

Politecnico di Torino

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA E AEROSPAZIALE Corso di Laurea magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Analisi RANS bidimensionale e tridimensionale per la palettatura di una turbina aeronautica

Relatori: Prof. Andrea Ferrero Prof. Francesco Larocca Candidato: Savino Pontino

Sommario

L'utilizzo della fluidodinamica computazionale, in inglese Computational Fluid Dynamics (CFD), risulta ormai fondamentale in ambito ingegneristico, soprattutto in campo aerospaziale. Se in passato, in fase di progettazione, lo strumento più efficace era quello della fluidodinamica sperimentale, il grosso impatto che ha avuto la fluidodinamica computazionale ha portato negli anni al susseguirsi di diversi studi, con lo scopo di sviluppare algoritmi e modelli in grado di fornire risultati sempre più precisi e aderenti a quelli sperimentali. Inoltre, lo sviluppo tecnologico in termini di risorse computazionale ha portato vantaggi in a livello di tempi, costi e facilità di analisi che ha reso indispensabile l'utilizzo della CFD. Allo stesso tempo, il largo utilizzo di questa tecnica ha fatto sì che si sviluppassero anche diversi software commerciali, che sfruttano la CFD per lo studio di flussi, che al giorno d'oggi sono largamente utilizzati sia in ambito accademico che industriale.

Il seguente lavoro si basa sull'utilizzo della fluidodinamica computazionale al fine di studiare un problema tipico della propulsione aerospaziale, ovvero il campo di moto che si sviluppa attorno ad una pala di turbina. Nello specifico, verranno da prima analizzati alcuni tra gli aspetti principali della CFD, quali la discretizzazione spaziale, le varie tipologie di griglie utilizzabili e i diversi modelli usati per l'approssimazione dei flussi turbolenti. Successivamente, mediante l'utilizzo di un codice ai volumi finiti, sono state svolte diverse simulazione su di una pala T106. Questo tipo di pala è usata per turbine di bassa pressione ed è caratterizzato da un profilo ad alta curvatura. La scelta della T106 è stata fatta per via dei diversi studi condotti su quest'ultima, che permettono quindi di avere diversi risultati sui quali confrontare il lavoro svolto.

Dopo una dettagliata descrizione sulle diverse griglie utilizzate, si è passato ad analizzare le simulazioni, le quali sono svolte utilizzando le Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS), cercando una soluzione di tipo stazionario. Il lavoro è stato quindi diviso i due fasi. La prima, nella quale sono state condotte simulazioni bidimensionali, è caratterizzata da uno studio sul confronto dei diversi modelli di turbolenza, e da un'analisi di convergenza sulla griglia al fine di valutare l'influenza di queste caratteristiche sui risultati della simulazione. Successivamente, scelti griglia e modello più adatti, si è proceduto valutando il comportamento della pala al variare delle caratteristiche del flusso in cui essa è immersa.

Nella seconda fase si è passati ad una simulazione tridimensionale del problema. Lo scopo di questa seconda parte è quella di studiare al meglio la T106, mettendo in luce una caratteristica tipica dei flussi che attraversano una palettatura, ovvero la formazione dei "flussi secondari". Si è andata quindi a valutare l'influenza delle strutture vorticose, che caratterizzano i flussi secondari, sul campo di moto e sulle prestazioni della pala stessa. I risultati ottenuti in entrambe le fasi sono stati quindi confrontati con quelli sperimentali o numerici presenti in bibliografia.

Indice

In	dice		iii
El	enco	delle figure	\mathbf{v}
1	Intr	oduzione	1
	1.1	Importanza della fluidodinamica computazionale nel campo inge-	
		gneristico	1
	1.2	Applicazione nel lavoro di tesi	2
2	Moo	delli di turbolenza: RANS	4
	2.1	Equazioni di governo e media alla Reynolds	5
		2.1.1 Decomposizione e media alla Reynolds	6
		2.1.2 Reynolds-Averaged Navier-Stokes	8
		2.1.3 Ipotesi di Boussinesq	9
		2.1.4 Equazione di trasporto dello sforzo di Reynolds	11
	2.2	Modelli con chiusura al primo ordine	12
		2.2.1 Modello Spalart-Allmaras	12
		2.2.2 Modello $K - \varepsilon$	13
		2.2.3 $K - \omega \in SST$	15
3	Disc	cretizzazione spaziale	18
	3.1	Metodo ai volumi finiti	21
		3.1.1 Metodo dei volumi finiti per una griglia non strutturata	23
		3.1.2 Schemi cella centrati	25
		3.1.3 Schema cella-vertice	26
		3.1.4 Confronto tra schemi cella-centrati e cella-vertice	28
4	Ana	lisi CFD	30
	4.1	Geometria	30
		4.1.1 Geometria del dominio	31
	4.2	Generazione della griglia	35

INDICE

		4.2.1	Mesh 3D	42	
	4.3	Scelta	del modello fisico	47	
	4.4	Studio	sui modelli di turbolenza	48	
		4.4.1	Condizioni al contorno ed iniziali	48	
		4.4.2	Spalart-Allmaras	50	
		4.4.3	$K-\varepsilon$	51	
		4.4.4	Standard $K - \omega \in K - \omega$ SST	52	
		4.4.5	Confronto trai diversi modelli	53	
	4.5	Studio	di convergenza sulla griglia	60	
		4.5.1	Effetto della variazione della mesh sui risultati	61	
	4.6	Influen	za del numero di Reynolds	67	
		4.6.1	Effetto della variazione del Re sui risultati	69	
	4.7	Influen	za del numero di Mach	72	
		4.7.1	Effetto della variazione del Ma sui risultati	74	
	4.8	Simula	zione 3D	77	
		4.8.1	Campo di velocità	77	
		4.8.2	Coefficiente di pressione	79	
		4.8.3	Streamline	82	
		4.8.4	Coefficiente di perdita di pressione totale	84	
5	Con	clusior	ni	88	
Bi	Bibliografia				

iv

Elenco delle figure

2.1	Velocità mediata alla Reynolds	7
$3.1 \\ 3.2$	 (a) griglia body-fitted e (b) griglia cartesiana. (a) esempio di griglia strutturata (b) griglia strutturata body-fitted. 	19
0.2	che prende anche il nome di $curvilinea.[1]$	19
3.3	Griglia multiblocco. Le linee più spesse identificano i diversi blocchi,	
	mentre è possibile notare, laddove sono presenti le griglie con celle	
	più piccole, l'utilizzo della tecnica hanging nodes [1]	20
3.4	Griglia con tecnica <i>chimera</i> [1]	20
3.5	Griglia non strutturata con tecnica ibrida $[1]$	21
3.6	A sinistra un volume di controllo per uno schema cella centrato, a	
~ -	destra un volume di controllo per uno schema cella–vertice (dual) [1]	22
3.7	Volume di controllo per uno schema cella centrato.[1]	26
3.8	Volume di controllo per uno schema cella-vertice dual.[1]	27
3.9	volume di controllo per uno schema median-dual per una griglia	20
	triangoarre surata. $[1]$	20
11	Configurazione geometrica T106A [5]	01
4.1		31
4.1 4.2	Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentano	31
4.1 4.2	Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentano la posizione delle palette adiacenti a quella studiata, ottenute con	31
4.1	Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentano la posizione delle palette adiacenti a quella studiata, ottenute con la condizioni di periodicità	31 33
4.1 4.2 4.3	Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentano la posizione delle palette adiacenti a quella studiata, ottenute con la condizioni di periodicità	31 33 34
4.1 4.2 4.3 4.4	Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentano la posizione delle palette adiacenti a quella studiata, ottenute con la condizioni di periodicità	31 33 34 34
4.1 4.2 4.3 4.4 4.5	Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentano la posizione delle palette adiacenti a quella studiata, ottenute con la condizioni di periodicità	31 33 34 34 36
4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6	Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentano la posizione delle palette adiacenti a quella studiata, ottenute con la condizioni di periodicità	31 33 34 34 36 36
$4.1 \\ 4.2 \\ 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \\ 4.7 \\ 4.2 \\ 4.6 \\ 4.7 \\ 4.2 $	Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentano la posizione delle palette adiacenti a quella studiata, ottenute con la condizioni di periodicità Dominio di calcolo 3D. Dettaglio della T106 con l'endwall Dettaglio Prism Layer Dettaglio prism layer nei pressi del bordo di attacco Mesh1 per il profilo T106A	31 33 34 34 36 36 39
$4.1 \\ 4.2 \\ 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \\ 4.7 \\ 4.8 \\ $	Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentano la posizione delle palette adiacenti a quella studiata, ottenute con la condizioni di periodicità	 31 33 34 34 36 36 39 30
$\begin{array}{c} 4.1 \\ 4.2 \\ 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \\ 4.7 \\ 4.8 \\ 4.0 \\ \end{array}$	Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentano la posizione delle palette adiacenti a quella studiata, ottenute con la condizioni di periodicità Dominio di calcolo 3D. Dottaglio della T106 con l'endwall Dettaglio Prism Layer Dettaglio prism layer nei pressi del bordo di attacco Mesh1 per il profilo T106A Mesh2 n mil nue file T106 A	 31 33 34 34 36 36 39 39 40
$\begin{array}{c} 4.1 \\ 4.2 \\ 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \\ 4.7 \\ 4.8 \\ 4.9 \\ 4.10 \end{array}$	Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentano la posizione delle palette adiacenti a quella studiata, ottenute con la condizioni di periodicità	 31 33 34 34 36 36 39 39 40
$\begin{array}{c} 4.1 \\ 4.2 \\ 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \\ 4.7 \\ 4.8 \\ 4.9 \\ 4.10 \end{array}$	Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentanola posizione delle palette adiacenti a quella studiata, ottenute conla condizioni di periodicitàDominio di calcolo 3D.Dettaglio della T106 con l'endwallDettaglio Prism LayerDettaglio prism layer nei pressi del bordo di attaccoMesh1 per il profilo T106ADettagli del bordo di attacco e del bordo di fuga con mesh effettuatatramite Volumetric ControlMesh2 per il profilo T106A, sono ben evidenti anche i volumi diaontrollo qui bordi dallo stacco	 31 33 34 34 36 36 39 39 40 41

4.11	Mesh3 per il profilo T106A	42
4.12	A sinistra si ha il <i>Prism Layer</i> generato sulla parete di endwall. A	
	destra il dettaglio sull'intersezione tra i Prism Layer di profilo e	
	parete	43
4.13	Mesh 3D per il profilo T106A	45
4.14	Piano x-y della Mesh 3D per il profilo T106A	45
4.15	Piano y-z della Mesh 3D per il profilo T106A	46
4.16	Dettaglio Mesh 3D sulla superfici del profilo T106A e dell'endwall .	46
4.17	Campo di velocità attorno alla pala T106A ottenuto con l'utilizzo	
	del modello Spalart-Allmaras	50
4.18	Campo di velocità attorno alla pala T106A ottenuto con l'utilizzo	
	del modello $k - \varepsilon$	51
4.19	Campo di velocità attorno alla pala T106A ottenuto con l'utilizzo	
	del modello $k - \omega$ standard	52
4.20	Campo di velocità attorno alla pala T106A ottenuto con l'utilizzo	
	del modello $k - \omega$ SST standard	53
4.21	Andamento del coefficiente di pressione lungo il profilo T106 al	
	variare del modello di turbolenza e ottenuto con i dati sperimentali.	54
4.23	Dettaglio dell'andamento del coefficiente di pressione nei pressi del	
	bordo di attacco	55
4.22	(a)Andamento del numero di Mach a monte e valle del profilo.(b)	
	Andamento del numero di Reynolds a monte e valle del profilo	56
4.24	Campo di velocità ottenuto attraverso l'utilizzo del modello $K-\omega$	
	SST con modello di transizione $\gamma - Re_{\theta} \dots \dots \dots \dots \dots$	58
4.25	Confronto distribuzione coefficiente di pressione con e senza modello	
	di transizione $\gamma - Re_{\theta}$	59
4.26	Campo di moto ottenuto con l'utilizzo della griglia $mesh\ 2$ \ldots .	61
4.27	Campo di moto ottenuto con l'utilizzo della griglia $mesh \ 3 \ \ldots \ \ldots$	61
4.28	Distribuzione del coefficiente di pressione ottenuto con varie griglie	
	per il profilo T106A	62
4.29	Coefficiente di perdita di pressione totale valutato a $x/c_{ax} = 1.1$ con	
	tre diverse griglie	63
4.30	Coefficiente di perdita di pressione totale valutato a $x/c_{ax} = 1.3$ con	
	tre diverse griglie	64
4.31	Coefficiente di perdita di pressione totale valutato a $x/c_{ax} = 1.5$ con	
	tre diverse griglie	64
4.32	Campo di velocità attorno al profilo T106A con flusso caratterizzato	
	da $Re_{2th} = 500000 \text{ e } M = 0.59.$	69
4.33	Distribuzione del coefficiente di pressione per $Re = 120000$ e $Re =$	
	500000 ottenuta con dati sperimentali	70

ELENCO DELLE FIGURE

4.34	Distribuzione del coefficiente di pressione per $Re = 120000$ e $Re =$	
	500000 ottenuta con la CFD.	70
4.35	Campo di velocità attorno al profilo T106A per $M = 0.3$ e $Re =$	
	500000	73
4.36	Campo di velocità attorno al profilo T106A per $M = 0.8$ e $Re =$	
	500000	74
4.37	Distribuzione del coefficiente di pressione per $Re = 500000$ al variare	
	del numero di Mach ottenuta con la CFD.	75
4.38	Distribuzione del coefficiente di pressione per $Re = 500000$ al variare	
	del numero di Mach ottenuta con dati sperimentali.	76
4.39	Campo di velocità a $z \simeq 0 \mathrm{mm}$ della paletta T106A	78
4.40	Campo di velocità a $z \simeq 150 \mathrm{mm}$ della paletta T106A	78
4.41	Distribuzione del coefficiente di pressione lungo la span-direction	
	della paletta ottenuta con lo studio numerico.	80
4.42	Distribuzione del coefficiente di pressione lungo la lungo la span-	
	direction della paletta da $[6]$	80
4.43	Valore della y^+ valutato sulle celle prossime alla parete lungo tutto	
	il dominio	81
4.44	Distribuzione di pressione statica lungo la superficie della pala T106A	81
4.45	Visualizzazione delle linee di corrente nei pressi del bordo di attacco	82
4.46	Visualizzazione delle linee di corrente lungo il dorso della paletta.	83
4.47	Visualizzazione delle linee di corrente nei pressi del bordo di fuga .	83
4.48	Coefficiente di perdita di pressione a $x/c_{ax} = 0.9$. A sinistra i	
	risultati ottenuti dal lavoro di tesi, a destra quelli dello studio di	
	confronto [8]	85
4.49	Coefficiente di perdita di pressione a $x/c_{ax} = 1.03$. A sinistra i	
	risultati ottenuti dal lavoro di tesi, a destra quelli dello studio di	
	confronto [8]	86
4.50	Coefficiente di perdita di pressione a $x/c_{ax} = 1.1$. A sinistra i	
	risultati ottenuti dal lavoro di tesi, a destra quelli dello studio di	
	confronto [8]	86
4.51	Coefficiente di perdita di pressione a $x/c_{ax} = 1.3$. A sinistra i	
	risultati ottenuti dal lavoro di tesi, a destra quelli dello studio di	
	confronto [8]	87

vii

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Importanza della fluidodinamica computazionale nel campo ingegneristico

Lo studio di problemi di natura fluidodinamica ha sempre ricoperto un ruolo di prim'ordine in ambito ingegneristico, e non solo, per via delle diverse applicazioni per cui questo si rende necessario. Basti pensare all'importanza che lo studio dell'aerodinamica esterna ed interna ricopre nel campo aerospaziale, automotive o ambientale, o se si considera la fluidodinamica e la sua importanza anche al livello biomedico per lo studio dei flussi corporei. Tuttavia l'analisi fluidodinamica in passato ha rappresentato un vero è proprio ostacolo per via dei limitati strumenti di ricerca che si possedevano. Infatti, per molto tempo l'unico metodo in grado di fornire risultati concreti era quello della fluidodinamica sperimentale, in quanto la risoluzione analitica di tali problemi è limitata ad alcuni casi semplificati. Questo è dovuto al fatto che i modelli matematici, utilizzati per descrivere la meccanica e la termodinamica dei fluidi, sono caratterizzati da sistemi di equazioni differenziali che risultano irrisolvibili analiticamente, se non per pochi semplici casi.

A partire dagli anni '30 lo sviluppo tecnologico ha portato ad avere sempre più risorse computazionali, questo ha fatto sì che si sviluppasse un nuovo strumento per la risoluzione dei sistemi di equazioni differenziali che caratterizzano i modelli matematici appena citati, ovvero la fluidodinamica computazionale. La CFD (computational fluid dynamics) è basata sulla risoluzione numerica di tali sistemi permettendo di ottenerne una soluzione che approssima in maniera ottimale il comportamento naturale dei fluidi. Seppur in un primo momento fu limitata dalle scarse risorse computazionali, al giorno d'oggi ricopre un ruolo da protagonista nella fase di progettazione in diversi settori, e l'ormai ottima precisione dei codici permette di ottenere diversi vantaggi rispetto allo studio sperimentale. Tra questi sicuramente è importante sottolineare l'importante riduzione dei tempi dell'analisi. Infatti, seppur il tempo richiesto per eseguire la sperimentazione è ridotto, tutta la fase di allestimento della catena di misura, costruzione del modello e integrazione tra modello e catena di misura richiede tempi solitamente molto lunghi. Ovviamente l'aumento dei tempi significa anche un aumento dei costi, che si vanno a sommare al fatto che sia la strumentazione, sia il modello e sia l'utilizzo della galleria del vento risultano essere molto onerosi. A questo si aggiunge che l'utilizzo, in fase di progettazione, della tecnica sperimentale risulta al quanto complesso nel momento in cui si devono effettuare modifiche al modello che portano ad aumentare ancora costi e tempo di esecuzione. Inoltre, per molti problemi risulta fisicamente impossibile andare a misurare determinate grandezze che rendono quindi complicato l'approccio sperimentale.

Se da un lato la CFD ha risolto le problematiche appena descritte dall'altro questa risente ancora di alcune limitazioni. Tra tutte la possibilità di realizzare, all'interno delle simulazioni, elevati numeri di Reynolds. Infatti il costo e i tempi computazionali sono proporzionali proprio al numero di Reynolds, perciò il metodo risente dei limiti tecnologici in termini di risorse computazionali disponibili, ovviamente questo problema risulta sempre meno rilevante con il passare degli anni e lo sviluppo di nuove tecnologie. Al contrario, nel caso sperimentale è possibile, con l'utilizzo di apposite tecniche (ad esempio gallerie del vento criogeniche e pressurizzate), studiare flussi con numeri di Reynolds elevati. Un altro problema della CFD è quello di andare a trattare alcuni casi particolari, come ad esempio flussi in cui si ha lo strato limite in fase di transizione, per i quali i modelli matematici a disposizione risultano estremamente sensibili.

Posti in evidenza i vantaggi e gli svantaggi della fluidodinamica sperimentale e della computazionale, risulta chiaro che ad oggi, in fase di progettazione, l'uso combinato tra le due tecniche sia quello più seguito. In particolare, si va sempre più verso una prima fase di studio computazionale seguita da una fase sperimentale utile al confermare i risultati ottenuti in modo da validarli.

1.2 Applicazione nel lavoro di tesi

Come detto in testa al precedente paragrafo, il settore aerospaziale è uno dei campi di principale applicazione della CFD. Nel seguente lavoro di tesi si andrà a valutare lo studio di una paletta di turbina di bassa pressione ad uso aeronautico attraverso il software commerciale Star CCm+, utilizzando le RANS. Nello specifico si tratta della pala T106, nelle particolare configurazione T106A. Questa scelta è dettata dal fatto che sono presenti diversi studi sia sperimentali che numerici in letteratura attraverso i quali è possibile quindi validare il risultati ottenuti.

Il lavoro di sviluppa in due fasi. La prima è caratterizzata da uno studio bidimensionale del caso, in cui ci si pone il problema di valutare come due caratteristiche

fondamentali delle RANS possano influenzare il risultato delle simulazioni, ovvero la scelta della griglia di calcolo e scelta del modello matematico per la discretizzazione della turbolenza. Successivamente, avendo fissato griglia e modello di turbolenza più adatto, si è proceduto con lo studio del campo di moto sviluppato intorno alla pala al variare delle condizioni del flusso, nello specifico si è valutato l'effetto del numero di Mach e del numero di Revnolds.In questo modo è stato possibile valutare sia le prestazioni della T106, sia l'influenza che tali grandezze hanno sulla bontà delle soluzioni numeriche. Nella seconda fase si è passati allo studio tridimensionale del problema. In questo modo si è potuto valutare l'evoluzione del campo di moto lungo lo spessore della pala. Inoltre, avendo introdotto a presenza della parete di endwall alla base della pala, si è messa in evidenza la presenza delle strutture vorticose tipiche dei flussi secondari. Questi ultimi sono frutto dell'interazione tra lo strato limite dell'endwall e le palettature di una turbomacchina e sono causa di una parte importante delle perdite che si verificano in questo tipo di strutture. Proprio la grande influenza che hanno sulle perdite rende particolarmente interessante lo studio di tale fenomeno mediante la CFD. Infine, il confronto tra i risultati sperimentali e quelli di autorevoli studi numerici

permette di valutare l'efficacia del lavoro e la fattibilità di uno studio del genere mediante l'uso di un software commerciale.

Capitolo 2 Modelli di turbolenza: RANS

I flussi, caratterizzati da un comportamento turbolento,ricoprono un ruolo di grande interesse in campo ingegneristico. Anche il flusso che caratterizza il campo di moto che verrà studiato all'interno di questa tesi rientra all'interno di questa tipologia, perciò viene qui presentata una panoramica dei modelli utilizzati per effettuare simulazioni CFD su flussi turbolenti con una particolare attenzione alle RANS (Reynold-Averaged Navier-Stokes equations) che verranno successivamente utilizzate.

Il moto delle particelle di un flusso turbolento è del tutto irregolare e caratterizza il comportamento caotico delle fluttuazioni delle variabili che descrivono il flusso stesso. Proprio per via di questa natura risulta quasi impossibile effettuare una simulazione numerica diretta della turbolenza attraverso le equazioni di Navier-Stokes (tecnica nota come Direct Numerical Simulation, DNS), se non per pochi casi semplificati e caratterizzati da flussi a basso numero di Reynolds $(Re \sim 10^4 \cdot 10^5)$. Il limite di questa tecnica sta nel costo computazionale, questo è proporzionale, a sua volta, al numero di Re. Nello specifico, al fine di ottenere una corretta risoluzione spaziale, sarà necessaria una griglia con numero di celle computazionali proporzionale al $Re^{9/4}$ e un CPU-time proporzionale a Re^3 . Per svincolarsi da questo problema sono stati sviluppati diversi modelli di turbolenza che si possono racchiudere in tre classi principali:

- con chiusura del primo ordine (*first-order* closures);
- con chiusura del secondo ordine (*second-order* closures);
- Large-Eddy Simulation (LES).

Ognuno di questi avrà caratteristiche diverse, che ne definiscono una maggiore adeguatezza nel descrivere particolari tipologie di flusso (ad esempio: con strato limite attaccato o separato, mixing flow, flussi di scia), pertanto risulta necessaria una buona conoscenza di base del fenomeno che si vuole studiare, al fine di scegliere il modello più opportuno. Stesso discorso riguarda il costo computazionale, che sarà diverso da un modello all'altro, e che deve essere confrontato con le caratteristiche della macchina utilizzata, in relazione anche ai tempi computazionali.

2.1 Equazioni di governo e media alla Reynolds

Le equazioni di governo della fluidodinamica possono essere espresse in diverso modo a seconda del tipo di flusso che si sta trattando e della forma in cui si decide di esprimerle (differenziale, integrale). In seguito verranno scritte le equazioni di Navier-Stokes, in forma differenziale, sia per il caso di flusso Newtoniano comprimibile, sia per quello incomprimibile. In entrambi i casi verranno omessi i termini sorgente. Si parte dal caso di flusso comprimibile:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j H) = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \tau_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$
(2.1)

Le equazioni descrivono rispettivamente il bilancio di massa, quantità di moto ed energia. Dove v_i rappresenta la componente della velocità $(\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]^T)$ e x_i la coordinata della direzione. La τ_{ij} indica la componente del tensore di attrito viscoso (viscous stress tensor). Infine, nella terza equazione, compaiono l'energia totale E e l'entalpia totale H, espresse come:

$$E = e + \frac{1}{2}v_i v_i$$
 $H = h + \frac{1}{2}v_i v_i$ (2.2)

Le stesse equazioni possono essere riscritte per il caso di flusso incomprimibile. È utile analizzare anche questo caso, in quanto essendo di più facile scrittura, permette di trattare i successivi argomenti in maniera facilitata.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = k \nabla^2 T$$

Dove ν rappresenta la viscosità cinematica ed è pari a $\nu = \mu/\rho$. È bene notare che nel caso di flusso incomprimibile l'equazione di bilancio dell'energia (la terza del

sistema (2.1)) è disaccoppiata dalle altre due leggi di bilancio, che quindi possono essere risolte autonomamente da quest'ultima.

2.1.1 Decomposizione e media alla Reynolds

Per la risoluzione delle Navier-Stokes, Reynolds propone un approccio differente alle equazioni. Tale metodo si basa sulla decomposizione delle grandezze che caratterizzano il flusso in una parte media e in una fluttuante. Nello specifico, la generica variabile a verrà indicata come:

$$a = \overline{a} + a' \tag{2.4}$$

Dove \overline{a} indica il valore medio della grandezza e a' quello delle fluttuazioni turbolente. Il valore medio può essere definito in diversi modi, in particolare si parlerà di:

• Media temporale. Definita come:

$$\overline{a} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} a \, dt \tag{2.5}$$

Il valore ottenuto sarà un valore medio \overline{a} che varia solo nello spazio, mentre resta costante nel tempo. Fisicamente , il fatto che $T \to \infty$ significa che il valore dell'intervallo temporale, T, è più grande della scala temporale che caratterizza le fluttuazioni turbolente del flusso che si sta studiando. Queste caratteristiche fanno si che questo tipo di media si presti bene a descrivere flussi che presentano turbolenza stazionaria.

• Media spaziale. Definita come:

$$\overline{a} = \lim_{\Omega \to \infty} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} a \, d\Omega \tag{2.6}$$

Dove Ω rappresenta il volume di controllo. Al contrario del caso precedente, qui il valore medio ottenuto varia nel tempo, mantenendosi uniforme nello spazio.Per questo, questo tipo di operazione risulta opportuno per descrivere turbolenze omogenee.

• Media di insieme. Definita come:

$$\overline{a} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} a \tag{2.7}$$

In questo caso il valore medio è funzione sia del tempo che dello spazio ed è utile per descrivere la turbolenza in generale.

Le equazioni di Navier-Stokes verranno risolte in termini di valore medio, in quanto la sua conoscenza risulta più interessante da un punto di vista pratico, perciò bisogna aver chiaro come viene definito il valore medio delle grandezze. Le tre tipologie di media risultano equivalenti là dove la turbolenza risulta sia stazionaria che omogenea e si parlerà di ipotesi ergodica.

Applicando questo approccio alle equazioni di governo, nel caso di flussio incomprimibile, si possono riscrivere nelle eq. (2.1), le variabili:

$$v_i = \overline{v_i} + v'_i \qquad p = \overline{p} + p' \tag{2.8}$$

Nella figura (2.1) viene mostrato un esempio di media alla Reynolds effettuata sulla velocità. È facile notare alcune caratteristiche riguardanti le fluttuazioni turbolente e la media di queste ultime. Infatti, è noto che la media delle fluttuazioni, in questo caso della velocità, è pari a zero $\overline{v'_i} = 0$, avendo valori di fluttuazioni, sia negativi che positivi, che oscillano intorno al valore medio. Allo stesso tempo, non sarà nulla la media del prodotto delle fluttuazioni $\overline{v'_iv'_i} \neq 0$, mentre questo sarà vero anche per $\overline{v'_iv'_j}$ solo se esiste una correlazione tra le componenti di velocità.



Figura 2.1: Velocità mediata alla Reynolds

Là dove la densità non è costante, è possibile applicare una diversa decomposizione, detta alla **Favre**, alle variabili che compaiono nelle eq. (2.1). Tuttavia, può risultare complicato utilizzare questo tipo di approccio su tutte le variabili che compaiono nel sistema delle equazioni di governo, per via delle ulteriori correlazioni dovute alle fluttuazioni di densità. Perciò si tende ad utilizzare un approccio misto, andando a mediare alla Reynolds la densità e la pressione, mentre per le restanti variabili si utilizzerà una scomposizione alla Favre. Un esempio di media alla Favre, può essere visto sulla componente di velocità, il cui valore medio è calcolato come:

$$\widetilde{v}_i = \frac{1}{\overline{\rho}} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho v_i \, dt \tag{2.9}$$

In questo caso la $\overline{\rho}$ rappresenta proprio la densità mediata alla Reynolds e la componente di velocità verrà espressa come:

$$v_i = \widetilde{v}_i + v_i'' \tag{2.10}$$

Con ancora una volta la scomposizione in un valore medio \tilde{v}_i ed una parte fluttuante v''_i della grandezza. È bene notare che continueranno a valere le caratteristiche descritte precedentemente sull'operatore di media sulle fluttuazioni turbolente:

$$\widetilde{v_i''} = 0 \qquad \widetilde{v_i''v_i''} \neq 0 \qquad \widetilde{v_i''v_j''} \neq 0 \tag{2.11}$$

Allo stesso modo, nel caso si utilizzassero entrambe le media, varranno le seguenti proprietà:

$$\widetilde{\rho v_i} = \overline{\rho} \widetilde{v_i} \qquad \overline{\rho v_i''} = 0 \qquad \overline{v_i''} \neq 0$$
(2.12)

2.1.2 Reynolds-Averaged Navier-Stokes

Applicando quanto appena visto alle equazioni di Navier-Stokes valide per l'incomprimibile eq. 2.1 (la scelta del caso di flusso incomprimibile è dettata da una più facile scrittura), si ottengono, per il bilancio di massa e quantità di moto:

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \rho \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\tau_{ij}} - \rho \overline{v'_i v'_j} \right)$$
(2.13)

Come si può notare, queste sono formalmente identiche alle eq. 2.1 precedentemente valutate, tranne che per la comparsa di un termine aggiuntivo, ovvero:

$$\tau_{ij}^R = -\rho \overline{v_i' v_j'} = -\rho (\overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j})$$
(2.14)

Questo termine prende il nome di *tensore degli sforzi di Reynolds*, mentre le eq.(2.13) sono dette equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds (RANS). Il tensore degli sforzi di Reynolds rappresenta il trasporto di quantità di moto dovuto alle fluttuazioni turbolente. Andando ad esplicitare le componenti delle fluttuazioni di velocità, questo è espresso attraverso un tensore di nove componenti:

$$\rho \overline{v_i' v_j'} = \begin{bmatrix} \rho \overline{(v_1')^2} & \rho \overline{v_1' v_2'} & \rho \overline{v_1' v_3'} \\ \rho \overline{v_2' v_1'} & \rho \overline{(v_2')^2} & \rho \overline{v_2' v_3'} \\ \rho \overline{v_3' v_1'} & \rho \overline{v_3' v_2'} & \rho \overline{(v_3')^2} \end{bmatrix}$$
(2.15)

Di queste nove componenti, solamente sei sono tra di loro indipendenti, per via della correlazione tra v'_i e v'_i , infatti:

$$\rho \overline{v'_i v'_j} = \rho \overline{v'_j v'_i} \tag{2.16}$$

Al fine di risolvere il sistema delle RANS è necessario andare quindi ad introdurre altre sei relazioni per trovare le nuove sei variabili introdotte con il tensore degli sforzi di Reynolds.

Come detto in precedenza, là dove la densità non si mantenga costante, e in particolare quando le fluttuazioni di densità non sono più trascurabili (ovvero non vale più $\rho' \ll \overline{\rho}$), è possibile andare ad effettuare una media alla Reynolds su pressione e densità ed una alla Favre sulle restanti variabili. Procedendo in tal modo con le equazioni di Navier.Stokes per un flusso comprimibile, eq.(2.1), si ottiene:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho} \, \widetilde{v}_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho} \, \widetilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho} \, \widetilde{v}_j \, \widetilde{v}_i) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widetilde{\tau_{ij}} - \overline{\rho} \, \widetilde{v''_i v''_j})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho} \, \widetilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho} \, \widetilde{v}_j \, \widetilde{H}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j} - \overline{\rho} \, \widetilde{v''_j h''} + \widetilde{\tau_{ij} v''_i} - \overline{\rho} \, \widetilde{v''_j K} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\widetilde{v}_i (\widetilde{\tau_{ij}} - \overline{\rho} \, \widetilde{v''_i v''_j}) \right]$$
(2.17)

Ottenendo così le *Favre and Reyondols Averaged Navier-Stokes*, che, come per le classiche RANS, presenta un termine aggiuntivo simile al tensore degli sforzi di Reynolds, ma mediato alla Favre:

$$\tau_{ij}^F = -\overline{\rho} \, \widetilde{v_i'' v_j''} \tag{2.18}$$

È chiaro che anche in questo caso, al fine di rendere risolvibile il sistema, sarà necessario andare ad introdurre altre sei relazioni per definire i sei componenti del nuovo tensore di Reynolds mediato alla Favre. In più, essendo presente anche l'equazione di equilibrio per l'energia, sarà necessario introdurre delle relazioni per definire le tre componenti del vettore di flusso di calore turbolento.

2.1.3 Ipotesi di Boussinesq

Al fine di rendere "chiusi" i sistemi appena descritti, si introduce l'ipotesi di Boussinesq. Questa si basa sull'idea che il trasferimento di quantità di moto in un flusso turbolento è dovuto prevalentemente ai vortici più energetici e più grandi. Nello specifico, l'ipotesi dice che lo sforzo di taglio turbolento dipende linearmente dalla velocità di deformazione media, come nel caso di flusso laminare. In questo caso il fattore di proporzionalità è l'eddy - viscosity e si indica con μ_T . Applicando l'ipotesi di Boussinesq per un flusso incomprimibile mediato alla Reynolds si ottiene:

$$\tau_{ij}^{R} = -\rho \overline{v_i' v_j'} = 2\mu_T \overline{S}_{ij} - \frac{2}{3}\rho K \delta_{ij}$$
(2.19)

Dove \overline{S}_{ij} rappresenta il tensore di sforzo di taglio mediato alla Reynolds:

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right)$$
(2.20)

Mentre la K indica l'energia cinetica turbolenta:

$$K = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_j} \tag{2.21}$$

L' eddy viscosity (viscosità turbolenta) è funzione delle condizioni locali del flusso ed è fortemente influenzata dalla storia del flusso stesso, diversamente da quanto succede con la viscosità molecolare che rappresenta una caratteristica fisica del fluido.

Come per il caso delle RANS per un flusso incomprimibile, anche per i flussi comprimibili, là dove si applicano entrambe le scomposizioni, si può riscrivere l'ipotesi di Boussinesq per l'eddy viscosity:

$$\tau_{ij}^F = -\overline{\rho}\widetilde{v_i''v_j''} = 2\mu_T \widetilde{S}_{ij} - \left(\frac{2\mu_T}{3}\right)\frac{\partial\widetilde{v}_k}{\partial x_k}\delta_{ij} - \frac{2}{3}\overline{\rho}\widetilde{K}\delta_{ij}$$
(2.22)

Sia per il caso di scomposizione alla Reynolds, sia per quello di scomposizione alle Favre, è quindi possibile esprimere il coefficiente di viscosità dinamica come somma di una parte laminare e di una turbolenta, espresso come:

$$\mu = \mu_L + \mu_T \tag{2.23}$$

L'utilizzo delle equazioni mediate e l'aggiunta del termine di viscosità dinamica turbolenta sono alla base dei modelli di turbolenza, con chiusura al primo ordine, che vengono comunemente utilizzati per le simulazione dei flussi turbolenti. Tuttavia tale approccio risulta limitato ad alcune tipologie di flusso, escludendo casi come: flussi con grosse curvature delle linee di corrente, flussi caratterizzati da stratificazioni e da rotazioni, flussi secondari nei condotti e nelle turbomacchine, flussi con separazione e riattacco di strato limite e flussi caratterizzati da cambiamenti repentini della velocità media di deformazione. Al fine di ovviare questo problema, vengono introdotti, all'interno dei vari modelli di turbolenza diverse correzioni. Allo stesso scopo, è possibile passare ad una trattazione non lineare per l'eddy-viscosity, andando ad introdurre termini di ordine superiori per i tenori di deformazione e rotazione.

2.1.4 Equazione di trasporto dello sforzo di Reynolds

Per quanto riguarda i modelli con chiusura a secondo ordine, questi si basano sulla risoluzione dell'equazione di trasporto dello sforzo di Reynolds (per questo detti anche modelli Reynolds-stress). Tale equazione si può derivare applicando la media temporale:

$$\overline{v'_i \mathcal{N}(v_j) + v'_j \mathcal{N}(v_i)} = 0 \tag{2.24}$$

con:

$$\mathcal{N}(v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{x_i} - \mu \nabla^2 v_i$$
(2.25)

Dove $\mathcal{N}(v_i)$ indica l'operatore di Navier-Stokes. Esplicitando l'operatore (2.1.4) all'interno dell'eq.(2.1.4) si ottiene l'equazione di trasporto dello sforzo di Reynolds:

$$\frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial t} + \overline{v}_k \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} - \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x_k} + \mu \nabla^2 \tau_{ij}^R \tag{2.26}$$

equazione valida per i flussi comprimibili. Dove i vari termini stanno ad indicare:

- P_{ij} : produzione di energia cinetica turbolenta;
- Π_{ij} : termine di pressione-deformazione;
- ε_{ij} : rateo di dissipazione;
- C_{ijk} : termine di diffusione del terzo ordine.

Per via della natura non lineare dell'equazioni di Navier-Stokes, l'equazione appena descritta (2.1.4) può essere chiusa solo attraverso modelli empirici.

2.2 Modelli con chiusura al primo ordine

Esistono diversi modelli di turbolenza con chiusura del primo ordine, ognuno dei quali si adatta meglio a risolvere particolari tipologie di flussi. È bene dunque conoscere le caratteristiche di ciascuno di questi, al fine di scegliere il più opportuno in fase di calcolo.

Come già spiegato, i modelli di turbolenza servono ad approssimare gli sforzi di Reynolds all'intero delle equazioni di Navier-Stokes mediate (alla Reynolds o nel caso di utilizzasse l'approccio ibrido con la media alla Favre). In particolare, i modelli al primo ordine, vengono utilizzati per calcolare l'eddy viscosity μ_T , in quanto basati sull'ipotesi di Boussinesq lineare o no.

2.2.1 Modello Spalart-Allmaras

Il modello Spalart-Allmaras è un modello ad una equazione, ovvero l'equazione di trasporto per la variabile $\tilde{\nu}$, legata all'eddy-viscosity attraverso la densità. Il modello è basato sia su dati empirici, sia su studi dimensionali e permette di ottenere buoni risultati, nella definizione del campo di moto anche per flussi che presentano gradienti avversi di pressione o che presentano una graduale transizione da laminare a turbolento, andando però a specificare, in fase di impostazione, la posizione in cui questa avverrà. Lo Spalart-Allmaras, come gli altri modelli che verranno discussi in seguito, può essere implementato sia per griglie strutturate, sia per griglie non strutturate, portando con sé il vantaggio di non richiedere una griglia particolarmente raffinata a parete. Inoltre, il modello è un modello locale, in quanto la soluzione in un punto non dipende da quella negli altri punti del dominio di calcolo.

Per quanto riguarda le condizioni iniziali, il valore iniziale di $\tilde{\nu}$ deve essere impostato, e solitamente si impone un valore di $\tilde{\nu} = 0.1\nu_L$ [1]. Per le condizioni al contorno, invece, si ha che sulla parete di ingresso deve essere impostato ancora il valore di $\tilde{\nu}$, mente su quello di uscita, questo valore è calcolato dalla corrispondete parte interna del volume di calcolo. Sempre facendo riferimento al testo [1], si può considerare appropriato imporre sulle pareti solide $\tilde{\nu} = 0$, che corrisponde ad una $\mu_T = 0$.

L'equazione che caratterizza lo Spalart-Allmaras, può essere scritta, in forma tensoriale, nel seguente modo:

$$\frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widetilde{\nu} \, v_j) = C_{b1} (1 - f_{t2}) \widetilde{S} \, \widetilde{v}
+ \frac{1}{\sigma} \Biggl\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \Bigl[(\nu_L + \widetilde{\nu}) \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_j} \Bigr] + C_{b2} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_j} \frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial x_j} \Biggr\}
- \Biggl[C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \Biggr] \Biggl(\frac{\widetilde{\nu}}{d} \Biggr)^2 + f_{t1} ||\Delta \widetilde{\nu}||_2^2$$
(2.27)

I termini a destra dell'equazione identificano:

- la produzione dell'eddy-viscosity: \widetilde{S} ;
- la diffusione conservativa e non conservativa:

$$\frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu_L + \widetilde{\nu}) \frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + C_{b2} \frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial x_j} \right\}$$

- la distruzione della turbolenza nei pressi della parete, mediante la funzione f_w ;
- smorzamento e sorgente di produzione della turbolenza dovuto alla transizione, attraverso le funzioni f_{t1} e f_{t2} .

Nota $\tilde{\nu}$ è possibile determinare l'eddy-viscoity come

$$\mu_T = f_{v1}\rho\,\widetilde{\nu} \tag{2.28}$$

Dove

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \qquad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu_L}$$
(2.29)

Inoltre vi sono i seguenti termini:

$$C_{b1}, C_{b2}, C_{v1}, C_{v2}, C_{w1}, C_{w2}, C_{w3}, \sigma, \kappa, C_{t1}, C_{t2}, C_{t3}, C_{t4}.$$

Che sono costanti tipiche del modello. Infine, drappresenta la distanza dalla parete.

2.2.2 Modello $K - \varepsilon$

Il modello di turbolenza $K - \varepsilon$, a differenza del precedente, è un modello a due equazioni. Ovvero, l'equazione per l'energia cinetica turbolenta K e l'equazione per la velocità di dissipazione (dell'energia cinetica turbolenta) ε . Al fine di ottenere

una corretta approssimazione del flusso anche nelle vicinanze della parete, e in particolare all'interno del sotto-strato viscoso, è necessario aggiungere, alle già citate, un'ulteriore equazione, detta "damping equation". I modelli $K - \varepsilon$, con l'aggiunta dell'equazione di "damping", sono anche detti modelli "low Reynolds" (ovvero basso numero di Reynolds) e variano a seconda dell'equazione aggiuntiva scelta. Lo scopo della damping equation è quello, come dice il nome stesso, di "smorzare" la K e la ε nei pressi della parete, in modo tale da avere:

$$K \sim y^2$$
 e $\frac{\varepsilon}{K} \sim \frac{2\nu}{y^2}$ per $y \to 0$ (2.30)

 $\operatorname{con} y$ coordinata normale alla parete.

Rispetto allo Spalart-Allmaras, questo modello richiede una griglia molto più sottile nei pressi della parete al fine di risolvere il sotto-strato viscoso. Per via di questa caratteristica, e per via della presenza dell'equazione di damping, che va ad influenzare i termini sorgente all'interno delle equazioni, tale metodo risulta sicuramente più complicato nella risoluzione numerica rispetto al precedente. In più il $K - \varepsilon$ è molto sensibile alla presenza si gradienti di pressione avversa che possono portare ad una cattiva approssimazione del flusso.

Le condizioni iniziali da impostare riguardano il valore di K e di ε^* nel flusso libero (Dove il simbolo "*" indica il rateo di dissipazione nel solo freestream, eliminando il contributo del rateo di dissipazione a parete). Gli stessi valori possono essere ottenuti impostando un profilo di energia cinetica turbolenta e di rateo di dissipazione, nei pressi della parete. Questa soluzione, seppur più precisa e raffinata, risulta più complessa, soprattutto perché richiede la conoscenza della distanza da ciascuna parete solida, cosa non sempre possibile.

Sulle pareti solide, per quanto riguarda le condizioni al contorno, si imposta un valore di K = 0 e $\varepsilon^* = 0$, essendo:

$$\varepsilon = \varepsilon_w + \varepsilon^* \tag{2.31}$$

con ε_w rateo di dissipazione a parete. Sulla superficie di ingresso i valori delle due grandezze possono essere esplicitati o determinati attraverso le relazioni che legano $K \in \varepsilon$ all'intensità di turbolenza e alla scala di lunghezza della turbolenza, con:

$$(Tu)_{\infty} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}K_{\infty}}{||\vec{v}_{\infty}||_2} \qquad (l_T)_{\infty} = \frac{C_{\mu}K_{\infty}^{3/2}}{\varepsilon_{\infty}^*}$$
(2.32)

Mentre, sulla superficie di uscita, i valori di energia cinetica turbolenta e rateo di dissipazione vengono calcolati dalla parte interna del dominio di calcolo.

Le equazioni che caratterizzano il modello $K - \varepsilon$ sono le seguenti:

$$\frac{\partial \rho K}{\partial t} + \frac{\partial}{x_j} (\rho v_j K) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + \tau_{ij}^F S_{ij} - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j \varepsilon^*) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon^*}{K} \tau_{ij}^F S_{ij} \qquad (2.33)$$

$$- C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \rho \frac{(\varepsilon^*)^2}{K} + \phi_\varepsilon$$

Dove i tre termini a destra, di entrambe le equazioni, rappresentano rispettivamente la diffusione conservativa, la produzione e la dissipazione di eddy-viscosity. Quest'ulitma è legata alle due grandezze di riferimento attraverso la seguente legge:

$$\mu_T = C_\mu f_\mu \rho \frac{K^2}{\varepsilon^*} \tag{2.34}$$

E si nota come imporre a parete K = 0, significa imporre anche $\mu_T = 0$. All'interno delle equazioni compaiono alcune costanti $(C_{\mu}, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, \sigma_K, \sigma_{\varepsilon}, Pr_T)$, le funzioni di smorzamento a parete $(f_{\mu}, f_{\varepsilon 1}, f_{\varepsilon 2})$ e il cosiddetto termine di parete esplicito (ϕ_{ε}) . La scelta dei valori e delle funzioni da attribuire a questi termine differenzia i vari tipi di modello $K - \varepsilon$.

Come detto in precedenza, il modello $K - \varepsilon$ richiede una griglia molto sottile in vicinanza delle pareti. In particolare, la prima cella in prossimità della parete deve trovarsi ad una distanza, da quest'ultima, pari a $y^+ \leq 1$. È possibile però ridurre il numero di punti di griglia, al fine di ridurre il costo computazionale della simulazione, ottenendo una prima cella con distanza dalla parete compresa tra $10 \leq y^+ \leq 100$. In questo caso vengono eliminare le funzioni di smorzamento e il termine di parete e i modelli così ottenuti sono detti ad alto numero di Reynolds. È quindi necessario introdurre delle funzioni, dette *wall functions*, per determinare il valore di $K e \varepsilon^*$ nella cella (o nel nodo) adiacente alla parete. Queste ultime sono solitamente basate sulla legge logaritmica a parete, e risultano particolarmente efficaci per flussi con strato limite attaccato, mentre i risultati diventano poco accurati quando è presente la separazione.

2.2.3 $K - \omega \in SST$

Il modello $K - \omega$ proposto da Wilcox, sostituisce l'equazione per la velocità di dissipazione con quella per la velocità specifica di dissipazione (di energia cinetica turbolenta) ω . Tale approccio è pensato per la parte inferiore dello strato limite e perciò risulta efficace per lo studio di quest'ultimo. In particolare il $K - \omega$ permette di ottenere un' accuratezza simile a quella del $K - \varepsilon$, all'interno dello strato

limite, ma con una stabilità numerica maggiore, in più non necessità di funzioni di smorzamento. La maggiore stabilità fa si che il modello risulti più adatto per lo studio di flussi con gradienti di pressione avversi, punto debole del $K - \varepsilon$, e di quelli comprimibili. Allo stesso tempo il $K - \varepsilon$ risulta più adatto per studiare lo strato limite nella zona di scia, dove il $K - \omega$ risulta troppo influenzato dal valore della ω nella zona di flusso libero, specialmente per i getti e per i flussi con mescolamento.

Per ottenere un giusto compromesso tra i due modelli, e sfruttare quindi le caratteristiche positive di entrambi, fu introdotto da Mentrer il così detto $K - \omega$ Shear Stress Transport, o SST, che combina il modello di Wilcox con un modello ad alto numero di Reynolds, riadattato con una formulazione valida per il $K - \omega$. Viene quindi modificata la funzione per l'eddy-viscosity, al fine di tener conto della proporzionalità che vi è tra l'energia cinetica turbolenta e il lo sforzo di taglio, e in particolar modo tiene conto del trasporto turbolento di quest'ultimo. Lo svantaggio che porta con sè il modello SST è quello dell'obbligatoria conoscenza della distanza dalla parete.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno sulle pareti solide si impostano i seguenti valori:

$$K = 0 \qquad \omega = 10 \frac{6\mu_L}{\rho\beta_1(d_1)^2} \tag{2.35}$$

con d_1 che rappresenta la distanza dalla parete della prima cella (nodo) e β_1 costante tipica del modello. Per la parete di ingresso un opzione potrebbe essere la seguente [1]:

$$\omega_{\infty} = C_1 \frac{||\vec{v}\infty||_2}{L} \qquad (\mu_T)_{\infty} = (\mu_L)_{\infty} 10^{-C_2} \qquad K_{\infty} = \frac{(\mu_T)_{\infty}}{\rho_{\infty}} \omega_{\infty}$$
(2.36)

Con L lunghezza del dominio di calcolo e C_1 e C_2 costanti. Le due equazioni per K e ω sono:

$$\frac{\partial \rho K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{j}} (\rho v_{j} K) = \frac{\partial}{\partial x_{j}} \left[(\mu_{L} + \sigma_{K} \mu_{T}) \frac{\partial K}{\partial x_{j}} \right] + \tau_{ij}^{F} S_{ij} - \beta^{*} \rho \omega K$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{j}} (\rho v_{j} \omega) = \frac{\partial}{\partial x_{j}} \left[(\mu_{L} + \sigma_{\omega} \mu_{T}) \frac{\partial \omega}{\partial x_{j}} \right] \frac{C_{\omega} \rho}{\mu_{T}} \tau_{ij}^{F} S_{ij}$$

$$- \beta \rho \omega^{2} + 2(1 - f_{1}) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial K}{\partial x_{j}} \frac{\partial \omega}{\partial x_{j}}$$
(2.37)

Con ancora i termini a destra che rappresentano la diffusione conservativa, la produzione e dissipazione dell'eddy-viscosity. Quest'ultima è calcolata mediante la seguente legge:

$$\mu_T = \frac{a_1 \rho K}{\max(a_1 \omega, f_2 || \operatorname{curl} \vec{v} ||_2)}$$
(2.38)

In questo modo si ha che per lo strato limite, in caso di presenza di gradienti avversi di pressione, dove la produzione di energia cinetica turbolenta è molto più grande della dissipazione (ω), sia mantenuta la proporzionalità tra sforzo di taglio ed energia cinetica turbolenta.

Molto importante è la presenza della funzione f_1 , che attraverso il coefficiente di blending permette di utilizzare un $K-\omega$ all'interno dello strato limite, e di passare ad una sorta di $K-\varepsilon$ nella zona di flusso libero o nei free-shear layer. Con:

$$f_1 = \tanh(\arg_1^4)$$

$$\arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{K}}{0.09\omega d}, \frac{500\mu_L}{\rho\omega d^2}\right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}K}{CD_{K\omega}d^2}\right]$$
(2.39)

Con d distanza dalla parete e $CD_{K\omega}$ parte positiva del termine di cross-diffusione dell'eq.(2.37).

Discorso analogo va fatto per le costanti presenti nelle equazioni, le quali, a seconda del valore assunto dal coefficiente di *blending*, assumeranno i valori tipici del $K - \omega$ o del $K - \varepsilon$ modificato. In particolare il coefficiente ϕ sarà pari a:

$$\phi = f_1 \phi_1 + (1 - f_1) \phi_2 \tag{2.40}$$

Che avrà valore ϕ_1 per il modello $K - \omega \in \phi_2$ per il $K - \varepsilon$.

Capitolo 3 Discretizzazione spaziale

Al fine di poter risolvere numericamente le equazioni Navier-Stokes è necessario andarle a discretizzare nello spazio e nel tempo, la dove si cercasse una soluzione non stazionaria. Discretizzare le equazioni nello spazio consiste nell'andare a suddividere il dominio fluido, all'interno del quale si muove il flusso, in una serie di elementi geometrici, di diverso tipo, al fine di costruire una griglia di calcolo (o mesh). Le griglie possono essere di diverso tipo a seconda del tipo di problema che si deve studiare. In generale è possibile fare una prima distinzione tra griglie body-fitted e griglie cartesiane. Nel primo caso, la griglia segue fedelmente la geometria dei contorni dello spazio fisico in cui il flusso si muove, come in fig.(3.1,a). Nel secondo caso, la griglia non segue la geometria fisica del problema e si caratterizza per il fatto che i bordi delle celle sono paralleli alle coordinate cartesiane, fig.(3.1,b). La griglia di tipo *body-fitted*, ha il vantaggio di essere più adatta alla risoluzione dei flussi di strato limite, di contro il suo utilizzo diventa più complicato per geometrie più complesse. La griglia di tipo *cartesiano* risulta invece più adatta allo studio dell'evoluzione dei flussi e sicuramente è caratterizzata da una più facile implementazione rispetto alla precedente. Tuttavia, la necessità di dover tener conto di ciò che avviene all'interno dello strato limite ha fatto sì che, in ambito di applicazione ingegneristica, la prima tipologia sia preferita.

Un' ulteriore distinzione è quella tra griglie strutturate e griglie non strutturate. Nelle prime ogni punto della griglia viene identificato attraverso degli indici (i,j,k)e attraverso una coordinata Cartesiana $(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$, fig.(3.2). In questo caso avremo celle, delle griglie, quadrangolari nei casi 2D ed esaedrica per quelli 3D. Il vantaggio principale, consiste nella linearità dello spazio computazionale in quanto ogni variabile fluidodinamica corrisponde direttamente a come verrà memorizzata all'interno della macchina. Tale proprietà facilità di molto tutte le operazioni di calcolo in cui è necessario valutare i valori assunti dalle variabili nei nodi adiacenti, come ad esempio avviene nel calcolo dei flussi o dei gradienti. Allo stesso tempo, l'utilizzo di questa tecnica diventa più complicato all'aumentare della complessità



Figura 3.1: (a) griglia body-fitted e (b) griglia cartesiana.[2]



Figura 3.2: (a) esempio di griglia strutturata (b) griglia strutturata body-fitted, che prende anche il nome di *curvilinea*.[1]

della geometria del problema. Un modo per ovviare a questa problematica è l'utilizzo di una griglia multiblocco, fig. (3.3), dove vengono utilizzati blocchi di griglia diversi per poter seguire al meglio la geometria dei contorni del dominio fisico. Un approccio del genere però risulta più oneroso dal punto di vista computazionale, implicando anche l'utilizzo di un solutore più complesso, soprattutto per via delle interfacce tra i blocchi caratterizzati da celle di diverse dimensioni. Per rendere più flessibile la griglia è possibile utilizzare la tecnica degli hanging nodes, dove i nodi all'interfaccia non coincidono tra i due blocchi a contatto, venendo quindi a mancare la continuità tra le linee delle due grigli e rendendo il sistema più snello, o attraverso una griglia chimera. In questo ultimo caso vengono eliminate completamente le interfacce, andando a sovrapporre griglie diverse. In particolar modo, viene generata la prima griglia indipendentemente da quella che è la geometria del dominio e questa viene poi combinata con griglie apposite che tengono conto della forma delle pareti, fig. (3.4). In questi casi, griglia multiblocco e chimera, il vantaggio ottenuto nella migliore capacità di utilizzo per geometri complesse si contrappone ad un costo computazionale maggiore della costruzione della griglia perdendo anche il vantaggio dato dalla linearità del dominio che permetteva una



Figura 3.3: Griglia multiblocco. Le linee più spesse identificano i diversi blocchi, mentre è possibile notare, laddove sono presenti le griglie con celle più piccole, l'utilizzo della tecnica *hanging nodes* [1]

semplificazione in fase di calcolo. Per questi motivi vengono spesso preferite le griglie non strutturate, che verranno ora descritte.



Figura 3.4: Griglia con tecnica *chimera* [1]

A differenza delle già citate griglie strutturate, per le non strutturate (*unstructu-red*) le celle, come i punti, della griglia non hanno un ordine ben preciso e non possono essere identificate direttamente con degli indici. In questo caso è possibile numerare le celle, ma non si può pi sfruttare l'indicizzazione per spostarsi all'interno della griglia, perdendo il vantaggio che si aveva prima in fase di imma-gazzinamento dei dati all'interno della macchina. La forma delle celle, in questo caso, risulta più complessa in quanto solitamente si utilizzano combinazioni di celle quadrangolari e triangolari per il caso 2D e esaedriche, tetraedriche, piramidali



Figura 3.5: Griglia non strutturata con tecnica ibrida [1]

o prismatiche per il caso 3D. Si parla dunque di griglie *ibride* o di *mixed grids*, fig.(3.5). Il vantaggio principale è quello legato alla precisione con cui si riesce a descrivere il dominio fisico mantenendo comunque un costo computazionale, di generazione della griglia, più basso rispetto alla soluzione *multiblocco* o *chimera*. In più, grazie alla tecnica ibrida, si riduce notevolmente il numero di punti della griglia. Di contro, una struttura così complicata è associata anche ad un solutore del flusso molto complesso, inoltre questo tipo di griglia richiede una memoria computazionale della macchina utilizzata superiore a quella richiesta per le griglie strutturate. Tuttavia, il bilancio tra vantaggi e svantaggi fa si che spesso, sopratutto nei software CFD commerciali, venga preferita l'implementazione di questi sistemi.

3.1 Metodo ai volumi finiti

Esistono diversi metodi per discretizzare nello spazio le equazioni di Navier-Stokes, questi possono essere raccolti in tre principali categorie: schemi alle differenze finite, schemi ai volumi finiti, schemi agli elementi finiti. Si andrà ad approfondire la seconda , in quanto sarà poi quello utilizzato durante il lavoro di tesi per la discretizzazione delle simulazioni.

Il metodo ai volumi finiti fu introdotto per la prima volta da McDonald nel suo studio bidimensionale su di un flusso transonico attraverso una turbina 2D [3]. Questo, utilizzato con la formulazione integrale delle equazioni di Navier-Stokes, soddisfa automaticamente le leggi di conservazione di massa, quantità di moto ed energia. La discretizzazione delle equazioni di Navier-Stokes parte dalla suddivisione del dominio fisico in un numero arbitrario di volumi di controllo poliedrici, con i quali è possibile approssimare gli integrali di superficie come somma dei flussi che attraversano le singole superfici dei diversi volumi di controllo. Esistono mol-



Figura 3.6: A sinistra un volume di controllo per uno schema cella centrato, a destra un volume di controllo per uno schema cella-vertice (dual) [1]

teplici approcci per effettuare la divisione dello spazio fisico in volumi di controllo che possono essere però raccolti in due principali categorie: schemi cella-centrati e schemi cella-vertice. Ovviamente l'utilizzo di uno e dall'altra caratterizza l'accuratezza della discretizzazione.

Per gli schemi cella-centrati (in inglese Cell-centred) le quantità delle grandezze di flusso sono assegnati ai centroidi delle celle, così facendo i volumi di controllo, utilizzati per suddividere il volume fisico, coincidono esattamente con le celle della griglia. Un esempio è mostrato in fig.(3.6). Negli schemi cella-verice (in inglese cell.vertex) le quantità di flusso sono assegnate ai punti della griglia. In questo caso è possibile distinguere due tipologie di volumi di controllo: quelli sovrapposti (*overlapping*) dove il volume di controllo è definito da tutte le celle che caratterizzate dallo stesso punto della griglia, quelli doppi (*dual*) in cui il volume di controllo è centrato intorno ad un nodo della griglia. Quest'ultimo caso è mostrato in fig.(3.6).

I vantaggi introdotti dagli schemi ai volumi finiti sono diversi. In primo luogo si evidenzia la capacità di questi schemi ad adattarsi senza alcun problema sia a griglie struttura che a griglie non strutturate. Questo, come già detto nella prima parte del capitolo, permette di poter studiare anche problemi caratterizzati da geometrie complesse senza troppe difficoltà. Inoltre, visto che la suddivisione in volumi di controllo, e quindi la discretizzazione spaziale, è fatta direttamente sullo spazio fisico, i metodi ai volumi finiti non necessitano di trasformazioni del sistema di coordinate da quello fisico a numerico. Come già detto, gli schemi ai volumi finiti sono derivati direttamente dalle leggi di conservazione il ché permette di ottenere una soluzione debole (*wake solution*) direttamente dalle equazioni. In più, questa caratteristica garantisce che la condizione di Rankine-Hugoniot sia rispettata lungo le discontinuità della soluzione, come può essere un'onda d'urto. Un appunto va fatto invece per le equazione di Eulero. In questo caso, al fine di evitare soluzione irreali, come soluzioni che prevedono una diminuzione di entropia violando il secondo principio della termodinamica, è necessario introdurre un'ulteriore condizione, detta condizione di entropia.

3.1.1 Metodo dei volumi finiti per una griglia non strutturata

Il metodo dei volumi finiti si basa sulla suddivisone dello spazio fisico in volumi di controllo. Per una griglia non strutturata questo significa dividere lo spazio fisico in elementi geometrici che di solito sono: triangoli e quadrati, o una loro combinazione, per il caso 2D e combinazioni di tetraedi, piramidi,prismi ed esaedri nel caso 3D. Quest'ultimo caso è di particolare interesse per le griglie ibride precedentemente descritte. Sebbene i metodi che si stanno analizzando siano implicitamente conservativi, anche la griglia deve essere curata in modo tale da conservare tale caratteristica delle leggi di governo. Per farlo devono essere rispettate alcune caratteristiche quali: la completa copertura del dominio fisico da parte della griglia, mancanza di buchi tra gli elementi e di sovrapposizione tra questi ultimi. Anche le dimensioni degli elementi devono essere tali da non prevedere rapide variazioni tra elementi adiacenti.

Gli elementi così definiti permettono di valutare le grandezze fluidodinamiche. Per facilitare la descrizione si introduce un'equazione generale di conservazione in grado di descrivere le equazioni di governo (2.1).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} \, d\Omega + \oint_{\partial \Omega} (\vec{F}_c - \vec{F}_v) \, dS = \int_{\Omega} \vec{Q} \, d\Omega \tag{3.1}$$

Dove \vec{W} e il vettore delle variabili conservative che, valutato sulle tre dimensioni, è pari a:

$$\vec{W} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E]^T$$
(3.2)

Con $\vec{F_c}$ e $\vec{F_v}$ due vettori di flusso, il primo detto vettore dei flussi convettivi ed è legato al trasporto convettivo delle quantità nel fluido, il secondo è il vettore dei flussi viscosi e contiene i termini di attrito viscoso e diffusione di calore. Mentre \vec{Q} è il termine di sorgente di volume.

$$\begin{bmatrix} \vec{\rho}V\\ \rho uV + n_x p\\ \rho vV + n_y p\\ \rho wV + n_z p\\ \rho HV \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \vec{F}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}\\ n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{yz}\\ n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \tau_{zz}\\ n_x \Theta_x + n_y \Theta_y + n_z \Theta_z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \vec{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ \rho f_{e,x}\\ \rho f_{e,y}\\ \rho f_{e,z}\\ \rho f_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_h \end{bmatrix}$$
(3.3)

Dove V è la velocità perpendicolare alla superficie dS, H è l'entalpia totale, i termini Θ rappresentano il lavoro dell'attrito viscoso e della conduzione di calore nel fluido.

Assumendo che il volume di controllo non possa cambiare forma nel tempo, è possibile riscrivere la derivata delle variabili \vec{W} come:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} \, d\Omega = \Omega \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \tag{3.4}$$

E sostituendo nell'equazione di conservazione:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega} \left[\oint_{\partial \Omega} (\vec{F}_c - \vec{F}_v) \, dS - \int_{\Omega} \vec{Q} \, d\Omega \right] \tag{3.5}$$

L'integrale di superficie, a destra dell'equazione, può essere approssimato come sommatoria dei contributi di tutti i flussi che attraversano la superficie dell'elemento. In particolare, si può supporre che il flusso sia costante lungo la singola faccia e quindi può essere calcolato sul punto medio della stessa. Il termine sorgente è si solito considerato costante all'interno del volume di controllo, altrimenti è possibile valutarlo partendo dai valori assunti da \vec{Q} nei dintorni del volume di controllo facendone una media. Quindi l'eq.(3.5) può essere riscritta come:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega_I} \left[\sum_{m=1}^{N_F} (\vec{F}_c - \vec{F}_v)_m \Delta S_m - (\vec{Q}\Omega)_I \right]$$
(3.6)

Dove Ω_I è uno specifico volume di controllo, N_F è il numero delle facce del volume di controllo e ΔS_m è la specifica sezione. Si ottiene così un'approssimazione del secondo ordine dei flussi. L'eq.(3.6) può essere infine riscritta come:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega_I} \vec{R}_I \tag{3.7}$$

Infatti, il termine in parentesi quadra nell' eq.(3.6) è detto residuo. Sviluppando la relazione appena scritta si ottiene un sistema di equazioni differenziali ordinario al primo ordine. Le equazioni sono però iperboliche nel tempo, questo significa che bisogna imporre delle corrette condizioni iniziali, da cui derivare lo step successivo. Particolare attenzione deve anche essere posta per la determinazione delle condizioni al contorno.

Come detto nella prima parte del paragrafo, i metodi ai volumi finiti si distinguono in base a dove si decide di collocare il valore delle quantità del fluido, ottenendo tre grandi categorie di schemi:cella centrata, cella-vertice *overlapping*, cella-vertice median-dual. Tutti questi schemi si accomunano per essere tutti schemi co-collocati, ovvero presentano sia le variabili indipendenti conservative (\vec{W}) , sia quelle dipendenti (ad es. p, T, c) poste nello stesso punto. Verrano qui inseguito analizzati gli schemi cella centrati e quelli median-dual, in quanto sono quelli più utilizzati.

3.1.2 Schemi cella centrati

Con schema cella centrato si intende uno schema ai volumi finiti per cui gli elementi, utilizzati per suddividere il volume fisico, coincidano perfettamente con le celle della griglia e in cui i valore delle variabili fluidodinamiche, dipendenti e non, vengono immagazzinati nei centroidi di queste ultime. Si è visto che per risolvere l'eq.(3.6) è necessario valutare il valore dei flussi, convettivi e viscosi, nel punto medio della faccia compresa tra due celle. Per farlo sono possibili tre metodi.

Il primo consiste nell'approssiamre i flussi partendo dalla media dei flussi calcolati nei centroidi delle celle che si trovano a sinistra e a destra della faccia che si sta valutando, utilizzando un solo versore normale alla parete. Nello specifico, facendo riferimento alla fig.(3.7), considerando l'interfaccia tra la cella $C_0 \in C_1$ si prende come unico versore normale alla parete \vec{n}_{01} e si valuta il flusso come:

$$(\vec{F}_c \Delta S)_{01} \approx \frac{1}{2} \left[\vec{F}_c(\vec{W}_0, \vec{n}_{01}) + \vec{F}_c(\vec{W}_1, \vec{n}_{01}) \right] \Delta S_{01}$$
(3.8)

Come si può notare è stato specificato che i flussi presenti nell'eq.(3.8) sono solo quelli convettivi, in quanto questo tipo di approccio è stato sviluppato solo per questi ultimi.

Il secondo metodo prevede di approssimare i flussi utilizzando la media delle variabili allocate nei centroidi a destra e a sinistra della faccia. Quindi i flussi sono valutati come:

$$(\vec{F}_c \Delta S)_{01} \approx \vec{F}(\vec{W}_{01}, \vec{n}_{01}) \Delta S_{01}$$
 (3.9)

Con il valore della variabile \vec{W}_{01} sulla faccia che viene determinato come media di quello delle variabili dei centroidi adiacenti:

$$\vec{W}_{01} = \frac{1}{2} \left(\vec{W}_0 + \vec{W}_1 \right) \tag{3.10}$$

Si nota come in questo caso nell'eq.(3.9) ci si riferisca sia ai flussi convettivi che a quelli viscosi.

Il terzo metodo è basato sul calcolare i flussi a partire da quantità ricostruite separatamente sui due lati dell'interfaccia, partendo dai valori delle celle adiacenti. Generalmente le quantità del fluido che vengono interpolate sui due lati della faccia



Figura 3.7: Volume di controllo per uno schema cella centrato.[1]

sono le componenti di velocità, la densità e l'entalpia totale. I valori ottenuti a destra e a sinistra della faccia sono solitamente diversi e il flusso viene valutato attraverso una differenza tra questi due, utilizzando una funzione non lineare.

$$(\vec{F}_c \Delta S)_{01} \approx f_{Flux} (\vec{U}_L, \vec{U}_R, \Delta S_{01}) \tag{3.11}$$

Dove le quantità ricostruite sono derivate dai valori dei centroidi delle celle vicine come:

$$\vec{U}_L = f_{Rec}(..., \vec{U}_2, \vec{U}_0, ...)$$

$$\vec{U}_R = f_{Rec}(..., \vec{U}_1, \vec{U}_0, ...)$$
(3.12)

Anche in questo caso il metodo è utilizzato prevalentemente per i flussi convettivi $\vec{F_c}$. Quanto appena detto è valido per una griglia bidimensionale, ma è possibile derivare le stesse relazioni anche per il caso tridimensionale.

3.1.3 Schema cella-vertice

Negli schemi cella-vertice i valori sono associati ai vertici delle griglie.Come già detto si tratteranno solo gli schemi cella-vertice *median-dual* in quanto più diffusi.In questo caso, i volumi di controllo sono costruiti collegando i centroidi, le facce e i punti medi dei contorni delle celle che condividono quel particolare nodo. Il sistema è ben illustrato in fig.(3.8).

Per risolvere l'eq.(3.6) sarà quindi necessario valutare i flussi singolarmente su ogni faccia del volume di controllo. Questo tipo di approccio, che può risultare complicato e dispendioso, porta ad ottenere una discretizzazione del terzo ordine per i


Figura 3.8: Volume di controllo per uno schema cella-vertice dual.[1]

flussi. E possibile quindi passare ad una discretizzazione del secondo ordine dove si assume che il valore delle variabili del flusso sia costante lungo tutte le facce che si trovano intorno ad un nodo. In questo modo è possibile valutare i flussi, nella mezzeria del bordo del volume, partendo dalle variabili e dai gradienti di entrambi i nodi. Per fare ciò è necessario definire un versore normale unico per le facce che condividono il bordo. Facendo sempre riferimento alla fig.(3.8), il versore normale e la superficie totale della faccia per i nodi P_0 e P_1 sono dati da:

$$\vec{n}_{01} = \vec{n}_L + \vec{n}_R \qquad \Delta S_{01} = \Delta S_L + \Delta S_R \tag{3.13}$$

A questo punto, per l'approssimazione dei flussi, si possono essere seguite tre strade, del tutto simili a quelle già descritte per gli schemi celle-centrati.

- Calcolare l'approssimazione dei flussi all'interfaccia attraverso la media dei flussi calcolati su entrambi i nodi e utilizzando un solo versore normale;
- Calcolare l'approssimazione dei flussi all'interfaccia attraversi la media delle variabili valutate sui due nodi di un bordo;
- Calcolare l'approssimazione dei flussi ricostruendo, separatamente per ogni lato della faccia del volume di controllo, le quantità fluidodinamiche attraverso i valori presenti sulle celle adiacenti.

Le leggi già viste per il caso degli schemi centrati possono essere quindi riutilizzate per quello degli schemi *median-dual* cella-vertice, facendo attenzione che per il primo e il terzo metodo ci si riferisce ancora solo ai flussi convettivi.

3.1.4 Confronto tra schemi cella-centrati e cella-vertice

Confrontando le due tipologie di schemi appena analizzati ci si può soffermare su alcuni aspetti caratteristici che ricoprono particolare interesse nella fluidodinamica. Primo tra questi è sicuramente l'accuratezza dello schema. In generale, uno schema cella centrato, con una griglia triangolare (2D) o tetraedrica (3D), è caratterizzata da un numero di volumi di controllo, e quindi di gradi di libertà, che può essere dalle due alle sei volte più grande rispetto al caso cella-vertice [4]. Il ché si traduce, oltre che in un numero superiore di variabili, anche in un'accuratezza maggiore per lo schema cella-centrato. Tuttavia, il residuo valutato nell'eq.(3.7) è determinato da un numero minore di flussi per lo schema cella-centrato rispetto a quello cella-vertice. Risulta quindi difficile determinare, a parità di griglia, quale dei due risulta più preciso.

Allo stesso tempo è possibile analizzare come gli schemi *median-dual* risultino particolarmente sensibili ad alcune tipologie di griglia. In particolare, risulta problematico il loro utilizzo per griglie triangolari particolarmente stirate, come mostrato in fig.(3.9). Quello che si nota è come la superficie su cui si vuole valutare il flusso sia particolarmente inclinata rispetto ai due vertici $i \in j$, tale caratteristica può introdurre un errore di approssimazione abbastanza significane. Infatti, negli schemi di discretizzazione spaziale è necessario valutare i flussi normalmente alla superficie.



Figura 3.9: Volume di controllo per uno schema median-dual per una griglia triangoalre stirata.[1]

Un altro problema è legato alla valutazione dei flussi lungo il bordo del dominio fluido. Infatti, qui si ha che solo metà del volume di controllo generato si trova all'interno del dominio di calcolo, questo implica che il residuo valutato sia collocato all'interno del volume di controllo, mentre lo schema prevede che questo si trovi sul nodo della griglia, il quale a sua volta si trova lungo il bordo del dominio. Questa differenza può introdurre altri errori di approssimazione. Problema ancora più evidente quando sulle pareti si va ad imporre la condizione di periodicità, dove i flussi su entrambe le pareti associate devono essere sommati correttamente. Infine gli schemi cella-vertice risultano particolarmente sensibili a griglie poco regolari, perciò possiamo dire che il loro utilizzo diventa complicato quando si vanno a studiare problemi con geometrie particolarmente complesse, come ad esempio i bordi di un profilo. Questa poca flessibilità ad adattarsi ai contorni della geometria può anche portare a problematiche nella valutazione dei flussi vicini a parete.

Per quanto riguarda i costi computazionali, possiamo considerare che questo sia legato all'integrazione dei flussi che sua volta è legato al numero di celle e vertici presenti nel dominio di calcolo. Considerando una griglia tetraedrica, il numero di facce delle celle è circa due volte quello dei vertici [1], perciò si può concludere che gli schemi a cella centrata, in cui si utilizzano codici basati su cicli sulle facce delle celle, siano più onerosi computazionalmente rispetto agli schemi cella-vertice, in cui si usano codici basati su cicli sui vertici delle stesse.

Capitolo 4 Analisi CFD

Il lavoro di tesi si basa sull'analisi CFD del flusso attorno alla palettatura con pala T106 attraverso l'utilizzo del software commerciale *Star CCM+*. Il caso studiato riprende l'esperimento condotto da A.Duden e L. Fottner presso la galleria "*High-Speed Cascade Wind-Tunnel*" dell'Università di Monaco (Germania) e riportato all'interno del loro articolo "*Influence of taper, Reynolds number and Mach number on the secondary flow field of a highly loaded turbine cascade*" [5].

In particolare, viene analizzata la configurazione T106A, procedendo prima con un confronto tra i diversi modelli di turbolenza, implementati nel software, poi spostando l'attenzione sull'influenza del numero di Mach e del numero di Reynolds sul campo di moto. Inoltre,fissate le condizioni di Reynolds e Mach si è andato ad effettuare uno studio sulla griglia, valutando gli effetti di quest'ultima, soprattutto sulla costruzione della scia a valle della paletta. Questa prima parte delle simulazioni è stata effettuata valutando un caso bidimensionale, successivamente è stata condotta una simulazione tridimensionale al fine di ottenere una sommaria descrizione dei flussi secondari e del loro effetto sul campo di moto.

Le simulazioni sono svolte sfruttando uno schema ai volumi finiti cella centrato e cercando una soluzione stazionaria.

4.1 Geometria

Come già detto le simulazioni sono state effettuate studiando il flusso attorno alla paletta T106, riportata in fig.(4.1). In particolare è stato considerato il caso T106A, le cui caratteristiche geometriche vengono riportare nella tab.(4.1):

Parametro		valore (u.d.m)
corda	с	100 (mm)
corda assiale	c_{ax}	$85.92 \ (mm)$
passo	\mathbf{t}	$79.9 \; (mm)$
solidità	t/c	0.799
flow angle in ingresso	β_1	127.7°
flow angle in uscita	β_2	26.8°

Tabella 4.1: Geomeria della palettatura T106A



Figura 4.1: Configurazione geometrica T106A [5]

4.1.1 Geometria del dominio

Per prima cosa è stato costruito un dominio fluido 2D. La cosa fondamentale, durante la costruzione, è rispettare le caratteristiche geometriche appena elencate. In particolare, svolge un ruolo importante la condizione sul rapporto passo-corda, al fine di poter poi confrontare al meglio i risultati ottenuti con la CFD con quelli sperimentali. In più, al contrario di quanto avviene nell'esperimento di riferimento,

CAPITOLO 4. ANALISI CFD

dove le misurazioni sono condotte lungo una schiera lineare composta da sette palette, nelle simulazioni svolte viene analizzato il campo intorno ad una sola pala, sfruttando la periodicità tipica della configurazione sperimentale. Questa scelta è dettata dalla necessità di limitare i costi computazionali della simulazione, ottenendo un volume di calcolo ridotto rispetto ad una simulazione con più palette. In più, riducendo le dimensioni del dominio, è possibile descrivere con maggior dettaglio la superficie della singola paletta senza incorrere in un elevato numero di celle della griglia.

Tale caratteristica è ottenuta imponendo la condizione di periodicità sulle pareti laterali del dominio, fig.(4.2). Queste sono accoppiate tra di loro nel seguente modo:

Superfici periodiche	
1	4
2	5
3	6

Tabella 4.2: Accoppiamento suprerfici su cui è imposta la condizioni di periodicità

Così facendo il flusso in uscita da una delle due superfici, ad esempio sup.(1), risulta entrante nella superficie periodica corrispondente, in questo caso (4), e viceversa. In questo modo, il dominio che si sta studiando risulta essere equivalente ad un dominio tre volte più grande e che prevede la presenza delle di due palette adiacenti a quella studiata.È importante, quando si impone la condizione di periodicità, che per i contorni accoppiati risultino uguali le dimensioni, in questo caso la lunghezza, e che le due superfici siano sovrapponibili, in questo caso, attraverso una traslazione. La forma dei due boundary che circondano il profilo (2-5) è ininfluente al fine della simulazione, perciò è stato scelto di utilizzare delle rette, in modo tale da permettere una più semplice generazione della mesh in quella zona. La seconda condizione geometrica da imporre riguarda lo spessore del bordo di inlet e di quello di outlet. Lo spessore è posto pari al passo dimensionale, la cui misura è riportata in tab.(4.1). In questo modo, il sistema ottenuto, risulterà pari a quello sperimentale, dove sono presenti due palette adiacenti a quella su cui vengono effettivamente valutate le grandezze. Facendo riferimento alla fig.(4.2), è chiaro che, avendo imposto lo spessore di inlet e outlet pari al passo, il flusso del campo di moto che attraversa le due palette verrà suddiviso tra la zona prossima al dorso, che risentirà dell'influenza della paletta superiore, e quella prossima al ventre, che risentirà dell'influenza della paletta inferiore.

La distanza tra bordo di attacco e inlet è stata presa pari al valore della corda della pala, mentre quella tra bordo di fuga e outlet è pari a due volte questo valore. La scelta sulla dimensione del dominio a valle del profilo è tale da poter garantire una zona sufficientemente lunga per lo sviluppo della scia, così da poterne studiare al meglio le caratteristiche. Nel caso invece della distanza tra inlet e bordo di attacco la distanza risulta sufficiente a non permettere al flusso (subsonico) di rimontare fino all'inlet, non compromettendo così i risultati.



Figura 4.2: Dominio di calcolo 2D. Le palette indicate in rosso rappresentano la posizione delle palette adiacenti a quella studiata, ottenute con la condizioni di periodicità

Successivamente è stato costruito il dominio 3D andando ad estrudere quello bidimensionale lungo la direzione spanwise (asse z della simulazione). Non essendo interessati allo studio degli effetti di pala finita, il dominio è stato estruso solo per il 50% (ovvero z = 150 mm)dell'altezza effettiva della pala. In più volendo ottenere una panoramica sui flussi secondari, la zona di interesse sarà quella in prossimità della parete inferiore. La superficie posta a z = 0, ovvero piano che identifica l'endwall, e quella della paletta, indicate rispettivamente con (8) e (9) sulla fig. (4.3), vengono trattate come pareti solide dove è imposta la condizione di no-slip, al fine di poter andare successivamente a simulare lo strato limite. Sulla superficie posta a z = 150 mm è stata impostata la condizione di simmetria, in moda tale che il dominio ottenuto sia equivalente a quello di una paletta, alta il doppio rispetto a quella della simulazione, che presente due endwall paralleli alle due estremità, riducendo ancora una volta il volume del dominio di controllo e quindi anche il costo computazionale.



Figura 4.3: Dominio di calcolo 3D.



Figura 4.4: Dettaglio della T106 con l'endwall

4.2 Generazione della griglia

Anche per la costruzione della mesh è stato utilizzato il software Star CCM+. Nello specifico, all'interno del lavoro di tesi, sono state utilizzate diverse griglie, essendo stato condotto anche uno studio sul raffinamento di quest'ultima. In generale, tutte le griglie utilizzate sono griglie non strutturate ibride. Lo schema utilizzato per la discretizzazione spaziale è quello cella centrato ai volumi finiti. I vantaggi nell'utilizzo di questo tipo di mesh sono stati descritti all'interno del secondo capitolo, riassumendo si può concludere che queste risultano le più adatte sia in termini di precisione dei risultati sia in termini di costi computazionali per la discretizzazione di problemi come quello in esame. In particolare, la grossa curvatura del profilo e le ridotte dimensioni di bordi di fuga ed attacco, rendono necessario l'utilizzo di un tipo di griglia in grado di adattarsi alla geometria complessa senza introdurre elevati costi computazionali in fase di costruzione della griglia stessa. Partendo dal caso 2D, si procede a descrivere la griglia di partenza sulla quale sono stati condotti i primi studi riguardanti il confronto tra modelli fisici. Questa è caratterizzata dalla presenza di una griglia strutturata, nell'intorno del profilo, identificata dal software come Prism Layer, che a sua volta è circondata da una griglia non strutturata. La griglia strutturata è detta O-type, in quanto è una griglia curvilinea che avvolge completamente la forma del profilo. Questa particolare struttura viene utilizzata dal software per andare a studiare lo strato limite. I valori richiesti in input dal software per costruire questa sezione della griglia sono:

- Prism Layer Total Thickness: ovvero lo spessore totale a partire dalla parete;
- *Number of Prism Layer*: che identifica il numero di celle che compongono lo spessore del prism layer;
- *Prism Layer Stretching*: Rateo di crescita delle celle a partire dalla cella precedente.

I valori impostati sono frutto di un fit fatto a partire dai valori trovati in bibliografia in cui si trattava lo stesso tipo di simulazione [6] [8], e andandoli a modificare in modo da poter controllare il valore della y^+ a seconda del modello di turbolenza utilizzato. I parametri impostati sono riportati in tab.(4.3), mentre la griglia ottenuta per i prism layer è mostrata in dettaglio nella fig.(4.5).

Parametro	Valore(u.d.m.)
Prism Layer Total Thickness	$4 \mathrm{mm}$
Number of Prism Layer:	40
Prism Layer Stretching	1.1

Tabella 4.3: Caratteristiche $Prism\ Layer$ per la mesh1



Figura 4.5: Dettaglio Prism Layer



Figura 4.6: Dettaglio prism layer nei pressi del bordo di attacco

Per quanto riguarda la parte non strutturata della griglia, questa è composta da celle poligonali ed è costruita imponendo i seguenti parametri:

- *Base Size*: valore di riferimento attraverso il quale è possibile esprimere gli altri parametri della mesh;
- *Target Surface Size*: dimensione raggiunta dalle celle della mesh in assenza di controllo sulla mesh che impongono dimensioni più piccole;
- *Minimum Surface Size*: valore minimo della dimensione delle celle a parete, essenziale per descrivere geometrie complesse, o come in questo caso curvature importanti;
- Surface Growth Rate: Rateo di crescita delle celle;

Ovviamente questi parametri devono essere impostati per ottenere il giusto compromesso tra una mesh abbastanza raffinata da permettere di ottenere delle buone soluzioni, ma che allo stesso tempo permetta di mantenere sotto controllo i costi computazionali. Per fare ciò è possibile inserire dei controlli sulla mesh in modo tale da poter modificare la griglia solo in determinate aree specifiche. Questo processo può essere effettuato in due modi: sfruttando superfici già presenti all'interno del volume di controllo, quindi si parlerà di *Surface Control*, o costruendo un volume che poi verrà sfruttato dal software per identificare la zona di interesse. Nello specifico, per questa griglia sono stati utilizzati i seguenti controlli:

- Surface control sulla superficie della paletta, che in questo caso (2D) diventa una curva. Nello specifico sono stati modificati i valori della griglia nei pressi del profilo che fanno riferimento al Target Surface Size e al Minimum Surface Size. In più è stata sfruttata la funzione del software Wake Refinement in grado di rifinire la mesh in scia al corpo selezionato, indicando la direzione in cui il programma deve rifinire.
- Surface control sulle superfici dei restanti Boundary, in questo caso solo contorni, in modo tale da disabilitare la creazione dei prism layer (non c'è formazione di strato limite) e con il fine di aumentare la Target Surface Size così da ridurre il numero delle celle della griglia laddove è possibile utilizzare griglie meno rifinite.
- Due *Volumetric control*, uno sul bordo di attacco e uno su quello di fuga del profilo. Per utilizzarli sono stati create prima due sfere centrate nei due punti caratteristici, che proiettate sulla griglia 2D diventano due circonferenze, e all'interno di queste è stata ridotta la dimensione delle celle.

• Volumetric control in scia, in quanto con il solo *Wake Refinement* non veniva coperta tutta la zona di scia rischiando di perdere così informazioni su quest'ultima.

I valori imposti sono i seguenti:

Mesh completa		
Parametro	Percentuale della Base Size	Valore assoluto (u.d.m.)
Base Size	_	10 mm
Target Surface Size:	25%	$2.5 \mathrm{mm}$
Minimum Surface Size	10%	$1 \mathrm{mm}$
Surface Growth Rate	-	1.3
Surface control sul profilo		
Target Surface Size	15%	$1.5 \mathrm{mm}$
Minimum Surface Size	1%	$0.1 \mathrm{mm}$
Wake Refinement		
Isotropic Size	25%	$2.5 \mathrm{mm}$
Growth Rate	-	1.3
Surface Control su contorni		
Target Surface Size	100%	$10\mathrm{mm}$
Volumetric Control su l.e. e t.e.		
Custom Size	5%	$0.5 \mathrm{mm}$
Volumetric Control per la scia		
Custom Size	25%	$2.5 \mathrm{~mm}$

Tabella 4.4: Valori caratteristici della $mesh\ 1$

Il risultato finale è denominato "mesh1" per distinguerlo dalle altre griglie ed è mostrato in fig.(4.7). È importante notare come aver impostato la periodicità sulle superfici laterali del dominio significhi anche che la mesh abbia le stesse dimensioni in prossimità delle due rispettive superfici accoppiate.



Figura 4.7: Mesh1 per il profilo T106A



Figura 4.8: Dettagli del bordo di attacco e del bordo di fuga con mesh effettuata tramite *Volumetric Control*

Come già detto in fase di introduzione di capitolo, è stato condotto uno studio di raffinamento della griglia. Sfruttando la caratteristica di *Star CCM*+, che permette di esprimere i parametri della mesh in funzione della *Base Size*, è stato cambiato il valore di quest'ultima in modo tale da ottenere due griglie con dimensioni caratteristiche nettamente inferiori. In particolare, per quella che verrà chiamata "mesh2" si sono imposti i seguenti valori:

CAPITOLO 4. ANALISI CFD

ParametroPercentuale della $Base Size$ Valore assoluto (u.d.m.) $Base Size$ -5 mm $Target Surface Size:25\%1.25 mmMinimum Surface Size10%0.5 mmSurface Growth Rate-1.3Surface control sul profilo-1.3Target Surface Size15%0.75 mmMinimum Surface Size1%0.05 mmMinimum Surface Size1%0.25 mm$
Base Size-5 mmTarget Surface Size: 25% 1.25 mm Minimum Surface Size 10% 0.5 mm Surface Growth Rate- 1.3 Surface control sul profilo 15% 0.75 mm Target Surface Size 15% 0.05 mm Minimum Surface Size 1% 0.05 mm Wake Refinement 1% 0.25 mm Isotropic Size 25% 1.25 mm
Target Surface Size:25%1.25 mmMinimum Surface Size10%0.5 mmSurface Growth Rate-1.3Surface control sul profilo-1.3Target Surface Size15%0.75 mmMinimum Surface Size1%0.05 mmWake Refinement-1.25 mm
Minimum Surface Size10%0.5 mmSurface Growth Rate-1.3Surface control sul profilo-0.75 mmTarget Surface Size15%0.75 mmMinimum Surface Size1%0.05 mmWake Refinement-1.25 mm
Surface Growth Rate-1.3Surface control sul profilo-1.3Target Surface Size15%0.75 mmMinimum Surface Size1%0.05 mmWake Refinement-1.25 mm
Surface control sul profiloTarget Surface Size15%Minimum Surface Size1%0.05 mmWake RefinementIsotropic Size25%1.25 mm
Target Surface Size15%0.75 mmMinimum Surface Size1%0.05 mmWake Refinement11.25 mm
Minimum Surface Size1%0.05 mmWake Refinement11.25 mm
Wake Refinement Isotropic Size 25% 1.25 mm
Isotropic Size 25% 1.25 mm
Growth Rate - 1.3
Surface Control su contorni
Target Surface Size100%5mm
Volumetric Control su l.e. e t.e.
Custom Size 5% 0.25 mm
Volumetric Control per la scia
Custom Size 25% 1.25 mm

Tabella 4.5: Valori caratteristici della $mesh\ 2$

Ottenendo il come griglia quella riportata in fig.(4.9):



Figura 4.9: Mesh2 per il profilo T106A



Figura 4.10: Mesh2 dettaglio profilo T106A, sono ben evidenti anche i volumi di controllo sui bordi dello stesso.

Mesh completa		
Parametro	Percentuale della Base Size	Valore assoluto (u.d.m.)
Base Size	_	1 mm
Target Surface Size:	25%	$0.25 \mathrm{~mm}$
Minimum Surface Size	10%	$0.1 \mathrm{mm}$
Surface Growth Rate	-	1.3
Surface control sul profilo		
Target Surface Size	15%	$0.15 \mathrm{~mm}$
Minimum Surface Size	1%	$0.01 \mathrm{mm}$
Wake Refinement		
Isotropic Size	25%	$0.25 \mathrm{~mm}$
Growth Rate	_	1.3
Surface Control su contorni		
Target Surface Size	100%	$1\mathrm{mm}$
Volumetric Control su l.e. e t.e.		
Custom Size	5%	$0.5 \mathrm{mm}$
Volumetric Control per la scia		
Custom Size	25%	$0.25 \mathrm{~mm}$

Stessa cosa è ripetuta riducendo ancora la Base Size ed ottenendo la "mesh
3". Caratterizzata da:

Tabella 4.6: Valori caratteristici della mesh ${\mathcal 3}$

È importante sottolineare che l'operazione non coinvolge lo spessore del *Prism* Layer, il quale deve comunque essere abbastanza grande da contenere l'intero strato limite. La griglia "mesh3" è rappresentata in fig. (4.11).



Figura 4.11: Mesh3 per il profilo T106A

Si nota chiaramente come il numero delle celle aumenti notevolmente passando dalla prima alla terza griglia, in particolare si ha che, riducendo del 90% la *Base Size* si ottiene una griglia con dieci volte il numero di celle contenute in quella di partenza. I dati sono riassunti in tab.(4.7).

	Mesh1	Mesh2	Mesh3
% Base Size (rispetto alla <i>mesh1</i>)	100%	50%	10%
n.celle	11707	32815	100588

Tabella 4.7: Confronto del numero di celle per le doverse griglie

4.2.1 Mesh 3D

L'ultima griglia costruita è quella per la simulazione tridimensionale. In questo caso la parte di griglia strutturata non riguarda solo il profilo, ma dovendo simulare anche lo strato limite lungo l'endwall, vengono costruiti anche in questa zona i così detti *Prism Layer*. Volendo avere una prima approssimazione dei flussi secondari, diventa fondamentale andare a costruire una corretta griglia i questa zona. Si premette però che, dovendo fare i conti con i notevoli tempi computazionali, non è stato possibile effettuare uno studio più approfondito sul giusto dimensionamento delle celle del *Prism Layer*, pertanto si è deciso di riprendere i valori utilizzati per

CAPITOLO 4. ANALISI CFD

la costruzione della griglia strutturata sul profilo. Per tanto sui per i *Prism Layer* sono stati impostati i seguenti valori:

Parametro	Valore(u.d.m.)
Prism Layer Total Thickness	$4 \mathrm{mm}$
Number of Prism Layer:	40
Prism Layer Stretching	1.1

Tabella 4.8: Caratteristiche del Prism Layer per la mesh 3D

Bisogna fare molta attenzione alla zona di intersezione tra i *Prism Layer* relativi all'endwal e quelli associati al profilo. Infatti, visto la presenza si un spigolo molto accentuato nella zona di congiunzione tra profilo e parete inferiore, laddove manca un raccordo, durante la fase di costruzione si hanno dei problemi dati dall'eccessivo assottigliamento dello spessore della griglia strutturata. Il problema è mitigato andando a modificare il valore del *Near Core Layer aspect ratio*, parametro che permette di modificare le dimensioni trasversali delle celle del *Prism Layer* nei pressi degli spigoli. Tuttavia, come si nota dalla fig.(4.12) un restringimento è comunque presente e sicuramente influenza negativamente il risultato della simulazione. Un modo per poter ridurre ancora il problema è quello di andare ad imporre dimensioni più piccole per le celle sulla superficie, di pala e parete, tuttavia questo porterebbe ad una aumento sostanziale dei tempi computazionali che risultano già onerosi.



Figura 4.12: A sinistra si ha il *Prism Layer* generato sulla parete di endwall. A destra il dettaglio sull'intersezione tra i *Prism Layer* di profilo e parete

I valori assegnati ai restanti parametri sono sempre tali da cercare il giusto equilibrio tra accuratezza e costi computazionali. Quindi si è deciso di sviluppare lungo l'asse z una griglia che, per grandezza media delle celle, risulti intermedia tra la mesh1 e la mesh2. Impostando quindi i seguenti parametri:

Mesh completa		
Parametro	Percentuale della Base Size	Valore assoluto (u.d.m.)
Base Size	-	$7.5 \mathrm{mm}$
Target Surface Size:	25%	$1.875 \mathrm{\ mm}$
Minimum Surface Size	10%	$0.7 \mathrm{mm}$
Surface Growth Rate	-	1.3
Volume Growth Rate	-	1.2
Surface control sul profilo		
Target Surface Size	10%	$0.75 \mathrm{~mm}$
Minimum Surface Size	1%	$0.225 \mathrm{\ mm}$
Wake Refinement		
Isotropic Size	35%	$0.2625 \mathrm{~mm}$
Growth Rate	-	1.3
Surface Control su contorni		
Target Surface Size	200%	$15 \mathrm{mm}$
Minimum Surface Size	50%	3.75 mm
Volumetric Control su l.e. e t.e.		
Custom Size	5%	$0.375 \mathrm{~mm}$
Volumetric Control per la scia		
Custom Size	35%	$0.2625~\mathrm{mm}$

Tabella 4.9: Valori caratteristici della mesh3D

Rispetto al caso 2D compare un ulteriore parametro, ovvero il Volume Growth Rate, che permette di regolare il rateo di crescita delle celle a partire dai contorni verso la parte interna della mesh. Parametro molto importante in questo caso in cui si vuole studiare ciò che avviene vicino a parete e dove un brusco passaggio delle dimensioni delle celle influenzerebbe negativamente la simulazione. La mesh 3D ottenuta è caratterizzata da:

N. celle	$5\ 423\ 540$
N. facce	$24 \ 904 \ 083$
N.vertici	$15\ 282\ 431$

Tabella 4.10: Dimensioni mesh 3D

Viene quindi rappresentata in fig.(4.13, 4.14, 4.15, 4.16).



Figura 4.13: Mesh 3D per il profilo T106A



Figura 4.14: Piano x-y della Mesh 3D per il profilo T106A



Figura 4.15: Piano y-z della Mesh $3\mathrm{D}$ per il profilo T106A



Figura 4.16: Dettaglio Mesh 3D sulla superfici del profilo T106A e dell'endwall

4.3 Scelta del modello fisico

Dopo aver creato la grigia, è necessario andare a specificare, all'interno del software, le caratteristiche fondamentali del problema in esame, scegliendo i moduli più adatti e definendo così il modello fisico. Si è imposto quindi sulla fisica del problema quanto riassunto in tab.(4.11):

Modello fisico	
Spazio	$2\mathrm{D}/3\mathrm{D}$
Tempo	Steady
Materiale	Gas
Flusso	Coupled flow
Equazione di stato	Equazione di stato per i gas perfetti
Regime viscoso	Turbolento
Modello di turbolenza	Spalart-Allmaras
	$ ext{K-}arepsilon$
	K- ω standard
	K- ω SST
Modello di transizione	$\gamma - Re_{\theta} \text{ (solo per K-}\omega \text{ SST)}$

Tabella 4.11: Modello fisico imposto per le simulazioni

Il campo "*spazio*" indica la geometria del problema che si sta trattando, nel caso specifico verrà scelto il caso 2D o 3D a seconda del fatto che si stia effettuando lo studio bidimensionale o tridimensionale. Il campo "*tempo*" identifica il tipo di soluzione nel tempo che si sta cercando. Nelle simulazioni svolte nel lavoro di tesi sono cercate soluzioni stazionarie. Successivamente è richiesto la tipologia di materiale che compone il flusso in esame, ovvero un fluido gassoso.

L'indicazione di "coupled flow" indica che dovrà essere risolta anche l'equazione per l'energia, accoppiata a quelle per massa e quantità di moto. Tale indicazione si rende necessaria in quanto si sta trattando un un flusso con M > 0.3 e quindi con gli effetti di comprimibilità che diventano importanti. La stessa motivazione guida la scelta di utilizzare l'equazione di stato per i gas perfetti, la quale permette così di tener conto delle variazioni del valore della densità.

Si è imposto quindi come regime viscoso quello turbolento e di conseguenza è necessario selezionare un modello di turbolenza. In tabella sono riportati i modelli utilizzati, i quali verranno analizzati dettagliatamente nel paragrafo seguente. Si nota anche che, per il solo caso con modello K- ω SST sono state condotte simulazioni utilizzando anche un modello di transizione per lo strato limite, ovvero il $\gamma - Re_{\theta}$.

4.4 Studio sui modelli di turbolenza

La prima parte del lavoro di tesi si è concentrata sul confronto tra diversi modelli di turbolenza implementati all'interno di Star CCM+. Per questo vengono fissati la griglia di calcolo, le condizioni iniziali e quelle al contorno. Nello specifico è stata utilizzata la griglia "mesh 1", descritta nel paragrafo precedente. Le simulazioni sono state quindi condotte fissando numero di Mach e numero di Reynolds isoetropici di uscita, con:

$$M_{2th} = 0.59 \qquad Re_{2th} = 120000 \tag{4.1}$$

I risultati sono quindi stati confrontati con quelli ottenuti sperimentalmente dallo studio condotto da A.Duden e L.Fottner [5] e con quelli ottenuti attraverso analisi CFD, sia attraverso le RANS che attraverso le LES, del lavoro di R.Pichler [6].

4.4.1 Condizioni al contorno ed iniziali

Per ottenere le condizioni di Mach e Reynolds isoentropici di uscita desiderati, sono stati determinati i valori delle varie grandezze in ingresso e in uscita che soddisfamo tali requisiti. In particolare, per le condizioni a monte sono stati scelti arbitrariamente i valori di pressione e temperatura totali, che sono stati presi pari a:

$$P_1^{\circ} = 100\,000\,\mathrm{Pa} \qquad T_1^{\circ} = 300\,\mathrm{K}$$

$$(4.2)$$

Per questo, noto il valore del Ma_{2th} , si possono determinare i valori della pressione statica e della temperatura statica in uscita attraverso le leggi per le correnti isoentropiche:

$$p_{2th} = \frac{P_1^{\circ}}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M_{2th}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}} = 79012.662762 \,\mathrm{Pa}$$
(4.3)

$$t_{2th} = \frac{T_1^{\circ}}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M_{2th}^2\right)} = 280.473439 \,\mathrm{K} \tag{4.4}$$

Sfruttando la definizione di numero di Mach e la legge che lega la velocità del suono alla temperatura è possibile determinare anche la velocità del flusso in uscita.

$$u_{2th} = M_{2s} \cdot \sqrt{\gamma \cdot R \cdot t_{2h}} = 198.097272 \,\mathrm{m/s}$$
 (4.5)

Quindi sfruttando l'equazione di stato dei gas perfetti, avendo imposto nella simulazione che il gas si comporti come un gas ideale, si determina la densità del flusso in uscita:

$$\rho_{2th} = \frac{p_{2th}}{R \cdot t_{2th}} = 0.981232 \,\mathrm{kg/m^3} \tag{4.6}$$

Noti a questo punto il Re_{2th} e le grandezze che lo definiscono, è possibile determinare la viscosità dinamica in moda tale che sia realizzata la condizione di Re e Ma in uscita desiderata.

$$Re_{2th} = \frac{\rho_{2th} \cdot u_{2th} \cdot c}{\mu} = 120000 \tag{4.7}$$

per cui si trova una viscosità dinamica paria a:

$$\mu = 1.61982842298 \cdot 10^{-4} \,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} \tag{4.8}$$

Riassumendo quanto appena calcolato, verranno imposti sulla sezione di ingresso e su quella di uscita dei valori fissi di pressione e temperatura. In particolare, sulla sezione di ingresso verranno fissati il valore di pressione totale, temperatura totale e direzione del flusso. Sulla sezione di uscita verranno imposti invece i valori di pressione statica e temperatura statica. I dati sono riassunti qui in tab.(4.12):

Grandezza	(u.d.m.)
sezione di ingresso	
P_1°	$100000 \mathrm{Pa}$
T_1°	$300\mathrm{K}$
Direzione del flusso	[0.79122, 0.61153]
sezione di uscita	
p_2	$79012.662762\mathrm{Pa}$
t_2	$280.473439\mathrm{K}$

Tabella 4.12: Condizioni al contorno imposte per la simulazione aRe=120000eM=0.59

Per quanto riguarda le condizioni iniziali, il flusso è stato considerato inizialmente fermo, mentre pressioni e temperatura sono state poste pari a quelle imposte sulla sezione di uscita.

condizioni iniziali	
Grandezza	(u.d.m.)
p_2	$79012.662762\mathrm{Pa}$
t_2	$280.473439\mathrm{K}$
flusso fermo	(v = 0)

Tabella 4.13: Condizioni iniziali imposte per la simulazione aRe=120000eM=0.59

Ovviamente ai valori assegnati a queste grandezze vanno aggiunti quelli richiesti dai vari modelli come valori iniziali e al contorno per risolvere le apposite equazioni aggiuntive. Queste ultime verranno specificate in seguito.

4.4.2 Spalart-Allmaras

Come descritto nel secondo capitolo, per risolvere il modello proposto da Spalart e Allmaras è necessario imporre il valore della variabile $\tilde{\nu}$ in ingresso sulla parete di inflow. Non essendo noto tale valore si sfrutta la possibilità fornita dal software di indicare come valore utile alla definizione del profilo di turbolenza quello della *Turbulent Viscosity Ratio*, μ_T/μ , attraverso il quale il è possibile calcolare la $\tilde{\nu}$ utilizzando la seguente legge:

$$\frac{\mu_t}{\mu} = \frac{\rho \tilde{\nu} f_{v1}}{\mu} \tag{4.9}$$

Quindi, rifacendosi sempre all'esperimento condotto da Duden e Fottner, in cui è indicata una *Turbulence Tntensity* nel freestream pari a I = 3.4%, per il caso a $Re_{2th} = 120000$, si è deciso di imporre una *Turbulent Viscosity Ratio* pari a:

$$\frac{\mu_t}{\mu} = 26\tag{4.10}$$

Valore che viene fuori dal consulto di alcuni testi che trattavano l'argomento, e che suggerivano un range di valori, in cui è compreso quello scelto, in base al valore di $I \in Re_{2th}$. Questa quantità è stata imposta sia per la condizione iniziale sia sulla parete di inflow. In realtà, anche se non richiesto dal modello, è stato imposto un valore di *Turbulent Viscosity Ratio* anche sull'outlet. Infatti, sebbene il valore di $\tilde{\nu}$ all'uscita venga normalmente derivato dalla parte interna del dominio, si impone comunque un valore che verrà utilizzato nel caso si presentassero flussi inversi in prossimità dell'outlet.

Un primo risultato che si può osservare è il campo di velocità che si sviluppa intorno al profilo, fig.(4.17)



Figura 4.17: Campo di velocità attorno alla pala T106A ottenuto con l'utilizzo del modello Spalart-Allmaras

4.4.3 $K - \varepsilon$

Per l'utilizzo del modello $K - \varepsilon$ è necessario imporre il valore dell'energia cinetica turbolenta K e della velocità di dissipazione (dell'energia cinetica turbolenta) sia nelle condizioni al contorno sia in quelle iniziali. Per determinare questi valori si sfrutta la conoscenza dell'andamento dell'energia cinetica turbolenta lungo il dominio (procedendo da monte verso valle del profilo), fornita sia dal lavoro di Pichler[6] sia da quello di R.Ciorciari [7]. Nello specifico si è proceduto andando a variare iterativamente il valore della lunghezza caratteristica della turbolenza Lin modo da ottenere l'andamento desiderato. Quest'ultima è stata calcolata come prodotto tra la lunghezza della corda del profilo per un valore costante che veniva variato ad ogni iterazione. Quindi dopo alcune iterazioni si è giunti ai seguenti valori:

$$L = \cot c = 0.0012 \,\mathrm{m} \qquad \cot c = 0.012$$
 (4.11)

Dal quale derivano:

$$K = \frac{3}{2} \left(I \cdot V_{ing} \right)^2 = 22.535\,064\,\mathrm{J/kg} \tag{4.12}$$

$$\varepsilon = \frac{C_{\mu}^{3/4} \cdot K^{3/2}}{L} = 14\,648.354\,099\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3 \tag{4.13}$$

Con la V_{ing} velocità di ingresso e paria a $v_{ing} = 102 \text{ m/s}$, mentre $C_{\mu} = 0.09$ è una costante del modello. Il campo di velocità ottenuto è quello mostrato in fig.(4.18)



Figura 4.18: Campo di velocità attorno alla pala T106A ottenuto con l'utilizzo del modello $k-\varepsilon$

4.4.4 Standard $K - \omega \in K - \omega$ SST

Per i due modelli proposti per il $K - \omega$ è stato eseguito lo stesso procedimento iterativo già descritto per il $k - \varepsilon$. Nello specifico in questo caso è stato calcolato il valore della velocità specifica di dissipazione (di energia cinetica turbolenta) ω . Ottenendo quindi:

$$L = \cot c = 0.0012 \,\mathrm{m} \qquad \cot c = 0.012$$
 (4.14)

$$K = \frac{3}{2} \left(I \cdot V_{ing} \right)^2 = 22.535\,064\,\mathrm{J/kg} \tag{4.15}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{k}}{L \cdot \beta *^{1/4}} = 7222.499\,567\,\mathrm{s}^{-1} \tag{4.16}$$

Con β^* costante e pari a $\beta^* = 0.09$. Ottenendo il campo di velocità in fig.(4.19)



Figura 4.19: Campo di velocità attorno alla pala T106A ottenuto con l'utilizzo del modello $k-\omega$ standard

Per quanto riguarda il $K - \omega$ SST i valori ottenuti con il processo iterativo e quindi successivamente imposti ai contorni e alla condizione iniziale sono i seguenti:

$$L = \cot \cdot c = 0.00135 \,\mathrm{m} \qquad \cot t = 0.012 \tag{4.17}$$

$$K = \frac{3}{2} \left(I \cdot V_{ing} \right)^2 = 22.535\,064\,\mathrm{J/kg} \tag{4.18}$$

CAPITOLO 4. ANALISI CFD

$$\omega = \frac{\sqrt{k}}{L \cdot \beta^{1/4}} = 6419.999\,615\,\mathrm{s}^{-1} \tag{4.19}$$

Dove in questo caso:

$$\beta * = f_1 \beta_1 * + (1 - f_1) \beta_2 * \tag{4.20}$$

Con $\beta_1 * e \beta_2 * costanti e f_1$ funzione di blending descritta nel capitolo 2. Si ottiene quindi il campo di moto in fig.(4.20)



Figura 4.20: Campo di velocità attorno alla pala T106A ottenuto con l'utilizzo del modello $k-\omega$ SST standard

4.4.5 Confronto trai diversi modelli

Ottenuti i risultati delle simulazioni è possibile effettuare un primo controllo sull'esattezza delle soluzioni andando a valutare il valore del M_{2th} e del Re_{2th} a valle del del profilo T106, in modo da controllare che le due grandezze assumano il valore desiderato, ovvero quello utilizzato per calcolare le grandezze delle condizioni al contorno e della condizione iniziale. Ulteriore confronto può essere fatto valutando il valore del numero di Mach in ingresso, noto grazie allo studio di riferimento [**6**]. Quindi si vogliono ottenere:

$$M_{2th} = 0.59$$
 $Re_{2th} = 120000$ $M_1 = 0.28$ (4.21)

Questi valori sono confermati da tutte le simulazioni condotte con i vari modelli di turbolenza, ottenendo valori identici o molto vicini a quelli appena descritti. Ad esempio sono riportati in fig.(4.22) gli andamenti per il numero di Mach e per il numero di Reynolds a monte e a valle del profilo, ottenuti attraverso la simulazione che utilizzava il modello di Spalart-Allmaras. In questo caso specifico le grandezze hanno valori pari a:

$$M_{2th} \sim 0.58 \qquad Re_{2th} \sim 118000 \qquad M_1 = 0.285$$
 (4.22)

Avvicinandosi molto a quelli sperimentali.

Per poter confrontare i risultati ottenuti con l'utilizzo dei vari modelli tra di loro e, in particolare, con quelli sperimentali si utilizza la distribuzione del coefficiente di pressione lungo il profilo. Il coefficiente di pressione, utilizzato nello studio di Duden e Fottner [5], è definito nel seguente modo:

$$C_p = \frac{p(x) - p_2}{P_1^{\circ} - p_2} \tag{4.23}$$

Dove p_2 è la pressione statica sulla sezione di uscita, P_1° è la pressione totale sulla sezione in ingresso e p(x) la pressione statica valutata lungo la coordinata xsulla superficie del profilo. I risultati vengono mostrati in fig.(4.21), dove è graficato l'andamento del coefficiente di pressione in funzione dell'ascissa normalizzata rispetto alla corda assiale del profilo.



Figura 4.21: Andamento del coefficiente di pressione lungo il profilo T106 al variare del modello di turbolenza e ottenuto con i dati sperimentali.



Figura 4.23: Dettaglio dell'andamento del coefficiente di pressione nei pressi del bordo di attacco

Osservando il grafico in fig.(4.21), si nota subito come i risultati ottenuti con i diversi modelli di turbolenza convergano tutti verso la stessa curva, con piccole differenze osservabili andando a ingrandire nel dettaglio alcuni punti caratteristici, come può essere il bordo di attacco, fig.(4.23). Mentre, confrontando i risultati ottenuti con la CFD e quelli sperimentali si osserva una sostanziale differenza di congruenza dei risultati tra dorso e ventre. Infatti, sul ventre i le curve ottenute attraverso le simulazioni seguono perfettamente quelli sperimentali, sul dorso c'è una differenza ben evidente. In particolare, si osserva, per i risultati numerici, che la depressione massima ottenuta sul dorso del profilo risulta maggiore, in valore assoluto, rispetto al caso sperimentale. Tale discrepanza è dovuta alla mancanza della separazione della corrente sul dorso del profilo nel caso numerico. Il fenomeno si può notare sia nelle immagini proposte nel paragrafo precedente, che mostrano il campo di velocità attorno al profilo, sia dall'andamento della curva del coefficiente di pressione, che in caso di separazione dovrebbe essere caratterizzata da valore



Figura 4.22: (a)Andamento del numero di Mach a monte e valle del profilo.(b) Andamento del numero di Reynolds a monte e valle del profilo.

costante di c_p nel tratto interessato dalla separazione. Quest'ultima caratteristica è presente, al contrario, nella curva ottenuta con i dati sperimentali. In particolare, la separazione avviene a $x/c_{ax} \cong 0.9$.

Modello $\gamma - Re_{\theta}$

Per ovviare a questa problematica, si è provato a ripetere la simulazione introducendo un modello di transizione dello strato limite. Un modello di transizione permette di valutare la transizione dello strato limite da laminare a turbolento. L'utilizzo di tali modelli è reso necessario dal fatto che i modelli di turbolenza, precedentemente analizzati, si basano sulla capacità di descrivere flussi completamente turbolenti, fatta eccezione per il il modello $K - \varepsilon$ che prevede l'utilizzo di apposite funzioni di smorzamento. Nello specifico si è scelto di utilizzare il modello $\gamma - Re_{\theta}$ accoppiato al già citato $K - \omega$ SST, il quale va ad aggiungere ulteriori due equazioni di trasporto al modello di turbolenza. Come altri modelli di transizione, questo di basa sul concetto di intermittenza, indicata con γ , la quale fornisce un'indicazione della durata del tempo in cui lo strato limite si trova nello stato turbolento. Nello specifico:

> $\gamma = 1$ flusso completamente turbolento per tutto il tempo $\gamma = 0$ flusso completamente laminare

Le due equazioni introdotte riguardano proprio il trasporto di questa grandezza e di una grandezza detta Transition Momentum Thickness Reynolds Number, indicata con Re_{θ} . Al fine di calibrare il modello è necessario introdurre una legge, solitamente di derivazione empirica, in grado di definire come il valore di Re_{θ} venga trasportato dal flusso libero all'interno dello strato limite. Tale funzione prende il nome di Free Stream Edge, e non avendo a disposizione dati empirici per definirla sono stati provati due approcci. Il primo consigliato all'interno della guida di Star CCM+ che prevede che la funzione abbia valore di 1 nel freestream e 0 nello strato limite. In particolare si avrà:

$$\begin{cases} f(d) = 0 & \text{per } d < \delta \\ f(d) = 1 & \text{per } d > \delta \end{cases}$$

$$(4.24)$$

Con f(d) funzione di Free Stream Edge, d coordinata normale alla parete, δ spessore dello strato limite. Il secondo approccio è quello consigliato da P.Malan nel suo studio sulla calibrazione del modello $\gamma - Re_{\theta}$ per il software Star CCM+ [9]. Questo prevede di far variare la funzione da 0 a 1 in un intervallo di spazio che va da 0 (parete) a 2δ attraverso una legge polinomiale. Non potendo ancora contare su dati empirici, si è scelto di far variare la funzione attraverso una legge

polinomiale di secondo grado. Riassumendo:

$$\begin{cases} 0 < f(d) < 1 \quad \text{per} \quad 0 < d < 2\delta \\ f(d) = 1 \quad \text{per} \quad d > 2\delta \end{cases}$$
(4.25)

I risultati ottenuti sono riportanti qui di seguito ancora sotto forma di campo di velocità e di coefficiente di pressione attorno al profilo, fig.(4.24,4.25).



Figura 4.24: Campo di velocità ottenuto attraverso l'utilizzo del modello $K - \omega$ SST con modello di transizione $\gamma - Re_{\theta}$

Anche in questo caso la simulazione non è in grado di catturare la separazione nei pressi del bordo di fuga. Questo è dovuto al fatto che, come già detto in fase di introduzione del modello di transizione, i modelli di turbolenza sono studiati per risolvere flussi completamente turbolenti. A questo si aggiunge che le RANS tendenzialmente anticipano la transizione da flusso laminare a turbolento. Proprio per questo si rende necessario l'utilizzo del modello di transizione. Nello specifico, il $\gamma - Re_{\theta}$ va ad agire sul termine di produzione dell'energia cinetica turbolenta limitandone l'effetto attraverso l'introduzione dell'intermittenza, precedentemente descritta. Le problematiche principali di tale modelli riguardano la taratura dello stesso rispetto al caso che si sta studiando e la grande sensibilità alle condizioni al contorno. Per questo la transizione anticipata del flusso non permette di catturare la separazione laminare che caratterizza il flusso sul dorso del profilo T106 analizzato, presente invece nelle misurazioni sperimentali, e che andrà a penalizzare le simulazioni svolte all'interno di questo lavoro di tesi.



Figura 4.25: Confronto distribuzione coefficiente di pressione con e senza modello di transizione $\gamma-Re_{\theta}$

4.5 Studio di convergenza sulla griglia

Per studiare gli effetti del raffinamento della mesh utilizzata è necessario fissare un modello di turbolenza tra quelli appena descritti. Non essendoci un modello che ha evidenziato vantaggi nella precisione della predizione del campo di moto, la scelta è stata fatta basandosi su quanto presente in bibliografia. Per questo le simulazioni utilizzate per valutare le tre differenti griglie sono fatte utilizzando un modello di turbolenza $K - \omega$ SST con ausilio di modello di transizione $\gamma - Re_{\theta}$, in quanto sulla carta risulta essere il più adatto allo studio di campi di moto di questo tipo. Le griglie utilizzate per lo studio di convergenza sono quelle descritte nel paragrafo 4.2 e che prendono il nome di: mesh 1, utilizzata già per lo studio dei modelli di turbolenza, mesh 2, mesh 3.

Nello specifico le mesh 2 e 3 sono state derivate dalla *mesh 1* andando a ridurne le dimensioni delle celle, allo stesso modo, in tutti i punti della griglia (operazione resa possibile dal fatto che tutti i parametri di griglia sono espressi in funzione della *Base Size*). In questo modo è possibile valutare in modo veritiero l'influenza delle dimensioni medie delle celle, e quindi della capacità di descrivere puntualmente il campo di moto, delle tre griglie. Riassumendo le caratteristiche delle griglie, e confrontandole si ottiene:

	Mesh1	Mesh2	Mesh3
% Base Size (rispetto alla mesh1)	100%	50%	10%
n.celle	11707	32815	100588

Tabella 4.14: Rapporto tra le dimensioni caratteristiche delle tre mesh bidimensionali

Per la mesh 1 si ottiene il campo di moto in fig.(4.24), per la mesh 2 quello in fig.(4.26), per la mesh 3 quello in fig.(4.27).



Figura 4.26: Campo di moto ottenuto con l'utilizzo della griglia mesh 2



Figura 4.27: Campo di moto ottenuto con l'utilizzo della griglia mesh 3

4.5.1 Effetto della variazione della mesh sui risultati

Osservando il campo di velocità ottenuto per le tre griglie si nota subito che in tutti e tre i casi non è presente la separazione del flusso nei pressi del bordo di fuga del profilo T106, per i motivi descritti nel paragrafo precedente. Perciò il campo di velocità che si sviluppa nella regione prossima alla paletta risulta identica nei tre casi, emergendo solo una maggiore dettaglio ed uniformità del flusso in espansione sul dorso. Quanto appena descritto è ben evidente nella curva che mostra l'andamento del coefficiente di pressione mostrato in fig.(4.28).



Figura 4.28: Distribuzione del coefficiente di pressione ottenuto con varie griglie per il profilo T106A

Se per quanto riguarda il flusso intorno al profilo il raffinamento della griglia non porta a variazioni evidenti del risultato, discorso diverso va fatto per il campo di moto a valle del profilo. In questo caso è ben evidente come lo sviluppo della scia sia influenzato notevolmente dalla scelta della griglia come si nota anche osservando il campo di velocità nelle fig.(4.26, 4.27). Al fine di evidenziare questa differenza viene utilizzato il coefficiente di perdita di pressione totale, definito come[**8**]:

$$\omega = \frac{P_1^{\circ} - P^{\circ}(x, y)}{P_1^{\circ} - P_2^{\circ}}$$
(4.26)

Dove P_1° rappresenta la pressione totale valutata nel flusso libero alla sezione di ingresso, P_2° è la pressione totale valutata sulla sezione di uscita e $P^{\circ}(x, y)$ è la pressione totale misurata puntualmente. Risulta importante andare a valutare la caduta di pressione totale in scia al profilo in quanto in questo dato sono contenute le informazioni riguardanti le perdite dovute agli effetti viscosi, al mescolamento della scia e a fenomeni come il vortex shedding, qualora questi fossero presenti. Si
procede fissando tre sezioni a valle del profilo e valutando il coefficiente di perdita in questi punti. Non avendo a disposizione dati sperimentali, i risultati sono confrontati con quelli ottenuti da M.Marconcini [8] che nel suo lavoro ha affrontato lo stesso problema sia utilizzando le RANS, sia la LES. In particolare si valuteranno solo i primi.

Le sezioni scelte per l'analisi si trovano a: $x/c_{ax} = 1.1$, $x/c_{ax} = 1.3$, $x/c_{ax} = 1.5$, con l'origine fissata sul bordo di attacco del profilo. I risultati sono mostrati nei grafici in fig.(4.29, 4.30, 4.31).



Figura 4.29: Coefficiente di perdita di pressione totale valutato a $x/c_{ax} = 1.1$ con tre diverse griglie



Figura 4.30: Coefficiente di perdita di pressione totale valutato a $x/c_{ax} = 1.3$ con tre diverse griglie



Figura 4.31: Coefficiente di perdita di pressione totale valutato a $x/c_{ax} = 1.5$ con tre diverse griglie

Nei grafici il coefficiente di perdita di pressione è graficato in funzione della coordinata y normalizzata rispetto al passo t corrispondete al caso T106A. Osservando i risultati ottenuti per $x/c_{ax} = 1.3$ e $x/c_{ax} = 1.5$ (fig.(4.30, 4.31)) risulta evidente come, riducendo la dimensione media delle celle, la soluzione di avvicini progressivamente a quella ottenuta da M.Marconcini. Questo si nota meno per il caso a $x/c_{ax} = 1.1$ dove, come descritto nel paragrafo dedicato alle mesh, è presente, nei pressi del bordo di fuga, una zona in cui viene ridotta notevolmente la dimensione delle celle attraverso l'utilizzo di un volume di controllo, come mostrato bene in fig.(4.8).

In generale i risultati ottenuti con la griglia "*mesh 3*" risultano prossimi a quelli ottenuti nello studio di riferimento. Se si considera però quanto osservato nei paragrafi precedenti, ovvero la mancanza di separazione del flusso sul dorso del profilo, si potrebbe pensare ad un errore commesso nella simulazione. Infatti, la caduta di pressione totale porta con sè l'informazione legata alle perdite dovuta a fenomeni come il mescolamento, la formazione di vortici e altri che caratterizzano la scia a valle di un corpo in cui si ha separazione della corrente. In questo caso, non essendoci separazione sul dorso, ci si aspetterebbe valori del coefficiente di perdita di pressione totale più bassi rispetto a quanto misurato nel caso reale. Tuttavia, è bene notare che i dati con cui vengono confrontati quelli ottenuti nel lavoro di tesi sono anch'essi ottenuti mediante l'utilizzo di RANS, quindi non sperimentali, e potrebbero risentire degli stessi problemi riscontrati nelle simulazioni svolte nel seguente studio. Pertanto, sono da ritenere soddisfacenti i risultati appena illustrati. Riassumendo:

posizione	ω_{max}	$\delta \ ({\rm mm})$
$x/c_{ax} = 1.1$	0.4186	15.98
$x/c_{ax} = 1.3$	0.2586	23.97
$x/c_{ax} = 1.5$	0.2027	30.362

Tabella 4.15: Valori del coefficiente ω a valle del profilo e spessore della zona interessata dalla scia δ

Con δ spessore della scia.

Analizzando dal punto di vista fisico i dati ottenuti, questi sono in linea con quanto ci si aspetta. Infatti, si può notare come sulla sezione più vicina il picco del coefficiente è maggiore in valore assoluto, per poi diminuire progressivamente allontanandosi dal profilo. Al contrario, l'area interessata dalla caduta di pressione risulta più piccola a $x/c_{ax} = 1.1$, per poi allargarsi procedendo verso valle del dominio, raggiungendo la sezione massima per $x/c_{ax} = 1.5$. Queste due caratteristiche si spiegano osservando che nella sezione più prossima al bordo di fuga

l'influenza del corpo è maggiore e porta a misurare valori di pressione totale minori. Successivamente il flusso che caratterizza la scia tende ad adattarsi al flusso del free-stream, aumentando la sua sezione e con valori di pressione totale misurata sempre più prossimi a quelli del flusso a valle del profilo.

4.6 Influenza del numero di Reynolds

Lo studio prosegue andando a valutare l'effetto della variazione del numero di Reynolds sul campo di moto che si sviluppa intorno al profilo. Ancora una volta sono presi come riferimento i risultati dello studio di A.Duden e L.Fottner [5], dove viene studiato il profilo T106A sia a Re = 120000 sia a Re = 500000. In entrambi i casi il numero di Mach isoentropico in uscita è mantenuto a $M_{2th} = 0.59$.

Al fine di effettuare questa nuova simulazione, variando il numero di Reynolds, è necessario modificare griglia, condizioni iniziali e condizioni al contorno utilizzate fin ora, mantenendo inalterata la geometria. Per quanto riguarda la griglia, si è scelto di utilizzare la griglia "mesh 2" che rappresenta un giusto compromesso tra costo computazionale e precisione della soluzione, andando a modificare lo spessore del *Prism layer* e la distribuzione delle celle al suo interno, in modo tale da poter racchiudere completamene lo strato limite mantenendo la condizione di $y^+ < 1$ sulla prima cella a parete. Per questo si è passati ad una griglia con *Prism Layer*:

Parametro	Valore(u.d.m.)
Prism Layer Total Thickness	$5 \mathrm{mm}$
Number of Prism Layer:	50
Prism Layer Stretching	1.1

Tabella 4.16: Caratteristiche del Prism Layer per Re = 500000

Per determinare le condizioni al contorno è necessario ricalcolare le grandezze da imporre ai contorni considerando che, per il caso di Re = 500000 e $M_{2th} = 0.59$, la turbulent intensity, misurata in galleria del vento, sulla sezione di ingresso vale:

$$I = 5.8\%$$
 (4.27)

In generale, resteranno invariate le condizioni su pressione, temperatura e direzione del flusso, in quanto resta invariato il numero di Mach, e saranno ancora pari a:

Grandezza	(u.d.m.)
sezione di ingresso	
P_1°	100000 Pa
T_1°	$300\mathrm{K}$
sezione di uscita	
p_2	$79012.662762\mathrm{Pa}$
t_2	$280.473439\mathrm{K}$

Tabella 4.17: Condizioni al contorno imposte per Re = 500000 e M = 0.59

Dovendo però realizzare un numero di Reynolds più elevato, dovrà variare il valore della viscosità dinamica, che diventa pari a:

$$\mu = \frac{\rho_{2th} \cdot u_{2th} \cdot c}{Re_{2th}} = 3.88758821516 \cdot 10^{-5} \text{Pa} \cdot \text{s}$$
(4.28)

Utilizzando come modello di turbolenza il $K - \omega$ SST, è necessario definire le grandezze utili a descrivere la turbolenza. Non potendo contare su informazioni che descrivono come l'energia cinetica turbolenta evolva all'interno del dominio, come era successo nel caso della simulazione a Re = 120000, si è deciso di utilizzare come grandezza di riferimento per la scala di turbolenza quella già usata nel caso precedente, determinando le restanti grandezze nello stesso modo.

$$L = \cot \cdot c = 0.00135 \,\mathrm{m} \qquad \cot = 0.012 \tag{4.29}$$

$$K = \frac{3}{2} \left(I \cdot V_{ing} \right)^2 = 50.460\,000\,\mathrm{J/kg} \tag{4.30}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{k}}{L \cdot \beta^{1/4}} = 9606.810\,570\,\mathrm{s}^{-1} \tag{4.31}$$

Restano invariate anche le impostazioni sul modello di transizione $\gamma - Re_{\theta}$, come anche le condizioni iniziali che sono uguali a:

condizioni iniziali	
Grandezza	(u.d.m.)
p_2	79012.662762 Pa
t_2	$280.473439\mathrm{K}$
flusso fermo	(v = 0)

Tabella 4.18: Condizioni iniziali imposte per la simulazione aRe=500000eM=0.59

Il campo di velocità ottenuto è quello mostrato in fig.(4.32). È subito possibile notare come, anche per il caso a Re = 500000, non è presente la separazione del flusso lungo il dorso del profilo T106. Ancora una volta il problema è legato alla difficoltà delle RANS nel predire una separazione laminare del flusso.



Figura 4.32: Campo di velocità attorno al profilo T106A con flusso caratterizzato da $Re_{2th} = 500000$ e M = 0.59.

4.6.1 Effetto della variazione del Re sui risultati

Anche in questo caso, volendo confrontare i risultati CFD con quelli sperimentali, si procede a valutare la distribuzione del coefficiente di pressione Cp lungo il profilo. Nello specifico, si riportano i valori del coefficiente di pressione sia a Re = 120000 sia a Re = 500000 in fig.(4.34), ottenuti numericamente, e in fig.(4.33), dati sperimentali presenti nel lavoro di A.Duden e L.Fottner [5].

Facendo riferimento ai grafici sperimentali in fig.(4.33), i dati da prendere in considerazione per il confronto sono quelli valutati alla mezzeria della paletta ed indicati con la linea continua in figura. Infatti, la distribuzione di Cp valutata nei pressi dell'endwall (linea tratteggiata in figura) è influenzata dalla presenza delle strutture tipiche dei flussi secondari. Al contrario, la simulazione svolta in 2D e non è in grado di valutare gli effetti di tali strutture, in quanto queste ultime sono per loro natura tridimensionali.

Confrontando i risultati numerici e sperimentali, si osserva che lungo il dorso del profilo (parte alta della curva), in entrambi i casi, le curve ottenute per i due diversi numeri di Reynolds tendono a sovrapporsi tra di loro fino a circa $x/c_{ax} = 0.6$, successivamente per il caso a numero di Reynolds maggiore si ha un valore di cppiù grande in valore assoluto. Superato questo massimo la curva a Re = 500000si mantiene al di sopra di quella a Re = 120000 nel caso sperimentale, mentre la situazione è invertita nel caso numerico. Allo stesso tempo, come ci si poteva aspettare da quanto già visto per il caso a Re più basso, per entrambi i numeri di Re i risultati numerici risultano sovrastimare quelli sperimentali. Questo è dovuto, come già detto, alla mancanza della separazione laminare nei pressi del bordo di



Figura 4.33: Distribuzione del coefficiente di pressione per Re = 120000 e Re = 500000 ottenuta con dati sperimentali.



Figura 4.34: Distribuzione del coefficiente di pressione per Re = 120000 e Re = 500000 ottenuta con la CFD.

fuga.

Guardando a ciò che succede lungo il ventre, mentre nel grafico ottenuto sperimentalmente le curve relative ai due numeri di Reynolds coincidono perfettamente, nel grafico numerico questo non avviene. Nello specifico, mentre per la curva a Re = 120000 si ha una completa corrispondenza tra risultati numerici e sperimentali, per il caso a Re più alto si nota una certa discrepanza. Infatti, osservano il dettaglio del dorso, si vede come il flusso, superata la $x/c_{ax} = 0.2$, acceleri in maniera più brusca, rispetto al caso sperimentale dove il valore di Cp resta quasi costante, fino a $x/c_{ax} = 0.6$. Successivamente il flusso rallenta fino a $x/c_{ax} = 0.75$ per poi riportarsi sui valori della curva sperimentale fino al bordo di fuga.

Questa differenza di risultati può essere attribuita all'alta sensibilità delle RANS e dei modelli di turbolenza alle condizioni al contorno. Infatti, come detto nella prima parte del paragrafo, non essendo presenti nei paper di riferimento informazioni sulla distribuzione di energia cinetica turbolenta K lungo il dominio, si è scelto di calibrare il modello di turbolenza sulle basi dei dati ottenuti per il caso a Re = 1200000. Questo dettaglio influenza negativamente la simulazione, potendola portare a risultato imprecisi, come si è già visto per la mancata separazione del flusso sul dorso del profilo.

4.7 Influenza del numero di Mach

Per valutare l'effetto della variazione del numero di Mach sul campo di moto che si genera attorno al profilo T106A, si procede fissando il numero di Reynolds e variando il numero di Mach. Al fine di confrontare i risultati numerici con quelli sperimentali disponibili, si è scelto di effettuare la simulazione a Re = 500000 e per tre numeri di Mach diversi: M = 0.3, M = 0.59, M = 0.8.

La griglia scelta per le seguenti simulazioni è la mesh denominata "mesh 2" con le opportune modifiche descritte del paragrafo precedente. Per quanto riguarda il modello di turbolenza si è scelto ancora una volta il $K - \omega$ SST con modello di transizione $\gamma - Re_{\theta}$. Ovviamente anche in questo caso vanno modificati i valori imposti alle condizioni al contorno, sia per quanto riguarda pressione e temperatura, sia per le grandezze utilizzate per descrivere la turbolenza. Allo stesso modo va modificato il valore della viscosità dinamica imposto al fine di imporre il numero di Reynolds isoentropico di uscita desiderato. Le grandezze sono state calcolate utilizzando le leggi e i criteri descritti nei precedenti paragrafi, nel seguito vengono riassunti in tab.(4.19, 4.20) i valori calcolati per le condizioni al contorno ed iniziali per i casi a M = 0.3 e M = 0.8.

Per M = 0.3, le misurazioni sperimentali condotte [5], suggeriscono sull'inlet un valore di intensità di turbolenza pari a: I = 6.8%. Per cui si ottengono:

condizioni iniziali	
Grandezza	(u.d.m.)
p_2	93946.969849 Pa
t_2	$294.695481{\rm K}$
flusso fermo	(v=0)
sezione di ingresso	
P_1°	100000 Pa
T_1°	$300\mathrm{K}$
K	$24.9696\mathrm{J/kg}$
ω	$6757.89433{ m s}^{-1}$
sezione di uscita	
p_2	93946.969849 Pa
t_2	$294.695481{\rm K}$

Tabella 4.19: Condizioni al contorno ed iniziali imposte per la simulazione a Re = 500000 e M = 0.3

La viscosità dinamica è uguale a $\mu = 2.2929506652 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Il campo di velocità ottenuto è quello mostrato in fig.(4.35).



Figura 4.35: Campo di velocità attorno al profilo T106A per M=0.3eRe=500000.

Mentre per il caso a M = 0.8, dove è prevista un'intensità di turbolenza all'inlet pari a I = 5.2%, si ha:

condizioni iniziali	
Grandezza	(u.d.m.)
p_2	65602.161836 Pa
t_2	$265.957447\mathrm{K}$
flusso fermo	(v=0)
sezione di ingresso	
P_1°	100000 Pa
T_1°	$300\mathrm{K}$
K	$49.0776\mathrm{J/kg}$
ω	$9474.302838\mathrm{s}^{-1}$
sezione di uscita	
p_2	65602.161836 Pa
t_2	$265.957447\mathrm{K}$

Tabella 4.20: Condizioni al contorno ed iniziali imposte per la simulazione aRe=500000eM=0.8

Con viscosità dinamica pari a $\mu = 4.49448026644 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Il campo di velocità ottenuto è quello mostrato in fig.(4.36).



Figura 4.36: Campo di velocità attorno al profilo T106A per M = 0.8 e Re = 500000.

4.7.1 Effetto della variazione del Ma sui risultati

Per confrontare i risultati numerici con quelli sperimentali si fa ricorso ancora una volta alla distribuzione di coefficiente di pressione lungo il profilo.I risultati sono mostrati in fig.(4.37), numerici, e fig.(4.38), sperimentali.

L'evidenza degli effetti della variazione del numero di Mach si trovano lungo la curva pertinente alla distribuzione di pressione sul dorso, parte superiore dei grafici in fig. (4.37, 4.38). Osservando nel dettaglio l'andamento delle curve si osserva che, come negli altri casi precedentemente analizzati, la mancata separazione della corrente lungo il dorso porta ad ottenere valori di Cp più grandi in modulo per il caso numerico rispetto al caso sperimentale. È possibile però cogliere alcune congruenze trai due risultati. Per prima cosa si nota come all'aumentare del numero di Mach il picco, in valore assoluto, di Cp si sposti verso il bordo di fuga del profilo. Tale caratteristica era stata evidenziata da un precedente lavoro di Weiß e Fottner [10], che aveva dimostrato come all'aumentare del mach il profilo diventasse sempre più carico sulla parte posteriore. Osservando invece il valore che il coefficiente assume, si nota come, sia per il numerico che per lo sperimentale, questo diminuisce all'aumentare del numero di Mach. Tale comportamento è in accordo con la fisica del problema. Infatti, per M > 0.3 gli effetti di comprimibilità del flusso diventano importanti e ad un aumento della velocità corrisponde una diminuzione di densità. Essendo il coefficiente di pressione Cp definito come una differenza di pressione misurata in un punto del dominio rispetto ad un altro, normalizzata rispetto ad una pressione dinamica isoentropica, è chiaro che per il casi ad alto numero di Mach la differenza presente al nominatore, fissato il punto in cui è presa la pressione di riferimento, risulti più piccola per il caso comprimibile rispetto a quello incomprimibile. Per quanto riguarda il ventre del profilo, si verifica lo stesso problema, già analizzato nel precedente paragrafo, per il quale i risultati sperimentali e quelli numerici non coincidono. Infatti l'andamento ottenuto con la CFD risulta meno regolare rispetto al caso sperimentale, dove l'accelerazione del flusso avviene in maniera lenta e progressiva. Inoltre, se dai risultati ottenuti da Duden e Fottner non si evidenziano particolari differenze tra le curve ottenute a Mach diversi, nei risultati numerici si nota una certa differenza tra il caso incomprimibile e quello comprimibile. Come già detto, questa discrepanza può essere legata all'alta sensibilità delle RANS e dei modelli di turbolenza alle condizioni al contorno, specificando che anche in questo caso non erano disponibili altre informazioni utili alla descrizione della turbolenza, fatta eccezione per l'intensità di turbolenza, portando quindi a tarare il modello $K - \omega$ SST su quanto visto per il caso a Re = 120000 e M = 0.59.



Figura 4.37: Distribuzione del coefficiente di pressione per Re = 500000 al variare del numero di Mach ottenuta con la CFD.



Figura 4.38: Distribuzione del coefficiente di pressione per Re = 500000 al variare del numero di Mach ottenuta con dati sperimentali.

4.8 Simulatione 3D

Lo studio di tesi è completato da una simulazione tridimensionale del profilo T106A. Lo scopo di quest'ultima parte è quello di valutare il comportamento del profilo andando ad introdurre gli effetti della tridimensionalità della paletta. Nello specifico si va a mettere in evidenza la presenza dei flussi secondari, che vengono a crearsi all'intersezione tra la paletta e la parete inferiore (*endwall*), e la loro interazione con il campo di moto che si sviluppa lungo il profilo. Possono considerarsi invece trascurabili gli effetti della stessa, in quanto la geometria analizzata presenta sia una parete inferiore, sia una superiore , introdotta attraverso l'utilizzo della condizioni si simmetricità sulla mezzeria del dominio.

Il caso che si sceglie di analizzare anche nel 3D è quello presentato nella prima parte del capitolo. Ovvero il problema caratterizzato da:

$$Re_{2th} = 120000$$
 $M_{2th} = 0.59$

La scelta è ricaduta sul suddetto caso in quanto risulta così possibile andare a confrontare i risultati ottenuti con i già citati studi di R.Pichler[6] e M.Marconcini [8], che trattano proprio lo studio dell'influenza dei flussi secondari su una paletta con profilo T106A.

Le simulazioni sono svolte sfruttando il cluster "Legion" attraverso le risorse di calcolo fornite hpc@polito, progetto di Academic Computing del Dipartimento di Automatica e Informatica presso il Politecnico di Torino (http://www.hpc.polito.it)".

4.8.1 Campo di velocità

La simulazione è sta condotta scegliendo come modello di turbolenza il $K - \omega$ SST con ausilio del modello di transizione $\gamma - Re_{\theta}$, ed impostando condizioni iniziali e condizioni al contorno identiche a quelle del caso 2D.

Per prima cosa viene mostrato il campo di velocità ottenuto in due sezioni caratteristiche del problema, ovvero il piano posto a cerca z = 0 mm e parallelo all'endwall e il piano posto in mezzeria a z = 150 mm. lo scopo di questa prima osservazione è quello di verificare che il campo di moto che si viene a creare sia coerente con quello del problema fisico in esame. Un primo confronto viene fatto osservando il valore del numero di Mach e del numero di Reynolds isoentropico di uscita valutati sulla sezione di mezzeria, che risultano essere pari a circa $Re_{2th} = 120000$ e $M_{2th} = 0.59$ come desiderato.

Osservando le fig.(4.39, 4.40), si nota subito che per la sezione in mezzeria non si presenti la separazione, come al contrario evidenziano i risultati sperimentali. Questo mostra un certo accordo tra quanto ottenuto con la simulazione 2D, paragonabile proprio al campo di moto ottenuto in questa zona della pala, dove non si

era riusciti a catturare la separazione laminare del flusso per le già dette caratteristiche delle RANS. Al contrario, per il campo di velocità nei pressi dell'endwall è possibile notare una separazione nei pressi del bordo di fuga. Tale comportamento è imputabile alla presenza delle strutture vorticose dovute ai flussi secondari che verranno meglio evidenziate nei successivi paragrafi attraverso lo studio di altre grandezze.



Figura 4.39: Campo di velocità
a $z\simeq 0\,{\rm mm}$ della paletta T106A



Figura 4.40: Campo di velocità
a $z\simeq 150\,{\rm mm}$ della paletta T106A

4.8.2 Coefficiente di pressione

Osservando la distribuzione di coefficiente di pressione in fig.(4.41) è possibile notare alcune caratteristiche che mettono ben in evidenza la presenza dei flussi secondari e la loro influenza sulle prestazioni del profilo. Osservando la curva che fa riferimento al dorso del profilo si nota come il Cp cali drasticamente in prossimità dell'endwall, dove sia a z = 0% che a z = 2% il picco di depressione risulti molto più basso rispetto al valore calcolato sulla mezzeria. Come si può notare sia dai dati sperimentali che da quelli numerici è chiaro che la presenza delle strutture vorticose dei flussi secondari influenzi maggiormente il dorso del profilo, infatti sul ventre non si notano particolari differenza tra le curve ottenute per le varie posizioni considerate. Questo è in accordo con quanto è possibile trovare nei vari studi in bibliografia, secondo i quali le strutture vorticose, che si formano nei pressi dell'intersezione tra la parete e il bordo di attacco, vengano trasportate lungo il dorso della pala adiacente a causa del gradiente trasversale di pressione che caratterizza il ventre della pala stessa. Si nota anche che la zona influenzata dai flussi secondari è concentrata in una zona fortemente limitata nei pressi dell'endwall. Infatti, già a z = 15% la curva è ormai identica a quella ottenuta per z = 50%.

La caratteristica per cui le strutture vorticose evolvono lungo il dorso del profilo è ben evidente nella fig.(4.44) che mostra la distribuzione di pressione lungo la superficie del profilo. In particolare, nella sezione riquadrata in rosso è bene evidente una zona a bassa pressione che evidenzia la presenza del vortice e si nota anche come questa si generi nei pressi dell'intersezione tra endwall e bordo di attacco. Confrontando i risultati ottenuto nel lavoro di tesi con quelli sperimentali, ottenuti da D.Fottner, e quelli numerici ottenuti da R.Picher, entrambi rappresentati in fig.(4.42), si nota la sovrastima del valore del Cp lungo il dorso, dovuto alla mancata separazione del flusso per le sezioni prossime alla mezzeria. Tale mancanza influenza anche il valore del Cp che si verifica nei pressi dell'endwall. Un'altra discrepanza la si nota nei pressi del bordo di attacco della paletta. Infatti, in questa zona, la formazione del vortice a ferro di cavallo, che caratterizza i flussi secondari, dovrebbe portare a visualizzare valori differenti di coefficiente di pressione per le sezioni nei pressi dell'endwall. Nei risultati numerici ottenuti questa caratteristica non è evidente. Il motivo può essere legata alle problematiche che si sono avute in fase di generazione di griglia proprio all'intersezione dell'endwall con la paletta e mostrate in fig.(4.12). La problematica è confermata dall'andamento della y^+ lungo il dominio (procedendo da monte verso valle) per le prime celle nei pressi dell'endwall, mostrato in fig(4.43). È possibile infatti osservare come il valore della y^+ resti costantemente inferiore a 1, valore desiderabile al fine di un corretto utilizzo del modello $K - \omega$, tranne che nei punti di intersezione tra il profilo e la parete, in questo caso nei pressi del bordo di attacco e del bordo di fuga.



Figura 4.41: Distribuzione del coefficiente di pressione lungo la span-direction della paletta ottenuta con lo studio numerico.



Figura 4.42: Distribuzione del coefficiente di pressione lungo la lungo la spandirection della paletta da [6].



Figura 4.43: Valore della y^+ valutato sulle celle prossime alla parete lungo tutto il dominio



Figura 4.44: Distribuzione di pressione statica lungo la superficie della pala T106A

4.8.3 Streamline

Per visualizzare in maniera chiara ed efficace le strutture vorticose formatesi all'interfaccia tra profilo ed endwall è possibile andare a visualizzare le linee di corrente che investono il profilo. Come si è visto già dallo studio del coefficiente di pressione, i vortici dei flussi secondari influenzano solamente la parte più prossima alla parete inferiore. Infatti, già per z = 15% l'influenza dovuta alla presenza di tali vortici sulla distribuzione di coefficiente di pressione era assente. Perciò la visualizzazione delle linee di corrente è fatta solo per una piccola parte della paletta. Partendo dall'osservazione della fig.(4.45), che mostra le linee di corrente nei pressi del bordo di attacco, si nota come le streamline lungo il ventre vengano subito allontanate verso la parete del dominio, ovvero verso la paletta adiacente simulata imponendo la condizione di periodicità sulla parete stesse. A confermare quanto appena detto sulla limitata zona di influenza dei flussi secondari, il fenomeno è ben evidente solo nelle linee di corrente più vicine all'endwall ed indicate in figura con la lettera a. Questo brusco allontanamento è dovuto al forte gradiente di pressione trasversale che caratterizza questa zona del dominio, ed è lo stesso fenomeno che provoca lo spostamento del *pressure side leq* del vortice a ferro di cavallo che si forma a monte del profilo verso il dorso della paletta adiacente e che provoca la forte influenza dei vortici dei flussi secondari sul dorso del profilo analizzata nel paragrafo precedente.



Figura 4.45: Visualizzazione delle linee di corrente nei pressi del bordo di attacco

Procedendo verso il bordo di fuga della paletta lungo il dorso della stessa, è possibile osservare altre due strutture tipiche dei flussi secondari. La prima, ben evidente, è quella del *suction side leg* del vortice a ferro di cavallo, indicato come "HS" in fig.(4.46), riconoscibile anche per le ridotte dimensioni. Nella fig.(4.46,b)

è possibile identificare il punto in cui il suction side leg si allontana, per via dell'interazione con le altre strutture vorticose, dall'endwall. Punto che si colloca circa a $x/c_{ax} = 0.28$. Oltre questo punto, in fig.(4.46,a) è osservabile il passage vortex, indicato con la lettera "P". Questo nasce dall'interazione di tutte le strutture che caratterizzano il campo di moto all'interfaccia tra endwall e palettatura. Come si può notare dall'immagine anch'esso si allontana dall'endwall procedendo verso il bordo di fuga, aumentando le proprie dimensione e in questo caso si nota come tenda ad avvolgere il suction side leg precedentemente descritto.



Figura 4.46: Visualizzazione delle linee di corrente lungo il dorso della paletta.



Figura 4.47: Visualizzazione delle linee di corrente nei pressi del bordo di fuga

Infine, ponendosi a valle del bordo di fuga del profilo, fig.(4.47) è possibile notare, se pur con più difficoltà, la presenza delle strutture appena descritte, ed in particolare il *passage vortex* che tende ad inglobare il *suction side leg* avvolgendosi attorno a quest'ultimo. Anche le linee di corrente che si allontanano dalla parete del ventre della paletta,"a", sono a ben evidenti,come è evidente l'intensità del fenomeno dei flussi secondari sul dorso del profilo.

4.8.4 Coefficiente di perdita di pressione totale

Come già detto in precedenza, studiare la caduta di pressione totale, attraverso l'apposito coefficiente (eq.(4.5.1)), permette di ricavare diverse informazioni sulle perdite che affliggono il profilo. Se però attraverso le simulazioni 2D precedentemente condotte si otteneva solo un indicazione quantitativa delle perdite di pressione totale, attraverso lo studio 3D è possibile anche identificare quali sono le principali cause che portano a queste perdite. Per farlo vengono qui di seguito mostrate le distribuzioni di coefficiente di perdita di pressione totale, sovrapposte con le rispettive curve iso-livello, su diverse sezioni del profilo che vanno dal bordo di fuga verso l'uscita del dominio di calcolo. I risultati ottenuti nello studio di tesi sono confrontati con i risultati ottenuti M.Marconcini e i suoi colleghi [8] sempre attraverso l'uso delle RANS.

Partendo dalla sezione posta a $x/c_{ax} = 0.9$, fig.(4.48) ovvero quella posta sul profilo si osserva che i valori maggiori del coefficiente di perdita si hanno lungo le superfici della paletta e dell'endwall, laddove è presente lo strato limite. Tuttavia è ben evidente l'influenza dei flussi secondari, le cui perdite occupano un'area della sezione molto più ampia rispetto a quelle presenti nello strato limite. Entrando nello specifico è possibile anche individuare le regioni influenzate da alcune delle strutture vorticose che caratterizzano i flussi secondari. In particolare, sono visibili i contributi dovuti alle strutture più intense, che sono le già citate passage vortex e suction side leg della struttura a ferro di cavallo. Oltre queste è visibile anche il contributo dovuto al corner vortex, in una zona limitata molto prossima all'intersezione pala-endwall. Quest'ultimo risulta meno evidente nell'immagine si sinistra, ottenuta con le simulazione svolte all'interno dello studio di tesi. Questo può essere dovuto al fatto che, come spiegato anche nel paragrafo sul coefficiente di pressione, non si è ottenuta una griglia perfetta nella zona di intersezione, il che può rendere difficile descrivere con dettaglio un fenomeno racchiuso in una zona così limitata dello spazio.

Procedendo verso valle, spostandosi sulla sezione a $x/c_{ax} = 1.03$, fig.(4.49), si nota come sia ancora abbastanza riconoscibile e distinguibile l'influenza delle strutture P,HP e C. Il coefficiente ω risulta però leggermente più basso, mentre la zona interessata dalle perdite resta sostanzialmente invariata per dimensioni.

Situazione totalmente differente è quella che si presenta invece per le sezioni a $x/c_{ax} = 1.1$ e $x/c_{ax} = 1.3$. fig.(4.50, 4.51). In questo caso i contributi delle diverse strutture non sono più distinguibili. Infatti, la zona caratterizzata dalle perdite, ed in particolare da quelle dovute agli effetti dei flussi secondari, si espande all'interno

del flusso libero e allo stesso tempo diminuisce il valore assoluto del coefficiente ω . Dal confronto trai risultati ottenuto con Star CCM+ nel lavoro di tesi e quelli ottenuti nel paper di riferimento si evince una sostanziale buona approssimazione dei valori sulle perdite di pressione totale. Le uniche differenze sono dovute al fatto che nello studio di riferimento il valore del coefficiente ω sia leggermente più grande, per via della separazione sul dorso del profilo. Inoltre è possibile evidenziare una descrizione meno dettagliata delle perdite sulle sezioni più lontane dal bordo di fuga della pala. A queste due differenze si aggiunge anche quella, già evidenziata, sul corner vortex. Nello specifico questi ultimi due problemi possono essere risolti utilizzando una griglia che presenti celle di dimensioni minori sia sul profilo, in modo tale da poter costruire meglio i Prism Layer all'intersezione tra pala ed endwall, sia in scia per poter descrivere il campo di moto in modo più puntuale. Ovviamente una scelta di questo tipo implicherebbe un aumento non trascurabile dei costi e dei tempi computazionali, perciò si è optato per una mesh più grossolana, ma che permettesse di svolgere le simulazioni in tempi ragionevoli con risultati abbastanza precisi.



Figura 4.48: Coefficiente di perdita di pressione a $x/c_{ax} = 0.9$. A sinistra i risultati ottenuti dal lavoro di tesi, a destra quelli dello studio di confronto [8]



Figura 4.49: Coefficiente di perdita di pressione a $x/c_{ax} = 1.03$. A sinistra i risultati ottenuti dal lavoro di tesi, a destra quelli dello studio di confronto [8]



Figura 4.50: Coefficiente di perdita di pressione a $x/c_{ax} = 1.1$. A sinistra i risultati ottenuti dal lavoro di tesi, a destra quelli dello studio di confronto [8]



Figura 4.51: Coefficiente di perdita di pressione a $x/c_{ax} = 1.3$. A sinistra i risultati ottenuti dal lavoro di tesi, a destra quelli dello studio di confronto [8]

Capitolo 5 Conclusioni

Analizzando nel complesso i risultati ottenuti, è possibile affermare che il problema principale che ha portato alle discrepanze nel confronto tra i risultati ottenuti all'interno della tesi è quelli, sperimentali o numerici, trovati in bibliografia è la mancanza di separazione del flusso lungo il dorso della pala. Questo ha portato ad una sovrastima delle prestazioni della paletta che caratterizza tutte le simulazioni svolte. Come già spiegato, la mancanza della separazione è dovuta principalmente alle caratteristiche dei modelli di turbolenza stessi i quali si basano sulla capacità di descrivere flussi completamente turbolenti, non riuscendo a catturare al meglio un fenomeno come la separazione laminare che caratterizza la pala T106, quando questa viene fatta lavorare a bassi numeri di Reynolds. Inoltre a questo va aggiunto che le RANS, essendo studiate per flussi completamente turbolenti, anticipano la transizione dello strato limite. Per questo si è introdotto un modello di transizione dello strato limite. Tuttavia la calibrazione del $\gamma - Re_{\theta}$ risulta alguanto complicata, in quanto richiede la conoscenza di diverse grandezze, alcune delle quali non misurabili sperimentalmente. Per risolvere questo problema si potrebbe pensare di calibrare il modello di transizione attraverso lo studio di un caso semplice, di cui si conosce il risultato, come quello per una placca piana, procedendo come proposto da P.Malan nel suo studio condotto proprio su un software commerciale 9.

Entrando nello specifico di tutti gli studi condotti, si parte dallo studio sui modelli di turbolenza. Mancando la separazione del flusso, tutti i modelli hanno condotto al medesimo risultato, non evidenziando alcuna differenza. Al contrario, lo studio sulla convergenza fatto con le tre diverse griglie, ha mostrato ottimi risultati se si considera quanto osservato sul campo di moto creatosi a valle del profilo. In particolare, si è visto, attraverso il coefficiente di perdita di pressione totale, come l'utilizzo di griglie caratterizzate da una dimensione media delle celle inferiore favorisca una descrizione più dettagliata del campo della scia portando anche a risultati più precisi. Infatti, confrontando i la distribuzione di ω ottenuta con la mesh 3 con quella mostrata nel lavoro di Marconcini [8] questi tendono ad essere

molto simili, fig.(4.29, 4.30, 4.31).

Procedendo con lo studio sull'influenza del numero di Mach e del numero di Reynolds, sebbene queste siano le simulazioni i cui risultati mostrano le maggiori differenza con i dati sperimentali, molte delle caratteristiche della T106 sono mantenute. In particolare, si nota come i risultati ottenuti per i due numeri di Reynolds diversi tendano a non variare di molto, fig.(4.34). Mentre all'aumentare del numero di Mach si osserva come il carico aerodinamico sul profilo tenda a spostarsi verso il bordo di fuga, mentre viene confermato che per valori di M minori si realizzano Cpmaggiori in valore assoluto, 4.37. Per migliorare i risultati, ed eliminare i problemi relativi ai valori misurati sul ventre del profilo, un primo passo può essere quello di ottenere i valori sperimentali sull'energia cinetica turbolenta e sulla sua dissipazione anche per questi casi. In questo modo si potrebbero imporre condizioni iniziali e al contorno più precise, ricordando che le RANS sono molto sensibili a queste ultime.

Passando alla simulazione tridimensionale, i risultati, seppur leggermente sovrastimati, mettono in evidenza alcune delle caratteristiche fondamentali che si volevano osservare, come la presenza e l'influenza dei flussi secondari. In particolare, la presenza delle strutture vorticose è ben messa in evidenza dalla distribuzione delle linee di corrente, fig.(4.46), e dall'andamento del coefficiente di pressione lungo la direzione spanwise della pala. Come nei risultati sperimentali, si nota anche in quelli numerici ottenuti all'interno della tesi, che questi interessano una zona molto limitata della pala, nei pressi dell'endwall andando ad influenzare la distribuzione di pressione lungo il profilo. L'effetto sulle perdite è mostrato bene attraverso il coefficiente ω , con il quale è possibile anche identificare il contributo di alcune specifiche strutture vorticose. Quest'ultima parte di lavoro potrebbe essere completata sia analizzando altre grandezze che permettano di valutare in maniera più completa l'influenza dei flussi secondari sulle perdite che si hanno sulla palettatura, sia andando a ripetere gli studi sugli effetti del numero di Mach e del numero di Reynolds utilizzando la simulazione tridimensionale. Purtroppo gli eccessivi tempi computazionali legati a quest'ultima ne hanno impedito la realizzazione.

Bibliografia

- [1] J. Blazek, 2005, Computational fluid dynamics: Principles and application.
- [2] S. A. Carrillo, 2013, Cartesian Grid Generation.
- [3] P.W: McDonald, 1971, The computation of transonic flow through twodimensional gas turbine cascade, ASME Paper 71-GT-89.
- [4] D.G. Holmes., S.D. Connell, 1989, Solution of two-dimensional Navier-Stokes equation on unstructured adaptive grids. AIAA Paper 89-1932.
- [5] A.Duden, L-Fottner, 1997, Influence of taper, Reynolds number and Mach number on the secondary flow field of a highly loaded turbine cascade.
- [6] R.Pichler, Y.Zhao, R.Sandberg, V.Michelassi, R. Pacciani, M.Marconcini, A.Arnone, 2019, Large-Eddy Simulation and RANS Analysis of the End-Wall Flow in a Linear Low-Pressure Turbine Cascade, Part I: Flow and Secondary Vorticity Fields Under Varying Inlet Condition.
- [7] R.Ciorciari, I.Kirik, R. Niehuis, 2014 Effects of unsteady wakes on the secondary flowes in the linear T106 turbine cascade.
- [8] M.Marconcini, R. Pacciani, A.Arnone, V.Michelassi, R.Pichler, Y.Zhao, R.Sandberg, 2019, Large-Eddy Simulation and RANS Analysis of the End-Wall Flow in a Linear Low-Pressure Turbine Cascade, Part II: Loss Generation.
- [9] P.Malan,K. Suluksna, E. Juntasaro, 2009, Calibrating the γRe_{θ} Transition Model for Commercial CFD.
- [10] A. P.Weiß, L.Fottner, 1993, The influence of load distribution on secondary flow in straight turbine cascades. ASME paper 93-GT-86.