Politecnico di Torino

Corso di laurea magistrale in ingegneria meccanica

Tesi di laurea di II livello

Anno accademico 2020/2021

Luglio 2021

Sviluppo di una metodologia di taratura di trasduttori multicomponente tramite piani inclinati

Relatore
Prof. Genta Gianfranco

Correlatori
Dott. Germak Alessandro
Dott. Prato Andrea

Studente
s274464 Borgiattino Davide

Prefazione

Il presente documento di tesi raccoglie l'attività di alcuni mesi passati presso l'INRiM a lavorare sui trasduttori multicomponente, assieme al Dott. Andrea Prato. Lo stato dell'arte a riguardo è piuttosto acerbo e sono quindi stati necessari diversi tentativi, alcuni più corretti di altri, sia per la metodologia di misura sia per la successiva analisi dei dati.
Non potendo narrare l'intero percorso, per quanto interessante, vorrei comunque presentarne gli argomenti principali nell'ordine cronologico con cui si sono succeduti nella realtà, in modo che siano chiari i motivi che ci hanno portato a compiere le scelte che di seguito verranno presentate.

Abstract

Trasduttori multicomponente per la misura di forze e momenti sono sempre più diffusi nel comparto industriale di oggi e soprattutto lo saranno in quello di domani. Come qualsiasi altro sensore, necessitano di una procedura di taratura, che sia riferibile e fornisca i valori di incertezza da associare alle misure che verranno effettuate. Il presente lavoro si propone di offrire un esempio a riguardo, sia per quanto concerne l'attività sperimentale vera e propria, vale a dire definizione del piano sperimentale ed esecuzione delle prove, sia per la successiva fase di analisi e rielaborazione dei dati, esponendo e utilizzando due diverse metodologie di propagazione dell'incertezza. Il sistema adottato per la generazione delle diverse componenti di forza e momento prevede l'utilizzo di una macchina campione di forza a pesi diretti, presente presso il reparto forze e vibrazioni INRiM (Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica). I risultati finali, riferiti ad un trasduttore multicomponente con capacità di carico pari a 20000 N (F_x), 20000 N (F_y), 100000 N (F_z), 2000 N (M_x), 2000 N (M_y), 1500 N (M_z), attestano dei livelli di incertezza intorno allo 0,1% per F_z e intorno al 10% per le altre componenti. Non sono valori eccezionali ma più che accettabili se si considerano i costi ridotti e la facilità di applicazione della metodologia di taratura utilizzata.

Glossario

Simbolo	Descrizione
F	Forza perpendicolare al terrreno generata dalla macchina a pesi diretti campione
F_x	Forza trasversale diretta lungo l'asse x
F_y	Forza trasversale diretta lungo l'asse y
F_z	Forza verticale diretta lungo l'asse z
M_x	Momento flettente diretto lungo l'asse x (regola della vite)
M_y	Momento flettente diretto lungo l'asse y (regola della vite)
M_z	Momento torcente diretto lungo l'asse z (regola della vite)
d_{Fx}	Uscita del trasduttore associata alla forza F_x
d_{Fy}	Uscita del trasduttore associata alla forza F_y
d_{Fz}	Uscita del trasduttore associata alla forza F_z
d_{Mx}	Uscita del trasduttore associata al momento M_x
d_{My}	Uscita del trasduttore associata al momento M_y
d_{Mz}	Uscita del trasduttore associata al momento M_z
α	Angolo di inclinazione del piano
ω	Angolo di rotazione del trasduttore
d_x	Disallineamento lungo x
d_y	Disallineamento lungo y
h	Altezza del trasduttore
ρ	coefficiente di correlazione
L_{piano}	Lunghezza del piano inclinato
D_{trasd}	Diametro trasduttore
$\mathbf{A}$	Matrice di utilizzo
$\mathbf{S}$	Matrice di sensibilità
$u^2(x)$	Varianza riferita alla variabile x
$u(x)$	Scarto tipo o incertezza tipo riferito alla variabile x
$U(x)$	Incertezza estesa riferita alla variabile x
r	Risoluzione di lettura
f_0	Errore di zero

Indice

Capitolo 1

Scopo del lavoro

La recente tendenza ad automatizzare gli impianti industriali, attraverso, per esempio, l'utilizzo di robot antropomorfi o celle robotizzate, ha incrementato la richiesta di trasduttori multicomponente per la misura di forze e momenti.

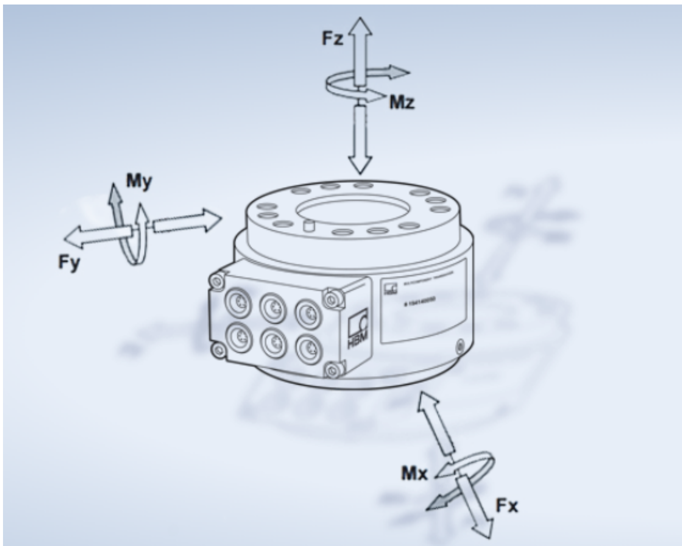


Figura 1.1: Trasduttore multicomponente

Effettuare una procedura di taratura di questo tipo di sensori presenta una serie di difficoltà e ostacoli, tra cui:

- **Generazione delle componenti**: ideare un sistema in grado di generare le componenti di forza e momento richieste, possibilmente in maniera indipendente
- **Piano sperimentale**: utilizzare un piano sperimentale adeguato, in modo da ottenere una taratura affidabile
- **Propagazione dell'incertezza**: sviluppare una metodologia per la propagazione dell'incertezza (la norma ISO 376, al momento non contiene indicazioni sul calcolo dell'incertezza per celle di carico multiassiali)
- **Costi**: la procedura deve essere economicamente realizzabile

Il presente lavoro si propone di mettere a punto una metodologia di taratura, in grado di trovare un compromesso a tutte queste problematiche.

Capitolo 2

Introduzione

Fino ad oggi sono diversi i sistemi che sono stati sviluppati per riuscire a generare differenti componenti di forza e momenti utili alla taratura di trasduttori multicomponente: macchina con struttura a esapodo dotata di sei martinetti elettrici [1][2][3]; macchina a pesi diretti unita a sistemi di leveraggi a cui agganciare masse tarate [4]; macchina a pesi diretti equipaggiata con delle carrucole [5]; sistemi con leveraggi a flessione incrociata [6] o tavole rotanti [7]; piattaforma di Stewart [8][9]. Analogamente i trasduttori multicomponente stessi possono lavorare secondo diverse tecnologie: ponti estensimetrici incollati su un corpo deformabile [10]; sistemi build-up con struttura a esapodo [11]. In quest'ultimo caso il trasduttore è composto da sei celle monoassiali adeguatamente posizionate, che possono essere tarate separatamente e poi assemblate successivamente, semplificando notevolmente la procedura di taratura.
Il sistema adottato per la generazione delle diverse componenti di forza e momento per il presente lavoro è stato ideato presso l'INRiM (Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica)[12][13] e prevede l'utilizzo di una macchina a pesi diretti, unita a dei piani inclinati . Modulando l'angolo di inclinazione è infatti possibile regolare il grado di scomposizione della forza perpendicolare al suolo applicata dall'esterno, ottenendo una componente longitudinale al trasduttore e una trasversale; disallineando il sensore rispetto alla linea di carico si possono ottenere i diversi momenti.
Se da un lato è un metodo molto semplice, con costi ridotti, dall'altro porta con sè alcuni problemi: impossibilità di generare in maniera indipendente le diverse componenti; incapacità di raggiungere il carico di fondoscala per le forze trasversali (limiti geometrici legati all'inclinazione dei piani); il momento torcente che può essere generato è molto piccolo (5-10% del fondoscala).

2.1 Schema sperimentale generale

Lo schema generale dell'esperimento consiste nel racchiudere il trasduttore multicomponente tra due piani inclinati di acciao temprato (34CrNiMo6) e di applicare il carico tramite una macchina a pesi diretti. Tra la macchina di carico e il piano superiore si interpone uno snodo a doppio coltello.

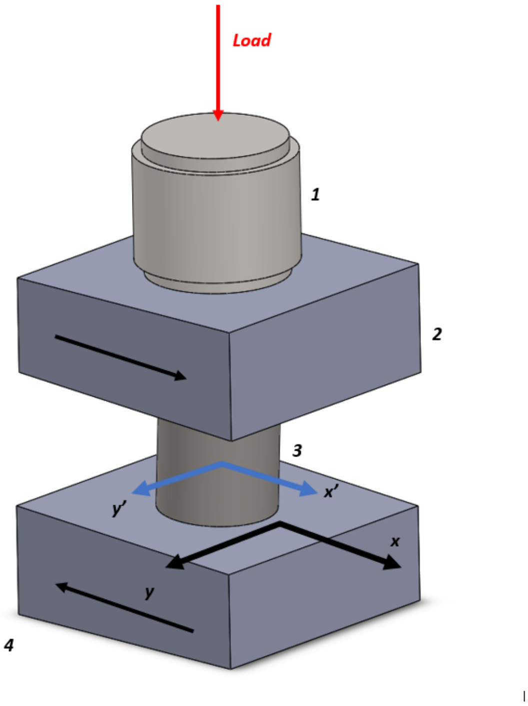


Figura 2.1: Setup sperimentale, piano 3°

1: Snodo a doppio coltello

2: Piano inclinato superiore

3: Trasduttore multicomponente in taratura

4: Piano inclinato inferiore

I piani inclinati a disposizione si presentano con le seguenti dimensioni:

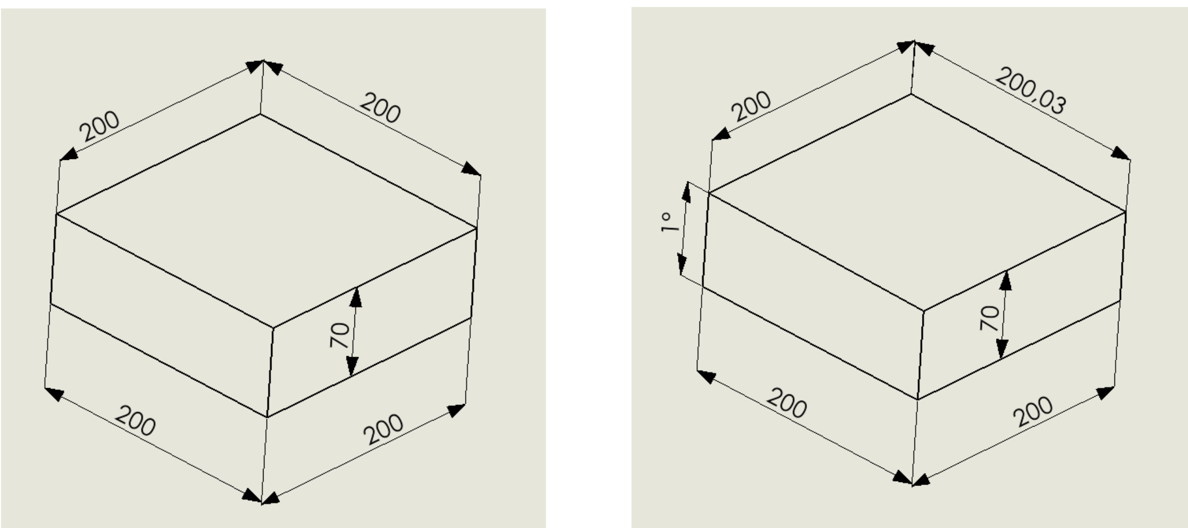


Figura 2.2: Piani inclinati 0° e 1°

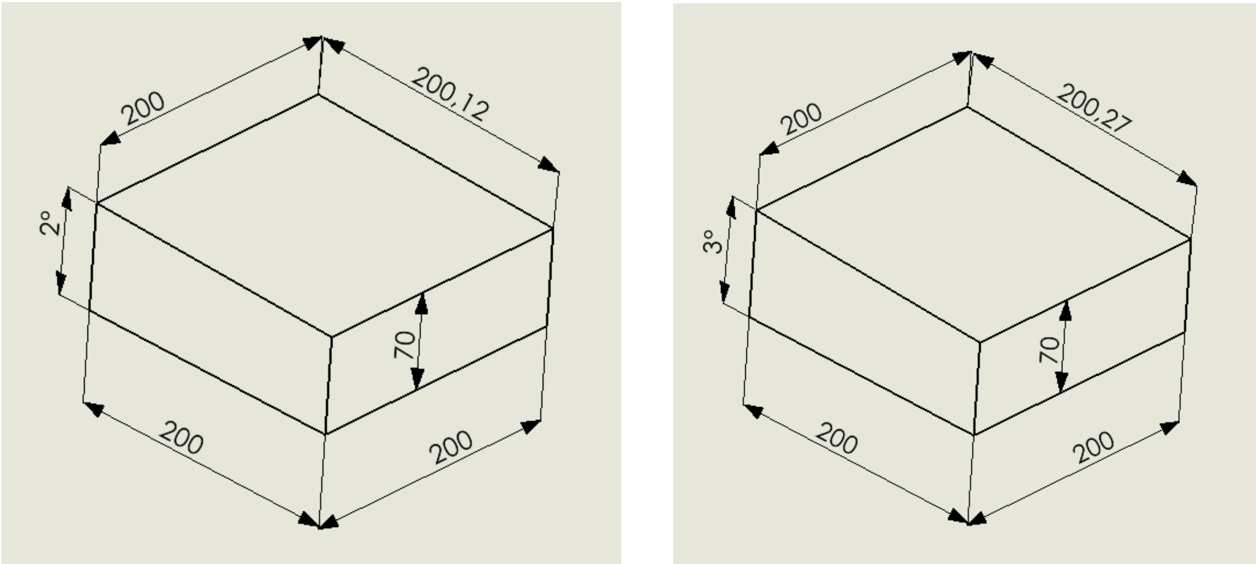


Figura 2.3: Piani inclinati 2° e 3°

Dal momento che l'inclinazione risulta piccola si decide di approssimare la lunghezza dell'ipotenusa a 200 mm per tutti i piani, in modo da facilitare le operazioni di centraggio e allineamento.

2.2 Generazione e calcolo delle componenti di forza e momento

Sfruttando l'inclinazione del piano α, la rotazione del trasduttore ω e il disallineamento rispetto alla linea di carico, è possibile riuscire a ottenere l'applicazione di tutte e sei le componenti. Detto xyz il sistema di riferimento assoluto della macchina e $x'y'z'$ il sistema di riferimento relativo al trasduttore, lo schema sperimentale risulta:

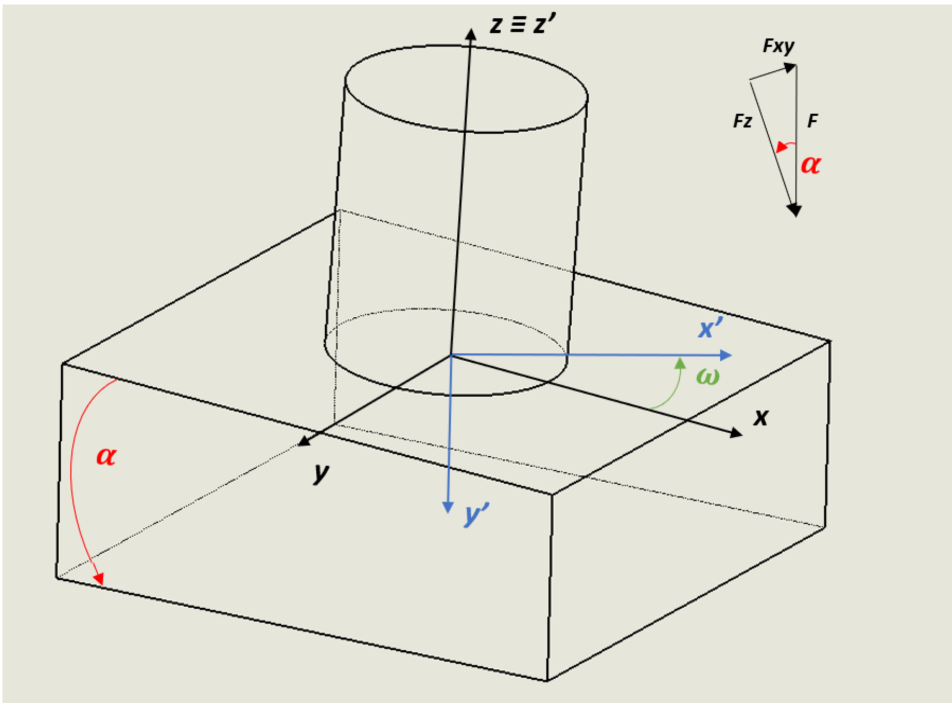


Figura 2.4: Setup sperimentale, piano 3°: rotazione ω senza disallineamento

Dalla figura 2.4 è facile ricavare le seguenti espressioni:

$$F_z = F \cos \alpha \tag{2.1}$$

$$F_{xy} = F \sin \alpha \tag{2.2}$$

Da cui:

$$F_x = F_{xy} \cos \omega = F \cos \omega \sin \alpha \tag{2.3}$$

$$F_y = F_{xy} \sin \omega = F \sin \omega \sin \alpha \tag{2.4}$$

Nel caso in cui si introducano i disallineamenti lungo x e y:

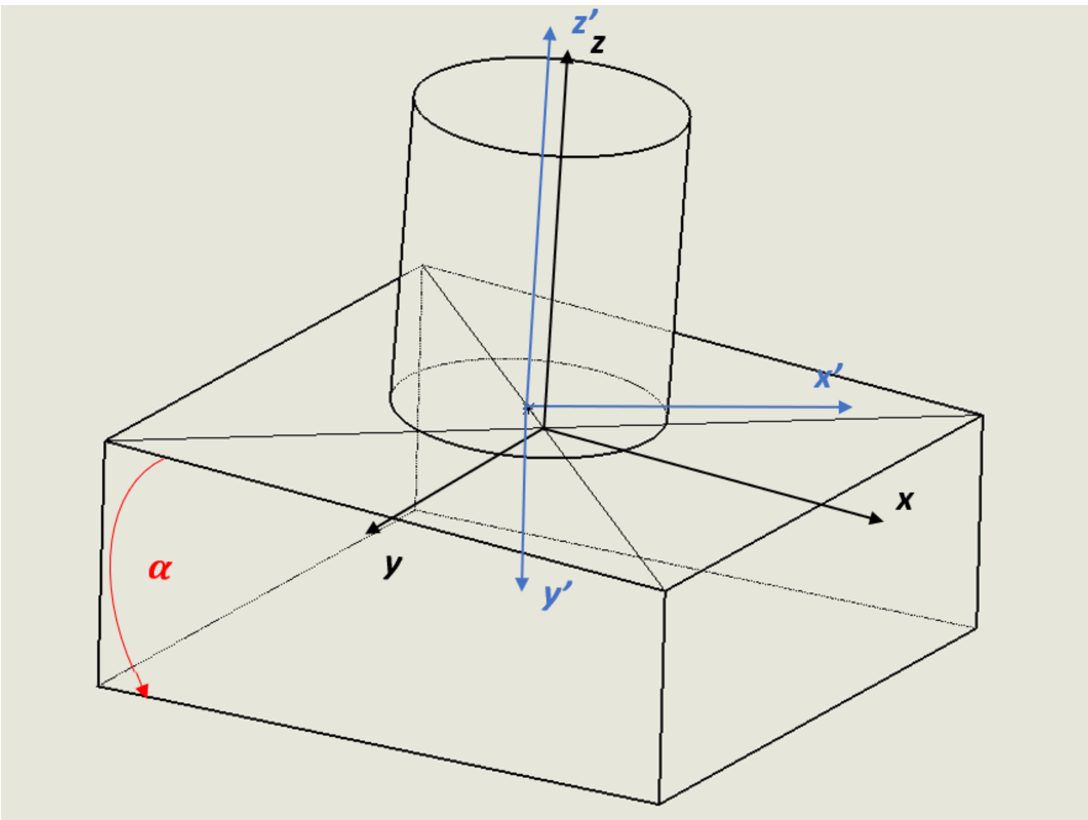


Figura 2.5: Setup sperimentale, piano 3°: rotazione ω con disallineamento

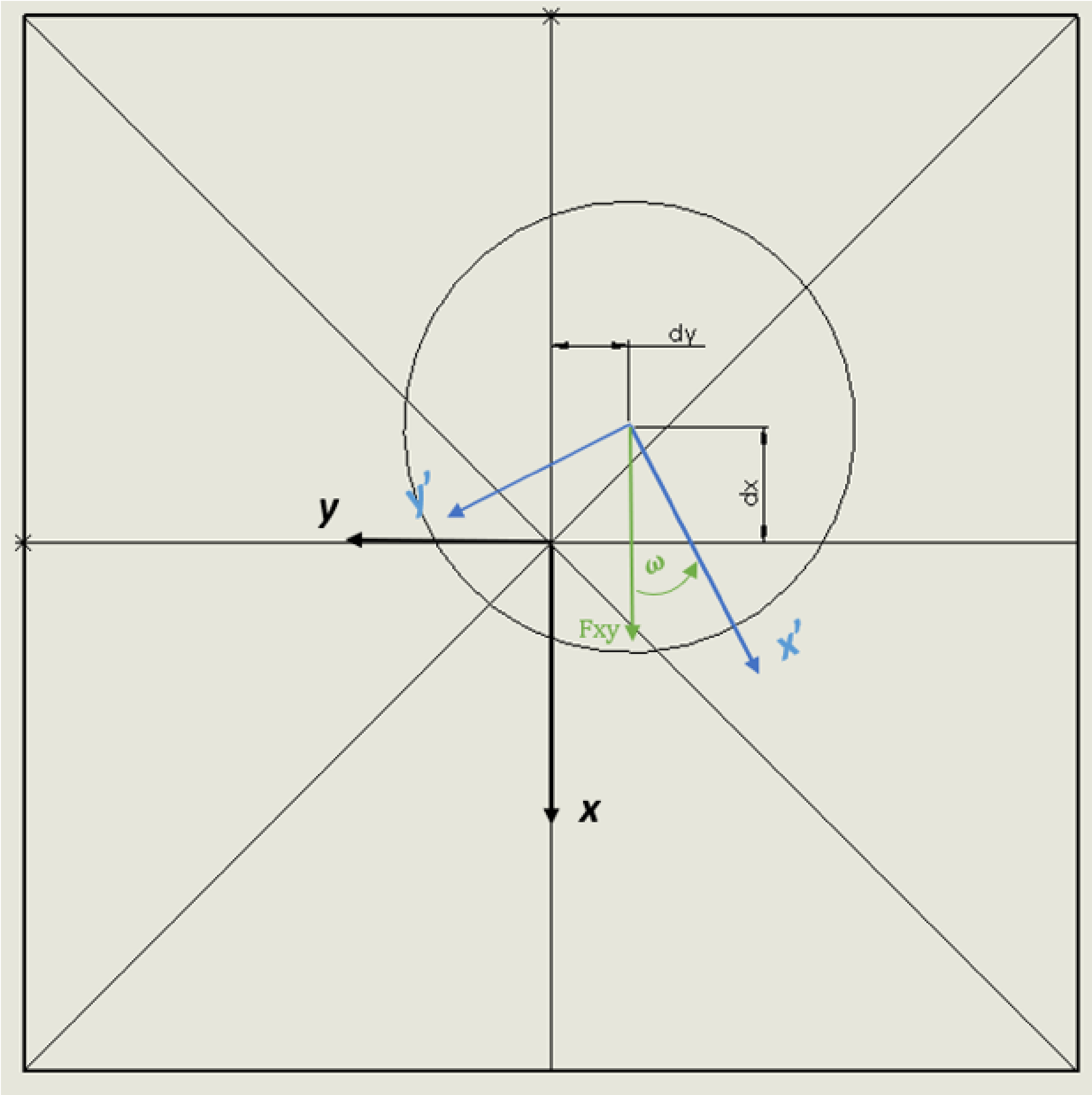


Figura 2.6: Setup sperimentale, piano 3°: rotazione ω con disallineamento, vista dall'alto

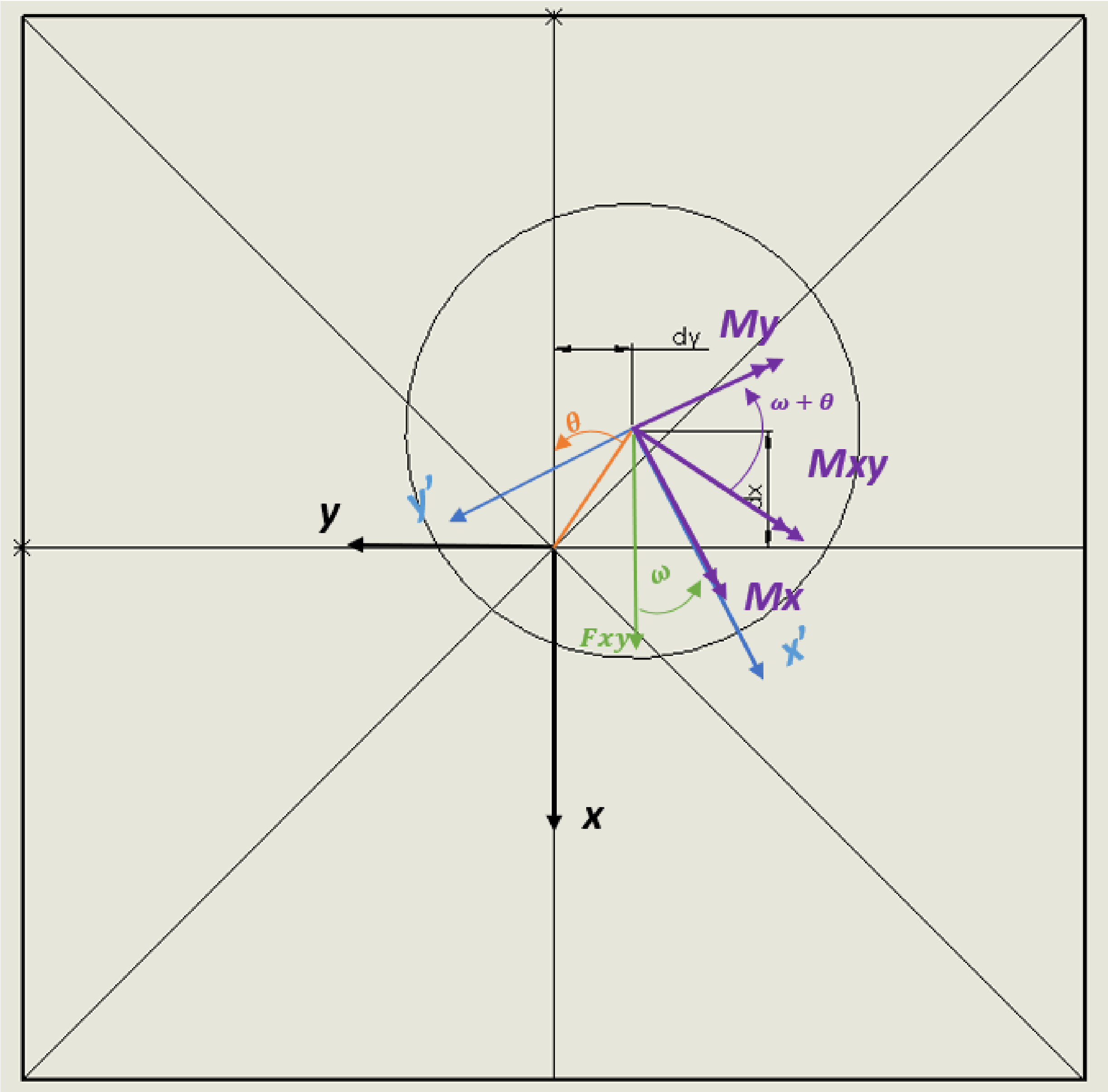


Figura 2.7: Setup sperimentale, piano 3°: rotazione ω con disallineamento, vista dall'alto

$$M_{xy} = F_z\sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{2.5}$$

$$\theta = \left|\arctan\left(\frac{d_y}{d_x}\right)\right| \tag{2.6}$$

Proiettando M_{xy} rispetto al sistema di riferimento del trasduttore:

$$M_x = F\cos\alpha\,\sqrt{d_x^2 + d_y^2}\,\sin(\omega + \theta) \tag{2.7}$$

$$M_y = -F \cos\alpha \, \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \, \cos(\omega + \theta) \tag{2.8}$$

I momenti M_x e M_y **effettivi** risultano tuttavia:

$$M_x = F \cos\alpha \, \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \, \sin(\omega + \theta) + \frac{F \sin\alpha \sin\omega \; h}{2} \tag{2.9}$$

$$M_y = -F \cos\alpha \, \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \, \cos(\omega + \theta) - \frac{F \sin\alpha \cos\omega \; h}{2} \tag{2.10}$$

I termini aggiuntivi $\frac{F \sin\alpha \sin\omega \; h}{2}$ e $\frac{F \sin\alpha \cos\omega \; h}{2}$ derivano dal momento generato dalle forze trasversali F_x e F_y, moltiplicate per il braccio $h/2$, dove h indica l'altezza del trasduttore.
Da considerazioni analoghe si ricava il momento torcente:

$$M_z = F \sin\alpha \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \, \sin\theta \tag{2.11}$$

NOTA

E' importante sottolineare che tali formule sono valide nel caso gli spostamenti d_x e d_y vengano effettuati come in Figura 2.6, ovvero in verso opposto al sistema di riferimento adottato.

Capitolo 3

Matrice di utilizzo e matrice di sensibilità

Un trasduttore multicomponente dispone di diversi ponti estensimetrici in modo da risultare sensibile alle tre componenti di forza e alle tre componenti di momento. Anche ammesso che il sensore sia estremamente ben progettato, e che quindi le sei uscite siano teoricamente sensibili solo e unicamente alla componente alla quale sono deputate, è inevitabile osservare un minimo fenomeno di crosstalk [14], dovuto a delle differenze nell'incollaggio o del *gage factor* di estensimetri appartenenti allo stesso ponte, le quali finiscono per indebolire la capacità di compensazione, delle altre componenti, del ponte medesimo.
I mV/V in uscita dal trasduttore devono quindi essere adeguatamente "trattati" per poter essere convertiti in valori di forza e momento. La matrice di utilizzo **A** permette questo passaggio:

$$\vec{F} = \vec{d}\,\mathbf{A} \tag{3.1}$$

Dove $\vec{F}$ rappresenta il vettore delle forze e dei momenti in N e Nm:

$$\vec{F} = \{F_x,\ F_y,\ F_z,\ M_x,\ M_y,\ M_z\} \tag{3.2}$$

Mentre $\vec{d}$ rappresenta il vettore delle uscite in mV/V:

$$\vec{d} = \{d_{Fx},\ d_{Fy},\ d_{Fz},\ d_{Mx},\ d_{My},\ d_{Mz}\} \tag{3.3}$$

Quindi:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} d_{Fx} \\ d_{Fy} \\ d_{Fz} \\ d_{Mx} \\ d_{My} \\ d_{Mz} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Semplificando la notazione di $\vec{F}$ e $\vec{d}$:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Il valore effettivo della forza F_i, in Newton, è quindi dato da:

$$F_i = d_1 \cdot A_{1i} + d_2 \cdot A_{2i} + d_3 \cdot A_{3i} + d_4 \cdot A_{4i} + d_5 \cdot A_{5i} + d_6 \cdot A_{6i} = \\ = \sum_{j=1}^{6} d_j \cdot A_{ji} \tag{3.6}$$

Il contributo preponderante a F_i è dato dal termine $d_i \cdot A_{ii}$, dove A_{ii} è la sensibilità in $N/(mV/V)$ del canale d_i alla forza F_i e, coerentemente, esso è il coefficiente maggiore colonna *i-esima* della matrice. Gli altri coefficienti della colonna *i-esima* quantificano invece l'influenza che F_i ha sugli altri canali[1] e tendono a essere nettamente inferiori.

3.1 Calcolo della matrice di utilizzo

Parte integrante del processo di taratura è il calcolo della matrice di utilizzo; questo può essere fatto a partire dal vettore delle forze e momenti applicati $\vec{F}$ e il vettore delle uscite $\vec{d}$, invertendo la Formula 3.1:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{d}\,\mathbf{A} \\ \vec{d}^T\,\vec{F} &= \vec{d}^T\,\vec{d}\,\mathbf{A} \\ \mathbf{A} &= [\vec{d}^T\,\vec{d}]^{-1}\,\vec{d}^T\,\vec{F} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Se $\vec{d}$ e $\vec{F}$ continuano a essere dei vettori, il sistema che ne deriva ha trentasei incognite, corrispondenti ai trentasei coefficienti della matrice $\mathbf{A}$ e solo sei equazioni. Per ottenere un sistema determinato è necessario che d e F siano due matrici con minimo sei righe, ovvero 6 x 6:

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{d^T}\ \boldsymbol{d}]^{-1}\ \boldsymbol{d^T}\ \boldsymbol{F} \tag{3.8}$$

Pe riuscire a calcolare la matrice di utilizzo è quindi necessario fare almeno sei prove, ognuna delle quali andrà a costituire una riga delle matrici d e F:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{Fx,1} & d_{Fy,1} & d_{Fz,1} & d_{Mx,1} & d_{My,1} & d_{Mz,1} \\ d_{Fx,2} & d_{Fy,2} & d_{Fz,2} & d_{Mx,2} & d_{My,2} & d_{Mz,2} \\ d_{Fx,3} & d_{Fy,3} & d_{Fz,3} & d_{Mx,3} & d_{My,3} & d_{Mz,3} \\ d_{Fx,4} & d_{Fy,4} & d_{Fz,4} & d_{Mx,4} & d_{My,4} & d_{Mz,4} \\ d_{Fx,5} & d_{Fy,5} & d_{Fz,5} & d_{Mx,5} & d_{My,5} & d_{Mz,5} \\ d_{Fx,6} & d_{Fy,6} & d_{Fz,6} & d_{Mx,6} & d_{My,6} & d_{Mz,6} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{x,1} & F_{y,1} & F_{z,1} & M_{x,1} & M_{y,1} & M_{z,1} \\ F_{x,2} & F_{y,2} & F_{z,2} & M_{x,2} & M_{y,2} & M_{z,2} \\ F_{x,3} & F_{y,3} & F_{z,3} & M_{x,3} & M_{y,3} & M_{z,3} \\ F_{x,4} & F_{y,4} & F_{z,4} & M_{x,4} & M_{y,4} & M_{z,4} \\ F_{x,5} & F_{y,5} & F_{z,5} & M_{x,5} & M_{y,5} & M_{z,5} \\ F_{x,6} & F_{y,6} & F_{z,6} & M_{x,6} & M_{y,6} & M_{z,6} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

E' tuttavia auspicabile fare più di sei prove, in quanto se queste non sono linearmente indipendenti, determinano una correlazione tra le sei variabili, e la matrice risultante è malcondizionata. Quando il numero delle prove è maggiore di sei, il sistema è sovradeterminato e la matrice $\mathbf{A}$ verrà calcolata come risultato di una regressione.

[1]Fenomeno del crosstalk

3.2 Calcolo della matrice di sensibilità

L'inverso della matrice di utilizzo è la matrice di sensibilità **S**:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A^{-1}} \tag{3.11}$$

E' in questo modo possibile passare dai valori delle forze e momenti espressi in N e Nm ai valori delle uscite in mV/V:

$$\vec{F}\mathbf{S} = \vec{d} \tag{3.12}$$

Analogamente alla Formula 3.8:

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{F^T}\ \boldsymbol{F}]^{-\mathbf{1}}\ \boldsymbol{F^T}\ \boldsymbol{d} \tag{3.13}$$

Capitolo 4

Misure preliminari su un trasduttore da 10 kN

4.1 Setup sperimentale

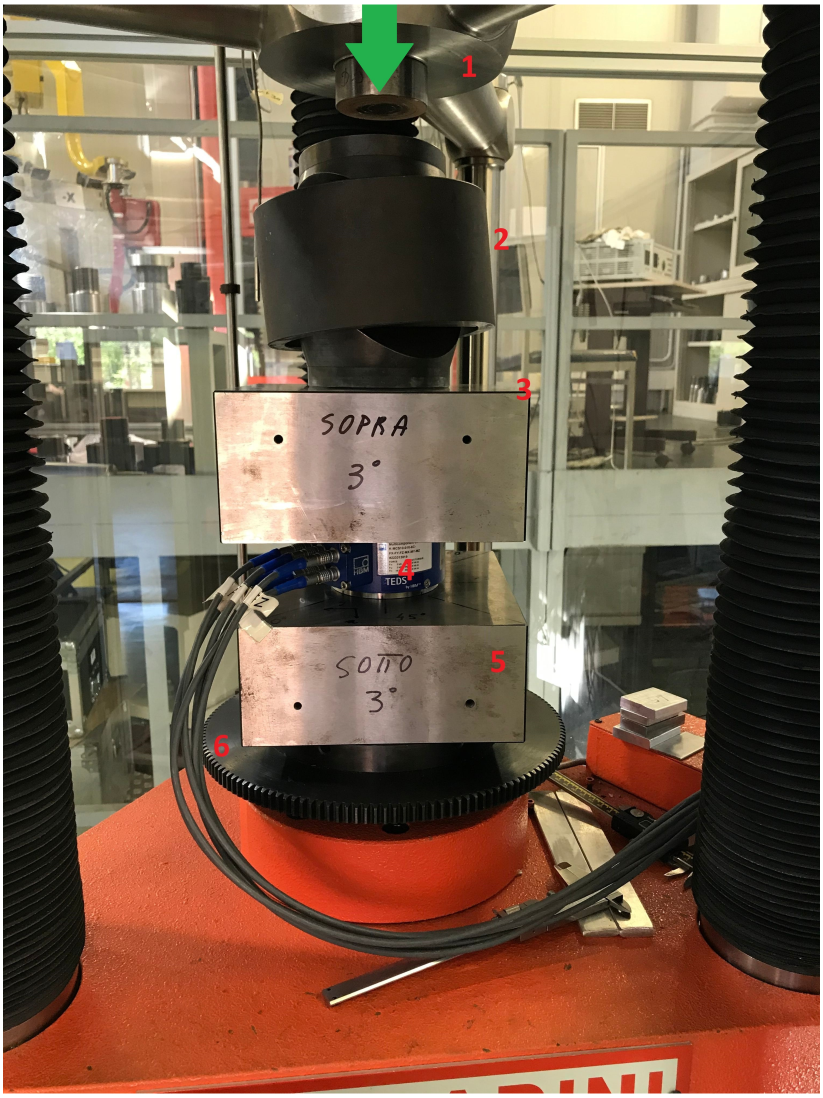


Figura 4.1: Setup sperimentale

Il setup di questa prima fase di sperimentazione riflette lo schema presentato nel capitolo introduttivo (Figura 2.1). Sulla piattaforma di carico (6) della traversa mobile (7) viene collocato il piano inclinato inferiore (5), il trasduttore in taratura (4), il piano inclinato superiore (3) e lo snodo a doppio coltello (2). La traversa può essere alzata fino a che il telaio della macchina (1) non va a contatto con lo snodo. La taratura viene effettuate tramite una macchina a pesi diretti da 30 kN [15]

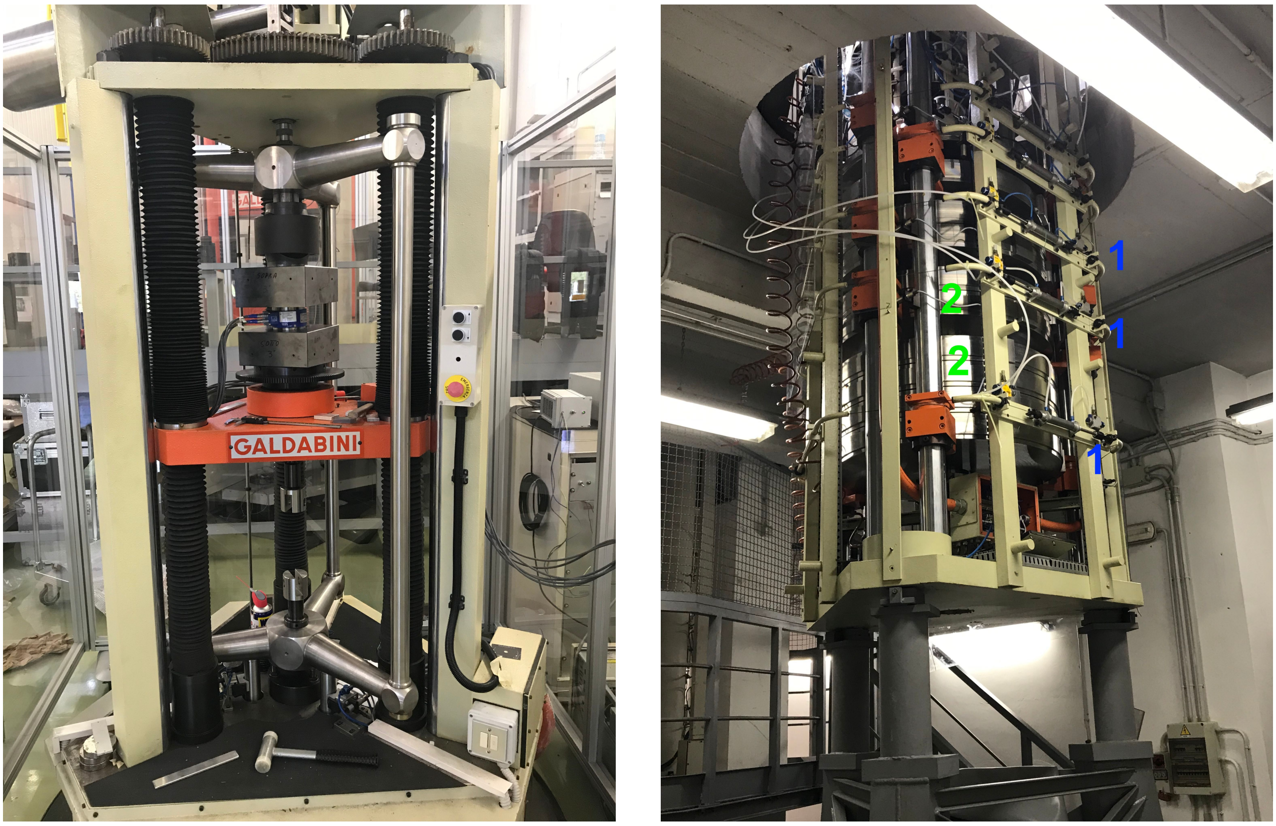


Figura 4.2: Macchina di carico a pesi diretti da 30 kN: (a sinistra) parte superiore in cui si collocano i trasduttori (a destra) parte inferiore, i pistoni (1) controllano l'appoggio delle masse (2) sul telaio

L'utilizzo di uno snodo è importante per eliminare eventuali componenti spurie generate dalla macchina a pesi diretti. Lo snodo a doppio coltello consta di un coltello superiore, il cui filo va a poggiare sul filo del coltello inferiore, assicurando una punto di contatto teoricamente puntiforme.

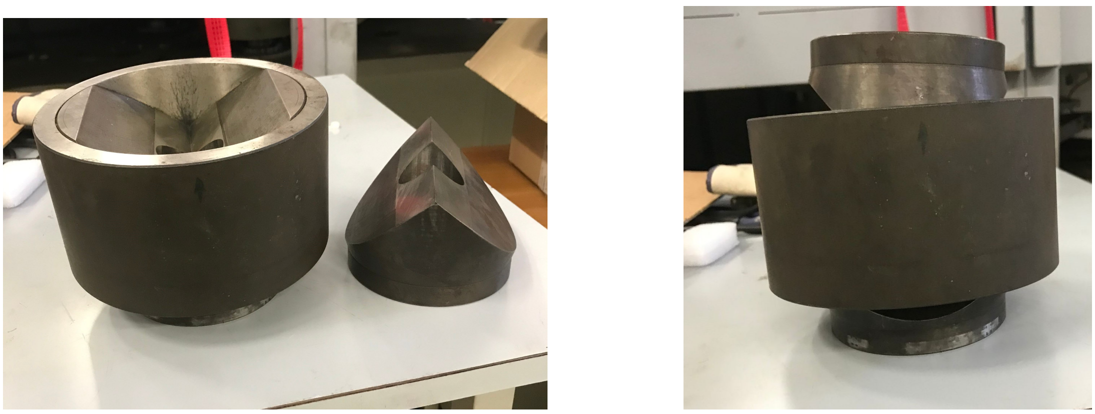


Figura 4.3: Snodo a doppio coltello

Il trasduttore utilizzato è un MCS10-010-6C HBM da 6 componenti con le seguenti capacità di carico:

F_x **[N]**	F_y **[N]**	F_z **[N]**	M_x **[Nm]**	M_y **[Nm]**	M_z **[Nm]**
2000	2000	10000	150	150	150

Tabella 4.1: Capacità di carico

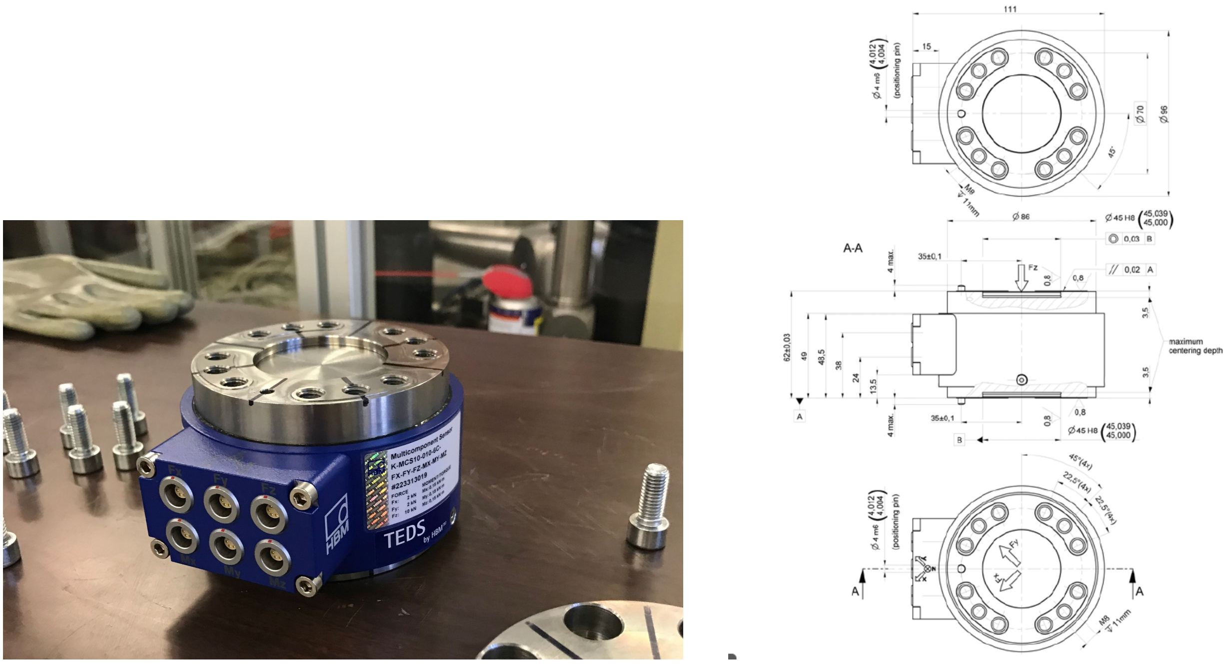


Figura 4.4: Trasduttore HBM MCS10-010-6C [16]

Come strumento di acquisizione si utilizza l'MGC plus HBM:

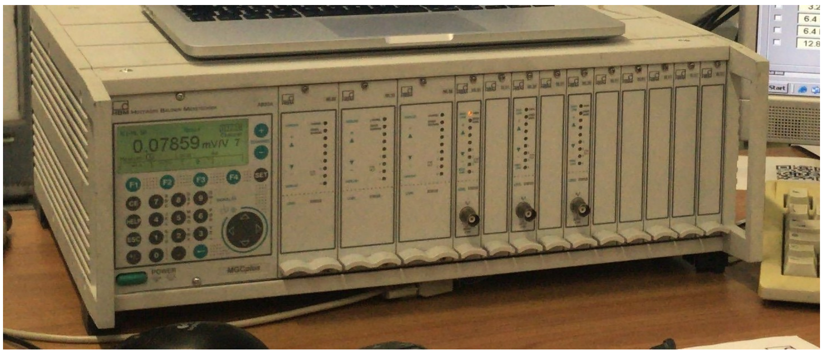


Figura 4.5: MGC plus

I sei canali del trasduttore vengono alimentati a ± 10 V e 600 Hz; il segnale di uscita viene filtrato con un filtro Bessel a 0,05 Hz.

4.2 Definizione del piano sperimentale

Come già presentato, è di fondamentale importanza l'utilizzo di un piano sperimentale in grado di coprire tutte le possibili combinazioni di forze e momenti, in modo da non ottenere successivamente delle matrici soggette ad un cattivo condizionamento. Evitare correlazioni tra le variabili è inoltre importante per soddisfare alcune ipotesi dietro al calcolo e la propagazione dell'incertezza [17].

4.2.1 Piano sperimentale

Il piano sperimentale prevede la suddivisione in 4 posizioni, ripetute per diverse rotazioni del trasduttore a diversi livelli di carico. Il livello di forza indicato in Tabella 4.2 fa riferimento al carico applicato dalla macchina a pesi diretti all'intero sistema di misura, in direzione verticale, perpendicolare al terreno; tale forza verrà adeguatamente scomposta dal sistema di piani inclinati. Il numero di misure totali risulta di 448.

Posizione	**1000 N**	**5000 N**	**8000 N**	**10000 N**
0	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°
A	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°
B	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°
C	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°	0° 45° 90° 135° 180° 270° 360°

Tabella 4.2: Piano sperimentale

Posizione	d_x [mm]	d_y[mm]
0	0	0
A	0	12
B	6	0
C	12	6

Tabella 4.3: Posizioni

Queste misure sono ripetute per diversi valori dell'angolo α: 0°, 1° e 2°.

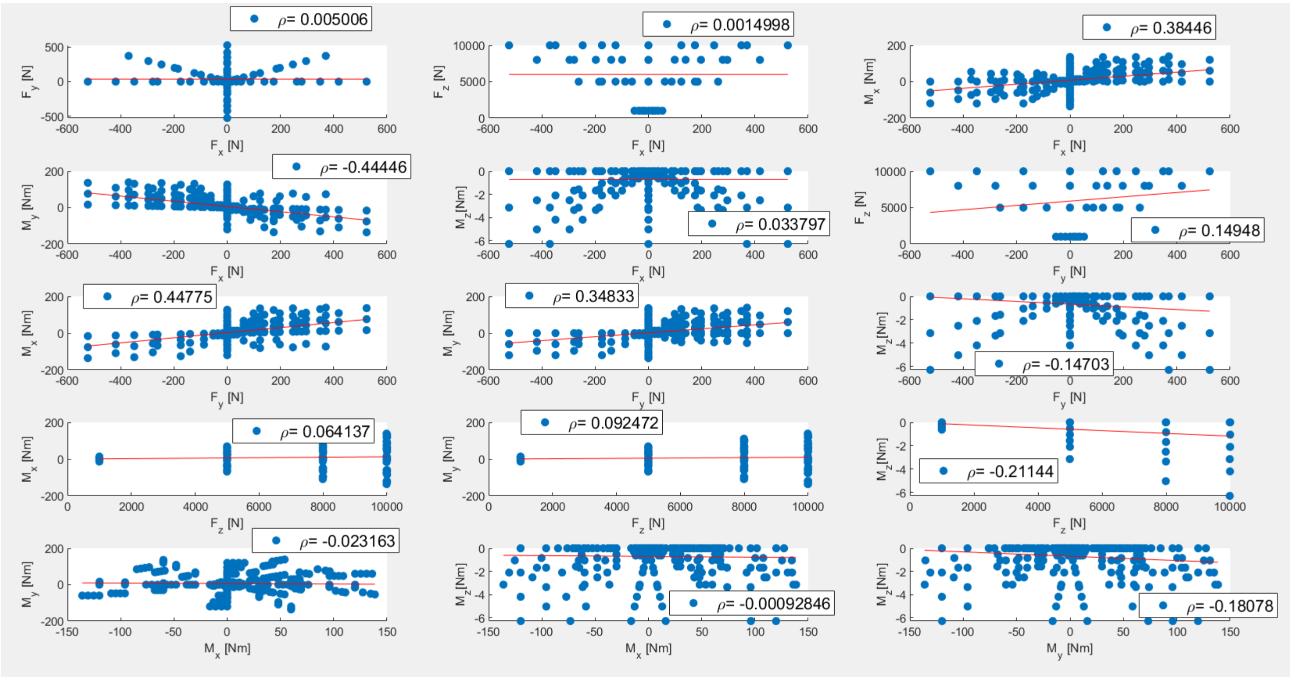


Figura 4.6: Piano sperimentale; in rosso è evidenziata la linea di regressione

	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
$N;\ Nm$	$523,23$	$523,23$	10000	$138,58$	$138,58$	$6,28$
%	$26,2$	$26,2$	100	$92,4$	$92,4$	$4,2$

Tabella 4.4: Massimi valori di carico raggiunti in taratura

Assegnate due variabili statistiche A e B l'indice di correlazione di Pearson è definito come:

$$\rho = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A\, \sigma_B} \tag{4.1}$$

Dove σ_A rappresenta la varianza della variabile A, σ_B, la varianza della variabile B e σ_{AB}, la covarianza tra le due variabili. Per come è definito il coefficiente risulta:

$$-1 \leq \rho \leq 1 \tag{4.2}$$

Se $\rho = 0$ le due variabili sono indipendenti; se $\rho < 0$ sono correlate negativamente; se $\rho > 0$ sono correlate positivamente. Come riportato dalla figura 4.6 il piano si presenta piuttosto buono, riuscendo a coprire gran parte delle combinazioni di carico possibili; alcuni coefficienti di correlazione rimangono tuttavia alti.

4.2.2 Schemi delle posizioni sperimentali

Posizione centrata 0

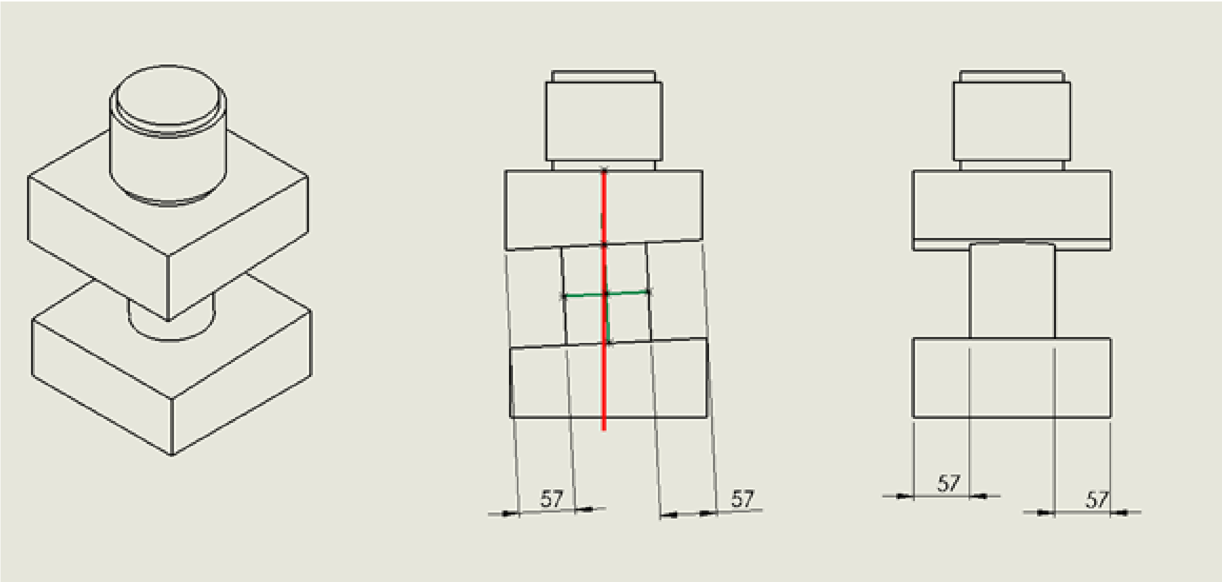


Figura 4.7: Setup sperimentale, piano 3°: posizione centrata

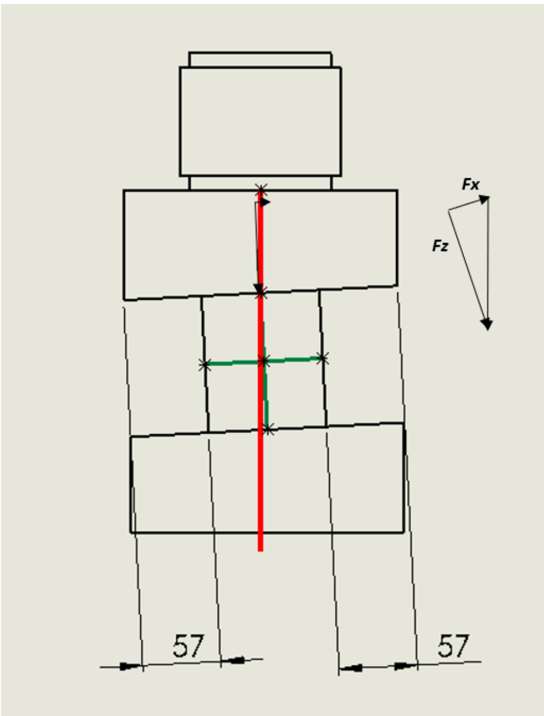


Figura 4.8: Setup sperimentale, piano 3°: posizione centrata, dettaglio

Disallineamento lungo y

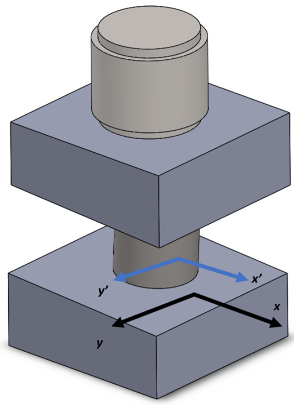


Figura 4.9: Setup sperimentale, piano 3°: disallineamento lungo y

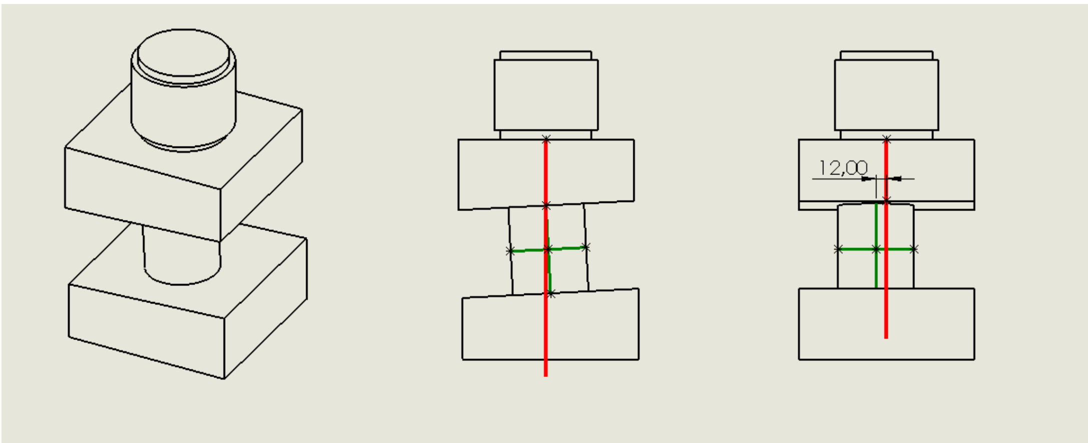


Figura 4.10: Setup sperimentale, piano 3°: disallineamento lungo y 12 mm

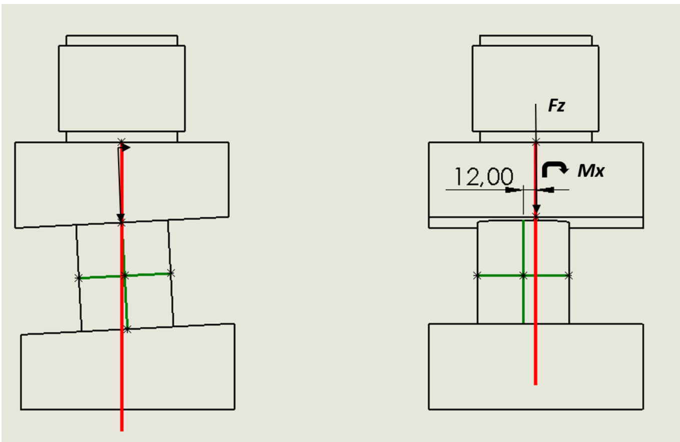


Figura 4.11: Setup sperimentale, piano 3°: disallineamento lungo y 12 mm, dettaglio

Disallineamento lungo x

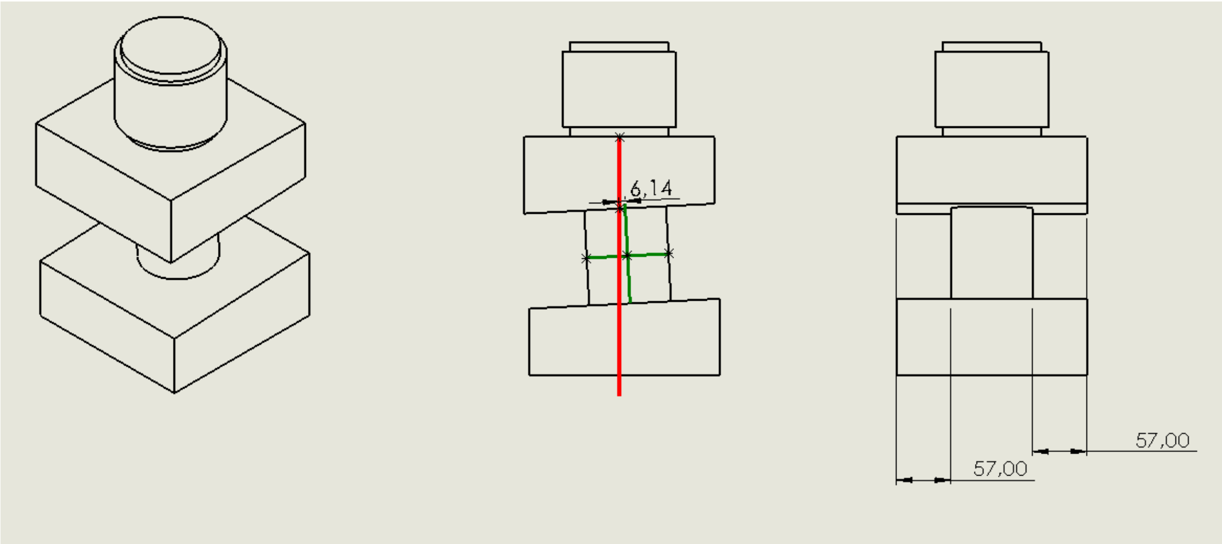


Figura 4.12: Setup sperimentale, piano 3°: disallineamento lungo x 6 mm

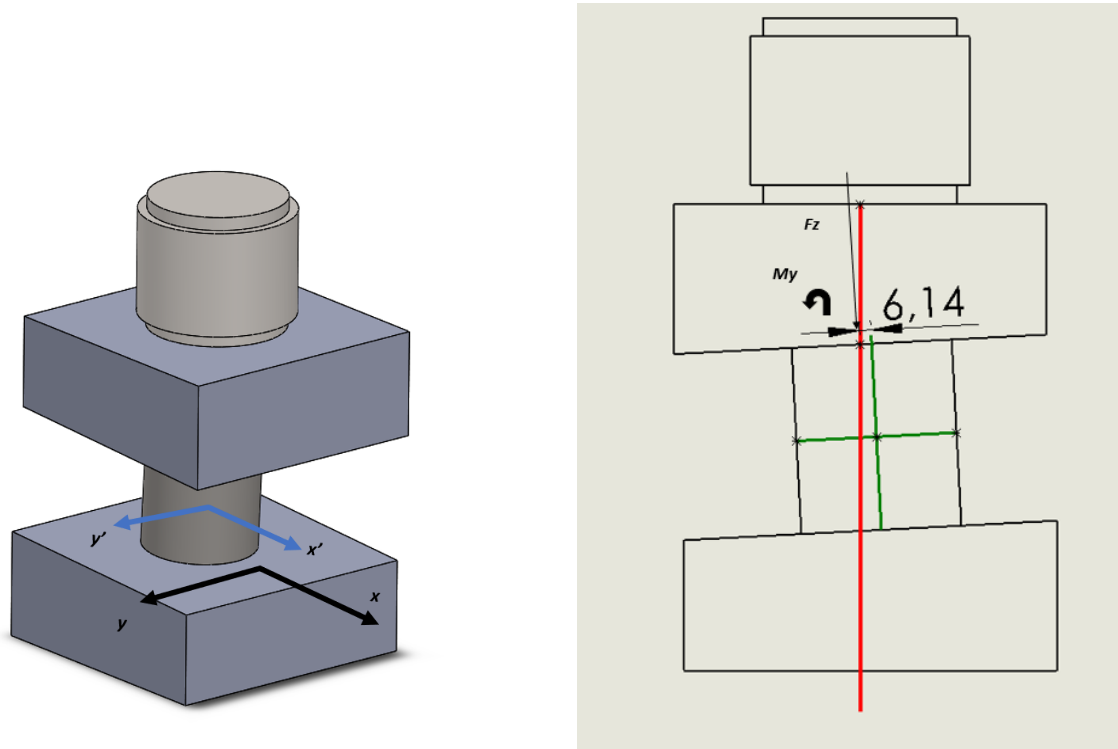


Figura 4.13: Setup sperimentale, piano 3°: disallineamento lungo x, dettaglio

NOTA

Il disallineamento lungo x di 6; mm è stato imposto come uno spostamento, rispetto alla posizione centrata, misurato a partire dalla faccia laterale, considerando una lunghezza del piano di 200; mm. A causa dell'inclinazione, tuttavia, le facce su cui poggia il trasduttore risultano leggermente più lunghe di 200; mm (Figura 2.3), di conseguenza il disallineamento effettivo risulta leggermente maggiore di 6; mm, un errore trascurabile in virtù della semplificazione procedurale.

Rotazione

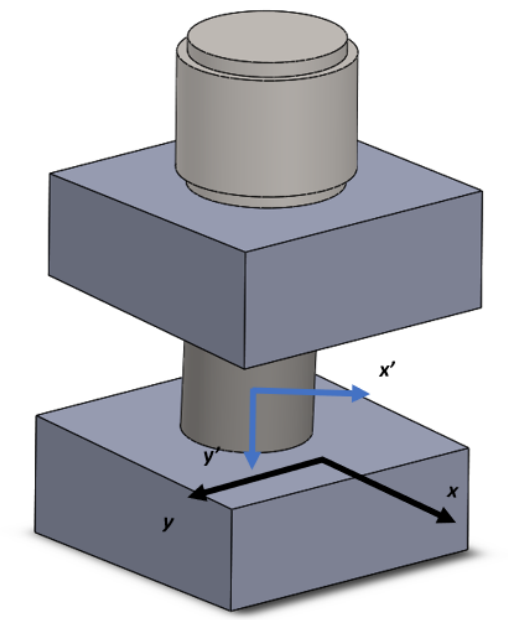


Figura 4.14: Setup sperimentale, piano 3°: rotazione ω

La rotazione si esegue ruotando il trasduttore e continuando a disallineare, esattamente come prima, lungo il riferimento **fisso** del piano inclinato.

4.3 Procedura per l'allineamento

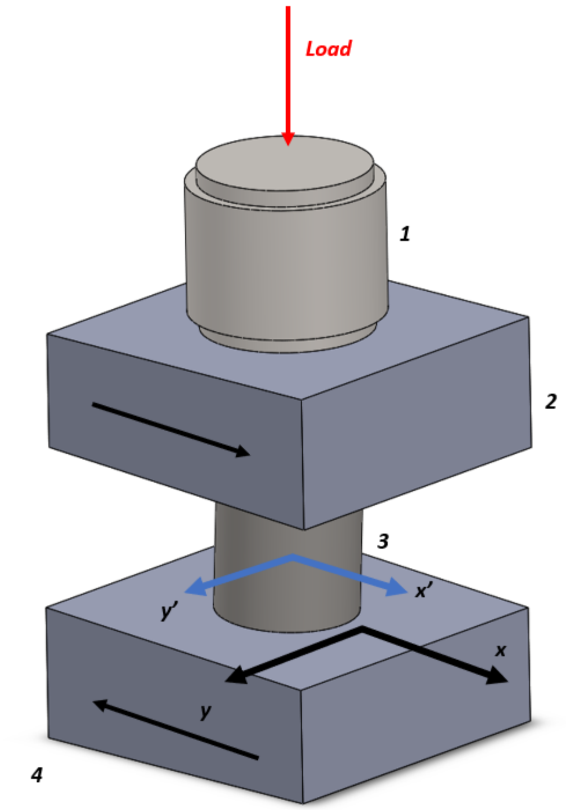


Figura 4.15: Setup sperimentale

Per effettuare delle letture accurate è necessario:

1. centrare il telaio (1) rispetto allo snodo (2)

2. centrare lo snodo (2) rispetto al piano (3)

3. posizionare correttamente il trasduttore (4)

4. assicurarsi che i due piani non siano tra di loro disassati o ruotati

4.3.1 Materiale utilizzato

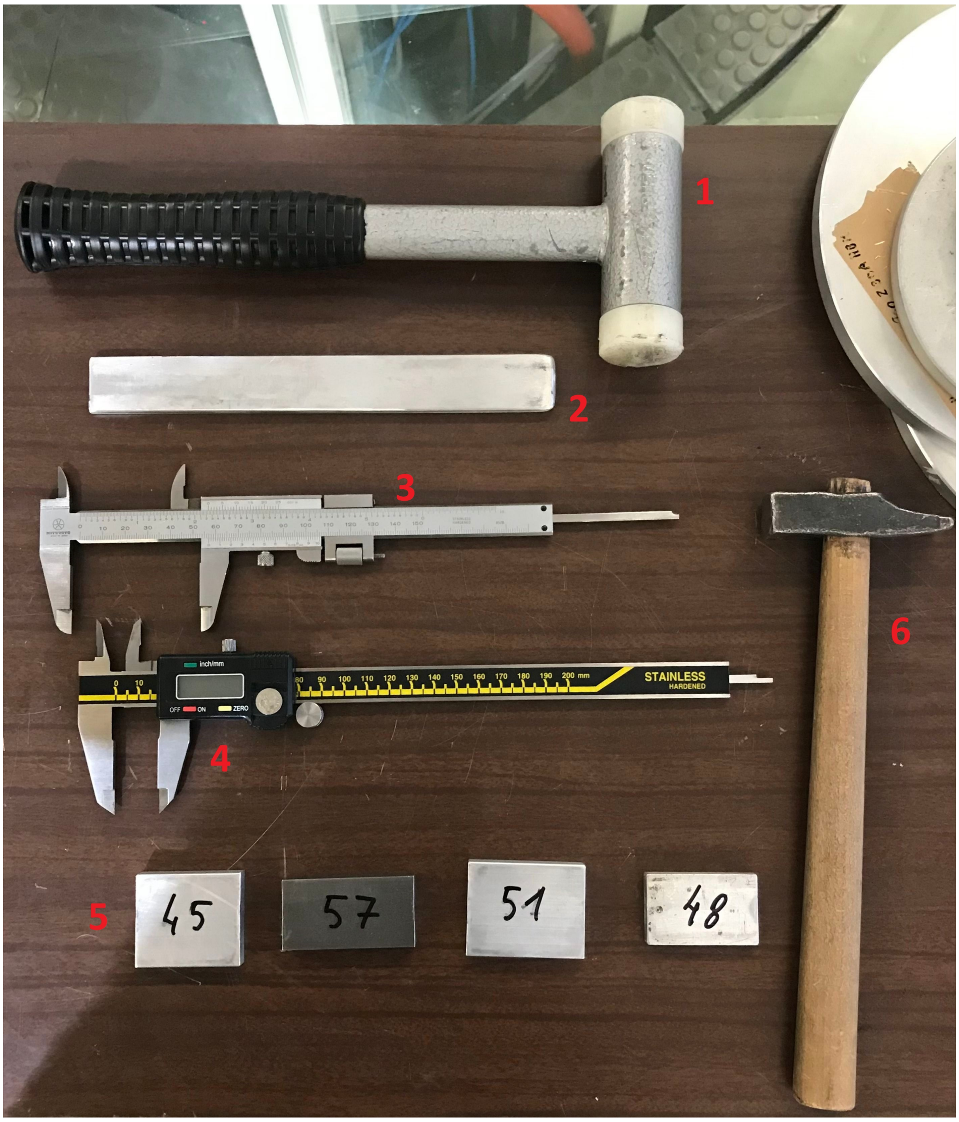


Figura 4.16: Materiale utilizzato

- **1**: martello di taglia grande per spostare i piani o per grossi spostamenti del trasduttore
- **2**: barretta in alluminio, utilizzata come uno scalpello per eseguire spostamenti più precisi (spostare il trasduttore direttamente con il martello renderebbe difficile seguire una traiettoria rettilinea a causa della difficoltà di colpire sempre nello stesso punto)
- **3**: calibro regolato sulla lunghezza per il centraggio del trasduttore
- **4**: calibro fissato per il centraggio dello snodo a doppio coltello rispetto al telaio della macchina
- **5**: blocchetti calibrati per le operazioni di centraggio
- **6**: martello di taglia piccola per spostamenti piccoli e rifiniture

4.3.2 Funzionamento dei blocchetti calibrati

Figura 4.17: blocchetti calibrati

La lunghezza si ottiene come la metà della differenza tra la lunghezza del piano e il diametro dell'elemento da centrare (ad esempio il trasduttore):

$$L_{piano} = 200\ mm$$
$$D_{trasd} = 86\ mm$$

$$L_{centr} = \frac{(200 - 86)}{2} = 57\ mm \tag{4.3}$$

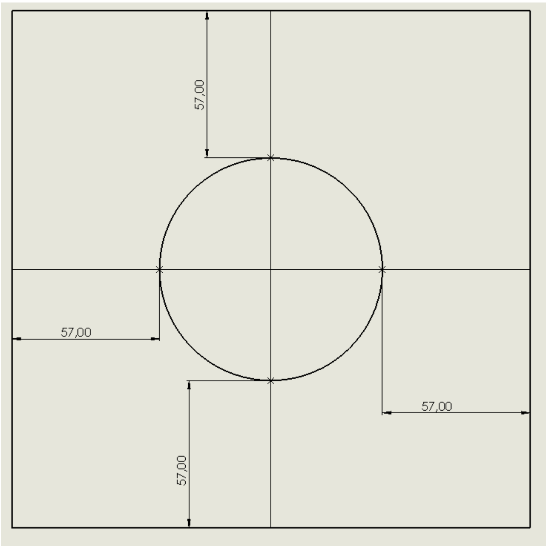


Figura 4.18: Calcolo lunghezza blocchetto

Per ottenere i disallineamenti del trasduttore si aggiunge o si toglie l'entità del disallineamento alla lunghezza ottenuta nella posizione centrata:

$$\begin{aligned} L_{dis,1} &= 57 - 6 = 51\ mm \\ L_{dis,2} &= 57 - 12 = 45\ mm \end{aligned} \tag{4.4}$$

Per il centraggio dello snodo:

$$L_{piano} = 200\ mm$$
$$D_{snodo} = 104\ mm$$

$$L_{snodo} = \frac{(200 - 104)}{2} = 48\ mm \tag{4.5}$$

Per eseguire il centraggio, si colpisce il blocchetto fino a che non arriva a filo con il piano:

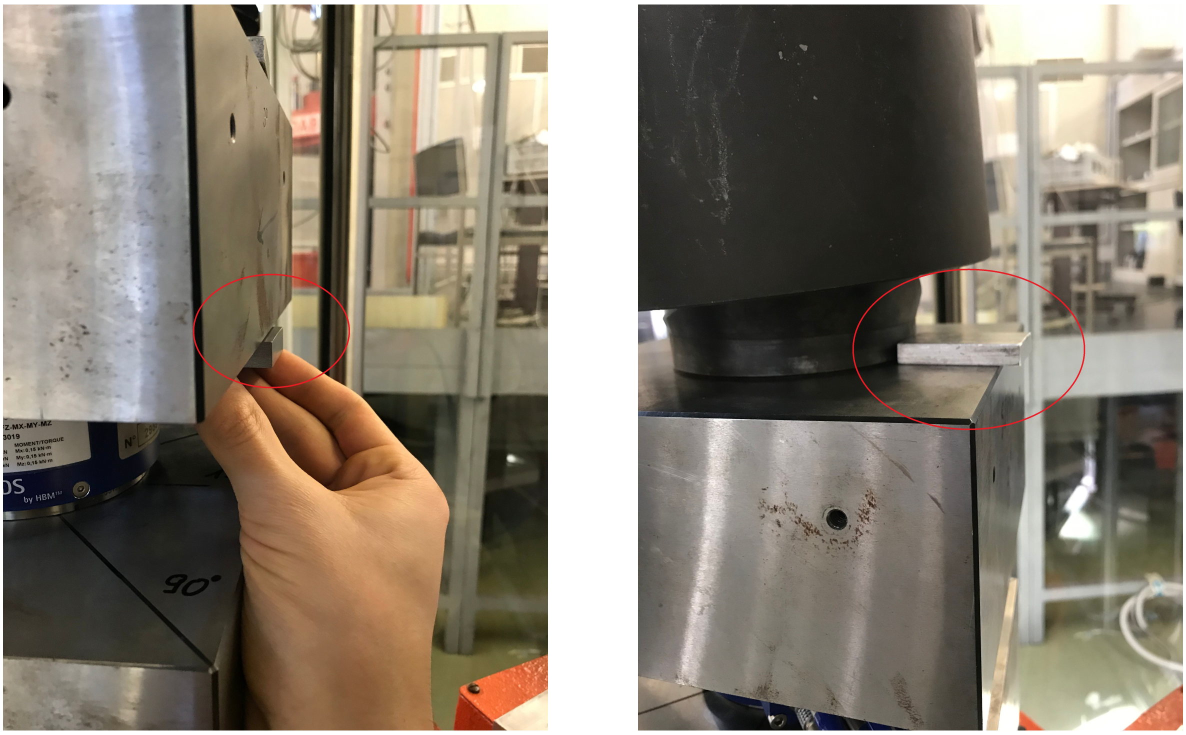


Figura 4.19: Utilizzo blocchetti calibrati

4.3.3 Operazioni preliminari

1. Disegnare sul piano inclinato superiore e inferiore dei riferimenti per le rotazioni:

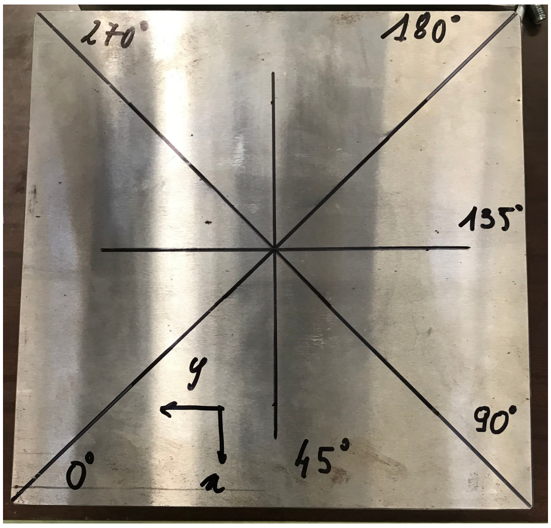


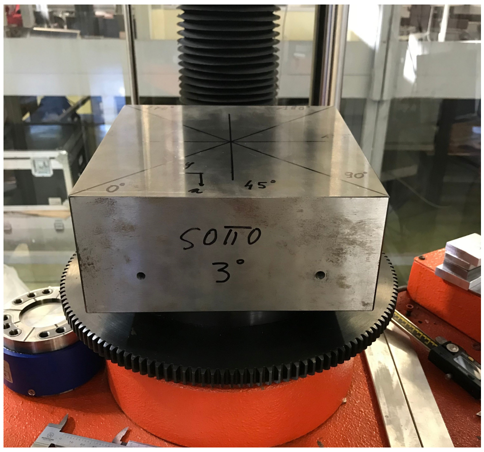
Figura 4.20: Riferimenti rotazioni piano inclinato

2. Fare lo stesso sul trasduttore

Figura 4.21: Riferimenti rotazioni trasduttore

4.3.4 Allineamento iniziale nella posizione 0

1. Centrare il piano inclinato inferiore rispetto alla piattaforma di carico

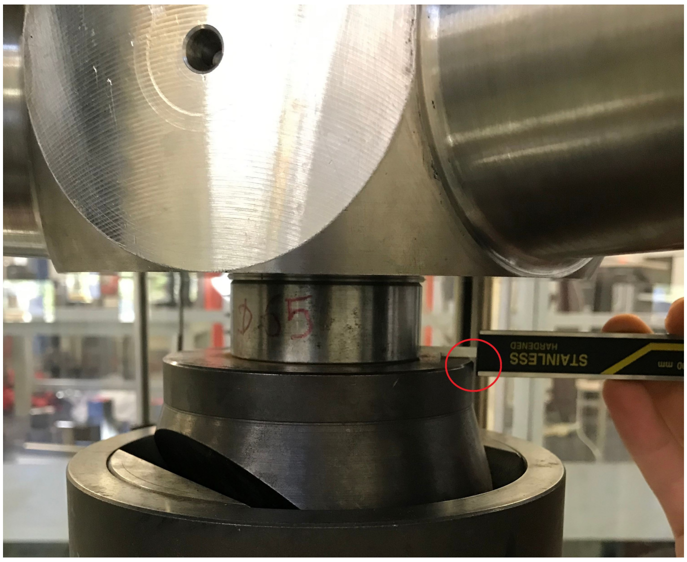


2. Posizionare il trasduttore con il riferimento degli assi in corrispondenza della posizione di 0°

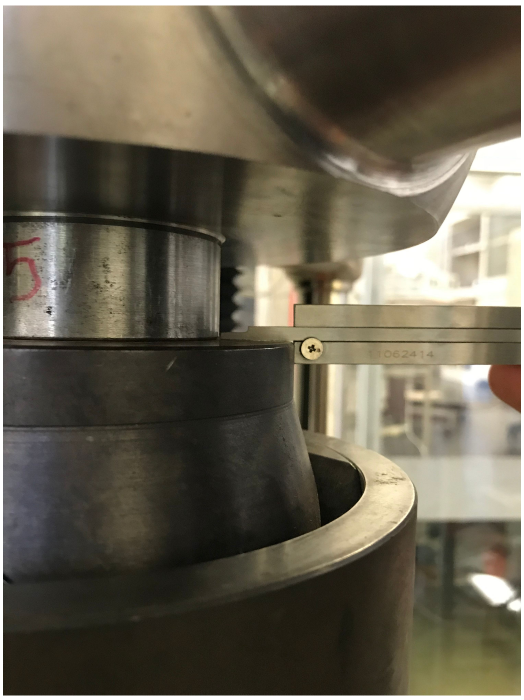
3. Collocare il piano inclinato superiore e lo snodo a doppio coltello. I due piani appariranno visibilmente disallineati; allineare a occhio il piano inclinato superiore con quello inferiore (verificare traslazioni relative tra i due piani e/o rotazioni).

4. Centrare lo snodo rispetto al piano inclinato superiore tramite opportuno blocchetto calibrato (telaio non a contatto)

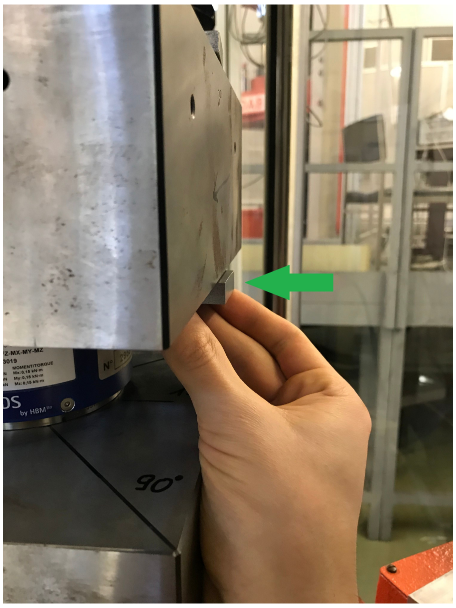
5. Mandare a contatto il telaio di carico con lo snodo e verificarne corretto il centraggio tramite il calibro **4** in Figura 4.16.



6. Nel caso il centraggio a **5.** non sia adeguato, spostare con piccoli colpi il piano inclinato superiore centrando successivamente lo snodo rispetto a tale piano, fino a quando lo snodo stesso non risulti allineato con il telaio. Fare attenzione a eseguire questi spostamenti con la traversa alzata e il telaio non a contatto con lo snodo.



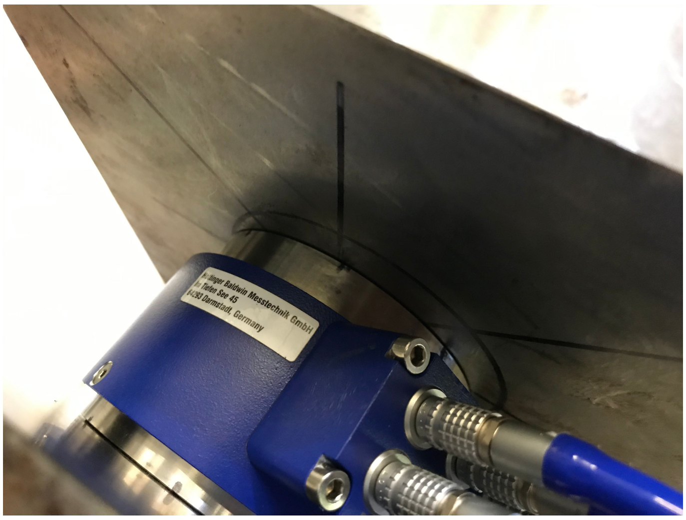
7. Centrare il trasduttore rispetto al piano inclinato superiore tramite opportuno blocchetto calibrato



8. Verificare il centraggio del trasduttore rispetto al piano inclinato inferiore tramite il calibro **3** in Figura 4.16, in questo modo sarà verificata l'assenza di traslazioni relative e/o rotazioni tra il piano superiore e quello inferiore. Nel caso di **forti** disallineamenti, eseguire il centraggio spostando direttamente il piano inferiore, ricontrollando di volta in volta tutti i precedenti allineamenti

9. Controllare il corretto orientamento del trasduttore rispetto alla posizione di 0°; se necessario ruotarlo con piccoli colpi sulla superficie laterale; ricontrollare successivamente il suo centraggio rispetto ai piani

10. Verificare l'orientamento anche attraverso i riferimenti tracciati sul piano superiore (ulteriore garanzia del corretto orientamento reciproco dei due piani inclinati).



4.3.5 Allineamento nelle posizioni A - B - C

1. Spostare il trasduttore tramite opportuno blocchetto calibrato.

2. Ripercorrere tutti i punti dell'allineamento iniziale.

4.3.6 Allineamento dopo rotazione

1. Ruotare il trasduttore manualmente o tramite il manico del martello (facendo attenzione a non arrecare danni), fino alla posizione richiesta. Se necessario, spruzzare un lubrificante sulla superficie del piano per facilitare lo spostamento relativo.

2. Durante la rotazione del trasduttore il piano superiore ruoterà in maniera solidale; ricollocarlo nella posizione corretta in maniera manuale o tramite un martello.

3. Ripercorrere tutti i punti dell'allineamento iniziale.

4.4 Matrice di utilizzo

Applicando la Formula 3.8 ai dati raccolti si ottiene la seguente matrice di utilizzo:

A =

1.2404	0.0029887	0.0083085	-0.0035597	-0.013017	-0.00015622
-0.0077486	1.255	0.0044395	-0.0010125	0.0027575	0.00022653
-0.0024377	-0.0059095	7.3772	0.0021404	-0.0015165	-0.00043311
-0.0010063	-0.00026157	0.033816	0.080089	0.00040857	-5.4514e-05
-0.00030591	-0.0010996	-0.03103	3.6407e-05	0.078725	6.4625e-05
0.010594	-0.027538	0.020807	0.033676	-0.0042541	0.084493

Figura 4.22: Matrice di utilizzo, valori espressi in $kN/(mV/V)$ e $kNm/(mV/V)$

Coerentemente con quanto esposto in precedenza, i valori sulla diagonale risultano nettamente maggiori dei termini presenti sulle rispettive colonne.

4.5 Propagazione dell'incertezza

Ogni processo di taratura è accompagnato dal calcolo dell'incertezza; in questo caso, fornire l'incertezza direttamente sui termini della matrice di utilizzo A sembra la strada più facile e immediata [18].
Il processo di propagazione dell'incertezza parte dall'individuazione di un modello matematico che leghi la variabile dipendente, di cui si vuole calcolare l'incertezza, alle variabili indipendenti, la cui incertezza è nota [19][20][21].

$$y = f(x_1 ... x_n) \tag{4.6}$$

La varianza della variabile indipendente y risulta:

$$u^2(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \, u^2(x_i)} \tag{4.7}$$

Il termine $u^2(x_i)$ è la varianza associata alla variabile x_i mentre c_i è il coefficienti di sensibilità associato alla variabile x_i:

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \tag{4.8}$$

La matrice A dipende sia dalle forze e momenti generati tramite l'ausilio di piani inclinati, affetti da una loro incertezza, sia dai valori in uscita forniti dal trasduttore, a loro volta incerti. Il metodo più semplice di propagazione è calcolare separatamente i due contributi, per poi ricomporli.

4.5.1 Incertezza sulle forze e momenti generati

Partendo dalla Formula 3.8:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [\mathbf{d}^T \, \mathbf{d}]^{-1} \, \mathbf{d}^T \, \mathbf{F} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{C} \, \mathbf{F} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Per un numero n di prove effettuate:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & . & . & . & C_{1,n} \\ C_{2,1} & . & . & . & C_{2,n} \\ C_{3,1} & . & . & . & C_{3,n} \\ C_{4,1} & . & . & . & C_{4,n} \\ C_{5,1} & . & . & . & C_{5,n} \\ C_{6,1} & . & . & . & C_{6,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x,1} & F_{y,1} & F_{z,1} & M_{x,1} & M_{y,1} & M_{z,1} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_{x,n-1} & F_{y,n-1} & F_{z,n-1} & M_{x,n-1} & M_{y,n-1} & M_{z,n-1} \\ F_{x,n} & F_{y,n} & F_{z,n} & M_{x,n} & M_{y,n} & M_{z,n} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$6\ x\ 6 =$ $(6\ x\ n)$ $(n\ x\ 6)$

Per semplificare la notazione la matrice F diventa:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{2,1} & F_{3,1} & F_{4,1} & F_{5,1} & F_{6,1} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ F_{1,n} & F_{2,n} & F_{3,n} & F_{4,n} & F_{5,n} & F_{6,n} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Il termine generico $A_{j,k}$ risulta:

$$A_{j,k} = C_{j,1}\ F_{1,k} + C_{j,2}\ F_{2,k} + ... + C_{j,n-1}\ F_{n-1,k} + C_{j,n}\ F_{n,k} \tag{4.12}$$

Le variabili indipendenti che concorrono alla determinazione del termine $A_{j,k}$ sono rappresentate dalle forze, o momenti, $F_{1\longrightarrow n,\ k}$. Immaginando di voler calcolare il termine A_{32}:

$$A_{3,2} = C_{3,1}\ F_{1,2} + C_{3,2}\ F_{2,2} + ... + C_{3,n-1}\ F_{n-1,2} + C_{3,n}\ F_{n,2} \tag{4.13}$$

Le variabili indipendenti sono in questo caso le forze F_y, applicate durante le n prove. I coefficienti di sensibilità sono direttamente i termini $C_{j,k}$:

$$c_{F_{3,1}} = \frac{\partial A_{3,1}}{\partial F_{1,2}} = C_{3,1} \tag{4.14}$$

Ne consegue:

$$u^2(A_{3,2}) = C_{3,1}^2\ u^2(F_{1,2}) + C_{3,2}^2\ u^2(F_{2,2}) + ... + C_{3,n-1}^2\ u^2(F_{n-1,2}) + C_{3,n}^2\ u^2(F_{n,2}) \tag{4.15}$$

La matrice delle varianze dei termini della matrice **A** può essere calcolata nel seguente modo:

$$\boldsymbol{u^2(A)} = \begin{bmatrix} C_{1,1}^2 & . & . & . & C_{1,n}^2 \\ C_{2,1}^2 & . & . & . & C_{2,n}^2 \\ C_{3,1}^2 & . & . & . & C_{3,n}^2 \\ C_{4,1}^2 & . & . & . & C_{4,n}^2 \\ C_{5,1}^2 & . & . & . & C_{5,n}^2 \\ C_{6,1}^2 & . & . & . & C_{6,n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2(F_{1,1}) & . & . & . & u^2(F_{1,6}) \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ . & & & . & . \\ u^2(F_{n,1}) & . & . & . & u^2(F_{n,6}) \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Le varianze sulle forze e i momenti possono essere valutate considerando i modelli matematici presentati (sezione 2.2), considerando i seguenti fattori di errore:

Simbolo	Valore	Note
F	0,002% [22]	Incertezza estesa relativa della macchina campione di forza (Categoria A)
α	0,1°	Incertezza sull'angolo di inclinazione del piano, espresso come semicampo di variabilità (Categoria B)
ω	2°	Incertezza sull'angolo di rotazione, espresso come semicampo di variabilità (Categoria B)
d_x	1 mm	Incertezza sul disallineamento lungo x, espresso come semicampo di variabilità (Categoria B)
d_y	1 mm	Incertezza sul disallineamento lungo y, espresso come semicampo di variabilità (Categoria B)
$h/2$	1 mm	Incertezza sulla semi altezza del trasduttore, espresso come semicampo di variabilità (Categoria B)

Tabella 4.5

Dalle misure sperimentali, le incertezze estese relative **percentuali** dei termini della matrice **A**, considerando il solo contributo dovuto all'errore nella generazione di forze e momenti, relativamente al trasduttore descritto in *Sezione 4.1*, risultano:

$$\boldsymbol{U(A)_F}\% = \begin{bmatrix} \mathbf{0.6653} & 268.0 & 4.660 & 119.1 & 40.35 & 143.2 \\ 107.1 & \mathbf{0.6834} & 9.047 & 537.9 & 160.6 & 102.2 \\ 35.41 & 14.73 & \mathbf{0.0004484} & 27.91 & 39.36 & 4.358 \\ 153.3 & 593.1 & 0.1748 & \mathbf{1.311} & 246.1 & 65.64 \\ 496.5 & 137.4 & 0.1839 & 2662 & \mathbf{1.324} & 53.69 \\ 543.8 & 209.9 & 13.26 & 88.48 & 719.6 & \mathbf{1.968} \end{bmatrix}$$

NOTA

Il metodo di calcolo esposto presuppone assenza di correlazione tra le variabili indipendenti in modo da non dover includere nel calcolo le covarianze.

4.5.2 Incertezza del trasduttore

Anche in questo caso è necessario partire da un modello matematico; ricordando la 3.13:

$$\begin{gathered} \mathbf{S} = [\mathbf{F}^T\ \mathbf{F}]^{-1}\ \mathbf{F}^T\ \mathbf{d} \\ \mathbf{S} = \mathbf{K}\ \mathbf{d} \end{gathered} \tag{4.17}$$

Utilizzando questa espressione diventa facile propagare gli errori commessi sulla matrice **d**; procedendo in maniera analoga al caso precedente si ha:

$$\boldsymbol{u^2(S)} = \begin{bmatrix} K_{1,1}^2 & . & . & . & K_{1,n}^2 \\ K_{2,1}^2 & . & . & . & K_{2,n}^2 \\ K_{3,1}^2 & . & . & . & K_{3,n}^2 \\ K_{4,1}^2 & . & . & . & K_{4,n}^2 \\ K_{5,1}^2 & . & . & . & K_{5,n}^2 \\ K_{6,1}^2 & . & . & . & K_{6,n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2(d_{1,1}) & . & . & . & u^2(d_{1,6}) \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ . & & & . & . \\ u^2(d_{n,1}) & . & . & . & u^2(d_{n,6}) \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Le varianze $u^2(d_{j,1})...u^2(d_{j,6})$ vengono calcolate considerando gli errori di zero[1], riproducibilità e risoluzione:

Simbolo	**Valore**	**Note**
r	0,00001	Risoluzione dello strumento di acquisizione
f_0	$0_{start} - 0_{return}$	Incertezza di zero calcolato come differenza tra lo zero iniziale e quello finale; viene utilizzato direttamente come scarto tipo (Categoria B)
U_{reprod}	$U_{j,0^\circ} - U_{j,360^\circ}$	Incertezza di riproducibilità, calcolato come differenza tra le misure svolte a rotazione *0°* e *360°*; viene utilizzato come semicampo di variabilità (Categoria B)

Tabella 4.6

	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
$r\ [mV/V]$	$0,00001$	$0,00001$	$0,00001$	$0,00001$	$0,00001$	$0,00001$
$f_0\ [mV/V]$	$0,0018$	$0,0018$	$0,0004$	$0,0734$	$0,0257$	$0,0021$
$U_{reprod}\ [mV/V]$	$0,0051$	$0,0121$	$0,0013$	$0,0985$	$0,0865$	$0,0107$

Tabella 4.7: Massimi valori di carico raggiunti in taratura

Dalle misure sperimentali, le incertezze estese relative **percentuali** dei termini della matrice **S**, considerando il solo contributo dovuto al trasduttore, risultano:

$$\boldsymbol{U(S)_T}\% = \begin{bmatrix} \mathbf{0.3416} & 276.9 & 109.2 & 154.8 & 37.21 & 531.1 \\ 58.84 & \mathbf{0.7333} & 102.6 & 354.4 & 195.7 & 204.4 \\ 24.68 & 19.92 & \mathbf{0.01130} & 44.02 & 36.97 & 18.46 \\ 76.03 & 454.9 & 3.932 & \mathbf{1.967} & 346.2 & 186.3 \\ 400.9 & 180.8 & 4.233 & 1286 & \mathbf{1.169} & 160.1 \\ 136.9 & 303.9 & 621.9 & 179.2 & 620.9 & \mathbf{4.678} \end{bmatrix}$$

4.5.3 Somma dei due contributi

Dalle elaborazioni precedenti si ottengono una matrice di utilizzo **A**, accompagnata dalle incertezze sulle forze e momenti generati, e una matrice di sensibilità **S**, accompagnata dalle incertezze legate al trasduttore.
Ipotizzando che:

$$\frac{(u^2(S)_{trasd})_{k,j}}{S^2_{k,j}} = \frac{(u^2(A)_{trasd})_{j,k}}{A^2_{j,k}} \qquad per\ j:\ 1 \longrightarrow 6\ \ e\ \ k:\ 1 \longrightarrow 6 \tag{4.19}$$

E' possibile convertire le varianze relative alla matrice **S**, che tengono conto degli errori del trasduttore, in varianze relative alla matrice **A**, sempre legate all'incertezza del trasduttore:

[1]Zero drift, ISO376

$$\left(u^2(A)_{trasd}\right)_{j,k} = \frac{\left(u^2(S)_{trasd}\right)_{j,k}}{S_{j,k}^2}\, A_{j,k}^2 \qquad per\ j:\ 1 \longrightarrow 6\ \ e\ \ k:\ 1 \longrightarrow 6 \tag{4.20}$$

Le varianze complessive saranno date da:

$$\left(u^2(A)\right)_{j,k} = \left(u^2(A)_{trasd}\right)_{j,k} + \left(u^2(A)_{forze}\right)_{j,k} \qquad per\ j:\ 1 \longrightarrow 6\ \ e\ \ k:\ 1 \longrightarrow 6 \tag{4.21}$$

La matrice di utilizzo, accompagnata dalle rispettive incertezze, espressa in $N/(mV/V))$ e $Nm/(mV/V)$ risulta:

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{1.2404 \pm 0.0093} & 0.0030 \pm 0.0115 & 0.0083 \pm 0.0091 & -0.0036 \pm 0.0070 & -0.0130 \pm 0.0071 & -0.0002 \pm 0.0009 \\
-0.0077 \pm 0.0095 & \mathbf{1.2550 \pm 0.0126} & 0.0044 \pm 0.0046 & -0.0010 \pm 0.0065 & 0.0028 \pm 0.0070 & 0.0002 \pm 0.0005 \\
-0.0024 \pm 0.0011 & -0.0059 \pm 0.0015 & \mathbf{7.3772 \pm 0.0008} & 0.0021 \pm 0.0011 & -0.0015 \pm 0.0008 & -0.0004 \pm 0.0001 \\
-0.0010 \pm 0.0017 & -0.0003 \pm 0.0020 & 0.0338 \pm 0.0013 & \mathbf{0.0801 \pm 0.0019} & 0.0004 \pm 0.0017 & -0.0001 \pm 0.0001 \\
-0.0003 \pm 0.0020 & -0.0011 \pm 0.0025 & -0.0310 \pm 0.0013 & 0.0000 \pm 0.0011 & \mathbf{0.0787 \pm 0.0014} & 0.0001 \pm 0.0001 \\
0.0106 \pm 0.0594 & -0.0275 \pm 0.1017 & 0.0208 \pm 0.1294 & 0.0337 \pm 0.0673 & -0.0043 \pm 0.0404 & \mathbf{0.0845 \pm 0.0043}
\end{bmatrix}$$

In termini relativi percentuali:

$$\boldsymbol{U(A)}\% = \begin{bmatrix}
\mathbf{0.7479} & 385.4 & 109.3 & 195.3 & 54.89 & 550.1 \\
122.2 & \mathbf{1.002} & 103.0 & 644.2 & 253.2 & 228.7 \\
43.16 & 24.77 & \mathbf{0.01131} & 52.12 & 53.10 & 18.96 \\
171.2 & 747.5 & 3.936 & \mathbf{2.364} & 424.8 & 197.5 \\
638.2 & 227.1 & 4.237 & 2957 & \mathbf{1.767} & 168.9 \\
560.8 & 369.4 & 622.1 & 199.9 & 950.5 & \mathbf{5.076}
\end{bmatrix}$$

4.6 Osservazioni

La matrice di utilizzo ricavata è coerente con quanto dichiarato dal costruttore del trasduttore:

1.2404	0.0029887	0.0083085	-0.0035597	-0.013017	-0.00015622
-0.0077486	1.255	0.0044395	-0.0010125	0.0027575	0.00022653
-0.0024377	-0.0059095	7.3772	0.0021404	-0.0015165	-0.00043311
-0.0010063	-0.00026157	0.033816	0.080089	0.00040857	-5.4514e-05
-0.00030591	-0.0010996	-0.03103	3.6407e-05	0.078725	6.4625e-05
0.010594	-0.027538	0.020807	0.033676	-0.0042541	0.084493

Figura 4.23: Matrice di utilizzo INRiM, valori espressi in $kN/(mV/V)$ e $kNm/(mV/V)$

1.2592	-0.00371	0.01351	3e-05	-0.00029	-0.00037
-0.00165	1.2765	0.01022	-0.00049	0.0001	-0.00015
-0.00208	-0.00749	7.377	0.0013	-0.00252	-0.00022
-0.00279	0.00136	0.03195	0.08114	-0.0001	7e-05
-0.00139	-0.0048	-0.03327	0.00027	0.08133	0.00019
-0.01149	0.01423	-0.00039	-0.00044	-0.00033	0.09081

Figura 4.24: Matrice di utilizzo HBM, valori espressi in $kN/(mV/V)$ e $kNm/(mV/V)$

Le incertezze ottenute hanno dei valori plausibili, in particolare è corretto che F_z abbia un incertezza molto bassa, poichè è la componente che può essere generata con la minore Incertezza, ed è corretto che la componente M_z abbia l'incertezza maggiore, prevalentemente derivante dal contributo

del trasduttore, a causa del fatto che durante le prove è stato possibile testare tale componente solo fino a circa il *5%* del fondo scala. Tuttavia questa metodologia grava fortemente sull'ipotesi 4.19 che, per quanto ragionevole che sia, non ha un preciso fondamento teorico.
Volendo verificare la riproducibilità e versatilità della metodologia appare sensato eseguire un' altra procedura di taratura analoga, su un trasduttore multicomponente praticamente identico ma con delle capacità di carico dieci volte maggiori.

Capitolo 5

Trasduttore da 100 kN

5.1 Setup sperimentale

Figura 5.1: Setup sperimentale

Il setup di questa seconda fase di sperimentazione e analogo al precedente (figura 2.1). Sulla piattaforma di carico (6) della traversa mobile (7) viene collocato il piano inclinato inferiore (5), il trasduttore in taratura (4), il piano inclinato superiore (3) e lo snodo a doppio coltello (2). E' inoltre presente

una piattaforma di centraggio (6), utile per centrare il piatto inferiore rispetto al telaio.
La macchina di taratura è a pesi diretti, con possibilità di caricare fino a 1 MN [23].

Figura 5.2: Macchina di carico a pesi diretti da 30 kN: (a sinistra) parte superiore in cui si collocano i trasduttori (a destra) parte inferiore con le masse

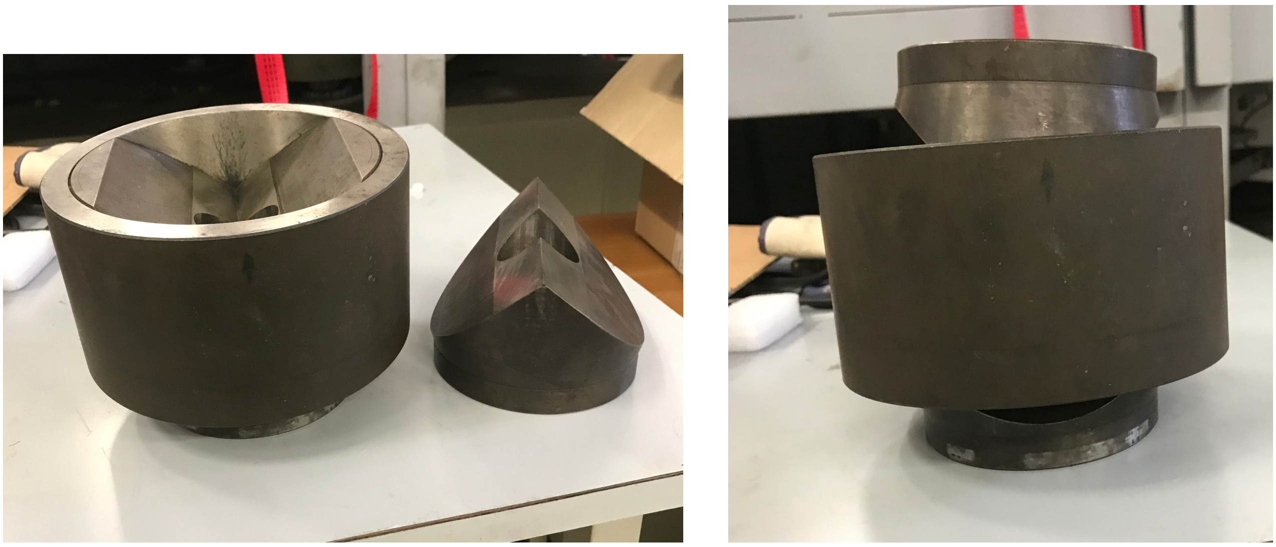


Figura 5.3: Snodo a doppio coltello

Il trasduttore utilizzato è un MCS10-100-6C HBM da 6 componenti con le seguenti capacità di carico:

F_x [N]	F_y [N]	F_z [N]	M_x [Nm]	M_y [Nm]	M_z [Nm]
20000	20000	100000	2000	2000	1500

Tabella 5.1: Capacità di carico

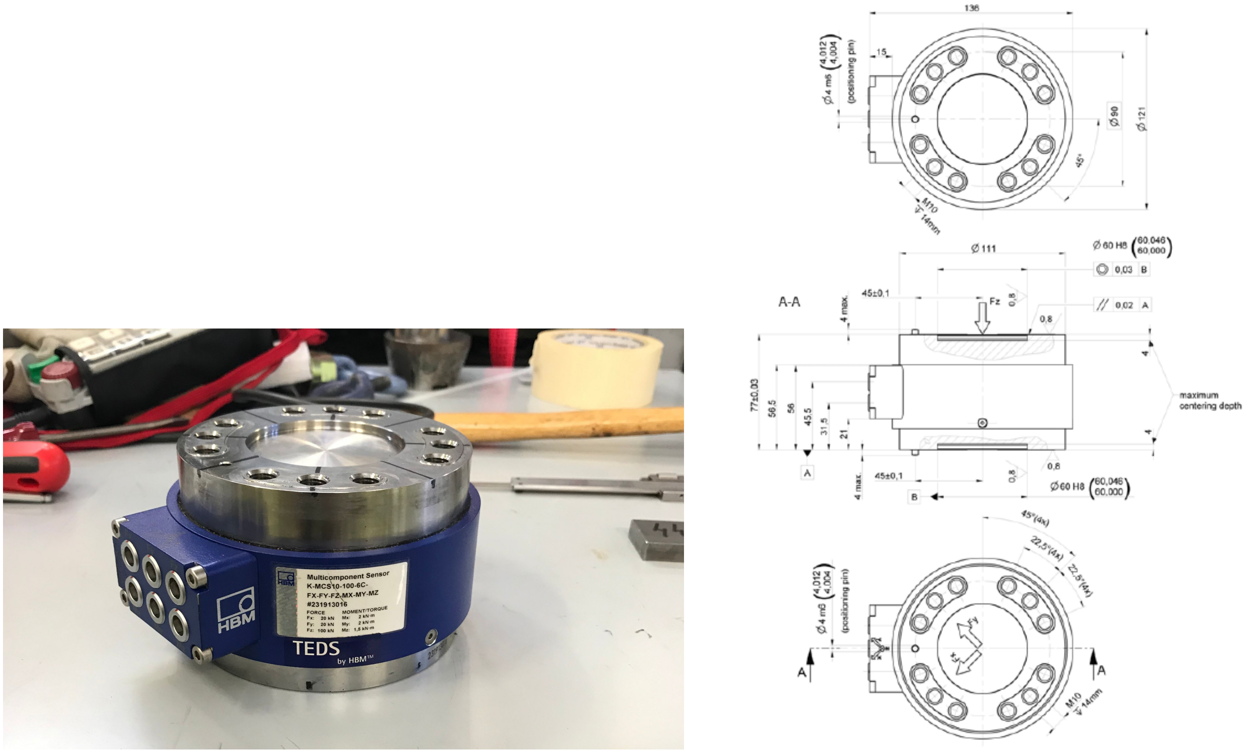


Figura 5.4: Trasduttore HBM MCS10-100-6C

Come strumento di acquisizione si utilizza l'MGC plus HBM:

Figura 5.5: MGC plus

I sei canali del trasduttore vengono alimentati a ± 10 V e 600 Hz; il segnale di uscita viene filtrato con un filtro Bessel a 0,05 Hz.

5.2 Definizione del piano sperimentale

Visti i risultati relativamente buoni ottenuti nella fase precedente, utilizzare il medesimo piano sperimentale appare la scelta giusta, anche per metterne in luce eventuali limiti.

5.2.1 Piano sperimentale

Posizione	**10000 N**	**50000 N**	**80000 N**	**100000 N**
0	0°	0°	0°	0°
	45°	45°	45°	45°
	90°	90°	90°	90°
	135°	135°	135°	135°
	180°	180°	180°	180°
	270°	270°	270°	270°
	360°	360°	360°	360°
A	0°	0°	0°	0°
	45°	45°	45°	45°
	90°	90°	90°	90°
	135°	135°	135°	135°
	180°	180°	180°	180°
	270°	270°	270°	270°
	360°	360°	360°	360°
B	0°	0°	0°	0°
	45°	45°	45°	45°
	90°	90°	90°	90°
	135°	135°	135°	135°
	180°	180°	180°	180°
	270°	270°	270°	270°
	360°	360°	360°	360°
C	0°	0°	0°	0°
	45°	45°	45°	45°
	90°	90°	90°	90°
	135°	135°	135°	135°
	180°	180°	180°	180°
	270°	270°	270°	270°
	360°	360°	360°	360°

Tabella 5.2: Piano sperimentale

Posizione	$\boldsymbol{d_x}$ [mm]	$\boldsymbol{d_y}$[mm]
0	0	0
A	0	16
B	8	0
C	16	8

Tabella 5.3: Posizioni

Queste misure sono ripetute per diversi valori dell'angolo α: 0°, 1° e 2°.

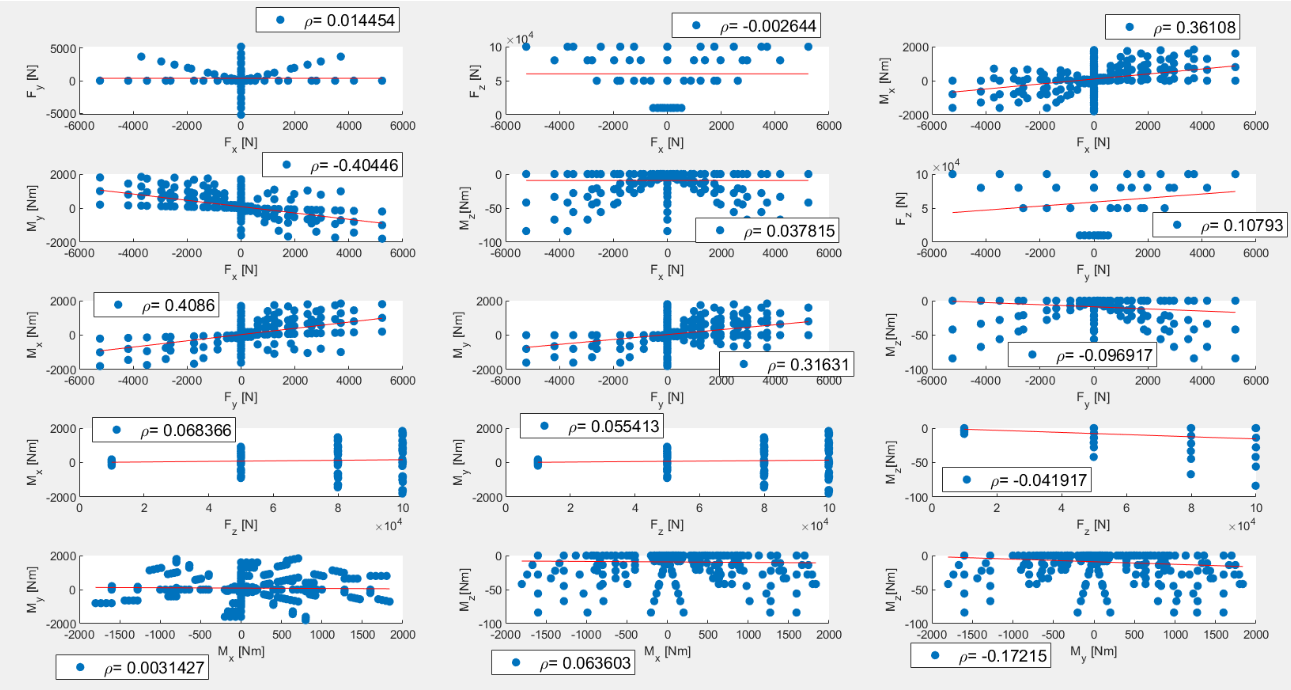


Figura 5.6: Piano sperimentale; in rosso è evidenziata la linea di regressione

	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
N; Nm	5233, 60	5233, 60	100000	1837, 21	1837, 21	83, 74
%	26, 2	26, 2	100	91, 9	91, 9	5, 6

Tabella 5.4: Massimi valori di carico raggiunti in taratura

5.3 Procedura per l'allineamento

Viene attuata la medesima procedura utilizzata in precedenza.

5.3.1 Materiale utilizzato

Figura 5.7: Materiale utilizzato

- **1**: martello di taglia grande in gomma per lo spostamento dei piani e del trasduttore
- **2**: blocchetti calibrati per le operazioni di centraggio
- **3**: calibro

5.4 Matrice di utilizzo

Applicando la Formula 3.8 ai dati raccolti si ottiene la seguente matrice di utilizzo:

A =

15.018	-0.18659	0.1169	0.10013	-0.60078	0.00051422
0.1388	14.973	-0.26827	0.39462	0.1947	0.0013087
0.0033828	0.10145	80.513	0.019584	0.03569	-0.012612
-0.020414	-0.026723	0.16856	1.0927	-0.0082712	-0.0018298
0.032942	0.052589	-0.25198	-0.012029	1.0417	0.0012569
0.06965	0.061789	3.5534	-0.17952	-0.015401	1.311

Figura 5.8: Matrice di utilizzo, valori espressi in $kN/(mV/V)$ e $kNm/(mV/V)$

I termini extradiagonali relativi ai momenti (colonne quattro e cinque) sono relativamente alti.

5.5 Propagazione dell'incertezza

Per il calcolo dell'incertezza si procede in maniera analoga a quanto fatto in precedenza per il trasduttore da 10 kN

5.5.1 Incertezza sulle forze e momenti generati

Ricordando che:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [\mathbf{d}^T\ \mathbf{d}]^{-1}\ \mathbf{d}^T\ \mathbf{F} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{C}\ \mathbf{F} \end{aligned} \tag{5.1}$$

La matrice *6 x 6* delle varianze di $\mathbf{A}$ risulta:

$$\boldsymbol{u^2(A)} = \begin{bmatrix} C_{1,1}^2 & . & . & . & C_{1,n}^2 \\ C_{2,1}^2 & . & . & . & C_{2,n}^2 \\ C_{3,1}^2 & . & . & . & C_{3,n}^2 \\ C_{4,1}^2 & . & . & . & C_{4,n}^2 \\ C_{5,1}^2 & . & . & . & C_{5,n}^2 \\ C_{6,1}^2 & . & . & . & C_{6,n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2(F_{1,1}) & . & . & . & u^2(F_{1,6}) \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ . & & & . & . \\ u^2(F_{n,1}) & . & . & . & u^2(F_{n,6}) \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Per il calcolo della varianze sulle forze e i momenti si assume:

Simbolo	Valore	Note
F	0,002%	Incertezza estesa relativa della macchina campione di forza (Categoria A)
α	0,1°	Incertezza sull'angolo di inclinazione del piano, espresso come semicampo di variabilità (Categoria B)
ω	2°	Incertezza sull'angolo di rotazione, espresso come semicampo di variabilità (Categoria B)
d_x	1 mm	Incertezza sul disallineamento lungo x, espresso come semicampo di variabilità (Categoria B)
d_y	1 mm	Incertezza sul disallineamento lungo y, espresso come semicampo di variabilità (Categoria B)
$h/2$	1 mm	Incertezza sulla semi altezza del trasduttore, espresso come semicampo di variabilità (Categoria B)

Tabella 5.5

Dalle misure sperimentali, le incertezze estese relative **percentuali** dei termini della matrice A, considerando il solo contributo dovuto all'errore nella generazione di forze e momenti, risultano:

$$\boldsymbol{U(A)_F}\% = \begin{bmatrix} \mathbf{0.6454} & 49.99 & 3.884 & 50.67 & 10.40 & 521.1 \\ 69.30 & \mathbf{0.6614} & 1.747 & 16.16 & 26.59 & 211.7 \\ 270.4 & 9.055 & \mathbf{0.0004589} & 31.46 & 17.25 & 1.786 \\ 78.69 & 59.71 & 0.3653 & \mathbf{1.007} & 129.2 & 21.83 \\ 47.79 & 29.40 & 0.2362 & 86.37 & \mathbf{1.039} & 30.88 \\ 967.6 & 1089 & 0.9052 & 207.3 & 2362 & \mathbf{1.556} \end{bmatrix}$$

5.5.2 Incertezza del trasduttore

Ricordando:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= [\mathbf{F}^T\ \mathbf{F}]^{-1}\ \mathbf{F}^T\ \mathbf{d} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{K}\ \mathbf{d} \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{u^2(S)} = \begin{bmatrix} K_{1,1}^2 & . & . & . & K_{1,n}^2 \\ K_{2,1}^2 & . & . & . & K_{2,n}^2 \\ K_{3,1}^2 & . & . & . & K_{3,n}^2 \\ K_{4,1}^2 & . & . & . & K_{4,n}^2 \\ K_{5,1}^2 & . & . & . & K_{5,n}^2 \\ K_{6,1}^2 & . & . & . & K_{6,n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2(d_{1,1}) & . & . & . & u^2(d_{1,6}) \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ . & & & . & . \\ u^2(d_{n,1}) & . & . & . & u^2(d_{n,6}) \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Le varianze $u^2(d_{j,1})...u^2(d_{j,6})$ vengono calcolate considerando gli errori di zero[1], riproducibilità e risoluzione:

[1]Zero drift, ISO376

Simbolo	Valore	Note
r	0,00001	Risoluzione dello strumento di acquisizione
f_0	$0_{start} - 0_{return}$	Incertezza di zero calcolato come differenza tra lo zero iniziale e quello finale; viene utilizzato direttamente come scarto tipo (Categoria B)
U_{reprod}	$U_{j,0°} - U_{j,360°}$	Incertezza di riproducibilità, calcolato come differenza tra le misure svolte a rotazione *0°* e *360°*; viene utilizzato come semicampo di variabilità (Categoria B)

Tabella 5.6

	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
$r\ [mV/V]$	$0,00001$	$0,00001$	$0,00001$	$0,00001$	$0,00001$	$0,00001$
$f_0\ [mV/V]$	$0,0013$	$0,0027$	$0,0004$	$0,0077$	$0,0037$	$0,0011$
$U_{reprod}\ [mV/V]$	$0,0051$	$0,0127$	$0,0012$	$0,1055$	$0,1469$	$0,0107$

Tabella 5.7: Massimi valori di carico raggiunti in taratura

Dalle misure sperimentali, le incertezze estese relative **percentuali** dei termini della matrice **S**, considerando il solo contributo dovuto al trasduttore, risultano:

$$\boldsymbol{U(S)_T}\% = \begin{bmatrix} \mathbf{0.3817} & 82.88 & 568.2 & 87.01 & 24.81 & 588.6 \\ 43.14 & \mathbf{0.9456} & 21.59 & 21.36 & 140.6 & 476.6 \\ 639.5 & 16.99 & \mathbf{0.01143} & 63.80 & 36.55 & 9.791 \\ 49.70 & 89.51 & 7.577 & \mathbf{1.331} & 233.9 & 96.27 \\ 27.75 & 52.40 & 5.933 & 119.5 & \mathbf{1.864} & 129.6 \\ 690.8 & 2184 & 10.84 & 272.4 & 229.9 & \mathbf{5.223} \end{bmatrix}$$

5.5.3 Somma dei due contributi

Ricordando l'ipotesi 4.19

$$\left(u^2(A)_{trasd}\right)_{j,k} = \frac{\left(u^2(S)_{trasd}\right)_{j,k}}{S^2_{j,k}}\, A^2_{j,k} \qquad per\ j:\ 1 \longrightarrow 6\ \ e\ \ k:\ 1 \longrightarrow 6 \tag{5.5}$$

Le varianze complessive saranno date da:

$$\left(u^2(A)\right)_{j,k} = \left(u^2(A)_{trasd}\right)_{j,k} + \left(u^2(A)_{forze}\right)_{j,k} \qquad per\ j:\ 1 \longrightarrow 6\ \ e\ \ k:\ 1 \longrightarrow 6 \tag{5.6}$$

La matrice di utilizzo, accompagnata dalle rispettive incertezze, espressa in $N/(mV/V))$ e $Nm/(mV/V)$ risulta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{15.018 \pm 0.113} & -0.187 \pm 0.181 & 0.181 \pm 0.664 & 0.117 \pm 0.101 & 0.100 \pm 0.162 & -0.601 \pm 0.004 \\ 0.139 \pm 0.113 & \mathbf{14.973 \pm 0.173} & -0.269 \pm 0.058 & 0.395 \pm 0.106 & 0.195 \pm 0.279 & 0.001 \pm 0.007 \\ 0.003 \pm 0.023 & 0.102 \pm 0.020 & \mathbf{80.513 \pm 0.009} & 0.020 \pm 0.014 & 0.036 \pm 0.014 & -0.013 \pm 0.001 \\ -0.020 \pm 0.019 & -0.027 \pm 0.029 & 0.169 \pm 0.013 & \mathbf{1.093 \pm 0.018} & -0.008 \pm 0.022 & -0.002 \pm 0.002 \\ 0.033 \pm 0.018 & 0.053 \pm 0.032 & -0.252 \pm 0.015 & -0.012 \pm 0.018 & \mathbf{1.042 \pm 0.022} & 0.001 \pm 0.002 \\ 0.070 \pm 0.828 & 0.062 \pm 1.508 & 3.553 \pm 0.386 & -0.180 \pm 0.614 & -0.015 \pm 0.366 & \mathbf{1.311 \pm 0.072} \end{bmatrix}$$

In termini relativi percentuali:

$$
\boldsymbol{U(A)}\% = \begin{bmatrix}
\mathbf{0.7498} & 96.79 & 568.2 & 100.7 & 26.90 & 786.2 \\
81.63 & \mathbf{1.154} & 21.66 & 26.78 & 143.1 & 521.5 \\
694.3 & 19.26 & \mathbf{0.01144} & 71.13 & 40.42 & 9.953 \\
93.07 & 107.6 & 7.586 & \mathbf{1.669} & 267.2 & 98.71 \\
55.27 & 60.09 & 5.937 & 147.5 & \mathbf{2.134} & 133.2 \\
1189 & 2440 & 10.87 & 342.2 & 2373 & \mathbf{5.450}
\end{bmatrix}
$$

5.6 Osservazioni

Le incertezze relative percentuali a confronto sono:

$$
\boldsymbol{U(A)_{100kN}}\% = \begin{bmatrix}
\mathbf{0.7498} & 96.79 & 568.2 & 100.7 & 26.90 & 786.2 \\
81.63 & \mathbf{1.154} & 21.66 & 26.78 & 143.1 & 521.5 \\
694.3 & 19.26 & \mathbf{0.01144} & 71.13 & 40.42 & 9.953 \\
93.07 & 107.6 & 7.586 & \mathbf{1.669} & 267.2 & 98.71 \\
55.27 & 60.09 & 5.937 & 147.5 & \mathbf{2.134} & 133.2 \\
1189 & 2440 & 10.87 & 342.2 & 2373 & \mathbf{5.450}
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{U(A)_{10kN}}\% = \begin{bmatrix}
\mathbf{0.7479} & 385.4 & 109.3 & 195.3 & 54.89 & 550.1 \\
122.2 & \mathbf{1.002} & 103.0 & 644.2 & 253.2 & 228.7 \\
43.16 & 24.77 & \mathbf{0.01131} & 52.12 & 53.10 & 18.96 \\
171.2 & 747.5 & 3.936 & \mathbf{2.364} & 424.8 & 197.5 \\
638.2 & 227.1 & 4.237 & 2957 & \mathbf{1.767} & 168.9 \\
560.8 & 369.4 & 622.1 & 199.9 & 950.5 & \mathbf{5.076}
\end{bmatrix}
$$

Il fatto che i risultati delle incertezze siano molti simili rassicura, dal momento che i due trasduttori tarati derivano dallo stesso costruttore e, verosimilmente, devono avere valori di incertezza compatibili, a parità di metodologia di taratura adottata.
La matrice di utilizzo del 100 kN è tuttavia differente da quella dichiarata dal costruttore:

15.018	-0.18659	0.1169	0.10013	-0.60078	0.00051422
0.1388	14.973	-0.26827	0.39462	0.1947	0.0013087
0.0033828	0.10145	80.513	0.019584	0.03569	-0.012612
-0.020414	-0.026723	0.16856	1.0927	-0.0082712	-0.0018298
0.032942	0.052589	-0.25198	-0.012029	1.0417	0.0012569
0.06965	0.061789	3.5534	-0.17952	-0.015401	1.311

Figura 5.9: Matrice di utilizzo INRiM, valori espressi in $kN/(mV/V)$ e $kNm/(mV/V)$

14.992	0.0074	0.04522	0.00166	-0.00397	0.00212
-0.01248	15.012	-0.06404	0.00311	-0.00439	0.00165
0.0055	0.11278	80.718	0.01352	-0.01301	-0.00956
-0.08932	0.00137	0.2127	1.1266	-0.00371	-0.00088
-0.00285	-0.02034	-0.27018	0.0007	1.1271	0.00087
-0.02334	-0.01126	0.1035	-0.00111	0.00441	1.4435

Figura 5.10: Matrice di utilizzo HBM, valori espressi in $kN/(mV/V)$ e $kNm/(mV/V)$

Questa differenza si manifesta particolarmente nei momenti; le incertezze non sembrano averne risentito quindi potrebbe trattarsi di un errore sistematico che sposta l'intera distribuzione statistica verso dei valori leggermente più bassi. Il telaio, nell'appoggiarsi sullo snodo, potrebbe tendere a ruotare leggermente, applicando una forza non perfettamente verticale; lo snodo dovrebbe riuscire a eliminare queste componenti spurie, tuttavia è possibile che, eseguendo un disallineamento piuttosto importante del trasduttore (16 mm), utilizzando un carico relativamente elevato (100 kN) e considerando la struttura molto più massiva del telaio, questo suo compito venga assolto solo in parte.

Figura 5.11: MCF 1 MN

Capitolo 6

Un nuovo approccio

Il piano sperimentale fino ad ora adottato richiede sei giorni di misure per poter essere portato a termine; il risultato non è tale da giustificare un simile impiego di risorse (incertezze relativamente alte, canali F_x e F_y testati solo fino al 25% del fondoscala e M_z fino al 5%). Ulteriore problema: le incertezze finali non vengono riferite direttamente ai valori di forza e momento, ma alla matrice di utilizzo **A**. Per rendere fruibile questa metodologia di taratura servono un nuovo piano sperimentale, più compatto, ed un approccio diverso per il calcolo dell'incertezza.

6.1 Nuova idea per il calcolo dell'incertezza

Come già visto, partendo dai dati sperimentali, si può calcolare la matrice di utilizzo:

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{d^T}\ \boldsymbol{d}]^{-1}\ \boldsymbol{d^T}\ \boldsymbol{F} \tag{6.1}$$

La matrice **A** può essere vista come l'analogo del polinomio interpolante nelle tarature dei trasduttori di forza monoassiali: il collegamento tra i valori in mV/V e i valori in N e Nm. Si procede:

$$\boldsymbol{F_{trasd}} = \boldsymbol{d}\ \boldsymbol{A} \tag{6.2}$$

Moltiplicando i dati sperimentali raccolti. per la matrice di utilizzo, si ottiene la loro conversione da mV/V in N e Nm ma non solo; se sulla matrice **d** non è possibile ragionare sui singoli canali a causa del fenomeno del crosstalk, le colonne della matrice $\mathbf{F_{trasd}}$ rappresentano effettivamente le forze F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z e possono essere trattate separatamente per il calcolo dell'incertezza, come se si trattasse di sei trasduttori indipendenti. Il sistema di misura può essere così semplificato:

Figura 6.1: Schema sistema di misura

Se la quarta riga della matrice $\mathbf{F}$, matrice dei valori di forza e momento di riferimento, fosse (valori espressi in N e Nm):

$$\mathbf{F}(4,:) = [2000, \;\; 0, \;\; 50000, \;\; 0, \;\; 620, \;\; 80] \tag{6.3}$$

Ovvero $F_x = 2000\ N$, $F_y = 0\ N$ e così via; ebbene, la quarta riga della matrice $\mathbf{F_{trasd}}$, matrice dei valori di forza e momento restituiti dal trasduttore, sarebbe, nel migliore dei casi identica, ma, nella realtà, leggermente diversa. Tali differenze sarebbero da imputare all'efficacia della matrice $\mathbf{A}$, e, indirettamente, alla bontà del piano sperimentale ma non solo; anche tutti gli errori caratteristici del trasduttore quali riproducibilità, risoluzione e errore di zero concorrerebbero a fare allontanare il valore di riferimento da quello restituito dallo strumento di acquisizione.
Considerando le diverse sorgenti di errore è possibile procedere al calcolo dell'incertezza, una componente alla volta, ripercorrendo quasi esattamente i punti prescritti dalla ISO 376 [24].

6.2 Ottimizzazione del piano sperimentale

Il nuovo piano sperimentale deve contenere un numero di prove inferiore, conservare il livello di correlazione della varibili al minimo e offrire la possibilità di calcolare l'incertezza in modo simile a quanto prescritto dalla ISO. Una possibilità è la seguente:

Ruolo	$\mathbf{d_x}$ **[mm]**	$\mathbf{d_y}$ **[mm]**	α [°]	ω [°]
	0	16	0	0
$\mathbf{M_x}$	16	0	0	90
	0	**-16**	**0**	**180**
	0	16	0	90
$\mathbf{M_y}$	-16	0	0	0
	16	**0**	**0**	**180**
	0	0	3	0
$\mathbf{F_x}$	0	16	3	0
	16	0	3	0
	8	**8**	**3**	**0**
	0	0	3	90
$\mathbf{F_y}$	16	0	3	90
	0	16	3	90
	8	**8**	**3**	**90**
	0	0	0	0
$\mathbf{F_z}$	0	0	0	90
	0	**0**	**0**	**180**
$\mathbf{M_z}$	**0**	**16**	**3**	**180**
	0	0	3	45
Filler	0	0	3	135
	0	0	3	225
	0	0	3	315
	8	16	3	45
	16	-8	3	45
	8	16	3	135
	-16	-8	3	135
	8	16	3	225
	-16	-8	3	225
	8	16	3	315
	16	-8	3	315

Tabella 6.1: Piano sperimentale

Queste misure vengono ripetute per quattro livelli di forza F applicata dalla macchina a pesi diretti: 10000 N, 50000 N, 80000 N, 100000 N; le prove contrassegnate in grassetto prevedono la registrazione anche dello zero di ritorno. Le misure totali passano da 448 a 120; di queste, 72 (18 X 4 livelli) sono necessarie per il successivo calcolo dell'incertezza mentre le altre 48 (12 Filler X 4) servono per coprire la maggior parte delle combinazioni di carico possibili e ridurre le correlazioni tra le variabili.

6.2.1 Disallineamenti negativi

La grande novità risiede nell'eseguire disallineamenti negativi:

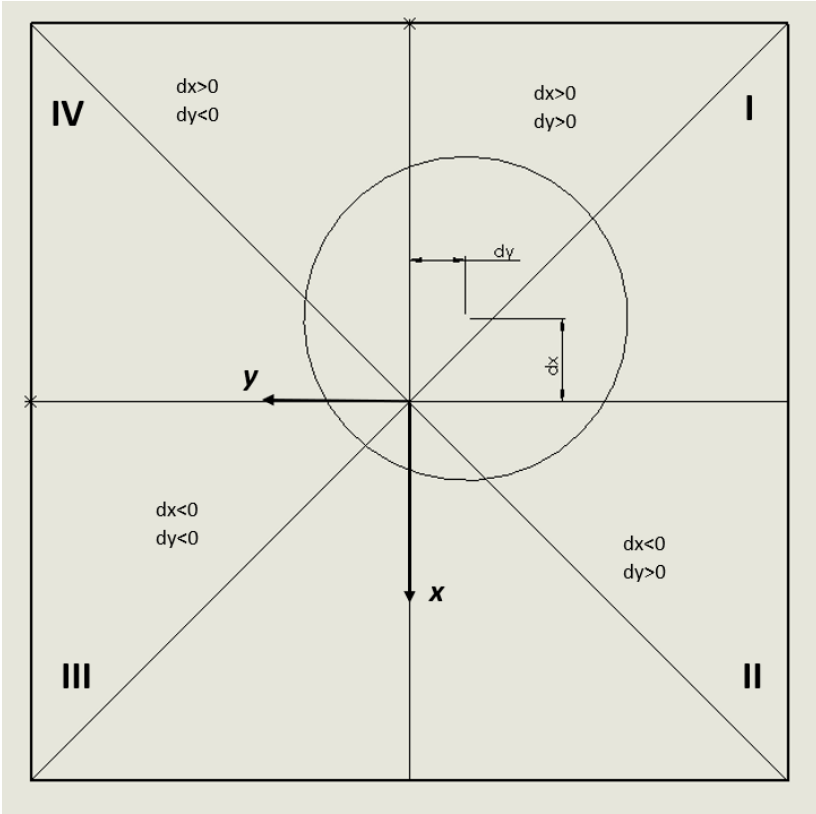


Figura 6.2: Disallineamenti e sistema di riferimento

Nel piano sperimentale iniziale i disallineamenti erano eseguiti sono nel **I** quadrante, per $x > 0$ e $y > 0$[1]. Utilizzare tutti e quattro i quadranti permette di generare nuove combinazioni di forze e momenti; con un numero inferiore di prove si riescono a ottenere dei livelli di correlazione tra le variabili mediamente più bassi. Le formule aggiornate per il calcolo delle componenti sono:

$$F_x = F \cos\omega \sin\alpha \tag{6.4}$$

$$F_y = F \sin\omega \sin\alpha \tag{6.5}$$

$$M_x \begin{cases} F\cos\alpha\,\sqrt{d_x^2+d_y^2}\,\sin(\omega+\theta)+\dfrac{F\sin\alpha\sin\omega\;h}{2} & se\;\; d_x \geq 0 \;e\; d_y \geq 0 \\ F\cos\alpha\,\sqrt{d_x^2+d_y^2}\,\sin(\theta-\omega)+\dfrac{F\sin\alpha\sin\omega\;h}{2} & se\;\; d_x \leq 0 \;e\; d_y \geq 0 \\ -F\cos\alpha\,\sqrt{d_x^2+d_y^2}\,\sin(\theta-\omega)+\dfrac{F\sin\alpha\sin\omega\;h}{2} & se\;\; d_x \geq 0 \;e\; d_y \leq 0 \\ -F\cos\alpha\,\sqrt{d_x^2+d_y^2}\,\sin(\omega+\theta)+\dfrac{F\sin\alpha\sin\omega\;h}{2} & se\;\; d_x \leq 0 \;e\; d_y \leq 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

[1]Ricordare che il disallineamento è positivo quando opposto alla direzione-verso indicata dal corrispondente asse cartesiano

$$M_y \begin{cases} -F\cos\alpha\,\sqrt{d_x^2+d_y^2}\,\cos(\omega+\theta) - \dfrac{F\sin\alpha\cos\omega\,h}{2} & se\;\; d_x \geq 0\; e\; d_y \geq 0 \\ F\cos\alpha\,\sqrt{d_x^2+d_y^2}\,\cos(\theta-\omega) - \dfrac{F\sin\alpha\cos\omega\,h}{2} & se\;\; d_x \leq 0\; e\; d_y \geq 0 \\ -F\cos\alpha\,\sqrt{d_x^2+d_y^2}\,\cos(\theta-\omega) - \dfrac{F\sin\alpha\cos\omega\,h}{2} & se\;\; d_x \geq 0\; e\; d_y \leq 0 \\ F\cos\alpha\,\sqrt{d_x^2+d_y^2}\,\cos(\omega+\theta) - \dfrac{F\sin\alpha\cos\omega\,h}{2} & se\;\; d_x \leq 0\; e\; d_y \leq 0 \end{cases} \tag{6.7}$$

$$M_z = F\,d_y\sin\alpha \tag{6.8}$$

Con θ pari a:

$$\theta = \left|\arctan\left(\frac{d_y}{d_x}\right)\right| \tag{6.9}$$

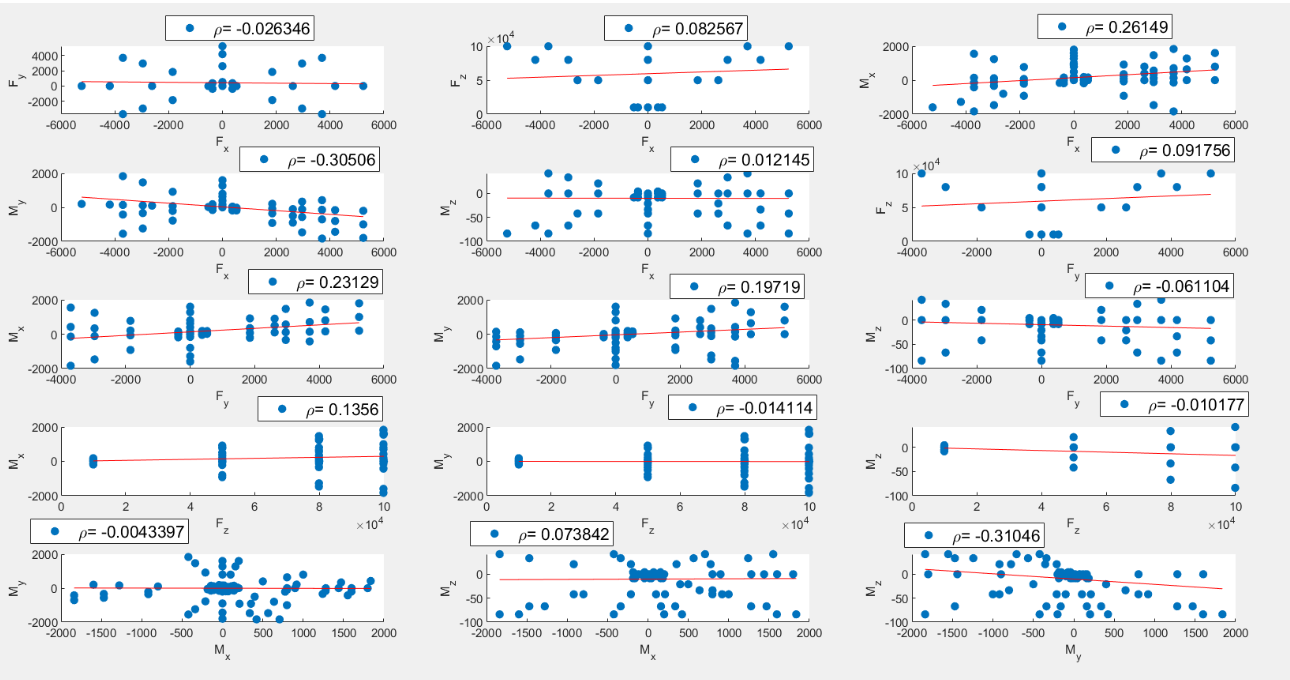


Figura 6.3: Correlazioni piano sperimentale ridotto

	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
$N;\ Nm$	5233, 60	5233, 60	100000	1837, 21	1837, 21	83, 74
%	26, 2	26, 2	100	91, 9	91, 9	5, 6

Tabella 6.2: Massimi valori di carico raggiunti in taratura

Le correlazioni tra momenti e forze (M_x-F_x, M_x-F_x, M_x-F_y) sono diminuite in quanto i punti sperimentali risultano dispersi in tutto il piano in modo più o meno omogeneo.

6.2.2 La logica dietro al nuovo piano sperimentale

I valori di disallineamento, angolo di inclinazione α e rotazione ω, scelti per le prime 18 X 4 prove, non sono casuali ma rispondono ad una precisa esigenza: ottenere dei valori di carico di riferimento, per le corrispettive componenti, indicate a fianco di ognuno dei 6 sottogruppi (Tabella 6.1), costanti. E' infatti questo l'unico modo per riuscire a ottenere una corretta valutazione della riproducibilità.
Per misurare quanto un sistema di misura è riproducibile, la ISO 376 prescrive di eseguire tre prove, a 0°, 120° e 240°, per diversi livelli di carico. La riproducibilità, espressa come incertezza tipo [25], viene poi calcolata:

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_m)^2}{n-1}} \tag{6.10}$$

Dove X_i è il valore della misura in N, o in Nm, mentre X_m è il valore medio delle n misure; **per ogni valore di carico di riferimento**, si ottiene un valore di u_2 e successivamente si potrà eseguire un fit o prendere il massimo. Nel caso di sensori multicomponenti il concetto di riproducibilità deve essere indagato una componente alla volta e può essere inteso come la capacità del trasduttore di dare risultati quasi uguali, per quella specifica componente, in prove ripetute, a seguito di **rotazioni** e/o **differenti combinazioni di carico** delle altre componenti, delle quali non si sta indagando la riproducibilità.
Si considerino le prime tre prove riportate nella Tabella 6.1, per $F = 10000\ N$ relative alla valutazione della riproducibilità del momento M_x:

$\mathbf{d_x}$ [mm]	$\mathbf{d_y}$ [mm]	α [°]	ω [°]	$\mathbf{F_x}$ [N]	$\mathbf{F_y}$ [N]	$\mathbf{F_z}$ [N]	$\mathbf{M_x}$ [Nm]	$\mathbf{M_y}$ [Nm]	$\mathbf{M_z}$ [Nm]
0	16	0	0	0	0	10000	**160**	0	0
16	0	0	90	0	0	10000	**160**	0	0
0	-16	0	180	0	0	10000	**160**	0	0

Tabella 6.3: Prove per valutazione riproducibilità M_x, $F = 10000\ N$

Tramite l'utilizzo di disallineamenti negativi è possibile ottenere un carico di riferimento per M_x pari a 160 Nm costante per le tre rotazioni 0°, 90° e 180°. Ovviamente sarebbe stato preferibile aggiungere alle rotazioni, una modifica del carico delle altre componenti, per esempio:

ω [°]	$\mathbf{F_x}$ [N]	$\mathbf{F_y}$ [N]	$\mathbf{F_z}$ [N]	$\mathbf{M_x}$ [Nm]	$\mathbf{M_y}$ [Nm]	$\mathbf{M_z}$ [Nm]
0	2000	0	10000	**160**	0	0
90	0	2000	10000	**160**	80	0
180	2000	2000	10000	**160**	0	100

Tabella 6.4: Esempio ideale per valutazione riproducibilità M_x

Tuttavia questo è concesso solo per sistemi di taratura in grado di generare le sei componenti in modo indipendente. Nel caso della componente F_x accade l'opposto:

$\mathbf{d_x}$ [mm]	$\mathbf{d_y}$ [mm]	α [°]	ω [°]	$\mathbf{F_x}$ [N]	$\mathbf{F_y}$ [N]	$\mathbf{F_z}$ [N]	$\mathbf{M_x}$ [Nm]	$\mathbf{M_y}$ [Nm]	$\mathbf{M_z}$ [Nm]
0	0	3	0	**523,36**	0	9986,3	0	-20,15	0
0	16	3	0	**523,36**	0	9986,3	159,78	-20,15	-8,37
16	0	3	0	**523,36**	0	9986,3	0	-179,93	0
8	8	3	0	**523,36**	0	9986,3	79,89	-100,04	-4,19

Tabella 6.5: Prove per valutazione riproducibilità F_x, $F = 10000\ N$

In questo caso non è possibile eseguire delle rotazione, onde modificare il valore di F_x di riferimento, ma si possono modificare le combinazioni di carico relative alle altre componenti.
Per la componente M_z si è preferito in parte riutilizzare le misure effettuate per le altre componenti[2]:

$\mathbf{d_x}$ [mm]	$\mathbf{d_y}$ [mm]	α [°]	ω [°]	$\mathbf{F_x}$ [N]	$\mathbf{F_y}$ [N]	$\mathbf{F_z}$ [N]	$\mathbf{M_x}$ [Nm]	$\mathbf{M_y}$ [Nm]	$\mathbf{M_z}$ [Nm]
0	16	3	0	5233,6	0	99862	1597,81	-201,49	**-83,74**
0	16	3	90	5233,6	0	99862	201,49	1597,81	**-83,74**
0	16	3	180	5233,6	0	-1597,81	0	201,49	**-83,74**

Tabella 6.6: Prove per valutazione riproducibilità M_z, $F = 100000\ N$

In questo caso è presente sia il fattore rotazione, sia il fattore differenti combinazioni di carico.

6.3 Calcolo dell'incertezza

L'incertezza tipo associata alla F_j componente, riferita al livello di carico c risulta:[3]

$$u_c(F_j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (u_{c,i}(F_j))^2} \tag{6.11}$$

$\boldsymbol{u_{c,1}(F_j)}$ Incertezza associata alla riproducibilità

$\boldsymbol{u_{c,2}(F_j)}$ Incertezza associata alla macchina campione

$\boldsymbol{u_{c,3}(F_j)}$ incertezza associata all'errore di zero

$\boldsymbol{u_{c,4}(F_j)}$ incertezza associata all'errore di risoluzione

6.3.1 Esempio: calcolo dell'incertezza su M_x

Dopo aver ottenuto la matrice $\mathbf{F_{trasd}}$[4] si estraggono le 3 x 4 (4 livelli di carico) prove relative alla valutazione dell'incertezza su M_x:

$\mathbf{M_{x,trasd}}$ [Nm]	$\mathbf{M_{x,ref}}$ [Nm]
1,70E+02	1,60E+02
1,61E+02	1,60E+02
1,61E+02	1,60E+02
7,94E+02	8,00E+02
7,86E+02	8,00E+02
8,22E+02	8,00E+02
1,27E+03	1,28E+03
1,25E+03	1,28E+03
1,32E+03	1,28E+03
1,58E+03	1,60E+03
1,57E+03	1,60E+03
1,65E+03	1,60E+03

Tabella 6.7: Tabella delle incertezze

[2] In Tabella, infatti, 6.1 compare una sola riga per M_z
[3] ISO 376
[4] Formula 6.2

Calcolo u_1

Per uno specifico carico di riferimento $M_{x,ref}$, u_1 risulta:[5]

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{\sum_{i=1}^{n}(M_x - \bar{M}_x)^2}{n-1}} \tag{6.12}$$

Ovvero per $n = 3$

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{\sum_{i=1}^{3}(M_x - \bar{M}_x)^2}{2}} \tag{6.13}$$

Quindi:

$\mathbf{M_{x,trasd}}$ [Nm]	$\mathbf{M_{x,ref}}$ [Nm]	$\boldsymbol{u_1}$ $[\boldsymbol{Nm}]$
1,70E+02	1,60E+02	
1,61E+02	1,60E+02	2,99
1,61E+02	1,60E+02	
7,94E+02	8,00E+02	
7,86E+02	8,00E+02	10,82
8,22E+02	8,00E+02	
1,27E+03	1,28E+03	
1,25E+03	1,28E+03	19,77
1,32E+03	1,28E+03	
1,58E+03	1,60E+03	
1,57E+03	1,60E+03	26,10
1,65E+03	1,60E+03	

Tabella 6.8: Tabella delle incertezze

Calcolo u_2

Per calcolare le incertezze sulla generazione delle forze e dei momenti si utilizza la medesima modalità adottata in precedenza (Tabella 5.5). Ognuno dei sei gruppi delle 18 X 4 misure relative alla valutazione dell'incertezza (6.1), è costruito in modo da offrire una varianza, della componente corrispondente, quasi costante con il carico di riferimento.

$\mathbf{M_{x,trasd}}$ [Nm]	$\mathbf{M_{x,ref}}$ [Nm]	$\boldsymbol{u_1}$ $[\boldsymbol{Nm}]$	$\boldsymbol{u_2^2}$ $[(\boldsymbol{Nm})^2]$
1,70E+02	1,60E+02		3,33E+01
1,61E+02	1,60E+02	2,99	3,35E+01
1,61E+02	1,60E+02		3,33E+01
7,94E+02	8,00E+02		8,33E+02
7,86E+02	8,00E+02	10,82	8,37E+02
8,22E+02	8,00E+02		8,33E+02
1,27E+03	1,28E+03		2,13E+03
1,25E+03	1,28E+03	19,77	2,14E+03
1,32E+03	1,28E+03		2,13E+03
1,58E+03	1,60E+03		3,33E+03
1,57E+03	1,60E+03	26,10	3,35E+03
1,65E+03	1,60E+03		3,33E+03

Tabella 6.9: Tabella delle incertezze

[5] ISO 376

Per ogni sottogruppo da tre si prende come varianza di riferimento la media $\bar{u_2^2}$; l'incertezza tipo corrispondente diventa:

$$u_2 = \sqrt{\bar{u_2^2}} \tag{6.14}$$

$\mathbf{M_{x,trasd}}$ [Nm]	$\mathbf{M_{x,ref}}$ [Nm]	$\boldsymbol{u_1}$ $[\boldsymbol{Nm}]$	$\boldsymbol{u_2}$ $[\boldsymbol{Nm}]$
1,70E+02 1,61E+02 1,61E+02	1,60E+02 1,60E+02 1,60E+02	2,99	5,77
7,94E+02 7,86E+02 8,22E+02	8,00E+02 8,00E+02 8,00E+02	10,82	28,88
1,27E+03 1,25E+03 1,32E+03	1,28E+03 1,28E+03 1,28E+03	19,77	46,22
1,58E+03 1,57E+03 1,65E+03	1,60E+03 1,60E+03 1,60E+03	26,10	57,77

Tabella 6.10: Tabella delle incertezze

Calcolo $\boldsymbol{u_3}$

L'incertezza tipo relativa all'errore di zero risulta:[6]

$$u_3 = f_0 = M_{x,start} - M_{x,return} \tag{6.15}$$

NOTA

I valori dello zero iniziale e di ritorno devono essere in Nm, quindi devono essere stati convertiti attraverso la matrice **A**

$\mathbf{M_{x,trasd}}$ [Nm]	$\mathbf{M_{x,ref}}$ [Nm]	$\boldsymbol{u_1}$ $[\boldsymbol{Nm}]$	$\boldsymbol{u_2}$ $[\boldsymbol{Nm}]$	$\boldsymbol{u_3}$ $[\boldsymbol{Nm}]$
1,70E+02 1,61E+02 1,61E+02	1,60E+02 1,60E+02 1,60E+02	2,99	5,77	1,26
7,94E+02 7,86E+02 8,22E+02	8,00E+02 8,00E+02 8,00E+02	10,82	28,88	1,26
1,27E+03 1,25E+03 1,32E+03	1,28E+03 1,28E+03 1,28E+03	19,77	46,22	1,26
1,58E+03 1,57E+03 1,65E+03	1,60E+03 1,60E+03 1,60E+03	26,10	57,77	1,26

Tabella 6.11: Tabella delle incertezze

[6] ISO 376

Calcolo u_4

Definita r la risoluzione dello strumento di acquisizione, in mV/V, l'incertezza tipo associata risulta:[7]

$$u_4 = \frac{r \cdot A_{44}}{\sqrt{6}} \tag{6.16}$$

Dove A_{44} rappresenta la sensibilità in $Nm/m(mV/V)$ del canale 4, ovvero di M_x.

$\mathbf{M_{x,trasd}}$ [Nm]	$\mathbf{M_{x,ref}}$ [Nm]	u_1 $[Nm]$	u_2 $[Nm]$	u_3 $[Nm]$	u_4 $[Nm]$
1,70E+02 1,61E+02 1,61E+02	1,60E+02 1,60E+02 1,60E+02	2,99	5,77	1,26	0,0046
7,94E+02 7,86E+02 8,22E+02	8,00E+02 8,00E+02 8,00E+02	10,82	28,88	1,26	0,0046
1,27E+03 1,25E+03 1,32E+03	1,28E+03 1,28E+03 1,28E+03	19,77	46,22	1,26	0,0046
1,58E+03 1,57E+03 1,65E+03	1,60E+03 1,60E+03 1,60E+03	26,10	57,77	1,26	0,0046

Tabella 6.12: Tabella delle incertezze

Calcolo incertezza estesa

L'incertezza estesa U, riferita ad uno specifico carico di taratura, si ottiene:

$$U = k\,\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} + |media_{scarti}| \tag{6.17}$$

Dove k indica l'indice di copertura ed è assunto pari a 2; $media_{scarti}$ è invece la media degli scarti delle misure dal carico di riferimento e tiene conto dell'eventuale sistematico presente nella distribuzione dei risultati:

$\mathbf{M_{x,trasd}}$ [Nm]	$\mathbf{M_{x,ref}}$ [Nm]	$\mathbf{M_{x,trasd}} - \mathbf{M_{x,ref}}$ [Nm]
1,70E+02	1,60E+02	9,83E+00
1,61E+02	1,60E+02	8,09E-01
1,61E+02	1,60E+02	8,81E-01
7,94E+02	8,00E+02	-5,67E+00
7,86E+02	8,00E+02	-1,42E+01
8,22E+02	8,00E+02	2,17E+01
1,27E+03	1,28E+03	-1,31E+01
1,25E+03	1,28E+03	-2,56E+01
1,32E+03	1,28E+03	3,90E+01
1,58E+03	1,60E+03	-1,81E+01
1,57E+03	1,60E+03	-3,21E+01
1,65E+03	1,60E+03	5,23E+01

Tabella 6.13: Tabella delle incertezze

[7] ISO 376

Il risultato finale diventa:

$\mathbf{M_{x,trasd}}$[Nm]	$\mathbf{M_{x,ref}}$[Nm]	$u_1[Nm]$	$u_2[Nm]$	$u_3[Nm]$	$u_4[Nm]$	$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{scarti}}$[Nm]	$U[Nm]$
1,70E+02	1,60E+02	2,99	5,77	1,26	0,0046	3,84E+00	1,71E+01
1,61E+02	1,60E+02						
1,61E+02	1,60E+02						
7,94E+02	8,00E+02	10,82	28,88	1,26	0,0046	6,31E-01	6,24E+01
7,86E+02	8,00E+02						
8,22E+02	8,00E+02						
1,27E+03	1,28E+03	19,77	46,22	1,26	0,0046	7,93E-02	1,01E+02
1,25E+03	1,28E+03						
1,32E+03	1,28E+03						
1,58E+03	1,60E+03	26,10	57,77	1,26	0,0046	6,78E-01	1,28E+02
1,57E+03	1,60E+03						
1,65E+03	1,60E+03						

Tabella 6.14: Tabella delle incertezze

6.3.2 Esempio: calcolo dell'incertezza su F_x

Si procede in modo analogo al caso precedente, ma con sottogruppi di quattro misure invece che tre:

$\mathbf{F_{x,trasd}}$ [N]	$\mathbf{F_{x,ref}}$ [N]	u_1 $[N]$	u_2 $[N]$	u_3 $[N]$	u_4 $[N]$	U $[N]$
5,37E+02	5,23E+02	7,20	10,06	3,08	0,0608	4,49E+01
5,54E+02	5,23E+02					
5,21E+02	5,23E+02					
5,27E+02	5,23E+02					
2,63E+03	2,62E+03	27,15	50,31	3,08	0,0608	1,20E+02
2,66E+03	2,62E+03					
2,58E+03	2,62E+03					
2,58E+03	2,62E+03					
4,20E+03	4,19E+03	38,53	80,50	3,08	0,0608	1,89E+02
4,24E+03	4,19E+03					
4,12E+03	4,19E+03					
4,14E+03	4,19E+03					
5,25E+03	5,23E+03	45,30	100,62	3,08	0,0608	2,32E+02
5,30E+03	5,23E+03					
5,16E+03	5,23E+03					
5,18E+03	5,23E+03					

Tabella 6.15: Tabella delle incertezze

6.4 Risultati

6.4.1 Matrice di utilizzo

```
A =

      14.905        0.152     -0.01844      0.13401     -0.25369    0.0043357
     -0.2469       14.865     -0.18416      0.36122      0.21804    -0.005003
 -0.00089896      0.11199       80.365    0.0019035     0.020273     -0.01892
  -0.0078419     0.019006      0.20603       1.1248   -0.0022823   -0.0010821
    0.014847     0.025335     -0.22664   -0.0089111       1.1207    0.0029683
   -0.066921     -0.47133      0.38148      -0.1029     -0.13213       1.3924
```

Figura 6.4: Matrice di utilizzo, valori espressi in $kN/(mV/V)$ e $kNm/(mV/V)$

6.4.2 Incertezze

$\mathbf{F_x}$

Ref [N]	$U(F_x)$ $[N]$	$U(F_x)$ %
5,23E+02	4,5E+01	9%
2,62E+03	1,20E+02	5%
4,19E+03	1,89E+02	5%
5,23E+03	2,32E+02	4%

Tabella 6.16: Incertezze su F_x

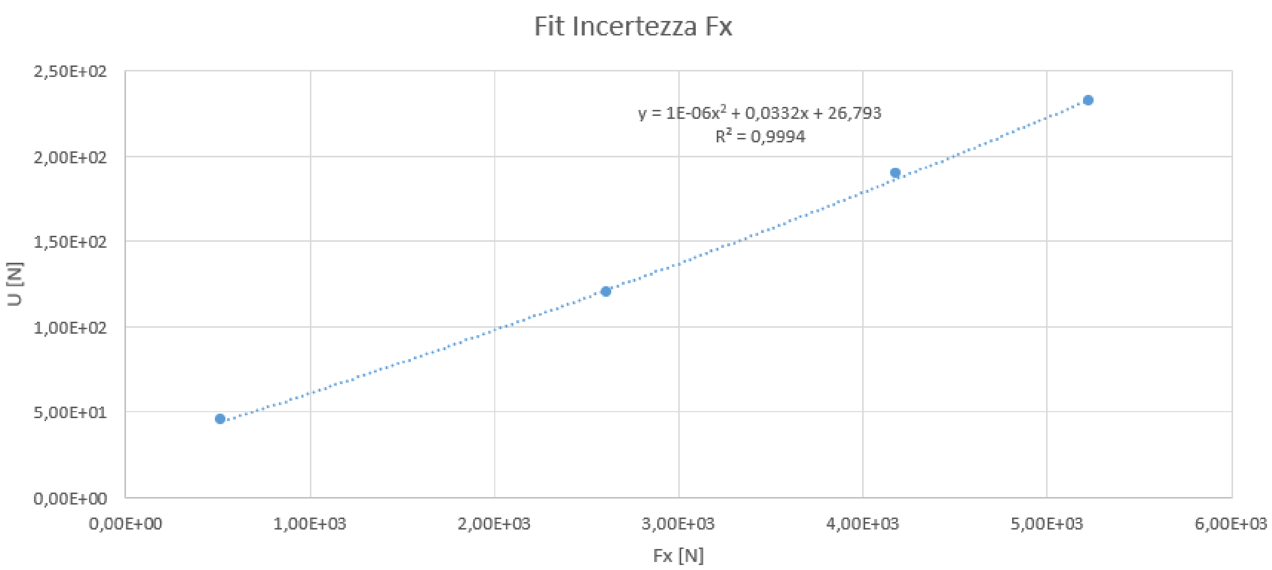


Figura 6.5: Interpolazione incertezze F_x

$$U = 10^{-6}\ F_x^2 + 0,0332\ F_x + 26,793$$

$\mathbf{F_y}$

Ref [N]	$\boldsymbol{U(F_y)\ [N]}$	$\boldsymbol{U(F_y)}$ **%**
5,23E+02	7,6E+01	14%
2,62E+03	1,25E+02	5%
4,19E+03	1,74E+02	4%
5,23E+03	2,15E+02	4%

Tabella 6.17: Incertezze su F_y

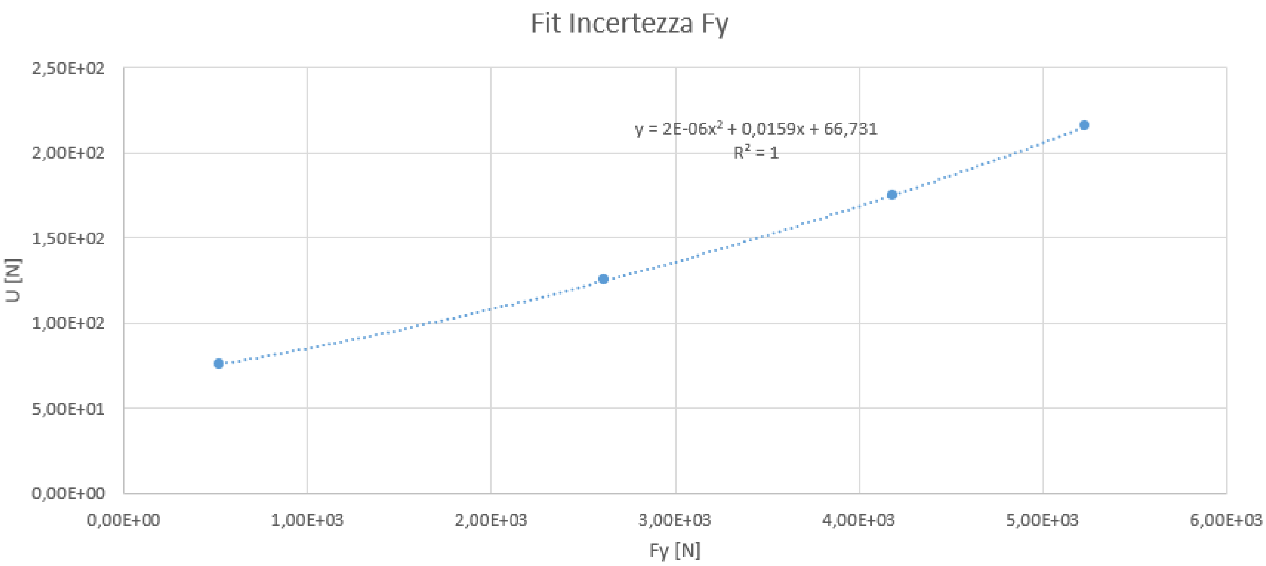


Figura 6.6: Interpolazione incertezze F_y

$$U = 2 \cdot 10^{-6}\ F_y^2 + 0,0159\ F_y + 66,731$$

$\mathbf{M_x}$

Ref [Nm]	$\boldsymbol{U(M_x)\ [Nm]}$	$\boldsymbol{U(M_x)}$ **%**
1,60E+02	1,7E+01	11%
8,00E+02	6,2E+01	8%
1,28E+03	1,01E+02	8%
1,60E+03	1,28E+02	8%

Tabella 6.18: Incertezze su M_x

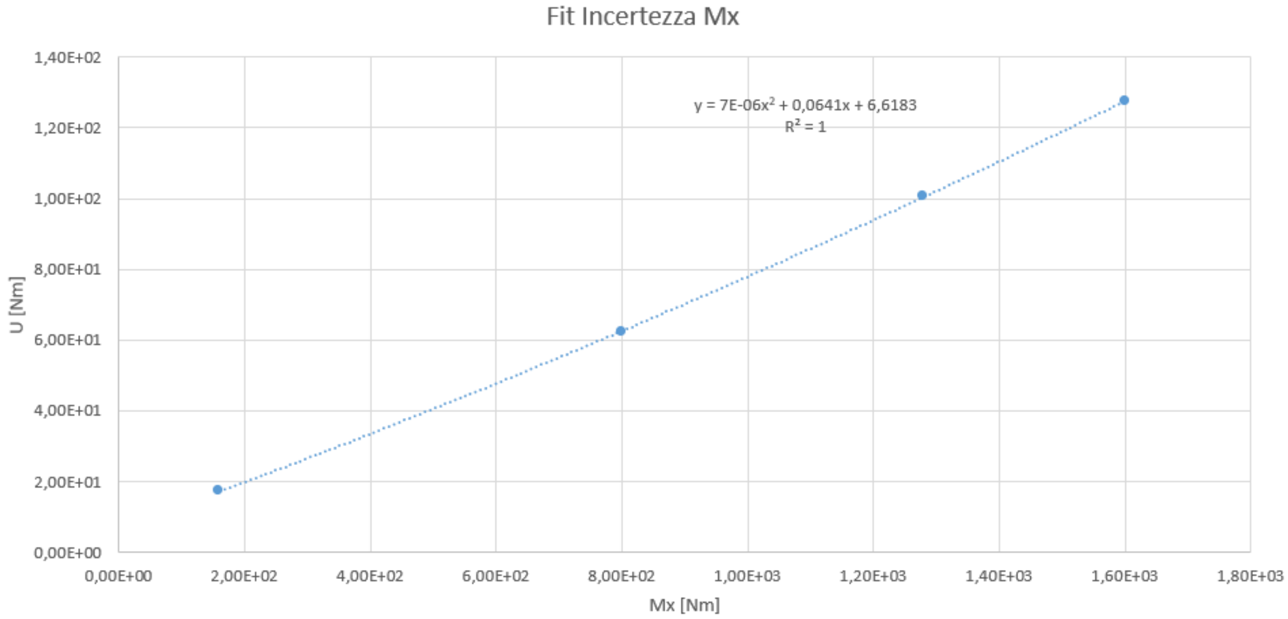


Figura 6.7: Interpolazione incertezze M_x

$$U = 7 \cdot 10^{-6}\ M_x^2 + 0,0641\ M_x + 6,6183$$

$\mathbf{M_y}$

Ref [Nm]	$U(M_y)$ [Nm]	$U(M_y)$ %
1,60E+02	2,2E+01	14%
8,00E+02	7,4E+01	9%
1,28E+03	1,19E+02	9%
1,60E+03	1,50E+02	9%

Tabella 6.19: Incertezze su M_y

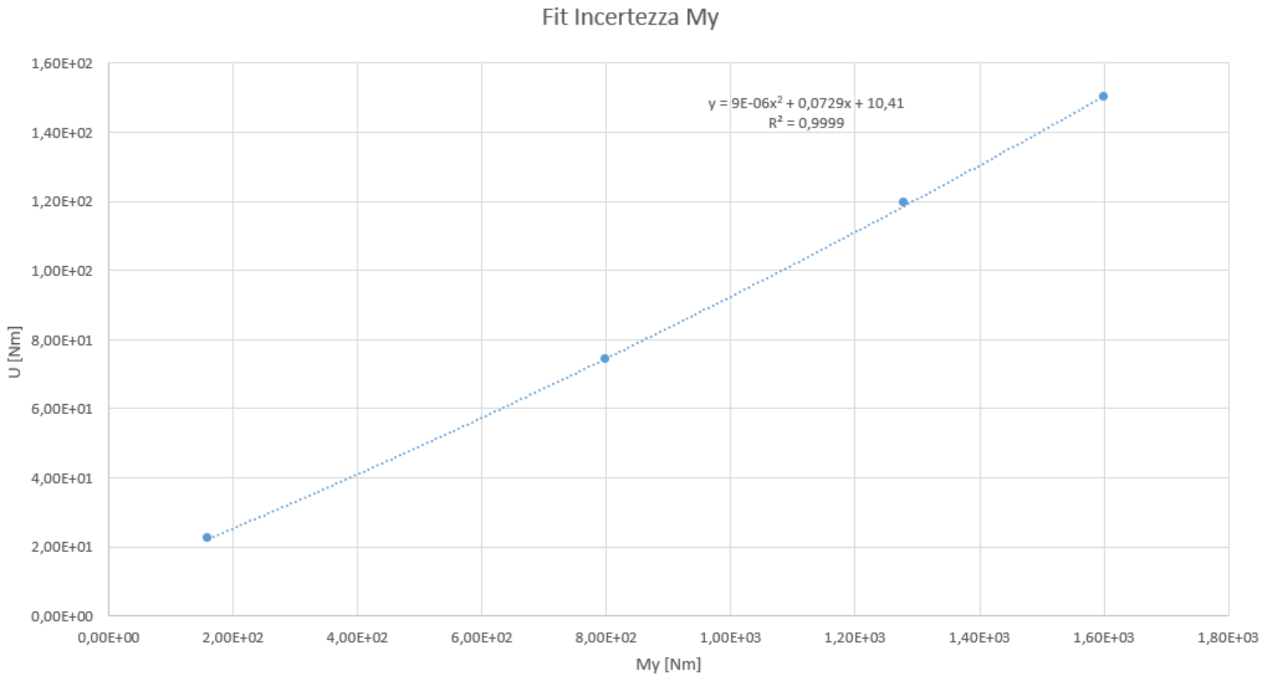


Figura 6.8: Interpolazione incertezze M_y

$$U = 9 \cdot 10^{-6}\ M_y^2 + 0,0729\ M_y + 10,41$$

$\mathbf{F_z}$

Ref [N]	$\boldsymbol{U(F_z)}$ **[N]**	$\boldsymbol{U(F_z)}$ **%**
1,00E+04	3,2E+01	0,32%
5,00E+04	1,33E+02	0,27%
8,00E+04	1,93E+02	0,24%
1,00E+05	2,52E+02	0,25%

Tabella 6.20: Incertezze su F_z

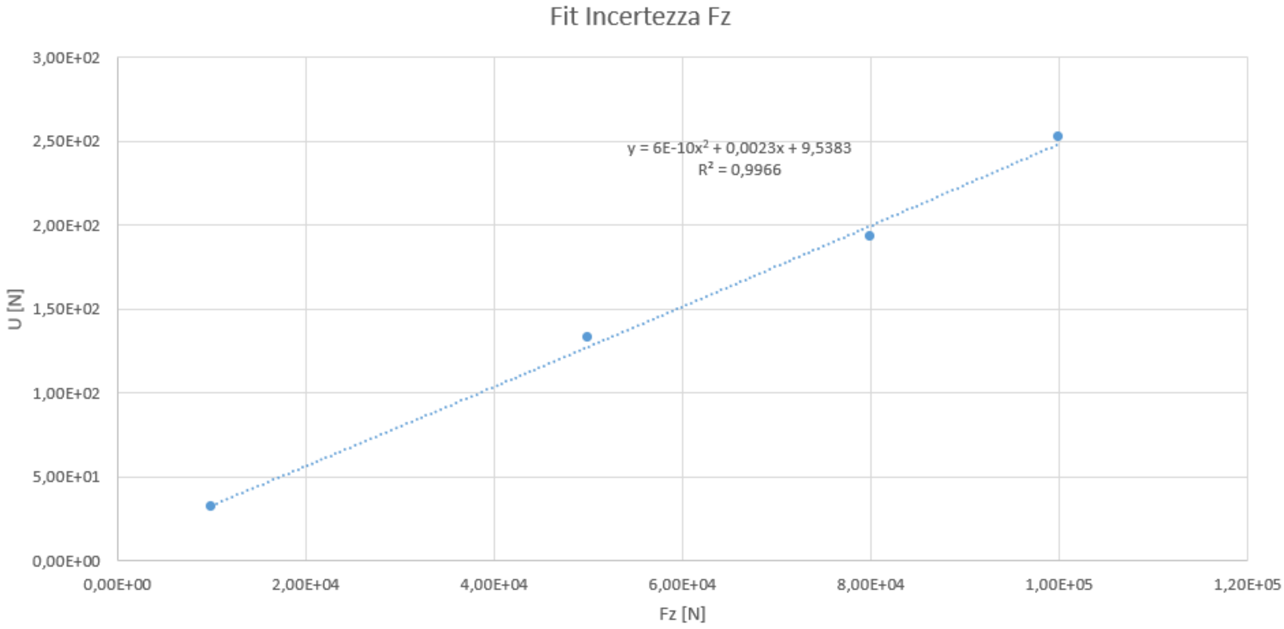


Figura 6.9: Interpolazione incertezze F_z

$$U = 6 \cdot 10^{-6}\ F_z^2 + 0,023\ F_z + 9,5383$$

$\mathbf{M_z}$

Ref [Nm]	$\boldsymbol{U(M_z)\ [Nm]}$	$\boldsymbol{U(M_z)\ \%}$
-8,37E+00	6,21E+00	74%
-4,19E+01	4,9E+00	12%
-6,70E+01	7,7E+00	12%
-8,37E+01	1,16E+01	14%

Tabella 6.21: Incertezze su M_z

$$U = 0,0027\ M_z^2 + 0,1733\ M_z + 7,4741$$

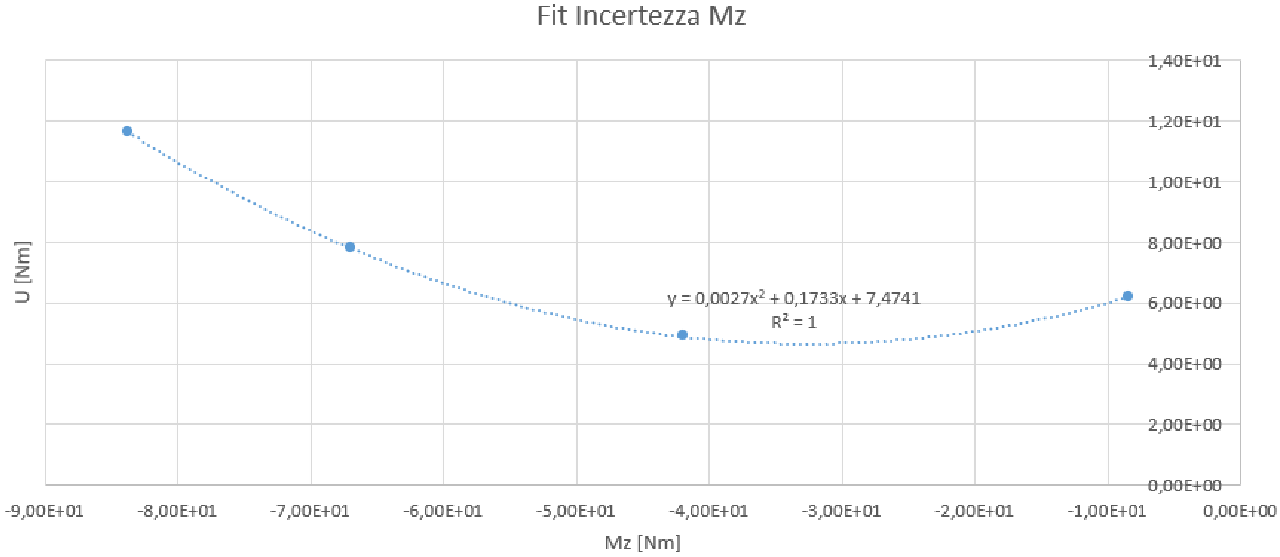


Figura 6.10: Interpolazione incertezze M_z

6.5 Osservazioni

La matrice di utilizzo derivante dai dati del nuovo piano sperimentale risulta più aderente a quella dichiarata dal costruttore, la quale non è detto che sia accurata; c'è tuttavia, almeno per i termini diagonali, una concordanza nei risultati. Si osserva, in particolare, un "miglioramento" nei momenti (quarta e quinta colonna); è possibile che, eseguendo disallineamenti un po' nel verso positivo degli assi e un po' in quello negativo, l'effetto sistematico osservato in precedenza sia stato compensato.

14.905	0.152	-0.01844	0.13401	-0.25369	0.0043357
-0.2469	14.865	-0.18416	0.36122	0.21804	-0.005003
-0.00089896	0.11199	80.365	0.0019035	0.020273	-0.01892
-0.0078419	0.019006	0.20603	1.1248	-0.0022823	-0.0010821
0.014847	0.025335	-0.22664	-0.0089111	1.1207	0.0029683
-0.066921	-0.47133	0.38148	-0.1029	-0.13213	1.3924

Figura 6.11: Matrice di utilizzo INRiM, piano ridotto, valori espressi in $kN/(mV/V)$ e $kNm/(mV/V)$

14.992	0.0074	0.04522	0.00166	-0.00397	0.00212
-0.01248	15.012	-0.06404	0.00311	-0.00439	0.00165
0.0055	0.11278	80.718	0.01352	-0.01301	-0.00956
-0.08932	0.00137	0.2127	1.1266	-0.00371	-0.00088
-0.00285	-0.02034	-0.27018	0.0007	1.1271	0.00087
-0.02334	-0.01126	0.1035	-0.00111	0.00441	1.4435

Figura 6.12: Matrice di utilizzo HBM, valori espressi in $kN/(mV/V)$ e $kNm/(mV/V)$

15.018	-0.18659	0.1169	0.10013	-0.60078	0.00051422
0.1388	14.973	-0.26827	0.39462	0.1947	0.0013087
0.0033828	0.10145	80.513	0.019584	0.03569	-0.012612
-0.020414	-0.026723	0.16856	1.0927	-0.0082712	-0.0018298
0.032942	0.052589	-0.25198	-0.012029	1.0417	0.0012569
0.06965	0.061789	3.5534	-0.17952	-0.015401	1.311

Figura 6.13: Matrice di utilizzo INRiM, piano completo, valori espressi in $kN/(mV/V)$ e $kNm/(mV/V)$

Per quanto riguarda le incertezze, i risultati sono plausibili: l'incertezza su F_z risulta in assoluta la più bassa e i momenti e le forze trasversali viaggiano intorno tra il 4% e il 10%; come già visto in precedenza, M_z raggiunge i valori più alti di incertezza.

Capitolo 7

I due metodi a confronto

E' intuitivo che i due metodi di propagazione e calcolo dell'incertezza elaborati fino ad ora, se applicati allo stesso insieme di dati, debbano fornire dei risultati consistenti. Diventa curioso verificarlo.

7.1 Piano ridotto: calcolo dell'incertezza sulla matrice di utilizzo

Prendendo i dati ottenuti nell'ultima fase sperimentale, quella relativa al piano sperimentale ottimizzato, e applicando quanto esposto nei capitolo iniziali, è possibile calcolare le incertezze sulla matrice di utilizzo $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{14.905 \pm 0.139} & 0.152 \pm 0.195 & -0.0184 \pm 0.635 & 0.134 \pm 0.130 & -0.253 \pm 0.157 & 0.004 \pm 0.010 \\ -0.247 \pm 0.142 & \mathbf{14.865 \pm 0.205} & -0.184 \pm 0.649 & 0.361 \pm 0.126 & 0.218 \pm 0.159 & -0.005 \pm 0.013 \\ -0.001 \pm 0.027 & 0.112 \pm 0.035 & \mathbf{80.365 \pm 0.096} & 0.002 \pm 0.016 & 0.020 \pm 0.030 & -0.019 \pm 0.002 \\ -0.008 \pm 0.033 & 0.019 \pm 0.051 & 0.206 \pm 0.138 & \mathbf{1.125 \pm 0.029} & -0.002 \pm 0.026 & -0.001 \pm 0.003 \\ 0.015 \pm 0.032 & 0.025 \pm 0.044 & -0.227 \pm 0.132 & -0.009 \pm 0.028 & \mathbf{1.121 \pm 0.038} & 0.003 \pm 0.003 \\ -0.067 \pm 0.897 & -0.471 \pm 1.395 & 0.381 \pm 4.231 & -0.103 \pm 0.656 & -0.132 \pm 1.314 & \mathbf{1.392 \pm 0.087} \end{bmatrix}$$

In termini relativi percentuali:

$$\boldsymbol{U(A)_{rid}^{100kN}}\% = \begin{bmatrix} \mathbf{0.9326} & 128.6 & 3443 & 96.76 & 62.08 & 235.6 \\ 57.76 & \mathbf{1.379} & 352.4 & 34.84 & 72.76 & 267.3 \\ 2965 & 31.03 & \mathbf{0.1195} & 838.1 & 147.6 & 11.78 \\ 421.8 & 268.4 & 66.96 & \mathbf{2.578} & 1148 & 259.8 \\ 220.3 & 173.5 & 58.32 & 315.0 & \mathbf{3.390} & 99.01 \\ 1340 & 295.9 & 1109 & 637.3 & 994.7 & \mathbf{6.250} \end{bmatrix}$$

Per confronto si riportano i medesimi risultati ottenuti con il piano completo da 448 misure:

$$\boldsymbol{U(A)_{compl}^{100kN}}\% = \begin{bmatrix} \mathbf{0.7498} & 96.79 & 568.2 & 100.7 & 26.90 & 786.2 \\ 81.63 & \mathbf{1.154} & 21.66 & 26.78 & 143.1 & 521.5 \\ 694.3 & 19.26 & \mathbf{0.01144} & 71.13 & 40.42 & 9.953 \\ 93.07 & 107.6 & 7.586 & \mathbf{1.669} & 267.2 & 98.71 \\ 55.27 & 60.09 & 5.937 & 147.5 & \mathbf{2.134} & 133.2 \\ 1189 & 2440 & 10.87 & 342.2 & 2373 & \mathbf{5.450} \end{bmatrix}$$

Al diminuire delle prove effettuate si osserva un piccolo aumento dell'incertezza [26], più che compensato dalla riduzione delle tempistiche e dei costi della procedura.

7.2 L'utilizzatore finale

Per l'utilizzatore, il passaggio dalle incertezze sulla matrice, a quelle sulle forze e i momenti è relativamente semplice; si ipotizzi di aver eseguito una misura, ottenendo i seguenti valori di uscite in mV/V:

$$\vec{d} = [U_{F_x}\ U_{F_y}\ U_{F_z}\ U_{M_x}\ U_{M_Y}\ U_{M_Z}] \tag{7.1}$$

I valori in N e Nm si ricavano moltiplicando per la matrice di utilizzo:

$$\vec{F} = \vec{d} \cdot \mathbf{A} \tag{7.2}$$

dove:

$$\vec{F} = [F_x\ F_y\ F_z\ M_x\ M_y\ M_z] \tag{7.3}$$

Il generico termine F_j è dato da:

$$F_j = d_1 \cdot A_{1,j} + d_2 \cdot A_{2,j} + d_3 \cdot A_{3,j} + d_4 \cdot A_{4,j} + d_5 \cdot A_{5,j} + d_6 \cdot A_{6,j} \tag{7.4}$$

La varianza su F_j invece:

$$u(F_j)^2 = d_1 \cdot u^2(A_{1,j}) + d_2 \cdot u^2(A_{2,j}) + d_3 \cdot u^2(A_{3,j}) + d_4 \cdot u^2(A_{4,j}) + d_5 \cdot u^2(A_{5,j}) + d_6 \cdot u^2(A_{6,j}) \tag{7.5}$$

L'incertezza estesa risulta:

$$U(F_j) = 2\,\sqrt{u^2(F_j)} \tag{7.6}$$

7.2.1 Esempio 1

Si immagini di applicare un momento M_x puro; la misura potrebbe fornire dei risultati del tipo:

$$\vec{d} = [1.5E-03,\ \ 1.5E-03,\ \ 1.5E-03,\ \ 1.77,\ \ 1.5E-03,\ \ 1.5E-03]$$

Il vettore $\vec{F}$:

$$\vec{F} = [8.02,\ \ 55.66,\ \ 485.15,\ \ 1991.38,\ \ -2.57,\ \ 0.14]$$

L'incertezza **percentuale relativa** risultante, componente per componente, diventa:

$$U(\vec{F})_{\%} = [729.62,\ \ 162.25,\ \ 50.35,\ \ \mathbf{2.56},\ \ 1799.8,\ \ 3353.3]$$

Su M_x l'incertezza ammonta a 2,56%; utilizzando l'altro metodo (Tabella 6.18), si ottiene circa 8%.

7.2.2 Esempio 2

$$\vec{d} = [1.3,\ \ 1.3,\ \ 1.25,\ \ 1.77,\ \ 1.77,\ \ 1.5E-03]$$

Il vettore $\vec{F}$:

$$\vec{F} = [19066,\ \ 19739,\ \ 100156,\ \ 2621,\ \ 1958,\ \ -19]$$

$$U(\vec{F})_{\%} = [1.43,\ \ 1.97,\ \ 1.23,\ \ \mathbf{9.39}\ ,\ \ 15.5,\ \ 121.52]$$

In questo caso, dalla Tabella 6.18, per interpolazione, come incertezza su M_x si otterrebbe circa un 6%.

7.2.3 Esempio 3

$$\vec{d} = [1.3, \;\; 1.3, \;\; 1.25, \;\; 1.77, \;\; 1.77, \;\; 1.0]$$

Il vettore $\vec{F}$:

$$\vec{F} = [18999, \;\; 19268, \;\; 100537, \;\; 2518, \;\; 1826, \;\; 1371]$$

$$U(\vec{F})_{\%} = [4.93, \;\; 7.51, \;\; 4.38, \;\; \mathbf{27.81} \;, \;\; 73.86, \;\; 6.56]$$

L'incertezza su M_x da Tabella 6.18 rimane intorno al 6%.

7.3 Osservazioni

Appare immediato che nel *metodo 1*[1] il valore di incertezza sulla generica componente, dipende dalla combinazione applicata: se si applicano tutte le componenti contemporaneamente si ottiene l'incertezza massima, in quanto i contributi di ciascuno dei coefficienti della matrice **A** si sommano ed è corretto che sia così. Per questa stessa ragione, nel *metodo 2* è importante applicare una elevata varietà di combinazioni differenti per la valutazione della riproducibilità (impossibile con i piani inclinati ma fattibile con altri sistemi di taratura); il risultato del *metodo 2* sarà un incertezza "media" spostata verso il caso peggiore: nell'**Esempio 2**, con cinque su sei componenti applicate al massimo, si raggiunge quasi l'incontro tra i due risultati.
Nell'**Esempio 1**, relativamente al *metodo 1*, stupisce il valore particolarmente basso di incertezza su M_x. Se l'unica componente applicata è M_x, l'unica incertezza propagata è quella del termine A_{44}, la quale risulta molto bassa (Formula 7.1). Anche questo è corretto: ogni termine della matrice è stato ottenuto come somma di n contributi, con n pari al numero delle prove (Formula 4.12); l'incertezza, elevata sulla singola prova, è stata ammortizzata sull'insieme di tutte le prove, ed è notevolmente diminuita. Il *metodo 2* in questo caso sovrastima di molto l'incertezza effettiva.
Nell'**Esempio 3**, aggiungendo la componente M_z, nel *metodo 1*, si osserva un drastico incremento di tutte le incertezze, imputabile al fatto che il momento torcente è stato testato fino al 5% del fondoscala e tutti i coefficienti della matrice dipendenti da esso hanno ereditato delle incertezze molto elevate. In generale non si osserva una grossa consistenza tra i due metodi; il perchè di questo potrebbe risiedere nell'incertezza molto elevata dei termini extradiagonali della matrice **A**. Tali coefficienti sono di per sè molto piccoli (circa intorno 10^{-3}) e la metodologia adottata per la taratura ha un substrato di incertezza **assoluta**, indipendente dal valore del misurando, al di sotto della quale non è possibile scendere: sbagliare di $\pm 1 \; mm$ l'allineamento può non aver influenza su F_z che è caricata a 100 kN ma può aver un enorme impatto su M_x, che, per esempio in quel caso, avrebbe dovuto essere circa nullo. Questi errori non si vedono nei termini diagonali della matrice, di per sè alti, ma nei termini fuori dalla matrice, molto più piccoli in valore assoluto. Alla luce di questo è possibile giustificare i valori di incertezza particolarmente elevati, riscontrati nel *metodo 1* nell'**Esempio 1**. Nel complesso il *metodo 2* appare più semplice e fruibile, per quanto possa portare ad una sovrastima del valore di incertezza.

[1] Per semplicità espositiva si indicherà con *metodo 1*, la procedura descritta nella *Sezione 4.5*, con *metodo 2*, la metodologia esposta nel **Capitolo 6**

Capitolo 8

Conclusioni

L'attività svolta ha permesso lo sviluppo di una procedura di taratura relativamente economica e accessibile, basata sull'utilizzo una macchina a pesi diretti equipaggiata con dei piani inclinati e di un piano sperimentale ottimizzato al fine di ridurre al minimo il numero di misure necessario assieme a due metodologie per il calcolo dell'incertezza. Di queste, la più affine alla ISO 376 per i trasduttori di forza monoassiali (**Capitolo 6**), si dimostra più semplice e immediata, soprattutto per l'utilizzatore finale. Con questa procedura i risultati finali, relativi al trasduttore da 100 kN, attestano un livello di incertezza massimo intorno allo 0,1 % per la componente F_z e circa 10 % per tutte le altre.
Le matrici di utlizzo ricavate si sono rivelate coerenti con quanto dichiarato dal costruttore, almeno relativamente ai termini diagonali; rimangono infatti delle problematiche sui termini extradiagonali che, data la loro piccola entità, risentono in modo molto pesante di eventuali piccoli errori nell'allineamento del trasduttore, come testimoniano le incertezze percentuali molto elevate (anche del 1000 %). E' a questo che probabilmente si deve l'elevata differenza tra le incertezze fornite dai due metodi presentati, specialmente nel caso in cui vengano applicate tutte le sei componenenti in contemporanea (*Sezione 6.7*). Sicuramente un ulteriore confronto tra le due procedure, a partire da un processo di taratura svolto su un sistema in grado di generare le sei componenti in modo indipendente, potrebbe essere determinante per la loro ulteriore validazione.

Bibliografia

[1] J. Nitsche, S. Baumgarten, M. Petz, D. Röske, R. Kumme and R. Tutsch, *Measurement uncertainty evaluation of a hexapod-structured calibration device for multi-component force and moment sensors*, Metrologia, vol. 54, n^{o}. 2, pp. 171, 2017.

[2] D. Röske, *Metrological characterization of a hexapod for a multi-component calibration device*, XVII IMEKO World Congress, Dubrovnik, Croatia, June 2003.

[3] D. Röske, D. Peschel, K. Adolf *The generation and measurement of arbitrarily directed forces and moments*, Proceedings of the 17^{th} international conference of force, mass, torque and pressure measurements, IMEKO TC3, 17-21 Sep. 2001, Instanbul, Turkey, 2001.

[4] S. Baumgarten, D. Röske, R. Kumme, *Multi-component measuring device - completion, measurement uncertainty budget and signal cross-talk for combined load conditions*, ACTA IMEKO, vol. 6, n^{o}. 4, 2017.

[5] A. Bray, G. Barbato, R. Levi, *Theory and practice of force measurement*, Academic Press, London, UK, 1990.

[6] C. Ferrero, L. Q. Zhong, C. Marinari, E. Martino, *New automatic multicomponent calibration system with crossedflexure levers*, The 3rd Int. Symp. on Measurement and Control in Robotics, pp Cm.I-31–Cm.I-39, 1993.

[7] G. Barbato, A. Bray, S. Desogus, F. Franceschini, A. Germak, *Field calibration method for multicomponent robotic force/moment transducers*, II International Symposium on Measurement and Control in Robotics, Tsukuba Science City, Japan, Nov. 1992.

[8] Ranganath R., Nair P. S., Mruthyunjaya T. S., Ghosal A. *A force-torque sensor based on a Stewart platform in a near-singular configuration*, Mech. Mach. Theory 39 971-98, Japan, Nov. 1992.

[9] Parenti Castelli V., Di Gregorio R., *Closed form solution of the direct kinematics of the 6-3 type Stewart platform using one extra sensor* , Meccanica 31 705-14, 1996.

[10] K. Hoffmann, *An introduction to measurements using strain gages*, Hottinger Baldwin Messtechnik, Darmstadt, 1989.

[11] S. Palumbo, A. Germak, F. Mazzoleni, S. Desogus, G. Barbato *Design and metrological evaluation of the new 5 MN hexapod-shaped multicomponent build-up system*, Metrologia, April. 2016.

[12] S. Palumbo, A. Prato, F. Mazzoleni, A. Germak, *Multicomponent force transducer calibration procedure using tilted plates*, XXII World Congress, Belfast, UK, Sept. 2018.

[13] Barbato G.,Bray A., Germak A. e Levi R., *Calibration and verification of multicomponent dynanometers in the Meganewton range*, Martinus Nijhoff publishers, 1986.

[14] S. Baumgarten, H. Kahmann, D. Röske, *Metrological characterization of a 2 kN·m torque standard machine for superposition with axial forces up to 1 MN*, Metrologia, vol. 53, n°. 5, pp. 1165–76, 2016.

[15] G. Barbato, S. Desogus, A. Germak, M. Vattasso, *Feedback controlled deadweight machine*

[16] *https://www.hbm.com/it/5626/sensori-multi-componente/*

[17] R. Fisher, *The Arrangement of Field Experiments*, Journal of the Ministry of Agriculture of Great Britain, vol. 33, pp. 503–513, 1926

[18] Prato A., Mazzoleni F., Schiavi A., *Traceability of digital 3-axis MEMS accelerometer: simultaneous determination of main and trasverse sensitivities in the frequency domain*, Metrologia, 2020.

[19] Barbato G., Germak A., Genta G., *Misurare per decidere*, Escuplapio, 2002.

[20] *JCGM 2008 Evaluation of Measurement Data - Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, JCGM 100:2008, Parigi.

[21] *JCGM 2008 Evaluation of Measurement Data - Supplement 1 to the 'Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement' - Propagation of Distributions using a Monte Carlo Method*, JCGM 101:2008, Parigi.

[22] https://www.bipm.org/kcdb/cmc/search?domain=PHYSICS & areaId=4 & keywords=italy & specificPart.branch=16 & specificPart.service=35 & specificPart.subService=113 & specificPart.individualService=-1 & _countries=1 & publicDateFrom= & publicDateTo= & unit= & minValue= & maxValue= & minUncertainty= & maxUncertainty=

[23] G. Barbato, A. Bray, F. Franceschini, R. Levi, F. Trevissoi *The new 1 MN dead-weight force standard machine: description of the installation procedure followed at the Istituto di Metrologia "G. Colonnetti"*, Proceedings of the XIII IMEKO World Congress, Torino, Sept. 1994

[24] *UNI EN ISO 376*, 2011.

[25] *JCGM 2008 Internetional vocabulary of metrology - Basic and general concepts and associated terms (VIM)*, JCGM 200:2012, Parigi.

[26] A. Prato, D. Borgiattino, F. Mazzoleni, A. Facello, A. Germak *Theoretical insights on the influence of the experimental plan in the calibration of multicomponent force and moment transducers*, XXIII IMEKO World Congress, Yokohama, Japan, August 2021.