

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Civile

Tesi di Laurea Magistrale

Edifici di grande altezza: Il calcolo delle tensioni negli elementi verticali a sezione sottile



Relatori

Ch.mo prof. Alberto Carpinteri
Ch.mo prof. Giuseppe Lacidogna
DR. Giuseppe Nitti

Candidato

Emanuele Filoni

Anno Accademico 2020-2021

Indice

Elenco delle figure	3
1 Introduzione	7
2 Ripartizione degli sforzi tra elementi irrigidenti degli edifici alti: L'Algoritmo Generale	11
3 Travi di sezione sottile aperta soggette a torsione: la teoria di Vlasov	17
4 Il calcolo automatico delle tensioni	29
4.1 Gli input dell'algoritmo	29
4.2 Determinazione del diagramma settoriale principale	31
4.3 Determinazione dei momenti statici	31
4.4 Determinazione delle tensioni	31
4.5 Il codice di calcolo	33
5 Esempi applicativi	37
5.1 Esempio n.1	37
5.2 Esempio n.2	44
5.3 Esempio n.3	53
6 Caso studio: il grattacielo RAI in Torino	63
6.1 Descrizione della struttura	63
6.2 Modello di calcolo	65
6.2.1 Azione del vento	65
6.3 Risultati	67
6.3.1 Spostamenti	67
6.3.2 Reazioni interne	67
6.3.3 Tensioni	68
7 Conclusioni	79
Bibliografia	81

Elenco delle figure

1.1	Home Insurance Building (42 m), Chicago (fonte www.History.com). . .	7
1.2	Sears Tower (442 m), Chicago (fonte web).	8
1.3	Petronas Towers (452 m), Kuala Lumpur; Taipei 101 (509 m), Taipei; Burj Khalifa (828 m), Dubai (fonte web).	8
1.4	Gli edifici più alti del mondo.	9
2.1	Schematizzazione di un edificio alto con un sistema di riferimento de- strosso ([1]).	12
2.2	Sistema di riferimento globale e sistema di riferimento locale ([1]). . . .	13
3.1	Trave a mensola con sezione ad "I" soggetta a un carico concentrato applicato sull'estremità di una flangia ([1]).	18
3.2	Calcolo della coordinata settoriale ω ([1]).	18
3.3	Trave a sezione sottile aperta soggetta ad azioni trasversali ([1]).	20
3.4	Equilibrio in direzione longitudinale di una striscia infinitesima della tra- ve ([1]).	22
3.5	Pareti di taglio con sezione contenente tratti convergenti nello stesso pun- to ([1]).	26
4.1	Diagramma di flusso dell'algoritmo per il calcolo delle tensioni.	30
5.1	Esempio n.1 - Pianta dell'elemento e condizione di carico (misure espres- se in metri).	37
5.2	Esempio n.1 - Assonometria dell'elemento.	38
5.3	Esempio n.1 - Numerazione dei vertici della sezione.	40
5.4	Esempio n.1 - Valore coordinata settoriale ω nei vertici.	43
5.5	Esempio n.1 - Valore della tensione normale nei vertici divisa in: contri- buto derivante dalla teoria di Saint Venant e contributo aggiuntivo deri- vante dalla teoria di Vlasov.	43
5.6	Esempio n.1 - Tensione normale totale agente nei vertici della sezione. . .	44
5.7	Esempio n.1 - Valore della tensione tangenziale derivante dalla teoria di Jourawsky e dal momento torcente secondario (Vlasov).	44
5.8	Esempio n.1 - Tensione tangenziale totale agente nei vertici della sezione.	45
5.9	Esempio n.2 - Pianta dell'elemento e condizione di carico (misure espres- se in metri).	46
5.10	Esempio n.2 - Assonometria dell'elemento.	47
5.11	Esempio n.2 - Numerazione dei vertici della sezione.	48
5.12	Esempio n.2 - Valore coordinata settoriale ω nei vertici.	51

5.13	Esempio n.2 - Valore della tensione normale nei vertici divisa in: contributo derivante dalla teoria di Saint Venant e contributo aggiuntivo derivante dalla teoria di Vlasov.	51
5.14	Esempio n.2 - Tensione normale totale agente nei vertici della sezione. . .	52
5.15	Esempio n.2 - Valore della tensione tangenziale derivante dalla teoria di Jourawsky e dal momento torcente secondario (Vlasov) in valore assoluto.	52
5.16	Esempio n.2 - Tensione tangenziale totale agente nei vertici della sezione.	53
5.17	Esempio n.3 - Pianta dell'elemento e condizione di carico (misure espresse in metri).	54
5.18	Esempio n.3 - Assonometria dell'elemento.	55
5.19	Esempio n.3 - Numerazione dei vertici della sezione.	56
5.20	Esempio n.3 - Valore coordinata settoriale ω nei vertici.	59
5.21	Esempio n.3 - Valore della tensione normale nei vertici divisa in: contributo derivante dalla teoria di Saint Venant e contributo aggiuntivo derivante dalla teoria di Vlasov.	59
5.22	Esempio n.3 - Tensione normale totale agente nei vertici della sezione. . .	60
5.23	Esempio n.3 - Valore della tensione tangenziale derivante dalla teoria di Jourawsky e dal momento torcente secondario (Vlasov) in valore assoluto.	60
5.24	Esempio n.3 - Tensione tangenziale totale agente nei vertici della sezione.	61
6.1	Il grattacielo Rai in Torino (fonte web).	63
6.2	Localizzazione dell'edificio all'interno della città di Torino.	64
6.3	Scansione del progetto originario: Planimetria piano tipo (fonte: Sezione Archivi della Biblioteca Centrale di Architettura "Roberto Gabetti", Politecnico di Torino).	65
6.4	Scansione del progetto originario: prospetto su via Guicciardini (fonte: Sezione Archivi della Biblioteca Centrale di Architettura "Roberto Gabetti", Politecnico di Torino).	66
6.5	Grattacielo RAI: Planimetria piano tipo.	70
6.6	Grattacielo RAI: Vista assonometrica del modello sviluppato con l'utilizzo del codice TaBu.	71
6.7	Azioni torcenti su edifici a pianta rettangolare (fonte: CNR-DT 207 R1/2018).	71
6.8	Carichi del vento applicati nel centro geometrico dei piani.	72
6.9	Spostamenti in direzione x (ξ), spostamenti in direzione y (η), rotazioni attorno all'asse z (θ).	72
6.10	Geometria del setto VL1 e posizione del baricentro G e del centro di taglio C (misure in metri).	73
6.11	Momento flettente attorno all'asse x (M_x), momento flettente attorno all'asse y (M_y) agenti sul setto VL1.	73
6.12	Bimomento (B) agente sul setto VL1.	74
6.13	Taglio in direzione x (T_x), taglio in direzione y (T_y) agenti sul setto VL1.	74
6.14	Momento torcente primario, secondario e totale agenti sul setto VL1. . . .	75
6.15	Numerazione dei punti in cui viene calcolata la tensione agente.	75
6.16	Valore della coordinata settoriale nei vertici scelti del setto VL1.	76
6.17	Tensione assiale dovuta ai carichi orizzontali agenti sul setto VL1 (Sezione di base).	76
6.18	Tensione tangenziale dovuta ai carichi orizzontali agenti lungo la linea media del setto VL1 (Sezione di base).	77

6.19	Tensione tangenziale totale agente negli estremi della corda nei vertici (Piano decimo).	77
6.20	Variazione lungo l'altezza della tensione agente lungo le fibre longitudinali nel vertice n.7.	78

Abstract

L'analisi strutturale degli edifici alti può essere eseguita utilizzando i programmi agli elementi finiti (FE), tuttavia, data la complessità di questo tipo di strutture, l'utilizzo di questi modelli può condurre a tempi di computazione elevati, oltre che a budget cospicui. Inoltre, eseguire un'analisi di questo tipo può portare a errori concettuali e a difficoltà di interpretazione del reale comportamento strutturale.

In virtù di quanto appena espresso, è stata sviluppata una formulazione analitica, denominata Algoritmo Generale, che grazie ad alcune ipotesi semplificative consente la modellazione di edifici alti in modo semplice e allo stesso tempo sufficientemente accurata il cui utilizzo è molto utile soprattutto in fase di progettazione. Originariamente questa formulazione era piuttosto limitata e permetteva l'analisi solo di alcuni tipi di strutture. Nel corso degli anni, anche grazie al contributo del Prof. Giuseppe Lacidogna, del Dr. Sandro Cammarano, e del Dr. Giuseppe Nitti, sono stati introdotti nuovi algoritmi di calcolo al fine di poter analizzare più tipologie possibili di edifici alti.

Di pari passo con lo sviluppo della formulazione analitica, nel corso degli anni la è stato creato un codice di calcolo, sviluppato in MATLAB, chiamato TaBu (**T**all **B**uilding), in grado di calcolare gli edifici alti, permettendo l'analisi in termini di spostamenti, reazioni interne e caratteristiche della sollecitazione.

In questo lavoro di tesi è stato creato un algoritmo, basato sulla teoria delle aree settoriali, che implementato in MATLAB, ed integrato all'interno del codice TaBu, consente di calcolare in maniera automatica le tensioni normali e di taglio nei vari punti di una sezione sottile aperta o chiusa.

In questo modo, utilizzando il software TaBu, è possibile, oltre che il calcolo automatico di spostamenti, reazioni interne e sollecitazioni, anche il calcolo dello stato tensionale in ogni punto dell'*i*-esimo elemento irrigidente di un edificio alto.

Infine, per validare il software, è stato effettuato il calcolo di un edificio alto presente nella città di Torino: il grattacielo RAI sito in via Cernaia. I risultati ottenuti dimostrano come il codice di calcolo analitico proposto in questo lavoro sia un ottimo strumento per il progetto preliminare di edifici di grande altezza. In particolare, la formulazione proposta fornisce risultati simili a quelli ottenibili tramite l'utilizzo di un modello FEM riducendo notevolmente le tempistiche di computazione che sono proporzionali al quadrato dei gradi di libertà.

Capitolo 1

Introduzione

Gli edifici alti rappresentano il progresso tecnologico di un paese, in alcuni casi, questi sono dei veri e propri simboli del paese stesso, basti pensare all'Empire State Building a New York, alla Willis Tower in Chicago, alle Petronas Tower in Kuala Lumpur, al Burj Khalifa in Dubai e così via.

Gli edifici alti vennero costruiti in particolari aree del pianeta, in particolare in quelle zone dove vi è stata una importante crescita demografica. L'Home Insurance Building di Chicago (Figura 1.1) è considerato il primo edificio alto della storia, aperto nel 1884, ha 12 piani e un'altezza di 42 metri.



Figura 1.1. Home Insurance Building (42 m), Chicago (fonte www.History.com).

Fino alla metà del ventesimo secolo le uniche città a poter vantare un contesto urbano caratterizzato da edifici di grande altezza erano New York, Chicago, Houston. L'edificio più alto del mondo fino al 1997 è stato la Sears Tower (442 m) in Chicago (Figura 1.2).

Questo record fu battuto dalle Petronas Towers (452 m) in Kuala Lumpur strappandolo così alle città americane, fino a quel momento detentrici del record di altezza. Nel 2004, Taipei 101 a Taipei tocca un'altezza di 509 m diventando l'edificio più alto del mondo sino



Figura 1.2. Sears Tower (442 m), Chicago (fonte web).

al 2010, anno di completamento del Burj Khalifa a Dubai che è ancora oggi il grattacielo più alto del globo con un'altezza di 828 metri (Figura 1.3).



Figura 1.3. Petronas Towers (452 m), Kuala Lumpur; Taipei 101 (509 m), Taipei; Burj Khalifa (828 m), Dubai (fonte web).

Tra gli edifici di grande altezza costruiti negli ultimi anni vanno citati la One World Trade Center Tower di New York (2014 - 541,3 m), Abraj Al-Bait Clock Tower alla Mecca (2012 - 601m), Shanghai Tower a Shanghai (2015 - 632 m). In Figura 1.4 è riportato un grafico dove sono riportati gli otto edifici più alti del mondo e le relative altezze.

La maggioranza dei grattacieli sono locati negli States, in Cina, negli Emirati Arabi e in tutti quei paesi dove si ha una grande capacità economica e un buon progresso tecnologico.

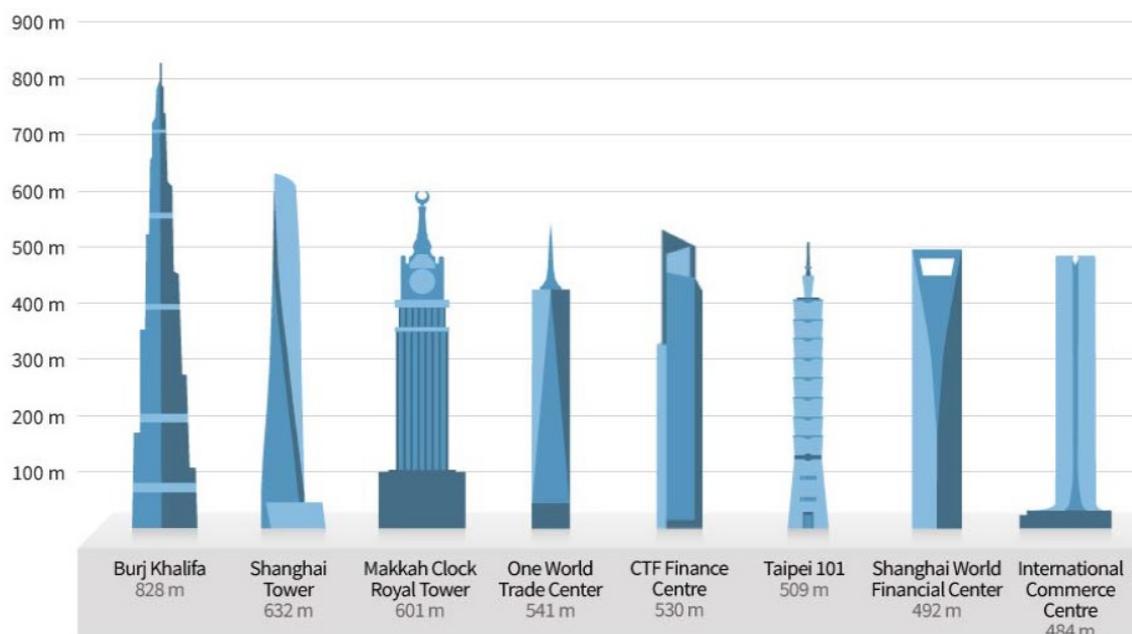


Figura 1.4. Gli edifici più alti del mondo.

Nel contesto storico italiano, degni di nota sono la torre Piacentini (1940 - 108 m) a Genova, che fu la più alta costruzione in cemento armato italiano ed europeo fino al 1952, la Torre Pirelli (1960 - 127,10 m) progettata da Giò Ponti e Pier Luigi Nervi a Milano, che era la torre più alta in Italia fino al 1995, e la Torre delle Telecomunicazioni a Napoli (1995 - 129 m). Negli ultimi anni, solo le città di Milano e Torino hanno preso in considerazione la costruzione di grattacieli in Italia. In particolare, è stato preparato un piano urbanistico che prevede la costruzione di grattacieli nella Città di Milano al fine di riqualificare e riutilizzare le grandi aree edilizie derivanti dalle aree espositive (Area CityLife) e dai siti dismessi (Area Portobello). Come risultato di questo piano urbano, la Torre Unicredit (231 m sulla punta e 217,7 m sul livello del tetto) è stata completata nel 2012. Questa torre è ora l'edificio più alto in Italia. D'altra parte, la Città di Torino ha subito un rapido sviluppo a causa del restyling urbano relativo ai XX Giochi Olimpici Invernali del 2006. In questo periodo fu progettata la Torre Intesa Sanpaolo (167,25 m) e successivamente completata nel 2012. Inoltre, il 30 novembre 2011, è iniziata la costruzione della Torre della sede centrale della Regione Piemonte (209 m). Ora è l'edificio più alto a Torino e il terzo edificio più alto in Italia.

La progettazione di edifici alti rappresenta un problema impegnativo dal punto di vista architettonico, soprattutto considerando l'analisi strutturale. Le principali difficoltà sono rappresentate dalla limitazione degli spostamenti trasversali dovuti al vento o al carico laterale sismico.

La formulazione del progetto preliminare è dovuta alla scelta di uno schema statico a causa della grande altezza. In risposta a questo problema, alcuni autori hanno suggerito di identificare il sistema strutturale appropriato in base al numero di piani. Pertanto, un edificio di 25 piani potrebbe essere progettato con pareti di taglio e telai controventati, mentre una struttura tubolare incorniciata con maglie ortogonali o tralicci (diagrid) sarebbe il metodo più appropriato per progettare edifici più alti, combinando i requisiti di ingegneria e le migliori pratiche architettoniche.

In questo momento, per quanto riguarda l'analisi strutturale, i programmi del metodo

agli elementi finiti (FEM) vengono utilizzati insieme a potenti computer per ottenere una descrizione dettagliata e globale del comportamento strutturale. Secondo Howson [2], l'ingegnere strutturale deve essere in grado di stimare, sia con semplici formulazioni matematiche i valori relativi di sollecitazione e deformazione, sia successivamente cercare soluzioni agli elementi finiti più accurate.

L'analisi strutturale con il software FEM richiede molto tempo, in particolare per la programmazione dell'input di dati, e il gran numero di dati di output disponibili potrebbe essere scomodo per interpretare rapidamente il comportamento strutturale. Metodi analitici semplificati aiutano l'ingegnere strutturale sia nella progettazione concettuale che nel dimensionamento iniziale, al fine di ottenere soluzioni rapide e sufficientemente accurate. A questo proposito, nei primi anni '60, quando la modellazione ad elementi finiti era appena agli inizi, Rosman [3] introdusse l'equivalente modello elastico continuo per studiare pareti di taglio con aperture in edifici alti. Quindi, altri autori [4–9] hanno lavorato sull'interazione problematica tra pareti di taglio e telai. I modelli strutturali di edifici alti sono stati modificati per valutare la rigidità dei setti a sezione sottile aperta. Dal momento che l'ipotesi di sezione chiusa non è accettabile per modellare travi semiaperte a parete sottile, si focalizza l'attenzione su teorie di ordini maggiori rispetto all'ipotesi di Saint Venant, Timoshenko [10, 11] e von Karman [12], negli anni '40, fornirono la prima formulazione di queste nuove teorie, elaborate da Vlasov. principali dubbi riguardavano l'applicabilità delle teorie a sistemi più complessi. Per superare queste difficoltà ed estendere l'uso del metodo analitico, nel 1985 Carpinteri [13] propose un Algoritmo Generale riguardante la distribuzione delle forze orizzontali tra gli elementi strutturali verticali di una struttura civile tridimensionale. Negli anni che seguirono l'Algoritmo Generale è stato migliorato in modo da poter lavorare con qualsiasi tipo di combinazioni strutturali [14–18], con lo scopo di applicarlo a casi studio reali [19–21].

Inoltre, sulle basi dell'Algoritmo Generale e della teoria di Vlasov è stato scritto un codice di calcolo in grado di calcolare gli edifici alti in modo rapido ed efficiente come dimostrato in svariati articoli scientifici pubblicati negli ultimi anni [19–21].

Lo scopo del presente lavoro è introdurre un algoritmo per il calcolo delle tensioni nelle travi di sezione sottile aperta e di trasformarlo in codice di calcolo. Dopo aver validato il suddetto codice, questo verrà inserito nel codice esistente per il calcolo degli edifici alti e permetterà ad esso di determinare lo stato tensionale in ogni punto di ogni elemento irrigidente presente nell'edificio.

Nel capitolo 2 è riassunta la formulazione analitica dell'Algoritmo Generale; nel capitolo 3 si sintetizza la Teoria di Vlasov; nel capitolo 4 si introduce l'algoritmo per il calcolo delle tensioni nelle sezioni sottile aperte e il codice di calcolo che permette l'applicazione dello stesso; nel capitolo 5 si applica il codice ad alcuni nuclei aperti non esistenti nella realtà e si confrontano i risultati ottenuti con quelli ottenuti manualmente con lo scopo di validare il codice. Il capitolo 6 contiene l'analisi del grattacielo RAI di Torino applicando il codice di calcolo e soffermandosi sui nuclei aperti facenti parte della struttura dello stesso.

Capitolo 2

Ripartizione degli sforzi tra elementi irrigidenti degli edifici alti: L'Algoritmo Generale

La formulazione generale del problema riguardante la distribuzione delle azioni laterali tra gli elementi irrigidenti di una struttura tridimensionale fu presentata nel 1985 da Carpinteri [13] e viene illustrata nel corrente capitolo.

Molto frequentemente gli elementi di controvento negli edifici di grande altezza sono delle mensole di sezione sottile aperta al cui interno vi sono le scale oppure gli ascensori. La struttura consiste in M elementi di controvento interconnessi attraverso un solaio infinitamente rigido nel proprio piano ed infinitamente deformabile fuori dal piano, la deformazione assiale degli elementi è trascurata. In virtù del fatto che ogni impalcato è considerato infinitamente rigido nel proprio piano, i gradi di libertà sono rappresentati dagli spostamenti trasversali di ogni singolo piano: due traslazioni ξ e η nella direzione X e Y , e la rotazione attorno all'asse Z θ , per ogni piano.

L'analisi di questo sistema composto è principalmente concentrata nell'identificazione di una distribuzione delle forze esterne tra le singole componenti. L'approccio è generale poichè è possibile considerare tutti i tipi di controventamento verticale, da semplici telai fino ad elementi tubolari di qualunque forma a patto che la loro matrice di rigidità sia nota.

In considerazione delle ipotesi menzionate precedentemente, indicando con N il numero di piani dell'edificio, quest'ultimo ha $3N$ gradi di libertà, e allo stesso modo i carichi esterni applicati nell'origine del sistema di riferimento sono espressi da un vettore di $3N$ elementi $\{F\}$, il quale è composto da $2N$ forze di taglio $\{p_x\}$, $\{p_y\}$ e N momenti torcenti $\{m_z\}$ (Figura 2.1):

$$\{F_t\} = \begin{Bmatrix} p_t \\ m_{z,t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{x,t} \\ p_{y,t} \\ m_{z,t} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Sia $X_t^* Y_t^* Z_t^*$ il sistema di riferimento locale del t -esimo controvento, il vettore delle forze $\{F_t^*\}$, composto da $3N$ elementi, e il vettore degli spostamenti $\{\delta_t^*\}$, composto anch'esso da $3N$ elementi, rappresentano rispettivamente la quota del carico esterno portata dall' i -esimo elemento a il suo spostamento trasversale.

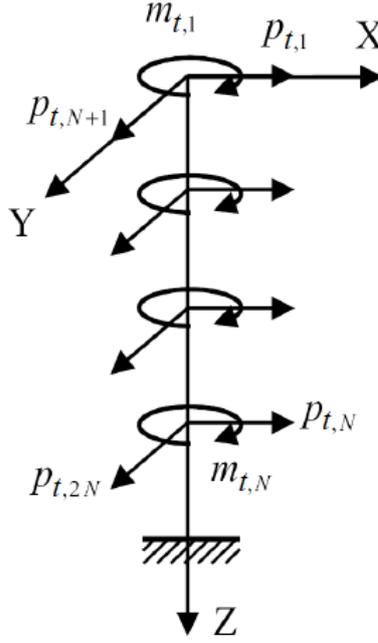


Figura 2.1. Schematizzazione di un edificio alto con un sistema di riferimento destrorso ([1]).

Il vettore $\{F_t^*\}$ può essere riferito al sistema di coordinate globale XYZ applicando la seguente trasformazione:

$$\begin{Bmatrix} p_{x,t}^* \\ p_{y,t}^* \\ m_{z,t}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_t] & [0] \\ -\{u_z\} \wedge \{\psi_t\} & [1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{x,t} \\ p_{y,t} \\ m_{z,t} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

dove $[1]$ è la matrice identità e $[0]$ è la matrice nulla.

I termini $[N_t]$ rappresentano la matrice di rotazione ortogonale dal sistema XY al sistema $X_t^*Y_t^*$; $\{\psi_t\}$ è il vettore coordinata dell'origine del sistema locale in quello globale; $\{u_z\}$ è il versore associato alla direzione Z . La matrice ortogonale $[N_t]$, estesa a tutti i piani, può essere rappresentata dagli angoli φ_t tra gli assi Y e Y_t^* (Figura 2.2):

$$[N_t] = \begin{bmatrix} [\cos\varphi_t] & [\sin\varphi_t] \\ -[\sin\varphi_t] & [\cos\varphi_t] \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

dove ogni termine è una sottomatrice diagonale $N \times N$:

$$[\cos\varphi_t] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos\varphi_t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos\varphi_t \end{bmatrix} \quad (2.4a)$$

$$[\sin\varphi_t] = \begin{bmatrix} \sin\varphi_t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sin\varphi_t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sin\varphi_t \end{bmatrix} \quad (2.4b)$$

Per semplicità, in modo da tenere conto degli N piani della struttura, questo prodotto vettoriale può essere scritto come una matrice $2N \times N$ indicata come $[C_t]$ composta

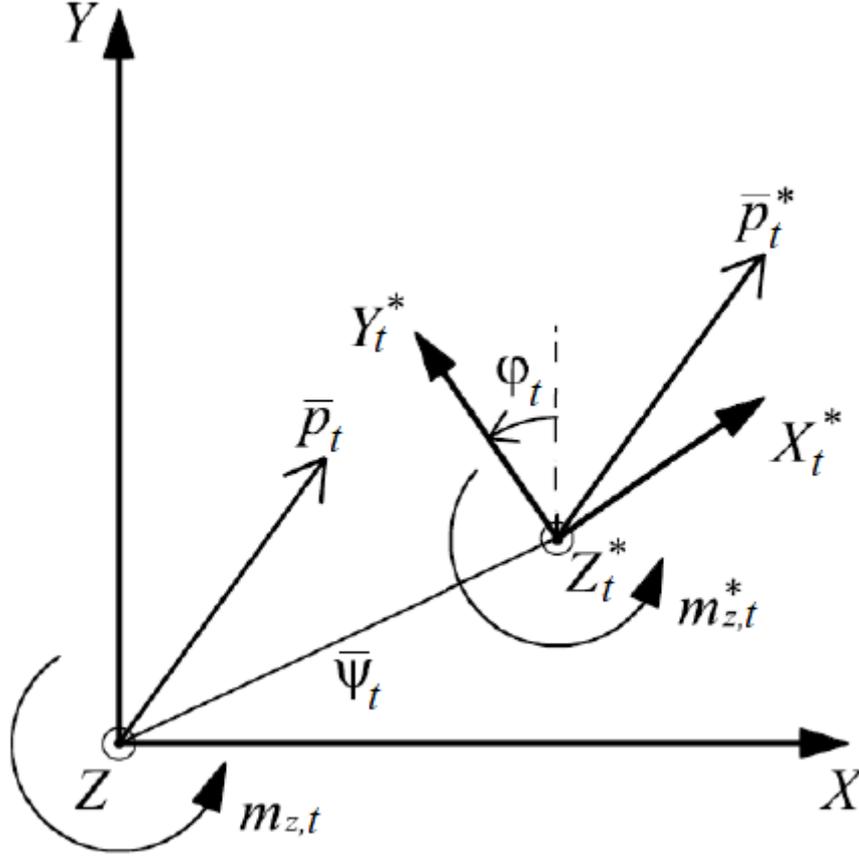


Figura 2.2. Sistema di riferimento globale e sistema di riferimento locale ([1]).

da due sottomatrici diagonali contenenti le coordinate $(x_t; y_t)$ dell'origine del sistema di riferimento locale $X_t^*Y_t^*$:

$$-\{u_z\} \wedge \{\psi_t\} = - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x_t & y_t & 0 \end{vmatrix} = -[-y_t \ x_t] = -[C_t]^T \quad (2.5)$$

Tenendo in considerazione tutti i piani l'Equazione (2.2) può essere scritta nella seguente forma:

$$\{F_t^*\} = [A_t]\{F_t\} \quad (2.6)$$

La matrice $[A_t]$ raccoglie le informazioni riguardanti le rotazioni reciproche tra il sistema di coordinate locali e globali e la posizione dell' i -esimo controvento nel sistema globale XY:

$$[A_t] = \begin{bmatrix} [N_t] & [0] \\ -[C_t]^T & [1] \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Allo stesso modo, il vettore δ_t^* , costituito da $2N$ traslazioni ξ_t^*, η_t^* e N rotazioni θ_t^* , può essere connesso al corrispondente δ_t , il quale è riferito al sistema di coordinate globali, per mezzo della matrice compatta $3N \times 3N$ $[B_t]$:

$$\{\delta_t^*\} = \begin{Bmatrix} \xi_t^* \\ \eta_t^* \\ \theta_t^* \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Gli spostamenti $\{\delta_t\}$ nel sistema globale XY sono connessi agli spostamenti $\{\delta_t^*\}$ nel sistema locale $X_t^*Y_t^*$ attraverso la matrice ortogonale $[N_t]$:

$$\begin{Bmatrix} \xi_t^* \\ \eta_t^* \\ \theta_t^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_t] & [0] \\ [0] & [1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_t \\ \eta_t \\ \theta_t \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Considerando tutti i piani, l'Equazione (2.9) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\{\delta_t^*\} = [B_t]\{\delta_t\} \quad (2.10)$$

dove la matrice $[B_t]$ è simile a $[A_t]$ con la differenza che i termini $[C_t]$ sono ridotti a una matrice nulla:

$$[B_t] = \begin{bmatrix} [N_t] & [0] \\ [0] & [1] \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Una relazione tra $\{F_t^*\}$ e $\{\delta_t^*\}$ è considerata nota attraverso la matrice di rigidezza $[K_t^*]$, riferita al sistema di riferimento locale:

$$\{F_t^*\} = [K_t^*]\{\delta_t^*\} \quad (2.12)$$

Sostituendo l'equazione (2.6) e la (2.10) nella (2.12), il vettore delle forze $\{F_t\}$ risulta essere connesso al vettore degli spostamenti $\{\delta_t^*\}$ attraverso un prodotto tra matrici, che identifica la matrice di rigidezza $[K_t]$ dell' i -esimo controvento nel sistema di riferimento globale XY :

$$\{F_t\} = ([A_t]^{-1}[K_t^*][B_t])\{\delta_t\} = [K_t]\{\delta_t\} \quad (2.13)$$

A causa della presenza di solette rigide che connettono le mensole verticali, lo spostamento trasversale di ogni elemento può essere calcolato considerando solo tre spostamenti generalizzati ξ , η e θ per piano. Questo passaggio, esteso a tutti i piani, è eseguito attraverso la matrice $[T_t]$, la quale tiene conto della posizione di tutti i controventi nel piano attraverso le coordinate $(x_t; y_t)$ e, pertanto, la matrice $[C_t]$:

$$\{\delta_t\} = \begin{bmatrix} [1] & [C_t] \\ [0] & [1] \end{bmatrix} \{\delta\} = [T_t]\{\delta\} \quad (2.14)$$

con $\{\delta\}$ il vettore degli spostamenti di piano, cioè il vettore degli spostamenti associato all'origine del sistema di riferimento globale.

La sostituzione dell'equazione (2.14) nell'equazione (2.13) permette di identificare la matrice di rigidezza dell' i -esimo elemento irrigidente, riferita al sistema di riferimento globale XYZ e gli spostamenti di piano generalizzati ξ , η e θ :

$$\{F_t\} = ([K_t][T_t])\{\delta\} = [\bar{K}_t]\{\delta\} \quad (2.15)$$

Per l'equilibrio globale, il carico esterno $\{F\}$ applicato alla struttura è uguale alla somma degli M vettori $\{F_t\}$. In questo modo si ottiene una relazione tra il carico esterno e lo spostamento di piano e si calcola la matrice di rigidezza globale della struttura. Grazie a questa matrice, una volta che è stato definito il carico esterno, si possono acquisire gli spostamenti della struttura, dai quali si possono dedurre le informazioni riguardanti ogni singolo elemento irrigidente:

$$\{F\} = \sum_{t=1}^M \{F_t\} = \left(\sum_{t=1}^M [\bar{K}_t] \right) \{\delta\} = [\bar{K}]\{\delta\} \quad (2.16)$$

e, quindi,

$$\{\delta\} = [\bar{K}]^{-1}\{F\} \quad (2.17)$$

Richiamando l'equazione (2.15) e confrontando la stessa con l'equazione (2.17) è possibile definire la quota parte di carico esterno portata dall'*i*-esimo elemento irrigidente verticale:

$$\{\delta\} = [\bar{K}]^{-1}\{F\} = [\bar{K}_t]^{-1}\{F_t\} \quad (2.18)$$

dalla quale si ottiene:

$$\{F_t\} = [\bar{K}_t][\bar{K}]^{-1}\{F\} = [R_t]F \quad (2.19)$$

La matrice di distribuzione dei carichi $[R_t]$, introdotta nell'equazione(2.19), dimostra che ogni elemento verticale è soggetto a un carico $\{F_t\}$ che è connesso al carico esterno $\{F\}$ attraverso la sua matrice di rigidezza e l'inverso della matrice di rigidezza globale.

Una volta che gli spostamenti generalizzati $\{\delta\}$ sono noti, dalle equazioni (2.8), (2.12) e (2.14) si possono determinare gli spostamenti e le forze relative all'*i*-esimo elemento, nel suo sistema di coordinate locali. Conseguentemente, dato che il carico applicato a ogni elemento è chiaramente identificato, si può facilmente eseguire una verifica preliminare.

L'equazione (2.19) risolve il problema della distribuzione del carico esterno tra gli elementi resistenti impiegati per irrigidire un edificio alto tridimensionale. Questa formulazione risulta essere generale e può essere adottata per ogni tipo di elemento strutturale a patto che si conosca la sua matrice di rigidezza $[K_t^*]$.

Inoltre, è possibile sottolineare ulteriori benefici derivanti dall'applicazione della formulazione appena presentata: facile identificazione dei parametri strutturali che governano il comportamento laterale della struttura; la formulazione è molto chiara e coincisa, limitando così il rischio di errore e ottimizzando le tempistiche di modellazione e analisi anche in comparazione con il metodo agli elementi finiti.

Capitolo 3

Travi di sezione sottile aperta soggette a torsione: la teoria di Vlasov

A differenza delle sezioni compatte, le sezioni sottili aperte soggette a torsione mostrano un comportamento lontano da quello alla Saint Venant. Una volta che la deformazione torsionale ha luogo, la sezione ruota attorno al suo centro di taglio ma, allo stesso tempo, non rimane piana, dato che presenta estensioni longitudinali diverse si ha una distorsione fuori dal piano, il cosiddetto ingobbamento della sezione. Di conseguenza, si sviluppa nello spessore della sezione un'ulteriore tensione longitudinale, assente nella teoria della torsione primaria.

Si consideri il caso di una trave a mensola con sezione a "I" soggetta a un carico concentrato su una delle sue flange (Figura 3.1). Basandosi sul Principio di Sovrapposizione degli Effetti, questo carico può essere scomposto nella somma di 4 differenti condizioni di carico: una puramente assiale, due puramente flessionali; l'altra invece è definita torsione flessionale, in virtù del fatto che le due flange sono forzate a flettersi in direzioni opposte nel loro piano. Nell'ultimo caso, la sezione non rimane piana e sorgono tensioni normali addizionali. Questa tensione normale fa nascere un'azione generalizzata, chiamata bimomento, che è direttamente connessa all'ingobbamento della sezione e consiste in due momenti flettenti, ognuno dei quali agente su una singola flangia, aventi la stessa intensità ma segno opposto.

L'intensità della suddetta tensione non è trascurabile in questo tipo di sezioni e l'applicazione della teoria di Saint Venant potrebbe portare a grossi errori.

Due ipotesi fondamentali sono alla base della teoria di Saint Venant:

- la sezione è considerata rigida e, pertanto, è indeformabile nel suo piano;
- le deformazioni di taglio sulla linea media della sezione sono assunte nulle.

Si consideri una trave di sezione sottile aperta di forma generica, posizionata in un sistema di coordinate generico, nel quale l'asse Z è parallelo all'asse longitudinale della trave. Definendo una specifica sezione a $z = costante$, gli assi X e Y completano il sistema di coordinate destrorso XYZ . Ogni punto della linea media può essere identificato usando le coordinate (x, y) oppure, attraverso la coordinata curvilinea s (Figura 3.2).

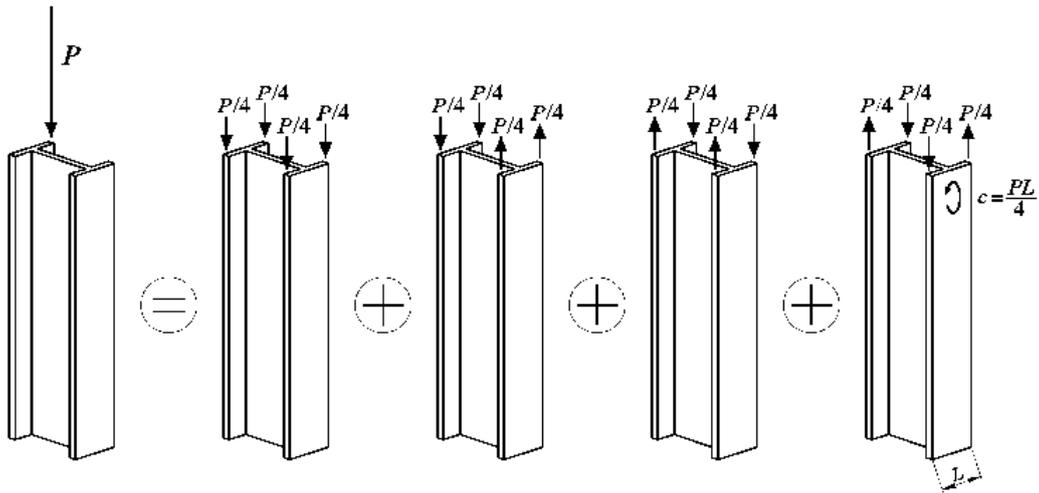


Figura 3.1. Trave a mensola con sezione ad "I" soggetta a un carico concentrato applicato sull'estremità di una flangia ([1]).

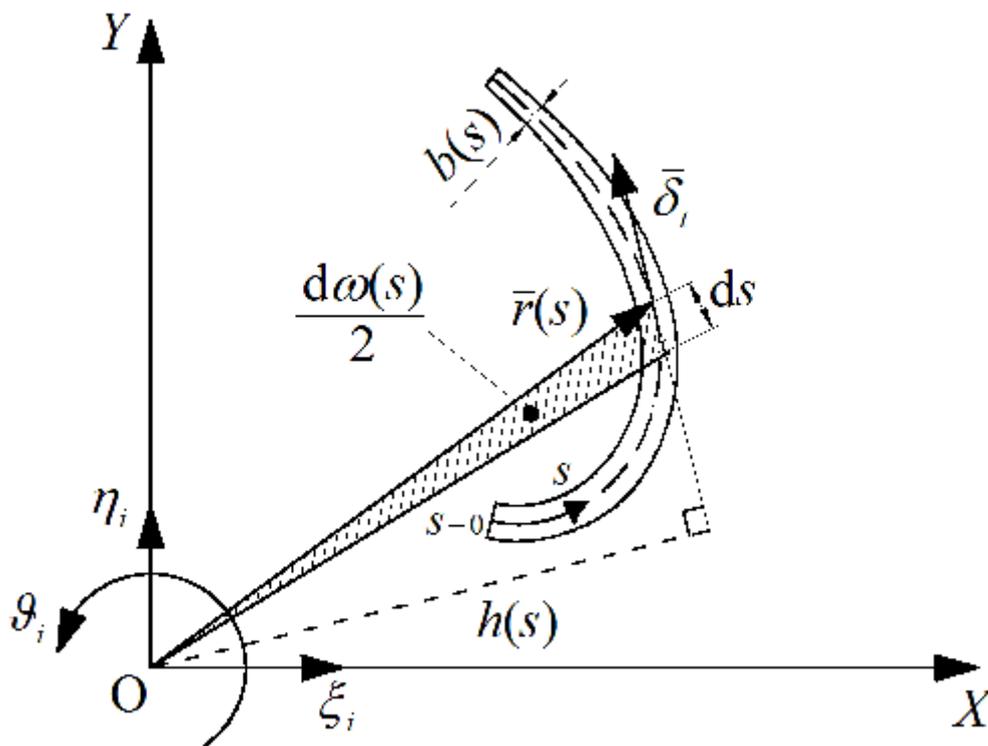


Figura 3.2. Calcolo della coordinata settoriale ω ([1]).

Con lo scopo di definire le equazioni che governano il comportamento strutturale dei profili aperti con sezione sottile, si assume che la trave sia soggetta a delle deformazioni torsionali. Come conseguenza di questo, ogni punto della sezione è caratterizzato da una nuova posizione nel sistema di riferimento generale XYZ . Così, si comporta come un corpo rigido, dove la posizione può essere valutata attraverso tre variabili indipendenti

corrispondenti ai tre spostamenti generalizzati di un punto scelto arbitrariamente: due traslazioni ξ e η in direzione X e Y , rispettivamente, e la rotazione θ .

Gli spostamenti trasversali ξ e η di tutti i punti appartenenti alla sezione trasversale possono essere determinati con la nota espressione:

$$u = \xi(z) - \theta(z)y \quad (3.1a)$$

$$v = \eta(z) + \theta(z)x \quad (3.1b)$$

Lo spostamento tangenziale δ_t , relativo al generico punto della sezione, può essere calcolato con la seguente:

$$\delta_t = \{\delta\}^T \{u_t\} = u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} \quad (3.2)$$

e quindi:

$$\delta_t = \xi \frac{dx}{ds} + \eta \frac{dy}{ds} + \theta h(s) \quad (3.3)$$

dove $h(s)$ rappresenta la distanza tra l'origine del sistema di riferimento e la linea tangente alla linea media della sezione (Figura 3.2):

$$h(s) = \{r\}^T \{u_n\} = x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \quad (3.4)$$

Lo spostamento longitudinale w può essere ottenuto dalla seconda delle ipotesi di Vlasov per cui la deformazione di taglio sulla linea media è nulla:

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \delta_t}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

Tenendo conto della seguente relazione:

$$\omega(s) = \int_0^s h(s) ds \quad (3.6)$$

Dove con ω si è indicata l'area settoriale [1]. L'espressione analitica di w è derivata per integrazione,

$$w = \zeta(z) - \int_0^s \frac{\partial \delta_t}{\partial z} ds = \zeta(z) - \xi'x - \eta'y - \theta'\omega \quad (3.7)$$

Il termine $\zeta(z)$ è una funzione arbitraria, dipendente esclusivamente da z , la quale descrive la traslazione longitudinale dell'intera sezione; $\omega(s)$ è l'area settoriale, data dal doppio dell'area spazzata dal raggio vettore $\{r\}$ da $s = 0$ al punto di coordinata s appartenente alla linea media della sezione. Il punto O e $s = 0$ sono rispettivamente il polo settoriale e l'origine settoriale (Figura 4).

La componente longitudinale w è composta da quattro termini: i primi tre sono ben noti e sorgono dall'estensione e dalla flessione nei piani XZ e XY . La componente che descrive l'ingobbamento della sezione è espresso dal quarto termine e, in particolare, θ' può essere considerato come un fattore di amplificazione, mentre ω la forma della sezione ingobbata.

Differenziando w rispetto a z è possibile ottenere l'espressione della deformazione longitudinale ε_z :

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \zeta' - \xi''x - \eta''y - \theta''\omega \quad (3.8)$$

Il quarto termine dell'equazione (3.8) dimostra che l'ipotesi di torsione primaria, per la quale l'angolo unitario di torsione sarebbe costante può essere rimossa.

L'espressione generale delle tensioni normali è ottenuto moltiplicando l'equazione (3.8) per il modulo elastico E :

$$\sigma_z = E(\zeta' - \xi''x - \eta''y - \theta''\omega) \quad (3.9)$$

In ogni sezione della trave, la tensione normale σ_z è la somma di due contributi:

$$\sigma_z = \sigma_z^{SV} + \sigma_z^{VL} \quad (3.10)$$

dove:

$$\sigma_z^{VL} = -E\theta''\omega \quad (3.11)$$

Questa espressione mostra come le tensioni normali possano anche essere risultato di una torsione uniforme della sezione trasversale oltre che dalla flessione e dalla compressione uniforme della trave. D'altra parte, questo contributo è assunto essere di entità trascurabile nella teoria della torsione primaria.

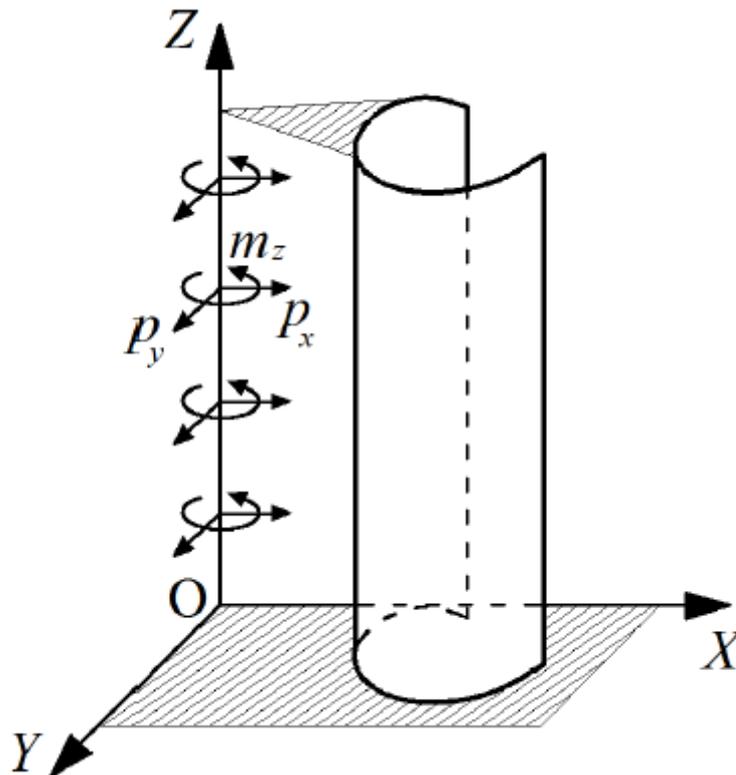


Figura 3.3. Trave a sezione sottile aperta soggetta ad azioni trasversali ([1]).

Il calcolo dei termini settoriali è eseguito considerando l'origine del generico sistema di riferimento XYZ come polo settoriale e un'origine settoriale generica posta sulla linea media della sezione (Figura 3.3), l'equazione (3.9) permette di definire, per integrazione, lo sforzo normale agente lungo la mensola:

$$N = \int_A \sigma_z dA = E(A\zeta' - S_y\xi'' - S_x\eta'' - S_\omega\theta'') \quad (3.12)$$

Supponendo la forza assiale nulla nel controvento verticale, il termine ζ' può essere eliminato dall'equazione (3.12):

$$\zeta' = \frac{S_y}{A}\xi'' + \frac{S_x}{A}\eta'' + \frac{S_\omega}{A}\theta'' = x_G\xi'' + y_G\eta'' + \omega_0\theta'' \quad (3.13)$$

La sostituzione dell'equazione (3.13) nell'equazione (3.9) permette di definire le caratteristiche della sollecitazione relative al comportamento flessionale della trave:

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA = -E(J_{yy}\xi'' + J_{yx}\eta'' + J_{y\omega}\theta'') \quad (3.14a)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = -E(J_{xy}\xi'' + J_{xx}\eta'' + J_{x\omega}\theta'') \quad (3.14b)$$

$$B = \int_A \sigma_\omega x dA = -E(J_{\omega y}\xi'' + J_{\omega x}\eta'' + J_{\omega\omega}\theta'') \quad (3.14c)$$

dove:

$$J_{yy} = I_{yy} - Ax_G^2 \quad (3.15a)$$

$$J_{xx} = I_{xx} - Ay_G^2 \quad (3.15b)$$

$$J_{xy} = I_{xy} - Ax_G y_G \quad (3.15c)$$

$$J_{\omega\omega} = I_{\omega\omega} - A\omega_0^2 \quad (3.16a)$$

$$J_{\omega y} = I_{\omega y} - A\omega_0 x_G \quad (3.16b)$$

$$J_{\omega x} = I_{\omega x} - A\omega_0 y_G \quad (3.16c)$$

L'equazione (3.14c) definisce il bimomento, il quale rappresenta un sistema auto-equilibrato equivalente a due momenti flettenti, aventi stessa intensità ma segno opposto.

Le equazioni (3.15) rappresentano l'applicazione del teorema di Huygens-Steiner, il quale trasferisce il sistema XYZ dall'origine generica al baricentro della sezione. Analogamente, le equazioni (3.16) esprimono le proprietà settoriali, essendo il polo settoriale invariato.

E' possibile scrivere i suddetti termini in forma compatta introducendo la matrice di inerzia $[J]$:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{yy} & J_{yx} & J_{y\omega} \\ J_{xy} & J_{xx} & J_{x\omega} \\ J_{\omega y} & J_{\omega x} & J_{\omega\omega} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

La tensione tangenziale τ_{zs} , la quale si suppone abbia una distribuzione costante nello spessore della sezione, può essere ottenuta considerando l'equilibrio longitudinale di una porzione elementare della trave, le cui dimensioni sono la lunghezza dz , la profondità ds e lo spessore b (Figura 3.4):

$$\frac{\partial(\tau_{zs}b)}{\partial s} + \frac{\partial(\sigma_z b)}{\partial s} = 0 \quad (3.18)$$

Sulla base dell'equazione (3.18), tre azioni interne trasversali, le forze di taglio e il momento torcente secondario, possono essere definite:

$$T_x = \int_A \tau_{zs} \frac{dx}{ds} dA \quad (3.19a)$$

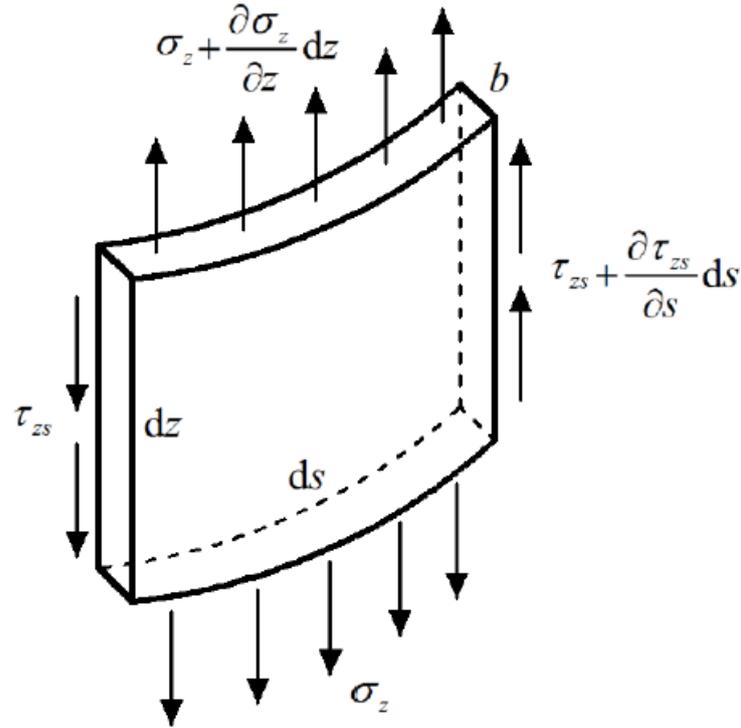


Figura 3.4. Equilibrio in direzione longitudinale di una striscia infinitesima della trave ([1]).

$$T_y = \int_A \tau_{zs} \frac{dy}{ds} dA \quad (3.19b)$$

$$M_Z^{VL} = \int_A \tau_{zs} h dA \quad (3.19c)$$

Integrando per parti e applicando l'equazione (3.18), si ottiene la seguente relazione:

$$T_x = - \int_C \frac{\partial(\tau_{zs}b)}{\partial s} x ds = \int_C \frac{\partial(\sigma_z b)}{\partial z} x ds = \frac{d}{dz} \int_A \sigma_z x dA \quad (3.20a)$$

$$T_y = - \int_C \frac{\partial(\tau_{zs}b)}{\partial s} y ds = \int_C \frac{\partial(\sigma_z b)}{\partial z} y ds = \frac{d}{dz} \int_A \sigma_z y dA \quad (3.20b)$$

$$M_Z^{VL} = - \int_C \frac{\partial(\tau_{zs}b)}{\partial s} \omega ds = \int_C \frac{\partial(\sigma_z b)}{\partial z} \omega ds = \frac{d}{dz} \int_A \sigma_z \omega dA \quad (3.20c)$$

Ignorando la rigidità torsionale GI_t , il sistema (3.20) è influenzato dalle equazioni (3.15) e (3.16) che diventa:

$$T_x = \frac{dM_y}{dz} = -E(J_{yy}\xi''' + J_{yx}\eta''' + J_{y\omega}\theta''') \quad (3.21a)$$

$$T_y = \frac{dM_x}{dz} = -E(J_{xy}\xi''' + J_{xx}\eta''' + J_{x\omega}\theta''') \quad (3.21b)$$

$$M_Z^{VL} = \frac{dB}{dz} = -E(J_{\omega y}\xi''' + J_{\omega x}\eta''' + J_{\omega\omega}\theta''') \quad (3.21c)$$

L'ultima equazione sottolinea come a causa dell'ingobbamento della sezione, un inaspettato momento torcente M_Z^{VL} è generato, definito come la derivata prima del bimomento.

Il momento torcente secondario M_Z^{VL} è generato dalle τ_{zs} dovute ai tagli T_x e T_y .

Differenziando ancora si ottengono le equazioni di equilibrio che tengono conto della distribuzione dei carichi esterni (termini noti):

$$p_x = -\frac{dT_x}{dz} = E(J_{yy}\xi^{IV} + J_{yx}\eta^{IV} + J_{y\omega}\theta^{IV}) \quad (3.22a)$$

$$p_y = -\frac{dT_y}{dz} = E(J_{xy}\xi^{IV} + J_{xx}\eta^{IV} + J_{x\omega}\theta^{IV}) \quad (3.22b)$$

$$m_z^{VL} = -\frac{dM_Z^{VL}}{dz} = E(J_{\omega y}\xi^{IV} + J_{\omega x}\eta^{IV} + J_{\omega\omega}\theta^{IV}) \quad (3.22c)$$

Quindi, le sezioni sottili aperte sono soggette a due diversi momenti torcenti: il primo, dovuto a una distribuzione costante delle tensioni tangenziali attraverso lo spessore, legato all'equilibrio con lo sforzo normale venuto fuori a causa dell'ingobbamento; il secondo, in accordo con la teoria di Saint Venant, dovuto alla variazione lineare degli sforzi tangenziali lungo lo spessore ed è uguale a zero sulla linea media.

In ogni sezione della trave, il momento torcente totale è somma di due contributi:

$$M_z = M_Z^{SV} + M_Z^{VL} = GI_t\theta' - E(J_{\omega y}\xi''' + J_{\omega x}\eta''' + J_{\omega\omega}\theta''') \quad (3.23)$$

e, pertanto, l'equilibrio globale (Eq. 3.22c) diventa:

$$m_z = -\frac{dM_z}{dz} = -\frac{dM_z^{SV}}{dz} - \frac{dM_z^{VL}}{dz} = -GI_t\theta'' + E(J_{\omega y}\xi^{IV} + J_{\omega x}\eta^{IV} + J_{\omega\omega}\theta^{IV}) \quad (3.24)$$

dove G è il modulo di elasticità tangenziale e I_t è il fattore di rigidezza torsionale della sezione.

Introducendo i vettori $\{\delta\}$, $\{M\}$, $\{T\}$ e $\{F\}$:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (3.25a)$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_y \\ M_x \\ B \end{Bmatrix} \quad (3.25b)$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_Z^{VL} \end{Bmatrix} \quad (3.25c)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ m_z \end{Bmatrix} \quad (3.25d)$$

è possibile scrivere i sistemi (3.14), (3.21) e (3.22) in forma compatta:

$$\{M\} = -E[J]\{\delta''\} \quad (3.26a)$$

$$\{T\} = -E[J]\{\delta'''\} \quad (3.26b)$$

$$\{F\} = E[J]\{\delta^{IV}\} \quad (3.26c)$$

Il sistema di equazioni (3.26) può essere semplificato operando alcune scelte. Infatti considerando un sistema di riferimento baricentrico, le seguenti condizioni sono immediatamente soddisfatte:

$$S_y = \int A x dA = 0 \quad (3.27a)$$

$$S_x = \int A y dA = 0 \quad (3.27b)$$

Di più, se il sistema di riferimento è anche principale, i momenti d'inerzia misti risultano nulli:

$$J_{xy} = J_{yx} = \int_A x y dA = 0 \quad (3.28)$$

D'altra parte, se il polo settoriale coincide con il centro di taglio della sezione, è possibile dimostrare che:

$$J_{\omega y} = J_{y\omega} = \int_A \omega x dA = 0 \quad (3.29a)$$

$$J_{\omega x} = J_{x\omega} = \int_A \omega y dA = 0 \quad (3.29b)$$

Se l'origine settoriale corrisponde al baricentro settoriale segue per definizione che:

$$S_\omega = \int_A \omega dA = 0 \quad (3.30)$$

Rispettando tutte le suddette ipotesi è possibile la diagonalizzazione della matrice d'inerzia $[J]$:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & J_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\omega\omega} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Tenendo conto di questa matrice diagonale, le equazioni (3.26) possono essere riscritte in forma semplificata e le caratteristiche della sollecitazione sono definite come segue:

$$M_y = -E J_{yy} \xi'' \quad (3.32a)$$

$$M_x = -E J_{xx} \eta'' \quad (3.32b)$$

$$B = -E J_{\omega_C \omega_C} \theta'' \quad (3.32c)$$

Le caratteristiche delle sollecitazioni che producono le tensioni tangenziali sono anch'esse diagonalizzabili:

$$T_x = -E J_{yy} \xi''' \quad (3.33a)$$

$$T_y = -E J_{xx} \eta''' \quad (3.33b)$$

$$M_z^{VL} = -E J_{\omega_C \omega_C} \theta''' \quad (3.33c)$$

Questo significa che il sistema di equazioni (3.22) è riducibile alle seguenti equazioni di equilibrio disaccoppiate:

$$p_x = E J_{yy} \xi^{IV} \quad (3.34a)$$

$$p_y = E J_{xx} \eta^{IV} \quad (3.34b)$$

$$m_z = E J_{\omega_C \omega_C} \theta^{IV} - G I_t \theta'' \quad (3.34c)$$

Imponendo le condizioni al contorno, il sistema può essere risolto e le funzioni ξ , η e θ possono essere determinate e con esse le tensioni tangenziali e normali.

E' interessante osservare come l'equazione (3.34c) è formalmente la stessa dell'equazione della linea elastica con effetti del secondo ordine dovuta ad uno sforzo assiale N :

$$q(z) = EIv^{IV} - Nv'' \quad (3.35)$$

E' altrettanto utile evidenziare l'analogia tra la nota equazione della linea elastica che descrive il comportamento flessionale della trave e l'equazione differenziale diagonalizzata che descrive il comportamento torsionale delle travi con sezione sottile aperta.

Come nel caso della curvatura flessionale, nel comportamento torsionale il termine θ'' è nullo quando il bimomento è nullo, o, in altre parole, il bimomento è zero quando la linea che descrive la rotazione della trave mostra un punto di flesso.

Se il contributo relativo alla torsione primaria $GI_t\theta''$ è trascurabile, l'equazione (3.34c) può essere integrata facilmente.

Dato che la matrice d'inerzia è simmetrica e definita positiva (se il determinante di $[J]$ è diverso da zero), questa è invertibile così da ottenere una relazione tra la derivata quarta degli spostamenti e i carichi distribuiti esterni:

$$\{\delta^{IV}\} = \frac{1}{E}[J]^{-1}\{F\} \quad (3.36)$$

Gli spostamenti trasversali della sezione sono ottenuti integrando l'equazione (3.36) e applicando le condizioni al contorno alla base e all'apice della mensola.

All'estremo incastrato si ha che:

$$\{\delta\} = \{0\}, \quad \{\delta'\} = \{0\}, \quad \text{per } z = 0 \quad (3.37a, b)$$

mentre all'estremo libero si ha:

$$\{\delta''\} = \{0\}, \quad \{\delta'''\} = \{0\}, \quad \text{per } z = l \quad (3.38a, b)$$

Una volta noti ξ , η e θ , l'applicazione dell'equazione (3.13) permette di ottenere ζ con la corrispondente condizione al contorno:

$$\zeta(z = 0) = 0 \quad (3.39)$$

Questa formulazione analitica non può essere applicata nei casi in cui si è in presenza di sezioni aventi una matrice $[J]$ singolare. Questo è il caso dei setti costituiti da un tratto rettangolare o da diversi tratti convergenti in un punto, come mostrato in Figura 3.5. In questo caso la funzione di ingobbamento non esiste.

La formulazione è stata estesa da Capurso [22] per considerare il caso di M mensole verticali le quali rappresentano lo scheletro resistente di un edificio alto caricato da forze trasversali applicate ai piani in riferimento al sistema di coordinate globale XYZ . Gli elementi verticali sono connessi da solette rigide che hanno rigidezza fuori dal piano trascurabile. L'incognita del problema sono gli spostamenti di piano, identificati dalle traslazioni ξ e η rispettivamente in direzione X e Y , e la rotazione torsionale θ . Se si indica con $\{F_t\}$ il vettore dei carichi trasversali trasmessi all' i -esima mensola, in virtù dell'equazione (45c) si ha:

$$\{F_t\} = E[J_t]\{\delta^{IV}\} \quad (3.40)$$

dove la matrice $[J_t]$ contiene i momenti di inerzia riferiti al baricentro della sezione e al baricentro settoriale, mentre il vettore $\{\delta^{IV}\}$ contiene le derivate di quarto ordine degli spostamenti di piano ξ , η e θ .

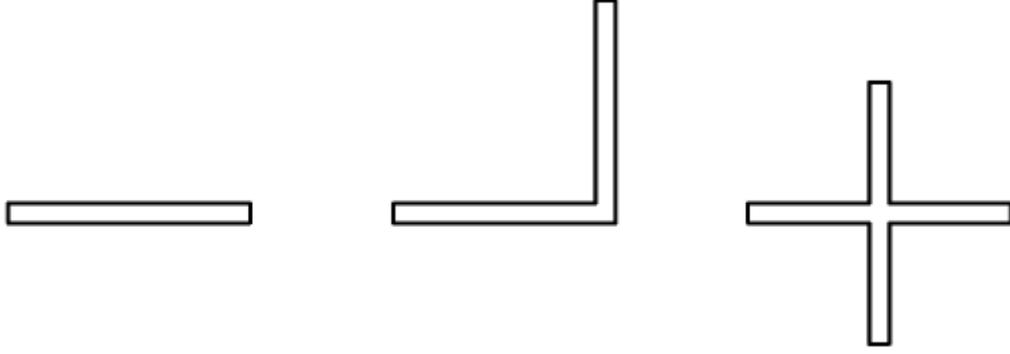


Figura 3.5. Pareti di taglio con sezione contenente tratti convergenti nello stesso punto ([1]).

Essendo $\{F\}$ il vettore dei carichi esterni, la condizione di equilibrio impone che:

$$\{F\} = \sum_{t=1}^M \{F_t\} = E \left(\sum_{t=1}^M [J_t] \right) \{\delta^{IV}\} = E[J] \{\delta^{IV}\} \quad (3.41)$$

Pertanto, la combinazione di M mensole si comporta come una singola mensola la cui matrice d'inerzia è data dalla somma delle M matrici relative alle singole mensole:

$$[J] = \sum_{t=1}^M [J_t] \quad (3.42)$$

L'equazione (3.41) può essere risolta seguendo la procedura precedentemente descritta nel caso di un singolo elemento verticale irrigidente. Una volta che gli spostamenti di piano sono noti, lo spostamento di ogni mensola può essere ricavato e le informazioni riguardanti lo stato tensionale ottenute. In fine, è interessante osservare, dalla relazione tra il vettore $\{F_t\}$ dell' i -esima mensola e il vettore globale $\{F\}$, che ogni elemento verticale è soggetto a un vettore di forze fornite dal prodotto della propria matrice d'inerzia e l'inverso della matrice d'inerzia globale, analogamente a quanto emerso nel capitolo 2:

$$\{F_t\} = [J_t][J]^{-1}\{F\} \quad (3.43)$$

Nel caso di una distribuzione di forze discreta corrispondete ai diversi piani, la matrice $[J]$ 3×3 , che è una funzione della coordinata longitudinale z , può essere espansa in una $3N \times 3N$ da inserire nell'Algoritmo Generale.

Sfruttando la formulazione appena esposta si possono ottenere le espressioni delle tensioni normali e tangenziali presenti negli elementi di sezione sottile aperta soggette a torsione. In particolare sostituendo l'equazione (3.32) nell'equazione (3.9), si ottiene la tensione normale generalizzata agente lungo le fibre longitudinale in funzione delle caratteristiche della sollecitazione:

$$\sigma_z = \frac{M_y}{J_{yy}}x + \frac{M_x}{J_{xx}}y + \frac{B}{J_{\omega_c \omega_c}}\omega \quad (3.44)$$

I primi due contributi derivano dalla nota teoria di Saint Venant e sono basati sull'ipotesi di sezione piana; il terzo termine descrive gli sforzi normali derivanti dall'ingobbamento fuori piano del profilo.

Sostituendo l'equazione (3.9) nella (3.18) si ottiene un'espressione della tensione tangenziale τ_{zs} :

$$\frac{\partial(\tau_{zs}b)}{\partial s} + Eb(\zeta'' - \xi'''x - \eta'''y - \theta'''\omega) = 0 \quad (3.45)$$

e integrando rispetto a s :

$$\tau_{zs} = -\frac{E}{b}[\zeta''A(s) - \xi'''S_y(s) - \eta'''S_x(s) - \theta'''S_\omega(s)] \quad (3.46)$$

nella quale sono state usate le seguenti espressioni geometriche:

$$A(s) = \int_0^s b ds \quad (3.47a)$$

$$S_y(s) = \int_0^s x b ds \quad (3.47b)$$

$$S_x(s) = \int_0^s y b ds \quad (3.47c)$$

$$S_\omega(s) = \int_0^s \omega b ds \quad (3.47d)$$

Sostituendo l'equazione (3.33) nell'equazione (3.46) si ottiene l'espressione per la tensione tangenziale generalizzata agente lungo la linea media della sezione:

$$\tau_{zs} = \frac{1}{b} \left[\frac{T_x}{J_{yy}} S_y(s) + \frac{T_y}{J_{xx}} S_x(s) + \frac{M_z^{VL}}{J_{\omega_c \omega_c}} S_\omega(s) \right] \quad (3.48)$$

I primi due termini derivano dalla teoria di Jourawsky, mentre l'ultimo scaturisce dalla teoria di Vlasov.

Infine, per completezza, si riporta la tensione tangenziale primaria che è variabile linearmente lungo lo spessore ed è zero sulla linea media:

$$\tau_{zs,T} = \frac{M_z^{SV}}{J_t} b(s) \quad (3.49)$$

Capitolo 4

Il calcolo automatico delle tensioni

In questo capitolo si presenta un algoritmo per il calcolo delle tensioni normali e tangenziali nelle travi con sezione sottile aperta. L'algoritmo, quindi, permette di ottenere i valori di σ_z e τ_{zs} in ogni punto della sezione, le cui proprietà geometriche sono supposte note.

In Figura 4.1 è riportato il diagramma di flusso dell'algoritmo nel quale sono illustrati i diversi step che compongono lo stesso e nel seguito elencati e descritti:

4.1 Gli input dell'algoritmo

L'algoritmo considera come input:

- La matrice geometrica $[D]$, che è una matrice $k \times 4$, dove con k si è indicato il numero di segmenti rettilinei che costituiscono la sezione. La i -esima riga della matrice contiene le coordinate degli estremi del segmento i -esimo con riferimento ad un sistema di coordinate generico XY :

$$[D] = \begin{bmatrix} x_{iniz,1} & y_{iniz,1} & x_{final,1} & y_{final,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{iniz,i} & y_{iniz,i} & x_{final,i} & y_{final,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{iniz,k} & y_{iniz,k} & x_{final,k} & y_{final,k} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

dove $(x_{iniz,i}; y_{iniz,i})$ sono le coordinate dell'estremo iniziale del tratto i -esimo e $(x_{final,i}; y_{final,i})$ sono le coordinate dell'estremo finale del tratto i -esimo. Serve a definire il disegno della sezione, la cui è supposta costante per tutta l'altezza dell'elemento irrigidente;

- Lo spessore della sezione b ;
- Le coordinate del baricentro $(x_G; y_G)$;

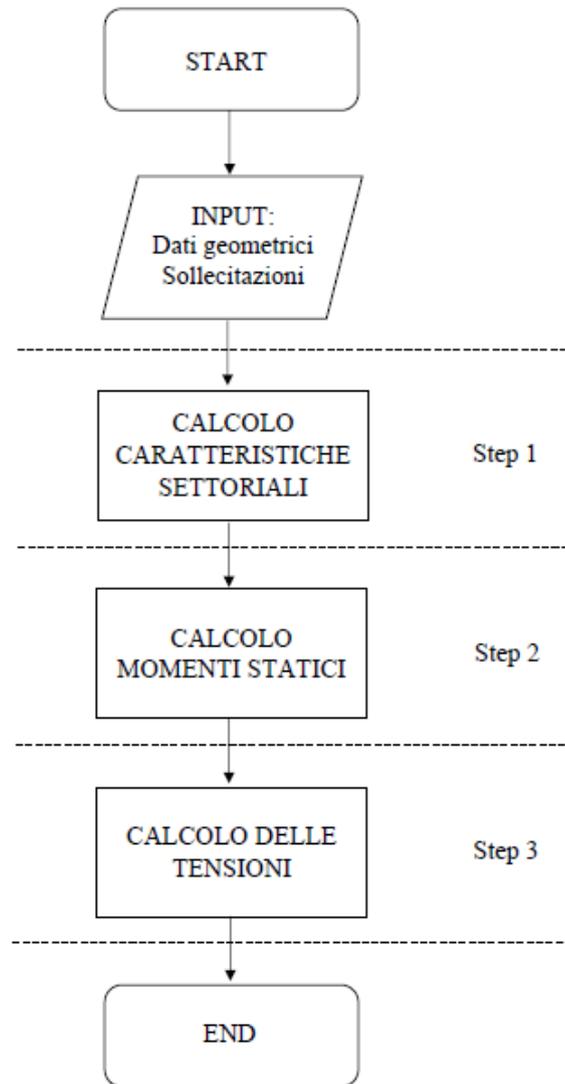


Figura 4.1. Diagramma di flusso dell' algoritmo per il calcolo delle tensioni.

- Le coordinate del centro di taglio $(x_C; y_C)$;
- I momenti d'inerzia principali J_{xx} , J_{yy} e $J_{\omega\omega}$;
- Il fattore di rigidezza torsionale J_t ;
- La matrice delle sollecitazioni $[S]$. E' una matrice $N \times 7$, dove con N si è indicato il numero di piani dell'elemento, contenente nella prima colonna il valore del momento flettente M_x per ogni piano, nella seconda il valore di M_y , nella terza il valore del bimomento B , nella quarta il valore del taglio in direzione x T_x , nella quinta il valore del taglio in direzione y T_y , nella sesta il valore del momento torcente secondario

M_Z^{VL} e nella settima il valore del momento torcente primario M_Z^{SV} :

$$[S] = \begin{bmatrix} M_{x,N} & M_{y,N} & B_N & T_{x,N} & T_{y,N} & M_{Z,N}^{VL} & M_{Z,N}^{SV} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{x,i} & M_{y,i} & B_i & T_{x,i} & T_{y,i} & M_{Z,i}^{VL} & M_{Z,i}^{SV} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{x,1} & M_{y,1} & B_1 & T_{x,1} & T_{y,1} & M_{Z,1}^{VL} & M_{Z,1}^{SV} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

4.2 Determinazione del diagramma settoriale principale

Il primo step dell'algoritmo ha lo scopo di calcolare il diagramma settoriale.

Si sceglie come polo il centro di taglio C e arbitrariamente l'origine e il verso di rotazione. Si calcola così il diagramma settoriale $\omega_C(s_1; s)$ (dove il pedice C sta ad indicare la scelta del punto C come polo) pari al doppio dell'area spazzata dal raggio vettore. Il diagramma settoriale calcolato deve avere origine settoriale nel baricentro settoriale per poter applicare le semplificazioni già introdotte nel Capitolo 3 (momenti d'inerzia misti nulli). In particolare si può dimostrare che [23]:

$$\omega_C(s_0; s) = \omega_C(s_1; s) - \frac{S_\omega(s_1)}{A} \quad (4.3)$$

L'espressione 4.3 permette di individuare il diagramma $\omega_C(s_0; s)$ a partire dal diagramma $\omega_C(s_1; s)$, avente origine arbitraria. Il diagramma così ottenuto, cui corrisponde un momento statico settoriale nullo, viene definito principale.

4.3 Determinazione dei momenti statici

Il secondo step consiste nel calcolo dei momenti statici in tutti i vertici, necessari al calcolo delle tensioni tangenziali. I momenti statici S_x e S_y vengono calcolati per tutti i vertici della sezione basandosi sulle note regole della geometria delle aree. Il momento statico settoriale S_ω è definito come segue:

$$S_\omega(s) = \int_A \omega(s_0; s) dA \quad (4.4)$$

Nel caso in questione, dove si è supposta una sezione composta da k tratti rettilinei, il momento statico settoriale in un vertice è dato dall'area del diagramma settoriale fino a quel punto.

4.4 Determinazione delle tensioni

Lo step 3 è lo step finale nel quale si applicano le equazioni (3.44), (3.48) e (3.49) per calcolare, nei vertici, rispettivamente, la tensione normale generalizzata agente lungo le fibre longitudinali, la tensione tangenziale generalizzata agente lungo la linea media della sezione trasversale e la tensione tangenziale primaria, variabile linearmente lungo lo spessore delle pareti costituenti la sezione trasversale.

In alcuni casi, il sistema di riferimento scelto non è quello principale e pertanto, l'ipotesi semplificativa (3.28) viene meno. Per automatizzare il calcolo delle tensioni senza

operare il cambio del sistema di riferimento si possono generalizzare le equazioni (3.45) e (3.48) per un sistema di coordinate generico.

La matrice (3.31) non è più diagonalizzabile e si scrive come segue:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{yy} & J_{xy} & 0 \\ J_{yx} & J_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\omega\omega} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Le equazioni (3.32), ossia le sollecitazioni che generano tensioni normali, si modificano aggiungendo il termine contenente il momento d'inerzia misto:

$$M_y = -E(J_{yy}\xi'' + J_{xy}\eta'') \quad (4.6a)$$

$$M_x = -E(J_{xy}\xi'' + J_{xx}\eta'') \quad (4.6b)$$

$$B = -EJ_{\omega\omega}\theta'' \quad (4.6c)$$

L'equazione (4.6c) è identica all'equazione (3.32c) poichè non si è rimossa l'ipotesi di coincidenza del centro di taglio con il polo settoriale. Le prime due, invece, non sono più disaccoppiate per via del sistema di riferimento non principale; si deve così risolvere il sistema di equazioni per determinare ξ'' e η'' . La risoluzione del sistema porta ai seguenti risultati:

$$\xi'' = \frac{1}{E} \frac{M_x J_{xy} - M_y J_{xx}}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} \quad (4.7a)$$

$$\eta'' = \frac{1}{E} \frac{M_y J_{xy} - M_x J_{yy}}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} \quad (4.7b)$$

$$\theta'' = -\frac{B}{EJ_{\omega\omega}} \quad (4.7c)$$

Allo stesso modo, è possibile riscrivere le equazioni (3.33), ossia le espressioni delle sollecitazioni che producono tensioni tangenziali:

$$T_x = -E(J_{yy}\xi''' + J_{xy}\eta''') \quad (4.8a)$$

$$T_y = -E(J_{xy}\xi''' + J_{xx}\eta''') \quad (4.8b)$$

$$M_z^{VL} = -EJ_{\omega\omega}\theta''' \quad (4.8c)$$

Si ricavano ξ''' e η''' , oltre che θ''' , il quale si ottiene dall'equazione (4.8c) in maniera immediata poichè disaccoppiato dal problema flessionale grazie alle ipotesi sul sistema di riferimento:

$$\xi''' = \frac{1}{E} \frac{T_y J_{xy} - T_x J_{xx}}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} \quad (4.9a)$$

$$\eta''' = \frac{1}{E} \frac{T_x J_{xy} - T_y J_{yy}}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} \quad (4.9b)$$

$$\theta''' = -\frac{M_z^{VL}}{EJ_{\omega\omega}} \quad (4.9c)$$

Si consideri, ora, l'equazione (3.9). Con il sistema di riferimento scelto, ζ' non è nullo ma si può esprimere come segue grazie all'ipotesi di sforzo normale nullo:

$$\zeta' = x_G \xi'' + y_G \eta'' \quad (4.10)$$

Così l'equazione (3.9) si esprime come segue:

$$\sigma_z = E[(x_G - x)\xi'' + (y_G - y)\eta'' - \omega\theta''] \quad (4.11)$$

e sostituendo ξ'' , η'' e θ'' si ottiene l'espressione per il calcolo delle tensioni normali per un sistema di riferimento non principale:

$$\sigma_z = \frac{(x_G - x)(M_x J_{xy} - M_y J_{xx}) + (y_G - y)(M_y J_{xy} - M_x J_{yy})}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} + \frac{B\omega}{J_{\omega\omega}} \quad (4.12)$$

Per il calcolo delle tensioni tangenziali si sfrutta l'equazione (3.45). Sostituendo l'espressione di ζ'' all'interno di quest'ultima e integrando rispetto a s , si ottiene la relazione seguente:

$$\tau_{zs} = -\frac{E}{b} \left(\xi''' \int_s (x_G - x) b ds + \eta''' \int_s (y_G - y) b ds + \theta''' \int_s (-\omega) b ds \right) \quad (4.13)$$

I primi due integrali presenti all'interno dell'equazione precedente rappresentano i momenti statici rispetto agli assi baricentrici dell'area individuata dalla coordinata s : $S_y(s)$, $S_x(s)$; il terzo integrale rappresenta il momento statico settoriale dell'area individuata dalla coordinata s rispetto al baricentro settoriale. L'equazione si può riscrivere come segue:

$$\tau_{zs} = \frac{E}{b} \left(\xi''' S_y(s) + \eta''' S_x(s) + \theta''' S_\omega(s) \right) \quad (4.14)$$

Sostituendo ξ''' , η''' e θ''' nella precedente si ottiene l'espressione per il calcolo delle tensioni tangenziali per sistema di riferimento non principale:

$$\tau_{zs} = \frac{1}{b} \left(\frac{T_y J_{xy} - T_x J_{xx}}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} S_y(s) + \frac{T_x J_{xy} - T_y J_{yy}}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} S_x(s) - \frac{M_z^{VL}}{J_{\omega\omega}} S_\omega(s) \right) \quad (4.15)$$

Il calcolo tensionale può essere anche eseguito per punti all'interno dei singoli tratti rettilinei inserendo nella matrice $[D]$ due diversi tratti con estremo il punto di cui si vuole ottenere le tensioni.

4.5 Il codice di calcolo

L'algoritmo per il calcolo delle tensioni è stato trasformato in codice di calcolo servendosi del software MATLAB. Si è così automatizzato il calcolo tensionale nelle sezioni sottili aperte permettendo di ottenere risultati in modo efficiente per tutte le geometrie della sezione. Si descrive di seguito il funzionamento del codice.

Una volta inseriti gli input (già elencati nella sezione 4.1) il codice ha una parte che consente l'esecuzione dello Step 1 (sezione 4.2), in particolare, lavorando sulla matrice geometrica $[D]$ si applicano le formule della geometria analitica per poter calcolare l'area spazzata dal raggio vettore per ogni tratto:

1. Distanza tra due punti per calcolare la lunghezza di tutti i tratti (ogni tratto è rappresentato da una riga della matrice $[D]$ introdotta precedentemente):

$$L_i = \sqrt{(y_{final,i} - y_{iniz,i})^2 + (x_{final,i} - x_{iniz,i})^2} \quad (4.16)$$

si ottiene un vettore di k elementi rappresentanti le lunghezze di ogni tratto.

2. Equazione della retta passante per due vertici consecutivi e distanza del centro di taglio da tale retta:

$$y_i = y_{iniz,i} + \frac{y_{final,i} - y_{iniz,i}}{x_{final,i} - x_{iniz,i}}(x - x_{iniz,i}) \quad (4.17)$$

$$d_i = \frac{|y_C - (m_i x_C + q_i)|}{\sqrt{1 + m_i^2}} \quad (4.18)$$

dove si è indicato con m_i e q_i , rispettivamente, il coefficiente angolare della retta i -esima e la sua intercetta.

3. A questo punto si possegono i dati per calcolare l'area spazzata dal raggio vettore in ogni singolo tratto che è l'area di un triangolo avente come base la lunghezza del tratto i -esimo e come altezza la distanza del polo C dalla retta i -esima (nel codice alcune righe permettono di riconoscere se il verso di rotazione è orario e quindi di considerare l'area con il segno meno):

$$w_i = L_i d_i \quad (4.19)$$

4. Conoscendo l'area spazzata dal raggio vettore per ogni tratto il codice calcola il valore della coordinata settoriale con origine nel primo vertice libero della sezione eseguendo una somma cumulata delle aree spazzate dal raggio vettore nei tratti precedenti al vertice da calcolare (il codice riconosce la presenza di nodi multipli ed è in grado di calcolare correttamente i valori della coordinata settoriale dividendo in sottostrutture la sezione). Si ottiene il vettore $\{\omega(s_1)\}$ composto da $k + 1$ elementi.
5. Per ottenere il diagramma settoriale principale si calcola il momento statico settoriale della sezione e l'area della stessa e si applica l'equazione (4.4) ottenendo il vettore $\{\omega(s_0)\}$.

Quella appena descritta è la prima parte del codice, la seconda parte prevede il calcolo dei momenti statici necessari all'applicazione dell'equazione (4.15). In considerazione del fatto che l'obiettivo è il calcolo dello stato tensionale nei vertici della sezione, si considera la corda passante per ogni vertice e si calcola il momento statico della parte sottostante la corda. Il calcolo del momento statico viene eseguito seguendo le regole della geometria delle aree e permette di ottenere i vettori $\{S_x\}$, $\{S_y\}$ e $\{S_\omega\}$ di $k + 1$ elementi (numero di vertici della sezione).

La terza parte consiste nell'applicazione delle formule per il calcolo tensionale ricavate nel Capitolo 4. In particolare, per calcolare le tensioni normali si applica l'equazione (4.12), i quali termini sono, in questa fase, tutti noti. Si calcola il contributo del momento flettente M_x e M_y e il contributo derivante dal bimomento B (proprio della teoria di Vlasov) per tutti i vertici della sezione e per tutti i piani, ottenendo la matrice:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{z,1,P} & \cdots & \sigma_{z,i,P} & \cdots & \sigma_{z,K+1,P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{z,1,j} & \cdots & \sigma_{z,i,j} & \cdots & \sigma_{z,K+1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{z,1,1} & \cdots & \sigma_{z,i,1} & \cdots & \sigma_{z,K+1,1} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

dove si è indicato con k il numero di tratti della sezione e con P il numero di piani dell'elemento. Le righe contengono i valori delle tensioni normali in tutti i vertici di un piano.

Per le tensioni tangenziali derivanti da taglio e momento torcente secondario si applica la (4.15) e come per le tensioni normali si ottiene la seguente matrice:

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \tau_{zs,1,P} & \cdots & \tau_{zs,i,P} & \cdots & \tau_{zs,K+1,P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{zs,1,j} & \cdots & \tau_{zs,i,j} & \cdots & \tau_{zs,K+1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{zs,1,1} & \cdots & \tau_{zs,i,1} & \cdots & \tau_{zs,K+1,1} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

La tensione tangenziale derivante dal momento torcente primario varia linearmente lungo lo spessore, si applica la (3.49) per trovare il massimo che si verifica ai punti estremi della corda passante per il punto da calcolare. La tensione ha valore costante sul piano e quindi, in questo caso, si ottiene un vettore di P elementi cui ogni elemento rappresenta la tensione tangenziale del piano massima e in valore assoluto:

$$\{\tau_T\} = \begin{Bmatrix} \tau_{zs,T,P} \\ \vdots \\ \tau_{zs,T,j} \\ \vdots \\ \tau_{zs,T,1} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Infine, in virtù del fatto che la tensione tangenziale proveniente da taglio e momento torcente secondario è costante sullo spessore e quella derivante dal torcente primario è lineare e simmetrica rispetto alla linea media, la tensione tangenziale totale avrà andamento trapezoidale o bitriangolare e si considereranno per ogni punto due valori della tensione tangenziale totale: quello all'estremo destro della corda e quello all'estremo sinistro.

I risultati vengono rappresentati su dei diagrammi che hanno per ascissa i numeri dei vertici e per ordinata il valore della tensioni; gli output grafici vengono illustrati nel capitolo successivo dove si eseguiranno alcune applicazioni del codice di calcolo appena descritto.

Capitolo 5

Esempi applicativi

Con lo scopo di validare il codice appena proposto e di sottolineare le potenzialità dello stesso, si svolgono alcuni esempi di calcolo tensionale in nuclei a sezione sottile aperta non esistenti nella realtà. Si confrontano i risultati ottenuti dalla risoluzione manuale e quelli ottenuti con l'ausilio del codice di calcolo.

5.1 Esempio n.1

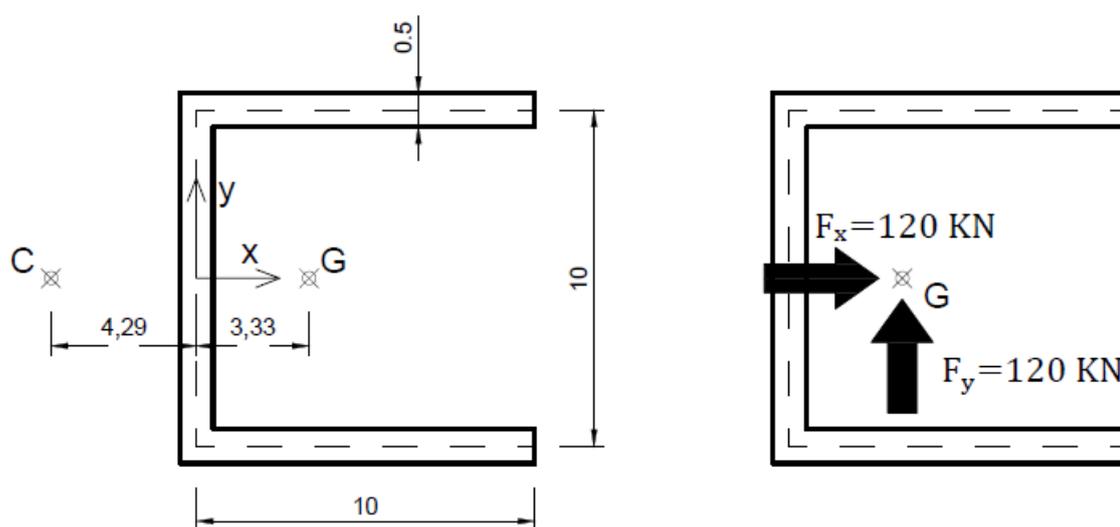


Figura 5.1. Esempio n.1 - Pianta dell'elemento e condizione di carico (misure espresse in metri).

Il primo esempio numerico riguarda un nucleo con sezione a "C" supposto parte della struttura di un edificio alto 30 piani. L'elemento ha sezione costante per tutta la sua altezza, la pianta è riportata in Figura 5.1. Ad ogni piano sono applicate nel baricentro due forze di 120 kN, di cui una in direzione X e l'altra in direzione Y (Figura 5.1). In Figura 5.2 è riportata una vista tridimensionale dell'elemento.

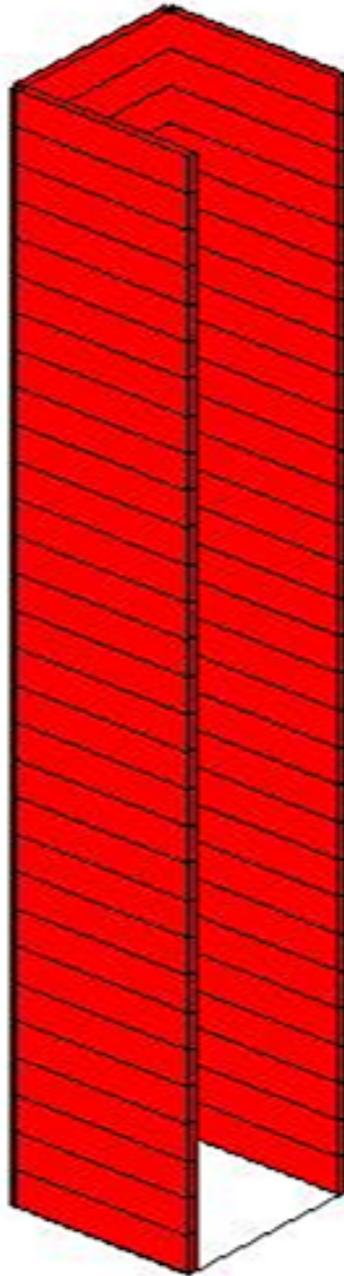


Figura 5.2. Esempio n.1 - Assonometria dell'elemento.

I dati di partenza per l'applicazione dell'algoritmo per il calcolo delle tensioni nelle sezioni sottili aperte sono quelli descritti al Capitolo 4 e qui riportati:

- Matrice geometrica (coordinate espresse in metri):

$$[D] = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

- Spessore sezione:

$$0.5 \text{ m}$$

- Coordinate baricentro:

$$G(3.33; 0)$$

- Coordinate centro di taglio:

$$C(-4.29; 0)$$

- Momenti d'inerzia principali:

$$J_{xx} = 291.6667 \text{ m}^4$$

$$J_{yy} = 166.6667 \text{ m}^4$$

$$J_{\omega\omega} = 2976.1900 \text{ m}^6$$

- Fattore di rigidità torsionale:

$$J_t = 1.25 \text{ m}^4$$

- La matrice $[S]$, di cui si riporta la prima riga, ossia le caratteristiche della sollecitazione alla base dell'elemento con le quali si svolgerà l'esercizio:

$$\begin{bmatrix} 1.95 \times 10^5 & 1.95 \times 10^5 & -1.06 \times 10^6 & 3.60 \times 10^3 & 3.60 \times 10^3 & 2.74 \times 10^4 & 0 \end{bmatrix}$$

Risoluzione manuale

Si consideri la numerazione dei vertici riportata in Figura 5.3.

Il primo passo consiste nel calcolo del diagramma settoriale, per fare questo si sceglie come polo il centro di taglio e come origine settoriale il vertice 1. Di seguito si riporta il calcolo dell'area spazzata dal raggio vettore in ogni vertice:

$$\omega(s_1; 1) = 0 \text{ m}^2$$

$$\omega(s_1; 2) = (10 \cdot 5) \text{ m}^2 = 50 \text{ m}^2$$

$$\omega(s_1; 3) = (50 - 10 \cdot 4.29) \text{ m}^2 = 7.1 \text{ m}^2$$

$$\omega(s_1; 4) = (7.1 + 10 \cdot 5) \text{ m}^2 = 57.1 \text{ m}^2$$

Per determinare il diagramma $\omega(s_0; s)$ avente come origine il baricentro settoriale, si utilizza la relazione (4.3) che richiede il calcolo del momento statico settoriale e dell'area:

$$S_\omega(s_1) = \left[\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot (50 + 7.1) \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot (7.1 + 57.1) \cdot 10 \right] \cdot 0.5 \text{ m}^4 = 428.25 \text{ m}^4$$

$$A = (10 + 10 + 10) \cdot 0.5 \text{ m}^2 = 15 \text{ m}^2$$

$$\omega(s_0; 1) = \left(0 - \frac{428.25}{15} \right) \text{ m}^2 = -28.55 \text{ m}^2$$

$$\omega(s_0; 2) = \left(50 - \frac{428.25}{15} \right) \text{ m}^2 = 21.45 \text{ m}^2$$

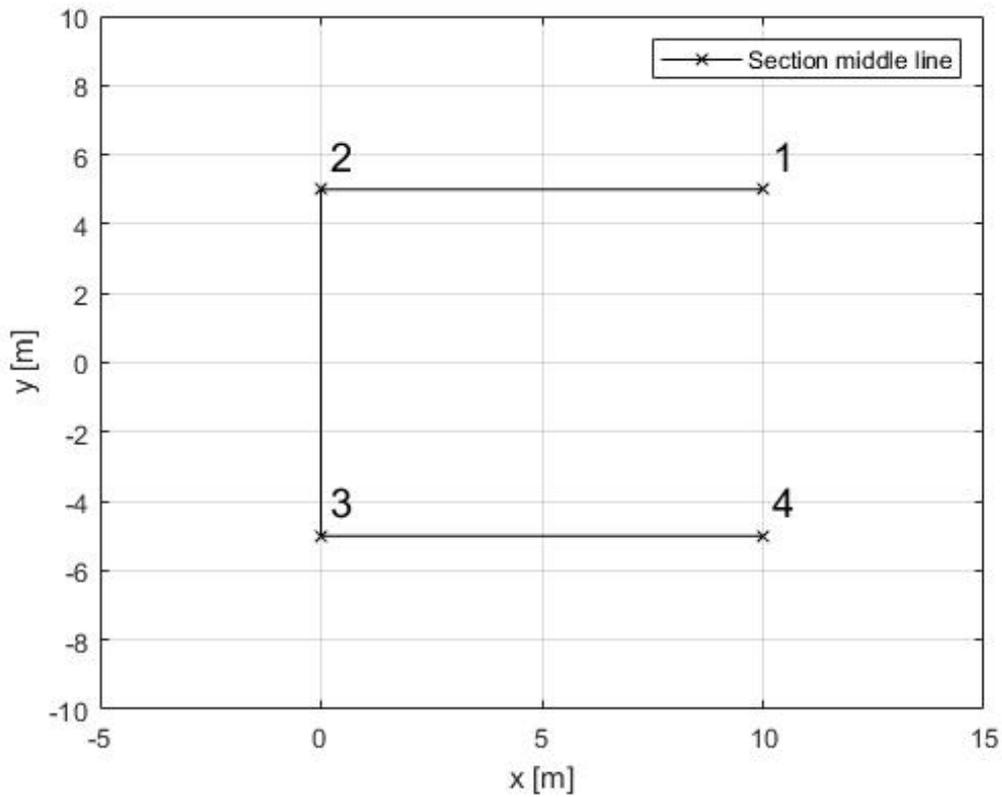


Figura 5.3. Esempio n.1 - Numerazione dei vertici della sezione.

$$\omega(s_0; 3) = \left(7.1 - \frac{428.25}{15}\right) m^2 = -21.45 m^2$$

$$\omega(s_0; 4) = \left(57.1 - \frac{428.25}{15}\right) m^2 = 28.55 m^2$$

Il secondo passo consiste nel calcolo dei momenti statici delle aree sottese alla corda passante per i vertici:

$$\begin{cases} S_x(1) = 0 m^3 \\ S_y(1) = 0 m^3 \\ S_\omega(1) = 0 m^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(2) = [(10 \cdot 0.5) \cdot 5] m^3 = 25 m^3 \\ S_y(2) = [(10 \cdot 0.5) \cdot (5 - 3.33)] m^3 = 8.3 m^3 \\ S_\omega(2) = [(-0.5 \cdot 28.55 \cdot 5.71 + 0.5 \cdot 21.45 \cdot 4.29) \cdot 0.5] m^4 = -17.75 m^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(3) = [(10 \cdot 0.5) \cdot (5) + 0] m^3 = 25 m^3 \\ S_y(3) = [(10 \cdot 0.5) \cdot (5 - 3.33) - (10 \cdot 0.5) \cdot 3.33] m^3 = -8.3 m^3 \\ S_\omega(3) = [(-0.5 \cdot 28.55 \cdot 5.71 + 0.5 \cdot 21.45 \cdot 4.29 + 0) \cdot 0.5] m^4 = -17.75 m^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(4) = 0 \text{ m}^3 \\ S_y(4) = 0 \text{ m}^3 \\ S_\omega(4) = 0 \text{ m}^4 \end{cases}$$

Avendo tutti i dati a disposizione si possono calcolare le tensioni normali e le tensioni tangenziali (Eq. (3.44), (3.48), (3.49)):

$$\begin{cases} \sigma_z(1) = \left[\frac{1.95 \times 10^5}{1.666667 \times 10^2} \cdot 6.66 + \frac{1.95 \times 10^5}{2.916667 \times 10^2} \cdot 5 + \frac{-1.06 \times 10^6}{2.976190 \times 10^3} \cdot -28.55 \right] = \\ = (11163.93 + 10211.42) \text{ kN/m}^2 = 21375.35 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(2) = \left[\frac{1.95 \times 10^5}{1.666667 \times 10^2} \cdot (-3.33) + \frac{1.95 \times 10^5}{2.916667 \times 10^2} \cdot 5 + \frac{-1.06 \times 10^6}{2.976190 \times 10^3} \cdot 21.45 \right] = \\ = (-554.09 - 7672.05) \text{ kN/m}^2 = -8226.04 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(3) = \left[\frac{1.95 \times 10^5}{1.666667 \times 10^2} \cdot (-3.33) + \frac{1.95 \times 10^5}{2.916667 \times 10^2} \cdot (-5) + \frac{-1.06 \times 10^6}{2.976190 \times 10^3} \cdot -21.45 \right] = \\ = (-7250.08 + 7672.05) \text{ kN/m}^2 = 422.03 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(4) = \left[\frac{1.95 \times 10^5}{1.666667 \times 10^2} \cdot 6.66 + \frac{1.95 \times 10^5}{2.916667 \times 10^2} \cdot (-5) + \frac{-1.06 \times 10^6}{2.976190 \times 10^3} \cdot 28.55 \right] = \\ = (4467.88 - 10211.50) \text{ kN/m}^2 = -5743.58 \text{ kN/m}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{zs}(1) = 0 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(2) = \frac{1}{0.5} \left[\frac{3.60 \times 10^3}{1.666667 \times 10^2} \cdot 8.3 + \frac{3.60 \times 10^3}{2.916667 \times 10^2} \cdot 25 + \frac{2.74 \times 10^4}{2.976190 \times 10^3} \cdot (-17.75) \right] = \\ = +977.89 - 327.02 \text{ kN/m}^2 = 650.91 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(3) = \frac{1}{0.5} \left[\frac{3.60 \times 10^3}{1.666667 \times 10^2} \cdot -8.3 + \frac{3.60 \times 10^3}{2.916667 \times 10^2} \cdot 25 + \frac{2.74 \times 10^4}{2.976190 \times 10^3} \cdot -17.75 \right] = \\ = 258.63 - 327.02 \text{ kN/m}^2 = -68.39 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(4) = 0 \text{ kN/m}^2 \end{cases}$$

$$\tau_{zs,T} = 0 \text{ kN/m}^2$$

Il calcolo è stato eseguito alla base dell'elemento oggetto di studio, dove le tensioni assumono il valore massimo. Le tensioni tangenziali dovute al momento torcente primario sono pertanto nulle.

Risoluzione automatica

Lo stesso procedimento eseguito manualmente viene implementato in MATLAB. Una volta inseriti i dati di partenza, il codice, seguendo quanto descritto nel Capitolo 4, restituisce gli output riguardanti le caratteristiche settoriali della sezione e le tensioni.

In Figura 5.4 si è riportato il valore della coordinata settoriale nei vertici.

Le Figure 5.5 e 5.6 mostrano l'andamento delle tensioni normali sulla sezione, in particolare, la prima mostra lo sforzo normale derivante dalla teoria di Saint Venant e quello aggiuntivo, dovuto al bimomento, ottenuto applicando la teoria di Vlasov; nella seconda è riportata la tensione normale totale agente nei vertici della sezione.

Nelle Figure 5.7 e 5.8 si riporta il valore della tensione tangenziale agente lungo la linea media della sezione in corrispondenza dei vertici in valore assoluto. In Figura 5.7 sono riportati i valori di tensione tangenziale derivante dalla formulazione di Jourawsky e quella generata dal momento torcente secondario (Teoria di Vlasov). In Figura 5.8 è riportata la tensione tangenziale totale (sommando i due contributi) in valore assoluto.

Il calcolo è stato eseguito nella sezione di base, pertanto non è presente la tensione tangenziale derivante dalla torsione primaria. Quando quest'ultima è presente (nei piani superiori), il codice restituisce anche un diagramma con il valore della tensione tangenziale negli estremi della corda passante per il punto di interesse. Inoltre, il codice, avendo a disposizione le caratteristiche della sollecitazione ad ogni piano, calcola per ogni piano lo stato tensionale presente.

Si può osservare come i risultati ottenuti tramite l'utilizzo del codice di calcolo siano identici a quelli ottenuti manualmente (Tabella 5.1) con il vantaggio di un tempo di esecuzione del calcolo molto contenuto (1.5 secondi).

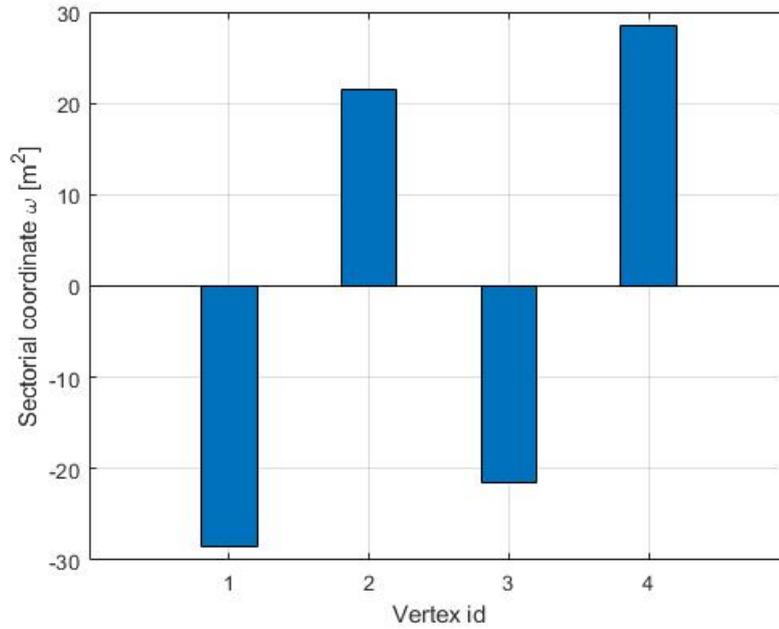


Figura 5.4. Esempio n.1 - Valore coordinata settoriale ω nei vertici.

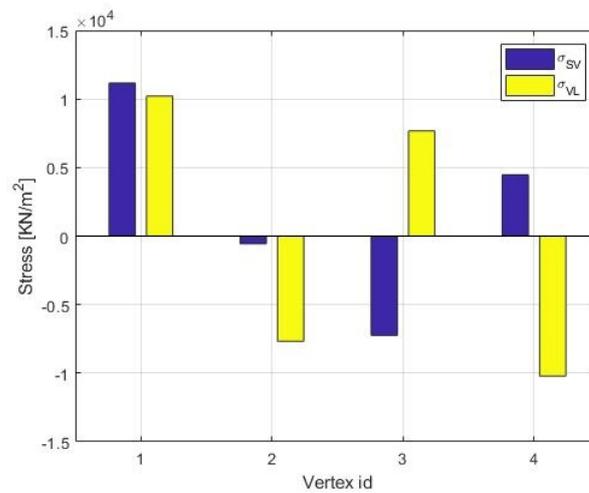


Figura 5.5. Esempio n.1 - Valore della tensione normale nei vertici divisa in: contributo derivante dalla teoria di Saint Venant e contributo aggiuntivo derivante dalla teoria di Vlasov.

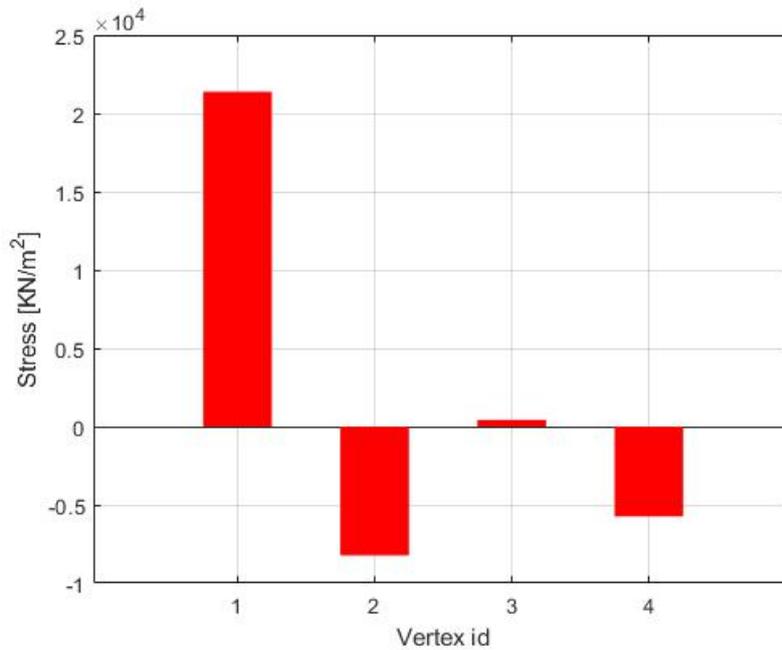


Figura 5.6. Esempio n.1 - Tensione normale totale agente nei vertici della sezione.

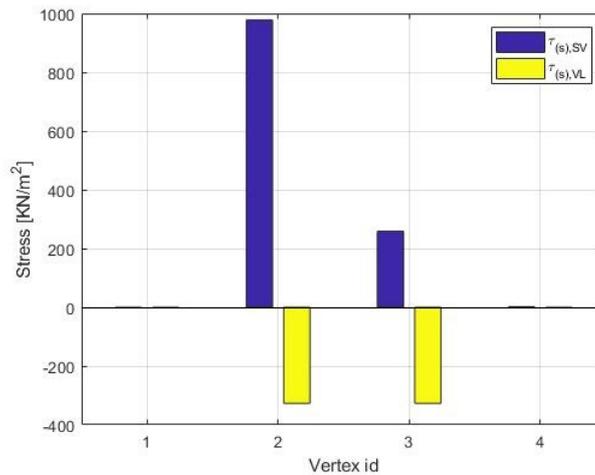


Figura 5.7. Esempio n.1 - Valore della tensione tangenziale derivante dalla teoria di Jourawsky e dal momento torcente secondario (Vlasov).

5.2 Esempio n.2

Il secondo esempio numerico riguarda un nucleo con sezione a "E" supposto parte della struttura di un edificio alto 30 piani. L'elemento ha sezione costante per tutta la sua altezza, la pianta è riportata in Figura 5.9. Ad ogni piano sono applicate nel baricentro due forze di 120 kN, di cui una in direzione X e l'altra in direzione Y (Figura 5.9). In Figura 5.10 è riportata una vista tridimensionale dell'elemento.

I dati di partenza per l'applicazione dell'algorithm per il calcolo delle tensioni nelle sezioni sottili aperte sono quelli descritti al Capitolo 4 e qui riportati:

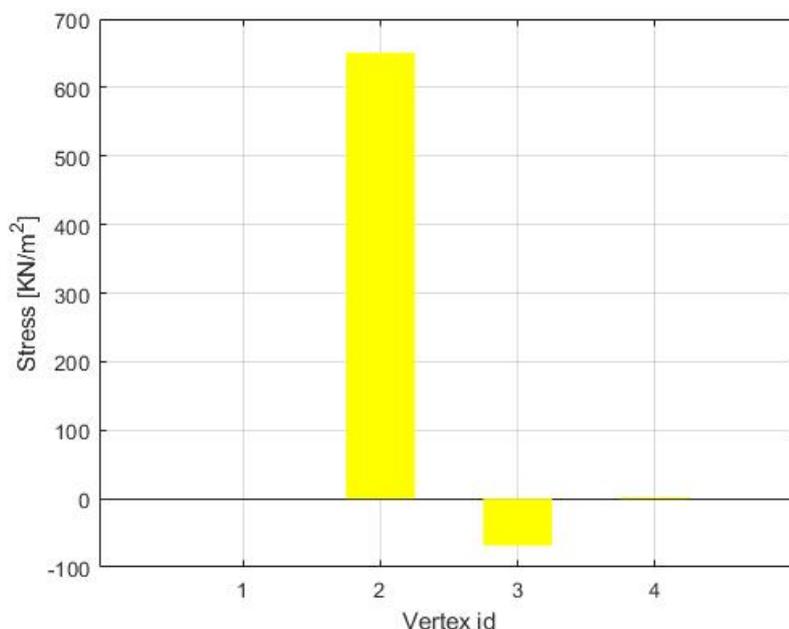


Figura 5.8. Esempio n.1 - Tensione tangenziale totale agente nei vertici della sezione.

Vertex ID	σ_z manuale	σ_z automatica	Diff. %	τ_{sz} manuale	τ_{sz} automatica	Diff. %
1	21375.35	21375.42	0.03	0	0	0
2	-8226.04	-8226.14	0.001	650.91	650.84	0.01
3	422.03	421.96	0.02	-68.39	-68.44	0.07
4	-5743.58	-5743.61	0.0005	0	0	0

Tabella 5.1. Esempio n.1 - Confronto risultati manuali e automatici

- Matrice geometrica (coordinate espresse in metri):

$$[D] = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -10 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$

- Spessore sezione:

$$0.5 \text{ m}$$

- Coordinate baricentro:

$$G(3; 0)$$

- Coordinate centro di taglio:

$$C(-3.75; 0)$$

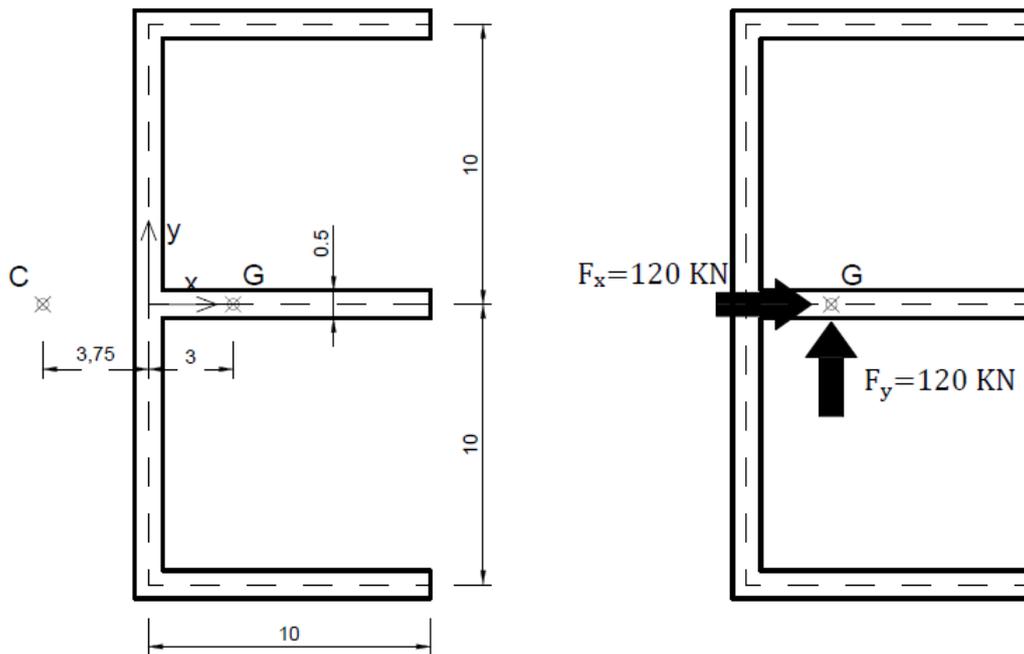


Figura 5.9. Esempio n.2 - Pianta dell'elemento e condizione di carico (misure espresse in metri).

- Momenti d'inerzia principali:

$$J_{xx} = 1333.3333 \text{ m}^4$$

$$J_{yy} = 275.0000 \text{ m}^4$$

$$J_{\omega\omega} = 14583.3300 \text{ m}^6$$

- Fattore di rigidezza torsionale:

$$J_t = 2.08 \text{ m}^4$$

- La matrice $[S]$ di cui si riporta la prima riga, ossia le caratteristiche della sollecitazione alla base dell'elemento con le quali si svolgerà l'esercizio:

$$[1.95 \times 10^5 \quad 1.95 \times 10^5 \quad -1.14 \times 10^6 \quad 3.60 \times 10^3 \quad 3.60 \times 10^3 \quad 2.43 \times 10^4 \quad 0]$$

Risoluzione manuale

Si consideri la numerazione dei vertici riportata in Figura 5.11.

Per il calcolo del diagramma settoriale, si sceglie come polo il centro di taglio e come origine settoriale il vertice 1. Di seguito si riporta il calcolo dell'area spazzata dal raggio vettore in ogni vertice:

$$\omega(s_1; 1) = 0 \text{ m}^2$$

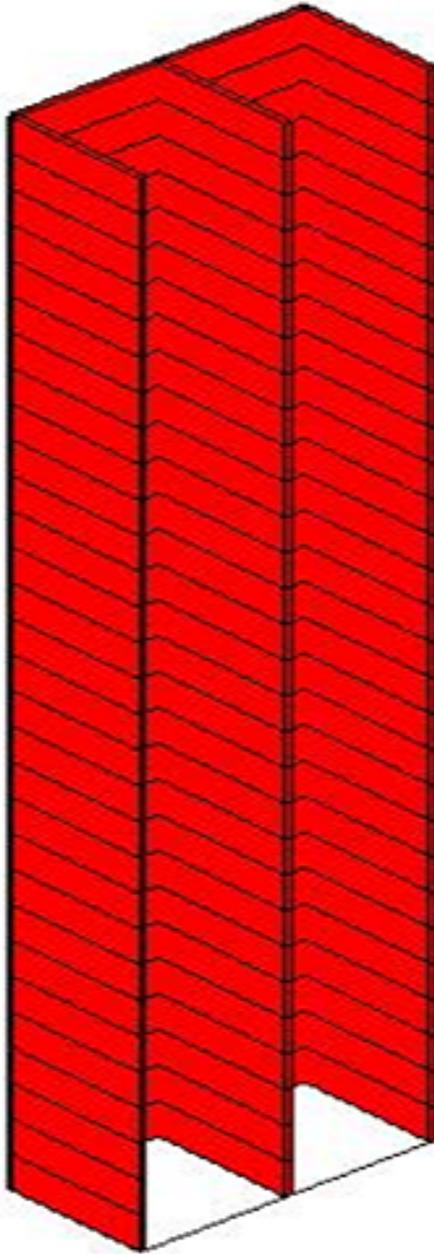


Figura 5.10. Esempio n.2 - Assonometria dell'elemento.

$$\omega(s_1; 2) = (10 \cdot 10) m^2 = 100 m^2$$

$$\omega(s_1; 3) = (100 - 10 \cdot 3.75) m^2 = 62.5 m^2$$

$$\omega(s_1; 4) = (62.5 + 0) m^2 = 62.5 m^2$$

$$\omega(s_1; 5) = (62.5 - 10 \cdot 3.75) m^2 = 25 m^2$$

$$\omega(s_1; 6) = (25 + 10 \cdot 10) m^2 = 125 m^2$$

Per determinare il diagramma $\omega(s_0; s)$ avente come origine il baricentro settoriale, si

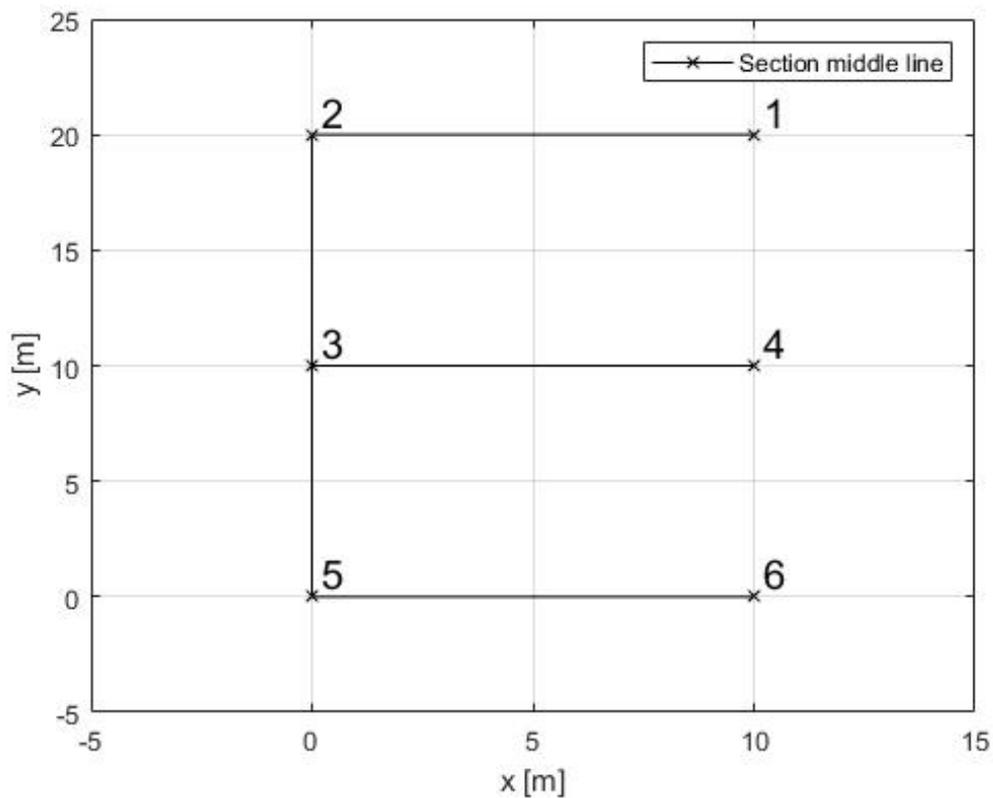


Figura 5.11. Esempio n.2 - Numerazione dei vertici della sezione.

utilizza la relazione (4.3) che richiede il calcolo del momento statico settoriale e dell'area:

$$S_{\omega}(s_1) = \left[\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot (100 + 25) \cdot 20 + 10 \cdot 62.5 + \frac{1}{2} \cdot (25 + 125) \cdot 10 \right] \cdot 0.5 \, m^4 = 1562.5 \, m^4$$

$$A = (10 + 10 + 10 + 10 + 10) \cdot 0.5 \, m^2 = 25 \, m^2$$

$$\omega(s_0; 1) = \left(0 - \frac{1562.5}{25} \right) m^2 = -62.5 \, m^2$$

$$\omega(s_0; 2) = \left(100 - \frac{1562.5}{25} \right) m^2 = 37.5 \, m^2$$

$$\omega(s_0; 3) = \left(62.5 - \frac{1562.5}{25} \right) m^2 = 0 \, m^2$$

$$\omega(s_0; 4) = \left(62.5 - \frac{1562.5}{25} \right) m^2 = 0 \, m^2$$

$$\omega(s_0; 5) = \left(25 - \frac{1562.5}{25} \right) m^2 = -37.5 \, m^2$$

$$\omega(s_0; 6) = \left(125 - \frac{1562.5}{25} \right) m^2 = 62.5 \, m^2$$

Il calcolo dei momenti statici rispetto al baricentro delle aree sottese alla corda passante per i vertici:

$$\begin{cases} S_x(1) = 0 \text{ m}^3 \\ S_y(1) = 0 \text{ m}^3 \\ S_\omega(1) = 0 \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(2) = [(10 \cdot 0.5) \cdot 10] \text{ m}^3 = 50 \text{ m}^3 \\ S_y(2) = [(10 \cdot 0.5) \cdot (5 - 3)] \text{ m}^3 = 10 \text{ m}^3 \\ S_\omega(2) = [(0.5 \cdot 37.5 \cdot 3.75 - 0.5 \cdot 62.5 \cdot 6.25) \cdot 0.5] \text{ m}^4 = -62.5 \text{ m}^4 \end{cases}$$

Il vertice 3 è un nodo triplo, per completezza si calcolano i momenti statici delle aree sottese alla corda passante per tutti e tre i tratti uscenti dal vertice:

$$\begin{cases} S_x(3 \rightarrow 2) = [(10 \cdot 0.5) \cdot 10 + (10 \cdot 0.5) \cdot 5] \text{ m}^3 = 75 \text{ m}^3 \\ S_y(3 \rightarrow 2) = [(10 \cdot 0.5) \cdot (5 - 3) + (10 \cdot 0.5) \cdot (-3)] \text{ m}^3 = -5 \text{ m}^3 \\ S_\omega(3 \rightarrow 2) = [(0.5 \cdot 37.5 \cdot 3.75 - 0.5 \cdot 62.5 \cdot 6.25 + 0.5 \cdot 37.5 \cdot 10) \cdot 0.5] \text{ m}^4 = 31.25 \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(3 \rightarrow 4) = 0 \text{ m}^3 \\ S_y(3 \rightarrow 4) = [(10 \cdot 0.5) \cdot (5 - 3)] \text{ m}^3 = 10 \text{ m}^3 \\ S_\omega(3 \rightarrow 4) = 0 \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(3 \rightarrow 5) = [(10 \cdot 0.5) \cdot (-10) + (10 \cdot 0.5) \cdot (-5)] \text{ m}^3 = -75 \text{ m}^3 \\ S_y(3 \rightarrow 5) = [(10 \cdot 0.5) \cdot (5 - 3) + (10 \cdot 0.5) \cdot (-3)] \text{ m}^3 = -5 \text{ m}^3 \\ S_\omega(3 \rightarrow 5) = [(-0.5 \cdot 37.5 \cdot 3.75 + 0.5 \cdot 62.5 \cdot 6.25 - 0.5 \cdot 37.5 \cdot 10) \cdot 0.5] \text{ m}^4 = -31.25 \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(4) = 0 \text{ m}^3 \\ S_y(4) = 0 \text{ m}^3 \\ S_\omega(4) = 0 \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(5) = [(10 \cdot 0.5) \cdot (-10)] \text{ m}^3 = -50 \text{ m}^3 \\ S_y(5) = [(10 \cdot 0.5) \cdot (5 - 3)] \text{ m}^3 = 10 \text{ m}^3 \\ S_\omega(5) = [(-0.5 \cdot 37.5 \cdot 3.75 + 0.5 \cdot 62.5 \cdot 6.25) \cdot 0.5] \text{ m}^4 = 62.5 \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(6) = 0 \text{ m}^3 \\ S_y(6) = 0 \text{ m}^3 \\ S_\omega(6) = 0 \text{ m}^4 \end{cases}$$

Avendo tutti i dati a disposizione si possono calcolare le tensioni normali e le tensioni tangenziali (Eq. (3.44), (3.48), (3.49)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z(1) = \left[\frac{1.95 \times 10^5}{2.75 \times 10^2} \cdot 7 + \frac{1.95 \times 10^5}{1.333333 \times 10^3} \cdot 10 + \frac{-1.06 \times 10^6}{1.458333 \times 10^4} \cdot -62.5 \right] = \\ = (6436.00 + 4981.73) \text{ kN/m}^2 = 11327.73 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(2) = \left[\frac{1.95 \times 10^5}{2.75 \times 10^2} \cdot (-3) + \frac{1.95 \times 10^5}{1.333333 \times 10^3} \cdot 10 + \frac{-1.06 \times 10^6}{1.458333 \times 10^4} \cdot 37.5 \right] = \\ = (-665.80 - 2935.12) \text{ kN/m}^2 = -3600.92 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(3) = \left[\frac{1.95 \times 10^5}{2.75 \times 10^2} \cdot (-3) + \frac{1.95 \times 10^5}{1.333333 \times 10^3} \cdot (0) + \frac{-1.06 \times 10^6}{1.458333 \times 10^4} \cdot 0 \right] = \\ = (-2130.48 + 0) \text{ kN/m}^2 = -2130.48 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(4) = \left[\frac{1.95 \times 10^5}{2.75 \times 10^2} \cdot 6 + \frac{1.95 \times 10^5}{1.333333 \times 10^3} \cdot (0) + \frac{-1.06 \times 10^6}{1.458333 \times 10^4} \cdot 0 \right] = \\ = (4971.22 - 0) \text{ kN/m}^2 = 4971.22 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(5) = \left[\frac{1.95 \times 10^5}{2.75 \times 10^2} \cdot (-3) + \frac{1.95 \times 10^5}{1.333333 \times 10^3} \cdot (-10) + \frac{-1.06 \times 10^6}{1.458333 \times 10^4} \cdot (-37.5) \right] = \\ = (-3595.3 + 2935.06) \text{ kN/m}^2 = -660.29 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(6) = \left[\frac{1.95 \times 10^5}{2.75 \times 10^2} \cdot (6) + \frac{1.95 \times 10^5}{1.333333 \times 10^3} \cdot (-10) + \frac{-1.06 \times 10^6}{1.458333 \times 10^4} \cdot 62.5 \right] = \\ = (3506.52 - 4891.78) \text{ kN/m}^2 = -1385.26 \text{ kN/m}^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{zs}(1) = 0 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(2) = \frac{1}{0.5} \left[\frac{3.60 \times 10^3}{2.75 \times 10^2} \cdot 10 + \frac{3.60 \times 10^3}{1.333333 \times 10^3} \cdot 50 + \frac{2.43 \times 10^4}{1.458333 \times 10^4} \cdot (-62.5) \right] = \\ = 531.72 - 208.29 \text{ kN/m}^2 = 323.43 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(3 \rightarrow 2) = \frac{1}{0.5} \left[\frac{3.60 \times 10^3}{2.75 \times 10^2} \cdot (-5) + \frac{3.60 \times 10^3}{1.333333 \times 10^3} \cdot 75 + \frac{2.43 \times 10^4}{1.458333 \times 10^4} \cdot 31.25 \right] = \\ = 274.09 + 104.14 \text{ kN/m}^2 = 378.23 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(3 \rightarrow 4) = \frac{1}{0.5} \left[\frac{3.60 \times 10^3}{2.75 \times 10^2} \cdot 10 + \frac{3.60 \times 10^3}{1.333333 \times 10^3} \cdot 0 + \frac{2.43 \times 10^4}{1.458333 \times 10^4} \cdot 0 \right] = \\ = 261.81 + 0 \text{ kN/m}^2 = 261.81 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(3 \rightarrow 5) = \frac{1}{0.5} \left[\frac{3.60 \times 10^3}{2.75 \times 10^2} \cdot (-5) + \frac{3.60 \times 10^3}{1.333333 \times 10^3} \cdot (-75) + \frac{2.43 \times 10^4}{1.458333 \times 10^4} \cdot (-31.25) \right] = \\ = -535.83 - 104.14 \text{ kN/m}^2 = -639.97 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(4) = 0 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(5) = \frac{1}{0.5} \left[\frac{3.60 \times 10^3}{2.75 \times 10^2} \cdot 10 + \frac{3.60 \times 10^3}{1.333333 \times 10^3} \cdot (-50) + \frac{2.43 \times 10^4}{1.458333 \times 10^4} \cdot 62.5 \right] = \\ = -8.28 + 208.29 \text{ kN/m}^2 = 200.01 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(6) = 0 \text{ kN/m}^2 \end{array} \right.$$

$$\tau_{zs,T} = 0 \text{ kN/m}^2$$

Il calcolo è stato eseguito alla base dell'elemento oggetto di studio, dove le tensioni assumono il valore massimo. Le tensioni tangenziali dovute al momento torcente primario sono pertanto nulle.

Risoluzione automatica

Come fatto per l'Esempio n.1 si calcola la sezione con l'ausilio del codice e si riportano in Figura 5.12 i valori della coordinata settoriale nei vertici, in Figura 5.13 i contributi di tensione normale derivanti dalla flessione e quelli derivanti dal bimomento, in Figura 5.14 la tensione normale totale, in Figura 5.15 la tensione tangenziale in valore assoluto evidenziando il contributo delle tensioni generate dal taglio e quelle generate dal momento

torcente secondario, in Figura 5.16 la tensione tangenziale totale nei vertici in valore assoluto.

Anche per questo esempio i risultati ottenuti con il codice di calcolo per le tensioni sono pressochè uguali a quelli ottenuti manualmente (Tabella 5.2).

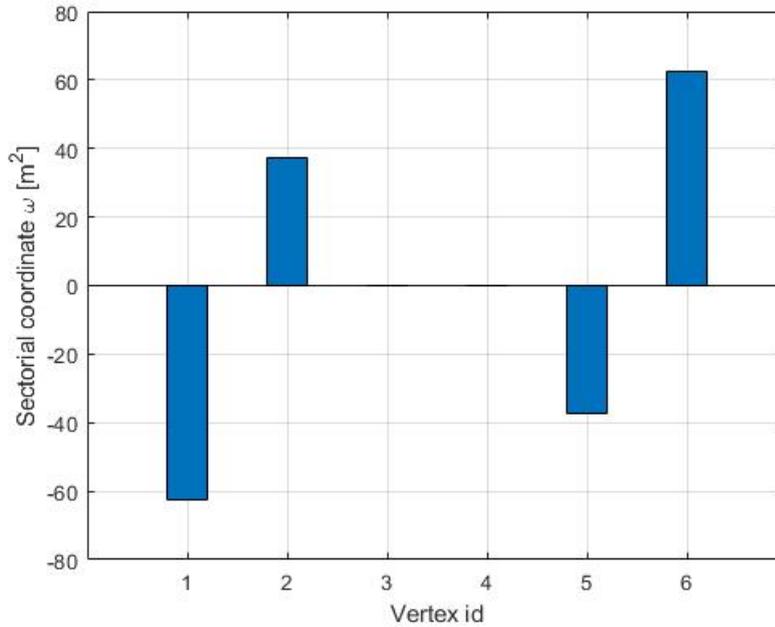


Figura 5.12. Esempio n.2 - Valore coordinata settoriale ω nei vertici.

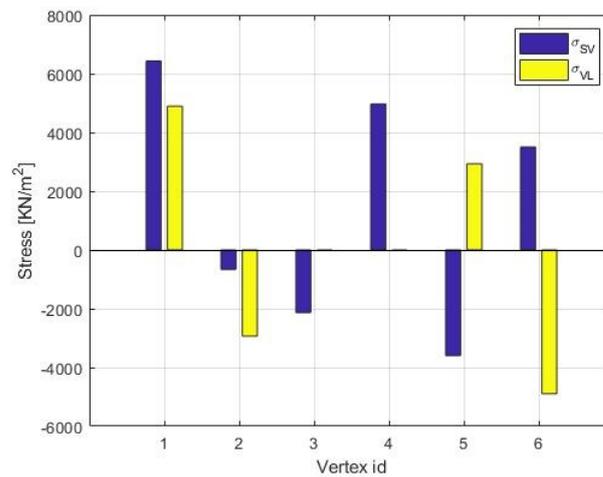


Figura 5.13. Esempio n.2 - Valore della tensione normale nei vertici divisa in: contributo derivante dalla teoria di Saint Venant e contributo aggiuntivo derivante dalla teoria di Vlasov.

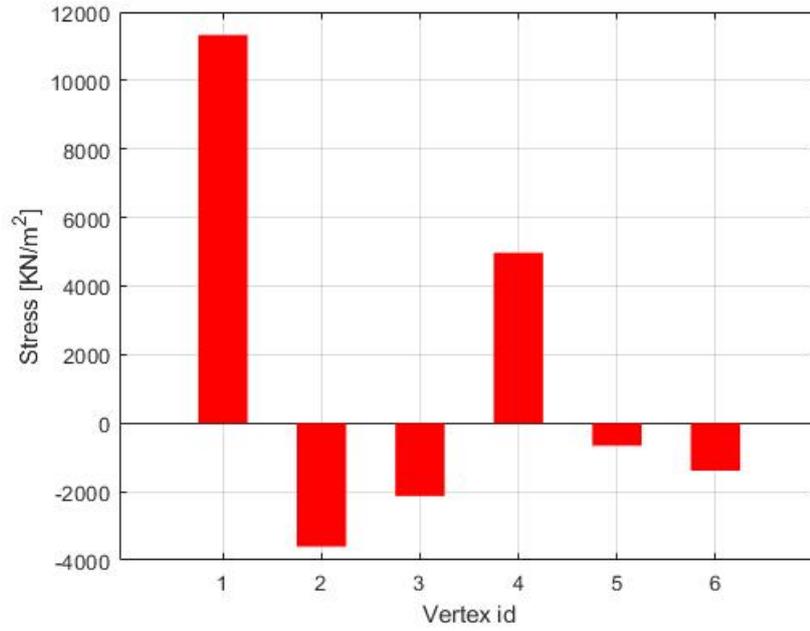


Figura 5.14. Esempio n.2 - Tensione normale totale agente nei vertici della sezione.

[h]

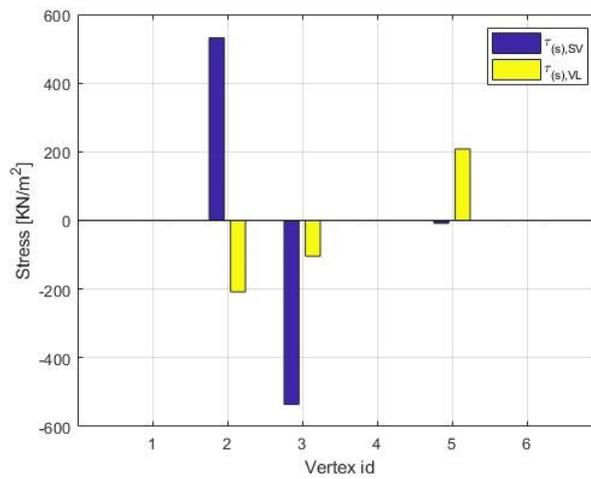


Figura 5.15. Esempio n.2 - Valore della tensione tangenziale derivante dalla teoria di Jourawsky e dal momento torcente secondario (Vlasov) in valore assoluto.

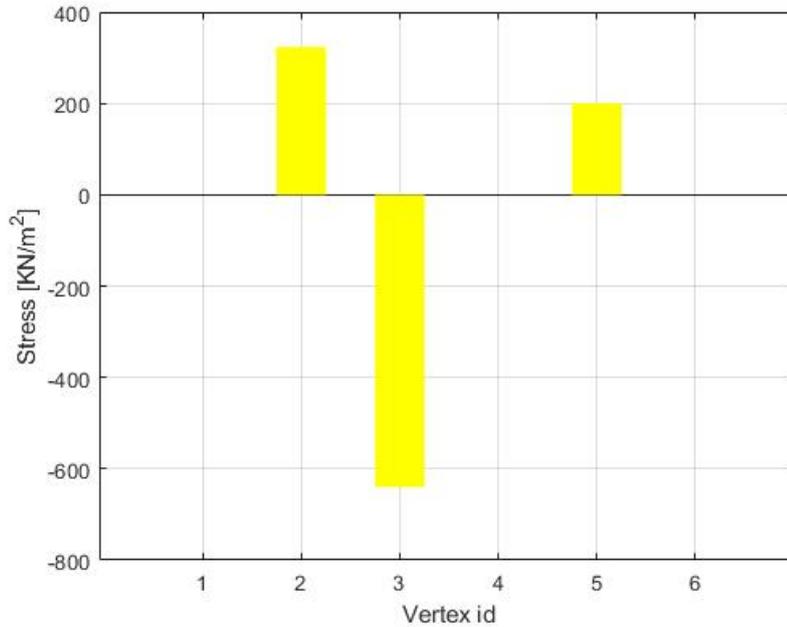


Figura 5.16. Esempio n.2 - Tensione tangenziale totale agente nei vertici della sezione.

Vertex ID	σ_z manuale	σ_z automatica	Diff. %	τ_{sz} manuale	τ_{sz} automatica	Diff. %
1	11327.73	11327.79	0.0005	0	0	0
2	3600.92	3600.85	0.002	323.43	323.53	0.03
3	-2130.48	-2130.54	0.003	-639.97	-640.05	0.01
4	4971.22	4971.27	0.001	0	0	0
5	-660.29	-660.24	0.007	200.01	200.10	0.04
6	-1385.26	-1385.24	0.001	0	0	0

Tabella 5.2. Esempio n.2 - Confronto risultati manuali e automatici

5.3 Esempio n.3

Il terzo esempio numerico riguarda una sezione di forma più complessa, l'elemento è supposto parte della struttura di un edificio alto 30 piani. L'elemento ha sezione costante per tutta la sua altezza, la pianta è riportata in Figura 5.17. Ad ogni piano sono applicate nel baricentro due forze di 120 kN, di cui una in direzione X e l'altra in direzione Y (Figura 5.17). In Figura 5.18 è riportata una vista tridimensionale dell'elemento.

Nella sezione oggetto di studio, il sistema di riferimento non è principale e presenta un'angolo di rotazione di -5.67 gradi. In questo caso si applicano, per il calcolo delle tensioni, le equazioni (4.12) e (4.15).

I dati di partenza per l'applicazione dell'algorithmo per il calcolo delle tensioni nelle sezioni sottili aperte sono quelli descritti al Capitolo 4 e qui riportati:

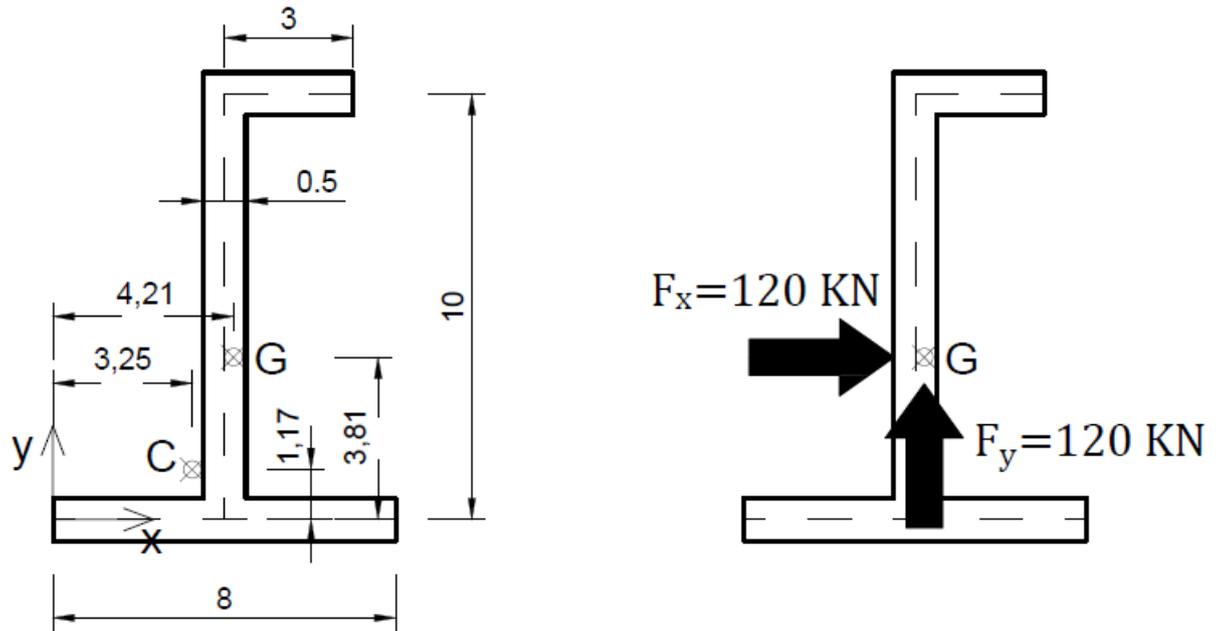


Figura 5.17. Esempio n.3 - Pianta dell'elemento e condizione di carico (misure espresse in metri).

- Matrice geometrica (coordinate espresse in metri):

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

- Spessore sezione:

$$0.5 \text{ m}$$

- Coordinate baricentro:

$$G(4.21; 3.81)$$

- Coordinate centro di taglio:

$$C(3.25; 1.17)$$

- Momenti d'inerzia principali:

$$J_{\xi\xi} = 165.6683 \text{ m}^4$$

$$J_{\eta\eta} = 23.9685 \text{ m}^4$$

$$J_{\omega\omega} = 250.3972 \text{ m}^6$$

- Fattore di rigidezza torsionale:

$$J_t = 0.875 \text{ m}^4$$

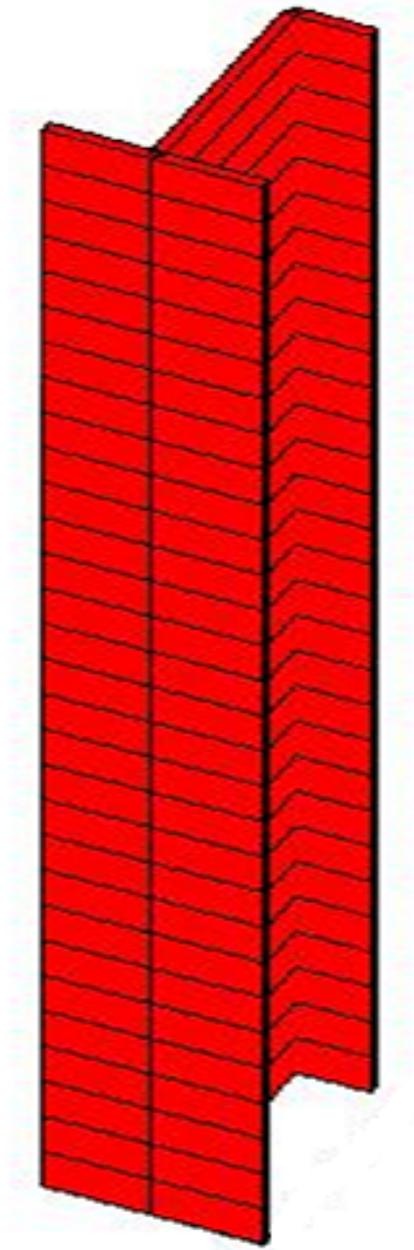


Figura 5.18. Esempio n.3 - Assonometria dell'elemento.

- La matrice $[S]$ di cui si riporta la prima riga, ossia le caratteristiche della sollecitazione alla base dell'elemento con le quali si svolgerà l'esercizio:

$$[2.13 \times 10^5 \quad 1.75 \times 10^5 \quad 1.22 \times 10^5 \quad 3.23 \times 10^3 \quad 3.94 \times 10^3 \quad -6.04 \times 10^3 \quad 0]$$

Risoluzione manuale

Nella sezione oggetto di studio, il sistema di riferimento non è principale e presenta un'angolo di rotazione di -5.67° . In questo caso si applicano, per il calcolo delle tensioni, le equazioni (4.12) e (4.15). Si devono calcolare i momenti d'inerzia relativi al sistema di riferimento baricentrico non principale a partire da quelli noti $J_{\xi\xi}$ e $J_{\eta\eta}$ (principali):

$$J_{xx} = [165.6683 \cdot (\cos^2(-5.67)) + 23.9686 \cdot (\sin^2(-5.67))] m^4 = 118.74 m^4$$

$$J_{yy} = [165.6683 \cdot (\sin^2(-5.67)) + 23.9686 \cdot (\cos^2(-5.67))] m^4 = 70.90 m^4$$

$$J_{xy} = [0.5 \cdot (165.6683 - 23.9686) \cdot \sin(2 \cdot (-5.67))] m^4 = 66.69 m^4$$

Si consideri la numerazione dei vertici riportata in Figura 5.19.

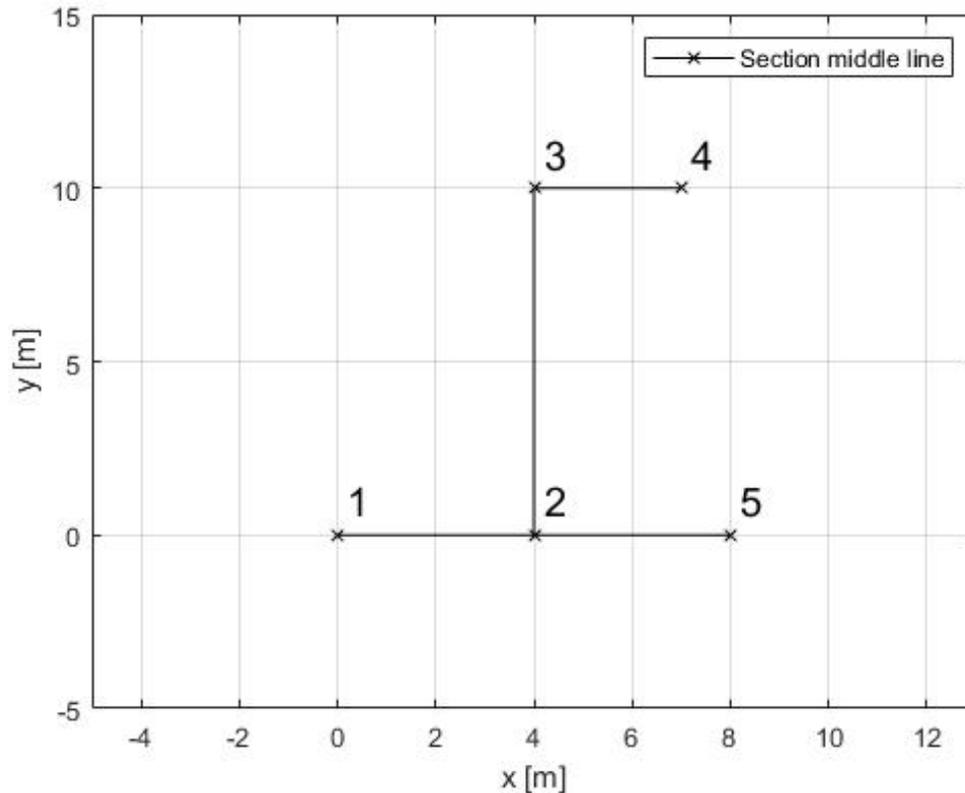


Figura 5.19. Esempio n.3 - Numerazione dei vertici della sezione.

Per il calcolo del diagramma settoriale, si sceglie come polo il centro di taglio e come origine settoriale il vertice 1. Di seguito si riporta il calcolo dell'area spazzata dal raggio vettore in ogni vertice:

$$\omega(s_1; 1) = 0 m^2$$

$$\omega(s_1; 2) = (4 \cdot 1.17) m^2 = 4.68 m^2$$

$$\omega(s_1; 3) = (4.68 + 10 \cdot 0.75) m^2 = 12.18 m^2$$

$$\omega(s_1; 4) = [12.18 - 3 \cdot (10 - 1.17)] m^2 = -14.31 m^2$$

$$\omega(s_1; 5) = (4.68 + 4 \cdot 1.17) m^2 = 9.36 m^2$$

Per determinare il diagramma $\omega(s_0; s)$ avente come origine il baricentro settoriale, si utilizza la relazione (4.3) che richiede il calcolo del momento statico settoriale e dell'area:

$$S_{\omega}(s_1) = \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9.36 + \frac{1}{2} \cdot (4.68 + 12.18) \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 12.18 \cdot 1.38 + \frac{1}{2} \cdot (-14.31) \cdot 2.62 \right] \cdot 0.5 \text{ m}^4 = 59.27 \text{ m}^4$$

$$A = (8 + 10 + 3) \cdot 0.5 \text{ m}^2 = 10.5 \text{ m}^2$$

$$\omega(s_0; 1) = \left(0 - \frac{59.27}{10.5} \right) \text{ m}^2 = -5.645 \text{ m}^2$$

$$\omega(s_0; 2) = \left(4.68 - \frac{59.27}{10.5} \right) \text{ m}^2 = -0.965 \text{ m}^2$$

$$\omega(s_0; 3) = \left(12.18 - \frac{59.27}{10.5} \right) \text{ m}^2 = 6.535 \text{ m}^2$$

$$\omega(s_0; 4) = \left(-14.31 - \frac{59.27}{10.5} \right) \text{ m}^2 = -19.955 \text{ m}^2$$

$$\omega(s_0; 5) = \left(9.36 - \frac{59.27}{10.5} \right) \text{ m}^2 = 3.715 \text{ m}^2$$

Il calcolo dei momenti statici rispetto al baricentro delle aree sottese alla corda passante per i vertici:

$$\begin{cases} S_x(1) = 0 \text{ m}^3 \\ S_y(1) = 0 \text{ m}^3 \\ S_{\omega}(1) = 0 \text{ m}^4 \end{cases}$$

Il vertice 2 è un nodo triplo, per completezza si calcolano i momenti statici delle aree sottese alla corda passante per tutti e tre i tratti uscenti dal vertice:

$$\begin{cases} S_x(2 \rightarrow 1) = [(4 \cdot 0.5) \cdot (-3.81)] \text{ m}^3 = -7.62 \text{ m}^3 \\ S_y(2 \rightarrow 1) = [(4 \cdot 0.5) \cdot (-4.21 + 2)] \text{ m}^3 = -4.42 \text{ m}^3 \\ S_{\omega}(2 \rightarrow 1) = [(0.5 \cdot (-5.645 - 0.965) \cdot 4) \cdot 0.5] \text{ m}^4 = -6.61 \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(2 \rightarrow 3) = [(8 \cdot 0.5) \cdot (-3.81)] \text{ m}^3 = +15.24 \text{ m}^3 \\ m^3 \\ S_y(2 \rightarrow 3) = [(8 \cdot 0.5) \cdot (-4.21 + 4)] \text{ m}^3 = +0.84 \text{ m}^3 \\ S_{\omega}(2 \rightarrow 3) = [(0.5 \cdot (-5.645) \cdot 4.825 + 0.5 \cdot 3.715 \cdot (8 - 4.825)) \cdot 0.5] \text{ m}^4 = +3.86 \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(2 \rightarrow 5) = [(4 \cdot 0.5) \cdot (-3.81)] \text{ m}^3 = -7.62 \text{ m}^3 \\ S_y(2 \rightarrow 5) = [(4 \cdot 0.5) \cdot (-4.21 + 6)] \text{ m}^3 = 3.58 \text{ m}^3 \\ S_{\omega}(2 \rightarrow 5) = [(0.5 \cdot (-0.965) \cdot 0.825 + 0.5 \cdot 3.715 \cdot (8 - 4.825)) \cdot 0.5] \text{ m}^4 = 2.75 \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(3) = [(3 \cdot 0.5) \cdot 6.19] \text{ m}^3 = 9.29 \text{ m}^3 \\ S_y(3) = [(3 \cdot 0.5) \cdot (-4.21 + 5.5)] \text{ m}^3 = 1.94 \text{ m}^3 \\ S_{\omega}(3) = [(0.5 \cdot 6.535 \cdot 0.74 + 0.5 \cdot (-19.955) \cdot (3 - 0.74)) \cdot 0.5] \text{ m}^4 = -10.06 \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(4) = 0 \text{ m}^3 \\ S_y(4) = 0 \text{ m}^3 \\ S_{\omega}(4) = 0 \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x(5) = 0 \text{ m}^3 \\ S_y(5) = 0 \text{ m}^3 \\ S_\omega(5) = 0 \text{ m}^4 \end{cases}$$

Avendo tutti i dati a disposizione si possono calcolare le tensioni normali e le tensioni tangenziali (Eq. (4.12), (4.15), (3.49)):

$$\begin{cases} \sigma_z(1) = \left[\frac{(4.21-0)(2.13 \times 10^5 \cdot 66.69 - 1.75 \times 10^5 \cdot 118.74) + (3.81-0)(1.75 \times 10^5 \cdot 66.69 - 2.13 \times 10^5 \cdot 70.90)}{118.74 \cdot 70.9 - 66.69^2} + \frac{1.22 \times 10^5 \cdot (-5.645)}{2.50 \times 10^4} \right] \text{ kN/m}^2 = -10261.79 - 2747.87 \text{ kN/m}^2 = -13009.66 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(2) = \left[\frac{(4.21-4)(2.13 \times 10^5 \cdot 66.69 - 1.75 \times 10^5 \cdot 118.74) + (3.81-0)(1.75 \times 10^5 \cdot 66.69 - 2.13 \times 10^5 \cdot 70.90)}{118.74 \cdot 70.9 - 66.69^2} + \frac{1.22e+05 \cdot (-0.965)}{2.50 \times 10^4} \right] \text{ kN/m}^2 = -3676.98 - 469.74 \text{ kN/m}^2 = -4146.72 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(3) = \left[\frac{(4.21-4)(2.13e+05 \cdot 66.69 - 1.75 \times 10^5 \cdot 118.74) + (3.81-10)(1.75 \times 10^5 \cdot 66.69 - 2.13 \times 10^5 \cdot 70.90)}{118.74 \cdot 70.9 - 66.69^2} + \frac{1.22 \times 10^5 \cdot (6.535)}{2.50 \times 10^4} \right] \text{ kN/m}^2 = 5066.24 + 3181.11 \text{ kN/m}^2 = 8247.35 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(4) = \left[\frac{(4.21-7)(2.13 \times 10^5 \cdot 66.69 - 1.75 \times 10^5 \cdot 118.74) + (3.81-10)(1.75 \times 10^5 \cdot 66.69 - 2.13 \times 10^5 \cdot 70.90)}{118.74 \cdot 70.9 - 66.69^2} + \frac{1.22 \times 10^5 \cdot (-19.955)}{2.50 \times 10^4} \right] \text{ kN/m}^2 = 10006.42 - 9713.70 \text{ kN/m}^2 = 292.72 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(5) = \left[\frac{(4.21-8)(2.13 \times 10^5 \cdot 66.69 - 1.75 \times 10^5 \cdot 118.74) + (3.81-0)(1.75 \times 10^5 \cdot 66.69 - 2.13 \times 10^5 \cdot 70.90)}{118.74 \cdot 70.9 - 66.69^2} + \frac{1.22 \times 10^5 \cdot (3.715)}{2.50 \times 10^4} \right] \text{ kN/m}^2 = 2909.94 + 1808.39 \text{ kN/m}^2 = 4718.33 \text{ kN/m}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{zs}(1) = 0 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(2 \rightarrow 1) = \left[\frac{1}{0.5} \left(\frac{3.94 \times 10^3 \cdot 66.69 - 3.23 \times 10^3 \cdot 118.74}{118.74 \cdot 70.90 - 66.69^2} \cdot (-4.42) + \frac{3.23 \times 10^3 \cdot 66.69 - 3.94 \times 10^3 \cdot 70.90}{118.74 \cdot 70.90 - 66.69^2} \cdot (-7.62) + \frac{-6.04 \times 10^3}{250.39} \cdot (-6.61) \right) \right] \text{ kN/m}^2 = (514.22 - 318.90) \text{ kN/m}^2 = 195.32 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(2 \rightarrow 3) = \left[\frac{1}{0.5} \left(\frac{3.94 \times 10^3 \cdot 66.69 - 3.23 \times 10^3 \cdot 118.74}{118.74 \cdot 70.90 - 66.69^2} \cdot (-0.84) + \frac{3.23 \times 10^3 \cdot 66.69 - 3.94 \times 10^3 \cdot 70.90}{118.74 \cdot 70.90 - 66.69^2} \cdot (-15.24) + \frac{-6.04 \times 10^3}{250.39} \cdot (-3.86) \right) \right] \text{ kN/m}^2 = (541.84 - 186.22) \text{ kN/m}^2 = 355.62 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(2 \rightarrow 5) = \frac{1}{0.5} \left(\frac{3.94 \times 10^3 \cdot 66.69 - 3.23 \times 10^3 \cdot 118.74}{118.74 \cdot 70.90 - 66.69^2} \cdot (3.58) + \frac{3.23 \times 10^3 \cdot 66.69 - 3.94 \times 10^3 \cdot 70.90}{118.74 \cdot 70.90 - 66.69^2} \cdot (-7.62) + \frac{-6.04 \times 10^3}{250.39} \cdot (2.75) \right) = (27.61 + 132.67) \text{ kN/m}^2 = 160.28 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(3) = \left[\frac{1}{0.5} \left(\frac{3.94 \times 10^3 \cdot 66.69 - 3.23 \times 10^3 \cdot 118.74}{118.74 \cdot 70.90 - 66.69^2} \cdot (1.94) + \frac{3.23 \times 10^3 \cdot 66.69 - 3.94 \times 10^3 \cdot 70.90}{118.74 \cdot 70.90 - 66.69^2} \cdot (9.29) + \frac{-6.04 \times 10^3}{250.39} \cdot (-10.06) \right) \right] \text{ kN/m}^2 = (+417.15 - 485.34) \text{ kN/m}^2 = -68.19 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(4) = 0 \text{ kN/m}^2 \\ \tau_{zs}(5) = 0 \text{ kN/m}^2 \end{cases}$$

$$\tau_{zs,T} = 0 \text{ kN/m}^2$$

Il calcolo è stato eseguito alla base dell'elemento oggetto di studio, dove le tensioni assumono il valore massimo. Le tensioni tangenziali dovute al momento torcente primario sono pertanto nulle.

Risoluzione automatica

Si esegue anche per questo esempio il calcolo automatico delle tensioni e nelle Figure 5.20, 5.21, 5.22, 5.23 e 5.24 sono riportati gli output restituiti (coordinata settoriale e tensioni).

Si può verificare l'esattezza del codice di calcolo confrontando i risultati forniti dallo stesso con quelli ottenuti manualmente (Tabella 5.3).

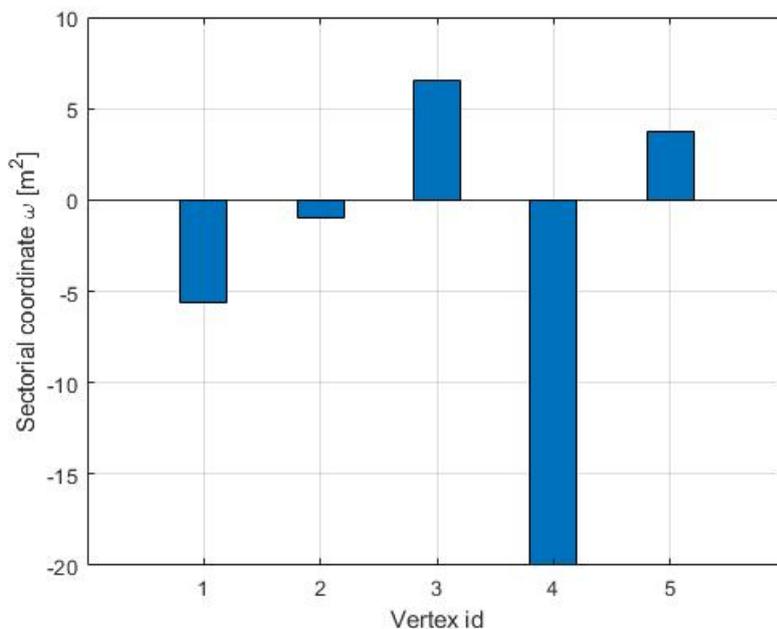


Figura 5.20. Esempio n.3 - Valore coordinata settoriale ω nei vertici.

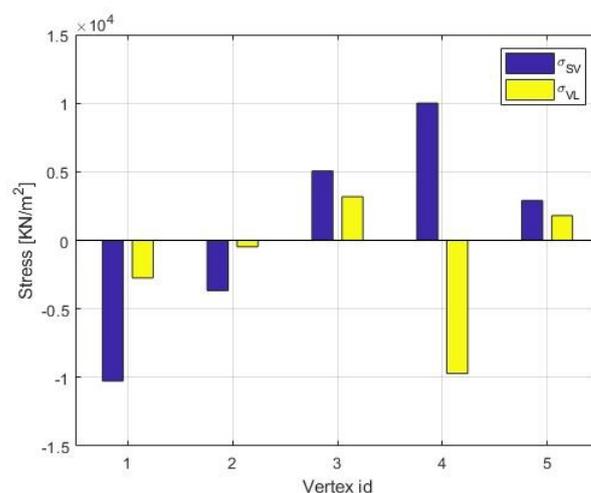


Figura 5.21. Esempio n.3 - Valore della tensione normale nei vertici divisa in: contributo derivante dalla teoria di Saint Venant e contributo aggiuntivo derivante dalla teoria di Vlasov.

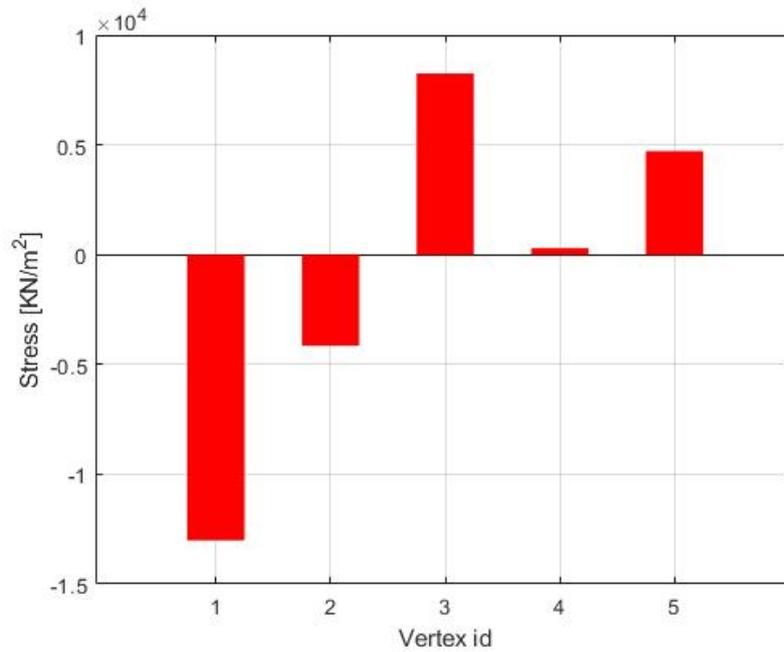


Figura 5.22. Esempio n.3 - Tensione normale totale agente nei vertici della sezione.

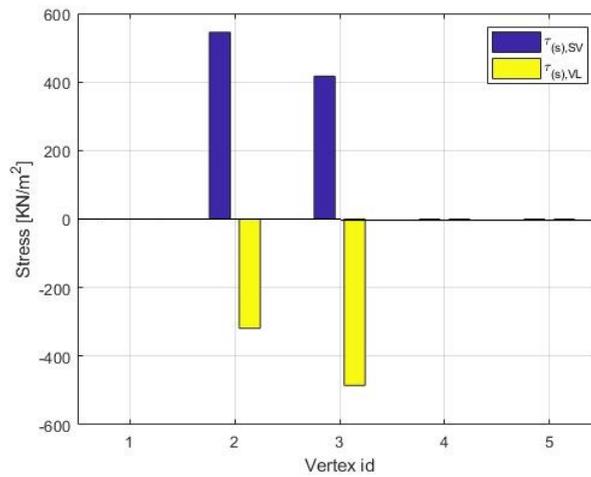


Figura 5.23. Esempio n.3 - Valore della tensione tangenziale derivante dalla teoria di Jourawsky e dal momento torcente secondario (Vlasov) in valore assoluto.

Vertex ID	σ_z manuale	σ_z automatica	Diff. %	τ_{sz} manuale	τ_{sz} automatica	Diff. %
1	13009.66	-13011.77	0.02	0	0	0
2	-4146.72	-4147.01	0.006	355.62	358.56	0.08
3	8247.35	8246.95	0.005	-68.19	-68.86	0.1
4	292.72	292.64	0.03	0	0	0
5	4718.33	4718.02	0.007	0	0	0

Tabella 5.3. Esempio n.3 - Confronto risultati manuali e automatici

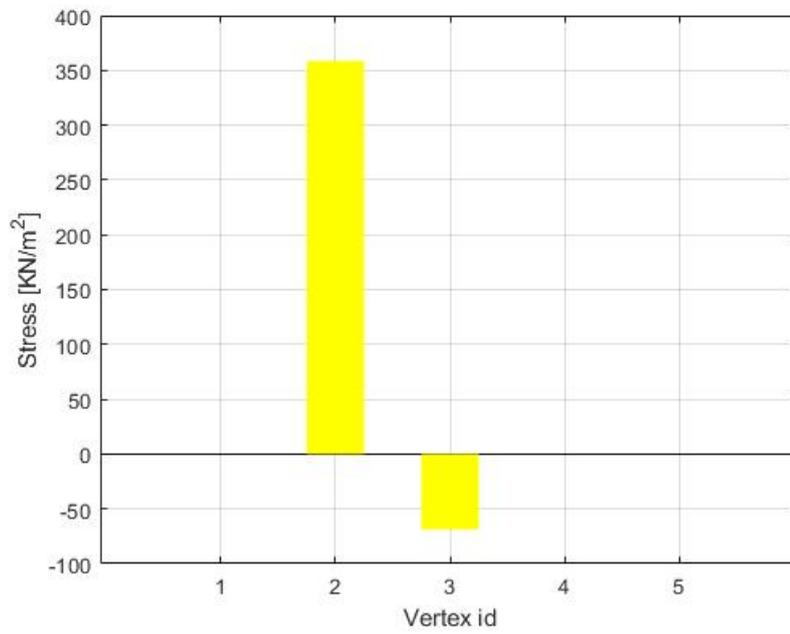


Figura 5.24. Esempio n.3 - Tensione tangenziale totale agente nei vertici della sezione.

Capitolo 6

Caso studio: il grattacielo RAI in Torino

Nel presente capitolo si analizza il grattacielo RAI sito in Torino attraverso l'ausilio del codice di calcolo TaBu, all'interno del quale è stato integrato l'algoritmo per il calcolo delle tensioni presentato al Capitolo 4 del presente lavoro.

6.1 Descrizione della struttura

Il Grattaciolo RAI di Torino (Figura 6.1) è stato progettato dagli architetti Aldo Morbelli e Domenico Morelli. L'edificio si trova tra piazza XVIII Dicembre e Via Cernaia, al confine del centro storico della città (Figura 6.2). Durante gli anni della costruzione (1962-1968) la zona in cui è locato era una zona in via di sviluppo, successivamente alla costruzione del grattaciolo oggetto di studio sono stati edificati il Grattaciolo Intesa-Sanpaolo (166 m) e la nuova stazione di Torino Porta Susa.



Figura 6.1. Il grattaciolo Rai in Torino (fonte web).



Figura 6.2. Localizzazione dell'edificio all'interno della città di Torino.

Il grattacielo presenta un'altezza di 72 metri, secondo il Council on Tall Buildings and Urban Habitat (CTBUH), che ne fa uno degli edifici più alti della città.

La pianta presenta una forma rettangolare di dimensioni $53.00 \times 13.50 m$, con due lievi rientranze di $3.00 \times 1.50 m$ sui frontoni ed un'ampia appendice laterale adibita a scalone principale e ai servizi. In Figura 6.3 è riportata la planimetria dell'edificio ricavata dal progetto originario e in Figura 6.4 una vista prospettica.

La struttura in acciaio consta in 11 telai verticali trasversali posti ad interasse costante di $5.00 m$; alle travi principali dei telai ed alle colonne esterne sono saldati a rastrelliera in officina monconi di travi secondarie alle quali sono bullonate in opera le travi secondarie stesse che corrono continue parallelamente al lato lungo del fabbricato su luci di $5.00 m$ con interasse $2.50 \div 3.00 m$. Il solaio passa continuo sopra le travi secondarie ed è realizzato in lamiera grecata di spessore $10/10 mm$, saldata ad ogni onda sulle travi secondarie con chiodi di saldatura; sopra la lamiera è saldata a punti una rete in acciaio di diametro $4 mm$ e gettata una soletta in calcestruzzo di spessore $4 cm$ sopra l'estradosso della lamiera; travature di controvento verticale a traliccio (3 trasversali al fabbricato e 1 longitudinale) completano le strutture.

Di particolare interesse sono i setti in calcestruzzo armato che si protraggono fino alla sommità dell'edificio. Sono presenti, infatti, 6 setti mostrati in Figura 6.5.

Da un punto di vista strutturale, la rigidità di questi elementi rinforza la torre limitando

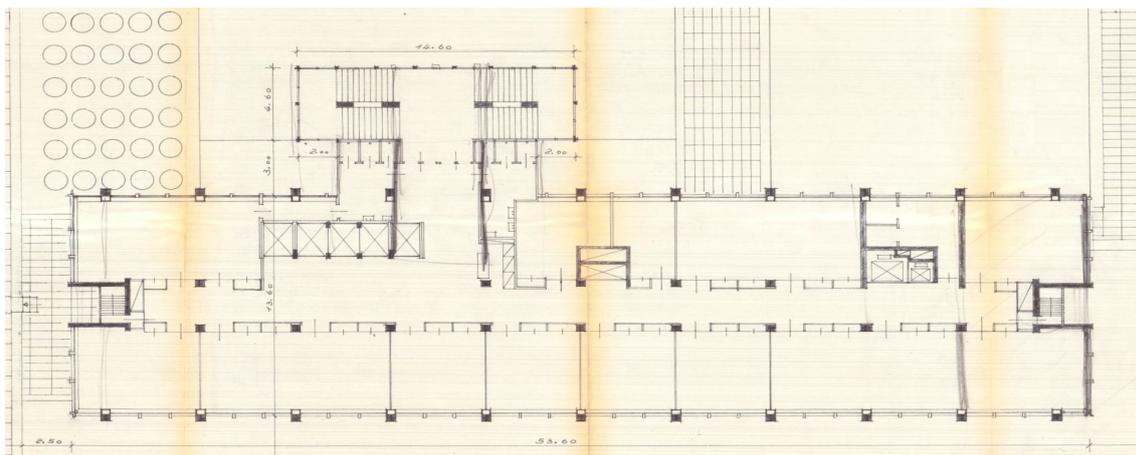


Figura 6.3. Scansione del progetto originario: Planimetria piano tipo (fonte: Sezione Archivi della Biblioteca Centrale di Architettura "Roberto Gabetti", Politecnico di Torino).

gli spostamenti trasversali.

I progettisti analizzarono la struttura tenendo conto dei carichi gravitazionali, sismici e del vento. Quest'ultimo rappresenta il carico orizzontale principale in virtù della bassa sismicità della zona (Peak Ground Acceleration - $PGA \leq 0.05$ g).

6.2 Modello di calcolo

Il modello numerico, implementato in MATLAB utilizzando il codice TaBu, è basato sulla formulazione analitica di Carpinteri, esposta nel Capitolo 2 del presente lavoro. Lo studio della struttura è eseguito utilizzando un modello semplificato dell'edificio nel quale si considera uno spessore dei setti e proprietà meccaniche costanti lungo l'altezza. In seguito, una volta noti i principali parametri che caratterizzano il comportamento strutturale, la struttura è ottimizzata ed è possibile definire un modello più preciso con un programma agli Elementi Finiti. Per questo, anche le caratteristiche meccaniche dell'edificio vengono omogeneizzate considerando la resistenza media degli elementi sui piani. Seguendo questa procedura, un modulo elastico di $200GPa$ è usato per i telai e di $28MPa$ per i setti. Il coefficiente di Poisson assunto per tutti gli elementi è 0.2.

Per la creazione del modello analitico della struttura ci si è serviti del codice di calcolo Ta.Bu. (Tall Building). Detto codice considera un edificio composto da N piani, con M elementi irrigidenti; ogni piano dell'edificio ha 3 gradi di libertà. Sulle basi della formulazione illustrata nei capitoli precedenti del presente lavoro, si calcola la matrice di rigidezza globale in modo da risolvere il problema della ripartizione degli sforzi determinando le forze agenti sull' i -esimo elemento irrigidente. Infine, è possibile determinare gli spostamenti e le tensioni.

In Figura 6.6 è riportata una vista assometrica del modello creato in TaBu.

6.2.1 Azione del vento

Il vento è considerato come un'azione agente in direzione orizzontale, esercita azioni sulle costruzioni che variano nel tempo e nello spazio, generalmente provocando effetti dinamici che hanno un effetto estremamente importante sugli edifici alti.

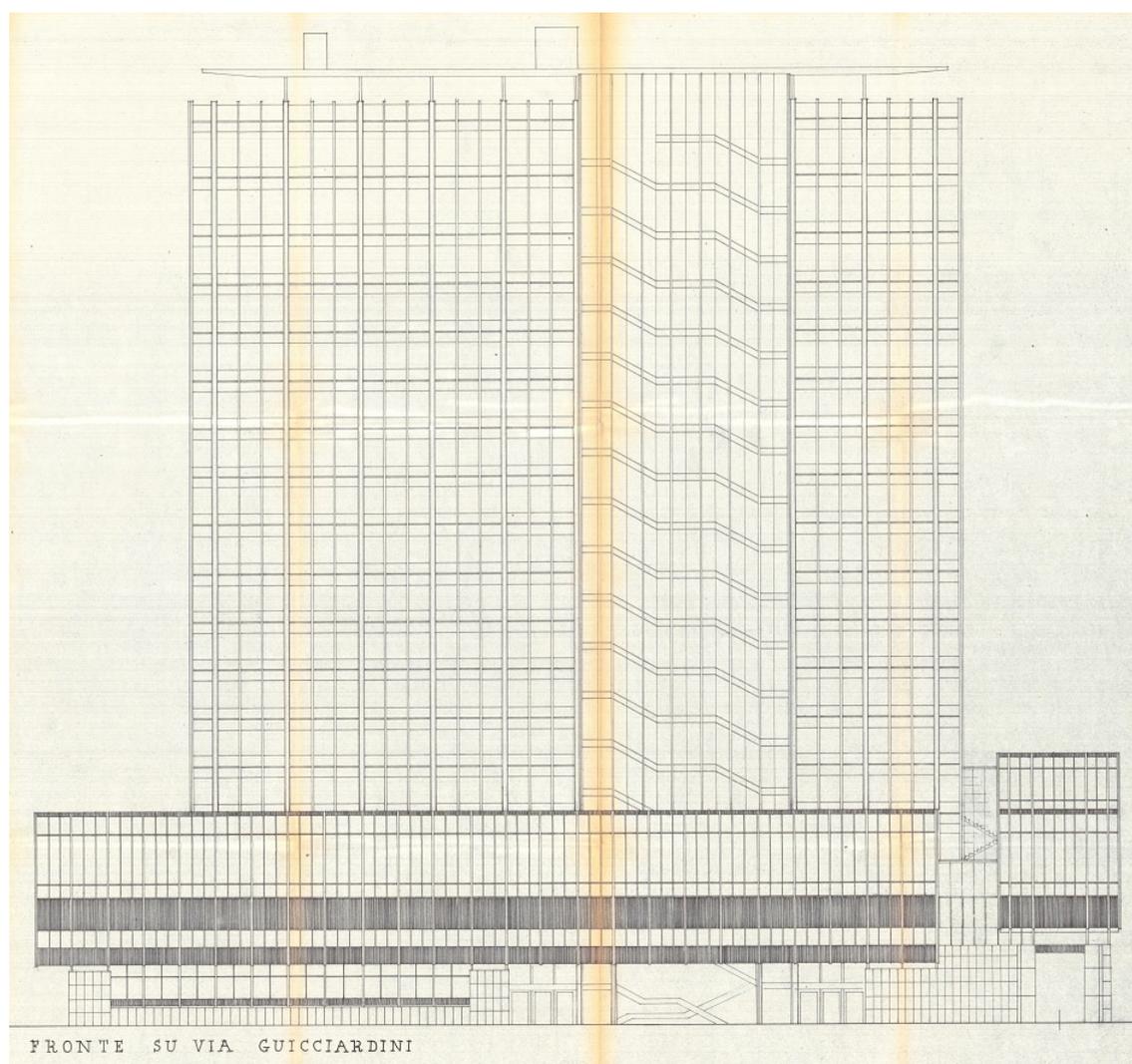


Figura 6.4. Scansione del progetto originario: prospetto su via Guicciardini (fonte: Sezione Archivi della Biblioteca Centrale di Architettura "Roberto Gabetti", Politecnico di Torino).

Per analizzare le azioni del vento, possono essere utilizzati metodi sofisticati che richiedono un'analisi sperimentale della struttura in una galleria del vento. Nella fase di progettazione preliminare, la mancanza di dettagli sulla struttura non consente l'applicazione di questi metodi, quindi verranno utilizzati per l'analisi dei metodi semplificati. Nella seguente analisi, si utilizza la procedura proposta dalla Normativa Italiana - D.M. 17 gennaio 2018, che riporta la stessa formulazione contenuta nella norma europea EN 1991 (Eurocodice 1).

Il calcolo delle forze del vento dipende dalla geometria e dalle caratteristiche dinamiche della struttura, dalla posizione geografica e dalle caratteristiche del luogo in cui sorge la struttura. Pertanto, richiede la determinazione di certi parametri, in primis la velocità del vento di riferimento, che in questo caso corrisponde a $25m/s$. Si considera un periodo di ritorno di 50 anni. Usando questi dati, si ottiene una pressione cinetica di riferimento di $441.10N/m^2$. La pressione del vento che agisce sull'edificio è data dal prodotto tra la pressione cinetica di riferimento e i coefficienti relativi all'esposizione, alla forma e alla dinamica della la struttura. Quando le pressioni sulle superfici verticali dell'edificio sono

note, è possibile calcolare le forze da applicare a ciascun piano in base alle aree colpite dal vento.

Negli edifici alti le azioni del vento possono dare luogo a forze trasversali alla direzione del vento e a momenti torcenti di intensità non trascurabile, per il calcolo di quest'ultime le NTC raccomandano di fare ricorso a dati di comprovata affidabilità. Per questo, si calcolano le forze trasversali e i momenti torcenti facendo riferimento alle "Linee Guida ed Istruzioni Tecniche del Consiglio Nazionale delle Ricerche" e in particolare alle CNR-DT 207 R1/2018: "Istruzioni per la valutazione delle azioni e degli effetti del vento sulle costruzioni" (Figura 6.7).

In questo lavoro di tesi, si considera, tra tutte le combinazioni, solo quella che massimizza gli effetti torsionali non tenendo conto delle azioni verticali indotte dai carichi permanenti sulla struttura.

I grafici in Figura 6.8 mostrano la forze applicate su ciascun piano del modello, facendo riferimento alla origine del sistema di riferimento riportato in Figura 6.5.

6.3 Risultati

In questa sezione vengono riportati i risultati dell'analisi strutturale eseguita attraverso l'ausilio del codice TaBu. Ci si sofferma in particolare sul calcolo tensionale di un elemento verticale così da dimostrare la validità e le potenzialità del codice di calcolo introdotto nel presente lavoro e integrato nel codice per l'analisi degli edifici alti esistente.

6.3.1 Spostamenti

La risposta della struttura nel suo complesso, in termini di spostamenti e rotazioni, è riportata nei grafici di Figura 6.9. Essi riportano i valori degli spostamenti lungo x , lungo y , e la rotazione attorno a z $\{\xi; \eta; \theta\}$ che ad ogni piano compiono i punti in cui giace il sistema di riferimento OXY .

Lo spostamento all'ultimo piano della struttura è pari a 16.4 mm in direzione y e -1.2 mm in direzione x che rappresentano anche i massimi in valore assoluto essendo, gli spostamenti, crescenti lungo l'altezza.

Le Norme Tecniche per le Costruzioni 2018, prescrivono per le strutture in acciaio uno spostamento massimo laterale dovuto ad azioni orizzontali pari a: $H/500$, dove H è l'altezza complessiva dell'edificio. Il grattacielo oggetto di studio raggiunge un'altezza di 72.21 m , ponendo il limite massimo di spostamento laterale a 14.4 cm . Il limite viene ampiamente rispettato.

Lo spostamento in direzione x è di un ordine di grandezza minore dello spostamento in direzione y sia perchè la combinazione di carico scelta è quella con il vento diretto in y e sia perchè la struttura è più rigida in suddetta direzione (lato corto).

La rotazione attorno all'asse z aumenta in funzione dell'altezza raggiungendo il valore massimo $|\theta_{max}| = 3.5 \times 10^{-4}$.

6.3.2 Reazioni interne

Noti gli spostamenti di piano, è possibile applicare la teoria di Vlasov [23] per determinare le caratteristiche della sollecitazione agenti su ogni elemento irrigidente applicando le Eq. (3.14) e (3.21).

Ci si concentra sul setto di sezione sottile aperta denominato "VLI" (Figura 6.5) le cui caratteristiche geometriche sono riportate in Figura 6.10.

In Figura 6.11 sono riportati i momenti flettenti M_x e M_y . Entrambi i momenti flettenti presentano il massimo alla base (in valore assoluto), cambiano di segno rispettivamente al decimo e al tredicesimo piano e si annullano in sommità. Il bimomento, il cui andamento è riportato in Figura 6.12, presenta il massimo valore alla base dell'edificio dove l'ingobbamento è impedito e si annulla in sommità (estremo libero), al sesto piano avviene l'inversione del segno del bimomento che fino alla sommità dell'edificio rimane negativo. Il valore massimo è di 88.6 kNm^2 mentre il valore minimo è -12.6 kNm^2 . In Figura 6.13 sono riportati il taglio agente in direzione x e in direzione y. Si può notare che la quantità di taglio assorbita dal setto è alta, questo perchè i carichi orizzontali vengono assorbiti principalmente dai setti, il contributo dei telai all'assorbimento delle azioni orizzontali è piccolo, quest'ultimi sono importanti soprattutto per l'assorbimento delle azioni verticali. Nel grafico di Figura 6.14 si può osservare il momento torcente totale che può essere scomposto in primario (Saint-Venant) e secondario (Teoria di Vlasov). E' importante notare come alla base, il momento torcente primario sia nullo. Questa è una conseguenza delle condizioni al contorno e in particolare del vincolo che non consente l'ingobbamento alla base ($\theta' = 0$). L'andamento del momento torcente secondario è governato dalla derivata terza delle rotazioni di piano come evidenziato nella Eq. (3.33c). Il valore massimo (in valore assoluto) del momento torcente secondario si ha alla base ed è pari a 8.33 kNm , il massimo (in valore assoluto) del momento torcente primario si ha in corrispondenza del sesto piano ed è 7.94 kNm .

6.3.3 Tensioni

Come fatto per gli esempi riportati al capitolo precedente si applica l'algoritmo introdotto in questo lavoro di tesi. I dati di partenza per l'applicazione dell'algoritmo per il calcolo delle tensioni nelle sezioni sottili aperte sono quelli descritti al Capitolo 4 e qui riportati:

- Matrice geometrica (coordinate espresse in metri con riferimento al centro geometrico del piano riportato in Figura 6.5):

$$[D] = \begin{bmatrix} 15 & 6.75 & 15 & 5.125 \\ 15 & 5.125 & 15 & 3.5 \\ 15 & 3.5 & 16.9 & 3.5 \\ 16.9 & 3.5 & 18.8 & 3.5 \\ 18.8 & 3.5 & 18.8 & 2.675 \\ 18.8 & 2.675 & 18.8 & 1.85 \\ 15 & 3.5 & 15 & 1.5 \end{bmatrix}$$

si è inserito un vertice in mezzzeria di ogni tratto per affinare il calcolo delle tensioni e per dimostrare la funzionalità del codice di calcolare le tensioni anche in punti interni ai tratti costituenti la sezione.

- Spessore sezione:

$$0.3 \text{ m}$$

- Coordinate baricentro:

$$G(16.26; 3.68)$$

- Coordinate centro di taglio:

$$C(15.2; 3.96)$$

- Momenti d'inerzia principali:

$$J_{\xi\xi} = 3.3408 \text{ m}^4$$

$$J_{\eta\eta} = 23.9685 \text{ m}^4$$

$$J_{\omega\omega} = 8.7707 \text{ m}^6$$

- Fattore di rigidità torsionale:

$$J_t = 0.0963 \text{ m}^4$$

- La matrice $[S]$ contenente le sollecitazioni agenti sul setto e calcolate al punto precedente.

Si consideri la numerazione dei vertici riportata in Figura 6.15. Attraverso l'applicazione delle Eq. (4.12), (4.15), (3.49) il codice restituisce le tensioni per ogni piano e per tutti i punti della sezione scelti. Si riportano le tensioni alla base ($z = 0$), dove assumono il massimo valore.

In Figura 6.16 è riportato il valore della coordinata settoriale nei vertici.

Il grafico di Figura 6.17 mostra l'andamento della tensione normale ottenuta applicando la teoria di Saint Venant e la teoria di Vlasov. Nel diagramma sono riportati i valori di $\sigma_z = \sigma_z^{SV}$, $\sigma_z = \sigma_z^{VL}$ e $\sigma_z = \sigma_z^{TOT}$. Si nota come considerando la tensione normale dovuta al bimomento si hanno variazioni sulla tensione totale che possono arrivare fino al 10% rispetto alla sola flessione. Le tensioni tangenziali dovute al taglio e al momento torcente secondario e la tensione tangenziale totale agenti lungo la linea media sono riportate in Figura 6.18. Anche in questo caso, considerando le tensioni aggiuntive ricavate dall'applicazione della teoria di Vlasov si ha una variazione della tensione tangenziale rispetto al solo taglio (fino al 15%).

Oltre alla sezione di base è possibile visualizzare l'andamento delle tensioni anche ai piani superiori, in questo caso l'andamento delle tensioni tangenziali non è più lineare lungo lo spessore della sezione per via della torsione primaria, in particolare si ottiene un andamento sullo spessore trapezoidale o bitriangolare con i massimi in corrispondenza dei lembi della sezione. In Figura 6.19 è riportata la tensione tangenziale totale agente sull'estremo destro e sinistro della corda passante per i punti calcolati in corrispondenza del decimo piano (si indicano estremo destro e sinistro seguendo la numerazione dei vertici).

Il codice permette anche la visualizzazione delle tensioni lungo l'altezza e la Figura 6.20 mostra l'andamento della tensione normale totale lungo l'altezza dell'edificio nel punto 7 (vedi Figura 6.15).

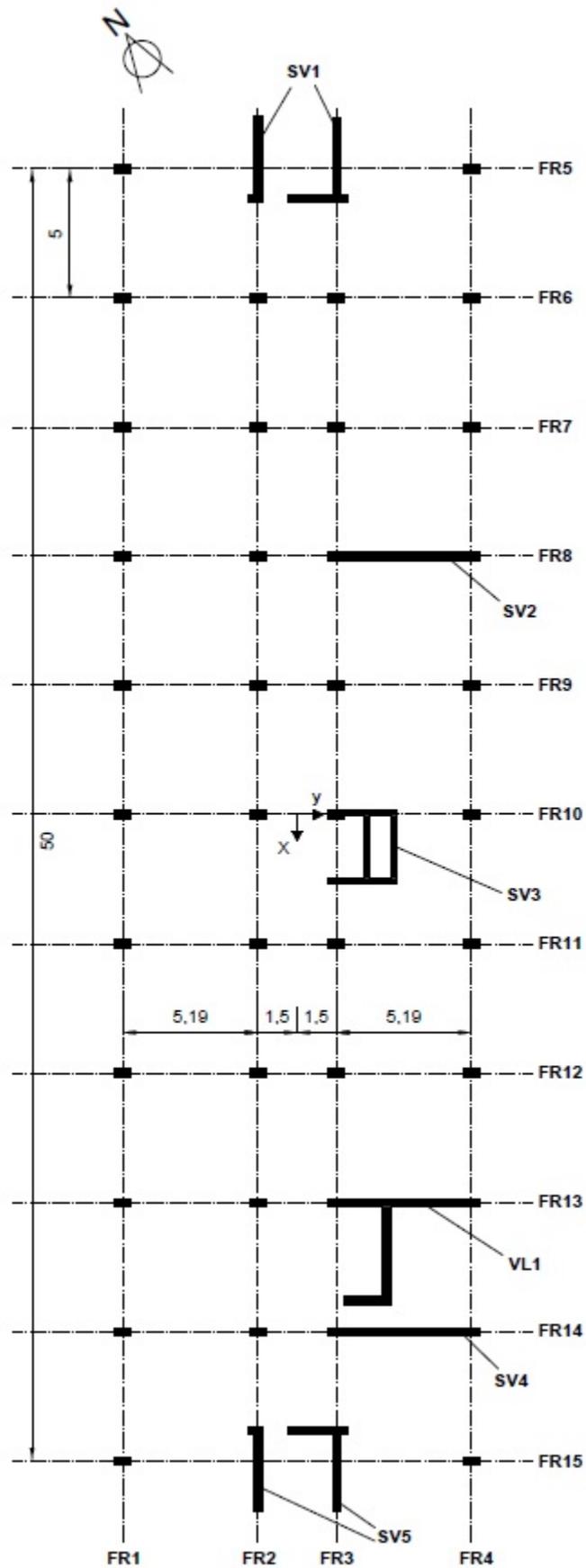


Figura 6.5. Grattacielo RAI: Planimetria piano tipo.

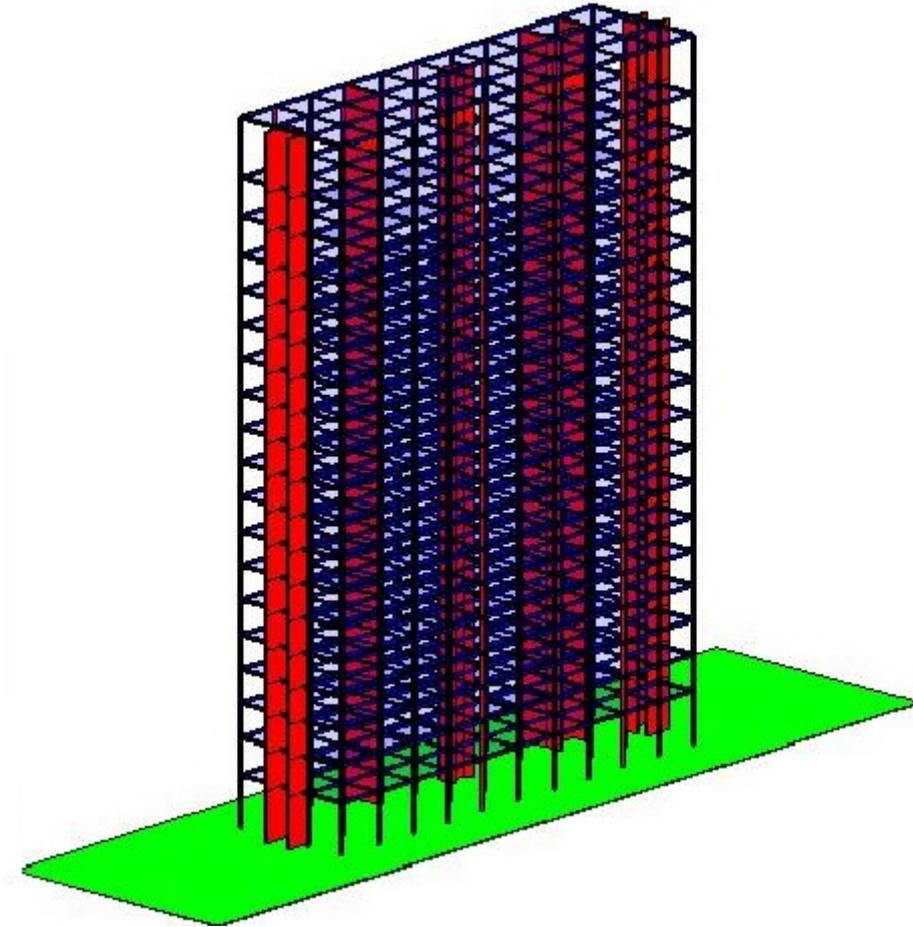


Figura 6.6. Grattacielo RAI: Vista assonometrica del modello sviluppato con l'utilizzo del codice TaBu.

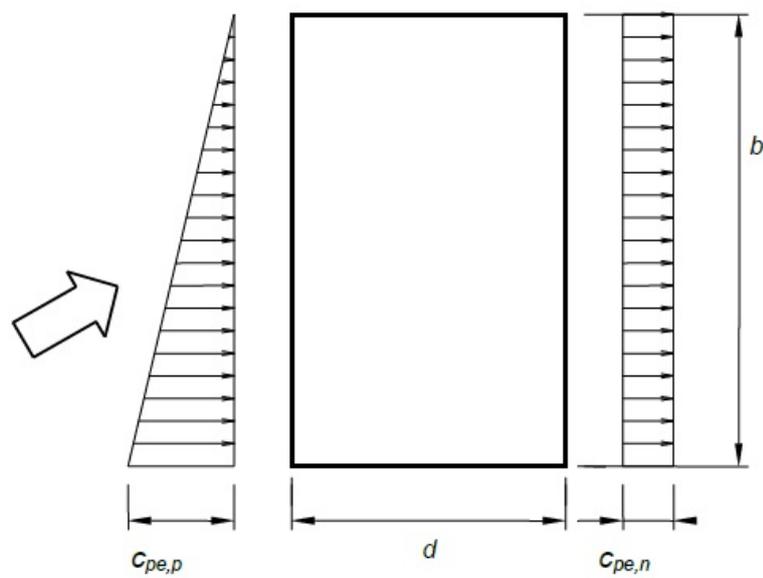


Figura 6.7. Azioni torcenti su edifici a pianta rettangolare (fonte: CNR-DT 207 R1/2018).

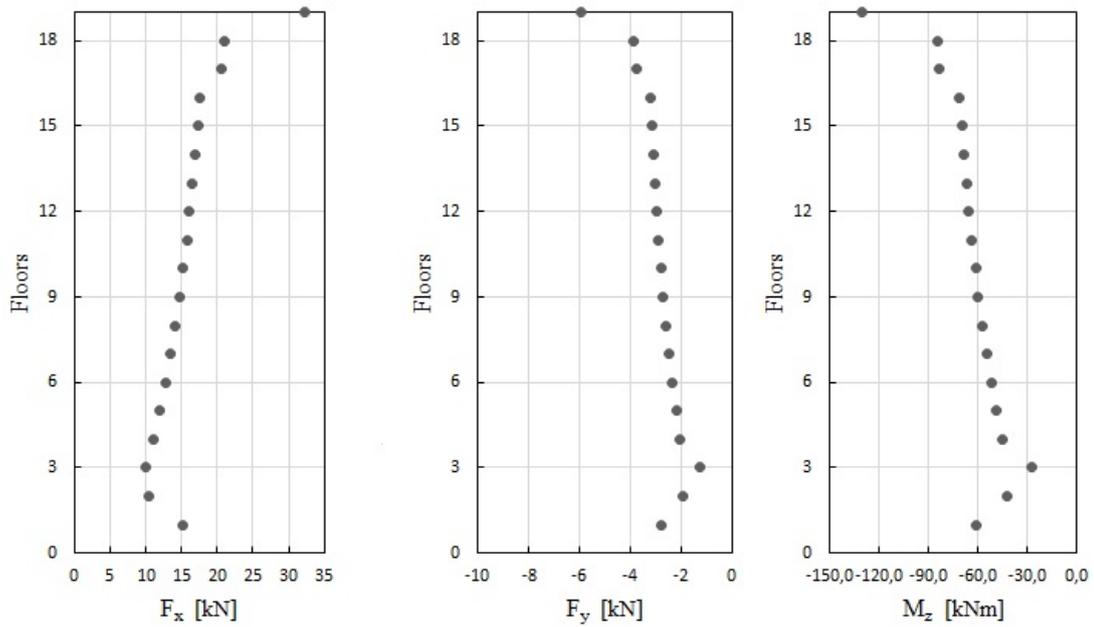


Figura 6.8. Carichi del vento applicati nel centro geometrico dei piani.

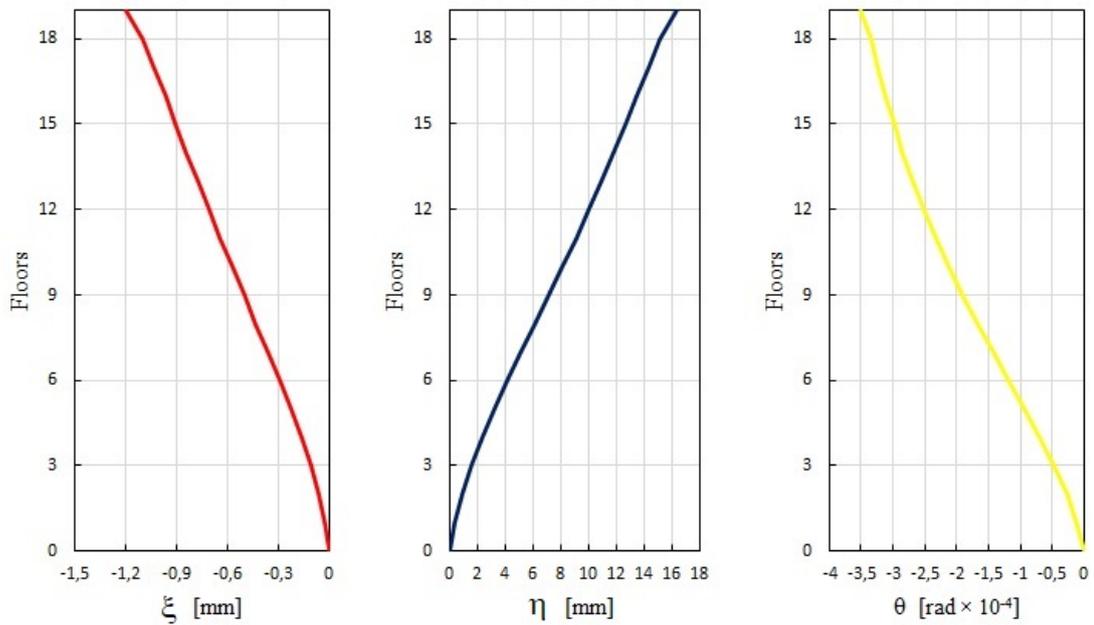


Figura 6.9. Spostamenti in direzione x (ξ), spostamenti in direzione y (η), rotazioni attorno all'asse z (θ).

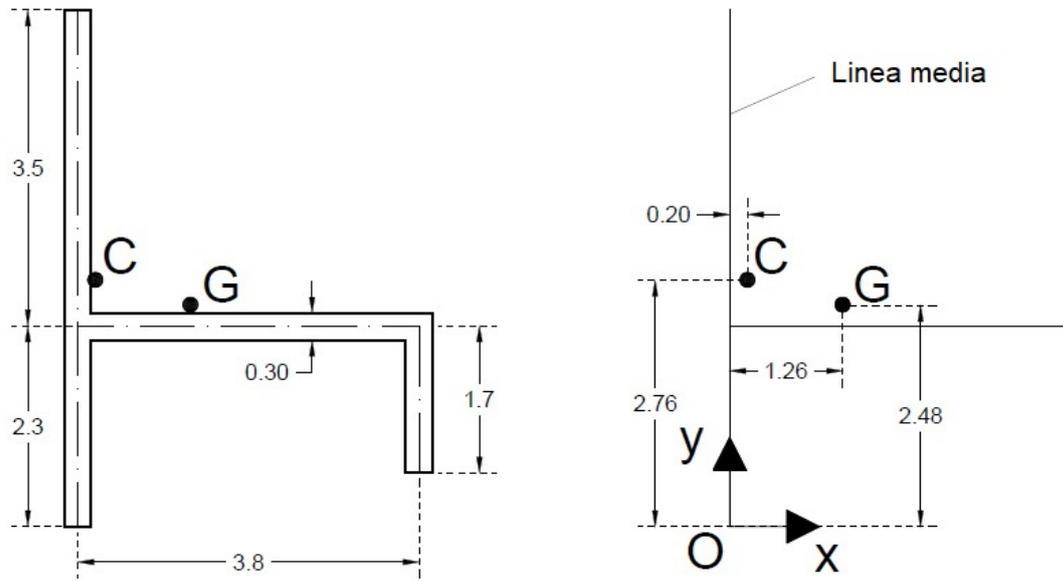


Figura 6.10. Geometria del setto VL1 e posizione del baricentro G e del centro di taglio C (misure in metri).

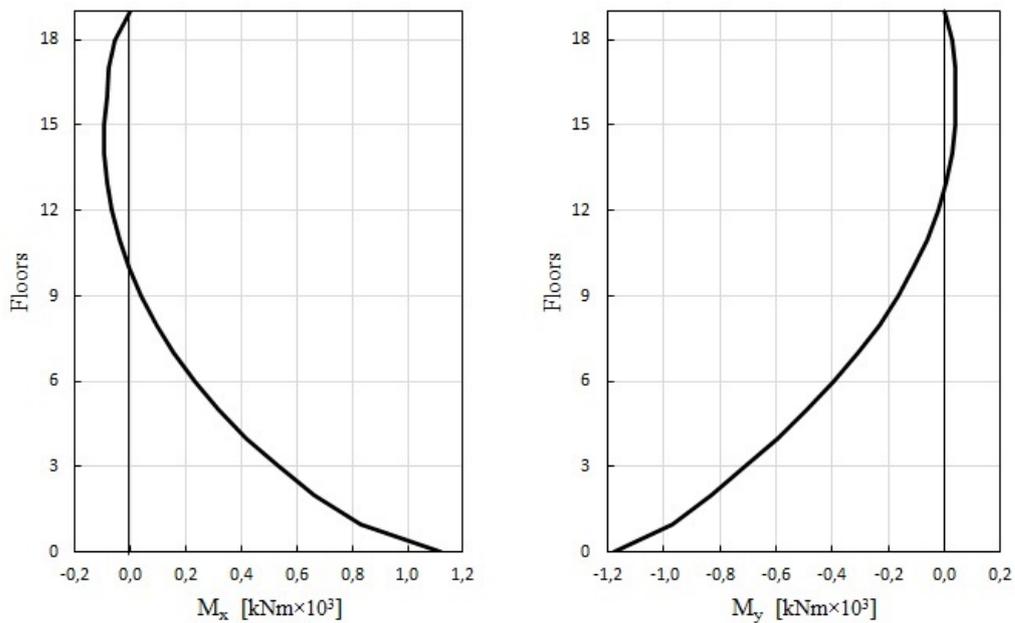


Figura 6.11. Momento flettente attorno all'asse x (M_x), momento flettente attorno all'asse y (M_y) agenti sul setto VL1.

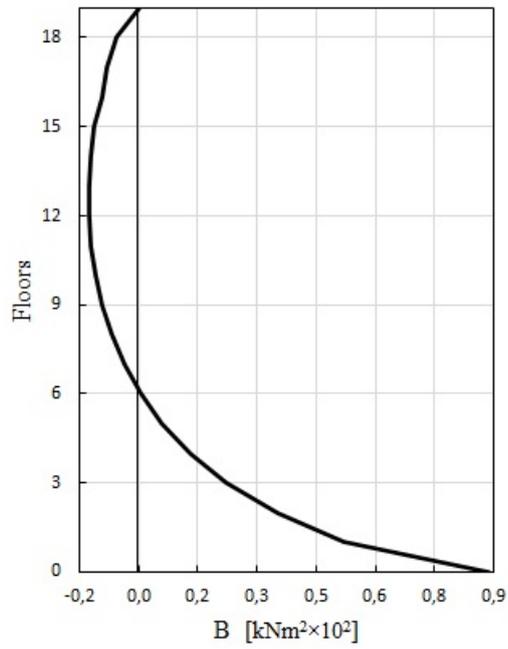


Figura 6.12. Bimomento (B) agente sul setto VL1.

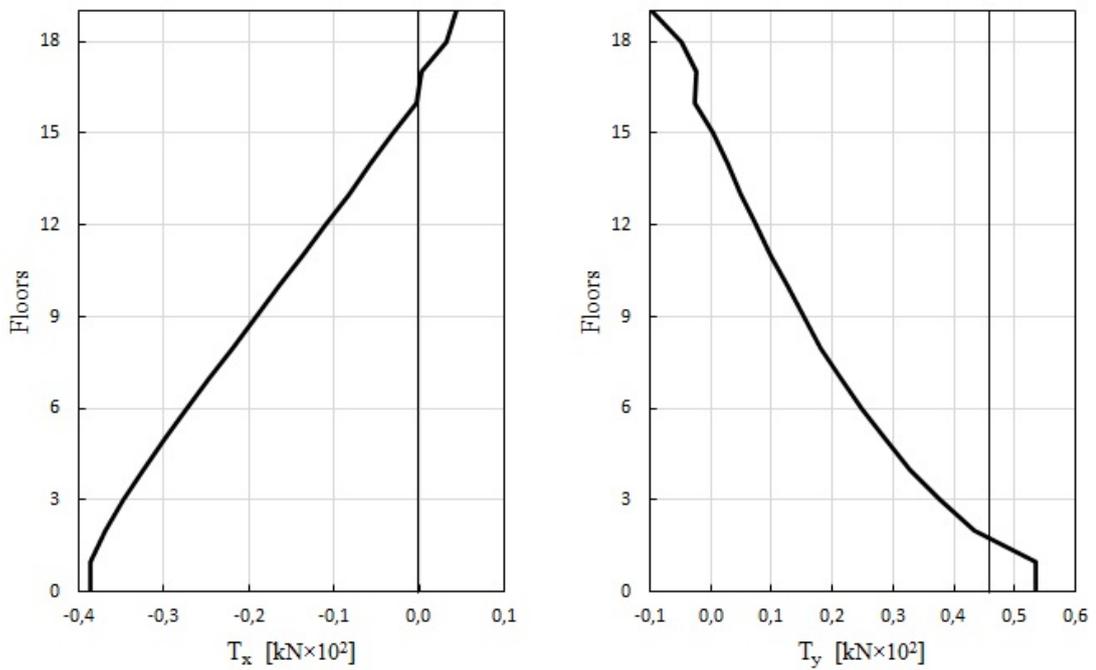


Figura 6.13. Taglio in direzione x (T_x), taglio in direzione y (T_y) agenti sul setto VL1.

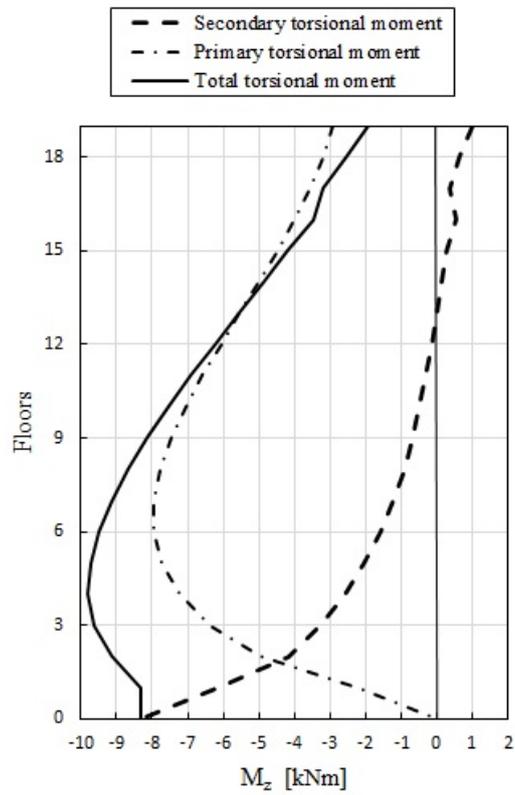


Figura 6.14. Momento torcente primario, secondario e totale agenti sul setto VL1.

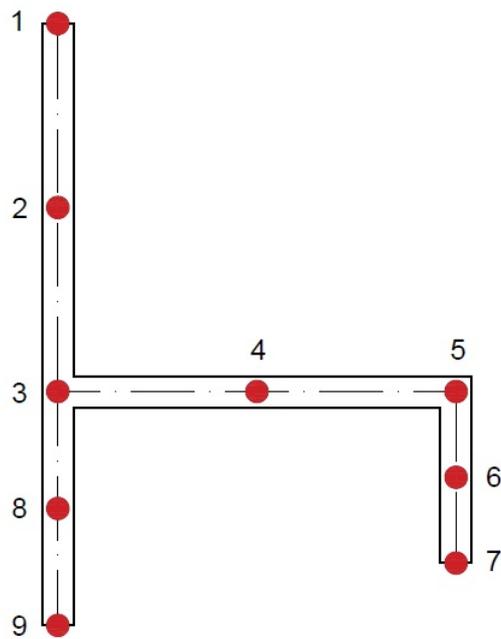


Figura 6.15. Numerazione dei punti in cui viene calcolata la tensione agente.

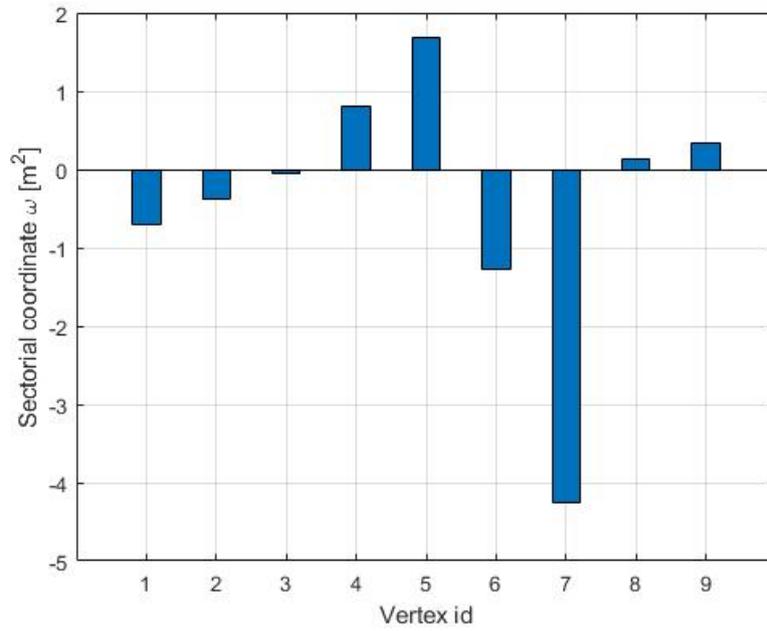


Figura 6.16. Valore della coordinata settoriale nei vertici scelti del setto VL1.

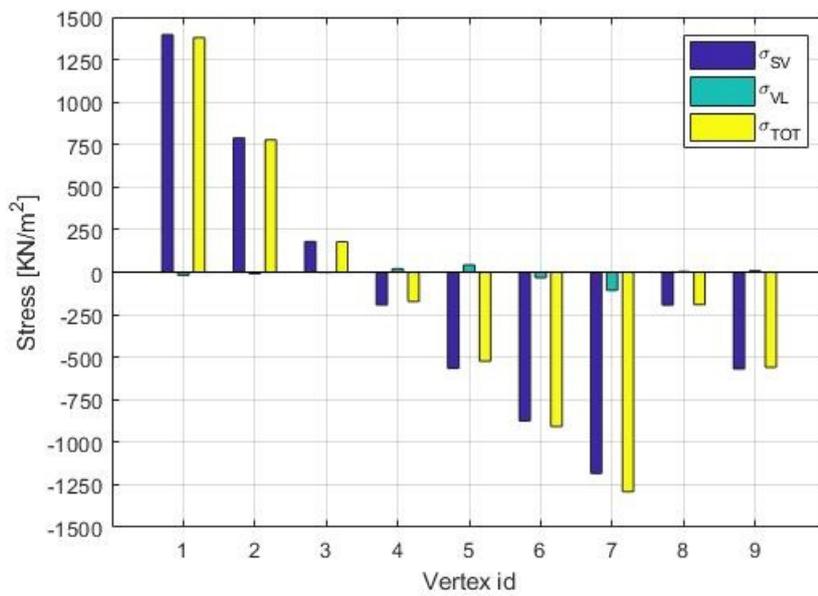


Figura 6.17. Tensione assiale dovuta ai carichi orizzontali agenti sul setto VL1 (Sezione di base).

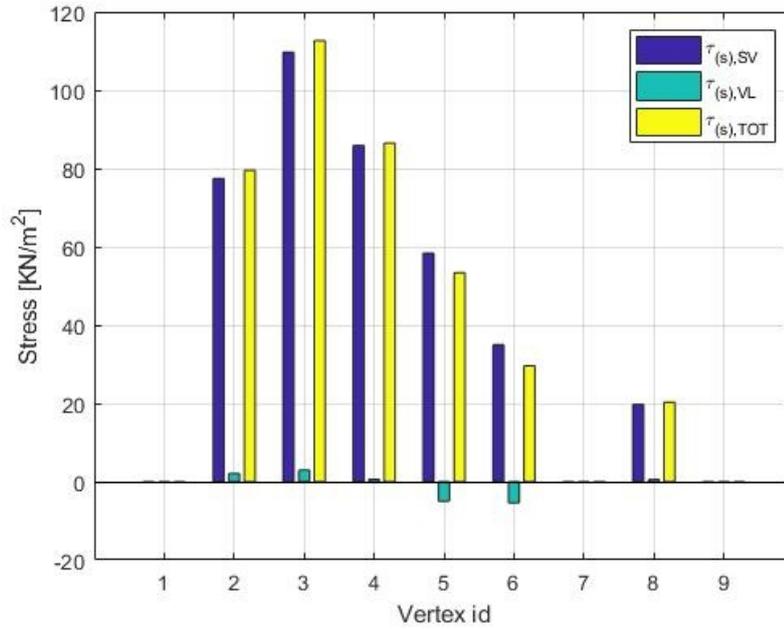


Figura 6.18. Tensione tangenziale dovuta ai carichi orizzontali agenti lungo la linea media del setto VL1 (Sezione di base).

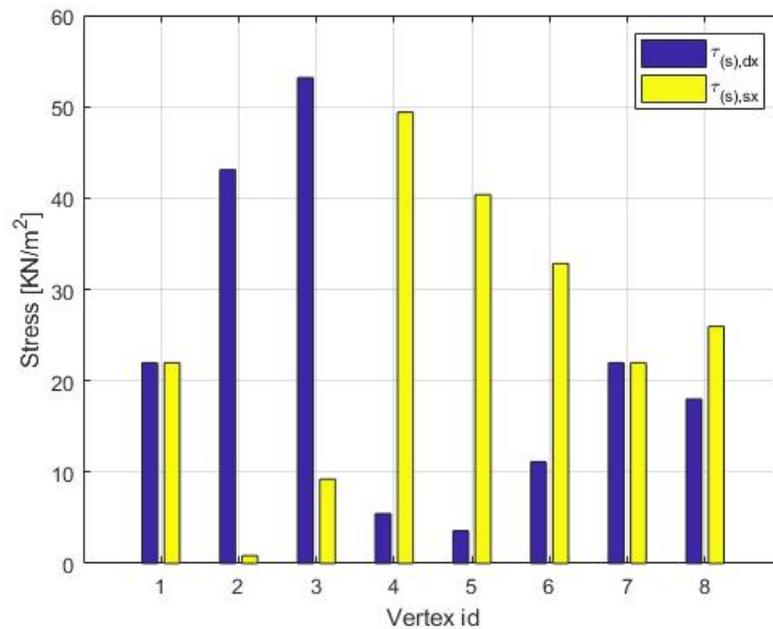


Figura 6.19. Tensione tangenziale totale agente negli estremi della corda nei vertici (Piano decimo).

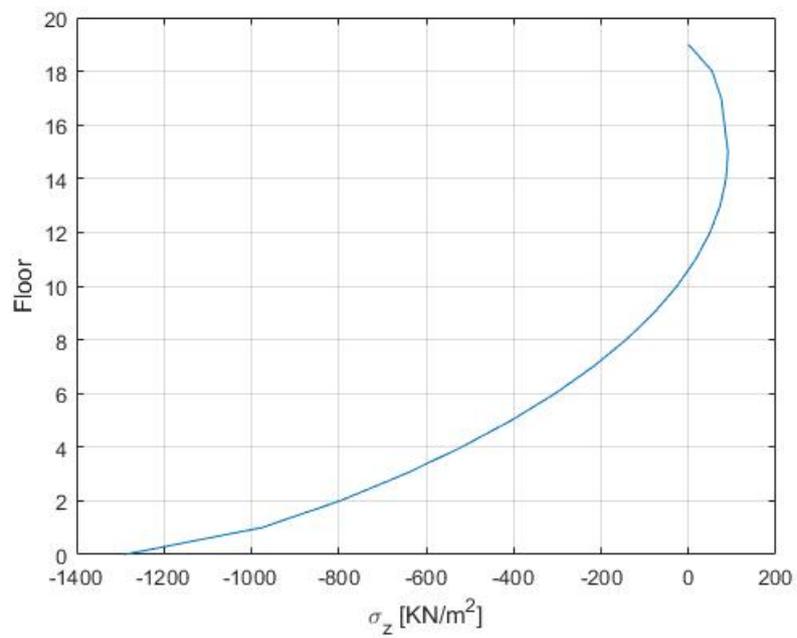


Figura 6.20. Variazione lungo l'altezza della tensione agente lungo le fibre longitudinali nel vertice n.7.

Capitolo 7

Conclusioni

In questo lavoro di tesi è stato creato un algoritmo basato sulla teoria delle aree settoriali, che implementato in MATLAB, consente di calcolare in maniera automatica le tensioni normali e di taglio nei vari punti di una sezione sottile aperta o chiusa.

Per validare il software sono stati riportati tre esempi di calcolo tensionale in sezioni sottili non esistenti nella realtà con complessità crescente. In particolare, sono state calcolate le tensioni normali e di taglio manualmente e si è fatto il confronto con i risultati forniti dal codice di calcolo sviluppato. Da questo confronto si è dedotto come il codice sia uno strumento valido e utilizzabile per un calcolo efficiente delle tensioni nelle sezioni sottili.

Il suddetto codice è stato integrato all'interno del software TaBu rendendo possibile, oltre che il calcolo di spostamenti, reazioni interne e sollecitazioni, anche il calcolo dello stato tensionale in ogni punto dell'*i*-esimo elemento irrigidente di un edificio di grande altezza.

Con l'utilizzo di questa versione migliorata del codice si è analizzato un edificio alto presente nella città di Torino: il grattacielo RAI sito in Via Cernaia. Da questo studio, e in accordo con i risultati riportati nel Capitolo 6, si è dimostrata l'abilità del codice di calcolo di restituire tutte le principali informazioni riguardanti il comportamento strutturale di edifici alti soggetti ad azioni orizzontali. Gli spostamenti, la distribuzione delle forze esterne tra gli elementi verticali e le tensioni presenti in essi sono parametri cruciali per un'analisi preliminare di questa tipologia di strutture.

Bibliografia

- [1] A. Carpinteri, G. Lacidogna, and G. Nitti. Open and closed shear-walls in high-rise structural systems: Static and dynamic analysis. *Curved and Layered Structures*, 3(1), 2016.
- [2] W. P. Howson. Global analysis-back to the future. *Structural Engineer*, 84(3):18–21, 2006.
- [3] R. Rosmon. Approximate analysis of shear walls subject to lateral loads. In *Journal proceedings*, volume 61, pages 717–734, 1964.
- [4] F. R. Khan and J. A. Sbarounis. Interaction of shear walls and frames. *Journal of the Structural Division*, 90(3):285–335, 1964.
- [5] A. Coull and A.W. Irwin. Analysis of load distribution in multi-storey shear wall structures. *Structural Engineering*, 48:201–306, 1970.
- [6] Z. P. Bazant and M. Christensen. Continuous approximation of large regular frameworks and the problem of a substitute frame. *Response of Multi-story Structures to Lateral Forces, SP*, 36, 1972.
- [7] A. C. Heidebrecht and B. S. Smith. Approximate analysis of tall wall-frame structures. *Journal of the Structural Division*, 99(2):199–221, 1973.
- [8] A. Rutenberg and A.C. Heidebrecht. Approximate analysis of asymmetric wall-frame structures. *Building Science*, 10(1):27–35, 1975.
- [9] F. Mortelmans, G. De Roeck, and D. A. Van Gemert. Approximate method for lateral load analysis of high-rise buildings. *Journal of Structural Engineering (United States)*, 109(2):591, 1983.
- [10] S. P. Timoshenko and J. M. Gere. *Theory of elastic stability*. Courier Corporation, 2009.
- [11] S. P. Timoshenko. Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open cross section. *Journal of the Franklin Institute*, 239(5):343–361, 1945.
- [12] T. Von Karman and W. Chien. Torsion with variable twist. *Journal of the aeronautical Sciences*, 13(10):503–510, 1946.
- [13] Al. Carpinteri and An. Carpinteri. Lateral loading distribution between the elements of a three-dimensional civil structure. *Computers & structures*, 21(3):563–580, 1985.
- [14] A. Carpinteri, G. Lacidogna, and S. Puzzi. A global approach for three-dimensional analysis of tall buildings. *The structural design of tall and special buildings*, 19(5):518–536, 2010.
- [15] A. Carpinteri, M. Corrado, G. Lacidogna, and S. Cammarano. Lateral load effects on tall shear wall structures of different height. *Structural engineering and mechanics*, 41(3):313–337, 2012.
- [16] A. Carpinteri, G. Lacidogna, and S. Cammarano. Conceptual design of tall and unconventionally shaped structures: A handy analytical method. *Advances in Structural Engineering*, 17(5):767–783, 2014.

- [17] A. Carpinteri, G. Lacidogna, B. Montrucchio, and S. Cammarano. The effect of the warping deformation on the structural behaviour of thin-walled open section shear walls. *Thin-Walled Structures*, 84:335–343, 2014.
- [18] G. Lacidogna. Tall buildings: Secondary effects on the structural behaviour. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings*, 170(6):391–405, 2017.
- [19] A. Carpinteri, G. Lacidogna, and S. Cammarano. Structural analysis of high-rise buildings under horizontal loads: A study on the intesa sanpaolo tower in turin. *Engineering structures*, 56:1362–1371, 2013.
- [20] G. Nitti, G. Lacidogna, and A. Carpinteri. Tall buildings subjected to horizontal loading: Analysis of two case studies by an in-house numerical code. In *Proceedings of the 23rd Conference of the Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics (AIMETA 2017), Salerno, Italy*, volume 4, 2017.
- [21] G. Nitti, G. Lacidogna, and A. Carpinteri. Structural analysis of high-rise buildings under horizontal loads: A study on the piedmont region headquarters tower in turin. *The Open Construction & Building Technology Journal*, 13(1), 2019.
- [22] M. Capurso. Sul calcolo dei sistemi spaziali di controventamento. *Giornale del Genio Civile*, pages 1–2, 1981.
- [23] V.Z. Vlasov. Thin walled elastic structures. *translated for the Russian–Israeli Program for Scientific Translation, Jerusalem*, 1961.