

**POLITECNICO DI TORINO**

**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA**

**Tesi di Laurea Magistrale**



**Studio della propagazione di cricca in molle Belleville sottoposte a carico ciclico**

Relatori:

**Prof.ssa Delprete Cristiana**

**Prof.ssa Sesana Raffaella**

Candidato:

**Gianluca Meli**

ANNO ACCADEMICO 2020/2021



## Sommario

1	Elenco delle figure .....	3
2	Introduzione .....	7
3	Molle Belleville .....	9
3.1	Configurazioni molla a tazza.....	10
3.2	Teoria Almen e Laszlo .....	12
3.2.1	Andamento caratteristica molla Belleville .....	13
4	Meccanica della frattura lineare elastica .....	15
4.1	Teoria di Griffth .....	17
4.2	Stato di tensione all'apice della cricca.....	20
4.2.1	Raggio plastico.....	22
4.3	Tenacità alla frattura .....	24
4.4	Vita a fatica .....	25
4.4.1	Legge di Paris .....	25
4.5	Diagramma di Kitagawa.....	27
5	Analisi analitica molla a tazza .....	29
5.1	Andamento forza spostamento.....	29
5.2	Valutazione stato di sollecitazione .....	31
5.3	Analisi analitica MFLE .....	34
5.3.1	Analisi risultati MFLE cricca radiale .....	39
5.3.2	Analisi risultati MFLE cricca circonferenziale.....	41
5.3.3	Piano di controllo.....	43
5.3.4	Variazione delle condizioni di lavoro.....	46
6	Analisi agli elementi finiti .....	50
6.1	Solidi assialsimetrici .....	51
6.2	Analisi FEM modello bidimensionale .....	52
6.2.1	Confronto risultati tra Almen-Laszlo e modello FEM .....	57
6.2.2	Analisi errore energetico percentuale ambito bidimensionale.....	61
6.2.3	Convergenza risultati ambito bidimensionale.....	63
6.3	Analisi FEM modello tridimensionale.....	65
6.3.1	Analisi errore energetico percentuale ambito tridimensionale .....	70
6.3.2	Convergenza risultati ambito tridimensionale .....	70
6.4	Analisi FEM meccanica della frattura .....	71
6.4.1	Identificazione cricca nel modello FEM.....	73
6.4.2	Cricca radiale .....	75
6.4.3	Cricca circonferenziale.....	78

7	Fattore di rischio di fatica .....	82
7.1	Andamento di $R_f$ con lo stato di tensione.....	83
7.2	Effetto trattamento superficiale.....	85
7.3	Effetto tensione di compressione .....	86
7.4	Effetto rugosità superficiale .....	87
7.5	Conclusioni sul fattore di rischio .....	88
8	Conclusioni .....	90
9	Bibliografia.....	93

## 1 Elenco delle figure

Figura 3.1: andamento forza nell'intervallo di lavoro nelle condizioni reali e ideali [14] .....	9
Figura 3.2: caratteristiche geometriche molla Belleville .....	10
Figura 3.3: configurazione molla in serie .....	10
Figura 3.4: configurazione molla in parallelo.....	11
Figura 3.5: punti caratteristici dello stato di tensione.....	12
Figura 3.6: centro neutro di rotazione della sezione meridiana.....	13
Figura 3.7: andamento forza-deflessione in funzione del rapporto $h_0/t$ [14] .....	14
Figura 4.1: prima fase con formazione di discontinuità lungo i piani di scorrimento [7].....	16
Figura 4.2: seconda fase con propagazione della cricca [7] .....	16
Figura 4.3: lastra con difetto iniziale centrale [8] .....	18
Figura 4.4: andamento delle energie potenziali [8].....	19
Figura 4.5: modi di apertura della cricca I, II, III [8] .....	20
Figura 4.6: stato di tensione nell'intorno dell'apice del difetto [8] .....	21
Figura 4.7: andamento di KI in funzione di r .....	22
Figura 4.8: redistribuzione dello stato di tensione nell'intorno del difetto [8] .....	22
Figura 4.9: andamento del raggio plastico [8] .....	24
Figura 4.10: andamento K <sub>Ic</sub> in funzione dello spessore del materiale.....	24
Figura 4.11: andamento del K <sub>Ic</sub> in funzione della temperatura .....	25
Figura 4.12: rappresentazione della legge di Paris .....	27
Figura 4.13: diagramma di Kitagawa [7] .....	28
Figura 5.1: relazione andamento forza spostamento.....	31
Figura 5.2: punti più sollecitati I in compressione e III in trazione .....	33
Figura 5.3: stato di tensione analitico in funzione dello spostamento.....	33
Figura 5.4: intaglio radiale .....	34
Figura 5.5: intaglio circonferenziale.....	34
Figura 5.6: tensione equivalente con spostamento di 1.27 mm .....	35
Figura 5.7: relazione lunghezza cricca radiale - numero cicli .....	39
Figura 5.8: relazione tra velocità di propagazione e $\Delta K$ (radiale).....	39
Figura 5.9: relazione lunghezza cricca radiale - $\Delta K$ .....	40
Figura 5.10: relazione lunghezza cricca circonferenziale - numero cicli.....	41
Figura 5.11: relazione lunghezza cricca circonferenziale - $\Delta K$ .....	42
Figura 5.12: relazione tra velocità di propagazione e $\Delta K$ (circonferenziale) .....	42
Figura 5.13: piano di controllo per la molla Belleville .....	44
Figura 5.14: cedimento materiale per collasso plastico .....	45
Figura 5.15: variazione carico per cricca radiale.....	46
Figura 5.16: variazione carico per cricca circonferenziale .....	47
Figura 5.17: piano di controllo con variazione tensione per cricca radiale.....	47
Figura 5.18: variazione lunghezza cricca circonferenziale .....	48
Figura 5.19: variazione lunghezza cricca radiale.....	48
Figura 5.20: piano di controllo con variazione lunghezza cricca radiale .....	49
Figura 6.1: solido assialsimmetrico [5] .....	51
Figura 6.2: creazione geometria molla con linee e keypointns .....	52
Figura 6.3: definizione delle aree interne alla sezione .....	52

Figura 6.4: (a) elemento plane42 quadrangolare, (b) elemento degenerare [3] .....	53
Figura 6.5: (a) elemento plane183 quadrangolare, (b) elemento degenerare [3] .....	54
Figura 6.6: creazione di una prima mesh grossolana .....	54
Figura 6.7: applicazione delle condizioni di vincolo.....	55
Figura 6.8: affinamento mesh modello bidimensionale.....	55
Figura 6.9: andamento delle tensioni equivalenti $v_m$ (soluzione sugli elementi).....	56
Figura 6.10: andamento delle tensioni equivalenti $v_m$ (soluzione nodale) .....	56
Figura 6.11: andamento forza in funzione dello spostamento.....	57
Figura 6.12: andamento tensione $\sigma_I$ in funzione dello spostamento.....	58
Figura 6.13: andamento tensione $\sigma_{III}$ in funzione dello spostamento.....	59
Figura 6.14: andamento $\sigma$ radiale in funzione dello spostamento al diametro esterno.....	60
Figura 6.15: andamento $\sigma$ radiale in funzione dello spostamento al diametro interno .....	60
Figura 6.16: tensione radiale per spostamento di 1.35 mm.....	60
Figura 6.17: rappresentazione andamento delle tensioni sugli elementi con mesh grossolana ...	62
Figura 6.18: : rappresentazione andamento delle tensioni sugli elementi con mesh fine .....	62
Figura 6.19: andamento residuo ambito bidimensionale .....	63
Figura 6.20: convergenza tensione $\sigma_{vm III}$ ambito bidimensionale.....	64
Figura 6.21: convergenza tensione $\sigma_{vm I}$ ambito bidimensionale.....	64
Figura 6.22: convergenza forza ambito bidimensionale.....	65
Figura 6.23: (a) elemento solid185, (b) elementi degeneri [3].....	66
Figura 6.24: (a) elemento solid186, (b) elementi degeneri [3].....	66
Figura 6.25: mesh finale per modello 3D di 45 gradi.....	67
Figura 6.26: applicazione delle condizioni al contorno per modello 3D .....	67
Figura 6.27: andamento tensioni equivalenti modello 3D parziale con spostamento di 1.35 mm	68
Figura 6.28: deformazione spicchio molla con spostamento di 1.35 mm.....	68
Figura 6.29: modello 3D completo con condizioni al contorno e spostamento imposto .....	69
Figura 6.30: andamento tensioni equivalenti per modello 3D completo con spostamento di 1.35 mm .....	69
Figura 6.31: andamento residuo ambito tridimensionale.....	70
Figura 6.32: convergenza tensione $\sigma_{vm I}$ ambito tridimensionale .....	71
Figura 6.33: elemento solid187 [3] .....	72
Figura 6.34: indicazione della mesh locale con raggio di sfera.....	72
Figura 6.35: identificazione del sistema di riferimento lungo il fronte della cricca [3].....	73
Figura 6.36: identificazione dei nodi sulle facce della cricca .....	73
Figura 6.37: identificazione cricca circonferenziale.....	74
Figura 6.38: identificazione cricca radiale.....	74
Figura 6.39: mesh per cricca radiale .....	75
Figura 6.40: (a) mesh iniziale nell'intorno della cricca, (b) variazione mesh con propagazione ....	76
Figura 6.41: avanzamento del fronte della cricca radiale.....	76
Figura 6.42: confronto risultati andamento numero di cicli per cricca radiale .....	77
Figura 6.43: confronto risultati andamento $\Delta K$ per cricca radiale.....	77
Figura 6.44: mesh per cricca circonferenziale .....	78
Figura 6.45: mesh iniziale per cricca circonferenziale .....	78
Figura 6.46: mesh finale per cricca circonferenziale .....	79

Figura 6.47:: avanzamento del fronte della cricca circonferenziale .....	79
Figura 6.48: confronto risultati andamento numero di cicli per cricca circonferenziale .....	80
Figura 6.49:confronto risultati andamento $\Delta K$ per cricca circonferenziale.....	80
Figura 7.1: andamento tensioni equivalenti sulla molla con deflessione 75% di $h_0$ .....	83
Figura 7.2: andamento fattore di rischio $R_f$ .....	84
Figura 7.3: andamento della tensione al di sotto della superficie della molla.....	84
Figura 7.4: andamento $R_f$ a seguito del trattamento superficiale.....	85
Figura 7.5: andamento $R_f$ a seguito dello stato di compressione .....	86
Figura 7.6: rugosità nel caso di profilo ideale e reale .....	87
Figura 7.7: andamento $R_f$ sotto l'influenza della rugosità.....	88
Figura 7.8: effetto delle inclusioni sulla vita a fatica [7] .....	89



## 2 Introduzione

Nell'ambito della meccanica esistono diversi componenti che vengono introdotti all'interno di sistemi complessi al fine di supportarli durante il loro funzionamento e di proteggerli dai danni causati dall'azione delle forze esterne; tra questi troviamo ad esempio l'utilizzo delle molle, che in seguito alla loro deformazione causata dalle sollecitazioni applicate, hanno il fine di prevenire un danno catastrofico al sistema dove vengono inserite.

Tramite questo lavoro di tesi si vuole valutare l'influenza della presenza di una cricca sulla vita a fatica delle molle Belleville dal punto di vista analitico e numerico, al fine di vedere se queste possano lavorare normalmente o se la presenza di difetti al loro interno può compromettere il loro numero di cicli e quindi la loro durata. In particolare si vedrà come la dimensione e la direzione della cricca influiscono sul danneggiamento e sulla vita della molla.

Nei primi capitoli si andranno ad analizzare quelle che sono le principali caratteristiche che identificano la molla Belleville e come esse si possono configurare all'interno di un sistema secondo l'obiettivo richiesto. Nello stesso tempo si cercherà di spiegare come possono essere caricate questa tipologia di molle e di conseguenza si individueranno anche le relative tensioni che sono risentite dal componente durante il suo utilizzo; per far ciò si farà riferimento alle formule che sono state proposte da Almen e Laszlo dal punto di vista analitico.

Dopo nei capitoli successivi ci si concentrerà nel valutare invece cosa comporta la presenza di una cricca all'interno della molla. In questo modo l'oggetto di studio delle varie simulazioni sarà incentrato sull'analizzare due casi differenti legati alla presenza o di una cricca disposta lungo la direzione radiale o di una cricca disposta lungo la direzione circonferenziale, e di cui poi si confronteranno i risultati finali. Sotto queste due condizioni si cercherà quindi di valutare il numero di cicli del pezzo secondo la teoria della meccanica della frattura, considerando delle prime ipotesi di lavoro in termini di carico esterno applicato alla molla e del valore di lunghezza iniziale della cricca. Dopo queste prime analisi si varieranno le condizioni di lavoro ipotizzate, in modo da vedere cosa questo comporta alla molla durante il suo funzionamento in termini di propagazione della cricca. Infine si cercherà di individuare quali sono i possibili punti di lavoro del nostro componente all'interno del piano di controllo, che si andrà a costruire per la molla in esame, e verificare così le condizioni di sicurezza e di rottura del pezzo.

Nel sesto capitolo, dopo l'analisi analitica, si passerà alla simulazione agli elementi finiti per valutare il comportamento strutturale della molla e confrontare i risultati ottenuti con quelli dal punto di vista analitico. Per far ciò nella prima parte dello studio si utilizzerà il programma di simulazione ANSYS Mechanical APDL, dove si creerà il modello geometrico della molla e a cui si andranno ad applicare le condizioni di vincolo e di carico per analizzare lo stato di tensioni. Il modello dovrà essere poi validato. Questa analisi agli elementi finiti sarà condotta sia dal punto di vista bidimensionale che dal punto di vista tridimensionale al fine di avere una rappresentazione più realistica del comportamento della molla. Inoltre il modello sarà realizzato mediante l'uso di diversi tipi di elementi per la creazione della mesh, distinti per l'ambito bidimensionale e tridimensionale, e di cui si confronteranno i risultati al fine di capire quale può essere l'elemento migliore che vada a descrivere le caratteristiche della molla. Si confronteranno infine i risultati ottenuti tramite la FEM e quelli ottenuti nei precedenti capitoli tramite il metodo di Almen e Laszlo evidenziando le principali differenze.

Procedendo sempre con l'analisi agli elementi finiti in una seconda fase si utilizzerà invece il programma ANSYS Workbench, con il quale si simulerà la propagazione di una cricca presente nella molla nella direzione radiale e circonferenziale andando poi a confrontare i risultati. In questa parte si andrà a descrivere la procedura che viene richiesta dal programma per l'identificazione del difetto all'interno del pezzo, le possibili problematiche che possono sorgere per questa tipologia di simulazione, e come evolve la mesh creata a seguito della propagazione della cricca.

Infine con l'ultimo capitolo si cercherà di descrivere quali sono i possibili fattori che possono influire sulla vita a fatica dei materiali e quali sono le possibili metodologie che si possono applicare al fine di contrastare la nucleazione della cricca; il tutto sarà correlato con la descrizione del cosiddetto fattore di rischio di fatica, che permette con facilità di individuare quali sono i punti critici lungo la superficie dei componenti che si devono tenere sott'occhio per evitare che le cricche nucleino.

### 3 Molle Belleville

La molla Belleville, definita anche come molla a tazza, è un componente meccanico di forma geometrica tronco conica con spessore costante, che può essere sfruttata in modo efficiente nei sistemi meccanici che presentano delle limitazioni di spazio, che necessitano di sostenere ampi carichi lungo una determinata direzione, oppure che richiedono una risposta elastica diversa dalla curva lineare sforzo deformazione delle molle tradizionali.

Questa tipologia di molle possono essere classificate in base alla loro rigidità e al loro spessore in tre diversi gruppi e tra le caratteristiche comuni che si mettono in evidenza troviamo:

- La capacità di essere configurata con determinate proprietà in funzione della geometria, in modo da avere una risposta non lineare con lo spostamento e sviluppare anche per un certo tratto di deformazione una forza costante;
- La possibilità di resistere a grandi forze con una minima deflessione, immagazzinando nello stesso tempo una grande quantità di energia, soprattutto quando si viene ad utilizzare una configurazione in parallelo;
- La capacità di resistere a un elevato numero di cicli in assenza di difetti interni.

In generale si dimostra che sopra un certo limite il valore della forza risentita dal componente comincia ad aumentare in modo esponenziale, in quanto si raggiunge pian piano una condizione di instabilità che coincide con il valore di angolo nullo della parte del tronco di cono della molla, cioè con lo schiacciamento totale oltre il quale si ha lo scatto della molla. Per questo nelle condizioni operative essa viene caricata lungo il suo asse fino a raggiungere un valore di spostamento massimo pari al 75% di  $h_0$ .

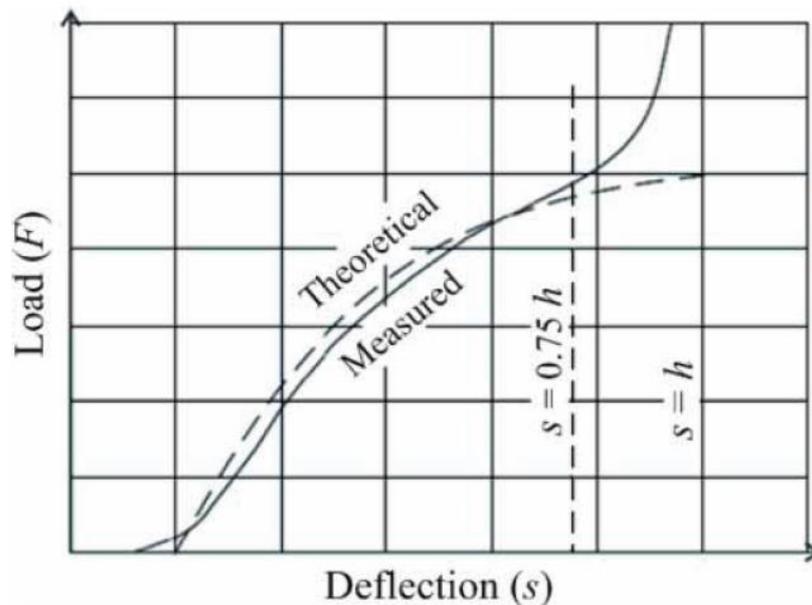


Figura 3.1: andamento forza nell'intervallo di lavoro nelle condizioni reali e ideali [14]

Per andare ad analizzare gli aspetti relativi all'operatività della molla a tazza nella Figura 3.2 si sono rappresentati in sezione le caratteristiche geometriche, dove rispetto all'altezza totale  $l_0$  l'intervallo di lavoro sarà dato dal valore  $h_0$  che indica l'altezza libera fino all'appiattimento.

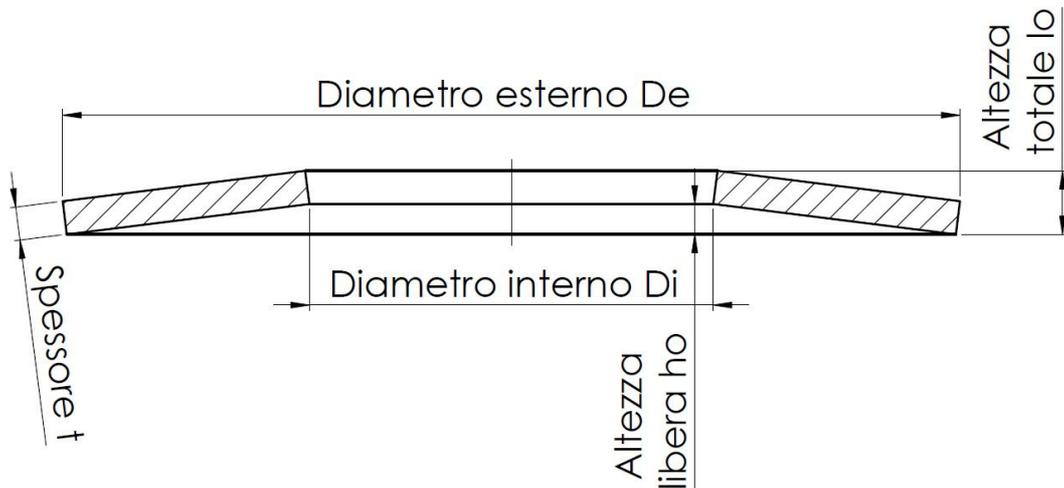


Figura 3.2: caratteristiche geometriche molla Belleville

### 3.1 Configurazioni molla a tazza

Secondo le esigenze che vengono richieste dal sistema le molle possono essere combinate in due differenti configurazioni per raggiungere un determinato obiettivo; questo implica una modifica o alle condizioni di spostamento, o di forza che il pacco molla ottenuto è in grado di sostenere, agendo nello stesso tempo anche sulla costante elastica totale.

Qualora il nostro sistema va a richiedere dei valori elevati di spostamento a parità di forza risentita, allora le molle saranno disposte in serie e quindi avremo uno stesso valore di forza  $F$  (N) che viene sostenuto da tutte le molle, ma una corsa totale  $S_{tot}$  data dal prodotto tra la corsa  $s$  (mm) della singola molla per le  $n$  molle impilate, e una costante elastica equivalente  $k_{tot}$  (N/mm) pari all'inverso della somma delle costanti elastiche  $k_i$  delle singole molle.

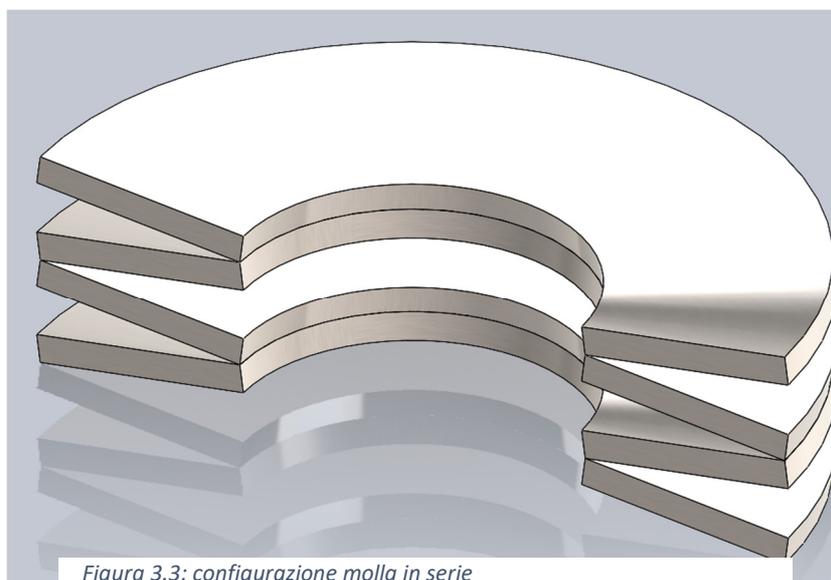


Figura 3.3: configurazione molla in serie

Il pacco molla risultante sarà rappresentato con molle sovrapposte le une sulle altre aventi le facce capovolte in modo alterno. Si elencano le formulazioni che si avranno sotto queste condizioni descritte:

$$F_{tot} = F \quad (3.1)$$

$$S_{tot} = n s \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{k_{tot}} = \sum_1^n \frac{1}{k_i} \quad (3.3)$$

Al contrario se si richiede al sistema di sostenere valori elevati di forza a parità di spostamento, le molle vengono disposte in parallelo e quindi si avrà una stessa corsa  $s$  ( $mm$ ) a carico di tutte le molle, ma una forza totale  $F_{tot}$  pari al prodotto tra la forza  $F$  ( $N$ ) che deve sostenere la singola molla per le  $n$  molle impilate, e una costante elastica risultante  $k_{tot}$  ( $N/mm$ ) pari alla somma delle costanti elastiche  $k_i$  delle singole molle. Il pacco molla totale è caratterizzato da molle sovrapposte le une sulle altre con le facce nello stesso verso.

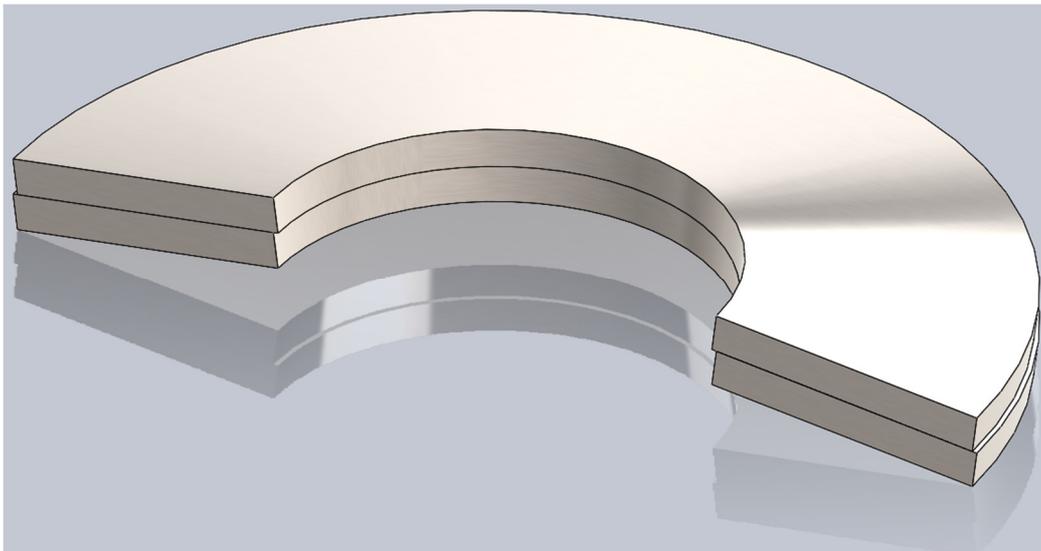


Figura 3.4: configurazione molla in parallelo

Si elencano le formulazioni che si avranno sotto queste condizioni descritte:

$$F_{tot} = n F \quad (3.4)$$

$$S_{tot} = s \quad (3.5)$$

$$k_{tot} = \sum_1^n k_i \quad (3.6)$$

Dal punto di vista della fatica il sistema cederà sempre a causa dell'elemento più debole della catena di molle, dove quindi propagherà più facilmente la cricca una volta che essa nuclea. Bisogna

quindi controllare con attenzione ogni singola molla che viene utilizzata all'interno del sistema meccanico in esame, al fine di evitare un cedimento prematuro che può danneggiare in maniera sostanziale la struttura nella quale il pacco molle viene inserito.

### 3.2 Teoria Almen e Laszlo

Per descrivere il comportamento delle molle dal punto di vista analitico si fa riferimento alle formule che relazionano tra loro la forza o le tensioni con gli spostamenti, e che sono state sviluppate per la prima volta da Almen e Laszlo e sono tutt'ora oggi usate all'interno della normativa DIN 2029, perché permettono di stimare con buona approssimazione lo stato di sforzi e sollecitazioni risentite dalla molla durante la deformazione.

Andando ad applicare una forza assiale sulla sommità della molla, essa risulta uniformemente distribuita sugli spigoli interni e provoca uno schiacciamento verso il basso della superficie superiore, determinando anche uno stato di tensione distinto tra le due facce superiori e inferiori della molla, che Almen e Laszlo calcolano in punti caratteristici che risultano essere i più sollecitati dal punto di vista tensionale e che richiedono quindi un maggior controllo durante le condizioni operative della molla. Questi punti saranno indicati nelle successive analisi come *I, II, III, IV, OM* e sono rappresentati nella Figura 3.5 dove viene applicata una forza  $F$  nella direzione assiale che provoca uno spostamento  $s$  verso il basso.

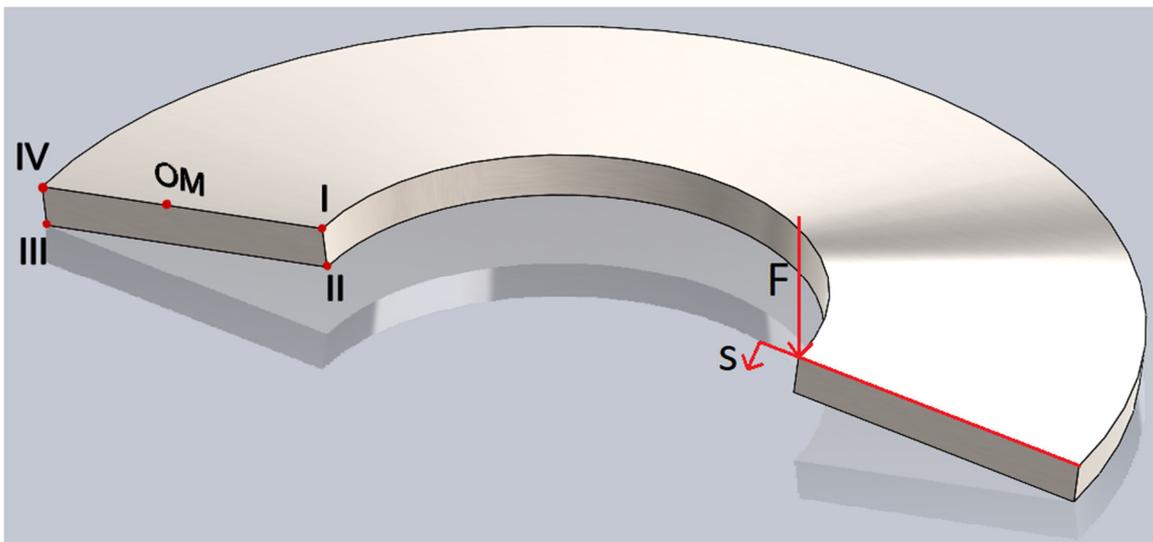


Figura 3.5: punti caratteristici dello stato di tensione

L'applicazione della teoria di Almen e Laszlo per calcolare le tensioni e gli sforzi sulla molla Belleville si basa su una serie di ipotesi semplificative, quali:

- La sezione trasversale della molla ruota semplicemente attorno a un centro di rotazione neutro  $D_o$ , che si assume essere nella mezzeria della sezione, senza avere una apprezzabile deflessione; si può quindi individuare un sistema di riferimento locale con origine in  $O$  che descrive questa rotazione neutra della molla, posizionato su un valore  $D_o$  detto diametro di rotazione;

$$D_o = \frac{D_e - D_i}{\ln\left(\frac{D_e}{D_i}\right)} \quad (3.7)$$

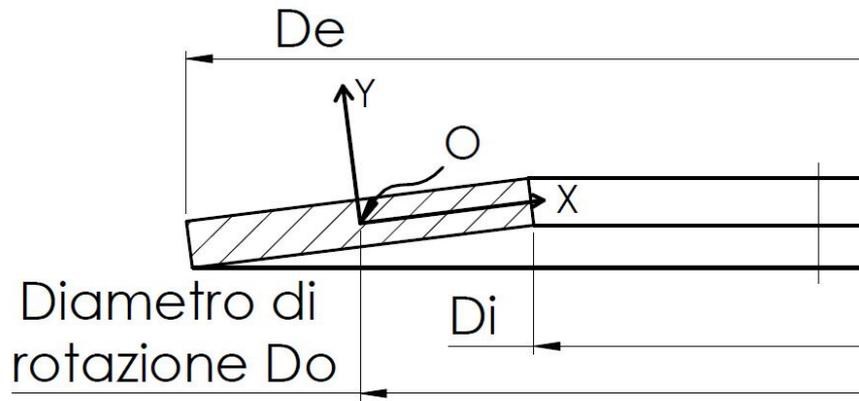


Figura 3.6: centro neutro di rotazione della sezione meridia

- Durante la deformazione la sezione trasversale della molla rimane sempre rettangolare in modo che la forza sia sempre applicata sugli spigoli superiori;
- La deformazione angolare della sezione trasversale è piccola;
- Nell'analisi dello stato di sollecitazione lo stress radiale è trascurabile.

Sotto queste ipotesi elencate Almen e Laszlo determinarono delle formule analitiche per descrivere il comportamento della molla a seguito di uno spostamento assiale.

### 3.2.1 Andamento caratteristica molla Belleville

Per le molle a tazza nell'analisi della caratteristica di rigidità si presenta un andamento della forza che varia non linearmente con la deflessione e il grafico risulta avere una certa curvatura all'aumentare dello spostamento; questo aspetto è correlato con il rapporto geometrico  $\frac{h_0}{t}$  e in generale all'aumentare di questo valore si accentua la curvatura della caratteristica della molla e si aumenta anche la capacità di carico che può essere sostenuta.

L'andamento della curva può essere sfruttato a seconda delle esigenze del sistema meccanico, poiché si può incorrere, sotto determinati spostamenti che vengono raggiunti dalla molla durante il suo funzionamento, a una curva che può assumere un andamento orizzontale; quindi avremo che all'aumentare della deflessione del componente la forza risentita si mantiene costante. Il tutto può essere rappresentato nel grafico sottostante dove si indica l'andamento della forza in funzione della deflessione:

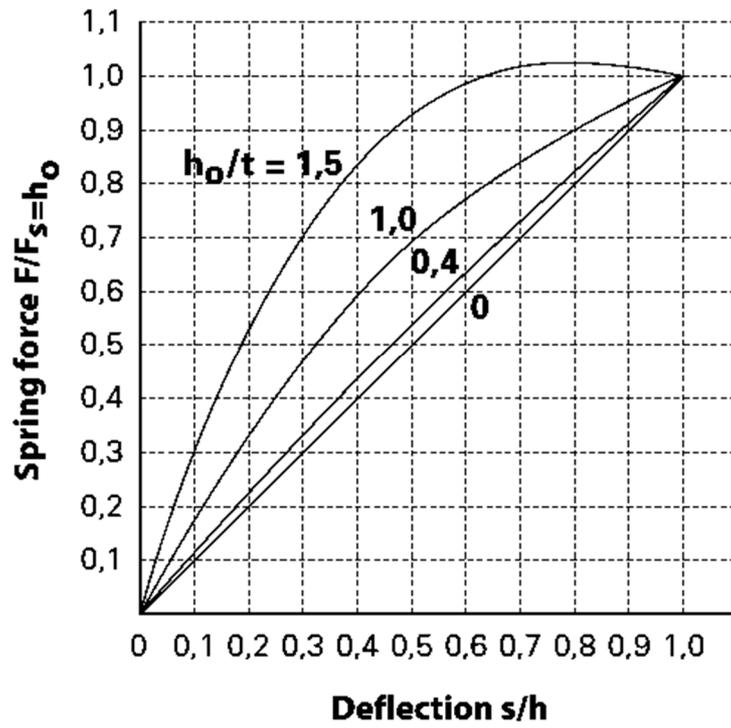


Figura 3.7: andamento forza-deflessione in funzione del rapporto  $h_0/t$  [14]

## 4 Meccanica della frattura lineare elastica

La progettazione degli organi meccanici che costituiscono un sistema si basa sull'ipotesi che gli elementi siano privi di difetti; il loro dimensionamento viene condotto andando a confrontare e verificare che un modulo caratteristico, quale per esempio la tensione equivalente risentita dal materiale, sia minore o uguale a un valore limite di riferimento, quale ad esempio la tensione di snervamento, quella di rottura o il limite della resistenza a fatica nel caso di carico ciclico. In alcuni casi però nonostante i componenti operino a valori di carico di esercizio inferiori a quelli di progetto si verifica la rottura degli elementi; questo è dovuto al fatto che gli organi meccanici possono presentare al loro interno difetti o discontinuità, che possono propagare causando questo tipo di cedimento sotto l'applicazione dei carichi.

La propagazione di questi difetti può avvenire ad alte velocità o a basse velocità; nel primo caso si parla di rottura fragile che implica una separazione istantanea delle due superfici del provino per la propagazione instabile della cricca, mentre nel secondo caso si parla di rottura duttile e va a richiedere un maggiore lasso temporale affinché il componente si rompa dovuto alla presenza della plasticità.

La meccanica della frattura ha come obiettivo quello di analizzare cosa succede all'interno del materiale quando sono presenti dei difetti, in modo da quantificare il numero di cicli legati a una crescita stabile del difetto, la lunghezza finale raggiunta dalla cricca e la forma e la posizione del difetto all'interno del corpo. Nello stesso tempo essa cerca di correlare lo stato di tensione che si ha nell'intorno dell'apice della cricca con la tensione nominale e con le dimensioni, la forma e l'orientamento del difetto.

Per analizzare il fenomeno della frattura si fa riferimento ad alcuni parametri principali quali:

- La lunghezza della cricca,  $a$ ;
- Lo stato di tensione agente nel materiale,  $\sigma$ ;
- La tenacità della frattura,  $K_{Ic}$ .

In generale nell'ambito della fatica legata alla propagazione delle cricche la vita di un organo è caratterizzata da tre fasi distinte che possono essere elencate come:

- Fase di nucleazione del difetto all'interno del componente che andrà a racchiudere una prima fase della vita del pezzo; questo è legato a qualcosa che si sviluppa lungo la superficie del provino dove lo stato di tensione è piano, quindi le tensioni tangenziali risentite sono maggiori e si favorisce la creazione di una deformazione plastica. Applicando un carico ciclico le tensioni tangenziali massime si sviluppano a circa 45 gradi del carico applicato, questo determina uno scorrimento dei piani cristallini gli uni sugli altri che creano delle discontinuità nel materiale, e quindi la formazione iniziale di una microcricca. In questa fase le cricche possono nucleare anche con carichi di compressione e si generano a seguito degli spostamenti irreversibili determinati dall'applicazione delle sollecitazioni esterne, cioè a seguito della plasticità propagando secondo il modo II (azione tagliante);

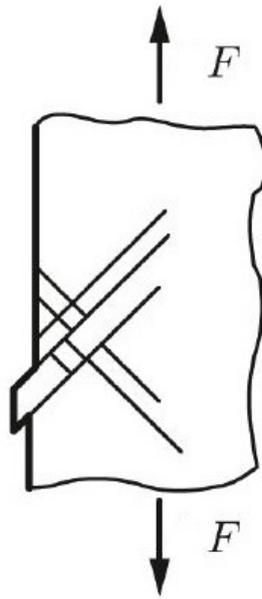


Figura 4.1: prima fase con formazione di discontinuità lungo i piani di scorrimento [7]

- Fase di propagazione del difetto; in questa fase avremo un difetto visibile nel pezzo che a seguito dello stato tensionale applicato nel tempo comincia a propagare lungo la superficie del componente. La meccanica della frattura opera in questa fase al fine di andare a calcolare quella che è la vita residua del materiale dopo la creazione della cricca.



Figura 4.2: seconda fase con propagazione della cricca [7]

Nel componente si formano inizialmente una serie di difetti dove però solo una cricca predominante andrà a concentrare maggiormente le tensioni rispetto alle altre che al contrario subiscono una fase di rilassamento e non crescono più. La cricca viene quindi analizzata a partire dal fattore di intensificazione delle tensioni che diventa predominante rispetto alla plasticità poiché avremo un meccanismo di propagazione che sarà correlato con la dimensione del difetto. Qui la cricca propaga secondo il modo I e pian piano va a coinvolgere più grani cristallini essendo spinta non più dall'azione tangenziale, ma dalla direzione della tensione principale massima;

- L'ultima fase della vita è legata alla propagazione instabile della cricca nel componente una volta che si raggiungono delle condizioni limiti dettate da un parametro di riferimento e con cui si ha la rottura finale del pezzo.

Lo stato delle tensioni nell'intorno dell'apice della cricca venne analizzato per la prima volta da Irwin secondo il quale la distribuzione delle tensioni in prossimità dell'apice del difetto è invariante in tutti i componenti, e l'intensità delle tensioni può essere analizzata a partire da un parametro di riferimento detto fattore di intensificazione delle tensioni  $K_I$ .

Il valore  $K_I$  viene influenzato dalla sollecitazione applicata al componente, dalla forma, dall'orientamento e dalla dimensione della cricca, ma questi elementi non alterano la distribuzione delle tensioni nell'intorno del difetto. Questo valore può essere quindi confrontato con un valore critico  $K_{Ic}$  detto tenacità alla frattura che è una proprietà del materiale, e viene visto come la caratteristica del materiale di riuscire a deformarsi plasticamente o di assorbire una quantità di energia in seguito alla propagazione del difetto. Questo significa che fin quando il  $K_I < K_{Ic}$  allora siamo in una condizione di sicurezza, però quando il corpo non riesce più ad assorbire l'energia di deformazione allora ho una propagazione istantanea della cricca e il collasso del materiale.

#### 4.1 Teoria di Griffith

L'analisi della frattura dei componenti in presenza di cricche venne analizzata inizialmente da Griffith, il quale per la valutazione del fattore di intensificazione delle tensioni adotta un'analisi di tipo energetica. Secondo questa teoria il materiale in assenza di difetti possiede una sua energia potenziale elastica iniziale, ma a seguito dell'introduzione di una cricca all'interno del materiale di una certa lunghezza, essa assorbe una quantità di energia che viene sottratta al valore dell'energia iniziale. Quando in seguito all'applicazione di una tensione esterna il difetto comincia a propagare di un valore infinitesimo, allora esso crea due superfici libere legate alle due facce della cricca; affinché questo avvenga bisogna introdurre energia nel materiale. Per avere una condizione di crescita stabile del difetto è necessario che la perdita di energia dovuta alla presenza del difetto sia più piccola di quella necessaria per formare le due superfici libere.

Questo si può analizzare ad esempio considerando una lastra che presenta un difetto di una certa lunghezza e a cui si applica una tensione  $\sigma$ :

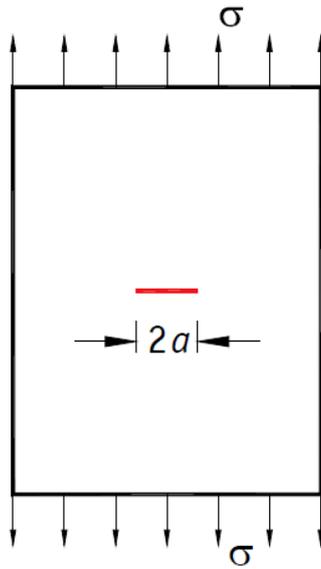


Figura 4.3: lastra con difetto iniziale centrale [8]

Il valore dell'energia potenziale elastica totale per il materiale può essere descritta come:

$$U_{tot} = U_o - U_a + U_\gamma \quad (4.1)$$

Dove i parametri nella formula sono:

- $U_o$  indica l'energia potenziale elastica in assenza di cricca;
- $U_a$  indica la diminuzione di energia dovuta alla presenza della cricca e dipende dalla lunghezza della fessura;
- $U_\gamma$  indica l'aumento di energia superficiale elastica per la formazione delle superfici libere e dipende dalla lunghezza della fessura.

La condizione di equilibrio per il materiale si ottiene imponendo che la derivata prima dell'energia totale sia pari a zero rispetto alla lunghezza del difetto ( $a$ ), cioè:

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial a} = 0$$

Poiché  $U_o$  è l'unico parametro indipendente dalla lunghezza del difetto allora la sua derivata è nulla e si ottiene l'equilibrio:

$$\frac{\partial U_a}{\partial a} = \frac{\partial U_\gamma}{\partial a}$$

In questo modo Griffith, rifacendosi all'analisi dello stato di tensione considerato da Inglis, calcolò per la lastra di larghezza infinita Figura 4.3 nel caso di stato di tensione piano:

$$\frac{\partial U_a}{\partial a} = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad (4.2)$$

Il termine trovato nell'equazione 4.2 rappresenta l'energia di deformazione elastica che viene liberata a seguito dell'avanzamento della cricca.

$$\frac{\partial U_\gamma}{\partial a} = 2\gamma_e \quad (4.3)$$

Al contrario il termine nell'equazione 4.3 rappresenta la resistenza che il materiale oppone all'avanzamento del difetto e nel caso di materiali fragili, cioè quando rimaniamo in campo puramente elastico, il valore è costante e non dipende dalla lunghezza del difetto; ciò significa che per avere un incremento infinitesimo del difetto è necessaria sempre la stessa quantità di energia; il valore  $\gamma_e$  indica l'energia superficiale del materiale necessaria per creare le nuove superfici di frattura.

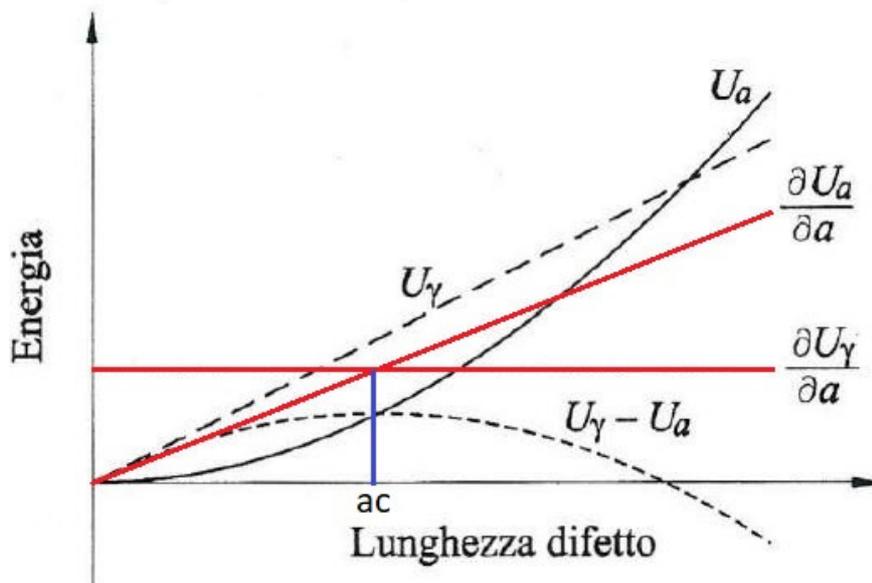


Figura 4.4: andamento delle energie potenziali [8]

Andando a rappresentare graficamente i diversi valori di energia che sono stati descritti, dal grafico Figura 4.4 si vede come la condizione stabile di propagazione della cricca si ha quando l'energia  $\frac{\partial U_a}{\partial a} < \frac{\partial U_\gamma}{\partial a}$ , invece quando i due valori di energia si eguagliano allora il difetto propaga in modo instabile, cioè si raggiunge la condizione di lunghezza critica  $a_c$ . Quindi andando a confrontare i due valori risulta:

$$\frac{\partial U_a}{\partial a} = \frac{\partial U_\gamma}{\partial a} \rightarrow \frac{\pi \sigma^2 a}{E} = 2\gamma_e \quad (4.4)$$

$$\sigma \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2\gamma_e E}{\pi}}$$

Dall'analisi della formula 4.4 si evidenzia come il termine a primo membro rappresenta l'indice di pericolosità della presenza della cricca all'interno del materiale e tiene in conto del valore della tensione e della lunghezza del difetto, e può essere assimilato al fattore di intensificazione delle

tensioni  $K_I$ . Invece il termine a secondo membro contiene una serie di termini costanti, tra cui il modulo di Young  $E$ , e rappresenta la resistenza che il materiale oppone alla crescita del difetto e può indicare il valore limite oltre il quale il difetto propaga in modo instabile; questo valore limite, valutato sperimentalmente, è legato alla tenacità alla frattura  $K_{Ic}$ .

Tutte queste formulazioni finora ricavate sono valide solo per i materiali fragili, Irwin però notò come l'energia richiesta per la propagazione della cricca nei materiali duttili era maggiore rispetto a quella richiesta per la formazione delle superfici libere, per questo per tenere in conto della presenza di una piccola deformazione plastica all'apice del difetto si aggiunge un ulteriore parametro alla formulazione precedente.

$$\frac{\pi\sigma^2 a}{E} = 2\gamma_e + \gamma_p \quad (4.5)$$

Il parametro  $\gamma_p$  rappresenta l'energia di deformazione plastica all'apice del difetto e si può considerare costante quando il valore di energia per la formazione della zona plastica è la stessa per ogni aumento della cricca.

#### 4.2 Stato di tensione all'apice della cricca

Nell'analisi della propagazione del difetto si possono avere tre differenti modi principali con cui le superfici della cricca si separano tra loro a causa dello stato di tensione che si evidenzia nell'intorno dell'apice, essi sono:

- Modo I, dove il piano del difetto è perpendicolare al carico e il difetto si propaga lungo la direzione x;
- Modo II, detto modo di taglio dove le due superfici di frattura scorrono le une sulle altre in modo parallelo;
- Modo III, detto modo di lacerazione dove le due superfici di frattura scorrono le une sulle altre parallelamente e allontanandosi in modo antisimmetrico.

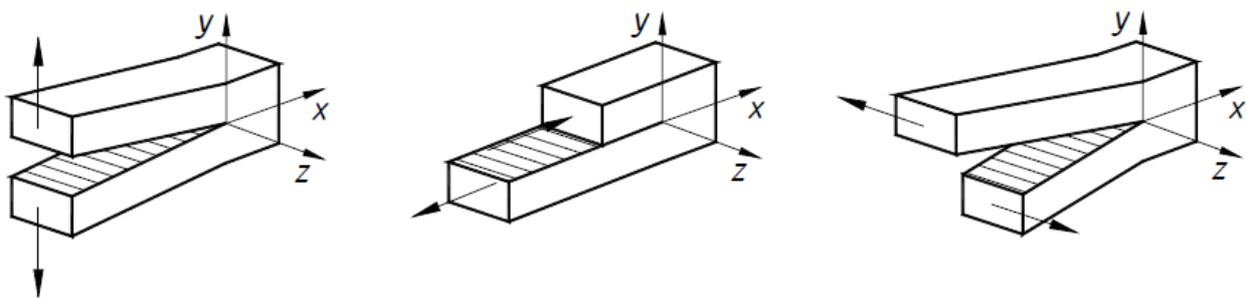


Figura 4.5: modi di apertura della cricca I, II, III [8]

Per analizzare lo stato di tensione nell'intorno dell'apice del difetto si può considerare un sistema di riferimento locale che individua la posizione e l'orientamento del difetto nel piano dove esso si propaga. In generale lo stato di tensione, che risulta essere un invariante per tutti i componenti, può essere descritto come una funzione di come la cricca è orientata  $\vartheta$  nel materiale e della posizione  $r$  che essa presenta:

$$\sigma = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f(\vartheta) \quad (4.6)$$

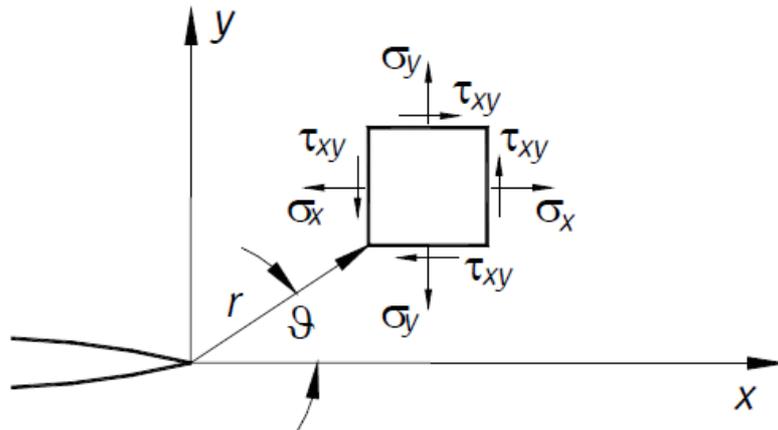


Figura 4.6: stato di tensione nell'intorno dell'apice del difetto [8]

Dall'analisi dello stato di tensione si può definire il fattore di intensificazione delle tensioni, che rappresenta un indice della pericolosità delle tensioni dovute alla presenza del difetto nel corpo, e si vede come il  $K_I$  è solo funzione della tensione nominale agente nel materiale come se la cricca non fosse presente e della dimensione del difetto, cioè della sua lunghezza.

In generale il valore del  $K_I$  viene descritto come:

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a} \quad \text{MPa}\sqrt{\text{m}} \quad (4.7)$$

Nella formula il parametro  $Y$  è un fattore di forma adimensionale che tiene in conto della geometria del componente considerato, della forma del difetto e del tipo di carico applicato.

L'andamento della curva  $K_I$  nel piano è sempre costante, cioè al variare del parametro  $r$  la curva può solo traslare rispetto a se stessa definendo l'andamento di  $K_I = f\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ ; questo è vero se si rimane in campo puramente elastico. La variazione della curva è legata ai fenomeni non lineari, cioè alla presenza della plasticità, e in questo caso se la curva cambia di forma essa non può essere usata come riferimento nell'analisi della pericolosità del difetto. Però se la dimensione del campo plastico è trascurabile rispetto la dimensione della cricca allora si riesce a rimanere in campo lineare elastico e il  $K_I$  può essere usato come riferimento all'interno della verifica del componente.

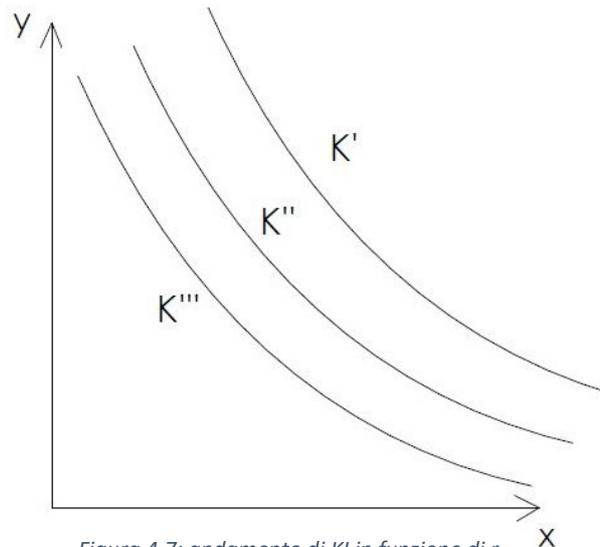


Figura 4.7: andamento di  $K_I$  in funzione di  $r$

#### 4.2.1 Raggio plastico

Dall'analisi dell'equazione  $\sigma = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$  si vede come nell'intorno dell'apice del difetto per  $r \rightarrow 0$  il valore di tensione è elevato e al limite tende a infinito; a causa di ciò nell'intorno dell'apice si avrà la presenza di una regione plasticizzata. In realtà il valore della tensione viene limitato dallo snervamento  $\sigma_s$  che comporta una redistribuzione dello stato di energia nel materiale e questo implica una traslazione della curva  $K_I$  uguale a se stessa, in modo che la quantità di energia plastica si ridistribuisce nel corpo rispettando la condizione che le due aree 1 e 2 rappresentate nella Figura 4.8 siano uguali. Questa condizione si viene ad avere solo se il valore del raggio plastico  $r_p$ , indicante la parte non lineare del sistema, sia più piccolo della lunghezza del difetto in modo da riuscire a rimanere in campo lineare elastico cosicché la curva  $K_I$  non cambi di forma.

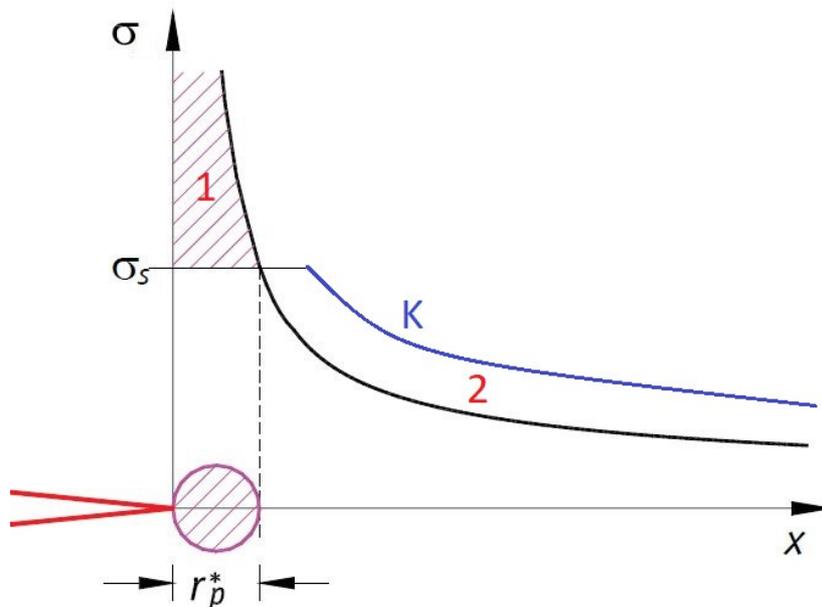


Figura 4.8: redistribuzione dello stato di tensione nell'intorno del difetto [8]

Per il calcolo del raggio plastico si procede con la formula inversa del  $\sigma$  andando a imporre:

- $r = r_p$ ;
- $\sigma = \sigma_s$ , cioè il valore della tensione è pari allo snervamento;

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2$$

Per la valutazione del fattore  $K_I = Y\sigma\sqrt{a}$  si può ipotizzare un valore del fattore di forma  $Y$  costante, cioè pari a  $\sqrt{\pi}$ , e andando a sostituire il tutto nella formula precedente si ritrova:

$$r_p = \frac{a}{2} \left( \frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^2 \quad (4.8)$$

Queste formulazione finora ricavate si riferiscono a uno stato di tensione piano, cioè quando il valore della tensione  $\sigma_z = 0$  e le condizioni di snervamento si hanno quando la  $\sigma_y = \sigma_s$ ; un procedimento analogo può essere condotto anche in condizioni di stato di deformazione piano, cioè quando il valore della deformazione  $\varepsilon_z = 0$  e all'apice del difetto avremo uno stato di tensione dato da:

$$\sigma_x = \sigma_y$$

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) = 2\mu\sigma_y$$

$$\sigma_y \approx 3\sigma_s$$

In uno stato di deformazione piano si ottiene quindi un valore di snervamento che è circa tre volte il valore trovato in uno stato di tensione piano e il valore del raggio plastico risulta quindi essere più piccolo pari a:

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{3\sigma_s} \right)^2 \quad (4.9)$$

In genere all'interno di un materiale non è possibile avere uno stato di deformazione piano puro, poiché esso si presenta maggiormente nella parte centrale del fronte della cricca dove le superfici sono vincolate alla deformazione lungo  $z$ , mentre nelle parti più estreme dove ho superfici libere il mio corpo non è vincolato e si presenterà uno stato di tensione piano con raggio plastico maggiore. La zona plastica varia lungo il fronte della cricca e in generale più è grande maggiore sarà l'energia che il materiale riesce ad assorbire, mentre se è minore il materiale assorbe meno energia e si comporta come fragile.

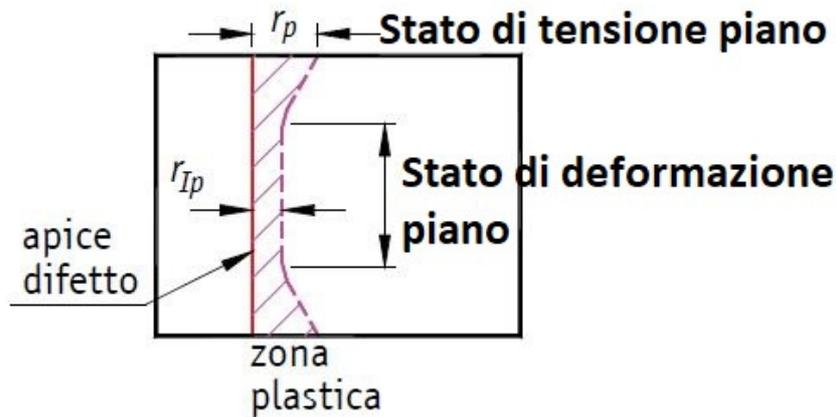


Figura 4.9: andamento del raggio plastico [8]

### 4.3 Tenacità alla frattura

Il parametro critico che viene usato nel confronto con il fattore di intensificazione delle tensioni è la tenacità alla frattura,  $K_{Ic}$ ; oltre il suo valore come già detto la cricca comincia a propagare in modo instabile nel componente senza la necessita di contributi di energia dati dall'esterno. Il  $K_{Ic}$  è una caratteristica intrinseca del materiale.

In generale il valore del  $K_{Ic}$  dipende da tre variabili, quali:

- Lo spessore del componente; all'aumentare del suo valore il  $K_{Ic}$  diminuisce, poiché ci avviciniamo maggiormente a uno stato di deformazione piano e il materiale si comporta come fragile;

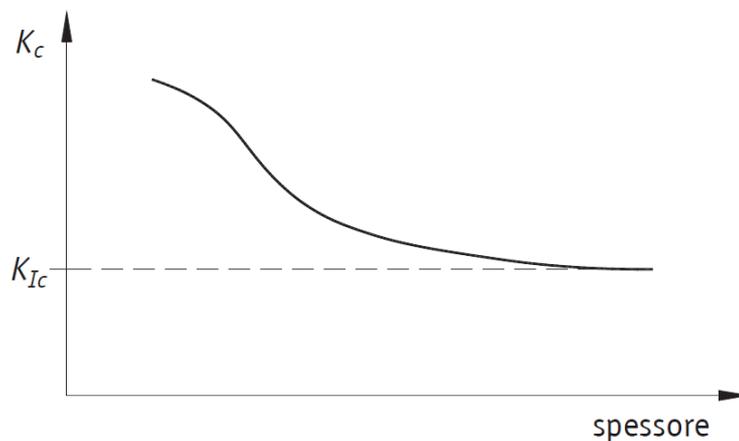


Figura 4.10: andamento  $K_{Ic}$  in funzione dello spessore del materiale

- La temperatura; all'aumentare del suo valore il  $K_{Ic}$  aumenta, perché il materiale riesce ad accumulare una maggiore quantità di energia in seguito alla deformazione e quindi avremo una regione plastica più estesa; al contrario a basse temperature il materiale si comporta come fragile e il  $K_{Ic}$  sarà minore;

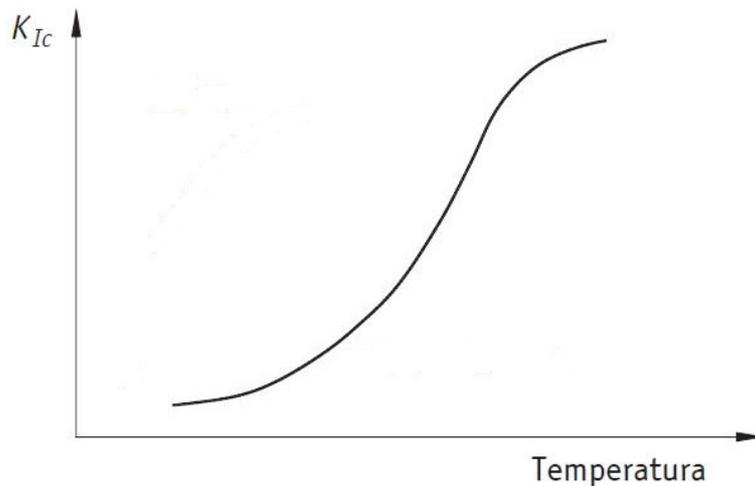


Figura 4.11: andamento del  $K_{Ic}$  in funzione della temperatura

- La velocità di applicazione del carico; maggiore è la velocità con cui il carico è applicato maggiore sarà il valore del  $K_{Ic}$ .

#### 4.4 Vita a fatica

Nella vita a fatica dei componenti si vuole valutare la durata del sistema in termini di numero di cicli a cui questo può resistere prima di giungere a rottura. Nella meccanica classica se si ipotizza che la struttura non presenti difetti al suo interno allora possono essere usati nell'analisi i diagrammi di Wohler a fatica, dove si controlla che il valore della tensione applicata sia inferiore a un determinato limite di fatica.

Nella meccanica della frattura invece, poiché si suppone che il componente presenti dei difetti, allora si vuole studiare come la cricca evolve nel tempo per passare da una condizione iniziale di lunghezza fino a una condizione finale critica. La vita del componente è legata alla cricca dalla fase di nucleazione fino alla rottura.

In generale i carichi che influenzano la propagazione del difetto sono quelli di trazione perché tendono ad aprire le due superfici libere della cricca, al contrario l'applicazione di carichi di compressione viene vista come ininfluenza poiché determina una chiusura delle due superfici della cricca.

##### 4.4.1 Legge di Paris

Colui che riuscì per primo a valutare come i difetti propagano all'interno dei componenti fu Paris, che definì un'equazione che permette di descrivere come la cricca in seguito all'applicazione di un carico esterno tende ad aumentare nel tempo di un incremento infinitesimo con una certa velocità, andando a ridurre così il numero dei cicli a cui il pezzo può resistere.

Il valore dell'incremento  $\Delta a$  della lunghezza della cricca nel tempo dipende da una serie di parametri che favoriscono la propagazione quali:

- Il valore del carico applicato in termini di tensioni massime  $\sigma_{max}$  e minime  $\sigma_{min}$ ;
- La lunghezza corrente del difetto nell'istante considerato,  $a$ ;

- La geometria del componente, tenuta in conto all'interno del fattore di forma  $Y$ ;

$$(\Delta a)_{ciclo} = f(\sigma_{max}, \sigma_{min}, a, Y)$$

Come già detto il parametro usato per analizzare la cricca è il fattore di intensificazione delle tensioni e se lo stato di tensione varia nel tempo allora è possibile individuare un valore massimo del fattore  $K_{I,max}$ , che deve sempre essere usato per la verifica del componente nell'ambito della rottura confrontandolo con il  $K_{Ic}$ , e un minimo  $K_{I,min}$ , quindi si avrà:

$$\Delta K = K_{I,max} - K_{I,min} = Y \Delta \sigma \sqrt{a} \quad (4.10)$$

Dalle seguenti considerazioni si ricava la legge di Paris:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R)$$

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^n \quad (4.11)$$

Dove i parametri presenti nella formula sono:

- $\frac{da}{dN}$  rappresenta la velocità con cui propaga il difetto a seguito di un incremento infinitesimo e in un grafico lunghezza cricca e numero di cicli indica la pendenza della retta;
- $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$  rappresenta il rapporto di carico con cui il pezzo opera;
- $C, n$  sono dei parametri costanti tipici del materiale che si considera e in un grafico  $\frac{da}{dN} - \Delta K$  il valore dell'esponente  $n$  indica la pendenza della curva.

La curva risultante della legge di Paris che descrive la propagazione della cricca ha una forma ad S in cui si vanno a distinguere tre zone caratteristiche:

- Secondo la legge di Paris ad ogni valore del fattore di intensificazione  $\Delta K$  applicato al componente corrisponde sempre un suo relativo danneggiamento con una velocità con cui la cricca propaga; questo implica che il pezzo non può mai avere una durata infinita come riportato all'interno della curva di Wohler, per questo la legge di Paris necessita una prima correzione legata al fatto che quando si applica un livello di tensione al di sotto di un determinato limite il difetto non deve propagare. Si ha quindi una regione di soglia a sinistra nel grafico al di sotto della quale il difetto non propaga e il componente non va a rottura e indicata con il valore limite di soglia  $\Delta K_{th}$ ;
- La parte centrale della curva invece è quella zona dove è applicata la legge di Paris e indica che il difetto una volta nucleato sotto l'applicazione del  $\Delta K$ , che deve essere maggiore della soglia  $\Delta K_{th}$ , comincia a propagare nel materiale;
- La parte destra nel grafico indica la zona finale di vita del componente prima di raggiungere le condizioni di instabilità per le quali la cricca accelera nella propagazione e il pezzo va a rottura; secondo Paris anche in questo caso qualunque sia il  $\Delta K$  applicato la cricca avrà sempre una relativa velocità di propagazione, si necessita quindi di una seconda correzione

che deve essere apportata alla legge e indicata con il valore limite della tenacità alla frattura  $K_{Ic}$ . Quando il  $K_{I,max}$  nel ciclo raggiunge  $K_{Ic}$  allora ho rottura del componente.

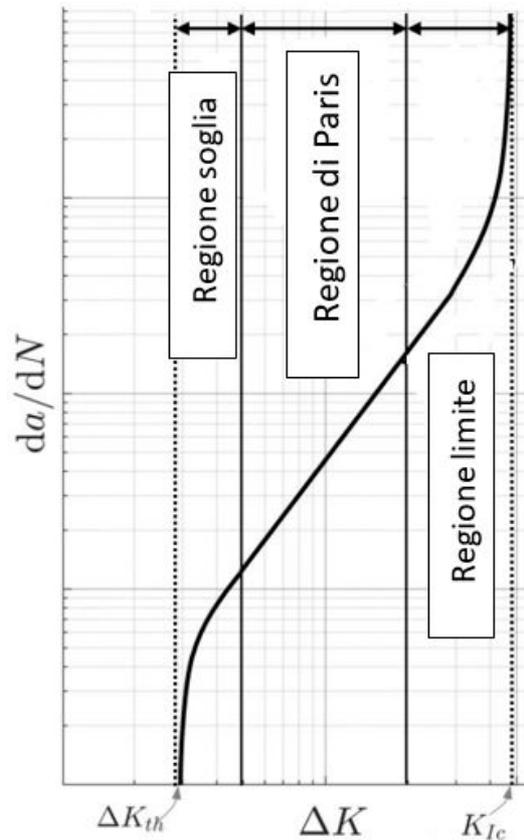


Figura 4.12: rappresentazione della legge di Paris

Dall'integrazione numerica della legge di Paris, sotto l'ipotesi che il fattore di forma  $Y$  si mantiene costante durante la propagazione della cricca, otteniamo il seguente risultato con cui si può calcolare il numero di cicli necessario per cui la cricca da un valore di lunghezza iniziale  $a_i$  raggiunge una lunghezza finale  $a_f$ :

$$N = \frac{a_f^{1-\frac{n}{2}} - a_i^{1-\frac{n}{2}}}{\left(1 - \frac{n}{2}\right) C Y^n \Delta \sigma^n} \quad (4.12)$$

#### 4.5 Diagramma di Kitagawa

Un diagramma utile per l'analisi della fatica dei componenti è il diagramma di Kitagawa che permette di analizzare contemporaneamente la fatica dal punto di vista della meccanica della frattura e dal punto di vista di Wohler.

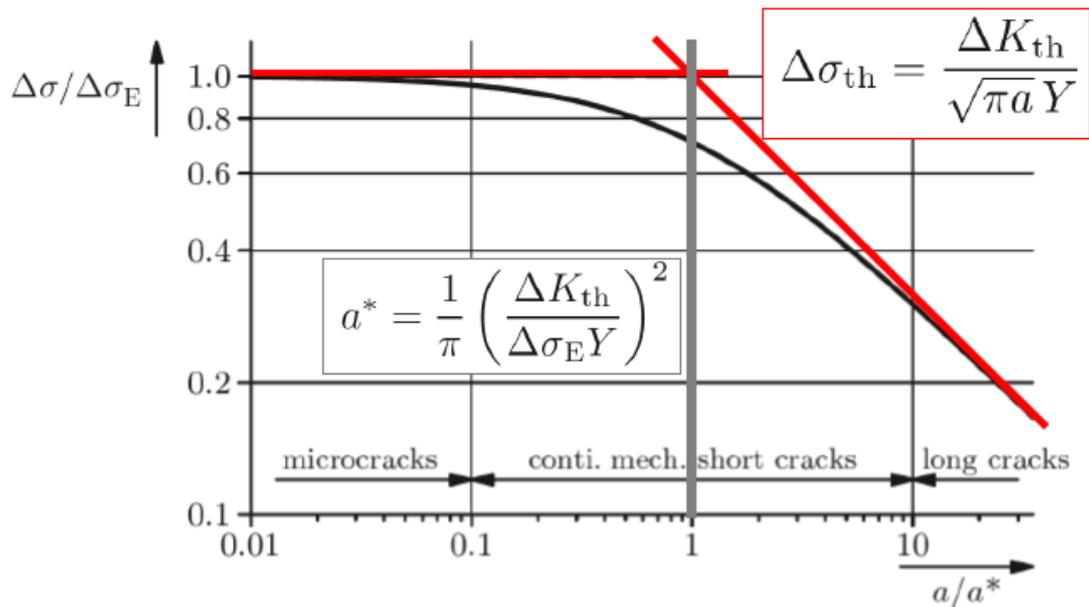


Figura 4.13: diagramma di Kitagawa [7]

All'interno del grafico lungo l'asse delle ordinate si ha la tensione esterna che viene applicata adimensionalizzata rispetto al limite di fatica, mentre sull'asse delle ascisse si ha la dimensione del difetto adimensionalizzata rispetto a una lunghezza di riferimento.

La curva in rosso rappresenta un limite della resistenza del componente al di là della quale il pezzo va a rottura, mentre al di sotto il pezzo sopravvive:

- la retta orizzontale indica un limite di fatica definito secondo il concetto di Wohler, cioè al di sopra della curva il componente risulta essere rotto perché supera il valore limite e quindi si avrà la formazione di una cricca nel materiale;
- la retta obliqua indica invece il limite definito dalla meccanica della frattura che è correlato con il  $\Delta K_{th}$  di soglia e con la lunghezza della cricca ed è esplicitato rispetto un valore di tensione di soglia  $\Delta\sigma_{th}$ .

A sinistra nel grafico avremo le cosiddette microcricche che si vengono a creare all'interno del grano cristallino e possono non emergere mai, mentre a destra troviamo le macrocricche, cioè delle cricche visibili nel componente che hanno coinvolto più grani cristallini e propagano seguendo la legge di Paris.

## 5 Analisi analitica molla a tazza

In questo capitolo si comincerà ad entrare nel dettaglio del nostro caso di studio considerando prima tutta la parte di analisi analitica, e valutando inizialmente lo stato di tensione e della forza che la molla Belleville può sostenere durante il suo funzionamento a seguito di uno spostamento assiale imposto. Nei capitoli successivi invece si passerà ad analizzare cosa comporta la presenza di una cricca all'interno della molla sotto due differenti casi e come questa va ad influenzare la durata a fatica.

Nelle tabelle sottostanti si riportano le caratteristiche geometriche della molla che è stata scelta per l'analisi e il relativo materiale con cui è prodotta. Si rileva come, dai vari produttori, il tipico materiale standard (normativa EN 10089) con cui vengono realizzate le molle Belleville per mantenere sempre una buona qualità in tutte le loro condizioni operative è il 51CrV4. A partire da questi insieme di dati indicati si è proceduto con il valutare i risultati finali dal punto di vista analitico.

Caratteristiche geometriche	
Diametro esterno $D_e$	80 mm
Diametro interno $D_i$	36 mm
Spessore $t$	3 mm
Altezza totale $l_o$	5.7 mm
Altezza libera $h_o$	2.7 mm

Materiale 51CrV4	
Modulo di Young $E$	210000 MPa
Coefficiente di Poisson $\mu$	0.3
Tensione di snervamento $R_{p\ 0.2}$	1140 MPa
Tensione di rottura $R_m$	1330 MPa
Densità	7500 kg/m <sup>3</sup>

### 5.1 Andamento forza spostamento

Per calcolare l'andamento della forza da applicare alla molla lungo la direzione assiale per ottenere un determinato spostamento come detto si ci rifà alla formula proposta da Almen e Laszlo, dove troviamo tre parametri di riferimento dai quali si fa dipendere il valore della forza:

- Il materiale con cui è realizzata la molla, in generale in acciaio, e questo si riversa nel modulo di Young  $E$  e nel coefficiente di Poisson  $\mu$ ;
- Le caratteristiche geometriche della molla, tenute in conto tramite dei coefficienti adimensionali quali  $K_1, K_2, K_3$ , e considerando anche lo spessore  $t$ , l'altezza libera  $h_o$  e i diametri della molla contenuti nel parametro adimensionale  $\delta$  che entra in gioco all'interno dei  $K_i$ . Tutti questi coefficienti una volta scelto il tipo di molla si mantengono costanti;
- Lo spostamento  $s$  imposto alla molla che causa la relativa deformazione.

Il tutto si traduce quindi nella seguente formula analitica adottata per calcolare la forza  $F$ :

$$F = \frac{4 E}{1 - \mu^2} \frac{t^4}{K_1 D_e^2 t} \frac{s}{t} \left[ \left( \frac{h_o}{t} - \frac{s}{t} \right) \left( \frac{h_o}{t} - \frac{s}{2t} \right) + 1 \right] \quad (5.1)$$

In generale si vede come la forza risulta essere funzione di:

$$F = f(\text{materiale, spostamento, geometria})$$

Per quanto riguarda invece i parametri adimensionali presenti all'interno della formula essi sono pari a:

$$\delta = \frac{D_e}{D_i} \quad (5.2)$$

$$K_1 = \frac{1}{\pi} \frac{\left( \frac{\delta - 1}{\delta} \right)^2}{\frac{\delta + 1}{\delta - 1} - \frac{2}{\ln \delta}} \quad (5.3)$$

$$K_2 = \frac{6}{\pi} \frac{\frac{\delta - 1}{\ln \delta} - 1}{\ln \delta} \quad (5.4)$$

$$K_3 = \frac{3}{\pi} \frac{\delta - 1}{\ln \delta} \quad (5.5)$$

Per ottenere quindi il risultato della caratteristica della molla dal punto di vista analitico si è imposto un valore di spostamento assiale sulla sommità del tronco di cono, pari a una percentuale dell'altezza libera  $h_o$  (mm) della molla, in modo da poter ottenere così la corrispettiva forza che può essere sostenuta, considerando che il componente è appoggiato alla base dove avremo un vincolo di traslazione nullo lungo il suo asse. Si elencano i risultati trovati:

Percentuale altezza libera (mm)	Spostamento s (mm)	Forza F (N)
0% $h_o$	0	0
25% $h_o$	0.675	5506.1
50% $h_o$	1.35	9374.15
75% $h_o$	2.025	12150.22
100% $h_o$ (appiattimento molla)	2.7	14380.29

Parametri adimensionali	
$\delta$	2.22
$K_1$	0.731
$K_2$	1.269
$K_3$	1.462

Si possono rappresentare graficamente i risultati finali nel grafico Figura 5.1, dove come detto avremo un andamento della caratteristica non lineare che aumenta con lo spostamento:

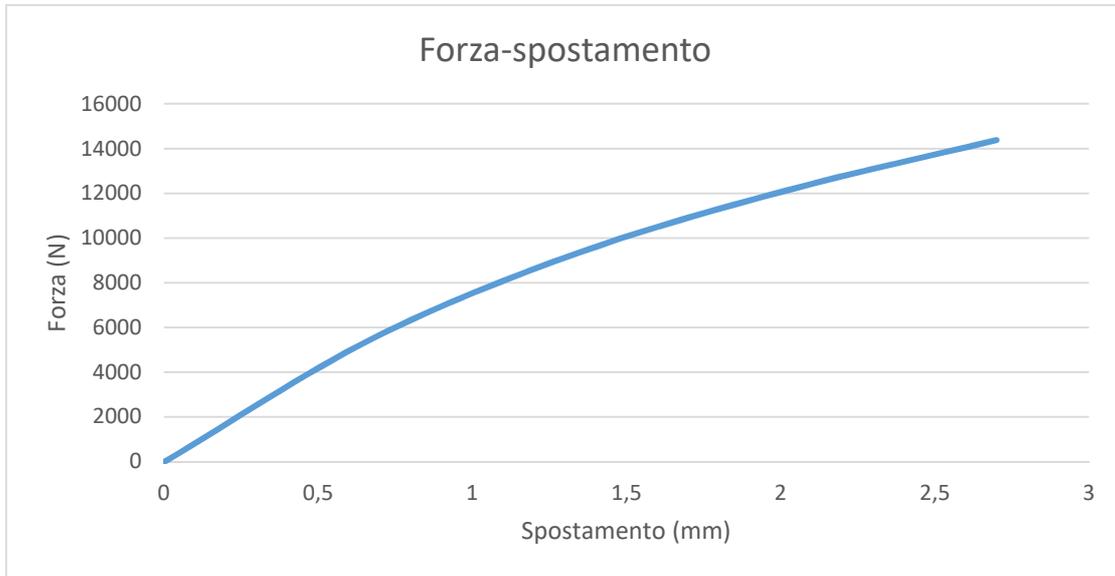


Figura 5.1: relazione andamento forza spostamento

## 5.2 Valutazione stato di sollecitazione

In modo analogo anche per le tensioni, così come descritto per la forza, le formule di Almen e Laszlo propongono un calcolo che sarà funzione solo del materiale, dello spostamento imposto e delle caratteristiche geometriche. Le tensioni equivalenti saranno quindi valutate dal punto di vista analitico in punti caratteristici della molla come:

$$\sigma_I = -\frac{4 E}{1 - \mu^2} \frac{t^2}{K_1 D_e^2} \frac{s}{t} \left[ K_2 \left( \frac{h_o}{t} - \frac{s}{2 t} \right) + K_3 \right] \quad (5.6)$$

$$\sigma_{II} = -\frac{4 E}{1 - \mu^2} \frac{t^2}{K_1 D_e^2} \frac{s}{t} \left[ K_2 \left( \frac{h_o}{t} - \frac{s}{2 t} \right) - K_3 \right] \quad (5.7)$$

$$\sigma_{III} = -\frac{4 E}{1 - \mu^2} \frac{t^2}{K_1 D_e^2} \frac{s}{t \delta} \left[ (K_2 - 2K_3) \left( \frac{h_o}{t} - \frac{s}{2 t} \right) - K_3 \right] \quad (5.8)$$

$$\sigma_{IV} = -\frac{4 E}{1 - \mu^2} \frac{t^2}{K_1 D_e^2} \frac{s}{t \delta} \left[ (K_2 - 2K_3) \left( \frac{h_o}{t} - \frac{s}{2 t} \right) + K_3 \right] \quad (5.9)$$

$$\sigma_{OM} = -\frac{4 E}{1 - \mu^2} \frac{t^2}{K_1 D_e^2} \frac{s}{t \pi} \quad (5.10)$$

In generale quindi dall'analisi delle tensioni si vede come esse sono funzione di:

$$\sigma = f(\text{materiale}, \text{spostamento}, \text{geometria})$$

Le tensioni descritte secondo la normativa DIN 2029 sono delle tensioni equivalenti con segno che derivano ciascuna dalla combinazione del valore della tensione circonferenziale e della tensione assiale, non tenendo in considerazione però il contributo derivante dalla tensione radiale secondo le ipotesi semplificative di Almen e Laszlo. Ai due valori di diametro, interno e esterno, si evidenziano infatti due differenti valori della tensione circonferenziale  $\sigma_c$  e assiale  $\sigma_a$  che vengono calcolate sempre a partire dalle caratteristiche della molla e la cui combinazione determina il valore delle tensioni nei punti *I, II, III, IV*. Ad esempio al valore del diametro interno si rileva dalla normativa le tensioni descritte come:

$$\sigma_a = -\frac{4 E K_3 t^2 s}{1 - \mu^2 K_1 D_e^2 t} \quad (5.11)$$

$$\sigma_c = -\frac{4 E K_2 t^2 s}{1 - \mu^2 K_1 D_e^2 t} \left( \frac{h_o}{t} - \frac{s}{2t} \right) \quad (5.12)$$

Al contrario al valore del diametro esterno questi valori delle tensioni vengono indicati come:

$$\sigma_a = -\frac{4 E K_3 t^2 s}{1 - \mu^2 K_1 D_e^2 \delta t} \quad (5.13)$$

$$\sigma_c = -\frac{4 E (K_2 - 2K_3) t^2 s}{1 - \mu^2 K_1 D_e^2 t \delta} \left( \frac{h_o}{t} - \frac{s}{2t} \right) \quad (5.14)$$

Per la valutazione dello stato di tensione agente sulla molla avremo che a seguito dall'applicazione di un carico esterno assiale con vincolo di traslazione nullo alla base, la superficie superiore risulta essere in uno stato di compressione e il valore massimo è raggiunto nello spigolo del diametro interno; la superficie inferiore invece risulta essere in uno stato di trazione e il valore massimo è raggiunto nello spigolo del diametro esterno e da nessuna parte della superficie il valore della tensione di trazione è maggiore di quella di compressione. Lo stato di tensione che si viene a produrre risulta essere simmetrico rispetto l'asse di rivoluzione della molla, però nella sezione rettangolare non è distribuito uniformemente.

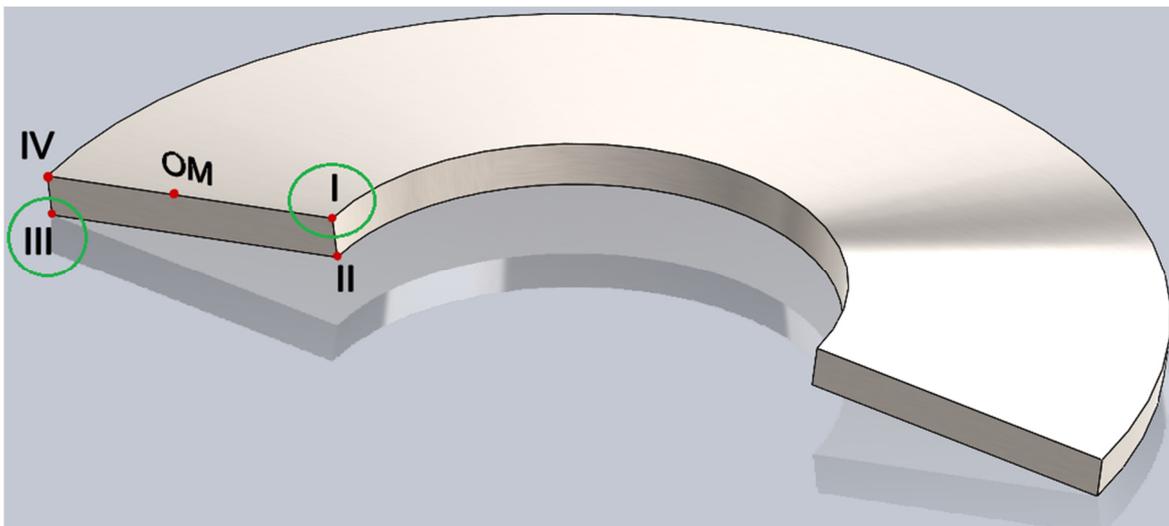


Figura 5.2: punti più sollecitati I in compressione e III in trazione

Si riassumono i risultati ottenuti dal punto di vista tensionale a fronte di uno spostamento imposto alla molla considerato come una percentuale dell'altezza libera  $h_o$  (mm):

Percentuale altezza libera (mm)	$\sigma_I$ (MPa)	$\sigma_{II}$ (MPa)	$\sigma_{III}$ (MPa)	$\sigma_{IV}$ (MPa)	$\sigma_{OM}$ (MPa)
0% $h_o$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
25% $h_o$	-983,10	184,62	496,89	-28,58	-381,45
50% $h_o$	-1852,13	483,31	926,88	-124,07	-762,90
75% $h_o$	-2607,09	896,06	1289,96	-286,45	-1144,35
100% $h_o$	-3247,98	1422,89	1586,15	-515,74	-1525,80

Si può anche rappresentare l'andamento grafico dello stato di tensioni nella molla dal punto di vista analitico, quando viene applicato sempre uno spostamento assiale al diametro interno; si rileva che all'aumentare della deformazione aumenta il valore dello stato di tensioni nella molla e in particolare dall'analisi delle formule proposte da Almen e Laszlo, che considerano uno stato di sollecitazione equivalente con segno trascurando l'effetto della tensione radiale, avremo che le tensioni  $\sigma_I$  e  $\sigma_{IV}$  sono di compressione, mentre le tensioni  $\sigma_{II}$  e  $\sigma_{III}$  sono di trazione, con valore massimo in trazione dato da  $\sigma_{III}$  e valore massimo in compressione dato da  $\sigma_{IV}$ .

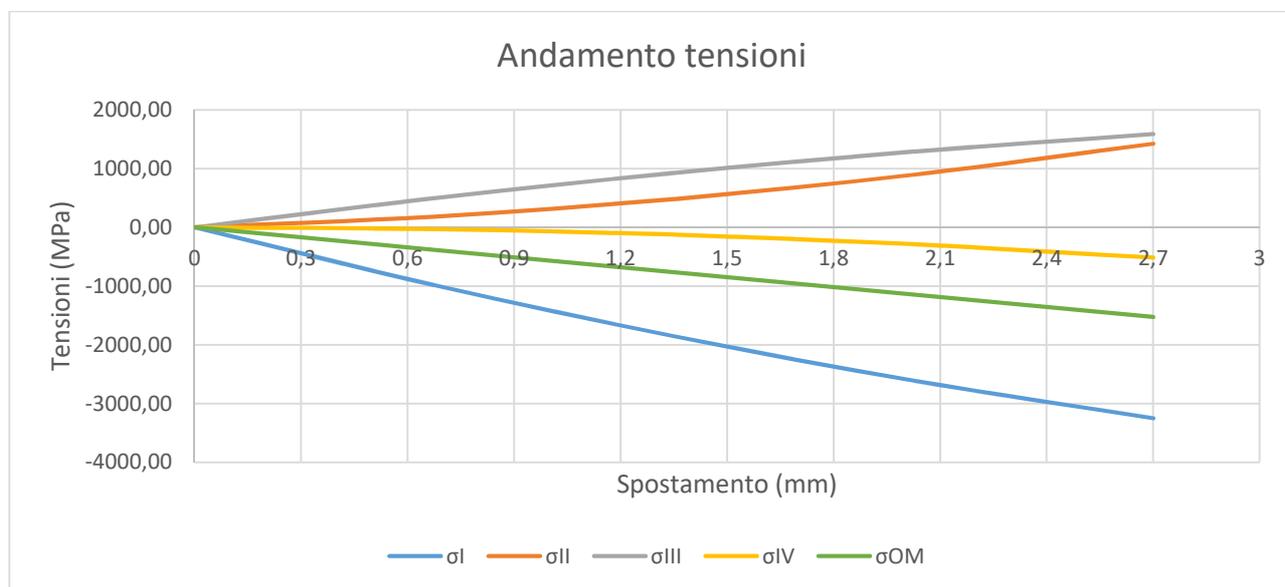


Figura 5.3: stato di tensione analitico in funzione dello spostamento

### 5.3 Analisi analitica MFLE

In questo capitolo si analizzerà il comportamento della molla a tazza dal punto di vista analitico per la meccanica della frattura (MFLE) sotto l'applicazione di una determinata condizione di lavoro, in modo da vedere come propaga una eventuale cricca all'interno del componente e la sua durata di vita. Nelle figure sottostanti sono stati rappresentati i due casi di studio per la molla Belleville in esame con l'indicazione della posizione delle due tipologie di cricca:

- Si è considerata la presenza di una cricca disposta lungo la direzione radiale, posizionata al valore del diametro esterno della molla con un raccordo all'apice dell'intaglio di circa  $0.3\text{ mm}$ ;

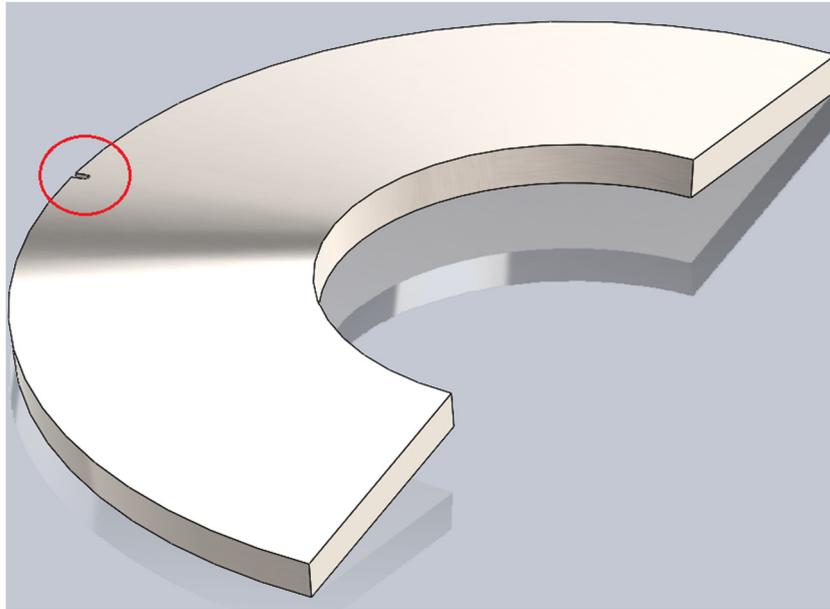


Figura 5.4: intaglio radiale

- Si è considerata la presenza di una cricca disposta lungo la direzione circonferenziale, posizionata lungo la mezzaria della larghezza della molla con un raccordo all'apice dell'intaglio di circa  $0.3\text{ mm}$ .

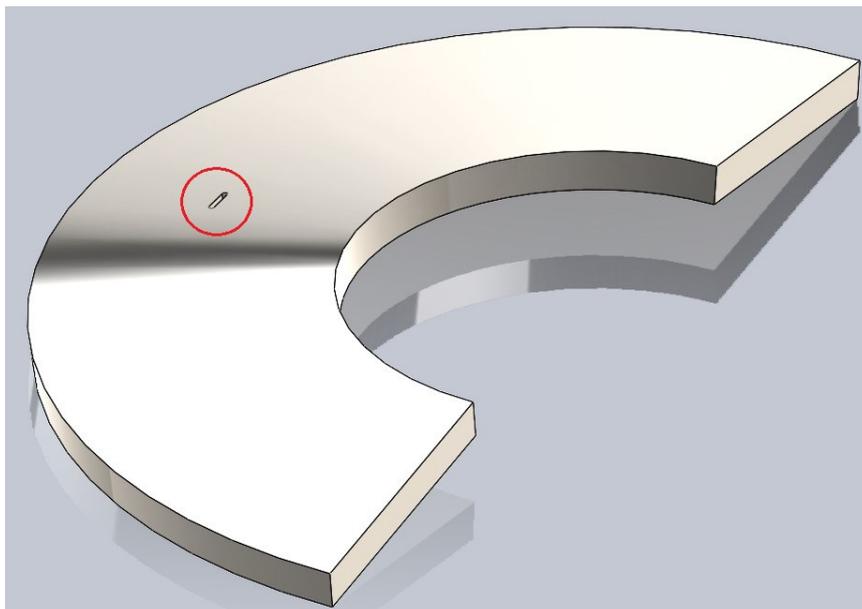


Figura 5.5: intaglio circonferenziale

Le condizioni di lavoro, comuni ai due casi, che sono state utilizzate per l'analisi della propagazione della cricca nella molla considerano una forza imposta che oscilla tra un valore massimo e un valore minimo a cui corrisponde un determinato intervallo di spostamento e di tensione nel componente. Si è scelto un valore di carico assiale da applicare sempre al diametro interno superiore, in modo che la tensione di trazione agente fosse inferiore al valore dello snervamento, e in modo da poter vedere una propagazione graduale e controllata del difetto così da essere abbastanza lontani dalle condizioni critiche di lunghezza finale che può essere raggiunta prima della rottura. Inoltre in entrambi i due casi si è considerata una lunghezza iniziale della cricca nell'intorno del raccordo di circa  $a = 0.1 \text{ mm}$ .

Condizioni di lavoro	Valore minimo	Valore massimo
Spostamento $s$ (mm)	0.053	1.27
Forza $F$ (N)	500	9000

Si rappresenta sotto queste condizioni lo stato di tensione nella molla, la quale nelle varie simulazioni viene appoggiata alla base sul diametro esterno inferiore e caricata lungo la direzione assiale:

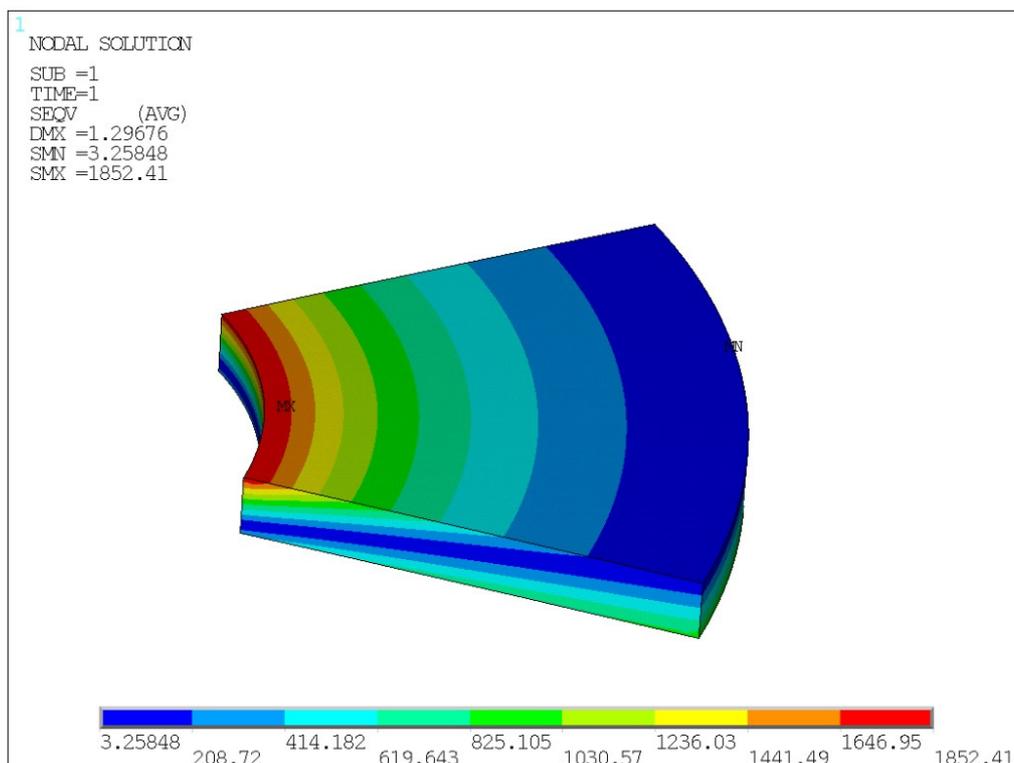


Figura 5.6: tensione equivalente con spostamento di 1.27 mm

Prima di procedere con l'analisi vera e propria è necessario andare a eseguire un primo controllo al fine di verificare che, sotto le condizioni operative indicate, la molla andrà a cedere secondo la meccanica della frattura e che non venga seguito un altro modo di cedimento. Si deve quindi controllare che:

- Lo stato di tensione nominale applicato sia inferiore al valore della tensione di snervamento;

- Valutare il valore della lunghezza critica della cricca nell'ambito della meccanica della frattura e dello snervamento, in modo da vedere quale sarà la modalità di cedimento seguita dal componente:
  - Per il caso con cricca disposta lungo la direzione radiale si calcola per la meccanica della frattura un valore critico, ottenuto imponendo il valore di tensione massima nel componente e il limite indicato da  $K_{Ic}$ , pari a:

$$a_{c\ MFLE} = \left( \frac{K_{Ic}}{Y\sigma_{max}} \right)^2 = 1.48\ mm \quad (5.15)$$

E per lo snervamento invece si impongono le condizioni limiti dettate dalla  $\sigma_s$  sotto il valore della forza massima:

$$a_{c\ plastico} = \frac{1}{2} \left( W - \frac{F_{max}}{\sigma_s B} \right) = 9.68\ mm \quad (5.16)$$

I parametri presenti nelle formule sono:

- $\sigma_{max}$  è il valore massimo di tensione nominale risentito dalla molla come se la cricca non fosse presente all'interno del materiale;
- $F_{max}$  è la forza massima applicata;
- $W$  è la larghezza del componente;
- $B$  è lo spessore della molla.

Dal confronto tra i due valori ottenuti si vede come le condizioni critiche sono dettate dalla meccanica della frattura perché  $a_{c\ MFLE} < a_{c\ plastico}$  che sarà quindi la modalità di cedimento seguita.

- Per il caso con cricca disposta lungo la direzione circonferenziale invece si calcola per la meccanica della frattura un valore critico pari a:

$$a_{c\ MFLE} = \left( \frac{K_{Ic}}{Y\sigma_{max}} \right)^2 = 2.21\ mm$$

E per lo snervamento:

$$a_{c\ plastico} = \frac{1}{2} \left( W - \frac{F_{max}}{\sigma_s B} \right) = 15.96\ mm$$

Anche in questo caso dal confronto tra i due valori ottenuti si vede come le condizioni critiche sono dettate sempre dalla meccanica della frattura.

Per andare ad ottenere i grafici che descrivono la propagazione della cricca nel tempo all'interno della molla, si è adottato un procedimento iterativo dovuto al fatto che il valore del fattore di forma dipende dalla lunghezza della cricca e quindi varierà nel tempo man mano che questa propaga.

Le ipotesi di lavoro che sono state utilizzate in questa prima fase per l'analisi analitica comuni ai due casi di cricca radiale e circonferenziale sono:

- Valore iniziale della lunghezza della cricca presente all'interno della sezione della molla pari  $a_o = 0.1 \text{ mm}$ ;
- A partire dalla lunghezza iniziale  $a_o$  si è utilizzato un passo di integrazione costante per l'aumento della cricca a ogni iterazione pari  $\Delta a = 0.03 \text{ mm}$ ;
- Il valore del fattore di forma è stato calcolato con una legge polinomiale data dalla letteratura [8] pari a:

$$Y = 1.12\sqrt{\pi} + 0.41 \left(\frac{a}{w}\right) + 18.7 \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 38.48 \left(\frac{a}{w}\right)^3 + 53.85 \left(\frac{a}{w}\right)^4 \quad (5.17)$$

Si rileva dall'iterazione numerica che il rapporto  $\frac{a}{w} \ll 1$ , quindi il valore del fattore  $Y$  si mantiene pressoché costante man mano che la cricca propaga.

- Per quanto riguarda i parametri presenti nella legge di Paris dalla letteratura si evidenzia come, a seguito di una serie di prove sperimentali condotte sugli acciai, esisterà sempre una legge sperimentale costante che lega fra loro i coefficienti  $C, n$ , in modo che scegliendo opportunamente il valore del parametro  $n$ , che per gli acciai può essere preso pari a 3, allora di conseguenza si può calcolare il valore del coefficiente  $C$ , e i due valori che si andranno ad ottenere saranno sempre costanti per il nostro modello. Una relazione sperimentale lega i coefficienti come:

$$C = A B^n$$

Dove i due fattori A e B sono pari a:

- $A = 7.6 \cdot 10^{-7} \frac{m}{ciclo}$ ;
- $B = 1.81 \cdot 10^{-2} (MPa \sqrt{m})^{-1}$ .
- Affinché la cricca propaghi e si possa applicare la legge di Paris allora il valore del  $\Delta K$  deve essere maggiore del  $\Delta K_{th}$  e minore del  $K_{Ic}$ .

Dalle ipotesi adottate si può procedere con l'applicazione del procedimento iterativo nel quale avremo una prima inizializzazione delle variabili iniziali relative alla lunghezza iniziale del difetto e al numero di cicli  $N$ , cioè si pone:

$$a_1 = a_i \text{ (valore lunghezza iniziale cricca)}$$

$$N = 0$$

Per ogni passo di integrazione successivo  $i + 1$  si è definita la nuova lunghezza raggiunta dalla cricca durante la propagazione a seguito dell'incremento costante  $\Delta a$ , calcolando nello stesso tempo un valore di lunghezza media equivalente  $a_m$ :

$$a_{i+1} = a_i + \Delta a$$

$$a_{medio} = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$$

Da questo valore medio della lunghezza si sono calcolati i due nuovi valori relativi al fattore di forma  $Y_i$  e  $\Delta K_i$ :

$$Y_i = f\left(\frac{a_m}{w}\right)$$

$$\Delta K_i = Y_i \Delta \sigma \sqrt{a_m}$$

Dall'insieme dei risultati possiamo calcolare la velocità con cui propaga il difetto per ogni incremento utilizzando la legge di Paris:

$$\frac{da_i}{dN} = C \Delta K_i^n$$

E infine l'incremento del numero di cicli  $\Delta N_i$  necessari per il difetto per passare da una lunghezza iniziale  $a_i$  a una lunghezza successiva  $a_{i+1}$  e da qui calcolare il numero di cicli totali che si è raggiunto:

$$\Delta N_i = \frac{\Delta a_i}{C \Delta K_i^n}$$

$$N_{tot} = N + \Delta N_i$$

Questa iterazione viene ripetuta fin quando è rispettata la condizione di essere al di sotto del valore della tenacità alla frattura  $K_{Ic}$  ed è stata adottata sia per la cricca disposta in senso radiale che per quella disposta in senso circonferenziale.

### 5.3.1 Analisi risultati MFLE cricca radiale

Dopo aver definito le condizioni di lavoro precedentemente descritte, si può passare all'analisi dei risultati finali ottenuti inizialmente per una cricca disposta nella direzione radiale al valore del diametro esterno.



Figura 5.7: relazione lunghezza cricca radiale - numero cicli

Dal grafico Figura 5.7 si vede come man mano che la cricca propaga si va a ridurre la vita utile del componente, andando quindi a diminuire il numero di cicli a cui la molla può resistere e aumentando la probabilità di rottura fino a raggiungere le condizioni critiche; per il nostro caso con le condizioni di carico indicate si ottiene un numero di cicli risultante pari a circa 7000 cicli.

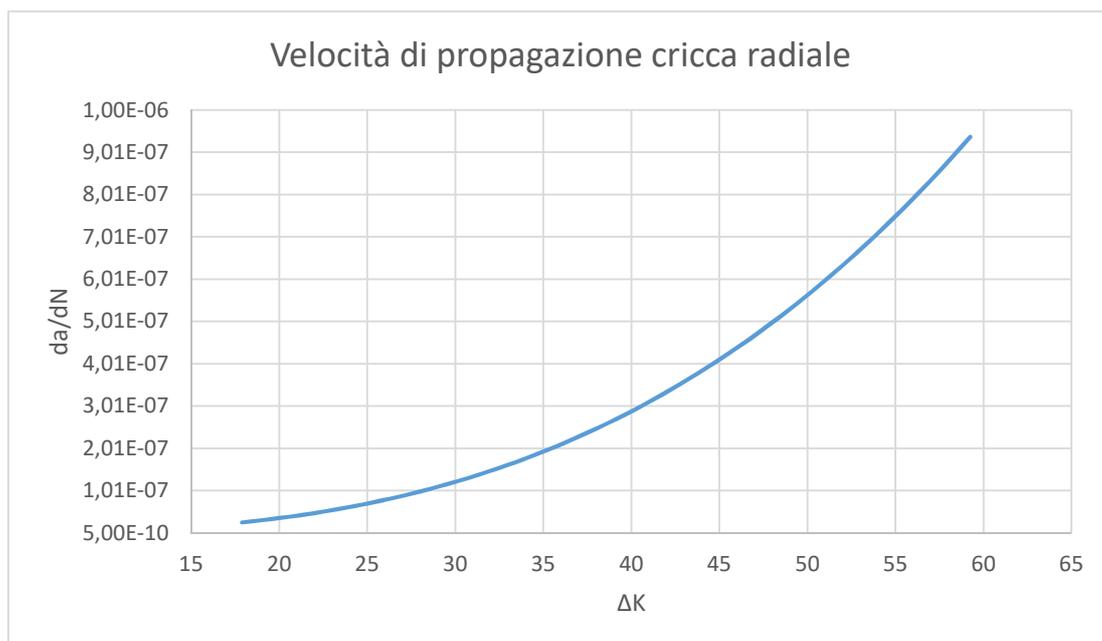


Figura 5.8: relazione tra velocità di propagazione e  $\Delta K$  (radiale)

Dal grafico Figura 5.8 si mette in evidenza come man mano che la cricca va a risentire un valore sempre maggiore del fattore di intensificazione delle tensioni, la velocità di propagazione va via via ad aumentare portando la cricca ad accelerare fino a raggiungere le condizioni critiche di rottura.

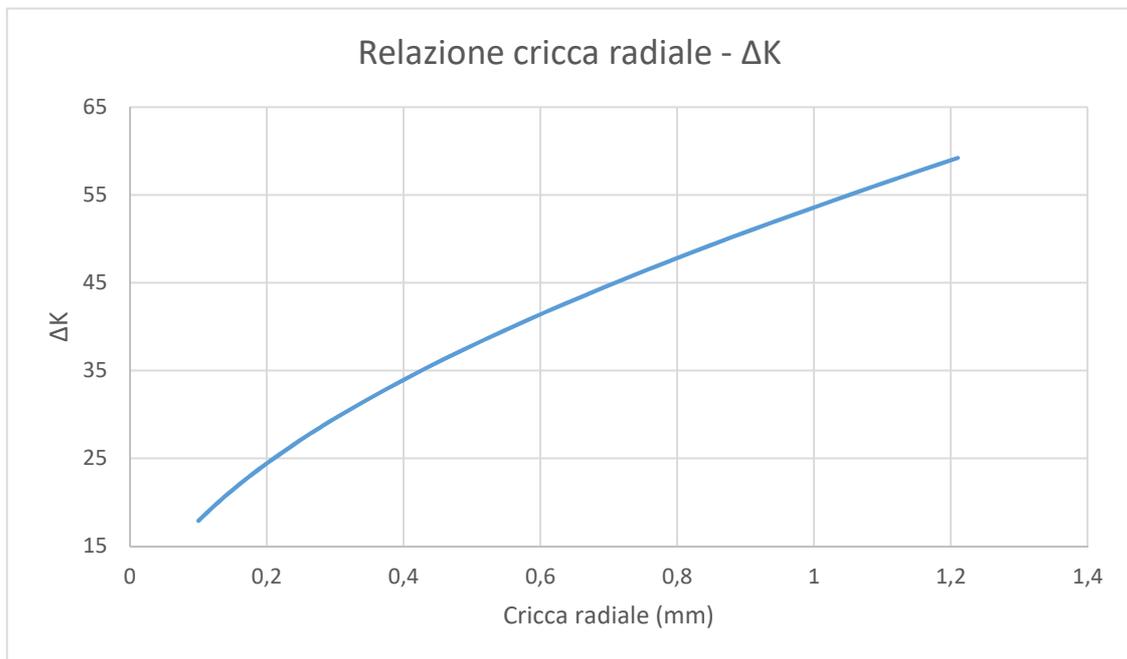


Figura 5.9: relazione lunghezza cricca radiale -  $\Delta K$

Dal grafico Figura 5.9 invece viene descritta la relazione che intercorre tra la lunghezza della cricca radiale e il valore di intensificazione della tensioni, dove si vede come all'aumentare della lunghezza del difetto nel tempo si rileva un valore crescente e graduale del fattore di intensificazione fino a quando si raggiungono le condizioni per le quali la molla va a rottura.

### 5.3.2 Analisi risultati MFLE cricca circonferenziale

In modo analogo si ripete il procedimento iterativo anche per una cricca disposta lungo la direzione circonferenziale nella mezzeria della larghezza della molla, e sotto le ipotesi precedentemente indicate considerando una lunghezza iniziale del difetto pari  $a = 0.1 \text{ mm}$  si sono ottenuti i seguenti risultati finali.



Figura 5.10: relazione lunghezza cricca circonferenziale - numero cicli

Dall'analisi della crescita della cricca Figura 5.10 posizionata circonferenzialmente avremo che inizialmente essa risente un valore di tensione che non favorisce la propagazione all'interno della molla e quindi si richiede un dispendio energetico maggiore rispetto al caso di cricca radiale; a seguito di ciò avremo un numero di cicli a cui il componente può resistere che risulta essere maggiore e si arriva a un valore totale di circa 13000 cicli. In questo caso quindi la durata di vita può essere suddivisa in due fasi, una prima fase legata a una crescita lungo la direzione circonferenziale che va ad assorbire un certo numero di cicli iniziali della molla, e una seconda fase di vita legata invece a una crescita lungo la direzione radiale che esaurisce gli ultimi cicli prima della rottura finale. Questo comportamento verrà visualizzato e descritto meglio nella parte legata alla simulazione agli elementi finiti dove si evidenzierà la deviazione della cricca dalla sua direzione originaria man mano che questa propaga.

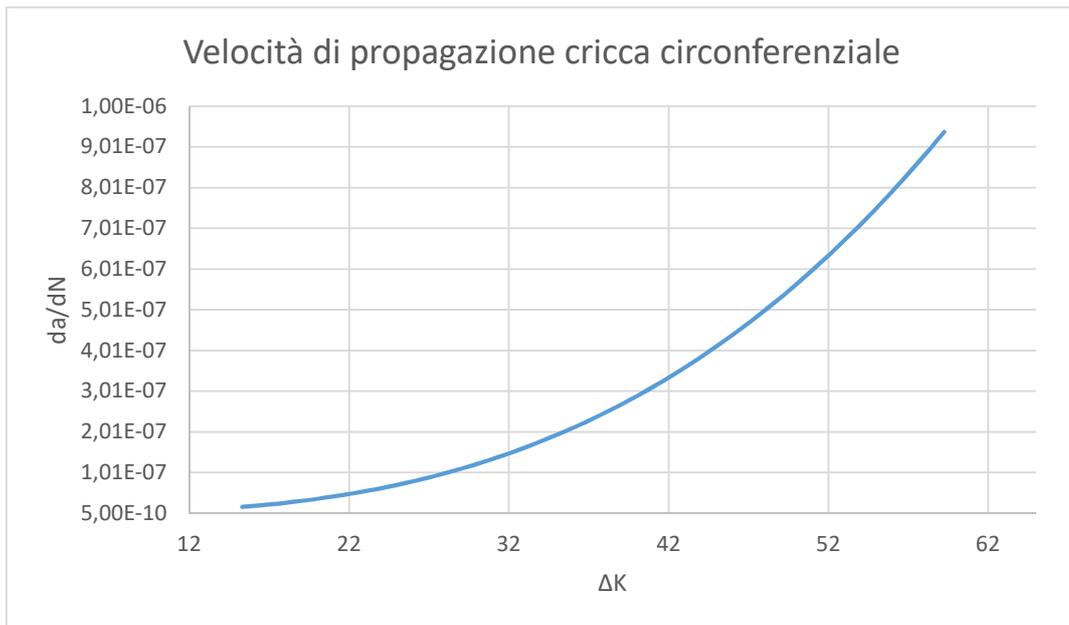


Figura 5.12: relazione tra velocità di propagazione e  $\Delta K$  (circonferenziale)

Dall'analisi del grafico Figura 5.12 avremo che la velocità con cui la cricca propaga, valutata tramite Paris, risulta essere sempre crescente con il fattore di intensificazione delle tensioni, ma rispetto al caso con cricca radiale avremo dei valori leggermente inferiori e sempre una fase di accelerazione nelle condizioni finali fino alla rottura del pezzo.

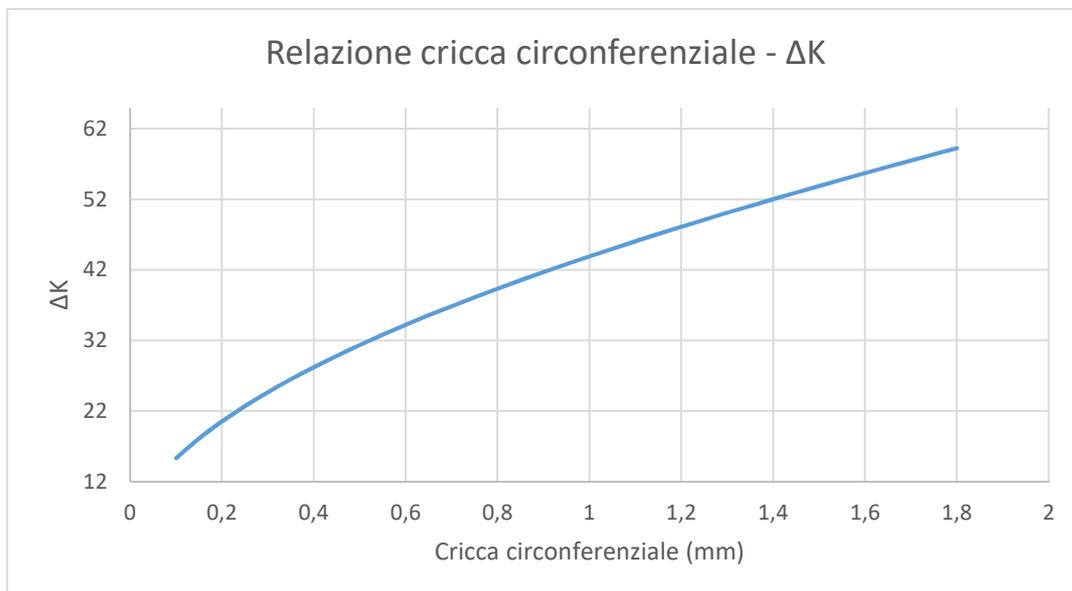


Figura 5.11: relazione lunghezza cricca circonferenziale -  $\Delta K$

Anche nel grafico Figura 5.11 per la cricca circonferenziale si rileva un aumento graduale e sempre crescente del fattore di intensificazione delle tensioni in funzione della lunghezza della cricca, e il  $\Delta K$  raggiungerà più tardi le condizioni critiche che portano il componente a cedimento rispetto il caso di cricca radiale.

### 5.3.3 Piano di controllo

Nella verifica del componente affinché quest'ultimo operi in modo corretto per tutta la sua durata di vita è necessario che i valori di stress risentiti siano inferiori a delle condizioni limiti. Si possono avere due differenti casi:

- In assenza di difetti nella struttura il collasso del componente avviene quando la tensione applicata supera il valore della tensione di snervamento  $\sigma_s$  o il valore di quella di rottura  $\sigma_R$ ;
- In presenza di difetti invece la resistenza della struttura è inferiore alla tensione di snervamento o di rottura e si deve considerare la propagazione nel tempo della cricca a partire da una condizione iniziale fino a una condizione critica.

Considerando questo secondo caso avremo che nell'analisi del fattore di intensificazione delle tensioni si hanno due parametri che si possono utilizzare per valutare le condizioni critiche, cioè la lunghezza della cricca  $a$  e la tensione  $\sigma$  applicata.

Se si fissa la lunghezza della cricca allora è possibile calcolare la tensione critica  $\sigma_c$  di frattura da confrontare con la tensione nominale  $\sigma_n$  agente nel componente; sapendo che si ha frattura quando  $K_I > K_{Ic}$  allora imponendo questo valore limite si ottiene:

$$K_{Ic} = Y\sigma_c\sqrt{a} \quad \rightarrow \quad \sigma_c = \frac{K_{Ic}}{Y\sqrt{a}} \quad (5.18)$$

La non rottura si ha se la  $\sigma_c > \sigma_n$ .

Eventualmente si può invece calcolare la lunghezza critica  $a_c$  del difetto, andando a fissare invece il valore della tensione  $\sigma_n$  con cui il componente opera, e confrontarla con la dimensione della cricca presente nella molla; considerando sempre la criticità dettata da  $K_I > K_{Ic}$  sostituendo il tutto nella formula si ottiene:

$$K_{Ic} = Y\sigma_n\sqrt{a_c} \quad \rightarrow \quad a_c = \left(\frac{K_{Ic}}{Y\sigma_n}\right)^2 \quad (5.19)$$

La non rottura si ha in questo caso se la  $a_c > a$ .

Queste insieme di condizioni critiche relative alla propagazione del difetto nel componente che sono state descritte, si tengono in considerazione per la costruzione del piano di controllo che può essere costruito per la nostra molla Belleville in esame. Nel definire il grafico avremo una curva  $K_{Ic}$  che rappresenta la condizione critica per cedimento del materiale secondo la meccanica della frattura, e un'altra curva  $\sigma_{plastico}$  che indica invece la condizione di cedimento del materiale per collasso plastico.

Per la definizione della curva limite  $K_{Ic}$ , indicata in rosso nella Figura 5.13, si valutano l'insieme delle lunghezze critiche della cricca in funzione dei possibili valori delle tensione nominale  $\sigma_n$  applicata dall'esterno:

$$a_c = \left(\frac{K_{Ic}}{Y\sigma_n}\right)^2$$

Per la definizione della curva limite  $\sigma_{plastico}$ , indicata in blu nella Figura 5.13, si considera invece la sezione netta resistente della molla, cioè pari alla differenza tra la larghezza  $w$  e la lunghezza del difetto tutto in relazione con il valore dello snervamento  $\sigma_s$  del materiale, che in questo caso sarà la condizione per la quale il componente cede; si impone quindi che la  $\sigma_p = \sigma_s$  e si calcolano i valori critici del collasso plastico  $\sigma_p$ :

$$\sigma_s = \frac{Forza}{(w - a)B}$$

$$\sigma_s = \frac{Forza}{(w - a)B} \frac{w}{w}$$

$$\sigma_p = \sigma_s \frac{w - a}{w} \quad (5.20)$$

Il piano di controllo ottenuto permette di valutare quelle che sono le possibili condizioni operative del componente in esame, cioè si identificano tutti i punti di lavoro dove la molla può lavorare in condizioni di sicurezza senza avere rottura e i punti dove al contrario il componente cede. Nel grafico Figura 5.13 avremo due aree separate dalla curva  $K_{Ic}$ ; l'area al di sotto del  $K_{Ic}$  indica la regione di sicurezza dove la cricca può propagare in condizioni stabili sotto l'applicazione della tensione  $\sigma_n$ , ma questo implica che la resistenza del materiale diminuisce man mano che la cricca propaga, e la probabilità di rottura aumenta perché ci avviciniamo alla curva di separazione  $K_{Ic}$ . Oltrepassato il valore limite  $K_{Ic}$  avremo la regione di rottura dove la cricca propaga in modo instabile secondo la meccanica della frattura.

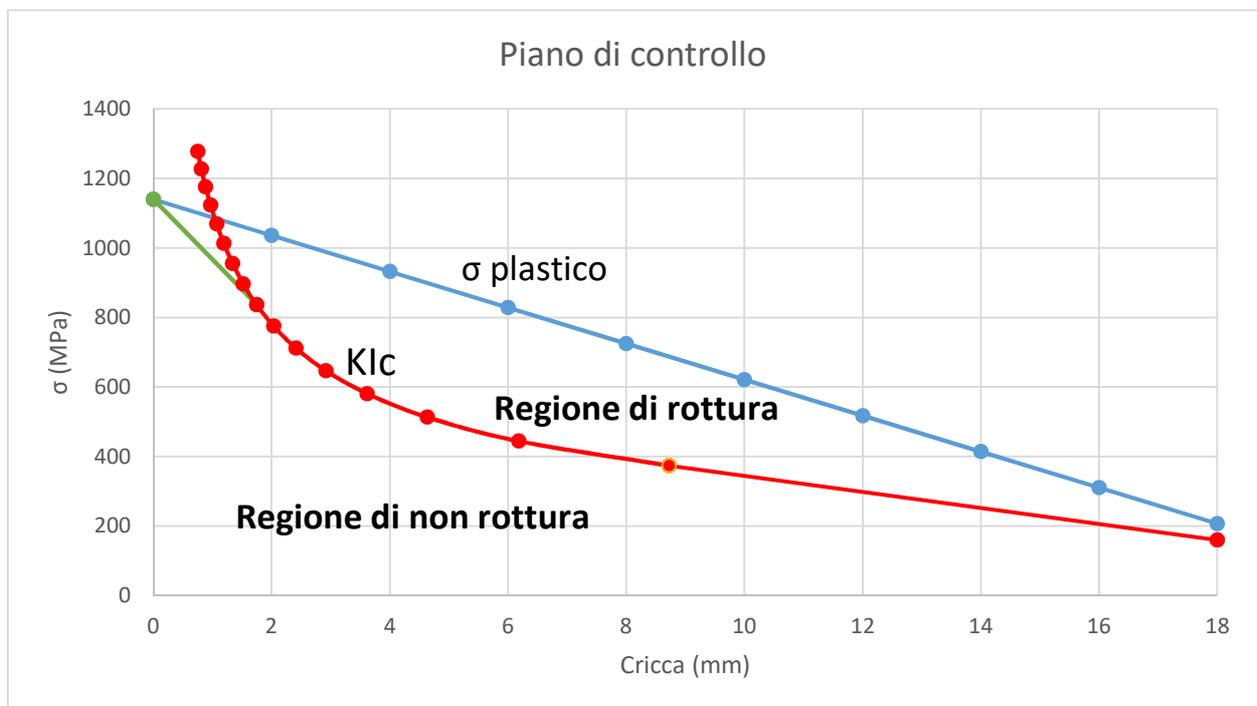


Figura 5.13: piano di controllo per la molla Belleville

Il grafico necessita però di una correzione poiché per la lunghezza del difetto  $a \rightarrow 0$ , il valore della tensione  $\sigma \rightarrow \infty$ , dalla seguente relazione:

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{Y\sqrt{a}}$$

Un componente però sottoposto a un valore di tensione infinito non riuscirebbe mai a resistere e andrebbe subito a rottura; in realtà il valore della tensione  $\sigma$  viene limitato dal valore della tensione di snervamento e esisterà una regione che per un determinato valore della lunghezza della cricca il cedimento avverrà per collasso plastico anziché per la meccanica della frattura qualsiasi sia il valore della tenacità alla frattura.

Per risolvere questo problema il diagramma viene approssimato con il metodo della tangente, cioè si traccia una retta passante per il valore dello snervamento del materiale  $\sigma_s$  e tangente alla curva  $K_{Ic}$ . Questo è indicato nel grafico Figura 5.13 dalla retta in colore verde.

Nel nostro caso di studio per la molla a tazza si evidenzia come verrà raggiunta prima la curva della tenacità alla frattura rispetto a quella del collasso plastico, quindi il cedimento del materiale avverrà secondo le metodologie della meccanica della frattura. Si possono però verificare cedimenti anche per collasso plastico sotto due differenti condizioni quali:

- Il valore della tenacità alla frattura risulta essere molto elevato e quindi la curva limite del  $K_{Ic}$  risulta tutta al di sopra della curva  $\sigma_{plastico}$ ; questo caso è rappresentato dalla curva in blu nella Figura 5.14 dove quindi verrà incontrata prima la condizione per collasso plastico;

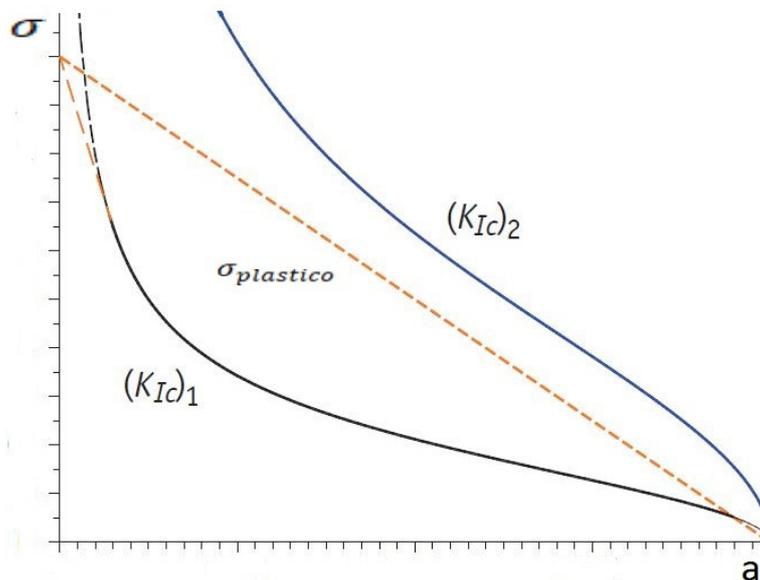


Figura 5.14: cedimento materiale per collasso plastico

- Il valore della lunghezza del difetto presente nel materiale è molto piccola tendente a zero.

#### 5.3.4 Variazione delle condizioni di lavoro

In questa parte si sono analizzati gli effetti che un eventuale variazione delle condizioni di lavoro nella molla Belleville può avere sulla sua vita a fatica rispetto le condizioni iniziali che sono state ipotizzate. Nella prima parte si andrà quindi a vedere cosa comporta una variazione del carico applicato alla molla e come questo va a influire sulla vita e la propagazione della cricca; nella seconda parte invece si andrà a variare il valore della lunghezza iniziale del difetto ipotizzato nella molla così da analizzare la relativa variazione del numero di cicli.

Come prima analisi si è deciso inizialmente di far variare il valore di tensione applicato alla molla, mantenendo però uno stesso valore della lunghezza iniziale della cricca, cioè pari  $a = 0.1 \text{ mm}$ . Nel grafico Figura 5.15 si sono quindi confrontate tre diverse analisi, ottenute ripetendo il procedimento iterativo precedentemente descritto, con tre diversi valori di tensioni applicate e si è riportato l'andamento della propagazione del difetto in funzione del numero di cicli a cui la molla può resistere prima di giungere a rottura.

Per i due casi di cricca disposta in direzione radiale e circonferenziale otteniamo i seguenti risultati:

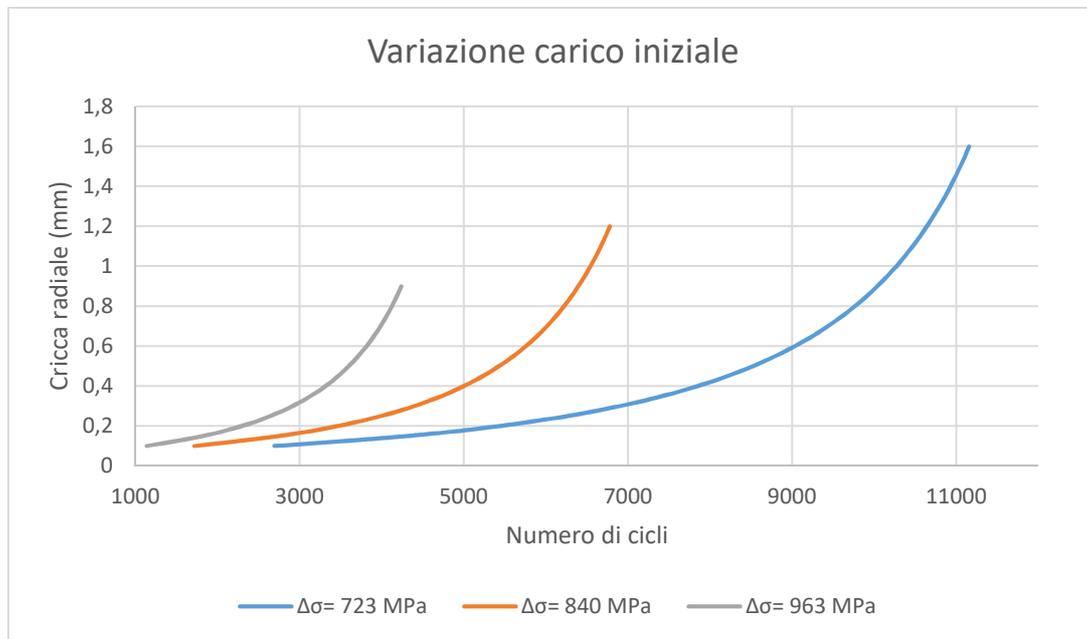


Figura 5.15: variazione carico per cricca radiale

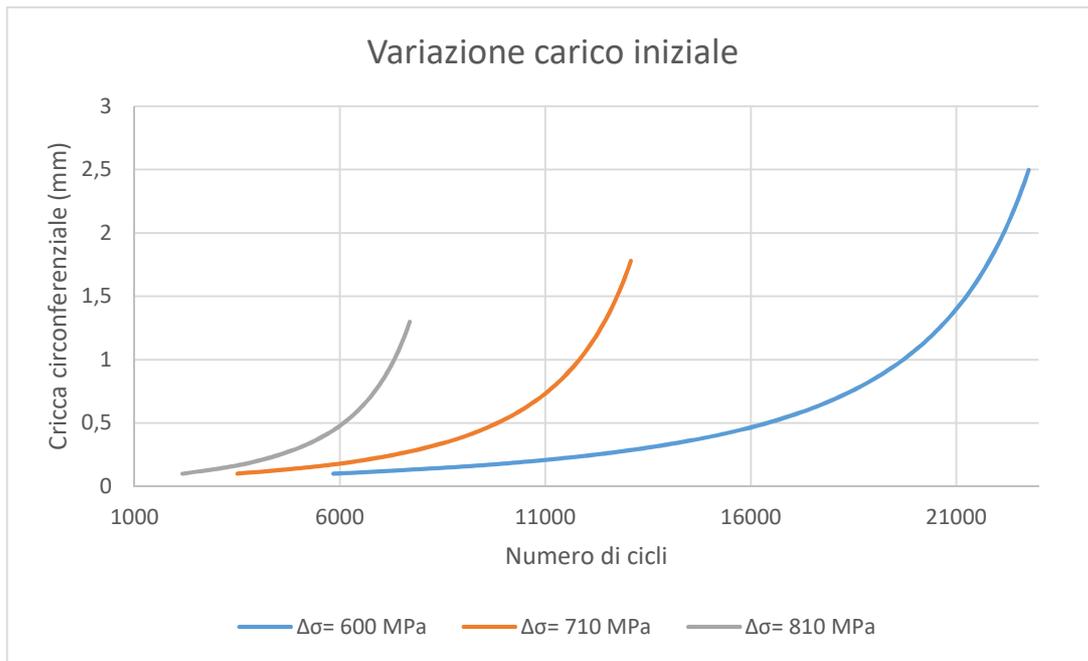


Figura 5.16: variazione carico per cricca circonferenziale

Dai risultati ottenuti si evidenzia come in generale aumentando il livello di tensione  $\Delta\sigma$ , aumenta la velocità con cui la cricca propaga nel materiale e quindi diminuiamo il numero di cicli a cui la molla può sopravvivere e nello stesso tempo diminuisce la lunghezza finale critica raggiunta dalla cricca prima della frattura.

Questo risultato ottenuto si può analizzare anche nel piano di controllo dove si vede che il punto di lavoro della molla, all'aumentare della tensione  $\sigma$  e a parità di lunghezza iniziale, raggiunge prima il valore limite della curva  $K_{Ic}$  e quindi sarà minore la distanza dalla curva rossa, cioè avremo un valore di lunghezza critica inferiore. Questo si può rappresentare per esempio per il caso della cricca radiale nel grafico Figura 5.17:

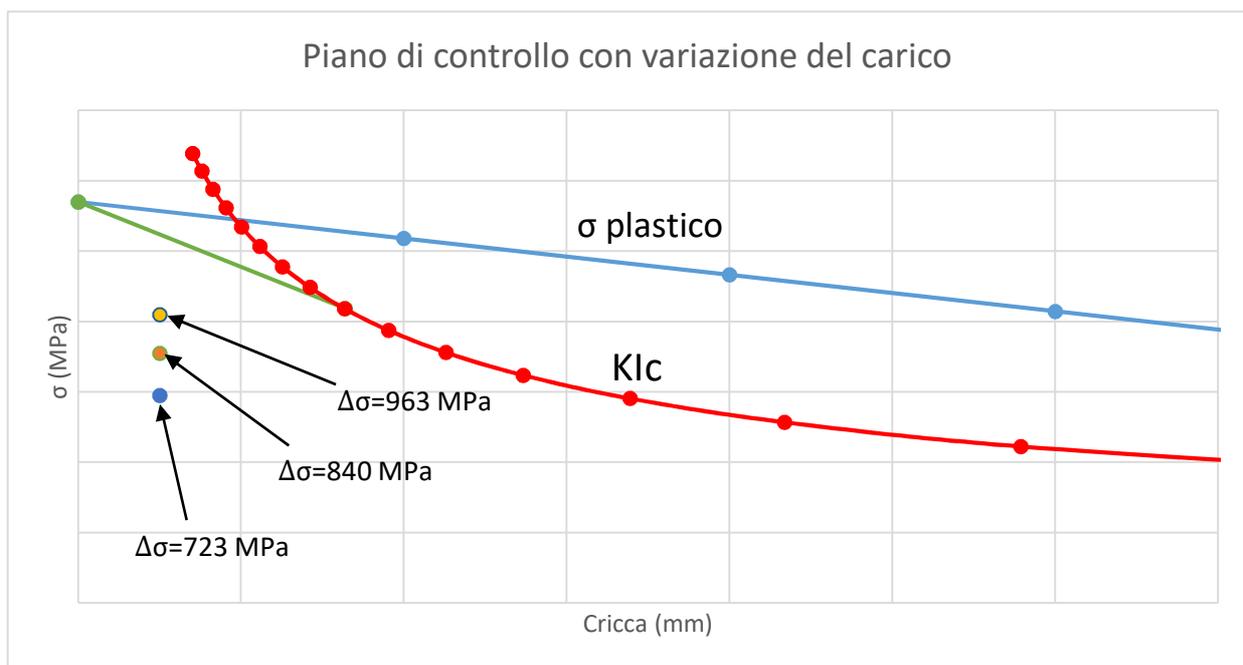


Figura 5.17: piano di controllo con variazione tensione per cricca radiale

Successivamente si è deciso invece di considerare uno stesso valore di tensione applicato al corpo pari a quello nominale delle condizioni di lavoro ipotizzate inizialmente, cioè con un valore di forza che oscilla tra 500 N e 9000 N, facendo variare però il valore della lunghezza iniziale della cricca nella molla. Si è ottenuto un grafico caratterizzato da tre diverse analisi, ottenute ripetendo il procedimento iterativo precedentemente descritto, con tre diverse lunghezze iniziali della cricca e si è riportato l'andamento della propagazione del difetto in funzione del numero di cicli prima di giungere a rottura.

Per i due casi di cricca disposta in direzione radiale e circonferenziale otteniamo i seguenti risultati:

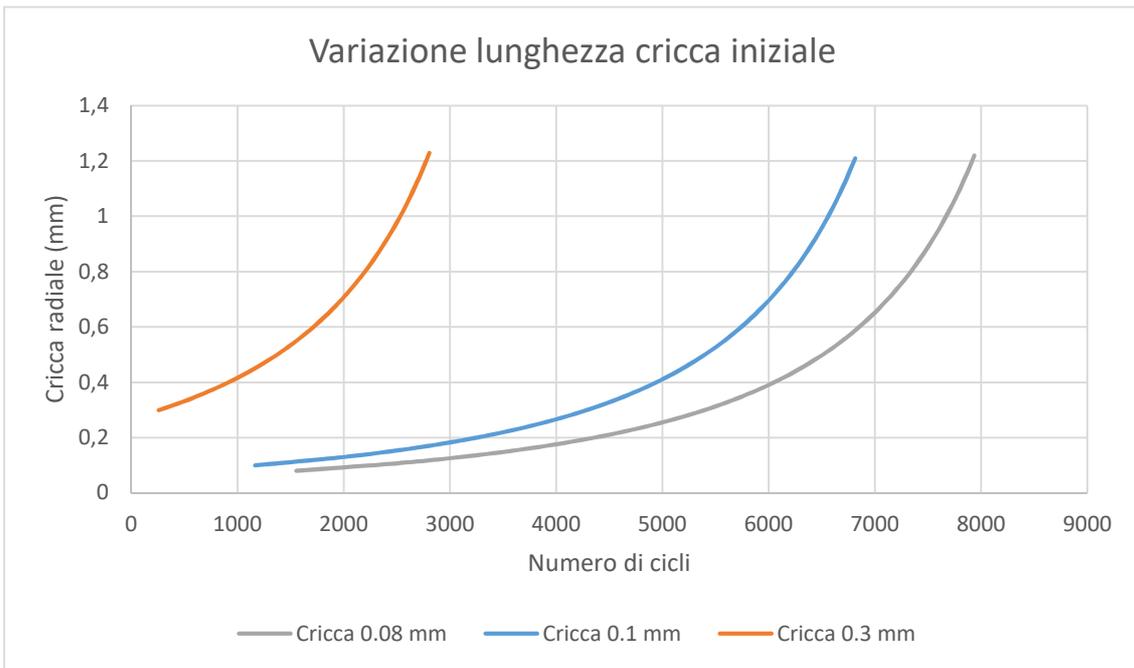


Figura 5.19: variazione lunghezza cricca radiale

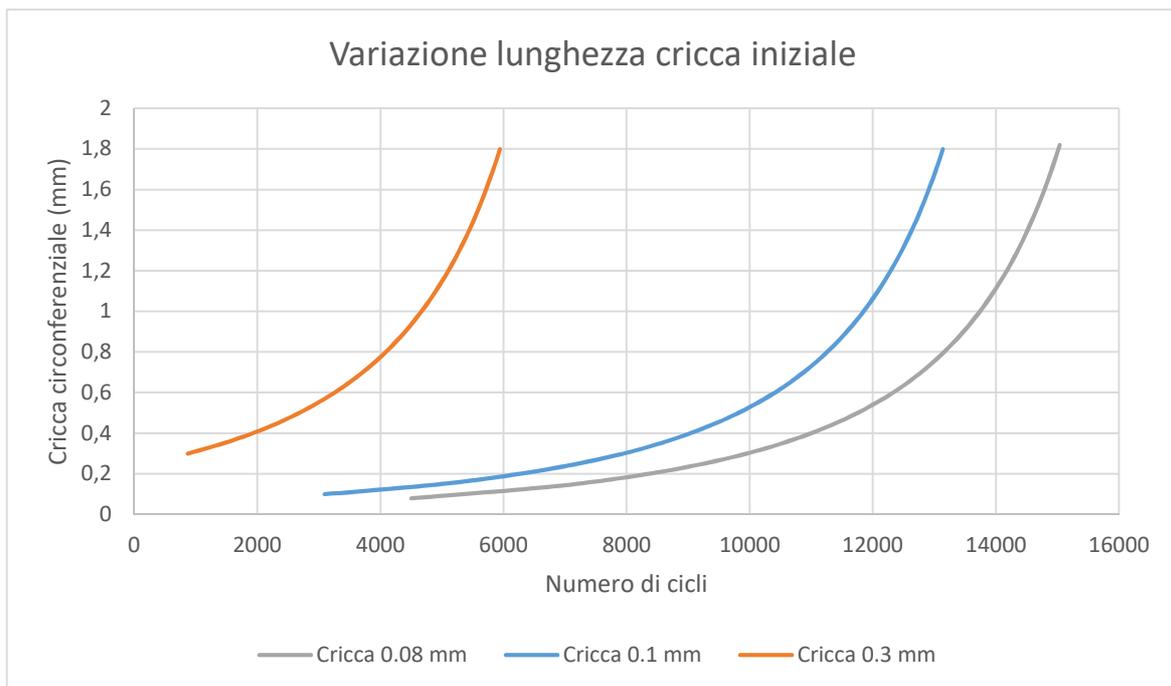


Figura 5.18: variazione lunghezza cricca circonferenziale

Dai grafici trovati si evidenzia come in generale aumentando il valore della lunghezza iniziale del difetto, aumenta la velocità con cui la cricca propaga nel materiale e quindi diminuiamo il numero di cicli a cui la molla può sopravvivere, ma si raggiungerà sempre uno stesso valore di lunghezza finale dalla cricca prima della frattura.

Questo si può analizzare anche nel piano di controllo dove si vede che il punto di lavoro della molla all'aumentare della lunghezza iniziale della cricca raggiunge prima il valore limite della curva  $K_{Ic}$ , cioè le condizioni critiche che portano a rottura. Il tutto si può rappresentare per esempio per il caso della cricca radiale nel grafico Figura 5.20:

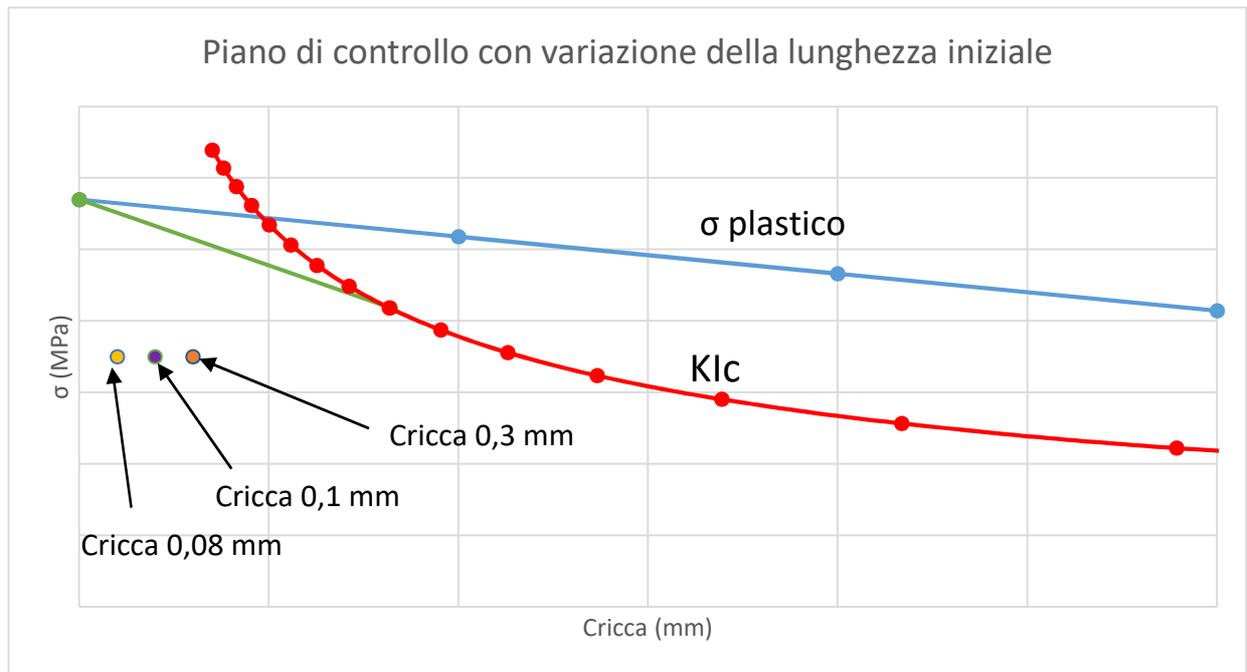


Figura 5.20: piano di controllo con variazione lunghezza cricca radiale

## 6 Analisi agli elementi finiti

Per mezzo dei codici di calcolo si riesce a creare un modello matematico del sistema che si vuole esaminare e di cui si vuole simulare il suo comportamento rispetto l'ambito reale. Un componente reale presenta un numero infinito di gradi di libertà, per questo motivo al fine di analizzare il pezzo si fa riferimento al metodo degli elementi finiti, con il quale noi cerchiamo di vedere il nostro componente come costituito da un numero finito di elementi che sono utilizzati per discretizzare il continuo, introducendo delle funzioni di approssimazione e ottenendo così un sistema algebrico equivalente costituito da un numero finito di incognite; tramite l'applicazione di queste funzioni di approssimazione andiamo a ricavare un problema in forma matriciale.

Nella totalità l'assemblaggio dei diversi elementi che vengono utilizzati per approssimare il sistema andrà a creare una mesh interna all'oggetto, adottando delle funzioni per descrivere la struttura che di solito sono delle funzioni di tipo polinomiale dette funzioni di forma.

Ogni singolo elemento utilizzato sarà caratterizzato da un sistema di riferimento locale che identifica tutte le caratteristiche dell'elemento rispetto a un sistema di riferimento globale dell'intera struttura; i vari elementi saranno caratterizzati da dei nodi che indicano i punti dove avremo i gradi di libertà. Secondo il metodo agli elementi finiti noi andiamo ad esprimere il campo degli spostamenti dell'elemento tramite queste funzioni polinomiali, imponendo quindi al corpo di deformarsi in un certo modo secondo gli spostamenti nodali. Questo si può esprimere secondo la formulazione matriciale:

$$\{u\} = [n] \{s\}$$

Dove i parametri indicati sono:

- $\{u\}$  è il vettore degli spostamenti;
- $[n]$  è la matrice delle funzioni di forma e sono adimensionali;
- $\{s\}$  è il vettore degli spostamenti nodali.

A seguito di questo vincolo imposto agli spostamenti avremo che i risultati sono sempre approssimati e la precisione dipende dal numero di elementi usati per discretizzare il corpo e dal grado del polinomio scelto per indicare gli spostamenti. Questa condizione fa irrigidire la struttura rispetto all'ambito reale determinando una differenza tra lo stato tensionale calcolato e quello reale.

Per svolgere l'analisi agli elementi finiti si è usato nella prima parte il programma ANSYS Mechanical APDL, il quale non è sensibile alle unità di misura quindi deve essere l'utente ad inserire correttamente i valori numerici per ottenere un risultato conforme. Per ottenere i risultati tensionali in MPa, si sono utilizzati dei valori relativi alle lunghezze in millimetri e i valori di forza in Newton.

Al contrario nella seconda parte, legata all'analisi della propagazione della cricca all'interno del modello si è usato il programma ANSYS Workbench, il quale risulta essere sensibile alle unità di misura, e con il quale si è simulata la propagazione della cricca nella molla e la sua relativa durata di vita.

Le varie fasi che si identificano all'interno del software possono essere raggruppate in tre parti distinte quali [3]:

- Una prima fase di pre processing, all'interno della quale noi dobbiamo andare a definire le caratteristiche della geometria del corpo che dobbiamo analizzare, definire la realizzazione di una mesh e imporre le condizioni di vincolo e forze;
- Una seconda fase di solving, nella quale vi è l'elaborazione dei dati da parte del software che vengono salvati in memoria;
- Un'ultima fase di post processing, dove si controllano i risultati ottenuti e si verifica che essi siano conformi con la realtà.

## 6.1 Solidi assialsimmetrici

La molla Belleville oggetto di questa ricerca, secondo la geometria che presenta può essere considerata nell'analisi come un solido assialsimmetrico, cioè un corpo tridimensionale che viene generato a seguito della rotazione di una sezione piana attorno al suo asse di rivoluzione, come rappresentato nella Figura 6.1.

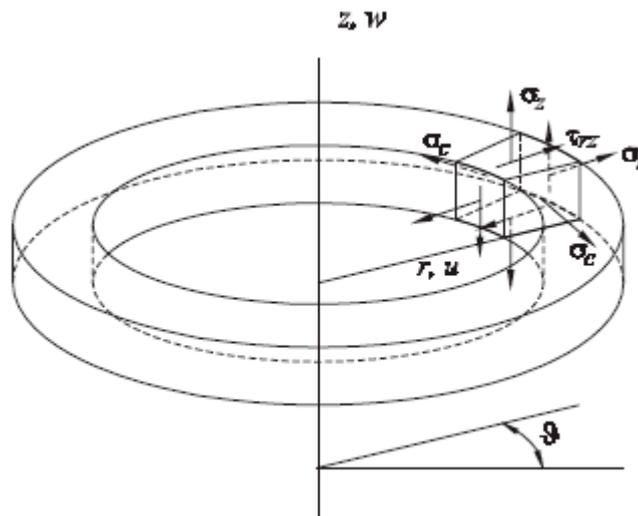


Figura 6.1: solido assialsimmetrico [5]

Un solido di rivoluzione si definisce assialsimmetrico quando le proprietà geometriche del corpo e del materiale sono indipendenti dal valore dell'angolo  $\vartheta$ ; se anche il carico applicato risulta essere assialsimmetrico, come nel nostro caso, allora l'intero problema può essere analizzato dal punto di vista del caso bidimensionale.

Sotto queste condizioni per un elemento assialsimmetrico avremo un campo di spostamenti in un generico punto del corpo che è caratterizzato solo da quello radiale,  $u$ , e quello assiale,  $w$ , essendo la componente circonferenziale nulla per simmetria:

$$\{u\}^T = \{u \ w\}$$

Il vettore degli spostamenti  $\{u\}$  può essere sempre correlato con le funzioni di forma agli spostamenti nodali  $\{s\}$  dell'elemento, e considerando ad esempio un elemento con tre nodi avremo la seguente relazione:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \{s\}$$

## 6.2 Analisi FEM modello bidimensionale

In questo capitolo tramite l'utilizzo del programma ANSYS APDL si sono analizzati i risultati della molla a tazza, dal punto di vista della forza e delle tensioni nel componente a fronte di uno spostamento assiale imposto. Si è considerato inizialmente il caso della creazione di un modello bidimensionale, dove nella simulazione si sono rispettate le condizioni di vincolo e di carico indicate nell'analisi analitica, cioè a partire dalla condizione di traslazione nullo alla base della molla, si è imposto un valore di spostamento assiale, al diametro interno superiore, dal valore nullo fino al valore pari all'altezza libera  $h_o$  della molla.

Il primo passo nell'analisi agli elementi finiti è quello di andare a definire il modello di riferimento per la molla; all'interno di ANSYS si deve creare quindi una geometria che rispecchi le caratteristiche della molla nell'ambito reale. Questo è ottenuto inizialmente tramite la definizione di punti base che prendono il nome di keypoints, i quali poi verranno uniti tramite delle linee in modo da ottenere una sezione rettangolare che rispecchi i valori del diametro interno e esterno del nostro caso di studio. Le linee e i keypoints della sezione sono definiti tramite numerazione e il risultato finale è quello indicato:

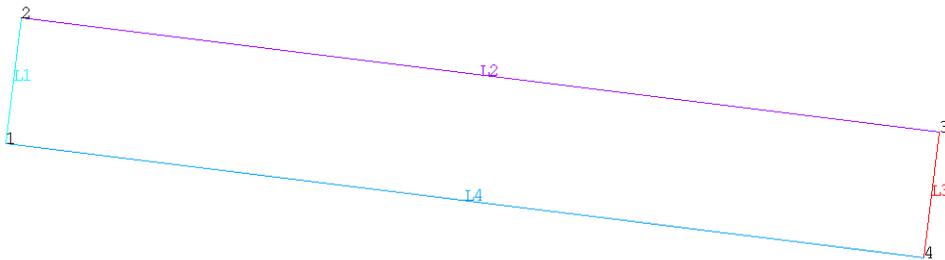


Figura 6.2: creazione geometria molla con linee e keypoints

Prima di procedere con la discretizzazione del modello si va a suddividere ulteriormente la geometria creata tramite il comando *ldiv* in modo da preparare la sezione rettangolare per la definizione di una mesh interna regolare. Fatto ciò si possono andare a costruire le aree interne alla sezione, tramite comando *al*, che saranno delimitate ciascuna dai keypoints e identificate sempre tramite numerazione; questa procedura permette di preparare il modello geometrico bidimensionale da utilizzare nella simulazione.

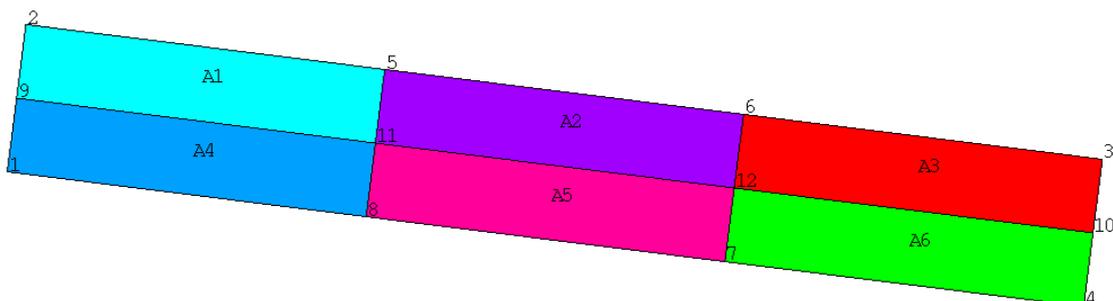


Figura 6.3: definizione delle aree interne alla sezione

Una volta definita la geometria completa per la molla si può procedere con la scelta del tipo di elementi che si possono andare a utilizzare per la creazione della mesh tramite il comando *et*. Gli elementi che si sono scelti di adoperare nell'ambito bidimensionale per la discretizzazione e di cui poi si sono confrontati i risultati sono:

- L'elemento *plane42*, che è assialsimmetrico ed è caratterizzato da quattro nodi con due gradi di libertà per nodo di tipo traslazionali lungo le direzioni *x* e *y* di un sistema di riferimento locale; questo elemento è usato per discretizzare l'intero corpo e permette una migliore approssimazione del risultato rispetto alla presenza di elementi triangolari a tre nodi, che si possono ottenere ad esempio in seguito a una degenerazione degli elementi nell'intorno degli spigoli della geometria con collasso di un lato. Elementi degeneri implicano sempre un risultato meno preciso;

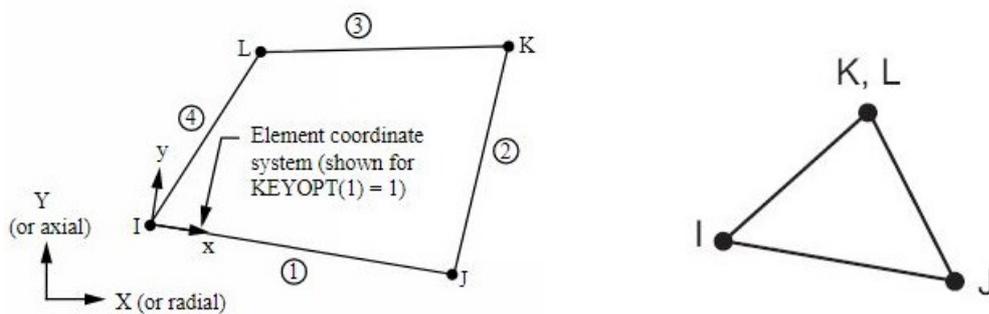


Figura 6.4: (a) elemento *plane42* quadrangolare, (b) elemento degenero [3]

- L'elemento *plane42* con *extra-shapes*, che è uguale al *plane42* ma presenta un'opzione aggiuntiva che ha il fine di aumentare in modo fittizio il grado del polinomio caratteristico legato alle funzioni di forma, al fine di convergere più velocemente alla soluzione numerica e ridurre nello stesso tempo il valore dell'errore energetico percentuale;
- L'elemento *plane183*, che è sempre assialsimmetrico, ma caratterizzato da otto nodi con due gradi di libertà per nodo di tipo traslazionali lungo le direzioni *x* e *y* di un sistema di riferimento locale. Anche in questo caso nella definizione della mesh con questo tipo di elementi si può avere una degenerazione del *plane183* ad una forma triangolare con sei nodi.

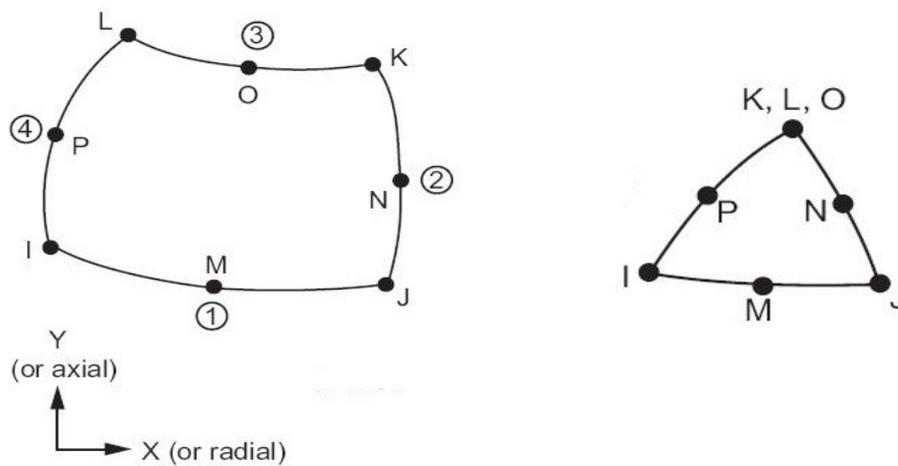


Figura 6.5: (a) elemento plane183 quadrangolare, (b) elemento degenera [3]

Gli elementi descritti devono quindi essere assegnati alle aree interne al corpo tramite comando *amesh*, con il quale indichiamo le caratteristiche e le proprietà (assegno il tipo di materiale acciaio) che deve avere ogni singolo elemento che viene utilizzato per creare la mesh interna alla sezione. Per la definizione della mesh si è cercato, tramite l'impostazione di determinate opzioni interne al programma (*mshape* e *mshkey*), di creare una mesh mappata con elementi tutti di forma quadrangolare non degeneri il più regolare possibile.

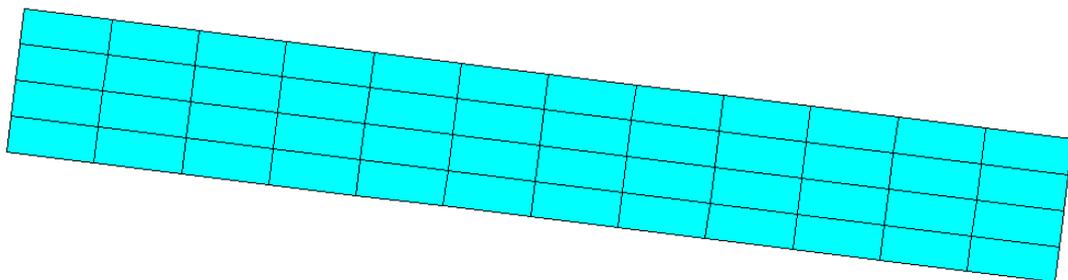


Figura 6.6: creazione di una prima mesh grossolana

Dopo la definizione di una prima mesh grossolana caratterizzata dalla presenza di pochi elementi interni al corpo, che determinano dei forti salti tensionali tra un elemento e un altro, e quindi anche una soluzione non precisa, e un errore energetico percentuale elevato, si è proceduto con un affinamento della mesh tramite il comando *lesize* settando opportunamente dei parametri lungo la geometria della sezione della molla. Il comando *lesize* permette di specificare le divisioni e il rapporto di spaziatura interno alle linee non meshiate con il fine di avere un maggior dettaglio nell'analisi del problema.

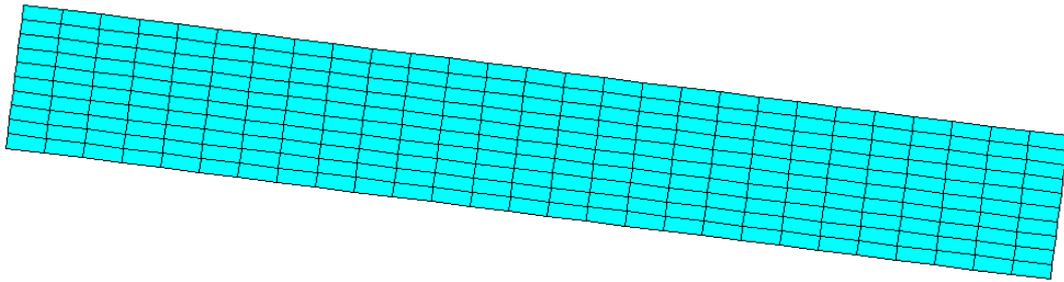


Figura 6.8: affinamento mesh modello bidimensionale

Prima di procedere con la visualizzazione dello stato di tensione nella molla è necessario imporre le condizioni di vincolo che si applicheranno sui nodi degli elementi creati con la definizione della mesh; andando quindi a selezionare il diametro esterno inferiore della sezione rettangolare si vuole uno spostamento nullo lungo la direzione verticale, perché la molla viene appoggiata alla sua base, mentre sulla parte superiore del diametro interno si impone un valore di spostamento assiale verso il basso così da simulare il comportamento della molla e valutare a fronte dello spostamento imposto le tensioni e la forza risentita. Lo spostamento applicato è stato fatto variare dal valore nullo fino al valore dell'altezza libera  $h_o$ , cioè fino al valore di  $2.7\text{ mm}$ , in modo da poter poi andare a descrivere l'andamento grafico delle tensioni e della forza in funzione dello spostamento.

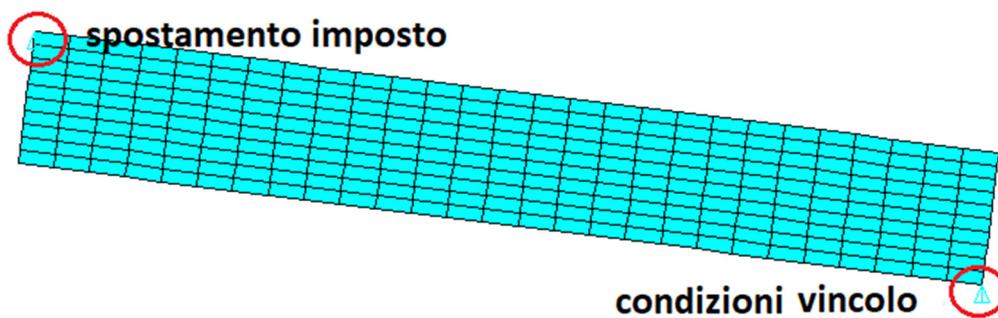


Figura 6.7: applicazione delle condizioni di vincolo

Come esempio per valutare la distribuzione delle tensioni equivalenti di von Mises nella molla si può considerare uno spostamento imposto pari al 50% dell'altezza libera, cioè pari a  $1.35\text{ mm}$ , ottenendo il risultato rappresentato nelle figure sottostanti dal punto di vista della soluzione nodale e della soluzione sugli elementi:

NODAL SOLUTION

STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
SEQV (AVG)  
DMX =1.37868  
SMN =15.3512  
SMX =2012.92

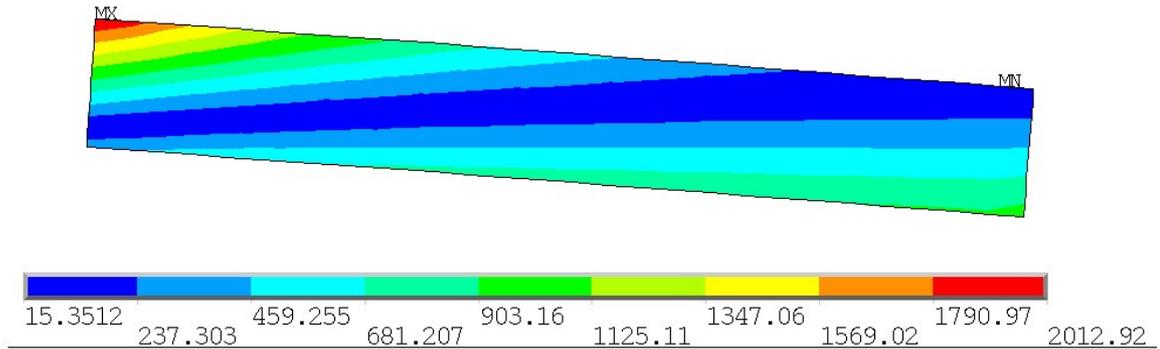


Figura 6.10: andamento delle tensioni equivalenti vm (soluzione nodale)

ELEMENT SOLUTION

STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
SEQV (NOAVG)  
DMX =1.37868  
SMN =14.2019  
SMX =2012.92

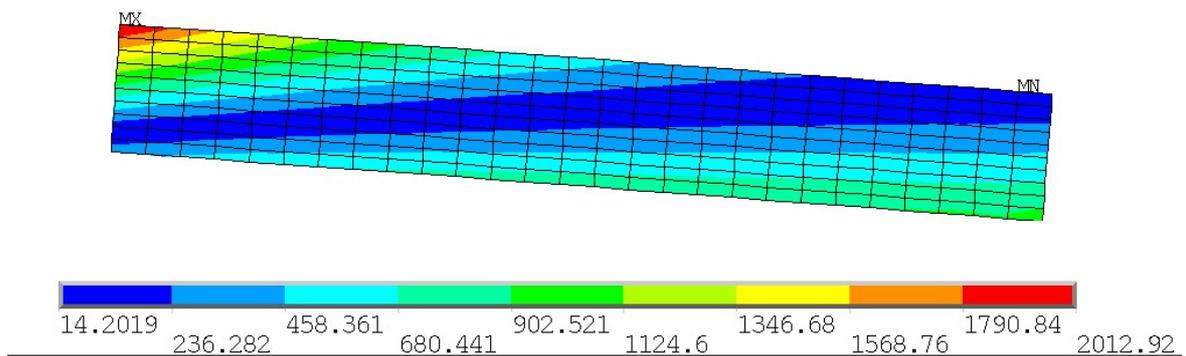


Figura 6.9: andamento delle tensioni equivalenti vm (soluzione sugli elementi)

Come si può notare dalle immagini la distribuzione delle tensioni lungo la sezione non è uniforme e come già rilevato dall'analisi analitica delle formule di Almen e Laszlo, i valori di picco critici che si devono tenere in considerazione sono quelli che si hanno sullo spigolo del diametro interno e nello spigolo del diametro esterno, cioè i valori indicati come  $\sigma_{vm I}$  e  $\sigma_{vm III}$ .

### 6.2.1 Confronto risultati tra Almen-Laszlo e modello FEM

Terminata la definizione del modello bidimensionale e scelta opportunamente la dimensione della mesh da utilizzare per la discretizzazione al fine di avere una convergenza dei risultati, si possono rappresentare per via grafica i valori finali dell'analisi numerica dal punto di vista della relazione forza spostamento e tensione spostamento.

Si considera per prima l'analisi della relazione forza spostamento, dove dall'andamento grafico si vede come all'aumentare della deformazione nella molla le due curve tendono a distanziarsi maggiormente tra loro, portando quindi a una differenza tra i risultati ottenuti con il metodo proposto da Almen-Laszlo e l'analisi agli elementi finiti. La deviazione dei risultati è elevata quando si arriva al valore dell'appiattimento della molla pari a 2.7 mm; in generale però queste condizioni operative non vengono mai raggiunte ma ci si ferma al valore del 75%  $h_o$ .

Percentuale altezza libera	Spostamento s (mm)	Forza F (N)	Deviazione risultati
0% $h_o$	0	0	0 %
25% $h_o$	0.675	6229	11.62%
50% $h_o$	1.35	11459	18.19%
75% $h_o$	2.025	15480	21.51%
100% $h_o$	2.7	21230	32.26%

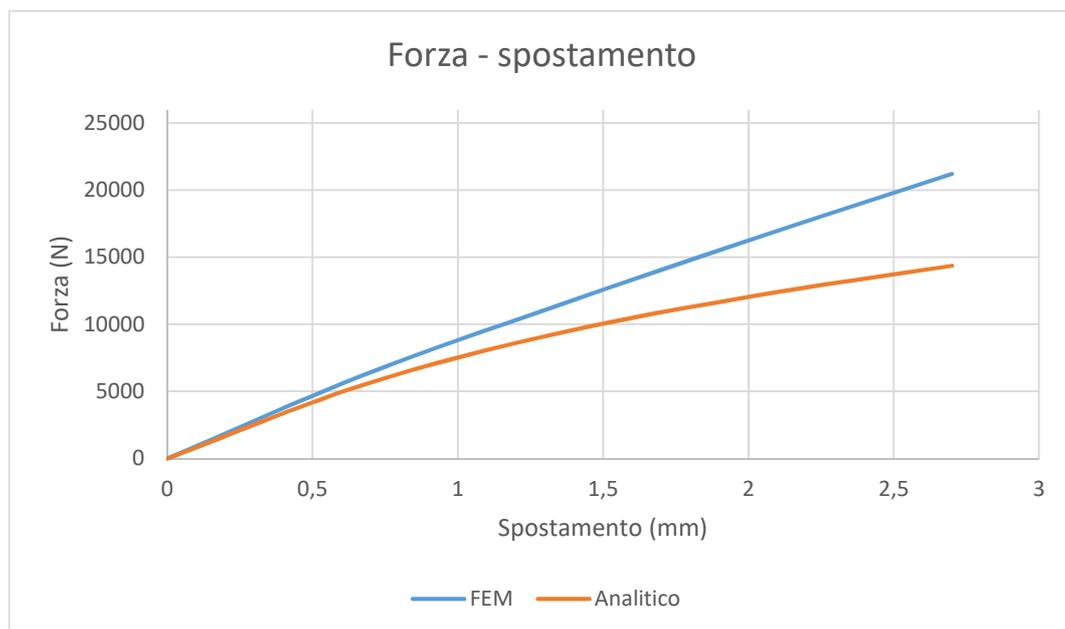


Figura 6.11: andamento forza in funzione dello spostamento

Concentrandoci invece sull'andamento delle tensioni equivalenti e in particolare sui valori della tensione  $\sigma_{vm1}$ , cioè quella risentita nello spigolo del diametro interno superiore, anche in questo caso si vede dall'andamento grafico come le due curve tendono pian piano a distanziarsi all'aumentare della deformazione della molla, portando a una differenza tra i risultati ottenuti con i due metodi. Il valore della tensione così come quello della forza va via via ad aumentare con lo spostamento esterno applicato.

Percentuale altezza libera	Spostamento s (mm)	Tensione $\sigma_{vm I}$ (MPa)	Deviazione risultati
0% $h_o$	0	0	0 %
25% $h_o$	0.675	1006.46	2.32%
50% $h_o$	1.35	1969	5.94%
75% $h_o$	2.025	2953.6	11.73%
100% $h_o$	2.7	3938	17.52%

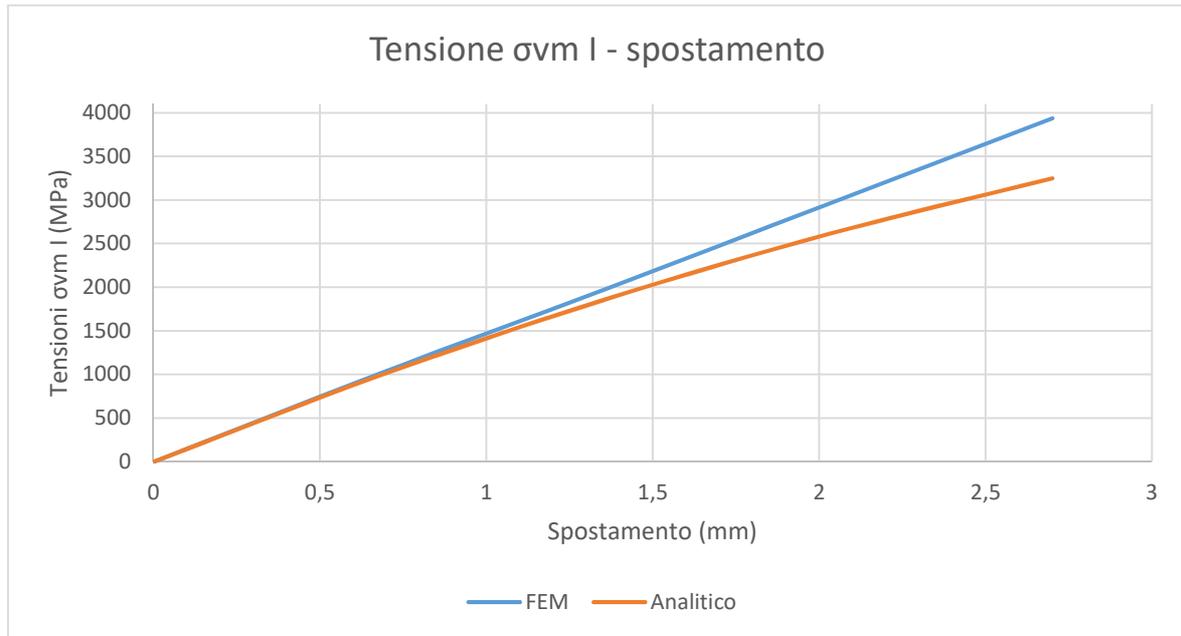


Figura 6.12: andamento tensione  $\sigma_{vm I}$  in funzione dello spostamento

Il procedimento di simulazione può essere ripetuto anche per i valori della tensione  $\sigma_{vm III}$ , cioè quella risentita nello spigolo del diametro esterno inferiore, dove si nota anche in questo caso come la differenza tra i due risultati tende tra loro ad aumentare con l'incremento dello spostamento, e avremo dei valori numerici abbastanza precisi nelle fasi iniziali della deformazione così come si rileva anche dall'analisi dei due grafici precedenti.

Percentuale altezza libera	Spostamento s (mm)	Tensione $\sigma_{vm III}$ (MPa)	Deviazione risultati
0% $h_o$	0	0	0 %
25% $h_o$	0.675	506	1.80%
50% $h_o$	1.35	998	7.13%
75% $h_o$	2.025	1496	13.77%
100% $h_o$	2.7	1997	20.56%

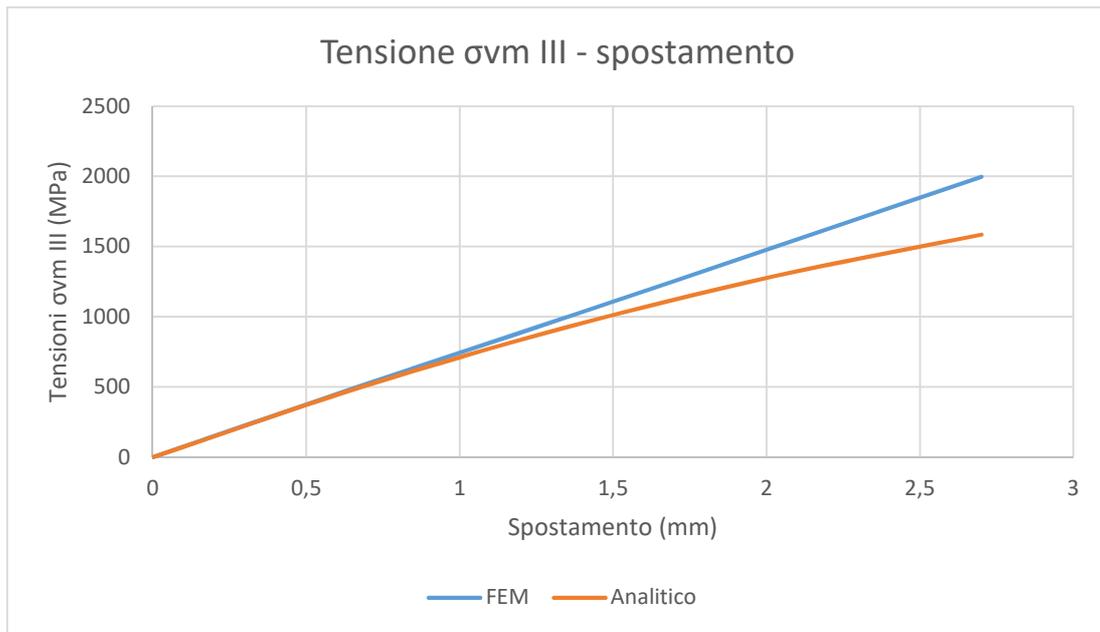


Figura 6.13: andamento tensione  $\sigma_{III}$  in funzione dello spostamento

Da questa prima valutazione dei risultati si può concludere che il metodo proposto da Almen e Laszlo risulta essere più preciso per piccoli valori della deformazione della molla, mentre all'aumentare dello spostamento assiale si mettono in evidenza maggiori errori. Questo è dovuto al fatto che le formule di Almen e Laszlo si basano su una serie di ipotesi semplificative come quella di trascurare il valore della tensione radiale sulla molla, la quale comincia ad apportare un certo contributo significativo e non più trascurabile per valori di deformazione elevati del pezzo.

Per mettere in evidenza questo contributo apportato al nostro componente, legato alla tensione radiale risentita a seguito di uno spostamento imposto, considerando sempre il modello geometrico che è stato creato precedentemente con una mesh abbastanza fine, si può andare a diagrammare l'andamento del valore della tensione  $\sigma_{radiale}$  ai due valori del diametro della molla, cioè al diametro esterno e a quello interno. Si ottengono i due grafici sottostanti:

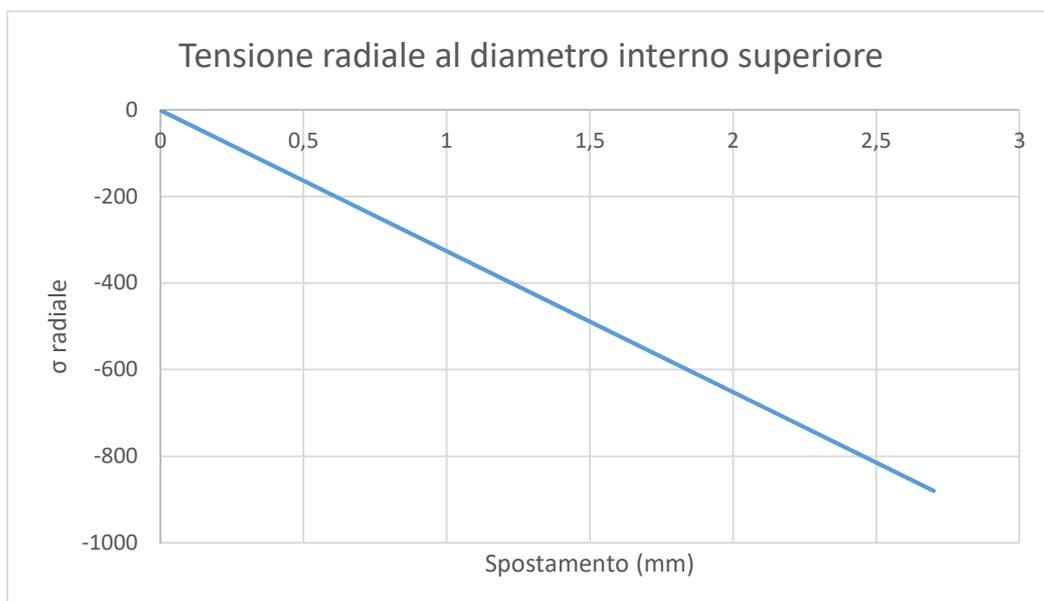


Figura 6.15: andamento  $\sigma$  radiale in funzione dello spostamento al diametro interno

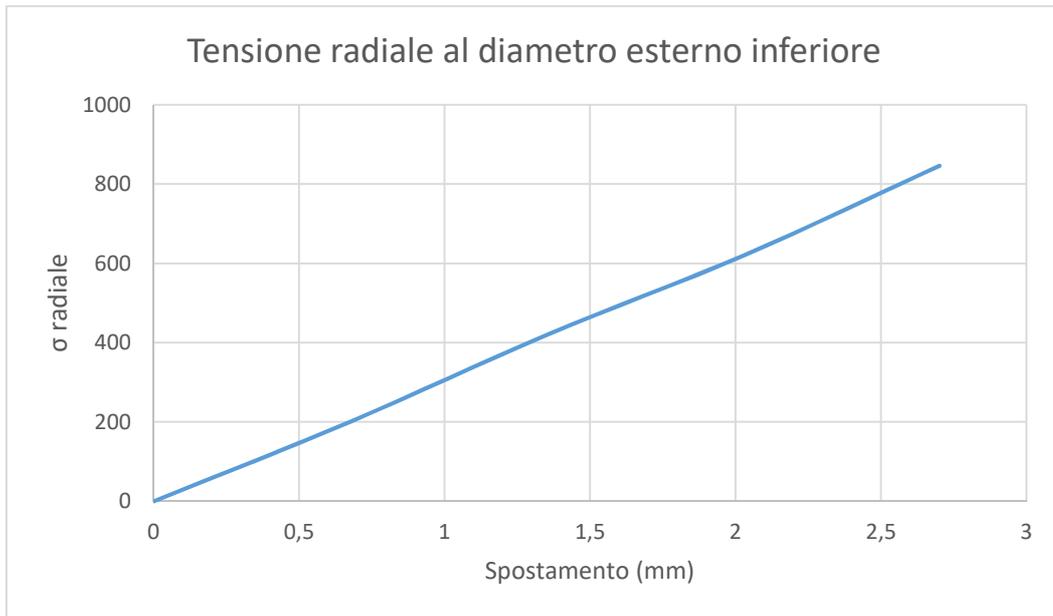


Figura 6.14: andamento  $\sigma$  radiale in funzione dello spostamento al diametro esterno

Dall'analisi grafica per i punti tensionali  $\sigma_I$  e  $\sigma_{III}$  si vede quindi come all'aumentare della deformazione il valore della tensione radiale risulta essere non più trascurabile rispetto a quella che si ottiene per piccoli spostamenti, raggiungendo dei valori di picco di quasi 1000 MPa. Inoltre come già detto nei paragrafi precedenti sulla superficie inferiore al valore del diametro esterno avremo una tensione di trazione, mentre sulla superficie superiore al valore del diametro interno avremo una tensione di compressione. Si può rappresentare ad esempio l'andamento dello stress radiale nella molla per uno spostamento assiale di 1.35 mm:

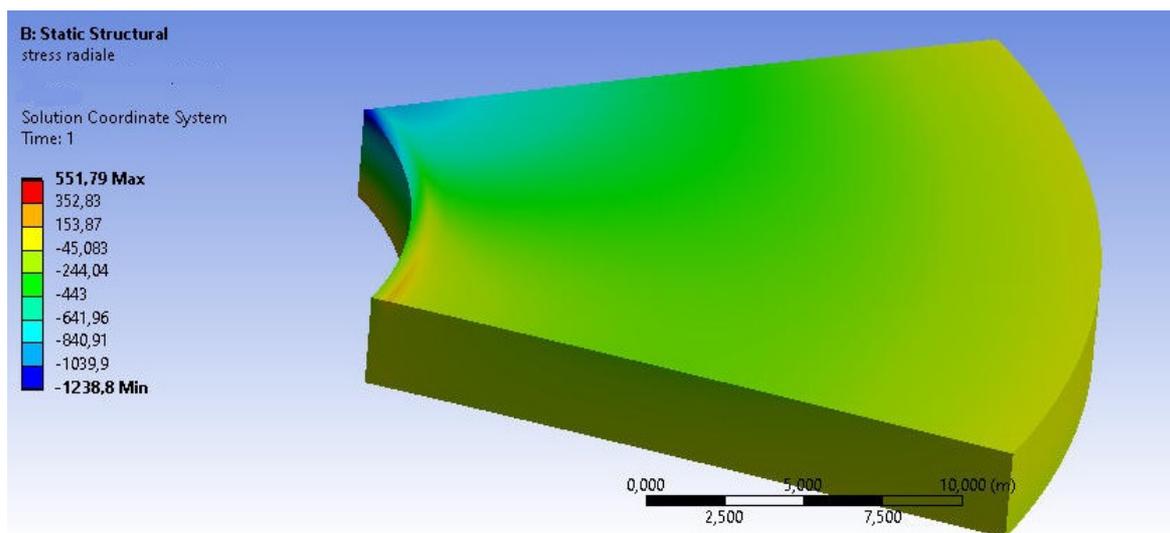


Figura 6.16: tensione radiale per spostamento di 1.35 mm

Nonostante questa differenza con i risultati ottenuti mediante gli elementi finiti, le formule di Almen e Laszlo sono tutt'ora oggi usate all'interno della normativa DIN 2093, perché in generale le molle Belleville come già detto non operano mai per valori di spostamento superiori al 75% dell'altezza libera, quindi le differenze che vi sono con il metodo numerico sono trascurabili. Per questo motivo per una prima progettazione del sistema dove si richiede l'inserimento di una molla a tazza si può far riferimento alla letteratura delle formule proposte da Almen e Laszlo.

### 6.2.2 Analisi errore energetico percentuale ambito bidimensionale

L'applicazione del metodo agli elementi finiti tramite il programma ANSYS presuppone la presenza di un errore tra il risultato reale e quello approssimato ottenuto dal processo di discretizzazione. La presenza di questo errore può portare a dei valori di risultati non validi legati al numero di elementi usati per la mesh e prende il nome di residuo o errore energetico. In ANSYS esso può essere valutato tramite il comando PRERR e permette di determinare la bontà dei valori ottenuti.

Dall'analisi agli elementi finiti come detto noi andiamo a imporre una legge di spostamento ai nodi dell'elemento in modo da approssimare lo spostamento reale del componente, e a causa di questi vincoli rendiamo il nostro pezzo più rigido tensionalmente rispetto all'ambito reale e questo comporta la presenza del residuo.

Questo errore sarà distribuito su tutta la geometria della molla ed è legato alla variazione di tensione all'interno del corpo, quindi in generale le zone che presentano dei valori di tensione equivalente elevata avranno una concentrazione maggiore del valore del residuo, al contrario le zone scariche tensionalmente avranno un errore energetico molto basso tendente a zero. Anche la presenza di elementi di forma non regolare, cioè elementi distorti, può comportare una discrepanza con il risultato reale.

Dalla letteratura [6] si può dare una definizione in formule del valore dell'errore energetico:

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta\sigma_E\} - \{\Delta\sigma_N\} \quad (6.1)$$

$$\% \text{ errore} = \% \frac{\{\Delta\sigma\}^T \{\Delta\sigma\}}{\|\{\Delta\sigma\}\|^2} \quad (6.2)$$

Dove il parametro  $\{\Delta\sigma\}$  indicato nella formula rappresenta un vettore pari alla somma di tutti i contributi degli elementi appartenenti alla mesh ed è un errore stimato a partire dalla tensione  $\{\Delta\sigma_E\}$  sugli elementi e mediata ai nodi  $\{\Delta\sigma_N\}$ .

I due metodi che si possono adottare al fine di andare a ridurre il valore del residuo in modo da ottenere dei risultati corretti possono essere:

- Andare ad affinare la mesh aumentando il numero di elementi usati per la discretizzazione;
- Andare a cambiare il tipo di elemento usato per la definizione della mesh.

Tramite questi metodi noi cerchiamo di ridurre il valore dell'errore globale sull'intera geometria in modo da riuscire a raggiungere la convergenza dei valori numerici; si evidenzia come valori accettabili del residuo per avere dei buoni risultati devono essere al di sotto del 15%.

Analizzando per esempio la soluzione tensionale del nostro caso di studio sugli elementi si vede come, passando da un elemento ad un altro adiacente all'interno della mesh, lungo l'interfaccia tra gli elementi contigui abbiamo un diverso stato di tensione, questo farà nascere il residuo poiché la tensione dovrebbe essere una funzione continua su tutta la geometria del componente.

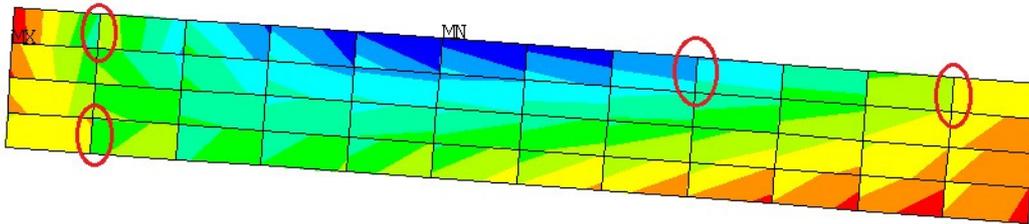


Figura 6.17: rappresentazione andamento delle tensioni sugli elementi con mesh grossolana

Nella Figura 6.17 sono stati messi in evidenza alcuni esempi per una mesh grossolana dove nell'interfaccia tra i vari elementi avremo questo salto tensionale non continuo. Al contrario nella Figura 6.18 a seguito di un infittimento della mesh si vede come lo stato tensionale è più uniforme all'interno del corpo.

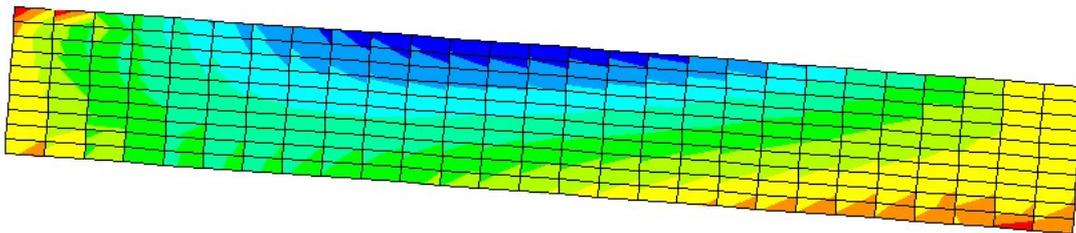


Figura 6.18: : rappresentazione andamento delle tensioni sugli elementi con mesh fine

Nell'analisi dei risultati applicando i due metodi descritti si evidenzia dai grafici riportati come, andando a infittire la mesh e quindi aumentando il numero di suddivisione delle linee che costituiscono il pezzo con comando *lesize*, cioè definendo più elementi all'interno del modello, si riesce ad avere una diminuzione del valore del residuo. Inoltre variando anche il tipo di elemento usato nell'approssimazione del modello, passando ad esempio da un elemento a quattro nodi (plane42) a uno a otto nodi (plane183) o ancora a un elemento che presenta extra-shapes, cioè l'uso di polinomi di grado superiore, allora il valore dell'errore energetico tende a ridursi più velocemente quindi ci avviciniamo maggiormente alla soluzione esatta. Dall'andamento grafico del residuo si vede come esso sarà sempre monotono decrescente.

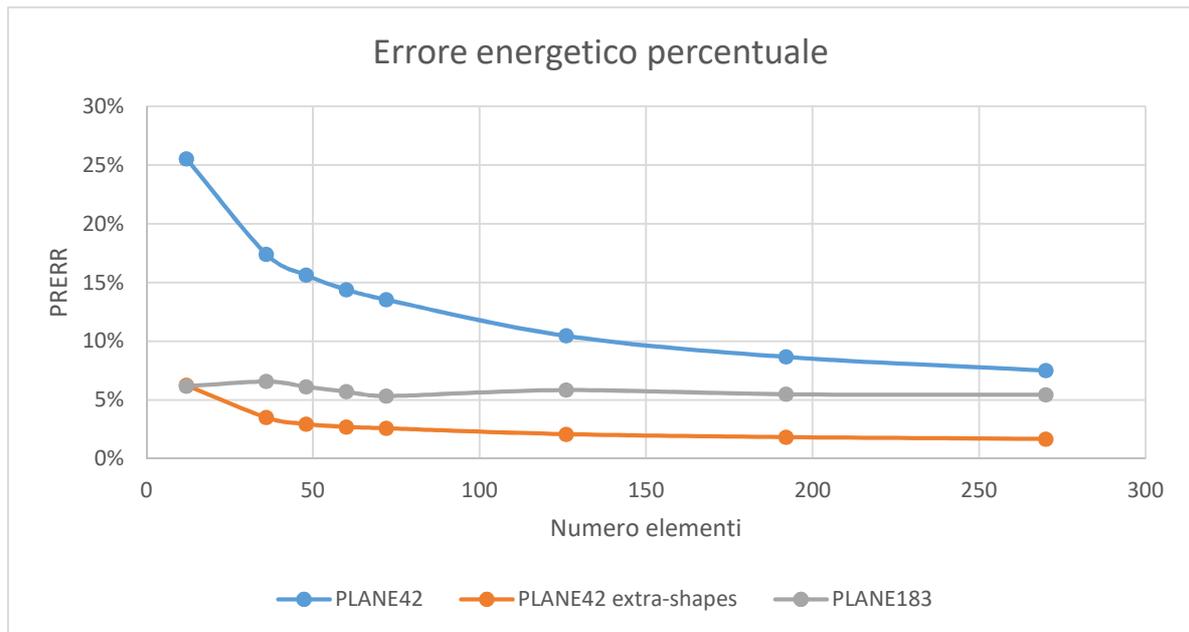


Figura 6.19: andamento residuo ambito bidimensionale

Per la scelta del tipo di elemento per il nostro caso in esame nell'ambito bidimensionale, si nota come dei buoni risultati con valori di residuo bassi al di sotto del 15% si possono avere scegliendo come elementi i plane42 con extra-shapes o i plane183, i quali permettono anche di andare a utilizzare un numero di elementi nettamente inferiore rispetto al caso con i plane42; questo può far risparmiare dei tempi minori per il calcolo della soluzione da parte del programma.

### 6.2.3 Convergenza risultati ambito bidimensionale

In generale la soluzione del modello agli elementi finiti converge alla soluzione esatta andando ad aumentare il numero di elementi usati per la mesh; nel caso ideale se il numero di elementi tende ad infinito e quindi ho un numero di gradi di libertà infinito allora noi convergiamo alla soluzione esatta.

Valutando l'analisi della convergenza dei risultati per la forza risentita dalla molla e per i due valori di tensione  $\sigma_{vm I}$  e  $\sigma_{vm III}$ , si rileva come andando a infittire la mesh e quindi aumentando il numero di elementi all'interno del modello, si arriva ad avere una migliore convergenza dei valori numerici. Inoltre variando anche il tipo di elemento usato nell'approssimazione del corpo, per esempio passando da un elemento plane42 a un plane183 allora il mio risultato tende a convergere più velocemente alla soluzione esatta.

Per l'analisi bidimensionale della molla quindi possono essere usati come elementi sia i plane42 con extra-shapes sia i plane183 per avere dei buoni valori e per i quali è anche richiesto un numero minore di elementi per convergere al risultato finale. L'analisi della convergenza è sempre strettamente correlata al valore del residuo.

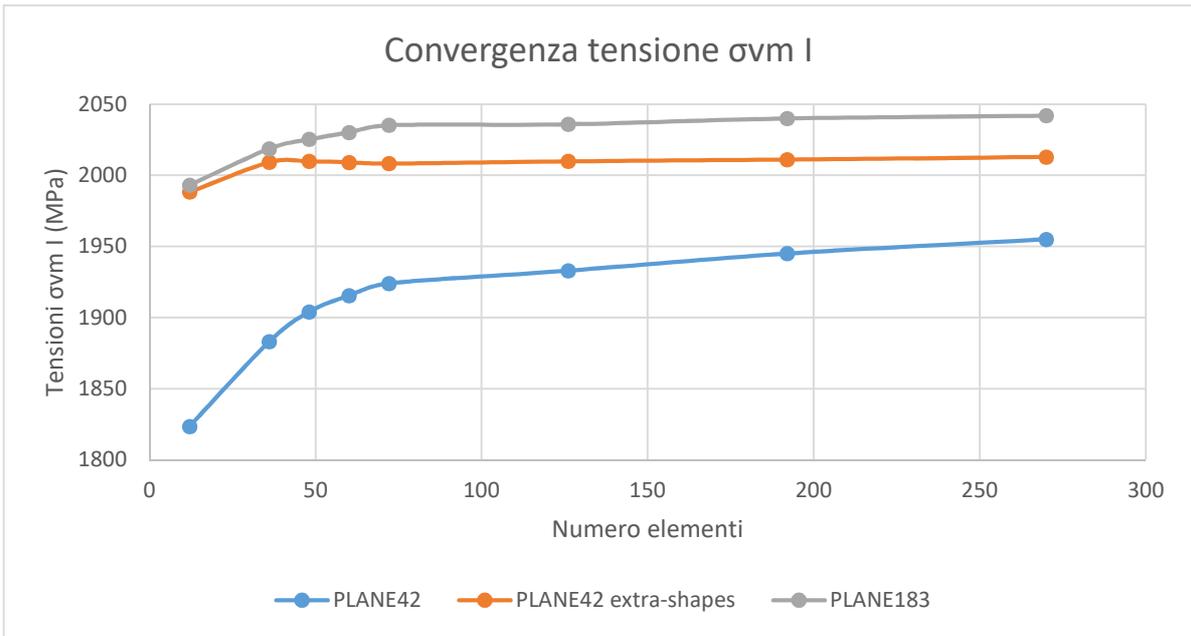


Figura 6.21: convergenza tensione  $\sigma_{vm I}$  ambito bidimensionale

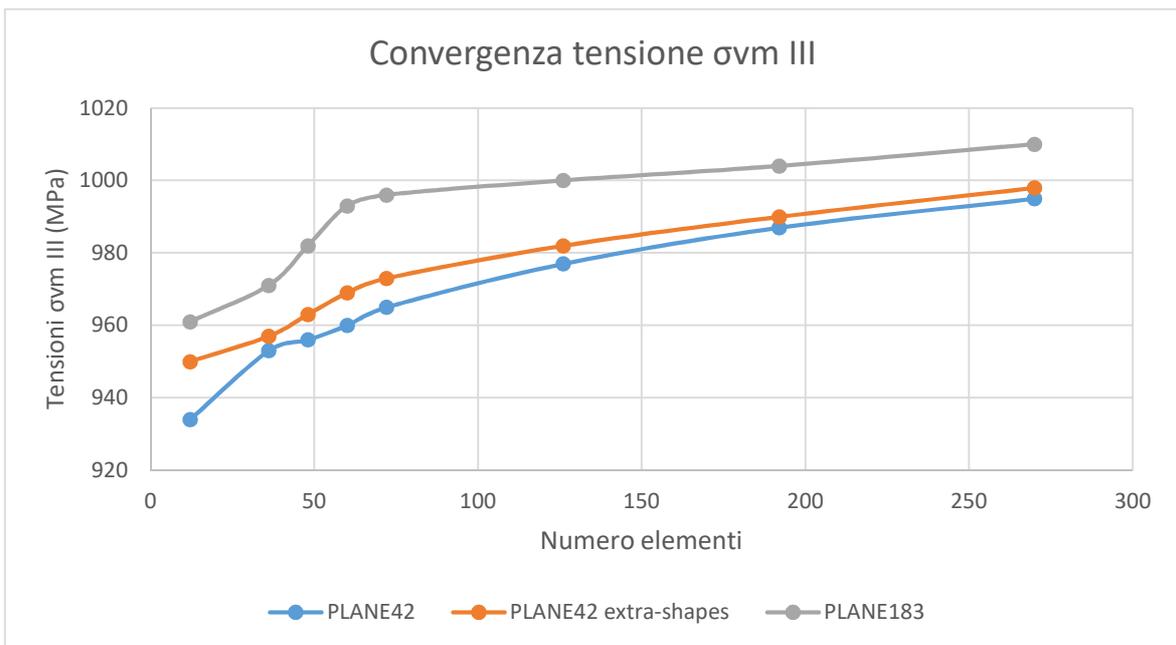


Figura 6.20: convergenza tensione  $\sigma_{vm III}$  ambito bidimensionale

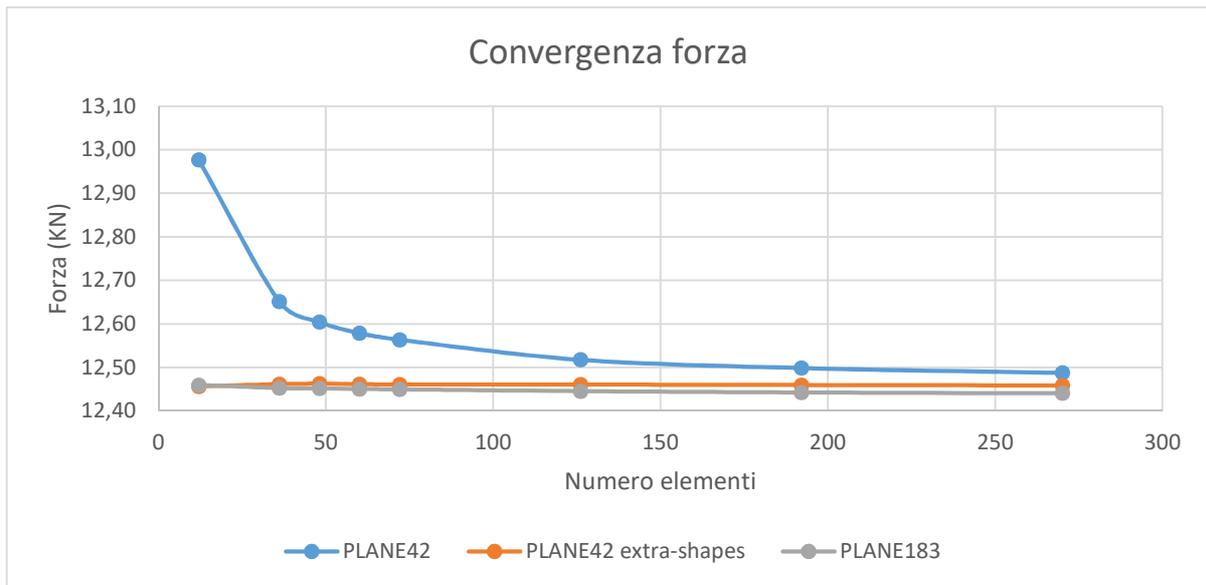


Figura 6.22: convergenza forza ambito bidimensionale

### 6.3 Analisi FEM modello tridimensionale

A partire dalla geometria creata per il modello bidimensionale si può passare all'analisi di un modello tridimensionale tramite sempre il software ANSYS APDL. Le condizioni di lavoro che sono state simulate sono uguali a quelle del modello bidimensionale, cioè si è considerato uno spostamento assiale imposto al valore del diametro interno della molla che è stato fatto variare dal valore nullo fino al valore massimo dell'altezza libera del componente cioè fino al valore di 2.7 mm; in questo modo si è cercato di diagrammare come si distribuisce la tensione nel modello 3D.

Per ottenere il nuovo risultato si usa il comando *vrotat*, che permette di far ruotare la geometria della molla intorno al suo asse di rivoluzione ottenendo così un primo modello tridimensionale parziale, cioè uno spicchio della molla di 45 gradi; con ciò si cerca di evitare la creazione di un modello tridimensionale completo, il quale richiederebbe un numero molto maggiore di elementi che si devono considerare per realizzare la mesh del componente, e quindi riusciamo a ridurre i tempi di calcolo del programma per le varie simulazioni, che aumentano notevolmente andando ad aumentare sempre di più il numero degli elementi considerati.

In questo caso nell'ambito tridimensionale gli elementi che si possono scegliere di adottare per la discretizzazione e di cui poi si sono confrontati i risultati sono:

- L'elemento solid185, che è caratterizzato da otto nodi con tre gradi di libertà per nodo di tipo traslazionali lungo le direzioni di un sistema di riferimento locale sull'elemento; anche in questo caso si cerca di evitare di avere degli elementi degeneri per avere dei buoni valori numerici, come per esempio elementi di forma piramidale con cinque nodi o elementi di forma prismatica con sei nodi;

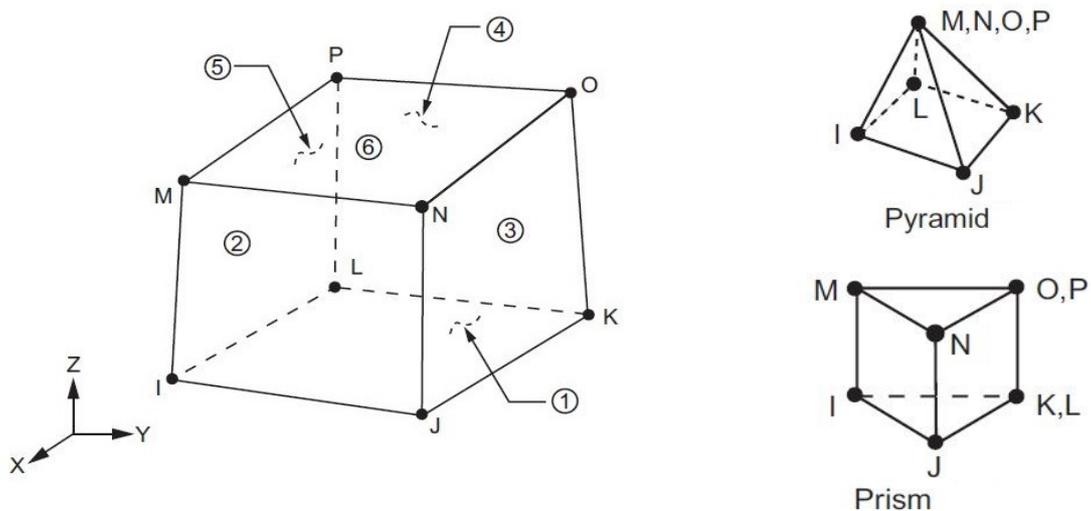


Figura 6.23: (a) elemento solid185, (b) elementi degeneri [3]

- L'elemento solid186, che è caratterizzato da venti nodi con tre gradi di libertà per nodo di tipo traslazionali lungo le direzioni di un sistema di riferimento locale sull'elemento; la sua eventuale degenerazione può comportare elementi di forma tetraedrica con dieci nodi o di forma prismatica con quindici nodi.

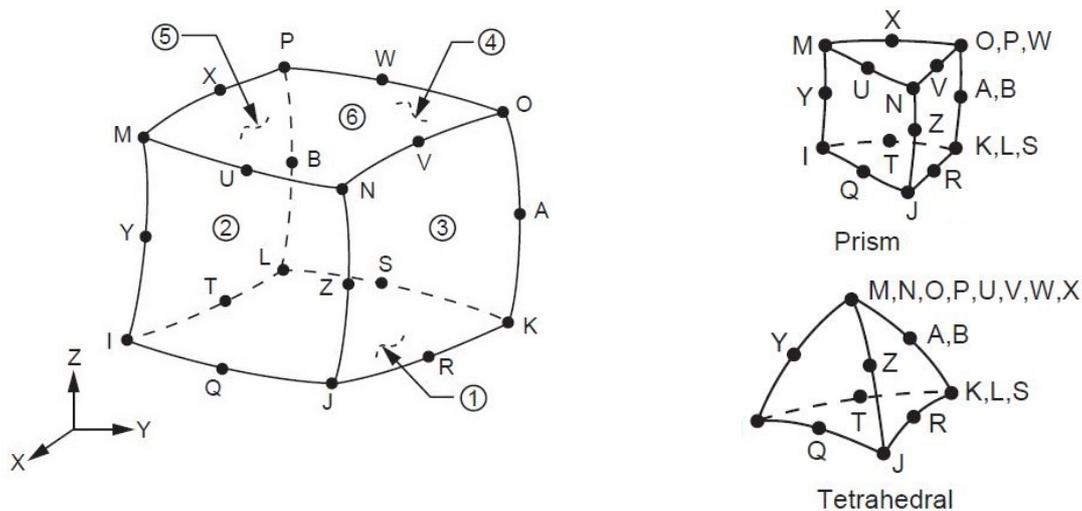


Figura 6.24: (a) elemento solid186, (b) elementi degeneri [3]

Dopo aver scelto il tipo di elemento da utilizzare allora si devono assegnare a quest'ultimi le caratteristiche e le proprietà relative alle aree interne al corpo per ottenere la mesh finale; si è cercato di realizzare una mesh mappata con elementi tutti di forma esaedrica non degeneri il più regolare possibile, tramite il settaggio di determinate opzioni interne al programma (mshkey e mshape). Il risultato finale in seguito ad un affinamento della mesh tramite impostazione del comando *lesize* è ottenuto nella Figura 6.25:

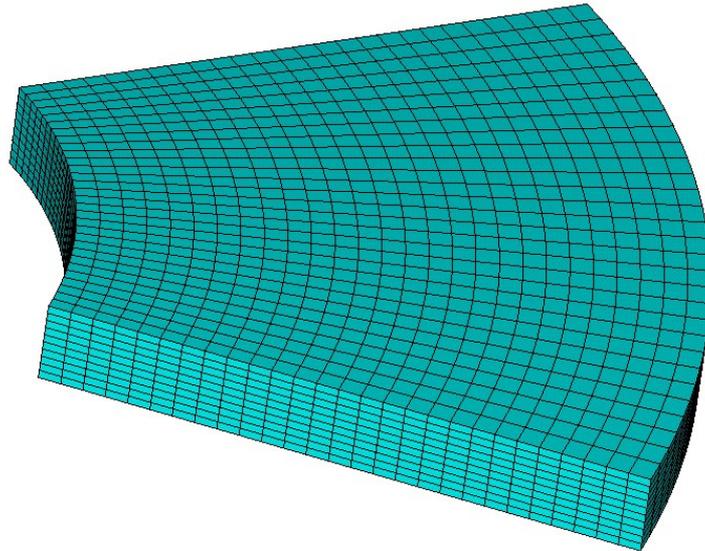


Figura 6.25: mesh finale per modello 3D di 45 gradi

Per poter procedere con la simulazione nel modello tridimensionale si applicano prima le condizioni di vincolo, che devono essere conformi a quelle che sono state utilizzate per il modello bidimensionale, cioè un valore di traslazione nullo lungo la direzione verticale alla base della molla, e in più si deve cercare di imporre una condizione di simmetria sulle due facce laterali per simulare correttamente le condizioni operative. Il corpo poiché è discretizzato mediante mesh allora i vari vincoli si andranno ad applicare sui singoli nodi che si individuano lungo le varie facce della molla.

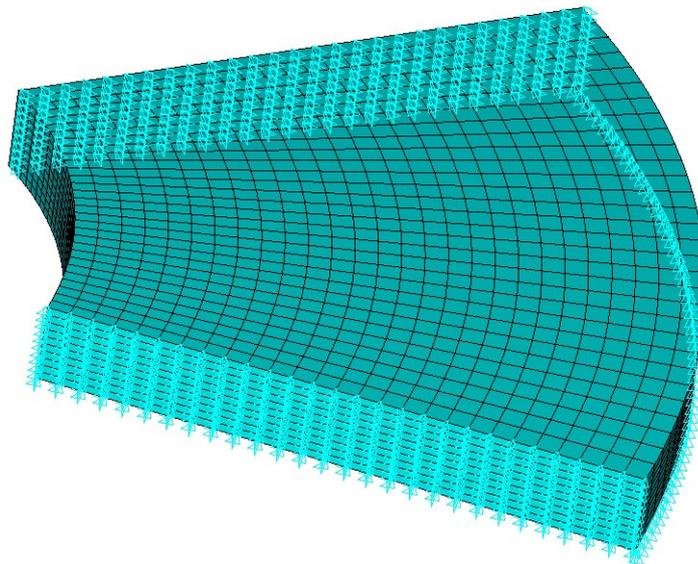


Figura 6.26: applicazione delle condizioni al contorno per modello 3D

Come esempio per valutare la distribuzione dello stato di tensione equivalenti di von Mises si può considerare uno spostamento assiale verso il basso pari al 50% dell'altezza libera, cioè pari a  $1.35\text{ mm}$  che si impone sulla sommità del tronco di cono, ottenendo il risultato tensionale

raccontato dal punto di vista della soluzione nodale nella Figura 6.27 e la relativa deformazione della molla rispetto le sue condizioni indeformate nella Figura 6.28:

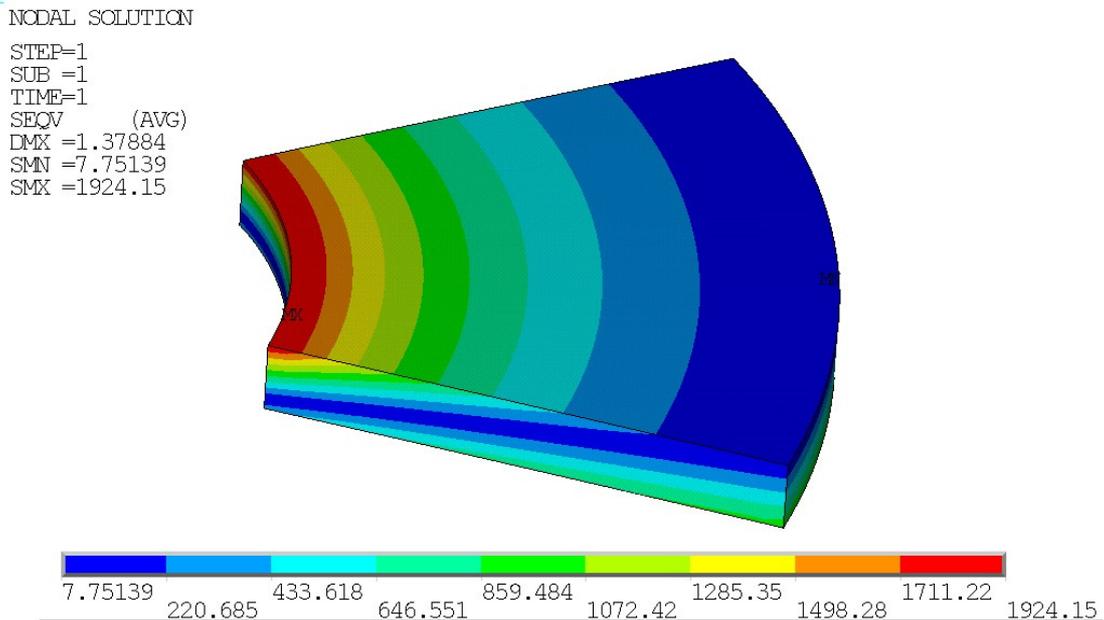


Figura 6.27: andamento tensioni equivalenti modello 3D parziale con spostamento di 1.35 mm

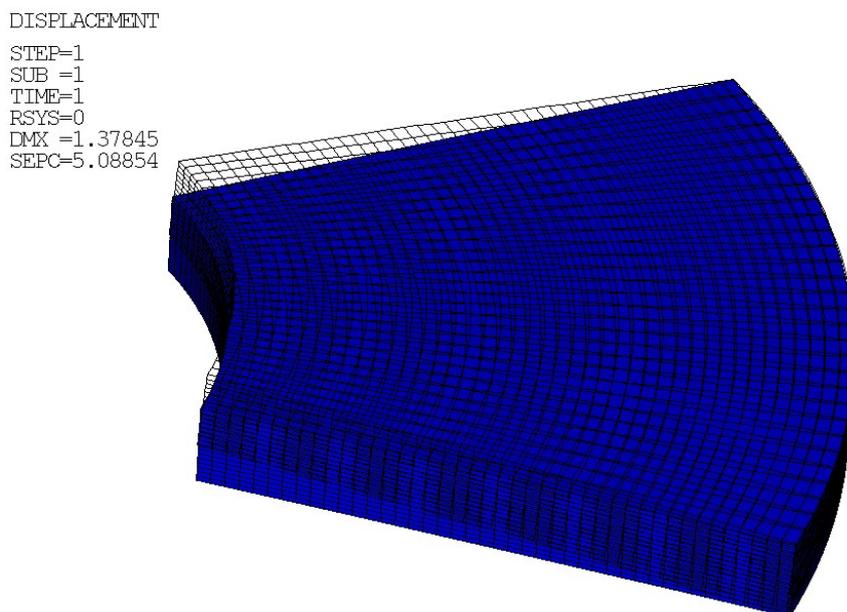


Figura 6.28: deformazione spicchio molla con spostamento di 1.35 mm

Tramite la creazione del modello tridimensionale è possibile avere una rappresentazione più realistica del comportamento della molla sotto le condizioni di carico indicate e vedere anche come si distribuiscono le tensioni lungo le superfici del pezzo. Avremo che nella sezione rettangolare le tensioni sono distribuite non uniformemente, ma esse risultano simmetriche rispetto l'asse di rivoluzione della molla e distribuite concentricamente lungo le superfici.

In modo analogo sempre tramite comando *vrotat* si può creare un modello tridimensionale completo per la molla facendo ruotare tutta la sezione geometrica di 360 gradi intorno al proprio asse di rivoluzione; adoperando sempre gli stessi elementi solid per la definizione della mesh, con le stesse proprietà e imponendo le stesse condizioni di vincolo alla base precedentemente descritte, con uno spostamento assiale imposto al diametro interno, si ottiene il modello tridimensionale completo:

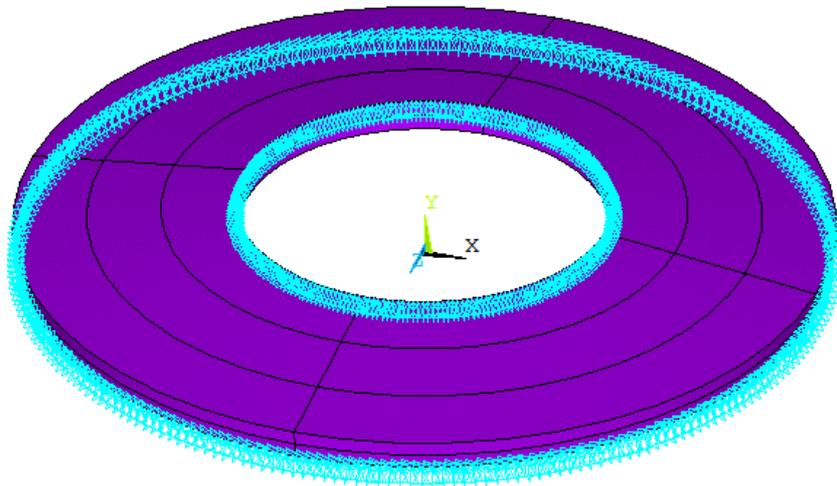


Figura 6.29: modello 3D completo con condizioni al contorno e spostamento imposto

Come esempio per valutare la distribuzione delle tensioni equivalenti di von Mises si può considerare sempre uno spostamento pari al 50% dell'altezza libera, cioè pari a 1.35 mm, ottenendo il risultato rappresentato dal punto di vista della soluzione nodale e dove la distribuzione delle tensioni risulta essere simmetrica rispetto l'asse di rivoluzione della molla:

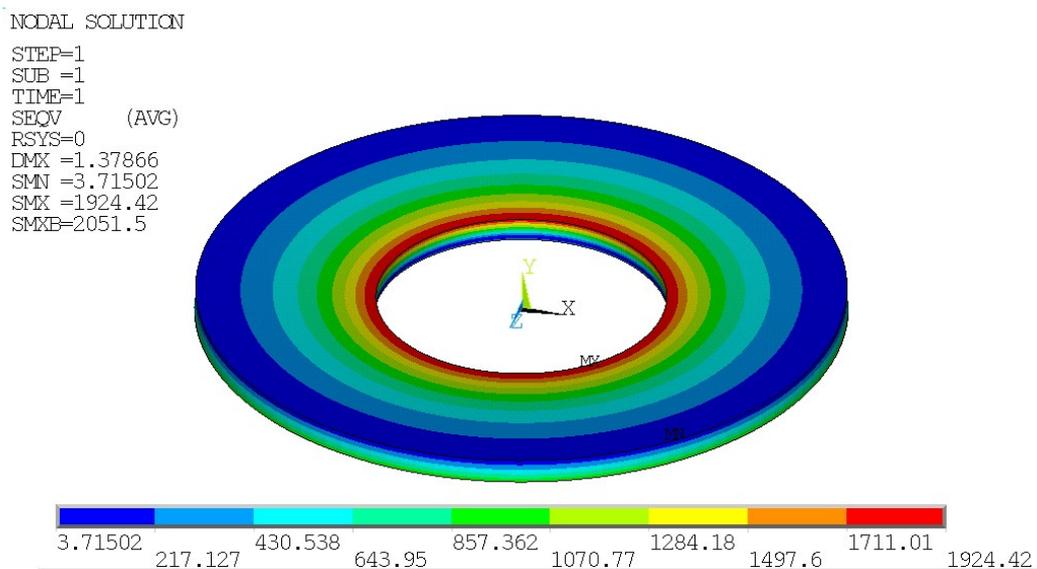


Figura 6.30: andamento tensioni equivalenti per modello 3D completo con spostamento di 1.35 mm

### 6.3.1 Analisi errore energetico percentuale ambito tridimensionale

Così come fatto per il caso bidimensionale si può analizzare l'andamento del residuo all'interno del corpo per il caso tridimensionale in base ai due diversi tipi di elementi che sono stati scelti per la discretizzazione, cioè il solid185 e il solid186.

Dai grafici riportati andando a infittire la mesh e quindi aumentando il numero di elementi usati all'interno del modello, si riesce ad avere una diminuzione del valore del residuo; variando nello stesso tempo anche il tipo di elemento usato nell'approssimazione, passando ad esempio dall'elemento solid185 al solid186 allora il valore dell'errore energetico tende a ridursi più velocemente quindi ci avviciniamo maggiormente alla soluzione esatta.

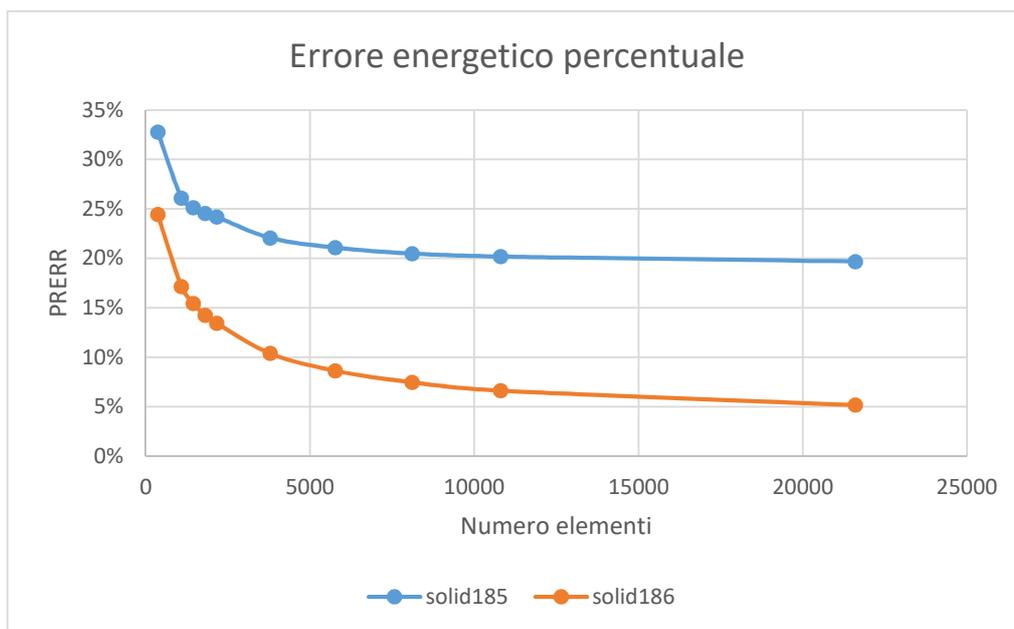


Figura 6.31: andamento residuo ambito tridimensionale

Per la scelta del tipo di elemento per il caso tridimensionale si vede come per avere dei buoni risultati con valori di residuo bassi al di sotto del 15% si possono scegliere come elementi i solid186, i quali permettono anche di andare a utilizzare un numero di elementi nettamente inferiore rispetto al caso con i solid185; questo può far risparmiare dei tempi minori per il calcolo della soluzione da parte del programma.

### 6.3.2 Convergenza risultati ambito tridimensionale

Per quanto riguarda lo studio della convergenza dei risultati si rileva come, dai grafici riportati, andando a infittire la mesh e quindi aumentando il numero di elementi all'interno del modello, si arriva ad avere una migliore convergenza dei valori numerici. Variando anche il tipo di elemento usato nell'approssimazione, per esempio passando da un elemento solid185 a un solid186 allora il mio risultato tende a convergere più velocemente alla soluzione esatta.

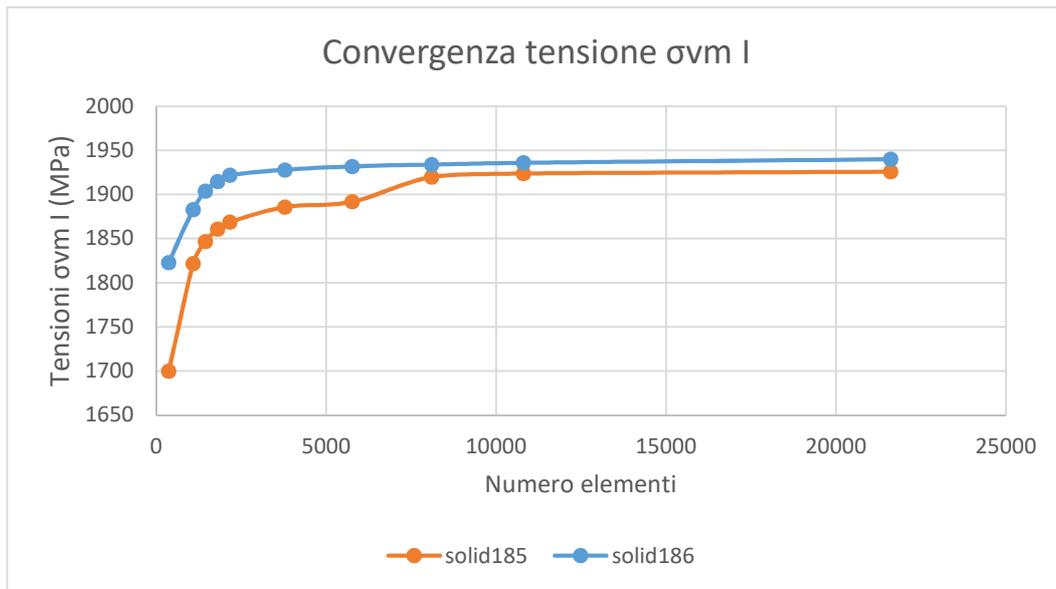


Figura 6.32: convergenza tensione  $\sigma_{vm I}$  ambito tridimensionale

Per l'analisi tridimensionale della molla quindi può essere usato come elemento il solid186 per avere dei buoni valori numerici e per il quale è anche richiesto un numero minore di elementi interni alla mesh per convergere al risultato finale.

#### 6.4 Analisi FEM meccanica della frattura

In questa parte per andare a stimare la durata di vita del componente in termini di numero di cicli e come la cricca propaga all'interno della molla si è utilizzato il programma ANSYS Workbench. I due casi che si sono simulati sono quelli con la presenza di una cricca disposta lungo la direzione radiale posizionata al valore del diametro esterno, e un altro caso con la presenza di una cricca disposta lungo la direzione circonferenziale posizionata nella mezzzeria della larghezza della molla. Le simulazioni che sono state condotte rispecchiano quanto fatto per l'analisi analitica della meccanica della frattura, e si riferiscono al settaggio del valore massimo incremento della lunghezza della cricca nella molla pari  $\Delta a = 0.03 \text{ mm}$  e con un valore di carico oscillante nel tempo tra  $500 \text{ N}$  e  $9000 \text{ N}$  applicato al valore del diametro interno, considerando la molla appoggiata alla base. La scelta di queste condizioni di lavoro ha il fine di vedere come la cricca possa propagare in maniera graduale e stabile nel componente prima di raggiungere il valore della sua lunghezza critica e andare a rottura.

Innanzitutto il primo step che deve essere eseguito è quello della preparazione del modello geometrico all'interno del programma con l'introduzione di un intaglio lungo le due differenti direzioni per la cricca.

Definito il modello completo per la molla Belleville si può procedere con la discretizzazione tramite elementi finiti per la realizzazione di una mesh interna al corpo. ANSYS per questa tipologia di simulazione relativa a problemi di propagazione di cricche va a richiedere come elemento da usare solamente elementi tetraedrici di tipo solid187.

Questo elemento è caratterizzato da dieci nodi con tre gradi di libertà per nodo di tipo traslazionali lungo un sistema di riferimento locale sull'elemento; il solid187 rispetto ad altri tipi di elementi è

quello che permette meglio di analizzare le condizioni di singolarità che si possono presentare sul componente, come ad esempio la presenza di una cricca.

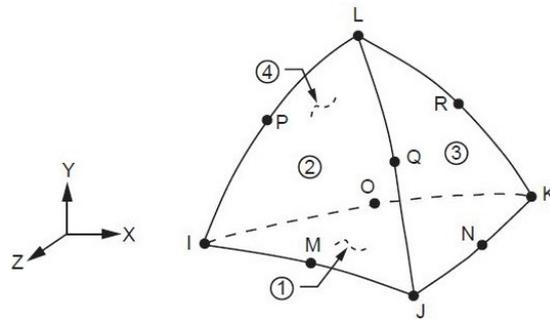


Figura 6.33: elemento solid187 [3]

All'elemento descritto si devono assegnare le caratteristiche e le proprietà relative alle aree interne al corpo per ottenere la mesh finale, la quale sarà caratterizzata da dei valori di aree grossolane nelle zone di non interesse per la nostra tipologia di analisi e da valori di area molto più fine nella zona dove invece si richiede un'analisi approfondita dovuta alla presenza di singolarità che vengono introdotte a causa della cricca. Per ottenere il risultato finale della mesh si sono usati come impostazioni interne al programma quelle elencate:

- La mesh deve seguire nella sua generazione la curvatura dettata dalla geometria della molla;
- Nell'intorno dell'apice della cricca l'affinamento della mesh è stato condotto tramite la generazione di un raggio di influenza della sfera, con la quale si sono indicati i valori locali di mesh che devono essere rispettati.

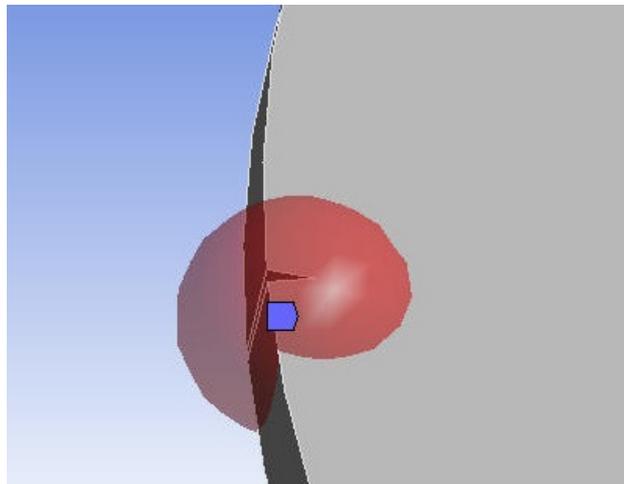


Figura 6.34: indicazione della mesh locale con raggio di sfera

In questo modello tridimensionale si sono sempre indicate come condizioni di vincolo quelle definite precedentemente e poiché il pezzo è discretizzato mediante mesh allora i vari vincoli si andranno ad applicare sui singoli nodi.

#### 6.4.1 Identificazione cricca nel modello FEM

ANSYS per poter procedere con l'analisi della simulazione della propagazione della cricca all'interno della molla, richiede la corretta identificazione della posizione del difetto nel componente.

Per ottenere il risultato è necessario andare ad indicare un sistema di riferimento locale nell'intorno dell'apice del difetto che possa individuare la sua posizione all'interno della molla rispetto al sistema di riferimento globale. La definizione di questo sistema di riferimento deve rispettare determinate condizioni affinché si abbia un'analisi corretta della propagazione:

- La direzione dell'asse  $x$  deve puntare lungo il possibile verso dove la cricca deve propagare e poi sarà il programma stesso che aggiornerà nella simulazione la direzione di propagazione;
- La direzione dell'asse  $y$  deve essere sempre perpendicolare al fronte dell'apice della cricca;
- La direzione dell'asse  $z$  sarà definita di conseguenza da una terna destrorsa.

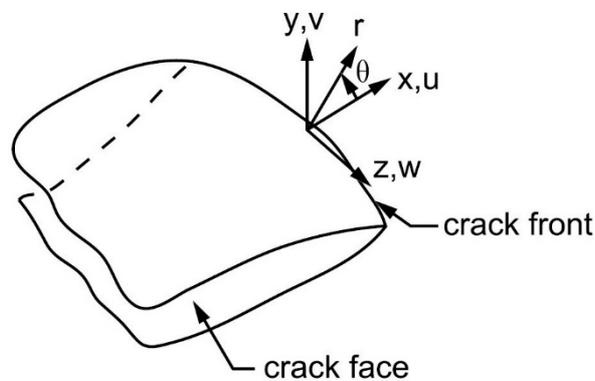


Figura 6.35: identificazione del sistema di riferimento lungo il fronte della cricca [3]

La cricca in generale è caratterizzata dal suo apice e dalle sue due superfici libere; questi elementi devono essere indicati nel programma in modo da identificare quelli che sono i nodi che si sono creati a seguito del processo di discretizzazione, e che si hanno sia lungo l'apice del difetto e sia lungo le due facce libere.

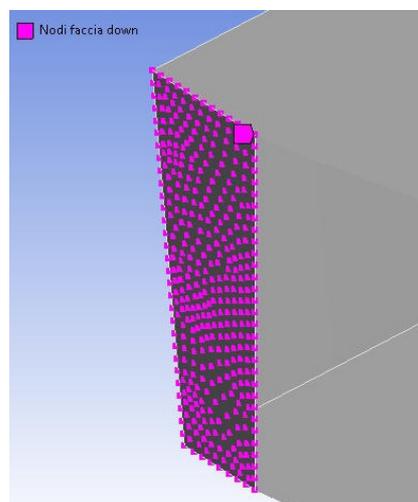


Figura 6.36: identificazione dei nodi sulle facce della cricca

Andando a eseguire questa procedura sia per una cricca disposta in senso radiale che per un'altra disposta in senso circonferenziale otteniamo la corretta identificazione e l'individuazione della posizione del difetto nella molla. Questo può essere rappresentato nel componente dove nelle figure sottostanti è indicato il sistema di riferimento e la relativa cricca:

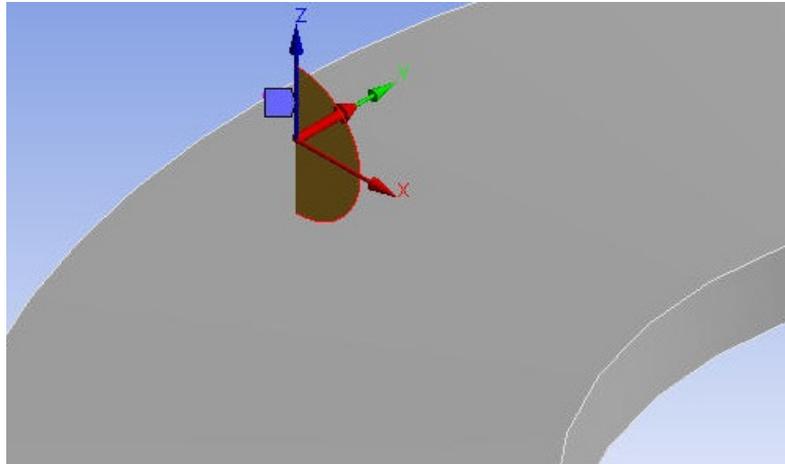


Figura 6.38: identificazione cricca radiale

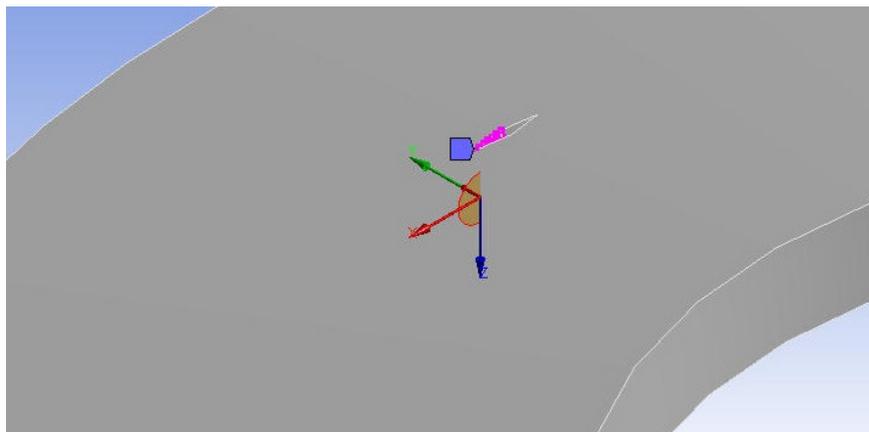


Figura 6.37: identificazione cricca circonferenziale

Fatto ciò si devono indicare i vari parametri legati alla legge di propagazione, come ad esempio i coefficienti adimensionali di Paris e il valore dell'incremento della cricca ad ogni ciclo. Nell'impostazione di quest'ultimo parametro si devono rispettare le dimensioni che si sono stabilite per gli elementi della mesh; questo perché nell'ambito della simulazione agli elementi finiti man mano che la cricca propaga si viene ad avere internamente al modello un continuo aggiornamento delle condizioni della mesh, la quale deve piano piano avanzare e infittirsi lungo la direzione della propagazione della cricca. Se si avesse una mesh troppo grossolana nell'intorno del difetto con dimensione degli elementi elevata, allora l'impostazione di un valore del parametro di incremento cricca minore di quello della dimensione degli elementi implica un fallimento nell'aggiornamento automatico della mesh, perché non si riescono ad analizzare bene le condizioni di singolarità che si vengono a creare man mano che il difetto propaga. Inoltre al fine di ottenere dei risultati conformi all'analisi analitica si va a indicare al programma un valore massimo di incremento della cricca ad ogni ciclo man mano che essa avanza, cioè pari a  $0.03 \text{ mm}$ ; il programma calcola questo valore di

incremento del difetto e se si ha un numero che è superiore al valore impostato dall'utente allora l'avanzamento sarà quello indicato come massimo.

Si possono riassumere i possibili errori che si presentano nell'ambito di questa simulazione per l'analisi della propagazione e che portano a dei risultati errati:

- Non corretta identificazione delle caratteristiche della cricca all'interno del componente, legata ad esempio all'indicazione dei nodi generati sulla cricca con la mesh;
- Non corretta definizione del sistema di riferimento locale lungo la cricca per individuare la sua posizione nel modello;
- Definizione di una mesh troppo grossolana che non permette al programma il calcolo automatico di una mesh dinamica;
- Altro errore che ANSYS non riesce a gestire è quello per il quale durante la propagazione la cricca devia dalla sua direzione originaria di un valore superiore a 180 gradi.

#### 6.4.2 Cricca radiale

Una volta definite tutte le caratteristiche e le condizioni necessarie per la simulazione della propagazione della cricca, si può passare all'immissione della mesh nella geometria della molla che come già detto deve essere più fitta nell'intorno dell'apice del difetto; si può poi applicare un carico oscillante pari a quello utilizzato nell'ambito analitico per avere un confronto dei risultati finali a cui corrisponde un valore di intervallo di spostamento della molla che varia tra  $0.053\text{mm}$  e  $1.27\text{mm}$ . La mesh ottenuta a seguito del processo di discretizzazione è quella indicata:

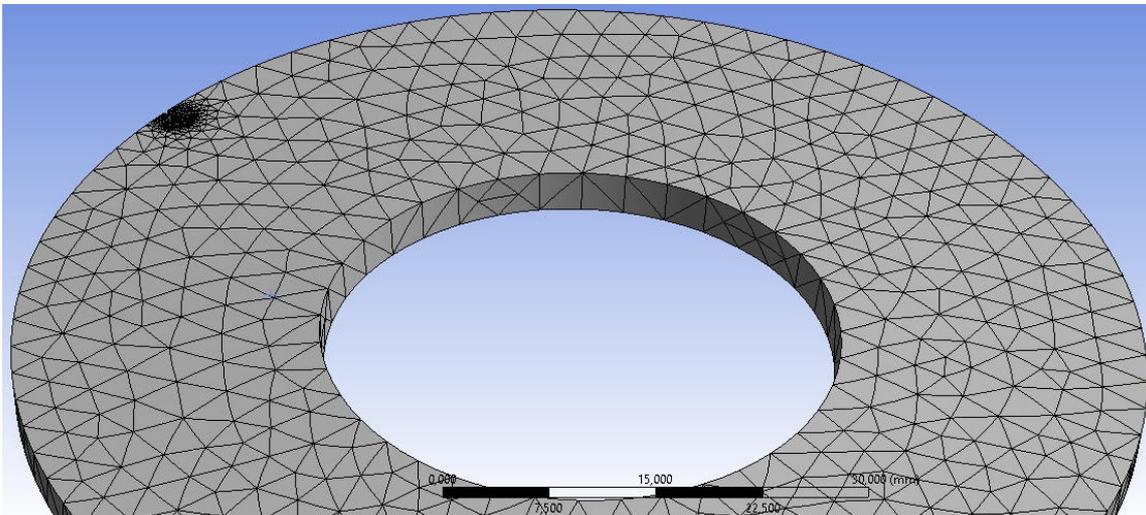


Figura 6.39: mesh per cricca radiale

Si può eseguire uno zoom sulla mesh iniziale che si viene ad avere nell'intorno dell'apice del difetto la quale poi muterà a seguito del suo aggiornamento automatico da parte del programma. Dall'estensione raggiunta dalla cricca a seguito della sua propagazione si mette in evidenza come già spiegato, che la mesh risulta essere variata rispetto le condizioni iniziali e avremo un suo infittimento lungo la direzione della propagazione dove il programma andrà a creare in automatico gli elementi necessari per la discretizzazione.

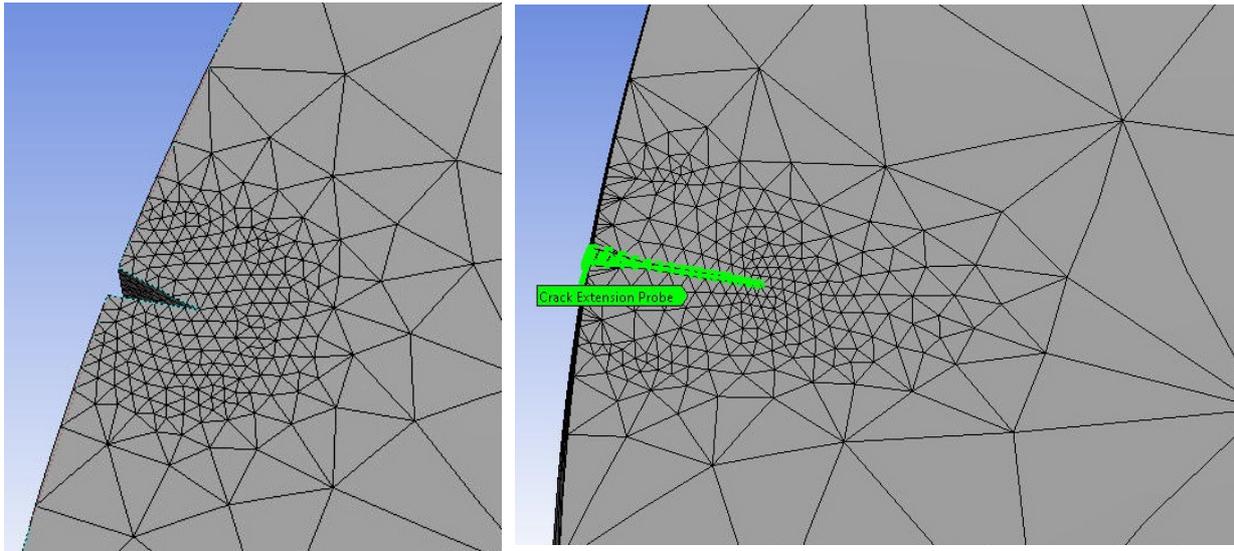


Figura 6.40: (a) mesh iniziale nell'intorno della cricca, (b) variazione mesh con propagazione

Dall'analisi della simulazione si vede come una cricca disposta lungo la direzione radiale per la molla Belleville risulta essere favorevolmente orientata lungo la direzione della tensione massima e quindi il fronte di cricca propagherà sempre lungo la direzione radiale senza mutare il suo verso.

Il fattore di intensificazione delle tensioni varierà nel tempo lungo il fronte della cricca fino a raggiungere le condizioni critiche che portano il pezzo a rottura e il suo avanzamento sarà sempre lungo la direzione radiale così come rappresentato nella Figura 6.43:



Figura 6.41: avanzamento del fronte della cricca radiale

Dal confronto con i risultati analitici troviamo una corrispondenza con i valori ottenuti tramite la simulazione e un errore relativo al distanziamento tra le due curve pressoché trascurabile sia dal punto di vista del numero di cicli che del fattore di intensificazione delle tensioni.

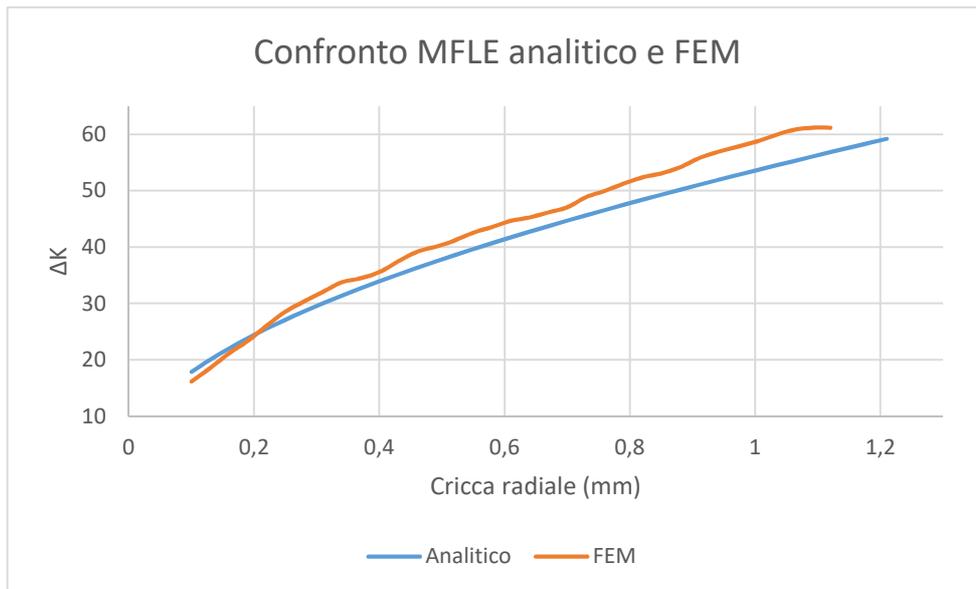


Figura 6.43: confronto risultati andamento  $\Delta K$  per cricca radiale

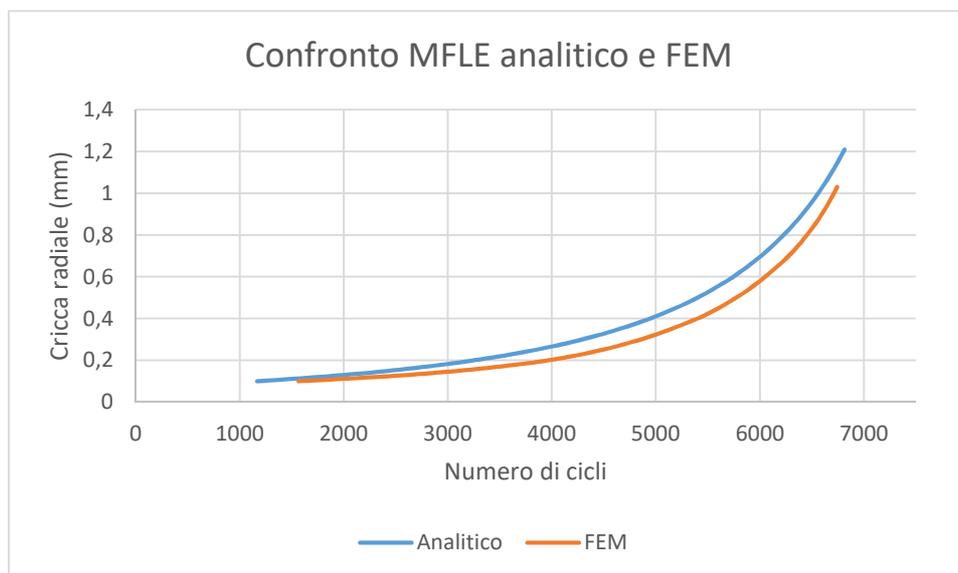


Figura 6.42: confronto risultati andamento numero di cicli per cricca radiale

### 6.4.3 Cricca circonferenziale

In modo analogo si può simulare la propagazione di un difetto disposto lungo la direzione circonferenziale andando ad imporre sempre le stesse condizioni di carico e di vincoli, cioè si considera la molla appoggiata alla base e un valore di carico oscillante che determina un intervallo di spostamento assiale che varia tra  $0.053\text{ mm}$  e  $1.27\text{ mm}$ . Nell'analisi si è ipotizzato di avere due cricche indipendenti tra loro che propagano all'interno della molla e posizionate nella mezziera della larghezza. Dopo aver definito tutte le caratteristiche e le condizioni necessarie per la simulazione, relative ad esempio al valore massimo di incremento cricca pari a  $\Delta a = 0.03\text{ mm}$  e al sistema di riferimento locale, si può passare all'immissione della mesh all'interno della geometria della molla che deve sempre essere più fitta nell'intorno dell'apice del difetto.

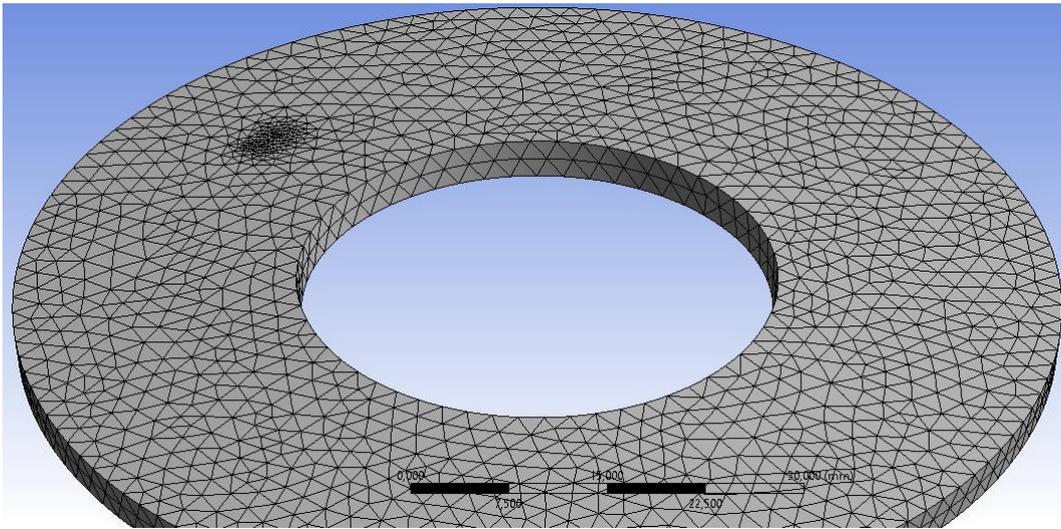


Figura 6.44: mesh per cricca circonferenziale

Si può eseguire uno zoom sulla mesh iniziale che si viene ad avere nell'intorno dell'apice del difetto la quale poi muterà a seguito del suo aggiornamento automatico da parte del programma man mano che la cricca propaga nel componente.

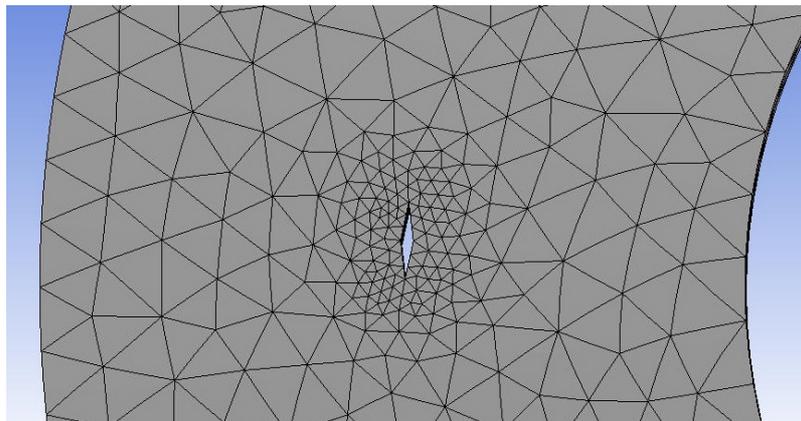


Figura 6.45: mesh iniziale per cricca circonferenziale

Dall'analisi dei risultati in questo caso si vede come poiché la cricca non risulta essere favorevolmente orientata lungo la direzione della tensione massima, allora inizialmente il fronte del difetto propaga circonferenzialmente ma dopo comincia a deviare dalla sua direzione originaria

andando a disporsi lungo la direzione radiale in modo da risentire con più facilità il valore della tensione che apre il difetto.

Si può rappresentare l'estensione raggiunta dalla cricca a seguito della sua propagazione dove si mette in evidenza come già spiegato, che la mesh interna al modello risulta essere variata rispetto le condizioni iniziali e avremo un suo infittimento lungo la direzione della propagazione della cricca dove il programma andrà a creare in automatico gli elementi necessari per la discretizzazione; dalla presenza delle due cricche circonferenziali avremo quindi una mutazione radicale della mesh nel tempo.

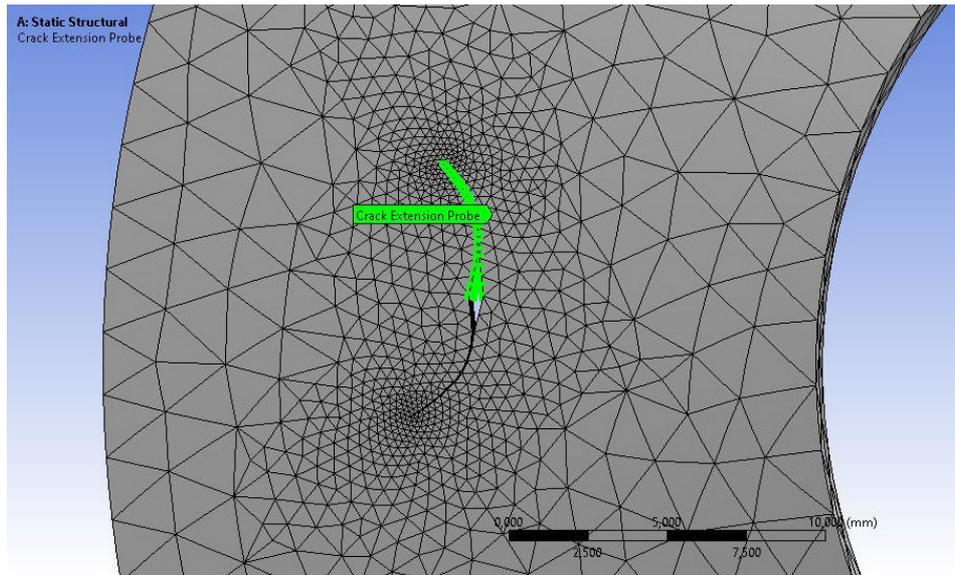


Figura 6.46: mesh finale per cricca circonferenziale

Come si può notare dalle immagini la cricca percorre uno spazio maggiore rispetto al caso con cricca radiale e raggiunge dei valori di lunghezza finale più grandi; anche il numero di cicli a seguito di queste condizioni sarà leggermente superiore.

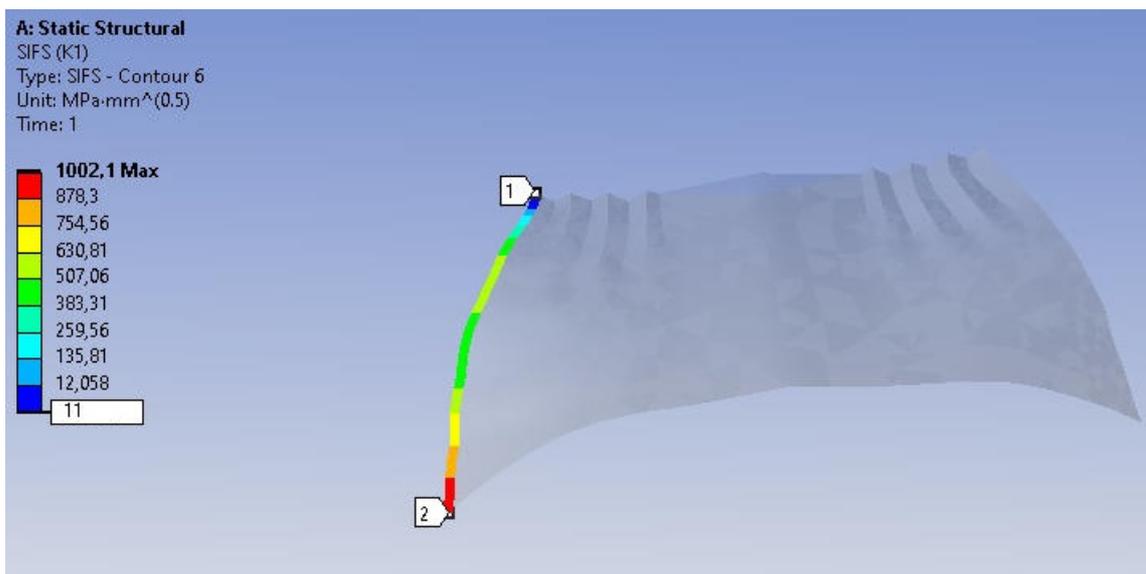


Figura 6.47:: avanzamento del fronte della cricca circonferenziale

Il fattore di intensificazione delle tensioni varierà nel tempo lungo il fronte della cricca fino a raggiungere le condizioni critiche che portano il pezzo a rottura e in questo caso avremo una sua deviazione rispetto la direzione originaria.

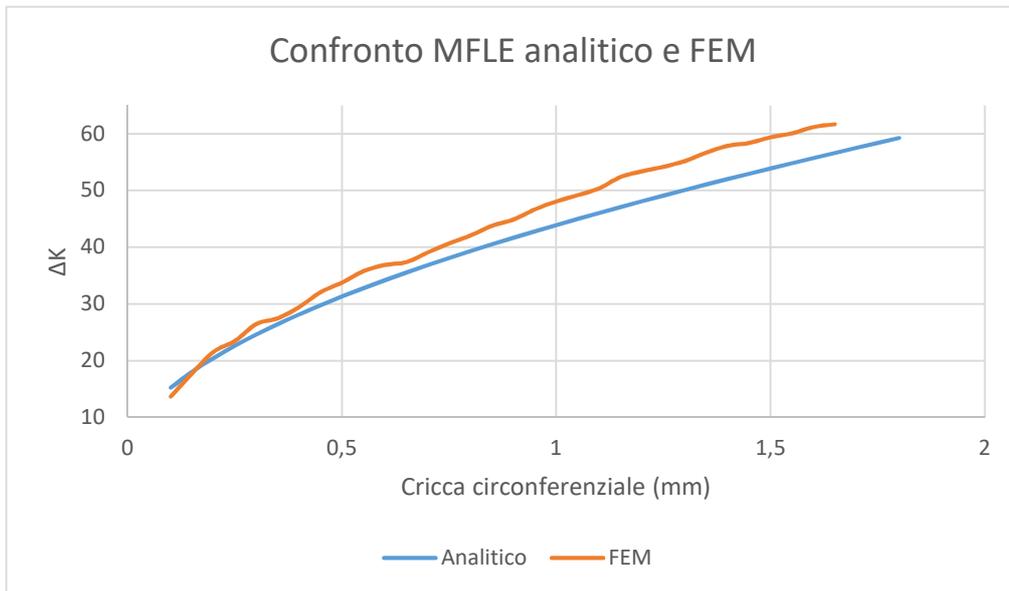


Figura 6.49: confronto risultati andamento  $\Delta K$  per cricca circonferenziale

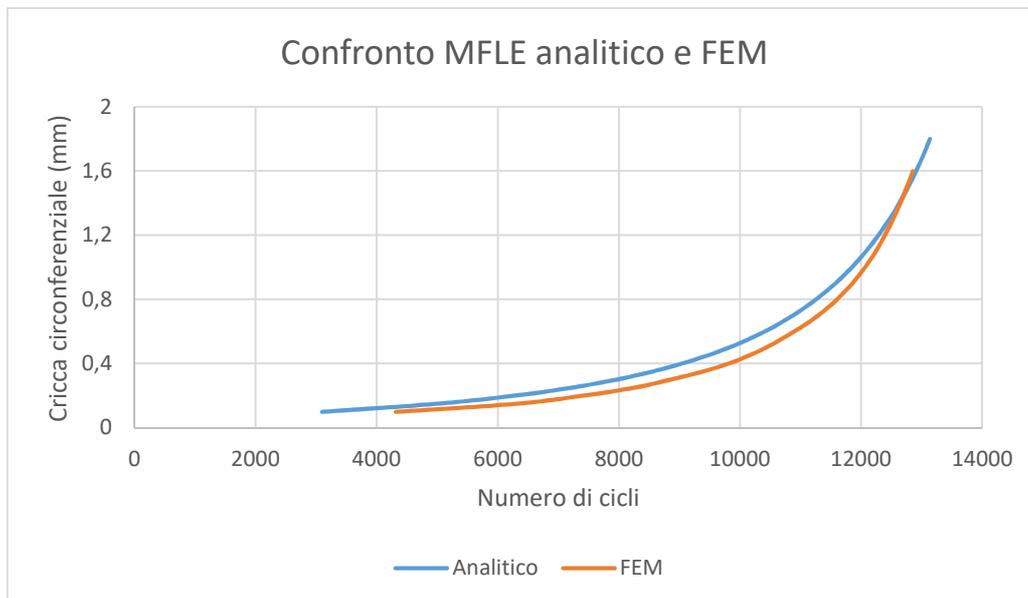


Figura 6.48: confronto risultati andamento numero di cicli per cricca circonferenziale

Dal confronto con i risultati analitici troviamo una corrispondenza con i valori ottenuti e un errore relativo al distanziamento tra le due curve pressoché trascurabile sia dal punto di vista del numero di cicli che del fattore di intensificazione delle tensioni.

Il numero di cicli a cui si giunge nel caso di cricca circonferenziale è maggiore rispetto alla presenza di una cricca radiale e in particolare se si diminuisse il valore del carico applicato alla molla, allora la cricca continuerebbe a propagare maggiormente lungo la direzione circonferenziale nelle prime fasi che daranno quindi un contributo maggiore in termini di numero di cicli e solo nelle fasi finali si avrà

sempre una deviazione del percorso lungo la direzione radiale per poi portare il componente a rottura.

## 7 Fattore di rischio di fatica

In questa parte si cercherà di mettere in evidenza alcuni metodi che possono essere usati al fine di estendere la vita a fatica del componente, cercando di prevenire nello stesso tempo la propagazione delle cricche.

Le molle per le loro condizioni operative in generale cederanno quasi sempre a seguito del raggiungimento delle condizioni di fatica. Il tempo di vita del componente meccanico può essere visto come una competizione tra le proprietà meccaniche del materiale di resistere e lo stato di tensioni applicato. Nell'analisi delle cricche da fatica si ha che esse nucleano sempre sul punto più debole della superficie del pezzo che deve quindi essere tenuto sotto controllo. Esistono una serie di parametri che possono influenzare questa posizione della cricca come per esempio:

- Lo stato di tensioni agente;
- Le caratteristiche del materiale;
- L'eventuale presenza di difetti all'interno del pezzo;
- La rugosità superficiale.

Tutti i parametri indicati giocano un ruolo importante nel processo di fatica e possono essere utilizzati per definire quello che è il fattore di rischio di fatica  $R_f$ . Esso è usato per quantificare il rischio di fatica dei componenti metallici sotto l'influenza dell'insieme dei fattori elencati.

Per gli organi meccanici in generale l'individuazione del valore massimo del fattore di rischio  $R_{f\ max}$  indica il punto più debole del componente dove si posiziona la fonte dell'inizio della cricca di fatica. Quindi il fattore  $R_f$  può essere usato per valutare il rischio di fessurazione per fatica dei metalli e si può calcolare come segue:

$$R_f(x) = \frac{K_t \sigma(x) + \sigma_{compres}(x)}{\sigma_{Rp,0.2}} \quad (7.1)$$

Si elencano i significati dei vari parametri che compaiono all'interno dell'equazione:

- Il valore del fattore di rischio  $R_f$  viene valutato in base alla posizione  $x$  che noi stiamo andando a considerare lungo la superficie del componente;
- $K_t$  rappresenta il fattore di concentrazione delle sollecitazioni locali sulla superficie del materiale dovuto alla presenza di errori di forma che determinano un incremento delle tensioni risentite;
- $\sigma_{compres}$  indica la sollecitazione di compressione che viene applicata dall'esterno al materiale ed è considerata in funzione della posizione  $x$  che noi stiamo analizzando sulla superficie;
- $\sigma$  indica la sollecitazione che il componente risente in seguito alle sue condizioni di lavoro ed è funzione della posizione  $x$  che stiamo considerando sulla superficie;
- $\sigma_{Rp,0.2}$  indica la tensione di snervamento del materiale che è una costante in assenza di trattamento superficiale.

I vari parametri di rischio possono essere analizzati singolarmente per evidenziare quale sarà l'elemento più debole che determina la nucleazione della cricca nel materiale.

## 7.1 Andamento di $R_f$ con lo stato di tensione

Andando a considerare il nostro caso di studio, per il calcolo del fattore di rischio si può prendere come esempio una condizione di lavoro severa corrispondente a un valore dell'altezza libera pari al 75% di  $h_o$ , cioè pari a uno spostamento assiale imposto sulla sommità della molla di 2.07 mm. A partire dallo spostamento assiale e considerando il componente appoggiato alla base, tramite simulazione agli elementi finiti, si è valutato lo stato di sollecitazione più critico dal punto di vista della trazione lungo la superficie e si è visto anche come varia la tensione scendendo in profondità all'interno della sezione della molla.

Si rappresenta nella Figura 7.1 l'andamento delle tensioni equivalenti von Mises per la sezione della molla a tazza per le condizioni di lavoro che sono state descritte.

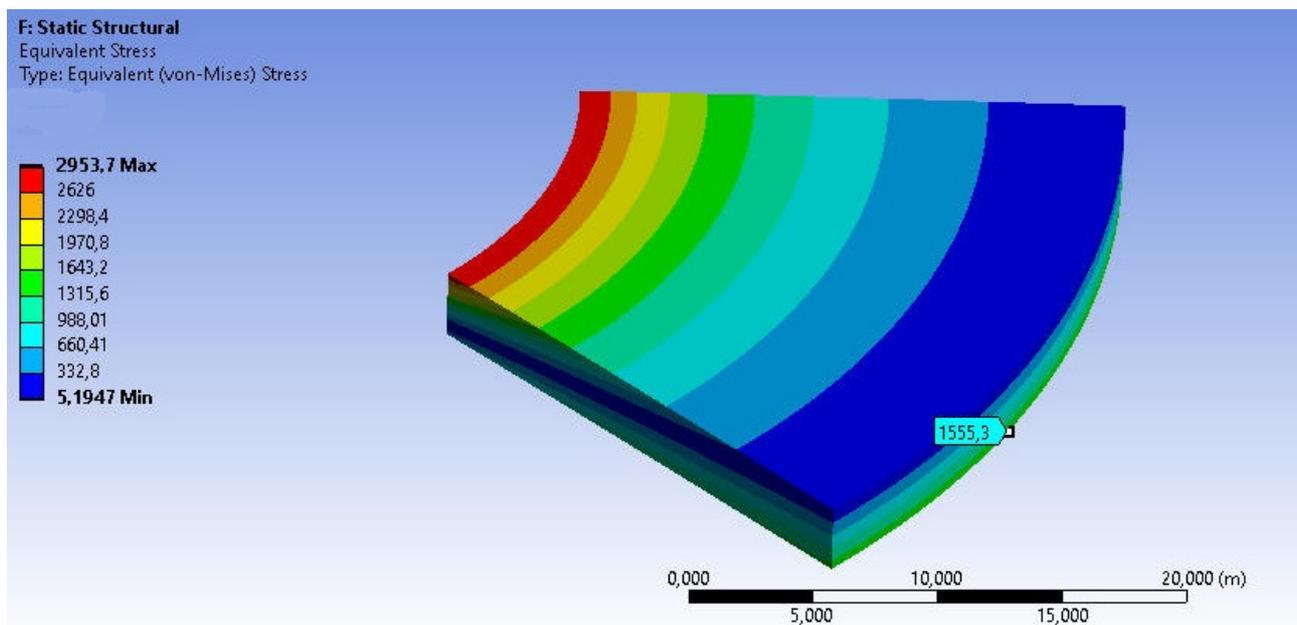


Figura 7.1: andamento tensioni equivalenti sulla molla con deflessione 75% di  $h_o$

Dal punto di vista ideale considerando una superficie liscia senza errori, senza rinforzi superficiali e senza stati di compressione il valore del fattore di rischio si può calcolare come:

$$R_f(x) = \frac{\sigma(x)}{\sigma_{Rp,0.2}} \quad (7.2)$$

Sotto queste condizioni il fattore di rischio varia linearmente in funzione dello stato di tensione  $\sigma(x)$  considerato lungo la sezione rettangolare della molla, e dove il carico di snervamento è una costante. Il valore di  $R_f$  va via via a decrescere linearmente scendendo in profondità nella matrice metallica perché si viene a evidenziare un valore di tensione minore, e quindi avremo un valore massimo in superficie che individua il punto critico del materiale dove si posiziona e nuclea la cricca.

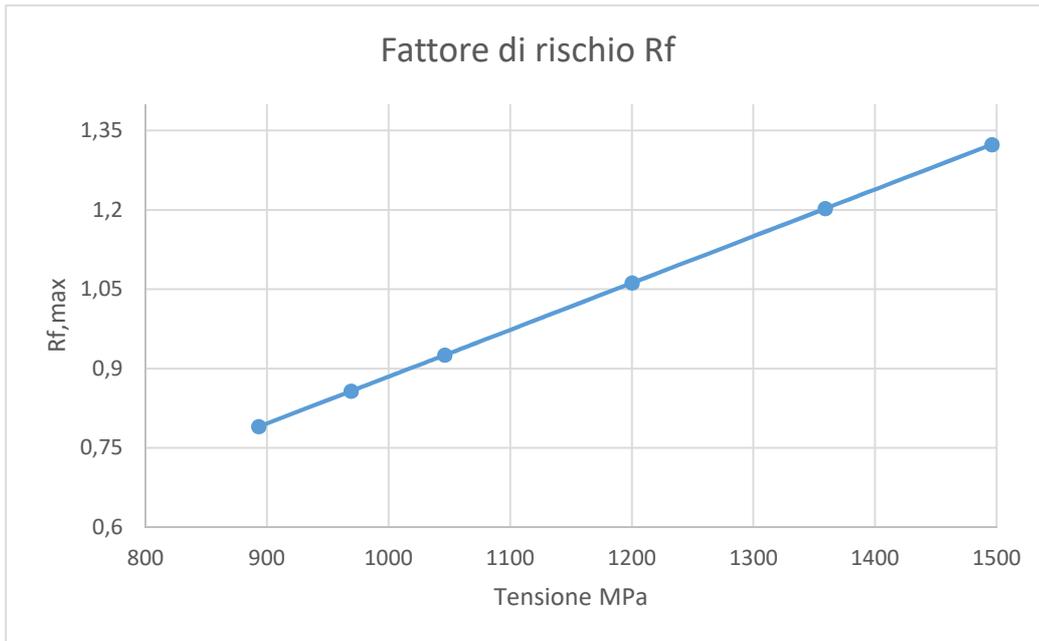


Figura 7.2: andamento fattore di rischio Rf

Per quanto riguarda l'andamento delle tensioni sotto la superficie della molla si vede come esso va via via a diminuire man mano che ci spostiamo in profondità aumentando la distanza dalla superficie. Quindi a seconda del valore dello stato di tensione applicato alla molla può variare la posizione del valore  $R_{f\ max}$ .

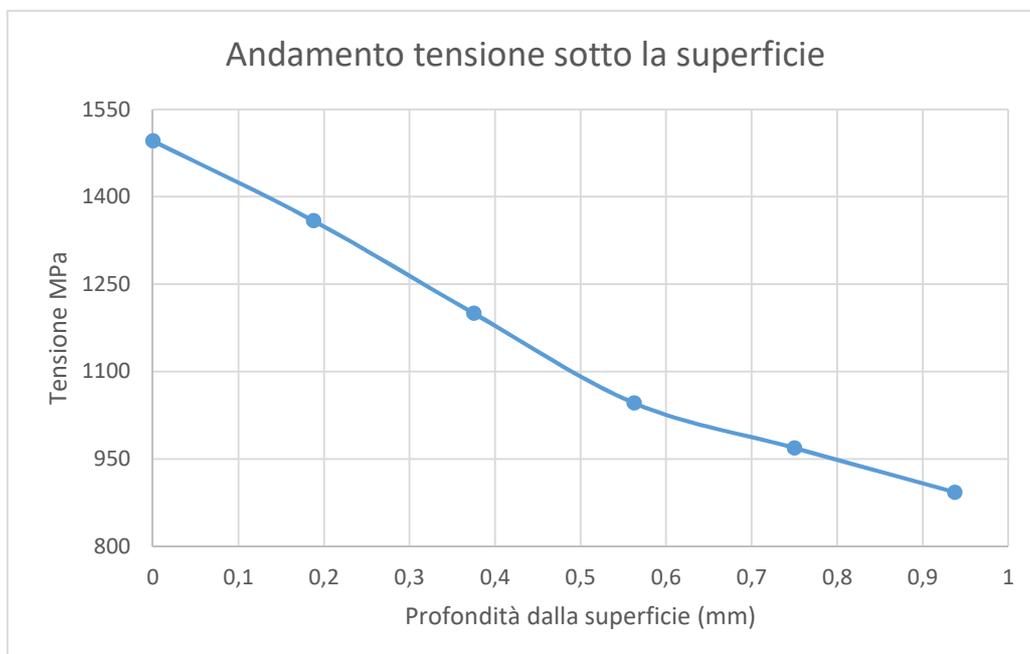


Figura 7.3: andamento della tensione al di sotto della superficie della molla

## 7.2 Effetto trattamento superficiale

Il trattamento superficiale di rinforzo può essere un metodo che può significativamente sopprimere l'inizio delle cricche da fatica lungo la superficie. Le proprietà del materiale infatti sono un importante fattore che domina il comportamento a fatica dei componenti metallici e indicano la resistenza che il materiale oppone nei confronti della cricca.

Lo strato superficiale del metallo in generale si può trovare sotto forma di strato normale oppure come strato rinforzato, e in questo caso i primi strati del materiale avranno una durezza maggiore rispetto alla matrice metallica interna al corpo. Si avrà quindi un valore  $\sigma_{Rp,0.2}$  che sarà variato in seguito al trattamento superficiale e a parità di tensione applicata avremo un valore del fattore di rischio che risulterà essere minore in superficie. Esso può essere calcolato come segue:

$$R_f(x) = \frac{\sigma(x)}{\sigma_{Rp,0.2}(x)} \quad (7.3)$$

Andando a considerare per esempio per il nostro caso di studio un valore di trattamento superficiale che porti la tensione  $\sigma_{Rp,0.2}$  a un valore di 1600 MPa si può diagrammare il nuovo andamento del fattore di rischio che sarà minore sui primi strati del materiale e ridotto del valore del nuovo snervamento. Questo andrà ad implicare che il valore di picco di  $R_f$  si evidenzia al di sotto della superficie della molla e quindi la cricca viene spinta a nucleare all'interno della sezione rettangolare.

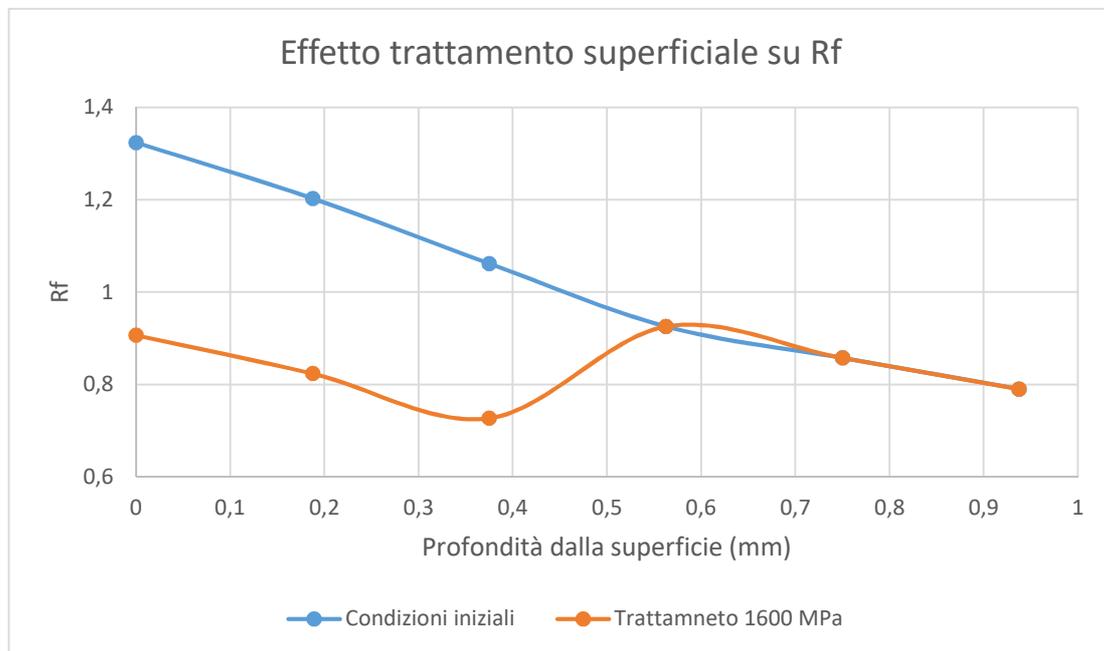


Figura 7.4: andamento  $R_f$  a seguito del trattamento superficiale

Il rinforzo superficiale quindi può migliorare efficacemente le proprietà di fatica dei materiali aumentandone l'affidabilità e cercando di inibire la nucleazione della cricca lungo la superficie.

### 7.3 Effetto tensione di compressione

L'applicazione di uno stato di tensione di compressione sul componente ha l'effetto di migliorare la vita a fatica perché va a ridurre lo stato di tensione esterno. Sotto queste condizioni per calcolare il nuovo fattore di rischio, la tensione di compressione  $\sigma_{compres}(x)$  viene sovrapposta alla tensione esterna  $\sigma(x)$  in modo da ridurla, ottenendo così il seguente risultato:

$$R_f(x) = \frac{\sigma(x) + \sigma_{compres}(x)}{\sigma_{Rp,0.2}} \quad (7.4)$$

In generale le molle Belleville al fine di allungare la loro vita a fatica e prevenire la nucleazione delle cricche lungo la superficie vengono sottoposte a un precarico di compressione che di solito è pari a circa il 15% - 20% del valore dello spostamento libero  $h_0$ . Andando a imporre queste condizioni operative, per il nostro caso in esame, si viene a ottenere un andamento grafico di  $R_f$  che va a decrescere all'aumentare del valore dello stato di compressione, e quindi la posizione di  $R_{f\ max}$  è spinta al di sotto della superficie dove la tensione di compressione tende a zero e non influenza la matrice metallica.

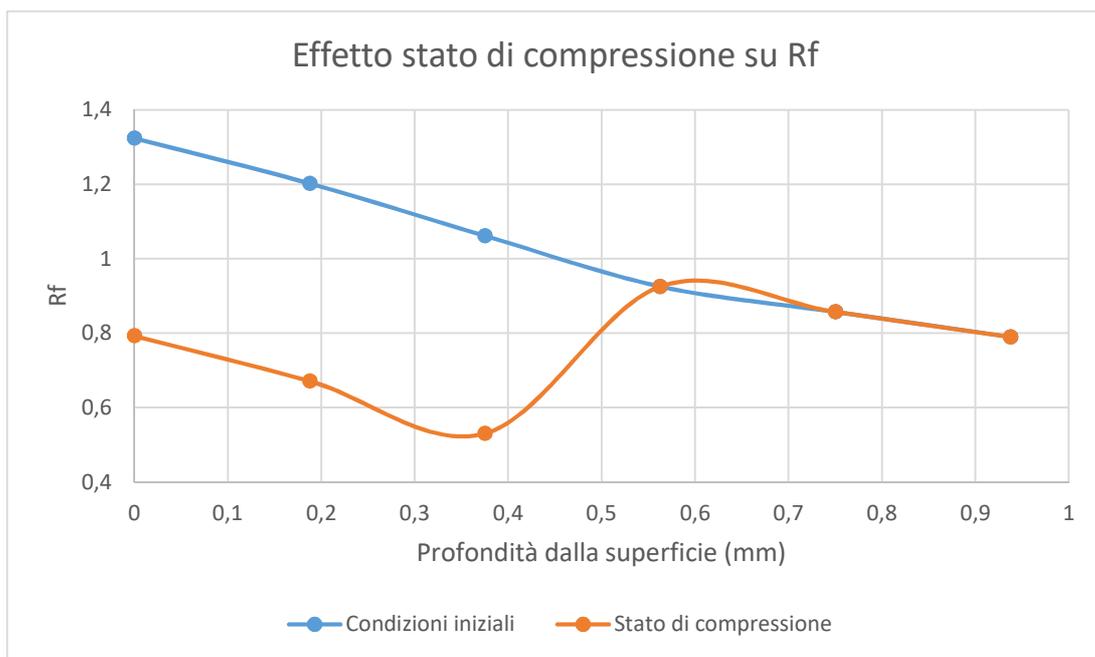


Figura 7.5: andamento  $R_f$  a seguito dello stato di compressione

Anche in questo caso avremo un beneficio nei confronti della vita a fatica delle molle, che porta a un aumento del loro numero di cicli cercando di inibire la nucleazione della cricca.

#### 7.4 Effetto rugosità superficiale

Un altro parametro che può influenzare la nucleazione delle cricche è la rugosità superficiale che ha un effetto negativo sulla vita a fatica, perché rispetto al profilo ideale che si ipotizza avere nella progettazione quindi senza errori di forma, nell'ambito reale a seguito del processo produttivo il profilo può presentare degli errori di forma che lo fanno discostare dall'ambito ideale. Si possono evidenziare quindi una serie di valli e creste lungo la superficie che vanno a determinare uno stato di concentrazione delle tensioni sul materiale; questo andrà a favorire il raggiungimento di picchi tensionali critici, portando a facilitare la nucleazione della cricca.

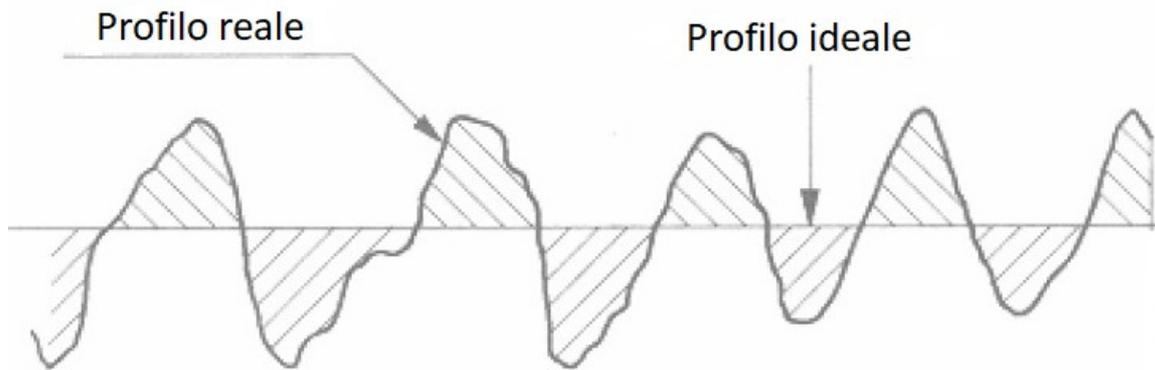


Figura 7.6: rugosità nel caso di profilo ideale e reale

Sotto queste condizioni per andare a ottenere il nuovo valore del fattore di rischio si fa riferimento a un parametro moltiplicativo  $K_t$  che è legato alla forma e alla dimensione dei difetti sulla superficie del materiale, ed è chiamato fattore di concentrazione degli stress; dalla letteratura [12] viene proposto un suo calcolo in funzione della rugosità come:

$$K_t = 1 + 2 \left( \lambda \frac{R_a}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.5)$$

Dove i parametri interni alla formula sono:

- $\lambda$  è la distanza tra le tacche dalla profondità e di solito imposto pari a uno;
- $\rho$  è il raggio di curvatura dell'avvallamento della superficie a causa della rugosità;
- $R_a$  è la rugosità del materiale.

Il fattore di rischio sarà proporzionale a  $K_t$  e moltiplicherà lo stato di tensione esterno:

$$R_f(x) = \frac{K_t \sigma(x)}{\sigma_{Rp,0.2}} \quad (7.6)$$

A causa della rugosità si avrà che il valore di  $R_f$  massimo si avrà su uno degli avvallamenti della superficie, e sarà proporzionale a  $K_t$  che implicherà un suo aumento; in questo caso la rugosità avrà

un effetto negativo sulla vita a fatica del componente perché va a favorire la nucleazione delle cricche, modificando la distribuzione dello stato di stress.

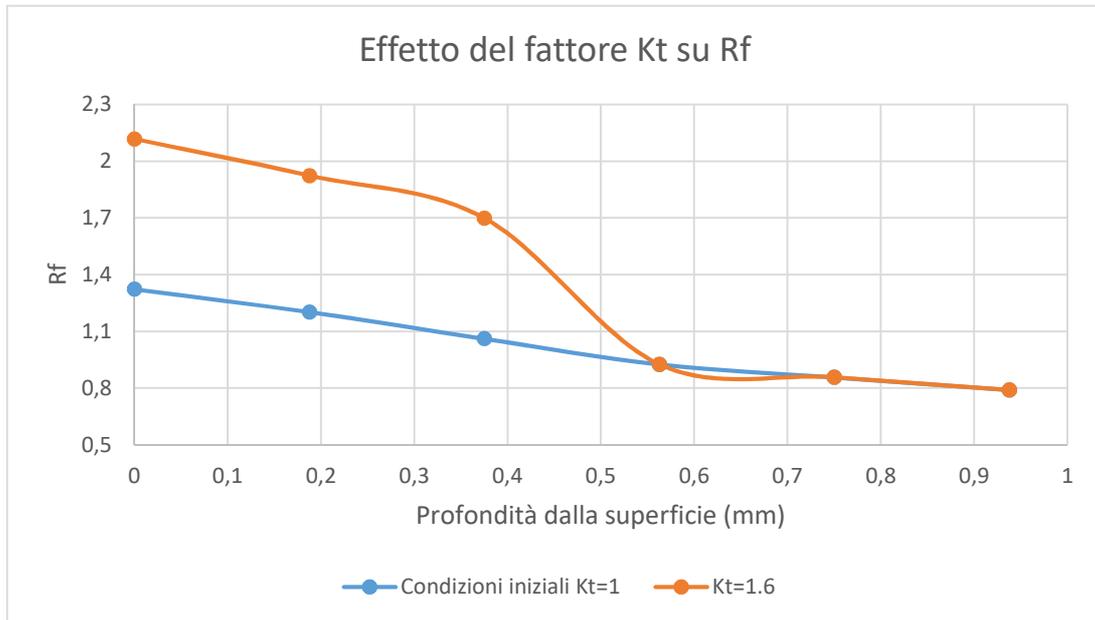


Figura 7.7: andamento  $R_f$  sotto l'influenza della rugosità

Dall'andamento grafico si rileva quindi un aumento del fattore di rischio che diminuisce man mano che ci spostiamo all'interno della matrice del materiale.

In generale si dovrebbe cercare di ridurre la rugosità superficiale in modo da diminuire la concentrazione dello stato di tensione così da migliorare l'affidabilità del componente nel tempo.

### 7.5 Conclusioni sul fattore di rischio

Nel totale la vita a fatica dei componenti è influenzata da una serie di fattori che insieme possono contribuire a migliorare o peggiorare la durata del pezzo, e tramite il fattore di rischio  $R_f$  si può facilmente comprendere l'interazione tra questi parametri così da individuare il punto critico sull'organo meccanico.

Altri due fattori che possono influenzare la vita a fatica possono essere l'eventuale presenza di inclusioni all'interno del pezzo e la dimensione del componente:

- In particolare si rileva che all'aumentare delle dimensioni delle inclusioni si diminuisce il numero di cicli a cui il pezzo può resistere. La discontinuità si presenterà non più sulla superficie ma direttamente all'interno della matrice dove nuclea la cricca portando a una morte accelerata. Per evitare ciò bisogna avere inclusioni piccole così da cercare di estendere la vita a fatica;

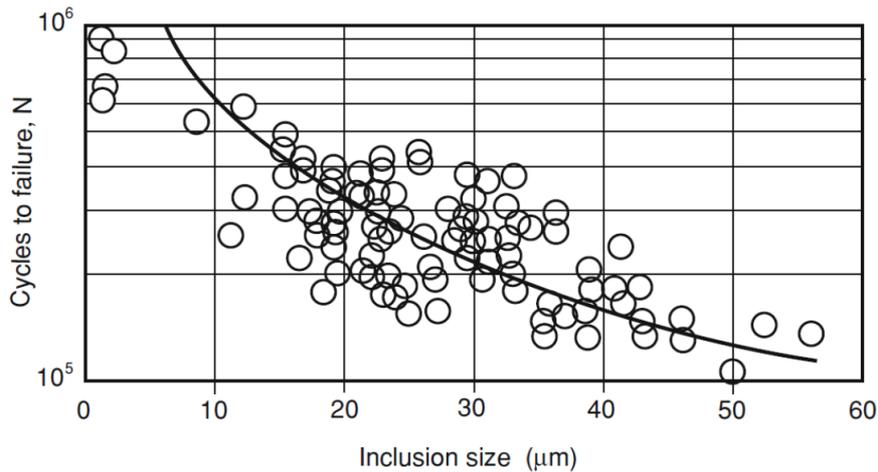


Figura 7.8: effetto delle inclusioni sulla vita a fatica [7]

- Invece avremo che all'aumentare della dimensione del componente sarà maggiore la probabilità che vi sia un difetto all'interno del pezzo in una condizione critica.

In generale quando si cerca di spingere la cricca a nucleare al di sotto della superficie del materiale allora si riesce a estendere la vita a fatica; al contrario i componenti che hanno dei difetti che iniziano sulla superficie avranno una vita a fatica minore.

Tramite ad esempio il rinforzo superficiale o l'effetto dello stato di compressione, si cerca di aumentare la vita del componente rendendo difficile la prima fase relativa alla nucleazione della cricca, però rendiamo più semplice la fase di propagazione. Quindi si dovrebbe cercare di avere grani fini in superficie così da ostacolare la cricca tramite i bordi di grano, mentre internamente si devono avere grani grossi. Con grani grossi avremo una bassa velocità durante la propagazione, mentre con grani fini avremo una bassa velocità durante la nucleazione.

Dal punto di vista del carico al contrario se al componente sono applicati carichi bassi allora si deve cercare di bloccare la fase di nucleazione della cricca, mentre se sono applicati carichi elevati allora si deve cercare di ostacolare la fase di propagazione perché si giunge facilmente alla nucleazione del difetto.

## 8 Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi si è cercato di analizzare in maniera completa le caratteristiche che identificano le molle Belleville durante le loro condizioni operative, e nello stesso tempo di studiare cosa comporta la presenza di una cricca all'interno del componente dal punto di vista analitico e numerico, e come questa può compromettere la durata di vita a fatica del pezzo.

Per far ciò in una prima fase, tramite formulazione analitica proposta da Almen e Laszlo, si sono valutati lo stato di forze e di tensioni nella molla quando viene applicato uno spostamento assiale imposto sulla sommità del tronco di cono, mettendo in evidenza quelli che sono i punti critici della molla durante il suo funzionamento, cioè il valore della tensione indicata come  $\sigma_I$  che si ha sul diametro interno superiore, la quale risulta essere una tensione di compressione, e il valore della tensione  $\sigma_{III}$  che si ha sul diametro esterno inferiore, la quale è invece una tensione di trazione. Andando a rappresentare graficamente l'andamento della tensione e della forza avremo che essi aumentano all'aumentare dello spostamento, e in generale il campo di lavoro del componente non deve mai andare oltre il valore del 75% di  $h_o$  per non sovrasollecitare in maniera eccessiva la molla.

Successivamente si è passati a studiare l'immissione di una cricca all'interno del pezzo tramite le ipotesi della meccanica della frattura, andando a diagrammare l'andamento della vita della molla in termini di numero di cicli e vedendo come man mano che la cricca propaga allora viene sempre di più consumata la durata di vita fino a portare il componente a cedimento. I due parametri che si sono considerati per condurre questa analisi sono stati il fattore di intensificazione delle tensioni  $K_I$  e il valore della tenacità alla frattura  $K_{Ic}$ . Dal confronto di questi due elementi si è visto come procede la propagazione della cricca che determina un aumento nel tempo del fattore  $K_I$  fino a portare il componente a rottura quando si supera il valore limite della tenacità alla frattura.

In questa prima parte della meccanica della frattura si sono adottate determinate ipotesi di lavoro come ad esempio si è deciso un certo valore di cricca iniziale e un certo carico con il quale la molla opera; si sono poi mutate queste condizioni iniziali ripetendo l'analisi iterativa, e vedendo come se si aumenta il valore di lunghezza del difetto o se si aumenta il valore del carico esterno applicato, allora questo comporta un'accelerazione della propagazione della cricca e quindi una diminuzione del numero di cicli del corpo.

I risultati analitici ottenuti sono poi stati confrontati con il metodo di simulazione agli elementi finiti al fine di creare un modello per la molla che possa rappresentare la realtà. Il programma adottato per la simulazione è stato ANSYS APDL con il quale si è cercato di creare prima un modello bidimensionale e poi a seguito della rotazione della geometria intorno al suo asse un modello tridimensionale. Per entrambi i due modelli si sono utilizzati determinati elementi per il processo di discretizzazione e affinando la mesh si è cercata una condizione che permettesse di avere un valore dell'errore energetico, utilizzato per valutare la bontà dei risultati rispetto all'ambito reale, che fosse al di sotto del 15%. Si è ottenuta quindi la convergenza dei risultati con gli elementi plane42 con extra shapes o plane183 nell'ambito bidimensionale e con gli elementi solid186 nell'ambito tridimensionale; si è poi passati al confronto dei risultati con le formule di Almen e Laszlo e si è visto come man mano che aumenta lo spostamento applicato alla molla vi è un errore tra i valori numerici che va via via a crescere, perché le formule analitiche proposte si basano su una serie di ipotesi semplificative quale ad esempio trascurano le tensioni radiali. Nonostante ciò si ha una buona

precisione nella valutazione dello stato di tensioni fino a un valore di spostamento pari al 75% dell'altezza libera della molla.

Proseguendo con l'analisi agli elementi finiti si è poi simulata la presenza di una cricca tramite programma Workbench in due differenti casi, cioè nel caso di una cricca disposta in senso radiale e di una disposta in senso circonferenziale. Dal confronto tra i risultati si è visto come una cricca lungo la direzione radiale nella molla risulta essere favorevolmente orientata lungo la direzione della tensione applicata e quindi andrà sempre a propagare lungo la direzione radiale; al contrario una cricca lungo la direzione circonferenziale non è disposta in modo favorevole al valore della tensione e quindi nelle fasi iniziali essa propaga lungo la circonferenza della molla, ma poi comincia a deviare dalla sua direzione originaria andando a disporsi in modo radiale, perché è attratta in modo più semplice dalla tensione massima. Questo andrà ad implicare per la molla una durata di vita leggermente superiore rispetto al caso con cricca radiale.

Infine nell'ultima parte si sono valutati quali possono essere i principali fattori da tenere in considerazione nell'analisi della vita a fatica della molla e come essi possono essere relazionati tra loro per portare a definire il fattore di rischio di fatica. Quest'ultimo è usato per individuare quale è il punto più debole del componente dove nuclerà la cricca. Tra i metodi che si possono adottare per cercare di ostacolare la nucleazione del difetto troviamo ad esempio il trattamento superficiale o l'induzione di uno stato di compressione, i quali possono portare a ridurre il valore del fattore di rischio di fatica e quindi riuscire a contrastare il difetto. In generale per la molla Belleville per raggiungere questo fine viene applicato uno stato di compressione che è pari al 15% - 20% dell'altezza libera.

Da questo studio si può concludere che la presenza di una cricca è sempre deleteria dal punto di vista della fatica e comporta una morte accelerata del componente; si deve quindi analizzare correttamente se il pezzo presenta al suo interno dei difetti che possono compromettere la sua operatività in modo che una volta individuati si può agire in maniera preventiva al fine di evitare il cedimento del componente, che può avere delle conseguenze più gravi nei confronti del sistema dove viene utilizzata la molla.



## 9 Bibliografia

- [1] Help ANSYS, Mechanical APDL;
- [2] Help ANSYS, Workbench;
- [3] ANSYS, Theory reference;
- [4] Antonio Gugliotta, 2002, Elementi finiti, Otto Editore, Politecnico di Torino;
- [5] Antonio Gugliotta, 2017, Solidi assialsimetrici, Politecnico di Torino;
- [6] Appunti del corso “Progettazione di prodotto e processo con metodi numerici”, Aurelio Somà, Politecnico di Torino;
- [7] Appunti del corso “Meccanica dei materiali”, Lorenzo Peroni, Politecnico di Torino;
- [8] Appunti del corso “Costruzione di macchine (meccanica della frattura)”, Antonio Gugliotta, Politecnico di Torino;
- [9] Vlasdimir Kobelev, “Durability of Springs”, Springer, 2018;
- [10] Yuan Li, Shaoping Wang, Jian Shi, “Crack propagation based remaining useful life prediction of the Belleville spring in linear oscillating motor”, Beihang University, China, 2018;
- [11] Ebubekir Can Günes, Ismet Çelik, “Use of disc springs in a pellet fuel machine”, Technical University, Prague, 2017;
- [12] D.Q.Q Wang, Q. Zhu, Y.K. Zhang, C.X. Ren, X.W. Li, “Evaluating the fatigue cracking risk of surface strengthened spring steel with abnormal life time distribution”, Material science and engineering, 2018;
- [13] Almen and Laszlo, “The uniform section disk spring”, Detroit, 1936;
- [14] Schonorr Corporation, “Handbook for disc springs”;