

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

**Metodo di penalizzazione di
Brinkman per flussi compressibili**



Relatori

Prof. Francesco Larocca

Prof. Andrea Ferrero

Candidato

Giacomo Attrotto

Luglio 2021

Ringraziamenti

Per primi vorrei ringraziare il Prof. Francesco Larocca ed il Prof. Andrea Ferrero per avermi seguito con pazienza durante lo sviluppo di questo elaborato, dimostrando sempre grande disponibilità.

Ringrazio i miei genitori, la mia forza, per avermi sostenuto soprattutto moralmente in ogni momento del mio percorso di studi, facendomi sentire a casa nonostante la distanza.

Un grazie va a mio fratello Matteo per aver creduto in me, sempre pronto con le sue parole a strapparmi un sorriso.

Un pensiero speciale lo rivolgo a mio nonno e tutti i miei parenti che mi hanno sempre dimostrato il loro affetto.

Un enorme ringraziamento va a tutti i miei amici, lontani e vicini con i quali ho condiviso in questi anni sia le gioie che i dispiaceri. Hanno sempre dimostrato molta pazienza, sopportandomi nei momenti difficili senza mai abbandonarmi e mi hanno permesso di collezionare esperienze indimenticabili.

Ultimo, ma non per importanza, un grazie a mio cugino Alessandro, la mia famiglia a Torino, in grado di capirmi anche solo con uno sguardo.

Sommario

Con l'intento di andare a simulare un flusso intorno ad un corpo solido di geometria complessa, col tempo sono stati sviluppati dei metodi che prendono il nome di *immersed boundary*. Questi a differenza del classico metodo *body-fitted*, sono caratterizzati da una mesh non conforme con il corpo. Uno tra questi è il *metodo di penalizzazione di Brinkman*, nel quale il corpo solido viene modellizzato come fosse un corpo poroso, caratterizzato da una porosità ϕ . Le equazioni di governo, in particolare quelle della quantità di moto e dell'energia, vengono modificate introducendo dei termini di penalizzazione normalizzati con il coefficiente di penalizzazione η . La semplicità del metodo consiste nella generazione delle griglie e nel fatto che le condizioni al contorno siano incluse nelle equazioni e non vadano imposte dall'esterno. Allo stesso tempo, però, vi è un aumento dei tempi di calcolo ed una propagazione di onde non fisiche all'interno del corpo.

Nel seguente elaborato viene analizzato un cilindro 2D investito da un flusso supersonico con il metodo classico per poi confrontarlo con il metodo di penalizzazione di Brinkman, per il quale viene presentato uno studio parametrico in cui si ha la variazione dei coefficienti ϕ ed η .

Abstract

To simulate a flow around a solid body of complex geometry, many immersed boundary methods had been developed. In contrast to body-fitted methods, they are characterised by a mesh that is not conforming with respect to the solid obstacle. One of these methods is the Brinkman penalization method, where the solid obstacle is modeled as a porous media, with porosity ϕ . The momentum and energy equations are extended with a penalization term normalized with the penalization coefficient η . The advantages of this method are the grid generation and the boundary conditions that are imposed in the penalization terms. On the other hand there is an increased computational time and unphysical waves propagate in the solid obstacle.

The objective of this work is to analyze a supersonic flow which invests a 2D cylinder by means of the Brinkman penalization method: the results are compared with a reference solution obtained by the classical body-fitted method. Moreover a parametric study is carried out on the parameters ϕ and η .

Indice

Ringraziamenti	2
Elenco delle figure	7
Elenco delle tabelle	10
1 Introduzione	11
1.1 Vantaggi e svantaggi della fluido dinamica computazionale	12
1.2 Generazione delle griglie	13
1.3 Metodi ai confini immersi	15
1.4 Procedura di calcolo e modello utilizzato	17
2 Metodo body-fitted	19
2.1 Leggi di governo	19
2.2 Metodo ai volumi finiti	20
2.3 Calcolo dei valori all'interfaccia	21
2.4 Calcolo dei gradienti mediante i minimi quadrati pesati	22
2.5 Discretizzazione temporale	23
3 Metodo di penalizzazione di Brinkman	25
3.1 Equazioni di governo per il mezzo poroso	25
3.2 Metodo di penalizzazione di Brinkman per flussi incompressibili . .	27
3.3 Metodo di penalizzazione di Brinkman per flussi compressibili . . .	28
4 Analisi	30
4.1 Geometria utilizzata	30
4.2 Condizioni al contorno	31
4.2.1 Calcolo del rapporto di pressioni statiche, temperature e Mach	31
4.2.2 Calcolo del Reynolds	33
4.3 Applicazione del metodo classico	33
4.3.1 Simulazioni con l'approccio body fitted	35
4.4 Applicazione del metodo ai confini immersi	37
4.4.1 Simulazioni con il metodo immersed boundary	39

4.4.2	Studio parametrico	39
4.4.3	Relazione tra i coefficienti ϕ , η e la dimensione della cella Δx	40
5	Risultati	41
5.1	Caso di riferimento	41
5.2	Risultati ottenuti con il metodo classico	43
5.3	Risultati ottenuti con il metodo immersed boundary	46
5.3.1	Confronto tra body-fitted ed immersed boundary	49
5.3.2	Confronto tra i valori assunti da ρ nel campo di moto per i confini immersi	49
5.3.3	Confronto tra i valori assunti da ρ nel caso body-fitted ed in quello ai confini immersi	51
5.4	Risultati ottenuti con la relazione che lega i coefficienti ϕ , η e la dimensione della cella Δx	51
6	Conclusioni	57
A	Immagini ottenute dall'analisi parametrica	58

Elenco delle figure

1.1	Discipline sfruttate nell'applicazione della CFD [27]	11
1.2	Approcci possibili per lo studio di fenomeni fluidodinamici e di scambio di calore [27]	12
1.3	Esempio di mesh Cartesiana strutturata	13
1.4	Esempio di mesh strutturata curvilinea adattata al corpo [10]	14
1.5	Esempio di griglia strutturata a blocchi [10]	14
1.6	Esempio di griglia non strutturata [10]	15
1.7	Esempio di mesh utilizzata per l'applicazione dei confini immersi [10]	16
1.8	Esempio di mesh utilizzata per l'applicazione ghost-cells [24]	17
1.9	Schlieren fotografica ottenuta da Bryson e Gross che rappresenta la diffrazione dell'urto intorno al cilindro [8]	18
2.1	Esempio di griglia non strutturata [16]	21
2.2	Confronto tra metodo implicito ed esplicito [27]	24
4.1	Campo di moto	30
4.2	Urto in moto in aria ferma con conseguente modifica delle condizioni del fluido	31
4.3	Griglia grezza	34
4.4	Griglia intermedia	34
4.5	Dettaglio sulla griglia intermedia	35
4.6	Griglia fine	35
4.7	Dettaglio sulla griglia fine	36
4.8	Griglia grezza Immersed Boundary	37
4.9	Dettaglio sulle celle in prossimità della superficie del cilindro	38
4.10	Griglia intermedia Immersed Boundary	38
4.11	Griglia fine Immersed Boundary	39
5.1	Iso-livello della densità ottenuta da J.J. Quirk	42
5.2	Iso-livello del Mach per la prima griglia	43
5.3	Iso-livello della densità per la prima griglia	43
5.4	Schlieren numerica per la prima griglia	44
5.5	Iso-livello del Mach per la seconda griglia	44

5.6	Iso-livello della densità per la seconda griglia	45
5.7	Schlieren numerica per la seconda griglia	45
5.8	Iso-livello del Mach per la Terza griglia	46
5.9	Iso-livello della densità per la terza griglia	46
5.10	Schlieren numerica per la terza griglia	47
5.11	Andamento di ρ per la Griglia 1 ed i casi 1, 2, 3, 4, e 6	50
5.12	Andamento di ρ per la Griglia 2 ed i casi 1, 2, 3, 4, e 6	50
5.13	Andamento di ρ per la Griglia 3 ed i casi 2, 3, 4, e 6	50
5.14	Andamento di ρ per la Griglia 1 nel caso body-fitted e nei casi 4 e 6 ai confini immersi	52
5.15	Andamento di ρ per la Griglia 2 nel caso body-fitted e nei casi 4 e 6 ai confini immersi	52
5.16	Andamento di ρ per la Griglia 3 nel caso body-fitted e nei casi 4 e 6 ai confini immersi	53
5.17	Andamento di ρ per la Griglia 3 nel caso body-fitted e nei casi 4 per le tre griglie ai confini immersi	53
5.18	Iso-livello del Mach per la prima griglia con la relazione che lega i ϕ , η e Δx	54
5.19	Iso-livello della densità per la prima griglia con la relazione che lega i ϕ , η e Δx	54
5.20	Schlieren numerica per la prima griglia con la relazione che lega i ϕ , η e Δx	55
5.21	Iso-livello del Mach per la seconda griglia con la relazione che lega i ϕ , η e Δx	55
5.22	Iso-livello della densità per la seconda griglia con la relazione che lega i ϕ , η e Δx	56
5.23	Schlieren numerica per la seconda griglia con la relazione che lega i ϕ , η e Δx	56
A.1	Griglia 1 - Caso 1 - Rappresentazione del Mach	58
A.2	Griglia 1 - Caso 1 - Rappresentazione della densità	59
A.3	Griglia 1 - Caso 1 - Schlieren numerica della densità	59
A.4	Griglia 1 - Caso 2 - Rappresentazione del Mach	60
A.5	Griglia 1 - Caso 2 - Rappresentazione della densità	60
A.6	Griglia 1 - Caso 2 - Schlieren numerica della densità	61
A.7	Griglia 1 - Caso 3 - Rappresentazione del Mach	61
A.8	Griglia 1 - Caso 3 - Rappresentazione della densità	62
A.9	Griglia 1 - Caso 3 - Schlieren numerica della densità	62
A.10	Griglia 1 - Caso 4 - Rappresentazione del Mach	63
A.11	Griglia 1 - Caso 4 - Rappresentazione della densità	63
A.12	Griglia 1 - Caso 4 - Schlieren numerica della densità	64
A.13	Griglia 1 - Caso 6 - Rappresentazione del Mach	64

A.14 Griglia 1 - Caso 6 - Rappresentazione della densità	65
A.15 Griglia 1 - Caso 6 - Schlieren numerica della densità	65
A.16 Griglia 2 - Caso 1 - Rappresentazione del Mach	66
A.17 Griglia 2 - Caso 1 - Rappresentazione della densità	66
A.18 Griglia 2 - Caso 1 - Schlieren numerica della densità	67
A.19 Griglia 2 - Caso 2 - Rappresentazione del Mach	67
A.20 Griglia 2 - Caso 2 - Rappresentazione della densità	68
A.21 Griglia 2 - Caso 2 - Schlieren numerica della densità	68
A.22 Griglia 2 - Caso 3 - Rappresentazione del Mach	69
A.23 Griglia 2 - Caso 3 - Rappresentazione della densità	69
A.24 Griglia 2 - Caso 3 - Schlieren numerica della densità	70
A.25 Griglia 2 - Caso 4 - Rappresentazione del Mach	70
A.26 Griglia 2 - Caso 4 - Rappresentazione della densità	71
A.27 Griglia 2 - Caso 4 - Schlieren numerica della densità	71
A.28 Griglia 2 - Caso 6 - Rappresentazione del Mach	72
A.29 Griglia 2 - Caso 6 - Rappresentazione della densità	72
A.30 Griglia 2 - Caso 6 - Schlieren numerica della densità	73
A.31 Griglia 3 - Caso 2 - Rappresentazione del Mach	73
A.32 Griglia 3 - Caso 2 - Rappresentazione della densità	74
A.33 Griglia 3 - Caso 2 - Schlieren numerica della densità	74
A.34 Griglia 3 - Caso 3 - Rappresentazione del Mach	75
A.35 Griglia 3 - Caso 3 - Rappresentazione della densità	75
A.36 Griglia 3 - Caso 3 - Schlieren numerica della densità	76
A.37 Griglia 3 - Caso 4 - Rappresentazione del Mach	76
A.38 Griglia 3 - Caso 4 - Rappresentazione della densità	77
A.39 Griglia 3 - Caso 4 - Schlieren numerica della densità	77
A.40 Griglia 3 - Caso 6 - Rappresentazione del Mach	78
A.41 Griglia 3 - Caso 6 - Rappresentazione della densità	78
A.42 Griglia 3 - Caso 6 - Schlieren numerica della densità	79

Elenco delle tabelle

4.1	Valori del rapporto di pressione, temperatura e Mach calcolati . . .	32
4.2	Analisi parametrica	40
5.1	Casi possibili nell'analisi parametrica	48
5.2	Griglia 1	48
5.3	Griglia 2	48
5.4	Griglia 3	48

Capitolo 1

Introduzione

La fluidodinamica computazionale, comunemente nota come CFD, viene normalmente applicata in vari ambiti a livello industriale e di ricerca. Inizialmente la sua applicazione era limitata ad alcuni rami dell'aeronautica e dell'astronautica, ma attualmente viene adoperata in svariati campi ingegneristici legati allo scambio di calore o alla meccanica dei fluidi. La CFD può essere definita come una nuova branca che è data dall'interazione tra tre diverse discipline, quali: meccanica dei fluidi, matematica ed informatica (Figura 1.1) [27].

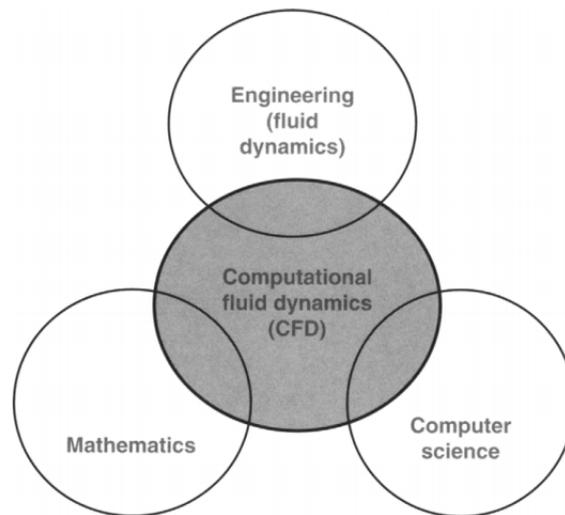


Figura 1.1: Discipline sfruttate nell'applicazione della CFD [27]

La meccanica dei fluidi riguarda lo studio dei fluidi e del loro moto o del loro comportamento a riposo. La CFD si occupa in particolar modo del primo caso e di come questo vada ad influenzare i processi tra cui gli scambi di calore. L'aspetto matematico del problema riguarda l'utilizzo di leggi che vanno a descrivere tali comportamenti, le quali sono normalmente espresse in forma differenziale. In

campo CFD queste leggi sono dette *equazioni di governo*. Le *equazioni di governo*, infine, vengono approssimate e tradotte in linguaggio di programmazione, per cui sfruttando gli strumenti informatici (quali programmi e pacchetti software) si cerca di ottenere una soluzione numerica. Questa poi viene analizzata per comprenderne la validità, in modo tale da ottenere uno strumento che modella adeguatamente la realtà. Chiaramente la CFD non risulta essere l'unico mezzo che permette di studiare un fenomeno fluidodinamico. Infatti vi sono altre due possibilità, cioè l'utilizzo di metodi sperimentali oppure analitici (Figura 1.2) [27], [10].

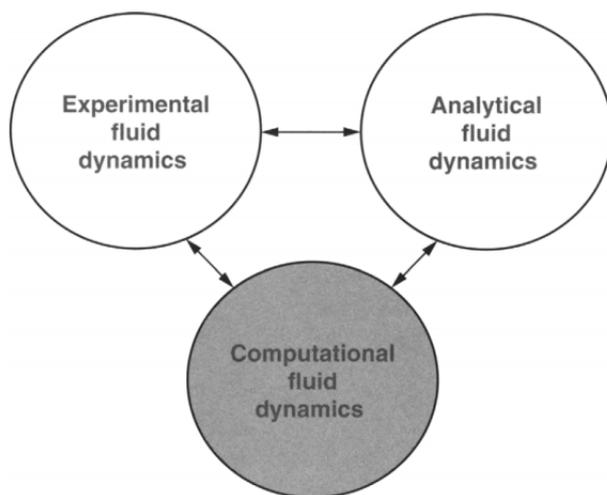


Figura 1.2: Approcci possibili per lo studio di fenomeni fluidodinamici e di scambio di calore [27]

Inizialmente i metodi analitici e sperimentali erano gli unici a disposizione degli ingegneri per poter studiare il comportamento dei fluidi, ma con l'avvento dei computer la CFD ha preso il sopravvento. Tuttavia, si noti che i primi due metodi continuano ad essere parte integrante degli studi in questo ambito. Come è stato già detto in precedenza, la CFD è uno strumento potentissimo che viene costantemente utilizzato non solo nella ricerca ma anche per applicazioni industriali.

1.1 Vantaggi e svantaggi della fluido dinamica computazionale

L'utilizzo della CFD comporta una serie di vantaggi rispetto all'esclusivo uso dei metodi sperimentali ed analitici. Infatti, questo ha permesso di concentrarsi sullo studio e la soluzione delle equazioni di governo, potendo realizzare varie approssimazioni che altrimenti non sarebbero state ottenute [27], [10]. Inoltre la CFD permette di ridurre notevolmente i costi ed i tempi di consegna se confrontata con

i metodi sperimentali, e permette di ottenere delle soluzioni là dove i metodi analitici non arrivano. Per concludere, la CFD consente di simulare delle condizioni del flusso che non sono riproducibili mediante test sperimentali.

Naturalmente non vi sono solo pregi, infatti bisogna considerare l'inevitabile presenza di errori numerici nei calcoli ed approssimazioni nei modelli, che porteranno a dei risultati differenti dalla realtà. Si noti, inoltre, che è necessario analizzare i risultati con grande attenzione, avendo già un'idea di quale potrebbe essere il comportamento fisico di un flusso, in quanto si potrebbero ottenere delle soluzioni che pur sembrando buone, invece non rispecchiano il comportamento reale [27], [10].

1.2 Generazione delle griglie

La generazione della mesh è uno dei passaggi fondamentali nell'applicazione della CFD, tanto da determinare il successo o il fallimento nell'ottenimento di una soluzione. In linea di massima, conoscendo il campo di moto, la griglia deve essere infittita nelle zone del dominio in cui si vuole ottenere una maggiore risoluzione, ma deve essere anche in grado di catturare tutte le caratteristiche geometriche importanti all'interno del dominio stesso. Tale procedura, naturalmente, non è affatto banale, infatti è fondamentale comprendere bene la fisica in gioco nel problema da studiare.

Nella generazione delle griglie vi sono infinite possibilità. Una prima suddivisione nella tipologia di mesh che è possibile generare è la seguente [27], [10], [19]:

- *strutturata*;
- *non strutturata*.

Per quanto riguarda le *strutturate*, a loro volta possono essere griglie in *coordinate cartesiane* (Figura 1.3), per le quali le linee seguono la direzione delle coordinate stesse. In alternativa è possibile fittare i punti della mesh con i contorni del corpo ed in questo modo ottenere una griglia non ortogonale seppur ancora regolare e strutturata (Figura 1.4).

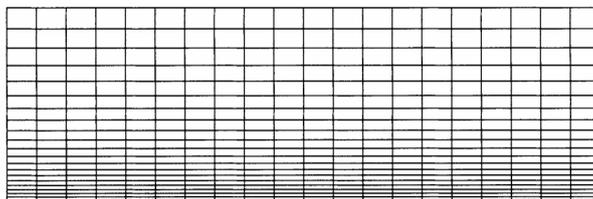


Figura 1.3: Esempio di mesh Cartesiana strutturata

Chiaramente l'utilizzo di questa metodologia ha dei vantaggi e degli svantaggi. Il

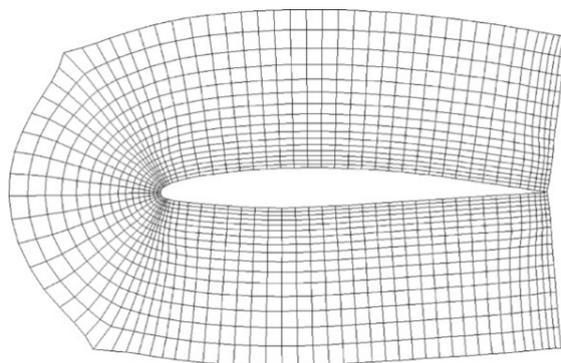


Figura 1.4: Esempio di mesh strutturata curvilinea adattata al corpo [10]

vantaggio principale è che i punti delle celle possono essere descritti da due indici (i, j) nel bidimensionale, o da tre (i, j, k) nel tridimensionale. La connessione tra le celle adiacenti risulta immediata ed identificata da questi indici: questo comporta delle semplificazioni nell'implementazione degli algoritmi numerici e permette di sfruttare in maniera efficiente la cache del processore. Allo stesso modo, però, nel momento in cui la griglia presenta delle asimmetrie eccessive a causa della complessità della geometria si possono ottenere delle soluzioni che non hanno significato fisico [27], [10]. Ne consegue che il loro utilizzo è limitato a geometrie semplici. Nell'intento di generare delle griglie più flessibili rispetto alle precedenti è possibile realizzare le *griglie strutturate multi-blocco* [27], [10]. Queste hanno ancora delle celle che possono essere identificate da una terna cartesiana in ogni blocco ed i vari blocchi possono essere connessi in modo arbitrario (Figura 1.5).

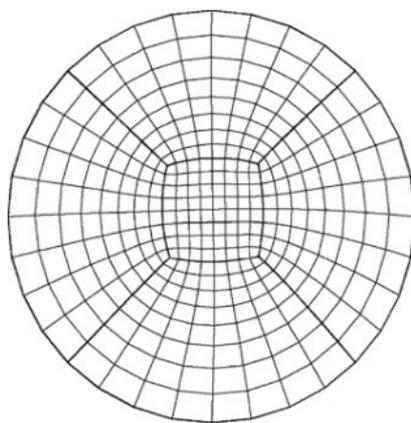


Figura 1.5: Esempio di griglia strutturata a blocchi [10]

L'alternativa più utilizzata consiste nell'ottenimento di *mesh non strutturate* (Figura 1.6) [27], [10], [19]. Queste permettono una maggiore flessibilità nella scelta

della forma delle celle che, comunque, sono tipicamente di tipo triangolare in due dimensioni o tetraedrica in tre dimensioni, anche se possono essere utilizzati dei quadrilateri o esaedri. Si noti che questo permette di discretizzare al meglio anche domini aventi contorni con grandi curvature. La maggiore flessibilità però si paga in termini di complessità della mesh. Tuttavia lo svantaggio principale è il fatto che, in questo caso non è più possibile utilizzare gli indici per nominare gli elementi delle celle, in quanto ognuna di esse può avere un numero arbitrario di elementi adiacenti. Oltre a questo sono necessari algoritmi più complessi per il calcolo della soluzione, il che si traduce in un aumento del tempo di calcolo, andando a ridurre l'efficienza.

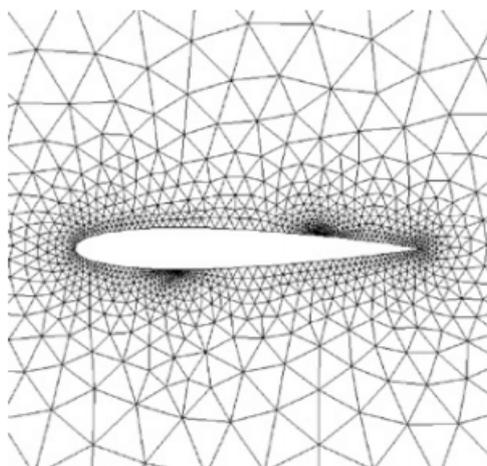


Figura 1.6: Esempio di griglia non strutturata [10]

1.3 Metodi ai confini immersi

A partire dal metodo classico (body-fitted), sono stati sviluppati nuovi metodi detti metodi ai *confini immersi* o *immersed boundary*. Nei metodi body-fitted, come visto in precedenza, le griglie vengono generate in modo tale da far cadere i punti sulla superficie del corpo analizzato, qualsiasi sia la sua complessità. Si riesce ad ottenere un'accuratezza soddisfacente della soluzione andando ad infittire i punti della mesh nelle zone del campo di moto in cui è richiesta una maggiore risoluzione, cioè nello strato limite. Per questi metodi, però, il processo di generazione delle griglie è particolarmente dispendioso, basti pensare a problemi con geometrie complesse, oppure a problemi non stazionari in cui diviene molto costoso andare ad interpolare la griglia e la soluzione alla nuova mesh per ogni passo temporale. I metodi ai confini immersi differiscono dai primi in quanto il corpo viene annegato nella mesh, creando un dominio fittizio, infatti la griglia si estende anche nel corpo

stesso [15], [1].

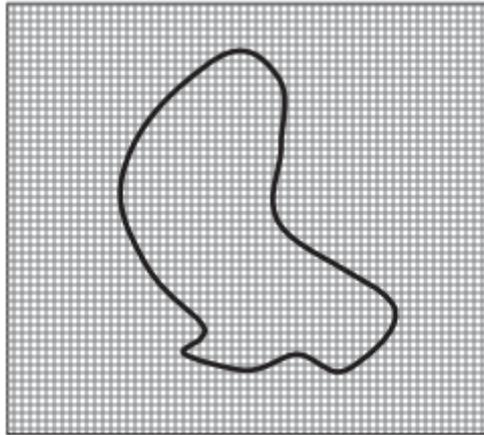


Figura 1.7: Esempio di mesh utilizzata per l'applicazione dei confini immersi [10]

Questi metodi sono stati introdotti da Peskin nel 1972 per simulare il flusso del sangue nelle valvole cardiache [23]. Lo studio è stato svolto per flussi incompressibili. Peskin andò ad utilizzare una griglia Cartesiana non conforme con la geometria del corpo. Il flusso è stato studiato mediante le equazioni di Navier-Stokes [23], mentre il contorno del corpo è stato considerato come un mezzo elastico che esercita sul fluido delle forze localizzate, andando a modificare le equazioni di conservazione della quantità di moto. Quindi il corpo solido viene modellizzato mediante una molla avente una certa rigidità [13]. Il metodo, in seguito ampliato, però, presenta degli inconvenienti, in quanto applicando uno schema esplicito ad un problema stiff è necessario un passo temporale troppo piccolo, questo tende a limitarne l'applicazione. Allo stesso tempo utilizzando uno schema implicito, questo rende il metodo inefficace per flussi intorno ad un corpo solido con alti numeri di Reynolds. Non potendo ottenere una soluzione che converge a quella esatta, col tempo sono stati formulati nuovi metodi ai confini immersi per i quali le condizioni al contorno non devono più essere imposte dall'esterno ma sono insite nel metodo stesso. Recentemente Mittal e Iaccarino [18] hanno presentato una classificazione dei metodi ai confini immersi. Si possono distinguere due categorie principali. Della prima fanno parte quei metodi in cui si tiene conto della presenza dei confini nel dominio mediante l'applicazione di forze esercitate sul fluido, come accade nel caso analizzato da Peskin. La seconda categoria è caratterizzata da termini di penalizzazione [3], [4], [15] in cui il corpo viene considerato un mezzo poroso e questo porta a dover introdurre una forza di volume nelle equazioni della quantità di moto. Questa fa parte dei metodi *Cartesian grid*. Tra i metodi *Cartesian grid* rientra anche l'approccio *ghost-cells* [9], [26]. Le cosiddette celle-fantasma sono delle celle nel solido che hanno come celle vicine, quelle di fluido come mostrato in figure 1.8, il cui numero dipende dallo schema di discretizzazione spaziale utilizzato [24]. Il valore della soluzione

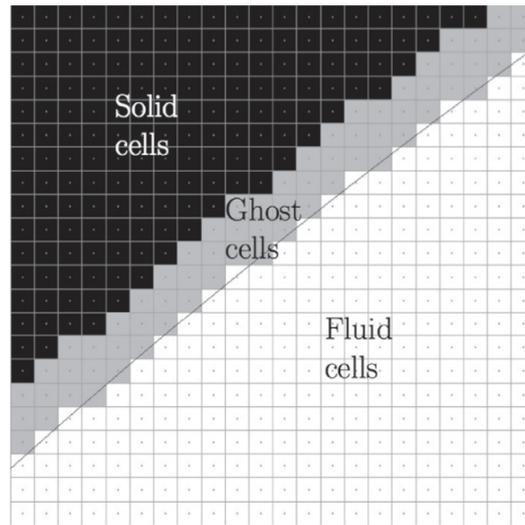


Figura 1.8: Esempio di mesh utilizzata per l'applicazione ghost-cells [24]

nelle ghost-cells viene calcolato a partire da quello ottenuto nelle celle di fluido, mediante un'interpolazione. Un'altra possibilità consiste nel metodo *Immersed interface* sviluppato da Leveque e Li [14], nel quale viene applicata un'espansione di Taylor della soluzione da entrambi i lati dell'interfaccia. In questo elaborato è stato utilizzato il metodo di penalizzazione di Brinkman, proposto per la prima volta da Arquis e Caltagirone [4] e l'idea principale consiste nell'andare a considerare il corpo come fosse poroso e caratterizzato da una porosità ϕ e da una permeabilità il più vicine possibile a zero. Tale approccio presenta dei vantaggi, infatti, le condizioni al contorno che vengono imposte mediante un termine di penalizzazione all'interno delle equazioni di conservazione della quantità di moto, possono essere assegnate con maggiore precisione e senza modificare il metodo numerico usato per risolvere le equazioni. Angot ha proposto una stima rigorosa dell'errore in seguito all'applicazione di questo metodo [3], ed ha dimostrato che la soluzione delle equazioni di Navier-Stokes per l'incompressibile, modificate con il termine di penalizzazione, convergono alla soluzione esatta quando il parametro di penalizzazione tende a zero [2]. Il metodo con penalizzazione di Brinkman, naturalmente presenta anche degli svantaggi, come una poca accuratezza nella rappresentazione dello strato limite e della riflessione degli urti in prossimità dell'interfaccia flusso-parete, con una conseguente perdita di massa.

1.4 Procedura di calcolo e modello utilizzato

In questo elaborato si è deciso di analizzare il comportamento di un urto in moto in aria ferma che investe un cilindro. Tale problema è stato ampiamente studiato

in passato sia con metodi sperimentali che con metodi numerici, quindi è possibile riuscire a compiere un confronto piuttosto immediato con le soluzioni già ottenute. In questo caso si farà riferimento alla soluzione sperimentale trovata da Bryson e Gross nel 1961 [8], ed a quella numerica trovata da J.J. Quirk, risalente al 1991 [25].

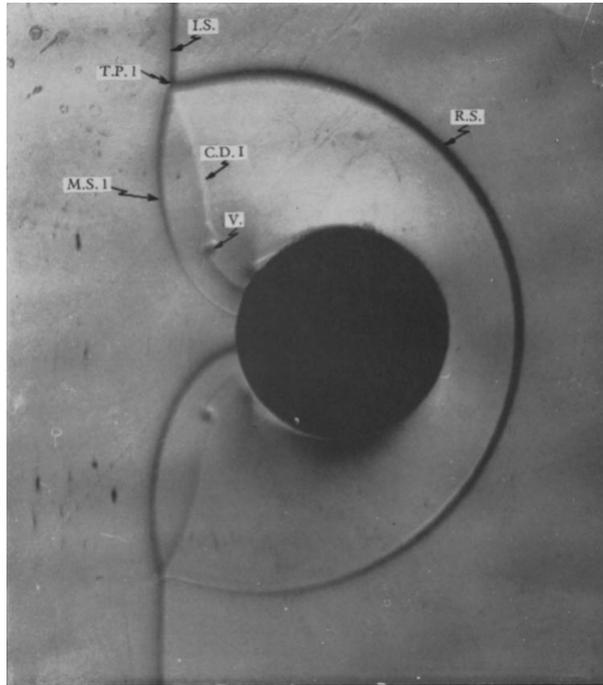


Figura 1.9: Schlieren fotografica ottenuta da Bryson e Gross che rappresenta la diffrazione dell'urto intorno al cilindro [8]

In particolare è stata svolta una prima analisi adottando il metodo classico (body-fitted) e la soluzione è stata confrontata con quella in Figura 1.9. Utilizzando in seguito il metodo ai confini immersi con penalizzazione di Brinkman, è stato possibile confrontare la soluzione con quella precedente e quindi valutarne la validità. Per fare questo è stato utilizzato un programma sviluppato all'interno del Politecnico di Torino scritto in linguaggio Fortran 90, il cui funzionamento è avvenuto sui cluster di HPC@POLITO.

Capitolo 2

Metodo body-fitted

Il metodo classico consiste nella realizzazione di una griglia strutturata o non strutturata, la quale si estende a partire dai confini esterni del dominio, fino alla superficie del corpo intorno al quale studiare il flusso. In questo capitolo verranno enunciate le leggi di governo e la loro approssimazione numerica.

2.1 Leggi di governo

Le equazioni Navier-Stokes dipendenti dal tempo ed in forma integrale [16] sono date da

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{d\Omega} (\mathbf{F} - \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (2.1)$$

dove \mathbf{U} è il vettore delle variabili conservative, \mathbf{F} e \mathbf{G} rappresentano rispettivamente i contributi di flusso inviscido e viscido. Inoltre, $\hat{\mathbf{n}} = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} + n_z \hat{\mathbf{k}}$ è il vettore unitario normale alla superficie dell'elemento $d\Omega$ appartenente al volume Ω . Nelle tre dimensioni i vettori \mathbf{U} , \mathbf{F} e \mathbf{G} sono dati da

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ E \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = F_1 n_x + F_2 n_y + F_3 n_z, \quad \text{dove } F_i = \begin{bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{i1} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{i2} \\ \rho u_i u_3 + p \delta_{i3} \\ u_i (E + p) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{n}} = G_1 n_x + G_2 n_y + G_3 n_z, \quad \text{dove } G_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{i1} \\ \tau_{i2} \\ \tau_{i3} \\ u_i \tau_{ij} - q_i \end{bmatrix}$$

dove, ρ è la densità, $\mathbf{V} = u_1 \hat{\mathbf{i}} + u_2 \hat{\mathbf{j}} + u_3 \hat{\mathbf{k}}$ è il vettore velocità, p è la pressione, $E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$ è l'energia totale per unità di volume. Gli sforzi viscosi τ_{ij} sono dati da

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$$

in cui μ è la viscosità dinamica. Il flusso di calore q_i è dato dalla legge

$$q_i = k \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

dove k è la conducibilità termica data da $k = \mu C_p / Pr$, in cui Pr è il numero di Prandtl e C_p è il calore specifico a pressione costante.

2.2 Metodo ai volumi finiti

Nel metodo ai volumi finiti [16] il dominio viene suddiviso in volumi di controllo non sovrapposti tra loro, i quali ricoprono l'intero dominio stesso. Le equazioni di conservazione della massa, quantità di moto ed energia vengono risolte per l'intero volume di controllo. La discretizzazione ai volumi finiti delle equazioni di governo in forma integrale 2.1, per la cella i -esima è la seguente

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} = -\frac{1}{A_i} \sum_{\text{facce}} (\mathbf{F} - \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mathbf{R}(\bar{\mathbf{U}}_i) \quad (2.2)$$

dove $\bar{\mathbf{U}}$ è il valore medio dei volumi finiti del vettore \mathbf{U} nel centro della cella i -esima. $\hat{\mathbf{n}}$ è il vettore unitario normale all'elemento di superficie dS , mentre A_i è l'area (nel caso 2D), oppure il volume (nel caso 3D) della cella i -esima. dS indica la lunghezza del lato della cella (in 2D) oppure l'area della faccia della cella (in 3D). Si noti che nella relazione 2.1 l'integrale di superficie dei flussi convettivi e viscosi sono approssimati mediante una somma attraverso le facce del volume di controllo A_i .

I flussi che compaiono nella formula 2.2 sono stati espressi in funzione dei valori assunti dalle variabili all'intervaccia delle celle, u_L ed u_R . Nella risoluzione dei flussi è stato utilizzato il modello, proposto da Osher e Solomon [21] e da Pandolfi [22], adattato al caso dei volumi finiti.

2.3 Calcolo dei valori all'interfaccia

I valori assunti dalle variabili all'interfaccia delle celle sono stati calcolati mediante il limitatore di Barth e Jespersion [5]. Seguendo questo metodo, si vuole realizzare una ricostruzione lineare delle variabili di stato, a partire da un generico punto (x_0, y_0) :

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + u_x \cdot (x - x_0) + u_y \cdot (y - y_0) = u(x_0, y_0) + \nabla u \cdot \Delta r \quad (2.3)$$

Si cerca di ottenere un valore medio del dato sulla cella, cioè:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{area}_i} \int_i u(x, y) da \quad (2.4)$$

Questo è soddisfatto per qualsiasi vettore gradiente costante quando (x_0, y_0) è il

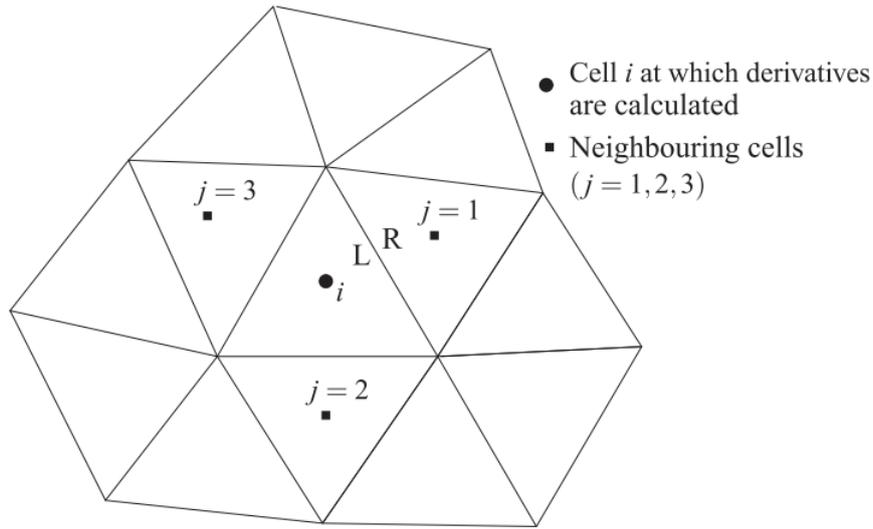


Figura 2.1: Esempio di griglia non strutturata [16]

baricentro della cella considerata. Il vettore ∇u rappresenta la migliore stima del gradiente della soluzione nella cella, calcolato a partire dai dati in prossimità del baricentro. A questo punto è possibile introdurre il limitatore di Barth e Jespersion [5], riscrivendo la funzione nel seguente modo:

$$u(x, y)_i = u(x_0, y_0)_i + \Phi_i \nabla u_i \cdot \Delta r_i, \quad \Phi_i \in [0, 1] \quad (2.5)$$

dove Φ_i deve assumere il massimo valore possibile, sfruttando il principio di monotonicità, facendo in modo che la funzione non superi il valore massimo e minimo

assunto nel baricentro delle celle adiacenti (incluso il valore nel baricentro della cella considerata). Per prima cosa si calcola $u_i^{min} = \min(u_i, u_j)$ e $u_i^{max} = \max(u_i, u_j)$, per poi imporre

$$u_i^{min} \leq u(x, y)_i \leq u_i^{max} \quad (2.6)$$

Bisogna calcolare per ogni vertice della faccia $u_k = u(x_k, y_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots, d(f)$, dove $d(f)$ è il numero di lati che compongono la cella, in modo tale da calcolare il limitatore $\bar{\Phi}_i$, nel seguente modo

$$\bar{\Phi}_{i_k} = \begin{cases} \min\left(1, \frac{u_i^{max} - u_i}{u_k - u_i}\right) & \text{se } u_k - u_i > 0 \\ \min\left(1, \frac{u_i^{min} - u_i}{u_k - u_i}\right) & \text{se } u_k - u_i < 0 \\ 1 & \text{se } u_k - u_i = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

in cui $\Phi_i = (\bar{\Phi}_{i_1}, \bar{\Phi}_{i_2}, \bar{\Phi}_{i_3}, \dots, \bar{\Phi}_{i_{d(f)}})$. Le variabili di stato \bar{u}_i^L ed \bar{u}_i^R a cavallo del bordo di una cella possono, infine, essere calcolate nel seguente modo

$$\bar{u}^L = u_i + \Phi_i \nabla u_i \cdot \Delta r \quad (2.8)$$

$$\bar{u}^R = u_j + \Phi_i \nabla u_j \cdot \Delta r \quad (2.9)$$

2.4 Calcolo dei gradienti mediante i minimi quadrati pesati

In questa sezione viene esposto il metodo dei minimi quadrati pesati per il calcolo dei gradienti [16], [17]. Si consideri che la cella i -esima contiene n celle vicine ($j = 1, \dots, n$), per cui i valori assunti dalle variabili in queste celle vicine possono essere espresse in funzione della soluzione della cella i -esima, mediante l'espansione in serie di Taylor

$$\begin{aligned} u_1 &= u_i + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y_1 + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z_1 \\ u_2 &= u_i + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x_2 + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z_2 \\ &\vdots \\ u_n &= u_i + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x_n + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y_n + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z_n \end{aligned} \quad (2.10)$$

dove Δx_j , Δy_j e Δz_j sono le distanze lungo gli assi x , y e z tra i centri delle celle vicine ($j = 1, \dots, n$) e la cella i -esima. Si possono riscrivere le equazioni nel seguente

sistema matriciale

$$\Delta u = Sdu \quad (2.11)$$

dove

$$\Delta u = \begin{bmatrix} u_1 - u_i \\ u_2 - u_i \\ \vdots \\ u_n - u_i \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 & \Delta z_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 & \Delta z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta x_n & \Delta y_n & \Delta z_n \end{bmatrix}$$

$$du = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Per trovare le derivate, sono state risolte le equazioni pesate nella forma

$$S^T W S du = S^T W \Delta u \quad (2.12)$$

in cui $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$ è la matrice diagonale dei pesi. La relazione 2.12 può essere riscritta nella seguente forma

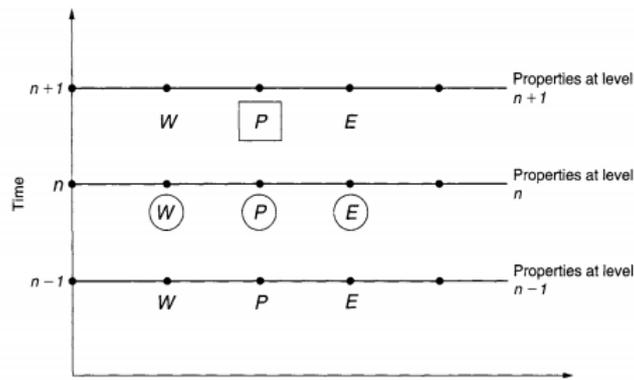
$$(W^{1/2} S)^T (W^{1/2} S) du = (W^{1/2} S)^T W^{1/2} \Delta u \quad (2.13)$$

da cui in modo equivalente si ottiene

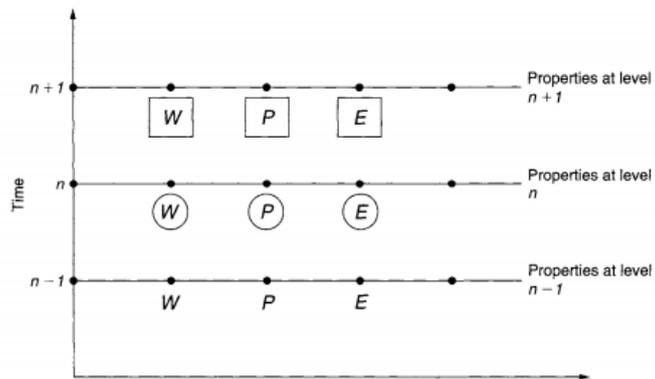
$$W^{1/2} \Delta u = (W^{1/2} S) du \quad (2.14)$$

2.5 Discretizzazione temporale

Per quanto riguarda l'approssimazione numerica è stato applicato un metodo implicito del secondo ordine. Nei metodi espliciti la soluzione in un punto dipende esclusivamente dalla soluzione nei punti al passo temporale precedente (figura 2.2), questo significa che la matrice al nuovo passo temporale sia diagonale, mentre il secondo membro del sistema è dipendente dalle variabili del flusso del passo temporale precedente. Per ottenere la soluzione basta, banalmente, invertire la matrice ed ottenere facilmente la soluzione [27], [10]. Nell'utilizzare un metodo implicito lo svantaggio principale si ha a livello computazionale, infatti la soluzione in un punto di griglia dipende sia dai punti vicini dello stesso passo temporale, ma anche dai punti del passo temporale precedente (figura 2.2). D'altro canto, per i metodi impliciti non si hanno limiti sui passi temporali come accade per quelli espliciti, quindi è possibile compiere un minor numero di step temporali, alleggerendo le analisi a livello computazionale [27], [10]. In questo caso a ogni passo la risoluzione del sistema lineare è stata fatta con l'algoritmo GMRES con il preconditionatore Additive Schwarz. A questo scopo si è richiamata la libreria Petsc che permette di risolvere sistemi lineari in parallelo su sistemi a memoria distribuita.



(a) Metodo esplicito



(b) Metodo implicito

Figura 2.2: Confronto tra metodo implicito ed esplicito [27]

Capitolo 3

Metodo di penalizzazione di Brinkman

Nel metodo di penalizzazione di Brinkman [15] per flussi incompressibili un corpo solido viene modellizzato come fosse un mezzo poroso. Il vantaggio di questo metodo è dato dal fatto che non è necessario imporre delle condizioni al contorno all'interfaccia fluido-solido. Questo perché risolvendo contemporaneamente le Navier-Stokes per il fluido e le Navier-Stokes con il termine di penalizzazione per il mezzo poroso, le condizioni al contorno sono già contenute nelle equazioni. Per riuscire a risolvere adeguatamente lo strato limite tra fluido e corpo è necessario usare una griglia sufficientemente fitta in maniera da evitare che lo strato limite numerico indotto dalla penalizzazione, diventi preponderante rispetto allo strato limite fisico. Una volta esplicitate le equazioni del metodo di penalizzazione di Brinkman valido per l'incompressibile, è possibile estenderlo anche al caso compressibile attraverso un termine di penalizzazione delle equazioni di conservazione della quantità di moto e dell'energia. Questo però potrebbe causare una perdita di massa ed energia a causa della riflessione delle onde non fisiche, che propagano all'interno del corpo solido. In questo capitolo verranno introdotte le equazioni di governo Navier-Stokes ed il relativo metodo di penalizzazione di Brinkman. In un primo momento verrà trattato il metodo per un flusso incompressibile, per poi passare al caso compressibile.

3.1 Equazioni di governo per il mezzo poroso

Un corpo poroso è caratterizzato dall'aver al suo interno una serie di cavità, detti pori, interconnessi tra loro. Queste cavità vengono riempite dal fluido che le circonda e permettono al fluido stesso di attraversare il mezzo poroso. Si possono introdurre due lunghezze di riferimento, cioè la dimensione caratteristica dei pori

d ed una lunghezza di riferimento macroscopica L , caratteristica del problema considerato. Inoltre il mezzo poroso possiede due caratteristiche principali, che sono la porosità ϕ e la permeabilità K . ϕ indica proprio una frazione volumica dei pori interconnessi che permettono il passaggio del fluido, mentre K è la conduttività idraulica o detto anche coefficiente di filtrazione, che dipende dal mezzo poroso e dal fluido. Chiamando con $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ la velocità reale negli interstizi e con $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ la velocità di Darcy, queste sono legate dalla legge [20]:

$$\mathbf{v} = \phi \mathbf{u} \quad (3.1)$$

nel momento in cui la porosità $\phi \ll 1$, chiaramente il modulo di \mathbf{v} risulta essere molto più piccolo di quello di \mathbf{u} .

A questo punto è possibile esprimere l'equazione di conservazione della massa per un mezzo poroso. Può essere espressa come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) \quad (3.2)$$

dove ρ è la densità del fluido negli interstizi.

Per quanto riguarda l'equazione di conservazione della quantità di moto è possibile utilizzare la legge di Darcy, cioè:

$$\mathbf{v} = -\frac{K}{\mu} \nabla p \quad (3.3)$$

dove con μ è indicata la viscosità dinamica, mentre con p la pressione. Si noti come il gradiente di pressione vada a bilanciare gli sforzi viscosi. Con l'intento di non rendere necessaria l'introduzione di alcuna condizione al contorno, la legge di Darcy è stata estesa ottenendo l'equazione di Brinkman [6], [7], in cui è stato aggiunto un ulteriore termine viscoso:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K} \mathbf{v} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.4)$$

Per rendere questa equazione il più simile possibile all'equazione di conservazione della quantità di moto di Navier-Stokes, è stata estesa da Wooding [29] ottenendo:

$$\rho \left[\phi^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\phi^{-1} \mathbf{v} \cdot \nabla) (\phi^{-1} \mathbf{v}) \right] = -\nabla p - \frac{\mu}{K} \mathbf{v} \quad (3.5)$$

oppure l'ulteriore estensione [28], [11]:

$$\rho \left[\phi^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\phi^{-1} \mathbf{v} \cdot \nabla) (\phi^{-1} \mathbf{v}) \right] = -\nabla p - \frac{\mu}{K} \mathbf{v} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.6)$$

Includendo l'equazione di continuità (3.2) nelle (3.5), (3.6), queste possono essere scritte in forma conservativa nel seguente modo:

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \phi^{-1} v_i v_j) - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\mu}{K} v_i \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \phi^{-1} v_i v_j) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \frac{\mu}{K} v_i \quad (3.8)$$

Infine è possibile esprimere l'equazione dell'energia per il mezzo poroso, cioè:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} [(e+p)v_j] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{h}{\phi} (T - T_0) \quad (3.9)$$

dove il trasferimento di calore tra fluido e solido si ha nel momento in cui ci si trova in una condizione di non equilibrio termico, e è l'energia totale, h è il coefficiente di trasferimento termico e T_0 è la temperatura del solido.

3.2 Metodo di penalizzazione di Brinkman per flussi incompressibili

Un fluido viscoso incompressibile è governato dalle equazioni di Navier-Stokes [15], cioè:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla P = \nu \Delta \mathbf{u} \quad (3.10)$$

Supponendo di avere un dominio rettangolare $\Omega = [L_1 x L_2] x [M_1 x M_2]$, in cui vi è un flusso che investe degli ostacoli solidi O_i , sulla superficie degli ostacoli stessi è necessario imporre la condizione di non scivolamento, che deve essere rispettata dalla velocità:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_o \quad \text{su } \partial O_i, \quad \forall i \quad (3.11)$$

dove \mathbf{U}_o è la velocità dell'ostacolo. Per evitare di imporre dall'esterno la condizione di aderenza, è stata sviluppata da Agot et al. [3] una nuova formulazione delle Navier-Stokes, che contiene sia la (3.10) che la (3.11), attraverso un termine di penalizzazione:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla P = \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\eta} \chi(\mathbf{x}, t) (\mathbf{u} - \mathbf{U}_o) \quad (3.12)$$

Si noti che l'equazione (3.12) è valida sull'intero dominio Ω ed il termine a secondo membro, che è stato aggiunto rispetto alla 3.10, è un termine di penalizzazione del flusso all'interno degli ostacoli O_i . In questo caso è necessario definire il coefficiente di penalizzazione $0 < \eta \ll 1$ e la funzione caratteristica χ :

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbf{O}_i \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases} \quad (3.13)$$

A questo punto è possibile ottenere la penalizzazione di Brinkman per il flusso compressibile andando ad unire le Navier-Stokes e le equazioni per il mezzo poroso prima trattate, ed andando ad esprimere l'equazione della quantità di moto in una forma simile alle 3.12.

3.3 Metodo di penalizzazione di Brinkman per flussi compressibili

Le equazioni di Navier-Stokes per un flusso compressibile sono le seguenti [15]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} [(e + p)u_j] + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (3.16)$$

in cui

$$\begin{aligned} p &= \rho R T \\ \tau_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ e &= \frac{1}{2} \rho u_i u_i + \frac{p}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

dove ρ è la densità del fluido considerato, p è la pressione, τ_{ij} è il tensore degli sforzi viscosi, μ è il coefficiente di viscosità dinamica del fluido, il quale è dipendente dalla temperatura, $R = (\gamma - 1)c_v$ è la costante dei gas e $\gamma = c_p/c_v$.

Sulla superficie dei corpi solidi deve valere la condizione di aderenza, mentre si considera costante la temperatura dei corpi stessi.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{U}_o \\ T &= T_o \end{aligned} \right\} \quad \text{su } \partial O_i, \forall i \quad (3.17)$$

dove \mathbf{U}_o e T_o sono rispettivamente la velocità e la temperatura dei corpi presenti nel dominio. Come è stato fatto per il caso incompressibile, anche adesso è possibile evitare di imporre la condizione di non scivolamento dall'esterno, aggiungendo un termine di penalizzazione nelle equazioni della quantità di moto e dell'energia. Questa modifica, però, provoca la trasmissione di onde non aventi significato fisico all'interno degli ostacoli solidi che in seguito alle riflessioni provocano la perdita di massa e di energia. Unendo le Navier-Stokes con le equazioni del mezzo poroso e scrivendo le equazioni di conservazione della quantità di moto in modo analogo a quanto fatto per il metodo di Brinkman per l'incompressibile, si ottengono le equazioni adimensionali per il caso compressibile [15]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[1 + \left(\frac{1}{\phi} - 1 \right) \chi \right] \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_a} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\chi}{\eta} (u_i - U_{io}) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x_j} [(e+p)u_j] + \frac{1}{Re_a} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) + \\ & \frac{1}{Re_a Pr(\gamma-1)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\chi}{\eta} (T - T_o) \end{aligned} \quad (3.20)$$

in cui

$$\begin{aligned} p &= \rho RT \\ \tau_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ e &= \frac{1}{2} \rho u_i u_i + \frac{p}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

ϕ è la porosità, $\eta = \alpha\phi$ è la permeabilità viscosa normalizzata. $\eta_T = \alpha_T\phi$ è la permeabilità termica normalizzata, $Re_a = \frac{\rho_0 c_0 L}{\mu_0}$ è il numero di Reynolds acustico, $Pr = \frac{\mu c_p}{k}$ è il numero di Prandtl, mentre U_o e T_o sono la velocità e la temperatura normalizzate dei corpi. Si noti che $0 < \phi \ll 1$, $0 < \eta \ll 1$ e $0 < \eta_T \ll 1$. Inoltre le variabili presenti nelle equazioni, cioè velocità, lunghezza, tempo, energia, densità, pressione, viscosità, conducibilità termica e temperatura sono state adimensionalizzate rispettivamente con una velocità di riferimento $u_{ref} = \sqrt{RT_0}$, una lunghezza caratteristica L , L/u_{ref} , u_{ref}^2 , la viscosità di riferimento μ_0 , $\mu_0 u_{ref}$ e la temperatura di riferimento T_0 . Le equazioni (3.18)-(3.20) sono valide sull'intero dominio Ω e l'ultimo termine a secondo membro delle equazioni di conservazione della quantità di moto e dell'energia rappresentano proprio gli elementi di penalizzazione di flusso e temperatura all'interno degli ostacoli contenuti nel dominio.

Capitolo 4

Analisi

In questo capitolo verranno esposte le scelte realizzate durante lo svolgimento delle analisi, a partire dalla scelta della geometria, per poi passare al calcolo delle condizioni al contorno e per concludere, lo svolgimento delle simulazioni sia per quanto riguarda il metodo classico che per il metodo ai confini immersi.

4.1 Geometria utilizzata

Per realizzare il modello del campo di moto, a partire dal quale sono state generate le griglie con cui sono state svolte le analisi, si è scelto di utilizzare il programma opensource Gmsh. Come detto in precedenza, la geometria scelta è un cilindro bidimensionale, il cui diametro adimensionalizzato è pari a $d = 1$. Questo è contenuto all'interno di un dominio rettangolare avente il lato maggiore di dimensioni $l_{maggiore} = 20$, mentre il lato minore pari ad $l_{minore} = 10$. In Figura 4.1 vi è una rappresentazione del campo di moto.

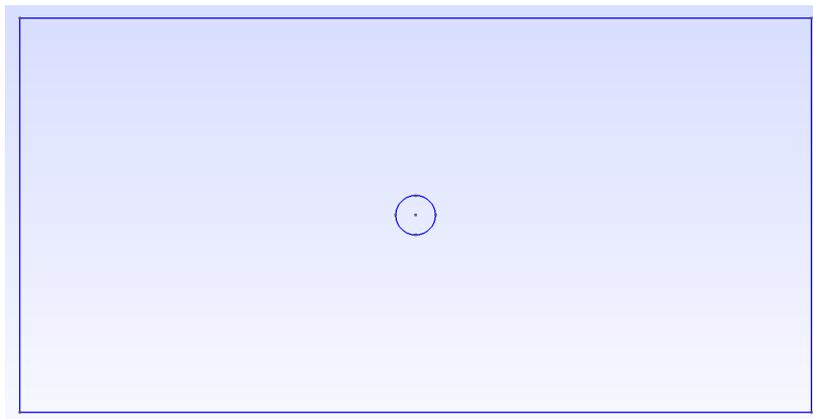


Figura 4.1: Campo di moto

4.2 Condizioni al contorno

A questo punto è stato possibile procedere con il calcolo delle condizioni al contorno. L'obiettivo è quello di ottenere un urto in moto in aria ferma. In particolare si vogliono calcolare il rapporto di pressioni a cavallo dell'urto, quello di temperature ed il Mach di monte.

4.2.1 Calcolo del rapporto di pressioni statiche, temperature e Mach

A partire dalla tesi di J. J. Quirk [25] sono stati presi i dati utilizzati per descrivere lo stesso problema da lui analizzato, in particolare:

$$\begin{aligned} M_s &= 2.81 \\ \gamma &= 1.4 \\ p_1 &= 1 \text{ bar} \\ \rho_1 &= 1 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

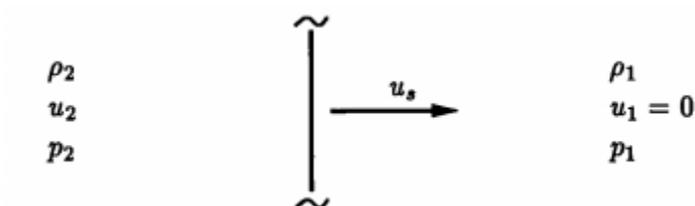


Figura 4.2: Urto in moto in aria ferma con conseguente modifica delle condizioni del fluido

A questo punto mediante le relazioni di Rankine-Hugoniot [25] è possibile calcolare tutti i valori di interesse. Di seguito viene svolta l'analisi completa:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma - 1)} = 9.04545 \quad (4.1)$$

Di conseguenza, essendo $p_1 = 1 \text{ bar}$, si ha:

$$p_2 = 9.04545 \text{ bar}$$

Per quanto riguarda il rapporto delle densità invece:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{p_2}{p_1} + 1}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) + \frac{p_2}{p_1}} = 3.6737 \quad (4.2)$$

quindi:

$$\rho_2 = 3.6737 \text{ kg/m}^3$$

Con questi dati è possibile calcolare la velocità del suono nel campo di moto indisturbato:

$$a_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}} = 374.166 \text{ m/s} \quad (4.3)$$

mentre la velocità dell'onda d'urto è data da:

$$u_s = M_s a_1 = 1051.4057 \text{ m/s} \quad (4.4)$$

Si ha poi:

$$\frac{u_2}{a_1} = M_s \left[1 - \frac{(\gamma - 1)M_s^2 + 2}{(\gamma + 1)M_s^2} \right] = 2.0451 \quad (4.5)$$

da cui:

$$u_2 = 765.2089 \text{ m/s}$$

Sfruttando ancora le Rankine-Hugoniot è possibile calcolare il rapporto di temperature statiche a cavallo dell'urto:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \left[\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}}{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1}} \right] = 2.4622 \quad (4.6)$$

Adesso calcolando la velocità del suono nel campo soggetto al passaggio dell'urto, è possibile calcolare anche il M_2 :

$$a_2 = \sqrt{\frac{\gamma p_2}{\rho_2}} = 587.1193 \text{ m/s} \quad (4.7)$$

$$M_2 = \frac{u_2}{a_2} = 1.3033 \quad (4.8)$$

I valori calcolati sono raccolti nella tabella seguente:

$\frac{p_2}{p_1}$	9.04545
$\frac{T_2}{T_1}$	2.4622
M_2	1.3033

Tabella 4.1: Valori del rapporto di pressione, temperatura e Mach calcolati

4.2.2 Calcolo del Reynolds

Nella tesi di Quirk [25] si fa riferimento ad un caso sperimentale di Bryson e Gross [8]. Si vuole calcolare il Reynolds per il seguente caso e per farlo è necessario conoscere il diametro del cilindro in questione. Nell'analisi in questione è stato utilizzato un cilindro con un diametro $d = 1/2 \text{ in} = 0.0127 \text{ m}$ (pag. 19, plate 3). Il Reynolds è dato da:

$$Re = \frac{\rho_2 u_2 d}{\mu} \quad (4.9)$$

dove μ è la viscosità dinamica che può essere calcolata con la legge di Maxwell-Rayleigh:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^n \quad (4.10)$$

con

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1.716 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m s)} \\ n &= 0.7 \end{aligned}$$

di conseguenza:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^n = 3.2244 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m s)} \quad (4.11)$$

Per cui è possibile calcolare il Reynolds:

$$Re = \frac{\rho_2 u_2 d}{\mu} = 1.11 \cdot 10^6$$

4.3 Applicazione del metodo classico

Nella prima fase delle analisi ci si è soffermati sulla generazione delle griglie da utilizzare, in seguito, per le simulazioni. Per fare questo è stato utilizzato ancora una volta il programma Gmesh. Le griglie generate sono tre, di cui la prima è quella meno raffinata. Questa è caratterizzata dalla presenza di tre zone. Per quella più esterna, la lunghezza caratteristica delle celle è stata posta pari ad $l_{cella} = 0.4$. La seconda zona ha inizio a partire da una distanza $r_{max} = 8$ dalla superficie del cilindro bidimensionale e si estende fino ad $r_{min} = 0.5$. Qui la dimensione delle celle decresce linearmente. Per quanto riguarda l'ultima zona, invece, ha inizio a partire dalla distanza $r_{min} = 0.5$, fino ad arrivare sulla superficie del cilindro. In questo caso la lunghezza caratteristica delle celle è pari ad $l_{parete} = 0.05$.

Come mostrato in figura 4.3, si è cercato di realizzare una mesh piuttosto regolare, pur rimanendo una griglia non strutturata. In un primo momento è stata generata una mesh triangolare, mediante un algoritmo dal nome Frontal-Delaunay for Quads, il quale permette di ottenere delle celle triangolari ad angolo retto. Queste sono più adatte ad una successiva ricombinazione, in modo tale da creare una griglia costituita da quadrilateri.

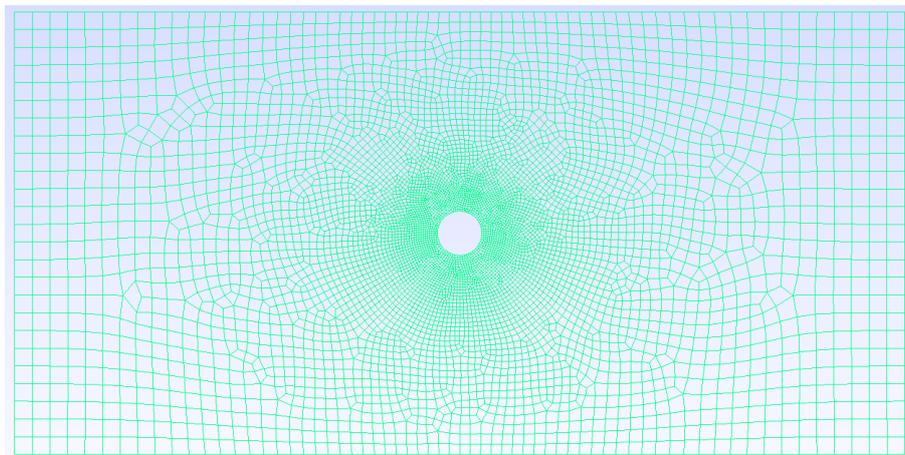


Figura 4.3: Griglia grezza

Per la seconda griglia la procedura seguita è stata esattamente la stessa, con alcune piccole differenze. Anche in questo caso vi sono le tre zone prima descritte. Per la prima, quella più esterna, la lunghezza caratteristica delle celle è stata leggermente aumentata, fino ad $l_{cella} = 0.5$. La seconda zona ha inizio a partire dalla distanza $r_{max} = 7$ dalla superficie del cilindro bidimensionale e si estende fino ad $r_{min} = 2$. Qui la dimensione delle celle decresce linearmente. Per quanto riguarda l'ultima zona che ha inizio a partire dalla distanza $r_{min} = 2$, fino ad arrivare sulla superficie del cilindro, la lunghezza caratteristica delle celle è pari ad $l_{parete} = 0.0125$. Cioè è stata posta pari ad $1/4$ rispetto alla prima mesh. Il risultato lo si può osservare in figura 4.4, 4.5.

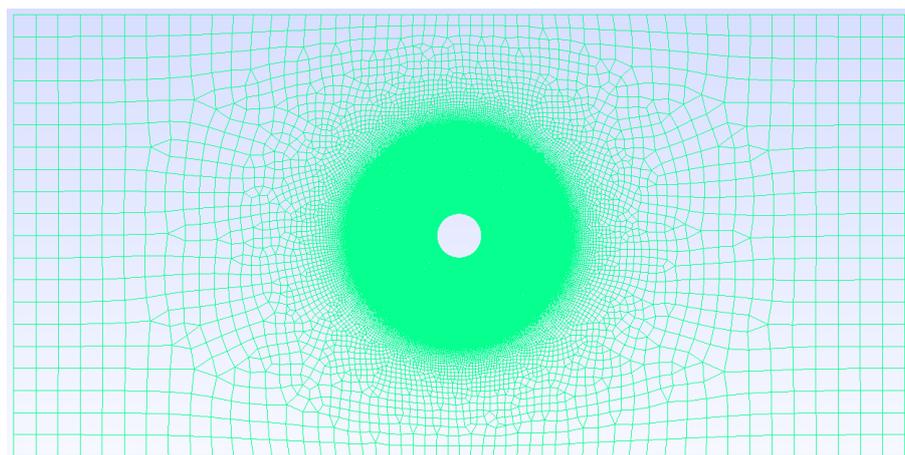


Figura 4.4: Griglia intermedia

Nell'ultimo caso è stata realizzata la griglia definitiva, quella più raffinata. La zona più esterna ha ancora una volta una lunghezza caratteristica pari ad $l_{cella} = 0.5$

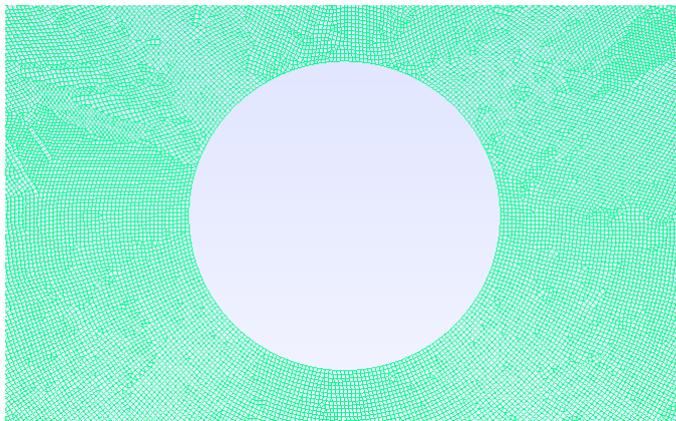


Figura 4.5: Dettaglio sulla griglia intermedia

e si estende fino ad $r_{max} = 7$. Da qui in poi inizia la seconda zona, la quale si conclude ad una distanza $r_{min} = 1.5$ dalla superficie del cilindro. Qui la dimensione delle celle decresce linearmente. Subito dopo la griglia si infittisce, a partire dalla distanza $r_{min} = 1.5$ fino ad arrivare sulla superficie del cilindro, infatti la lunghezza caratteristica delle celle è pari ad $l_{parete} = 0.005$. Cioè è stata posta pari ad 1/10 rispetto alla prima mesh. Il risultato lo si può osservare in figura 4.6, 4.7.

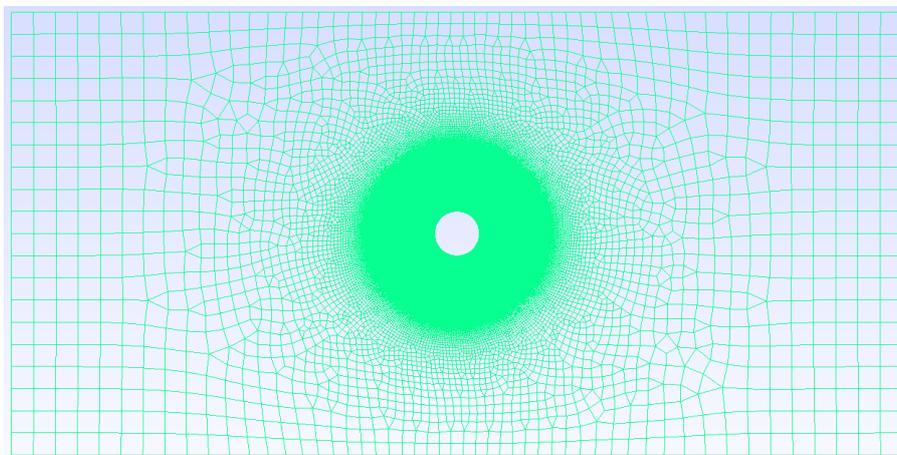


Figura 4.6: Griglia fine

4.3.1 Simulazioni con l'approccio body fitted

Una volta generate le mesh, sono state utilizzate per compiere le simulazioni. Prima di fare questo sono stati inseriti nel programma i valori di pressione statica, temperatura statica e Mach calcolati nel paragrafo delle condizioni al contorno.

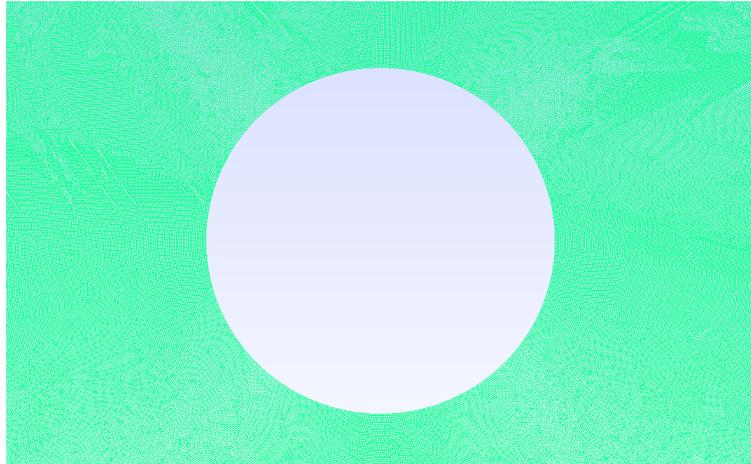


Figura 4.7: Dettaglio sulla griglia fine

Successivamente si è deciso di far partire l'urto dalla coordinata $x = -1$ e non dall'inizio del dominio ($x = -10$). In questo modo è stato possibile ridurre il numero di iterazioni, avendo un urto molto più vicino al cilindro. Partendo dalla prima griglia sono state svolte due simulazioni con l'intento di fermare l'urto in modo tale da non andare a visualizzare l'intera scia, ma la particolare struttura di diffrazione che è possibile notare anche nella tesi di J.J. Quirk [25]. Quindi tutte le simulazioni sono state interrotte ancora prima che l'urto superasse la posizione assiale occupata dal cilindro. Presa in esame la prima griglia (figura 4.3), è stata lanciata la simulazione di prova, con la quale si è capito che per ottenere il risultato desiderato ci si deve fermare al passo $k = 190$. Il programma calcola un tempo adimensionale dt necessario a compiere una iterazione temporale. Per cui è stato calcolato un dt medio, cioè $dt = 5.034168 \cdot 10^{-3}$, da cui è stato ottenuto il *tempo finale*, cioè $ft = dt \cdot k = 0.95649$. Inserendo quest'ultimo dato nel programma, la simulazione viene conclusa circa nel punto desiderato, che per la prima griglia è $k_{effettivo} = 186$. Conservando lo stesso *tempo finale* per tutte le griglie (sia body-fitted che immersed boundary), all'istante finale l'urto dovrebbe posizionarsi all'incirca sulla stessa ascissa. Ottenuti in questo modo i risultati desiderati, mediante l'utilizzo del software VisIt è stato possibile visualizzarli, generando tre immagini per ogni griglia. In particolare due iso-livello, una rappresentante il Mach, una la densità ed infine una Schlieren numerica. La Schlieren rappresenta il modulo del gradiente di densità mediante una scala logaritmica. I risultati verranno discussi e confrontati con quelli di J.J. Quirk nel prossimo capitolo.

4.4 Applicazione del metodo ai confini immersi

Ancora una volta, in questa fase ci si è dedicati alla realizzazione delle griglie mediante l'utilizzo di Gmesh. In questo caso, per realizzare le griglie da utilizzare nell'applicazione del metodo Immersed Boundary, sono state semplicemente modificate le griglie body-fitted. In precedenza, per ottenere il dominio è stato necessario sottrarre all'intera superficie rettangolare (visibile in figura 4.1) quella del cilindro bidimensionale. In questo modo è stata generata la mesh in modo tale che le celle in prossimità del cilindro abbiano i nodi che si posizionano esattamente sulla superficie del cilindro stesso. Per il metodo ai confini immersi invece, non sottraendo la superficie del cilindro bidimensionale alla superficie rettangolare, questa risulta coincidere con l'intero dominio. A questo punto è possibile ricapitolare la struttura delle tre griglie. Anche in questo caso la mesh è caratterizzata dalla presenza di tre zone. Per quella più esterna, la lunghezza caratteristica delle celle è stata posta pari ad $l_{cella} = 0.4$. La seconda zona ha inizio a partire da una distanza $r_{max} = 8$ dalla superficie del cilindro bidimensionale e si estende fino ad $r_{min} = 0.5$. Qui la dimensione delle celle decresce linearmente. Per quanto riguarda l'ultima zona, invece, ha inizio a partire dalla distanza $r_{min} = 0.5$, fino ad arrivare nel centro del cilindro. In questo caso la lunghezza caratteristica delle celle è pari ad $l_{parete} = 0.05$. L'algoritmo utilizzato è ancora il Frontal-Delaunay for Quads. Il risultato è visibile in figura 4.8.

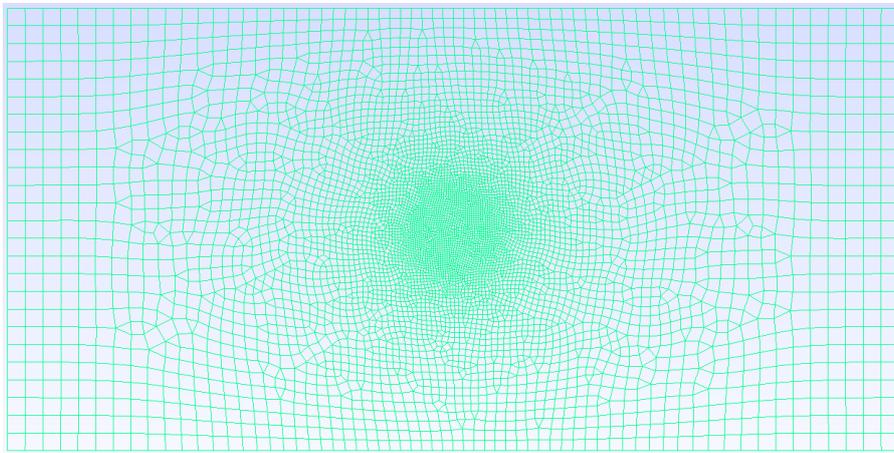


Figura 4.8: Griglia grezza Immersed Boundary

A riprova di quanto spiegato nel paragrafo 1.3, in figura 4.9 è possibile notare come i nodi delle celle in prossimità del cilindro non cadano necessariamente sulla sua superficie.

Per quanto riguarda la seconda mesh, nella zona più esterna la lunghezza caratteristica delle celle è stata leggermente aumentata, fino ad $l_{cella} = 0.5$. La seconda

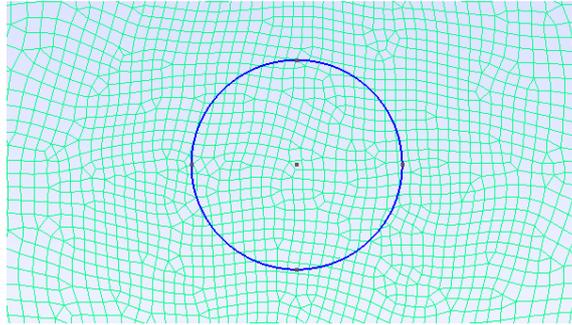


Figura 4.9: Dettaglio sulle celle in prossimità della superficie del cilindro

zona ha inizio a partire dalla distanza $r_{max} = 7$ dalla superficie del cilindro bidimensionale e si estende fino ad $r_{min} = 2$. Qui la dimensione delle celle decresce linearmente. Nell'ultima zona, che ha inizio a partire dalla distanza $r_{min} = 2$, fino ad arrivare nel centro del cilindro, la lunghezza caratteristica delle celle è pari ad $l_{parete} = 0.0125$. Cioè è stata posta pari ad $1/4$ rispetto alla prima mesh. Il risultato lo si può osservare in figura 4.10.

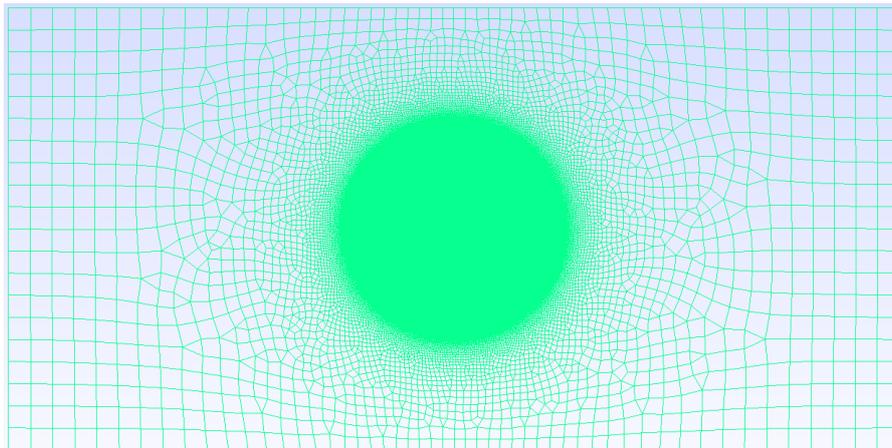


Figura 4.10: Griglia intermedia Immersed Boundary

Nell'ultimo caso è stata realizzata la griglia definitiva, quella più raffinata. La zona più esterna ha ancora una volta una lunghezza caratteristica pari ad $l_{cella} = 0.5$ e si estende fino ad $r_{max} = 7$. Da qui in poi inizia la seconda zona, la quale si conclude ad una distanza $r_{min} = 1.5$ dalla superficie del cilindro. Qui la dimensione delle celle decresce linearmente. Subito dopo la griglia si infittisce, a partire dalla distanza $r_{min} = 1.5$ fino ad arrivare nel centro del cilindro, infatti la lunghezza caratteristica delle celle è pari ad $l_{parete} = 0.005$. Cioè è stata posta pari ad $1/10$ rispetto alla prima mesh. Il risultato lo si può osservare in figura 4.11.

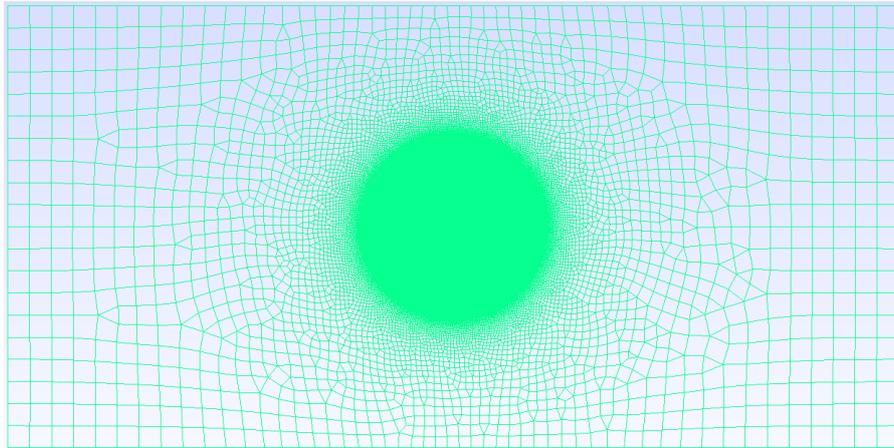


Figura 4.11: Griglia fine Immersed Boundary

4.4.1 Simulazioni con il metodo immersed boundary

Nell'affrontare i calcoli per il caso ai confini immersi sono state applicate le stesse procedure svolte per il metodo classico. Quindi oltre ad avere un urto che parte dalla stessa posizione all'interno del campo di moto ($x = -1$), è stato imposto lo stesso *tempo finale* in modo tale da poter compiere un confronto ottimale tra i risultati ottenuti con i due metodi. Ancora una volta i risultati ottenuti, sono stati visualizzati mediante l'utilizzo del software VisIt, generando tre immagini per ogni griglia che sono state raccolte in Appendice A.

4.4.2 Studio parametrico

Nelle leggi 3.20 compaiono due parametri, quali la porosità ϕ ed il coefficiente di penalizzazione η . Questi, al fine di ottenere un risultato ottimale, è necessario che assumano i valori più piccoli possibile, ma allo stesso tempo sono legati alle dimensioni della griglia [15], [3], [12]. Al diminuire della dimensione caratteristica delle celle è possibile ridurre questi due parametri ottenendo un risultato migliore, con una minore propagazione di onde all'interno del corpo. Nel tentativo di analizzare questo comportamento si è deciso di compiere uno studio parametrico, facendo variare la porosità nell'intervallo $10^{-2} \leq \phi \leq 10^{-4}$, mentre il coefficiente di penalizzazione nell'intervallo $10^{-3} \leq \eta \leq 10^{-6}$. Per tale motivo è possibile individuare dodici casi per griglia, come mostrato nella tabella 4.2.

Sono state svolte tutte le simulazioni, i cui risultati verranno discussi nel capitolo dei successivo.

$\phi \backslash \eta$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
10^{-2}	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
10^{-3}	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
10^{-4}	Caso 9	Caso 10	Caso 11	Caso 12

Tabella 4.2: Analisi parametrica

4.4.3 Relazione tra i coefficienti ϕ , η e la dimensione della cella Δx

Ai due coefficienti bisogna assegnare il valore più piccolo che possono assumere con la griglia considerata. Quindi si è cercato di trovare una relazione che vada a legare i coefficienti ϕ ed η alla dimensione caratteristica delle celle Δx . In questo modo, una volta generata la griglia, conoscendo il Δx durante la simulazione i due coefficienti vengono calcolati in modo automatico. Secondo Kevlahan e Ghidaglia [12] η e Δx sono legati dalla relazione

$$\eta = \Delta x^{2.3} \quad (4.12)$$

Nello studio di Vasilyev [15], invece, i due coefficienti sono stati legati tra loro imponendo $\eta = \phi^2$, per cui si è deciso di procedere applicando tale relazione anche nel seguente elaborato

$$\phi = \eta^{0.5} \quad (4.13)$$

In seguito si è cercato di verificare questi andamenti svolgendo nuovamente le simulazioni per tutte e tre le griglie, i cui risultati verranno discussi nel prossimo capitolo.

Capitolo 5

Risultati

In questo capitolo verranno analizzati i risultati ottenuti e confrontati con quelli di J.J. Quirk [25]. In particolare in un primo momento verranno discussi quelli ottenuti con il metodo classico, per poi passare ai risultati ottenuti mediante il metodo ai confini immersi.

5.1 Caso di riferimento

Quando un urto retto incontra un cilindro ed avanza lungo la sua superficie, si comporta come fosse a contatto con un cuneo avente un angolo variabile. In particolare quando entra in contatto con il primo punto (quello di arresto), questo è come se fosse un cuneo avente un angolo di 90° , ottenendo una *riflessione regolare*. Mano a mano che l'urto incidente propaga sulla superficie del cilindro, l'angolo di riflessione della superficie stessa tende a decrescere, fino a quando non vi è una transizione da una *riflessione regolare* ad una *riflessione di Mach*. Per Quirk [6] il primo punto in cui si verifica questa transizione si posiziona a 44.8° , mentre per Bryson & Gross [8] si posiziona tra i 40° ed i 50° . La correttezza di questo dato dipende nel primo caso dal metodo numerico utilizzato, mentre nel secondo dall'attrezzatura utilizzata per condurre gli esperimenti. In seguito lo stelo di Mach che si viene a creare dopo il punto di transizione, tende ad aumentare le proprie dimensioni, diventando sempre più visibile. Nel momento in cui l'urto arriva nella posizione voluta è possibile notare una particolare struttura che si può osservare in figura 5.1. Osservando la Schlieren fotografica in figura 1.9 ottenuta da Bryson e Gross è possibile comprendere al meglio la struttura che si viene a creare intorno al cilindro. Tenendo conto che l'urto si muova da destra verso sinistra, l'*urto incidente* viene indicato con *I.S.*. A destra è possibile osservare l'*urto riflesso*, indicato con la sigla *R.S.*. Nella zona posteriore, in questo caso sulla sinistra del cilindro, vi è lo stelo di Mach indicato con *M.S.*. *T.P.*, invece, indica il *punto triplo* che va a collegare i tre urti fino ad ora espressi. All'interno di questa struttura, poi, è possibile notare la presenza di

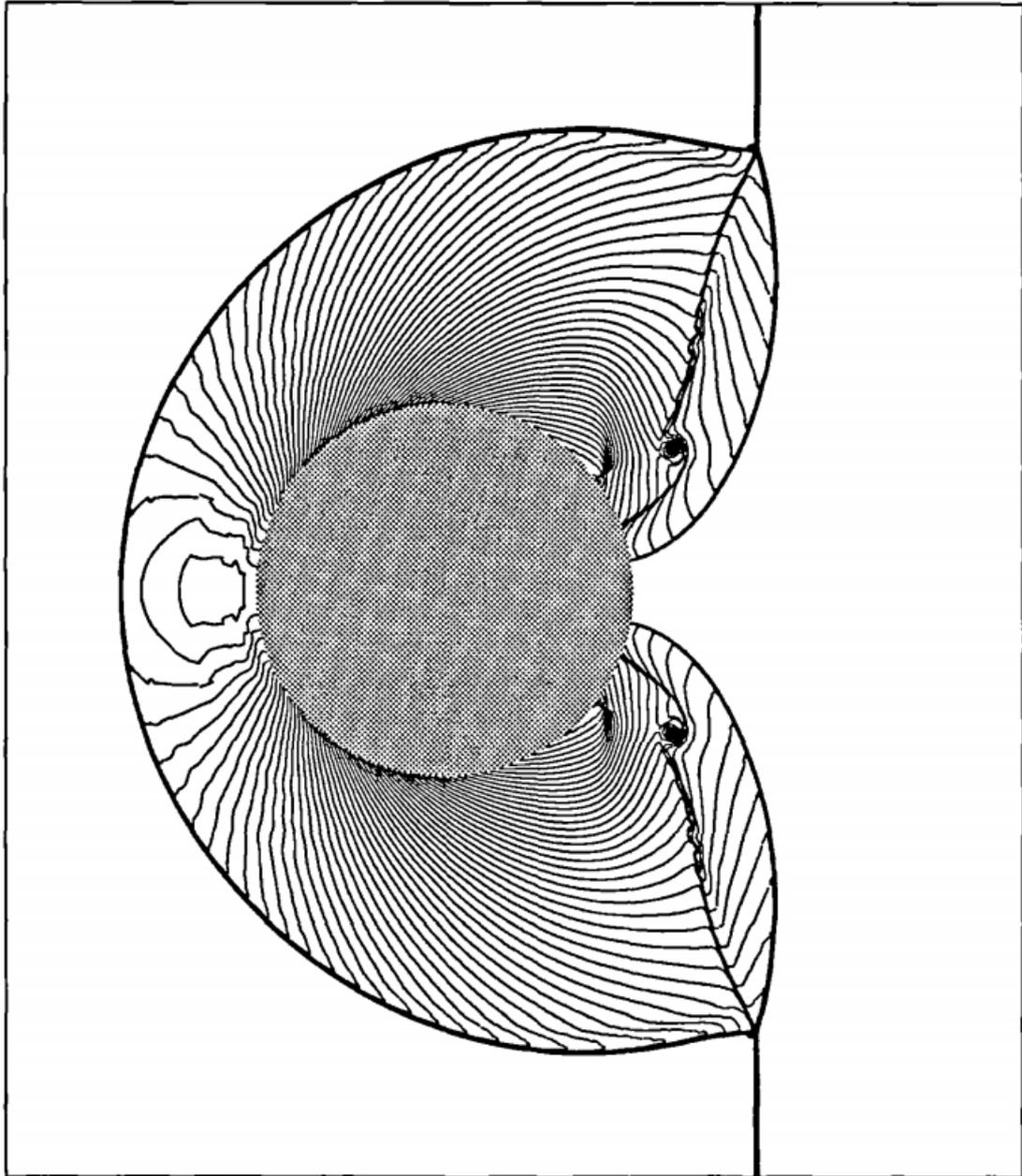


Figura 5.1: Iso-livello della densità ottenuta da J.J. Quirk

una *superficie di contatto* (*C.D.*), che parte proprio dal punto triplo e di un *vortice*, indicato con *V*.

5.2 Risultati ottenuti con il metodo classico

Come specificato nel capitolo precedente, sono state svolte tre simulazioni, una per griglia. Per quanto concerne la prima ($\Delta x = 0.05$), imponendo il *tempo finale* $ft = 0.95649$, la simulazione si conclude per un $k_{effettivo} = 186$.

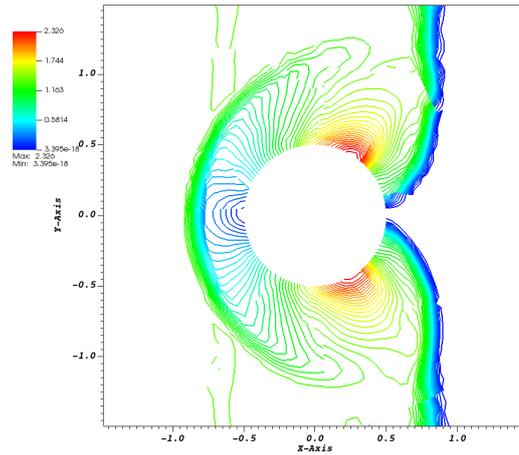


Figura 5.2: Iso-livello del Mach per la prima griglia

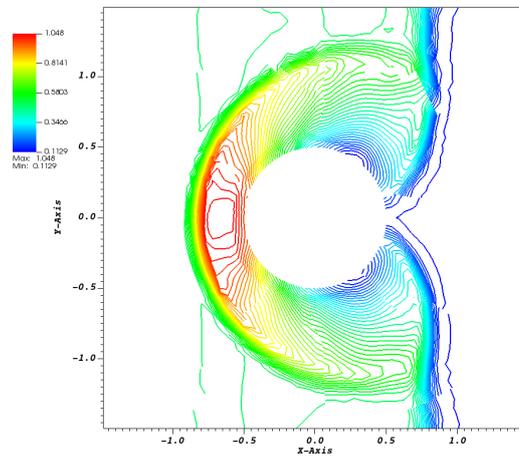


Figura 5.3: Iso-livello della densità per la prima griglia

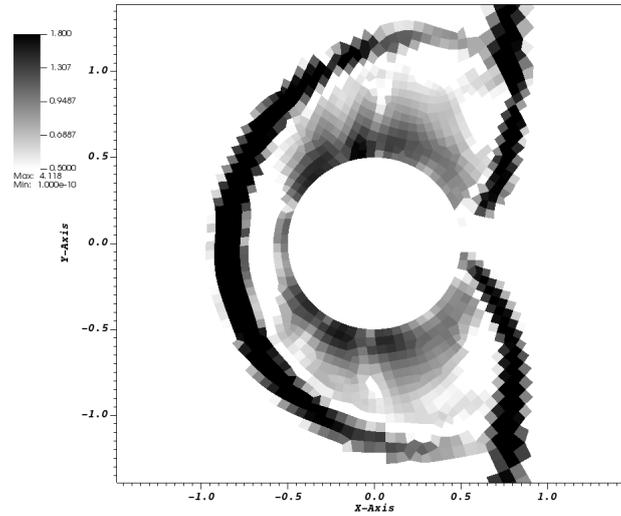


Figura 5.4: Schlieren numerica per la prima griglia

Si noti come, essendo la griglia ancora poco raffinata, la struttura che si vuole rappresentare è ancora molto distante da quella in figura 5.1. Per la seconda griglia ($\Delta x = 0.0125$), mantenendo lo stesso *tempo finale*, la simulazione si ferma per $k_{effettivo} = 1203$. Anche in questo caso è possibile rappresentare le iso-livello del Mach, della densità e la schlieren numerica (figure 5.5, 5.6 e 5.7)

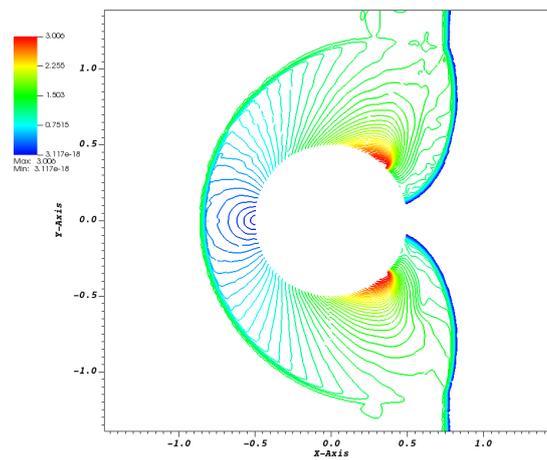


Figura 5.5: Iso-livello del Mach per la seconda griglia

Si noti che l'immagine è molto più raffinata della precedente, inoltre confrontando

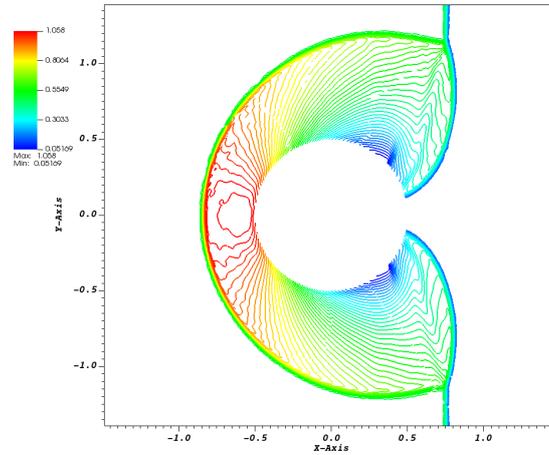


Figura 5.6: Iso-livello della densità per la seconda griglia

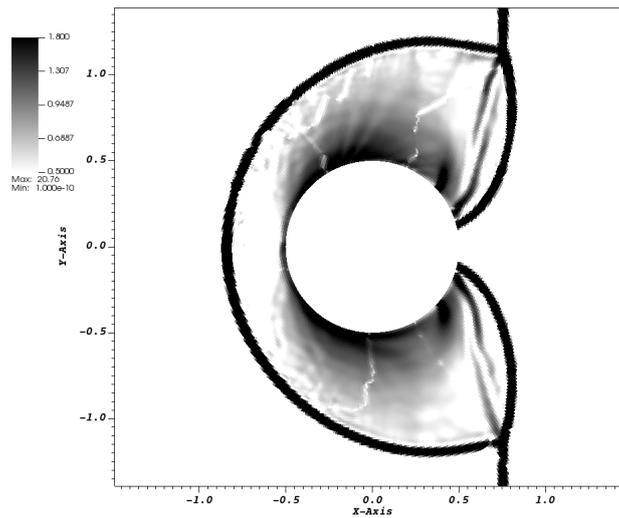


Figura 5.7: Schlieren numerica per la seconda griglia

le due Schlieren (5.7, 5.1) vi è la comparsa della superficie di contatto, ma non si riesce ancora a catturare adeguatamente il vortice.

Prendendo in considerazione l'ultima griglia ($\Delta x = 0.005$), quella più raffinata, si ottiene il risultato sperato. La simulazione si conclude per $k_{effettivo} = 3629$. Anche in questo caso è possibile osservare i risultati nelle figura 5.8, 5.9 e 5.10. Nella figura 5.10 è possibile ritrovare tutti gli elementi descritti per il caso di riferimento. Rispetto alla seconda griglia, inoltre, si può osservare che la superficie di

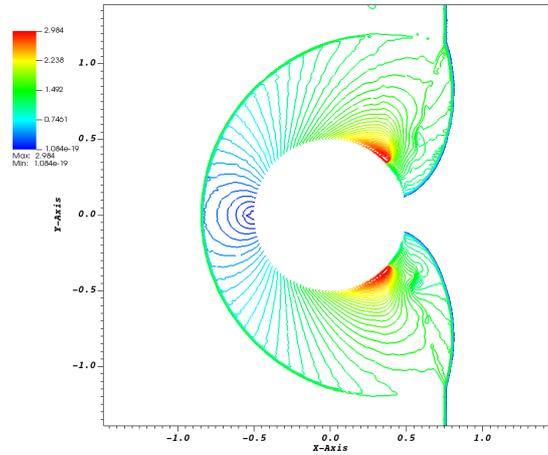


Figura 5.8: Iso-livello del Mach per la Terza griglia

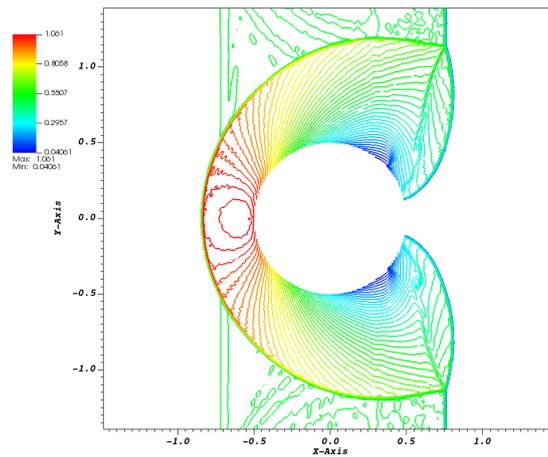


Figura 5.9: Iso-livello della densità per la terza griglia

contatto ($C.D.$) è meglio definita e viene catturato anche il vortice (V).

5.3 Risultati ottenuti con il metodo immersed boundary

Nel realizzare le analisi riguardanti i confini immersi si è deciso di compiere uno studio parametrico facendo variare i coefficienti ϕ ed η , come mostrato in tabella 5.1. Tale procedimento è stato svolto per ogni griglia per un totale di 36 simulazioni. Da

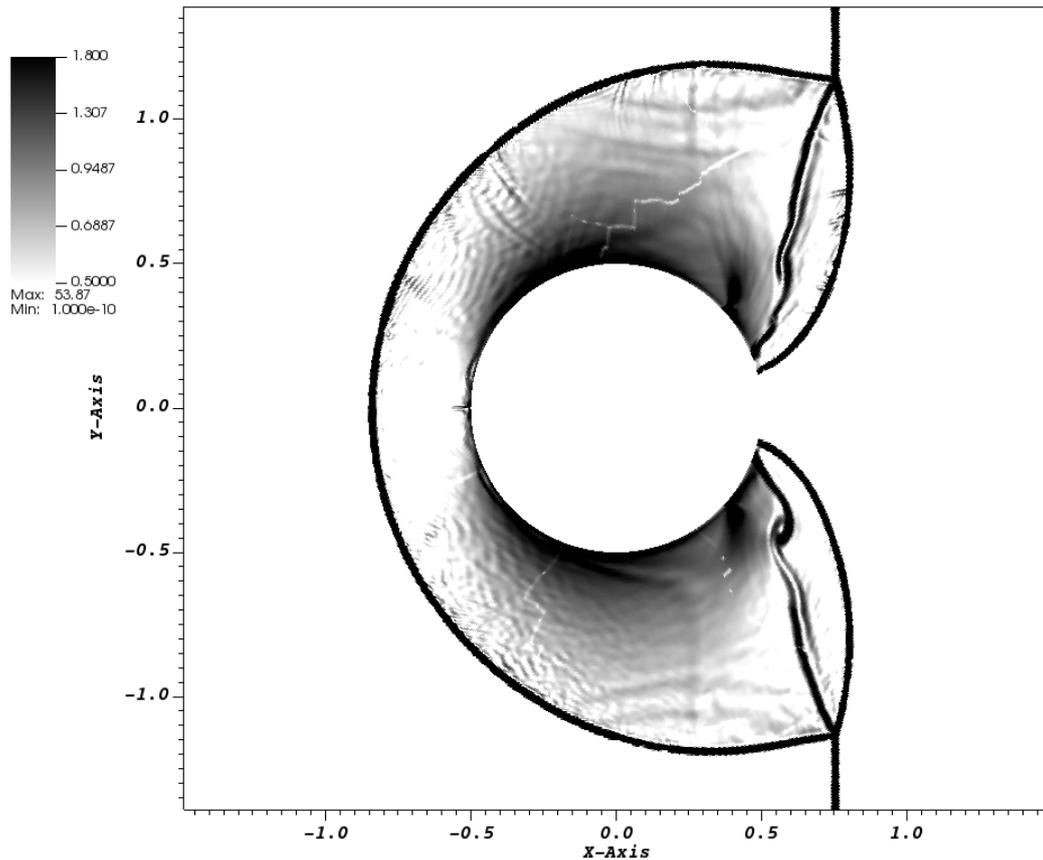


Figura 5.10: Schlieren numerica per la terza griglia

bibliografia [15], [3], [12] emerge che al diminuire delle dimensioni caratteristiche della cella è possibile diminuire anche i coefficienti ϕ ed η , ottenendo una soluzione via via più simile al caso body-fitted. In realtà osservando i risultati ottenuti si può notare che questi non rispecchiano quanto detto fino ad ora. Per una maggiore chiarezza è possibile osservare le tabelle 5.2, 5.3 e 5.4, in cui vengono indicati con una spunta \checkmark i casi che per ogni griglia sono andati a buon fine, mentre con una X quelli per cui non è stato ottenuto alcun risultato. In particolare, si noti come per ogni mesh si abbiano effettivamente gli stessi risultati in termini di valori assunti dai due coefficienti, se non fosse che nell'ultima griglia 5.4 anche il caso 1 non dà alcun risultato. Questo potrebbe portare a pensare che al diminuire della dimensione caratteristica delle celle i coefficienti non possano assumere valori sempre maggiori, ma tale affermazione dovrebbe essere verificata espandendo l'analisi parametrica.

$\phi \backslash \eta$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
10^{-2}	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
10^{-3}	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
10^{-4}	Caso 9	Caso 10	Caso 11	Caso 12

Tabella 5.1: Casi possibili nell'analisi parametrica

$\phi \backslash \eta$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
10^{-2}	✓	✓	✓	✓
10^{-3}	X	✓	X	X
10^{-4}	X	X	X	X

Tabella 5.2: Griglia 1

$\phi \backslash \eta$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
10^{-2}	✓	✓	✓	✓
10^{-3}	X	✓	X	X
10^{-4}	X	X	X	X

Tabella 5.3: Griglia 2

$\phi \backslash \eta$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
10^{-2}	X	✓	✓	✓
10^{-3}	X	✓	X	X
10^{-4}	X	X	X	X

Tabella 5.4: Griglia 3

Tutte le visualizzazioni sono state raccolte nell'Appendice A. Avedo utilizzato lo stesso *tempo finale* per il caso body-fitted e per quello ai confini immersi, l'urto incidente all'istante finale dovrebbe fermarsi più o meno nella stessa posizione in tutte le visualizzazioni. Questo effettivamente accade, infatti per entrambi i metodi si ha che l'urto si posiziona tra $x = 0.74$ ed $x = 0.76$. Per quanto riguarda l'immersed boundary, per la prima griglia si ha un $k_{effettivo} = 196$, per quella intermedia $k_{effettivo} = 1074$, mentre per la mesh più raffinata $k_{effettivo} = 2820$.

5.3.1 Confronto tra body-fitted ed immersed boundary

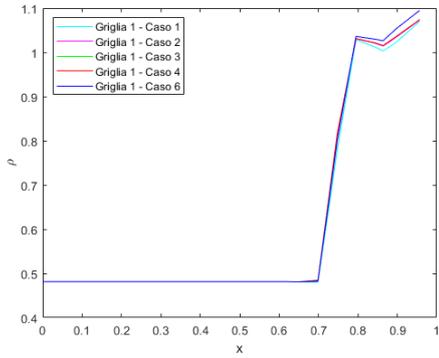
Confrontando tra loro tutte le simulazioni ottenute dall'analisi parametrica (Appendice A) si può notare come la dimensione caratteristica della cella sia determinante per l'ottenimento di una buona visualizzazione. Nel momento in cui si ha una dimensione delle celle molto grande (in questo caso $\Delta x = 0.05$), la struttura di diffrazione non viene rappresentata adeguatamente. Al diminuire del Δx si riescono ad ottenere dei buoni risultati, molto più simili al metodo body-fitted 5.10, A.39. Si può inoltre notare che al variare dei due coefficienti, per ogni griglia i risultati sono piuttosto simili, anche se il caso migliore sembra sempre essere il *caso 4* (tabella 5.1), cioè con $\phi = 10^{-2}$ ed $\eta = 10^{-6}$.

Volendo confrontare le visualizzazioni ottenute per il metodo classico (5.4, 5.7, 5.10) con quelle ottenute per i confini immersi (Appendice A), si nota subito che per l'immersed boundary i risultati migliori riguardano la mesh più raffinata. Nonostante le simulazioni siano state fermate tutte nello stesso istante mediante il *tempo finale*, si nota che con l'immersed boundary la struttura di diffrazione non si sviluppa in modo adeguato, in particolare si può notare come nonostante l'urto incidente *I.S.* arrivi nella posizione desiderata, l'urto riflesso *R.S.* si posiziona su ascisse maggiori. Questo è dovuto al fatto che non vi è sufficiente risoluzione per risolvere correttamente l'interfaccia solido/gas. Inoltre si può notare come per i confini immersi non si riescano a catturare i due vortici ma la sola superficie di contatto.

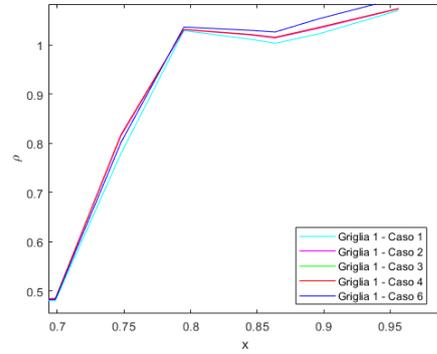
5.3.2 Confronto tra i valori assunti da ρ nel campo di moto per i confini immersi

Volendo è possibile compiere un confronto tra i valori assunti dalla densità ρ lungo un segmento orizzontale, a partire dall'indisturbato a monte fino alla superficie del cilindro, in modo tale da valutare le soluzioni ottenute al variare dei coefficienti ϕ ed η . Partendo dal campo di moto considerato, che si estende da $x = -10$ fino ad $x = 10$ si può notare come l'urto riflesso si sviluppi a partire dall'ascissa $x > -1$. Per tale motivo vengono valutati i valori di ρ lungo un segmento orizzontale che parte da $x = -1.5$ fino ad $x = -0.5$ con $y = 0$, appartenente alla superficie del cilindro.

Nelle figure 5.11, 5.12 e 5.13 sono stati rappresentati tutti i casi al variare di ϕ ed η raccolti nelle tabelle 5.2, 5.3 e 5.4. Si noti che il gradino corrisponde ad un aumento di pressione dovuto alla presenza dell'urto riflesso. Al diminuire di ϕ ed η le curve tendono a spostarsi in alto ed a sinistra, questo vuol dire che l'urto nell'istante finale si posiziona ad ascisse inferiori, quindi si avvicina al caso body-fitted. Nel passaggio dal *caso 3* al *caso 4*, cioè da $\eta = 10^{-5}$ ad $\eta = 10^{-6}$, non si ha una effettiva differenza nei valori assunti dalla pressione, infatti in ogni grafico 5.11, 5.12 e 5.13 le due curve coincidono.

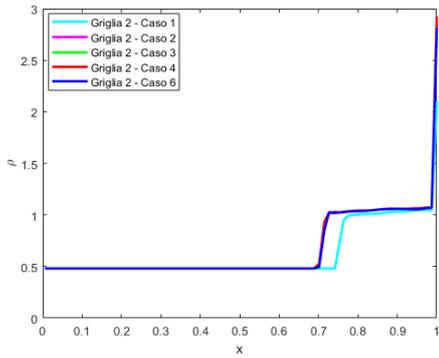


(a) *Andamento di ρ*

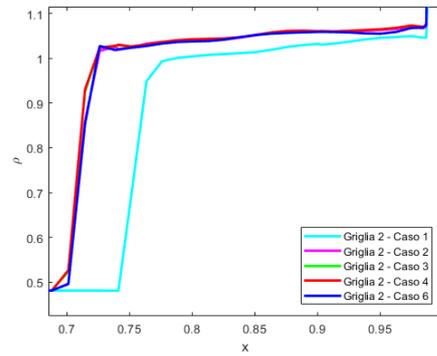


(b) *Grafico nel dettaglio*

Figura 5.11: Andamento di ρ per la Griglia 1 ed i casi 1, 2, 3, 4, e 6

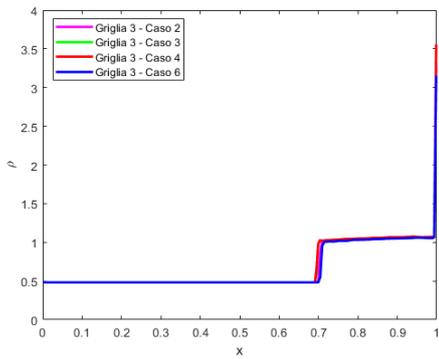


(a) *Andamento di ρ*

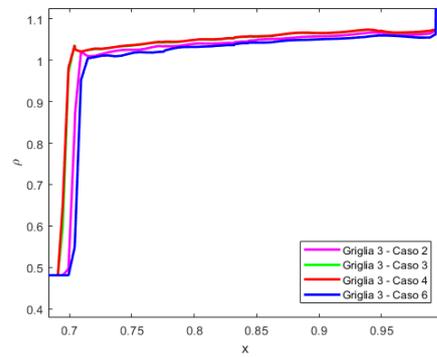


(b) *Grafico nel dettaglio*

Figura 5.12: Andamento di ρ per la Griglia 2 ed i casi 1, 2, 3, 4, e 6



(a) *Andamento di ρ*



(b) *Grafico nel dettaglio*

Figura 5.13: Andamento di ρ per la Griglia 3 ed i casi 2, 3, 4, e 6

Si possono compiere altre due osservazioni. Per prima cosa si può notare che vi è un picco in corrispondenza delle ascisse finali. Questo è dovuto all'errore introdotto dal metodo immersed boundary, che introduce dei termini di sorgente nelle equazioni. Un'altra osservazione riguarda il gradino di densità. Questo infatti per la prima griglia non è catturato adeguatamente come mostrato in figura 5.11, infatti l'aumento di densità è spalmato su un intervallo molto ampio, che tende poi a diminuire per le due griglie successive. Tale comportamento è dovuto semplicemente al fatto che l'urto venga spalmato su un certo numero di punti, i quali vengono infittiti nelle mesh successive, per cui l'urto stesso viene catturato meglio.

5.3.3 Confronto tra i valori assunti da ρ nel caso body-fitted ed in quello ai confini immersi

Per il confronto tra i valori assunti da ρ nel caso body-fitted ed in quello immersed boundary il procedimento è del tutto simile a quello descritto nel paragrafo precedente. Avendo definito un segmento che si estende da $x = -1.5$ fino ad $x = -0.5$, per $y = 0$, presi i valori di ρ lungo tale segmento, sono stati generati i grafici rappresentati nelle figure 5.14, 5.15 e 5.16. Per ognuno di essi è ben visibile l'andamento della densità con il metodo classico e con il metodo ai confini immersi per i casi 4 e 6 dalle tabelle 5.2, 5.3 e 5.4. Questo procedimento è stato applicato ad ognuna delle tre mesh. Nel grafico rappresentato in figura 5.17 in particolare vi è un confronto tra l'andamento della densità per la griglia più fine del metodo body fitted e l'andamento di ρ con il metodo ai confini immersi per tutte e tre le griglie generate. In questo grafico si è scelto di rappresentare il caso 4 (tabelle 5.2, 5.3 e 5.4) per il metodo immersed boundary. Ancora una volta è possibile vedere che con l'immersed boundary vi è un urto che si posiziona ad ascisse maggiori e mano a mano che la griglia diventa sempre più raffinata, questo tende a convergere al risultato ottenuto con il metodo body-fitted. Nonostante vi sia una leggera discrepanza tra i risultati dei due metodi, comunque la soluzione con penalizzazione di Brinkman risulta essere piuttosto buona.

5.4 Risultati ottenuti con la relazione che lega i coefficienti ϕ , η e la dimensione della cella Δx

Una volta trovate le due possibili relazioni che legano ϕ , η e la dimensione caratteristica delle celle Δx (equazioni 4.12 e 4.13), sono state svolte tre simulazioni, una per griglia. Per quanto riguarda la prima mesh la simulazione si è conclusa per $k_{effettivo} = 196$, la seconda per $k_{effettivo} = 1074$, mentre l'ultima non è andata a buon fine. Si noti che per la prima mesh avendo $\Delta x = 0.05$ si ha

$$\eta = 1.0177 \cdot 10^{-3}$$

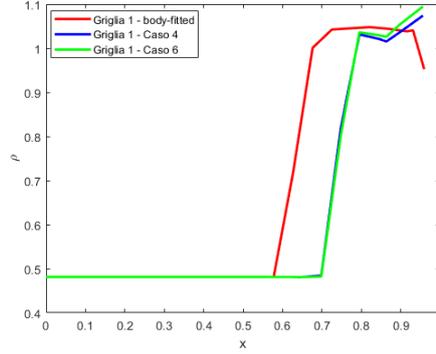
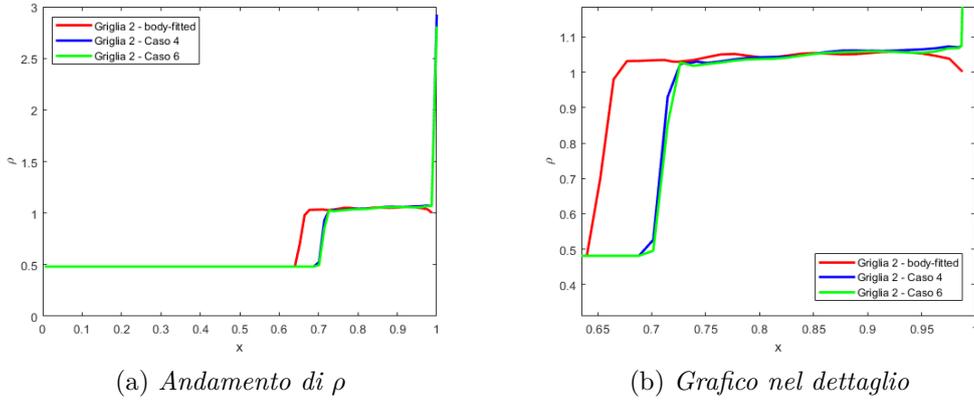


Figura 5.14: Andamento di ρ per la Griglia 1 nel caso body-fitted e nei casi 4 e 6 ai confini immersi



(a) Andamento di ρ

(b) Grafico nel dettaglio

Figura 5.15: Andamento di ρ per la Griglia 2 nel caso body-fitted e nei casi 4 e 6 ai confini immersi

$$\phi = 3.1902 \cdot 10^{-2}$$

per la seconda mesh $\Delta x = 0.0125$, quindi

$$\eta = 4.1966 \cdot 10^{-5}$$

$$\phi = 6.478 \cdot 10^{-3}$$

mentre per la terza $\Delta x = 0.005$, per cui

$$\eta = 5.101 \cdot 10^{-6}$$

$$\phi = 2.2585 \cdot 10^{-3}$$

Osservando i valori appena calcolati e la tabella 5.1, si può vedere come i coefficienti per la prima mesh rientrino effettivamente nella casistica considerata dallo studio

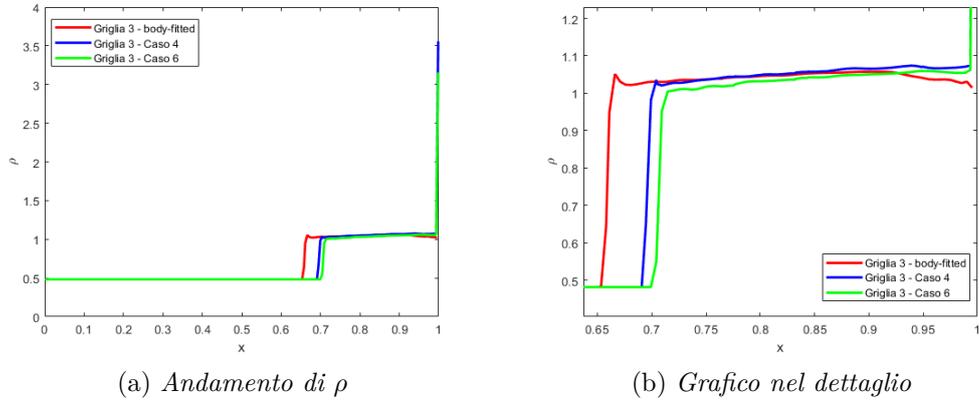


Figura 5.16: Andamento di ρ per la Griglia 3 nel caso body-fitted e nei casi 4 e 6 ai confini immersi

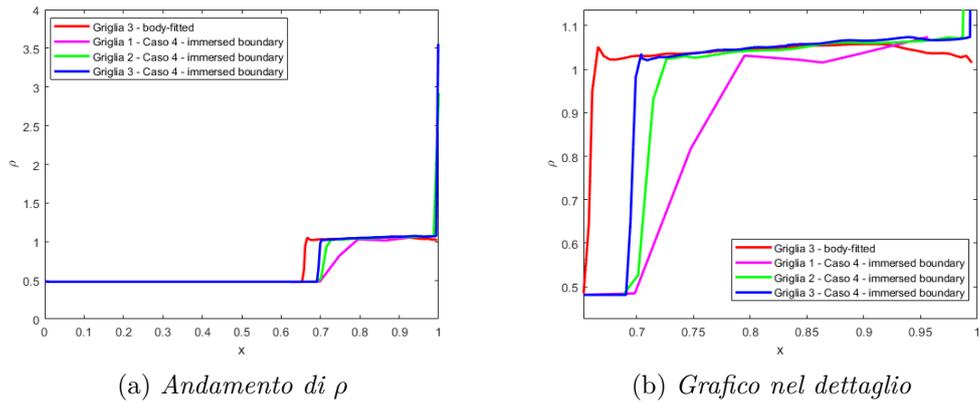


Figura 5.17: Andamento di ρ per la Griglia 3 nel caso body-fitted e nei casi 4 per le tre griglie ai confini immersi

parametrico svolto. Per la seconda mesh ci si posiziona tra il *caso 6* ed il *caso 7*, mentre per la terza griglia non si ottiene alcun risultato pur provando a modificare i coefficienti e gli esponenti delle equazioni 4.12 e 4.13. Per tale motivo si rimanda a studi futuri la possibilità di trovare una buona relazione che leghi i coefficienti alle dimensioni delle celle, in quanto questo porterebbe a dei vantaggi dovendosi limitare alla realizzazione delle griglie senza dover imporre dall'esterno ϕ ed η . Di seguito sono rappresentati i risultati ottenuti con le simulazioni svolte seguendo la procedura appena trattata (figure 5.18, 5.19, 5.20, 5.21, 5.22 e 5.23).

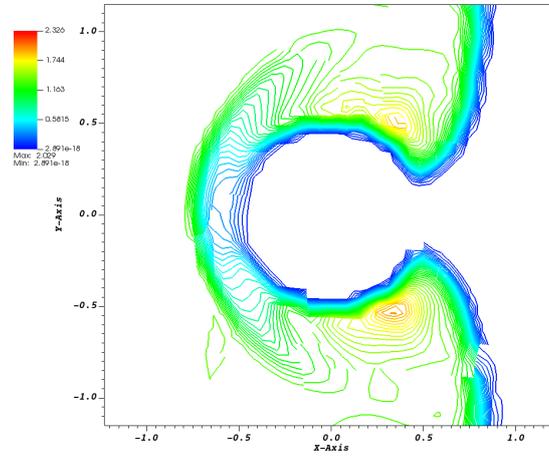


Figura 5.18: Iso-livello del Mach per la prima griglia con la relazione che lega i ϕ , η e Δx

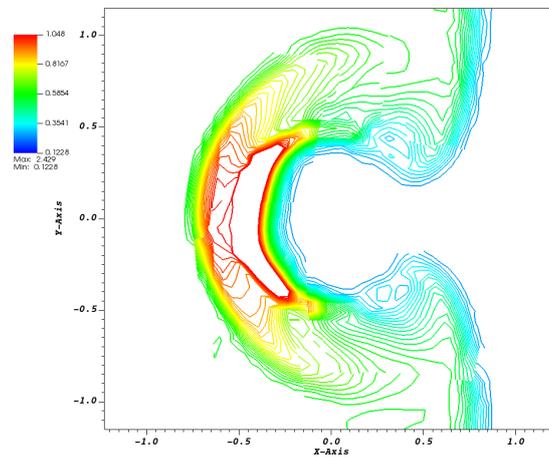


Figura 5.19: Iso-livello della densità per la prima griglia con la relazione che lega i ϕ , η e Δx

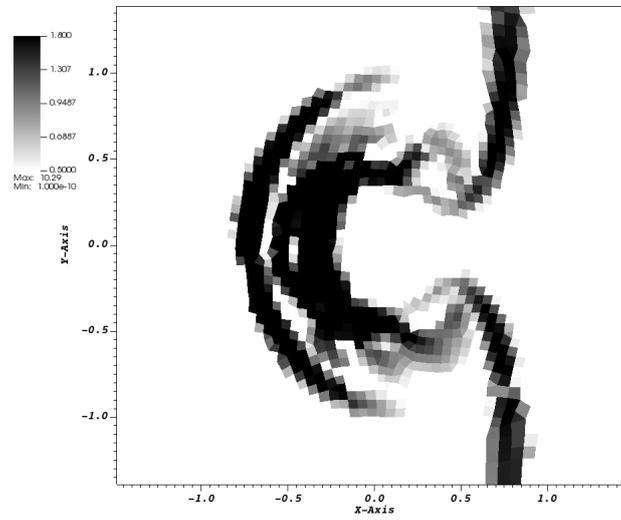


Figura 5.20: Schlieren numerica per la prima griglia con la relazione che lega i ϕ , η e Δx

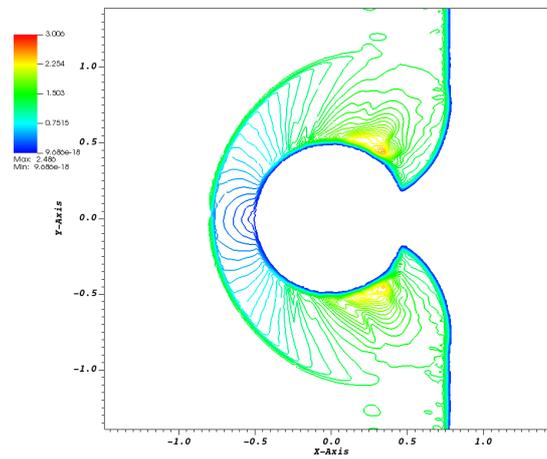


Figura 5.21: Iso-livello del Mach per la seconda griglia con la relazione che lega i ϕ , η e Δx

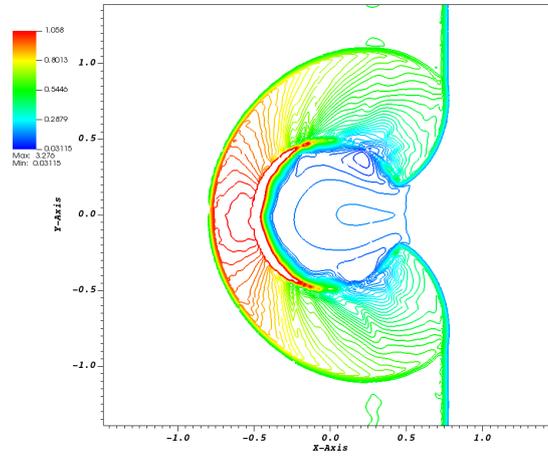


Figura 5.22: Iso-livello della densità per la seconda griglia con la relazione che lega i ϕ , η e Δx

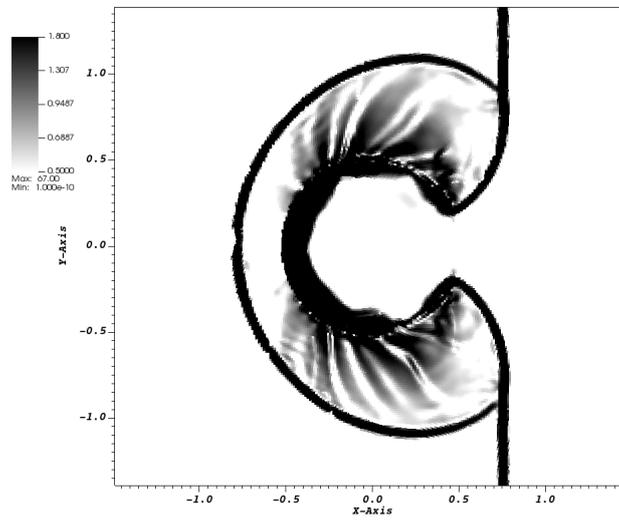


Figura 5.23: Schlieren numerica per la seconda griglia con la relazione che lega i ϕ , η e Δx

Capitolo 6

Conclusioni

A partire da un caso di riferimento di un cilindro 2D investito da un urto in aria ferma, sono state condotte delle simulazioni utilizzando il metodo classico body-fitted ed il metodo immersed boundary con penalizzazione di Brinkman. Il metodo ai confini immersi in questione è caratterizzato da un ampliamento delle equazioni di governo, considerando il corpo come fosse poroso, per poi aggiungere dei termini sottrattivi nelle equazioni di quantità di moto ed energia. Avendo generato tre griglie, di volta in volta più raffinate, sono state svolte le simulazioni con i due metodi. I risultati ottenuti con il metodo classico sono stati confrontati con quelli riguardanti il caso immersed boundary, mediante i valori assunti dalla densità lungo un segmento di riferimento preso all'interno del campo di moto. Le soluzioni in esame sono affini, nonostante la presenza di errori nel secondo caso dovuta alla cattiva risoluzione dello strato limite in prossimità della parete ed alla perdita di massa ed energia, causate dall'aver considerato il corpo come un mezzo poroso, il che comporta una riflessione di onde d'urto al suo interno. L'analisi parametrica svolta, con l'intento di valutare le soluzioni al variare della porosità ϕ e del coefficiente di penalizzazione η , non ha portato a dei risultati positivi. Al diminuire della dimensione caratteristica delle celle Δx , infatti, si dovrebbe poter ridurre i due coefficienti, ma le analisi condotte a riguardo non sono state in grado di dimostrare questo andamento.

Si è deciso di provare a legare mediante due relazioni ϕ , η e Δx cercando di sfruttare il vantaggio di poter generare le griglie, senza dover imporre in un secondo momento i coefficienti dall'esterno. I risultati sono stati positivi per le prime due griglie utilizzate durante le analisi, ma non per l'ultima, la mesh più raffinata. Per tale motivo si rimanda a studi successivi la possibilità di approfondire questo lavoro, magari andando ad espandere l'analisi parametrica. Questo potrebbe permettere o di evidenziare le criticità che hanno portato a dei risultati negativi, oppure a comprendere meglio l'effettivo andamento di ϕ ed η al variare di Δx , in modo tale da poter elaborare le relazioni cercate.

Appendice A

Immagini ottenute dall'analisi parametrica

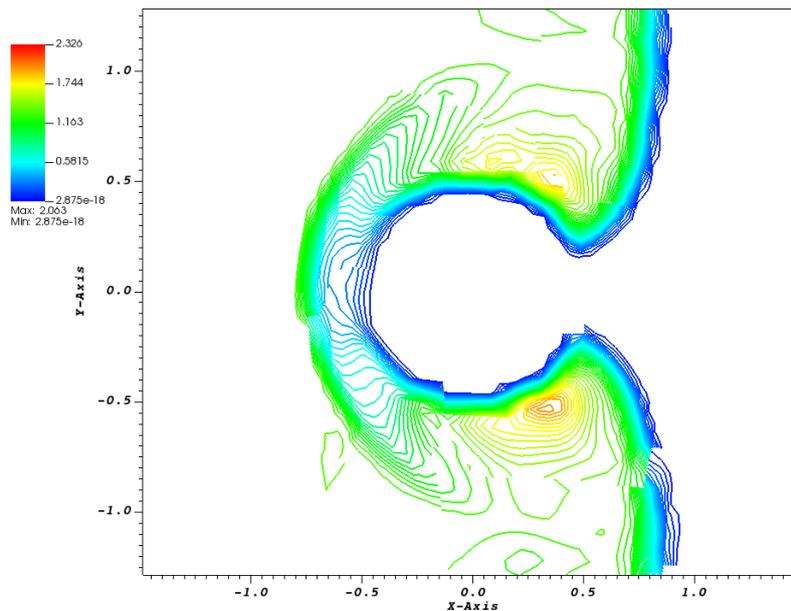


Figura A.1: Griglia 1 - Caso 1 - Rappresentazione del Mach

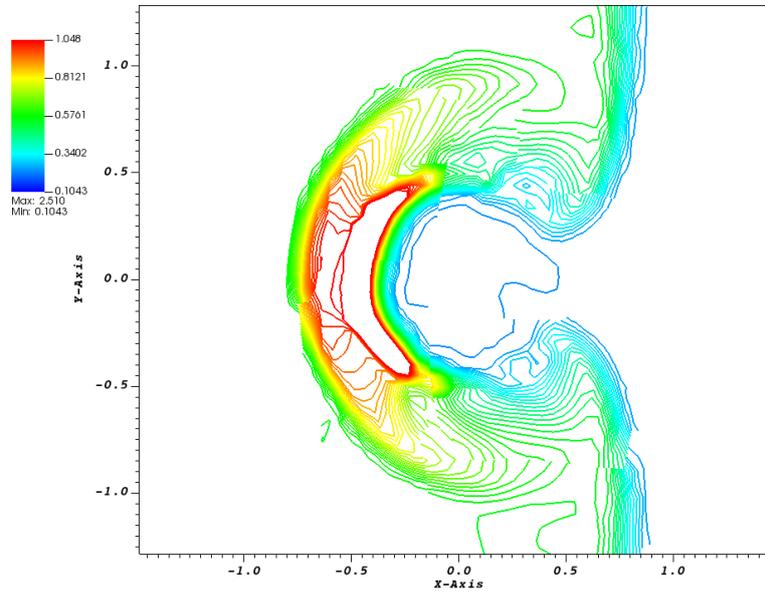


Figura A.2: Griglia 1 - Caso 1 - Rappresentazione della densità

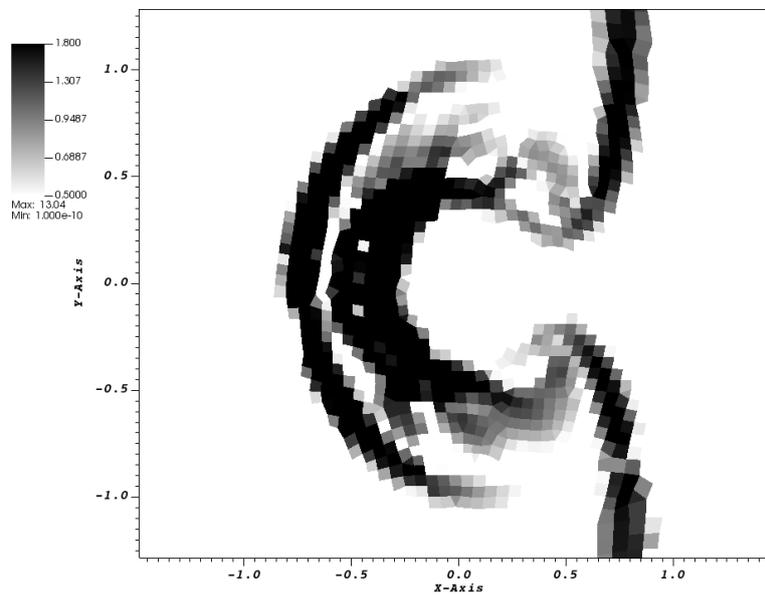


Figura A.3: Griglia 1 - Caso 1 - Schlieren numerica della densità

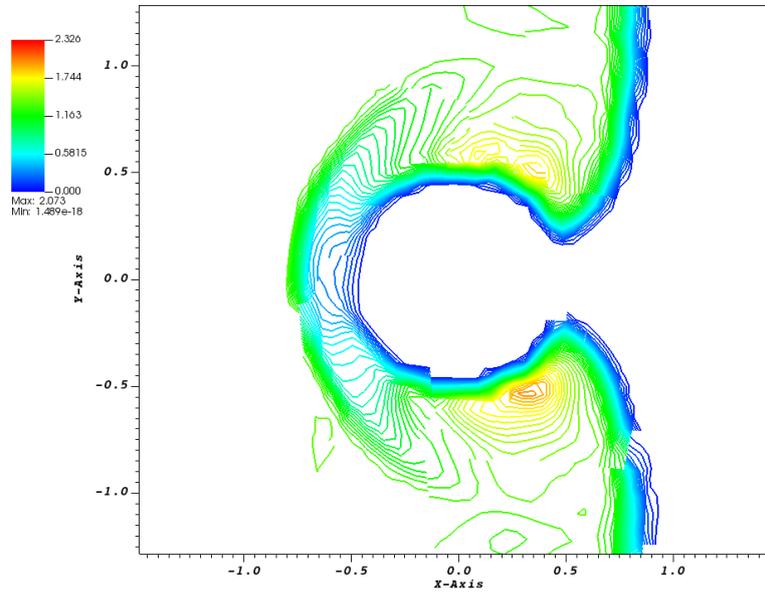


Figura A.4: Griglia 1 - Caso 2 - Rappresentazione del Mach

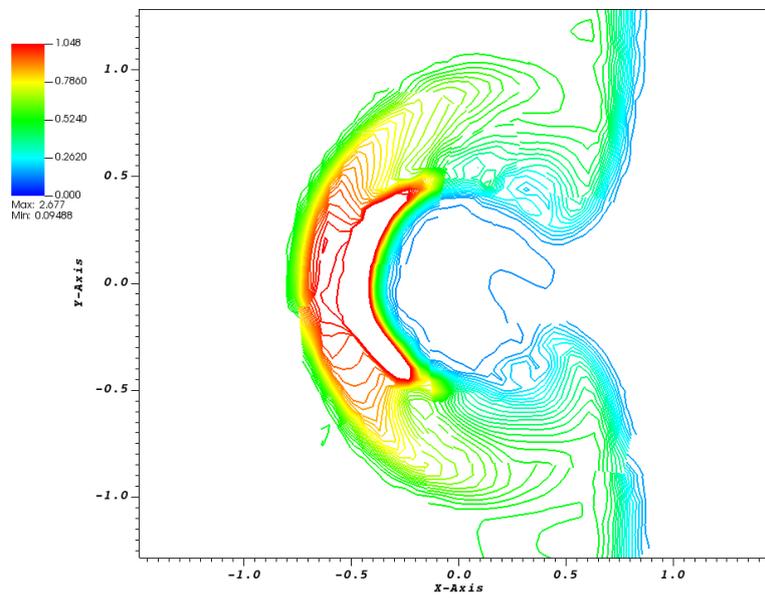


Figura A.5: Griglia 1 - Caso 2 - Rappresentazione della densità

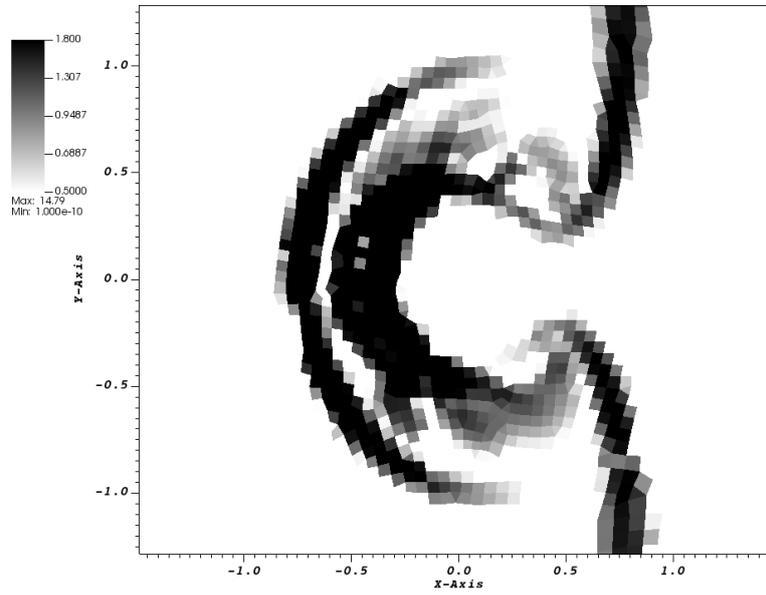


Figura A.6: Griglia 1 - Caso 2 - Schlieren numerica della densità

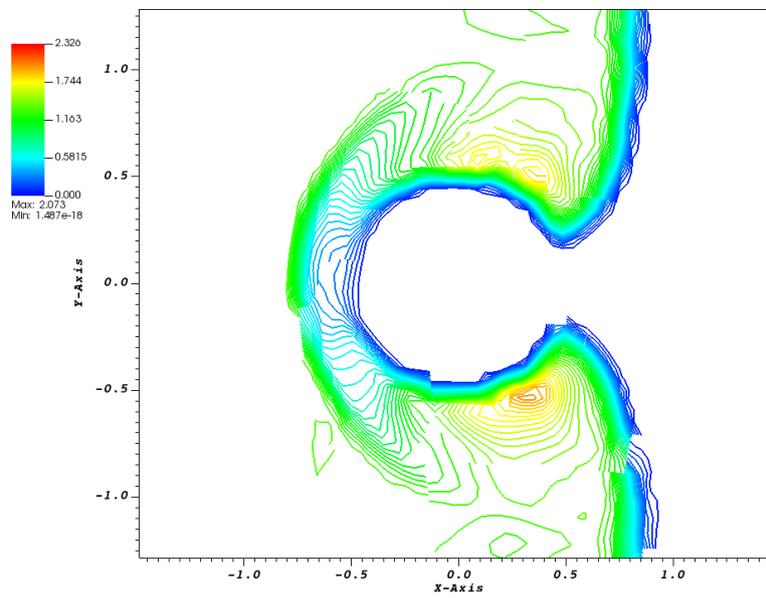


Figura A.7: Griglia 1 - Caso 3 - Rappresentazione del Mach

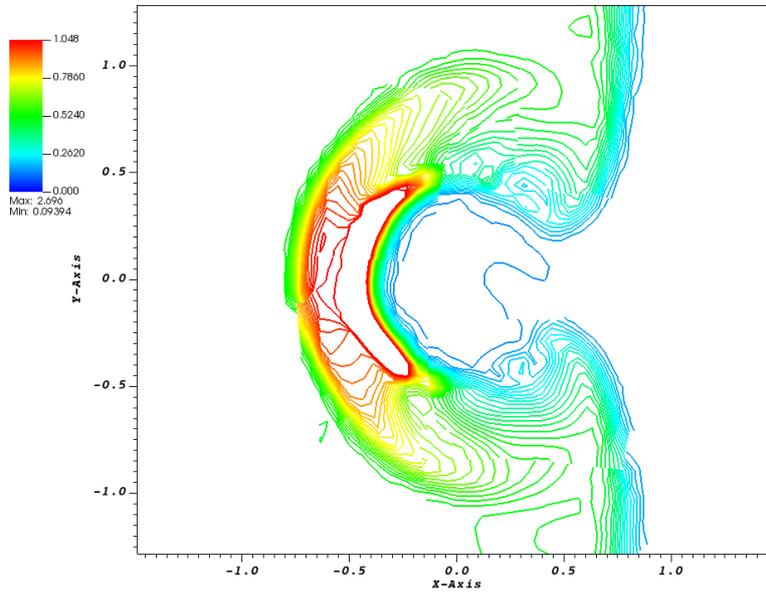


Figura A.8: Griglia 1 - Caso 3 - Rappresentazione della densità

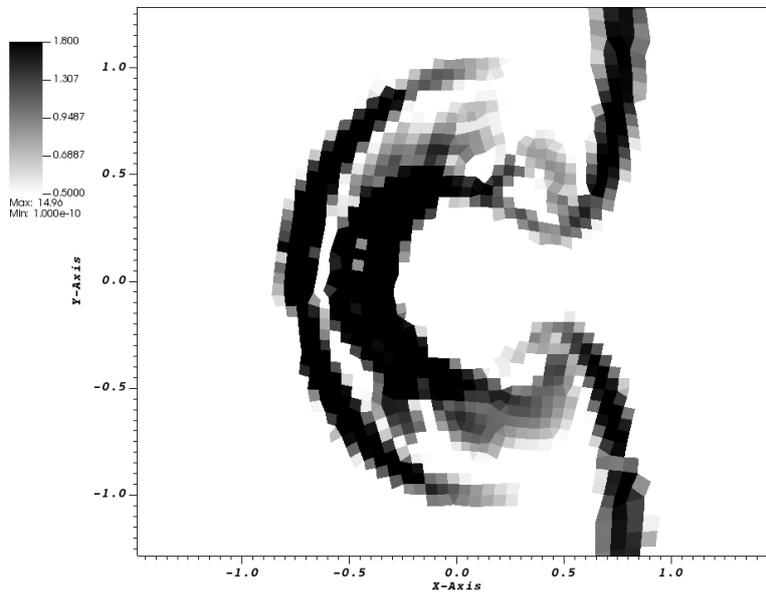


Figura A.9: Griglia 1 - Caso 3 - Schlieren numerica della densità

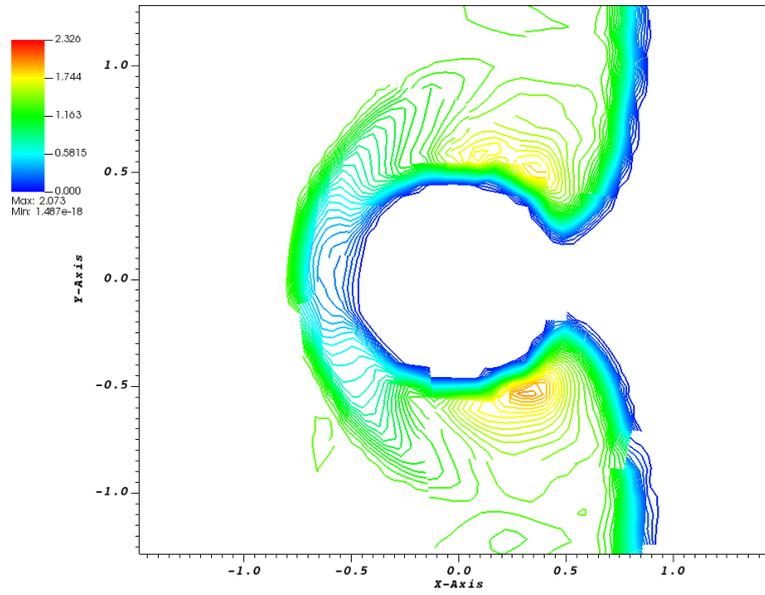


Figura A.10: Griglia 1 - Caso 4 - Rappresentazione del Mach

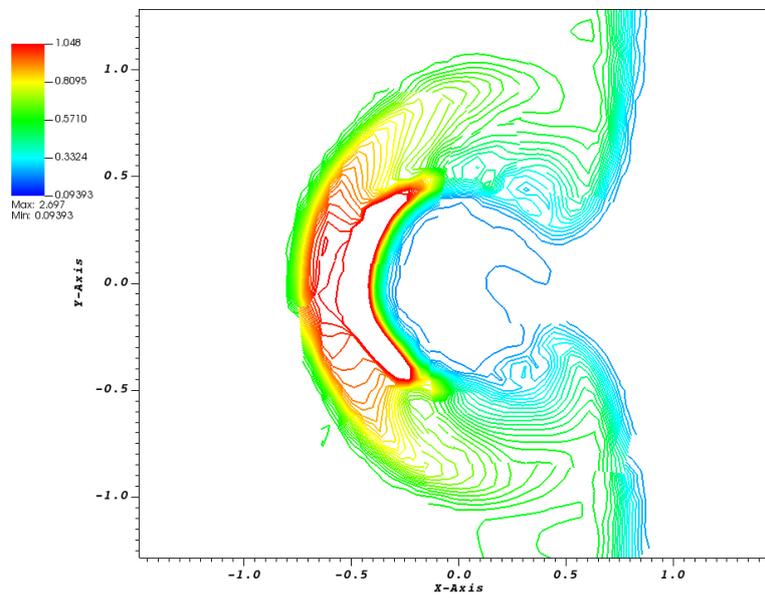


Figura A.11: Griglia 1 - Caso 4 - Rappresentazione della densità

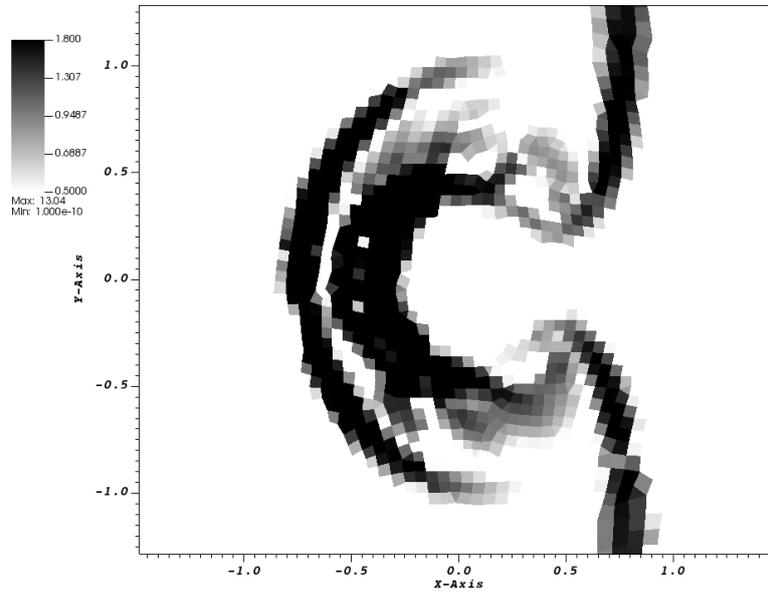


Figura A.12: Griglia 1 - Caso 4 - Schlieren numerica della densità

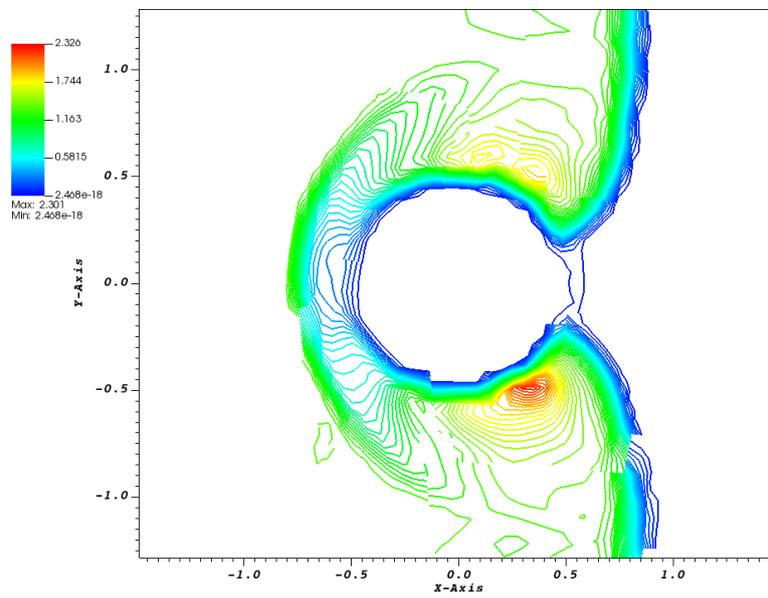


Figura A.13: Griglia 1 - Caso 6 - Rappresentazione del Mach

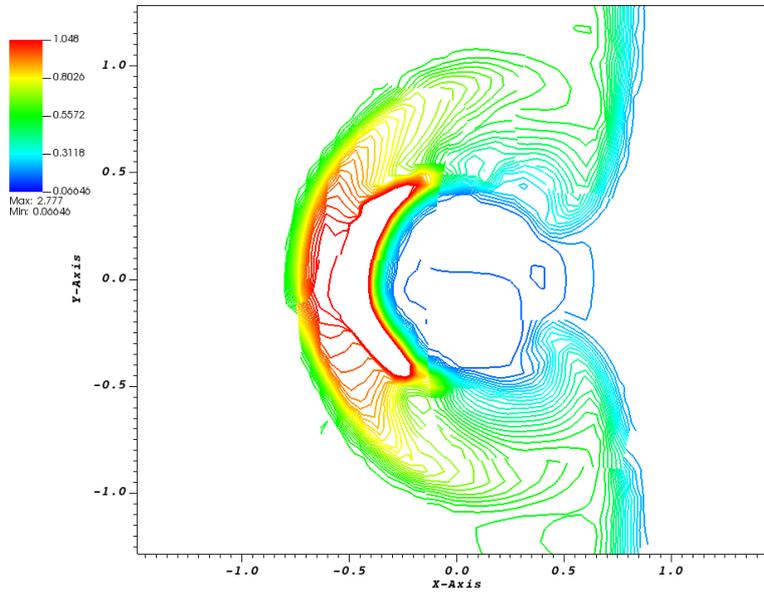


Figura A.14: Griglia 1 - Caso 6 - Rappresentazione della densità

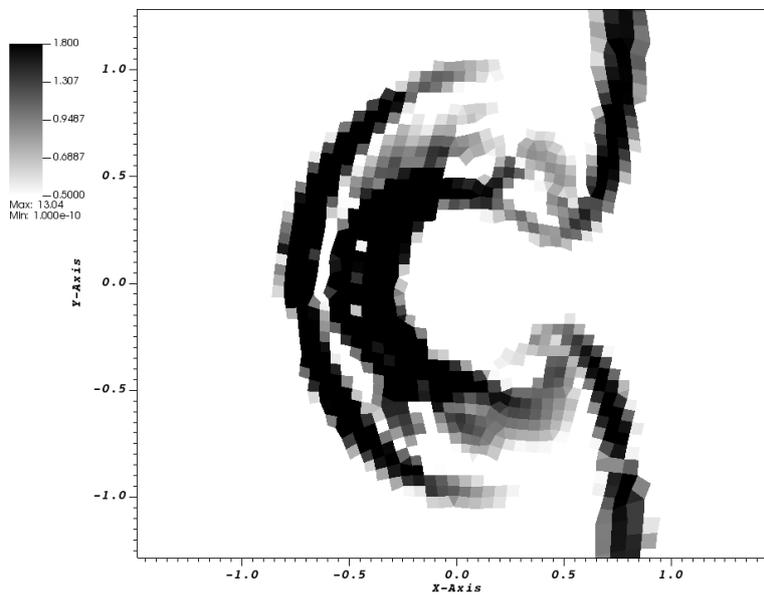


Figura A.15: Griglia 1 - Caso 6 - Schlieren numerica della densità

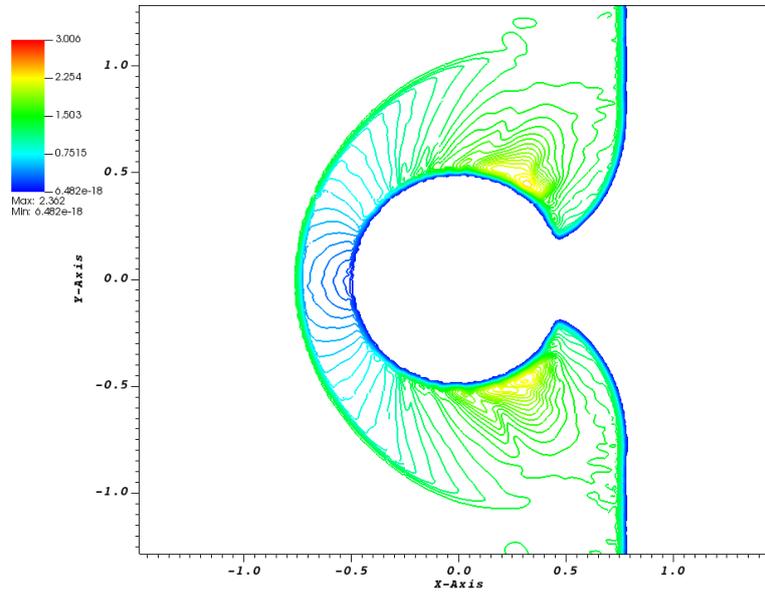


Figura A.16: Griglia 2 - Caso 1 - Rappresentazione del Mach

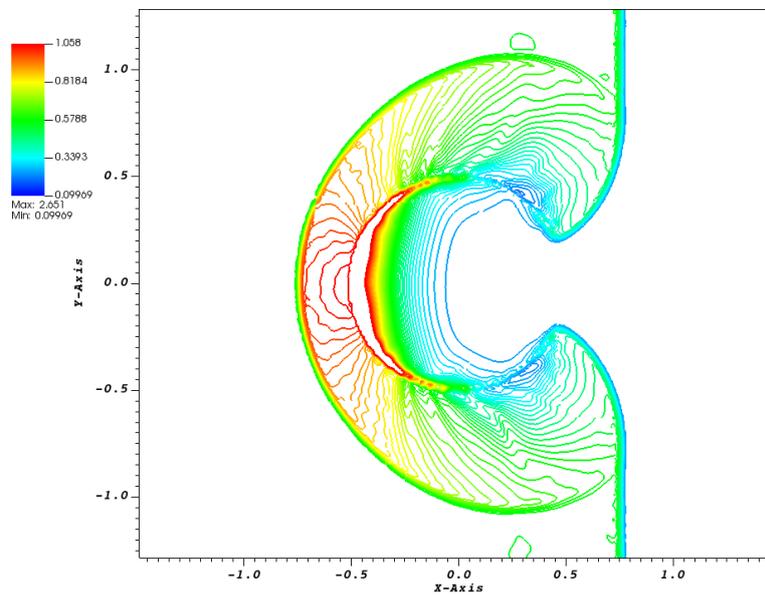


Figura A.17: Griglia 2 - Caso 1 - Rappresentazione della densità

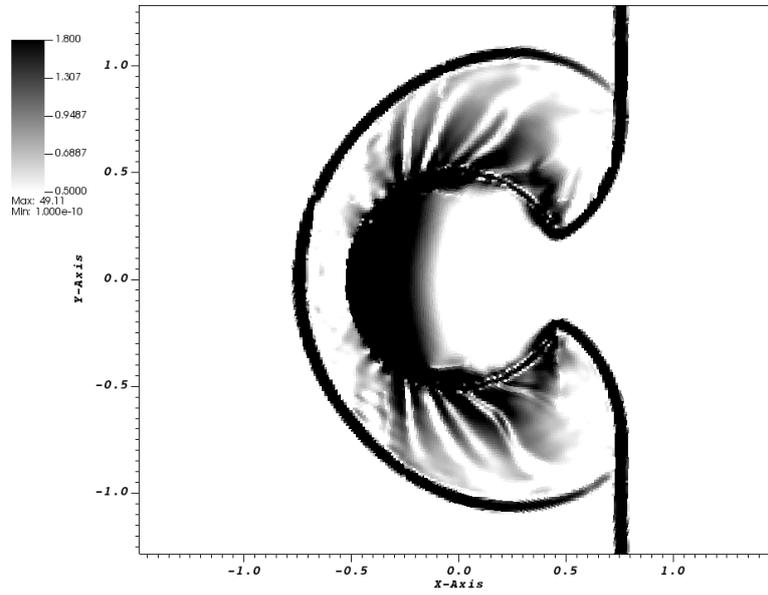


Figura A.18: Griglia 2 - Caso 1 - Schlieren numerica della densità

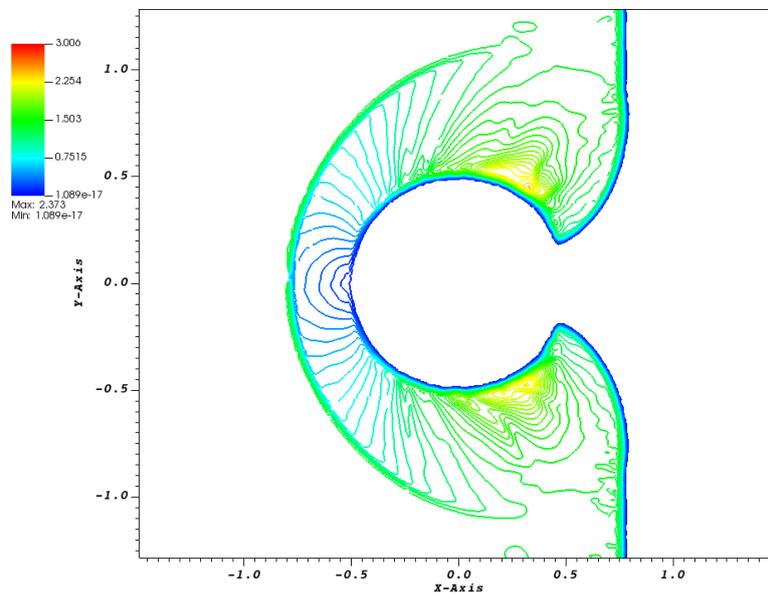


Figura A.19: Griglia 2 - Caso 2 - Rappresentazione del Mach

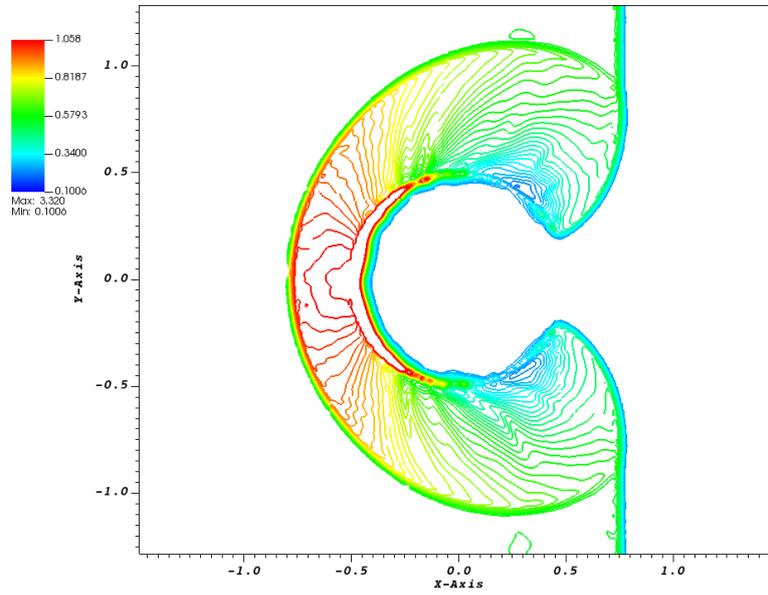


Figura A.20: Griglia 2 - Caso 2 - Rappresentazione della densità

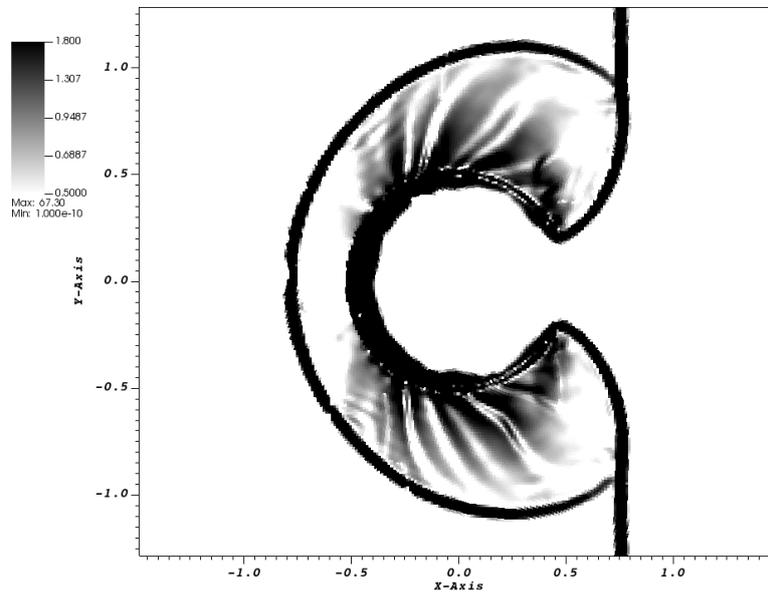


Figura A.21: Griglia 2 - Caso 2 - Schlieren numerica della densità

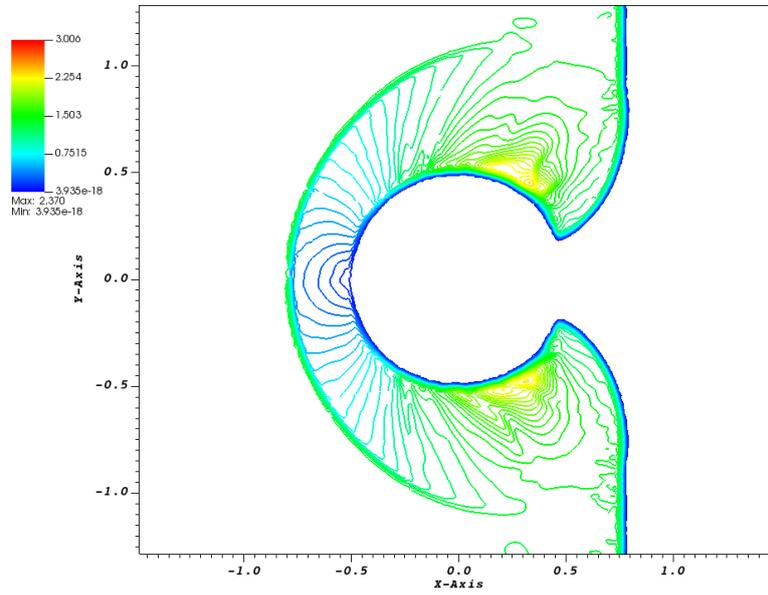


Figura A.22: Griglia 2 - Caso 3 - Rappresentazione del Mach

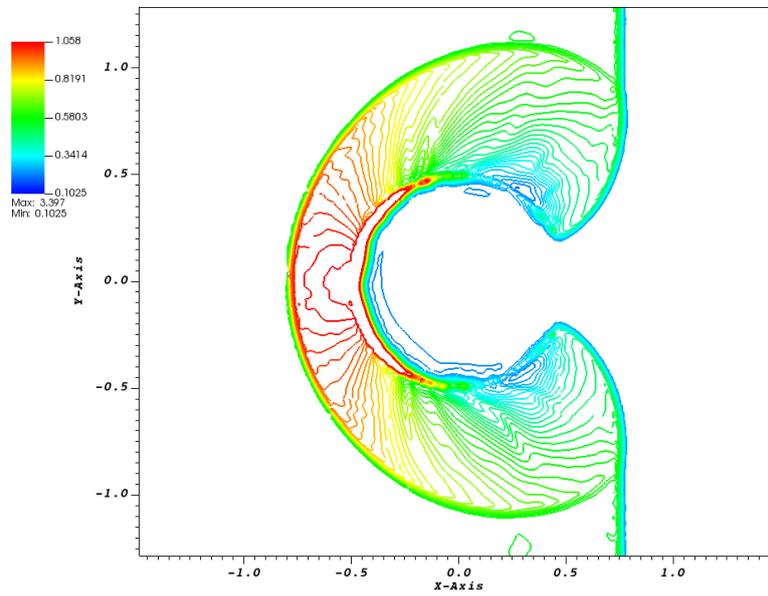


Figura A.23: Griglia 2 - Caso 3 - Rappresentazione della densità

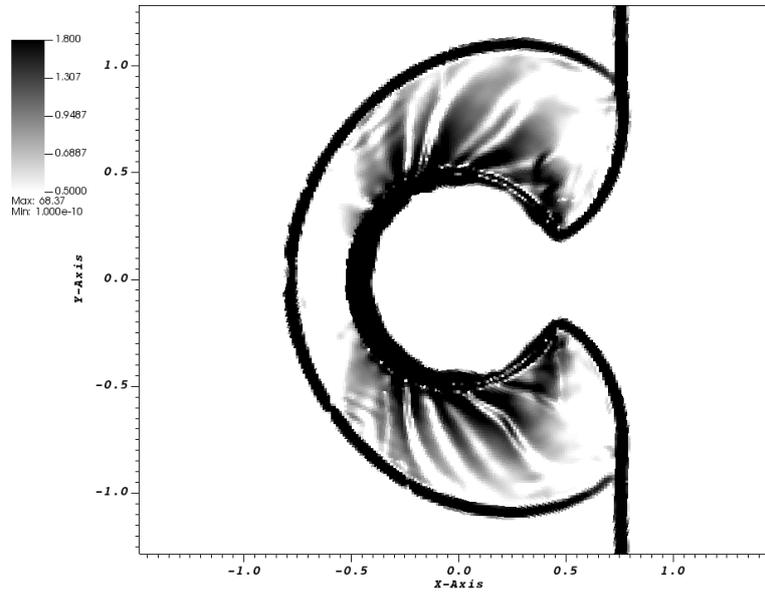


Figura A.24: Griglia 2 - Caso 3 - Schlieren numerica della densità

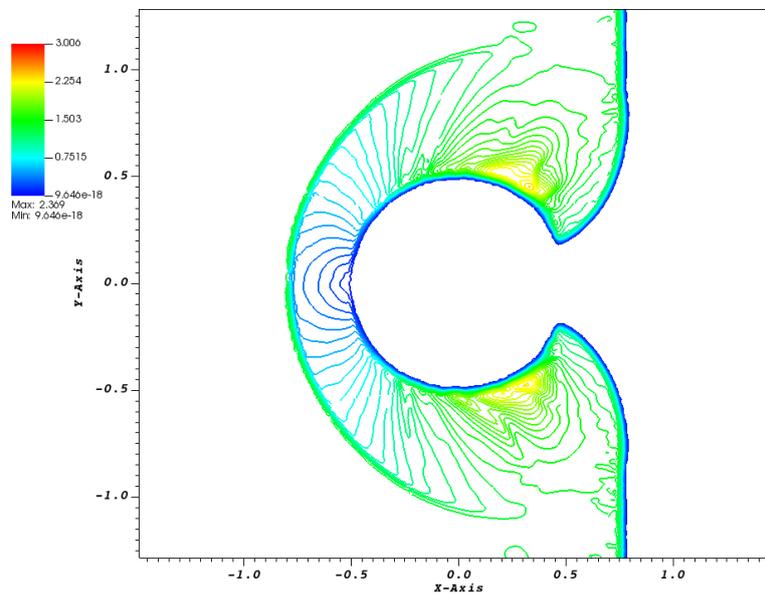
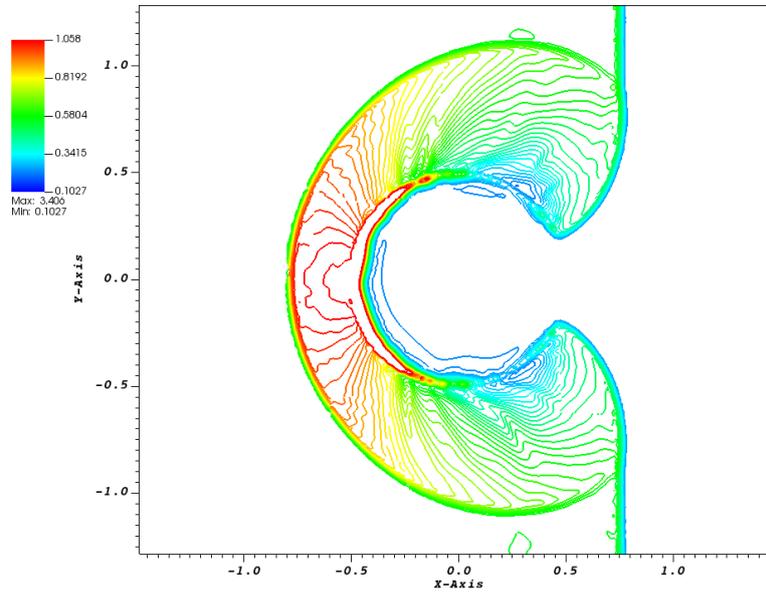


Figura A.25: Griglia 2 - Caso 4 - Rappresentazione del Mach



Contour

Figura A.26: Griglia 2 - Caso 4 - Rappresentazione della densità

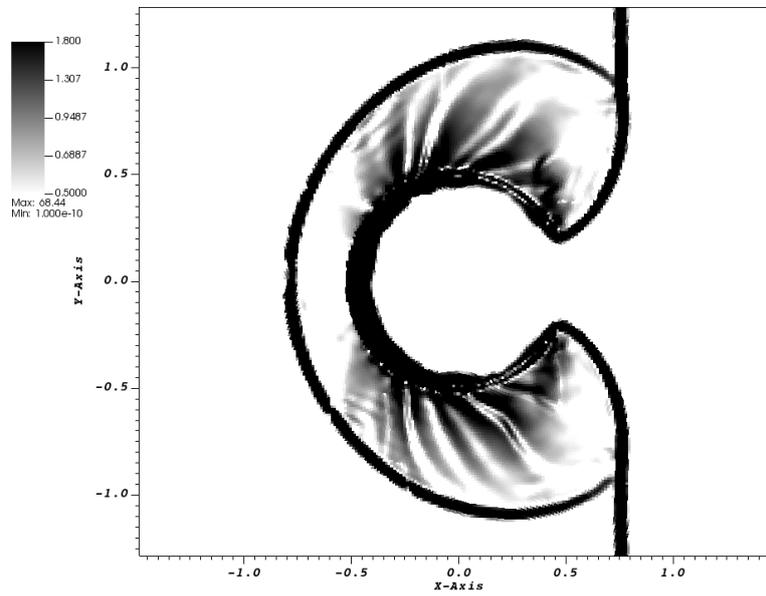


Figura A.27: Griglia 2 - Caso 4 - Schlieren numerica della densità

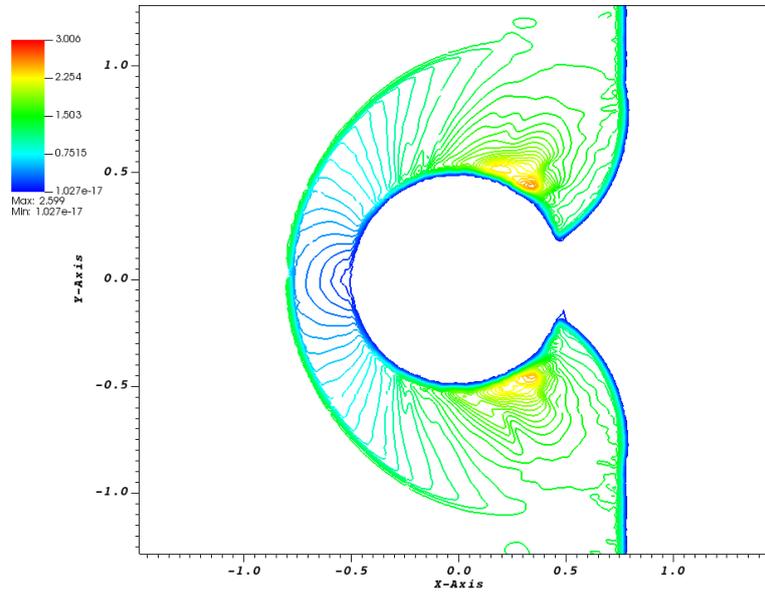


Figura A.28: Griglia 2 - Caso 6 - Rappresentazione del Mach

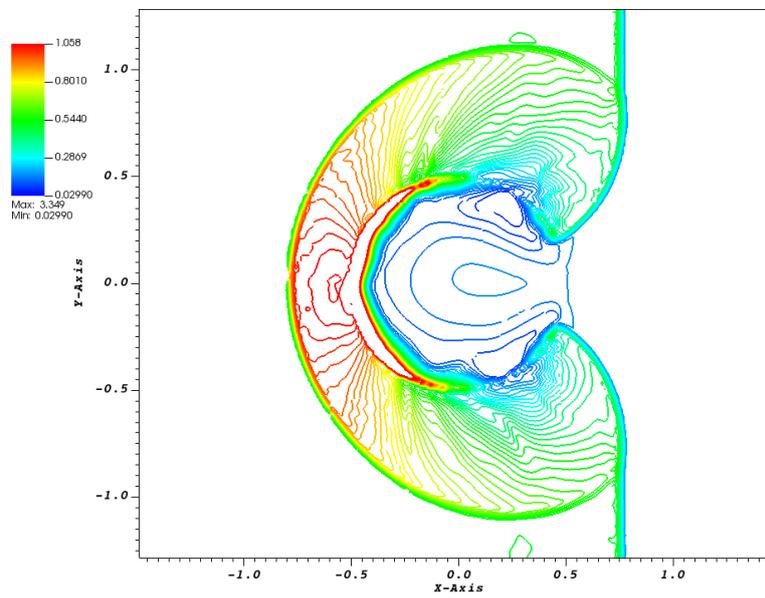


Figura A.29: Griglia 2 - Caso 6 - Rappresentazione della densità

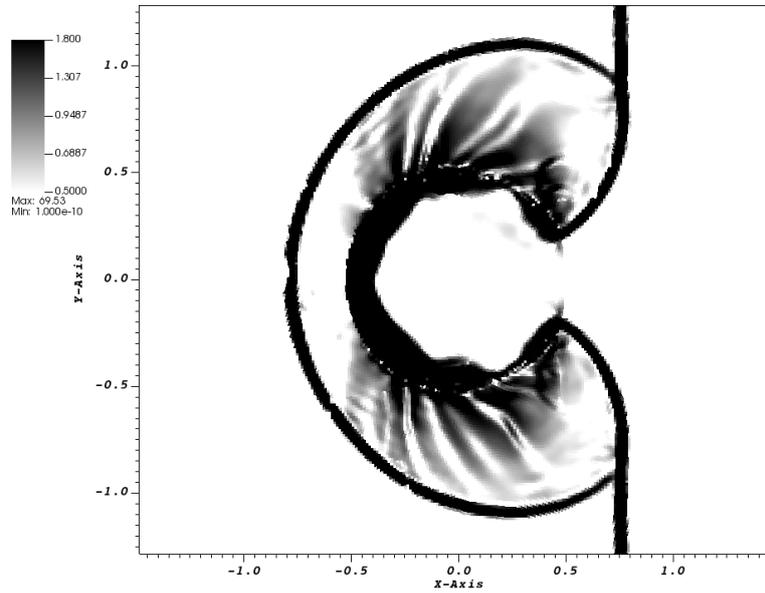


Figura A.30: Griglia 2 - Caso 6 - Schlieren numerica della densità

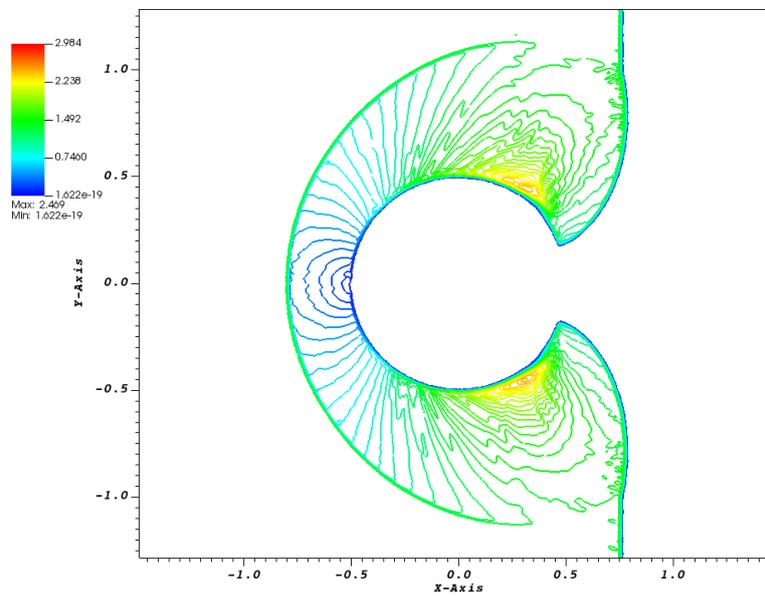


Figura A.31: Griglia 3 - Caso 2 - Rappresentazione del Mach

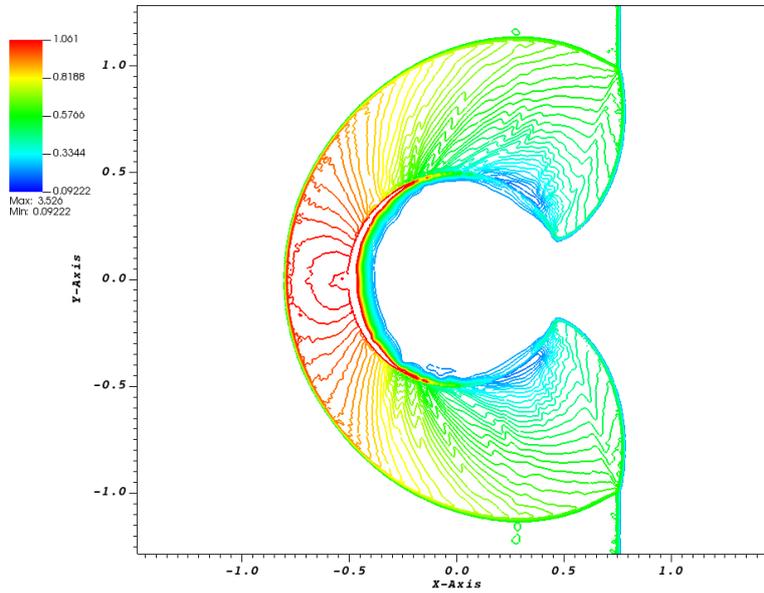


Figura A.32: Griglia 3 - Caso 2 - Rappresentazione della densità

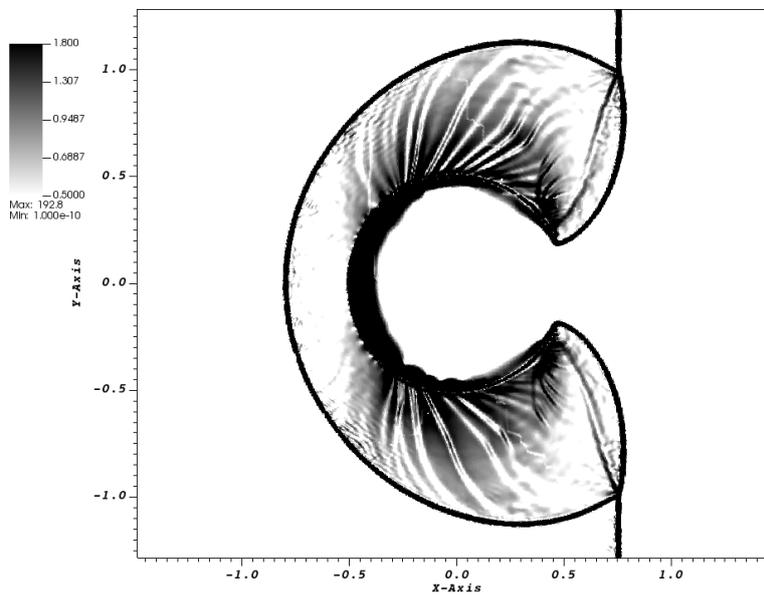


Figura A.33: Griglia 3 - Caso 2 - Schlieren numerica della densità

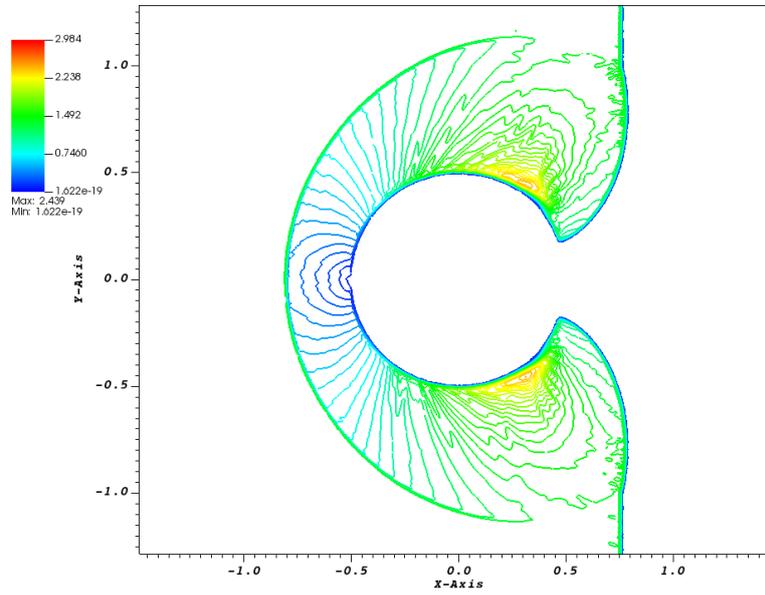


Figura A.34: Griglia 3 - Caso 3 - Rappresentazione del Mach

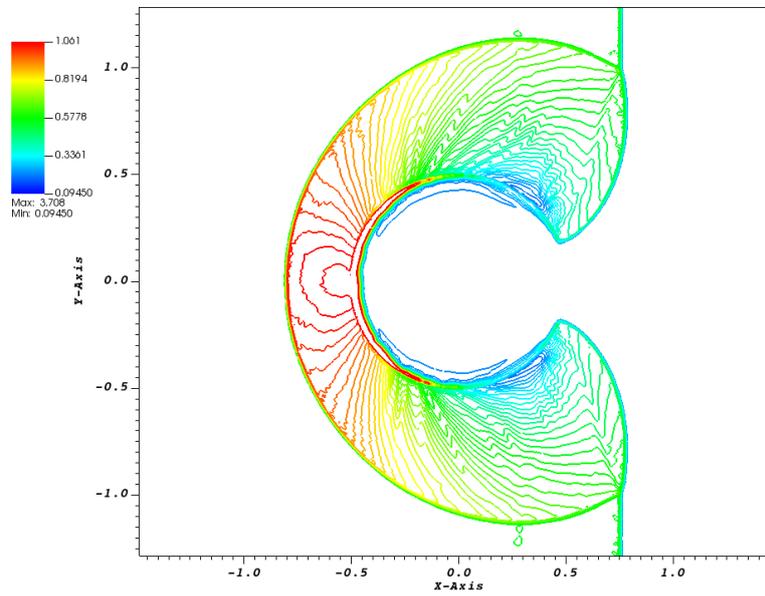


Figura A.35: Griglia 3 - Caso 3 - Rappresentazione della densità

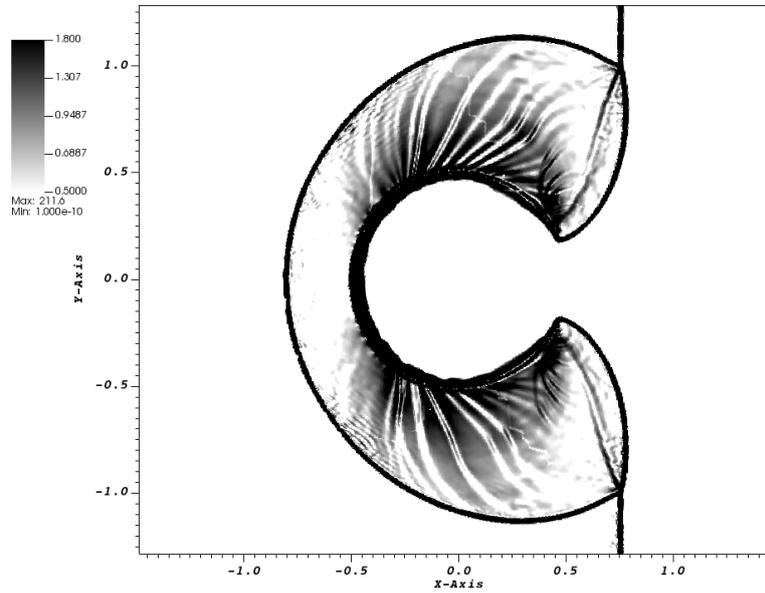


Figura A.36: Griglia 3 - Caso 3 - Schlieren numerica della densità

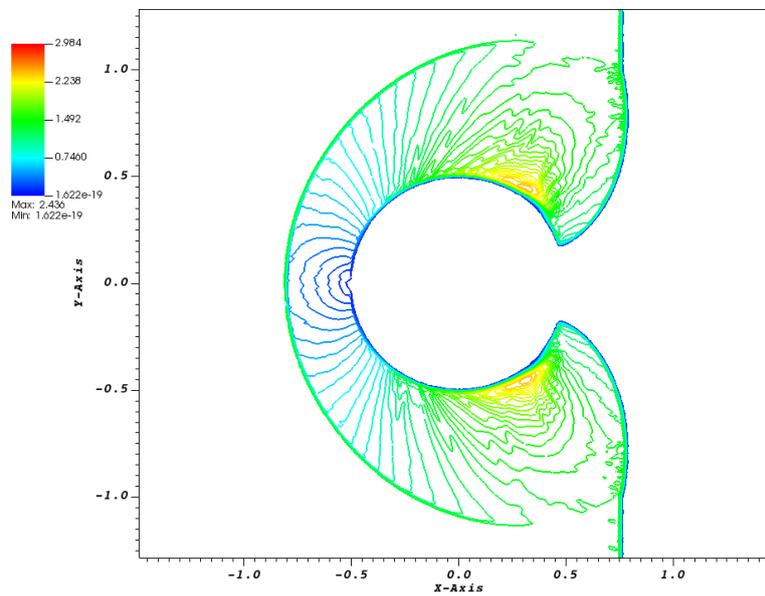


Figura A.37: Griglia 3 - Caso 4 - Rappresentazione del Mach

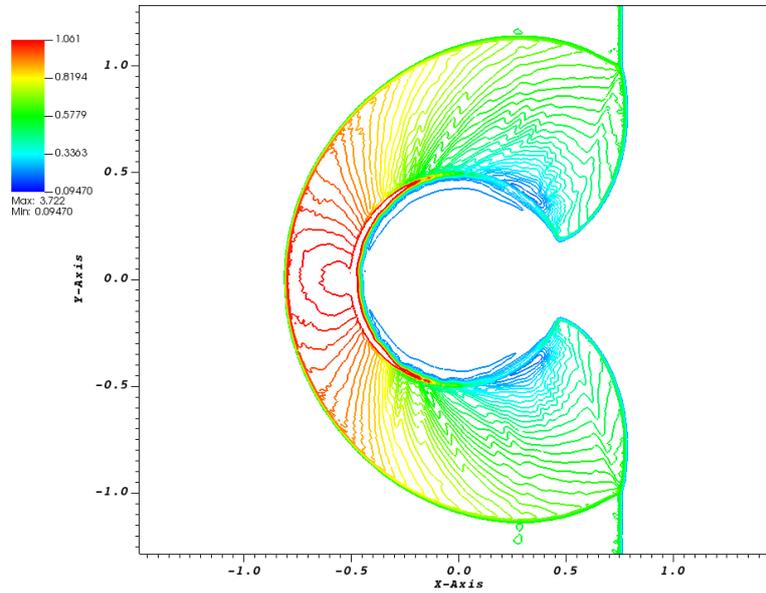


Figura A.38: Griglia 3 - Caso 4 - Rappresentazione della densità

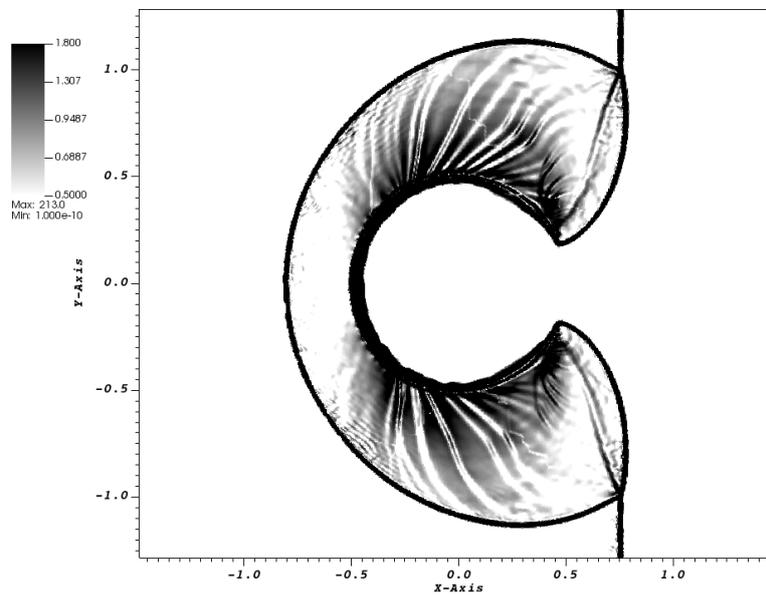


Figura A.39: Griglia 3 - Caso 4 - Schlieren numerica della densità

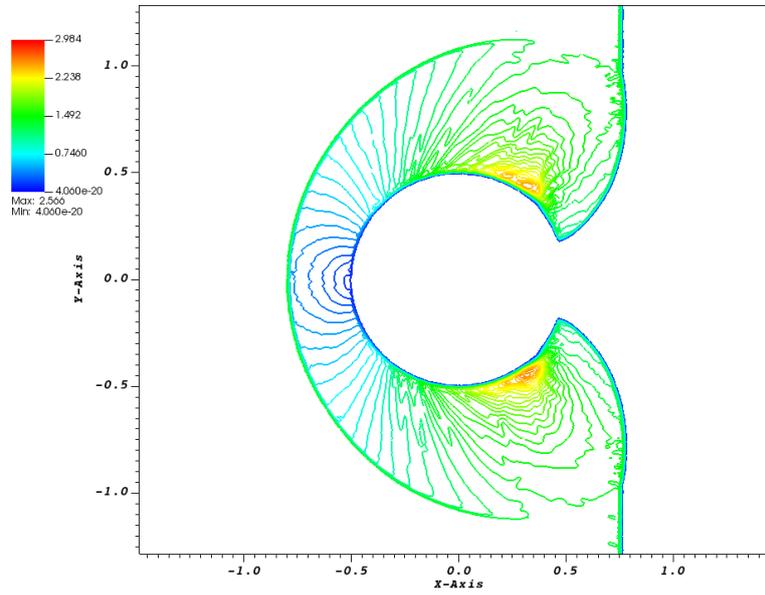


Figura A.40: Griglia 3 - Caso 6 - Rappresentazione del Mach

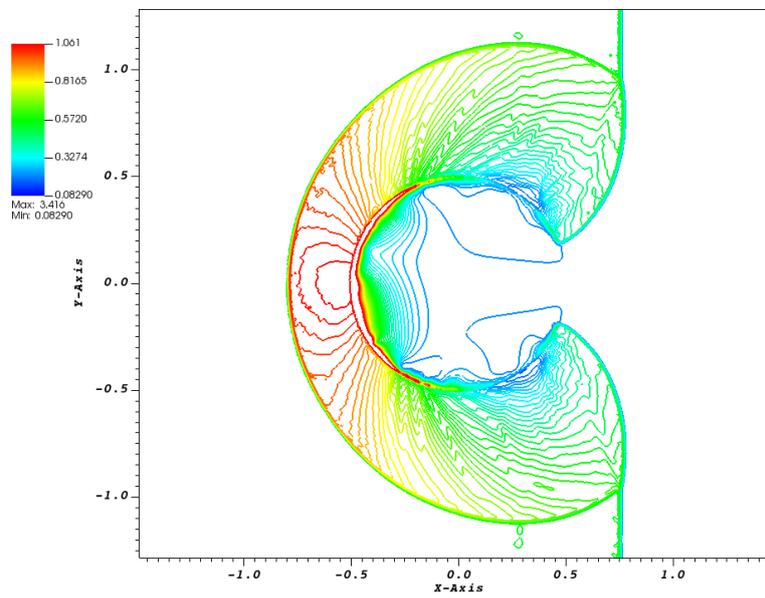


Figura A.41: Griglia 3 - Caso 6 - Rappresentazione della densità

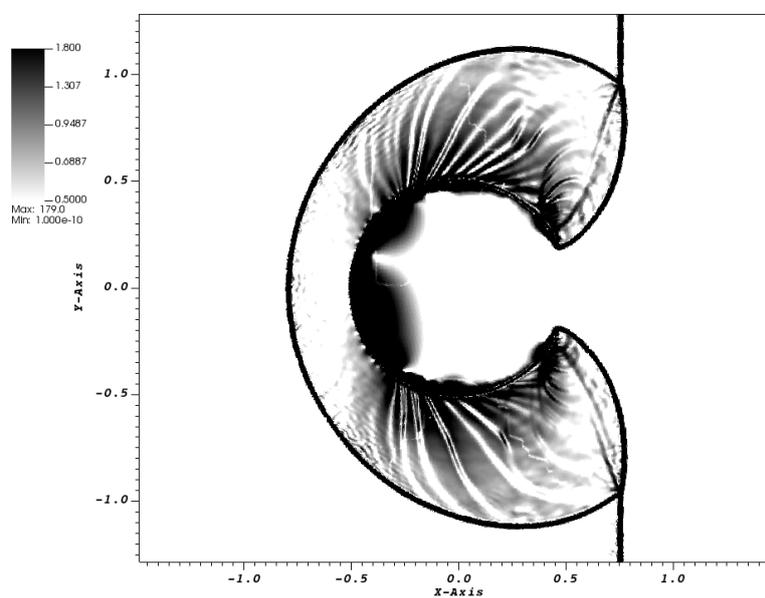


Figura A.42: Griglia 3 - Caso 6 - Schlieren numerica della densità

Bibliografia

- [1] R. Abgrall, H. Beaugendre e C. Dobrzynski. “An immersed boundary method using unstructured anisotropic mesh adaptation combined with level-sets and penalization techniques”. In: *Journal of Computational Physics* 257 (2013).
- [2] P. Angot. “Analysis of singular perturbations on the brinkman problem for fictitious domain models of viscous flows”. In: *Math. Meth. Appl. Sci.* 22 (1997).
- [3] Philippe Angot, Charles-Henri Bruneau e Pierre Fabrie. “A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows”. In: *Numer. Math.* (1997).
- [4] E. Arquis e J.P. Caltagirone. “Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d’une interface milieu fluide – milieu poreux: application a’ la convection naturelle”. In: *C.R. Acad. Sci. Paris II* 299 (1984).
- [5] T. J. Barth e D. C. Jespersen. “The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes”. In: *AI AA-89-0366* (1989).
- [6] HC Brinkman. “A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles”. In: *Flow, Turbulence and Combustion* 1.1 (1949), pp. 27–34.
- [7] HC Brinkman. “On the permeability of media consisting of closely packed porous particles”. In: *Flow, Turbulence and Combustion* 1.1 (1949), pp. 81–86.
- [8] A. E. Bryson e R. W. F. Gross. “Diffraction of strong shocks, by cones, cylinders and spheres”. In: *J. Fluid Mech., Vol. 10* (1960).
- [9] E.A. Fadluna et al. “Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations”. In: *J. Comput. Phys.* 161 (2000).
- [10] Charles Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. 2007.
- [11] Chin-Tsau Hsu e Ping Cheng. “Thermal dispersion in a porous medium”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 33.8 (1990), pp. 1587–1597.

-
- [12] Nicholas K.-R. Kevlahan e Jean-Michel Ghidaglia. “Computation of turbulent flow past an array of cylinders using a spectral method with Brinkman penalization”. In: *Eur. J. Mech. B - Fluids* 20 (2001).
- [13] M.C. Lai e C.S. Peskin. “An immersed boundary method with formal second order accuracy and reduced numerical viscosity”. In: *J. Comput. Phys.* 160 (2000).
- [14] Randall J. LeVeque e Zhilin Li. “The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources”. In: *SIAM Numerical Analysis* 31 (1994).
- [15] Qianlong Liu e Oleg V. Vasilyev. “A Brinkman penalization method for compressible flows in complex geometries”. In: *Journal of Computational Physics* 227 (2007).
- [16] J.C. Mandal e Sundeep P. Rao. “High resolution finite volume computations on unstructured grids using solution dependent weighted least squares gradients”. In: *Computers & Fluids* (2010).
- [17] J.C. Mandal e J. Subramanian. “On the link between weighted least-squares and limiters used in higher-order reconstructions for finite volume computations of hyperbolic equations”. In: *Applied Numerical Mathematics* 58 (2007).
- [18] Rajat Mittal e Gianluca Iaccarino. “Immersed Boundary Methods”. In: *Annu. Rev. Fluid Mech.* 37 239–261 (2005).
- [19] F. Moukalled e M. Darwish L. Mangani. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*. 2016.
- [20] Donald A Nield, Adrian Bejan et al. *Convection in porous media*. Vol. 3. Springer, 2006.
- [21] Stanley Osher e Fred Solomon. “Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws”. In: *Mathematics of computation* 38.158 (1982), pp. 339–374.
- [22] Maurizio Pandolfi. “A contribution to the numerical prediction of unsteady flows”. In: *AIAA journal* 22.5 (1984), pp. 602–610.
- [23] C.S. Peskin. “Flow patterns around heart valves: a digital computer method for solving the equations of motion”. Ph.D. Thesis. Albert Einstein College of Medicine, 1972.
- [24] A. Piquet e A. Hadjadj O. Roussel. “A comparative study of Brinkman penalization and direct-forcing immersed boundary methods for compressible viscous flows”. In: *Computers and Fluids* 136 (2016).
- [25] J. J. Quirk. “An Adaptive Grid Algorithm For Computational Shock Hydrodynamics”. Ph.D. Thesis. Cranfield Institute of Technology, 1991.

BIBLIOGRAFIA

- [26] Yu-Heng Tseng e Joel H. Ferziger. “A ghost cell immersed boundary method for flow in complex geometry”. In: *J. Comput. Phys.* 192 (2003).
- [27] Jiyuan Tu, Guan Heng Yeoh e Chaoqun Liu. *Computational Fluid Dynamics A Practical Approach*. 2008.
- [28] Kambiz Vafai e Chang L Tien. “Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 24.2 (1981), pp. 195–203.
- [29] R. A. Wooding. “Steady state free thermal convection of liquid in a saturated permeable medium”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 2.3 (1957), pp. 273–285.