



**Politecnico  
di Torino**

# POLITECNICO DI TORINO

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale**

A.a. 2020/2021  
Sessione di Laurea Luglio 2021

## **Interazione termica tra fluido e particelle sospese in flussi turbolenti**

RELATORE:

*Michele Iovieno*

CANDIDATA:

*Federica Toni*



# Sommario

Il presente elaborato propone lo studio dell'interazione termica tra fluido e particelle sospese in flussi turbolenti. Le simulazioni sono state effettuate mediante la tecnica DNS, tenendo conto del feedback di temperatura delle particelle sul fluido, mentre quello di quantità di moto é trascurato. La forzante imposta é di tipo deterministico per quanto riguarda la velocità, mentre per la temperatura é stato imposto un gradiente medio. Le simulazioni effettuate con il cluster HPC Polito hanno permesso di ottenere una soluzione sia per la parte fluida, utilizzando le equazioni di Navier-Stokes per fluido incomprimibile, sia per la fase dispersa, attraverso l'equazione di Maxey-Riley. Il range dei numeri di Stokes utilizzati é  $[0.2 : 2]$  mentre quello dello Stokes termico  $[0.2 : 6]$ . Attraverso combinazioni di questi é stato possibile valutare l'effetto della presenza delle particelle sul fluido. Sono state ricavate le visualizzazioni dei campi di velocità e temperatura, i grafici delle funzioni di struttura e le funzioni di densità di probabilità. Dai risultati ottenuti, si é potuto notare che le particelle tendono a posizionarsi sul bordo dei vortici a causa della turboforesi e che, quando é presente un gradiente medio di scalare imposto, le funzioni di struttura non sono autosimili e le PDF presentano code esponenziali, non seguendo piú l'andamento Gaussiano ipotizzato da Kolmogorov.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Equazioni di Navier-Stokes . . . . .	1
1.1.1	Il Caso Incomprimibile . . . . .	2
1.2	Turbolenza . . . . .	4
1.2.1	Generalit� . . . . .	4
1.2.2	Variabili Aleatorie . . . . .	5
1.2.3	Equazioni Mediate . . . . .	7
1.2.4	Turbolenza Omogenea ed Isotropa . . . . .	7
1.3	Equazioni del Moto della Particella in un Fluido . . . . .	11
1.4	Caratteristiche della Simulazione Numerica delle Particelle Inerziali in Tur- bolenza . . . . .	18
1.4.1	Metodi di Simulazione Numerica . . . . .	18
1.4.2	Accoppiamento . . . . .	20
1.5	Scalare Passivo . . . . .	22
1.5.1	Fenomenologia . . . . .	22
1.5.2	Funzioni di Struttura e Intermittenza nel Subrange Inerziale . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Interazione Termica tra Fluido e Particella</b>	<b>27</b>
2.1	Modello fisico . . . . .	28
2.1.1	Fase fluida . . . . .	28
2.1.2	Fase delle Particelle . . . . .	29
2.1.3	Validit� e limitazioni del modello . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Metodo Numerico</b>	<b>31</b>
3.1	Adimensionalizzazione . . . . .	33
3.1.1	Parte Fluida . . . . .	33
3.1.2	Forzanti . . . . .	34
3.1.3	Pressione . . . . .	35
3.1.4	Procedura di Calcolo . . . . .	35
3.1.5	Particelle . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Codice</b>	<b>39</b>
4.1	Equazioni Base . . . . .	39
4.2	Equazioni Adimensionalizzate . . . . .	40
4.3	Equazioni di Navier-Stokes e delle Particelle in Presenza di Gradiente Uniforme . . . . .	40
4.3.1	Equazioni Base . . . . .	40
4.3.2	Equazioni Adimensionali . . . . .	42

4.4	Statistiche . . . . .	42
4.4.1	Dipendenza del Numero di Nusselt . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Risultati</b>	<b>47</b>
5.1	Stato Stazionario . . . . .	48
5.1.1	Caso $St = 0.2$ . . . . .	48
5.1.2	Caso $St = 0.3$ . . . . .	51
5.1.3	Caso $St = 0.5$ . . . . .	53
5.1.4	Caso $St = 1$ . . . . .	56
5.1.5	Caso $St = 2$ . . . . .	58
5.1.6	Confronto Raggiungimento Stato Stazionario . . . . .	61
5.2	Visualizzazione Campi di Temperatura e Velocità . . . . .	64
5.2.1	Campo di Temperatura . . . . .	65
5.2.2	Confronto Campi con Rapporto $St_\theta/St$ Costante . . . . .	65
5.2.3	Confronto Campi di Temperatura Rapporto $St_\theta/St$ Variabile . . . . .	66
5.2.4	Campo di velocità . . . . .	77
5.2.5	Confronto con il caso di forzante lineare . . . . .	83
5.3	Funzioni di Struttura . . . . .	84
5.3.1	Introduzione . . . . .	84
5.3.2	Funzioni di Struttura del Campo di Temperatura del Fluido . . . . .	84
5.3.3	Funzioni di Struttura del Campo di Temperatura delle Particelle . . . . .	87
5.3.4	Funzioni di Struttura del Campo di Velocità del Fluido . . . . .	90
5.3.5	Funzioni di Struttura del Campo di Velocità delle Particelle . . . . .	93
5.4	Funzione di Densità di Probabilità . . . . .	94
5.4.1	Fluttuazioni del Campo di Temperatura del Fluido . . . . .	95
5.4.2	Fluttuazioni del Campo di Temperatura delle Particelle . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>103</b>

# Elenco delle figure

1.1	<i>Suddivisione delle scale turbolente nei vari range, in accordo con la teoria di Kolmogorov</i>	11
1.2	<i>Diversi regimi di accoppiamento in funzione della frazione volumica<sup>[1]</sup></i>	21
1.3	<i>Serie temporali delle fluttuazioni longitudinali di velocità, <math>u</math>, e delle fluttuazioni di temperatura, <math>\theta'</math>, e delle loro derivate<sup>[W]</sup></i>	23
1.4	<i>PDF dello scalare passivo<sup>[W]</sup></i>	24
1.5	<i>Ampiezza spaziale di un campo scalare evoluto<sup>[W]</sup></i>	25
5.1	<i><math>St = 0.2</math> e <math>St_\theta = 0.2</math></i>	48
5.2	<i><math>St = 0.2</math> e <math>St_\theta = 0.6</math></i>	49
5.3	<i><math>St = 0.2</math> e <math>St_\theta = 0.9</math></i>	49
5.4	<i><math>St = 0.2</math> e <math>St_\theta = 1.2</math></i>	50
5.5	<i><math>St = 0.2</math> e <math>St_\theta = 2</math></i>	50
5.6	<i><math>St = 0.2</math> e <math>St_\theta = 1.2</math></i>	51
5.7	<i><math>St = 0.3</math> e <math>St_\theta = 0.2</math></i>	51
5.8	<i><math>St = 0.3</math> e <math>St_\theta = 0.6</math></i>	52
5.9	<i><math>St = 0.3</math> e <math>St_\theta = 0.9</math></i>	52
5.10	<i><math>St = 0.3</math> e <math>St_\theta = 1.8</math></i>	53
5.11	<i><math>St = 0.3</math> e <math>St_\theta = 2</math></i>	53
5.12	<i><math>St = 0.5</math> e <math>St_\theta = 0.2</math></i>	54
5.13	<i><math>St = 0.5</math> e <math>St_\theta = 0.6</math></i>	54
5.14	<i><math>St = 0.5</math> e <math>St_\theta = 0.9</math></i>	55
5.15	<i><math>St = 0.5</math> e <math>St_\theta = 2</math></i>	55
5.16	<i><math>St = 0.5</math> e <math>St_\theta = 3</math></i>	56
5.17	<i><math>St = 1</math> e <math>St_\theta = 0.2</math></i>	56
5.18	<i><math>St = 1</math> e <math>St_\theta = 0.6</math></i>	57
5.19	<i><math>St = 1</math> e <math>St_\theta = 0.9</math></i>	57
5.20	<i><math>St = 1</math> e <math>St_\theta = 2</math></i>	58
5.21	<i><math>St = 1</math> e <math>St_\theta = 6.24</math></i>	58
5.22	<i><math>St = 2</math> e <math>St_\theta = 0.2</math></i>	59
5.23	<i><math>St = 2</math> e <math>St_\theta = 0.6</math></i>	59
5.24	<i><math>St = 2</math> e <math>St_\theta = 0.9</math></i>	60
5.25	<i><math>St = 2</math> e <math>St_\theta = 2</math></i>	60
5.26	<i><math>St = 2</math> e <math>St_\theta = 12</math></i>	61
5.27	<i><math>St = 0.2</math></i>	61
5.28	<i><math>St = 0.3</math></i>	62
5.29	<i><math>St = 0.5</math></i>	62
5.30	<i><math>St = 1</math></i>	63

5.31	$St = 2$ . . . . .	64
5.32	Visualizzazione campo di velocità iniziale con $St = 0.2$ . . . . .	77
5.33	Visualizzazione campo di velocità in due diversi istanti in condizione di stazionarietà con $St = 0.2$ . . . . .	78
5.34	Visualizzazione campo di velocità iniziale con $St = 0.3$ . . . . .	78
5.35	Visualizzazione campo di velocità in due diversi istanti in condizione di stazionarietà con $St = 0.3$ . . . . .	79
5.36	Visualizzazione campo di temperatura iniziale con $St = 0.5$ . . . . .	79
5.37	Visualizzazione campo di velocità in due diversi istanti in condizione di stazionarietà con $St = 0.5$ . . . . .	80
5.38	Visualizzazione campo di velocità iniziale con $St = 1$ . . . . .	80
5.39	Visualizzazione campo di velocità in due diversi istanti in condizione di stazionarietà con $St = 1$ . . . . .	81
5.40	Visualizzazione campo di temperatura iniziale con $St = 2$ . . . . .	81
5.41	Visualizzazione campo di velocità in due diversi istanti in condizione di stazionarietà con $St = 2$ . . . . .	82
5.42	Visualizzazione campo di temperatura in condizione di stazionarietà con $St = 0.5$ e forzanti diverse . . . . .	83
5.43	Visualizzazione campo di temperatura in condizione di stazionarietà con $St = 1$ e forzanti diverse . . . . .	83
5.44	Visualizzazione campo di temperatura in condizione di stazionarietà con $St = 2$ e forzanti diverse . . . . .	84
5.45	Funzione di struttura del campo di temperatura del fluido per $St=0.5$ e $St_\theta = 3$ . . . . .	85
5.46	Funzione di struttura del campo di temperatura del fluido per $St=1$ e $St_\theta = 6$ . . . . .	85
5.47	Funzione di struttura del campo di temperatura del fluido per $St=2$ e $St_\theta = 12$ . . . . .	86
5.48	Funzioni di struttura del fluido per Stokes variabile . . . . .	86
5.49	Funzione di struttura del campo di temperatura del fluido per $St=0.5$ e $St_\theta$ variabile . . . . .	87
5.50	Funzione di struttura del campo di temperatura del fluido per $St=1$ e $St_\theta$ variabile . . . . .	87
5.51	Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per $St=0.5$ e $St_\theta = 3$ . . . . .	88
5.52	Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per $St=1$ e $St_\theta = 6$ . . . . .	88
5.53	Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per $St=2$ e $St_\theta = 12$ . . . . .	89
5.54	Funzioni di struttura delle particelle per Stokes variabile . . . . .	89
5.55	Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per $St=0.5$ e $St_\theta$ variabile . . . . .	90
5.56	Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per $St=1$ e $St_\theta$ variabile . . . . .	90
5.57	Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per $St=0.5$ e $St_\theta = 3$ . . . . .	91
5.58	Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per $St=1$ e $St_\theta = 6$ . . . . .	92
5.59	Funzioni di struttura del fluido per Stokes variabile . . . . .	92

5.60	<i>Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per <math>St=0.5</math> e <math>St_\theta = 3</math></i>	93
5.61	<i>Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per <math>St=1</math> e <math>St_\theta = 6</math></i>	93
5.62	<i>Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per <math>St=1</math> e <math>St_\theta = 6</math></i>	94
5.63	<i>Funzioni di struttura delle particelle per Stokes variabile</i>	94
5.64	<i>Parametri del fluido [27]</i>	95
5.65	<i>Parametri della fase dispersa [27]</i>	95
5.66	<i>PDF del fluido per <math>St = 1</math> e <math>St = 3</math> con <math>St_\theta</math> variabile [27].</i>	96
5.67	<i>Kurtosis della PDF del fluido [27].</i>	97
5.68	<i>PDF delle particelle per <math>St = 1</math> e <math>St = 3</math> con <math>St_\theta</math> variabile. A destra il grafico in cui non viene tenuto in conto il feedback [27].</i>	98
5.69	<i>Kurtosis della PDF delle particelle [27].</i>	99
5.70	<i>PDF di <math>\theta_p</math>. A destra il grafico in cui viene tenuto in conto il feedback [27].</i>	100
5.71	<i>PDF di <math>\theta_p</math> rispetto alla funzione di Gauss [27].</i>	101



# Capitolo 1

## Introduzione

In questo capitolo verranno richiamati alcuni concetti teorici di base. Si introdurranno brevemente le equazioni di Navier-Stokes, ponendo in modo particolare l'interesse su alcune caratteristiche principali del termine convettivo e sulla sua non linearità, insieme alla fenomenologia di base della turbolenza. In seguito, verrà presentata la dinamica del fluido e delle particelle inerziali in turbolenza utilizzando un approccio di tipo Lagrangiano, il quale costituisce una valida alternativa al punto di vista Euleriano in diverse applicazioni di interesse pratico. Si espliciteranno le espressioni delle forze agenti sulla particella inerziale, considerata piccola, sospesa in un flusso turbolento e verranno inoltre discusse le assunzioni derivanti dal modello di particella puntiforme. Si presenteranno inoltre le principali tecniche di simulazione di flussi, ponendo particolare attenzione alla Direct Numerical Simulation (DNS), utilizzata per effettuare le simulazioni. Infine, si forniranno alcuni concetti base riguardanti scalare passivo ed equazioni annesse.

### 1.1 Equazioni di Navier-Stokes

Le equazioni di Navier-Stokes sono un set di equazioni differenziali alle derivate parziali che descrivono il moto di un fluido. Il set completo è composto, in particolare, da un'equazione scalare di bilancio della massa, da una equazione vettoriale, scomponibile nelle tre componenti, che rappresenta il bilancio della quantità di moto e infine dal bilancio dell'energia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \mathbf{u} &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \tau \\ \rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla e \right) &= -p \nabla \mathbf{u} + \Phi - \nabla \mathbf{q}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Per chiudere il problema é necessario inserire anche le equazioni costitutive, che sono:

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, T) \\ e &= e(\rho, T) \\ \mathbf{q} &= -k\nabla T \\ \tau_{i,k} &= -\frac{2}{3}\mu\nabla\mathbf{u} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nell'equazione dell'energia compare anche la funzione di dissipazione  $\Phi$ , definita come:

$$\Phi = \tau\nabla\mathbf{u} \tag{1.3}$$

Le incognite di questo set di equazioni sono la densitá  $\rho$ , le tre componenti del vettore velocità  $\mathbf{u}$  e la temperatura  $T$ . Tutte queste quantità sono, in genere, funzione del vettore posizione  $\mathbf{x}$  e del tempo  $t$ . Inoltre devono essere fornite delle opportune condizioni iniziali e al contorno per definire il problema matematico.

Di queste equazioni, quando si considera un problema generico, non é possibile trovare una soluzione esplicita in termini matematici, ossia una soluzione in forma chiusa. La principale difficoltà sta nella struttura stessa di queste equazioni, che formano un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali accoppiate e non lineari. Il fatto che queste equazioni siano accoppiate implica che tutte le incognite siano derivate dalla soluzione istantanea di tutte le equazioni del set.

Comunque, la caratteristica che comporta la piú grande complessitá matematica é la non linearitá delle equazioni. Si ricorda che un'equazione differenziale é non lineare se sono presenti i prodotti delle derivate di ordine  $n$  delle funzioni incognite (incluso il caso  $n = 0$ , cioè la funzione stessa).

I termini non lineari presenti nelle equazioni sono tutti i termini convettivi delle derivate materiali, che appaiono a sinistra dell'uguale, e la funzione di dissipazione che compare nell'equazione di bilancio dell'energia. Inoltre, la densitá moltiplica le derivate materiali nei bilanci di quantità di moto ed energia, ed é questa la principale grandezza che causa un forte accoppiamento di tutte le equazioni. Le equazioni costitutive sono un'altra fonte di termini non lineari, poiché i coefficienti della viscositá e della conduttivitá termica sono, al minimo, funzioni della temperatura  $T$ .

Il problema matematico é cosí complesso che persino l'esistenza e l'unicitá della soluzione delle equazioni di Navier-Stokes per generiche condizioni iniziali e al contorno non sono state completamente dimostrate. Comunque, questo non vuol dire che non esistano soluzioni per queste equazioni, infatti ve ne sono molte, in particolare per il caso incomprimibile [1].

### 1.1.1 Il Caso Incomprimibile

In questa tesi verrà trattato il caso di fluido incomprimibile, ossia un fluido in cui possono essere trascurate le variazioni di densitá a causa del suo moto. É importante ricordare che, sebbene in alcuni casi possano essere considerate valide le ipotesi di incomprimibilitá, nella realtá tutti i fluidi sono comprimibili, quello che varia é il loro grado di comprimibilitá.

Da un punto di vista matematico, un flusso incomprimibile puó essere considerato un flusso che soddisfa la relazione:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{1.4}$$

Questa relazione non richiede che il flusso abbia densità costante ovunque nel suo campo, ma che ogni variazione della densità di ogni singola particella fluida sia trascurabile. Ciò equivale a considerare il campo di moto come solenoidale ossia, in termini matematici, che la divergenza del vettore velocità sia nulla in tutto il campo:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.5)$$

Inoltre, siccome tutte le variazioni derivanti dalla comprimibilità sono trascurate, la temperatura può variare, in pratica, solo a causa delle variazioni dell'energia interna dovute alla dissipazione.

L'importante conseguenza di ciò è che i coefficienti di viscosità e conduttività possono essere assunti costanti durante il moto ed essere considerati solo funzione del tipo di fluido. Questo fatto semplifica di molto il termine viscoso nell'equazione di bilancio della quantità di moto; infatti, la costanza del termine viscoso e la solenoidalità del campo di velocità permettono la derivazione di un semplice termine lineare:

$$\nabla \tau = \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.6)$$

In un flusso incomprimibile, inoltre, la pressione non è più considerata come variabile termodinamica, ma può essere interpretata come l'opposto del valore medio degli stress normali agenti sulle tre superfici elementari ortogonali tra loro che passano attraverso un punto nel fluido. La pressione, presente nell'equazione della quantità di moto, in questo caso serve solo da moltiplicatore di Lagrange al fine di permettere il soddisfacimento del vincolo di incomprimibilità.

Il fatto che si siano considerate nulle le variazioni di densità, e non solo molto piccole, porta a diverse conseguenze. Una di queste è che ogni perturbazione in un punto sia sentita immediatamente nell'intero campo, la quale è una caratteristica che non rispecchia il comportamento reale di nessun fluido.

Da un punto di vista matematico, una delle caratteristiche più interessanti delle equazioni del moto di un flusso incomprimibile è che, avendo assunto  $\mu$  costante (e quindi anche  $\nu$ ), la temperatura compare solo nell'equazione dell'energia. Di conseguenza, le equazioni di bilancio della massa e della quantità di moto risultano disaccoppiate da quella dell'energia, le quali formano un sistema di quattro equazioni scalari che, in linea di principio, possono essere risolte per le tre componenti di velocità e per la pressione. Questo implica che l'equazione di bilancio dell'energia possa essere risolta, per ricavare il campo di temperatura, solo se necessario.

Quindi, se sono verificate le ipotesi di incomprimibilità, le equazioni di Navier-Stokes possono essere semplificate, in particolar modo diventano:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho_f} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  è il campo di velocità,  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$  è il campo di pressione,  $\rho_f$  è la densità del fluido  $\nu$  è la sua viscosità.

Manipolando l'equazione della quantità di moto è possibile far comparire la vorticità, espressa come  $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$ . Utilizzando la seguente relazione vettoriale:

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (1.8)$$

la quale può essere ottenuta decomponendo  $\nabla \mathbf{u}$  e  $\nabla \mathbf{w}$  nelle loro parti simmetriche e anti-simmetriche e applicandole al vettore velocità  $\mathbf{u}$ . Richiamando la definizione di vorticità, il termine convettivo può essere scritto come:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{u}\|^2 + \mathbf{w} \times \mathbf{u} \quad (1.9)$$

Questo implica che la variazione convettiva della velocità sia dovuta al gradiente di energia cinetica e a un contributo che nasce dalla rotazione dell'elemento fluido.

## 1.2 Turbolenza

### 1.2.1 Generalità

Non esiste una definizione unica e rigorosa di turbolenza, ma ciò che accomuna i flussi definiti turbolenti è che questi sono non stazionari, irregolari, apparentemente casuali e caotici, portando a una apparente imprevedibilità del moto di ogni singolo vortice o elemento fluido [2].

Una caratteristica essenziale del flusso turbolento è che la velocità varia significativamente ed irregolarmente sia nello spazio che nel tempo. L'effetto di queste fluttuazioni è che il flusso turbolento trasporta e mescola il fluido molto più efficacemente di quando non faccia un flusso laminare con velocità medie confrontabili. Questo comporta che il trasporto di quantità di moto, materia e calore sia notevolmente accresciuto dalla presenza della turbolenza.

È possibile però fornire alcune caratteristiche della turbolenza [2]:

- elevato numero di Reynolds (o di Rayleigh): questo risulta essere necessario affinché il flusso laminare sia instabile;
- irregolarità e caoticità: la presenza di strutture vorticosi rende il flusso estremamente irregolare e imprevedibile nei dettagli;
- grande differenziazione di scala: sono presenti contemporaneamente strutture vorticosi distribuite su un ampio intervallo dimensionale. Tali strutture formano uno spettro continuo;
- tridimensionalità: un flusso turbolento è rotazionale e tridimensionale;
- diffusività: a causa della presenza di strutture vorticosi il trasporto dovuto alla turbolenza risulta essere molto efficace;
- dissipazione: a causa della formazione di vortici di piccole dimensioni, molto minore della scala globale del flusso, i processi diffusivi sono mediamente più intensi e ciò accresce anche la dissipazione.

Esclusa ovviamente la possibilità di risolvere analiticamente le equazioni di Navier-Stokes, si può pensare di utilizzare un metodo numerico.

Questo approccio diretto di risolvere le equazioni di Navier-Stokes è chiamato simulazione numerica diretta (DNS). Questo metodo risulta essere impraticabile per flussi ad alto numero di Reynolds, come verrà spiegato meglio nei capitoli successivi, ma fornisce uno strumento potente per studiare flussi a basso-medio numero di Reynolds. Per gli alti

numeri di Reynolds, prevalentemente presenti in natura, l'unica alternativa é di seguire un approccio di tipo statistico. Questo implica descrivere il flusso non in termini dei valori locali istantanei della velocità o della pressione, ma in termini della loro probabilità. Un modello basato sulla statistica, la piú semplice delle quali é la media, puó portare ad un insieme di equazioni trattabili poiché ci si aspetta che i campi statistici varino piú lentamente nello spazio e nel tempo.

### 1.2.2 Variabili Aleatorie

Dal momento in cui si ammette che velocità, pressione e altre caratteristiche in un flusso turbolento siano variabili aleatorie, queste sono imprevedibili, ma ai fini dello studio é sufficiente conoscere la probabilità con cui possono assumere valori in determinati intervalli.

Si indichi con  $P(A)$  la probabilità di un evento  $A$  e sia  $U$  una variabile aleatoria continua (ossia il risultato di un processo casuale e che questa possa assumere un qualsiasi valore).

Per ogni valore di  $u$  si puó definire la probabilità che  $U \leq u$ , sicché alla variabile aleatoria  $U$  si possa associare una funzione reale  $F_U(u)$  definita come:

$$F_U(u) = P(U \leq u) \quad (1.10)$$

dove la funzione  $F_U$  é detta funzione cumulativa, o di distribuzione, di  $U$ . Questa funzione risulta essere crescente e parte dal valore nullo per  $u \rightarrow -\infty$  e tende al valore unitario quando  $u \rightarrow +\infty$ . Ammettendo che  $F$  sia derivabile, allora tale derivata vale:

$$f_U(u) = F'_U(u) \quad (1.11)$$

e questa prende il nome di densità di probabilità di  $U$ . La probabilità viene definita come:

$$P(a \leq U \leq b) = \int_a^b f_U(u) du \quad (1.12)$$

ossia la probabilità di cadere in un certo intervallo é l'integrale della densità di probabilità di quell'intervallo.

La conoscenza della densità di probabilità in quell'intervallo permette di conoscere completamente, a livello statistico, il comportamento di  $U$ .

Si definisce media di  $U$ :

$$\langle U \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_U(u) du \quad (1.13)$$

ovvero la media di tutti i valori che  $U$  puó assumere, pesata sulla densità di probabilità. Si puó quindi definire fluttuazione la differenza tra la variabile e la sua media:

$$U' = U - \langle U \rangle \quad (1.14)$$

La varianza di  $U$  é la media del quadrato delle sue fluttuazioni:

$$V(U) = \langle U'^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u'^2 f_U(u) du \quad (1.15)$$

mentre la deviazione standard la sua radice quadrata:

$$\sigma(U) = \sqrt{V(U)} \quad (1.16)$$

e questa rappresenta una misura dell'ampiezza media delle fluttuazioni di  $U$  rispetto al valor medio.

Date due variabili aleatorie  $A$  e  $B$ , si definisce covarianza di  $A$  e  $B$  la media del prodotto delle fluttuazioni:

$$B(A, B) = \langle A'B' \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) \rangle \quad (1.17)$$

Se le variabili  $A$  e  $B$  sono indipendenti, la loro covarianza é nulla.

Si definisce correlazione di  $A$  e  $B$  la covarianza normalizzata con le varianze delle singole variabili, ossia:

$$C(A, B) = \frac{B(A, B)}{[V(A)V(B)]^{1/2}} = \frac{\langle A'B' \rangle}{(\langle A'^2 \rangle \langle B'^2 \rangle)^{1/2}} = \frac{B(A, B)}{\sigma_A \sigma_B} \quad (1.18)$$

Il modulo della correlazione indica quanto due variabili siano legate tra loro, e assume valore nullo quando queste sono indipendenti e pari a uno quando sono la stessa cosa, mentre il segno indica se le variabili fluttuano in fase oppure no.

Se queste statistiche vengono applicate alle equazioni di Navier-Stokes, si può osservare che in ogni punto e in ogni istante si hanno almeno quattro variabili aleatorie (le tre componenti della velocità e la pressione), ciascuna della quali ha una propria densità di probabilità. Tutte queste variabili aleatorie non sono indipendenti, poiché la loro evoluzione é determinata dalle equazioni di Navier-Stokes.

É possibile definire una distanza media a cui le fluttuazioni sono correlate. Si considerino due diverse variabili aleatorie  $U$ , una posiziona in  $x$  e l'altra in  $x + r$ ; allora per valutare la loro reciproca dipendenza é necessario valutare la loro correlazione, ottenendo così la funzione:

$$B(r) = B(U(x), U(x + r)) = \langle U'(x)U'(x + r) \rangle \quad (1.19)$$

che decrescerà per distanze  $r$  molto grandi. Da qui é possibile definire una lunghezza di correlazione, o scala integrale,  $l$  come:

$$l = \int_0^{+\infty} \frac{B(r)}{B(0)} dr \quad (1.20)$$

Piú lontane sono legate le fluttuazioni della variabile  $U$ , piú lentamente decrescerà  $B(r)$  e quindi tanto maggiore sarà  $l$ .

Praticamente  $l$  fornisce una misura statistica delle dimensioni dei vortici piú grandi; infatti, se si considerano due punti diversi nello stesso vortice, le loro velocità risultano essere legate e varieranno insieme, sicché  $B(r)$  sarà grande ( $C \simeq 1$ ). Al contrario, piú lontani sono i vortici, minore sarà la variazione di velocità indotta nei punti dell'altro vortice, e  $B(r)$  tenderá rapidamente a 0.

L'obiettivo é quello di ottenere delle equazioni per il flusso medio a partire da quelle di Navier-Stokes. Per fare ciò, oltre alla linearità della media statistica, si osservi che:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial A}{\partial t}} &= \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} \\ \overline{\frac{\partial A}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \overline{A}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.21)$$

e

$$\overline{AB} = \overline{(\overline{A} + A')(\overline{B} + B')} = \overline{AB} + \overline{A'B'} \quad (1.22)$$

ossia la media di un prodotto é il prodotto dei valori medi piú la covarianza delle variabili.

### 1.2.3 Equazioni Mediate

Si applica l'operatore di media alle equazioni di Navier-Stokes per ottenere le equazioni per il flusso medio. Considerando per semplicitá un flusso incomprimibile, le equazioni di continuitá e quantitá di moto divengono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}_i \overline{u}_j)}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\overline{P}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \overline{u}_i + \rho g_i \end{aligned} \quad (1.23)$$

I termini lineari risultano inalterati, sicché l'equazione di continuitá non cambia, mentre i termini non lineari sono la fonte della complessitá del problema.

Scomponendo la velocitá in media e fluttuazione  $u_i = \overline{u}_i + u'_i$ , il termine non lineare puó essere scritto come  $\overline{u_i u_j} = \overline{u_i u_j} + \overline{u'_i u'_j}$

Portando a secondo membro la media dei prodotti delle fluttuazioni, si ottiene:

$$\rho \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}_i \overline{u}_j)}{\partial x_j} \right) = -\frac{\overline{P}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \overline{u}_i + \frac{\partial(-\rho(\overline{u'_i u'_j}))}{\partial x_j} \rho g_i \quad (1.24)$$

Questa equazione é molto simile a quella di Navier-Stokes, solo che a secondo membro si aggiunge la divergenza del tensore  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ . Tale tensore, detto tensore degli sforzi di Reynolds, rappresenta il trasporto di quantitá di moto medio dovuto alle fluttuazioni. Nonostante questo sia denominato come 'sforzo' -dovuto al fatto che possiede le dimensioni di uno sforzo e che a secondo membro la loro divergenza si sommi alla divergenza degli sforzi viscosi- questo ha origine inerziale, e non viscosa.

La scomposizione  $\overline{u_i u_j} = \overline{u_i u_j} + \overline{u'_i u'_j}$  di fatto scompone il trasporto convettivo in un trasporto dovuto al moto medio e a uno dovuto alle fluttuazioni.

Le equazioni mediate di continuitá e quantitá di moto non sono, neppure per il caso piú semplice di flusso incomprimibile, un sistema chiuso. Questo é dovuto al fatto che si ha un sistema di quattro equazioni in cui non compaiono solo le quattro funzioni incognite  $\overline{u}_i$  e  $\overline{P}$  che rappresentano il flusso medio, ma anche le sei componenti  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  del tensore degli sforzi di Reynolds.

Come detto prima, il tensore degli sforzi di Reynolds rappresenta il trasporto di quantitá di moto media da parte delle fluttuazioni e quindi non riconducibile al flusso medio, rappresentati dalle  $\overline{u}_i$  e dalle sue derivate.

Se si vuole provare a risolvere questo sistema é necessario rappresentare il tensore di Reynolds in termini di grandezze medie.

### 1.2.4 Turbolenza Omogenea ed Isotropa

L'instabilitá del flusso medio genera strutture vorticosi che hanno una dimensione dell'ordine della scala caratteristica del flusso, che a loro volta generano strutture vorticosi piú piccole a causa dei meccanismi di *vortex - stretching*, ossia un vortice presente in un

campo non uniforme aumenta la sua componente di vorticità nella direzione di massima dilatazione, e tilting, cioè un vortice in un flusso non omogeneo tende ad allinearsi alla direzione dell'autovettore corrispondente all'autovalore maggiore)<sup>[2]</sup>.

Dal momento che il numero di Reynolds é molto grande, tutti questi processi avvengono senza effetti diffusivi, e di conseguenza senza dissipazione.

Questo significa che l'energia viene immessa nelle fluttuazioni sulle grandi scale e poi trasferita alle scale sempre piú piccole con un meccanismo essenzialmente inerziale. Questo fenomeno prende il nome di cascata energetica.

Il flusso turbolento puó essere visto come una sovrapposizione di vortici di scala diversa la cui dimensione viene indicata con  $r$ <sup>[2]</sup>. In presenza di turbolenza omogenea ed isotropa, solo una scala risulta essere fondamentale poiché mediamente, a causa dell'isotropia, le strutture vorticosi avranno la stessa grandezza nelle varie dimensioni; ciò significa che una sola grandezza  $r$  é sufficiente a caratterizzare la dimensione. Ammettendo che il sistema sia mediamente omogeneo, sicché non si ha trasposto di energia tra le diverse regioni del flusso, a livello cinematico ciò che caratterizza un vortice é la differenza di velocità su una distanza dell'ordine della sua dimensione. Chiamando  $\delta u_r$  questa velocità, questa viene definita come:

$$\delta u_r = \sqrt{|u(x+r) - u(x)|^2} \quad (1.25)$$

Il tempo caratteristico della convezione (scala temporale inerziale) dei vortici di dimensione  $r$  é:

$$\tau_i(r) \sim \frac{r}{\delta u_r} \quad (1.26)$$

Il tempo caratteristico della diffusione di quantit' a di moto, ossia il tempo che impiega la viscosità a diffondere la velocità lungo  $r$  é:

$$\tau_d(r) \sim \frac{r^2}{\nu} \quad (1.27)$$

Quindi la convezione é determinata da  $\delta u_r$  e  $r$ , mentre la diffusione da  $\nu$  e  $r$ .

Il rapporto tra le due scale temporali é:

$$\frac{\tau_d(r)}{\tau_i(r)} \sim \frac{r \delta u_r}{\nu} \equiv Re(r) \quad (1.28)$$

ossia il numero di Reynolds dei vortici.

Se il numero di Reynolds risulta essere grande, la diffusione é molto piú lenta della convezione e quindi non interviene nel processo di trasferimento di energia tra una scala e l'altra.

Dal momento che il fenomeno di *stretching - tilting* é un processo inerziale (determinato dal termine  $\omega \cdot \nabla u$  nell'equazione della vorticità), il flusso di energia per unità di tempo trasferito alle scale piú piccole é:

$$\epsilon \sim \frac{\delta u_r}{\tau_i(r)} \sim \frac{\delta u_r^3}{r} \quad (1.29)$$

ed é indipendente da  $r$ , poiché la dissipazione non interviene.

Da ciò é possibile stimare la scala di velocità associata a vortici di dimensione  $r$ :  $\delta u_r(r) \sim (\epsilon_r)^{1/3}$ .

I vortici piú piccoli hanno meno energia, ma hanno una dinamica piú veloce perché, in termini di  $\epsilon$  (che risulta essere uguale per tutti i vortici), si può riscrivere l'equazione di  $\tau_i(r)$  come:

$$\tau_i(r) \sim \frac{r}{\delta u_r} \sim \epsilon^{-1/3} r^{2/3} \quad (1.30)$$

Il fenomeno della cascata energetica ha luogo finché il numero di Reynolds risulta essere sufficientemente elevato da far sí che la diffusione sia molto piú lenta della convezione. Tuttavia, poiché al ridursi di  $r$  si riduce anche la velocità, il numero di Reynolds diminuisce progressivamente insieme ad  $r$ , finché i tempi di convezione e diffusione sono dello stesso ordine di grandezza. Questa uguaglianza avviene su una scala  $\eta$ , tale che:

$$\frac{\tau_d(\eta)}{\tau_i(\eta)} \sim \frac{\eta \delta u_\eta}{\nu} \sim 1 \Leftrightarrow Re_\eta \sim 1 \quad (1.31)$$

e questa viene definita come microscala di Kolmogorov. Tale scala rappresenta la minima dimensione che mediamente ci si può attendere di trovare nelle strutture vorticosi di un flusso turbolento.

Vortici piú piccoli vengono diffusi immediatamente, poiché il tempo diffusivo é minore del tempo inerziale per i vortici piú piccoli, sicché l'energia viene dissipata piú in fretta di quanto non possa essere trasferita.

Il flusso di energia  $\epsilon$  che viene trasferito dalle scale grandi a quelle piccole é pertanto pari alla dissipazione. Per quanto siano le scale piú piccole a dissipare energia, la quantità di energia dissipata non é determinata da loro, ma dalle scale piú grandi.

Poiché la velocità diminuisce con la dimensione, il risultato é che gran parte dell'energia é concentrata nelle grandi scale del flusso, sicché é possibile approssimare tale velocità con il valore quadratico medio delle fluttuazioni, ossia la radice quadrata dell'energia cinetica,  $\delta u_r \sim u'$ . Allora sostituendo:

$$\begin{aligned} \epsilon &\sim \frac{\delta u_r}{l} \sim \frac{u'^3}{l} \\ \eta &\sim \frac{\nu^{3/4}}{u'^{3/4} l^{1/4}} \rightarrow \frac{\eta}{l} = \left( \frac{u'l}{\nu} \right)^{3/4} = Re_l^{-3/4} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Questo rappresenta il numero di Reynolds dei vortici di scala piú grande del flusso, non del flusso stesso: in generale  $l < L$  e  $u' < \bar{u}$ , sicché  $Re_l < Re$ , ossia del Reynolds globale del flusso.

Il tempo caratteristico di questi vortici di dimensione pari alla scala di Kolmogorov rappresenta la minima scala temporale del flusso e, sostituendo la definizione di  $\eta$ , questa si può scrivere come:

$$\tau_\eta = \left( \frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \quad (1.33)$$

Il rapporto tra il tempo caratteristico della microscala di Kolmogorov e delle scale piú grandi é, quindi:

$$\frac{\tau_\eta}{\tau_l} \sim \frac{u'}{l} \left( \frac{\nu}{u'l} \right)^{1/2} = Re_l^{-1/2} \quad (1.34)$$

Nel 1941 il matematico russo Andrej Kolmogorov formuló una teoria dimensionale sulla turbolenza omogenea e isotropa, anche detta *K41*. Questa teoria é formulata per mezzo di tre ipotesi:

- ipotesi zero o ipotesi di locale isotropia: le strutture vorticose piú grandi sono influenzate dalla geometria del problema, quindi sono fortemente anisotrope. Le strutture vorticose piú piccole non dipendono invece dalla direzione di osservazione e quindi dalla geometria, sono isotrope;
- prima ipotesi di similarit : nei flussi turbolenti ad alto numero di Reynolds, la statistica delle piccole scale della turbolenza   universale e dipende solo dall'energia cinetica trasferita  $\epsilon$  e dalla viscosit   $\nu$ , non dal tipo di flusso considerato;
- seconda ipotesi di similarit  : le scale con lunghezza caratteristica  $l$ , tale che  $\eta \ll l \ll L$ , hanno un comportamento universale che dipende solo da  $\epsilon$ , indipendentemente da  $\nu$ . Questo intervallo di scale viene chiamato range inerziale.

Come conseguenza dell'ipotesi zero risulta necessario introdurre la scala  $l_{EI}$ , ovvero la scala di "confine" tra le grandi scale anisotrope, con  $l > l_{EI}$ , e le piccole scale isotrope, con  $l < l_{EI}$ . Secondo quanto affermato nella prima ipotesi di similarit , ci si pu  riferire in generale all'intervallo  $l < l_{EI}$  con range universale: tutte le informazioni relative alla geometria delle grandi scale, determinate dal campo di moto medio e dalle condizioni al contorno, vengono perse. Il comportamento delle piccole scale ad elevati numeri di Reynolds sono in un certo senso universali e quindi simili in ogni flusso turbolento ad alti numeri di Reynolds. Noti  $\epsilon$  e  $\nu$    possibile conoscere lunghezza, velocit  e tempo caratteristici della scala piú piccola che si forma nel flusso turbolento, ovvero della scala di Kolmogorov:

$$\begin{aligned}\eta &= \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \\ u_\eta &= (\epsilon\nu)^{1/4} \\ \tau_\eta &= \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}\end{aligned}\tag{1.35}$$

A prova del fatto che  $\eta$  rappresenta la scala dissipativa piú piccola si ha che il numero di Reynolds basato sulla scala di Kolmogorov   unitario,  $Re_\eta = (\eta u_\eta)/\nu = 1$ , in accordo con il fatto che la cascata di energia procede verso scale sempre piú piccole finch  il Reynolds non risulta essere cos  piccolo da rendere effettiva la dissipazione, ovvero quando termini viscosi non possono piú essere trascurati. Inoltre la dissipazione nella scala di Kolmogorov   data da  $\epsilon = \nu(u_\eta/\eta)^2 = \nu/\tau_\eta^2$ , che   proprio la dissipazione dell'energia cinetica turbolenta.

Infine, nella seconda ipotesi di similarit , si descrivono quelle strutture vorticose che sono molto piccole rispetto  $L$ , ma allo stesso tempo molto piú grandi di  $\eta$ , quindi poco influenzate dagli effetti della viscosit . A tal proposito si definisce la scala  $l_{DI}$ , che suddivide il range universale in due sotto-intervalli: il range di dissipazione dove  $l < l_{DI}$  e il gi  citato range inerziale dove  $l_{DI} < l < l_{EI}$ . Solo i moti nel range dissipativo risentono in modo non trascurabile degli effetti viscosi e sono quindi praticamente responsabili di tutta la dissipazione.

Nella figura seguente sono rappresentate le varie scale e i rispettivi range.

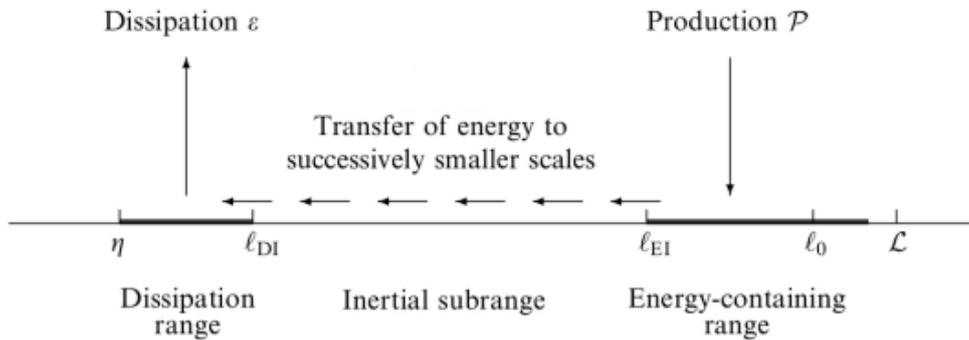


Figura 1.1: *Suddivisione delle scale turbolente nei vari range, in accordo con la teoria di Kolmogorov*

Come verrà mostrato anche in seguito, il rapporto tra le scale più piccole e quelle più grandi può essere espresso dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{L} &\sim Re^{-3/4} \\ \frac{u_\eta}{U} &\sim Re^{-1/4} \\ \frac{\tau_\eta}{T} &= Re^{1/2} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Risulta chiaro come all'aumentare del numero di Reynolds il rapporto  $\eta/L$  decresca, andando ad ampliare il range inerziale dove  $\eta \ll l \ll L$ . Ad alti numeri di Reynolds le scale temporali e di velocità degli eddies più piccoli sono molto piccole se comparate con quelle degli eddies più grandi. Infine, una quantità di primaria importanza è l'energia trasferita nel range inerziale dagli eddies più grandi a quelli più piccoli: si può notare come questa sia indipendente da  $l$  e che inoltre è uguale a  $\epsilon$ . L'energia quindi fluisce da  $l_{EI}$  a  $l_{DI}$  senza essere intaccata e viene poi completamente dissipata alla scala di Kolmogorov.

### 1.3 Equazioni del Moto della Particella in un fluido

Utilizzando un approccio di tipo Lagrangiano, ossia studiando le caratteristiche della turbolenza seguendo le particelle lungo il loro percorso, e inserendo di conseguenza la derivata Lagrangiana, le equazioni di Navier-Stokes per un flusso incomprimibile diventano:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{D\mathbf{x}}{Dt} &= \mathbf{u} \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Queste equazioni descrivono il moto di una particella fluida che risulta essere identificata in modo unico dal vettore posizione iniziale  $\mathbf{X} = \mathbf{x}(0)$ . Uno dei problemi della descrizione Lagrangiana della turbolenza è che queste equazioni non risultano essere in forma chiusa a causa della non-località, siccome il gradiente di pressione e il tensore degli stress viscosi includono informazioni riguardanti punti diversi da quello considerato, ossia diverso dalla posizione della particella fluida.

Nonostante ciò, la descrizione Lagrangiana della dinamica delle particelle é di grande interesse pratico, soprattutto quando vengono prese in considerazione particelle inerziali o bolle [3, 4, 5]. Per studiare il moto di oggetti sospesi in un flusso turbolenti é necessario esplicitare l'espressione della forza che agisce sull'oggetto stesso.

Il problema considerato é quello di una particella inerziale, rigida, sferica, piccola rispetto alla piú piccola scala del flusso -la scala di Kolmogorov- e con velocità relativa rispetto al flusso anch'essa piccola.

Da queste considerazioni si può dedurre che anche il numero di Reynolds della particella sia piccolo, ossia il flusso in prossimitá della particella può essere approssimato a laminare, dominato principalmente dalle condizioni al contorno sulla superficie della particella.

La particella di raggio  $r_p$  é localizzata nel punto  $\mathbf{Y}(t)$  del flusso, il quale, senza la presenza della particella, presenta un campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . La presenza della particella e il suo moto attraverso il fluido modificano localmente il flusso e portano a un nuovo campo di velocità denominato  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , il quale deve soddisfare le condizioni:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= \rho g - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{V} + \Omega \times [\mathbf{x} - \mathbf{Y}(t)] \text{ sulla sfera,} \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \text{ as } |\mathbf{x} - \mathbf{Y}(t)| \end{aligned} \quad (1.38)$$

per un flusso incomprimibile di densitá uniforme [6]. La terza equazione rappresenta la condizione di aderenza sulla sfera, per la quale localmente il fluido ha la stessa velocità della particella  $\mathbf{V}(t)$  e velocità angolare  $\Omega(t)$ .

Esprimendo il tensore degli stress fluidi  $\sigma_{ij}$  come:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.39)$$

L'equazione per il moto di una particella sferica é:

$$m_p \frac{dV_i}{dt} = m_p g_i + \oint_S \sigma_{ij} n_j dS \quad (1.40)$$

dove l'integrale di superficie é calcolato sulla superficie della sfera e  $n$  é il versore normale uscente.

Il problema consiste ora nel valutare il tensore degli stress fluidi. Per fare ciò é utile fare un cambio di coordinate, utilizzando un nuovo sistema di riferimento solidale al centro della sfera. Il cambio di variabili é:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{x} - \mathbf{Y}(t), \quad t=t, \\ \mathbf{w}(\mathbf{z}, t) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}(t). \end{aligned} \quad (1.41)$$

E le equazioni (1.38) ora si possono esprimere come:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} + w_j \frac{\partial w_i}{\partial z_j} \right) &= \rho \left( g_i - \frac{dV_i}{dt} \right) - \frac{\partial p}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial z_j \partial z_j}, \\ \frac{\partial w_i}{\partial z_i} &= 0; \\ \mathbf{w} &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{z} \text{ for } |\mathbf{z}| = r_p, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{u} - \mathbf{V} \text{ as } |\mathbf{z}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.42)$$

e il tensore degli stress viscosi diventa:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial w_i}{\partial z_j} + \frac{\partial w_j}{\partial z_i} \right) \quad (1.43)$$

Per sfruttare i vantaggi derivanti dai parametri di piccole dimensioni, é utile separare il campo di moto in due contributi:  $\mathbf{w}^{(0)}$  e  $\mathbf{w}^{(1)}$ , che rappresentano rispettivamente il campo di moto indisturbato e quello disturbato dalla presenza della particella. La componente  $\mathbf{w}^{(0)}$  puó essere espressa come:

$$\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w} - \mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{u} - \mathbf{V} \quad (1.44)$$

Queste due componenti del flusso devono soddisfare le equazioni del moto, sempre considerando il caso incomprimibile:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial t} + w_j^{(0)} \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial z_j} \right) &= \rho \left( g_i - \frac{dV_i}{dt} \right) - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial^2 w_i^{(0)}}{\partial z_j \partial z_j}, \\ \rho \left( \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial t} + w_j^{(0)} \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial z_j} + w_j^{(1)} \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial z_j} + \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial z_j} \right) &= -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial^2 w_i^{(1)}}{\partial z_j \partial z_j} \end{aligned} \quad (1.45)$$

L'analisi dimensionale dell'equazione mostra che, se  $\mathbf{W}_0$  viene presa come scala rappresentativa della velocità relativa del flusso attorno alla sfera e il numero di Reynolds viene definito come  $Re = \frac{r_p \mathbf{W}_0}{\nu}$ , allora per bassi valori di quest'ultimo i termini avvertivi possono essere trascurati e il problema si riduce a un flusso non stazionario di Stokes. L'equazione per il flusso disturbato si riduce a:

$$\rho \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial t} = -\frac{p^{(1)}}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial^2 w_i^{(1)}}{\partial z_j \partial z_j} \quad (1.46)$$

a patto che, come detto prima, siano soddisfatte le condizioni  $Re = \frac{r_p \mathbf{W}_0}{\nu} \ll 1$  e  $\frac{r_p^2 U_0}{\nu L} \ll 1$ , dove  $L$  é la scala di lunghezza differenziale del flusso indisturbato e  $\frac{U_0}{L}$  é la rispettiva scala del gradiente di velocità.

Le condizioni al contorno del flusso disturbato  $\mathbf{w}^{(1)}$  sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(1)} &= (\mathbf{u} - \mathbf{V}) + \Omega \times \mathbf{z} \text{ quando } |\mathbf{z}| = \mathbf{a}, \\ |\mathbf{w}^{(1)}| &\rightarrow 0 \text{ per } |\mathbf{z}| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.47)$$

La stima della forza agente sulla particella consiste ora nel trovare gli stress di superficie prodotti dal flusso non stazionario di Stokes governato dalle equazioni (1.46) e (1.47). Il contributo del flusso indisturbato  $\mathbf{w}^{(0)}$  sulla forza agente sulla sfera é  $\mathbf{F}^{(0)}$ :

$$F_i^{(0)} = \oint_S n_j \left[ -p^{(0)} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial z_j} + \frac{\partial w_j^{(0)}}{\partial z_i} \right) \right] dS \quad (1.48)$$

Il quale puó essere convertito in un integrale di volume e valutato come:

$$F_i^{(0)} = \frac{4}{3} \pi r_p^3 \left( -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial^2 w_i^{(0)}}{\partial z_j \partial z_j} \right) \quad (1.49)$$

sotto l'ipotesi che i termini tra parentesi siano circa uniformi sulla sfera, a patto che quest'ultima sia sufficientemente piccola. Da ciò deriva che il gradiente di pressione é approssimativamente uniforme sulla sfera e che la velocità  $w_i^{(0)}$  può essere espressa come espansione in serie di Taylor. Questa assunzione é valida se la dimensione della sfera é piccola rispetto alla lunghezza caratteristica delle variazioni del flusso indisturbato, vale a dire  $\frac{r_p}{L} \ll 1$ . In questa maniera sono incluse le variazioni lineari del tensore degli stress  $\sigma_{ij}^{(0)}$ .

A questo punto l'equazione (1.49) può essere semplificata utilizzando l'equazione del momento del flusso indisturbato, ottenendo così:

$$F_i^{(0)} = -m_F g_i + m_F \left( \frac{dV_i}{dt} + \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial t} + w_j^{(0)} \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial z_j} \right) \quad (1.50)$$

Questa equazione può essere scritta anche in termini del flusso indisturbato nel sistema di riferimento originario, ottenendo così il primo risultato dato da Riley[7]:

$$F_i^{(0)} = -m_F g_i + m_F \left( \frac{du_i}{dt} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \Bigg|_{\mathbf{Y}(t)} \quad (1.51)$$

Unendo i due contributi si ottiene l'equazione per il moto della particella:

$$m_p \frac{dV_i}{dt} = (m_p - m_f) g_i + m_f \frac{Du_i}{Dt} \Bigg|_{\mathbf{Y}(t)} + F_i^{(1)} \quad (1.52)$$

sempre sotto l'ipotesi che  $\frac{r_p}{L} \ll 1$ .

L'espressione della forza  $F^{(1)}$  agente sulla sfera prodotta dal flusso disturbato può essere scritta in forma simile a quanto fatto per quella dovuta al flusso indisturbato, vale a dire:

$$F_i^{(1)} = \oint_S \left[ -p^{(1)} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial z_j} + \frac{\partial w_j^{(1)}}{\partial z_i} \right) \right] n_j dS \quad (1.53)$$

con l'assunzione di bassi numeri di Reynolds per il flusso disturbato.

La forza  $F^{(1)}$  può essere esplicitata in tutti i suoi termini risolvendo il problema instazionario di Stokes, utilizzando un'analisi in termini di trasformate di Laplace.

Ora, esplicitando i risultati ottenuti per il flusso disturbato e introducendoli nell'equazione del moto della particella si ottiene l'equazione:

$$\begin{aligned} m_p \frac{dV_i}{dt} = (m_p - m_f) g_i + m_f \frac{Du_i}{Dt} \Bigg|_{\mathbf{Y}(t)} & - \frac{1}{2} m_f \frac{d}{dt} \{V_i(t) - u_i[Y(t), t] - \frac{1}{10} r_p^2 \nabla^2 u_i|_{Y(t)}\} - \\ & 6\pi r_p \mu \{V_i(t) - u_i[Y(t), t] - \frac{1}{6} r_p^2 \nabla^2 u_i|_{Y(t)}\} \\ & - 6\pi r_p^2 \mu \int_0^t \left( \frac{d}{d\tau} \{V_i(\tau) - u_i[Y(\tau), \tau] - 1/6 r_p^2 \nabla^2 u_i|_{Y(\tau)}\} [\pi\nu(t - \tau)]^{0.5} \right) \end{aligned} \quad (1.54)$$

dove le particelle vengono immerse al tempo  $t = 0$  e non vi é alcun flusso disturbato  $\mathbf{w}^{(1)}$  precedente all'inserimento di queste. I termini a destra in questa equazione rappresentano, in ordine:

- la forza di galleggiamento, in cui  $g$  é l'accelerazione di gravitá,  $m_p$  é la massa della particella e  $m_f$  quella del fluido;
- l'accelerazione del fluido calcolata nella posizione della particella. Questa forza é spesso chiamata forza del gradiente di pressione, poiché il termine viscoso é stato trascurato. Maxey e Riley hanno dimostrato che, peró, sia il gradiente di pressione che la forza viscosa devono essere incluse [6];
- la forza di massa aggiunta, che rappresenta l'inertzia aggiunta al sistema dovuta a un corpo che accelerando o decelerando muove il fluido circostante in cui questo é immerso;
- la resistenza di Stokes, dove  $r_p$  é il raggio della sfera e  $\mu$  la viscositá dinamica, ed é dovuta alla differenza di velocitá tra la particella e il fluido indisturbato; questa é scritta con la correzione di Faxén, che include la variazione della resistenza sulla sfera dovuta alla curvatura del campo di velocitá;
- la forza di Basset, che include la media pesata nel tempo della forza sulle particelle.

Nell'equazione non vi é nessun termine che rappresenta la forza sulla particella dovuta al flusso di taglio, questo a causa dell'ipotesi di bassi numeri di Reynolds della particella. Inoltre la particella é isolata, ossia questa é posizionata a vari raggi di distanza dalle altre particelle o dai contorni; questo implica che le dimensioni della fase volumica delle particelle siano piccole rispetto al volume del dominio. Per quanto riguarda il termine di accelerazione del fluido  $\frac{Du}{Dt}$ , questa equazione differisce dalla formulazione proposta in [6], dove questa era scritto in termini di  $m_f \frac{du}{dt}$ . La derivata totale lungo la traiettoria della particella inerziale e della particella fluida sono in genere diverse ma, nell'ipotesi di bassi numeri di Reynolds, queste possono essere considerate approssimativamente le stesse, poiché la loro differenza risulta essere inferiore alla resistenza di Stokes di un ordine di grandezza pari a  $O(r_p^2 U_0 / L\nu)$ .

Le costrizioni causate dalle restrizioni  $r_p W_0 / \nu \ll 1$ ,  $(r_p^2 / \nu)(U_0 / L) \ll 1$  e  $r_p / L \ll 1$  sono la causa della diversa importanza dei vari termini presenti nell'equazione (1.54) dove, in generale, la resistenza di Stokes é quella dominante; questo porta a un'uguaglianza locale nell'equazione tra la velocitá della particella e del fluido o, se le forze di galleggiamento sono importanti, a un bilancio tra la resistenza di Stokes e quella gravitazionale. L'importanza relativa puó essere valutata tramite un'analisi delle scale del fluido e della particella. Se la scala di velocitá relativa rispetto alla grande scala di velocitá del fluido é  $W/U \simeq O(\rho_p r_p^2 / (\rho_f \nu L))$ , allora la resistenza di Stokes e il contributo inerziale della particella sono confrontabili; quest'ultima diventa rilevante anche se la particella risulta essere molto piú densa del fluido. L'accelerazione del fluido e la resistenza di Stokes sono comparabili quando  $W/U \simeq r_p^2 U / (\nu L)$ , il che porta a basse velocitá relative. La correzione di Faxén, come detto prima, dovuta all'interazione tra la particella e la curvatura del campo di velocitá del fluido, produce una velocitá relativa pari a  $W/U \simeq r_p^2 / L^2$ , la quale puó essere considerata trascurabile.

Il rapporto tra la il contributo di massa aggiunta e la resistenza di Stokes é  $O(r_p^2 U / (\nu L))$ , mentre il contributo del termine di Basset, sempre rispetto a Stokes, é  $O(\sqrt{r_p^2 U / (\nu L)})$ . Questo porta alla conclusione che il termine storico di Basset [6] il piú importante fra i termini trascurati. Quando l'attenzione é posta sulla dinamica di transizione, diventano importanti i termini di massa aggiunta, inerziale e di Basset. Per esempio, quando una

particella si sta depositando sotto l'azione della forza di gravità questa presenta, all'inizio, una velocità molto simile a quella del fluido, e questo porta a una piccola resistenza di Stokes. In questa situazione le tre forze sopracitate si compensano tra di loro. Infine, l'accelerazione convettiva dovuta al moto della particella attraverso i gradienti di velocità è dell'ordine di  $O(UW/L)$ , i quali sono in genere piccoli.

Riassumendo, nella maggior parte dei casi i termini più importanti sono la resistenza lineare di Stokes, la forza inerziale della particella e l'accelerazione di gravità. Questa analisi dimensionale porta alla definizione del modello semplificato di particella puntiforme, le cui equazioni sono:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} &= \mathbf{v}_p \\ \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} &= \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t)}{\tau_p} + \mathbf{g} \end{aligned} \quad (1.55)$$

dove  $\tau_p$  è la velocità di risposta della particella, la quale si può definire come:

$$\tau_p = \frac{2\rho_p r_p^2}{9\rho_f \nu} \quad (1.56)$$

Queste equazioni rappresentano in buona approssimazione il moto di una particella piccola e pesante, che si muove con una velocità relativa rispetto al fluido bassa. Inoltre, le particelle devono essere ben distanziate in modo da evitare la loro interazione reciproca, ossia la loro distanza deve essere molto maggiore del loro raggio. L'equazione per la temperatura della particella, sempre considerando il modello di particella puntiforme, può essere espressa come:

$$\frac{d\theta_p}{dt} = \frac{T(\mathbf{x}_p, t) - \theta_p}{\tau_\theta} \quad (1.57)$$

dove  $T$  è la temperatura del fluido e  $\tau_\theta$  è il tempo di risposta termico, definito come:

$$\tau_\theta = \frac{\rho_p r_p^2}{3\rho_f \kappa} \quad (1.58)$$

dove  $\kappa$  è la conduttività termica del fluido. Dalle grandezze presenti in queste relazioni possono essere ricavati dei parametri caratteristici utili alla caratterizzazione del sistema:

- il numero di Prandtl  $Pr = \nu/\kappa$ , definito dal rapporto tra la diffusività cinematica e quella termica. Questo rappresenta una caratteristica fisica del fluido, quindi indipendente dal campo di moto, e permette di misurare l'importanza relativa degli effetti viscosi rispetto alla diffusività termica;
- il numero di Stokes  $St = \tau_p/\tau_\eta$ , definito dal rapporto tra il tempo di risposta della particella (o tempo di rilassamento), che rappresenta il tempo che impiega la particella a raggiungere la velocità del flusso, e il tempo caratteristico della più piccola scala del flusso, ossia la scala temporale di Kolmogorov, definita come  $\tau_\eta = \eta^2/\nu$ . Se il numero di Stokes è  $St < 1$ , la particella ha una bassa inerzia, ossia questa tende ad adeguarsi ai cambiamenti di velocità del fluido prima che il fluido cambi. In altre parole, questa tende a seguire bene le fluttuazioni di velocità del fluido. Se, al contrario, il numero di Stokes è  $St \geq 1$ , la particella ha un'elevata inerzia, quindi non riesce ad adeguarsi bene alla velocità del fluido, poiché reagisce in un tempo più lungo rispetto a quello che impiega il fluido a cambiare la sua velocità.

- il numero di Stokes termico  $St_\theta = \tau_\theta/\tau_\eta$ , definito dal rapporto tra il tempo di risposta termico della particella e la scala temporale di Kolmogorov che, analogamente al numero di Stokes, rappresenta quanto velocemente la temperatura della particella tenda ad adeguarsi ai cambiamenti di temperatura del fluido.

## 1.4 Caratteristiche della Simulazione Numerica delle Particelle Inerziali in Turbolenza

Il trasporto di particelle o di gocce in un flusso turbolento é di grande interesse industriale, poiché questo gioca un ruolo centrale in diversi problemi sia di tipo ingegneristico che fisico. Questo fenomeno é presente, ad esempio, nella combustione dei motori [172], nel raffreddamento di componenti miniaturizzati [124], nella microfisica delle nubi [44] e nella sedimentazione in ambienti acquatici [130].

Esistono diversi metodi di simulazione possibili: questi spaziano da metodi in cui tutti i dettagli, compreso il flusso attorno a ogni particella, sono risolti, metodi in cui si risolve l'equazione del moto per ogni particella considerando quest'ultima puntiforme, a metodi Euleriani nei quali sono risolte equazioni per la concentrazione e la velocità delle particelle.

Quando lo studio é rivolto a un flusso turbolento nel quale sono disperse particelle, esistono in generale due diversi approcci. L'approccio di tipo Euleriano, che viene utilizzato quando le particelle non sono piccole o sono presenti in numero molto elevato, dove si considerano entrambe le fasi, quella della particella e quella del fluido, come continue e risolve per entrambe le equazioni di trasporto.

In questo modo le particelle non sono descritte singolarmente, ma attraverso i campi di velocità e concentrazione: oltre alle equazioni della fase fluida, si aggiungono equazioni differenziali alle derivate parziali per questi due campi, che devono essere risolte.

L'approccio Lagrangiano si differenzia nel modo in cui tratta le particelle; infatti in questo caso i valori medi statistici vengono calcolati a partire dalle simulazioni delle singole traiettorie di un grande numero di particelle. Questo metodo viene utilizzato quando la dimensione della particella é molto piú piccola della piú piccola scala del flusso, ossia la scala di Kolmogorov, ed é possibile utilizzare il modello di particella puntiforme. Il problema con quest'ultimo approccio é che, affinché si possa simulare la traiettoria discreta della particella, devono essere note in ogni punto della traiettoria le fluttuazioni turbolente istantanee di velocità della fase fluida. Queste fluttuazioni sono, ovviamente, tempo-dipendenti e le sole quantità note, ossia gli stress di Reynolds derivanti da un modello turbolento, sono mediate nel tempo.

### 1.4.1 Metodi di Simulazione Numerica

Di seguito verranno elencati brevemente i tre diversi metodi di simulazione per flussi turbolenti:

#### DNS - Direct Numerical Simulations

Con il metodo di simulazione diretta, o DNS, le equazioni di Navier-Stokes vengono discretizzate e risolte senza l'ausilio di nessun modello. Queste equazioni racchiudono in sé, però, tutta la fisica del problema dei flussi turbolenti, quindi questo approccio deve risolvere un grande range di scale spaziali e temporali. In particolare, a parte il flusso dettagliato attorno ad ogni particella, sono risolte tutte le scale del moto del fluido, fino a quella di Kolmogorov. Questo metodo comporta da una parte una riproduzione dettagliata ed accurata del flusso, in cui la simulazione acquista un valore paragonabile ad un esperimento, ma dall'altra comporta un grande costo computazionale. Il costo computazionale, unitamente al tempo di simulazione, sono proporzionali rispettivamente

a  $Re^{9/4}$  e  $Re^3$ , quindi risulta evidente come questa tecnica debba essere circoscritta allo studio di flussi a bassi numeri di Reynolds. I pregi della simulazione numerica diretta risiedono invece nella qualità e quantità dei dati che produce. Infatti, poiché essa risolve direttamente le equazioni del moto senza l'impiego di alcun modello, i risultati prodotti sono di qualità paragonabile a quelli sperimentali. Attualmente, nel campo della ricerca della turbolenza, i dati ottenuti tramite DNS a piena risoluzione sono riconosciuti validi al pari di quelli sperimentali. Inoltre la simulazione numerica diretta fornisce istante per istante tutto il campo vettoriale di velocità in ogni punto del dominio, proprietà che è molto difficile da ottenere dal punto di vista sperimentale. Da tali considerazioni si può concludere che la simulazione numerica diretta è una tecnica fondamentale per la ricerca della turbolenza, ma il costo computazionale ne vincola l'utilizzo a numeri di Reynolds moderati, rendendola inutilizzabile per flussi di interesse ingegneristico.

### LES - Large Eddies Simulation

Attraverso la tecnica LES vengono risolte solo le scale più grandi del moto turbolento, tramite un'operazione di filtraggio (esplicito o implicito), mentre le scale più piccole, sottofiltro, vengono modellate. Questa tecnica riduce significativamente le risorse computazionali richieste per la risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes, ma allo stesso tempo perde accuratezza rispetto i dati sperimentali e rispetto alla DNS.

La logica della LES è quella di risolvere esplicitamente le dinamiche del moto delle grandi scale, anisotrope e legate alla geometria e alla natura del caso in esame, mentre, per simulare l'influenza delle piccole scale, isotrope e caratterizzate da una certa universalità, si utilizzano dei modelli. La griglia di una simulazione LES, quindi, è più rada di quella di una DNS in quanto non deve cogliere tutte le scale fino a quella dissipativa, ma è sufficiente che sia minore della dimensione della macrostruttura di cui si vuole studiare in modo esplicito l'evoluzione. Le scale che vengono modellate faranno quindi parte del range universale: infatti, solo in questo modo si può costruire un modello indipendente dal flusso simulato, visto che in questo intervallo, dal range inerziale a quello dissipativo, si ha una dinamica universale. Questa tecnica è da preferirsi alla DNS specialmente in termini di costo computazionale: se da una parte, infatti, si ha una riproduzione dettagliata e accurata del flusso in esame, con risultati paragonabili a quelli sperimentali, dall'altra si vede che il tempo totale di simulazione cresce con il cubo del numero di Reynolds e questo limita l'utilizzo della DNS a flussi con Reynolds non troppo elevati. La LES, inoltre, è un'ottima alternativa alle tecniche RANS in quanto fornisce una descrizione molto più precisa del flusso turbolento e porta a risultati più accurati e affidabili.

### RANS - Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations

L'approccio RANS è utile in prima approssimazione per flussi di interesse ingegneristico, in quanto inizialmente è richiesta solo la configurazione stazionaria dei campi di velocità mediata, mentre con la DNS si studia la non stazionarietà di un flusso turbolento. Di conseguenza, per questo tipo di problemi, è utile focalizzare l'attenzione sullo studio di campi mediati piuttosto che su quelli istantanei. Considerando un campo di velocità medio permette di eliminare il vincolo sulla finezza della griglia, che dipende dalle piccole scale ( $\eta$ ), in quanto con un campo medio le grandezze sono più 'lisce' e il passo di griglia dipende solo dai gradienti del campo medio. Altro vantaggio di considerare i campi medi è che questi conservano la simmetria di un problema, e ciò permette di studiare con griglie 2D problemi in cui è presente la simmetria, come flussi in condotti o getti circolari.

Attraverso la decomposizione di Reynolds, il campo fluidodinamico viene scomposto in una parte media e una parte fluttuante, ad esempio per la velocità si ha:

$$u_i(x, t) = \overline{U}_i(x, t) + u'_i(x, t) \quad (1.59)$$

La media d'insieme della parte fluttuante é sempre nulla  $\langle u'_i(x, t) \rangle = 0$ , mentre  $\langle u_i^2(x, t) \rangle \neq 0$ . Come detto prima, oltre ad avere come incognite le tre componenti di velocità e la pressione, é presente anche il tensore degli sforzi di Reynolds, ovvero un tensore simmetrico del secondo ordine a 9 componenti, che rappresenta il flusso di quantità di moto dovuto alle fluttuazioni della velocità mediata. Per stimare il Reynolds stress é quindi necessario un modello di chiusura, come ad esempio il modello  $k - \epsilon$ . Questa tecnica risulta essere quella di piú immediata applicazione, ma fornisce informazioni solo sui valori medi delle varie quantità, modellando l'intero effetto di tutte le scale del moto tramite il tensore degli sforzi di Reynolds.

### 1.4.2 Accoppiamento

I metodi di simulazione numerica possono essere suddivisi anche in base al livello di accoppiamento tra particella e fluido. Se la frazione volumica della particella risulta essere sufficientemente piccola, le particelle non influenzano il flusso, e in questo caso si parla di accoppiamento unidirezionale. Se, al contrario, la frazione volumica risulta essere piú elevata, allora la presenza delle particelle modifica le proprietà del fluido e in questo caso si parla di accoppiamento bidirezionale. Per frazioni volumiche ancora piú elevate, quindi quando si é nel caso di accoppiamento quadri-direzionale, anche le collisioni fra le particelle influenzano i risultati della simulazione. In caso di turbolenza omogenea ed isotropa i limiti di validità dell'accoppiamento unidirezionale e bidirezionale sono stati suggeriti da Elghobashi [34], come mostrato in figura:

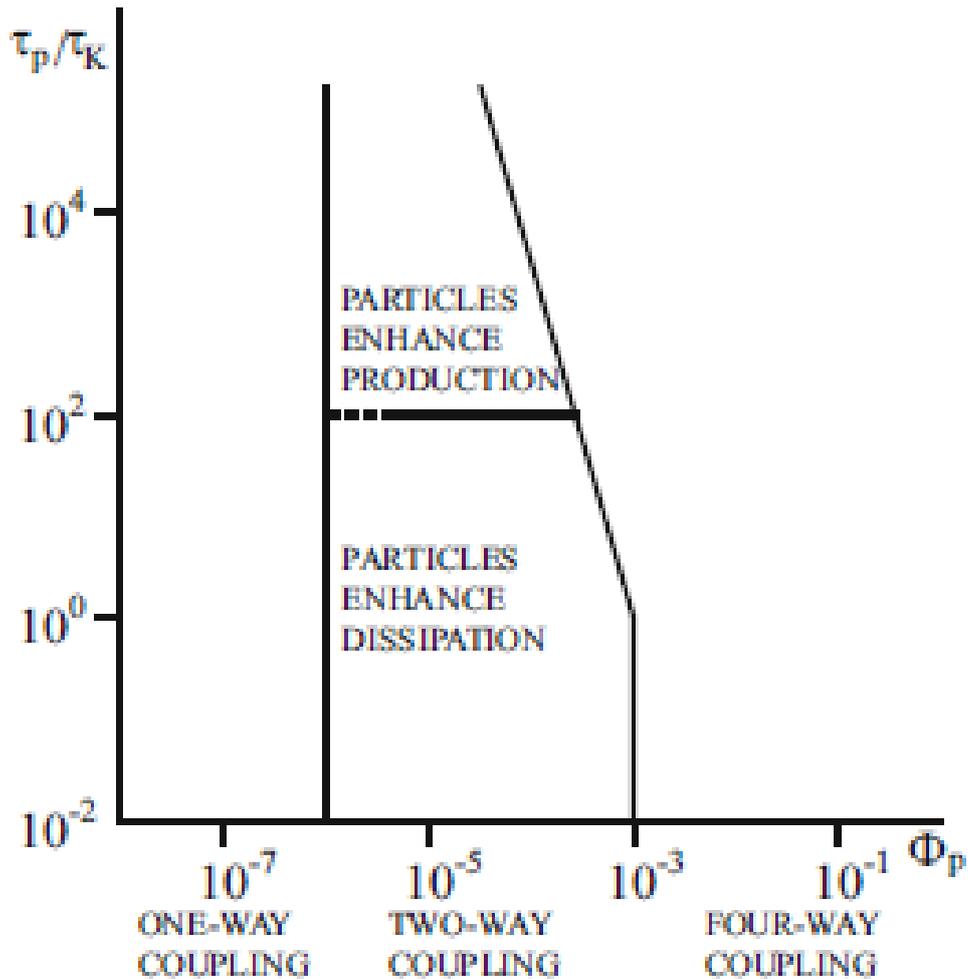


Figura 1.2: *Diversi regimi di accoppiamento in funzione della frazione volumica*<sup>[1]</sup>

In linea di principio, tutti i livelli di accoppiamento possono essere applicati ai tre livelli di dettaglio della descrizione della turbolenza, DNS, LES e RANS.

### Accoppiamento unidirezionale

L'accoppiamento unidirezionale é applicabile solo in caso di flussi diluiti, in cui la frazione volumica delle particelle é inferiore a  $10^{-5}$  [33, 34]. In questo caso, come detto prima, gli effetti dovuti alla presenza delle particelle sul flusso sono trascurabili.

### Accoppiamento bidirezionale

In caso di frazioni volumiche maggiori di  $10^{-5}$  é necessario tenere in conto la forza di reazione delle particelle sul fluido. Ció implica la risoluzione di due problemi. Il primo consiste nel fatto che tutte le forze idrodinamiche agenti sulla particella richiedono la conoscenza della velocità del flusso indisturbato nella posizione della particella stessa, e questo non risulta essere noto direttamente nel caso di accoppiamento bidirezionale. In [16] si dimostra che la differenza tra la velocità di flusso disturbato e non disturbato é piccola se il diametro delle particelle é piccolo rispetto alla dimensione di griglia. Siccome la dimensione di griglia nelle DNS é quasi sempre piú grande della lunghezza di Kolmogorov

e il diametro della particella deve essere piccola rispetto a quest'ultima affinché il modello di particella puntiforme sia applicabile, questa condizione risulta essere soddisfatta.

Il secondo problema é che il termine di accoppiamento presente nell'equazione, che rappresenta la forza esercitata dalla particella sul fluido, é localizzata nella posizione della particella, e ciò può essere rappresentato dalla funzione del delta di Dirac.

In [16] si discute anche l'influenza della presenza delle particelle sull'energia cinetica turbolenta e sul tasso di dissipazione in caso di turbolenza omogenea e isotropa. Si é notato come queste grandezze diminuiscano all'aumentare del carico di massa delle particelle, e che l'intensità di questo calo dipenda dalla dimensione della particella. Prendendo in considerazione lo spettro di energia, si é notato che la densità di turbolenza spettrale é diminuita nelle particelle piú grandi e aumentata dalle particelle di piccole dimensioni.

Con gli esperimenti riportati in [77], si é riscontrato che le particelle piú piccole della lunghezza di Kolmogorov sopprimono la turbolenza, al contrario di quelle piú grandi che favoriscono le fluttuazioni di velocità nella direzione del flusso, mentre le altre due componenti e gli stress di Reynolds sono ridotti sensibilmente.

## 1.5 Scalare Passivo

Per scalare passivo si intende un contaminante diffuso in flusso la cui concentrazione é talmente basso da non avere effetti dinamici sul moto del flusso stesso. Il flusso turbolento semplice considerato é senza flussi di taglio, ossia con turbolenza generata dalla griglia. In questo caso le fluttuazioni dello scalare vengono prodotte imponendo un gradiente medio di scalare nel flusso. In particolare, lo scalare passivo qui considerato é la temperatura. La dinamica del campo di scalare passivo  $\Theta$  é governata dall'equazione di convezione-diffusione:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} = \kappa \nabla^2 \Theta \quad (1.60)$$

dove  $\kappa$  é la diffusività termica, poiché come detto prima lo scalare passivo considerato é la temperatura, e  $u_j$  (e gli indici ripetuti implicano la somma:  $j = 1, 2, 3$ ) sono le componenti di velocità lungo  $x$ , ossia la direzione del flusso,  $y$  e  $z$  rispettivamente. L'interesse ingegneristico consiste nelle proprietà di trasporto e di mescolamento dello scalare e, considerando questa prospettiva, l'attenzione é stata posta nel determinare come la varianza e il flusso (proprietá integrali) variano nello spazio e nel tempo all'interno di particolari flussi. Inoltre, queste quantità sono fortemente influenzate dalle condizioni al contorno.

### 1.5.1 Fenomenologia

I campi di scalare e di velocità possono essere decomposti nelle componenti medie e di fluttuazione, ossia  $\Theta = \bar{\Theta} + \theta'$  e  $U_i = \bar{U}_i + u'$ . Tipiche serie temporali delle fluttuazioni  $u$  e  $\theta$  e delle loro derivate temporali sono mostrate in figura:

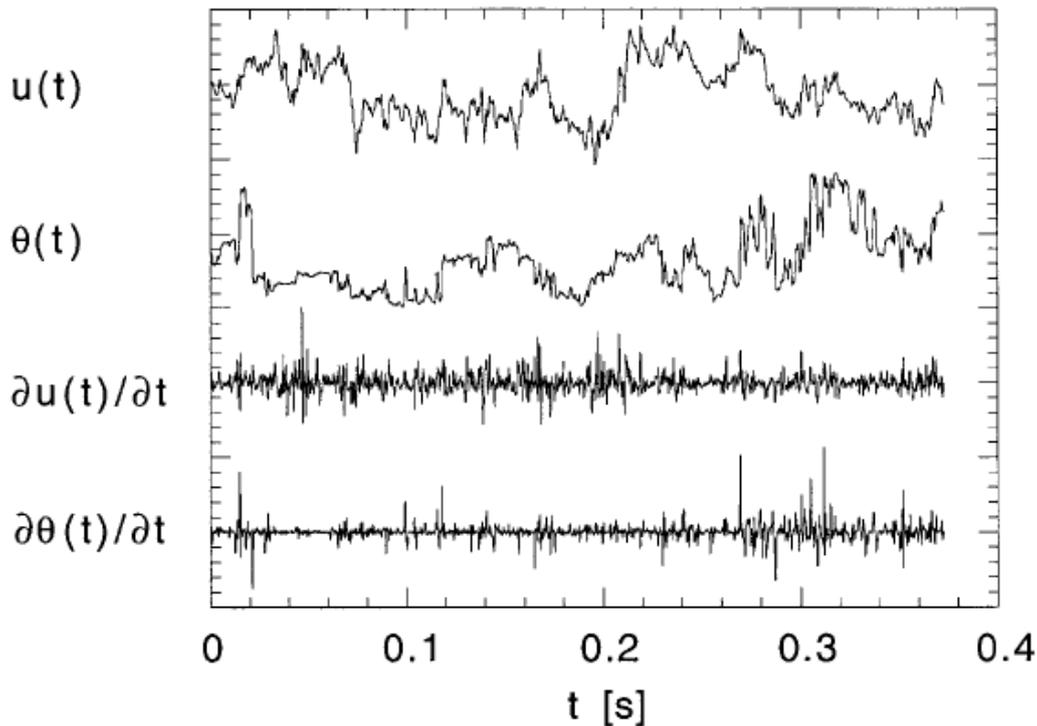


Figura 1.3: Serie temporali delle fluttuazioni longitudinali di velocità,  $u$ , e delle fluttuazioni di temperatura,  $\theta'$ , e delle loro derivate<sup>[W]</sup>

Nel caso mostrato nella figura soprastante, il flusso turbolento è generato dalla griglia con un gradiente medio di temperatura trasversale al flusso. In molti problemi, la determinazione della varianza dello scalare  $\langle \theta'^2 \rangle$ , del flusso  $\langle \theta' u_j \rangle$  e il tasso di dissipazione medio dello scalare  $\langle \epsilon_\theta \rangle$  è di primaria importanza. Gli spettri del campo di scalare e di velocità sono, rispettivamente:

$$F_\theta(k_1) = C_\theta \langle \epsilon \rangle^{1/3} \langle \epsilon_\theta \rangle k_1^{-5/3} \quad (1.61)$$

$$F(k_1) = C \langle \epsilon \rangle^{2/3} k_1^{-5/3} \quad (1.62)$$

dove la varianza è definita come  $\langle \theta'^2 \rangle = \int F_\theta(k_1) dk_1$ ,  $k_1$  è il numero d'onda longitudinale e  $C_\theta$  e  $C$  sono costanti universali.

La statistica di  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$  è fortemente non Gaussiana, come si può notare dalla Fig.[1.3]. Infatti si possono notare steps più netti nella serie temporale di  $\theta$  che in quella di  $u$ . Questo dà luogo a una derivata temporale molto più intermittente, e ciò risulta essere caratteristico di tutti i flussi turbolenti in cui è presente uno scalare passivo.

Nella figura seguente è mostrata la funzione di densità di probabilità di  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ , dove si può notare la caratteristica coda esponenziale:

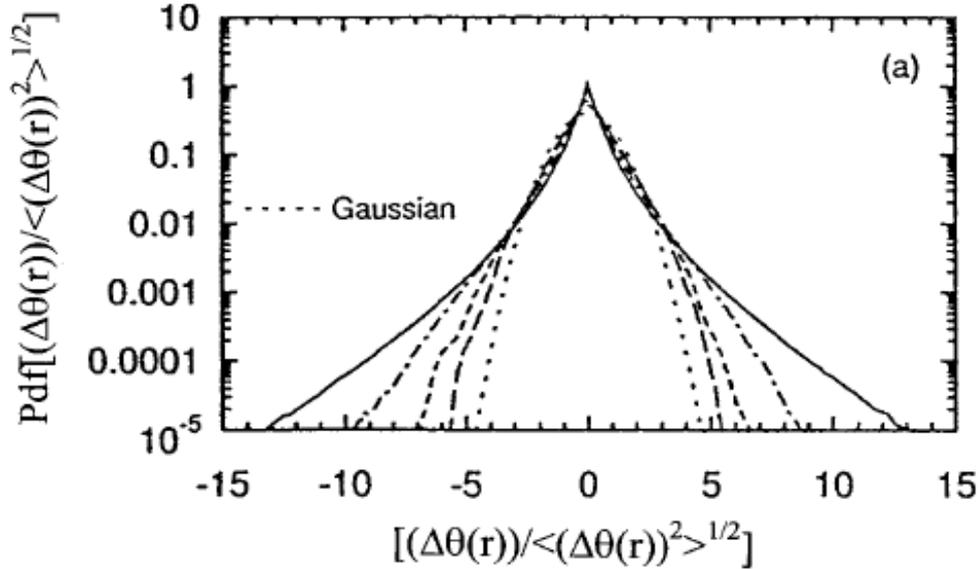


Figura 1.4: *PDF dello scalare passivo*<sup>[W]</sup>

La curva continua rappresenta la derivata della PDF ( $r \sim \eta$ ) e, al crescere di  $r$  la curva tende a una Gaussiana. In piú, come per il campo di velocità, il comportamento non Gaussiano si estende a scale piú grandi della scala di dissipazione  $\eta = (\nu/\langle\epsilon\rangle)^{1/4}$ . Per ottenere una descrizione piú dettagliata della statistica dello scalare é necessario prendere in considerazione momenti di ordine superiore. Tradizionalmente, sono state utilizzate maggiormente le funzioni di struttura rispetto allo spettro. Queste sono definite come  $\langle\Delta\theta(r)^n\rangle$ , dove  $n$  é un intero positivo, e caratterizzano le fluttuazioni di temperatura attraverso le scale del flusso. La differenza puó essere fatta in tutte le direzioni, ad esempio in direzione concorde o trasversale a quella rispetto al gradiente, e queste giocano un ruolo importante.

### 1.5.2 Funzioni di Struttura e Intermittenza nel Subrange Inerziale

L'anisotropia, manifestata nelle statistiche di terzo ordine, é evidente solo quando é presente un gradiente medio di scalare. In assenza di questo, la derivata della skewness risulta essere uguale a zero per simmetria. L'azione istantanea dei grandi vortici produce nette discontinuitá nel campo scalare, ma queste non hanno direzioni preferenziali e si ha media nulla in ogni direzione, come si puó notare dalla Fig.[1.5]



Figura 1.5: *Ampiezza spaziale di un campo scalare evoluto*<sup>[W]</sup>

Queste discontinuitá danno luogo a effetti non-Gaussiani sulle piccole scale, che si manifestano solo nei momenti di ordine superiore. Questa intermittenza sulle piccole scale é presente sia nel campo di velocità che di scalare, ma in quest'ultimo risulta essere di piú facile trattazione. L'equazione per lo scalare risulta essere lineare, e l'intermittenza per questo risulta essere presente anche se é assente quella per la velocità, ossia il campo di velocità puó essere considerato strettamente Gaussiano, a patto che ci sia una molteplicitá di scale.



## Capitolo 2

# Interazione Termica tra Fluido e Particella

Come detto nei capitoli precedenti, l'interazione tra le particelle inerziali e i campi scalari nei flussi turbolenti é di grande interesse, sia in ambito fisico che ingegneristico.

In questa tesi l'attenzione principale sar a posta nello scambio di calore tra particelle inerziali, sottoposte ad avvezione, e il flusso turbolento in cui sono sospese.

Uno dei maggiori problemi consiste, ad esempio nel capire come l'interazione tra turbolenza, scambi di calore, processi di condensazione e le collisioni possano portare a una rapida crescita delle gocce d'acqua che portano alla formazione della pioggia [7,8].

Quando le differenze di temperatura all'interno del fluido sono sufficientemente piccole, questa pu  essere considerata uno scalare passivo, cio  un contaminante diffuso nel fluido la cui concentrazione   talmente bassa da non avere effetti dinamici sul moto del fluido.

Esperimenti, simulazioni numeriche e modelli analitici hanno mostrato che un campo scalare presenta sempre una maggiore intermittenza rispetto al campo di velocit , e gli scalari passivi in turbolenza sono caratterizzati da scaling fortemente anomali [9]. Ci    dovuto alla formazione di strutture a rampa nel campo scalare [10,11]: si possono distinguere grandi regioni, definite strutture Lagrangiane coerenti, in cui il campo scalare   circa costante, le quali sono separate da regioni pi  sottili, denominate fronti, nei quali si hanno repentine variazioni dello scalare.

Se nel flusso vengono immerse delle particelle inerziali, queste si disperdono in esso in una maniera non uniforme e correlata [12]. Una caratteristica molto importante   che queste tendono a raggrupparsi spontaneamente anche in flussi comprimibili [16,17,13,15]; questo avviene su diverse scale del flusso [13,14,15], e sulle piccole scale del flusso questo raggruppamento tende ad essere massimo quando  $St = O(1)$ . Ci  pu  essere spiegato in questo modo: quando le particelle presentano un numero di Stokes  $St \ll 1$  il raggruppamento   dovuto al fatto che queste subiscono l'effetto centrifugo e vengono spinte fuori dalle regioni ad elevata rotazione, mentre per  $St \geq 1$ , il raggruppamento   generato da un meccanismo non locale, il cui effetto   collegato alla memoria delle particelle rispetto alla loro interazione con il flusso lungo la loro traiettoria [18,19,18,20,14].

Quando le particelle presentano un'inerzia termica finita, queste non sono in equilibrio termico con il campo di temperatura del fluido, e ci  pu  portare all'insorgenza di fenomeni di accoppiamento termico non banali tra fluido e particella immersa in flusso turbolento. Siccome sia la temperatura del fluido sia la dinamica della particelle dipendono dal campo di velocit  del fluido, possono esistere correlazioni non banali anche in caso di assenza di accoppiamento termico. Infatti, come si dimostra in [21], le particelle

inerziali tendono a raggrupparsi preferibilmente nei fronti del campo scalare e questo, associato al fatto che il campo di temperatura presenta una forte intermittenza in un flusso turbolento, può portare le particelle a presentare grandi fluttuazioni di temperatura lungo la loro traiettoria.

In questa tesi verranno investigati gli effetti dell'accoppiamento termico tra fluido e particella, che risultano essere evidenti sia sulle grandi scale che sulle piccole. Per studiare l'interazione tra il campo di temperatura scalare e la temperatura delle particelle inerziali sospese nel fluido, si sono effettuate simulazioni numeriche dirette (DNS), sia in caso di accoppiamento unidirezionale che bidirezionale. Il flusso turbolento considerato è statisticamente stazionario, e si è preso in considerazione il caso di turbolenza isotropa per quanto riguarda la velocità e anisotropa per la temperatura, poiché presente un gradiente di scalare medio in una direzione.

## 2.1 Modello fisico

Nei seguenti paragrafi si presenteranno le equazioni di governo del modello fisico che verrà risolto numericamente per simulare l'accoppiamento termico e il comportamento di un flusso turbolento in cui sono immerse le particelle.

### 2.1.1 Fase fluida

Il flusso considerato è statisticamente stazionario, omogeneo e isotropo, governato dalle equazioni di Navier-Stokes per il caso incomprimibile. Il campo di velocità turbolento trasporta il campo di temperatura del fluido, considerata scalare passivo, e le particelle inerziali in esso sospese.

In questo caso si considera l'accoppiamento di tipo unidirezionale per l'equazione del momento, mentre l'accoppiamento termico è di tipo bidirezionale. Di conseguenza, le equazioni di governo per la fase fluida sono:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \kappa \nabla^2 T - C_T + f_T \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  è la velocità del fluido,  $p(\mathbf{x}, t)$  è la pressione,  $\rho_0$  è la densità del fluido,  $\kappa$  è la diffusività termica e  $T(\mathbf{x}, t)$  è la temperatura del fluido.

I termini  $f$  e  $f_T$  rappresentano le forzanti esterne e  $C_T$  è il feedback termico delle particelle sulla temperatura del fluido, ossia lo scambio di calore per unità di tempo e di volume tra fluido e particella alla posizione  $\mathbf{x}$ .

Quando la forzante agisce su scale di dimensioni grandi, si può assumere che queste non influenzino la dinamica delle scale più piccole. Ciò viene dimostrato in [22], il che conferma il comportamento universale delle piccole scale. Comunque, recenti studi hanno dimostrato che questa ipotesi di universalità è parzialmente violata dal campo scalare trasportato, in cui la statistica del range inerziale mostra una non trascurabile sensibilità alle caratteristiche della forzante imposta.

Siccome lo scopo di questa tesi è caratterizzare la temperatura e le fluttuazioni dei suoi gradienti nel range di dissipazione per differenti valori di inerzia delle particelle, si utilizza una forzante che impone la stessa dissipazione totale per tutte le simulazioni.

La forzante utilizzata, che agisce sulle grandi scale, é [23]:

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t) = \epsilon \frac{\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)}{\sum_{\mathbf{k}_f \in \kappa_f} \|\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_f, t)\|} \delta_{k, k_f} \quad (2.2)$$

$$\hat{f}_T(\mathbf{k}, t) = \chi \frac{\hat{T}(\mathbf{k}, t)}{\sum_{\mathbf{k}_f \in \kappa_f} |\hat{T}(\mathbf{k}_f, t)|} \delta_{k, k_f} \quad (2.3)$$

nello spazio di Fourier. Il cappello presente nei termini indica la trasformata di Fourier e  $k_f$  é il numero d'onda che appartiene al set dei numeri d'onda forzati e  $\epsilon$  e  $\chi$  sono, rispettivamente, i tassi di dissipazione della varianza di velocità e temperatura imposti. Questo modo di esprimere le forzanti permette di controllare il tasso di dissipazione globale e, di conseguenza, il numero di Stokes.

### 2.1.2 Fase delle Particelle

La base per quasi tutte le applicazioni della DNS delle particelle puntiformi é l'equazione di Maxey-Riley [6], la quale descrive il moto di una particella immersa in un fluido viscoso.

In questo caso particolare, le particelle puntiformi considerate hanno una densità maggiore del fluido ( $\rho_p \gg \rho_f$ ) in cui sono immerse, e piccole rispetto a qualsiasi scala del fluido, vale a dire che il loro raggio é molto minore della scala di lunghezza di Kolmogorov ( $r_p \ll \eta$ ).

Grazie a queste assunzioni, e trascurando la gravità, l'accelerazione della particella é descritta dalla legge di resistenza di Stokes. Analogamente, il tasso di variazione della temperatura della particella é descritta dalla legge di Newton per la conduzione di calore; quindi le equazioni per la particella sono, come tra l'altro detto nei capitoli precedenti:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} &= \mathbf{v}_p \\ \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} &= \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t)}{\tau_p} + \mathbf{g} \\ \frac{d\theta_p}{dt} &= \frac{T(\mathbf{x}_p, t) - \theta_p}{\tau_\theta} \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 2.1.3 Validità e limitazioni del modello

Il modello presentato é quello della particella puntiforme. Nelle simulazioni effettuate viene preso in considerazione sia l'accoppiamento unidirezionale, in cui sono trascurati sia gli effetti che la particella produce sul fluido, sia le collisioni tra le varie particelle, che quello bidirezionale in cui é presente il feedback di temperatura. Inoltre, si trascura anche l'accoppiamento bidirezionale dell'equazione del momento, poiché il problema risulterebbe troppo complicato.

La soluzione numerica delle equazioni [2.1] e [2.4] é ottenuta tramite simulazione numerica diretta, quindi é risolta la scala di Kolmogorov ma non i dettagli del flusso attorno alla particella.

Questa semplificazione di particella puntiforme é formalmente valida per le particelle che sono piú piccole della piú piccola scala del flusso, ossia la scala di Kolmogorov [24]. Quando il numero di Reynolds della particella, in cui la velocità considerata é quella relativa tra particella e fluido, é piccolo, l'effetto degli stress sulla particella sulla particella può essere descritto usando la forza di resistenza di Stokes [6]. Sotto condizione analoghe,

il trasferimento di calore tra particella e fluido risulta essere un processo diffusivo, il quale ha una scala temporale  $r_p^2/\kappa$ . Per particelle molto piccole, questo tempo risulta essere molto minore della scala temporale di Kolmogorov, e in questo modo il trasferimento di calore é un processo quasi stazionario che conduce a un'equazione tipo quella di Newton per il trasferimento di calore [25,21].

Le statistiche del campo di temperatura si riferiscono a quello risolto del fluido, in cui il campo di temperatura di disturbo prodotto dalle particelle é trascurato. Quest'ultimo può comunque essere ricostruito a partire dalla soluzione del fluido e dalla soluzione analitica del campo di temperatura della particella.

Riassumendo, a causa della grande differenza tra la dimensione della particella e la scala di Kolmogorov, e della piccola frazione volumica, l'assunzione di particella puntiforme fornisce una buona approssimazione per il problema considerato.

# Capitolo 3

## Metodo Numerico

I parametri da inserire nel codice devono essere calcolati in funzione di quello che si vuole ottenere. Questa discrepanza é dovuta al fatto che le equazioni e il codice non sono adimensionalizzati nella stessa maniera.

I parametri che si vorrebbero fissare sono la dissipazione  $\epsilon$ , ossia quanta energia si immette nel sistema, e la viscosità  $\nu$ , che varia in base al fluido scelto.

I parametri utili al codice sono invece i punti griglia  $N$ , la dissipazione adimensionale  $\tilde{\epsilon}$ , il numero d'onda della forzante  $k_f$  e  $\eta/\Delta x$ , ossia il rapporto tra la scala di Kolmogorov e il passo di griglia, questo perché la griglia deve essere abbastanza fine da cogliere  $\eta$ .

Come detto prima si vuole controllare, da un punto di vista dimensionale, la dissipazione e la viscosità, poiché questi sono dati fisici.

Da questi due valori é immediato ottenere la scala di Kolmogorov, esprimibile come:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (3.1)$$

Il numero di Reynolds rimane però un'incognita, poiché non sono note né le fluttuazioni  $u'$  né  $\lambda$ , cioè la scala integrale di Taylor.

Attraverso la dissipazione é possibile ricavare sia l'espressione di  $\lambda$ :

$$\lambda = \left( 15\nu \frac{u'^{1/2}}{\epsilon} \right) \quad (3.2)$$

e da questa l'espressione delle fluttuazioni di velocità:

$$u' = \frac{(\epsilon l)^{1/3}}{f^{1/3}} \quad (3.3)$$

dove  $l$  é la scala integrale e la funzione  $f$  é una funzione empirica decrescente e, per  $Re_\lambda \rightarrow \infty$ , il limite ha un valore pari a circa 0.42.

I numeri di Reynolds della scala integrale e quella di Taylor sono:

$$\begin{aligned} Re_l &= \frac{u'l}{\nu} \\ Re_\lambda &= \frac{u'\lambda}{\nu} \end{aligned} \quad (3.4)$$

e, sostituendo nell'equazione l'espressione di  $u'$  in (3.3), questi divengono:

$$Re_l = f^{-1/3} \frac{\epsilon^{1/3} l^{4/3}}{\nu} \quad (3.5)$$

e

$$Re_\lambda = \sqrt{15} \frac{u'^2}{\nu^{1/2} \epsilon^{1/2}} = \frac{\sqrt{15} \epsilon^{1/6} l^{2/3}}{f^{2/3} \nu^{1/2}} \quad (3.6)$$

Una volta dedotte le relazioni tra le varie scale é possibile far comparire nelle due equazioni precedenti  $\eta$ , quindi scriverle in funzione di  $(\epsilon, \eta, \nu)$  invece che  $(\epsilon, l, \nu)$ .

Supponendo che  $f$  veri poco per i valori del numero di Reynolds considerati, é possibile esplicitare le relazioni tra le scale:

- Relazione tra  $l$  ed  $\eta$

$$\eta = \left( \frac{\eta^3}{\epsilon} \right)^{1/4} = \left( \frac{\eta^3}{f u'^3 / l} \right)^{1/4} = \left( \frac{\eta^3 l}{u'^3 f} \right)^{1/4} = \left( \frac{\eta^3 l}{u'^3 l^3} \right)^{1/4} \frac{l}{f^{1/4}} = l f^{-1/4} Re_l^{-3/4} \quad (3.7)$$

da cui si ricava

$$\frac{\eta}{l} = f^{-1/4} Re_l^{-3/4} \quad (3.8)$$

in cui il coefficiente di proporzionalitá é  $f = 1/4 \simeq 1,19$  se  $f \simeq 0,5$ .

- Relazione tra  $\lambda$  e  $l$

$$\lambda = \left( 15 \nu \frac{u'^2}{\epsilon} \right)^{1/2} = \left( 15 \frac{\nu u'^2}{u'^3 f / l} \right)^{1/2} = \left( \frac{15 \nu l}{f u'} \right)^{1/2} = \left( \frac{15}{f} \right)^{1/2} Re_l^{-1/2} l \quad (3.9)$$

da cui si ricava

$$\frac{\lambda}{l} = \alpha Re_l^{1/2} \quad (3.10)$$

con  $\alpha = \sqrt{15/f} \simeq 5,5$  se  $f \simeq 0,5$ . Si puó osservare che, moltiplicando numeratore e denominatore a primo membro per  $u'/\nu$ , si ha:

$$\frac{Re_\lambda}{Re_l} = \alpha Re_l^{-1/2} \quad (3.11)$$

ossia

$$Re_\lambda = \alpha Re_l^{1/2} \quad (3.12)$$

- Relazione tra  $\lambda$  e  $\eta$

Si considera il rapporto

$$\frac{\lambda}{\eta} = \frac{\lambda/l}{\eta/l} = \frac{\sqrt{15/f} Re_l^{-1/2}}{f^{-1/4} Re_l^{-3/4}} = \sqrt{15} f^{-1/4} Re_l^{1/4} \quad (3.13)$$

dove il coefficiente di proporzionalitá  $\sqrt{15} f^{-1/4} \simeq 4,61$  per  $f \simeq 0,5$ .

É possibile esplicitare la dipendenza di  $\lambda$  da  $\eta$  e  $l$  (nonché da  $\nu$ ) utilizzando il numero di Reynolds:

$$\lambda = \sqrt{15} f^{-1/4} \eta \left( \frac{u'l}{\eta} \right)^{1/4} = \frac{15}{f^{1/3}} l^{1/3} \eta^{2/3} \quad (3.14)$$

dove il coefficiente di proporzionalità vale  $\sqrt{15}f^{-1/3} \simeq 4,6$ .

Grazie alla relazione (3.12) é possibile riscrivere le relazioni tra le scale in termini di  $Re_\lambda$ , da cui  $Re_l = Re_\lambda^2/\alpha^2$

$$\frac{\eta}{l} = f^{-1/4} Re_l^{-3/4} = f^{-1/4} (Re_\lambda^2 \alpha^{-2})^{-3/4} = f^{-1/4} \alpha^{3/2} Re_\lambda^{-3/2} = \frac{15^{3/4}}{f} Re_\lambda^{-3/2} \quad (3.15)$$

dove  $15^{3/4}/f \simeq 1.5$ .

Inoltre

$$\frac{\lambda}{l} = \alpha Re_l^{-1/2} = \alpha (Re_\lambda^2 \alpha^{-2})^{-1/2} = \alpha^2 Re_\lambda^{-1} \quad (3.16)$$

dove  $\alpha^2 \simeq 30$

## 3.1 Adimensionalizzazione

Per adimensionalizzare le equazioni di Navier-Stokes é necessario scegliere una scala di velocità e una di lunghezza.

Il dominio considerato per le simulazioni é un cubo, la cui dimensione risulta essere molto piú grande della scala integrale del flusso in modo da non avere interferenze, evitando cioè che i vortici interagiscano con se stessi.

Invece di considerare un flusso infinito, si impone che questo sia periodico; questo vale a dire che ciò che é vero statisticamente lo sia anche istantaneamente; in altre parole, il flusso che entra nel cubo é identico a quello che esce.

Le condizioni al contorno considerate sono periodiche, e di conseguenza lo sono anche le funzioni base utilizzate. Vengono utilizzate questo tipo di condizioni al contorno poiché il flusso che si vuole simulare é statisticamente omogeneo, cioè un flusso che di fatto si sviluppa in tutto il dominio, ma le cui proprietà statistiche delle fluttuazioni sono le stesse in tutti i punti.

Il codice utilizzato presenta equazioni adimensionalizzate, quindi á necessario adimensionalizzare anche il dominio.

La scala di riferimento utilizzata per la lunghezza é proprio la scala del dominio, che risulta essere anche la migliore poiché, qualunque sia il flusso, il valore del dominio é sempre lo stesso.

Adimensionalizzando il dominio con la sua scala, il cubo utilizzato ha lunghezza dei lati uguali a uno.

Ma, come detto prima, si necessitano di condizioni al contorno periodiche, e quindi funzioni base dello stesso tipo. Le funzioni periodiche piú comode sono seno e coseno, che hanno un periodo pari a  $2\pi$ . Quindi non si adimensionalizza con la dimensione del dominio, ma con una scala che é risulta essere il lato del cubo diviso  $2\pi$  e, facendo ciò, i lati del cubo hanno lunghezza pari a  $2\pi$ .

### 3.1.1 Parte Fluida

Adimensionalizzando le equazioni in cui sono presenti le scale di riferimento  $L_R$ ,  $U_R$  e  $T_R = L_R/U_R$  per le lunghezze, velocità e tempi, nelle variabili  $\tilde{x} = x/L_R$ ,  $\tilde{u} = u/U_R$  e  $\tilde{t} = t/T_R$ , le equazioni di Navier-Stokes rimangono formalmente le stesse, con l'unica differenza che la viscosità cinematica  $\nu$ , che moltiplica il termine diffusivo, viene sostituita con  $1/Re$ , essendo:

$$Re = \frac{U_R L_R}{\nu} \quad (3.17)$$

e si può definire così la viscosità adimensionale come  $\tilde{\nu} = 1/Re$ .

I parametri di controllo (quelli da scegliere e inserire nella simulazione) sono:

- equazioni dimensionali: la viscosità  $\nu$  e la dissipazione  $\epsilon$ ;
- equazioni adimensionali: la viscosità  $\tilde{\nu}$ , la dissipazione  $\tilde{\epsilon}$  e la forzante del numero d'onda  $\tilde{\kappa}_f$ , il numero di punti griglia  $N$  ed il passo temporale  $\Delta t$ .

Tutte le altre grandezze dipendono da quelle appena sopracitate.

Per quanto riguarda gli altri parametri, la microscala di Kolmogorov  $\eta$  è fissata una volta assegnati  $\nu$  ed  $\epsilon$ , il passo di griglia  $\Delta x$  è proporzionale  $\eta$ , in modo che l'aumento della risoluzione corrisponda a un aumento delle dimensioni del dominio dimensionale (al contrario di quello adimensionale la cui ampiezza è sempre pari a  $2\pi$ ).

### 3.1.2 Forzanti

Il flusso studiato è un flusso turbolento, isotropo in velocità e stazionario. Per soddisfare quest'ultima condizione è necessario imporre una forzante, ossia inserire energia nel sistema.

Per fare ciò è necessario inserire una forza di volume nell'equazione della quantità di moto, poiché è necessario un termine che generi delle fluttuazioni. Infatti, il prodotto tra forzante e velocità non è altro che l'input di energia e questa, in condizioni mediamente stazionarie, è uguale alla dissipazione.

Le forzanti possono essere di due tipi, che verranno descritte di seguito.

#### Forzante Deterministica

Questo tipo di forzante è proporzionale alla velocità, ossia  $\rho \mathbf{f} \propto \rho \mathbf{u}$ .

Utilizzando questa forzante si conosce automaticamente il valore della dissipazione, poiché quest'ultima è pari al valor quadratico medio del prodotto scalare tra forzante e velocità. Ciò vale a dire che si può modificare il valore della forzante in modo da ottenere la dissipazione voluta.

Il termine deterministico deriva dal fatto che, con questo tipo di forzante, una volta fissate le condizioni iniziali (che sono però casuali), i risultati della simulazione sono sempre gli stessi. Questo può essere sia un vantaggio che uno svantaggio, poiché tutto è legato alle condizioni iniziali, e la qualità di queste risulta essere critica.

#### Forzante Stocastica

I coefficienti aleatori  $a \cdot \sin$  e  $b \cdot \cos$  della forzante vengono trovati risolvendo l'equazione stocastica  $\frac{da}{dt} = -\frac{s}{\tau} + b$ , dove ad ogni passo temporale il coefficiente  $b$  cambia.

Così facendo, ogni simulazione è diversa da tutte le altre, anche con condizioni iniziali uguali; questo conduce a una qualità statistica dei risultati migliori su tempi lunghi rispetto alla forzante deterministica, perché non si ha nessuna riproducibilità dei dati.

Uno degli svantaggi che si hanno, però, é quello di conoscere la dissipazione solo in forma approssimata, poiché in questo caso si conosce solo la statistica della forzante, che non é altro che la statistica dei suoi coefficienti (quindi non si può controllare l'ingresso di energia).

### 3.1.3 Pressione

In un flusso incomprimibile, la condizione di divergenza nulla é garantita dalla pressione.

Facendo la divergenza dell'equazione di quantità di moto, si ottiene che:

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad (3.18)$$

A secondo membro si ottiene la divergenza del gradiente della pressione, che non é altro che il suo Laplaciano, e la divergenza dei termini convettivi e diffusivi:

$$0 = -\nabla^2 p - \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\nu \nabla^2 \mathbf{u}) \quad (3.19)$$

quindi, trasportando il termine di pressione a primo membro:

$$\nabla^2 p = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\nu \nabla^2 \mathbf{u}) \quad (3.20)$$

Ossia, data la velocità  $\tilde{\mathbf{u}}$ , si ottiene la pressione, che andrà aggiunta in modo da garantire divergenza nulla a ogni passo temporale. In questo modo si é ottenuto un doppio vantaggio, infatti si é trovato un modo per calcolare la pressione, e si é garantito allo stesso tempo che la velocità continui a rimanere a divergenza nulla.

### 3.1.4 Procedura di Calcolo

Per ottenere i dati utili da inserire nel codice é stato utilizzato un foglio di calcolo Excel.

Come detto prima, i parametri di input sono per le variabili dimensionali la dissipazione  $\epsilon$  e la viscosità cinematica  $\nu$ , mentre per quelle adimensionali i punti di griglia  $N$ , la dissipazione adimensionale  $\tilde{\epsilon}$ , il numero d'onda  $\tilde{k}_f$  e il rapporto  $c = \eta/\Delta x$ , che definisce la risoluzione della simulazione. Tutte le altre variabili sono calcolate partendo da questi dati in modo che le due rappresentazioni, dimensionale ed adimensionale, coincidano. I passi sono i seguenti per ottenere tali variabili sono i seguenti:

1. si fissano  $\nu$  ed  $\epsilon$  dimensionali, da cui si ricava  $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}$ ;
2. si fissa la risoluzione di griglia  $N$ , da cui si ricava il passo di griglia adimensionale  $\tilde{\Delta x} = 2\pi/N$ ;
3. si fissa il rapporto  $c = \eta/\Delta x$ , da cui si ricava la scala di Kolmogorov adimensionale  $\tilde{\eta} = c\tilde{\Delta x}$ ;
4. dalla scala di Kolmogorov dimensionale e adimensionale si può ottenere la scala di riferimento per le lunghezze  $L_R$ :  $\tilde{\eta} = \eta/L_R$  da cui  $L_R = \eta/\tilde{\eta}$ ;
5. si fissa  $\tilde{\epsilon}$  da cui si ricavano  $\tilde{\nu}$ , la scala di riferimento per le velocità  $V_R$  e quella dei tempi  $T_R$ . Per ottenere la viscosità adimensionale si usa la (3.1):

$$\tilde{\nu} = \tilde{\eta}^{4/3} \tilde{\epsilon}^{-1/3} \quad (3.21)$$

e quindi il suo invero  $Re$ . Da qui si può ricavare la scala per le velocità  $U_R$ , infatti, essendo l'adimensionalizzazione della dissipazione

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{U_R^3/L_R} \quad (3.22)$$

si ottiene

$$U_R = \left( L_R \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}} \right)^{1/3} \quad (3.23)$$

e a questo punto  $T_R = L_R/U_R$

6. si fissa  $\tilde{\kappa}_f$  e si ottiene la scala integrale  $\tilde{l} = c_l \frac{2\pi}{\tilde{\kappa}_f}$ , dove  $c_l \simeq 1/1.744$ . Si può ottenere anche la scala integrale dimensionale come  $l = \tilde{l}L_R$ ;
7. si determina il valore del root mean square RMS delle velocità e la scala di Taylor. Per il RMS della velocità si considera la (3.3), da cui:

$$\tilde{u}' = (\tilde{\epsilon}\tilde{l})^{1/3} f^{-1/3} \quad (3.24)$$

mentre per la scala di Taylor adimensionale si considera l'Eq.[3.2]:

$$\tilde{\lambda} = \left( 15\tilde{\nu} \frac{\tilde{u}'^2}{\tilde{\epsilon}} \right)^{1/2} \quad (3.25)$$

e da qui si possono ottenere i numeri di Reynolds  $Re_\lambda$  e  $Re_l$  fisici.

### Passo Temporale

Il passo temporale  $\Delta t$  può essere determinato a partire dal CFL o, viceversa, il CFL dal passo temporale. Siccome si hanno solo le fluttuazioni di velocità, il CFL può essere solo uno, e questo è basato su tali fluttuazioni. Fissato il passo temporale, il CFL si ottiene come:

$$CFL = \frac{3}{4} \frac{\tilde{u}'\tilde{\Delta}t}{2\pi} N = \frac{3}{4} \frac{\tilde{u}'\tilde{\Delta}t}{(2\pi)/N} = \frac{3}{4} \frac{\tilde{u}'\tilde{\Delta}t}{\tilde{\Delta}x} \quad (3.26)$$

### 3.1.5 Particelle

Per quanto riguarda le particelle il codice chiede di fornire il raggio adimensionale, il rapporto di densità tra particella e fluido e il loro rapporto tra i calori specifici. Fisicamente si vuole, però, fissare il numero di Stokes ed il numero di Stokes termico delle particelle. Nelle simulazioni vengono considerate particelle a raggio costante, per cui il parametro fondamentale è il numero di Stokes, si tratta quindi di scegliere il raggio che fornisce il numero di Stokes corretto. Poiché il tempo di rilassamento è:

$$\tau_u = \frac{2}{9} \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{R^2}{\nu} \quad (3.27)$$

tale equazione adimensionalizzata, che è quella che risolve il codice, è:

$$\tilde{\tau}_u = \frac{2}{9} \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{\tilde{R}^2}{\tilde{\nu}} \quad (3.28)$$

Poiché la scala temporale di Kolmogorov é:

$$\tilde{\tau}_\eta = \left( \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\eta}} \right)^{1/2} \quad (3.29)$$

si tratta di valutare

$$\tilde{\tau}_u = St\tilde{\tau}_\eta \quad (3.30)$$

e quindi

$$\tilde{R} = \left( \frac{9}{2} \tilde{\nu} \frac{\rho_f}{\rho_p} St\tilde{\tau}_\eta \right)^{1/2} \quad (3.31)$$



# Capitolo 4

## Codice

Il codice GradScal permette di aggiungere un gradiente di scalare medio e, in questo caso specifico, si é scelto come scalare la temperatura. Ciò significa che la temperatura non fluttua attorno ad un valore fissato, ma nel sistema é imposta una forzante che permette di aggiungere delle fluttuazioni.

La forzante sulla temperatura é data dalla presenza di un gradiente di scalare medio, il quale produce delle fluttuazioni di temperatura. La forzante sulla velocità é sempre di tipo deterministico.

Queste fluttuazioni di temperatura vengono trasportate dal flusso e dissipate dalla diffusione, la quale tende a rendere tutto il sistema uniforme; in questo modo si ha un bilancio tra la generazione e la dissipazione, mantenendo il valor medio della temperatura nel dominio costante.

A causa della presenza di un gradiente medio costante di temperatura, la temperatura non é piú periodica, e questo porta a dei problemi riguardanti le condizioni al contorno che, come detto prima, sono periodiche.

Per ovviare a questo problema, ciò che é considerato periodico non piú la temperatura, ma le sue fluttuazioni. Quindi, considerando un flusso omogeneo nelle fluttuazioni, é possibile utilizzare condizioni al contorno di periodicità.

La dinamica del campo di scalare passivo é governata dall'equazione di convezione-diffusione:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} = \kappa \nabla^2 \Theta \quad (4.1)$$

Dove  $\kappa$  é la diffusività, in questo caso termica poiché si sta considerando la temperatura, e  $u$  é la velocità.

### 4.1 Equazioni Base

Le equazioni di Navier-Stokes del fluido, quando sono presenti delle forzanti e sono immerse in esso delle particelle, si scrivono come:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i + f_i + C_{u,i} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 T + f_T + C_T \quad (4.3)$$

dove  $f_i$  e  $f_T$  sono le forzanti e  $C_{u,i}$  e  $C_T$  rappresentano la retrazione delle particelle; inoltre, la pressione presente nell'equazione della quantità é già stata divisa per la densità del fluido. Le equazioni per le particelle sono, invece:

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{v}_p}{\tau_p} \quad (4.4)$$

$$\frac{d\theta_p}{dt} = \frac{T(\mathbf{x}_p, t) - \theta_p}{\tau_\theta} \quad (4.5)$$

dove  $\tau_p$  e  $\tau_\theta$  rappresentano, rispettivamente, i tempi di rilassamento cinematico e termico.

## 4.2 Equazioni Adimensionalizzate

Per adimensionalizzare le equazioni di Navier-Stokes si devono prendere tre grandezze di riferimento, che sono una lunghezza  $L$ , una velocità  $U$  e una differenza di temperatura  $\Theta$ . Le equazioni a questo punto diventano:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_i + f_i + C_{u,i} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{ScRe} \nabla^2 T + f_T + C_T \quad (4.7)$$

Le equazioni delle particelle rimangono formalmente identiche, gli unici termini che variano sono i tempi di rilassamento, che vengono sostituiti dagli equivalenti adimensionali.

$$\tau_p^* = \frac{U}{L} \tau_p = \frac{2 \rho_p R^2 U}{9 \rho_f \nu L} = \frac{2 \rho_p}{9 \rho_f} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{UL}{\nu} = \frac{2 \rho_p}{9 \rho_f} \frac{R^{*2}}{Re^{-1}} \quad (4.8)$$

$$\tau_\theta^* = \frac{U}{L} \tau_\theta = \frac{1 \rho_p c_p}{3 \rho_f c_f} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{UL}{\kappa} = \frac{1 \rho_p c_p}{9 \rho_f c_f} \frac{R^{*2}}{(ScRe)^{-1}} \quad (4.9)$$

ovvero le stesse defi

nizioni ma in cui il raggio  $R$  é stato sostituito dal raggio adimensionale  $R^* = R/L$ , la viscosità cinematica  $\nu$  sostituita da  $1/Re$  e  $\kappa$  da  $1/(ReSc)$ .

## 4.3 Equazioni di Navier-Stokes e delle Particelle in Presenza di Gradiente Uniforme

### 4.3.1 Equazioni Base

In questo caso non é piú presente le forzante sulla temperatura, ma un gradiente medio di quest'ultima che viene mantenuto costante. Questo, come detto prima, rappresenta una forzante per il flusso. Le equazioni di Navier-Stokes divengono:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i + f_i + C_{u,i} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 T + C_T \quad (4.11)$$

L'equazione della temperatura, essendo il suo gradiente costante, si può scrivere come:

$$T = \Gamma x + T' \quad (4.12)$$

Dove  $\Gamma x$  rappresenta il gradiente di temperatura e  $T'$  le fluttuazioni di questa.

Sostituendo questa espressione nell'equazione di convezione-diffusione considerando appunto come scalare passivo la temperatura, si ottiene un'equazione in  $T'$ .

Considerando solo l'equazione nella direzione del gradiente si ottiene:

$$\frac{DT'}{Dt} = \kappa \nabla^2 T' - u\Gamma \quad (4.13)$$

L'ultimo termine a destra dell'uguale rappresenta il termine forzante, ossia quello che genera le fluttuazioni di temperatura.

Per capire come si sono generate le fluttuazioni si moltiplica l'Eq.(4.13) per la fluttuazione  $T'$ :

$$T' \frac{DT'}{Dt} = T' (\kappa \nabla^2 T' - u\Gamma) \quad (4.14)$$

che si può riscrivere come::

$$\frac{D \frac{T'^2}{2}}{Dt} = T' (\kappa \nabla^2 T' - u\Gamma) \quad (4.15)$$

Il termine a sinistra dell'uguale rappresenta la derivata materiale della varianza di  $T'$ , mentre l'ultimo termine, in particolare  $uT'$ , è il termine sorgente che genera le fluttuazioni, poiché genera varianza.

La presenza di questo gradiente di scalare genera un flusso disomogeneo in temperatura lungo la direzione del gradiente stesso, poiché in questa direzione si ha un flusso di calore. Se questo non fosse presente, cioè in caso di flusso fermo o laminare, il flusso di calore si esprime utilizzando l'equazione di Fourier per la diffusione:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 t \quad (4.16)$$

Quando è presente la turbolenza il numero di Knudsen è maggiore di uno, poiché le fluttuazioni turbolente trasportano le varie grandezze, fra cui energia interna, energia cinetica e quantità di moto, e ciò provoca un aumento del flusso di calore rispetto al caso non turbolento.

Se nel flusso vengono immesse delle particelle, avendo queste hanno una propria inerzia e di conseguenza potendosi muovere in modo parzialmente indipendente dal flusso, contribuiscono allo scambio termico.

Queste particelle sono molto più piccole della scala di Kolmogorov, e quindi il flusso intorno a loro può essere considerato uniforme. Inoltre, avendo un numero di Reynolds del moto relativo molto basso, l'interazione tra la particella e il fluido può essere approssimata trascurando i termini inerziali.

Analogamente, risolvendo l'equazione della temperatura attorno alla particella, definita come  $\theta$ , si possono trascurare i termini inerziali ottenendo così l'equazione di Fourier della diffusione:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \theta \quad (4.17)$$

Avendo trascurato i termini inerziali, la derivata materiale si é ridotta alla sola derivata parziale nel tempo.

Questa equazione ha una soluzione che é analoga a quella di Stokes, dove la resistenza é proporzionale alla differenza di velocità tra particella e fluido, ossia il flusso di calore é proporzionale alla differenza di temperatura tra la particella e il fluido. Le equazioni, in questo modo, risultano essere lineari.

Nel codice utilizzato sono state modificate sia l'equazione per la temperatura del fluido che per la temperatura della particella.

La variazione di temperatura della particella può essere espressa come:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k(T - \theta) \quad (4.18)$$

dove  $k$  rappresenta una costante. Analogamente a quanto fatto per il fluido, la temperatura della particella può essere espressa come:

$$\theta = \Gamma u + \theta' \quad (4.19)$$

e, facendone la derivata:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \Gamma \mathbf{u}_p \quad (4.20)$$

dove  $\mathbf{u}_p$  rappresenta la velocità relativa della particella rispetto al fluido.

Sostituendo in questa equazione l'espressione per la variazione di temperatura della particella data nell'Eq.[4.18], si ottiene l'equazione della temperatura per la particella:

$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{T'(\mathbf{x}_p, t) - \theta'}{\tau_\theta} - \Gamma v_{p,3} \quad (4.21)$$

### 4.3.2 Equazioni Adimensionali

Le equazioni di bilancio della quantità di moto non sono modificate dal gradiente medio di temperatura, quindi queste rimangono invariate. Per adimensionalizzare le equazioni vengono sempre scelte una scala di lunghezza  $L_R$ , una di velocità  $U_R$  e una di temperatura  $T_R$ . Quest'ultima può essere espressa come  $T_R = \Gamma L_R$ , sicché l'equazione adimensionale per  $T'$  diviene:

$$\frac{D\tilde{T}'}{D\tilde{t}} = \frac{1}{Pe} \tilde{\nabla}^2 \tilde{T}' - \tilde{u}_3 \quad (4.22)$$

mentre per la temperatura delle particelle si ha, analogamente:

$$\frac{d\tilde{\theta}'}{dt} = \frac{\tilde{T}'(\mathbf{x}_p, t) - \theta'}{\tau_\theta^*} - \tilde{v}_{p,3} \quad (4.23)$$

dove  $\tau_p^* = \tau_p U/L$  é il tempo di rilassamento termico adimensionale.

## 4.4 Statistiche

Facendo la media dell'equazione per le fluttuazioni di temperatura del fluido si ottiene:

$$\frac{D\langle\tilde{T}'\rangle}{D\tilde{t}} = \frac{1}{Pe} \tilde{\nabla}^2 \langle\tilde{T}'\rangle - \langle\tilde{u}_3\rangle \quad (4.24)$$

La media della velocità risulta essere nulla poiché il flusso considerato presenta turbolenza omogenea e isotropa in velocità.

Esplicitando la derivata totale e scrivendo l'equazione nella sola direzione del gradiente, qui assunta come  $x_3$ , si ha:

$$\frac{\partial\langle\tilde{T}'\rangle}{\partial\tilde{t}} + \frac{\partial\langle\tilde{T}'u_3\rangle}{\partial\tilde{x}_3} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2\langle\tilde{T}'\rangle}{\partial\tilde{x}_3^2} \quad (4.25)$$

Effettuando una decomposizione alla Reynolds sull'espressione della temperatura del fluido, questa diviene:

$$T = \langle T \rangle + T' \quad (4.26)$$

Moltiplicando questa equazione per la velocità  $u_3$  e facendone la media si ottiene:

$$\langle Tu_3 \rangle = \langle\langle T \rangle u_3\rangle + \langle T' u_3 \rangle \quad (4.27)$$

Da questa si può notare che il flusso  $\langle Tu_3 \rangle$  è pari al flusso delle fluttuazioni  $\langle T' u_3 \rangle$ , poi che nel primo termine a destra è presente la media della velocità, che risulta essere sempre nulla per le ipotesi sopracitate.

Scrivendo l'equazione della temperatura per le fluttuazioni utilizzando la decomposizione alla Reynolds, quindi scrivendo  $T' = T - \langle T \rangle$ , si ottiene:

$$\frac{\partial(T - \langle T \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial Tu_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Tu_2}{\partial x_2} + \frac{\partial(Tu_3 - \langle T' u_3 \rangle)}{\partial x_3} = \frac{1}{Pe} \nabla^2(T - \langle T \rangle) - u_3 \quad (4.28)$$

Moltiplicando questa equazioni per la fluttuazione  $T'$  e scrivendo la temperatura come  $T = \langle T \rangle + T'$ :

$$T' \frac{\partial(T - \langle T \rangle)}{\partial t} + T' \frac{\partial(\langle T \rangle + T')u_1}{\partial x_1} + T' \frac{\partial(\langle T \rangle + T')u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial(\langle T \rangle + T')u_3 - \langle T' u_3 \rangle}{\partial x_3} = \frac{1}{Pe} T' \nabla^2 T' - T' u_3 \quad (4.29)$$

Il primo termine a sinistra può essere scritto come:

$$T' \frac{\partial(T - \langle T \rangle)}{\partial t} = \frac{\partial T'^2 / 2}{\partial t} \quad (4.30)$$

mentre il primo a sinistra dell'uguale come:

$$T' \nabla^2 T' = \nabla^2 T'^2 / 2 - \nabla T' \cdot \nabla T' \quad (4.31)$$

Facendone la media si ottiene:

$$\frac{\partial\langle T'^2 \rangle / 2}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} (T' \langle T \rangle u_1 + T'^2 u_1) \right\rangle - \langle (\langle T \rangle + T') u_1 \frac{\partial T'}{\partial x_1} \rangle + ecc. = \frac{1}{Pe} \nabla^2 \langle T'^2 \rangle / 2 - \frac{1}{Pe} \langle |\nabla T'|^2 \rangle - \langle u_3 T' \rangle \quad (4.32)$$

I termini che si annullano in questa equazione sono:

- $T' \frac{\partial}{\partial x_j} (-\langle T' u_j \rangle)$ , poiché il termine tra parentesi risulta essere un termine costante;

- $T' \frac{\partial}{\partial x_j} (-\langle T' \rangle u_j)$ , poiché il termine  $\langle T' \rangle$  é nullo, ciò é dovuto al fatto che la temperatura é costante.

L'equazione di partenza si riduce, cosí, a:

$$\frac{\partial \langle T'^2 \rangle}{\partial t} \frac{1}{2} + \frac{\partial \langle T'^2 u_j \rangle}{\partial x_j} = \frac{1}{Pe} \nabla^2 \langle T'^2 \rangle - \langle u_3 T' \rangle - \frac{1}{Pe} \langle |\nabla T'|^2 \rangle \quad (4.33)$$

ma, poiché il flusso turbolento risulta essere stazionario e omogeneo, l'equazione si riduce ulteriormente a:

$$0 = -\langle u_3 T' \rangle - \frac{1}{Pe} \langle |\nabla T'|^2 \rangle \quad (4.34)$$

ossia, in condizioni mediamente stazionarie ed in assenza di particelle, l'energia fornita dalla forzante é pari alla dissipazione della varianza dello scalare. Ciò significa che le fluttuazioni di temperatura aumentano o diminuiscono finché non si arriva a una condizione di equilibrio.

Quando questi due termini non sono uguali vuol dire che é presente un flusso di calore, esprimibile come:

$$\phi_j = \frac{1}{Pe} \frac{\partial T'}{\partial x_j} - u_j T' \quad (4.35)$$

Il flusso medio di calore risulta non essere nullo solo nella direzione in cui é presente il gradiente:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{1,2} \rangle &= 0 \\ \langle \phi_3 \rangle &= -\langle u_3 T' \rangle \end{aligned} \quad (4.36)$$

#### 4.4.1 Dipendenza del Numero di Nusselt

Il numero di Nusselt  $Nu$  é il gruppo adimensionale che esprime il rapporto tra il flusso di calore scambiato per convezione e il flusso di calore scambiato per conduzione.

Questo può essere espresso come:

$$Nu = \frac{\rho c_p \langle u_3 T' \rangle}{\lambda \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_3}} \quad (4.37)$$

Come detto prima la temperatura può essere espressa come  $T = \Gamma x_3 + T'$  e, inserendola nell'equazione precedente, questa diventa:

$$Nu = \frac{\rho c_p \langle u_3 T' \rangle}{\lambda \Gamma} \quad (4.38)$$

Adimensionalizzando l'equazione precedente si ottiene:

$$Nu = \frac{\rho c_p U_R T_R \langle \tilde{u}_3 \tilde{T}' \rangle}{\lambda \Gamma} \quad (4.39)$$

e, ponendo  $T_R = \Gamma L_R$ :

$$Nu = \frac{\rho c_p U_R L_R \langle \tilde{u}_3 \tilde{T}' \rangle}{\lambda} \quad (4.40)$$

Introducendo la conducibilitá termica, che può essere espressa come  $k = \lambda / (\rho c_p)$ , si ottiene l'espressione adimensionale del numero di Nusselt:

$$Nu = 1 + \frac{1}{k} U_R L_R \langle \tilde{u}_3 T' \rangle \quad (4.41)$$

ma  $\frac{1}{k} U_R L_R$  é pari al numero di Peclet, quindi:

$$Nu = 1 + Pe \langle \tilde{u}_3 T' \rangle \quad (4.42)$$

Quando nel flusso vengono introdotte le particelle, anche queste hanno un effetto sul numero di Nusselt, che diventa:

$$Nu = 1 + Pe \langle \tilde{u}_3 T' \rangle + Pe \phi \frac{\rho_p c_p}{\rho_f c_f} \langle \theta v_{3,p} \rangle \quad (4.43)$$

dove  $\rho_p$  e  $\rho_f$  rappresentano la densità della particella e del fluido,  $c_p$  e  $c_f$  i loro calori specifici e  $\phi$  la frazione volumica.



# Capitolo 5

## Risultati

In questo capitolo verranno mostrati i risultati ottenuti dalle varie simulazioni. In particolare i parametri variati in queste sono stati il numero di Stokes, in particolare i casi di  $St = 0.2$ ,  $St = 0.3$ ,  $St = 0.5$ ,  $St = 1$  e  $St = 2$ , mantenendo costante il rapporto fra calore specifico della particella e del fluido a un valore di 4.16. Per i numero di Stokes pari a 0.2, 0.3 e 0.5 sono state effettuate simulazioni mantenendo il numero di Stokes costante e facendo variare il numero di Stokes termico. Di seguito, vengono riportate le caratteristiche dei flussi esaminati.

St	Numero Particelle	Raggio	$\phi$	$St_\theta$	$St_\theta/St$	$c_p/c_f$	Materiale
0.2	6258227	$9.81 \cdot 10^{-04}$	$1 \cdot 10^{-4}$	0.2	1	1.5	Acetali
				0.6	3	2	Ghiaccio (0 °)
				0.9	4.5	3	Paraffina
				1.2	6	4.16	Acqua (20 °)
				1.5	7.5	5	Ammoniaca
				2	10	6.67	
0.3	3406547	$1.202 \cdot 10^{-03}$	$1 \cdot 10^{-4}$	0.2	0.67	0.44	Ossa
				0.6	2	1.33	Cellulosa
				0.9	3	2	Sughero
				1.2	4	2.67	Alcol
				1.5	5	3.33	Paraffina
				1.8	6	4.16	Acqua (20°)
				2	10	6.67	
0.5	1583200	$1.552 \cdot 10^{-03}$	$1 \cdot 10^{-4}$	0.2	0.4	0.27	Bario
				0.6	1.2	0.8	Fosforo
				0.9	1.8	1.2	Policarbonati
				1.2	2.4	1.6	Cenere
				1.5	3	2	Sughero
				2	4	2.67	Alcol
				3	6	4.16	Acqua (20°)
1	559752	$2.195 \cdot 10^{-03}$	$1 \cdot 10^{-4}$	6	6	4.16	Acqua (20°)
2	197902	$3.105 \cdot 10^{-03}$	$1 \cdot 10^{-4}$	3	6	4.16	Acqua (20°)

## 5.1 Stato Stazionario

I seguenti grafici mostrano l'andamento della varianza della temperatura per diversi numeri di Stokes.

### 5.1.1 Caso $St = 0.2$

I seguenti grafici mostrano l'andamento della varianza della temperatura per simulazioni con numero di Stokes pari a 02 e Stokes termico variabile.

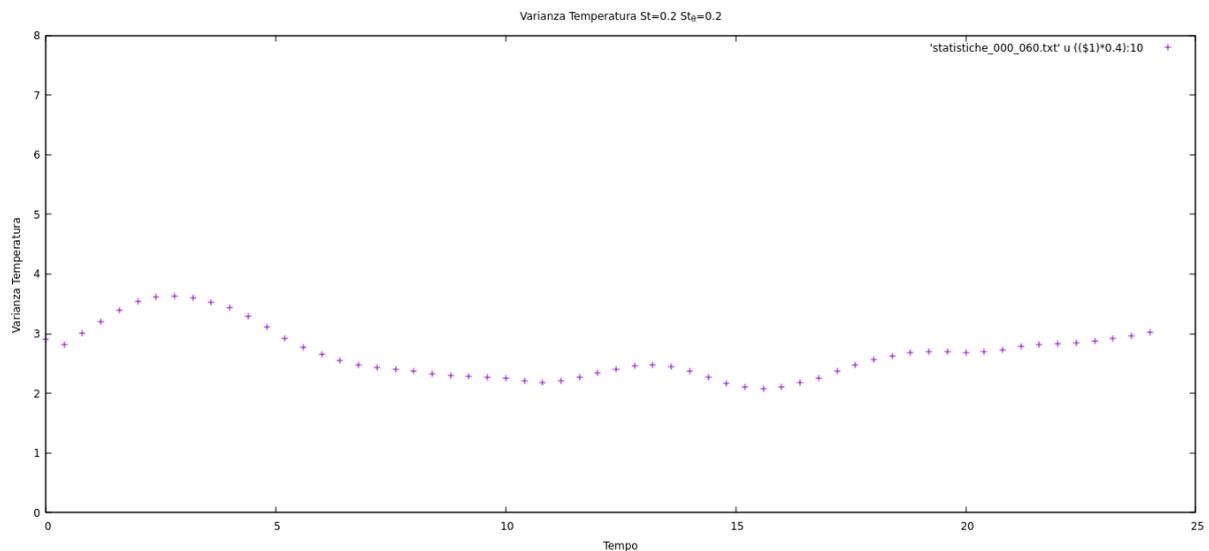
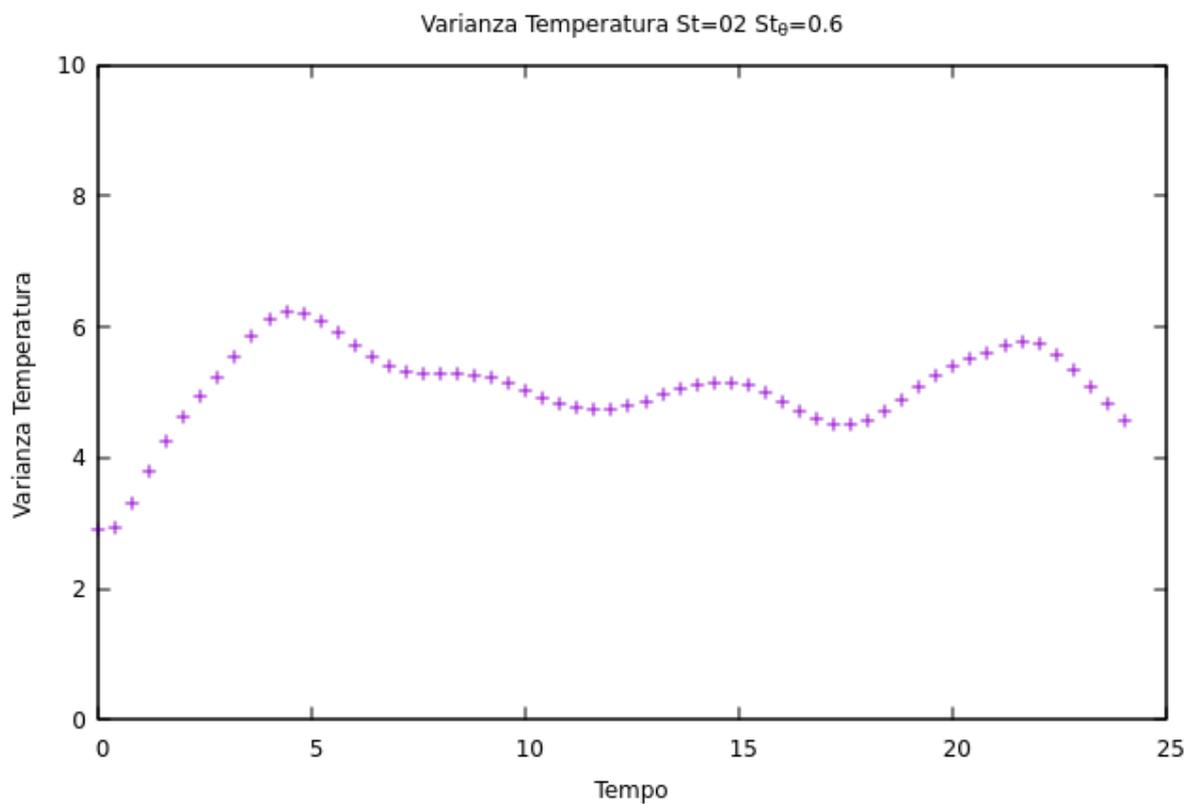
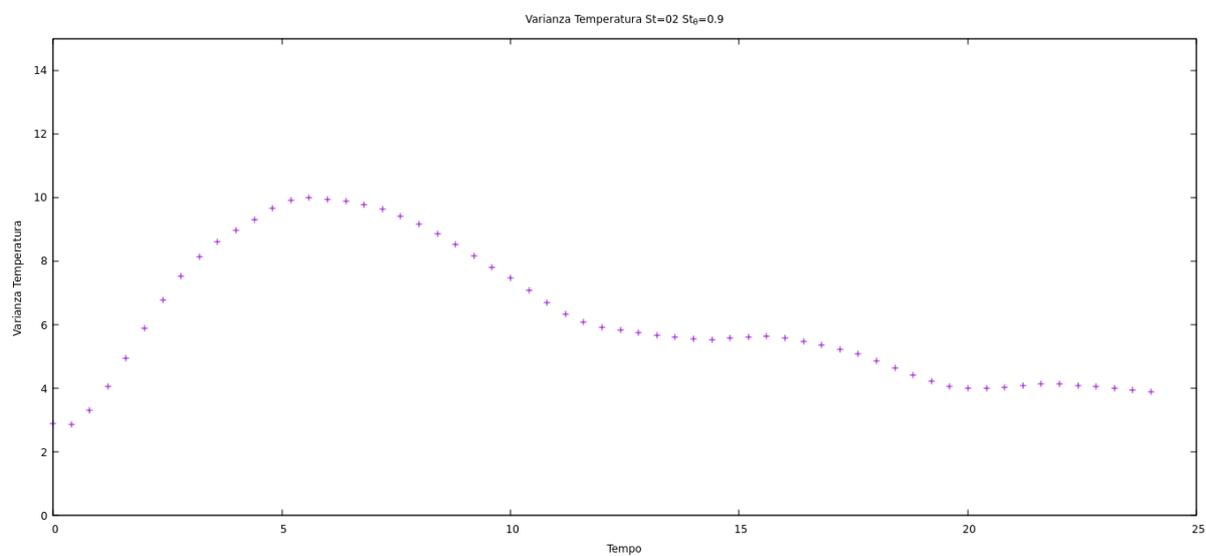
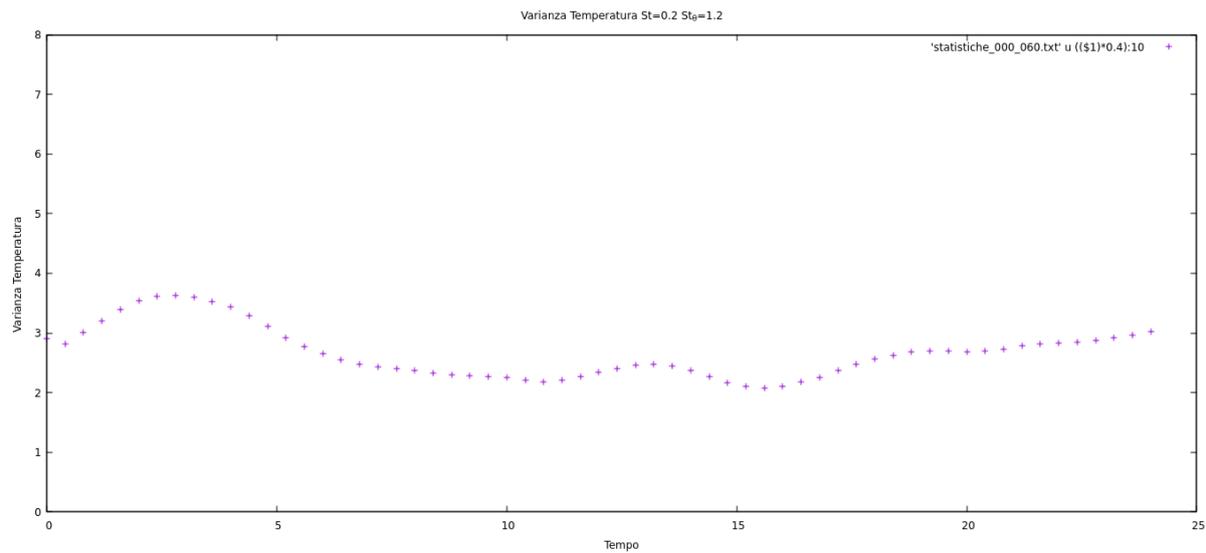
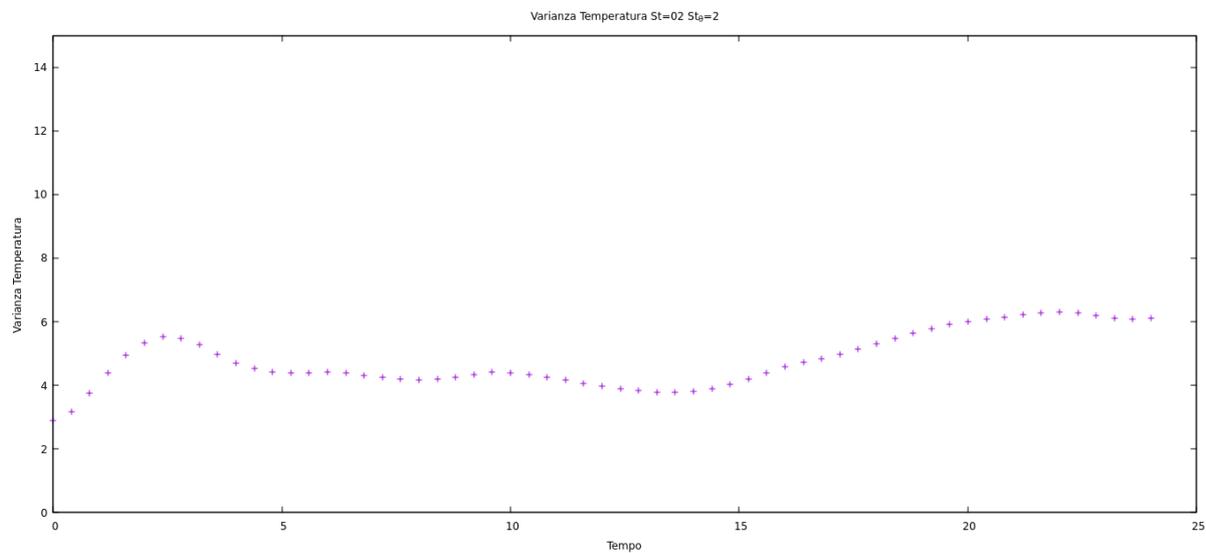
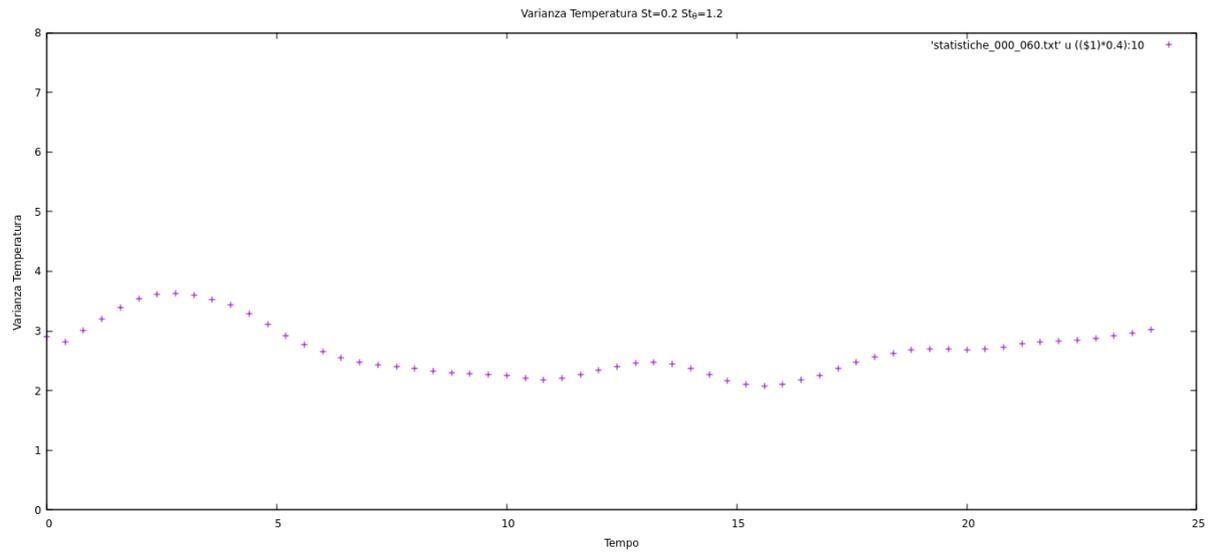


Figura 5.1:  $St = 0.2$  e  $St_\theta = 0.2$

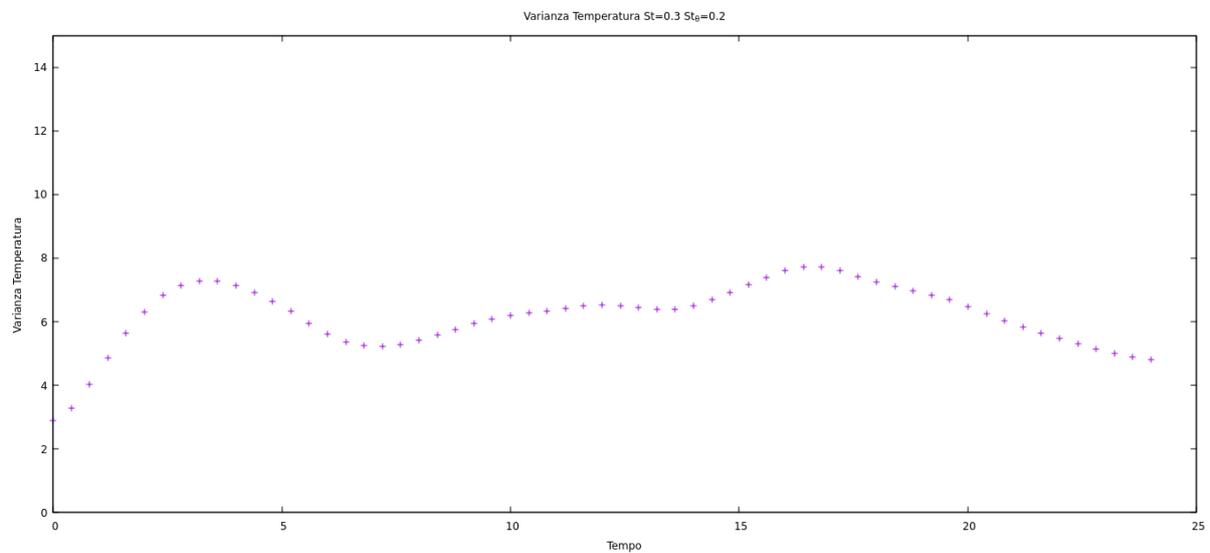
Figura 5.2:  $St = 0.2$  e  $St_\theta = 0.6$ Figura 5.3:  $St = 0.2$  e  $St_\theta = 0.9$

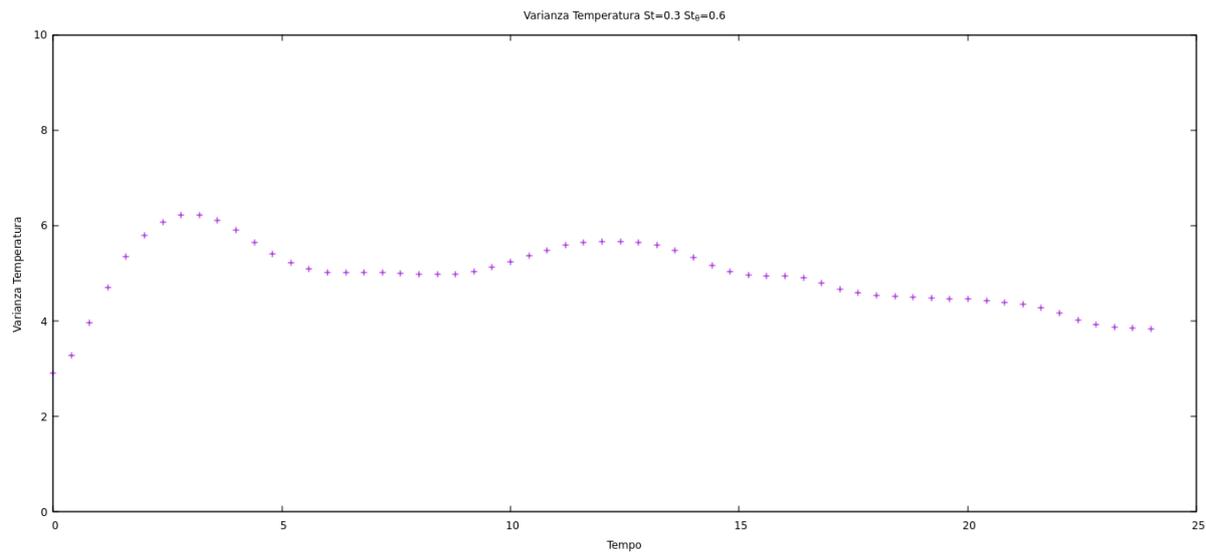
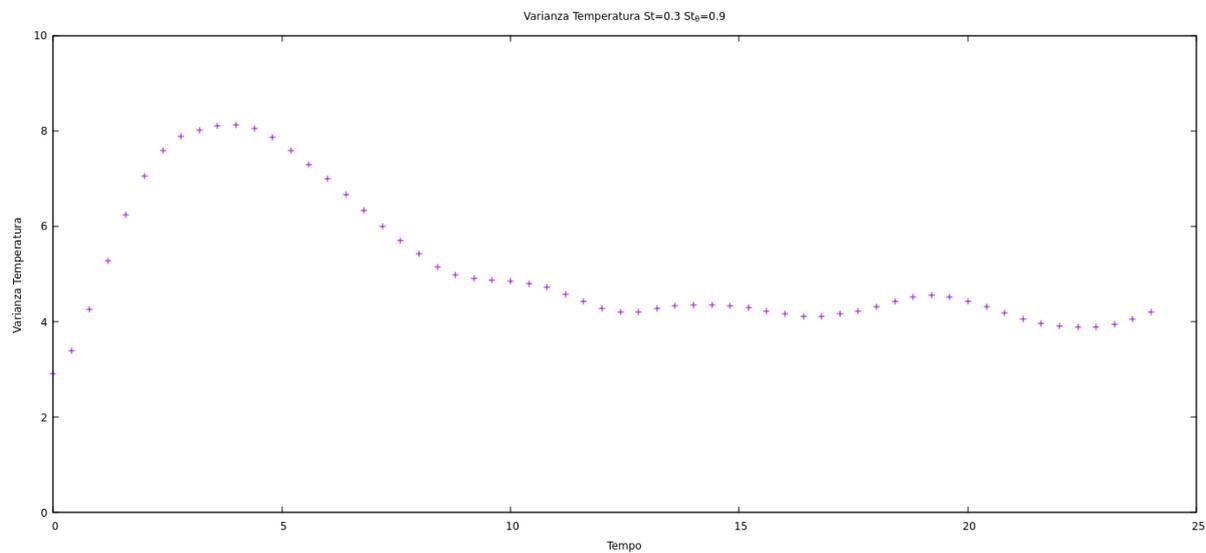
Figura 5.4:  $St = 0.2$  e  $St_\theta = 1.2$ Figura 5.5:  $St = 0.2$  e  $St_\theta = 2$

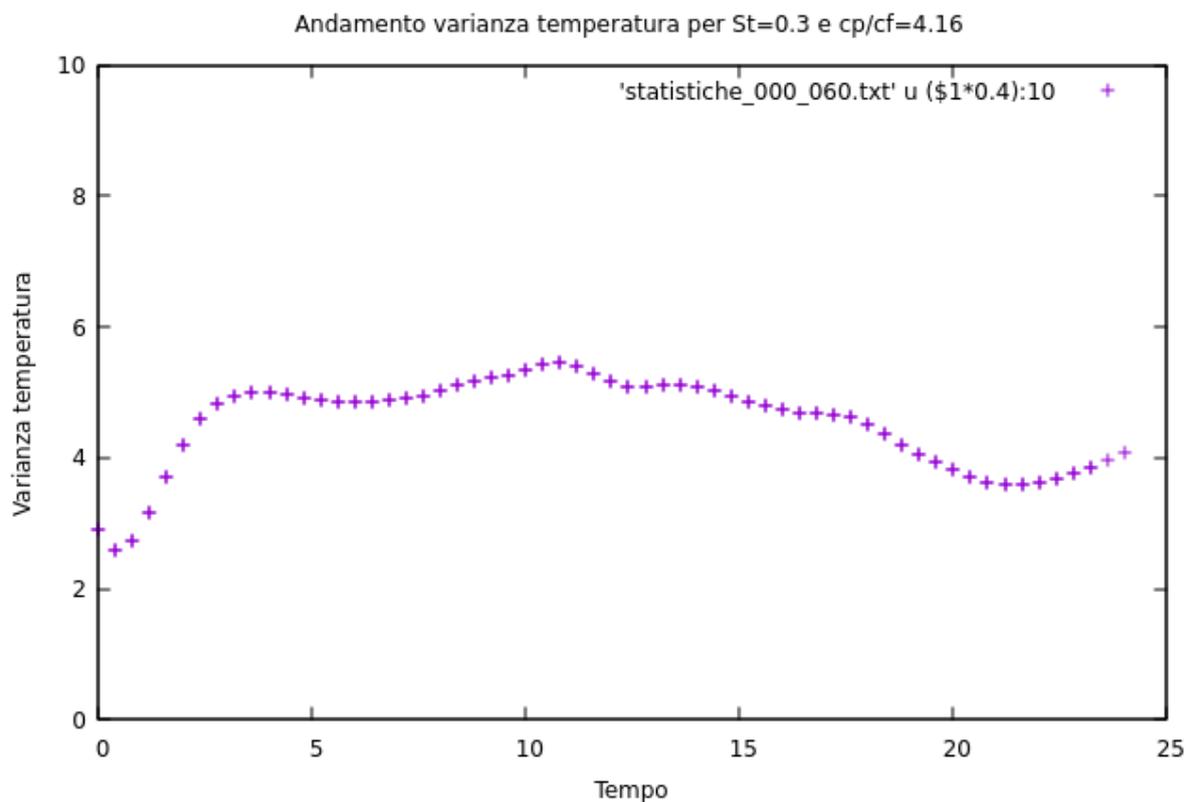
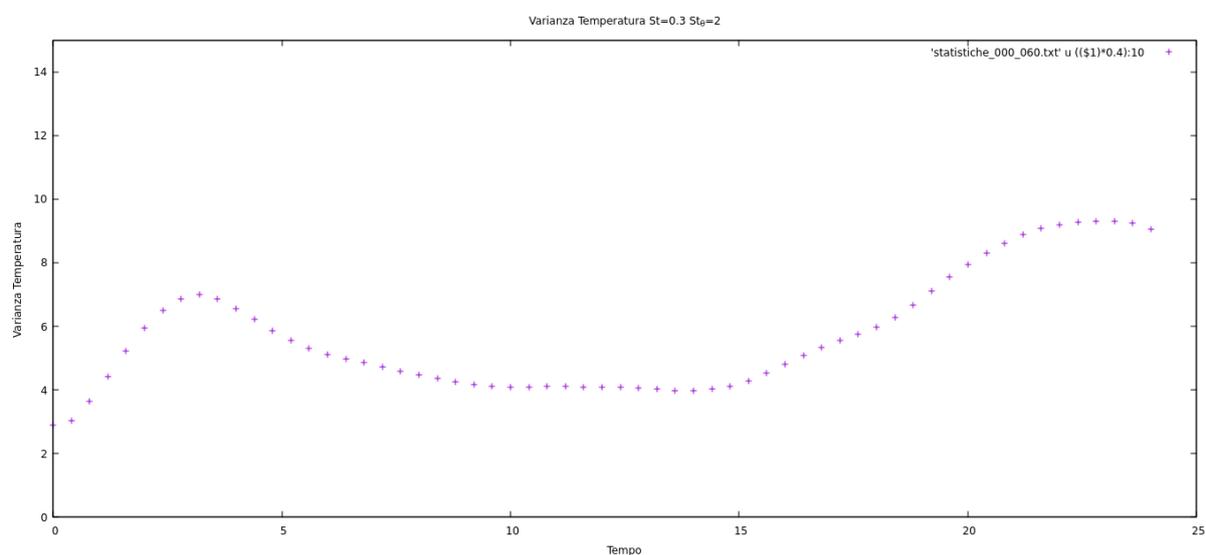
Figura 5.6:  $St = 0.2$  e  $St_{\theta} = 1.2$ 

### 5.1.2 Caso $St = 0.3$

I seguenti grafici mostrano l'andamento della varianza della temperatura per simulazioni con numero di Stokes pari a 0.3 e Stokes termico variabile.

Figura 5.7:  $St = 0.3$  e  $St_{\theta} = 0.2$

Figura 5.8:  $St = 0.3$  e  $St_{\theta} = 0.6$ Figura 5.9:  $St = 0.3$  e  $St_{\theta} = 0.9$

Figura 5.10:  $St = 0.3$  e  $St_\theta = 1.8$ Figura 5.11:  $St = 0.3$  e  $St_\theta = 2$ 

### 5.1.3 Caso $St = 0.5$

I seguenti grafici mostrano l'andamento della varianza della temperatura per simulazioni con numero di Stokes pari a 0.5 e Stokes termico variabile.

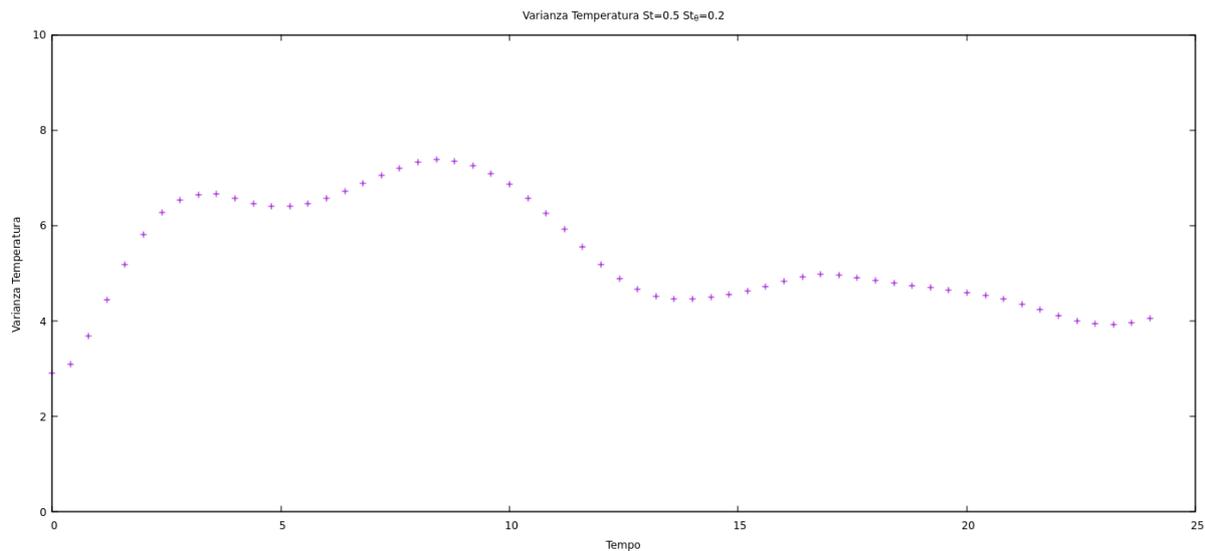


Figura 5.12:  $St = 0.5$  e  $St_\theta = 0.2$

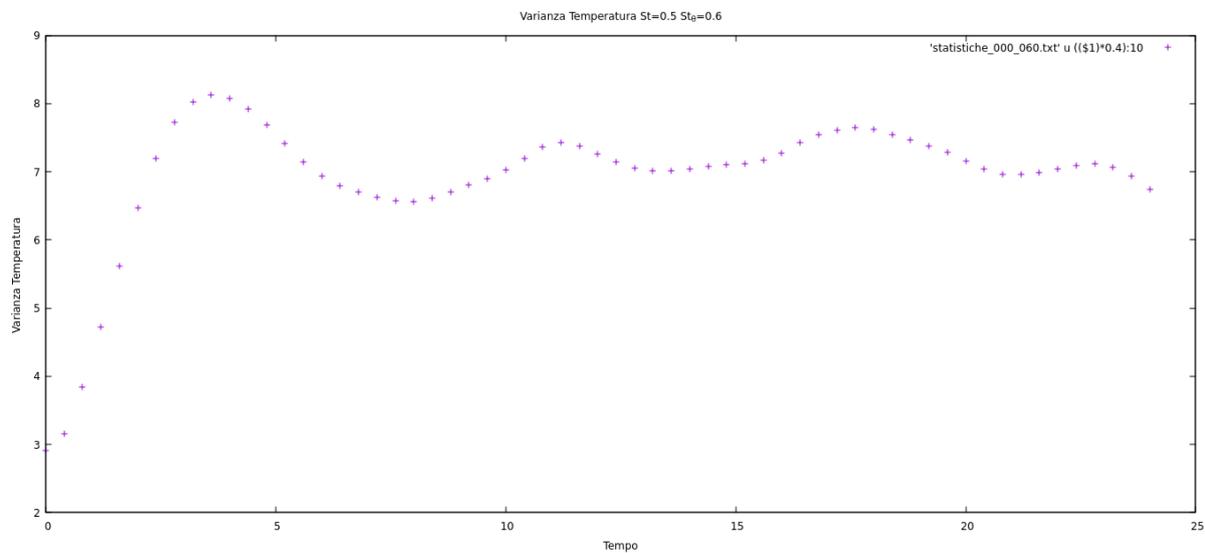
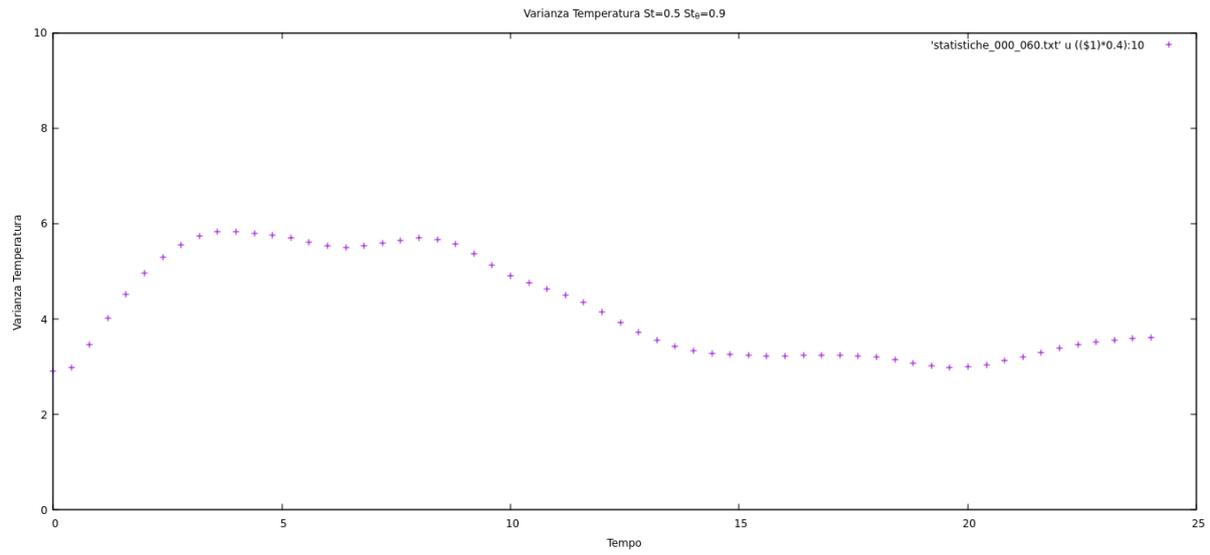
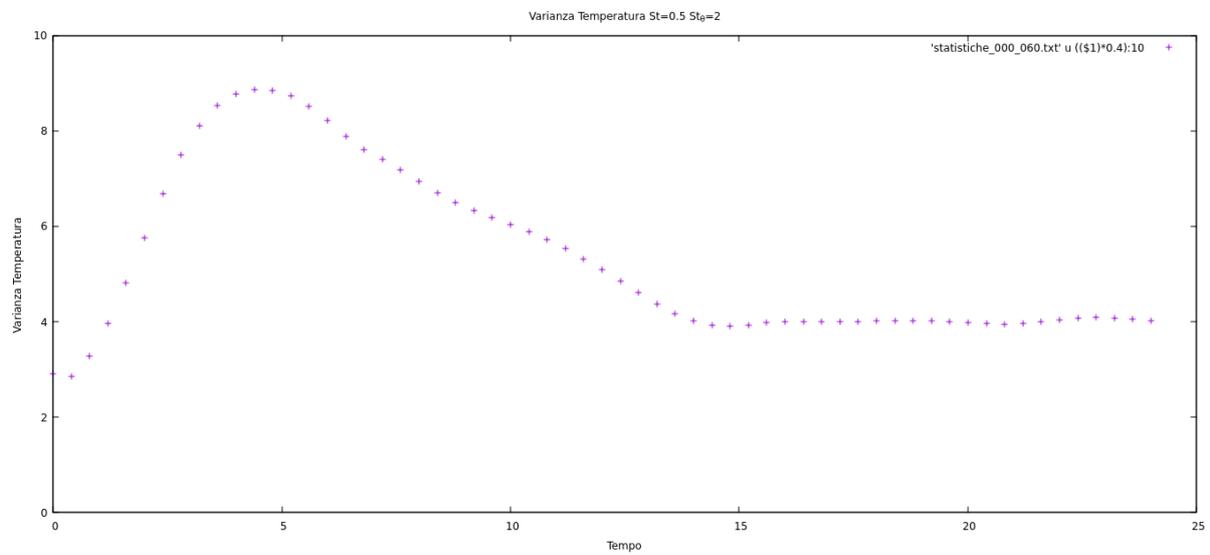
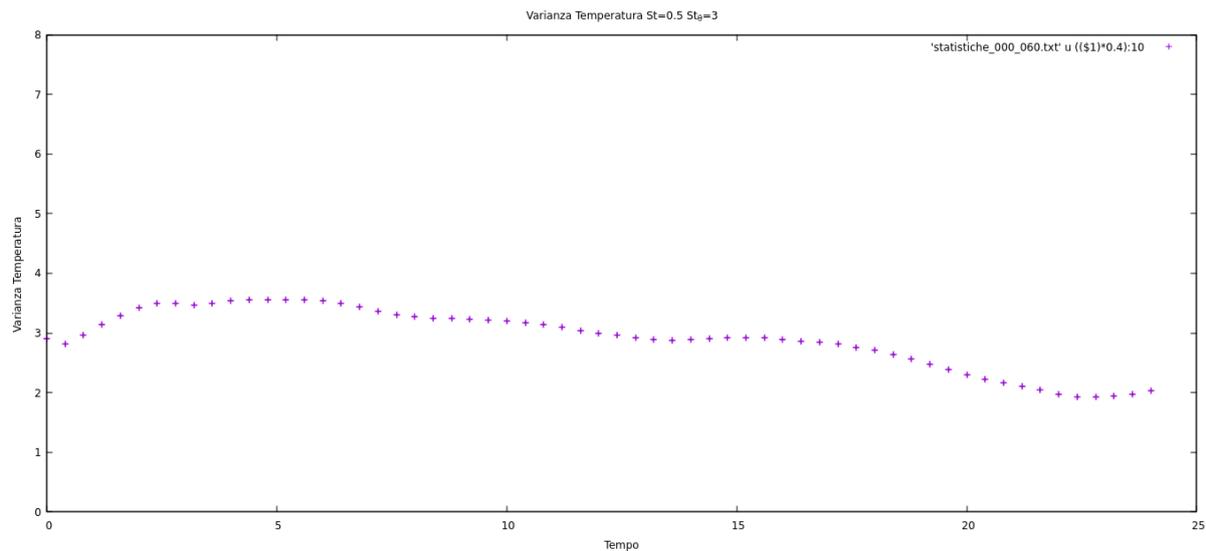


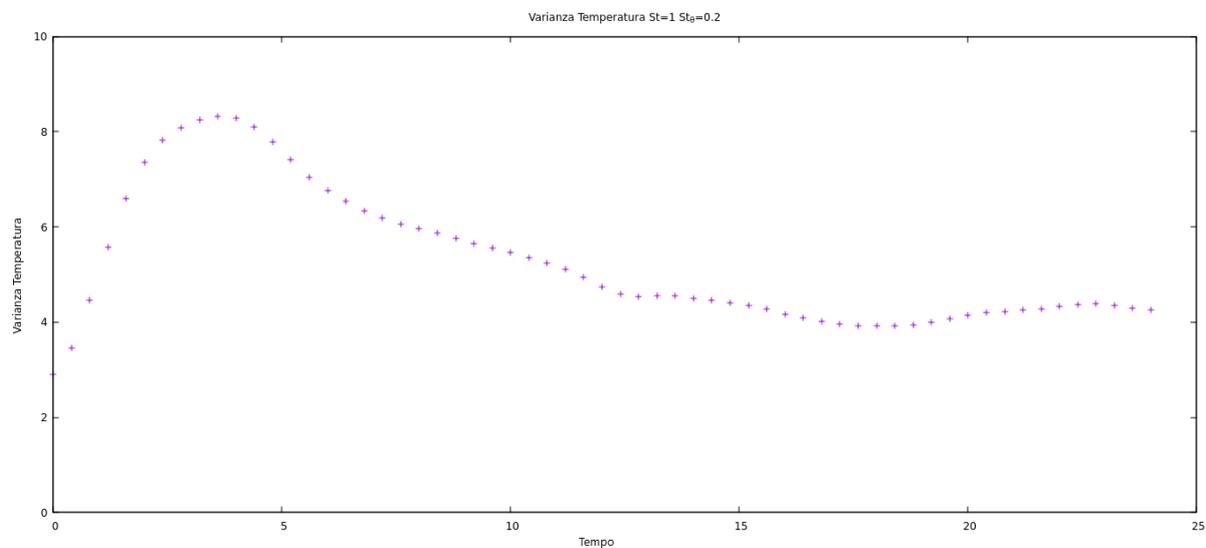
Figura 5.13:  $St = 0.5$  e  $St_\theta = 0.6$

Figura 5.14:  $St = 0.5$  e  $St_{\theta} = 0.9$ Figura 5.15:  $St = 0.5$  e  $St_{\theta} = 2$

Figura 5.16:  $St = 0.5$  e  $St_{\theta} = 3$ 

#### 5.1.4 Caso $St = 1$

I seguenti grafici mostrano l'andamento della varianza della temperatura per simulazioni con numero di Stokes pari a 1 e Stokes termico variabile.

Figura 5.17:  $St = 1$  e  $St_{\theta} = 0.2$

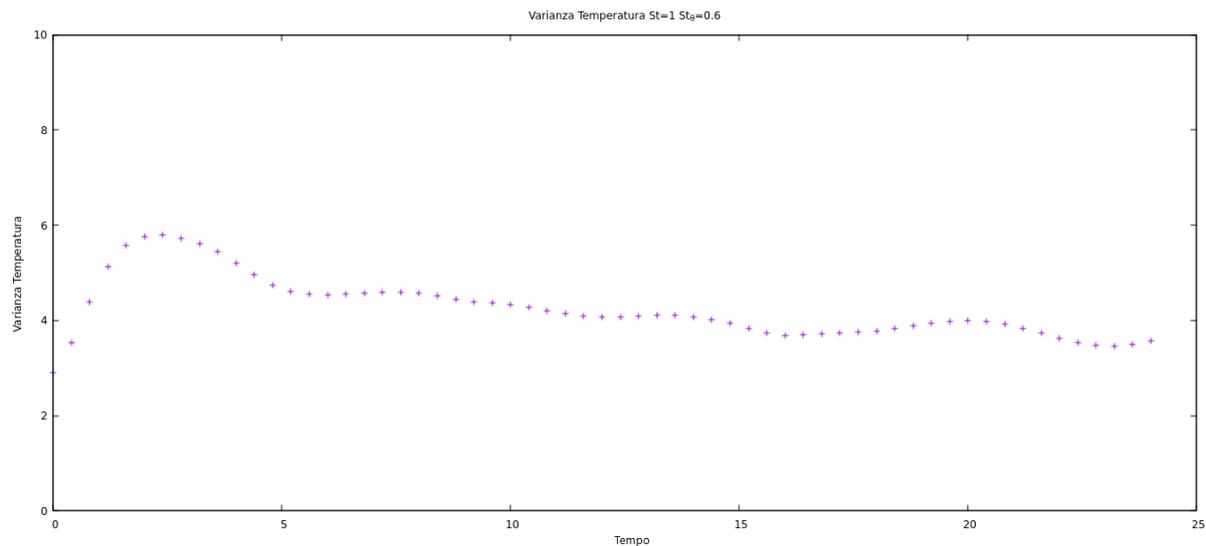


Figura 5.18:  $St = 1$  e  $St_{\theta} = 0.6$

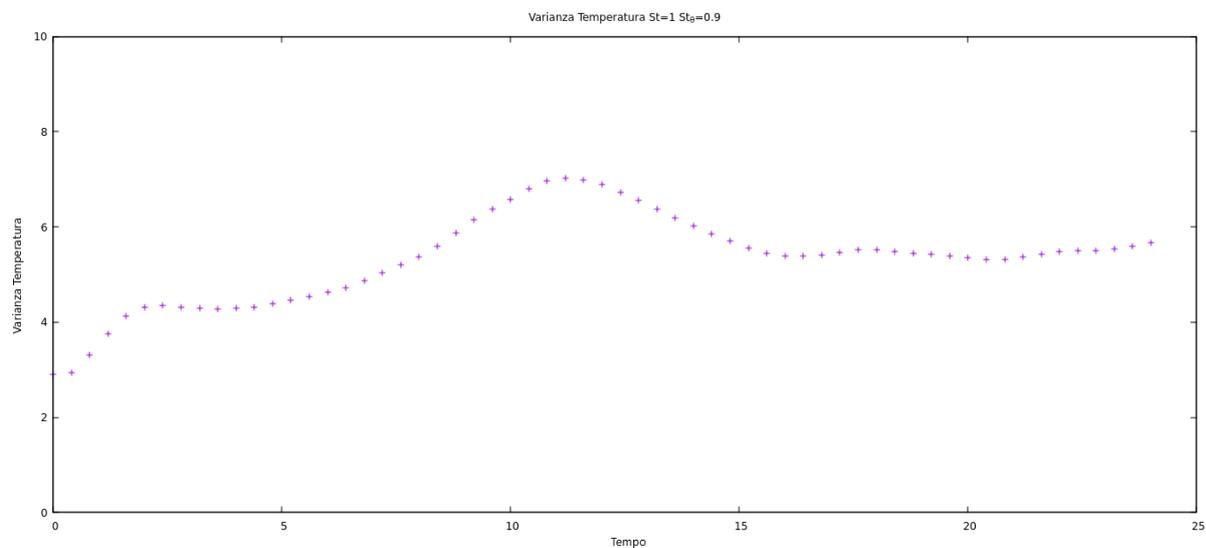


Figura 5.19:  $St = 1$  e  $St_{\theta} = 0.9$

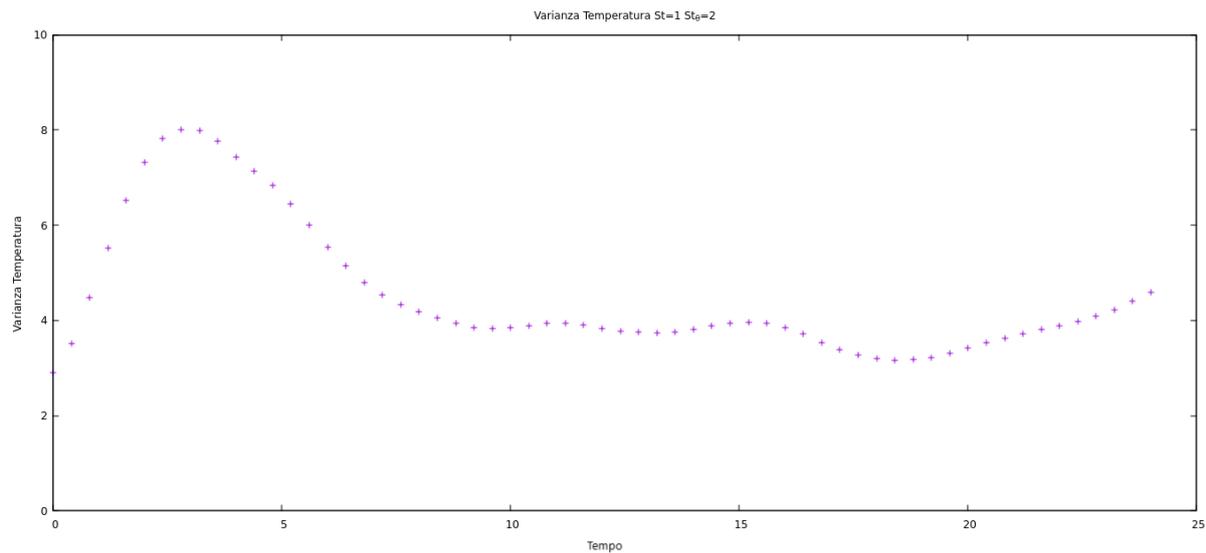


Figura 5.20:  $St = 1$  e  $St_\theta = 2$

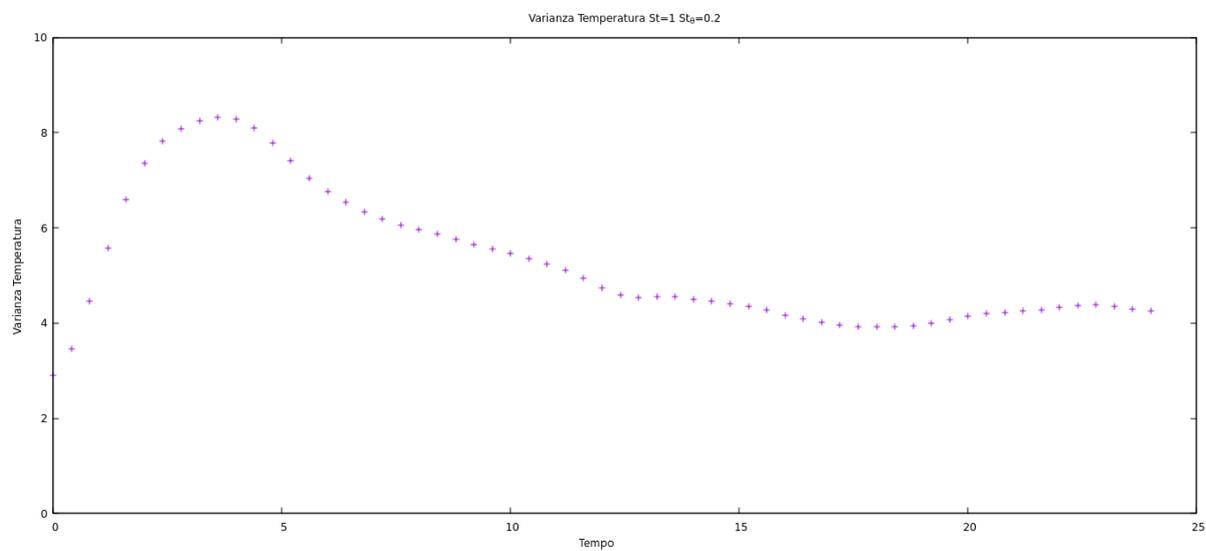


Figura 5.21:  $St = 1$  e  $St_\theta = 6.24$

### 5.1.5 Caso $St = 2$

I seguenti grafici mostrano l'andamento della varianza della temperatura per simulazioni con numero di Stokes pari a 2 e Stokes termico variabile.

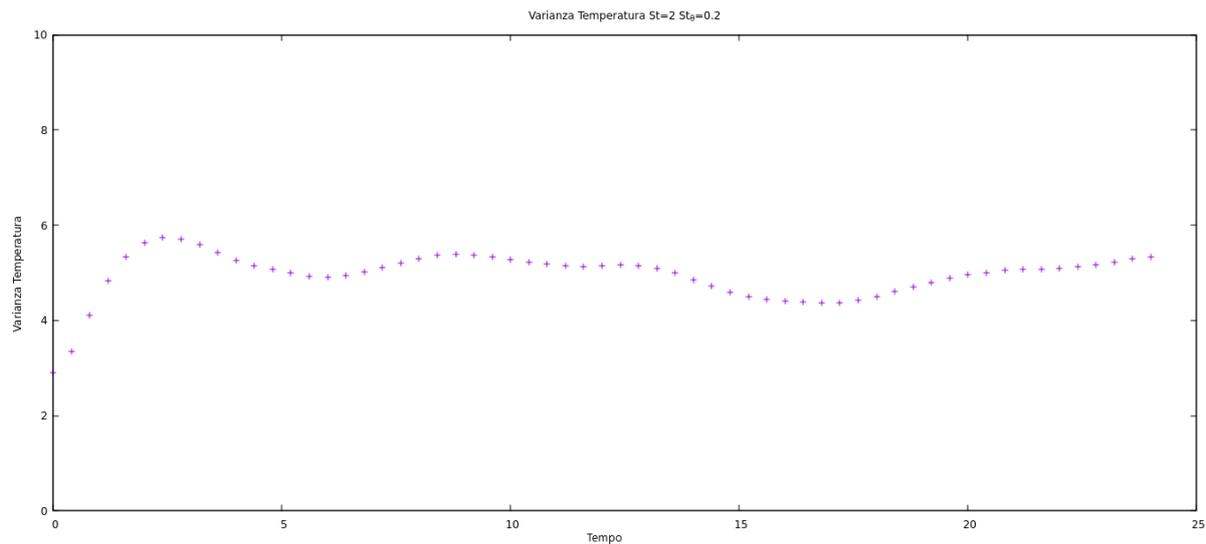


Figura 5.22:  $St = 2$  e  $St_{\theta} = 0.2$

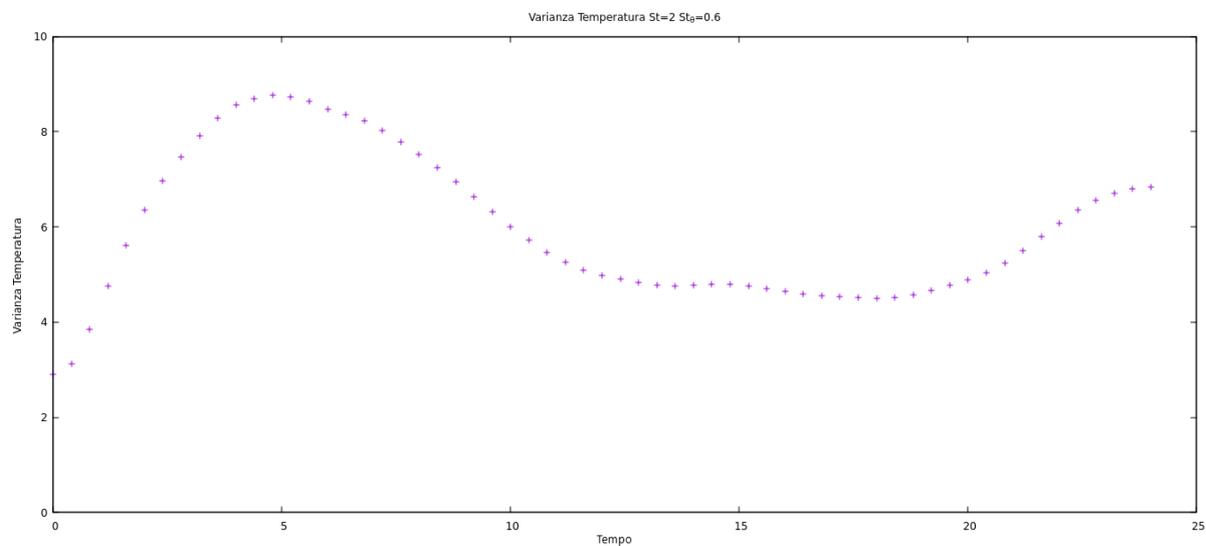
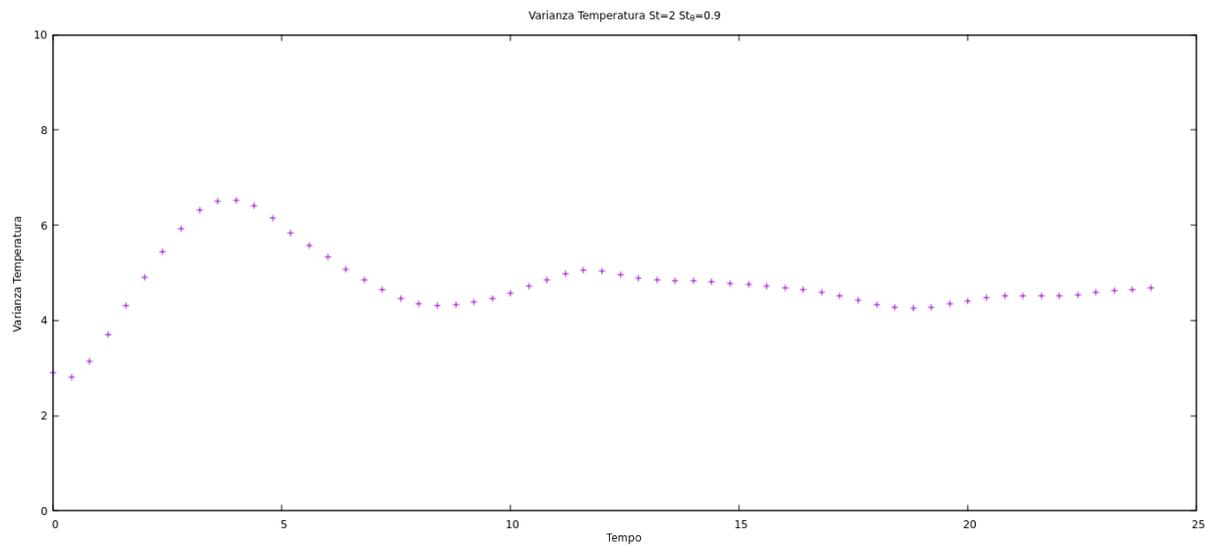
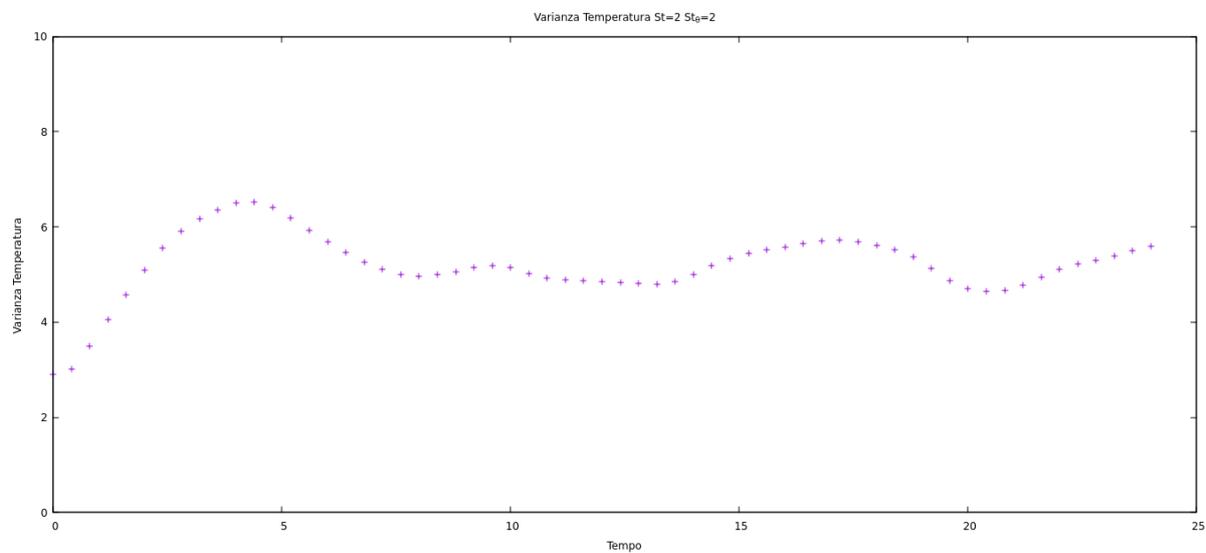


Figura 5.23:  $St = 2$  e  $St_{\theta} = 0.6$

Figura 5.24:  $St = 2$  e  $St_{\theta} = 0.9$ Figura 5.25:  $St = 2$  e  $St_{\theta} = 2$

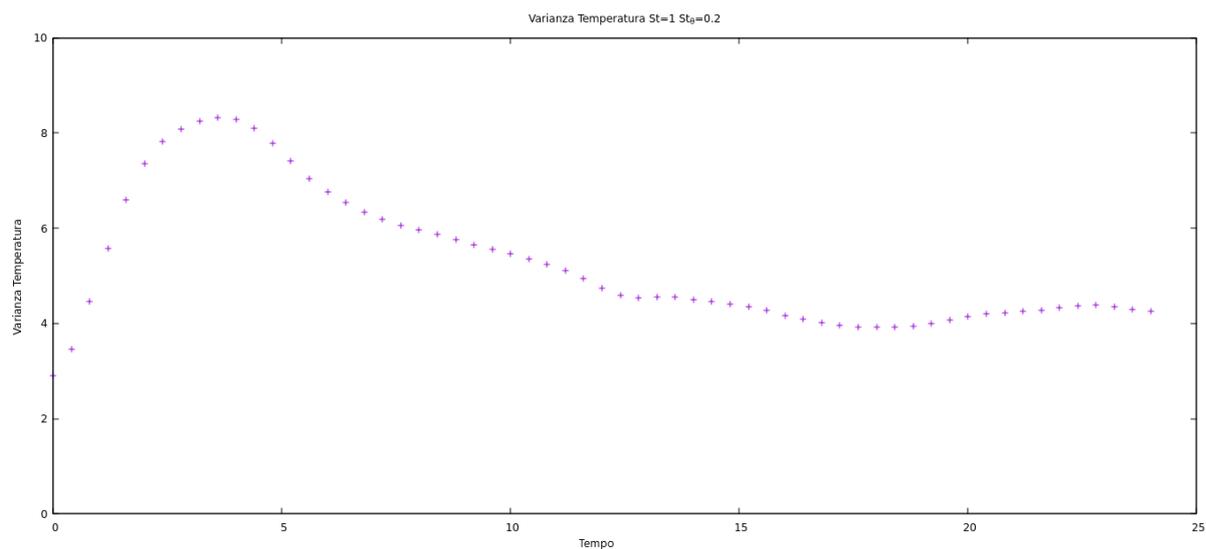


Figura 5.26:  $St = 2$  e  $St_{\theta} = 12$

### 5.1.6 Confronto Raggiungimento Stato Stazionario

Di seguito verranno mostrati i grafici per i numeri di Stokes pari a  $St = 0.2$ ,  $St = 0.3$ ,  $St = 0.5$ ,  $St = 1$  e  $St = 2$  nel caso in cui il rapporto  $St_{\theta}/St$  costante e pari a un valore di 6, il che significa che il rapporto tra i calori specifici di particella e fluido é pari a 4.16.

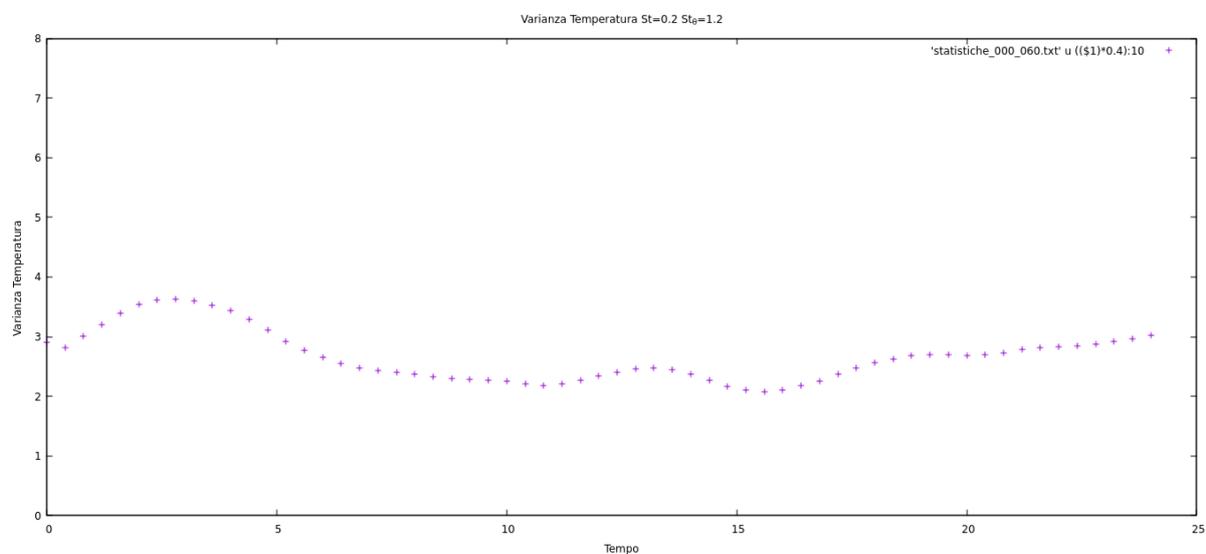
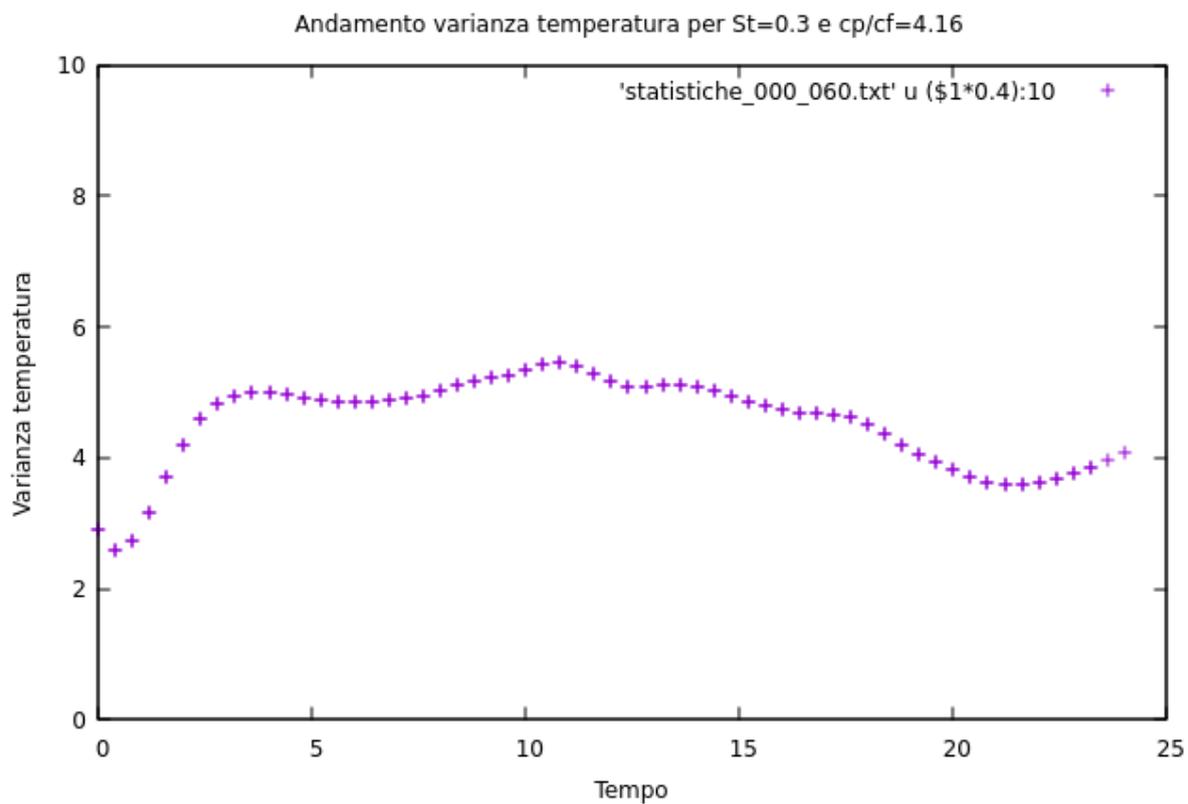
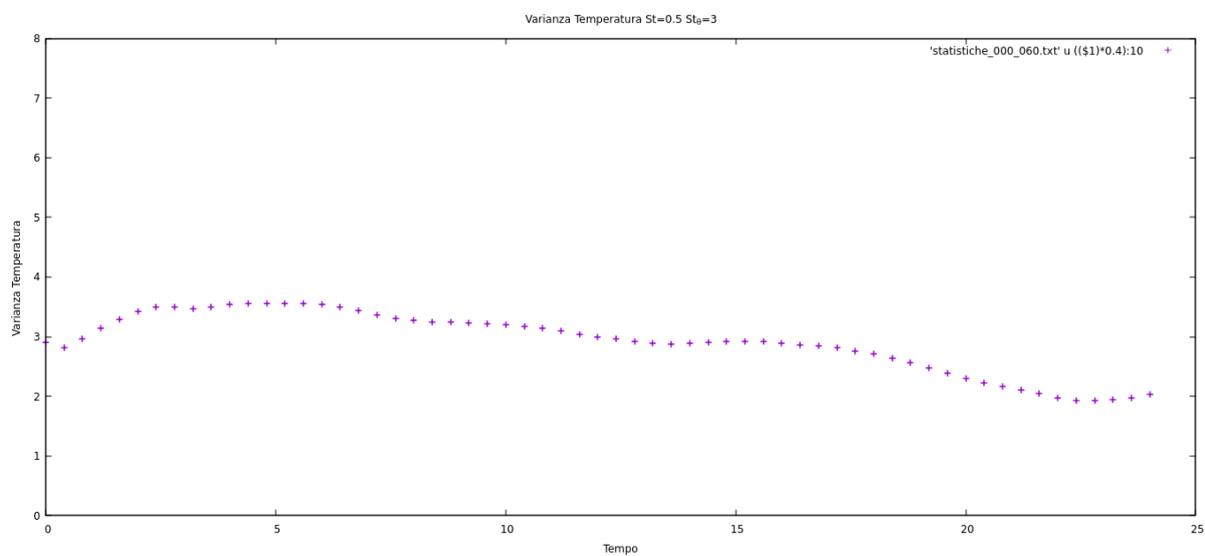
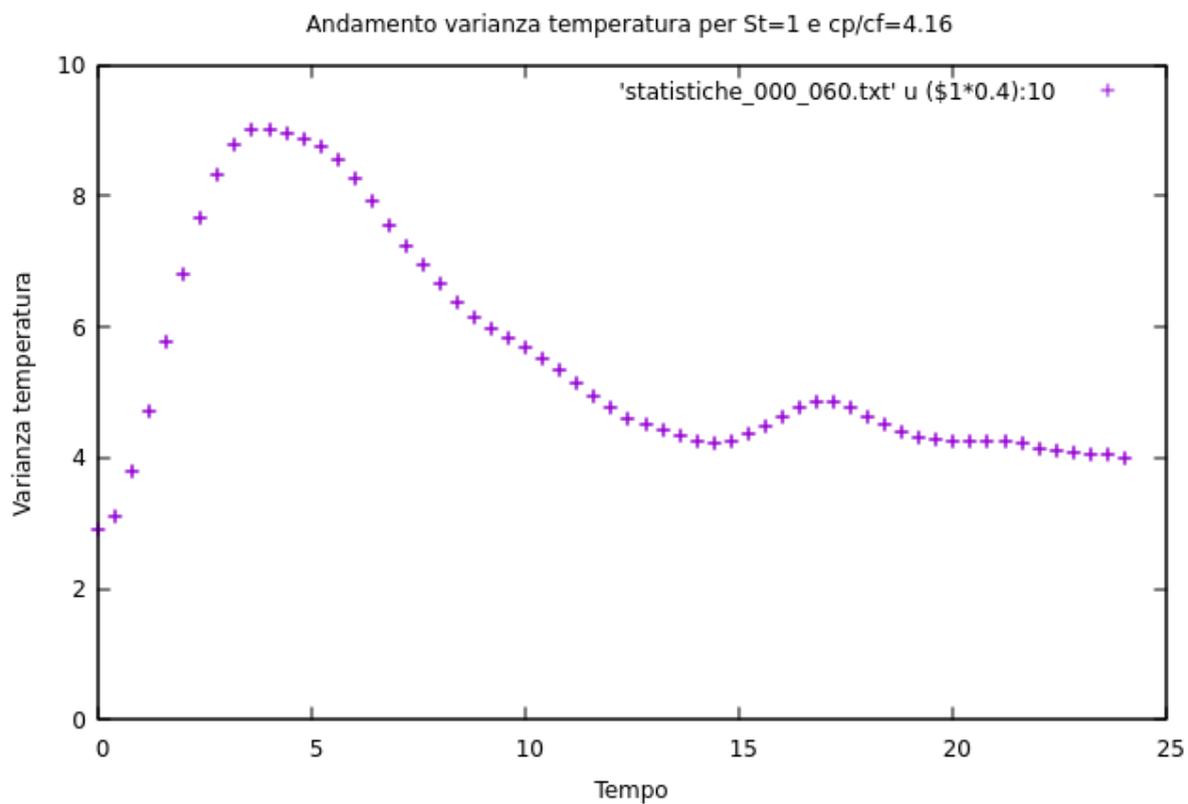
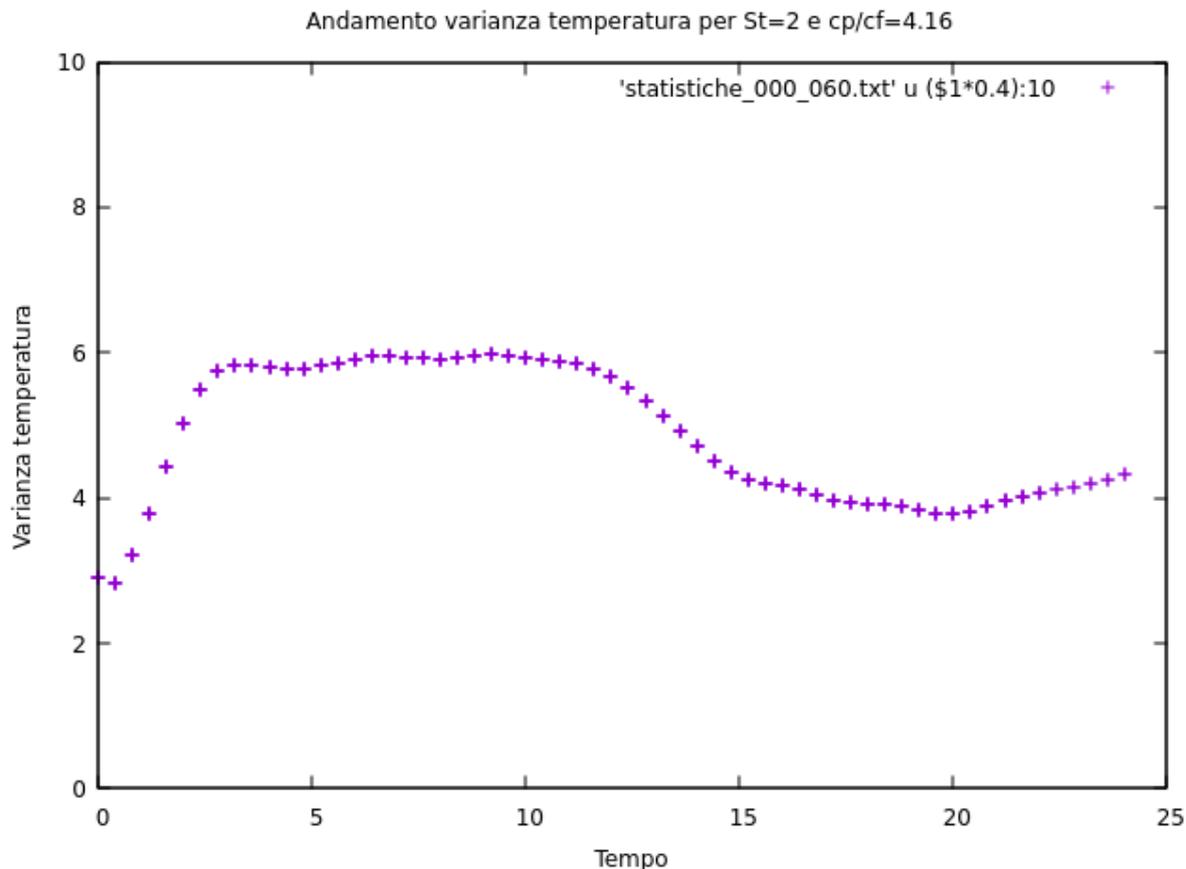


Figura 5.27:  $St = 0.2$

Figura 5.28:  $St = 03$ Figura 5.29:  $St = 05$

Figura 5.30:  $St = 1$

Figura 5.31:  $St = 2$ 

Si può notare che lo stato stazionario, dopo una forte oscillazione che caratterizza tutti i casi in esame, viene raggiunto in modo e con velocità diverse. Infatti, dopo un certo tempo, le oscillazioni sono contenute entro un certo range rispetto al valor medio.

## 5.2 Visualizzazione Campi di Temperatura e Velocità

Nei grafici successivi verranno mostrati i campi di temperatura e velocità ottenuti dalle simulazioni in cui si è variato il numero di Stokes e il numero di Stokes termico.

A causa della turboforesi è possibile notare delle zone del dominio con diversa intensità di temperatura, in particolare ai bordi dei vortici, dove si concentreranno le particelle e i forti gradienti dello scalare. La marcata concentrazione delle particelle in queste aree del dominio comporta una notevole influenza anche sugli scambi di calore tra le diverse fasi.

Si è poi potuto osservare che, in base al numero di Stokes considerato nella simulazione, i risultati saranno diversi. Numeri di Stokes, termici e non, elevati comportano una grande inerzia sia cinematica che termica delle particelle, e una conseguente difficoltà di adeguamento alle velocità e alla temperatura del fluido che le trasporta.

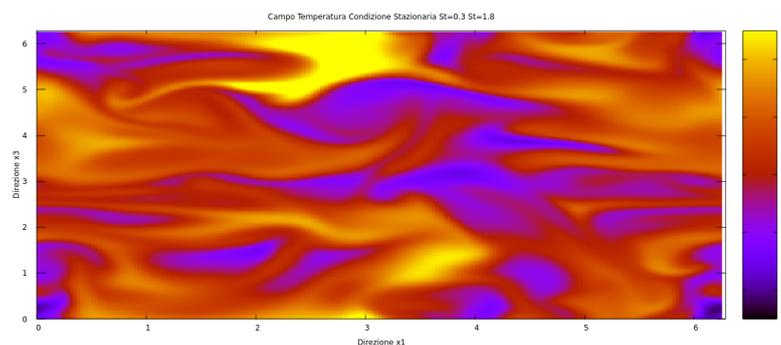
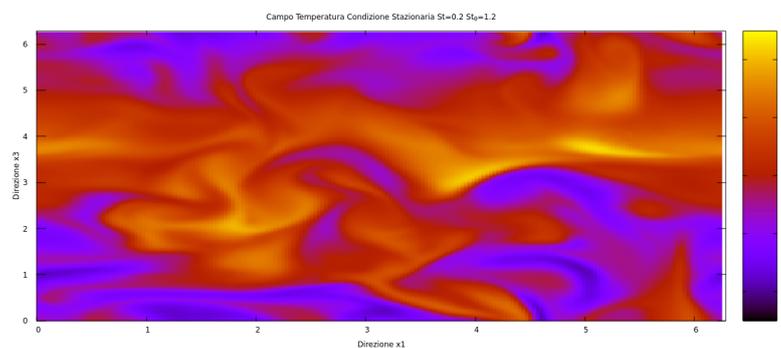
### 5.2.1 Campo di Temperatura

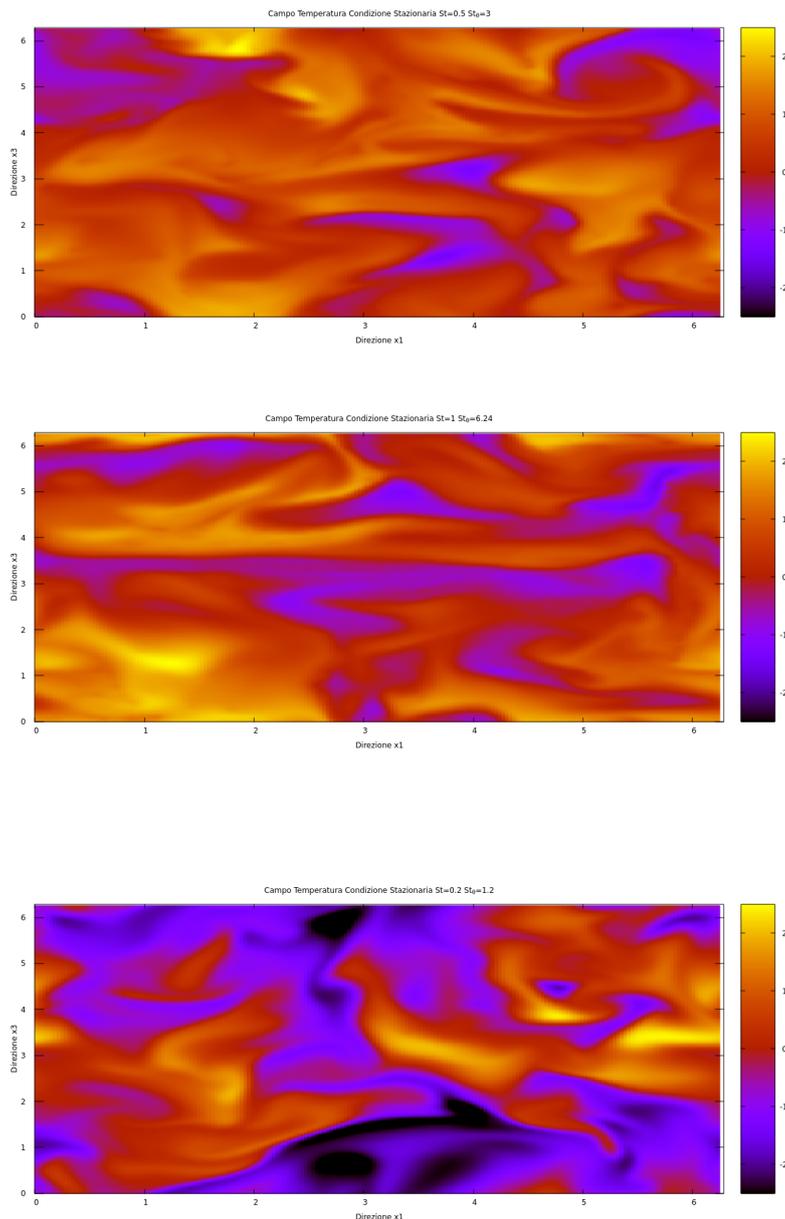
In questa sezione verranno messi a confronti casi in cui si mantiene costante il rapporto  $St/St_\theta$  facendo variare il numero di Stokes e, in seguito, i casi in cui si mantiene costante il numero di Stokes e si fa variare quello termico.

In particolare, per ogni caso verranno mostrati i campi nella condizione iniziale casuale e due condizioni in cui é stato raggiunto la condizione di stazionarietà.

### 5.2.2 Confronto Campi con Rapporto $St_\theta/St$ Costante

In questa sezione vengono messi a confronto i campi di temperatura nel caso in cui il rapporto  $St_\theta/St$  rimane costante, facendo assumere al numero di Stokes i valori di 0.2, 0.3, 0.5, 1 e 2.





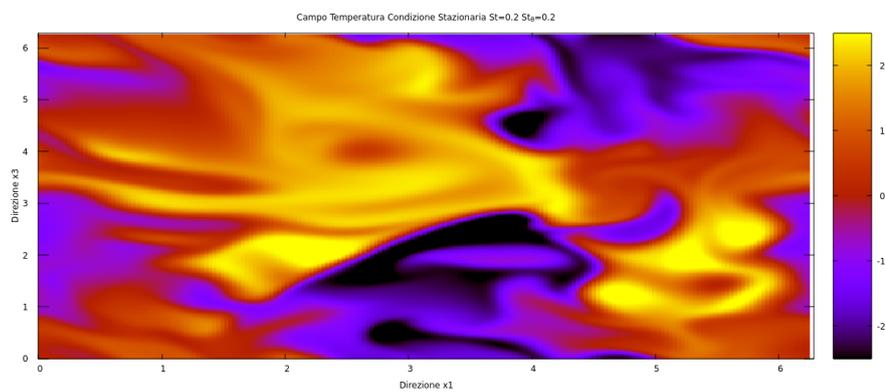
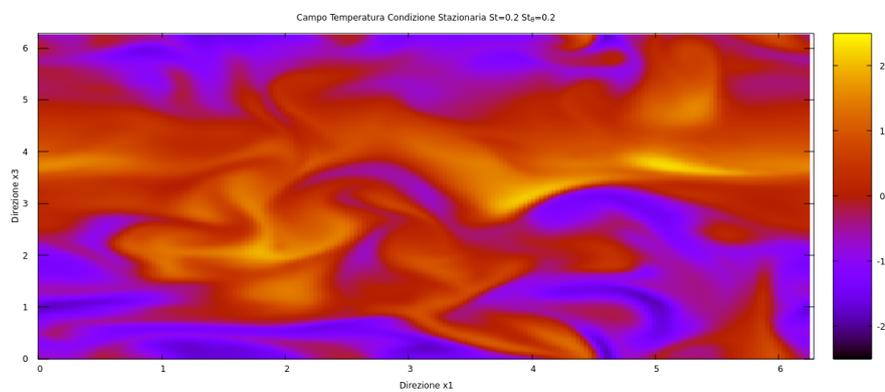
Da come si può notare dalle figure soprastanti, non si notano grandi differenze in tutti i campi. Differenze maggiori si possono notare nel campo di temperatura rispetto a quello di velocità, poiché mantenendo il rapporto costante, variando  $St$  varia anche  $St_\theta$ ; di conseguenza, il modo in cui evolvono le particelle, quindi come varia la loro temperatura, modifica il feedback delle particelle. Queste variazioni, a meno che non ci siano concentrazioni enormi di particelle, non sono significative e osservabili a occhio. La struttura del sistema non cambia completamente, come ad esempio i flussi di temperatura e i gradienti fra regioni calde e fredde.

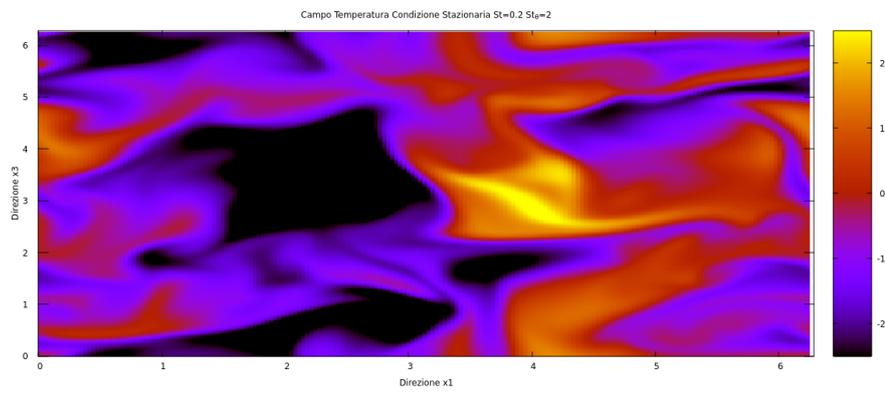
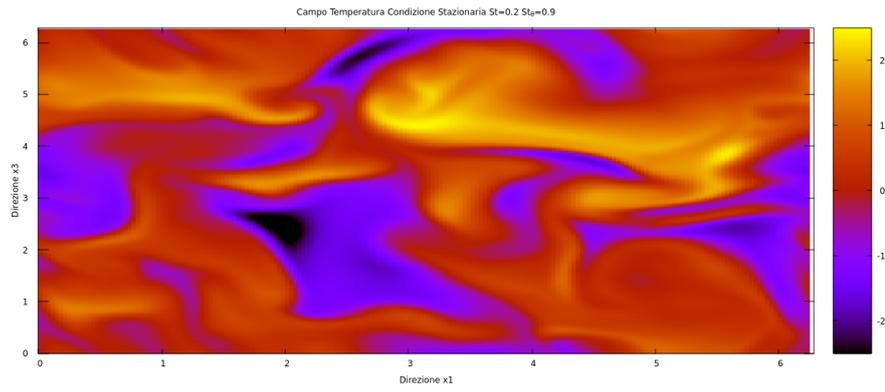
### 5.2.3 Confronto Campi di Temperatura Rapporto $St_\theta/St$ Variabile

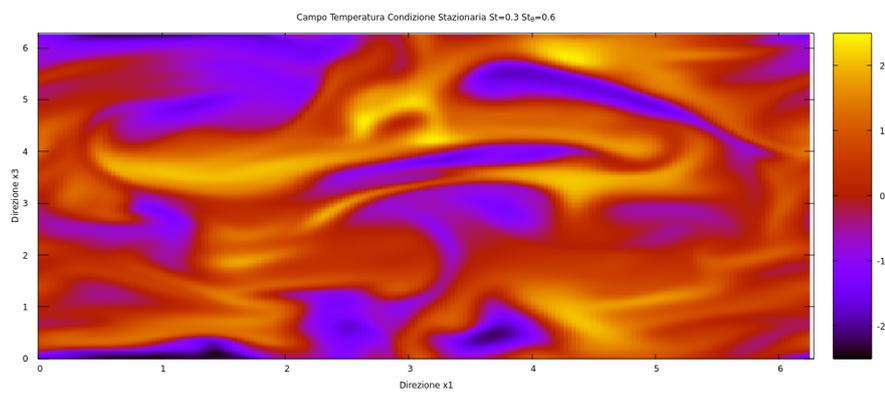
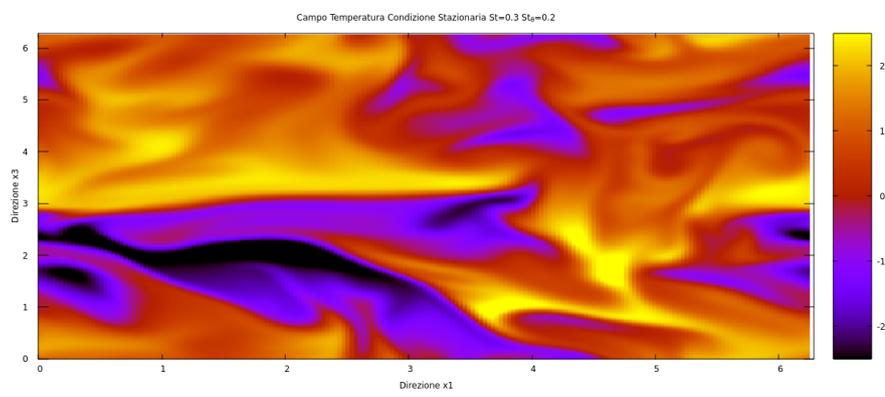
In questa sezione verranno messi a confronto i campi di temperatura nei casi di numero di Stokes costante e rapporto  $St_\theta/St$  variabile. Questo viene fatto in modo da simulare

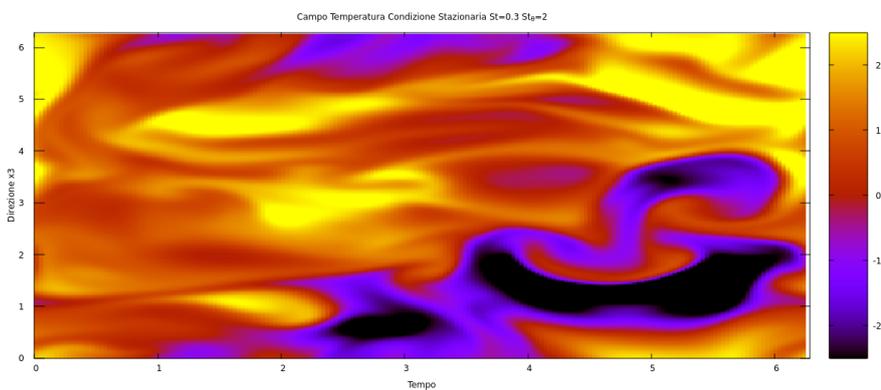
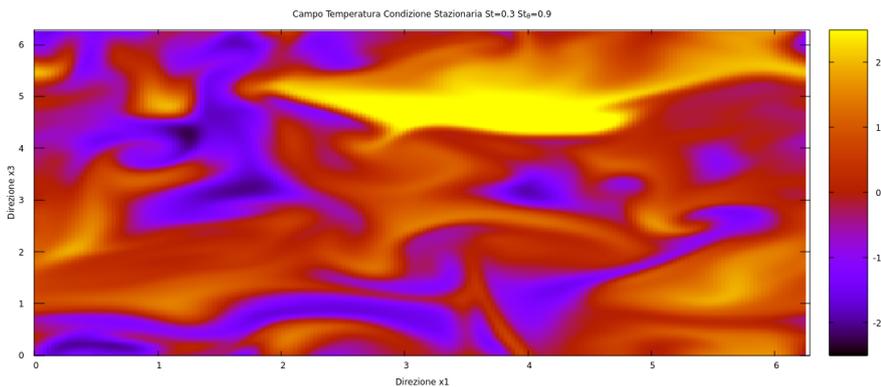
particelle di diverso materiale poiché, facendo variare il rapporto, varia anche il rapporto  $c_p/c_f$  caratteristico di ogni materiale. Il fluido considerato, in cui sono immerse le particelle, è sempre l'acqua. Nei casi considerati si fa variare il numero di Stokes, con valori pari a 0.2, 0.3, 0.5, 1 e 2, e un numero di Stokes termico, per ogni  $St$ , pari a 0.2, 0.6, 0.9 e 2.

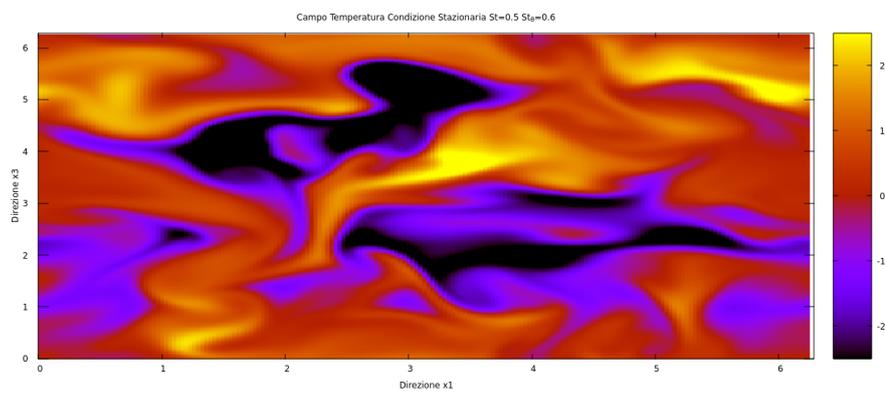
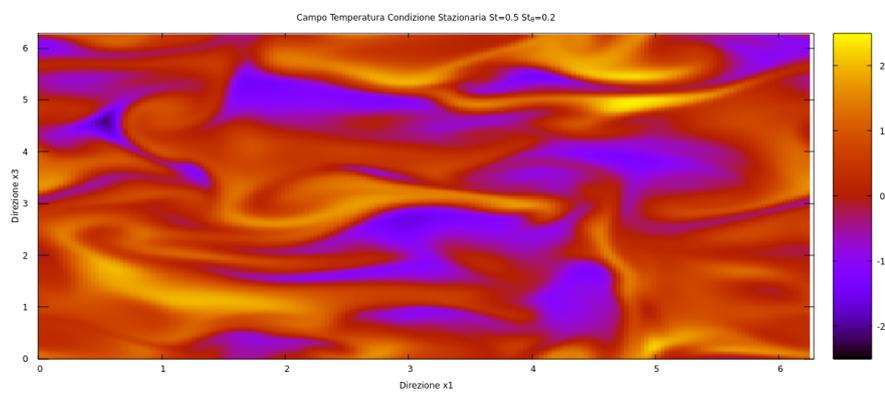
**St=0.2**

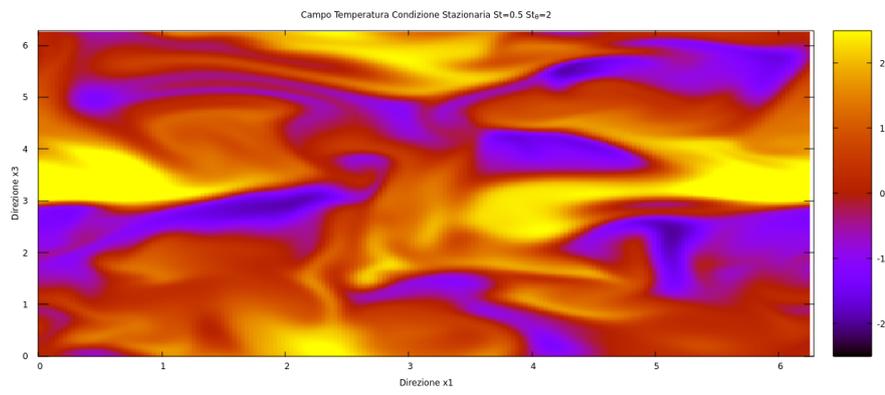
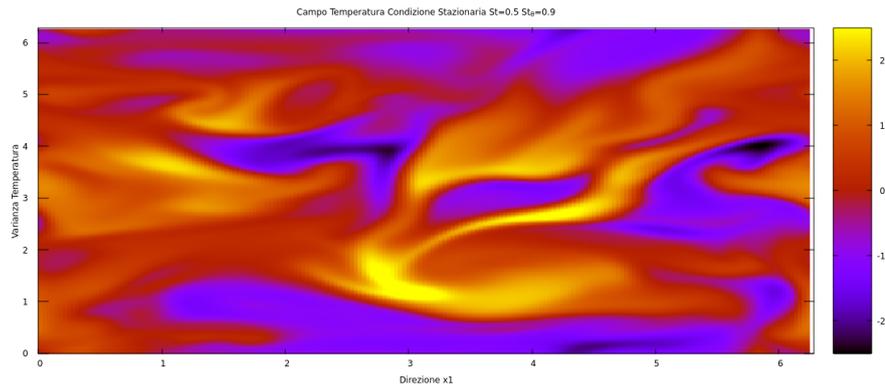


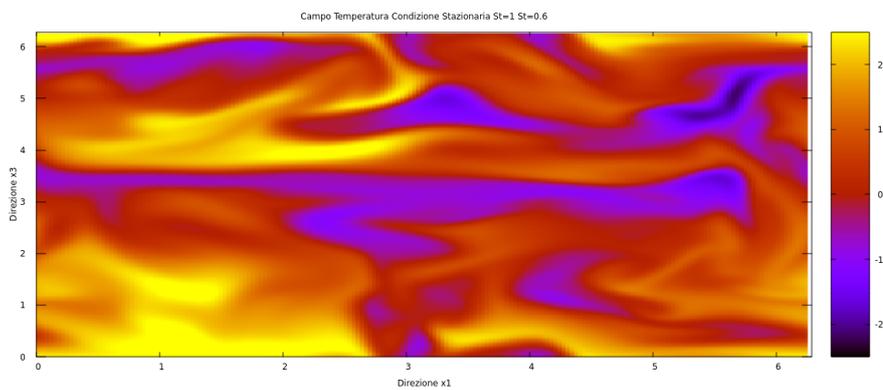
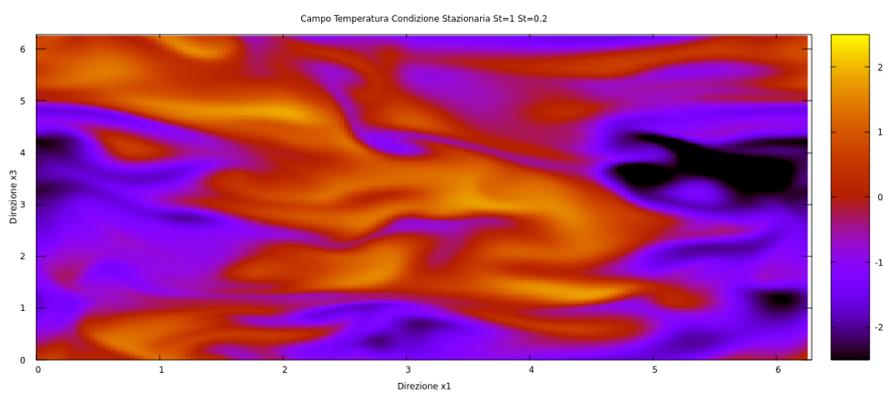


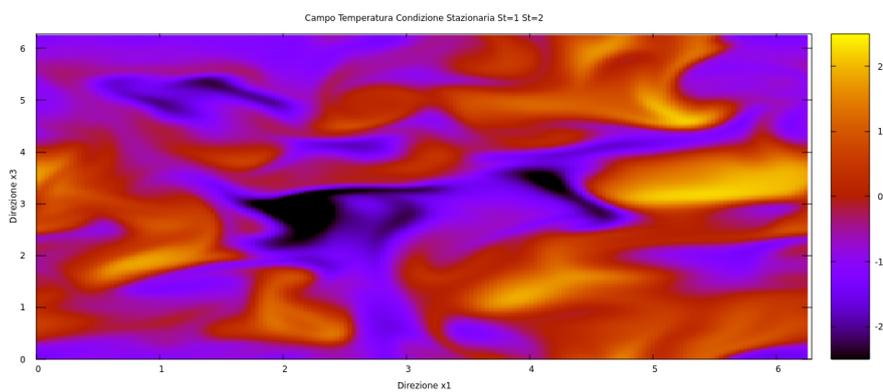
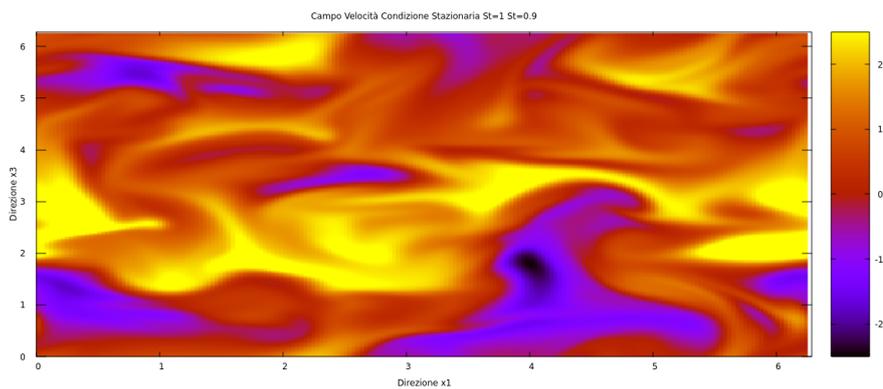
**St=0.3**

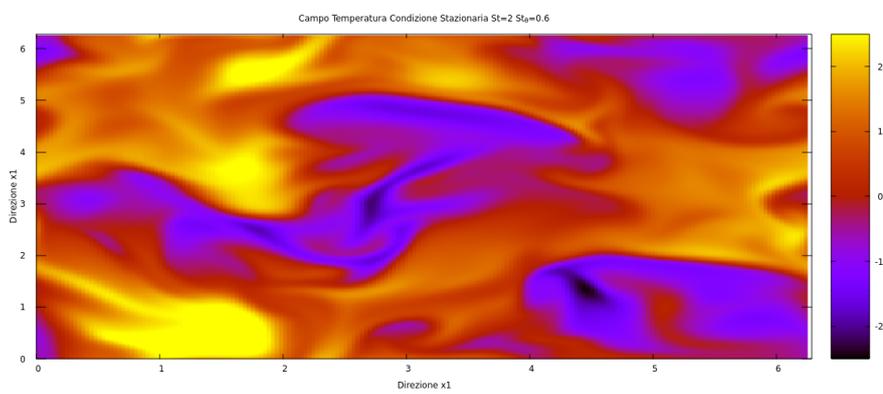
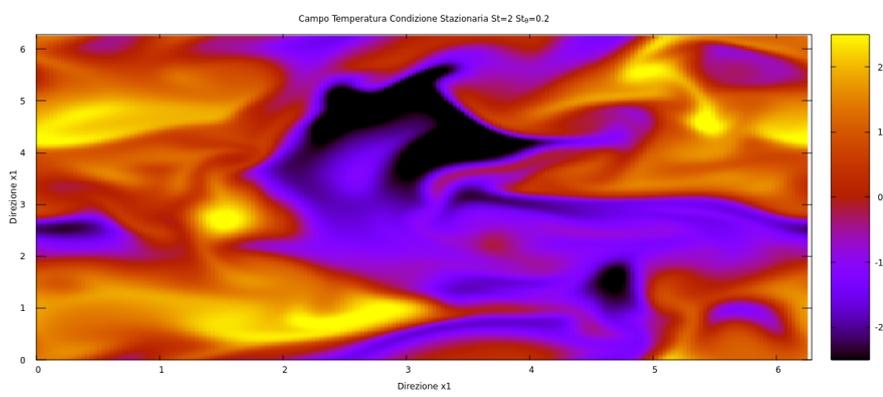


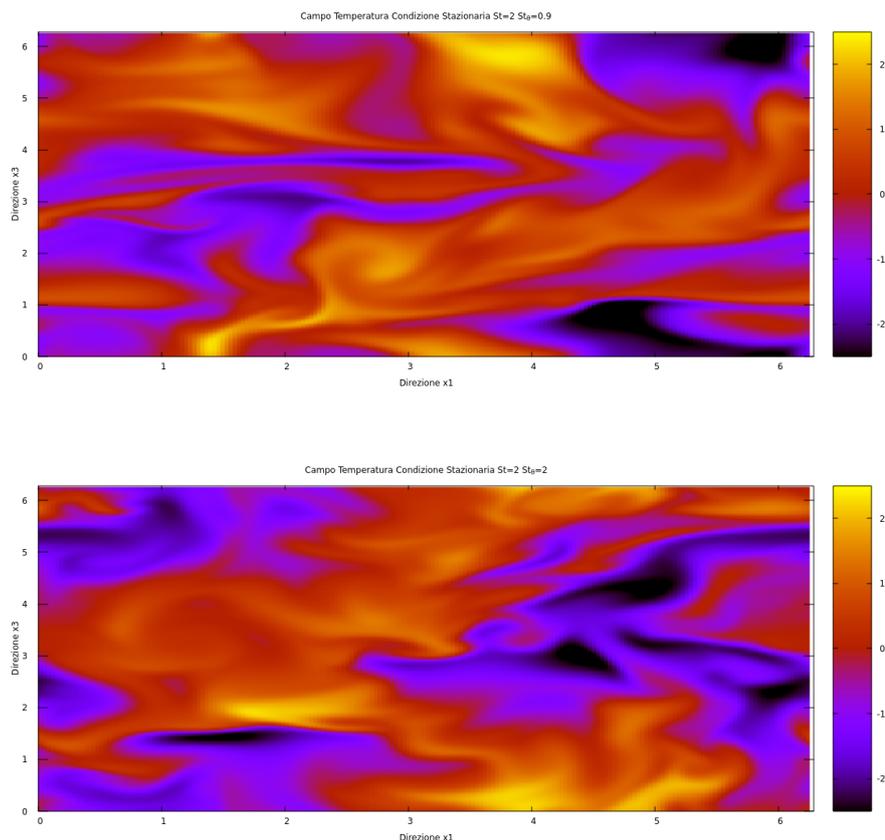
**St=0.5**



**St=1**



**St=2**



Nelle immagini precedenti si é mostrata l'evoluzione del campo di temperatura dall'istante iniziale fino al raggiungimento dello stato stazionario per il caso di gradiente medio di temperatura imposto. Come anticipato prima, é possibile notare la formazione dei fronti in alcune aree del dominio. In particolare si nota come al centro dei vortici le fluttuazioni di temperatura siano negative, e quindi inferiori rispetto alla temperatura media imposta. Al margine dei vortici invece la temperatura mostra fluttuazioni sensibilmente maggiori rispetto al caso iniziale.

La caoticitá dello stato iniziale é dovuta al fatto che sono state considerate, nella simulazione, condizioni iniziali casuali.

Inoltre si puó notare che, sebbene le visualizzazioni dei campi stazionari siano diverse, qualitativamente sono simili e non é possibile distinguere a quale istante temporale dello stato stazionario appartengono, questo poiché siamo in una regione mediamente stazionaria. I livelli di temperatura sono gli stessi e le scale di variazione sono delle stesse dimensioni.

Quando lo Stokes é pari a uno vuol dire che l'inerzia delle particelle é grande, quindi tendono a non seguire il flusso in cui sono immerse, mentre per numeri di Stokes bassi la particella tende ad essere meno indipendente dal moto del fluido.

Numeri di Stokes termico bassi implicano un veloce adeguamento della temperatura delle particelle con il flusso locale. Al contrario, particelle con numero di Stokes termico alto presentano una grandissima inerzia termica e tendono quindi a mantenere inalterata la propria temperatura. In questo modo, si ha un trasporto di energia su grandi distanze. Ad esempio, se le particelle si muovono da una regione fredda ad una piú calda le particelle tendono a rimuovere energia dal flusso, e viceversa; questo implica uno smorzamento di

tutti i gradienti di temperatura, ossia il campo tende ad essere uniforme. Da come si può notare, l'aumento della diffusione tende ad eliminare i picchi di temperatura.

Paradossalmente, se il numero di Stokes termico fosse dell'ordine delle centinaia, le particelle non avrebbero un effetto sul flusso, poiché queste hanno un'inerzia così elevata che non hanno il tempo di interagire termicamente sul flusso. Il massimo effetto, in questi termini, si ha quando  $St_\theta$  è di ordine 1.

Le differenze maggiori si notano quando si hanno numeri di Stokes basso e numeri di Stokes termico alti. Questo perché le particelle tendono a seguire il flusso, ma mantengono a lungo la loro temperatura, aumentando l'inerzia termica del sistema. Particelle con  $St$  piccolo tendono a essere dipendenti dal moto del fluido, quindi i vortici tendono ad essere più evidenti. Rispetto al caso precedente, si possono notare fluttuazioni più grandi poiché, appunto, lo  $St_\theta$  è più elevato.

### 5.2.4 Campo di velocità

Nelle seguenti immagini verranno mostrate le visualizzazioni dei campi di velocità per i numeri di Stokes pari a 0.2, 0.3, 0.5, 1 e 2 nei casi di rapporto  $St_\theta/St$  costante e pari a 4.16.

In particolare, per ogni caso verranno mostrati i campi nella condizione iniziale casuale e due condizioni in cui è stato raggiunto la condizione di stazionarietà.

In quelli di velocità perché non c'è il feedback di velocità, quindi di quantità di moto, delle particelle sul fluido.

**Caso  $St = 0.2$**

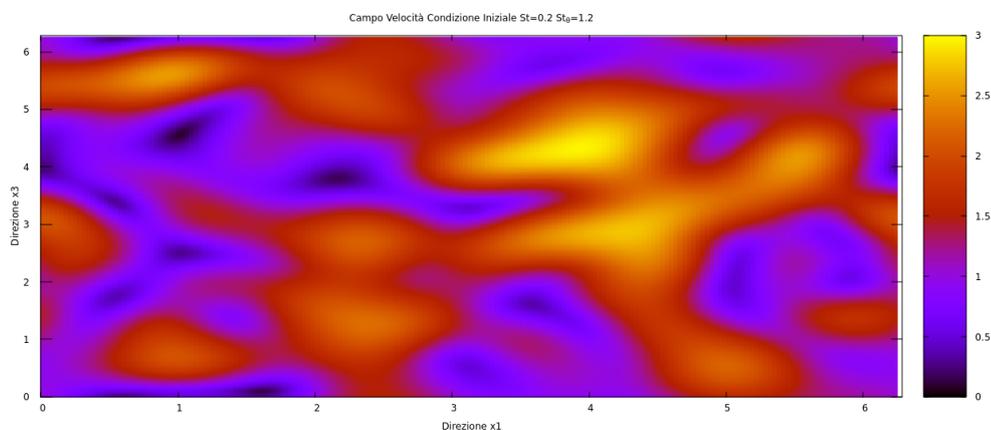


Figura 5.32: Visualizzazione campo di velocità iniziale con  $St = 0.2$

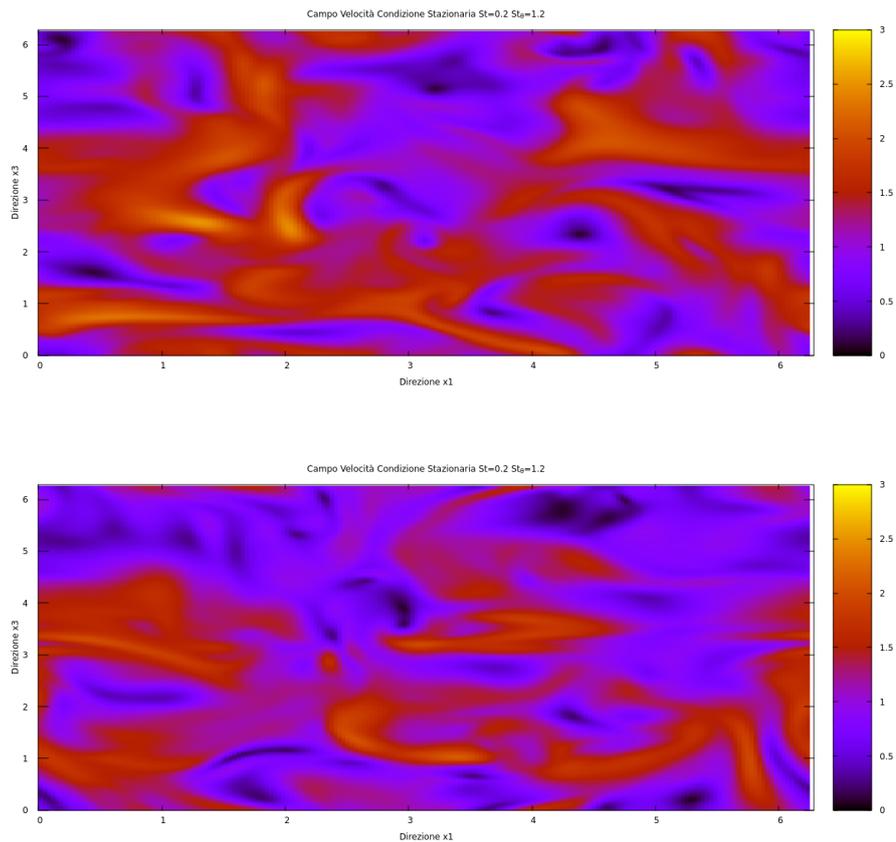


Figura 5.33: Visualizzazione campo di velocità in due diversi istanti in condizione di stazionarietà con  $St = 0.2$

### Caso $St = 0.3$

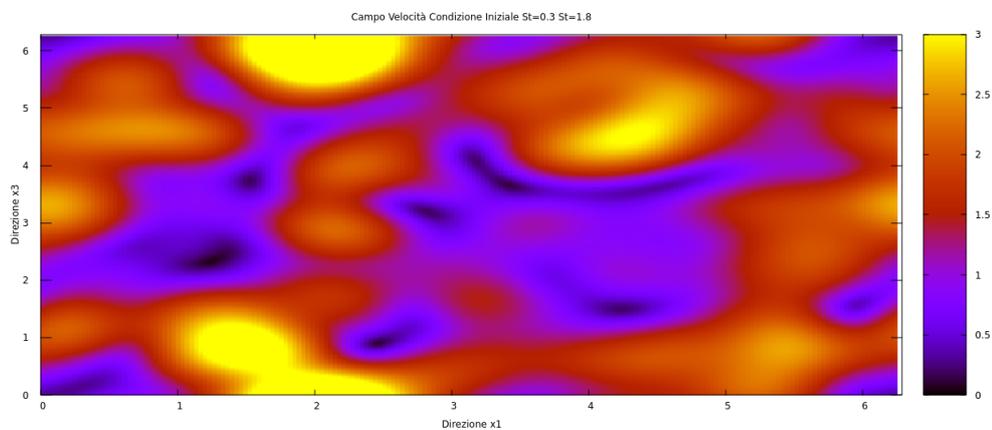


Figura 5.34: Visualizzazione campo di velocità iniziale con  $St = 0.3$

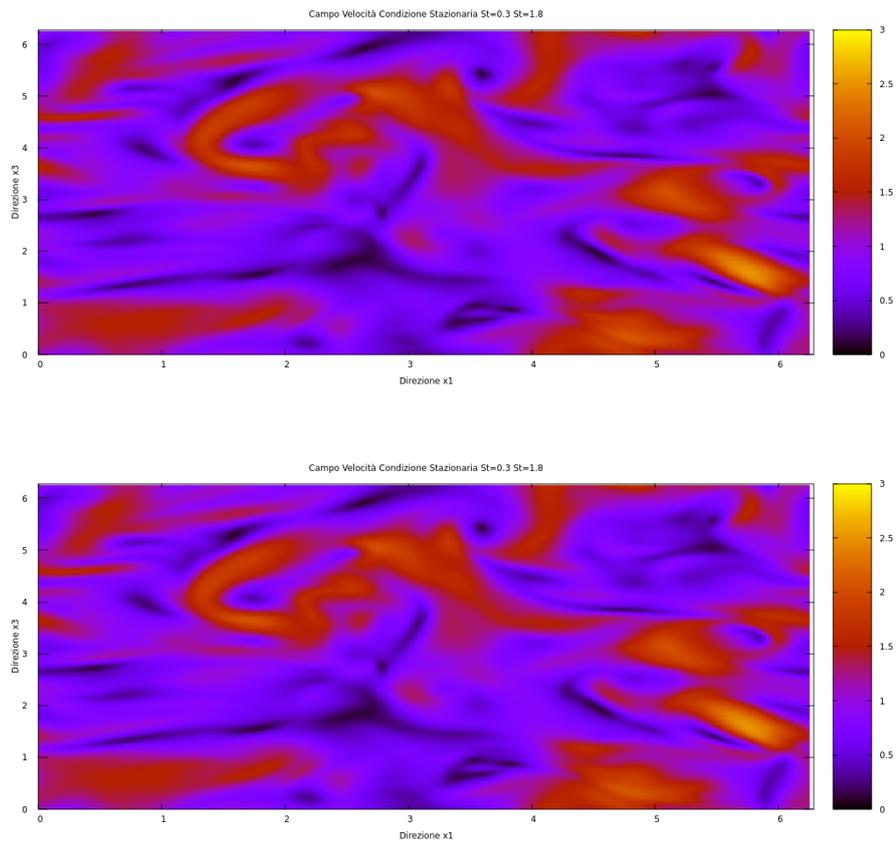


Figura 5.35: Visualizzazione campo di velocità in due diversi istanti in condizione di stazionarietà con  $St = 0.3$

Caso  $St = 0.5$

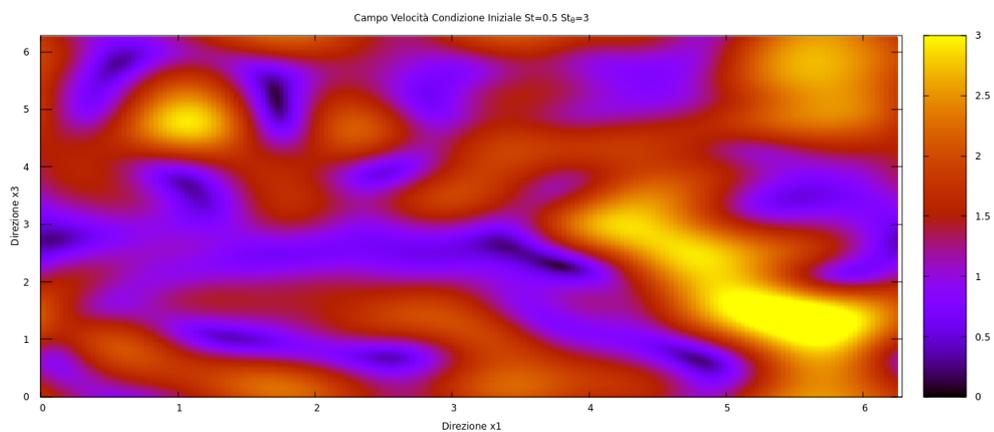


Figura 5.36: Visualizzazione campo di temperatura iniziale con  $St = 0.5$

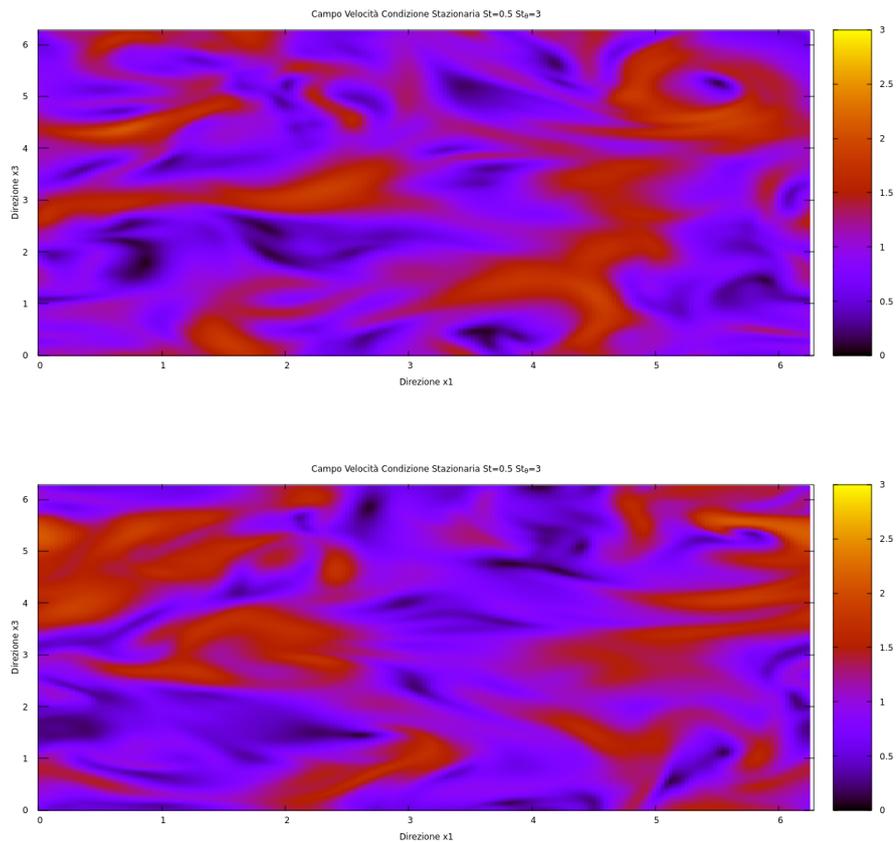


Figura 5.37: Visualizzazione campo di velocità in due diversi istanti in condizione di stazionarietà con  $St = 0.5$

### Caso $St = 1$

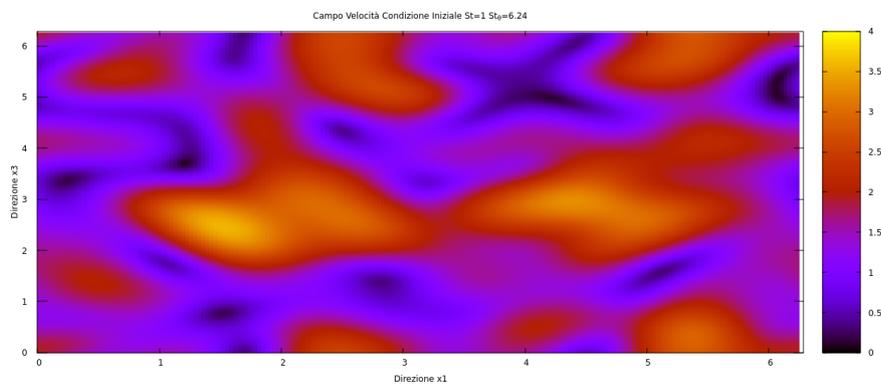


Figura 5.38: Visualizzazione campo di velocità iniziale con  $St = 1$

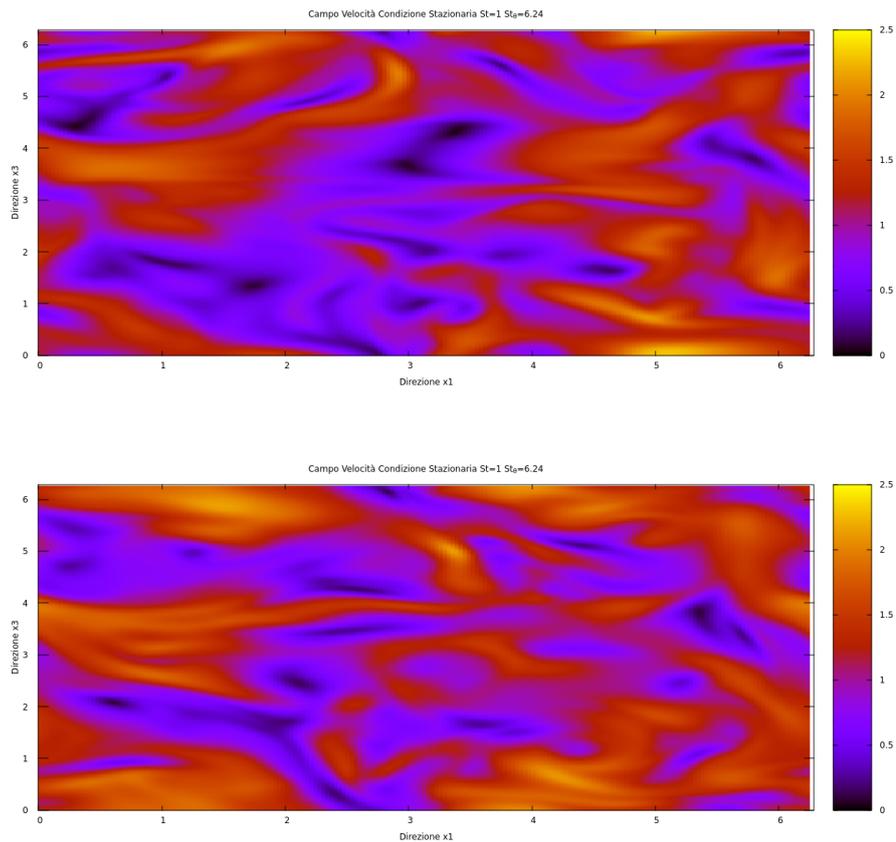


Figura 5.39: Visualizzazione campo di velocità in due diversi istanti in condizione di stazionarietà con  $St = 1$

Caso  $St = 2$

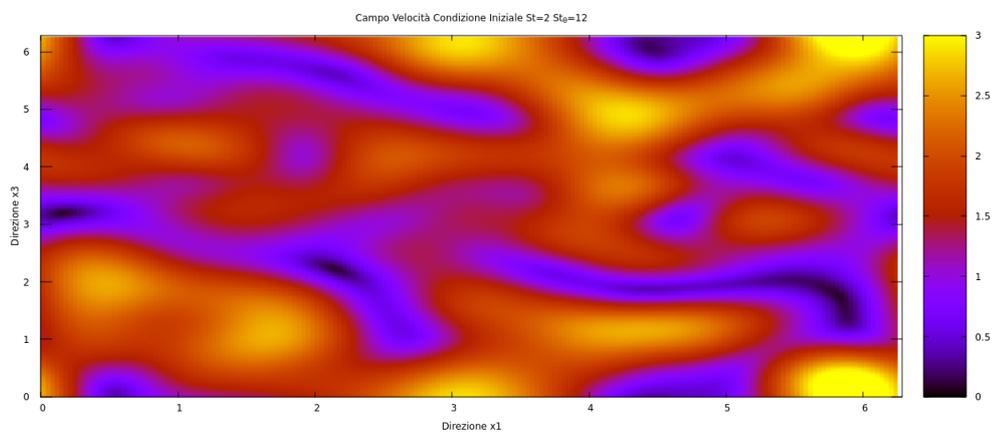


Figura 5.40: Visualizzazione campo di temperatura iniziale con  $St = 2$

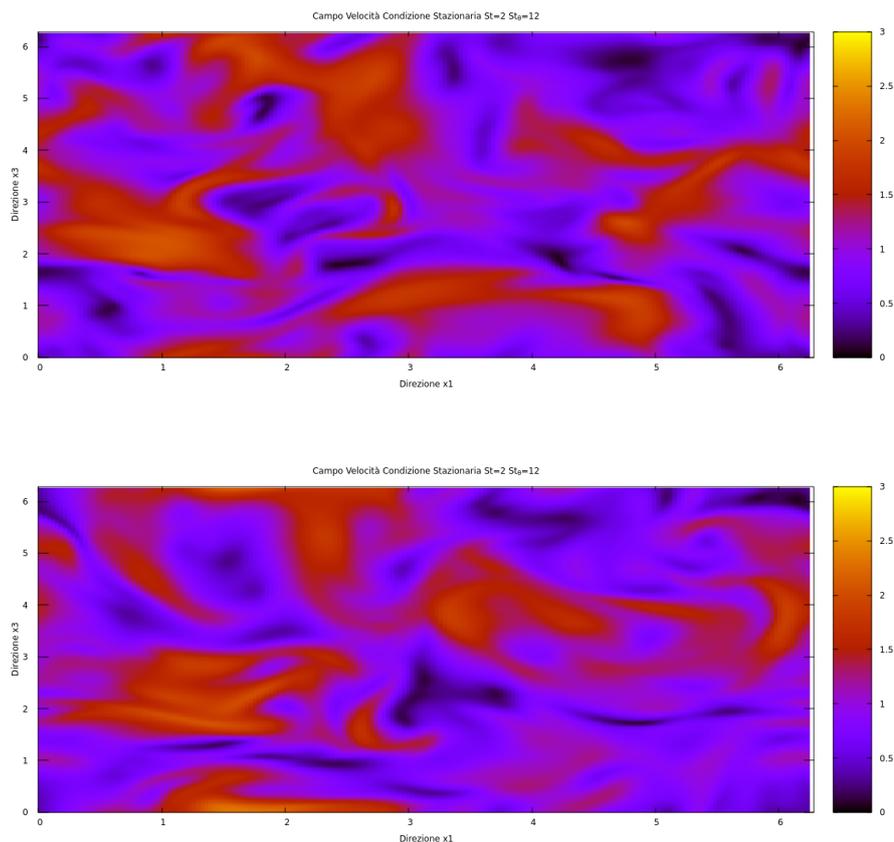


Figura 5.41: Visualizzazione campo di velocità in due diversi istanti in condizione di stazionarietà con  $St = 2$

Nelle immagini precedenti si è mostrata l'evoluzione del campo di velocità dall'istante iniziale fino al raggiungimento dello stato stazionario. Come per il caso del campo di temperatura, anche in questo caso è possibile notare l'azione della turboforesi, che causa la generazione di fronti. Ora, però, si ha un'attenuazione delle fluttuazioni di velocità rispetto all'istante iniziale, dovuta all'azione della dissipazione.

Le differenze qualitative tra condizione iniziale e stati stazionari sono minori poiché usiamo una forzante di tipo deterministico, quindi legata alle condizioni iniziali. Ciò vuol dire che si inserisce energia ad un certo numero d'onda sufficiente a bilanciare quanto viene dissipato. I grafici degli stati stazionari sono differenti poiché quello che cambia tra un istante e l'altro è il coefficiente di proporzionalità, poiché dipende dalla dissipazione istantanea, ma istante per istante si sta immettendo una quantità di energia proporzionale alla struttura dei bassi numeri d'onda, che tende a rimanere preservata al variare del tempo. Si può notare, infatti, che le scale tendono a mantenersi circa uguali, mentre nel caso della temperatura si avevano delle scale iniziali casuali che tendevano a variare, poiché queste dipendono da quante fluttuazioni vengono generate con il gradiente di scalare.

Come detto prima, l'energia del sistema che viene immessa con un certo rateo costante è quanto basta per bilanciare la dissipazione, che è quindi la causa di minori fluttuazioni. Fissare la scala della forzante e la dissipazione implica un valor quadratico medio dell'energia fissato. L'energia immessa inizialmente è indipendente da questo valore, quindi

non é detto che questa sia corrispondente a quella che si ha in condizioni stazionarie di equilibrio, per questo l'energia iniziale varia implicando fluttuazioni iniziali maggiori.

### 5.2.5 Confronto con il caso di forzante lineare

Nelle immagini seguenti verranno messe a confronto le visualizzazioni dei campi di temperatura in condizioni stazionarie considerando il caso di forzante deterministica e di gradiente medio di temperatura.

In entrambi i casi si considerano gli scarti rispetto alla temperatura media, la quale, nel caso di forzante lineare, rimane costante mentre nel caso di gradiente medio imposto cresce con la direzione verticale  $x_3$ .

Nel caso di forzante deterministica si é imposto a priori il valore delle fluttuazioni di temperatura, che la dissipazione tende ad eliminare. Di conseguenza, la varianza risulta essere legata a quanto rapidamente queste fluttuazioni vengono attenuate.

Al contrario, nel caso di gradiente non si sa esattamente quanta energia viene immessa, poiché questa dipende dalla velocità, che non risulta essere nota a priori.

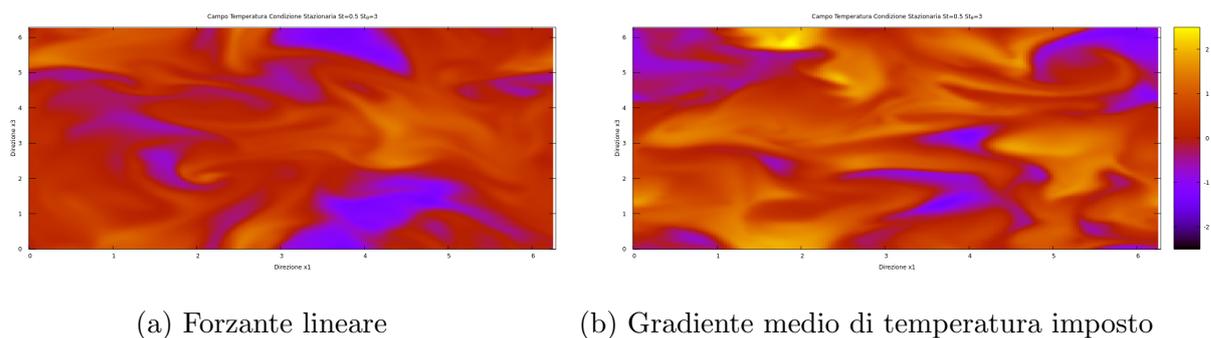


Figura 5.42: Visualizzazione campo di temperatura in condizione di stazionarietà con  $St = 0.5$  e forzanti diverse

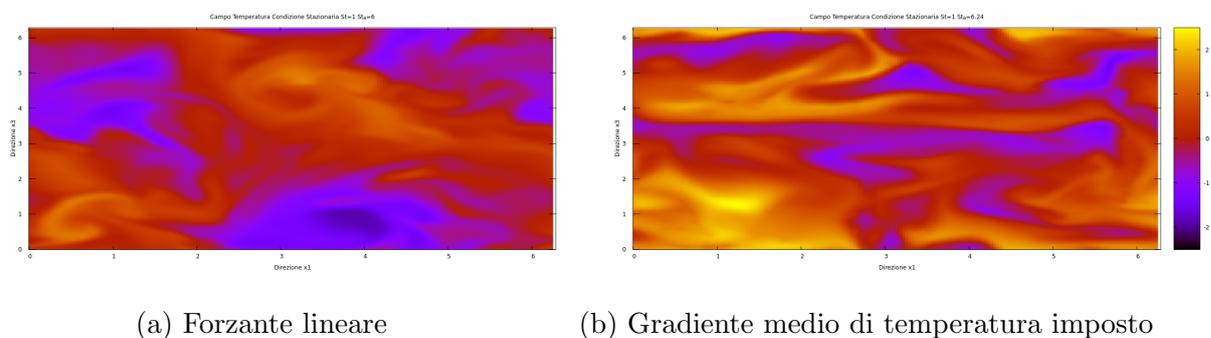


Figura 5.43: Visualizzazione campo di temperatura in condizione di stazionarietà con  $St = 1$  e forzanti diverse

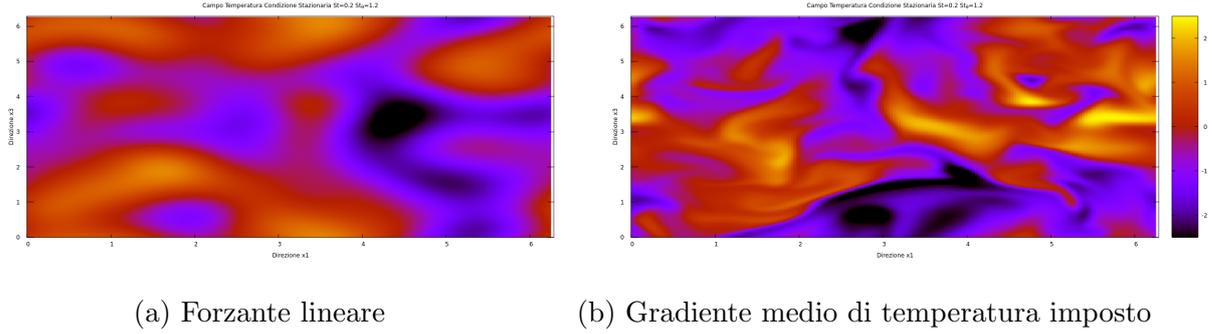


Figura 5.44: Visualizzazione campo di temperatura in condizione di stazionarietà con  $St = 2$  e forzanti diverse

A parte le condizioni iniziali che sono casuali, ma che sono generate allo stesso modo quindi fondamentalmente sono la stessa cosa, si può notare che i vortici più grandi del sistema, nella condizione stazionaria, hanno all'incirca la stessa dimensione. Queste sono confrontabili poiché sono determinate, nel caso di gradiente scalare, dai vortici della velocità, che sono sempre gli stessi nei due casi avendo lo stesso tipo di forzante. Nel caso di forzante lineare per la temperatura, i vortici sono determinati dal numero d'onda della forzante che, però, è lo stesso di quello della velocità. Si può notare infatti che le strutture di grande scala hanno all'incirca le stesse dimensioni.

## 5.3 Funzioni di Struttura

### 5.3.1 Introduzione

Per capire meglio come l'accoppiamento termico bidirezionale influenzi il sistema su piccole scale, è necessario utilizzare statistiche di ordine superiore. In particolare, in questa sezione saranno analizzate le funzioni di struttura sia del fluido che della particella.

In particolare, si evidenzia che le scale sono adimensionalizzate; per quanto riguarda il raggio con la dimensione della scala di Kolmogorov  $\eta$ , mentre le funzioni di struttura, per quanto riguarda il campo di temperatura, con la temperatura di Kolmogorov - definita come  $T_\eta = (\chi\tau_\eta)^{1/2}$  e pari a 0.127 - e per il campo di velocità con la velocità di Kolmogorov  $u_\eta = (\epsilon\eta)^{1/2}$ .

### 5.3.2 Funzioni di Struttura del Campo di Temperatura del Fluido

La funzione di struttura di ordine  $n$  del campo di temperatura del fluido viene definita come:

$$S_T^n(r) \equiv \langle |\Delta T(r, n)|^n \rangle \quad (5.1)$$

dove  $\Delta T(r, t)$  è la differenza di temperatura di due punti del campo posti ad una distanza  $r$ . Le funzioni di struttura del campo di temperatura effettivo si differenzia dal campo di temperatura del fluido a causa della presenza delle particelle, ma che comunque risulta essere marcata sulle piccole scale. Per questo motivo, le funzioni di struttura del campo di temperatura del fluido sono riportate solo al di sotto della scala di Kolmogorov.

Di seguito vengono riportati i grafici in cui sono mostrati gli andamenti delle funzioni di struttura per gli esponenti considerati e per i vari numeri di Stokes.

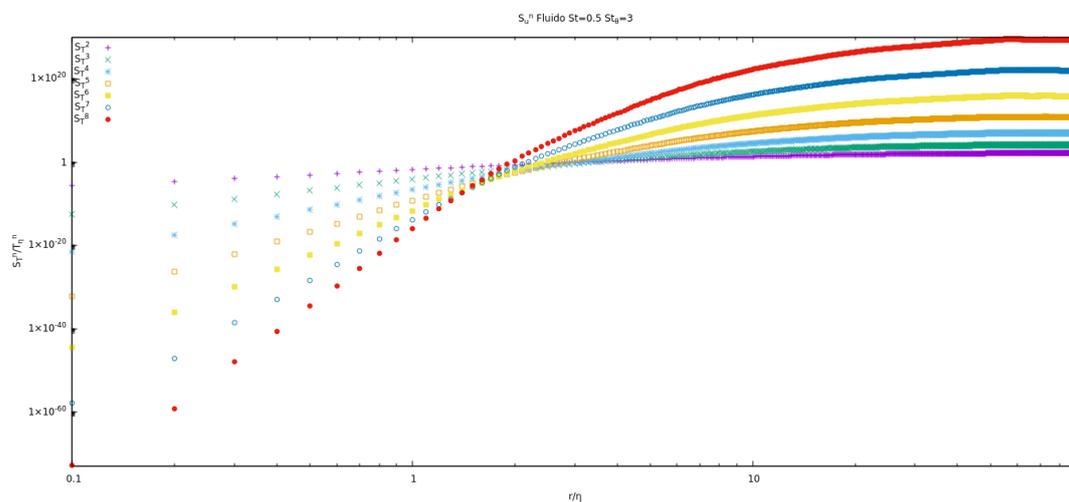


Figura 5.45: *Funzione di struttura del campo di temperatura del fluido per  $St=0.5$  e  $St_{\theta} = 3$*

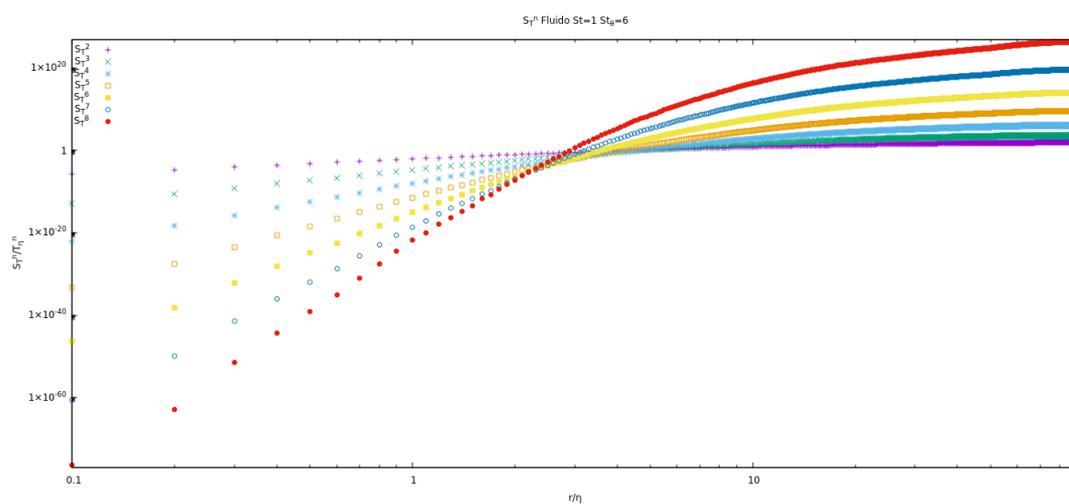


Figura 5.46: *Funzione di struttura del campo di temperatura del fluido per  $St=1$  e  $St_{\theta} = 6$*

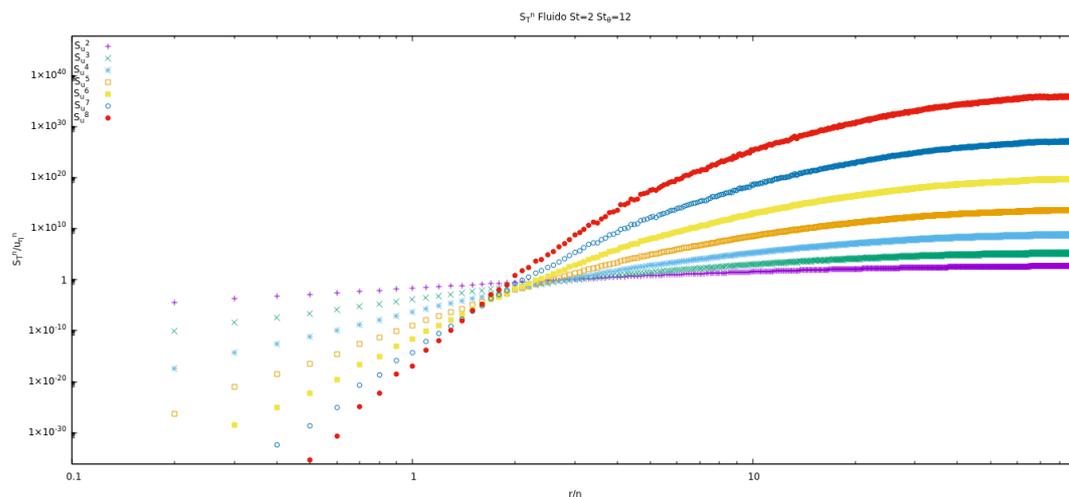


Figura 5.47: Funzione di struttura del campo di temperatura del fluido per  $St=2$  e  $St_\theta = 12$

Da come si può notare nelle figure soprastanti, tutte le funzioni mostrano un primo tratto con andamento lineare relativo al range dissipativo, e un secondo tratto, sempre lineare, inerente al range inerziale. Questo andamento lineare, poiché il grafico è in scala logaritmica, implica che l'andamento segua una legge di potenza.

Si nota inoltre come le funzioni di struttura tendano a zero per distanze che tendono allo stesso valore, poiché appunto riferite al fluido.

Nella seguente immagine vengono riportati gli andamenti delle funzioni di struttura di secondo ordine  $S_T^2$  per numeri di Stokes pari a 0.5, 1 e 2, mantenendo il rapporto  $St_\theta/St$  costante.

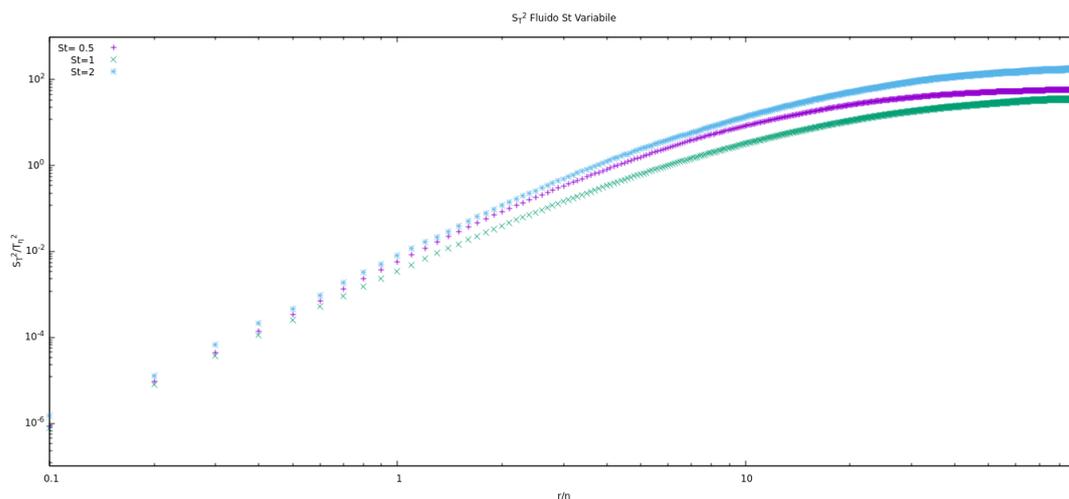


Figura 5.48: Funzioni di struttura del fluido per Stokes variabile

Di seguito si riportano le funzioni di struttura di secondo ordine per i numeri di Stokes pari a 0.5 e 1 al variare del numero di Stokes termico.

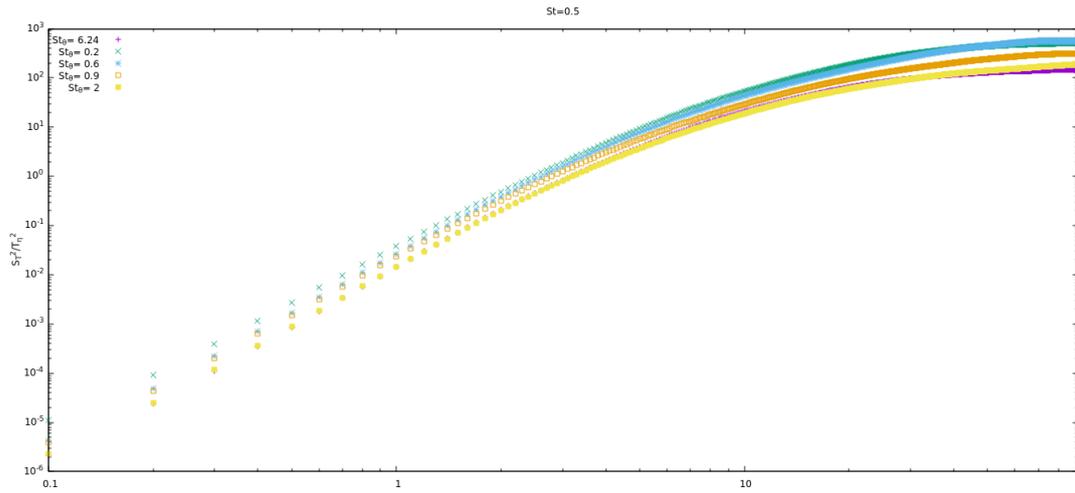


Figura 5.49: *Funzione di struttura del campo di temperatura del fluido per  $St=0.5$  e  $St_\theta$  variabile*

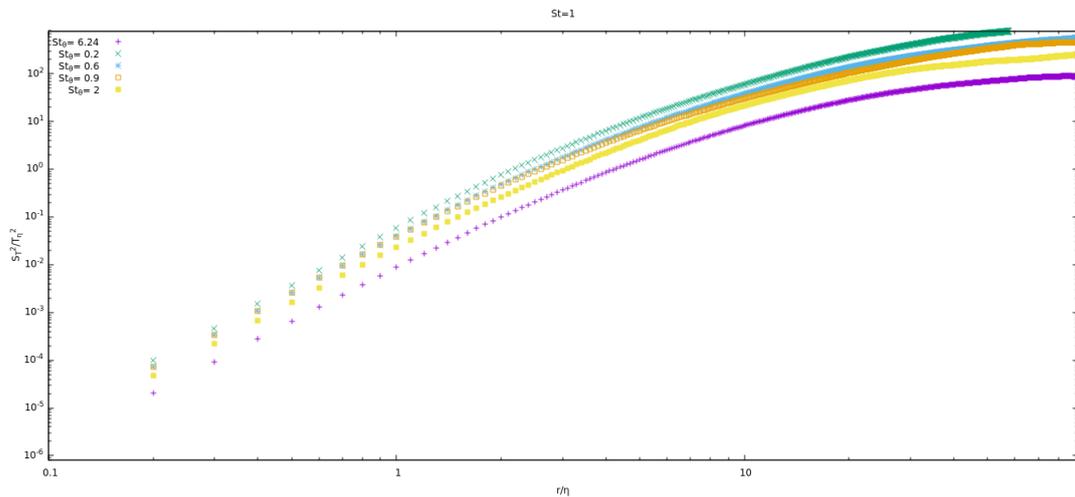


Figura 5.50: *Funzione di struttura del campo di temperatura del fluido per  $St=1$  e  $St_\theta$  variabile*

I risultati mostrano che, se si tiene conto dell'accoppiamento bidirezionale, la funzione di struttura di secondo ordine  $S_7^2$  presenta una decrescita monotona all'aumentare del numero di Stokes termico su tutte le scale. Nel range dissipativo,  $S_7^2$  è direttamente legato al tasso di dissipazione, ed è soppresso nello stesso modo per tutti i numeri di Stokes considerati. Al contrario, la soppressione delle fluttuazioni su grande scala è più forte al diminuire di  $St$ .

### 5.3.3 Funzioni di Struttura del Campo di Temperatura delle Particelle

La funzione di struttura di ordine  $n$  della temperatura delle particelle  $\theta_p(t)$  viene definita come:

$$S_\theta^n(r) \equiv \langle |\Delta\theta_p(r, n)|^n \rangle \quad (5.2)$$

dove  $\Delta T(r, t)$  é la differenza di temperatura di due particelle poste a distanza  $r$ . In figura vengono riportati i risultati di  $S_\theta^2$  per diversi  $St$  e  $St_\theta$ .

I risultati mostrano che  $S_\theta^2$  dipende da  $St_\theta$  nella stessa maniera in cui le funzioni di struttura della velocità relativa delle particelle inerziali dipende da  $St$ .

Di seguito vengono riportati i grafici in cui sono mostrati gli andamenti degli esponenti per i vari numeri di Stokes considerati.

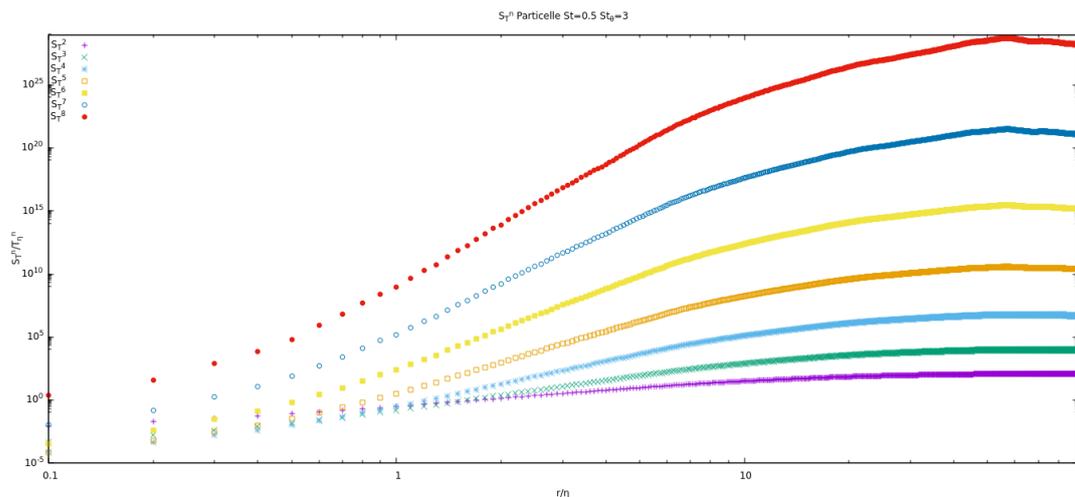


Figura 5.51: *Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per  $St=0.5$  e  $St_\theta = 3$*

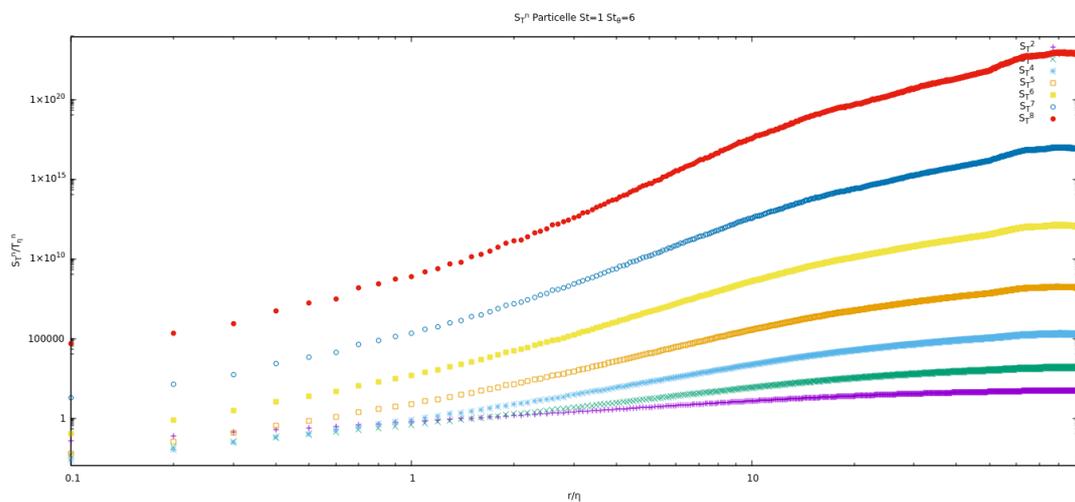


Figura 5.52: *Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per  $St=1$  e  $St_\theta = 6$*

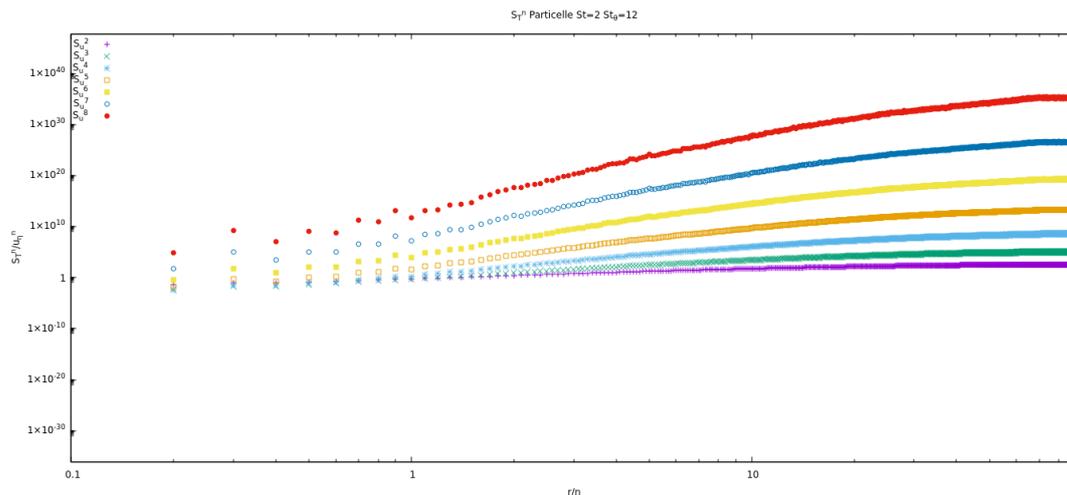


Figura 5.53: Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per  $St=2$  e  $St_\theta = 12$

Nella seguente immagine vengono riportati gli andamenti delle funzioni di struttura con esponente pari a 2 per numeri di Stokes pari a 0.5, 1 e 2, mantenendo il rapporto  $St_\theta/St$  costante.

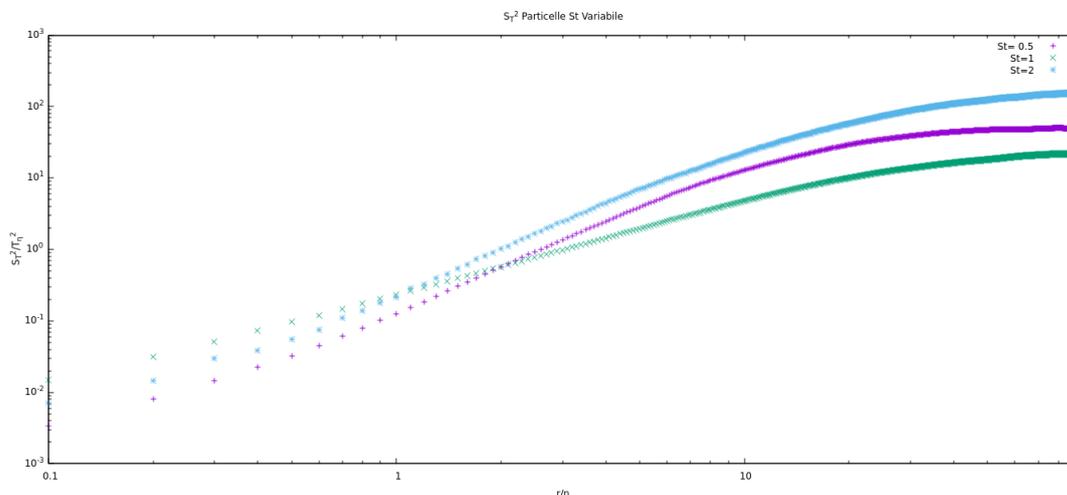


Figura 5.54: Funzioni di struttura delle particelle per Stokes variabile

Analogamente a quanto visto per le funzioni di struttura del fluido, anche qui le curve relative ad ogni esponente mostrato due tratti lineari, uno relativo al range dissipativo e uno a quello inerziale.

Di seguito si riportano le funzioni di struttura di secondo ordine per i numeri di Stokes pari a 0.5 e 1 al variare del numero di Stokes termico.

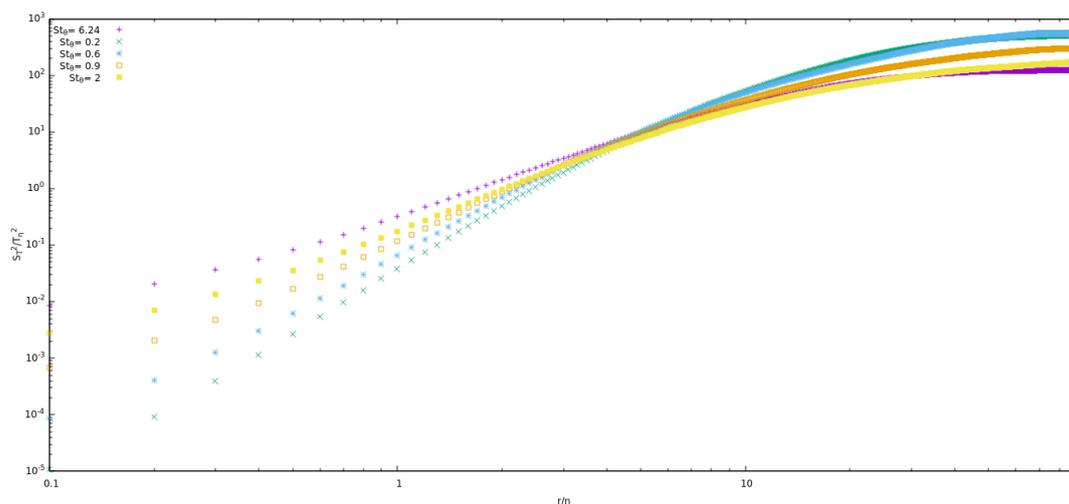


Figura 5.55: *Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per  $St=0.5$  e  $St_\theta$  variabile*

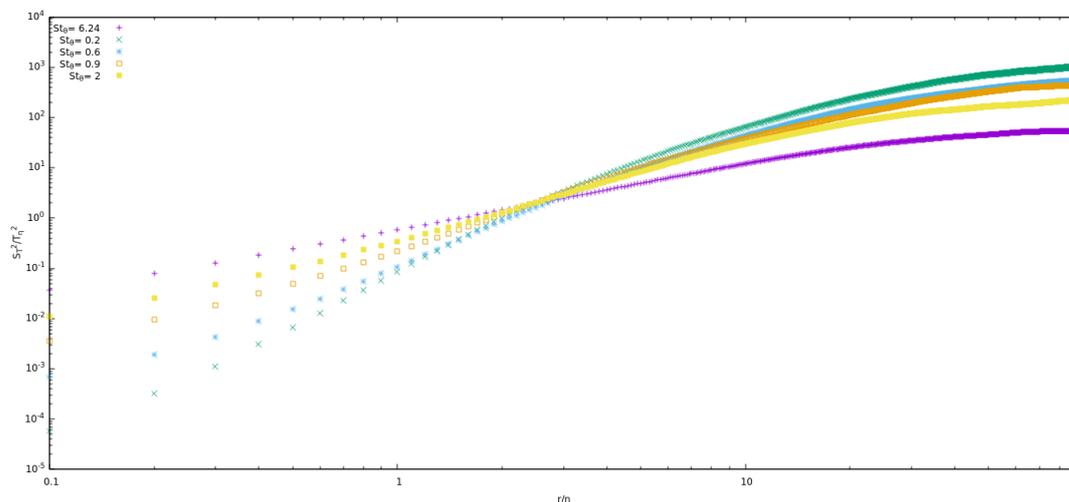


Figura 5.56: *Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per  $St=1$  e  $St_\theta$  variabile*

Dalle figure si nota come la funzione di struttura di secondo ordine  $S_T^2$  dipendano sia da  $St_\theta$ , in particolare risultano essere direttamente proporzionale, che da  $St$ . Infatti, aumentando il numero di Stokes, le particelle risultano avere un'inerzia maggiore, quindi la loro temperatura può essere molto diversa dalla temperatura locale del fluido. Si può notare che man mano che la distanza diminuisce, anche le funzioni diminuiscono, senza però arrivare a zero. Questo fenomeno può essere riportato all'inerzia termica delle particelle, le quali possono avere temperature molto diverse anche se poste a distanze ridotte - fenomeno tanto più rilevante all'aumentare dell'inerzia termica, ossia  $St_\theta$ .

### 5.3.4 Funzioni di Struttura del Campo di Velocità del Fluido

In questa sezione, analogamente a quanto fatto prima, vengono analizzate le funzioni di struttura del campo di velocità del fluido. In questo caso è necessario definire la direzione

in cui si vuole valutare la differenza di temperatura e, per risolvere il problema, queste vengono valutate considerando la norma del vettore velocità.

La funzione di struttura del campo di velocità é definita come:

$$S_u^n = \langle ||\bar{u}(\bar{x}_2) - \bar{u}(\bar{x}_1)|| \rangle \quad (5.3)$$

Si noti che, essendo il campo di velocità omogeneo, la funzione di struttura non dipende dalla differenza di velocità tra due punti, ma dalla loro posizione. Inoltre, essendo il campo anche isotropo,  $S_u^n$  dipende dal modulo del vettore posizione. Quindi, riassumendo, la funzione di struttura dipende solo dalla distanza  $r$ .

Non essendoci il feedback di quantità di moto delle particelle, il fluido non risulta essere influenzato dalla presenza di queste. Quindi le funzioni di struttura hanno gli stessi andamenti per ogni numero di Stokes considerato. L'unica differenza che si può notare é dovuta al fatto che essendo state fatte due simulazioni, le condizioni iniziali sono differenti; quindi, anche se queste sono statisticamente equivalenti, si hanno differenze nei dettagli dei vortici.

Di seguito vengono riportati i grafici in cui sono mostrati gli andamenti degli esponenti per i vari numeri di Stokes considerati.

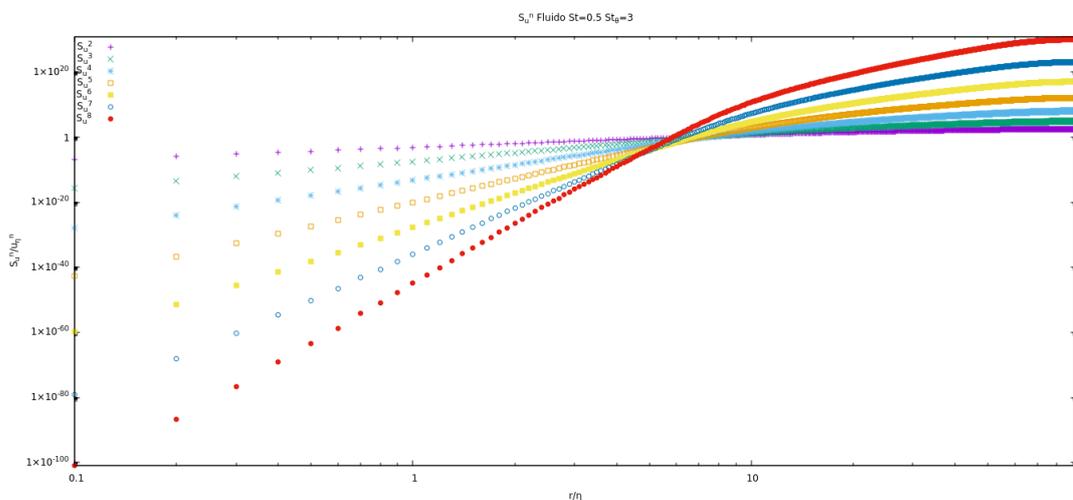


Figura 5.57: Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per  $St=0.5$  e  $St_\theta = 3$

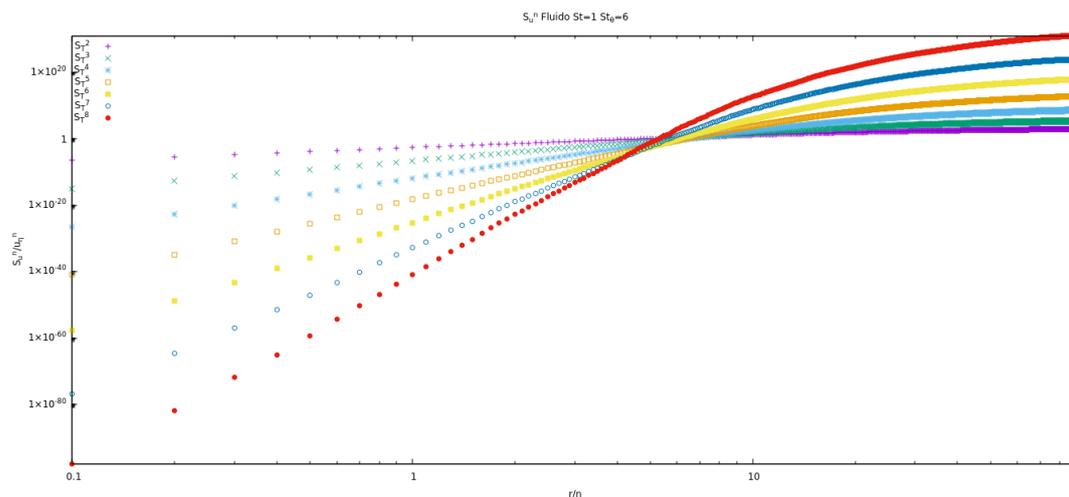


Figura 5.58: *Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per  $St=1$  e  $St_\theta = 6$*

Si nota come alle piccole scale le funzioni di struttura diminuiscano all'aumentare del numero di Stokes. Infatti, in questo range, le funzioni di struttura del campo di velocità risultano essere proporzionali al rateo di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta

Analogamente a quanto visto per il campo di temperatura, si possono notare due tratti lineari relativi al range dissipativo e quello inerziale.

Nella seguente immagine vengono riportati gli andamenti delle funzioni di struttura con esponente pari a 2 per numeri di Stokes pari a 0.5, 1 e 2, mantenendo il rapporto  $St_\theta/St$  costante.

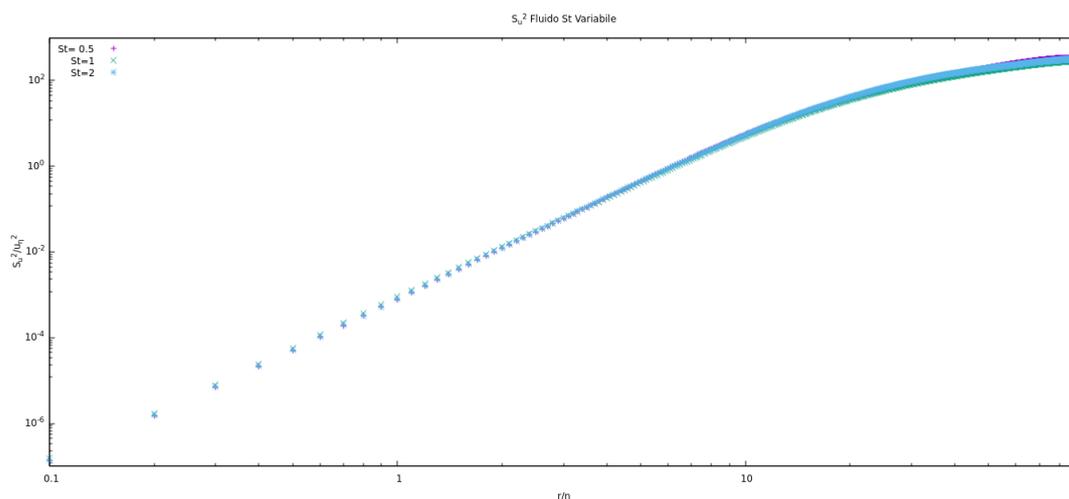


Figura 5.59: *Funzioni di struttura del fluido per Stokes variabile*

Non essendoci il feedback sulla quantità di moto, le curve risultano essere all'incirca sovrapposte.

### 5.3.5 Funzioni di Struttura del Campo di Velocità delle Particelle

In questa sezione vengono analizzate le funzioni di struttura del campo di velocità delle particelle. Di seguito si riportano gli andamenti degli esponenti delle funzioni di struttura considerando i casi di  $St$  pari a 0.5, 1 e 2.

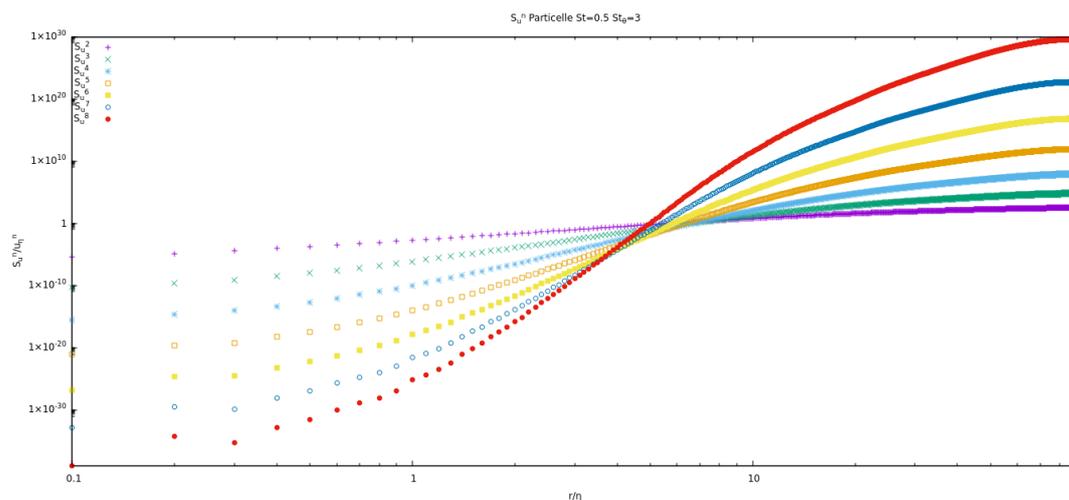


Figura 5.60: Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per  $St=0.5$  e  $St_{\theta} = 3$

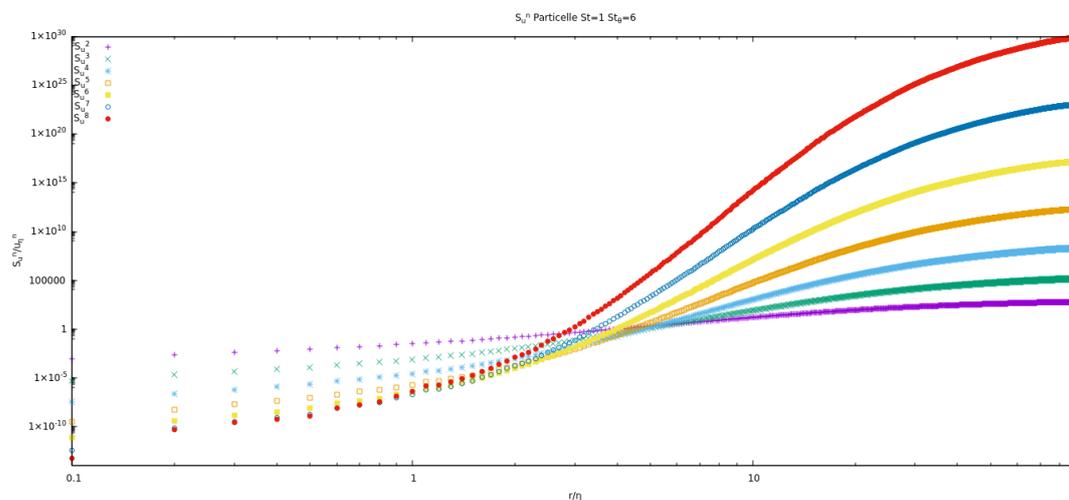


Figura 5.61: Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per  $St=1$  e  $St_{\theta} = 6$

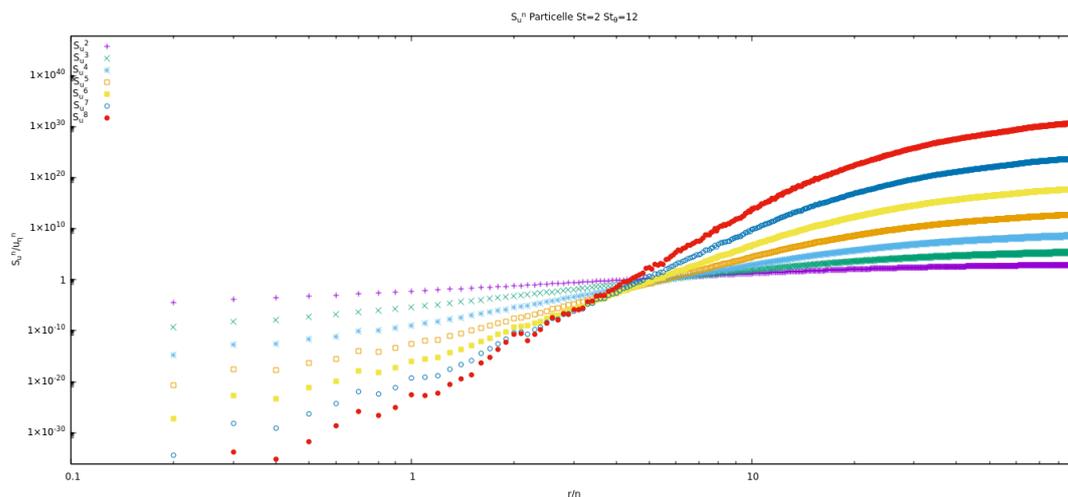


Figura 5.62: *Funzione di struttura del campo di temperatura delle particelle per  $St=1$  e  $St_\theta = 6$*

Come visto per tutti i casi precedenti, si possono notare i due tratti lineari e, considerando in particolare le funzioni di struttura del campo di temperatura delle particelle, anche qui queste non tendono a zero a causa dell'inerzia delle particelle.

Di seguito vengono riportati i grafici di  $S_u^2$  al variare del numero di Stokes.

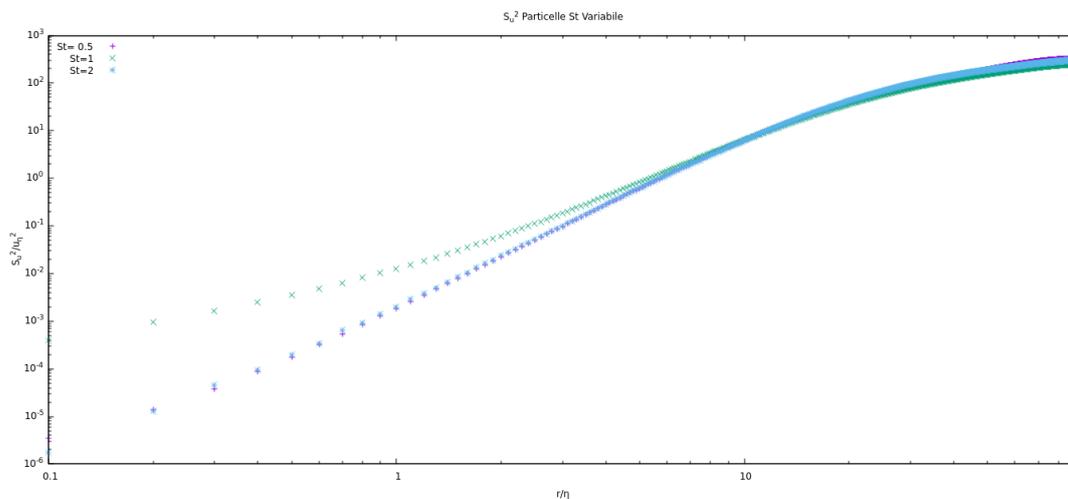


Figura 5.63: *Funzioni di struttura delle particelle per Stokes variabile*

Si può notare come le curve tendano, a piccole distanze, a non seguire più l'andamento analitico poiché particelle molto vicine tendono ad avere velocità relative molto diverse rispetto al flusso locale. Invece, considerando le grandi scale, si nota come l'energia cinetica diminuisca all'aumentare del numero di Stokes.

## 5.4 Funzione di Densità di Probabilità

In questa sezione verranno mostrate le PDF delle fluttuazioni di temperatura del fluido e delle particelle. Le simulazioni per ottenere questi grafici sono state fatte utilizzando parametri diversi, di seguito elencati:

Kinematic viscosity	$\nu$	0.005
Prandtl number	Pr	1
Velocity fluctuations dissipation rate	$\varepsilon$	0.27
Temperature fluctuations dissipation rate	$\chi$	0.1
Kolmogorov time scale	$\tau_\eta$	0.136
Kolmogorov length scale	$\eta$	0.0261
Taylor micro-scale	$\lambda$	0.498
Integral length scale	$\ell$	1.4
Root mean square velocity	$u'$	0.88
Kolmogorov velocity scale	$u_\eta$	0.192
Small scale temperature	$T_\eta$	0.117
Taylor Reynolds number	Re $_\lambda$	88
Integral scale Reynolds number	Re $_\ell$	244
Forced wavenumber	$k_f$	$\sqrt{2}$
Number of Fourier modes	$N$	128 (3/2)
Resolution	$N\eta/2$	1.67

Figura 5.64: *Parametri del fluido [27]*

Particle phase volume fraction	$\phi$	0.0004
Particle to fluid density ratio	$\rho_p/\rho_0$	1000
Particle back reaction	$C_T$	S1: included; S2: neglected.
Stokes number	St	0.5; 1; 3.
Thermal Stokes number	St $_\theta$	0.2; 0.6; 1; 1.5; 2; 3; 4; 5; 6.
Number of particles	$N_P$	12500992; 4419584; 847872.

Figura 5.65: *Parametri della fase dispersa [27]*

Si noti che, poiché le simulazioni sono state fatte tramite DNS con forzanti sulle grandi scale, queste statistiche possono essere influenzate dal tipo di forzante imposta [46]. In generale, la PDF della velocità segue un andamento Gaussiano, mentre lo scalare trasportato no. Lo scalare passivo e le particelle tendono ad essere spinti ai bordi del vortice, quindi queste presenteranno zone di forti gradienti; queste zone, infatti, presenteranno una PDF della temperatura con code esponenziali.

Questo comportamento é osservabile per  $Re_\lambda > 30$ .

### 5.4.1 Fluttuazioni del Campo di Temperatura del Fluido

Nelle figure sottostanti vengono mostrate le PDF del fluido considerando un punto per  $St = 1$  e  $St = 3$  al variare del numero di Stokes termico. Le PDF sono normalizzate sono la deviazione standard della distribuzione  $\sigma_T$ . Si può notare che le PDF seguono

l'andamento Gaussiano per bassi  $St_\theta$ , con code che diventano piú ampie man mano che il numero di Stokes termico aumenta. Questo fenomeno non é ancora stato pienamente compreso. Inoltre, le PDF della temperatura mostrano una non simmetria, con una gobba nella parte destra. Questo fenomeno é stato riscontrato anche per il caso senza particelle, e pare essere dovuto al basso numero di Reynolds. La PDF non risulta quindi essere influenzata dalla presenza delle particelle, anche in caso di feedback di temperatura. Dalle figure si puó notare la grande dipendenza di  $\sigma_T$  dal numero di Stokes.

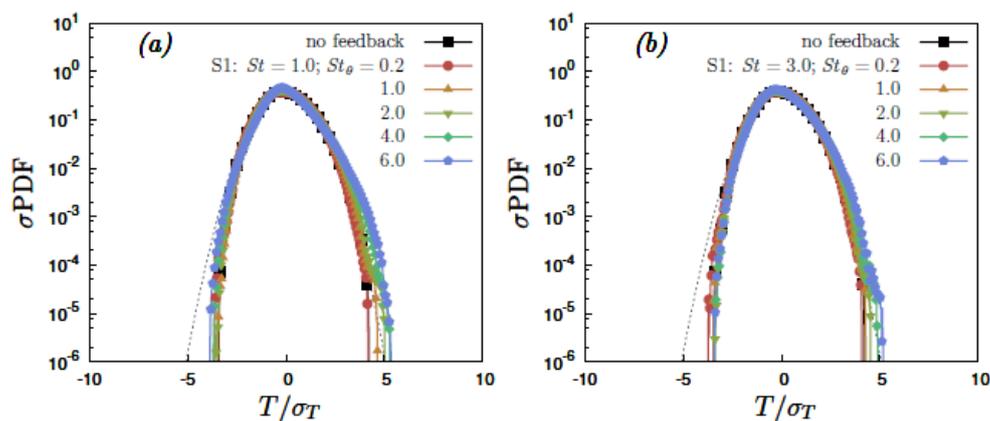


Figura 5.66: PDF del fluido per  $St = 1$  e  $St = 3$  con  $St_\theta$  variabile [27].

Si riporta inoltre il kurtosis delle fluttuazioni di temperatura del fluido, come funzione di  $St_\theta$  e per vari  $St$ . Si puó notare che, per piccoli valori di  $St_\theta$ , il valore del kurtosis é vicino a quello che si ha per una Gaussiana, ossia 3. Ma, man mano che  $St_\theta$  aumenta, il kurtosis aumenta. Inoltre, si puó notare che questo diminuisce, in particolare diventa negativa, all'aumentare del numero di Stokes. Il motivo di questo andamento non é del tutto certo.

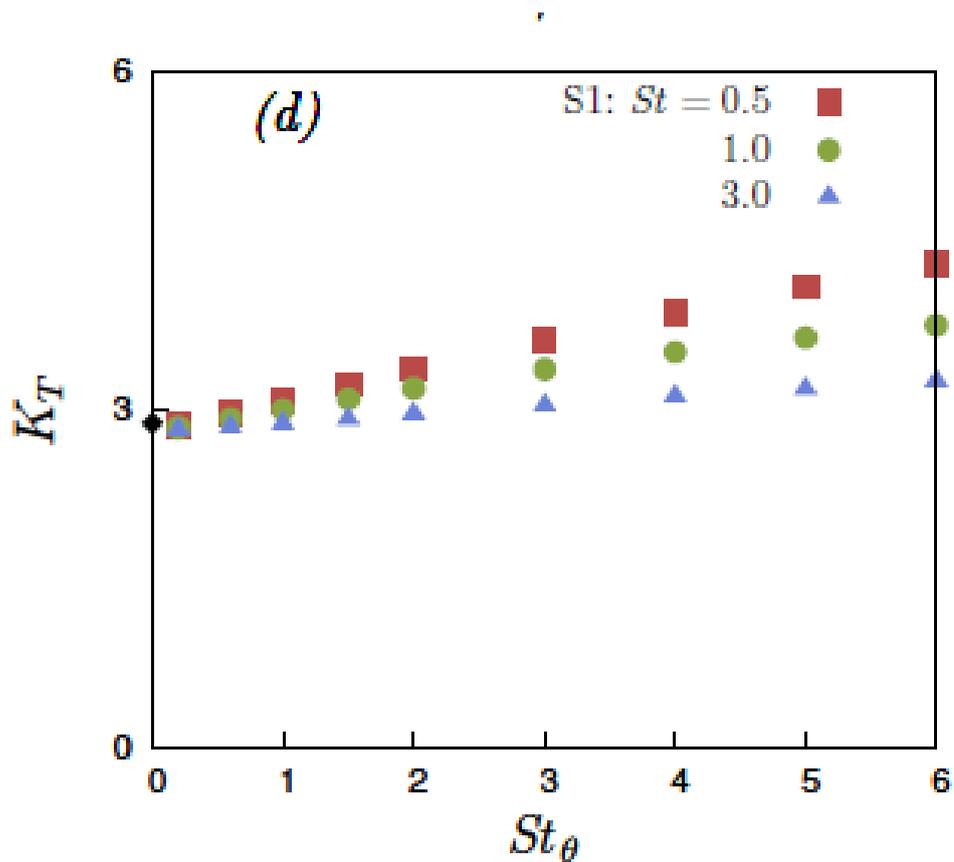


Figura 5.67: Kurtosis della PDF del fluido [27].

#### 5.4.2 Fluttuazioni del Capo di Temperatura delle Particelle

Nelle figure seguenti, analogamente a quanto fatto per il fluido, vengono mostrate le PDF della temperatura delle particelle per  $St = 1$  e  $St = 3$ , al variare del numero di Stokes termico. Si riportano i casi in cui si considera l'accoppiamento bidirezionale e il caso in cui questo venga trascurato.

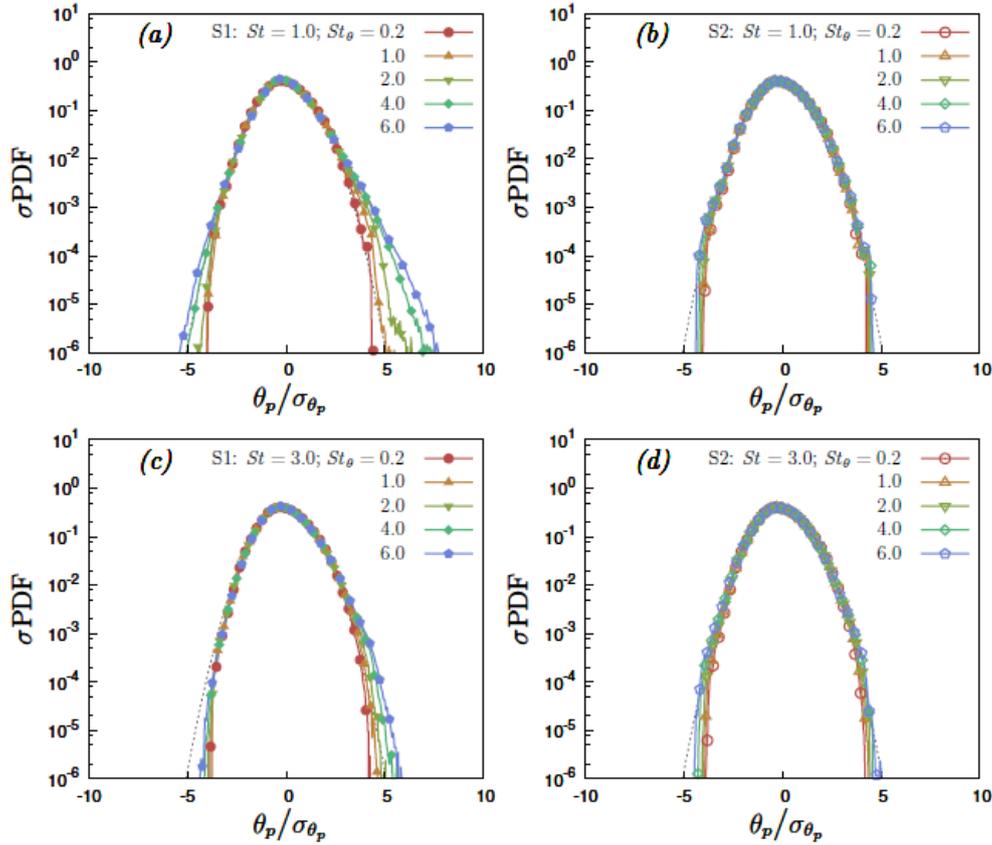


Figura 5.68: PDF delle particelle per  $St = 1$  e  $St = 3$  con  $St_\theta$  variabile. A destra il grafico in cui non viene tenuto in conto il feedback [27].

Si può notare come in caso di assenza di feedback le curve tendano ad essere più fedeli alla curva Gaussiana. Questo perché le particelle che si trovano in una regione con temperatura molto diversa dalla loro tendono a scambiare molto calore ma, non essendoci accoppiamento termico, il fluido non risente di questo scambio e i valori estremi di temperatura tendono ad essere smorzati più in fretta e le grandi code sono eliminate. Aumentando il numero di Stokes i valori estremi di temperatura, ossia i valori molto più grandi della varianza, delle particelle sono sempre più probabili ma, essendo la frazione volumica piccola e che la particella influenza una regione solo intorno a sé, non si hanno grandi effetti sul fluido.

Si riporta inoltre il kurtosis della temperatura delle particelle. Si può notare che questo aumenta all'aumentare di  $St_\theta$  in caso di presenza di feedback. Al contrario, questo rimane su un valore costante quando l'accoppiamento è trascurato, indipendentemente dalla variazione di  $St_\theta$ .

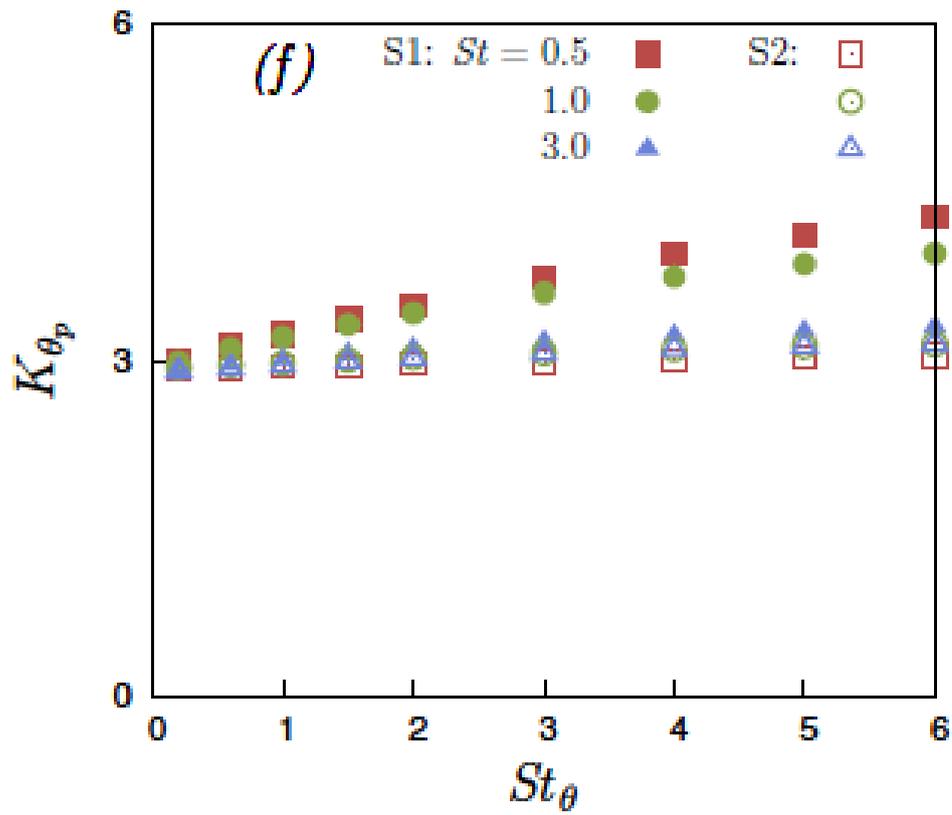


Figura 5.69: Kurtosis della PDF delle particelle [27].

Si riportano inoltre le PDF della derivata delle temperature delle particelle per i numeri di Stokes al variare di  $St_{\theta}$ .

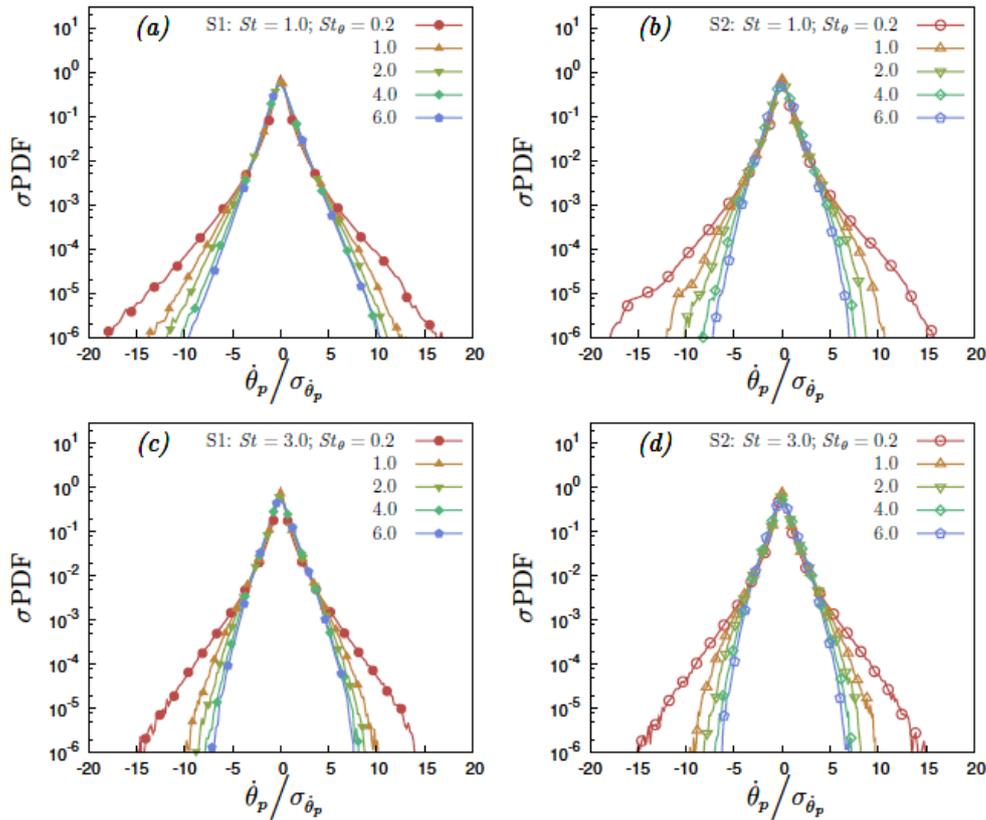


Figura 5.70: PDF di  $\dot{\theta}_p$ . A destra il grafico in cui viene tenuto in conto il feedback [27].

Si nota che, a differenza della PDF del gradiente di temperatura del fluido, quella di  $\dot{\theta}_p$  non é autosimile rispetto alla sua varianza. Inoltre, all'aumentare del numero di Stokes termico, la PDF tende ad assottigliarsi, poiché per elevati valori di  $St_\theta$  i forti gradienti di temperatura di fluido e particelle tendono ad essere soppressi. Ciò é dovuto al fatto che, all'aumentare dell'inerzia termica delle particelle, queste tendono a rispondere piú lentamente alle variazioni di temperatura del fluido. Si può notare che, quando si tiene conto del feedback di temperatura delle particelle, la coda della distribuzione della temperatura delle particelle tende a diventare piú ampia, invece, quando l'accoppiamento viene trascurato, la curva tende ad approssimare una Gaussiana e sia  $St$  che  $St_\theta$  non pare abbiano effetti sull'andamento, con un massimo scostamento per  $St = 1$ , infatti le particelle tendono a concentrarsi tutte dove sono presenti i gradienti dello scalare. Inoltre, per  $St_\theta$  piccoli, le variazioni di temperatura sono molto piú rapide, e infatti la PDF presenta code piú ampie.

Di seguito viene riportata la PDF del rateo di variazione della temperatura delle particelle con la funzione di Gauss, riportando le curve per vari numeri di Stokes e mantenendo  $St_\theta=1$  e trascurando il feedback di temperatura. Da questo grafico é possibile notare come il massimo scostamento dalla Gaussiana si abbia per  $St = 1$ , infatti é per questo valore che si assiste alla massima concentrazione delle particelle sui fronti, ossia dove sono presenti forti gradienti.

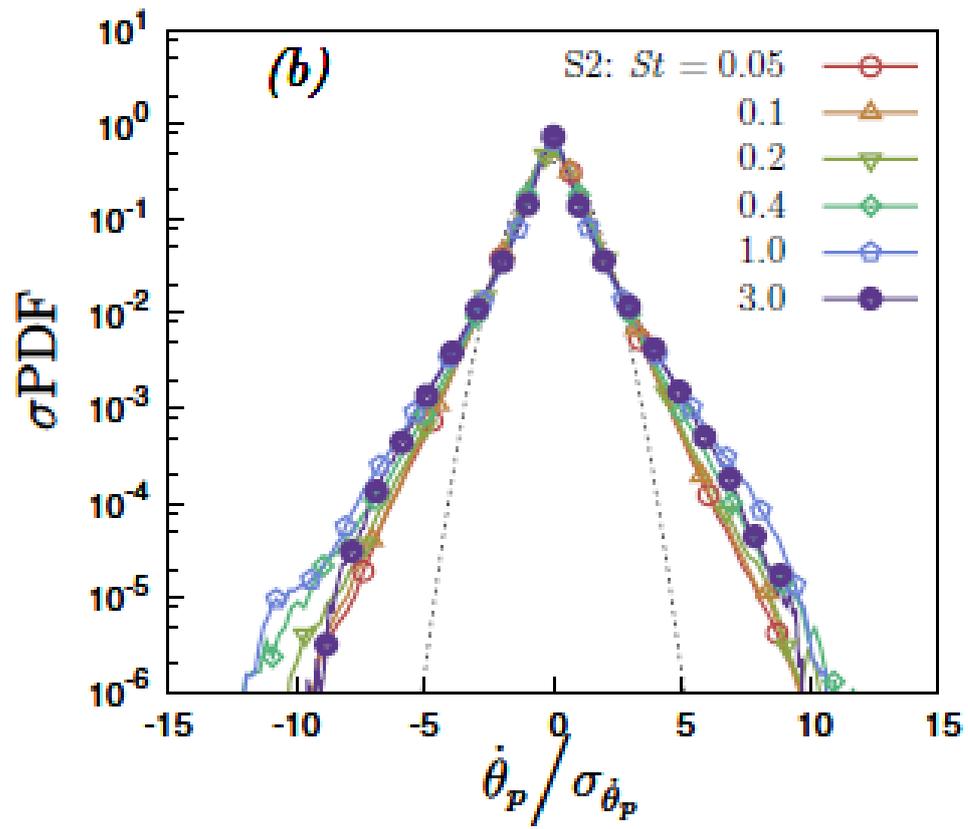


Figura 5.71: PDF di  $\dot{\theta}_p$  rispetto alla funzione di Gauss [27].



# Capitolo 6

## Conclusioni

Questo elaborato di tesi ha avuto come obiettivo quello di studiare l'interazione termica tra fluido e particelle sospese in un flusso turbolento, in particolare considerando l'accoppiamento termico bidirezionale, cioè tenendo conto della forza di reazione delle particelle sul fluido, e unidirezionale per quanto riguarda quello della quantità di moto. Il problema considerato è quello di una particella inerziale, rigida, sferica, piccola rispetto alla più piccola scala del flusso -la scala di Kolmogorov- e con velocità relativa rispetto al flusso anch'essa piccola. Le equazioni di Navier-Stokes e quelle di Maxey-Riley - rispettivamente per il fluido e per le particelle - sono state risolte con il metodo di simulazione diretta, o DNS, in cui queste vengono discretizzate e risolte senza l'ausilio di nessun modello. Queste equazioni racchiudono in sé, però, tutta la fisica del problema dei flussi turbolenti, quindi questo approccio deve risolvere un grande range di scale spaziali e temporali. In particolare, a parte il flusso dettagliato attorno ad ogni particella, sono risolte tutte le scale del moto del fluido, fino a quella di Kolmogorov. Questo metodo comporta da una parte una riproduzione dettagliata ed accurata del flusso, in cui la simulazione acquista un valore paragonabile ad un esperimento, ma dall'altra comporta un grande costo computazionale. Il flusso turbolento semplice considerato è senza flussi di taglio, ossia con turbolenza generata dalla griglia. In questo caso le fluttuazioni dello scalare vengono prodotte imponendo un gradiente medio di scalare nel flusso. In particolare, lo scalare passivo qui considerato è la temperatura. Si ricordi che per lo scalare passivo si intende un contaminante diffuso e trasportato in un flusso la cui concentrazione è talmente bassa da non avere effetti dinamici sul moto del flusso stesso. Il flusso studiato è un flusso turbolento, isotropo in velocità e stazionario. Per soddisfare quest'ultima condizione è necessario imporre una forzante, ossia inserire energia nel sistema. Per la velocità si è utilizzata una forzante di tipo deterministico, dove questa è proporzionale alla velocità, ossia  $\rho \mathbf{f} \propto \rho \mathbf{u}$ , e l'energia viene inserita a bassi numeri d'onda, quindi su scale grandi, in modo da non toccare lo spettro della turbolenza del range inerziale e dissipativo. Per quanto riguarda la temperatura, siccome la diffusione tenderebbe a rendere tutto uniforme, il campo è forzato dalla presenza del gradiente medio che, in presenza di turbolenza, genera fluttuazioni di scalare. Per le simulazioni si è considerato un numero di Reynolds pari a 152, e un  $Re_\lambda = 71$ , in modo da poter considerare il range inerziale sviluppato.

Il dominio considerato per le simulazioni è un cubo di lato  $2\pi$ , la cui dimensione risulta essere molto più grande della scala integrale del flusso in modo da non avere interferenze, evitando cioè che i vortici interagiscano con se stessi.

Invece di considerare un flusso infinito, si impone che questo sia periodico; questo vale a dire che ciò che è vero statisticamente lo sia anche istantaneamente; in altre parole, il

flusso che entra nel cubo é identico a quello che esce.

Le condizioni al contorno considerate sono periodiche, e di conseguenza lo sono anche le funzioni base utilizzate. Vengono utilizzate questo tipo di condizioni al contorno poiché il flusso che si vuole simulare é statisticamente omogeneo, cioè un flusso che di fatto si sviluppa in tutto il dominio, ma le cui proprietà statistiche delle fluttuazioni sono le stesse in tutti i punti. Il codice utilizzato presenta equazioni adimensionalizzate, quindi á necessario adimensionalizzare anche il dominio. In questo caso non é piú presente la forzante sulla temperatura, ma un gradiente medio di quest'ultima che viene mantenuto costante. Le equazioni sono state adimensionalizzate e modificate affinché sia stato possibile esplicitare il termine di generazione delle fluttuazioni, il quale equilibra la dissipazione.

Le simulazioni effettuate hanno previsto la variazione del numero di Stokes, che rappresenta il tempo che impiega la particella ad uniformarsi alla velocità del fluido, e il numero di Stokes termico, che dá un'indicazione sulla velocità di adeguamento della temperatura della particella a quella del fluido.

Dai risultati é stato possibile notare che, per ogni simulazione effettuata, la condizione stazionaria é stata raggiunta dopo un certo periodo di tempo, a seguito di una forte oscillazione iniziale.

Per quanto riguarda i campi di visualizzazione di velocità e temperatura del fluido, sié potuto notare che, a causa della turboforesi, le particelle tendono a posizionarsi verso il bordo dei vortici, dove sono presenti forti gradienti dello scalare. Questo fenomeno risulta essere tanto maggiore quanto il numero di Stokes é basso, poiché come detto prima, le particelle tendono a seguire bene il flusso.

Le funzioni di struttura del campo di temperatura, sia per il fluido che per le particelle, hanno permesso di confermare che l'ipotesi di Kolmogorov non risulta essere valida in queste simulazioni, poiché non presentano un comportamento autosimile, ossia non é possibile ricavare le funzioni di struttura di diverso ordine l'una dall'altra tramite un coefficiente di proporzionalità. Da queste si é potuto inoltre notare che il massimo trasporto di temperatura si ha per un valore di  $St$  e  $St_\theta \simeq 1$ .

Le funzioni di densità di probabilità della temperatura di fluido e particelle hanno messo in evidenza come effettivamente queste non seguano piú l'andamento Gaussiano, ma mostrino code esponenziali.

# Bibliografia

- [1] G. Buresti: *Elements of Fluid Dynamics*. Doi:10.1142/p848
- [2] M. Iovieno: *Fluidodinamica per l'Ambiente e l'Energia*. Politecnico di Torino, 2019.
- [3] Abdunour Y. Toukmaji and John A. Board. "Ewald summation techniques in perspective: a survey". In: *Computer Physics Communications* 95.2 (1996), pp. 73-92. doi: [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(96\)00016-1](https://doi.org/10.1016/0010-4655(96)00016-1).
- [4] P. J. Ireland, A. D. Bragg, and L. R. Collins. "The effect of Reynolds number on inertial particle dynamics in isotropic turbulence. Part 1. Simulations without gravitational effects". In: *Journal of Fluid Mechanics* 796 (2016), pp. 617-658. doi: 10.1017/jfm.2016.238.
- [5] T. Ma et al. "Progress in the second-moment closure for bubbly flow based on direct numerical simulation data". In: *Journal of Fluid Mechanics* 883 (2020), A9. doi: 10.1017/jfm.2019.851.
- [6] M. R. Maxey and J. J. Riley. "Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow". In: *Physics of Fluids* 26.4 (1983), pp. 883-889. doi: 10.1063/1.864230.
- [7] H. R. Pruppacher and J. D. Klett. *Microphysics of Clouds and Precipitation*. 2nd ed. Springer, 2010.
- [8] W. W. Grabowski and L.P.Wang. "Growth of Cloud Droplets in a Turbulent Environment". In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 45.1 (2013), pp. 293-324. doi: 10.1146/annure-fluid-011212-140750.
- [9] M. Holzer and E. D. Siggia. "Turbulent mixing of a passive scalar". In: *Physics of Fluids* 6.5 (1994), pp. 1820-1837. doi: 10.1063/1.868243.
- [10] A. Celani et al. "Universality and Saturation of Intermittency in Passive Scalar Turbulence". In: *Physical Review Letters* 84 (11 2000), pp. 2385-2388. doi: 10.1103/PhysRevLett.84.2385.
- [11] T. Watanabe and T. Gotoh. "Statistics of a passive scalar in homogeneous turbulence". In: *New Journal of Physics* 6.1 (2004).
- [12] F. Toschi and E. Bodenschatz. "Lagrangian Properties of Particles in Turbulence". In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 41.1 (2009), pp. 375-404. doi: 10.1146/annurev.fluid.010908.165210.

- [13] J. Bec et al. "Heavy Particle Concentration in Turbulence at Dissipative and Inertial Scales". In: *Physical Review Letters* 98 (8 2007), p. 084502. doi: 10.1103/PhysRevLett.98.084502.
- [14] A. D. Bragg, P. J. Ireland, and L. R. Collins. "Mechanisms for the clustering of inertial particles in the inertial range of isotropic turbulence". In: *Physical Review E* 92 (2 2015), p. 023029. doi: 10.1103/PhysRevE.92.023029.
- [15] P. J. Ireland, A. D. Bragg, and L. R. Collins. "The effect of Reynolds number on inertial particle dynamics in isotropic turbulence. Part 1. Simulations without gravitational effects". In: *Journal of Fluid Mechanics* 796 (2016), pp. 617-658. doi: 10.1017/jfm.2016.238.
- [16] M. R. Maxey. "The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields". In: *Journal of Fluid Mechanics* 174 (1987), pp. 441-465. doi: 10.1017/S0022112087000193.
- [17] L. P. Wang and M. R. Maxey. "Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence". In: *Journal of Fluid Mechanics* 256 (1993), pp. 27-68.
- [18] K. Gustavsson and B. Mehlig. "Ergodic and non-ergodic clustering of inertial particles". In: *Europhysics Letters* 96 (2011), p. 60012.
- [19] K. Gustavsson and B. Mehlig. "Statistical models for spatial patterns of heavy particles in turbulence". In: *Advances in Physics* 65.1 (2016), pp. 1-57. doi:10.1080/00018732.2016.1164490.
- [20] D. Buaria et al. "Extreme velocity gradients in turbulent flows". In: *New Journal of Physics* 21.4 (2019), p. 043004. doi: 10.1088/1367-2630/ab0756.
- [21] J. Bec, H. Homann, and G. Krstulovic. "Clustering, Fronts, and Heat Transfer in Turbulent Suspensions of Heavy Particles". In: *Physical Review Letters* 112 (23 2014), p. 234503. doi: 10.1103/PhysRevLett.112.234503.
- [22] K. R. Sreenivasan. "The passive scalar spectrum and the Obukhov-Corrsin constant". In: *Physics of Fluids* 8.1 (1996), pp. 189-196. doi: 10.1063/1.868826.
- [23] T. Gotoh and T. Watanabe. "Power and Nonpower Laws of Passive Scalar Moments Convected by Isotropic Turbulence". In: *Physical Review Letters* 115 (11 2015), p. 114502. doi: 10.1103 /PhysRevLett.115.114502.
- [24] B. Kumar, J. Schumacher, and R. A. Shaw. "Cloud microphysical effects of turbulent mixing and entrainment". In: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 27.3 (2013), pp. 361-376.
- [25] F. Toschi and E. Bodenschatz. "Lagrangian Properties of Particles in Turbulence". In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 41.1 (2009), pp. 375-404. doi: 10.1146/annurev.fluid.010908.165210.
- [26] F. Zonta, C. Marchioli, and A. Soldati. "Direct numerical simulation of turbulent heat transfer modulation in micro-dispersed channel flow". In: *Acta Mechanica* 195.1-4 (2008), pp. 305-326.

- [27] R. Dhariwal and S. L. Rani. "Effects of deterministic and stochastic forcing schemes on the relative motion of inertial particles in DNS of isotropic turbulence". In: *Powder Technology* 339 (2018), pp. 46-69. doi: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.07.058>.
- [28] M. Carbone "Particle motion and gradient dynamics in turbulent flows: Theory and Numerical Simulation". Politecnico di Torino, 2020.