



**Politecnico  
di Torino**

Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

---

# **Analisi del comportamento dinamico non-lineare di ruote dentate**

---

Relatore:

Prof. Stefano ZUCCA

Tesista:

Simone ZOCCA

Luglio 2021



# Sommario

1	Introduzione	7
1.1	Necessità dell'utilizzo di Geared Turbofan	7
1.2	Studio del comportamento dinamico delle ruote dentate e obiettivi della Tesi	10
2	Metodologia usata per la risoluzione	12
2.1	Metodo del bilanciamento armonico	12
2.2	Metodi di continuazione	13
2.3	Modello di contatto	15
3	Massa contro parete	16
3.1	Influenza del gap	18
3.2	Influenza della forzante	19
3.3	Influenza del carico statico	21
4	Due masse	25
4.1	Problema agli autovalori	26
4.2	Modello di contatto	27
4.3	Risposta in frequenza	27
5	Applicazione di quanto visto finora	30
5.1	Risultati del caso trattato e loro analisi	33
6	Ruote dentate	37
6.1	Caso con forzante esterna armonica non nulla	39
6.2	Risposta forzata e analisi dei risultati	44
7	Static Transmission Error	49
7.1	Modellazione del singolo dente	50
7.2	Metodologia FEM di risoluzione del problema	52
7.3	Valutazione del contributo di deformazione derivate dalla teoria del contatto hertziano	54
7.4	Risultati e analisi considerando denti a spessore costante	54
7.5	Risultati e analisi considerando uno spessore variabile con il raggio	61
7.6	Miglioramenti nella modellazione del dente	66
7.7	Effetto dell'inclinazione variabile lungo il segmento dei contatti	68
8	Analisi della risposta del sistema di ruote dentate	71
8.1	Modello ad 1 grado di libertà utilizzato	71
8.2	Risposta dinamica del sistema ad 1 grado di libertà	75
9	Analisi sull'influenza del backlash sui risultati ottenuti	80
10	Conclusioni	91
11	Bibliografia	93

# Indice delle figure

Figura 1: Rendimento termodinamico del ciclo Joule-Brayton	7
Figura 2: Influenza del bypass ratio sulle prestazioni dei propulsori. [1]	8
Figura 3: confronto direct drive TF e geared TF [2]	9
Figura 4: consumo specifico in funzione del BPR [3]	9
Figura 5: Metodo pseudo arc-length continuation [16]	15
Figura 6: Schematizzazione caso massa contro parete	16
Figura 7: Risposta nel caso di open contact e full contact	16
Figura 8: Esempi di andamenti della forza di contatto generata dalla sovrapposizione del precarico con l'oscillazione dinamica della massa	17
Figura 9: Risposte ottenute imponendo $\text{gap}=-1.2$ m e $\text{gap}=-0.6$ m	19
Figura 10: Risposte ottenute imponendo $\text{gap}=1$ m e $\text{gap}=0.4$ m	19
Figura 11: Risposte ottenute imponendo un $\text{gap}=-0.6$ m e $F=0.01$ N; $\text{gap}=-0.6$ m e $F=0.001$ N	20
Figura 12: Risposte ottenute imponendo $\text{gap}=-1.2$ m e $F=0.01$ N; $\text{gap}=-1.2$ e $F=0.03$ N	20
Figura 13: Istante di tempo nel quale ancora non si è superato il gap, si segue l'andamento relativo ad un contatto aperto	21
Figura 14: Viene superato il valore del gap e si vede come i copri vadano in contatto aumentando così la rigidità del sistema	22
Figura 15: Si torna ad avere ampiezza di oscillazione minore del gap e si riottiene la condizione iniziale	22
Figura 16: Ampiezza non sufficiente per uscire dalla condizione di contatto	23
Figura 17: L'andamento supera il valore precedentemente indicato ed effettivamente si ha separazione	24
Figura 18: Si ritorna alla condizione iniziale	24
Figura 19: Rappresentazione del sistema con due masse	25
Figura 20: Risposta ottenuta imponendo un gap iniziale pari a $-0.5$ m	28
Figura 21: Risposta ottenuta imponendo un gap iniziale pari a $-0.005$ m	28
Figura 22: Risposta ottenuta imponendo un gap iniziale pari a $0.15$ m	29
Figura 23: Risposta ottenuta imponendo un gap iniziale pari a $0.6$ m	29
Figura 24: Sistema di due masse studiato da Comparin e Singh [17]	30
Figura 25: Risposta ottenuta imponendo $F_m=4.1$ N; $F_p=0.05$ N ed un gap iniziale di $-20$ m e $-15$ m	33
Figura 26: Risposta ottenuta imponendo $F_m=4.1$ N; $F_p=0.05$ N ed un gap iniziale di $-1$ m e $6$ m	34
Figura 27: Risposta ottenuta imponendo $F_m=4.1$ N; $F_p=0.1$ N ed un gap iniziale di $-20$ m e $-30$ m	34
Figura 28: Risposta ottenuta imponendo $F_m=4.1$ N; $F_p=0.1$ N ed un gap iniziale di $6$ m e $20$ m	35
Figura 29: Risposta ottenuta imponendo $F_m=2.1$ N; $F_p=0.05$ N ed un gap iniziale di $-15$ m e $-8$ m	35

Figura 30: Risposta ottenuta imponendo $F_m=2.1$ N; $F_p=0.05$ N ed un gap iniziale di 6 m e 10 m_____	36
Figura 31: Caratteristiche del profilo del dente [19] _____	37
Figura 32: Segmento dei contatti _____	37
Figura 33: Angolo di pressione_____	38
Figura 34: Sistema di riferimento coppia di ruote dentate con tre gradi di libertà _____	39
Figura 35: Forze che si scambiano due ruote dentate che ingranano_____	39
Figura 36: Spostamenti della ruota 1 nelle tre direzioni a seguito della perturbazione _____	40
Figura 37: Rappresentazione delle componenti di spostamento della ruota 1 _____	40
Figura 38: Spostamenti della ruota 2 nelle tre direzioni a seguito della perturbazione_____	41
Figura 39: Rappresentazione delle componenti di spostamento della ruota 2 _____	41
Figura 40: Risposta in frequenza ottenuta imponendo $F_i=1e5$ _____	45
Figura 41: Risposta in frequenza ottenuta imponendo $F_i=1e7$ _____	46
Figura 42: Risposta in frequenza ottenuta imponendo $F_i=-1e8$ _____	46
Figura 43: Risposta in frequenza ottenuta imponendo $F_i=-1e6$ _____	47
Figura 44: Risposta in frequenza ottenuta imponendo $F_i=1e7$ _____	48
Figura 45: Risposta in frequenza ottenuta imponendo $F_i=-1e8$ _____	48
Figura 46: Modellazione dei denti delle ruote dentate che ingranano _____	50
Figura 47: Denti schematizzati come rigidzze, a seconda delle coppie in contatto la rigidzza complessiva varia _____	51
Figura 48: Spostamento ottenuto applicando la forza derivante da una coppia di $T= 300$ Nm ai nodi 6-18 _____	55
Figura 49: Spostamento ottenuto applicando la forza derivante da una coppia di $T= 300$ Nm ai nodi 7-17 _____	56
Figura 50: Freccia teorica a seguito dell'applicazione della forza nel nodo 7 _____	56
Figura 51: Freccia teorica a seguito dell'applicazione della forza nel nodo 6 _____	57
Figura 52: Spostamento ottenuto "fondendo" i nodi 2-22 e 30-38 _____	58
Figura 53: Spostamento ottenuto "fondendo" i nodi 3-21 e 31-37 _____	58
Figura 54: Spostamento ottenuto "fondendo" i nodi 4-20 e 32-36 _____	59
Figura 55: Spostamento ottenuto "fondendo" i nodi 5-19 e 33-35 _____	59
Figura 56: Andamento del momento lungo la trave _____	60
Figura 57: Profilo della dentatura _____	62
Figura 58: Deformazione denti con una sola coppia in contatto e $T=300$ Nm _____	63
Figura 59: Deformazione con due coppie di denti in contatto, $T= 300$ Nm e contatto tra i nodi 2-22 e 30-38 _____	63
Figura 60: Confronto tra lo STE ottenuto con il codice sviluppato e il risultato trovato da Parker, Vijayakar e Imajo [20] _____	64

Figura 61: Coefficienti di Fourier al variare della coppia e dell'armonica, non è ora riportata l'armonica zero che rappresenta il valor medio _____	65
Figura 62: Modellazione del dente con un numero di nodi pari a 14 _____	66
Figura 63: Andamento dello STE modellando con un numero di nodi pari a 14 _____	67
Figura 64: Coefficienti di Fourier relativi allo STE modellando con un numero di nodi pari a 14 _____	67
Figura 65: Casi limite considerati per la valutazione della variazione angolare dell'asse del dente ____	68
Figura 66: Sistema ad 1 GDL considerato per l'analisi del comportamento dinamico in relazione allo STE [25] _____	71
Figura 67: Andamento della rigidezza di contatto del sistema valutato in base allo STE _____	72
Figura 68: Andamento della rigidezza di contatto trovato da Parker, Vijayakar, Imajo [20] _____	73
Figura 69: Risposta dinamica del sistema considerando 1 armonica _____	76
Figura 70: Risposta dinamica ottenuta considerando 5 armoniche _____	77
Figura 71: Confronto tra il risultato ottenuto e l'analisi FEM condotta da Parker, Vijayakar e Imajo [20] _____	78
Figura 72: Confronto tra il risultato ottenuto e il risultato sperimentale ottenuta da Parker, Vijayakar e Imajo [20] _____	78
Figura 73: Rappresentazione del passo di base lungo il segmento dei contatti _____	81
Figura 74: Rappresentazione della direzione normale e di quella nominale _____	81
Figura 75: Condizione limite per la valutazione del backlash normale _____	82
Figura 76: Visualizzazione di una condizione di contatto di interesse per la variazione del backlash [27] _____	83
Figura 77: Andamento dello STE considerando il contributo del backlash _____	85
Figura 78: Confronto tra i coefficienti di Fourier nel caso che tiene conto del backlash e in quello che non lo considera _____	85
Figura 79: Confronto tra i coefficienti di Fourier valutati considerando il backlash con il risultato ottenuto da Parker, Vijayakar e Imajo [20] _____	86
Figura 80: Andamento della risposta considerando l'effetto del backlash ed una sola armonica _____	87
Figura 81: Risposta dinamica considerando il backlash e 5 armoniche _____	88
Figura 82: Confronto tra il caso che considera il backlash e quello che non lo considera _____	89
Figura 83: Confronto con il risultato dall'analisi FEM provniente da letteratura [20] _____	89
Figura 84: Confronto con il risultato sperimentale ottenuto da letteratura [20] _____	90

# 1 Introduzione

## 1.1 Necessità dell'utilizzo di Geared Turbofan

Le ruote dentate rappresentano ad oggi uno dei principali componenti usati per trasmettere il moto e la potenza da un albero ad un altro. Il loro campo di utilizzo varia dall'aerospazio, vengono infatti usate per i motori degli aeromobili e per gli elicotteri, all'automotive sino alle turbine eoliche. L'utilizzo delle ruote dentate ha permesso di ottenere notevoli miglioramenti nelle prestazioni, nonché un incremento della precisione ed una riduzione complessiva degli spazi.

Per quanto riguarda l'apparato propulsivo di aeromobili, grazie anche all'introduzione di comitati regolatori come il CAEP (*Committee on Aviation Environmental Protection*) che fa capo all'ICAO, a partire dalla fine degli anni '90 si è iniziato a porre attenzione non solo più alle prestazioni dei motori, ma anche al loro impatto ambientale in termini di emissioni e di rumore. Tale impegno ha portato, negli anni, a definire alcuni target da rispettare in fase di certificazione; questi obiettivi diventano sempre più ambiziosi e di conseguenza necessitano dell'uso di tecnologie opportune.

In passato, per migliorare le prestazioni e, allo stesso tempo, ridurre le emissioni di gas incombusti e scarti di combustione (quali CO<sub>2</sub> e HC), si è cercato di aumentare la temperatura di fine combustione (TIT: *Turbine Inlet Temperature*) in modo da avere un miglior rendimento termodinamico del ciclo Joule-Brayton. Numerosi sono anche stati i miglioramenti nella progettazione dei compressori nel tentativo di lavorare ad un opportuno rapporto di compressione in modo da avere un massimo del rendimento, come si osserva nella figura seguente.

Siano  $\tau = T_3/T_1$  e  $\tau_c = \beta_c^{(\gamma-1)/\gamma}$

$$\eta_{th} = \frac{\tau \eta_{at} \left(1 - \frac{1}{\tau_c}\right) - \frac{\tau_c - 1}{\eta_{ac}}}{\tau - 1 - \frac{\tau_c - 1}{\eta_{ac}}}$$

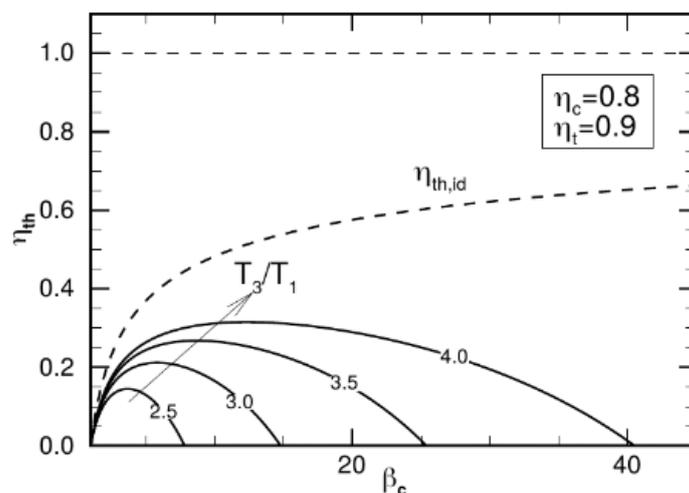


Figura 1: Rendimento termodinamico del ciclo Joule-Brayton

L'aumento della TIT si scontra però con i limiti di resistenza dei materiali usati per la turbina; ad oggi è stato possibile raggiungere un valore elevato di  $T_3$  grazie a diverse tecniche quali il *coating*, l'uso di pale cave nelle quali viene fatta confluire aria fredda proveniente dal compressore che dunque non partecipa alla combustione e anche grazie all'utilizzo di materiali compositi ceramici molto resistenti alle alte temperature.

Ecco che per migliorare ulteriormente è necessario sviluppare nuove architetture quale ad esempio quella dei motori a doppio flusso. Questi motori presentano un flusso caldo che partecipa alla combustione e garantisce un  $\eta_{th}$  elevato, e un flusso freddo che viene elaborato solo dal fan che porta ad un abbassamento della velocità di uscita dei gas andando così ad aumentare il rendimento propulsivo ed a diminuire consumi e rumore.

Il parametro che governa questo tipo di propulsori è il *bypass ratio*  $BPR = \dot{m}_f / \dot{m}_c$ . Il trend è quello di aumentare sempre più questo rapporto per ottenere notevoli miglioramenti, l'uso però di motori *direct drive* dove fan e turbina ruotano alla stessa velocità angolare inibisce la possibilità di incrementare le dimensioni del fan (e quindi del BPR) perché tale componente si troverebbe ad avere una velocità periferica troppo elevata che potrebbe comportare problemi di tipo strutturale e fluidodinamico; inoltre la turbina è costretta a ruotare lentamente e quindi ad avere dimensione e numero di stadi molto elevati per garantire una opportuna potenza per muovere il fan,  $P = \omega C$ .

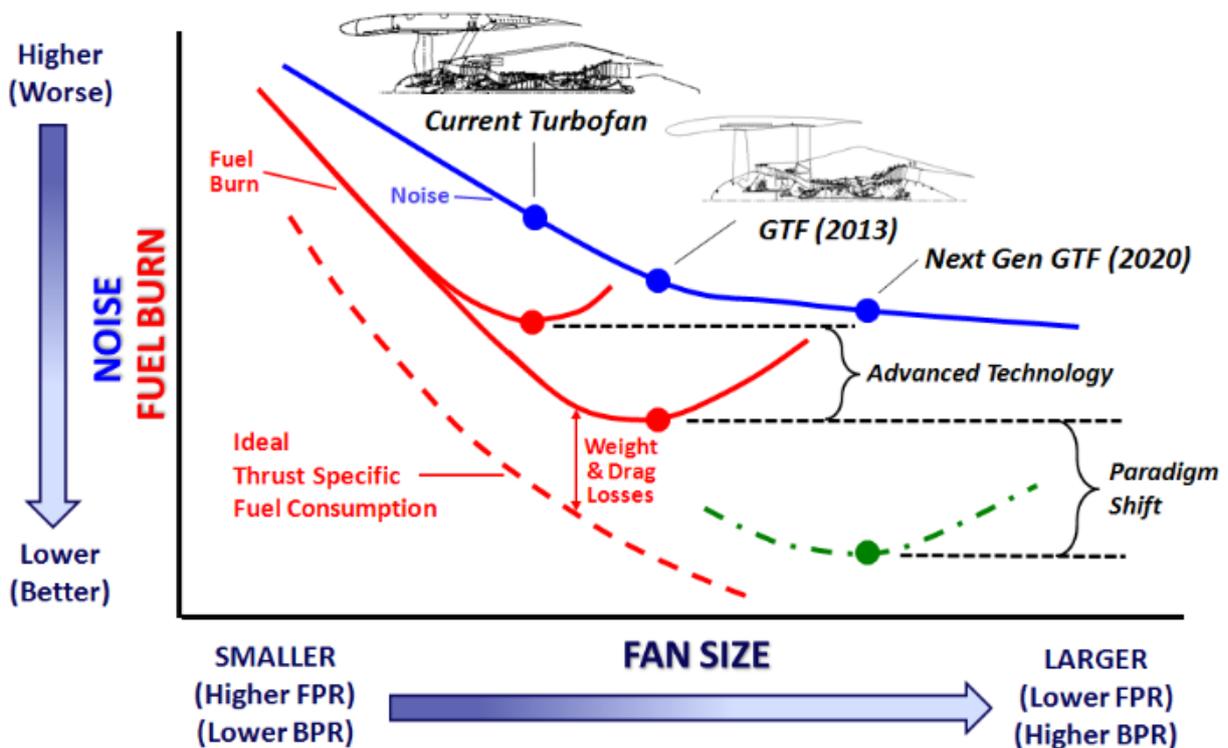


Figura 2: Influenza del bypass ratio sulle prestazioni dei propulsori. [1]

È chiaro dunque che, volendo continuare ad aumentare il BPR, è necessario separare i due regimi di rotazione, i quali rimangono legati, ma vengono demoltiplicati grazie all'introduzione di un riduttore (*gearbox*). In questo modo il fan può aumentare di dimensione poiché ruoterà più lentamente e di conseguenza andrà ad aumentare il BPR e quindi il rendimento propulsivo; la turbina, invece, potrà girare molto velocemente con conseguente riduzione della coppia per garantire uguale potenza, questo significa dimensioni minori e anche minor numero di stadi con un notevole risparmio di peso.

Con l'aumento della velocità di rotazione della turbina, incrementa anche quella del *booster* a lei collegato, dunque anche questo avrà dimensioni minori rispetto al caso *direct drive* e si capisce così il motivo per cui il riduttore viene posto immediatamente prima del compressore di bassa pressione.

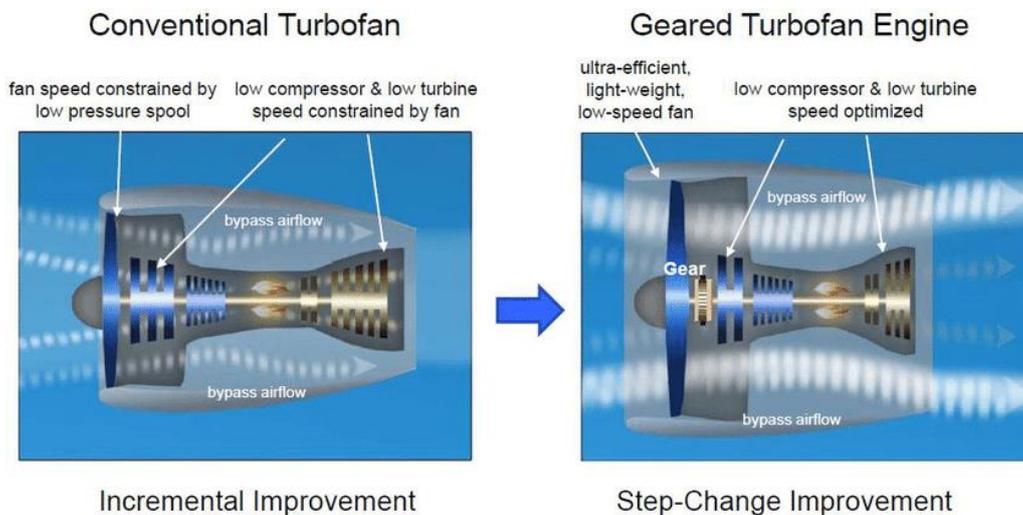


Figura 3: confronto direct drive TF e geared TF [2]

Con questa soluzione è stato ridotto il rumore, legato alla velocità di uscita dei gas di efflusso ed anche alle velocità periferica al tip della pala del fan; sono stati aumentati i rendimenti di fan e turbina perché tali componenti si trovano ora a ruotare in condizioni ottimali e si è ridotto notevolmente il consumo specifico.

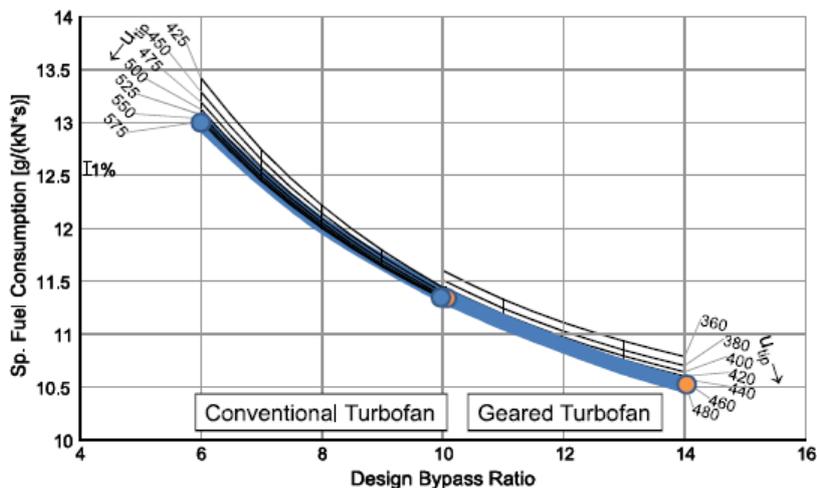


Figura 4: consumo specifico in funzione del BPR [3]

## 1.2 Studio del comportamento dinamico delle ruote dentate e obiettivi della Tesi

Si è dunque osservato come ad oggi sia necessario dotare i motori degli aeromobili di riduttori per i vantaggi precedentemente discussi. Proprio per questo motivo sempre più attenzione è stata rivolta all'analisi del comportamento dinamico delle ruote dentate.

Sino agli anni '70 articoli e pubblicazioni su tali argomenti erano molto pochi anche a causa della natura particolare di questi elementi dallo sviluppo circolare e assialsimmetrico. Tuttavia, con l'introduzione di *geared turbofans*, è risultato necessario uno studio approfondito a seguito delle vibrazioni che inevitabilmente si presentavano durante il funzionamento; questo aspetto è tutt'oggi di grande interesse per la ricerca.

Nel 1958, Harris [4] indicò come causa della vibrazione delle ruote dentate, anche in assenza di eventuali errori di produzione e assemblaggio, una variazione della rigidità del corpo da imputare al rapporto di ingranamento (*contact ratio*). Proprio la possibilità di avere in istanti diversi un numero di coppie di denti in contatto variabile provoca tale fluttuazione della rigidità, la quale si ripercuote in un comportamento dinamico variabile che induce carichi che possono peggiorare notevolmente la vita a fatica dei componenti ed anche vibrazioni che vanno ad incrementare il livello di rumore.

La dinamica delle ruote dentate risulta altrettanto influenzata dalla tipologia del contatto che si viene ad avere tra coppie di denti; si definisce contatto intermittente per il fatto che i denti lavorano solo in compressione, dunque o vi è il contatto, oppure se ne ha la parziale perdita in alcune condizioni; si inizia già a comprendere il comportamento altamente non lineare che caratterizza questi componenti. Per comprendere meglio questo aspetto si andrà preliminarmente a studiare il caso di massa contro parete e poi di due masse coinvolte in un contatto intermittente, in modo da poter avere un'idea della dinamica corrispondente.

Successivamente si andranno ad applicare i concetti preliminari analizzati al caso di due ruote dentate che ingranano tra loro. In un primo momento si ipotizzerà una forzante esterna al sistema al variare della quale si otterrà una risposta diversa; poi si farà riferimento ad un problema ingegneristicamente di maggior interesse, infatti si considererà una forzante interna al sistema, lo *Static Transmission Error (STE)*. Questo è definito come la differenza tra la posizione attuale delle ruote durante la rotazione e la posizione ideale che avrebbero nel caso in cui le ruote fossero corpi rigidi perfetti. Tale differenza può derivare da errori di produzione (in questo caso si parla di *No-Load Transmission Error NLTE*) oppure dalla deformazione elastica dei denti che inevitabilmente si viene ad avere durante il contatto. Per individuare il valore di questo STE si porterà avanti un'analisi agli elementi finiti modellando i denti come travi incastrate e, procedendo in tal modo, si otterranno i valori da utilizzare come forzanti interne.

Per una definizione teorica di questa grandezza ci si può riferire a quanto riportato da Munro [24], il quale definisce il *Transmission Error* come:

*“The deviation of the driven gear (for any given position of the driving gear), relative to the position that the driven gear would occupy if both gears were geometrically perfect and undeformed.”*

Dal momento che l'obiettivo è quello di sviluppare uno strumento in grado di predire in maniera opportuna il comportamento del sistema in esame in una fase preliminare di progetto, si ricercherà un metodo non solo capace di fornire una soluzione valida e coerente, ma anche di farlo nel più breve tempo possibile in modo da poter portare avanti un numero molto elevato di analisi al variare dei parametri in gioco; questo aspetto è fondamentale in una fase ancora concettuale del progetto. Di conseguenza, non si utilizzeranno modelli agli elementi finiti molto evoluti, in grado di avere performance ottimali e risultati sicuramente maggiormente veritieri, ma con sforzi computazionali davvero elevati e applicabili solo nel caso in cui si abbia a disposizione una geometria ben definita e realistica del sistema che si vuole studiare. Mentre ci si riferirà ad analisi con ipotesi semplificative andando a dettagliare in maniera approfondita solo alcuni aspetti fondamentali per il comportamento dinamico e lasciando così la possibilità di procedere con approcci più snelli e rapidi nel tentativo di poter apprezzare soprattutto l'influenza dei parametri in gioco in modo da arrivare, in una fase successiva, alla miglior scelta di progetto possibile.

Sulla base di quanto detto, ricercando tempistiche veloci e bassi sforzi computazionali, si farà riferimento ad un modello parametrico a parametri concentrati (*lumped parameter model*) che dà una rappresentazione del sistema di ruote dentate con uno schema basato su masse, molle e smorzatori. Riferendosi a studi portati avanti in passato [5-12], si considerano ruote rigide, denti elastici per simularne la deformabilità e molle non lineari con l'obiettivo di modellare il comportamento altamente non lineare di tali componenti.

Per la risoluzione e lo studio della risposta in frequenza occorre dunque utilizzare modelli in grado di considerare il contatto e risolvere problemi dalla natura non lineare; si andrà quindi ad usare il metodo del bilanciamento armonico (HBM: *harmonic balance method*), la quale viene descritta in dettaglio al paragrafo seguente.

## 2 Metodologia usata per la risoluzione

Per la risoluzione occorre prima fare un'analisi statica del problema, tuttavia è stato dimostrato che non è necessaria per lo studio della dinamica in quanto rappresenta un offset della risposta; dunque, si può direttamente studiare il sistema accoppiando l'analisi statica con quella dinamica.

Nel caso di sistema ad un grado di libertà con massa libera e vincolata con una rigidità e uno smorzatore l'equazione di equilibrio risulta:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Nei vari casi che si andranno a studiare, la massa, che poi sarà una schematizzazione della ruota, non è libera, ma potrebbe andare ad impattare con altre masse e, data la natura non lineare del problema, potrebbe verificarsi una situazione di contatto intermittente. L'equazione di equilibrio si modifica facendo intervenire una componente nel termine forzante che sarà dipendente dallo spostamento  $x$  della massa, ma non solo e non in modo lineare, quindi introduce una non linearità nel sistema.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) - f_c(x, \dot{x}, t)$$

### 2.1 Metodo del bilanciamento armonico

Ipotizzando di avere una forzante armonica, un sistema non lineare può avere una risposta periodica di periodo pari a quello della forzante oppure una risposta non periodica. Il metodo del bilanciamento armonico che si utilizzerà fa riferimento al primo caso indicato; affinché la risposta sia periodica occorre che la forza di contatto sia anche periodica. Quindi la risposta e le forze dovute al contatto si possono scrivere:

$$x(t) \cong x_0 + \sum_{n=1}^N \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t}$$

$$f_c(t) \cong f_{c0}(x, \dot{x}) + \sum_{n=1}^N \bar{f}_c^{(n)} e^{in\omega t}$$

Dove  $N$  rappresenta il numero di armoniche scelte. Si può trascurare il termine statico, il quale è ampiamente dimostrato che rappresenta solo un offset della soluzione, e si può andare a sostituire nell'equazione scritta in precedenza:

$$-m \sum_{n=1}^N n^2 \omega^2 \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} + c \sum_{n=1}^N in\omega \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} + k \sum_{n=1}^N \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} = \bar{f} e^{i\omega t} - \sum_{n=1}^N \bar{f}_c^{(n)} e^{in\omega t}$$

Perché l'equazione venga rispettata i termini corrispondenti al termine  $n$ -esimo devono essere uguali a primo e secondo membro

$$n = 1 \quad (-\omega^2 m + i\omega c + k) \bar{x}^{(1)} e^{i\omega t} = \bar{f} e^{i\omega t} - \bar{f}_c^{(1)} e^{i\omega t}$$

$$n > 1 \quad (-(n\omega)^2 m + in\omega c + k) \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} = -\bar{f}_c^{(n)} e^{in\omega t}$$

I termini dipendenti dal tempo si possono semplificare e così si ottiene un set di equazioni algebriche a coefficienti complessi. Nel caso di un sistema ad N gradi di libertà sarà sufficiente andare ad inserire matrici e vettori al posto dei parametri singoli.

$$n = 1 \quad (-\omega^2[m] + i\omega[c] + [k])\{\bar{x}^{(1)}\} = \{\bar{f}\} - \{\bar{f}_c^{(1)}\}$$

$$n > 1 \quad (-(n\omega)^2[m] + in\omega[c] + [k])\{\bar{x}^{(n)}\} = -\{\bar{f}_c^{(n)}\}$$

Immaginando di avere un sistema ad 1 grado di libertà e volendo ricercare la soluzione dell'armonica fondamentale (n=1), è necessario espandere i numeri complessi in parte reale e parte immaginaria.

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k) \left( Re(\bar{x}^{(1)}) + iIm(\bar{x}^{(1)}) \right) = \left( Re(\bar{f}) + iIm(\bar{f}) \right) - \left( Re(\bar{f}_c^{(1)}) + iIm(\bar{f}_c^{(1)}) \right)$$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m + k & -\omega c \\ \omega c & -\omega^2 m + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Re(\bar{x}^{(1)}) \\ Im(\bar{x}^{(1)}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Re(\bar{f}) \\ Im(\bar{f}) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Re(\bar{f}_c^{(1)}) \\ Im(\bar{f}_c^{(1)}) \end{Bmatrix}$$

Portando tutto a primo membro, il sistema assume la forma tipica di sistemi di equazioni non lineari da risolvere con Newton-Raphson. La procedura è la seguente: si impone un vettore di tentativo delle incognite  $\begin{Bmatrix} Re(\bar{x}^{(1)}) \\ Im(\bar{x}^{(1)}) \end{Bmatrix}_0$ , in funzione di questo viene calcolato il vettore delle forze

di contatto  $\begin{Bmatrix} Re(\bar{f}_c^{(1)}) \\ Im(\bar{f}_c^{(1)}) \end{Bmatrix}_0$  e in questo modo si calcola il residuo dell'equazione, se tale residuo è

diverso da zero si ha un nuovo vettore delle incognite dal quale partire per l'iterazione successiva e si continua in questo modo sino ad arrivare a convergenza.

Nel codice che si implementerà nei vari casi di studio che verranno presentati in seguito, il metodo di Newton-Raphson viene utilizzato solo per la prima frequenza, poi, per tutte le altre, si usa un metodo di continuazione, più adatto per trattare un classico caso di contatto intermittente; la scelta può ricadere tipicamente tra due.

## 2.2 Metodi di continuazione

Il sistema di equazioni scritto in precedenza si può anche vedere come:

$$D^{(n)} X^{(n)} = F_E^{(n)} + F_{NL}^{(n)}$$

$$-(n\omega^2)[m] + in\omega[c] + [k] = D^{(n)}$$

In forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} X_{NL}^{(n)} \\ X_L^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{ENL}^{(n)} \\ X_{EL}^{(n)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{NL,NL}^{(n)} & R_{NL,L}^{(n)} \\ R_{L,NL}^{(n)} & R_{L,L}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{NL}^{(n)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si vede che solo una parte dell'equazione è non lineare e quindi solo questa necessita di un solutore non lineare, poi, una volta note le forze non lineari, si potranno ottenere agevolmente le componenti  $X_L^{(n)}$ . Infine, si considerano solo le componenti reali dell'equazione perché interessano le incognite reali.

$$X = X_E + R_X F_X(x)$$

- Metodo *natural continuation*: valuta la relazione sopra scritta in un range di frequenze  $[\omega_i, \omega_f]$ , per  $\omega = \omega_i$  si ha già la soluzione  $X=X_0$  trovata dall'analisi non lineare; poi si usa il metodo Newton-Raphson.

$$X_{K+1} = X_K - J(x_k)^{-1} f(x_k)$$

$$f(x_k) = X_k - X_E - R_X F_X(x_k)$$

Quando la norma del residuo è sotto una certa tolleranza l'algoritmo si ferma e si prende il risultato come soluzione.

- Metodo *pseudo arc-length continuation*: con il metodo precedente il range di frequenze  $[\omega_i, \omega_f]$  è studiato solo in ordine crescente o decrescente, tuttavia può accadere che, per una stessa frequenza, esistano soluzioni multiple e che, dunque, siano presenti dei *turning point*. Utilizzando la strategia del *natural continuation* non risulta possibile individuare correttamente la soluzione quando l'andamento di questa non è monotono; ecco la necessità di riferirsi ad un altro metodo.

Per  $\omega = \omega_i$  si utilizza Newton-Raphson come visto al paragrafo 2.1; dalla seconda iterazione ciò che si vuole trovare è il vettore  $Y_n^p$

$$Y_n^p = \begin{Bmatrix} X_n^p \\ \omega_n^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_n \\ \omega_n \end{Bmatrix} + hZ_n = Y_n + hZ_n$$

Dove  $Z_n$  rappresenta il vettore unitario tangente alla curva della soluzione, questo passaggio viene definito *predictor step*, dove  $h$  è uno scalare che controlla la lunghezza di questo *predictor*.

Successivamente, avendo aggiunto una ulteriore incognita rappresentata dalla direzione in cui si deve andare a ricercare la soluzione, è necessario procedere con un altro step: *corrector step*.

Il tentativo è quello di migliorare la soluzione procedendo in direzione perpendicolare rispetto al *predictor step*.

$$\begin{cases} X - X_E - R_X F_X(X) = 0 \\ Z_n^T (Y_n^p - Y) = 0 \end{cases}$$

Tale sistema viene risolto con il metodo Newton-Raphson, partendo da un valore iniziale  $Y_i^p$  che è quello individuato dal *predictor step*. Di seguito si può vedere una rappresentazione di come agisce il metodo ora descritto che sarà quello utilizzato nel codice implementato per lo studio della risposta non lineare delle ruote dentate.

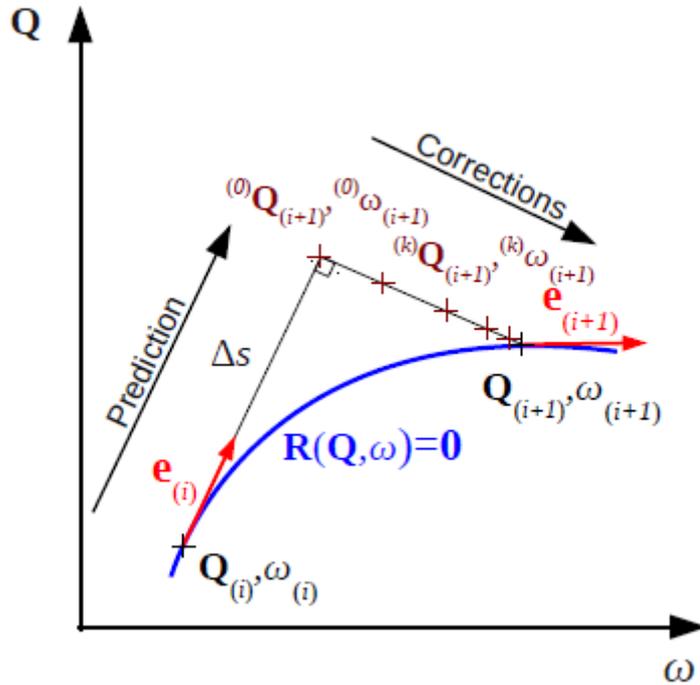


Figura 5: Metodo *pseudo arc-length continuation* [16]

### 2.3 Modello di contatto

Per risolvere il sistema occorre ancora capire come si può ottenere il vettore delle forze di contatto in funzione di quello delle incognite, serve quindi un modello di contatto.

Dal momento che si vuole sviluppare un codice in grado di predire la risposta non solo nel caso questa sia armonica, ma anche periodica (questo, come osservato, è possibile con il metodo del bilanciamento armonico), è opportuno passare dal dominio delle frequenze, nel quale viene definita la soluzione iniziale di tentativo, ad un dominio nel tempo. Per fare questo si segue una logica *Alternating Frequency/Time Domain Method* (AFT).

Si parte dal vettore  $\bar{x}^{(n)}$ , definito nel dominio delle frequenze, e attraverso una IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*) lo si porta nel dominio del tempo, qua si applica il modello di contatto e, successivamente, per risolvere il sistema nel dominio delle frequenze (è in questo che si vuole valutare la risposta in frequenza) si applica una FFT (*Fast Fourier Transform*) al vettore delle forze non lineari di contatto ottenuto.

$$\bar{x}^{(n)} \xrightarrow{IFFT} x(t) \rightarrow F_{NL}(t) = f(x(t)) \xrightarrow{FFT} \overline{F_{NL}}^{(n)}$$

Il vero e proprio modello di contatto è nella formula  $F_{NL}(t) = f(x(t))$ ; questa assumerà forma diversa a seconda del sistema considerato, dunque verrà esplicitata per ognuno dei casi notevoli che si andranno a presentare in seguito.

### 3 Massa contro parete

Il sistema a cui ora si farà riferimento è il seguente:

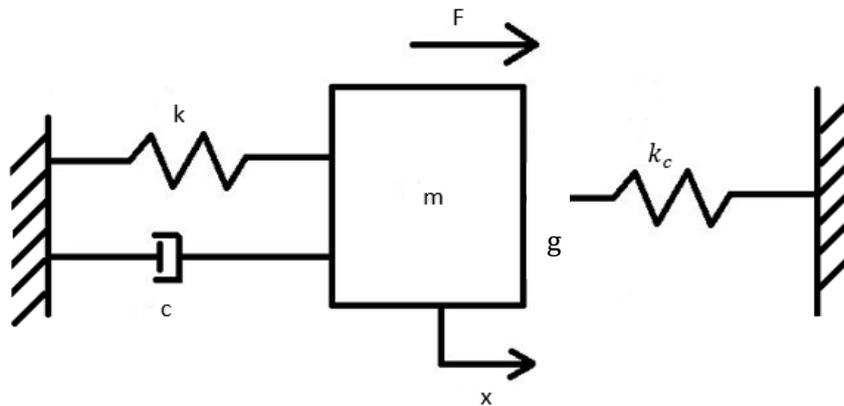


Figura 6: Schematizzazione caso massa contro parete

Dunque, la massa risulta vincolata da una molla  $k$  e uno smorzatore  $c$ ;  $k_c$  rappresenta la rigidità di contatto che, come tale, lavorerà solo in compressione, mentre nel caso in cui si trovi in trazione sarà posta pari a zero. La massa inoltre può essere soggetta ad una forzante esterna armonica (come da ipotesi vista nel paragrafo 2.1) e può anche essere presente una componente statica della forzante che rappresenterà un offset per la soluzione dinamica che si troverà.

Nel seguito verrà indicato con  $g$  il divario tra la massa e la parete; se  $g > 0$  allora significa che i due corpi sono in contatto, al contrario, se  $g < 0$  indica che vi è un gap.

Con la massa separata dalla parete (*open contact*) si può diagrammare la risposta in frequenza del tipico sistema massa-molla-smorzatore:

$$X(n) = (k - \omega(n)^2 m + i\omega(n)c) \setminus F$$

Nel momento in cui i due corpi si trovano in contatto la dinamica varia a seguito dell'entrata in gioco della rigidità  $k_c$ ; in generale la forza di contatto è dipendente dall'oscillazione della massa  $f_c(t) = k_c x(t)$ , per cui nel caso in cui si abbia un contatto la rigidità del sistema va ad aumentare e, di conseguenza, ci si aspetterà di trovare una risonanza a frequenza più elevata.

$$X(n) = (k + k_c - \omega(n)^2 m + i\omega(n)c) \setminus F$$

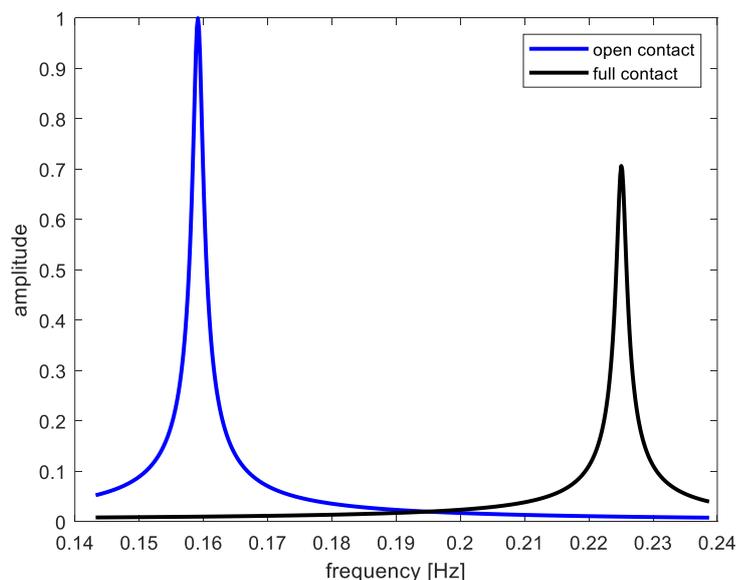


Figura 7: Risposta nel caso di open contact e full contact

Si procede quindi a scrivere le equazioni di equilibrio secondo il metodo del bilanciamento armonico; come detto in precedenza, per la prima frequenza del range scelto si utilizza il metodo Newton-Raphson, poi, per le frequenze successive, si farà riferimento al metodo *pseudo arc-length continuation*, come riportato al paragrafo 2.2. In questo modo si giungerà alla valutazione di un residuo, quando tale valore sarà minore di un certo  $\varepsilon$  di riferimento, allora sarà trovata la soluzione relativa alla frequenza considerata.

$$RES = \begin{bmatrix} real((k - \omega^2 m + \omega c)X - F + F_c) \\ imag((k - \omega^2 m + \omega c)X - F + F_c) \end{bmatrix}$$

Per poter ottenere tale residuo, risulta necessario definire un modello di contatto in grado di simulare tutte le varie condizioni descritte e fornire una soluzione per quanto riguarda  $F_c$  anche nel caso di contatto intermittente.

Si suppone di avere un andamento periodico per quanto riguarda l'ampiezza di vibrazione della massa  $x(t) = x_0 \cos \vartheta$ . Il gap dà origine ad un precarico che viene indicato come  $N_0 = k_c g$ , dove, nel caso in cui  $g > 0$  il precarico è positivo e sta ad indicare che i due corpi sono in contatto inizialmente (caso blu e rosso); viceversa nel caso in cui  $g < 0$  (caso verde). A tale precarico si va poi a sommare l'andamento periodico dell'oscillazione della massa, si può dunque venire ad avere una situazione come quella graficata.

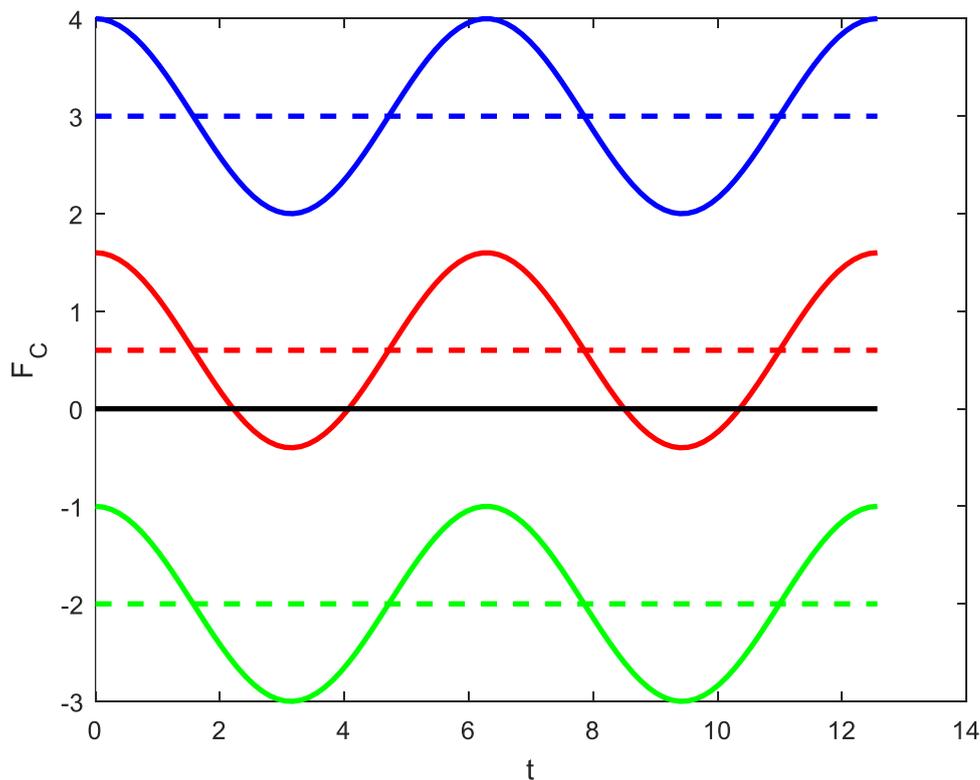


Figura 8: Esempi di andamenti della forza di contatto generata dalla sovrapposizione del precarico con l'oscillazione dinamica della massa

La forza di contatto che si ottiene risulta:

$$F_C = N_0 + k_c x_0 \cos \vartheta$$

Quando  $F_C = 0$  vuol dire che i corpi sono in una fase di transizione, se  $\dot{x} < 0$  allora stanno per separarsi, viceversa, se  $\dot{x} > 0$  stanno per entrare in contatto. Quindi si osserva che, nel caso dell'andamento blu si avranno corpi sempre in contatto (*full contact*), questo vuol dire che l'oscillazione della massa non è abbastanza elevata da far separare per qualche istante i due corpi. Nel caso graficato in verde sono sempre separati poiché l'oscillazione non è sufficientemente alta da vincere il precarico negativo e far andare la massa contro la parete (*open contact*). Nel caso riportato in rosso, invece, si vede che l'andamento di  $F_C$  attraversa l'asse delle ascisse per cui si avranno delle transizioni (*intermittent contact*).

Dal momento che la forza di contatto assume un valore positivo nel caso in cui i due corpi siano uno contro l'altro, oppure è nulla quando il contatto non sussiste; questa non può mai essere negativa. Perciò la si può individuare come:

$$F_C = \max(N_0 + k_c x, 0)$$

In questo modo è stato definito un modello di contatto che, al variare del valore  $x$  dell'ampiezza di vibrazione della massa, riporta una forza da inserire nel sistema che viene risolto iterativamente. Così sarà possibile studiare la dinamica anche nel caso in cui si dovesse avere una perdita parziale del contatto durante l'oscillazione.

Seguendo i passi descritti si implementa un codice numerico in grado di riportare la risposta in frequenza del sistema. È interessante sviluppare un programma parametrico in modo da comprendere il significato dei vari termini che compaiono nelle equazioni ed anche l'influenza che essi vengono ad assumere nella dinamica del problema.

### 3.1 Influenza del gap

Come osservato nella figura 8 sopra riportata, il gap influenza fortemente il precarico  $N_0$ ; si osserva che un gap molto elevato fa permanere il sistema in condizioni di *full contact*, viceversa per un gap negativo (quindi un divario) che, se elevato in valore assoluto, porta la massa a rimanere separata dalla parete. Si può vedere che il valore del gap da applicare per ricadere nei casi di *full contact* oppure *open contact* sono strettamente legati all'ampiezza di oscillazione della massa; infatti, risulta sempre valida

$$F_C = \max(N_0 + k_c x, 0)$$

Negli andamenti riportati in seguito vengono fissati:

Grandezza	Valore
k [N/m]	1
m [Kg]	1
c [Ns/m]	0.01
$k_c$ [N/m]	1
F [N]	0.01

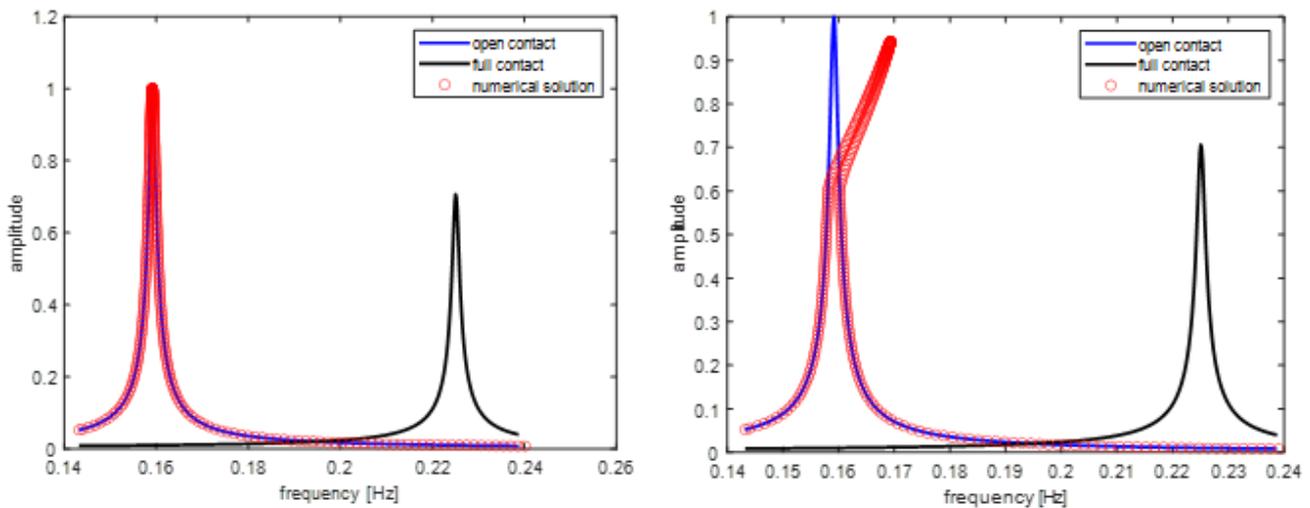


Figura 9: Risposte ottenute imponendo gap=-1.2 m e gap=-0.6 m

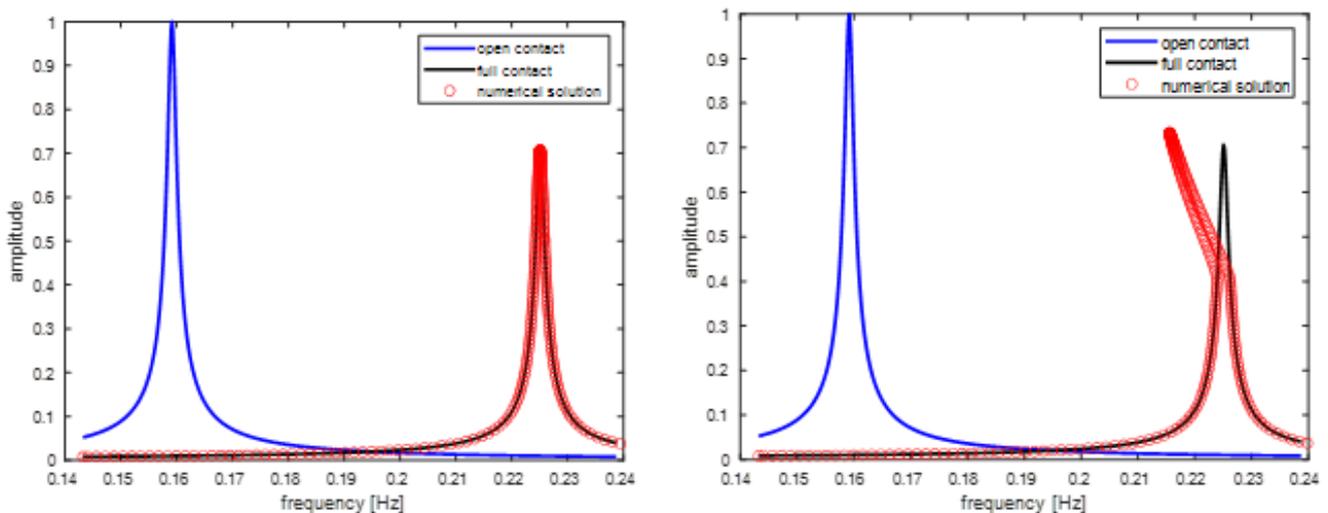


Figura 10: Risposte ottenute imponendo gap=1 m e gap=0.4 m

### 3.2 Influenza della forzante

La forzante è armonica, come da ipotesi del metodo del bilanciamento armonico, per cui il termine che influenza la dinamica è il suo modulo. Come ci si aspetta, un valore più elevato di  $F$  causa un'evoluzione del sistema secondo la quale esso tende maggiormente a presentare una transizione durante la propria dinamica; viceversa, un valore più basso, comporta maggior probabilità di rimanere nella condizione iniziale (sia essa di contatto o di separazione). Questo è dovuto al fatto che l'ampiezza della risposta in frequenza dipende dal modulo della forzante, un valore minore di quest'ultimo porta il picco ad un valore più basso e, di conseguenza, a pari gap, la tendenza è quella di rimanere nello stato in cui ci si trova all'inizio (lo si può intuire osservando le figure sopra riportate con l'andamento al variare del gap).

Negli andamenti riportati vengono fissati:

Grandezza	Valore
$k$ [N/m]	1
$m$ [Kg]	1
$c$ [Ns/m]	0.01
$k_c$ [N/m]	1

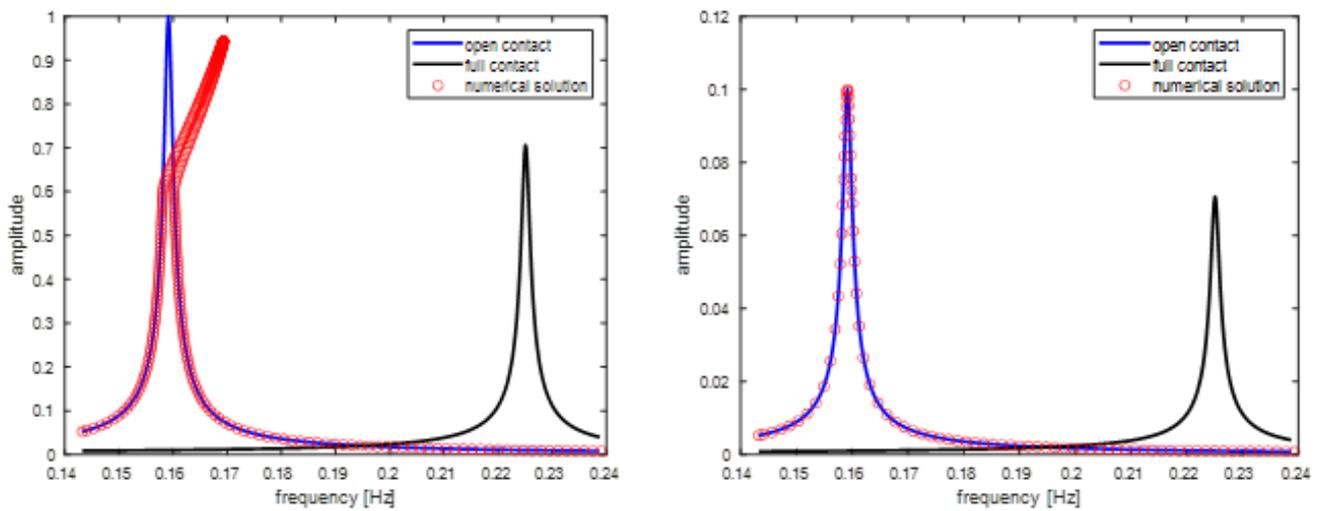


Figura 11: Risposte ottenute imponendo un gap=-0.6 m e  $F=0.01$  N; gap=-0.6 m e  $F=0.001$  N

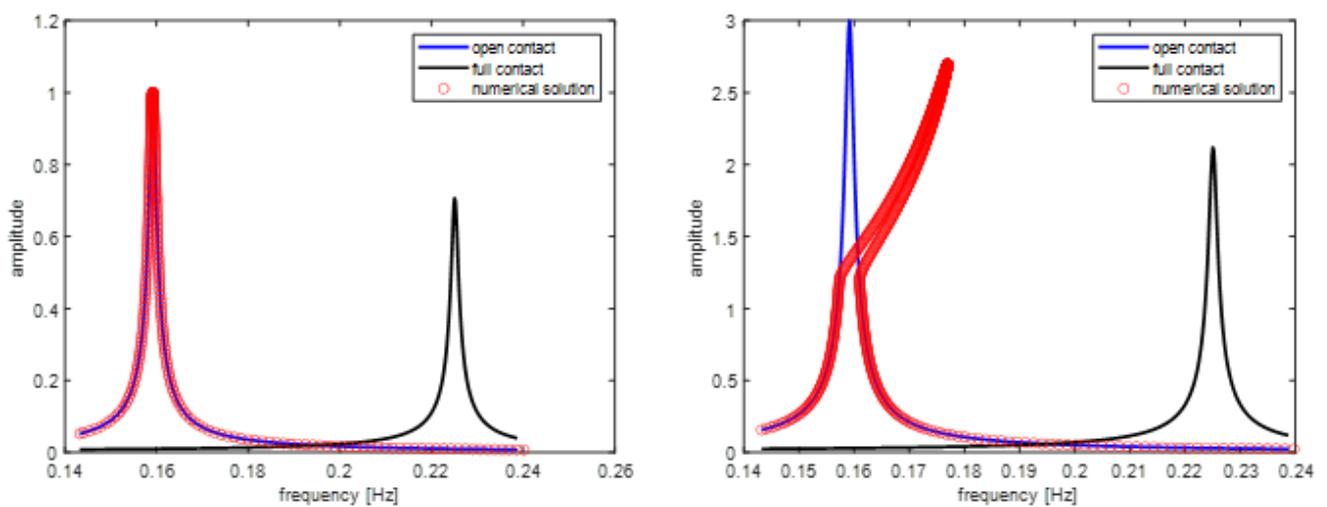


Figura 12: Risposte ottenute imponendo gap=-1.2 m e  $F=0.01$  N; gap=-1.2 e  $F=0.03$  N

### 3.3 Influenza del carico statico

Come già detto, l'applicazione di un carico statico ha la conseguenza di imporre uno sfasamento all'andamento nel tempo dell'oscillazione della massa. Risulta dunque opportuno, in questo caso, non solo diagrammare la risposta in frequenza, ma, attraverso una IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*), ottenere anche la variazione dell'ampiezza nel tempo.

Il risultato al quale si giungerà sarà tale per cui, quando l'ampiezza complessiva (ovvero quella che comprende anche il contributo del carico statico) supera il valore iniziale del gap allora si avrà una transizione. Nell'esempio seguente si impone un gap iniziale di -1.5 m e una forzante statica di 1 N. Se l'andamento nel tempo viene ad assumere un valore superiore ad 1.5 m allora significa che, attraverso la propria oscillazione, la massa è riuscita a vincere il divario iniziale e a portarsi in contatto con la parete; nel riportare i diagrammi vengono affiancate la risposta in frequenza e l'andamento nel tempo relativo all'iterazione corrente.

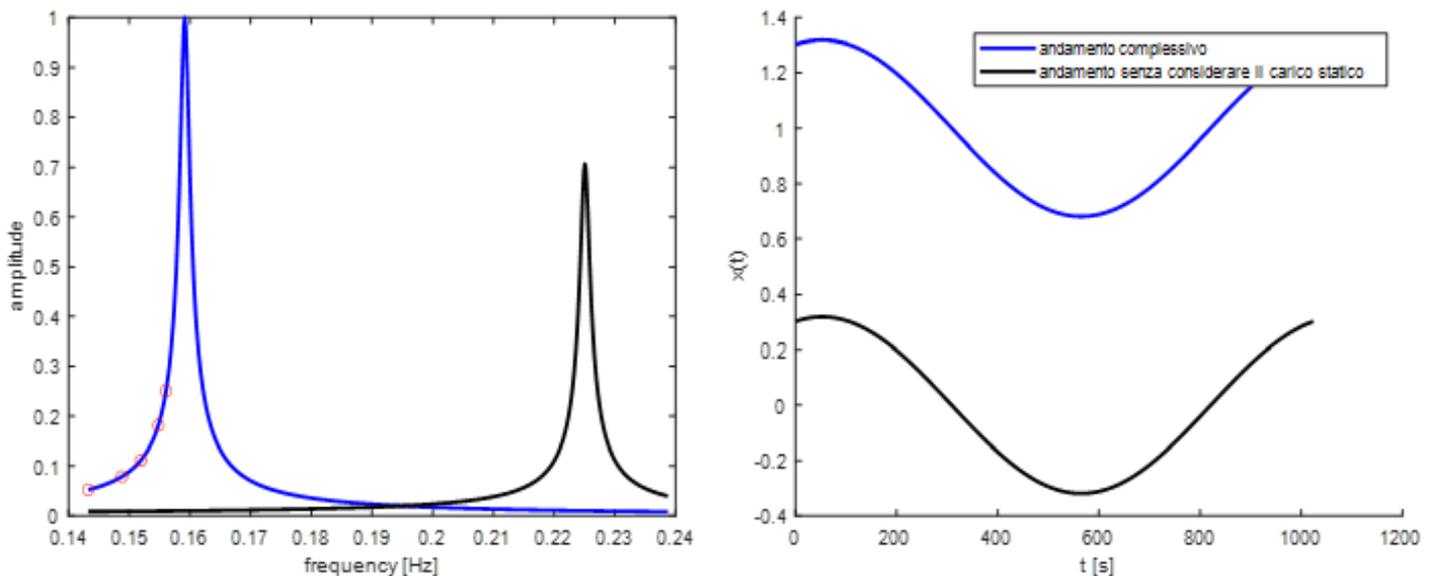


Figura 13: Istante di tempo nel quale ancora non si è superato il gap, si segue l'andamento relativo ad un contatto aperto

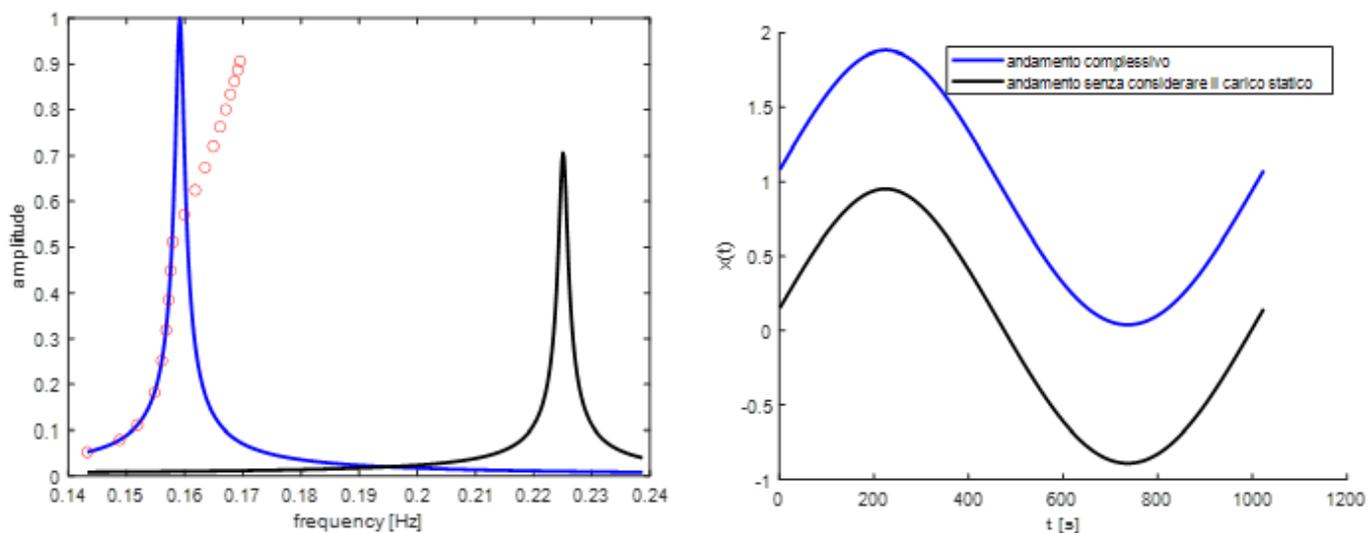


Figura 14: Viene superato il valore del gap e si vede come i copri vadano in contatto aumentando così la rigidità del sistema

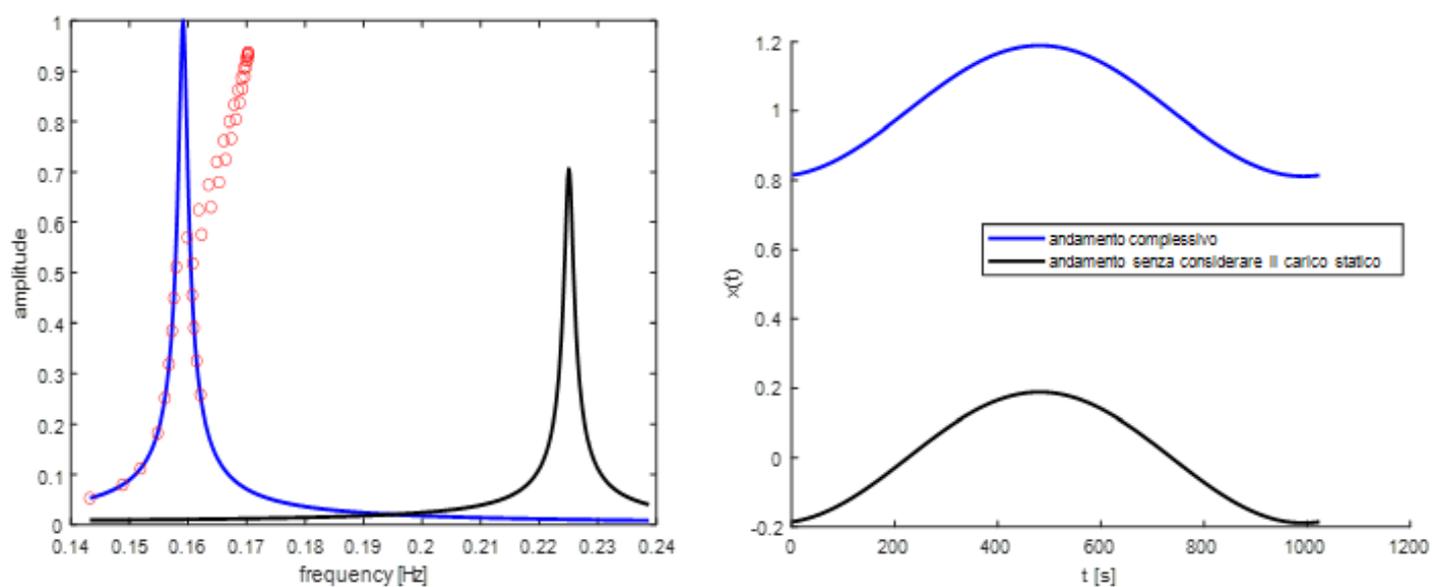


Figura 15: Si torna ad avere ampiezza di oscillazione minore del gap e si riottiene la condizione iniziale

In maniera del tutto analoga si può osservare il caso in cui si parte da un contatto iniziale; il gap rimane negativo, ma a seguito dell'applicazione di una forza statica maggiore di  $k_c g$  i due corpi vanno inizialmente in contatto. Nel momento in cui l'andamento complessivo viene ad avere un'ampiezza tale che sia minore di  $F_0 - k_c g$  è come se la forza di contatto attraversasse l'asse delle ascisse (in analogia alla figura 8) e si assiste ad una transizione da contatto a massa libera.

Ora si considera gap iniziale di -0.5 m e forza statica pari a 1 N; essendo  $k_c$  pari ad 1 N/m sarà necessario che l'ampiezza dell'oscillazione raggiunga in valore assoluto 0.5 m affinché si possa assistere ad una transizione.

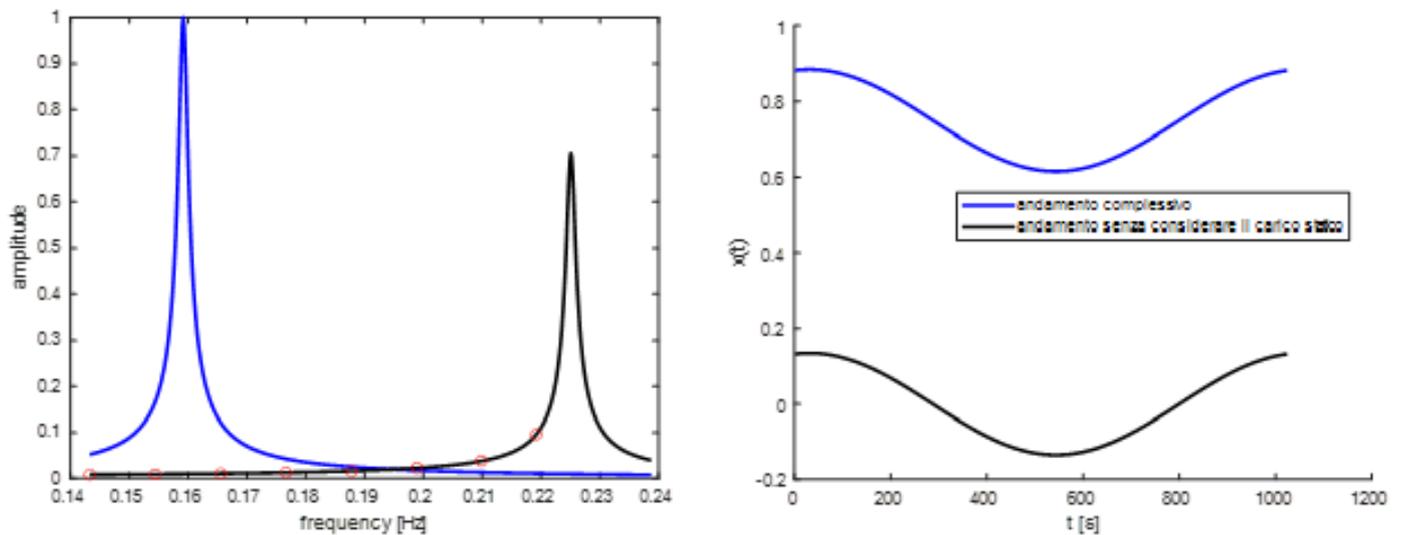


Figura 16: Ampiezza non sufficiente per uscire dalla condizione di contatto

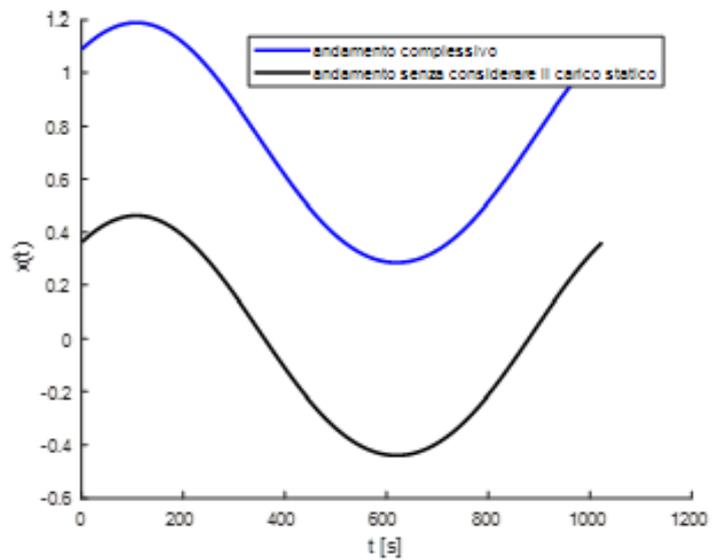
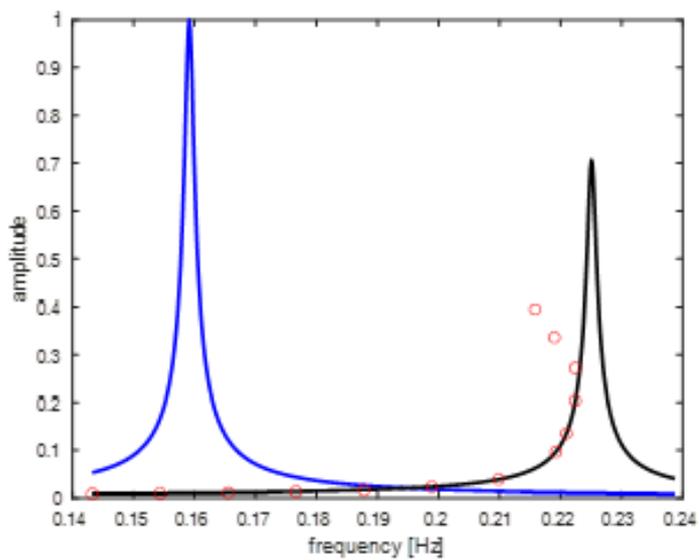


Figura 17: L'andamento supera il valore precedentemente indicato ed effettivamente si ha separazione

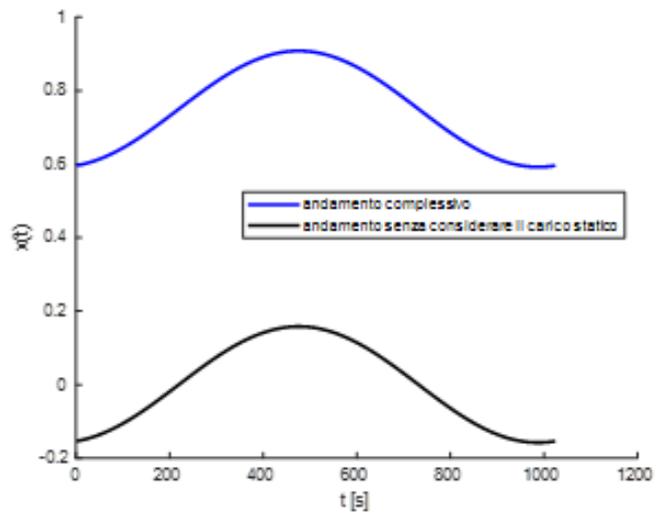
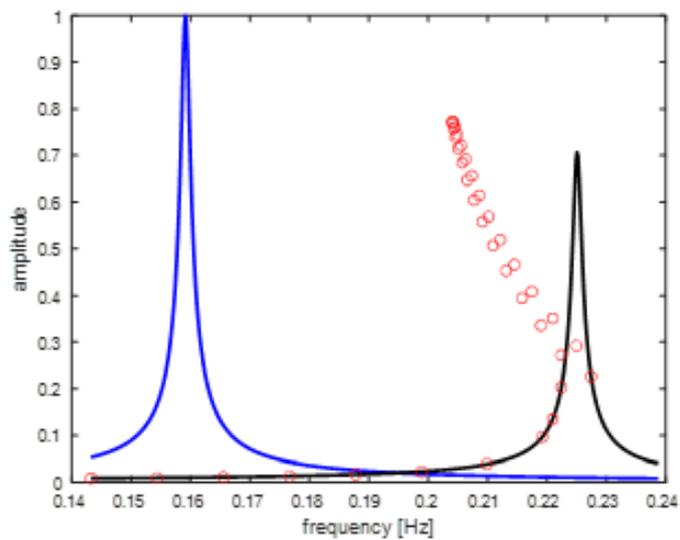


Figura 18: Si ritorna alla condizione iniziale

## 4 Due masse

Il sistema seguente rappresenta la naturale continuazione del caso massa contro parete visto al capitolo precedente; ora si considerano due masse, entrambe vincolate, libere di muoversi sotto l'effetto di una forzante esterna armonica e si vuole andare a studiare il comportamento dinamico e la risposta in frequenza che si genera garantendo la possibilità alle due di rimanere separate o anche andare in contatto.

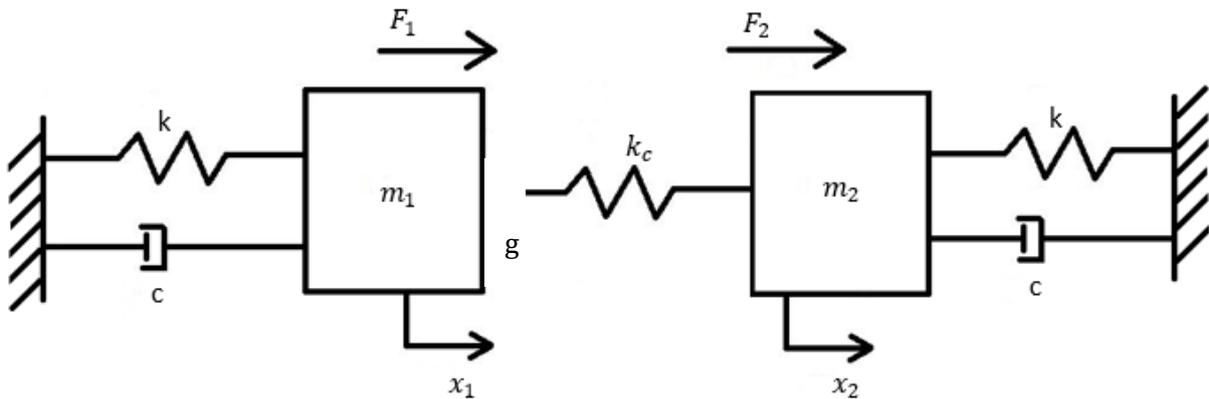


Figura 19: Rappresentazione del sistema con due masse

Per la risoluzione del problema viene sempre utilizzato il metodo del bilanciamento armonico con delle modifiche rispetto al caso visto al capitolo 3. Ora i termini di massa, rigidezza e smorzamento diventano delle matrici 2x2 perché due sono i gradi di libertà del sistema qui considerato. L'equazione risulta quindi:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f(t)\} - \{f_c(t, x, \dot{x})\}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Per lo smorzamento si fa riferimento all'ipotesi di Rayleigh, per cui  $[c] = \alpha[m] + \beta[k]$ .

Grandezza	Valore
m [Kg]	1
k [N/m]	5
kc [N/m]	2
$\alpha$ [1/s]	0
$\beta$ [s]	0.01

## 4.1 Problema agli autovalori

Per la risoluzione dell'auto-problema è opportuno apportare delle modifiche all'equazione sopra scritta. Dal momento che è sufficiente considerare il sistema non smorzato e non forzato, ora si farà riferimento a quello.

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

La matrice degli autovettori  $[\Psi]$  può essere vista come la nuova base della scrittura e quindi si può utilizzare:

$$\{x\} = [\Psi]\{q\}$$

Dove  $\{q\}$  rappresenta l'ampiezza del generico modo. Poiché i modi propri del sistema sono delle deformate definite a meno di costanti moltiplicative, le si può scalare a piacere in modo tale da avere un sistema più semplice da risolvere. Dunque, seguendo questa logica, i vettori contenuti in  $[\Psi]$  vengono scalati e vanno a generare la matrice  $[\Phi]$  che contiene i modi *m-normalizzati*.

$$[\Phi]^T [m] [\Phi] = [I]$$

La generica  $\{x\}$  può essere vista come  $\{\bar{x}\}e^{i\omega t}$ , per cui l'equazione diventa:

$$-\omega^2 [\Phi]^T [m] [\Phi] \{\bar{x}\}e^{i\omega t} + [\Phi]^T [k] [\Phi] \{\bar{x}\}e^{i\omega t} = \{0\}$$

Il termine temporale può essere semplificato perché si sta cercando una soluzione sempre valida, tale soluzione la si può ottenere andando ad annullare il determinante della matrice dei coefficienti, che prende anche il nome di matrice dinamica.

$$\det \left[ -\omega^2 [I] + [\tilde{k}_{mod}] \right] = 0$$

Si osserva che inserendo come  $\omega(i) = \omega_n$  (ovvero uno degli autovalori, pulsazione propria) la matrice dinamica perde di rango, dunque l'applicazione della *m-normalizzazione* non solo ha il risultato di trasformare la matrice di massa nella matrice identità, ma rende anche la matrice di rigidezza tale che abbia sulla diagonale le pulsazioni proprie del sistema.

$$[\tilde{k}_{mod}] = [\Lambda] = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{ccccc} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{n-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{array} \right) \end{bmatrix}$$

Si arriva così a dover risolvere un sistema con matrici diagonalizzate disaccoppiate tra loro che è esattamente come risolvere N sistemi ad 1 grado di libertà.

$$\det[-\omega^2 [I] + [\Lambda]] = 0$$

## 4.2 Modello di contatto

Come per il caso *massa contro parete*, anche ora è necessario definire un modello di contatto in grado di fornire una forza non lineare di contatto in funzione dello spostamento delle masse.

Il concetto che si segue è esattamente lo stesso esplicitato nel capitolo 3, con un gap iniziale imposto (gap negativo sta ad indicare che le due masse inizialmente sono separate, viceversa vuol dire che sono in contatto) e la possibilità per la rigidità di contatto di lavorare solo in compressione, per cui rimane valido considerare:

$$F_c = \max(N_0 + k_c x, 0)$$

Dove

$$N_0 = k_c g$$

Mentre lo spostamento  $x$  non può più essere quello di una sola delle due masse, ma deve rappresentare lo spostamento relativo di una rispetto all'altra in modo da poter comprendere se, durante la loro oscillazione, vi sono condizioni tali perché si possa assistere ad una transizione.

$$x = x_1 - x_2$$

Come osservato nei capitoli 3.1 e 3.2 il gap iniziale e la forzante armonica a cui le masse sono sottoposte giocano un ruolo molto importante nell'andamento della risposta in frequenza.

A parità del gap iniziale imposto, se la forzante è più elevata ci sarà una maggior tendenza del sistema a portarsi in una condizione diversa rispetto a quella in cui si trova all'istante iniziale dal momento che il moto oscillatorio delle due masse viene ad avere un'ampiezza maggiore. Nel caso in cui sia presente, anche la forzante statica va a influenzare la risposta che si viene ad ottenere, infatti, per come è stata presa la convenzione di segno, un eventuale termine statico agente sulla massa 1 con segno positivo rappresenterebbe un offset per la risposta perché andrebbe ad intervenire insieme al valore del gap tendendo a far avvicinare le due masse e quindi la condizione di contatto. In modo del tutto analogo considerando una forzante statica di segno opposto o applicata all'altra massa che entra in gioco.

## 4.3 Risposta in frequenza

A questo punto si vanno ad osservare gli andamenti ottenuti applicando i metodi del bilanciamento armonico e di continuazione descritti in precedenza.

Per le immagini che seguono si farà riferimento a gap iniziale variabile e termini legati alla presenza di forze esterne armoniche e statiche pari a:

Grandezza	Valore
$F_1$ [N]	0.025
$F_2$ [N]	0.02
$F_{01}$ [N]	0
$F_{02}$ [N]	0

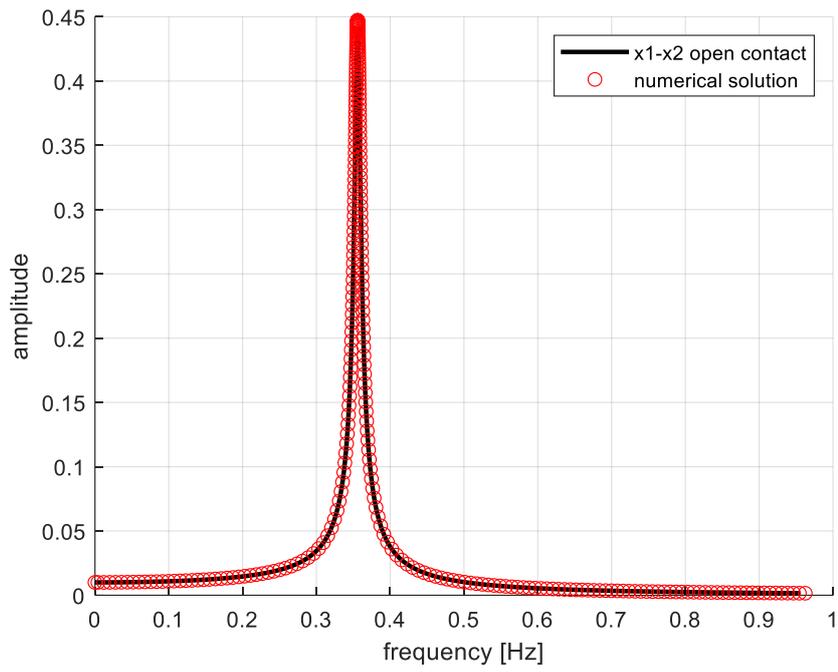


Figura 20: Risposta ottenuta imponendo un gap iniziale pari a -0.5 m

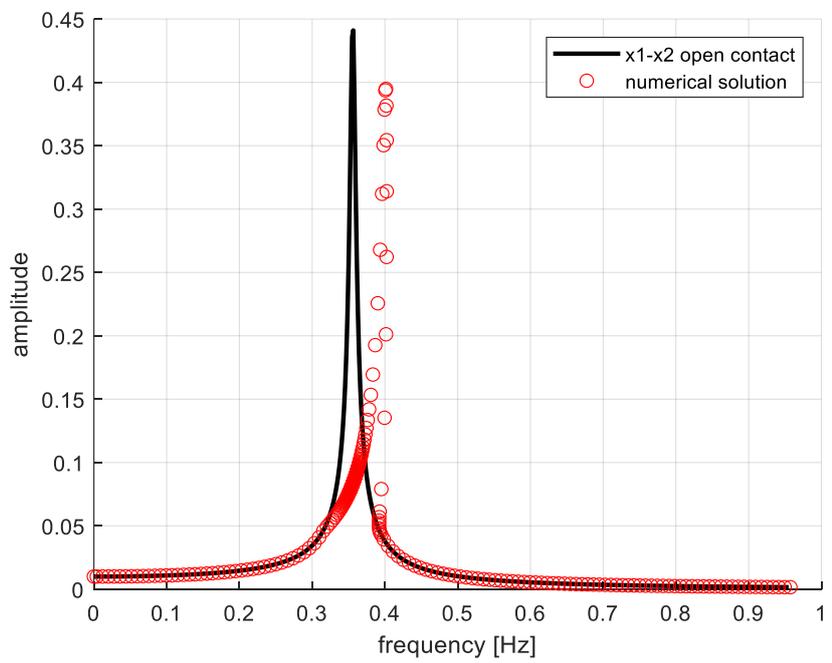


Figura 21: Risposta ottenuta imponendo un gap iniziale pari a -0.005 m

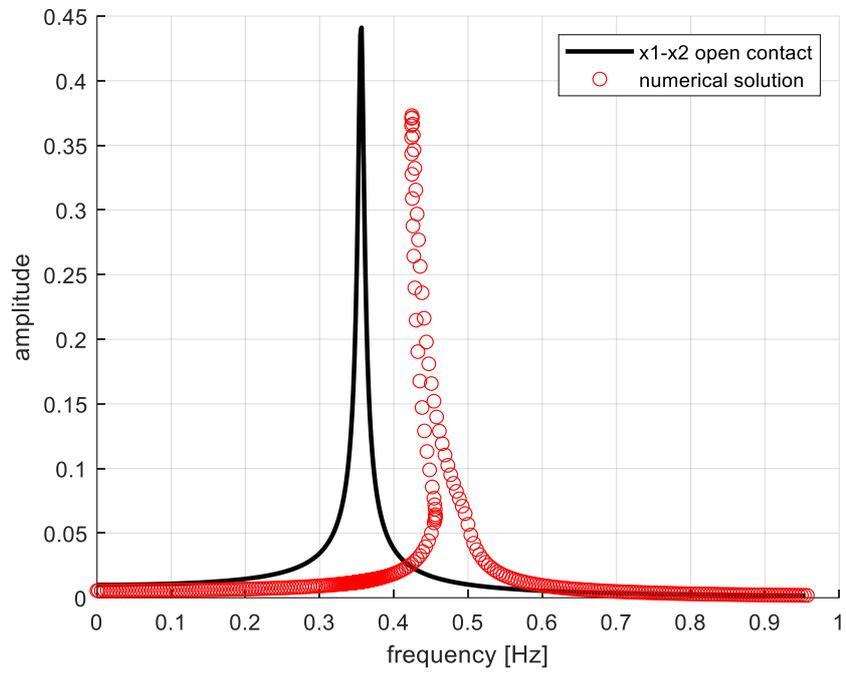


Figura 22: Risposta ottenuta imponendo un gap iniziale pari a 0.15 m

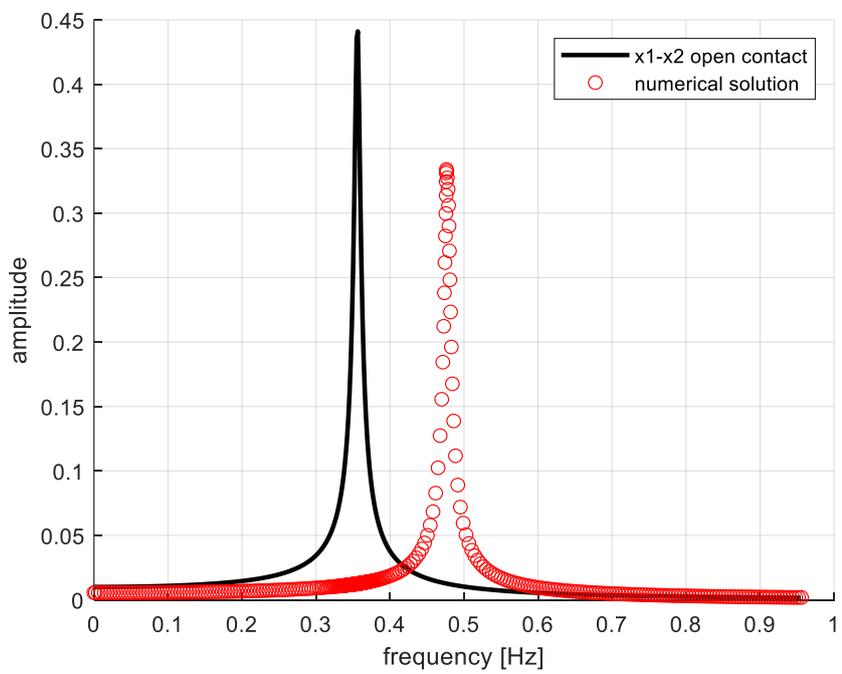


Figura 23: Risposta ottenuta imponendo un gap iniziale pari a 0.6 m

## 5 Applicazione di quanto visto finora

In questo paragrafo si fa riferimento ad un sistema costituito da due masse che verrà elaborato in modo da ottenere un sistema ad un grado di libertà; nel procedere in questa trasformazione ci si basa sugli studi portati avanti da Comparin, R. J., e Singh, R., nel 1989 [17].

Il sistema a cui si farà riferimento è il seguente:

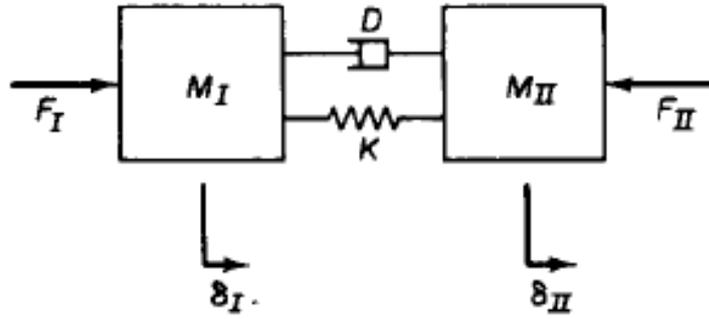


Figura 24: Sistema di due masse studiato da Comparin e Singh [17]

Si ipotizza che la forzante esterna abbia una componente media  $F_m$  e una variabile nel tempo  $F_p(t)$ , la prima massa è soggetta ad entrambe, mentre la seconda solo alla componente media.

$$M_I \ddot{\delta}_I + D \dot{\delta} + Kf(\delta) = F_m + F_p(t)$$

$$M_{II} \ddot{\delta}_{II} - D \dot{\delta} - Kf(\delta) = -F_m$$

Dove  $\delta = \delta_I - \delta_{II}$  rappresenta il moto relativo (ricalcando quanto visto al paragrafo precedente), mentre  $f(t)$  definisce l'elemento elastico non lineare che simula la variazione della rigidità a seconda che i corpi siano in contatto oppure separati.

Si possono ridurre le due relazioni ad una sola equazione con unico grado di libertà  $\delta$ , si moltiplica la prima per  $M_{II}$  e la seconda per  $M_I$ , successivamente si sottraggono le due per ottenere l'equazione finale.

$$M_{II} M_I \ddot{\delta}_I + M_{II} D \dot{\delta} + M_{II} Kf(\delta) = M_{II} F_m + M_{II} F_p(t)$$

$$M_I M_{II} \ddot{\delta}_{II} - M_I D \dot{\delta} - M_I Kf(\delta) = -M_I F_m$$

Dunque:

$$M \ddot{\delta} + D \dot{\delta} + Kf(\delta) = F_m + \frac{M}{M_I} F_p(t)$$

Dove

$$M = \frac{M_I M_{II}}{M_I + M_{II}}$$

L'equazione di equilibrio scritta sopra si può adimensionalizzare attraverso l'utilizzo della pulsazione propria del sistema (ipotizzando un valore della rigidità  $K$  e che le due masse abbiano uguale valore  $m$ ;  $\omega_n = \sqrt{K/M}$ ) e di  $b$ , che rappresenta metà del gap iniziale tra le due masse, tale gap quando è negativo indica effettivamente un divario. Inoltre,  $b^*$  sta ad indicare anch'esso metà della distanza iniziale tra le masse.

$$\begin{aligned}\bar{\delta} &= \frac{\delta}{b^*} \\ \bar{b} &= \frac{b}{b^*} = 1 \\ \bar{t} &= t\omega_n \\ \zeta &= \frac{D}{2M\omega_n} \\ \bar{F}_m &= \frac{F_m}{Mb^*\omega_n^2} \\ \bar{F}_p &= \frac{F_p}{M_I b^*\omega_n^2} \\ \bar{\Omega} &= \frac{\Omega}{\omega_n}\end{aligned}$$

Dunque

$$\bar{\delta} + 2\zeta\bar{\delta} + f(\bar{\delta}) = \bar{F}_m + \bar{F}_p(\bar{t})$$

La risoluzione di questa equazione avviene con il metodo del bilanciamento armonico, quindi si assume un andamento per la forzante esterna e di conseguenza si può assumere una soluzione approssimata.

$$\bar{F} = \bar{F}_m + \bar{F}_p \cos(\bar{\Omega}_p \bar{t} + \varphi)$$

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_m + \bar{\delta}_p \cos(\bar{\Omega}_p \bar{t} + \varphi)$$

Il termine  $\bar{\delta}_m$  viene considerato come un offset per l'andamento, come già osservato in precedenza, mentre  $\bar{\delta}_p$  rappresenta l'ampiezza della risposta forzata dovuta alla componente alternata della forzante.

$$f(\bar{\delta}) = N_{fm}\bar{\delta}_m + N_{fp}\bar{\delta}_p \cos(\bar{\Omega}_p \bar{t} + \varphi)$$

Dove  $N_{fm}$  e  $N_{fp}$  sono coefficienti ottenuti da un'espansione in serie di Fourier

$$N_{fm}(\bar{\delta}_m, \bar{\delta}_p) = \frac{1}{\pi\bar{\delta}_m} \int_0^\pi f(\bar{\delta}) d(\bar{\Omega}_p \bar{t} + \varphi)$$

$$N_{fp}(\bar{\delta}_m, \bar{\delta}_p) = \frac{2}{\pi\bar{\delta}_m} \int_0^\pi f(\bar{\delta}) \cos(\bar{\Omega}_p \bar{t} + \varphi) d(\bar{\Omega}_p \bar{t} + \varphi)$$

È stato dimostrato nell'articolo di riferimento che si può giungere ad un risultato diverso nel caso in cui le due masse non vadano ad avere una transizione rispetto alla condizione iniziale.

- Caso in cui le due masse non vadano mai in contatto; viene definito *type 1* ed indica la situazione tale per cui la somma della componente statica e di quella alternata dello spostamento sono tali da non superare mai il gap iniziale che si ha e che le tiene separate.

$$N_{fm} = \alpha \quad \text{e} \quad N_{fp} = \alpha$$

Dove  $\alpha$  rappresenta una misura della non-linearità del sistema, ora viene considerata pari ad 1 in modo da osservare se si riescono ad ottenere risultati confrontabili con quanto visto nei capitoli precedenti.

$$\bar{\delta}_m = \frac{\bar{F}_m}{\alpha}$$

$$\bar{\delta}_p = \frac{\bar{F}_p}{\sqrt{(\alpha - \bar{\Omega}_p^2)^2 + (2\zeta\bar{\Omega}_p)^2}}$$

Dunque, come detto, tale *type 1* ha il significato di corpi sempre separati e si ricade in questa condizione se sussistono le seguenti relazioni:

$$\bar{\delta}_p < \bar{b} - \bar{\delta}_m \quad \text{ed anche} \quad \bar{\delta}_p > -\bar{b} + \bar{\delta}_m$$

Tali condizioni vanno applicate qualora inizialmente ci si trovi nella condizione di masse non in contatto, quindi va verificato a priori che  $g < -\frac{2\bar{F}_m}{k}$ .

- Caso in cui le due masse rimangono in contatto durante tutto il periodo, viene definito *type 2* ed indica la situazione per cui la somma della componente statica e di quella alternata dell'oscillazione è tale da vincere il gap iniziale (che ha valore tale da far andare in contatto i corpi) più lo spostamento  $\bar{\delta}_m$  che in questo caso interviene in modo favorevole per far rimanere il sistema nella condizione iniziale. Va soltanto fatta attenzione al fatto che, essendo le masse in contatto, la rigidità di contatto  $k_c$  non è nulla e quindi interviene nella relazione che esplicita la componente statica dello spostamento in quanto va a scalare la componente media della forza che diventa  $\bar{F}_m^*$ .

$$N_{fm} = 1 - \frac{(1-\alpha)\bar{b}}{\bar{\delta}_m} \quad \text{e} \quad N_{fp} = 1$$

$$\bar{\delta}_m = \bar{F}_m + (1 - \alpha)\bar{b}$$

$$\bar{\delta}_p = \frac{\bar{F}_p}{\sqrt{(1 - \bar{\Omega}_p^2)^2 + (2\zeta\bar{\Omega}_p)^2}}$$

Si ricade nella condizione dettata da questo *type 2* se valgono dunque le seguenti ipotesi:

$$\bar{\delta}_p < \bar{b} + \bar{\delta}_m^* \quad \text{ed anche} \quad \bar{\delta}_p > -\bar{b} - \bar{\delta}_m^*$$

## 5.1 Risultati del caso trattato e loro analisi

È interessante, dunque, implementando le condizioni precedentemente discusse, sviluppare un codice in grado di fornire immediatamente in output all'utilizzatore il comportamento dinamico del sistema, ovvero se questo si mantiene continuamente in contatto, oppure sempre con un divario, o ancora se è soggetto ad un contatto intermittente. Si osserva che il programma risulta in grado di predire correttamente la condizione che poi si andrà a verificare numericamente attraverso il metodo del bilanciamento armonico.

Per poter avere una conferma di quanto già osservato circa la dipendenza dai parametri che intervengono nelle equazioni, si andranno a riportare gli andamenti della risposta in frequenza al variare del gap, della componente armonica della forzante esterna ed anche della componente media della forzante esterna.

Come discusso con le equazioni del paragrafo precedente, il gap iniziale va combinato con lo spostamento indotto dalla componente statica della forzante per comprendere quale sia la condizione iniziale nella quale si trova il sistema. A parità di  $F_m$  e di  $F_p$ , un gap iniziale maggiormente negativo (corpi con un divario) tende a portare nella condizione di *open contact*, viceversa uno positivo in una condizione di *full contact*; quest'ultima situazione è più facile da ottenere in quanto, seguendo le ipotesi fatte da Comparin e Singh, si considera una  $F_m$  positiva che, data la convenzione di segno, avvicina le masse. Nei grafici di seguito riportati nel titolo nel grafico verrà riportato quanto predetto dal codice.

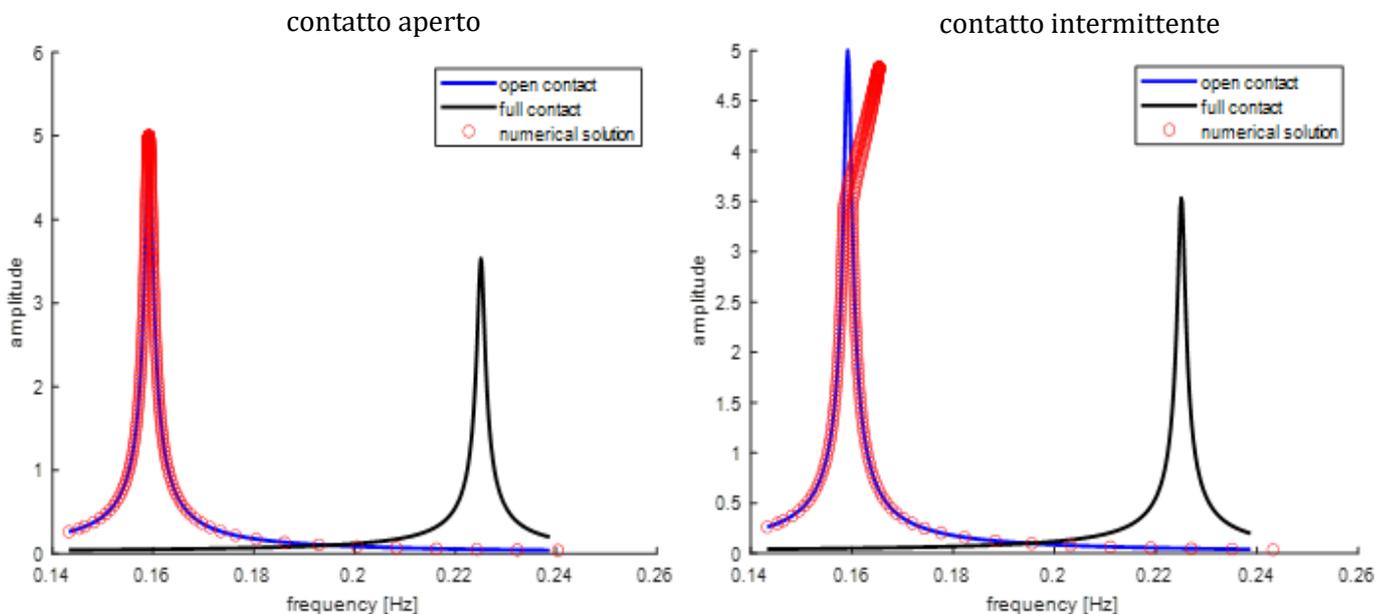


Figura 25: Risposta ottenuta imponendo  $F_m=4.1$  N;  $F_p=0.05$  N ed un gap iniziale di  $-20$  m e  $-15$  m

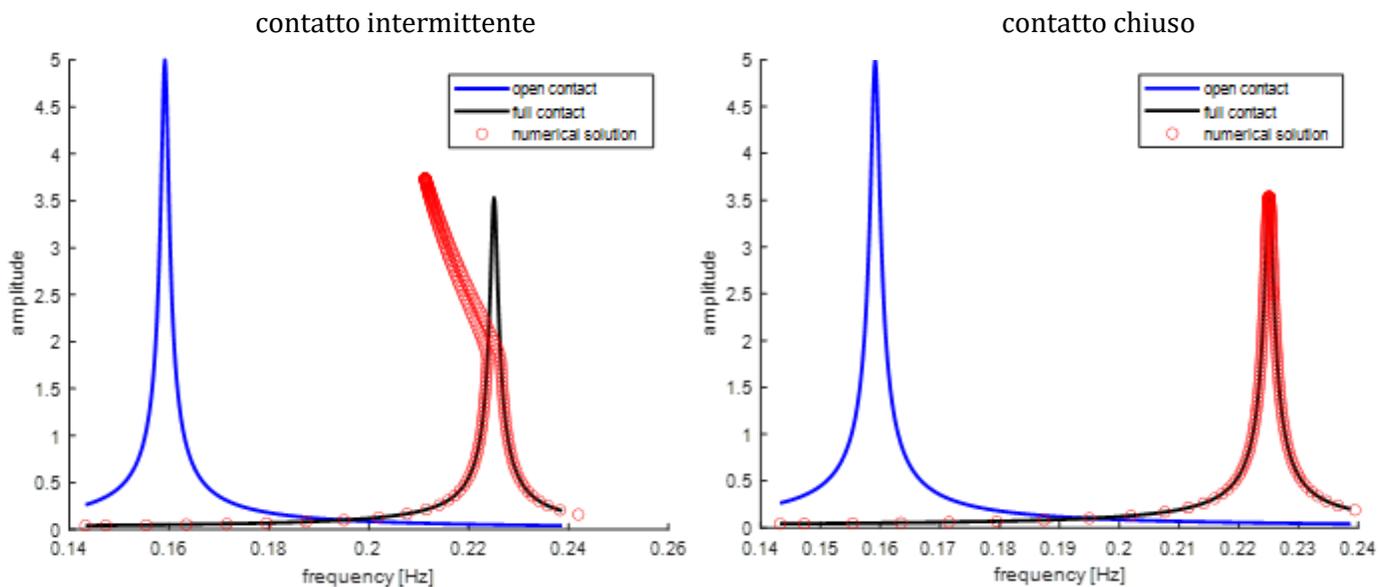


Figura 26: Risposta ottenuta imponendo  $F_m=4.1$  N;  $F_p=0.05$  N ed un gap iniziale di -1 m e 6 m

Aumentando il valore della componente armonica della forzante esterna, come ci si aspetta, a parità di gap iniziale, il sistema ha maggiore tendenza a portarsi in una condizione differente rispetto a quella iniziale.

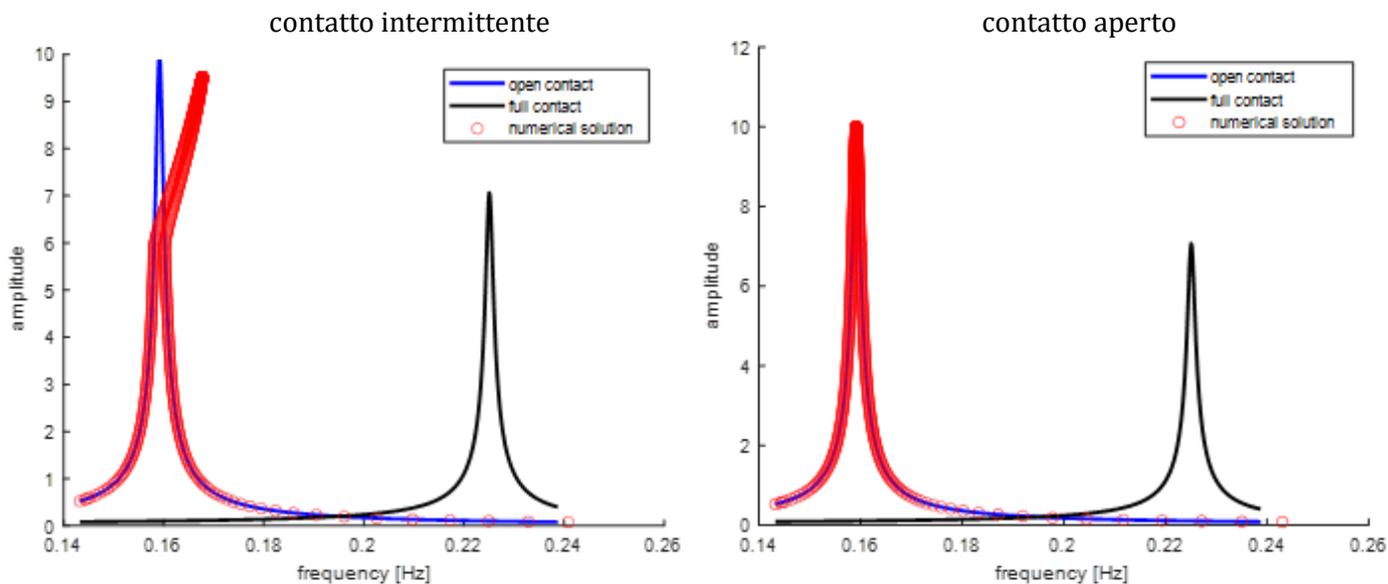


Figura 27: Risposta ottenuta imponendo  $F_m=4.1$  N;  $F_p=0.1$  N ed un gap iniziale di -20 m e -30 m

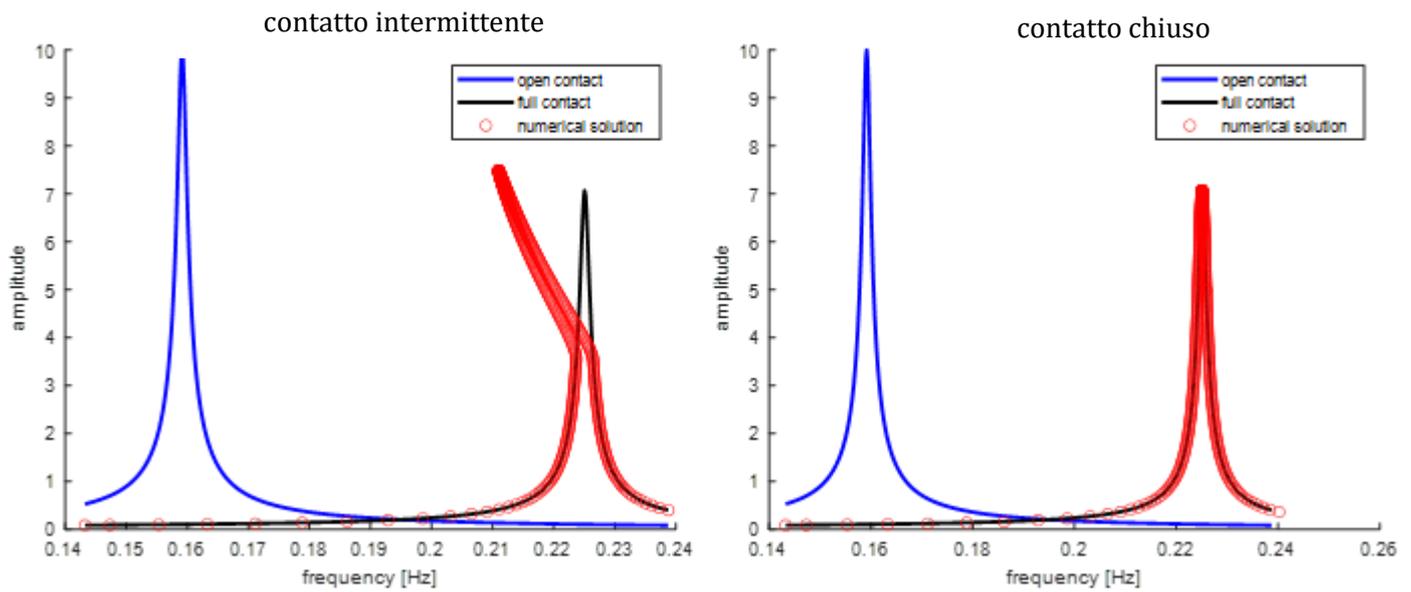


Figura 28: Risposta ottenuta imponendo  $F_m=4.1$  N;  $F_p=0.1$  N ed un gap iniziale di 6 m e 20 m

Il contributo della componente media della forzante esterna, che viene considerata positiva e quindi che va ad avvicinare le masse, è tale che, un suo aumento, a parità di tutti gli altri parametri, porti ad andare con più facilità verso la condizione di *full contact*; analogamente, una sua riduzione sortirà effetto opposto mantenendo maggiormente il sistema in *open contact* anche con un gap iniziale meno negativo (quindi meno divario iniziale).

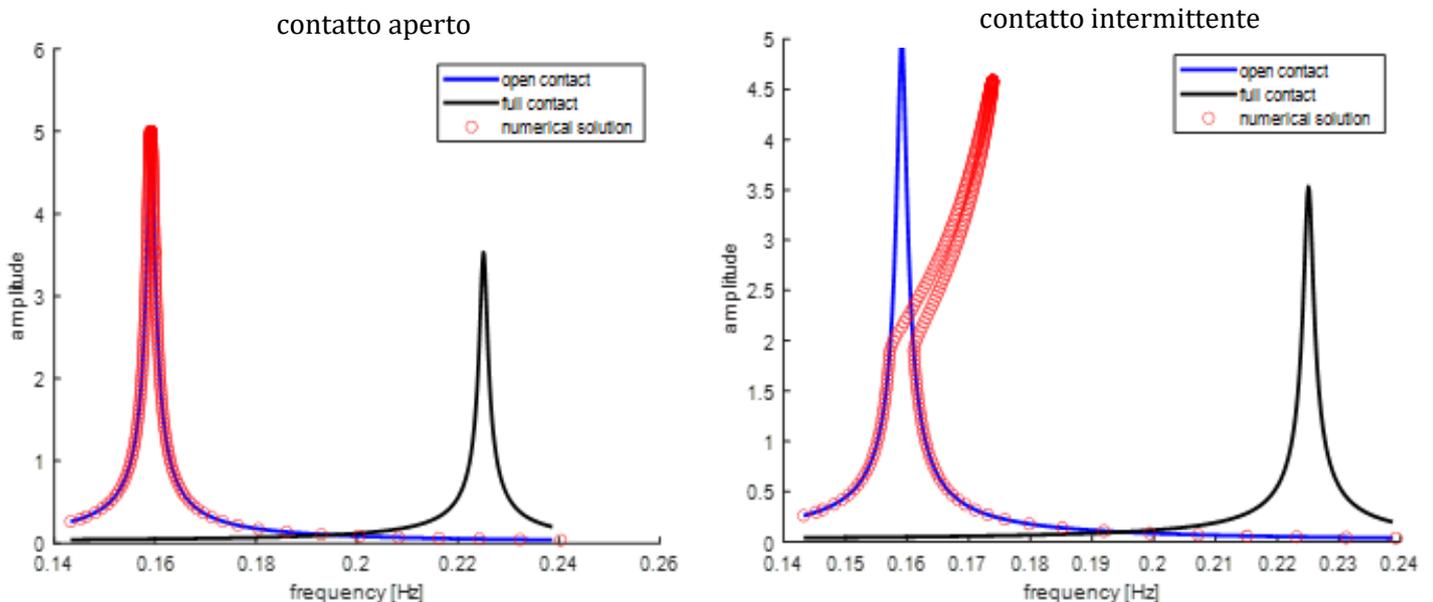


Figura 29: Risposta ottenuta imponendo  $F_m=2.1$  N;  $F_p=0.05$  N ed un gap iniziale di -15 m e -8 m

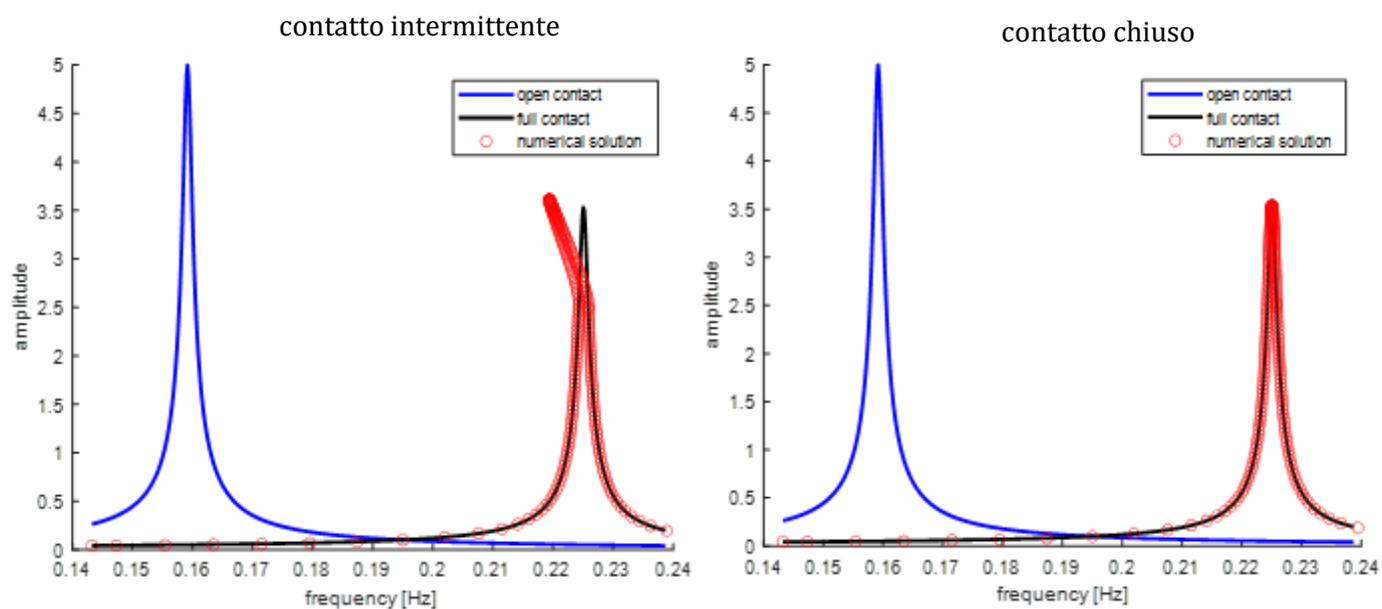


Figura 30: Risposta ottenuta imponendo  $F_m=2.1$  N;  $F_p=0.05$  N ed un gap iniziale di 6 m e 10 m

Nel diagrammare tali andamenti sono stati considerati i seguenti parametri geometrici.

Grandezza	Valore
$m_1$ [Kg]	2
$m_2$ [Kg]	2
$k$ [N/m]	1
$k_c$ [N/m]	1
$c$ [Ns/m]	0.01

## 6 Ruote dentate

A questo punto, osservata la fenomenologia e le principali peculiarità della dinamica derivante da un contatto intermittente, si può passare a studiare il caso in cui si abbiano due ruote dentate che ingranano tra loro. Si considerano ruote con denti ad evolvente che hanno la particolarità di mantenere il punto di contatto sempre sulla stessa linea, definita, appunto, segmento dei contatti. Tale segmento non si estende per tutta la distanza tra i raggi di base, ma soltanto da un punto A ad un punto E grazie ad un diverso valore tra addendum e dedendum; in questo modo si evitano problemi come l'usura adesiva causata dallo strisciamento specifico che può comportare gravi problemi sulla vita a fatica dei corpi.

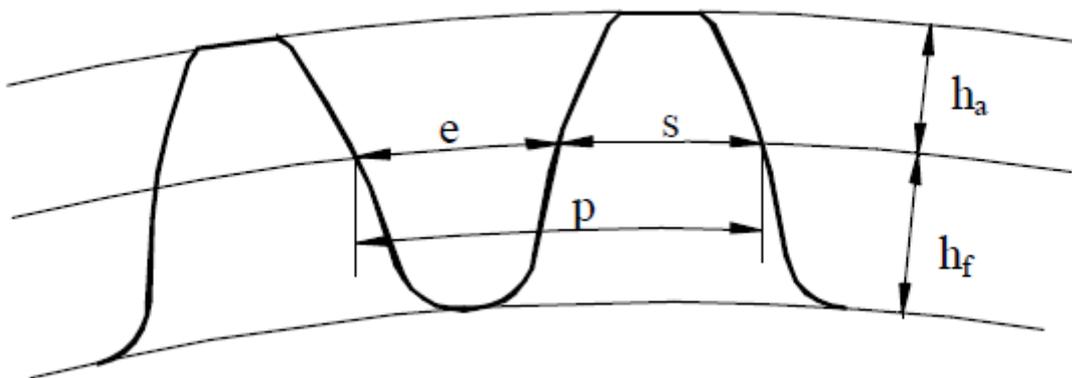


Figura 31: Caratteristiche del profilo del dente [19]

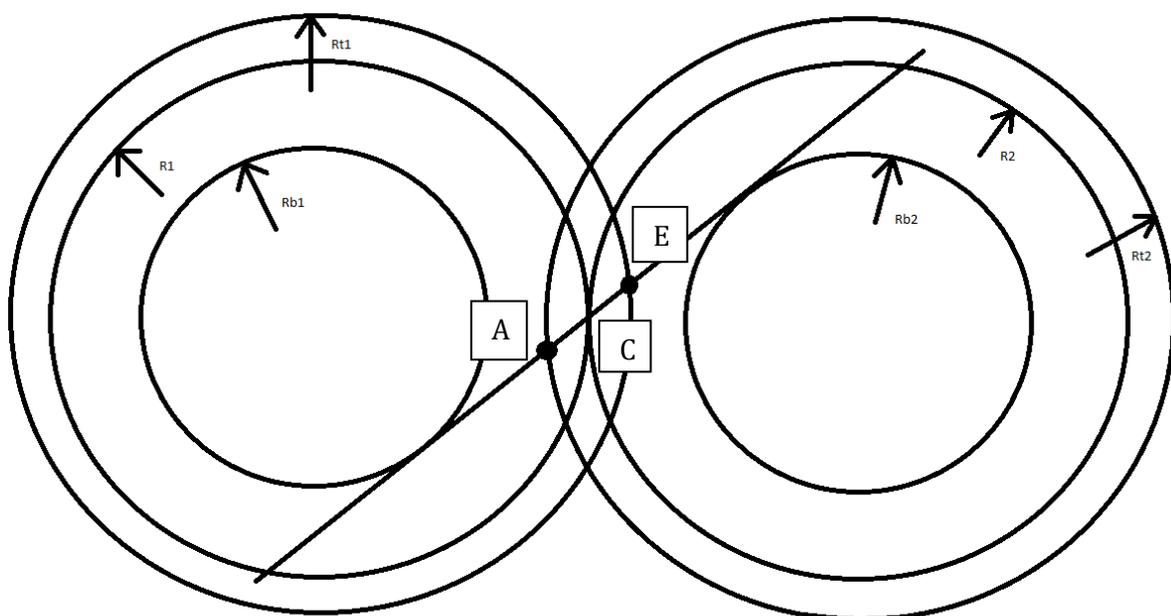


Figura 32: Segmento dei contatti

Le forze di contatto che si generano si troveranno dunque su tale segmento AE, sarà dunque necessario definire degli opportuni vettori di rotazione in funzione dell'angolo di pressione  $\alpha$ .

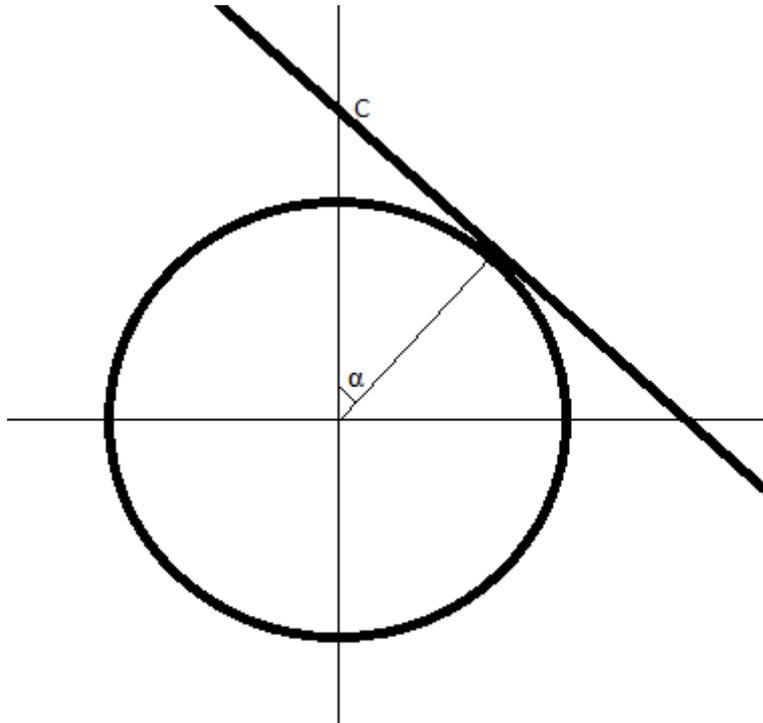


Figura 33: Angolo di pressione

Ciò che interessa valutare è l'ampiezza di vibrazione che si sovrappone al moto rigido delle ruote dentate, le quali possono ruotare rigidamente, ed anche traslare lungo la direzione x ed y, dal momento che l'albero sul quale sono calettate ha una propria rigidità flessionale. Affinché nasca tale oscillazione ci si aspetta un'eccitante, in accordo a quanto osservato nei casi massa contro parete e due masse in contatto tra loro.

Si vedrà poi in seguito che, in questo caso, tale forzante esterna non è necessaria perché si verifichi il moto oscillatorio, infatti, data la natura elastica dei denti, questi saranno soggetti ad una deformazione durante il contatto che li porta in una posizione diversa rispetto a quella che avrebbero nel caso fossero infinitamente rigidi. Questa differenza nel posizionamento rappresenta proprio un termine eccitante interno che porta alla generazione di tale vibrazione. Inoltre, sul segmento dei contatti AE, è possibile avere una sola coppia di denti in contatto oppure più di una, a seconda del rapporto di condotta o rapporto di ingranamento; nel primo caso si avrà quindi un sistema meno rigido rispetto al secondo e tale differenza induce un moto vibratorio anche nel caso in cui non vi sia la presenza di una forzante esterna.

Dunque, inizialmente si farà riferimento ad una forzante esterna, poi, attraverso una valutazione dello *Static Transmission Error*, essa verrà sostituita da un termine interno.

## 6.1 Caso con forzante esterna armonica non nulla

Il sistema di riferimento è sotto riportato. Le ruote, come già detto, sono in grado di ruotare ed anche di traslare nelle direzioni x ed y. Tutti e tre i gradi di libertà concorrono a generare uno spostamento relativo tra le due ruote, in base al quale si ha la possibilità di osservare se i due corpi possono rimanere sempre in contatto oppure se si viene ad avere una perdita di contatto (condizione che in precedenza è stata definita *intermittent contact*).

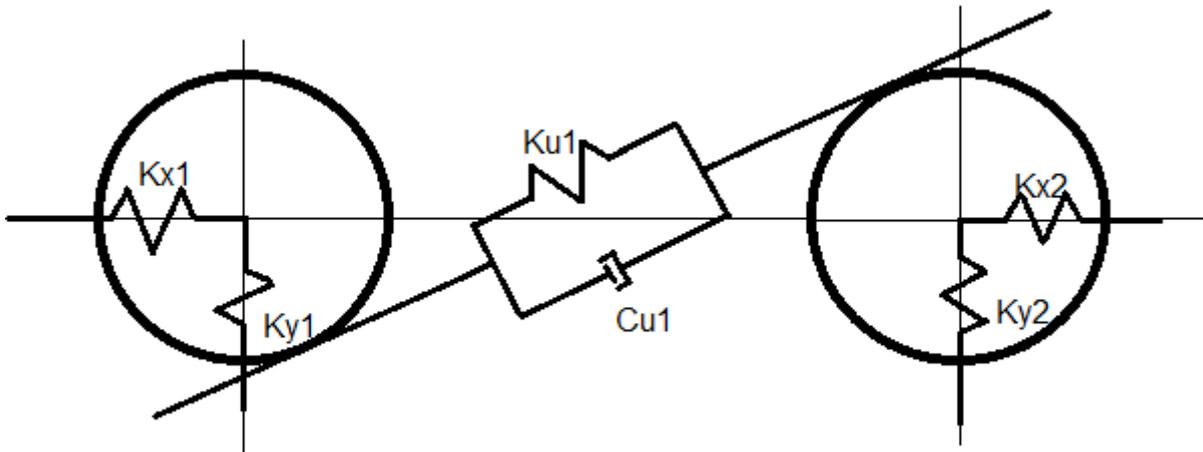


Figura 34: Sistema di riferimento coppia di ruote dentate con tre gradi di libertà

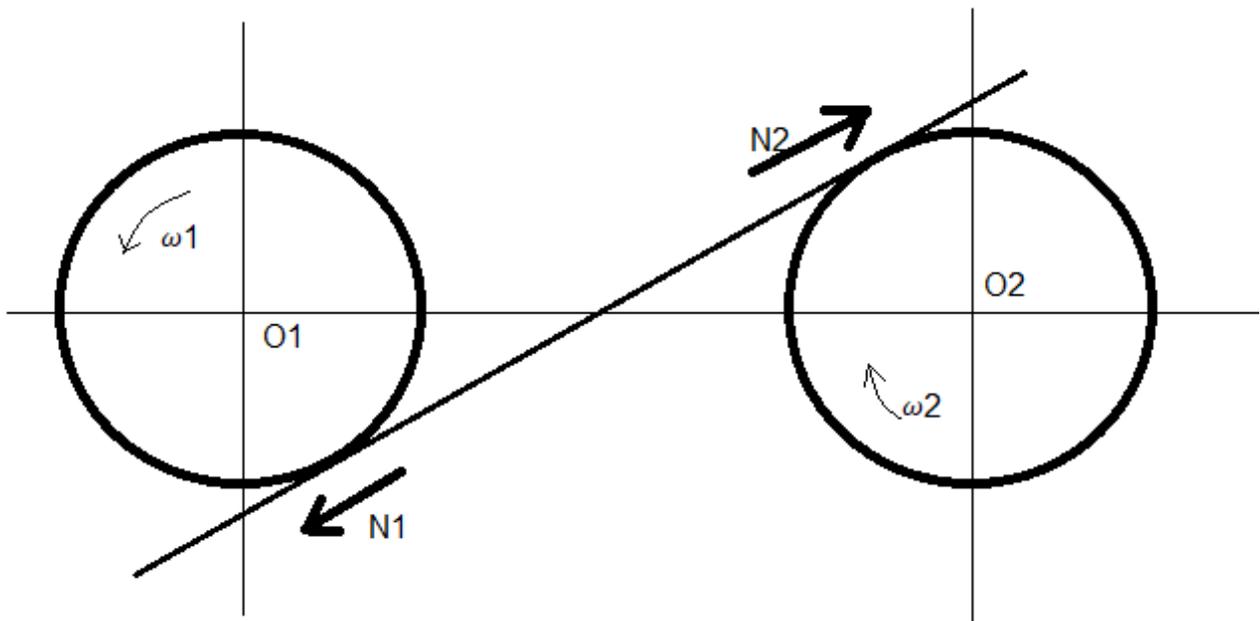


Figura 35: Forze che si scambiano due ruote dentate che ingranano

Per tracciare la risposta in frequenza ed analizzare il comportamento dinamico è opportuno riferirsi al moto relativo delle due ruote (esattamente in analogia a quanto fatto con le due masse). Si può osservare che uno spostamento  $\delta_1$  maggiore di zero porta nella condizione di contatto tra i corpi, mentre un  $\delta_2$  maggiore di zero li fa allontanare.

Nel seguito, in modo da studiare il moto relativo, si considererà  $\Delta = \delta_1 - \delta_2$ .

Gli spostamenti  $\delta_1$  e  $\delta_2$  nascono per la presenza di perturbazioni  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  che rispettivamente si sovrappongono alle velocità di rotazione delle ruote  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Per poterli confrontare tra loro è necessario portarli in uno stesso sistema di riferimento che ora viene individuato dal segmento dei contatti AE. Le oscillazioni delle singole ruote  $\delta_i$  sono dovute ai tre gradi di libertà (rotazione e spostamenti in direzione x ed y).

Secondo i sistemi di riferimento sopra riportati, per la ruota 1 si hanno i seguenti spostamenti, i quali andranno a generare rispettivamente una forza  $N_1$  che la ruota 1 esercita sulla seconda.

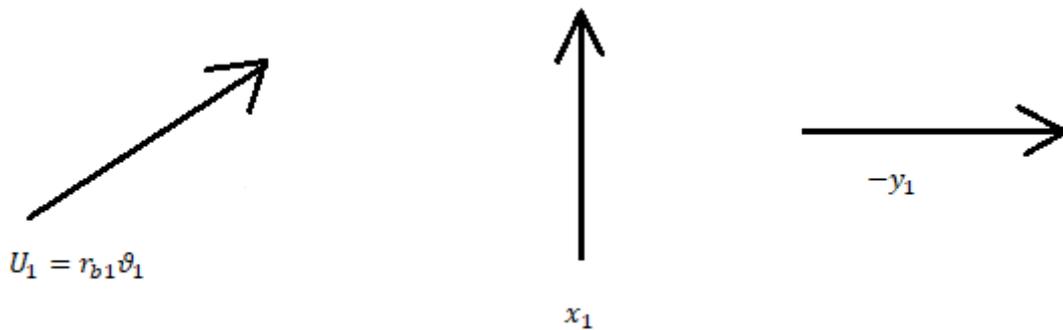


Figura 36: Spostamenti della ruota 1 nelle tre direzioni a seguito della perturbazione

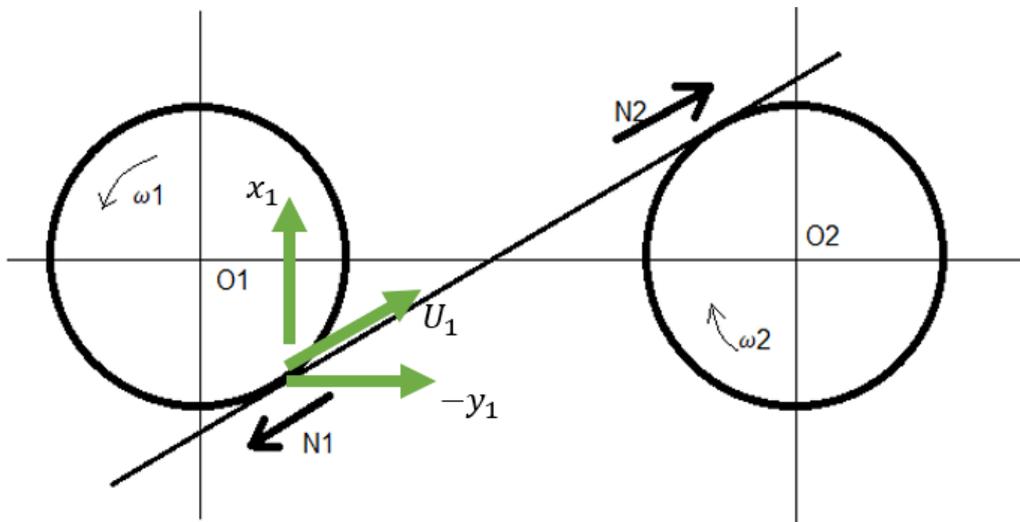


Figura 37: Rappresentazione delle componenti di spostamento della ruota 1

In maniera del tutto analoga vengono sotto riportati gli spostamenti della ruota 2 generati dalla perturbazione  $\vartheta_2$ . In conseguenza a questi nasce una forza  $N_2$  che potrà essere scomposta secondo gli assi x, y e quello individuato dal segmento dei contatti. Tale forza, per il principio di azione e reazione sarà uguale e opposta a  $N_1$  esattamente come riportato in Figura 35.

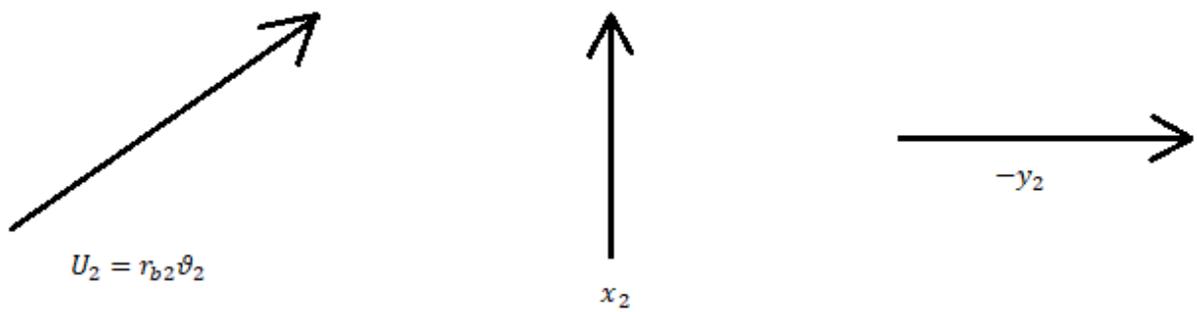


Figura 38: Spostamenti della ruota 2 nelle tre direzioni a seguito della perturbazione

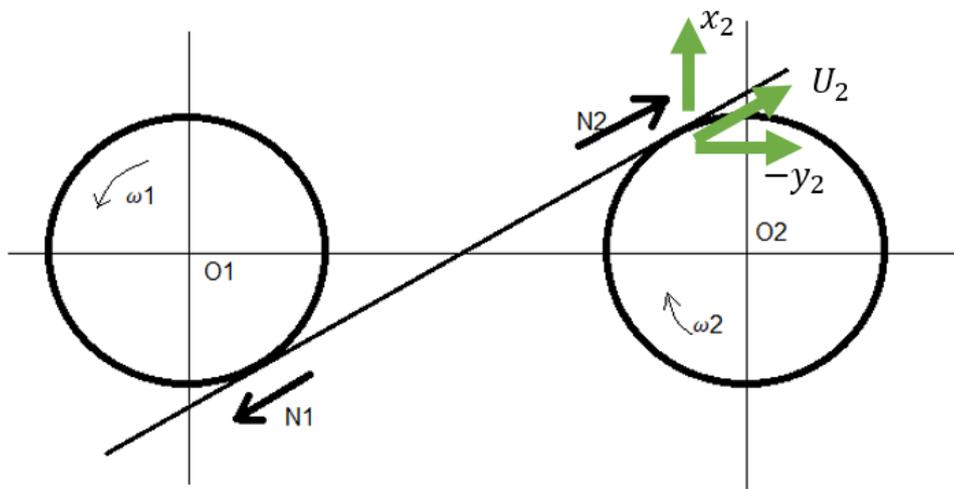


Figura 39: Rappresentazione delle componenti di spostamento della ruota 2

A questo punto si portano tutti questi spostamenti lungo la stessa direzione (quella di AE) e si può definire lo spostamento  $\Delta$  che rappresenta il moto relativo e che permette di valutare il contatto.

$$\Delta = U_1 - U_2 + (x_1 - x_2)\cos\alpha - (y_1 - y_2)\sin\alpha$$

I gradi di libertà per ruota sono 3, di conseguenza si avranno 6 equazioni di equilibrio e la dinamica del sistema viene determinata risolvendo queste con il metodo del bilanciamento armonico. Come detto, in questa sezione, si considera la presenza di una forzante esterna che dunque potrà avere 6 componenti, di conseguenza si avranno anche 6 componenti di forza non lineare dovuta al contatto.

Nel prosieguo le componenti nelle prime tre posizioni rappresentano quelle che intervengono nelle equazioni di equilibrio alla traslazione lungo x, lungo y e poi alla rotazione della ruota 1. Le ultime tre sono l'analogo, ma per la ruota 2. Poiché nelle equazioni di equilibrio alla rotazione intervengono delle coppie, è opportuno moltiplicare la componente in posizione 3 e 6 del vettore delle forze di contatto per il raggio relativo alla ruota considerata.

$$F_{nl} = \begin{Bmatrix} -N_1 \cos\alpha \\ N_1 \sin\alpha \\ -N_1 r_{b1} \\ N_2 \cos\alpha \\ -N_2 \sin\alpha \\ N_2 r_{b2} \end{Bmatrix}$$

Dove  $N_1 = N_2 = N$  per il principio di azione e reazione.

Per poter implementare il metodo del bilanciamento armonico è necessario definire un modello di contatto che, a seguito di un valore dello spostamento, fornisca la forza di contatto. Lo spostamento da considerare è quello relativo  $\Delta$ . Dal momento che non è interessante dal punto di vista ingegneristico studiare il comportamento al variare del gap, questo viene posto pari a zero; infatti, inizialmente le ruote vengono poste in contatto in modo che esse siano in grado di ingranare, poi, a seguito delle oscillazioni, potrebbero perdere tale contatto e questo è di grande interesse per la nascita di vibrazioni, rumore e problemi di fatica per le ruote.

$$F_c = \max(k_c * v, 0)$$

Dove  $v$  viene definito a partire dallo spostamento relativo  $\Delta$ . Quest'ultimo è nel dominio delle frequenze, attraverso la IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*) viene portato nel dominio del tempo dove viene definita la forza non lineare di contatto secondo la formula scritta sopra per la quale è bene ricordare che la rigidità di contatto lavora solo a compressione, mentre si annulla a trazione. Successivamente si applica una FFT (*Fast Fourier Transform*) e si porta la forza di contatto nel dominio delle frequenze dove si vanno a risolvere le equazioni di equilibrio attraverso il metodo del bilanciamento armonico in maniera numerica con l'ausilio di metodi di continuazione.

$$\bar{x}^{(n)} \xrightarrow{IFFT} x(t) \rightarrow F_{NL}(t) = f(x(t)) \xrightarrow{FFT} \bar{F}_{NL}^{(n)}$$

Per poter studiare la risposta in frequenza occorre ancora definire la matrice di rigidità nel caso in cui i corpi siano in contatto. Infatti, se i corpi sono separati,  $k_c$  è pari a zero e la matrice di rigidità si riduce a:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{y1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{u1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{u2} \end{bmatrix}$$

Quando i corpi vanno in contatto  $k_c$  assume valore diverso da zero dato che lavora a compressione. Nasce quindi una matrice di rigidità ulteriore da sommare alla  $[K]$  definita sopra.

$F_{nl}$  può essere vista come prodotto tra un vettore colonna di coefficienti  $[T_1]$  che moltiplica  $F_c$  trovato secondo il modello di contatto descritto in precedenza.

$$[T_1] = \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \\ -r_{b1} \\ \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ r_{b2} \end{bmatrix}$$

Lo spostamento relativo  $\Delta$  può invece essere espresso dal prodotto di un vettore riga  $[T_2]$  con un vettore colonna  $[\delta]$ .

$$[T_2][\delta] = [\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad r_{b1} \quad -\cos\alpha \quad \sin\alpha \quad -r_{b2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vartheta_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$$

Dunque, modificando la relazione che esprime la forza di contatto, si può trovare la matrice aggiuntiva da utilizzare nel caso in cui le ruote siano in contatto. Il segno meno nell'equazione che definisce  $F_c$  è dovuto al fatto che la forza è di compressione.

$$F_c = -k_c \Delta$$

$$[T_1]F_c = -[T_1]k_c \Delta = -[T_1]k_c [T_2][\delta]$$

In questo modo si è trovata la matrice 6x6  $[K_c]$  da sommare a  $[K]$ . Nel caso in cui i corpi non siano in contatto ci si limita a risolvere l'auto-problema relativo all'equazione che presenta solo la matrice  $[K]$ ; se, invece, le ruote si trovano in contatto l'auto-problema che si risolve è relativo all'equazione che ha come matrice di rigidità:

$$[K_c] = -[T_1]k_c [T_2]$$

$$[K_{contact}] = [K] + [K_c]$$

## 6.2 Risposta forzata e analisi dei risultati

Di seguito vengono riportati gli andamenti della risposta in frequenza relativi a due ruote dentate che ingranano che hanno i seguenti dati geometrici, questi sono stati presi in riferimento a tipici valori presenti in letteratura [5] con lo scopo di verificare la bontà del codice sviluppato.

Grandezza	Valore
$\alpha$ [°]	24.6
$I_1$ [Kg m <sup>2</sup> ]	0.39
$m_1$ [Kg]	0.4
$r_{b1}$ [m]	0.0774
$k_{x1}$ [N/m]	$1 \cdot 10^8$
$k_{y1}$ [N/m]	$1 \cdot 10^8$
$k_{u1}$ [N]	$1 \cdot 10^9$
$I_2$ [Kg m <sup>2</sup> ]	0.61
$m_2$ [Kg]	0.66
$r_{b2}$ [m]	0.1003
$k_{x2}$ [N/m]	$1 \cdot 10^8$
$k_{y2}$ [N/m]	$1 \cdot 10^8$
$k_{u2}$ [N]	$1 \cdot 10^9$
$k_c$ [N/m]	$5 \cdot 10^2$

Per lo smorzamento si fa nuovamente riferimento all'ipotesi di Rayleigh e lo si considera proporzionale rispetto alle matrici di massa e di rigidità.

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k]$$

Dove ora  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1 \cdot 10^{-6}$ .

Poiché, come già indicato, ora non è utile considerare un gap iniziale, si vanno a riportare gli andamenti della risposta in frequenza al variare della componente statica della forzante e poi di quella armonica. I risultati ottenuti confermano quanto ci si aspetta in riferimento ai risultati ottenuti in precedenza con lo studio dei vari casi precedentemente descritti.

Per quanto riguarda la componente statica, si pongono diversi da zero solo i termini che intervengono nelle equazioni di equilibrio alla rotazione, quindi la coppia che agisce sulla ruota 1 (questa si troverà in posizione 3 del vettore della forza  $F_0$ ) e la coppia sulla ruota 2 che, per la conservazione della potenza, sarà uguale a quella del primo corpo, ma scalata secondo il rapporto dei raggi di base. Una coppia  $C_1$  positiva tende ad avvicinare i corpi (secondo il riferimento di Figura 35), quindi ci si aspetta che un suo valore molto elevato faccia rimanere le ruote sempre in contatto; un suo valore non molto alto porterà invece ad avere una transizione ad un *intermittent contact*.

Solo a titolo di conferma dei risultati ottenuti, anche se ingegneristicamente di poco interesse, si va a riportare anche la risposta nel caso in cui si fornisca una coppia negativa in un caso con valore assoluto elevato e nell'altro più basso; in quest'ultimo è ragionevole aspettarsi una transizione.

Dunque, nei seguenti quattro andamenti si andrà a variare la coppia statica applicata (assumerà un generico valore  $C_i$ ), mentre si manterranno costanti le componenti armoniche, per le quali si considerano ora non nulle le componenti di rotazione e di traslazione lungo la direzione x.

$$F_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_i \\ 0 \\ 0 \\ -F_i \cdot \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \end{Bmatrix} \quad e \quad F = \begin{Bmatrix} 1 \cdot 10^4 \\ 0 \\ 1 \cdot 10^4 \\ 1 \cdot 10^4 \\ 0 \\ 1 \cdot 10^4 \end{Bmatrix}$$

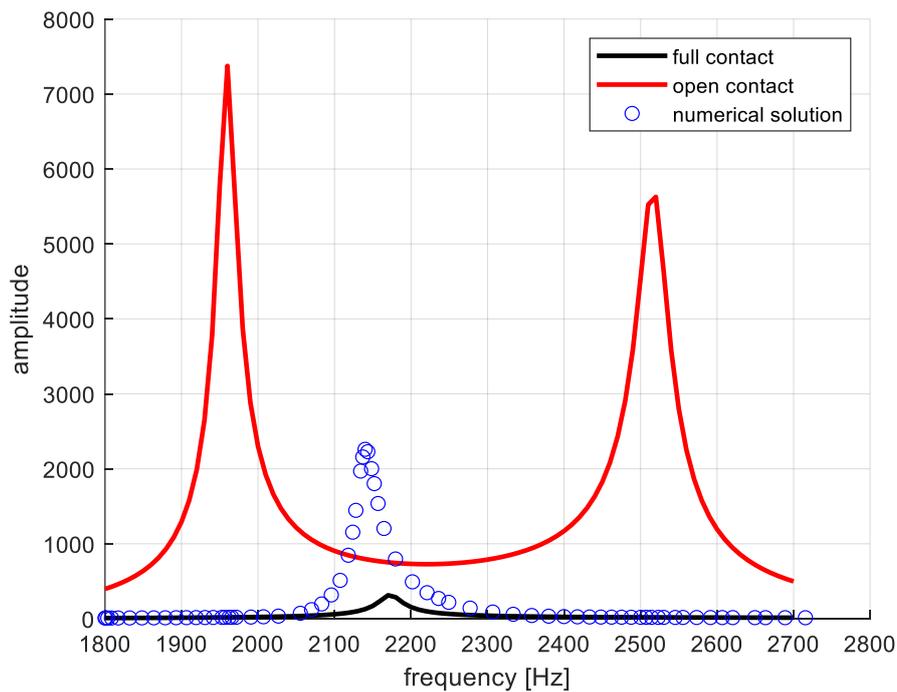


Figura 40: Risposta in frequenza ottenuta imponendo  $F_i=1e5$

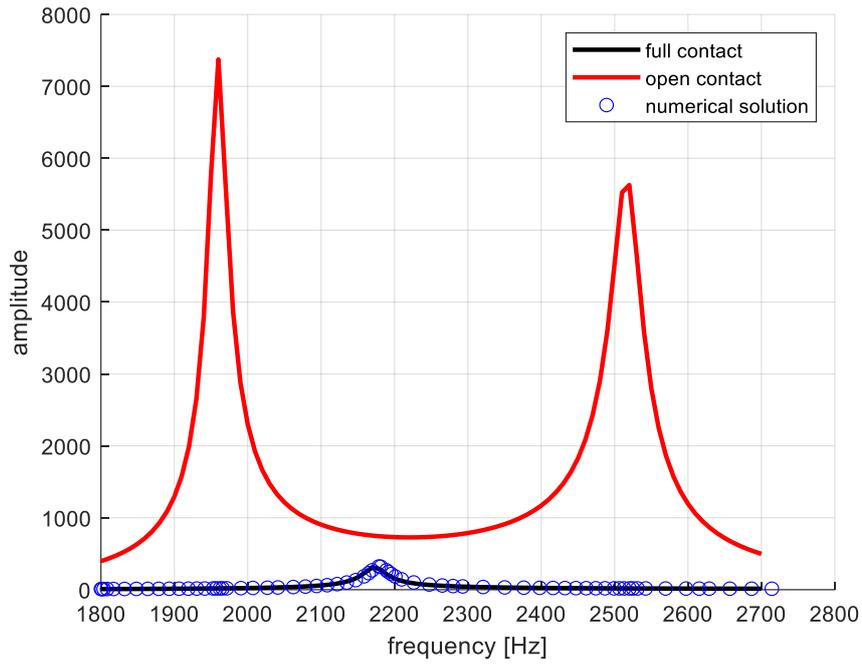


Figura 41: Risposta in frequenza ottenuta imponendo  $F_i=1e7$

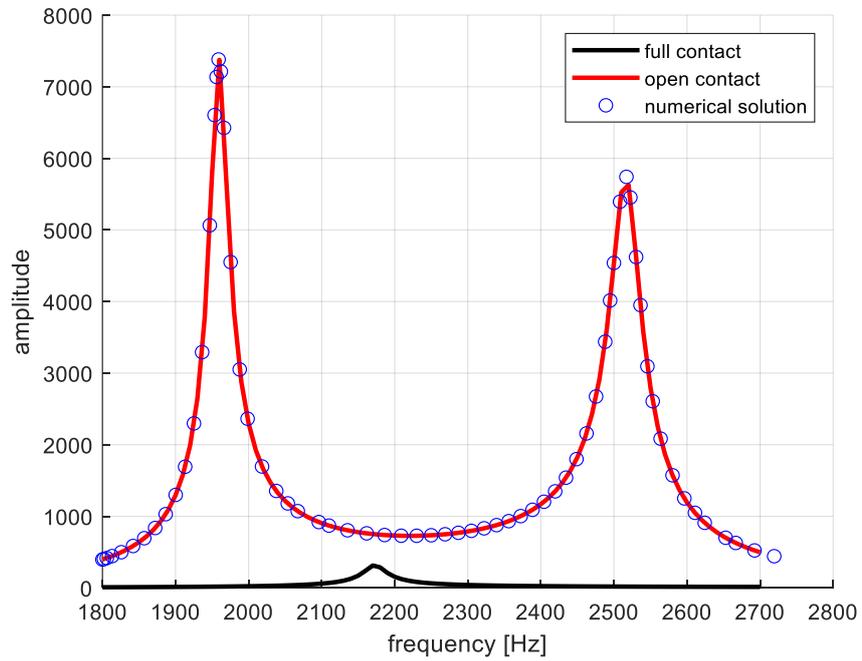


Figura 42: Risposta in frequenza ottenuta imponendo  $F_i=-1e8$

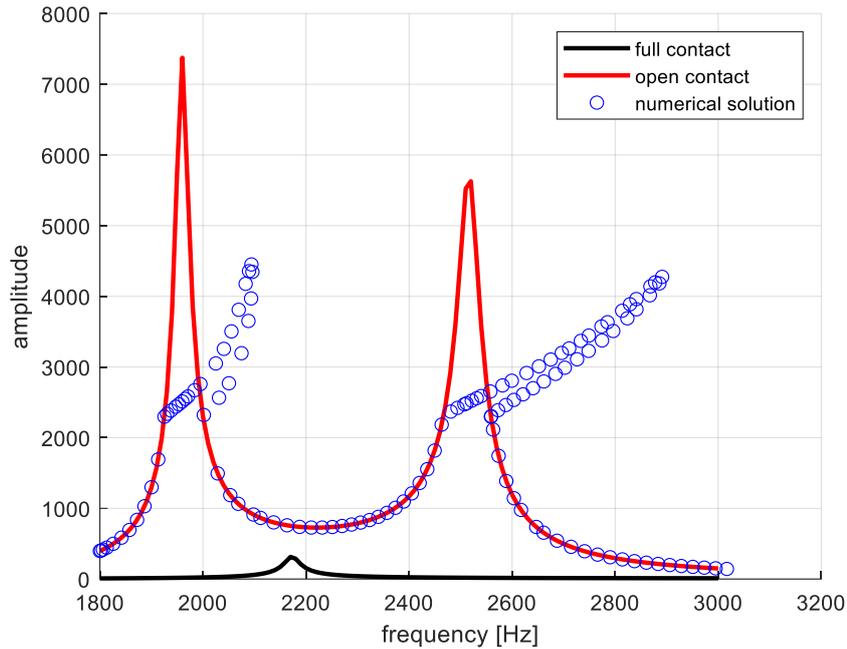


Figura 43: Risposta in frequenza ottenuta imponendo  $F_i = -1e6$

A questo punto è interessante osservare l'influenza della componente armonica della forzante; ci si aspetta di trovare, in accordo ai sistemi già studiati, che una componente più elevata porterà le ruote ad avere una maggior tendenza a passare dalla condizione iniziale ad una diversa per le oscillazioni provocate, appunto, da tali componenti armoniche.

Nei diagrammi riportati in seguito si impongono  $F_i = 1 \cdot 10^7$  e  $F_i = -1 \cdot 10^8$ , che sono i casi di *full contact* ed *open contact*, come osservato sopra. Si va a valutare se un aumento delle componenti armoniche della forzante porti le ruote ad avere una transizione verso un contatto aperto nel primo caso e verso un contatto chiuso nel secondo.

$$F = \begin{Bmatrix} 1 \cdot 10^6 \\ 0 \\ 1 \cdot 10^6 \\ 1 \cdot 10^6 \\ 0 \\ 1 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

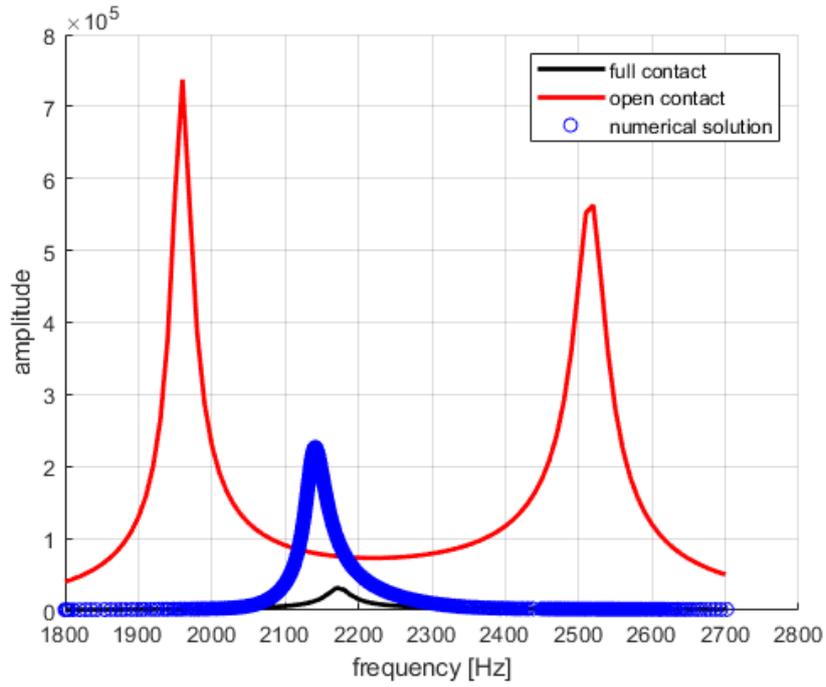


Figura 44: Risposta in frequenza ottenuta imponendo  $F_i=1e7$

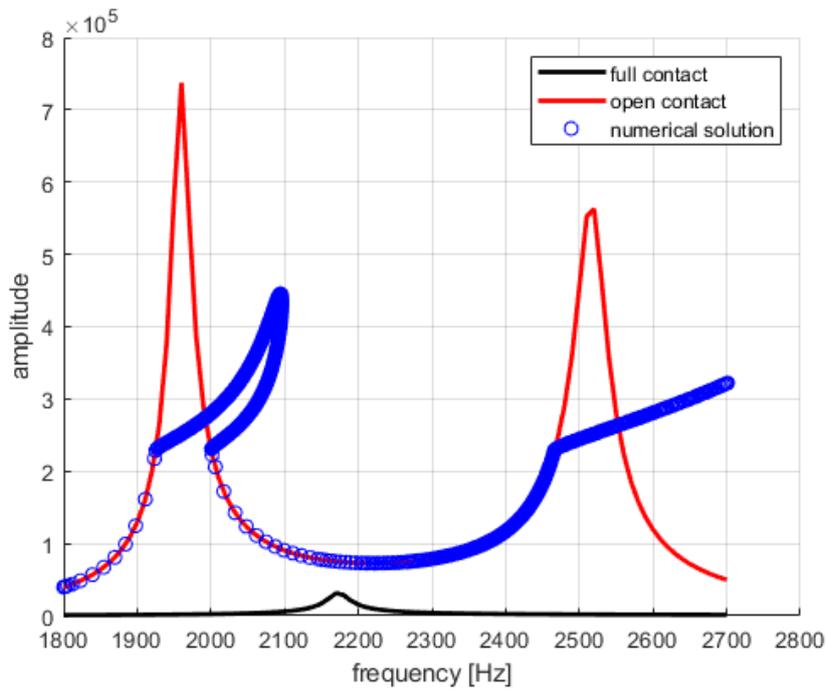


Figura 45: Risposta in frequenza ottenuta imponendo  $F_i=-1e8$

## 7 Static Transmission Error

Dopo aver studiato il comportamento dinamico del sistema di due ruote dentate che ingranano sottoposte ad una forzante esterna che presenta sia componenti statiche che armoniche, è interessante valutare il caso in cui la forzante armonica esterna sia nulla, corrispondente al caso di una applicazione della coppia costante nel tempo tipica degli ingranaggi.

In questo caso la dinamica del sistema non va ad annullarsi, ma rimane a causa di un termine eccitante proveniente dall'interno a causa di una variazione periodica della rigidità dovuta al fatto che il numero di coppie di denti in contatto è variabile ed è funzione del rapporto di condotta, il quale indica quante coppie risultano mediamente in contatto. Infatti, lungo il segmento AE, individuato in figura 32, ci si aspetta di ritrovare ad esempio un'unica coppia di denti in contatto quando questo avviene in prossimità del punto C (punto di tangenza tra le due circonferenze primitive), mentre, quando una coppia si trova in contatto nelle vicinanze del punto A, è presumibile che un'altra coppia lo sia in prossimità del punto E.

Tale variabilità induce, appunto, che si instauri una diversa rigidità del sistema a seconda delle condizioni; in questo modo nasce una forzante interna al sistema che va a comportare una certa dinamica. Per simularla occorre inserire un termine periodico all'interno del  $\Delta$  definito come lo spostamento relativo delle due ruote.

Questo contributo esterno (che rappresenta appunto lo *Static Transmission Error*) è dovuto principalmente alla presenza di due effetti:

- La deformazione elastica che inevitabilmente si genera quando i denti vanno in contatto, la quale viene valutata in modo statico attraverso un'analisi FEM.
- Il contributo di deformazione dovuto alla teoria hertziana del contatto, secondo la quale, per via dell'impossibilità della compenetrazione tra i corpi, i due profili in contatto tendono ad adagiarsi uno sull'altro provocando in questo modo un ulteriore contributo di deformazione.

$$\delta_{STE} = \delta_{elastico} + \delta_{hertziano}$$

Una volta che si giunge al calcolo del valore complessivo dello *Static Transmission Error*, per il legame tra lo spostamento e la rigidità, la deformazione che viene calcolata è indicativa della rigidità variabile del sistema. Per poter poi inserire i dati relativi allo STE nel codice in grado di valutare il comportamento dinamico, è necessario passare nel dominio delle frequenze e quindi applicare una *Fast Fourier Transform* al termine statico ottenuto.

## 7.1 Modellazione del singolo dente

Il singolo dente viene modellato come una trave incastrata, in prima approssimazione si ipotizza di avere ruote uguali con dentature uguali per cui le travi relative a ruote diverse risultano identiche. Ognuna di queste travi viene suddivisa in dieci elementi di pari lunghezza.

Lungo il segmento dei contatti AE, nel caso in cui vi sia una sola coppia di denti in contatto, la rigidezza complessiva del sistema è minore perché relativa solo a due travi, mentre, se le coppie risultano due, la rigidezza aumenta e, a parità di forza, lo spostamento del dente si riduce. Ciò che interessa calcolare per conoscere lo *Static Transmission Error* è lo spostamento dell'incastro superiore, il quale va proprio a simulare un movimento della ruota che porta i corpi, non infinitamente rigidi, a trovarsi in una posizione diversa rispetto al caso in cui lo fossero.

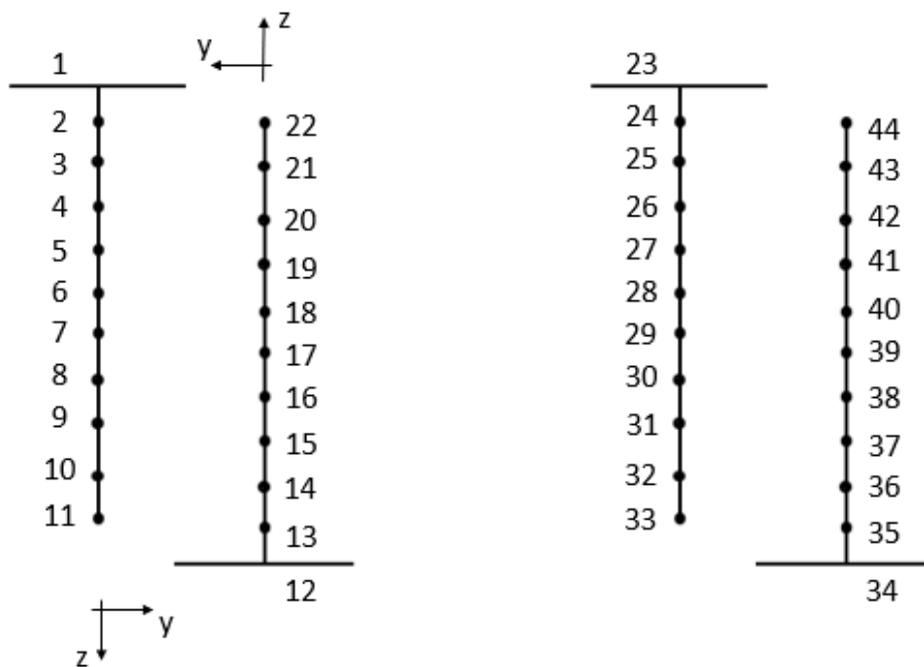


Figura 46: Modellazione dei denti delle ruote dentate che ingranano

Immaginando di percorrere il segmento dei contatti AE (facendo riferimento alla figura 32):

- In prossimità del punto A si può pensare che una prima coppia di denti sia in contatto nei nodi 2 e 22; mentre una seconda, in posizione intermedia tra C ed E, in contatto nei nodi 30 e 38.
- Proseguendo lungo AE, vanno in contatto 3-21 e per l'altra coppia di denti 31-37; successivamente 4-20 e 32-36; ed infine 5-19 e 33-25.
- Nell'intorno del punto C la coppia di denti interessata è una sola, di conseguenza vanno in contatto 6-18 in un primo momento e poi 7-17.
- Superato il punto C si ripete quanto descritto, si osserva bene come la dinamica che si instaura sarà di natura periodica.

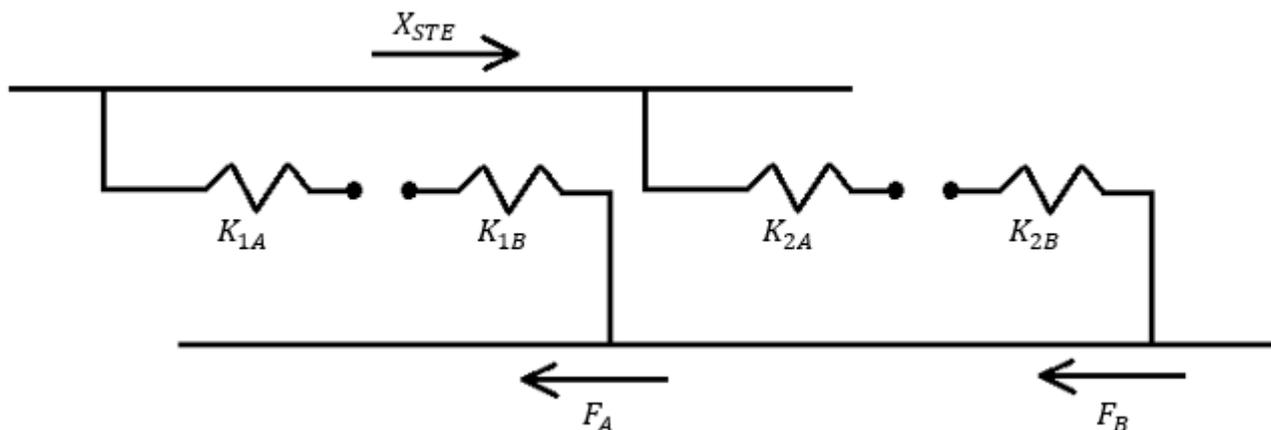


Figura 47: Denti schematizzati come rigidezze, a seconda delle coppie in contatto la rigidezza complessiva varia

Nel caso in cui il contatto sia uno solo entrano in gioco solo due delle quattro possibili travi, si può ipotizzare di vincolare con incastri entrambe le travi (dunque si bloccano sia la traslazione lungo la direzione  $y$ , sia la rotazione rispetto all'asse  $x$ ); si applica la forza che i denti si scambiano ai nodi interessati e di conseguenza viene ottenuto lo spostamento di tali nodi. Lo *Static Transmission Error* può essere visto come la somma di questi spostamenti.

Quando, invece, sono due le coppie in contatto è necessario conoscere la ripartizione della forza.

In questo caso si vincolano solo più alla rotazione i nodi 1 e 23, mentre rimangono incastri per i nodi 12 e 34; si impone un  $X_{STE}$  di tentativo e si valutano le reazioni vincolari  $F_A$  e  $F_B$  che nascono, quando la loro somma è pari alla forza che le ruote si vanno a scambiare, allora significa che è stato trovato l'effettivo valore dello *Static Transmission Error* per tale situazione.

A questo proposito si può procedere in due modi: il primo è quello di considerare denti a spessore costante (come si farà nella sezione 7.3); quando questi vanno in contatto le rigidezze sono in serie e si hanno delle rigidezze risultanti pari a

$$\frac{1}{k_i} = \frac{1}{k_{iA}} + \frac{1}{k_{iB}}$$

$$F_i = k_i \cdot X_{STE}$$

Si può capire che, se i denti presentano spessore costante, indipendentemente dai nodi che vanno in contatto, le rigidezze risultanti saranno sempre uguali e quindi le reazioni vincolari risulteranno tali da sopportare ognuna metà della forza complessiva. In maniera analoga, se lo spessore dei denti viene considerato variabile (sezione 7.4), ci si aspetterà di trovare forze risultanti diverse a seconda di quelli che saranno i nodi in contatto.

## 7.2 Metodologia FEM di risoluzione del problema

Per quanto osservato, risulta necessario sviluppare un codice agli elementi finiti in grado di fornire gli spostamenti dei nodi in funzione della forza a cui sono sottoposti e della rigidità delle travi con cui vengono modellati i denti delle ruote.

Secondo la metodologia FEM, si costruiscono sistemi 4x4 per ognuno degli elementi in cui vengono suddivise le travi, dove i quattro gradi di libertà sono rappresentati dalle due traslazioni in direzione y e dalle due rotazioni in direzione x. Il sistema corrispondente è il classico relativo ad una trave; la matrice di rigidità del singolo elemento risulta dunque:

$$[K^{(e)}] = \left(\frac{EJ_y}{L^3}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 12 & 6L^{(e)} & -12 & 6L^{(e)} \\ 6L^{(e)} & 4L^{(e)2} & -6L^{(e)} & 2L^{(e)2} \\ -12 & -6L^{(e)} & 12 & -6L^{(e)} \\ 6L^{(e)} & 2L^{(e)2} & -6L^{(e)} & 4L^{(e)2} \end{bmatrix}$$

Procedendo in questo modo per ognuno degli elementi si va poi ad assemblare la matrice di rigidità complessiva che, in questo caso, sarà simmetrica 88x88 perché tale è il numero di gradi di libertà del sistema completo.

$$[K]\{Q\} = \{F\} + \{R\}$$

Dove  $\{Q\}$  è il vettore degli spostamenti che presenta, in posizione dispari, le traslazioni in direzione y, mentre in posizione pari le rotazioni rispetto all'asse x.  $\{F\}$  rappresenta il vettore delle forzanti esterne, mentre  $\{R\}$  quello delle reazioni vincolari, quest'ultimo sarà dunque non nullo in corrispondenza dei nodi vincolati.

Dopo aver ottenuto il sistema completo, si procede al partizionamento delle matrici e dei vettori, con il pedice F si indicheranno i gradi di libertà liberi, mentre con il pedice V quelli vincolati.

$$\begin{bmatrix} K_{VV} & K_{VF} \\ K_{FV} & K_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_V \\ Q_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_V \\ F_F \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_V \\ R_F \end{Bmatrix}$$

Gli spostamenti dei gradi di libertà vincolati saranno nulli; analogamente le reazioni vincolari dei gradi di libertà liberi saranno pari a zero, come già indicato in precedenza. Dunque, si arriva alla risoluzione delle seguenti equazioni.

- Per trovare gli spostamenti dei nodi liberi di muoversi.

$$[K_{FF}]\{Q_F\} = \{F_F\}$$

$$\{Q_F\} = [K_{FF}]^{-1}\{F_F\}$$

- Per trovare le reazioni vincolari.

$$[K_{VF}]\{Q_F\} - \{F_V\} = \{R_V\}$$

Nel caso in cui si abbia un'unica coppia di denti in contatto, i gradi di libertà vincolati e impossibilitati di muoversi sono 8; la forzante presenta in corrispondenza delle equazioni di equilibrio alla traslazione lungo y il valore che i due denti si scambiano. Questa forza va a causare una deformazione elastica delle travi che viene valutata nel modo sopra descritto.

Nel caso in cui le coppie di denti in contatto sono due, si impone uno spostamento  $X_{STE}$  di tentativo che sarà uguale per le due travi dal momento che partono dalla stessa ruota e che lo *Static Transmission Error* è uno solo, dunque i gradi di libertà vincolati diventano solo più 6. Le equazioni 1 (traslazione in direzione y del nodo 1) e 45 (traslazione in direzione y del nodo 23) possono essere eliminate dal sistema, ed anche le relative colonne che passano a secondo membro e vanno a rappresentare il termine forzante che dunque risulta essere:

$$\{F\} = N \cdot V = [K(:,1) \quad K(:,45)] \begin{bmatrix} X_{STE}(1) \\ X_{STE}(45) \end{bmatrix}$$

Togliendo le due equazioni il sistema si riduce ad un 86x86. Per risolverlo si introduce la matrice *Booleana* che va ad accoppiare i nodi che vanno in contatto, imponendo che questi abbiano uguale traslazione e rotazione (è proprio come se si avesse una fusione dei due nodi). Di conseguenza, a seguito di questa fusione, si vengono a perdere altre 4 equazioni, ovvero quelle relative alla traslazione ed alla rotazione dei nodi delle travi che hanno incastro in basso.

La matrice *Booleana* farà passare così il sistema da uno di 86 equazioni ad uno di 82. Per semplicità si può vedere un esempio.

Si considerino in contatto i nodi 2-22 e 30-38. La prima riga e la prima colonna rappresentano entrambe il grado di libertà 2 (dato che l'equazione relativa ad 1 viene tolta, come detto prima), per cui si inserisce un 1 in posizione (1, 1) e poi tutti altri zeri. In maniera analoga la seconda riga e la seconda colonna rappresentano il grado di libertà 3 (traslazione del nodo 2). Si procede in questo modo, con 1 in posizione (i, i) sino alla riga 41 (che rappresenta il grado di libertà 42, ovvero la rotazione del nodo 21). Il nodo 22 deve "fondersi" con il nodo 2, dunque la riga 42 dovrà presentare uno 0 in posizione (42, 42) poiché la colonna 42 rappresenterà la traslazione del nodo 23 (grado di libertà 46) perché il nodo 22 viene eliminato dal sistema; mentre in posizione (42, 2) si pone un -1 poiché le traslazioni dei nodi 2 e 22 devono essere uguali, il segno è dato dalla convenzione sul sistema di riferimento. Dovendo eguagliare anche la rotazione si pone uno 0 in posizione (43, 43) ed un 1 in (43, 3).

Dalla riga 44 si passa alle altre due travi (44 rappresenta il grado di libertà 46 perché, come detto, anche 45 è stato tolto). Dunque, si procede inserendo un 1 in posizione (44:72, 42:70). Alla riga 73 (traslazione del nodo 38) si pone 0 in (73, 71) e un -1 in posizione (73, 55) dove 55 rappresenta la traslazione del nodo 30. Alla riga 74 si pone un 1 in (74, 56). Infine, si conclude inserendo 1 in posizione (75:86, 71:82). Si vede come, attraverso tale procedura, è possibile ridurre il sistema da risolvere.

Nel momento in cui si ottiene la soluzione,  $\{Q\}$  avrà solo 82 termini, dunque andranno aggiunti in posizione 1 lo spostamento imposto  $X_{STE}$ , in posizione 43 va imposto uno spostamento pari a quello in posizione 3 cambiato di segno, in posizione 44 uno spostamento pari a quello in posizione 4. Alla riga 45 si mette  $X_{STE}$ , mentre alle righe 75 e 76 si impongono gli spostamenti in 59 (cambiato di segno) e 60.

### 7.3 Valutazione del contributo di deformazione derivate dalla teoria del contatto hertziano

Oltre a tale deformazione elastica descritta nei paragrafi precedenti, si aggiunge un ulteriore termine legato alla deformazione che nasce a seguito del contatto che si genera, quest'ultimo termine viene valutato attraverso la teoria di Hertz sui contatti che schematizza il contatto tra denti come uno tra cilindri, per il quale lo spostamento che nasce è dato da una relazione semi-empirica.

$$\delta = 3.84 \cdot 10^{-5} \frac{F^{0.9}}{L^{0.8}}$$

Dove L indica la larghezza di fascia del dente, e chiaramente, qualora le due ruote presentassero valori diversi, va considerato il più piccolo dei due. Il valore di forza che deve essere utilizzato per il calcolo viene fornito come soluzione della metodologia agli elementi finiti che, come visto, nel caso in cui si abbia una sola coppia di denti in contatto permette di ottenere direttamente la soluzione in termini di spostamento e forza; nel caso, invece, in cui le coppie in contatto siano due si rende necessario risolvere secondo la procedura iterativa descritta al paragrafo precedente.

In entrambi i casi si ha la possibilità di ricavare il valore della forza agente nel punto di contatto tra i denti, tale valore viene inserito nella relazione semi-empirica indicata e permette di ottenere il contributo della teoria hertziana alla deformazione complessiva del dente.

### 7.4 Risultati e analisi considerando denti a spessore costante

Ora si vanno ad implementare in un codice le equazioni e le condizioni sopra descritte. Si considerano due ruote dentate identiche con i seguenti parametri geometrici [20].

Grandezza	Valore
$E [N/m^2]$	$207 \cdot 10^9$
$\nu$	0.3
$\alpha [^\circ]$	20
Numero di denti z	50
$r_b [m]$	0.0705
$r [m]$	0.075
$m [m]$	0.003
Addendum $h_a [m]$	0.003
Dedendum $h_d [m]$	0.00375
Larghezza di fascia L [m]	0.02

In un primo momento si va a verificare la veridicità del codice sviluppato, dunque si osserva il risultato e si confronta con le teorie esatte a disposizione in grado di fornire lo spostamento di travi vincolate soggette a forze e momenti. Solo dopo aver dimostrato che i risultati ottenuti siano accettabili si andrà a sommare il termine derivante dalla deformazione che nasce a seguito del contatto e che viene studiato con la teoria di Hertz.

Il primo risultato che si va a valutare è quello relativo al caso in cui solo una coppia di denti si trova in contatto, quindi ci si trova nei casi in cui, facendo riferimento alla Figura 46, sono in contatto i nodi 6-18 oppure 7-17. Le ruote saranno sottoposte ad una certa coppia, dalla quale, scalandola per il raggio primitivo, si ottiene la forza che vanno a scambiarsi; il valore trovato viene applicato sui nodi sopra indicati in corrispondenza dei gradi di libertà relativi alla traslazione in direzione y. Come si vede dal sistema di riferimento, sempre riportato in Figura 46, per entrambi i nodi la forza va applicata con segno negativo per poter simulare il contatto.

Prima di procedere con la metodologia agli elementi finiti descritta in precedenza, è necessario fornire il valore del momento d'inerzia  $J_y$  relativo all'elemento considerato. Dal momento che si sta modellando il dente con una trave la relazione è proprio quella relativa ad una trave.

$$J_y = \frac{bh^3}{12}$$

Dove b rappresenta la larghezza di fascia, mentre h lo spessore del dente, che, in questa prima analisi, viene considerato costante e pari a 6 mm; ovvero poco più del valore che si ha al diametro primitivo.

Il codice fornisce i seguenti risultati:

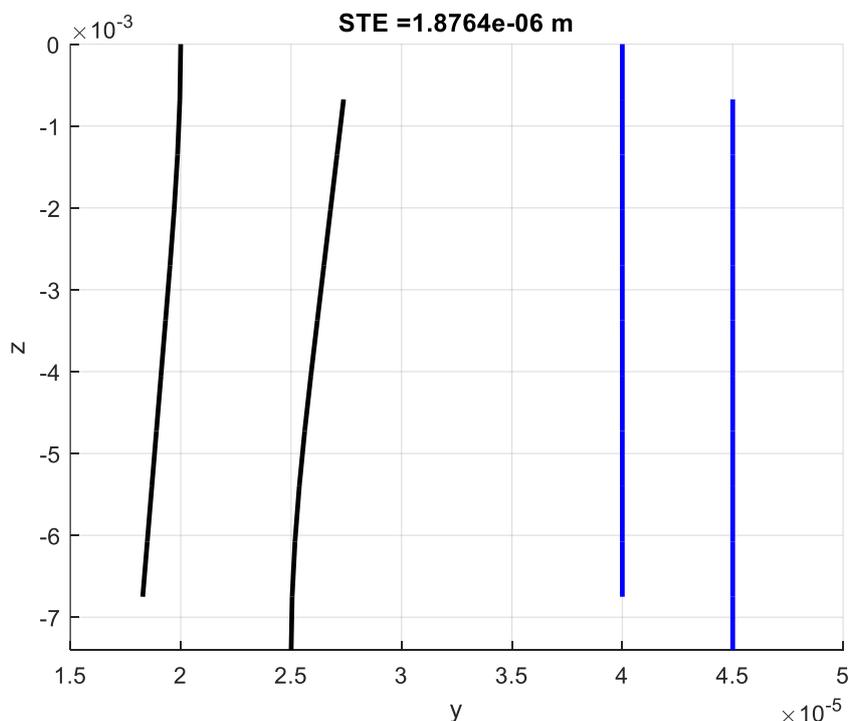


Figura 48: Spostamento ottenuto applicando la forza derivante da una coppia di  $T = 300 \text{ Nm}$  ai nodi 6-18

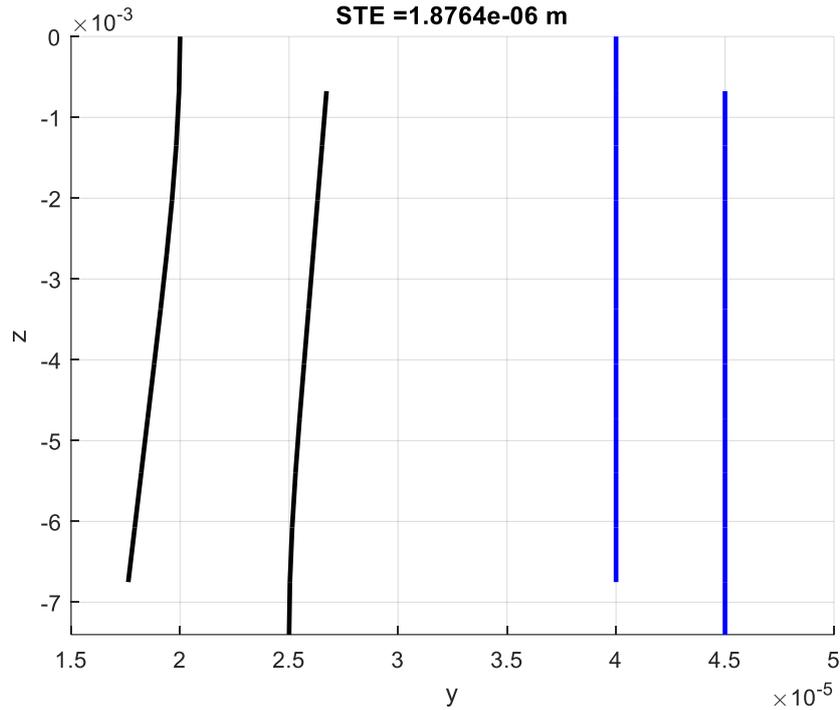


Figura 49: Spostamento ottenuto applicando la forza derivante da una coppia di  $T = 300 \text{ Nm}$  ai nodi 7-17

Per verificare il risultato ottenuto si considera l'equazione della freccia per una trave incastrata soggetta ad una forza applica nel generico punto  $a$  della trave.

$$y = \frac{-Fx^2}{6EI} (3a - x) \quad \text{con } x \leq a$$

$$y = \frac{-Fa^2}{6EI} (3x - a) \quad \text{con } x > a$$

Con la forza applicata al nodo 7 si ottiene che tale nodo presenta il seguente spostamento:

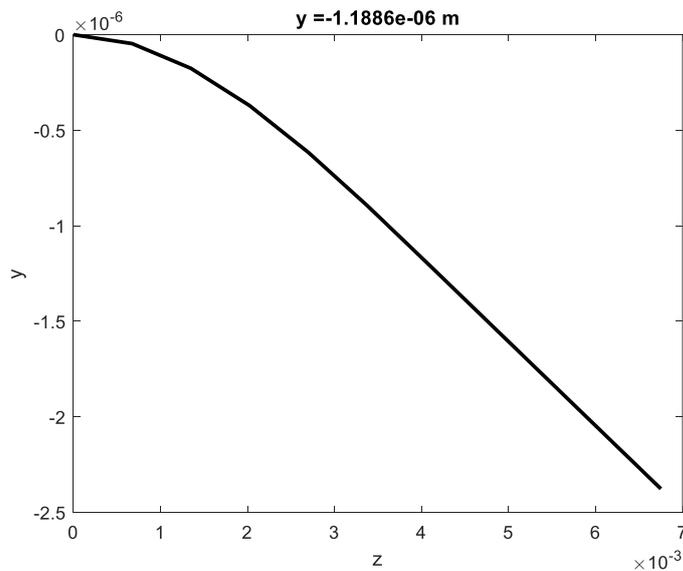


Figura 50: Freccia teorica a seguito dell'applicazione della forza nel nodo 7

Applicandola invece al nodo 6

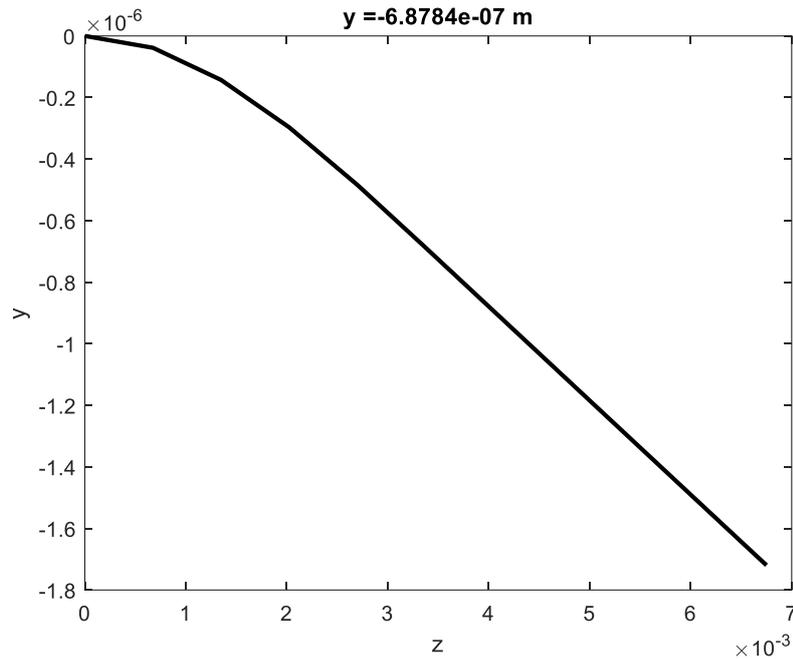


Figura 51: Freccia teorica a seguito dell'applicazione della forza nel nodo 6

Per i due casi in cui la coppia di denti in contatto è una sola lo *Static Transmission Error* deriva dalla somma dello spostamento del nodo 6 e 7 delle prime due travi (le quali rappresentano la prima coppia di denti). Nel caso contatto in 6-18 si guarda lo spostamento del nodo 6 per la prima trave e del nodo 7 per la seconda; nel caso 7-17 viceversa. In entrambi i casi si ottiene un valore  $X_{STE} = 1.8764 \mu\text{m}$ , ottenuto sia attraverso il codice implementato, sia dalla formula teorica esatta della linea elastica.

Quando le coppie di denti in contatto sono due, si procede alla risoluzione del sistema dopo averlo modificato per mezzo della matrice *Booleana*. Viene ottenuto il valore dello *Static Transmission Error* sfruttando il fatto che le relazioni che legano la forza con lo spostamento sono lineari e dunque,  $X_{STE}$  che viene considerato è quello per cui la somma delle reazioni vincolari dia, in valore assoluto, la forza che viene applicata alle ruote.

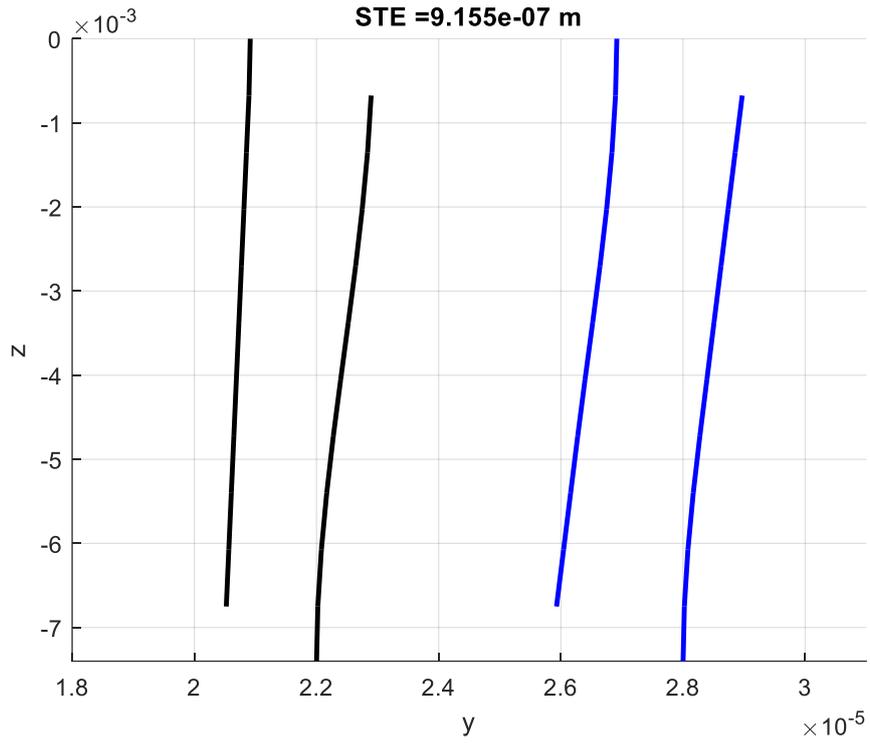


Figura 52: Spostamento ottenuto "fondendo" i nodi 2-22 e 30-38

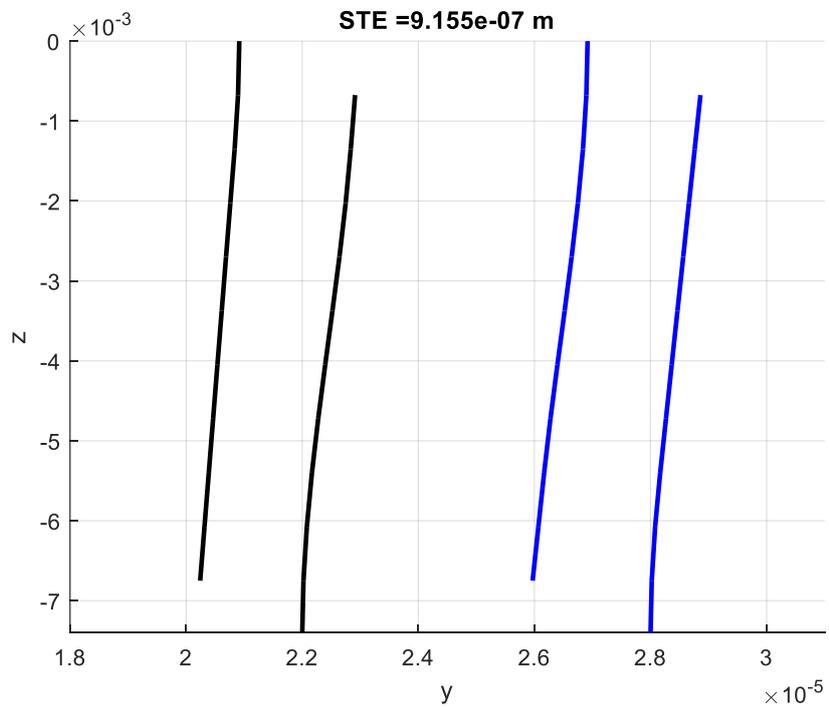


Figura 53: Spostamento ottenuto "fondendo" i nodi 3-21 e 31-37

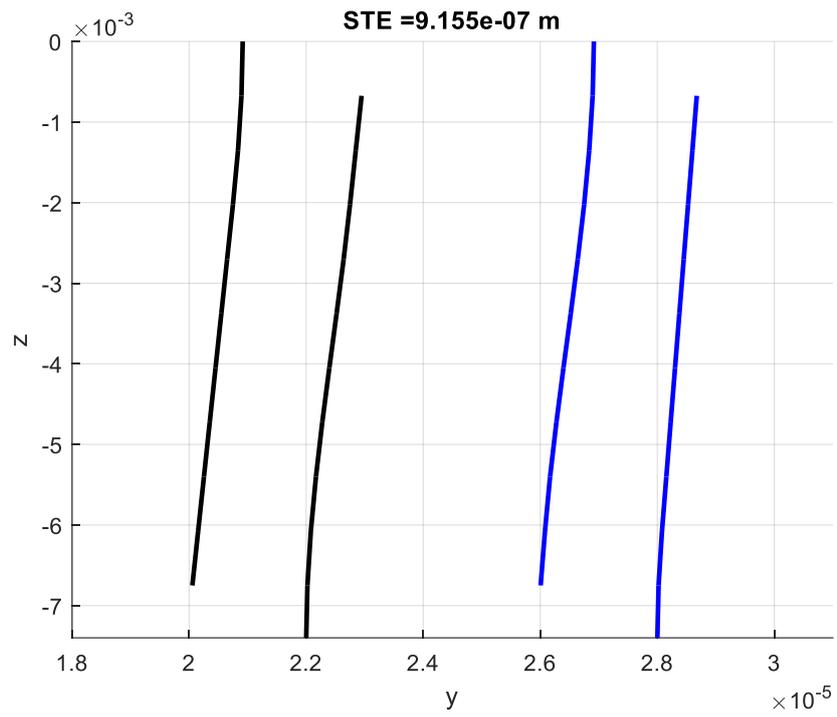


Figura 54: Spostamento ottenuto "fondendo" i nodi 4-20 e 32-36

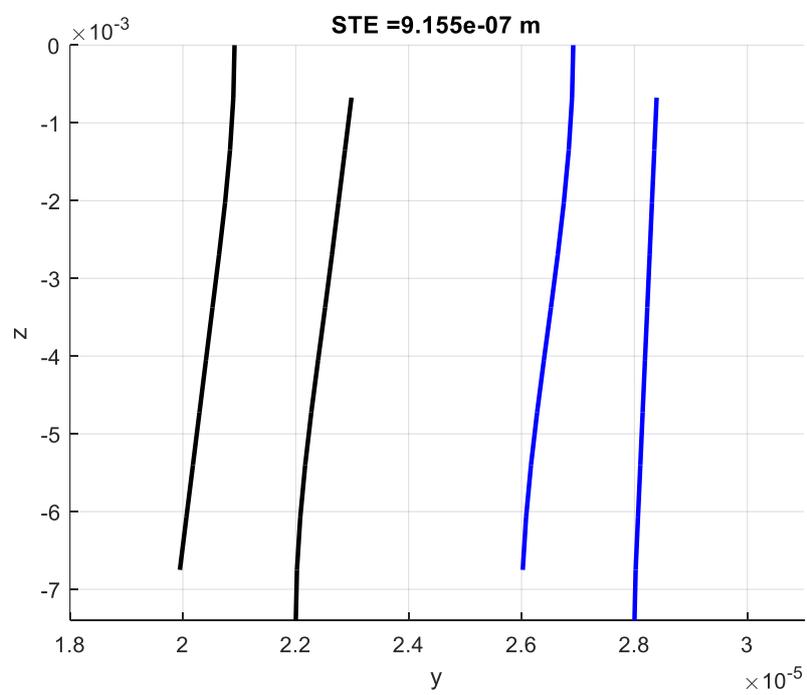


Figura 55: Spostamento ottenuto "fondendo" i nodi 5-19 e 33-35

Come ci si aspettava, avendo imposto uno spessore costante, lo spostamento è sempre uguale al variare dei nodi che vanno in contatto. In maniera analoga, come già discusso, si ritrova che le reazioni vincolari  $F_A$  e  $F_B$  sono effettivamente uguali perché lo sono le rigidità compressive del “dente fuso” che si viene ad ottenere a seguito della modellazione del contatto.

Ciò che a primo impatto potrebbe sembrare non corretto è la forma della deflessione che si viene ad avere, infatti è visibile un cambio di pendenza che va contro la teoria elastica della trave sottoposta ad una forza che genera una freccia parabolica. Tuttavia, tale andamento è corretto poiché nei nodi che vanno in contatto si ha anche la nascita di un momento di reazione, questo è anche confermato dal fatto che nelle reazioni vincolari si hanno anche delle coppie. L’andamento del momento lungo la trave è tale per cui assume il valore della reazione vincolare all’incastro, si annulla in mezzeria e ha un andamento lineare.

Il vettore delle risultanti che si ottiene è:

$$\{R_V\} = \begin{Bmatrix} -7.425 \text{ Nm} \\ -2000 \text{ N} \\ -7.425 \text{ Nm} \\ -7.425 \text{ Nm} \\ -2000 \text{ N} \\ -7.425 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Si osserva come il valore del momento sia effettivamente pari a  $\frac{FL}{2}$ , ciò indica che si andrà ad annullare in mezzeria.

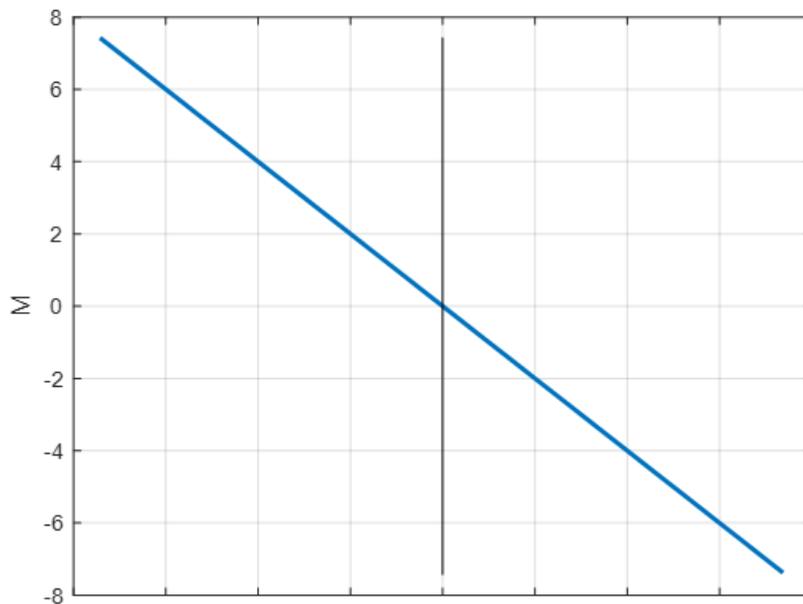


Figura 56: Andamento del momento lungo la trave

In prossimità dell’incastro, diagrammando le caratteristiche di sollecitazione, il momento deve avere segno positivo e dunque, secondo il sistema di riferimento riportato in Figura 46, va ad allontanare le travi incrementando la deflessione provocata dalla forza. Superata la mezzeria la forza genera un momento maggiore rispetto a quello della reazione vincolare, quindi è

necessario un momento negativo, concorde alla reazione, in modo che complessivamente il termine di momento si vada ad annullare. In questa zona della trave il contributo ulteriore alla freccia è tale da ridurre leggermente lo spostamento indotto dalla forza chiarendo il motivo dell'andamento che era stato trovato dal risultato fornito dal codice sviluppato.

Dunque, la forza genera una deflessione della trave secondo le formule prima esplicitate, a questo contributo va sommato quello dato dal momento, il cui valore deve essere quello relativo al nodo considerato in relazione all'andamento sopra riportato.

$$y = -\frac{ML^2}{2EI}$$

Fino al punto in cui è applicata la forza, occorre sommare questo andamento parabolico per quanto riguarda il momento, mentre nel tratto successivo il contributo del momento rimane presente, ma con un contributo lineare. In questo modo si va effettivamente a verificare che l'andamento ottenuto è esattamente analogo a quello ricavabile attraverso tali relazioni teoriche.

## 7.5 Risultati e analisi considerando uno spessore variabile con il raggio

Il passo successivo a quanto fatto in precedenza è quello di andare a considerare non più uno spessore costante, ma valutare la sua variazione con il raggio. La relazione che individua tale variazione è la seguente

$$s = r \cdot \frac{s_0}{r_0} + 2r[\text{inv}(\alpha_0) - \text{inv}(\alpha)]$$

$$\text{inv}(\alpha) = \tan(\alpha) - \alpha$$

Dove  $s_0$  rappresenta lo spessore sulla circonferenza primitiva di raggio  $r_0$ , tale spessore può essere espresso dalla relazione

$$s_0 = \frac{\pi m}{2}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{r_b}{r}\right)$$

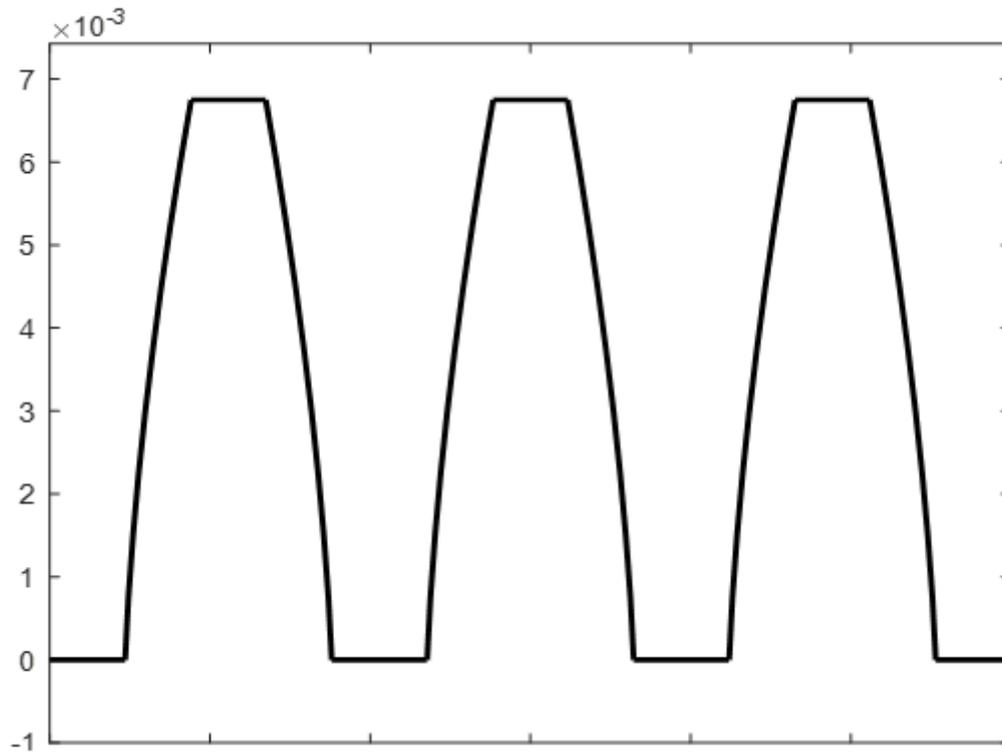


Figura 57: Profilo della dentatura

Nei diagrammi seguenti viene riportata la deformazione elastica del dente, a questa viene poi aggiunto il contributo dovuto alla deformazione che nasce a causa del contatto dal momento che non vi può essere compenetrazione tra i denti, quest'ultimo termine, come già indicato, viene studiato attraverso la teoria di Hertz.

$$\delta = 3.84 \cdot 10^{-5} \frac{F^{0.9}}{L^{0.8}}$$

A titolo di esempio vengono riportati solo due casi, il primo relativo ad una sola coppia di denti in contatto, il secondo rappresenta invece il caso in cui vi siano due coppie di denti in contatto.

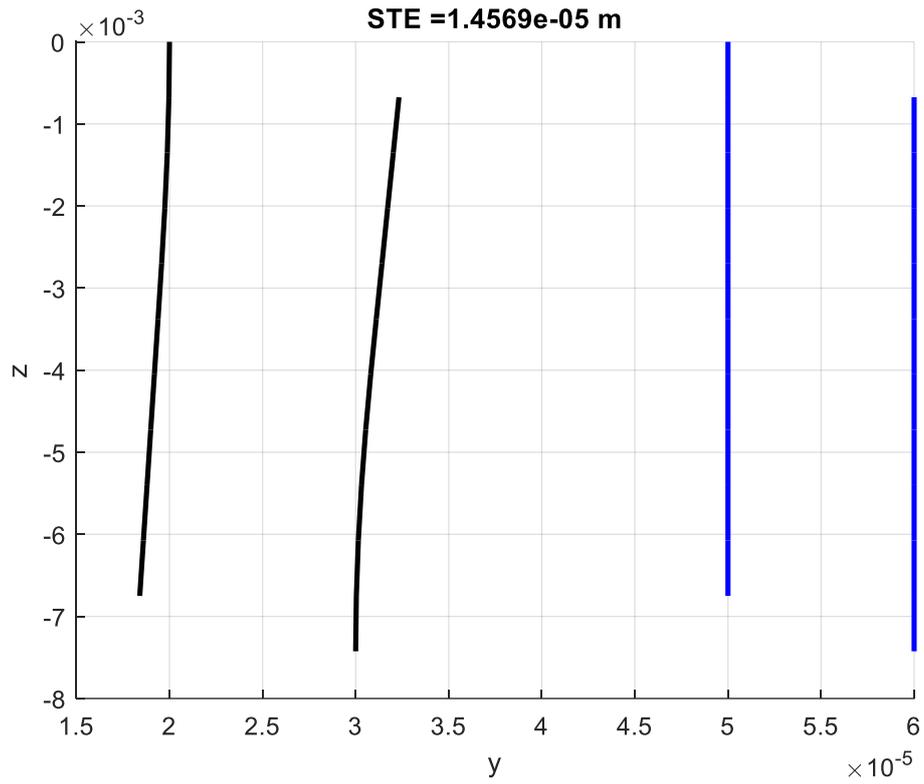


Figura 58: Deformazione denti con una sola coppia in contatto e T=300 Nm

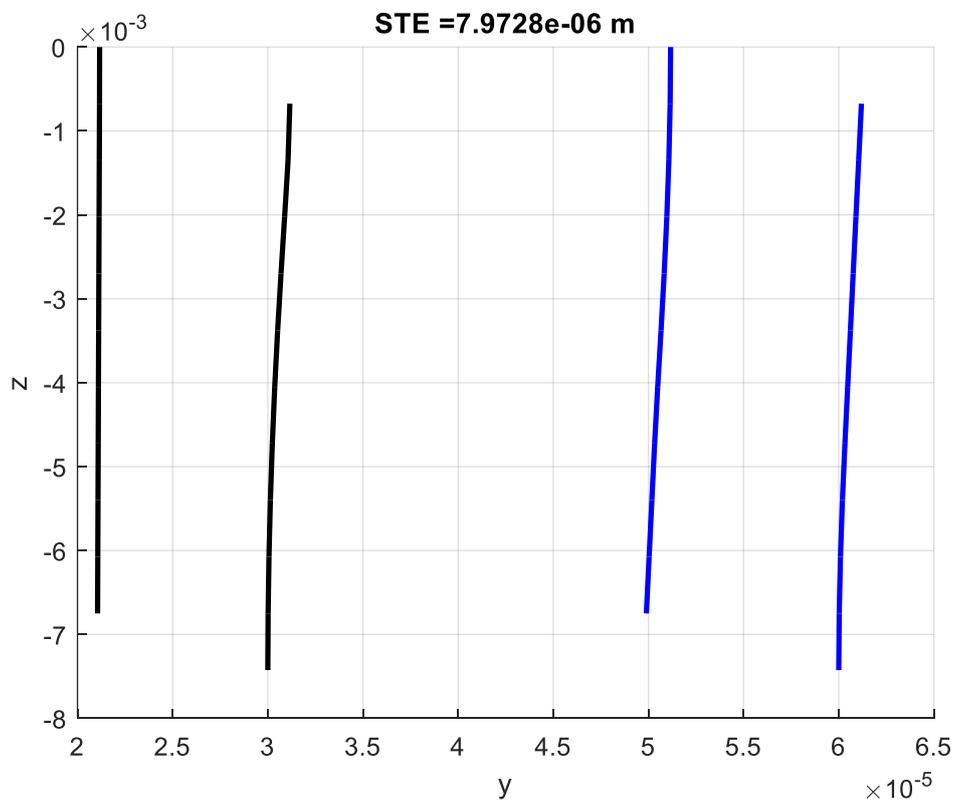


Figura 59: Deformazione con due coppie di denti in contatto, T= 300 Nm e contatto tra i nodi 2-22 e 30-38

I valori dello *Static Transmission Error* ottenuto nei vari casi studiati possono essere raccolti e ne può essere rappresentato l'andamento nel tempo; tale diagramma viene costruito per tre diversi valori di coppia ( $T_1 = 100 \text{ Nm}$ ;  $T_2 = 200 \text{ Nm}$ ;  $T_3 = 300 \text{ Nm}$ ). Con le caratteristiche geometriche scelte si può impostare un confronto con valori derivanti dalla letteratura, come l'analisi svolta da Parker, Vijayakar e Imajo [20], in modo da verificare l'attendibilità e la veridicità dei risultati ottenuti con il codice sviluppato.

Dopo aver trovato i valori dello *Static Transmission Error* variabili nel tempo a seconda del numero di coppie di denti in contatto e dei nodi che vanno a "fondersi", è opportuno applicare una *Fast Fourier Transform* per trovarne l'andamento nel dominio della frequenza. Ricavati questi coefficienti sarà possibile utilizzarli come la forzante interna che si andava cercando, verranno quindi inseriti nel calcolo del  $\Delta$ , a partire dal quale si va a calcolare la forza normale di contatto che si genera. Con questo termine intrinseco si avrà la possibilità di studiare la risposta in frequenza del sistema composto dalle due ruote dentate in un modo ingegneristicamente più interessante, infatti rimarrà soltanto tale eccitante interna e si vanno ad annullare tutti i termini esterni.

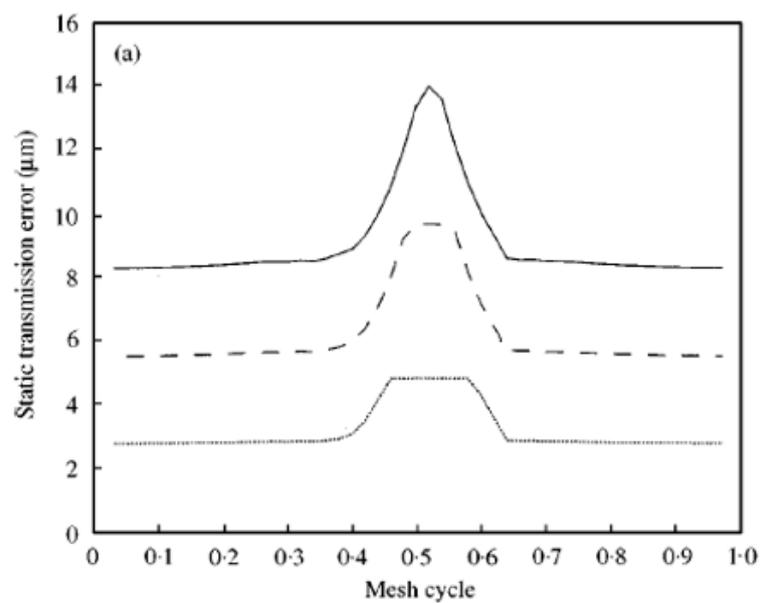
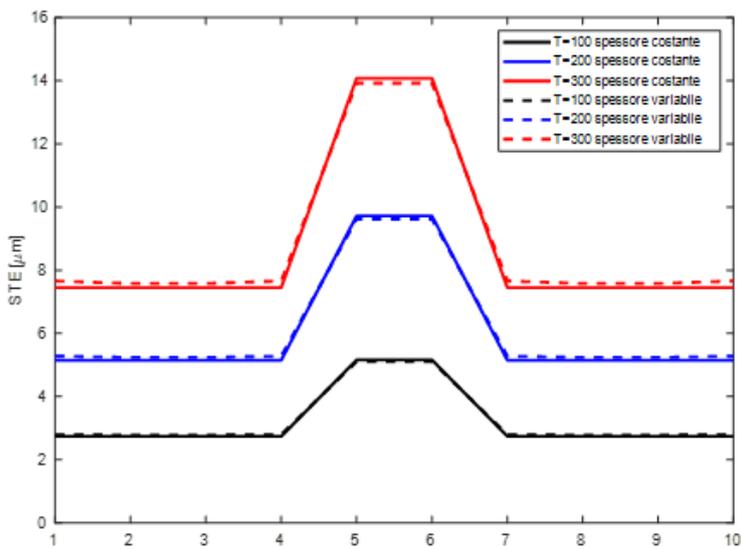


Figura 60: Confronto tra lo STE ottenuto con il codice sviluppato e il risultato trovato da Parker, Vijayakar e Imajo [20]

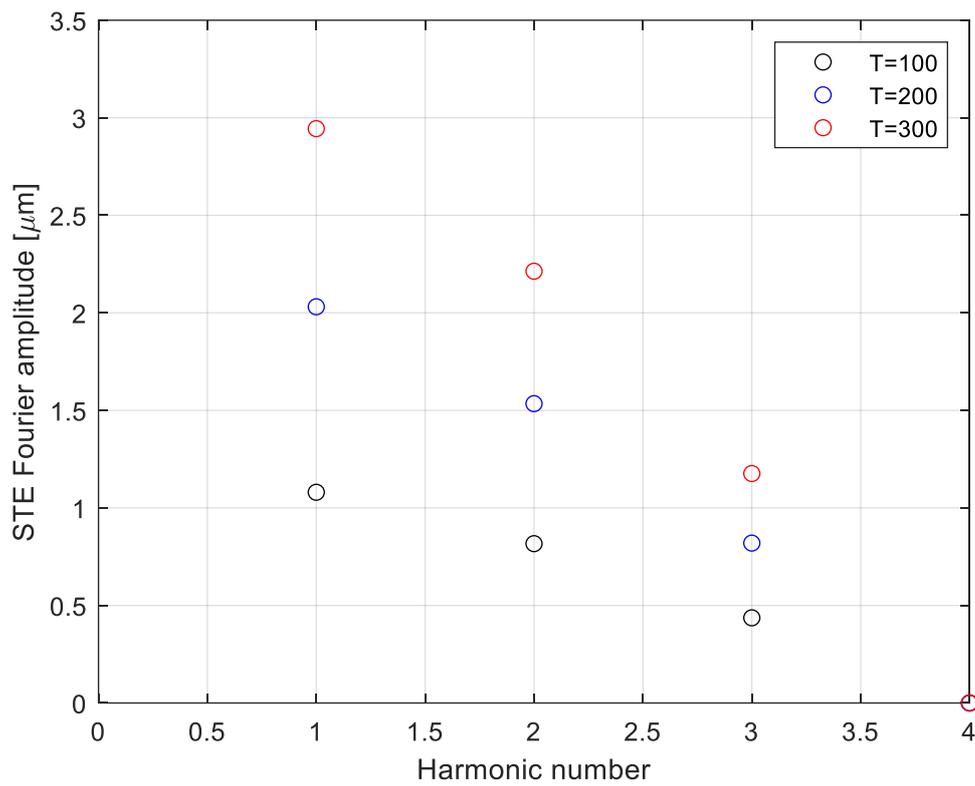


Figura 61: Coefficienti di Fourier al variare della coppia e dell'armonica, non è ora riportata l'armonica zero che rappresenta il valor medio

## 7.6 Miglioramenti nella modellazione del dente

I valori ottenuti dal modello agli elementi finiti che sono stati riportati in figura 60, rappresentano lo spostamento tra la posizione effettivamente assunta dal dente in un certo istante rispetto al valore teorico ottenibile considerando il dente come un elemento infinitamente rigido.

Data la natura discreta della metodologia di risoluzione, è necessario che i punti in cui si va a suddividere il segmento dei contatti AE siano in numero pari ai nodi in cui si va a schematizzare la trave che rappresenta il dente; infatti, solo in questo modo si può avere la certezza che nel punto del segmento in cui si vuole valutare lo *Static Transmission Error* si abbia una soluzione proveniente dal codice relativa esattamente a quel punto.

Dunque, cercando di costruire un programma parametrico in modo da poter portare avanti un elevato numero di analisi senza dover cambiare ogni volta una quantità troppo elevata di grandezze, si va a riportare tutto in funzione del numero di nodi in cui si sceglie di suddividere la parte del segmento dei contatti relativa al passo di base. Conseguentemente a tale scelta, in funzione del rapporto di condotta, si può stabilire quante volte si avrà una sola coppia di denti in contatto e quante, invece, tali coppie saranno due. Stabilito ciò, si va a modellare in dente suddividendolo in un numero di nodi tale da avere corrispondenza biunivoca con la suddivisione apportata per il segmento AE.

I valori relativi alla geometria delle ruote che ingranano ed ai denti non variano nel momento in cui si va a scegliere un numero diverso per la discretizzazione, dunque quello che deve cambiare in funzione del numero di nodi scelti è la lunghezza del singolo elemento di trave che si considera ad ogni iterazione ed il numero di calcoli che si deve eseguire, in quanto l'obiettivo è quello di ottenere un risultato in corrispondenza di ogni nodo.

Ad esempio, suddividendo la parte di segmento dei contatti relativa al passo di base in 8 nodi, si ottiene, per un rapporto di condotta pari a 1.75, che il dente deve essere schematizzato in 14 punti complessivi. Di seguito viene riportata la modellazione, dove con \* si intende un contatto tra una sola coppia di nodi.

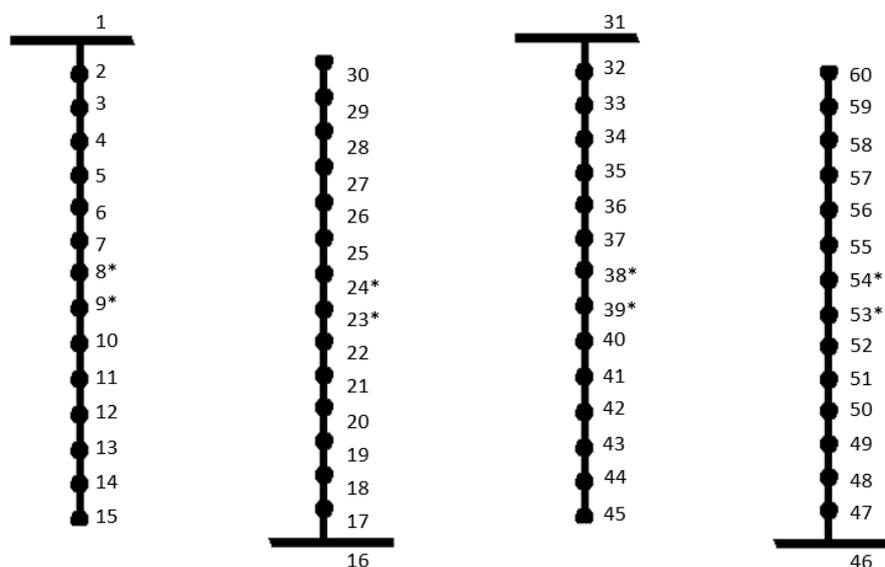


Figura 62: Modellazione del dente con un numero di nodi pari a 14

Come ci si aspetta, cambiando il numero di nodi in cui si decide di discretizzare il segmento dei contatti e quindi il dente, l'andamento dello *Static Transmission Error* e quello dei corrispondenti coefficienti di Fourier che si ottengono non variano, se non di pochissimo, rispetto a quanto già riportato in precedenza.

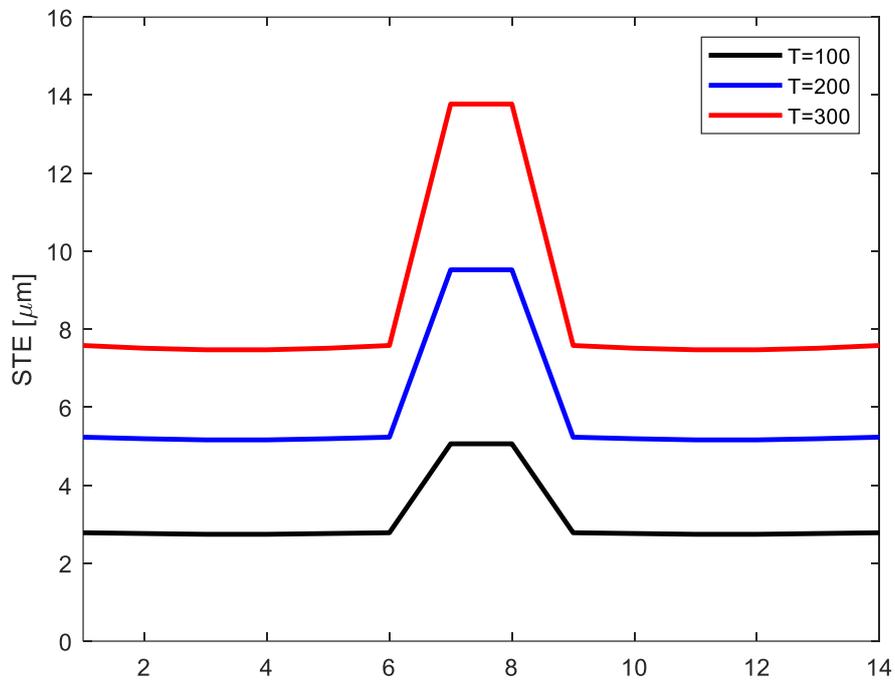


Figura 63: Andamento dello STE modellando con un numero di nodi pari a 14

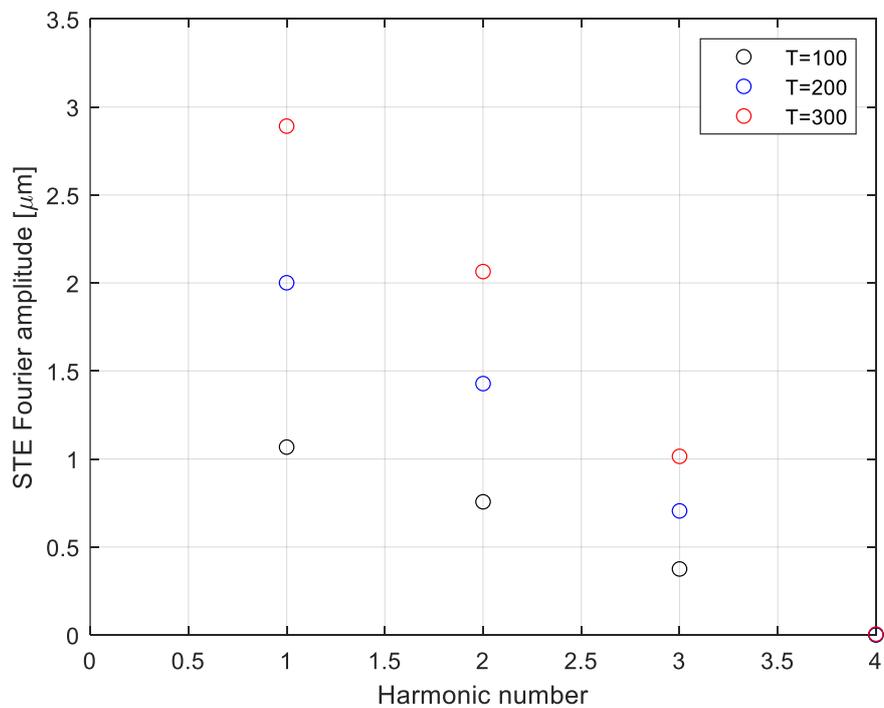


Figura 64: Coefficienti di Fourier relativi allo STE modellando con un numero di nodi pari a 14

## 7.7 Effetto dell'inclinazione variabile lungo il segmento dei contatti

Un ulteriore miglioramento che si potrebbe apportare al codice sviluppato è relativo al fatto che, durante la transizione lungo il segmento dei contatti dal punto A al punto E (come si vede in Figura 32), l'asse del dente non presenta sempre un'uguale inclinazione rispetto a tale segmento.

Poiché la forza che due denti in contatto si scambiano deve essere riportata nella direzione del segmento dei contatti (così come lo *Static Transmission Error* rappresenta uno spostamento parallelo a tale segmento), non sarebbe corretto considerarla sempre perpendicolare alla trave incastrata modellata, che, nell'approccio agli elementi finiti, viene tracciata secondo la direzione dell'asse del dente. Nei casi in cui il segmento AE e l'asse del dente non risultino perpendicolari, andrebbe ruotato tutto il piano di riferimento per la modellazione scalando la forza applicata secondo il coseno dell'angolo che si forma.

Dunque, si vuole andare a valutare la variazione dell'angolo che si forma tra la perpendicolare all'asse del dente e il segmento dei contatti, è proprio tale angolo quello con cui si dovrebbe scalare la forza di contatto all'interno del modello agli elementi finiti sviluppato.

Si considerano quindi i casi limite nei quali ci si potrebbe trovare. Per maggior comprensione nel seguito verrà riportato:

- In nero l'interasse
- In arancione l'asse del dente
- In blu la perpendicolare all'asse del dente
- In verde il segmento dei contatti
- In grigio la direzione perpendicolare all'interasse nel punto C

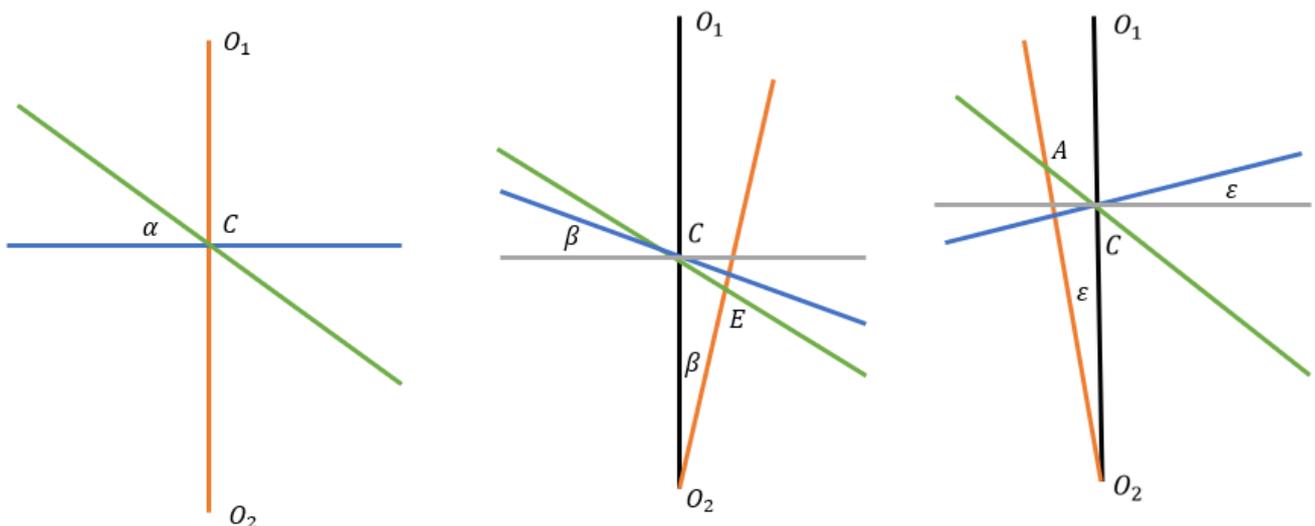


Figura 65: Casi limite considerati per la valutazione della variazione angolare dell'asse del dente

La prima situazione, rappresentata sulla sinistra, è quella in cui l'asse del dente viene considerato parallelo all'interasse (ovvero l'asse che congiunge i centri delle due ruote). In questo caso si sa, da considerazioni teoriche, che l'angolo tra la perpendicolare all'asse del dente e il segmento dei contatti è proprio l'angolo di pressione  $\alpha$ . Dal momento che la forza di contatto che i denti si scambiano si trova sempre lungo il segmento dei contatti, ipotizzando di modellare il dente a partire dal suo asse, sarebbe necessario scalare la forza con il coseno dell'angolo di pressione.

Quanto invece riportato sulla destra si riferisce invece ai casi in cui l'asse del dente sia parallelo al segmento  $O_2A$  oppure  $O_2E$ ; ora si fa riferimento alla ruota che sta in basso, ma risultati del tutto analoghi verrebbero trovati anche considerando la ruota superiore. L'angolo che l'asse del dente viene ad avere con l'interasse può essere valutato nel modo seguente.

Dapprima vanno calcolate le lunghezze dei vari segmenti in gioco, ci si riferisce alla schematizzazione riportata a fianco, dove l'angolo di pressione  $\alpha$  è rappresentato da  $\overline{CO_2T_2}$

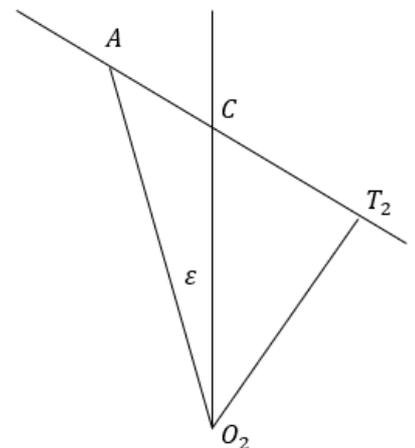
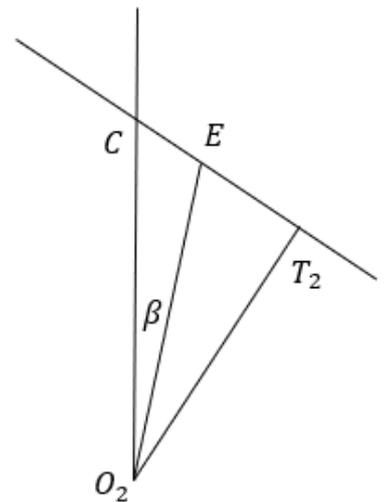
$$\begin{aligned}\overline{AC} &= 0.0078 \text{ m} \\ \overline{CE} &= 0.0078 \text{ m} \\ \overline{T_2C} &= r_b \sin \alpha = 0.0241 \text{ m} \\ \overline{T_2E} &= 0.0163 \text{ m} \\ \beta &= \alpha - \tan^{-1}\left(\frac{\overline{T_2E}}{r_b}\right) = \alpha - 0.2273 \text{ rad} = 7^\circ\end{aligned}$$

Quindi, nel secondo caso, in presenza dell'angolo  $\beta$ , la forza andrebbe scalata con il coseno dell'angolo dato da  $\alpha - \beta$ .

Per il terzo caso le relazioni a cui si deve fare riferimento sono le seguenti.

$$\begin{aligned}\overline{T_1C} &= r_b \sin \alpha = 0.0241 \text{ m} \\ \overline{T_1A} &= 0.0163 \text{ m} \\ \varepsilon &= \tan^{-1}\left(\frac{\overline{T_2C} + \overline{AC}}{r_b}\right) - \alpha = 0.425 - \alpha = 4.35^\circ\end{aligned}$$

Dunque, ora l'angolo con cui scalare il coseno risulta  $\alpha + \varepsilon$ .



Complessivamente la variazione angolare totale potrà essere valutata in  $\varepsilon + \beta$ .

Il coseno, nel caso in cui l'asse del dente viene ad avere uguale inclinazione rispetto al segmento  $O_2E$ , vale:

$$\cos(\alpha - \beta) = 0.9744$$

Quando invece l'asse del dente è parallelo al segmento  $O_2A$ :

$$\cos(\alpha + \varepsilon) = 0.9111$$

La variazione complessiva in termini di forza sarà dunque al massimo pari a:

$$\Delta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \varepsilon)}{\cos(\alpha + \varepsilon)} = \frac{0.9744 - 0.9111}{0.9111} = 6.9 \%$$

Poiché si sta cercando di sviluppare un programma utilizzabile nelle prime fasi di progetto, la volontà è quella di non complicare troppo il codice, ma di mantenerlo quanto più snello e fedele alla realtà; tale fedeltà può quindi essere ritenuta accettabile anche trascurando l'effetto di un angolo variabile lungo il segmento dei contatti poiché un errore minore del 7% è sicuramente accettabile in una fase di avamprogetto, dal momento che lo scopo non è quello di ottenere il risultato esatto che verrà poi ricercato in fasi più avanzate e dettagliate, ma quello di rappresentare il comportamento generale del sistema.

## 8 Analisi della risposta del sistema di ruote dentate

A questo punto, dopo aver calcolato lo *Static Transmission Error* relativo alla coppia di ruote dentate che sono state considerate nella trattazione, occorre valutare come la presenza di tale deviazione rispetto alla condizione ideale possa indurre una dinamica anche senza la presenza di una forzante armonica esterna; quest'ultimo citato era appunto il caso considerato nel paragrafo 6 dove si è andata a studiare la risposta dinamica del sistema andando a sottoporre le due ruote ad una forza variabile.

Nell'analisi precedentemente condotta al paragrafo 6 si era scelto di fare riferimento ad un sistema caratterizzato da 6 gradi di libertà complessivi (per ognuna delle ruote si consideravano i due gradi di libertà traslazionali più quello rotazionale) ed era stato studiato il comportamento al variare della forzante esterna e di alcuni parametri progettuali il cui valore ha un'influenza piuttosto importante nel risultato ottenuto.

In questo paragrafo si vuole invece andare a vedere dettagliatamente il contributo dello STE, di conseguenza, poiché l'attenzione verte sulla tipologia di dinamica che verrà a nascere a seguito di questo spostamento dalla posizione ideale legato alla deflessione dei denti, si può andare a semplificare la configurazione andando a considerare un sistema ad un grado di libertà.

In tal modo si procede con un'assunzione analoga a quella fatta da Parker, Vijayakar e Imajo [20] avendo così la possibilità di confrontare il risultato che si verrà ad ottenere, tale confronto potrà essere fatto sia con l'analisi agli elementi finiti condotta dai tre ricercatori sopracitati, sia con quanto sono venuti a visualizzare da evidenze sperimentali.

### 8.1 Modello ad 1 grado di libertà utilizzato

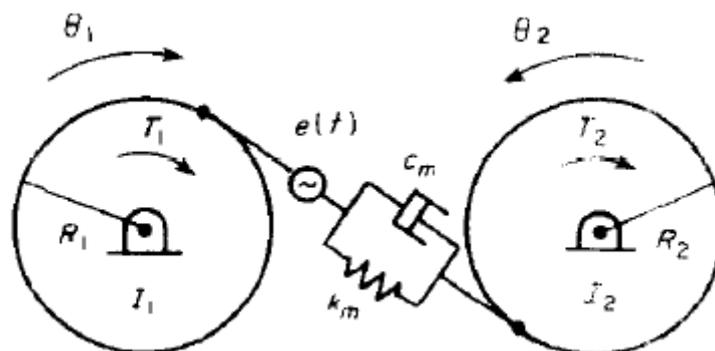


Figura 66: Sistema ad 1 GDL considerato per l'analisi del comportamento dinamico in relazione allo STE [25]

Per il sistema ad un grado di libertà le relazioni cambiano nel seguente modo:

$$x = r_1\theta_1 - r_2\theta_2$$
$$m_e = \frac{I_1 I_2}{I_1 r_2^2 + I_2 r_1^2}$$
$$F_e = \frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2}$$

Per quanto riguarda la rigidezza, si considera una rigidezza torsionale pari a 0, dunque l'unico contributo è dato dalla rigidezza di contatto che si viene appunto ad instaurare nel momento in cui le due ruote vanno in contatto. Avendo precedentemente calcolato lo *Static Transmission Error* che si genera a causa della deformazione elastica dei denti più quella dovuta alla natura hertziana del contatto, è possibile calcolare la rigidezza di contatto proprio a partire da tale risultato.

Il vettore relativo allo STE trovato è definito nel dominio delle frequenze, quindi si applica una *Inverse Fast Fourier Transform* per portarlo nel dominio del tempo, trovando in questo modo un vettore ora chiamato  $V$ .

$$k = \left(\frac{T}{r}\right) \cdot V$$

Tale valore di rigidezza sarà un vettore variabile nel tempo dal momento che  $V$  è un vettore, dunque si sceglie di assumere come rigidezza di contatto il valore medio della distribuzione che si ottiene. Procedendo così si trova:

$$k_c = 473.2 \cdot 10^6 \frac{N}{m}$$

Questo risultato è in linea con quanto trovato da Parker [20], pari a  $462.1 \cdot 10^6 \frac{N}{m}$ .

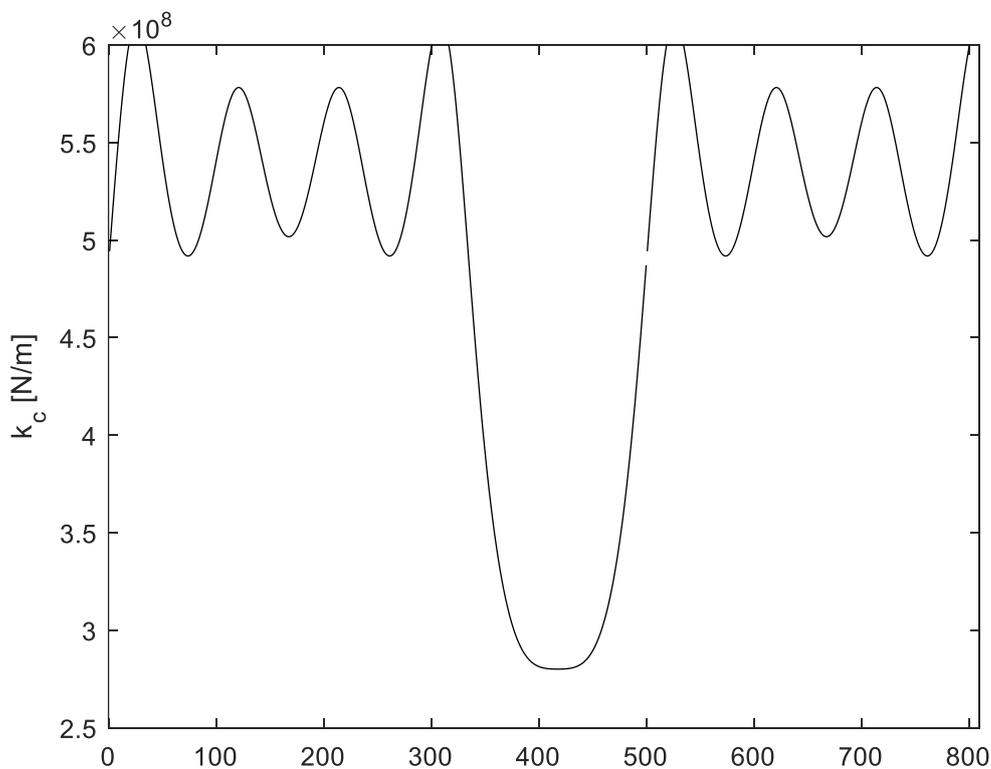


Figura 67: Andamento della rigidezza di contatto del sistema valutato in base allo STE

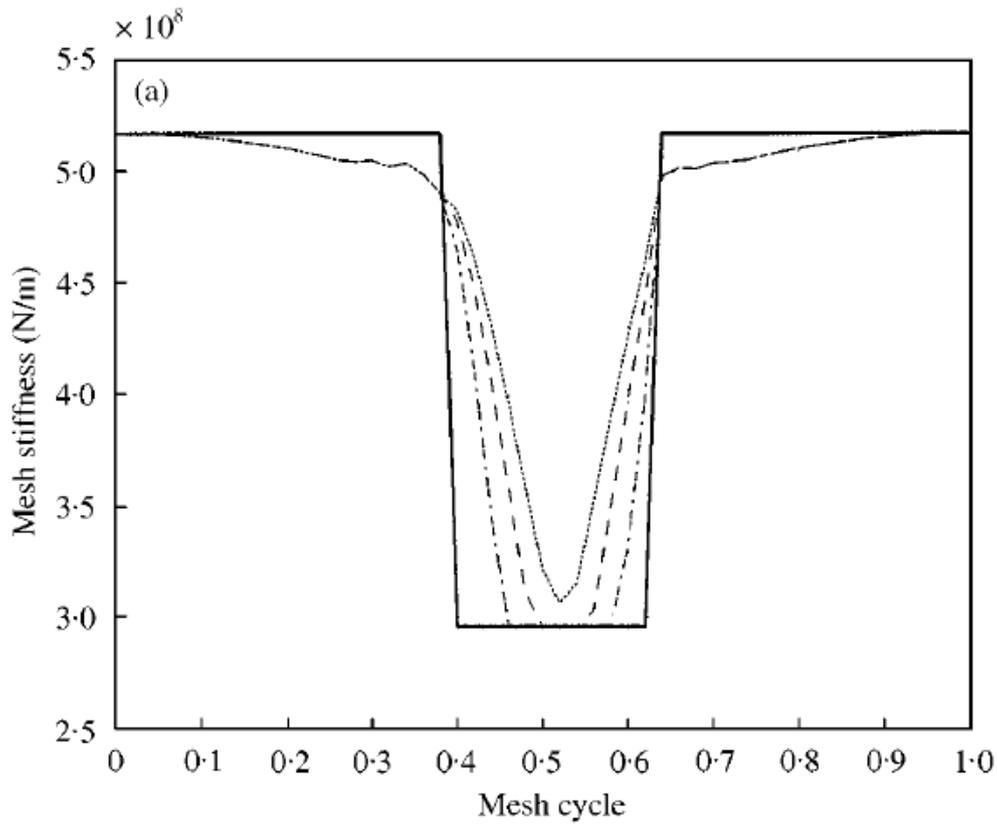


Figura 68: Andamento della rigidezza di contatto trovato da Parker, Vijayakar, Imajo [20]

Dal valore di rigidezza trovato si può infine definire lo smorzamento del sistema, ipotizzando un opportuno rateo di smorzamento:

$$c = \zeta \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{k_c}{m_e}}$$

Grandezza	Valore
$\rho$ [ $kg/m^3$ ]	7600
$I_1$ [ $kg \cdot m^2$ ]	0.0158
$I_2$ [ $kg \cdot m^2$ ]	0.0158
$m_e$ [ $kg$ ]	1.4
$k_c$ [ $N/m$ ]	$473.2 \cdot 10^6$
$\zeta$	0.08

Procedendo come descritto si ha un classico sistema massa-molla-smorzatore di cui se ne vuole valutare la dinamica; la procedura di risoluzione è sempre la solita descritta secondo la quale la prima iterazione viene risolta con il metodo Newton-Raphson, poi le iterazioni successive vengono risolte con un metodo di continuazione. In questo caso, per via delle unità di misura basse alle quali si lavora (come già osservato per lo STE si è nel campo dei micron), si riscontrano dei problemi di convergenza. Alcuni di questi vengono risolti scalando opportunamente le grandezze in gioco di un fattore di scala pari a  $1 \cdot 10^6$ ; altri non si riesce ad evitarli, di conseguenza si procede con questi metodi iterativi non solo procedendo in maniera crescente con le frequenze, ma anche decrescente; questo è accettabile dal momento che quello che maggiormente interessa è valutare se si riscontrano casi di perdita parziale del contatto a causa della dinamica che si instaura.

Esattamente come fatto al paragrafo 6, è necessario utilizzare un opportuno modello di contatto che sia in grado di fornire in output il valore della forza di contatto da inserire nelle equazioni di equilibrio che valutano il residuo. La funzione implementata è la stessa vista al paragrafo 6, solo che ora in ingresso lo spostamento relativo  $\Delta$  non è legato alla presenza di una forzante esterna, ma solo allo *Static Transmission Error* calcolato.

$$F_c = \max(k_c * v, 0)$$

Dove  $v$  è definito a partire dallo spostamento relativo a valle dell'applicazione in cascata di una IFFT e poi di una FFT.

$$\Delta = x + STE$$

Trovata la forza di contatto, si può utilizzare tale valore per le equazioni di equilibrio a partire dalle quali si calcola il residuo e si procede alla risoluzione attraverso la procedura iterativa. Si può osservare di seguito che nell'equazione di equilibrio è necessario inserire la componente statica della forza.

$$F_0 = \frac{T}{r}$$

$$m_e \ddot{x} + c \dot{x} = -F_c + F_0$$

Passando dal dominio del tempo a quello delle frequenze:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{nH} \bar{x}^n e^{in\omega t}$$

$$(-\omega^2 n^2 m_e + i\omega n c) \bar{x}^n e^{in\omega t} = -F_c^n e^{in\omega t} + F_0$$

Quando  $n=0$ , nel caso non vi fosse  $F_0$ , l'unica soluzione ammissibile sarebbe  $F_c = 0$ , che è chiaramente impossibile, ecco dunque la necessità di inserire la componente statica nelle equazioni di equilibrio. Nel codice che viene utilizzato per ottenere il comportamento dinamico si va effettivamente a verificare che, nel caso  $n=0$ , il risultato in termini di forza di contatto sia proprio la forza statica; questo è verificato ed è un primo risultato che dà una buona confidenza al codice sviluppato.

## 8.2 Risposta dinamica del sistema ad 1 grado di libertà

Si procede per prima cosa a rappresentare la risposta che si ottiene considerando solo l'armonica fondamentale, in secondo luogo, invece, si va a riportare il caso caratterizzato da cinque armoniche, quest'ultimo è verificato essere il caso limite nel senso che, aumentando ulteriormente il numero di armoniche che si possono considerare, l'andamento della risposta non varia più dal momento che l'influenza data dalle armoniche successive è trascurabile.

In relazione al numero di armoniche considerate, dovranno essere utilizzate nel vettore dello *Static Transmission Error* tante componenti quante sono le armoniche oltre al valore medio legato al caso statico. Dunque, andranno presi solo alcuni dei valori ottenuti a valle della FFT condotta sui valori estrapolati dal codice FEM utilizzato per studiare lo STE del sistema.

In seguito viene rappresentata la RMS (*Root Mean Squared*) della componente oscillante, ovvero la media pesata. Per valutarla, si procede, esattamente come nei casi precedentemente esposti, a riportare la soluzione iterativa ottenuta dal dominio delle frequenze a quello del tempo attraverso una IFFT; in questo modo si ottiene un vettore  $v$  che rappresenta i valori della soluzione nel tempo.

La media pesata viene calcolata facendo la radice quadrata della somma dei valori ottenuti, si procede appunto ad un prodotto vettoriale tra le trasposte, diviso il numero complessivo di punti che è stato considerato.

$$RMS = \frac{\sqrt{v' \times v}}{\text{length}(v)}$$

Nei grafici riportati sotto si possono osservare:

- un andamento con linea nera piena che è ora riportato a titolo di esempio e rappresenta la risposta lineare del sistema tracciata ipotizzando un certo valore della forzante armonica; si è deciso di riportare anche questo andamento per dare l'idea della frequenza naturale alla quale ci si aspetta di ottenere il picco della risonanza nel caso di sistema in contatto chiuso.
- un andamento con pallini rossi. Ogni pallino individua il risultato ottenuto a seguito di una iterazione, tale risposta è corrispondente al caso con  $T=300$  Nm.
- un andamento blu che è relativo al caso in cui  $T=200$  Nm.
- un andamento verde che è relativo al caso in cui  $T=100$  Nm.

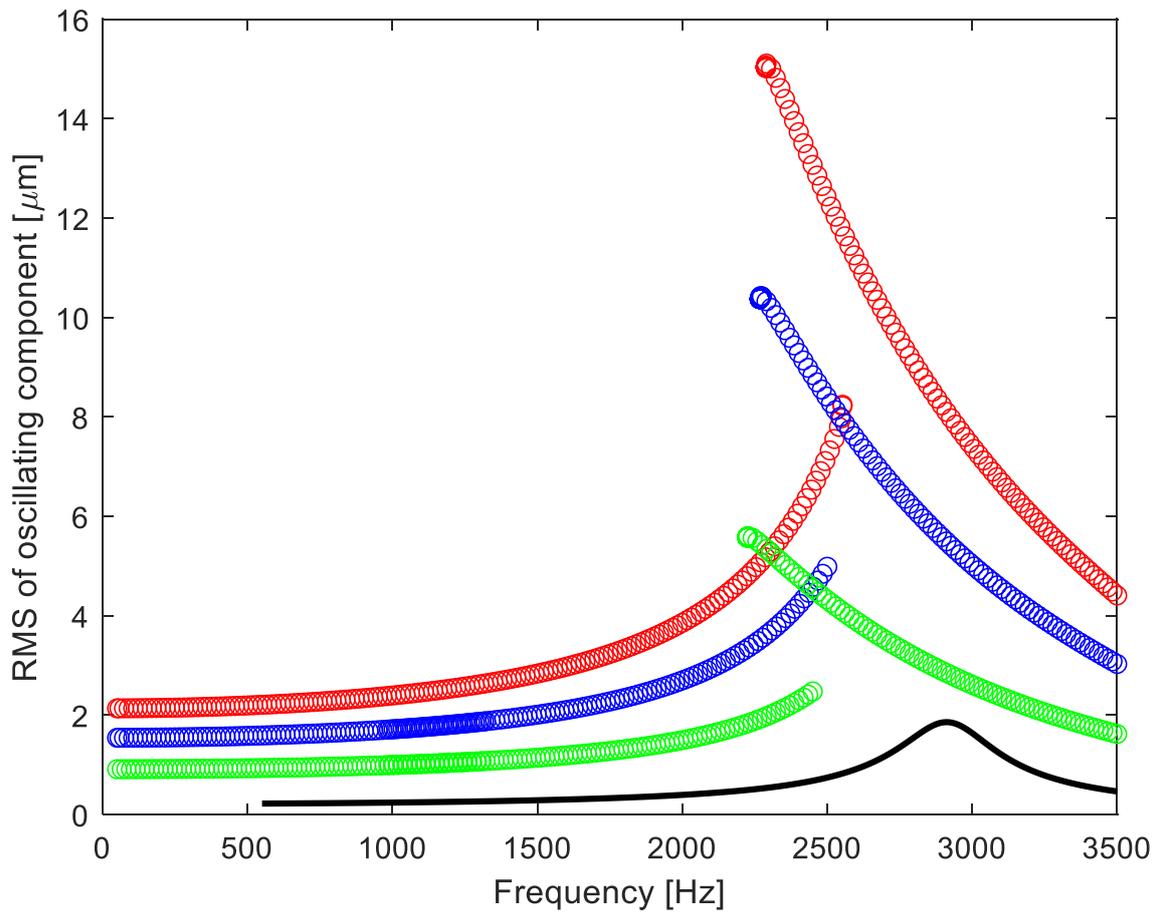


Figura 69: Risposta dinamica del sistema considerando 1 armonica

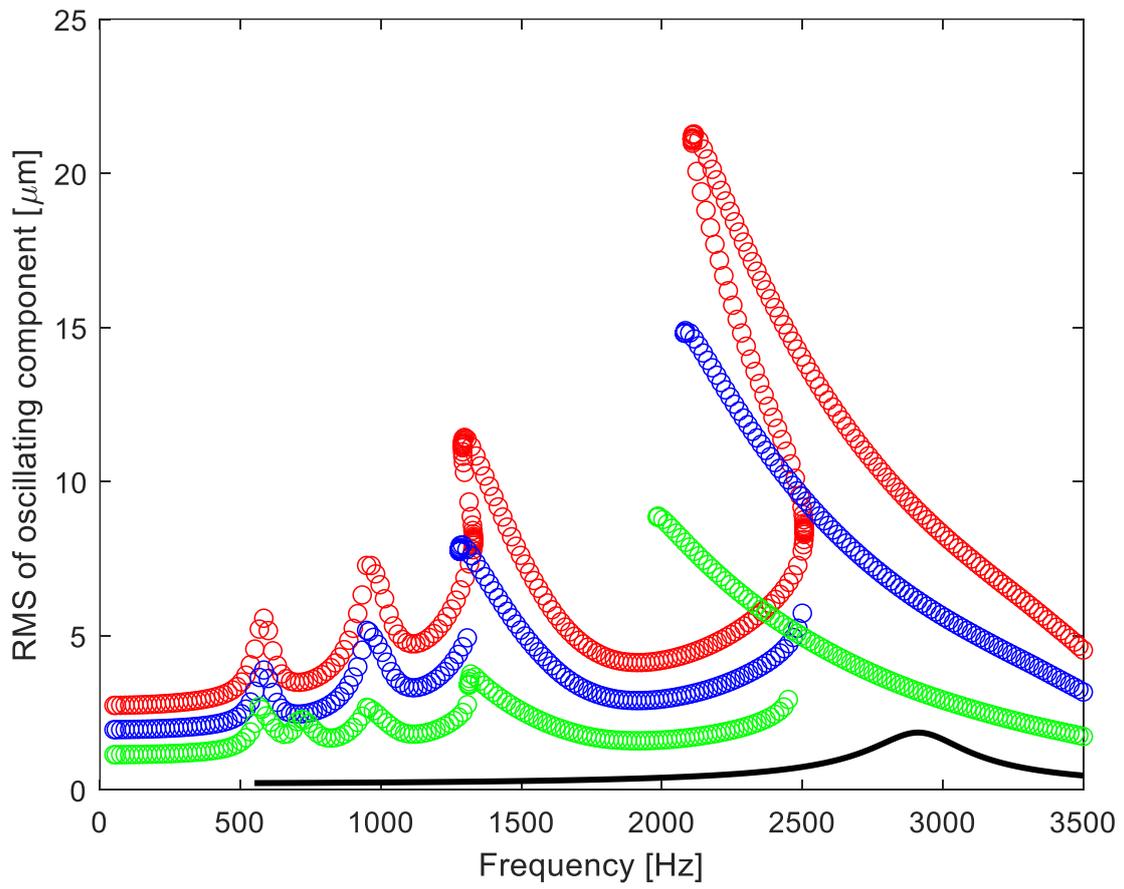


Figura 70: Risposta dinamica ottenuta considerando 5 armoniche

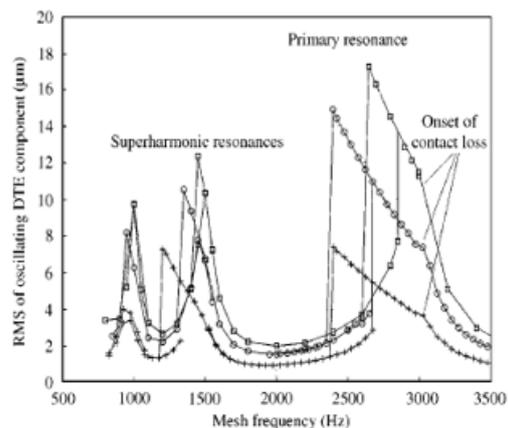
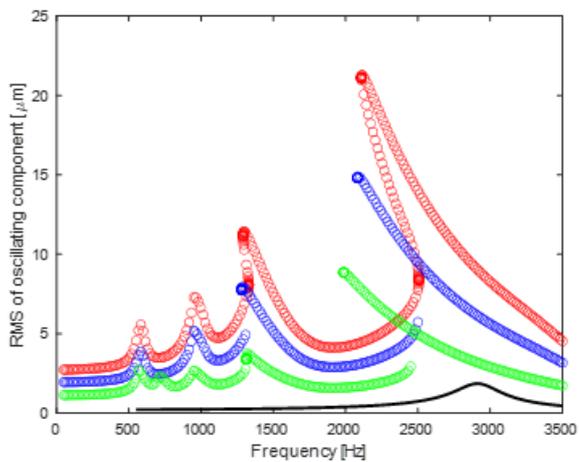


Figure 7. Finite element calculation of RMS of oscillating component of dynamic transmission error for  $T = 100$  (+),  $200$  (○) and  $300$  (□) Nm.

Figura 71: Confronto tra il risultato ottenuto e l'analisi FEM condotta da Parker, Vijayakar e Imajo [20]

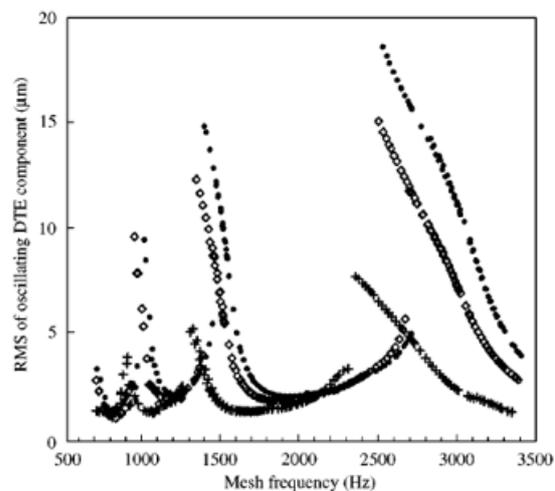
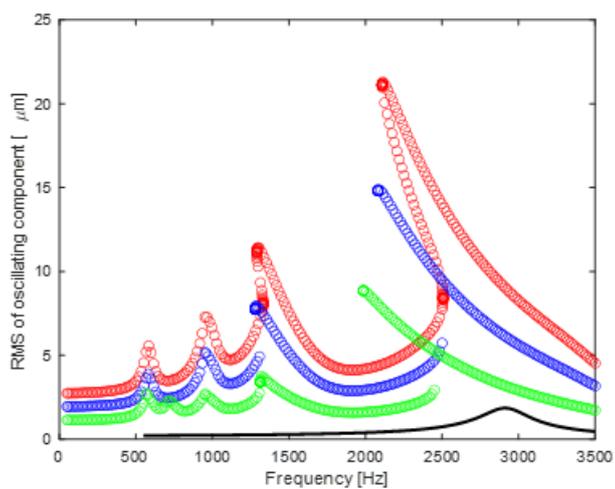


Figure 6. Experimentally measured RMS of oscillating component of dynamic transmission error for  $T = 100$  (+),  $200$  (◇) and  $300$  (♣) Nm. From reference [4].

Figura 72: Confronto tra il risultato ottenuto e il risultato sperimentale ottenuta da Parker, Vijayakar e Imajo [20]

Dagli andamenti sopra riportati si evince che il valore della forzante, in questo caso interna e rappresentata dallo *Static Transmission Error*, è sufficientemente elevato da causare, in tutti e tre i casi considerati, una perdita parziale del contatto che riesce ad essere valutata grazie al modello di contatto sviluppato secondo quanto riportato al paragrafo 2.3.

Per via della natura della soluzione nel tratto in cui si osserva la perdita del contatto, si vede bene che alla stessa frequenza si viene ad avere una doppia soluzione e la cattura di entrambe le soluzioni è resa possibile grazie all'utilizzo di opportuni metodi di continuazione. A causa di problemi di convergenza dovuti alle dimensioni in gioco eccessivamente piccole è necessario, in un primo momento scalare le varie grandezze, e in alcuni casi spezzare la procedura iterativa procedendo a volte secondo il verso crescente delle frequenze, a volte in senso decrescente; questo è visibile dal fatto che le curve tracciate non sono continue, ma presentano zone in cui, per problemi di convergenza, il programma non riesce a fornire l'effettiva soluzione.

Comunque, si vede che il risultato ottenuto è piuttosto fedele sia all'andamento trovato da Parker, Vjiayakar e Imajo [20] con un'analisi agli elementi finiti, sia al risultato sperimentale riportato nel secondo confronto alla pagina precedente.

Il risultato con approccio agli elementi finiti conferma che la perdita del contatto viene ad essere presente in tutti e tre i casi, i picchi "secondari" dovuti all'interazione delle varie armoniche considerate si trovano pressoché alla stessa frequenza; mentre le variazioni che si manifestano sono dovute al fatto che i picchi giungono ad un valore massimo più basso (si vedrà in seguito che ciò è in parte dovuto all'effetto del *backlash* di cui ora non viene tenuto conto) e per il fatto che il codice riesce a giungere ad un valore più elevato di frequenza prima di smettere di convergere, probabilmente questo è dovuto all'utilizzo di un codice con metodi risolutivi più accurati; comunque, per un'analisi asservita a valutazioni per le fasi iniziali di progetto il risultato ottenuto appare accettabile e veritiero.

La veridicità è sicuramente sancita dal confronto con il risultato sperimentale, infatti gli andamenti sono piuttosto simili a meno del valore massimo (già detto che è dovuto all'impossibilità, con un'analisi lineare, di trattare dettagliatamente l'effetto del *backlash*), e si ritrova che i valori di frequenza ai quali si hanno i picchi sono confrontabili. Infine, è confermato che considerare un numero di armoniche pari a 5 rappresenta il limite massimo oltre il quale l'introduzione di nuove armoniche non genera cambiamenti alla soluzione.

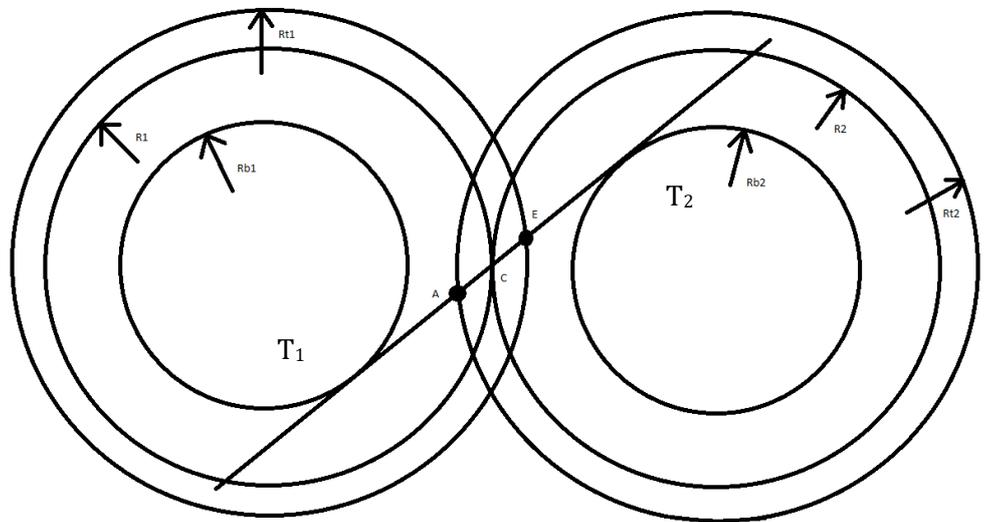
## 9 Analisi sull'influenza del backlash sui risultati ottenuti

A conclusione delle considerazioni e degli studi portati avanti, è opportuno apportare un miglioramento alle analisi eseguite. Infatti, trovato il valore dello *Static Transmission Error* nelle diverse possibili condizioni di contatto, occorre prestare attenzione al fatto che, qualora tale valore vada a superare lo spazio che inevitabilmente si ha tra i denti (si definisce *backlash*), allora si avrebbe una prematura transizione dal caso in cui si ha una sola coppia di denti in contatto a quello in cui le coppie in contatto siano due.

Questo accade nel momento in cui la deflessione provocata dall'elasticità del dente e dall'effetto del contatto hertziano diano uno spostamento almeno pari al *backlash* che si ha tra due profili adiacenti.

Da valori geometrici costruttivi si sa che il *backlash* nominale, ovvero valutato lungo il raggio in direzione tangenziale, è pari a  $15\ \mu\text{m}$  [21]. Tuttavia, va considerata la componente in direzione del segmento AE, poiché, qualora lo STE fosse sufficientemente elevato da avere un contatto prematuro, questo lo si verrebbe ad avere proprio lungo il segmento dei contatti AE. Dunque, è necessario passare dal valore del *backlash* nominale al *backlash* normale, ovvero proprio quello nella direzione del segmento dei contatti.

Riprendendo la figura 20, si sa che il segmento dei contatti si estende dal punto A ad E per effetto della troncatura di testa che impedisce la compenetrazione che potrebbe insorgere a causa di piccoli errori di montaggio, nonché fenomeni pericolosi come il pitting e danni per usura che sono molto accentuati in corrispondenza dei punti  $T_1$  e  $T_2$  che vengono appunto esclusi in questo modo dai possibili punti di contatto.



Sviluppando un passo di base su tale segmento AE si trovano le condizioni per cui si hanno due coppie di denti in contatto (caso in cui una coppia si trova in contatto vicina ad A ed un'altra vicina ad E) e quelle per cui se ne ha una sola, queste due possibilità stanno tra loro in un rapporto che segue quello di ingranamento che ora è posto pari a 1.75 [21].

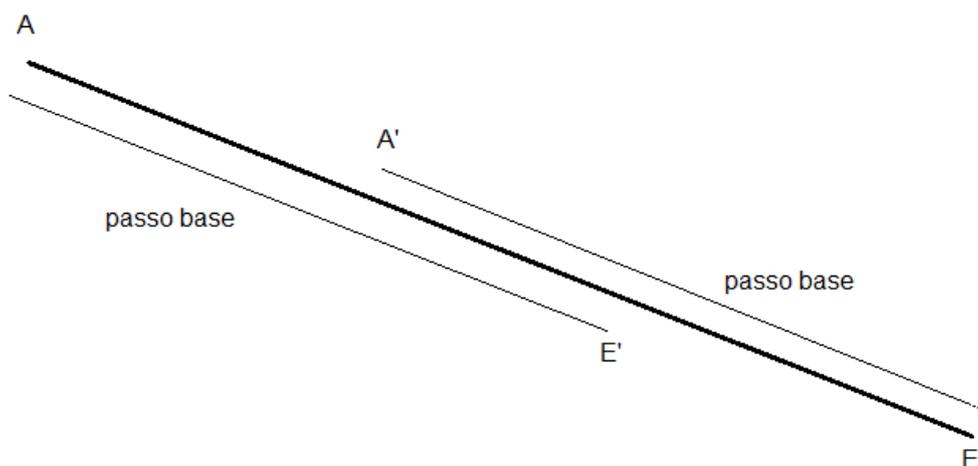


Figura 73: Rappresentazione del passo di base lungo il segmento dei contatti

Sulla base di quanto riportato sopra, si avrà una singola coppia di denti in contatto nel momento in cui tale contatto avviene all'interno del segmento che va da A' ad E'; è proprio lungo questo segmento che diventa interessante valutare il contributo normale del *backlash* e vedere se lo STE derivante dal contatto è in grado di annullare tale divario e portare il dente in contatto con il profilo del dente adiacente.

Dunque, per poter scalare opportunamente il *backlash* nominale occorre definire l'angolo che si forma tra la direzione tangenziale lungo la circonferenza primitiva e il segmento dei contatti nel generico punto P in cui si va ad instaurare un contatto.

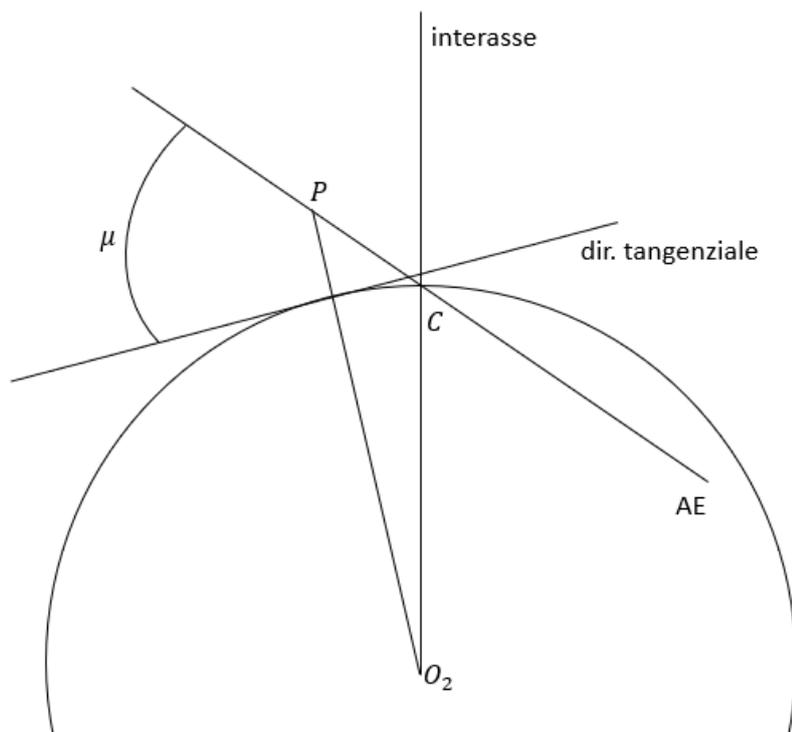


Figura 74: Rappresentazione della direzione normale e di quella nominale

Dunque, in generale, la procedura secondo la quale si va a scalare il *backlash* è la seguente:

$$b_{normale} = b_{nominale} \cdot \cos \mu$$

Si sa che nel punto C la direzione tangenziale relativa al punto di contatto forma un angolo pari a quello di pressione  $\alpha$  con il segmento AE, di conseguenza il valore che si può andare a calcolare vede un angolo  $\mu = \alpha$ . In questo punto il valore del backlash normale è quello massimo che si può avere e questo lo si può vedere attraverso due aspetti:

- L'angolo tra la direzione tangenziale e il segmento dei contatti è il minimo possibile tra tutte le posizioni che può assumere il generico punto P.
- Quando si ha il contatto in C la coppia di denti adiacente è sufficientemente lontana da A o E, per cui è difficile che si possa avere una transizione prematura dal caso in cui si ha una sola coppia di denti in contatto al caso in cui se ne hanno due.

$$b_{normale} = b_{nominale} \cdot \cos \alpha = 14.1 \mu m$$

Questo angolo con cui scalare il *backlash* nominale non è però costante lungo il segmento A'E' per il fatto che la direzione tangenziale relativa al punto di contatto assume diversa angolazione rispetto al segmento dei contatti. Si può osservare un caso limite: nel momento in cui il contatto avviene in E' si può immaginare che la coppia adiacente sia prossima al punto A, dunque si va a valutare l'angolo in questa condizione.

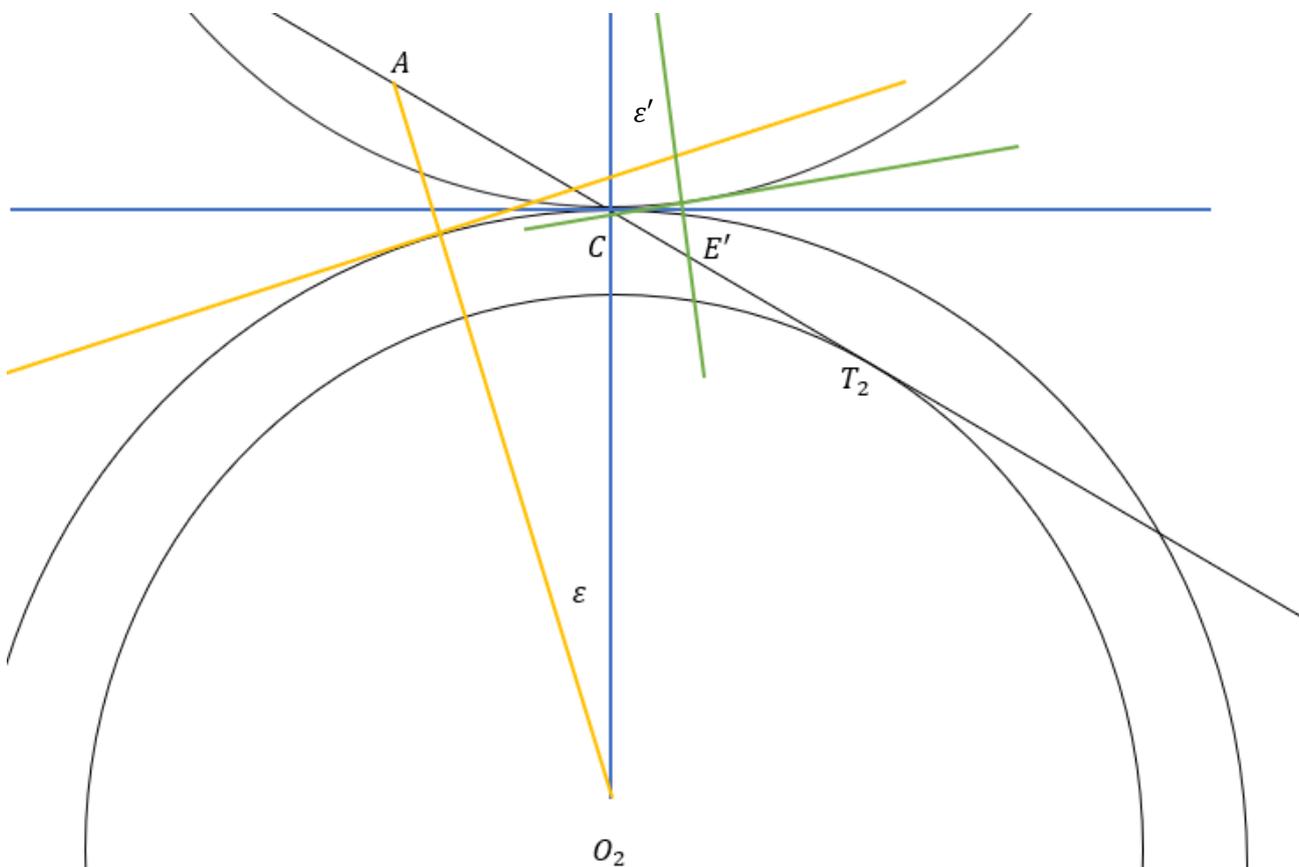


Figura 75: Condizione limite per la valutazione del backlash normale

L'angolo  $\varepsilon$  è già stato valutato al paragrafo 7.7 e pari a  $4.35^\circ$ .

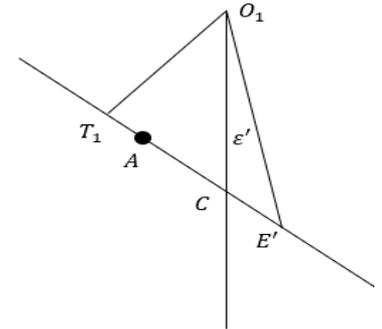
Il caso rappresentato vede la possibilità di avere un contatto prematuro tra il profilo di destra della ruota inferiore che si trova in A (quindi *backlash* scalato di un angolo  $\varepsilon$ ) con il profilo di sinistra della ruota superiore che invece si troverà in E'; in questo punto, dato che si considera la ruota superiore, si avrà un ulteriore contributo di diminuzione del *backlash* in funzione dell'angolo che si genera in E' (indicato con  $\varepsilon'$ ).

L'angolo che nasce è:

$$\overline{CE'} = p_{base} - \overline{CA}$$

$$p_{base} = \pi \frac{d_{base}}{z}$$

$$\varepsilon' = \tan^{-1} \left( \frac{\overline{CE'}}{r_b} \right) = 0.8942^\circ$$



Di conseguenza il valore minimo di *backlash* da annullare risulta essere:

$$b_{normale} = b_{nominale} \cdot \cos \mu = b_{nominale} \cdot \cos(\varepsilon + \varepsilon') = 13.5 \mu m$$

Si osserva che, quando il contatto avviene in corrispondenza del punto C, va recuperato un *backlash* superiore (è proprio il suo valore massimo), infatti la coppia di denti precedente e quella successiva sono abbastanza distanti dai punti A ed E a partire dai quali si ha la possibilità di instaurare un contatto.

Se invece la coppia singola è in contatto in A' (o E'), allora la coppia adiacente si troverà in prossimità di E (o di A) e la parte del profilo del dente che si trova all'interno del segmento ha la possibilità di entrare in contatto a seguito di una deformazione tale da recuperare il *backlash*. Proprio per la maggior vicinanza ad E (oppure ad A) risulta più facile prevedere una transizione da una singola coppia a due coppie in contatto e tale meccanismo può essere appunto spiegato dalla variazione dell'angolo che si forma tra la direzione tangenziale lungo la circonferenza primitiva in corrispondenza del punto di contatto e il segmento AE.

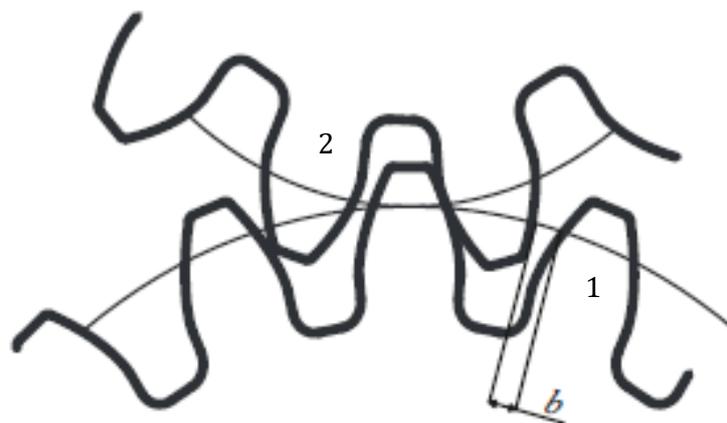


Figura 76: Visualizzazione di una condizione di contatto di interesse per la variazione del backlash [27]

Questa situazione, riportata in figura 76, rappresenta proprio il caso di contatto in E' ed incipiente contatto in A, si osserva molto bene che la distanza da annullare è diversa tra il punto 1 ed il punto 2 e ciò è dovuto proprio alla variazione angolare. Attenzione a non confondere le considerazioni fatte in riferimento alla figura 75, la quale rappresenta proprio la condizione di funzionamento delle ruote che si stanno considerando; quanto osservato in figura 76 è inserito solo a titolo di esempio per una maggior facilità di comprensione, ma rappresenta il caso in cui la ruota inferiore è quella motrice.

In relazione ai valori precedentemente trovati, senza considerare questo effetto legato al *backlash*, si osserva che per i casi che presentano una coppia statica bassa e intermedia (100 Nm e 200 Nm) non si ha una transizione prematura ed è confermato l'andamento precedentemente trovato. Al contrario, nel caso in cui  $T=300$  Nm, era stato trovato uno STE pari a  $13.77 \mu m$ , per cui, per le considerazioni fatte, il valore deve essere abbassato al massimo ammissibile a seconda del punto in cui ci si trova. Dal punto di vista fisico significa che in realtà, a causa della deformazione elevata per il fatto che la forza scambiata è molto alta, nel momento in cui ci si avvicina ai punti A' ed E' si viene ad avere una prematura transizione al caso in cui le coppie in contatto siano due; ciò provoca un incremento della rigidità, con conseguente riduzione dello spostamento, come visto.

Attraverso l'utilizzo di opportuni modelli CAD andrebbe anche considerata la variazione di spessore del dente per via della geometria ad evolvente, uno spessore diverso avrà un diverso contributo sul divario che, ci si aspetta, andrebbe a diminuire ancora di più rispetto a quanto valutato; risultati decisamente più accurati potranno poi essere sicuramente valutati con considerazioni sperimentali.

Comunque, ciò che è interessante valutare è la possibilità di dimostrare il motivo per cui, ad alte forze scambiate tra i denti, non si ha una demarcazione netta tra la situazione di una sola coppia di denti in contatto e il caso in cui ve ne siano due, ma si ha un andamento maggiormente graduale proprio per il fatto che deve interfacciarsi ad una graduale variazione dell'angolo e quindi della componente normale del *backlash* che deve essere annullato. Un andamento più "smooth" dello STE ha come risultato quello di abbassare i valori dei coefficienti di Fourier e questo avvicina al risultato trovato da Parker, Vjiayakar e Imajo [20], al quale si fa riferimento per accertare la validità dei risultati trovati.

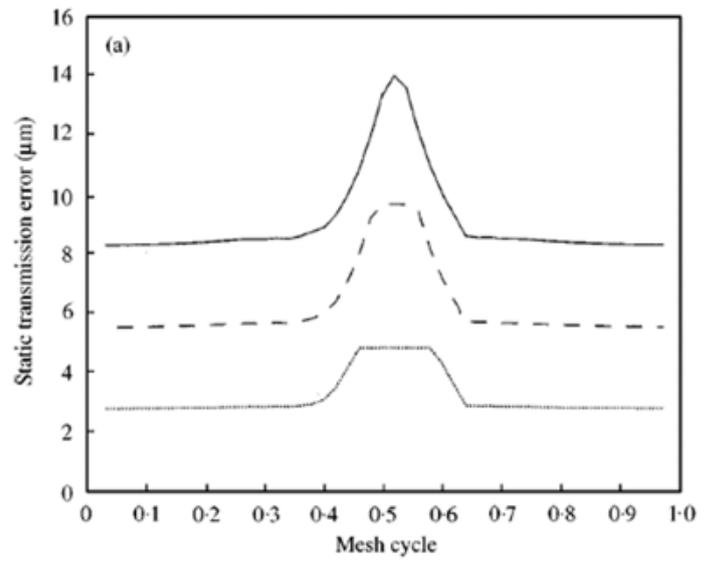
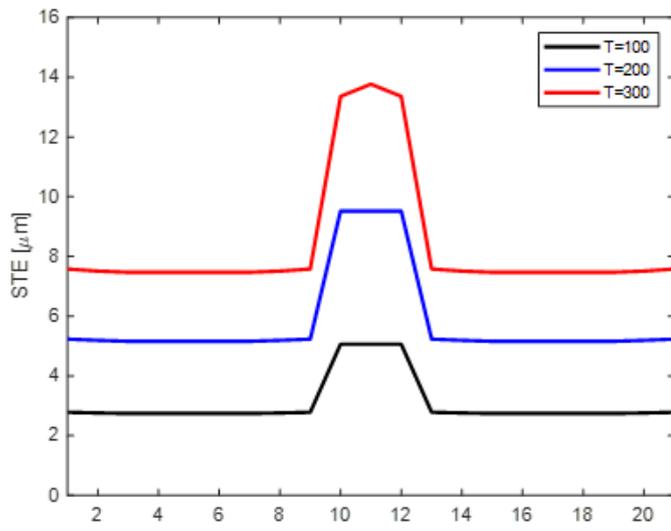


Figura 77: Andamento dello STE considerando il contributo del backlash

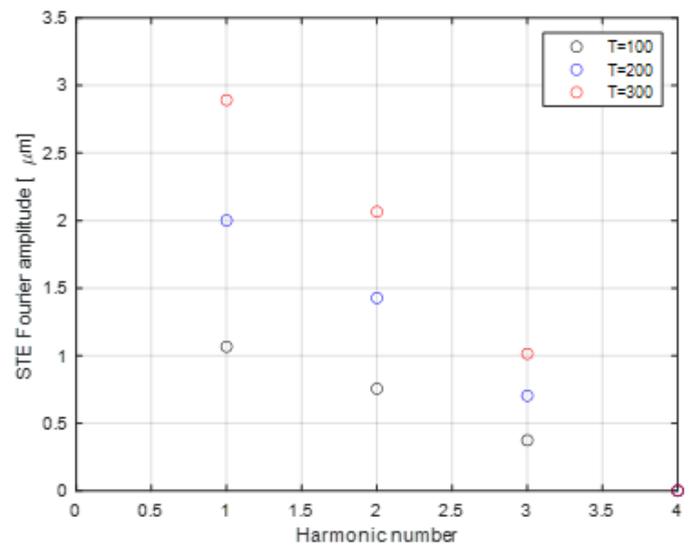
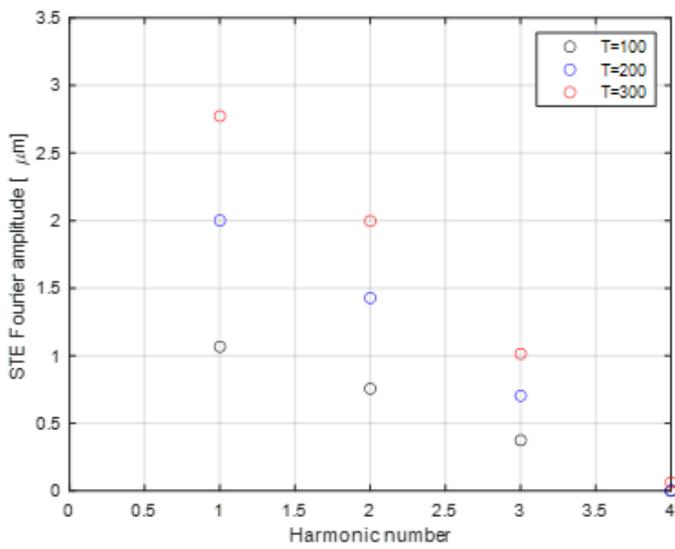


Figura 78: Confronto tra i coefficienti di Fourier nel caso che tiene conto del backlash e in quello che non lo considera

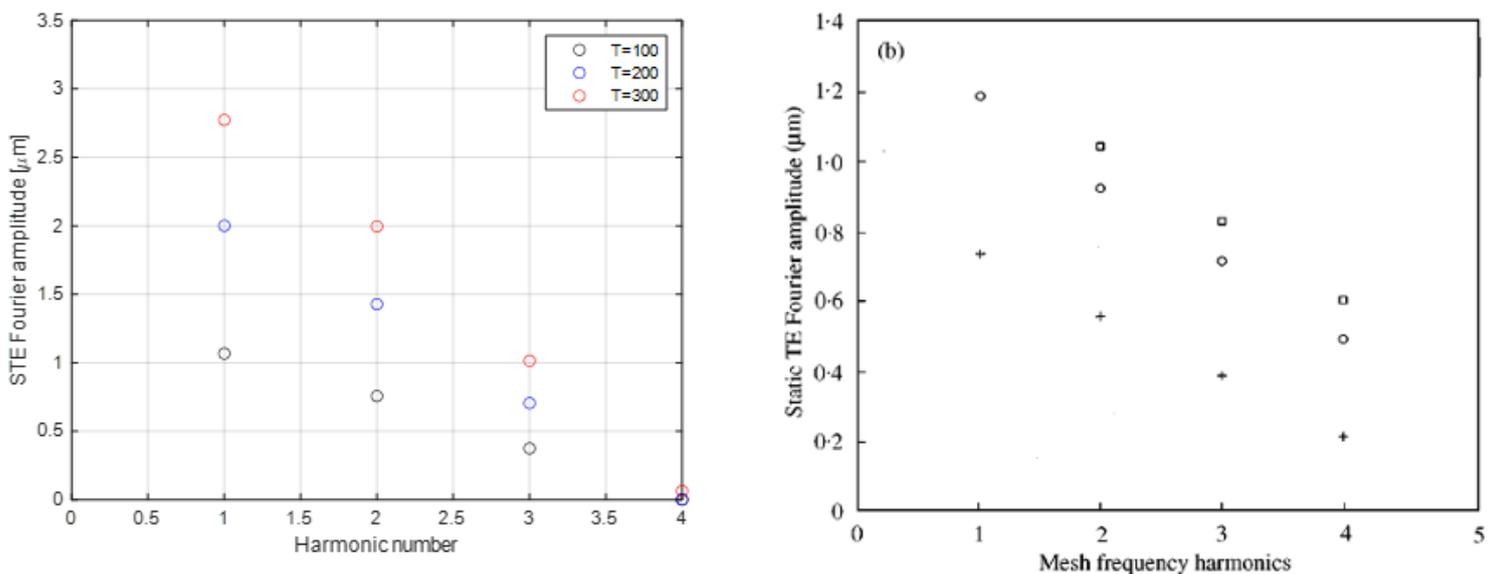


Figura 79: Confronto tra i coefficienti di Fourier valutati considerando il backlash con il risultato ottenuto da Parker, Vijayakar e Imajo [20]

A questo punto, utilizzando i valori ottenuti con tali considerazioni, si vanno a riportare gli andamenti della risposta dinamica che si ottiene. Il processo che porta alla risoluzione è analogo a quello precedentemente discusso con alcune modifiche.

Il valore della rigidità di contatto ora varia in conseguenza di un diverso vettore dello STE; poiché quest'ultimo si abbassa, a causa della limitazione sul divario massimo e l'impossibilità di avere compenetrazione, per garantire una uguale forza, il valore di  $k_c$  si alza; rimanendo comunque coerente con il valore di riferimento trovato da Parker, Vijayakar e Imajo [20] pari a  $461.2 \text{ N/m}$ .

$$k_c = 474.57 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Si riscontra un andamento più graduale con un picchi più bassi anche per la risposta dinamica, chiaramente questo viene a variare solo per la coppia maggiore perché è solo per questa condizione che si risente dell'effetto del *backlash*; infatti, si osserva in maniera ben visibile che il picco della risonanza è più basso (più semplice da osservare nel caso in cui si consideri una singola armonica); mentre la maggior gradualità della risposta viene osservata nel caso in cui si considerino 5 armoniche per il fatto che l'andamento rosso (relativo a  $T=300 \text{ Nm}$ ) è molto più vicino rispetto a quello blu ( $T=200 \text{ Nm}$ ) in relazione a quanto si otteneva senza tener conto del *backlash*.

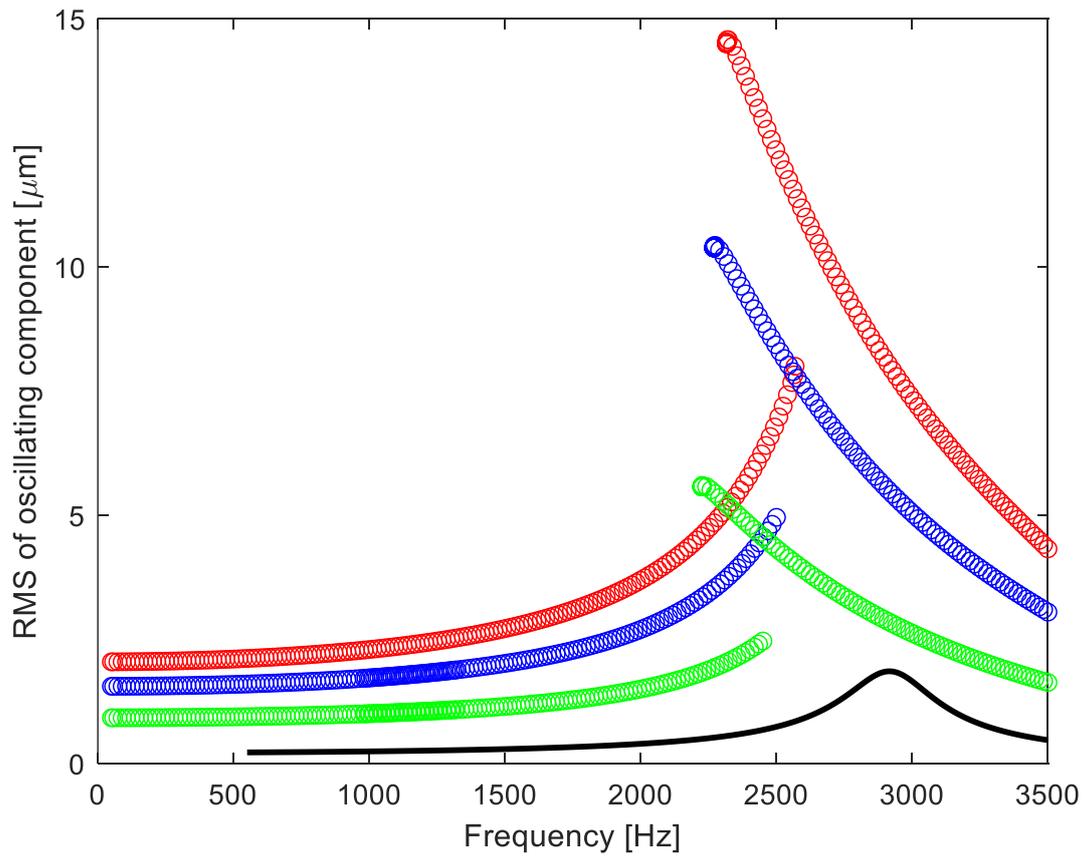


Figura 80: Andamento della risposta considerando l'effetto del backlash ed una sola armonica

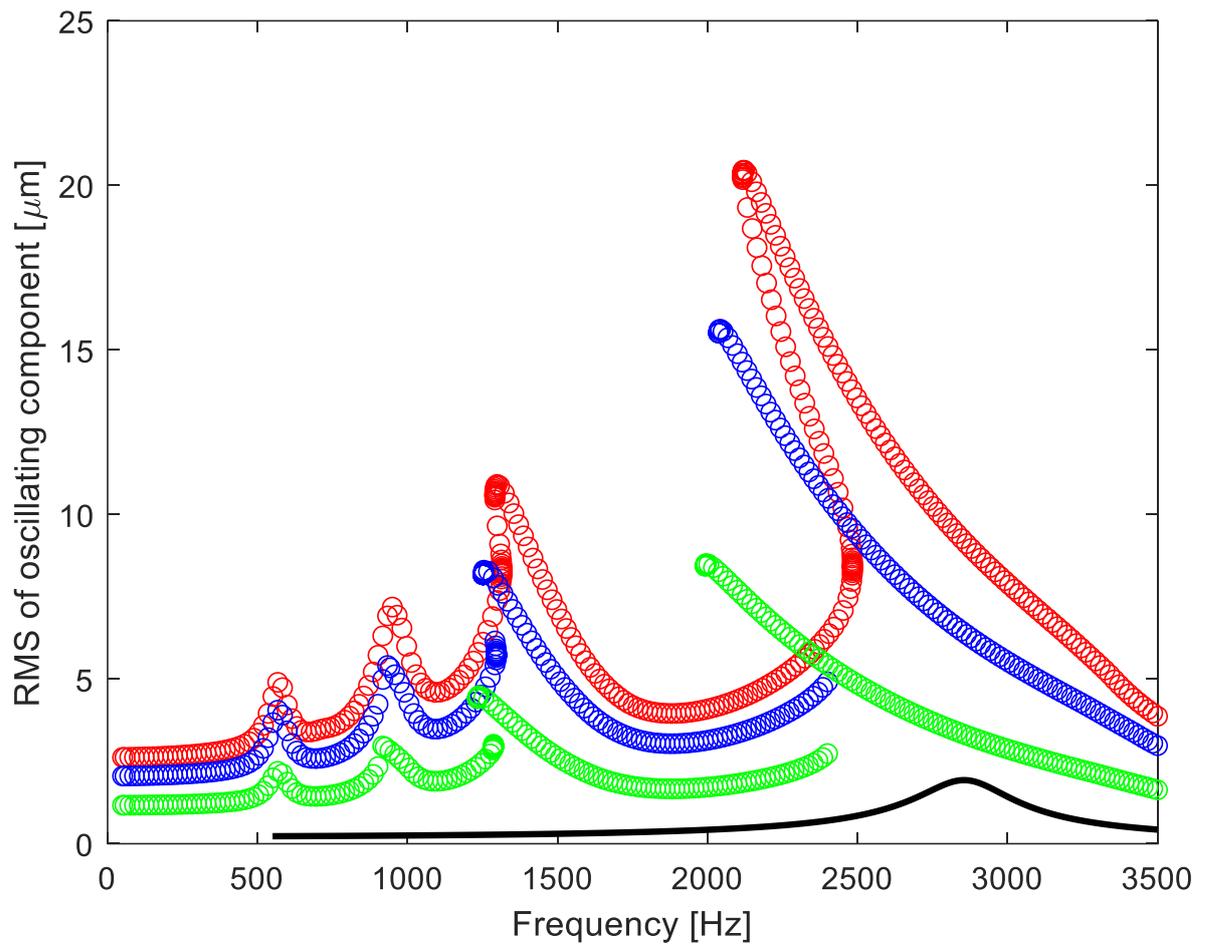


Figura 81: Risposta dinamica considerando il backlash e 5 armoniche

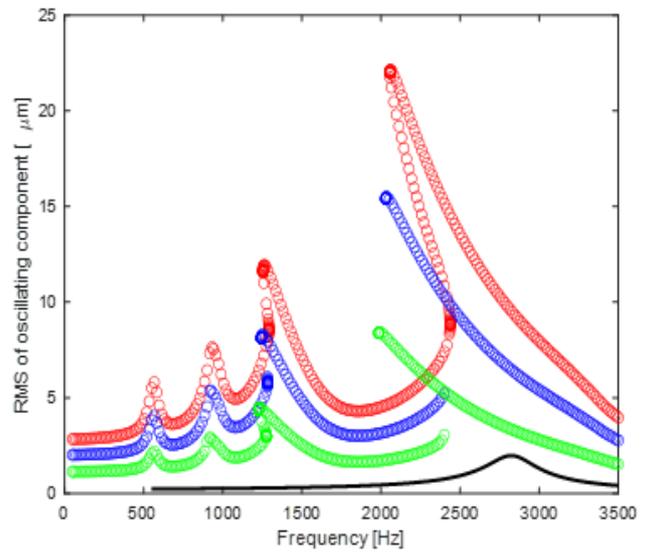
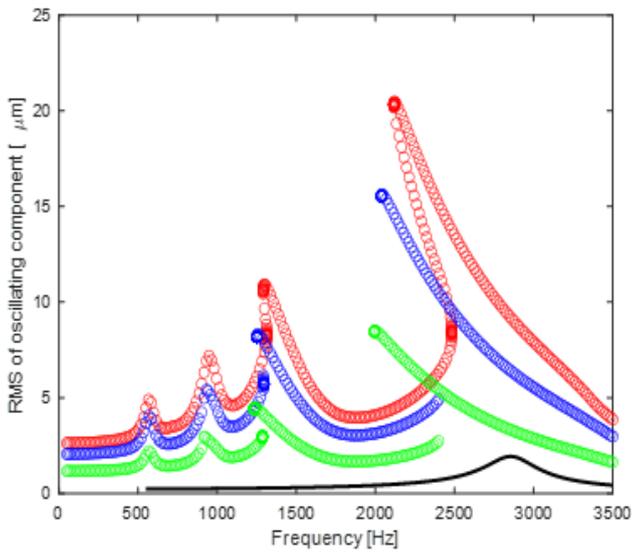


Figura 82: Confronto tra il caso che considera il backlash e quello che non lo considera

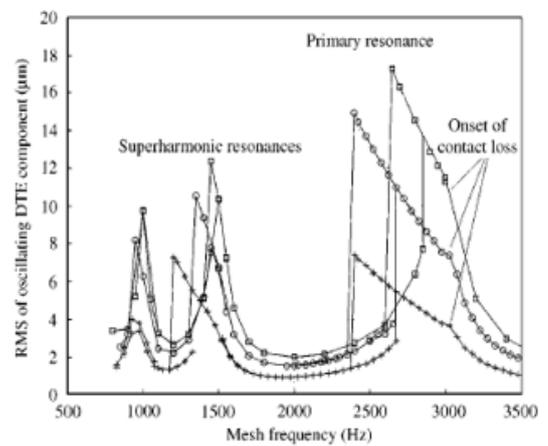
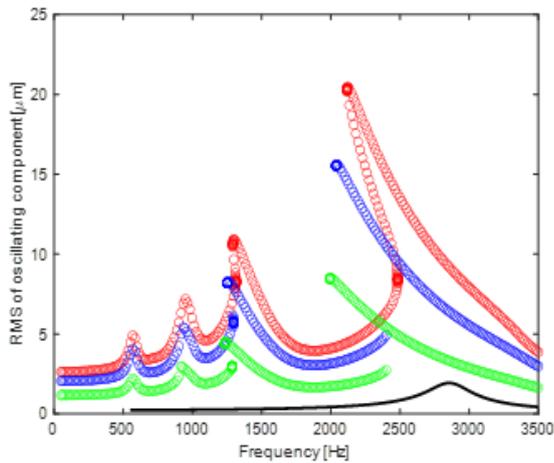


Figure 7. Finite element calculation of RMS of oscillating component of dynamic transmission error for  $T = 100$  (+),  $200$  (O) and  $300$  (□) Nm.

Figura 83: Confronto con il risultato dall'analisi FEM proveniente da letteratura [20]

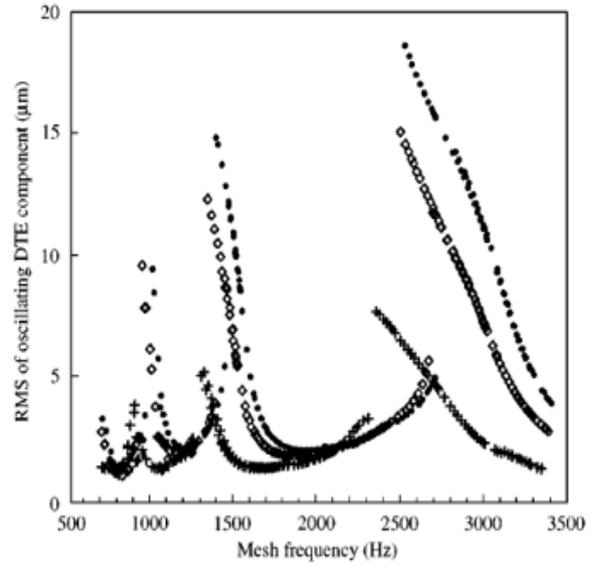
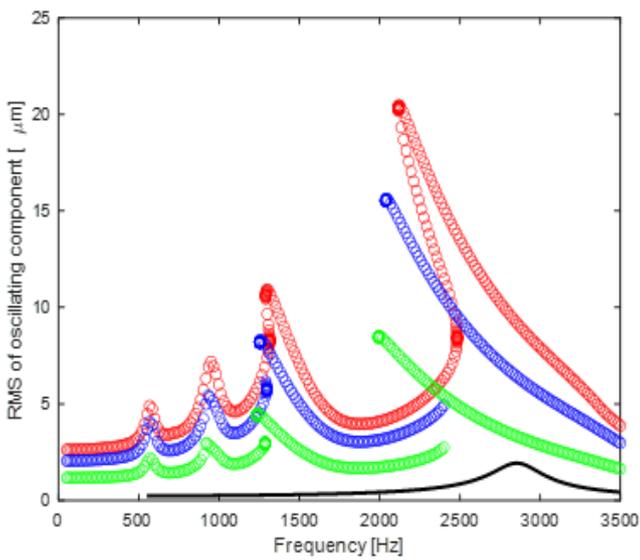


Figure 6. Experimentally measured RMS of oscillating component of dynamic transmission error for  $T = 100$  (+), 200 ( $\diamond$ ) and 300 ( $\star$ ) N m. From reference [4].

Figura 84: Confronto con il risultato sperimentale ottenuto da letteratura [20]

Le considerazioni in merito ai risultati ottenuti ricalcano quelle riportate al paragrafo 8. In questo caso è possibile apprezzare il contributo dell'effetto del *backlash* nell'abbassamento del picco che si raggiunge avvicinandosi così ai risultati trovati da Parker, Vjiayakar e Imajo [20]. Chiaramente, essendo rimasti in ambito lineare e non avendo condotto analisi più accurate con mesh più fini, non è stato possibile ricalcare esattamente il risultato a cui si fa riferimento; tuttavia, il fatto più interessante era sicuramente quello di poter dare evidenza che per lo studio dello *Static Transmission Error* non può essere sufficiente limitarsi a trattare i denti senza considerarne la posizione relativa, bensì sarebbe opportuno sviluppare modelli non lineari (in maniera analoga a quanto fatto per il modello di contatto) in modo da poter avere idea del fatto che il valore dello STE potrebbe essere sufficientemente elevato da vincere il divario tra profili e anticipare la transizione dal caso in cui si ha un'unica coppia di denti in contatto al caso in cui se ne hanno due, con conseguente variazione della rigidità e, in cascata, di tutti i risultati che ne conseguono.

## 10 Conclusioni

Dunque, questo lavoro ha avuto lo scopo di sviluppare un programma in grado di riportare il comportamento dinamico di due ruote che ingranano cercando di tener conto di alcuni dei principali aspetti che rendono tale dinamica altamente non lineare.

Per trattare tali temi, svariati sono i metodi che si possono utilizzare, in questo caso è stato necessario ricercare un compromesso tra il volere una metodologia in grado di fornire una soluzione veritiera e la necessità di avere a disposizione strumenti flessibili, rapidi e di facile comprensione affinché possano essere utilizzati durante le fasi di avamprogetto. Di conseguenza la scelta è ricaduta sull'utilizzo di un modello parametrico a parametri concentrati in modo da poter avere una immediata comprensione del contributo che ognuno dei parametri viene ad avere sulla soluzione.

Inizialmente sono stati studiati dei casi preliminari semplificati rispetto al caso di due ruote che ingranano nel tentativo di assumere maggior familiarità con la dinamica che si instaura nel momento in cui si ha un contatto tra corpi, andando così a simulare le varie casistiche, tra le quali la situazione di contatto intermittente che causa una deflessione dell'andamento della risposta forzata. Dunque, con questa ottica, sono stati studiati il caso di massa contro parete e il caso di due masse che si scontrano; a partire dai risultati che sono stati visualizzati è stato quindi possibile comprendere il ruolo giocato dai vari parametri che intervengono nel sistema.

Successivamente si è passati a studiare il caso di due ruote dentate che ingranano, dapprima facendo riferimento alla dinamica che si instaura quando sottoposte ad una forzante esterna e dopo quando tale forzante è interna (ovvero lo *Static Transmission Error*).

Applicando una forzante esterna alla coppia di ruote dentate si ritrova un risultato che è esattamente quello che ci si aspetta a valle delle considerazioni preliminari condotte sui casi massa contro parete e due masse contro. Ovvero, si osserva che un aumento della forzante esterna genera un campo vibrazionale più accentuato e favorisce la transizione tra una condizione di contatto chiuso ad una di contatto aperto (considerando ruote dentate, la condizione di partenza con contatto aperto chiaramente non è di interesse). In maniera analoga, si ritrova che un incremento della componente statica della forza a cui sono soggette le ruote garantisce una maggior permanenza nella condizione iniziale perché fa risentire meno del contributo del campo vibrazionale che si genera per la forzante armonica esterna.

In secondo luogo, si è trattato il caso ingegneristicamente di maggior interesse, ovvero considerare solo il contributo di una forzante interna (quella esterna rimane solo presente con il proprio contributo statico), rappresentata dallo *Static Transmission Error*. In maniera analoga a quanto fatto nella scelta del metodo risolutivo per trovare la risposta forzata, anche per la valutazione dello *Static Transmission Error*, si è utilizzato un codice agli elementi finiti in grado di calcolare in maniera lineare lo spostamento in funzione della forza che si scarica sul punto di contatto, senza andare eccessivamente nel dettaglio per la costruzione della mesh o delle inevitabili considerazioni non lineari che andrebbero fatte per simulare maggiormente la realtà.

Comunque, l'obiettivo di sviluppare un programma asservito alle fasi iniziali di progetto è rispettato, confermandone anche la bontà e veridicità attraverso il confronto con i risultati a disposizione da letteratura. Il punto di maggior interesse era sicuramente quello di comprendere come, una variazione dei parametri di progetto, potesse giocare nell'andare a creare variazioni nel comportamento dinamico che si viene ad ottenere.

In questo modo è stato osservato il contributo di una variazione della forzante esterna (o interna) e anche quello della sua componente statica. Nel caso che considera la presenza della forzante interna al sistema è stato necessario calcolare lo STE.

Proprio per la valutazione dello *Static Transmission Error* si potrebbe pensare, in un lavoro futuro, di approfondire alcuni aspetti quali ad esempio la costruzione di una *mesh* più raffinata tramite l'utilizzo di software opportuni in grado di trattare gli elementi finiti, ed anche l'uso di opportuni CAD per meglio comprendere il comportamento non lineare che inevitabilmente nasce per l'effetto del *backlash*. Su questo punto, infatti, l'utilizzo di strumenti che considerino direttamente la geometria complessiva delle ruote, permetterebbe di avere direttamente a disposizione la geometria ad evolvente e di conseguenza la differenza in termini di divario tra i profili dei denti che va appunto a causare una variabilità nel valore dello *Static Transmission Error* per via degli effetti discussi al paragrafo 9.

Proprio attraverso l'utilizzo di strumenti più evoluti si può prevedere la possibilità di ottenere un andamento della risposta forzata maggiormente simile al risultato sperimentale trovato da Parker, Vjiayakar e Imajo [20] a cui si fa riferimento; tuttavia, nonostante le approssimazioni e le inevitabili inaccurately presenti nel programma sviluppato, questo è in grado di simulare in modo sufficientemente accettabile il comportamento garantendo la possibilità di condurre già analisi molto interessanti circa le peculiarità di tali sistemi.

## 11 Bibliografia

- [1] Hughes, C. E., Van Zante, D. E., Heidmann, J.D. (2013). *Aircraft Engine Technology for Green Aviation to Reduce Fuel Burn*. 3<sup>rd</sup> Atmospheric and Space Environments Conference. Glenn Research Center, Cleveland, Ohio.
- [2] Mohd Tobi, A. L., Ismail, A. E. (2016). *Development in Geared Turbofan Aeroengine*. Structural Integrity and Monitoring Research Group, Malaysia.
- [3] Kurzke, J. (2009). *Fundamental differences between conventional and geared turbofans*. In Proceedings of the ASME Turbo Expo.
- [4] Harris, S. L. (1958). *Dynamic Loads on the Teeth of Spur Gears*. University of Cambridge.
- [5] Lin, J., Parker, R. G. (1999). *Analytical Characterization of the Unique Properties of Planetary Gear Free Vibration*. Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 121: 316-321.
- [6] Ambarisha, V. K., Parker, R. G. (2007). *Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 302: 577-595.
- [7] Eritenel, T., Parker, R. G. (2012). *An investigation of tooth mesh nonlinearity and partial contact loss in gear pairs using a lumped-parameter model*. Mechanism and Machine Theory, Vol. 56: 28-51.
- [8] Lin, J., Parker, R. G. (2002). *Mesh Stiffness Variation Instabilities in Two-Stage Gear Systems*. Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 124: 68-76.
- [9] Lin, J., Parker, R. G. (1999). *Sensitivity of planetary gear natural frequencies and vibration modes to model parameters*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 228(1): 109-128.
- [10] Velez, P. (2012). *On the modelling of spur and helical gear dynamic behaviour*. Mechanical Engineering, 75-106.
- [11] Bahk, C.-J., Parker, R. G. (2011). *Analytical Solution for the Nonlinear Dynamics of Planetary Gears*. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Vol. 6 (2): 021007.
- [12] Liu, J., Wang, S., Zhou, S., Wen, B. (2014). *Nonlinear behaviour of a spur gear pair transmission system with backlash*. Journal of Vibroengineering, Vol. 16 (8): 3922-3938.
- [13] Firrone, C. M., Zucca, S. (2011). *Modelling friction contacts in structural dynamics and its application to turbine bladed disks*. InTech.
- [14] Fasana, A., Marchesiello, S. (2006). *Meccanica delle vibrazioni*. Clut.
- [15] Kahraman, A., (1994). *Load Sharing Characteristics of Planetary Transmissions*. Mechanism and Machine Theory, Vol. 29 (8): 1151-1165.
- [16] Peletan, L., Baguet, S., Torkhani, M., Jacquet-Richardet, G. (2014). *Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor-stator dynamics*. Nonlinear Dynamics, Vol. 78 (4): 2501-2515.
- [17] Comparin, R. J., Singh, R. (1989). *Non-linear frequency response characteristics of an impact pair*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 134 (2): 259-290.
- [18] Kahraman, A., Singh, R. (1990). *Non-linear dynamics of a spur gear pair*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 142 (1): 49-75.

- [19] Curti, G. *Le ruote dentate*. Appunti del corso di Costruzione di Macchine, Corso di Ingegneria Meccanica.
- [20] Parker, R. G., Vijayakar, S. M., Imajo, T. (2000). *Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparison*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 237 (3): 435-455.
- [21] Blankenship, G. W., Kahraman, A. (1995). *Steady state forced response of a mechanical oscillator with combined parametric excitation and clearance type non-linearity*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 185 (5): 743-765.
- [22] Cirelli, M., Valentini, P.P., Pennestri, E. (2019). *A study of the non-linear dynamic response of spur gear using a multibody contact based model with flexible teeth*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 445: 148-167.
- [23] Cooley, C. G., Parker, R. G., Vijayakar, S. M. (2011). *A frequency domain finite element approach for three-dimensional gear dynamics*. Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 133: 041004-1:9.
- [24] Munro, R. G. (1990). *A review of the theory and measurement of gear transmission error*. Proceedings of the First Institution of Mechanical Engineers International Conference on Gearbox Noise and Vibration, paper C404/032, pag: 3-10.
- [25] Ozguven, H. N., Houser, D. R. (1988). *Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 125(1): 71-83.
- [26] Liu, J., Liu, S., Zhao, W., Zhang, L. (2019). *Dynamic Characteristics of Spur Gear Pair with Dynamic Center Distance and Backlash*. International Journal of Rotating Machinery. Vol. 2019.
- [27] Karba, B., Yildirim, N., Erdogan, F., Vardar, M. (2019). *A study on prediction & validation of meshing gear pair backlash under various manufacturing and assembly errors*. MATEC Web of Conferences 287, Power Transmission 2019.