

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica



**Politecnico  
di Torino**

Tesi Magistrale

## Ottimizzazione statica di portafoglio: analisi comparativa di approcci robusti e basati su fattori

Relatore

Prof. Paolo BRANDIMARTE

Candidato

Lorenzo PALETTO

Ottobre 2021



# Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>   | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>Portafogli azionari</b>  | <b>6</b>  |
| 2.1      | Ottimizzazione di portafoglio tramite modelli media-varianza . . .              | 6         |
| 2.1.1    | Rendimenti e rischio . . . . .  | 6         |
| 2.1.2    | Analisi media-varianza . . . . .  | 8         |
| 2.1.3    | Limitazioni dell'ottimizzazione media-varianza . . . . .                        | 10        |
| 2.2      | Modelli a fattori . . . . .   | 11        |
| 2.2.1    | Modello a singolo indice . . . . .  | 11        |
| 2.2.2    | Modelli multifattore . . . . .  | 16        |
| <b>3</b> | <b>Ottimizzazione robusta di portafoglio</b>                                    | <b>18</b> |
| 3.1      | Ottimizzazione robusta . . . . .  | 19        |
| 3.1.1    | Robustezza . . . . .  | 19        |
| 3.1.2    | Controparte robusta . . . . .   | 20        |
| 3.1.3    | Insiemi d'incertezza . . . . .  | 22        |
| 3.2      | Costruzione di portafogli robusti . . . . .                                     | 24        |
| 3.2.1    | Portafogli robusti con box uncertainty . . . . .                                | 24        |
| 3.3      | Ottimizzazione del CVaR . . . . .   | 27        |
| 3.3.1    | Ottimizzazione standard . . . . .   | 27        |
| 3.3.2    | Ottimizzazione worst case con box uncertainty . . . . .                         | 29        |
| <b>4</b> | <b>Risk Parity</b>  | <b>32</b> |
| 4.1      | Ottimizzazione di portafogli Risk Budgeting . . . . .                           | 32        |
| 4.1.1    | Risk contribution . . . . .   | 33        |
| 4.1.2    | Portafoglio Risk Budgeting . . . . .  | 35        |
| 4.2      | Decomposizione del rischio rispetto ai fattori . . . . .                        | 37        |
| 4.2.1    | Fattori di rischio osservabili . . . . .  | 37        |
| 4.2.2    | Fattori di rischio intrinseci . . . . .   | 39        |
| <b>5</b> | <b>Analisi comparativa di approcci robusti per la costruzione di portafogli</b> | <b>42</b> |
| 5.1      | Confronto uniperiodale di portafogli robusti . . . . .                          | 42        |
| 5.1.1    | Procedura applicata nell'analisi . . . . .                                      | 42        |
| 5.1.2    | Portafoglio GMV . . . . .   | 44        |
| 5.1.3    | Portafoglio EW . . . . .  | 44        |
| 5.1.4    | Portafoglio ERC . . . . .   | 45        |
| 5.1.5    | Portafoglio media-varianza robusto . . . . .                                    | 46        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 5.1.6    | Confronto delle prestazioni . . . . .                              | 47        |
| 5.2      | Confronto multiperiodale: analisi sull'aggiornamento dei pesi . .  | 50        |
| 5.2.1    | Procedura seguita nell'analisi . . . . .                           | 50        |
| 5.2.2    | Confronto senza vincoli di turnover . . . . .                      | 51        |
| 5.2.3    | Vincoli di turnover assoluti . . . . .                             | 54        |
| 5.2.4    | Penalizzazione del turnover . . . . .                              | 57        |
| <b>6</b> | <b>Analisi comparativa di portafogli basati sui fattori</b>        | <b>61</b> |
| 6.1      | Confronto uniperiodale di portafogli robusti basati su fattori . . | 61        |
| 6.1.1    | Procedura seguita nell'analisi . . . . .                           | 61        |
| 6.1.2    | Stima dei fattori e decomposizione del rischio di portafoglio      | 62        |
| 6.1.3    | Portafogli FRP . . . . .   | 67        |
| 6.1.4    | Confronto complessivo di tutti i portafogli analizzati . . .       | 70        |
| <b>7</b> | <b>Conclusione</b>   | <b>75</b> |

# Elenco delle figure

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Frontiera efficiente nel piano rischio-rendimento . . . . .   | 10 |
| 2.2 | Varianza di un portafoglio equally weighted al variare di $n$ . . . . .   | 15 |
| 5.1 | Somme allocate a ciascun indice. I nomi presenti nel grafico sono codici usati dall'API per leggere i dati, l'ordine degli indici è lo stesso dell'elenco a inizio sezione. . . . . | 47 |
| 5.2 | Andamento della ricchezza di ogni portafoglio . . . . .   | 48 |
| 5.3 | Grafici descrittivi dei portafogli . . . . .  | 53 |
| 5.4 | Grafici descrittivi dei portafogli . . . . .  | 56 |
| 5.5 | Grafici descrittivi dei portafogli . . . . .  | 59 |
| 6.1 | Esposizione dei portafogli ai fattori del modelli Fama-French . . . . .   | 64 |
| 6.2 | Variabilità e variabilità cumulata spiegata dalle componenti . . . . .  | 65 |
| 6.3 | Esposizioni dei portafogli rispetto a 9 e 4 fattori intrinseci . . . . .  | 66 |
| 6.4 | Pesi dei quattro portafogli FRP . . . . .   | 68 |
| 6.5 | Andamento della ricchezza dei portafogli basati sui fattori . . . . .   | 69 |
| 6.6 | Andamento delle ricchezze dei protafogli . . . . .  | 71 |
| 6.7 | Pesi degli otto portafogli analizzati nella tesi . . . . .  | 72 |

# Capitolo 1

## Introduzione

L'obiettivo di ogni investitore finanziario è incrementare la propria ricchezza investendola in strumenti finanziari quotati in borsa. Dato un insieme di titoli, costruire o selezionare un portafoglio significa scegliere come allocare ad essi la propria ricchezza cioè quali strumenti comprare e vendere e in quali quantità. Nel corso dell'ultimo secolo molti economisti e matematici hanno studiato teorie finanziarie con lo scopo di individuare le migliori tecniche di costruzione e ottimizzazione di portafoglio. Il risultato più importante fu raggiunto da Harry Markowitz nel 1952 con l'invenzione della modern portfolio theory, una teoria di costruzione di portafoglio basata sul presupposto che ogni investitore abbia come obiettivo la massimizzazione del rendimento e la minimizzazione del rischio. Il modello di Markowitz si basa sull'analisi storica dei titoli, ovvero la stima sulla base di dati passati del rendimento atteso degli asset e della loro matrice delle covarianze che ne rappresenta la rischiosità. Questa teoria è stata ampiamente adottata dagli investitori finanziari ed è tuttora un caposaldo dell'ottimizzazione di portafoglio.

Nel corso dei decenni l'utilizzo della modern portfolio theory ha evidenziato diversi problemi riguardo agli assiomi del modello e alla sua implementazione. Tra le criticità più importanti riportiamo le due di maggior interesse per l'elaborato: l'elevato numero di parametri necessari per stimare la matrice delle covarianze e la sensibilità dell'ottimizzazione a variazioni del vettore dei rendimenti attesi. Per comprendere il primo problema basta notare che per stimare la matrice delle covarianze di  $N$  titoli servono  $\mathcal{O}(N^2)$  parametri, una quantità che esplode al crescere di  $N$ . Si sono quindi resi necessari modelli di rappresentazione dei rendimenti che dipendono dalla stima di un numero minore di parametri. Il secondo è un problema di mancanza di robustezza e stabilità osservabile a posteriori: ripetendo l'ottimizzazione con due vettori dei rendimenti attesi leggermente differenti i pesi del portafoglio ottenuto in output possono risultare estremamente diversi. Negli ultimi decenni la ricerca si è spinta a studiare teorie di selezione e ottimizzazione di portafoglio robuste che non dipendessero direttamente dal vettore dei rendimenti attesi ma lo trattassero come parametro incerto o si focalizzassero sulla dimensione del rischio.

L'obiettivo principale della tesi è quello di presentare lo stato dell'arte di alcuni approcci robusti all'ottimizzazione di portafoglio e implementarne i modelli di ottimizzazione per confrontare le prestazioni su dati finanziari. Un primo semplice portafoglio che presentiamo è il global minimum variance, cioè

il portafoglio che si ottiene volendo minimizzare la varianza dell'investimento. Tale approccio è robusto nel senso che non usa statistiche rumorose ma limita a difendere l'ottimizzatore dal rischio. Successivamente trattiamo il framework dell'ottimizzazione robusta, un ramo della ricerca operativa che permette di associare incertezza ai dati del problema. Ciò consente di non usare le stime rumorose dei rendimenti attesi ma di attribuire degli uncertainty set ad ogni parametro definendo quindi un insieme di valori assumibili ed equiprobabili. Proseguiamo presentando la risk parity, un approccio più recente all'ottimizzazione di portafoglio basato non sull'allocazione monetaria ma su quella del rischio. Dal momento che lavora direttamente sul rischio, questo approccio utilizza statistiche robuste e non è soggetto alle oscillazioni indotte dal vettore dei rendimenti medi. Parallelamente ai modelli di ottimizzazione, presentiamo un modo alternativo per esprimere i rendimenti degli asset e stimare la matrice delle covarianze con un minor numero di parametri, i modelli a fattori. Essi permettono di stabilire una dipendenza lineare tra i rendimenti degli  $N$  asset e  $m \leq N$  fattori di rischio comuni, sono molto interessanti perchè si fondano sull'intuizione che l'andamento mercato sia rappresentabile da pochi fattori trasversali a tutti gli asset. Concludiamo la parte centrale applicando l'approccio risk parity ai modelli a fattori quindi discutendo modelli di costruzione di portafoglio che allocano il rischio ai fattori comuni sottostanti. La combinazione di questi due approcci è doppiamente conveniente perchè applica una procedura robusta a un modello stimabile con un basso numero di parametri. Gli ultimi due capitoli sono destinati all'implementazione dei modelli di ottimizzazione presentati nei capitoli precedenti e al confronto della loro prestazioni quando applicati a dati finanziari reali. I portafogli vengono confrontati in termini di prestazioni, volatilità e, solo nei confronti multiperiodali, di sostenibilità cioè la facilità con cui se ne aggiornano i pesi. Dato che nell'intervallo di tempo dell'analisi includiamo l'anno 2020, e quindi il crollo del mercato dovuto alla crisi COVID, possiamo testare e confrontare le resistenze dei portafogli a grandi variazioni dei dati in input. Questi ultimi capitoli, e in generale tutte le porzioni di codice, sono implementati in linguaggio Python.

## Capitolo 2

# Portafogli azionari

Introduciamo brevemente la teoria di portafoglio così come pensata da Harry Markowitz. Tale teoria spiega come costruire portafogli basandosi su media, varianza e correlazione dei rendimenti degli asset. Il framework da essa generato è comunemente noto come **media-varianza** o **modern portfolio theory** (MPT) e la sua applicazione più utile è la definizione di problemi di ottimizzazione per la selezione di portafoglio. Dato l'elevato numero di parametri necessario per impostare e risolvere un modello di ottimizzazione media-varianza, sono nati approcci diversi al problema. Uno di questi è l'utilizzo di **modelli a fattori**, rappresentazioni che impongono una dipendenza dei rendimenti degli asset da un numero limitato di fattori comuni.

### 2.1 Ottimizzazione di portafoglio tramite modelli media-varianza

In questa prima sezione definiamo il framework della MPT e tutti i dati che servono per impostare un problema di selezione di portafoglio. Successivamente mostriamo alcuni esempi di modelli di ottimizzazione per la selezione di portafoglio tramite analisi media-varianza e presentiamo il concetto di frontiera efficiente di portafogli. Concludiamo la sezione elencando i principali problemi dell'analisi media-varianza tra cui l'elevato numero di parametri da stimare necessari per impostare i modelli di ottimizzazione.

#### 2.1.1 Rendimenti e rischio

Nella MPT un portafoglio costituito da  $N$  asset è espresso in funzione dei pesi degli asset all'interno del portafoglio, ovvero della porzione dell'investimento totale allocata ad ogni asset

$$w_1 + w_2 + \dots + w_N = \sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (2.1)$$

dove  $w_i$  è il peso allocato all'asset  $i$ . Il rendimento degli asset è il cambiamento percentuale di prezzo rispetto al valore iniziale:

$$r = \frac{P_{finale} - P_{iniziale}}{P_{iniziale}}, \quad (2.2)$$

dove  $P_{finale}$  e  $P_{iniziale}$  sono il prezzo finale e iniziale dell'asset. Se il rendimento è giornaliero,  $P_{finale}$  e  $P_{iniziale}$  sono i prezzi di chiusura di due giorni successivi, se è mensile di due mesi. Unendo le due definizioni appena date, il rendimento del portafoglio si può scrivere come

$$r_p = w_1 r_1 + \dots + w_N r_N = \sum_{i=1}^N w_i r_i \quad (2.3)$$

o, in forma matriciale,

$$r_p = w' r \quad (2.4)$$

dove  $w$  e  $r$  sono vettori in  $\mathbb{R}^N$ .

Possiamo ora definire il **rendimento atteso** (expected return) di un portafoglio come media dei rendimenti attesi degli asset che lo compongono,

$$\mathbb{E}(r_p) = \sum_{i=1}^N w_i \mathbb{E}(r_i) \quad \text{e} \quad \mathbb{E}(r_p) = w' \mu, \quad (2.5)$$

dove  $\mu \in \mathbb{R}^N$  è il vettore dei rendimenti attesi

$$\mu = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(r_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(r_N) \end{bmatrix}.$$

I rendimenti attesi sono solitamente stimati a partire dai dati storici. Per esempio, avendo i prezzi mensili di chiusura di tredici mesi consecutivi possiamo calcolarne i rendimenti mensili dell'anno passato e usare la loro media come rendimento atteso per il prossimo mese.

Il rischio del portafoglio è misurato dalla **varianza**. La varianza è un funzionale di rischio che serve a misurare la pericolosità del portafoglio ed è definita come lo scarto quadratico medio

$$\sigma_i^2 = Var(r_i) = \mathbb{E}\left((r_i - \mathbb{E}(r_i))^2\right) \quad (2.6)$$

dove  $r_i$  è il rendimento dell'asset  $i$ . Un investimento con alta varianza indica forte incertezza e quindi espone l'investitore al rischio. La **deviazione standard** è semplicemente la radice quadrata della varianza,

$$\sigma_i = \sqrt{Var(r_i)}. \quad (2.7)$$

La varianza di un portafoglio non si calcola direttamente come il rendimento medio atteso ma richiede l'utilizzo delle proprietà della varianza. Per un portafoglio di  $N$  asset vale

$$Var(r_p) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j Cov(r_i, r_j) \quad (2.8)$$

dove  $Cov(X_i, X_j)$  è la covarianza tra le variabili casuali  $X_i$  e  $X_j$  e  $w_i w_j Cov(r_i, r_j) = w_i^2 Var(r_i)$  quando  $i = j$ . Vediamo che quindi non è sufficiente sommare le  $N$  varianze degli asset ma contano anche tutte le covarianze. Questi termini “extra” sono una delle scoperte più importanti della MPT e hanno rappresentato una svolta nel calcolo del rischio di portafoglio.

Spesso, per indicare quanto similmente due asset si muovono allo stesso tempo se ne stima la **correlazione**, statistica ottenuta dividendo la covarianza tra due asset per le loro deviazioni standard

$$\rho_{ij} = Corr(r_i, r_j) = \frac{Cov(r_i, r_j)}{\sigma_i \sigma_j}. \quad (2.9)$$

La correlazione è usata più spesso perchè assume valori nell’intervallo  $[-1, +1]$ , dove  $+1$  indica un perfetto movimento nella stessa direzione. In forma matriciale si può scrivere

$$Var(r_p) = w' \Sigma w \quad e \quad \sigma_p = \sqrt{w' \Sigma w}, \quad (2.10)$$

dove  $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$  è la **matrice delle covarianze**:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N,1} & \cdots & \sigma_{N,N} \end{bmatrix}.$$

Dato che  $\sigma_{i,j} = \sigma_i^2$  quando  $i = j$ , la diagonale della matrice è formata dalle varianze degli asset mentre gli altri elementi si possono scrivere usando la 2.9 come  $\sigma_{i,j} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$ .

### 2.1.2 Analisi media-varianza

La MPT è basata su alcune forti e controverse assunzioni riguardo al mercato e gli investitori:

- Gli investitori scelgono il loro portafoglio preferendo rendimento atteso alto e varianza bassa
- Gli investitori decidono sulla base dei rendimenti attesi e della varianza
- Tutti gli investitori usano gli stessi dati
- Tutte le decisioni sono prese su un singolo periodo.

Spesso implicitamente si assume che i rendimenti abbiano distribuzione normale. Dato che gli investitori usano medie e varianza, quest’approccio di selezione di portafoglio è noto come **ottimizzazione media-varianza**.

Il problema di ottimizzazione per la selezione di portafoglio può essere formulato in diversi modi a seconda delle esigenze dell’investitore, un primo modo è quello di minimizzare il rischio del portafoglio imponendo vincoli sul rendimento atteso e sui pesi. Si ha la seguente formulazione:

$$\begin{aligned}
\min_w \quad & \frac{1}{2} w' \Sigma w \\
\text{s.t.} \quad & w' \mu \geq r_b \\
& w' \mathbf{1} = 1
\end{aligned} \tag{2.11}$$

dove  $r_b$  è il rendimento benchmark sotto il quale non vogliamo che il nostro portafoglio scenda,  $\mathbf{1}$  è un vettore di uni e gli altri parametri sono quelli presentati nella sezione precedente. L'aggiunta di  $1/2$  nella funzione obiettivo serve per convenienza computazionale. L'ultimo vincolo chiede che i pesi degli asset sommino a 1 e non esclude la presenza di pesi negativi, quindi di vendite allo scoperto. Un portafoglio senza vendite allo scoperto è chiamato long-only e per ottenerlo bisogna aggiungere il vincolo

$$w_i \geq 0 \quad \forall i.$$

Sebbene questa sia la formulazione più generale, per motivi computazionali spesso si preferisce non mettere vincoli sulla somma dei pesi. Spesso piuttosto si risolve il problema trovando un vettore di pseudo-pesi  $\bar{w}_i$  che viene successivamente normalizzato con la formula

$$w_i = \frac{\bar{w}_i}{\sum_j \bar{w}_j}$$

e trasformato in un vettore che somma a 1. Un secondo modo di cercare il portafoglio ottimo è massimizzarne il rendimento atteso imponendo un upper bound sul suo rischio:

$$\begin{aligned}
\max_w \quad & w' \mu \\
\text{s.t.} \quad & w' \Sigma w \leq \sigma_b^2 \\
& w' \mathbf{1} = 1
\end{aligned} \tag{2.12}$$

dove  $\sigma_b^2$  è la varianza benchmark che non vogliamo superare. In aggiunta a questi due si può usare un terzo modello definito con una funzione trade-off tra rischio e rendimento e senza vincoli a parte quello sui pesi:

$$\begin{aligned}
\min_w \quad & \frac{\lambda}{2} w' \Sigma w - w' \mu \\
\text{s.t.} \quad & w' \mathbf{1} = 1
\end{aligned} \tag{2.13}$$

dove  $\lambda$  è il coefficiente di avversione al rischio dell'investitore. Valori di  $\lambda$  alti penalizzano maggiormente la varianza, quindi il rischio del portafoglio.

Risolvendo il problema 2.11 con diversi valori di  $r_p$ , si trovano portafogli di minima varianza per ogni livello di rendimento atteso. Questi producono una curva, in particolare un'iperbole, come quella mostrata in figura 2.1. Tra tutti i portafogli che soddisfano un dato rendimento atteso minimo gli investitori preferiscono i portafogli a minima varianza perchè garantiscono basso rischio a parità delle altre condizioni, quindi l'intera frontiera è formata da portafogli ottimi. Lo stesso ragionamento si può fare sulla dimensione dei rendimenti, infatti

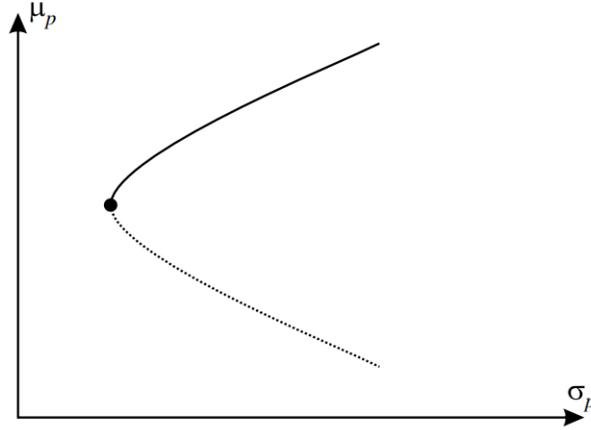


Figura 2.1: Frontiera efficiente nel piano rischio-rendimento

tracciando linee verticali sul grafico vediamo che per ogni livello di rischio sulla curva si trovano due portafogli. Dato che però un rendimento alto è preferito a uno basso, gli investitori sono interessati solo alla metà superiore della curva, nota come **frontiera efficiente**, perchè tutta la metà inferiore ne è dominata. Il punto più a sinistra della curva è il portafoglio a minima varianza (MV o GMV), cioè quello cercato da chi vuole l'investimento con il minor rischio possibile. Questo portafoglio si trova risolvendo il problema

$$\begin{aligned} \min_w \quad & \frac{1}{2} w' \Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & w' \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

che minimizza il rischio senza porre vincoli sul rendimento atteso. Il modello 2.14 è il primo esempio di portafoglio robusto perchè basato su statistiche non rumorose. Il concetto di robustezza verrà introdotto nel capitolo 3 ed è legato al problema dell'utilizzo dei vettori dei rendimenti attesi, non necessari per il calcolo del portafoglio GMV.

### 2.1.3 Limitazioni dell'ottimizzazione media-varianza

Nella sezione precedente abbiamo mostrato che per definire un problema di ottimizzazione di portafoglio con l'approccio media-varianza servono due fondamentali input: il vettore dei rendimenti attesi  $\mu$  e la matrice delle covarianze  $\Sigma$ . Potremmo credere ora che basti avere sufficienti dati passati e stimare gli input con la media campionaria e la matrice delle covarianze campionaria. Dato un campione di rendimenti passati  $r_{it}$  di asset indicizzati con  $i = 1, \dots, n$  nei periodi di tempo  $t = 1, \dots, T$ , gli stimatori sono rispettivamente

$$\bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it}, \quad S_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j).$$

Tale approccio nasconde diverse grandi insidie. Per dare un'idea della prima consideriamo un universo di  $n$  aziende e contiamo quanti parametri dobbiamo

stimare. Il vettore delle medie campionarie ha  $n$  entrate e la matrice delle covarianze ne ha  $n^2$  ma dato che è simmetrica possiamo considerare solo gli elementi della sua parte triangolare inferiore. Il numero totale di parametri è quindi

$$n + \sum_{i=1}^n i = n + \frac{n(n+1)}{2} \quad (2.15)$$

che per  $n = 4$  vale 14 ma nel caso più concreto di  $n = 500$  aziende diventa 125'750. Stimare un numero di parametri così alto è chiaramente difficile e quasi impossibile se vogliamo che siano anche affidabili: avremmo bisogno di serie storiche molto lunghe che in alcuni casi possono non esistere.

Un secondo problema, non trattato in questa tesi, è la validità dei dati e delle predizioni che si fanno a partire da essi ovvero la validità dell'usare conoscenza passata per predire eventi futuri. Anche avendo a disposizione serie storiche molto lunghe, queste potrebbero essere in gran parte non rilevanti dato che i mercati e probabilmente le aziende stesse sono cambiate radicalmente negli anni.

## 2.2 Modelli a fattori

Iniziamo questa sezione definendo il modello a singolo indice, ne elenchiamo le principali proprietà evidenziando la facilità della sua stima in termini di numero di parametri e discutiamo la diversificazione del rischio inteso come varianza. Risolviamo la massimizzazione dello Sharpe Ratio di un portafoglio definito tramite il modello a singolo indice e concludiamo la sezione con una breve discussione sui modelli multifattore.

### 2.2.1 Modello a singolo indice

Un modo per affrontare l'insidia presentata nella sezione precedente è ridurre la dimensionalità del problema, ad esempio introducendo un modello che semplifichi il modo in cui descriviamo le fonti del rischio, utilizzando un insieme più piccolo e coerente di fattori di rischio. La semplificazione emerge a causa delle covarianze positive osservate tra i rendimenti delle security derivanti da forze economiche comuni che influenzano le sorti della maggior parte delle imprese. Alcuni esempi di fattori economici comuni sono i cicli economici, i tassi di interesse e il costo delle risorse. Le variazioni di queste variabili causano contemporaneamente variazioni dei tassi di rendimento dell'intero mercato azionario. Decomponendo il rendimento delle aziende rispetto a questi fattori di rischio, semplifichiamo notevolmente il problema della stima della covarianza e della correlazione.

Un approccio ragionevole è quello di affermare che tasso di rendimento di un ampio indice di titoli come lo S&P 500 (o il DAX o il FTSE MIB) è un valido fattore finanziario comune. Questo approccio porta ad un modello simile al CAPM, chiamato **modello a singolo indice** perché utilizza l'indice di mercato come fattore comune. Il modello più semplice che si possa costruire è quindi una relazione lineare tra il rendimento di ogni asset, rappresentato dalle variabili casuali  $r_i, i = 1, \dots, n$ , e un singolo fattore di rischio comune legato al rendimento del mercato  $M$  rappresentato dalla variabile  $r_M$ .

Possiamo esprimere il modello a singolo indice sia in funzione dei rendimenti degli asset  $r_i$  e dell'indice di mercato  $r_M$  che dei rendimenti in eccesso  $R_i = r_i - r_f$  e  $R_M = r_M - r_f$ , dove  $r_f$  è il tasso d'interesse risk-free. In questa trattazione usiamo i rendimenti in eccesso ma tutte le definizioni e le proprietà sono analoghe. Assumendo la normalità dei rendimenti, il modello a singolo indice è fornito dal modello di regressione lineare

$$R = \alpha + \beta R_M + \epsilon \quad (2.16)$$

che viene impostato per ogni asset come

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.17)$$

L'intercetta di questa equazione (denotata dalla lettera alfa) è il rendimento in eccesso previsto quando il rendimento in eccesso del mercato è pari a zero, in alcune formulazioni del modello essa non è presente. Il coefficiente di pendenza,  $\beta_i$ , è la beta della security. Il Beta è la sensibilità del titolo all'indice: è la quantità con cui il rendimento della security tende ad aumentare o diminuire per ogni aumento di un punto percentuale del rendimento dell'indice. Il termine  $\epsilon_i$ , chiamato anche **residuo**, è il **fattore di rischio specifico** dell' $i$ -esimo asset;  $\beta$  e  $\epsilon$  sono anche chiamati fattori di rischio sistematici e idiosincratici.

Riguardo a quest'ultimo termine stiamo facendo le seguenti assunzioni:

- I rischi sistematici e specifici non sono correlati. Dopo aver stimato il modello utilizzando i minimi quadrati, dalla teoria della regressione lineare sappiamo che  $cov(R_M, \epsilon_i) = 0$ ;
- I rischi specifici sono variabili casuali con valore atteso  $E[\epsilon_i] = 0$ . Ciò ha senso, in quanto qualsiasi componente prevedibile dovrebbe essere inclusa nell'intercetta  $\alpha_i$ ;
- Non c'è correlazione tra i rischi specifici, ovvero vale

$$cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0, \quad i \neq j. \quad (2.18)$$

Ciò implica che la matrice delle covarianze degli asset sia diagonale che è una condizione forte e che vale davvero solo se il fattore comune spiega tutto il rischio. Quando più fattori di rischio comuni sono in gioco, possibilmente condizioni macroeconomiche, un solo fattore non spiega l'intera correlazione, e questo può riflettersi in errori correlati. Tuttavia, l'ipotesi della diagonalità è conveniente perchè permette di determinare l'intera matrice delle covarianze solo grazie alle varianze degli  $\epsilon_i$ .

### Proprietà del modello

Richiamiamo la notazione dei rendimenti attesi degli asset individuali e dell'indice

$$\mu_i = \mathbb{E}[r_i], \quad \mu_M = \mathbb{E}[r_M]$$

e dei rendimenti in eccesso (o risk premia),

$$\pi_i = \mathbb{E}[R_i] = \mu_i - r_f, \quad \pi_M = \mathbb{E}[R_M] = \mu_M - r_f.$$

Alla luce dell'equazione 2.17 possiamo dire che

$$\pi_i = \mathbb{E}[R_i] = \alpha_i + \beta_i \mathbb{E}[R_M] = \alpha_i + \beta_i \pi_M$$

cioè che il risk premium del generico asset  $i$  dipende da:

- il risk premium specifico  $\alpha_i$ , che dipende dall'esposizione al rischio specifico.  $\alpha_i$  può essere grande se una security è sottoprezzata e offre un rendimento atteso promettente;
- l'esposizione al rischio sistematico, che misura la sensitività di ogni asset al fattore di rischio comune, ripagata da  $\beta_i$ .

Richiamiamo dalla teoria della regressione lineare e dei minimi quadrati che  $\beta = \frac{\text{cov}(X,y)}{\text{Var}(X)}$ . Nel nostro caso l'intercetta è indicata con  $\alpha$ , mentre per la sensitività vale

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_M, R_i)}{R_M} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \quad (2.19)$$

dove  $\sigma_{iM}$  è la covarianza tra l'asset e il rendimento del mercato. Il rischio totale di un asset è invece la somma del rischio specifico e sistematico:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2, \quad (2.20)$$

dove  $\sigma_M^2$  e  $\sigma_{\epsilon_i}^2$  sono rispettivamente le varianze di  $R_M$  e  $\epsilon_i$ .

### Stima di un modello a fattori

In questa sottosezione mostriamo perchè è più semplice trattare un modello a fattori piuttosto che un'intera matrice delle covarianze. Abbiamo già calcolato le varianze nella 2.20 e sappiamo che richiedono i beta e le varianze dei rischi specifici e sistematici. Le covarianze tra gli asset, sotto l'ipotesi di modello diagonale, richiedono i beta e il rischi di mercato:

$$\text{cov}(R_i, R_j) = \beta_i \beta_j \sigma_M^2, \quad i \neq j. \quad (2.21)$$

Notiamo che grazie all'assunzione 2.18 non compare il termine  $\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j)$ . La correlazione è il prodotto delle correlazioni dei due asset con il fattore di rischio comune:

$$\rho_{ij} = \frac{\beta_i \beta_j \sigma_M^2}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{(\beta_i \sigma_M^2) \cdot (\beta_j \sigma_M^2)}{(\sigma_i \sigma_M) \cdot (\sigma_j \sigma_M)} = \rho_{im} \rho_{jm} \quad (2.22)$$

Riassumendo, per usare un modello di ottimizzazione media-varianza dobbiamo stimare:

- gli  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , per  $2n$  parametri
- le statistiche del fattore di rischio  $\mu_M$  (o  $\pi_M$ ) e  $\sigma_M^2$
- le varianze dei fattori di rischio specifici  $\sigma_{\epsilon_i}^2$ , per  $n$  parametri

Con questi  $(3n + 2)$  parametri stimati siamo in grado di coprire tutti gli input richiesti dall'universo di security e definire il modello a un fattore. Questo vale grazie all'assunzione 2.18, infatti se la matrice delle covarianze degli errori specifici non fosse diagonale dovremmo stimare tutte le  $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j)$ , che sono nell'ordine di  $n^2$ . Se riprendiamo l'esempio usato con la 2.15 vediamo che, invece di 125'750 parametri, ora dobbiamo stimarne 1502. Se vogliamo un'esempio reale e più significativo pensiamo al New York Stock Exchange che, contando circa 3'000 security, necessita di 9'002 parametri invece di 4.5 milioni.

### Il modello a fattori e la diversificazione

Il modello a fattori offre un'interessante visione riguardo alla diversificazione, tema centrale nell'analisi e nell'ottimizzazione di portafoglio. Supponiamo di avere un portafoglio di  $n$  security, l'excess return del portafoglio si può scrivere come

$$R_P = \alpha_P + \beta_P R_M + \epsilon_P \quad (2.23)$$

dove per ognuna delle security vale

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i \quad (2.24)$$

Ora mostriamo che, con l'aumento del numero di azioni incluse in questo portafoglio, la parte di rischio di portafoglio attribuibile a fattori non di mercato diventa sempre più piccola. Mentre questa parte di rischio è diversificabile, il rischio di mercato invece non scompare indipendentemente dal numero di asset combinati nel portafoglio. Per comprendere questo risultato si noti che il rendimento in eccesso del portafoglio, per il quale ogni peso sarà di  $w_i = 1/n$ , è

$$\begin{aligned} R_P &= \sum_{i=1}^n w_i R_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i + \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i \right) R_M + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i \end{aligned} \quad (2.25)$$

Vediamo come il portafoglio ha sensitività al mercato data da

$$\beta_P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i \quad (2.26)$$

cioè la media delle sensitività individuali, rendimento non-market di

$$\alpha_P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (2.27)$$

cioè la media degli alfa individuali, più la variabile a media nulla

$$\epsilon_P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i \quad (2.28)$$

che è la media delle componenti specifiche di ogni azione. Ne segue che la varianza del portafoglio è

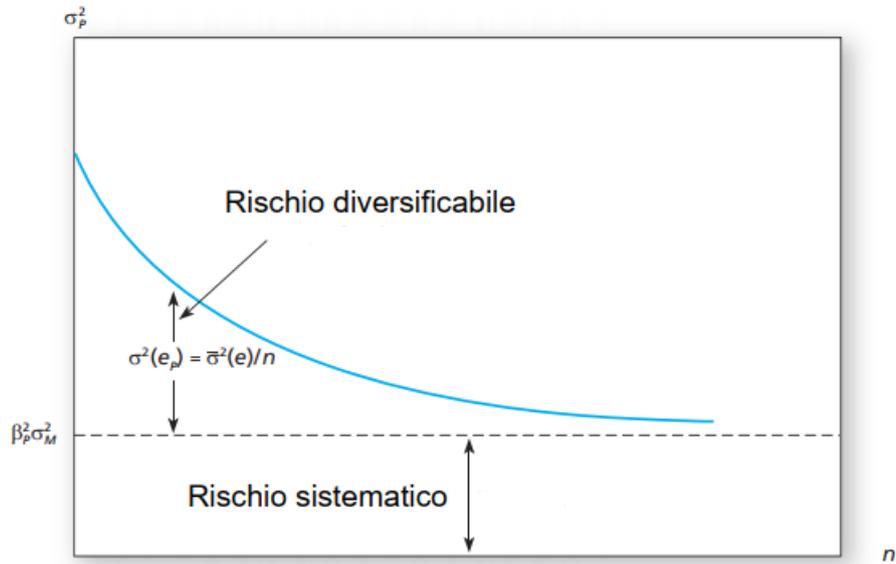


Figura 2.2: Varianza di un portafoglio equally weighted al variare di  $n$

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon_P}^2 \quad (2.29)$$

La componente sistematica della varianza di portafoglio dipende dai coefficienti di sensitività delle singole aziende. Non importa quante security sono incluse nel portafoglio, la loro esposizione sarà riflessa nel rischio sistematico e, a meno che tutti i beta siano uguali a zero, non sarà mai nulla. Al contrario, dato che le  $\epsilon_i$  sono indipendenti e hanno media nulla, la legge dei grandi numeri garantisce che più security aggiungiamo al portafoglio, più il rischio specifico tende a scomparire. Un rischio di questo tipo è detto **diversificabile**. Lo si vede matematicamente esaminando la formula della varianza del portafoglio unendo la 2.28 alla 2.29. Dato che le  $\epsilon_i$  sono scorrelate vale

$$\sigma_{\epsilon_P}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{\epsilon_i}^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}_\epsilon^2 \quad (2.30)$$

dove  $\bar{\sigma}_\epsilon^2$  è la media delle varianze specifiche. Al crescere di  $n$  quindi  $\sigma_{\epsilon_P}^2$  diventa trascurabile.

Per riassumere, all'aumentare della diversificazione la varianza totale di un portafoglio si avvicina alla sua varianza sistematica, componente non diversificabile del rischio definita come la varianza del fattore di mercato moltiplicata per il quadrato del coefficiente di sensibilità del portafoglio,  $\beta_P^2$ . Ciò è illustrato nella Figura 2.2.

### Ottimizzazione di portafoglio all'interno del modello a singolo indice

Come primo semplice esempio di ottimizzazione di portafoglio affrontiamo la massimizzazione dello Sharpe ratio non vincolato tramite il framework del modello a singolo indice. Indicati con  $w_i$  i pesi del portafoglio, il suo rendimento

in eccesso è:

$$\begin{aligned} R_p &= \sum_{i=1}^n w_i(\alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i) = \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i + R_M \sum_{i=1}^n w_i \beta_i + \sum_{i=1}^n w_i \epsilon_i \\ &= \alpha_p + \beta_p R_M + \epsilon_p \end{aligned} \quad (2.31)$$

dove

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i, \quad \beta_p = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i, \quad \epsilon_p = \sum_{i=1}^n w_i \epsilon_i \quad (2.32)$$

sono rispettivamente l'alfa, il beta e l'epsilon del portafoglio. Il risk premium del portafoglio è dunque

$$\pi_p = \mathbb{E}[R_p] = \alpha_p + \beta_p \pi_M, \quad (2.33)$$

dove  $\pi_M$  è il risk premium del portafoglio di mercato, e la sua varianza è

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sum_i w_i^2 \sigma_{\epsilon_i}^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon_p}^2, \quad (2.34)$$

dove  $\sigma_{\epsilon_p}^2 = \sum_i w_i^2 \sigma_{\epsilon_i}^2$  è la varianza residue del portafoglio, cioè la componente associata al rischio specifico.

Ora possiamo esprimere lo Sharpe ratio come

$$\frac{\pi_p}{\sigma_p} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \alpha_i + \pi_M \sum_{i=1}^n w_i \beta_i}{\left[ \sigma_M^2 \left( \sum_{i=1}^n w_i \beta_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_{\epsilon_i}^2 \right]^{1/2}}. \quad (2.35)$$

Sappiamo di poter massimizzare lo Sharpe ratio tramite un sistema di equazioni lineari in funzioni di pseudo-pesi  $x_i$  che vanno normalizzati per ottenere i veri pesi  $w_i$ . Usando l'equazione  $\Sigma x = \pi$ , scriviamo le condizioni di ottimalità del prim'ordine

$$\sigma_M^2 \beta_k \left( \sum_{i=1}^n x_i \beta_i \right) + x_k \sigma_{\epsilon_k}^2 = \alpha_k + \pi_M \beta_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.36)$$

che riscritto isolando l'incognita diventa

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n x_i \beta_i + x_k \left( \beta_k + \frac{\sigma_{\epsilon_k}^2}{\sigma_M^2 \beta_k} \right) = \frac{\alpha_k + \pi_M \beta_k}{\sigma_M^2 \beta_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.37)$$

Una volta risolte le equazioni e trovato il vettore delle  $x$  basta normalizzare per trovare i veri pesi. La soluzione è molto semplice perchè non abbiamo messo vincoli particolari e permettiamo anche short-sales.

## 2.2.2 Modelli multifattore

Il modello a indice singolo è concettualmente molto utile ma è improbabile che un singolo fattore comune possa spiegare completamente la componente sistematica dei rendimenti azionari. Una conseguenza è che il modello risultante non è diagonale, cioè troviamo rischi residui specifici che sono correlati. L'altra conseguenza è che non siamo in grado di valutare il rischio e prevedere  $\alpha$  con

precisione. Per questo come generalizzazione del modello a indice unico sono stati proposti i modelli multifattore:

$$R_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_{ij} F_j + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.38)$$

dove vengono inclusi  $m$  fattori di rischio  $F_j$ . E' importante notare come anche in questo framework i rischi specifici sono legati agli asset e non ai fattori di rischio e quindi sono indicizzati con  $i$ . Gli  $\epsilon_i$  sono scorrelati e i coefficienti  $\beta_{ij}$  misurano l'esposizione dell'asset  $i$  al fattore di rischio sistematico  $j$ . Le esposizioni sono raccolte nella matrice  $\beta \in \mathbb{R}^{N \times m}$  dove le dimensioni corrispondono al numero di asset e al numero di fattori di rischio. Chiamata  $\Sigma_F$  la matrice delle covarianze dei fattori, vale la proprietà

$$\Sigma = \beta \Sigma_F \beta' + D \quad (2.39)$$

dove  $D$  è la matrice delle covarianze dei residui che però è diagonale e quindi contiene solo le varianze.

Riguardo alla scelta dei fattori c'è molta discrezionalità, si possono includere:

- fattori finanziari legati a mercati come indici o portafogli benchmark. In questo caso è naturale usare i loro rendimenti come fattori sistematici;
- fattori finanziari legati a misure di contabilità usate in corporate finance come il rapporto book-to-market. Questi fattori sono chiamati *fondamentali* e non si esprimono come rendimenti;
- fattori *macroeconomici* come inflazione o il prezzo del petrolio. Anche questi non si esprimono come rendimenti;
- fattori *comportamentali* come il momento che misurano le anomalie del mercato.

Il modello multifattore più noto è forse quello a tre fattori di **Fama-French**. Al rischio di mercato sono aggiunti due fattori basati sulla grandezza dell'azienda e sul suo rapporto book-to market. Il primo considera la differenza empirica tra i rendimenti di piccole e grandi aziende, il secondo tra azioni *value* e *growth*. Il modello di regressione per ogni azienda è il seguente:

$$R_{it} = \alpha_i + b_i R_{Mt} + s_i \text{SMB}_t + h_t \text{HML}_t + \epsilon_{it} \quad (2.40)$$

dove SMB è small-minus-big riferito ai rendimenti di grandi e piccole aziende e HML è high-minus-low, riferito ai valori del book-to-market ratio.

## Capitolo 3

# Ottimizzazione robusta di portafoglio

Un problema fondamentale dell'ottimizzazione media-varianza che non abbiamo ancora presentato è la sensibilità ai dati in input. Consideriamo un esempio che si basa su dati e simulazioni numeriche per renderci conto dell'entità del problema. Un investitore con avversione al rischio  $\lambda = 2.5$  vuole costruire un portafoglio formato da tre asset di distribuzione multinormale  $r \sim N(\cdot)$  caratterizzati dai seguenti parametri:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.015 \\ 0.04 \\ 0.029 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0.0256 & 0.0159 & 0.0113 \\ 0.0159 & 0.0412 & 0.0199 \\ 0.0113 & 0.0199 & 0.0219 \end{bmatrix}.$$

$\Sigma$  e  $\mu$  sono i parametri veri, quelli che generano i rendimenti che l'investitore osserva. Invece di conoscere i parametri della distribuzione, l'investitore conosce solo i rendimenti mensili realizzati dagli asset. Ipotizziamo che l'investitore abbia a disposizione i rendimenti degli asset degli ultimi tre anni e che debba costruire il portafoglio sulla base di questi. Può quindi osservare 36 realizzazioni della distribuzione dei rendimenti e, a partire da questi, stimarne i parametri. Quanto descritto è esattamente il procedimento che un investitore nel mondo reale deve seguire per impostare un problema di media-varianza, infatti nessuno conosce le distribuzioni che generano i rendimenti degli asset ma può solo osservarne le realizzazioni. Simuliamo 36 realizzazioni della variabile  $r$ , esse sono i rendimenti che l'investitore osserva. Dalla stima dei parametri  $\bar{R}$  e  $S$  come nella sezione 2.1.3 otteniamo

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0.0434 \\ 0.0373 \\ 0.0371 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} 0.0164 & 0.0139 & 0.0078 \\ 0.0139 & 0.0331 & 0.014 \\ 0.0078 & 0.014 & 0.0176 \end{bmatrix}.$$

L'errore medio nella stima degli elementi della matrice delle covarianze è circa del 20% mentre gli errori relativi alla stima del vettore dei rendimenti attesi sono del -200%, 6% e del -30%. Le computazioni mostrano che la stima dei parametri con così poche osservazioni produce errori di notevole rilevanza. Le differenze tra i parametri forniti in input al modello media-varianza si riflettono nei risultati ottenuti, abbiamo infatti

$$w = \begin{bmatrix} 0.1392 \\ 0.2348 \\ 0.6260 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{w} = \begin{bmatrix} 0.7529 \\ -0.1599 \\ 0.4072 \end{bmatrix},$$

dove  $w$  è il vettore dei pesi ottenuto risolvendo il modello 2.13 con i parametri corretti  $\mu$  e  $\Sigma$  (possiamo considerarlo il portafoglio corretto) e  $\hat{w}$  è il vettore dei pesi ottenuto dai parametri stimati  $\bar{R}$  e  $S$ . I due portafogli sono molto diversi: il peso del primo asset nel portafoglio dell'investitore è sei volte più grande del peso vero e il quello del terzo asset è circa di un terzo più piccolo. La differenza più evidente è quella relativa al secondo asset, a cui il primo portafoglio alloca un quarto della ricchezza mentre nel portafoglio dell'investitore è presente come vendita allo scoperto.

L'esempio mostra quanto l'ottimizzazione media-varianza sia sensibile a variazioni dei dati in input dovuti a errori di stima, come in questo caso, o ai dati differenti a disposizione dei vari investitori. Recentemente sono stati proposti approcci alla costruzione di portafoglio che migliorano la robustezza dei modelli di ottimizzazione. Il capitolo prosegue presentando alcuni dei metodi robusti che possono essere usati per la costruzione di portafogli.

## 3.1 Ottimizzazione robusta

In questa sezione introduciamo il framework dell'ottimizzazione robusta partendo dal concetto di incertezza in opposizione a quello di rischio e definendo l'ottimizzazione worst case. Successivamente definiamo la controparte robusta per un problema di ottimizzazione e forniamo un esempio di definizione della controparte robusta di un problema di ottimizzazione di portafoglio. Concludiamo la sezione definendo alcuni dei più noti insiemi d'incertezza e formuliamo le controparti robuste di semplici modelli di ottimizzazione che li usano.

### 3.1.1 Robustezza

La definizione di robustezza può nascere dal principale problema del modello media-varianza: i modelli robusti sono un approccio i cui risultati non sono sensibili a piccole variazioni dei dati assunti dal modello. La versione robusta del modello media-varianza costruirà portafogli i cui pesi relativi ad ogni asset sono stabili indipendentemente da piccoli cambiamenti del vettore dei rendimenti attesi e della matrice delle covarianze. La robustezza può riferirsi sia ai pesi, quindi il risultato del modello, che alla performance, ovvero la ricchezza dell'investitore. In ogni caso le due cose non possono essere separate perchè la seconda dipende dalla prima.

Per comprendere a fondo la robustezza bisogna indagare il concetto di incertezza e la differenza con il rischio. Prendiamo per esempio la lotteria 1 definita nel seguente modo: possiamo scegliere tra due urne, A e B, entrambe contenenti 100 palline rosse e verdi. L'urna A contiene 20 palline rosse che corrispondono alla vincita di 5\$ e 80 palline verdi che corrispondono alla vincita di 30\$. L'urna B invece contiene 74 palline rosse che corrispondono alla perdita di 1\$ e 26 verdi che corrispondono alla vincita di 100\$. L'investitore valuta le due lotterie basandosi sull'atteso e su una misura di rischio, in questo caso la volatilità.

| Urna | Rosso | Verde | $\mu$ | $\sigma$ |
|------|-------|-------|-------|----------|
| A    | 5     | 20    | 25    | 10.05    |
| B    | -1    | 100   | 25.3  | 44.53    |

Un investitore avverso al rischio, a parità di valore atteso, sceglierebbe la lotteria A perchè  $\sigma_A < \sigma_B$ , cioè è meno rischiosa. Consideriamo ora un'altra lotteria, sempre composta da due urne con 100 palline ciascuna. L'urna A contiene 50 palline rosse che corrispondono alla vincita di 0\$ e 50 palline verdi che corrispondono alla vincita di 100\$. Dell'urna B invece si sa che contiene palline verdi e rosse con le stesse proprietà della A ma non quante ce ne sono di un tipo o dell'altro.

| Urna | Rosso | Verde | $\mu$ | $\sigma$ |
|------|-------|-------|-------|----------|
| A    | 0     | 100   | 50    | 50.25    |
| B    | 0     | 100   | ?     | ?        |

Se l'investitore sapesse la proporzione di palline di un colore e dell'altro la scelta sarebbe ovvia ma per una delle due urne non abbiamo la distribuzione dei dati, per questo non possiamo più parlare di rischio ma dobbiamo parlare di incertezza. L'investitore sa che se, nel peggior caso, l'urna B contenesse solo palline rosse il risultato della sua pescata da quell'urna sarebbe per forza 0\$, quindi preferisce l'urna A.

In questo esempio la scelta ottima per l'investitore avverso all'incertezza è stata presa osservando il **worst case**, nella stessa maniera si può applicare ottimizzazione worst case alla selezione di portafoglio per minimizzare il rischio in una situazione incerta. Le stime dei parametri  $\mu$  e  $\Sigma$  per il modello media-varianza vengono fatte sulla base di dati passati ma con l'obiettivo di predire dati futuri, e anche se i dati osservati seguono perfettamente una particolare distribuzione non abbiamo nessuna certezza che lo facciano anche i dati futuri. Dato che i rendimenti futuri delle azioni non sono noti con certezza, si può scegliere il miglior portafoglio come quello che riduce le future perdite nel caso i rendimenti realizzati siano i peggiori tra quelli possibili.

### 3.1.2 Controparte robusta

Ora spieghiamo come funziona l'ottimizzazione robusta con un esempio legato all'ottimizzazione di portafoglio. Dato un problema di ottimizzazione standard,

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

introduciamo incertezza relativa alle funzioni del problema. In questo caso vogliamo trovare l'ottimo tra tutte le possibili soluzioni che soddisfano i vincoli. Il problema quindi si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x, u) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x, u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathfrak{U}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{3.1}$$

dove  $f(x, u)$  e  $g_i(x, u)$  sono le versioni incerte di  $f(x)$  e  $g_i(x)$  con l'insieme d'incertezza  $u \subset \mathbb{R}$ . Il problema, così scritto, è chiamato **controparte robusta**

e può essere visto come una collezione di problemi indicizzati da  $u \in \mathfrak{U}$ . È importante notare che, per come l'abbiamo definita, la controparte robusta è una costruzione relativa ai vincoli del problema. Si può anche definire passando dalla funzione obiettivo impostando il problema come

$$\begin{aligned} \min_x & \left( \max_{u \in \mathfrak{U}} f(x, u) \right) \\ \text{s.t.} & \quad g_i(x, u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathfrak{U}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

ma è uso in ogni caso trasformare il problema in modo che l'incertezza agisca sui vincoli, perciò si introduce una variabile ausiliaria  $z$  e il problema si trasforma in

$$\begin{aligned} \min & \quad z \\ \text{s.t.} & \quad g_i(x, u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathfrak{U}, \quad i = 1, \dots, m. \\ & \quad f(x, u) \leq z \quad \forall u \in \mathfrak{U}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

A seconda dell'insieme d'incertezza, di cui parleremo nella prossima sezione, il problema può essere caratterizzato da un numero infinito di vincoli che rendono il problema intrattabile. Nell'ottimizzazione robusta perciò si impone l'approccio worst-case, solo la peggior situazione all'interno dell'insieme d'incertezza è considerata per trovare la soluzione ottima.

### Esempio di ottimizzazione robusta: portafoglio di minima varianza

Consideriamo il seguente problema quadratico volto a costruire il portafoglio di minima varianza con rendimento atteso sopra un certo valore  $r \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \min_{\omega} & \quad \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega \\ \text{s.t.} & \quad \mu' \omega \geq r \\ & \quad \omega' \mathbf{1} = 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Se il rendimento atteso dei titoli  $\mu \in \mathbb{R}^N$  è incerto ma si sa che vive all'interno del set  $\mathfrak{U}_\mu$ , il problema si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \min_{\omega} & \quad \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega \\ \text{s.t.} & \quad \mu' \omega \geq r \quad \forall \mu \in \mathfrak{U}_\mu \\ & \quad \omega' \mathbf{1} = 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Notiamo subito per la sua geometria che il vincolo  $\mu' \omega \geq r$  è soddisfatto  $\forall \mu \in \mathfrak{U}_\mu$  se il minimo rendimento che il portafoglio può garantire è maggiore o uguale a  $r$ . Di conseguenza possiamo garantire il vincolo del problema 3.4 se vale nel peggior caso

$$\min_{\mu \in \mathfrak{U}_\mu} \mu' \omega \geq r. \tag{3.5}$$

L'idea dietro questo esempio è molto semplice ma la miglior soluzione nel worst-case non è sempre facilmente calcolabile. La trattabilità dei problemi di ottimizzazione robusta dipende da come l'insieme d'incertezza, finora indicato solo con  $\mathfrak{U}$ , è definito. Affrontiamo il problema nella seguente sezione.

### 3.1.3 Insiemi d'incertezza

L'insieme d'incertezza rappresenta come l'incertezza viene modellata nel problema e perciò è probabilmente la componente più importante dell'ottimizzazione robusta. È l'oggetto che distingue questo metodo di ottimizzazione dagli altri perchè molte alternative assumono distribuzioni di probabilità invece di definire un insieme di possibili valori, di fatto, equiprobabili. Viene posta molta attenzione nella scelta dell'insieme d'incertezza perchè determina direttamente la trattabilità dell'intero problema. Da essa dipende anche il trade off tra rischio e rendimento, in quanto diverse scelte di insiemi d'incertezza possono portare a soluzioni troppo conservative.

La più semplice forma d'incertezza è data dall'*insieme d'incertezza a scenari* definito come

$$\mathfrak{U} = \{u^{(1)}, \dots, u^{(s)}\}$$

dove  $u^{(1)}, \dots, u^{(s)} \in \mathbb{R}^n$  sono vettori che rappresentano gli  $s$  scenari. Poichè la formulazione robusta non è affetta dall'utilizzo del convex hull dell'insieme d'incertezza, si può usare anche la forma  $\text{Conv}\{u^{(1)}, \dots, u^{(s)}\}$  che definisce l'*incertezza poliedrale*. Questo tipo di insieme è il più intuitivo ma è soggetto ad una grossa limitazione: dato che la maggior parte dei problemi richiede un numero molto grande di scenari per avere una rappresentazione realistica dell'incertezza, spesso diventa computazionalmente inutilizzabile.

Un'alternativa agli scenari è definire un intervallo per i possibili valori. L'*insieme d'incertezza a intervallo* ( o *box*) è definito con un limite inferiore  $b_k$  e uno superiore  $t_k$  per ogni parametro incerto  $u_k$ :

$$\mathfrak{U} = \{b \leq u \leq t\}. \quad (3.6)$$

L'ultima, e più importante, forma è l'*insieme d'incertezza ellissoidale*, definita come

$$\mathfrak{U} = \{u | u = u_0 + Mv, \|v\|_2 \leq 1\}, \quad (3.7)$$

dove  $M$  è una matrice non singolare in  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Oltre alla  $\|\cdot\|_2$  si possono usare altra norme e definire regioni di forme diverse.

#### Programmazione lineare robusta: insiemi box e ellissoidali

Tra tutte le geometrie possibili, gli insiemi più frequenti sono quelli a scatola e ellissoidale. Vengono utilizzati perchè portano alla formulazione di problemi che possono essere risolti computazionalmente in modo efficiente. Mostriamo ora come da questi due insiemi si arrivino a formulare modelli lineari robusti.

Consideriamo il seguente modello lineare incerto

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c'x \\ \text{s.t.} \quad & a'_i x \leq b_i \quad \forall a_i \in \mathfrak{U}_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

dove  $c \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}$  sono noti mentre l'incertezza arriva dagli  $a_i \in \mathbb{R}^n$ . Ora esprimiamo gli  $a_i$  con intervalli d'incertezza a box nella forma

$$a_i^0 - \delta_i \leq a_i \leq a_i^0 + \delta_i \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

dove  $a_i^0 \in \mathbb{R}^n$  è il valore nominale e  $\delta_i \in \mathbb{R}_+^n$  limita la distanza dal valore nominale. Notiamo che questa definizione è diversa da quella dell'equazione 3.6: gli estremi dell'intervallo non sono definiti direttamente da un upper e un lower bound. Ora l'intervallo è visto come deviazione da un valore fisso in un modo che ricorda l'incertezza nelle misurazioni fisiche. L'ampiezza dell'insieme d'incertezza a scatola è controllata dai  $\delta_i$  e la soluzione diventa tanto più robusta quanto più questi aumentano perchè aumentano anche i valori assumibili. Per questo insieme d'incertezza il worst case è chiaramente l'upper bound

$$\max_{a_i \in \mathfrak{U}_i} a_i' x = (a_i^0 + \delta_i)' x \quad (3.9)$$

perchè tende verso  $b_i$ . La controparte robusta del problema originale resta un problema lineare,

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c' x \\ \text{s.t.} \quad & (a_i^0 + \delta_i)' x \leq b_i \quad \forall a_i \in \mathfrak{U}_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Lo stesso problema può anche essere formulato usando un insieme d'incertezza ellissoidale,

$$\mathfrak{U}_i = \{a_i^0 + P_i v \mid \|v\|_2 \leq 1\}$$

dove  $v$  è un vettore in  $\mathbb{R}^n$ ,  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è una matrice non singolare e  $a_i^0$  è sempre il valore nominale. Il worst case si può derivare come

$$\begin{aligned} \max\{a_i' x \mid a_i \in \mathfrak{U}_i\} &= \max\{(a_i^0 + P_i v)' x \mid \|v\|_2 \leq 1\} \\ &= a_i^0' x + \max\{v' P_i' x \mid \|v\|_2 \leq 1\} \\ &= a_i^0' x + \|P_i' x\|_2, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$|v' P_i' x| \leq \|v\|_2 \|P_i' x\|_2.$$

Alla fine la formulazione robusta del problema diventa

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c' x \\ \text{s.t.} \quad & a_i^0' x + \|P_i' x\|_2 \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.11)$$

che è un problema SOCP e quindi esistono algoritmi efficienti per la sua soluzione. Come mostrato in questa sezione, un problema di ottimizzazione con una componente incerta può essere formulato in diversi modi a seconda della geometria dell'insieme d'incertezza. Questa può variare in maniera significativa la trattabilità del problema, perciò è importante ribadire l'importanza della definizione di insiemi d'incertezza che portino a problemi trattabili computazionalmente.

## 3.2 Costruzione di portafogli robusti

In questa breve sezione spieghiamo come costruire portafogli robusti in media-varianza. Copriamo il caso in cui l'incertezza sia assunta sui rendimenti attesi: rappresentiamo l'insieme d'incertezza e successivamente impostiamo il modello di ottimizzazione. Concludiamo la sezione mostrando il codice Python necessario per implementare il calcolo del portafoglio.

### 3.2.1 Portafogli robusti con box uncertainty

All'inizio del capitolo abbiamo presentato un problema determinante nell'implementazione dei portafogli media-varianza: la sensibilità ai dati in input. Abbiamo anche evidenziato che variazioni nel vettore dei rendimenti attesi impattano fortemente i risultati, per questo studiamo il modello con box uncertainty relativa ad esso.

Cambiamo leggermente la formulazione della 2.13 e scriviamo il problema media-varianza come

$$\begin{aligned} \min_w \quad & w' \Sigma w - \lambda \mu' x \\ \text{s.t.} \quad & w' \mathbf{1} = 1, \end{aligned} \tag{3.12}$$

la formulazione della sua controparte robusta è la seguente:

$$\begin{aligned} \min_w \max_{\mu \in \mathfrak{A}_\mu} \quad & w' \Sigma w - \lambda \mu' x \\ \text{s.t.} \quad & w' \mathbf{1} = 1. \end{aligned} \tag{3.13}$$

La box uncertainty per i rendimenti attesi è definita come

$$\{\mu : |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i, i = 1, \dots, N\} \tag{3.14}$$

dove  $\hat{\mu} \in \mathbb{R}^N$  è la stima del vettore e i range delle incertezze sono date da  $\delta \in \mathbb{R}^N$ . La controparte robusta si può scrivere quindi come

$$\begin{aligned} \min_w \max_{\mu \in \{\mu : |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i, i=1, \dots, N\}} \quad & w' \Sigma w - \lambda \mu' x \\ \text{s.t.} \quad & w' \mathbf{1} = 1. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Per decidere i valori di  $\delta$  ci sono diverse strategie, nessuna riconosciuta come universalmente meglio delle altre. Si può scegliere un valore fisso e usarlo per tutte le  $i$  oppure assegnare a  $\delta_i$  la distanza tra  $\hat{\mu}_i$  e il massimo o il minimo rendimento del titolo. Una strategia molto comune è, assunta la distribuzione normale dei rendimenti, di usare intervalli di confidenza del tipo

$$\left( \hat{\mu} - \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{T}}, \hat{\mu} + \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{T}} \right)$$

dove  $T$  è la dimensione del campione e  $z_{\alpha/2}$  è lo  $z$  corrispondente al livello  $1 - \alpha$ . Una volta scelto il vettore  $\delta$  procediamo a trasformare la definizione che abbiamo dato della controparte robusta in un problema trattabile computazionalmente.

Per il titolo  $i$ , l'insieme di possibili rendimenti assumibili è

$$\hat{\mu}_i - \delta_i \leq \mu_i \leq \hat{\mu}_i + \delta_i.$$

Se il peso  $w_i$  è allocato al titolo  $i$ , ogni peggior rendimento vale

$$\begin{cases} (\mu_i - \delta_i)w_i & \text{se } w_i > 0 \\ 0 & \text{se } w_i = 0 \\ (\mu_i + \delta_i)w_i & \text{se } w_i < 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

ma tale scrittura si può riassumere in

$$\hat{\mu}_i w_i - \delta_i |w_i|$$

che ci permette di scrivere la 3.15 come

$$\begin{aligned} \min_w \quad & w' \Sigma w - \lambda (\hat{\mu}' w - \delta' |w|) \\ \text{s.t.} \quad & w' \mathbf{1} = 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Seguendo [4], dividiamo il vettore  $w$  nella sua componente positiva  $w_+ \in \mathbb{R}^N$  e negativa  $w_- \in \mathbb{R}^N$ , entrambe non-negative, tali che  $w = w_+ - w_-$ . Invece che impostare un problema in tre variabili, possiamo cambiare notazione e utilizzare una sola variabile di lunghezza  $2N$  assieme a due matrici che la trasformano. Al posto di  $w$  introduciamo  $x \in \mathbb{R}^{2N}$  dove i primi  $N$  elementi rappresentano la componente positiva di  $w$  e i secondi  $N$  quella negativa. Definiamo anche le due matrici  $T$  e  $T_{abs}$  appartenenti a  $\mathbb{R}^{N \times 2N}$ :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [I, -I]$$

$$T_{abs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I, I].$$

Con la nuova notazione possiamo definire

$$w = Tx \quad \text{e} \quad |w| = T_{abs}x$$

e scrivere finalmente la versione computazionalmente trattabile della controparte robusta:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x' T' \Sigma T x - \lambda (\hat{\mu}' T - \delta' T_{abs}) x \\ \text{s.t.} \quad & x' T' \mathbf{1} = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Una volta trovata la  $x$  ottima, il portafoglio corrispondente è  $w = Tx$ .

## Implementazione in Python

Procediamo all'implementazione del modello di ottimizzazione robusta. Questa sottosezione si basa, così come il resto della tesi, sul software di programmazione Python che comprende numerose librerie utili e adeguate all'analisi. Per l'ottimizzazione di portafoglio ci basiamo sulle librerie `gurobipy` e `rsome`. Python offre diversi ottimizzatori gratuiti, in questa tesi utilizziamo la libreria `gurobipy` che fornisce un ottimo algoritmo di ottimizzazione utilizzabile per modelli di varie difficoltà, anche non convessi.

Implementiamo il modello 3.18 come una funzione che dati  $\Sigma$  e  $\mu$  restituisca il portafoglio robusto ottimo in media-varianza. Definiamo  $\delta$  come nella 3.16 e settiamo l'avversione al rischio  $\lambda = 2$ , la funzione risulta essere:

```
1 # importo le librerie necessarie
2 import gurobipy as gp
3 from gurobipy import GRB
4 from math import sqrt
5
6 # varcov = matrice delle covarianze, mu = vettore dei rend attesi
7 def robust_pf(varcov, mu):
8     # creo il modello
9     mro = gp.Model()
10
11     # dimensione del problema
12     n = varcov.shape[0]
13     Id = np.identity(n)
14     # matrici di trasformazione
15     T = np.hstack((Id,-Id))
16     T_abs = np.hstack((Id,Id))
17     # variabili x di dimensione 2N
18     x = mro.addMVar(2*n)
19     # T x
20     xT = mro.addMVar(n)
21     # T_abs x
22     xTabs = mro.addMVar(n)
23     # T x Sigma
24     xTSigma = mro.addMVar(n)
25     # vettore delle incertezze
26     sig = np.ones((n))* 1.95 * sqrt(np.diag(varcov)) / sqrt(n)
27
28     mro.addConstr(xT == T @ x)
29     mro.addConstr(xTabs == T_abs @ x)
30     mro.addConstr(xTSigma == varcov @ xT)
31     mro.addConstr(xT @ np.ones(n) == 1)
32     mro.addConstr(x>=0)
33     # funzione obiettivo x'T'SigmaTx - muTx + lambda delta'T_abs x
34     mro.setObjective(xT @ xTSigma - mu@xT + 2*sig@xTabs)
35     mro.params.NonConvex = 2
36     mro.optimize()
37
38     # restituisco il portafoglio ottimo w = Tx
39     return xT.X
```

Useremo la funzione `robust_pf` nel capitolo 5 quando dovremo costruire un portafoglio robusto per confrontarlo con altri portafogli.

### 3.3 Ottimizzazione del CVaR

Proponiamo come esempio di ottimizzazione robusta di portafoglio l'ottimizzazione del CVaR. Il CVaR verrà introdotto nella sezione 4.1.1 come l'atteso delle perdite condizionate ad essere maggiori del VaR. Per la lettura di dati finanziari ci affidiamo a `API_FIDA`, un'API di proprietà di FIDA che si connette al database dell'azienda. Grazie alla funzione `API_PData_DF` riusciamo data una lista di titoli identificati tramite ticker, l'intervallo di tempo, la valuta e la frequenza di misurazione, a scaricare i total return degli strumenti finanziari presenti nel database.

Nel nostro esempio possiamo investire su  $N$  titoli con un orizzonte di investimento pari a un mese. Utilizziamo come dati i rendimenti mensili  $R$  dei tre anni che vanno dal '01-01-2018' al '01-01-2021'. Ogni realizzazione mensile degli  $N$  rendimenti, cioè la riga della matrice  $R$ , rappresenta uno scenario ovvero una possibile realizzazione dei rendimenti dei titoli alla fine del prossimo mese. Trentasei mesi di dati passati ci forniscono trentasei scenari e ogni scenario  $s \in S$  è caratterizzato da una probabilità  $\pi_s$ . Questo è un caso molto semplice di ottimizzazione a singolo periodo e singolo stadio. Supponiamo di possedere una ricchezza iniziale  $w = 1$  da spartire tra gli  $N$  titoli per costruire un portafoglio long-only  $x$  e di voler realizzare un rendimento atteso minimo  $\mu_m$ . La seguente porzione di codice raccoglie tutti i dati:

```
1     ### Ottimizzazione CVaR
2     import API_FIDA as API
3     import numpy as np
4
5     stocks = ['AMAZON', 'EBAY', 'ENI']
6     data_start = '2018-01-01'
7     data_end = '2021-01-01'
8     data = API.FIDA_API_PData_DF(stocks, 2, 'EUR', data_start,
9     data_end, 'monthly')
10    data.replace("NaN", np.nan, inplace=True)
11    data.dropna(inplace=True)
12    data = data.sort_index(ascending=False).astype('float64')
13
14    # matrice dei rendimenti
15    R = data.values
16    # s: numero di scenari o osservazioni; n: numero di titoli
17    s, n = R.shape
18    # lower e upper bond per la condizione long-only
19    x_lb = np.zeros(n)
20    x_ub = np.ones(n)
21    # alpha
22    alpha = 0.05
23    # ricchezza spartita
24    w = 1
25    # rendimento minimo atteso
26    mu_m = 0.01
```

#### 3.3.1 Ottimizzazione standard

Per trovare il portafoglio  $x$  dobbiamo definire il modello da ottimizzare. Riporiamo quindi un importante teorema che ci permette di impostare il problema di ottimizzazione come un modello di programmazione lineare.

**Teorema 1.** Sia  $L(x, Y)$  una loss function che dipende da un vettore di variabili decisionali  $x$  e da un vettore di variabili casuali  $Y$  caratterizzate dalla densità congiunta  $f_Y(y)$ . Definiamo la seguente funzione

$$H_{1-\alpha}(x, V) = V + \frac{1}{\alpha} \int [L(x, y) - V]^+ f_Y(y) dy \quad (3.19)$$

dove  $[z]^+ = \max(z, 0)$  e  $V \in \mathbb{R}$  è una variabile ausiliaria. Allora:

- Per una data scelta di  $x$ , l'ottimizzazione del  $CVaR_{1-\alpha}$  si ottiene minimizzando  $H_{1-\alpha}(x, V)$  rispetto a  $V$ . Il corrispondente valore della variabile ausiliaria  $V$  è il  $VaR_{1-\alpha}$ .
- Minimizzare  $H_{1-\alpha}(x, V)$  rispetto a entrambe le variabili equivale a minimizzare il  $CVaR_{1-\alpha}$ .

Non è nostra intenzione dimostrare il teorema, ci limitiamo ad usarlo per impostare il problema di ottimizzazione. Nel nostro caso  $Y$  è una variabile discreta che rappresenta gli scenari e, nel caso più semplice non robusto, vale  $f_Y(y) = \pi = [1/36, \dots, 1/36]$ . L'argomento dell'integrale nella 3.19 è la differenza tra la loss function e il VaR e può solo essere positiva, quindi l'integrale è la sommatoria di tutte le perdite in eccesso che superano il VaR moltiplicate per la loro probabilità. Seguendo [5] definiamo il problema di minimizzazione del CVaR come:

$$\begin{aligned} \min \quad & V + \pi' u \\ \text{s.t.} \quad & u_s + \sum_{i=1}^N R_i x_i + V \geq 0, \quad \forall s \in S \\ & u_s \geq 0 \quad \forall s \in S \\ & \pi' R x \geq \mu_m \\ & 0 \leq x \leq 1 \\ & \sum x_i = 1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

La funzione obiettivo è la 3.19: la media delle perdite in eccesso definite nei primi due vincoli. Il vincolo  $\pi' R x \geq \mu_m$  esprime il minimo rendimento atteso da rispettare, questo si capisce subito chiamando  $\bar{R}_i = \pi R_i$  rendimento medio futuro dell' $i$ -esimo asset, dove  $R_i$  è la  $i$ -esima colonna della matrice  $R$ .

```

27     ### Ottimizzazione CVaR non robusto
28     # importo il pacchetto per l'ottimizzazione
29     from rsome import ro
30     from rsome import norm
31     from rsome import grb_solver as grb
32     # creo il modello
33     model = ro.Model()
34     # ogni rendimento osservato e' un equiprobabile scenario futuro
35     pi = np.ones(s) / s
36     # variabile decisionale: pesi del portafoglio
37     x = model.dvar(n)
38     # variabile decisionale: loss in eccesso di ogni scenario
39     u = model.dvar(s)
40     # variabile decisionale: VaR

```

```

41 VaR = model.dvar()
42 # imposto il modello e i vincoli
43 model.min(VaR + 1/alpha * (pi@u))
44 model.st(u + y@x + VaR >=0)
45 model.st(u >= 0)
46 model.st(pi@y@x >= mu_m)
47 model.st(x >= x_lb, x <= x_ub, x.sum() == w)
48
49 model.solve(grb)
50
51 print('pesi cvar standard = ',x.get().round(4),
52       " VaR = ",VaR.get().round(4))

```

La stampa dell'output restituisce

```

53 > pesi cvar standard = [0.3466 0.1267 0.5267]
54 > VaR = [0.0952]

```

dove il VaR è definito per la loss function, quindi nel peggior 5% dei casi il portafoglio ha un rendimento del  $-9.52\%$ .

### 3.3.2 Ottimizzazione worst case con box uncertainty

Introduciamo incertezza nel problema alterando le probabilità  $\pi_s$  degli scenari. Diamo la possibilità ad ogni scenario di essere più o meno probabile dell'1%, siamo quindi nel caso di box uncertainty per componente. Se prima valeva  $\pi = [1/36, \dots, 1/36] \simeq [0.028, \dots, 0.028]$ , ora ogni scenario può avere  $0.018 \leq \pi_s^u \leq 0.038$  che sono circa  $1/56$  e  $1/26$ . L'insieme delle nuove distribuzioni di probabilità diventa

$$\Pi^u = \{\pi^u : \pi^u = \pi + \eta, \quad \mathbf{1}'\eta = 0, \quad -0.01 \leq \eta_s \leq 0.01 \quad \forall s \in S\} \quad (3.21)$$

dove  $\eta$  è un vettore di  $s$  variabili casuali uniformi nell'intervallo  $[-0.01, 0.01]$  che si vanno a sommare alle probabilità originarie  $\pi_s$  degli scenari. Dato che  $\pi^u$  dev'essere una distribuzione di probabilità, serve imporre che  $\mathbf{1}'\eta = 0$  perchè in questo modo:

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in S} \pi_s^u &= \sum_{s \in S} (\pi_s + \eta_s) \\
&= \sum_{s \in S} \pi_s + \sum_{s \in S} \eta_s \\
&= \sum_{s \in S} \pi_s \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Il nuovo modello di ottimizzazione è quindi

$$\begin{aligned}
& \min \left[ \max_{\eta} V + \pi' u^s \right. \\
& \text{s.t. } \mathbf{1}' \eta = 0 \\
& \quad \pi^u = \pi + \eta \\
& \quad \left. -0.01 \leq \eta_s \leq 0.01 \quad \forall s \in S \right] \\
& \text{s.t. } u_s + \sum_{i=1}^N R_i x_i + V \geq 0, \quad \forall s \in S \quad (3.22) \\
& \quad u_s \geq 0 \quad \forall s \in S \\
& \quad \pi' R x \geq \mu_m \\
& \quad 0 \leq x \leq 1 \\
& \quad \sum x_i = 1,
\end{aligned}$$

e viene risolto con il seguente codice

```

55     ### CV@R robusto BOX
56     # serve abbassare il vincolo del rendimento minimo atteso
57     mu_m = 0.005
58     modelr = ro.Model()
59     # upper e lower bound di eta
60     eta_ub = 0.01
61     eta_lb = -0.01
62     # variabile casuale: eta
63     eta = modelr.rvar(s)
64     # insieme d'incertezza di eta
65     uset = (eta.sum() == 0,
66            eta >= eta_lb,
67            eta <= eta_ub)
68     # definisco le nuove probabilita'
69     pi = 1/s + eta
70     # dichiaro le solite variabili
71     x = modelr.dvar(n)
72     u = modelr.dvar(s)
73     VaR = modelr.dvar()
74     # imposto il modello
75     modelr.minmax(VaR + 1/alpha * (pi@u), uset)
76     modelr.st(u >= y@x - VaR)
77     modelr.st(u >= 0)
78     modelr.st(pi@y@x >= mu_m)
79     modelr.st(x >= x_lb, x <= x_ub, x.sum() == w)
80
81     model1.solve(grb)
82
83     print('pesi cvar robusto = ', x.get().round(4),
84           " VaR = ", VaR.get().round(4))

```

Alla riga 57 si nota che abbiamo cambiato il minimo rendimento atteso perchè il valore precedente era troppo alto e rendeva il problema infeasible. I risultati sono più estremi e il portafoglio è meno diversificato:

```

85     > pesi cvar robusto = [0.8778 0.         0.1222]
86     > VaR = [0.1767]

```

Notiamo che non viene investito nulla nelle azioni di EBAY e solo una piccola parte della ricchezza in quelle del titolo ENI. Troviamo un possibile motivo analizzando alcune righe della matrice dei rendimenti, cioè alcuni scenari.

| <i>Mese</i> | <i>Amazon</i> | <i>Ebay</i> | <i>Eni</i> |
|-------------|---------------|-------------|------------|
| 2020 – 10   | -0.034930     | -0.085015   | -0.101226  |
| 2020 – 09   | -0.069498     | -0.030077   | -0.127759  |
| 2020 – 03   | 0.037004      | -0.130554   | -0.173687  |
| 2018 – 10   | -0.184005     | -0.100795   | -0.035376  |

In tre dei quattro mesi complessivamente peggiori il titolo AMAZON riesce a ottenere rendimenti migliori degli altri due: è possibile che questi scenari siano tra quelli più probabili nel modello worst case, da qui la penalizzazione. Più difficile è invece comprendere la preferenza di ENI su EBAY nonostante quest'ultimo abbia minore varianza e rendimento medio più alto.

## Capitolo 4

# Risk Parity

Le costruzioni di portafoglio che abbiamo visto finora si reggono sulla formulazione di vincoli particolari definiti ad hoc per il singolo problema. In questi casi le performance dei portafogli ottimizzati dipendono fortemente dal tipo di vincoli imposti, scelte fatte a priori dall'ottimizzatore che rendono difficile confrontare portafogli diversi. Un nuovo aspetto che vale la pena considerare nella costruzione di portafoglio è la decomposizione del rischio rispetto agli asset che lo compongono o alle loro classi. Per questo nel seguente capitolo introduciamo un nuovo metodo di allocazione robusto che richiede meno input a discrezione dell'ottimizzatore, cioè l'approccio **risk budgeting** o **risk parity**.

La risk parity è uno dei tre principali metodi di budgeting usati nell'asset allocation assieme al weight budgeting e alla performance budgeting. Per comprendere le differenze tra i metodi immaginiamo di voler costruire un portafoglio di due asset con una politica 30/70. Con l'approccio weight budgeting (WB), definiamo direttamente i pesi del portafoglio: il 30% della ricchezza è investito nell'asset 1 e il 70% nell'asset 2. Se scegliamo l'approccio risk budgeting (RB), e supponiamo di volere che il rischio del portafoglio sia del 20%, applichiamo la politica ai budget di rischio degli asset: il budget di rischio del primo asset sarà del 6% mentre quello del secondo del 14%. L'approccio performance budgeting (PB) è analogo a quello RB ma calibra i pesi in modo che ogni asset raggiunga dei contributi alla performance del portafoglio: se il nostro obiettivo è un rendimento del 10%, il contributo alla performance dei due asset sarà del 3% e 7%.

### 4.1 Ottimizzazione di portafogli Risk Budgeting

In questa sezione definiamo il concetto di risk contribution tramite il principio di Eulero e lo deriviamo rispetto alle principali misure di rischio usate in ottimizzazione. Successivamente introduciamo il portafoglio risk budgeting, ne discutiamo le diverse definizioni e impostiamo dei modelli di ottimizzazione utilizzabili per calcolarlo. Per concludere la sezione mostriamo come decomporre il rischio rispetto ai fattori di rischio introdotti nella sezione 2.2 e impostiamo un modello di ottimizzazione costruito su modelli a fattori.

### 4.1.1 Risk contribution

Misurare il rischio di un portafoglio è solo il primo passo nella gestione del suo rischio. Ne va aggiunto un secondo che consiste nella decomposizione del rischio di portafoglio in una somma di risk contribution degli asset; questo step è chiamato allocazione del rischio o **risk allocation**. Il concetto di risk contribution è fondamentale per identificare e comprendere il profilo di rischio di un portafoglio. Ci sono molti modi per definirlo, in questa tesi usiamo il principio di allocazione di Eulero che procediamo a descrivere brevemente.

Sia  $\Pi$  la distribuzione dei rendimenti di un portafoglio, la decomponiamo nella somma delle  $\Pi_i$  degli  $N$  asset:

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \Pi_i.$$

Chiamiamo  $\mathcal{R}(\Pi)$  la misura di rischio associata alla distribuzione dei rendimenti del portafoglio e  $\mathcal{R}(\Pi_i|\Pi)$  le risk contribution degli asset. Deve quindi valere la proprietà di allocazione totale:

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{R}(\Pi_i|\Pi) = \mathcal{R}(\Pi). \quad (4.1)$$

E' dimostrato che l'unica definizione per le risk contribution è

$$\mathcal{R}(\Pi_i|\Pi) = \left. \frac{d}{dh} \mathcal{R}(\Pi + h\Pi_i) \right|_{h=0} \quad (4.2)$$

e che in caso di misura di rischio subadditiva vale

$$\mathcal{R}(\Pi_i|\Pi) \leq \mathcal{R}(\Pi_i),$$

cioè che la risk contribution di un asset è sempre più piccola della sua misura di rischio autonoma, questo è dovuto alla diversificazione del rischio.

Il framework che abbiamo appena definito implica che data una misura di rischio  $\mathcal{R}(x)$  la risk contribution dell'asset  $i$  è unicamente definita come

$$\mathcal{RC}_i = x_i \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x_i} \quad (4.3)$$

e che la misura di rischio soddisfa la decomposizione di Eulero

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \mathcal{RC}_i.$$

Questa relazione è chiamata principio di allocazione di Eulero ed è una proprietà fondamentale dei portafogli risk parity. Può essere comodo esprimere le risk contribution degli asset come pesi relativi al rischio totale del portafoglio, per questo definiamo

$$\mathcal{RC}_i^* = \frac{\mathcal{RC}_i}{\mathcal{R}}, \quad (4.4)$$

che può essere interpretata come risk contribution percentuale.

## Principali misure di rischio

Abbiamo detto nella sezione precedente che la risk contribution è definita per una misura di rischio. Nel caso di rendimenti Gaussiani le principali misure di rischio usate sono, oltre alle già definite varianza e deviazione standard, value-at-risk e conditional value-at-risk. Sono misure di rischio basate sulla loss function (distribuzione delle perdite)  $L(x)$  e sui quantili. Il value-at-risk si definisce come

$$\text{VaR}_{1-\alpha}(x) = \inf\{t : \mathbb{P}(L(x) \leq t) \geq 1 - \alpha\}, \quad (4.5)$$

quindi è l' $1 - \alpha$ -quantile della distribuzione delle perdite.  $\alpha$  è un livello di probabilità e quindi varia tra 0 e 1, i valori più usati sono 10, 5 e 1. Il conditional value-at-risk (o expected shortfall, ES) è definito come

$$\text{CVaR}_{1-\alpha}(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 \text{VaR}_u(x) du \quad (4.6)$$

ed è la media dei VaR calcolati a livello  $1 - \alpha$  e maggiore. Un'interpretazione più immediata è considerare il CVaR come l'atteso della loss function quando questa è maggiore o uguale al VaR:

$$\text{CVaR}_{1-\alpha}(x) = \mathbb{E}[L(x) | L(x) \geq \text{VaR}_{1-\alpha}(x)]. \quad (4.7)$$

Assumiamo ritorni distribuiti normalmente  $\Pi \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ , per il portafoglio  $x$  valgono  $\mu(x) = \mu'x$ ,  $\sigma(x) = \sqrt{x'\Sigma x}$ . Basandoci sul fatto che  $\Pi(x) = -L(x)$  e che, chiamata  $\Phi(x)$  la CDF di una normale standard,  $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha)$  possiamo esprimere VaR e CVaR del portafoglio. In particolare abbiamo

$$\text{VaR}_{1-\alpha}(x) = \mu'x + \Phi^{-1}(1 - \alpha)\sqrt{x'\Sigma x} \quad (4.8)$$

e

$$\text{CVaR}_{1-\alpha}(x) = \mu'x + \frac{\sqrt{x'\Sigma x}}{\alpha} \phi(\Phi^{-1}(1 - \alpha)), \quad (4.9)$$

dove  $\phi(x)$  è la PDF di una normale standard.

## Calcolo delle risk contribution per le misure di rischio

Come mostrato dalle 4.8 e 4.9, le due misure di rischio dipendono dalla volatilità. Procediamo a calcolare la risk contribution per la misura di rischio  $\sigma(x)$  e quindi per  $\text{VaR}(x)$  e  $\text{CVaR}(x)$ . Dato che  $\sigma(x) = \sqrt{x'\Sigma x}$ , il vettore delle volatilità marginali è

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} &= \frac{1}{2} (x'\Sigma x)^{-1/2} (2\Sigma x) \\ &= \frac{\Sigma x}{\sqrt{x'\Sigma x}} \end{aligned}$$

e quindi la risk contribution dell' $i$ -esimo asset è

$$\mathcal{RC}_i = x_i \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x'\Sigma x}} \quad \text{e} \quad \mathcal{RC}_i^* = x_i \frac{(\Sigma x)_i}{x'\Sigma x} \quad (4.10)$$

Possiamo verificare che la proprietà di decomposizione di Eulero è verificata in quanto

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \mathcal{RC}_i &= \sum_{i=1}^N x_i \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x' \Sigma x}} \\ &= x' \frac{\Sigma x}{\sqrt{x' \Sigma x}} = \sqrt{x' \Sigma x} \\ &= \sigma(x).\end{aligned}$$

Infine, nel caso del value-at-risk la risk contribution diventa

$$\mathcal{RC}_i = x_i \left( \mu_i + \Phi^{-1}(1 - \alpha) \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x' \Sigma x}} \right) \quad (4.11)$$

mentre nel caso del conditional value-at-risk diventa

$$\mathcal{RC}_i = x_i \left( \mu_i + \frac{(\Sigma x)_i}{\alpha \sqrt{x' \Sigma x}} \phi(\Phi^{-1}(1 - \alpha)) \right). \quad (4.12)$$

#### 4.1.2 Portafoglio Risk Budgeting

Definiamo ora il portafoglio risk budgeting (RB) in funzione dei budget  $\{B_1, \dots, B_N\}$ , dove  $B_i$  è una parte di rischio espressa in dollari. Chiamiamo  $\mathcal{RC}_i(x_1, \dots, x_N)$  la risk contribution dell'asset  $i$  rispetto al portafoglio  $x = (x_1, \dots, x_N)$ . Allora il portafoglio RB è definito dai seguenti vincoli:

$$\begin{cases} \mathcal{RC}_1(x_1, \dots, x_N) = B_1 \\ \vdots \\ \mathcal{RC}_i(x_1, \dots, x_N) = B_i \\ \vdots \\ \mathcal{RC}_n(x_1, \dots, x_N) = B_n \end{cases}$$

cioè è il portafoglio  $x$  le cui risk contribution soddisfano i budget di rischio. Notiamo due grandi differenze rispetto a un classico portafoglio ottimizzato:

- Un portafoglio RB non è basato sulla minimizzazione di una funzione di utilità;
- Un portafoglio RB non dipende direttamente dai rendimenti attesi degli asset che lo compongono.

Questo non vuol dire che non abbiamo bisogno di assunzioni sui rendimenti attesi, infatti alcune misure di rischio come VaR e CVaR dipendono dal vettore  $\mu$ . Contrariamente all'approccio di Markowitz però reputiamo la dimensione delle performance troppo complicata per comprenderla nell'analisi e consideriamo solo quella del rischio. Nella nostra trattazione non poniamo particolare attenzione al vettore dei budget di rischio  $B_i$  ma li consideriamo come dati del problema. Nella definizione pratica di un portafoglio RB la definizione di questi parametri può necessitare analisi complesse che variano a seconda dell'obiettivo di investimento.

La definizione che abbiamo dato rappresenta molto bene idealmente il concetto di portafoglio RB ma è diversa da quelle usate in pratica nell'ottimizzazione. Per l'omogeneità delle misure di rischio coerenti, se definiamo un nuovo portafoglio  $y = cx$ , dove  $c$  è un numero scalare, i suoi rischi marginali sono gli stessi dell'originale. Possiamo quindi semplificare il portafoglio RB usando dei pesi e dei budget di rischio relativi  $b_i$  espressi in %. Spesso preferiamo ottenere un portafoglio long-only cioè con tutti i pesi positivi, allora possiamo ridefinire meglio il portafoglio risk budgeting con il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} \mathcal{RC}_i(x) = b_i \mathcal{R}(x) & \forall i \\ b_i \geq 0 & \forall i \\ x_i \geq 0 & \forall i \\ \sum_i x_i = 1 \\ \sum_i b_i = 1. \end{cases}$$

I vincoli sulle  $b_i$  vanno modificati perchè avere come vincolo  $b_k = 0$  non sempre porta a soluzioni con  $x_k = 0$ . Risulta quindi meglio indicare il portafoglio RB come la soluzione del sistema:

$$x^* = \{x \in [0, 1]^N : \sum_{i=1}^N x_i = 1, \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x_i} = b_i \mathcal{R}(x)\} \quad (4.13)$$

dove  $b \in ]0, 1]^N$  e  $\sum_{i=1}^N b_i = 1$ . Settando il vettore  $b$  in modo che  $b_j = b_k$  si chiede che tutti gli asset abbiano la stessa risk contribution, per questo il portafoglio che si ottiene è chiamato **equal risk contribution** (ERC).

A parte alcuni casi banali, non si può trovare una soluzione analitica per il problema 4.13, perciò si ricorre ad una soluzione numerica. Il sistema non lineare viene trasformato nel problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x; b) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}'x = 1 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i. \end{aligned} \quad (4.14)$$

La dichiarazione della funzione obiettivo lascia intendere che non esista un unico modo di impostare il problema. Esistono infatti diverse funzioni appropriate, tra cui

$$f(x; b) = \sum_{i=1}^N (x_i \partial_{x_i} \mathcal{R}(x) - b_i \mathcal{R}(x))^2 \quad (4.15)$$

dove  $\partial_{x_i}$  è la scrittura abbreviata della derivata parziale, che può anche essere scritta usando le risk contribution percentuali:

$$f(x; b) = \sum_{i=1}^N (\mathcal{RC}^*(x) - b_i)^2, \quad (4.16)$$

e

$$f(x; b) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \frac{x_i \partial_{x_i} \mathcal{R}(x)}{b_i} - \frac{x_j \partial_{x_j} \mathcal{R}(x)}{b_j} \right)^2.$$

## 4.2 Decomposizione del rischio rispetto ai fattori

Presentiamo ora il concetto di risk budgeting applicato ai fattori di rischio di un modello a fattori. Riprendiamo il framework della sezione 2.2 e consideriamo  $N$  asset modellati tramite  $m$  fattori  $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m\}$ , con  $m \leq N$ . Esprimendo i rendimenti degli asset in funzione dei fattori di rischio è possibile costruire portafogli allocando il rischio ad essi piuttosto che ai titoli. Ciò ha due importanti implicazioni: la prima, legata al concetto di fattore, è il passaggio a una visione trasversale del mercato e dei suoi rischi, la seconda è il minor numero di dati necessari a impostare l'ottimizzazione. I fattori utilizzati possono essere finanziari e macroeconomici come quelli del modello Fama-French o comportamentali; in alternativa si possono utilizzare tecniche come la Principal Component Analysis (PCA) per ricavarne di intrinseci ai dati. In questa sottosezione presentiamo una metodologia di costruzione di portafogli Factor Risk Parity (FRP) per entrambi gli approcci all'analisi ai fattori.

### 4.2.1 Fattori di rischio osservabili

In questo caso il modello si ottiene risolvendo il problema di regressione lineare

$$R = \beta \mathcal{F} + \epsilon \quad (4.17)$$

dove  $R$  è il vettore dei rendimenti degli asset e  $\Sigma \in R^{N \times N}$  è la loro matrice delle covarianze,  $\mathcal{F}$  è il vettore dei fattori di rischio e  $\Omega \in R^{M \times M}$  è la loro matrice delle covarianze.  $\beta \in R^{N \times m}$  invece è la matrice delle sensitività dei titoli rispetto ai fattori, i beta della regressione lineare, mentre notiamo che non è presente  $\alpha$ .

Seguendo [3] decomponiamo le esposizioni degli asset del portafoglio  $x$  rispetto alle esposizioni dei fattori di rischio come:

$$x = (B^+ \quad \tilde{B}^+) \cdot \begin{pmatrix} y \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

dove  $B^+$  è la pseudo-inversa di Moore-Penrose di  $B = \beta'$  e  $\tilde{B}^+$  è una matrice di dimensioni  $N \times (N - m)$  che spanna il kernel sinistro di  $B^+$ .  $y$  è il vettore dei pesi allocati ai fattori  $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m\}$ ,  $\tilde{y}$  rappresenta gli  $N - m$  fattori residui, fattori senza definizione univoca che non hanno interpretazione economica. Nel caso di una matrice come  $\beta$ , che ha numero di righe maggiore di quello delle colonne, la pseudo-inversa di Moore-Penrose è semplicemente  $(\beta' \beta)^{-1} \beta'$ . Segue che

$$\begin{cases} y = Bx \\ \tilde{y} = \tilde{B}x \end{cases} \quad (4.19)$$

dove  $\tilde{B} = \ker(B)'$ , infatti sostituendo la 4.19 nella 4.18 troviamo l'identità. Di conseguenza il rischio marginale degli asset è legato a quello dei fattori nel seguente modo:

$$\frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial y} B + \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial \tilde{y}} \tilde{B}.$$

Ne concludiamo che il rischio marginale del  $j$ -esimo fattore è dato da:

$$\frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial y_j} = \left( \beta^+ \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x'} \right)_j, \quad (4.20)$$

mentre per i residui vale

$$\frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial \tilde{y}_j} = \left( \tilde{B} \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x'} \right)_j. \quad (4.21)$$

Da questi possiamo passare alle risk contribution dei fattori tramite le formule

$$\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j) = (\beta' x)_j \cdot \left( \beta^+ \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x'} \right)_j \quad (4.22)$$

e

$$\mathcal{RC}(\tilde{\mathcal{F}}_j) = (\tilde{B} x)_j \cdot \left( \tilde{B} \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x'} \right)_j, \quad (4.23)$$

dove gli  $\tilde{\mathcal{F}}$  sono i fattori residui. Sempre seguendo [3] mostriamo che le risk contribution soddisfano il criterio di allocazione:

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{j=i}^m \mathcal{RC}(\mathcal{F}_j) + \sum_{j=i}^{N-m} \mathcal{RC}(\tilde{\mathcal{F}}_j).$$

Concludiamo calcolando le risk contribution dei fattori nel caso in cui la misura di rischio  $\mathcal{R}(x)$  usata sia la volatilità del portafoglio  $\sigma(x) = \sqrt{x' \Sigma x}$ :

$$\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j) = \frac{(\beta' x)_j \cdot (\beta^+ \Sigma x)_j}{\sigma(x)} \quad (4.24)$$

e

$$\mathcal{RC}(\tilde{\mathcal{F}}_j) = \frac{(\tilde{B} x)_j \cdot (\tilde{B} \Sigma x)_j}{\sigma(x)}. \quad (4.25)$$

Supponiamo ora di voler costruire un portafoglio RB tale che le risk contribution combacino un insieme di valori dati  $\{b_1, \dots, b_N\}$  secondo

$$\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j) = b_j \mathcal{R}(x). \quad (4.26)$$

Un modo è risolvere il seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} (y^*, \tilde{y}^*) = \operatorname{argmin} \quad & \sum_{i=1}^m (\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j) - b_j \mathcal{R}(x))^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}'(B^+ y + \tilde{B}^+ \tilde{y}) = 1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

perchè se esiste una soluzione al problema per cui la funzione obiettivo è pari a zero, corrisponde al portafoglio che risolve il problema dato da 4.26. Se vogliamo un portafoglio long-only dobbiamo imporre i vincoli

$$\mathbf{0} \leq (B^+y + \tilde{B}^+\tilde{y}) \leq \mathbf{1}.$$

Il portafoglio FRP in questo framework è un portafoglio bilanciato in termini di risk contribution rispetto ai fattori e si indica con il vincolo

$$\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j) \simeq \mathcal{RC}(\mathcal{F}_k),$$

che come nella sezione precedente può essere tradotto in  $b_j = b_k$ . Notiamo che i vincoli sono imposti solo sui fattori osservabili e non su quelli residui.

#### 4.2.2 Fattori di rischio intrinseci

Un ulteriore metodo per ottenere fattori di rischio è applicare la PCA alla matrice delle covarianze  $\Sigma$  in modo da decomporre il rendimento del portafoglio nella somma di  $m$  fattori scorrelati:

$$\Sigma = AA' \quad \text{dove} \quad AA' = I_m \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

dove  $I_m$  è la matrice identità di dimensione  $m$ ,  $A$  è la matrice dei loadings e  $\Lambda \in \mathcal{D}^+$  è una matrice diagonale ad elementi positivi. Ora la relazione tra i rendimenti degli asset  $R$  e i rendimenti dei fattori  $r_F$  è

$$r_F = RA' \quad (4.29)$$

e la matrice delle covarianze dei fattori  $\Sigma_F$  è uguale a

$$\Sigma_F = A\Sigma A' = AA'\Sigma AA' = \Lambda. \quad (4.30)$$

La 4.29 vale solo se  $m = N$ , se invece vale  $m \leq N$  e quindi si usa un numero di fattori minore del numero di titoli, la relazione diventa

$$r_F = RA' + U, \quad (4.31)$$

dove  $U$  è la parte non spiegata dalla pca che cattura solo una parte della variabilità dei dati. In questo caso i fattori ottenuti sono i primi  $m$  degli  $N$  fattori totali, quindi un sottoinsieme.

L'utilizzo di questa tecnica ha un effetto negativo, cioè una grande riduzione dell'interpretabilità: i nuovi fattori sono dati da una combinazione lineare degli asset originali quindi la loro interpretazione non è sempre ovvia. Alcune tecniche più complesse, come l'approccio *minimum torsion*, cercano di limitare questo problema scegliendo fattori decorrelati con minima distanza da altri fattori forniti in input. Aggiungiamo anche che la composizione dei fattori dipende fortemente dalla variabilità dei rendimenti, di conseguenza la PCA ripetuta sugli stessi titoli ma su intervalli di tempo diversi può restituire fattori molto differenti. A questi due svantaggi si contrappone un grande vantaggio, ovvero la decorrelazione delle componenti principali e quindi dei fattori di rischio. Grazie a questa proprietà della PCA possiamo scrivere la varianza totale del portafoglio  $x = (x_1, \dots, x_N)$  come somma dei contributi alla varianza dei diversi fattori:

$$\begin{aligned}
x' \Sigma x &= x' A^{-1} \Sigma_F (A')^{-1} x \\
&= x'_F \Sigma_F x_F \\
&= \sum_{i=1}^m (\sigma_F x_F)^2
\end{aligned} \tag{4.32}$$

dove  $x_F \in \mathbb{R}^m = (A')^{-1}x$  se  $m = N$  e  $x_F = (A')^+x$  se  $m < N$  si può interpretare come un portafoglio di fattori mentre l'ultimo passaggio è possibile grazie alla diagonalità di  $\Sigma_F$  evidenziata nella 4.30. Ora possiamo definire la risk contribution del  $k$ -esimo fattore di rischio rispetto alla misura di rischio varianza:

$$\mathcal{RC}(\mathcal{F}_k) = \frac{(\sigma_F x_F)^2}{x' \Sigma x}. \tag{4.33}$$

Notiamo che nonostante la misura di rischio non sia la deviazione standard, la risk contribution è molto simile alla 4.22 della sottosezione precedente, infatti in entrambe compaiono i pesi dei loadings ( $A$  e  $\beta$ ) alla seconda. La differenza è che prima per esprimere la volatilità dei fattori si usava l'intera matrice delle covarianze mentre ora grazie al fatto che  $\Sigma_F$  è diagonale si usano solo le volatilità.

Seguendo [6] definiamo ora l'Effective Number of Bets (ENB) che consente di misurare la diversificazione di un portafoglio rispetto alle risk contribution

$$\text{ENB}(w) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n w_i \ln(w_i)\right). \tag{4.34}$$

L'ENB non è altro che l'entropia calcolata su dei pesi, quindi assume il valore minimo 1 se la massa è concentrata su un unico peso e il valore massimo  $N$  se i pesi sono equamente distribuiti. Calcolandola in funzione delle  $\mathcal{RC}_i(x)$  otteniamo l'ENB del portafoglio e massimizzandola cerchiamo il portafoglio RFP. Si dimostra che la soluzione del problema

$$\max_x \text{ENB}(x) \quad \text{s.t. } \mathbf{1}x = 1 \tag{4.35}$$

è data da

$$x = \frac{A' \Sigma_F^{-1/2} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}}{\mathbf{1} A' \Sigma_F^{-1/2} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}}. \tag{4.36}$$

La soluzione non è unica ma dipende dal vettore di  $[\pm 1, \dots, \pm 1]' \in \mathbb{R}^m$ , in particolare ci sono  $2^{m-1}$  soluzioni. Tutte le disposizioni danno soluzioni valide che rispettano l'uguaglianza delle risk contribution generando varianze totali diverse, in particolare usando:

1. il vettore

$$\text{sign}(A\mathbf{1}) \tag{4.37}$$

si ottiene il portafoglio  $x$  con la minore volatilità tra tutte le soluzioni della 4.36, chiamato GMV-FRP;

2. il vettore

$$\text{sign}(A\mu) \tag{4.38}$$

si ottiene il portafoglio  $x$  con lo Sharpe Ratio più alto tra le soluzioni della 4.36, chiamato SR-FRP.

Per completezza presentiamo anche un modello affine al 4.35 che usa l'ENB come vincolo,

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sigma^2(x) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}w = 1 \\ & \text{ENB}(\mathcal{RC}) \geq \text{ENB}^* \end{aligned}$$

dove  $\text{ENB}^*$  è il target minimo di Effective Number of Bets.

## Capitolo 5

# Analisi comparativa di approcci robusti per la costruzione di portafogli

Questo capitolo è destinato all'applicazione dei concetti teorici e dei modelli presentati nei capitoli precedenti. Il software usato è Python, in particolare le sue librerie scientifiche più standard come NumPy, Pandas e matplotlib e librerie più tecniche adibite all'ottimizzazione come gurobipy e rsome. Per la lettura di dati finanziari ci affidiamo alla funzione API\_FIDA.

### 5.1 Confronto uniperiodale di portafogli robusti

In questa sezione compariamo le performance di alcune delle tecniche di selezione di portafoglio robusto presentate nei capitoli precedenti con un portafoglio benchmark. In particolare testiamo i seguenti portafogli:

- Benchmark : **Equally Weighted** (EW)
- Media-Varianza robusto
- Global Minimum Variance (GMV)
- Equal Risk Contribution (ERC)

Il primo è un portafoglio particolare con tutti i pesi uguali  $w_i = \frac{1}{n}$  che viene spesso usato come benchmark nell'analisi di portafoglio. Le caratteristiche che lo rendono interessante sono l'essere il portafoglio monetariamente più diversificato possibile e il non necessitare di alcun dato per essere stimato al di là del numero di titoli acquistabili. Come vedremo, nonostante la sua banale definizione, si è mostrato empiricamente che è un benchmark difficile da superare in termini di prestazioni.

#### 5.1.1 Procedura applicata nell'analisi

Per la costruzione dei portafogli abbiamo a disposizione i rendimenti mensili di  $N = 9$  indici FIDA FFI (Fida Fund Index) relativi al periodo '01-01-2010'

'01-01-2018' della durata di otto anni. La ricchezza iniziale di cui disponiamo è  $w_0 = 100\text{€}$  che viene spartita tra i titoli sulla base dei pesi dei portafogli ottenuti. La valutazione viene fatta usando i rendimenti dei tre anni e mezzo successivi, dal '01-01-2018' al '01-06-2021': costruiamo i portafogli sulla base dei pesi e ne simuliamo l'andamento e la ricchezza generata al termine dell'orizzonte di investimento. Nell'analisi arrotondiamo i pesi minori di  $10^{-4} = 0.0001$  a zero e usiamo la volatilità  $\sigma(x)$  come misura di rischio. Gli indici usati sono:

1. Azionari Europa (Mercati Emergenti)
2. Azionari Europa (Mercati Sviluppati) - Large & Mid Cap Growth
3. Azionari Nord America
4. Obbligazionari Sterlina - Corporate e Governativi
5. Azionari Settoriali - Immobiliare (America)
6. Obbligazionari Asia Pacifico
7. Azionari Asia Pacifico (Mercati Emergenti e Sviluppati)
8. Obbligazionari Area Euro - Governativi
9. Azionari Africa

```

1  ### Confronto portafogli: dati e impostazione problema
2  import API_FIDA as API
3  import numpy as np
4  import gurobipy as gp
5  from gurobipy import GRB
6  from math import sqrt
7  import matplotlib.pyplot as plt
8
9  stocks = ['ISCI27', 'ISCI31', 'ISCI65', 'ISCI167', 'ISCI86',
10           'ISCI134', 'ISCI11', 'ISCI143', 'ISCI328']
11  data_start = '2010-01-01'
12  data_end = '2018-01-01'
13  data = API.FIDA_API_PData_DF(stocks, 2, 'EUR',
14                               data_start, data_end, 'monthly')
15  data.replace("NaN", np.nan, inplace=True)
16  data.dropna(inplace=True)
17  data = data.sort_index(ascending=False).astype('float64')
18
19  # vettore dei rendimenti attesi
20  mu = data.mean().values
21  # matrice delle covarianze
22  Sigma = data.cov().values
23  # ricchezza iniziale
24  invest_in = 100

```

Nelle righe 20 e 22 calcoliamo il vettore dei rendimenti attesi  $\mu$  e la matrice delle covarianze  $\Sigma$ , necessari per i calcoli successivi. Il primo è un vettore di dimensione (9,) e la matrice è (9,9), entrambi sono calcolati a partire da `data`, che ha dimensioni (96,9). Queste sono dovute al numero di mesi usato per stimare i pesi dei portafogli,  $12 * 8$ , e al numero di titoli.

## 5.1.2 Portafoglio GMV

Il primo portafoglio robusto che costruiamo è il global minimum variance. Lo calcoliamo con una funzione molto semplice che in input necessita solo una matrice delle covarianze:

```
25 ### portafoglio GMV
26 def min_variance_pf(varcov):
27     # creiamo un modello vuoto
28     mmv = gp.Model()
29     # variabile: pesi del portafoglio
30     x = mmv.addMVar(varcov.shape[0])
31
32     # funzione obiettivo da minimizzare: rischio del portafoglio
33     portfolio_risk = x @ varcov @ x
34     mmv.setObjective(portfolio_risk, GRB.MINIMIZE)
35     # vincolo sui pesi
36     mmv.addConstr(x.sum() == 1)
37     mmv.optimize()
38
39     # la funzione ritorna i pesi ottimi
40     return x.X
```

Applichiamo la funzione a  $\Sigma$  per ottenere i pesi del portafoglio GMV

```
41 pesi_min_var = min_variance_pf(Sigma)
42 print(pesi_min_var)
43
44 > [0.0247 0.0000 0.0494 0.0001 0.0000 0.0224 0.0000 0.9034 0.0000]
```

Notiamo che solo cinque titoli hanno pesi maggiori di zero e che il peso più grande, Obbligazionari Area Euro - Governativi, vale più del 90%. Ciò non è sorprendente in quanto il portafoglio che cerchiamo è quello con minima varianza e i titoli obbligazionari sono solitamente meno volatili di quelli azionari.

```
45 alloc_min_v = pesi_min_var*invest_in
46 print(alloc_min_v)
47
48 > [ 2.47  0.  4.94  0.01  0.  2.24  0. 90.34  0. ]
```

Lo sbilanciamento dei pesi si ritrova nelle quantità di denaro allocate agli asset.

## 5.1.3 Portafoglio EW

Il portafoglio equally weighted non necessita di un vero e proprio algoritmo per essere determinato pertanto la funzione consiste solo nell'assegnamento di  $1/N$  ad ogni peso

```
49 ### portafoglio EW
50 def equally_w_pf(varcov):
51     # numero di asset
52     n = varcov.shape[0]
53     return(np.repeat(1/n,n))
54
55 pesi_equally = equally_w_pf(Sigma)
56 print(pesi_equally)
57
58 > [0.1112 0.1111 0.1111 0.1111 0.1111 0.1111 0.1111 0.1111 0.1111]
```

Arrotondiamo assegnando un millesimo in più al primo asset solo per soddisfare il vincolo  $\sum_i x_i = 1$ . Segue che

```

59 alloc_equally = pesi_equally*invest_in
60 print(alloc_equally)
61
62 > [11.12 11.11 11.11 11.11 11.11 11.11 11.11 11.11 11.11]

```

### 5.1.4 Portafoglio ERC

Iniziamo scrivendo una funzione che permetta di calcolare la risk contribution percentuale  $\mathcal{RC}^*(x)$  di un portafoglio rispetto alla volatilità. Il seguente codice implementa la 4.10

```

63 ### risk contribution di un portafoglio data la matrice Sigma
64 def RC(varcov,x):
65     var = x @ varcov @ x
66     num = varcov @ x
67     return (x*num)/var

```

Ora implementiamo una funzione che, data  $\Sigma$  e il vettore delle risk contribution percentuali  $b$ , risolva il problema 4.16. Anche se in quest'analisi viene usata per calcolare il portafoglio equal risk contribution, la funzione è definita per  $b$  generico quindi può essere usata per un portafoglio basato sull'allocation del rischio qualsiasi. Questo codice, così come quello del portafoglio robusto che definiamo nella prossima sottosezione, contiene notazione `gurobipy` un po' più tecnica delle precedenti (non è possibile, ad esempio, definire la variabile  $y = x'\Sigma x$  ma serve definire  $z = \Sigma x$  e poi  $y = x'z$ ) pertanto commentiamo solo le righe più importanti.

```

68 ### portafoglio ERC data Sigma e il vettore dei contributi
69 def RB_pf(varcov,B):
70     # modello vuoto
71     mrb = gp.Model()
72     # pesi del portafoglio
73     x = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
74     Sig_x = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
75     # varianza del portafoglio
76     x_Sig_x = mrb.addMVar(1)
77     den = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
78     # vettore delle risk contribution
79     RC_ot = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
80     vett_x_Sig_x = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
81     diff_RC_b = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
82
83     mrb.params.NonConvex = 2
84     # funzione obiettivo da minimizzare
85     mrb.setObjective(diff_RC_b @ diff_RC_b , GRB.MINIMIZE)
86     # vincolo sui pesi
87     mrb.addConstr(x.sum() == 1)
88     mrb.addConstr(varcov @ x == Sig_x)
89     # insieme di vincoli che porta alla definizione della rc
90     mrb.addConstr(x_Sig_x == x @ Sig_x)
91     mrb.addConstrs(den[i] == x[i] @ Sig_x[i]
92                    for i in range(varcov.shape[0]))
93     mrb.addConstr(np.ones((varcov.shape[0], 1)) @ x_Sig_x
94                  == vett_x_Sig_x )
95     mrb.addConstrs(vett_x_Sig_x[i] @ RC_ot[i] ==

```

```

96         den[i] for i in range(varcov.shape[0]))
97         mrb.addConstr(diff_RC_b == RC_ot - B)
98
99         mrb.optimize()
100         return x.X

```

Ora usiamo la funzione `RB_pf` per trovare il portafoglio ERC e RC per verificare che sia corretto.

```

101 pesi_ERC = RB_pf(Sigma,np.repeat(1/Sigma.shape[0],Sigma.shape[0]))
102 # pesi del portafoglio ERC
103 print(pesi_ERC)
104
105 > [0.0571 0.0684 0.0754 0.1102 0.0568 0.1126 0.0688 0.3887 0.0621]
106
107 # RC degli asset dati i pesi del portafoglio ERC
108 print(RC(Sigma,pesi_ERC))
109
110 > [0.11088625 0.11095786 0.11167088 0.11023773 0.11085421 0.11155562
111     0.11160066 0.11181553 0.11042126]

```

I pesi di questo portafoglio sono più omogenei del GMV perchè tutti sono maggiori di zero e ogni titolo ha peso maggiore del 5%. Gli indici che li hanno più alti sono il quarto, il sesto e l'ottavo. Tutti e tre sono indici obbligazionari a bassa volatilità quindi necessitano di pesi maggiori per raggiungere risk contribution pari a quelle degli indici azionari. Le risk contribution non sono identiche perchè il portafoglio è frutto di una soluzione numerica, ciò nonostante tutti i valori sono uguali fino alla seconda cifra decimale.

```

112 alloc_erc = pesi_ERC*invest_in
113 print(alloc_erc)
114
115 > [ 5.71  6.84  7.54 11.02  5.68 11.26  6.88 38.87  6.21]

```

### 5.1.5 Portafoglio media-varianza robusto

L'ultimo portafoglio riproduce il modello 3.18 ed è costruito usando la funzione `robust_pf` definita nella sezione 3.2.1.

```

116 ### portafoglio robusto
117 pesi_rob = robust_pf(Sigma, mu)
118 # il vettore delle ampiezze delle incertezze
119 print(sig)
120
121 > [0.00985238 0.0067079  0.00615111 0.00566796 0.00822777 0.00462742
122     0.00598546 0.00194877 0.00774712]
123
124 print(pesi_rob)
125
126 > [0.    0.    0.0214 0.    0.    0.    0.    0.9786 0.    ]

```

Notiamo quanto sia limitata la regione d'incertezza dei rendimenti data dal vettore  $\delta$ , ogni titolo infatti può registrare una variazione massima minore dell'1% dal suo rendimento atteso. Il portafoglio robusto è il meno diversificato dei quattro proposti: investe solo su due titoli, uno dei quali è obbligazionario e ha più del 97% della ricchezza.

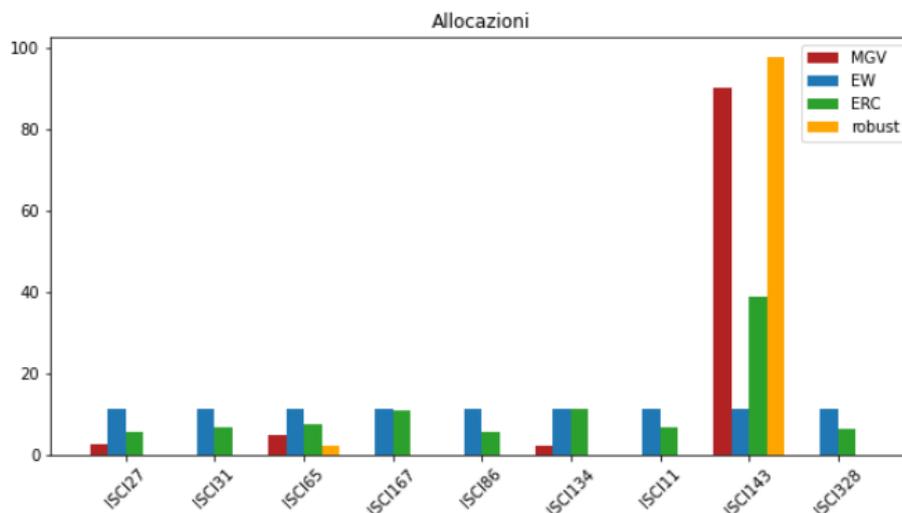


Figura 5.1: Somme allocate a ciascun indice. I nomi presenti nel grafico sono codici usati dall'API per leggere i dati, l'ordine degli indici è lo stesso dell'elenco a inizio sezione.

```

127 alloc_rob = pesi_rob * invest_in
128 print(alloc_rob)
129
130 > [ 0.    0.    2.14  0.    0.    0.    0.    97.86  0. ]

```

### 5.1.6 Confronto delle prestazioni

Riassumiamo i risultati delle precedenti sottosezioni riportando tutte allocazioni ottenute dai quattro portafogli nella figura 5.1. Ora leggiamo dal dataset di FIDA i rendimenti del secondo periodo e li usiamo per simulare i portafogli.

```

1  ### Confronto performance
2  data_start = '2018-01-01'
3  data_end = '2021-06-01'
4  data_p = API.FIDA_API_PData_DF(stocks,2,'EUR',data_start,
5  data_end, 'monthly')
6  data_p.replace("NaN",np.nan,inplace=True)
7  data_p.dropna(inplace=True)
8  data_p = data_p.sort_index(ascending=True).astype('float64')
9  # trasformiamo i rendimenti in fattori di montante
10 rend_new = data_p.values+1
11 # calcoliamo i rendimenti composti nel tempo di ogni titolo
12 rend_new_cp = rend_new.cumprod(axis=0)
13 # stampiamo il fattore di montante alla fine dell'orizzonte
14 print(rend_new_cp[-1,])
15
16 > [1.08913706 1.30144539 1.49075646 1.16360913 1.23306323 1.04799216
17    1.24557114 1.05550324 0.88799531]

```

Trasformando i rendimenti in fattori di montante possiamo moltiplicarli cumulativamente lungo le colonne per vedere l'evoluzione nel tempo del fattore  $(1 + r_{it})$ . Questo permette di osservare l'evoluzione della ricchezza iniziale

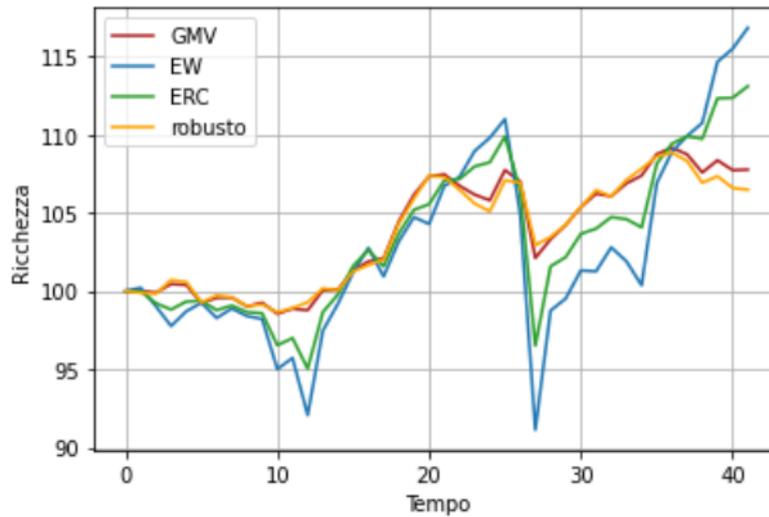


Figura 5.2: Andamento della ricchezza di ogni portafoglio

nel tempo perchè indica di quanto è cresciuta al tempo  $t$  la somma di denaro investita nell' $i$ -esimo titolo. La porzione di codice soprastante stampa il fattore di montante finale di ciascun titolo, ad esempio ogni euro investito a fine 2017 sull'indice Azionari Europa (Mercati emergenti) a giugno 2021 vale 1.089€. Usiamo questo vettore per valutare la ricchezza di ogni portafoglio al termine dell'investimento.

```

18 ### Ricchezze a fine investimento
19 ricchezza_mv = np.dot(rend_new_cp[-1,], alloc_min_v)
20 ricchezza_ew = np.dot(rend_new_cp[-1,], alloc_equally)
21 ricchezza_erc = np.dot(rend_new_cp[-1,], alloc_erc)
22 ricchezza_rob = np.dot(rend_new_cp[-1,], alloc_rob)
23
24 print("GMV =", ricchezza_mv, "EW =", ricchezza_ew,
25       "ERC =", ricchezza_erc, "robusto =", ricchezza_rob)
26
27 > GMV = 107.77    EW = 116.83    ERC = 113.10    robusto = 106.48

```

Il miglior portafoglio è quello equally weighted che ha un rendimento di 1.16, seguito dall'ERC che realizza 1.13. Il peggiori sono i portafogli più conservativi, infatti il GMV realizza l'1.08 e quello robusto l'1.06. Calcoliamo ora l'andamento del valore dei portafogli nel tempo e lo visualizziamo nella figura 5.2.

```

28 ### Ricchezza nel tempo
29 # Calcoliamo la ricchezza di ogni portafoglio in ogni istante
30 percorso_mv = rend_new_cp @ alloc_min_v
31 percorso_ew = rend_new_cp @ alloc_equally
32 percorso_erc = rend_new_cp @ alloc_erc
33 percorso_rob = rend_new_cp @ alloc_rob

```

I portafogli possono essere divisi in due gruppi: quello più volatile, formato dall'EW e dall'ERC, e quello meno volatile, formato dal GMV e dal robusto. Il primo gruppo realizza migliori performance alla fine dell'orizzonte di investimento ma nella maggior parte dei mesi, 27 su 42, rende meno del secondo.

|         | Dev. Standard | Media  | 0.05-Quantile | Drawdown Massimo |
|---------|---------------|--------|---------------|------------------|
| GMV     | 3.59          | 103.84 | 98.87         | -0.05            |
| EW      | 5.98          | 102.79 | 95.00         | -0.18            |
| ERC     | 4.82          | 103.46 | 96.53         | -0.12            |
| Robusto | 3.40          | 103.72 | 99.03         | -0.04            |

La tabella riassume alcune statistiche quantitative calcolate sulle serie degli andamenti dei portafogli. Il dato più sorprendente è la bassa volatilità del portafoglio robusto, minore addirittura di quella del GMV. I portafogli EW e ERC sono invece molto volatili: il primo ha standard deviation quasi doppia rispetto al robusto. Le medie sono molto simili mentre i quantili riflettono i risultati precedenti indicando il portafogli GMV e robusto come più sicuri. L'ultima colonna della tabella è il drawdown massimo, ovvero la massima perdita percentuale prima del successivo picco. Dato che il grafico 5.2 è definito su un intervallo di tempo molto corto, riusciamo a individuare ad occhio i drawdown massimi: si realizzano tutti al 27esimo mese, in corrispondenza con il crollo del mercato dovuto alla crisi COVID-19. I portafogli più volatili perdono il 12% e il 18% mentre quello robusto e il GMV solo il 4% e il 5%. Quest'ultimo risultato è in linea con il punto di forza dell'ottimizzazione robusta, ovvero la bassa sensibilità alle variazioni dei dati in input.

## 5.2 Confronto multiperiodale: analisi sull'aggiornamento dei pesi

Nella sezione precedente abbiamo introdotto il problema di selezione di portafoglio implementando le funzioni che ci permettono di costruire i portafogli definiti nelle sezioni teoriche e confrontandone le performance. Ora affrontiamo un problema più complesso cioè l'aggiornamento dei pesi nel tempo. Impostiamo quindi un caso di gestione di portafoglio multiperiodale sviluppato su tre periodi, dove un investitore seleziona i portafogli nel primo e li aggiorna negli altri due.

A seguire poniamo particolare attenzione alla sostenibilità dei portafogli, ovvero a quanto sia necessario o meno cambiarne i pesi. Ciò è importante in quanto, nella gestione pratica di portafoglio, ogni volta che compriamo o vendiamo un titolo è molto probabile dover pagare delle commissioni che intaccano il rendimento dell'investimento. Misuriamo la sostenibilità tramite il **turnover**, cioè la percentuale di ricchezza spostata tra i titoli al momento dell'aggiornamento del portafoglio. Testiamo la costruzione di portafogli tramite modelli che limitano il turnover sia imponendogli un valore massimo che penalizzandolo nella funzione obiettivo.

### 5.2.1 Procedura seguita nell'analisi

Per la costruzione dei portafogli e la loro valutazione abbiamo a disposizione i rendimenti mensili dei  $N = 9$  indici usati nella sezione precedente relativi al periodo '01-06-2010' '01-06-2021' della durata di undici anni. La tabella 5.1 mostra che l'intervallo di tempo è diviso in tre periodi di cinque anni (60 mesi) usati per stimare i pesi dei portafogli e tre di 2 anni (24 mesi) in cui si osservano i rendimenti dei portafogli e al termine dei quali si aggiornano i pesi. Il singolo ciclo di costruzione e simulazione dura sette anni ed è molto più corto di quello usato nella sezione precedente. Abbiamo scelto intervalli di tempo più brevi per arginare uno dei problemi dell'analisi media-varianza, ovvero l'utilizzo di dati passati per predire il futuro. Preferiamo cercare di catturare l'andamento dei titoli con dati recenti, per questo scegliamo anche di non cumulare i dati ma di scartare quelli datati con una strategia 'Moving Window'.

Nella prima parte dell'analisi supponiamo di poter ricalcolare ogni volta i pesi del portafoglio da zero, senza vincoli di turnover. Successivamente ripetiamo l'analisi per i portafogli che non si dimostrano sostenibili aggiungendo ai loro modelli due diverse penalizzazioni del turnover.

| 2010        | 2011 | 2012        | 2013 | 2014        | 2015        | 2016        | 2017 | 2018        | 2019 | 2020 |
|-------------|------|-------------|------|-------------|-------------|-------------|------|-------------|------|------|
| Costruzione |      |             |      |             | Simulazione |             |      |             |      |      |
|             |      | Costruzione |      |             |             | Simulazione |      |             |      |      |
|             |      |             |      | Costruzione |             |             |      | Simulazione |      |      |

Tabella 5.1: Divisione degli anni utilizzata per l'analisi. Con ogni colonna si indica il periodo che va dall'01-06 dell'anno indicato all'01-06 del successivo

## 5.2.2 Confronto senza vincoli di turnover

Iniziamo leggendo i dati dal dataset FIDA. Come si nota nella porzione di codice sottostante non stimiamo subito  $\Sigma$  e  $\mu$  perchè li stimeremo all'inizio di ogni periodo sulle singole porzioni di dataset.

```
1  ### Caso senza vincoli sull'aggiornamento dei pesi
2
3  # lettura dei dati
4  stocks = ['ISCI27','ISCI31','ISCI65','ISCI167','ISCI86',
5           'ISCI134','ISCI11','ISCI143','ISCI328']
6  data_end = '2021-06-01'
7  data_start = '2010-06-01' # questi sono in basso
8  data = API.FIDA_API_PData_DF(stocks,2,'EUR',
9                               data_start,data_end, 'monthly')
10 data.replace("NaN",np.nan,inplace=True)
11 data.dropna(inplace=True)
12
13 # lista dei pezzi di dataset usati per costruire i portafogli
14 train = []
15 # lunghezza in mesi dei periodi usati per il calcolo dei pesi
16 t_tr = 60
17 # lista dei pezzi di dataset usati per osservare i portafogli
18 test = []
19 # lunghezza in mesi dei periodi in cui si osservano i rendimenti
20 t_te = 24
21 for i in range(3):
22     inizio_st = i*t_te
23     fine_st = inizio_st+t_tr
24     fine_perf = fine_st+t_te
25     train.append(data.iloc[inizio_st:fine_st,:])
26     test.append(data.iloc[fine_st:fine_perf,:])
```

Avendo diviso i dati possiamo calcolare i portafogli per ogni periodo

```
27 # creiamo liste vuote per inserire i risultati
28 # ricchezze realizzate alla fine dei periodi da ogni portafoglio
29 ricc_gmv = [100]
30 ricc_ew = [100]
31 ricc_erc = [100]
32 ricc_rob = [100]
33
34 #liste per i pesi relativi ai vari periodi di ogni portafoglio
35 pesi_gmv=[]
36 pesi_ew = []
37 pesi_erc = []
38 pesi_rob = []
39
40 # allocazioni iniziali nei periodi di ogni portafoglio
41 alloc_gmv = []
42 alloc_ew = []
43 alloc_erc = []
44 alloc_rob = []
45
46 # andamenti nel tempo dei vari portafogli
47 percorso_gmv = []
48 percorso_ew = []
49 percorso_erc = []
50 percorso_rob = []
51
52 # ciclo sui periodi
53 for i in range(3):
54     # stima
```

```

55 Sigma = train[i].cov().values
56 mu = train[i].mean().values
57
58 # costruzione portafogli
59 pesi_gmv.append(min_variance_pf(Sigma).round(4))
60 pesi_ew.append(equally_w_pf(Sigma).round(4))
61 pesi_erc.append(RB_pf(Sigma,np.repeat(
62     1/Sigma.shape[0],Sigma.shape[0])).round(4))
63 pesi_rob.append(robust_pf(Sigma,mu).round(4))
64
65 # allocazioni
66 alloc_gmv.append(pesi_gmv[i]*ricc_gmv[i])
67 alloc_ew.append(pesi_ew[i]*ricc_ew[i])
68 alloc_erc.append(pesi_erc[i]*ricc_erc[i])
69 alloc_rob.append(pesi_rob[i]*ricc_rob[i])
70
71 # preparazione dati test
72 rend_test = test[i].values+1
73 rend_t_cum = rend_test.cumprod(axis=0)
74
75 # calcoliamo gli andamenti
76 percorso_gmv.append(rend_t_cum @alloc_gmv[i])
77 percorso_ew.append(rend_t_cum @alloc_ew[i])
78 percorso_erc.append(rend_t_cum @alloc_erc[i])
79 percorso_rob.append(rend_t_cum @alloc_rob[i])
80
81 # calcoliamo la nuova ricchezza totale
82 ricc_gmv.append(np.dot(rend_t_cum[-1,],alloc_gmv[i]))
83 ricc_ew.append(np.dot(rend_t_cum[-1,],alloc_ew[i]))
84 ricc_erc.append(np.dot(rend_t_cum[-1,],alloc_erc[i]))
85 ricc_rob.append(np.dot(rend_t_cum[-1,],alloc_rob[i]))
86
87 # andamenti complessivi di ciascun portafoglio
88 perc_tot_nm_gmv = np.hstack((100,percorso_gmv[0],
89     percorso_gmv[1],percorso_gmv[2]))
90 perc_tot_nm_ew = np.hstack((100,percorso_ew[0],
91     percorso_ew[1],percorso_ew[2]))
92 perc_tot_nm_erc = np.hstack((100,percorso_erc[0],
93     percorso_erc[1],percorso_erc[2]))
94 perc_tot_nm_rob = np.hstack((100,percorso_rob[0],
95     percorso_rob[1],percorso_rob[2]))

```

La figura 5.3 riassume alcune delle caratteristiche dei portafogli relative al loro andamento e all'evoluzione dei pesi nel tempo.

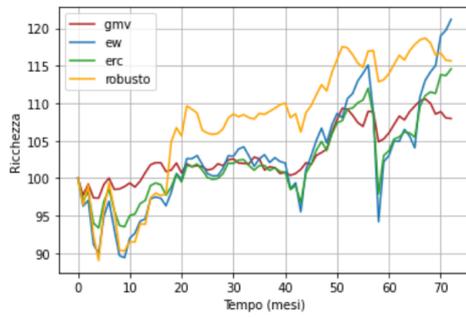
```

96 print("GMV =",ricc_gmv[-1],"EW =",ricc_ew[-1],"ERC =",
97     ricc_erc[-1],"robusto =",ricc_rob[-1])
98
99 > GMV = 107.97 EW = 121.21 ERC = 114.59 robusto = 115.66

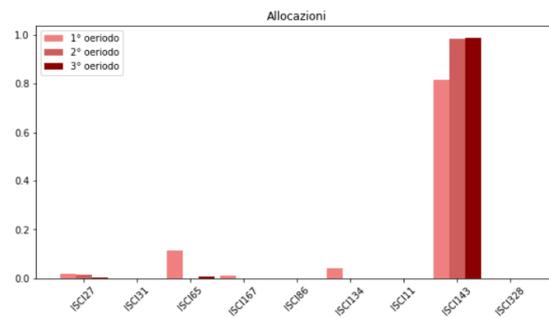
```

Il portafoglio EW registra nuovamente la ricchezza finale più alta, seguito dall'ERC e il portafoglio robusto.

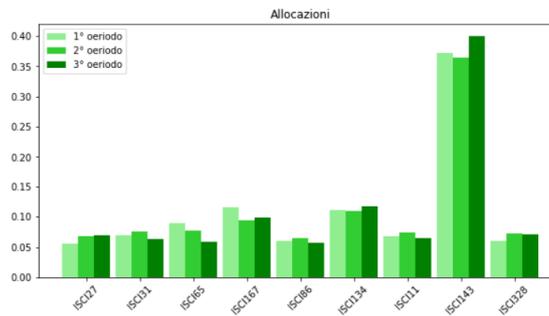
|         | Dev. Standard | Media  | 0.05-Quantile | Drawdown Massimo |
|---------|---------------|--------|---------------|------------------|
| GMV     | 3.70          | 103.22 | 98.55         | -0.04            |
| EW      | 7.08          | 102.67 | 91.66         | -0.18            |
| ERC     | 5.22          | 102.37 | 94.62         | -0.13            |
| Robusto | 8.26          | 107.61 | 91.53         | -0.11            |



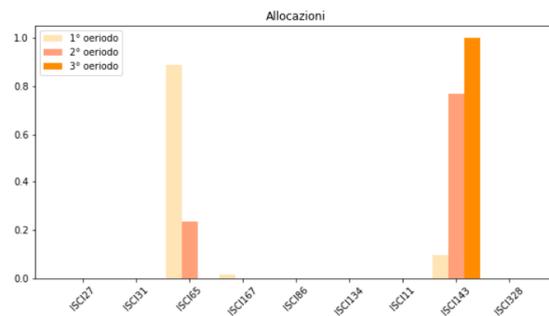
(a) Andamenti complessivi dei portafogli



(b) Portafoglio GMV



(c) Portafoglio ERC



(d) Portafoglio robusto

Figura 5.3: Grafici descrittivi dei portafogli

Osservando le statistiche quantitative notiamo che la media del portafoglio robusto è maggiore di quella che aveva nel caso uniperiodale. Drawdown massimo e quantile decrescono e la deviazione standard cresce, rilevando quindi anche un sostanziale aumento di rischiosità. Il GMV risulta essere il meno rischioso ma compensa la sicurezza con la più bassa prestazione del gruppo.

A parte l'EW, che per definizione mantiene i pesi fissi, i grafici non evidenziano grandi variazioni nei pesi dei portafogli tranne che in quello robusto. Calcoliamo i turnover di ogni portafoglio con la formula

$$TO(w_1, w_2) = \frac{\|w_1 - w_2\|_1}{2} \quad (5.1)$$

e li stampiamo.

|                  | GMV    | EW | ERC   | Robusto |
|------------------|--------|----|-------|---------|
| 1° aggiornamento | 16.84% | –  | 4.25% | 66.94%  |
| 2° aggiornamento | 1.3%   | –  | 4.8%  | 23.34%  |

I turnover del portafoglio ERC non superano il 5% rendendo il portafoglio sostenibile. Quelli dei portafogli robusto e GMV sono molto più alti, in particolare il turnover medio del primo supera il 45%. Questi risultati motivano l'analisi della sottosezione successiva.

### 5.2.3 Vincoli di turnover assoluti

Modifichiamo le funzioni per il calcolo dei portafogli robusto e GMV introducendo il vincolo sul turnover massimo del 5%. Per entrambe le funzioni commentiamo solo le righe che le rendono diverse dalle originali. Per calcolare il turnover usiamo la formula 5.1 che comprende la  $\|\cdot\|_1$  cioè la somma di valori assoluti. Il valore assoluto è una funzione non lineare quindi nei modelli di programmazione per rappresentarlo si usa il seguente espediente

$$\min_x |Ax - b| \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & z \\ \text{s.t.} & Ax - b \leq z \\ & b - Ax \leq z \end{array}$$

cioè introducendo una nuova variabile maggiore sia dell'oggetto del valore assoluto che del suo opposto.

```

100 ### portafoglio robusto con turnover massimo
101 # dmax e il turnover massimo
102 # pesiv sono i pesi rispetto ai quali si calcola il turnover
103 def robust_pf_pesivA(varcov, mu, pesiv, dmax):
104     mro = gp.Model()
105
106     # nuova variabile
107     Z = mro.addMVar(varcov.shape[0])
108     n = varcov.shape[0]
109     x = mro.addMVar(2*n)
110     xT = mro.addMVar(n)
111     xTabs = mro.addMVar(n)
112     xTSigma = mro.addMVar(n)
113     sig = (1.95*np.diag(Sigma)**0.5)/sqrt(data.shape[0])
114     Id = np.identity(n)
115     T = np.hstack((Id, -Id))

```

```

116     T_abs = np.hstack((Id,Id))
117
118     mro.addConstr(xT == T @ x)
119     mro.addConstr(xTabs == T_abs @ x)
120     mro.addConstr(xTSigma == varcov @ xT)
121     mro.addConstr(xT @ np.ones(n) == 1)
122     mro.addConstr(x>=0)
123     # calcoliamo la norma 1 della differenza tra i pesi nuovi
124     # e vecchi, la differenza e' Z
125     mro.addConstr(x[:n]-pesiv <= Z)
126     mro.addConstr(pesiv-x[:n] <= Z)
127     # Z non puo' essere maggiore di 2*turnover per la definizione
128     mro.addConstr(Z.sum() <= 2*dmax)
129     mro.setObjective(xT @ xTSigma - mu@xT + 2*sig@xTabs)
130     mro.params.NonConvex = 2
131     mro.optimize()
132
133     return xT.X
134
135 ### portafoglio GMV con turnover massimo
136 def min_variance_pf(varcov):
137     mmv = gp.Model()
138     x = mmv.addMVar(varcov.shape[0])
139     Z = mmv.addMVar(varcov.shape[0])
140
141     portfolio_risk = x @ varcov @ x
142     mmv.setObjective(portfolio_risk, GRB.MINIMIZE)
143     mmv.addConstr(x.sum() == 1)
144     mmv.addConstr(x-pesiv <= Z)
145     mmv.addConstr(pesiv-x <= Z)
146     mmv.addConstr(Z.sum() <= 2*dmax)
147     mmv.optimize()
148
149     return x.X

```

Calcolando i nuovi pesi e i nuovi andamenti delle ricchezze dei portafogli con lo stesso script utilizzato nella sezione precedente otteniamo i risultati in figura 5.4. Notiamo innanzitutto l'effetto dei vincoli sui grafici relativi ai pesi, inoltre con il nuovo modello il portafoglio robusto realizza un rendimento complessivo molto più alto degli altri.

```

150 print("GMV =", ricc_gmv[-1], "robusto =", ricc_rob[-1])
151
152 > GMV = 109.33  robusto = 157.24

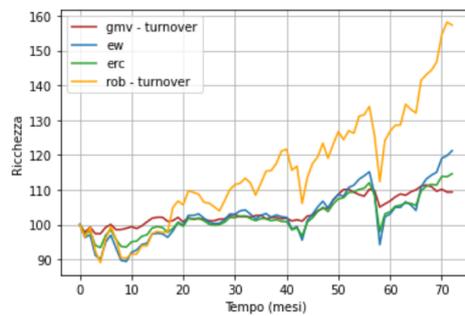
```

Anche il portafoglio GMV ottiene un piccolo miglioramento della performance complessiva. Possiamo inoltre verificare che il turnover è rispettato con il seguente codice

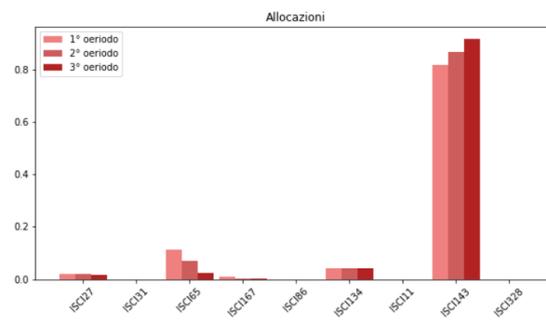
```

153 ### portafoglio GMV
154 #calcolo i due turnover
155 print(np.abs(pesi_gmv[1]-pesi_gmv[0]).sum()/2,
156       np.abs(pesi_gmv[1]-pesi_gmv[2]).sum()/2)
157
158 > 0.04999999999999997  0.050000000000000024
159
160 ### portafoglio robusto
161 print(np.abs(pesi_rob[1]-pesi_rob[0]).sum()/2,
162       np.abs(pesi_rob[1]-pesi_rob[2]).sum()/2)
163
164 > 0.04999999999999996  0.05000000000000002

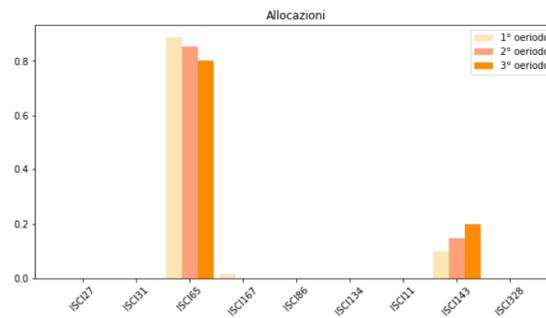
```



(a) Andamenti complessivi dei portafogli



(b) Portafoglio GMV con vincolo sul turnover



(c) Portafoglio robusto con vincolo sul turnover

Figura 5.4: Grafici descrittivi dei portafogli

La tabella riporta le statistiche dei portafogli

|         | Dev. Standard | Media  | 0.05-Quantile | Drawdown Massimo |
|---------|---------------|--------|---------------|------------------|
| GMV     | 4.02          | 103.72 | 98.55         | -0.05            |
| EW      | 7.08          | 102.67 | 91.66         | -0.18            |
| ERC     | 5.22          | 102.37 | 94.62         | -0.13            |
| Robusto | 16.67         | 115.06 | 91.53         | -0.16            |

Tutti i valori sono simili ai precedenti, ulteriore prova che limitare il turnover non danneggia il portafoglio ma ne riduce solamente i costi. L'unico che cambia

sensibilmente è il portafoglio robusto il quale diventa più performante ma anche più rischioso.

## 5.2.4 Penalizzazione del turnover

La sottosezione precedente limitava gli spostamenti di ricchezza nei portafogli non sostenibili con vincoli sul turnover massimo. Riprendendo le argomentazioni usate all'inizio del capitolo sulla risk parity, possiamo criticare tale approccio perchè non sappiamo se vincolare un turnover così basso aiuti o penalizzi i portafogli. In certe occasioni la scelta migliore potrebbe essere superare leggermente la soglia di turnover, se ciò comporta ottenere ricchezza maggiore. Per questo motivo ora cambiamo approccio e non imponiamo vincoli sul turnover ma lo penalizziamo inserendolo nella funzione obiettivo dei modelli. Possiamo definire questo approccio, che ricorda tecniche Ridge e Lasso, di regolarizzazione, infatti sottopone l'ottimizzatore alla scelta di quanto penalizzare la norma. Per quanto delicato e interessante, la nostra tesi non tratta tale argomento ma usa coefficienti che sono stati decisi empiricamente per ogni portafoglio in modo da ottenere un turnover medio minore o uguale al 5%.

Nell'analisi regolarizziamo il turnover con la  $\|\cdot\|_1$  in modo da concentrarlo su meno elementi possibili e non avere tante piccole differenze di pesi vicine allo zero. Questa scelta è dovuta al fatto che a livello di commissioni può essere meno costoso cambiare un solo peso di un certo valore più che diversi pesi di frazioni del valore. Sottoponiamo all'analisi anche il portafoglio ERC.

```

1  ### portafoglio risk budgeting ERC
2  def RB_pf_pesivB(varcov,B, pesiv):
3      mrb = gp.Model()
4
5      Z = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
6      x = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
7      Sig_x = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
8      x_Sig_x = mrb.addMVar(1)
9      den = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
10     RC_ot = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
11     vett_x_Sig_x = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
12     diff_RC_b = mrb.addMVar(varcov.shape[0])
13
14     mrb.params.NonConvex = 2
15     # la norma uno viene penalizzata di 1
16     mrb.setObjective(diff_RC_b @ diff_RC_b +Z.sum(), GRB.MINIMIZE)
17     mrb.addConstr(x.sum() == 1)
18     mrb.addConstr(varcov @ x == Sig_x) # definisco (\Sigma x)
19     mrb.addConstr(x_Sig_x == x @ Sig_x)
20     mrb.addConstrs(den[i] == x[i] @ Sig_x[i]
21                    for i in range(varcov.shape[0]))
22     mrb.addConstr( np.ones((varcov.shape[0], 1)) @ x_Sig_x
23                    == vett_x_Sig_x )
24     mrb.addConstrs(vett_x_Sig_x[i] @ RC_ot[i] == den[i]
25                    for i in range(varcov.shape[0]))
26     mrb.addConstr(diff_RC_b == RC_ot - B)
27     # stessa definizione usata nell'altra sottosezione
28     mrb.addConstr(x-pesiv <= Z)
29     mrb.addConstr(pesiv-x <= Z)
30
31     mrb.optimize()
32     return x.X
33

```

```

34 # portafoglio robusto
35 def robust_pf_pesiB(varcov, mu, pesiv):
36     mro = gp.Model()
37
38     Z = mro.addMVar(varcov.shape[0])
39     n = varcov.shape[0]
40     x = mro.addMVar(2*n)
41     xT = mro.addMVar(n)
42     xTabs = mro.addMVar(n)
43     xTSigma = mro.addMVar(n)
44     sig = (1.95*np.diag(Sigma)**0.5)/sqrt(data.shape[0])
45     Id = np.identity(n)
46     T = np.hstack((Id,-Id))
47     T_abs = np.hstack((Id,Id))
48
49     mro.addConstr(xT == T @ x)
50     mro.addConstr(xTabs == T_abs @ x)
51     mro.addConstr(xTSigma == varcov @ xT)
52     mro.addConstr(xT @ np.ones(n) == 1)
53     mro.addConstr(x>=0)
54     mro.addConstr(x[:n]-pesiv <= Z)
55     mro.addConstr(pesiv-x[:n] <= Z)
56     # penalizziamo con coefficiente = 1/410
57     mro.setObjective(xT @ xTSigma - mu@xT +
58         2*sig@xTabs + Z.sum()/410)
59     mro.params.NonConvex = 2
60     mro.optimize()
61
62     return xT.X
63
64 def min_variance_pf_pesiB(varcov, pesiv):
65     mmv = gp.Model()
66     #vdmx = np.repeat(dmax,varcov.shape[0])
67     x = mmv.addMVar(varcov.shape[0])
68     Z = mmv.addMVar(varcov.shape[0])
69
70     # penalizziamo di 1/25000
71     portfolio_risk = x @ varcov @ x + Z.sum()/25000
72     mmv.setObjective(portfolio_risk, GRB.MINIMIZE)
73     mmv.addConstr(x.sum() == 1)
74     mmv.addConstr(x-pesiv <= Z)
75     mmv.addConstr(pesiv-x <= Z)
76     mmv.optimize()
77     return x.X

```

Notiamo che le penalizzazioni sono molto diverse l'una dall'altra.

```

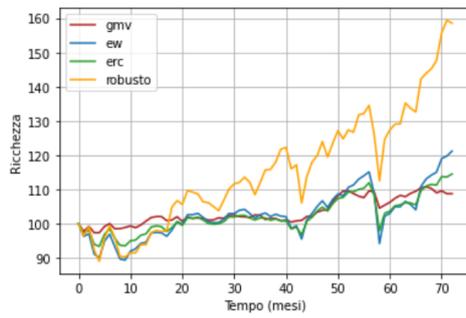
79 print("GMV =", ricc_gmv[-1], "robusto =", ricc_rob[-1],
80       "ERC =", ricc_erc[-1])
81
82 > GMV = 108.76  robusto = 158.52  ERC = 114.51

```

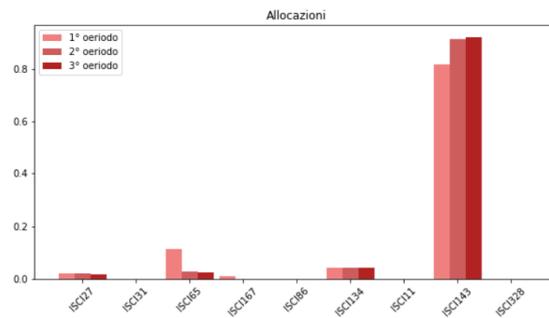
Le ricchezze finali sono molto simili a quelle del caso precedente. Una panoramica più completa è data dalla figura 5.5, i turnover adesso sono

|                  | GMV   | EW | ERC   | Robusto |
|------------------|-------|----|-------|---------|
| 1° aggiornamento | 9.56% | —  | 3.56% | 1.56%   |
| 2° aggiornamento | 0.84% | —  | 4.1%  | 6.72%   |

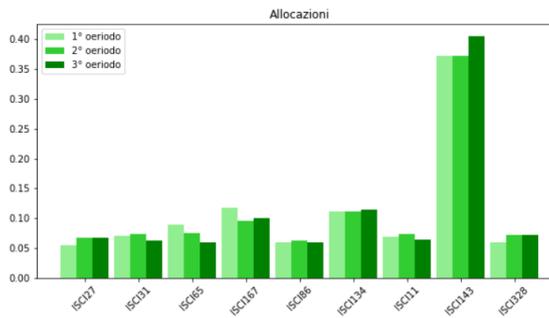
e hanno valori bassi ma non limitati al 5%.



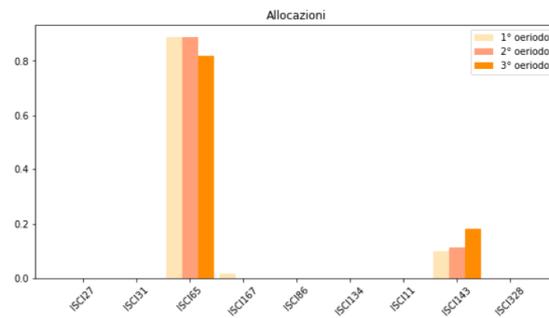
(a) Andamenti complessivi dei portafogli



(b) Portafoglio GMV



(c) Portafoglio ERC



(d) Portafoglio robusto

Figura 5.5: Grafici descrittivi dei portafogli

Come abbiamo scritto a inizio sottosezione, utilizzare nei modelli la  $\|\cdot\|_1$  della differenza dei pesi penalizza le piccole variazioni e le concentra in pochi elementi non nulli. Questo si traduce in un minore numero di operazioni e quindi di commissioni. La tabella sottostante tiene conto del numero di pesi che subiscono variazioni ad ogni aggiornamento del portafoglio.

|                  | Turnover Vincolato |     |         | Penalizzazione |     |         |
|------------------|--------------------|-----|---------|----------------|-----|---------|
|                  | GMV                | ERC | Robusto | GMV            | ERC | Robusto |
| 1° aggiornamento | 3                  | 7   | 3       | 3              | 5   | 2       |
| 2° aggiornamento | 2                  | 6   | 2       | 2              | 4   | 2       |

Con la penalizzazione in  $\|\cdot\|_1$  tutti i portafogli hanno un numero di pesi variati minore o uguale rispetto al caso con turnover vincolato. La differenza è molto leggera nei portafogli GMV e robusto perchè sono molto poco diversificati e hanno pochi elementi non nulli in partenza, è invece più evidente nel portafoglio ERC che ad ogni aggiornamento modifica due pesi in meno.

## Capitolo 6

# Analisi comparativa di portafogli basati sui fattori

Questo capitolo è destinato all'applicazione dei concetti teorici e dei modelli presentati nella sezione 4.2. Oltre alle librerie usate nel capitolo 5 sfruttiamo `scikit-learn`, una libreria con funzioni utili per l'analisi di dati, in particolare il modulo `sklearn.decomposition.PCA` che permette di eseguire la PCA e `sklearn.linear_model.LinearRegression` che permette di eseguire la regressione lineare.

### 6.1 Confronto uniperiodale di portafogli robusti basati su fattori

Questa sezione è dedicata ad un'analisi uniperiodale di selezione di portafoglio basata sui fattori. Iniziamo calcolando i fattori di rischio secondo le tecniche presentate nei capitoli precedenti e, sulla base di questi, decomponiamo il rischio dei portafogli non basati su fattori ottenuti in precedenza. Successivamente costruiamo e compariamo portafogli Factor Risk Parity, in particolare:

1. GMV-FRP, il portafoglio con la minore volatilità
2. SR-FRP, quello con il maggior Sharpe Ratio

Concludiamo comparando le prestazioni dei due portafogli FRP con i portafogli non basati sui fattori studiati nel capitolo precedente. In quest'analisi non mettiamo vincoli long-only e ammettiamo vendite allo scoperto, questo perché vincoli sulle posizioni possono rendere impossibile la costruzione dei portafogli basati sui fattori.

#### 6.1.1 Procedura seguita nell'analisi

Per la costruzione dei portafogli abbiamo a disposizione il framework del capitolo precedente, i rendimenti mensili dei  $N = 9$  indici FIDA FFI relativi al periodo '01-01-2010' '01-01-2018'. La ricchezza iniziale è  $w = 100\text{€}$  e la valutazione viene fatta usando i rendimenti dei tre anni e mezzo successivi, dal '01-01-2018' al '01-06-2021': costruiamo i portafogli sulla base dei pesi ottenuti e ne simuliamo

l'andamento e la ricchezza generata al termine dell'orizzonte d'investimento. Le variabili  $\Sigma$ ,  $\mu$  e  $\text{data}$  sono le stesse dei vecchi script e contengono rispettivamente la matrice delle covarianze degli asset, il vettore dei rendimenti attesi e i rendimenti.

### 6.1.2 Stima dei fattori e decomposizione del rischio di portafoglio

Stimiamo i fattori di rischio secondo i due metodi descritti nella sezione 4.2 e calcoliamo le risk contribution dei portafogli EW, GMV, RB e robusto costruiti nel confronto uniperiodale della sezione 5.1.

#### Fattori osservabili nel mercato

Usiamo come fattori di rischio i dati del modello Fama-French a tre fattori reperibili a questo link: [http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data\\_library.html](http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html).

```

1 # carichiamo il dataset di Fama French scaricato dal link
2 fama_3fat = pd.read_csv('FF_3_Factors.csv', sep=',',
3     ,index_col=0, header=0)
4 # selezioniamo la porzione di dati relativa al periodo di analisi
5 fama_3fat = fama_3fat.iloc[1002:1098,:]
```

Ora impostiamo e risolviamo il modello di regressione lineare al fine di ottenere la matrice dei loadings  $\beta$  e la matrice diagonale di covarianza dei residui  $D$ .

```

6 # funzione per risolvere la regressione lineare
7 from sklearn.linear_model import LinearRegression
8 reg = LinearRegression(fit_intercept = False)
9 # la X del modello lineare
10 fama_reg = fama_3fat.values/100
11 # la Y del modello lineare
12 data_reg = data.values
13 reg.fit(fama_reg,data_reg)
14
15 # salviamo la matrice dei beta e la varianza dei residui
16 betas = reg.coef_ # matrice dei beta
17 omega = np.var(reg.predict(fama_reg)-data_reg,axis=0)
```

Riportiamo la matrice  $\beta$  nella tabella 6.1. Notiamo come tutti gli indici azionari abbiano il beta del mercato molto alto, in particolare quelli europei, i beta degli altri due fattori sono invece quasi tutti negativi e molto bassi.

Il modello a fattori permette di calcolare la matrice delle covarianze dei titoli stimando un basso numero di parametri grazie a  $\Omega$ ,  $D$  e  $\beta$ .

```

18 # calcoliamo la matrice delle covarianze come B omega B' + D
19 Sigma_f = (betas @ np.cov(fama_reg.T) @ betas.T + np.diag(omega))
20 # matrice delle covarianze calcolata senza i fattori
21 Sigma = np.cov(data_reg.T)
22 # stampiamo la differenza media delle due matrici delle covarianze
23 print((np.abs(Sigma-Sigma_f)).round(4).mean())
24
25 > 0.000311
```

La differenza media tra  $\Sigma$  stimata direttamente dai titoli e tramite i fattori è trascurabile.

| Indice | Market | SMB     | HML     |
|--------|--------|---------|---------|
| 1      | 1.1528 | -0.128  | 0.1895  |
| 2      | 1.0877 | -0.1396 | -0.2352 |
| 3      | 1.0038 | 0.0103  | 0.0195  |
| 4      | 0.255  | -0.0137 | -0.21   |
| 5      | 0.8937 | -0.0236 | -0.1525 |
| 6      | 0.2615 | -0.0904 | -0.0634 |
| 7      | 0.8681 | -0.0795 | -0.111  |
| 8      | 0.4063 | -0.2743 | -0.0575 |
| 9      | 0.8684 | -0.1858 | 0.0159  |

Tabella 6.1: Matrice  $\beta$  del modello lineare. La numerazione degli indici è la stessa del capitolo precedente

```

26 from scipy.linalg import null_space
27 from scipy.linalg import pinv
28 B_til = null_space(betas.T).T
29 beta_plus = pinv(betas)
30
31 # funzione che calcola l'esposizione ai fattori
32 def RC_fat(varcov, a, x):
33     apiu = pinv(a)
34     denom = x @ varcov @ x.T
35     num_a = a.T @ x
36     num_b = apiu @ varcov @ x
37     numer = np.multiply(num_a, num_b)
38     return numer/denom
39
40 # funzione che calcola l'esposizione ai fattori nascosti
41 def RC_nasc(varcov, a, x):
42     btild = null_space(a.T).T
43     denom = x @ varcov @ x
44     num_a = btild @ x
45     num_b = btild @ varcov @ x
46     numer = np.multiply(num_a, num_b)
47     return numer/denom

```

Le due funzioni implementano la 4.24 e la 4.25, grazie a loro possiamo calcolare l'esposizione dei portafogli ai fattori del modello Fama-French.

```

48 # portafoglio GMV
49 print(RC_fat(Sigma, betas, pesi_gmv), RC_nasc(Sigma, betas, pesi_gmv)
50 > [0.28  0.5035 0.0003] [0.0011 0.0018 0.0146 0.0004 0.1666 0.0317]
51
52 # portafoglio EW
53 print(RC_fat(Sigma, betas, pesi_ew), RC_nasc(Sigma, betas, pesi_ew)
54 > [1.0076 0.005 -0.0156] [ 0.007 -0.0004 -0.0012 0. -0.0024 0.]
55
56 # portafoglio ERC
57 print(RC_fat(Sigma, betas, pesi_erc), RC_nasc(Sigma, betas, pesi_erc)
58 > [0.8303 0.1432 -0.0014] [0.0052 -0.0008 -0.0025 0. 0.0225 0.0034]
59
60 # portafoglio robusto
61 print(RC_fat(Sigma, betas, pesi_rob), RC_nasc(Sigma, betas, pesi_rob)
62 > [0.2015 0.5502 0.0075] [0.0026 0.0026 0.0201 0.0002 0.1873 0.0281]

```

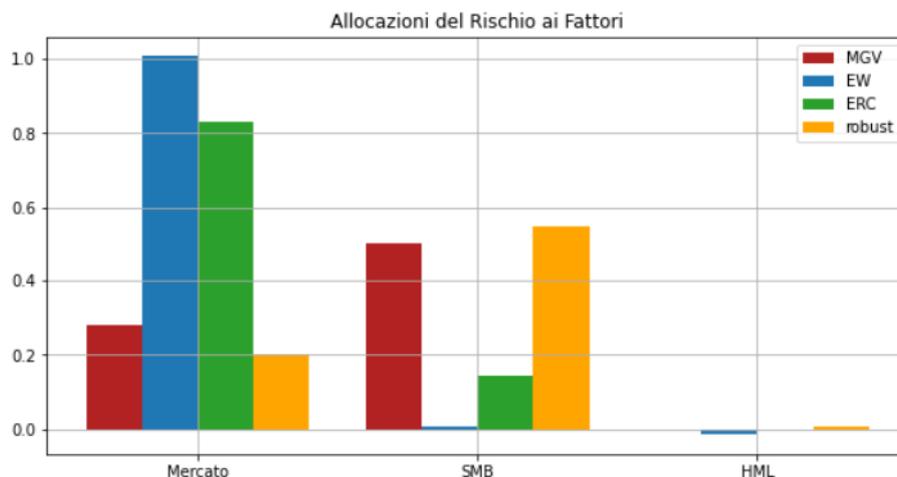


Figura 6.1: Esposizione dei portafogli ai fattori del modelli Fama-French

Le risk contribution di ciascun portafoglio si dividono in tre valori associati ai fattori del modello e sei esposizioni a fattori nascosti. Queste ultime sono basse per quasi tutti i portafogli tranne per i meno diversificati, il GMV e il robusto, e non è possibile dar loro un'interpretazione economica. La figura 6.1 mostra le risk contribution percentuali dei quattro portafogli rispetto ai tre fattori osservabili. I portafogli ERC e EW, che sono i più diversificati, hanno esposizione altissima al mercato e quasi nulla agli altri due fattori, gli altri due invece hanno bassa esposizione al mercato e più alta al fattore Small Minus Big. Dato che i portafogli GMV e robusto sono costituiti da più del 90% dall'ottavo indice, 'Obbligazionari Area Euro- Governativi', possiamo dire che riflettano le risk contribution dell'indice che essendo obbligazionario non è particolarmente esposto al mercato.

### Fattori intrinseci ai dati

Proseguiamo stimando i fattori con il metodo della PCA. L'applicazione di questa tecnica al dataset di indici individua  $m = N = 9$  componenti principali, pari al numero di indici. Le nuove componenti, cioè i fattori, sono ordinate sulla base dell'importanza che nella PCA è determinata dalla variabilità dei dati che esse spiegano. Costruire un portafoglio FRP su tutti i fattori vuol dire allocare  $1/m$  del rischio a ciascuno di essi, anche agli ultimi e meno importanti. Può essere dunque utile e interessante selezionare gli  $m < N$  fattori più importanti e allocare il rischio in modo uguale tra loro. In quest'analisi seguiamo entrambi gli approcci iniziando da quello con  $m = 9$ .

```

63 # carichiamo la funzione che svolge la PCA
64 from sklearn.decomposition import PCA
65 # dichiariamo implicitamente m=9
66 pca = PCA()
67 pca.fit_transform(data.values)
68 print(pca.explained_variance_)
69
70 > [5.86e-03 1.76e-03 8.20e-04 6.00e-04 4.90e-04 2.50e-04
```

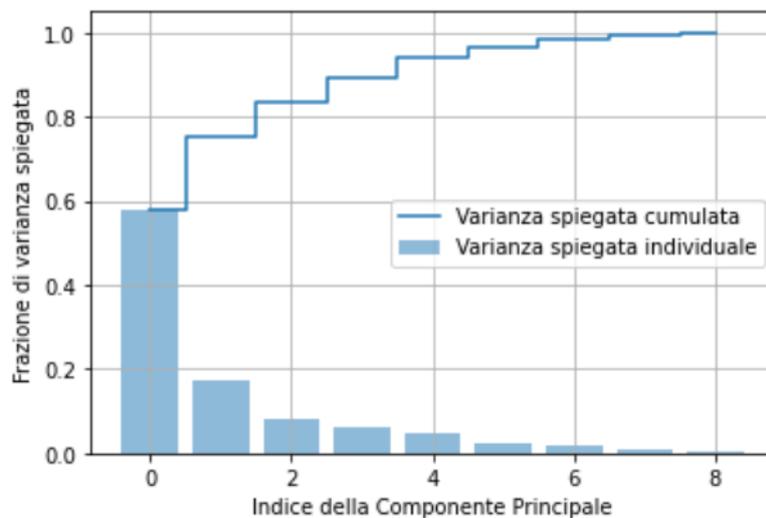


Figura 6.2: Variabilità e variabilità cumulata spiegata dalle componenti

```
71 [ 1.60e-04 1.10e-04 6.00e-05]
```

Le frazioni di variabilità dei dati spiegate dalle componenti sono ordinate in modo decrescente, la figura 6.2 le visualizza più chiaramente in forma percentuale. Con sole  $m = 4$  componenti riusciamo a catturare quasi il 90% della variabilità dell'intero dataset.

```
72 # salviamo la matrice dei loadings
73 A = pca.components_.round(4)
74 # e la varianza spiegata dalle componenti principali
75 VV = np.diag(pca.explained_variance_)
76 from scipy.linalg import sqrtm
77 from scipy.linalg import inv
78 VVmez = sqrtm(inv(VV))
```

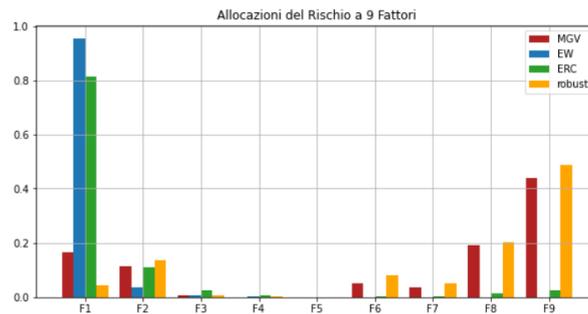
La matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$ , mostrata nella tabella 6.2, raccoglie i coefficienti lineari che legano le vecchie dimensioni a quelle delle componenti principali. Interpretare i nuovi fattori è complicato, specialmente i meno importanti, ma proviamo a dare un significato ad alcuni di loro. Osservando la prima riga della matrice notiamo che tutti gli indici azionari hanno loadings alti in valore assoluto, possiamo quindi dire che il fattore più importante dipenda dal mercato azionario. Il terzo fattore ha due loadings positivi molto alti relativi a indici obbligazionari, perciò cattura la variabilità del suddetto mercato. Il coefficiente dell'indice obbligazionario europeo è basso ma dal momento che diversi altri indici sono europei, è probabile che molta della sua variabilità sia catturata da altri fattori.

```
79 # funzione che calcola le risk contribution percentuali
80 def RC_pca(algo, covar, pesi):
81     num = np.multiply((inv(algo.components_.T) @ pesi)**2,
82                       algo.explained_variance_)
83     den = pesi @ covar @ pesi
84     return num/den
```

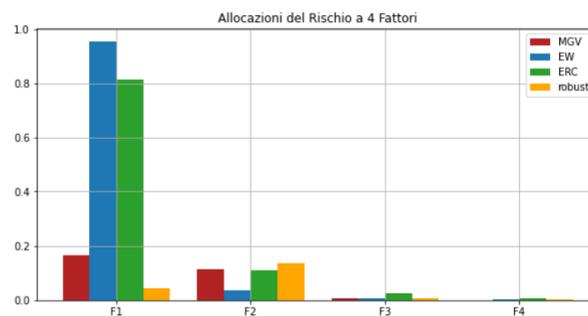
|    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| F1 | -0.54 | -0.38 | -0.32 | -0.09 | -0.36 | -0.12 | -0.35 | -0.01 | -0.41 |
| F2 | 0.54  | 0.0   | -0.12 | -0.44 | -0.59 | -0.32 | -0.05 | -0.08 | 0.09  |
| F3 | 0.05  | -0.26 | -0.30 | 0.50  | -0.44 | 0.42  | 0.06  | 0.03  | 0.46  |
| F4 | 0.30  | 0.29  | 0.08  | 0.52  | -0.23 | 0.06  | 0.01  | -0.01 | -0.68 |
| F5 | 0.52  | -0.48 | -0.44 | -0.02 | 0.46  | 0.11  | -0.14 | 0.01  | -0.20 |
| F6 | 0.03  | -0.44 | 0.42  | -0.31 | -0.17 | 0.45  | 0.43  | -0.18 | -0.24 |
| F7 | -0.15 | 0.23  | -0.57 | -0.15 | 0.01  | -0.02 | 0.71  | 0.18  | -0.15 |
| F8 | 0.01  | 0.36  | -0.07 | -0.37 | -0.04 | 0.63  | -0.36 | 0.41  | -0.07 |
| F9 | 0.06  | -0.30 | 0.25  | 0.09  | -0.08 | -0.25 | 0.09  | 0.86  | -0.01 |

Tabella 6.2: Matrice dei loadings della PCA. Il numero della colonna segue la numerazione degli indici, le righe sono i fattori o componenti principali

Con la funzione `RC_pca` dati i pesi di un portafoglio possiamo calcolarne le risk contribution rispetto ai fattori. Lo facciamo per i quattro portafogli sia con  $m = 9$  che con  $m = 4$  fattori e mostriamo i risultati nella figura 6.3. Il secondo grafico è semplicemente la prima parte del primo che è molto sbilanciato sui primi o sugli ultimi fattori di rischio a seconda dei portafogli.



(a) Risk contribution con 9 fattori



(b) Risk contribution con 4 fattori

Figura 6.3: Esposizioni dei portafogli rispetto a 9 e 4 fattori intrinseci

### 6.1.3 Portafogli FRP

Ora costruiamo i portafogli GMV-FRP e SR-FRP sulla base di quattro e nove fattori di rischio intrinseci.

```
85 ### 9 fattori
86 pca = PCA()
87 pca.fit_transform(data.values)
88 A = pca.components_
89 VV = np.diag(pca.explained_variance_)
90 VVmez = sqrtm(inv(VV))
91
92 # costruiamo il portafoglio GMV-FRP
93 uni = np.sign(A @ np.ones(9))
94 print(uni)
95 > [-1. -1.  1.  1. -1. -1.  1.  1.  1.]
96
97 pesi_fgmv_n = (A.T @ VVmez @ uni)/(np.ones(len(mu))
98               @ A.T @ VVmez @ uni)
99 print(pesi_fgmv_n)
100 > [-0.0767  0.2904 -0.1059  0.1456 -0.1171  0.0763
101     0.0913  0.7148 -0.0186]
102
103 # costruiamo il portafoglio SR-FRP
104 uni = np.sign(A @ mu)
105 print(uni)
106 > [-1. -1. -1.  1. -1.  1.  1.  1.  1.]
107
108 pesi_fsr_n = (A.T @ VVmez @ uni)/(np.ones(len(mu))
109               @ A.T @ VVmez @ uni)
110 print(pesi_fsr_n)
111 > [-0.0937  0.1547  0.2341 -0.1872 -0.0987  0.2252
112     0.3554  0.7422 -0.332 ]
```

I due vettori di  $\pm 1$  sono diversi e producono pesi diversi. Ci sono molte vendite allo scoperto, alcune anche maggiori del 30%, ma i pesi sommano comunque a uno.

```
113 ### 4 fattori
114 pca = PCA(4)
115 pca.fit_transform(data.values)
116 A = pca.components_
117 VV = np.diag(pca.explained_variance_)
118 VVmez = sqrtm(inv(VV))
119
120 # costruiamo il portafoglio GMV-FRP
121 uni = np.sign(A @ np.ones(9))
122 print(uni)
123 > [-1. -1.  1.  1.]
124
125 pesi_fgmv_q = (A.T @ VVmez @ uni)/(np.ones(len(mu))
126               @ A.T @ VVmez @ uni)
127 print(pesi_fgmv_q)
128 > [ 0.0933  0.0849  0.0057  0.5588 -0.0694  0.2973
129     0.0977  0.0295 -0.0978]
130
131 # costruiamo il portafoglio SR-FRP
132 uni = np.sign(A @ mu)
133 print(uni)
134 > [-1. -1. -1.  1.]
135
136 pesi_fsr_q = (A.T @ VVmez @ uni)/(np.ones(len(mu))
```

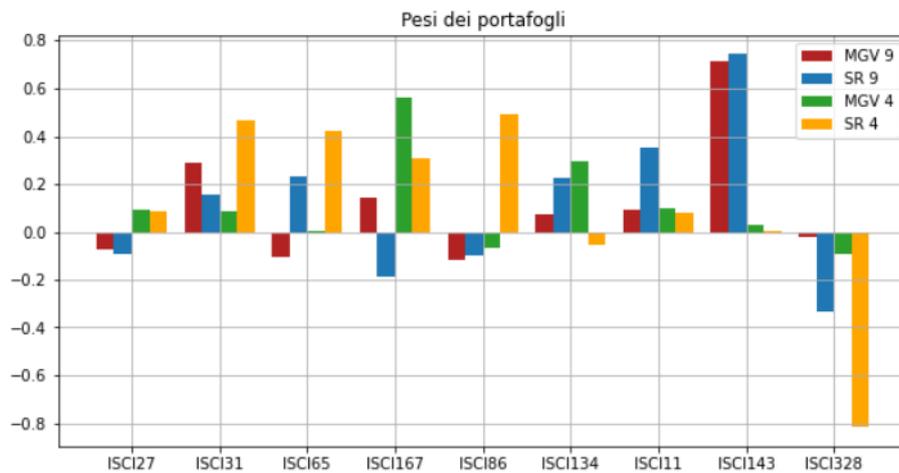


Figura 6.4: Pesi dei quattro portafogli FRP

```

137 @ A.T @ VVmez @ uni)
138 print(pesi_fsr_q)
139 > [ 0.0886  0.4653  0.4257  0.311  0.4943 -0.0581
140      0.0821  0.0085 -0.8173]

```

Utilizzando quattro fattori il portafoglio GMV diventa più equilibrato perchè contiene solo due titoli venduti allo scoperto e con pesi bassi invece lo SR, anche se ha solo due titoli venduti allo scoperto, presenta un peso uguale circa a  $-0.82$ , quindi è molto sbilanciato. I pesi dei portafogli sono riassunti nella figura 6.4.

```

141 ### 9 fattori
142 Sigma = A.T @ VV @A
143 # calcoliamo le risk contribution dei titoli
144 print(RC_pca(pca, Sigma, pesi_fgm_n))
145 > [0.11120702 0.11111061 0.11111958 0.11109502 0.11113098
146     0.11115381 0.1110878  0.1110857  0.11108666]
147 # calcoliamo la varianza del portafoglio
148 print(pesi_fgm_n @ Sigma @ pesi_fgm_n)
149 > 0.000146
150
151 print(RC_pca(pca, Sigma, pesi_fsr_n))
152 > [0.11113936 0.11113031 0.11108987 0.11113091 0.11118362
153     0.11109586 0.11109191 0.11109022 0.11108709]
154
155 print(pesi_fsr_n @ Sigma @ pesi_fsr_n)
156 > 0.000214
157
158 ### 4 fattori
159 # GMV-FRP
160 print(RC_pca(pca, Sigma, pesi_fgm_q))
161 > [0.25005917 0.24996644 0.25001677 0.24995761]
162
163 print(pesi_fgm_q @ Sigma @ pesi_fgm_q)
164 > 0.000488
165
166 # SR-FRP
167 print(RC_pca(pca, Sigma, pesi_fsr_q))
168 > [0.25006571 0.24997298 0.25002332 0.24996415]
169 print(pesi_fsr_q @ Sigma @ pesi_fsr_q)

```

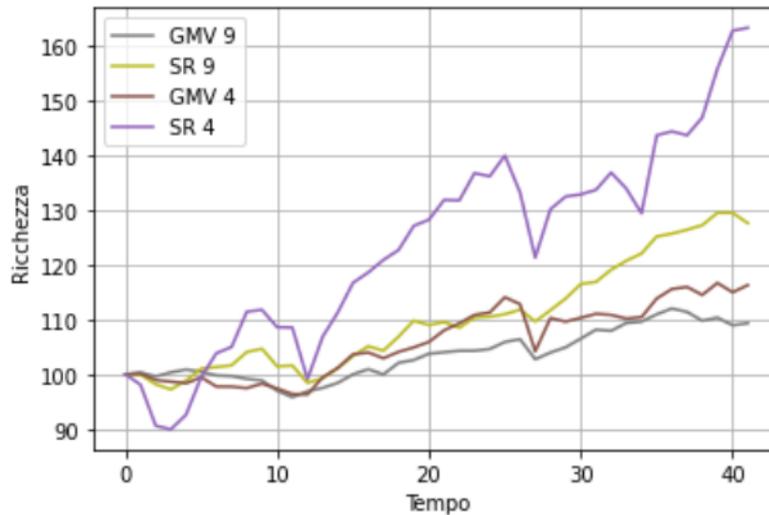


Figura 6.5: Andamento della ricchezza dei portafogli basati sui fattori

```
170 > 0.001576
```

I vincoli sulle risk contribution sono rispettati e le varianze dei due portafogli GMV sono minori di quelle dei SR. Procediamo a confrontare le performance dei portafogli, `rend_new_cp` è la matrice dei rendimenti cumulati dei titoli.

```
171 invest_in = 100
172 alloc_fgmv_q = pesi_fgmv_q*invest_in
173 alloc_fsr_q = pesi_fsr_q*invest_in
174 alloc_fsr_n = pesi_fsr_n*invest_in
175 alloc_fgmv_n = pesi_fgmv_n*invest_in
176
177 percorso_fgmv_q = rend_new_cp @ alloc_fgmv_q
178 percorso_fsr_q = rend_new_cp @ alloc_fsr_q
179 percorso_fsr_n = rend_new_cp @ alloc_fsr_n
180 percorso_fgmv_n = rend_new_cp @ alloc_fgmv_n
181
182 ricc_fgmv_n = percorso_fgmv_n[-1]
183 ricc_fsr_n = percorso_fsr_n[-1]
184 ricc_fgmv_q = percorso_fgmv_q[-1]
185 ricc_fsr_q = percorso_fsr_q[-1]
186 print("GMV nove fattori =", ricc_fgmv_n,
187       "SR nove fattori =", ricc_fsr_n,
188       "GMV quattro fattori =", ricc_fgmv_q,
189       "SR quattro fattori =", ricc_fsr_q)
190
191 > GMV nove fattori = 109.32, SR nove fattori = 127.60,
192     GMV quattro fattori = 116.28, SR quattro fattori = 163.26
```

Le ricchezze a fine periodo dei portafogli GMV sono in linea con quelle dei portafogli non basati su fattori mentre i due che massimizzano lo Sharpe Ratio, in particolare quello a quattro fattori, realizza un rendimento superiore al 60%. La figura 6.5 mostra l'andamento nel tempo delle ricchezze ribadendo l'incredibile prestazione del portafoglio SR-FRP.

|               | Dev. Std | Media  | 0.05-Quantile | Drawdown Massimo |
|---------------|----------|--------|---------------|------------------|
| GMV 9 fattori | 4.51     | 103.56 | 97.02         | -0.05            |
| SR 9 fattori  | 9.84     | 110.25 | 98.44         | -0.05            |
| GMV 4 fattori | 6.61     | 106.04 | 97.41         | -0.08            |
| SR 4 fattori  | 18.87    | 123.62 | 92.88         | -0.13            |

Dalla tabella delle statistiche quantitative si nota il basso quantile del portafoglio dovuto all'inflessione osservabile all'inizio del grafico. Le altre statistiche sono in linea con le precedenti con i portafogli GMV che si dimostrano meno performanti ma più sicuri.

### 6.1.4 Confronto complessivo di tutti i portafogli analizzati

Concludiamo l'analisi con un confronto di tutti i portafogli studiati e implementati nella tesi sulla base di volatilità, esposizione e prestazioni realizzate. Abbiamo ricalcolato tutti i pesi e le ricchezze dei portafogli non basati su fattori senza vincoli sulla vendite allo scoperto, così come sono definiti quelli basati su fattori, ma ciò non li ha variati. Ciò è indice di robustezza dei modelli perchè i loro vincoli non influenzano attivamente il risultato che dipende invece dalle basi statistiche sulle quali sono costruiti. Nel confronto ignoriamo i portafogli SR perchè usano il vettore dei rendimenti attesi come base per calcolare i pesi. Abbiamo discusso del forte impatto di  $\mu$  all'inizio del capitolo 3 e il suo utilizzo farebbe cadere l'ipotesi di robustezza dell'analisi, pertanto tra i portafogli a fattori consideriamo solo i due GMV.

Gli andamenti delle ricchezze dei portafogli sono mostrati nella figura 6.6, a parte i portafogli esclusi hanno tutti andamenti simili.

```

193 print("GMV =", percorso_mv[-1], "EW =", percorso_ew[-1],
194       "ERC =", percorso_erc[-1], "robusto =", percorso_rob[-1],
195       "GMV-FRP N =", percorso_fgmv_n[-1],
196       "GMV-FRP Q =", percorso_fgmv_q[-1])
197
198 > GMV = 107.77      EW = 116.83      ERC = 113.10
199 robusto = 106.48      GMV-FRP N = 109.32      GMV-FRP Q = 116.28

```

I migliori risultati provengono dai portafogli EW e GMV-FRP a quattro fattori con il primo che supera il secondo negli ultimi mesi di mercato. Entrambi generano un rendimento maggiore del +15%. Un altro portafoglio in crescita è l'ERC, da dopo il crollo di Marzo 2021 diminuisce costantemente la distanza con i primi due superando il +10%. Il GMV, il portafoglio robusto e il GMV-FRP a nove fattori realizzano rendimenti compresi tra il +5% e il +10% ma concludono l'orizzonte d'investimento con un andamento decrescente del capitale.

```

200 print(sum(abs(pesi_fgmv_q)), sum(abs(pesi_fgmv_n)),
201       sum(abs(pesi_fsr_q)), sum(abs(pesi_fsr_n)))
202
203 > 1.3344      1.6367      2.7509      2.4232

```

Le esposizioni dei portafogli basati sui fattori sono molto alte a causa delle corpose vendite allo scoperto evidenti nella figura 6.7. I due portafogli GMV-FRP hanno esposizione del 30% e del 60% maggiore degli altri portafogli robusti con cui sono confrontati.

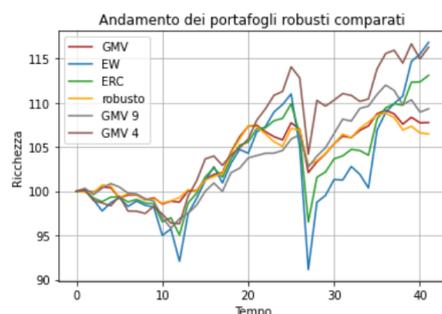
Uno degli aspetti più importanti del confronto tra i portafogli è la loro volatilità. I meno rischiosi sono il GVM e il robusto, entrambi con deviazione standard minore del 4% e drawdown massimo inferiore al 5%, seguiti dal GMV-FRP a 9 fattori che realizza la stessa perdita massima percentuale e ha volatilità pari al 4.5%. Sono i portafogli che patiscono meno il crollo del mercato dovuto alla crisi COVID-19 ma sono anche quelli che realizzano i rendimenti minori. Dei portafogli rimanenti solo l'ERC ha volatilità minore del 5%, EW e GMV-FRP a 4 fattori superano il 6%.

```

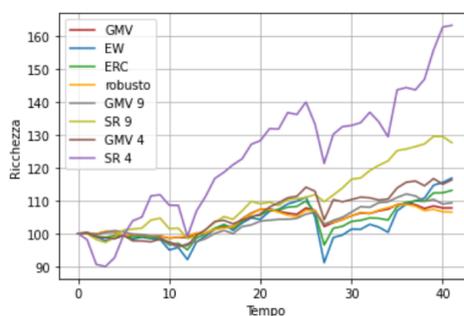
204 # uniamo tutti gli andamenti in una matrice
205 rendis = np.vstack((percorso_mv, percorso_ew, percorso_erc,
206                   percorso_rob, percorso_fgm_n, percorso_fgm_q))
207 nomi = ['gmv', 'ew', 'erc', 'rob', 'gmv_n', 'gmv_q']
208 # salviamo la ricchezza minima ad ogni istante di tempo
209 minimi = [nomi[el] for el in np.argmin(rendis, axis=0)]
210 print(np.unique(minimi, return_counts=True))
211
212 > (ew 16), (gmv_n 12), (rob 7),
213    (gmv_q 5), (gmv 2), (erc 0)

```

La stampa nella porzione di codice precedente riporta un dato molto interessante, ovvero il numero di mesi in cui ogni portafoglio è stato quello con ricchezza minima. Nonostante il miglior rendimento complessivo l'EW risulta essere il peggior investimento nel 38% dei mesi, anche i portafogli GMV-FRP 9 e robusto lo sono spesso, l'ERC invece non lo è mai.



(a) Portafogli confrontati



(b) Tutti i portafogli

Figura 6.6: Andamento delle ricchezze dei protafogli

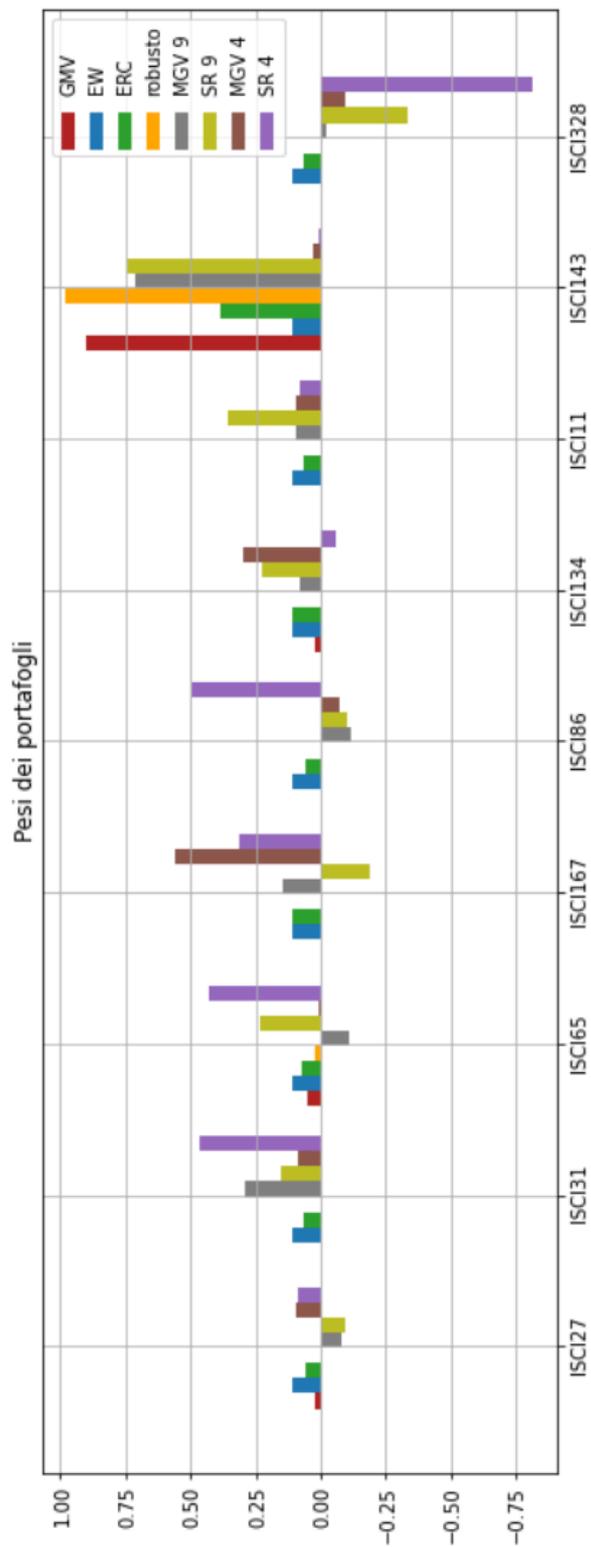


Figura 6.7: Pesi degli otto portafogli analizzati nella tesi

Concludiamo il confronto riportando una breve analisi relativa ai turnover dei portafogli basati sui fattori. Ripetiamo il confronto multiperiodale del capitolo precedente applicandolo ai portafogli FRP per calcolarne i turnover.

```

214 ricc_gmv_n = [100]
215 ricc_sr_n = [100]
216 ricc_gmv_q = [100]
217 ricc_sr_q = [100]
218
219 pesi_gmv_n=[]
220 pesi_sr_n = []
221 pesi_gmv_q = []
222 pesi_sr_q = []
223
224 alloc_gmv_n = []
225 alloc_sr_n = []
226 alloc_gmv_q = []
227 alloc_sr_q = []
228
229 percorso_gmv_n = []
230 percorso_ew = []
231 percorso_gmv_q = []
232 percorso_sr_q = []
233
234 for i in range(3):
235
236     mu = train[i].mean().values
237     # calcoliamo i portafogli con 9 fattori
238     pca = PCA()
239     X_projection = pca.fit_transform(train[i].values)
240     A = pca.components_
241     VV = np.diag(pca.explained_variance_)
242     uni = np.sign(A @ np.ones(9))
243     VVmez = sqrtm(inv(VV))
244     # portafoglio GMV 9 fattori
245     pesi_gmv_n.append((A.T @ VVmez @ uni)/(np.ones(len(mu))
246                     @ A.T @ VVmez @ uni))
247     uni = np.sign(A @ mu)
248     # portafoglio SR 9 fattori
249     pesi_sr_n.append((A.T @ VVmez @ uni)/(np.ones(len(mu))
250                     @ A.T @ VVmez @ uni))
251
252     # calcoliamo i portafogli con 4 fattori
253     pca = PCA(4)
254     X_projection = pca.fit_transform(train[i].values)
255     A = pca.components_
256     VV = np.diag(pca.explained_variance_)
257     uni = np.sign(A @ np.ones(9))
258     VVmez = sqrtm(pinv(VV))
259     # portafoglio GMV 4 fattori
260     pesi_gmv_q.append((A.T @ VVmez @ uni)/(np.ones(len(mu))
261                     @ A.T @ VVmez @ uni))
262     uni = np.sign(A @ mu)
263     # portafoglio SR 4 fattori
264     pesi_sr_q.append((A.T @ VVmez @ uni)/(np.ones(len(mu))
265                     @ A.T @ VVmez @ uni))
266
267     alloc_gmv_n.append(pesi_gmv[i]*ricc_gmv_n[i])
268     alloc_sr_n.append(pesi_ew[i]*ricc_sr_n[i])
269     alloc_gmv_q.append(pesi_erc[i]*ricc_gmv_q[i])
270     alloc_sr_q.append(pesi_rob[i]*ricc_sr_q[i])
271

```

```

272     rend_test = test[i].values+1
273     rend_t_cum = rend_test.cumprod(axis=0)
274
275     percorso_gmv_n.append(rend_t_cum @alloc_gmv_n[i])
276     percorso_sr_n.append(rend_t_cum @alloc_sr_n[i])
277     percorso_gmv_q.append(rend_t_cum @alloc_gmv_q[i])
278     percorso_sr_q.append(rend_t_cum @alloc_sr_q[i])
279
280     ricc_gmv_n.append(np.dot(rend_t_cum[-1,], alloc_gmv_n[i]))
281     ricc_sr_n.append(np.dot(rend_t_cum[-1,], alloc_sr_n[i]))
282     ricc_gmv_q.append(np.dot(rend_t_cum[-1,], alloc_gmv_q[i]))
283     ricc_sr_q.append(np.dot(rend_t_cum[-1,], alloc_sr_q[i]))

```

Le componenti principali sono calcolate e aggiornate ad ogni iterazione, ciò rende difficile confrontare i periodi diversi perchè sono basati su fattori con diversi loadings e diverse interpretazioni economico finanziarie.

|                  | GMV 9  | SR 9   | GMV 4  | SR 4   |
|------------------|--------|--------|--------|--------|
| 1° aggiornamento | 58.53% | 65.15% | 72.31% | 59.34% |
| 2° aggiornamento | 43.09% | 31.79% | 83.88% | 57.17% |

I turnover sono altissimi, tutti maggiori del 30% e alcuni maggiori del 70%. Questa semplice analisi sull'aggiornamento dei pesi mostra come i portafogli FRP non siano sostenibili e richiedano enormi movimenti di capitale per essere mantenuti. L'eventuale aggiunta di vincoli sul turnover li penalizzerebbe molto e avrebbe pesanti effetti sul loro obiettivo finale, cioè la diversificazione del rischio sui fattori: questa non sarebbe raggiunta e i portafogli perderebbero parte del loro significato.

## Capitolo 7

# Conclusione

La tesi prova a presentare alcuni approcci robusti all'ottimizzazione di portafoglio, commentarne l'implementazione e a comparare le prestazioni da loro realizzate. È empiricamente dimostrato che l'ottimizzazione basata sulla stima dei rendimenti attesi  $\mu$  dei titoli sia fortemente sensibile a variazioni dei dati in input, per questo presentiamo e confrontiamo approcci che non si basano direttamente su  $\mu$  ma piuttosto gli associano incertezza o operano sulla dimensione del rischio. Tra questi abbiamo trattato l'ottimizzazione robusta e l'approccio risk parity applicato sia agli asset che a fattori di rischio.

Abbiamo implementato i modelli di costruzione di portafoglio e li abbiamo confrontati in un'analisi uniperiodale dove l'EW ha ottenuto il miglior rendimento ma la più alta variabilità. I portafogli robusto e GMV si sono dimostrati molto stabili ma poco performanti e estremamente sbilanciati mentre l'ERC ha mantenuto equilibrate prestazioni e rischiosità ma ha patito fortemente la crisi di Marzo 2021. Gli stessi portafogli sono stati comparati in un'analisi multiperiodale organizzata su un intervallo di tempo complessivamente più lungo, in questo caso abbiamo posto particolare interesse al loro turnover. L'ERC ha totalizzato un ottimo rendimento con aggiornamenti dei pesi sostenibili, al contrario il robusto e il GMV hanno mostrato grandi variazioni dei pesi dimostrandosi difficili da mantenere nel tempo. Abbiamo quindi esaminato le prestazioni degli ultimi due portafogli limitandone il turnover ma le analisi si sono dimostrate troppo vincolanti e i portafogli hanno patito la loro bassa diversificazione iniziale.

Abbiamo concluso l'analisi implementando e confrontando i modelli di ottimizzazione basati sui fattori di rischio, un interessante approccio che permette di ridurre la dimensionalità dei problemi e di introdurre una visione trasversale dei mercati. I portafogli basati su un numero di fattori minore del numero di titoli hanno registrato buoni risultati in termini di rischio e performance ma una breve analisi multiperiodale ha evidenziato il problema degli altissimi turnover realizzati nell'aggiornamento dei pesi.

I risultati confermano la forza e l'affidabilità di metodi di costruzione di portafoglio basati sull'allocazione del rischio piuttosto che su quella monetaria, i portafogli ERC hanno realizzato performance comparabili con quelle dell'EW restando sempre meno volatili del benchmark. Un altro aspetto fortemente positivo di quest'approccio si è dimostrato essere la sostenibilità, infatti per aggiornare i pesi del portafoglio è bastato spostare una piccola frazione della ricchezza. I portafogli robusti e FRP hanno mostrato performance variabili,

picchi di alti rendimenti o risultati leggermente sotto la media, in particolare si sono dimostrati molto dipendenti dai vincoli che ne caratterizzano i modelli e dai vincoli sul turnover.

# Bibliografia

- [1] Brandimarte, Paolo, (2018), *An Introduction to Financial Markets, A Quantitative Approach*, Wiley, Hoboken.
- [2] Bodie, Zvi, Kane, Alex, Marcus, Alan J., (2014), *Investments*, McGraw-Hill, New York.
- [3] Roncalli, Thierry, (2014), *Introduction to Risk Parity and Budgeting*, CRC Press, Boca Raton.
- [4] Fabozzi, Franck J., Kim, Woo Chang, Kim, Jang Ho, (2016), *Robust Equity Portfolio Management*, Wiley, Hoboken.
- [5] Zhu, Shu-Shang, Fukushima, Masao, (2009), *Worst-Case Conditional Value-at-Risk with Application to Robust Portfolio Management*, Operations Research 57.
- [6] Deguest, Romain, Martellini, Lionel, Meucci, Attilio, (2013), *Risk Parity and Beyond - From Asset Allocation to Risk Allocation Decisions*, SSRN Electronic Journal.