottone 58 CW614N

Tabella 4.1: Alberi in esercizio.

È impensabile poter conoscere il valore di una grandezza fisica mediante una singola misura. Infatti, buona parte delle volte si commettono degli errori non indifferenti, i quali impediscono di attestare il valore vero di una grandezza fisica. Perciò, è necessario limitare al minimo i disturbi durante una sperimentazione. Tra gli errori più comuni (sistematici e casuali), figurano:

- La taratura erronea dello strumento;
- L'errore di allineamento;
- L'errore umano;
- Le vibrazioni.

Per ottenere una stima approssimata del valore che, nominalmente, è stato assegnato all'elemento, è possibile valutare il valore più rappresentativo della grandezza misurata, considerando anche gli altri che si sono presentati durante la sperimentazione. La scelta più ragionevole ricade sulla media aritmetica μ dei valori ottenuti, poiché essa tiene conto di tutti i valori misurati durante la sperimentazione.

Inoltre, è stata analizzata la Deviazione Standard σ . È una grandezza sempre positiva, e permette di analizzare l'attendibilità della misura ottenuta. La pratica suggerisce come, all'aumentare del numero di prove effettuate n , il valore della deviazione standard σ diminuisce di conseguenza, garantendo una più elevata precisione della misura. Tale valore permette anche di valutare la distribuzione delle singole misure all'interno dell'intervallo di misura.

I valori delle masse sono stati ottenuti mediante strumento di misura Mettler Toledo PM34-K considerando, per ogni albero, la media aritmetica di tre pesate consecutive. Per ogni misura non vi sono state fluttuazioni di nessun tipo; di conseguenza, non sono state fatte ulteriori analisi a riguardo.

Per consentire, invece, un corretto accoppiamento con gli O-Ring ($\delta = 5 \div 20\%$), gli alberi presentano diametri esterni diversi. È stato verificato che, sperimentalmente, una grande mole di misure affette da piccoli errori casuali si distribuisce approssimativamente secondo una curva simmetrica "a campana", il cui centro di simmetria corrisponde al valor medio μ (secondo il "Teorema del Limite Centrale"). I risultati riguardanti il diametro di ciascun albero (ottenuti mediante calibro digitale) sono visibili nelle figure seguenti (**Figura 4.12a, 4.12b, 4.12c e 4.12d**). Per ogni albero, sono state considerate dieci prove indipendenti tra loro.

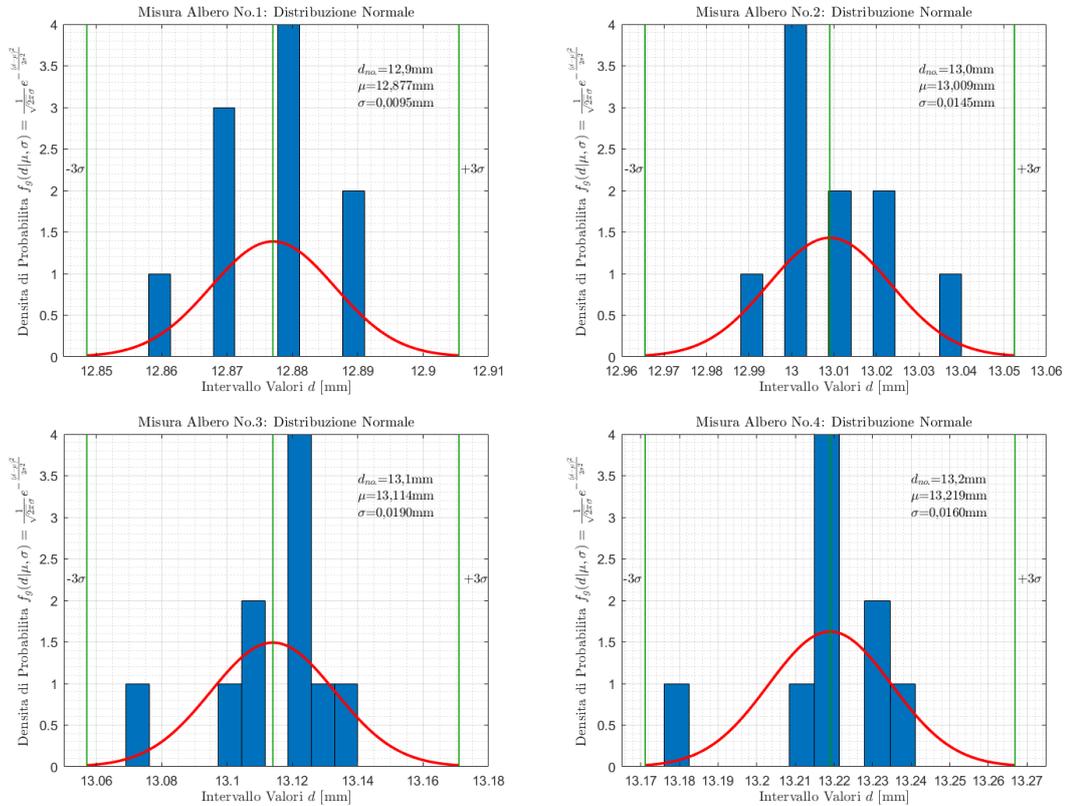


Figura 4.12: Albero in Ottone 58 CW614N (No.1 ÷ 4).

Di seguito (**Tabella 4.2**), vengono presentati i risultati numerici dell'analisi.

Elemento	Moda v_0 [mm]	Media μ [mm]	Deviazione SD σ [mm]
Albero No.1	12,88	12,877	0,0095
Albero No.2	13,00	13,009	0,0145
Albero No.3	13,12	13,114	0,0190
Albero No.4	13,22	13,219	0,0160

Tabella 4.2: Analisi statistica.

A questo punto, è possibile identificare il parametro δ_R [%] reale per ogni albero:

- Albero No.1, $\delta_R = 3,85\%$;
- Albero No.2, $\delta_R = 10,45\%$;
- Albero No.3, $\delta_R = 15,7\%$;
- Albero No.4, $\delta_R = 20,95\%$.

Per quanto riguarda le altre caratteristiche:

- Lunghezza $l = 50$ mm;
- Rugosità superficiale $\varepsilon = 1.6\mu m$.

Non sono state condotte analisi statistiche su tali parametri perché non utili ai fini della sperimentazione. È possibile vedere la rappresentazione tecnica dell'Albero No.2 in **Figura 4.13**.

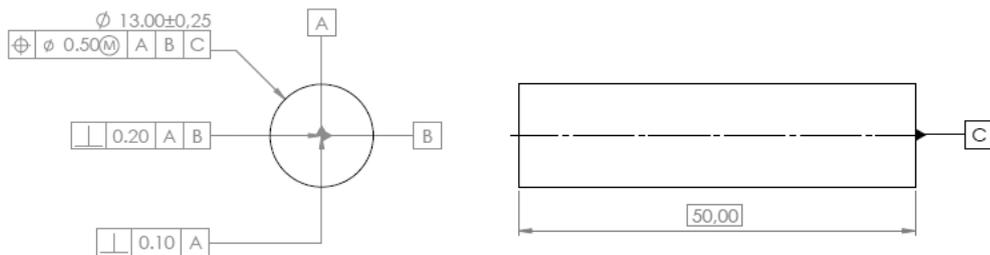


Figura 4.13: Albero No.2.

4.2.5 Sensori capacitivi

I sensori capacitivi effettuano misure di spostamento, posizionamento, deviazioni, etc. senza contatto. Il funzionamento si basa sul principio del condensatore ideale a piastre parallele. Le piastre sono rappresentate dal sensore e dall'oggetto di studio. Se una corrente alternata costante fluisce attraverso il sensore, il segnale elaborato è proporzionale alla distanza tra i due elettrodi. Lo schema costruttivo del sensore in esercizio viene presentato in **Figura 4.14b**.

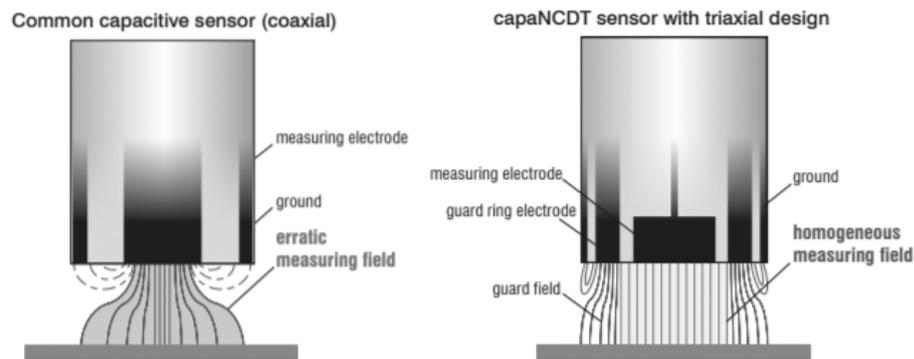


Figura 4.14: (a) Sensore comune (b) Sensore CapaNCDT. [18]

Vengono presentate, in **Tabella 4.3** le caratteristiche dei sensori utilizzati.

Caratteristica	Unità di misura	Modulo	Note
Range Misura	mm	0,5	Nominale
Linearità	μm	$\leq \pm 15$	-
Risoluzione	nm	$0,375 \div 10$	Static. e Din.
Range Temp.	$^{\circ}C$	$-50 \div +200$	-
Diam. Misura	mm	$\geq \varnothing 7$	-

Tabella 4.3: Caratteristiche Principali CapaNCDT CS05 $[\varnothing 8f7]$. [18]

Nel caso in cui sia accentuato il *Tilting* dell'elemento in esame (**Figura 4.15**), è necessario assumere un errore di misura. La distanza media del sensore rimane costante; nonostante ciò, gli spigoli del *target* possono oscillare periodicamente. Inoltre, è possibile che l'inclinazione determini contatto, quindi distorsioni di campo, distorcendo la bontà del segnale elaborato.

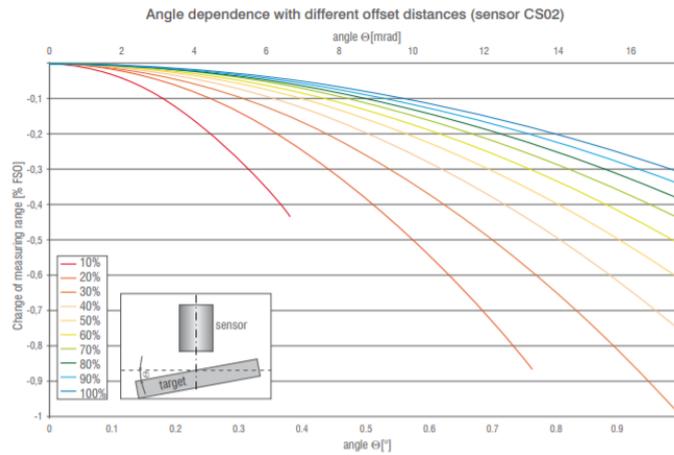


Figura 4.15: Variazione percentuale di segnale in base all'angolo di inclinazione (intervallo $0 \div 1^\circ$) del target per diverse distanze. [18]

Spesso, è necessario misurare la distanza per superfici curve (**Figura 4.16**). Una funzione integrata prende un punto di zero virtuale interno al target; quindi, la linea media di misura del piano giace sotto la linea di superficie da misurare. [18]

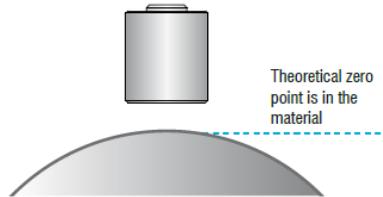


Figura 4.16: Misura con target curvo. [18]

Con riferimento all'attività sperimentale, i sensori sono stati utilizzati per la misura dello spostamento dell'Housing e dell'Albero (**Figura 4.17**).

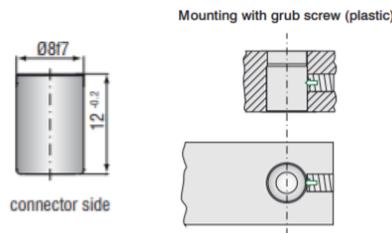


Figura 4.17: (a) Sensore (b) Montaggio. [18]

4.2.6 Forza esterna imprimibile

La sezione valuta, sulla base delle caratteristiche approssimate del banco prova, la capacità da parte dell'eccitatore modale (**Sezione 4.2.1**) di imprimere valori adeguati di forza per ottenere, inizialmente, uno spostamento fissato dell'Alloggiamento³. Le ipotesi fatte, le quali hanno permesso di delineare le funzioni di trasferimento di interesse, sono finalizzate alla eventuale modifica del banco stesso.

È stata rivalutata la rigidità k_s sia mediante formule ottenibili in letteratura, sia mediante simulazione FEM⁴. È necessario, infatti, valutare se lo spessore delle lamine dovesse essere modificato, a causa di problematiche dovute all'acquisizione di segnale oltre un certo valore di frequenza nell'intervallo di interesse.

Per quanto riguarda il primo caso⁵, è stato analizzato il caso della trave (incastro-doppio pendolo); ricavata la rigidità per metà lamina (a partire dalla matrice di rigidità della trave nel piano), il valore della stessa è stato raddoppiato ottenendo, approssimativamente, il valore di rigidità per una singola lamina. Il valore ottenuto per una singola lamina è stato raddoppiato poiché le lamine sono in parallelo; il valore finale $k_s = k_{s1} + k_{s2}$ approssima la rigidità complessiva. Un ragionamento simile è stato condotto per il valore c_s , posto $c_s = 20 \frac{Ns}{m}$ per ogni lamina. per quanto riguarda il modello di trave, è possibile fare riferimento alla **Figura 4.18**.

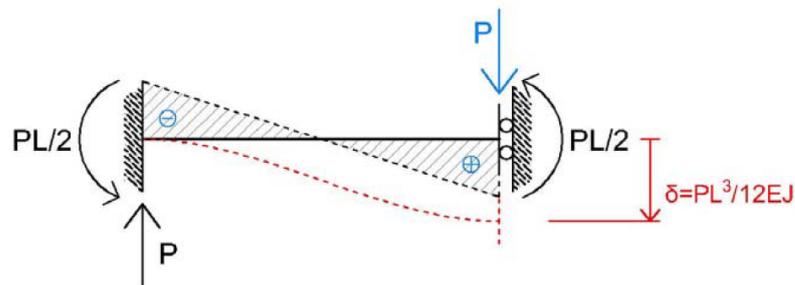


Figura 4.18: Trave Incastro - Bipendolo. [19]

³È stato necessario valutare se il problema di acquisizione segnale, presentatosi precedentemente, fosse dovuto alle caratteristiche intrinseche di rigidità e smorzamento di parte della struttura durante la traslazione verticale della stessa, sotto l'azione di una forza.

⁴È stato utilizzato il software di modellazione COMSOL Multiphysics®.

⁵Il caso non prende in considerazione eventuali fori presenti sulla lamina.

Per quanto riguarda la modellazione mediante software è stato considerato, inizialmente, il caso con trave piena singola (**Figura 4.19a**); successivamente, il caso reale per il sistema completo (**Figura 4.19b**). Il valore di rigidezza, ricercato in ambito elastico, è stato ottenuto mediante l'equazione $k = \frac{F}{s}$.

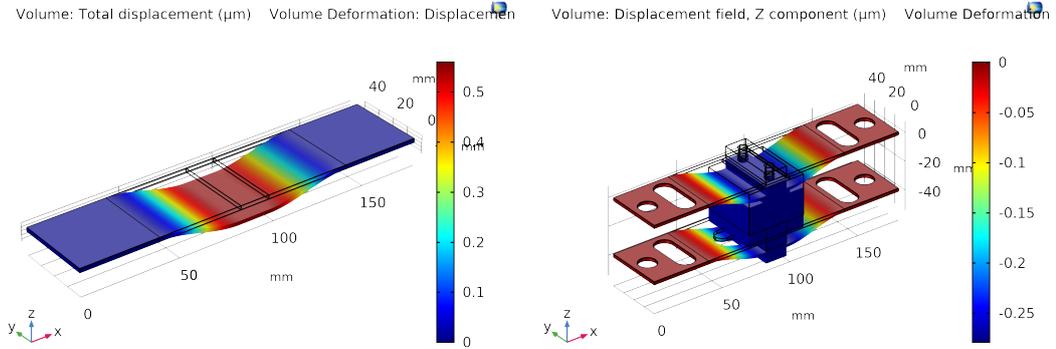


Figura 4.19: (a) Trave piena (b) Modello completo.

In **Tabella 4.4** vengono presentati i valori di k_s in base ai due metodi (intervallo di analisi: $s = 2mm \div 0.4mm$). La **Sezione 4.3.1** valuta, sperimentalmente, le caratteristiche dell'Alloggiamento e le confronta con il modello numerico.

Spessore [mm]	Metodo No.1: $k_{si} [\frac{MN}{m}]$	Metodo No.2: $k_{si} [\frac{MN}{m}]$
2,0	1,751	1,818
1,7	1,075	1,101
1,5	0,738	0,757
1,3	0,480	0,495
1,1	0,291	0,299
0,9	0,159	0,163

Tabella 4.4: Rigidezza lamina singola.

Valutata la rigidezza e lo smorzamento delle lamine per $s = 2mm$, è stato sviluppato un modello numerico per ottenere il dominio di frequenze per cui lo sfasamento tra Housing e Albero risulta compreso nell'intervallo⁶ $i_3 = 15 \div 165^\circ$. Tale intervallo è stato definito in letteratura [12] per questioni legate alla fisica dell'esperimento.

⁶Il valore $\Delta F_{aseMax.} = 165^\circ$ non viene mai raggiunto in nessun modello numerico (tipicamente si ottiene $\Delta F_{ase} \simeq 120^\circ$). Inoltre, i grafici sono tutti molto simili tra loro.

Alcuni dei risultati numerici sono visibili in **Figura 4.20** e **Figura 4.21**. Il codice di riferimento è consultabile in **Appendice D**.

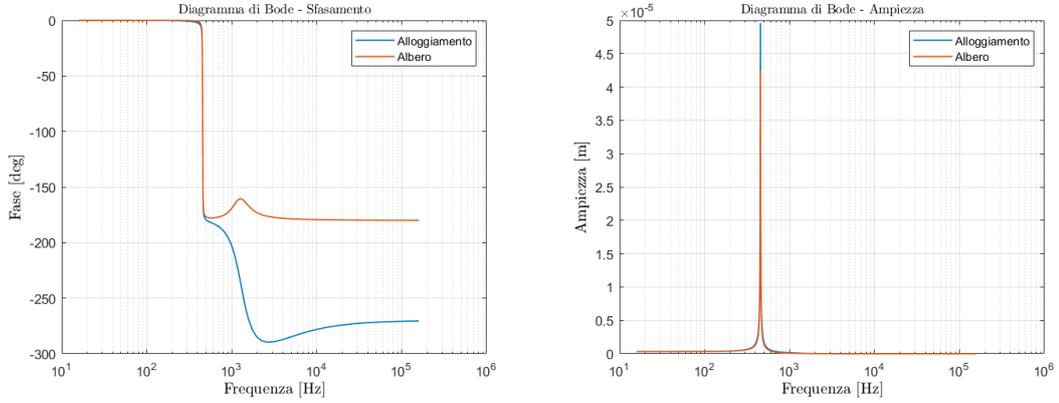


Figura 4.20: Albero No.2, Viton 70 NBR ($\delta = 10\%$) (a) Sfasamento (b) Ampiezza.

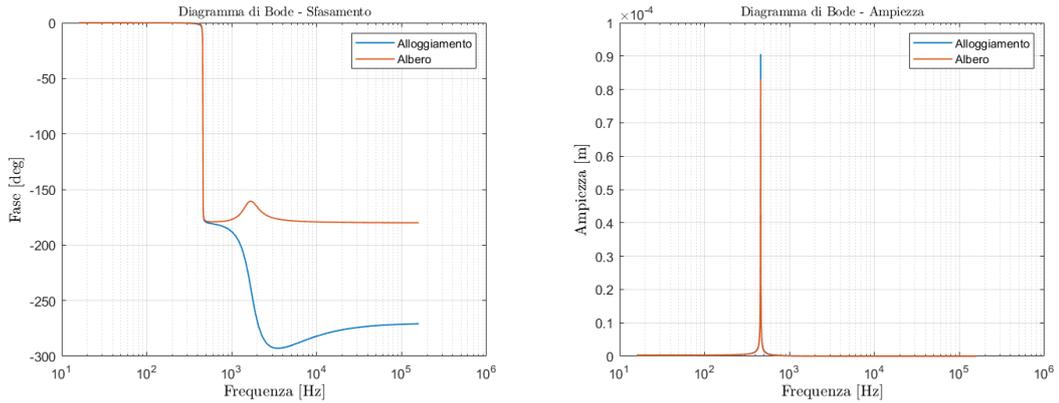


Figura 4.21: Albero No.2, Viton 70 NBR ($\delta = 20\%$) (a) Sfasamento (b) Ampiezza.

Valutati i valori di frequenza che ricadono nell'intervallo di interesse, è necessario entrare all'interno del grafico della funzione di trasferimento $H(s) = \frac{F(s)}{y(s)}$; successivamente, valutare il valore di frequenza ottenuto in prossimità di $\frac{F(s)}{y(s)} = 10 \cdot 10^7 \frac{N}{\mu m}$, corrispondente a $F(s) = 100N$ (per per uno spostamento noto dell'Housing $y(s) = 1\mu m$). Il procedimento è necessario per valutare il livello di forza necessario a spostare l'elemento Housing di una quantità preimpostata all'aumentare della frequenza.

I passaggi successivi sono visibili in **Figura 4.22**:

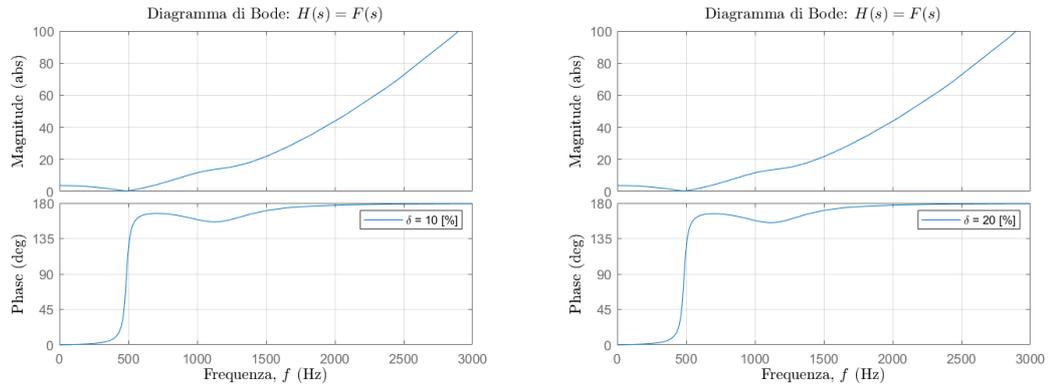


Figura 4.22: $H(s) = F(s)$ (a) $\delta = 10\%$ (b) $\delta = 20\%$.

Per l'Albero No.2, il valore di forza esercitabile è compreso nell'intervallo $F(s) = 30 \div 40N$. Inoltre, secondo i risultati ottenuti, l'eccitatore non dovrebbe essere in grado di spingersi oltre valori di frequenza⁷ pari a $f = 3000Hz$.

Le variabili prese in considerazione sono state:

1. L'O-Ring (Viton SH=70 \div 90);
2. L'Albero ($\varnothing d_s = 12,9 \div 13,2mm$);
3. Lo spostamento dell'Housing ($y(s) = 1\mu m$);
4. La rigidità delle lamine k_s (spessore $s = 2mm$);
5. Lo smorzamento delle lamine c_s (spessore $s = 2mm$);
6. Lo Squeeze ($\delta = 5 \div 20\%$, da cui derivano i valori k , c propri degli O-Ring).

Inserendo i valori delle frequenze di lavoro all'interno del diagramma, è possibile vedere se è necessario ridurre lo spessore di entrambe le lamine.

Sulla base di queste premesse, l'eccitatore è sempre in grado di fornire una forza nei limiti delle sue possibilità tecnologiche (i.e., $F = 100N$ per $f_{Max.} = 3000Hz$) per ottenere uno spostamento imposto dell'Alloggiamento $y(s) = 1\mu m$. Il codice di riferimento è consultabile in **Appendice E**.

⁷Inserendo i valori delle frequenze di lavoro nel diagramma è possibile vedere se lo shaker riesce a garantire lo sfasamento richiesto dal modello numerico. Nel caso di esito negativo, è necessario cambiare i valori di rigidità delle lamine, diminuendone lo spessore. Ciò comporta, quindi, la modifica dei parametri collegati ad esse, a partire dal valore di massa dell'Housing M.

4.3 Risultati

4.3.1 Caratterizzazione Housing

È necessario, inizialmente, verificare sperimentalmente i risultati numerici ottenuti per il solo alloggiamento degli Alberi (e, quindi, degli O-Ring). Tale procedura è necessaria per fissare alcuni dei parametri per caratterizzare gli O-Ring in prova ed i relativi modelli numerici.

Per il caso in esame, il setting di laboratorio ha permesso di sviluppare due diverse tipologie di prove per l'acquisizione degli input necessari a caratterizzare la funzione di trasferimento $H(s) = \frac{y(s)}{F(s)}$:

- Analisi mediante *Sweep* (tempo di acquisizione $\Delta t = 120s$);
- Analisi mediante impulso (tempo di acquisizione $\Delta t = 5s$).

La prima metodologia consiste nell'impostare un tempo di acquisizione massimo entro il quale lo strumento, sollecitando il banco, immagazzina i dati, passando in rassegna un intervallo di frequenze fissato. La seconda metodologia consiste nell'impostare un tempo di acquisizione breve entro il quale sollecitare la struttura e, successivamente, studiare la risposta del sistema provocata dall'azione. Se la struttura è molto rigida, occorre valutare bene la scelta dello strumento⁸. Durante l'acquisizione e l'elaborazione dei segnali in uscita dal banco, la funzione MATLAB[®] `w = hamming(L,sflag)` ha assunto grande rilevanza per la costruzione delle funzioni di trasferimento e la successiva sintonizzazione del modello numerico, necessari alla caratterizzazione del banco stesso e, successivamente, degli O-Ring.

L'analisi di un segnale mediante FFT si basa su insieme finito di dati a spettro continuo (i.e., un componente di periodo di un segnale periodico più ampio). Infatti, essa è utile nel momento in cui si vuole decostruire un segnale nel dominio del tempo in più funzioni seno/coseno (che contribuiscono, secondo una media pesata, alla definizione del segnale) nel dominio della frequenza per analizzarne le caratteristiche. Generalmente, i termini di inizio e fine di una funzione d'onda sinusoidale sono sequenziali. Se il segnale misurato è periodico, la FFT risulta un ottimo metodo di elaborazione. La maggior parte delle volte, il segnale misurato non è caratterizzato da un numero intero di periodi. Esso può risultare, quindi, discontinuo. Il fenomeno può essere interpretato come l'energia di un segnale ad una data frequenza che diffonde in altre frequenze. Il fenomeno è noto come *dispersione spettrale*.

⁸Estremità in gomma producono una forza il cui spettro è molto basso ad alte frequenze. Per raggiungere le alte frequenze, è necessario l'impiego di estremità metalliche. [20] In ragione di ciò, è stata scelta una estremità in plastica dura. Inoltre, è necessario evitare di applicare una sequenza di impulsi troppo ravvicinati.

È possibile ridurre al minimo gli effetti del fenomeno attraverso la tecnica della finestatura (i.e., *window function*). Questa funzione matematica normalmente simmetrica riduce l'ampiezza delle discontinuità agli estremi di ogni sequenza acquisita attraverso la moltiplicazione di un segmento di dati acquisiti per una finestra di lunghezza finita⁹ (la cui ampiezza tende gradualmente verso zero agli estremi). Ciò permette agli estremi dell'intervallo di "incontrarsi" e produrre una forma d'onda continua senza brusche transizioni di segnale. A seconda del segnale da elaborare, esistono diversi tipi di funzione finestra impiegabili. In **Figura 4.23** viene evidenziato il confronto tra due delle più comuni funzioni finestra utilizzate.

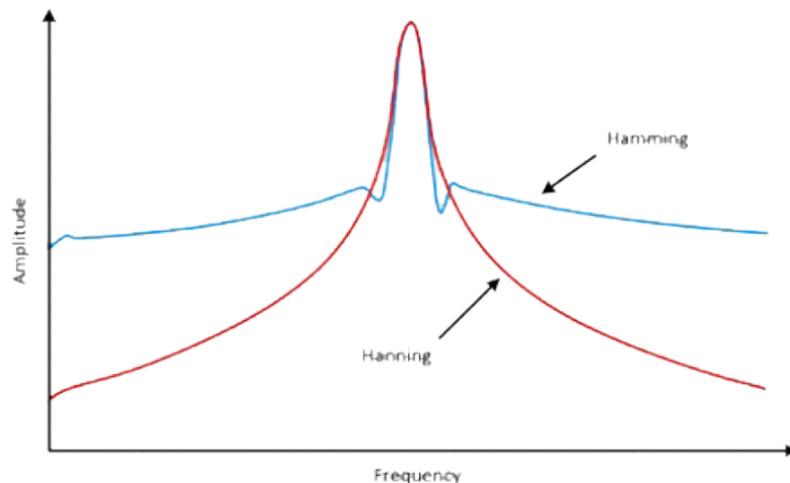


Figura 4.23: Confronto Hann - Hamming Window in frequenza. [21]

Il grafico generico di una funzione finestra mostra come lo spettro continuo sia caratterizzato da un lobo principale e diversi lobi laterali. Il lobo principale è centrato ad ogni frequenza componente del segnale nel dominio del tempo, e i lobi laterali si avvicinano gradualmente verso zero. L'altezza dei lobi laterali indica l'effetto che la funzione di finestatura ha sulle frequenze attorno ai lobi principali. La risposta del lobo laterale di un segnale sinusoidale forte può sopraffare la risposta del lobo principale di un segnale sinusoidale debole. Tipicamente, i lobi laterali inferiori riducono le perdite nella FFT misurata ma aumentano la larghezza di banda del lobo principale. Il tasso di *roll-off*¹⁰ del lobo laterale è descritto come il tasso di decadimento asintotico dei picchi del lobo laterale.

⁹Al di fuori dell'intervallo prescelto, il valore della moltiplicazione tra i termini vale zero.

¹⁰Esso viene definito come la pendenza di una funzione di trasferimento con la frequenza. È normale misurare il roll-off in funzione della logaritmo della frequenza *logf*.

Aumentando la velocità di roll-off del lobo laterale, è possibile ridurre la dispersione spettrale. Per scegliere una funzione della finestra, è necessario valutare il contenuto in frequenza del segnale:

- Se il segnale contiene forti componenti di frequenza di disturbo distanti dalla frequenza di interesse, è bene scegliere una finestra con un tasso di roll-off del lobo laterale elevato;
- Se il segnale contiene forti segnali di interferenza vicino alla frequenza di interesse, è bene scegliere a funzione finestra con un tasso di roll-off del lobo laterale basso;
- Se la frequenza di interesse contiene due o più segnali molto vicini tra loro, è bene scegliere una finestra con lobo principale stretto.
- Se la precisione dell'ampiezza di un singolo componente di frequenza è più importante della posizione esatta del componente in un dato intervallo frequenza, è bene scegliere una finestra con lobo principale ampio;
- Se lo spettro del segnale è piuttosto piatto, è bene utilizzare una finestatura uniforme o, al più, nessuna finestra.

In generale, se non si conosce la natura del segnale, è opportuno iniziare con la finestra di Hann/Hamming. Entrambe presentano forma sinusoidale caratterizzata da picco ampio ma lobi laterali bassi. La finestra di Hann raggiunge lo zero agli estremi eliminando ogni discontinuità. La finestra di Hamming non raggiunge lo zero e quindi presenta ancora una leggera discontinuità di segnale. A causa di questa differenza, la finestra di Hamming può annullare meglio il lobo laterale più vicino ma fatica nell'eliminazione degli altri. [21]

Grazie al *tuning* dei parametri (ζ, ω_n) , la curva numerica approssima adeguatamente i risultati sperimentali. Esistono altri due metodi per valutare grossomodo ζ :

- Metodo dei punti di metà potenza, per cui $\zeta \simeq \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2\omega_n}$;
- Metodo del decremento logaritmico, per cui $\zeta \simeq \frac{\ln(\frac{x_1}{x_2})}{2\pi}$ (se $\zeta \ll 1$).

Il confronto tra le funzioni di trasferimento ottenute è presentato in **Figura 4.24**.

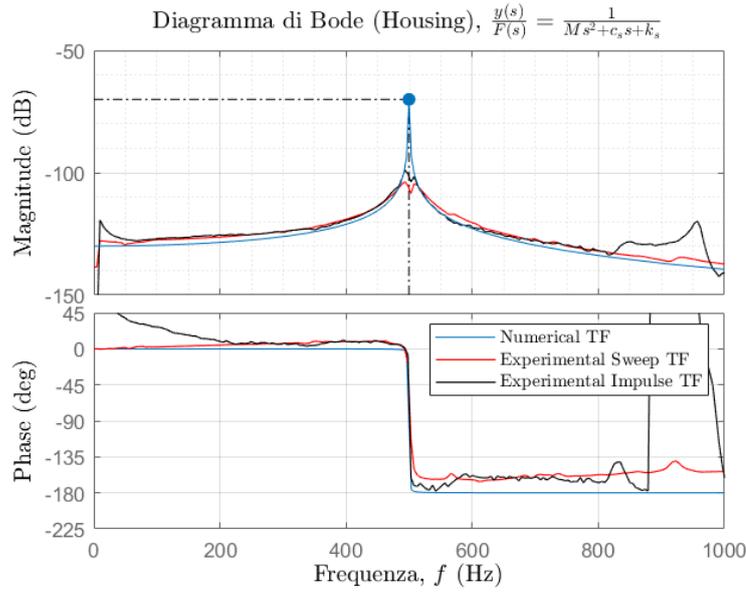


Figura 4.24: Confronto $H(s) = \frac{y(s)}{F(s)}$ Housing.

Non sono stati considerati valori di frequenza oltre $f = 1000Hz$ per una questione di accuratezza di segnale. È stato possibile definire le seguenti relazioni:

- $\omega_s = 500Hz$;
- $\zeta = 5 \cdot 10^{-4}$;
- $k_s = 3,168 \frac{MN}{m}$;
- $c_s = 1,816 \frac{Ns}{m}$.

I termini risultano in linea con i valori ottenuti per il modello numerico. Il codice di riferimento è consultabile in **Appendice G**.

4.3.2 Caratterizzazione O-Ring

Successivamente, sono stati verificati sperimentalmente i valori di rigidezza k e smorzamento c degli O-Ring presenti in laboratorio, le cui caratteristiche geometriche e chimiche sono già state introdotte nel **Capitolo 4** e i cui risultati sono proposti in diverse condizioni. Per il caso in esame, il setting presente in laboratorio ha permesso di sviluppare due diverse tipologie di prove per l'acquisizione dei dati necessari alla valutazione dei parametri sopracitati:

- Analisi mediante Sweep (tempo di acquisizione $\Delta t = 120s$);
- Analisi per punti (frequenza di eccitazione f fissata).

La seconda metodologia, più affidabile, può essere attuata mediante l'utilizzo di un amplificatore di potenza analogico (i.e., Brüel & Kjær - Power Amplifier Type 2719¹¹). Il metodo consiste nel regolare - mediante guadagno dell'amplificatore - la forza impressa al sistema da parte dello Shaker (**Sezione 4.2.1**), in modo tale da visualizzare a video (i.e LabVIEW[®]) sempre lo stesso valore di spostamento z da parte dell'O-Ring in esame, grazie alla lettura da parte dei sensori capacitivi delegati alla misura dello spostamento dell'Albero e dell'Alloggiamento. È possibile, in ogni caso, la presenza di errori sia sistematici sia casuali.

A partire dai dati ottenuti in formato *.txt*, è possibile confrontare i segnali acquisiti con il modello numerico tramite funzione di trasferimento (in MATLAB[®]); in seguito, applicare l'**Equazione 4.6** per valutare rigidezza e smorzamento degli elastomeri. Tra i comandi MATLAB[®] più importanti, per la definizione dei punti sperimentali, figurano:

- `txy = tfestimate(x,y);`
- `cxy = mscohere (x,y).`

È possibile consultare un estratto della sintassi in **Appendice H**.

Sono evidenziati, di seguito, i risultati dei confronti ottenuti per gli elastomeri disponibili in laboratorio (**Figura 4.25, 4.26, 4.27, 4.28**).

¹¹È progettato per variare la forza impressa dall'eccitatore modale al sistema. Il limite di corrente di uscita RMS, così come il guadagno, è regolabile (guadagno di tensione massimo $G = 14dB$). Un circuito limitatore impedisce picchi istantanei eccessivi di corrente. [22]

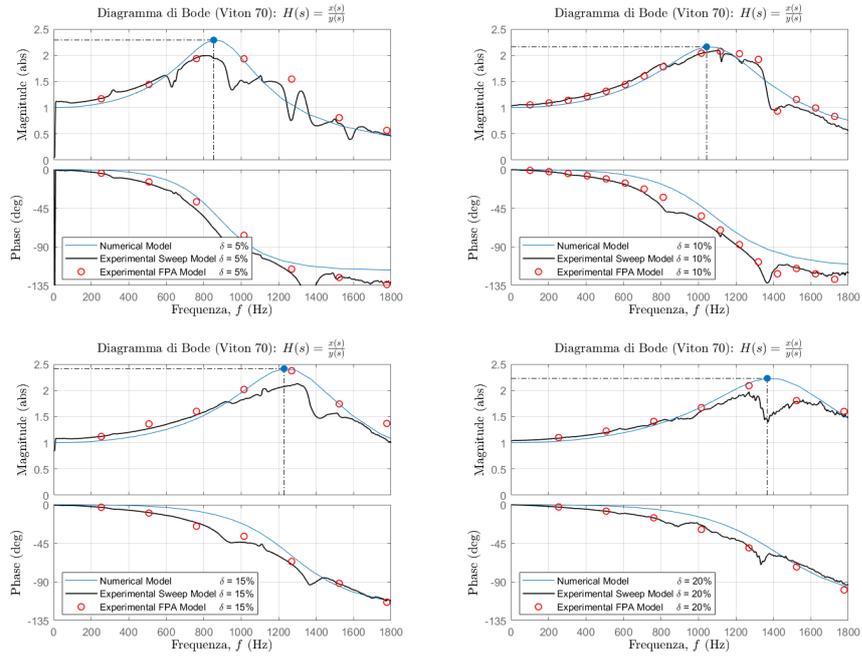


Figura 4.25: Viton 70: $H(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$ ($\delta = 5 \div 20\%$).

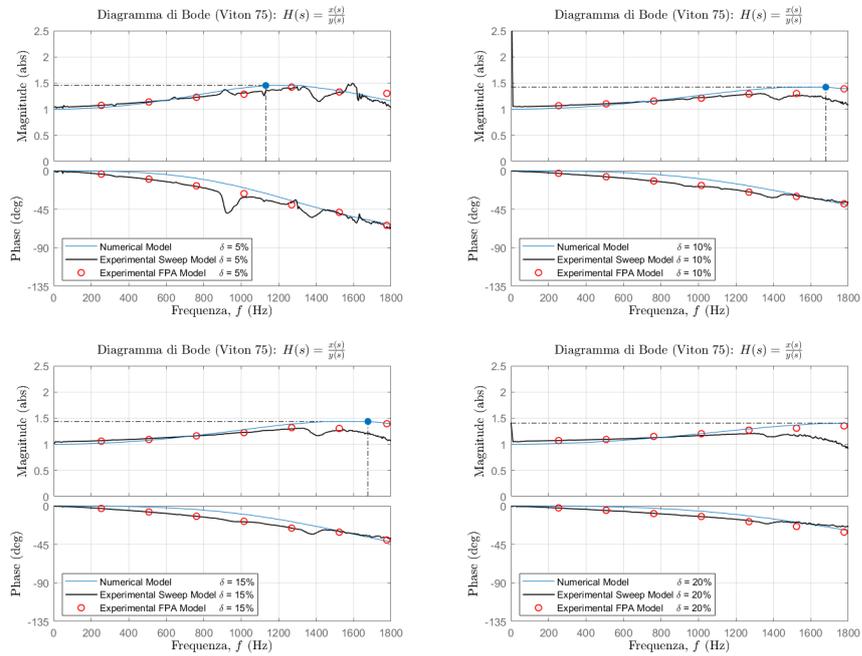


Figura 4.26: Viton 75: $H(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$ ($\delta = 5 \div 20\%$).

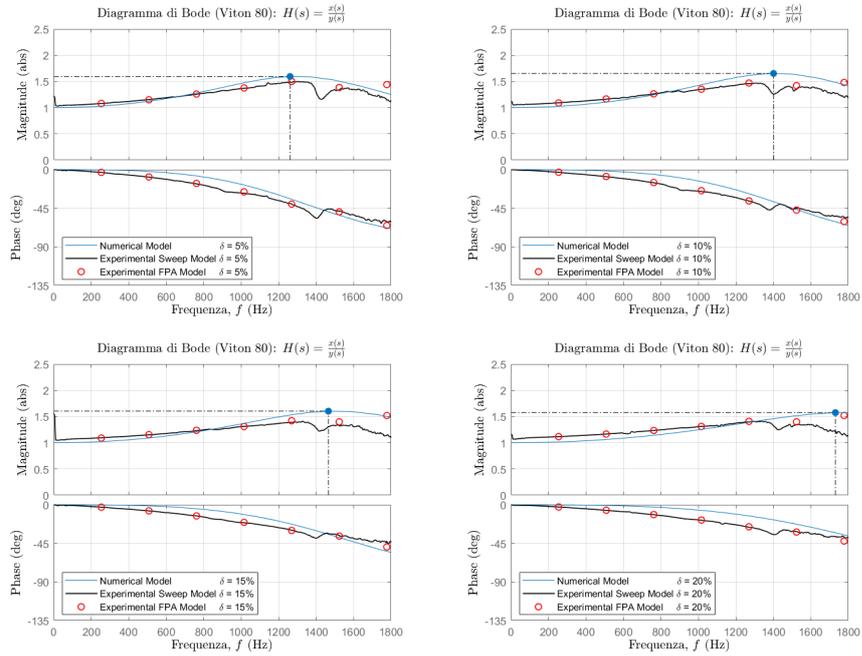


Figura 4.27: Viton 80: $H(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$ ($\delta = 5 \div 20\%$).

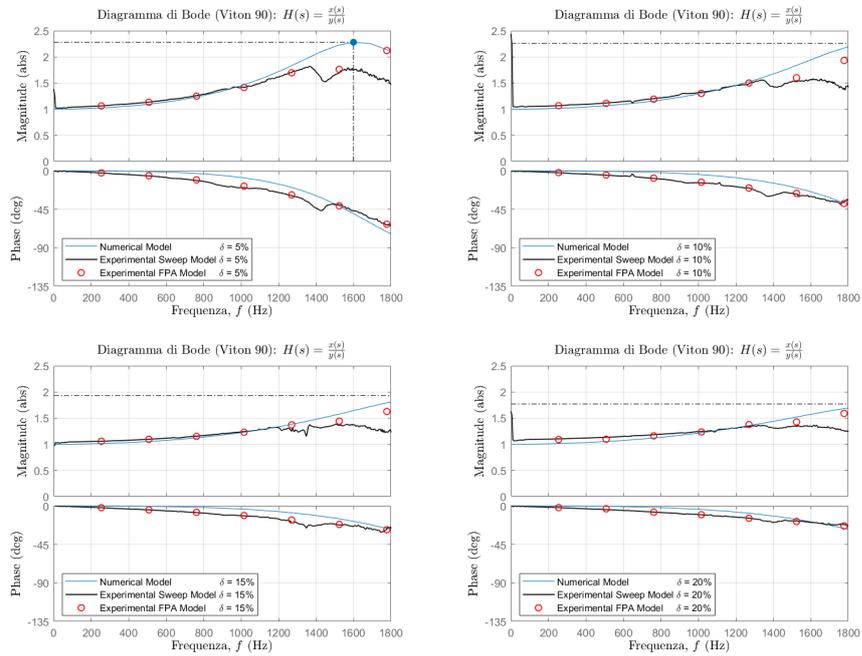


Figura 4.28: Viton 90: $H(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$ ($\delta = 5 \div 20\%$).

In tutti i casi, i risultati numerici approssimano abbastanza bene i valori sperimentali ottenuti per punti. Inoltre, è stato appurato che la prima metodologia, definita ad inizio paragrafo, non risulta coerente con il modello per punti oltre un certo valore di frequenza (i.e., $f = 1400Hz$) e, per questo, non viene compresa nei confronti successivi. le Incongruenze tra il modello numerico e il modello sperimentale sono più evidenti per elevati valori di frequenza, probabilmente a causa dell'incapacità dell'eccitatore modale di imprimere un livello di forza adeguato.

Verificata la bontà delle acquisizioni, è possibile valutare, in base alle tabelle seguenti, i termini di rigidezza e smorzamento per diversi livelli di Squeeze (ottenuti mediante sintonizzazione dei parametri del modello numerico).

O-Ring Viton 70			
$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=5\%)$	$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=10\%)$	$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=15\%)$	$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=20\%)$
0,90	1,41	1,90	2,46

Tabella 4.5: Rigidezza singolo O-Ring Viton 70.

O-Ring Viton 70			
$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=5\%)$	$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=10\%)$	$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=15\%)$	$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=20\%)$
78	107	108	137

Tabella 4.6: Smorzamento singolo O-Ring Viton 70.

O-Ring Viton 75			
$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=5\%)$	$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=10\%)$	$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=15\%)$	$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=20\%)$
2,20	3,88	3,80	5,40

Tabella 4.7: Rigidezza singolo O-Ring Viton 75.

O-Ring Viton 75			
$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=5\%)$	$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=10\%)$	$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=15\%)$	$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=20\%)$
248	351	340	431

Tabella 4.8: Smorzamento singolo O-Ring Viton 75.

O-Ring Viton 80			
$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=5\%)$	$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=10\%)$	$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=15\%)$	$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=20\%)$
2,34	2,80	3,75	4,76

Tabella 4.9: Rigidezza singolo O-Ring Viton 80.

O-Ring Viton 80			
$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=5\%)$	$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=10\%)$	$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=15\%)$	$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=20\%)$
216	225	257	323

Tabella 4.10: Smorzamento singolo O-Ring Viton 80.

O-Ring Viton 90			
$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=5\%)$	$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=10\%)$	$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=15\%)$	$k \left[\frac{MN}{m} \right] (\delta=20\%)$
3,20	4,63	5,70	5,90

Tabella 4.11: Rigidezza singolo O-Ring Viton 90.

O-Ring Viton 90			
$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=5\%)$	$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=10\%)$	$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=15\%)$	$c \left[\frac{Ns}{m} \right] (\delta=20\%)$
147	183	252	295

Tabella 4.12: Smorzamento singolo O-Ring Viton 90.

I dati ricavati durante l'attività sperimentale hanno permesso di valutare rigidezza e smorzamento (**Equazione 4.6**), all'aumentare della frequenza di eccitazione del sistema. Successivamente, è stato possibile effettuare una analisi comparativa tra i valori di rigidezza e smorzamento sia a parità di tipologia sia a parità di precompressione radiale. Per il primo caso, è possibile fare riferimento a **Figura 4.29, 4.30, 4.31, 4.32**; per il secondo caso, è possibile fare riferimento a **Figura 4.33, 4.34, 4.35, 4.36**.

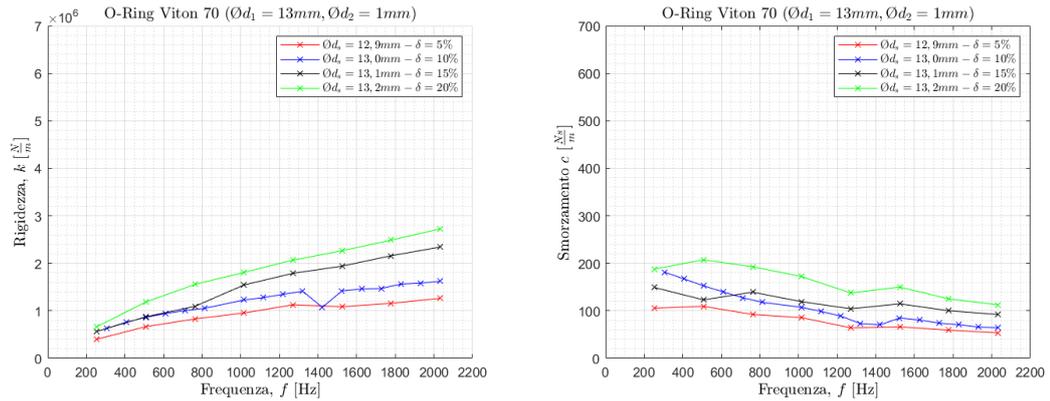


Figura 4.29: Viton 70 ($\delta = 5 \div 20\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.

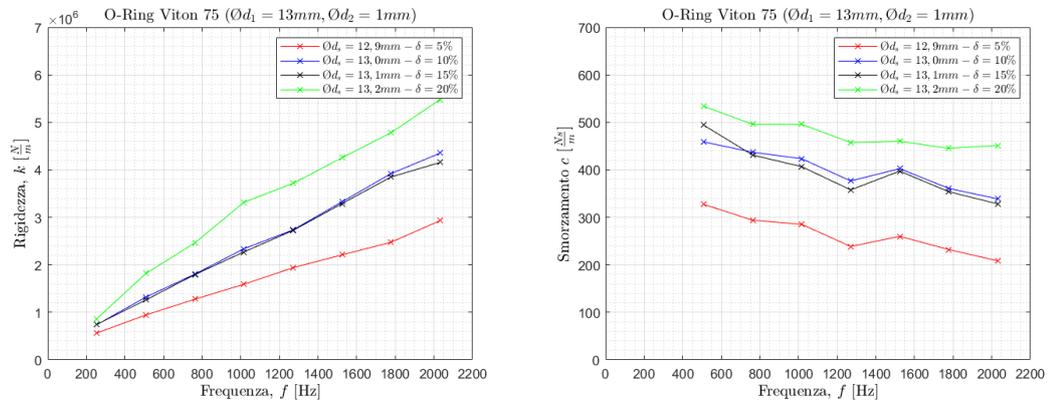


Figura 4.30: Viton 75 ($\delta = 5 \div 20\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.

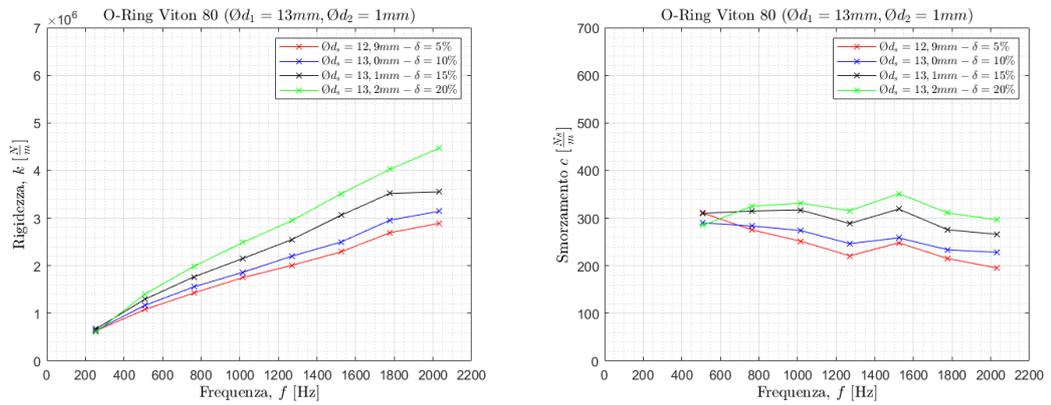


Figura 4.31: Viton 80 ($\delta = 5 \div 20\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.

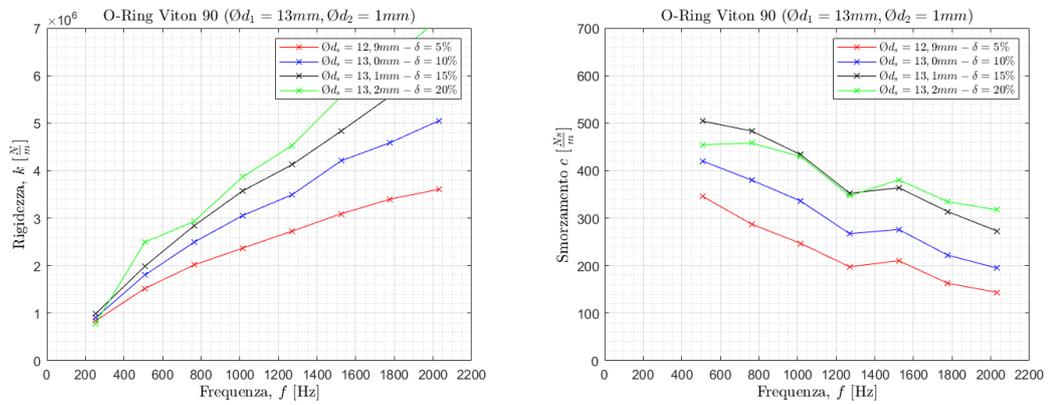


Figura 4.32: Viton 90 ($\delta = 5 \div 20\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.

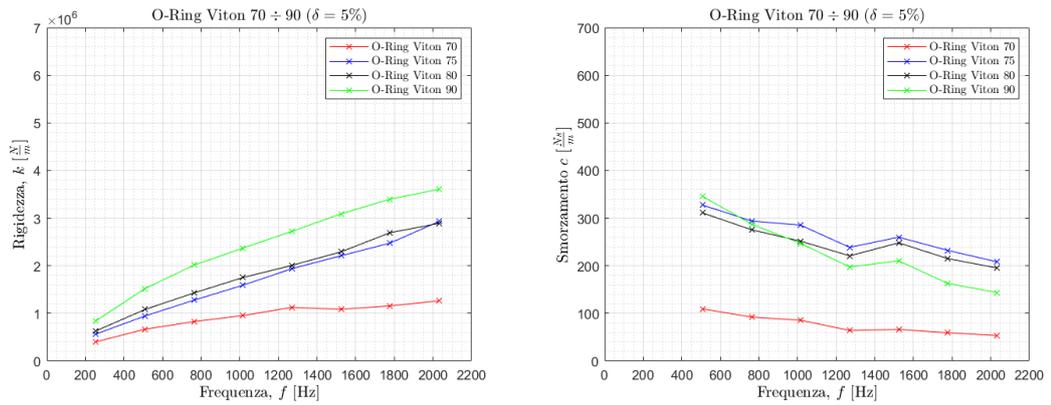


Figura 4.33: Viton 70 ÷ 90 ($\delta = 5\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.

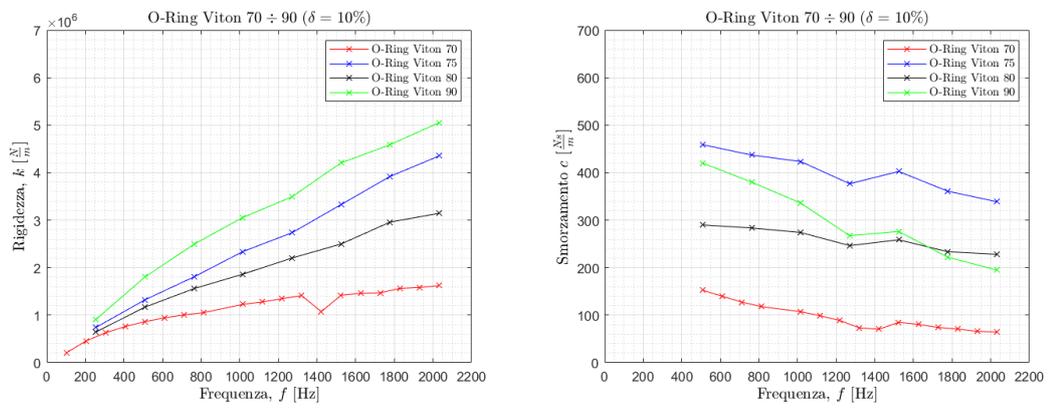


Figura 4.34: Viton 70 ÷ 90 ($\delta = 10\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.

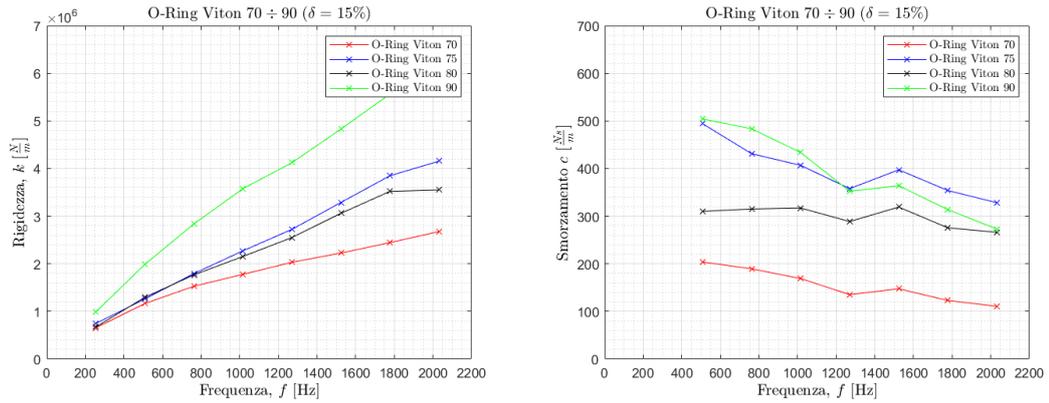


Figura 4.35: Viton 70 ÷ 90 ($\delta = 15\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.

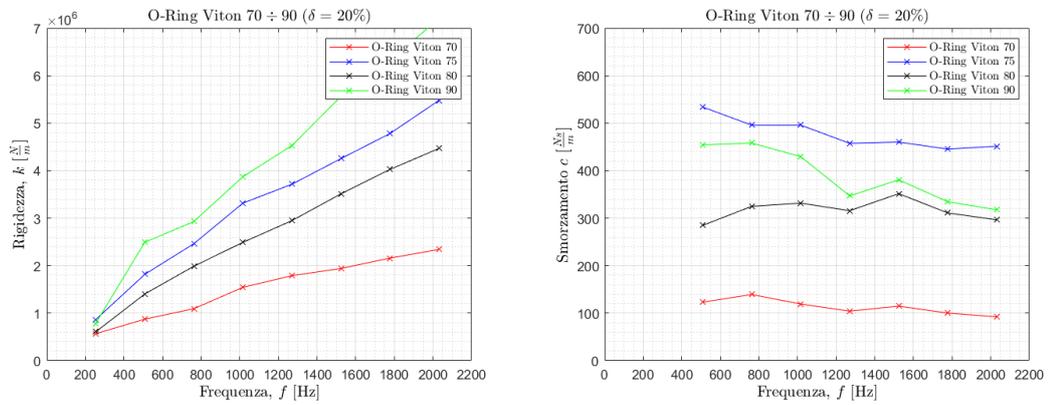


Figura 4.36: Viton 70 ÷ 90 ($\delta = 20\%$) (a) Rigidezza (b) Smorzamento.

Alcuni punti sperimentali non seguono strettamente l'andamento del modello numerico. È possibile che tale condizione sia dovuta al fenomeno di antirisonanza. L'antirisonanza è una condizione di ampiezza di vibrazione minima per una particolare frequenza. È causata da interferenze distruttive (e.g., interazione tra una forza esterna e un oscillatore). Inoltre, le antirisonanze di un sistema sono indipendenti dalle proprietà dell'oscillatore (i.e., non cambiano se la frequenza di risonanza o lo smorzamento dell'oscillatore vengono alterati).

Per valutare dal punto di vista statistico l'insieme di termini ottenuto, è stata condotta una analisi di "regressione"¹² mediante MATLAB® per ogni set di valori di k e c a disposizione. Tale tecnica viene usata per analizzare il rapporto causa-effetto che intercorre tra una variabile indipendente ed una dipendente e descrivere al meglio l'evoluzione di una quantità mediante una curva che approssima al meglio i dati di partenza. È doveroso verificare le assunzioni alla base dell'analisi, nonostante non sia necessario né conoscere a priori i processi che hanno generato i dati né la distribuzione di probabilità degli errori ad essi collegati. alla base della "regressione" è possibile collocare il principio di massima verosimiglianza, necessario all'introduzione del metodo dei minimi quadrati (utilizzato per le analisi sperimentali). Il principio della massima verosimiglianza enuncia che il valore più attendibile di una serie di misure caratterizzate da errori casuali distribuiti secondo la stessa legge normale (e in assenza di errori sistematici) è dato dalla loro media aritmetica. Il metodo dei minimi quadrati è una diretta conseguenza di tale principio. L'ipotesi alla base stabilisce che il valore più attendibile di una grandezza corrisponde a quello per cui è minima la somma dei quadrati degli scarti divisi per $2\sigma^2$, nel caso in cui le misure provengano da n distribuzioni differenti, ognuna caratterizzata dalla propria varianza σ^2 . In questo caso, considerando la distribuzione come uguale per ogni set di dati, il valore più attendibile corrisponde alla media aritmetica. Invece, Nel caso di osservazioni provenienti da distribuzioni differenti, il valore più attendibile è la media pesata delle osservazioni.

In relazione ai risultati sperimentali, studi precedenti hanno confermato che la relazione che lega frequenza f e rigidità k è lineare; la relazione tra frequenza f e smorzamento c ha, invece, un andamento quadratico. Nel primo caso, risulta di fondamentale importanza determinare i coefficienti m e q della relazione:

$$y = mx + q \quad (4.13)$$

In cui il termine y al primo membro definisce la grandezza fisica investigata per diversi valori misurati della grandezza x al secondo membro. È naturale aspettarsi che la distribuzione dei dati non segua una linea retta ma seguano un ordine casuale. L'obiettivo è trovare la retta che, adattandosi bene ai dati, permette di rendere minima la differenza dei quadrati degli scarti. I valori m e q , costituiscono misure indirette di grandezze fisiche: è importante valutare quali siano le loro deviazioni standard (i.e., stime delle indeterminazioni associate alle grandezze fisiche corrispondenti a m e q).

¹²Per saperne di più:

<https://it.mathworks.com/help/stats/fitlm.html#t0ck7o-modelspec>

<https://it.mathworks.com/help/matlab/ref/interp1.html>

Per quanto riguarda la "regressione" non lineare, adottata in questo elaborato riguardo il coefficiente di smorzamento, non esiste un metodo generale per determinare i valori dei parametri che garantiscono la migliore interpolazione dei dati. È possibile ricorrere a classi di algoritmi numerici di ottimizzazione che, a partire da valori preliminari casuali, permettono di ottenere risultati ottimali. Un metodo più semplice consiste nell'esprimere un andamento secondo l'**Equazione 4.14**:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (4.14)$$

Si rimanda a testi specifici per l'analisi del sistema di equazioni risultante.

Nel momento in cui si effettuano delle prove sperimentali, è ragionevole supporre che i dati su cui viene effettuata la "regressione" siano correlati. Non sempre è possibile verificare la correlazione tra due grandezze. In questo caso, il coefficiente di correlazione è uno strumento atto a definire la bontà della correlazione tra due grandezze. Considerando il caso lineare come il più semplice, è possibile definire la condizione limite in cui i dati si trovano esattamente su una retta; secondo questo ragionamento, le due rette dovrebbero coincidere definendo la condizione di correlazione lineare:

$$m \cdot m_1 \simeq 1 \quad (4.15)$$

In assenza di correlazione, la condizione limite impone che il prodotto dei termini presenti in **Equazione 4.15** sia pari a zero. Si introduce pertanto il coefficiente $r = \sqrt{m \cdot m_1}$, allo scopo di stimare la linearità della correlazione tra due insiemi di dati. Più $r \simeq \pm 1$, più è probabile che gli insiemi siano tra loro linearmente correlati. La condizione opposta si verifica nel caso in cui $r \simeq 0$. [23]

In (Tabella 4.13 e Tabella A.1) è possibile vedere un estratto dei risultati di "regressione" per Viton 70.

Modello di "regressione" lineare (MATLAB®): $y \sim 1 + x$				
-	Estimate	SE	tStat	pValue
Intercept	461351	64504	7	$1,62 \cdot 10^{-6}$
x	617	52	12	$1,34 \cdot 10^{-9}$

Tabella 4.13: Coefficienti di "regressione" (Viton 70, $\delta = 5\%$).

Output data (MATLAB®)	
Number of observations	19
Error degrees of freedom	17
Root Mean Squared Error	$1,37 \cdot 10^5$
R-squared	0,891
Adjusted R-Squared	0,884
F-statistic vs. Constant model	139
P-value	$1,35 \cdot 10^{-9}$

Tabella 4.14: Dati di output (Viton 70, $\delta = 5\%$).

È importante valutare la consistenza dei dati. Tutte le misure sono affette da errori sia sistematici sia casuali. Non esistono regole generali per limitare gli errori sistematici; è importante individuarli ed eliminarli, poiché non è possibile analizzarli statisticamente (condizione possibile sono per gli errori casuali, distribuiti secondo leggi semplici modellabili numericamente). L'esistenza di errori sistematici può arrivare a definire la inconsistenza statistica tra due serie di misure attraverso la differenza tra i valori medi e tra le deviazioni standard delle due serie di misure (i.e., la prima differenza molto maggiore della seconda). [23]

Le figure seguenti mostrano le curve interpolatrici dei minimi quadrati per tutte le tipologie di O-Ring analizzate, sulla base dei punti sperimentali elaborati. Se per la rigidità è vero che è sufficiente un numero non troppo elevato di punti per un'opportuna caratterizzazione, ciò non è altrettanto vero per lo smorzamento il quale, in alcuni casi, può non risultare in accordo con gli studi effettuati precedentemente. La stima è stata accompagnata da un intervallo di valori plausibili (intervallo fiduciario) entro cui può ricadere il parametro, considerando un valore di attendibilità del metodo di stima pari a $s = 95\%$.

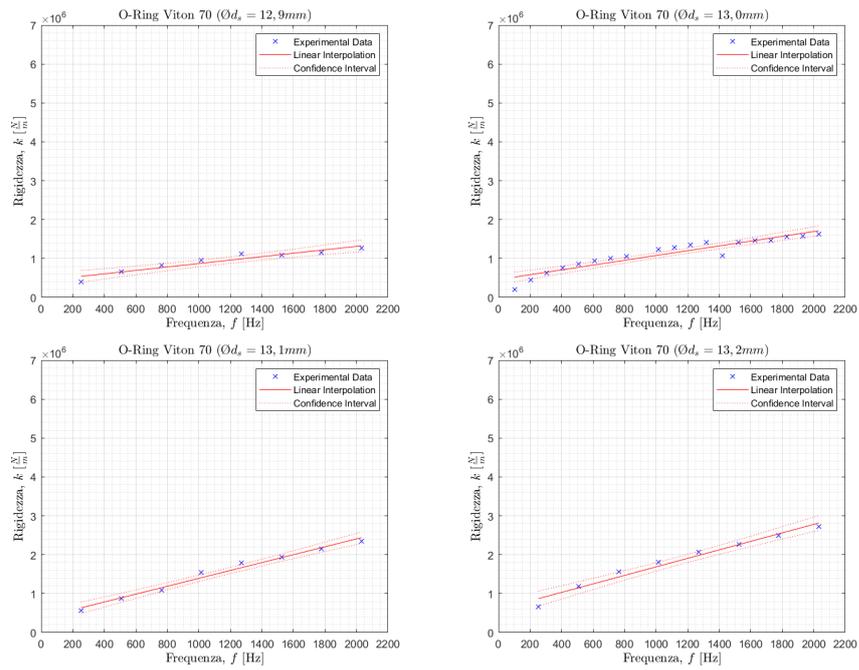


Figura 4.37: "Regressione" lineare, k (Viton 70, $\delta = 5 \div 20\%$).

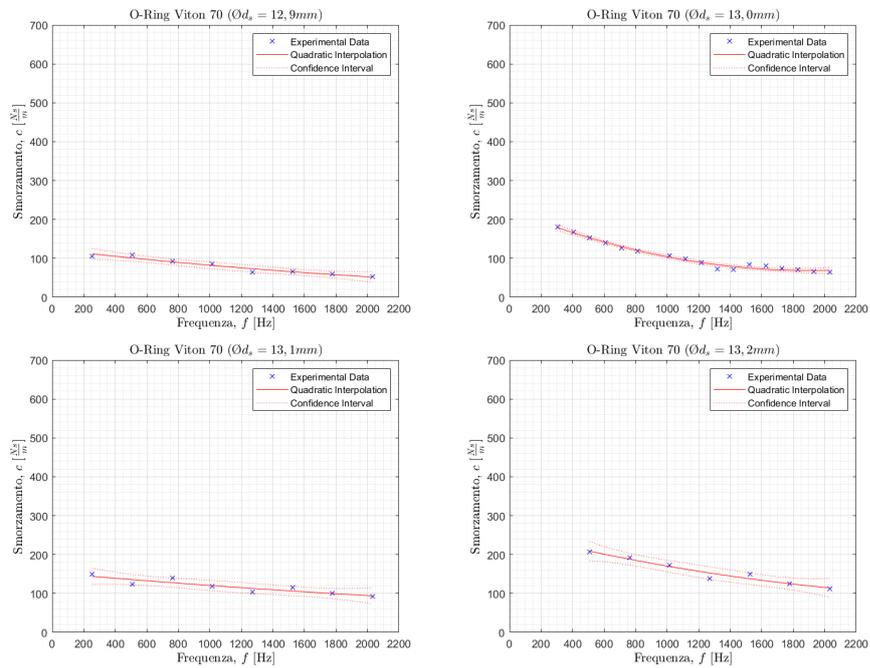


Figura 4.38: "Regressione" quadratica, c (Viton 70, $\delta = 5 \div 20\%$).

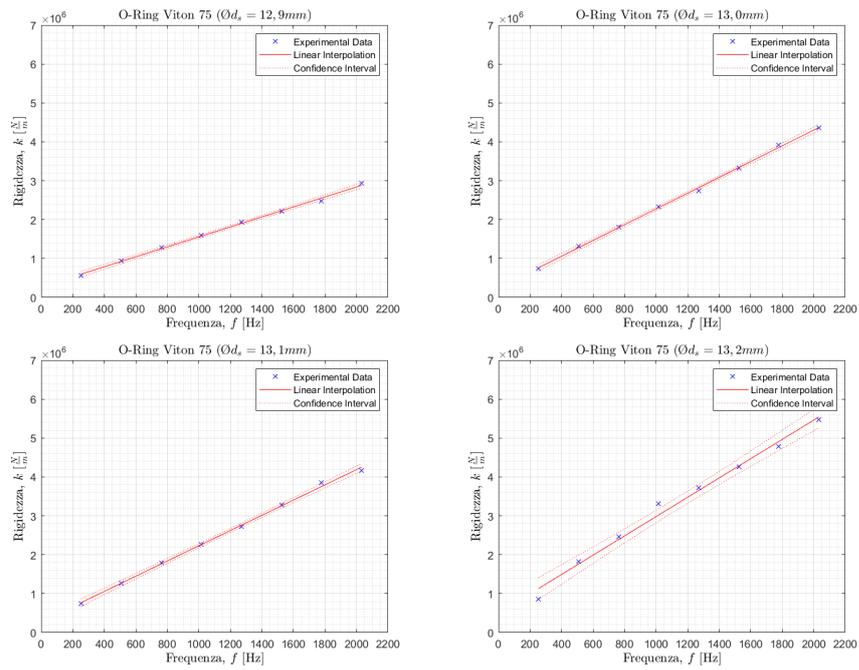


Figura 4.39: "Regressione" lineare, k (Viton 75, $\delta = 5 \div 20\%$).

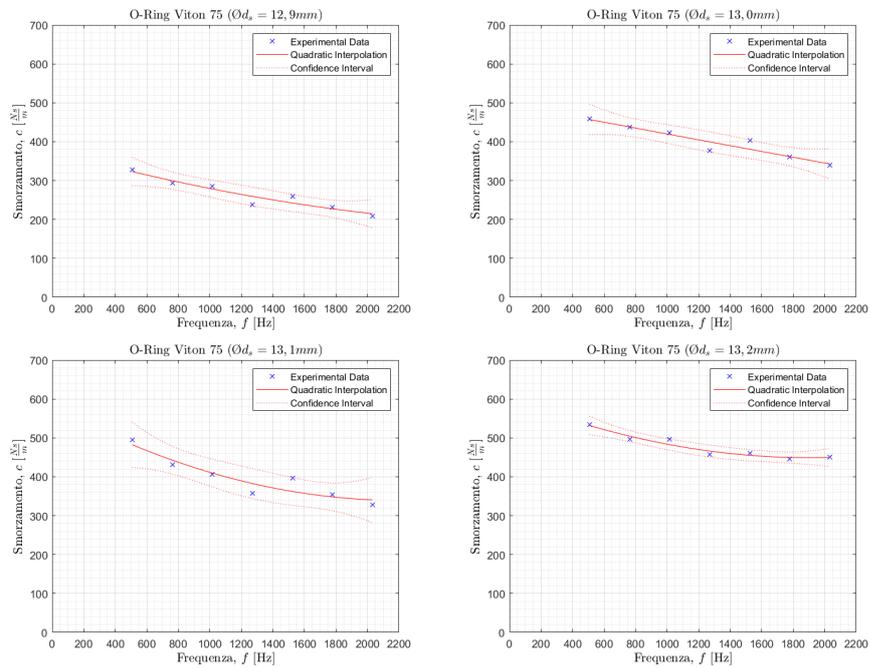


Figura 4.40: "Regressione" quadratica, c (Viton 75, $\delta = 5 \div 20\%$).

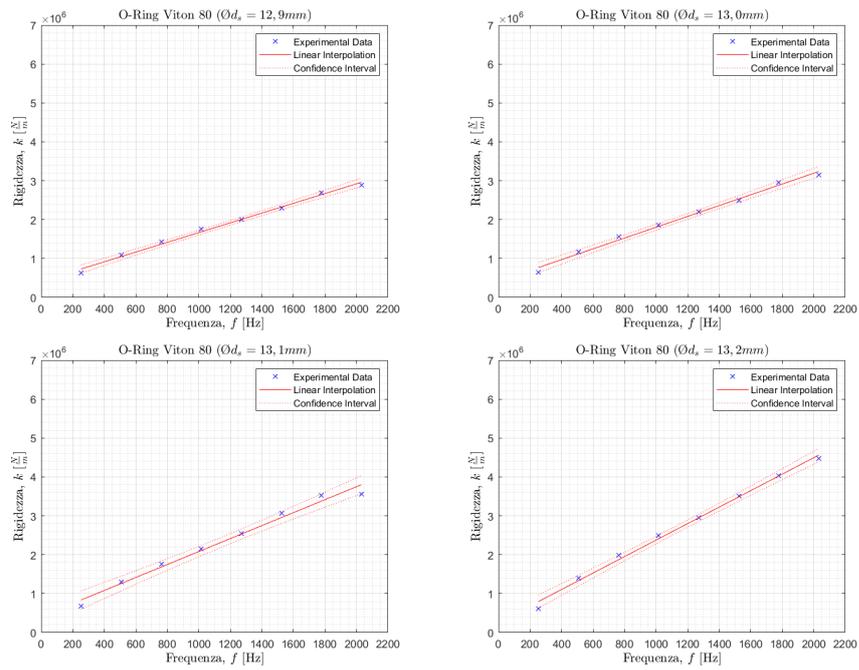


Figura 4.41: "Regressione" lineare, k (Viton 80, $\delta = 5 \div 20\%$).

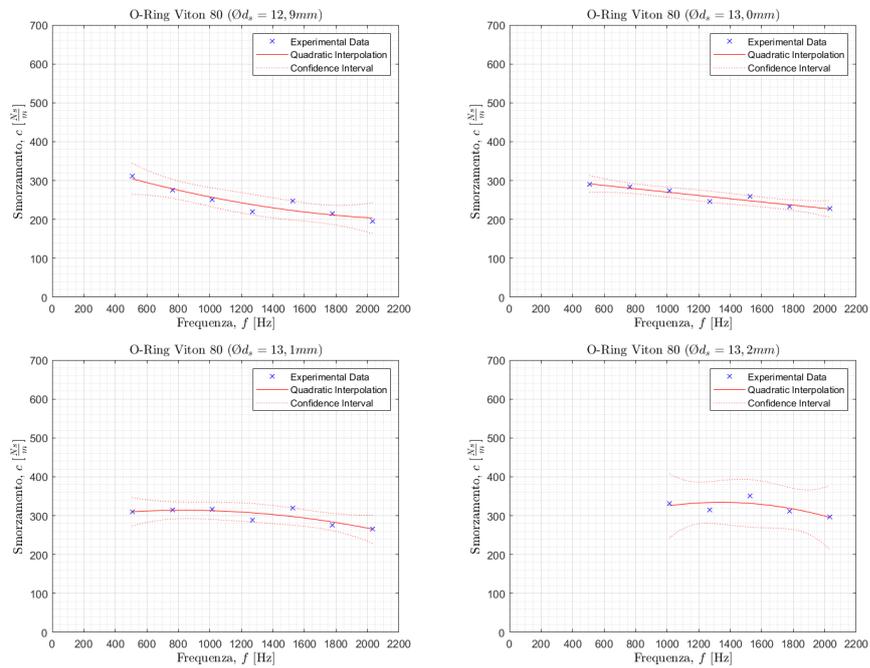


Figura 4.42: "Regressione" quadratica, c (Viton 80, $\delta = 5 \div 20\%$).

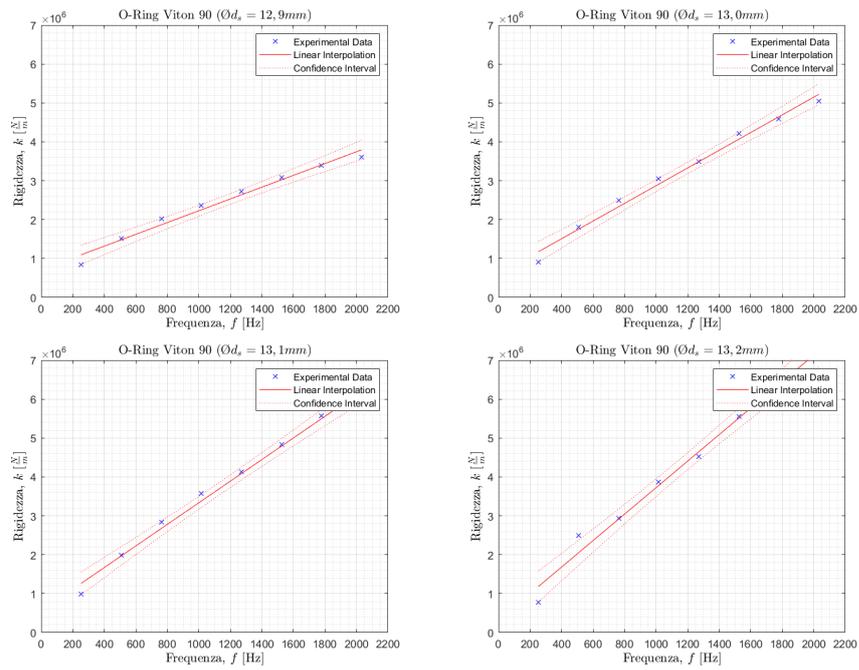


Figura 4.43: "Regressione" lineare, k (Viton 90, $\delta = 5 \div 20\%$).

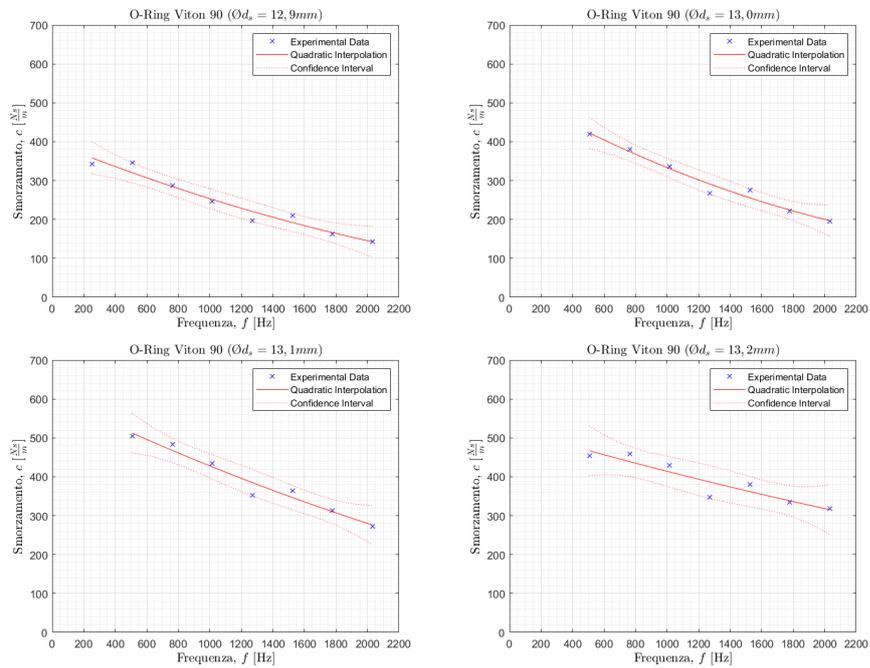


Figura 4.44: "Regressione" quadratica, c (Viton 90, $\delta = 5 \div 20\%$).

Capitolo 5

Applicazioni per O-Ring: Cuscinetti a gas

La lubrificazione a gas è un ramo della lubrificazione a film fluido. L'impiego di un fluido comprimibile in pressione che scorre tra due superfici solide permette di diminuire l'attrito tra le stesse. A seconda del principio fisico mediante il quale si ottiene la distribuzione di pressione all'interno del meato, è possibile distinguere tra cuscinetti aerodinamici (i.e., *self-acting gas bearing*) e aerostatici (i.e., *Externally pressurised gas bearing*). Lo spessore del film di gas può variare da pochi a decine di micrometri. Esiste un'ampia gamma di configurazioni. [24] La classificazione può essere dinamica (se ci si riferisce al modo in cui viene generata la forza portante), o cinematica, in relazione al movimento dell'elemento portante.

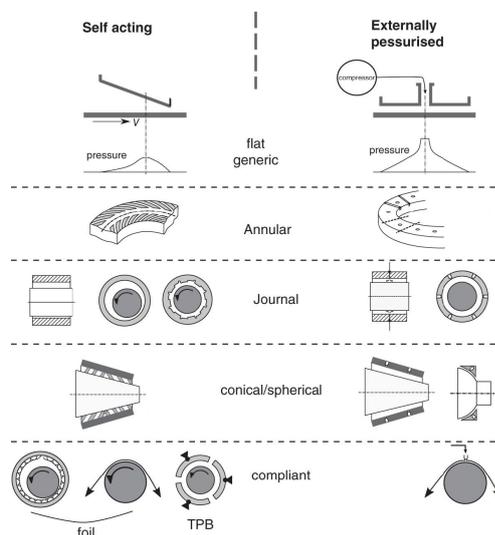


Figura 5.1: Classificazione dei cuscinetti a gas. [24]

Ad oggi, la lubrificazione a gas è in continuo sviluppo, in quanto le richieste da parte dell'industria sono sempre più esigenti. Le applicazioni principali riguardano l'alta velocità e l'alta precisione, per le quali è possibile fare riferimento alla bassa viscosità del gas, grazie alla quale la generazione di calore per attrito è notevolmente ridotta. La capacità di lubrificazione e le caratteristiche dinamiche dei gas impiegate sono correlate alle loro proprietà fisiche. Per quanto riguarda i cuscinetti radiali, tra i principali vantaggi è possibile citare la bassa tendenza, da parte del gas, al cambiamento di fase, permettendo elevate temperature di impiego (e.g., $T = 650^{\circ}C$). I principali svantaggi (legati alla bassa viscosità e alla comprimibilità) riguardano:

- La ridotta capacità di carico;
- La ridotta rigidezza relativa;
- Lo smorzamento ridotto.

La previsione delle caratteristiche del cuscinetto permette di valutare, approssimativamente, capacità di carico, consumo di gas e perdite per attrito. D'altra parte, l'analisi del comportamento dinamico dell'intero sistema permette di valutare le instabilità che ne limitano gli impieghi. In generale, esistono due tipi di instabilità per sistemi supportati da cuscinetti a gas: *Pneumatic hammer* e *Asynchronous rotor whirl*. La prima tipologia di vibrazione dipende dal ritardo tra la variazione di meato e la corrispondente variazione di pressione. La seconda tipologia è dovuta alla progressiva perdita di smorzamento da parte del sistema. La natura dell'instabilità è diversa rispetto al fenomeno di precessione sincrono, cioè la risposta passiva allo sbilanciamento residuo del rotore, dovuta al bilanciamento ridotto in condizioni reali. [25]

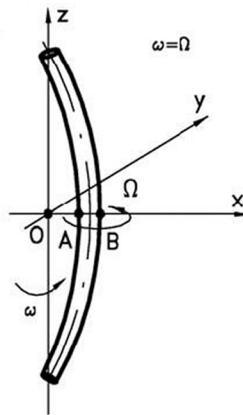


Figura 5.2: *Synchronous whirling, $\omega = \Omega$.* [26]

È impossibile, infatti, pensare che centro geometrico e centro di massa coincidano perfettamente. Nel caso di precessione sincrona, La rotazione attorno al centro geometrico impone una forza/coppia che determina un moto sincrono con la velocità di rotazione (i.e., $\omega = \Omega$). Se il rotore è ben bilanciato, non si verificano situazioni pericolose. Al contrario, il fenomeno asincrono è di natura più distruttiva. [27]

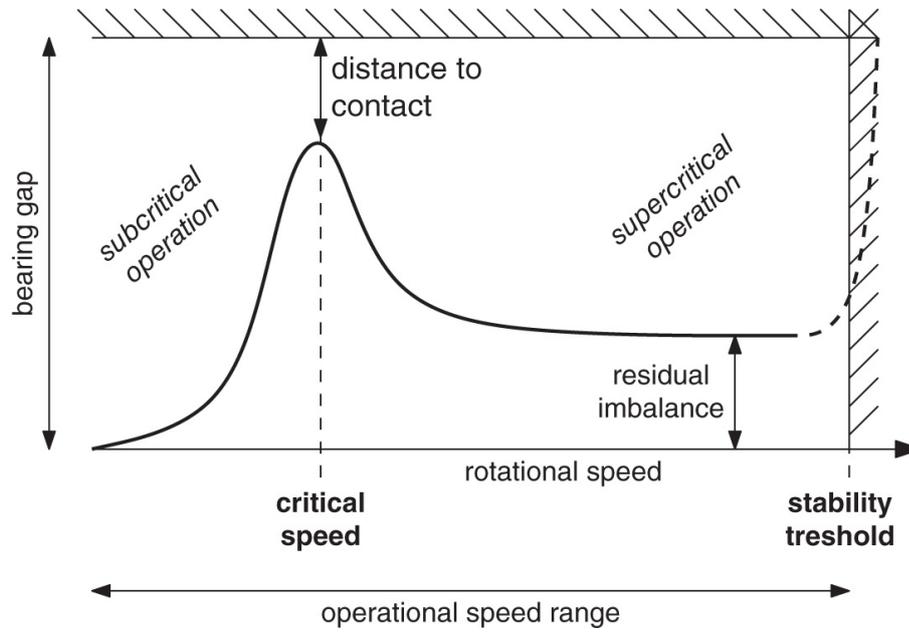


Figura 5.3: Analisi qualitativa della risposta sincrona del cuscinetto. [24]

In base a **Figura 5.3**, è possibile constatare che, per velocità ridotte, l'ampiezza sia qualitativamente bassa (campo subcritico). In questo caso, l'effetto della forza centrifuga è ridotto. Esiste un massimo locale in corrispondenza della velocità critica, il quale può essere superato mediante un opportuno bilanciamento del rotore. Superato questo limite, l'ampiezza si riduce fino ad un valore di sbilanciamento residuo. Il campo operativo supercritico determina, successivamente, l'insorgenza di uno sbilanciamento tale da danneggiare il sistema.

Il moto di precessione dell'albero non preclude (totalmente) la stabilità del sistema. La stabilità può essere classificata in due categorie:

- Stabilità puntuale (**Figura 5.4a**);
- Stabilità orbitale (**Figura 5.4b**).

La prima tipologia prevede che il rotore ritorni nella sua configurazione di rotazione originale, data una perturbazione esterna. La seconda, invece, fa riferimento ad un'orbita stabile (sufficientemente ridotta) che il rotore descrive all'interno del cuscinetto. È anche possibile che il sistema si trovi in condizioni caotiche di lavoro (**Figura 5.4e** e **Figura 5.4f**), le quali sono difficilmente modellabili numericamente. Esse possono essere tali da distruggere repentinamente il sistema in esercizio. [24]

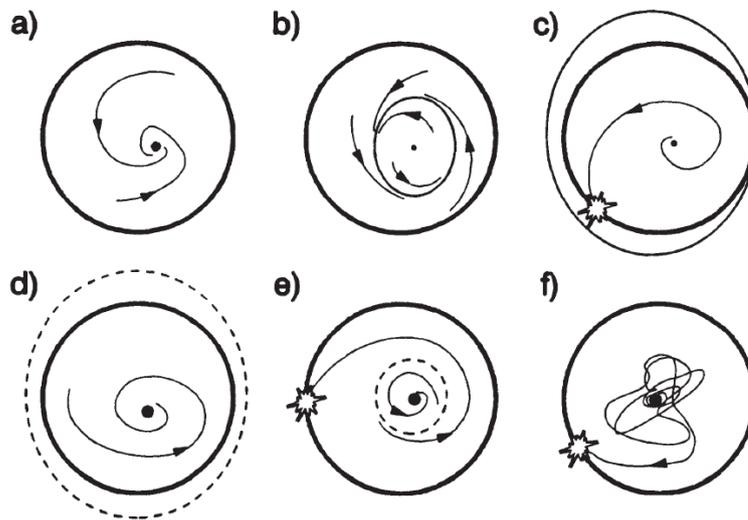


Figura 5.4: Gradi di stabilità. [27]

Le sezioni successive analizzano come modellare un sistema rotore-cuscinetto (radiale) e come i parametri degli O-Ring, analizzati nel **Capitolo 4**, influiscono sulla stabilità di un sistema, rispettivamente a due e quattro gradi di libertà.

5.1 Modellazione del sistema

La presente sezione analizza la modellazione di un cuscinetto dinamico radiale a gas (i.e., *Dynamic Journal Bearing*). Il cuscinetto forma un manicotto intorno all'albero (**Figura 5.5a**). Gran parte delle applicazioni industriali necessita che la superficie esterna dell'alloggiamento del rotore sia fissata esternamente. La sezione è propedeutica all'inserimento degli O-Ring all'interno del modello.

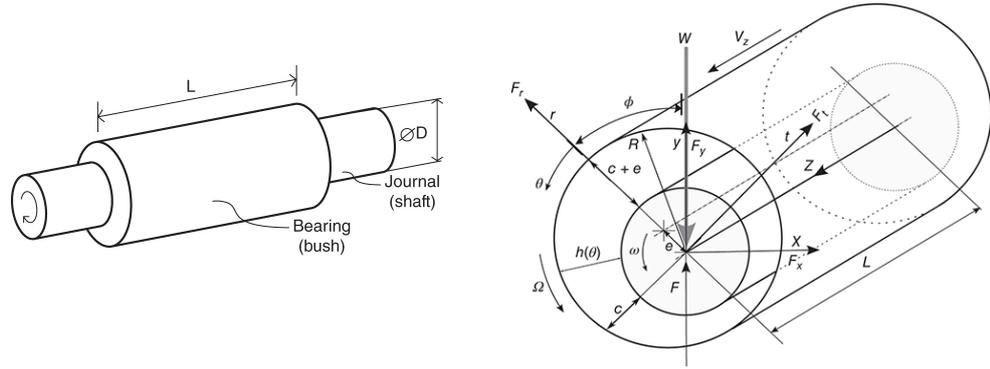


Figura 5.5: Cuscinetto radiale (a) Modello generale (b) Notazione. [24]

A seconda del tipo di cuscinetto in uso, i parametri geometrici possono essere molto influenti sia sulla rigidezza che sul coefficiente di smorzamento. Lo svantaggio principale riguarda l'estrema sensibilità all'instabilità dinamica citata precedentemente. In base al modello ideale in **Figura 5.5b**, è possibile distinguere:

- Raggio R [m];
- Gioco radiale c [m];
- Lunghezza del cuscinetto L [m];
- Eccentricità dell'albero rispetto al centro del cuscinetto e [m];
- *Gap function* $h(\theta) = c + e \cos \theta + O(\frac{c^2}{R}) \simeq c + e \cos \theta$ (se $\frac{c}{R} \ll 10^{-2}$).

L'ultimo parametro rappresenta la distanza nominale tra alloggiamento e cuscinetto quando i loro assi rimangono paralleli ma traslati di una quantità e (i.e., eccentricità). Il principio alla base della teoria della lubrificazione è l'equazione differenziale di Reynolds [28], la quale descrive la distribuzione di pressione nel film di fluido. Essa è interpretabile a seconda del sistema di coordinate preso in considerazione (e.g., cartesiano). In questo caso:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} - \rho \frac{V_z h}{2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \rho \frac{R(\Omega + \omega)h}{2} \right) = \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (5.1)$$

Impostando $H = \frac{h}{c}$, $\mathcal{Q} = \frac{\rho}{\rho_a}$, $P = \frac{p}{p_a}$, $\tau = \nu t$ e normalizzando rispetto a R , c , L , p_a , μ , ν , è possibile ottenere:

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(H^3 \mathcal{Q} \frac{\partial P}{\partial Z} - \Lambda_z H \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 \mathcal{Q} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \mathcal{Q} \Lambda_r H \right) = \sigma \frac{\partial(\mathcal{Q}H)}{\partial \tau} \quad (5.2)$$

Dove $-\frac{L}{D} \leq Z \leq \frac{L}{D}$. Tra i termini più importanti, figurano:

- $\Lambda_z = \frac{6\mu V_z}{p_a} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \simeq 0$ (i.e., *sliding number*);
- $\Lambda_r = \frac{6\mu(\Omega+\omega)}{p_a} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \simeq \Lambda = \frac{6\mu\omega}{p_a} \left(\frac{R}{c} \right)^2$ (i.e., *bearing number*, caso $\Omega = 0$);
- $\sigma = \frac{12\mu\nu}{p_a} \left(\frac{R}{c} \right)^2$ (i.e., *squeeze number*, con ν frequenza di eccitazione esterna).

Inoltre, è possibile riscrivere la *Gap Function* come:

$$H = \frac{h}{c} = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (5.3)$$

Il termine ε rappresenta il rapporto di eccentricità (i.e., $\varepsilon = \frac{e}{c}$). È possibile semplificare l'analisi basando la caratterizzazione del cuscinetto¹ su una serie di parametri adimensionali (i.e., $\frac{L}{D}$, ε , Λ , σ).

¹Per un cuscinetto assialsimmetrico, l'albero è in equilibrio statico nella sua posizione concentrica (il carico netto è nullo). In questa posizione, la rigidità radiale k_r è massima. È più utile considerare la rigidità radiale in posizione concentrica come una caratteristica del cuscinetto al posto del carico. Se la rigidità radiale è massima nella posizione concentrica, il carico sostenibile da parte del cuscinetto è $W \leq k_r e$; il carico massimo è $W_{max} \leq k_r c$. [24]

5.1.1 Caratteristiche del sistema

Forze (film di gas)

Con riferimento alla notazione tipica (**Figura 5.5b**), le forze principali inerenti al film di fluido nelle principali direzioni (r, t) , sono:

$$F_r = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (p - p_a) \cos \theta R d\theta dz \quad (5.4)$$

$$F_t = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (p - p_a) \sin \theta R d\theta dz \quad (5.5)$$

E:

$$W = \sqrt{F_r^2 + F_t^2} \quad \phi = \arctan \left(\frac{F_t}{F_r} \right) \quad (5.6)$$

È possibile calcolare le forze nelle direzioni (x, y) , scelte come sistema di coordinate:

$$F_x = -F_r \sin \phi + F_t \cos \phi \quad (5.7)$$

$$F_y = F_r \cos \phi + F_t \sin \phi \quad (5.8)$$

Rigidezza e smorzamento

Per la presente sezione, è possibile fare riferimento a **Figura 5.6**:

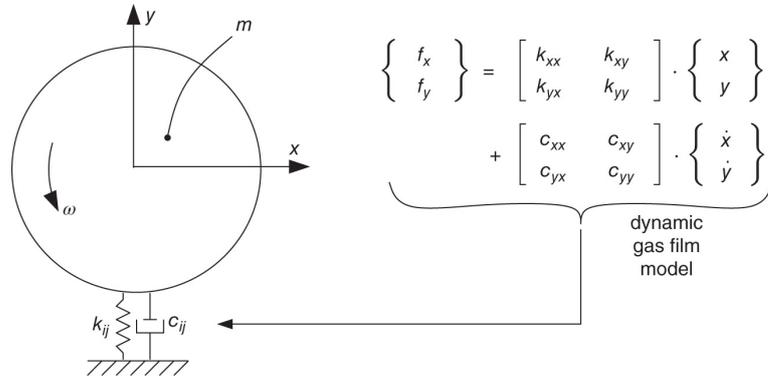


Figura 5.6: Sistema Rotore-Cuscinetto con supporto rigido. [25]

Rigidezza e smorzamento possono essere identificati per la formulazione generale della forza dinamica del film $\vec{f} = (f_x, f_y)$:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Il termine k_{ij} rappresenta la reazione del film, nella i -esima direzione, ad uno spostamento nella j -esima direzione; il coefficiente c_{ij} è definito allo stesso modo; i termini f_x ed f_y sono le forze dinamiche agenti sul rotore. Le equazioni del moto [25], a partire dalle quali è possibile definire un primo criterio di stabilità, sono presentate di seguito (**Equazione 5.10** ed **Equazione 5.11**):

$$m\ddot{x} + c_{ii}\dot{x} + c_{ij}\dot{y} + k_{ii}x + k_{ij}y = 0 \quad (5.10)$$

$$m\ddot{y} + c_{ii}\dot{y} - c_{ij}\dot{x} + k_{ii}y - k_{ij}x = 0 \quad (5.11)$$

È possibile ottenere le caratteristiche dinamiche del film di fluido mediante integrazione della pressione di perturbazione dinamica Δp sulla superficie del cuscinetto:

$$\Delta p = \Delta p_k + j\nu\Delta p_c \quad (5.12)$$

Dove:

- Δp_k è la componente in fase responsabile della rigidezza;
- Δp_c è la componente non in fase responsabile del coefficiente di smorzamento.

I coefficienti dinamici sono ottenibili, per una data ω [$\frac{rad}{s}$] e ε [m], mediante perturbazione del rotore in entrambe le direzioni x , y (per piccole perturbazioni Δx , Δy a cui è soggetto il rotore. Alcuni coefficienti vengono presentati di seguito:

$$k_{xx} = \frac{-\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (\Delta p_k) \cos \theta r d\theta dz}{\Delta x} \quad k_{yx} = \frac{-\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (\Delta p_k) \sin \theta r d\theta dz}{\Delta x} \quad (5.13)$$

$$c_{xx} = \frac{-\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (\Delta p_c) \cos \theta r d\theta dz}{\Delta x} \quad c_{yx} = \frac{-\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (\Delta p_c) \sin \theta r d\theta dz}{\Delta x} \quad (5.14)$$

Per un sistema simmetrico (i.e., $\varepsilon \simeq 0$) a due gradi di libertà con $\omega > 0$, $\nu \simeq 0$:

$$k_{xx} = k_{yy} > 0 \quad k_{xy} = -k_{yx} > 0 \quad (5.15)$$

$$c_{xx} = c_{yy} > 0 \quad c_{xy} = -c_{yx} > 0 \quad (5.16)$$

Questa semplificazione aiuta a comprendere meglio l'evoluzione dell'instabilità all'aumentare della velocità di rotazione del rotore. [24]

Normalizzazione dei parametri

È possibile adimensionalizzare carico, rigidezza e smorzamento:

$$\bar{W} = \frac{W}{p_a L D} \quad K_{ij} = k_{ij} \frac{c}{p_a L D} \quad C_{ij} = c_{ij} \frac{1}{3\mu L} \left(\frac{c}{D}\right)^3 \quad (5.17)$$

La completa caratterizzazione dinamica di un cuscinetto portante consiste nella successiva valutazione delle proprietà del film per diverse combinazioni di velocità di rotazione e frequenza di perturbazione. [24]

Portata massica

È possibile derivare la formula della portata massica adimensionale [24]:

$$\bar{m} = \frac{\dot{m} \mathcal{R} T_a 12\mu}{c^3 p_a} \quad (5.18)$$

Attrito, Coppia idrodinamica, Potenza

Per semplicità di trattazione, solo l'albero ruota con velocità angolare ω , mentre il cuscinetto è fermo (i.e., $\Omega = 0$). Lo sforzo di taglio su una superficie di appoggio è dovuta ad attrito viscoso e azione aerodinamica:

$$\tau_t = \left(-\frac{\mu}{h} \omega R \mp \frac{h}{2R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \frac{p_a c}{2R} \left(-\frac{\Lambda}{3H} \mp H \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \quad (5.19)$$

La convenzione di segno utilizzata è tale per cui la sollecitazione è negativa quando è nel senso opposto rispetto al verso di rotazione. Il primo termine è di attrito dissipativo; il secondo è dovuto all'azione aerodinamica.

Integrando τ_t su tutta la superficie di appoggio $A = \{0 \leq L, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ e moltiplicando per R , si ottiene la coppia di attrito totale e la potenza:

$$T_f = R \int_A \tau_t dA \Rightarrow P_f = T_f \omega \quad (5.20)$$

La dissipazione di potenza mediante attrito è responsabile della generazione della maggior parte del calore nel cuscinetto e aumenta con il quadrato della velocità. Nel caso di un cuscinetto auto-agente, la dissipazione di potenza aerodinamica (componente minoritaria, se paragonata all'attrito viscoso) è quella responsabile della capacità di carico. Una componente aggiuntiva di perdita è rappresentata dall'alimentazione del cuscinetto. [24]

5.1.2 Caratteristiche dinamiche

Le ipotesi alla base della sezione sono disponibili in letteratura [29]:

- $\Lambda_z = 0$;
- $\varepsilon \ll 1$;
- Moto assiale nullo;
- Compressione isoterma;
- $Q = P$ e stato stazionario.

In base a tali ipotesi, la **Equazione 5.2** si modifica di conseguenza. Attraverso una serie di passaggi, è possibile ottenere le componenti radiale (**Equazione 5.21**) e tangenziale (**Equazione 5.22**) della forza del cuscinetto:

$$F_r = \varepsilon p_a L D \left(\frac{\pi}{2} \right) \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{i\Lambda}{1+i\Lambda} \right) \left[1 - \frac{\tanh(\sqrt{1+i\Lambda}L/D)}{(\sqrt{1+i\Lambda}L/D)} \right] \right\} \quad (5.21)$$

$$F_t = \varepsilon p_a L D \left(\frac{\pi}{2} \right) \operatorname{Im} \left\{ \left(\frac{i\Lambda}{1+i\Lambda} \right) \left[1 - \frac{\tanh(\sqrt{1+i\Lambda}L/D)}{(\sqrt{1+i\Lambda}L/D)} \right] \right\} \quad (5.22)$$

$$\bar{F}_r + i\bar{F}_t = \left(\frac{i\Lambda}{1+i\Lambda} \right) \left\{ \left(\frac{i\Lambda}{1+i\Lambda} \right) \left[1 - \frac{\tanh(\sqrt{1+i\Lambda}L/D)}{(\sqrt{1+i\Lambda}L/D)} \right] \right\} \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad (5.23)$$

La soluzione (in forma chiusa) è utile per stimare le caratteristiche statiche e dinamiche. È possibile analizzare i valori di $\bar{F}_r = \frac{F_r}{\varepsilon p_a L D}$, $\bar{F}_t = \frac{F_t}{\varepsilon p_a L D}$, $\bar{W} = \frac{W}{\varepsilon p_a L D}$ (carico sul cuscinetto) e $\phi = \arctan\left(\frac{F_t}{F_r}\right)$ (angolo di carico) in funzione di $\Lambda = \frac{6\mu\omega}{p_a} \left(\frac{R}{c}\right)^2$.

La soluzione adimensionale può essere estesa al caso dinamico. Tale rielaborazione permette di valutare le caratteristiche del sistema indipendentemente dalla geometria. È possibile ottenere la soluzione generale per la rigidità dinamica:

$$K_{XX} = K_{YY} = \frac{1}{2}(\bar{F}_r(\Lambda - \sigma) + \bar{F}_r(\Lambda + \sigma)) \quad (5.24)$$

$$C_{XX} = C_{YY} = -\frac{1}{2\sigma}(\bar{F}_t(\Lambda - \sigma) - \bar{F}_t(\Lambda + \sigma)) \quad (5.25)$$

$$K_{YX} = -K_{XY} = \frac{1}{2}(\bar{F}_t(\Lambda - \sigma) + \bar{F}_t(\Lambda + \sigma)) \quad (5.26)$$

$$C_{YX} = -C_{XY} = -\frac{1}{2\sigma}(\bar{F}_r(\Lambda - \sigma) - \bar{F}_r(\Lambda + \sigma)) \quad (5.27)$$

I termini sopracitati vengono presentati di seguito:

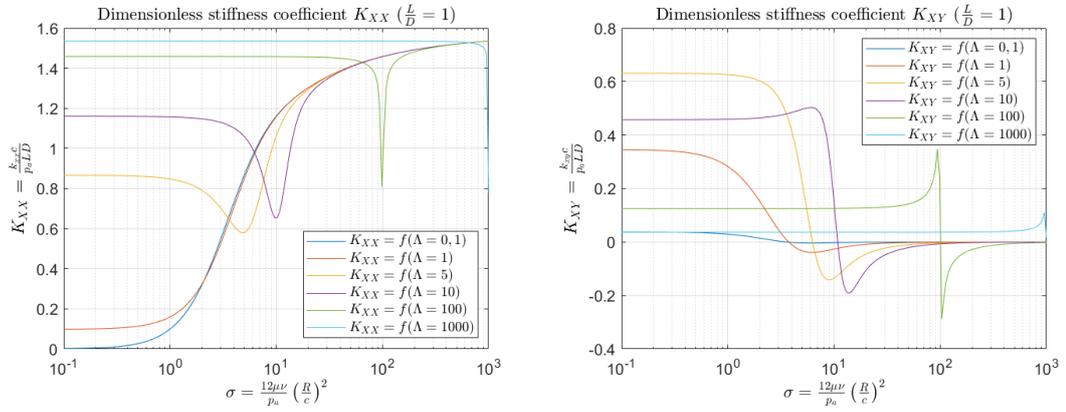


Figura 5.7: Coefficiente adimensionale di rigidità (a) K_{XX} (b) K_{XY} . [24]

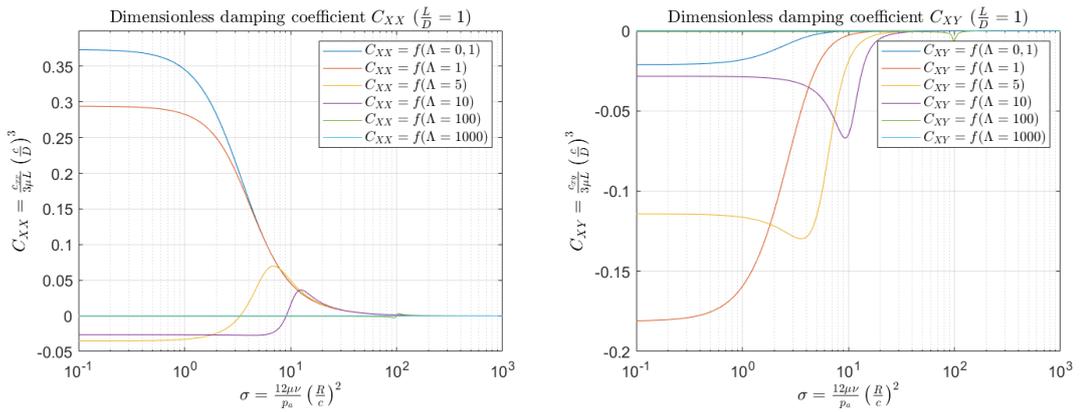


Figura 5.8: Coefficiente adimensionale di smorzamento (a) C_{XX} (b) C_{XY} . [24]

5.2 Stabilità del sistema

La presente sezione intende fornire una interpretazione fisica del meccanismo responsabile del moto di precessione del rotore. Ripercorrendo i passaggi inerenti al sistema in **Figura 5.6**, i coefficienti k_{ij} [$\frac{N}{\mu m}$] e c_{ij} [$\frac{Ns}{m}$] dipendono dalle condizioni di lavoro (ω [$\frac{rad}{s}$], ε [-], ϕ [rad]) e ν [Hz]. Lo studio permette di isolare i coefficienti responsabili del fenomeno. Il caso generale prevede otto coefficienti distinti. Per $\varepsilon \simeq 0$ (condizione vera per rotori verticali non caricati, applicabile anche ad altre situazioni), il sistema è simmetrico e caratterizzato da quattro parametri (**Equazione 5.15**). Nel dominio di Laplace:

$$\begin{bmatrix} ms^2 + c_{ii}s + k_{ii} & c_{ij}s + k_{ij} \\ -c_{ij}s - k_{ij} & ms^2 + c_{ii}s + k_{ii} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

La cui soluzione omogenea può essere espressa come:

$$\lambda_{1,2} \simeq \frac{-(c_{ii} + jc_{ij}) \pm \sqrt{(c_{ii} + jc_{ij})^2 - 4m(k_{ii} + ik_{ij})}}{2m} \quad (5.29)$$

A λ_1 è associato il moto di precessione in avanti, a λ_2 il moto all'indietro. La soluzione omogenea di un sistema lineare può essere espressa come:

$$\lambda = \eta + j\omega_d \quad (5.30)$$

Dove ω_d è la frequenza naturale smorzata del sistema, mentre:

$$\zeta = -\frac{\eta}{|\lambda|} = -\frac{\eta}{\omega_n} \quad (5.31)$$

In cui il rapporto di smorzamento descrive come le oscillazioni, in un sistema, si estinguono dopo un disturbo iniziale. Al fine di valutare le prestazioni, in termini di stabilità, dei cuscinetti a gas, esso è una misura generale di stabilità migliore rispetto alla parte reale della soluzione poiché rappresenta una proprietà adimensionale, scalata rispetto alla frequenza naturale del sistema. Il rapporto di un sistema è correlato al decremento logaritmico secondo la seguente relazione:

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5.32)$$

È necessario, quindi, adottare una strategia di soluzione iterativa (e.g., metodo di bisezione, ampiamente trattato in letteratura), poiché i coefficienti dinamici del film dipendono sia da ω sia da ν . Definito un insieme di variabili a monte della procedura (e.g., μ , c , L , etc.), i passi del metodo da seguire sono descritti come segue:

- Si definisce un intervallo per la velocità di rotazione ω in esame;
- Si calcola, per ogni valore dell'intervallo, il corrispondente *Bearing Number* Λ .

È necessario sviluppare un ciclo iterativo all'interno del ciclo iterativo. Si calcolano gli autovalori λ_i dei moti di precessione, definendo:

- Gli estremi del metodo iterativo scelto (i.e., σ_{min} , σ_{max});
- Il valore σ iniziale di convergenza del metodo;
- Un numero finito e ragionevole di iterazioni;
- Le corrispondenti frequenze di perturbazione ν_i , le forze agenti sul cuscinetto, le rigidità e smorzamenti dimensionali;
- Le equazioni di secondo grado $\lambda_{1,2}$.

A questo punto, si confronta la parte immaginaria ω_{di} degli autovalori con la frequenza ν_i . Se l'intervallo ottenuto è maggiore, si prende un intervallo di frequenze superiore, viceversa minore. Il risultato finale del processo fornisce, in uscita:

- La frequenza di perturbazione ν_i ;
- La frequenza naturale smorzata ω_d ;
- Il fattore di smorzamento ζ_i .

Si ripete il procedimento fino al sopraggiungere della condizione $\text{Im}(\lambda_i) \simeq \nu_i$. Facendo riferimento al metodo di iterazione scelto, **Figura 5.9** espone i risultati della procedura nel caso in cui gli estremi del metodo di bisezione coincidano con il parametro σ scelto (i.e., $\sigma_{min} = \sigma = \sigma_{max}$, che corrisponde alla convergenza puntuale).

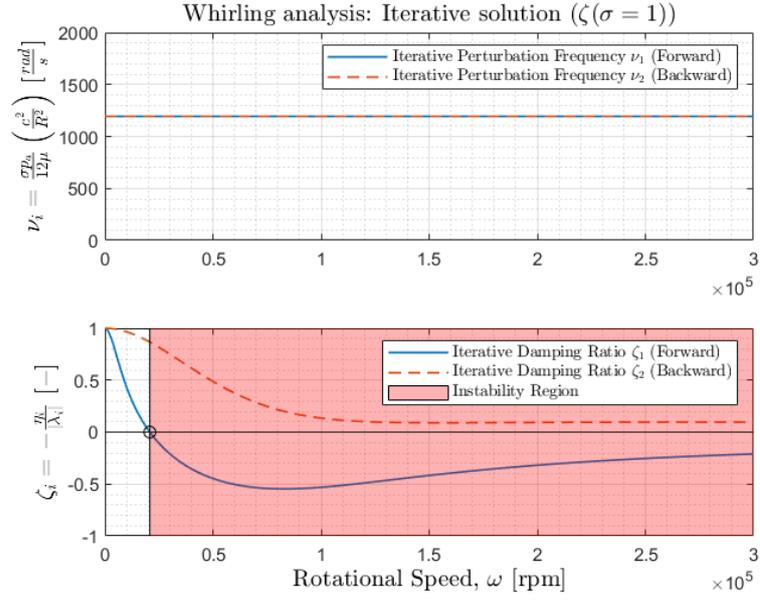


Figura 5.9: Analisi di stabilità: $\text{Im}(\lambda) \simeq \nu$ (Rif. Figura 5.6).

La Figura 5.10 prende in considerazione un intervallo in cui gli estremi del metodo sono diversi rispetto alle condizioni precedenti (i.e., $\sigma_{min} < 1 < \sigma_{max}$).

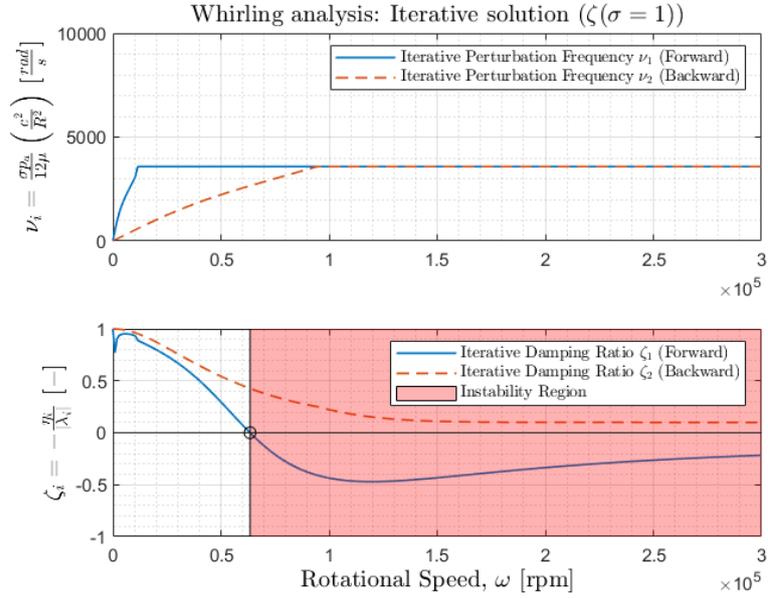


Figura 5.10: Analisi di stabilità: $\text{Im}(\lambda) \simeq \nu$ (Rif. Figura 5.6).

Per quanto riguarda la frequenza di perturbazione, i termini tendono a convergere raggiunta una certa velocità di rotazione (per poi rimanere costanti). Per quanto riguarda il rapporto di smorzamento, è possibile vedere come la velocità di rotazione per cui si verifica numericamente l'instabilità aumenta. Inoltre, è stato verificato che il solo moto di precessione in avanti funge da discriminante per l'instabilità, in quanto il rapporto di smorzamento per il moto di precessione all'indietro tende asintoticamente a zero. È bene notare che il risultato influisce più dal punto di vista matematico sul risultato rispetto alla condizione fisica reale, la quale deve essere opportunamente verificata.

Un altro modo per valutare la stabilità del sistema in esame permette di ricavare una relazione che coinvolge il termine misto k_{ij} , necessario ad azzerare la parte reale della soluzione ($\Re(\lambda) = 0$). Esso rappresenta il valore di soglia $k_{ij,thres}$ per il quale si manifesta l'instabilità dinamica. La condizione è soddisfatta per:

$$\Re(\sqrt{c_{ii}^2 - 4m(k_{ii} + ik_{ij})}) = c_{ii} \quad (5.33)$$

Con $c_{ii} > 0$ [30]. In forma generale:

$$\Re(\sqrt{(x + iy)(x + iy)}) = x \Rightarrow \Re(\sqrt{x^2 - y^2 + 2ixy}) = x \quad (5.34)$$

Per analogia:

$$y = \frac{2mk_{ij,thres}}{c_{ii}} \quad x = c_{ii} \quad (5.35)$$

È possibile definire la condizione di stabilità per un modello bidimensionale:

$$|k_{ij}| \leq \sqrt{\frac{k_{ii}}{m}} c_{ii} \Rightarrow \frac{|k_{ij}|}{c_{ii}} \leq \sqrt{\frac{k_{ii}}{m}} \Rightarrow \frac{|K_{ij}|}{C_{ii}} \leq \sqrt{\frac{K_{ii}}{M}} \Rightarrow \frac{|K_{ij}|}{C_{ii}} \leq \sigma_r \quad (5.36)$$

Quindi, minore è l'entità del termine k_{ij} (K_{ij} per il caso adimensionale), più il sistema è dinamicamente stabile. Definendo $\kappa = \frac{k_{ij}}{k_{ii}}$ e $c_{ii} = 2m\zeta_n\omega_n$, la formulazione diventa²:

$$|k_{ij}| \leq \sqrt{\frac{k_{ii}}{m}} c_{ii} \Rightarrow |\kappa| \leq \frac{1}{k_{ii}} \sqrt{\frac{k_{ii}}{m}} c_{ii} \Rightarrow |\kappa| \leq \sqrt{\frac{1}{\frac{m^2}{k_{ii}}}} \Rightarrow |\kappa| \leq 2\zeta_n \quad (5.37)$$

La quale risulta valida per un moto di precessione cilindrico. È possibile derivare espressioni analoghe per altre configurazioni (e.g., moto di precessione conico). Inoltre, l'espressione indica, quantitativamente, come e in che misura influiscono i parametri dinamici, coinvolti nei cuscinetti a gas ad alta velocità, sulle prestazioni. Il criterio consente di eseguire una rapida valutazione della stabilità durante la progettazione del sistema.

²Per $\omega = 0$, vale la relazione $\zeta = \zeta_n$. [24]

Il termine k_{ij} [$\frac{N}{\mu m}$] si è dimostrato discriminante di instabilità per un sistema semplice. La **Figura 5.11** mostra l'area di influenza dell'instabilità per il setting definito precedentemente e i valori dei parametri dinamici al raggiungimento dell'instabilità.

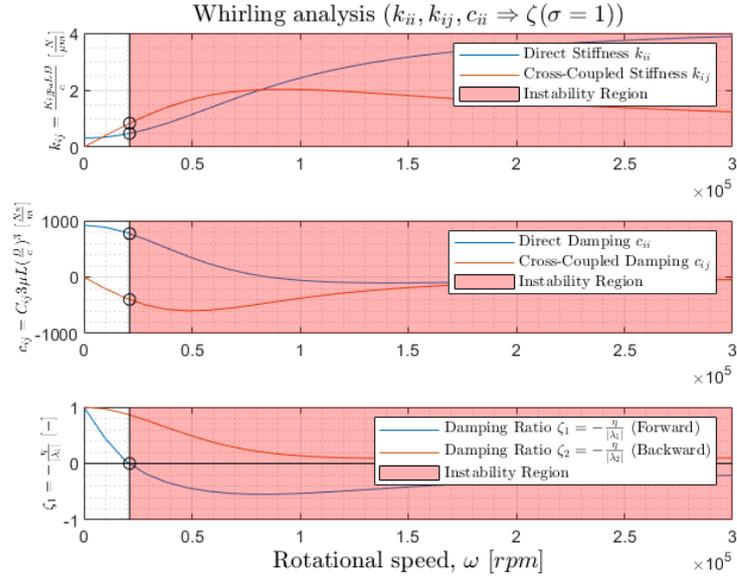


Figura 5.11: Analisi di stabilità $\zeta = f(\sigma = 1)$ (Rif. **Figura 5.6**).

L'aumento di velocità di rotazione determina, inizialmente, l'aumento del valore dei termini k_{ij} e k_{ii} . I termini c_{ij} [$\frac{Ns}{m}$], invece, tendono asintoticamente ad un valore negativo. Inoltre, il termine c_{ij} risulta piuttosto influente sul calcolo del rapporto di smorzamento complessivo del sistema ζ . [24] È utile conoscere l'influenza dei parametri sul rapporto di smorzamento ζ :

- Un aumento del termine di smorzamento diretto c_{ii} o una diminuzione della massa m del rotore si traduce in un aumento di stabilità;
- Un aumento del termine diretto di rigidezza k_{ii} determina un aumento del valore massimo raggiungibile dal termine misto k_{ij} ;

Attraverso una parametrizzazione dei coefficienti dinamici del sistema, è possibile valutare come la soglia di instabilità si sposta verso valori più elevati.

Viene presentata, di seguito, l'analisi di stabilità adimensionale condotta per la configurazione presente in **Figura 5.6**.

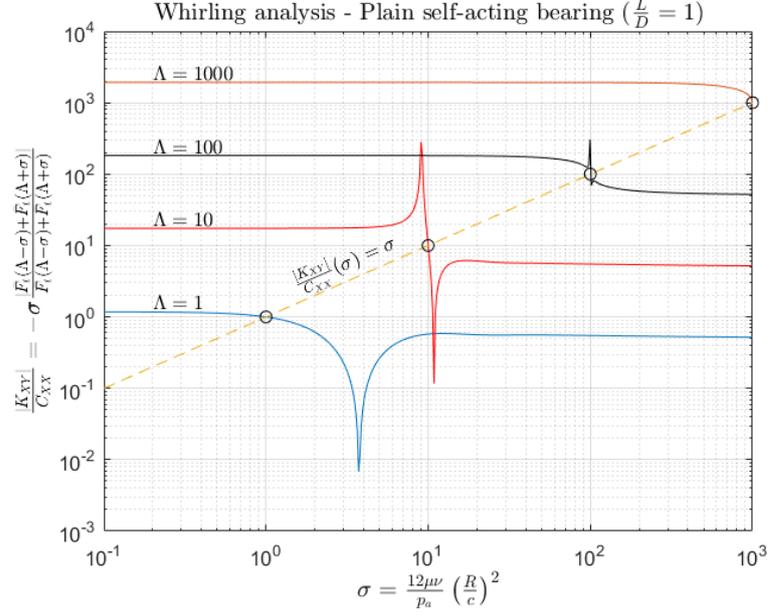


Figura 5.12: Analisi di stabilità adimensionale: $\frac{|K_{XY}|}{C_{XX}} = f(\sigma, \Lambda)$. [24]

In base a quanto presente in **Figura 5.12**, è possibile affermare che:

- Il moto di precessione si verifica per $\sigma_{crit} = \Lambda$, cioè ad una frequenza dimensionale uguale a metà della velocità di rotazione ($\nu = \frac{\omega}{2} \Rightarrow \sigma = \Lambda$);
- Se $\sigma > \Lambda$, allora $\frac{|K_{XY}|}{C_{XX}} < \sigma$. Quindi, se il sistema è stabile per $\sigma_{crit} = \Lambda$, allora rimane in questa condizione anche a frequenze più elevate;
- Per $\Lambda = 0$, $\bar{F}_t(\Lambda) = 0$. Inoltre, è sempre verificato $C_{XX} > 0$ per $\sigma \geq \sigma_{crit}$.

In maniera simile ai passaggi precedenti, è possibile definire la massa per cui il sistema risulta sulla soglia di instabilità:

$$M_{crit} = \frac{K_{XX}(\sigma_{crit})}{\sigma_{crit}^2} = \frac{\bar{F}_r(2\Lambda)}{2\Lambda^2} \quad (5.38)$$

La **Figura 5.13** evidenzia come la funzione $M_{crit} = f(\Lambda, \frac{L}{D})$ aumenta all'aumentare del rapporto $\frac{L}{D}$, convergendo asintoticamente per tutti i valori $\frac{L}{D}$.

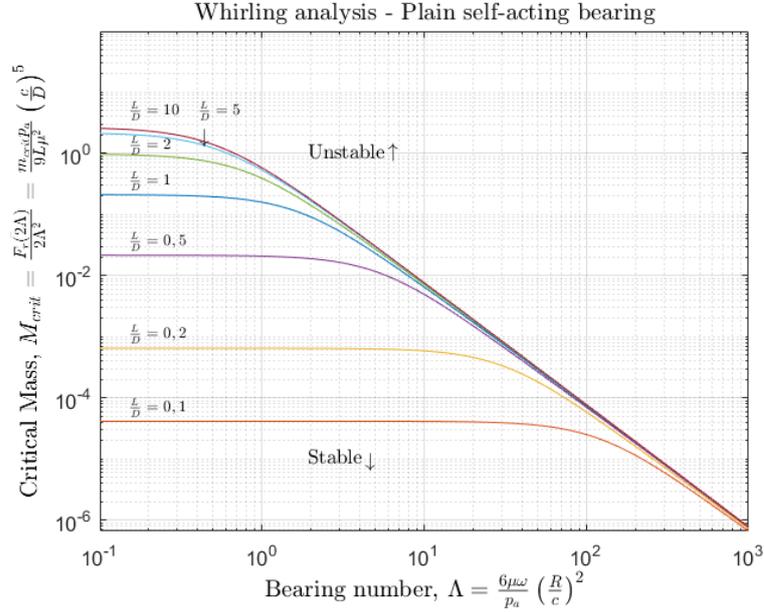


Figura 5.13: Analisi di stabilità adimensionale: $M_{crit} = \frac{F_r(\bar{2}\Lambda)}{2\Lambda^2}$. [24]

Impostando $C_{XY} = 0$ (giustificabile per elevati σ), il moto di precessione si verifica per $\sigma_r = \Lambda_c$. Inoltre, K_{XX} presenta un minimo locale per elevati Λ . Esso rappresenta la disposizione, da parte del sistema, all'instabilità. Per la categoria *Plain self-acting bearing*, il minimo è molto accentuato (prestazioni peggiori, se paragonata ad altre tipologie). Se il moto si verifica per $\nu = \frac{\omega}{2}$, è sufficiente, per alcuni cuscinetti, confrontare solo K_{XX} per $\Lambda = \sigma$. I sistemi con K_{XX} elevato (in tale punto) sono più stabili e caratterizzati da una massa critica più elevata. [24]

Per quanto riguarda l'ultimo criterio di stabilità analizzato, una formulazione simile impone l'inserimento di un termine $z = x \pm iy$ ($i = \sqrt{-1}$), noto come *whirling vector*, all'interno di **Equazione 5.10** e **Equazione 5.11** definendo, successivamente, un'unica equazione che permette di consolidare il risultato presente in **Disequazione 5.37**. Tale procedimento permette di considerare il termine misto di smorzamento come un contributo alla massa del sistema (tale caratteristica è comparabile all'effetto giroscopico su un rotore di lunghezza elevata) e, in ultima analisi, non determina nessun effetto diretto sulla stabilità del sistema. [24]

Come visto precedentemente, è importante definire la soglia di instabilità di un cuscinetto. Data una geometria fissata, è possibile tracciare il valore della massa adimensionale M [-] del rotore in funzione di più *Bearing Number* Λ [-], fornendo il valore massimo di massa raggiungibile per una data velocità di rotazione. La soglia di instabilità è ricavabile a partire dalla trasformazione del sistema nel dominio di Laplace impostando, successivamente, la parte reale e immaginaria del determinante del sistema come nulli. Conseguentemente:

$$(-M\Omega_w + K_{ii})(-M\Omega_w + K_{jj}) - C_{ii}C_{jj} - K_{ij}K_{ji} + C_{ij}C_{ij} = 0 \quad (5.39)$$

$$M = \frac{1}{\Omega_w^2} \frac{C_{ii}K_{jj} + C_{jj}K_{ii} - C_{ji}K_{ij} - C_{ij}K_{ji}}{C_{ii} + C_{jj}} \quad (5.40)$$

Con $\Omega_w = \frac{\sigma}{2\Lambda}$ [24]. Poiché i coefficienti K_{ij} e C_{ij} sono dipendenti da Ω_w , non è possibile una soluzione in forma chiusa. La procedura iterativa prevede l'uguaglianza tra i termini in **Equazione 5.39**, a partire da un valore Ω_w^* iniziale da inserire in **Equazione 5.40**. La massa adimensionale corrispondente rappresenta il termine di soglia M_{thres} (i.e., *Critical Rotor Mass*). Per il caso in esame, è opportuno rielaborare l'asse delle ordinate, in maniera tale da ottenere il valore di soglia della velocità di rotazione data la massa del rotore o, viceversa, per determinare la massa ammissibile del rotore data una velocità operativa (**Figura 5.14**).

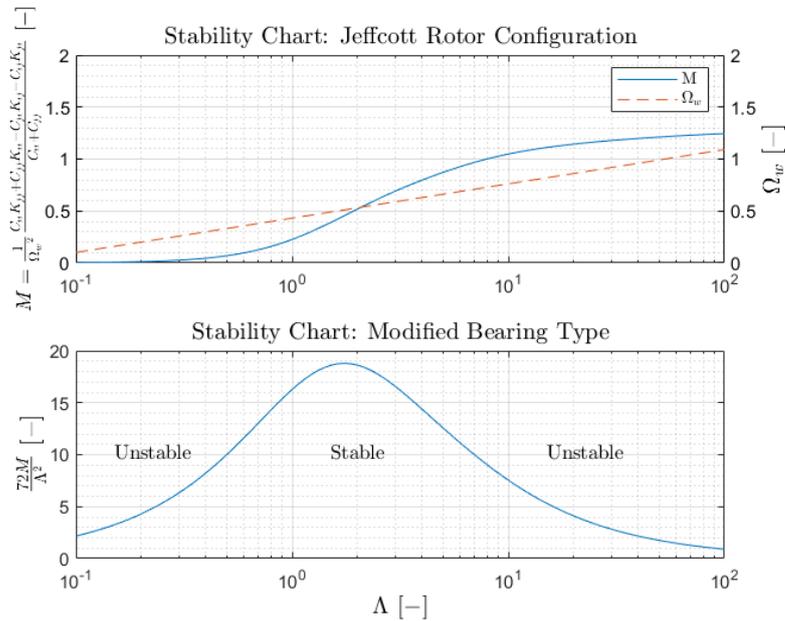


Figura 5.14: Diagramma di stabilità (a) Rotore di Jeffcott (b) Type B.

5.2.1 Incrementare la stabilità

Sulla base di quanto analizzato, il fenomeno di instabilità appare inevitabile, non essendo sempre possibile raggiungere le condizioni di lavoro necessarie a diminuire l'insorgenza del fenomeno. Ciò è dovuto, in larga parte, alle problematiche connesse ai giochi necessari estremamente ridotti, ai rapporti geometrici tra le grandezze e ai problemi di allineamento. La progettazione accurata di un cuscinetto è in grado, comunque, di posticipare il punto di insorgenza per prevenire l'insorgenza del fenomeno nel campo o operativo di velocità. Sono stati sviluppati vari metodi per aumentare il valore di soglia oltre il quale il fenomeno si presenta. Il metodo su cui si concentra la presente sezione riguarda l'introduzione di un supporto flessibile e smorzato. Ciò permette di compensare le forze destabilizzanti indotte dal film di gas. La configurazione più diffusa per l'introduzione di smorzamento esterno è evidenziata in **Figura 5.15a** [24].

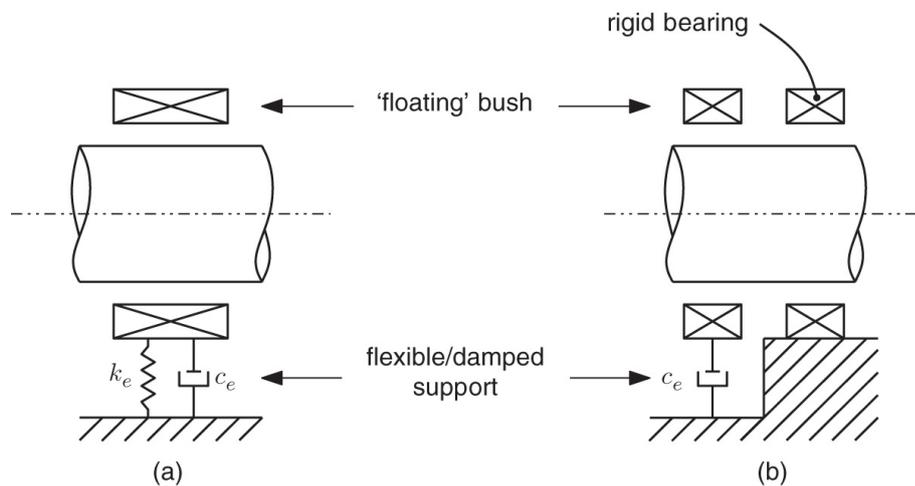


Figura 5.15: Modello dinamico (a) Con supporto flessibile (b) Misto. [24]

I parametri introdotti operano numericamente in serie ai termini afferenti al film di gas. Per aumentare la stabilità, è buona norma:

- Introdurre un valore di rigidità esterna $k_e \leq (2 \div 3)k_{ij}$;
- Implementare il sistema in termini di allineamento dei supporti.

La caratterizzazione più semplice per k_e e c_e suggerisce di considerare costanti entrambi i termini. Tale rappresentazione, però, non è rappresentativa della realtà, poiché sia il valore di rigidità sia il valore di smorzamento sono entrambi funzione della frequenza di perturbazione alla quale è sottoposto il sistema (i.e., $k_e, c_e = f(\nu)$), come evidenziato durante l'attività sperimentale (**Capitolo 4**).

Il modello in **Figura 5.16**, evoluzione del modello presente in **Figura 5.6**, è la rappresentazione di un sistema a quattro gradi di libertà. Il modello dinamico del film rimane invariato, ma posto in serie al modello di supporto mediante un alloggiamento m_b .

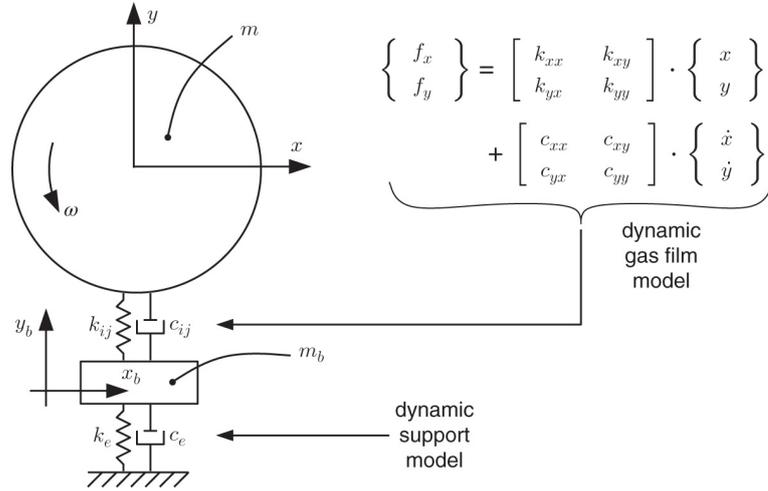


Figura 5.16: Modello dinamico con supporto flessibile e smorzato. [24]

Assumendo che i termini k_e e c_e siano costanti (ed agiscono uniformemente in tutte le direzioni della perturbazione) e che il film di gas sia simmetrico, valgono le relazioni presenti in **Disequazione 5.15**. Impostando $\delta x = x - x_b$ e $\delta y = y - y_b$, è possibile scrivere le equazioni nel moto:

$$m\ddot{x} + c_{ii}\dot{\delta x} + k_{ii}\delta x + k_{ij}\delta y = 0 \quad (5.41)$$

$$m\ddot{y} + c_{ii}\dot{\delta y} + k_{ii}\delta y - k_{ij}\delta x = 0 \quad (5.42)$$

$$m_b\ddot{x}_b + c_e\dot{x}_b + k_e x_b - c_{ii}\dot{\delta x} - k_{ii}\delta x - k_{ij}\delta y = 0 \quad (5.43)$$

$$m_b\ddot{y}_b + c_e\dot{y}_b + k_e y_b - c_{ii}\dot{\delta y} - k_{ii}\delta y + k_{ij}\delta x = 0 \quad (5.44)$$

L'analisi dell'insieme di equazioni sopra indicato fornisce quattro soluzioni, ognuna delle quali rappresenta un modo del sistema.

In forma matriciale:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_b \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{y}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{ii} & 0 & -c_{ii} & 0 \\ 0 & c_{ii} & 0 & -c_{ii} \\ -c_{ii} & 0 & (c_{ii} + c_e) & 0 \\ 0 & -c_{ii} & 0 & (c_{ii} + c_e) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \end{Bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & -k_{ii} & -k_{ij} \\ -k_{ij} & k_{ii} & k_{ij} & -k_{ii} \\ -k_{ii} & -k_{ij} & (k_{ii} + k_e) & k_{ij} \\ k_{ij} & -k_{ii} & -k_{ij} & (k_{ii} + k_e) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ x_b \\ y_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

È stata valutata, quindi, l'influenza da parte dei supporti flessibili citati precedentemente. Il calcolo degli autovalori risulta numericamente più complesso per sistemi a molti gradi di libertà (i quali hanno ordine $2n$). È più conveniente, per il caso in esame, fare riferimento allo spazio degli stati. A partire da [31]:

$$\begin{aligned}
 [M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} &= 0 \\
 \{\ddot{x}(t)\} + [M]^{-1} [C] \{\dot{x}(t)\} + [M]^{-1} [K] \{x(t)\} &= 0 \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

Si può trasformare l'equazione nello spazio degli stati definendo i vettori $\{y_1(t)\} = \{x(t)\}$ e $\{y_2(t)\} = \{\dot{x}(t)\}$, a partire dai quali:

$$\begin{aligned}
 \{y_1(t)\} &= \{x(t)\} = \{y_2(t)\} \\
 \{y_2(t)\} &= \{\dot{x}(t)\} = -[M]^{-1} [K] \{x(t)\} - [M]^{-1} [C] \{\dot{x}(t)\} \quad (5.47)
 \end{aligned}$$

Infine:

$$\begin{aligned}
 \{\dot{y}(t)\} &= \begin{bmatrix} \{\dot{y}_1(t)\} \\ \{\dot{y}_2(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0y_1(t) + I\{y_2(t)\} \\ -[M]^{-1} [K] \{y_1(t)\} - [M]^{-1} [C] \{y_2(t)\} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1} [K] & -[M]^{-1} [C] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{y_1(t)\} \\ \{y_2(t)\} \end{bmatrix} = [A] \{y(t)\} \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

La matrice di stato A , in caso sia presente smorzamento, è definita come:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1} [K] & -[M]^{-1} [C] \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Per ottenere un problema agli autovalori del tipo $[A]\{z\} = [\lambda]\{z\}$ ($z \neq 0$), la soluzione per **Equazione 5.49** può essere espressa nella forma $\{y(t)\} = \{z\}e^{\lambda t}$. La soluzione restituisce $2n$ autovalori λ_i , i quali possono essere complessi, così come i $2n$ autovettori risultanti $\{z_i\}$. Ciò determina forme modali $\{u_i\}$ e vettore di risposta libera $\{x(t)\}$ complessi. Grazie alla formulazione scelta, è possibile interpretare fisicamente gli autovalori complessi e la soluzione risultante.

La risposta $\{x(t)\}$ è definita come la parte reale delle prime n coordinate del vettore $\{y(t)\}$, ottenuta a partire da:

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^{2n} c_i \{u_i e^{\lambda_i t}\} \quad (5.50)$$

Gli autovalori complessi appaiono nella forma:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= -\zeta_i \omega_i - j \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \\ \lambda_{i+1} &= -\zeta_i \omega_i + j \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \end{aligned} \quad (5.51)$$

con $j = \sqrt{-1}$, ω_i la frequenza naturale non smorzata dell' i -esimo modo di vibrare e ζ_i il rapporto di smorzamento modale associato all' i -esimo modo. Analogamente al modello a due gradi di libertà, la soluzione del problema agli autovalori fornisce un insieme di soluzioni complesse nella forma generale $\lambda_i = \alpha_i + \beta_i j$. Comparandola con **Equazione 5.51**, si ottiene:

$$\omega_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} = \sqrt{\Re(\lambda_i)^2 + \Im(\lambda_i)^2} \quad (5.52)$$

$$\zeta_i = \frac{-\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} = \frac{-\Re(\lambda_i)}{\sqrt{\Re(\lambda_i)^2 + \Im(\lambda_i)^2}} \quad (5.53)$$

Per il caso sottosmorzato, tali relazioni definiscono la correlazione tra frequenza naturale e rapporto di smorzamento. Dal punto di vista fisico, una forma modale complessa può essere definita come segue: ogni elemento descrive rispettivamente modulo e fase del moto del grado di libertà associato all'elemento stesso quando il sistema vibra per un modo specifico. Per il caso sottosmorzato, il vettore reale descrive la posizione relativa di ogni massa per ogni istante di tempo dato ad una singola frequenza. Per il caso complesso, la posizione relativa della massa può essere sfasata di una quantità pari alla parte complessa del numero in esame. [31]

Al fine di valutare l'influenza degli O-Ring, viene presentato il confronto preliminare tra le funzioni di trasferimento $H(s) = \frac{y_b(s)}{y(s)}$ del sistema a quattro gradi di libertà sopracitato, al variare della precompressione radiale alla quale sono sottoposti gli O-Ring in prova. Poiché è impensabile effettuare l'analisi per tutti i valori di rigidezza e smorzamento presenti nei rispettivi vettori, è stata avanzata l'ipotesi di fissare i termini dinamici del film fluido, per una data condizione operativa.

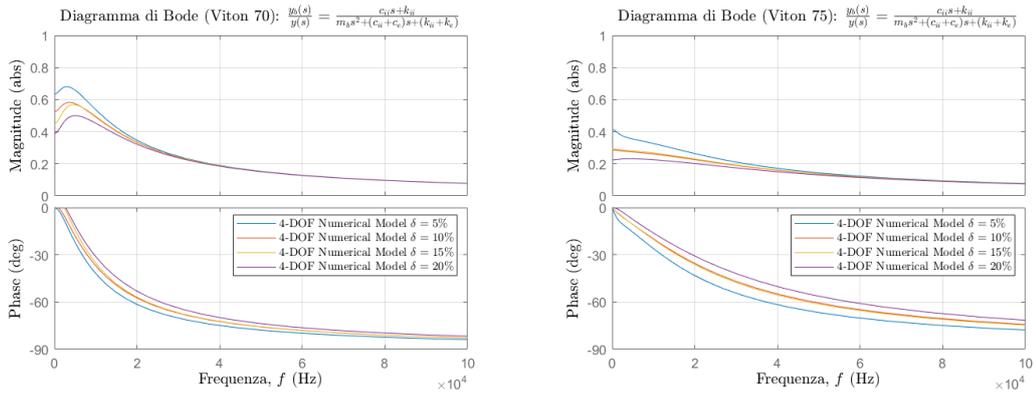


Figura 5.17: $H(s) = \frac{y_b(s)}{y(s)}$ ($\delta = 5 \div 20\%$) (a) Viton 70 (b) Viton 75.

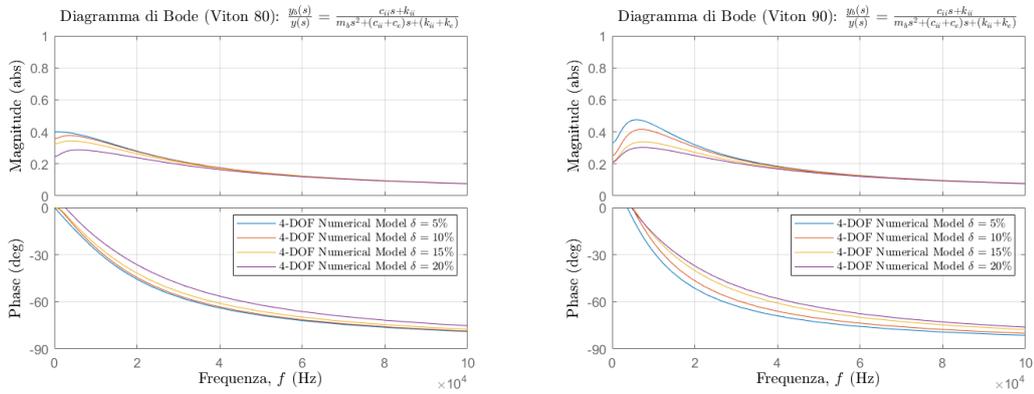


Figura 5.18: $H(s) = \frac{y_b(s)}{y(s)}$ ($\delta = 5 \div 20\%$) (a) Viton 80 (b) Viton 90.

L'analisi preliminare condotta evidenzia come, all'aumentare della precompressione radiale alla quale è sottoposto l'O-Ring in prova, lo spostamento trasversale proprio del supporto m_b diminuisce, in virtù di una capacità di smorzamento delle vibrazioni più alta da parte del sistema. Per una corretta valutazione dell'influenza che gli O-Ring hanno su un sistema di questo tipo, è necessario che i risultati ottenuti vengano corroborati da opportune prove sperimentali.

Il miglioramento della stabilità si basa su una corretta selezione dei parametri di supporto. La loro messa in relazione con le proprietà del film di gas e del rotore permette di definire alcune linee guida da seguire nella progettazione di un sistema di questo tipo. Per ridurre al minimo il numero di variabili da impiegare, è possibile ricercare un insieme di parametri adimensionali. Trascurando il termine di smorzamento c_{ij} , le proprietà del solo sistema rotore-cuscinetto diventano:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{ii}}{m}} \quad \zeta_n = \frac{c_{ii}}{2m\omega_n} \quad \kappa = \frac{k_{ij}}{k_{ii}} \quad (5.54)$$

Il termine κ rappresenta la tendenza intrinseca del cuscinetto verso moti vorticosi autoeccitati. È necessario definire dei parametri adimensionali di supporto, relazionando le caratteristiche del sistema di supporto alle proprietà del film di gas:

$$M_b = \frac{m_b}{m}; \quad K_e = \frac{k_e}{k_{ii}}; \quad C_e = \frac{c_e}{c_{ii}}. \quad (5.55)$$

È possibile valutare il termine ζ per diversi valori di K_e e C_e al variare di M_b , κ e ζ_n . In **Figura 5.19** è possibile vedere come la stabilità è determinata dal modo di vibrare caratterizzato dal termine ζ_n minore). I parametri dinamici del film sono stati assunti indipendenti dalla frequenza di perturbazione del sistema.

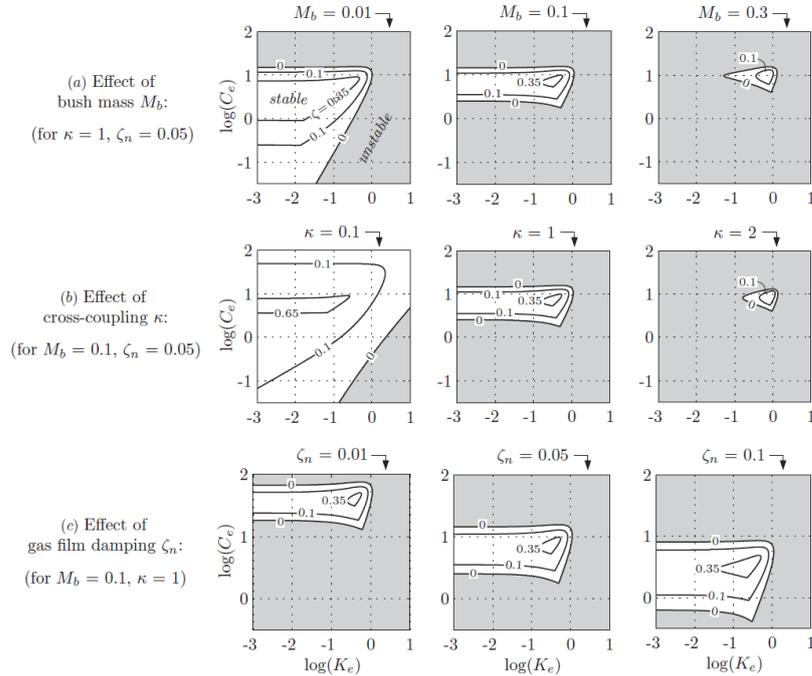


Figura 5.19: Stabilità: effetto di M_b , κ e ζ_n su K_e , C_e . [25]

La zona di stabilità ricercata è delimitata da curve iso- ζ_n (a partire da $\zeta_n = 0$), e fornisce informazioni sulla stabilità e sul grado di stabilità entro i confini della regione. Date le proprietà dinamiche del film e del rotore, valgono le seguenti considerazioni nella scelta dei valori ottimali dei parametri m_b , k_e e c_e [24]:

- Per ottenere una zona stabile ampia, mantenere la massa m_b del cuscinetto almeno dieci volte più piccola del rotore (i.e., $M_b \leq 0.1$). Aumentando M_b , la regione stabile è significativamente ridotta;
- Progettare il supporto in maniera tale da verificare la disuguaglianza $K_e \leq 0.3$;
- Un film di gas caratterizzato da κ ridotto (i.e., $\kappa = 0.1$), permette un funzionamento stabile su un ampio intervallo sia per K_e che per C_e . Se $\kappa = 1$, la regione di stabilità si riduce. Per $\kappa = 2$, il funzionamento stabile esiste solo per una gamma ristretta di parametri di supporto. Una scelta ottimale dei parametri di supporto può, in caso di stabilità intrinseca del cuscinetto, determinare una prestazione di stabilità superiore;
- I diagrammi di stabilità, ottenuti in base al rapporto di smorzamento del film di gas ζ_n (i.e., $\zeta_n = 0,01 \div 0,1$), dimostrano che la mancanza di smorzamento interno del film può essere compensata fornendo smorzamento esterno. Inoltre, il valore ottimale del termine K_e è virtualmente indipendente da ζ_n ;
- A seconda della quantità di gas nel film, garantire un valore ragionevole di smorzamento esterno c_e ($2 < C_e < 20$).

Formulazioni adimensionali di questo tipo possono essere applicate a sistemi rotodinamici flessibili e smorzati, senza considerare la dimensione, il tipo di cuscinetto etc. In ogni caso, in fase di progettazione, è consigliabile considerare il comportamento del film dipendente dalla frequenza. [25]

Allo stesso modo, uno studio recente [32] presenta i risultati di un'analisi dinamica non lineare approfondita di un cuscinetto poroso a gas sul quale vengono montati più tipologie di O-Ring. Il film di fluido impiegato è modellato secondo la legge di Darcy. Per la caratterizzazione numerica degli O-Ring è stato utilizzato il modello Kelvin-Voigt, considerando frequenza di eccitazione, diametro dei fori di alimentazione, numero (e tipo) di O-Ring impiegati e pressione di alimentazione. Le prestazioni sono analizzate in base al modello dinamico in **Figura 5.20**.

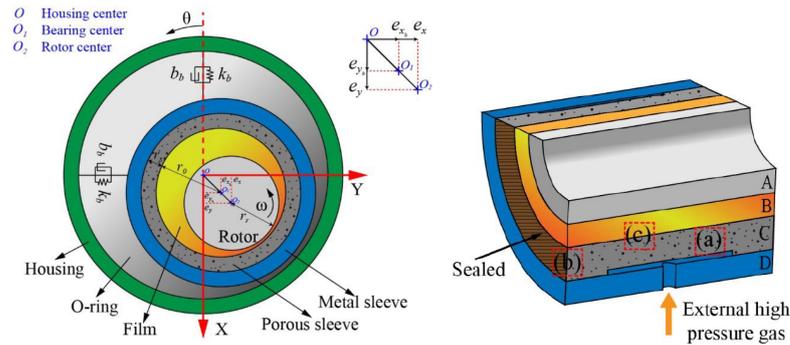


Figura 5.20: (a) Cuscinetto supportato da un elastomero (b) $\frac{1}{4}$ Sezione. [32]

Viene presentato in **Figura 5.21** il confronto tra modello numerico e sperimentale per diverse pressioni di alimentazione. La metodologia seguita per la caratterizzazione degli O-Ring ha previsto l'utilizzo di un banco prova. Successivamente, le caratteristiche sono state introdotte all'interno di un modello numerico. All'aumentare della velocità di rotazione, i risultati sperimentali approssimano abbastanza bene il modello numerico impiegato. La variazione di pressione è ininfluente.

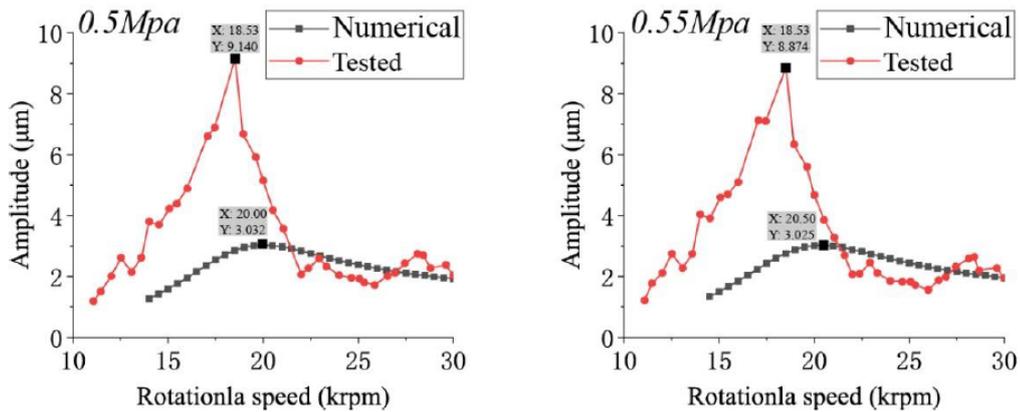


Figura 5.21: Confronto (a) $P_{alim.} = 0,5 MPa$ (b) $P_{alim.} = 0,55 MPa$. [32]

In seguito, le caratteristiche della struttura sono state valutate mediante diagrammi di biforcazione, per valutare le vibrazioni trasversali del rotore (smorzato o meno) dalla posizione di riferimento all'aumentare della velocità di rotazione ($\omega = 12 \div 60krpm$). I risultati dell'analisi sono visibili in **Figura 5.22** e **Figura 5.23**.

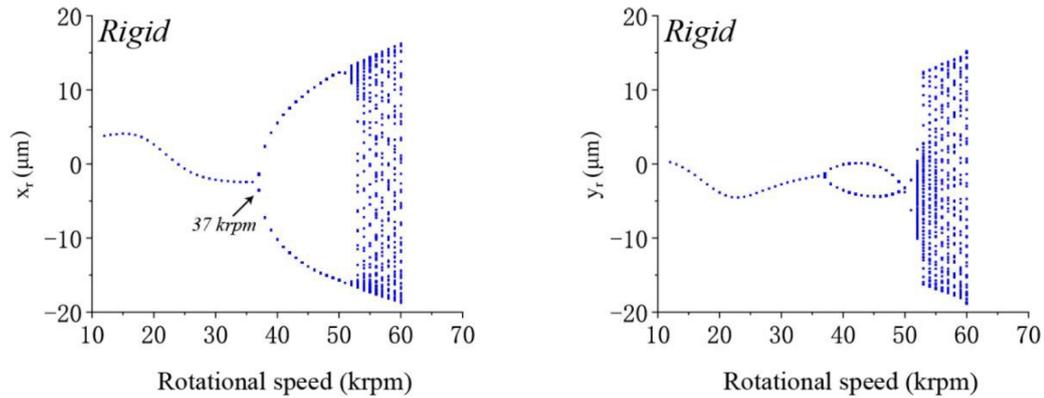


Figura 5.22: Diagramma di biforcazione (a) Asse x (b) Asse y . [32]

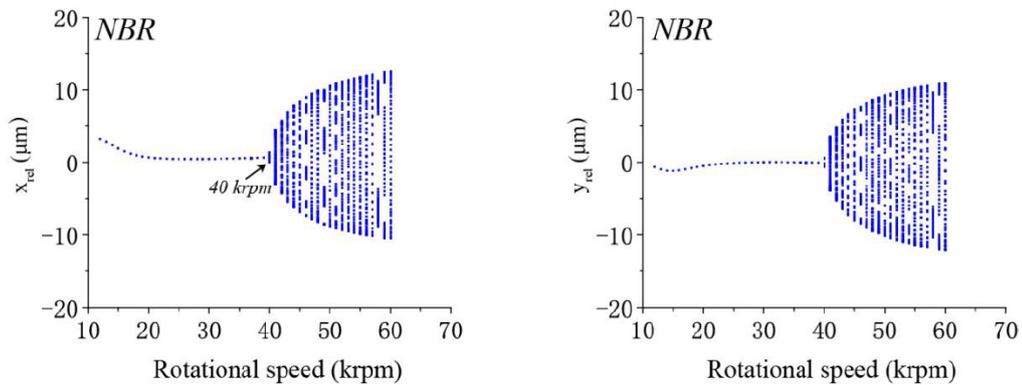


Figura 5.23: Diagramma di biforcazione (a) Asse x (b) Asse y . [32]

È interessante vedere come l'inserimento di un anello in materiale elastomerico, mediante boccola fissa, diminuisce notevolmente le vibrazioni trasversali che si verificano nel rotore.

Allo stesso modo, l'inserimento di O-Ring influenza notevolmente la forma dell'orbita; essa, nonostante sia regolare, aumenta in estensione. In condizioni di movimento quasi-periodico, le dimensioni dell'orbita e le vibrazioni sub-sincrone del rotore sono notevolmente ridotte. In **Figura 5.24** **Figura 5.25** è possibile vedere come la presenza degli O-Ring permetta di ottenere un'orbita più regolare e di dimensioni inferiori per $\omega = 37krpm$ e $\omega = 41krpm$.

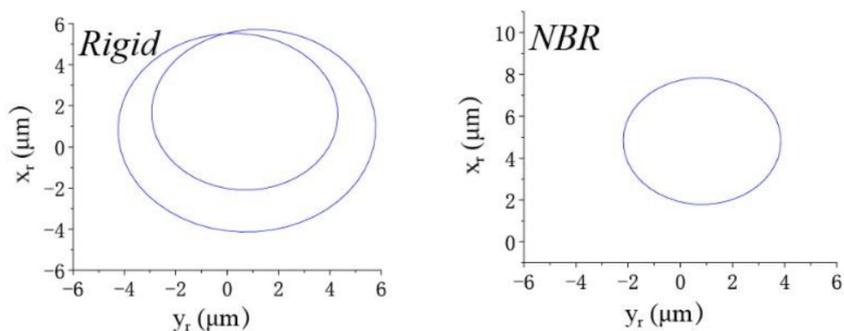


Figura 5.24: Orbita di un (a) Rotore rigido (b) Rotore smorzato. [32]

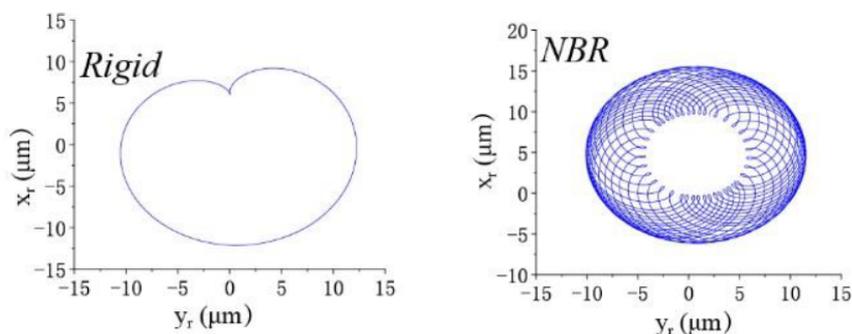


Figura 5.25: Orbita di un (a) Rotore rigido (b) Rotore smorzato. [32]

Ulteriori effetti, inerenti alla geometria del banco prova utilizzato, non sono stati presi in considerazione in questa sede, poiché non utili ai fini dell'elaborato.

Conclusioni

Il presente lavoro di tesi ha analizzato in maniera approfondita le caratteristiche di alcuni O-Ring elastomerici per l'impiego, come supporto flessibile e smorzato, in cuscinetti a gas ad alta velocità, al fine di stabilizzarne il comportamento. Tale pratica è dovuta alla necessità di una soluzione economica ed efficace per il supporto di rotori per applicazioni industriali poiché, a seconda della velocità di rotazione, è possibile che si verifichi il moto di precessione dell'albero. Normalmente, l'instabilità che ne deriva e i potenziali danni limitano la velocità di rotazione raggiungibile. Alcuni autori hanno dimostrato che, se la selezione dei valori di rigidità k e smorzamento c degli anelli, come supporto esterno al cuscinetto, risulta corretta e coadiuvata da altri parametri (e.g., massa del rotore), la verifica sperimentale garantisce la diminuzione del fenomeno di instabilità sopracitato. La maggior parte degli studi inerenti agli O-Ring analizza, come variabili da investigare:

- Il diametro interno $\varnothing d_1$ [mm];
- Il diametro di corda $\varnothing d_2$ [mm];
- La precompressione radiale δ [%];
- La frequenza di eccitazione f [Hz].

Con riferimento all'attività di tesi, le caratteristiche di alcuni O-Ring sono state valutate prima numericamente e, successivamente, corroborate sperimentalmente in termini di rigidità e smorzamento, in funzione di diversi parametri (i.e., durezza SH, frequenza di eccitazione, etc.) mediante l'utilizzo di più strumenti di misura. Primariamente, però, è stato necessario riprogettare alcune parti di un banco prova preesistente. Inoltre, è stata condotta un'analisi statistica sui risultati ottenuti. I risultati sono stati poi confrontati con i dati presenti in letteratura. Successivamente, è stato sviluppato un modello numerico a più gradi di libertà per analizzare la soglia di stabilità di un cuscinetto a gas dinamico (i.e., *Dynamic Journal bearing*) sul quale sono stati montati O-Ring in materiale elastomerico. Il modello è risultato essenziale per aumentare la velocità di soglia alla quale si manifesta il fenomeno di instabilità. Tale metodologia ha fornito un metodo di analisi semplice e immediato, consentendo un risparmio notevole in termini di costi e tempo. Analisi future richiederanno non solo la caratterizzazione degli O-Ring a diverse temperature e frequenze di eccitazione di esercizio, ma anche la costruzione di un ulteriore banco prova per quantificare sperimentalmente il grado di bontà delle approssimazioni numeriche effettuate nel **Capitolo 5**. Migliorare la stabilità dei cuscinetti a gas per posticipare fenomeni di instabilità indesiderati rappresenta una sfida non indifferente per gli istituti di ricerca, ai quali sarà obbligatorio fare riferimento negli anni avvenire, impegnati in questo campo.

Appendice A

Funzione di Risposta in Frequenza e Diagramma di Bode

Il diagramma di Bode è definito come il grafico della ampiezza (in dB) e/o della fase della funzione di trasferimento in funzione della frequenza. È possibile individuare e disegnare rapidamente grafico identificando i poli e gli zeri della risposta in frequenza. La funzione di trasferimento tipica può essere analizzata nel dominio s e si presenta sempre come un polinomio razionale:

$$H(s) = K \cdot \frac{N(s)}{D(s)} = K \cdot \frac{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \dots a_1s + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots b_1s + b_0} \quad (\text{A.1})$$

I polinomi al numeratore ed al denominatore sono fattorizzati per trovare i poli e gli zeri (i valori di s per cui si annullano, rispettivamente, il denominatore e il numeratore). Impostando i poli come $p_1, p_2 \dots p_n$ e gli zeri come $z_1, z_2 \dots z_m$, la funzione può essere riscritta come:

$$H(s) = K \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_1) \dots (s - p_n)} \quad (\text{A.2})$$

Graficamente, le posizioni dei poli e degli zeri possono essere reali o complesse. Quando le radici sono reali, si identificano *poli semplici* o *zero semplici*. Quando le radici sono complesse si presentano sempre in coppie complesse e coniugate.

Prendendo in considerazione il piano complesso s , importante è che le reti stabili abbiano poli e zeri nella metà sinistra del grafico, in modo tale che le parti reali dei poli/zeri siano negative.

Per una rete stabile, è sempre possibile trovare i termini al denominatore nella forma $(s + a)$ al denominatore (con $a > 0$). La condizione di stabilità del polo è definita dalle seguenti condizioni: $Re\{a\} > 0$ o $Re\{p\} > 0$. La condizione $(s + a)^r$ al denominatore determina più radici nella stessa posizione (r determina il numero intero di ripetizioni della radice)

Se la rete stabile comprende una coppia di poli complessa e coniugata, è possibile rappresentare la loro posizioni dei poli come $s = \alpha \pm j\beta$ in cui α e β sono entrambi reali positivi (ciò impone che tutti i termini al denominatore siano positivi). Alternativamente, è possibile utilizzare una forma più conveniente per la rappresentazione della funzione di trasferimento (e.g. $D(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2$, con $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ [$\frac{rad}{s}$] intesa come *corner frequency* e $\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n}$ [-] inteso come fattore/rapporto di smorzamento).

Spesso, nel tracciamento dei grafici, si ricorre alla scala logaritmica, poiché permette di rappresentare le funzioni che variano su molti ordini di grandezza. La scala "Bel" è definita come logaritmo in base dieci del rapporto tra due "intensità" di segnale (grandezze relative alla potenza associata al segnale stesso):

$$10\log_{10} \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (A.3)$$

La scala logaritmica dB è vantaggiosa per la rappresentazione di funzioni di trasferimento. Due termini correlati alla risposta in frequenza sono "decade" e "ottava". Una variazione di frequenza di una decade è un fattore moltiplicativo dieci (e.g. $f_1 = 1kHz$ è una decade sopra $f_2 = 100Hz$). Un "ottava" è un fattore moltiplicativo due (e.g. $f_1 = 1kHz$ è una ottava sopra $f_3 = 500Hz$). [33]

Conversione $ H $ - $ H _{dB}$	
$ H $	$ H _{dB}$
1	$20\log(1)=0dB$
$\sqrt{2}$	$20\log(\sqrt{2})=3dB$
2	$20\log(2)=6dB$
4	$20\log(4)=12dB$
5	$20\log(5)=14dB$
10	$20\log(10)=20dB$

Tabella A.1: Conversione $|H|$ - $|H|_{dB}$.

A.0.1 Diagramma di Bode: Ampiezza

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \quad (\text{A.4})$$

Caratterizzata da un polo semplice ($s = -1$), è possibile ricavare:

$$|H(j\omega)| = [\omega^2 + 1]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.5})$$

E, graficamente:

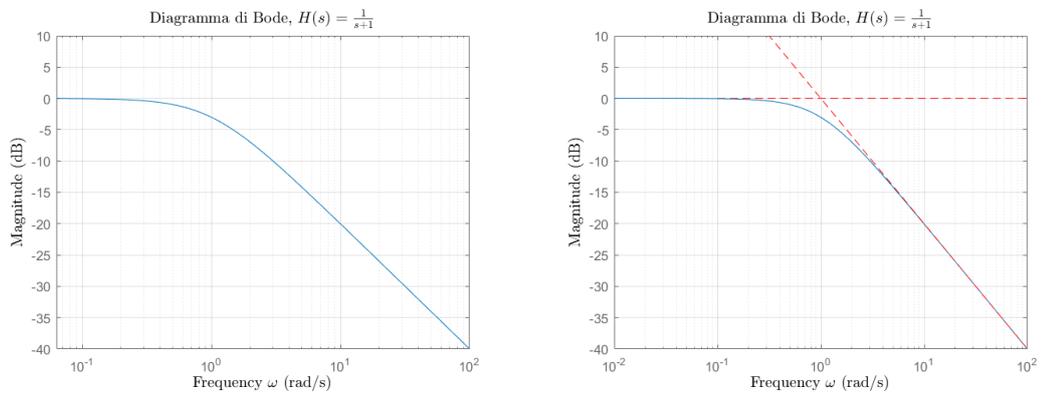


Figura A.1: (a) $H(s) = \frac{1}{s+1}$: Ampiezza (b) $H(s) = \frac{1}{s+1}$: Asintoti.

La funzione di trasferimento si comporta, asintoticamente, nel modo seguente:

$$|H(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0dB & \omega \ll 1 \\ -20\log(\omega)dB & \omega \gg 1 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Ciò indica che, spostandosi verso destra, il valore della funzione di trasferimento diminuisce di $|H(j\omega)|_{dB} = 20dB$ per ogni fattore dieci con cui aumenta la frequenza (in scala logaritmica). Le due rette si comportano in modo tale da incontrarsi ad un dato valore di frequenza ($\omega = 1 \frac{rad}{s}$) cui corrisponde il polo della funzione (*Break Point*). In questo punto, vale la seguente relazione:

$$|H(1j)|_{dB} = \frac{1}{\sqrt{(2)}} \simeq -3dB \quad (\text{A.7})$$

Una funzione caratterizzata da uno zero semplice (e.g. $H(s) = (s + 1)$) si comporta in maniera simile, fatta eccezione per il risultato ($|H(1j)|_{dB} \simeq 3dB$). In ogni caso, la **Equazione A.5** può essere generalizzata:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + a)^r} \Rightarrow |H(j\omega)| = [\omega^2 + a^2]^{-\frac{r}{2}} \quad (\text{A.8})$$

Così come gli asintoti:

$$|H(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} -20r \log(a) dB & \omega \ll 1 \\ -20r \log(\omega) dB & \omega \gg 1 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

La pendenza vale $m = 20r \frac{dB}{decade}$ per ogni ripetizione del polo. È possibile migliorare la precisione del grafico, ricordando che la correzione da attuare tra gli asintoti e la curva reale risulta essere di circa $C_1 = -3rdB$; per ogni ripetizione del polo, è necessaria una correzione di $C_2 = 3dB$.

Se i poli/zeri sono molteplici, la **Equazione A.1** diventa:

$$H(s) = A \frac{(s + z)}{(s + p)} \quad (\text{A.10})$$

È possibile ricorrere alle proprietà dei logaritmi:

$$|H(s)|_{dB} = 20 \log|A| + 20 \log|s + z| + 20 \log \frac{1}{|s + p|} \quad (\text{A.11})$$

Valutando, quindi, il diagramma di Bode come contributo di più fattori:

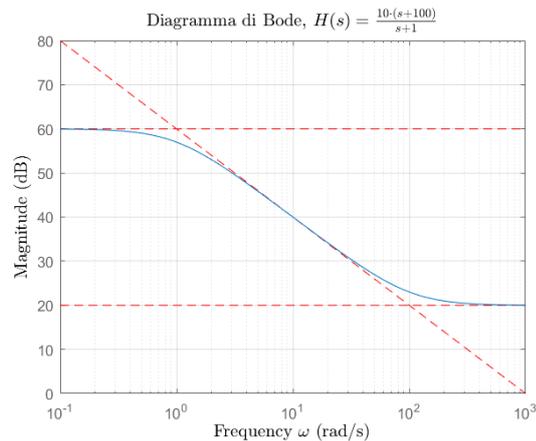


Figura A.2: $H(s) = \frac{10 \cdot (s+100)}{s+1}$.

In base a **Figura A.4**, è possibile affermare che:

- Quando si incontra un polo, la pendenza diminuisce di $m = 20r \frac{dB}{decade}$;
- Quando si incontra uno zero, la pendenza aumenta di $m = 20r \frac{dB}{decade}$.

In ogni caso, è possibile seguire queste semplici linee guida per disegnare la *Ampiezza* [dB] del diagramma di Bode:

1. Determinare i Break Points (i.e. i poli e gli zeri) in ordine di frequenza crescente e scegliere un intervallo che li racchiuda, aggiungendo una decade agli estremi dell'insieme dei Break Points trovati;
2. Effettuare l'analisi di funzione e delineare il grafico attraverso delle bozze preliminari (e.g. $H(\omega \rightarrow 0)$ e $H(\omega \rightarrow \infty)$);
3. Correggere il diagramma di Bode (per radici semplici/ripetute la risposta vera passa per un punto che è $C = 3rdB$ al di sotto del curva non corretta al Break Point, o $C = +3dB$ per ogni volta che il polo è ripetuto).

Le regole funzionano bene per funzioni di trasferimento i cui poli/zeri sono ben separati in frequenza. Se i poli e gli zeri sono molto vicini tra loro, allora è meglio valutare la funzione numericamente. Per "semplificare" la procedura, è possibile ri-normalizzare la funzione (dividendo il numeratore per gli zeri, e il denominatore per i poli). La procedura consente di valutare l'asintoto a bassa frequenza come $y = 0dB$ o $y = 1dB$. il Break Point rimane definito come $\omega = a$.

Se la risposta fosse del secondo ordine (e avesse radici complesse), sarebbe possibile fare riferimento alla seguente forma polinomiale:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.12})$$

In questa forma, è possibile esprimere la posizione dei poli come:

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (\text{A.13})$$

Per $\zeta = 1$, la risposta coinvolge due poli reali semplici. È possibile avere coppie di poli complessi e coniugati stabili se $0 < \zeta < 1$, la cui risposta è esprimibile come:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_n}{|\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega|} = \omega_n^2 [(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.14})$$

Il cui comportamento asintotico può essere espresso come:

$$|H(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0dB & \omega \ll \omega_n \\ -20\log(\omega^2)dB & \omega \gg \omega_n \end{cases} \quad (A.15)$$

Il comportamento asintotico è lo stesso che si avrebbe per un polo semplice ripetuto in $\omega = \omega_n$; la pendenza diminuisce di $m = 40 \frac{dB}{decade}$ in questa posizione. Il diagramma non corretto caratterizzato da poli complessi e coniugati è lo stesso che si avrebbe per un semplice polo ripetuto.

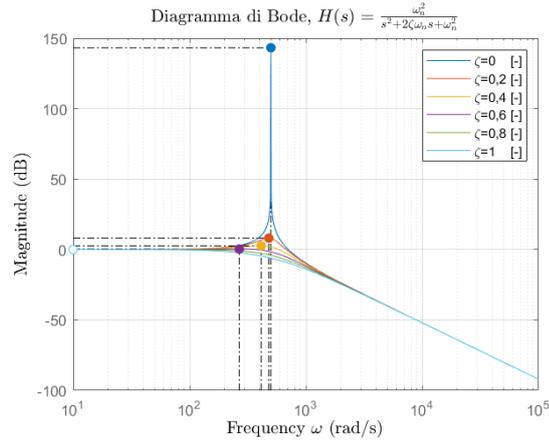


Figura A.3: $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$: Ampiezza.

Il comportamento del grafico è fortemente influenzato da ζ . Per bassi valori di ζ , il picco del grafico tende a valori sempre più grandi. Per $\omega = \omega_n$:

$$|H(j\omega_n)| = \frac{1}{2\zeta} \Rightarrow -20\log 2\zeta [dB] \quad (A.16)$$

La posizione del picco è localizzabile mediante la derivata prima della funzione:

$$\frac{\partial |H(j\omega)|}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (A.17)$$

Esiste un picco/massimo solo se $1 - 2\zeta^2 > 0$. L'ampiezza del picco è data da:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \Rightarrow -20\log(2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}) [dB] \quad (A.18)$$

La frequenza alla quale si manifesta il picco viene definita "frequenza di risonanza". Sarebbe possibile un procedimento analogo nel caso in cui vi fosse una coppia complessa di zeri (e.g. $H(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$).

Regole per la Ampiezza del diagramma di Bode (coppie di poli/zeri complessi):

1. Scrivere il polinomio nella forma standard. Successivamente, estrarre ω_n e ζ (Le radici complesse sono associate all'intervallo $0 \leq \zeta \leq 1$);
2. Tracciare il diagramma non corretto di Bode. Se le radici complesse sono al numeratore, la pendenza aumenta di $m = 40 \frac{dB}{decade}$ al Break Point. La condizione opposta si verifica se le radici complesse sono al denominatore;
3. Correggere il diagramma non corretto di Bode.

Un polinomio del secondo ordine non possiede sempre radici complesse e coniugate. Tuttavia, è possibile esprimere il polinomio in forma standard. È necessario verificare la disuguaglianza $0 \leq \zeta \leq 1$ prima di inserire il fattore di smorzamento in **Equazione**. Un modo utile per visualizzare le soluzioni di un polinomio del secondo ordine per ogni possibile valore del fattore di smorzamento è definito come *Luogo delle Radici*. Tale metodo viene impiegato, generalmente, per valutare la stabilità interna di un sistema dinamico lineare stazionario in retroazione. Le frecce mostrano il percorso delle radici nel piano complesso, a partire da $\zeta = 0$ (punto per cui non esiste nessuna radice reale). Man mano che $\zeta \rightarrow 1$, le radici descrivono un'orbita circolare verso l'asse orizzontale reale (negativo). per $\zeta = 1$, le radici convergono in un unico punto (polo semplice). per $\zeta > 1$, le radici divergono sull'asse orizzontale. All'interno di un sistema, esistono variabili di stato non controllabili (e.g. incertezza sui parametri) che agiscono sullo stesso; Il metodo è utile perché permette di stabilire gli accorgimenti necessari che un controllore deve attuare per raggiungere certi requisiti minimi (e.g. velocità di risposta). [33]

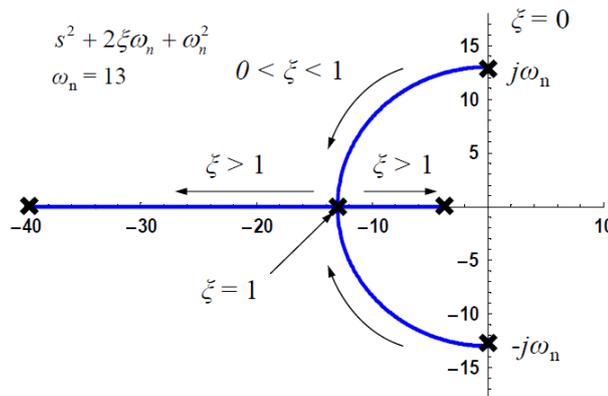


Figura A.4: Luogo delle Radici: $H(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$. [33]

A.0.2 Diagramma di Bode: Fase

La funzione di trasferimento $H(j\omega)$ è un fasore. La fase sinusoidale di un segnale, all'interno del diagramma di Bode, può cambiare in funzione della frequenza. Diagrammi di fase di questo tipo sono importanti per analizzare l'instabilità nei sistemi retroazionati. La fase netta del prodotto di due funzioni fasoriali è la somma delle singole fasi:

$$H(j\omega) = F(j\omega)G(j\omega) \Rightarrow \angle H(j\omega) = \angle F(j\omega) + \angle G(j\omega) \quad (\text{A.19})$$

Analogamente, per la divisione:

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \Rightarrow \angle H(j\omega) = \angle N(j\omega) - \angle D(j\omega) \quad (\text{A.20})$$

Viene presentata, di seguito, una formulazione di una funzione di trasferimento:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega + z)^m}{(j\omega + p)^n} \Rightarrow \angle H(j\omega) = m \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right) - n \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right) \quad (\text{A.21})$$

Facendo riferimento a **Equazione A.4**, è possibile scrivere la fase come:

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega) \quad (\text{A.22})$$

Il cui comportamento asintotico può essere descritto come:

$$|H(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0^\circ & \omega \ll 1 \\ -90^\circ & \omega \gg 1 \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

In questo caso, la funzione di trasferimento attraversa un cambio di fase pari a $deg = -90^\circ$ per un polo semplice. Il Break Point specifico, in questo caso, è $\omega = 1 \frac{rad}{s}$ (per cui vale $-\tan^{-1}(1) = -45^\circ$). Una decade al di sotto del Break Point vale $-\tan^{-1}(0,1) \simeq 6^\circ$; al di sopra, è possibile verificare che $deg = +84^\circ$ (**Figura A.5**). Il comportamento per uno zero semplice è simile. In forma generale:

$$H(s) = (s + a)^{\pm r} \Rightarrow H(j\omega) = (j\omega + a)^{\pm r} \quad (\text{A.24})$$

Il segno "+" rappresenta uno zero, il segno "-" rappresenta un polo. la forma generale è rappresentata da:

$$\angle H(j\omega) = \pm r \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (\text{A.25})$$

A cui corrisponde un comportamento asintotico del tipo:

$$|H(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0^\circ & \omega \ll 1 \\ \pm r 90^\circ & \omega \gg 1 \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

In generale, la fase della funzione di trasferimento cambia in positivo ($deg = +90^\circ$) per uno zero, in negativo ($deg = -90^\circ$) per un polo (**Figura A.5**). La funzione passa per il punto medio di ciascun "salto" di fase, a metà della variazione di fase netta (45° per ogni polo/zero), e passa per un punto che è distante $deg \simeq 6^\circ$ dall'asintoto una decade sopra o sotto il Break Point. Per radici ripetute, i valori vengono moltiplicati per il numero di ripetizioni della radice.

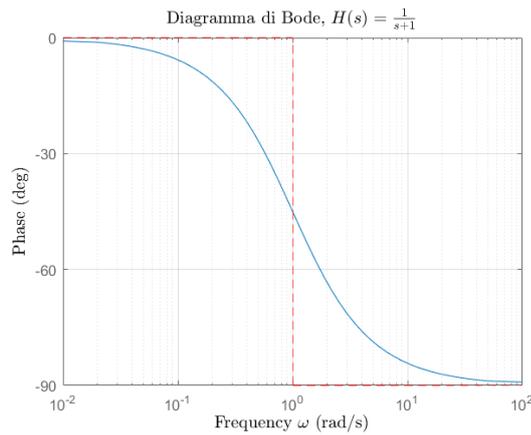


Figura A.5: $H(s) = \frac{1}{s+1}$: Fase.

Se i poli/zeri sono molteplici, è bene ricordare che la fase totale a qualsiasi frequenza è la somma dei contributi di tutti i poli e gli zeri. Le correzioni sono state tutte pari a $deg = \pm 6^\circ$ perché i poli sono semplici. Se le radici fossero ripetute, le correzioni di riferimento dei punti associate alla radice ripetuta sarebbero raddoppiate.

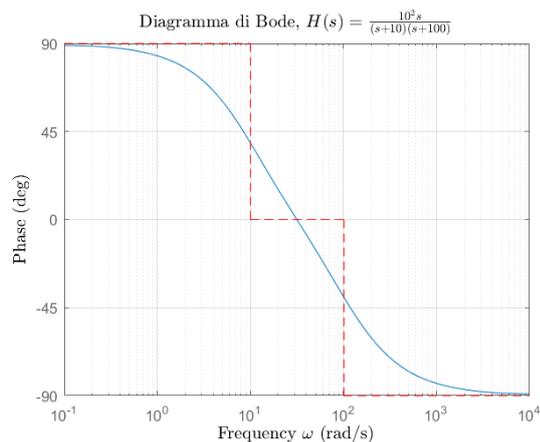


Figura A.6: $H(s) = \frac{10^2 s}{(s+10)(s+100)}$: Fase.

In ogni caso, per disegnare la Fase del diagramma di Bode:

1. Determinare inizialmente la fase della funzione di trasferimento per $\omega \rightarrow 0$, in maniera da definire l'asintoto di partenza per il diagramma di Bode non corretto (N.B.: se la funzione di trasferimento restituisce un numero reale negativo, il punto di partenza della fase è $p_1 = \pm 180^\circ$);
2. Disegnare la fase non corretta (sequenza di linee a fase costante) aumentando, ad ogni Break Point, $deg = +90^\circ$ per ogni *zero* e diminuendo $deg = -90^\circ$ per ogni *polo* (il salto vale $deg = 90^\circ$ per radici ripetute);
3. Segnare, per ogni polo/zero, il punto medio di ogni salto di fase. Considerare, successivamente, se quei punti si trovano o meno entro una decade da un polo/zero.;
4. Disegnare successivamente il diagramma di Bode corretto, facendo incontrare gli asintoti in punti distanti due decadi dal polo/zero più vicino.

Se la risposta fosse del secondo ordine (e avesse radici complesse), è possibile affermare che, man mano che il fattore di smorzamento ($0 < \zeta \leq 1$) diminuisce, il diagramma corretto di Bode assume la forma del diagramma non corretto. Per semplici poli/zeri il metodo precedente può ancora essere usato (tracciare punti di riferimento alla frequenza del punto medio e una decade sopra/sotto il punto in esame), ma bisogna scegliere frequenze più vicine al Break Point per meglio approssimare la pendenza della curva (e.g. $\omega = \frac{\omega_n}{2}$). [33]

Appendice

Appendice B

Metodo diretto: Effetti di squeeze e dimensione

```
1 % Effetto dello Squeeze – Confronto a parità di dimensione
2 %% Dati
3 d=[0.011 0.041]; % Diametro interno O-Ring [m]
4 phi=[0.00178 0.00262]; % Diametro di corda O-Ring [m]
5 squeeze=[5 10 15 20]; % Pre-compressione radiale [%]
6 omega=1:100:3000; % Intervallo di frequenza [Hz]
7 omegarad=(omega./(200/6.28)); % Intervallo normalizzato [-]
8 %% Import/Read starting Matrix
9 Viton75= xlsread('O_Ring_data',1);
10 Viton90=xlsread('O_Ring_data',2);
11 Kalrez4079=xlsread('O_Ring_data',3);
12 Kalrez6375=xlsread('O_Ring_data',4);
13 %% Menu&Conditions
14 Categories=[Viton75 Viton90 Kalrez4079 Kalrez6375];
15 choice=menu('Choose the Category','O-Ring Viton75 - d=11mm, phi=1.78
mm','O-Ring Viton75 - d=11mm, phi=2.62mm','O-Ring Viton75 - d=41mm
, phi=1.78mm','O-Ring Viton75 - d=41mm, phi=2.62mm','O-Ring
Viton90 - d=11mm, phi=1.78mm','O-Ring Viton90 - d=11mm, phi=2.62mm
', 'O-Ring Viton90 - d=41mm, phi=1.78mm','O-Ring Viton90 - d=41mm,
phi=2.62mm','O-Ring Kalrez4079 - d=11mm, phi=1.78mm','O-Ring
Kalrez6375 - d=11mm, phi=1.78mm');
16 if choice==1
17 Categories=Viton75;
18 k=Categories(1:4,6).*omegarad.^Categories(1:4,5);
19 figure
20 loglog(omega,k)
21 grid on
22 % Caratteristiche grafico
```

```

23     title('O-Ring Viton 75,  $\Phi=1.78$  [mm], d=11 [mm]$', 'FontName',
24           'Times New Roman', ...
25           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
26     legend('Squeeze = 5 [%]', 'Squeeze = 10 [%]', 'Squeeze = 15 [%]', '
27           Squeeze = 20 [%]')
28     xlim([0 3000])
29     xlabel('Frequenza,  $f$  [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
30           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
31     ylabel('Rigidezza,  $k$   $[\frac{N}{m}]$ ', 'FontName', 'Times New
32           Roman', ...
33           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
34     c=Categories(1:4,9).*omegarad.^Categories(1:4,8);
35     figure
36     loglog(omega,c)
37     grid on
38     % Caratteristiche grafico
39     title('O-Ring Viton 75,  $\Phi=1.78$ mm, d=11mm$', 'FontName', 'Times
40           New Roman', ...
41           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
42     legend('Squeeze = 5 [%]', 'Squeeze = 10 [%]', 'Squeeze = 15 [%]', '
43           Squeeze = 20 [%]')
44     xlim([0 3000])
45     xlabel('Frequenza,  $f$  [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
46           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
47     ylabel('Smorzamento,  $c$   $[\frac{Ns}{m}]$ ', 'FontName', 'Times New
48           Roman', ...
49           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
50 elseif choice==2
51     Categories=Viton75;
52     k=Categories(5:7,6).*omegarad.^Categories(5:7,5);
53     figure
54     loglog(omega,k)
55     grid on
56     % Caratteristiche grafico
57     title('O-Ring Viton 75,  $\Phi=2.62$  [mm], d=11 [mm]$', 'FontName',
58           'Times New Roman', ...
59           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
60     legend('Squeeze = 10 [%]', 'Squeeze = 15 [%]', 'Squeeze = 20 [%]')
61     xlim([0 3000])
62     xlabel('Frequenza,  $f$  [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
63           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
64     ylabel('Rigidezza,  $k$   $[\frac{N}{m}]$ ', 'FontName', 'Times New
65           Roman', ...
66           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
67     c=Categories(5:7,9).*omegarad.^Categories(5:7,8);
68     figure
69     loglog(omega,c)
70     grid on
71     % Caratteristiche grafico

```

```

64 title('O-Ring Viton 75,  $\Phi=2.62\text{mm}$ ,  $d=11\text{mm}$ ', 'FontName', 'Times
    New Roman', ...
65         'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
66 legend('Squeeze = 10 [%]', 'Squeeze = 15 [%]', 'Squeeze = 20 [%]')
67 xlim([0 3000])
68 xlabel('Frequenza,  $f$  [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
69         'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
70 ylabel('Smorzamento,  $\zeta$   $[\frac{Ns}{m}]$ ', 'FontName', 'Times New
    Roman', ...
71         'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
72 elseif choice==3
73     Categories=Viton75;
74     k=Categories(8:11,6).*omegarad.^Categories(8:11,5);
75     figure
76     loglog(omega,k)
77     grid on
78     % Caratteristiche grafico
79     title('O-Ring Viton 75,  $\Phi=1.78$  [mm],  $d=41$  [mm]', 'FontName',
    'Times New Roman', ...
80         'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
81     legend('Squeeze = 5 [%]', 'Squeeze = 10 [%]', 'Squeeze = 15 [%]', '
    Squeeze = 20 [%]')
82     xlim([0 3000])
83     xlabel('Frequenza,  $f$  [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
84         'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
85     ylabel('Rigidezza,  $k$   $[\frac{N}{m}]$ ', 'FontName', 'Times New
    Roman', ...
86         'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
87     c=Categories(8:11,9).*omegarad.^Categories(8:11,8);
88     figure
89     loglog(omega,c)
90     grid on
91     % Caratteristiche grafico
92     title('O-Ring Viton 75,  $\Phi=1.78\text{mm}$ ,  $d=41\text{mm}$ ', 'FontName', 'Times
    New Roman', ...
93         'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
94     legend('Squeeze = 5 [%]', 'Squeeze = 10 [%]', 'Squeeze = 15 [%]', '
    Squeeze = 20 [%]')
95     xlim([0 3000])
96     xlabel('Frequenza,  $f$  [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
97         'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
98     ylabel('Smorzamento,  $\zeta$   $[\frac{Ns}{m}]$ ', 'FontName', 'Times New
    Roman', ...
99         'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
100 elseif choice==4
101     Categories=Viton75;
102     k=Categories(12:15,6).*omegarad.^Categories(12:15,5);
103     figure
104     loglog(omega,k)

```

```

105     grid on
106     % Caratteristiche grafico
107     title('O-Ring Viton 75,  $\Phi=2.62$  [mm], d=41 [mm]', 'FontName',
108           'Times New Roman', ...
109           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
110     legend('Squeeze = 5 [%]', 'Squeeze = 10 [%]', 'Squeeze = 15 [%]',
111           'Squeeze = 20 [%]')
112     xlim([0 3000])
113     xlabel('Frequenza,  $f$  [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
114           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
115     ylabel('Rigidezza,  $k \frac{N}{m}$ ', 'FontName', 'Times New
116           Roman', ...
117           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
118     c=Categories(12:15,9).*omegarad.^Categories(12:15,8);
119     figure
120     loglog(omega, c)
121     grid on
122     % Caratteristiche grafico
123     title('O-Ring Viton 75,  $\Phi=2.62$ mm, d=41mm', 'FontName', 'Times
124           New Roman', ...
125           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
126     legend('Squeeze = 5 [%]', 'Squeeze = 10 [%]', 'Squeeze = 15 [%]',
127           'Squeeze = 20 [%]')
128     xlim([0 3000])
129     xlabel('Frequenza,  $f$  [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
130           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
131     ylabel('Smorzamento,  $c \frac{Ns}{m}$ ', 'FontName', 'Times New
132           Roman', ...
133           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
134 elseif choice==5
135     [...]
136 end
137
138 % Effetto della dimensione – Confronto a parità di Squeeze
139 level=menu('Choose the squeeze level', '5%', '10%', '15%', '20%');
140 if choice==1
141     k_Viton75=Categories(1:15,6).*omegarad.^Categories(1:15,5);
142     c_Viton75=Categories(1:15,9).*omegarad.^Categories(1:15,8);
143     if level==1
144         figure
145         loglog(omega, k_Viton75(1,:), omega, k_Viton75(8,:), omega, k_Viton75
146               (12,:))
147         % Caratteristiche grafico di confronto
148         title('O-Ring Viton 75, Squeeze = 5%', 'FontName', 'Times New
149               Roman', ...
150               'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
151         legend('Viton 75: d = 11 [mm];  $\Phi=1.78$  [mm]', 'Viton 75: d = 11
152               [mm];  $\Phi=2.62$  [mm]', 'Viton 75: d = 41 [mm];  $\Phi=1.78$  [mm]',
153               'Viton 75: d = 41 [mm];  $\Phi=2.62$  [mm]')

```

```

144     grid on
145     xlim([0 3000])
146     xlabel('Frequenza, $f$ [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
147           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
148     ylabel('Rigidezza, $k$ $[\frac{N}{m}]$', 'FontName', 'Times New
149           Roman', ...
150           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
151     figure
152     loglog(omega,c_Viton75(1,:),omega,c_Viton75(8,:),omega,c_Viton75
153           (12,:))
154     title('O-Ring Viton 75, Squeeze = 5\%', 'FontName', 'Times New
155           Roman', ...
156           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
157     legend('Viton 75: d = 11 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', 'Viton 75: d = 11
158           [mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', '
159           Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=2.62 [mm]')
160     grid on
161     xlim([0 3000])
162     xlabel('Frequenza, $f$ [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
163           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
164     ylabel('Smorzamento, $\zeta$ $[\frac{Ns}{m}]$', 'FontName', 'Times
165           New Roman', ...
166           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
167     elseif level==2
168     figure
169     loglog(omega,k_Viton75(2,:),omega,k_Viton75(5,:),omega,k_Viton75
170           (9,:),omega,k_Viton75(13,:))
171     % Caratteristiche grafico di confronto
172     title('O-Ring Viton 75, Squeeze = 10\%', 'FontName', 'Times New
173           Roman', ...
174           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
175     legend('Viton 75: d = 11 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', 'Viton 75: d = 11
176           [mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', '
177           Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=2.62 [mm]')
178     grid on
179     xlim([0 3000])
180     xlabel('Frequenza, $f$ [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
181           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
182     ylabel('Rigidezza, $k$ $[\frac{N}{m}]$', 'FontName', 'Times New
183           Roman', ...
184           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
185     figure
186     loglog(omega,c_Viton75(2,:),omega,c_Viton75(5,:),omega,c_Viton75
187           (9,:),omega,c_Viton75(13,:))
188     title('O-Ring Viton 75, Squeeze = 10\%', 'FontName', 'Times New
189           Roman', ...
190           'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')

```

```

178 legend('Viton 75: d = 11 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', 'Viton 75: d = 11
[mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', '
Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=2.62 [mm]')
179 grid on
180 xlim([0 3000])
181 xlabel('Frequenza, $f$ [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
182 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
183 ylabel('Smorzamento, $c$ $[\frac{Ns}{m}]$', 'FontName', 'Times
New Roman', ...
184 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
185 elseif level==3
186 figure
187 loglog(omega,k_Viton75(3,:),omega,k_Viton75(6,:),omega,k_Viton75
(10,:),omega,k_Viton75(14,:))
188 % Caratteristiche grafico di confronto
189 title('O-Ring Viton 75, Squeeze = 15\%', 'FontName', 'Times New
Roman', ...
190 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
191 legend('Viton 75: d = 11 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', 'Viton 75: d = 11
[mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', '
Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=2.62 [mm]')
192 grid on
193 xlim([0 3000])
194 xlabel('Frequenza, $f$ [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
195 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
196 ylabel('Rigidezza, $k$ $[\frac{N}{m}]$', 'FontName', 'Times New
Roman', ...
197 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
198 figure
199 loglog(omega,c_Viton75(3,:),omega,c_Viton75(6,:),omega,c_Viton75
(10,:),omega,c_Viton75(14,:))
200 title('O-Ring Viton 75, Squeeze = 15\%', 'FontName', 'Times New
Roman', ...
201 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
202 legend('Viton 75: d = 11 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', 'Viton 75: d = 11
[mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', '
Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=2.62 [mm]')
203 grid on
204 xlim([0 3000])
205 xlabel('Frequenza, $f$ [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
206 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
207 ylabel('Smorzamento, $c$ $[\frac{Ns}{m}]$', 'FontName', 'Times
New Roman', ...
208 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
209 elseif level==4
210 figure
211 loglog(omega,k_Viton75(4,:),omega,k_Viton75(7,:),omega,k_Viton75
(11,:),omega,k_Viton75(15,:))
212 % Caratteristiche grafico di confronto

```

```

213     title('O-Ring Viton 75, Squeeze = 20\%', 'FontName', 'Times New
Roman', ...
214     'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
215     legend('Viton 75: d = 11 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', 'Viton 75: d = 11
[mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', '
Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=2.62 [mm]')
216     grid on
217     xlim([0 3000])
218     xlabel('Frequenza, $f$ [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
219     'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
220     ylabel('Rigidezza, $k$ $[\frac{N}{m}]$', 'FontName', 'Times New
Roman', ...
221     'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
222     figure
223     loglog(omega,c_Viton75(4,:),omega,c_Viton75(7,:),omega,c_Viton75
(11,:),omega,c_Viton75(15,:))
224     title('O-Ring Viton 75, Squeeze = 20\%', 'FontName', 'Times New
Roman', ...
225     'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
226     legend('Viton 75: d = 11 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', 'Viton 75: d = 11
[mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', '
Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=2.62 [mm]')
227     grid on
228     xlim([0 3000])
229     xlabel('Frequenza, $f$ [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
230     'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
231     ylabel('Smorzamento, $c$ $[\frac{Ns}{m}]$', 'FontName', 'Times
New Roman', ...
232     'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
233     end
234 elseif choice==2
235     k_Viton90=CATEGORIES(1:15,6).*omegarad.^CATEGORIES(1:15,5);
236     c_Viton90=CATEGORIES(1:15,9).*omegarad.^CATEGORIES(1:15,8);
237     if level==1
238     [...]
239     end
240 end

```

Appendice

Appendice C

Metodo diretto: Interpolazione lineare e caratteristiche

```
1 %% Dati
2 d=[0.011 0.041];           % Diametro interno O-Ring [m]
3 phi=[0.00178 0.00262];   % Diametro di corda O-Ring [m]
4 squeeze=[5 10 15 20];    % Pre-compressione radiale [%]
5 %% Import/Read starting Matrix
6 Viton75=xlsread('O_Ring_data',1);
7 Viton90=xlsread('O_Ring_data',2);
8 Kalrez4079=xlsread('O_Ring_data',3);
9 Kalrez6375=xlsread('O_Ring_data',4);
10 Coefficienti=xlsread('O_Ring_data',5);
11 %% Menu&Conditions
12 Categories=[Viton75 Viton90 Kalrez4079 Kalrez6375];
13 choice=menu('Category', 'Viton 75', 'Viton 90', 'Kalrez 4079', 'Kalrez
14 6375');
15 if choice==1
16     Categories=Viton75;
17     k1=Categories(1:4,6)/(d(1).*phi(1));
18     k2=Categories(5:7,6)/(d(1).*phi(2));
19     k3=Categories(8:11,6)/(d(2).*phi(1));
20     k4=Categories(12:15,6)/(d(2).*phi(2));
21     figure
22     plot(squeeze,k1,'o',squeeze(2:4),k2,'square',squeeze,k3,'*',
23          squeeze,k4,'^')
24     title('O-Ring Viton 75','FontName','Times New Roman', ...
25           'FontSize',12,'Color','k','Interpreter','LaTeX')
```

```

24 legend('Viton 75: d = 11 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', 'Viton 75: d = 11
[mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', '
Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=2.62 [mm]')
25 grid on
26 grid minor
27 xlim([0 20])
28 xlabel('Squeeze, $\delta$ [%]', 'FontName', 'Times New Roman',
...
'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
29 ylabel('$\bar{k}_{200}$ = $\frac{k_{200}}{d \cdot \phi}$ $\frac{N}{m^3}$', 'FontName', 'Times New Roman', ...
'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
30 c1=Categories(1:4,9)./(d(1).*phi(1));
31 c2=Categories(5:7,9)./(d(1).*phi(2));
32 c3=Categories(8:11,9)./(d(2).*phi(1));
33 c4=Categories(12:15,9)./(d(2).*phi(2));
34 figure
35 plot(squeeze,c1,'o',squeeze(2:4),c2,'square',squeeze,c3,'*',
36 squeeze,c4,'^')
37 title('O-Ring Viton 75', 'FontName', 'Times New Roman', ...
'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
38 legend('Viton 75: d = 11 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', 'Viton 75: d = 11
[mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', '
Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=2.62 [mm]')
39 grid on
40 grid minor
41 xlim([0 20])
42 xlabel('Squeeze, $\delta$ [%]', 'FontName', 'Times New Roman',
...
'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
43 ylabel('$\bar{c}_{200}$ = $\frac{c_{200}}{d \cdot \phi}$ $\frac{Ns}{m^3}$', 'FontName', 'Times New Roman', ...
'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
44 % Fit a polynomial p of degree 1 to the (x,y) data:
45 x = Categories(1:15,3)';
46 y = [k1',k2',k3',k4'];
47 p = polyfit(x,y,1);
48 % Evaluate the fitted polynomial p and plot:
49 f = polyval(p,x);
50 % Grafico
51 hold on
52 figure
53 plot(squeeze,k1,'o',squeeze(2:4),k2,'square',squeeze,k3,'*',
54 squeeze,k4,'^',x,f,'k-')
55 title('O-Ring Viton 75 - Interpolazione Lineare', 'FontName', '
Times New Roman', ...
56 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
57
58
59

```

```

60 legend('Viton 75: d = 11 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', 'Viton 75: d = 11
[mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', '
Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Interpolazione Lineare
Viton 75')
61 grid on
62 grid minor
63 xlim([0 20])
64 xticks([5 10 15 20])
65 xlabel('Squeeze, $\delta$ [%]', 'FontName', 'Times New Roman',
...
'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
66 ylabel('$\bar{k}_{200}$ = $\frac{k_{200}}{d \cdot \phi}$ $\frac{N}{m^3}$', 'FontName', 'Times New Roman', ...
'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
67
68 % Fit a polynomial p of degree 1 to the (x,y) data:
69 z = Categories(1:15,3)';
70 w = [c1',c2',c3',c4'];
71
72 p = polyfit(z,w,1);
73 % Evaluate the fitted polynomial p and plot:
74 f = polyval(p,z);
75 % Grafico
76 figure
77 plot(squeeze,c1,'o',squeeze(2:4),c2,'square',squeeze,c3,'*',
squeeze,c4,'^',x,f,'k-')
78 title('O-Ring Viton 75 - Interpolazione Lineare', 'FontName', '
Times New Roman', ...
'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
79
80 legend('Viton 75: d = 11 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', 'Viton 75: d = 11
[mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=1.78 [mm]', '
Viton 75: d = 41 [mm]; \Phi=2.62 [mm]', 'Interpolazione Lineare
Viton 75')
81 grid on
82 grid minor
83 xlim([0 20])
84 xticks([5 10 15 20])
85 xlabel('Squeeze, $\delta$ [%]', 'FontName', 'Times New Roman',
...
'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
86 ylabel('$\bar{c}_{200}$ = $\frac{c_{200}}{d \cdot \phi}$ $\frac{Ns}{m^3}$', 'FontName', 'Times New Roman', ...
'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
87
88 elseif choice==2
89     [...]
90
91 end

```

Appendice D

State Space: Intervallo di frequenza di interesse

```
1 %% Dati modello: Housing
2 M=0.3213; % [kg] Massa
3 ks=3.168e6; % [N/m] Rigidezza Housing
4 cs=1.81; % [Ns/m] Vettore Smorzamento
5 %% Dati modello: Alberi
6 Alberi=[0.548 0.0563 0.0568 0.0578]; % [kg] Massa alberi
7 choice=menu('Shaft: ', 'No.1 ', 'No.2 ', 'No.3 ', 'No.4 ');
8 m=Alberi(choice);
9 %% Dati modello: O-Ring
10 Viton70_Rigidezza=[2.88e6/1.6 6.22e6/2.2 7.60e6/2 10.82e6/2.2];
11 Viton70_Smorzamento=[164/1.05 246/1.15 292/1.35 302/1.1];
12 Viton75_Rigidezza=[2.88e6/0.65 6.22e6/0.8 7.6e6/1 10.82e6/1];
13 Viton75_Smorzamento=[164/0.33 246/0.35 292/0.43 302/0.35];
14 Viton80_Rigidezza=[4.92e6/1.2 11.21e6 19.5e6 17.16e6];
15 Viton80_Smorzamento=[194/0.5 270 410 387];
16 Viton90_Rigidezza=[6.96e6/1.1 16.20e6/1.5 31.4e6/2.7 23.5e6/2];
17 Viton90_Smorzamento=[224/0.76 494/1.3 528 472/0.8];
18 O_Ring=menu('O-Ring: ', 'Viton70 ', 'Viton75 ', 'Viton80 ', 'Viton90 ');
19 Squeeze=menu('Choose the Squeeze level: ', '5%', '10%', '15%', '20%');
20 %% Rigidezza e Smorzamento
21 if O_Ring==1 && Squeeze==1
22     Viton70_Rigidezza=Viton70_Rigidezza(1); % [N/m] Rigidezza
23     Viton70_Smorzamento=Viton70_Smorzamento(1); % [Ns/m] Smorzamento
24     k=Viton70_Rigidezza;
25     c=Viton70_Smorzamento;
26     F=50; % [N] Forzante
27     % State Space
```

```

28 A=[0 1 0 0 ;-k/m -c/m k/m c/m;0 0 0 1;k/M c/M -(ks+k)/M -(cs+c)/M
];
29 B=[0 0 0 1/M]';
30 C=[1 0 0 0; 0 0 1 0]; % Matrix - Housing/Shaft displacement
31 % C=[1 0 -1 0; 0 0 0 0]; % Matrix - O-Ring displacement
32 D=[0 0]';
33 sys = ss(A,B,C,D);
34 opts = bodeoptions('cstprefs');
35 opts.MagUnits = 'abs';
36 opts.FreqUnits = 'Hz';
37 % Diagramma di Bode
38 bode(sys,opts),grid on;
39 [mag,phase,wout] = bode(sys);
40 Mag1=(mag(1,:));
41 Phase1=phase(1,:);
42 Mag2=(mag(2,:));
43 Phase2=phase(2,:);
44 title('Diagramma di Bode', 'FontName', 'Times New Roman', ...
45 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
46 xlabel('Frequenza, $f$ ', 'FontName', 'Times New Roman', ...
47 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
48 figure
49 semilogx(wout/(2*pi),Mag1,'LineWidth',1), hold on
50 semilogx(wout/(2*pi),Mag2,'LineWidth',1), hold on
51 xlabel('Frequenza [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
52 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
53 ylabel('Ampiezza [m]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
54 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
55 title('Diagramma di Bode - Ampiezza', 'FontName', 'Times New
Roman', ...
56 'FontSize',10,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
57 legend('Alloggiamento','Albero')
58 figure
59 semilogx(wout/(2*pi),Phase1,'LineWidth',1), hold on
60 semilogx(wout/(2*pi),Phase2,'LineWidth',1), hold on
61 xlabel('Frequenza [Hz]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
62 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
63 ylabel('Fase [deg]', 'FontName', 'Times New Roman', ...
64 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
65 title('Diagramma di Bode - Sfasamento', 'FontName', 'Times New
Roman', ...
66 'FontSize',10,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
67 legend('Alloggiamento','Albero')
68 grid on, zoom on
69 elseif O_Ring==1 && Squeeze==2
70 [...]
71 end

```

Appendice E

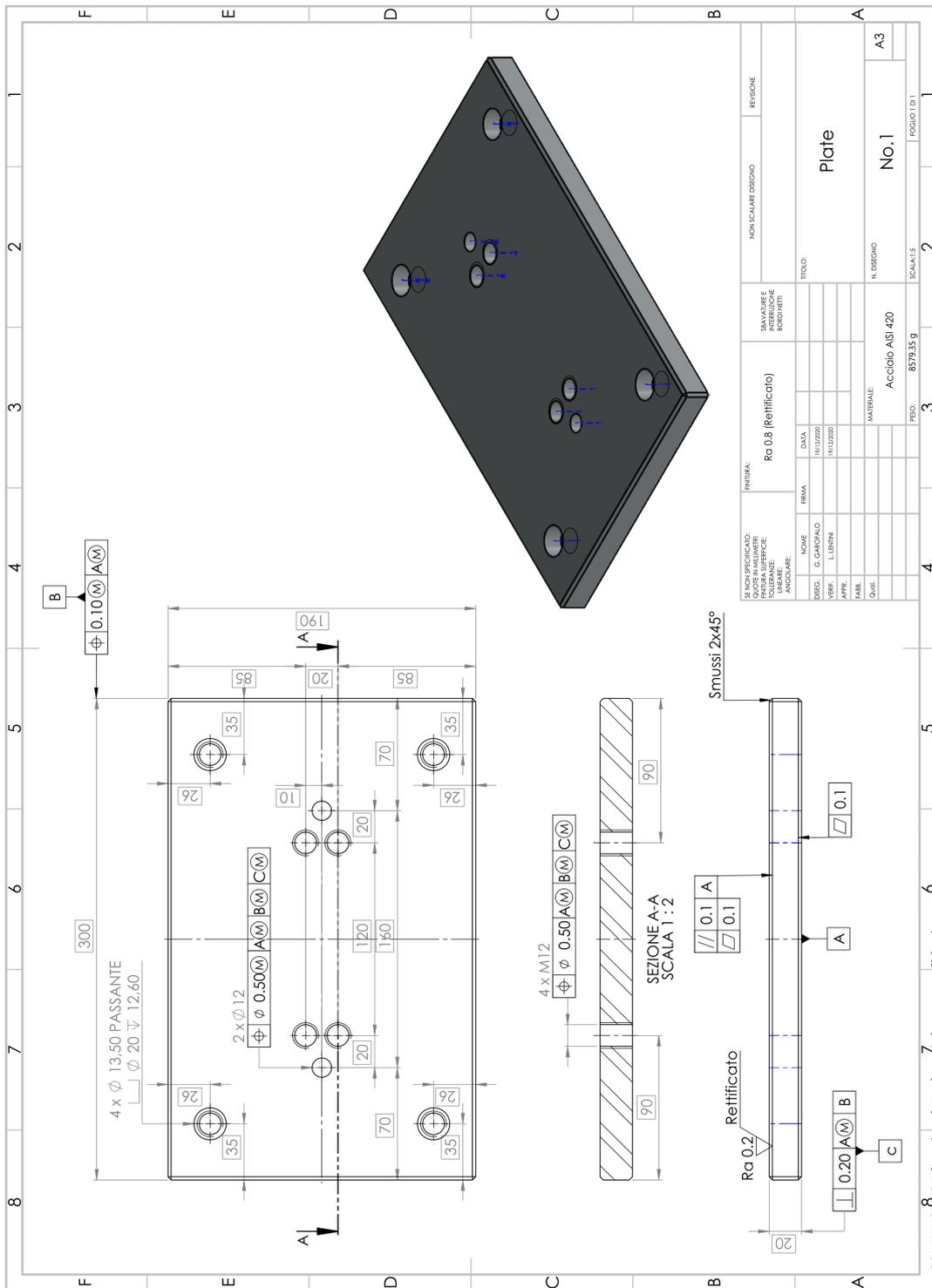
Forza esercitabile da un eccitatore modale

```
1 % Dati
2 Alberi=[0.548 0.0563 0.0568 0.0578]; % [kg] Massa alberi
3 choice=menu('Shaft: ', 'No.1 ', 'No.2 ', 'No.3 ', 'No.4 ');
4 M=0.3213; % [kg] Massa Housing
5 Ks=3.168e6; % [N/m] Rigidezza Housing
6 Cs=1.81; % [Ns/m] Smorzamento Housing
7 % Dati modello: O-Ring
8 Viton70_Rigidezza=[2.88e6/1.6 6.22e6/2.2 7.60e6/2 10.82e6/2.2];
9 Viton70_Smorzamento=[164/1.05 246/1.15 292/1.35 302/1.1];
10 Viton75_Rigidezza=[2.88e6/0.65 6.22e6/0.8 7.6e6/1 10.82e6/1];
11 Viton75_Smorzamento=[164/0.33 246/0.35 292/0.43 302/0.35];
12 Viton80_Rigidezza=[4.92e6/1.2 11.21e6 19.5e6 17.16e6];
13 Viton80_Smorzamento=[194/0.5 270 410 387];
14 Viton90_Rigidezza=[6.96e6/1.1 16.20e6/1.5 31.4e6/2.7 23.5e6/2];
15 Viton90_Smorzamento=[224/0.76 494/1.3 528 472/0.8];
16 O_Ring=menu('O-Ring: ', 'Viton70 ', 'Viton75 ', 'Viton80 ', 'Viton90 ');
17 Squeeze=menu('Choose the Squeeze level: ', '5%', '10%', '15%', '20%');
18 % Dati Modello: Spostamento Housing
19 ydisp=[0.5e-6 0.75e-6 1e-6];
20 z=menu('Displacement: ', 'y1=0.5e-6m', 'y2=0.75e-6m', 'y3=1e-6m');
21 if O_Ring==1 && Squeeze==1
22     m=Alberi(Squeeze);
23     k=Viton70_Rigidezza(Squeeze);
24     c=Viton70_Smorzamento(Squeeze);
25     wn=sqrt(k/m); % [rad/s] Pulsazione
26     beta=M/m; % [-] Rapporto masse
27     ws=sqrt(Ks/m); % [rad/s] Pulsazione
28     zeta=(c/(2*wn*m)); % Damping Ratio
```

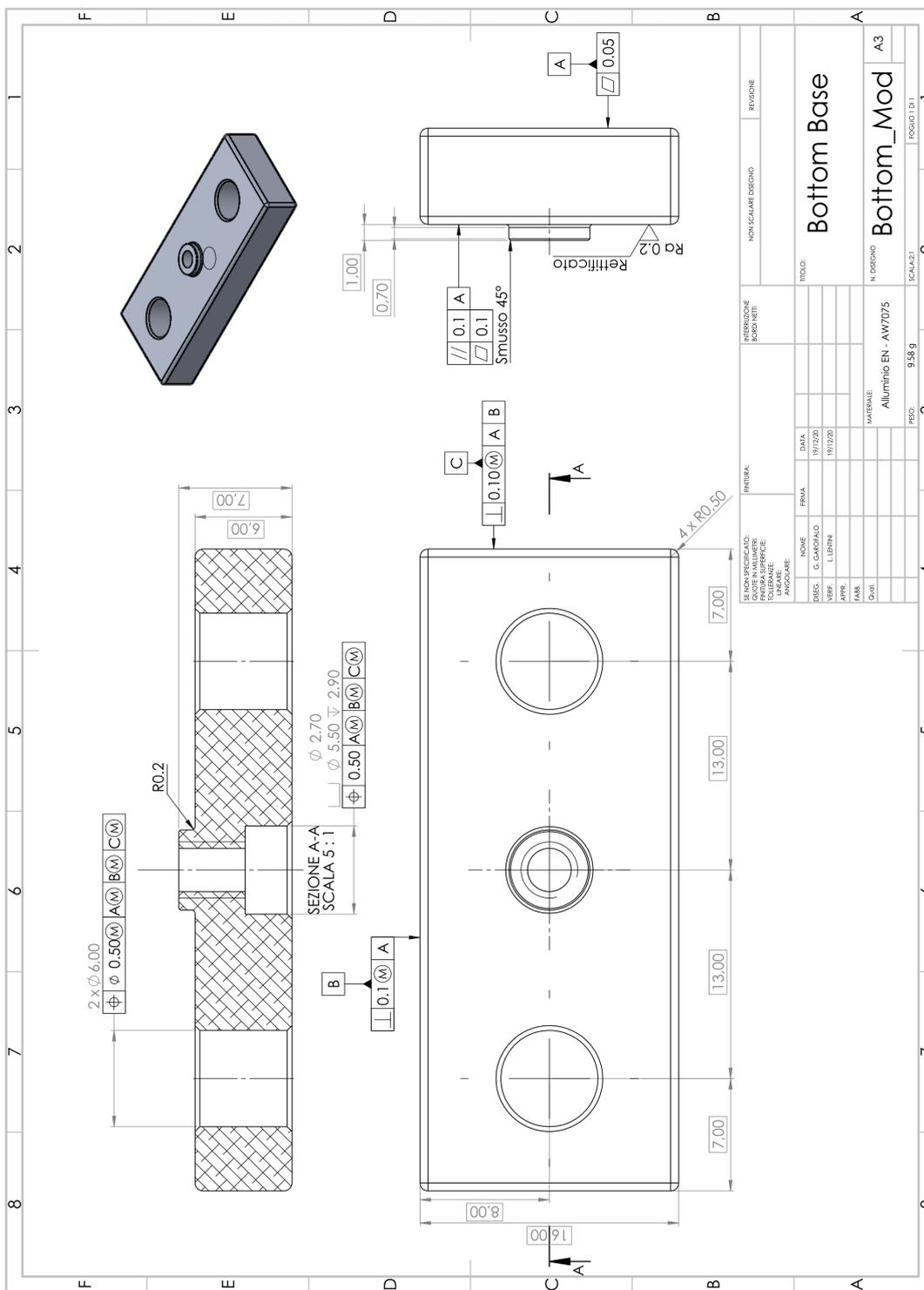
```

29 zetaS=(Cs/(2*ws*m)); % Damping Ratio
30 gamma=Ks/k; % [-] Parametro adim.
31 delta=Cs/c; % [-] Parametro adim.
32 % Funzione di Trasferimento TF=F(s)/y(s)
33 numeratore=[beta*ydisp(z) ((beta*2*zeta*wn)+(2*zetaS*ws+2*zeta))*
ydisp(z) (beta*(wn^2)+((2*zetaS*ws)+2*zeta*wn)*2*zeta*wn+((wn^2)+(
ws^2))-4*(zeta^2)*(wn^2))*ydisp(z) ((2*zeta*wn+2*zetaS*ws)*(wn
^2)+(((ws^2)+(wn^2))*2*zeta*wn)-(4*zeta*(wn^3)))*ydisp(z) (((wn^2)
+ws^2)*(wn^2)-(wn^4))*ydisp(z)];
34 denominatore=[(1/m) ((2*zeta*wn)/m) ((wn^2)/(m))];
35 % Sistema
36 sys=tf(numeratore,denominatore);
37 BodeDiag=bodeplot(sys);
38 % Caratteristiche Diagramma
39 setoptions(BodeDiag,'FreqUnits','Hz');
40 setoptions(BodeDiag,'MagUnits','abs');
41 funit=getoptions(BodeDiag);
42 setoptions(BodeDiag,'FreqUnits','Hz');
43 funit.MagScale='linear';
44 setoptions(BodeDiag,funit);
45 omegaw=getoptions(BodeDiag);
46 omegaw.FreqScale='linear';
47 setoptions(BodeDiag,omegaw);
48 % Grafico
49 grid on
50 grid minor
51 zoom on
52 title('Diagramma di Bode: Forza imprimibile $F(s)$', 'FontName',
'Times New Roman', ...
53 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
54 xlim([0 3000])
55 xlabel('Frequenza, $f$ ', 'FontName', 'Times New Roman', ...
56 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
57 ylabel('Phase', 'FontName', 'Times New Roman', ...
58 'FontSize',12,'Color','k', 'Interpreter', 'LaTeX')
59 elseif O_Ring==1 && Squeeze==2
60 [...]
61 end

```

SOLIDWORKS Educational Product. Solo per uso didattico.

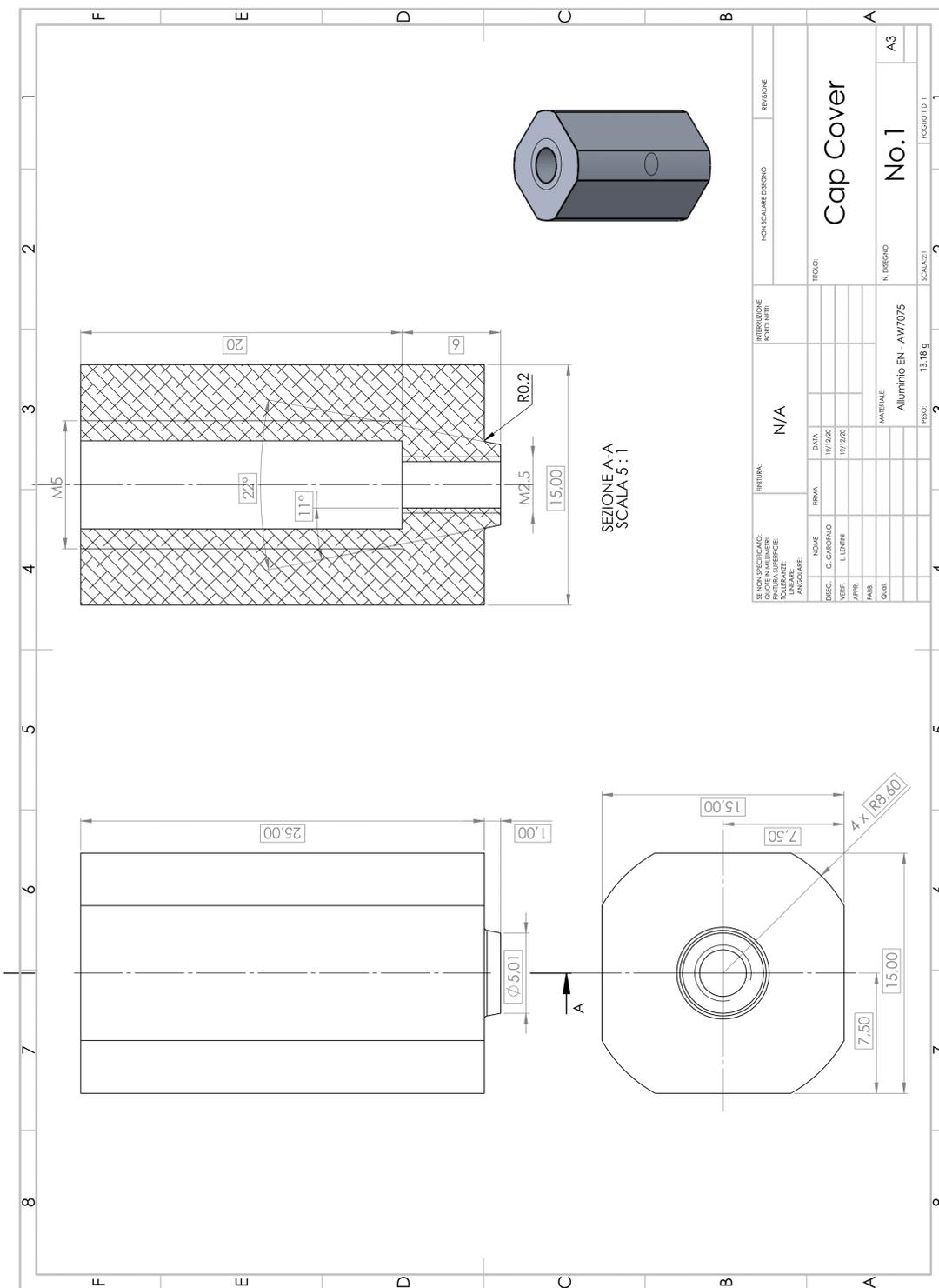


REVISIONI		REVISIONI	
NO.	DATA	DESCRIZIONE	REVISIONE
1	19/12/20	PRODOTTO	1
2	19/12/20	REVISIONE	2

PRODOTTORE		REVISIONI	
NO.	DATA	DESCRIZIONE	REVISIONE
1	19/12/20	PRODOTTO	1
2	19/12/20	REVISIONE	2

PRODOTTORE		REVISIONI	
NO.	DATA	DESCRIZIONE	REVISIONE
1	19/12/20	PRODOTTO	1
2	19/12/20	REVISIONE	2

PRODOTTORE		REVISIONI	
NO.	DATA	DESCRIZIONE	REVISIONE
1	19/12/20	PRODOTTO	1
2	19/12/20	REVISIONE	2



DESCRIZIONE QUOTI NUMERICI LINEARE ANGOLARE		UNITA'		NON SCALARE		REVISIONE	
NOME		DATA		TITOLO:		REVISIONE	
DESC. G. CAROPALO		19/12/20		Cap Cover		REVISIONE	
VSF. L. LENZI		19/12/20		N. PRODOTTORE		REVISIONE	
APR. P.M.B.				N. DISEGNO		REVISIONE	
Data.				N. DISEGNO		REVISIONE	
				MATERIALE		REVISIONE	
				Alluminio EN - A7075		REVISIONE	
				PROG.		REVISIONE	
				1318 9		REVISIONE	
				SCALATI		REVISIONE	
				2		REVISIONE	
				A3		REVISIONE	

Appendice G

Caratterizzazione Housing

```
1 %% Loading and Setting Dati Sperimentali
2 % Sweep
3 load fs_20kHz_Sweep5kHz_0Hz_Housing_Molla_1.txt
4 Dati=fs_20kHz_Sweep5kHz_0Hz_Housing_Molla_1;
5 % Impulse
6 load fs_20kHz_Impulso_Housing_1.txt
7 Dati1=fs_20kHz_Impulso_Housing_1;
8 %% Dati Sensori
9 % Sweep
10 y1=Dati(:,2)-mean(Dati(:,2)); % [um] Sensore No.1 Housing
11 y2=Dati(:,3)-mean(Dati(:,3)); % [um] Sensore No.2 Housing
12 f=Dati(:,4)*10; % [N] Forza impressa Housing
13 y=-((y1+y2)/2)*1e-6; % [um] Media sensori Housing
14 % Impulse
15 y11=Dati1(:,2)-mean(Dati1(:,2)); % [um] Sensore No.1 Housing
16 y22=Dati1(:,3)-mean(Dati1(:,3)); % [um] Sensore No.2 Housing
17 f1=Dati1(:,4)*10; % [N] Forza impressa Housing
18 y3=-((y11+y22)/2)*1e-6; % [um] Media sensori Housing
19 %% Setting acquisizioni
20 fs=20000; %f_ext *10 % [Hz] Frequenza campionamento
21 dt=1/fs; % Risoluzione
22 t=[1:length(y)]*dt; % Numero di campioni
23 t=t';
24 M=0.3213; % [kg] Massa Housing
25 ws=500*6.28; % [rad/s] Frequenza naturale
26 Ks=M*(ws^2); % [N/m] Rigidezza Housing
27 ZetaS=0.0009; % Rapporto di Smorzamento
28 Cs=2*ZetaS*(sqrt(Ks*M)); % Smorzamento
29 % Sweep
30 T_wind=0.2;
31 window=2^nextpow2(T_wind*fs);
```

```

32 WINDOW=hamming(window);
33 NOVERLAP=round(75*window/100);
34 [Txym,Fm]=tfestimate(f,y,hamming(window),NOVERLAP,[],fs);
35 [Cxym,Fm] = mscohere(f,y,hamming(window),NOVERLAP,[],fs);
36 [Txy,F]=tfestimate(f,y,hamming(window),NOVERLAP,[],fs);
37 [Cxy,F] = mscohere(f,y,hamming(window),NOVERLAP,[],fs);
38 % Impulse
39 [Txym1,Fm1]=tfestimate(f1,y3,hamming(window),NOVERLAP,[],fs);
40 [Cxym1,Fm1] = mscohere(f1,y3,hamming(window),NOVERLAP,[],fs);
41 [Txy1,F1]=tfestimate(f1,y3,hamming(window),NOVERLAP,[],fs);
42 [Cxy1,F1] = mscohere(f1,y3,hamming(window),NOVERLAP,[],fs);
43 %% Funzione di Trasferimento (Sperimentale-Numerico)
44 plot(Fm,mag2db(abs(Txym)),'r','linewidth',0.7)
45 ylim([-150 100])
46 hold on
47 plot(Fm1,mag2db(abs(Txym1)),'k','linewidth',0.7)
48 ylim([-150 100])
49 numeratore=1;
50 denominatore=[M Cs Ks];
51 sys=tf(numeratore,denominatore);
52 BodeDiag=bodeplot(sys);
53 setoptions(BodeDiag,'FreqUnits','Hz');
54 % setoptions(BodeDiag,'MagUnits','abs');
55 % funit=getoptions(BodeDiag);
56 setoptions(BodeDiag,'FreqUnits','Hz');
57 % funit.MagScale='linear';
58 % setoptions(BodeDiag,funit);
59 omegaw=getoptions(BodeDiag);
60 omegaw.FreqScale='linear';
61 setoptions(BodeDiag,omegaw);
62 xlim([0 1000])
63 ylim([-200 80])
64 title('Diagramma di Bode (Housing),  $\frac{y(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+c_s s+k_s}$ ','FontName','Times New Roman',...
65       'FontSize',12,'Color','k','Interpreter','LaTeX')
66 xlabel('Frequenza, $f$','FontName','Times New Roman',...
67       'FontSize',12,'Color','k','Interpreter','LaTeX')
68 ylabel('Phase','FontName','Times New Roman',...
69       'FontSize',12,'Color','k','Interpreter','LaTeX')
70 hold on
71 plot(Fm,angle(Txym)/pi*180,'r','linewidth',0.7)
72 hold on
73 plot(Fm1,angle(Txym1)/pi*180,'k','linewidth',0.7)
74 legend('Numerical TF','Experimental Sweep TF','Experimental Impulse
75       TF','Interpreter','LaTeX')
76 grid on
77 grid minor

```

Appendice H

Transfer Function Estimate/Coherence

H.0.1 Transfer Function Estimate

La relazione tra l'input x e l'output y è modellata da una funzione di trasferimento lineare e tempo-invariante. Nel dominio della frequenza, $\frac{y(f)}{x(f)} = H(f)$.

- `txy = tfestimate(x,y)` stima la funzione di trasferimento. I vettori devono avere la stessa lunghezza. Se uno dei segnali è una matrice e l'altro è un vettore, la lunghezza del vettore deve essere uguale al numero di righe nella matrice. La funzione espande il vettore e restituisce una matrice di stime della funzione di trasferimento (colonna per colonna);
- Se x e y sono matrici con lo stesso numero di righe ma diverso di colonne, `txy` è una funzione di trasferimento multi-input / multi-output (MIMO). `txy` è un array tridimensionale. Se x ha m colonne e y ha n colonne, allora `txy` ha n colonne e m "pagine";
- Se x e y sono matrici di uguale dimensione, allora `tfestimate` opera per colonna: `txy(:, n) = tfestimate(x(:, n), y(:, n))`. Per ottenere una stima MIMO, bisogna aggiungere "mimo" all'elenco degli argomenti;
- `txy = tfestimate(x,y>window)` usa la funzione di finestrazione per dividere x e y (e.g. vettori) in segmenti e stimare a poco a poco la funzione di trasferimento. Se la finestra è un vettore, divide ogni colonna di x e y in sezioni sovrapposte di lunghezza uguale alla lunghezza della finestra, quindi effettua il "finestraggio" di ogni sezione con il parametro specificato in `window`.

- $\text{txy} = \text{tfestimate}(x,y,\text{window},\text{noverlap})$ utilizza campioni noverlap di sovrapposizione tra segmenti adiacenti. Noverlap deve essere un intero più piccolo della finestra se la finestra è un intero (se noverlap è omesso). Di base, ci sono otto sezioni con overlap al 50%.
- $\text{txy},w = \text{tfestimate}(x,y,\text{window},\text{noverlap},\text{nfft})$. Un'altra rappresentazione può essere $\text{txy},w = \text{tfestimate}(x,y,\text{window},\text{noverlap},w)$. La prima specifica un numero di punti FFT usare per calcolare la PSD e stimare la CPSD. se x e y sono reali, la funzione txy ha lunghezza $(\text{NFFT}/2)+1$ se NFFT è pari, $(\text{NFFT}+1)/2$ se è dispari. Se x e y sono complessi, txy ha sempre lunghezza NFFT . Se NFFT è specificato come vuoto, allora è posto come 256 oppure la successiva potenza di due più grande della lunghezza di ogni sezione di x o y (la maggiore tra le due). Se NFFT è maggiore della lunghezza di ciascuna sezione, i dati sono "zero-padded". Se NFFT è inferiore alla lunghezza della sezione, il segmento è "avvolto" (utilizzando `DATAWRAP`) per rendere la lunghezza uguale a NFFT . Questo produce la FFT corretta quando NFFT è inferiore alla lunghezza della sezione. W è il vettore delle frequenze normalizzate a cui è stimata T_{xy} . L'unità di misura di w è radianti/campione. Per segnali reali, W copre l'intervallo $[0, \pi]$ quando NFFT è pari e $[0, 2*\pi)$ quando NFFT è dispari. Per segnali complessi, W copre sempre l'intervallo $[0, 2*\pi)$.
- $\text{txy},F = \text{tfestimate}(x,y,\text{window},\text{NOVERLAP},\text{NFFT},F_s)$ restituisce la stima della funzione di trasferimento in funzione della frequenza fisica. F_s è la frequenza di campionamento in Hertz. Se F_s è vuoto, il valore predefinito è 1 Hz. F è il vettore delle frequenze (in Hz) a cui è stimato T_{xy} . Per segnali reali, F copre l'intervallo $[0, F_s/2]$ quando NFFT è pari e $[0, F_s/2)$ quando NFFT è dispari. Per segnali complessi, F si estende sempre su intervallo $[0, F_s)$.
- $T_{xy}, F = \text{tfestimate}(X, Y, \text{WINDOW}, \text{NOVERLAP}, F, F_s)$ calcola la stima della funzione alle frequenze fisiche contenute nel vettore F . F deve essere espresso in Hz e avere almeno due elementi.

H.0.2 Coherence

La coerenza è una funzione della frequenza con valori compresi tra 0 e 1 e indica quanto bene corrisponde l'ingresso x all'uscita y per ogni valore di frequenza. Di base, x e y sono divisi in otto sezioni con una sovrapposizione del 50%; ogni sezione è "finestrata" con una finestra di Hamming e otto periodogrammi modificati, quindi calcolati e mediati.

- $cxy = mscohere(x, y)$ trova la stima della coerenza al quadrato della grandezza, con input x e output y . Se x e y sono entrambi vettori, devono avere la stessa lunghezza. È simile al comando $txy = tfestimate(x,y)$
- $cxy = mscohere(x, y, window)$ usa $window$ per dividere x e y in segmenti ed eseguire il windowing (almeno due segmenti, altrimenti la coerenza è 1 per tutte le frequenze). Nel caso MIMO, il numero di segmenti deve essere maggiore del numero di canali di ingresso. Se $window$ è un vettore, divide ogni colonna di x e y in sezioni sovrapposte di lunghezza uguale a $window$, poi "finestra" ogni sezione secondo quanto specificato dal vettore. Se, invece, è un intero, ogni colonna di x e y è divisa in sezione di lunghezza pari a $window$ e ogni sezione finestrata secondo in metodo di Hamming. Il valore può anche essere omissso.
- $cxy = mscohere(x, y, window, noverlap)$ utilizza campioni $noverlap$ di sovrapposizione tra segmenti adiacenti. $NOVERLAP$ deve essere un intero più piccolo della lunghezza di $window$, se $window$ è un intero. Vale lo stesso se è un vettore. il valore può essere omissso.
- $cxy = mscohere(x, y, window, noverlap, nfft)$ utilizza punti di campionamento $nfft$ per calcolare la trasformata di Fourier discreta. $NFFT$ sono il numero di punti di campionamento FFT usati per stimare la PSD e CPSD. È simile al comando $txy,w = tfestimate(x,y>window,noverlap,nfft)$.
- $cxy, w = mscohere(x, y, window, noverlap, w)$ restituisce la stima della coerenza al quadrato della magnitudine alle frequenze normalizzate specificate in w .
- $cxy, f = mscohere(\text{vuoto}, fs)$ restituisce un vettore di frequenze, f , espresso in termini di frequenza di campionamento, fs , alla quale è stimata la coerenza. fs deve essere il sesto input numerico per $mscohere$. Per immettere una frequenza di campionamento e utilizzare ancora i valori predefiniti degli argomenti opzionali precedenti, specificare questi argomenti come vuoti.
- $cxy, f = mscohere(x, y, window, noverlap, f, fs)$ restituisce la stima della coerenza al quadrato alle frequenze specificate in f (Hz).

Bibliografia

- [1] *Development of procedures for calculating stiffness and damping properties in elastomers in engineering applications. Part II: elastomer characteristics at constant temperature.* National Aeronautics e Space Administration: Lewis Research Center. 1974 (cit. a p. ii).
- [2] Serope Kalpakjian e Steven R. Schmidt. *Tecnologia Meccanica, II Ed.* Milano-Torino, IT: Pearson, 2014 (cit. alle pp. 2, 4).
- [3] William D. Callister e David G. Rethwisch. *Scienza e ingegneria dei Materiali, III Ed.* Napoli, IT: EdiSES S.r.l., 2012 (cit. alle pp. 3, 5, 6).
- [4] *Understanding FFTs and Windowing.* White Paper. National Instruments (cit. a p. 4).
- [5] Peter Rhys Lewis. «Why Polymer Products Fail in Service». In: *Forensic Polymer Engineering (Second Edition)* (2016), pp. 307–346 (cit. a p. 5).
- [6] *International Standard ISO 3601-1.* International Standard for Organization. 2012 (cit. a p. 7).
- [7] *O-rings.* Anyseals (cit. alle pp. 8, 9, 12, 13).
- [8] *O-rings.* Gapi S.r.l. (cit. alle pp. 8, 11–13).
- [9] *O-rings Failure Analysis.* PolyMax LTD (cit. alle pp. 9, 10).
- [10] *Selecting the Right O-Ring Squeeze Ratio.* Gallagher Fluid Seals, Inc. (cit. a p. 12).
- [11] Philipp Bättig e Jürg Schiffmann. «Data-Driven Model for the Dynamic Characteristics of O-Rings for Gas Bearing Supported Rotors». In: *Journal of Applied Mechanics* 86 (mag. 2019) (cit. alle pp. 14, 30).
- [12] *Mechanical Design Handbook for Elastomers.* National Aeronautics e Space Administration: Lewis Research Center. 1981 (cit. alle pp. 14, 24, 25, 29, 45).
- [13] Farid Al-Bender et al. «Dynamic Characterization of Rubber O-Rings: Squeeze and Size Effects». In: *Advances in Tribology 2017.* Article ID 2509879 (2017), pp. 1–12 (cit. alle pp. 15–18).

- [14] J. Tomioka e Norifumi Miyanaga. «Effect of Dynamic Properties of Support O-Rings on Stability of Herringbone-Grooved Aerodynamic Journal Bearings». In: *Journal of Physics: Conference Series* 11 (2016), pp. 272–280 (cit. a p. 26).
- [15] Tadayoshi Shoyama e Koji Fujimoto. «Calculation of high-frequency dynamic properties of squeezed O-ring for bearing support». In: *Mechanical Engineering Journal* (2017) (cit. a p. 27).
- [16] *Technical Documentation, Modal Exciter Type 4824*. Brüel Kjaer. 2011 (cit. a p. 32).
- [17] *Instruction Manual, Press Force Sensor Type 9313AA1, 9313AA2*. Kistler (cit. alle pp. 37, 38).
- [18] *CapaNCDT, Capacitive displacement sensors and systems*. MicroEpsilon (cit. alle pp. 42, 43).
- [19] M. Orlando e R. Piscitelli. «Corso di Tecnica delle costruzioni». In: Firenze: Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale, 2017, p. 17 (cit. a p. 44).
- [20] A. Fasana e S. Marchesiello. *Meccanica delle Vibrazioni*. Torino, IT: CLUT, 2006 (cit. a p. 48).
- [21] *Nonlinear Finite Element Analysis of Elastomers*. White Paper. MSC Software, 2016 (cit. alle pp. 49, 50).
- [22] *Product Data - Power Amplifier Type 2719*. Brüel & Kjær (cit. a p. 52).
- [23] M. Dapor e M. Ropele. *Elaborazione dei dati sperimentali*. via Sommarive 18, 38050 Povo (Trento): Springer, 2005 (cit. alle pp. 62, 63).
- [24] Farid Al-Bender et al. *Air Bearings - Theory, Design and Applications*. KU Leuven, Department of Mechanical Engineering: Wiley, 2021 (cit. alle pp. 68, 70–73, 75, 76, 78, 82–88, 93).
- [25] Tobias Waumans et al. «Aerodynamic journal bearing with a flexible, damped support operating at 7.2 million DN». In: *Journal of Micro-mechanics and Micro-engineering* 21. Article ID 104014 (2011), pp. 1–12 (cit. alle pp. 69, 74, 75, 92, 93).
- [26] Giancarlo Genta. *Dynamics of Rotating Systems*. Torino, IT: Springer, 2005 (cit. a p. 69).
- [27] Krzysztof Czolczynski. *Rotordynamics of Gas-Lubricated Journal Bearing Systems*. Lodz, Poland: Springer, 1999 (cit. alle pp. 70, 71).
- [28] Osborne Reynolds. «V. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil». In: *The Royal Society* 177 (1886), pp. 157–234 (cit. a p. 72).

- [29] J. S. Ausman. «An Improved Analytical Solution for Self-Acting, Gas-Lubricated Journal Bearings of Finite Length». In: *J. Fluids Eng.* 83 (1961), pp. 188–192 (cit. a p. 77).
- [30] T. Waumans. «On the design of high-speed miniature air bearings: dynamic stability, optimisation and experimental validation». Tesi di dott. Leuven: Katholieke Universiteit, 2009 (cit. a p. 82).
- [31] Daniel J. Inman e Ramesh Chandra Singh. *Engineering Vibration, IV Ed.* Harlow, EN: Pearson, 2014 (cit. alle pp. 89, 90).
- [32] Kang Zhang, Kai Feng, Wenjun Li e Lijun Song. «Nonlinear Dynamic Analysis of a Rotor-Porous Air Journal Bearing System With O-Rings Mounted». In: *Research Square* 1 (2021), pp. 1–48 (cit. alle pp. 94–96).
- [33] Bob York. «Frequency Response and Bode Plots». In: (2009) (cit. alle pp. 99, 104, 107).