



**Politecnico
di Torino**

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Anno accademico 2020/2021

Tesi di Laurea Magistrale

ANALISI E MODELLAZIONE DEL COMPORTAMENTO A CARICO DI PUNTA DI OCCHIELLI METALLICI

Relatori

Prof.ssa Delprete Cristiana

Prof.ssa Sesana Raffaella

Candidato

Giovanni Migliore

(263226)

INDICE

ELENCO DEI SIMBOLI	1
INTRODUZIONE	4
Capitolo 1 – L’OCCHIELLO	6
CARATTERISTICHE	6
1.1.1 OCCHIELLI SIGILLO DI GARANZIA	7
PROCESSO DI INSTALLAZIONE	10
Capitolo 2 – FENOMENO DI BUCKLING	15
2.1 GENERALITÀ	15
2.1.1 CONDIZIONI DI EQUILIBRIO E STABILITÀ	15
2.1.2 BUCKLING PER CARICO ASSIALE DI PUNTA	17
2.1.2.1 <i>Instabilità Euleriana</i>	18
2.1.2.2 <i>Buckling plastico</i>	21
2.1.2.3 <i>Imperfezioni iniziali</i>	22
2.2 BUCKLING SU CILINDRI	23
2.2.1 BUCKLING SU CILINDRI A PARETE SOTTILE.....	25
2.2.2 BUCKLING SU CILINDRI A PARETE SPESSA	34
2.3 IL CASO DEGLI OCCHIELLI	39
Capitolo 3 –STUDIO ANALITICO	42
3.1 MODELLO ANALITICO	44
3.1.1 TEORIA INCREMENTALE DELLA J_2 -PLASTICITÀ	45
3.1.2 INCRUDIMENTO ISOTROPO	49
3.1.3 RELAZIONI MATEMATICHE DEL MODELLO.....	50
3.2 APPLICAZIONE SUGLI OCCHIELLI	53

Capitolo 4 –ANALISI NUMERICA.....	57
4.1 ANALISI 2D ASSIALSIMMETRICA	57
4.1.1 GEOMETRIA.....	58
4.1.2 ELEMENTO DELLA MESH	58
4.1.3 VINCOLI E FORZE	60
4.1.4 MESHATURA	65
4.1.5 RISULTATI	66
4.1.6 EFFETTO DELLA VARIAZIONE GEOMETRICA	67
4.1.6.1 <i>Effetto del rapporto L/R</i>	67
4.1.6.2 <i>Effetto del rapporto R/t</i>	71
4.1.7 EFFETTO DELLE CONDIZIONI DI VINCOLO	74
4.1.8 EFFETTO COMBINATO DI VARIAZIONE GEOMETRICA – VINCOLO	76
4.1.8.1 <i>Effetto del rapporto L/R</i>	76
4.1.8.2 <i>Effetto del rapporto R/t</i>	81
4.2 ANALISI TRIDIMENSIONALE.....	85
4.2.1 ELEMENTO DELLA MESH	85
4.2.2 RISULTATI	86
CONCLUSIONI.....	89
BIBLIOGRAFIA.....	91
SITOGRAFIA	93

ELENCO DEI SIMBOLI

- L = lunghezza del cilindro caratterizzante l'occhiello;
- t = spessore del cilindro caratterizzante l'occhiello;
- R = raggio interno del cilindro caratterizzante l'occhiello;
- F = forza;
- F_l = forza (o carico) limite;
- Q = coordinata generalizzata;
- Q_l = valore della coordinata generalizzata in corrispondenza del carico limite;
- A_{in} = area iniziale del cilindro caratterizzante l'occhiello;
- $F_{cr,sp}$ = forza critica di buckling, trovata sperimentalmente;
- $\sigma_{cr,sp}$ = carico tensionale critico di buckling, trovato sperimentalmente;
- N_{cr} = forza critica di buckling, calcolata analiticamente;
- E = modulo di Young;
- I_{min} = modulo di inerzia minimo;
- l = lunghezza della trave di Eulero;
- r = raggio di curvatura della trave di Eulero;
- A = area della sezione della trave di Eulero;
- σ_{cr} = carico tensionale critico di buckling, calcolato analiticamente;
- K = fattore di lunghezza effettiva;
- σ_0 = tensione di snervamento;
- $y_0(x)$ = scostamento iniziale della trave dalla sua configurazione ideale;
- a = valore massimo dello scostamento iniziale della trave dalla sua configurazione ideale;
- P = carico assiale;
- e = eccentricità del carico assiale rispetto all'asse della trave;
- $y(x)$ = deflessione della trave;
- δ = valore massimo della deflessione della trave;
- σ_c^{EL} = carico tensionale classico critico di buckling elastico nei cilindri;
- ν = coefficiente di Poisson;
- ρ_{EL} = *Knockdown Factor* nel buckling elastico;
- \bar{N}^- = *lower local buckling load*;
- \bar{N}^+ = *upper local buckling load*;

- \bar{N} = rapporto della forza assiale rispetto alla forza critica di buckling;
- $u(y)$ = spostamento assiale del cilindro;
- u_0 = spostamento causato dal carico del guscio cilindrico nello stato iniziale;
- a_1 = moto di traslazione dell'elemento terminale rigido del guscio;
- a_2 = moto rotazionale dell'elemento terminale rigido del guscio;
- y = coordinata circonferenziale;
- Z = parametro di Batdorf;
- σ_c^p = carico tensionale critico di buckling nel campo plastico, dalla formula di Batterman;
- H = modulo di incrudimento isotropico;
- D = diametro interno del cilindro caratterizzante l'occhiello;
- σ_c^B = carico tensionale critico di buckling elastico, tramite il parametro di Batdorf;
- σ_{ij} = elementi del tensore delle tensioni;
- $f(\sigma_{ij})$ = funzione di snervamento;
- $\sigma_{eq}(\sigma_{ij})$ = tensione equivalente;
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ = tensioni principali;
- k_{VM} = valore limite di cedimento plastico legato al criterio di Von Mises;
- r_{VM} = raggio del cilindro di Von Mises;
- J'_2 = secondo invariante delle tensioni deviatoriche;
- σ'_{ij} = tensioni deviatoriche;
- $\underline{\underline{\varepsilon}}^{pl}$ = tensore delle deformazioni plastiche;
- $\underline{\underline{\sigma}}$ = tensore delle tensioni;
- $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{pl}$ = tensore delle velocità di deformazione nel campo plastico;
- $\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}$ = elementi del tensore delle velocità di deformazione nel campo plastico;
- \dot{W}^{pl} = potenza necessaria per creare lavoro in campo plastico;
- $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ = base ortonormale dello spazio vettoriale;
- \mathbf{D} = tensore dell'elasticità del quarto ordine;
- D_{ijkl} = elementi del tensore \mathbf{D} ;
- $\delta_{ij} = \delta_{kl} = \delta_{ik} = \delta_{jl} = \delta_{il} = \delta_{kj} = \delta_{jk}$ = delta di Kronecker;
- λ e μ = costanti di Lamé;
- \mathbf{C}^p = tensore ridotto di \mathbf{D} ;
- C^p_{ijkl} = elementi del tensore \mathbf{C}^p ;

- α, β, γ = elementi del tensore \mathbf{C}^p diversi da zero;
- E_T = modulo tangente;
- k = fattore di correzione di taglio;
- σ_c^{TS} = carico tensionale critico di buckling nel campo plastico, tenendo conto dell'effetto del taglio trasversale;
- σ_c^{NL} = carico tensionale critico di buckling nel campo plastico, tenendo conto delle non-linearità geometriche;
- σ_c^{nom} = carico tensionale critico di buckling nel campo plastico, tenendo conto anche deformazioni plastiche pre-critiche;
- ε = deformazione nominale longitudinale nell'istante critico;
- $\sigma_{cr,FEM}$ = tensione critica di buckling, determinata tramite FEM;

INTRODUZIONE

L'uso delle minuterie metalliche va sempre più affermandosi in vari ambiti dell'ingegneria e non solo. È sufficiente pensare al notevole uso di viti nella vita quotidiana per comprendere come tali componenti di piccole dimensioni abbiano un forte impatto sia nei sistemi industriali (dal semplice ingranaggio ai dispositivi meccanici più articolati), sia in altri ambiti, come l'imballaggio, l'abbigliamento, i prodotti alimentari, il bricolage.

Tra questi oggetti riveste una grande importanza l'occhiello, ossia un piccolo elemento tubolare metallico usato per la bordatura di un foro. Questo processo di rivestimento viene eseguito attraverso l'uso della cosiddetta occhiellatrice, l'apparecchio necessario affinché, attraverso l'azione di una forza di compressione, venga applicato l'occhiello al foro. Sperimentalmente si è potuto notare che in dipendenza della velocità di compressione, l'occhiello raggiunge una condizione di instabilità per carico di punta, comportando una inadeguata tenuta sul foro.

In generale, il collasso delle strutture, quando soggette a carico di compressione, è principalmente causato dal fenomeno di buckling. Pertanto, la progettazione meccanica di tali strutture deve tenere conto anche del carico critico che induce tale fenomeno, il quale si verifica a carichi bassi nel caso di gusci, cioè strutture a parete sottile, quindi nel campo di elasticità.

Le dimensioni notevolmente piccole dell'occhiello fanno subito pensare, purtroppo erroneamente, che la sua geometria sia vicina a un cilindro a parete sottile. In realtà, come vedremo, un occhiello sigillo di garanzia di Tipo-9 mostra un rapporto spessore/raggio maggiore del valore discriminante di $1/10$, al di sopra del quale si entra nel campo delle strutture a parete spessa. Il fenomeno di instabilità suddetto è molto più difficile da analizzare nel caso di strutture più spesse, perché il carico critico di buckling è maggiore rispetto a quanto si vede nelle strutture a parete sottile, pertanto il materiale entra in campo plastico prima che la struttura ceda per buckling.

Di fronte a quanto detto sopra, il presente documento vuole studiare il fenomeno di buckling (plastico) di cilindri a parete spessa sottoposti a una tensione di compressione assiale. Pertanto, si riassume brevemente la struttura del documento:

- il Capitolo 1 mostrerà cosa si intende per occhiello: si metteranno a luce, in particolare, le caratteristiche geometriche e materiali dell'occhiello sigillo di garanzia di Tipo-9 (su cui è incentrata l'analisi del documento) e la procedura che, attraverso l'occhiellatrice, permette di installarlo correttamente;

- nel Capitolo 2 saranno messi a luce gli aspetti generali del fenomeno di buckling, sottolineando poi come esso si manifesti nel caso di cilindri a parete spessa, prendendo come riferimento il caso di cilindri a parete sottile, ed evidenziando in particolare quanto avviene sperimentalmente sugli occhielli;
- il Capitolo 3 vuole descrivere l'approccio matematico adeguato a determinare il carico critico di buckling, il cui valore verrà messo a confronto con quanto ottenuto a livello sperimentale;
- il Capitolo 4 si occupa di presentare quanto studiato numericamente, attraverso la modellazione FEM eseguita tramite l'uso della piattaforma ANSYS Workbench 2021 R1, al fine di comprendere le deformazioni a buckling e il relativo carico critico del cilindro a parete spessa, confrontandoli con quanto ottenuto sperimentalmente e sottolineando anche la loro dipendenza rispetto alle configurazioni geometriche e di vincolo che si manifestano in partenza.

Capitolo 1

L'OCCHIELLO

L'occhiello è un elemento di piccole dimensioni usato per rinforzare un foro praticato su un materiale e garantirne un minore deterioramento. Si vogliono quindi evidenziare le caratteristiche geometriche degli occhielli unificati, con uno specifico riferimento agli occhielli usati per il sigillo di garanzia.

Si vuole poi porre l'attenzione sul processo di installazione dell'occhiello, ottenuta attraverso l'occhiellatrice, una macchina che applica sull'occhiello una forza di compressione assiale che riduce la sua dimensione assiale e aumenta la sua dimensione radiale. Ciò permette la corretta bordatura del foro presente.

1.1 CARATTERISTICHE

Di fronte alle numerose necessità per cui è usato, le proprietà dell'occhiello sono variabili in dipendenza dell'applicazione. Dal punto di vista del materiale, infatti, esso ha avuto un notevole impatto come componente metallico (per esempio in ferro o in ottone), per cui garantisce una notevole resistenza meccanica, ma oggi si sta diffondendo sempre di più l'uso di occhielli di materiale plastico, i quali in certe circostanze possono dare un miglior rendimento rispetto a quelli metallici (basti pensare alla maggiore resistenza della plastica di fronte alle intemperie).



Figura 1: Occhielli metallici (a sinistra) e plastici (a destra)

In generale, comunque, la struttura geometrica dell'occhiello è assimilabile a un cilindro, di spessore relativamente piccolo rispetto alla lunghezza del cilindro stesso, al di sopra del quale si

estende una parte pseudo-anulare. Quest'ultima è la *testa* dell'occhiello, mentre la parte cilindrica viene denominata *stelo* o *gambo*. A queste parti se ne può presentare una terza, *bordo fustella*, che è necessaria per poter incidere e tagliare il materiale su cui l'occhiello viene installato, ossia per creare un foro che prima del processo di installazione dell'occhiello non era ancora presente.



Figura 2: Terminologia delle parti dell'occhiello

Anche l'occhiello gode della procedura di standardizzazione, attraverso cui sono state definite le dimensioni geometriche specificate nella *Tabella 1*, i cui valori bassi lo inseriscono nella gamma della minuteria industriale:

Tabella 1: Dimensioni degli occhielli unificati [IV]

CODICE	MISURE IN mm		
	<i>Diametro esterno testa</i>	<i>Diametro esterno stelo</i>	<i>Lunghezza stelo</i>
-			
O.U. 15	2,50	1,50	Da 20 a 100
O.U. 20	3,50	2,00	Da 20 a 125
O.U. 22	3,70	2,20	Da 25 a 110
O.U. 25	4,00	2,50	Da 25 a 160
O.U. 30	5,00	3,00	Da 20 a 200
O.U. 35	5,50	3,50	Da 30 a 185
O.U. 40	6,00	4,00	Da 30 a 200
O.U. 45	6,50	4,50	Da 30 a 100
O.U. 50	7,50	5,00	Da 40 a 170
O.U. 60	8,00	6,00	Da 40 a 100

1.1.1 OCCHIELLI SIGILLO DI GARANZIA

Tra la vasta gamma di occhielli disponibili sul mercato, sono presenti i cosiddetti *sigilli di garanzia*, che sono utilizzati per l'imballaggio di merci e sigillare confezioni. Essi, per esempio, sono adatti per bloccare il cartoncino sopra la busta che contiene il prodotto.

Questo tipo di occhielli presenta nello specifico una testa molto estesa e piana, sulla quale è incisa la parola "GARANZIA" e la quale non incide il materiale sigillato (aspetto molto importante per l'uso su prodotti soffici o di spessore limitato). Tali sigilli di garanzia sono suddivisi in due diverse tipologie, ognuna delle quali caratterizzata da dimensioni specifiche (*Tabella 2*).



Figura 3: Sigillo di garanzia ad occhiello con relativo disegno CAD (a destra [3])

Tabella 2: Dimensione degli occhielli sigillo di garanzia

TIPO SIGILLO	MISURE IN mm			
-	<i>Diametro esterno testa</i>	<i>Diametro esterno stelo</i>	<i>Lunghezza stelo</i>	<i>Spessore</i>
TIPO 7	7	3	4	0,2
TIPO 9	9	3,5	4,6	0,2

Nei seguenti capitoli ci si riferirà all'occhiello sigillo di garanzia di Tipo-9. Si riportano pertanto in *Figura 4* le dimensioni di questo tipo di occhiello, le quali sono state ricavate tramite misurazione al microscopio e l'ausilio di modellazione CAD.

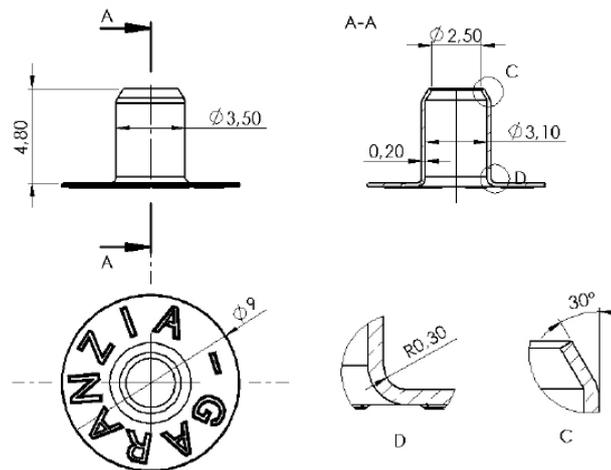


Figura 4: sviluppo delle misurazioni rinvenute del microscopio su CAD [3]

A questo punto è importante determinare le dimensioni del cilindro caratterizzante lo stelo dell'occhiello, a meno del suo bordo fustella e della sua testa, compreso il raggio di raccordo. In particolare, sono stati trovati i seguenti valori:

Lunghezza del cilindro L	3,98 mm
Raggio interno del cilindro R	1,55 mm
Spessore del cilindro t	0,2 mm

Da queste dimensioni è possibile determinare i seguenti rapporti:

R/t	7,75
L/R	2,57

Il valore del rapporto R/t definisce la tipologia del cilindro caratterizzante l'occhiello: esso rientra nella categoria dei cilindri a parete spessa, essendo il rapporto R/t minore al valore 10 (o viceversa $t/R > 0.1$).

Per quanto concerne il materiale, nell'occhiello sigillo di garanzia di Tipo-9 si distinguono il materiale del rivestimento e quello dell'anima, le cui composizioni ottenute dal processo di spettrografia sono riportate rispettivamente in *Figura 5* e in *Figura 6*.

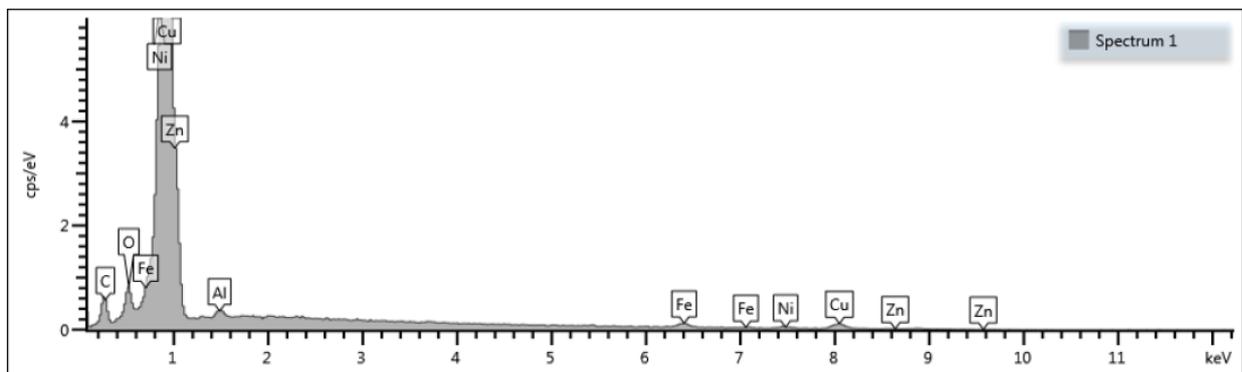


Figura 5: composizione chimica del rivestimento dell'occhiello sigillo di garanzia di Tipo-9 [18]

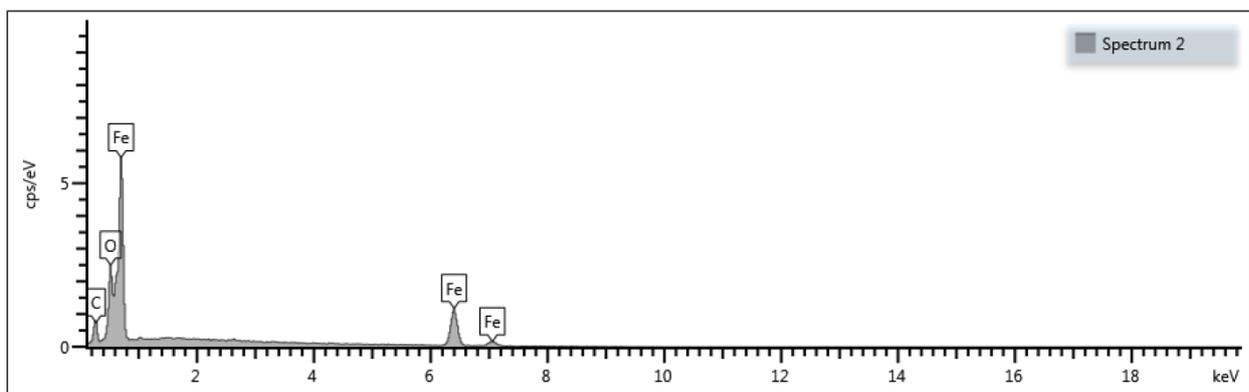


Figura 6: composizione chimica dell'anima dell'occhiello sigillo di garanzia di Tipo-9 [18]

Si può vedere che l'occhiello presenta un'anima in acciaio con un tenore di carbonio notevolmente basso, a cui è legata una certa quantità di ossigeno, dovuta possibilmente al mancato trattamento di rimozione degli ossidi sulla superficie tagliata, e un rivestimento in ottone, con numerosi elementi ad esso legati, tra cui principalmente lo zinco.

In termini volumetrici, il volume del rivestimento in ottone è però troppo basso rispetto al volume occupato dall'anima: la frazione volumetrica corrispondente al materiale dell'anima è pari al 99,995%. Questo valore rende lecito considerare solamente l'acciaio come materiale caratterizzante l'occhiello, perché l'ottone del rivestimento ha una trascurabile influenza sulla resistenza a trazione del componente, dovuta al suo spessore troppo piccolo rispetto allo spessore totale.

1.2 PROCESSO DI INSTALLAZIONE

Il processo di applicazione di un occhiello su un foro si basa su uno schiacciamento del primo in direzione assiale e ciò permette la bordatura del foro stesso. Questo meccanismo di installazione è permesso da una macchina simile a una pressa, chiamata occhiellatrice, che si presenta nel mondo industriale sia in modalità manuale sia in modalità automatica.



Figura 7: Esempi di occhiellatrice manuale (a sinistra) e automatica (a destra)

Tra le varie componenti caratterizzanti la macchina occhiellatrice, è importante distinguere due elementi fondamentali per l'installazione dell'occhiello:

- il *punzone*, che replica il negativo della testa dell'occhiello: quest'aspetto consente, durante la fase di discesa della parte mobile dell'occhiellatrice (la traversa) di cui lo stesso punzone fa parte, una giusta trasmissione della forza di schiacciamento dalla macchina all'occhiello.
- il *contro-punzone*, il quale è connesso alla base fissa dell'occhiellatrice e ospita l'occhiello. La sua struttura geometrica, che prevede sulla superficie superiore un raggio di curvatura, permette, durante il processo di deformazione, di direzionare la deformazione stessa dello stelo dell'occhiello.



Figura 8: Punzone e contro-punzone su particolare di un'occhiellatrice

Prima di entrare nel dettaglio di quanto avviene nell'occhiello, importante è aprire una parentesi sul processo di deformazione di un cilindro quando, spinto da una superficie superiore che fa da punzone, entra in contatto con un contro-punzone, il quale funge da stampo. In particolare, a seconda del raggio di curvatura caratterizzante lo stampo, si possono verificare tre situazioni diverse:

- a valori di raggio di curvatura intermedi, il contro-punzone direziona la deformazione del cilindro e si riscontra sperimentalmente il processo di inversione, che comporta la formazione di un toro nella parte inferiore del cilindro stesso;
- raggi di curvatura bassi comportano una superficie dello stampo quasi piana, incapace di direzionare la deformazione. Il cilindro si oppone a questa configurazione con la sua rigidità assiale, fino a raggiungere un carico critico di collasso molto maggiore rispetto al caso precedente: il componente si comporta come se fosse schiacciato da due superfici piane e, una volta raggiunto il carico critico, si verifica un collasso plastico

assialsimmetrico, denominato *buckling* (di cui verrà approfondito nel Capitolo 2), con una struttura geometrica detta “*a zampa di elefante*”;

- con valori di raggio di curvatura elevati, invece, il cilindro riesce sì a deformarsi in maniera concorde a quanto imposto dalla superficie dello stampo ma non ha la capacità di invertire, poiché si creano delle tensioni troppo elevate sul bordo del materiale, capaci di innescare delle cricche e farle propagare fino a giungere la rottura (*tearing*) a carichi critici notevolmente minori rispetto al caso di buckling già citato.

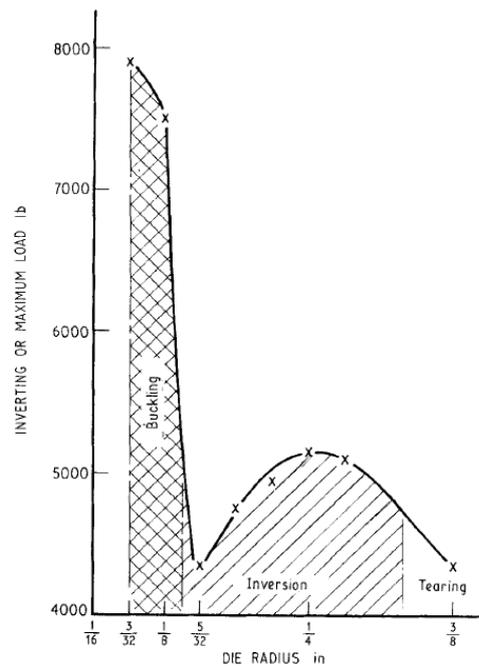


Figura 9: Curva carico critico - raggio stampo [2]

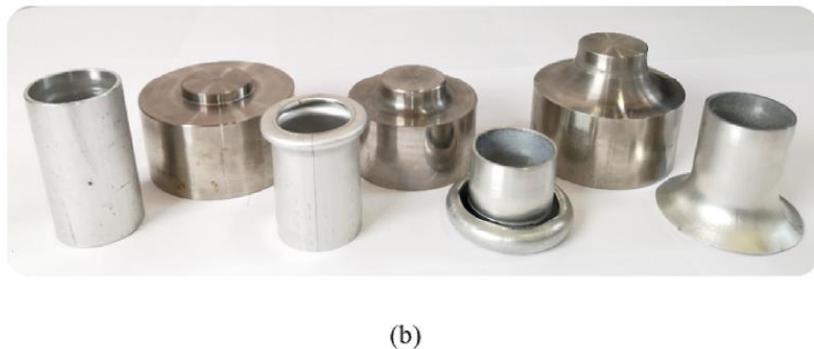
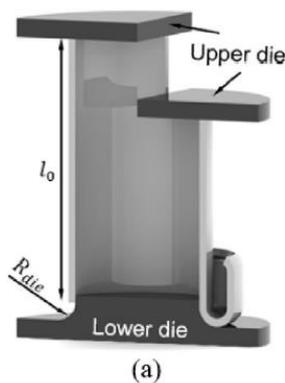


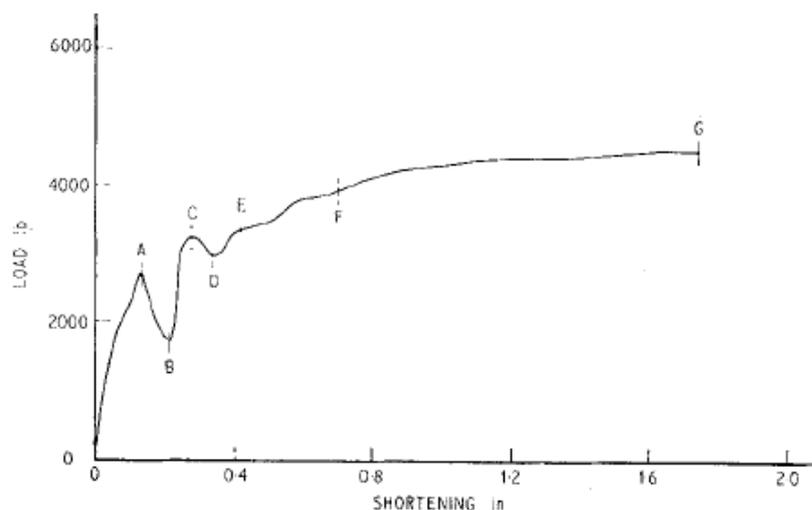
Figura 10: Inversione esterna di tubi a parete sottile. (a) rappresentazione schematica della configurazione sperimentale; (b) contro-punzoni con i provini tubolari iniziale e finale con tre diversi modi di deformazione [1]

La corretta installazione dell'occhiello avviene se esso subisce il processo di inversione esterna, il quale può essere ben spiegato facendo uso della *Figura 11*, che evidenzia la curva carico – deformazione descritta durante il processo di inversione di un generico tubo e mostra alcuni punti salienti di tale processo a livello fotografico.

Una volta inserito l'occhiello all'interno del foro (se già presente) del materiale su cui installarlo e fatto poggiare nel contro-punzone, il punzone inizia il suo movimento libero in direzione verticale verso il contro-punzone finché il primo non va in contatto con la testa dell'occhiello (*Figura 11*, punto A).

Successivamente, il punzone continua la sua fase di discesa e ciò provoca uno schiacciamento dell'occhiello in direzione assiale e conseguente deformazione dello stelo, il quale segue il percorso imposto dal contro-punzone con il suo raggio di curvatura, finché la parte interna dell'occhiello entra pienamente a contatto con la superficie del contro-punzone (*Figura 11*, punto B).

A questo punto è necessaria una forza crescente per la deformazione del materiale fino a innescare il processo di inversione (*Figura 11*, punto C). Ciò segna l'inizio della formazione del toro, il quale, con una forza crescente, raggiunge ad un certo punto la sua configurazione completa (*Figura 11*, punto F). La presenza del toro aumenta la rigidità radiale del cilindro e riduce notevolmente la rigidità assiale, pertanto il materiale è invitato a proseguire la sua deformazione in direzione assiale in verso opposto a quello di schiacciamento (*Figura 11*, punto G).



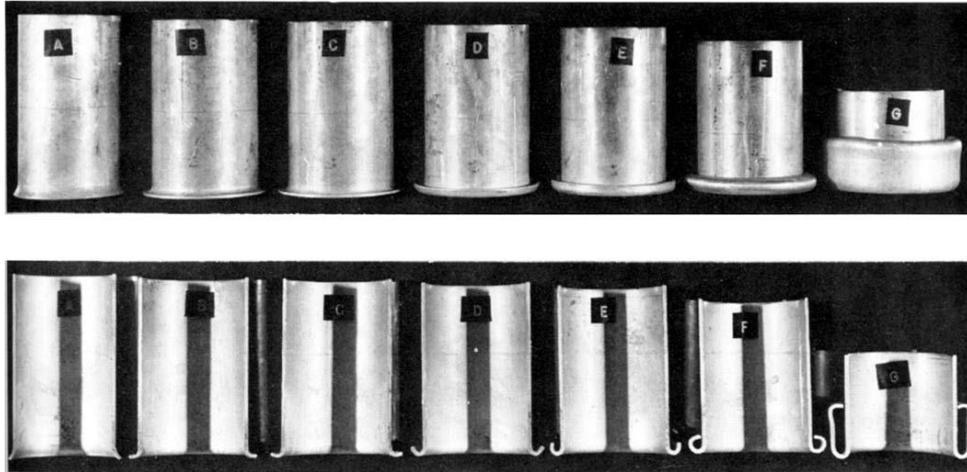


Figura 11: Curva carico – deformazione durante la fase di inversione e relative rappresentazioni fotografiche [2]

Questo processo, che produce la formazione del toro per via dell'inversione dello stelo dell'occhiello, permette di avere una giusta tenuta dell'occhiello e la bordatura del foro voluta.



Figura 12: Esempio di bordatura tramite occhiello installato

Capitolo 2

FENOMENO DI BUCKLING

Qualsiasi componente meccanico, durante il suo impiego, può subire un guasto, in relazione a importanti fenomeni di cedimento. Dal punto di vista statico, il cedimento può avvenire una volta che viene superato il carico di snervamento nel caso di materiali duttili o il carico di rottura nel caso di materiali fragili, pertanto si pone l'attenzione su tali parametri, tipici del materiale usato. Per quanto concerne invece il secondo meccanismo di cedimento, ossia quello per buckling, esso dipende non solo dal materiale caratterizzante il componente ma anche dalle sue proprietà geometriche: importante è in tal senso il concetto di snellezza, che è correlato al rapporto della lunghezza del componente rispetto alla forma e alle dimensioni della sua sezione trasversale.

In analogia al concetto di tensione di snervamento quale valore discriminante al di sopra del quale si verifica l'ingresso del materiale nel campo plastico, si è cercato, nel corso della storia, di trovare quel valore che, una volta raggiunto, innesca il fenomeno di buckling. Secondo tale obiettivo di ricerca, nel caso per esempio di gusci cilindrici, è stata però ottenuta un'ampia discrepanza tra i risultati sperimentali e i risultati trovati teoricamente, giungendo anche a valori sperimentali pari al 20% dei valori teorici. Questa differenza attirò l'attenzione di molti ricercatori, i quali si occuparono di comprendere e spiegare la sua origine.

Le numerose variabili in gioco e i diversi aspetti peculiari del fenomeno di buckling inducono il seguente capitolo a soffermarsi sulla presentazione di questo meccanismo di cedimento, giungendo poi a evidenziare come esso si verifica negli occhielli, passando attraverso l'analisi di tale instabilità nei cilindri. Vista la struttura geometrica degli occhielli, si sottolineerà, in particolare, quanto avviene nei cilindri a parete spessa.

2.1 GENERALITÀ

2.1.1 CONDIZIONI DI EQUILIBRIO E DI STABILITÀ

Un sistema può subire un'azione perturbatrice che potrebbe alterare la sua condizione di equilibrio: se il sistema rimane nella configurazione assunta, allora esso viene detto *indifferente* (Figura 13, a destra); se invece si presenta un'alterazione della configurazione di partenza, è necessario

comprendere se il sistema è *stabile* o *instabile* (Figura 13, rispettivamente a sinistra e al centro). Nel primo caso, il sistema, una volta rimosso il carico di perturbazione, ritorna nella configurazione iniziale; nel secondo caso invece il sistema si allontana dalla configurazione di partenza, assumendo nuove configurazioni che sono diverse rispetto alle precedenti. È proprio quest'ultimo il caso a cui verrà posta maggiore attenzione.



Figura 13: equilibrio stabile (a sinistra), instabile (al centro), indifferente (a destra)

Potranno verificarsi i casi seguenti:

1. *Ramo di equilibrio a stabilità crescente*: condizione necessaria e sufficiente perché ciò accada è che, a parità di spostamento, la forza necessaria per ottenere una nuova configurazione cresce, quindi aumenta la stabilità del sistema. Il sistema si definisce di *equilibrio di prima specie*;
2. *Ramo di equilibrio a stabilità decrescente*: la condizione perché ciò avvenga è che il passaggio tra una configurazione e una nuova, ottenuto aumentando una possibile coordinata generalizzata Q , avvenga con la diminuzione del lavoro, ossia a parità di spostamento, è necessaria una minore forza per raggiungere una nuova configurazione di equilibrio, pertanto si ha una stabilità decrescente. Questo sistema viene detto in *equilibrio di seconda specie* e il ramo naturale si sviluppa al di sotto del piano $F_l = cost$, dove con F_l si indica il cosiddetto *carico limite*, non potendo esso essere superato.

Per i sistemi in equilibrio di seconda specie (con fase instabile), la legge carichi – spostamenti è prima crescente fino ad arrivare a un massimo e poi decrescente (Figura 14). In particolare, la fase crescente individua le diverse configurazioni di equilibrio stabile, mentre il tratto decrescente è caratterizzato dalle configurazioni di equilibrio instabile.

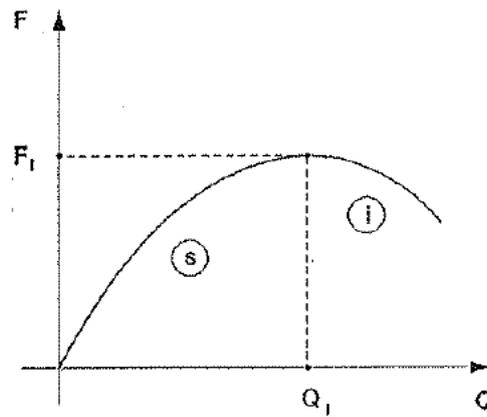


Figura 14: Curva tipica dei sistemi in equilibrio di seconda specie [7]

Si sottolinea l'importanza del punto di massimo, il quale definisce il passaggio da un comportamento stabile a uno instabile: esso rappresenta il *carico limite* sopra citato, poiché risulta impossibile andare oltre al suo valore. Si parla, in questo senso, di *instabilità progressiva o geometrica o di seconda specie*, perché caratterizzato da un aumento progressivo della deformazione che si evidenzia con un'alterazione di tutti i parametri caratterizzanti il sistema e si esalta fino alla perdita della stabilità.

Tuttavia, può accadere che una parte dei parametri del sistema non intervenga durante la deformazione fino a che il carico non raggiunge un particolare valore, detto *critico*, oltre il quale i parametri assumono valori diversi da zero e individuano nuove configurazioni dette di *equilibrio deviato*, appartenenti a un ramo secondario. Il punto in corrispondenza del quale si attinge il carico critico prende il nome di *punto di biforcazione*. Il fenomeno prende il nome di *instabilità improvvisa o euleriana per biforcazione dell'equilibrio o buckling*.

Mentre i carichi limite separano campi di equilibrio stabile da campi di equilibrio instabile, i carichi critici definiscono il passaggio da campi di equilibrio pre-critico a campi di equilibrio post-critico che non necessariamente risulta essere instabile, ma può essere anche stabile: i due campi di equilibrio sono retti da leggi differenti.

2.1.2 BUCKLING PER CARICO ASSIALE DI PUNTA

Dato un sistema sottoposto a un carico assiale di punta, si dice che esso cede per buckling quando un componente strutturale subisce un improvviso collasso perché soggetto a intensi sforzi di compressione, sebbene lo sforzo generante il collasso sia minore dello sforzo massimo che il materiale caratterizzante il componente è capace di sopportare. In particolare, la struttura,

ricevendo sollecitazioni di questo tipo, tende a incurvarsi assumendo una nuova configurazione rispetto a quella di partenza. Questa nuova configurazione e quella di partenza sono entrambi di equilibrio e seguono leggi differenti: tradotto dal punto di vista grafico, le due configurazioni seguono due curve differenti, che si intersecano in un punto particolare, che è il punto di biforcazione e segna il passaggio da una condizione ad un'altra.

A seconda che la perdita di stabilità riguardi parti più o meno cospicue di una struttura, il buckling si può definire:

- *globale*, se interessa l'intero componente;
- *locale*, se interessa solamente una parte del componente.

2.1.2.1 Instabilità Euleriana

Il caso più noto di instabilità improvvisa è quello dell'asta di Eulero, che rappresenta il collasso dovuto ad *instabilità elastica*. Consideriamo, in dettaglio, una trave di lunghezza l con una sezione trasversale generica di area A , un momento di inerzia I e un generico modulo di Young E . Essa è vincolata ad un'estremità da una cerniera e all'altra estremità da un carrello longitudinale, oltre a essere sottoposta ad un carico di punta di tipo assiale. La reazione vincolare che si oppone alla forza assiale è una forza applicata sulla cerniera. L'intensità di tale carico potrebbe provocare l'instabilità della trave stessa, in maniera del tutto dipendente da un valore critico di riferimento.

Si possono distinguere due diversi casi (*Figura 15*):

- Se il carico assiale rimane al di sotto del valore critico, ci si trova nella fase sub-critica, che porta ad avere una situazione di equilibrio stabile: si mantiene cioè la stabilità dell'asta, pertanto il sistema tende sempre a ritornare alla configurazione di partenza una volta che il carico viene rimosso. Per mantenere la struttura nello stato deformativo, si devono applicare delle forze eccitatrici sulla trave.
- Se il carico assiale supera il valore di carico critico, si entra nella fase super-critica, caratterizzata da un equilibrio instabile: l'asta entra in collasso e presenta una deformata di tipo flessionale, ossia il sistema raggiunge una situazione di instabilità, che lo porta ad avere una nuova configurazione da cui non può più sfuggire. Per evitare che si verifichi questo processo irreversibile, è necessario applicare azioni frenanti sulla struttura.

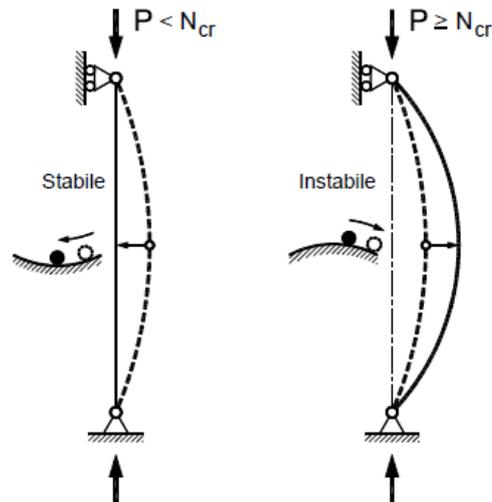


Figura 15: Situazioni di stabilità o instabilità della trave di Eulero [1]

La deformata flessionale dovuta all'instabilità dell'asta, e dunque la funzione che la definisce, compare soltanto quando il carico raggiunge il valore critico, mentre la deformazione estensionale, ed i parametri che la individuano, sono presenti fin dall'inizio: questo sottolinea il fatto che il sistema segue due leggi differenti a seconda del carico a cui è sottoposto.

Se la trave fosse libera di inflettersi in ogni piano, si infletterebbe nel piano di minima rigidezza una volta raggiunto il carico critico di buckling pari a:

$$N_{cr} = EI_{min} \frac{\pi^2}{l^2} \quad (1)$$

Il carico critico di buckling non dipende solamente dalle proprietà intrinseche del materiale, quale è il modulo di Young E , ma è fortemente influenzato anche dalle sue caratteristiche geometriche: il modulo di inerzia (in particolare il suo valore minimo I_{min}), che è correlato al raggio di curvatura della trave e all'area della sua sezione trasversale, e la lunghezza della trave l . Il rapporto tra la lunghezza e il raggio di curvatura della trave l/r identifica un parametro importante per il comportamento a buckling, quale è la snellezza: a parità di sezione, una lunghezza maggiore comporta una snellezza maggiore, mentre una lunghezza minore determina un componente più tozzo. L'impatto che la snellezza ha sul fenomeno di buckling può essere visualizzato dalla relazione che la lega alla tensione critica di buckling:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{EI_{min} \frac{\pi^2}{l^2}}{A} = \frac{EA r^2 \frac{\pi^2}{l^2}}{A} = \frac{E \pi^2}{\left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad (2)$$

Questa relazione in realtà viene corretta da un parametro K , chiamato *fattore di lunghezza effettiva*: esso tiene conto del fatto che il carico di buckling dipende dalle condizioni di vincolo a cui è sottoposto il componente, quindi K varia in dipendenza dei vincoli applicati sul componente (Figura 16):

$$\sigma_{cr} = \frac{E\pi^2}{\left(K \frac{l}{r}\right)^2} \quad (3)$$

Buckled shape of column shown by dashed line						
Theoretical K value	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Recommended design value K	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0
End condition key		Rotation fixed and translation fixed				
		Rotation free and translation fixed				
		Rotation fixed and translation free				
		Rotation free and translation free				

Figura 16: Fattore di lunghezza effettiva [II]

Il legame tra la tensione critica di buckling e la snellezza del componente è definito da una curva iperbolica (Figura 17).

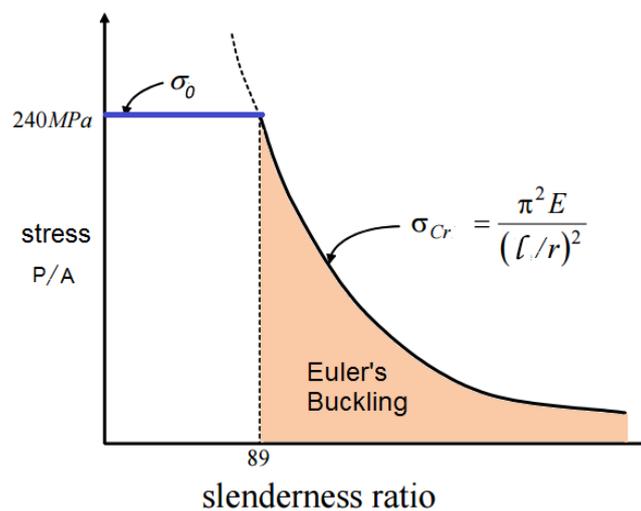


Figura 17: Curva tensione critica – snellezza (esempio acciaio con $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_0 = 240 \text{ MPa}$) [II]

Esiste un valore di snellezza discriminante, al di sotto del quale il carico critico di buckling è maggiore della tensione di snervamento: il materiale si trova nel campo plastico, pertanto la teoria di Eulero non è più adeguata. L'instabilità euleriana rappresenta infatti il caso più celebre per quanto concerne il fenomeno di buckling elastico, cioè quando si parla di buckling di elementi con alta snellezza, in cui l'instabilità si verifica prima che il materiale entri nel campo plastico. In generale, infatti, il fenomeno di buckling può verificarsi in qualunque momento della storia deformativa del componente, che sia in elasticità o che sia nel campo plastico, in dipendenza del carico critico di buckling.

2.1.2.2 Buckling plastico

Per travi meno snelle, quindi con lunghezze minori a parità di raggio di curvatura, si ha una vera e propria transizione tra l'instabilità elastica e il *buckling plastico*, pertanto è stata introdotta una correzione che tenesse proprio conto dell'effetto della plasticità. Si introduce, in tal senso, la *formula di Johnson*:

$$\sigma_{cr} = \sigma_0 - \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma_0 Kl}{2\pi r} \right)^2 \quad (4)$$

La formula di Johnson descrive il comportamento a buckling di una trave nel campo plastico attraverso una parabola con concavità verso il basso: la parabola rappresenta quindi il limite di stabilità anelastico e interseca la curva di Eulero ad un valore di carico pari alla tensione di snervamento. Anche la parabola di Johnson è costretta a rispettare le condizioni di cedimento del materiale: la curva è limitata superiormente dalla tensione limite quale è la tensione di rottura, e ciò caratterizza quelle travi molto tozze, cioè caratterizzate da bassi valori di l/r (Figura 18).

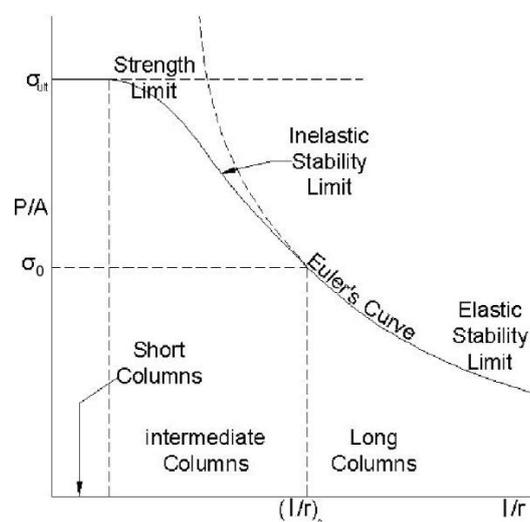


Figura 18: Curva tensione critica - snellezza con limite di stabilità anelastica [III]

L'aumento della tensione critica di buckling con la corrispondente diminuzione della snellezza del componente è dovuto al fatto che questo, essendo più tozzo, mostra una minore capacità di inflettersi rispetto a quanto avviene nelle strutture snelle, quindi è presente una minore probabilità che il buckling si verifichi.

2.1.2.3 Imperfezioni iniziali

La teoria di buckling di Eulero assume che, tra le varie ipotesi, la trave sia perfettamente dritta e il carico di compressione abbia la direzione coincidente con l'asse neutro di ogni sezione trasversale. Queste condizioni però sono ideali, perché ogni componente presenta necessariamente delle *imperfezioni iniziali*: le imperfezioni geometriche e le eccentricità di carico sono inevitabili nella pratica (*Figura 19*). Entrambi i tipi di imperfezioni hanno l'effetto di indurre la flessione non appena il carico viene applicato, con una velocità che dipende dal valore di carico di compressione: più lo sforzo compressivo è alto, minore è il tempo necessario affinché il componente raggiunga una configurazione flessionale per buckling.

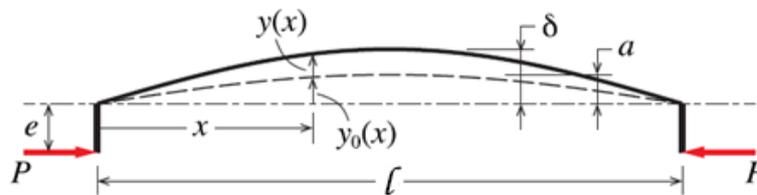


Figura 19: Buckling di una trave caratterizzata da imperfezioni geometriche iniziali e da un carico eccentrico [9]

Partendo da uno scostamento iniziale della trave rispetto alla configurazione ideale di trave dritta, con un valore dato da y_0 variabile lungo la coordinata assiale (da un valore nullo a un valore massimo pari ad a), la trave, per via di un carico P la cui direzione si discosta dall'asse neutro della trave per un valore di eccentricità e , subisce una deflessione $y(x)$, il cui valore massimo è visibile nella mezzeria dell'asse ed è identificato dal parametro δ . La totale deflessione δ è data da:

$$\delta = y\left(\frac{l}{2}\right) + y_0\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{a}{1 - \frac{P}{N_{cr}}} + e \left[\sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{N_{cr}}}\right) - 1 \right] \quad (5)$$

o, usando una serie di Taylor:

$$\delta = a \left[1 + \frac{P}{N_{cr}} + \left(\frac{P}{N_{cr}}\right)^2 + \dots \right] + e \left[\frac{\pi^2}{8} \frac{P}{N_{cr}} + \frac{5\pi^4}{384} \left(\frac{P}{N_{cr}}\right)^2 + \dots \right] \quad (6)$$

La rappresentazione grafica dell'equazione è mostrata in *Figura 20*. La variazione di δ/a con P/N_{cr} è mostrata con sette diverse curve, ognuna associata a un valore di e/a . Un rapporto $e/a < -\pi/4$ produce una deflessione finale negativa (segno opposto rispetto alla deflessione iniziale); un rapporto $e/a > -\pi/4$ produce una deflessione finale positiva. È importante il valore $e/a = -\pi/4$: esso non produce alcuna deflessione finale, come se la trave fosse neutralizzata.

Questo grafico fa comprendere che, quando il carico di compressione si avvicina al carico critico di Eulero N_{cr} , la deflessione aumenta. In altri termini, questo sottolinea il fatto che, la presenza di imperfezioni geometriche e di eccentricità di carico determina un carico critico di buckling minore rispetto al carico critico di Eulero, quindi quest'ultimo rappresenta il massimo valore che il carico critico di Buckling può assumere.

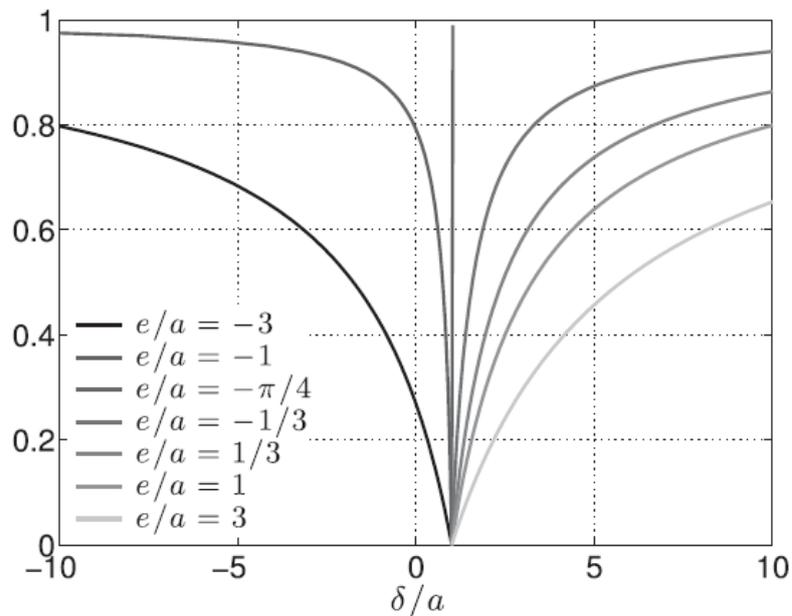


Figura 20: Curve carico - deflessione di travi con imperfezioni iniziali [9]

2.2 BUCKLING DI CILINDRI

Le caratteristiche generali del fenomeno di instabilità sono state fino ad ora presentate per semplicità nel caso delle travi. La definizione di buckling per carico di punta assiale, in realtà, prescinde dalla tipologia di componente in cui si verifica, infatti si parla di buckling quando un generico componente, soggetto a intensi sforzi di compressione, collassa per instabilità e tende ad

incurvarsi, assumendo una nuova configurazione, differente rispetto alla configurazione di partenza. Questo tipo di collasso, infatti, si estende anche nei componenti cilindrici.



Figura 21: Esempio di deformazione a buckling di un cilindro

Come nel caso della trave, il buckling dei cilindri dipende fortemente dalle caratteristiche geometriche del componente. La geometria dell'elemento cilindrico è descritta dal suo spessore t , dal suo raggio di curvatura R (che coincide con il raggio del cilindro) e dalla sua lunghezza L . In particolare, è importante distinguere i cilindri in relazione al loro rapporto R/t :

- se $R/t < 5$, i cilindri sono ritenuti molto spessi. Cilindri di questo tipo non possono essere considerati come gusci, ma devono necessariamente essere studiati attraverso la teoria riguardante gli elementi solidi;
- con un rapporto $5 < R/t < 30$, si parla di cilindri a parete spessa ed essi sono studiati attraverso la teoria di Mindlin – Reissner, la quale include la deformazione di taglio;
- se $30 < R/t < 4000$ si passa alla gamma di cilindri a parete sottile, il cui comportamento è descritto attraverso la teoria di Sanders – Koiter, che considera i momenti e le forze membranali, includendo la deformazione a flessione e le tensioni di taglio, ma escludendo la deformazione di taglio;
- superando la soglia di $R/t = 4000$, lo spessore del cilindro è talmente piccolo rispetto al suo raggio che è lecito parlare di membrane, pertanto la teoria di riferimento è quella del guscio membranale, che tiene conto delle sole forze membranali e non include la flessione e il taglio.

Questa distinzione conferma il motivo per il quale gli occhielli sigillo di garanzia di Tipo-9 rientrano nella gamma dei cilindri a parete spessa.

2.2.1 BUCKLING DI CILINDRI A PARETE SOTTILE

Uno sguardo, seppur breve, merita la gamma dei cilindri a parete sottile, i quali manifestano ampiamente il fenomeno di buckling per via del loro piccolo spessore.

Ad oggi, ci sono numerosi studi concernenti la resistenza a buckling di una struttura cilindrica sotto compressione assiale. Per cilindri compressi assialmente, il *classico carico critico di buckling elastico*, ottenuto da un autoproblema lineare classico basato dalla teoria di piccole deflessioni, può essere scritto come:

$$\sigma_c^{EL} = \frac{Et}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (7)$$

Questa formula, dipendente dalle proprietà del materiale e dal rapporto R/t , è basata nell'ipotesi di stato di pre-buckling membranale, in cui lo stress flessionale è trascurato. Tale ipotesi è adatta per i cilindri a parete sottile.

Una volta raggiunto il carico critico, il guscio cilindrico subisce buckling che può manifestarsi a livello deformativo, se si sviluppa a livello globale, nel modello ad anelli oppure nel modello a diamante (*Figura 22*).

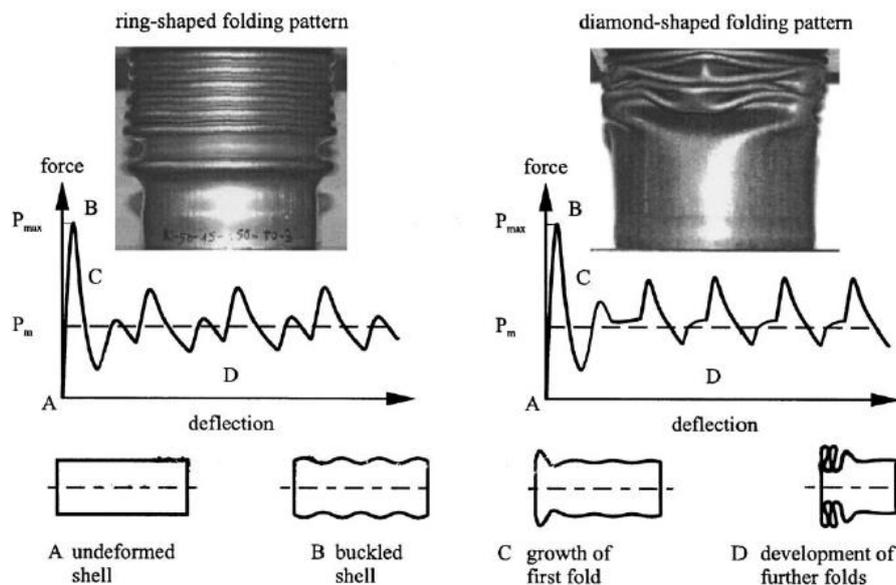


Figura 22: Processo del buckling nel caso di modello ad anello e modello a diamante [14]

Può anche accadere che, dopo essere entrato in una situazione di instabilità, il componente raggiunga una nuova configurazione di equilibrio: una volta che viene raggiunto il punto di biforcazione, il componente entra in un percorso di equilibrio *post-buckling*, inizialmente instabile,

e la tensione cade rapidamente dal valore di carico classico a un valore nettamente inferiore per poi entrare nuovamente in una situazione di stabilità (Figura 23a).

Dal punto di vista energetico, in natura un sistema ha la tendenza a seguire la trasformazione che richiede il minor quantitativo di energia, pertanto il passaggio da una configurazione stabile di pre-buckling del cilindro a una configurazione di post-buckling ristabilizzato è permesso attraverso un abbassamento energetico. È necessario, dunque, che venga liberata energia per effettuare questo passaggio di energia, affinché il componente segua una condizione di energia più bassa. L'energia liberata è la cosiddetta *barriera di energia* e viene ottenuta tramite la creazione di fossette, i quali rappresentano una deformazione per buckling locale.

A questo processo di liberazione energetica corrisponde il *mountain-pass point*, ossia il punto di sella nel panorama energetico del fenomeno di buckling (Figura 23b). Visto che esistono infiniti possibili stati di post-buckling ristabilizzati di energia più bassa, esistono infiniti possibili "mountain-pass points": lo stato di pre-buckling è detto *metastabile*. È necessario quindi che ogni perturbazione impartisca energia sufficiente per "vincere" questa barriera di energia.

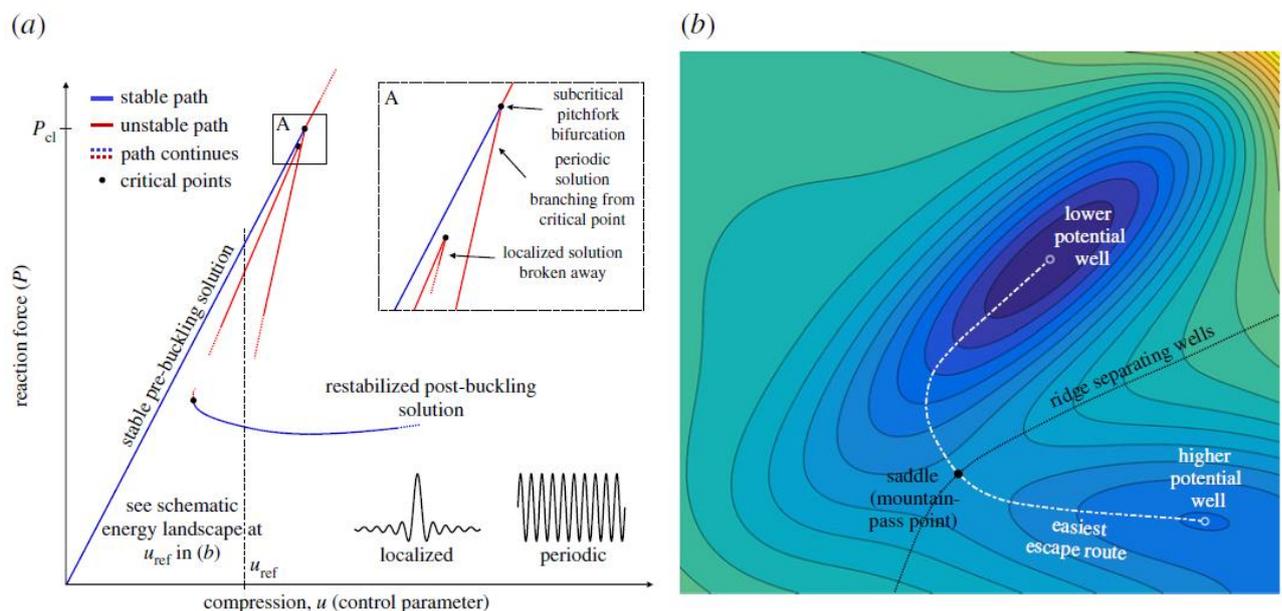


Figura 23: (a) Diagramma forza di reazione - compressione, (b) panorama energetico del buckling [12]

Le deformazioni a buckling localizzato differiscono dalle deformazioni "periodiche" in quanto sono limitate a una porzione della geometria della struttura. Ciascuna localizzazione corrisponde a un percorso di equilibrio separato ed è in grado di svilupparsi con uguale probabilità in diversi punti del dominio spaziale. Un percorso di equilibrio localizzato è quindi solo una delle infinite possibilità correnti. Poiché questa situazione con stati di equilibrio alternativi potenzialmente infiniti ha alcune analogie con il caos temporale, a volte essa viene definita "caos spaziale". Le

localizzazioni, come una singola fossetta, sono tipiche di strutture con comportamento in post-buckling instabile e possono presentarsi come biforcazioni secondarie da un percorso post-buckling periodico o come percorsi di equilibrio spezzati giustapposti al percorso di pre-buckling.

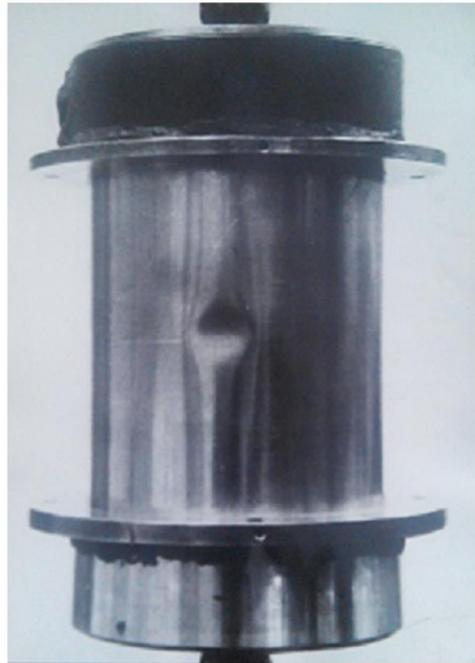


Figura 24: esempio di fossetta in un guscio cilindrico assialmente compresso [13]

Il comportamento e la resistenza a buckling di gusci cilindri a parete sottile sono ben conosciuti per la loro estrema sensibilità alle imperfezioni iniziali: essi determinano un abbassamento impattante del carico critico di buckling. Le imperfezioni sono anche qui identificate come deviazioni dalla forma geometrica nominalmente perfetta e dalle proprietà del materiale, quali le condizioni al contorno e di carico a cui i gusci sono sottoposti (Figura 25).

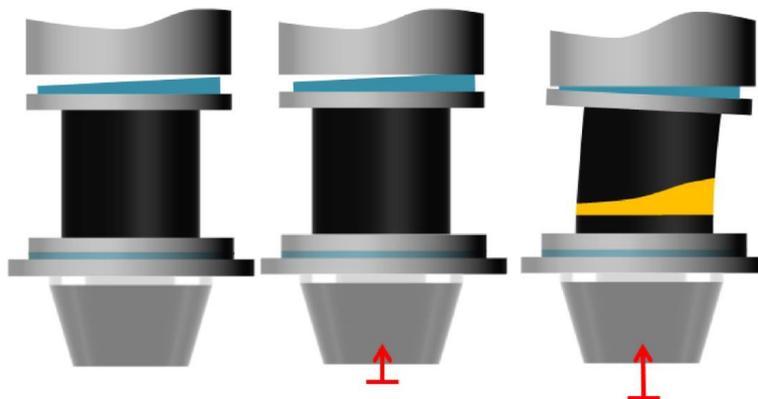


Figura 25: Esempio di simulazione di imperfezione di carico su guscio cilindrico [11]

Esistono tre differenti approcci per implementare l'effetto delle imperfezioni geometriche all'interno del comportamento per instabilità dei gusci cilindrici:

- il primo approccio assume le cosiddette imperfezioni geometriche “*realistiche*”, ossia quelle determinate da misurazioni effettuate nelle strutture reali. Questo portò la creazione di un database, contenente le diverse forme di imperfezione relative al processo di produzione del componente: il lato negativo è la mancata sufficienza dei dati per un’applicazione del tutto generale, la quale comporterebbe l’uso di un’imperfezione geometrica *equivalente*;
- il secondo approccio prevede l’uso dell’imperfezione “*peggiore*”, che fornisce la più bassa resistenza a buckling, definendo il limite inferiore teorico. Ciò porta a identificare le appropriate forma e dimensione dell’imperfezione geometrica nella loro interdipendenza. Possono essere assunti come imperfezioni gli auto-modi dell’analisi lineare a buckling preliminare di un guscio cilindrico perfetto;
- il terzo approccio suggerisce la scelta di un modello di semplice imperfezione geometrica equivalente che simulerebbe la caratteristica comportamentale del buckling del guscio in esame.

Un’ampia dispersione di valori sperimentali di resistenza a buckling di gusci cilindri nella condizione di compressione assiale porta a suggerire più semplicemente un approccio di progettazione *a limite inferiore*. Il più famoso è la linea guida empirica NASA SP-8007 [10], usata nella progettazione di gusci aerospaziali funzionanti per un lungo periodo, che definisce una netta dipendenza della sensibilità alle imperfezioni di fronte al rapporto raggio – spessore R/t attraverso la seguente relazione:

$$\rho_{EL} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_c^{EL}} = 1 - 0.901 \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{R}}{16t}} \right) \quad (8)$$

Si può notare che una riduzione del rapporto R/t , dato da una riduzione dello spessore a parità di raggio del cilindro, provoca una diminuzione della tensione critica di buckling, scostandola dal valore nominale teorico. In particolare, il rapporto sopra definito è chiamato **KnockDown Factor** e rappresenta il rapporto tra il carico di buckling sperimentale e quello teorico.

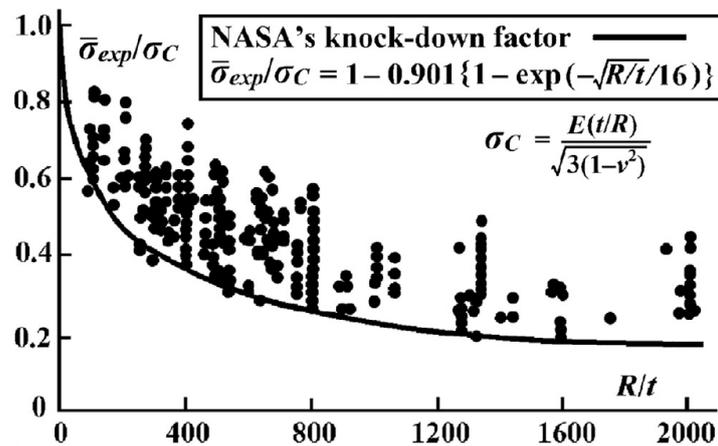


Figura 26: Valori sperimentali di resistenza a buckling raccolti nel 1960 e il cui rapporto con la resistenza nominale è rappresentato in funzione del rapporto R/t [10]

La creazione di una fossetta per via del buckling di tipo locale configura in maniera nuova lo stato del cilindro in una situazione di stabilità e introduce nel componente un' imperfezione geometrica che abbassa notevolmente la resistenza a buckling.

Lo stato di equilibrio locale con una fossetta può avvenire anche se il componente cilindrico è sottoposto a una forza laterale, addizionale allo sforzo di compressione: il buckling locale insorge quando il carico di compressione raggiunge almeno il 35% circa del carico critico di buckling classico. Questo livello di carico è definito "lower local buckling load" \bar{N}^- . Il carico di compressione affinché si manifesti lo stato di equilibrio stabile locale ha però un limite superiore, approssimativamente il 50% del carico di buckling della teoria classica, oltre il quale il componente cilindrico perde la sua capacità portante di carico e il suo stato di post-buckling diventa instabile: il guscio subisce un buckling globale, piuttosto che locale. Il valore di carico corrispondente all'insorgere della deformazione per instabilità globale è chiamato "upper local buckling load" \bar{N}^+ (Figura 27).

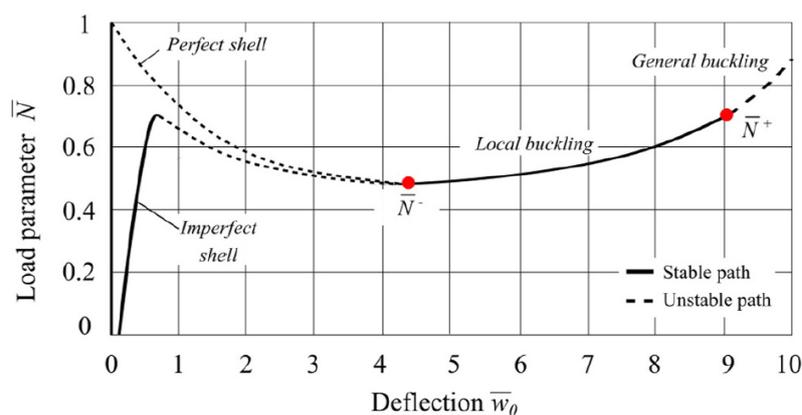


Figura 27: Diagramma carico – deflessione laterale illustrante la definizione di lower e upper local buckling load [13]

Uno stato stabile di post-buckling del guscio cilindrico esiste in un piccolo dominio del rapporto di carico, ossia nell'intervallo $\bar{N}^- \leq \bar{N} \leq \bar{N}^+$. La parte discendente del grafico definisce la liberazione di energia per entrare nella nuova configurazione di post-buckling stabile.

Un'informazione molto utile può essere derivata dal diagramma carico laterale – deflessione (*Figura 28*), caratterizzato da diverse curve, ognuna dipendente da un preciso valore di carico di compressione applicato al guscio cilindrico perfetto (senza imperfezioni geometriche). Si possono individuare tre punti importanti:

- Il punto A corrisponde allo stato di pre-buckling iniziale.
- Il punto B individua il punto massimo della curva, corrispondente alla forza laterale massima e produce la combinazione di carico di buckling se la forza laterale è considerata come una perturbazione.
- Il punto C è l'intersezione della curva con l'asse delle ascisse e corrisponde a uno stato di equilibrio. Tale punto può anche non essere presente.

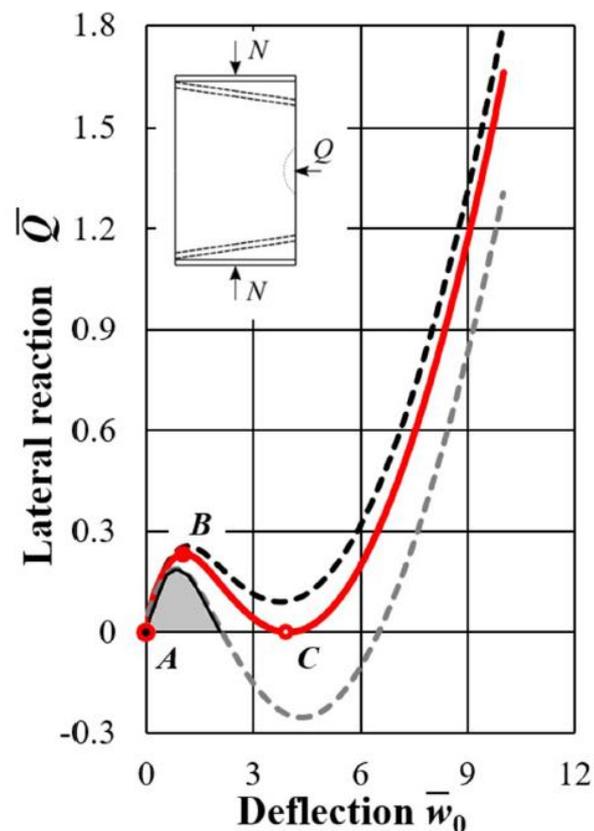


Figura 28: Diagramma carico laterale - deflessione per differenti livelli di carico assiale [13]

Se nel diagramma c'è solo il punto A, allora non ci sono stati di post-buckling e il carico assiale ha un valore inferiore del *lower local buckling load*. Se, invece, ci sono due intersezioni addizionali, con un totale di tre punti di intersezione della curva con l'asse delle ascisse, allora il

valore di carico di compressione è superiore del *lower local buckling load*. Il punto di intersezione aggiuntivo sinistro appartiene allo stato di equilibrio instabile intermedio. Nel caso, infine, di una curva tangente all'asse delle ascisse, il carico di compressione coincide con il limite inferiore di carico per l'insorgenza del buckling locale.

Dal diagramma può essere calcolata la barriera di energia corrispondente per un certo valore di carico assiale, attraverso l'area sottesa alla curva tra i punti A e C. Tale area, quindi, corrisponde al minimo di energia addizionale richiesta per passare da uno stato di pre-buckling a uno di post-buckling e, oltre a essere una misura della metastabilità, è anche una misura della sensibilità del guscio alle perturbazioni laterali.

La barriera di energia, in particolare, è circa 1% – 3% dell'energia di deformazione del guscio nello stato di equilibrio iniziale di pre-buckling al *lower local buckling load*, quindi è richiesta una perturbazione molto bassa per l'instabilità del guscio a questo livello di carico. La barriera di energia cresce circa proporzionalmente rispetto al numero di fossette, quindi lo stato di equilibrio con una fossetta corrisponde alla minima barriera di energia.

Anche le condizioni al contorno giocano un ruolo importante nel fenomeno di buckling dei gusci cilindrici. Si consideri per ipotesi la situazione in cui le facce terminali del guscio sono attaccate ai dischi rigidi: i loro spostamenti assiali possono essere descritti nella seguente forma funzionale:

$$u(y) = u_0 + a_1 + a_2 \cos\left(\frac{y}{R}\right) \tag{9}$$

dove u_0 è lo spostamento causato dal carico del guscio nello stato iniziale di pre-buckling e y è la coordinata circonferenziale. I parametri a_1 e a_2 descrivono rispettivamente il moto di traslazione e rotazionale dell'elemento terminale rigido del guscio (*Figura 29*).

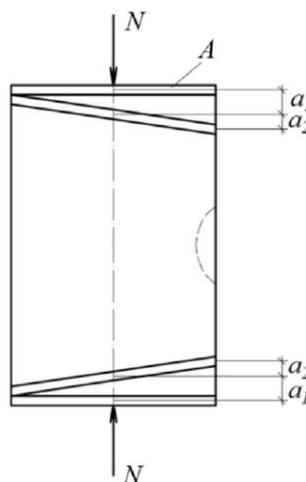


Figura 29: Rappresentazione grafica dei parametri a_1 e a_2

Possono esserci quattro differenti tipi di carico:

1. $a_1 \neq 0; a_2 \neq 0$: corrisponde al caso di spostamento e rotazione liberi dell'estremità del guscio cilindrico;
2. $a_1 = 0; a_2 \neq 0$: caratterizzato dalla sola rotazione;
3. $a_1 \neq 0; a_2 = 0$: le rotazioni dell'estremità del cilindro sono vincolate;
4. $a_1 = 0; a_2 = 0$: descrive uno spostamento rigido senza le rotazioni terminali.

Nella condizione al contorno di Tipo 4, il comportamento del guscio in post-buckling dipende solo dal *parametro di Batdorf Z*, ossia dal principale fattore geometrico che tiene conto del raggio, dello spessore e della lunghezza (non considerata in NASA SP-8007) del cilindro, definito dall'equazione:

$$Z = L^2 \frac{\sqrt{1 - \nu^2}}{R \cdot t} \tag{10}$$

Per gli altri casi di carico, il comportamento post-buckling dipende anche leggermente dal rapporto R/t .

In particolare, si possono definire le seguenti relazioni:

- Caso di carico assiale prescritto con rotazione libera: $\rho_{el} = 1.15 Z^{-0.138}$ (11);
- Caso di accorciamento prescritto senza rotazione: $\rho_{el} = 1.23 Z^{-0.138}$ (12).

In *Figura 30* sono rappresentate le curve corrispondenti alle formule di cui sopra e confrontati con i risultati sperimentali ottenuti nel passato testando campioni cilindrici. Si nota che le curve definiscono bene il limite inferiore rispetto ai dati sperimentali.

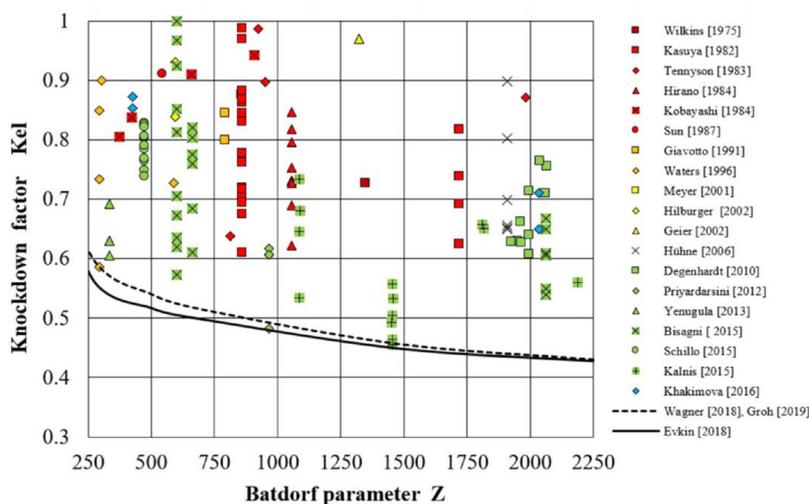


Figura 30: Curva KnockDown Factor - parametro di Batdorf e confronto con risultati sperimentali [13]

Il concetto di buckling locale di un cilindro compresso assialmente è esteso anche al caso di una struttura avente materiale con comportamento plastico. La plasticità, infatti, ha un certo effetto sui valori di *lower local buckling load* e *upper local buckling load* (Figura 31), i quali dipendono dal materiale caratterizzante il componente e sono molto poco sensibili alle imperfezioni geometriche iniziali. Nel dettaglio, fino a che ci si trova con una tensione di snervamento al di sopra del carico critico di buckling, i due valori di carico di riferimento sono indipendenti rispetto alla variazione del rapporto della tensione di snervamento con il carico critico di buckling. Man mano che tale rapporto tende al valori unitario, quindi le due tensioni di cedimento tendono a equivalersi, si nota, a partire da un rapporto pari a 1,2, una leggera diminuzione del *lower local buckling load* e un leggero aumento dell'*upper local buckling load*: diventa più semplice raggiungere la configurazione di buckling locale e più difficile raggiungere una situazione di buckling globale. Una volta che il carico critico di buckling supera la tensione di snervamento, si verifica una diminuzione ad entrambi i valori di carico di riferimento, con una maggior caduta nel caso di *upper local buckling load*: ciò porta a raggiungere una situazione in cui il *lower local buckling load* e l'*upper local buckling load* quasi si equivalgono.

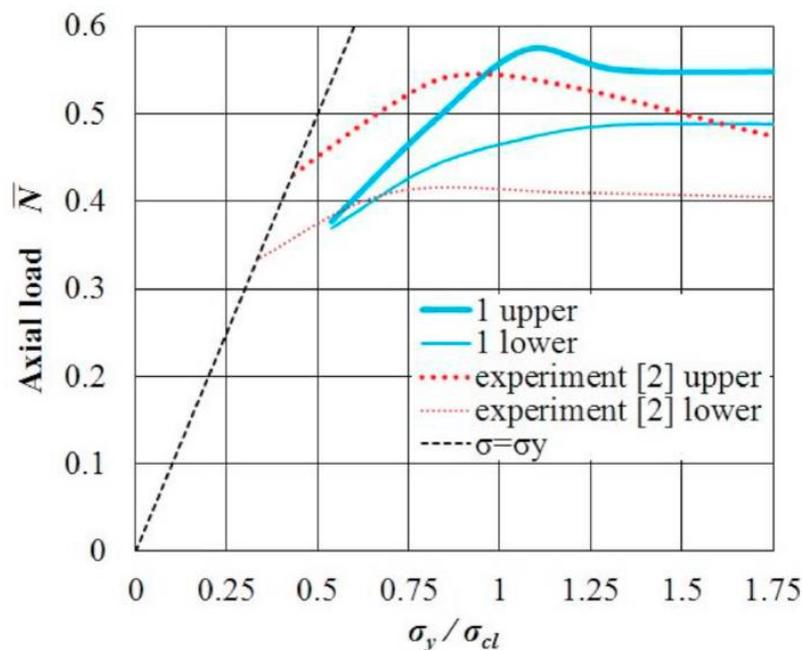


Figura 31: Andamento del lower e upper local buckling load rispetto alla tensione di snervamento [15]

Anche se la plasticità provoca una diminuzione significativa del *lower local buckling load*, questo carico è ancora considerato adatto come valore di riferimento per la progettazione a buckling del guscio cilindrico.

2.2.2 BUCKLING DI CILINDRI A PARETE SPESSA

I gusci a parete sottile spesso collassano per instabilità nel campo dell'elasticità: questo è dovuto al fatto che il fenomeno di buckling nella maggior parte delle volte si verifica ad un livello di carico minore del valore di tensione di snervamento, quindi l'instabilità avviene prima che il materiale entri in campo plastico. Le strutture a parete spessa sono più difficili da analizzare in tal senso, in quanto il fenomeno di buckling è innescato spesso dopo che il materiale è già plasticizzato. Lo spessore della loro parete permette ai cilindri di questo tipo di avere una maggiore capacità di assorbimento energetico, che induce un buckling non elastico ma plastico. Questo aspetto ci porta ad affermare che la teoria dei gusci sottili non va più bene, ma bisogna fare riferimento alla teoria di Mindlin – Reissner.

La teoria di Mindlin – Reissner si differenzia dalla teoria riguardante i gusci a parete sottile, in quanto nella seconda si ipotizza che i punti appartenenti a segmenti rettilinei normali al piano medio prima della deformazione si trovino ancora su un segmento rettilineo normale, localmente, alla superficie a deformazione avvenuta, quindi si tengono conto solo le deformazioni flessionali e membranali, escludendo quelle a taglio fuori piano (ciò non vuol dire che non esistono sforzi di taglio), mentre nella teoria di Reissner – Mindlin contempla invece la deformazione tagliante. Secondo tale teoria, un segmento retto e normale alla superficie media della piastra prima dell'applicazione del carico rimane retto dopo l'applicazione del carico ma non necessariamente normale alla superficie media deformata. In questo modo si consente la deformazione di scorrimento trasversale. Il moto di un punto non appartenente alla superficie media dipende dalle rotazioni α_x e α_y che subiscono i segmenti che prima dell'applicazione del carico erano retti e normali alla superficie media. Utilizzando il sistema di riferimento illustrato in *Figura 32*, si ha:

$$\begin{cases} \alpha_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{zx} \\ \alpha_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{zy} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} u = -z\alpha_x \\ v = -z\alpha_y \end{cases} \quad (14)$$

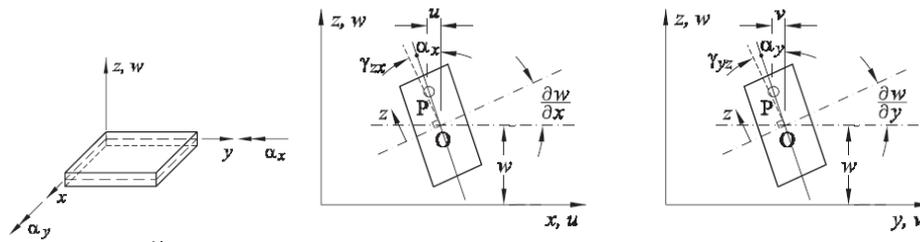


Figura 32: Spostamenti e rotazioni secondo l'ipotesi di Reissner – Mindlin [16]

Da queste, si possono ottenere le seguenti relazioni deformazioni – spostamenti secondo la teoria di Reissner – Mindlin:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = -z \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial y} - \alpha_y \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha_x \end{array} \right. \quad (15)$$

Vista la plasticità dell'instabilità subita dai cilindri a parete spessa, molti dei risultati teorici disponibili in letteratura usano il punto di biforcazione *plastica* al valore critico del modulo tangente come carico di buckling minimo possibile a cui la struttura potrebbe subire instabilità nella pratica. In particolare, la plasticizzazione del materiale avviene prima che viene raggiunto il carico critico del modulo tangente.

Solo due tipi di modi di deformazione a buckling sono propensi a sorgere: nel caso di gusci a parete sottile (valori del raggio R alti rispetto allo spessore t), come è stato già visto, spesso si verifica una deformazione a buckling locale in forma non-assialsimmetrica, mentre nel caso di cilindri a parete sufficientemente spessa si evidenzia una deformazione generalmente assialsimmetrica di impronta plastica, manifestata da una deformazione a forma di anello verso l'esterno attorno alla circonferenza del cilindro, quale è la cosiddetta “zampa di elefante”. Pertanto, nel caso di gusci a parete spessa non si possono usare i concetti di *lower local buckling load* e *upper local buckling load*.



Figura 33: Esempio di deformazione post-buckling di un campione cilindrico a parete spessa [4]

In realtà questo modello di deformazione assialsimmetrico avviene alla prima biforcazione, infatti potrebbe presentarsi, nel corso della deformazione di compressione, una transizione dalla forma assialsimmetrica alla forma non-assialsimmetrica nel range del post-buckling a causa della biforcazione secondaria (Figura 34).

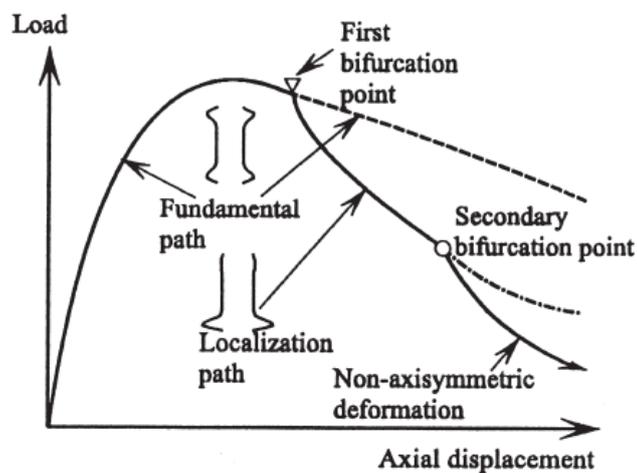


Figura 34: Curva carico - spostamento assiale per la localizzazione del modello di buckling di un cilindro a parete spessa [17]

Poiché si tratta proprio di plasticità, possono essere ottenuti diversi valori di tensione critica di buckling, in maniera del tutto dipendente dalla teoria della plasticità scelta nell'analisi, che sia la teoria della deformazione di plasticità o che sia la teoria del flusso plastico.

In ogni caso, anche nei cilindri a parete spessa, esistono diversi fattori che influenzano la capacità del cilindro di assorbire energia di compressione, fattori che, quindi, incidono sulla sua resistenza a buckling e di cui è importante parlare.

A differenza dei cilindri a parete sottile, il fenomeno di buckling nei cilindri a parete spessa non è influenzato dalle imperfezioni geometriche del cilindro, pertanto è lecito studiare il loro comportamento come se fossero cilindri perfetti. Maggiore è lo spessore del cilindro, minore è

l'influenza delle imperfezioni geometriche, quindi i cilindri più spessi sono meno sensibili alle imperfezioni geometriche. Rimane però l'influenza della perturbazione laterale, che provoca la deformazione a buckling anche con un'intensità molto bassa.

Un altro aspetto da tenere in considerazione riguarda le condizioni al contorno. Il fenomeno di buckling plastico di cilindri spessi è, infatti, fortemente influenzato dalle condizioni di vincolo. Si possono, per esempio, distinguere tre diverse tipologie (*Figura 35*):

1. Bordi semplicemente supportati (*simply-supported edges*), caratterizzati da un carrello radiale all'estremità superiore del cilindro e da un carrello radiale e assiale all'estremità opposta;
2. Bordi incastrati (*clamped edges*), che si differenziano dal caso precedente per via della presenza di un vincolo angolare ad entrambe le estremità;
3. Bordi liberi (*free edges*), che mostrano un solo carrello radiale nell'estremità inferiore del cilindro e nessun vincolo nel bordo superiore.

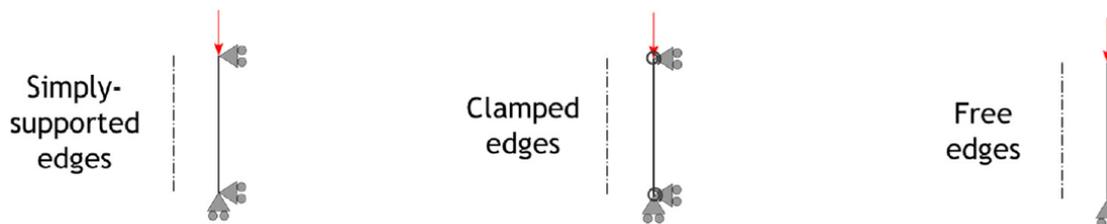


Figura 35: Differenti condizioni al contorno [4]

Parlando del buckling plastico di cilindri compressi assialmente, il primo che derivò il carico critico di buckling usando la teoria del flusso di plasticità fu Batterman [5], il quale propose la seguente formula per il caso di cilindro con bordi semplicemente supportati:

$$\sigma_c^p = \frac{Et}{R} \sqrt{\frac{4H}{3[(5 - 4\nu)E + 4H(1 - \nu^2)]}} \quad (16)$$

Si può notare come nella formula di Batterman non venga tenuta in considerazione l'influenza della lunghezza del cilindro. In generale, è importante controllare l'impatto che la snellezza (in termini di rapporto L/R) ha nel fenomeno di buckling sui cilindri: a differenza del rapporto R/t che regola la dipendenza del cilindro a cedere per instabilità in maniera localizzata (buckling locale), il rapporto L/R definisce la sensibilità di un cilindro a cedere per buckling globale. Oltre a questo, bassi rapporti L/R comportano un'alta capacità portante di carico assiale e, aumentando la snellezza del componente (ossia il rapporto L/R – per esempio, aumentando la lunghezza del

cilindro e mantenendo costante il suo raggio), il carico di buckling diminuisce, portando ad una probabilità maggiore di riscontrare il fenomeno di instabilità. Dato che l'aumento della snellezza comporta una riduzione del carico di buckling, cilindri con un grande rapporto L/R sono più propensi a cedere per buckling prima di raggiungere il carico di snervamento, subendo un buckling elastico piuttosto che plastico.

A sostegno della comprensione di questo aspetto, si riportano i risultati trovati in [6] da un'analisi sperimentale su provini cilindrici in acciaio galvanizzato, sottoposti a compressione assiale. I provini mostrano diversi rapporti L/D (pari alla metà del nostro rapporto L/R , essendo D il diametro del cilindro), il cui valore è inserito nella codice identificativo del provino accanto alla lettera C. Si può notare in *Figura 36* come in cilindri con rapporti L/D inferiori ci sia un punto di massimo nella curva tensione – deformazione al di sopra della tensione di snervamento: questo punto corrisponde al carico critico di buckling, che in questo caso è di tipo plastico. Man mano che il rapporto L/D aumenta, il carico critico di buckling diminuisce, definendo un punto di massimo corrispondente al carico di snervamento: si è passati da una situazione di *incrudimento* a una situazione di *softening*.

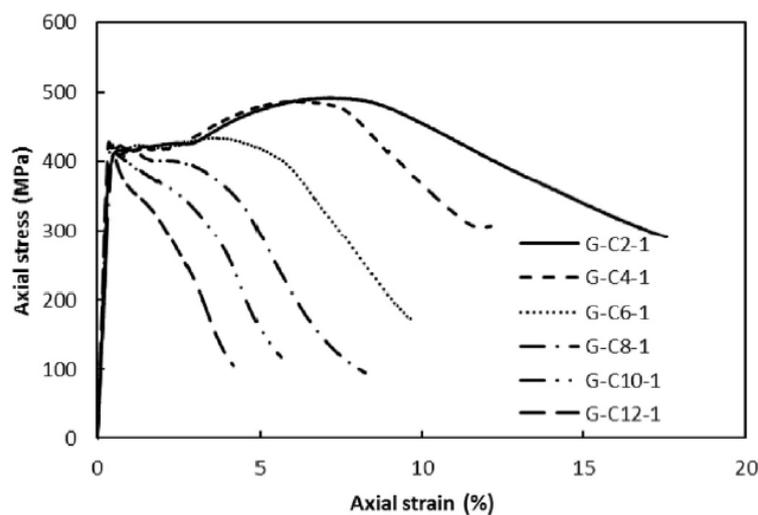


Figura 36: Curva tensione - deformazione di provini cilindrici in acciaio galvanizzato sotto compressione assiale [6]

La variazione parametro L/D porta anche ad avere diversi modi di cedimento: si passa da un buckling locale (zampa di elefante) per valori bassi di L/D a un buckling globale per valori alti di snellezza (*Figura 37*).

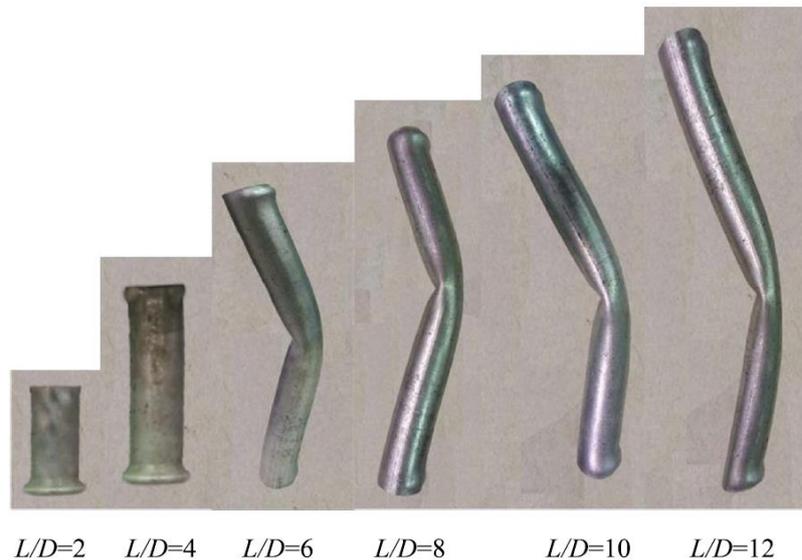


Figura 37: Modi di cedimento di provini cilindrici in acciaio galvanizzato [6]

Nonostante questa correlazione tra carico critico di buckling e parametro di snellezza, esiste un intervallo di valori del rapporto L/R in cui il carico critico difficilmente dipende dalla lunghezza del cilindro come se esso fosse di lunghezza semi-infinita. Lo si può notare dal fatto che nei cilindri con i rapporti L/D pari a 2 e a 4 c'è una differenza quasi trascurabile tra i valori di carico critico, definenti il punto di massimo della curva tensione – deformazione nel campo plastico.

2.3 IL CASO DEGLI OCCHIELLI

La struttura geometrica degli occhielli, come visto, è data da uno stelo di forma cilindrica e una testa di forma piana, la quale è presente per avere un pieno contatto con il punzone durante la fase di deformazione, quindi per avere una buona trasmissione della forza di compressione. La testa però non partecipa attivamente alla deformazione, pertanto quando si parla di deformazione dell'occhiello, si intende in realtà la deformazione del solo stelo.

In [3] è descritta un'attività sperimentale che evidenzia il processo di installazione degli occhielli sigillo di garanzia di Tipo-9, sia dal punto di vista deformativo sia per quanto concerne la curva forza di reazione – spostamento assiale che viene descritta, e l'influenza della velocità di deformazione sull'occhiello. Quest'ultima è stata studiata imponendo una corsa della traversa dell'occhialatrice pari a 5 mm ed è stato visto che a velocità di deformazione basse il processo di deformazione dell'occhiello avviene in maniera corretta, mentre, aumentando la velocità di deformazione, nasce la probabilità che l'occhiello entri in una situazione di collasso (Figura 38).

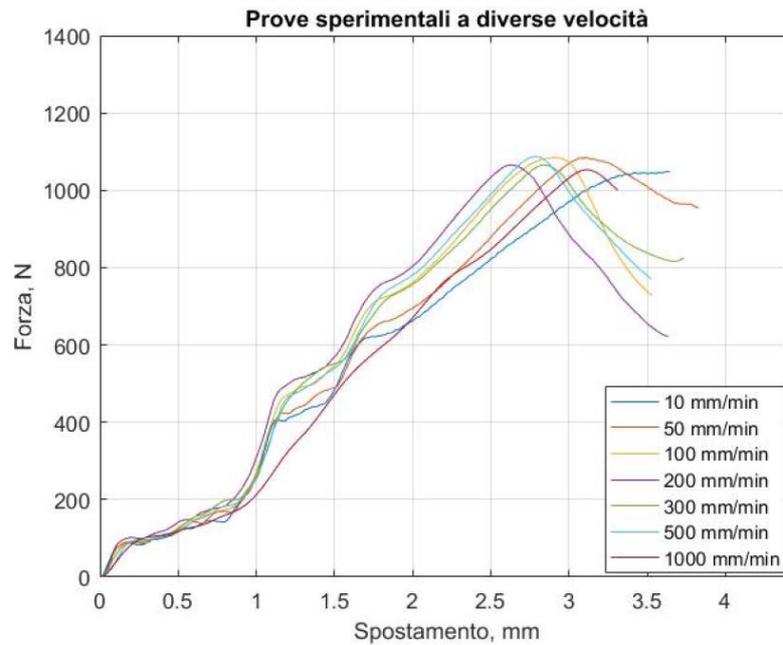


Figura 38: prove condotte a differenti velocità sul sigillo di garanzia fissando una corsa della traversa di 5mm [3]

Tabella 3: Riassunto delle prove condotte a differenti velocità dove viene fatto notare se l’occhiello collassa, in particolare a quale forza e spostamento [3]

Velocità di prova mm/min	Collasso	Forza massima N	Punto del collasso mm
10	NO	1049	-
50	SÌ	1083	3,1
100	SÌ	1084	2,9
200	SÌ	1031	2,64
300	SÌ	1057	2,86
500	SÌ	1087	2,79
1000	SÌ	1050	3,29

Dalla *Tabella 3* è possibile vedere che a una velocità pari a 10 mm/min l’occhiello non subisce collasso, mentre a una velocità maggiori, si verifica l’instabilità. Pertanto, una volta raggiunto un certo valore di forza, identificabile dal punto di massimo della curva carico – spostamento, si verifica il fenomeno di buckling, evidenziato con l’insorgere di una “zampa di elefante” (come ci si aspettava a causa della struttura geometrica dell’occhiello) circa in mezzzeria in direzione assiale e con una direzione che in alcuni casi è perpendicolare all’asse del cilindro e in altri è obliqua rispetto all’asse del cilindro (*Figura 39*).

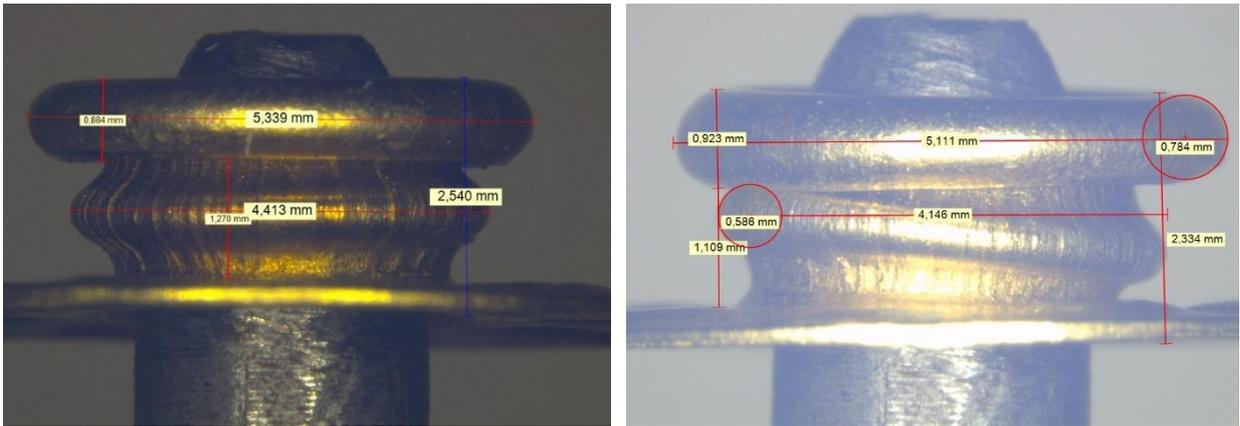


Figura 39: immagine al microscopio di un occhio che presenta un collasso assialsimmetrico ottenuto dalle prove sperimentali, in direzione perpendicolare (a sinistra) e in direzione obliqua (a destra) rispetto all'asse del cilindro [3]

La forza massima è correlata, quindi, al carico critico di buckling e il suo valore è all'incirca costante al variare della velocità di deformazione dell'occhio, come mostrato in Figura 40.

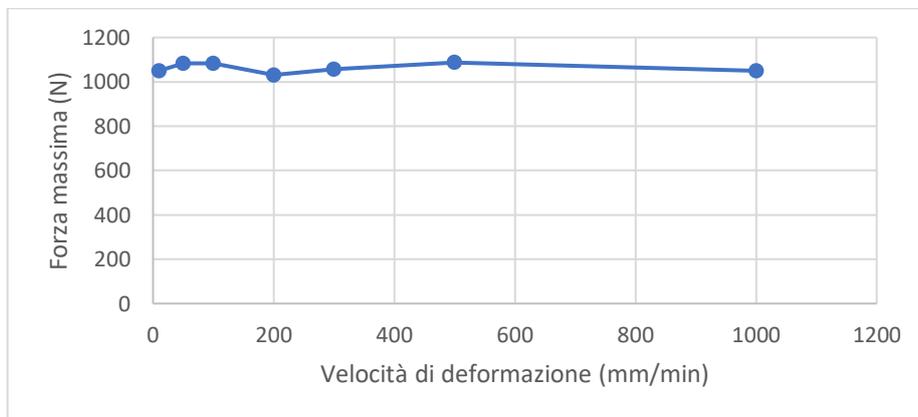


Figura 40: curva forza massima - velocità di deformazione

Considerando una forza massima circa pari a 1050 N, si trova il seguente carico critico di buckling:

$$\sigma_{cr,sp} = \frac{F_{cr,sp}}{A_{in}} = \frac{F_{cr,sp}}{\pi \frac{[2(R+t)]^2 + (2R)^2}{4}} \quad (17)$$

$$\sigma_{cr,sp} = 506,40 \text{ MPa}$$

Capitolo 3

STUDIO ANALITICO

Secondo la teoria, gli occhielli sigillo di garanzia di Tipo-9 si mostrano come cilindri a parete spessa. Questo induce un carico critico di buckling superiore al caso dei cilindri a parete sottile: in particolare il carico critico di buckling è maggiore del carico di snervamento e ciò provoca una condizione di buckling plastico.

Si definiscono nella *Tabella 4* i valori medi, estrapolati da tabelle, delle proprietà meccaniche dell'acciaio strutturale non lineare a basso tenore di carbonio, quale materiale caratterizzante l'occhiello.

Tabella 4: Proprietà del materiale dell'occhiello

GRANDEZZA	VALORE	UNITÀ DI MISURA
E	200000	MPa
ν	0,3	
σ_0	250	MPa
H	1461	MPa

Dal punto di vista analitico, per quanto concerne il carico critico di buckling descritto nel caso degli occhielli, si applicano qui le equazioni relative al calcolo del carico critico di buckling, presentati nel Capitolo 2:

- l'equazione (7), proveniente dalla teoria classica di elasticità, permette di calcolare il classico carico critico di buckling σ_c^{EL} ;
- l'equazione (11), relativa al calcolo del *KnockDown Factor* in funzione del parametro di Batdorf (ottenuto tramite l'equazione (10)) per quanto concerne il caso di buckling elastico ottenuto da un carico assiale prescritto con rotazione libera, permette di determinare il carico critico di buckling σ_c^B , legato alle imperfezioni iniziali e alla lunghezza del cilindro;
- l'equazione (16), quale è la formula di Batterman ottenuta dalla teoria del flusso di plasticità, porta al calcolo del carico critico di buckling nel campo plastico σ_c^p .

Dall'equazione (7) si trova il seguente carico critico di buckling:

$$\sigma_c^{EL} = \frac{Et}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 15618,78 \text{ MPa}$$

Questo valore, al di là del suo ordine di grandezza troppo elevato, si discosta molto dal carico critico di buckling visualizzato sperimentalmente: tale scostamento è giustificato dal fatto che questa relazione, essendo riferita ai cilindri a parete sottile, non è adeguata agli occhielli, essendo essi a parete spessa, e si riferisce al caso di buckling elastico, in opposizione al fatto che, negli occhielli, il buckling avviene nel campo plastico. Per di più, l'equazione (7) non tiene conto dell'effetto della lunghezza e delle imperfezioni iniziali.

Dall'equazione (11) si ottiene il seguente valore di *Knockdown Factor*:

$$\rho_{el} = 1.15 Z^{-0.138} = 0,67$$

Il *Knockdown Factor* è ottenuto dal parametro di Batdorf, il quale è calcolato tramite l'equazione (10):

$$Z = \frac{L^2}{Rt} \sqrt{1-\nu^2} = 48,75$$

Dalla definizione del *KnockDown Factor*, quale è il rapporto tra il carico critico di buckling reale e quello nominale proveniente dalla teoria classica, si calcola il valore di carico critico di buckling legato alle imperfezioni iniziali e alla lunghezza:

$$\sigma_c^B = \rho_{el} \cdot \sigma_c^{EL} = 10505,37 \text{ MPa}$$

Il vantaggio di questo approccio è che si tiene in considerazione l'effetto della lunghezza e delle imperfezioni iniziali, infatti si evidenzia una diminuzione del carico critico di buckling rispetto a ciò che è determinato dall'equazione (7) con il relativo avvicinamento di esso rispetto al carico critico di buckling ottenuto a livello sperimentale. Di contro, il valore ottenuto è ancora troppo alto rispetto al carico critico determinato sperimentalmente e ciò è giustificato dal limite di questo approccio, ossia che esso si riferisce al caso di buckling elastico, in opposizione al fatto che, negli occhielli, il buckling avviene nel campo plastico.

Infine, dalla formula di Batterman descritta nell'equazione (16), si trova il seguente valore di carico critico di buckling:

$$\sigma_c^p = \frac{Et}{R} \sqrt{\frac{4H}{3[(5-4\nu)E + 4H(1-\nu^2)]}} = 1301,79 \text{ MPa}$$

Il carico critico di buckling trovato mostra un valore di un ordine di grandezza inferiore rispetto al carico di buckling elastico. Tale avvicinamento al carico critico ottenuto in maniera sperimentale è riscontrabile per via del punto di forza di tale formula, quale è il tenere in considerazione il legame tra il fenomeno di plasticità e il fenomeno di buckling, egli occhielli. D'altro canto, il limite della formula di Batterman è il fatto che, per esempio, non si considera l'effetto della lunghezza del cilindro e il fatto che tale relazione è specifica per la condizione di vincolo di bordi semplicemente supportati: ciò giustifica lo scostamento ampio rispetto al caso sperimentale.

In aggiunta ai modelli analitici fino ad ora considerati, i quali hanno mostrato una certa differenza rispetto al carico critico di buckling sperimentale $\sigma_{cr,sp} = 506,40 \text{ MPa}$, il seguente paragrafo introduce un ulteriore modello analitico, presentato in [4], capace di considerare i diversi aspetti del buckling plastico di cilindri a parete spessa, come avviene negli occhielli.

3.1 MODELLO ANALITICO

Per definire il modello analitico adeguato a studiare il fenomeno di buckling plastico degli occhielli, è necessario prima comprendere la condizione di vincolo a cui esso è sottoposto, perché, come già visto, i cilindri a parete spessa sono fortemente sensibili alle condizioni al contorno.

In particolare, il processo di installazione dell'occhiello, citato nel Capitolo 1, ci porta ad affermare che all'estremità superiore esso non è sottoposto a nessun tipo di vincolo, mentre l'estremità inferiore (laddove è presente l'eventuale bordo fustella), essendo sottoposta a una deformazione direzionata dallo stampo in direzione radiale, è vincolata nella sola direzione assiale, quindi è vincolata da un carrello radiale (*Figura 41*). Questa condizione di vincolo rappresenta il caso speciale di estremità libere (o *free edges*).

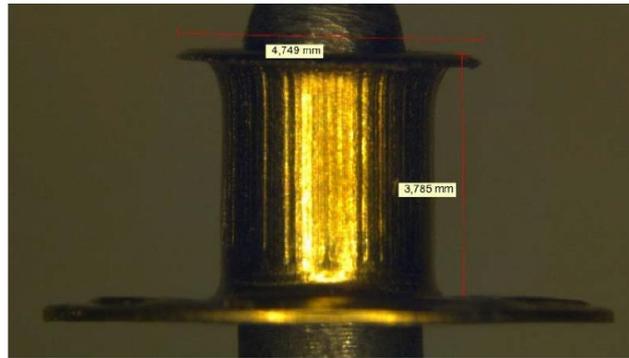


Figura 41: Rappresentazione fotografica della deformazione direzionata tramite stampo [3]

Di fronte a questa condizione al contorno, si farà riferimento a quanto proposto in [4], dove è infatti presente lo sviluppo di una soluzione analitica per il problema di buckling plastico di un componente cilindrico a parete spessa sotto compressione assiale nel caso speciale di bordi liberi.

Il modello analitico giunge a importanti risultati della teoria della biforcazione plastica, prendendo come riferimento:

- la teoria incrementale della J_2 -plasticità (o J_2 -Flow Theory);
- un incrudimento isotropo.

3.1.1 TEORIA INCREMENTALE DELLA J_2 -PLASTICITÀ

Il buckling plastico presuppone necessariamente che il materiale sia entrato nel campo della plasticità, ossia che la tensione a cui esso è sottoposto abbia raggiunto il valore della tensione di snervamento. In generale, in una condizione pluriassiale, la relazione che definisce questa condizione di snervamento è la seguente:

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_{eq}(\sigma_{ij}) - \sigma_0 = 0 \quad (18)$$

Nel considerare materiali pluricristallini, quindi materiali isotropi, la plasticità non dipende dalla direzione del sistema di riferimento scelto all'interno del materiale, pertanto è lecito esprimere il criterio di snervamento tramite le tensioni principali.

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (19)$$

Date le tre generiche tensioni principali, la funzione f è rappresentata graficamente nell'iperspazio a quattro dimensioni. Il criterio di snervamento è rappresentato dalla superficie ottenuta in corrispondenza di un valore della funzione di partenza pari a zero (Figura 42): si trova la *superficie di snervamento*. Il criterio di snervamento afferma che il materiale entra nel campo della plasticità

quando il vettore tensione, dato dalla composizione delle tensioni principali, interseca la superficie di snervamento: se il vettore tensione si trova all'interno della superficie di snervamento, allora il materiale si trova ancora nel campo dell'elasticità (Figura 43).

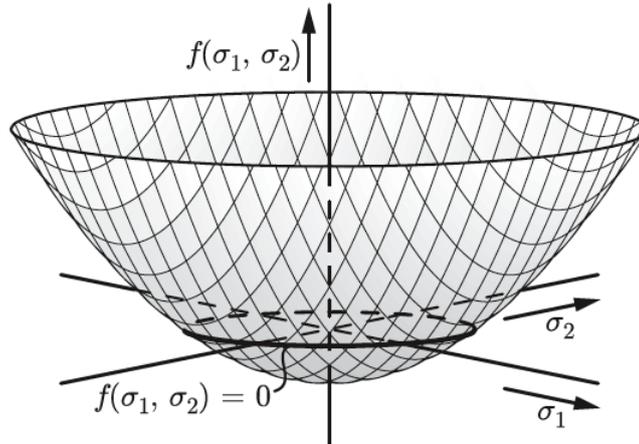


Figura 422: Rappresentazione della funzione di snervamento f per uno stato di tensione piana [8]

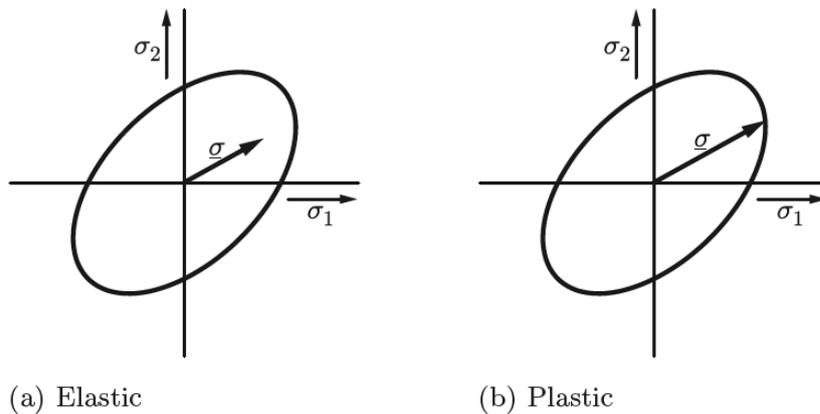


Figura 433: Superficie di snervamento per uno stato di tensione piana: (a) elasticità, (b) plasticità [8]

Un criterio di snervamento è quello identificato graficamente dal cilindro di Von Mises (Figura 44), le cui relazioni principali partono proprio dal fatto che il valore limite di cedimento plastico k_{VM} è proporzionale al raggio r_{VM} del cilindro:

$$r_{VM} = \sqrt{2}k_{VM} \tag{20}$$

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} = k_{VM} \tag{21}$$

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2} = k_{VM} \tag{22}$$

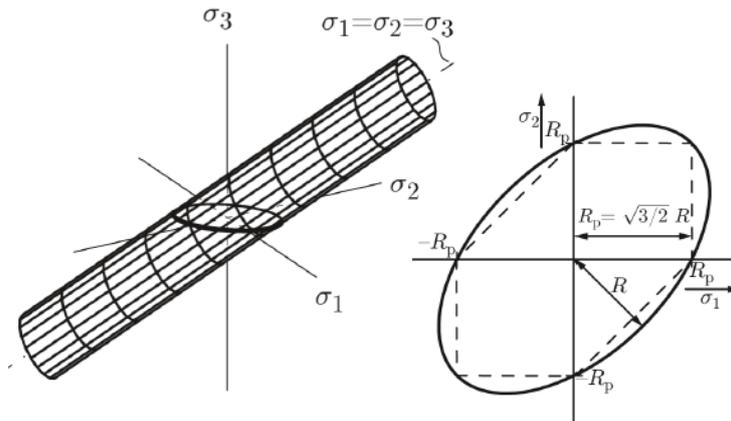


Figura 44: Funzione e corrispondente superficie di snervamento per il criterio di Von Mises [8]

La relazione è strettamente connessa al secondo invariante delle tensioni deviatoriche J'_2 , essendo esse responsabili della costanza del volume del materiale riscontrato durante la deformazione plastica:

$$J'_2 = \frac{1}{2} (\sigma'_{ij} \sigma'_{ji}) = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2 \quad (23)$$

Un ulteriore passo avanti viene fatto con la teoria del flusso plastico, di cui un caso particolare è la teoria incrementale della J_2 -plasticità, che (ricordiamo) sta alla base del modello analitico usato per il calcolo del carico critico di buckling plastico. La teoria del flusso plastico afferma che non è sufficiente che il materiale agganci la superficie di snervamento, perché la deformazione continua ad essere presente anche all'interno del campo plastico.

Esistono configurazioni del materiale che esibiscono stessa tensione e deformazioni diverse, oppure che, a parità di deformazioni, mostrano tensioni diverse (Figura 45): il problema diventa non più lineare e non più univoco, perché sapere quale valore di deformazione è stato raggiunto, non comporta la conoscenza univoca del valore delle tensioni.

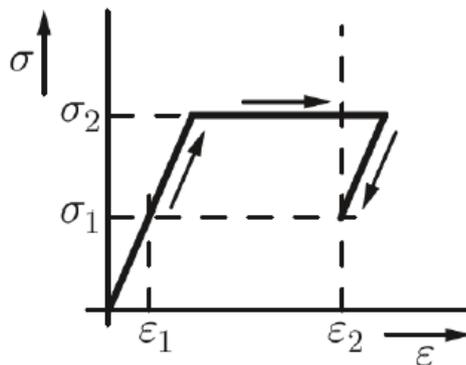


Figura 45: Illustrazione della relazione non univoca tra deformazioni e tensioni

Si introduce allora il concetto di *incremento* della deformazione, perché esiste sempre un legame tra esso e il valore della tensione: un certo valore di tensione produce un certo incremento di deformazione. Quindi in campo plastico si può scrivere che:

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^{pl} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^{pl}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (24)$$

Dividendo l'incremento della deformazione per il tempo usato per questo incremento, si trova la velocità di deformazione che è anch'essa funzione della tensione applicata al materiale.

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{pl} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{pl}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (25)$$

Questo è l'unico legame con cui è possibile comprendere a quale stato del materiale un determinato *flusso plastico* conduce. Di fronte a questa correlazione, i codici di calcolo usano un approccio in cui il passaggio tra due stati è dato da piccoli incrementi $d\varepsilon$: per ogni piccolo incremento, si va a cercare la tensione (le sue componenti nel caso multiassiale) che ha generato quell'incremento di deformazione che è plastica. Ma la tensione, purché sia agganciata alla superficie di snervamento, può trovarsi in qualunque punto della superficie, quindi è necessaria un'ulteriore legge che renda univoco il valore tensionale. A tal proposito si usa la *legge di flusso plastico*: la velocità di deformazione plastica è proporzionale alla tensione deviatorica (in termini di tensori):

$$\varepsilon_{ij}^{\dot{pl}} = \dot{\lambda} \sigma'_{ij} \quad (26)$$

La traccia del tensore della tensione deviatorica è nulla, quindi la traccia della matrice di velocità delle deformazioni è anch'essa nulla. Questa regola deriva dal **postulato di Drucker**, che non possiede alcuna spiegazione fisica e afferma che il materiale, nella sua deformazione, tra tutte le possibili strade deformative, segue quella in cui si massimizza la potenza utile per creare il lavoro plastico di deformazione del componente:

$$\dot{W}^{pl} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{\dot{pl}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{pl} = \max \quad (27)$$

Assumendo che il volume del componente, che si sta deformando plasticamente, sia costante, è lecito legare le potenze dissipate non alla tensione in toto, ma alla sola componente deviatorica.

$$\dot{W}^{pl} = \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^{\dot{pl}} = \underline{\underline{\sigma'}} \cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{pl} = \max \quad (28)$$

Tutto questo permette di stimare a quale tensione si giunge data una velocità di deformazione. Se il materiale è plastico, esso si sta muovendo sulla superficie di snervamento: il vettore tensione

dovrà giacere su tale superficie. Si sta facendo un certo passo deformativo, da cui è possibile definire il vettore $\dot{\varepsilon}^{pl}$. Avere la massima potenza dissipata in campo plastico significa avere la massima proiezione del vettore σ sul vettore $\dot{\varepsilon}^{pl}$: esiste solo un vettore σ che rispetta questa condizione, quindi, seguendo il postulato di Drucker, si conosce il preciso valore di tensione. Allora si nota che, se è noto il vettore tensione, è possibile determinare il vettore di incremento di deformazione, perché deve essere sempre normale alla superficie di snervamento nel punto di esistenza di quel valore di tensione: il vettore di velocità di deformazione è data da $grad f$. Se invece è noto dove si trova il vettore di incremento di deformazione, automaticamente si conosce il vettore tensione attraverso una considerazione geometrica, quale è il fatto che la retta ortogonale al vettore è tangente alla superficie di snervamento nel punto in cui si troverà la tensione che stiamo cercando (Figura 46).

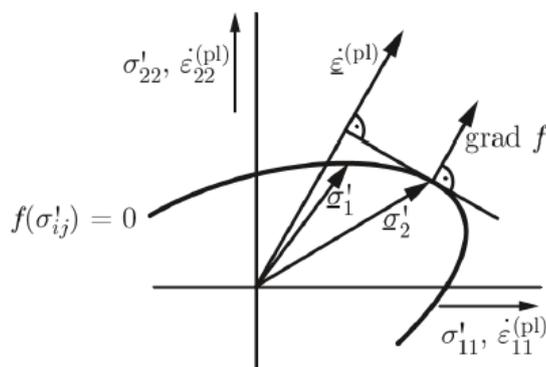


Figura 46: Illustrazione del postulato di Drucker [8]

Questa correlazione tra incremento di deformazione e tensione è possibile se e solo se la superficie di snervamento è continuamente derivabile e ci permette di comprendere come si comporta il materiale sia dal punto di vista tensionale sia dal punto di vista deformativo.

La teoria del flusso plastico conduce al suo caso particolare della J_2 -Flow Theory, la quale proviene da una condizione di snervamento definita sulla base del criterio di Von Mises, cioè si raggiunge una condizione di snervamento quando il secondo invariante del tensore delle tensioni deviatoriche raggiunge un valore limite k_{VM}^2 :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(J'_2) = J'_2 - k_{VM}^2 = 0 \tag{29}$$

3.1.2 INCRUDIMENTO ISOTROPO

Una volta raggiunta la tensione di snervamento, il materiale entra nel campo plastico ma, essendo esso non perfettamente plastico, non esibisce sempre la stessa tensione di flusso plastico, ma

all'aumentare del livello di deformazione tenderà di aumentare anche il suo valore tensionale fino a poi giungere, nel caso in esame, alla condizione di collasso per buckling plastico. Il materiale è quindi sottoposto a una fase di *incrudimento*, la cui legge definisce l'evoluzione della funzione di snervamento in funzione della deformazione plastica accumulata. In termini grafici, ad un'evoluzione della funzione corrisponde un cambiamento di forma della superficie di snervamento: se tale cambiamento è ottenuto attraverso un'espansione omotetica della superficie di snervamento in tutte le direzioni, si ha un gonfiamento del cilindro di Von Mises e si parla di *incrudimento isotropo* (Figura 47).

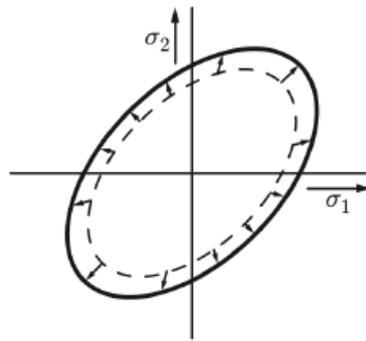


Figura 47: Variazione della superficie di snervamento per incrudimento isotropo [8]

Il modello di incrudimento isotropo prevede, pertanto, un aumento dei valori massimi e minimi di sforzo raggiunto.

3.1.3 RELAZIONI MATEMATICHE DEL MODELLO

Definite le basi su cui poggia il modello analitico in [4], si può passare alla stesura delle sue relazioni matematiche: è stata determinata la seguente equazione della biforcazione per un sistema in uno stato di tensione uniassiale e sotto la condizione di tensione piana:

$$\forall \delta \mathbf{U}, \quad \int_{\Omega} \nabla^T \delta \mathbf{U} : (\mathbf{C}^p - \xi \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i) : \nabla \mathbf{X} \, d\Omega = 0 \quad (30)$$

È importante sottolineare che il vettore \mathbf{e}_1 è un componente della base ortonormale fissa $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e rappresenta la direzione di carico compressivo.

Al fine del calcolo del carico critico di buckling, poniamo l'attenzione sulla matrice \mathbf{C}^p . Essa proviene dalla considerazione che la risposta elastica del materiale è supposta essere isotropica ed è allora rappresentata dalla legge di Saint-Venant – Kirchhoff che coinvolge il tensore dell'elasticità del quarto ordine \mathbf{D} , le cui componenti in una base ortonormale sono:

$$\mathbf{D}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) \quad (31)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker e λ e μ sono le costanti di Lamé, ossia quella coppia di parametri dipendenti dal materiale che permette di definire la legge di Hooke nel caso tridimensionale e di cui si riportano le formule di calcolo:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (32)$$

Nel dettaglio, deve essere verificata la condizione di tensione piana, pertanto si effettua il passaggio dal tensore \mathbf{D} al tensore ridotto \mathbf{C}^p , ottenuto definendo nulla la tensione normale del materiale nella direzione dello spessore. Le componenti di \mathbf{C}^p nella base ortonormale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sono:

$$\mathbf{C}_{ijkl}^p = \mathbf{D}_{ijkl}^p - \frac{\mathbf{D}_{ij33}^p \mathbf{D}_{33kl}^p}{\mathbf{D}_{3333}^p} \quad \text{con } (i, j) \neq (3, 3), (k, l) \neq (3, 3) \quad (33)$$

Il tensore \mathbf{C}^p , in particolare, ha entrambe le simmetrie maggiore e minore e le componenti diverse da zero sono le seguenti:

$$\alpha = \mathbf{C}_{1111}^p = E \frac{1 + 3 \frac{E_T}{E}}{5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E}} \quad (34)$$

$$\beta = \mathbf{C}_{1122}^p = E \frac{2 - 2(1 - 2\nu) \frac{E_T}{E}}{5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E}} \quad (35)$$

$$\gamma = \mathbf{C}_{2222}^p = E \frac{4}{5 - 4\nu - (1 - 2\nu)^2 \frac{E_T}{E}} \quad (36)$$

Il modulo tangente E_T è indentificato tramite il modulo di Young E e il modulo di incrudimento isotropico H dalla seguente relazione:

$$E_T = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H} \right)^{-1} \quad (37)$$

Effetto del taglio trasversale

Viene adesso riportata la relazione presente in [4], che permette di calcolare la prima tensione critica di buckling, tenendo conto dell’effetto di taglio trasversale. A tal proposito si introduce il fattore di correzione di taglio k .

$$\sigma_c^{TS} = \frac{3t(\alpha\gamma - \beta^2) \left\{ t\sqrt{3(\alpha\gamma - \beta^2)} \left[k^2\mu^2R^2 + \frac{t^2}{36}(\beta^2 - \alpha\gamma) \right] + 4k^3\mu^3R^3 \right\}}{k\mu R^2(6k\mu R + t\sqrt{3(\alpha\gamma - \beta^2)})(t(\alpha\gamma - \beta^2) + 2k\mu R\sqrt{3(\alpha\gamma - \beta^2)})} \quad (38)$$

Questo sarà utile per verificare se la differenza tra il valore trovato e quello calcolato con la formula di Batterman è sostanziale, ossia se l’effetto di taglio influenza il comportamento a buckling dell’occhiello.

Non-linearità geometriche

A causa delle deformazioni elasto – plastiche del componente cilindrico, l’analisi di biforcazione deve essere basata dalle non-linearità geometriche, che, nel caso dell’occhiello, si verificano nel campo della plasticità sotto forma di “zampa di elefante” (Figura 48). In tal senso, in [4] è introdotta la seguente formula:

$$\sigma_c^{NL} = \frac{\{\alpha\gamma t - 2\beta^2 t + 4\alpha\sqrt{3\left[(\alpha\gamma - \beta^2)R^2 + \frac{1}{48}\gamma^2 t^2\right]}\}}{24\alpha R^2 + \gamma t^2 + 4\sqrt{3\left[(\alpha\gamma - \beta^2)R^2 + \frac{1}{48}\gamma^2 t^2\right]}} \quad (39)$$

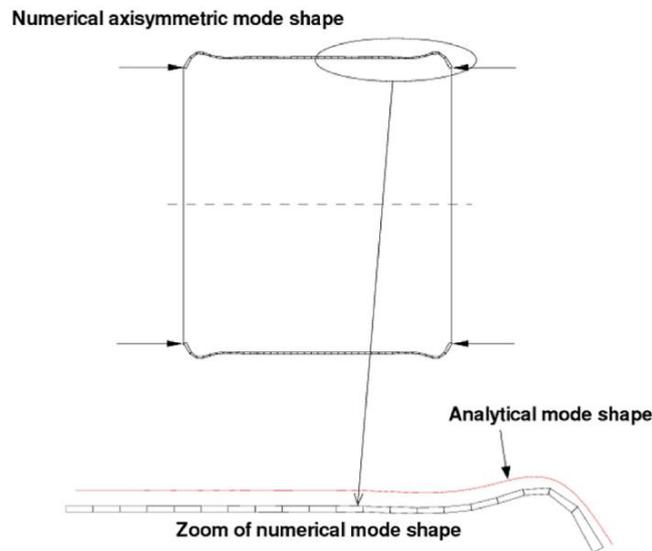


Figura 48: Confronto tra deformazione assialsimmetrica sperimentale e calcolata analiticamente [4]

Se il valore di carico trovato si discosta tanto dal valore determinato con la formula di Batterman, si evidenzia che la rigidità geometrica ha un effetto non trascurabile sul fenomeno di buckling.

Deformazioni pre-critiche finite

A causa del fatto che le tensioni critiche sono dello stesso ordine di grandezza del modulo tangente costitutivo, le deformazioni finite plastiche sembrano avvenire prima del buckling, a meno che le tensioni di snervamento e critica di buckling siano circa coincidenti. È allora necessario prendere in considerazione l'influenza delle deformazioni finite in campo plastico, secondo la relazione proposta in [4]:

$$\sigma_c^{nom} = (1 + \varepsilon)\sigma_c^{NL} \quad \text{con } \varepsilon = -\frac{\sigma_c^{NL} - \sigma_0}{H} \quad (40)$$

Il parametro ε rappresenta la deformazione nominale longitudinale nell'istante critico, che potrebbe essere approssimato dalla deformazione plastica di Green.

3.2 APPLICAZIONE SUGLI OCCHIELLI

Si procede adesso ad applicare il modello analitico sopra definito al caso degli occhielli sigillo di garanzia di Tipo-9, di cui si riportano per semplicità le caratteristiche geometriche e i valori della forza critica di buckling e del relativo carico tensionale, ottenuti a livello sperimentale:

$$\begin{cases} L = 3,98 \text{ mm} \\ R = 1,55 \text{ mm} \\ t = 0,2 \text{ mm} \end{cases} \rightarrow \frac{R}{t} = 7,75 ; \frac{L}{R} = 2,57$$

$$F_{cr,sp} = 1050 \text{ N}$$

$$\sigma_{cr,sp} = 506,40 \text{ MPa}$$

In relazione alla geometria dell'occhiello, è importante introdurre il *fattore di correzione di taglio* k , la cui necessità deriva dal fatto che non esiste una formula unica e semplice in grado di descrivere come vari la tensione tangenziale dovuta al taglio da punto a punto sulla sezione, pertanto il suo valore è utile per calcolare la tensione critica di buckling tenendo conto dell'effetto di taglio trasversale. Il fattore k dipende dalla geometria della sezione del componente:

essendo l'occhiello un componente cilindrico, la sua sezione è circolare cava e il fattore di correzione di taglio è:

$$k = 2$$

Per quanto concerne le proprietà del materiale, è necessario ricavare i valori del modulo tangente e delle costanti di Lamé (*Tabella 5*), ottenuti rispettivamente dalle *equazioni (37) e (32)*.

Tabella 5: Valori delle grandezze derivate del materiale

GRANDEZZA	VALORE	UNITÀ DI MISURA
E_T	1450	MPa
λ	115385	MPa
μ	76923	MPa

Prima di procedere con il calcolo della tensione critica di buckling, è necessario trovare i valori delle componenti del tensore ridotto C^p , tramite le *equazioni (34), (35), (36)*:

$$\alpha = C_{1111}^p = 53793 \text{ MPa}$$

$$\beta = C_{1122}^p = 104990 \text{ MPa}$$

$$\gamma = C_{2222}^p = 210591 \text{ MPa}$$

Si procede adesso con il calcolo della tensione critica di buckling, considerando gli aspetti influenzanti il comportamento a buckling del cilindro, secondo quanto definito sopra. Pertanto, si calcola dapprima il carico critico di buckling, tenendo conto dell'effetto del taglio trasversale tramite l'*equazione (38)*:

$$\sigma_c^{TS} = 1299,04 \text{ MPa}$$

Il valore trovato è molto vicino al valore determinato con la formula di Batterman, quindi questo porta ad affermare che il taglio trasversale non influisce sul comportamento a buckling dei cilindri a parete spessa in compressione assiale con condizioni di vincolo dati dai bordi liberi.

Si passa poi al calcolo del carico critico di buckling, tenendo conto dell'effetto delle non-linearità geometriche, secondo l'*equazione (39)*:

$$\sigma_c^{NL} = 521,00 \text{ MPa}$$

Si nota come la differenza tra questo valore e la tensione critica ottenuta con la formula di Batterman è decisamente impattante, a tal punto che il valore trovato si avvicina molto al valore

di carico ottenuto sperimentalmente. Questo verifica la veridicità dell'adeguatezza del modello matematico utilizzato.

Ultimo passaggio è aggiungere alle non-linearità geometriche le deformazioni pre-critiche finite, per cui, attraverso l'equazione (40), si trova il seguente valore di carico critico:

$$\sigma_c^{nom} = 424,33 \text{ MPa}$$

È importante visualizzare come si è passati da un valore estremamente alto di carico, ottenuto con la teoria classica dell'elasticità, a un valore dello stesso ordine di grandezza del carico critico di buckling ottenuto sperimentalmente. A tal proposito, si può rapportare il valore di tensione critica sperimentale alle varie tensioni sopra trovate, come se si definisse uno pseudo-*KnockDown Factor*, i cui diversi valori sono elencati nella *Tabella 6*, secondo i diversi modelli analitici sopra citati e nella *Tabella 6* numerati.

Tabella 6: Valori del rapporto tra carico critico sperimentale e carico ricavato teoricamente

N°	Modello analitico	Tensione considerata	Rapporto
1	Teoria classica del buckling elastico	σ_c^{EL}	0,032
2	Teoria di buckling elastico con parametro di Batdorf	σ_c^B	0,048
3	Teoria di buckling plastico secondo Batterman	σ_c^P	0,389
4	Effetto del taglio trasversale sulla teoria del buckling plastico	σ_c^{TS}	0,390
5	Effetto delle non-linearità geometriche sulla teoria del buckling plastico	σ_c^{NL}	0,972
6	Effetto delle non-linearità geometriche e delle deformazioni plastiche pre-critiche sulla teoria del buckling plastico	σ_c^{nom}	1,193

Il grafico in *Figura 49* mostra l'andamento dello pseudo-*Knockdown Factor* in funzione del modello analitico utilizzato. Esso evidenzia come il modello matematico che tiene conto dell'effetto delle non-linearità geometriche e dell'effetto delle deformazioni plastiche pre-critiche (modello n°6 in *Tabella 6*) sia pressoché adeguato al caso in esame, in quanto il rapporto tra il valore sperimentale di carico critico di buckling e il valore teorico si avvicina al valore unitario.

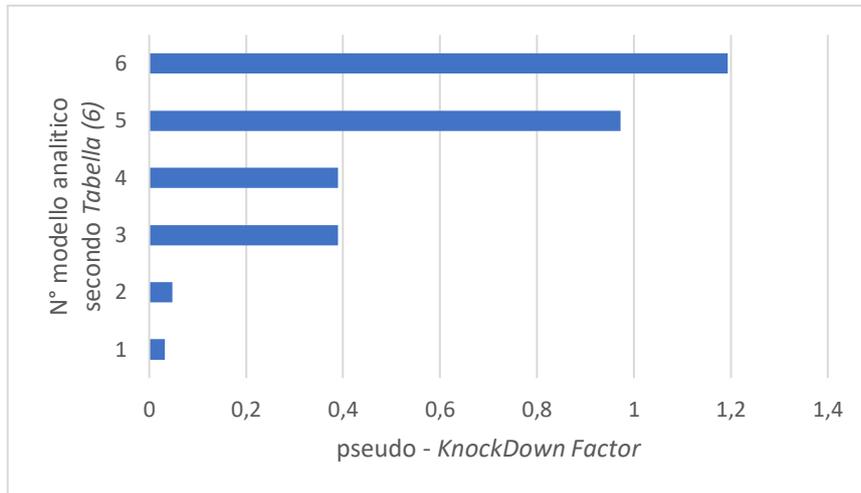


Figura 49: Grafico rappresentante il rapporto tra carico critico sperimentale e carico ricavato a livello teorico, in relazione al modello analitico utilizzato

Capitolo 4

ANALISI NUMERICA

Il modello analitico sopra citato è servito per avere un modello di riferimento capace di restituire un valore di carico critico di buckling confrontabile con il carico critico determinato sperimentalmente. Questo però non permette di comprendere il tipo di deformazione che l'occhiello assume nella sua fase di compressione, quindi si introduce un approccio numerico al fenomeno in esame, ottenuto tramite l'uso del programma di simulazione numerica ANSYS. In particolare, per il cilindro rappresentante l'occhiello, di lunghezza pari a $3,98\text{ mm}$, sarà simulato un processo di compressione di $1,5\text{ mm}$, al fine di ottenere una lunghezza finale del cilindro pari a circa $2,5\text{ mm}$, quale lunghezza finale dell'occhiello,

Si procederà prima con un'analisi 2D assialsimmetrica, giustificata dalla deformazione a zampa di elefante dell'occhiello, la quale, seguendo quanto mostrato in *Figura 39 a sinistra* nel Capitolo 2, se perpendicolare all'asse del cilindro, non dipende dalla coordinata angolare scelta. Successivamente si estenderà l'analisi nel campo tridimensionale, dovuta al fatto che l'osservazione sperimentale del collasso degli occhielli mostra spesso una deformata a buckling in direzione obliqua rispetto alla perpendicolare all'asse dell'occhiello, pertanto una deformata non assialsimmetrica (*Figura 39 a destra*).

4.1 ANALISI 2D ASSIALSIMMETRICA

La deformazione a buckling dell'occhiello si manifesta in generale a zampa di elefante, sia che si presenti in direzione puramente radiale sia che mostri un'inclinazione rispetto alla direzione perpendicolare all'asse dell'occhiello. Per comprendere il fenomeno di buckling, sia dal punto di vista computazionale sia dal punto di vista soprattutto deformativo, è lecito effettuare prima un'analisi 2D assialsimmetrica, la quale permette di trovare una deformazione a buckling radiale e, al tempo stesso, riduce notevolmente i tempi di calcolo legati al programma di simulazione numerica utilizzato.

4.1.1 GEOMETRIA

Un solido di rivoluzione è assialsimmetrico se le proprietà geometriche e del materiale sono indipendenti dalla coordinata angolare. Data l'assialsimmetria del carico di compressione a cui è sottoposto l'occhiello, il problema si riduce al caso bidimensionale, quindi ogni punto della sezione è caratterizzato dagli spostamenti radiale e assiale e l'analisi del buckling di cilindro è coincidente con quella del problema piano con una variazione, dovuta alla presenza delle componenti circonferenziali della tensione e della deformazione.

La geometria caratterizzante l'analisi in questione si riduce a un semplice rettangolo, quale sezione del cilindro ripetuta al variare della coordinata angolare (*Figura 50*).

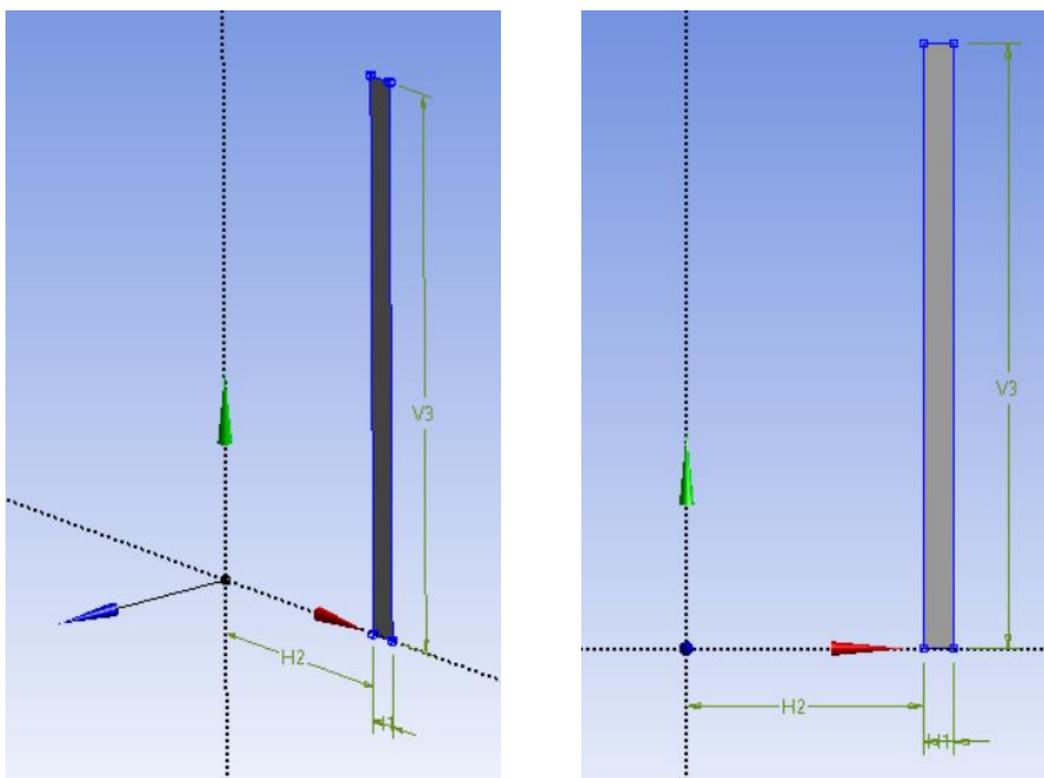


Figura 50: Rappresentazione della geometria del modello nell'analisi 2D assialsimmetrica

La geometria rettangolare, la cui dimensione più estesa $V3$ rappresenta la lunghezza dello stelo dell'occhiello e quella più piccola $H1$ coincide con lo spessore dell'occhiello, viene discostata dalla terna di assi cartesiani di una quantità $H2$ coincidente con il raggio interno dell'occhiello, al fine di ottenere il modello cilindrico una volta imposta l'assialsimmetria.

4.1.2 ELEMENTO DELLA MESH

Dato il comportamento a buckling da analizzare, è stato utilizzato come elemento della mesh del modello numerico l'elemento PLANE183 (*Figura 51*), il quale è un elemento 2D generalmente a

8 nodi (ai vertici del quadrilatero e nella mezzeria di ogni suo lato), ma che può presentarsi anche a 6 nodi nel caso in cui l'elemento degeneri in un triangolo. Ad ogni nodo sono presenti due gradi di libertà: traslazione lungo la direzione X, coincidente con la direzione radiale, e traslazione lungo la direzione Y, coincidente con la direzione assiale. L'elemento potrebbe essere usato come un elemento piano oppure come un elemento assialsimmetrico, quale è il caso in esame. Inoltre, esso presenta diverse proprietà, tra cui plasticità, iper-plasticità, creep e capacità di ampie deformazioni.

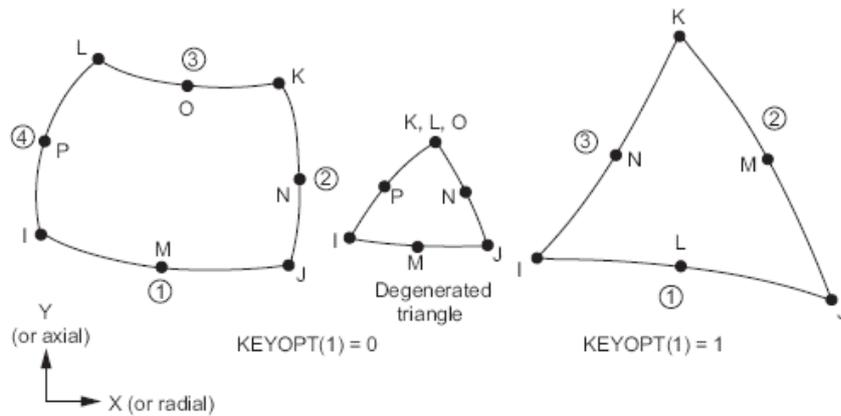


Figura 51: Geometria dell'elemento PLANE183 [19]

Per semplicità, la mesh è impostata inizialmente con un elemento di grandezza costitutiva pari a 0,05 mm, che impone 9 punti di integrazione in direzione radiale (Figura 52).

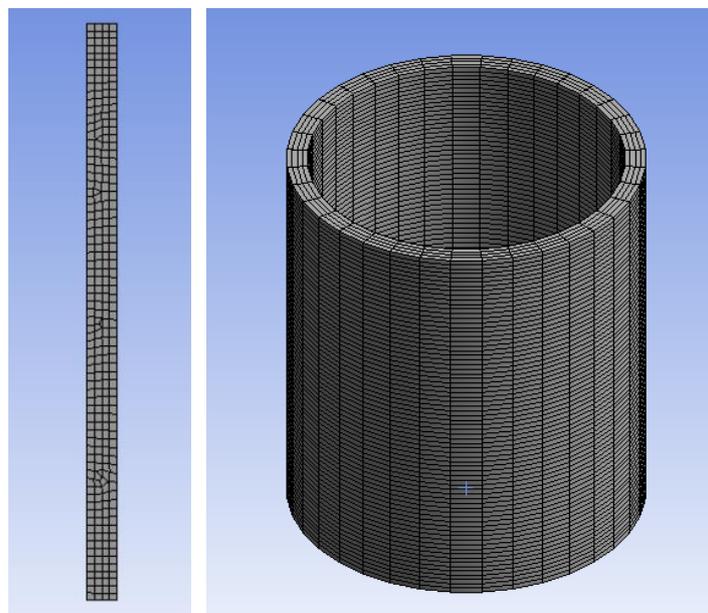


Figura 52: Prima meshatura

4.1.3 VINCOLI E FORZE

Il processo di installazione dell'occhiello, come è stato già detto, porta ad imporre uno spostamento di compressione in direzione assiale all'estremità superiore del modello, e un vincolo assiale all'estremità inferiore, che evita ogni movimento rigido del cilindro e blocca qualsiasi spostamento in direzione assiale e permette un libero spostamento in direzione radiale: si ha uno spostamento di $-1,5\text{ mm}$ in direzione assiale all'estremità superiore e un carrello radiale all'estremità inferiore.

È necessario, inoltre, tenere in considerazione un altro tipo di forza da applicare al cilindro. È stato già detto che, per quanto concerne i cilindri a parete spessa, il fenomeno di buckling non è influenzato dalle imperfezioni geometriche, pertanto questo rende lecito l'uso di un modello cilindrico ideale. È necessaria, pertanto, una piccola perturbazione laterale al fine di innescare il fenomeno di instabilità del cilindro. A tale scopo, sono state applicate due forze radiali centripete distribuite alle estremità assiali del modello, il cui valore, molto piccolo rispetto al valore di forza assiale che provoca collasso, conduce all'insorgere di una deformata a buckling preferenziale. Nella *Figura 53* è stata rappresentata la forza centripeta applicata sull'estremità superiore del cilindro (vettore di colore rosso), che attraverso l'assialsimmetria si distribuisce su tutta la sezione di base del cilindro, come rappresentato dai vettori forza caratterizzati da maggior trasparenza.

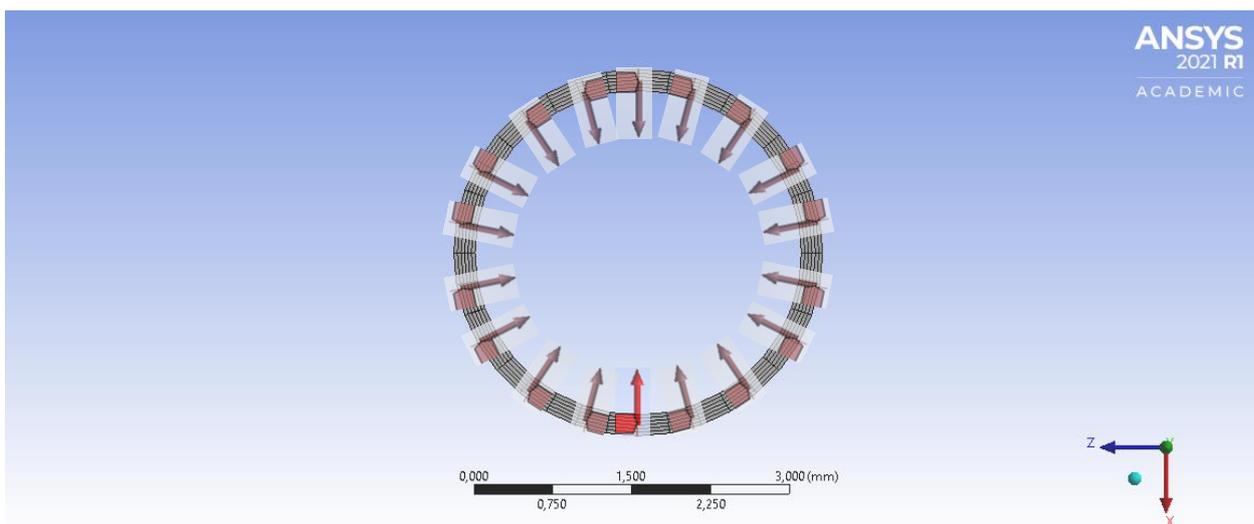


Figura 53: Perturbazione centripeta applicata in maniera distribuita sulle due estremità assiali del cilindro

Sono stati attribuiti quindi alla forza, centripeta e distribuita su ogni estremità assiale del modello, diversi valori, al fine di trovare il modo deformativo cercato e ricavare il valore di forza assiale generante il collasso per instabilità (*Tabella 7*).

Per quanto riguarda il tipo di deformazione a buckling ottenuto con un dato valore attribuito a ogni forza laterale, si distinguono le deformazioni *verso l'interno* e *verso l'esterno*, a seconda del verso dello spostamento radiale, e il luogo in cui avviene la deformazione, ossia se in mezzeria dell'asse del cilindro (*centrale*) o se alle due estremità assiali (*superiore* o *inferiore*).

Tabella 7: Determinazione della forza assiale di collasso e del tipo di deformazione ottenuta da diversi valori di forza laterale

FORZA LATERALE CENTRIPETA DISTRIBUITA (N)	FORZA ASSIALE DI COLLASSO (N)	TIPO DI DEFORMAZIONE A BUCKLING
-0,05	2465,2	Centrale Verso esterno
-0,06	2432,3	Centrale Verso esterno
-0,07	2421,5	Centrale Verso esterno
-0,08	2408,4	Centrale Verso esterno
-0,09	2253,5	Centrale Verso interno
-0,1	2236,8	Superiore verso esterno
-0,2	2074,6	Centrale verso interno
-0,3	1620,1	Centrale verso interno
-0,4	1595,8	Centrale verso interno
-0,5	1553,3	Centrale verso esterno
-0,6	1547,3	Centrale verso esterno
-0,7	1618,7	Centrale verso esterno
-0,8	1604,9	Centrale verso esterno
-0,9	1596,4	Centrale verso esterno
-1	1490,9	Superiore verso esterno
-1,1	1414,2	Inferiore verso esterno
-1,2	1469,5	Superiore verso esterno
-1,3	1487,6	Superiore verso esterno
-1,4	1467,4	Superiore verso esterno
-1,5	1444,6	Superiore verso esterno
-1,6	1312,5	Inferiore verso esterno
-1,7	1434,8	Inferiore verso esterno
-1,8	1456,1	Inferiore verso esterno
-1,9	1370,6	Inferiore verso esterno
-2	1379,9	Inferiore verso esterno
-2,2	1383,3	Inferiore verso esterno
-2,5	1352,4	Inferiore verso esterno
-2,7	1433,4	Superiore verso esterno
-3	1252,7	Centrale verso esterno
-3,2	1244,7	Centrale verso esterno
-3,5	1238	Centrale verso esterno
-3,7	1233,4	Centrale verso esterno
-4	1225,5	Centrale verso esterno
-4,2	1208,5	Centrale verso esterno
-4,5	1204,3	Centrale verso esterno
-4,7	1213,5	Centrale verso esterno
-5	1208,3	Centrale verso esterno

-5,5	1188,5	Centrale verso esterno
-6	1182	Centrale verso esterno
-6,5	1136,1	Centrale verso esterno
-7	1116	Centrale verso esterno
-7,5	1070,8	Superiore e inferiore verso esterno
-8	1048,4	Superiore e inferiore verso esterno
-9	1043,8	Superiore e inferiore verso esterno
-10	1036,6	Superiore e inferiore verso esterno

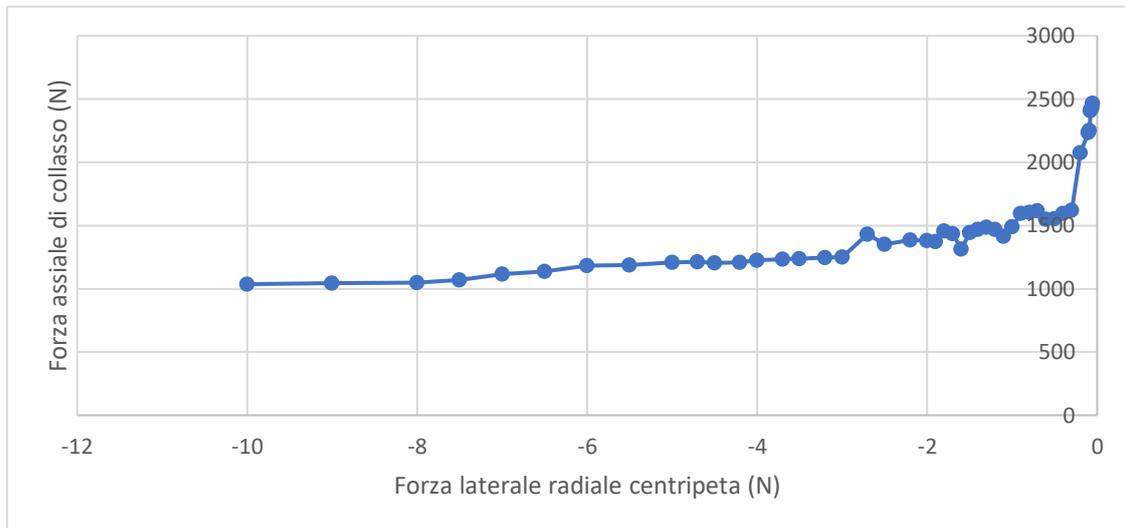


Figura 54: Andamento della forza assiale di collasso rispetto alle forze laterali [19]

È possibile verificare come un diverso valore attribuito a ogni perturbazione laterale centripeta distribuita su ogni estremità assiale del cilindro provoca una diversa configurazione deformativa del cilindro. A sostegno di questo, si riportano qui le deformazioni totali associate ad alcuni valori di intensità della forza laterale, a meno del segno.

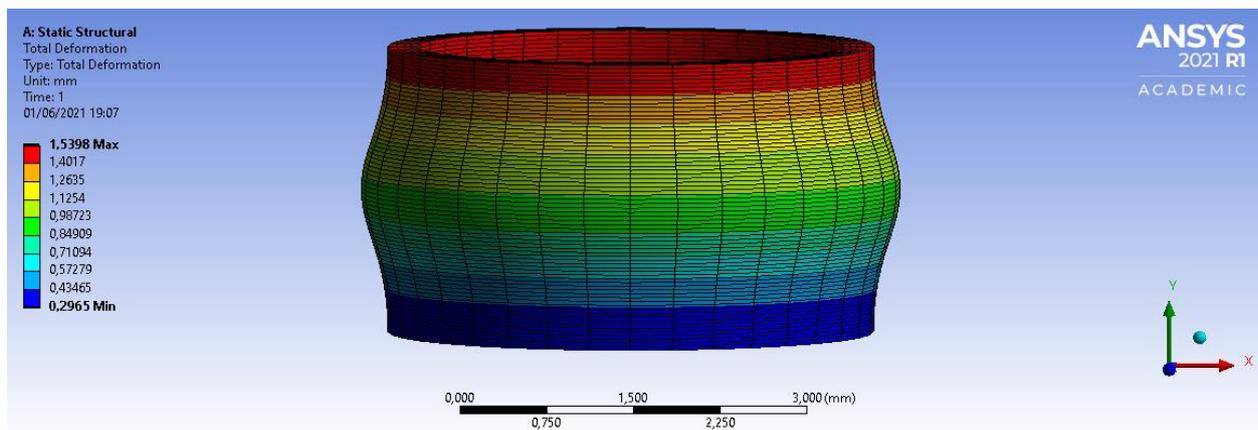


Figura 55: Deformazione totale data da due forze centripete, distribuita ognuna su un'estremità del cilindro e pari a 0,05 N – analisi 2D assialsimmetrica

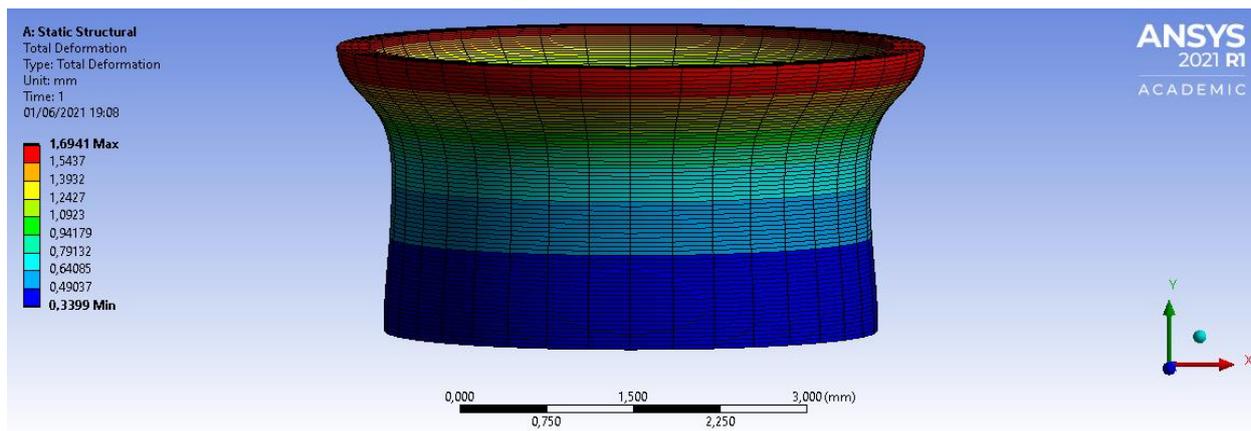


Figura 56: Deformazione totale data da due forze centripete, distribuita ognuna su un'estremità del cilindro e pari a 0,1 N – analisi 2D assialsimmetrica

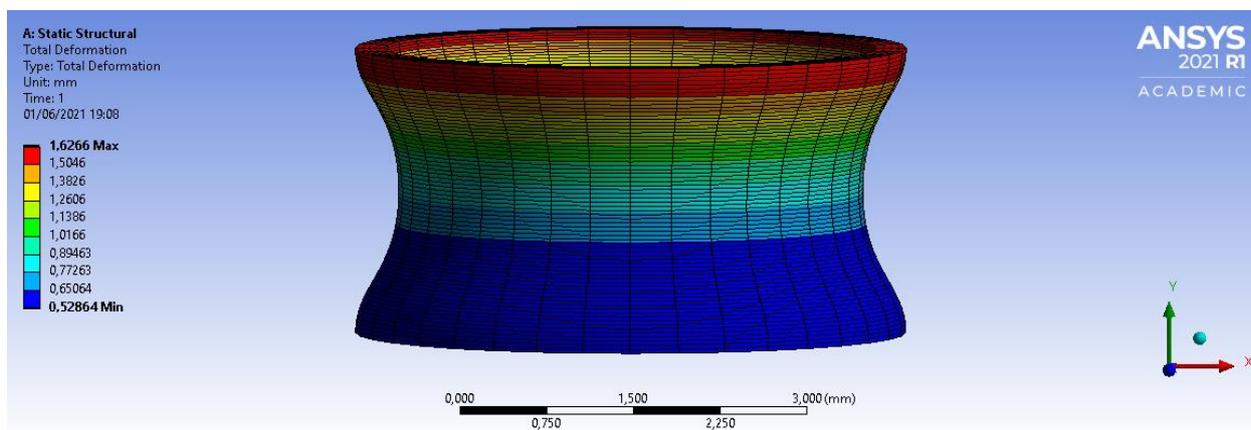


Figura 57: Deformazione totale data da due forze centripete, distribuita ognuna su un'estremità del cilindro e pari a 0,2 N – analisi 2D assialsimmetrica

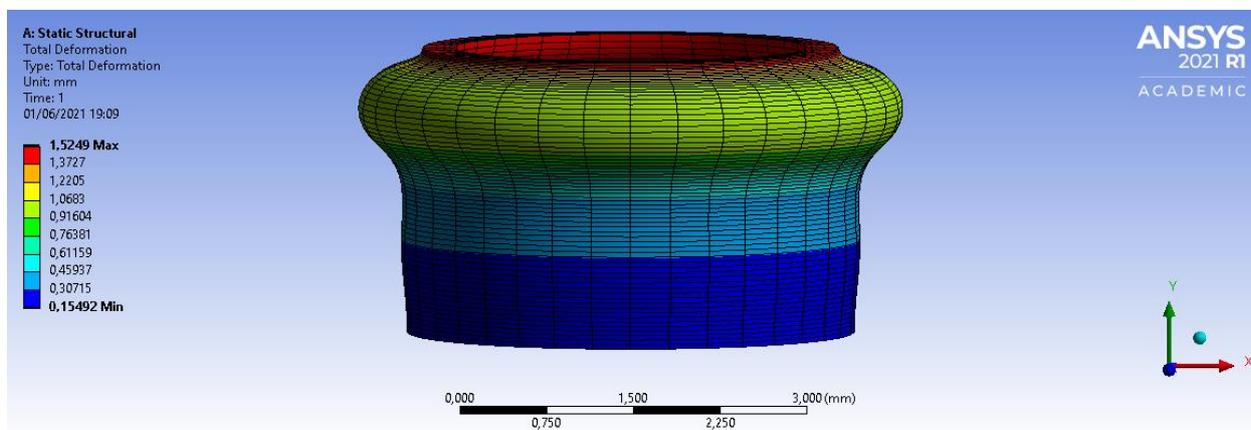


Figura 58: Deformazione totale data da due forze centripete, distribuita ognuna su un'estremità del cilindro e pari a 1 N – analisi 2D assialsimmetrica

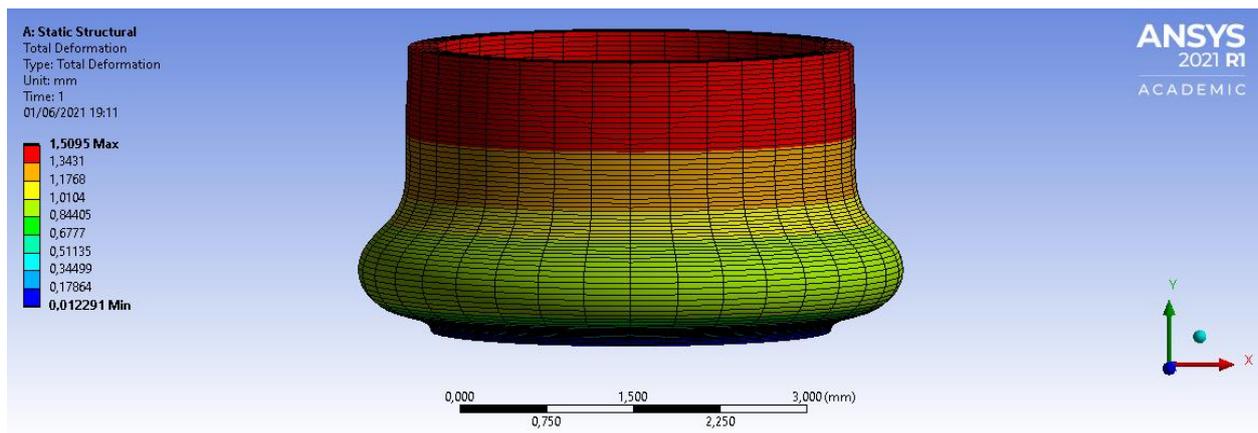


Figura 59: Deformazione totale data da due forze centripete, distribuita ognuna su un'estremità del cilindro e pari a 2 N – analisi 2D assialsimmetrica

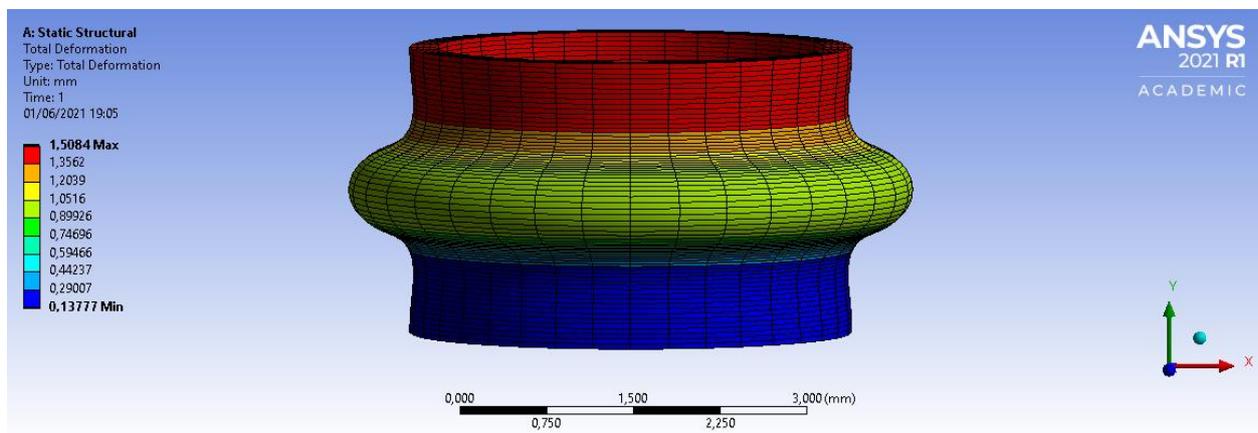


Figura 60: Deformazione totale data da due forze centripete, distribuita ognuna su un'estremità del cilindro e pari a 4 N – analisi 2D assialsimmetrica

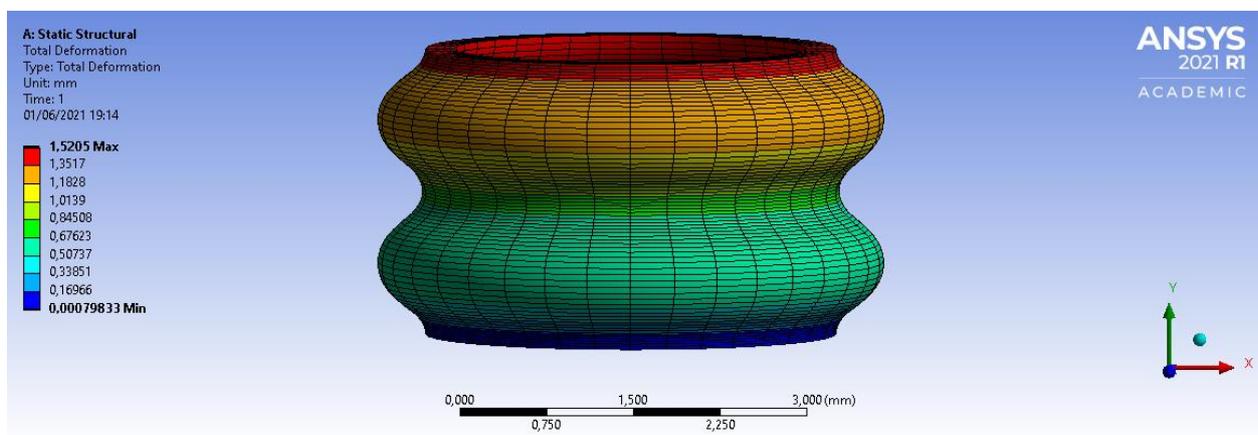


Figura 61: Deformazione totale data da due forze centripete, distribuita ognuna su un'estremità del cilindro e pari a 10 N – analisi 2D assialsimmetrica

Si può notare che la deformazione totale riscontrata nell'occhiello è associabile alla deformazione centrale verso l'esterno, quale deformazione a zampa di elefante. Tale tipo di deformazione è riscontrabile per un valore associato ad ogni forza laterale compreso tra 3 N e 7 N: ad ogni valore di perturbazione laterale corrisponde anche un dato valore di forza assiale critico di buckling. Per selezionare il valore di forza laterale utile per l'analisi del fenomeno di buckling, si effettua la media dei carichi critici di buckling.

$$N_{cr_media} \cong 1204 \text{ N}$$

Il valore medio di forza critica di buckling trovato è vicino al valore di forza critica associato alle forze laterali distribuite, ognuna delle quali avente intensità pari a 4,5 N.

4.1.4 MESHATURA

Una volta trovato il valore associato a ogni perturbazione centripeta distribuita sulle due estremità assiali del cilindro, si può procedere nella determinazione della dimensione dell'elemento della mesh, al fine di trovare il giusto compromesso tra la minimizzazione della tempistica di calcolo e una giusta approssimazione della forza critica di buckling. Si effettua quindi l'operazione di convergenza, tenendo, come forze laterali, le forze avente ognuna intensità pari a 4,5 N.

Tabella 8: Analisi di convergenza

Dimensione dell'elemento (mm)	Forza critica di buckling (N)
0,005	1203,3
0,01	1203,3
0,02	1203,4
0,03	1203,1
0,035	1204
0,04	1204,5
0,045	1217
0,05	1204,3
0,055	1204,5
0,06	1217,5
0,065	1217,6
0,07	1217,4
0,075	1216,2
0,08	1212,5
0,085	1213,5
0,09	1212,4
0,1	1209,1

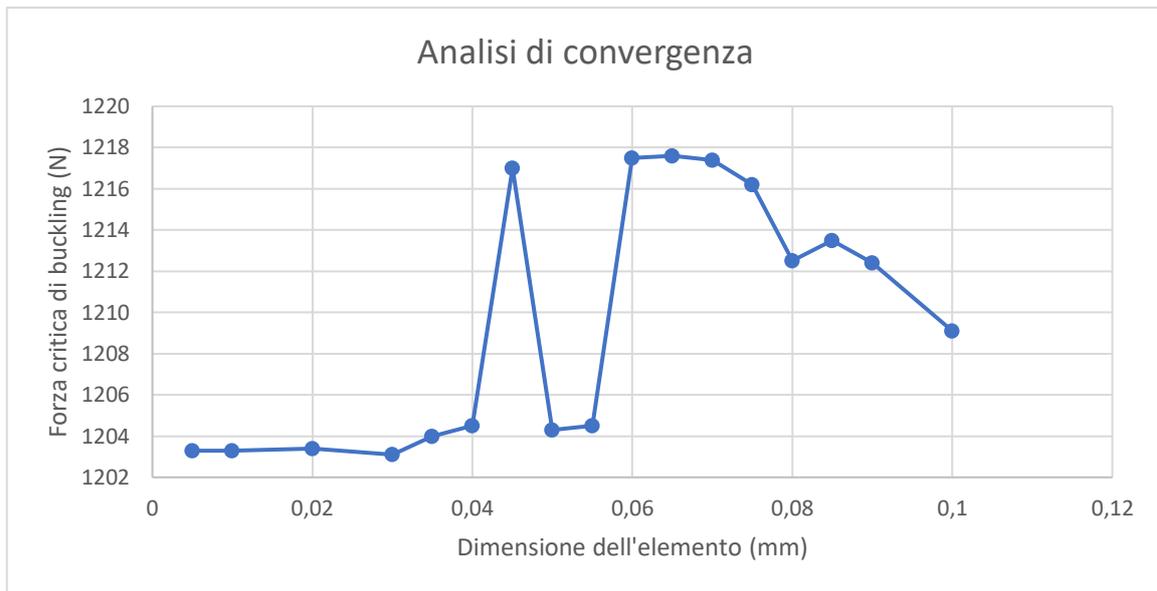


Figura 62: Andamento della forza critica di buckling rispetto alla dimensione dell'elemento della mesh

É lecito prendere come dimensione dell'elemento il valore pari a 0,03 mm, che rappresenta il valore più alto di dimensione dell'elemento per cui si ha una forza critica di buckling pressoché uguale all'intensità di forza di instabilità ottenuta con elementi più piccoli. Tale valore porta ad avere 13 punti di integrazione lungo lo spessore del cilindro.

4.1.5 RISULTATI

Secondo quanto riportato sopra, considerato come elemento della mesh l'elemento PLANE183 di dimensione pari a 0,03 mm e applicate le due forze centripete distribuite, ciascuna di intensità pari a 4,5 N, si ottiene numericamente il grafico in Figura 63:

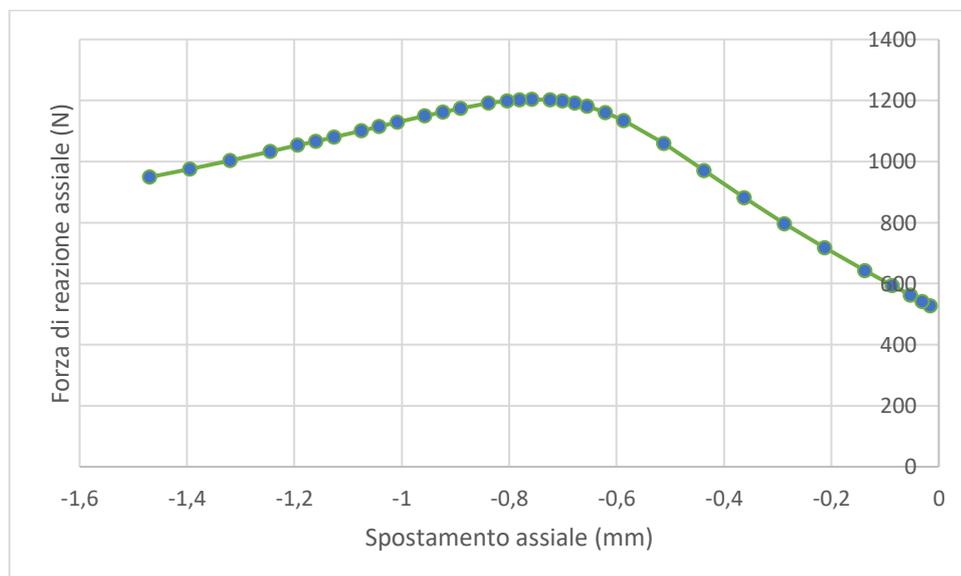


Figura 63: Andamento della forza di reazione assiale rispetto allo spostamento assiale con analisi FEM 2D assialsimmetrica

Concordemente alla teoria di instabilità, nel grafico è possibile visualizzare un punto di massimo, che corrisponde alla forza critica di buckling, la cui intensità è pari a 1203,1 N. Ad essa corrisponde la tensione critica di buckling:

$$\sigma_{cr,FEM} = 569,20 \text{ MPa}$$

Tale valore mostra uno scostamento rispetto al carico critico di buckling ottenuto sperimentalmente pari a +12%. Si riportano quindi in *Figura 64* i valori di carico critico di buckling ottenuti 1) sperimentalmente, 2) analiticamente e 3) numericamente.

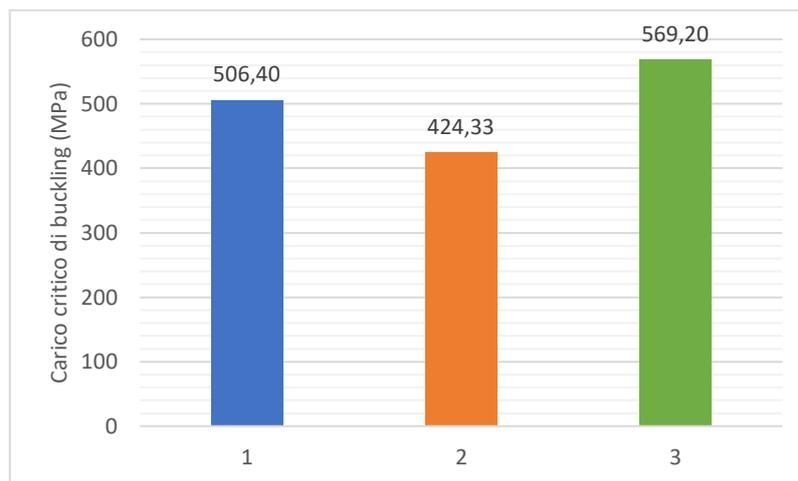


Figura 64: Carico critico di buckling ottenuto 1) sperimentalmente, 2) analiticamente e 3) numericamente

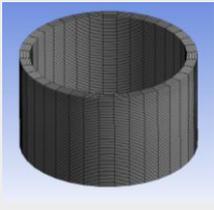
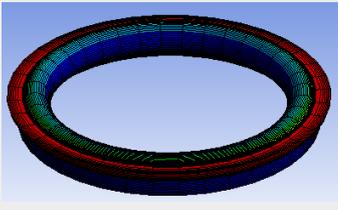
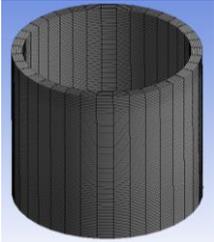
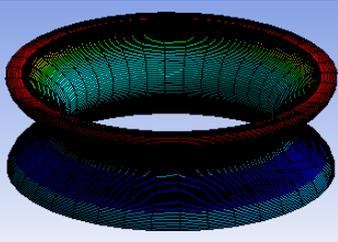
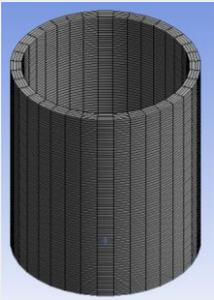
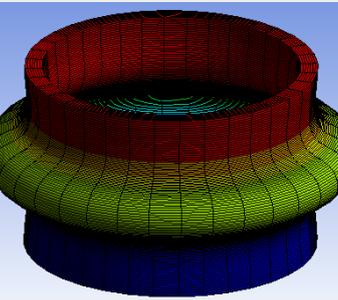
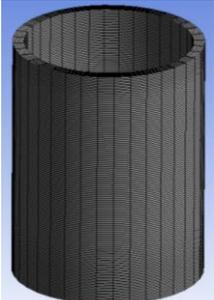
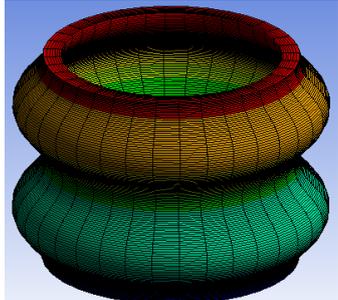
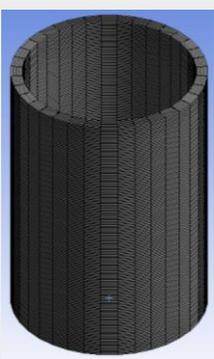
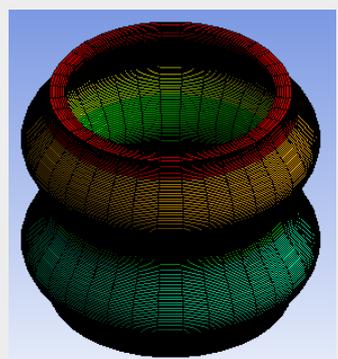
4.1.6 EFFETTO DELLA VARIAZIONE GEOMETRICA

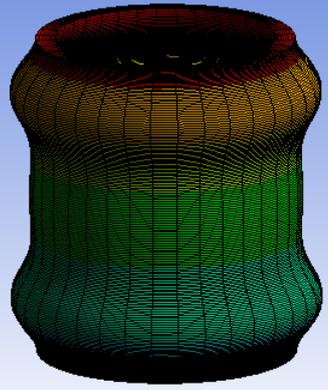
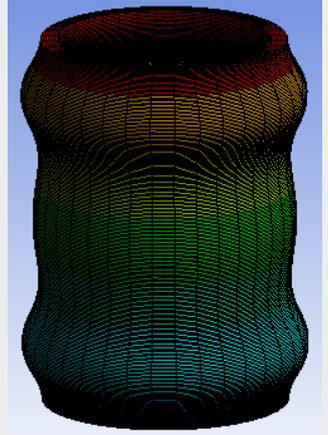
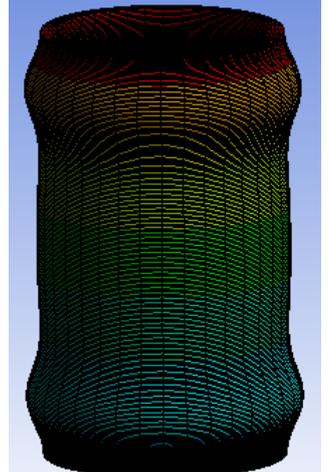
Secondo quanto detto a livello teorico, è noto che il fenomeno di buckling è fortemente influenzato dalle caratteristiche geometriche del componente cilindrico. Si analizzerà quindi l'impatto della variazione geometrica, ossia l'effetto che si ha sul carico critico di buckling variando il rapporto L/R e il rapporto R/t .

4.1.6.1 Effetto del rapporto L/R

Il rapporto L/R definisce la snellezza del cilindro, che induce una certa capacità portante del carico assiale. Si mostrerà cosa avviene nel carico critico di buckling e nella deformata finale, facendo variare il valore della lunghezza assiale del cilindro e mantenendo inalterato il raggio interno dello stesso.

Tabella 9: Variazione della deformata e del carico critico di buckling al variare della snellezza

L (mm)	L/R	GEOMETRIA INIZIALE	DEFORMATA	FORZA CRITICA (N)	CARICO CRITICO (MPa)
2	1,29			3775,5	1786,24
3	1,94			1609,8	761,62
3,98	2,57			1203,1	569,20
4,5	2,90			1069,5	491,80
5	3,23			1079,5	510,73

6	3,87			1099	519,95
7	4,52			1077,1	509,59
8	5,16			1093	517,11

Una variazione della snellezza del cilindro di partenza ha comportato una diversa deformazione a buckling, nonché un diverso valore di carico critico, il quale si mantiene comunque al di sopra della tensione di snervamento, comportando un buckling di tipo plastico. Per quanto concerne la configurazione deformativa del cilindro, si può notare che dal valore $L/R = 2,90$ in su la deformazione si presenta sempre con due zampe di elefante, ognuna su ogni estremità del cilindro, e con un solo aumento della distanza tra esse.

Per quanto riguarda invece il carico critico di buckling, si riportano l'andamento del carico critico di buckling (punti di massimo delle curve rappresentanti la forza di reazione in funzione dello spostamento) in funzione del rapporto L/R (Figura 65) e gli andamenti della forza di reazione assiale rispetto allo spostamento assiale determinati numericamente, ognuno associato a un valore di lunghezza iniziale del cilindro (Figura 66).

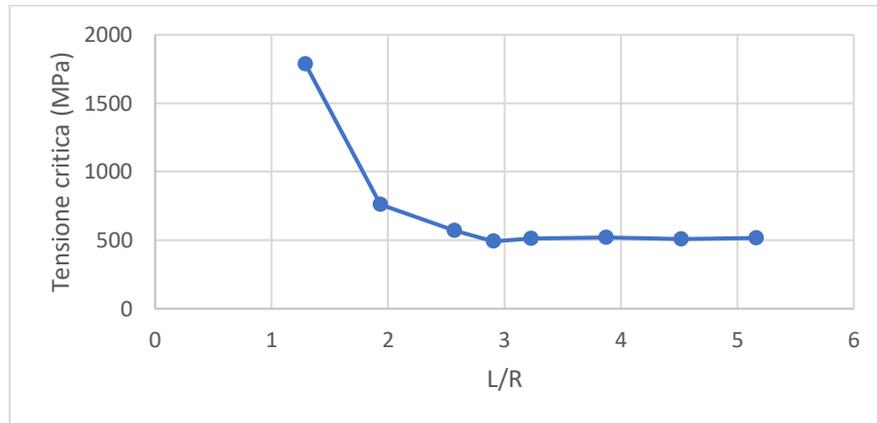


Figura 65: Andamento del carico critico di buckling in funzione del rapporto L/R

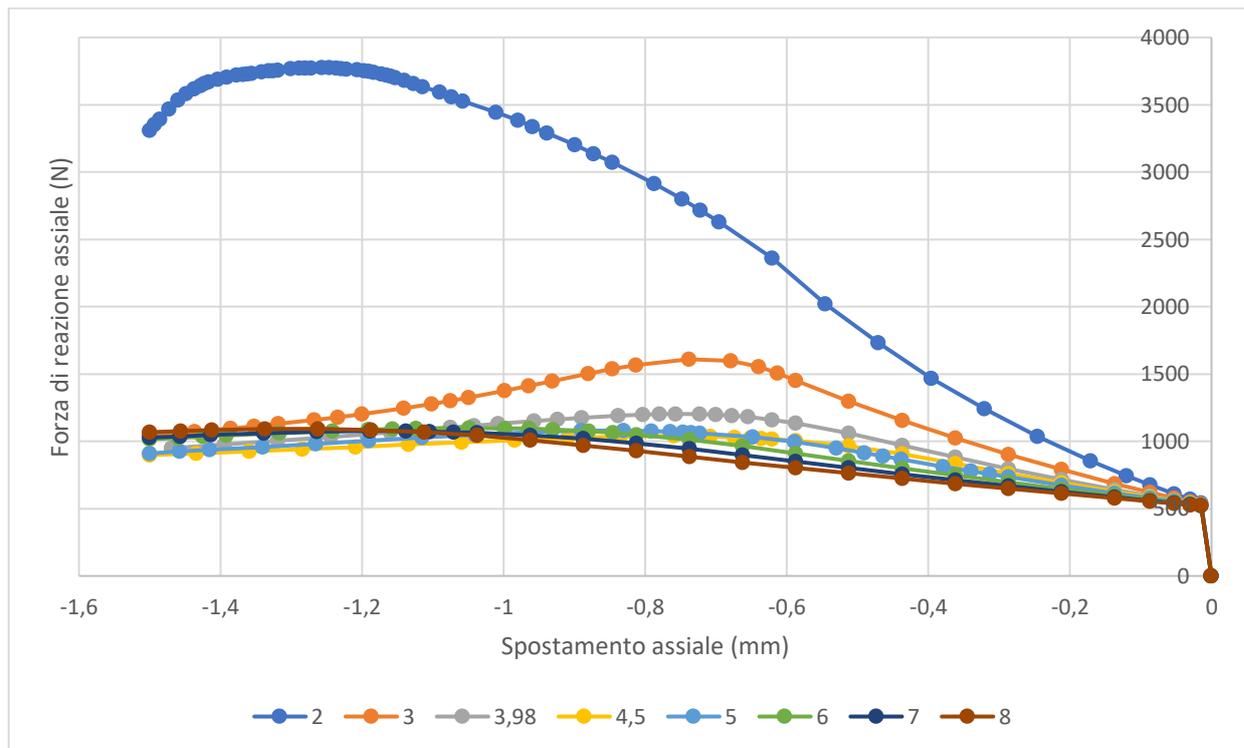


Figura 66: Curve forza di reazione assiale - spostamento assiale per diversi valori di lunghezza iniziale del cilindro

Si nota come, a diversa snellezza del cilindro, corrisponde genericamente diverso carico critico di buckling. In particolare, si evidenzia un maggior gradiente di variazione soprattutto per valori di

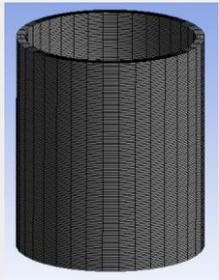
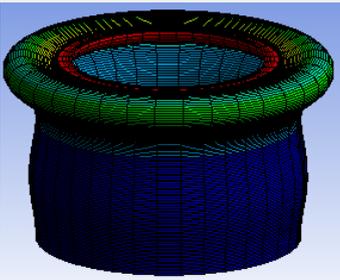
rapporto L/R compresi tra 1 e 3, mentre il carico critico di buckling rimane pressoché lo stesso per valori maggiori di 3. Questo conferma quanto detto in linea teorica, ossia che, nonostante la dipendenza della resistenza a buckling rispetto alla lunghezza del cilindro, esiste un intervallo di lunghezza tale per cui il carico critico difficilmente dipende dalla lunghezza del cilindro come se esso fosse di lunghezza semi-infinita.

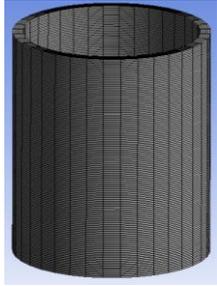
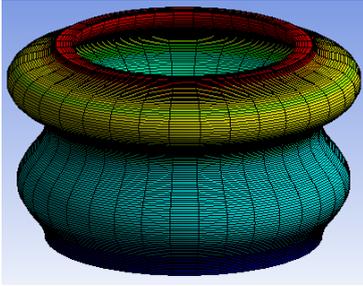
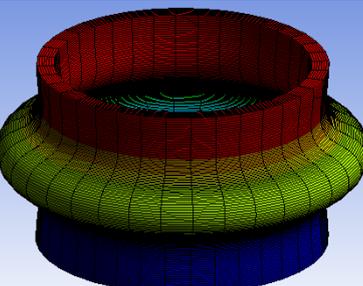
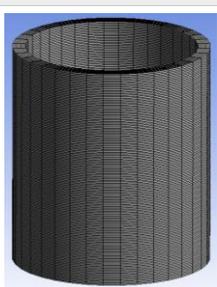
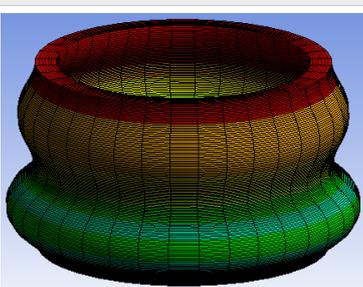
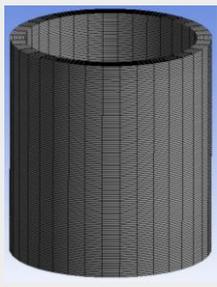
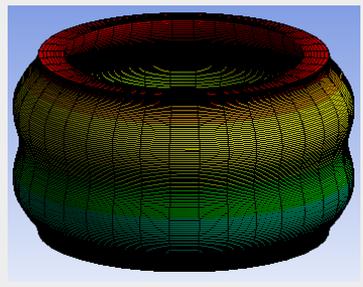
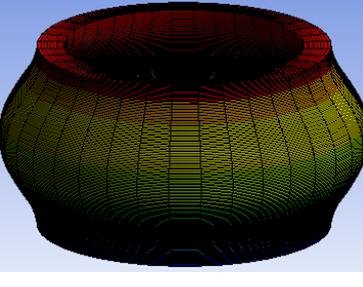
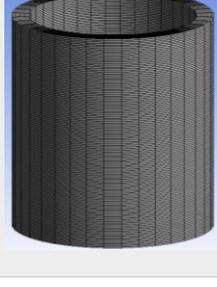
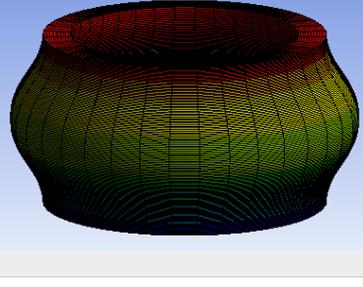
4.1.6.2 Effetto del rapporto R/t

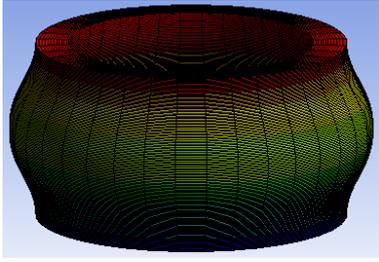
La variazione del rapporto R/t è ottenuta facendo variare lo spessore del cilindro e mantenendo costante il suo raggio interno. Si mantiene comunque il rapporto entro i limiti concernenti il modello cilindrico a parete spessa, cioè al di sotto del limite superiore del rapporto R/t pari a 10.

Il rapporto R/t relativo all’occhiello sigillo di garanzia di Tipo-9 è pari a 7,75, quindi pari a un valore molto vicino al valore discriminante che trasforma la parete del cilindro da spessa a sottile, pertanto la variazione del rapporto raggio – spessore è effettuata per la maggior parte aumentando lo spessore, ossia rendendo il cilindro più tozzo. Anche questa trasformazione geometrica comporta da un lato una variazione della deformata a buckling e dall’altro un’alterazione del carico critico. Pertanto, si associa, ad ogni valore di t , quindi ad ogni valore di R/t , la configurazione geometrica di partenza del cilindro, la configurazione deformativa finale e il relativo carico critico di buckling.

Tabella 10: Variazione della deformata e del carico critico di buckling al variare del rapporto R/t

t (mm)	R/t	GEOMETRIA INIZIALE	DEFORMATA	FORZA CRITICA (N)	CARICO CRITICO (MPa)
0,155	10			643,7	304,53

0,17	9,12			728,2	344,50
0,2	7,75			1203,1	569,20
0,22	7,05			1638,2	775,05
0,25	6,20			2402,3	1136,56
0,27	5,74			2363,1	1118,01
0,3	5,17			2745,7	1299,02

0,35	4,43			-	-
------	------	---	--	---	---

Anche qui è possibile notare come, a partire da un valore $R/t = 5,74$ a salire, si ha una stazionarietà della deformata, la quale si presenta con un gonfiamento della zona centrale del cilindro. In particolare, aumentando lo spessore del cilindro, questa deformata riduce la sua ampiezza, a testimonianza della maggiore capacità di carico che si ottiene con il rinforzo del cilindro in direzione radiale.

Dal punto di vista del carico di buckling, si nota che per un valore di $R/t = 4,43$ non è specificato il valore di carico critico di buckling, perché in realtà il componente non raggiunge una condizione di instabilità nella sua fase di compressione di 1,5 mm. Questo lo si può verificare dal grafico in *Figura 67*, in cui la curva non presenta un punto a tangente orizzontale, quale punto attribuibile al carico critico.

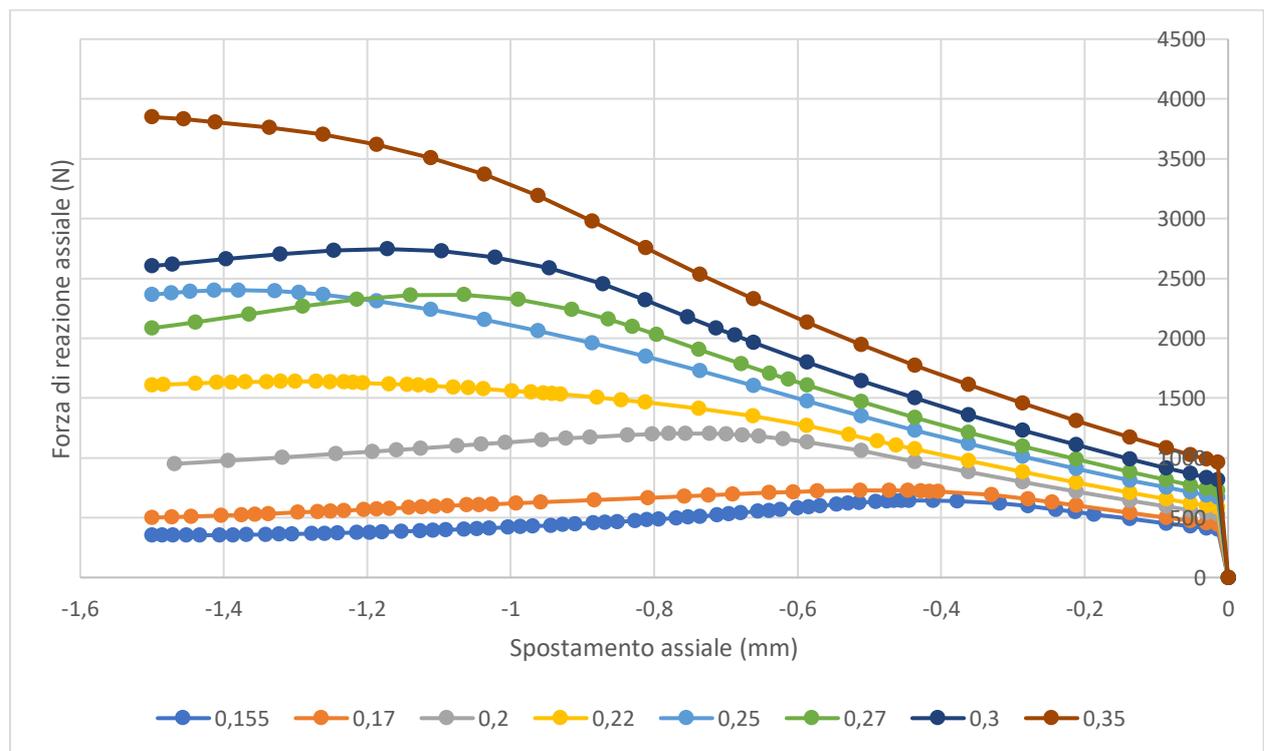


Figura 67: Curve forza di reazione assiale - spostamento assiale per diversi valori di spessore iniziale del cilindro

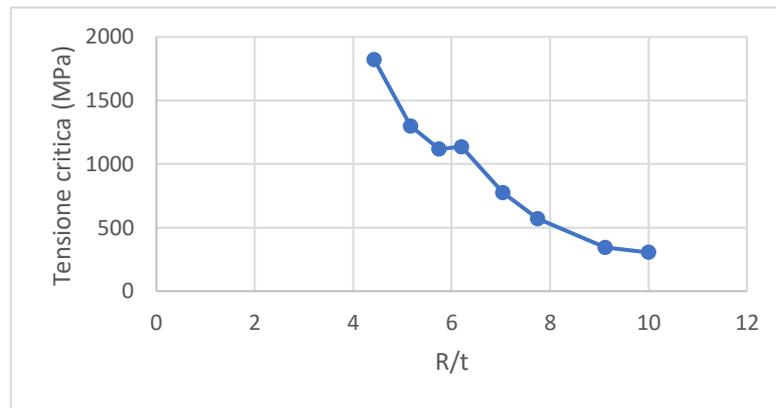


Figura 68: Andamento del carico critico di buckling in funzione del rapporto R/t

Si può affermare dalla *Figura 68* che, genericamente, un aumento dello spessore del cilindro, quindi una diminuzione del rapporto R/t , comporta un aumento della resistenza a buckling del cilindro, giustificata dal fatto che il cilindro diventa più tozzo. A valori di R/t alti, invece, si hanno carichi critici di buckling vicini alla tensione di snervamento e ciò conferma il fatto che, riducendo lo spessore, quindi entrando nella gamma dei cilindri a parete sottile, il buckling si verifica prima che il materiale entri all'interno del campo plastico, comportando un buckling di tipo elastico.

4.1.7 EFFETTO DELLE CONDIZIONI DI VINCOLO

Il fenomeno di buckling su cilindri a parete spessa esprime una dipendenza anche rispetto alle condizioni di vincolo intorno a cui deve lavorare. Pertanto, è qui analizzato il comportamento del componente cilindrico se sottoposto alla condizione di vincolo *clamped edges*, dove tutti gli spostamenti lineari e rotazionali delle due estremità del cilindro sono vincolati, eccetto che lo spostamento in direzione assiale al bordo superiore.

Un diversa condizione di vincolo provoca infatti una diversa deformata a buckling, nonché una variazione del carico critico di buckling. Mantenendo una meshatura la cui dimensione di ogni elemento è pari a $0,03\text{ mm}$ e considerando ancora, oltre che a uno schiacciamento pari a $1,5\text{ mm}$, due forze centripete, distribuita ognuna su un'estremità assiale del cilindro e avente intensità pari a $4,5\text{ N}$, il cilindro nella nuova configurazione di vincolo mostra la presenza di due zampe di elefante alle due estremità del cilindro (*Figura 69*), diversamente da quanto visto nel caso di cilindro sottoposto a un vincolo *free edges*, in cui era presenta una deformata a zampa di elefante in mezzeria della dimensione assiale del cilindro.

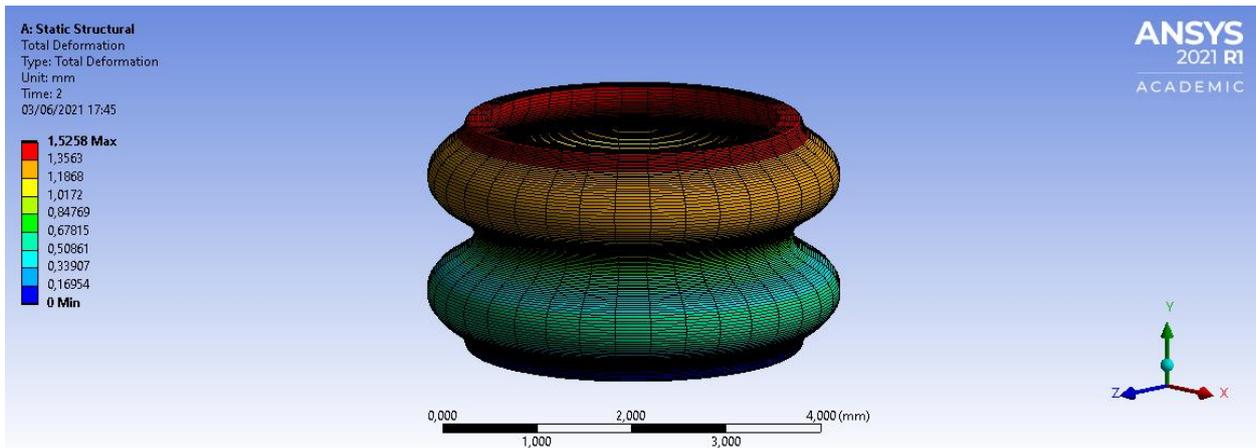


Figura 69: Deformata a buckling di cilindro in clampde edges – analisi 2D assialsimmetrica

La diversa condizione di vincolo provoca anche un cambiamento nella curva forza di reazione – spostamento assiale, dove infatti il punto di massimo corrispondente alla forza critica di buckling assume un valore più basso rispetto al caso studiato precedentemente, come mostrato in *Figura 70*: nel caso *clamped edges*, è stato trovato una forza critica pari a 837,14 N, a cui corrisponde una tensione critica di buckling pari a 396,06 MPa. Quest’ultimo valore si discosta dal carico critico precedentemente trovato di una quantità pari a -173,14 MPa (-30%)

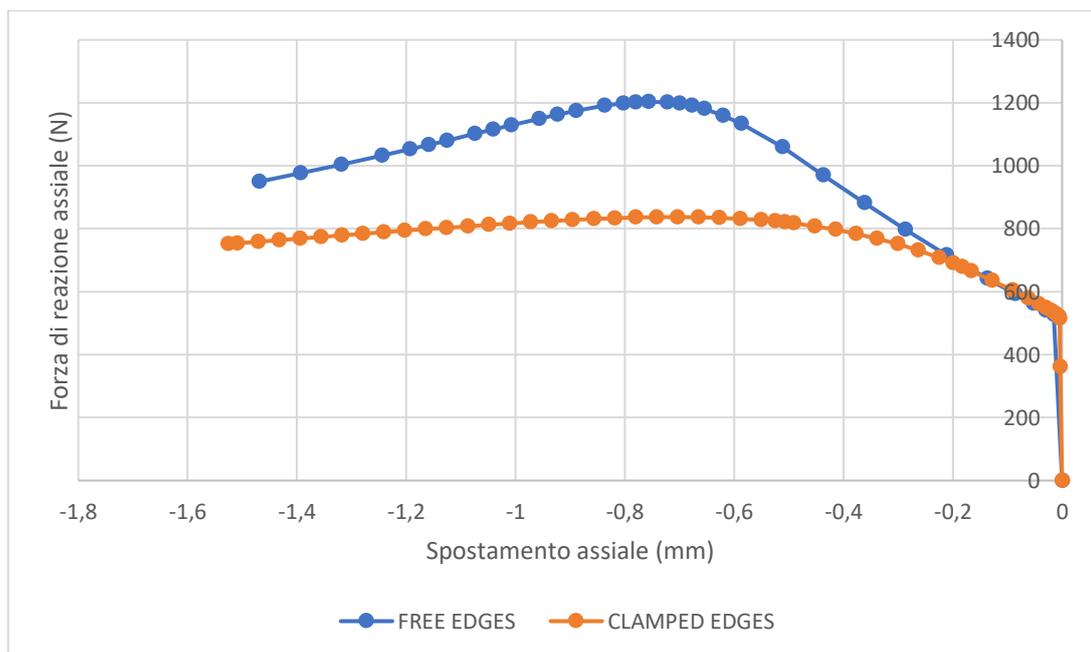


Figura 70: Confronto tra andamento forza di reazione - spostamento assiale nelle due condizioni di vincolo

La determinazione di un andamento forza di reazione – spostamento assiale più basso nel caso di *clamped edges* rispetto al caso *free edges*, porta a sostenere che nel secondo caso il cilindro presenta una maggiore resistenza all’instabilità plastica. Questo risultato può essere giustificato dal fatto che, nel caso di bordi liberi, l’estremità inferiore è libera di muoversi in direzione radiale, quindi il cilindro, prima di subire deformazione per buckling, mostra uno spostamento in direzione radiale: per vincere questa tendenza di “scivolamento”, è necessaria una maggiore forza per ottenere la deformazione. D’altro canto, una condizione di vincolo data dal caso *clamped edges* non permette di avere uno scivolamento del bordo inferiore in direzione radiale, quindi il vincolo, bloccando questo spostamento, favorisce la deformazione del cilindro, pertanto è più semplice ottenere il buckling.

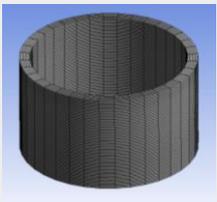
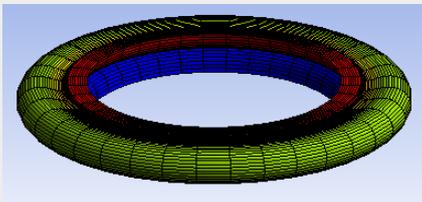
4.1.8 EFFETTO COMBINATO DI VARIAZIONE GEOMETRICA – VINCOLO

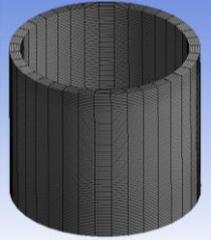
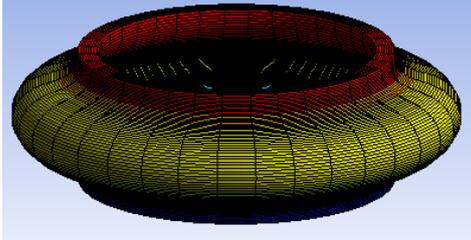
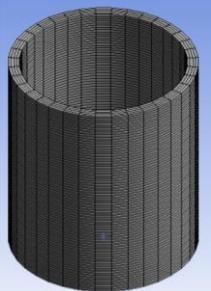
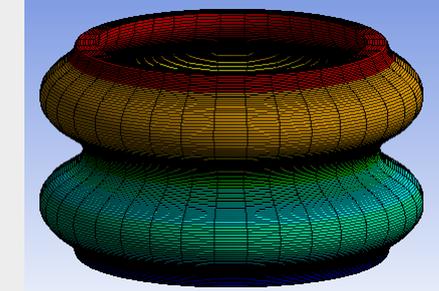
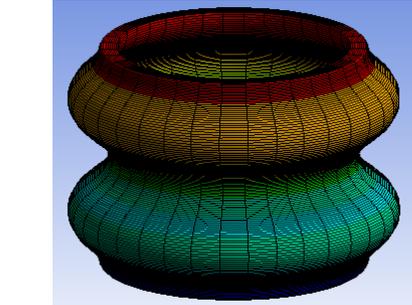
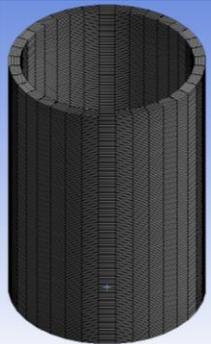
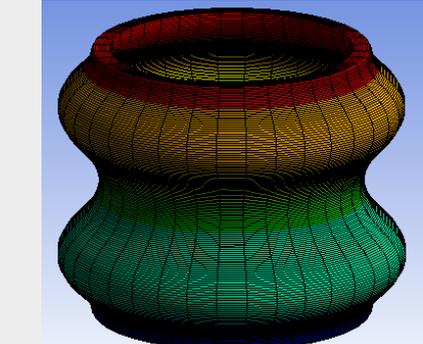
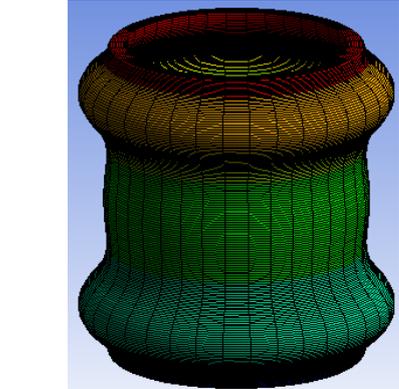
Si analizzerà qui l’effetto combinato della variazioni geometriche e delle condizioni di vincolo del cilindro, ossia il gradiente percentuale dato dal cambiamento di vincolo (da *free edges* a *clamped edges*) per ogni configurazione geometrica iniziale del cilindro. La variazione geometrica è determinata, anche in questa occasione di *clamped edges*, facendo prima variare il rapporto L/R mantenendo costante lo spessore del cilindro e facendo poi variare il rapporto R/t mantenendo costante la lunghezza del cilindro.

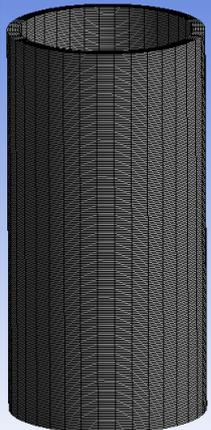
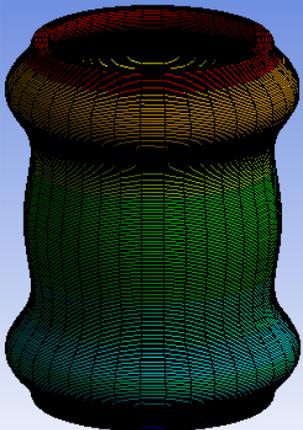
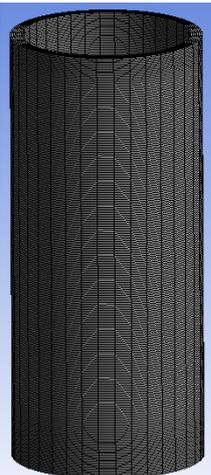
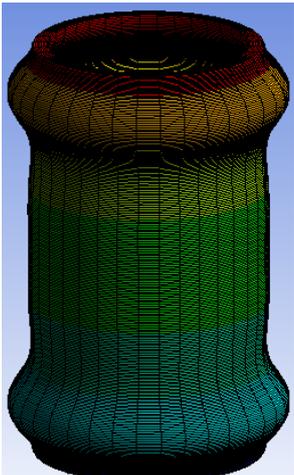
4.1.8.1 Effetto del rapporto L/R

Si analizza qui la variazione della deformata a buckling e del carico critico causata dalla variazione della snellezza in termini di L/R , considerando la nuova condizione di vincolo.

Tabella 11: Variazione della deformata e del carico critico di buckling al variare della snellezza nel caso *clamped edges*

L (mm)	L/R	GEOMETRIA INIZIALE	DEFORMATA	FORZA CRITICA (N)	CARICO CRITICO (MPa)
2	1,29			797,94	377,52

3	1,94			909,44	430,27
3,98	2,57			837,14	396,06
4,5	2,90			810,24	383,33
5	3,23			829,61	392,50
6	3,87			853,70	403,90

7	4,52			843,23	398,94
8	5,16			850,1	402,19

La deformata a buckling nel caso di cilindri sottoposti al vincolo *clamped edges* passa da una configurazione a una zampa di elefante in mezzera a una configurazione a due zampe di elefante nelle estremità del cilindro per un valore discriminante (tra quelli analizzati) di lunghezza pari a 3,98 mm.

Per quanto riguarda invece il carico critico di buckling, si riportano l'andamento del carico critico di buckling (punti di massimo delle curve rappresentanti la forza di reazione in funzione dello spostamento) in funzione del rapporto L/R (Figura 71), il quale si mostra all'incirca costante, e gli andamenti della forza di reazione assiale rispetto allo spostamento assiale determinati numericamente, ognuno associato a un valore di lunghezza iniziale del cilindro (Figura 72).

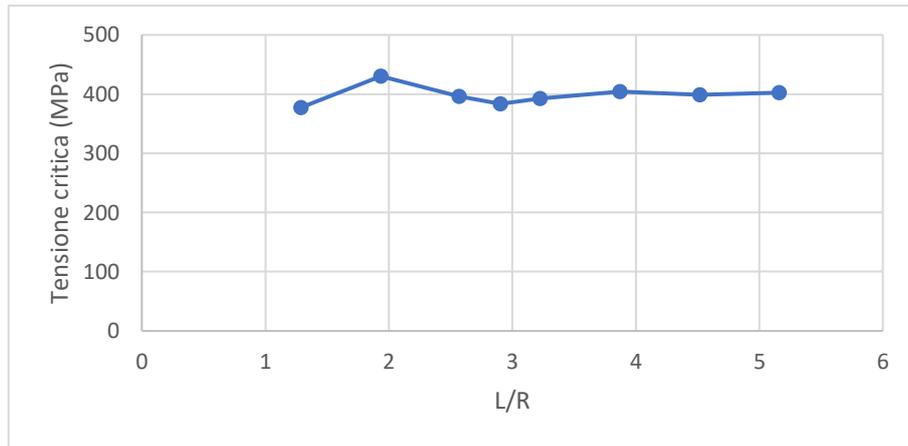


Figura 71: Andamento del carico critico di buckling in funzione del rapporto L/R nel caso clamped edges

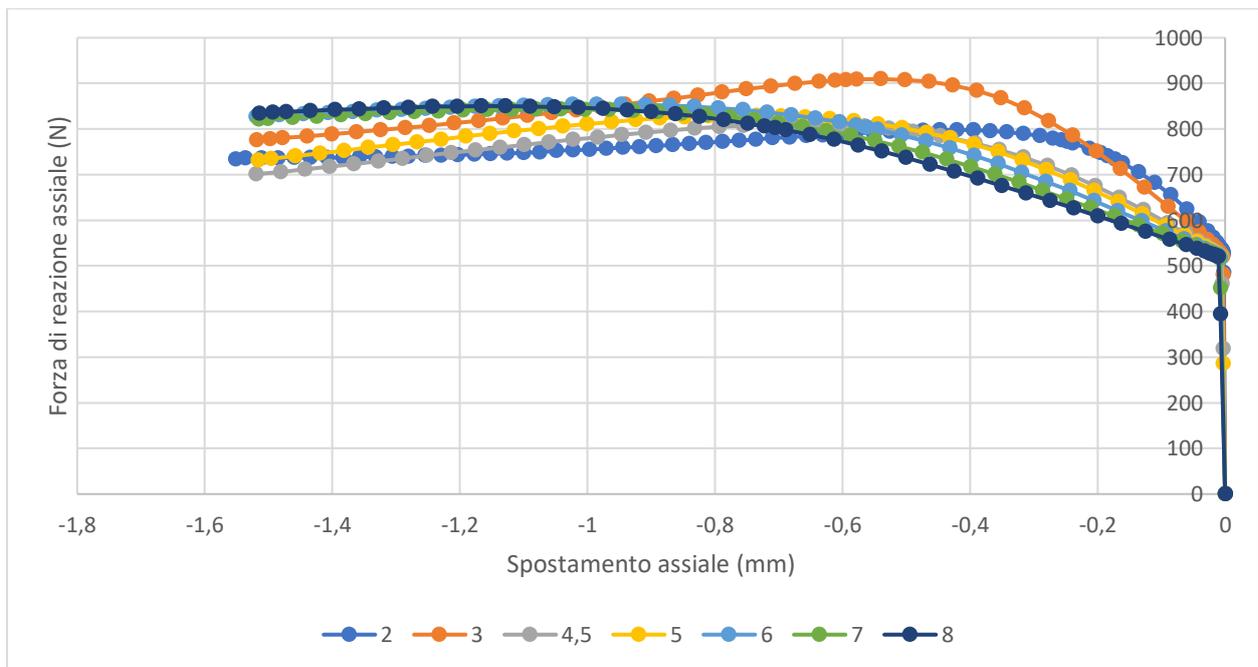


Figura 72: Curve forza di reazione assiale - spostamento assiale per diversi valori di lunghezza iniziale del cilindro nel caso clamped edges

È interessante adesso mettere a confronto i risultati trovati nelle due condizioni di vincolo, indicando con la lettera F la condizione di bordi liberi e con le lettere CL la condizione *clamped edges*. Si definiscono nella *Tabella 12* le variazioni percentuali della tensione critica.

Tabella 12: Variazioni percentuali della tensione critica rispetto alla condizione di bordi liberi

L (mm)	L/R	TENSIONE CRITICA_F (MPa)	TENSIONE CRITICA_CL (MPa)	Δ% (F-CL)
2	1,29	1786,24	377,52	-79%
3	1,94	761,62	430,27	-44%
3,98	2,57	569,20	396,06	-30%

4,5	2,90	491,80	383,33	-22%
5	3,23	510,73	392,50	-25%
6	3,87	519,95	403,90	-25%
7	4,52	509,59	398,94	-21%
8	5,16	517,11	402,19	-23%

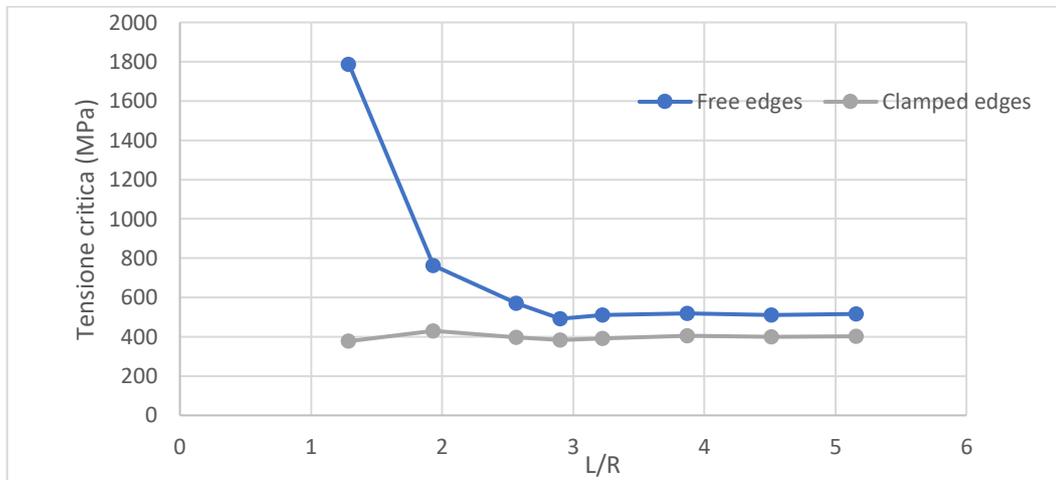


Figura 73: Andamento della tensione critica di buckling in funzione del rapporto L/R nei due casi di vincolo

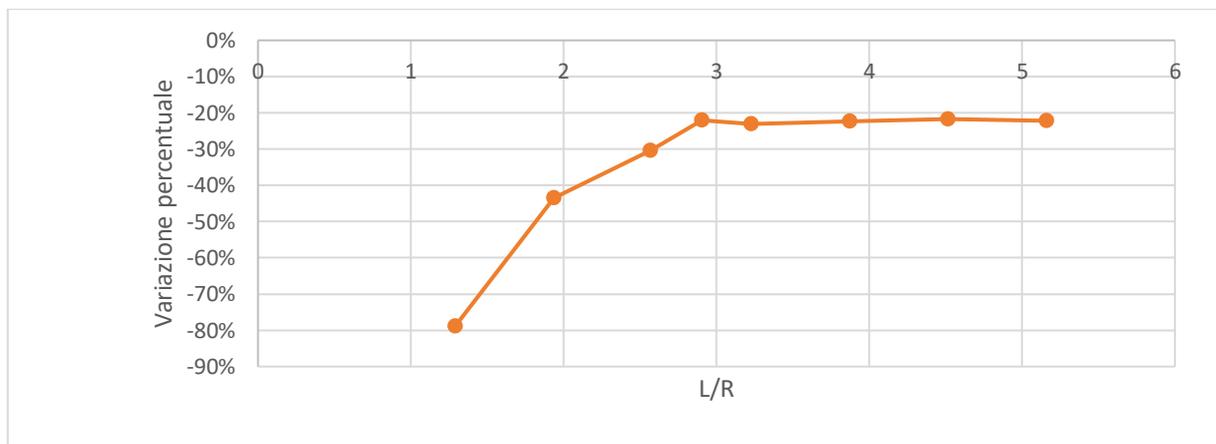


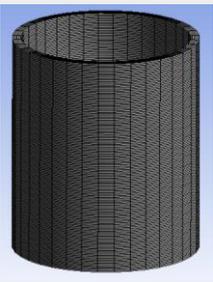
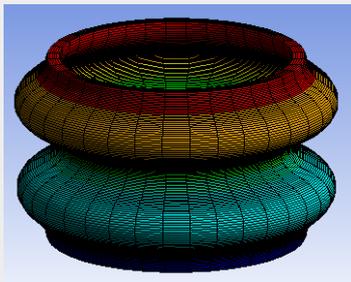
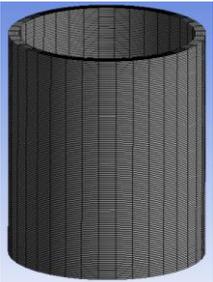
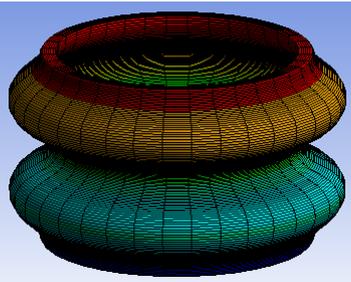
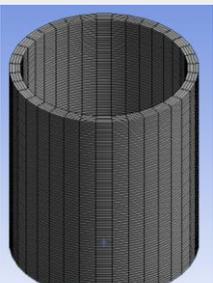
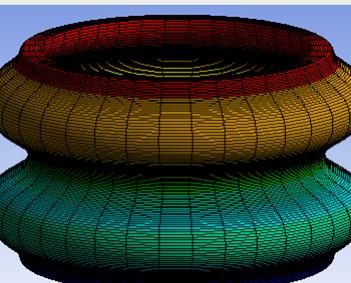
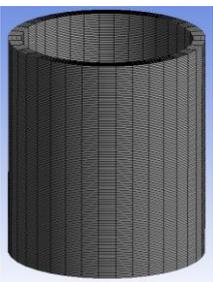
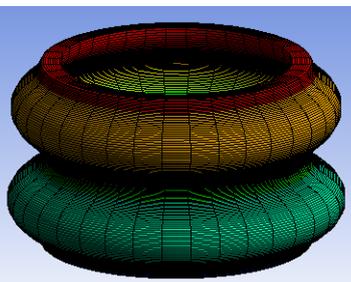
Figura 74: Andamento della variazione percentuale in funzione del rapporto L/R

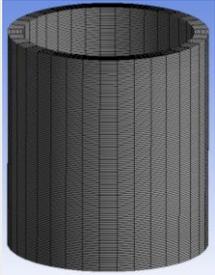
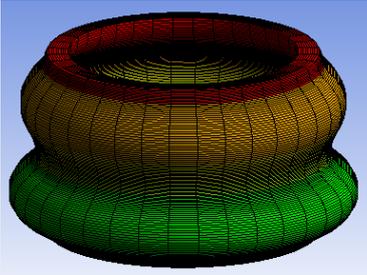
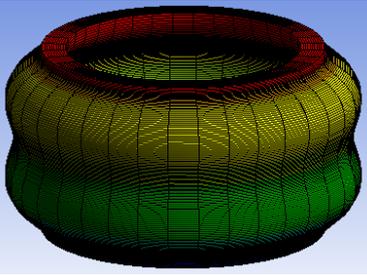
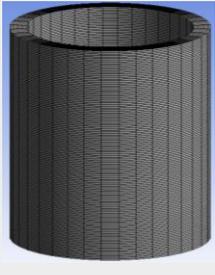
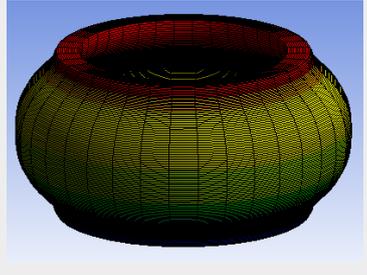
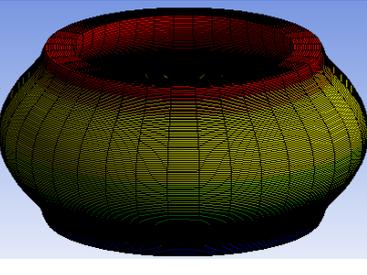
Si manifesta in ogni caso una tensione critica di buckling più bassa nel caso *clamped edges* rispetto al caso di bordi liberi. Dalla *Figura 74* si evidenzia inoltre un andamento decrescente in modulo della variazione percentuale della tensione critica di buckling, a partire da una variazione decisamente impattante per lunghezze piccole del cilindro, fino a giungere a un valore stazionario di circa il 25% per lunghezze più alte. Si comprende quindi che componenti cilindrici di lunghezza piccola cedono molto facilmente per buckling nel caso di bordi incastrati.

4.1.6.2 Effetto del rapporto R/t

Si analizza adesso l'effetto della variazione del rapporto R/t nella nuova condizione di vincolo, ottenuta facendo variare lo spessore del cilindro e mantenendo costante il suo raggio interno. Si mantiene comunque anche qui il rapporto entro i limiti concernenti il modello cilindrico a parete spessa, cioè al di sotto del limite superiore del rapporto R/t pari a 10.

Tabella 13: Variazione della deformata e del carico critico di buckling al variare del rapporto R/t

t (mm)	R/t	GEOMETRIA INIZIALE	DEFORMATA	FORZA CRITICA (N)	CARICO CRITICO (MPa)
0,155	10			529,26	250,40
0,17	9,12			614,48	290,72
0,2	7,75			837,14	396,06
0,22	7,05			1060	501,50

0,25	6,20			1620,3	766,58
0,27	5,74			2048,8	969,31
0,3	5,17			2105,4	996,09
0,35	4,43			2524,1	1194,18

La deformata a buckling nel caso di cilindri sottoposti al vincolo *clamped edges* passa da una configurazione a due zampe di elefante nelle estremità del cilindro a un gonfiamento centrale per un valore discriminante (tra quelli analizzati) di spessore pari a 0,27 mm.

Per quanto riguarda invece il carico critico di buckling, si riportano l'andamento del carico critico di buckling (punti di massimo delle curve rappresentanti la forza di reazione in funzione dello spostamento) in funzione del rapporto R/t (Figura 75), il quale si mostra decrescente, e gli andamenti della forza di reazione assiale rispetto allo spostamento assiale determinati numericamente, ognuno associato a un valore di lunghezza iniziale del cilindro (Figura 76).

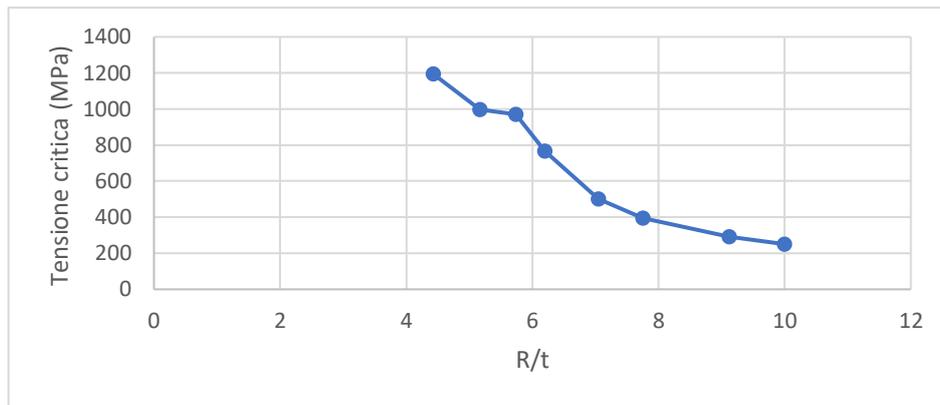


Figura 75: Andamento del carico critico di buckling in funzione del rapporto R/t nel caso clamped edges

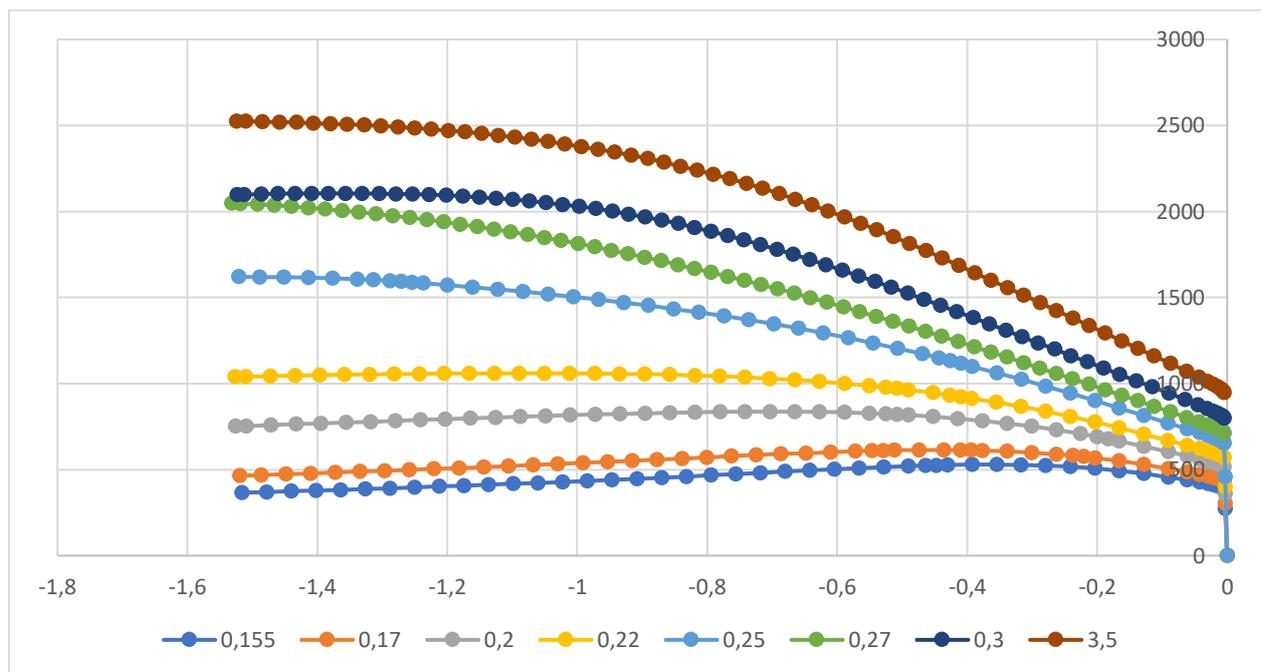


Figura 76: Curve forza di reazione assiale - spostamento assiale per diversi valori di spessore iniziale del cilindro nel caso clamped edges

Si nota dalle curve forza di reazione – spostamento assiale che in alcune di esse non si evidenzia una vero e proprio punto di massimo della curva, quindi non si potrebbe proprio parlare di carico critico di buckling. Nonostante questo, è possibile vedere che queste curve mostrano un andamento tendente a un proprio asintoto orizzontale e, essendo il punto di massimo di una curva quel punto di tangente orizzontale, è lecito considerare come forza critica di buckling il valore di forza corrispondente all’ultimo punto considerato.

Un altro aspetto da considerare è che per valori grandi di R/t , quindi per i cilindri con spessore tendente al sottile, il carico critico di buckling si avvicina alla tensione di snervamento. È possibile, infatti, vedere che per $t = 0,155 \text{ mm}$ si ha un carico critico di buckling pari a $250,40 \text{ MPa}$ con

una differenza quasi nulla rispetto alla tensione di snervamento: ciò comporterebbe una presenza trascurabile delle deformazioni plastiche pre-critiche finite e, diminuendo anche di poco lo spessore del cilindro, si cadrebbe nel caso di buckling nel campo elastico.

È interessante anche qui mettere a confronto i risultati trovati nelle due condizioni di vincolo, indicando con la lettera F la condizione di bordi liberi e con le lettere CL la condizione *clamped edges*. Si definiscono nella *Tabella 14* le variazioni percentuali della tensione critica, non considerando il caso di $t = 0,35 \text{ mm}$, per cui non è possibile ricavare la tensione critica di buckling nel caso di bordi liberi.

Tabella 14: Variazioni percentuali della tensione critica rispetto alla condizione di bordi liberi

t (mm)	R/t	TENSIONE CRITICA_F (MPa)	TENSIONE CRITICA_CL (MPa)	Δ% (F-CL)
0,155	10	304,53	250,40	-18%
0,17	9,12	344,50	290,72	-16%
0,2	7,75	569,20	396,06	-30%
0,22	7,05	775,05	501,50	-35%
0,25	6,20	1136,56	766,58	-33%
0,27	5,74	1118,01	969,31	-13%
0,3	5,17	1299,02	996,09	-23%

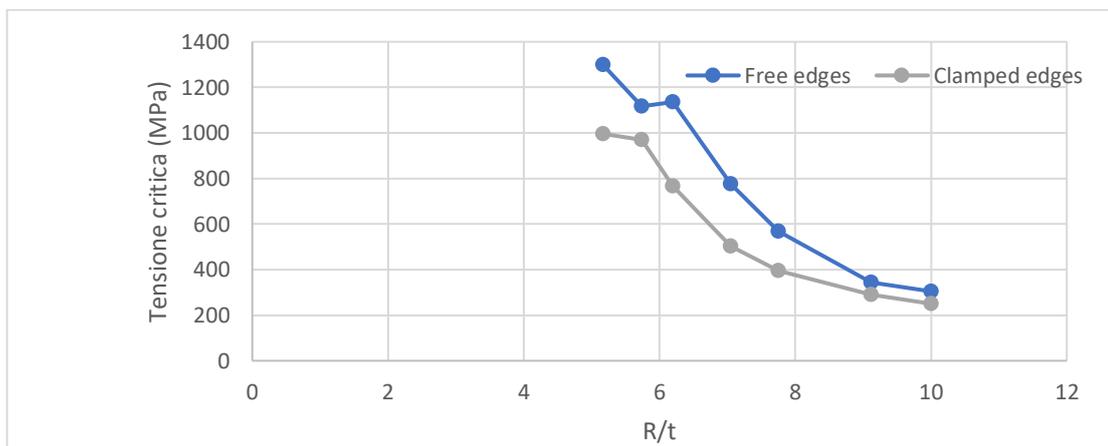


Figura 77: Andamento della tensione critica di buckling in funzione del rapporto R/t nei due casi di vincolo

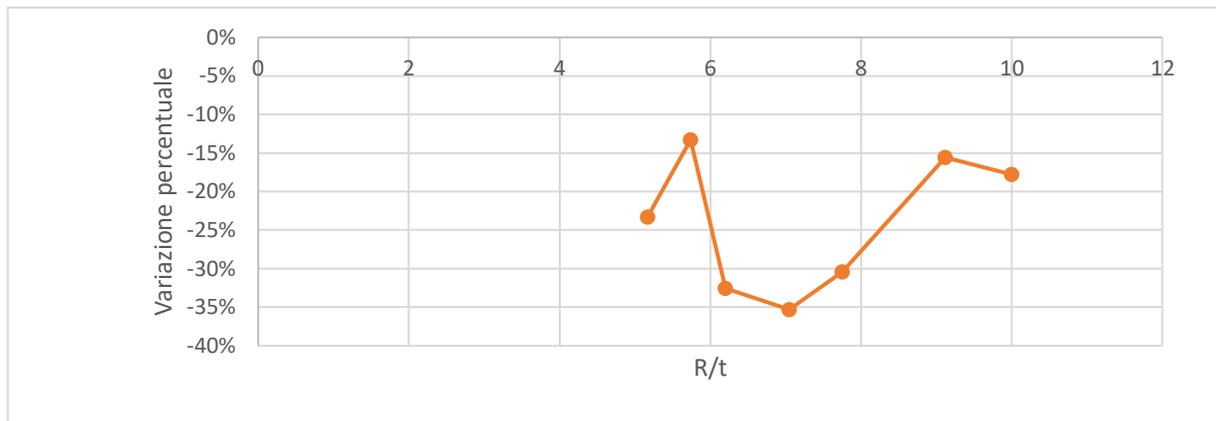


Figura 78: Andamento della variazione percentuale in funzione del rapporto R/t

Si nota nella *Figura 78* un andamento irregolare della variazione percentuale del carico critico di buckling, con un valore massimo (in modulo) per $t = 0,22$ e con un valore minimo per $t = 0,27$ mm, quindi per $R/t = 5,74$, il quale corrisponde, come già visto, al cambiamento deformativo del cilindro.

4.2 ANALISI TRIDIMENSIONALE

Una certa percentuale di occhielli sottoposti al processo di installazione mostra una deformazione a buckling con direzione obliqua e non perpendicolare rispetto all'asse dell'occhiello stesso, pertanto, non essendo mantenuta l'assialsimmetria, non è possibile in questo caso effettuare un'analisi 2D assialsimmetrica.

Mantenendo le forze e la meshatura dell'analisi 2D della sezione 4.1 ed estendo il vincolo alla base inferiore del cilindro da una configurazione bidimensionale ad una tridimensionale, in questa sezione si vuole analizzare il fenomeno di buckling visto prima attraverso un'analisi tridimensionale, per comprendere quali sono le differenze tra l'analisi 2D assialsimmetrica e l'analisi tridimensionale sia dal punto di vista deformativo sia dal punto di vista computazionale.

4.2.1 ELEMENTO DELLA MESH

Dato il comportamento a buckling da analizzare, è stato utilizzato come elemento della mesh del modello numerico l'elemento SOLID186 (*Figura 51*), il quale è un elemento 3D a 20 nodi che esibisce un comportamento a spostamento quadratico. L'elemento in particolare ha tre gradi di

libertà per nodo, ossia traslazioni nelle tre direzioni cartesiane e presenta diverse proprietà, tra cui plasticità, iper-plasticità, creep e capacità di ampie deformazioni.

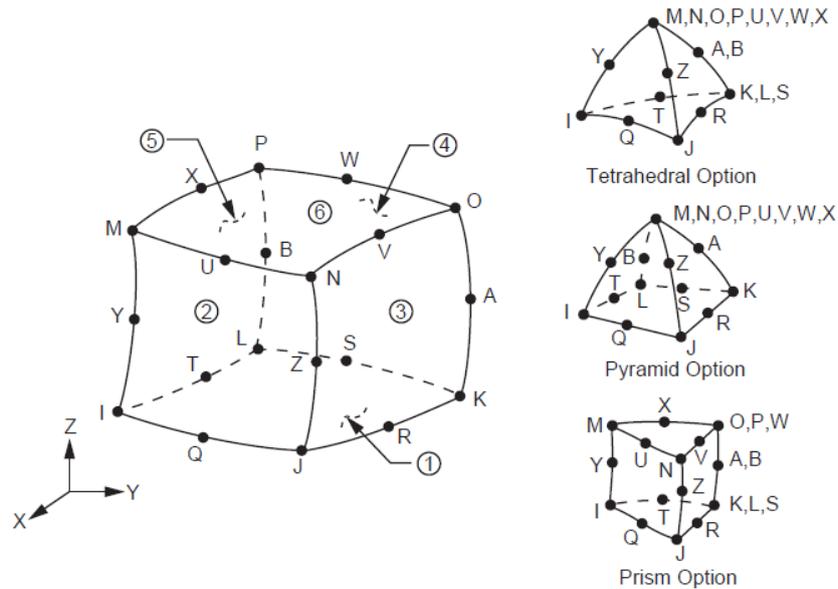


Figura 79: Geometria dell'elemento SOLID186 [19]

4.2.2 RISULTATI

Numericamente, nel processo di deformazione del cilindro, si ottiene la curva forza di reazione – spostamento assiale mostrata in *Figura 80*.

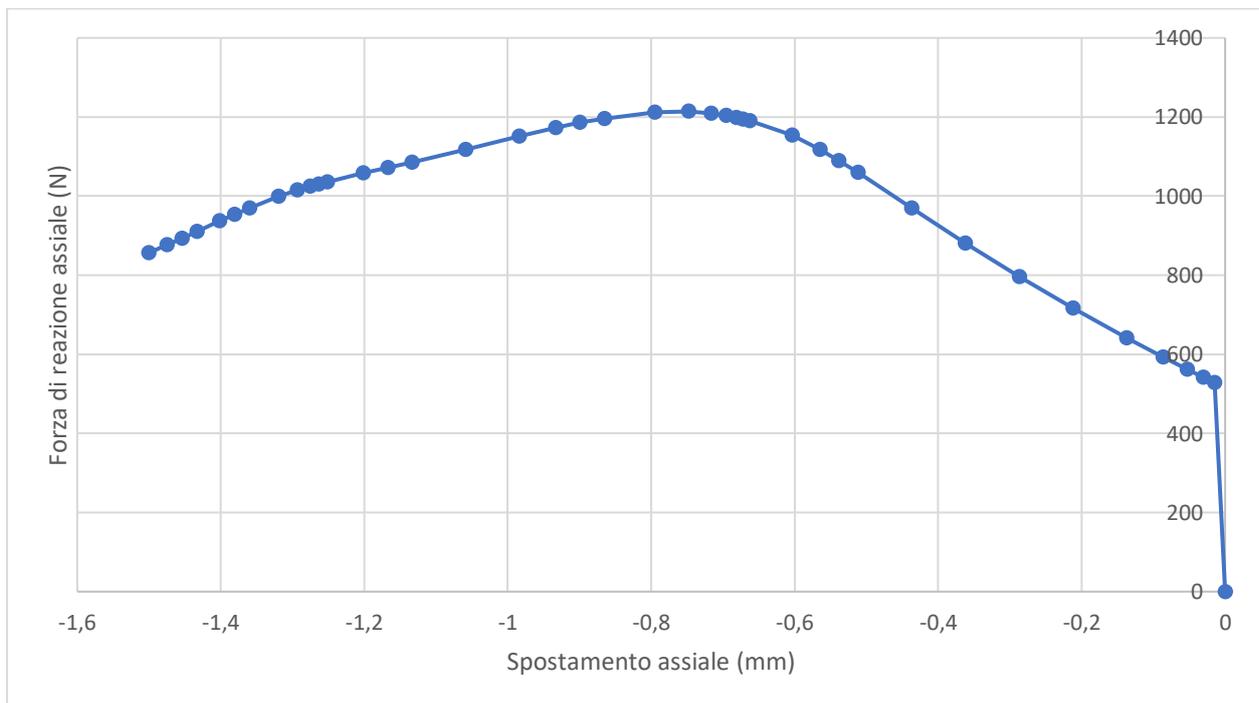


Figura 80: Andamento della forza di reazione assiale rispetto allo spostamento assiale - analisi FEM 3D

Concordemente alla teoria di instabilità, nel grafico è possibile visualizzare un punto di massimo, che corrisponde alla forza critica di buckling, la cui intensità è pari a 1213,9 N. Ad essa corrisponde la tensione critica di buckling:

$$\sigma_{cr,FEM} = 574,31MPa$$

Tale valore mostra uno scostamento rispetto al carico critico di buckling ottenuto sperimentalmente pari a +13%, quindi all'incirca uguale rispetto a quanto è stato ottenuto tramite l'analisi 2D assialsimmetrica. Dal punto di vista computazionale, quindi, è lecito analizzare il fenomeno di buckling attraverso un'analisi 2D assialsimmetrica.

Dal punto di vista deformativo, si ottiene quanto riportato nella *Figura 81*, in cui è possibile notare che la base superiore del cilindro, durante la fase di compressione, subisce una deformazione che determina in essa una forma ellittica. Inoltre, la deformazione a buckling, sempre a zampa di elefante in mezzeria del cilindro, mostra una leggera inclinazione rispetto alla configurazione deformativa perpendicolare all'asse del cilindro, ma non concorde a quanto visto sperimentalmente per quanto concerne la deformazione a buckling obliqua.

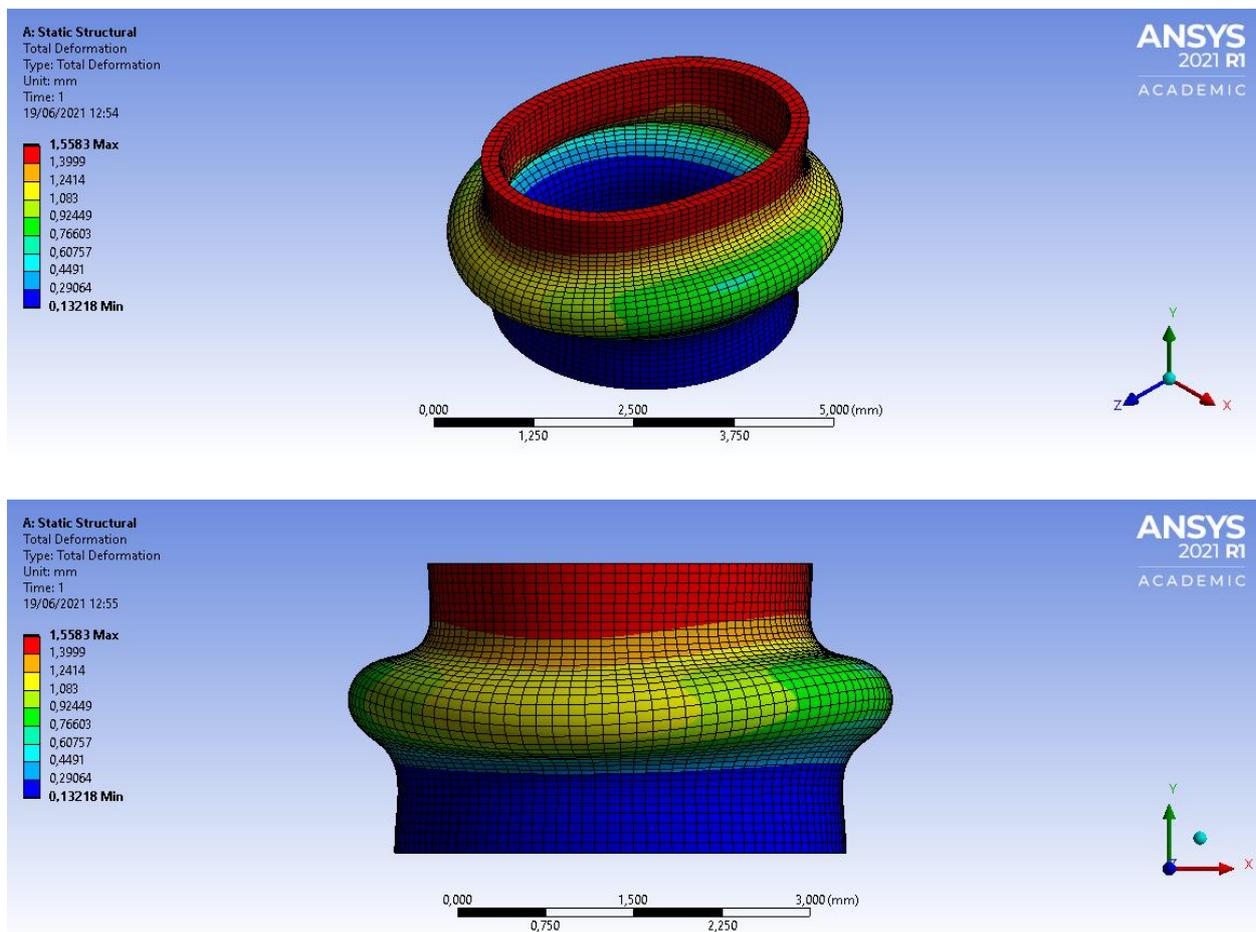


Figura 81: Deformazione totale del cilindro sotto compressione assiale – analisi 3D

Pertanto, l'analisi 3D permette di comprendere che la deformazione obliqua a buckling, che si verifica in una certa percentuale degli occhielli durante il loro processo di deformazione compressiva, è determinata da altri fattori che in questa sezione di analisi non sono stati considerati. Tale caratteristica ha bisogno di maggiore attenzione.

CONCLUSIONI

Nel presente documento, è stata effettuata un'analisi del buckling plastico di un componente cilindrico a parete spessa sottoposto a carico assiale, in relazione a quanto avviene nell'occhiello sigillo di garanzia di Tipo-9 quando sottoposto a un processo di installazione caratterizzato da una velocità alta. La consapevolezza di trattare un cilindro non a parete sottile è stata indispensabile per comprendere il motivo per il quale sperimentalmente il carico critico di buckling si discosta di molto dal carico critico di buckling calcolato analiticamente dalla formula della teoria classica dell'elasticità. È stato quindi analizzato, dopo aver espresso a livello teorico il fenomeno di buckling sia in campo elastico sia in campo plastico e le caratteristiche dell'occhiello, sia dal punto di vista geometrico e materiale sia dal punto di vista applicativo, il comportamento a buckling di un cilindro geometricamente perfetto, caratteristica giustificata dal fatto che i cilindri a parete spessa non sono sensibili alle imperfezioni geometriche, come avviene invece nel caso di cilindri a parete sottile.

In maniera concorde a quanto visualizzato nel processo di installazione dell'occhiello, si è considerato un modello matematico adeguato a calcolare il carico critico di buckling nel caso di cilindri a parete spessa, i cui estremi sono mantenuti liberi, ossia sottoposti a un valore definito di spostamento solo in direzione assiale. È stato visto come il modello matematico utilizzato, che tiene conto delle non-linearità geometriche e delle deformazioni pre-critiche finite, tipiche del fenomeno di buckling in esame, permette di giungere a un carico critico di buckling, il cui valore è dello stesso ordine di grandezza rispetto a quanto ottenuto sperimentalmente.

Di conseguenza, è stata effettuata anche un'analisi numerica del fenomeno, andando a perturbare il componente cilindrico attraverso due forze laterali centripete, ognuna distribuita su un'estremità assiale del cilindro, responsabili dell'innescio del buckling (che altrimenti non si sarebbe verificato vista l'assenza delle imperfezioni geometriche). È stato possibile vedere come il valore ottenuto numericamente attraverso il programma ANSYS si discosta solo di +12% dal valore del caso sperimentale, a conferma dell'esattezza del modello utilizzato. Di fronte a ciò, è stata poi posta l'attenzione sull'effetto della variazione geometrica e/o della condizione di vincolo, per evidenziare il cambiamento della deformazione a buckling e del valore di carico critico: aumentando il numero di gradi di libertà vincolati, si è riscontrato un abbassamento del carico critico di buckling, che sottolinea una minore resistenza a buckling. Per tale motivo, si è cercato di comprendere su quali rapporto L/R e R/t si evidenzia una minore differenza di carico critico.

Infine, effettuando un'analisi 3D al fenomeno di buckling, si è potuto concludere che, dal punto di vista computazionale, il valore trovato è molto simile rispetto a quanto trovato nell'analisi 2D assialsimmetrica quindi, per minimizzare i tempi di calcolo, è utile usare un approccio assialsimmetrico, mentre dal punto di vista deformativo, si ottiene una deformata a buckling caratterizzata da una leggera inclinazione (quindi non perfettamente perpendicolare all'asse del cilindro) che però non riesce a tenere conto dell'inclinazione impattante visualizzata in alcuni occhiali, pertanto ci saranno altri fattori che non sono presenti nell'analisi effettuata nel presente documento e di cui è necessaria una maggiore attenzione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J.P. Magrinho, G. Centeno, M.B. Silva, C. Vallellano, P.A.F. Martins, *On the formability limits of thin-walled tube inversion using different die fillet radii*, Thin-Walled Structures 144 (2019) 106328 <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106328>
- [2] S. Al-Hassani, W. Johnson e W. Lowe, *Characteristics of inversion tube under axial loads*, Journal Mechanical Engineering Science, vol. 14, n. 6, pp. 370-381, 1972
- [3] A. Pelissero, D. Maffiodo, R. Sesana, *Modellazione e progettazione di un meccanismo per occhiellatrice industriale automatica*, Tesi di Laurea Magistrale, Politecnico di Torino, A.A. 2017/2018
- [4] J. Legendre, P. Le Grogneq, C. Doudard, S. Moyne, *Analytical, numerical and experimental study of the plastic buckling behaviour of thick cylindrical tubes under axial compression*, International Journal of Mechanical Sciences 156 (2019) 494-505 <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.03.002>
- [5] S.C. Batterman, *Free-edges plastic buckling of axially compressed cylindrical shells*, Journal Appl Mech 1968; 35:73-9
- [6] F. Alhussainy, M.N. Sheikh, M. N.S. Hadi, *Behaviour of Small Diameter Steel Tubes Under Axial Compression*, Structure 11 (2017) 155-163 <https://dx.doi.org/10.1016/j.istruc.2017.05.006>
- [7] N. Augenti, *Lezioni di stabilità delle strutture*, 1993
- [8] J. Rösler, H. Harders, M. Bäker, *Mechanical Behaviour of Engineering Materials*, Springer-Verlang Berlin Heidelberg 2007
- [9] P.S. Harvey Jr., T.M.N. Cain, *Buckling of elastic columns with initial imperfections and load eccentricity*, Structures 23 (2020) 660-664 <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2019.09.021>
- [10] NASA SP-8007, *Buckling of thin-walled circular cylinders*, NASA space vehicle design criteria, 1968
- [11] H.N.R. Wagner, C. Hühne, M. Janssen, *Buckling of cylindrical shells under axial compression with loading imperfections: An experimental and numerical campaign on low knockdown factors*, Thin-Walled Structures 151 (2020) 106764

- [12] R. M. J. Groh and A. Pirrera, *On the role of localizations in buckling of axially compressed cylinders*, Proc. R. Soc. A 475 (2019): 2019006
- [13] A. Evkin, O. Lykhachova, *Energy barrier method for estimation of design buckling load of axially compressed elasto-plastic cylindrical shells*, Thin-Walled Structures 161 (2021) 107454 <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107454>
- [14] J. Marsolek, H.-G. Reimerdes, *Energy absorption of metallical cylindrical shells with induced non-axisymmetric folding patterns*, International Journal of Impact Engineering 30 (2004) 1209-1223
- [15] O. Lykhachova, A. Evkin, *Effect of the plasticity in the concept of local buckling of axially compressed cylindrical shells*, Thin-Walled Structures 155 (2020) 106965 <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.106965>
- [16] A. Gugliotta, *Elementi finiti*, Politecnico di Torino (2002)
- [17] Y. Goto, C. Zhang, Q. Wang, M. Obata, *A rigorous method for the analysis of localization of axisymmetric buckling patterns in thick cylindrical shells*, Thin-Walled Structures 31 (1998) 73-88
- [18] A. Corbisiero, R. Sesana, *Comportamento a compressione di borchie metalliche*, Tesi di Laurea, Politecnico di Torino, A.A. 2018/2019
- [19] ANSYS, *ANSYS Mechanical APDL Element Reference*, 2011

SITOGRAFIA

- [I] https://cdm.ing.unimo.it/.mediawiki/index.php/Teoria_Instabilit%C3%A0
- [II] https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_critical_load
- [III] <https://www.semanticscholar.org/paper/Practical-methods-for-critical-load-determination-Fern%C3%A1ndez/36f9ced5c52155b652f85fadf0cf6c0db7e1a159>
- [IV] <https://www.moromin.it/it/prodotti/gamma-prodotti/occhielli/occhiello-unificato/occhiello-unificato>