



**Politecnico
di Torino**

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA ED AEROSPAZIALE
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Metodologie avanzate nelle analisi 3D termoelastiche di strutture composite

Relatore
Salvatore Brischetto

Correlatore
Roberto Torre

Candidato
Domenico Cesare

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Obiettivi	2
2	Modellazione 3D dei gusci sferici	3
2.1	Modellazione del problema	4
2.2	Relazioni geometriche	7
2.3	Equazioni costitutive	9
2.4	Equazioni indefinite di equilibrio 3D	12
2.5	Analisi statica	22
2.6	Analisi alle vibrazioni libere	25
3	Revisione codice per analisi alle vibrazioni libere di piastre e gusci multistrato	30
3.1	Modifiche effettuate sul codice 3DES	30
3.2	Confronto, validazione e analisi di convergenza	33
4	Revisione codice per analisi statiche di piastre e gusci multistrato	75
4.1	Modifiche effettuate sul codice 3DES	75
4.2	Confronto, validazione e analisi di convergenza	77
5	Modello guscio 3D per analisi termomeccaniche di strutture multistrato	96
5.1	Modello guscio 3D termomeccanico disaccoppiato	97
5.1.1	Relazioni geometriche	97
5.1.2	Equazione costitutiva	99
5.1.3	Determinazione del profilo di temperatura e del relativo carico termico equivalente	107
5.1.4	Risoluzione della versione 3D dell'equazione di conducibilità di Fourier	109

5.1.5	Risoluzione della versione 1D dell'equazione di conducibilità di Fourier	112
5.1.6	Profilo di temperatura assunto lineare a priori	113
5.2	Modello guscio 3D termomeccanico accoppiato	114
5.2.1	Relazioni geometriche e costitutive	114
5.2.2	Equazioni di governo completamente accoppiate	114
6	Risultati analisi termomeccanica accoppiata su strutture multistrato	125
6.1	Confronto e validazione	126
7	Conclusioni e sviluppi futuri	167

Capitolo 1

Introduzione

In ambito ingegneristico e, in particolare, in ambito aerospaziale la conoscenza approfondita del comportamento delle strutture realizzate con materiali innovativi, sia multistrato che FGM (*Functionally Graded Materials*), diventa sempre più importante per la buona realizzazione dei progetti aeronautici d'avanguardia. Questi particolari materiali vengono utilizzati al fine di garantire delle performance strutturali di alto livello e, per poter ottenere ciò, bisogna disporre necessariamente di alcune caratteristiche che sono: un elevato valore di rigidità specifica (ovvero un elevato rapporto di E/ρ), ottime proprietà termiche e una capacità di distribuire nella maniera più uniforme possibile le tensioni lungo lo spessore. Essendo materiali di nuova generazione, non è ancora esaurita la conoscenza riguardo al loro comportamento sotto l'azione dei vari carichi possibili durante l'esercizio e, per questo motivo, diventano necessarie numerose e dettagliate analisi su di essi.

Oltre alle analisi statiche e modali/alle vibrazioni libere diventa fondamentale, sia per velivoli classici e in particolare per quelli supersonici e/o ipersonici, uno specifico studio dei carichi termici agenti sulla struttura, dato che, durante le diverse fasi di volo, il velivolo subisce una notevole variazione di temperatura i cui effetti sulla struttura possono essere parecchio rilevanti. Ciò, inoltre, permette di comprendere globalmente il comportamento della struttura e rendere il velivolo il più sicuro possibile.

Alcuni esempi nei quali questo particolare tipo di analisi può essere utilizzato con successo sono

- ali di nuova generazione per velivoli commerciali che sono esposte ad un'alta incidenza di radiazioni solari
- strutture di velivoli supersonici e ipersonici
- turbine dei velivoli

- strutture delle capsule di rientro da missioni spaziali
- strutture orbitali agenti sotto carichi termici ciclici

Ad oggi, esistono pochi modelli analitici che prendono in considerazione in maniera piuttosto dettagliata analisi termomeccaniche 3D esatte, sia esse disaccoppiate che accoppiate. Sono, invece, molto più numerosi i modelli 2D esatti e 2D numerici; in particolare questi ultimi sono molto importanti in campo ingegneristico, perchè, come verrà spiegato anche in seguito, essi permettono di poter studiare dei casi di natura pratica, cosa che, invece, non è possibile con i modelli esatti dato che questi sottostanno a rigide ipotesi sulle caratteristiche della struttura.

1.1 Obiettivi

Il presente lavoro di tesi si pone due diversi obiettivi: il primo è il miglioramento, in termini di performance, di un codice Matlab[®] 3D esatto, sviluppato per gusci, cilindri e piastre, già correttamente validato e perfettamente funzionante, utilizzato per analisi meccaniche di strutture multistrato. L'obiettivo di questa prima parte è quello di ottimizzare e velocizzare il codice stesso per diminuire i tempi di calcolo e il costo computazionale.

Per quanto riguarda la seconda parte, essa prevede l'estensione del precedente modello meccanico attraverso la realizzazione della formulazione termomeccanica accoppiata, in cui anche la componente termica viene trattata come una variabile primaria del problema. Si precisa che in letteratura è già disponibile una formulazione termomeccanica disaccoppiata, la quale prevede il calcolo del profilo di temperatura lungo lo spessore della struttura utilizzando separatamente l'equazione di conduzione del calore di Fourier. In questo modello disaccoppiato la sovratemperatura non verrà trattata come una variabile primaria del problema, perchè essa non viene calcolata insieme alle tre componenti di spostamento, bensì, grazie all'equazione del calore di Fourier (che può essere introdotta nel modello in tre differenti versioni), la componente termica viene calcolata con una formulazione matematica *a parte*, e solo successivamente verrà introdotta nelle equazioni di equilibrio che, una volta risolte, permettono di conoscere il valore delle tre componenti di spostamento; queste componenti, ovviamente, sono influenzate dal valore di sovratemperatura precedentemente calcolato.

Capitolo 2

Modellazione 3D dei gusci sferici

I gusci sferici sono elementi strutturali tridimensionali, in cui le dimensioni in pianta sono, solitamente, prevalenti rispetto allo spessore. In generale, le direzioni in pianta della geometria sono curve e le dimensioni possono essere valutate attraverso la definizione di raggi di curvatura R_α ed R_β che vengono definiti lungo la direzione α e β del sistema di riferimento. I valori di R_α ed R_β possono assumere sia valori costanti che variabili lungo le tre direzioni.

Il sistema di riferimento che viene utilizzato per questo modello è il sistema *curvilineo misto ortogonale*, così chiamato dato che gli assi α e β sono curvilinei, giacchè seguono la curvatura della geometria del guscio, mentre l'asse z rimane ortogonale alla superficie media dello stesso, la quale verrà indicata in seguito come Ω_0 ed è presa come superficie di riferimento della geometria, sulla quale ci si riferisce per il calcolo di alcune grandezze caratteristiche. In Figura 2.1 è possibile vedere un esempio di guscio sferico. Grazie a questo particolare sistema di riferimento, che verrà usato nella presente tesi per scrivere le equazioni di governo del problema, è possibile considerare le seguenti geometrie:

1. Gusci sferici ($R_\alpha = R_\beta = \text{cost.}$)
2. Gusci cilindrici ($R_\alpha = \text{cost.}$ e $R_\beta = \infty$ o viceversa)
3. Cilindri ($R_\alpha = \text{cost.}$ e $R_\beta = \infty$ o viceversa)
4. Piastre ($R_\alpha = R_\beta = \infty$).

La particolarità di questa formulazione sta nel fatto che le equazioni di governo che si usano per risolvere problemi riferiti a piastre e cilindri derivano direttamente da quelle proprie dei gusci sferici, andando semplicemente a considerare i corretti raggi di curvatura per lo specifico caso, come è indicato nell'elenco puntato precedente. Si noti che la differenza tra i gusci cilindrici

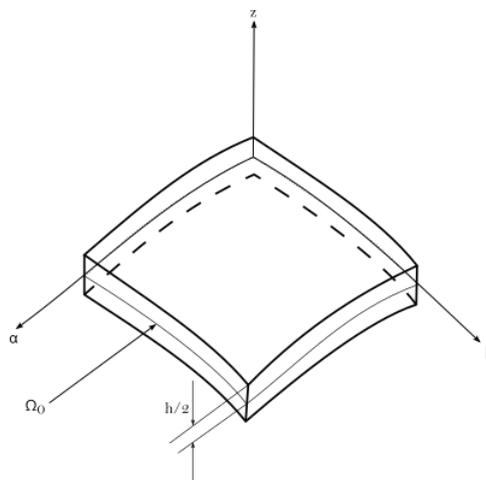


Figura 2.1: *Guscio sferico nel sistema di coordinate curvilineo misto ortogonale (α, β, z)*

e i cilindri sta nelle dimensioni in pianta, infatti il secondo avrà sempre una di esse pari a $2\pi R_\alpha$ oppure $2\pi R_\beta$, a seconda di quale tra i due raggi di curvatura R_α ed R_β è pari ad un valore costante. Le quattro geometrie a cui si fa riferimento è possibile visualizzarle in Figura 2.2.

2.1 Modellazione del problema

L'analisi meccanica e termomeccanica trattata nella presente tesi comporta la risoluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali (ovvero le equazioni indefinite di equilibrio) le quali contengono le incognite del problema. Nel caso in questione, si parla di *modello agli spostamenti* dato che la teoria utilizzata prevede come incognite gli spostamenti; esistono, in letteratura, anche altri casi in cui le incognite sono le tensioni oppure sia le tensioni che gli spostamenti (si parla, rispettivamente, di *modello alle tensioni* per il primo caso mentre di *modello misto* per il secondo).

In meccanica strutturale, la realtà è tridimensionale, ovvero le dimensioni lungo gli assi α, β e z hanno la stessa importanza e non possono essere trascurate. Si parla di modellazione tridimensionale (o, più semplicemente, 3D) quando tutte le incognite dipendono *allo stesso modo* dalle dimensioni lungo gli assi del sistema di riferimento considerato. Così facendo, il campo degli spostamenti (che indica le incognite del problema in questione) dipende dalle tre coordinate del sistema di riferimento. In formule è possibile scrivere

$$u = f(\alpha, \beta, z), \quad v = f(\alpha, \beta, z), \quad w = f(\alpha, \beta, z). \quad (2.1)$$

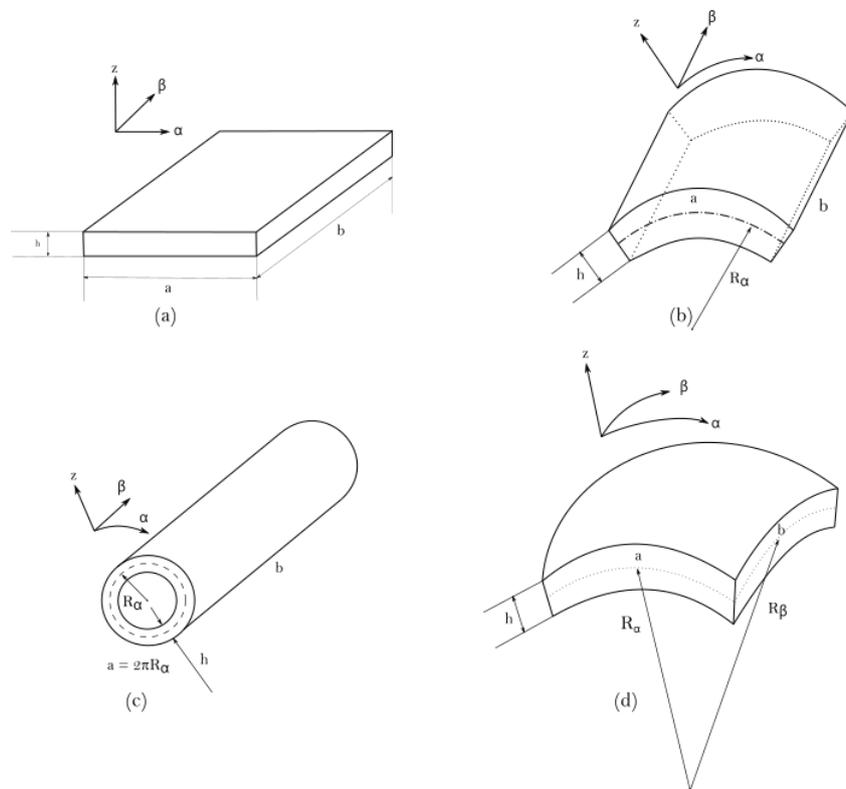


Figura 2.2: Geometrie trattabili utilizzando le relazioni esprimibili nel sistema di riferimento curvilineo misto ortogonale: (a) piastra, (b) guscio cilindrico, (c) cilindro, (d) guscio sferico

Le equazioni indefinite di equilibrio per l'analisi termomeccanica possono essere risolte sia in *forma esatta* che in *forma approssimata*; la differenza sta nel fatto che la prima permette di risolvere le equazioni in maniera analitica e, solitamente, è possibile eseguirla solo per casi molto particolari, che richiedono specifiche condizioni di carico, condizioni al contorno e laminazioni del materiale nel caso in cui si trattino i materiali compositi, le cui lamine possono essere orientate secondo un certo angolo rispetto al sistema di riferimento della struttura. La forma approssimata, invece, permette di eseguire analisi anche per casi molto più complicati e generali, ma, ovviamente, a causa della risoluzione matematica che si va ad utilizzare, che può essere, ad esempio, numerica, non permettono di conoscere i risultati esatti. Da questa semplice discussione è già possibile comprendere dei vantaggi e degli svantaggi di questi due tipi di forme di risoluzione di questo genere: da una parte si ha a disposizione la conoscenza di risultati esatti del problema, mentre dall'altra si perde molto in generalità, dato che non tutti i casi possibili nella realtà sono analizzabili con questi modelli esatti; dal punto di vista ingegneristico, questo fattore può essere determinante, perchè spesso si ha a che fare con condizioni molto particolari che non è possibile studiare con le analisi esatte. Infatti, con un'analisi 3D esatte, è possibile solamente analizzare strutture semplicemente appoggiate, i cui carichi siano armonici e la cui laminazione non sia differente da 0° oppure $\pm 90^\circ$. Queste limitazioni sono date dalla complessità matematica del problema, infatti è sufficiente che solo una delle precedenti ipotesi venga meno, che il problema non sia più risolvibile in forma chiusa. Entrando più nello specifico, queste ipotesi sono necessarie dato che, per poter compiere un'analisi esatta, si ha la necessità di imporre le incognite in forma armonica, la quale permette di scriverle come una combinazione di seni e coseni; sfruttando le ipotesi sulla configurazione della struttura, si riesce raccogliere a fattori comune e, successivamente, ad elidere la combinazione di seni e coseni precedentemente imposta, risolvendo il problema in forma chiusa.

Come ultima osservazione va chiarito che il modello descritto nella presente tesi è di tipo *layerwise*, ovvero lo spostamento viene modellato in ogni strato della geometria multistrato andando, attraverso delle opportune condizioni, a "dialogare" opportunamente con gli spostamenti degli strati adiacenti. Questi modelli *layerwise* si differenziano dai modelli *equivalent single layer* perchè in questi ultimi, seppur la geometria sia composta fisicamente da più strati di materiali diverso, il problema viene formulato considerando la struttura come se fosse composta da un unico strato risultante, che tiene in conto di tutti i differenti strati fisici presenti. Questo comporta che le incognite vengano calcolate considerando questo particolare strato risultante. L'utilizzo dei modelli *equivalent single layer* è largamente utilizzato, dato

che ha costi computazionali molto bassi, ma, ovviamente, i risultati forniti sono più approssimati; diverso è il caso per i modelli layerwise, che, invece, forniscono risultati molto più precisi a discapito di un costo computazionale ben maggiore. In letteratura, sono anche presenti dei modelli equivalent single layer più evoluti che non arrivano alla precisione dei modelli layerwise, ma che forniscono alcune informazioni tipiche di questi: un esempio sono i modelli *equivalent single layer zigzag*, in cui le funzioni zigzag, le quali hanno un'ampiezza costante che non dipende dallo spessore del singolo strato, consentono di conoscere alcune informazioni aggiuntive sulle incognite e sulle loro derivate.

In questo capitolo verrà presentata, in maniera dettagliata, la formulazione matematica su cui si basa il codice Matlab[®] a cui è stato effettuato un incremento delle performance computazionali. Vengono esplicitate le relazioni geometriche riferite ai gusci sferici, le equazioni costitutive del materiale, le equazioni di governo nel sistema di riferimento curvilineo misto ortogonale e la procedura per la risoluzione del sistema di equazioni differenziali di primo grado.

2.2 Relazioni geometriche

Le relazioni geometriche del guscio sferico, scritte nel sistema di riferimento curvilineo misto ortogonale, sono le relazioni che legano le deformazioni del guscio con gli spostamenti. Nel caso generico di un guscio sferico con raggi di curvatura non costanti, le relazioni geometriche possono essere scritte, come si può vedere in [1]

$$e_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{U_i}{\sqrt{g_i}} \right) + \frac{1}{2g_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k} \frac{U_k}{\sqrt{g_k}} \quad \text{per } i = 1, 2, 3 \quad (2.2a)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_j}} \left[g_i \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{U_i}{\sqrt{g_i}} \right) + g_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{U_j}{\sqrt{g_j}} \right) \right] \quad \text{per } i = 1, 2, 3 \wedge i \neq j \quad (2.2b)$$

dove il termine e_i indica le tre componenti di deformazione nel piano mentre γ_{ij} le tre fuori dal piano. In più, si trovano dei parametri geometrici specifici per i gusci, che consentono di tenere in considerazione la curvatura della geometria, che sono i termini g_i . In particolare, essi derivano dalle equazioni di Lamb, ed è possibile scriverli come

$$g_1 = \left[A \left(1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \right]^2, \quad g_2 = \left[B \left(1 + \frac{z}{R_\beta} \right) \right]^2, \quad g_3 = 1. \quad (2.3)$$

in cui, invece, compaiono i termini A e B , i quali indicano la lunghezza dei vettori tangenti alle curve parallele agli assi α e β del sistema di riferimento curvilineo misto ortogonale.

Dalle equazioni (2.2a) - (2.2b) è possibile, quindi, ottenere

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_\alpha}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{w}{R_\alpha} \right) \quad (2.4a)$$

$$\varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_\beta}} \left(\frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{w}{R_\beta} \right) \quad (2.4b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.4c)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{A \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)}{B \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{u}{A \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)} \right] + \frac{B \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)}{A \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{v}{B \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)} \right] \quad (2.4d)$$

$$\gamma_{\alpha z} = \frac{1}{A \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + A \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{u}{A \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)} \right] \quad (2.4e)$$

$$\gamma_{\beta z} = \frac{1}{B \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)} \frac{\partial w}{\partial \beta} + B \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{v}{B \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)} \right]. \quad (2.4f)$$

In particolare, nelle espressioni (2.4a) - (2.4f), per una semplice questione di notazione, valgono le seguenti uguaglianze: $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $\alpha_3 = z$, $U_1 = u$, $U_2 = v$, $U_3 = w$ (le prime tre uguaglianze sono riferite alla nominazione degli assi del sistema di riferimento considerato, mentre le restanti tre sono riferite alla notazione utilizzata per gli spostamenti). Attraverso queste relazioni è anche possibile definire le quantità parametriche della geometria (ovvero le grandezze che dipendono dallo spessore z) come $H_\alpha = 1 + \frac{z}{R_\alpha}$, $H_\beta = 1 + \frac{z}{R_\beta}$ e $H_z = 1$ (il cui valore è pari ad 1 perchè l'asse z è rettilineo, infatti, se si andasse a considerare il relativo termine di curvatura $\frac{z}{R_z}$, in aggiunta al fatto che l'asse ha raggio di curvatura infinita in quanto rettilineo, si può facilmente comprendere il motivo per cui H_z è unitario).

Considerando solo il caso di gusci i cui raggi di curvatura siano costanti (ovvero $R_\alpha = \text{cost}$ e $R_\beta = \text{cost}$), i termini geometrici diventano $A = B = 1$ ed è, quindi, possibile semplificare le equazioni (2.4a) - (2.4f) come segue

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial \alpha} + \frac{w^k}{H_\alpha R_\alpha} \quad (2.5a)$$

$$\varepsilon_{\beta\beta}^k = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial v^k}{\partial \beta} + \frac{w^k}{H_\beta R_\beta} \quad (2.5b)$$

$$\varepsilon_{zz}^k = \frac{\partial w^k}{\partial z} \quad (2.5c)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial v^k}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u^k}{\partial \beta} \quad (2.5d)$$

$$\gamma_{\alpha z}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial w^k}{\partial \alpha} + \frac{\partial u^k}{\partial z} - \frac{u^k}{H_\alpha R_\alpha} \quad (2.5e)$$

$$\gamma_{\beta z}^k = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial w^k}{\partial \beta} + \frac{\partial v^k}{\partial z} - \frac{v^k}{H_\beta R_\beta}. \quad (2.5f)$$

Le equazioni (2.5a) - (2.5f) sono le relazioni geometriche relative al guscio sferico, che è possibile anche vedere in [1] e [2]. Come è possibile vedere, in esse è presente l'apice k , il quale indica il numero del generico strato fisico del multistrato al quale si fa riferimento per il calcolo delle deformazioni.

2.3 Equazioni costitutive

Le equazioni costitutive 3D del guscio sono le relazioni che permettono di legare le tensioni con le deformazioni, attraverso i coefficienti elastici. Esse vengono scritte, genericamente, nel sistema di riferimento struttura, a seguito di un'opportuna rotazione dei coefficienti elastici della matrice \mathbf{Q} , i quali sono, invece, calcolati nel sistema di riferimento materiale, giacchè i valori numerici considerati provengono da prove sperimentali sul materiale.

In generale, la matrice dei coefficienti elastici per un materiale monoclinico, nel sistema di riferimento materiale, può essere scritta, come anche espresso in [3]

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & Q_{26} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{36} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Essa è composta da 13 coefficienti indipendenti, tutti valutabili attraverso opportune prove sperimentali sul materiale da considerare. Nel caso in questione, dovendo risolvere il problema in forma chiusa, si rende obbligatorio, come anche detto in precedenza, poter utilizzare solo angoli di laminazione pari a 0° oppure $\pm 90^\circ$ rendendo necessariamente i termini Q_{16} , Q_{26} , Q_{36} e

Q_{45} nulli e, quindi, ottenendo la matrice \mathbf{Q} valida per i materiali ortotropi

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Attraverso questa è possibile scrivere la legge di Hooke come

$$\sigma_m = \mathbf{Q}\varepsilon_m \quad (2.8)$$

dove il pedice m indica proprio il sistema di riferimento materiale.

Essendo i coefficienti della matrice \mathbf{Q} valutati nel sistema di riferimento materiale (α_1, β_1, z_1) , essi devono essere opportunamente ruotati, in modo da poter avere la matrice dei coefficienti elastici nel sistema di riferimento struttura (α, β, z) , giacchè il problema è definito proprio in quest'ultimo. Per poter eseguire la rotazione dei coefficienti elastici è necessario andare a costruire una matrice di rotazione che tenga in considerazione l'angolo ϕ , definito in verso antiorario, che si viene a creare tra il sistema di riferimento materiale e quello struttura, come è possibile vedere in Figura 2.3. La relazione che esiste tra i due sistemi di riferimento può essere scritta come

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}. \quad (2.9)$$

Attraverso la (2.9) è possibile passare dal sistema di riferimento materiale al sistema di riferimento struttura.

Utilizzando la relazione (2.9), congiuntamente alla notazione vettoriale delle tensioni e deformazioni, è possibile passare alle tensioni scritte nel sistema di riferimento struttura come segue

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} \\ \sigma_{\beta\beta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\beta z} \\ \sigma_{\alpha z} \\ \sigma_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\phi \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & 0 & 0 & 0 & \sin 2\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \phi \cos \phi & -\sin \phi \cos \phi & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

che può essere riformulata anche in forma più compatta, attraverso la notazione matriciale

$$\sigma_s = \mathbf{T}_\phi \sigma_m \quad (2.11)$$

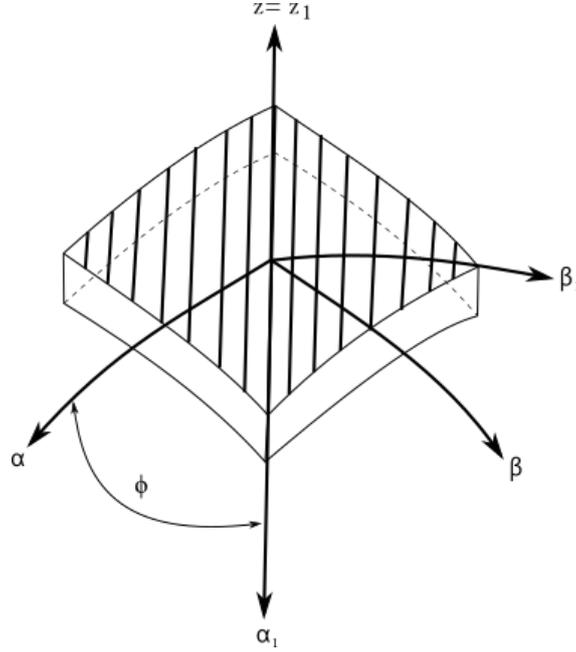


Figura 2.3: Rotazione dal sistema di riferimento materiale (α_1, β_1, z_1) a quello struttura (α, β, z)

in cui il pedice s indica il sistema di riferimento struttura.

La stessa relazione vale anche per il passaggio delle deformazioni dal sistema di riferimento materiale a quelle del sistema di riferimento struttura; per farlo basta semplicemente sostituire, nella (2.11), i corrispondenti vettori delle deformazioni con quelli delle tensioni. Grazie a queste relazioni è possibile scrivere l'equazione costitutiva nel sistema di riferimento struttura come

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{T}_\phi \boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{T}_\phi \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{T}_\phi \mathbf{Q} \mathbf{T}_\phi^T \boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (2.12)$$

dove la matrice \mathbf{T}_ϕ è la matrice di rotazione composta da seni e coseni, come si vede nella (2.10), mentre la matrice \mathbf{C} racchiude i coefficienti elastici nel sistema di riferimento struttura.

Per un guscio sferico, nota l'equazione costitutiva nel sistema di riferimento struttura, e noto esplicitamente il termine delle deformazioni, è possibile ottenere una scrittura delle componenti di tensione in funzione degli spostamenti. Quindi, unendo la relazione (2.12) e conoscendo le espressioni delle deformazioni nel sistema di riferimento struttura (espresse in (2.5a) - (2.5f)), è possibile ottenere, come si può vedere in [4]

$$\sigma_{\alpha\alpha}^k = \frac{C_{11}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{C_{11}^k w^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{C_{12}^k w^k}{H_\beta R_\beta} + C_{13}^k w_{,z}^k \quad (2.13a)$$

$$\sigma_{\beta\beta}^k = \frac{C_{12}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{C_{12}^k w^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{22}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{C_{22}^k w^k}{H_\beta R_\beta} + C_{23}^k w_{,z}^k \quad (2.13b)$$

$$\sigma_{zz}^k = \frac{C_{13}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{C_{13}^k w^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{23}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{C_{23}^k w^k}{H_\beta R_\beta} + C_{13}^k w_{,z}^k \quad (2.13c)$$

$$\sigma_{\beta z}^k = \frac{C_{44}^k}{H_\beta} w_{,\beta}^k + C_{44}^k v_{,z}^k - \frac{C_{44}^k v^k}{H_\beta R_\beta} \quad (2.13d)$$

$$\sigma_{\alpha z}^k = \frac{C_{55}^k}{H_\alpha} w_{,\alpha}^k + C_{55}^k u_{,z}^k - \frac{C_{55}^k u^k}{H_\alpha R_\alpha} \quad (2.13e)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^k = \frac{C_{66}^k}{H_\beta} u_{,\beta}^k + \frac{C_{66}^k}{H_\alpha} v_{,\alpha}^k \quad (2.13f)$$

ovvero le relazioni delle tensioni in cui compaiono esplicitamente gli spostamenti (e le loro derivate), che sono le variabili primarie del problema.

2.4 Equazioni indefinite di equilibrio 3D

Le equazioni indefinite di equilibrio 3D per un guscio sferico con raggi di curvatura R_α e R_β costanti possono essere scritte, come anche espresso in [5] e in [6]

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial z} + \left(\frac{2H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \right) \sigma_{\alpha z}^k = 0 \quad (2.14a)$$

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial z} + \left(\frac{2H_\alpha}{R_\beta} + \frac{H_\beta}{R_\alpha} \right) \sigma_{\beta z}^k = 0 \quad (2.14b)$$

$$\begin{aligned} & H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} - \frac{H_\beta}{R_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}^k - \frac{H_\alpha}{R_\beta} \sigma_{\beta\beta}^k + \\ & + \left(\frac{H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \right) \sigma_{zz}^k = 0 \end{aligned} \quad (2.14c)$$

da queste equazioni è possibile ricondursi alle equazioni indefinite di equilibrio 3D valide anche per gusci cilindrici, cilindri oppure piastre, semplicemente andando a considerare opportunamente i raggi di curvatura. Per mostrare un esempio, è possibile andare a scrivere le equazioni indefinite di equilibrio

3D di un guscio cilindrico/cilindro (in cui si ha $R_\alpha = \text{cost.}$ ed $R_\beta = \infty$), partendo da quelle riferite al guscio sferico. Cambiando la geometria, anche i termini parametrici H_α e H_β variano, infatti $H_\alpha = 1 + \frac{z}{R_\alpha}$ e $H_\beta = 1$ per il caso del guscio cilindrico (essendo $R_\beta = \infty$, allora H_β tende ad 1, mentre questa considerazione non è valida per H_α dato che R_α assume un valore numerico costante).

Si ottiene, sostituendo opportunamente il valore dei raggi di curvatura e dei parametri geometrici valutati in precedenza nelle (2.14a) - (2.14c)

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial z} + \frac{2}{R_\alpha} \sigma_{\alpha z}^k = 0 \quad (2.15a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial z} + \frac{1}{R_\alpha} \sigma_{\beta z}^k = 0 \quad (2.15b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} - \frac{1}{R_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}^k + \frac{1}{R_\alpha} \sigma_{zz}^k = 0 \quad (2.15c)$$

ovvero le equazioni indefinite di equilibrio 3D per un guscio cilindrico. Come è possibile vedere, tutti i termini che avevano a denominatore R_β nelle equazioni indefinite di equilibrio 3D dei gusci sferici, essendo questo pari ad infinito nel caso di guscio cilindrico, vanno a zero; allo stesso tempo non è più presente esplicitamente il termine parametrico H_β giacchè pari ad 1 [4].

Per completezza, si ricavano anche le equazioni indefinite di equilibrio 3D valevoli per una piastra (in cui si ha $R_\alpha = \infty$ ed $R_\beta = \infty$), partendo da quelle riferite al guscio cilindrico/cilindro. Anche in questo caso, a seguito del cambio della geometria, cambiano i termini parametrici H_α e H_β , che diventano, infatti, $H_\alpha = H_\beta = 1$, dato che tutti e due i raggi di curvatura da considerare tendono ad infinito. È, quindi, possibile ottenere

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^k}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial z} = 0 \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^k}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial z} = 0 \quad (2.16b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} = 0 \quad (2.16c)$$

Come è possibile osservare, non si trova alcun termine che esprime la curvatura nelle direzioni in pianta, dato che la piastra è la particolare geometria in cui tutti gli assi sono rettilinei [4].

Le equazioni (2.14a) - (2.14c) è possibile scriverle in funzione degli spostamenti, in modo da far comparire esplicitamente le incognite del problema. Per fare ciò, bisogna inserire nelle (2.14a) - (2.14c) le (2.13a) - (2.13f), derivandole opportunamente. Dopo aver eseguito questi semplici passaggi algebrici, è possibile ottenere

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) u^k + \left(\frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) u_{,z}^k + \left(\frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & + \left(\frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) u_{,\beta\beta}^k + \left(C_{55}^k H_\alpha H_\beta \right) u_{,zz}^k + \left(C_{12}^k + C_{66}^k \right) v_{,\alpha\beta}^k + \\
 & + \left(\frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) w_{,\alpha}^k + \left(C_{13}^k H_\alpha + C_{55}^k H_\beta \right) w_{,\alpha z}^k = 0
 \end{aligned} \tag{2.17a}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{H_\alpha C_{44}^k}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) v^k + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) v_{,z}^k + \left(\frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) v_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & + \left(\frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) v_{,\beta\beta}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha H_\beta \right) v_{,zz}^k + \left(C_{12}^k + C_{66}^k \right) u_{,\alpha\beta}^k + \\
 & + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) w_{,\beta}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\beta \right) w_{,\beta z}^k = 0
 \end{aligned} \tag{2.17b}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} \right) w^k + \left(-\frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{13}^k}{R_\beta} + \right. \\
 & - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \left. \right) u_{,\alpha}^k + \left(-\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) v_{,\beta}^k + \\
 & + \left(\frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) w_{,z}^k + \left(C_{55}^k H_\beta + C_{13}^k H_\beta \right) u_{,\alpha\beta}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha \right) v_{,\beta z}^k + \\
 & + \left(\frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) w_{,\alpha\alpha}^k + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) w_{,\beta\beta}^k + \left(C_{33}^k H_\alpha H_\beta \right) w_{,zz}^k = 0.
 \end{aligned} \tag{2.17c}$$

in cui vengono espresse, come pedice dopo la virgola, le direzioni lungo cui viene valutata la derivata; il doppio pedice indica che l'operazione di derivazione viene effettuata due volte: prima nella direzione indicata dal primo pedice e successivamente, ciò che si è ottenuto, viene derivato nella direzione indicata dal secondo pedice. I valori di R_α ed R_β sono definiti sulla superficie media della geometria (in precedenza chiamata Ω_0), mentre i parametri geometrici H_α e H_β , i quali sono funzioni di z , come è possibile vedere

nelle espressioni matematiche esplicite, sono valutati lungo lo spessore del multistrato.

Le relazioni (2.17a) - (2.17c) possono essere risolte in forma chiusa nel caso in cui vengano imposti gli spostamenti in forma armonica, la cui espressione è possibile scriverla, come anche è possibile vedere in [7]

$$u^k(\alpha, \beta, z) = U^k(z) \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta) \quad (2.18a)$$

$$v^k(\alpha, \beta, z) = V^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta) \quad (2.18b)$$

$$w^k(\alpha, \beta, z) = W^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta) \quad (2.18c)$$

dove $U(z)$, $V(z)$ e $W(z)$ sono le ampiezze degli spostamenti, che dipendono solamente da z , mentre i coefficienti $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ sono definiti come $\bar{\alpha} = \frac{m\pi}{a}$ e $\bar{\beta} = \frac{n\pi}{b}$ in cui a e b indicano le dimensioni della geometria lungo gli assi α e β del sistema di riferimento, mentre m ed n indicano proprio il numero di semionde nelle relative direzioni (il valore viene sempre scelto a priori). Si nota che, attraverso questa formulazione, è possibile separare la dipendenza da z , che viene mantenuta solo dall'ampiezza degli spostamenti, con quella dalle dimensioni in pianta, che vengono prese in carico dalla particolare combinazione di seni e coseni utilizzata. Si ricorda, inoltre, che per ottenere una soluzione in forma chiusa del problema, oltre all'imposizione degli spostamenti in forma armonica devono *sempre* valere le condizioni al contorno di semplice appoggio e di laminazione del materiale solo 0° o $\pm 90^\circ$. Va precisato che le condizioni di semplice appoggio si rendono necessarie affinché possano essere imposte le forme armoniche delle incognite, infatti, se così non fosse si dovrebbe cercare una diversa formulazione matematica con la quale definirle che, inoltre, deve permettere la risoluzione in forma chiusa del problema.

Sostituendo le relazioni (2.18a) - (2.18c) nelle relazioni (2.17a) - (2.17c), dopo aver calcolato le opportune derivate e aver effettuato le possibili semplificazioni, è possibile ottenere le equazioni indefinite di equilibrio 3D in funzione delle ampiezze degli spostamenti; la soluzione del problema si otterrà andando a risolvere le tre equazioni differenziali proprio in funzione di queste grandezze. Si noti che in questo punto della modellazione è possibile comprendere uno dei più importanti vantaggi dell'utilizzo della forma armonica degli spostamenti, infatti, è possibile eseguire le derivate in maniera analitica (perchè sono ben note dall'analisi matematica le derivate delle funzioni trigonometriche), senza dover utilizzare approssimazioni numeriche, consentendo, una volta risolto completamente il problema, di poter calcolare sia le deformazioni che le tensioni in modo esplicito. Questa peculiarità non è propria dei modelli agli elementi finiti, in cui si ha un'approssimazione numerica che non consente di ottenere risultati esatti.

Grazie alla sostituzione descritta in precedenza è possibile ottenere

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) U^k + \left(-\bar{\alpha} \bar{\beta} C_{12}^k - \bar{\alpha} \bar{\beta} C_{66}^k \right) V^k + \\
 & + \left(\bar{\alpha} \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) W^k + \left(\frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) U_{,z}^k + \\
 & + \left(\bar{\alpha} C_{13}^k H_\beta + \bar{\alpha} C_{55}^k H_\beta \right) W_{,z}^k + \left(C_{55}^k H_\alpha H_\beta \right) U_{,zz}^k = 0
 \end{aligned} \tag{2.19a}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(-\bar{\alpha} \bar{\beta} C_{66}^k - \bar{\alpha} \bar{\beta} C_{12}^k \right) U^k + \left(-\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) V^k + \\
 & + \left(\bar{\beta} \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \bar{\beta} \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) W^k + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) V_{,z}^k + \\
 & + \left(\bar{\beta} C_{44}^k H_\alpha + \bar{\beta} C_{23}^k H_\alpha \right) W_{,z}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha H_\beta \right) V_{,zz}^k = 0
 \end{aligned} \tag{2.19b}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\bar{\alpha} \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \bar{\alpha} \frac{C_{13}^k}{R_\beta} + \bar{\alpha} \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) U^k + \left(\bar{\beta} \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \bar{\beta} \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} + \bar{\beta} \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \right. \\
 & + \left. \bar{\beta} \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) V^k + \left(\frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} + \right. \\
 & - \left. \bar{\beta}^2 \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) W^k + \left(-\bar{\alpha} C_{55}^k H_\beta - \bar{\alpha} C_{13}^k H_\beta \right) U_{,z}^k + \left(-\bar{\beta} C_{44}^k H_\alpha - \bar{\beta} C_{23}^k H_\alpha \right) V_{,z}^k + \\
 & + \left(\frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) W_{,z}^k + \left(C_{33}^k H_\alpha H_\beta \right) W_{,zz}^k = 0
 \end{aligned} \tag{2.19c}$$

Le equazioni (2.19a) - (2.19c) sono un sistema di tre equazioni differenziali alle derivate parziali di secondo ordine, dato che compare una derivata seconda rispetto z in almeno un termine di ogni equazione.

Nelle precedenti equazioni differenziali non tutti i coefficienti sono costanti, in particolare i termini parametrici H_α e H_β variano in funzione di z , mentre tutti gli altri termini presenti tra parentesi sono costanti nel k -esimo strato fisico, dato che R_α , R_β , $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ sono tutti calcolati rispetto alla superficie media Ω_0 . Per poter risolvere in forma chiusa il problema si ha necessità di avere tutti i coefficienti costanti; per questo motivo si introducono, per ogni k -esimo strato fisico, una serie di l strati matematici in cui i termini parametrici del guscio H_α e H_β possono essere calcolati (in totale, quindi, si avranno $N_L = l \cdot N_F$ strati matematici totali che "discretizzano" la

struttura, dove N_F sono il numero totale di strati fisici presenti) [8]. Questi strati matematici possono essere considerati come degli strati molto sottili in cui qualunque termine tra quelli in parentesi nelle (2.19a) - (2.19c) ha un valore costante. Nello specifico, i valori di H_α e H_β saranno calcolati sulla superficie media di ogni strato matematico, per poter essere considerati come costanti; ciò è possibile perchè, essendo lo strato matematico molto sottile, il valore di H_α e H_β non varia lungo lo spessore dello stesso. Ovviamente, le equazioni (2.19a) - (2.19c) rimangono valide anche negli strati matematici, infatti, da questo punto in avanti, non ci si riferirà più agli strati fisici, bensì agli strati matematici, proprio utilizzando l'apice j , che indica un generico strato matematico.

È possibile riscrivere le (2.19a) - (2.19c) in una forma più compatta andando a rinominare, come coefficienti A_i^j , tutti quei coefficienti espressi tra parentesi tonde che moltiplicano le ampiezze degli spostamenti. Si ottiene, quindi

$$A_1^j U^j + A_2^j V^j + A_3^j W^j + A_4^j U_{,z}^j + A_5^j W_{,z}^j + A_6^j U_{,zz}^j = 0 \quad (2.20a)$$

$$A_7^j U^j + A_8^j V^j + A_9^j W^j + A_{10}^j V_{,z}^j + A_{11}^j W_{,z}^j + A_{12}^j V_{,zz}^j = 0 \quad (2.20b)$$

$$A_{13}^j U^j + A_{14}^j V^j + A_{15}^j W^j + A_{16}^j U_{,z}^j + A_{17}^j V_{,z}^j + A_{18}^j W_{,z}^j + A_{19}^j W_{,zz}^j = 0. \quad (2.20c)$$

dove l'apice j indica il j -esimo strato matematico di riferimento.

Il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, ora a coefficienti costanti, dato che ci si riferisce al singolo strato matematico, può essere risolto in forma chiusa. Per rendere più semplice il calcolo della soluzione, è conveniente ridurre l'ordine massimo di derivazione del sistema di equazioni differenziali, passando dal secondo ordine al primo. Il metodo generale per poter eseguire questa riduzione è il seguente, ed è possibile visualizzarlo in [9] e in [10], in cui si sviluppa un semplice esempio per rendere più chiara la comprensione del metodo. Dato il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti

$$a_1 u_1'' + b_1 u_1' + c_1 u_1 = f_1 \quad (2.21a)$$

$$a_2 u_1'' + b_2 u_1' + c_2 u_1 = f_2 \quad (2.21b)$$

in cui u_i'' indica $u_{i,zz}$, u_i' indica $u_{i,z}$ e f_1 ed f_2 rappresentano i carichi dinamici esterni (che nel caso di analisi alle vibrazioni libere sono nulli). È possibile imporre le seguenti identità

$$a_1 u_1' = a_1 u_1' \quad (2.22a)$$

$$a_2 u_2' = a_2 u_2' \quad (2.22b)$$

che vanno aggiunte alle (2.21a) - (2.21b) in un sistema (che ora è composto da quattro equazioni). Il sistema "risultate" ora è possibile scriverlo, in forma matriciale, come

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -c_2 & -b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1 \\ 0 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Lo stesso metodo può essere facilmente applicato anche al caso riferito alle relazioni (2.20a) - (2.20c) infatti, per poter eseguire questa riduzione dell'ordine massimo di derivazione, bisogna imporre le seguenti identità che vanno aggiunte al sopracitato sistema di equazioni differenziali

$$A_6^j U_{,z}^j = A_6^j U_{,z}^j \quad (2.24a)$$

$$A_{12}^j V_{,z}^j = A_{12}^j V_{,z}^j \quad (2.24b)$$

$$A_{19}^j W_{,z}^j = A_{19}^j W_{,z}^j \quad (2.24c)$$

in questo modo, scrivendo in forma matriciale le relazioni (2.20a) - (2.24c), è possibile ottenere

$$\begin{bmatrix} A_6^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12}^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{19}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_6^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ U_{,z}^j \\ V_{,z}^j \\ W_{,z}^j \end{Bmatrix}_{,z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_6^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^j \\ -A_1^j & -A_2^j & -A_3^j & -A_4^j & 0 & -A_5^j \\ -A_7^j & -A_8^j & -A_9^j & 0 & -A_{10}^j & -A_{11}^j \\ -A_{13}^j & -A_{14}^j & -A_{15}^j & -A_{16}^j & -A_{17}^j & -A_{18}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ U_{,z}^j \\ V_{,z}^j \\ W_{,z}^j \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

che, ancora, può essere riscritta in forma compatta come

$$D^j U_{,z}^j = A^j U^j \quad (2.26)$$

$$U_{,z}^j = D^{-1j} A^j U^j \quad (2.27)$$

$$U_{,z}^j = A^{*j} U^j \quad (2.28)$$

dove la matrice \mathbf{A}^{*j} è costante in ogni j -esimo strato matematico, dato che ogni termine, sia della matrice \mathbf{D}^j che della matrice \mathbf{A}^{*j} , è anch'esso costante in ogni j -esimo strato. Questo passaggio di abbassare il grado della derivazione permette anche di vedere il presente modello come una sorta di modello misto, dato che si introducono, nel vettore delle incognite, anche le derivate prime eseguite rispetto ad z . In questo modo, le derivate rispetto ad α e β sono calcolate esattamente perchè si riescono a derivare in maniera esatta le forme armoniche, mentre le derivate rispetto a z sono già calcolate dal modello, sempre in maniera esatta. Questo consentirà di ottenere sia le deformazioni che le tensioni (calcolate grazie alle equazioni costitutive) in maniera esatta.

La soluzione dell'equazione (2.28) può essere calcolata attraverso l'utilizzo del metodo della matrice esponenziale [11]

$$\mathbf{U}^j(h_j) = \exp(\mathbf{A}^{*j}h_j)\mathbf{U}^j(0) \quad \text{per } 0 \leq z_j \leq h_j \quad (2.29)$$

dove h_j indica lo spessore del j -esimo strato matematico mentre z_j rappresenta la coordinata relativa allo spessore del j -esimo strato matematico.

Come è possibile evincere dalla (2.29), l'equazione va risolta per ogni strato matematico della struttura, considerando che lo spessore del singolo strato può variare sempre e solo tra 0 e h_j . Ovviamente con 0 si indica il bottom del j -esimo strato, mentre con h_j si indica il top dello stesso.

La matrice esponenziale viene calcolata sempre ponendosi al top del j -esimo strato matematico e la sua espressione esplicita è

$$\mathbf{A}^{**j} = \exp(\mathbf{A}^{*j}h_j) = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{*j}h_j + \frac{\mathbf{A}^{*j2}}{2!}h_j^2 + \dots + \frac{\mathbf{A}^{*jN}}{N!}h_j^N \quad (2.30)$$

dove \mathbf{I} è la matrice identità 6×6 , mentre N indica l'ordine massimo di espansione con cui si vuole approssimare la matrice esponenziale \mathbf{A}^{**j} .

Per poter passare dallo strato matematico j al successivo, si ha la necessità di imporre le condizioni di continuità interlaminare sia sugli spostamenti che sulle tensioni trasversali e normali di taglio su ogni interfaccia tra due strati matematici. Queste vanno imposte in modo tale che sia gli spostamenti che le tensioni trasversali e normali di taglio siano continue tra uno strato e l'altro. In formule, è possibile scrivere, come è descritto in [7]

$$u_t^j = u_b^{j+1}, \quad v_t^j = v_b^{j+1}, \quad w_t^j = w_b^{j+1} \quad (2.31)$$

$$\sigma_{\alpha z_t}^j = \sigma_{\alpha z_b}^{j+1}, \quad \sigma_{\beta z_t}^j = \sigma_{\beta z_b}^{j+1}, \quad \sigma_{z z_t}^j = \sigma_{z z_b}^{j+1}. \quad (2.32)$$

dove il pedice t indica il top del j -esimo strato considerato mentre il pedice b indica il bottom. Si nota che per quanto riguarda le tensioni $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$ e

$\sigma_{\alpha\beta}$ non si va ad imporre alcuna continuità interlaminare; in questo modo è possibile che si verifichino delle discontinuità, lungo lo spessore, tra le tensioni di due strati matematici adiacenti; ciò è possibile nella realtà, perchè le relazioni di continuità vanno imposte solamente sulle tensioni agenti sulle facce dei cubetti elementari che hanno come perpendicolare l'asse z . Dalle equazioni (2.31) e (2.32), introducendo le relazioni (2.18a) - (2.18c) per quanto riguarda la continuità degli spostamenti, e le relazioni (2.13a) - (2.13f) per quanto riguarda la continuità delle tensioni, è possibile ottenere

$$\frac{C_{55}^j}{H_{\alpha t}^j} \bar{\alpha} W_t^j + C_{55}^j U_{,zt}^j - \frac{C_{55}^j}{H_{\alpha t}^j} U_t^j = \frac{C_{55}^{j+1}}{H_{\alpha b}^{j+1}} \bar{\alpha} W_b^{j+1} + C_{55}^{j+1} U_{,z_b}^{j+1} - \frac{C_{55}^{j+1}}{H_{\alpha b}^{j+1}} U_b^{j+1} \quad (2.33a)$$

$$\frac{C_{44}^j}{H_{\beta t}^j} \bar{\beta} W_t^j + C_{44}^j V_{,zt}^j - \frac{C_{44}^j}{H_{\beta t}^j} V_t^j = \frac{C_{44}^{j+1}}{H_{\beta b}^{j+1}} \bar{\beta} W_b^{j+1} + C_{44}^{j+1} V_{,z_b}^{j+1} - \frac{C_{44}^{j+1}}{H_{\beta b}^{j+1}} V_b^{j+1} \quad (2.33b)$$

$$\begin{aligned} -\frac{C_{13}^j}{H_{\alpha t}^j} \bar{\alpha} U_t^j + \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha t}^j R_{\alpha}} W_t^j - \frac{C_{23}^j}{H_{\beta t}^j} \bar{\beta} V_t^j + \frac{C_{23}^j}{H_{\beta t}^j R_{\beta}} W_t^j + C_{33}^j W_{,zt}^j &= -\frac{C_{13}^{j+1}}{H_{\alpha b}^{j+1}} \bar{\alpha} U_b^{j+1} + \\ + \frac{C_{13}^{j+1}}{H_{\alpha b}^{j+1} R_{\alpha}} W_b^{j+1} - \frac{C_{23}^{j+1}}{H_{\beta b}^{j+1}} \bar{\beta} V_b^{j+1} + \frac{C_{23}^{j+1}}{H_{\beta b}^{j+1} R_{\beta}} W_b^{j+1} + C_{33}^{j+1} W_{,z_b}^{j+1} \end{aligned} \quad (2.33c)$$

da cui si ricavano direttamente i termini $U_{,z_b}^{j+1}$, $V_{,z_b}^{j+1}$ e $W_{,z_b}^{j+1}$; per poterlo fare, va tenuto in conto che, contestualmente, bisogna anche considerare le relazioni della continuità interlaminare degli spostamenti che, per come sono definiti questi ultimi, si ripercuote sulla continuità interlaminare delle ampiezze degli spostamenti. E' possibile, quindi, scrivere, riformulando le espressioni precedenti

$$U_b^{j+1} = U_t^j \quad (2.34a)$$

$$V_b^{j+1} = V_t^j \quad (2.34b)$$

$$W_b^{j+1} = W_t^j \quad (2.34c)$$

$$\begin{aligned} U_{,z_b}^{j+1} &= \frac{1}{C_{55}^{j+1}} \left(\frac{C_{55}^{j+1}}{R_{\alpha} H_{\alpha b}^{j+1}} - \frac{C_{55}^j}{R_{\alpha} H_{\alpha t}^j} \right) U_t^j + \frac{1}{C_{55}^{j+1}} \left(\frac{C_{55}^j}{H_{\alpha t}^j} \bar{\alpha} - \frac{C_{55}^{j+1}}{H_{\alpha b}^{j+1}} \bar{\alpha} \right) W_t^j + \\ &+ \left(\frac{C_{55}^j}{C_{55}^{j+1}} \right) U_{,z_t}^j \end{aligned} \quad (2.34d)$$

$$\begin{aligned}
 V_{,z_b}^{j+1} &= \frac{1}{C_{44}^{j+1}} \left(\frac{C_{44}^{j+1}}{R_\beta H_{\beta_b}^{j+1}} - \frac{C_{44}^j}{R_\beta H_{\beta_t}^j} \right) V_t^j + \frac{1}{C_{44}^{j+1}} \left(\frac{C_{44}^j}{H_{\beta_t}^j} \bar{\beta} - \frac{C_{44}^{j+1}}{H_{\beta_b}^{j+1}} \bar{\beta} \right) W_t^j + \\
 &\quad + \left(\frac{C_{44}^j}{C_{44}^{j+1}} \right) V_{,z_t}^j
 \end{aligned} \tag{2.34e}$$

$$\begin{aligned}
 W_{,z_b}^{j+1} &= \frac{1}{C_{33}^{j+1}} \left(\frac{C_{13}^{j+1}}{H_{\alpha_b}^{j+1}} \bar{\alpha} - \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha_t}^j} \bar{\alpha} \right) U_t^j + \frac{1}{C_{33}^{j+1}} \left(-\frac{C_{23}^j}{H_{\beta_t}^j} \bar{\beta} + \frac{C_{23}^{j+1}}{H_{\beta_b}^{j+1}} \bar{\beta} \right) V_t^j + \\
 &\quad + \frac{1}{C_{33}^{j+1}} \left(\frac{C_{23}^j}{H_{\beta_t}^j R_\beta} - \frac{C_{23}^{j+1}}{H_{\beta_b}^{j+1} R_\beta} + \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha_t}^j R_\alpha} - \frac{C_{13}^{j+1}}{H_{\alpha_b}^{j+1} R_\alpha} \right) W_t^j + \\
 &\quad + \left(\frac{C_{33}^j}{C_{33}^{j+1}} \right) W_{,z_t}^j
 \end{aligned} \tag{2.34f}$$

da cui è possibile ottenere una formulazione matriciale più compatta, del tipo

$$\left\{ \begin{array}{c} U \\ V \\ W \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \end{array} \right\}_b^{j+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & T_3 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & T_5 & 0 & T_6 & 0 \\ T_7 & T_8 & T_9 & 0 & 0 & T_{10} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} U \\ V \\ W \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \end{array} \right\}_t^j \Rightarrow \mathbf{U}_b^{j+1} = \mathbf{T}^{j+1,j} \mathbf{U}_t^j \tag{2.35}$$

dove la matrice $\mathbf{T}^{j+1,j}$ viene chiamata *matrice di trasferimento* [12] e permette di passare dal top dello strato j -esimo al bottom dello strato $j+1$ -esimo, proprio attraverso le condizioni di continuità interlaminare. Ovviamente, per ogni interfaccia va calcolata una diversa matrice di trasferimento; così facendo, si dovranno calcolare $N_L - 1$ matrici (dove N_L è il numero di strati matematici totali considerati), pari al numero delle interfacce presenti nella struttura multistrato.

Attraverso le relazioni (2.34d) - (2.34f) e (2.35) è possibile calcolare gli spostamenti incogniti lungo tutto lo spessore della piastra, passando dal bottom del primo strato al top dell'ultimo strato, infatti, moltiplicando a sinistra la matrice $\mathbf{T}^{j+1,j}$ nella (2.29), si ottiene

$$\mathbf{T}^{j+1,j} \mathbf{U}_t^j = \mathbf{T}^{j+1,j} \mathbf{A}^{**j} \mathbf{U}_b^j = \mathbf{U}_b^{j+1} \tag{2.36}$$

in cui si comprende come avviene il passaggio dal bottom del j -esimo strato al bottom del $j+1$ -esimo, grazie alle matrici di trasporto ed esponenziale di ogni singolo strato matematico. Si noti anche che è leggermente variata la notazione, infatti, per non appesantirla eccessivamente, si è preferito non indicare $\mathbf{U}^j(h_j)$ e utilizzare la forma più semplice \mathbf{U}_t^j considerando che il

valore del vettore degli spostamenti al top coincide con il valore del vettore degli spostamenti calcolato ad h_j . Lo stesso discorso vale anche per \mathbf{U}_b^j . In generale, per un numero N_L di strati matematici totali, per passare dal bottom al top della struttura, si può scrivere

$$\mathbf{U}_t^{N_L} = \mathbf{A}^{**N_L} \mathbf{T}^{N_L, N_L-1} \dots \mathbf{T}^{2,1} \mathbf{A}^{**1} \mathbf{U}_b^1 = \mathbf{H}_m \mathbf{U}_b^1 \quad (2.37)$$

dove la matrice \mathbf{H}_m consente di racchiudere tutta la successione di matrici esponenziali e di trasporto che permettono di collegare il bottom del primo strato matematico con il top dell'ultimo. Per come è definito il vettore degli spostamenti, si comprende che la matrice \mathbf{H}_m sarà sempre una 6×6 , qualsiasi sia il numero di strati matematici utilizzati, dato che è creata attraverso un prodotto di matrici 6×6 . Questa è una particolarità da notare, perchè permette di capire che il costo computazionale del programma che verrà sviluppato, dipende solamente dalla effettiva creazione di tutte quelle matrici che vanno calcolate per ogni strato matematico e *non* dal compimento delle diverse operazioni tra matrici.

2.5 Analisi statica

L'analisi statica permette di imporre dei carichi armonici sia al top che al bottom della geometria multistrato, lungo una qualsiasi delle tre direzioni. Per imporre le condizioni di carico si può scrivere [13]

$$\sigma_{zz} = p_z, \quad \sigma_{\alpha z} = p_\alpha, \quad \sigma_{\beta z} = p_\beta \quad \text{per } z = \pm h/2 \quad (2.38)$$

che vanno unite insieme alle condizioni al contorno, le quali, per la presente analisi esatta 3D, sono sempre di semplice appoggio, quindi

$$w = v = 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = 0 \quad \text{per } \alpha = 0 \wedge \alpha = a \quad (2.39)$$

$$w = u = 0, \quad \sigma_{\beta\beta} = 0 \quad \text{per } \beta = 0 \wedge \beta = b. \quad (2.40)$$

Le seguenti condizioni al contorno sono automaticamente soddisfatte considerato come sono scritte le forme armoniche degli spostamenti. Infatti, la scrittura degli spostamenti, con quella specifica combinazione di seni e coseni, è proprio fatta in modo tale che nel momento in cui si impongono le condizioni al contorno di semplice appoggio, esse siano automaticamente soddisfatte.

I carichi applicati alla struttura sono anch'essi armonici, dato che senza questa imposizione non sarebbe possibile elidere la combinazione di seni e

coseni, introdotta grazie alla formulazione armonica degli spostamenti, e poter risolvere il sistema solamente in funzione della variabile z . È possibile, quindi, scrivere [13]

$$p_z = P_z(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta) \quad (2.41a)$$

$$p_\alpha = P_\alpha(z) \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta) \quad (2.41b)$$

$$p_\beta = P_\beta(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta). \quad (2.41c)$$

dove $P_z(z)$, $P_\alpha(z)$ e $P_\beta(z)$ sono le ampiezze dei carichi e dipendono solo da z . Non è possibile applicare alcun'altra forma per quanto riguarda i carichi, altrimenti, questo porterebbe a ottenere delle relazioni che non possono essere risolte analiticamente.

Andando ad applicare le relazioni (2.38) sia per il bottom che per il top della geometria multistrato, si ottiene

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}\left(-\frac{h}{2}\right) &= -\frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} U_b^1 + \frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} W_b^1 - \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} V_b^1 + \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} W_b^1 + C_{33}^1 W_{,z_b}^1 = \\ &= P_{z_b} \end{aligned} \quad (2.42a)$$

$$\sigma_{\beta z}\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} W_b^1 + C_{44}^1 V_{,z_b}^1 - \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} V_b^1 = P_{\beta_b} \quad (2.42b)$$

$$\sigma_{\alpha z}\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} W_b^1 + C_{55}^1 U_{,z_b}^1 - \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} U_b^1 = P_{\alpha_b} \quad (2.42c)$$

che esprimono le condizioni di carico applicate al bottom del primo strato matematico della geometria multistrato. I valori di $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, R_α ed R_β sono calcolati sulla superficie media di riferimento dell'intera struttura multistrato, mentre $H_{\alpha_b}^1$ e $H_{\beta_b}^1$ sono calcolati riferendosi al bottom del primo strato matematico.

Per quanto riguarda, invece, le tensioni al top della geometria multistrato, si può scrivere

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}\left(+\frac{h}{2}\right) &= -\frac{C_{13}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}} \bar{\alpha} U_t^{NL} + \frac{C_{13}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL} R_\alpha} W_t^{NL} - \frac{C_{23}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}} \bar{\beta} V_t^{NL} + \frac{C_{23}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL} R_\beta} W_t^{NL} + \\ &+ C_{33}^{NL} W_{,z_t}^{NL} = P_{z_t} \end{aligned} \quad (2.43a)$$

$$\sigma_{\beta z}\left(+\frac{h}{2}\right) = \frac{C_{44}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}} \bar{\beta} W_t^{NL} + C_{44}^{NL} V_{,z_t}^{NL} - \frac{C_{44}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL} R_\beta} V_t^{NL} = P_{\beta_t} \quad (2.43b)$$

$$\sigma_{\alpha z}\left(+\frac{h}{2}\right) = \frac{C_{55}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}} \bar{\alpha} W_t^{NL} + C_{55}^{NL} U_{,z_t}^{NL} - \frac{C_{55}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL} R_\alpha} U_t^{NL} = P_{\alpha_t} \quad (2.43c)$$

anche in questo caso i valori di $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, R_α ed R_β sono calcolati sulla superficie media della geometria, mentre $H_{\alpha_t}^{N_L}$ e $H_{\beta_t}^{N_L}$ sono calcolati riferendosi al top dell'ultimo strato matematico, indicato con N_L .

Le condizioni di carico, sia al top che al bottom della geometria, possono essere riscritte andando ad utilizzare la notazione matriciale come segue

$$\begin{bmatrix} -\frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} & -\frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} & \frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1} R_\alpha + \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1} R_\beta & 0 & 0 & C_{33}^1 \\ 0 & -\frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1} R_\beta & \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} & 0 & C_{44}^1 & 0 \\ -\frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1} R_\alpha & 0 & \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} & C_{55}^1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b^1 \\ V_b^1 \\ W_b^1 \\ U_{,z_b}^1 \\ V_{,z_b}^1 \\ W_{,z_b}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{z_b} \\ P_{\beta_b} \\ P_{\alpha_b} \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{C_{13}^{N_L}}{H_{\alpha_t}^{N_L}} \bar{\alpha} & -\frac{C_{23}^{N_L}}{H_{\beta_t}^{N_L}} \bar{\beta} & \frac{C_{13}^{N_L}}{H_{\alpha_t}^{N_L}} R_\alpha + \frac{C_{23}^{N_L}}{H_{\beta_t}^{N_L}} R_\beta & 0 & 0 & C_{33}^{N_L} \\ 0 & -\frac{C_{44}^{N_L}}{H_{\beta_t}^{N_L}} R_\beta & \frac{C_{44}^{N_L}}{H_{\beta_t}^{N_L}} \bar{\beta} & 0 & C_{44}^{N_L} & 0 \\ -\frac{C_{55}^{N_L}}{H_{\alpha_t}^{N_L}} R_\alpha & 0 & \frac{C_{55}^{N_L}}{H_{\alpha_t}^{N_L}} \bar{\alpha} & C_{55}^{N_L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_t^{N_L} \\ V_t^{N_L} \\ W_t^{N_L} \\ U_{,z_t}^{N_L} \\ V_{,z_t}^{N_L} \\ W_{,z_t}^{N_L} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{z_t} \\ P_{\beta_t} \\ P_{\alpha_t} \end{Bmatrix}. \quad (2.45)$$

Le equazioni (2.44) e (2.45) possono essere scritte in modo ancora più compatto come

$$\mathbf{B}_b^1 \mathbf{U}_b^1 = \mathbf{P}_b \quad (2.46)$$

$$\mathbf{B}_t^{N_L} \mathbf{U}_t^{N_L} = \mathbf{P}_t \quad (2.47)$$

ricordando la (2.37) è possibile riscrivere la (2.47) come

$$\mathbf{B}_t^{N_L} \mathbf{H}_m \mathbf{U}_b^1 = \mathbf{P}_t \quad (2.48)$$

la quale, porta ad ottenere il seguente sistema algebrico lineare da risolvere

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_t^{N_L} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_b^1 \end{bmatrix} \mathbf{U}_b^1 = \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_t \\ \mathbf{P}_b \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

riscrivibile, in maniera più chiara e compatta come

$$\mathbf{E} \mathbf{U}_b^1 = \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{U}_b^1 = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{P}. \quad (2.50)$$

Una volta risolta, consente di calcolare tutti gli spostamenti (e le relative derivate prime) riferite al bottom del primo strato matematico della geometria multistrato. Per conoscere, invece, gli spostamenti lungo tutto lo spessore della geometria, bisogna necessariamente applicare ricorsivamente le relazioni (2.29)-(2.35), in modo che sia possibile calcolare gli spostamenti al bottom

dello strato $j + 1$ -esimo a partire dagli spostamenti al bottom dello strato j -esimo. La matrice \mathbf{E} , che può essere intesa come la matrice di rigidità del sistema, per come è costruita, ha sempre dimensioni 6×6 , qualsiasi sia il numero di strati matematici utilizzati.

Attraverso una fase di postprocessing, è possibile anche calcolare le deformazioni e le tensioni agenti lungo lo spessore a seguito dei carichi applicati alle estremità della struttura, utilizzando, rispettivamente, le relazioni (2.5a)-(2.5f) e, in seguito, le (2.13a)-(2.13f). I valori che si ottengono sono esatti, perchè le derivate rispetto α e β che si trovano nelle relazioni appena citate, sono eseguite in modo esatto, grazie alla formulazione armonica; in più le derivate prime degli spostamenti sono calcolate, anch'esse in modo esatto, perchè compaiono nel vettore degli spostamenti.

2.6 Analisi alle vibrazioni libere

Per ciò che riguarda l'analisi alle vibrazioni libere essa permette di calcolare le frequenze proprie della geometria multistrato, fissata una coppia di semionde m ed n , e valutare il relativo modo di vibrare. Per poter eseguire questo tipo di analisi, si ha la necessità di aggiungere anche i carichi inerziali, che nella trattazione generale precedente non sono stati considerati. In particolare, essi vanno aggiunti nelle equazioni indefinite di equilibrio 3D (le equazioni (2.14a) - (2.14c)), che, quindi, devono essere leggermente modificate, ottenendo [7]

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial z} + \left(\frac{2H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \right) \sigma_{\alpha z}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{u}^k \quad (2.51a)$$

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial z} + \left(\frac{2H_\alpha}{R_\beta} + \frac{H_\beta}{R_\alpha} \right) \sigma_{\beta z}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{v}^k \quad (2.51b)$$

$$\begin{aligned} H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} - \frac{H_\beta}{R_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}^k - \frac{H_\alpha}{R_\beta} \sigma_{\beta\beta}^k + \\ + \left(\frac{H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \right) \sigma_{zz}^k = \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{w}^k \end{aligned} \quad (2.51c)$$

dove il termine a secondo membro esprime il carico inerziale, rispettivamente nelle direzioni α , β e z : in particolare, ρ^k indica la densità del materiale del k -esimo strato, la quale non varia lungo lo spessore dello specifico k -esimo strato, ma può variare per ogni strato fisico, dato che ognuno di esso può essere potenzialmente composto da materiale diverso. Infine, \ddot{u}^k , \ddot{v}^k , \ddot{w}^k indicano la derivata seconda nel tempo degli spostamenti (quindi, l'accelerazione). Inoltre, anche la formulazione armonica degli spostamenti cambia

leggermente per il caso dinamico, perchè compare un termine esponenziale in cui viene espressa la dipendenza dal tempo che nel caso statico non avrebbe senso introdurre, dato che l'analisi statica è indipendente dal tempo ma dipendente dai carichi applicati. Per questo caso, quindi, si definiscono gli spostamenti in forma armonica come

$$u^k(\alpha, \beta, z) = U^k(z)e^{j\omega t} \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta) \quad (2.52a)$$

$$v^k(\alpha, \beta, z) = V^k(z)e^{j\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta) \quad (2.52b)$$

$$w^k(\alpha, \beta, z) = W^k(z)e^{j\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta). \quad (2.52c)$$

L'introduzione del carico inerziale porta, conseguentemente, una variazione delle relazioni (2.19a) - (2.19c), dato che sono presenti dei nuovi termini in cui compaiono le derivate seconde degli spostamenti rispetto al tempo. Le relazioni (2.19a) - (2.19c), calcolando opportunamente le derivate grazie alle relazioni (2.52a) - (2.52c), diventano

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} + \rho^k H_\alpha H_\beta \omega^2 \right) U^k + \\ & + \left(-\bar{\alpha} \bar{\beta} C_{12}^k - \bar{\alpha} \bar{\beta} C_{66}^k \right) V^k + \left(\bar{\alpha} \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) W^k + \\ & + \left(\frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) U_{,z}^k + \left(\bar{\alpha} C_{13}^k H_\beta + \bar{\alpha} C_{55}^k H_\beta \right) W_{,z}^k + \left(C_{55}^k H_\alpha H_\beta \right) U_{,zz}^k = 0 \end{aligned} \quad (2.53a)$$

$$\begin{aligned} & \left(-\bar{\alpha} \bar{\beta} C_{66}^k - \bar{\alpha} \bar{\beta} C_{12}^k \right) U^k + \left(-\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} + \right. \\ & \left. + \rho^k H_\alpha H_\beta \omega^2 \right) V^k + \left(\bar{\beta} \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \bar{\beta} \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) W^k + \\ & + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) V_{,z}^k + \left(\bar{\beta} C_{44}^k H_\alpha + \bar{\beta} C_{23}^k H_\alpha \right) W_{,z}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha H_\beta \right) V_{,zz}^k = 0 \end{aligned} \quad (2.53b)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\bar{\alpha} \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \bar{\alpha} \frac{C_{13}^k}{R_\beta} + \bar{\alpha} \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) U^k + \left(\bar{\beta} \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \bar{\beta} \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} + \bar{\beta} \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \right. \\
 & \left. + \bar{\beta} \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) V^k + \left(\frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} + \right. \\
 & \left. - \bar{\beta}^2 \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} + \rho^k H_\alpha H_\beta \omega^2 \right) W^k + \left(-\bar{\alpha} C_{55}^k H_\beta - \bar{\alpha} C_{13}^k H_\beta \right) U_{,z}^k + \left(-\bar{\beta} C_{44}^k H_\alpha + \right. \\
 & \left. - \bar{\beta} C_{23}^k H_\alpha \right) V_{,z}^k + \left(\frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) W_{,z}^k + \left(C_{33}^k H_\alpha H_\beta \right) W_{,zz}^k = 0
 \end{aligned} \tag{2.53c}$$

dove si nota che la parte dinamica modifica solamente i termini A_1 , A_8 e A_{15} della (2.25).

Per poter eseguire l'analisi dinamica bisogna, come già visto nella sezione riguardante l'analisi statica, imporre le condizioni al contorno, che, anche in questo caso, sono di semplice appoggio [7]

$$w = v = 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = 0 \quad \text{per } \alpha = 0 \wedge \alpha = a \tag{2.54}$$

$$w = u = 0, \quad \sigma_{\beta\beta} = 0 \quad \text{per } \beta = 0 \wedge \beta = b. \tag{2.55}$$

Anche in questo caso queste equazioni sono soddisfatte grazie alla particolare definizione della forma armonica utilizzata per gli spostamenti. Inoltre, essendo un'analisi alle vibrazioni libere, non si ha da imporre alcuna condizione di carico al top e al bottom della struttura ottenendo, quindi

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{\alpha z} = 0, \quad \sigma_{\beta z} = 0 \quad \text{per } z = \pm h/2. \tag{2.56}$$

Applicando la (2.56) sia al bottom che al top della struttura, è possibile ottenere

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}(-\frac{h}{2}) &= -\frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} U_b^1 + \frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} W_b^1 - \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} V_b^1 + \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} W_b^1 + C_{33}^1 W_{,z_b}^1 = \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.57a}$$

$$\sigma_{\beta z}(-\frac{h}{2}) = \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} W_b^1 + C_{44}^1 V_{,z_b}^1 - \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} V_b^1 = 0 \tag{2.57b}$$

$$\sigma_{\alpha z}(-\frac{h}{2}) = \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} W_b^1 + C_{55}^1 U_{,z_b}^1 - \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} U_b^1 = 0 \tag{2.57c}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}\left(+\frac{h}{2}\right) &= -\frac{C_{13}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}}\bar{\alpha}U_t^{NL} + \frac{C_{13}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}R_\alpha}W_t^{NL} - \frac{C_{23}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}}\bar{\beta}V_t^{NL} + \frac{C_{23}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}R_\beta}W_t^{NL} + \\ &\quad + C_{33}^{NL}W_{,z_t}^{NL} = 0 \end{aligned} \quad (2.58a)$$

$$\sigma_{\beta z}\left(+\frac{h}{2}\right) = \frac{C_{44}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}}\bar{\beta}W_t^{NL} + C_{44}^{NL}V_{,z_t}^{NL} - \frac{C_{44}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}R_\beta}V_t^{NL} = 0 \quad (2.58b)$$

$$\sigma_{\alpha z}\left(+\frac{h}{2}\right) = \frac{C_{55}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}}\bar{\alpha}W_t^{NL} + C_{55}^{NL}U_{,z_t}^{NL} - \frac{C_{55}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}R_\alpha}U_t^{NL} = 0 \quad (2.58c)$$

dove i valori di $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, R_α ed R_β sono calcolati sulla superficie media della struttura, mentre $H_{\alpha_b}^1$, $H_{\beta_b}^1$, $H_{\alpha_t}^{NL}$ e $H_{\beta_t}^{NL}$ sono calcolati riferendosi, rispettivamente, al bottom del primo e al top dell'ultimo strato matematico (lo stesso si è visto precedentemente nella sezione riferita all'analisi statica).

È possibile, nuovamente, riferirsi ad una notazione matriciale che diventa

$$\begin{bmatrix} -\frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1}\bar{\alpha} & -\frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1}\bar{\beta} & \frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1}R_\alpha + \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1}R_\beta & 0 & 0 & C_{33}^1 \\ 0 & -\frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1}R_\beta & \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1}\bar{\beta} & 0 & C_{44}^1 & 0 \\ -\frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1}R_\alpha & 0 & \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1}\bar{\alpha} & C_{55}^1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b^1 \\ V_b^1 \\ W_b^1 \\ U_{,z_b}^1 \\ V_{,z_b}^1 \\ W_{,z_b}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{C_{13}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}}\bar{\alpha} & -\frac{C_{23}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}}\bar{\beta} & \frac{C_{13}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}}R_\alpha + \frac{C_{23}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}}R_\beta & 0 & 0 & C_{33}^{NL} \\ 0 & -\frac{C_{44}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}}R_\beta & \frac{C_{44}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}}\bar{\beta} & 0 & C_{44}^{NL} & 0 \\ -\frac{C_{55}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}}R_\alpha & 0 & \frac{C_{55}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}}\bar{\alpha} & C_{55}^{NL} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_t^{NL} \\ V_t^{NL} \\ W_t^{NL} \\ U_{,z_t}^{NL} \\ V_{,z_t}^{NL} \\ W_{,z_t}^{NL} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

la quale, passando ad una notazione più compatta, può essere scritta come

$$\mathbf{B}_b^1 \mathbf{U}_b^1 = \mathbf{0} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{B}_t^{NL} \mathbf{U}_t^{NL} = \mathbf{0} \quad (2.62)$$

ricordando la (2.37) è possibile riscrivere la (2.62) come

$$\mathbf{B}_t^{NL} \mathbf{H}_m \mathbf{U}_b^1 = \mathbf{0} \quad (2.63)$$

la quale, porta ad ottenere il seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_t^1 \mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_b^{N_L} \end{bmatrix} \mathbf{U}_b^1 = \mathbf{0} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

riscrivibile, in maniera più chiara e compatta, come

$$\mathbf{E} \mathbf{U}_b^1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{U}_b^1 = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{0}. \quad (2.65)$$

Per poter risolvere questo sistema lineare omogeneo, affinché non si ottenga la soluzione banale, bisogna imporre il determinante della matrice \mathbf{E} pari a zero e andare a risolvere l'equazione algebrica che si ottiene rispetto al parametro ω^2 , che è proprio la grandezza di nostro interesse, giacchè rappresenta il valore di pulsazione propria associato al problema (matematicamente si sta risolvendo un problema agli autovalori e il parametro ω^2 è proprio l'autovalore soluzione del problema). Si impone, quindi

$$\det(\mathbf{E}) = 0. \quad (2.66)$$

Per una specifica coppia di semionde m ed n , la risoluzione del problema fornisce un certo numero di pulsazioni proprie, anche in base all'ordine usato della matrice esponenziale e al numero di strati matematici considerati, che possiamo intendere come le uniche approssimazioni compiute in questo modello. Potenzialmente, il numero di autovalori da trovare dovrebbero essere pari ad infinito, essendo un modello in cui i gradi di libertà della struttura sono proprio pari ad infinito. Ovviamente, per motivi di calcolo numerico, il numero di autovalori sarà sempre finito. Una volta che è noto l'autovalore, è possibile andare a calcolare gli autovettori associati all'autovalore trovato; così facendo, si troveranno i vari modi di vibrare della struttura. Per fare ciò, bisogna andare a sostituire il valore dell'autovalore ω^2 precedentemente ricavato all'interno della matrice \mathbf{E} , che a questo punto diventa completamente numerica e non dipende più da un parametro incognito. Una volta compiuto questo passaggio, è possibile ricavare sempre sei autovalori dalla matrice \mathbf{E} : nel caso in questione siamo interessati all'autovettore associato all'autovalore minore tra i sei, perchè lo scopo è quello di calcolare il vettore \mathbf{U}_b^1 che renda nullo lo spazio vettoriale generato dalla matrice \mathbf{E} , il quale fornisce proprio il valore degli spostamenti (e le relative derivate prime) al bottom del primo strato della geometria multistrato.

Per ottenere il modo di vibrare lungo lo spessore della geometria, come visto anche nell'analisi statica, si ha bisogno di utilizzare più volte la (2.36), in modo da passare al valore degli spostamenti del bottom dello strato $j + 1$ -esimo a partire dagli spostamenti al bottom dello strato j -esimo; questa relazione va utilizzata più volte fino a passare direttamente dal bottom del primo strato matematico al top dell'ultimo.

Capitolo 3

Revisione codice per analisi alle vibrazioni libere di piastre e gusci multistrato

Come precedentemente espresso, la prima parte della tesi consiste nel riscrivere e diminuire il costo computazionale del codice Matlab[®] 3DES (che sta per *Three Dimensional Exact Solutions*), utilizzato per l'analisi alle vibrazioni libere e statica 3D esatta di gusci sferici, gusci cilindrici, cilindri e piastre multistrato. Nel presente capitolo verrà eseguito un assessment riferito al primo caso e si andranno a confrontare i risultati della nuova versione del codice rispetto ai precedenti, presenti in [7]. Questo capitolo sarà diviso in due differenti parti:

- modifiche effettuate sul codice 3DES
- confronto, validazione e convergenza risultati nuovo codice

3.1 Modifiche effettuate sul codice 3DES

Per poter diminuire il costo computazionale del codice 3DES si è provveduto ad implementare alcune semplici migliorie di programmazione; la maggior parte di queste sono anche descritte nella documentazione messa a disposizione dagli sviluppatori del software Matlab[®], la quale è accessibile liberamente [14].

Le modifiche sono state eseguite principalmente a livello di algoritmo (andando a velocizzare alcune operazioni di creazione delle matrici e di esecuzione dei prodotti matriciali, fatto con comandi dedicati e più performanti) e di macrostruttura del codice (utilizzando, ad esempio, un numero maggiore

di *function* che vengono richiamate all'interno di uno *script*, piuttosto che utilizzarne uno unico in cui tutto il codice viene eseguito). Per quanto riguarda l'analisi alle vibrazioni libere, a causa della particolare formulazione del problema matematico da risolvere, come descritto nel Capitolo 2, si è dovuto continuare ad utilizzare il calcolo simbolico di Matlab[®], il quale, dal punto di vista computazionale, è molto oneroso e aumenta di molto i tempi di calcolo. Un possibile ulteriore miglioramento futuro, che renderebbe il codice molto performante, sarebbe l'abbattimento totale dei costi computazionali per quanto riguarda l'analisi alle vibrazioni libere, in modo da non avere tempi di calcolo troppo differenti tra un'analisi alle vibrazioni libere e un'analisi statica, come è possibile notare se si confrontano i tempi di calcolo dei due differenti tipi di analisi, a patto di considerare lo stesso numero di strati matematici.

Entrando più nello specifico, nella nuova versione del codice, si è scelto di utilizzare più *function* che creassero le diverse matrici utili per la formulazione. In questo modo, la specifica *function* svolge le istruzioni presenti al suo interno, e mette a disposizione dello *script* in cui viene richiamata solo la matrice finale, che è considerata come l'output della *function* stessa. Quindi, una qualsiasi *function* opera come una vera e propria istruzione dalla quale si ottiene un output, che può essere una matrice, un vettore oppure uno scalare, a seguito dell'introduzione di un opportuno numero di dati in input. La successione delle *function* che si è utilizzato è la seguente:

1. creazione della matrice \mathbf{C} per ogni strato matematico attraverso la *function* `"calculation_matrix_C"`
2. creazione della matrice \mathbf{A}^* per ogni strato matematico attraverso la *function* `"calculation_matrix_A_star"`
3. creazione della matrice \mathbf{A}^{**} per ogni strato matematico attraverso la *function* `"exponential_matrix_method"`
4. creazione della matrice $\mathbf{T}^{j+1,j}$ per ogni interfaccia tra due strati matematici contigui attraverso la *function* `"calculation_matrix_T"`
5. creazione della matrice \mathbf{H}_m attraverso la *function* `"calculation_matrix_Hm"`
6. creazione delle matrici \mathbf{B}_b^1 e $\mathbf{B}_t^{N_L}$ attraverso la *function* `"calculation_matrix_Bt_and_Bb"`.

L'ordine utilizzato è proprio quello che si può vedere nell'elenco puntato e corrisponde esattamente a quello con cui compaiono le matrici sopraelencate

nel Capitolo 2. In più, per rendere ancora più agevole l'utilizzo, si è deciso di utilizzare due diversi script interamente dedicati alla definizione del caso di studio: il primo si chiama "*inputdata.m*" e permette di introdurre tutte le caratteristiche geometriche della struttura e i carichi agenti su di essa, mentre il secondo è nominato "*materialdata.m*" e permette di introdurre le caratteristiche dei materiali. Nella versione precedente il codice eseguiva tutte queste operazioni descritte in un unico script. L'utente, nel momento in cui si troverà a dover eseguire un'analisi alle vibrazioni libere oppure un'analisi statica, si troverà di fronte, quindi, a due differenti script che servono per immettere i dati caratteristici del caso da analizzare; per poter eseguire effettivamente l'analisi impostata si ha la necessità di utilizzare un terzo script, chiamato "*launcher.m*", il quale raccoglie semplicemente tutte le diverse function che permettono di costruire, passo dopo passo, la matrice \mathbf{E} e, infine, risolvere il problema, noto il vettore \mathbf{P} oppure \mathcal{P} . Il nome di questo ultimo file è emblematico e deriva proprio dalla prassi nel dire che le analisi vengono "lanciate" (lo stesso vale ugualmente per la lingua inglese, in cui sovente si trova la traduzione *lauch* per esprimere questo concetto).

Un ulteriore importante modifica, che ha portato ad un grande incremento delle prestazioni del codice, è stata quella di effettuare un'analisi di postprocessing che non comportasse l'utilizzo del calcolo simbolico di Matlab[®]. La fase di postprocessing è quella che permette di visualizzare, sottoforma di figure, l'andamento di tutti gli spostamenti, le deformazioni e le tensioni lungo lo spessore della piastra. In sostanza, nella precedente versione del codice, nel momento in cui si effettuava il postprocessing, ogni strato matematico veniva ulteriormente suddiviso; per poter ricostruire gli andamenti lungo lo spessore si andava a definire una variabile simbolica z la quale esprimeva l'altezza di queste micro suddivisioni del singolo strato matematico. Questa procedura comporta un grande incremento del tempo di calcolo, sia perchè si introduce nuovamente il calcolo simbolico (si ricordi che anche la fase di calcolo effettivo dei modi di vibrare avviene utilizzando questo strumento) e sia perchè il numero di strati da considerare diventa altissimo. La miglioria apportata è stata quella di non utilizzare mai il calcolo simbolico in questa fase, andando ad espandere, in base a quante sono le micro suddivisioni dello strato matematico, le matrici già precedentemente calcolate per ogni strato matematico.

Le ulteriori modifiche effettuate, invece, sono state semplicemente finalizzate ad incrementare la velocità di alcuni cicli for e altre istruzioni utili a creare i singoli termini che costituiscono le diverse matrici.

3.2 Confronto, validazione e analisi di convergenza

Per poter validare la nuova struttura del codice si sono andati a confrontare i risultati presenti in [7], ottenuti utilizzando il codice 3DES, con quelli ottenuti dal nuovo codice; inoltre, viene anche valutato il tempo di esecuzione, in modo da confermare che le modifiche effettuate non abbiano apportato alcuna variazione nei risultati e, al contempo, abbiano solamente migliorato le performance. Il tempo di calcolo è stato registrato solo per un caso perchè è indipendente dal rapporto di snellezza (ovvero dai diversi rapporti a/h oppure R_α/h), a parità di numero di strati matematici e di grado della matrice esponenziale.

I casi trattati per la validazione sono dodici; in particolare, ognuna delle quattro geometrie (piastra, guscio cilindrico, cilindro e guscio sferico) viene valutata con tre differenti configurazioni di materiale, che sono:

- monostrato in Alluminio (Al2024)
- sandwich, con facce in Alluminio e cuore in schiuma polimerica (PVC)
- sandwich, con facce in materiale composito ($0^\circ/90^\circ$) e cuore in schiuma polimerica (PVC).

Tutte le caratteristiche geometriche dei dodici casi studiati nel presente capitolo sono presenti in Tabella 3.1 mentre le caratteristiche meccaniche dei materiali presenti nell'elenco puntato soprastante sono raccolte nella Tabella 3.2.

Per ognuno dei casi espressi in Tabella 3.1 si è confrontato il valore delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata $\bar{\omega}$; si utilizza questa particolare convenzione per ragioni di praticità di scrittura del risultato e di maggiore chiarezza nel confronto dei risultati. Il tipo di adimensionalizzazione varia caso per caso ed è riportato direttamente in ogni singola tabella, per maggiore chiarezza e facilità di consultazione.

Per ciò che concerne il Caso 1, visibile in Tabella 3.3 si può notare come i risultati forniti dalla nuova versione del codice siano identici a quelli che è possibile determinare con la precedente versione, ma con il vantaggio di abbattere in maniera importante i tempi di calcolo. Inoltre, si nota come la convergenza viene raggiunta per un numero di strati matematici molto basso, anche a seguito della semplicità della geometria e della configurazione del materiale utilizzato, comportando un tempo di calcolo esiguo al fine di ottenere il valore delle prime tre frequenze proprie e dei relativi modi di vibrare (che sono visibili in Figura 3.2).

Tabella 3.1: *Casi studiati per la validazione della nuova versione del codice 3DES. In tutti i casi considerati l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$. Per i casi che prevedono la configurazione sandwich con lamine in composito il numero di strati matematici totali è $N_L = 200$ mentre per tutti gli altri casi $N_L = 100$. Sono stati utilizzati questi specifici casi in modo da considerare omogeneamente tutte le possibili configurazioni di materiale e geometria possibile.*

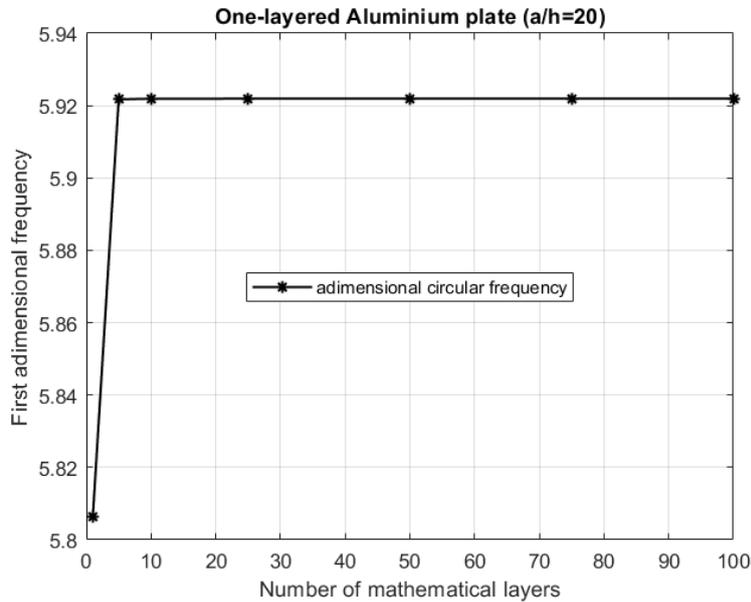
a	b	h_{layers}	R_α	R_β	m	n
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]		
Caso 1: Piastra monostrato Alluminio						
1	1	h	∞	∞	1	1
Caso 2: Piastra sandwich Al/PVC/Al						
1	1	0.15h/0.7h/0.15h	∞	∞	1	1
Caso 3: Piastra sandwich $0^\circ/90^\circ$/PVC/$90^\circ/0^\circ$						
1	1	0.15h/0.7h/0.15h	∞	∞	1	1
Caso 4: Guscio cilindrico monostrato Alluminio						
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	20	h	10	∞	1	1
Caso 5: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al						
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	20	0.15h/0.7h/0.15h	10	∞	1	1
Caso 6: Guscio cilindrico sandwich $0^\circ/90^\circ$/PVC/$90^\circ/0^\circ$						
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	20	0.15h/0.7h/0.15h	10	∞	1	1
Caso 7: Cilindro monostrato Alluminio						
$2\pi R_\alpha$	100	h	10	∞	2	2
Caso 8: Cilindro sandwich Al/PVC/Al						
$2\pi R_\alpha$	100	0.15h/0.7h/0.15h	10	∞	2	2
Caso 9: Cilindro sandwich $0^\circ/90^\circ$/PVC/$90^\circ/0^\circ$						
$2\pi R_\alpha$	100	0.15h/0.7h/0.15h	10	∞	2	2
Caso 10: Guscio sferico monostrato Alluminio						
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	$\frac{\pi}{3}R_\beta$	h	10	10	1	1
Caso 11: Guscio sferico sandwich Al/PVC/Al						
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	$\frac{\pi}{3}R_\beta$	0.15h/0.7h/0.15h	10	10	1	1
Caso 12: Guscio sferico sandwich $0^\circ/90^\circ$/PVC/$90^\circ/0^\circ$						
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	$\frac{\pi}{3}R_\beta$	0.15h/0.7h/0.15h	10	10	1	1

Tabella 3.2: *Caratteristiche meccaniche dei materiali utilizzati per la revisione del codice 3DES*

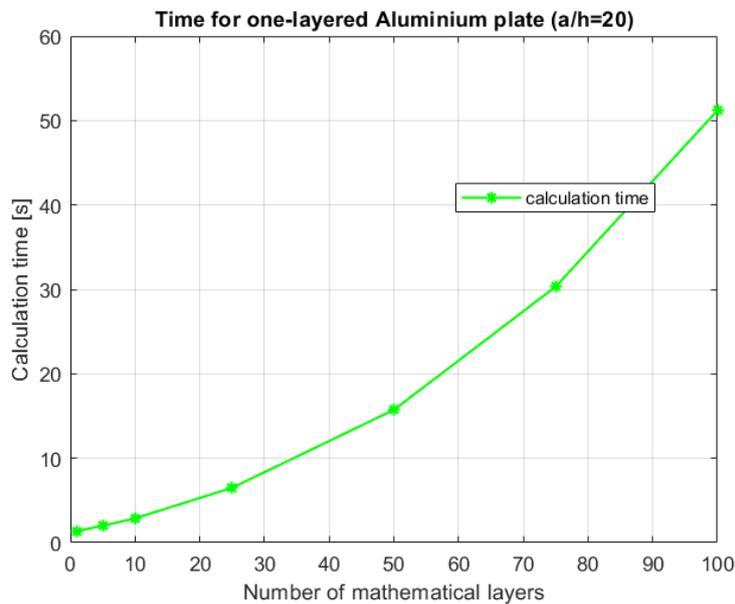
ρ [$\frac{kg}{m^3}$]	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	E_3 [GPa]	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_1 [GPa]	G_2 [GPa]	G_3 [GPa]
Lega Alluminio 2024									
2800	73	73	73	0.3	0.3	0.3	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$
PVC									
50	0.180	0.180	0.180	0.37	0.37	0.37	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$
Composito									
1600	132.38	10.756	10.756	0.24	0.24	0.49	5.6537	5.6537	3.603

Tabella 3.3: *Validazione Caso 1: Piastra monostrato in Alluminio semplicemente appoggiata. Confronto delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [7].*

	$\bar{\omega}_{3DES}$ [7]	$\bar{\omega}$	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$					
$a/h = 5$					
I frequenza	5.30361	5.30361			
II frequenza	13.7768	13.7768	219.37	49.217	77%
III frequenza	23.1364	23.1364			
$a/h = 10$					
I frequenza	5.7769	5.7769			
II frequenza	27.5536	27.5536			
III frequenza	46.5025	46.5025			
$a/h = 50$					
I frequenza	5.9650	5.9650			
II frequenza	137.77	137.77			
III frequenza	232.86	232.86			
$a/h = 100$					
I frequenza	5.9713	5.9713			
II frequenza	275.54	275.54			
III frequenza	465.73	465.73			



(a) Convergenza, al variare del numero di strati matematici, del Caso Piastra monostrato in Alluminio. Gli asterischi in nero indicano il valore della I frequenza propria adimensionalizzata di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in nero.



(b) Tempo di esecuzione del codice al variare del numeri di strati matematici. Gli asterischi in verde indicano il tempo di esecuzione di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in verde.

Figura 3.1: *Analisi di convergenza e tempo di esecuzione del codice relativi al Caso 1: Piastra monostrato in Alluminio semplicemente appoggiata*

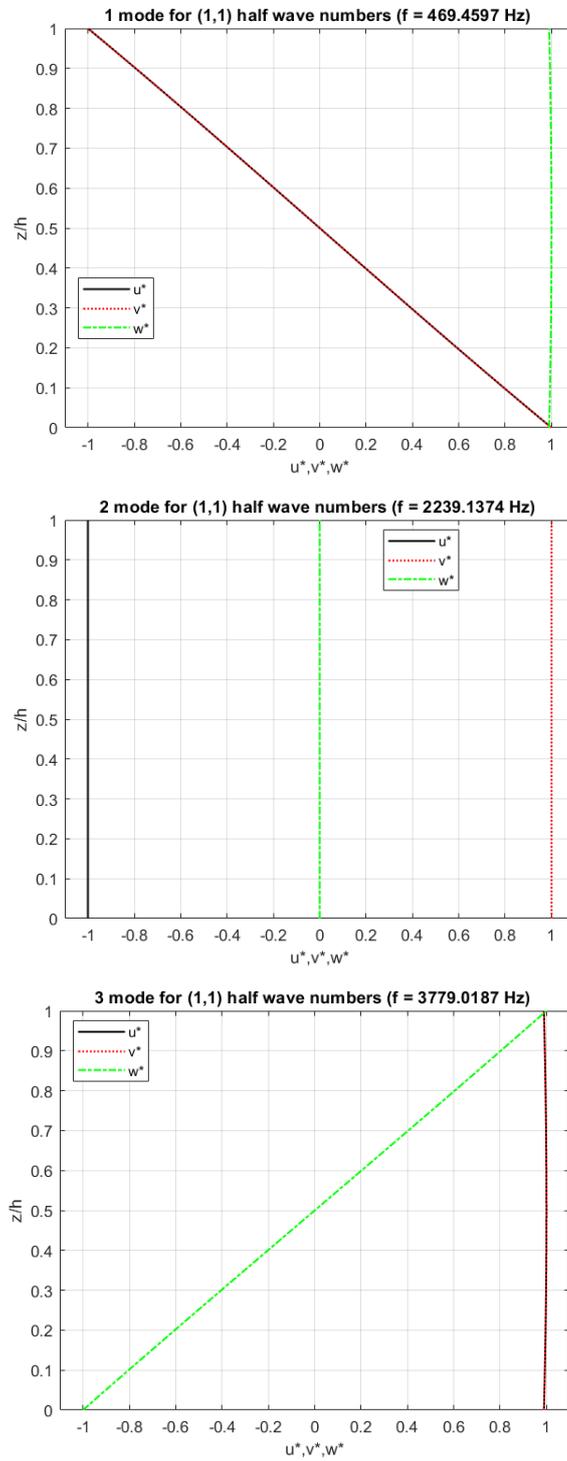
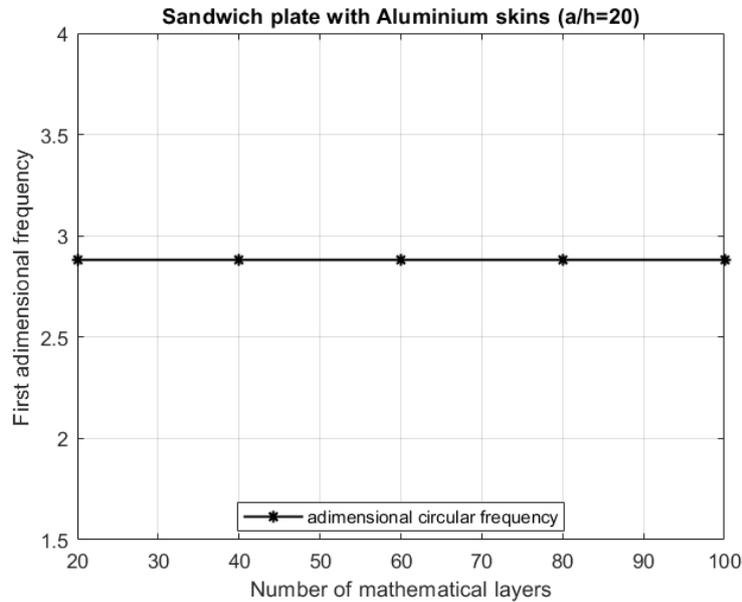


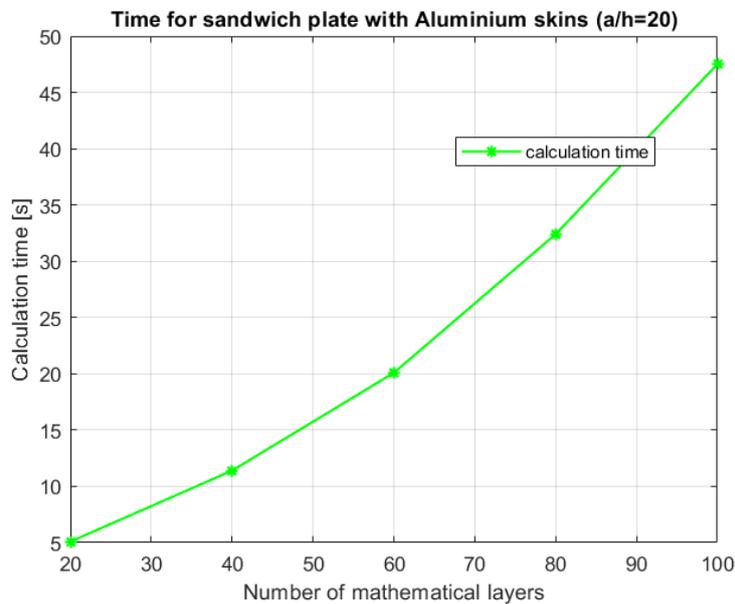
Figura 3.2: *Primi tre modi di vibrare, in termini di spostamento, relativi al Caso 1: Piastra monostrato in Alluminio semplicemente appoggiata con rapporto di snellezza $a/h = 10$*

Tabella 3.4: Validazione Caso 2: Piastra sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiata. Confronto delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [7].

	$\bar{\omega}_{3DES}$ [7]	$\bar{\omega}$	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_{skin}}{E_{skin}}}$					
$a/h = 5$					
I frequenza	1.4786	1.4787			
II frequenza	6.8059	6.8059	218.50	48.652	78%
III frequenza	13.473	13.473			
$a/h = 10$					
I frequenza	2.4879	2.4879			
II frequenza	27.045	27.045			
III frequenza	28.081	28.081			
$a/h = 50$					
I frequenza	7.0764	7.0764			
II frequenza	135.35	135.35			
III frequenza	228.77	228.77			
$a/h = 100$					
I frequenza	8.1693	8.1693			
II frequenza	270.70	270.70			
III frequenza	457.67	457.67			



(a) Convergenza, al variare del numero di strati matematici, del Caso Piastra sandwich Al/PVC/Al. Gli asterischi in nero indicano il valore della I frequenza propria adimensionalizzata di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in nero.



(b) Tempo di esecuzione del codice al variare del numeri di strati matematici. Gli asterischi in verde indicano il tempo di esecuzione di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in verde.

Figura 3.3: *Analisi di convergenza e tempo di esecuzione del codice relativi al Caso 2: Piastra sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiata*

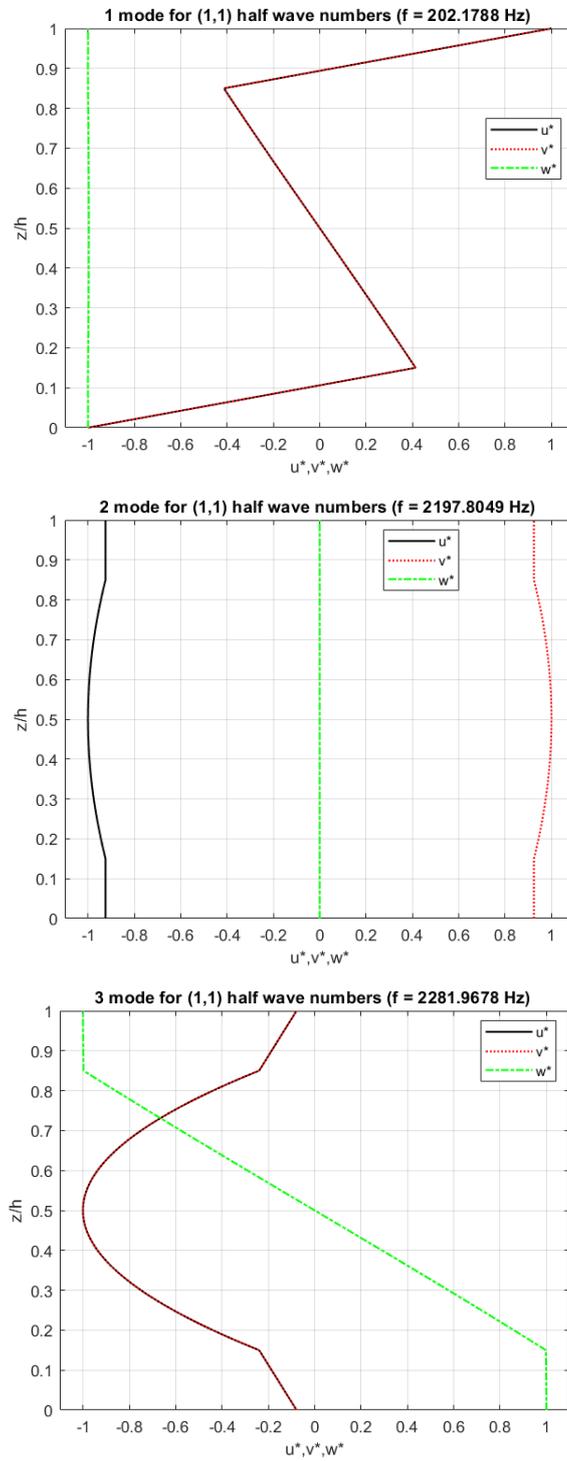


Figura 3.4: Primi tre modi di vibrare, in termini di spostamento, relativi al Caso 2: Piastra sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiata con rapporto di snellezza $a/h = 10$

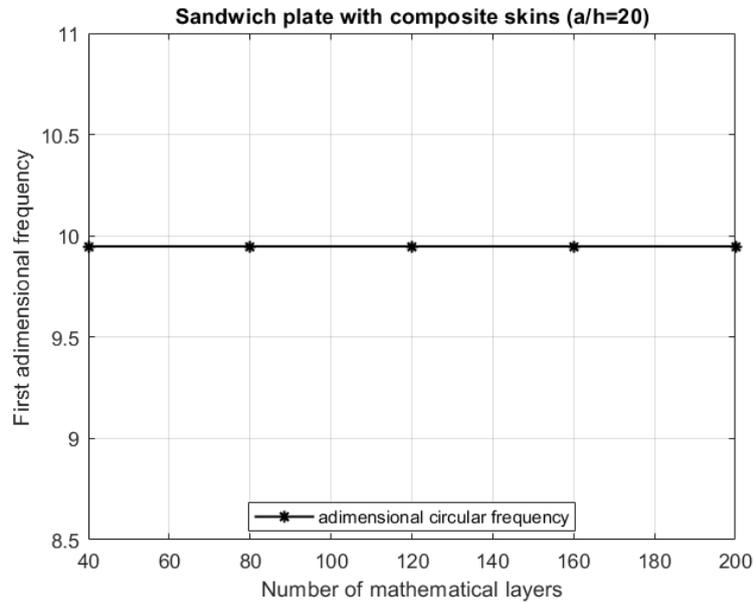
Per ciò che riguarda il Caso 2, visibile in Tabella 3.4 si può notare come i risultati forniti dalla nuova versione del codice siano, per la maggior parte, identici a quelli che è possibile determinare con la precedente versione; solo in un caso (I frequenza propria adimensionalizzata relativa al rapporto $a/h = 5$) si ha una differenza sull'ultima cifra decimale, causata, presumibilmente, dal metodo di arrotondamento utilizzato. Per questo caso i tempi di calcolo sono abbattuti di una percentuale simile a quella vista nel Caso 1. Inoltre, si nota come già per venti strati matematici si è raggiunta la convergenza sul valore della prima frequenza propria adimensionalizzata, come è possibile vedere in Figura 3.3. Il valore di venti strati matematici che si vede è stato scelto dato che è il minimo valore che permette di ottenere la corretta suddivisione di h_{layers} per questo caso.

Riguardo al Caso 3, visibile in Tabella 3.5 si può notare come i risultati forniti dalla nuova versione del codice siano, per la maggior parte, identici a quelli che è possibile determinare con la precedente versione; solo in un caso (I frequenza propria adimensionalizzata relativa al rapporto $a/h = 5$) si ha una differenza sull'ultima cifra decimale, causata, presumibilmente, dal metodo di arrotondamento utilizzato. Per questo caso, dato il maggior numero di strati matematici utilizzato, i tempi di calcolo sono abbattuti drasticamente; ciò permette di comprendere come le migliorie effettuate sul codice, descritte in precedenza, siano molto performanti per un numero di strati matematici molto alto. In particolare, ciò che permette di diminuire in questo modo i tempi di calcolo è il non utilizzo del calcolo simbolico nella fase di post-processing del codice, dato che, effettuandolo come nella versione precedente, cioè attraverso l'ulteriore divisione micro strati gli strati matematici, si appesantiva moltissimo la successione delle operazioni da effettuare, le quali necessitavano, per un numero molto grande di micro strati, sempre della variabile simbolica. Inoltre, si nota come già per quaranta strati matematici si è raggiunta la convergenza sul valore della prima frequenza propria adimensionalizzata, come è possibile vedere in Figura 3.5. Il valore di quaranta strati matematici che si vede è stato scelto dato che è il minimo valore che permette di ottenere la corretta suddivisione di h_{layers} per questo caso.

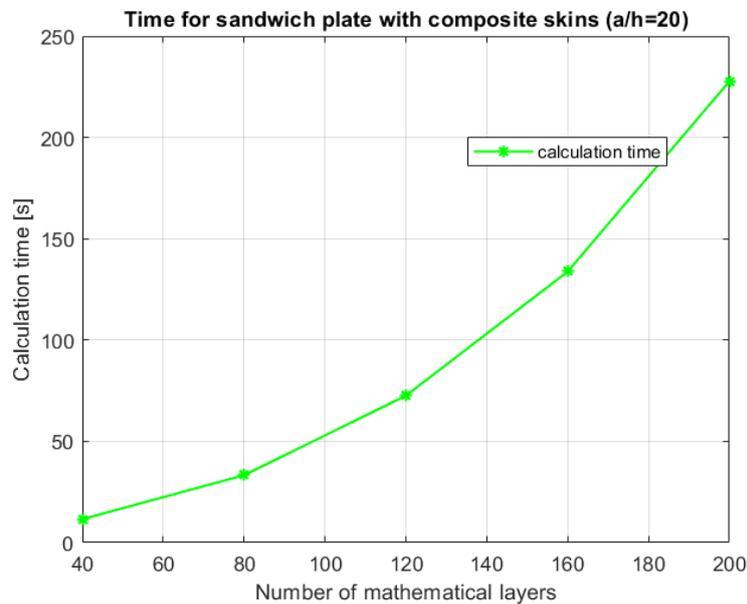
Per ciò che concerne il Caso 4, visibile in Tabella 3.6 si può notare come i risultati forniti dalla nuova versione del codice siano uguali a quelli che è possibile determinare con la precedente versione a seguito di un significativo miglioramento in termini di tempi di calcolo. Inoltre, si nota come la convergenza viene raggiunta per un numero di strati matematici molto basso, anche a seguito della semplicità della geometria e del materiale comportando un tempo di calcolo esiguo al fine di ottenere il valore delle prime tre frequenze proprie e dei relativi modi di vibrare (che sono visibili in Figura 3.8).

Tabella 3.5: Validazione Caso 3: Piastra sandwich $0^\circ/90^\circ/PVC/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiata. Confronto delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [7].

	$\bar{\omega}_{3DES}$ [7]	$\bar{\omega}$	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_{skin}}{E_{1_{skin}}}}$					
$a/h = 5$					
I frequenza	3.2639	3.2640			
II frequenza	17.398	17.398	2205.6	202.80	91%
III frequenza	37.351	37.351			
$a/h = 10$					
I frequenza	5.9275	5.9275			
II frequenza	71.631	71.631			
III frequenza	76.817	76.817			
$a/h = 50$					
I frequenza	14.440	14.440			
II frequenza	385.73	385.73			
III frequenza	430.56	430.56			
$a/h = 100$					
I frequenza	15.754	15.754			
II frequenza	771.58	771.58			
III frequenza	861.39	861.40			



(a) Convergenza, al variare del numero di strati matematici, del Caso Piastra sandwich $0^\circ/90^\circ/\text{PVC}/90^\circ/0^\circ$. Gli asterischi in nero indicano il valore della I frequenza propria adimensionalizzata di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in nero.



(b) Tempo di esecuzione del codice al variare del numeri di strati matematici. Gli asterischi in verde indicano il tempo di esecuzione di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in verde.

Figura 3.5: *Analisi di convergenza e tempo di esecuzione del codice relativi al Caso 3: Piastra sandwich $0^\circ/90^\circ/\text{PVC}/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiata*

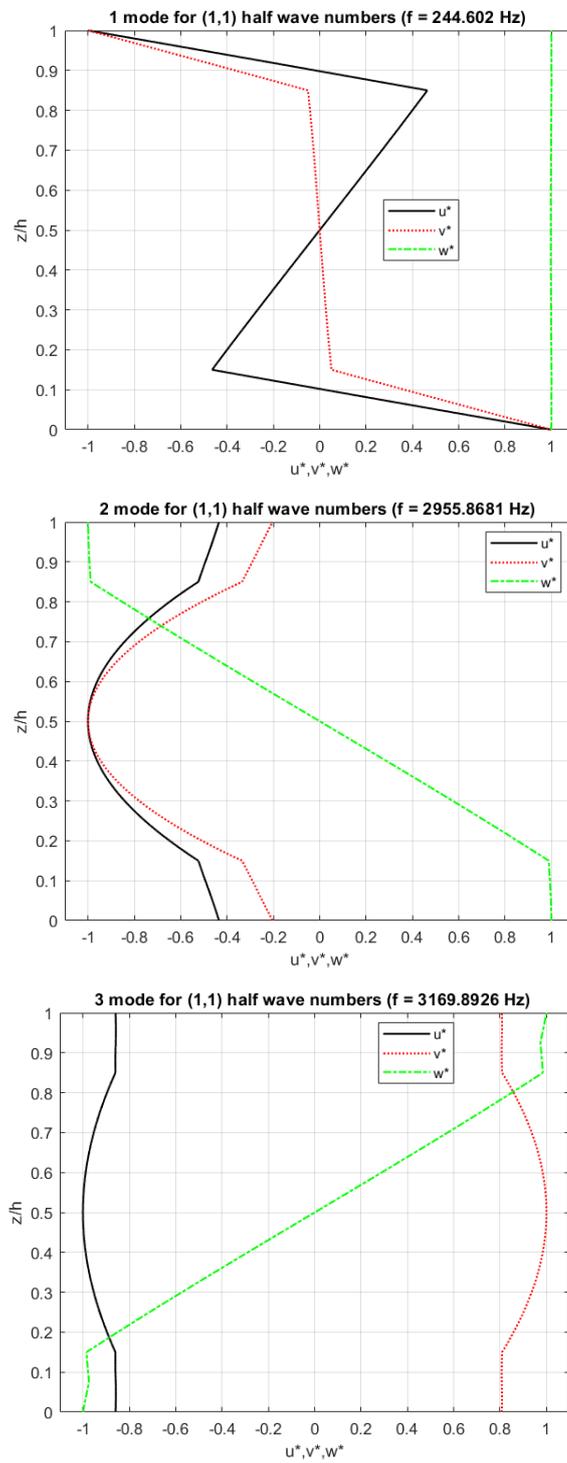
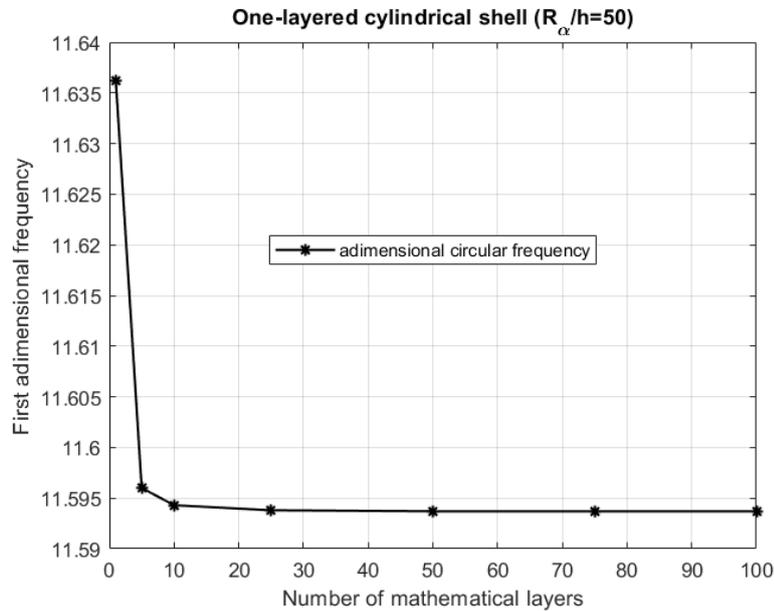


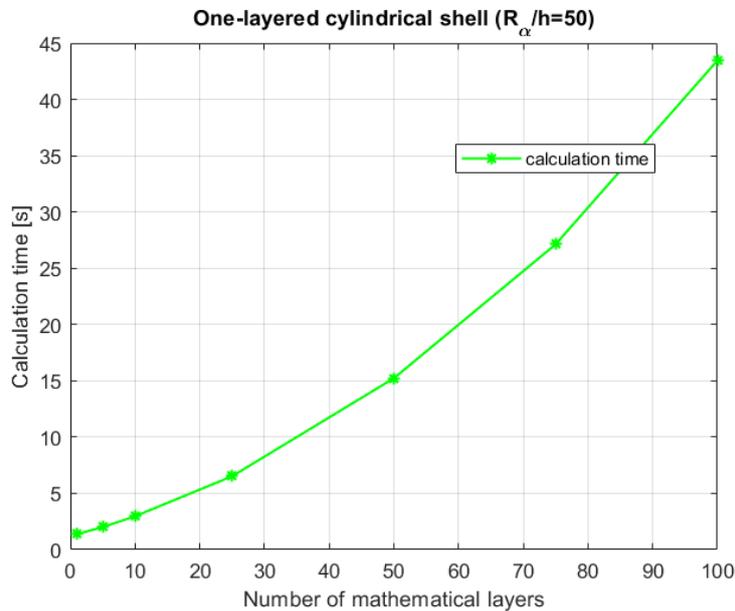
Figura 3.6: Primi tre modi di vibrare, in termini di spostamento, relativi al Caso 3: Piastra sandwich $0^\circ/90^\circ/\text{PVC}/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiata con rapporto di snellezza $a/h = 10$

Tabella 3.6: Validazione Caso 4: Guscio cilindrico monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato. Confronto delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [7].

	$\bar{\omega}_{3DES}$ [7]	$\bar{\omega}$	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$					
$R_\alpha/h = 5$					
I frequenza	3.2156	3.2156			
II frequenza	11.842	11.842	213.31	43.072	80%
III frequenza	19.846	19.846			
$R_\alpha/h = 10$					
I frequenza	3.8758	3.8758			
II frequenza	23.656	23.656			
III frequenza	40.060	40.060			
$R_\alpha/h = 100$					
I frequenza	22.503	22.503			
II frequenza	236.45	236.45			
III frequenza	401.73	401.73			
$R_\alpha/h = 1000$					
I frequenza	222.73	222.73			
II frequenza	2364.5	2364.5			
III frequenza	4017.4	4017.4			



(a) Convergenza, al variare del numero di strati matematici, del Caso Guscio cilindrico monostrato in Alluminio. Gli asterischi in nero indicano il valore della I frequenza propria adimensionalizzata di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in nero.



(b) Tempo di esecuzione del codice al variare del numeri di strati matematici. Gli asterischi in verde indicano il tempo di esecuzione di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in verde.

Figura 3.7: *Analisi di convergenza e tempo di esecuzione del codice relativi al Caso 4: Guscio cilindrico monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato*

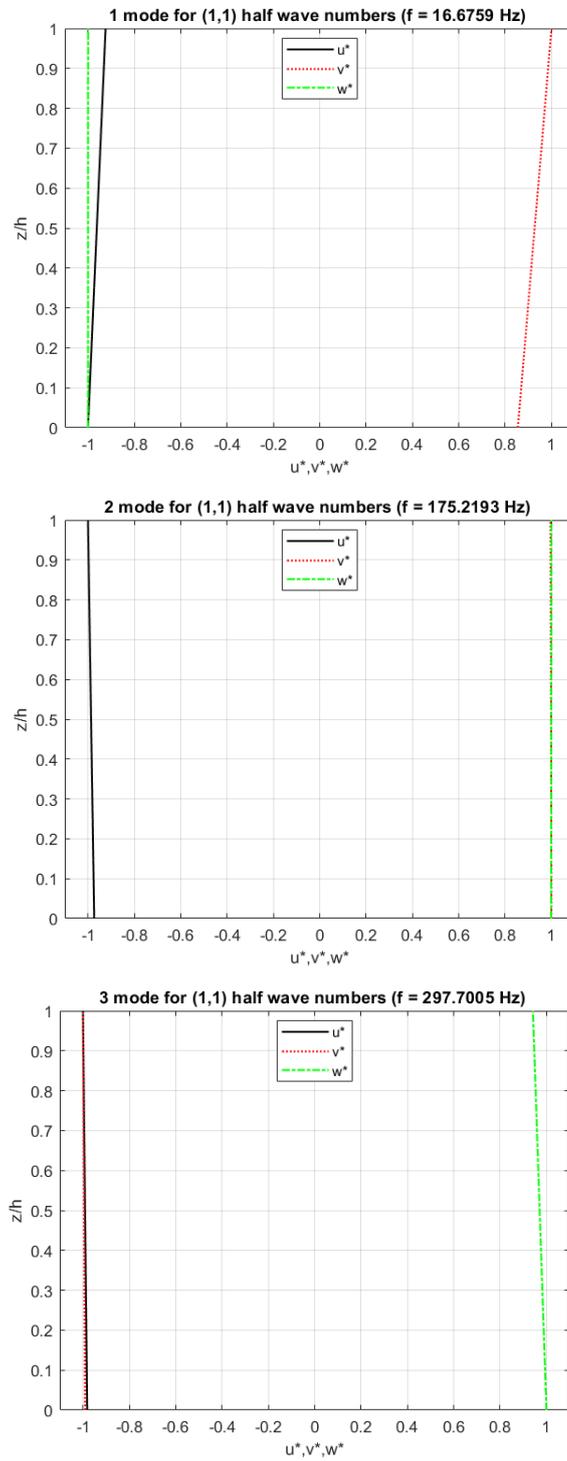
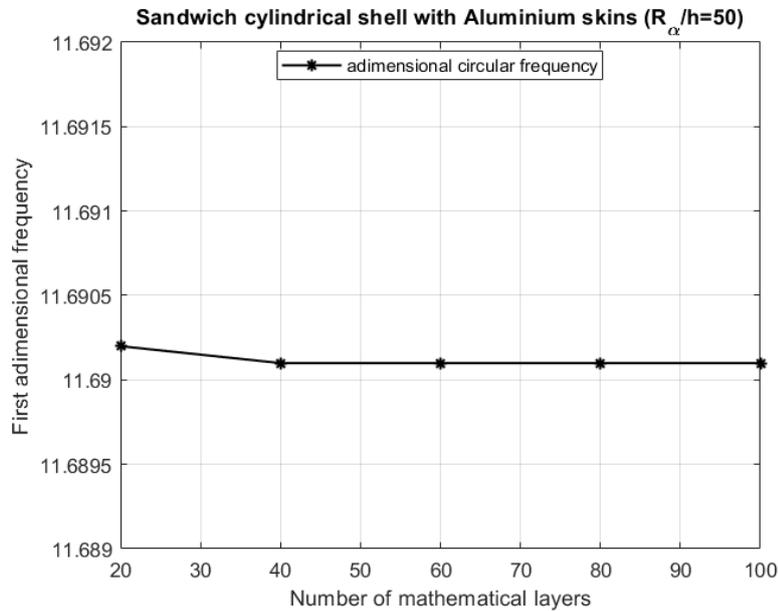


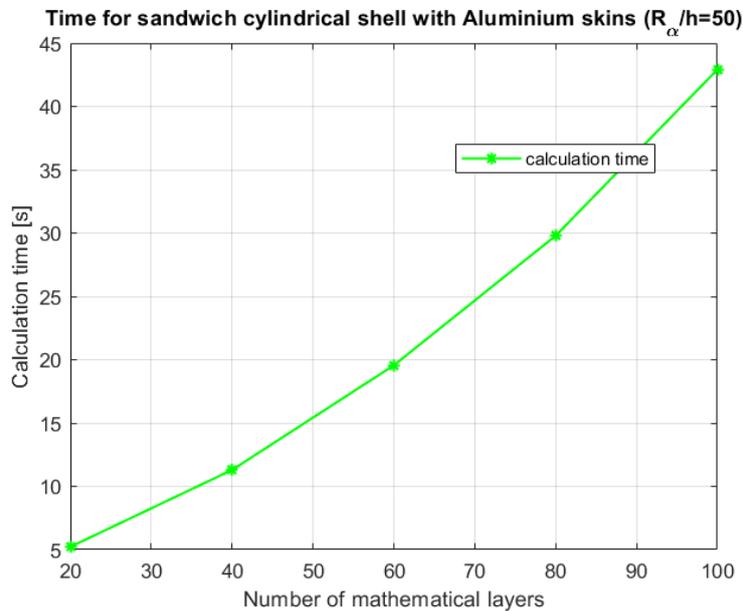
Figura 3.8: Primi tre modi di vibrare, in termini di spostamento, relativi al Caso 4: Guscio cilindrico monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 100$

Tabella 3.7: Validazione Caso 5: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato. Confronto delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [7].

	$\bar{\omega}_{3DES}$ [7]	$\bar{\omega}$	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_{skin}}{E_{skin}}}$					
$R_\alpha/h = 5$					
I frequenza	1.4630	1.4630			
II frequenza	7.2572	7.2572	212.01	42.143	80%
III frequenza	11.201	11.201			
$R_\alpha/h = 10$					
I frequenza	2.7559	2.7560			
II frequenza	23.080	23.080			
III frequenza	26.028	26.028			
$R_\alpha/h = 100$					
I frequenza	22.345	22.345			
II frequenza	232.30	232.30			
III frequenza	394.78	394.78			
$R_\alpha/h = 1000$					
I frequenza	218.88	218.88			
II frequenza	2323.0	2323.0			
III frequenza	3948.2	3948.2			



(a) Convergenza, al variare del numero di strati matematici, del Caso Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al. Gli asterischi in nero indicano il valore della I frequenza propria adimensionalizzata di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in nero.



(b) Tempo di esecuzione del codice al variare del numeri di strati matematici. Gli asterischi in verde indicano il tempo di esecuzione di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in verde.

Figura 3.9: *Analisi di convergenza e tempo di esecuzione del codice relativi al Caso 5: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato*

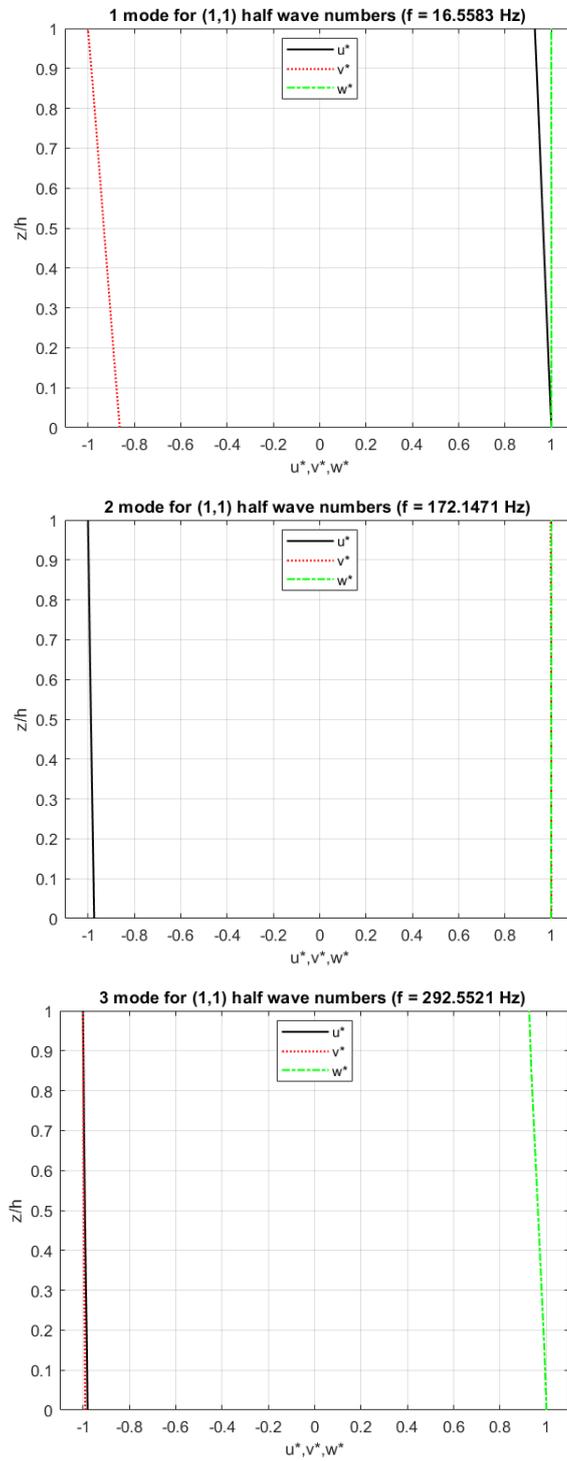


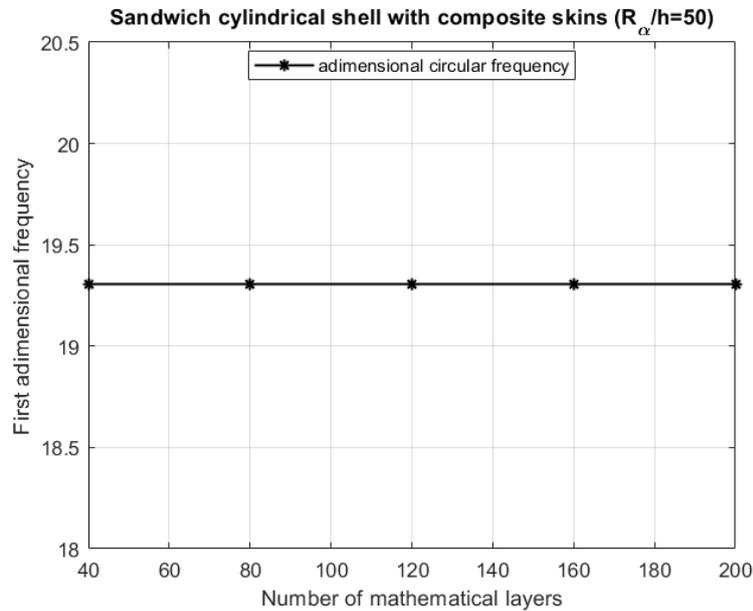
Figura 3.10: *Primi tre modi di vibrare, in termini di spostamento, relativi al caso 5: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 100$*

Tabella 3.8: Validazione Caso 6: Guscio cilindrico sandwich $0^\circ/90^\circ/PVC/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiato. Confronto delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [7].

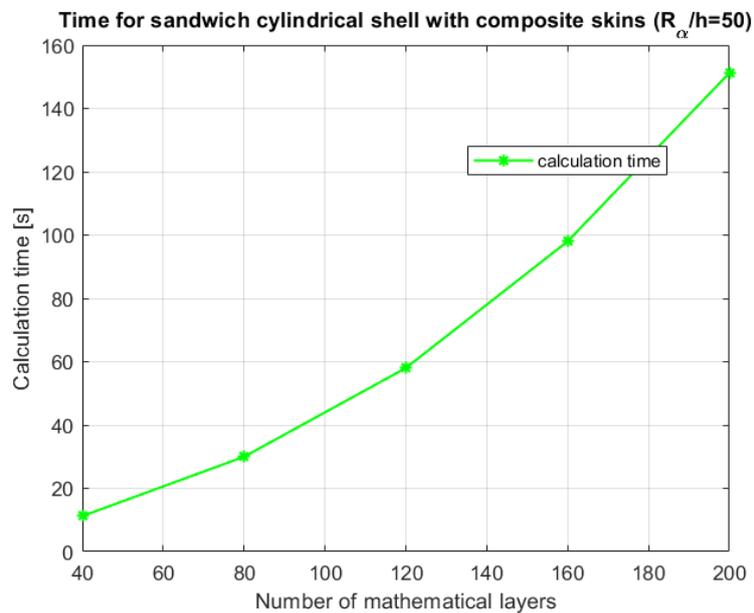
	$\bar{\omega}_{3DES}$ [7]	$\bar{\omega}$	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_{skin}}{E_{1skin}}}$					
$R_\alpha/h = 5$					
I frequenza	2.9011	2.9011			
II frequenza	18.627	18.627	2166.0	143.56	93%
III frequenza	24.208	24.208			
$R_\alpha/h = 10$					
I frequenza	5.4162	5.4163			
II frequenza	48.665	48.665			
III frequenza	61.782	61.782			
$R_\alpha/h = 100$					
I frequenza	35.247	35.247			
II frequenza	487.52	487.52			
III frequenza	877.98	877.99			
$R_\alpha/h = 1000$					
I frequenza	338.13	338.13			
II frequenza	4875.2	4875.2			
III frequenza	8781.1	8781.1			

A riferimento del Caso 5, visibile in Tabella 3.7 si può notare come i risultati forniti dalla nuova versione del codice siano, per la maggior parte, identici a quelli che è possibile determinare con la precedente versione; le eventuali differenze si attestano sempre sull'ultima cifra decimale e sono causati dal metodo di arrotondamento utilizzato. Per questo caso i tempi di calcolo sono abbattuti di una percentuale simile a quella vista nel Caso 4. Inoltre, si nota come già per quaranta strati matematici si è raggiunta la convergenza sul valore della prima frequenza propria adimensionalizzata, come è possibile vedere in Figura 3.9). Il valore di quaranta strati matematici che si vede è stato scelto dato che è il minimo valore che permette di ottenere la corretta suddivisione di h_{layers} per questo caso.

Per ciò che concerne il Caso 6, visibile in Tabella 3.8 si può notare come



(a) Convergenza, al variare del numero di strati matematici, del Caso Guscio cilindrico sandwich $0^\circ/90^\circ/\text{PVC}/90^\circ/0^\circ$. Gli asterischi in nero indicano il valore della I frequenza propria adimensionalizzata di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in nero.



(b) Tempo di esecuzione del codice al variare dei numeri di strati matematici. Gli asterischi in verde indicano il tempo di esecuzione di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in verde.

Figura 3.11: *Analisi di convergenza e tempo di esecuzione del codice relativi al Caso 6: Guscio cilindrico sandwich $0^\circ/90^\circ/\text{PVC}/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiato*

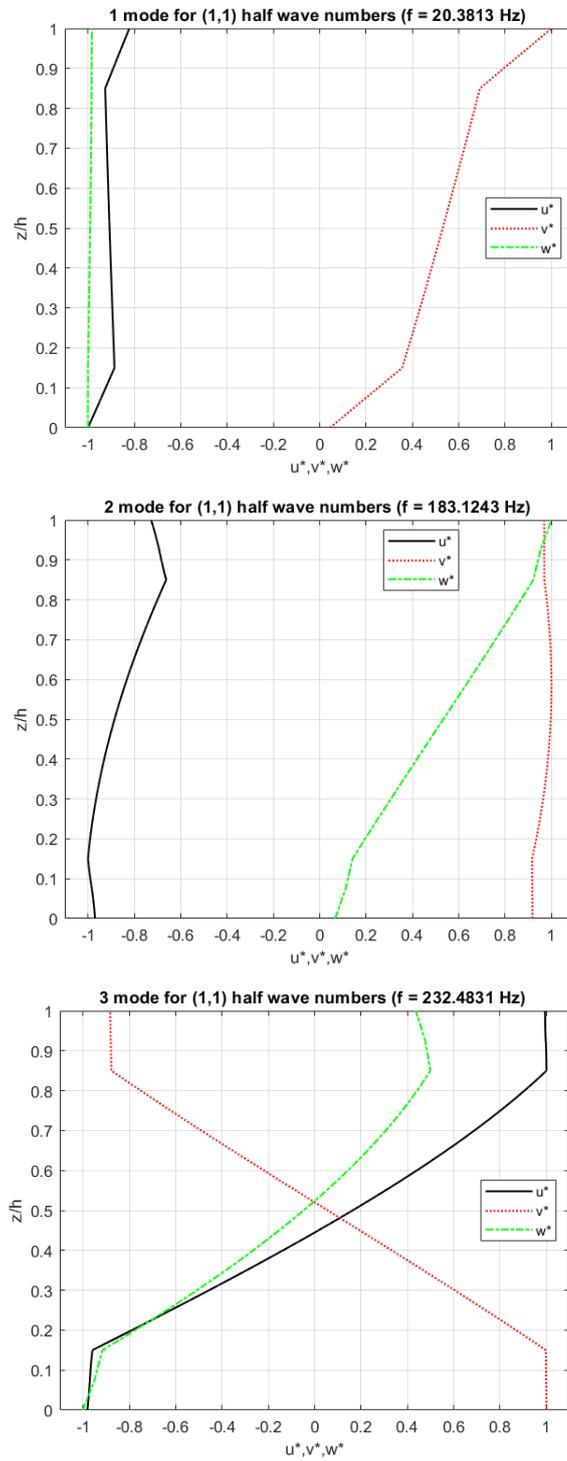


Figura 3.12: Primi tre modi di vibrare, in termini di spostamento, relativi al Caso 6: Guscio cilindrico sandwich $0^\circ/90^\circ/\text{PVC}/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 10$

i risultati forniti dalla nuova versione del codice siano, per la maggior parte, identici a quelli che è possibile determinare con la precedente versione; solo in un paio di casi (I frequenza propria adimensionalizzata relativa al rapporto $R_\alpha/h = 10$ e III frequenza propria adimensionalizzata relativa al rapporto $R_\alpha/h = 100$) si ha una differenza sull'ultima cifra decimale, causata, presumibilmente, dal metodo di arrotondamento utilizzato. Anche per questo caso come per il Caso 3, dato il maggior numero di strati matematici utilizzato, i tempi di calcolo sono abbattuti drasticamente. Le motivazioni sono le stesse riportate in precedenza. Inoltre, si nota come già per quaranta strati matematici si è raggiunta la convergenza sul valore della prima frequenza propria adimensionalizzata, come è possibile vedere in Figura 3.11). Il valore di quaranta strati matematici che si vede è stato scelto dato che è il minimo valore che permette di ottenere la corretta suddivisione di h_{layers} per questo caso.

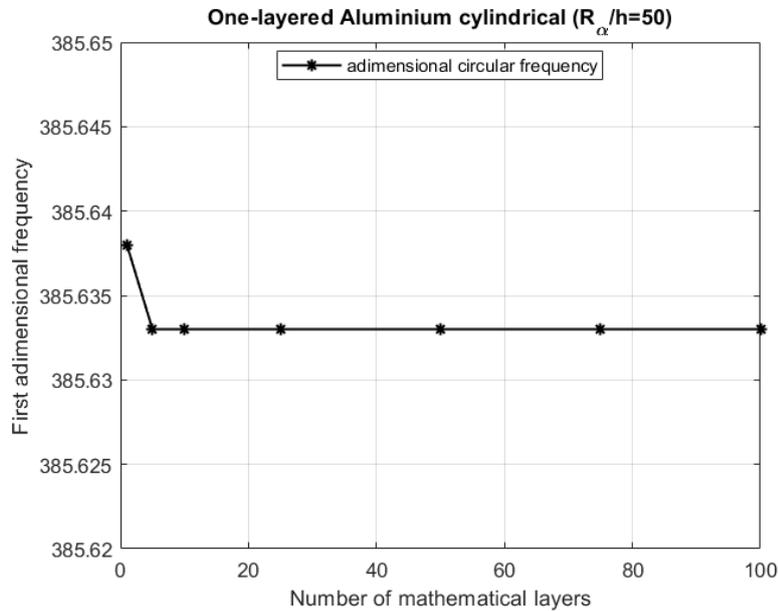
Per ciò che riguarda il Caso 7, visibile in Tabella 3.9 si può notare come i risultati forniti dalla nuova versione del codice siano, per la maggior parte, identici a quelli che è possibile determinare con la precedente versione; solo in un paio di casi (III frequenza propria adimensionalizzata relativa al rapporto $R_\alpha/h = 5$ e I frequenza propria adimensionalizzata relativa al rapporto $R_\alpha/h = 100$) si ha una differenza sull'ultima cifra decimale, causata, presumibilmente, dal metodo di arrotondamento utilizzato. Anche per questo caso come per il Caso 3, dato il maggior numero di strati matematici utilizzato, i tempi di calcolo sono abbattuti drasticamente. Le motivazioni sono le stesse riportate in precedenza. Inoltre, si nota come già per quaranta strati matematici si è raggiunta la convergenza sul valore della prima frequenza propria adimensionalizzata, come è possibile vedere in Figura 3.15). Il valore di quaranta strati matematici che si vede è stato scelto dato che è il minimo valore che permette di ottenere la corretta suddivisione di h_{layers} per questo caso.

In relazione al Caso 8, visibile in Tabella 3.10 si può notare come i risultati forniti dalla nuova versione del codice siano identici a quelli che è possibile determinare con la precedente versione a seguito di un significativo miglioramento in termini di tempi di calcolo. Per questo caso i tempi di calcolo sono abbattuti di una percentuale simile a quella vista nel Caso 4. Inoltre, si nota come già per venti strati matematici si è raggiunta la convergenza sul valore della prima frequenza propria adimensionalizzata, come è possibile vedere in Figura 3.15. Il valore di quaranta strati matematici che si vede è stato scelto dato che è il minimo valore che permette di ottenere la corretta suddivisione di h_{layers} per questo caso.

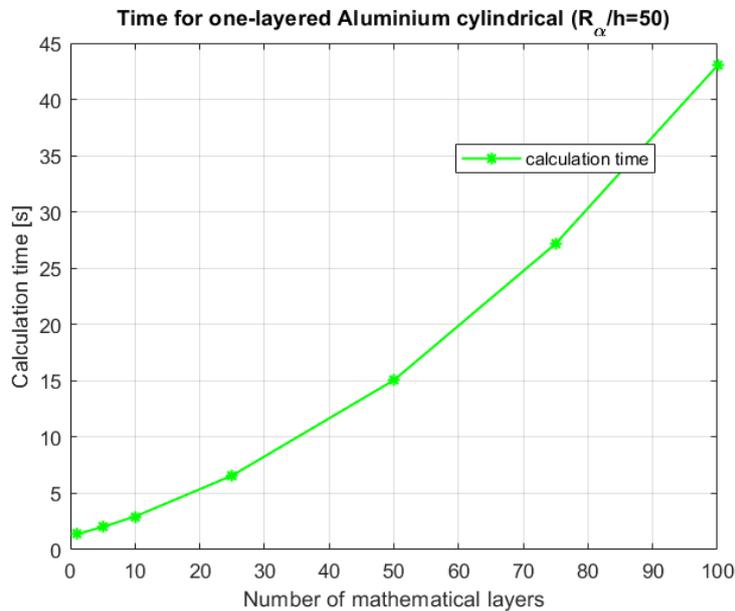
Per ciò che concerne il Caso 9, visibile in Tabella 3.11 si può notare come i risultati forniti dalla nuova versione del codice siano, per la maggior parte, identici a quelli che è possibile determinare con la precedente versione; so-

Tabella 3.9: Validazione Caso 7: Cilindro monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato. Confronto delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [7].

	$\bar{\omega}_{3DES}$ [7]	$\bar{\omega}$	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$					
$R_\alpha/h = 5$					
I frequenza	38.820	38.820			
II frequenza	167.09	167.09	219.37	43.076	80%
III frequenza	305.15	305.15			
$R_\alpha/h = 10$					
I frequenza	77.252	77.252			
II frequenza	333.85	333.85			
III frequenza	612.74	612.74			
$R_\alpha/h = 100$					
I frequenza	771.23	771.23			
II frequenza	3337.5	3337.5			
III frequenza	6135.3	6135.3			
$R_\alpha/h = 1000$					
I frequenza	7712.1	7712.1			
II frequenza	33375	33375			
III frequenza	61354	61354			



(a) Convergenza, al variare del numero di strati matematici, del Caso Cilindro monostrato in Alluminio. Gli asterischi in nero indicano il valore della I frequenza propria adimensionalizzata di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in nero.



(b) Tempo di esecuzione del codice al variare del numeri di strati matematici. Gli asterischi in verde indicano il tempo di esecuzione di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in verde.

Figura 3.13: *Analisi di convergenza e tempo di esecuzione del codice relativi al Caso 7: Cilindro monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato*

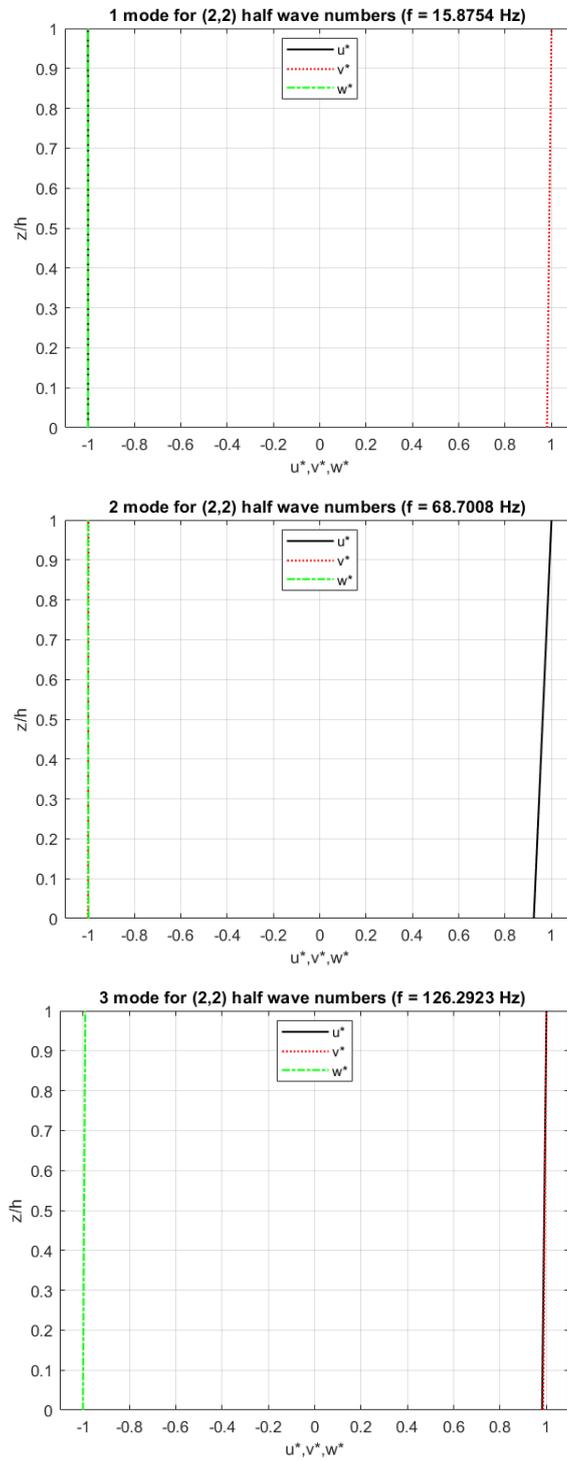
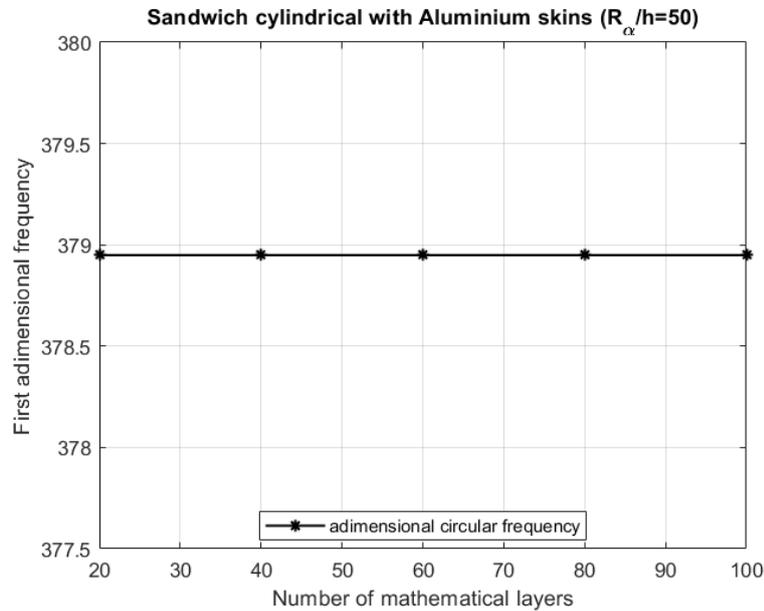


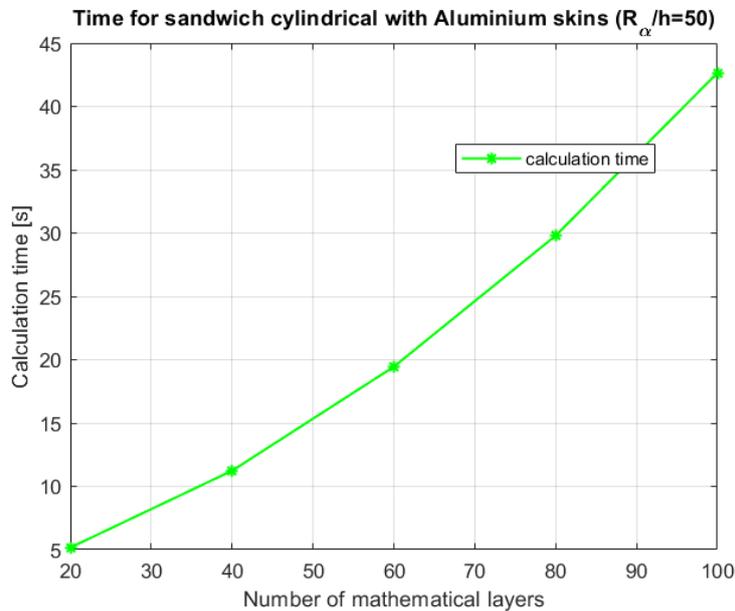
Figura 3.14: *Primi tre modi di vibrare, in termini di spostamento, relativi al Caso 7: Cilindro monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 100$*

Tabella 3.10: Validazione Caso 8: Cilindro sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato. Confronto delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [7].

	$\bar{\omega}_{3DES}$ [7]	$\bar{\omega}$	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_{skin}}{E_{skin}}}$					
$R_\alpha/h = 5$					
I frequenza	38.143	38.143			
II frequenza	162.44	162.44	213.36	42.902	80%
III frequenza	181.27	181.28			
$R_\alpha/h = 10$					
I frequenza	75.989	75.989			
II frequenza	327.93	327.93			
III frequenza	577.50	577.50			
$R_\alpha/h = 100$					
I frequenza	757.81	757.82			
II frequenza	3279.0	3279.0			
III frequenza	6029.5	6029.6			
$R_\alpha/h = 1000$					
I frequenza	7577.9	7577.9			
II frequenza	32790	32790			
III frequenza	60297	60297			



(a) Convergenza, al variare del numero di strati matematici, del Caso Cilindro sandwich Al/PVC/Al. Gli asterischi in nero indicano il valore della I frequenza propria adimensionalizzata di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in nero.



(b) Tempo di esecuzione del codice al variare dei numeri di strati matematici. Gli asterischi in verde indicano il tempo di esecuzione di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in verde.

Figura 3.15: *Analisi di convergenza e tempo di esecuzione del codice relativi al Caso 8: Cilindro sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato*

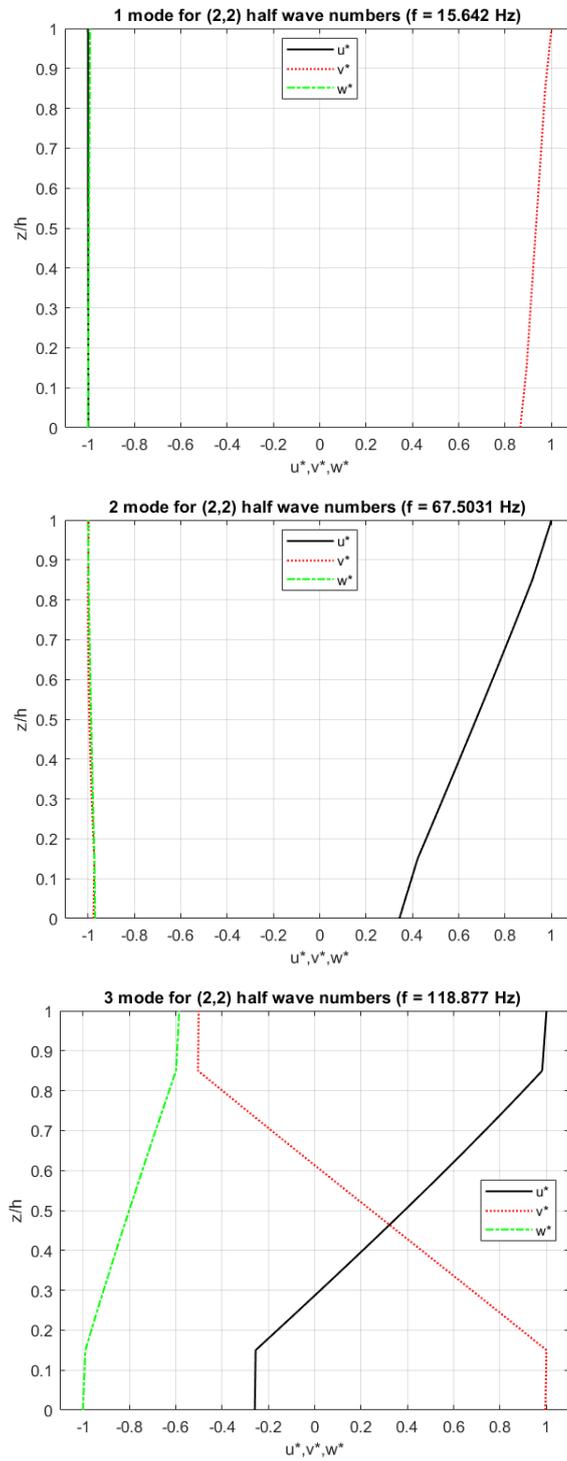
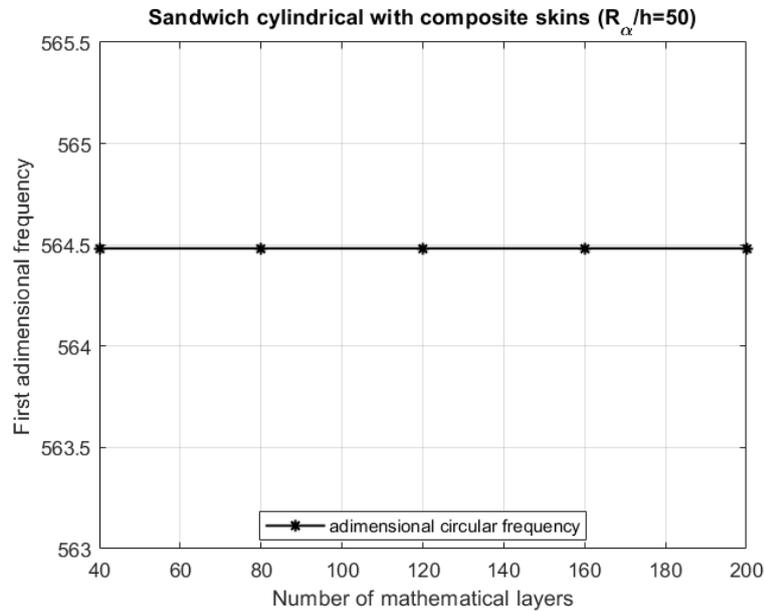


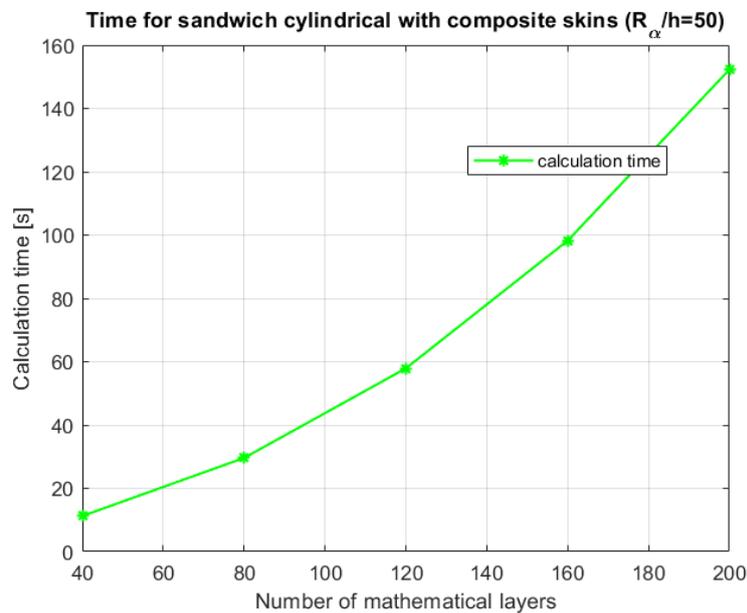
Figura 3.16: *Primi tre modi di vibrare, in termini di spostamento, relativi al Caso 8: Cilindro sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 10$*

Tabella 3.11: Validazione Caso 9: Cilindro sandwich $0^\circ/90^\circ/PVC/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiato. Confronto delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [7].

	$\bar{\omega}_{3DES}$ [7]	$\bar{\omega}$	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_{skin}}{E_{1skin}}}$					
$R_\alpha/h = 5$					
I frequenza	57.169	57.169			
II frequenza	340.25	340.25	2159.4	141.31	93%
III frequenza	473.05	473.05			
$R_\alpha/h = 10$					
I frequenza	113.47	113.47			
II frequenza	681.10	681.10			
III frequenza	1382.3	1382.3			
$R_\alpha/h = 100$					
I frequenza	1128.7	1128.7			
II frequenza	6811.1	6811.1			
III frequenza	14049	14050			
$R_\alpha/h = 1000$					
I frequenza	11287	11287			
II frequenza	68111	68111			
III frequenza	140500	140500			



(a) Convergenza, al variare del numero di strati matematici, del Caso Cilindro sandwich $0^\circ/90^\circ/\text{PVC}/90^\circ/0^\circ$. Gli asterischi in nero indicano il valore della I frequenza propria adimensionalizzata di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in nero.



(b) Tempo di esecuzione del codice al variare del numeri di strati matematici. Gli asterischi in verde indicano il tempo di esecuzione di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in verde.

Figura 3.17: *Analisi di convergenza e tempo di esecuzione del codice relativi al Caso 9: Cilindro sandwich $0^\circ/90^\circ/\text{PVC}/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiato*

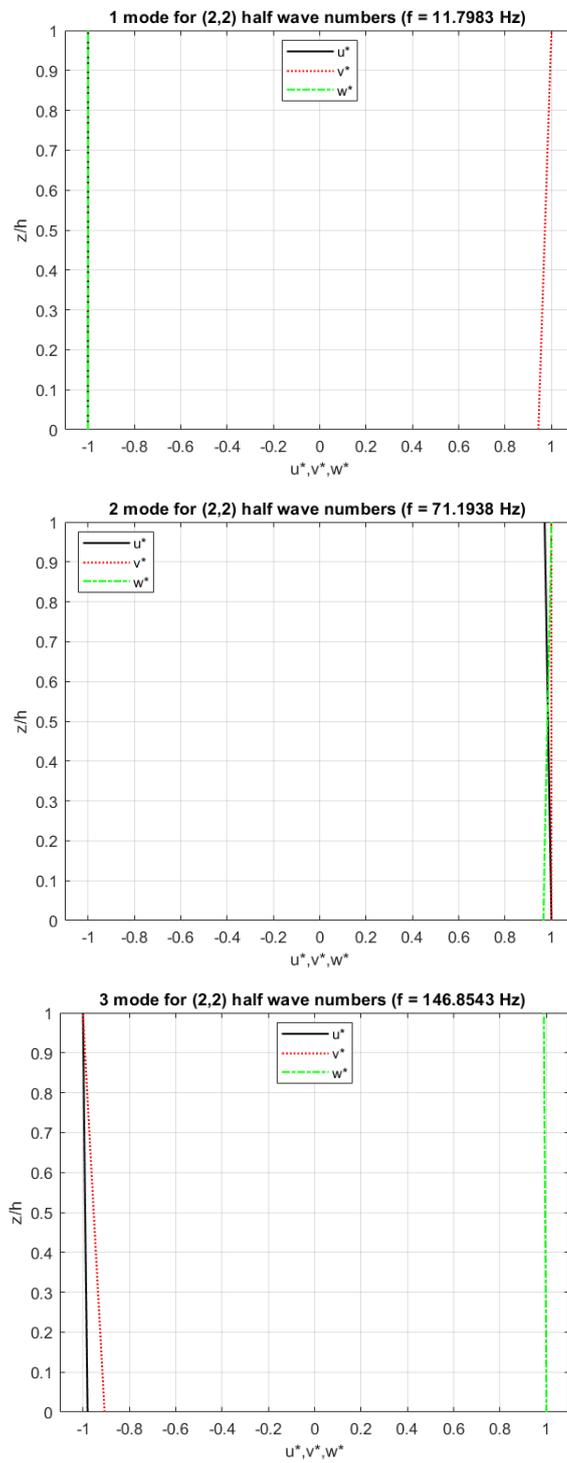


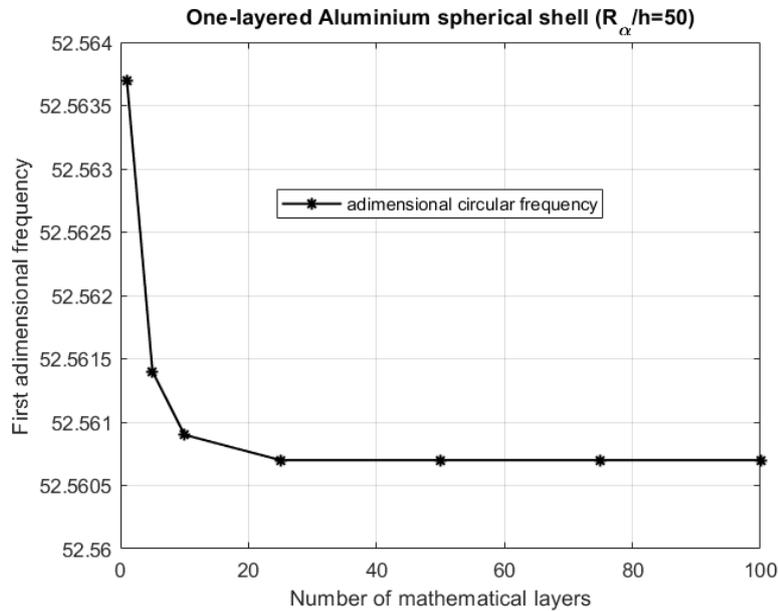
Figura 3.18: *Primi tre modi di vibrare, in termini di spostamento, relativi al Caso 9: Cilindro sandwich $0^\circ/90^\circ/PVC/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 10$*

Tabella 3.12: *Validazione Caso 10: Guscio sferico monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato. Confronto delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [7].*

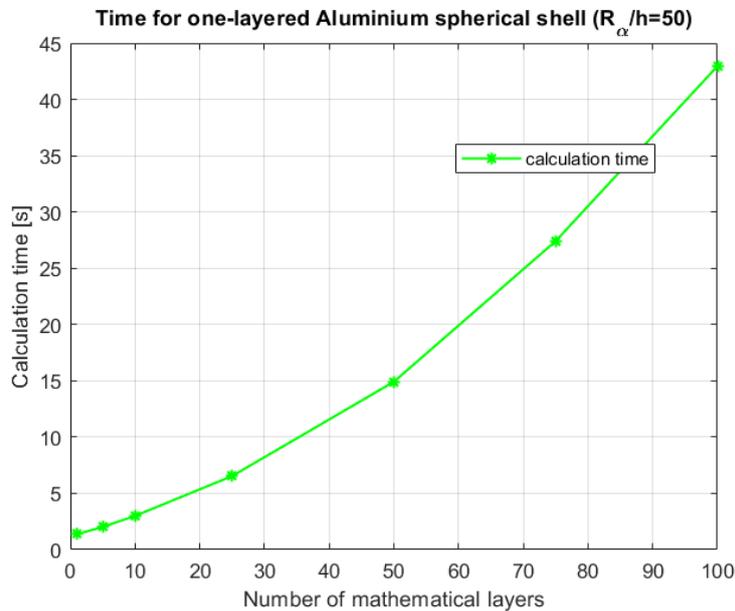
	$\bar{\omega}_{3DES}$ [7]	$\bar{\omega}$	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$					
$R_\alpha/h = 5$					
I frequenza	6.9554	6.9554			
II frequenza	14.302	14.302	212.88	42.530	80%
III frequenza	24.937	24.937			
$R_\alpha/h = 10$					
I frequenza	11.564	11.564			
II frequenza	28.793	28.793			
III frequenza	50.821	50.821			
$R_\alpha/h = 100$					
I frequenza	104.76	104.76			
II frequenza	288.53	288.53			
III frequenza	511.13	511.13			
$R_\alpha/h = 1000$					
I frequenza	1046.4	1046.4			
II frequenza	2885.4	2885.4			
III frequenza	5111.6	5111.6			

lo in un caso (III frequenza propria adimensionalizzata relativa al rapporto $R_\alpha/h = 100$) si ha una differenza, causata, presumibilmente, dal metodo di arrotondamento utilizzato. Anche per questo caso come per il Caso 3, dato il maggior numero di strati matematici utilizzato, i tempi di calcolo sono abbattuti drasticamente. Le motivazioni sono le stesse riportate in precedenza. Inoltre, si nota come già per quaranta strati matematici si è raggiunta la convergenza sul valore della prima frequenza propria adimensionalizzata, come è possibile vedere in Figura 3.17). Il valore di quaranta strati matematici che si vede è stato scelto dato che è il minimo valore che permette di ottenere la corretta suddivisione di h_{layers} per questo caso.

A riferimento del Caso 10, visibile in Tabella 3.12 si può notare come i risultati forniti dalla nuova versione del codice siano identici a quelli che



(a) Convergenza, al variare del numero di strati matematici, del Caso Guscio sferico monostrato in Alluminio. Gli asterischi in nero indicano il valore della I frequenza propria adimensionalizzata di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in nero.



(b) Tempo di esecuzione del codice al variare del numeri di strati matematici. Gli asterischi in verde indicano il tempo di esecuzione di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in verde.

Figura 3.19: *Analisi di convergenza e tempo di esecuzione del codice relativi al Caso 10: Guscio sferico monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato*

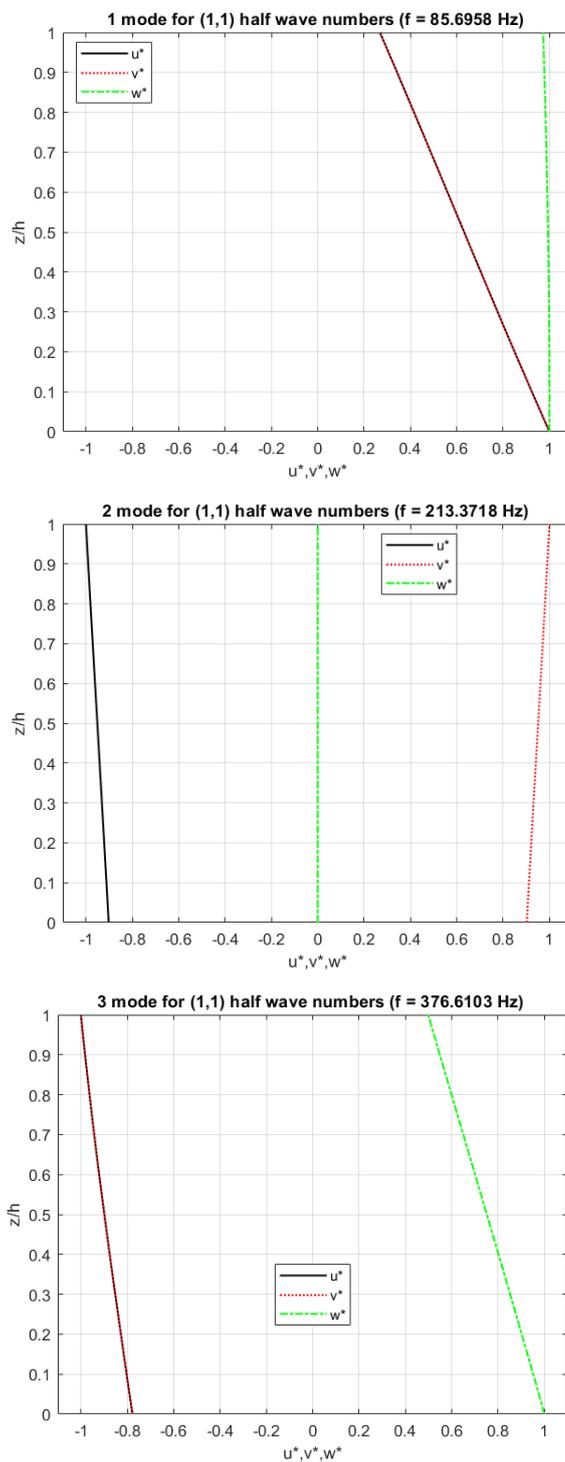


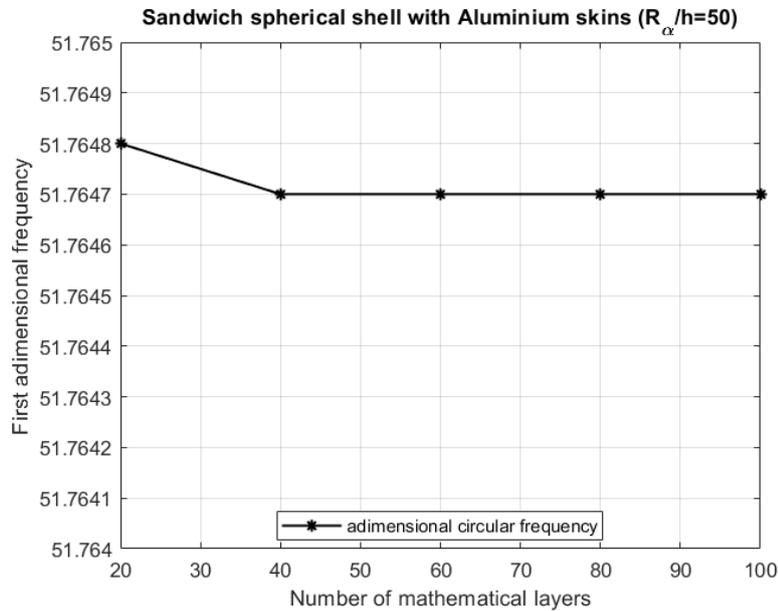
Figura 3.20: Primi tre modi di vibrare, in termini di spostamento, relativi al Caso 10: Guscio sferico monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 10$

Tabella 3.13: Validazione Caso 11: Guscio sferico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato. Confronto delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [7].

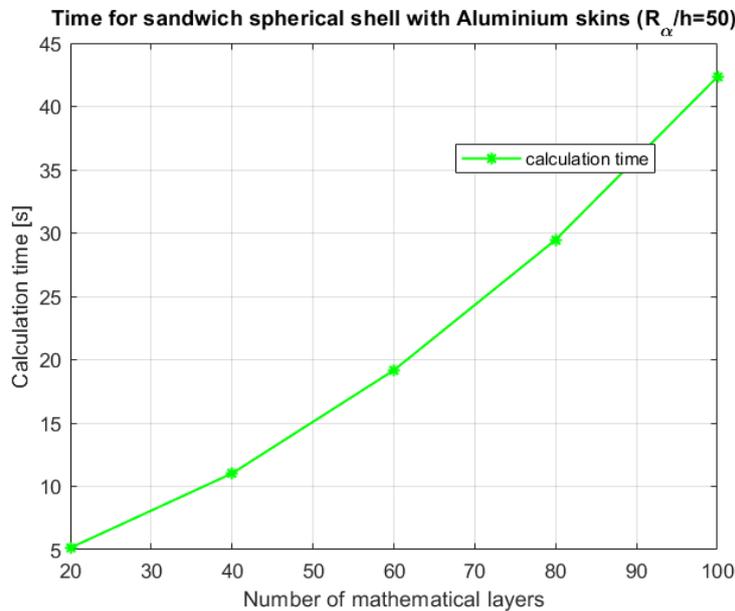
	$\bar{\omega}_{3DES}$ [7]	$\bar{\omega}$	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$					
$R_\alpha/h = 5$					
I frequenza	5.2854	5.2855			
II frequenza	8.9414	8.9414	210.61	41.561	80%
III frequenza	13.256	13.256			
$R_\alpha/h = 10$					
I frequenza	10.522	10.522			
II frequenza	27.909	27.909			
III frequenza	31.006	31.006			
$R_\alpha/h = 100$					
I frequenza	103.05	103.05			
II frequenza	283.47	283.47			
III frequenza	502.27	502.27			
$R_\alpha/h = 1000$					
I frequenza	1028.2	1028.2			
II frequenza	2834.8	2834.8			
III frequenza	5023.6	5023.6			

è possibile determinare con la precedente versione, ma con il vantaggio di abbattere in maniera importante i tempi di calcolo. Inoltre, si nota come la convergenza viene raggiunta per un numero di strati matematici più alto rispetto alle precedenti geometrie composte da uno strato unico in Alluminio, questo perchè viene introdotto l'effetto della doppia curvatura. Il tempo di calcolo per poter disporre di risultati che siano già a convergenza, a seguito di questa considerazione, aumenta leggermente rispetto alle configurazioni precedenti in solo Alluminio (visibile Figura 3.19).

Per ciò che riguarda il Caso 11, visibile in Tabella 3.13 si può notare come i risultati forniti dalla nuova versione del codice siano, per la maggior parte, identici a quelli che è possibile determinare con la precedente versione; solo in un caso (I frequenza propria adimensionalizzata relativa al rapporto $R_\alpha/h =$



(a) Convergenza, al variare del numero di strati matematici, del Caso Guscio sferico sandwich Al/PVC/Al. Gli asterischi in nero indicano il valore della I frequenza propria adimensionalizzata di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in nero.



(b) Tempo di esecuzione del codice al variare dei numeri di strati matematici. Gli asterischi in verde indicano il tempo di esecuzione di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in verde.

Figura 3.21: *Analisi di convergenza e tempo di esecuzione del codice relativi al caso 11: Guscio sferico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato*

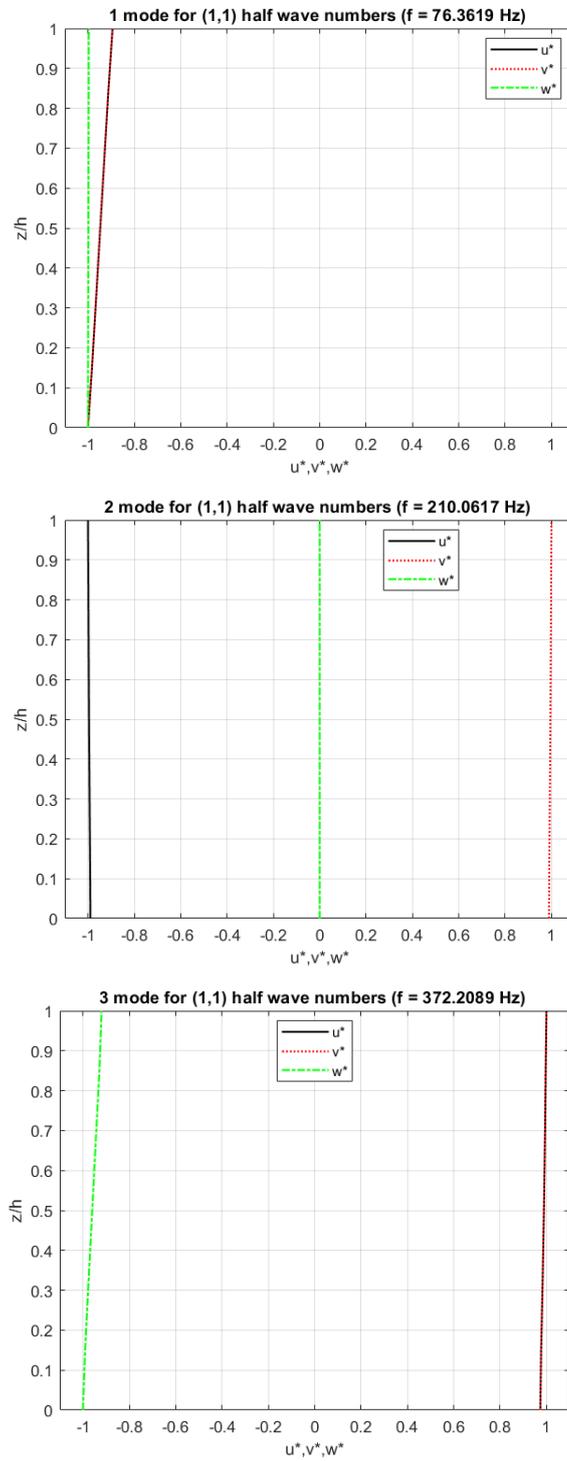


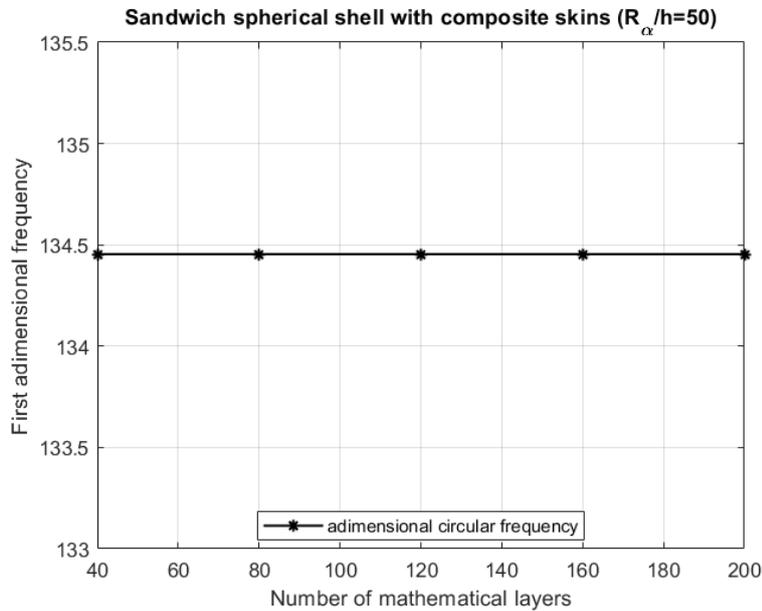
Figura 3.22: *Primi tre modi di vibrare, in termini di spostamento, relativi al Caso 11: Guscio sferico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 100$*

Tabella 3.14: Validazione Caso 12: Guscio sferico sandwich $0^\circ/90^\circ/PVC/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiato. Confronto delle prime tre frequenze proprie in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [7].

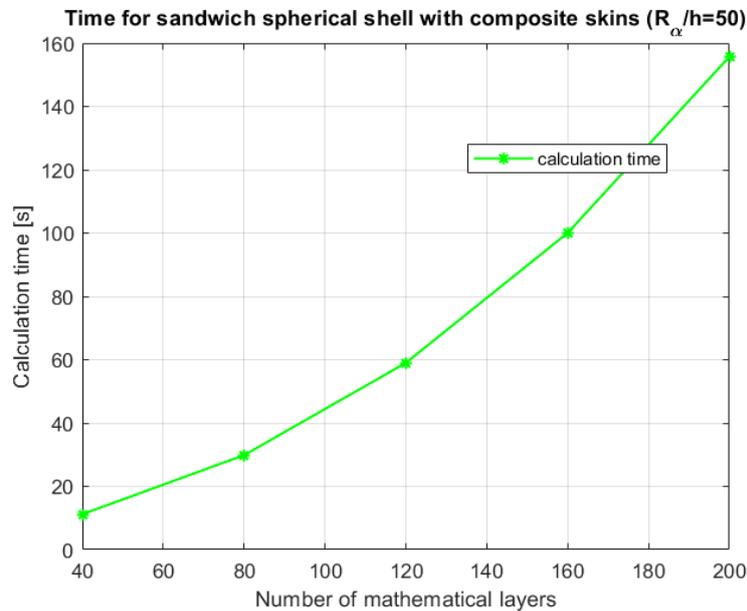
	$\bar{\omega}_{3DES}$ [7]	$\bar{\omega}$	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$					
$R_\alpha/h = 5$					
I frequenza	7.2379	7.2379			
II frequenza	19.204	19.204	2168.4	141.43	93%
III frequenza	37.348	37.349			
$R_\alpha/h = 10$					
I frequenza	14.290	14.290			
II frequenza	72.088	72.088			
III frequenza	79.253	79.253			
$R_\alpha/h = 100$					
I frequenza	134.45	134.45			
II frequenza	807.96	807.96			
III frequenza	975.81	975.81			
$R_\alpha/h = 1000$					
I frequenza	1338.4	1338.4			
II frequenza	8080.3	8080.3			
III frequenza	9760.1	9760.1			

5) si ha una differenza sull'ultima cifra decimale, causata, presumibilmente, dal metodo di arrotondamento utilizzato. Per questo caso i tempi di calcolo sono abbattuti di una percentuale simile a quella vista nel Caso 4. Inoltre, si nota come già per quaranta strati matematici si è raggiunta la convergenza sul valore della prima frequenza propria adimensionalizzata, come è possibile vedere in Figura 3.21). Il valore di quaranta strati matematici che si vede è stato scelto dato che è il minimo valore che permette di ottenere la corretta suddivisione di h_{layers} per questo caso.

Per ciò che concerne, infine, il Caso 12, visibile in Tabella 3.14 si può notare come i risultati forniti dalla nuova versione del codice siano, per la maggior parte, identici a quelli che è possibile determinare con la precedente versione; solo in un caso (III frequenza propria adimensionalizzata relativa



(a) Convergenza, al variare del numero di strati matematici, del Caso Guscio sferico sandwich $0^\circ/90^\circ/\text{PVC}/90^\circ/0^\circ$. Gli asterischi in nero indicano il valore della I frequenza propria adimensionalizzata di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in nero.



(b) Tempo di esecuzione del codice al variare del numeri di strati matematici. Gli asterischi in verde indicano il tempo di esecuzione di un particolare caso utilizzato per ricostruire l'andamento generale in verde.

Figura 3.23: *Analisi di convergenza e tempo di esecuzione del codice relativi al Caso 12: Guscio sferico sandwich $0^\circ/90^\circ/\text{PVC}/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiato*

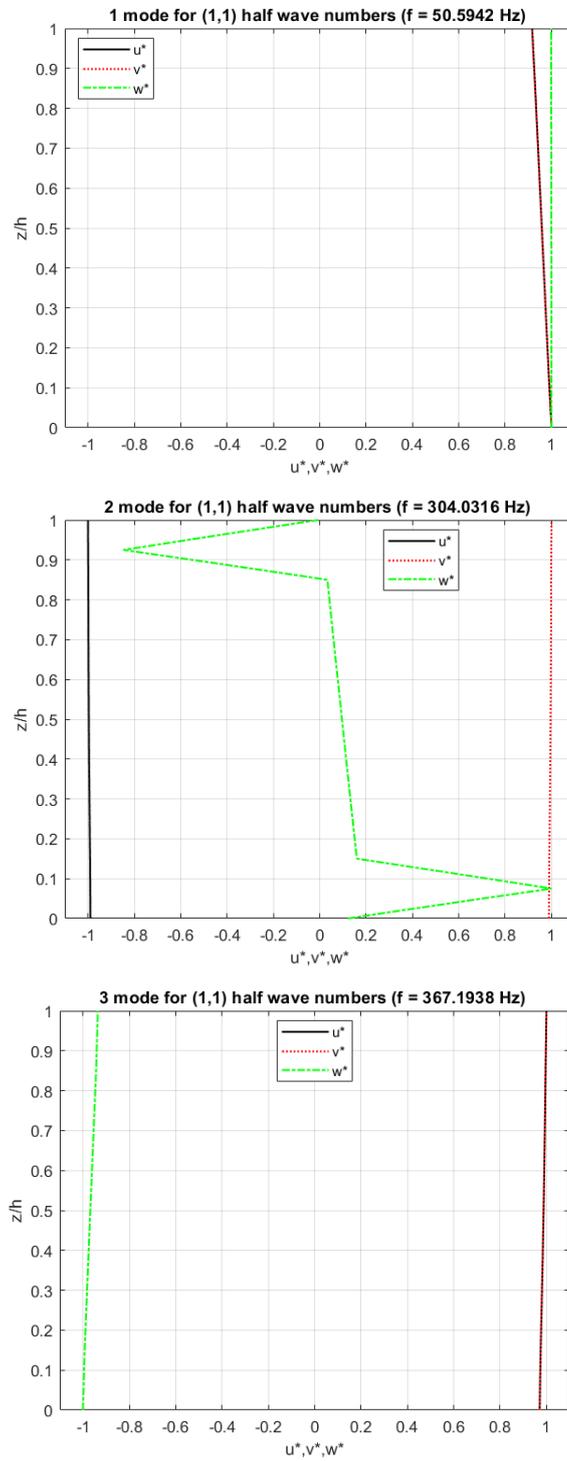


Figura 3.24: Primi tre modi di vibrare, in termini di spostamento, relativi al Caso 12: Guscio sferico sandwich $0^\circ/90^\circ/PVC/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 100$

al rapporto $R_\alpha/h = 5$) si ha una differenza sull'ultima cifra decimale, causata, presumibilmente, dal metodo di arrotondamento utilizzato. Anche per questo caso come per il Caso 3, dato il maggior numero di strati matematici utilizzato, i tempi di calcolo sono abbattuti drasticamente. Le motivazioni sono le stesse riportate in precedenza. Inoltre, si nota come già per quaranta strati matematici si è raggiunta la convergenza sul valore della prima frequenza propria adimensionalizzata, come è possibile vedere in Figura 3.23). Il valore di quaranta strati matematici che si vede è stato scelto dato che è il minimo valore che permette di ottenere la corretta suddivisione di h_{layers} per questo caso.

Dal confronto dei risultati effettuato si dimostra come le modifiche apportate non cambiano in modo determinante i risultati, se non per leggerissime differenze date principalmente dal metodo di arrotondamento numerico. D'altro canto, invece, le performance del nuovo codice sono molto migliorate, avendo, in generale, una diminuzione dei tempi di calcolo che, nei casi in cui si utilizzano 100 strati matematici, sta attorno al 75%-80% mentre arriva anche a più del 90% nei casi in cui si va ad utilizzare il doppio degli strati.

Contestualmente, viene anche presentata l'analisi di convergenza, effettuata per i valori $a/h = 20$ e $R_\alpha/h = 50$, la quale dimostra come il modello sia numericamente convergente, ovvero che all'aumentare del numero di strati matematici, i quali sono gli unici elementi, insieme all'ordine della matrice esponenziale N , che introducono approssimazioni, il risultato si vada a stabilizzare verso un certo valore. In alcuni casi, a causa del numero di strati utilizzato per l'analisi, si vede che il valore è già stabilizzato (ad esempio il Caso 2), perchè si è utilizzato un numero di essi già sufficienti a far convergere il risultato; in tutti i casi presentati il numero minimo di strati matematici considerato per l'analisi di convergenza e per il calcolo del tempo di esecuzione è stato scelto affinché sia possibile ottenere la suddivisione dei diversi h_{layers} di ogni caso. L'analisi di convergenza è anche utile per capire il numero minimo di strati matematici che è possibile utilizzare in modo tale da diminuire al massimo il costo computazionale e, quindi, valutare il minimo tempo di esecuzione del codice. Come è possibile constatare, in base ai grafici in verde presenti in Figura 3.1-Figura 3.23, con l'uso di quaranta strati matematici tutti i casi sono già convergenti e quindi i risultati sono sufficientemente affidabili; utilizzando questo numero di strati matematici totali il codice ha un tempo di esecuzione che si attesta intorno agli 11 secondi che è il tempo in cui codice fornisce sia il valore delle frequenze proprie che i relativi modi di vibrare del caso impostato. Vengono racchiusi in Tabella 3.15 i tempi di calcolo e il relativo numero di strati matematici per cui si ha la convergenza.

Si nota che i casi in cui si ha il materiale monostrato in Alluminio tendono

Tabella 3.15: *Convergenza in base al numero di strati matematici e relativi tempi di esecuzione. Nella prima colonna viene mostrato il numero di strati matematici da cui il risultato è convergente, mentre nella seconda colonna si misura il tempo di esecuzione impiegato dal codice per il numero di strati matematici che portano a convergenza*

	Convergenza dopo n° strati matematici	Tempo esecuzione [s]
Caso 1	5	2.00
Caso 2	20	5.09
Caso 3	40	11.6
Caso 4	25	6.53
Caso 5	40	11.3
Caso 6	40	11.3
Caso 7	5	2.02
Caso 8	20	5.17
Caso 9	40	11.3
Caso 10	25	6.54
Caso 11	40	11.0
Caso 12	40	11.2

a convergere con un numero minore di strati matematici rispetto ai casi in cui si ha la configurazione sandwich, che, mediamente, invece, ha bisogno di più strati. Per i Casi 3,6,9,12 si ha convergenza sempre per 40 strati matematici perchè è il minimo numero che si è utilizzato per eseguire l'analisi di convergenza; probabilmente, se la configurazione del materiale composito fosse diversa, si avrebbe una convergenza per un numero di strati matematici minore. Va comunque considerato che il valore di frequenza propria adimensionalizzata calcolato con un numero esiguo di strati matematici si discosta rispetto a quello di "convergenza" solo sull'ultima cifra decimale, permettendo di comprendere come la differenza sia pressochè insignificante anche se si utilizza il numero di strati che porta a convergenza il risultato.

Capitolo 4

Revisione codice per analisi statiche di piastre e gusci multistrato

In questo capitolo viene presentata la validazione del nuovo codice per il caso di analisi statiche; la metodologia seguita è la stessa presentata per le analisi alle vibrazioni libere vista nel Capitolo 3, comprendendo, quindi, sia il confronto tra i risultati fra le due versioni del codice, con l'indicazione del tempo di esecuzione, che l'analisi di convergenza. Non è stata eseguita l'analisi dei tempi di calcolo al variare del numero di strati matematici perchè a seguito delle modifiche effettuate sul codice, che verranno presentate nella sezione seguente, non si ha necessità di effettuarla, dato che il tempo di calcolo, per qualsiasi numero di strati matematici rimane circa costante. I risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli presenti in [13] e [15].

4.1 Modifiche effettuate sul codice 3DES

Il grande vantaggio che è possibile sfruttare nel caso statico riguarda la possibilità di non utilizzare il calcolo simbolico di Matlab[®], incrementando notevolmente le performance del codice. Questo miglioramento è stato possibile considerando che i termini A_1 , A_8 e A_{15} nelle (2.20a) - (2.20c), i quali possono essere scritti esplicitamente come

$$A_1^j = -\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} + \rho^k H_\alpha H_\beta \omega^2 \quad (4.1a)$$

$$A_8^j = -\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} + \rho^k H_\alpha H_\beta \omega^2 \quad (4.1b)$$

$$\begin{aligned}
A_{15}^j = & \frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} + \\
& + \rho^k H_\alpha H_\beta \omega^2
\end{aligned}
\tag{4.1c}$$

contengono il parametro incognito ω^2 , il quale è responsabile dell'utilizzo del calcolo simbolico, giacchè è una variabile incognita che Matlab tratta con il calcolo simbolico, considerandolo come una variabile che può assumere qualsiasi valore numerico. Questa variabile è l'incognita che permette, una volta arrivati alla relazione conclusiva del problema dinamico, di conoscere il valore della pulsazione propria del caso impostato. Nel caso di analisi statica questo termine non è presente (per comprendere ciò, si confronti la trattazione riferita al caso statico rispetto a quella del caso dinamico nel Capitolo 2) perchè la densità del materiale non influisce in alcun modo in questo tipo di analisi, quindi, per poter migliorare le prestazioni del codice, si è provveduto ad omettere tutto l'addendo relativo al termine ω^2 . In questo modo, non comparando nei termini A_i^j delle relazioni precedenti, i valori di questi sono semplicemente numerici e non simbolici. Con questa semplice accortezza i tempi di calcolo vengono abbattuti drasticamente dato che il software riesce a gestire in maniera molto più agevole delle variabili composte da sole entità numeriche piuttosto che simboliche, in cui un termine non è noto. Nella versione precedente del codice, dato che la densità del materiale non ha influenza nelle analisi statiche, si provvedeva a forzarne il valore impostando zero, in modo che quell'addendo non avesse alcuna influenza sui termini A_i^j . Dal punto di vista matematico questa soluzione non ha alcuna differenza rispetto a quella effettuata nella nuova versione del codice, mentre dal punto di vista operativo la differenza è marcata perchè Matlab[®] considera quell'addendo come uno *zero simbolico*, il che porta a considerare tutto il termine A_i^j come simbolico e così in cascata tutte le altre grandezze che contengono gli A_i^j definiti sopra. Questa procedura comporta un aumento dei tempi di calcolo molto importante, perchè la variabile simbolica viene portata avanti in numerosi calcoli. Attraverso, invece, la soluzione attuata nel nuovo codice, il termine A_i^j viene considerato come una variabile numerica perchè non è presente alcun addendo simbolico al suo interno. Con il proseguire dei calcoli non si effettua nessuna operazione con variabili simboliche e quindi il codice lavora solo con termini numerici, portando ad un pregevole miglioramento delle prestazioni in termini di tempo di calcolo.

Tabella 4.1: *Casi studiati per la validazione della nuova versione del codice 3DES. Il numero di strati matematici utilizzato per Caso 1 e Caso 3 sono pari a $N_L = 100$, mentre per tutti gli altri si ha $N_L = 300$. L'ordine massimo di approssimazione della matrice esponenziale è pari a $N = 3$ per ogni caso considerato*

a	b	h_{layers}	R_α	R_β	m	n	P_{top}	P_{bottom}
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]			[Pa]	[Pa]
Caso 1: Piastra monostrato Alluminio								
1	1	h	∞	∞	1	1	$P_z = 1$	$P_z = 0$
Caso 2: Piastra sandwich Al/PVC/Al								
1	1	0.1h/0.8h/0.1h	∞	∞	1	1	$P_z = -1$	$P_z = 1$
Caso 3: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al								
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	20	0.1h/0.8h/0.1h	10	∞	1	1	$P_z = 1$	$P_z = 0$
Caso 4: Guscio cilindrico composito $0^\circ/90^\circ/0^\circ$								
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	20	h/3 (x3)	10	∞	1	1	$P_\beta = 1$	$P_\beta = 0$
Caso 5: Cilindro composito $0^\circ/90^\circ$								
$2\pi R_\alpha$	20	0.5h/0.5h	10	∞	2	2	$P_\beta = 1$	$P_\beta = -1$
Caso 6: Guscio sferico composito $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$								
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	$\frac{\pi}{3}R_\beta$	h/4 (x4)	10	10	1	1	$P_\alpha = 1$	$P_\alpha = 0$

4.2 Confronto, validazione e analisi di convergenza

Per questo assessment si sono confrontati sei differenti casi i quali permettono di avere una visione ampia di tutte le configurazioni che è possibile studiare con il codice; infatti, si hanno tutte le possibilità di carico lungo le tre direzioni, materiali e geometrie possibili. In particolare, i materiali considerati sono gli stessi utilizzati per la validazione del caso dinamico, che possono essere visti nella Tabella 2.2 del capitolo precedente, mentre le geometrie hanno diversi parametri caratteristici rispetto a quelli visti nel precedente capitolo e vengono dettagliatamente riportati in Tabella 4.1. Anche in questo caso le indicazioni temporali sono state rilevate solo per il primo valore di snellezza, dato che al variare di questo parametro non varia il tempo di calcolo, sempre ragionando a parità di numero di strati matematici e ordine massimo della matrice esponenziale.

Per ciò che riguarda il Caso 1 è possibile visualizzare in Tabella 4.2 come non ci sia alcuna differenza in termini di risultati tra le due versioni del

Tabella 4.2: Validazione Caso 1: Piastra monostrato in Alluminio semplicemente appoggiata soggetta a carichi al contorno $P_z = 1$ Pa (top) e $P_z = 0$ Pa (bottom). Confronto dello spostamento trasversale in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [13].

\bar{w}_{3DES} [13]	\bar{w}	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{w} = w \frac{10^2 E}{\bar{p}_z h (\frac{a}{h})^4}$				
$a/h = 2$ 6.0466	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 6.0466	92.605	2.4386	97%
$a/h = 4$ 3.6630	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 3.6630			
$a/h = 10$ 2.9425	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 2.9425			
$a/h = 20$ 2.8377	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 2.8377			
$a/h = 50$ 2.8082	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 2.8082			
$a/h = 100$ 2.8040	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 2.8040			

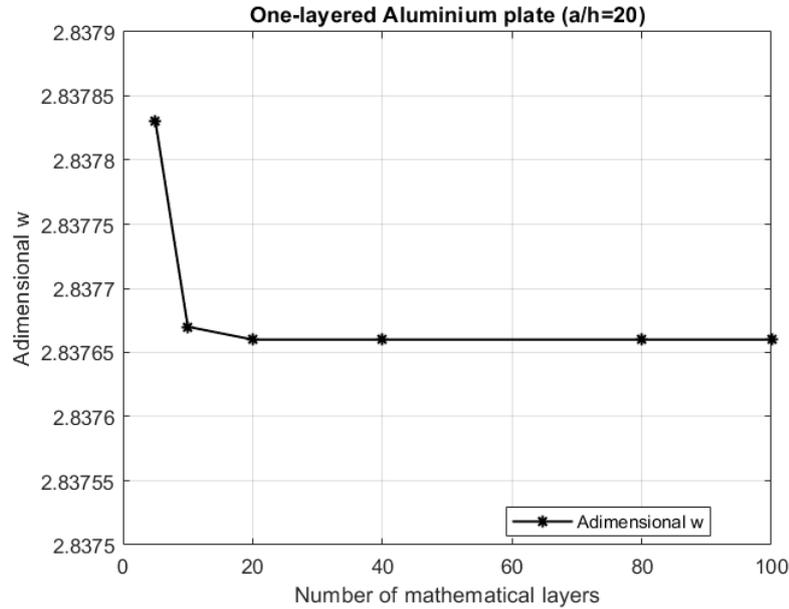


Figura 4.1: *Convergenza, al variare del numero degli strati matematici, del Caso 1: Piastra monostrato in Alluminio semplicemente appoggiata*

codice; allo stesso tempo è possibile constatare che i tempi di calcolo sono stati abbattuti drasticamente, permettendo di compiere un'analisi statica, la quale fornisce in output l'andamento degli spostamenti, delle deformazioni e delle tensioni, sottoforma di figure, in poco più di due secondi. Per quanto riguarda, invece, l'analisi di convergenza, in Figura 4.1, si vede come già con l'utilizzo di venti strati matematici il risultato sia convergente. Si noti che il numero di strati matematici non incide sui tempi di calcolo del programma, giacchè, grazie alla modifica effettuata, vengono utilizzate solamente variabili numeriche che il software Matlab[®] riesce a gestire con estrema facilità e velocità. Infine, è possibile verificare che l'analisi è stata correttamente effettuata grazie ai grafici Figura 4.2, infatti attraverso l'andamento di σ_{zz} è possibile vedere che le condizioni di carico al contorno sono rispettate (ovvero al top il valore di σ_{zz} è pari ad 1 Pa a seguito del carico applicato mentre al bottom è pari a 0 Pa dato che non viene applicato nessun carico) mentre attraverso le figure relative degli spostamenti si nota l'andamento continuo che non ha variazioni di pendenza a seguito del fatto che il materiale considerato è unico per tutta la struttura.

Per quanto concerne il Caso 2 è possibile visualizzare in Tabella 4.3 come non ci sia alcuna differenza in termini di risultati tra le due versioni del codice; allo stesso tempo è possibile constatare che i tempi di calcolo sono stati

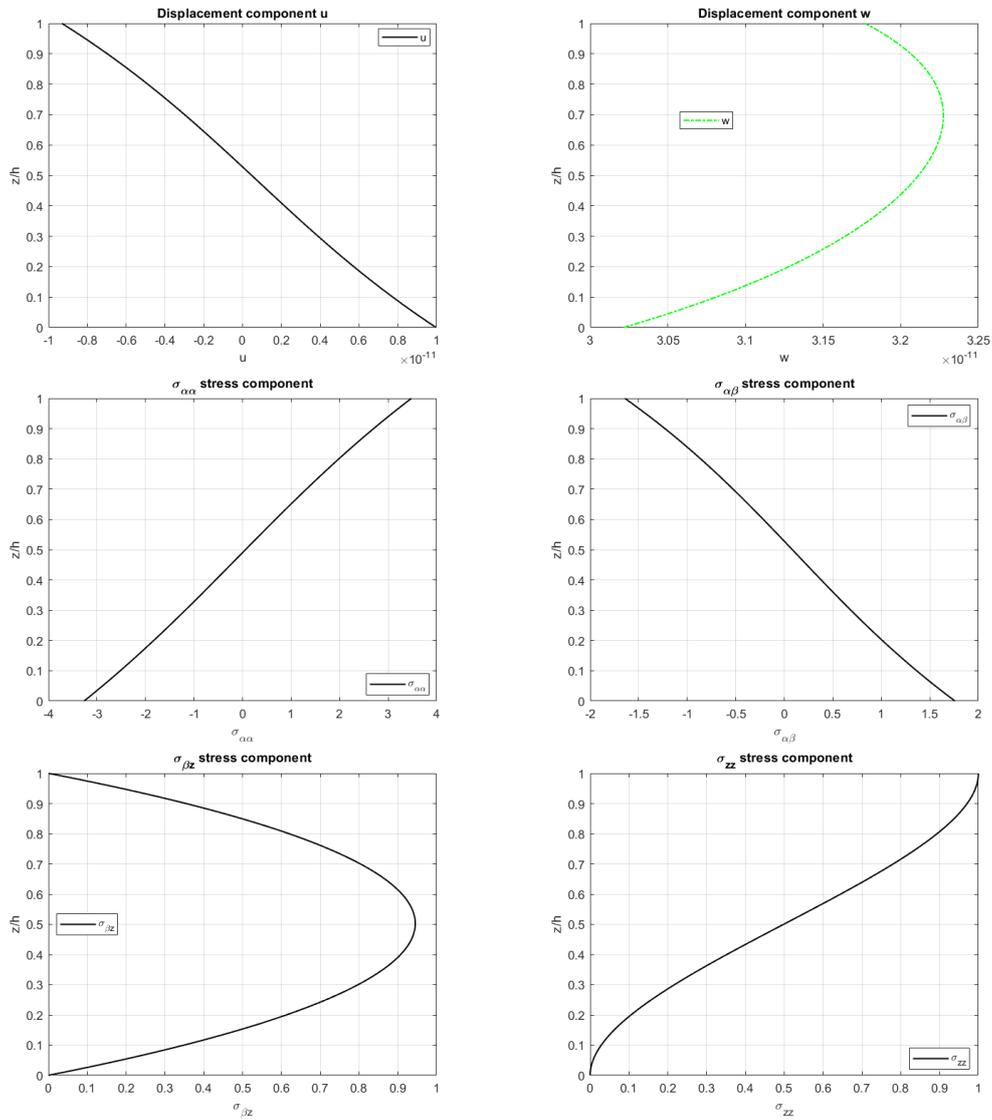


Figura 4.2: *Spostamenti e tensioni lungo lo spessore del Caso 1: Piastra monostrato in Alluminio semplicemente appoggiata con rapporto di snellezza $a/h = 4$*

Tabella 4.3: Validazione Caso 2: Piastra sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiata soggetta a carichi al contorno $P_z = -1$ Pa (top) e $P_z = 1$ Pa (bottom). Confronto dello spostamento trasversale in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [15].

\bar{w}_{3DES} [15]	\bar{w}	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{w} = w \frac{10^4 E_2 \text{bottom}}{\bar{p}_z h (\frac{a}{h})^4}$				
$a/h = 2$ -1286.1	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -1286.1	505.09	2.4712	99.5%
$a/h = 4$ -556.66	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -556.66			
$a/h = 10$ -117.41	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -117.41			
$a/h = 20$ -38.757	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -38.757			
$a/h = 50$ -15.861	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -15.861			
$a/h = 100$ -12.558	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -12.558			

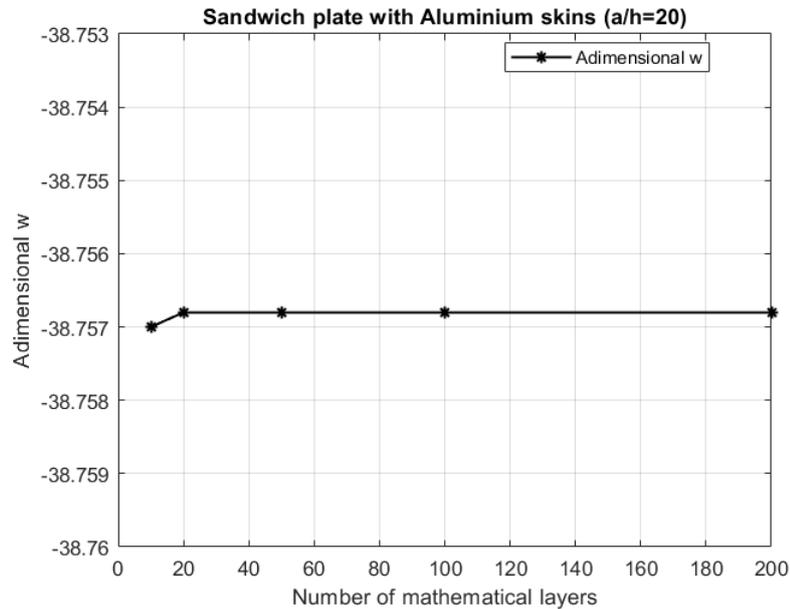


Figura 4.3: *Convergenza, al variare del numero degli strati matematici, del Caso 2: Piastra sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiata*

abbattuti drasticamente, in percentuale ancora superiore rispetto al caso precedente a seguito dell'utilizzo di un numero maggiore di strati matematici. Per quanto riguarda, invece, l'analisi di convergenza, in Figura 4.3, si vede come, anche per questo caso, già con l'utilizzo di venti strati matematici il risultato sia convergente; vale la stessa considerazione effettuata in precedenza riguardo al variare dei tempi di calcolo in funzione del numero di strati matematici. Infine, è possibile verificare che l'analisi è stata correttamente effettuata grazie ai grafici Figura 4.4, infatti attraverso l'andamento di σ_{zz} è possibile vedere che le condizioni di carico al contorno sono rispettate (ovvero al top il valore di σ_{zz} è pari ad $-1 Pa$ a seguito del carico applicato mentre al bottom è pari a $1 Pa$). Inoltre, è possibile notare come l'andamento delle tensioni $\sigma_{\alpha z}$ e σ_{zz} sia continuo lungo lo spessore; ciò è possibile solamente attraverso la corretta imposizione delle condizioni di continuità interlaminare. Lo stesso vale per gli spostamenti, anch'essi continui a seguito dell'imposizione delle condizioni di continuità interlaminare. Le tensioni nel piano, $\sigma_{\beta\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$, invece, possono essere discontinue in corrispondenza dell'interfaccia tra due materiali differenti.

A riferimento del Caso 3 è possibile visualizzare in Tabella 4.4 come non ci sia alcuna differenza in termini di risultati tra le due versioni del codice se non per quanto riguarda il caso relativo ad $R_\alpha/h = 2$ in cui la differenza

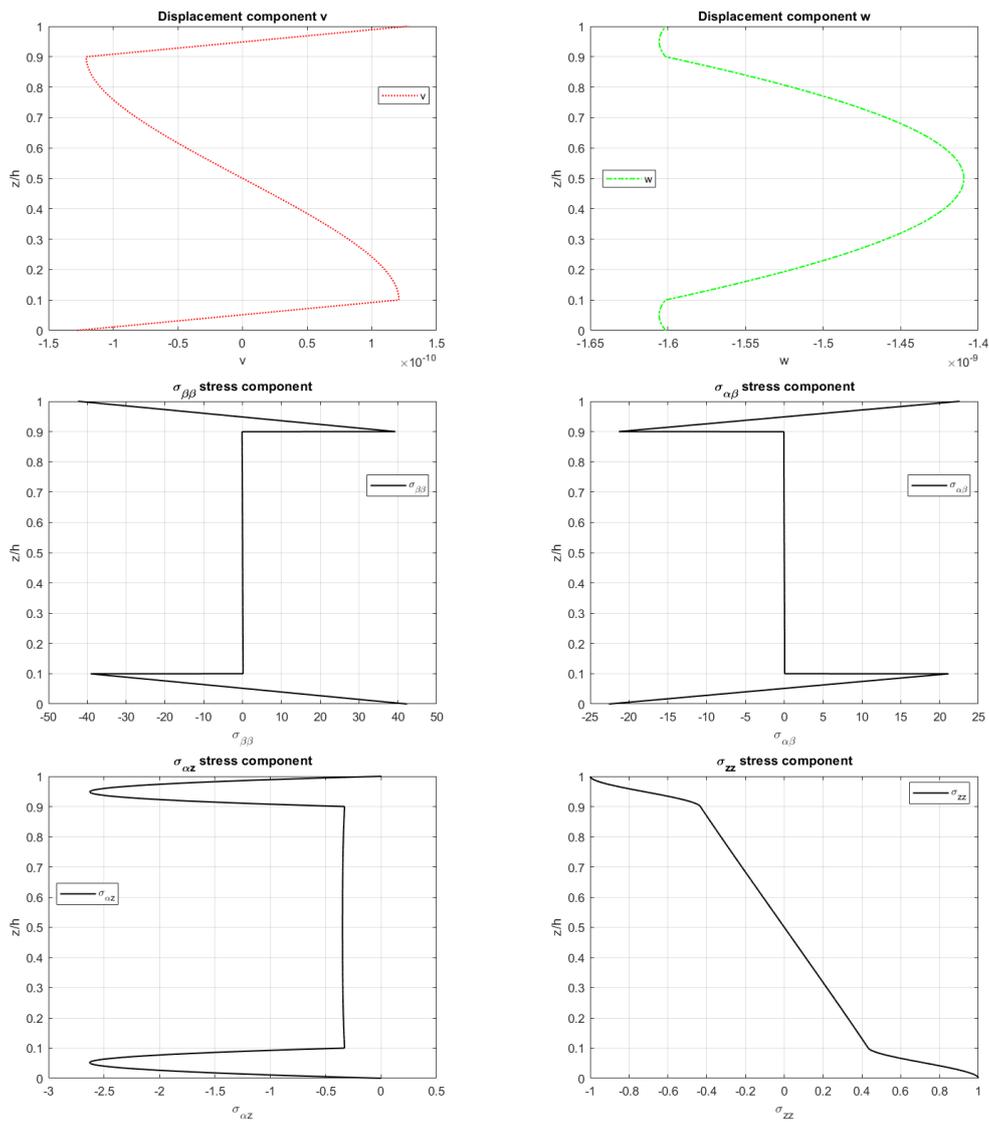


Figura 4.4: *Spostamenti e tensioni lungo lo spessore del Caso 2: Piastra sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiata con rapporto di snellezza $a/h = 2$*

Tabella 4.4: Validazione Caso 3: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato soggetta a carichi al contorno $P_z = 1 \text{ Pa}$ (top) e $P_z = 0 \text{ Pa}$ (bottom). Confronto dello spostamento trasversale in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [13].

\bar{w}_{3DES} [13]	\bar{w}	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{w} = w \frac{10^4 E_2 \text{bottom}}{\bar{p}_z h (\frac{a}{h})^4}$				
$R_\alpha/h = 2$ 119525	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 119522	94.809	2.5659	97%
$R_\alpha/h = 4$ 35910	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 35910			
$R_\alpha/h = 10$ 6228.5	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 6228.5			
$R_\alpha/h = 50$ 370.04	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 370.04			
$R_\alpha/h = 100$ 102.48	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 102.48			
$R_\alpha/h = 500$ 4.2727	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 4.2727			

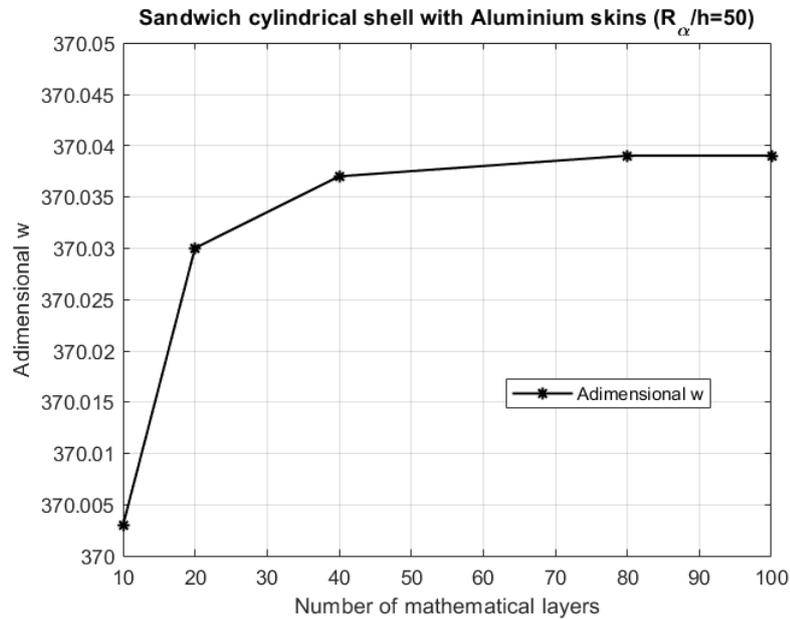


Figura 4.5: *Convergenza, al variare del numero degli strati matematici, del Caso 3: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato*

percentuale è molto minore dell'1%; allo stesso tempo è possibile constatare che i tempi di calcolo sono stati abbattuti drasticamente, come nel caso precedente. Per quanto riguarda, invece, l'analisi di convergenza, in Figura 4.5, si vede come sia necessario un numero maggiore di strati matematici per arrivare a convergenza; nei casi precedenti la convergenza si aveva per venti strati matematici, mentre in questo caso si ha la necessità di ottanta strati. Questa variazione non incide in alcun modo sui tempi di calcolo effettivi, perchè il codice Matlab[®] effettua anche questa analisi sempre in circa due secondi, a seguito delle modifiche apportate descritte in precedenza. Infine, è possibile verificare che l'analisi è stata correttamente effettuata grazie ai grafici Figura 4.6, infatti attraverso l'andamento di σ_{zz} è possibile vedere che le condizioni di carico al contorno sono rispettate (ovvero al top il valore di σ_{zz} è pari ad 1 Pa a seguito del carico applicato mentre al bottom è pari a 0 Pa). Inoltre, è possibile notare come l'andamento delle tensioni $\sigma_{\beta z}$ e σ_{zz} sia continuo lungo lo spessore; ciò è possibile solamente attraverso la corretta imposizione delle condizioni di continuità interlaminare. Lo stesso vale per gli spostamenti, anch'essi continui a seguito dell'imposizione delle condizioni di continuità interlaminare. Le tensioni nel piano, $\sigma_{\alpha\alpha}$ e $\sigma_{\beta\beta}$, invece, possono essere discontinue in corrispondenza dell'interfaccia tra due

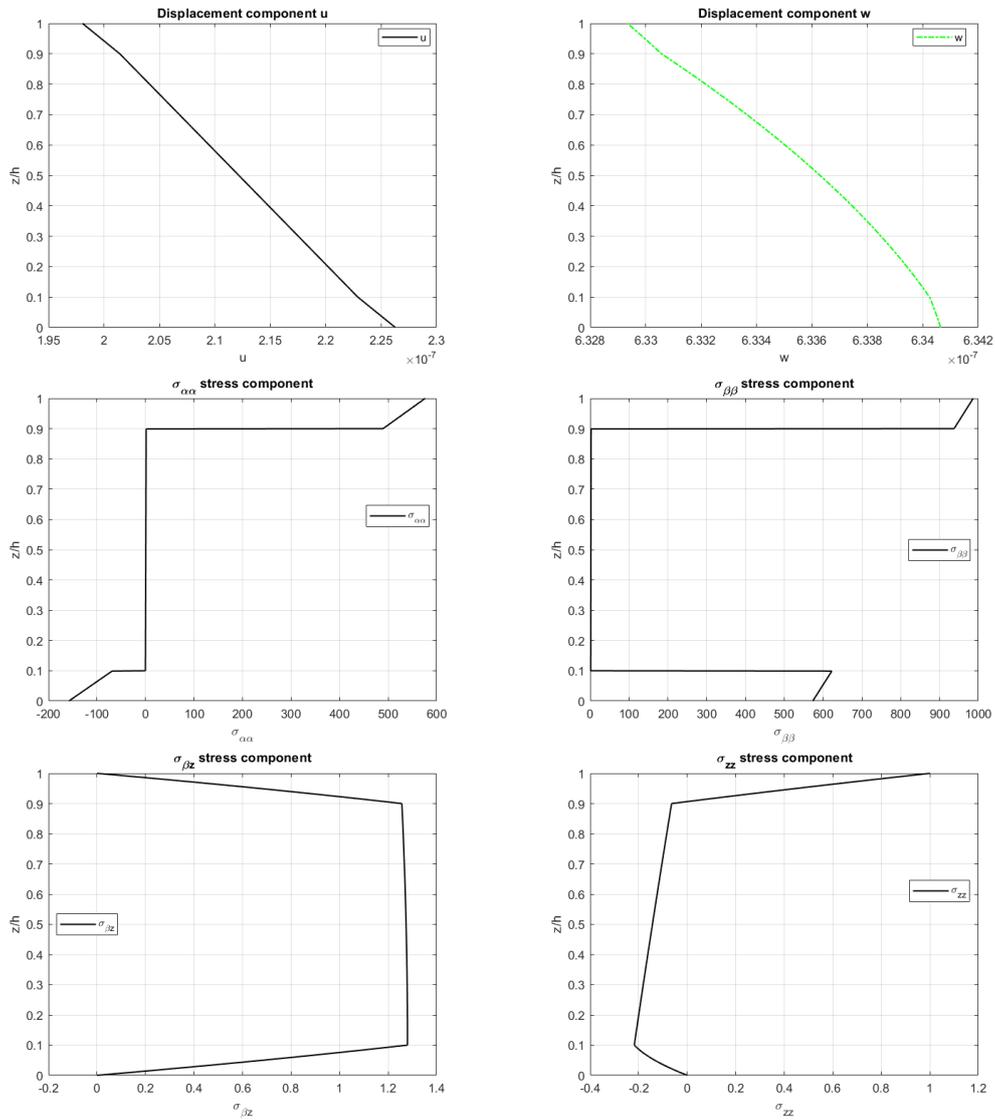


Figura 4.6: *Spostamenti e tensioni lungo lo spessore del Caso 3: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 50$*

Tabella 4.5: Validazione Caso 4: Guscio cilindrico composito $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiata soggetta a carichi al contorno $P_\beta = 1 Pa$ (top) e $P_\beta = 0 Pa$ (bottom). Confronto dello spostamento trasversale in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [15].

\bar{w}_{3DES} [15]	\bar{w}	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{w} = w \frac{10^6 E_2^{bottom}}{\bar{p}_\beta h (\frac{a}{h})^4}$				
$R_\alpha/h = 2$ -40125	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -40125	513.02	2.5146	99.5%
$R_\alpha/h = 4$ -9351.8	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -9351.8			
$R_\alpha/h = 10$ -2118.2	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -2118.2			
$R_\alpha/h = 50$ -203.67	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -203.67			
$R_\alpha/h = 100$ -52.672	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -52.672			
$R_\alpha/h = 500$ -1.9846	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -1.9846			

materiali differenti.

Per ciò che concerne il Caso 4 è possibile visualizzare in Tabella 4.5 come non ci sia alcuna differenza in termini di risultati tra le due versioni del codice e, allo stesso tempo, è possibile constatare che i tempi di calcolo sono stati abbattuti drasticamente. Per quanto riguarda, invece, l'analisi di convergenza, in Figura 4.7, si vede come, nuovamente, siano necessari ottanta strati matematici per arrivare a convergenza. Infine, è possibile verificare che l'analisi è stata correttamente effettuata grazie ai grafici Figura 4.8, infatti attraverso l'andamento di σ_{zz} è possibile vedere che le condizioni di carico al contorno sono rispettate (ovvero al top il valore di $\sigma_{\beta z}$ è pari ad $1 Pa$ a seguito del carico applicato mentre al bottom è pari a $0 Pa$). Inoltre, è possibile notare come l'andamento delle tensioni $\sigma_{\beta z}$ e $\sigma_{\alpha z}$ sia continuo lungo lo spessore; ciò è possibile solamente attraverso la corretta imposizione delle condizioni di continuità interlaminare. Lo stesso vale per gli spostamenti, anch'essi

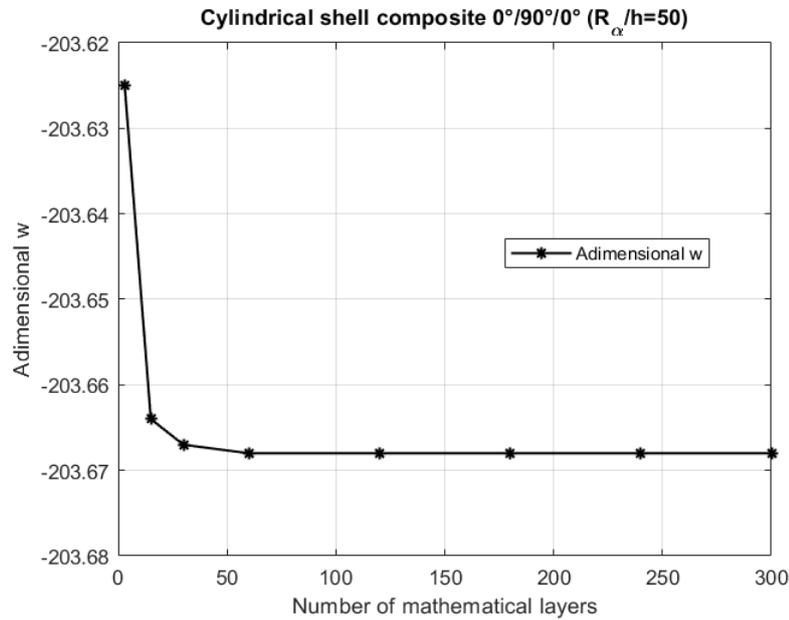


Figura 4.7: *Convergenza, al variare del numero degli strati matematici, del Caso 4: Guscio cilindrico composito $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiato*

continui a seguito dell'imposizione delle condizioni di continuità interlaminare. Le tensioni nel piano, $\sigma_{\alpha\alpha}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$, invece, possono essere discontinue in corrispondenza dell'interfaccia tra due materiali differenti.

In relazione al Caso 5 è possibile visualizzare in Tabella 4.6 come non ci sia alcuna differenza in termini di risultati tra le due versioni del codice; allo stesso tempo è possibile constatare che i tempi di calcolo sono stati abbattuti drasticamente. Per quanto riguarda, invece, l'analisi di convergenza, in Figura 4.9, si ha la necessità di utilizzare sessanta strati matematici, un numero leggermente inferiore rispetto al caso precedente. Infine, è possibile verificare che l'analisi è stata correttamente effettuata grazie ai grafici Figura 4.10, infatti attraverso l'andamento di $\sigma_{\beta z}$ è possibile vedere che le condizioni di carico al contorno sono rispettate (ovvero al top il valore di $\sigma_{\beta z}$ è pari ad $1 Pa$ a seguito del carico applicato mentre al bottom è pari a $-1 Pa$, sempre a seguito del carico applicato). Inoltre, è possibile notare come l'andamento delle tensioni $\sigma_{\beta z}$ e σ_{zz} sia continuo lungo lo spessore; ciò è possibile solamente attraverso la corretta imposizione delle condizioni di continuità interlaminare. Lo stesso vale per gli spostamenti, anch'essi continui a seguito dell'imposizione delle condizioni di continuità interlaminare. Le tensioni nel piano, $\sigma_{\beta\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$, invece, possono essere discontinue in corrispondenza dell'interfaccia tra

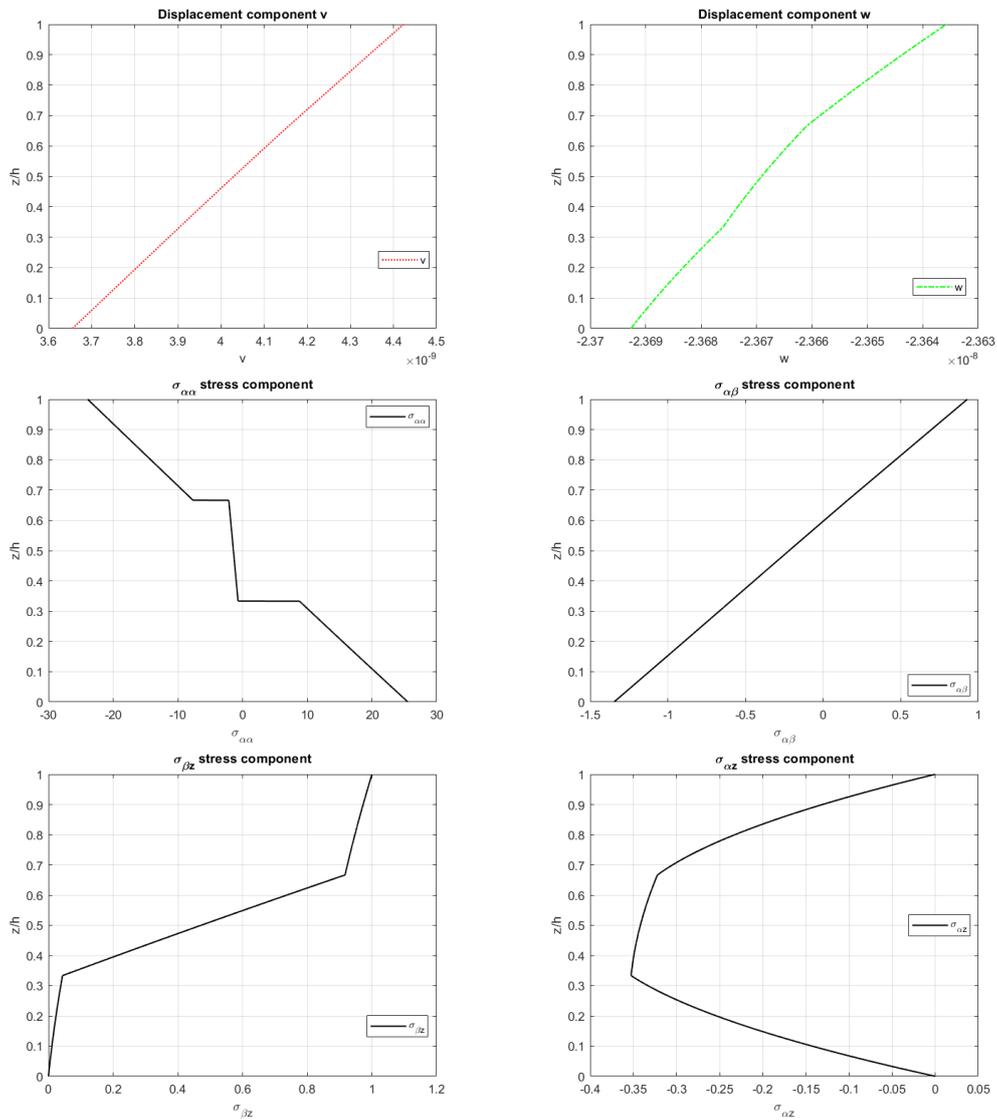


Figura 4.8: Spostamenti e tensioni lungo lo spessore del Caso 4: Guscio cilindrico composito $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 50$

Tabella 4.6: Validazione Caso 5: Cilindro composito $0^\circ/90^\circ$ semplicemente appoggiato soggetta a carichi al contorno $P_\beta = 1$ Pa (top) e $P_\beta = -1$ Pa (bottom). Confronto dello spostamento trasversale in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [15].

\bar{w}_{3DES} [15]	\bar{w}	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{w} = w \frac{10^6 E_2 \text{bottom}}{\bar{p}_\beta h (\frac{a}{h})^4}$				
$R_\alpha/h = 2$ 8221.4	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 8221.4	514.20	2.4287	99.5%
$R_\alpha/h = 4$ 2876.3	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 2876.3			
$R_\alpha/h = 10$ 311.06	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 311.06			
$R_\alpha/h = 50$ 1.1730	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 1.1730			
$R_\alpha/h = 100$ -0.1573	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -0.1573			
$R_\alpha/h = 500$ -0.0211	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -0.0211			

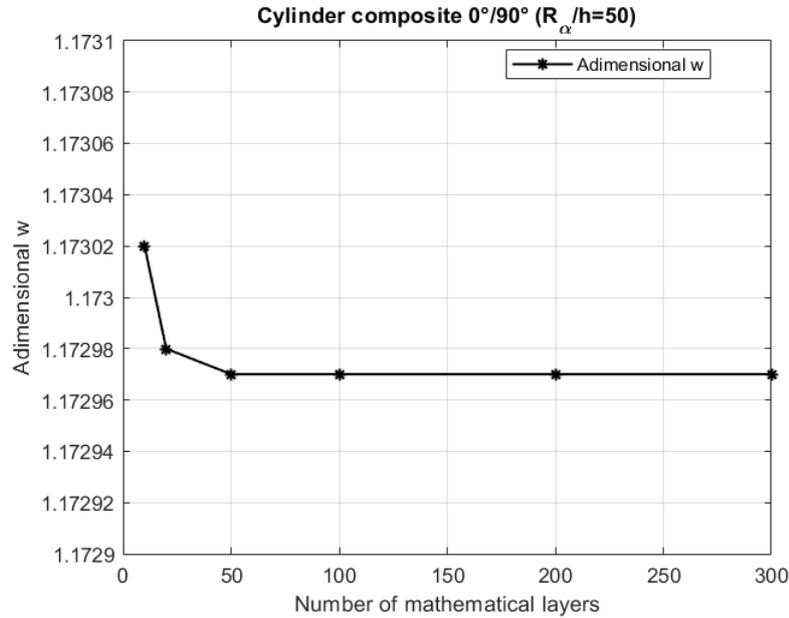


Figura 4.9: *Convergenza, al variare del numero degli strati matematici, del Caso 5: Cilindro composito 0°/90° semplicemente appoggiato*

due materiali differenti.

Per quanto riguarda il Caso 6 è possibile visualizzare in Tabella 4.7 come non ci sia alcuna differenza in termini di risultati tra le due versioni del codice se non per il caso in cui $R_\alpha/h = 500$ in cui la differenza si attesta solamente sull'ultima cifra decimale; allo stesso tempo è possibile constatare che i tempi di calcolo sono stati abbattuti drasticamente. Per quanto riguarda, invece, l'analisi di convergenza, in Figura 4.11, si vede come, anche in questo caso, siano necessari sessanta strati matematici per arrivare a convergenza. Infine, è possibile verificare che l'analisi è stata correttamente effettuata grazie ai grafici Figura 4.12, infatti attraverso l'andamento di $\sigma_{\alpha z}$ è possibile vedere che le condizioni di carico al contorno sono rispettate (ovvero al top il valore di $\sigma_{\alpha z}$ è pari ad 1 Pa a seguito del carico applicato mentre al bottom è pari a 0 Pa). Inoltre, è possibile notare come l'andamento delle tensioni $\sigma_{\alpha z}$ e $\sigma_{\beta z}$ sia continuo lungo lo spessore; ciò è possibile solamente attraverso la corretta imposizione delle condizioni di continuità interlaminare. Lo stesso vale per gli spostamenti, anch'essi continui a seguito dell'imposizione delle condizioni di continuità interlaminare. Le tensioni nel piano, $\sigma_{\alpha\alpha}$ e $\sigma_{\beta\beta}$, invece, possono essere discontinue in corrispondenza dell'interfaccia tra due materiali differenti.

Dal confronto dei vari risultati scritti nelle Tabella 4.2 - Tabella 4.7 è

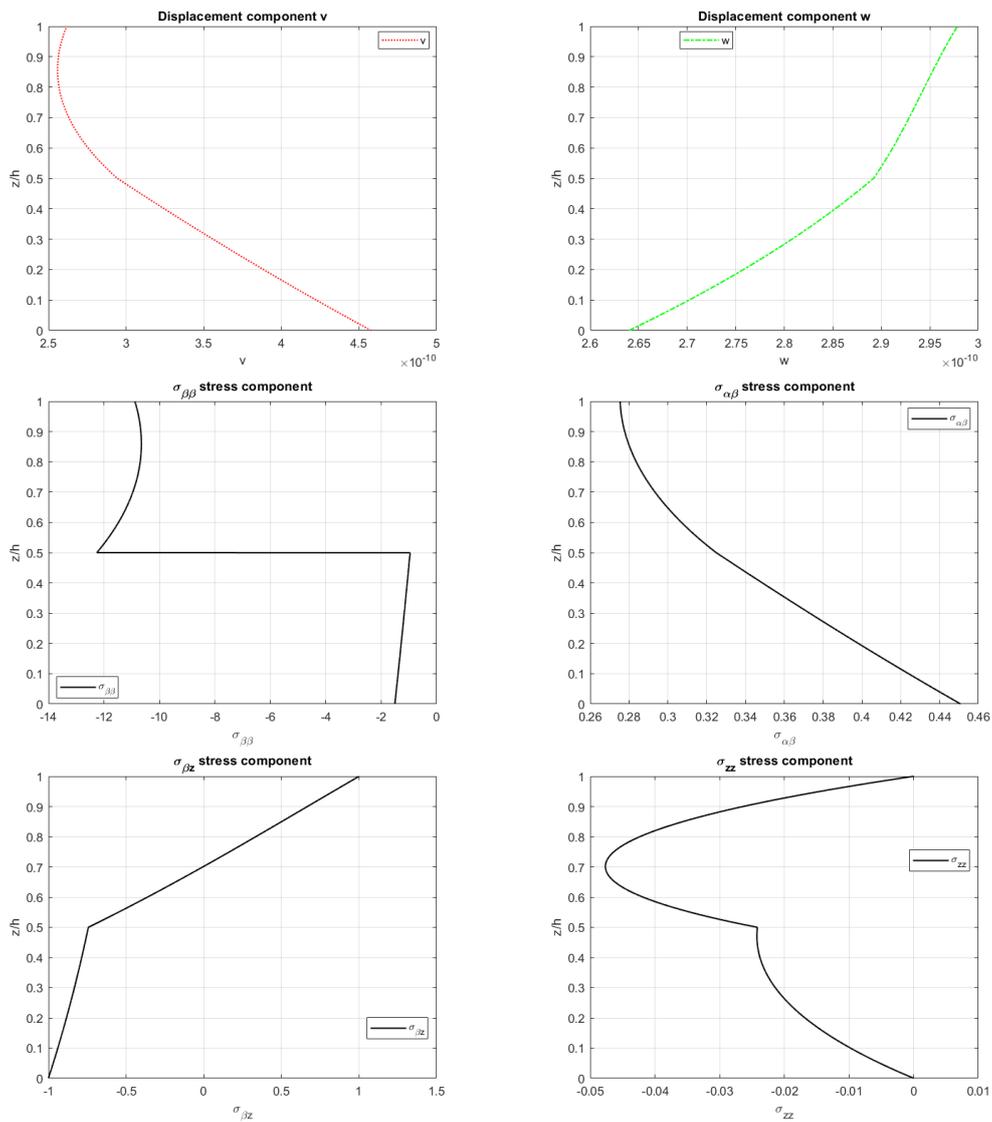


Figura 4.10: Spostamenti e tensioni lungo lo spessore del Caso 5: Cilindro composito $0^\circ/90^\circ$ semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 10$

Tabella 4.7: Validazione Caso 6: Guscio sferico composito $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ semplicemente appoggiato soggetta a carichi al contorno $P_\alpha = 1 \text{ Pa}$ (top) e $P_\alpha = 0 \text{ Pa}$ (bottom). Confronto dello spostamento trasversale in forma adimensionalizzata. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [15].

\bar{w}_{3DES} [15]	\bar{w}	Tempo codice 3DES [s]	Tempo nuovo codice [s]	Variazione percentuale tempo
$\bar{w} = w \frac{10^6 E_2 \text{bottom}}{\bar{p}_\alpha h (\frac{a}{h})^4}$				
$R_\alpha/h = 2$ -2737.1	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ -2737.1	518.14	2.4287	99.5%
$R_\alpha/h = 4$ 316.53	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 316.53			
$R_\alpha/h = 10$ 610.21	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 610.21			
$R_\alpha/h = 50$ 56.358	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 56.358			
$R_\alpha/h = 100$ 15.034	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 15.034			
$R_\alpha/h = 500$ 0.6280	$(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$ 0.6281			

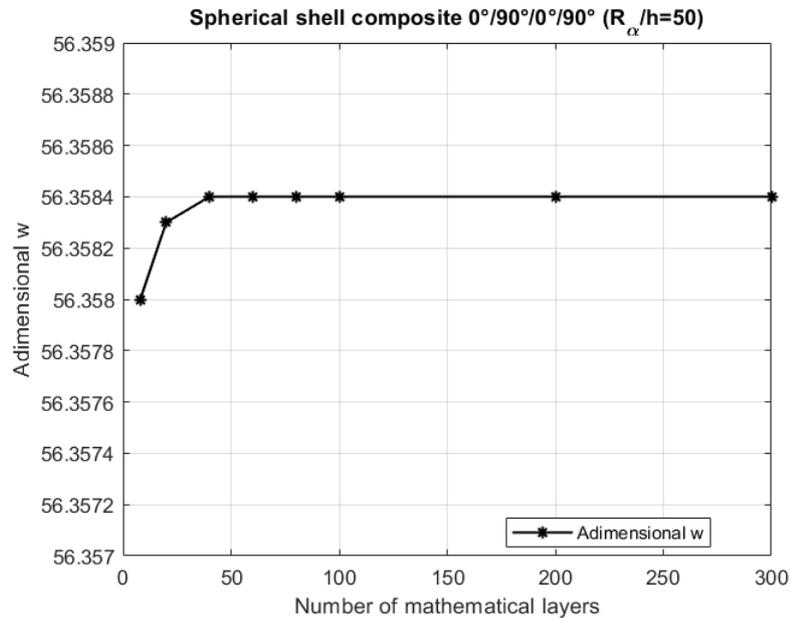


Figura 4.11: *Convergenza, al variare del numero degli strati matematici, del Caso 6: Cilindro composito $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ semplicemente appoggiato*

possibile constatare come i risultati del nuovo codice siano pressochè identici a quelli del precedente, confermando il fatto che le modifiche effettuate non abbiano cambiato alcunchè nella formulazione matematica del modello ma che siano solo a livello di performance numeriche, tanto da avere un notevole miglioramento per quanto riguarda i tempi di calcolo, che sono abbattuti, mediamente, del 95%.

È stata presentata anche l'analisi di convergenza, da cui si vede che il modello è convergente perchè, per ogni caso in esame, all'aumentare del numero di strati la grandezza considerata tende a stabilizzarsi attorno un valore specifico; lo stesso risultato si otteneva anche nel caso dell'analisi alle vibrazioni libere del capitolo precedente. Il numero di strati matematici per cui si ha convergenza oscilla tra i sessanta e gli ottanta, che è un numero superiore rispetto a quelli valutati per l'analisi alle vibrazioni libere. Questo però non comporta un aumento dei tempi di calcolo, anzi, l'analisi statica, per qualsiasi numero di strati matematici viene completata sempre in circa due secondi.

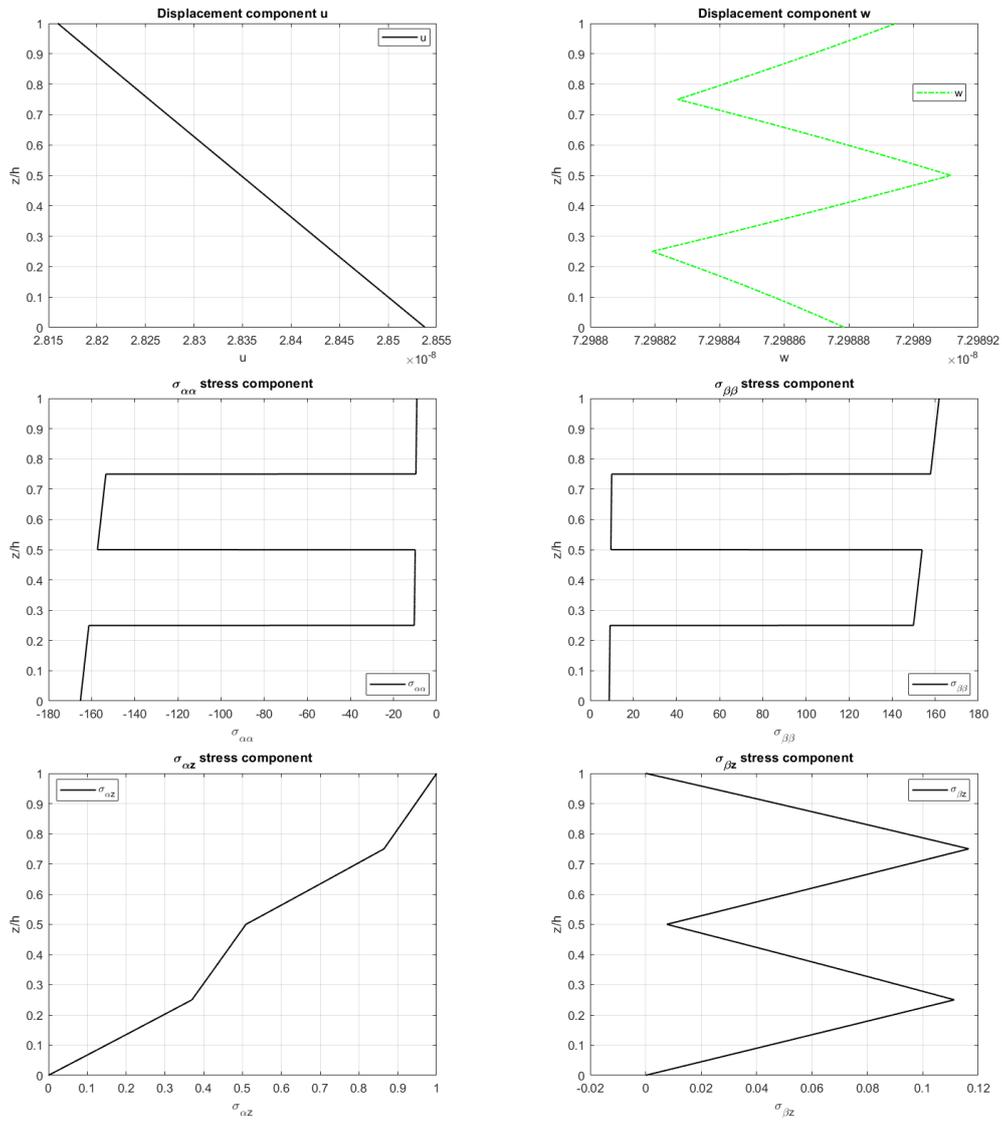


Figura 4.12: *Spostamenti e tensioni lungo lo spessore del Caso 6: Cilindro composito $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 500$*

Capitolo 5

Modello guscio 3D per analisi termomeccaniche di strutture multistrato

La formulazione vista nel Capitolo 2, valida nel caso di analisi statiche e dinamiche, viene estesa anche al caso termomeccanico, ovvero includendo anche l'effetto del campo di temperatura. Nel presente capitolo si confronterà la formulazione sia in forma disaccoppiata che nella nuova forma accoppiata, mettendo in evidenza i vantaggi e gli svantaggi di entrambi gli approcci. Attraverso questa estensione è possibile eseguire la *thermal stress analysis*, ovvero una analisi in cui, imposto un valore di sovratemperatura θ sia al top che al bottom del multistrato, è possibile valutare, oltre al profilo di temperatura che si viene a creare lungo lo spessore della struttura, le tensioni, le deformazioni e gli spostamenti che questo induce. Questo tipo di analisi diventa molto importante in campo aeronautico, giacchè tutti i velivoli sono sottoposti a carichi termici di grande entità durante il volo, i quali generano delle deformazioni che è opportuno studiare e controllare accuratamente per non incorrere in fenomeni di cedimento, potenzialmente, catastrofici.

Anche in questo caso, essendo un'analisi esatta, è possibile solamente eseguirla per i casi in cui la laminazione del materiale sia pari a 0° o $\pm 90^\circ$, struttura semplicemente appoggiata e campo di sovratemperatura assunta come armonica (oltre, ovviamente, agli spostamenti).

Va sottolineato che la *thermal stress analysis* viene condotta in regime stazionario, ovvero si è dato il tempo alla temperatura di esaurire tutti i transitori mantenendo un valore costante nel tempo. A seguito di ciò, il campo termico che si viene a generare lungo lo spessore della struttura dipende solo dalla temperatura agli estremi, dalla configurazione del materiale e dallo spessore complessivo del multistrato.

5.1 Modello guscio 3D termomeccanico disaccoppiato

La formulazione termomeccanica disaccoppiata ha come variabili del problema gli spostamenti u, v, w mentre la sovratemperatura θ viene definita a parte esternamente, attraverso tre differenti casi: assunta a priori, calcolata con Fourier 1D oppure calcolata con Fourier 3D. Essa viene definita come il valore di temperatura che eccede una certa temperatura di riferimento arbitraria, ovvero

$$\theta = T - T_{ref}. \quad (5.1)$$

Solitamente, come T_{ref} viene presa la temperatura dell'ambiente in cui è posta la struttura. La presente formulazione si dice disaccoppiata perchè il campo della sovratemperatura viene calcolato separatamente, utilizzando la legge di Fourier in coordinate curvilinee miste ortogonali e *solo successivamente* questo verrà utilizzato per risolvere le equazioni indefinite di equilibrio 3D per i gusci sferici in ogni strato matematico. Per mostrare la formulazione termomeccanica, sia disaccoppiata che accoppiata, si seguirà lo stesso schema utilizzato nel Capitolo 2, partendo dalle relazioni geometriche per poi arrivare alla risoluzione del sistema di equazioni differenziali di primo ordine alle derivate parziali attraverso l'utilizzo del metodo della matrice esponenziale.

5.1.1 Relazioni geometriche

A differenza del caso meccanico, le deformazioni per l'analisi termomeccanica comprendono anche un termine aggiuntivo, che è la deformazione termica, la quale introduce un effetto di contrazione o di espansione in base al valore della sovratemperatura che si applica agli estremi della struttura: in generale, se il valore della sovratemperatura è negativo ci si aspetta una contrazione mentre nel caso contrario una espansione. La deformazione termica si crea nel momento in cui viene applicata una sovratemperatura al multistrato e questo valore di deformazione dipende *anche* dalle caratteristiche del materiale; è noto che i materiali ceramici siano meno inclini a deformarsi a seguito di sovrature mentre i materiali polimerici si deformino, invece, anche molto vistosamente; tutto ciò dipende dalla particolare struttura molecolare del materiale. La relazione che lega la deformazione termica con

la sovratemperatura può essere scritta, in forma matriciale, come

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha\theta} \\ \varepsilon_{\beta\beta\theta} \\ \varepsilon_{zz\theta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mu_\alpha \\ \mu_\beta \\ \mu_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \theta \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_\theta = -\boldsymbol{\mu}\theta \quad (5.2)$$

dove i termini $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_z$ sono i coefficienti di espansione termica del materiale lungo le direzioni α, β, z mentre si è indicato con $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$ il vettore deformazione che considera la parte termica, dove, infatti, il pedice θ esplicita quale sia il contributo che influisce direttamente su quelle deformazioni [16]. La deformazione termica viene aggiunta semplicemente come somma algebrica alla deformazione meccanica, in modo da avere un vettore di deformazioni termomeccaniche

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_u + \boldsymbol{\varepsilon}_\theta = \boldsymbol{\varepsilon}_u - \boldsymbol{\mu}\theta. \quad (5.3)$$

in cui si è indicato il contributo meccanico sulle deformazioni con il pedice u nel vettore $\boldsymbol{\varepsilon}_u$. Grazie alla (5.3), le relazioni geometriche, ricordando le (2.4a) - (2.4f), possono essere scritte come

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^k = \varepsilon_{\alpha\alpha u}^k - \varepsilon_{\alpha\alpha\theta}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial \alpha} + \frac{w^k}{H_\alpha R_\alpha} - \mu_\alpha^k \theta^k \quad (5.4a)$$

$$\varepsilon_{\beta\beta}^k = \varepsilon_{\beta\beta u}^k - \varepsilon_{\beta\beta\theta}^k = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial v^k}{\partial \beta} + \frac{w^k}{H_\beta R_\beta} - \mu_\beta^k \theta^k \quad (5.4b)$$

$$\varepsilon_{zz}^k = \varepsilon_{zz u}^k - \varepsilon_{zz\theta}^k = \frac{\partial w^k}{\partial z} - \mu_z^k \theta^k \quad (5.4c)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^k = \gamma_{\alpha\beta u}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial v^k}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u^k}{\partial \beta} \quad (5.4d)$$

$$\gamma_{\alpha z}^k = \gamma_{\alpha z u}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial w^k}{\partial \alpha} + \frac{\partial u^k}{\partial z} - \frac{u^k}{H_\alpha R_\alpha} \quad (5.4e)$$

$$\gamma_{\beta z}^k = \gamma_{\beta z u}^k = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial w^k}{\partial \beta} + \frac{\partial v^k}{\partial z} - \frac{v^k}{H_\beta R_\beta}. \quad (5.4f)$$

dove i termini H_α, H_β ed R_α, R_β sono stati già definiti in precedenza nel Capitolo 2. Da queste espressioni è chiara l'introduzione della componente termica nei termini $\varepsilon_{\alpha\alpha}^k, \varepsilon_{\beta\beta}^k$ e ε_{zz}^k .

5.1.2 Equazione costitutiva

Per quanto riguarda l'equazione costitutiva del materiale, essa non cambia rispetto al caso meccanico, perchè continua a svolgere la funzione di mettere in relazione le tensioni con le deformazioni, ma, in questo caso, quelle da considerare sono le termomeccaniche. La relazione costitutiva, quindi, è possibile scriverla come

$$\boldsymbol{\sigma}^k = \mathbf{C}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k = \mathbf{C}^k \left(\boldsymbol{\varepsilon}_u^k + \boldsymbol{\varepsilon}_\theta^k \right) \quad (5.5)$$

in cui, per un materiale ortotropo, la matrice dei coefficienti elastici, scritti nel sistema di riferimento struttura, \mathbf{C}^k è sempre

$$\mathbf{C}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{13}^k & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{23}^k & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{33}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^k \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Il pedice k , anche in questo caso, indica che l'equazione costitutiva va valutata per ogni strato fisico della struttura. Sostituendo le (5.4a) - (5.4f) nella (5.5) è possibile ottenere l'espressione delle tensioni in funzione delle variabili del problema

$$\sigma_{\alpha\alpha}^k = \frac{C_{11}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{C_{11}^k w^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{C_{12}^k w^k}{H_\beta R_\beta} + C_{13}^k w_{,z}^k - \lambda_\alpha^k \theta^k \quad (5.7a)$$

$$\sigma_{\beta\beta}^k = \frac{C_{12}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{C_{12}^k w^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{22}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{C_{22}^k w^k}{H_\beta R_\beta} + C_{23}^k w_{,z}^k - \lambda_\beta^k \theta^k \quad (5.7b)$$

$$\sigma_{zz}^k = \frac{C_{13}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{C_{13}^k w^k}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{23}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{C_{23}^k w^k}{H_\beta R_\beta} + C_{13}^k w_{,z}^k - \lambda_z^k \theta^k \quad (5.7c)$$

$$\sigma_{\beta z}^k = \frac{C_{44}^k}{H_\beta} w_{,\beta}^k + C_{44}^k v_{,z}^k - \frac{C_{44}^k v^k}{H_\beta R_\beta} \quad (5.7d)$$

$$\sigma_{\alpha z}^k = \frac{C_{55}^k}{H_\alpha} w_{,\alpha}^k + C_{55}^k u_{,z}^k - \frac{C_{55}^k u^k}{H_\alpha R_\alpha} \quad (5.7e)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^k = \frac{C_{66}^k}{H_\beta} u_{,\beta}^k + \frac{C_{66}^k}{H_\alpha} v_{,\alpha}^k \quad (5.7f)$$

dove i termini $\lambda_\alpha^k, \lambda_\beta^k, \lambda_z^k$ sono i coefficienti di accoppiamento termomeccanico, che vengono definiti come

$$\lambda_\alpha^k = C_{11}^k \mu_\alpha^k + C_{12}^k \mu_\beta^k + C_{13}^k \mu_z^k \quad (5.8a)$$

$$\lambda_\beta^k = C_{12}^k \mu_\alpha^k + C_{22}^k \mu_\beta^k + C_{23}^k \mu_z^k \quad (5.8b)$$

$$\lambda_z^k = C_{13}^k \mu_\alpha^k + C_{23}^k \mu_\beta^k + C_{33}^k \mu_z^k. \quad (5.8c)$$

È possibile vedere che le relazioni (5.8a) - (5.8c) contengono sia un termine meccanico (i coefficienti elastici) che un termine termico (i coefficienti di espansione termica) al loro interno; questi termini di accoppiamento hanno la funzione di mediare tra i due campi fisici presi in considerazione ed è per questo motivo che assumono questa particolare denominazione. Introducendo le relazioni (5.7a) - (5.7f) nelle equazioni indefinite di equilibrio 3D è possibile ottenere

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) u^k + \left(\frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) u_{,z}^k + \left(\frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \left(\frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) u_{,\beta\beta}^k + \left(C_{55}^k H_\alpha H_\beta \right) u_{,zz}^k + \left(C_{12}^k + C_{66}^k \right) v_{,\alpha\beta}^k + \\ & + \left(\frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) w_{,\alpha}^k + \left(C_{13}^k H_\alpha + C_{55}^k H_\beta \right) w_{,\alpha z}^k + \\ & + \left(-H_\beta \lambda_\alpha^k \right) \theta_{,\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (5.9a)$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{H_\alpha C_{44}^k}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) v^k + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) v_{,z}^k + \left(\frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) v_{,\alpha\alpha}^k + \\ & + \left(\frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) v_{,\beta\beta}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha H_\beta \right) v_{,zz}^k + \left(C_{12}^k + C_{66}^k \right) u_{,\alpha\beta}^k + \\ & + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) w_{,\beta}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\beta \right) w_{,\beta z}^k + \\ & + \left(-H_\alpha \lambda_\beta^k \right) \theta_{,\beta} = 0 \end{aligned} \quad (5.9b)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11} H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} \right) w^k + \left(\frac{H_\beta}{R_\alpha} \lambda_\alpha^k + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \lambda_\beta^k + \right. \\
 & \left. - \frac{H_\beta}{R_\alpha} \lambda_z^k - \frac{H_\alpha}{R_\beta} \lambda_z^k \right) \theta + \left(-\frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{13}^k}{R_\beta} - \frac{C_{11} H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) u_{,\alpha}^k + \\
 & + \left(-\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) v_{,\beta}^k + \left(\frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) w_{,\alpha}^k + \\
 & + \left(C_{55}^k H_\beta + C_{13}^k H_\beta \right) u_{,\alpha\beta}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha \right) v_{,\beta z}^k + \left(\frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) w_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) w_{,\beta\beta}^k + \left(C_{33}^k H_\alpha H_\beta \right) w_{,\alpha z}^k + \left(-H_\alpha H_\beta \lambda_z^k \right) \theta_{,\alpha} = 0.
 \end{aligned} \tag{5.9c}$$

Si nota che, come si poteva prevedere, gli unici termini aggiuntivi che si trovano, rispetto alle stesse relazioni riferite al solo caso meccanico, sono proprio quelli relativi alla parte termica; esse si trovano solo nelle prime tre relazioni, data la definizione delle deformazioni termiche.

A questo punto, si va ad imporre la forma armonica sia agli spostamenti che alla sovratemperatura θ attraverso le espressioni [16]

$$u^k(\alpha, \beta, z) = U^k(z) \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta) \tag{5.10a}$$

$$v^k(\alpha, \beta, z) = V^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta) \tag{5.10b}$$

$$w^k(\alpha, \beta, z) = W^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta) \tag{5.10c}$$

$$\theta^k(\alpha, \beta, z) = \Theta^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta). \tag{5.10d}$$

Andando ad introdurre queste ultime espressioni all'interno delle (5.9a) - (5.9c) è possibile ottenere le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{11} H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) U^k + \left(-\bar{\alpha} \bar{\beta} C_{12}^k - \bar{\alpha} \bar{\beta} C_{66}^k \right) V^k + \\
 & + \left(\bar{\alpha} \frac{C_{11} H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) W^k + \left(-H_\beta \lambda_\alpha \bar{\alpha} \right) \Theta + \\
 & + \left(\frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) U_{,\alpha}^k + \left(\bar{\alpha} C_{13}^k H_\beta + \bar{\alpha} C_{55}^k H_\beta \right) W_{,\alpha}^k + \left(C_{55}^k H_\alpha H_\beta \right) U_{,\alpha\alpha}^k = 0
 \end{aligned} \tag{5.11a}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(-\bar{\alpha}\bar{\beta}C_{66}^k - \bar{\alpha}\bar{\beta}C_{12}^k \right) U^k + \left(-\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) V^k + \\
 & + \left(\bar{\beta} \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \bar{\beta} \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) W^k + \left(-H_\alpha \lambda_\beta \bar{\beta} \right) \Theta + \\
 & + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) V_{,z}^k + \left(\bar{\beta} C_{44}^k H_\alpha + \bar{\beta} C_{23}^k H_\alpha \right) W_{,z}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha H_\beta \right) V_{,zz}^k = 0
 \end{aligned} \tag{5.11b}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\bar{\alpha} \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \bar{\alpha} \frac{C_{13}^k}{R_\beta} + \bar{\alpha} \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) U^k + \left(\bar{\beta} \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \bar{\beta} \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} + \bar{\beta} \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \right. \\
 & + \left. \bar{\beta} \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) V^k + \left(\frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} + \right. \\
 & - \left. \bar{\beta}^2 \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) W^k + \left(\frac{H_\beta}{R_\alpha} \lambda_\alpha + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \lambda_\beta - \frac{H_\beta}{R_\alpha} \lambda_z - \frac{H_\alpha}{R_\beta} \lambda_z \right) \Theta + \\
 & + \left(-\bar{\alpha} C_{55}^k H_\beta - \bar{\alpha} C_{13}^k H_\beta \right) U_{,z}^k + \left(-\bar{\beta} C_{44}^k H_\alpha - \bar{\beta} C_{23}^k H_\alpha \right) V_{,z}^k + \\
 & + \left(\frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) W_{,z}^k + \left(-H_\alpha H_\beta \lambda_z \right) \Theta_{,z} + \left(C_{33}^k H_\alpha H_\beta \right) W_{,zz}^k = 0.
 \end{aligned} \tag{5.11c}$$

che, come visto anche nel Capitolo 2, permettono di esplicitare le ampiezze degli spostamenti (e le relative derivate). Anche in questo caso si ha bisogno di utilizzare un sufficiente numero di strati matematici affinché si rendano i coefficienti delle equazioni differenziali costanti, dato che le equazioni indefinite di equilibrio 3D hanno i parametri geometrici H_α e H_β che dipendono da z . Dividendo ognuno degli N strati fisici in l strati matematici, è possibile calcolare i parametri geometrici a metà di esso, rendendoli, in questo modo, costanti. Come anche espresso nel Capitolo 2, le equazioni scritte fino ad ora rimangono valide anche per gli strati matematici, quindi da questo punto in poi si passerà a scrivere le equazioni per ogni singolo strato matematico utilizzando l'apice j , che indica uno dei diversi strati matematici (si ricordi che vale sempre $N_L = l \cdot N_F$ dove N_L indica il numero totale degli strati matematici mentre N_F il numero totale di strati fisici che compongono la struttura). Le relazioni (5.11a) - (5.11c) permettono di ottenere un sistema di equazioni differenziali che, in forma compatta, può essere scritto come

$$A_1^j U^j + A_2^j V^j + A_3^j W^j + A_4^j U_{,z}^j + A_5^j W_{,z}^j + A_6^j U_{,zz}^j + J_1^j \Theta^j = 0 \tag{5.12a}$$

$$A_7^j U^j + A_8^j V^j + A_9^j W^j + A_{10}^j V_{,z}^j + A_{11}^j W_{,z}^j + A_{12}^j V_{,zz}^j + J_2^j \Theta^j = 0 \tag{5.12b}$$

$$A_{13}^j U^j + A_{14}^j V^j + A_{15}^j W^j + A_{16}^j U_{,z}^j + A_{17}^j V_{,z}^j + A_{18}^j W_{,z}^j + A_{19}^j W_{,zz}^j + J_3^j \Theta_{,z}^j + J_4^j \Theta^j = 0. \quad (5.12c)$$

Essendo la formulazione disaccoppiata i termini relativi alla parte termica ($J_1^j \Theta^j, J_2^j \Theta^j, J_3^j \Theta_{,z}^j, J_4^j \Theta^j$) sono dei termini noti e sono stati posizionati come ultimo termine del primo membro; in seguito, in alcuni sottoparagrafi dedicati, verrà definito in dettaglio il calcolo di queste componenti che racchiudono proprio il profilo di temperatura lungo lo spessore della geometria.

Nuovamente, si va ad abbassare il massimo grado di derivazione lungo z , sempre come è possibile visualizzare in [9], passando da un sistema differenziale di secondo ordine composto da tre equazioni in un sistema differenziale di primo ordine composto da sei equazioni. Il metodo utilizzato è lo stesso presentato nel Capitolo 2, che permette di ottenere

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_6^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12}^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{19}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_6^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ U_{,z}^j \\ V_{,z}^j \\ W_{,z}^j \end{Bmatrix}_{,z} = \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_6^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^j \\ -A_1^j & -A_2^j & -A_3^j & -A_4^j & 0 & -A_5^j \\ -A_7^j & -A_8^j & -A_9^j & 0 & -A_{10}^j & -A_{11}^j \\ -A_{13}^j & -A_{14}^j & -A_{15}^j & -A_{16}^j & -A_{17}^j & -A_{18}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ U_{,z}^j \\ V_{,z}^j \\ W_{,z}^j \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_1^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_2^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_4^j & -J_3^j & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta^j \\ \Theta_{,z}^j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.13)$$

la quale, può essere scritta in forma compatta come

$$D^j U_{,z}^j = A^j U^j + J^j \Theta^j \quad (5.14)$$

$$U_{,z}^j = D^{-1j} A^j U^j + D^{-1j} J^j \Theta^j \quad (5.15)$$

$$U_{,z}^j = A^{*j} U^j + J^{*j} \Theta^j = A^{*j} U^j + \Theta^{*j} \quad (5.16)$$

L'ampiezza della temperatura $\Theta(z)$ viene assunta lineare in ogni strato matematico; in questo modo la soluzione che si troverà lungo lo spessore sarà

una successione di tratti lineari, riferiti ad ogni singolo strato matematico, che, globalmente, consentiranno di conoscere il profilo di temperatura lungo tutto lo spessore del multistrato. Quindi, è possibile scrivere

$$\Theta^j(\tilde{z}^j) = a_{\Theta}^j \tilde{z}^j + b_{\Theta}^j \quad (5.17)$$

dove \tilde{z}^j indica la coordinata locale z di ogni strato matematico, che va da 0 a h^j , dove h^j è l'altezza del j -esimo strato matematico. I termini a_{Θ}^j e b_{Θ}^j sono costanti in ogni j -esimo strato matematico e vanno calcolati, dato che sono termini incogniti.

Dall'ultima uguaglianza riferita all'equazione (5.16), che rappresenta un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, si nota che essa ha un termine noto aggiuntivo che rende il set di equazioni differenziali non omogeneo. A causa di questo, la soluzione del problema cambia rispetto a quella vista nel Capitolo 2, ed è possibile scriverla, come si può vedere in [16]

$$\mathbf{U}^j(\tilde{z}^j) = \exp(\mathbf{A}^{*j} \tilde{z}^j) \mathbf{U}^j(0) + \int_0^{\tilde{z}^j} \exp(\mathbf{A}^{*j}(\tilde{z}^j - s)) \Theta^{*j}(s) ds. \quad (5.18)$$

Da questa equazione è possibile calcolare il vettore incognito al top di ogni j -esimo strato matematico, partendo dal valore del bottom $\mathbf{U}^j(0)$. L'equazione (5.18) viene anche riscritta, in forma più compatta

$$\mathbf{U}^j(h^j) = \mathbf{A}^{**j} \mathbf{U}^j(0) + \mathbf{J}^{**j} \quad (5.19)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{**j} = & \int_0^{\tilde{z}^j} \exp(\mathbf{A}^{*j}(\tilde{z}^j - s)) \Theta^{*j}(s) ds = \int_0^{\tilde{z}^j} \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{*j}(h^j - s) + \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{A}^{*j2}}{2!} (h^j - s)^2 + \dots + \frac{\mathbf{A}^{*jN}}{N!} (h^j - s)^N \right) \Theta^{*j}(s) ds \end{aligned} \quad (5.20)$$

mentre \mathbf{A}^{**} è la stessa matrice esponenziale che si può trovare nel Capitolo 2 all'equazione (2.30). L'equazione (5.19) permette di collegare il vettore degli spostamenti incogniti dal bottom al top del j -esimo strato matematico. Per poter passare da uno strato all'altro, come anche visto nel Capitolo 2, bisogna imporre le condizioni di interlaminarità in modo tale che dal top del j -esimo strato sia possibile passare al bottom del $j+1$ -esimo. Le condizioni di interlaminarità da imporre sono le stesse viste nel caso di analisi statica e

dinamica nelle (2.31)-(2.32), le quali portano ad ottenere la seguente scrittura

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{c} U \\ V \\ W \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \end{array} \right\}_b^{j+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & T_3 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & T_5 & 0 & T_6 & 0 \\ T_7 & T_8 & T_9 & 0 & 0 & T_{10} \end{bmatrix}^{j+1,j} \left\{ \begin{array}{c} U \\ V \\ W \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \end{array} \right\}_t^j + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{j+1,j} \left\{ \begin{array}{c} \Theta \\ \Theta_{,z} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_t^j
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

in cui l'unica differenza che si trova rispetto al caso meccanico è la presenza del termine T_{11} a seguito del fatto che nell'espressione della σ_{zz} , da cui è possibile ricavare l'espressione che si trova nell'ultima riga, è presente un termine relativo alla sovratemperatura. Anche in questo caso si nota che le prime tre righe dell'espressione precedente esprimono la continuità degli spostamenti, mentre le ultime tre la continuità delle tensioni. La (5.21) può essere riscritta in forma compatta come

$$\mathbf{U}_b^{j+1} = \mathbf{T}_U^{j+1,j} \mathbf{U}_t^j + \mathbf{T}_\Theta^{j+1,j} \Theta_t^j. \tag{5.22}$$

Attraverso questa espressione, invece, è possibile, come scritto in precedenza, passare dal top del j -esimo strato al bottom del $j+1$ -esimo. Per poter collegare direttamente il bottom del primo strato matematico al top dell'ultimo (che verrà nominato come N_L) bisogna utilizzare ricorsivamente sia la (5.22) che la (5.19) nello stesso modo visto anche nel Capitolo 2: si ottiene, quindi,

la seguente relazione

$$\begin{aligned}
 U_t^{N_L} = & \left(A^{**N_L} T_U^{N_L, N_L-1} \dots A^{**2} T_U^{2,1} A^{**1} \right) U_b^1 + \\
 & \left(A^{**N_L} T_U^{N_L, N_L-1} \dots A^{**2} T_U^{2,1} J^{**1} + \right. \\
 & A^{**N_L} T_U^{N_L, N_L-1} \dots A^{**3} T_U^{3,2} J^{**2} + \\
 & \vdots \\
 & A^{**N_L} T_U^{N_L, N_L-1} J^{**N_L-1} + \\
 & J^{**N_L} + \\
 & A^{**N_L} T_U^{N_L, N_L-1} \dots A^{**2} T_\Theta^{2,1} \Theta_t^1 + \\
 & A^{**N_L} T_U^{N_L, N_L-1} \dots A^{**3} T_\Theta^{3,2} \Theta_t^2 + \\
 & \vdots \\
 & A^{**N_L} T_U^{N_L, N_L-1} A^{**N_L-1} T_\Theta^{N_L-1, N_L-2} \Theta_t^{N_L-2} + \\
 & \left. A^{**N_L} T_U^{N_L, N_L-1} \Theta_t^{N_L-1} \right) = H_m U_b^1 + H_\Theta
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Infine, vengono imposte le condizioni al contorno, che, anche in questo caso, sono quelle di semplice appoggio, e corrispondono esattamente a quelle imposte in (2.54) e (2.55), relative all'analisi dinamica. Senza mostrare tutti i passaggi, che possono essere visti nella sezione 2.6 del Capitolo 2, le condizioni al contorno è possibile scriverle in forma matriciale come

$$B_t^{N_L} U_t^{N_L} = P_t^{N_L} = \mathbf{0} \tag{5.24}$$

$$B_b^1 U_b^1 = P_b^1 = \mathbf{0} \tag{5.25}$$

dove i carichi meccanici sono nulli, perchè nel caso di thermal stress analysis sulla struttura agisce solo una sovratemperatura al top e al bottom della struttura, senza alcun carico meccanico.

Ricordando la (5.23) è possibile riscrivere la (5.24) come

$$B_t^{N_L} \left(H_m U_b^1 + H_\Theta \right) = \mathbf{0} \Rightarrow B_t^{N_L} H_m U_b^1 = -B_t^{N_L} H_\Theta \tag{5.26}$$

che, se compattata insieme alla (5.24), porta ad ottenere

$$\begin{bmatrix} B_t^{N_L} H_m \\ B_b^1 \end{bmatrix} U_b^1 = \begin{Bmatrix} -B_t^{N_L} H_\Theta \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = P_\Theta \Rightarrow E U_b^1 = P_\Theta \tag{5.27}$$

dove il vettore P_Θ contiene *solamente* i carichi termici equivalenti; per la precisione, ciò che contiene il vettore colonna P_Θ è proprio il campo termico

che si viene a generare sulla struttura, il quale è convertito in un vettore di carichi termici equivalenti in modo da poter risolvere il problema e ottenere gli spostamenti. Anche in questo caso, la matrice \mathbf{E} ha sempre dimensioni 6×6 , qualsiasi sia il numero di strati matematici utilizzati.

Da questa ultima scrittura si nota come il caso meccanico e il termomeccanico disaccoppiato siano, nella forma finale di risoluzione del problema, molto simili tra di loro, con la sola differenza sostanziale che il campo di temperatura imposto viene modificato in un carico termico equivalente, che ha la stessa valenza "fisica" di un classico carico meccanico. Le differenze più marcate si trovano nelle matrici di trasporto $\mathbf{T}^{j+1,j}$ e nella risoluzione del sistema di equazioni differenziali, in cui il termine noto rende la soluzione più complessa rispetto al caso meccanico.

5.1.3 Determinazione del profilo di temperatura e del relativo carico termico equivalente

Essendo la formulazione presentata disaccoppiata, la componente termica viene calcolata separatamente e poi considerata come termine noto nell'equazione (5.13). Per il calcolo del profilo di sovratemperatura si utilizza la legge di Fourier scritta nel sistema di riferimento curvilineo misto ortogonale, la quale può essere definita in tre differenti modi

- Risoluzione dell'equazione di Fourier 3D
- Risoluzione dell'equazione di Fourier 1D
- Profilo di temperatura assunto, a priori, come lineare

La differenza tra le prime due equazioni sta nel fatto che, per quanto riguarda l'equazione 1D, esso considera solo il flusso termico lungo la direzione z dato che, per una struttura molto sottile, i flussi lungo α e β possono essere considerati trascurabili. In aggiunta, dato che la struttura è molto sottile, l'effetto dello spessore viene trascurato usando questa equazione. Diverso è il caso di Fourier 3D, in quanto tiene in conto sia delle caratteristiche di conduzione dei materiali utilizzati nel multistrato che dello spessore della struttura, da cui ne consegue che non è possibile trascurare i flussi di calore agenti lungo le direzioni in pianta e, quindi, si ha la necessità di valutare q_α , q_β e q_z . Per questo motivo, quando bisogna analizzare geometrie multistrato spesse è buona norma utilizzare l'equazione di Fourier 3D se si ha necessità di conoscere i risultati esatti. Invece, nel caso in cui si ha da studiare una geometria sottile, è sufficiente utilizzare l'equazione di Fourier 1D, perchè l'effetto dello spessore diventa trascurabile ed è possibile non considerare i carichi termici

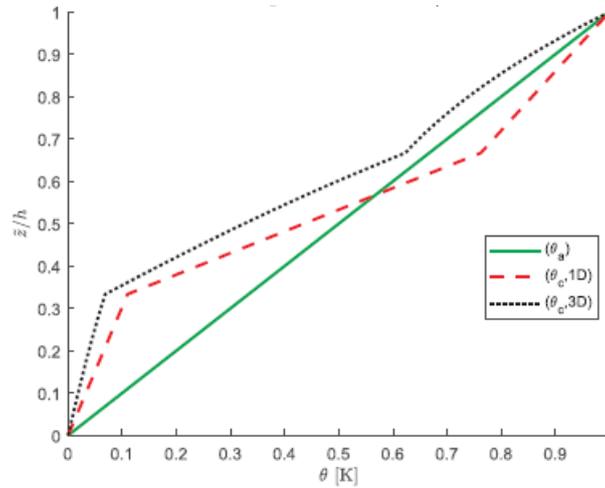


Figura 5.1: Esempio di profili di temperatura valutabili dal modello termo-meccanico. È possibile vedere un profilo di temperatura valutato attraverso l'utilizzo dell'equazione di conducibilità del calore 3D (nero), uno attraverso l'utilizzo dell'equazione di conducibilità del calore l'1D (rosso) e il profilo di temperatura assunto come lineare (verde) [16]

agenti lungo α e β . Il profilo di temperatura assunto lineare a priori è spesso utilizzato in letteratura per la sua semplicità di implementazione ma molto spesso fornisce dei risultati non corretti; diventa molto accurato nel caso in cui la geometria da studiare è sottile e monostrato, dato che la dipendenza dello spessore diventa trascurabile, mentre il materiale, essendo sempre lo stesso, non induce a variazioni di pendenza nel profilo di temperatura, che, ovviamente, un profilo lineare a priori non può considerare. Un esempio dei tre differenti profili di temperatura che possono essere considerati utilizzando la formulazione termomeccanica disaccoppiata è presente in Figura 5.1, dove si mostra il caso di una struttura composta da tre differenti materiali. Come si può notare dalla Figura 5.1, il caso verde (profilo lineare assunto a priori) non tiene assolutamente in conto né del tipo di materiale né dello spessore della struttura, ma dipende solamente dal valore di sovratemperatura imposto agli estremi. Nel caso del profilo rosso (Fourier 1D) e nero (Fourier 3D) si comprende come le diverse caratteristiche termiche tra due strati fisici incidano sul profilo di temperatura lungo lo spessore della geometria, consentendo il caratteristico cambio di pendenza tra due strati adiacenti. La leggera differenza tra questi due profili va attribuita alla presenza dell'effetto dello spessore presente nel caso di Fourier 3D mentre non presente in Fourier 1D [16].

5.1.4 Risoluzione della versione 3D dell'equazione di conducibilità di Fourier

In generale, in un sistema di coordinate curvilineo ortogonale (u_1, u_2, u_3) , l'equazione di conduzione del calore, per un solido omogeneo e stazionario, che non crea energia interna, è possibile scriverla come

$$\nabla \cdot \mathbf{q}(u_1, u_2, u_3) = 0. \quad (5.28)$$

Nel caso in cui il sistema di coordinate è ortogonale e completamente curvilineo, l'equazione (5.28) diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{a}{a_1} q_1 \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{a}{a_2} q_2 \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{a}{a_3} q_3 \right) \right] \quad (5.29)$$

dove q_1, q_2, q_3 esprimono i flussi di calore lungo le tre direzioni mentre a_1, a_2, a_3 e $a = a_1 a_2 a_3$ rappresentano i fattori di scala. Grazie alle ricerche di Povstenko, pubblicate in [17], è possibile scrivere l'equazione (5.29) in un sistema curvilineo misto ortogonale, come

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{H_\alpha H_\beta}{H_\alpha} \kappa_1 \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{H_\alpha H_\beta}{H_\beta} \kappa_2 \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right) \right] + \kappa_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (5.30)$$

in cui $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ sono i coefficienti di conduzione termica, i quali indicano la capacità del materiale di diffondere il flusso di calore lungo le tre direzioni. Questi coefficienti vanno considerati per ogni strato matematico, infatti, in seguito avranno sempre l'apice j . Andando ad eseguire tutti i calcoli, è possibile riscrivere la precedente come

$$\kappa_1^{*j} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + \kappa_2^{*j} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} + \kappa_3^j \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (5.31)$$

dove

$$\kappa_1^{*j} = \frac{k_1^j}{H_\alpha^2} \quad \kappa_2^{*j} = \frac{k_2^j}{H_\beta^2} \quad (5.32)$$

sono i termini che permettono di riscrivere in forma più agevole e riconoscibile la legge di Fourier, pur essendo nel sistema di riferimento curvilineo misto ortogonale e sono funzione di z , in quanto H_α e H_β sono funzioni di z . Si nota che l'unica differenza che aggiunge questo particolare sistema di riferimento è l'esplicitazione dei termini parametrici H_α e H_β , che tengono in conto della curvatura della geometria. Partendo dall'equazione (5.31), si introducono anche in questo caso gli strati matematici in modo da avere un'equazione differenziale di secondo grado alle derivate parziali con coefficienti costanti;

senza l'introduzione di questi strati fittizi si avrebbero i coefficienti k_1^* e k_2^* dipendenti da z , a seguito della espressione dei termini geometrici H_α e H_β .

L'equazione (5.31) può essere risolta esattamente nei soliti casi in cui è valida la formulazione armonica delle incognite e, per come è stata definita la sovratemperatura nella (5.10d), essa è automaticamente soddisfatta. È possibile scrivere esplicitamente l'ampiezza della sovratemperatura $\Theta(z)$ come

$$\Theta^j(z) = \Theta_0^j e^{s^j z} \quad (5.33)$$

dove sia il termine Θ_0^j che s^j devono essere calcolati per ogni strato matematico, dato che sono termini incogniti. La coordinata spaziale z va da 0 ad h^j . Il termine s^j può essere calcolato andando a sostituire, nella (5.31), la formulazione armonica riferita alla sovratemperatura, tenendo in conto anche del legame tra l'ampiezza della sovratemperatura Θ con lo spessore z e la condizione di stazionarietà del flusso di calore. Andando ad eseguire i calcoli si ottiene la seguente espressione

$$s_{1,2}^j = \pm \sqrt{\frac{k_1^{*j} \bar{\alpha}^2 + k_2^{*j} \bar{\beta}^2}{k_3^j}} \quad (5.34)$$

dove la soluzione da scegliere, valida dal punto di vista fisico, è s_1 , ovvero quella riferita al segno positivo. Andando a sostituire l'espressione della (5.34) nella (5.33), è possibile scrivere, come forma alternativa, attraverso dei semplici espedienti algebrici

$$\Theta^j(z) = \Theta_{01}^j e^{s_1^j z} + \Theta_{02}^j e^{s_2^j z} = S_1^j \cosh(s_1^j z) + S_2^j \sinh(s_1^j z) \quad (5.35)$$

dove la seconda uguaglianza si ottiene considerando che le funzioni iperboliche possono essere scritte utilizzando la funzione esponenziale ed eseguendo gli opportuni calcoli.

L'equazione (5.35) contiene due termini incogniti per ogni strato matematico; in totale, quindi, si ha bisogno di calcolare $2N_L$ coefficienti, dato che, per ogni strato matematico, si ha la necessità di conoscere il valore sia di S_1^j che di S_2^j . Per fare questo, bisogna imporre, oltre alle condizioni sugli spostamenti, altre due relazioni di continuità aggiuntive, relative alla parte termica del modello; le due relazioni di continuità, che anche in questo caso sono valide all'interfaccia tra due strati matematici successivi, sono

$$\Theta_b^{j+1} = \Theta_t^j \quad (5.36)$$

$$k_3^{*j+1} \Theta_{,z_b}^{j+1} = k_3^{*j} \Theta_{,z_t}^j. \quad (5.37)$$

Si comprende, quindi, che la continuità interlaminare va introdotta anche per l'ampiezza della sovratemperatura e per l'ampiezza della derivata lungo

z della sovratemperatura (quest'ultima esprime il flusso di calore in direzione z).

Dall'utilizzo delle relazioni di continuità è possibile scrivere in forma esplicita le relazioni che ne conseguono, ovvero

$$S_1^{j+1} \cosh(s_1^{j+1} h_b^{j+1}) + S_2^{j+1} \sinh(s_1^{j+1} h_b^{j+1}) = S_1^j \cosh(s_1^j h_t^j) + S_2^j \sinh(s_1^j h_t^j) \quad (5.38a)$$

$$\begin{aligned} k_3^{*j+1} \left(S_1^{j+1} s_1^{j+1} \sinh(s_1^{j+1} h_b^{j+1}) + S_2^{j+1} s_1^{j+1} \cosh(s_1^{j+1} h_b^{j+1}) \right) = \\ = k_3^{*j} \left(S_1^j s_1^j \sinh(s_1^j h_t^j) + S_2^j s_1^j \cosh(s_1^j h_t^j) \right) \end{aligned} \quad (5.38b)$$

che è possibile riscrivere, in forma matriciale, come

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix}^{j+1} = \begin{bmatrix} V_{\Theta_1}^{j+1,j} & V_{\Theta_2}^{j+1,j} \\ V_{\Theta_3}^{j+1,j} & V_{\Theta_4}^{j+1,j} \end{bmatrix}^{j+1} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix}^j. \quad (5.39)$$

dove è nuovamente presente una matrice di trasferimento, che però è chiamata $\mathbf{V}_{\Theta}^{j+1,j}$ per distinguerla dalla precedente. Per poter passare dal bottom del primo strato al top dell'ultimo si esegue la stessa procedura vista in precedenza, dato che la matrice $\mathbf{V}_{\Theta}^{j+1,j}$ ha la stessa valenza fisica della matrice $\mathbf{T}^{j+1,j}$ già analizzata nel Capitolo 2. Quindi, è possibile scrivere

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix}^{N_L} = \mathbf{V}_{\Theta}^{N_L, N_L-1} \dots \mathbf{V}_{\Theta}^{3,2} \mathbf{V}_{\Theta}^{2,1} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix}^1 = \mathbf{V}_{\Theta}^{N_L,1} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix}^1 \quad (5.40)$$

In questo modo, si riescono a calcolare $2N_L - 1$ incognite, perchè il numero di interfacce è pari ad $N_L - 1$ e, come anche detto in precedenza, per ogni interfaccia si calcolano le *due* incognite S_1 ed S_2 . Per arrivare al numero di incognite totali, che è pari a $2N_L$, mancano solamente due termini: essi sono le condizioni al contorno imposte sull'ampiezza della sovratemperatura, che corrispondono proprio al valore di sovratemperatura che si ha al top dell'ultimo strato e al bottom del primo; grazie a queste condizioni è possibile calcolare i termini S_1 ed S_2 agli estremi della geometria. In questo modo, tutte le incognite sono determinate e può essere calcolato, ricorsivamente, il profilo di temperatura che si genera a causa dell'esposizione della struttura al campo di sovratemperatura.

Quando si inserirà questo profilo di temperatura nel modello 3D guscio descritto nel paragrafo 5.1, si ottiene la formulazione termomeccanica disaccoppiata che verrà denominata 3D(θ_c , 3D), il cui nome deriva dal fatto che il profilo di sovratemperatura viene calcolato esternamente attraverso l'equazione di Fourier 3D.

5.1.5 Risoluzione della versione 1D dell'equazione di conducibilità di Fourier

Come già detto nella precedente sezione 5.1.3 la risoluzione dell'equazione di Fourier, nella versione 1D, implica il fatto di poter trascurare i flussi di calore in direzione α e β ; ciò, a sua volta, implica il fatto che il profilo calcolato in questo modo sia preciso solo nel caso di piastre sottili (ovvero valori a/h alti). La risoluzione, per questo caso, è leggermente diversa rispetto al caso visto in precedenza.

Data la semplificazione riguardo i flussi di calore, per questo caso particolare, è possibile scrivere

$$k_3^j \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (5.41)$$

che consiste nell'equazione di Fourier 1D. Ovviamente, rimane valida la formulazione armonica della sovratemperatura vista in (5.10d). L'equazione (5.41) è possibile riscriverla, poiché all'interno di ciascuno strato matematico k_3^j è costante, in modo da rendere più evidente il termine del flusso di calore q_z^j

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_3^j \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(q_z^j \right) = 0 \quad (5.42)$$

da cui si evince che, il flusso di calore lungo z è costante in ogni strato matematico. Data questa considerazione si nota che, essendo sia q_z che k_3 costanti, è possibile scrivere

$$k_3^j \frac{\partial \theta}{\partial z} = q_z^j \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial z} = \text{cost.} \quad (5.43)$$

da cui si comprende facilmente che θ assume un andamento lineare. A seguito di questa importante considerazione è possibile riscrivere tutto come

$$q_z^j = k_3^j \frac{\partial \theta}{\partial z} = \text{cost} = \frac{k_3^j}{h^j} \left(\Theta_t^j - \Theta_b^j \right) \quad (5.44)$$

dove il termine $\frac{k_3^j}{h^j}$ viene chiamato *conduttanza termica*, e va calcolato per ogni j -esimo strato matematico. Il passaggio dalla derivata alle differenze, espresso nella (5.44), è possibile farlo dato che il flusso di calore è costante nello strato matematico. Sempre sfruttando il fatto che il flusso q_z è costante lungo lo spessore è possibile calcolare una *resistenza termica equivalente* di tutto il multistrato e utilizzarla per calcolare il flusso di calore lungo lo spessore dell'intera geometria. La resistenza termica equivalente è possibile scriverla come

$$R_{eq} = \sum_{j=1}^{N_L} \frac{h^j}{k_3^j} \quad (5.45)$$

e, quindi, il flusso di calore complessivo q_z lungo il multistrato è esprimibile come

$$q_z = \frac{1}{R_{eq}} (\Theta_t - \Theta_b) \quad (5.46)$$

dove Θ_t e Θ_b indicano il valore di sovratemperatura imposto *direttamente* agli estremi del multistrato. In questo modo si vede che il flusso q_z dipende solamente dalla resistenza termica equivalente e dal valore di sovratemperatura agli estremi della struttura.

Infine, legando le equazioni relative al flusso di calore complessivo q_z e quelle relative al flusso di calore per ogni singolo strato q_z^j si ottiene

$$q_z = cost = q_z^j = \frac{k_3^j}{h^j} (\Theta_t^j - \Theta_b^j) = q_z^{j+1} = \frac{k_3^{j+1}}{h^{j+1}} (\Theta_t^{j+1} - \Theta_b^{j+1}) \quad (5.47)$$

dove q_z , lo spessore h^j , i coefficienti di conducibilità termica di ogni strato matematico e le sovratemperature al top e al bottom del multistrato sono completamente note. Attraverso la (5.47) è possibile calcolare Θ_t e Θ_b per ogni strato matematico, partendo a calcolare sempre dal top o dal bottom del multistrato ricostruendo il profilo di temperatura generatosi lungo lo spessore della struttura a causa delle sovratemperature esterne imposte.

Quando si inserirà questo profilo di temperatura nel modello 3D guscio descritto nel paragrafo 5.1, si ottiene la formulazione termomeccanica disaccoppiata che verrà denominata 3D(θ_c , 1D), il cui nome deriva dal fatto che il profilo di sovratemperatura viene calcolato esternamente attraverso l'equazione di Fourier 1D.

5.1.6 Profilo di temperatura assunto lineare a priori

In questo caso, il profilo di temperatura viene assunto lineare e la pendenza è semplicemente data dal valore di Θ_t e Θ_b che si hanno agli estremi della geometria. Questo caso viene utilizzato spesso per l'esiguo costo computazionale ma non è assolutamente preciso, in particolare nel caso di piastra spessa (valori di a/h bassi) e con strati fisici di materiale diverso.

Quando si inserirà questo profilo di temperatura nel modello 3D guscio descritto nel paragrafo 5.1, si ottiene la formulazione termomeccanica disaccoppiata che verrà denominata 3D(θ_a , 3D), il cui nome deriva dal fatto che il profilo di sovratemperatura viene assunto a priori.

5.2 Modello guscio 3D termomeccanico accoppiato

In questo paragrafo viene definita la formulazione termomeccanica accoppiata; essendo una trattazione nuova verranno forniti tutti i dettagli, anche se alcune parti sono identiche rispetto a quelle viste precedentemente per il caso termomeccanico disaccoppiato o per il caso meccanico.

La differenza sostanziale tra l'approccio disaccoppiato e quello accoppiato sta nel fatto che, nel primo caso, il calcolo del profilo di temperatura avviene "esternamente", utilizzando la procedura vista nella sezione 5.1, mentre, nel secondo caso, il calcolo del profilo di temperatura avviene insieme al calcolo degli spostamenti; tutte e quattro le incognite (u , v , w e θ) sono considerarsi come variabili primarie del problema. La definizione della sovratemperatura θ è la stessa che si può vedere in (5.1). Ovviamente, anche in questo caso, il vettore soluzione fornirà il valore delle derivate prime rispetto a z delle incognite.

Quando ci si riferirà a questo profilo di temperatura si utilizzerà la nomenclatura 3D- u - θ per chiarire che questa formulazione deriva da un modello guscio 3D termomeccanico accoppiato in cui si ha da intendere che sia gli spostamenti che la sovratemperatura sono variabili primarie.

5.2.1 Relazioni geometriche e costitutive

Le relazioni geometriche e le equazioni costitutive sono le stesse viste per il caso disaccoppiato, essendo, infatti, valide genericamente per una formulazione termomeccanica. Per quanto riguarda le relazioni geometriche, esse sono le (5.4a) - (5.4f), le quali permettono di legare le deformazioni con gli spostamenti. Invece, per quanto riguarda le equazioni costitutive, considerando sempre la matrice dei coefficienti elastici scritta nel sistema di riferimento struttura \mathbf{C}^k vista in (5.6), valida per un materiale ortotropo, si arriva a poter scrivere la (5.5), la quale lega le deformazioni con le tensioni. Infine, come anche visto nel paragrafo 5.1.2, andando ad esprimere le tensioni in funzione delle variabili primarie del problema, è possibile ottenere le (5.7a) - (5.7f).

5.2.2 Equazioni di governo completamente accoppiate

Le equazioni di governo del caso termomeccanico completamente accoppiato, in regime stazionario, sono le tre equazioni indefinite di equilibrio 3D e la

legge di Fourier 3D, che vengono messe a sistema

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial z} + \left(\frac{2H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \sigma_{\alpha z}^k \right) = 0 \quad (5.48a)$$

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial z} + \left(\frac{2H_\alpha}{R_\beta} + \frac{H_\beta}{R_\alpha} \right) \sigma_{\beta z}^k = 0 \quad (5.48b)$$

$$\begin{aligned} H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} - \frac{H_\beta}{R_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}^k - \frac{H_\alpha}{R_\beta} \sigma_{\beta\beta}^k + \\ + \left(\frac{H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \right) \sigma_{zz}^k = 0 \end{aligned} \quad (5.48c)$$

$$k_1^{*k} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + k_2^{*k} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} + k_3^k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (5.48d)$$

Avendo aggiunto una nuova incognita (la sovratemperatura θ) si rende necessario, per avere un set di equazioni risolubile, aggiungere una nuova equazione, che è proprio l'equazione di conducibilità 3D. In questo caso, queste quattro equazioni vengono risolte contemporaneamente, senza utilizzare separatamente la legge di Fourier 3D per il calcolo del profilo di temperatura.

Introducendo le relazioni (5.7a) - (5.7f) (e le opportune derivate) nelle quattro equazioni di governo è possibile ottenere

$$\begin{aligned} \left(-\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) u^k + \left(\frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) u_{,z}^k + \left(\frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) u_{,\alpha\alpha}^k + \\ + \left(\frac{C_{66}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) u_{,\beta\beta}^k + \left(C_{55}^k H_\alpha H_\beta \right) u_{,zz}^k + \left(C_{12}^k + C_{66}^k \right) v_{,\alpha\beta}^k + \\ + \left(\frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) w_{,\alpha}^k + \left(C_{13}^k H_\alpha + C_{55}^k H_\beta \right) w_{,\alpha z}^k + \\ + \left(-H_\beta \lambda_\alpha^k \right) \theta_{,\alpha}^k = 0 \end{aligned} \quad (5.49a)$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{H_\alpha C_{44}^k}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} \right) v^k + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) v_{,z}^k + \left(\frac{C_{66}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) v_{,\alpha\alpha}^k + \\ + \left(\frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) v_{,\beta\beta}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha H_\beta \right) v_{,zz}^k + \left(C_{12}^k + C_{66}^k \right) u_{,\alpha\beta}^k + \\ + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) w_{,\beta}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\beta \right) w_{,\beta z}^k + \\ + \left(-H_\alpha \lambda_\beta^k \right) \theta_{,\beta}^k = 0 \end{aligned} \quad (5.49b)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11} H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} \right) w^k + \left(\frac{H_\beta}{R_\alpha} \lambda_\alpha^k + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \lambda_\beta^k + \right. \\
 & \left. - \frac{H_\beta}{R_\alpha} \lambda_z^k - \frac{H_\alpha}{R_\beta} \lambda_z^k \right) \theta + \left(-\frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{13}^k}{R_\beta} - \frac{C_{11} H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) u_{,\alpha}^k + \\
 & + \left(-\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) v_{,\beta}^k + \left(\frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) w_{,z}^k + \\
 & + \left(C_{55}^k H_\beta + C_{13}^k H_\beta \right) u_{,\alpha\beta}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha + C_{23}^k H_\alpha \right) v_{,\beta z}^k + \left(\frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} \right) w_{,\alpha\alpha}^k + \\
 & + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) w_{,\beta\beta}^k + \left(C_{33}^k H_\alpha H_\beta \right) w_{,zz}^k + \left(-H_\alpha H_\beta \lambda_z^k \right) \theta_{,z}^k = 0.
 \end{aligned} \tag{5.49c}$$

$$k_1^{*k} \theta_{,\alpha\alpha}^k + k_2^{*k} \theta_{,\beta\beta}^k + k_3^k \theta_{,zz}^k = 0. \tag{5.49d}$$

Per poter proseguire, si ha la necessità di imporre la forma armonica su tutte le variabili primarie del problema, andando, quindi, a scrivere la soluzione armonica già vista anche in precedenza nella sezione 5.1.2, precisamente le relazioni (5.10a) - (5.10d). Queste relazioni, una volta calcolate le opportune derivate, possono essere inserite all'interno delle (5.49a) - (5.49d), in modo da ottenere, dopo aver semplificato correttamente le funzioni trigonometriche funzioni di α e β

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{H_\beta C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{11} H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{66} H_\alpha}{H_\beta} \right) U^k + \left(-\bar{\alpha} \bar{\beta} C_{12}^k - \bar{\alpha} \bar{\beta} C_{66}^k \right) V^k + \\
 & + \left(\bar{\alpha} \frac{C_{11} H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{12}^k}{R_\beta} + \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{55}^k}{R_\beta} \right) W^k + \left(-H_\beta \lambda_\alpha \bar{\alpha} \right) \Theta^k + \\
 & + \left(\frac{C_{55}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) U_{,z}^k + \left(\bar{\alpha} C_{13}^k H_\beta + \bar{\alpha} C_{55}^k H_\beta \right) W_{,z}^k + \left(C_{55}^k H_\alpha H_\beta \right) U_{,zz}^k = 0
 \end{aligned} \tag{5.50a}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(-\bar{\alpha} \bar{\beta} C_{66}^k - \bar{\alpha} \bar{\beta} C_{12}^k \right) U^k + \left(-\frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44}^k}{R_\alpha R_\beta} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{66} H_\beta}{H_\alpha} - \bar{\beta}^2 \frac{C_{22} H_\alpha}{H_\beta} \right) V^k + \\
 & + \left(\bar{\beta} \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{44}^k}{R_\alpha} + \bar{\beta} \frac{C_{22} H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \bar{\beta} \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) W^k + \left(-H_\alpha \lambda_\beta \bar{\beta} \right) \Theta^k + \\
 & + \left(\frac{C_{44}^k H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44}^k H_\beta}{R_\alpha} \right) V_{,z}^k + \left(\bar{\beta} C_{44}^k H_\alpha + \bar{\beta} C_{23}^k H_\alpha \right) W_{,z}^k + \left(C_{44}^k H_\alpha H_\beta \right) V_{,zz}^k = 0
 \end{aligned} \tag{5.50b}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\bar{\alpha} \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \bar{\alpha} \frac{C_{13}^k}{R_\beta} + \bar{\alpha} \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \bar{\alpha} \frac{C_{12}^k}{R_\beta} \right) U^k + \left(\bar{\beta} \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \bar{\beta} \frac{C_{23}^k}{R_\alpha} + \bar{\beta} \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \right. \\
 & \left. + \bar{\beta} \frac{C_{12}^k}{R_\alpha} \right) V^k + \left(\frac{C_{13}^k}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11}^k H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12}^k}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22}^k H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} - \bar{\alpha}^2 \frac{C_{55}^k H_\beta}{H_\alpha} + \right. \\
 & \left. - \bar{\beta}^2 \frac{C_{44}^k H_\alpha}{H_\beta} \right) W^k + \left(\frac{H_\beta}{R_\alpha} \lambda_\alpha + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \lambda_\beta - \frac{H_\beta}{R_\alpha} \lambda_z - \frac{H_\alpha}{R_\beta} \lambda_z \right) \Theta^k + \\
 & + \left(-\bar{\alpha} C_{55}^k H_\beta - \bar{\alpha} C_{13}^k H_\beta \right) U_{,z}^k + \left(-\bar{\beta} C_{44}^k H_\alpha - \bar{\beta} C_{23}^k H_\alpha \right) V_{,z}^k + \\
 & + \left(\frac{C_{33}^k H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33}^k H_\alpha}{R_\beta} \right) W_{,z}^k + \left(-H_\alpha H_\beta \lambda_z \right) \Theta_{,z}^k + \left(C_{33}^k H_\alpha H_\beta \right) W_{,zz}^k = 0
 \end{aligned} \tag{5.50c}$$

$$\left(-k_1^* \bar{\alpha} \right) \Theta^k + \left(-k_2^* \bar{\beta} \right) \Theta^k + \left(k_3 \right) \Theta_{,zz}^k = 0 \tag{5.50d}$$

che è possibile riscriverle in forma compatta andando a utilizzare i termini A_i e Γ_i , che esprimono in forma più semplice i termini tra parentesi delle precedenti equazioni. Vengono chiamati in maniera differente per distinguere, rispettivamente, i termini prettamente meccanici con quelli termici. Inoltre, si passa direttamente agli strati matematici j , sempre per gli stessi motivi già accuratamente descritti sia nel caso meccanico che termomeccanico disaccoppiato. Considerando ciò, si può scrivere

$$A_1^j U^j + A_2^j V^j + A_3^j W^j + A_4^j U_{,z}^j + A_5^j W_{,z}^j + A_6^j U_{,zz}^j + \Gamma_1^j \Theta^j = 0 \tag{5.51a}$$

$$A_7^j U^j + A_8^j V^j + A_9^j W^j + A_{10}^j V_{,z}^j + A_{11}^j W_{,z}^j + A_{12}^j V_{,zz}^j + \Gamma_2^j \Theta^j = 0 \tag{5.51b}$$

$$A_{13}^j U^j + A_{14}^j V^j + A_{15}^j W^j + A_{16}^j U_{,z}^j + A_{17}^j V_{,z}^j + A_{18}^j W_{,z}^j + A_{19}^j W_{,zz}^j + \Gamma_3^j \Theta_{,z}^j + \Gamma_4^j \Theta^j = 0 \tag{5.51c}$$

$$\Gamma_5^j \Theta^j + \Gamma_6^j \Theta^j + \Gamma_7^j \Theta_{,zz}^j = 0. \tag{5.51d}$$

Anche in questo caso si ha da risolvere un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, come visto anche per il caso meccanico. E' conveniente abbassare il grado delle equazioni, secondo la metodologia vista in [9], in modo da risolvere più agevolmente questo set di equazioni differenziali. Rispetto ai casi precedenti il sistema è composto da quattro equazioni; quella aggiuntiva contiene la derivata seconda della sovratemperatura e deriva dall'introduzione dell'equazione di conducibilità 3D. Quindi, ovviamente, sarà necessario aggiungere una quarta identità, in modo da considerare la nuova variabile primaria del secondo ordine. Alla fine, è possibile ottenere

$$A_6^j U_{,z}^j = A_6^j U_{,z}^j \tag{5.52a}$$

$$A_{12}^j V_{,z}^j = A_{12}^j V_{,z}^j \quad (5.52b)$$

$$A_{19}^j W_{,z}^j = A_{19}^j W_{,z}^j \quad (5.52c)$$

$$\Gamma_7^j \Theta_{,z}^j = \Gamma_7^j \Theta_{,z}^j \quad (5.52d)$$

che vanno unite alle (5.51a) - (5.51d). In forma matriciale, il sistema di equazioni differenziali completo è possibile scriverlo come

$$\begin{bmatrix} A_6^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12}^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{19}^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_7^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_6^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_7^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ \Theta^j \\ U_{,z}^j \\ V_{,z}^j \\ W_{,z}^j \\ \Theta_{,z}^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A_6^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_7^j \\ -A_1^j & -A_2^j & -A_3^j & -\Gamma_1^j & -A_4^j & 0 & -A_5^j & 0 \\ -A_7^j & -A_8^j & -A_9^j & -\Gamma_2^j & 0 & -A_{10}^j & -A_{11}^j & 0 \\ -A_{13}^j & -A_{14}^j & -A_{15}^j & -\Gamma_3^j & -A_{16}^j & -A_{17}^j & -A_{18}^j & -\Gamma_4^j \\ 0 & 0 & 0 & -(\Gamma_5^j + \Gamma_6^j) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ \Theta^j \\ U_{,z}^j \\ V_{,z}^j \\ W_{,z}^j \\ \Theta_{,z}^j \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

che è possibile riscrivere come

$$D^j \mathbf{X}_{,z}^j = \mathbf{A}^j \mathbf{X}^j \quad (5.54)$$

$$\mathbf{X}_{,z}^j = D^{-1j} \mathbf{A}^j \mathbf{X}^j \quad (5.55)$$

$$\mathbf{X}_{,z}^j = \mathbf{A}^{*j} \mathbf{X}^j \quad (5.56)$$

dove il vettore delle incognite, per differenziarlo dai casi precedenti, è stato chiamato \mathbf{X} dato che ha, al suo interno, termini meccanici e termici. La denominazione delle altre matrici presenti non sono state cambiate, in modo da far comprendere come la formulazione meccanica e quella termomeccanica accoppiata siano pressochè simili, a patto solamente di modificare le dimensioni delle matrici, passando da delle 6×6 a delle 8×8 , dato che si sono aggiunte al problema due nuove variabili e un'equazione (l'equazione di Fourier 3D) più un'identità (la relazione (5.52d)).

Come visto in precedenza, è possibile applicare il metodo della matrice esponenziale per risolvere il set di equazioni differenziali del primo ordine; in questo caso la soluzione sarà identica al caso meccanico perchè non si ha il termine che rende l'equazione non omogenea, visto, invece, nella trattazione termomeccanica disaccoppiata. Quindi, si ottiene, applicando il metodo espresso in [11]

$$\mathbf{X}^j(h_j) = \exp(\mathbf{A}^{*j}h_j)\mathbf{X}^j(0) = \mathbf{A}^{**j}\mathbf{X}^j(0) \quad \text{per } 0 \leq z_j \leq h_j. \quad (5.57)$$

A questo punto è possibile imporre le condizioni di continuità interlaminare in modo tale che sia possibile passare dal top del j -esimo strato matematico al bottom del $j+1$ -esimo; essendo queste condizioni imposte nell'interfaccia tra due strati, è possibile ottenere $N_L - 1$ condizioni. Le condizioni di continuità interlaminare sono

$$u_t^j = u_b^{j+1}, \quad v_t^j = v_b^{j+1}, \quad w_t^j = w_b^{j+1}, \quad \theta_t^j = \theta_b^{j+1} \quad (5.58)$$

$$\sigma_{\alpha z_t}^j = \sigma_{\alpha z_b}^{j+1}, \quad \sigma_{\beta z_t}^j = \sigma_{\beta z_b}^{j+1}, \quad \sigma_{zz_t}^j = \sigma_{zz_b}^{j+1}, \quad q_{z_t}^j = q_{z_b}^{j+1} \quad (5.59)$$

che consentono di poter scrivere

$$U_b^{j+1} = U_t^j \quad (5.60a)$$

$$V_b^{j+1} = V_t^j \quad (5.60b)$$

$$W_b^{j+1} = W_t^j \quad (5.60c)$$

$$\Theta_b^{j+1} = \Theta_t^j \quad (5.60d)$$

$$\frac{C_{55}^j}{H_{\alpha t}^j} \bar{\alpha} W_t^j + C_{55}^j U_{,z_t}^j - \frac{C_{55}^j}{H_{\alpha t}^j} U_t^j = \frac{C_{55}^{j+1}}{H_{\alpha b}^{j+1}} \bar{\alpha} W_b^{j+1} + C_{55}^{j+1} U_{,z_b}^{j+1} - \frac{C_{55}^{j+1}}{H_{\alpha b}^{j+1}} U_b^{j+1} \quad (5.60e)$$

$$\frac{C_{44}^j}{H_{\beta t}^j} \bar{\beta} W_t^j + C_{44}^j V_{,z_t}^j - \frac{C_{44}^j}{H_{\beta t}^j} V_t^j = \frac{C_{44}^{j+1}}{H_{\beta b}^{j+1}} \bar{\beta} W_b^{j+1} + C_{44}^{j+1} V_{,z_b}^{j+1} - \frac{C_{44}^{j+1}}{H_{\beta b}^{j+1}} V_b^{j+1} \quad (5.60f)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha t}^j} \bar{\alpha} U_t^j + \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha t}^j} W_t^j - \frac{C_{23}^j}{H_{\beta t}^j} \bar{\beta} V_t^j + \frac{C_{23}^j}{H_{\beta t}^j} W_t^j + C_{33}^j W_{,z_t}^j - \lambda_{z_t} \Theta_t^j = \\ & = - \frac{C_{13}^{j+1}}{H_{\alpha b}^{j+1}} \bar{\alpha} U_b^{j+1} + \frac{C_{13}^{j+1}}{H_{\alpha b}^{j+1}} W_b^{j+1} - \frac{C_{23}^{j+1}}{H_{\beta b}^{j+1}} \bar{\beta} V_b^{j+1} + \frac{C_{23}^{j+1}}{H_{\beta b}^{j+1}} W_b^{j+1} + \\ & + C_{33}^{j+1} W_{,z_b}^{j+1} - \lambda_{z_b} \Theta_b^{j+1} \end{aligned} \quad (5.60g)$$

$$k_3^j \Theta_{,z_t}^j = k_3^{j+1} \Theta_{,z_b}^{j+1}. \quad (5.60h)$$

La continuità degli spostamenti e della sovratemperatura si ripercuote sulle ampiezze stesse, come si può vedere se si scrivessero esplicitamente le (5.58). Si noti come, nelle equazioni (5.58) - (5.59), le condizioni di continuità relative alla parte meccanica siano sempre quelle imposte sia per il caso puramente meccanico che per il termomeccanico disaccoppiato, mentre le condizioni di continuità relative alla parte termica sono relative alla sovratemperatura e al flusso termico, così come viene fatto nel paragrafo 5.1.4.

Dalle relazioni precedenti è possibile calcolare direttamente i termini $U_{,z_b}^{j+1}$, $V_{,z_b}^{j+1}$, $W_{,z_b}^{j+1}$ e $\Theta_{,z_b}^{j+1}$ in modo da poter passare da uno strato all'altro attraverso l'interfaccia, infatti

$$\begin{aligned} U_{,z_b}^{j+1} = & \frac{1}{C_{55}^{j+1}} \left(\frac{C_{55}^{j+1}}{R_\alpha H_{\alpha_b}^{j+1}} - \frac{C_{55}^j}{R_\alpha H_{\alpha_t}^j} \right) U_t^j + \frac{1}{C_{55}^{j+1}} \left(\frac{C_{55}^j}{H_{\alpha_t}^j} \bar{\alpha} - \frac{C_{55}^{j+1}}{H_{\alpha_b}^{j+1}} \bar{\alpha} \right) W_t^j + \\ & + \left(\frac{C_{55}^j}{C_{55}^{j+1}} \right) U_{,z_t}^j \end{aligned} \quad (5.61a)$$

$$\begin{aligned} V_{,z_b}^{j+1} = & \frac{1}{C_{44}^{j+1}} \left(\frac{C_{44}^{j+1}}{R_\beta H_{\beta_b}^{j+1}} - \frac{C_{44}^j}{R_\beta H_{\beta_t}^j} \right) V_t^j + \frac{1}{C_{44}^{j+1}} \left(\frac{C_{44}^j}{H_{\beta_t}^j} \bar{\beta} - \frac{C_{44}^{j+1}}{H_{\beta_b}^{j+1}} \bar{\beta} \right) W_t^j + \\ & + \left(\frac{C_{44}^j}{C_{44}^{j+1}} \right) V_{,z_t}^j \end{aligned} \quad (5.61b)$$

$$\begin{aligned} W_{,z_b}^{j+1} = & \frac{1}{C_{33}^{j+1}} \left(\frac{C_{13}^{j+1}}{H_{\alpha_b}^{j+1}} \bar{\alpha} - \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha_t}^j} \bar{\alpha} \right) U_t^j + \frac{1}{C_{33}^{j+1}} \left(-\frac{C_{23}^j}{H_{\beta_t}^j} \bar{\beta} + \frac{C_{23}^{j+1}}{H_{\beta_b}^{j+1}} \bar{\beta} \right) V_t^j + \\ & + \frac{1}{C_{33}^{j+1}} \left(\frac{C_{23}^j}{H_{\beta_t}^j R_\beta} - \frac{C_{23}^{j+1}}{H_{\beta_b}^{j+1} R_\beta} + \frac{C_{13}^j}{H_{\alpha_t}^j R_\alpha} - \frac{C_{13}^{j+1}}{H_{\alpha_b}^{j+1} R_\alpha} \right) W_t^j + \end{aligned} \quad (5.61c)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{C_{33}^{j+1}} \left(-\lambda_z^j + \lambda_z^{j+1} \right) \Theta_t^j + \left(\frac{C_{33}^j}{C_{33}^{j+1}} \right) W_{,z_t}^j \\ & \Theta_{,z_b}^{j+1} = \frac{k_3^j}{k_3^{j+1}} \Theta_{,z_t}^j. \end{aligned} \quad (5.61d)$$

Le relazioni (5.61a) - (5.61d) possono essere scritte, in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ \Theta \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Theta_{,z} \end{pmatrix}_b^{j+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & 0 & T_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & T_5 & 0 & 0 & T_6 & 0 & 0 \\ T_7 & T_8 & T_9 & \tau_1 & 0 & 0 & T_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ \Theta \\ U_{,z} \\ V_{,z} \\ W_{,z} \\ \Theta_{,z} \end{pmatrix}_t^j \quad (5.62)$$

$$\mathbf{X}_b^{j+1} = \mathbf{T}^{j+1,j} \mathbf{X}_t^j \quad (5.63)$$

in cui $\mathbf{T}^{j+1,j}$ è la matrice di trasferimento che, in questo caso, ha dimensioni 8×8 e va calcolata per ogni interfaccia della geometria. Combinando il metodo della matrice esponenziale con la relazione (5.63) è possibile passare dal bottom al top del multistrato; anche in questo caso la relazione che si usa è la stessa, dal punto di vista formale, vista nel caso meccanico

$$\mathbf{X}_t^{N_L} = \mathbf{A}^{**N_L} \mathbf{T}^{N_L, N_L-1} \dots \mathbf{T}^{2,1} \mathbf{A}^{**1} \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{H}_m \mathbf{X}_b^1. \quad (5.64)$$

Infine, per completare la trattazione della thermal stress analysis, ciò che manca è l'imposizione delle condizioni al contorno, che sono sempre di semplice appoggio, essendo l'analisi esatta, quindi

$$w = v = 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = 0 \quad \text{per } \alpha = 0 \wedge \alpha = a \quad (5.65)$$

$$w = u = 0, \quad \sigma_{\beta\beta} = 0 \quad \text{per } \beta = 0 \wedge \beta = b. \quad (5.66)$$

Oltre alle precedenti, vanno imposte anche le condizioni di carico, valide sia per il top che per il bottom del multistrato

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{\alpha z} = 0, \quad \sigma_{\beta z} = 0, \quad \Theta = T_{amb} - T_{ref} \quad \text{per } z = \pm h/2 \quad (5.67)$$

dove l'ultima uguaglianza permette di imporre direttamente sulla Θ al top e al bottom della struttura il valore della sovratemperatura che si ha nell'ambiente in cui è posta la struttura. Date queste condizioni, è possibile scrivere

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(-\frac{h}{2}) &= -\frac{C_{13}^1}{H_{\alpha b}^1} \bar{\alpha} U_b^1 + \frac{C_{13}^1}{H_{\alpha b}^1} W_b^1 - \frac{C_{23}^1}{H_{\beta b}^1} \bar{\beta} V_b^1 + \frac{C_{23}^1}{H_{\beta b}^1} W_b^1 + C_{33}^1 W_{,z_b}^1 = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.68a)$$

$$\sigma_{\beta z}\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} W_b^1 + C_{44}^1 V_{,z_b}^1 - \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1 R_\beta} V_b^1 = 0 \quad (5.68b)$$

$$\sigma_{\alpha z}\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} W_b^1 + C_{55}^1 U_{,z_b}^1 - \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1 R_\alpha} U_b^1 = 0 \quad (5.68c)$$

$$\Theta\left(-\frac{h}{2}\right) = \Theta_b \quad (5.68d)$$

dove l'ultima uguaglianza, per ovvi motivi, non era presente nel caso meccanico ed è una delle poche variazioni presenti nel modello termomeccanico. Il termine Θ_b indica il valore di sovratemperatura che è possibile misurare sul bottom della struttura, valutato in gradi Kelvin oppure centigradi.

Lo stesso ragionamento è possibile farlo per il top della struttura, andando a scrivere

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}\left(+\frac{h}{2}\right) = & -\frac{C_{13}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}} \bar{\alpha} U_t^{NL} + \frac{C_{13}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL} R_\alpha} W_t^{NL} - \frac{C_{23}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}} \bar{\beta} V_t^{NL} + \frac{C_{23}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL} R_\beta} W_t^{NL} + \\ & + C_{33}^{NL} W_{,z_t}^{NL} = 0 \end{aligned} \quad (5.69a)$$

$$\sigma_{\beta z}\left(+\frac{h}{2}\right) = \frac{C_{44}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}} \bar{\beta} W_t^{NL} + C_{44}^{NL} V_{,z_t}^{NL} - \frac{C_{44}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL} R_\beta} V_t^{NL} = 0 \quad (5.69b)$$

$$\sigma_{\alpha z}\left(+\frac{h}{2}\right) = \frac{C_{55}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}} \bar{\alpha} W_t^{NL} + C_{55}^{NL} U_{,z_t}^{NL} - \frac{C_{55}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL} R_\alpha} U_t^{NL} = 0 \quad (5.69c)$$

$$\Theta\left(+\frac{h}{2}\right) = \Theta_t \quad (5.69d)$$

In questo caso, invece, il termine Θ_t indica il valore di sovratemperatura che si riesce a misurare al top della struttura, anch'esso valutato in gradi Kelvin oppure centigradi. Per maggiore chiarezza, le relazioni precedenti possono

essere riscritte in forma matriciale come

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -\frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} & -\frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} & \frac{C_{13}^1}{H_{\alpha_b}^1} R_\alpha + \frac{C_{23}^1}{H_{\beta_b}^1} R_\beta & -\lambda_z^1 & 0 & 0 & C_{33}^1 & 0 \\ 0 & -\frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1} R_\beta & \frac{C_{44}^1}{H_{\beta_b}^1} \bar{\beta} & 0 & 0 & C_{44}^1 & 0 & 0 \\ -\frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1} R_\alpha & 0 & \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha_b}^1} \bar{\alpha} & 0 & C_{55}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b^1 \\ V_b^1 \\ W_b^1 \\ \Theta_b^1 \\ U_{,z_b}^1 \\ V_{,z_b}^1 \\ W_{,z_b}^1 \\ \Theta_{,z_b}^1 \end{Bmatrix} = \\
 & = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Theta_b \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -\frac{C_{13}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}} \bar{\alpha} & -\frac{C_{23}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}} \bar{\beta} & \frac{C_{13}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}} R_\alpha + \frac{C_{23}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}} R_\beta & -\lambda_z^{NL} & 0 & 0 & C_{33}^{NL} & 0 \\ 0 & -\frac{C_{44}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}} R_\beta & \frac{C_{44}^{NL}}{H_{\beta_t}^{NL}} \bar{\beta} & 0 & 0 & C_{44}^{NL} & 0 & 0 \\ -\frac{C_{55}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}} R_\alpha & 0 & \frac{C_{55}^{NL}}{H_{\alpha_t}^{NL}} \bar{\alpha} & 0 & C_{55}^{NL} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_t^{NL} \\ V_t^{NL} \\ W_t^{NL} \\ \Theta_t^{NL} \\ U_{,z_t}^{NL} \\ V_{,z_t}^{NL} \\ W_{,z_t}^{NL} \\ \Theta_{,z_t}^{NL} \end{Bmatrix} = \\
 & = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Theta_t \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

che porta ad ottenere

$$B_b^1 X_b^1 = \mathcal{P}_b \tag{5.72}$$

$$B_t^{NL} X_t^{NL} = \mathcal{P}_t \tag{5.73}$$

dove la (5.73) può essere riscritta, utilizzando la (5.64), come

$$B_t^{NL} H_m X_b^1 = \mathcal{P}_t. \tag{5.74}$$

Infine, raccogliendo come già visto in tutti i casi precedenti, è possibile ottenere

$$\begin{bmatrix} B_t^{NL} H_m \\ B_b^1 \end{bmatrix} X_b^1 = \mathcal{P} = \begin{Bmatrix} \mathcal{P}_t \\ \mathcal{P}_b \end{Bmatrix} \tag{5.75}$$

riscrivibile, in maniera più chiara e compatta come

$$\mathbf{E}\mathbf{X}_b^1 = \mathcal{P} \Rightarrow \mathbf{X}_b^1 = \mathbf{E}^{-1}\mathcal{P}. \quad (5.76)$$

dove il vettore \mathcal{P} è stato così denominato, per differenziarlo dal vettore \mathbf{P} , in modo da indicare chiaramente che, potenzialmente, è possibile avere sia l'imposizione della sovratemperatura agli estremi della struttura che i carichi meccanici.

Per questa trattazione, a differenza del caso meccanico, la matrice \mathbf{E} ha dimensioni 8×8 , qualsiasi sia il numero di strati matematici utilizzati per la modellazione. Come è possibile constatare da questa trattazione, non si ha nessuna difficoltà matematica aggiuntiva rispetto al caso puramente meccanico anche considerando come nuova variabile primaria la sovratemperatura, cosa che, invece, si ha nel caso disaccoppiato a causa dell'applicazione del metodo della matrice esponenziale per il caso non omogeneo. La risoluzione del problema permette di ottenere sia gli spostamenti che la sovratemperatura al bottom del primo strato della struttura; attraverso le relazioni (5.57) - (5.63), applicate ricorsivamente, è possibile ricostruire l'andamento degli spostamenti e del campo di temperatura lungo lo spessore della geometria.

La grande differenza che si ha tra questi due modelli termomeccanici sta nel fatto che il disaccoppiato, come esplicitato nella sezione 5.1, ha una formulazione più lunga e laboriosa ma consente di poter scegliere quale profilo di temperatura utilizzare in base al caso di studio; questa particolarità non è presente nel caso accoppiato dato che il profilo di temperatura sarà sempre quello che si ottiene risolvendo l'equazione di Fourier 3D, che, infatti, è l'unica equazione che tiene conto dell'aspetto termico, come si può vedere nell'equazione (5.48d). D'altro canto, però, il modello termomeccanico accoppiato è notevolmente più semplice ed intuitivo nella trattazione matematica e fornisce sempre il risultato più corretto, per ogni rapporto di snellezza, dato che non vengono introdotte funzioni iperboliche utili per calcolare il profilo di temperatura.

Capitolo 6

Risultati analisi termomeccanica accoppiata su strutture multistrato

In questo capitolo vengono effettuati gli assessment per il caso termomeccanico, andando a confrontare i risultati che si ottengono utilizzando due differenti codici: uno che implementa il modello termomeccanico disaccoppiato (i cui fondamenti teorici sono stati visti in 5.1) e l'altro che utilizza il nuovo modello accoppiato (visto, invece, teoricamente nella sezione 5.2).

In questo caso non è stata effettuata alcuna modifica al codice 3DES, dato che esso era specifico solamente per analisi meccaniche; ciò che è di novità rispetto al precedente sta nel fatto che la formulazione matematica è accoppiata. La possibilità di effettuare la thermal stress analysis è stata aggiunta direttamente al programma migliorato relativo alle analisi meccaniche, cosicché tutte le modifiche descritte in precedenza nei capitoli di assessment dell'analisi dinamica e statica rimangono valide e operative anche per questo specifico caso. Come si è visto nel capitolo precedente le modifiche sono minime, dato che la formulazione meccanica rispetto a quella termomeccanica differisce di pochi elementi, come ad esempio le dimensioni di alcune matrici, che passano da 6×6 a 8×8 , l'introduzione di alcuni termini aggiuntivi (gli accoppiamenti termomeccanici), che tengono in considerazione degli accoppiamenti tra parte termica e meccanica, oppure l'introduzione di nuove condizioni di continuità interlaminari riferite alla temperatura e ai flussi di calore agenti.

Allo stesso modo, neanche l'analisi di convergenza viene effettuata, dato che nei capitoli 3 e 4 si è dimostrato che il modello è convergente; non avendo modificato nulla a livello matematico, se non solamente le dimensioni di alcune matrici, non c'è motivo per cui questo caso non sia convergente.

6.1 Confronto e validazione

Per questi assessment si è utilizzato otto diverse casistiche che comprendono diversi tipi di strutture e di configurazione del materiale, in modo da ottenere una panoramica il più generale e completa possibile dei casi di studio. I materiali utilizzati e le loro caratteristiche meccaniche e termiche sono visibili in Tabella 5.1 mentre le caratteristiche geometriche dei casi analizzati sono visibili in Tabella 5.2.

I modelli utilizzati in questo capitolo per il confronto sono:

- $3D(\theta_c, 3D)$: formulazione termomeccanica disaccoppiata con profilo di temperatura calcolato dalla versione 3D dell'equazione di conducibilità di Fourier, la cui formulazione matematica estesa si trova nel paragrafo 5.1.4
- $3D(\theta_c, 1D)$: formulazione termomeccanica disaccoppiata con profilo di temperatura calcolato dalla versione 1D dell'equazione di conducibilità di Fourier, la cui formulazione matematica estesa si trova nel paragrafo 5.1.5
- $3D(\theta_a)$: formulazione termomeccanica disaccoppiata con profilo di temperatura assunto lineare a priori, la cui formulazione matematica estesa si trova nel paragrafo 5.1.6
- $3D-u-\theta$: formulazione termomeccanica accoppiata in cui le variabili primarie del problema sono gli spostamenti nelle tre direzioni u , v , w e la sovratemperatura θ , la cui formulazione matematica estesa si trova nel paragrafo 5.2

Per quanto riguarda il Caso 1 è possibile vedere, da Tabella 6.3 e Tabella 6.4 che i risultati forniti dall'analisi termomeccanica accoppiata sono in accordo con i risultati forniti dal modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza, per il calcolo del profilo di temperatura, l'equazione di conducibilità del calore 3D, questo perchè entrambi i modelli tengono in considerazione sia lo spessore della struttura che l'effetto del materiale. È anche possibile mostrare che, per rapporti di snellezza alti (cioè per piastre sottili), anche il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza l'equazione di conducibilità del calore 1D, ha risultati piuttosto concordi con i precedenti due modelli, dato che, per quei valori di a/h l'effetto dello spessore si può considerare trascurabile. In più, per questo specifico caso, essendo la struttura composta da un solo materiale, sempre per valori di snellezza alti, anche il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza un profilo di temperatura assunto lineare a priori permette di ottenere dei risultati molto validi, dato che

Tabella 6.1: *Caratteristiche meccaniche dei materiali utilizzati per valutare la validità dei risultati forniti dall'analisi termomeccanica accoppiata presentata nella sezione 5.2*

	Al2024	Ti22	PVC	Acciaio	Composito
E_1 [GPa]	73	110	3	210	172.72
E_2 [GPa]	73	110	3	210	6.909
E_3 [GPa]	73	110	3	210	6.909
ν_{12}	0.3	0.32	0.4	0.3	0.25
ν_{13}	0.3	0.32	0.4	0.3	0.25
ν_{23}	0.3	0.32	0.4	0.3	0.25
G_1 [GPa]	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	3.45
G_2 [GPa]	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	3.45
G_3 [GPa]	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	$\frac{E_1}{2(1+\nu)}$	1.38
μ_1 [1/K]	$25 \cdot 10^{-6}$	$8.6 \cdot 10^{-6}$	$50 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$	$0.57 \cdot 10^{-6}$
μ_2 [1/K]	$25 \cdot 10^{-6}$	$8.6 \cdot 10^{-6}$	$50 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$	$35.6 \cdot 10^{-6}$
μ_3 [1/K]	$25 \cdot 10^{-6}$	$8.6 \cdot 10^{-6}$	$50 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$	$35.6 \cdot 10^{-6}$
k_1 [W/mK]	130	21.9	0.18	60	36.42
k_2 [W/mK]	130	21.9	0.18	60	0.96
k_3 [W/mK]	130	21.9	0.18	60	0.96

Tabella 6.2: *Casi studiati per la valutazione dei risultati riferiti alla thermal stress analysis con formulazione termomeccanica accoppiata. In tutti i casi considerati il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$. Sono stati utilizzati questi specifici casi in modo da considerare omogeneamente tutte le possibili configurazioni di materiale e geometria possibile.*

a [m]	b [m]	h_{layers} [m]	R_α [m]	R_β [m]	m	n	Θ_t [K]	Θ_b [K]
Caso 1: Piastra monostrato Composito 0°								
a	a	1	∞	∞	1	1	0.5	-0.5
Caso 2: Piastra Composito 0°/90°/0°								
a	a	1	∞	∞	1	1	0.5	-0.5
Caso 3: Cilindro monostrato Alluminio								
$2\pi R_\alpha$	30	h	10	∞	2	1	0.5	-0.5
Caso 4: Cilindro Alluminio/Titanio								
$2\pi R_\alpha$	30	0.5h/0.5h	10	∞	2	1	0.5	-0.5
Caso 5: Guscio cilindrico monostrato Titanio								
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	20	h	10	∞	1	0	1	0
Caso 6: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al								
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	20	0.1h/0.8h/0.1h	10	∞	1	0	1	0
Caso 7: Guscio sferico monostrato Acciaio								
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	$\frac{\pi}{3}R_\beta$	h	10	10	1	1	1	0
Caso 8: Guscio sferico Alluminio/Titanio/Acciaio								
$\frac{\pi}{3}R_\alpha$	$\frac{\pi}{3}R_\beta$	h/3 (x3)	10	10	1	1	1	0

Tabella 6.3: Risultati Caso 1: Piastra monostrato in Composito 0° semplicemente appoggiata soggetta ad una sovratemperatura $\Theta_t = 0.5$ K e $\Theta_t = -0.5$ K. Confronto tra gli spostamenti nel piano (u, v) e trasversale (w). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [16].

a/h	2	5	10	20	50	100
u [10^{-5} m] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	-0.0729	-0.1661	-0.3297	-0.6583	-1.6450	-3.2898
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-0.0729	-0.1661	-0.3297	-0.6583	-1.6450	-3.2898
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-0.0369	-0.1351	-0.3104	-0.6480	-1.6408	-3.2877
3D-u- θ	-0.0369	-0.1352	-0.3104	-0.6480	-1.6408	-3.2877
v [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	0.5261	0.5861	0.5918	0.7981	1.7020	3.3184
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.5261	0.5861	0.5918	0.7981	1.7020	3.3184
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.2718	0.4771	0.5572	0.7856	1.6977	3.3162
3D-u- θ	0.2718	0.4771	0.5572	0.7856	1.6977	3.3162
w [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0$)						
3D(θ_a) [16]	0.0936	0.7345	2.3955	8.7090	52.699	209.77
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.0936	0.7345	2.3955	8.7090	52.699	209.77
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.0958	0.6221	2.2634	8.5750	52.565	209.64
3D-u- θ	0.0958	0.6221	2.2634	8.5750	52.565	209.64

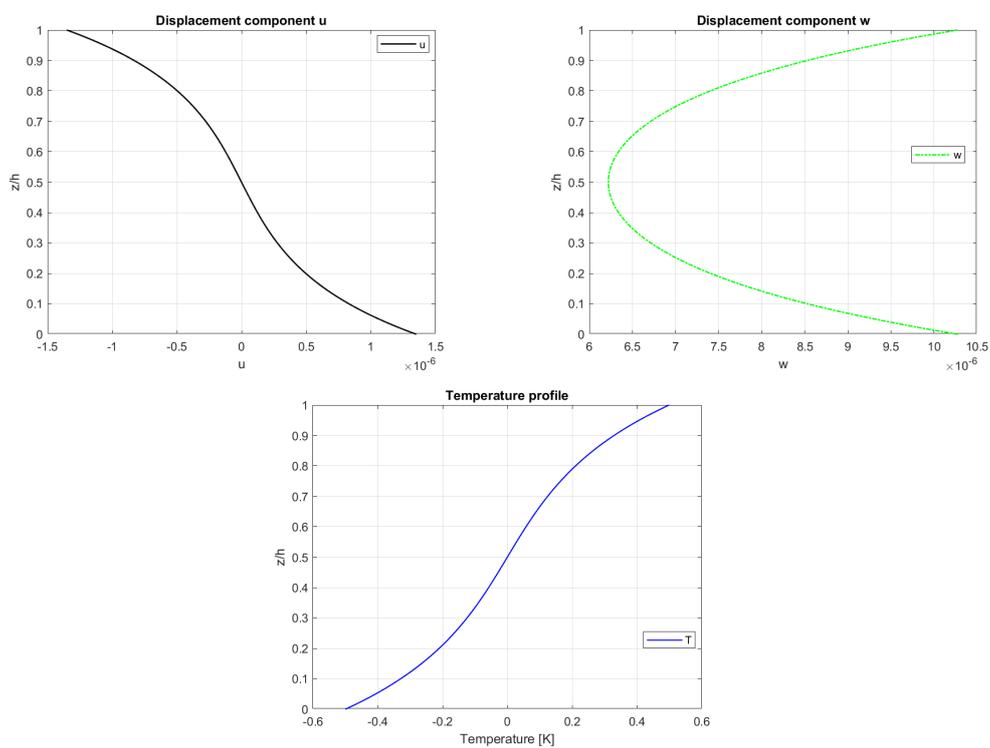


Figura 6.1: *Spostamenti lungo lo spessore del Caso 1: Piastra monostrato in Alluminio semplicemente appoggiata con rapporto di snellezza $a/h = 5$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata*

Tabella 6.4: Risultati Caso 1: Piastra monostrato in Composito 0° semplicemente appoggiata soggetta ad una sovratemperatura $\Theta_t = 0.5 K$ e $\Theta_t = -0.5 K$. Confronto tra le tensioni nel piano ($\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\beta\alpha}$) e trasversale ($\sigma_{\alpha z}$, $\sigma_{\beta z}$ e σ_{zz}). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$.

a/h	2	5	10	20	50	100
$\sigma_{\alpha\alpha}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	13.240	10.687	10.238	10.105	10.065	10.059
3D(θ_c , 1D) [16]	13.240	10.687	10.238	10.105	10.065	10.059
3D(θ_c ,3D) [16]	2.7489	7.2060	9.1706	9.8214	10.019	10.047
3D-u- θ	2.7481	7.2059	9.1705	9.8214	10.019	10.048
$\sigma_{\beta\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	6.4558	9.6469	10.911	11.331	11.458	11.477
3D(θ_c , 1D) [16]	6.4558	9.6469	10.911	11.331	11.458	11.477
3D(θ_c ,3D) [16]	9.3207	10.155	10.997	11.347	11.461	11.478
3D-u- θ	9.3210	10.155	10.997	11.347	11.461	11.478
$\sigma_{\alpha\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = 0, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	-1.4933	-0.8115	-0.5003	-0.3950	-0.3628	-0.3581
3D(θ_c , 1D) [16]	-1.4933	-0.8115	-0.5003	-0.3950	-0.3628	-0.3581
3D(θ_c ,3D) [16]	-0.6148	-0.6468	-0.4205	-0.3887	-0.3619	-0.3579
3D-u- θ	-0.6148	-0.6468	-0.4698	-0.3888	-0.3619	-0.3579
$\sigma_{\alpha z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	1.0518	0.9566	0.5860	0.3108	0.1265	0.0634
3D(θ_c ,1D) [16]	1.0518	0.9566	0.5860	0.3108	0.1265	0.0634
3D(θ_c ,3D) [16]	0.5278	0.7701	0.5501	0.3057	0.1261	0.0633
3D-u- θ	0.5278	0.7701	0.5501	0.3057	0.1261	0.0633
$\sigma_{\beta z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	-1.0666	-0.9325	-0.5815	-0.3101	-0.1264	-0.0634
3D(θ_c ,1D) [16]	-1.0666	-0.9325	-0.5815	-0.3101	-0.1264	-0.0634
3D(θ_c ,3D) [16]	-0.5417	-0.7727	-0.5500	-0.3056	-0.1261	-0.0633
3D-u- θ	-0.5416	-0.7727	-0.5500	-0.3056	-0.1261	-0.0633
σ_{zz} [Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	1955.6	136.85	11.229	0.7601	0.0199	0.0013
3D(θ_c ,1D) [16]	1955.6	136.85	11.229	0.7601	0.0199	0.0013
3D(θ_c ,3D) [16]	-503.79	-10.923	0.4205	0.0598	0.0018	0.0001
3D-u- θ	-503.73	-10.923	0.4205	0.0598	0.0018	0.0001

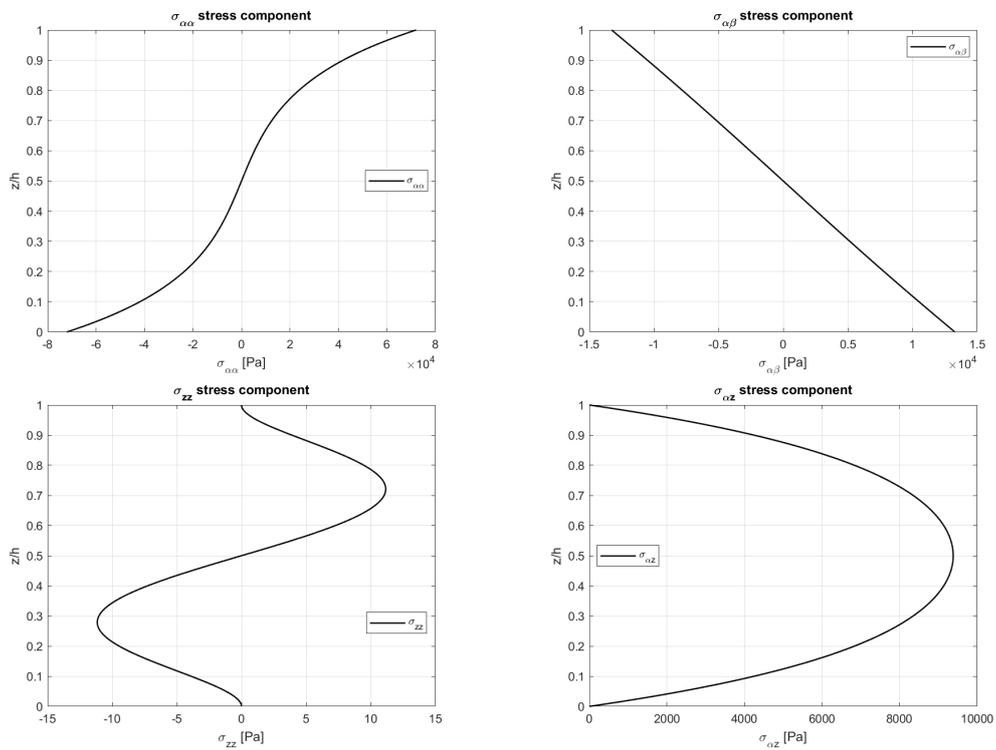


Figura 6.2: Tensioni lungo lo spessore del Caso 1: Piastra monostrato in Alluminio semplicemente appoggiata con rapporto di snellezza $a/h = 5$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata

anch'esso non considera l'effetto dello spessore. Per quanto riguarda, invece, valori di snellezza bassi, i modelli 3D(θ_a) e 3D(θ_c , 1D), forniscono risultati diversi perchè l'effetto dello spessore diventa importante. Al contrario, i modelli 3D(θ_c , 3D) e 3D(u- θ), per rapporti a/h bassi, continuano a fornire valori molto simili tra loro, perchè considerano l'effetto dello spessore correttamente. In Figura 6.1 è possibile vedere l'andamento, lungo lo spessore, delle componenti di spostamenti u , w e del profilo di temperatura θ calcolato grazie alla formulazione termomeccanica accoppiata; è possibile notare come questi andamenti siano continui lungo lo spessore. Infine, in Figura 6.2 si mostra l'andamento delle tensioni nel piano $\sigma_{\alpha\alpha}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$ e delle tensioni trasversali σ_{zz} e $\sigma_{\alpha z}$. In questo caso le tensioni nel piano sono continue perchè si sta considerando una struttura composta da un unico strato, mentre le tensioni trasversali sono ugualmente continue lungo lo spessore dato che sono state imposte correttamente le condizioni di continuità all'interfaccia di ogni strato matematico. In più, è possibile vedere come rispettino le condizioni di carico al contorno.

A riferimento del Caso 2 è possibile vedere, da Tabella 6.5 e Tabella 6.6 che i risultati forniti dall'analisi termomeccanica accoppiata sono in accordo con i risultati forniti dal modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza, per il calcolo del profilo di temperatura, l'equazione di conducibilità del calore 3D, se non per qualche particolare caso in cui l'errore si evidenzia sull'ultima cifra decimale, probabilmente a causa di errori dovuti all'arrotondamento numerico effettuato. È anche possibile mostrare che, per rapporti di snellezza alti (cioè per piastre sottili), anche il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza l'equazione di conducibilità del calore 1D, ha risultati piuttosto concordi con i precedenti due modelli, dato che, per quei valori di a/h l'effetto dello spessore si può considerare trascurabile. Inoltre, per questo particolare tipo di struttura, composta da un solo materiale ma con differente schema di laminazione, sempre considerando alti valori di snellezza, anche il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza un profilo di temperatura assunto lineare a priori permette di ottenere dei risultati molto validi, pur non tenendo in conto dell'effetto dello spessore. Ciò avviene perchè, pur avendo le fibre ruotate a 90° , il coefficiente κ_3 non cambia, mentre si scambiano i coefficienti κ_1 e κ_2 ; la particolarità sta nel fatto che questi ultimi due coefficienti di conduzione termica vanno a moltiplicare sempre lo stesso valore, dato che la piastra è quadrata (quindi $a = b$) e il numero di semionde non varia nelle due direzioni ($m=n=1$). Per quanto riguarda, invece, valori di snellezza bassi, i modelli 3D(θ_a) e 3D(θ_c , 1D), forniscono risultati diversi perchè l'effetto dello spessore diventa importante mentre i modelli 3D(θ_c , 3D) e 3D(u- θ), per rapporti a/h bassi, continuano a fornire valori poco discordanti tra loro, perchè considerano l'effetto dello spessore correttamente. Si

Tabella 6.5: Risultati Caso 2: Piastra monostrato in Composito $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiata soggetta ad una sovratemperatura $\Theta_t = 0.5$ K e $\Theta_b = -0.5$ K. Confronto tra gli spostamenti nel piano (u , v) e trasversale (w). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [16].

a/h	2	5	10	20	50	100
u [10^{-5} m] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	-0.0791	-0.1779	-0.3388	-0.6635	-1.6472	-3.2909
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-0.0791	-0.1779	-0.3388	-0.6635	-1.6472	-3.2909
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-0.0400	-0.1451	-0.3191	-0.6532	-1.6430	-3.2888
3D-u- θ	-0.0401	-0.1451	-0.3191	-0.6532	-1.6430	-3.2888
v [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	0.4834	0.5408	0.5747	0.7919	1.6999	3.3173
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.4834	0.5408	0.5747	0.7919	1.6999	3.3173
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.2610	0.4471	0.5426	0.7798	1.6956	3.3152
3D-u- θ	0.2610	0.4471	0.5426	0.7798	1.6956	3.3152
w [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0$)						
3D(θ_a) [16]	0.1159	0.8948	2.6731	9.0380	53.045	210.12
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.1159	0.8948	2.6731	9.0380	53.045	210.12
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.1132	0.7622	2.5294	8.9002	52.910	209.99
3D-u- θ	0.1132	0.7622	2.5294	8.9002	52.910	209.99

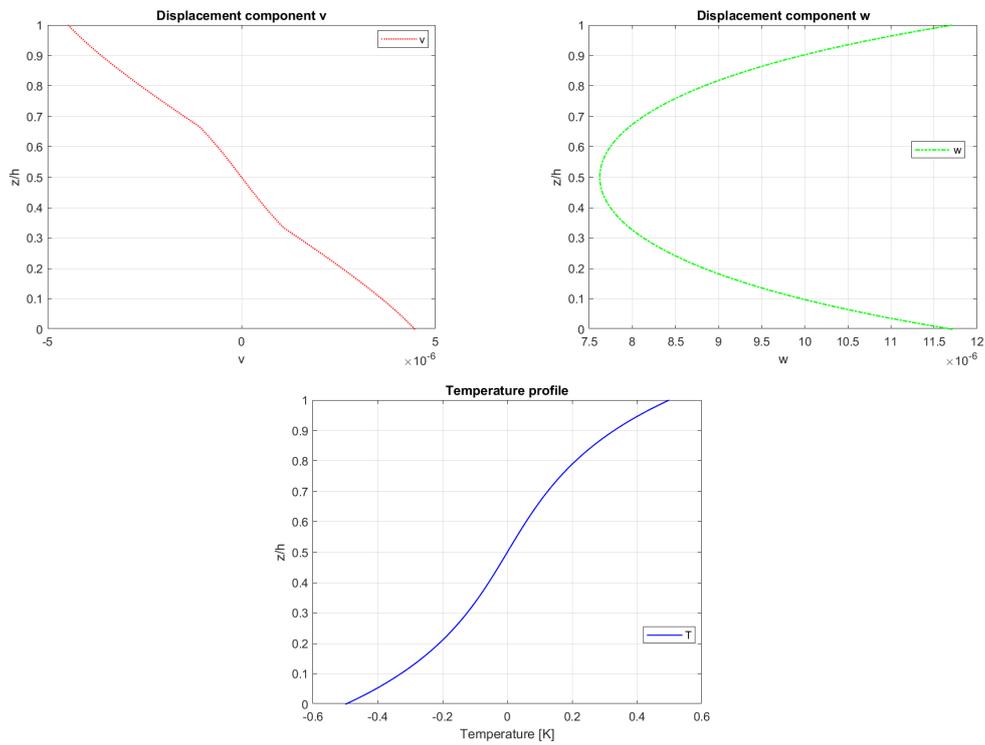


Figura 6.3: *Spostamenti lungo lo spessore del Caso 2: Piastra monostrato in Composito $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiata con rapporto di snellezza $a/h = 5$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata*

Tabella 6.6: Risultati Caso 2: Piastra monostrato in Composito $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiata soggetta ad una sovratemperatura $\Theta_t = 0.5 K$ e $\Theta_b = -0.5 K$. Confronto tra le tensioni nel piano ($\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$) e trasversale ($\sigma_{\alpha z}$, $\sigma_{\beta z}$ e σ_{zz}). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$.

a/h	2	5	10	20	50	100
$\sigma_{\alpha\alpha}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	14.818	11.928	10.728	10.246	10.088	10.065
3D($\theta_c, 1D$) [16]	14.818	11.928	10.728	10.246	10.088	10.065
3D($\theta_c, 3D$) [16]	3.5819	8.2513	9.6365	9.9607	10.042	10.053
3D-u- θ	3.5877	8.2511	9.6364	9.9606	10.042	10.053
$\sigma_{\beta\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	6.9043	9.8311	10.943	11.336	11.459	11.477
3D($\theta_c, 1D$) [16]	6.9043	9.8311	10.943	11.336	11.459	11.477
3D($\theta_c, 3D$) [16]	9.4299	10.275	11.024	11.352	11.461	11.478
3D-u- θ	9.4301	10.275	11.024	11.352	11.462	11.478
$\sigma_{\alpha\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = 0, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	-1.0256	-0.6194	-0.4439	-0.3805	-0.3605	-0.3575
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-1.0256	-0.6194	-0.4439	-0.3805	-0.3605	-0.3575
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-0.4520	-0.5005	-0.4177	-0.3745	-0.3596	-0.3573
3D-u- θ	-0.4520	-0.5005	-0.4177	-0.3745	-0.3596	-0.3573
$\sigma_{\alpha z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	1.1161	0.9225	0.5754	0.3091	0.1263	0.0634
3D($\theta_c, 1D$) [16]	1.1161	0.9225	0.5754	0.3091	0.1263	0.0634
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.5190	0.7375	0.5398	0.3040	0.1260	0.0633
3D-u- θ	0.5189	0.7375	0.5399	0.3040	0.12601	0.0633
$\sigma_{\beta z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	-1.3762	-0.9939	-0.5889	-0.3110	-0.1265	-0.0634
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-1.3762	-0.9939	-0.5889	-0.3110	-0.1265	-0.0634
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-0.6537	-0.8164	-0.5567	-0.3065	-0.1262	-0.0633
3D-u- θ	-0.6537	-0.8164	-0.5567	-0.3065	-0.1262	-0.0634
σ_{zz} [Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	1704.4	124.34	11.042	0.7725	0.0205	0.0013
3D($\theta_c, 1D$) [16]	1704.4	124.34	11.042	0.7725	0.0205	0.0013
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-512.45	-16.459	0.3721	0.0744	0.0024	0.0002
3D-u- θ	-512.40	-16.459	0.3721	0.0744	0.0024	0.0002

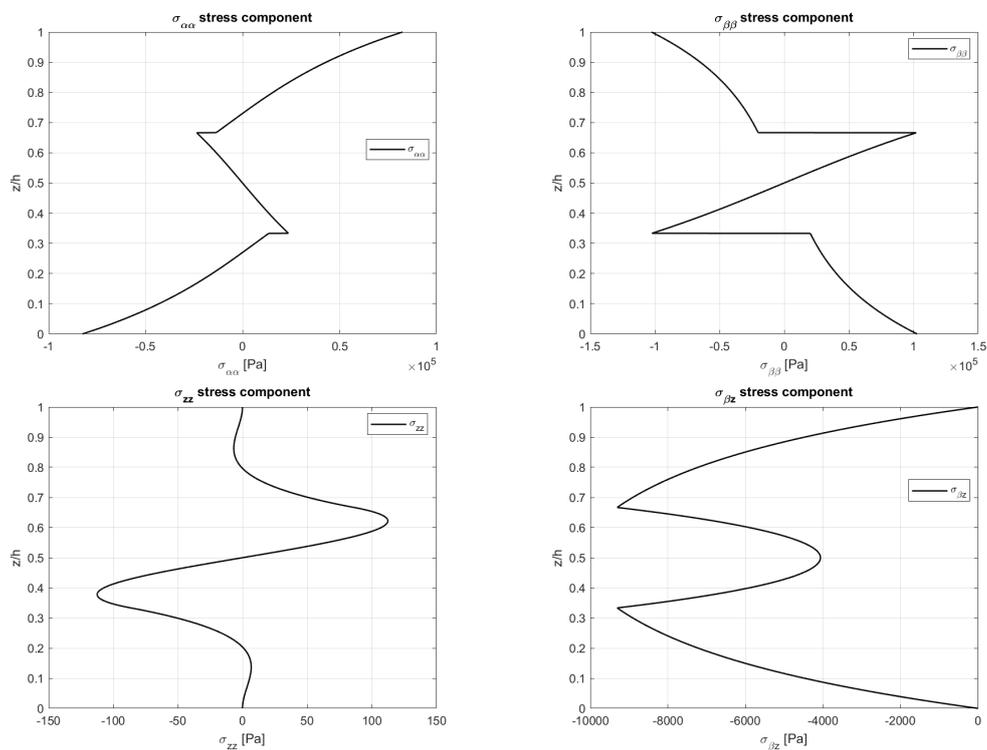


Figura 6.4: Tensioni lungo lo spessore del Caso 2: Piastra monostrato in Composito $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ semplicemente appoggiata con rapporto di snellezza $a/h = 5$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata

notano, in particolare in Tabella 6.6 alcune leggere differenze per rapporti di snellezza bassi, probabilmente perchè, per questi valori di a/h , la formulazione matematica termomeccanica disaccoppiata con Fourier 3D composta da seni e coseni iperbolici inizia a fallire, mentre il modello termomeccanico accoppiato continua a fornire i risultati esatti, dato che viene utilizzato un approccio completamente differente. In Figura 6.3 è possibile vedere l'andamento, lungo lo spessore, delle componenti di spostamenti v , w e del profilo di temperatura θ calcolato grazie alla formulazione termomeccanica accoppiata; è possibile notare come questi andamenti siano continui lungo lo spessore. Infine, in Figura 6.4 si mostra l'andamento delle tensioni nel piano $\sigma_{\alpha\alpha}$ e $\sigma_{\beta\beta}$ e delle tensioni trasversali σ_{zz} e $\sigma_{\beta z}$. In questo caso le tensioni nel piano non sono continue dato che si sta considerando una struttura composta da materiali con differente schema di laminazione, mentre le tensioni trasversali sono ugualmente continue lungo lo spessore perchè sono state imposte correttamente le condizioni di continuità all'interfaccia di ogni strato matematico. In più, è possibile vedere come rispettino correttamente le condizioni di carico al contorno.

Per quanto concerne il Caso 3 è possibile vedere, da Tabella 6.7 e Tabella 6.8 che i risultati forniti dall'analisi termomeccanica accoppiata sono in accordo con i risultati forniti dal modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza, per il calcolo del profilo di temperatura, l'equazione di conducibilità del calore 3D, se non per qualche particolare caso in cui l'errore si evidenzia sull'ultima cifra decimale, probabilmente a causa di errori dovuti all'arrotondamento numerico effettuato. È anche possibile mostrare che, per rapporti di snellezza alti (cioè per piastre sottili), anche il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza l'equazione di conducibilità del calore 1D, ha risultati piuttosto concordi con i precedenti due modelli, dato che, per quei valori di a/h l'effetto dello spessore si può considerare trascurabile. Inoltre, per questo particolare tipo di struttura, composta da un unico materiale, sempre considerando alti valori di snellezza, anche il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza un profilo di temperatura assunto lineare a priori permette di ottenere dei risultati molto validi, pur non tenendo in conto dell'effetto dello spessore. Per quanto riguarda, invece, valori di snellezza bassi, i modelli 3D(θ_a) e 3D(θ_c , 1D), forniscono risultati leggermente diversi perchè l'effetto dello spessore diventa importante. I modelli 3D(θ_c , 3D) e 3D(u- θ), per rapporti a/h bassi, continuano a fornire valori perfettamente in linea tra loro, perchè considerano l'effetto dello spessore correttamente. Si notano, in particolare in Tabella 6.8 alcune leggere differenze per rapporti di snellezza bassi, probabilmente perchè, per questi valori di a/h , la formulazione matematica termomeccanica disaccoppiata con Fourier 3D composta da seni e coseni iperbolici inizia a fallire, mentre il modello termomeccanico

Tabella 6.7: Risultati Caso 3: Cilindro monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato soggetto ad una sovratemperatura $\Theta_t = 0.5 K$ e $\Theta_t = -0.5 K$. Confronto tra gli spostamenti nel piano (u, v) e trasversale (w). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [16].

R_α/h	2	5	10	20	50	100
$u [10^{-5} \text{ m}] (\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/2)$						
3D(θ_a) [16]	3.0170	1.8209	0.9969	0.5167	0.2105	0.1059
3D($\theta_c, 1D$) [16]	3.0170	1.8209	0.9969	0.5167	0.2105	0.1059
3D($\theta_c, 3D$) [16]	3.0032	1.8196	0.9967	0.5167	0.2105	0.1059
3D-u- θ	3.0032	1.8196	0.9967	0.5167	0.2105	0.1059
$v [10^{-5} \text{ m}] (\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/2)$						
3D(θ_a) [16]	0.9712	-0.1470	-0.1879	-0.1232	-0.0563	-0.0293
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.9712	-0.1470	-0.1879	-0.1232	-0.0563	-0.0293
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.9488	-0.1481	-0.1880	-0.1232	-0.0563	-0.0293
3D-u- θ	0.9488	-0.1481	-0.1880	-0.1232	-0.0563	-0.0293
$w [10^{-5} \text{ m}] (\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$						
3D(θ_a) [16]	4.7030	2.3414	1.2126	0.6117	0.2453	0.1227
3D($\theta_c, 1D$) [16]	4.7030	2.3414	1.2126	0.6117	0.2453	0.1227
3D($\theta_c, 3D$) [16]	4.7108	2.3416	1.2126	0.6117	0.2453	0.1227
3D-u- θ	4.7108	2.3416	1.2126	0.6118	0.2453	0.1227

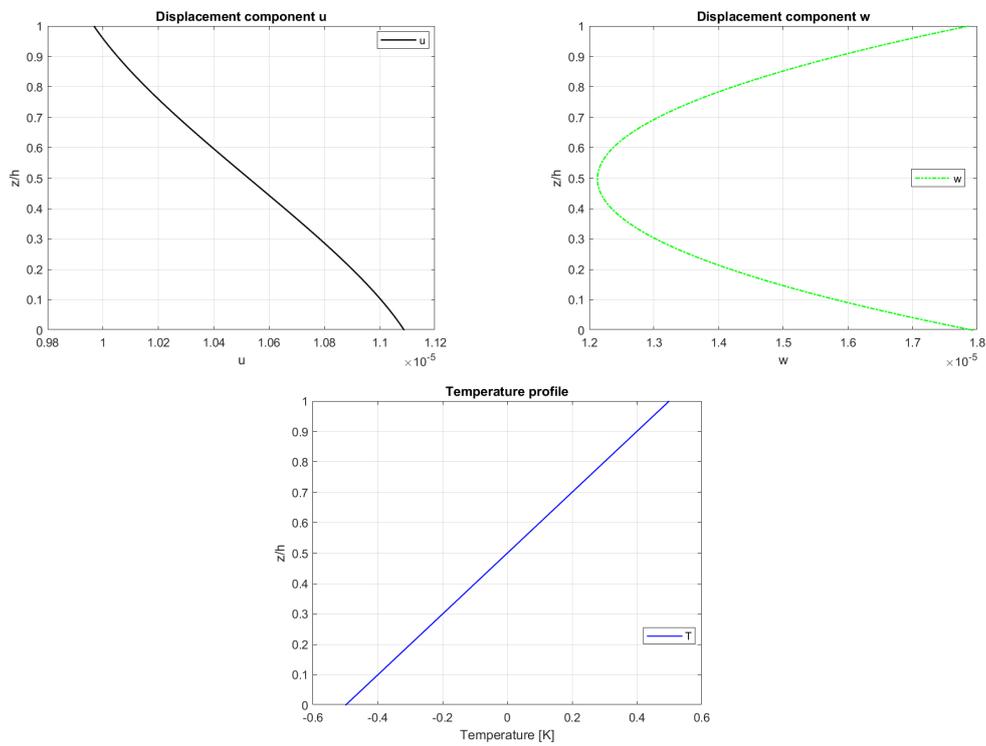


Figura 6.5: *Spostamenti lungo lo spessore del Caso 3: Cilindro monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 10$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata*

Tabella 6.8: Risultati Caso 3: Cilindro monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato soggetto ad una sovratemperatura $\Theta_t = 0.5 K$ e $\Theta_t = -0.5 K$. Confronto tra le tensioni nel piano ($\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$) e trasversale ($\sigma_{\alpha z}$, $\sigma_{\beta z}$ e σ_{zz}). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$.

R_α/h	2	5	10	20	50	100
$\sigma_{\alpha\alpha}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	-93.780	-115.72	-123.27	-126.90	-128.99	-129.68
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-93.780	-115.72	-123.27	-126.90	-128.99	-129.68
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-93.790	-115.72	-123.27	-126.90	-128.99	-129.68
3D-u- θ	-93.790	-115.72	-123.27	-126.90	-129.00	-129.68
$\sigma_{\beta\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	128.80	134.91	133.67	132.27	131.19	130.78
3D($\theta_c, 1D$) [16]	128.80	134.91	133.67	132.27	131.19	130.78
3D($\theta_c, 3D$) [16]	128.97	134.91	133.67	132.27	131.19	130.78
3D-u- θ	128.97	134.91	133.67	132.27	131.19	130.78
$\sigma_{\alpha\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = 0, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	4.3550	3.4394	2.0110	1.0738	0.4451	0.2250
3D($\theta_c, 1D$) [16]	4.3550	3.4394	2.0110	1.0738	0.4451	0.2250
3D($\theta_c, 3D$) [16]	4.2954	3.4341	2.0102	1.0737	0.4451	0.2250
3D-u- θ	4.2954	3.4341	2.0102	1.0737	0.4451	0.2251
$\sigma_{\alpha z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	-8.4089	-4.3683	-2.3272	-1.1947	-0.4846	-0.2434
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-8.4089	-4.3683	-2.3272	-1.1947	-0.4846	-0.2434
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-8.3275	-4.3624	-2.3264	-1.1946	-0.4846	-0.2434
3D-u- θ	-8.3275	-4.3624	-2.3264	-1.1946	-0.4846	-0.2434
$\sigma_{\beta z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	-9.8045	-4.9447	-2.5480	-1.2810	-0.5125	-0.2561
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-9.8045	-4.9447	-2.5480	-1.2810	-0.5125	-0.2561
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-9.7151	-4.9382	-2.5472	-1.2809	-0.5125	-0.2561
3D-u- θ	-9.7151	-4.9382	-2.5472	-1.2809	-0.5125	-0.2561
σ_{zz} [Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	14.109	5.3127	2.5599	1.2521	0.4937	0.2456
3D($\theta_c, 1D$) [16]	14.109	5.3127	2.5599	1.2521	0.4937	0.2456
3D($\theta_c, 3D$) [16]	13.978	5.3055	2.5591	1.2520	0.4937	0.2456
3D-u- θ	13.978	5.3055	2.5591	1.2520	0.4937	0.2457

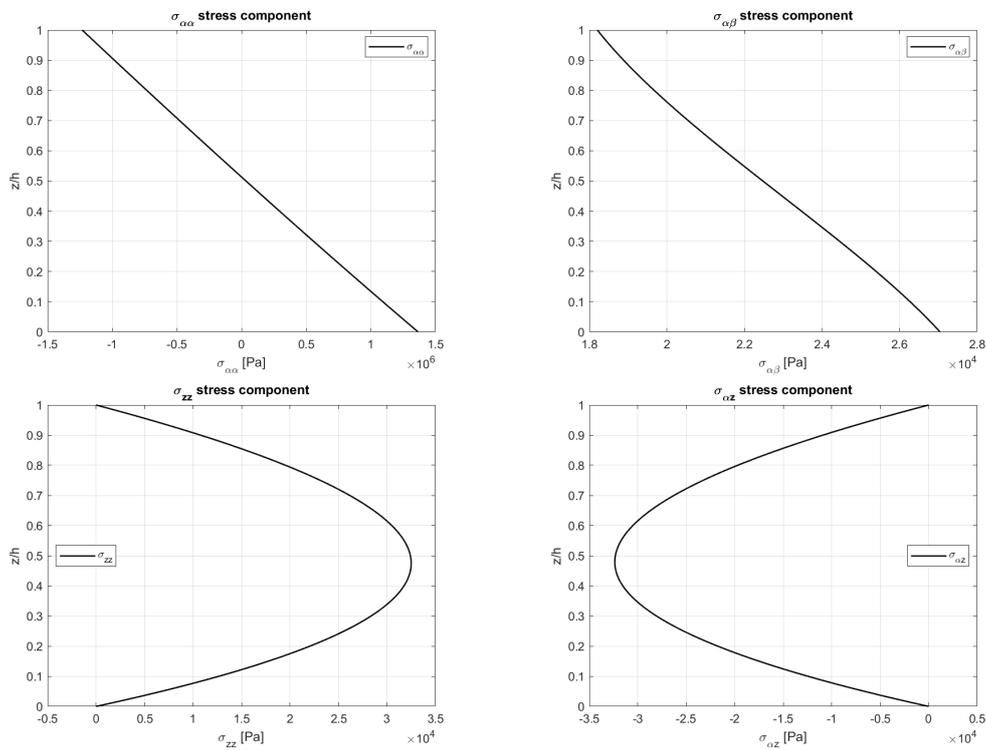


Figura 6.6: Tensioni lungo lo spessore del Caso 3: Cilindro monostrato in Alluminio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 10$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata

Tabella 6.9: Risultati Caso 4: Cilindro Alluminio/Titanio semplicemente appoggiato soggetto ad una sovratemperatura $\Theta_t = 0.5 K$ e $\Theta_t = -0.5 K$. Confronto tra gli spostamenti nel piano (u, v) e trasversale (w). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [16].

R_α/h	2	5	10	20	50	100
u [10^{-5} m] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	1.2933	0.2640	-0.3392	-0.6804	-0.8952	-0.9683
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.3491	-1.5604	-2.4805	-2.9740	-3.2766	-3.3783
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.4135	-1.5375	-2.4736	-2.9721	-3.2763	-3.3782
3D-u- θ	0.4135	-1.5375	-2.4736	-2.9721	-3.2763	-3.3782
v [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	1.4618	0.8157	0.8649	0.9555	1.0315	1.0604
3D($\theta_c, 1D$) [16]	2.9972	2.7826	3.1004	3.3448	3.5181	3.5802
3D($\theta_c, 3D$) [16]	2.8572	2.7563	3.0931	3.3429	3.5178	3.5801
3D-u- θ	2.8572	2.7563	3.0931	3.3429	3.5178	3.5801
w [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0$)						
3D(θ_a) [16]	0.9037	-0.6784	-1.4092	-1.7945	-2.0284	-2.1065
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-3.1677	-5.4294	-6.3630	-6.8341	-7.1132	-7.2051
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-2.8414	-5.3676	-6.3469	-6.8300	-7.1125	-7.2050
3D-u- θ	-2.8414	-5.3676	-6.3469	-6.8300	-7.1125	-7.2050

accoppiato continua a fornire i risultati esatti, dato che viene utilizzato un approccio completamente differente. In Figura 6.5 è possibile vedere l'andamento, lungo lo spessore, delle componenti di spostamenti u, w e del profilo di temperatura θ calcolato grazie alla formulazione termomeccanica accoppiata; è possibile notare come questi andamenti siano continui lungo lo spessore. Infine, in Figura 6.6 si mostra l'andamento delle tensioni nel piano $\sigma_{\alpha\alpha}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$ e delle tensioni trasversali σ_{zz} e $\sigma_{\alpha z}$. In questo caso le tensioni nel piano sono continue, dato che si sta considerando una struttura composta da un unico materiale, mentre le tensioni trasversali sono ugualmente continue lungo lo spessore perchè sono state imposte correttamente le condizioni di continuità all'interfaccia di ogni strato matematico. In più, è possibile vedere come rispettino correttamente le condizioni di carico al contorno.

A riferimento del Caso 4 è possibile vedere, da Tabella 6.9 e Tabella 6.10 che i risultati forniti dall'analisi termomeccanica accoppiata sono perfettamente in accordo con i risultati forniti dal modello termomeccanico disac-

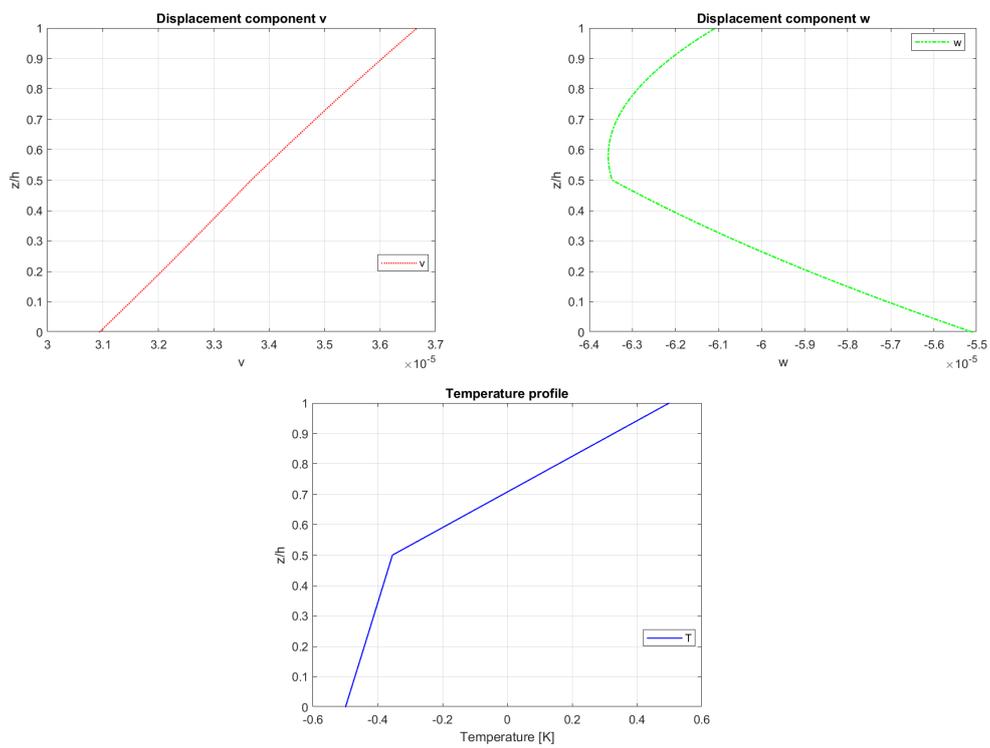


Figura 6.7: *Spostamenti lungo lo spessore del Caso 4: Cilindro Alluminio/Titanio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 10$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata*

Tabella 6.10: Risultati Caso 4: Cilindro Alluminio/Titanio semplicemente appoggiato soggetto ad una sovratemperatura $\Theta_t = 0.5 K$ e $\Theta_t = -0.5 K$. Confronto tra le tensioni nel piano ($\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\beta\alpha}$) e trasversale ($\sigma_{\alpha z}$, $\sigma_{\beta z}$ e σ_{zz}). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$.

R_α/h	2	5	10	20	50	100
$\sigma_{\alpha\alpha}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	-60.434	-77.267	-82.907	-85.559	-87.072	-87.561
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-103.96	-121.98	-127.17	-129.39	-130.57	-130.94
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-100.49	-121.39	-127.02	-129.35	-130.57	-130.94
3D-u- θ	-100.49	-121.39	-127.02	-129.35	-130.57	-130.94
$\sigma_{\beta\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	121.30	123.62	121.82	120.33	119.24	118.85
3D($\theta_c, 1D$) [16]	105.78	102.14	97.324	94.173	92.057	91.316
3D($\theta_c, 3D$) [16]	107.14	102.42	97.404	94.195	92.061	91.317
3D-u- θ	107.14	102.42	97.404	94.195	92.061	91.317
$\sigma_{\alpha\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = 0, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	5.7913	3.8577	2.1752	1.1434	0.4698	0.2369
3D($\theta_c, 1D$) [16]	9.9534	5.7771	3.1362	1.6193	0.6583	0.3308
3D($\theta_c, 3D$) [16]	9.5595	5.7469	3.1324	1.6188	0.6583	0.3308
3D-u- θ	9.5595	5.7469	3.1324	1.6188	0.6583	0.3308
$\sigma_{\alpha z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	-6.2364	-3.2046	-1.6959	-0.8672	-0.3509	-0.1760
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-10.571	-4.8990	-2.5119	-1.2649	-0.5072	-0.2537
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-10.179	-4.8738	-2.5088	-1.2645	-0.5072	-0.2537
3D-u- θ	-10.179	-4.8739	-2.5088	-1.2645	-0.5072	-0.2537
$\sigma_{\beta z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	-9.4212	-4.4541	-2.2626	-1.1307	-0.4509	-0.2251
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-10.034	-4.5094	-2.2221	-1.0907	-0.4298	-0.2137
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-9.8714	-4.5011	-2.2213	-1.0906	-0.4298	-0.2137
3D-u- θ	-9.8714	-4.5011	-2.2213	-1.0906	-0.42984	-0.2137
σ_{zz} [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	12.392	4.6425	2.2412	1.0977	0.4333	0.2156
3D($\theta_c, 1D$) [16]	13.659	4.7199	2.2012	1.0583	0.4129	0.2047
3D($\theta_c, 3D$) [16]	13.403	4.7109	2.2004	1.0582	0.4129	0.2047
3D-u- θ	13.403	4.7109	2.2004	1.0582	0.4129	0.2047

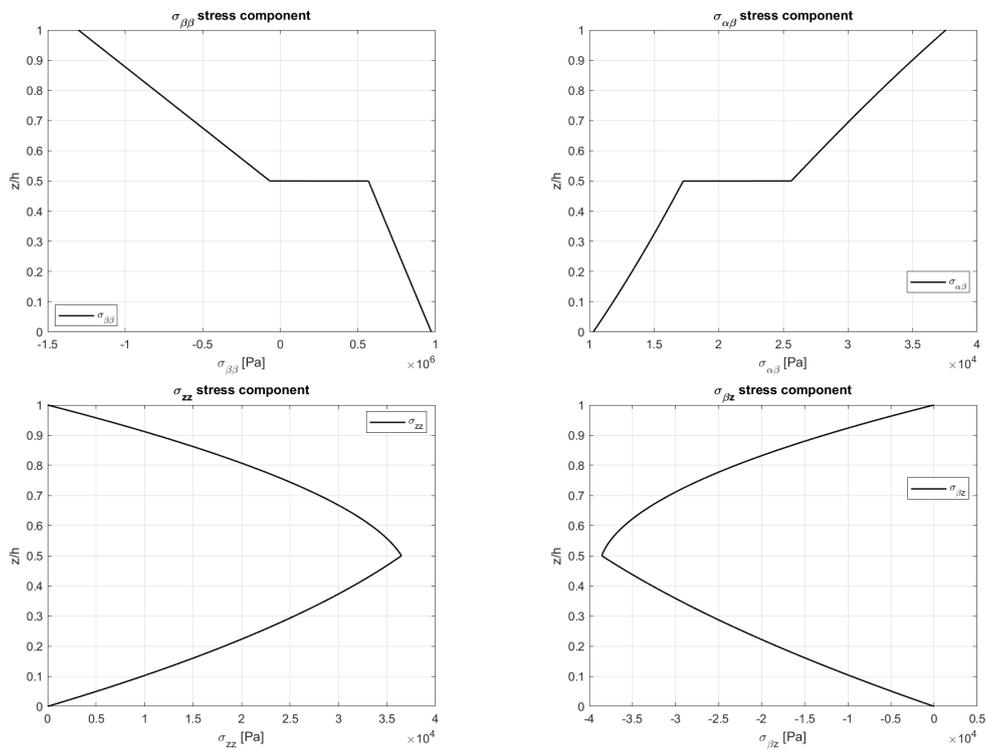


Figura 6.8: Tensioni lungo lo spessore del Caso 4: Cilindro Alluminio/Titanio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 10$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata

coppiato che utilizza, per il calcolo del profilo di temperatura, l'equazione di conducibilità del calore 3D. È anche possibile mostrare che, per rapporti di snellezza alti (cioè per piastre sottili), anche il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza l'equazione di conducibilità del calore 1D, ha risultati piuttosto concordi con i precedenti due modelli, dato che, per quei valori di a/h l'effetto dello spessore si può considerare trascurabile. Inoltre, per questo particolare tipo di struttura, composta da due diversi materiali, sempre considerando alti valori di snellezza, è possibile visualizzare come il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza un profilo di temperatura assunto lineare a priori non consente di ottenere valori affidabili, dato che l'assunzione di profilo lineare fallisce perchè, presentando due materiali diversi, si ha un cambio di pendenza dovuto ai diversi coefficienti termici in gioco per i due strati fisici. Per quanto riguarda, invece, valori di snellezza bassi, i modelli $3D(\theta_a)$ e $3D(\theta_c, 1D)$, forniscono risultati molto diversi perchè non viene considerato l'effetto dello spessore. I modelli $3D(\theta_c, 3D)$ e $3D(u-\theta)$, per rapporti a/h bassi, continuano a fornire valori perfettamente in linea tra loro, perchè considerano l'effetto dello spessore correttamente. In Figura 6.5 è possibile vedere l'andamento, lungo lo spessore, delle componenti di spostamenti v , w e del profilo di temperatura θ calcolato grazie alla formulazione termomeccanica accoppiata; è possibile notare come questi andamenti siano continui lungo lo spessore a seguito della corretta imposizione delle condizioni di continuità interlaminare. Infine, in Figura 6.6 si mostra l'andamento delle tensioni nel piano $\sigma_{\beta\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$ e delle tensioni trasversali σ_{zz} e $\sigma_{\beta z}$. In questo caso le tensioni nel piano non sono continue, dato che si sta considerando una struttura composta da due differenti materiali, mentre le tensioni trasversali sono continue lungo lo spessore perchè sono state imposte correttamente le condizioni di continuità all'interfaccia di ogni strato matematico. In più, è possibile vedere come rispettino correttamente le condizioni di carico al contorno imposte sulla struttura.

Per ciò che riguarda il Caso 5 è possibile vedere, da Tabella 6.11 e Tabella 6.12 che i risultati forniti dall'analisi termomeccanica accoppiata sono perfettamente in accordo con i risultati forniti dal modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza, per il calcolo del profilo di temperatura, l'equazione di conducibilità del calore 3D. È anche possibile mostrare che, per rapporti di snellezza alti (cioè per piastre sottili), anche il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza l'equazione di conducibilità del calore 1D, ha risultati piuttosto concordi con i precedenti due modelli, dato che, per quei valori di a/h l'effetto dello spessore si può considerare trascurabile. Inoltre, per questo particolare tipo di struttura, composta da un unico materiale, sempre considerando alti valori di snellezza, è possibile visualizzare come il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza un profilo di temperatura assunto

Tabella 6.11: Risultati Caso 5: Guscio cilindrico monostrato in Titanio semplicemente appoggiato soggetto ad una sovratemperatura $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_b = 0$ K. Confronto tra gli spostamenti nel piano (u , v) e trasversale (w). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [16].

R_α/h	2	5	10	20	50	100
u [10^{-5} m] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	-3.5730	-1.7728	0.6652	5.4209	19.623	43.275
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-3.5730	-1.7728	0.6652	5.4209	19.623	43.275
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-3.2200	-1.7140	0.6772	5.4223	19.622	43.274
3D-u- θ	-3.2200	-1.7140	0.6772	5.4223	19.622	43.276
v [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D-u- θ	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
w [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0$)						
3D(θ_a) [16]	2.0687	6.3251	13.444	27.651	70.233	141.18
3D($\theta_c, 1D$) [16]	2.0687	6.3251	13.444	27.651	70.233	141.18
3D($\theta_c, 3D$) [16]	2.1059	6.3144	13.431	27.642	70.229	141.18
3D-u- θ	2.1059	6.3144	13.431	27.642	70.228	141.18

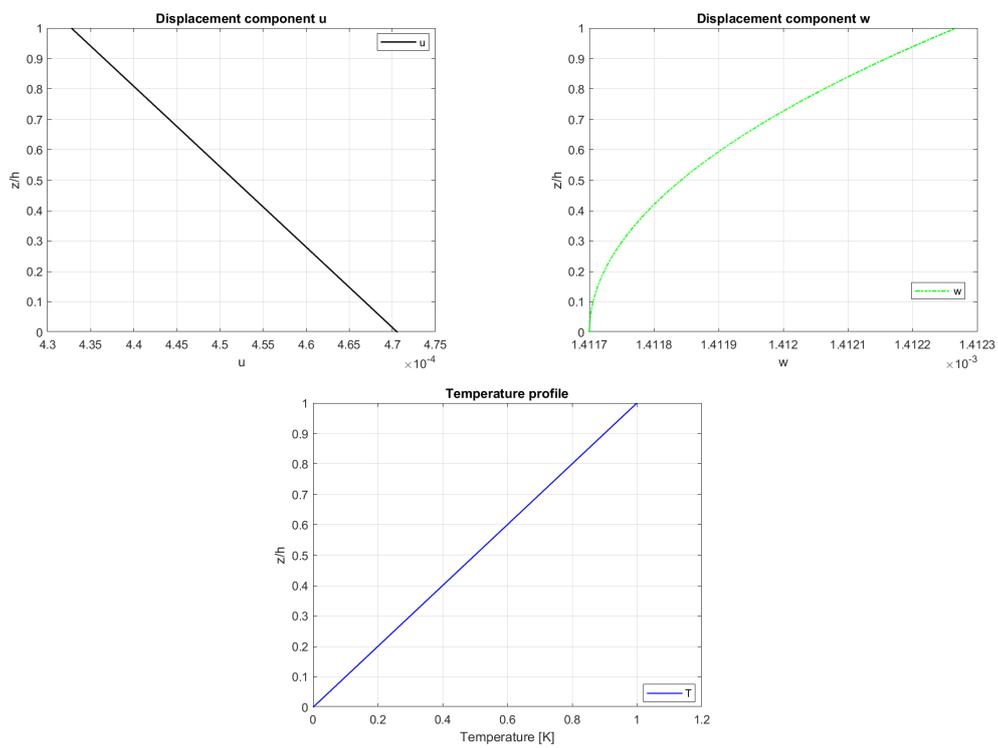


Figura 6.9: *Spostamenti lungo lo spessore del Caso 5: Guscio cilindrico monostrato in Titanio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 100$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata*

Tabella 6.12: Risultati Caso 5: Guscio cilindrico monostrato in Titanio semplicemente appoggiato soggetto ad una sovratemperatura $\Theta_t = 0.5$ K e $\Theta_t = -0.5$ K. Confronto tra le tensioni nel piano ($\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$) e trasversale ($\sigma_{\alpha z}$, $\sigma_{\beta z}$ e σ_{zz}). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$.

R_α/h	2	5	10	20	50	100
$\sigma_{\alpha\alpha}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	7.0586	0.0892	-0.5280	-0.4182	-0.2053	-0.1117
3D($\theta_c, 1D$) [16]	7.0586	0.0892	-0.5280	-0.4182	-0.2053	-0.1117
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-5.0098	-2.1901	-1.1261	-0.5712	-0.2301	-0.1179
3D-u- θ	-5.0100	-2.1902	-1.1261	-0.5712	-0.2305	-0.1156
$\sigma_{\beta\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	1.5486	-0.2240	-0.2448	-0.1544	-0.0694	-0.0351
3D($\theta_c, 1D$) [16]	1.5486	-0.2240	-0.2448	-0.1544	-0.0694	-0.0351
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-1.7924	-0.7635	-0.3792	-0.1879	-0.0747	-0.0364
3D-u- θ	-1.7924	-0.7635	-0.3792	-0.1879	-0.0746	-0.0372
$\sigma_{\alpha\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = 0, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D-u- θ	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\sigma_{\alpha z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	0.8436	-0.0115	-0.0174	-62.410	-11.770	-3.2400
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.8436	-0.0115	-0.0174	-62.410	-11.770	-3.2400
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-0.6693	-0.1246	-0.0321	-80.980	-12.970	-3.3900
3D-u- θ	-0.6693	-0.1246	-0.0321	-80.984	-13.017	-3.2588
$\sigma_{\beta z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D-u- θ	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
σ_{zz} [Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	346.96	-27.698	-51.184	-19.624	-3.8665	-0.9796
3D($\theta_c, 1D$) [16]	346.96	-27.698	-51.184	-19.624	-3.8665	-0.9796
3D($\theta_c, 3D$) [16]	14.887	-285.50	-91.627	-25.148	-4.2371	-1.0266
3D-u- θ	14.887	-285.50	-91.627	-25.147	-4.2213	-1.0709

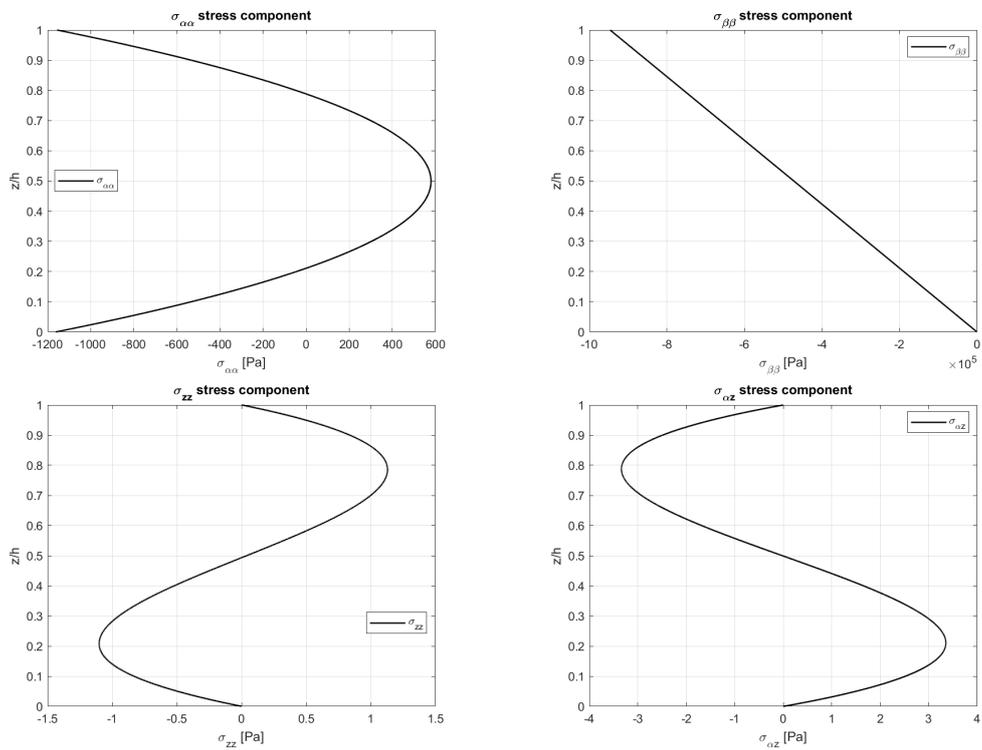


Figura 6.10: Tensioni lungo lo spessore del Caso 5: Guscio cilindrico monostrato in Titanio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 100$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata

lineare a priori consente di ottenere valori affidabili, anche se non si considera l'effetto dello spessore. Per quanto riguarda, invece, valori di snellezza bassi, i modelli 3D(θ_a) e 3D($\theta_c, 1D$), forniscono risultati non corretti perchè non viene considerato l'effetto dello spessore. I modelli 3D($\theta_c, 3D$) e 3D($u-\theta$), per rapporti a/h bassi, continuano a fornire valori perfettamente in linea tra loro, perchè considerano l'effetto dello spessore correttamente. In Figura 6.10 è possibile vedere l'andamento, lungo lo spessore, delle componenti di spostamenti u , w e del profilo di temperatura θ calcolato grazie alla formulazione termomeccanica accoppiata; è possibile notare come questi andamenti siano continui lungo lo spessore. Infine, in Figura 6.11 si mostra l'andamento delle tensioni nel piano $\sigma_{\alpha\alpha}$ e $\sigma_{\beta\beta}$ e delle tensioni trasversali σ_{zz} e $\sigma_{\alpha z}$. In questo caso le tensioni nel piano sono continue, dato che si sta considerando una struttura composta da un unico materiale, mentre le tensioni trasversali sono continue lungo lo spessore perchè sono state imposte correttamente le condizioni di continuità all'interfaccia di ogni strato matematico. In più, è possibile vedere come queste ultime rispettino correttamente le condizioni di carico al contorno imposte sulla struttura.

Per quanto riguarda il Caso 6 è possibile vedere, da Tabella 6.13 e Tabella 6.14 che i risultati forniti dall'analisi termomeccanica accoppiata sono in accordo con i risultati forniti dal modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza, per il calcolo del profilo di temperatura, l'equazione di conducibilità del calore 3D. È anche possibile mostrare che, per rapporti di snellezza alti (cioè per piastre sottili), anche il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza l'equazione di conducibilità del calore 1D, ha risultati piuttosto concordi con i precedenti due modelli, dato che, per quei valori di a/h l'effetto dello spessore si può considerare trascurabile. Inoltre, per le strutture sandwich, essendo composte da differenti materiali tra facce e cuore, sempre considerando alti valori di snellezza, è possibile visualizzare come il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza un profilo di temperatura assunto lineare a priori non consente di ottenere valori affidabili, per le stesse considerazioni effettuate per il Caso 4. Per quanto riguarda, invece, valori di snellezza bassi, i modelli 3D(θ_a) e 3D($\theta_c, 1D$), forniscono risultati non corretti perchè non viene considerato l'effetto dello spessore. I modelli 3D($\theta_c, 3D$) e 3D($u-\theta$), per rapporti a/h bassi, continuano a fornire valori perfettamente in linea tra loro, perchè considerano l'effetto dello spessore correttamente. In Figura 6.11 è possibile vedere l'andamento, lungo lo spessore, delle componenti di spostamenti u , w e del profilo di temperatura θ calcolato grazie alla formulazione termomeccanica accoppiata; è possibile notare come questi andamenti siano continui lungo lo spessore, anche se il comportamento termico dei materiali è molto diverso tra le facce e il cuore. Infine, in Figura 6.12 si mostra l'andamento delle tensioni nel piano $\sigma_{\alpha\alpha}$ e $\sigma_{\beta\beta}$ e delle tensioni tra-

Tabella 6.13: Risultati Caso 6: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato soggetto ad una sovratemperatura $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_b = 0$ K. Confronto tra gli spostamenti nel piano (u , v) e trasversale (w). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [16].

R_α/h	2	5	10	20	50	100
u [10^{-5} m] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	-10.134	-6.2106	0.7010	14.818	57.457	128.61
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-10.547	-6.0658	1.7093	17.534	65.279	144.94
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-10.428	-6.0160	1.7227	17.536	65.279	144.94
3D-u- θ	-10.428	-6.0161	1.7227	17.536	65.278	144.95
v [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D-u- θ	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
w [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0$)						
3D(θ_a) [16]	2.8059	15.568	37.159	80.036	208.30	421.89
3D($\theta_c, 1D$) [16]	3.0068	17.794	42.099	90.160	233.78	472.91
3D($\theta_c, 3D$) [16]	3.4353	17.879	42.112	90.159	233.78	472.90
3D-u- θ	3.4353	17.879	42.112	90.159	233.78	472.93

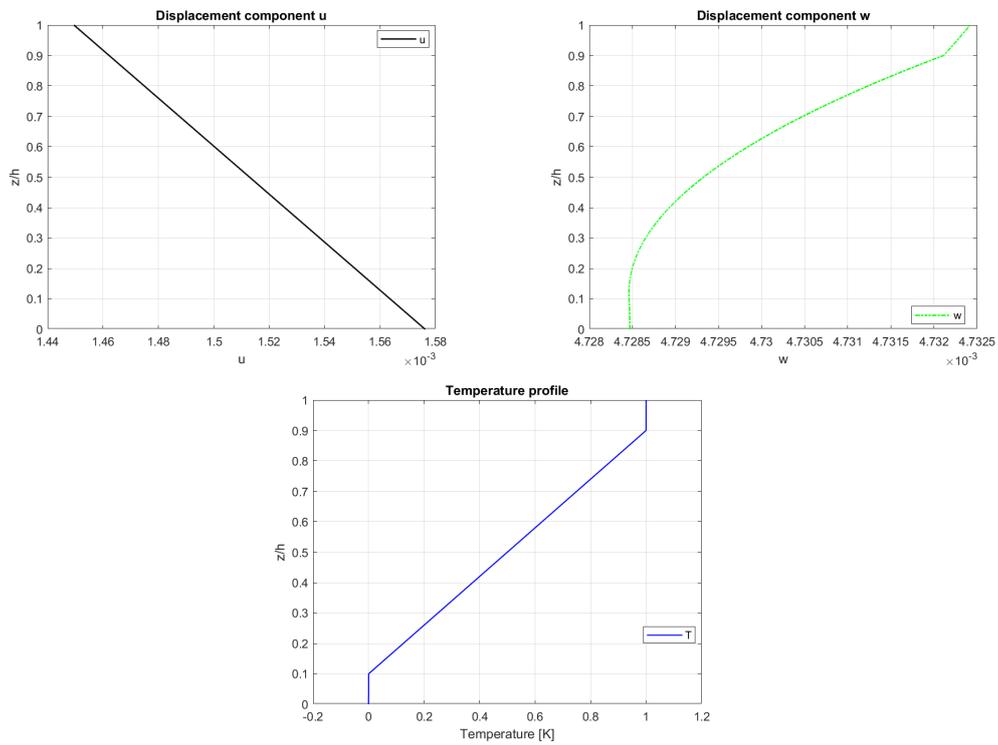


Figura 6.11: *Spostamenti lungo lo spessore del Caso 6: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 100$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata*

Tabella 6.14: Risultati Caso 6: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato soggetto ad una sovratemperatura $\Theta_t = 0.5$ K e $\Theta_t = -0.5$ K. Confronto tra le tensioni nel piano ($\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$) e trasversale ($\sigma_{\alpha z}$, $\sigma_{\beta z}$ e σ_{zz}). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$.

R_α/h	2	5	10	20	50	100
$\sigma_{\alpha\alpha}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	40.943	30.197	28.954	28.961	29.193	29.302
3D($\theta_c, 1D$) [16]	57.526	46.613	45.332	45.332	45.565	45.674
3D($\theta_c, 3D$) [16]	50.807	45.457	45.031	45.255	45.553	45.671
3D-u- θ	50.806	45.457	45.031	45.255	45.552	45.680
$\sigma_{\beta\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	11.276	5.8276	5.0898	4.8953	4.8300	4.8193
3D($\theta_c, 1D$) [16]	6.0584	0.8660	0.1630	-0.0221	-0.0839	-0.0936
3D($\theta_c, 3D$) [16]	3.7887	0.6018	0.1018	-0.0369	-0.0863	-0.0941
3D-u- θ	3.7886	0.6018	0.1018	-0.0369	-0.0860	-0.0969
$\sigma_{\alpha\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = 0, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D-u- θ	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\sigma_{\alpha z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	2.4049	0.8769	0.4277	0.2118	0.0843	0.0421
3D($\theta_c, 1D$) [16]	2.3775	0.8540	0.4130	0.2036	0.0808	0.0403
3D($\theta_c, 3D$) [16]	1.8442	0.8126	0.4077	0.2029	0.0808	0.0403
3D-u- θ	1.8442	0.8126	0.40768	0.2029	0.0808	0.0403
$\sigma_{\beta z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D-u- θ	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
σ_{zz} [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	-22.828	0.1782	0.1182	0.0657	0.0278	0.0142
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-728.70	0.2087	0.1288	0.0698	0.0292	0.0148
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-273.08	0.2005	0.1273	0.0696	0.0292	0.0148
3D-u- θ	-273.07	0.2005	0.1273	0.0696	0.0292	0.0148

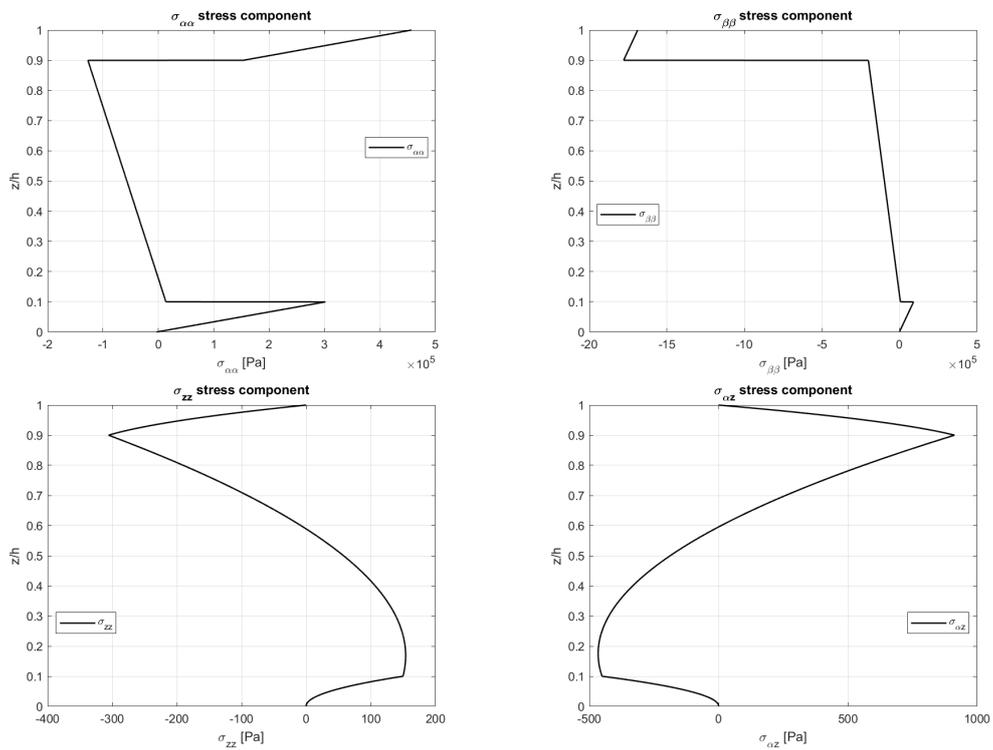


Figura 6.12: Tensioni lungo lo spessore del Caso 6: Guscio cilindrico sandwich Al/PVC/Al semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 100$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata

Tabella 6.15: Risultati Caso 7: Guscio sferico monostrato in Acciaio semplicemente appoggiato soggetto ad una sovratemperatura $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_b = 0$ K. Confronto tra gli spostamenti nel piano (u, v) e trasversale (w). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [16].

R_α/h	2	5	10	20	50	100
u [10^{-5} m] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	-2.9176	-1.7996	-0.8976	-0.3635	-0.1096	-0.0478
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-2.9176	-1.7996	-0.8976	-0.3635	-0.1096	-0.0478
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-2.4554	-1.7161	-0.8837	-0.3617	-0.1095	-0.0478
3D-u- θ	-2.4554	-1.7161	-0.8838	-0.3617	-0.1095	-0.0478
v [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	0.6033	1.3064	1.0998	0.6572	0.2771	0.1394
3D($\theta_c, 1D$) [16]	0.6033	1.3064	1.0998	0.6572	0.2771	0.1394
3D($\theta_c, 3D$) [16]	0.7619	1.2903	1.0921	0.6558	0.2770	0.1394
3D-u- θ	0.7619	1.2903	1.0921	0.6558	0.2770	0.1394
w [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0$)						
3D(θ_a) [16]	2.5188	5.1544	6.5432	6.7022	6.3930	6.2141
3D($\theta_c, 1D$) [16]	2.5188	5.1544	6.5432	6.7022	6.3930	6.2141
3D($\theta_c, 3D$) [16]	2.1970	4.9750	6.4703	6.6807	6.3894	6.2132
3D-u- θ	2.1970	4.9750	6.4703	6.6807	6.3894	6.2132

versali σ_{zz} e $\sigma_{\alpha z}$. In questo caso le tensioni nel piano sono discontinue, dato che si sta considerando una struttura sandwich, mentre le tensioni trasversali sono continue lungo lo spessore perchè sono state imposte correttamente le condizioni di continuità all'interfaccia di ogni strato matematico. In più, è possibile vedere come queste ultime rispettino correttamente le condizioni di carico al contorno imposte sulla struttura.

Per ciò che concerne il Caso 7 è possibile vedere, da Tabella 6.15 e Tabella 6.16 che i risultati forniti dall'analisi termomeccanica accoppiata sono in accordo con i risultati forniti dal modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza, per il calcolo del profilo di temperatura, l'equazione di conducibilità del calore 3D. È anche possibile mostrare che, per rapporti di snellezza alti (cioè per piastre sottili), anche il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza l'equazione di conducibilità del calore 1D, ha risultati piuttosto concordi con i precedenti due modelli, dato che, per quei valori di a/h l'effetto dello spessore si può considerare trascurabile. Inoltre, valgono le stesse con-

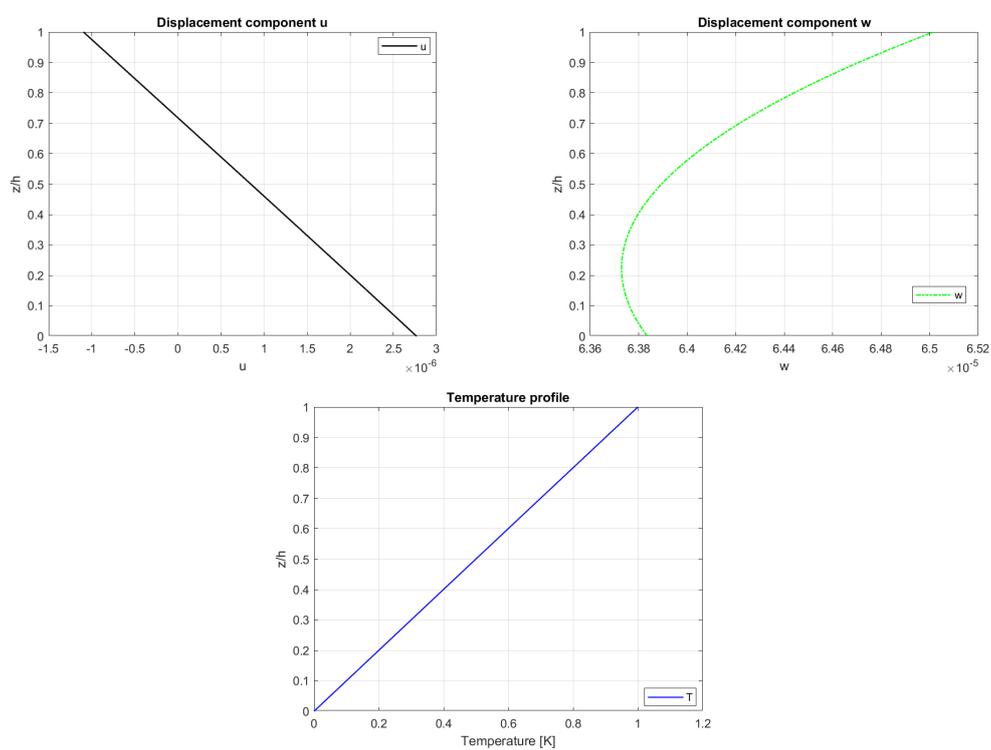


Figura 6.13: *Spostamenti lungo lo spessore del Caso 7: Guscio sferico monostrato in Acciaio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 500$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata*

Tabella 6.16: Risultati Caso 7: Guscio sferico monostrato in Acciaio semplicemente appoggiato soggetto ad una sovratemperatura $\Theta_t = 0.5 K$ e $\Theta_t = -0.5 K$. Confronto tra le tensioni nel piano ($\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$) e trasversale ($\sigma_{\alpha z}$, $\sigma_{\beta z}$ e σ_{zz}). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$.

R_α/h	2	5	10	20	50	100
$\sigma_{\alpha\alpha}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	-26.340	-45.030	-81.526	-124.05	-157.00	-168.52
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-26.340	-45.030	-81.526	-124.05	-157.00	-168.52
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-76.934	-57.708	-84.933	-124.86	-157.12	-168.55
3D-u- θ	-76.935	-57.708	-84.933	-124.86	-157.12	-168.55
$\sigma_{\beta\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	-11.391	31.845	99.865	144.84	168.36	174.67
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-11.391	31.845	99.865	144.84	168.36	174.67
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-26.667	28.711	98.425	144.33	168.26	174.65
3D-u- θ	-26.667	28.711	98.425	144.33	168.26	174.65
$\sigma_{\alpha\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = 0, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	-63.025	-43.070	-17.981	-5.0090	-0.6002	-0.0429
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-63.025	-43.070	-17.981	-5.0090	-0.6002	-0.0429
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-50.132	-40.541	-17.589	-4.9637	-0.5977	-0.0426
3D-u- θ	-50.132	-40.541	-17.589	-4.9637	-0.5978	-0.0426
$\sigma_{\alpha z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	16.767	3.5155	-2.2579	-3.0027	-1.7068	-0.9349
3D($\theta_c, 1D$) [16]	16.767	3.5155	-2.2579	-3.0027	-1.7068	-0.9349
3D($\theta_c, 3D$) [16]	6.5367	2.3933	-2.3892	-3.0150	-1.7074	-0.9350
3D-u- θ	6.5366	2.3933	-2.3892	-3.0150	-1.7074	-0.9350
$\sigma_{\beta z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	14.469	4.0791	-2.4801	-3.1541	-1.7412	-0.9443
3D($\theta_c, 1D$) [16]	14.469	4.0791	-2.4801	-3.1541	-1.7412	-0.9443
3D($\theta_c, 3D$) [16]	15.652	3.9491	-2.4699	-3.1478	-1.7406	-0.9442
3D-u- θ	15.652	3.9491	-2.4699	-3.1478	-1.7406	-0.9442
σ_{zz} [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/4$)						
D(θ_a) [16]	1.4441	2.9960	3.6512	2.6452	1.2471	0.6508
3D($\theta_c, 1D$) [16]	1.4441	2.9960	3.6512	2.6452	1.2471	0.6508
3D($\theta_c, 3D$) [16]	4.8006	3.0618	3.6338	2.6400	1.2466	0.6507
3D-u- θ	4.8006	3.0618	3.6338	2.6400	1.2466	0.6507

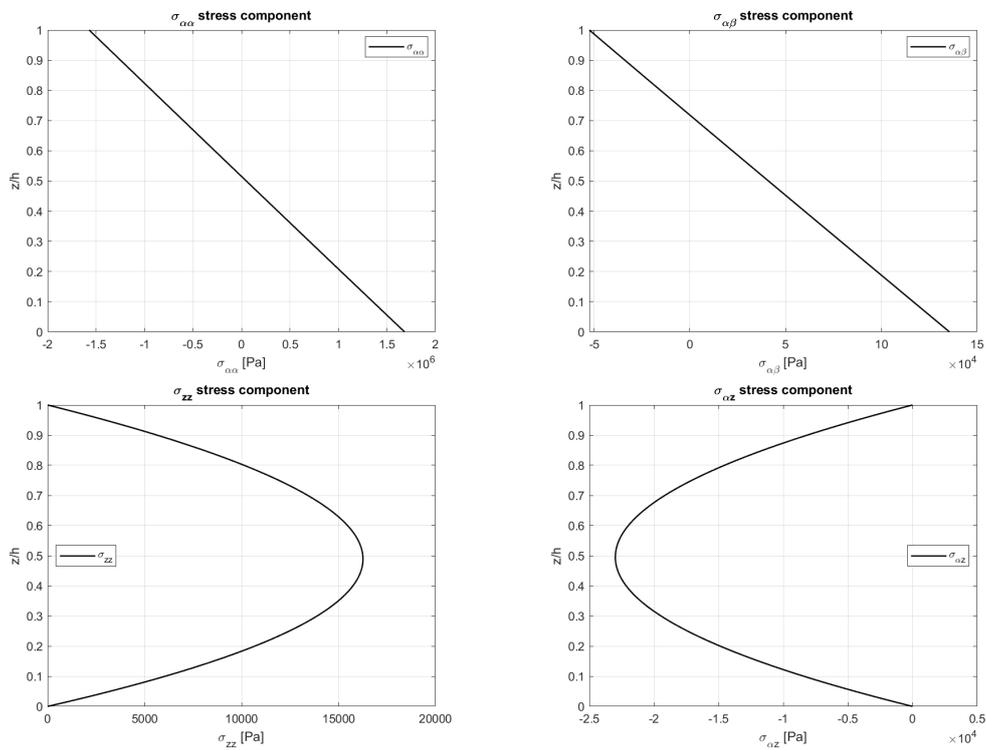


Figura 6.14: Tensioni lungo lo spessore del Caso 7: Guscio sferico monostrato in Acciaio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 500$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata

siderazioni effettuate per le strutture sottili composte da un unico materiale per ciò che riguarda il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza un profilo di temperatura assunto lineare a priori. Per quanto riguarda, invece, valori di snellezza bassi, i modelli $3D(\theta_a)$ e $3D(\theta_c, 1D)$, forniscono risultati non corretti perchè non viene considerato l'effetto dello spessore. I modelli $3D(\theta_c, 3D)$ e $3D(u-\theta)$, per rapporti a/h bassi, continuano a fornire valori perfettamente in linea tra loro, perchè considerano l'effetto dello spessore correttamente. In Figura 6.13 è possibile vedere l'andamento, lungo lo spessore, delle componenti di spostamenti u , w e del profilo di temperatura θ calcolato grazie alla formulazione termomeccanica accoppiata; è possibile notare come questi andamenti siano continui lungo lo spessore. Infine, in Figura 6.14 si mostra l'andamento delle tensioni nel piano $\sigma_{\alpha\alpha}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$ e delle tensioni trasversali σ_{zz} e $\sigma_{\alpha z}$. In questo caso le tensioni nel piano sono continue, dato che si sta considerando una struttura composta da un unico materiale, mentre le tensioni trasversali sono continue lungo lo spessore perchè sono state imposte correttamente le condizioni di continuità all'interfaccia di ogni strato matematico. In più, è possibile vedere come queste ultime rispettino correttamente le condizioni di carico al contorno imposte sulla struttura.

Per, infine, il Caso 8, è possibile vedere, da Tabella 6.17 e Tabella 6.18 che i risultati forniti dall'analisi termomeccanica accoppiata sono in accordo con i risultati forniti dal modello termomeccanico, disaccoppiato che utilizza, per il calcolo del profilo di temperatura, l'equazione di conducibilità del calore 3D, se non per quanto riguarda qualche errore sull'ultima cifra decimale. È anche possibile mostrare che, per rapporti di snellezza alti (cioè per piastre sottili), anche il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza l'equazione di conducibilità del calore 1D, ha risultati piuttosto concordi con i precedenti due modelli, dato che, per quei valori di a/h l'effetto dello spessore si può considerare trascurabile. Inoltre, valgono le stesse considerazioni effettuate per le strutture sottili composte da più materiali differenti per ciò che riguarda il modello termomeccanico disaccoppiato che utilizza un profilo di temperatura assunto lineare a priori. Per quanto riguarda, invece, valori di snellezza bassi, i modelli $3D(\theta_a)$ e $3D(\theta_c, 1D)$, forniscono risultati non corretti perchè non viene considerato l'effetto dello spessore. I modelli $3D(\theta_c, 3D)$ e $3D(u-\theta)$, per rapporti a/h bassi, continuano a fornire valori perfettamente in linea tra loro, perchè considerano l'effetto dello spessore correttamente. In Figura 6.15 è possibile vedere l'andamento, lungo lo spessore, delle componenti di spostamenti v , w e del profilo di temperatura θ calcolato grazie alla formulazione termomeccanica accoppiata; è possibile notare come questi andamenti siano continui lungo lo spessore. Infine, in Figura 6.16 si mostra l'andamento delle tensioni nel piano $\sigma_{\beta\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$ e delle tensioni trasversali σ_{zz} e $\sigma_{\beta z}$. In questo caso le tensioni nel piano non sono continue, dato che si sta considerando

Tabella 6.17: Risultati Caso 8: Guscio sferico Alluminio/Titanio/Acciaio semplicemente appoggiato soggetto ad una sovratemperatura $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_t = 0$ K. Confronto tra gli spostamenti nel piano (u , v) e trasversale (w). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$. I risultati utilizzati per confronto sono presi da [16].

R_α/h	2	5	10	20	50	100
u [10^{-5} m] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	-2.7765	-1.6822	-0.8444	-0.3527	-0.1118	-0.0502
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-2.8569	-1.6278	-0.7481	-0.2799	-0.0771	-0.0320
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-2.5560	-1.5832	-0.7414	-0.2791	-0.0771	-0.0320
3D-u- θ	-2.5559	-1.5832	-0.7414	-0.2791	-0.0771	-0.0320
v [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	0.6479	1.6264	1.3680	0.8175	0.3458	0.1743
3D($\theta_c, 1D$) [16]	1.3282	2.0430	1.5665	0.8946	0.3680	0.1838
3D($\theta_c, 3D$) [16]	1.3841	2.0187	1.5592	0.8934	0.3679	0.1838
3D-u- θ	1.3841	2.0187	1.5592	0.8934	0.3679	0.1838
w [10^{-5} m] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0$)						
3D(θ_a) [16]	2.9557	5.8248	7.4366	7.7817	7.6037	7.4685
3D($\theta_c, 1D$) [16]	3.1261	6.2203	7.6461	7.7384	7.3669	7.1651
3D($\theta_c, 3D$) [16]	2.9405	6.1003	7.5992	7.7248	7.3647	7.1646
3D-u- θ	2.9405	6.1003	7.5992	7.7248	7.3647	7.1646

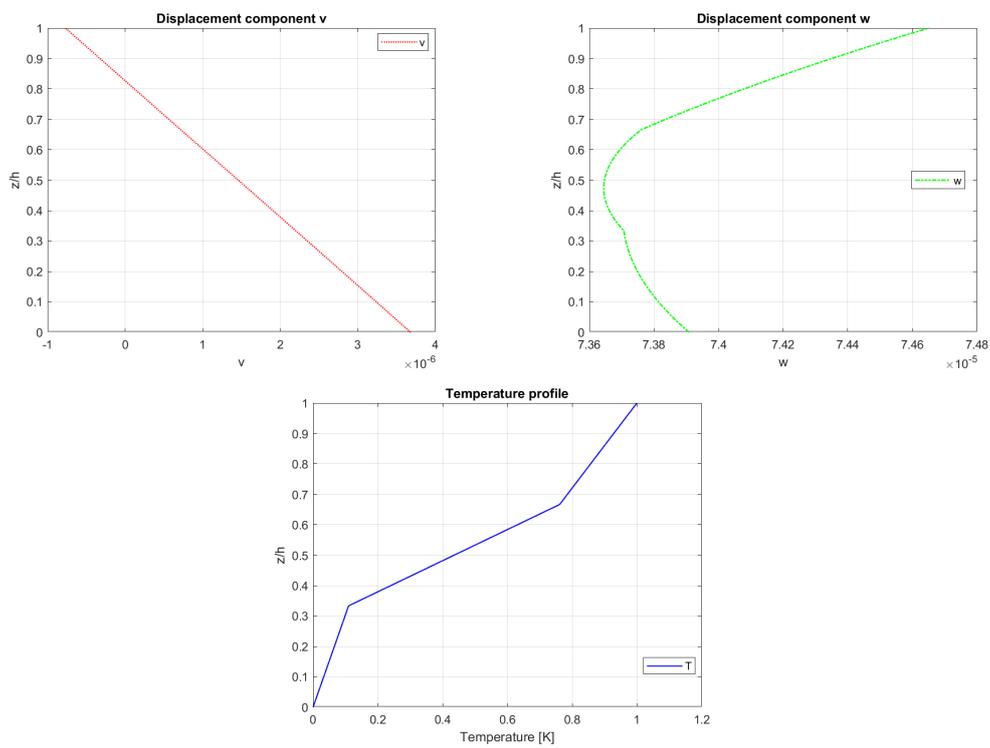


Figura 6.15: *Spostamenti lungo lo spessore del Caso 8: Guscio sferico Alluminio/Titanio/Acciaio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 50$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata*

Tabella 6.18: Risultati Caso 8: Guscio sferico Alluminio/Titanio/Acciaio semplicemente appoggiato soggetto ad una sovratemperatura $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_b = 0$ K. Confronto tra le tensioni nel piano ($\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$) e trasversale ($\sigma_{\alpha z}$, $\sigma_{\beta z}$ e σ_{zz}). Il numero di strati matematici totali è $N_L = 300$ mentre l'ordine massimo di espansione della matrice esponenziale è $N = 3$.

R_α/h	2	5	10	20	50	100
$\sigma_{\alpha\alpha}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = h/2$)						
3D(θ_a) [16]	-30.353	-39.796	-63.025	-94.912	-121.52	-131.22
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-16.005	-31.260	-63.948	-101.82	-131.33	-141.73
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-49.975	-38.883	-65.959	-102.30	-131.40	-141.75
3D-u- θ	-49.976	-38.883	-65.959	-102.30	-131.40	-141.75
$\sigma_{\beta\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/2$)						
3D(θ_a) [16]	-6.2333	5.5609	34.884	56.468	69.026	72.734
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-21.024	0.0635	32.842	54.605	66.248	69.464
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-23.195	-0.3048	32.583	54.502	66.227	69.458
3D-u- θ	-23.195	-0.3048	32.583	54.502	66.227	69.458
$\sigma_{\alpha\beta}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = 0, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	-53.004	-34.402	-12.851	-2.7306	0.1396	0.2914
3D($\theta_c, 1D$) [16]	-52.233	-28.954	-7.4856	0.7013	1.6463	1.0601
3D($\theta_c, 3D$) [16]	-44.666	-27.810	-7.3394	0.7151	1.6469	1.0601
3D-u- θ	-44.666	-27.810	-7.3394	0.71507	1.6469	1.0601
$\sigma_{\alpha z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = 0, \beta = b/2, z = h/4$)						
3D(θ_a) [16]	11.410	2.8595	-1.3183	-2.0168	-1.1898	-0.6587
3D($\theta_c, 1D$) [16]	11.275	1.2740	-2.7727	-2.8863	-1.5517	-0.8396
3D($\theta_c, 3D$) [16]	7.2149	0.9005	-2.8097	-2.8889	-1.5517	-0.8396
3D-u- θ	7.2149	0.9005	-2.8097	-2.8889	-1.5517	-0.8396
$\sigma_{\beta z}$ [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	13.084	5.4242	0.6419	-0.6211	-0.4972	-0.2884
3D($\theta_c, 1D$) [16]	12.141	3.6918	-0.6355	-1.3225	-0.7766	-0.4262
3D($\theta_c, 3D$) [16]	11.798	3.6010	-0.6378	-1.3213	-0.7765	-0.4262
3D-u- θ	11.798	3.6010	-0.6378	-1.3213	-0.7765	-0.4262
σ_{zz} [10^4 Pa] ($\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/4$)						
3D(θ_a) [16]	-2.1848	-0.6175	0.5564	0.6729	0.3720	0.2022
3D($\theta_c, 1D$) [16]	2.6622	1.1518	1.5228	1.1590	0.5600	0.2944
3D($\theta_c, 3D$) [16]	3.3096	1.1724	1.5195	1.1579	0.5599	0.2944
3D-u- θ	3.3096	1.1724	1.5195	1.1579	0.5599	0.2944

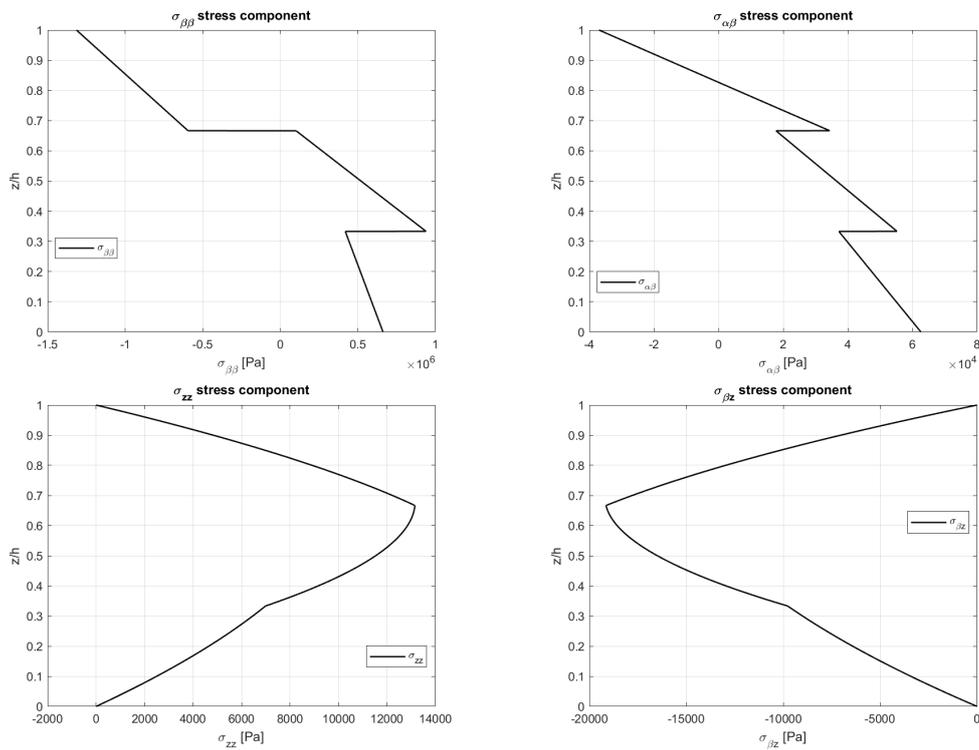


Figura 6.16: *Tensioni lungo lo spessore del Caso 8: Guscio sferico Alluminio/Titanio/Acciaio semplicemente appoggiato con rapporto di snellezza $R_\alpha/h = 50$. I profili in figura sono stati ottenuti attraverso la formulazione termomeccanica accoppiata*

una struttura composta da tre materiali diversi, mentre le tensioni trasversali sono continue lungo lo spessore perchè sono state imposte correttamente le condizioni di continuità all'interfaccia di ogni strato matematico. In più, è possibile vedere come queste ultime rispettino correttamente le condizioni di carico al contorno imposte sulla struttura.

Come è possibile vedere dai risultati presentati nel seguente capitolo, per la maggior parte dei casi analizzati non si hanno variazioni dei risultati, confermando sia il fatto che il modello termomeccanico accoppiato è stato sviluppato correttamente e che il modello di riferimento con il quale effettuare un confronto è il termomeccanico disaccoppiato con Fourier 3D, dato che entrambi considerano sia l'effetto dello spessore che del materiale. Nei casi in cui si notano delle variazioni, sovente, la differenza è data semplicemente da errori di arrotondamento, infatti si può notare come molte di esse siano relative solamente all'ultima cifra decimale, mentre negli altri casi in cui si verificano differenze leggermente più marcate, bisogna considerare che avviene solamente per rapporti di snellezza bassi: il motivo risiede nel fatto che la formulazione termomeccanica disaccoppiata inizia ad essere meno precisa in questi casi a causa dell'utilizzo dei coseni e seni iperbolici. Ciò non accade per il caso accoppiato, invece, dato che la formulazione utilizzata è diversa e non utilizza queste funzioni matematiche per calcolare il profilo di temperatura, che viene calcolato insieme agli spostamenti.

Per quanto riguarda i tempi di calcolo, il codice che implementa la thermal stress analysis, è figlio del codice utilizzato per le analisi statiche, quindi implementa le stesse modifiche descritte in dettaglio nel Capitolo 4: di particolare rilevanza, per questo caso, è la modifica che abolisce completamente il calcolo simbolico nel programma. Per questo motivo, tutte le analisi effettuate, hanno un tempo di esecuzione che sta intorno ai 2-3 secondi, che non varia dal numero di strati matematici e dall'ordine di approssimazione della matrice esponenziale.

Capitolo 7

Conclusioni e sviluppi futuri

Nella presente tesi sono state espresse le modalità con le quali si è provveduto ad incrementare le performance del codice Matlab[®] 3DES.2, usato per analisi meccaniche di strutture multistrato, andando a migliorare la gestione delle matrici e ottimizzando l'intera struttura del codice già esistente. Inoltre, si è sviluppato un nuovo modello termomeccanico accoppiato che consente di eseguire la thermal stress analysis in alternativa all'utilizzo del modello disaccoppiato, che pecca di una eccessiva laboriosità sia dal punto di vista del modello matematico che, quindi, per quanto riguarda l'implementazione informatica. Nei Capitoli 2 e 3 si è andato a confrontare i risultati e il tempo di calcolo impiegato dai due diversi codici relativi alle analisi meccaniche, oltre alla presentazione dell'analisi di convergenza, mentre nel Capitolo 6 si è andato a confrontare solamente i risultati tra il modello termomeccanico disaccoppiato e quello accoppiato. I risultati dimostrano che le modifiche impiegate sono state utili a migliorare di molto le performance del codice, arrivando, per il caso meccanico, addirittura all'abbattimento dei tempi di calcolo di più del 90%, senza modificare in maniera significativa i risultati di entrambi i tipi di analisi trattate. Per quanto riguarda il modello termomeccanico, oltre ad essere molto performante in termini di tempo di calcolo, dato che è stato implementato sulla base del nuovo codice riferito alle analisi meccaniche, esso permette di avere una diversa formulazione matematica che consente di non avere differenze significative nei risultati.

L'analisi di convergenza, operata solamente sulle analisi meccaniche, ha lo scopo di dimostrare che il modello è convergente anche utilizzando un esiguo numero di strati matematici.

A seguito di questa tesi, possono essere facilmente colti alcuni interessanti sviluppi futuri, dato che, basandosi sulla nuova formulazione termomeccanica presente nel Capitolo 5, è possibile implementare un codice che permetta di eseguire le analisi igromeccaniche accoppiate, considerando che l'equazio-

ne di Fick 3D è formalmente uguale all'equazione di Fourier 3D, infatti è necessario solamente cambiare il significato fisico dei coefficienti del materiale che sono presenti in Fourier 3D, passando, cioè, da un coefficiente di conduzione termica ad un coefficiente di conduzione igrometrico. Allo stesso modo, è possibile anche pensare di creare un modello matematico che possa eseguire delle analisi igrotermomeccaniche accoppiate, dato che l'aggiunta dell'equazione di Fick 3D non comporta alcuna difficoltà aggiuntiva, perchè l'introduzione di quest'ultima è molto simile all'introduzione della legge di Fourier 3D a partire dal modello meccanico, come è possibile vedere in dettaglio nel Capitolo 5. In questo ultimo caso si ha la necessità di prestare molta attenzione ai casi di studio che si vanno ad utilizzare per validare il codice, perchè l'introduzione di ulteriori incognite rende molto difficile trovare in letteratura dei casi che possano essere utilizzati come confronto.

Bibliografia

- [1] A. W. Leissa, *Vibration of Shells*, NASA SP-288, Washington, 1973.
- [2] W. Soedel, *Vibration of Shells and Plates*, Marcel Dekker, Inc., New York, USA, 2005.
- [3] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and applications. Second Edition*, CRC Press LLC, 2004.
- [4] E. Carrera, S. Brischetto, P. Nali, *Plates and Shells for Smart Structures. Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*, John Wiley & Sons, Ltd, New Delhi, India, 2011.
- [5] F. B. Hildebrand, E. Reissner, E. and G. B. Thomas, *Notes on the Foundations of the Theory of Small Displacements of Orthotropic Shells*, NACA Technical Note No.1833, Washington, 1949.
- [6] F. Tornabene, *Meccanica delle Strutture a Guscio in Materiale Composito*, Società Editrice Esculapio, Bologna, Italia, 2012.
- [7] S. Brischetto, *An exact 3D solution for free vibrations of multilayered cross-ply composite and sandwich plates and shells*, International Journal of Applied Mechanics, Vol.6, No.6, 42 pages, 2004.
- [8] S. Brischetto, E. Carrera, *Advanced mixed theories for bending analysis of functionally graded plates*, Computer and Structures, Vol. 88, 2010.
- [9] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.
- [10] Open document, *Systems of Differential Equations*, free available on <http://www.math.utah.edu/gustafso/>
- [11] C. Molery, C. and Van Loan, *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later* SIAM Review 45(1), 1–46, 2003.

- [12] S. Brischetto, *Exact Elasticity Solution for Natural Frequencies of Functionally Graded Simply-supported Structures*, CMES, Vol.95, No.5, pp.391-430, 2013.
- [13] S. Brischetto, *Exact three-dimensional static analysis of single- and multi-layered plates and shells*, Composites Part B 119, 230-252, 2017.
- [14] Open document, *Techniques to Improve Performance*, free available on https://it.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/techniques-for-improving-performance.html
- [15] S. Brischetto, *A closed-form 3D shell solution for multilayered structures subjected to different load combinations*, Aerospace Science and Technology 70, 29–46, 2017.
- [16] S. Brischetto, R. Torre, *Thermo-elastic analysis of multilayered plates and shells based on 1D and 3D heat conduction problems*, Composite Structures 206, 326–353, 2018.
- [17] Y. Povstenko, *Fractional Thermoelasticity*, Switzerland: Springer International Publishing, 2015
- [18] A. Messina, E. Carrera, *Three-dimensional free vibration of multi-layered piezoelectric plates through approximate and exact analyses*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 26(5), 489–504, 2015.
- [19] S. Brischetto, *Convergence analysis of the exponential matrix method for the solution of 3D equilibrium equations for free vibration analysis of plates and shells*, Composites Part B 98, 453-471, 2016.
- [20] S. Brischetto, E. Carrera, *Coupled Thermo-Mechanical Analysis of One-Layered and Multilayered Isotropic and Composite Shells*, CMES, Vol. 56, No.3, pp.249-301, 2010.