

# POLITECNICO DI TORINO

Collegio di Ingegneria Meccanica, Aerospaziale, dell'Autoveicolo e della Produzione

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica**

Tesi di Laurea Magistrale

## **Determinazione della tensione a fondo dente con metodi semianalitici**



### **Relatori**

Prof. Carlo Rosso

Ing. Claudio Marcellini

Ing. Fabio Bruzzone

Ing. Tommaso Maggi

**Candidato**

Andrea Guerci

Aprile 2021

# Abstract

Le ruote dentate sono organi meccanici utilizzati per la trasmissione del moto rotatorio tra alberi mediante le azioni scambiate tra i denti. Trovano applicazione in svariati settori e tra i motivi che ne hanno determinato la diffusione vi sono la costanza del rapporto di trasmissione e la facilità costruttiva e di montaggio.

Il deterioramento e l'eventuale rottura di tali componenti sono fenomeni da non sottovalutare durante la fase di progettazione ed occorre quanto più possibile limitarli.

Il presente lavoro di tesi si propone di determinare la tensione a fondo dente con differenti metodi di calcolo, di cui uno analitico, uno semianalitico e uno agli elementi finiti confrontando i risultati ottenuti nei tre diversi casi.

I modelli sviluppati riguardano lo studio di ruote cilindriche a denti dritti e ruote cilindriche a denti elicoidali. Nel modello analitico, per il caso di ingranaggi a denti dritti, si considera una distribuzione del carico uniforme lungo la linea di contatto e non uniforme per il caso di ingranaggi a denti elicoidali.

La fase iniziale del lavoro verte sullo studio del classico approccio secondo la normativa di riferimento ISO 6336-3 per il calcolo della tensione alla radice del dente e relativa analisi dei fattori interessati nel calcolo del valore nominale di tensione.

Il modello analitico implementato consente di determinare la distribuzione del carico sui denti in contatto e la tensione a fondo dente riprendendo la formula della normativa ISO 6336-3, mentre il modello semianalitico utilizza un approccio basato sulla teoria della trave.

Entrambi i metodi permettono di studiare lo stato di tensione alla radice dei denti in contatto alla specifica posizione angolare relativa all'intervallo di rotazione in esame.

I primi due modelli sono definiti mediante codici di calcolo in ambiente MatLab, mentre per il modello agli elementi finiti si utilizza Solidworks.

La parte conclusiva del lavoro verte sul confronto e sull'analisi dei risultati di sollecitazione ottenuti nei tre diversi modelli.

# Indice

1	Introduzione .....	1
1.1	Ruote cilindriche a denti dritti.....	2
1.2	Ruote cilindriche a denti elicoidali .....	4
1.3	Dati di pignone e ruota condotta .....	6
1.3.1	Fase preliminare, denti dritti.....	7
1.3.2	Fase preliminare, denti elicoidali.....	9
2	Tensione a fondo dente, normativa ISO 6336.....	12
2.1	Fattore di forma, $Y_F$ .....	14
2.1.1	Determinazione di $sF_n$ , $\rho_F$ e $hF_e$ di ruote esterne generate con l'utensile creatore (hob) .....	17
2.1.2	Determinazione di $sF_n$ , $\rho_F$ e $hF_e$ di ruote generate con ruota dentata utensile (shaper cutter) .....	19
2.2	Fattore di correzione della tensione, $Y_S$ .....	23
2.3	Fattore dell'angolo d'elica, $Y_\beta$ .....	24
2.4	Fattore di spessore della corona, $Y_B$ .....	25
2.5	Fattore di profondità del dente, $Y_{DT}$ .....	26
2.6	Risultati della norma.....	28
3	Modello analitico.....	30
3.1	Descrizione del modello .....	30
3.1.1	Spostamento del dente .....	30
3.1.2	Distribuzione del carico, denti dritti.....	32
3.1.3	Distribuzione del carico, denti elicoidali.....	36
3.1.4	Tensione a fondo dente, denti dritti .....	38
3.1.5	Tensione a fondo dente, denti elicoidali .....	39
3.2	Risultati del modello analitico .....	40
3.2.1	Denti dritti .....	40
3.2.2	Denti elicoidali .....	43
4	Modello semianalitico basato sulla teoria della trave.....	49
4.1	Area e momenti d'inerzia .....	49
4.1.1	Calcolo di area e momenti d'inerzia .....	51
4.2	Elemento trave di Timoshenko.....	61
4.3	Assemblaggio della matrice di rigidità del dente .....	66
4.4	Componenti della forza nel punto di applicazione del carico .....	68

4.4.1 Esempio, denti dritti .....	69
4.4.2 Esempi, denti elicoidali.....	71
4.5 Calcolo degli spostamenti incogniti.....	73
4.5.1 Grafici di spostamento .....	75
4.6 Calcolo di forze e momenti in corrispondenza dei nodi struttura .....	77
4.6.1 Calcolo dei momenti attorno gli assi principali $\xi$ ed $\eta$ .....	80
4.7 Calcolo della tensione a fondo dente, denti dritti.....	83
4.8 Calcolo della tensione a fondo dente, denti elicoidali .....	85
5 Modello FEM .....	90
5.1 Applicazione di vincoli e carichi.....	90
5.2 Creazione della mesh.....	93
5.3 Risultati dello studio, denti dritti.....	93
5.4 Risultati dello studio, denti elicoidali .....	95
5.4.1 Due coppie di denti in presa.....	95
5.4.2 Tre coppie di denti in presa .....	97
6 Confronto tra i risultati dei modelli.....	100
6.1 Denti dritti .....	100
6.2 Denti elicoidali .....	102
6.2.1 Confronto tra FEM e norma ISO 6336-3.....	102
6.2.2 Confronto tra FEM e modello analitico .....	104
6.2.3 Confronto tra FEM e modello semianalitico .....	105
Conclusioni .....	110
Bibliografia.....	111

# 1 Introduzione

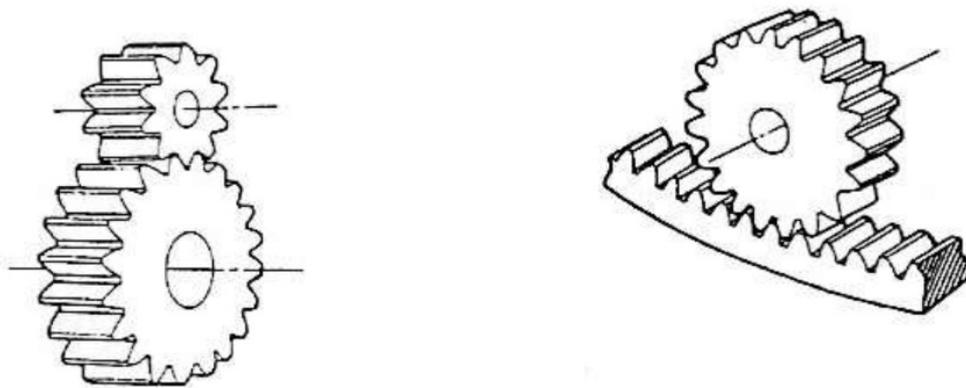
Le ruote dentate permettono di trasmettere il moto tra assi paralleli, concorrenti o sghembi mediante le azioni scambiate tra i denti. Due ruote che si scambiano tali forze costituiscono un ingranaggio. Le figure 1.1, 1.2, 1.3 mostrano alcuni esempi di ingranaggi realizzati con diverse tipologie di ruote.

Tra essi troviamo gli ingranaggi cilindrici che devono il loro nome alla forma cilindrica degli elementi che ne definiscono il comportamento cinematico e le caratteristiche costruttive.

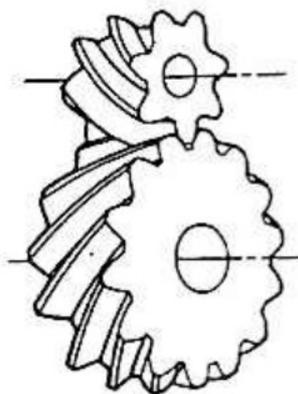
Nel caso di ingranaggi cilindrici a denti dritti, i denti si sviluppano parallelamente all'asse della ruota, mentre se i denti si sviluppano elicoidalmente intorno all'asse si parla di ingranaggi cilindrici a denti elicoidali. Entrambe le tipologie vengono utilizzate per la trasmissione del moto tra assi paralleli.

Gli ingranaggi conici vengono utilizzati per la trasmissione del moto tra assi complanari e non paralleli.

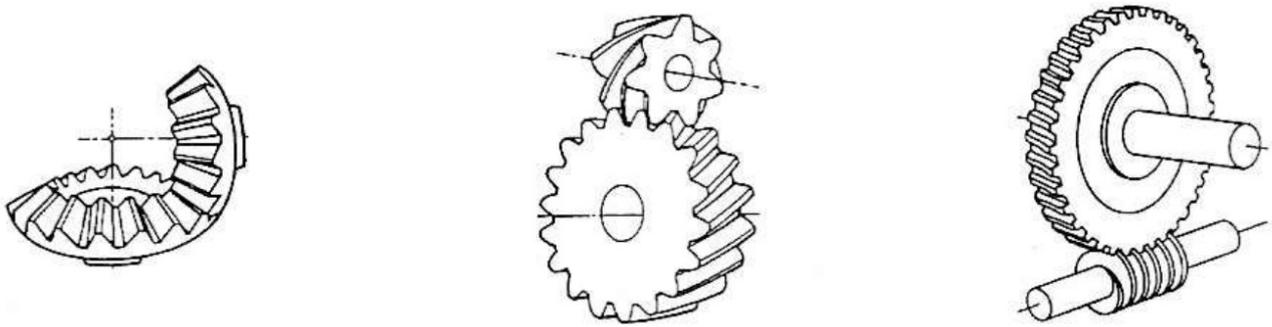
Qualora sia necessaria una trasmissione del moto tra assi perpendicolari e non complanari (sghembi) si utilizza l'ingranaggio vite senza fine-ruota elicoidale.



**Figura 1.1:** Ruote cilindriche a denti dritti. [1]



**Figura 1.2:** Ruote cilindriche a denti elicoidali. [1]



**Figura 1.3:** Ruote coniche, ruote ad assi sghembi, vite senza fine-ruota elicoidale. [1]

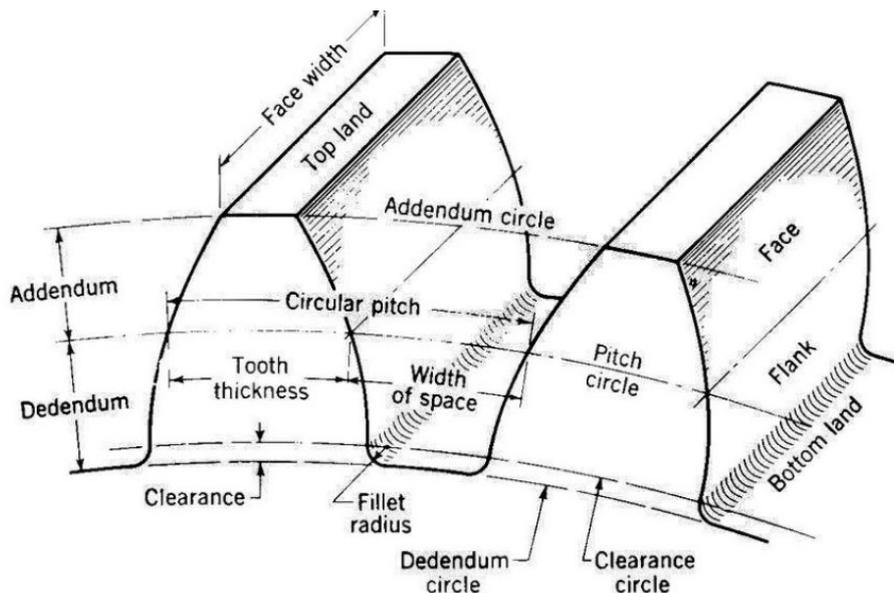
## 1.1 Ruote cilindriche a denti dritti

Sono le tipologie di ruote più comuni e sono utilizzate per la trasmissione di potenza tra alberi paralleli. In figura 1.4 si osserva la nomenclatura caratteristica delle ruote dentate. Le due estremità del dente sono definite dalla circonferenza di piede e dalla circonferenza di testa. La differenza tra il raggio di testa (troncatura esterna) e il raggio di piede (troncatura interna) definisce l'altezza del dente.

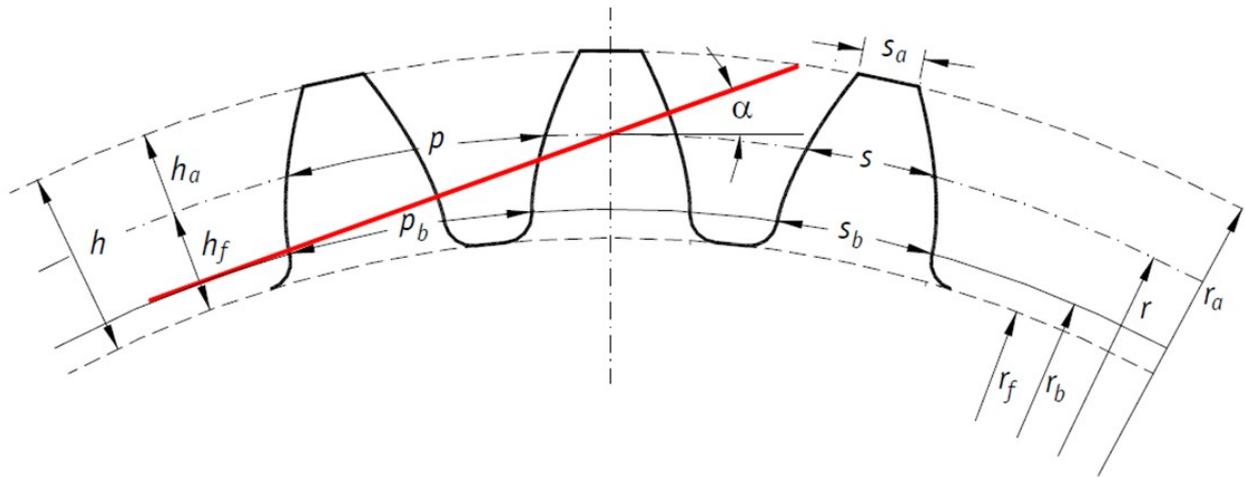
Il dedendum è definito come differenza tra il raggio del cerchio primitivo e il raggio di piede, mentre l'addendum è noto come differenza tra il raggio di testa e il raggio primitivo. Addendum e dedendum sono entrambi correlati al modulo della dentatura.

Per garantire il corretto ingranamento le due ruote devono avere lo stesso passo circolare, dato dalla somma di spessore del dente e vano. Sulla circonferenza primitiva lo spessore del dente e il vano coincidono e sono pari alla metà del passo.

In figura 1.5 vi è una rappresentazione schematica dei denti e della retta di azione rossa lungo la quale si ha lo scambio di forze tra i denti. Tale retta è tangente alla circonferenza di base delle due ruote ingrananti e passa per il centro di istantanea rotazione.



**Figura 1.4:** Nomenclatura delle ruote dentate. [3]

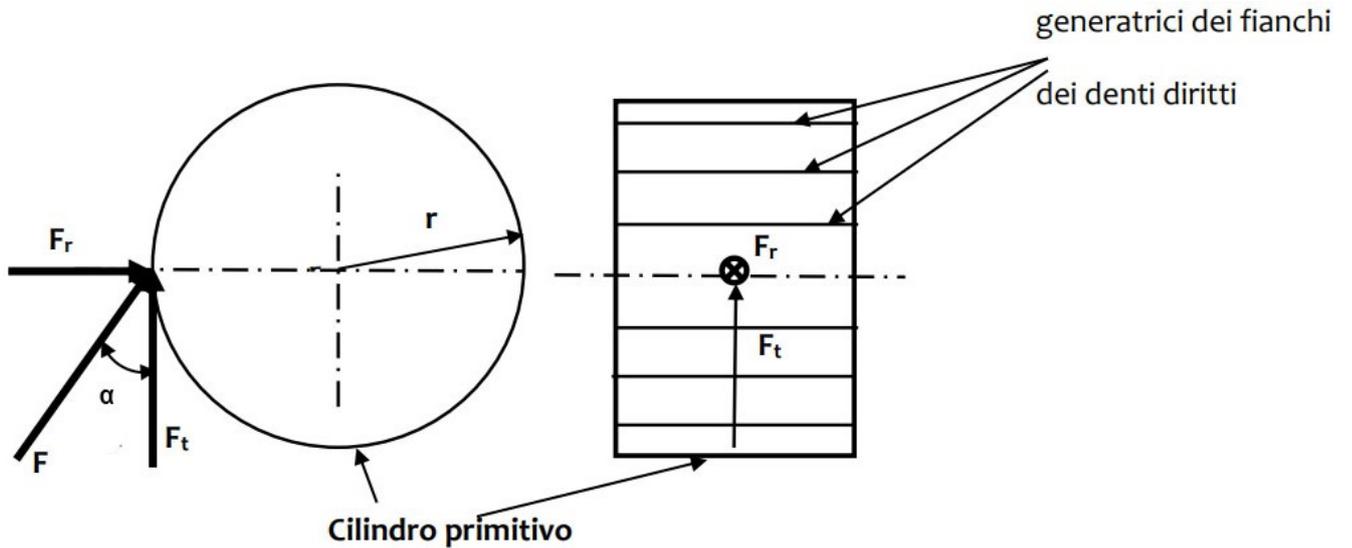


**Figura 1.5:** Retta di azione. [2]

In figura 1.6 è riportata la forza totale trasmessa  $F$  nell'ingranamento tra due ruote dentate con profilo ad evolvente. La forza tangenziale  $F_t$  è la componente della forza  $F$  nella direzione tangente comune alle due circonferenze primitive ed è quella a cui è dovuta la rotazione.

La forza radiale  $F_r$  è la componente della forza  $F$  diretta verso il centro della ruota.

L'angolo di pressione  $\alpha$  viene normalmente assunto pari a  $20^\circ$ .



**Figura 1.6:** Forze, ruote a denti dritti. [4]

**Tabella 1.1:** Grandezze geometriche caratteristiche.

Parametro	Simbolo
modulo	$m$
angolo di pressione	$\alpha$
raggio di testa	$r_a$
raggio primitivo	$r$
raggio di base	$r_b$
raggio di piede	$r_f$
addendum	$h_a = m$
dedendum	$h_f = 1.25 m$
altezza dente	$h = h_a + h_f$
passo	$p = \pi m$
passo base	$p_b = p \cos \alpha$
spessore del dente sulla linea di riferimento	$s = p/2$

## 1.2 Ruote cilindriche a denti elicoidali

Gli ingranaggi cilindrici a denti elicoidali realizzano una trasmissione del moto regolare e silenziosa e perciò sono largamente impiegati. Anche in questo caso la superficie del dente può essere pensata generata da una retta giacente su un piano che rotola senza strisciare sul cilindro fondamentale, però in questo caso la retta forma un angolo  $\beta_b$  con l'asse della ruota.

Nelle ruote dentate elicoidali, ai fini del proporzionamento, è importante la sezione normale alla superficie del dente. Utilizzando semplici relazioni geometriche è possibile legare le grandezze misurate sul piano normale con quelle misurate sul piano frontale.

In figura 1.7 e in figura 1.8 si osservano le componenti di forza e gli angoli caratteristici della dentatura elicoidale.

In tabella 1.2 sono messe in evidenza gli angoli e le forze delle ruote elicoidali e le relazioni geometriche che permettono di legare il passo e l'angolo di pressione sul piano normale con i rispettivi valori sul piano frontale.

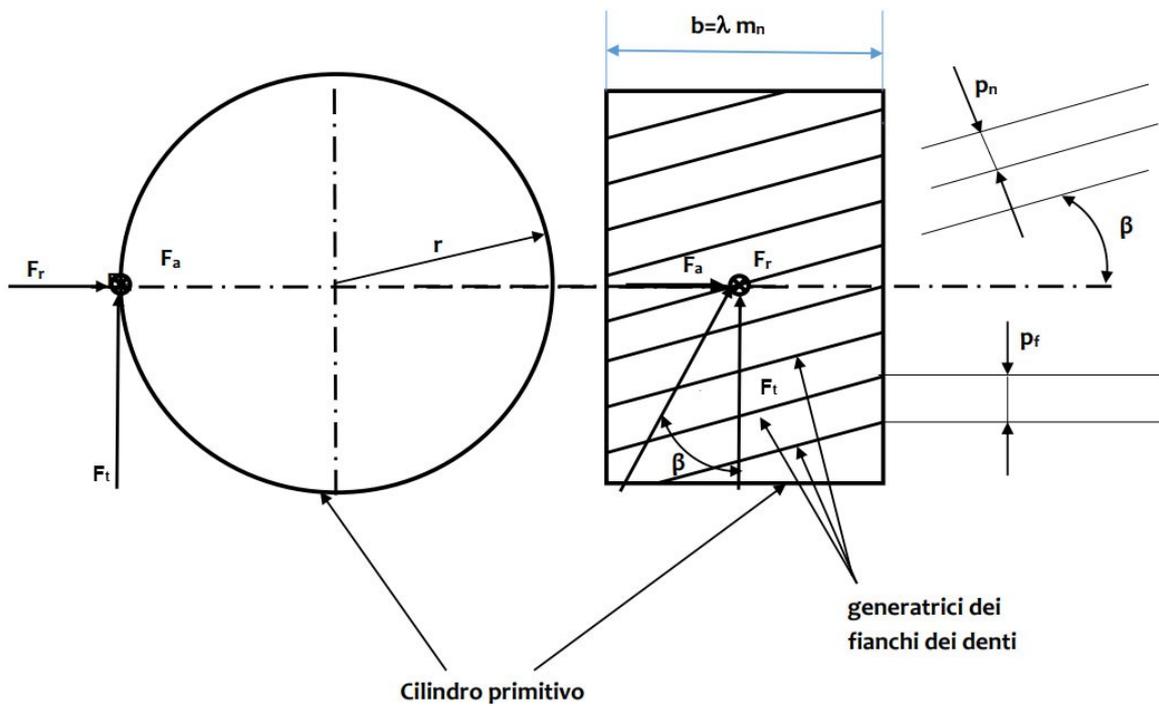


Figura 1.7. Forze, ruote a denti elicoidali. [4]

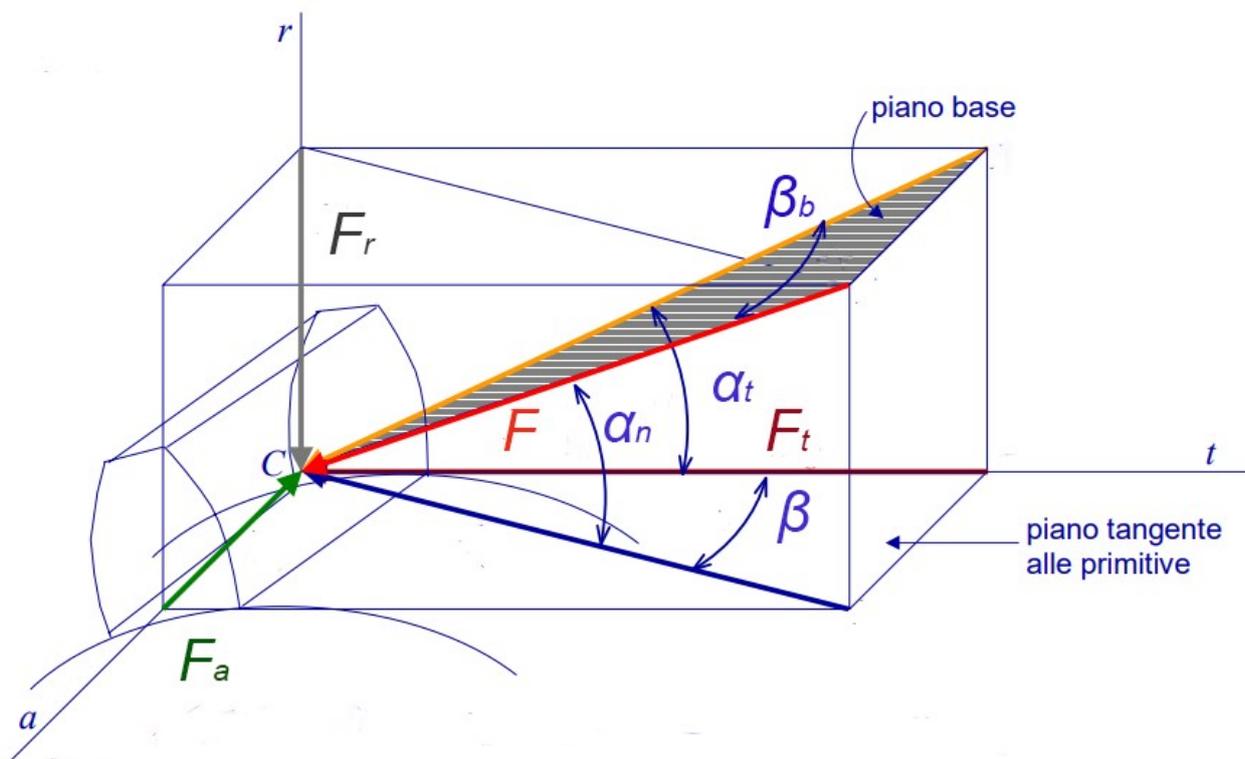


Figura 1.8. Forze e angoli caratteristici, ruote a denti elicoidali. [5]

**Tabella 1.2:** Relazioni caratteristiche, ruote a denti elicoidali.

Parametro	Simbolo
modulo normale	$m_n$
angolo di pressione frontale	$\alpha_t$
angolo di pressione normale	$\alpha_n$
angolo di inclinazione elica su cilindro primitivo	$\beta$
angolo di inclinazione elica su cilindro base	$\beta_b$
passo frontale	$p_f$
passo normale	$p_n = p_f \cos \beta$
relazione tra $\alpha_n$ e $\beta$	$\tan \alpha_n = \tan \alpha_t \cos \beta$
forza totale scambiata tra i denti	$F$
forza tangenziale	$F_t = F \cos \alpha_n \cos \beta = F \cos \beta_b \cos \alpha_t$
forza assiale	$F_a = F \cos \alpha_n \sin \beta = F \sin \beta_b$
forza radiale	$F_r = F \sin \alpha_n = F \cos \beta_b \sin \alpha_t$

### 1.3 Dati di pignone e ruota condotta

Al fine di calcolare la tensione a fondo dente occorre come prima cosa definire i dati relativi alle due tipologie di ruote dentate (cilindriche a denti dritti ed elicoidali) utilizzate nel presente lavoro di tesi.

Come input per i modelli che verranno implementati su MatLab viene fornito un file contenitore di dati. I dati relativi alle ruote in analisi sono organizzati opportunamente nelle seguenti strutture :

- CN
- mating
- input
- gear1
- gear2
- rack1
- rack2

**Tabella 1.3:** Strutture di dati.

Struttura	Descrizione
CN	Struttura contenente posizioni nodali e coordinate dei punti di contatto
mating	Parametri relativi all'accoppiamento tra pignone e condotta
input	Parametri relativi al dente
gear1	Parametri fondamentali del pignone
gear2	Parametri fondamentali della ruota
rack1	Parametri fondamentali della generatrice del pignone
rack2	Parametri fondamentali della generatrice della ruota

Per il caso a denti elicoidali vi è in aggiunta un elemento cell indicato come CNall, ovvero un vettore di celle che contiene le posizioni nodali dei soli punti di contatto di pignone e ruota per ciascuna slice di contatto.

### 1.3.1 Fase preliminare, denti dritti

I valori forniti in input al software utilizzato per dimensionare le ruote e generare i parametri fondamentali descritti sopra in tabella 1.3, sono raggruppati in tabella 1.4. Come si può osservare in tabella, le caratteristiche di pignone e ruota condotta sono analoghe e il valore di coppia imposta è pari a 500 Nm. Con il numero 1 si fa riferimento alle grandezze del pignone, con 2 quelle della condotta.

In figura 1.9, 1.10 e 1.11 sono riportati una serie di immagini relative al software.

**Tabella 1.4:** Valori in input al software, denti dritti. [9]

<b>Parametri in input</b>	<b>Valore</b>	<b>Unità di misura</b>
Modulo	6	[mm]
Angolo di pressione	20	[°]
Larghezza di fascia del pignone	60	[mm]
Larghezza di fascia della ruota	60	[mm]
Numero di denti del pignone	20	[-]
Numero di denti della ruota	20	[-]
Raggio esterno dell'albero del pignone	20	[mm]
Raggio esterno dell'albero della ruota	20	[mm]
Modulo elastico pignone	200	[GPa]
Modulo elastico ruota	200	[GPa]
Coefficiente di Poisson del pignone	0.3	[-]
Coefficiente di Poisson della ruota	0.3	[-]
Densità del materiale del pignone	$7.85 \times 10^{-9}$	[ton/mm <sup>3</sup> ]
Densità del materiale della ruota	$7.85 \times 10^{-9}$	[ton/mm <sup>3</sup> ]
Tensione di snervamento del pignone	500	[MPa]
Tensione di snervamento della ruota	500	[MPa]

GearRack		GearDraft		GearCutting		Optimicro		Dynamics 1D	
Input parameters		Tolerances		Profile modification		Results			
<b>Basic data</b>									
Coupling name		Coupling 1		Name		Pinion 1		Gear 1	
Normal module	<b>mn</b>	6	[mm]	Teeth number	<b>z1</b>	20	<b>z2</b>	20	[-]
Pressure angle	<b>α</b>	20	[°]	Profile shift coefficient	<b>x1</b>	0	<b>x2</b>	0	[-]
Helix angle	<b>β</b>	0	[°]	Teeth facewidth	<b>b1</b>	60	<b>b2</b>	60	[mm]
				Rim facewidth	<b>w1</b>	60	<b>w2</b>	60	[mm]
				Rim depth	<b>l1</b>	5	<b>l2</b>	5	[mm]
				External shaft radius	<b>r1 shaft_e</b>	20	<b>r2 shaft_e</b>	20	[mm]
<b>Material</b>									
Gear 1	Manually	Young modulus	<b>E1</b>	200	<b>E2</b>	200	[GPa]		
Gear 2	Manually	Poisson coefficient	<b>v1</b>	0.3	<b>v2</b>	0.3	[-]		
		Density	<b>p1</b>	7.85e-09	<b>p2</b>	7.85e-09	[ton/mm³]		
		Yield strength	<b>Rp1</b>	500	<b>Rp2</b>	500	[MPa]		
		Reset values		Create geometry		Save geometry		Upload geometry	

Figura 1.9: Parametri in input, denti dritti.

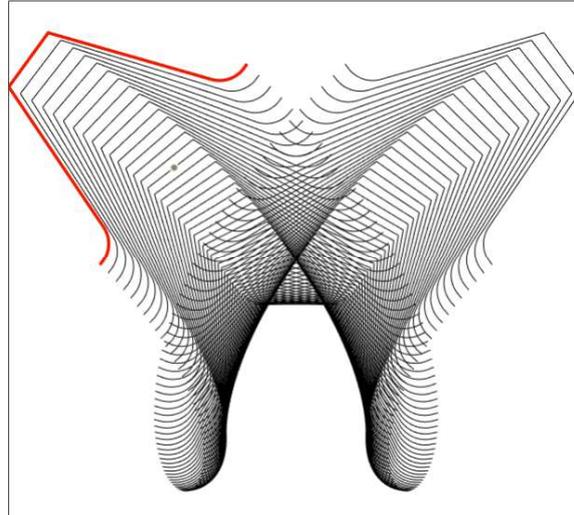
GearRack		GearDraft		GearCutting		Optimicro		Dynamics 1D	
Input parameters		Tolerances		Profile modification		Results			
2D		3D							
Mating parameters		Gears parameters		Pinion manufacture		Gear manufacture		Gear meshing	
		<b>Pinion</b>		<b>Gear</b>					
Pitch diameter	<b>dp1</b>	120.0000	<b>dp2</b>	120.0000	[mm]				
Base diameter	<b>db1</b>	112.7631	<b>db2</b>	112.7631	[mm]				
Major diameter	<b>da1</b>	132.0000	<b>da2</b>	132.0000	[mm]				
Operative pitch diameter	<b>dw1</b>	120.0000	<b>dw2</b>	120.0000	[mm]				
Minor diameter	<b>df1</b>	105.0000	<b>df2</b>	105.0000	[mm]				
Addendum	<b>ha1</b>	6.0000	<b>ha2</b>	6.0000	[mm]				
Dedendum	<b>hf1</b>	7.5000	<b>hf2</b>	7.5000	[mm]				
Helix pitch	<b>pz1</b>	0.0000	<b>pz2</b>	0.0000	[mm]				
									
		Reset values		Create geometry		Save geometry		Upload geometry	

Figura 1.10: Parametri caratteristici di pignone e ruota, denti dritti.

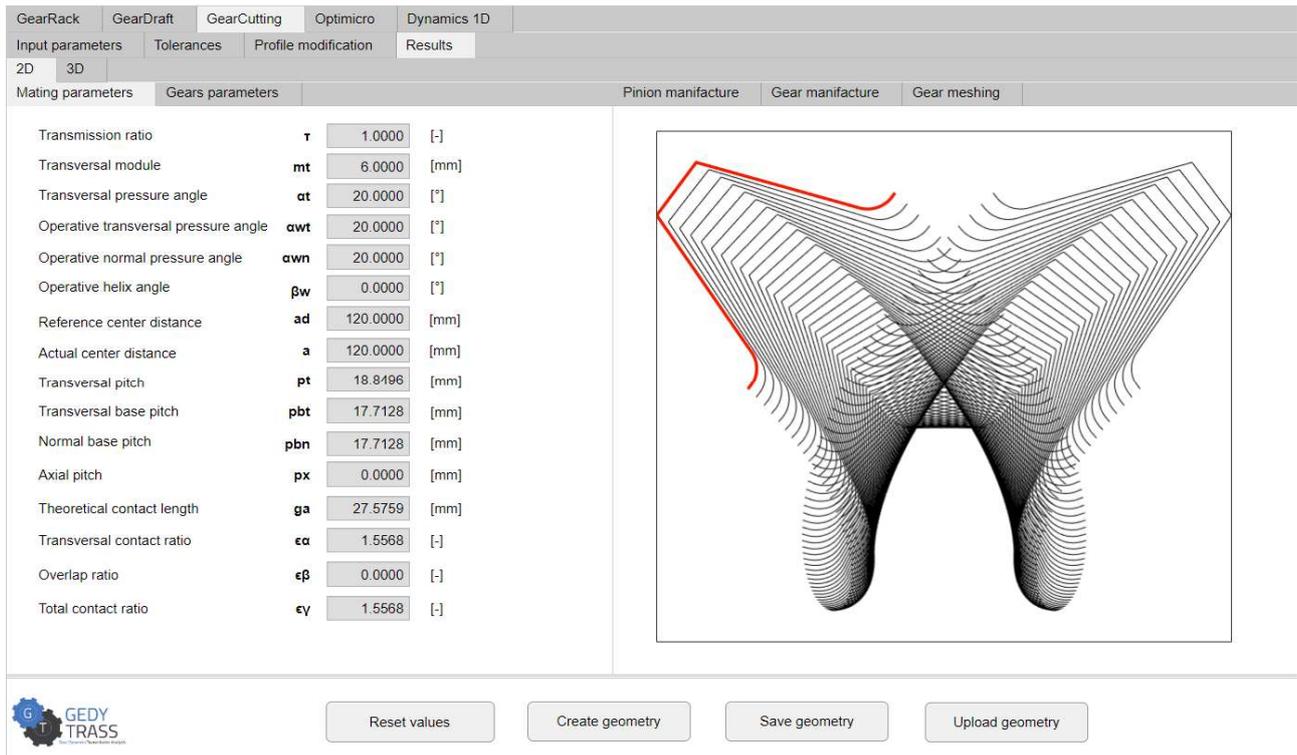


Figura 1.11: Parametri di accoppiamento, denti dritti.

### 1.3.2 Fase preliminare, denti elicoidali

Le ruote elicoidali sono della stessa taglia di quelle a denti dritti ma occorre tenere in considerazione l'effetto dell'angolo d'elica. Analogamente al paragrafo precedente, in tabella 1.5 sono indicati i valori in input al software per il dimensionamento di tali ruote e nelle figure 1.12, 1.13 e 1.14 si osservano le immagini degli stessi input e i risultati ottenuti dal dimensionamento.

Tabella 1.5: Valori in input, denti elicoidali. [9]

Parametri in input	Valore	Unità di misura
Modulo normale	6	[mm]
Angolo di pressione normale	20	[°]
Angolo d'elica	15	[°]
Larghezza di fascia del pignone	60	[mm]
Larghezza di fascia della ruota	60	[mm]
Numero di denti del pignone	20	[-]
Numero di denti della ruota	20	[-]
Raggio esterno dell'albero del pignone	20	[mm]
Raggio esterno dell'albero della ruota	20	[mm]
Modulo elastico pignone	200	[GPa]
Modulo elastico ruota	200	[GPa]
Coefficiente di Poisson del pignone	0.3	[-]
Coefficiente di Poisson della ruota	0.3	[-]
Densità del materiale del pignone	$7.85 \times 10^{-9}$	[ $ton/mm^3$ ]
Densità del materiale della ruota	$7.85 \times 10^{-9}$	[ $ton/mm^3$ ]
Tensione di snervamento del pignone	500	[MPa]
Tensione di snervamento della ruota	500	[MPa]

GearRack		GearDraft		GearCutting		Optimicro		Dynamics 1D	
Input parameters		Tolerances		Profile modification		Results			
<b>Basic data</b>									
Coupling name		Coupling 3		Name		Pinion 3		Gear 3	
Normal module	<b>mn</b>	6	[mm]	Teeth number	<b>z1</b>	20	<b>z2</b>	20	[-]
Pressure angle	<b>α</b>	20	[°]	Profile shift coefficient	<b>x1</b>	0	<b>x2</b>	0	[-]
Helix angle	<b>β</b>	15	[°]	Teeth facewidth	<b>b1</b>	60	<b>b2</b>	60	[mm]
				Rim facewidth	<b>w1</b>	60	<b>w2</b>	60	[mm]
				Rim depth	<b>l1</b>	5	<b>l2</b>	5	[mm]
				External shaft radius	<b>r1 shaft_e</b>	20	<b>r2 shaft_e</b>	20	[mm]
<b>Material</b>									
Gear 1	Manually	Young modulus	<b>E1</b>	200	<b>E2</b>	200	[GPa]		
Gear 2	Manually	Poisson coefficient	<b>v1</b>	0.3	<b>v2</b>	0.3	[-]		
		Density	<b>p1</b>	7.85e-09	<b>p2</b>	7.85e-09	[ton/mm³]		
		Yield strength	<b>Rp1</b>	500	<b>Rp2</b>	500	[MPa]		
		Reset values		Create geometry		Save geometry		Upload geometry	

Figura 1.12: Parametri in input, denti elicoidali.

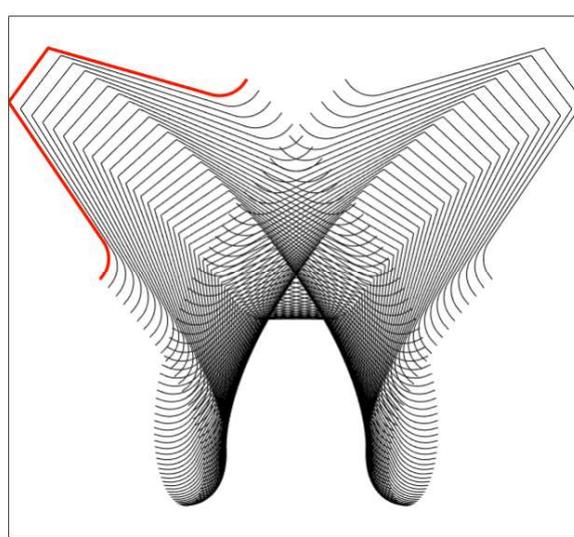
GearRack		GearDraft		GearCutting		Optimicro		Dynamics 1D	
Input parameters		Tolerances		Profile modification		Results			
2D		3D							
Mating parameters		Gears parameters		Pinion manufacture		Gear manufacture		Gear meshing	
		<b>Pinion</b>		<b>Gear</b>					
Pitch diameter	<b>dp1</b>	124.2331	<b>dp2</b>	124.2331	[mm]				
Base diameter	<b>db1</b>	116.2538	<b>db2</b>	116.2538	[mm]				
Major diameter	<b>da1</b>	136.2331	<b>da2</b>	136.2331	[mm]				
Operative pitch diameter	<b>dw1</b>	124.2331	<b>dw2</b>	124.2331	[mm]				
Minor diameter	<b>df1</b>	109.2331	<b>df2</b>	109.2331	[mm]				
Addendum	<b>ha1</b>	6.0000	<b>ha2</b>	6.0000	[mm]				
Deendum	<b>hf1</b>	7.5000	<b>hf2</b>	7.5000	[mm]				
Helix pitch	<b>pz1</b>	1456.5818	<b>pz2</b>	1456.5818	[mm]				
									
		Reset values		Create geometry		Save geometry		Upload geometry	

Figura 1.13: Parametri caratteristici di pignone e ruota, denti elicoidali.

GearRack		GearDraft		GearCutting		Optimicro		Dynamics 1D	
Input parameters		Tolerances		Profile modification		Results			
2D		3D							
Mating parameters		Gears parameters				Pinion manufacture		Gear manufacture	Gear meshing
Transmission ratio	$\tau$	1.0000	[-]						
Transversal module	$mt$	6.2117	[mm]						
Transversal pressure angle	$\alpha t$	20.6469	[°]						
Operative transversal pressure angle	$\alpha wt$	20.6469	[°]						
Operative normal pressure angle	$\alpha wn$	20.0000	[°]						
Operative helix angle	$\beta w$	15.0000	[°]						
Reference center distance	$ad$	124.2331	[mm]						
Actual center distance	$a$	124.2331	[mm]						
Transversal pitch	$pt$	19.5145	[mm]						
Transversal base pitch	$pbt$	18.2611	[mm]						
Normal base pitch	$pbn$	17.7128	[mm]						
Axial pitch	$px$	72.8291	[mm]						
Theoretical contact length	$ga$	27.2192	[mm]						
Transversal contact ratio	$\epsilon \alpha$	1.4906	[-]						
Overlap ratio	$\epsilon \beta$	0.8238	[-]						
Total contact ratio	$\epsilon \gamma$	2.3144	[-]						

**Figura 1.14:** Parametri di accoppiamento, denti elicoidali.

## 2 Tensione a fondo dente, normativa ISO 6336

La normativa ISO 6336 è la più importante per il calcolo della resistenza delle ruote cilindriche. Tale norma presenta i principi base e i fattori generali di influenza per quanto riguarda il calcolo della capacità di carico di ingranaggi cilindrici a denti dritti ed elicoidali. Essa fornisce un metodo tramite il quale si possono dimensionare e verificare le ruote cilindriche sia al pitting che a flessione. Nel nostro caso si procede con l'analisi del metodo utilizzato per il dimensionamento a flessione.

Per determinare la tensione a fondo dente si suppone che il carico sia applicato nel punto di contatto in uscita della singola coppia di denti in presa.

Le sollecitazioni massime di trazione si misurano a livello del raggio alla radice del dente sul fianco attivo ovvero quello caricato, mentre le sollecitazioni massime di compressione si misurano al raggio alla radice del fianco passivo. A seconda della geometria del dente e delle caratteristiche del carico, la concentrazione dello stress nel raccordo di base dove si verificano le condizioni massime di trazione può variare.

La norma consente di determinare la tensione nominale a fondo dente  $\sigma_{F0}$  (formula 2.1) e la sollecitazione massima di trazione  $\sigma_F$  nel raccordo di base (formula 2.2).

Dal momento che ipotizziamo che le ruote vengano caricate da una coppia nominale statica di 500 Nm, la nostra attenzione ricade sulla determinazione della  $\sigma_{F0}$ .

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b m_n} Y_F Y_S Y_\beta Y_B Y_{DT} \quad (2.1)$$

$$\sigma_F = \sigma_{F0} K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha} \quad (2.2)$$

Si procede dunque con il calcolo dei fattori riportati nella formula 2.1 secondo normativa.

**Tabella 2.1:** Grandezze per la determinazione della tensione secondo normativa.

Simbolo	Descrizione	Unità di misura
$a_0$	Distanza dal centro	[mm]
$b$	Larghezza di fascia	[mm]
$d$	Diametro di riferimento	[mm]
$d_{an}$	Diametro di testa della ruota virtuale	[mm]
$d_{bn}$	Diametro base della ruota virtuale	[mm]
$d_{en}$	Diametro esterno di contatto singolo della ruota virtuale	[mm]
$d_n$	Diametro di riferimento della ruota virtuale	[mm]
$d_{Na}$	Diametro attivo di testa	[mm]
$E$	Valore ausiliario	[mm]
$F_t$	Forza tangenziale al cilindro primitivo	[N]
$f_\varepsilon$	Fattore d'influenza della distribuzione del carico	[-]
$G$	Valore ausiliario	[-]
$H$	Valore ausiliario	[-]
$h_{aP0}$	Addendum dell'utensile	[mm]
$h_{Fe}$	Braccio di flessione con carico applicato nel punto di contatto in uscita della singola coppia di denti in presa	[mm]
$h_{fP}$	Dedendum della dentiera	[mm]
$h_t$	altezza dente	[mm]
$K$	Distanza tra M e il punto di contatto del cerchio primitivo	[mm]
$K_A$	Fattore di applicazione del carico	[-]

$K_V$	Fattore dinamico	[-]
$K_{F\alpha}$	Fattore del carico trasversale	[-]
$K_{F\beta}$	Fattore del carico longitudinale	[-]
$L$	Valore ausiliario	[-]
$m_n$	Modulo normale	[mm]
$p_{bn}$	Passo di base normale	[mm]
$pr$	Protuberanza dell'utensile	[mm]
$q$	Sovrametallo per la finitura del fianco	[mm]
$q_s$	Parametro di intaglio	[-]
$r_M$	Raggio al centro del raccordo in testa all'utensile	[mm]
$r_w$	Raggio del cerchio primitivo di lavorazione	[mm]
$r_{w0}$	Raggio del cerchio primitivo di lavorazione dell'utensile	[mm]
$s_{Fn}$	Dimensione della corda normale nella sezione critica	[mm]
$s_{pr}$	Filetto residuo undercut	[mm]
$s_r$	Spessore corona	[mm]
$T$	Valore ausiliario	[-]
$u_0$	Rapporto di lavoro del dente	[-]
$x$	Coefficiente di spostamento del profilo	[-]
$X_M$	Coordinata del punto M	[mm]
$x_0$	Coefficiente di spostamento del profilo dell'utensile	[-]
$y$	Valore ausiliario	[° o rad]
$y'$	Valore ausiliario	[°]
$Y_B$	Fattore di spessore della corona	[-]
$Y_{DT}$	Fattore di profondità del dente	[-]
$Y_F$	Fattore di forma	[-]
$Y_M$	Coordinata del punto M	[mm]
$Y_S$	Fattore di correzione della tensione	[-]
$Y_\beta$	Fattore dell'angolo d'elica	[-]
$z$	Numero di denti	[-]
$z_n$	Numero di denti virtuale della ruota elicoidale	[-]
$z_0$	Numero di denti dell'utensile	[-]
$z_{0v}$	Numero di denti equivalente dell'utensile	[-]
$\alpha_{en}$	Angolo di profilo nel punto di contatto in uscita della singola coppia di denti in presa di una ruota virtuale	[°]
$\alpha_{Fen}$	Angolo di direzione del carico nel punto di contatto in uscita della singola coppia di denti in presa di una ruota virtuale	[°]
$\alpha_M$	Angolo di pressione trasversale per il raggio nel punto M	[°]
$\alpha_n$	Angolo di pressione normale	[°]
$\alpha_{w0}$	Angolo di pressione in esercizio	[°]
$\beta$	Angolo d'elica	[°]
$\beta_b$	Angolo d'elica di base	[°]
$\gamma_e$	Angolo ausiliario della ruota virtuale	[°]
$\Delta\alpha$	Metà dell'angolo di spessore nel punto M	[°]
$\Delta h$	Valore ausiliario	[mm]
$\Delta h'$	Valore ausiliario	[mm]
$\delta$	Valore ausiliario	[°]
$\varepsilon_\alpha$	Rapporto di contatto trasversale	[-]
$\varepsilon_{\alpha n}$	Rapporto di contatto virtuale	[-]
$\varepsilon_\beta$	Rapporto di ricoprimento	[-]
$\theta$	Angolo tangenziale	[° o rad]

$\lambda$	Valore ausiliario	[-]
$\xi$	Valore ausiliario	[-]
$\rho_{a0}$	Arrotondamento dello spigolo in testa all'utensile	[mm]
$\rho_F$	Raggio alla radice del dente nella sezione critica	[mm]
$\rho_{fP}$	Raccordo alla radice del dente della dentiera	[mm]
$\sigma_F$	Tensione alla radice del dente	[MPa]
$\sigma_{F0}$	Tensione nominale alla radice del dente	[MPa]
$\Psi$	Angolo ausiliario	[° o rad]
$\omega_0$	Angolo ausiliario	[°]

## 2.1 Fattore di forma, $Y_F$

Il fattore di forma, presente nel calcolo della tensione nominale a fondo dente, tiene conto della forma del dente ed è sensibile allo spessore di quest'ultimo.  $Y_F$  viene determinato separatamente per il pignone e per la ruota.

Le formule riportate per il calcolo di  $Y_F$  sono valide per tutti i tipi di dentiera generatrice, con o senza undercut come riportato in figura 2.1 e valgono le seguenti restrizioni:

- il punto di contatto tra la tangente a  $30^\circ$  e il profilo deve trovarsi nel raccordo alla radice del dente, il quale è generato tramite il raccordo della dentiera creatrice;
- il profilo base della dentiera creatrice deve avere un raggio di raccordo  $\rho_{fP} > 0$ ;
- i denti devono essere generati con strumenti come utensili creatori (hobs) o ruote dentate utensili (shaper cutters);
- dal momento che i valori calcolati si riferiscono a forme dei denti finiti, i processi di rettifica dei profili e le tolleranze di spessore del dente possono essere trascurate;
- per gli ingranaggi interni vengono utilizzati solamente i dati relativi alla ruota dentata utensile (shaper cutter).

In figura 2.2 e in figura 2.3 si osservano i metodi geometrici di determinazione della corda normale  $s_{Fn}$  e del braccio di flessione  $h_{Fe}$  sia nel caso di ingranaggi esterni che nel caso di ingranaggi interni. Nel primo caso i punti in cui le tangenti inclinate di  $30^\circ$  rispetto all'asse dente entrano in contatto con il raccordo di raggio  $\rho_f$  saranno utilizzati per definire  $s_{Fn}$ . Nel secondo caso invece le tangenti sono inclinate di  $60^\circ$ .

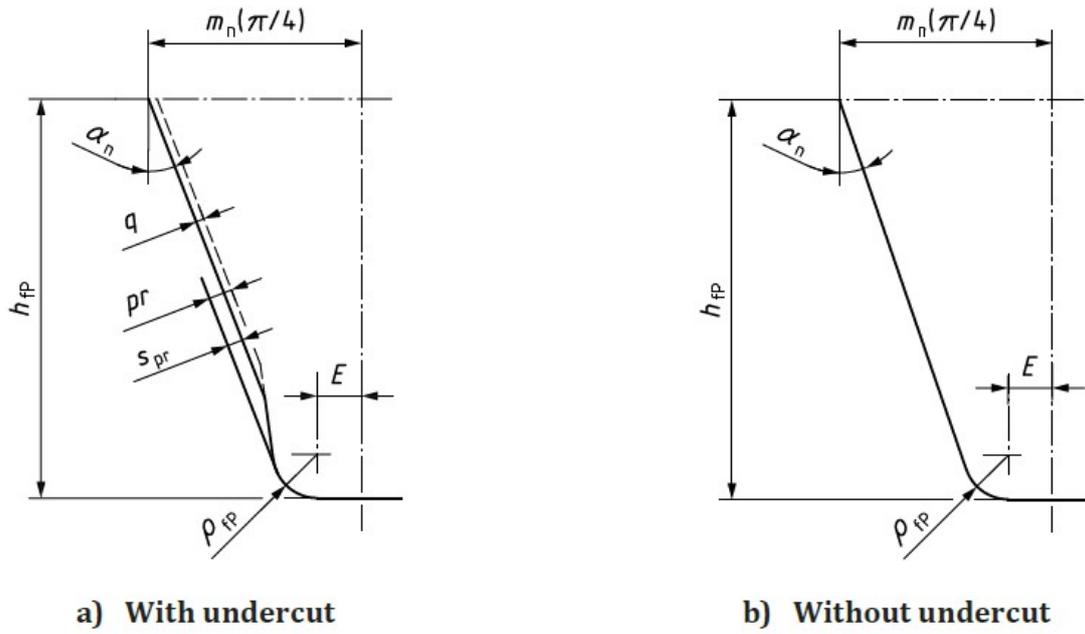
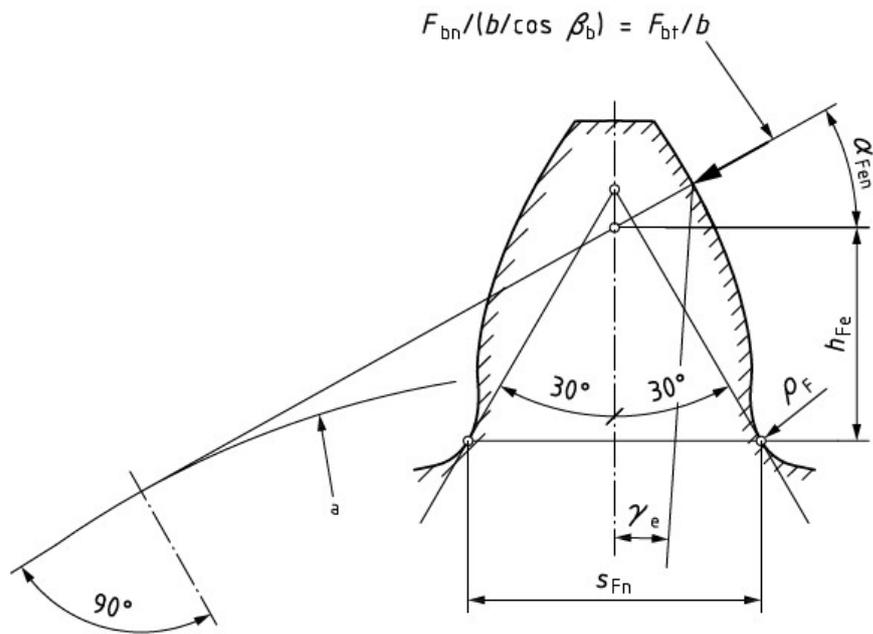
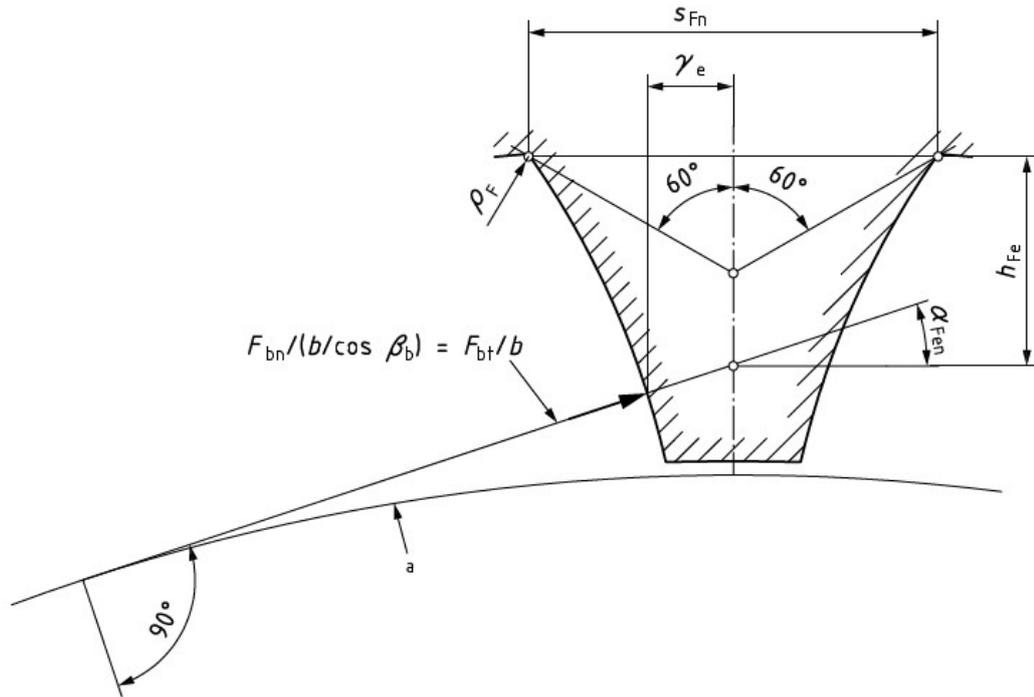


Figura 2.1: Dimensioni e profilo base della dentiera generatrice (profilo finito). [7]



a Base circle.

Figura 2.2: Determinazione delle dimensioni della corda normale nella sezione critica alla radice del dente (ingranaggi esterni). [7]



a Base circle.

**Figura 2.3:** Determinazione delle dimensioni della corda normale nella sezione critica alla radice del dente (ingranaggi interni). [7]

La definizione di  $Y_F$  con il metodo grafico non è raccomandata e viene tipicamente utilizzata l'espressione analitica 2.3.

$$Y_F = \frac{\frac{6 h_{Fe}}{m_n} \cos \alpha_{Fen}}{\left(\frac{S_{Fn}}{m_n}\right)^2 \cos \alpha_n} f_\varepsilon \quad (2.3)$$

Il fattore  $f_\varepsilon$  tiene in considerazione l'influenza della distribuzione del carico tra i denti ingrananti e fornisce risultati più accurati per ingranaggi con rapporti  $\varepsilon_{an} \geq 2$ .

Se  $\varepsilon_\beta = 0$  e  $\varepsilon_{an} < 2$  si ha

$$f_\varepsilon = 1 \quad (2.4)$$

Se  $\varepsilon_\beta = 0$  e  $\varepsilon_{an} \geq 2$  si ha

$$f_\varepsilon = 0.7 \quad (2.5)$$

Se  $0 < \varepsilon_\beta < 1$  e  $\varepsilon_{an} < 2$  allora

$$f_\varepsilon = \left(1 - \varepsilon_\beta + \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_{an}}\right)^{0.5} \quad (2.6)$$

Se  $0 < \varepsilon_\beta < 1$  e  $\varepsilon_{an} \geq 2$  allora

$$f_\varepsilon = \left(\frac{1 - \varepsilon_\beta}{2} + \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_{an}}\right)^{0.5} \quad (2.7)$$

Se  $\varepsilon_\beta \geq 1$

$$f_\varepsilon = \varepsilon_{\alpha n}^{-0.5} \quad (2.8)$$

Nel caso di denti elicoidali occorre tenere in considerazione un numero di denti virtuali e una serie di altri parametri caratteristici di questi ultimi. Di seguito vengono riportati i calcoli relativi ad essi.

$$z_n = \frac{z}{\cos^2 \beta_b \cos \beta} \quad (2.9)$$

$$\beta_b = \cos^{-1} \sqrt{1 - (\sin \beta \cos \alpha_n)^2} = \sin^{-1}(\sin \beta \cos \alpha_n) \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_{\alpha n} = \frac{\varepsilon_\alpha}{\cos^2 \beta_b} \quad (2.11)$$

$$d_n = \frac{d}{\cos^2 \beta_b} = m_n z_n \quad (2.12)$$

$$p_{bn} = \pi m_n \cos \alpha_n \quad (2.13)$$

$$d_{bn} = d_n \cos \alpha_n \quad (2.14)$$

$$d_{an} = d_n + d_{Na} - d \quad (2.15)$$

$$d_{en} = 2 \frac{z}{|z|} \sqrt{\left[ \sqrt{\left(\frac{d_{an}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{bn}}{2}\right)^2} - \frac{\pi d \cos \beta \cos \alpha_n}{|z|} (\varepsilon_{\alpha n} - 1) \right]^2 + \left(\frac{d_{bn}}{2}\right)^2} \quad (2.16)$$

Il numero di denti  $z$  è positivo per ruote esterne e negativo per ruote interne.

$$\alpha_{en} = \cos^{-1} \left( \frac{d_{bn}}{d_{en}} \right) \quad (2.17)$$

$$\gamma_e = \frac{0.5 \pi + 2 x \tan \alpha_n}{z_n} + \text{inv} \alpha_n - \text{inv} \alpha_{en} \quad (2.18)$$

$$\alpha_{Fen} = \alpha_{en} - \gamma_e = \tan \alpha_{en} - \text{inv} \alpha_n - \frac{0.5 \pi + 2 x \tan \alpha_n}{z_n} \quad (2.19)$$

### 2.1.1 Determinazione di $s_{Fn}$ , $\rho_F$ e $h_{Fe}$ di ruote esterne generate con l'utensile creatore (hob)

Considerando ruote dentate generate secondo lo schema di figura 2.4 si procede con il calcolo della corda normale nella sezione critica, del raggio di raccordo alla radice del dente e del braccio di flessione.

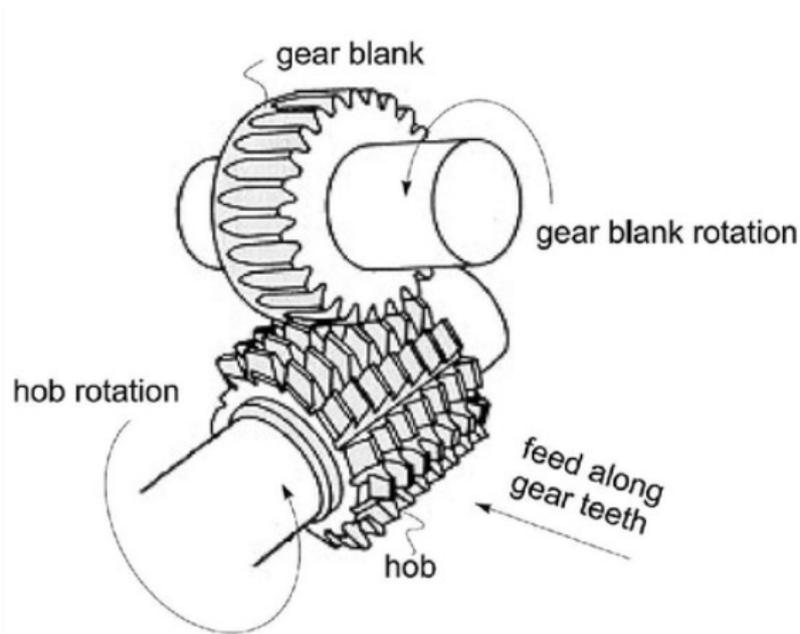


Figura 2.4: Hob e gear blank. [8]

Occorre determinare tutte le grandezze caratteristiche non ancora note ovvero  $s_{Fn}$ ,  $\rho_F$  e  $h_{Fe}$  in modo tale da poter definire il valore caratteristico del fattore di forma  $Y_F$  dato dalla formula 2.3.

$$E = \frac{\pi}{4} m_n - h_{fP} \tan \alpha_n + \frac{s_{pr}}{\cos \alpha_n} - (1 - \sin \alpha_n) \frac{\rho_{fP}}{\cos \alpha_n} \quad (2.20)$$

con

$$s_{pr} = pr - q \quad (\text{noto da figura 2.1})$$

$$s_{pr} = 0 \quad \text{per ruote senza undercut}$$

$$\rho_{fP} = 0.38 m_n$$

$$h_{fP} = 1.25 m_n$$

$$G = \frac{\rho_{fP}}{m_n} - \frac{h_{fP}}{m_n} + x \quad (2.21)$$

$$H = \frac{2}{z_n} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{E}{m_n} \right) - T \quad (2.22)$$

con

$$T = \frac{\pi}{3} \quad \text{per ruote esterne}$$

$$\theta = \frac{2G}{z_n} \tan \theta - H \quad (2.23)$$

Il valore  $\theta = \frac{\pi}{6}$  per ingranaggi esterni è di solito adottato come primo valore nel calcolo iterativo per la determinazione di  $\theta$ ; tipicamente la funzione converge dopo 5 iterazioni.

- Dimensione della corda normale nella sezione critica alla radice del dente

$$s_{Fn} = m_n \left[ z_n \sin \left( \frac{\pi}{3} - \theta \right) + \sqrt{3} \left( \frac{G}{\cos \theta} - \frac{\rho_{fP}}{m_n} \right) \right] \quad (2.24)$$

- Raggio di raccordo alla radice del dente

$$\rho_F = \rho_{fp} + m_n \left[ \frac{2 G^2}{\cos\theta (z_n \cos^2\theta - 2 G)} \right] \quad (2.25)$$

- Braccio di flessione

$$h_{Fe} = \frac{m_n}{2} \left[ (\cos\gamma_e - \sin\gamma_e \tan\alpha_{Fen}) \frac{d_{en}}{m_n} - z_n \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) - \left(\frac{G}{\cos\theta} - \frac{\rho_{fp}}{m_n}\right) \right] \quad (2.26)$$

### 2.1.2 Determinazione di $s_{Fn}$ , $\rho_F$ e $h_{Fe}$ di ruote generate con ruota dentata utensile (shaper cutter)

Si procede con la determinazione degli stessi tre parametri del paragrafo precedente, ma considerando ruote generate secondo lo schema di figura 2.5.

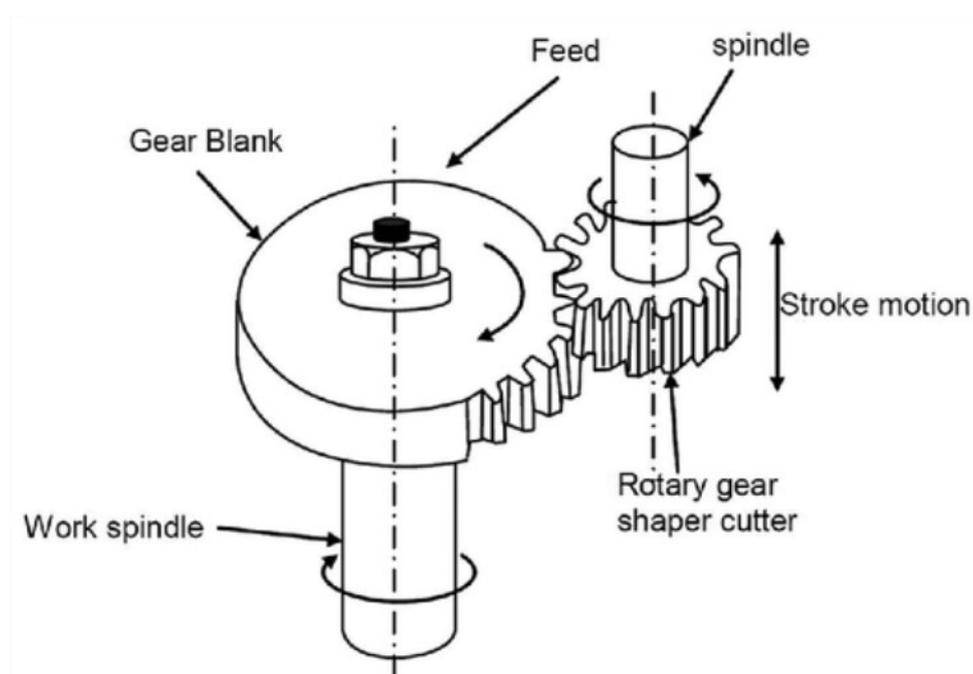
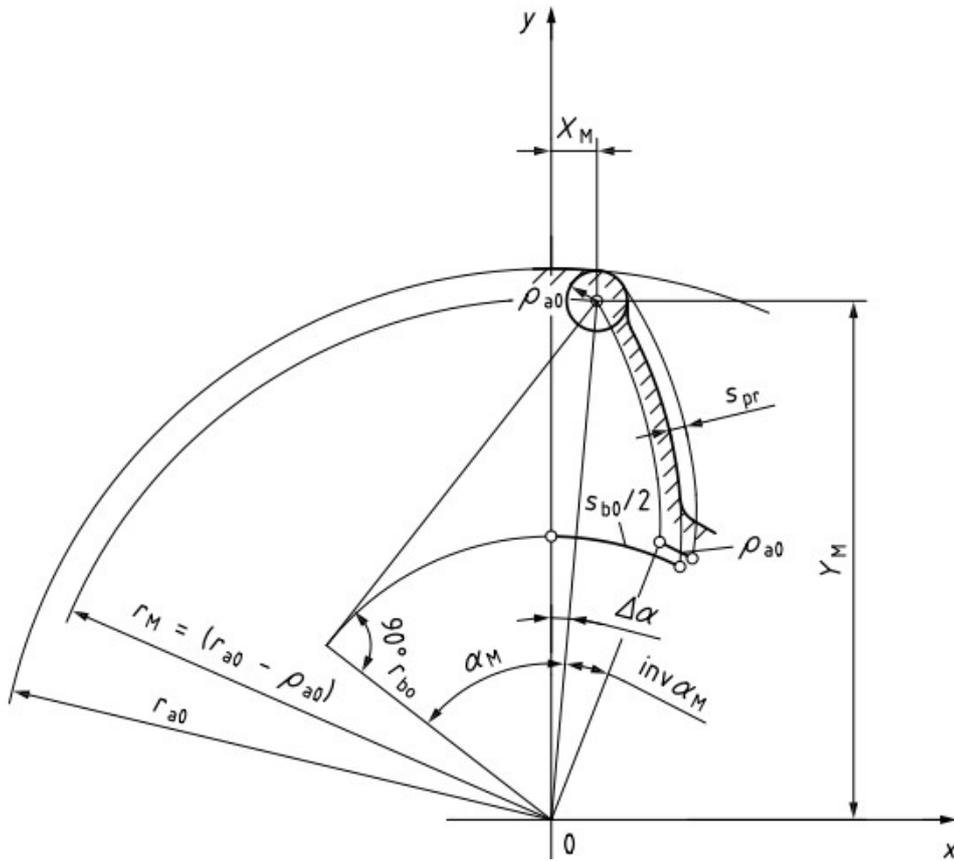


Figura 2.5: Shaper cutter e gear blank. [8]





**Figura 2.8:** Grandezze caratteristiche della shaper cutter. [7]

Nel caso di ingranaggi esterni viene utilizzato un angolo tangenziale  $\theta = \frac{\pi}{6}$ , mentre nel caso di ingranaggi interni  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

Inizialmente occorre determinare i seguenti parametri:

- numero di denti equivalente  $z_{0v}$

$$z_{0v} = \frac{z_0}{\cos^2 \beta_b \cos \beta} \quad (2.27)$$

- angolo di pressione in esercizio  $\alpha_{w0}$ , tipicamente ottenuto con due iterazioni

$$\xi = 2 \frac{x_0 + x}{z_{0v} + z_n} \tan \alpha_n + \text{inv} \alpha_n \quad (2.28)$$

Valore iniziale:

$$\alpha_{w0} = \sqrt[3]{3\xi} \quad (2.29)$$

Iterando:

$$\alpha_{w0} := \alpha_{w0} + \frac{\xi - \text{inv} \alpha_{w0}}{\tan^2 \alpha_{w0}} \quad (2.30)$$

- distanza dal centro  $a_0$

$$a_0 = m_n \frac{z_{0v} + z_n}{2} \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha_{w0}} \quad (2.31)$$

- rapporto della dentatura

$$u_0 = \frac{z_{0v}}{z_n} \quad (2.32)$$

- raggi del cerchio primitivo di fabbricazione della ruota,  $r_w$ , e dell'utensile,  $r_{w0}$

$$r_w = \frac{a_0}{1+u_0} \quad (2.33)$$

$$r_{w0} = r_w u_0 \quad (2.34)$$

- raggio del cerchio di base dell'utensile

$$r_{b0} = 0,5 m_n z_{0v} \cos \alpha_n \quad (2.35)$$

In figura 2.8 sono rappresentate le grandezze geometriche caratteristiche della shaper cutter:

- raggio  $r_M$  al centro del raccordo in testa all'utensile

$$r_M = r_{a0} - \rho_{a0} = m_n \left( \frac{z_{0v}}{2} + \frac{h_{aP}}{m_n} + x_0 - \frac{\rho_{a0}}{m_n} \right) \quad (2.36)$$

- angolo di pressione trasversale  $\alpha_M$  per il raggio  $r_M$

$$\alpha_M = \cos^{-1} \left( \frac{r_{b0}}{r_M} \right) \quad (2.37)$$

- metà dell'angolo di spessore,  $\Delta\alpha$ , nel punto M

$$\Delta\alpha = \frac{0,5 \pi + 2 x_0 \tan \alpha_n}{z_{0v}} - \frac{\rho_{a0} - s_{pr}}{r_{b0}} + \text{inv} \alpha_n - \text{inv} \alpha_M \quad (2.38)$$

- Coordinate del punto M

$$X_M = r_M \sin(\Delta\alpha) \quad (2.39)$$

$$Y_M = r_M \cos(\Delta\alpha) \quad (2.40)$$

- Determinazione dell'angolo ausiliario  $\Psi$  iterando:

$$\Psi_0 = \frac{\pi}{z_n} + \theta \quad (2.41)$$

Valore iniziale:

$$\Psi = \Psi_0 \quad (2.42)$$

$$\lambda = \frac{r_{w0}}{r_M} \cos \Psi \quad (2.43)$$

$$y = \Psi - \cos^{-1}(\lambda) + \Delta\alpha + \frac{\Psi - \Psi_0}{u_0} \quad (2.44)$$

$$y' = 1 + \frac{1}{u_0} - \frac{r_{w0}}{r_M} \frac{\sin(\Psi)}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad (2.45)$$

$$\Psi := \Psi - \frac{y}{y'} \quad (2.46)$$

si interrompe l'iterazione se  $\left| \frac{y}{y'} \right| < 10^{-6}$ .

Distanza K tra il punto M e il punto di contatto del cerchio primitivo:

$$\omega_0 = \delta - \Psi - \Delta\alpha \quad (2.47)$$

$$\delta = \cos^{-1} \left( \frac{r_{w0}}{r_M} \cos \Psi \right) \quad (2.48)$$

$$\Delta h' = Y_M - r_{w0} \cos \omega_0 \quad (2.49)$$

$$\Delta h = \frac{\Delta h' \sin \Psi}{\sin (\Psi + \omega_0)} \quad (2.50)$$

$$K = \frac{\Delta h}{\sin \Psi} \quad (2.51)$$

Grandezze geometriche caratteristiche alla radice:

- coordinate del punto di tangenza

$$X = r_w \sin(\Psi - \theta) - (K + \rho_{a0}) \cos \theta \quad (2.52)$$

$$Y = r_w \cos(\Psi - \theta) - (K + \rho_{a0}) \sin \theta \quad (2.53)$$

- Dimensione della corda normale nella sezione critica alla radice del dente

$$s_{Fn} = 2X \quad (2.54)$$

- Raggio di raccordo alla radice del dente

$$\rho_F = \frac{K^2}{\frac{r_{w0} r_w}{r_{w0} + r_w} \sin \Psi + K} + \rho_{a0} \quad (2.55)$$

- Braccio di flessione

$$h_{Fe} = (\cos \gamma_e - \sin \gamma_e \tan \alpha_{Fen}) \frac{d_{en}}{2} - Y \quad (2.56)$$

## 2.2 Fattore di correzione della tensione, $Y_S$

Il fattore di correzione della tensione viene utilizzato per convertire la tensione nominale al piede del dente in una tensione locale effettiva. Esso viene valutato con il carico applicato nel punto di contatto in uscita della singola coppia di denti in presa. Il fattore  $Y_S$  permette di prendere in considerazione i seguenti aspetti:

- l'effetto di amplificazione di tensione dovuto al cambiamento di sezione nel raggio di raccordo alla base del dente;

- l'intensità dello stress locale alla radice del dente data da due componenti, uno dei quali è direttamente influenzata dal valore di momento flettente mentre l'altro cresce progressivamente avvicinando la posizione di applicazione del carico alla sezione critica.

Le formule utilizzate derivano da calcoli effettuati su ingranaggi esterni che presentano un angolo di pressione  $\alpha$  pari a  $20^\circ$ , ma possono essere anche utilizzate per ottenere risultati approssimativi nel caso di ingranaggi interni o ruote aventi angoli di pressione differenti.

La formulazione 2.57 per il calcolo del fattore di correzione della tensione  $Y_S$  è valida per determinati valori di  $q_s$  tali per cui  $1 \leq q_s < 8$ .

$$Y_S = (1,2 + 0,13 L) q_s^{\left[ \frac{1}{1,21 + \frac{2,3}{L}} \right]} \quad (2.57)$$

con

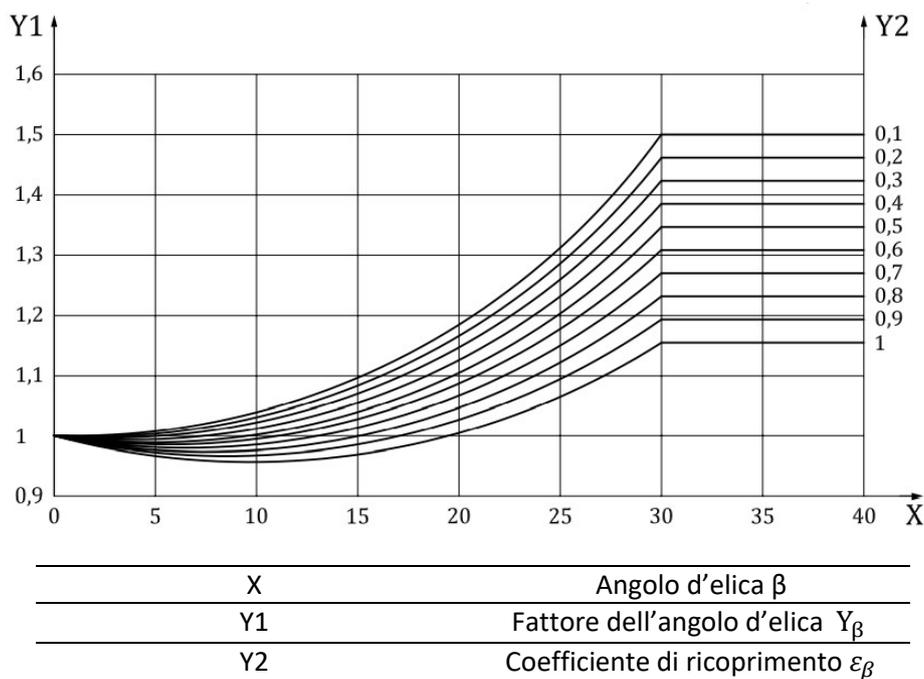
$$L = \frac{SF_n}{h_{Fe}} \quad (2.58)$$

$$q_s = \frac{SF_n}{2 \rho_F} \quad (2.59)$$

## 2.3 Fattore dell'angolo d'elica, $Y_\beta$

Il fattore dell'angolo d'elica tiene conto dell'inclinazione della linea di contatto nel calcolo della tensione  $\sigma_{F0}$ . Secondo normativa questo fattore può essere calcolato con due metodi, uno grafico e uno analitico.

Il metodo grafico è rappresentato in figura 2.9 e permette di determinare  $Y_\beta$  in funzione dell'angolo d'elica  $\beta$  e del coefficiente di ricoprimento  $\varepsilon_\beta$ .



**Figura 2.9:** Diagramma del fattore dell'angolo d'elica  $Y_\beta$ . [7]

In alternativa, il fattore  $Y_\beta$  può essere calcolato analiticamente mediante la seguente formulazione:

$$Y_\beta = \left(1 - \varepsilon_\beta \frac{\beta}{120^\circ}\right) \frac{1}{\cos^3 \beta} \quad (2.60)$$

- Se  $\varepsilon_\beta > 1$

$$Y_\beta = \left(1 - \frac{\beta}{120^\circ}\right) \frac{1}{\cos^3 \beta} \quad (2.61)$$

- Se  $\beta > 30^\circ$

$$Y_\beta = \left(1 - \varepsilon_\beta \frac{30^\circ}{120^\circ}\right) \frac{1}{\cos^3 30^\circ} \quad (2.62)$$

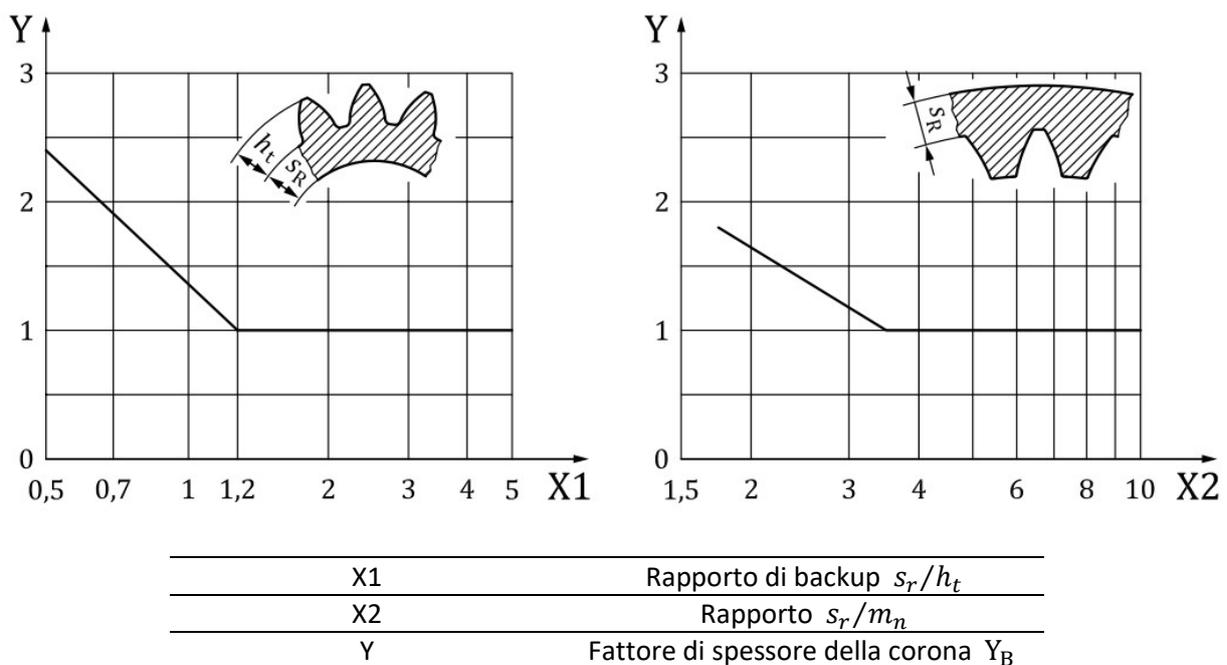
- Se  $\varepsilon_\beta > 1$  e  $\beta > 30^\circ$

$$Y_\beta = \left(1 - \frac{30^\circ}{120^\circ}\right) \frac{1}{\cos^3 30^\circ} \quad (2.63)$$

## 2.4 Fattore di spessore della corona, $Y_B$

Se lo spessore della corona non è sufficiente a fornire un supporto adatto per la radice del dente, il cedimento potrebbe avvenire attraverso la corona piuttosto che al raccordo di base. Il fattore  $Y_B$  può essere determinato graficamente o con calcoli analitici.

Il metodo grafico è illustrato in figura 2.10 sia per ingranaggi esterni che interni. In particolare, nel caso di ruota esterna,  $Y_B$  sarà funzione del rapporto tra lo spessore della corona e l'altezza totale del dente; nel caso di ruota interna sarà invece funzione del rapporto tra lo spessore della corona e il modulo normale.



**Figura 2.10:** Grafico per la determinazione del fattore di spessore della corona  $Y_B$ . [7]

Il fattore  $Y_B$  può essere determinato anche analiticamente con le formule che seguono.

Per ruote esterne:

- Se  $\frac{s_r}{h_t} \geq 1,2$  allora

$$Y_B = 1 \quad (2.64)$$

- Se  $\frac{s_r}{h_t} > 0,5$  e  $\frac{s_r}{h_t} < 1,2$  allora

$$Y_B = 1,6 \ln\left(2,242 \frac{h_t}{s_r}\right) \quad (2.65)$$

- Il caso con  $\frac{s_r}{h_t} \leq 0,5$  si dovrebbe evitare.

Per ruote interne:

- Se  $\frac{s_r}{m_n} \geq 3,5$  allora

$$Y_B = 1 \quad (2.65)$$

- Se  $\frac{s_r}{m_n} > 1,75$  e  $\frac{s_r}{m_n} < 3,5$  allora

$$Y_B = 1,15 \ln\left(8,324 \frac{m_n}{s_r}\right) \quad (2.66)$$

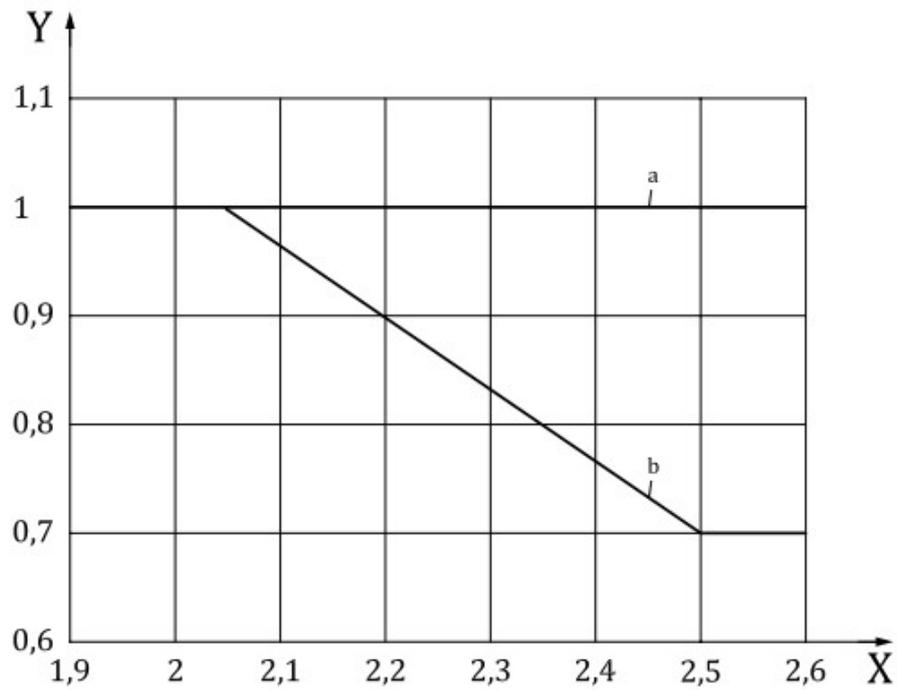
- Il caso con  $\frac{s_r}{m_n} \leq 1,75$  si dovrebbe evitare.

## 2.5 Fattore di profondità del dente, $Y_{DT}$

$Y_{DT}$  è utilizzato per correggere la tensione nominale nelle ruote dentate ad alta precisione (classe di tolleranza ISO  $\leq 4$ ) con rapporto di contatto virtuale  $\varepsilon_{\alpha n} \geq 2.05$ . Nel caso in cui le classi di tolleranza ISO di pignone e condotta siano diverse viene utilizzata la peggiore tra le due per entrambi.

Anche in questo caso il valore di  $Y_{DT}$  può essere determinato graficamente o con espressioni analitiche.

In figura 2.11 è illustrato il grafico di  $Y_{DT}$  in funzione del rapporto di contatto virtuale e della classe di tolleranza ISO.



X	Rapporto di contatto virtuale $\varepsilon_{\alpha n}$
Y	Fattore di profondità del dente $Y_{DT}$
a	Classe di tolleranza ISO > 4
b	Classe di tolleranza ISO $\leq$ 4

**Figura 2.11:** Grafico del fattore di profondità del dente. [7]

In alternativa al metodo grafico è possibile determinare di  $Y_{DT}$  mediante calcoli analitici:

- Se  $\varepsilon_{\alpha n} \leq 2,05$  o se  $\varepsilon_{\alpha n} > 2,05$  e la classe di tolleranza ISO > 4, allora

$$Y_{DT} = 1 \quad (2.67)$$

- Se  $2,05 < \varepsilon_{\alpha n} \leq 2,5$  o  $\varepsilon_{\alpha n} > 2,5$  e la classe di tolleranza ISO  $\leq$  4, allora

$$Y_{DT} = -0,666 \varepsilon_{\alpha n} + 2,366 \quad (2.68)$$

- Se  $\varepsilon_{\alpha n} > 2,5$  e la classe di tolleranza ISO  $\leq$  4, allora

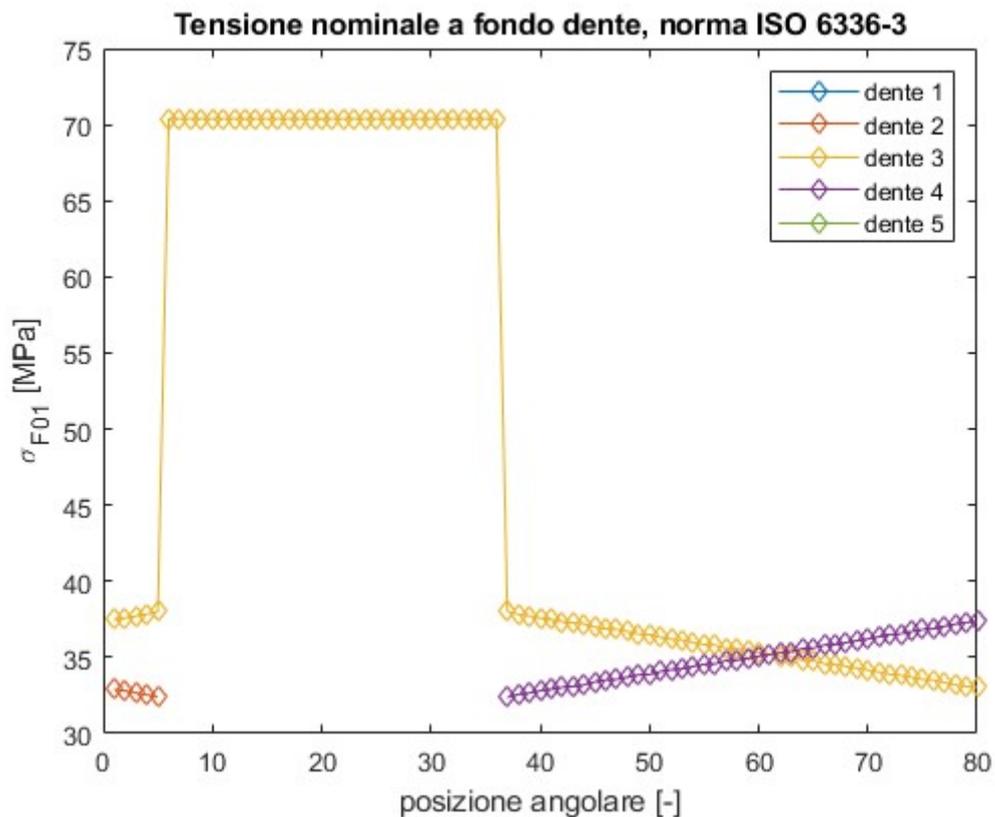
$$Y_{DT} = 0,7 \quad (2.69)$$

## 2.6 Risultati della norma

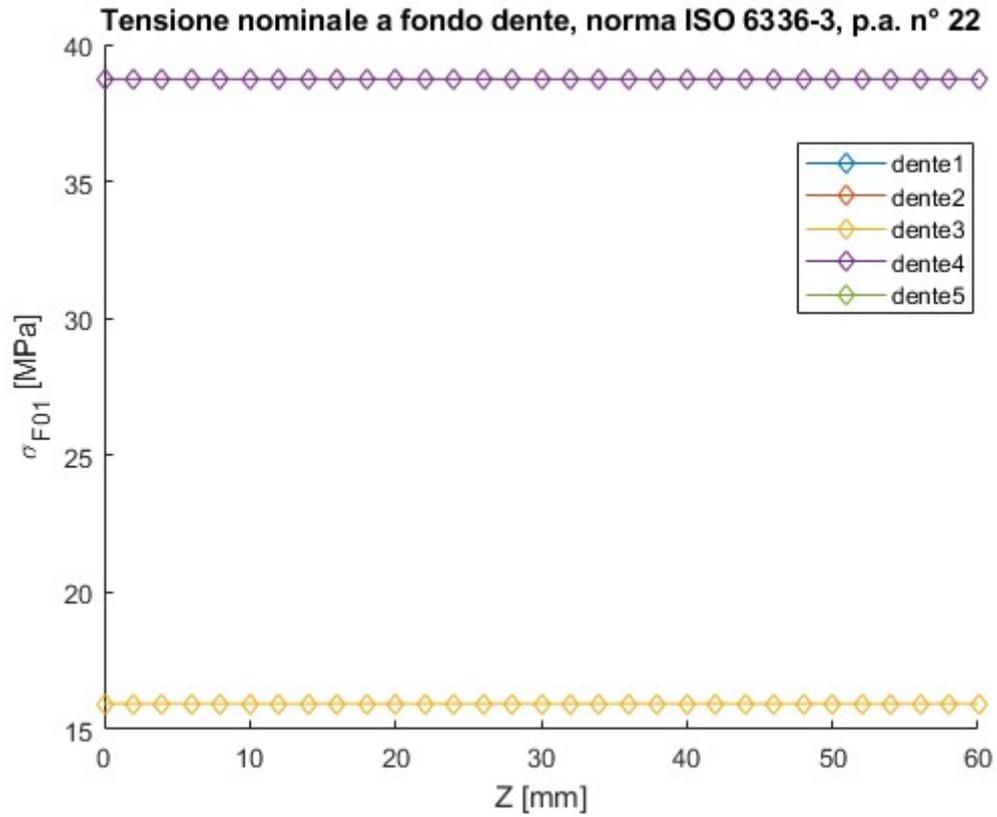
In figura 2.12 sono illustrati i risultati di tensione nominale a fondo dente  $\sigma_{F01}$  del pignone in funzione della posizione angolare per il caso a denti dritti. Si osserva che la tensione è massima quando il carico è interamente applicato su un solo dente e in tal caso il valore si mantiene costante. In tal grafico si osservano il dente 2 in uscita, il 3 presente in tutto l'intervallo di ingranamento e il dente 4 in ingresso.

In figura 2.13 e 2.14 è rappresentata la tensione nominale a fondo dente  $\sigma_{F0}$  del pignone rispettivamente nel caso a due e a tre coppie di denti in presa delle ruote elicoidali. Le tensioni sono rappresentate in funzione della direzione assiale  $Z$  della ruota lungo la larghezza di fascia  $b$ . Si osserva che le tensioni sono costanti in direzione assiale e che il valore massimo interessa il dente che assorbe più carico, in questi casi il dente numero 4. Il carico è applicato sul fianco destro del dente e l'elica è destrorsa. In figura 2.13 si hanno rispettivamente il dente 3 in contatto per la prima parte dei valori di  $Z$  e il dente 4 in contatto su tutta la larghezza di fascia. In figura 2.14 si hanno rispettivamente il dente 3 in uscita in contatto per i primi valori di  $Z$ , il 4 interamente in presa e il dente 5 in ingresso.

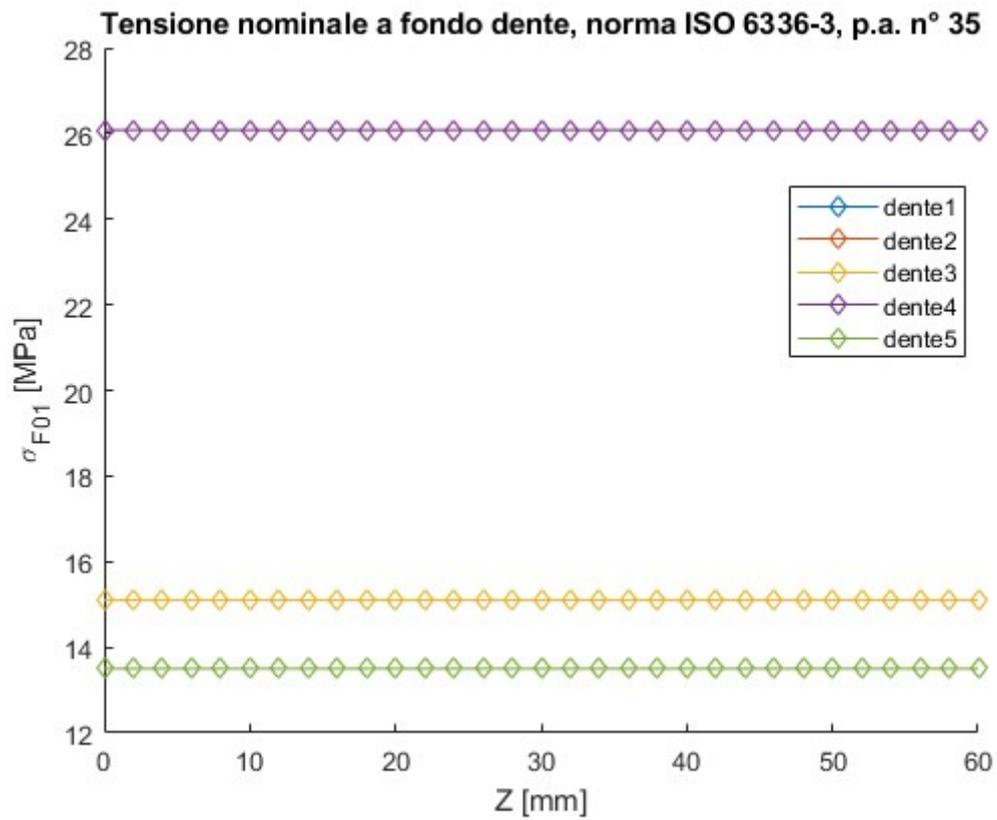
Le stesse posizioni angolari di ingranamento, rappresentate nelle figure 3.11 e 3.12, verranno utilizzate in tutti i modelli sviluppati per operare un confronto diretto dei risultati nella parte conclusiva della tesi.



**Figura 2.12:** Tensione nominale a fondo dente, denti dritti.



**Figura 2.13:** Tensione nominale a fondo dente, 2 coppie di denti in presa, denti elicoidali.



**Figura 2.14:** Tensione nominale a fondo dente, 3 coppie di denti in presa, denti elicoidali.

## 3 Modello analitico

In questo capitolo viene studiato un modello per il calcolo della tensione a fondo dente scelto dalla letteratura. Utilizzeremo un approccio analitico per determinare la tensione a fondo dente, sia nel caso di ruote cilindriche a denti dritti che nel caso di ruote cilindriche a denti elicoidali.

Tramite l'utilizzo di MatLab sarà dunque possibile manipolare espressioni matematiche e definire il codice di calcolo del modello.

### 3.1 Descrizione del modello

Il presente modello si propone di analizzare il comportamento delle ruote ingrananti durante un intervallo di rotazione.

La differenza sostanziale tra ruote a denti dritti e ruote a denti elicoidali è data dalla non uniformità della distribuzione del carico lungo la linea di contatto nel secondo caso.

Il modello si articola in due fasi principali:

1. Calcolo della distribuzione del carico;
2. Determinazione della tensione a fondo dente.

**Tabella 3.1:** Nomenclatura presente nelle figure del modello.

Simbolo	Descrizione
$F$	Forza totale trasmessa
$b$	Larghezza di fascia
$T$	Coppia
$m_n$	Modulo normale
$n$	Numero di slices lungo la larghezza di fascia
$z$	Numero di denti
$R_b$	Raggio di base
$r$	Raggio del punto di contatto
$R_d$	Raggio di troncatura interna
$r_f$	Raggio di raccordo alla base del dente
$\theta$	Angolo tra $r$ e $R_b$
$\gamma$	Angolo tra $r$ e l'asse dente
$\Phi$	Angolo di carico
$\Phi_n$	Angolo di pressione normale
$\Phi_t$	Angolo di pressione trasversale
$W_{tr}$	Forza trasversale

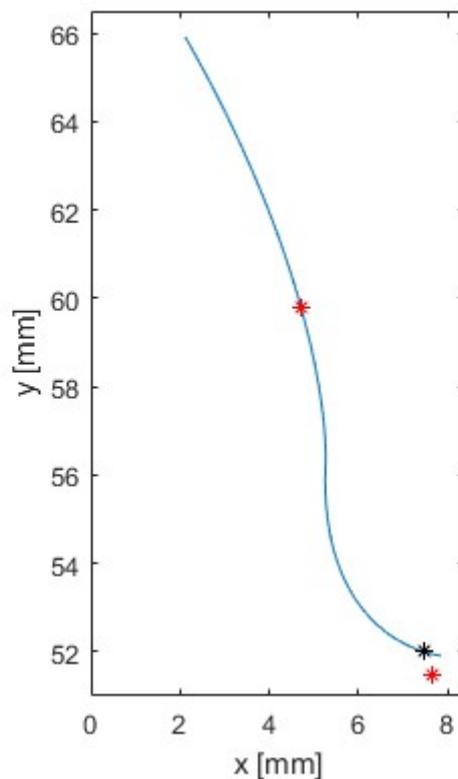
#### 3.1.1 Spostamento del dente

Per determinare lo spostamento del dente a seguito dell'applicazione del carico, si considera esso come una trave a sbalzo soggetta all'azione di un carico trasversale che flette, comprime e taglia il dente. Si definisce uno spostamento totale  $\delta$  facendo riferimento alla figura 3.1.



Per ottenere il valore di  $L$  occorre prima determinare il valore di  $h_0$  secondo lo schema di figura 3.2. In tale figura è rappresentato il profilo del dente con due punti rossi che rappresentano i punti per cui passa la retta tangente al profilo. Le coordinate  $x$  e  $y$  del punto più in alto coincidono con quelle del nodo appartenente al fianco del dente tale per cui la differenza in valore assoluto tra il raggio primitivo e il raggio del nodo è minima. Considerando poi l'inclinazione della retta dovuta all'angolo di carico della formula 3.6, si definisce un secondo punto sotto il profilo. L'intersezione tra la retta passante per i due punti e il profilo del dente consentono di determinare il punto nero nel raccordo la cui coordinata  $x$  coincide con il valore  $h_0/2$ .

I valori di  $a$ ,  $h$  e  $\Phi$  non sono costanti e di conseguenza per determinarli occorre prima individuare i punti di contatto durante l'intervallo d'ingranamento e quindi il raggio che identifica tali punti. La determinazione di questi parametri è rimandata nei paragrafi successivi.



**Figura 3.2:** Profilo del dente.

### 3.1.2 Distribuzione del carico, denti dritti

Data in input la struttura CN contenente le coordinate e le posizioni dei punti di contatto di pignone e ruota, è possibile estrarre i valori delle coordinate  $X$  e  $Y$  rispetto ad un sistema di riferimento assoluto con l'origine  $O_1$  posizionato al centro del pignone e avente  $Z$  come coordinata assiale lungo la larghezza di fascia  $b$ . I valori di  $X$  e  $Y$  corrispondenti ai punti di contatto del pignone vengono prelevati tramite le posizioni dei nodi di contatto presenti all'interno di CN. Questo procedimento permette di definire i raggi  $r_1$  (tramite la formula 3.7) dei punti di contatto del pignone per ciascuno dei denti in presa alle varie posizioni angolari

analizzate. Lo stesso procedimento viene utilizzato per determinare i valori dei raggi  $r_2$  per la ruota condotta in un sistema di riferimento avente l'origine  $O_2$  nel centro ruota. Si consideri che  $O_2$  è spostato rispetto  $O_1$  di una distanza pari all'interasse dato dalla somma tra i raggi primitivi di pignone e condotta. Si cercano i valori di X e Y corrispondenti ai nodi di contatto relativi a quest'ultima anch'essi definiti in CN e si calcolano i raggi  $r_2$  sempre applicando la formula 3.7.

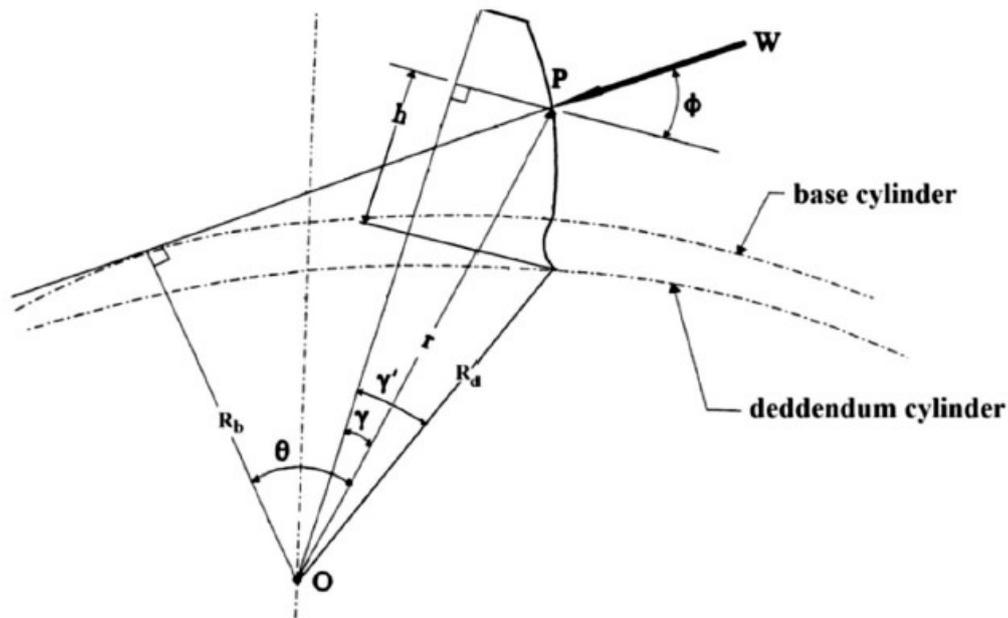
Nel caso a denti dritti non occorre tenere in considerazione la coordinata Z in quanto si ha una distribuzione uniforme del carico lungo la larghezza di fascia.

Le configurazioni angolari analizzate sono in tutto 80 e tra di esse si distinguono tre fasi in cui si hanno rispettivamente due, una ed infine nuovamente due coppie di denti in presa.

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (3.7)$$

Una volta definiti i raggi dei punti di contatto è possibile calcolare l'angolo  $\theta$  tra il raggio di base e il raggio che identifica il punto di contatto P sul fianco del dente come è possibile osservare in figura 3.3. Lo si calcola sia per il pignone che per la ruota condotta con la formula 3.8.

$$\theta = \cos^{-1}(r_b/r) \quad (3.8)$$



**Figura 3.3:** Angoli caratteristici. [9]

L'angolo  $\gamma$  tra il raggio del punto di contatto e l'asse del dente è possibile definirlo conoscendo le coordinate in x e y dei nodi che costituiscono il fianco del dente. Facendo riferimento alla figura 3.4 si osserva la forma del dente e si nota che l'asse del dente coincide con la retta x uguale a zero. Risulta possibile definire l'angolo  $\gamma$  per ciascuno dei nodi costituenti il fianco del dente secondo la formula 3.9 costruendo un vettore.

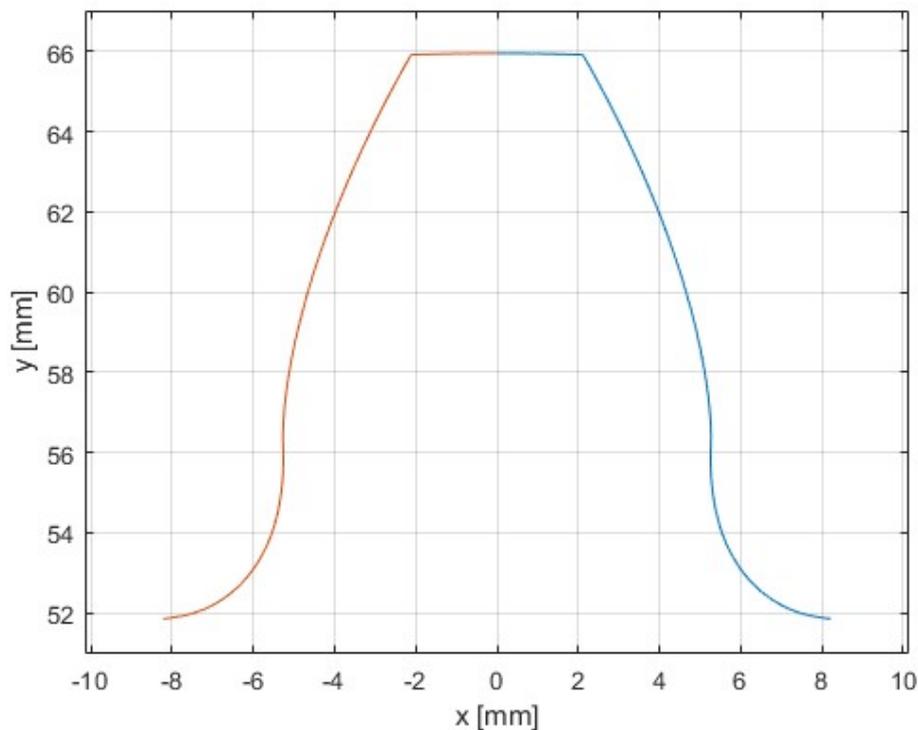
$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.9)$$

Allo stesso modo si crea il vettore contenente i valori di  $h$  di figura 3.1 del paragrafo precedente che indicano lo spessore del dente in funzione della coordinata  $y$ .

Sempre facendo riferimento alla figura 3.1 occorre definire i valori di  $a$  dei vari contatti e per farlo si definisce una dimensione  $c$  tale per cui vale la formula 3.10. L'intersezione tra la retta passante per i due punti di figura 3.2 e il profilo del dente permette di determinare non solo il valore  $h_0/2$  ma anche il valore dell'ordinata corrispondente al punto d'intersezione definita  $y_0$ . Tale valore permette, insieme a  $r$  e  $\gamma$  di definire  $c$  secondo la formula 3.11. Noti i valori di  $c$ , essendo nota la costante  $L$ , si può applicare la 3.10 per definire i valori di  $a$ .

$$a = L - c \quad (3.10)$$

$$c = r \cos \gamma - y_0 \quad (3.11)$$



**Figura 3.4:** Dente.

Facendo riferimento alla figura 3.3, noti gli angoli  $\theta$  e  $\gamma$ , è possibile calcolare l'angolo di carico  $\Phi$ , variabile in relazione al punto di contatto e definito dalla formula 3.12. Per come è stato costruito il vettore  $\gamma$  occorre estrarre il valore corrispondente nel punto di contatto e poi si definisce  $\Phi$ .

$$\Phi = \alpha_F = \theta - \gamma \quad (3.12)$$

Per determinare il valore di  $h$  di figura 3.3, come prima cosa, occorre determinare il valore di  $\gamma'$  tramite le formulazioni sotto riportate facendo riferimento alla figura 3.5 sia per il pignone che per la condotta.

$R_r^*$  è definibile conoscendo il valore del raggio del raccordo di base  $r_f$  e il raggio di troncatura interna  $R_d$ .

$R_f$  è il raggio definito dalla somma tra i raggi di troncatura interna e raccordo.

$$R_f = R_d + r_f \quad (3.13)$$

$$R_r^* = \sqrt{R_f^2 - r_f^2} \quad (3.14)$$

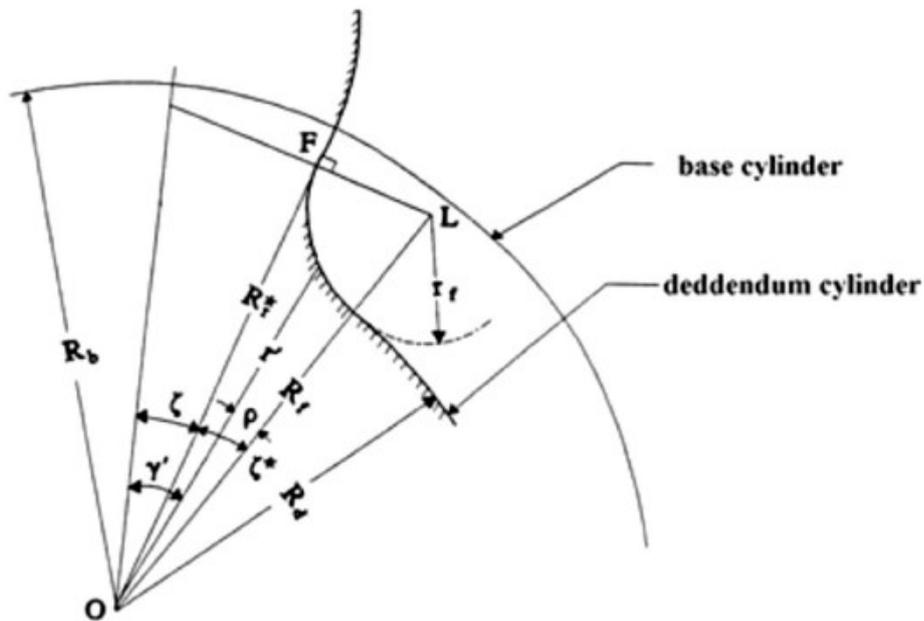
$$\gamma' = \zeta + \zeta^* - \rho \quad (3.15)$$

con

$$\zeta = \frac{1}{z} \frac{\pi}{2} + \text{inv}(\Phi_t)$$

$$\zeta^* = \tan^{-1} \frac{r_f}{R_r^*}$$

$$\rho = \cos^{-1} \left( \frac{R_f^2 + R_d^2 - r_f^2}{2R_f R_d} \right)$$



**Figura 3.5:** Grandezze e angoli caratteristici. [9]

Dopo aver calcolato l'angolo  $\gamma'$  di pignone e condotta, si calcolano rispettivamente i valori  $h_1$  e  $h_2$  dei punti P di contatto tra i denti alle varie posizioni angolari. Osservando la figura 3.3 si ottiene la formula 3.16 in cui il raggio  $r$  e l'angolo  $\gamma$  variano a seconda del punto di contatto sul fianco del dente mentre il raggio  $R_d$  e l'angolo  $\gamma'$  sono costanti geometriche.

$$h = r \cos \gamma - R_d \cos \gamma' \quad (3.16)$$

A questo punto, avendo calcolato tutte le grandezze che ci servivano, si definiscono con la formula 3.5 le cedevolezza di pignone e condotta e si procede facendo la somma tra le due per ogni punto di contatto secondo la 3.17.

$$w = w_1 + w_2 \quad (3.17)$$

La rigidezza è definita come l'inverso della cedevolezza, quindi nota quest'ultima si possono calcolare i corrispondenti valori di rigidezza.

Si indicano con la lettera  $m$  il numero totale di linee di contatto tra pignone e ruota, ovvero il numero di denti del pignone e il numero di denti della ruota coinvolti nel contatto alla specifica posizione angolare.

La quantità  $K_S$  è una misura della rigidezza globale data dalla somma tra le rigidezze corrispondenti a ciascuna linea di contatto, è definita dalla 3.18 e  $w_i$  rappresenta la somma tra la cedevolezza del dente del pignone e quella del dente della ruota per l' $i$ -esima linea.

Tenendo in considerazione che la forza totale trasmessa tra le due ruote è pari a  $F$  definita dalla 3.19, si ottiene il carico trasversale  $W_{tri}$  agente su ciascuna linea di contatto, ovvero la forza scambiata tra ciascuna coppia di denti in presa (formula 3.20).

$$K_S = \sum_{i=1}^m \frac{1}{w_i} \quad (3.18)$$

$$F = \frac{T}{R_{b1}} \quad (3.19)$$

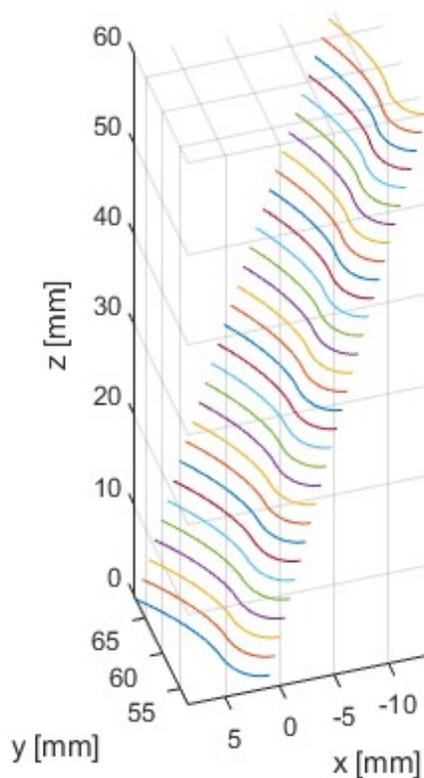
$$W_{tri} = \frac{F}{K_S w_i} \quad (3.20)$$

### 3.1.3 Distribuzione del carico, denti elicoidali

Nel caso di dentatura elicoidale occorre tenere in considerazione che le linee di contatto non sono parallele all'asse della ruota e del pignone ma sono inclinate rispetto ad esso di un angolo  $\beta_b$  definito dalla formula 3.21. La distribuzione del carico non è uniforme lungo queste linee a causa della variazione della rigidezza del dente lungo ciascuna linea di contatto.

$$\beta_b = \tan^{-1}(\tan \beta \cos \Phi_t) \quad (3.21)$$

Per calcolare la distribuzione del carico e rappresentare la sua non uniformità in direzione assiale, si divide il dente in una serie di parti perpendicolari all'asse  $z$  come in figura 3.6 e per ciascuna di essa si utilizza lo stesso approccio sviluppato per gli ingranaggi a denti dritti. Ciascuna parte ha una estensione lungo la direzione  $z$  pari al rapporto tra la larghezza di fascia  $b$  e il totale di parti create, che in questo caso sono 30. Le linee rappresentanti il profilo del dente in figura sono 31 e di conseguenza la sedicesima sarà posizionata a metà della larghezza di fascia.



**Figura 3.6:** Suddivisione del dente lungo l'asse z.

Per il caso a denti elicoidali si utilizza un elemento cell ovvero un vettore di celle che contiene le posizioni nodali dei soli punti di contatto di pignone e ruota ed è stato indicato come CNall. Esso è stato creato in modo tale che alla specifica posizione angolare siano presenti solo ed esclusivamente le fette del dente che partecipano al contatto. Ad esempio, se il dente del pignone ingrana toccando il dente della ruota condotta lungo tutta la larghezza di fascia significa che il numero totale di fette presenti per quel dente è 31. A seconda della posizione angolare, esso presenterà le prime, le ultime oppure tutte le fette. Per ciascuna sfetta di contatto sono indicate le posizioni dei nodi di contatto del pignone e della ruota condotta.

I raggi dei punti di contatto di pignone e condotta per lo specifico dente e posizione di ingranamento variano lungo la larghezza di fascia e quindi variano a seconda della fetta considerata. Per poterli calcolare si considera un sistema di riferimento assoluto con l'origine  $O_1$  nel centro del pignone e uno con l'origine  $O_2$  nel centro della ruota spostato di una quantità pari all'interasse. Nello specifico, per il pignone e per la ruota si vanno ad estrapolare i valori X e Y relativi alle posizioni dei nodi. Conoscendo questi valori si applica la formula 3.7 e si determinano i raggi  $r_1$  ed  $r_2$  rispettivamente di pignone e condotta. Si procede applicando le formule viste per i denti dritti tenendo in considerazione la variabilità dei parametri anche in funzione della coordinata assiale.

In maniera analoga al caso delle ruote a denti dritti occorre definire una rigidezza globale  $K_h$  secondo la formula 3.22 che tenga in considerazione anche la terza dimensione lungo z.

Si indicano con la lettera  $m_i$  il numero totale di linee di contatto per la singola fetta, mentre con la lettera  $n$  si indicano il numero di fette. La cedevolezza del j-esimo dente in corrispondenza della i-esima fetta è indicata con il termine  $w_{ij}$ .

Tenendo in considerazione che la forza totale trasmessa tra le due ruote è pari a  $F$  definita dalla 3.19, si ottiene il carico trasversale  $W_{trij}$  agente sulla singola fetta di ciascun dente per ciascuna posizione angolare secondo l'espressione 3.23.

$$K_h = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{mi} \frac{1}{w_{ij}} \quad (3.22)$$

$$W_{trij} = \frac{F}{K_h w_{ij}} \quad (3.23)$$

### 3.1.4 Tensione a fondo dente, denti dritti

Per il calcolo della tensione a fondo dente si applica la formula 3.24 e si ottiene il corrispondente valore su ciascuna linea di contatto ad ogni posizione angolare. Per i simboli e la corrispondente descrizione delle grandezze presenti nella formula, si fa riferimento alla figura 3.7 e alla tabella 3.2.

$$\sigma_{Fi} = \frac{6 W_{tri} \cos \alpha_F(r_i) h_F(r_i)}{b s_F^2} Y_S(r_i) \quad (3.24)$$

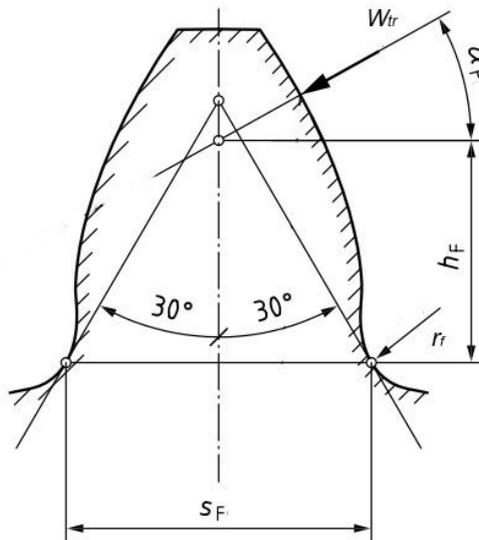
Il carico  $W_{tri}$  agente su ciascun dente alle diverse posizioni angolari è noto dal paragrafo 3.1.2.

La larghezza di fascia  $b$  è definita e costante, mentre altri parametri quali  $\alpha_F$ ,  $h_F$  e  $Y_S$  variano a seconda del punto di contatto considerato.

Il braccio  $h_F$  è calcolato mediante l'espressione 3.25.

$$h_F = r \cos \gamma - r \sin \gamma \tan \alpha_F - d_{CSL} \quad (3.25)$$

Conoscendo il valore di  $s_F$  calcolato secondo le formule della normativa, è possibile determinare il valore  $d_{CSL}$ . Per farlo si cerca il nodo del raccordo di base tale per cui la differenza in valore assoluto tra la metà della corda normale e la coordinata  $x$  di tale nodo è minima. La coordinata  $y$  di tale nodo coincide con  $d_{CSL}$ .



**Figura 3.7:** Grandezze per il calcolo della tensione. [7]

**Tabella 3.2:** Parametri per il calcolo della tensione, denti dritti.

Simbolo	Descrizione
$r_i$	Raggio del punto di contatto sull'i-esimo dente
$W_{tri}$	Forza totale scambiata dall'i-esimo dente
$S_F$	Dimensione della corda normale nella sezione critica
$h_F(r_i)$	Braccio di flessione per l'i-esimo dente definito come la distanza tra la sezione critica e l'intersezione data dalla retta di direzione della forza scambiata con la mezzeria del dente
$\alpha_F(r_i)$	Angolo tra la forza $W_{tri}$ sull'i-esimo dente e la perpendicolare alla mezzeria
$Y_s(r_i)$	Fattore di correzione della tensione definito con le formule della normativa e variabile a seconda del punto di contatto
$\sigma_{Fij}$	Tensione a fondo del dente i-esimo
$d_{CSL}$	Distanza tra il centro ruota o pignone e la sezione critica

### 3.1.5 Tensione a fondo dente, denti elicoidali

Nel caso di ruote a denti elicoidali occorre considerare la non uniformità del carico lungo la linea di contatto e di conseguenza una tensione alla base del dente variabile con la coordinata Z. Per questa ragione la formula 3.24 viene modificata in modo da poter definire un valore di tensione  $\sigma_{Fij}$  variabile a seconda del dente e della slice considerata ad ogni posizione angolare e a questo scopo viene utilizzata l'espressione 3.26. In tabella 3.3 sono descritte le grandezze utilizzate per il calcolo della tensione.

$$\sigma_{Fij} = \frac{6 W_{trij} \cos \alpha_F(r_{ij}) h_F(r_{ij})}{d_L s_F^2} Y_s(r_{ij}) \quad (3.26)$$

Per il calcolo del braccio  $h_F$  si utilizza la stessa espressione utilizzata nel caso a denti dritti.

**Tabella 3.3:** Parametri per il calcolo della tensione, denti elicoidali.

Simbolo	Descrizione
$r_{ij}$	Raggio del punto di contatto sul j-esimo dente nella i-esima fetta
$W_{trij}$	Forza totale sul piano frontale scambiata dal j-esimo dente nella i-esima fetta
$S_F$	Dimensione della corda normale nella sezione critica
$h_F(r_{ij})$	Braccio di flessione per il j-esimo dente nella i-esima fetta definito come la distanza tra la sezione critica e l'intersezione data dalla retta di direzione della forza scambiata con la mezzeria del dente
$\alpha_F(r_{ij})$	Angolo tra la forza $W_{trij}$ sul j-esimo dente nella i-esima fetta e la perpendicolare alla mezzeria
$Y_s(r_{ij})$	Fattore di correzione della tensione definito con le formule della normativa e variabile a seconda del punto di contatto
$\sigma_{Fij}$	Tensione a fondo del j-esimo dente nella i-esima fetta
$d_{CSL}$	Distanza tra il centro ruota o pignone e la sezione critica
$d_L$	Spessore di ciascuna parte in cui è suddiviso il dente lungo Z

## 3.2 Risultati del modello analitico

Seguendo la procedura di calcolo illustrata del paragrafo 3.1 è stato implementato il codice per il calcolo della tensione a fondo dente, sia per il caso a denti dritti che per il caso a denti elicoidali. Di seguito vengono illustrati i risultati ottenuti nei due casi, evidenziando sia la distribuzione del carico che la sollecitazione nel raccordo di base.

### 3.2.1 Denti dritti

In figura 3.8 si osservano i risultati ottenuti con la formula 3.20 per determinare la forza totale  $W_{tri}$  scambiata da ciascun dente in funzione della posizione angolare.

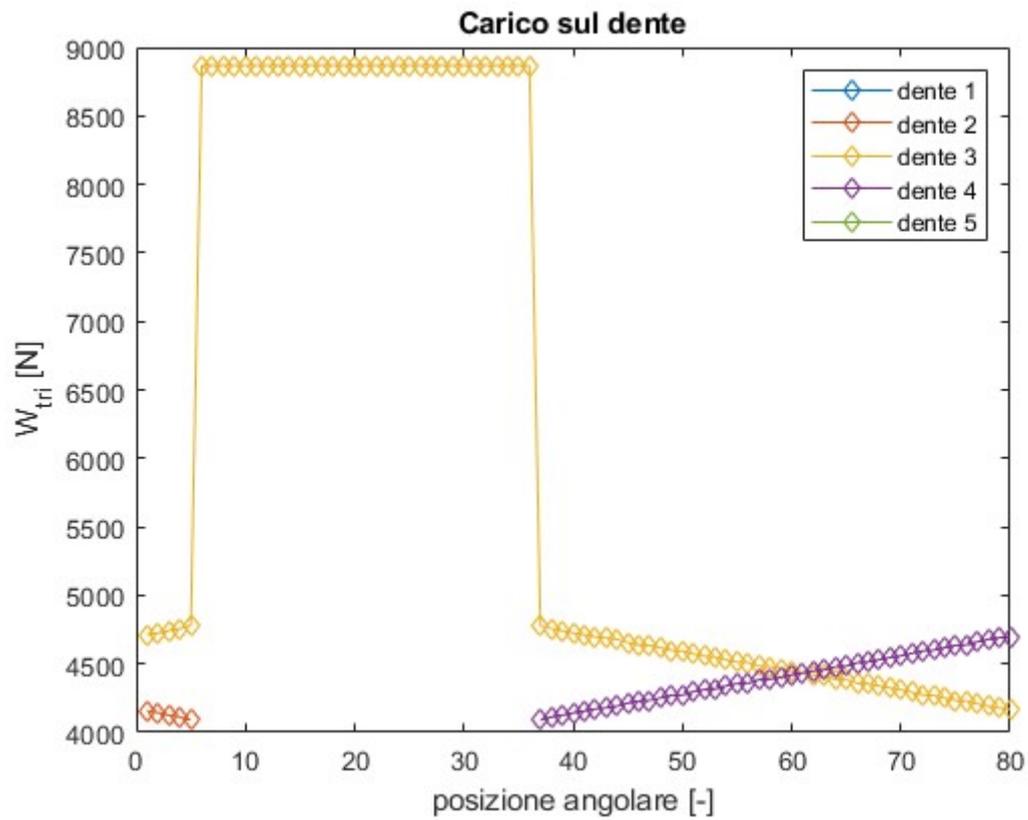
Nell'intervallo di rotazione analizzato si osservano tre fasi distinte: nella prima fase si hanno due coppie di denti in presa, nella seconda una e nella terza tornano ad esserci due linee di contatto.

Partendo dalla prima posizione e arrivando alla quinta si osserva una leggera crescita del carico gravante sul terzo dente a cui corrisponde una decrescita del carico sul secondo dente avvicinandosi all'ultima posizione angolare di contatto. Tra la sesta e la trentaseiesima posizione angolare, essendoci una sola coppia di denti in contatto, la forza è interamente applicata sul terzo dente e il fattore di condivisione del carico è unitario.

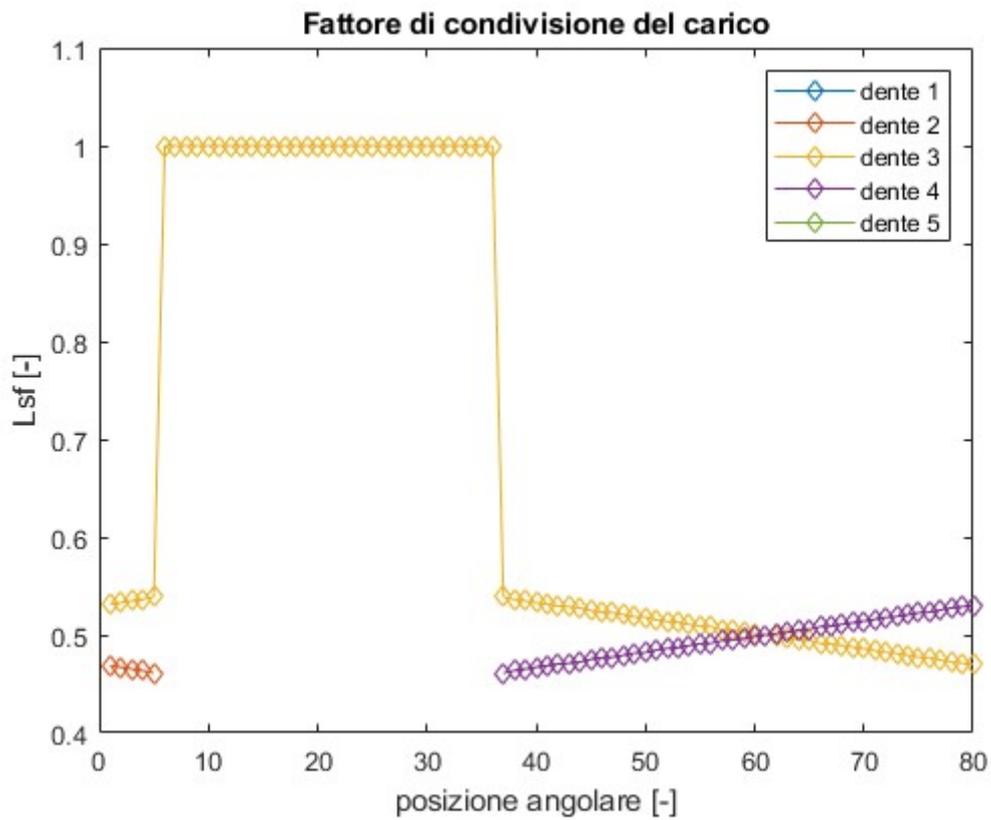
Alla trentasettesima posizione angolare il quarto dente entra in contatto e pian piano il carico agente su di esso aumenta mentre la forza applicata sul terzo dente diminuisce.

La condizione critica di carico è quindi rappresentata dalla seconda fase poiché il carico è assorbito per intero da un unico dente. In questo caso, sapendo che il valore della coppia applicata è di 500 Nm si può risalire al valore del carico dal rapporto tra la coppia e il raggio di base secondo la formula 3.19 e tale valore coincide con quello di  $F$  indicato in tabella 3.4.

In figura 3.9 sono illustrati i risultati ottenuti in merito al fattore di condivisione del carico  $Lsf$ . Esso è definito in modo tale che ad ogni posizione angolare la somma tra i valori di ciascun dente presente dia un valore unitario. Come si può osservare dalla figura, l'andamento dell' $Lsf$  è analogo a quello del grafico di forza scambiata.



**Figura 3.8:** Forza totale scambiata, denti dritti.



**Figura 3.9:** Lsf, denti dritti.

Nel grafico di figura 3.10 si osserva la sollecitazione  $\sigma_{Fi1}$  a fondo dell'i-esimo dente del pignone in funzione della posizione angolare.

Come già illustrato in precedenza il dente 3 è presente durante tutto l'intervallo di rotazione analizzato. In particolare, per le prime posizioni angolari è presente anche il dente 2, che essendo in uscita, vede valori di tensione maggiori dovuti ad un braccio  $h_F$  elevato e scompare poi a partire dalla sesta posizione. La scomparsa del contatto sul dente 2 determina una rapida crescita del carico e della tensione sul dente 3 nel passaggio tra la quinta e la sesta posizione angolare.

Appare evidente che quando vi è una sola linea di contatto i valori di tensione sono più elevati perché tutta la forza si è applicata su un unico dente. Tra la sesta e la trentaseiesima posizione è presente solo il dente 3 e lo stress continua a crescere perché la linea di contatto si sta spostando verso la punta del dente con conseguente incremento del braccio  $h_F$  che è proporzionale alla  $\sigma_{Fi}$ .

Tra la trentaseiesima e la trentasettesima posizione angolare si ha un crollo della tensione sul dente 3 poiché il fattore di condivisione del carico non è più unitario a causa della comparsa del contatto sul dente numero 4.

I valori di tensione sui due denti, a partire da questa posizione aumenteranno sempre sino a giungere all'ultima posizione a causa dell'aumento del braccio  $h_F$ . Si noti che, dalla trentasettesima posizione all'ultima, nonostante il carico sul terzo dente diminuisca, la tensione aumenta. Il motivo di tale comportamento è dovuto al fatto che il contributo relativo all'aumento del braccio  $h_F$  pesa più della diminuzione del carico  $W_{tri}$ .

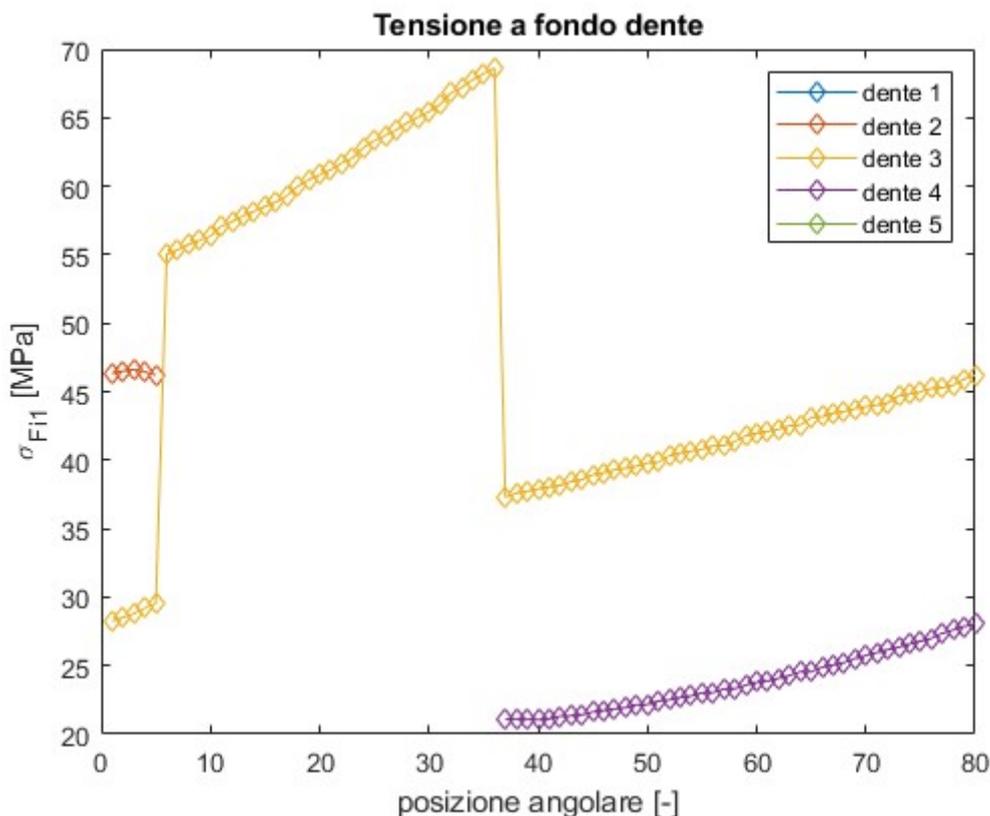


Figura 3.10: Tensione a fondo dente, denti dritti.

**Tabella 3.4:** Risultati ottenuti nel codice, denti dritti.

Simbolo	Valore	Unità di misura
alfa1_F	80 x 5 double	[rad]
alfa2_F	80 x 5 double	[rad]
F	$8.8681 \times 10^3$	[N]
h1F	80 x 5 double	[mm]
h2F	80 x 5 double	[mm]
input.params.sel_teeth	5	[-]
Ks_tot	80 x 1 double	[N/mm]
Lsf	80 x 5 double	[-]
pos_angolari	80	[-]
r1	80 x 5 double	[mm]
r2	80 x 5 double	[mm]
rf1	3,4377	[mm]
rf2	3,4377	[mm]
sF1	11,6685	[mm]
sF2	11,6685	[mm]
sigma_F1	80 x 5 double	[MPa]
sigma_F2	80 x 5 double	[MPa]
sigma_F1_max	68.6361	[MPa]
T	500000	[Nmm]
Wtr	80 x 5 double	[N]
w	80 x 5 double	[mm/N]
Y_S1	80 x 5 double	[-]
Y_S2	80 x 5 double	[-]

### 3.2.2 Denti elicoidali

Nel caso di ruote a denti elicoidali dobbiamo fare riferimento a variabili in tre dimensioni poiché oltre ad esserci, come nei denti dritti, dipendenza dal dente e dalla posizione angolare vi è anche dipendenza dalla coordinata assiale Z e quindi dalla slice considerata.

Per questo motivo i grafici dei carichi e delle tensioni sono organizzati in modo da presentare sull'asse delle ascisse la coordinata Z lungo la larghezza di fascia e sull'asse delle ordinate la variabile in esame. Ogni grafico illustrerà quindi i valori ottenuti ad una determinata posizione angolare. In tabella 3.5 sono illustrati i risultati ottenuti nel codice riguardanti i parametri necessari al calcolo della forza scambiata e della tensione.

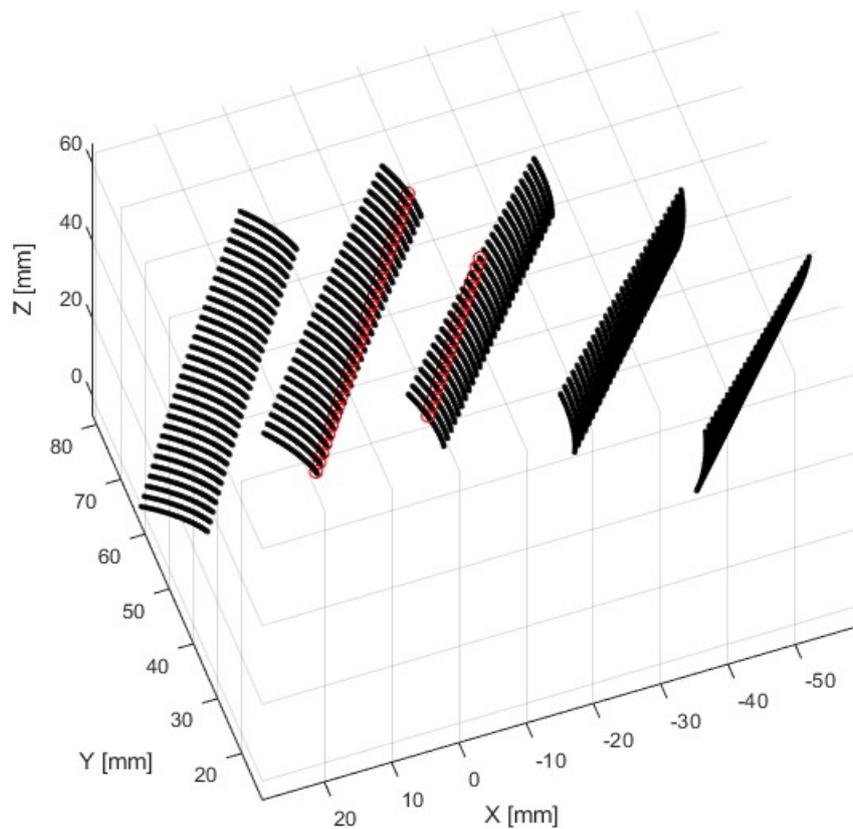
In questo caso, ad ogni posizione angolare, saranno sempre presenti almeno due coppie di denti in presa e un massimo di tre.

Sono riportati i risultati ottenuti in due diverse configurazioni per mostrare il comportamento del sistema rispettivamente con due e con tre coppie di denti in contatto.

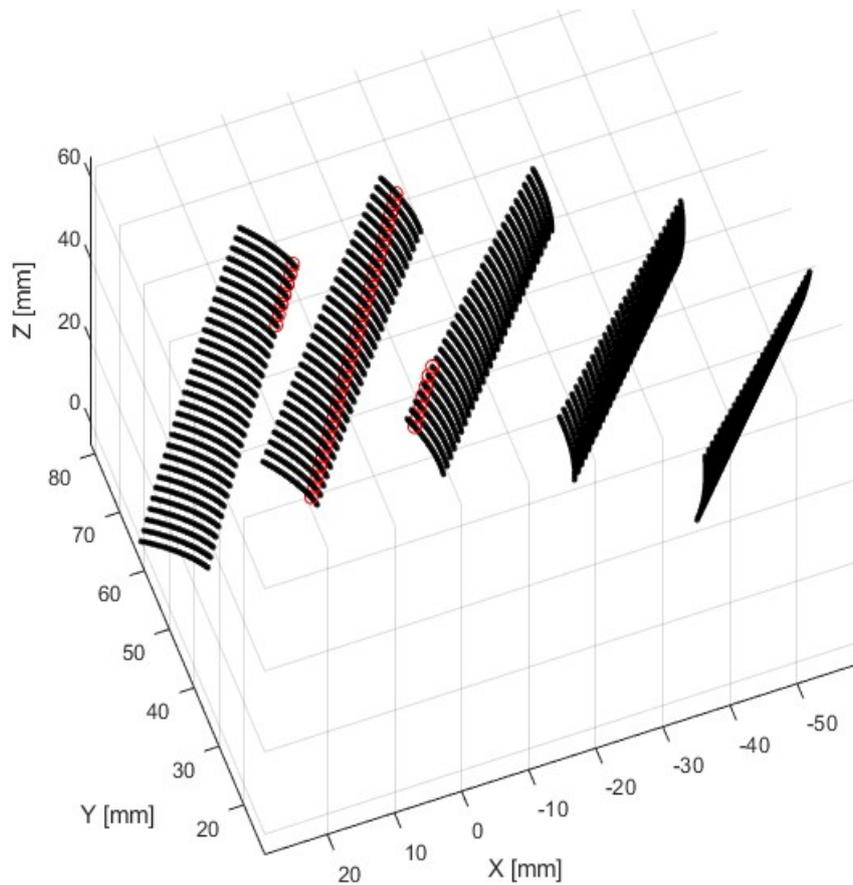
Le figure 3.11 e 3.12 mostrano in un grafico tridimensionale le 31 slices di colore nero che costituiscono i denti del pignone. Considerando una rotazione oraria del pignone si deduce che il fianco destro del dente sarà quello caricato e che i denti in uscita dalla zona di contatto sono a destra mentre quelli in ingresso sono a sinistra. In rosso sono evidenziati i contatti tra i denti del pignone e i denti della ruota condotta alla specifica posizione angolare durante l'ingranamento.

La prima configurazione analizzata è la posizione angolare numero 22, in cui si hanno due coppie di denti in presa e quindi due linee di contatto come rappresentato in figura 3.11. In questo caso il dente 3, ovvero quello centrale tra i cinque tocca per le prime 18 slices, mentre il dente 4 tocca con tutte.

La seconda configurazione è rappresentata in figura 3.12 e vede tre coppie di denti in presa. Sul dente 3 in uscita si hanno le prime 7 slices in contatto, il dente 4 tocca per tutta la larghezza di fascia ed infine il dente 5 in ingresso tocca con le ultime 7 slices.



**Figura 3.11:** Contatti, 2 coppie di denti in presa.



**Figura 3.12:** Contatti, 3 coppie di denti in presa.

Contrariamente al caso delle ruote a denti dritti la distribuzione del carico lungo la linea di contatto, come già è stato detto, non è costante. La non costanza del carico si osserva dai grafici di figura 3.13 e 3.14 in cui si osserva l'andamento del carico lungo la larghezza di fascia calcolata secondo la formula 3.23. Nello specifico la forza  $W_{trij}$  sta ad indicare il carico applicato sulla  $i$ -esima slice del  $j$ -esimo dente.

Le configurazioni descritte nelle figure precedenti sono quindi analizzate in termini di carico nelle figure 3.13 e 3.14.

Dai grafici si nota che i denti in uscita dalla zona di contatto, ovvero quelli che toccano per la prima parte della larghezza di fascia presentano un carico decrescente all'aumentare della coordinata  $Z$ . Le slices di contatto a valori di  $Z$  maggiori, per questi denti, saranno le prime a non presentare più contatto nelle posizioni angolari successive e di conseguenza vedono meno carico.

Al contrario, i denti in ingresso, ovvero quelli che non toccano per la parte iniziale ma per quella finale della larghezza di fascia, mostrano un carico crescente con la coordinata  $Z$ . In questo caso, le slices di contatto che si trovano a valori di  $Z$  inferiori saranno le ultime ad essere entrate nella zona di contatto e di conseguenza vedono meno carico.

Nel caso in cui il dente tocchi per intero lungo tutta la larghezza di fascia l'andamento è prima crescente, si raggiunge un valore massimo e poi decresce.

Il punto di massimo carico si trova in corrispondenza di metà della larghezza di fascia nel caso in cui sono presenti tre coppie di denti in presa e ciascuno dei due denti più esterni presenta contatto con lo stesso numero di slices come accade in figura 3.14.

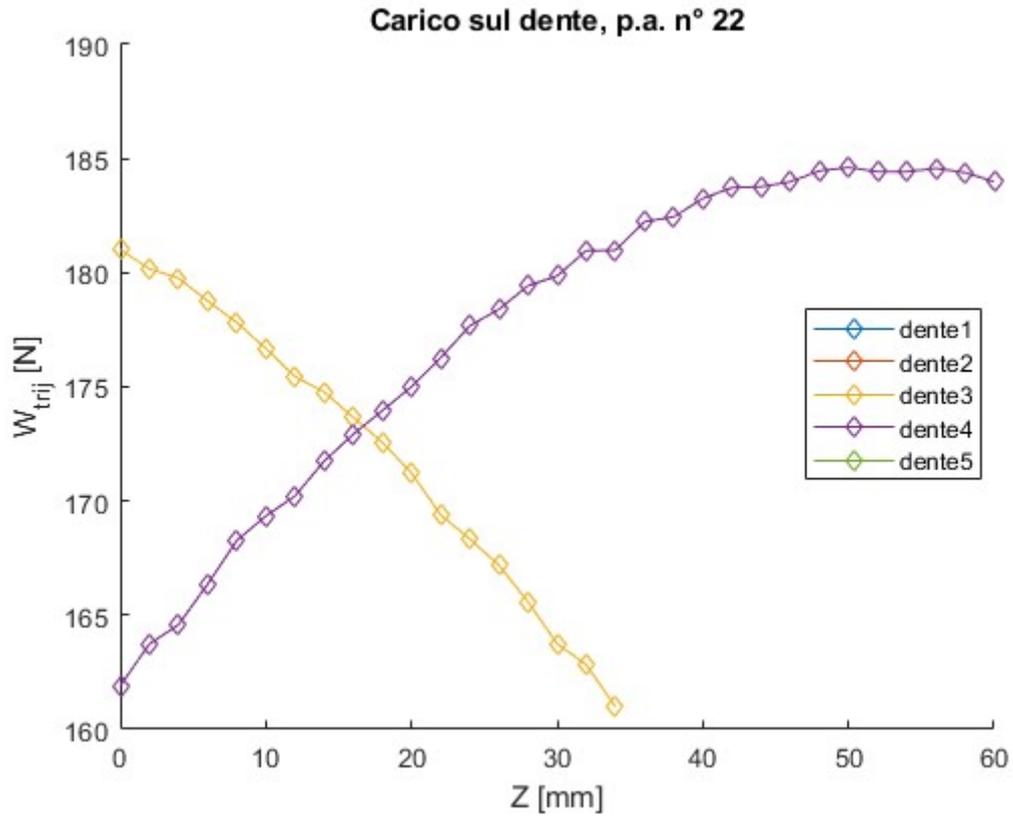


Figura 3.13 : Carico sul dente, 2 coppie di denti in presa.

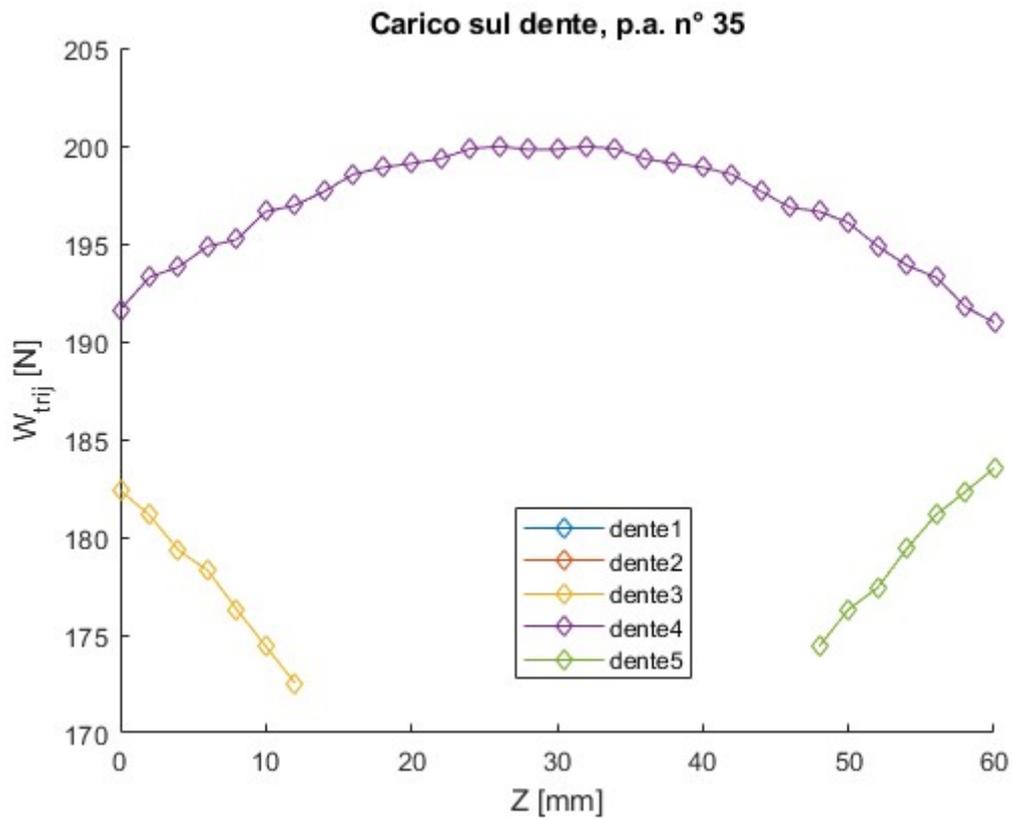


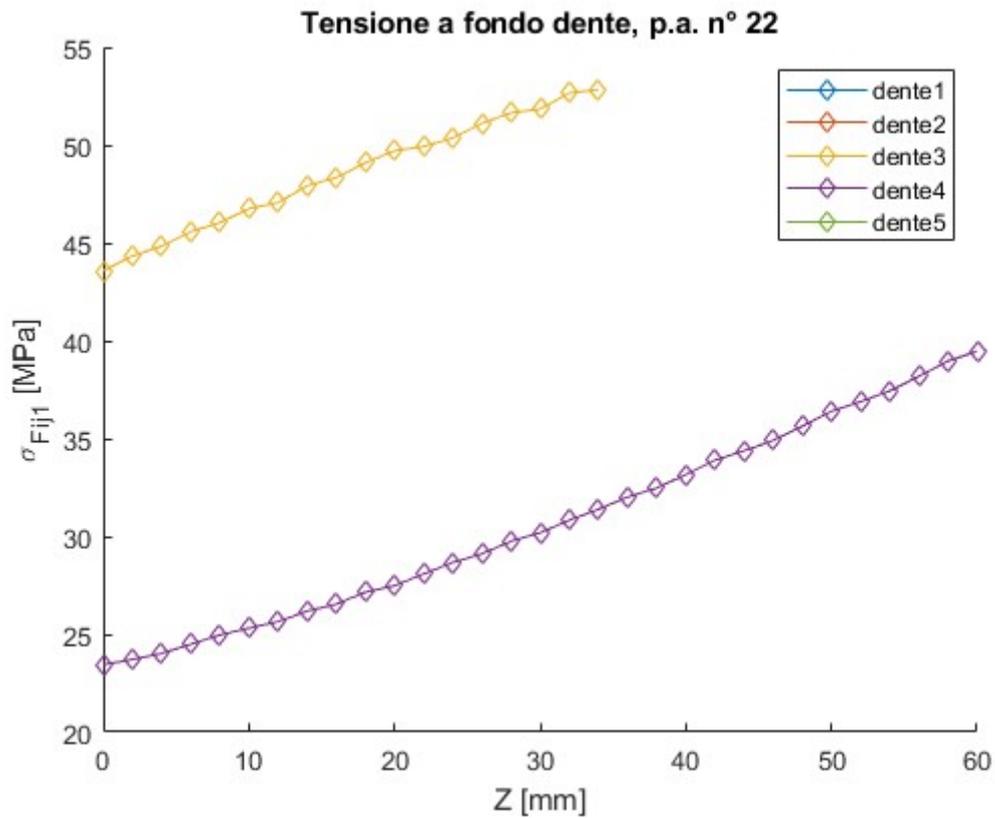
Figura 3.14 : Carico sul dente, 3 coppie di denti in presa.

La tensione a fondo dente, contrariamente al caso a denti dritti, è anch'essa variabile con la coordinata Z. La tensione  $\sigma_{Fij1}$  rappresenta lo stress a fondo dente in corrispondenza della i-esima slice del j-esimo dente del pignone.

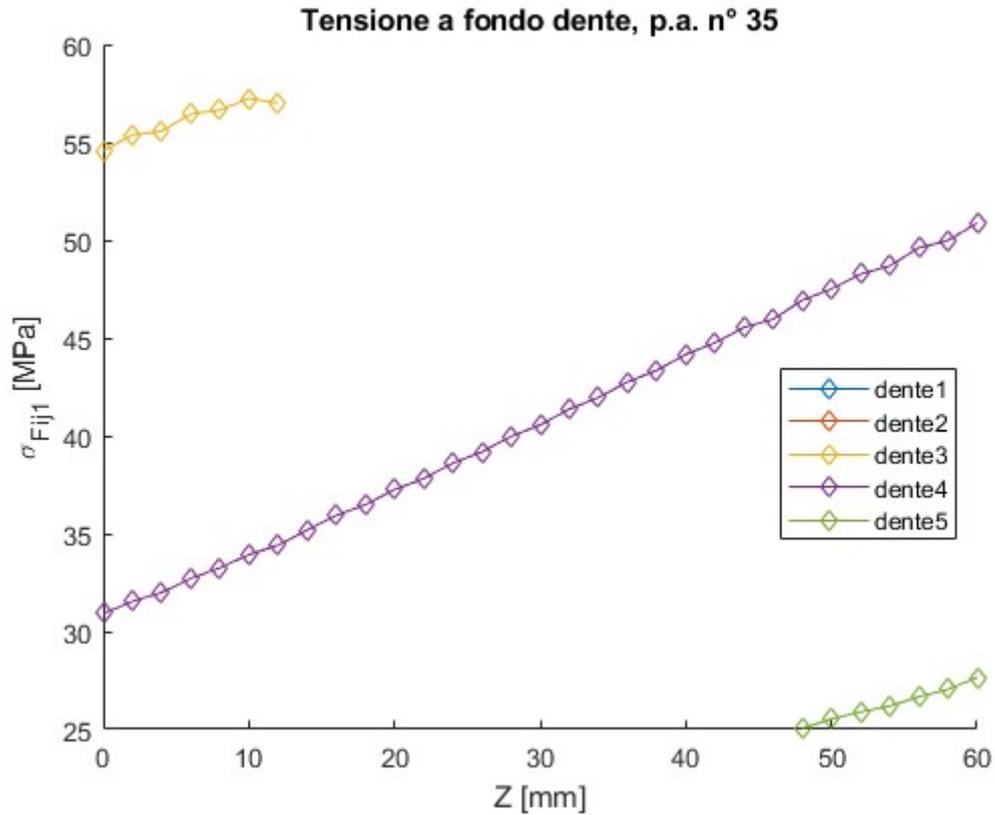
In figura 3.15 e 3.16 si osservano i risultati ottenuti nelle due configurazioni analizzate. Dai grafici si osserva che il dente 3 è quello più sollecitato e che la tensione su di esso tende in generale a crescere con la coordinata Z anche se il carico decresce. Questa crescita è dovuta al braccio  $h_F$  che aumenta al crescere della coordinata Z e quindi questo contributo pesa di più rispetto alla diminuzione di carico.

Allo stesso modo, se si guarda il dente che ricopre tutta la larghezza di fascia, l'andamento è crescente nonostante il carico abbia un andamento prima crescente e poi decrescente.

Il dente 5 in ingresso, invece, presenta un andamento sempre crescente come succedeva per il carico.



**Figura 3.15:** Tensione a fondo dente, 2 coppie di denti in presa.



**Figura 3.16:** Tensione a fondo dente, 3 coppie di denti in presa.

**Tabella 3.5:** Risultati ottenuti nel codice, denti elicoidali.

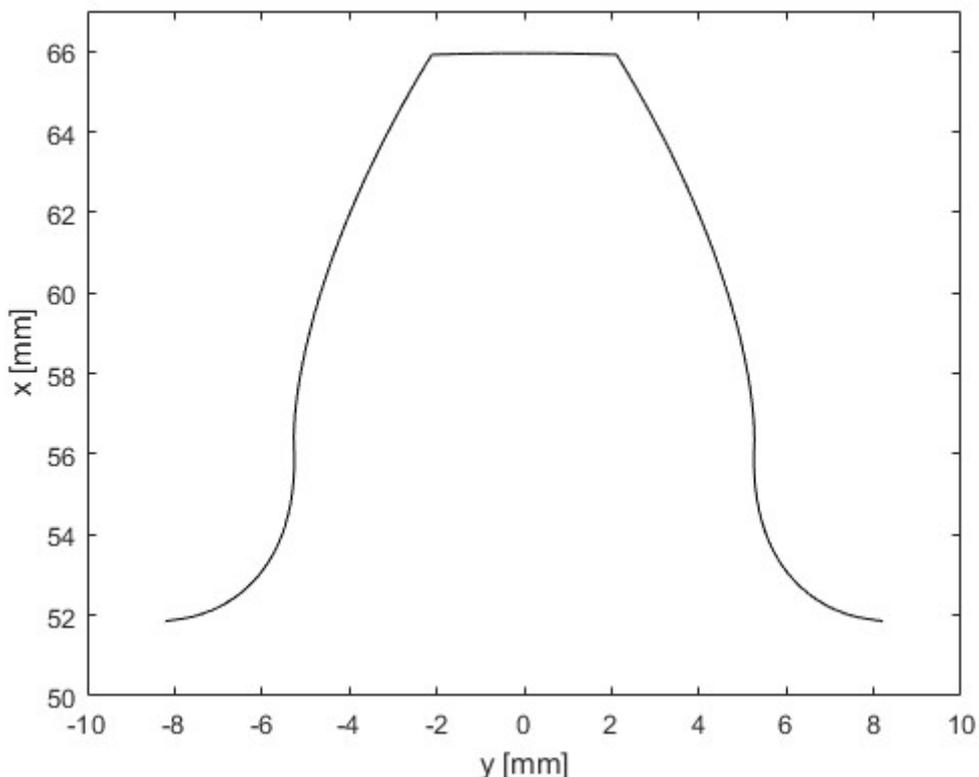
Simbolo	Valore	Unità di misura
alfa1_F	31 x 5 x 80 double	[rad]
alfa2_F	31 x 5 x 80 double	[rad]
F	$8.6019 \times 10^3$	[N]
h1F	31 x 5 x 80 double	[mm]
h2F	31 x 5 x 80 double	[mm]
input.params.sel_teeth	5	[-]
input.params.slices	31	[-]
Kh_tot	80 x 1 double	[N/mm]
pos_angolari	80	[-]
r1	31 x 5 x 80 double	[mm]
r2	31 x 5 x 80 double	[mm]
rf1	3,4066	[mm]
rf2	3,4066	[mm]
sF1	11,8616	[mm]
sF2	11,8616	[mm]
sigma_F1	31 x 5 x 80 double	[MPa]
sigma_F2	31 x 5 x 80 double	[MPa]
T	500000	[Nmm]
Wtr	31 x 5 x 80 double	[N]
w	31 x 5 x 80 double	[mm/N]
Y_S1	31 x 5 x 80 double	[-]
Y_S2	31 x 5 x 80 double	[-]

## 4 Modello semianalitico basato sulla teoria della trave

Il profilo del dente, definito dal raccordo di base e dal fianco, è discretizzato con un certo numero di nodi non equi spaziatati e aventi coordinate  $x$  e  $y$ . Tali nodi permettono di suddividere il dente in direzione  $x$  in tanti piccoli elementi trave disposti uno in serie all'altro, ciascuno caratterizzato da una propria sezione resistente e da una matrice di rigidezza di dimensione  $12 \times 12$ .

Il dente può essere quindi modellato secondo la teoria della trave e utilizzando la matrice di rigidezza caratteristica è possibile giungere al calcolo della tensione a fondo dente.

Il sistema di riferimento adottato è illustrato in figura 4.1 e presenta l'asse  $x$  orientato lungo l'asse dente, l'asse  $y$  disposto perpendicolarmente al precedente in modo tale che il valore di  $y$  indichi come varia lo spessore del dente lungo il proprio asse procedendo dalla base alla punta e l'asse  $z$  è diretto lungo la larghezza di fascia della ruota.



**Figura 4.1:** Sistema di riferimento per il dente.

### 4.1 Area e momenti d'inerzia

Per poter determinare la tensione è opportuno determinare i momenti d'inerzia. Risulta necessario definire alcune grandezze che descrivono le proprietà geometriche dell'area della sezione resistente del dente in modo che sia possibile calcolare i momenti d'inerzia.

Prendendo in considerazione una generica figura nel piano definita in un sistema di riferimento  $(y,z)$  si definiscono le grandezze sotto riportate.

$$A = \int_A dA \quad (4.1)$$

$$S_y = \int_A z dA \quad S_z = \int_A y dA \quad (4.2)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad (4.3)$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad (4.4)$$

Conoscendo i momenti statici è possibile determinare le coordinate del baricentro  $g$  della sezione  $A$  nel sistema di riferimento cartesiano  $(y,z)$ .

$$y_g = \frac{S_z}{A} \quad (4.5)$$

$$z_g = \frac{S_y}{A} \quad (4.6)$$

Tali espressioni indicano che i momenti statici  $S_y$  e  $S_z$  riferiti ad un asse baricentrico sono nulli. Se la figura presenta un asse di simmetria o di antisimmetria, tali assi sono definiti come assi baricentrici.

In molte applicazioni strutturali esistono casi in cui la sezione dell'elemento considerato può essere vista come una figura composta da parti semplici che presentano caratteristiche già note o comunque determinabili in maniera semplice. Si parla in questi casi di figure composte e a tal proposito si possono presentare casi diversi. La figura può essere definita dalla somma di parti semplici oppure tramite sottrazione di parti semplici a partire da una parte semplice iniziale che include la figura finale desiderata.

Nel caso di figure composte occorre considerare le proprietà additive per le aree e per i momenti.

I contributi delle singole aree vengono sommati in modo da ottenere l'area totale della figura.

I momenti d'inerzia della figura finale sono definiti dalla somma tra i contributi di momento di ciascuna parte nel sistema di riferimento globale. Per fare ciò occorre definire i valori di trasporto con la formula di Huygens.

$$A = \sum_i A_i \quad (4.7)$$

$$S_y = \sum_i z_i A_i \quad S_z = \sum_i y_i A_i \quad (4.8)$$

$$I_y = \sum_i (I_{yi} + z_i^2 A_i) \quad I_z = \sum_i (I_{zi} + y_i^2 A_i) \quad (4.9)$$

$$I_{yz} = \sum_i (I_{yzi} + y_i z_i A_i) \quad (4.10)$$

**Tabella 4.1:** Grandezze relative alla geometria delle aree.

Simbolo	Descrizione	Unità di misura
$A$	Area	$[mm^2]$
$i$	$i$ -esima parte	$[-]$
$I_y, I_z$	Momenti d'inerzia	$[mm^4]$
$I_{yz}$	Momento d'inerzia centrifugo	$[mm^4]$
$S_y, S_z$	Momenti statici	$[mm^3]$
$y_i, z_i$	Coordinate della $i$ -esima parte rispetto al baricentro	$[mm]$

### 4.1.1 Calcolo di area e momenti d'inerzia

La trave è un solido cilindrico tridimensionale, quindi la forma della sezione contribuirà a determinare la distribuzione degli sforzi interni e la rigidità del sistema. Risulta quindi importante determinare i momenti d'inerzia della trave sia nel caso a denti dritti che nel caso a denti elicoidali.

Si definisce  $A$  la sezione resistente della trave,  $\beta_f$  l'angolo d'elica e  $y_s$  lo spessore del dente sul piano trasversale in direzione  $y$ .

Nel caso a denti dritti, immaginando di osservare il dente dall'alto e di tagliarlo lungo la sua altezza con un piano  $yz$  (perpendicolare all'asse  $x$ ) si ottiene una sezione resistente di forma rettangolare. Si ricordi che  $z$  è diretto lungo la larghezza di fascia  $b$ .

Il caso a denti elicoidale vede invece una sezione resistente a forma di parallelogramma perché tiene in considerazione l'effetto dell'angolo d'elica.

La lunghezza del parallelogramma in direzione  $z$  sarà pari alla larghezza di fascia  $b$ , mentre la larghezza totale  $H$  sarà data dalla somma di un contributo  $a$  (legato all'angolo  $\beta_f$ ) e dello spessore  $y_s$ .

$$a = b \tan \beta_f \quad (4.11)$$

$$H = a + y_s \quad (4.12)$$

L'angolo d'elica  $\beta_f$  è variabile lungo l'altezza del dente ed è dato dalla formula 4.13 espressa in funzione delle coordinate  $x$  e  $y$  dei nodi costituenti il profilo del dente di figura 4.1, del raggio primitivo e dell'angolo  $\beta$ .

$$\beta_f = \tan^{-1} \left( \frac{\tan(-\beta) \sqrt{x^2 + y^2}}{r_p} \right) \quad (4.13)$$

Osservando le formule 4.11 e 4.12 risulta evidente che il modello a denti dritti non è altro che una semplificazione del modello a denti elicoidali in cui l'angolo d'elica è nullo e per cui le due formule daranno i risultati della 4.14. In questo caso il rettangolo avrà il lato maggiore pari alla larghezza di fascia  $b$  e il lato minore pari allo spessore del dente  $y_s$ .

$$a = 0 \quad H = y_s \quad (4.14)$$

In figura 4.2 si osservano le caratteristiche geometriche appena illustrate e necessarie a calcolare la sezione resistente del dente e i momenti d'inerzia per il caso a denti elicoidali. In figura 4.3 è rappresentato il caso a denti dritti che, come già illustrato dalle formule sopra, non è altro che una semplificazione in cui si ottiene una sezione di forma rettangolare.

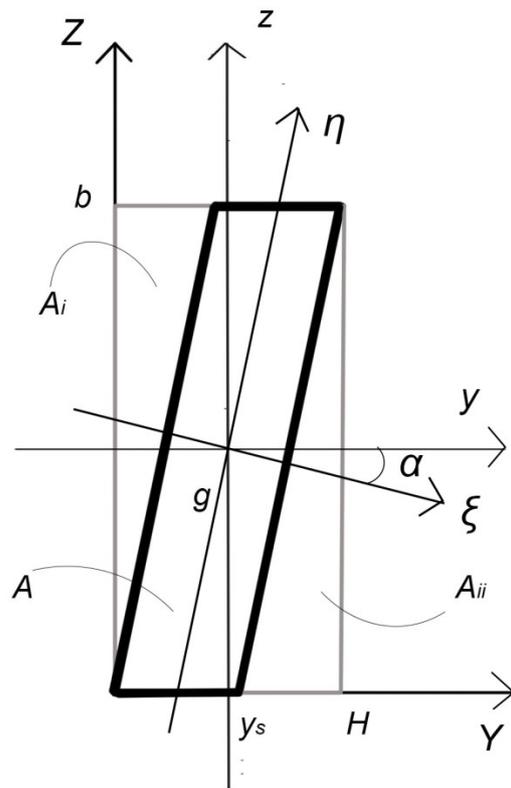


Figura 4.2: Vista sul piano YZ, denti elicoidali.

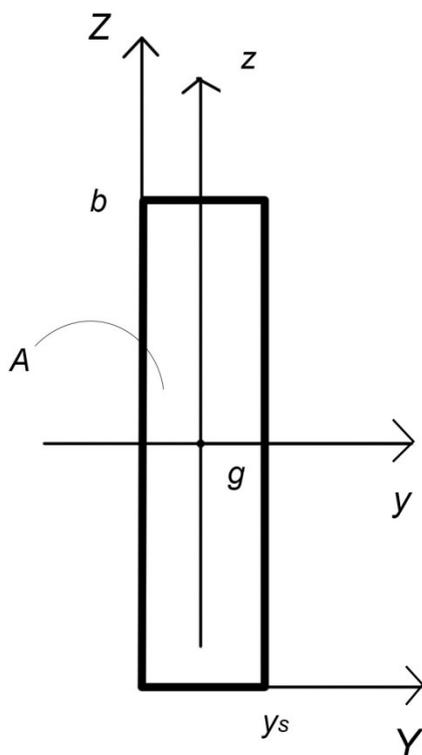


Figura 4.3: Vista sul piano YZ, denti dritti.

Come già detto in precedenza, in molte applicazioni pratiche si incontrano spesso casi in cui la sezione dell'elemento strutturale che si considera è composta da parti semplici (rettangoli e triangoli ad esempio), le cui caratteristiche sono già note o facilmente determinabili.

Nel nostro caso, la sezione resistente  $A$  viene determinata tramite considerazioni di carattere geometrico andando a sottrarre all'area del rettangolo  $A_{tot}$  di lunghezza  $b$  e larghezza  $H$  i due triangoli rettangoli di aree  $A_i$  ed  $A_{ii}$ . Le formule seguenti indicano i passaggi effettuati per determinare l'area  $A$  della sezione resistente del dente.

$$A_{tot} = b H \quad (4.15)$$

$$A_i = a \frac{b}{2} \quad (4.16)$$

$$A_{ii} = A_i \quad (4.17)$$

$$A = A_{tot} - A_i - A_{ii} \quad (4.18)$$

Nelle figure 4.4 e 4.5 è rappresentata la sezione resistente  $A$  del dente in funzione del corrispondente elemento trave disposto lungo l'altezza in direzione  $x$  del dente stesso rispettivamente per il modello a denti dritti e quello a denti elicoidali. Con il numero 1 si indica l'elemento trave situato alla base del dente, mentre l'ultimo indica quello situato sulla punta. L'andamento delle curve è decrescente e presenta un valore massimo alla base del dente e un valore minimo sulla punta.

In tabella 4.2 sono indicati i valori massimi e minimi ottenuti nei due casi e dai risultati si osserva che i valori sono maggiori nel caso a denti elicoidali a causa dell'inclinazione del dente dovuta all'angolo d'elica.

Le coordinate del baricentro rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano sono espresse mediante i momenti statici come visto nel paragrafo precedente, i quali diventano nulli se riferiti ad un asse baricentrico. Per i corpi che possiedono un asse di simmetria, o anche di antisimmetria, l'asse stesso è un asse baricentrico. Nel caso in cui la superficie possieda due assi di simmetria, il baricentro è definito nel punto di intersezione dei due assi come nel caso del rettangolo di area  $A_{tot}$ .

Le coordinate del baricentro del rettangolo di area  $A_{tot}$  rispetto al sistema di riferimento  $(Y, Z)$  sono date dalle formule 4.19 e 4.20.

$$Y_g = \frac{H}{2} \quad (4.19)$$

$$Z_g = \frac{b}{2} \quad (4.20)$$

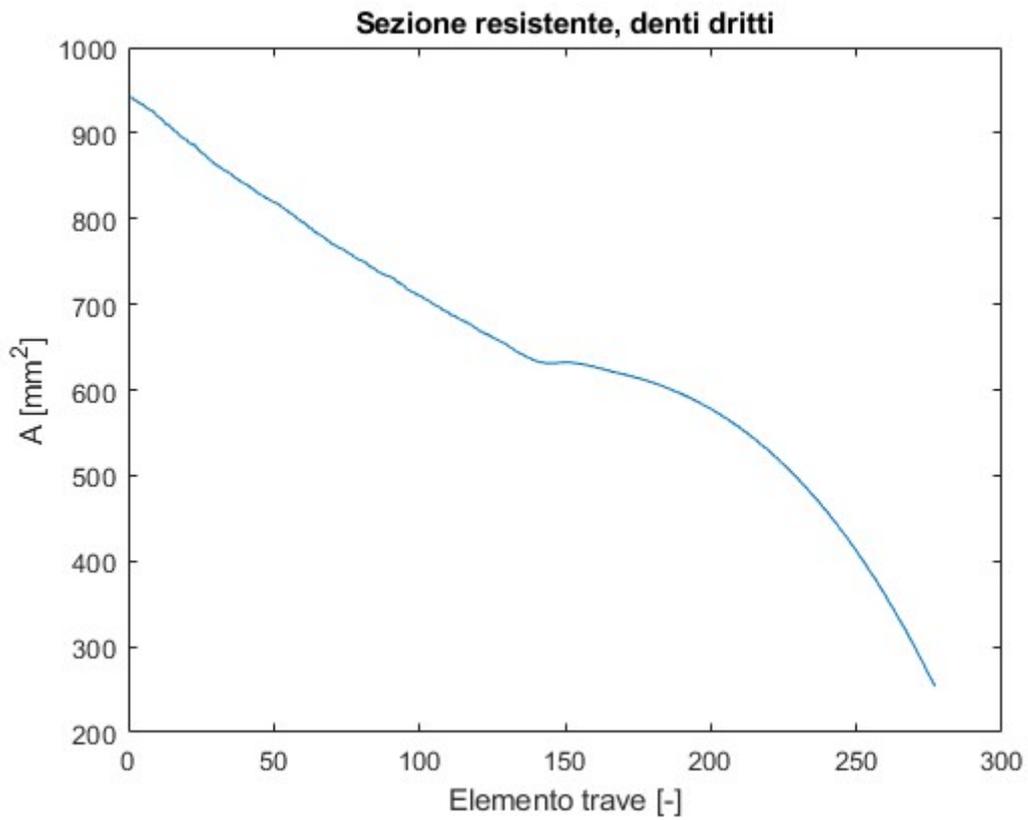
Si definiscono anche le coordinate del baricentro rispetto al sistema cartesiano  $(Y, Z)$  per i due triangoli rispettivamente di area  $A_i$  e  $A_{ii}$ .

$$Y_{gi} = \frac{1}{3} a \quad (4.21)$$

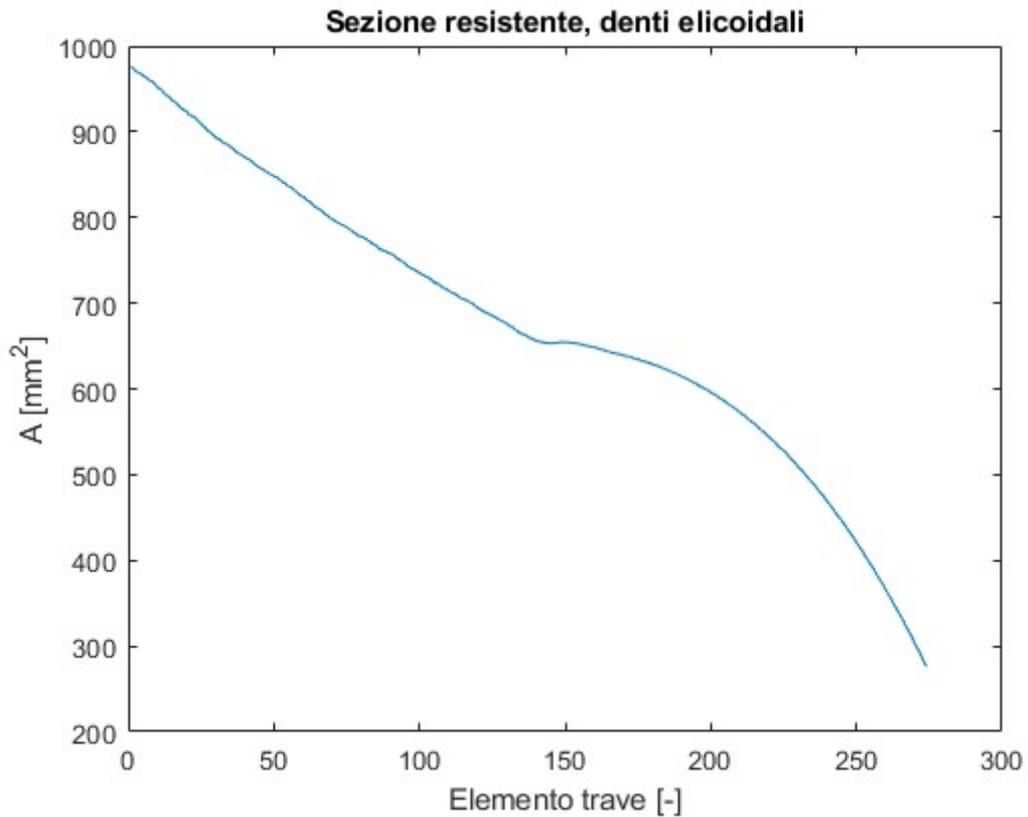
$$Z_{gi} = \frac{2}{3} b \quad (4.22)$$

$$Y_{gii} = \frac{2}{3} a + y_s \quad (4.23)$$

$$Z_{gii} = \frac{1}{3} b \quad (4.24)$$



**Figura 4.4:** Area resistente, denti dritti.



**Figura 4.5:** Area resistente, denti elicoidali.

**Tabella 4.2:** Valori massimi e minimi di A.

Simbolo	Valore	Unità di misura
$A_{max}$ denti dritti	$9.426 \times 10^2$	$[mm^2]$
$A_{min}$ denti dritti	$2.537 \times 10^2$	$[mm^2]$
$A_{max}$ denti elicoidali	$9.758 \times 10^2$	$[mm^2]$
$A_{min}$ denti elicoidali	$2.760 \times 10^2$	$[mm^2]$

Si prosegue definendo i momenti d'inerzia del rettangolo di area  $A_{tot}$  rispetto all'asse y e all'asse z baricentrici.

$$I_{toty} = \frac{1}{12} b^3 H \quad (4.25)$$

$$I_{totz} = \frac{1}{12} b H^3 \quad (4.26)$$

Si definiscono inoltre i momenti d'inerzia dei due triangoli rispetto ai propri assi y e z baricentrici attraverso le espressioni note sotto definite. I due triangoli hanno le stesse forme e dimensioni quindi momenti d'inerzia rispetto ai propri assi baricentrici sono identici.

$$I_{yi} = \frac{1}{36} a b^3 \quad (4.27)$$

$$I_{zi} = \frac{1}{36} b a^3 \quad (4.28)$$

$$I_{yii} = I_{yi} \quad (4.29)$$

$$I_{zii} = I_{zi} \quad (4.30)$$

Oltre ai momenti d'inerzia precedentemente descritti, si definisce anche il momento d'inerzia centrifugo dei due triangoli con l'espressione 4.31. Il momento d'inerzia centrifugo può risultare positivo, negativo o nullo come nel caso del rettangolo poiché la distribuzione delle masse risulta simmetrica rispetto agli assi.

$$I_{yzi} = -\frac{1}{72} a^2 b^2 \quad (4.31)$$

$$I_{yzii} = I_{yzi} \quad (4.32)$$

Per calcolare il momento d'inerzia del parallelogramma occorre utilizzare il teorema di trasposizione dei momenti d'inerzia, il quale stabilisce le relazioni esistenti tra i momenti di secondo ordine rispetto ad assi baricentrici e i momenti di secondo ordine rispetto ad assi paralleli a quelli passanti per il baricentro del sistema.

Occorre determinare i valori di trasporto calcolando la distanza in direzione z tra gli assi y baricentrici dei due triangoli con l'asse y baricentrico del rettangolo di area  $A_{tot}$ , allo stesso modo si calcolano le distanze in direzione y tra gli assi z. Gli assi baricentrici del rettangolo di area  $A_{tot}$  coincidono con gli assi baricentrici del parallelogramma caratteristico della sezione e di conseguenza i termini di trasporto per quest'ultimo saranno nulli.

$$d_{yi} = Y_{gi} - Y_g \quad (4.33)$$

$$d_{yii} = Y_{gii} - Y_g \quad (4.34)$$

$$d_{zi} = Z_{gi} - Z_g \quad (4.35)$$

$$d_{zii} = Z_{gii} - Z_g \quad (4.36)$$

Quindi, tenendo in considerazione che il baricentro del parallelogramma coincide con il baricentro del rettangolo, si possono scrivere i momenti d'inerzia intorno agli assi baricentrici  $y$  e  $z$  e il momento di inerzia centrifugo. In figura 4.6 e 4.7 sono riportate le curve che mostrano i momenti d'inerzia  $I_y$  e  $I_z$  in funzione dell'elemento trave in direzione  $x$  lungo l'altezza del dente. I grafici mostrano rispettivamente i valori ottenuti nel caso a denti dritti e i valori ottenuti nel caso a denti elicoidali.

L'andamento di  $I_y$  e  $I_z$ , in entrambi i casi, è decrescente procedendo dalla base alla punta del dente a causa della diminuzione della sezione resistente osservata nei grafici precedenti. Si osserva inoltre che i valori di  $I_y$  sono sempre maggiori dei valori di  $I_z$  poiché la somma dei prodotti delle areole costituenti il parallelogramma per la loro distanza al quadrato dall'asse  $y$  è maggiore per effetto di una distanza in direzione  $z$  più elevata rispetto a quella del calcolo di  $I_z$ .

$$I_y = I_{toty} - I_{yi} - I_{yii} - A_i d_{zi}^2 - A_{ii} d_{zii}^2 \quad (4.37)$$

$$I_z = I_{totz} - I_{zi} - I_{zii} - A_i d_{yi}^2 - A_{ii} d_{yii}^2 \quad (4.38)$$

$$I_{zy} = - (I_{yzi} + I_{yzii} - (d_{yi} d_{zi}) A_i - (d_{yii} d_{zii}) A_{ii} ) \quad (4.39)$$

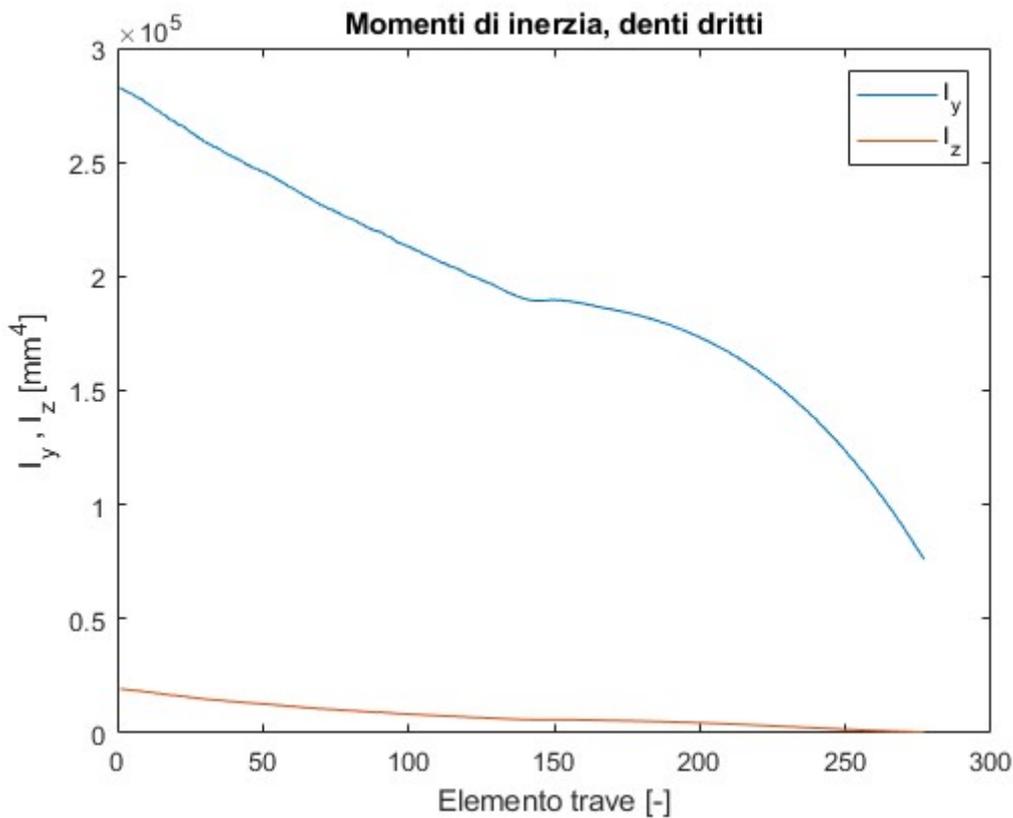
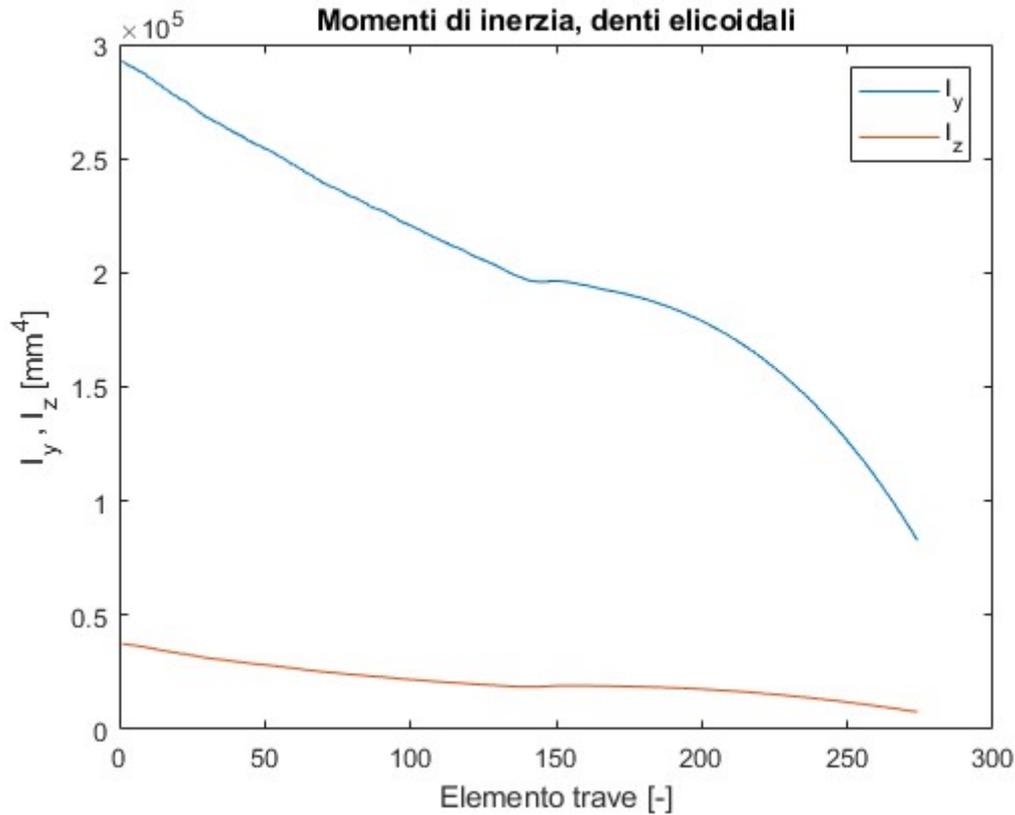


Figura 4.6: Momenti d'inerzia, denti dritti.



**Figura 4.7:** Momenti d'inerzia, denti elicoidali.

Sapere come variano i momenti di secondo ordine al ruotare degli assi di riferimento risulta necessario per lo studio degli assi principali d'inerzia e dei corrispondenti momenti principali d'inerzia. Gli assi rispetto ai quali il momento d'inerzia risulta minimo o massimo sono ortogonali e vengono indicati come assi principali d'inerzia .

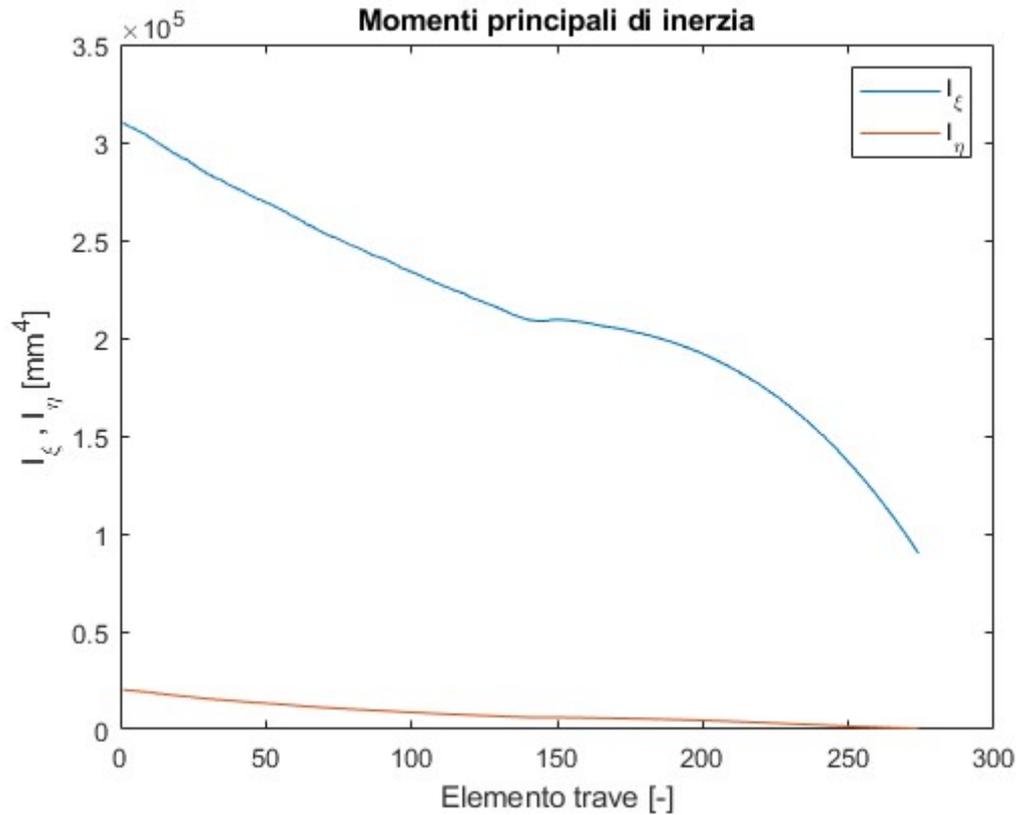
Si può dimostrare che i momenti d'inerzia e centrifugo di una figura piana costituiscono i coefficienti di un tensore  $[I]$ , simmetrico 2x2 costruito come segue.

$$[I] = \begin{bmatrix} I_y & I_{zy} \\ I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Esiste un sistema di riferimento avente la stessa origine nel baricentro  $g$  e ruotato di un angolo  $\alpha$  rispetto gli assi  $y$  e  $z$  tale per cui, calcolando i momenti rispetto ai propri assi, il tensore  $[I]$  diventa diagonale e gli elementi della diagonale principale saranno gli autovalori del tensore che coincidono con i momenti principali d'inerzia  $I_\xi$  e  $I_\eta$ .

$$\begin{bmatrix} I_\eta & 0 \\ 0 & I_\xi \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

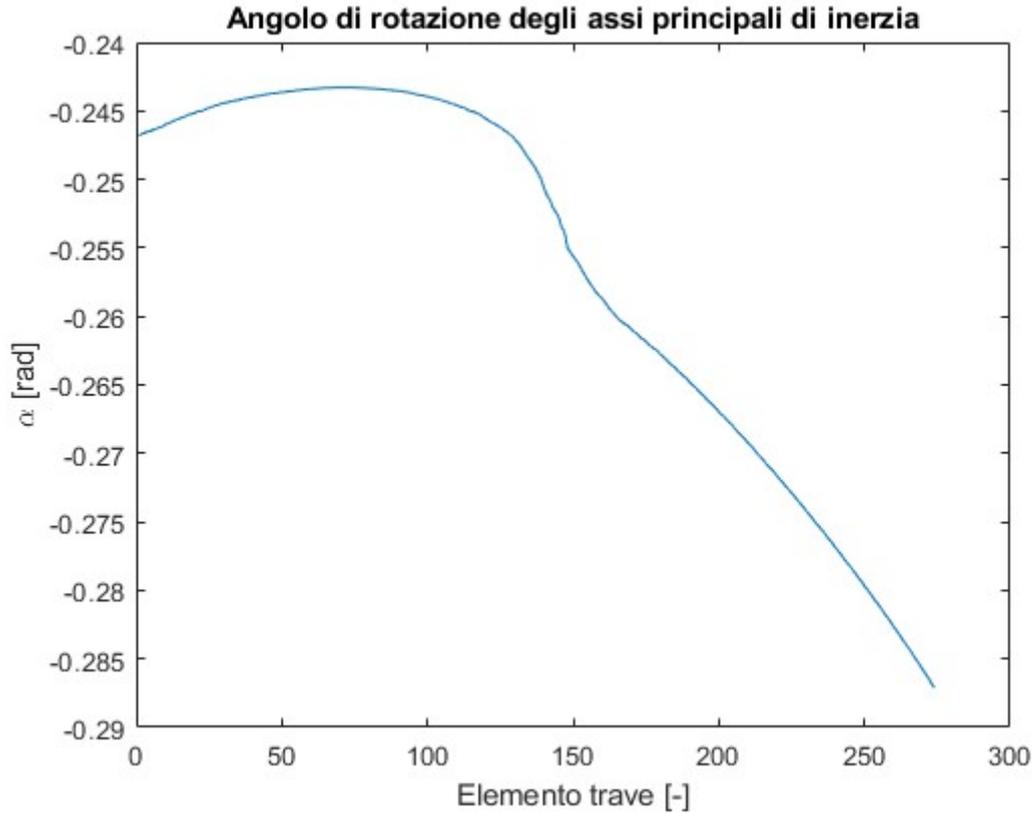
Partendo dal tensore  $[I]$  della 4.40 si calcolano gli autovalori della matrice quadrata in modo da ottenere i momenti principali d'inerzia del modello a denti elicoidali. In figura 4.8 si osservano i valori per cui il momento d'inerzia è massimo intorno all'asse  $\xi$  e quelli per cui è minimo attorno all'asse  $\eta$ .



**Figura 4.8:** Momenti principali d'inerzia.

Per individuare la posizione degli assi principali d'inerzia rispetto al sistema di riferimento cartesiano con l'origine nel baricentro del parallelogramma, si definisce l'angolo di rotazione  $\alpha$ . L'angolo tra l'asse principale  $\xi$  e l'asse  $y$  è indicato con  $\alpha$  e può essere calcolato tramite l'espressione definita sotto. Il grafico di figura 4.9 mostra i valori dell'angolo  $\alpha$  ottenuti in funzione del corrispondente elemento disposto in direzione  $x$  del dente e come si può osservare è sempre negativo.

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( -2 \frac{I_{zy}}{I_z - I_y} \right) \quad (4.42)$$



**Figura 4.9:** Angolo di rotazione degli assi principali di inerzia.

Il calcolo del fattore torsionale  $I_t$ , ovvero del momento d'inerzia intorno all'asse x è definito secondo la formula 4.43.

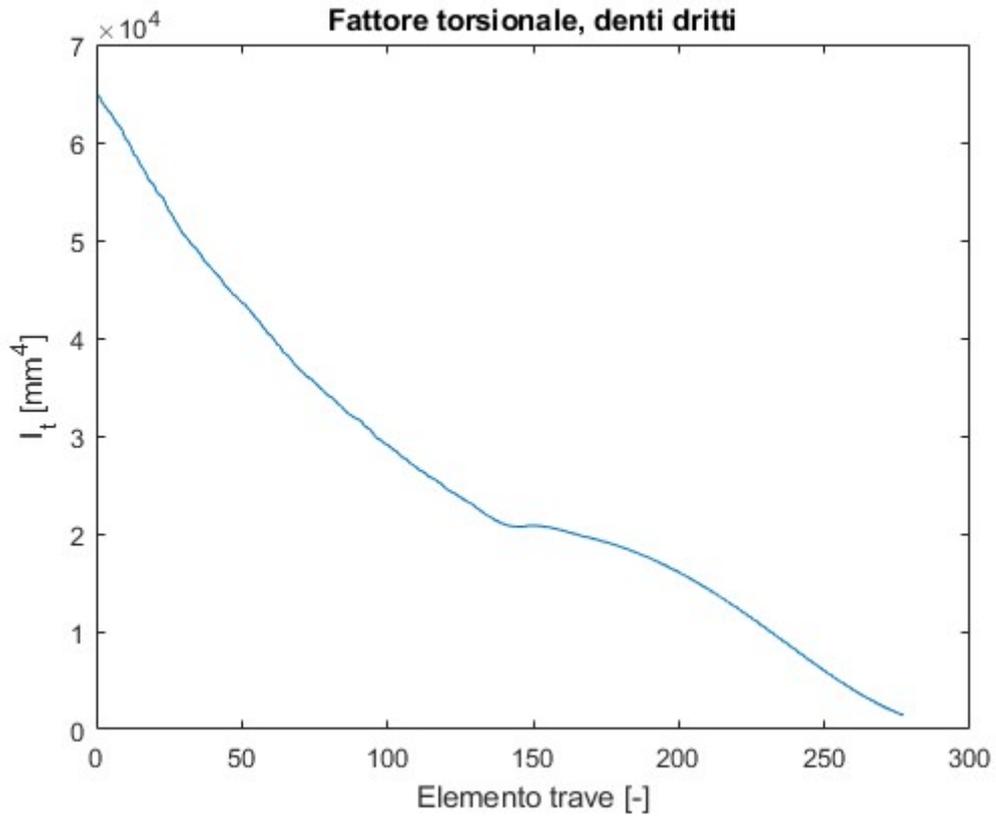
$$I_t = \frac{b}{\cos \beta_f} (y_s \sin(90 - \beta_f))^3 / b_{DSV} \quad (4.43)$$

Il termine  $b_{DSV}$  deriva da una interpolazione spline cubica ed è possibile determinarlo, nel punto richiesto, utilizzando i valori di  $\beta_{DSV}$  e  $n_{DSV}$ .

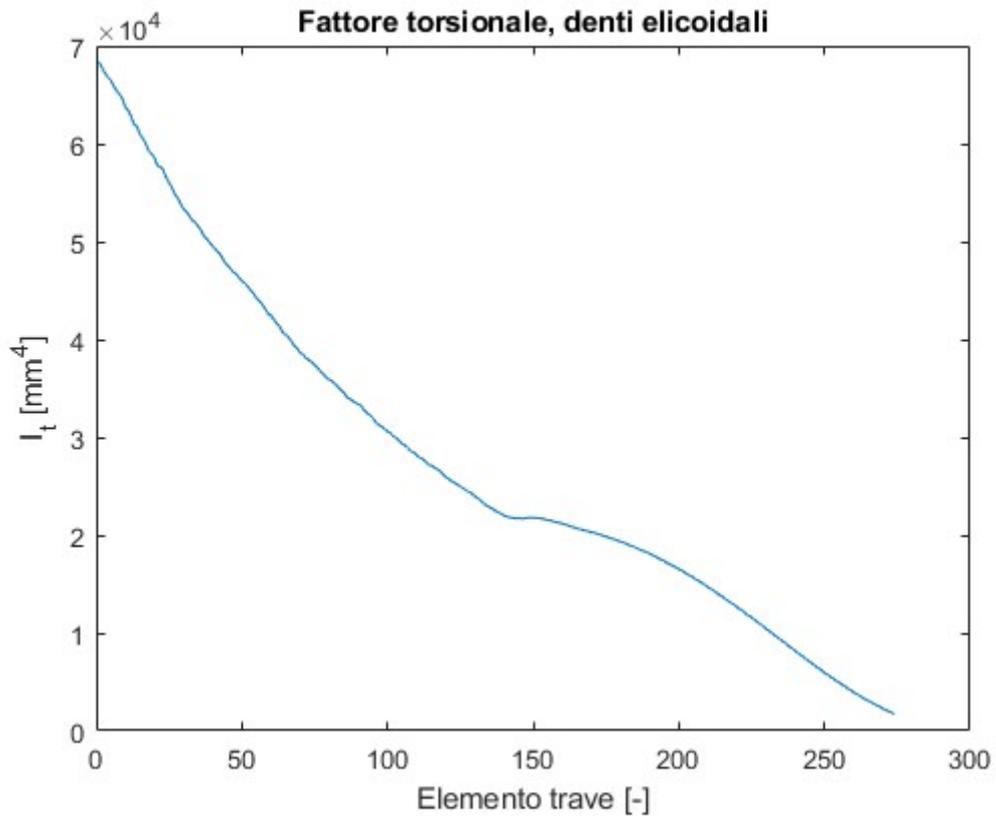
$\beta_{DSV} = [7.114 \ 6.49 \ 6.02 \ 5.82 \ 5.65 \ 5.35 \ 5.11 \ 4.91 \ 4.74 \ 4.67 \ 4.60 \ \dots$   
 $4.37 \ 4.16 \ 4.01 \ 3.8 \ 3.56 \ 3.43 \ 3.35 \ 3.26 \ 3.2 \ 3.1 \ 3.0];$

$n_{DSV} = [1 \ 1.1 \ 1.2 \ 1.25 \ 1.3 \ 1.4 \ 1.5 \ 1.6 \ 1.7 \ 1.75 \ 1.8 \ \dots$   
 $2 \ 2.25 \ 2.5 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 8 \ 10 \ 20 \ 1000000];$

I grafici 4.10 e 4.11 mostrano i risultati ottenuti per il fattore torsionale  $I_t$  e la sua variazione lungo l'altezza del dente rispettivamente per il modello a denti dritti e per quello a denti elicoidali.



**Figura 4.10:** Fattore torsionale, denti dritti.



**Figura 4.11:** Fattore torsionale, denti elicoidali.

In tabella 4.3 sono riassunti i valori massimi e minimi ottenuti nei grafici dei momenti d'inerzia per entrambi i modelli.

**Tabella 4.3** : Valori massimi e minimi dei momenti d'inerzia.

Simbolo	Valore	Unità di misura
$I_{t,max}$ denti dritti	$6.476 \times 10^4$	$[mm^4]$
$I_{t,min}$ denti dritti	$1.455 \times 10^3$	$[mm^4]$
$I_{y,max}$ denti dritti	$2.827 \times 10^5$	$[mm^4]$
$I_{y,min}$ denti dritti	$7.611 \times 10^4$	$[mm^4]$
$I_{z,max}$ denti dritti	$1.938 \times 10^4$	$[mm^4]$
$I_{z,min}$ denti dritti	$3.780 \times 10^2$	$[mm^4]$
$I_{t,max}$ denti elicoidali	$6.837 \times 10^4$	$[mm^4]$
$I_{t,min}$ denti elicoidali	$1.725 \times 10^3$	$[mm^4]$
$I_{y,max}$ denti elicoidali	$2.927 \times 10^5$	$[mm^4]$
$I_{y,min}$ denti elicoidali	$8.281 \times 10^4$	$[mm^4]$
$I_{z,max}$ denti elicoidali	$3.760 \times 10^4$	$[mm^4]$
$I_{z,min}$ denti elicoidali	$7.628 \times 10^3$	$[mm^4]$
$I_{\xi,max}$ denti elicoidali	$3.100 \times 10^5$	$[mm^4]$
$I_{\xi,min}$ denti elicoidali	$8.999 \times 10^4$	$[mm^4]$
$I_{\eta,max}$ denti elicoidali	$2.031 \times 10^4$	$[mm^4]$
$I_{\eta,min}$ denti elicoidali	$4.480 \times 10^2$	$[mm^4]$

## 4.2 Elemento trave di Timoshenko

Nel passato sono stati realizzati numerosi studi riguardanti la teoria della trave che differiscono per le formulazioni analitiche e per i risultati teorici ottenuti. Tra di essi sono note la teoria della trave di Eulero Bernoulli e la teoria della trave di Timoshenko.

Timoshenko perfeziona la teoria tecnica della trave di Eulero Bernoulli deformata elasticamente a flessione riproducendo in maniera più accurata il comportamento della trave inflessa.

Secondo la teoria di Eulero Bernoulli il concio infinitesimo della trave è deformato a flessione e per effetto del momento flettente si ha trazione dalla parte delle fibre tese e compressione dalla parte in cui le fibre sono contratte. Se si considera una generica sezione retta della trave, essa rimane perpendicolare all'asse della trave stessa dopo la deformazione.

Occorre però tenere in considerazione che il concio infinitesimo è deformabile sia a flessione sia per effetto del taglio. La teoria di Timoshenko tiene in considerazione, oltre al contributo di deformabilità a flessione, anche il contributo di deformabilità a taglio. In questo caso la generica sezione retta della trave dopo la deformazione non sarà più perpendicolare all'asse, come illustrato in figura 4.12.

Nel caso di travi snelle è possibile tenere in considerazione soltanto il contributo di deformazione prodotta dal momento flettente poiché la deformazione prodotta dal taglio è molto piccola e tale assunzione non produce un errore sensibile.

Nel caso di travi tozze, in cui il rapporto tra lunghezza e altezza della sezione è piccolo, l'effetto del taglio non risulta più trascurabile. Di conseguenza, nell'equazione differenziale della linea elastica, occorre sommare al contributo del momento flettente quello dovuto allo sforzo di taglio.

Come si può osservare in figura 4.13, lo spostamento di un punto della trave sarà dato dalla somma dello spostamento  $v_m$  dovuto al momento flettente e dello spostamento  $v_t$  dovuto al taglio.

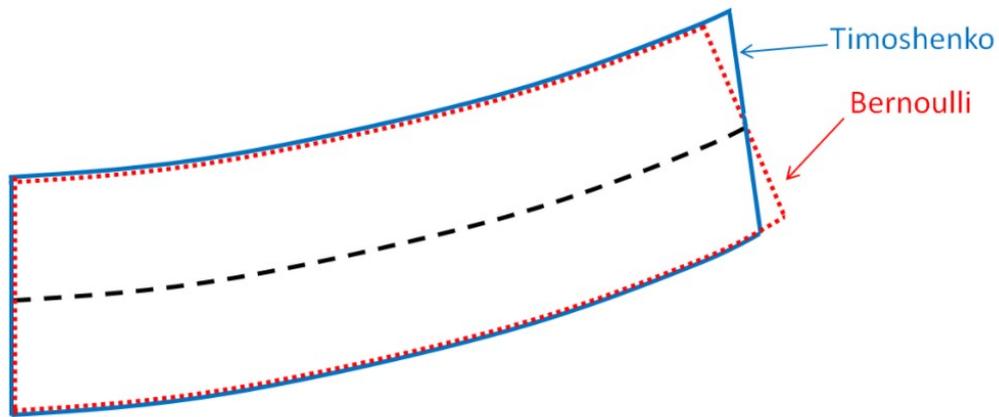


Figura 4.12: Confronto tra le due teorie della trave. [16]

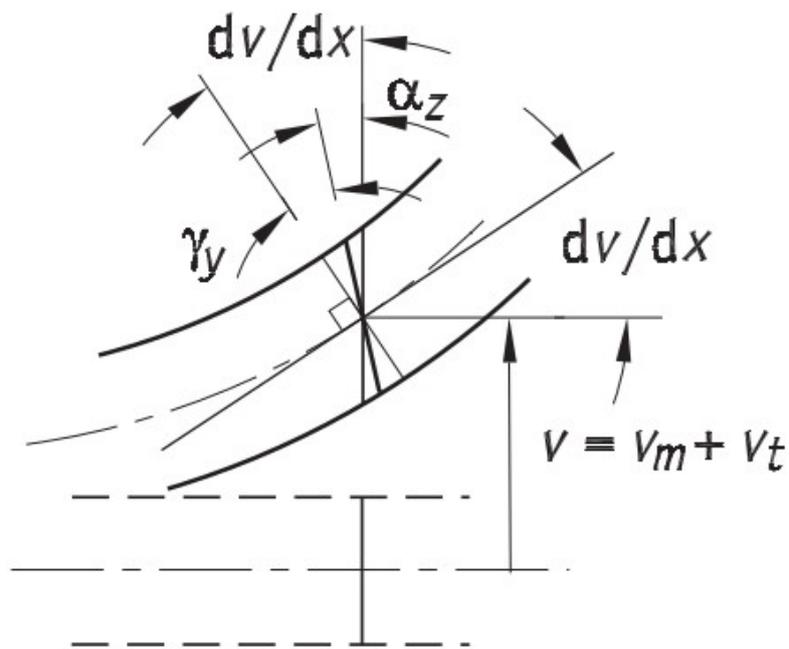


Figura 4.13: Effetto del taglio. [13]

Si definisce lo spostamento risultante  $v$  di un punto della trave secondo la 4.44 e la relazione 4.45 che lega la rotazione  $\alpha_z$  della sezione e la pendenza  $dv/dx$  dell'asse neutro con la deformazione media  $\gamma_y$  dovuta al taglio.

$$v = v_m + v_t \quad (4.44)$$

$$\frac{dv}{dx} = \alpha_z + \gamma_y \quad (4.45)$$

La deformazione  $\gamma_y$  dovuta al taglio è definita secondo la 4.46 in funzione di un fattore di taglio  $\chi_y$  della sezione in direzione dell'asse  $y$  e della forza di taglio  $f_{v2}$  applicata sul secondo nodo dell'elemento.

$$\gamma_y = \chi_y \frac{f_{v2}}{G A} \quad (4.46)$$

L' elemento trave omogeneo prismatico nello spazio è definito, secondo la teoria di Timoshenko, con un nodo a ciascuna delle due estremità e 6 gradi di libertà per nodo.

Per trave nello spazio, figura 4.14, si intende un elemento comunque orientato nello spazio e che può essere sollecitato da carichi descrivibili in termini di forze assiali, forze perpendicolari al suo asse, momenti flettenti agenti secondo i due assi principali d'inerzia e momento torcente agente lungo il suo asse.

Il sistema di riferimento locale dell'elemento definito dai nodi 1 e 2, è tale per cui l'asse  $x$  coincide con l'asse della trave ed è diretto da 1 verso 2 mentre gli assi  $y$  e  $z$  sono perpendicolari all'asse  $x$ .

Le azioni di taglio e di momento flettente nei due piani  $xy$  e  $xz$  possono essere considerate indipendenti l'una dall'altra.

La matrice di rigidezza dell'elemento può così essere ottenuta, nell'ipotesi di linearità geometrica, come sovrapposizione delle matrici dell'elemento asta, dell'elemento barra di torsione e dell'elemento trave inflessa.

Per la teoria di Timoshenko occorre tenere in considerazione anche l'effetto del taglio sulle deformazioni dell'elemento trave inflessa.

Il numero totale di gradi libertà dell'elemento è pari a 12, ovvero 6 per ogni nodo di cui 3 spostamenti e 3 rotazioni lungo gli assi  $x, y$  e  $z$ . La matrice di rigidezza dell'elemento trave di Timoshenko nello spazio è definita dalla 4.47.

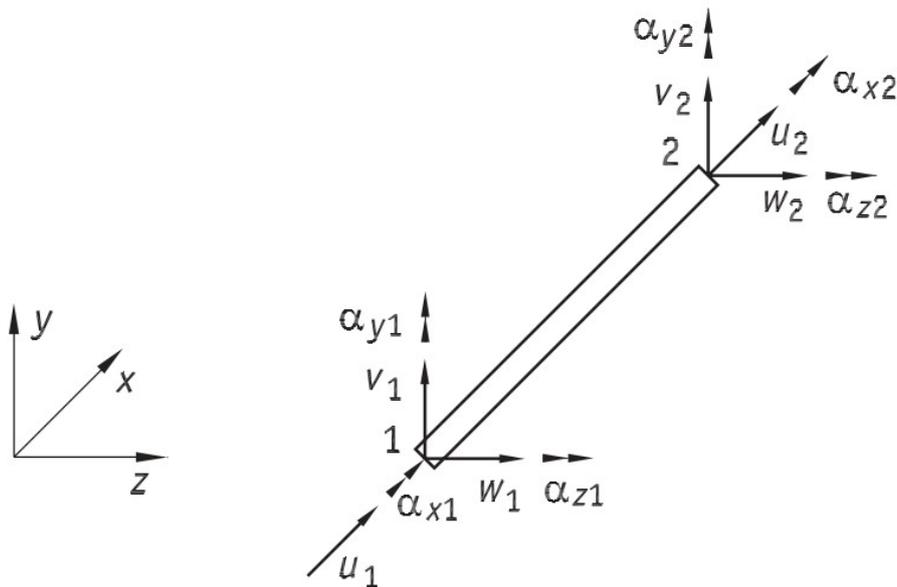


Figura 4.14: Elemento trave nello spazio. [13]



I fattori introdotti da Timoshenko nella matrice di rigidezza che tengono in considerazione l'effetto del taglio sono indicati con i simboli  $\Phi_y$  e  $\Phi_z$  a seconda della direzione lungo gli assi e sono definiti tramite le espressioni 4.48 e 4.49.

$$\Phi_{y1} = \frac{12 E I_z}{G A_1 k_b \delta_{s1}^2} \quad (4.48)$$

$$\Phi_{z1} = \frac{12 E I_y}{G A_1 k_b \delta_{s1}^2} \quad (4.49)$$

Il termine  $k_b$  è l'inverso del il fattore di taglio  $\chi$  di cui si è parlato in precedenza ed è definito dalla 5.50 e varia a seconda della forma della sezione retta della trave, mentre il modulo elastico tangenziale è dato dalla 4.51. In tabella 4.4 sono indicate le grandezze presenti nella matrice di rigidezza dell'elemento trave nello spazio.

$$k_b = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (4.50)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.51)$$

**Tabella 4.4:** Parametri presenti nella matrice di rigidezza dell'elemento trave.

Simbolo	Descrizione	Unità di misura
$A_1$	Area dell'elemento trave	$[mm^2]$
$E$	Modulo di Young	[MPa]
$G$	Modulo elastico tangenziale	[MPa]
$I_x$	Fattore torsionale	$[mm^4]$
$I_y$	Momento d'inerzia lungo $y$	$[mm^4]$
$I_z$	Momento d'inerzia lungo $z$	$[mm^4]$
$k_b$	Fattore di taglio	[-]
$[K_{temp}]$	Matrice di rigidezza dell'elemento	$[N/mm]$
$\delta_{s1}$	Lunghezza dell'elemento trave	[mm]
$\Phi_{y1}$	Fattore correttivo di Timoshenko lungo $y$	[-]
$\Phi_{z1}$	Fattore correttivo di Timoshenko lungo $z$	[-]
$\nu$	Coefficiente di Poisson	[-]

### 4.3 Assemblaggio della matrice di rigidezza del dente

Successivamente, dopo aver definito la matrice di rigidezza del singolo elemento trave, occorre assemblare tra di loro tali elementi per costruire la struttura e definire la matrice di rigidezza del dente.

Analogamente a quanto detto per il singolo elemento, anche per la struttura vengono identificati due insiemi distinti di variabili:

- $N$  variabili cinematiche, cioè spostamenti generalizzati per definire il campo di spostamento della struttura;
- $N$  variabili statiche, cioè forze generalizzate che dall'esterno sono applicate nei punti nodali della struttura.

Il numero  $N$  di variabili struttura è dato dalla sommatoria, estesa a tutti i nodi della struttura, del numero di gradi di libertà cinematici di ciascun nodo. Nel caso della struttura dente la matrice di rigidezza avrà quindi dimensione  $N \times N$ .

L'assemblaggio della struttura conviene realizzarlo tramite la regola della mappa. Secondo tale regola si associa un numero ai gradi di libertà dell'elemento e a quelli della struttura seguendo una certa logica. Questo modo di identificare i gradi di libertà fornisce direttamente le dimensioni dei sistemi di equazioni associati all'elemento o alla struttura.

La mappa serve ad individuare direttamente la corrispondenza tra la matrice di rigidezza  $[K_{temp}]$  dell'elemento e la sua posizione nella matrice di rigidezza  $[K_1]$  della struttura.

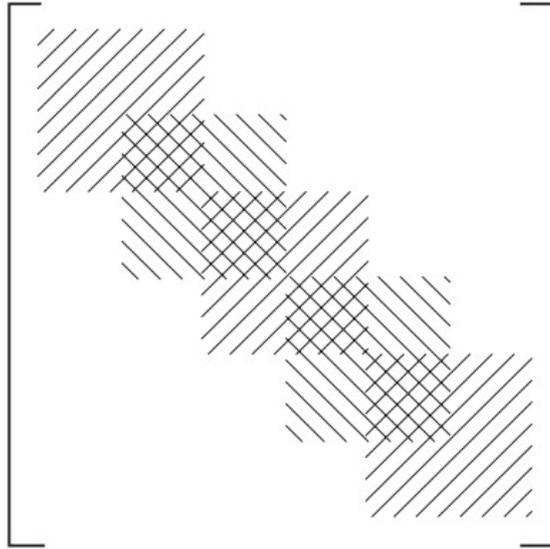
Nel nostro caso i gradi di libertà dell'elemento sono numerati da 1 a 12 e tra di essi quelli numerati da 1 a 6 appartengono al primo nodo mentre gli altri appartengono al secondo nodo.

Si tratta di una struttura che identifica il dente mediante un certo numero di elementi trave disposti in serie, ovvero una struttura composta da elementi aventi due soli estremi e assemblati senza ramificazioni. Il numero totale di elementi è pari al numero di nodi della struttura meno uno e il nodo 2 di un elemento corrisponde al nodo 1 dell'elemento successivo. Di conseguenza tali nodi condividono la stessa numerazione per i gradi di libertà riferiti alla struttura.

Per il generico elemento  $h$  è riportata sotto la mappa per la corrispondenza dei gradi di libertà e si nota che i gradi di libertà dell'elemento non variano, mentre quelli della struttura sono indicati con  $G_{hn}$  ( $n = 1:12$ ) dipendono dalla collocazione dell'elemento  $h$  all'interno della struttura.

Elemento $h$	g.d.l. elemento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	g.d.l. struttura	$G_{h1}$	$G_{h2}$	$G_{h3}$	$G_{h4}$	$G_{h5}$	$G_{h6}$	$G_{h7}$	$G_{h8}$	$G_{h9}$	$G_{h10}$	$G_{h11}$	$G_{h12}$

Avendo una struttura in serie composta da elementi aventi solo due nodi e assemblati senza ramificazioni, la matrice di rigidezza  $[K_1]$  della struttura si ottiene agevolmente seguendo lo schema in figura 4.15. Per farlo occorre disporre le singole matrici di rigidezza elemento  $[K_{temp}]$  lungo la diagonale principale di  $[K_1]$  sovrapponendone i quadranti in modo che la sovrapposizione corrisponda alla somma degli elementi corrispondenti.



**Figura 4.15:** Schema di assemblaggio della matrice di rigidezza. [13]

Nella function utilizzata per assemblare la matrice di rigidezza si indicano con  $X_{s1}$  e  $Y_{s1}$  i vettori contenenti le coordinate dei nodi che definiscono il profilo del dente nel sistema di riferimento x,y di figura 4.1.

Per agevolare la trattazione e l'assemblaggio è stato creato un nodo fittizio in più alla sommità del dente prendendo come riferimento la lunghezza  $dX_{s1}$  dell'ultimo elemento trave situato in punta e la corrispondente variazione  $dY_{s1}$  lungo y tra gli ultimi due nodi come indicato nella 4.52 e 4.53.

$$dX_{s1} = X_{s1}(\text{end}) - X_{s1}(\text{end} - 1) \quad (4.52)$$

$$dY_{s1} = Y_{s1}(\text{end}) - Y_{s1}(\text{end} - 1) \quad (4.53)$$

Si ottengono quindi due vettori  $X_{s1}$  e  $Y_{s1}$  contenenti un nodo in più alla sommità.

$$X_{s1} = [X_{s1}, X_{s1}(\text{end}) + dX_{s1}] \quad (4.54)$$

$$Y_{s1} = [Y_{s1}, Y_{s1}(\text{end}) + dY_{s1}] \quad (4.55)$$

Come detto precedentemente, il numero totale di elementi della struttura è pari al numero di nodi meno uno. Utilizzando un ciclo for è possibile determinare l'area della sezione resistente dell'elemento, i momenti d'inerzia, l'angolo  $\alpha$  e i valori di  $\delta_{s1}$ ,  $\Phi_{y1}$  e  $\Phi_{z1}$  coinvolti nel calcolo della matrice di rigidezza di ogni elemento trave della struttura.

I valori di  $A_1$ ,  $I_\eta$ ,  $I_\xi$ ,  $\alpha$ ,  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  ottenuti sono già stati precedentemente illustrati nel paragrafo 4.1.1.

La lunghezza assiale  $\delta_{s1}$  di ciascuna elemento trave sarà data alla differenza tra i valori di  $X_{s1}$  dei due nodi in serie mentre i valori di  $\Phi_{y1}$  e  $\Phi_{z1}$  sono stati calcolati mediante le espressioni 4.48 e 4.49.

A questo punto si procede definendo la matrice di rigidezza  $[K_{temp}]$  per ogni elemento trave applicando la 4.47, che varia a seconda dei corrispondenti valori di area, momenti d'inerzia, lunghezza elemento e fattori correttivi di Timoshenko.

Utilizzando le matrici di rigidezza  $[K_{temp}]$  di ciascun elemento sarà quindi possibile seguire lo schema di figura 4.15 per assemblare la matrice di rigidezza della struttura.

## 4.4 Componenti della forza nel punto di applicazione del carico

Essendo noti il valore della coppia  $C$  in ingresso, il fattore di condivisione del carico  $LSF$ , l'angolo  $\beta_b$  e la geometria della ruota, è possibile calcolare la forza totale scambiata da ciascun dente in contatto durante l'ingranamento secondo la formula 4.56. La forza totale varia a seconda del dente e della posizione angolare ed è quindi definita da una matrice avente numero di righe pari al numero delle posizioni angolari analizzate e colonne definite dai denti.

$$F_n = \frac{C}{r_b \cos(\beta_b)} LSF \quad (4.56)$$

La forza totale nel nodo di contatto deve essere successivamente scomposta nelle sue componenti lungo gli assi  $x, y, z$ .

Data la struttura CN contenente le posizioni dei nodi di contatto di ogni dente a ciascuna posizione angolare, occorre trasformare il nodo di contatto del dente tridimensionale nel corrispondente nodo per il dente bidimensionale e calcolare le componenti di forza.

Come è stato già detto in precedenza, la ruota dentata è definita da 31 slices equamente spaziate e perpendicolari al proprio asse lungo la larghezza di fascia  $b$ . La slice a cui appartiene il nodo di contatto è identificata come media tra le corrispondenti slices in cui vi è contatto. Nel caso a denti dritti il nodo di contatto appartiene sempre alla slice centrale a metà larghezza di fascia, indipendentemente dal dente e dalla posizione angolare considerata poiché i denti sono sempre a contatto lungo tutta la larghezza di fascia.

Nel caso a denti elicoidali la distribuzione del carico non è uniforme lungo la larghezza di fascia e la slice media di contatto è dipendente dal dente e dalla posizione angolare in questione.

Conoscendo la posizione del nodo di contatto definita in CN, conoscendo il numero totale di possibili nodi di contatto su ciascun slice ed essendo noti il numero di nodi che formano il raccordo di base del dente è possibile riportare i nodi al dente bidimensionale.

A questo punto si definiscono  $b_y$  la coordinata  $z$  del punto di applicazione del carico (nodo di contatto) e  $b_z$  la coordinata  $y$  rispetto un sistema di riferimento con l'origine a metà della larghezza di fascia  $b$ . Infine, si consideri  $\mu_{eff}$  l'angolo tra la direzione della forza totale  $F_n$  e la perpendicolare alla mezzeria del dente e  $\mu_{eff\beta}$  l'angolo tra la proiezione della forza  $F_n$  sul piano perpendicolare alla mezzeria del dente e il piano frontale.

Note  $F_n, b_y, b_z, \mu_{eff}, \mu_{eff\beta}$  è possibile procedere con il calcolo delle componenti di forza lungo gli assi del sistema di riferimento.

$$F_x = F_n \sin(\mu_{eff}) \quad (4.57)$$

$$F_y = F_n \cos(\mu_{eff}) \cos(\mu_{eff\beta}) \quad (4.58)$$

$$F_z = F_n \cos(\mu_{eff}) \sin(\mu_{eff\beta}) \quad (4.59)$$

$$M_x = F_n \cos(\mu_{eff}) \cos(\mu_{eff\beta}) b_y + F_n \cos(\mu_{eff}) \sin(\mu_{eff\beta}) b_z \quad (4.60)$$

$$M_y = F_n \sin(\mu_{eff}) b_y \quad (4.61)$$

$$M_z = F_n \sin(\mu_{eff}) b_z \quad (4.62)$$

La componente della forza applicata lungo l'asse x ha valore negativo poiché da un contributo di compressione sul dente. La componente in direzione y è positiva nel caso in cui il dente sia caricato sul fianco sinistro e negativa se il carico agisce sul fianco destro.

Nel nostro caso, il pignone della ruota a denti dritti è caricato sul fianco sinistro mentre quella a denti elicoidali è caricato sul fianco destro quindi le componenti in direzione y saranno rispettivamente positiva e negativa.

La componente di forza lungo z è presente solo nel caso a denti elicoidali ed è positiva poiché il pignone è destrorso.

La componente di forza rotazionale attorno all'asse x determina l'effetto torcente ed è nulla nel caso a denti dritti poiché la forza  $F_z$  e il braccio  $b_y$  sono nulli. Nel caso elicoidale tale componente sarà positiva o negativa a seconda della posizione di contatto.

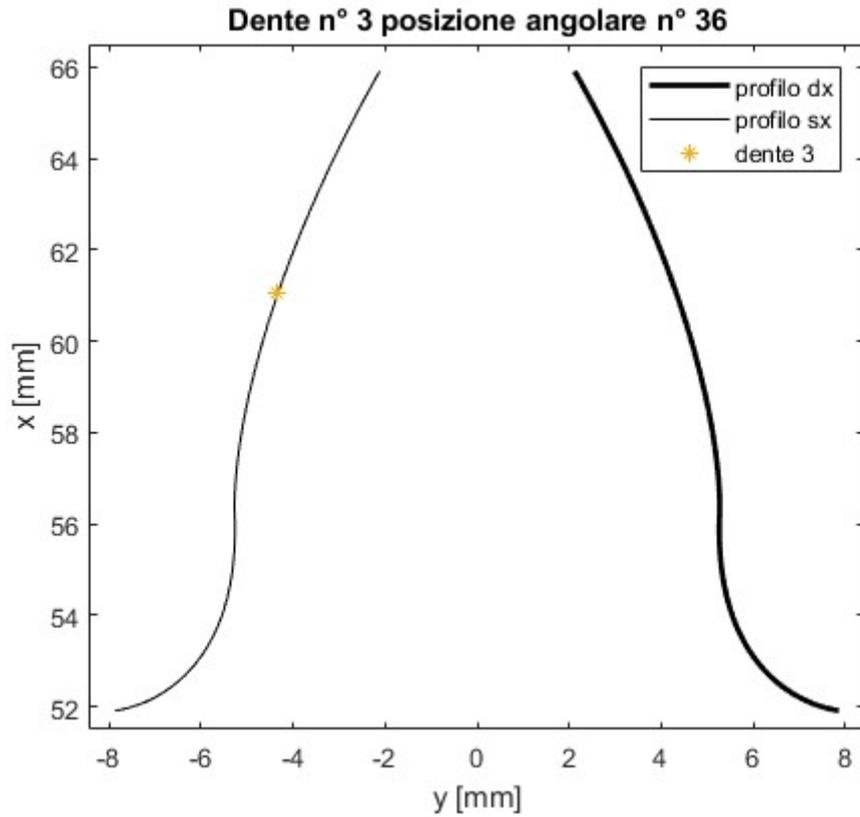
La componente rotazionale attorno all'asse y è nulla nel caso a denti dritti poiché il braccio  $b_y$  è nullo, mentre nel caso a denti elicoidali viene trascurata. Le componenti rotazionali intorno all'asse z sono in entrambi i casi trascurate.

**Tabella 4.5:** Parametri utilizzati per il calcolo delle componenti di forza.

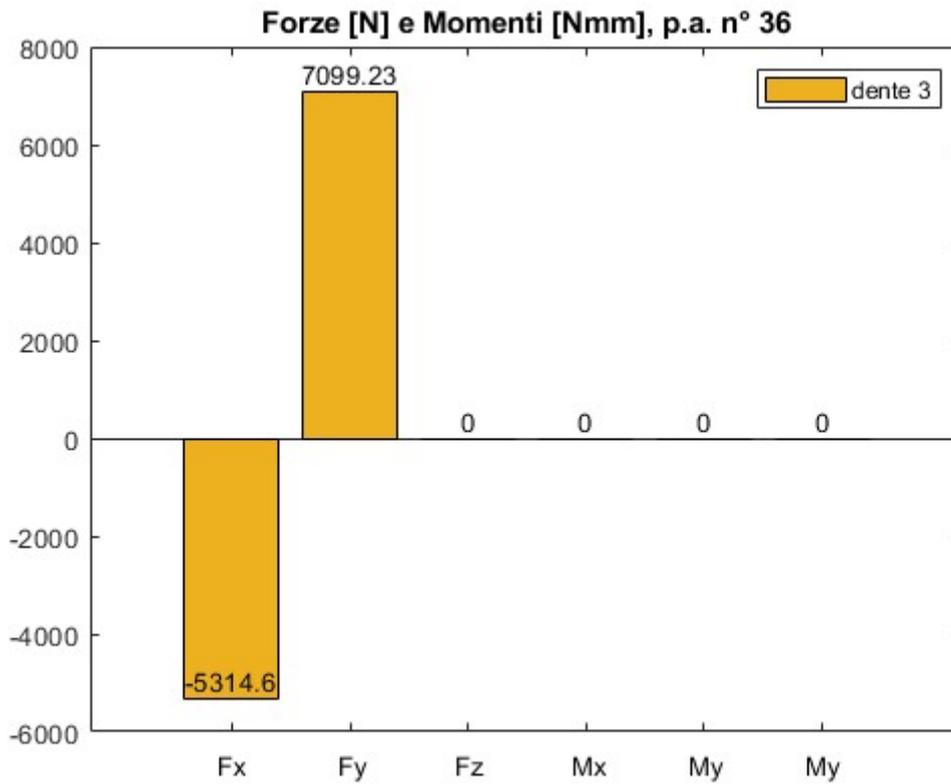
Simbolo	Descrizione	Unità di misura
$b_y$	Coordinata z del punto di applicazione del carico	[mm]
$b_z$	Coordinata y del punto di applicazione del carico	[mm]
C	Coppia	[Nmm]
$F_n$	Forza totale	[N]
$F_x$	Componente della forza lungo l'asse x	[N]
$F_y$	Componente della forza lungo l'asse y	[N]
$F_z$	Componente della forza lungo l'asse z	[N]
LSF	Fattore di condivisione del carico	[-]
$M_x$	Componente della forza rotazionale attorno l'asse x	[Nmm]
$M_y$	Componente della forza rotazionale attorno l'asse y	[Nmm]
$M_z$	Componente della forza rotazionale attorno l'asse z	[Nmm]
$r_b$	Raggio base	[mm]
$\mu_{eff}$	Angolo tra la direzione della forza totale e la perpendicolare alla mezzeria del dente	[rad]
$\mu_{eff\beta}$	Angolo tra la proiezione della forza totale sul piano perpendicolare alla mezzeria del dente e il piano frontale.	[rad]

#### 4.4.1 Esempio, denti dritti

In figura 4.16 e 4.17 è illustrato un esempio del caso a denti dritti in cui si ha una sola coppia di denti in presa. In giallo, nella figura 4.16, è evidenziato il punto di applicazione del carico sul fianco sinistro del dente. In tal punto, tramite le formulazioni precedentemente illustrate, si registrano la forza  $F_y$  positiva e la  $F_x$  negativa. La forza assiale  $F_z$ , i momenti  $M_x$  ed  $M_y$  sono sempre nulli nei denti dritti e in quel punto si è deciso di trascurare anche il momento  $M_z$ .



**Figura 4.16** : Punto di applicazione del carico, denti dritti.



**Figura 4.17**: Forze e momenti nel punto di applicazione del carico, denti dritti.

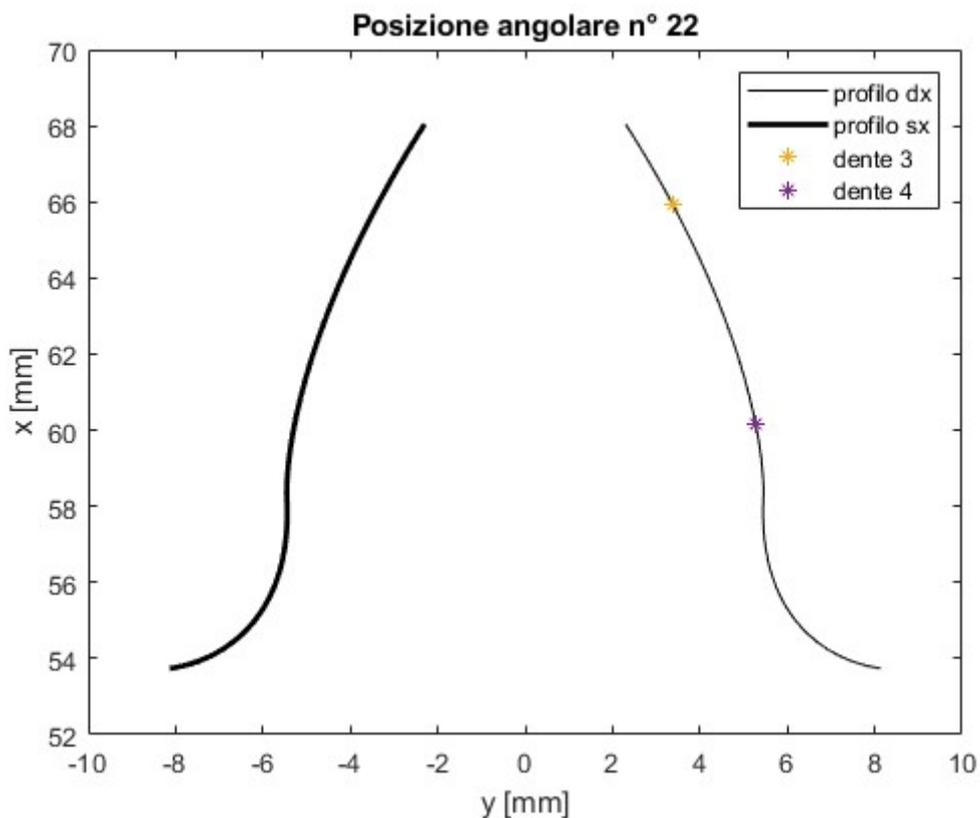
## 4.4.2 Esempi, denti elicoidali

Le figure 4.18 e 4.19 riportano due esempi del caso a denti elicoidali in cui si evidenziano le posizioni dei punti di applicazione del carico sul fianco del dente per i corrispondenti denti coinvolti nel contatto. Il carico è applicato sul fianco destro e sono analizzate le posizioni angolari numero 22 e 35 in cui si hanno rispettivamente due e tre coppie di denti in presa.

Dalle immagini si nota che nei denti in uscita il punto di applicazione del carico è più spostato verso la punta, mentre nei denti in ingresso è più spostato verso la base. Analizzando ad esempio la figura 4.19 si hanno il dente 3 in uscita, il 4 interamente coinvolto nel contatto per tutta la larghezza di fascia e il 5 in ingresso.

Le figure 4.20 e 4.21 mostrano i risultati di forze e momenti calcolati nei corrispondenti punti per entrambe le posizioni angolari. In entrambi i casi si hanno le forze  $F_x$  negative di compressione, le  $F_y$  negative poiché i carichi agiscono sul fianco destro, le  $F_z$  positive poiché l'elica è destrorsa.

Il segno del momento  $M_x$  dipende dalla posizione del punto di applicazione del carico lungo la larghezza di fascia, i momenti  $M_y$  ed  $M_z$  vengono trascurati.



**Figura 4.18:** Punti di applicazione del carico sul fianco del dente, 2 coppie di denti in presa, denti elicoidali.

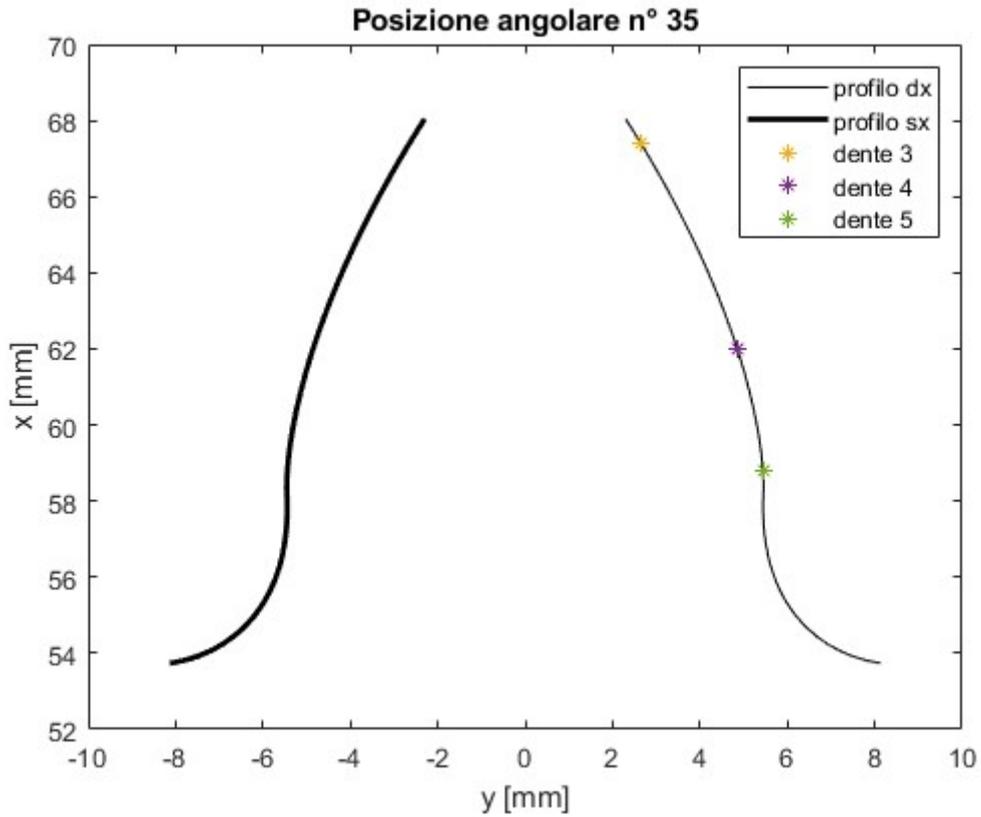


Figura 4.19: Punti di applicazione del carico sul fianco del dente, 3 coppie di denti in presa, denti elicoidali.

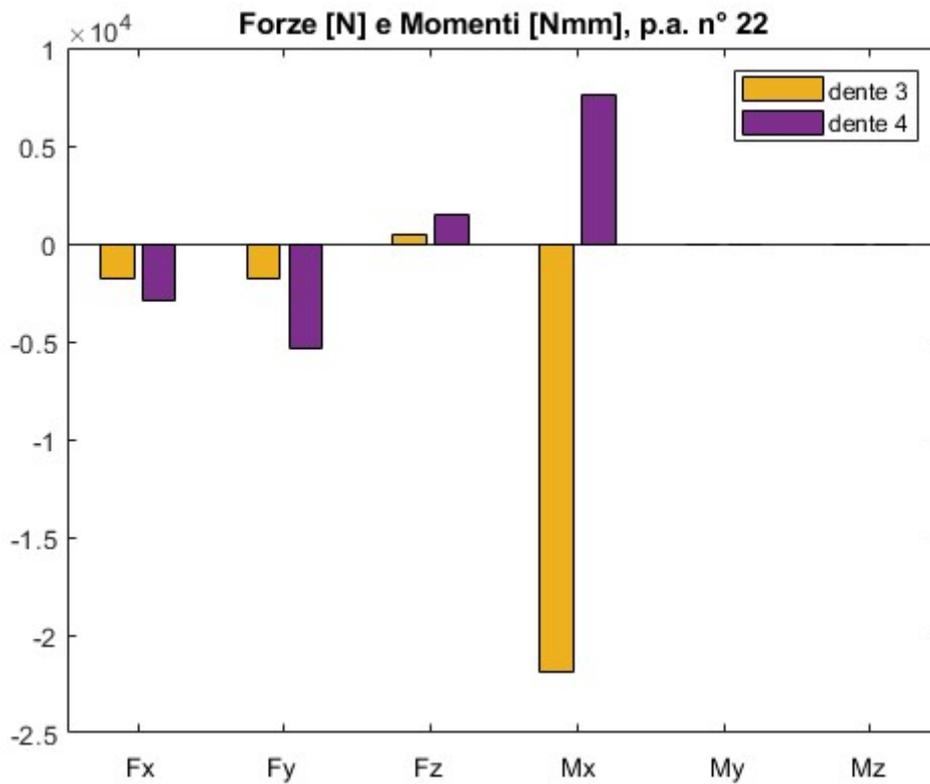
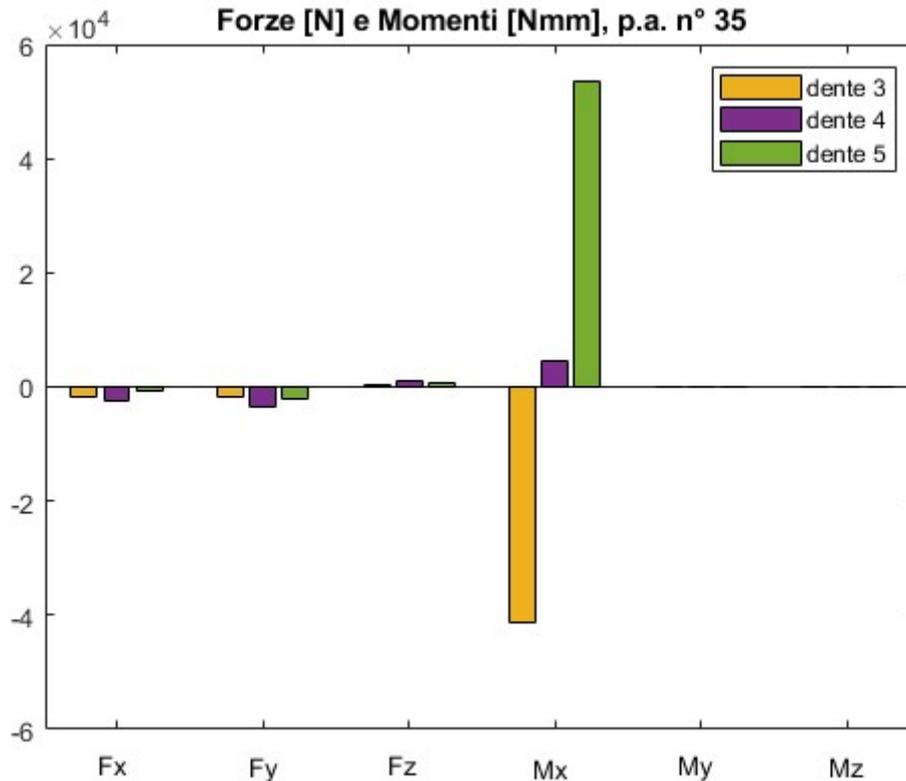


Figura 4.20: Forze e momenti nei punti di applicazione del carico, 2 coppie di denti in presa, denti elicoidali.



**Figura 4.21:** Forze e momenti nei punti di applicazione del carico, 3 coppie di denti in presa, denti elicoidali.

**Tabella 4.6:** Forze e Momenti nel punto di applicazione del carico.

	$F_x$ [N]	$F_y$ [N]	$F_z$ [N]	$M_x$ [Nmm]	$M_y$ [Nmm]	$M_z$ [Nmm]
dente 3 p.a. n° 22	-1760.58	-1828.9	490.15	-21869.3	0	0
dente 4 p.a. n° 22	-2930.86	-5367.89	1437.91	7587.24	0	0
dente 3 p.a. n° 35	-1756.73	-1647.03	441.51	-41203.6	0	0
dente 4 p.a. n° 35	-2347.06	-3400.03	910.98	4420.83	0	0
dente 5 p.a. n° 35	-797.29	-1969.67	526.8	53519.9	0	0

## 4.5 Calcolo degli spostamenti incogniti

Per il calcolo degli spostamenti incogniti occorre prendere in considerazione la notazione di rigidità, definita dalla formula 4.63.

$$[K] \{S\} = \{F\} + \{F_e\} \quad (4.63)$$

La matrice di rigidità  $[K]$  è singolare e non può essere invertita per calcolare gli spostamenti. Per risolvere il sistema 4.63 occorre imporre le seguenti condizioni al contorno:

- condizioni di vincolo cinematico in numero sufficiente ad impedire il moto rigido della struttura e a cui corrispondono termini di forza incognite;
- condizioni al contorno in termini di carichi a cui corrisponderanno gli spostamenti incogniti.

Si evidenzia che quando uno spostamento è noto la corrispondente forza è incognita e viceversa. Per risolvere il sistema occorre riordinare le equazioni scambiando righe e colonne della matrice di rigidezza  $[K]$  in modo che i termini di spostamento noto occupino le prime posizioni del vettore degli spostamenti  $\{S\}$ . Il sistema riordinato può essere ripartito come illustrato dalla 4.64.

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{S_1\} \\ \{S_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F_{e1}\} \\ \{F_{e2}\} \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

Risolviendo il sistema 4.64 agendo separatamente sulle singole sottomatrici è possibile scrivere la 4.65 e la 4.66.

$$[K_{11}]\{S_1\} + [K_{12}]\{S_2\} = \{F_1\} + \{F_{e1}\} \quad (4.65)$$

$$[K_{21}]\{S_1\} + [K_{22}]\{S_2\} = \{F_2\} + \{F_{e2}\} \quad (4.66)$$

Nella equazione 4.66 le uniche incognite sono gli spostamenti determinabili dalla 4.67 e noti essi è possibile determinare le reazioni vincolari secondo la 4.68.

$$\{S_2\} = [K_{22}]^{-1}(\{F_2\} + \{F_{e2}\} - [K_{21}]\{S_1\}) \quad (4.67)$$

$$\{F_1\} = [K_{11}]\{S_1\} + [K_{12}]\{S_2\} - \{F_{e1}\} \quad (4.68)$$

**Tabella 4.7:** Parametri relativi alla formulazione di rigidezza.

Simbolo	Descrizione
$\{S\}$	Vettore degli spostamenti
$\{S_1\}$	Spostamenti noti
$\{S_2\}$	Spostamenti incogniti
$\{F\}$	Vettore delle forze
$\{F_1\}$	Forze incognite o reazioni vincolari
$\{F_2\}$	Forze note
$\{F_e\}$	Vettore dei carichi nodali equivalenti
$[K]$	Matrice di rigidezza della struttura

Nel nostro caso la formulazione di rigidezza illustrata nella 4.63 è priva del termine  $\{F_e\}$  dei carichi nodali equivalenti come illustrato nella 4.69.

$$[K] \{S\} = \{F\} \quad (4.69)$$

Trattandosi di una struttura con elementi disposti in serie e con un incastro nel primo nodo del primo elemento, occorre sopprimere i primi 6 gradi di libertà (gdl del nodo all'incastro) ponendo pari a zero i corrispondenti spostamenti  $\{S_1\}$ .

Il minore  $[K_{22}]$  della matrice di rigidezza struttura si ottiene eliminando le prime 6 righe e le prime 6 colonne della matrice  $[K]$  corrispondenti ai gradi di libertà del nodo all'incastro.

Fatte queste premesse l'equazione 4.67 è esprimibile come illustrato dalla 4.70.

$$\{S_2\} = [K_{22}]^{-1}\{F_2\} \quad (4.70)$$

Utilizzando tale formulazione sono stati calcolati gli spostamenti incogniti nei nodi della struttura per ogni singolo dente e posizione angolare.

**Tabella 4.8:** Nomenclatura e dimensione delle variabili nel codice.

Variabile	Descrizione	Dimensione	
		Denti dritti	Denti elicoidali
F_1	Forze note $\{F_2\}$ comprensive del nodo fittizio	1662 x 5 x 80	1644 x 5 x 80
input.params.sel_teeth	Numero di denti	5	5
numel(CN)	Posizioni angolari	80	80
size(gear1.single_slice.x,2)	Numero di nodi della struttura	277	274
s_1	Spostamenti nodali $\{S\}$	1662 x 5 x 80	1644 x 5 x 80
s_2	Spostamenti dei nodi 1 e 2 per ogni elemento	3312 x 5 x 80	3276 x 5 x 80
K_1_inv	Inversa del minore $[K_{22}]$ della matrice di rigidezza comprensiva del nodo fittizio	1662 x 1662	1644 x 1644

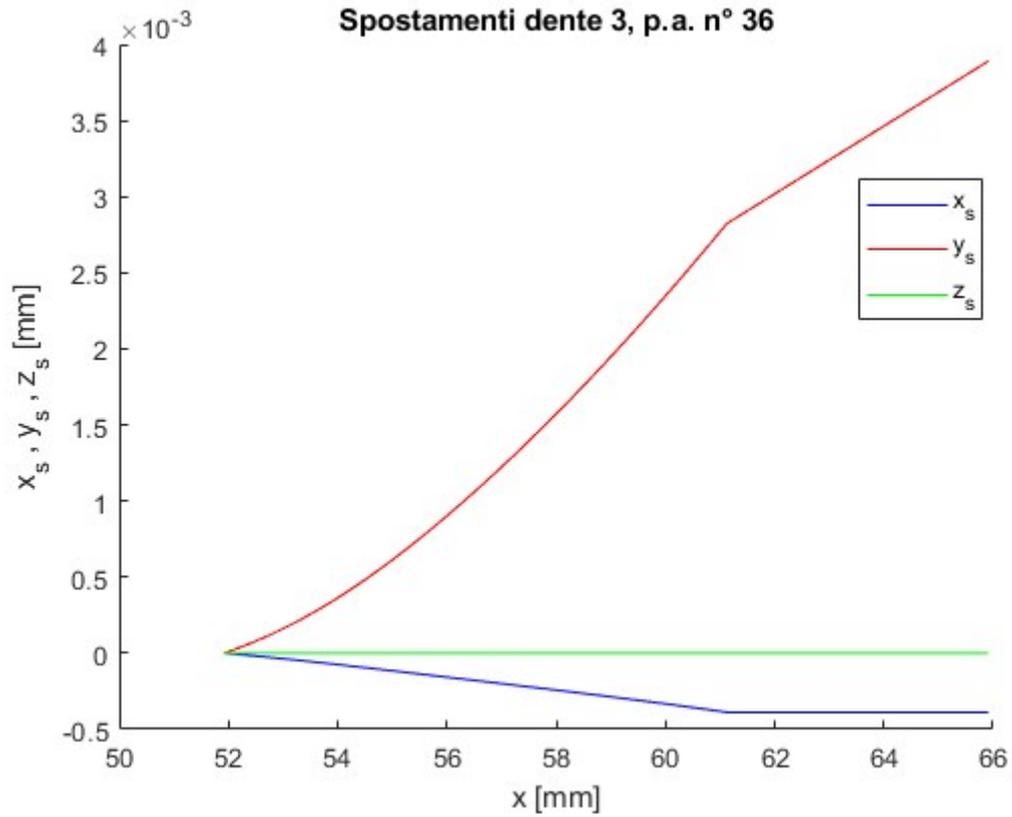
### 4.5.1 Grafici di spostamento

Nelle figure 4.22 e 4.23 sono riportati due esempi dei risultati ottenuti in termini di spostamento, rispettivamente per denti dritti e denti elicoidali. Si osservano gli spostamenti lungo i tre assi del sistema di riferimento in funzione della coordinata  $x$  indicante la posizione sull'altezza del dente.

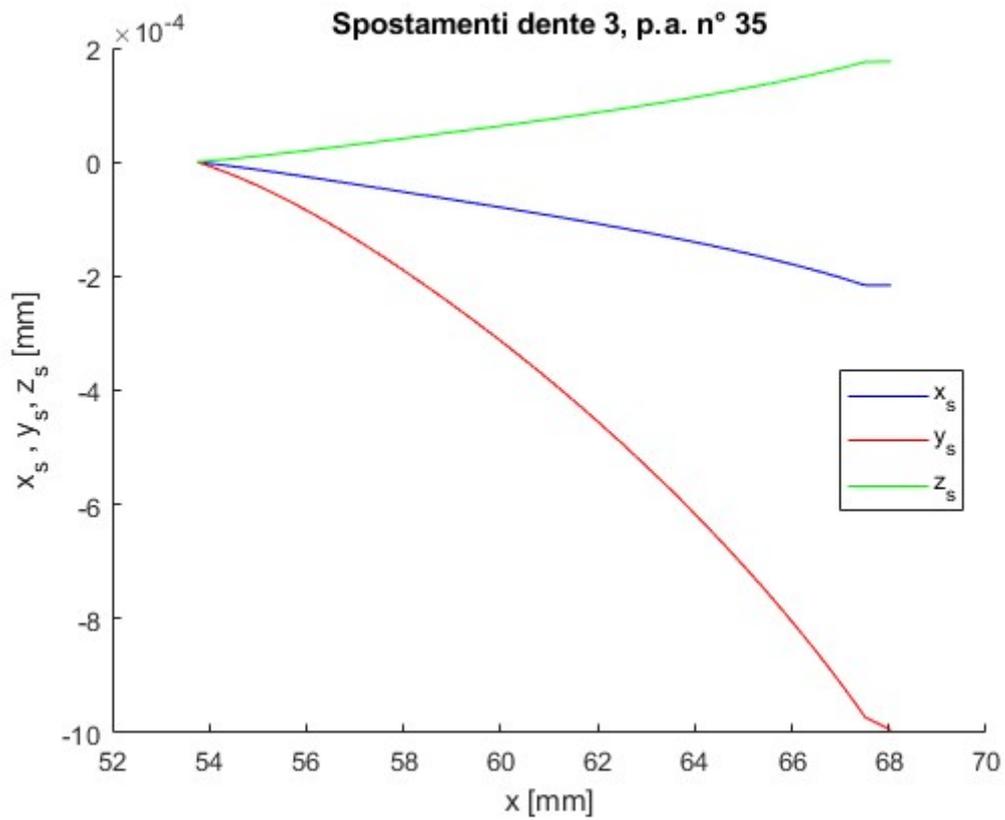
In entrambe le figure, lo spostamento è nullo all'incastro e massimo in valor assoluto sulla punta del dente con valori più significativi in direzione  $y$ .

In figura 4.22 si osserva che lo spostamento in direzione  $z$  è nullo su tutto il dente poiché la componente di forza assiale  $F_z$  è nulla nei denti dritti.

In figura 4.23 è mostrato un esempio degli spostamenti del dente 3 nella configurazione a denti elicoidali con tre coppie di denti in presa analizzata sino ad ora. In questo caso si osserva la presenza della componente di spostamento in direzione  $z$  non nulla e uno spostamento  $y_s$  negativo dovuto al carico  $F_y$  agente sul fianco destro del dente in senso discorde a  $y$ .



**Figura 4.22:** Spostamenti, denti dritti.



**Figura 4.23:** Spostamenti, denti elicoidali.

## 4.6 Calcolo di forze e momenti in corrispondenza dei nodi struttura

Noti gli spostamenti in entrambi i nodi di tutti gli elementi che costituiscono la struttura, si procede con il calcolo delle forze e delle reazioni su di essi.

Tali valori si ottengono dal prodotto tra la matrice di rigidità  $[K_{temp}]$  dell'elemento e i corrispondenti spostamenti nodali di ogni elemento.

Se tale operazione è svolta correttamente le dimensioni della variabile ottenuta sono uguali a quelle della variabile contenente gli spostamenti nodali di ciascun elemento.

Seguendo tale procedimento si ottengono sul secondo nodo di ogni elemento i valori di forze e momenti, mentre sul primo nodo le reazioni. Su uno stesso nodo si hanno reazioni di valore uguale e segno opposto ai valori di forze e momenti.

In figura 4.24 sono illustrati i risultati ottenuti in termini di forze e momenti nella stessa posizione angolare della ruota a denti dritti delle figure 4.16 e 4.17. Nel punto di applicazione del carico i valori coincidono con quelli della figura 4.17 e la parte di dente sopra a tal punto risulta ovviamente scarica. La forza  $F_x$  di compressione rimane costante e negativa, l'azione di taglio  $F_y$  è costante e positiva, mentre il momento  $M_z$  è nullo nel punto di applicazione del carico e massimo all'incastro.

Nelle figure 4.25 e 4.26 sono illustrati i risultati ottenuti in termini di forze e momenti per i casi correlati alle figure 4.18 e 4.20. Le figure 4.27, 4.28 e 4.29 sono invece correlate alle configurazioni delle figure 4.19 e 4.21.

Le forze  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  e il momento  $M_x$  sono costanti lungo l'altezza del dente e coincidenti con i valori visti in precedenza nei punti di applicazione del carico.

I momenti flettenti  $M_y$  ed  $M_z$  sono nulli nei punti di applicazione del carico e in valore assoluto massimi all'incastro, con valori più significativi per il contributo attorno all'asse z.

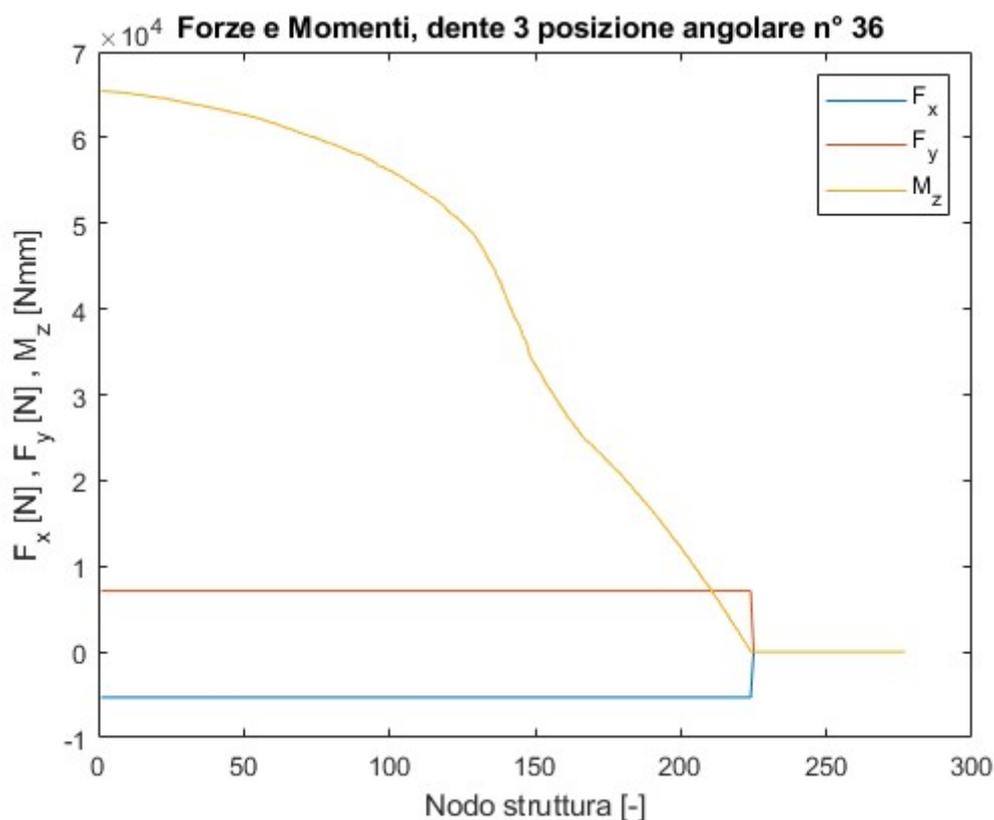


Figura 4.24: Forze e momenti nei nodi struttura, denti dritti.

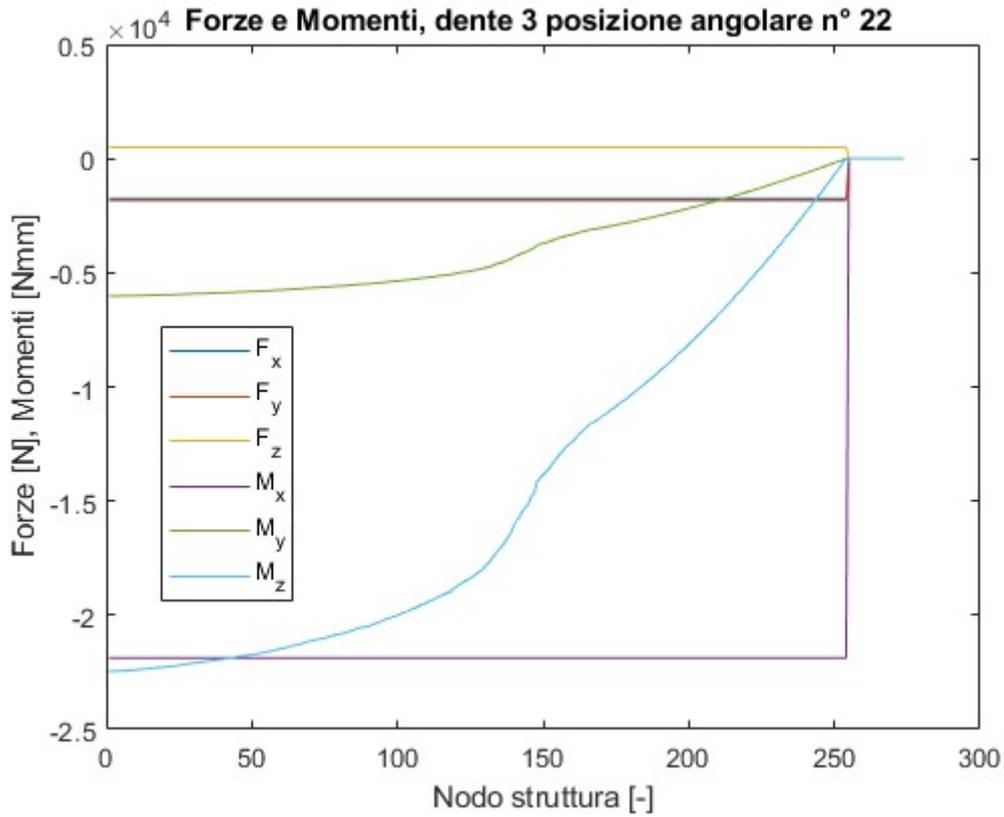


Figura 4.25: Forze e momenti nei nodi struttura, 2 coppie di denti in presa, dente 3 elicoidali.

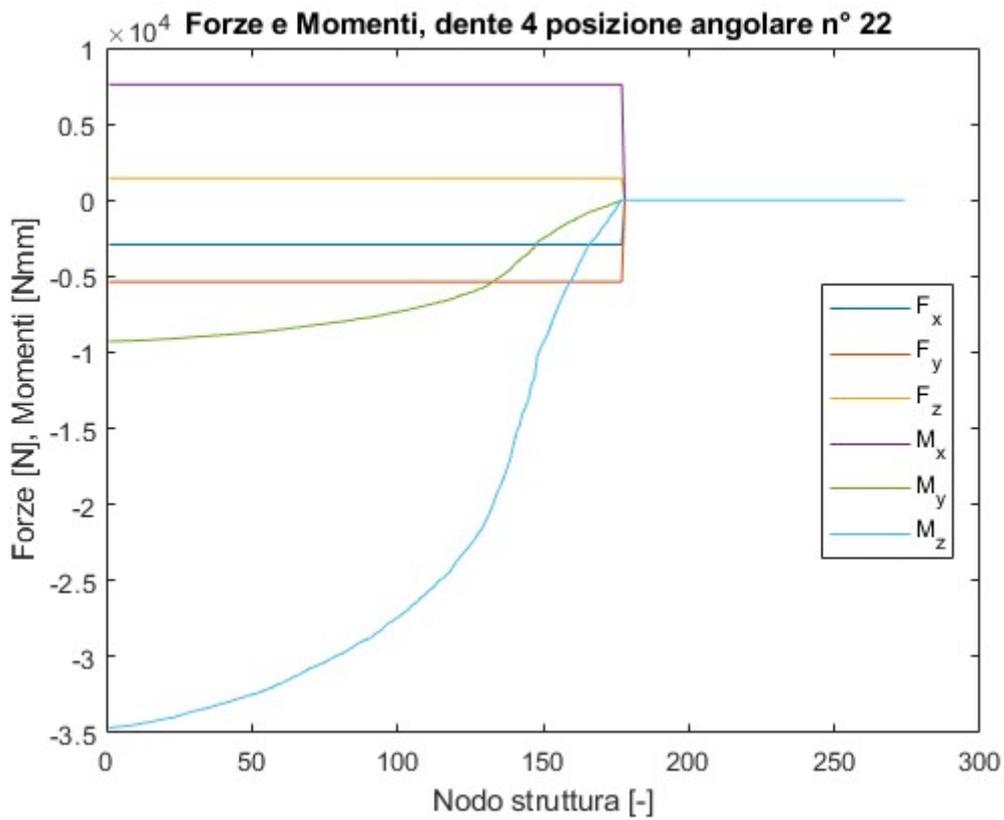


Figura 4.26: Forze e momenti nei nodi struttura, 2 coppie di denti in presa, dente 4 elicoidali.

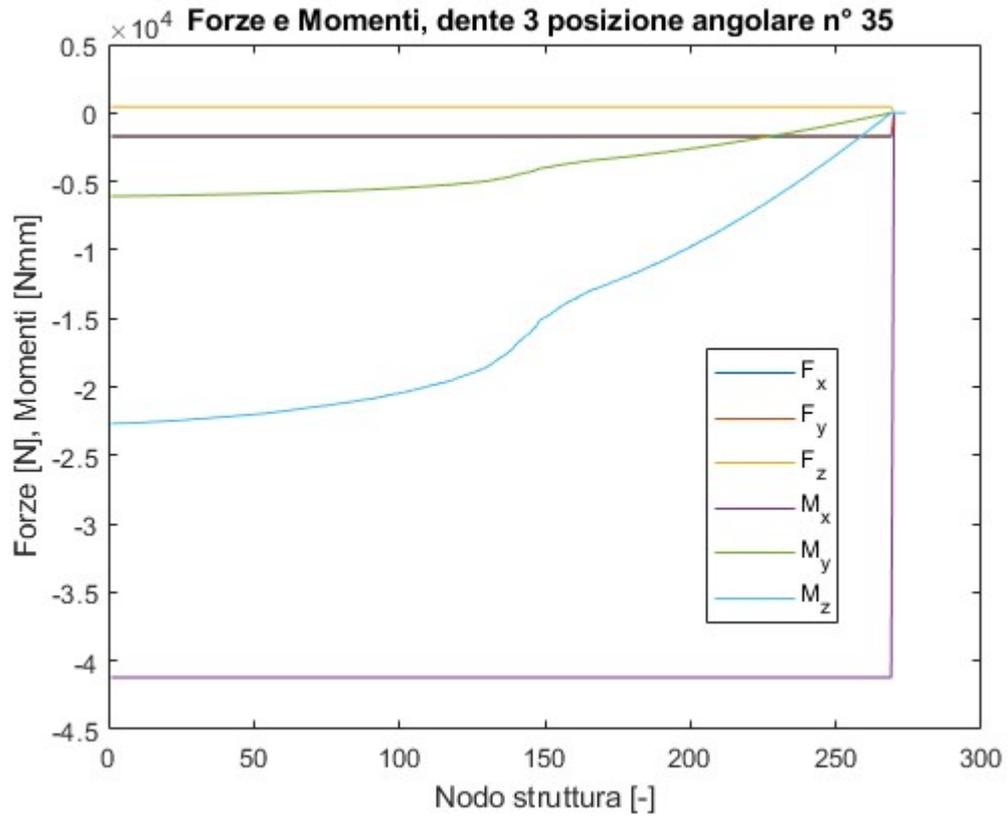


Figura 4.27: Forze e momenti nei nodi struttura, 3 coppie di denti in presa, dente 3 elicoidali.

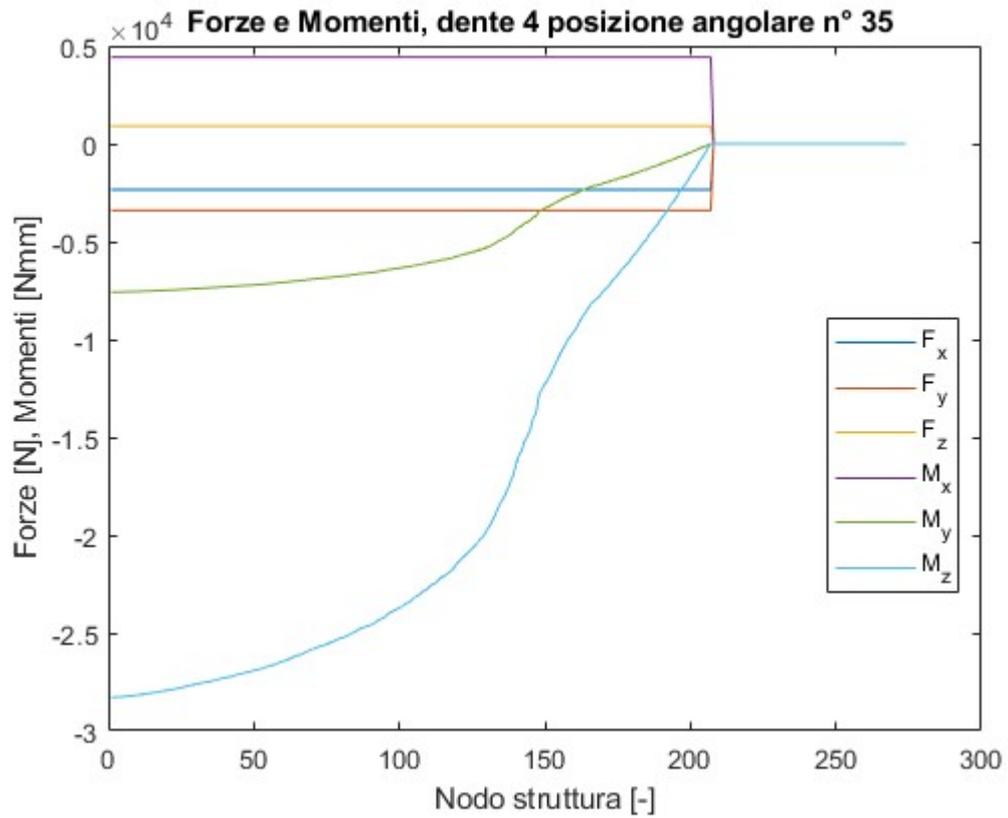


Figura 4.28: Forze e momenti nei nodi struttura, 3 coppie di denti in presa, dente 4 elicoidali.

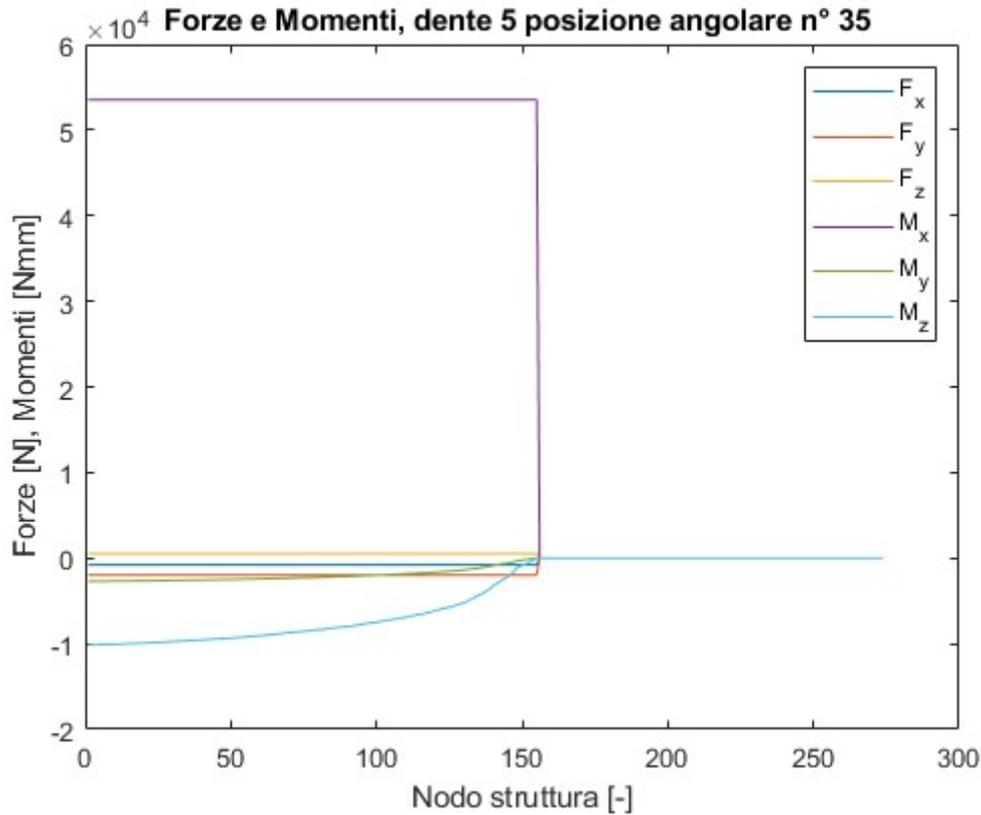


Figura 4.29: Forze e momenti nei nodi struttura, 3 coppie di denti in presa, dente 5 elicoidali.

#### 4.6.1 Calcolo dei momenti attorno gli assi principali $\xi$ ed $\eta$

Nel caso a denti elicoidali, noti i momenti  $M_y$  ed  $M_z$  in corrispondenza dei nodi struttura, è possibile determinare i momenti  $M_\xi$  ed  $M_\eta$  attorno agli assi principali.

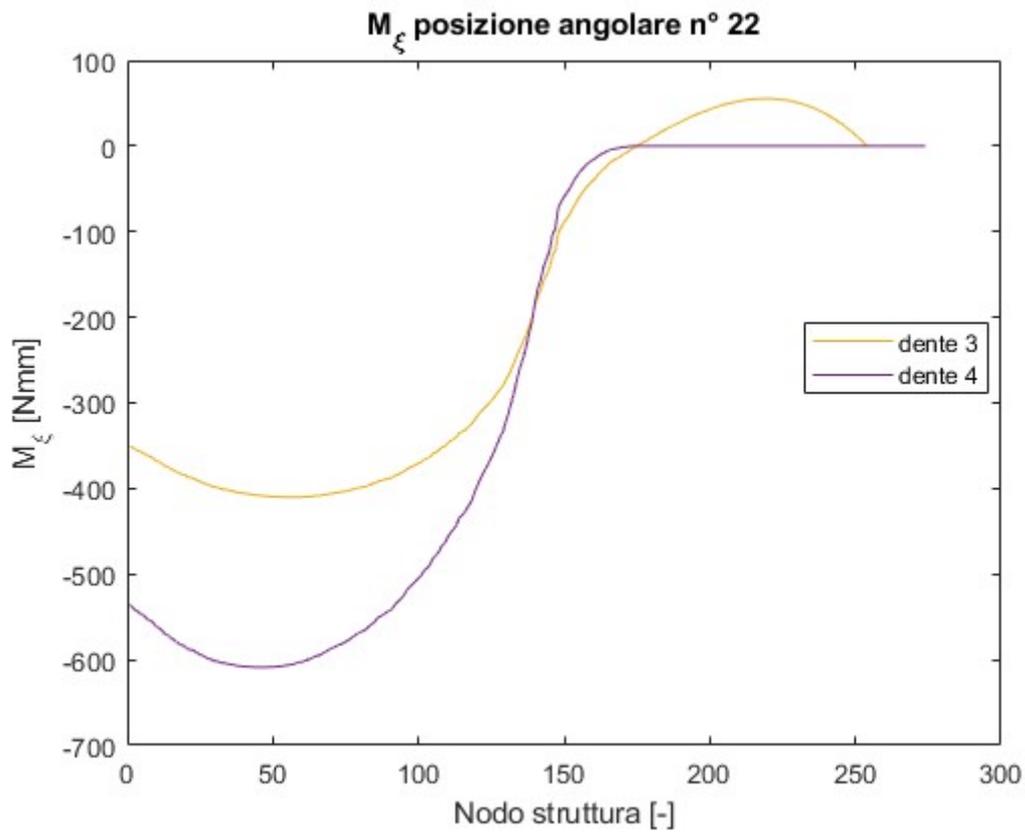
Conoscendo l'angolo di rotazione  $\alpha$  del sistema di riferimento principale, definito dalla formula 4.42, si calcolano i momenti attorno agli assi principali d'inerzia  $\xi$  ed  $\eta$  con le espressioni 4.71 e 4.72.

$$M_\xi = M_z \sin\alpha + M_y \cos\alpha \quad (4.71)$$

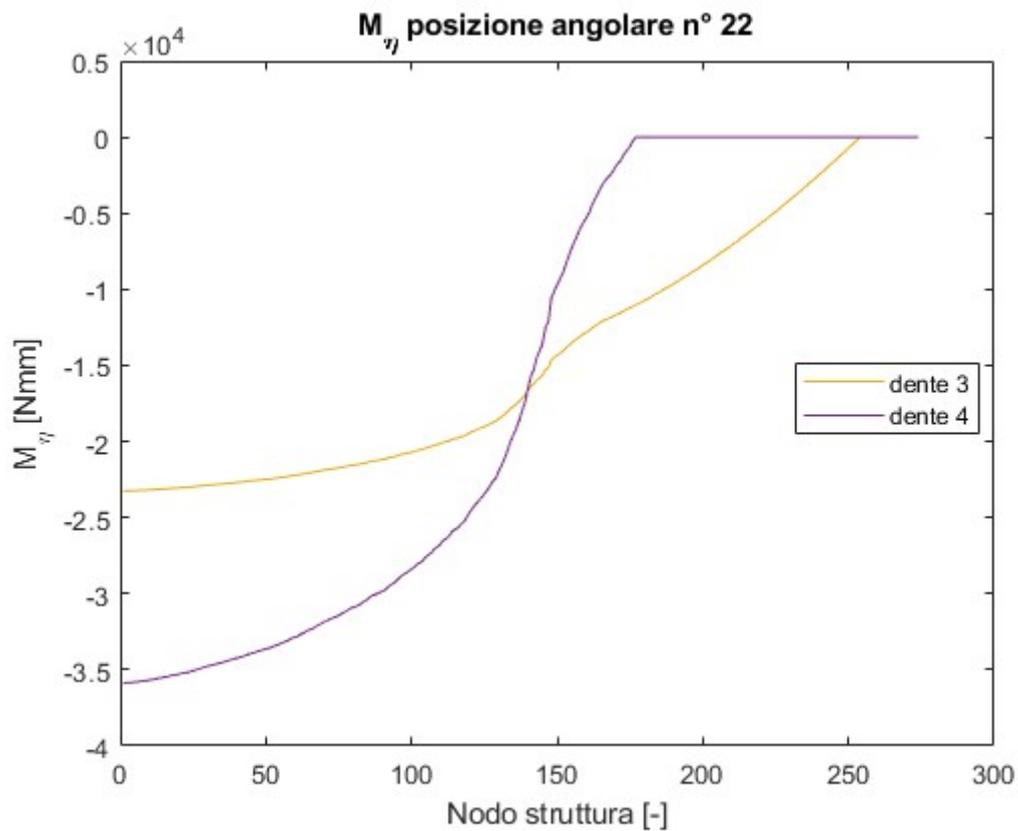
$$M_\eta = M_z \cos\alpha - M_y \sin\alpha \quad (4.72)$$

Nelle figure 4.30 e 4.31 sono illustrati i risultati ottenuti per i due momenti  $M_\xi$  ed  $M_\eta$  nella configurazione con due coppie di denti in presa.

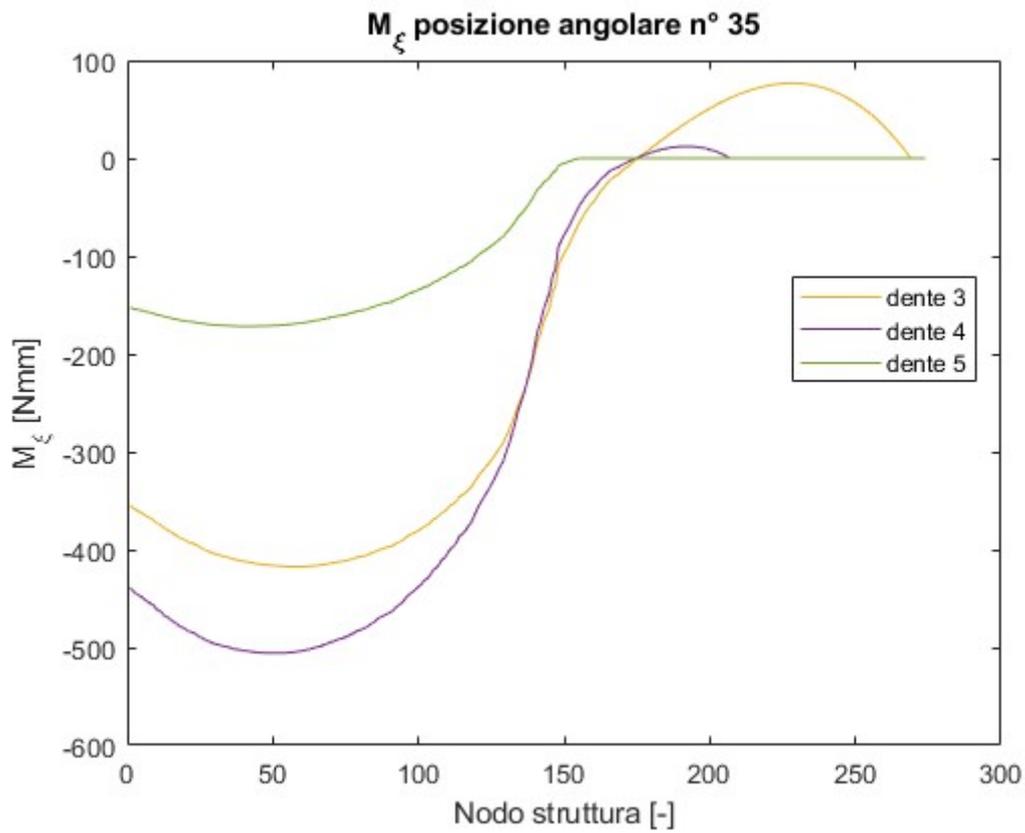
Le figure 4.32 e 4.33 riportano invece i risultati ottenuti nella configurazione con tre coppie di denti in contatto.



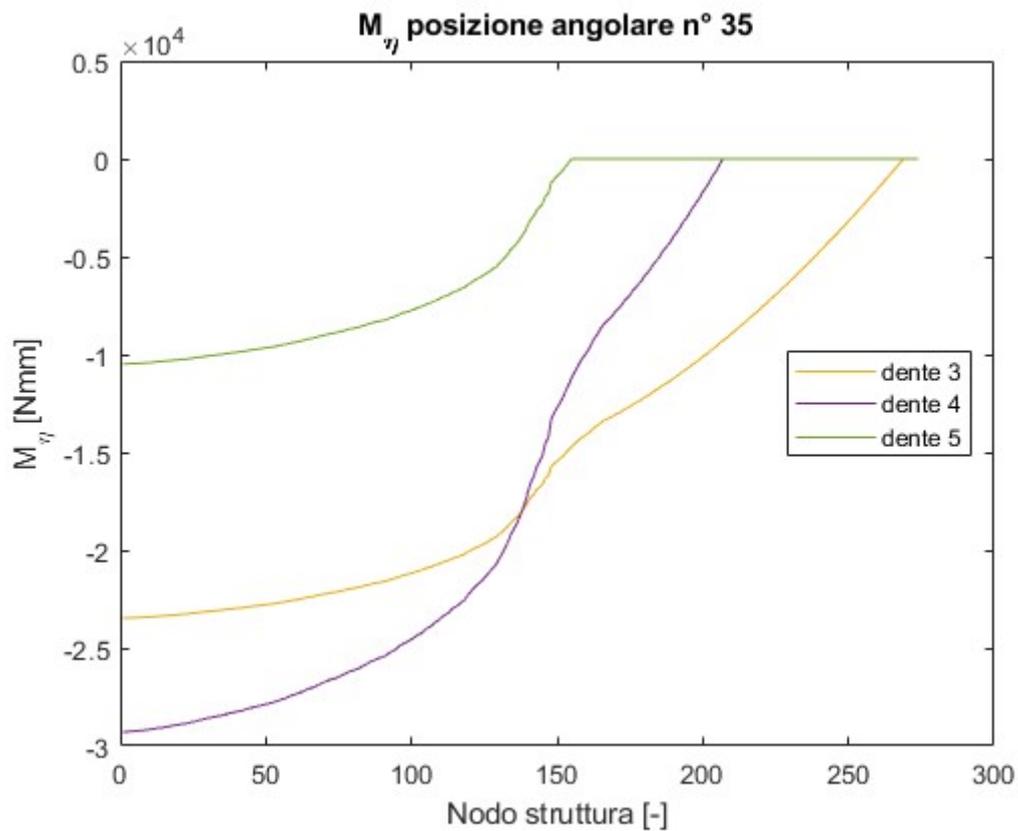
**Figura 4.30:** Momento  $M_\xi$ , 2 coppie di denti in presa.



**Figura 4.31:** Momento  $M_\eta$ , 2 coppie di denti in presa.



**Figura 4.32:** Momento  $M_{\xi}$ , 3 coppie di denti in presa.



**Figura 4.33:** Momento  $M_{\eta}$ , 3 coppie di denti in presa.

**Tabella 4.9:** Variabili per il calcolo di forze e momenti nel codice.

Variabile	Descrizione	Dimensione	
		Denti dritti	Denti elicoidali
F <sub>x</sub>	Componente della forza lungo l'asse x	277 x 5 x 80	274 x 5 x 80
F <sub>y</sub>	Componente della forza lungo l'asse y	277 x 5 x 80	274 x 5 x 80
F <sub>z</sub>	Componente della forza lungo l'asse z	277 x 5 x 80	274 x 5 x 80
M <sub>x</sub>	Componente della forza rotazionale attorno l'asse x	277 x 5 x 80	274 x 5 x 80
M <sub>y</sub>	Componente della forza rotazionale attorno l'asse y	277 x 5 x 80	274 x 5 x 80
M <sub>z</sub>	Componente della forza rotazionale attorno l'asse z	277 x 5 x 80	274 x 5 x 80
M <sub>csi</sub>	Componente della forza rotazionale attorno l'asse ξ	-	274 x 5 x 80
M <sub>eta</sub>	Componente della forza rotazionale attorno l'asse η	-	274 x 5 x 80
r <sub>1</sub>	Forze e reazioni ai nodi di ogni elemento trave	3312 x 5 x 80	3276 x 5 x 80
K <sub>temp</sub>	Matrice di rigidezza dell'elemento trave	12 x 12	12 x 12

## 4.7 Calcolo della tensione a fondo dente, denti dritti

Una volta determinati i valori di forze e momenti nei nodi struttura è possibile procedere con il calcolo delle tensioni dovute allo sforzo normale e al momento flettente .

La tensione dovuta allo sforzo normale si ottiene con la formula 4.73 dal rapporto tra la forza applicata in direzione x e la sezione resistente nel punto considerato.

$$\sigma_c = \frac{F_x}{A_1} \quad (4.73)$$

Nel caso a denti dritti occorre determinare la tensione  $\sigma_b$  nel piano yx dovuta al momento  $M_z$  agente attorno l'asse z. La tensione raggiunge valori massimi in modulo e opposti in segno agli estremi della sezione ed è nulla in corrispondenza dell'asse neutro z. La tensione viene valutata all'estremo della sezione dalla parte delle fibre tese applicando la formula 4.74 ed è data dal rapporto tra il momento flettente attorno a z e il momento d'inerzia attorno a z moltiplicati per la coordinata y corrispondente a metà dello spessore del dente.

$$\sigma_b = \frac{M_z}{I_z} Y_{s1} \quad (4.74)$$

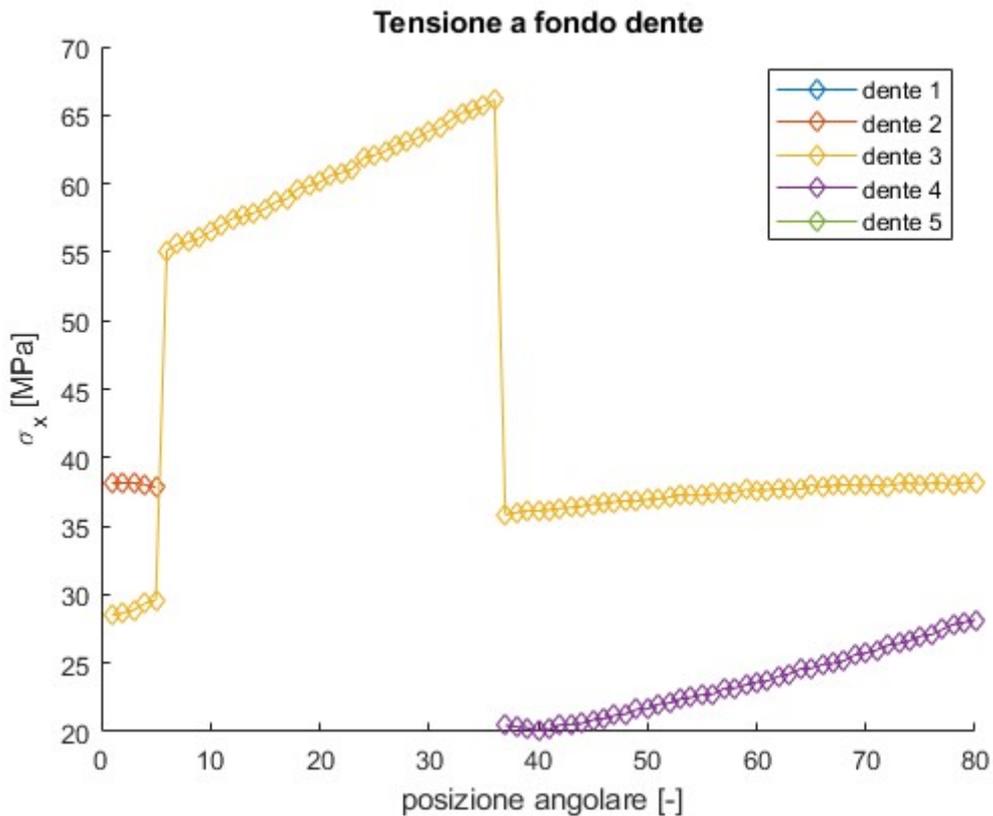
La tensione totale  $\sigma_{tot}$  di trazione (lato fibre tese) nel piano yx, definita dalla formula 4.75, è data dalla somma tra il contributo di compressione dovuto allo sforzo normale e il contributo flessionale.

$$\sigma_{tot} = \sigma_c + \sigma_b = \frac{F_x}{A_1} + \frac{M_z}{I_z} Y_{S1} \quad (4.75)$$

I valori di tensione sono stati calcolati in tutti i nodi della struttura, ma ci interessa valutare i valori massimi di tensione nel raccordo di base del dente dove la  $\sigma_{tot}$  è massima. Per farlo, si ricerca il nodo  $N_{\sigma_{tot,max}}$  della struttura in cui si registra il massimo della tensione  $\sigma_{tot}$ . Il valore di tensione  $\sigma_b$  nel nodo trovato viene poi moltiplicato per un fattore di correzione della tensione indicato con  $Y_{S1}$  e viene valutata la tensione  $\sigma_x$  a fondo dente con la formula 4.77. Il fattore di intaglio  $Y_{S1}$  derivante dalla norma viene utilizzato per correggere solo il contributo di flessione poiché la ISO 6336-3 trascura la parte di compressione.

$$\sigma_x = \sigma_b(N_{\sigma_{tot,max}}) Y_{S1} + \sigma_c(N_{\sigma_{tot,max}}) \quad (4.77)$$

In figura 4.34 sono riportati i risultati di tensione a fondo dente ottenuti applicando la formula 4.77 ed utilizzando lo stesso fattore di correzione della tensione calcolato nel modello analitico, variabile con la posizione angolare e quindi espresso in funzione del punto di applicazione del carico.



**Figura 4.34:** Tensione a fondo dente, denti dritti.

**Tabella 4.10:** Variabili per il calcolo della tensione nel codice, denti dritti.

Variabile	Descrizione	Dimensione
A_1	Sezione resistente	1 x 277
Iz_1	Momento d'inerzia attorno all'asse z	1 x 277
sigma_x	Tensione a fondo dente	5 x 80
Nmaxsigma_tot	Nodo struttura in cui la tensione totale è massima	5 x 80
Ys1	Metà spessore del dente in direzione y	1 x 277
Y_s1	Fattore di correzione della tensione	80 x 5
sigma_b	Tensione dovuta a flessione	277 x 5 x 80
sigma_c	Tensione di compressione dovuta a sforzo normale	277 x 5 x 80
sigma_tot	Tensione totale somma di compressione e flessione	277 x 5 x 80

## 4.8 Calcolo della tensione a fondo dente, denti elicoidali

Una volta ottenuti i risultati in termini di forze e momenti sulla struttura, anche nel caso a denti elicoidali, si procede determinando le tensioni dovute a sforzo normale e momento flettente.

La tensione di compressione dovuta allo sforzo normale è definita in modo analogo al caso a denti dritti tramite la formulazione 4.73.

Per calcolare le tensioni sul lato destro del dente dove le fibre tese a causa momento flettente applicato, occorre definire le coordinate del punto più sollecitato (indicato con la lettera B) sia nel sistema di riferimento  $(y, z)$  che nel sistema di riferimento principale  $(\xi, \eta)$ .

Tenendo in considerazione che il dente lungo la larghezza di fascia  $b$ , in direzione dell'asse  $z$ , è suddivisa in 31 slices equamente spaziate, la coordinata  $z$  dei punti B (indicata con  $B_z$ ) corrisponde alla coordinata  $z$  di ciascuna delle 31 slices e varia tra  $-b/2$  e  $+b/2$ .

Allo stesso modo viene definita la coordinata  $y$  dei punti B (indicata con  $B_y$ ) corrispondente a ciascun valore in  $z$  sopra descritto e che risulta variabile tra  $-b/2 \tan(|\beta_f|) + Y_{s1}$  e  $+b/2 \tan(|\beta_f|) + Y_{s1}$ .

Utilizzando la matrice di rotazione  $[R_\alpha]$  definita dalla 4.78 è possibile trasformare le coordinate dei punti B definite nel sistema di riferimento  $(y, z)$  in coordinate relative al sistema di riferimento principale  $(\xi, \eta)$ .

Le coordinate dei punti B nel sistema di riferimento principale  $(\xi, \eta)$  sono definite seguendo la formulazione 4.79 e sono state nominate rispettivamente  $B_\xi$  e  $B_\eta$ .

$$[R_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

$$\{B(\xi, \eta)\} = [R_\alpha] \{B(y, z)\} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} B_y \\ B_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_\xi \\ B_\eta \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$

A questo punto è possibile calcolare le tensioni dovute a  $M_\xi$  e le tensioni dovute a  $M_\eta$ . Essendo presenti entrambi i momenti flettenti  $M_\xi, M_\eta$  la distribuzione sulla sezione della tensione  $\sigma_b$  dovuta a flessione si ottiene per sovrapposizione degli effetti tramite la formula 4.80.

La tensione totale  $\sigma_{tot}$ , data dalla espressione 4.81, tiene conto della somma tra il contributo dovuto a compressione e quello dovuto a flessione.

$$\sigma_b = \frac{M_\xi}{I_\xi} B_\eta - \frac{M_\eta}{I_\eta} B_\xi \quad (4.80)$$

$$\sigma_{tot} = \sigma_c + \sigma_b = \frac{F_x}{A_1} + \frac{M_\xi}{I_\xi} B_\eta - \frac{M_\eta}{I_\eta} B_\xi \quad (4.81)$$

I valori di tensione sono stati calcolati in tutti i nodi della struttura, ma occorre definire la tensione nel punto più sollecitato del raccordo di base del dente. Per ciascuna slice di contatto del dente si ricerca il numero del nodo struttura in cui la tensione  $\sigma_{tot}$  è massima. Per determinare il valore effettivo di tensione a fondo dente occorre utilizzare un fattore di intensificazione della tensione indicato con  $Y_{S1}$ .

Nel caso a denti elicoidali oltre al fattore  $Y_{S1}$  si è considerato un coefficiente correttivo, indicato con  $cc$ , che tiene conto dell'inclinazione della linea di contatto sul dente.

Il coefficiente correttivo  $cc$  viene calcolato secondo la seguente procedura:

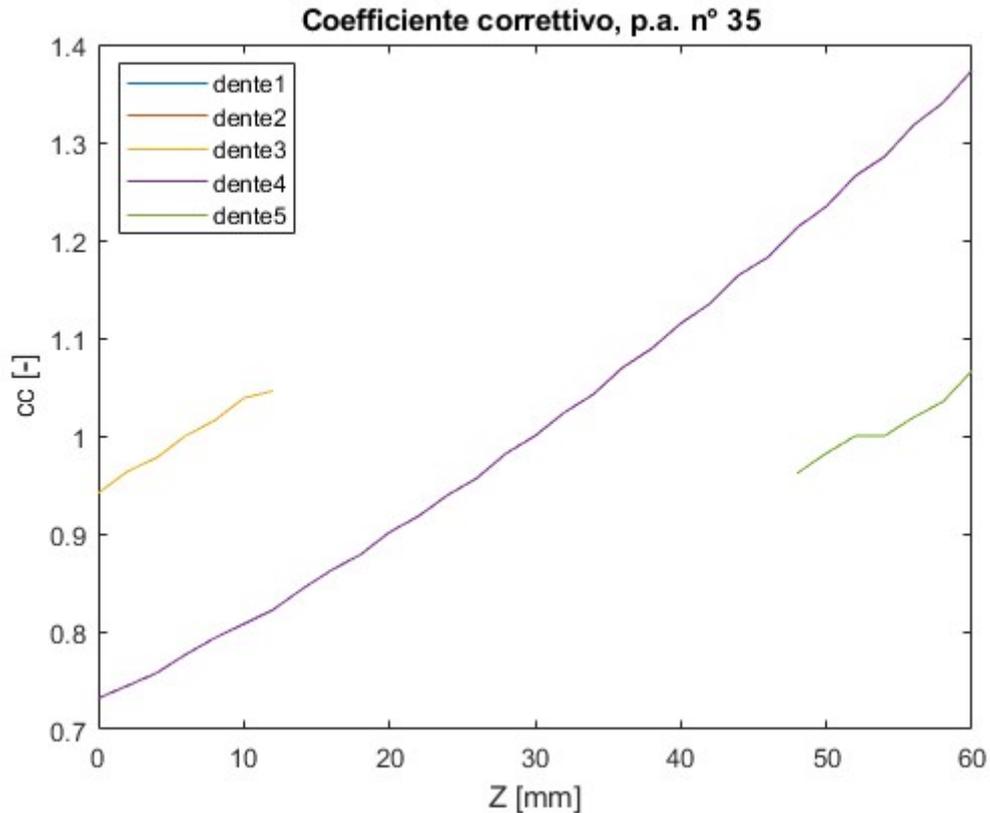
- definizione del raggio  $R_1$  del nodo di contatto su ciascuna slice del dente;
- definizione dell'angolo  $\gamma_1$  tra il raggio  $R_1$  e l'asse x del dente;
- calcolo della dimensione  $h$  data dalla differenza tra il valore di  $R_1$  riportato sull'asse x e la coordinata x del primo nodo della struttura, definita tramite la formula 4.82;

$$h = R_1 \cos \gamma_1 - x(1) \quad (4.82)$$

- calcolo di  $cc$  dal rapporto tra il valore di  $h$  della i-esima slice e il valore di  $h$  calcolato sulla slice media di contatto, secondo la formula 4.83.

$$cc = \frac{h}{h_m} \quad (4.83)$$

Utilizzando tale procedimento il coefficiente  $cc$  risulta unitario sulla slice media di contatto, maggiore di uno sulle slices in cui il contatto avviene più in alto rispetto al valor medio e minore di uno se il contatto è più in basso verso la base del dente. In figura 4.35 è riportato un esempio del coefficiente correttivo  $cc$  per la configurazione a tre coppie di denti in presa.



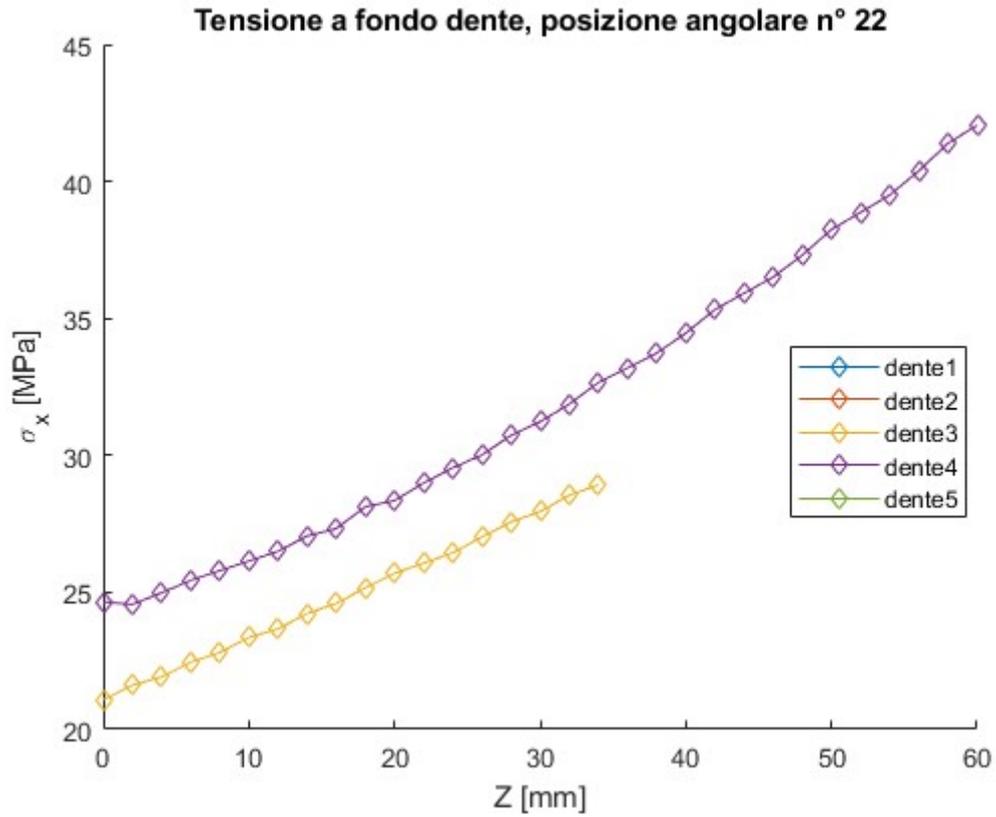
**Figura 4.35:** Coefficiente correttivo, tre coppie di denti in presa.

Noti il nodo  $N_{\sigma_{tot,max}}$  in cui la tensione  $\sigma_{tot}$  è massima, il fattore di  $Y_{S1}$  e il coefficiente correttivo  $cc$ , si procede con la determinazione della tensione a fondo dente applicando la formula 4.84.

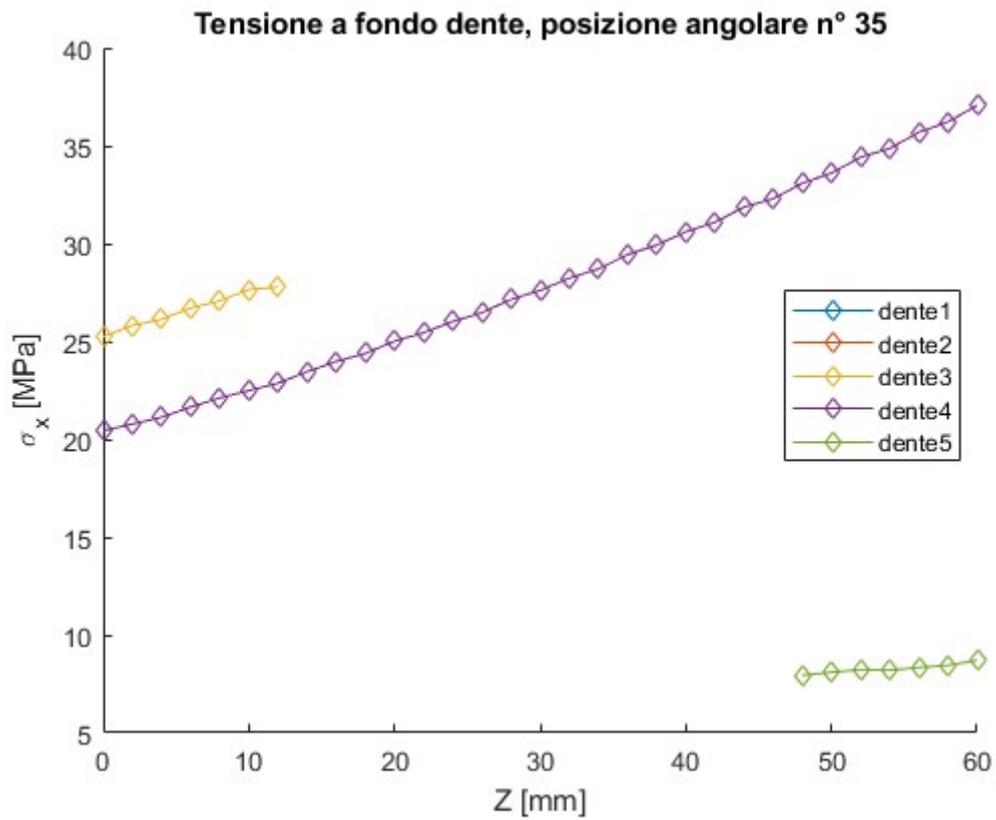
$$\sigma_x = \sigma_b(N_{\sigma_{tot,max}}) Y_{S1} cc + \sigma_c(N_{\sigma_{tot,max}}) \quad (4.84)$$

Le figure 4.36 e 4.37 mostrano i risultati di tensione a fondo dente ottenuti rispettivamente nelle configurazioni a 2 e 3 coppie di denti in presa analizzate sino ad ora. Il fattore  $Y_{S1}$  utilizzato nelle figure coincide con quello calcolato secondo normativa ISO 6336-3 ed è pari a 1.8134.

Si nota che, in entrambe le configurazioni, il dente in cui si registra la massima sollecitazione è quello che presenta contatto su tutta la larghezza di fascia. Osservando la figura 4.37 si nota che, nonostante il carico sul dente 3 sia applicato più in alto rispetto al dente 4, le tensioni massime registrate sul dente 3 sono minori a quelle del dente 4. Tale comportamento è giustificato dal fatto che il dente 4 assorbe una percentuale maggiore del carico totale rispetto al dente 3.



**Figura 4.36:** Tensione a fondo dente, 2 coppie di denti in presa, denti elicoidali.



**Figura 4.37:** Tensione a fondo dente, 3 coppie di denti in presa, denti elicoidali..

**Tabella 4.11:** Variabili per il calcolo della tensione nel codice, denti elicoidali.

<b>Variabile</b>	<b>Descrizione</b>	<b>Dimensione</b>
A_1	Sezione resistente	1 x 274
By	Coordinata y del punto B	31 x 274
Bz	Coordinata z del punto B	31 x 274
B_csi	Coordinata $\xi$ del punto B	31 x 274
B_eta	Coordinata $\eta$ del punto B	31 x 274
cc	Coefficiente correttivo	31 x 5 x 80
Icsi	Momento d'inerzia attorno all'asse principale $\xi$	1 x 274
Ieta	Momento d'inerzia attorno all'asse $\eta$	1 x 274
sigma_x	Tensione a fondo dente	31 x 5 x 80
Nmax_sigma_tot	Nodo struttura in cui la tensione totale è massima	31 x 5 x 80
R_alpha	Matrice di rotazione	2 x 2
sigma_b	Tensione dovuta a flessione	274 x 5 x 80 x 31
sigma_c	Tensione di compressione dovuta a sforzo normale	274 x 5 x 80
sigma_tot	Tensione totale somma di compressione e flessione	274 x 5 x 80 x 31
Ys1	Metà spessore del dente in direzione y	1 x 274
Y_S1	Fattore di correzione della tensione	1.8134 (valore)

## 5 Modello FEM

Al fine di operare un confronto diretto con i risultati ottenuti nel modello analitico e in quello semianalitico si realizza un modello agli elementi finiti (FEM) mediante Solidworks.

Partendo dall'assieme costituito da pignone e ruota condotta, utilizzando un accoppiamento meccanico ad ingranaggio e tenendo in considerazione un rapporto di trasmissione in questo caso unitario, è possibile forzare i due componenti a ruotare relativamente l'uno rispetto all'altro intorno ai rispettivi assi.

Per studiare il comportamento del sistema durante l'ingranamento, si eseguono diverse simulazioni utilizzando l'ambiente Simulation di Solidworks.

Il materiale utilizzato nelle simulazioni è l'acciaio AISI 1020. La scelta di questo materiale è basata semplicemente sul fatto di simulare ruote di un materiale con caratteristiche meccaniche analoghe ai valori utilizzati nel modello analitico e semianalitico.

L'analisi viene condotta sia per le ruote a denti dritti che per le ruote a denti elicoidali.

### 5.1 Applicazione di vincoli e carichi

Il sistema è stato opportunamente vincolato tramite l'applicazione di spostamenti remoti ed è stato utilizzato un carico remoto in modo da simulare le condizioni reali di funzionamento.

Per l'applicazione di spostamenti e carichi remoti è stata utilizzata una connessione rigida con il quale è possibile scegliere un punto di riferimento che può essere messo in collegamento con facce, bordi o vertici del modello. Nel caso di connessione rigida, il movimento di ciascun nodo all'interno della regione di connessione è definito dalla traslazione e rotazione del punto di riferimento grazie all'utilizzo di barre rigide.

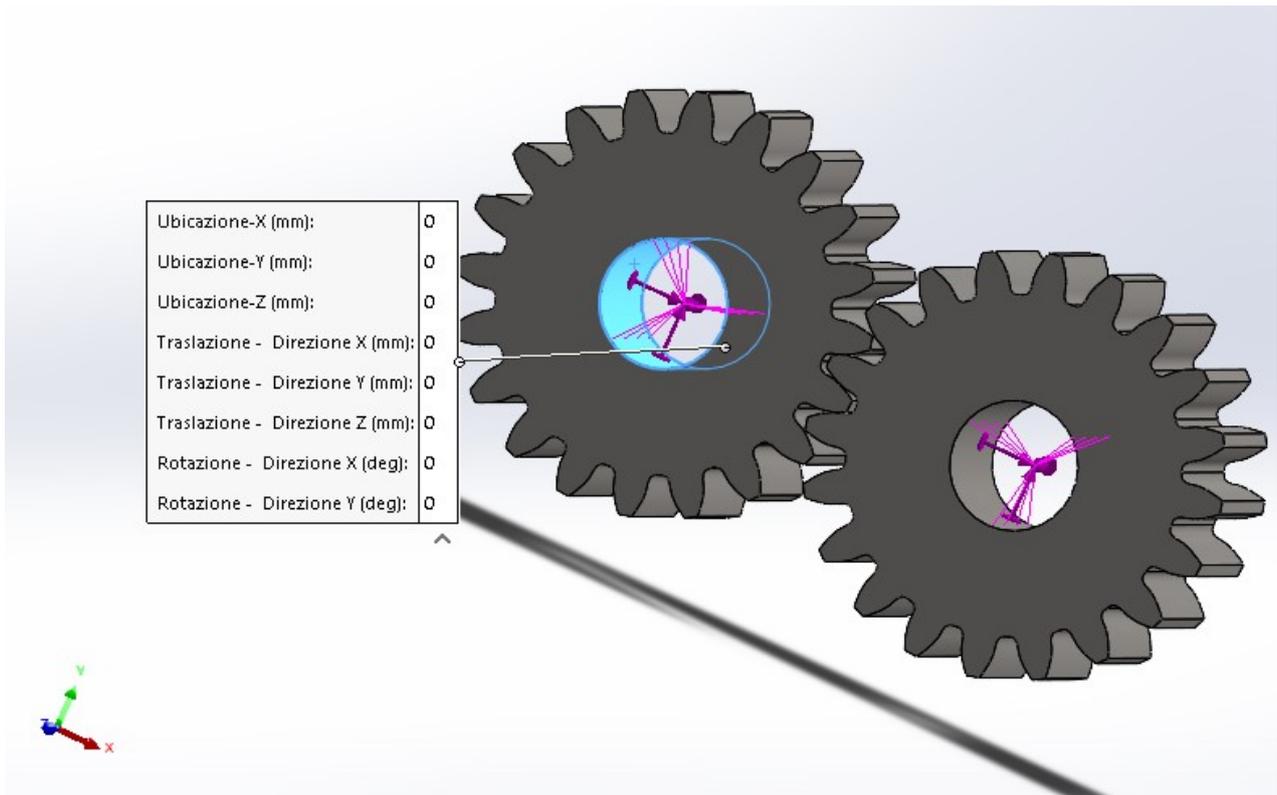
Il nodo di riferimento del pignone è ubicato nel centro ruota a metà della larghezza di fascia  $b$  e coincide con l'origine del sistema di riferimento globale, di conseguenza avremo  $X, Y, Z$  pari a zero, dove  $Z$  rappresenta la direzione assiale.

In figura 5.1 si osservano gli spostamenti remoti applicati al pignone e l'ubicazione del punto remoto. Tale punto deve essere opportunamente vincolato sopprimendo 5 gradi di libertà. Sono state poste pari a zero le traslazioni lungo le tre direzioni e le rotazioni attorno  $X$  e  $Y$ , mentre è stata lasciata libera la rotazione attorno  $Z$ .

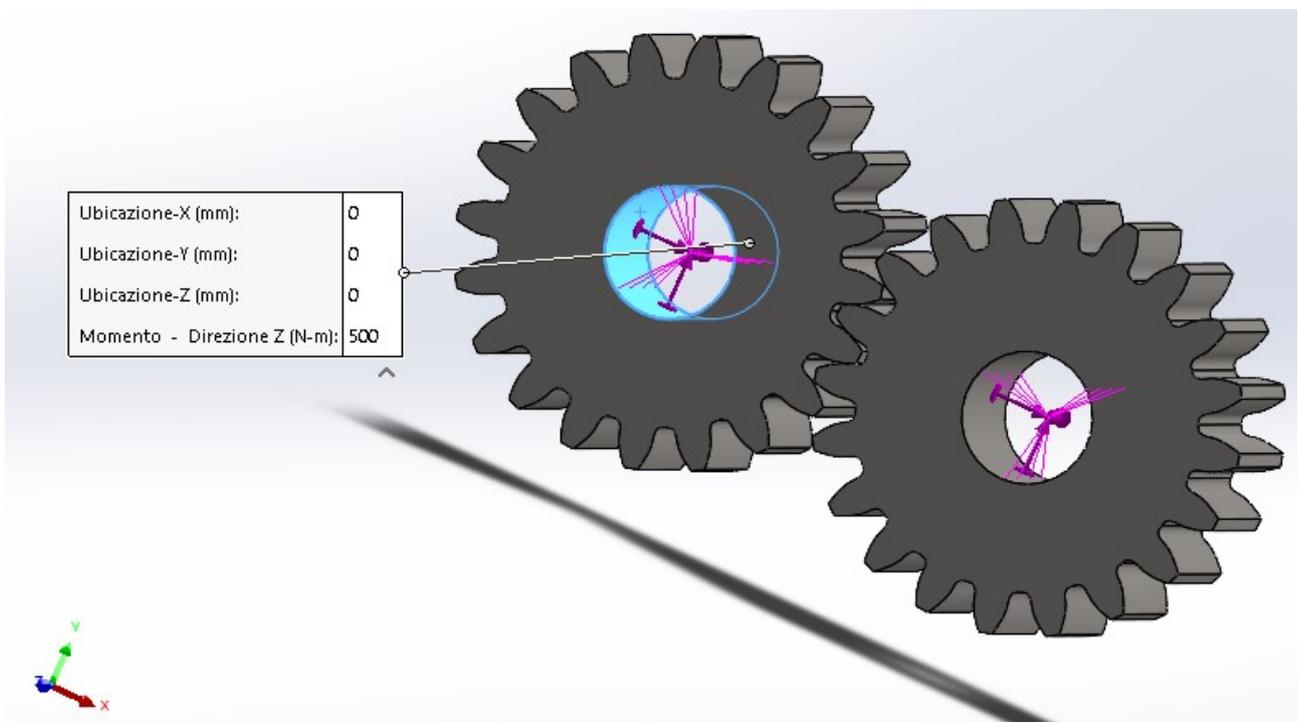
In figura 5.2, sul pignone, è rappresentato il carico remoto di 500 Nm attorno all'asse  $Z$  in verso concorde a quello di rotazione.

In figura 5.3 è illustrato lo spostamento remoto applicato sulla ruota condotta. In questo caso, per posizionare correttamente il punto di riferimento nel centro della ruota condotta a metà della larghezza di fascia, occorre tenere in considerazione l'interasse di funzionamento. Detto ciò, le coordinate  $Y$  e  $Z$  nel sistema di riferimento globale saranno pari a zero mentre la coordinata  $X$  sarà pari all'interasse di 120 mm.

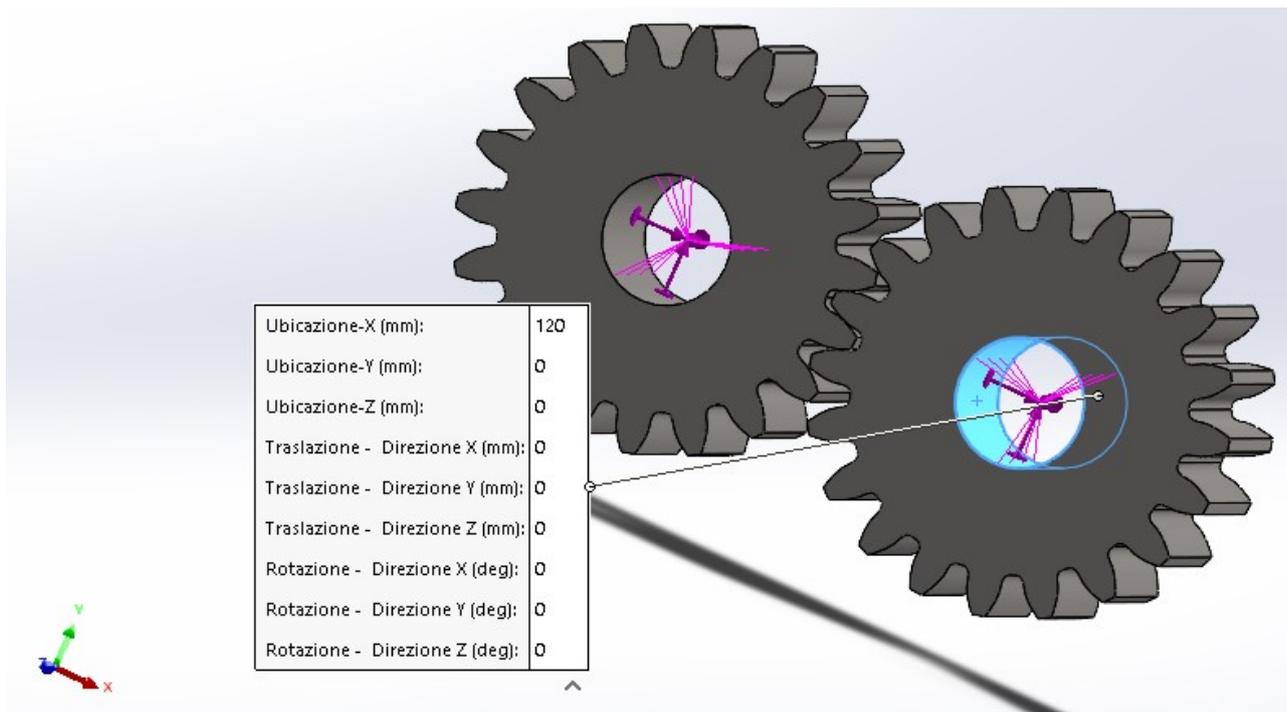
In questo caso il punto remoto sarà totalmente vincolato sopprimendo le tre traslazioni e le tre rotazioni attorno  $X, Y, Z$ .



**Figura 5.1:** Spostamenti remoti, pignone.

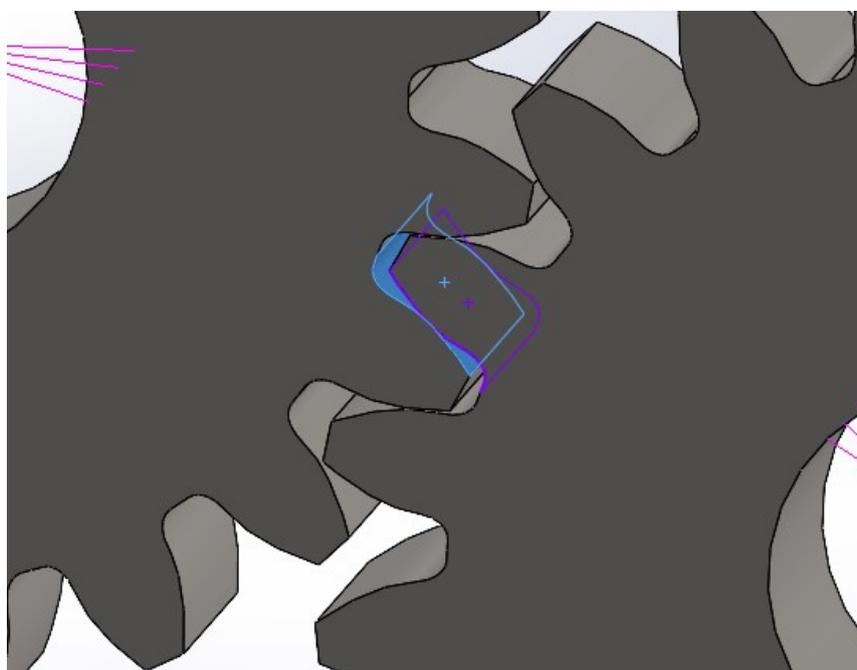


**Figura 5.2:** Carico remoto, pignone.



**Figura 5.3:** Spostamenti remoti, ruota condotta.

Il contatto tra i denti è stato simulato mediante la definizione dei gruppi di contatto. Si è scelto di adottare un contatto senza compenetrazione con coefficiente di attrito pari a 0.05. Le facce dei denti a contatto sono state selezionate manualmente come illustrato nell'esempio di figura 5.4, in cui abbiamo una sola coppia di denti in presa.



**Figura 5.4:** Definizione del gruppo di contatto.

La procedura di definizione dei vincoli e applicazione dei carichi utilizzata per il caso a denti elicoidali è analoga ai denti dritti. L'unica differenza riguarda l'interasse tra le due ruote, maggiore in questo caso e pari a 124.2331 mm.

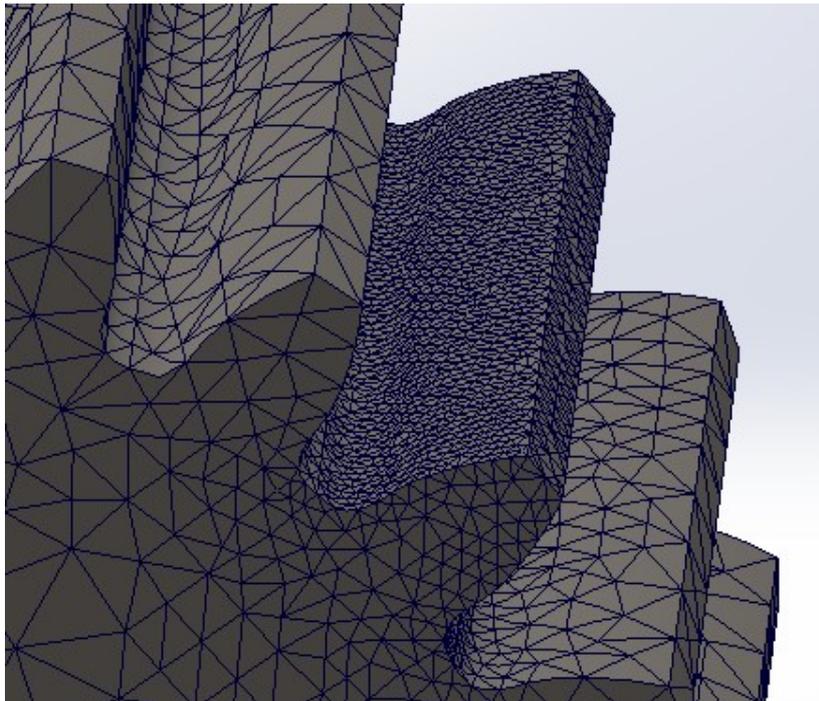
## 5.2 Creazione della mesh

La creazione della mesh è una fase fondamentale per la corretta analisi del modello. Il mesher automatico consente al software di calcolare la dimensione globale degli elementi per il modello prendendone in considerazione il volume, l'area della superficie e una serie di altri dettagli geometrici. La densità della mesh generata e quindi il numero di nodi ed elementi dipendono dalla geometria e dalla dimensione del modello e degli elementi.

Tra i parametri di mesh è stata utilizzata l'opzione di mesh basata su curvatura, in modo tale che il mesher crei una quantità maggiore di elementi nelle zone ad alta curvatura.

In questo caso i risultati sarebbero approssimativi a causa di una dimensione degli elementi abbastanza elevata. Per una soluzione più precisa occorre utilizzare elementi di dimensione più piccola, a discapito di un aumento dei tempi di simulazione.

Quindi, per ottenere risultati più precisi, è stato applicato un controllo mesh in modo da poter specificare una dimensione degli elementi più piccola sulle facce in cui si andranno a valutare le tensioni. In figura 5.5 è riportato un esempio di creazione della mesh per il caso a denti dritti con una sola coppia di denti in presa. Nella zona soggetta al controllo si nota un affinamento della mesh rispetto ai denti non interessati dal contatto.



**Figura 5.5:** Mesh.

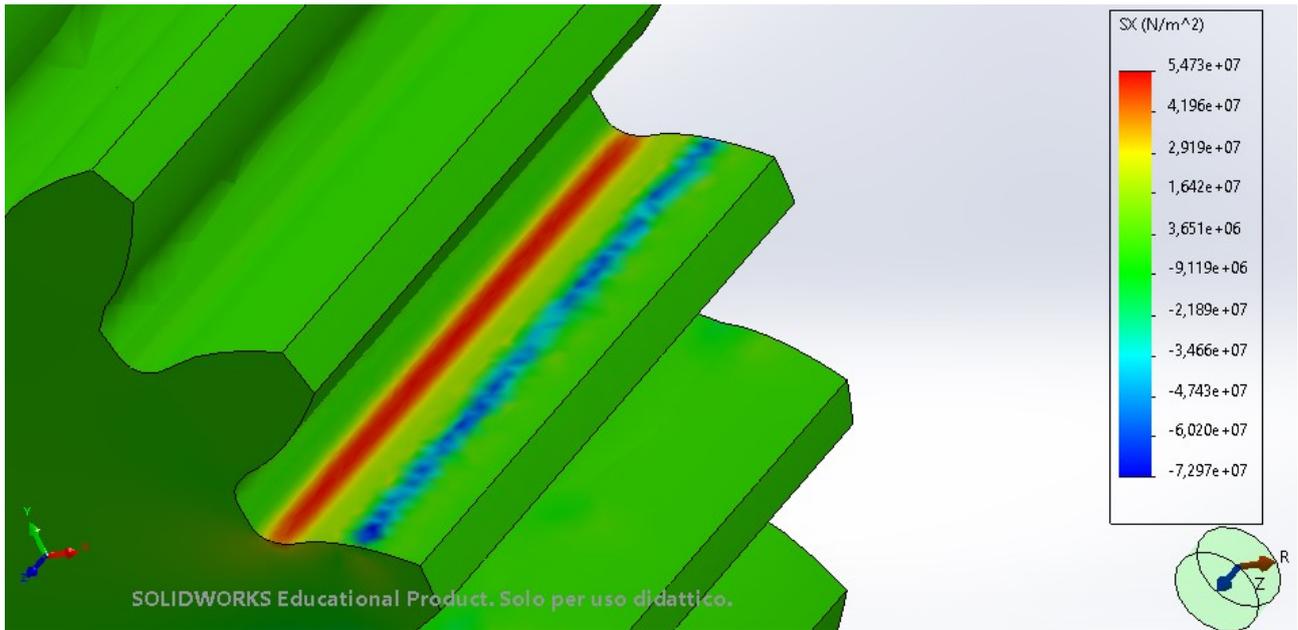
## 5.3 Risultati dello studio, denti dritti

L' utilizzo di un sistema di coordinate cilindriche consente di visionare correttamente i risultati di tensione a fondo dente osservando la sollecitazione normale in direzione radiale.

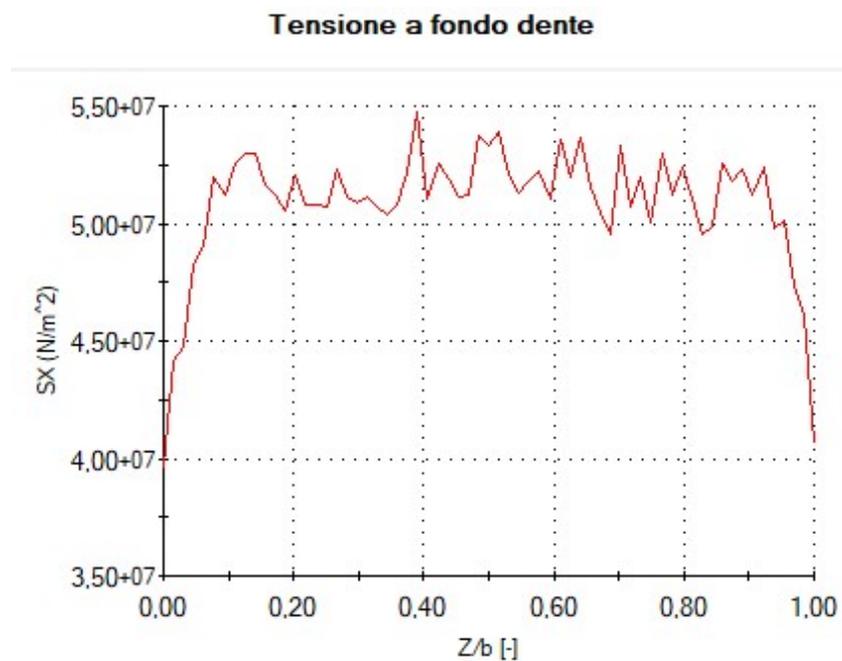
In figura 5.6 si osserva il grafico della sollecitazione normale sul dente 3 nel caso ad una coppia di denti in presa ed alla posizione angolare in cui la sollecitazione è massima. Dall'immagine appare evidente che i

valori massimi di tensione si registrano nella zona del raccordo del dente dove abbiamo un valore massimo di circa 55 MPa. La parte di colore azzurro è indicativa della posizione della linea di contatto tra il dente del pignone e quello della condotta e su di essa si registrano tensioni negative di compressione.

In figura 5.7 è riportato l'andamento della tensione a fondo dente in funzione della coordinata assiale della ruota Z (variabile tra 0 e 60 mm) per unità di larghezza di fascia b (60 mm). Come detto in precedenza si ribadisce che, essendo uniforme la distribuzione del carico sulla linea di contatto, lo studio può essere condotto considerando costante la tensione in funzione della direzione assiale Z. Dalla figura si osserva infatti una distribuzione uniforme della tensione lungo la larghezza di fascia, eccetto in corrispondenza delle estremità in cui prevalgono gli effetti di bordo e la tensione decade.

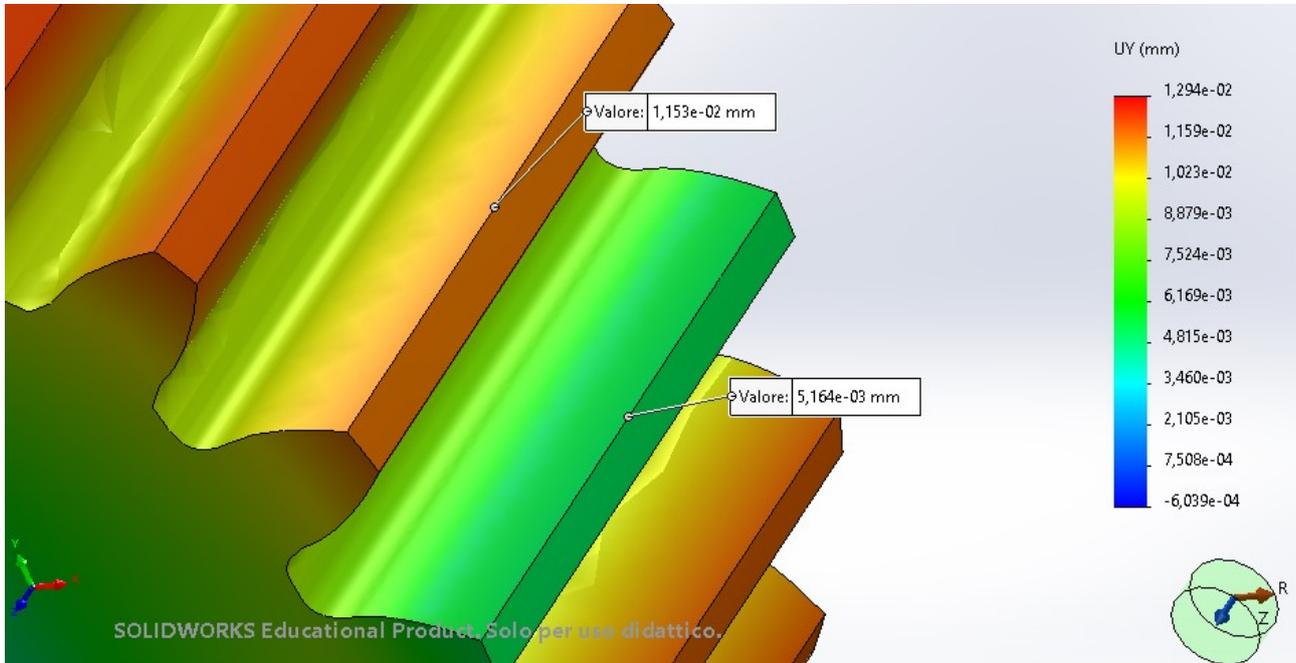


**Figura 5.6:** Sollecitazione normale in direzione radiale, denti dritti.



**Figura 5.7:** Grafico della tensione a fondo dente, ruota a denti dritti.

In figura 5.8 sono riportati i risultati ottenuti in termini di spostamento tangente. In seguito, per realizzare un confronto con gli spostamenti ottenuti nel modello semianalitico, occorrerà valutare lo spostamento relativo dato dalla differenza tra il valore di un dente non in contatto e quello del dente in presa di cui si valuta la tensione. In questo caso, lo spostamento relativo tra i due denti nei punti evidenziati risulta pari a 0.0063 mm. Il confronto tra gli spostamenti dei modelli è rimandato al capitolo finale.



**Figura 5.8:** Spostamento tangente, denti dritti.

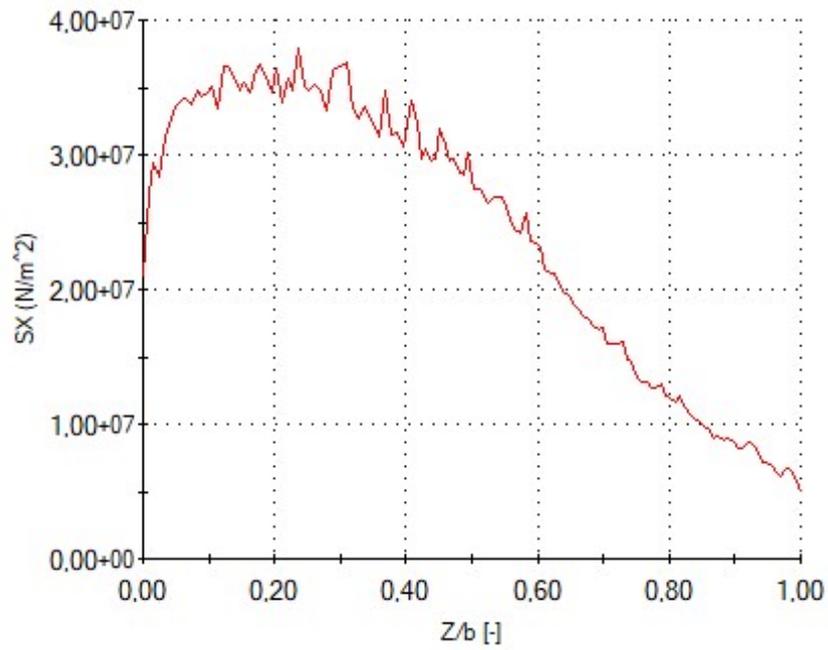
## 5.4 Risultati dello studio, denti elicoidali

Allo stesso modo, anche nel modello a denti elicoidali è stato adottato un sistema di riferimento in coordinate cilindriche in modo da poter definire in maniera più accurata la tensione a fondo dente.

### 5.4.1 Due coppie di denti in presa

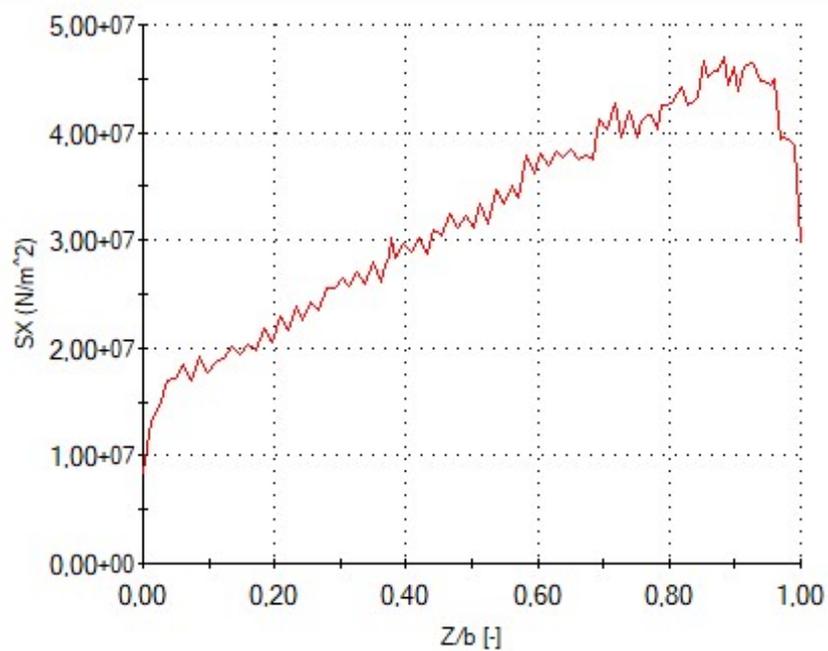
Nelle figure 5.9 e 5.10 sono illustrati i grafici della sollecitazione normale in direzione radiale a fondo dente in funzione della coordinata assiale Z (variabile da 0 a 60 mm) per unità di larghezza di fascia  $b$  (60 mm) rispettivamente per i denti numero 3 e 4. Il dente 3 è in contatto per poco più della prima metà della larghezza di fascia  $b$  e su tale dente la tensione tende a crescere e poi a decrescere gradualmente sino ad arrivare a tensioni molto basse per valori di Z in cui non vi è contatto con il dente della ruota condotta. Il dente 4 è interamente in contatto lungo tutta la larghezza di fascia e si registrano valori di tensioni in generale crescenti con la coordinata assiale (a meno degli effetti di bordo).

**Tensione a fondo dente 3 posizione angolare n° 22**



**Figura 5.9:** Grafico della tensione a fondo dente 3, 2 coppie di denti in presa.

**Tensione a fondo dente 4 posizione angolare n° 22**

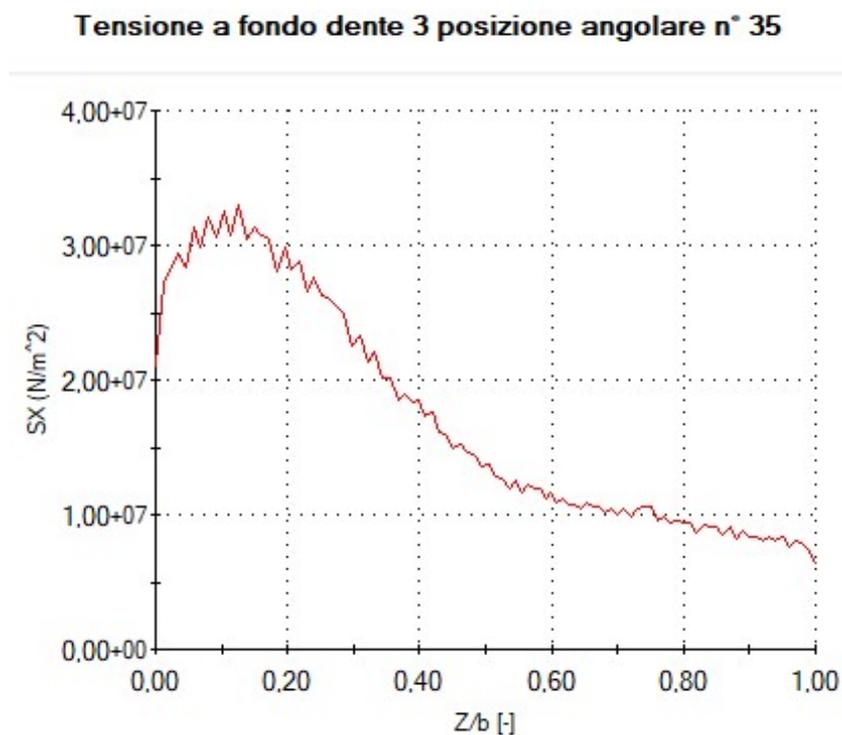


**Figura 5.10:** Grafico della tensione a fondo dente 4, 2 coppie di denti in presa.

## 5.4.2 Tre coppie di denti in presa

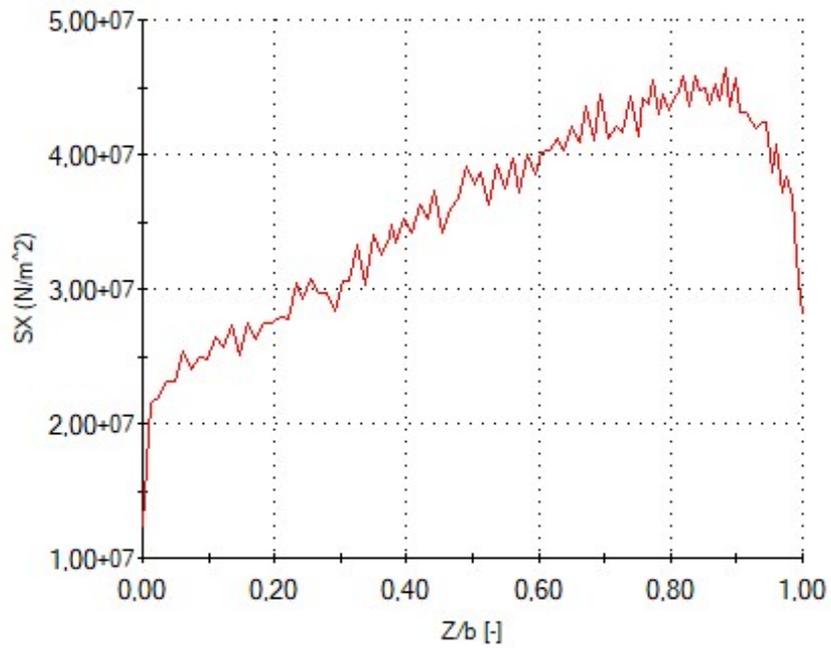
Nelle figure 5.11, 5.12 e 5.13 sono illustrati i grafici della sollecitazione normale in direzione radiale a fondo dente in funzione della coordinata assiale Z per unità di larghezza di fascia b rispettivamente per i denti numero 3 (in uscita), 4 e 5 (in ingresso). L'andamento della tensione sul dente 4 è analogo a quello della configurazione a 2 coppie di denti in presa. I valori registrati a fondo del dente 3 sono inizialmente crescenti e poi decrescono gradatamente, mentre sul dente 5 sono negativi alle coordinate Z in cui non vi è contatto e crescono gradualmente raggiungendo valori positivi nell'ultima parte della larghezza di fascia.

In figura 5.14 sono riportati i risultati di spostamento tangente per la configurazione a tre coppie di denti in presa. Successivamente, per confrontare l'esempio degli spostamenti del dente 3 ottenuti con il modello semianalitico e quelli ottenuti con il FEM occorrerà valutare lo spostamento relativo tra il dente 2 (non in contatto) e dente 3 (in uscita). Dalla differenza tra i valori dei denti 2 e 3 indicati in figura si ottiene uno spostamento di 0.001 mm.



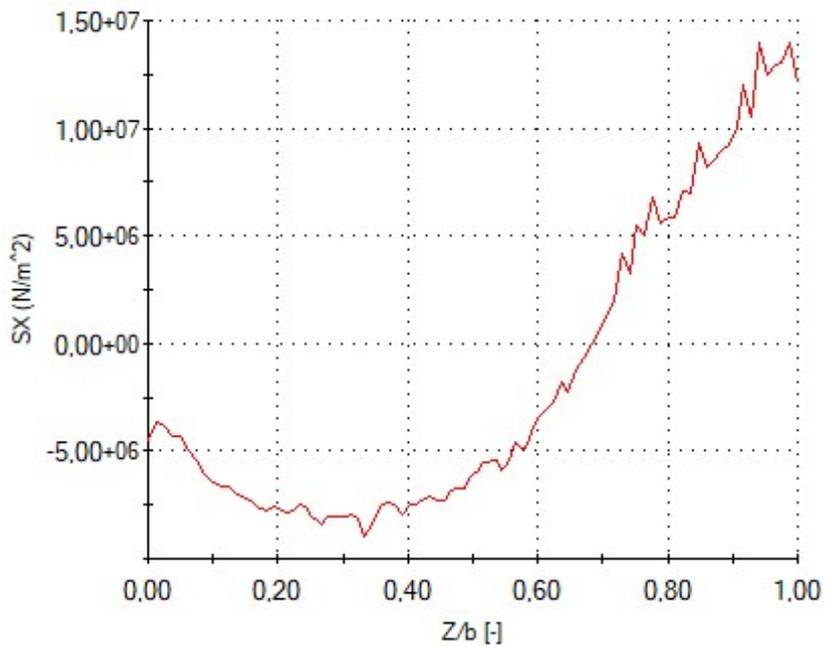
**Figura 5.11:** Grafico della tensione a fondo dente 3, 3 coppie di denti in presa.

**Tensione a fondo dente 4 posizione angolare n° 35**

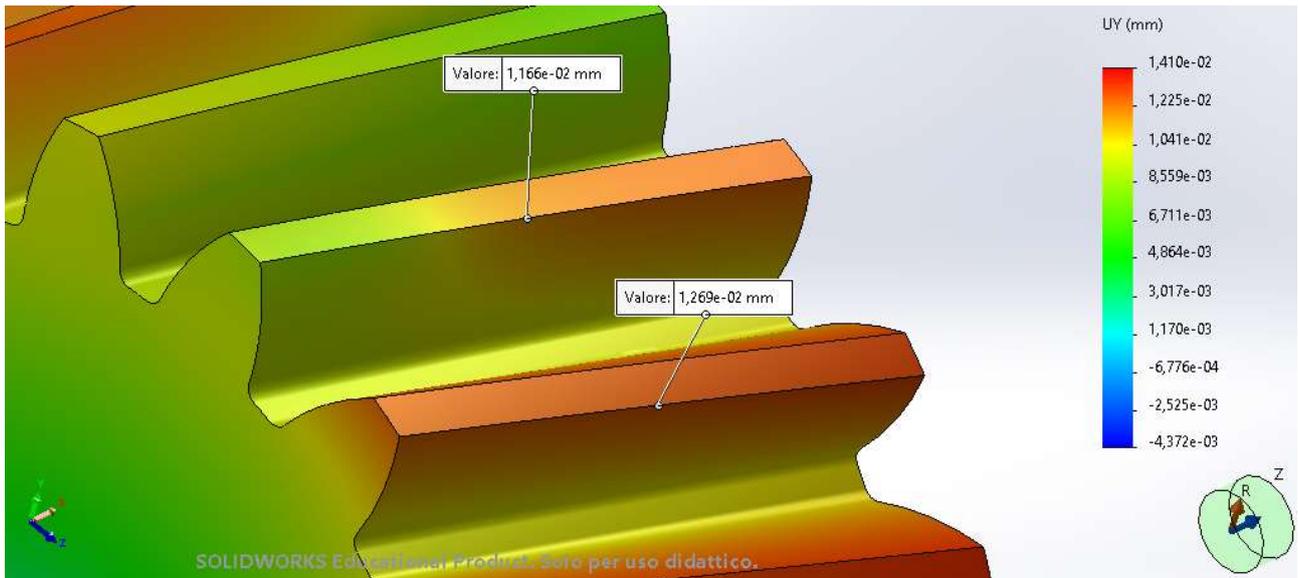


**Figura 5.12:** Grafico della tensione a fondo dente 4, 3 coppie di denti in presa.

**Tensione a fondo dente 5 posizione angolare n° 35**



**Figura 5.13:** Grafico della tensione a fondo dente 5, 3 coppie di denti in presa.



**Figura 5.14:** Spostamento tangente, 3 coppie di denti in presa.

## 6 Confronto tra i risultati dei modelli

Dopo aver calcolato le tensioni a fondo dente tramite il modello analitico, semianalitico e il FEM si confrontano i risultati ottenuti con le tre diverse metodologie di calcolo evidenziando gli eventuali miglioramenti dei risultati rispetto alla norma di riferimento ISO 6336-3, sia nel caso di ruote a denti dritti che nel caso di ruote a denti elicoidali.

### 6.1 Denti dritti

I modelli realizzati hanno permesso di determinare la tensione a fondo dente al variare della posizione angolare. La figura 6.1 mostra i valori di tensione a fondo del terzo dente ovvero quello che è in contatto durante l'intero intervallo di ingranamento.

Si osserva che, alle prime posizioni angolari essendo il dente 2 in uscita ed essendo presenti due coppie di denti in contatto, i valori di tensione sul dente 3 sono bassi. La scomparsa di contatto sul dente 2 determina una rapida crescita del carico e della tensione nel passaggio tra la quinta e la sesta posizione angolare.

Segue un intervallo di posizioni in cui è presente in contatto solo il dente 3 e il punto di applicazione del carico procedendo con la rotazione si allontana sempre di più dalla base del dente avvicinandosi alla punta con un conseguente incremento del valore di tensione.

Successivamente la tensione sul dente decade a causa della comparsa di contatto sul dente 4 e permane a valori minori sino all'ultima posizione angolare.

Osservando la figura appare evidente che per la quasi totalità dell'intervallo di ingranamento la tensione a fondo dente ottenuta con il modello semianalitico è inferiore a quella ottenuta con il modello analitico.

I valori di tensione dei due modelli risultano molto simili per le prime cinque posizioni angolari in cui vi è compresenza di contatto sui denti 2 e 3.

Nell'intervallo di posizioni in cui è in presa solamente il dente 3, lo scostamento tra le due tensioni è minimo all'inizio e poi aumenta sino al raggiungimento della tensione massima.

I punti di colore rosso evidenziano i valori di sollecitazione a fondo dente ottenuti con il FEM sul dente 3 nelle seguenti posizioni angolari di importanza rilevante:

- 5: ultima posizione angolare con presenza di contatto sul dente 2 ( $L_{sf} < 1$ )
- 6: prima posizione angolare di contatto unico sul dente 3 ( $L_{sf} = 1$ )
- 36: ultima posizione angolare di contatto unico sul dente 3 ( $L_{sf} = 1$ )
- 37: prima posizione angolare con presenza di contatto sul dente 4 ( $L_{sf} < 1$ )

I risultati del FEM evidenziano valori massimi di tensione minori rispetto a quelli ottenuti con gli altri due modelli.

In figura 6.1 è riportata anche la tensione nominale a fondo dente ottenuta con il procedimento di calcolo della normativa ISO 6336-3 illustrato nel capitolo 2. La differenza più rilevante rispetto ai modelli elaborati nella tesi è dovuta al fatto che la norma utilizza angoli costanti indipendentemente dalla posizione angolare in esame. Durante l'intervallo di posizioni in cui il fattore di condivisione del carico è costante e unitario si nota infatti che la tensione è costante.

Nei modelli sviluppati nella tesi si considera la variabilità della posizione del punto di applicazione del carico sul fianco del dente e dei corrispondenti angoli tra la forza normale nel fianco e la perpendicolare alla mezzeria del dente.

Osservando la figura si nota che, alle posizioni angolari che precedono il punto di massimo degli altri modelli, la norma sovrastima di una quantità rilevante la tensione poiché il punto di applicazione del carico utilizzato dalla norma è spostato più in alto rispetto al punto reale. Al contrario, alle posizioni angolari successive al punto di massimo, i valori della norma diventano via via più bassi.

In tabella 6.1 sono riassunti i valori di tensione a confronto dei modelli alle posizioni angolari descritte in precedenza, mentre in tabella 6.2 sono illustrati i risultati dei rapporti tra la tensione calcolata con il FEM e quella calcolata negli altri tre casi. Tanto più il rapporto si avvicina al valore unitario e tanto maggiore sarà la precisione di calcolo della tensione a fondo dente del modello. Si conclude quindi che il modello che approssima in modo più accurato i risultati è il semianalitico.

Confrontando inoltre i risultati di spostamento del modello semianalitico della figura 4.22 con quelli del FEM della figura 5.8 e valutando un punto sulla circonferenza di testa lontano dalla linea di contatto si ottengono spostamenti minori nel primo caso. In particolare, 0.0039 mm nel modello semianalitico e 0.0063 mm nel FEM. Essendo minori gli spostamenti del modello semianalitico si conclude che esso è più rigido e di conseguenza le tensioni sono maggiori rispetto al modello FEM.

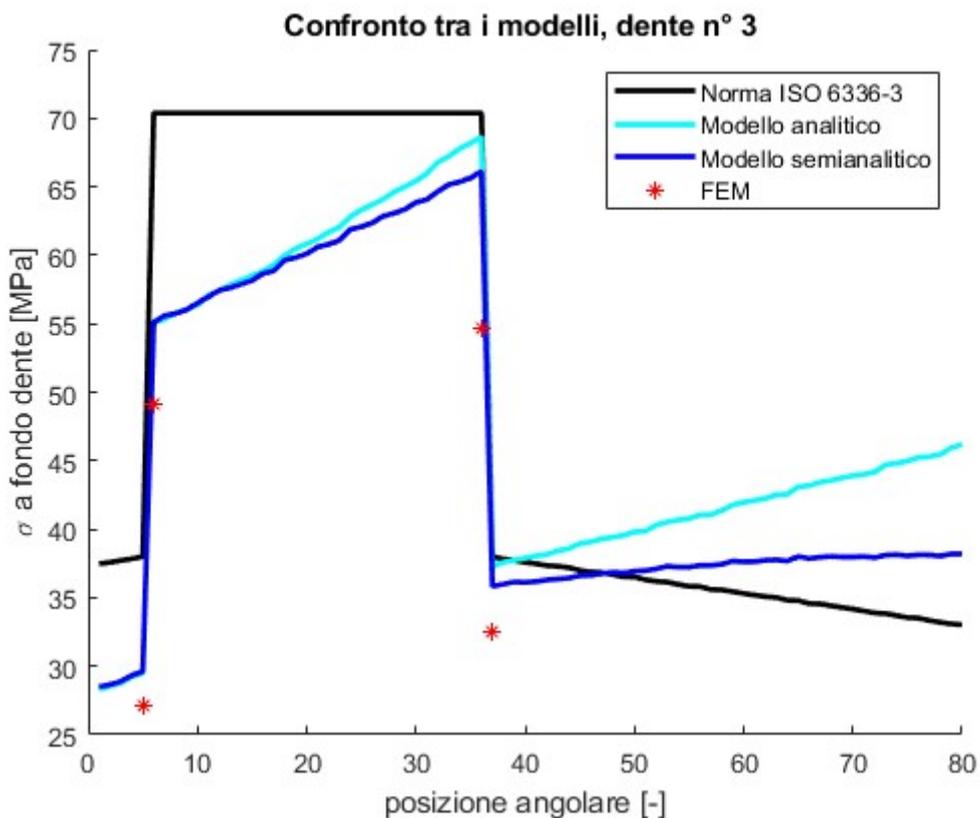


Figura 6.1: Confronto denti dritti, tensione a fondo dente.

Tabella 6.1: Tensione a fondo dente, denti dritti.

	p.a. n° 5	p.a. n° 6	p.a. n° 36	p.a. n° 37
$\sigma_{Analitico}$ [MPa]	29.51	55.05	68.64	37.29
$\sigma_{Semianalitico}$ [MPa]	29.61	55.1	66.13	35.83
$\sigma_{FEM}$ [MPa]	27.15	49.18	54.73	32.52
$\sigma_{ISO}$ [MPa]	38.01	70.38	70.38	38.01

**Tabella 6.2:** Rapporto tra le tensioni, denti dritti.

	p.a. n° 5	p.a. n° 6	p.a. n° 36	p.a. n° 37
$\sigma_{FEM} / \sigma_{ISO} [-]$	0.714	0.699	0.778	0.856
$\sigma_{FEM} / \sigma_{Analitico} [-]$	0.92	0.893	0.798	0.872
$\sigma_{FEM} / \sigma_{Semianalitico} [-]$	0.917	0.893	0.828	0.908

## 6.2 Denti elicoidali

La tensione a fondo dente nelle ruote elicoidali è stata valutata in funzione della coordinata assiale Z lungo la larghezza di fascia  $b$  a ciascuna posizione angolare. Le posizioni angolari fornite tra i dati sono in tutto 80 e nella tesi sono stati rappresentati graficamente i risultati ottenuti di due delle possibili configurazioni (a 2 e a 3 coppie di denti in presa rispettivamente nelle posizioni angolari numero 22 e 35).

Dai risultati del capitolo 2, ottenuti con il procedimento di calcolo secondo la norma ISO 6336-3, si è visto che la tensione a fondo dente è assunta costante lungo la larghezza di fascia della ruota. Questi risultati sono dettati dall'utilizzo di un punto di applicazione del carico sul fianco del dente che non varia con la posizione angolare e con la coordinata assiale della ruota. I modelli sviluppati per le ruote elicoidali, oltre a considerare la variazione del punto di applicazione con la posizione angolare come nei denti dritti, considerano anche l'effetto dovuto all'inclinazione della linea di contatto sul fianco del dente

Dai grafici di tensione ottenuti con il modello FEM si nota infatti che assumere costante la tensione a fondo dente in funzione della coordinata assiale Z corrisponde ad una forzatura e per questo motivo si è cercato di replicare l'andamento della tensione del FEM con un modello analitico e uno semianalitico.

Di seguito vengono presentati i confronti tra i risultati nelle configurazioni a 2 e a 3 coppie di denti in contatto.

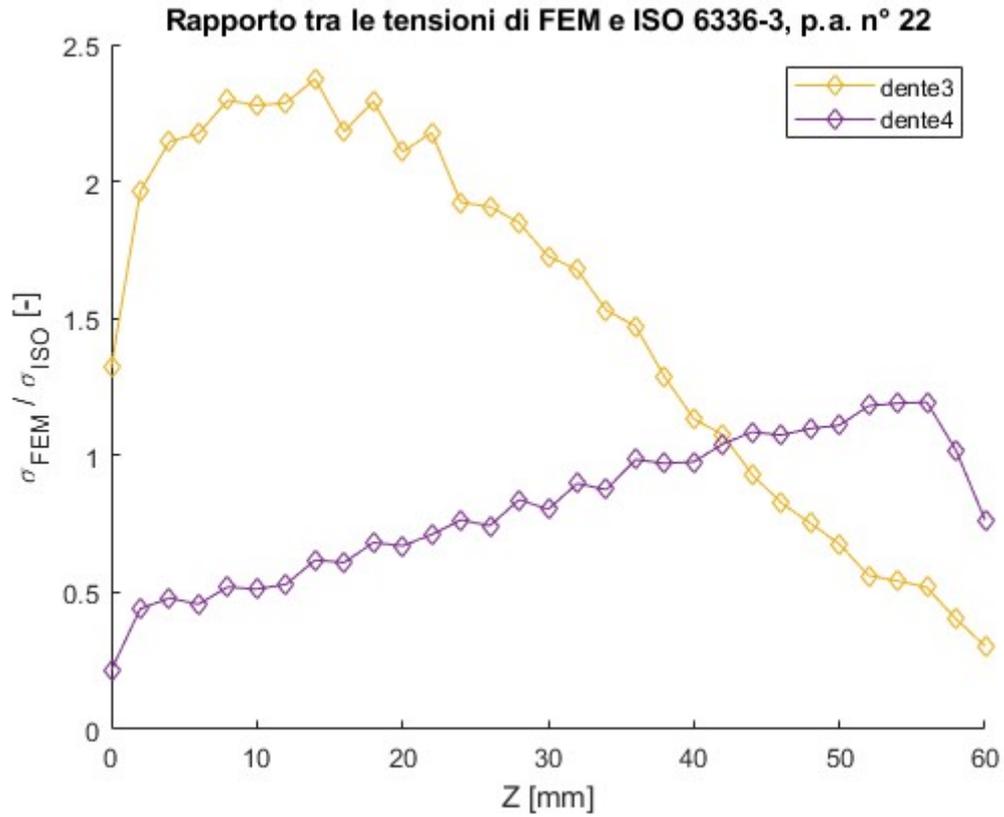
### 6.2.1 Confronto tra FEM e norma ISO 6336-3

Le figure 6.2 e 6.3 mostrano i risultati del confronto in termini di rapporto tra le tensioni del modello FEM e le tensioni calcolate secondo normativa, rispettivamente nelle configurazioni a 2 e a 3 coppie di denti in presa. Tanto più il rapporto tra le tensioni si avvicina al valore unitario e tanto maggiore è la precisione del calcolo secondo normativa.

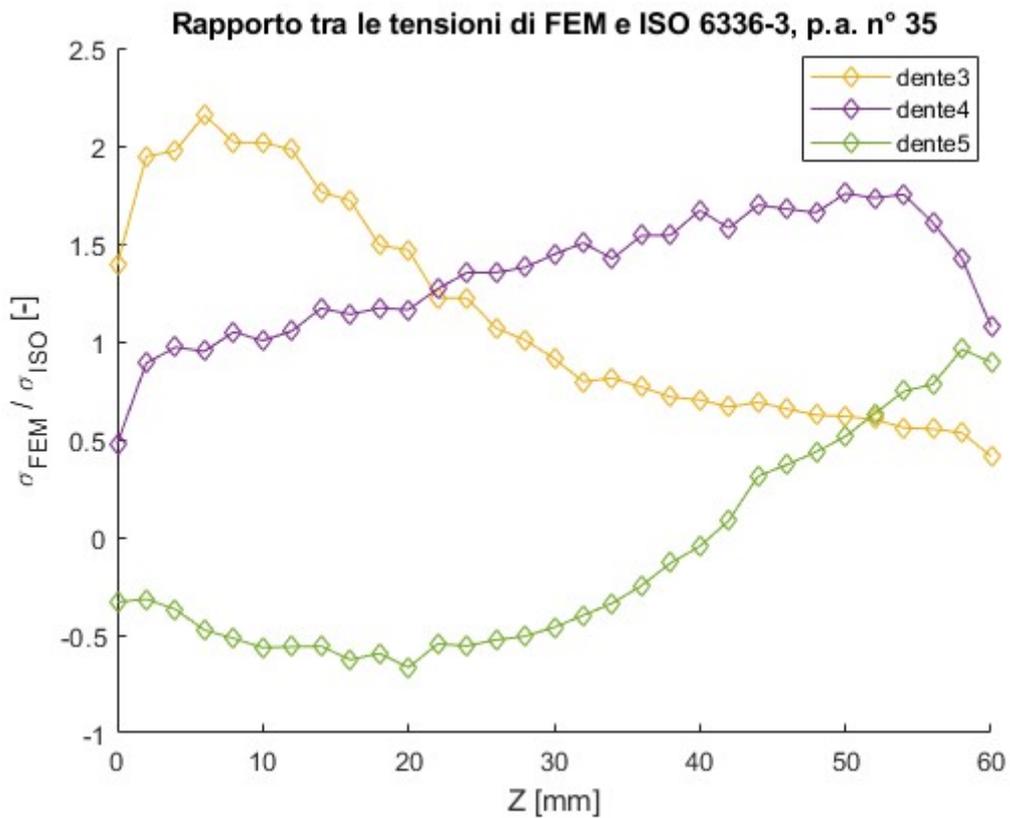
Osservando la figura 6.2 si nota che le tensioni calcolate con la norma sono sottostimate sul dente 3 soprattutto nella prima parte della larghezza di fascia con un rapporto massimo di poco inferiore a 2.5, mentre alle coordinate Z in cui non vi è contatto sul dente i valori tendono a divenire progressivamente inferiori ad uno. Sul dente 4, in contatto completo lungo la larghezza di fascia, le tensioni sono sottostimate per la seconda metà dei valori di Z.

Osservando la figura 6.3, sul dente 3, nella zona di contatto, le tensioni del FEM sono circa doppie di quelle della norma e ai valori Z di non contatto il rapporto decresce progressivamente. Sul dente 4 la sottostima delle tensioni tendenzialmente aumenta all'aumentare di Z, a meno degli effetti di bordo. Sul dente 5 si ha una buona stima nell'ultima parte della larghezza di fascia dove vi è contatto, con rapporti circa minori o uguali ad uno.

In termini di affidabilità del metodo sarebbe più corretto che le tensioni della norma fossero maggiori di quelle del FEM con un rapporto vicino ma inferiore ad uno.



**Figura 6.2:** Rapporto tra le tensioni di FEM e ISO 6336-3, 2 coppie di denti in presa.



**Figura 6.3:** Rapporto tra le tensioni di FEM e ISO 6336-3, 3 coppie di denti in presa.

## 6.2.2 Confronto tra FEM e modello analitico

Le figure 6.4 e 6.5 mostrano i risultati del confronto in termini di rapporto tra le tensioni del modello FEM e le tensioni del modello analitico, rispettivamente nelle configurazioni a 2 e a 3 coppie di denti in presa.

Le tensioni a fondo dente ottenute con il modello analitico sono tendenzialmente maggiori rispetto al FEM eccetto sul dente 4 nella configurazione a due coppie di denti in presa di figura 6.4.

Il dente 3 di tale figura è in contatto con il dente della ruota condotta sino al valore  $Z$  di 34  $mm$  e mentre le tensioni del FEM hanno un andamento che prima cresce e poi decresce, nel modello analitico l'andamento è sempre crescente determinando un rapporto minimo tra le tensioni inferiore a 0.5 alla quota  $Z$  di 34  $mm$ .

Osservando la configurazione a tre denti in presa di figura 6.5, si ha una buona stima delle tensioni sul dente 4 soprattutto nella seconda metà della larghezza di fascia dove il rapporto tra le tensioni è di poco inferiore ad 1. Per quanto riguarda i denti 3 e 4 si ha una sovrastima eccessiva delle tensioni da parte del modello soprattutto sul dente 5 dove si registrano valori maggiori del doppio rispetto al FEM.

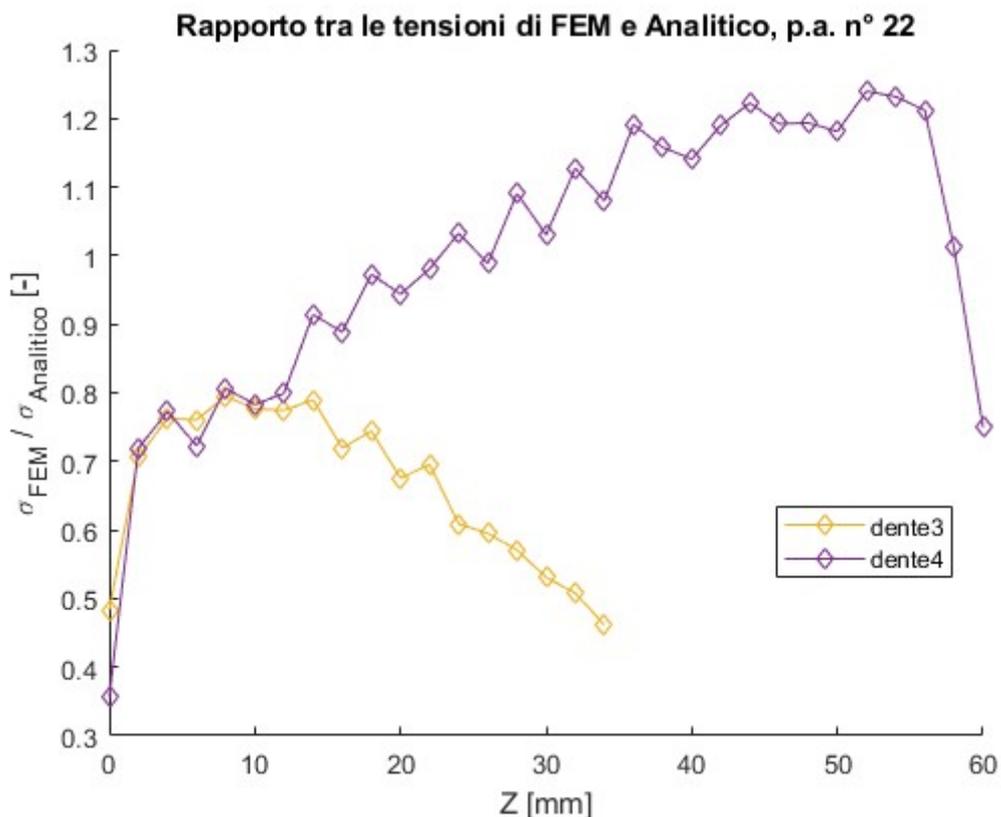


Figura 6.4: Rapporto tra le tensioni di FEM e modello analitico, 2 coppie di denti in presa.

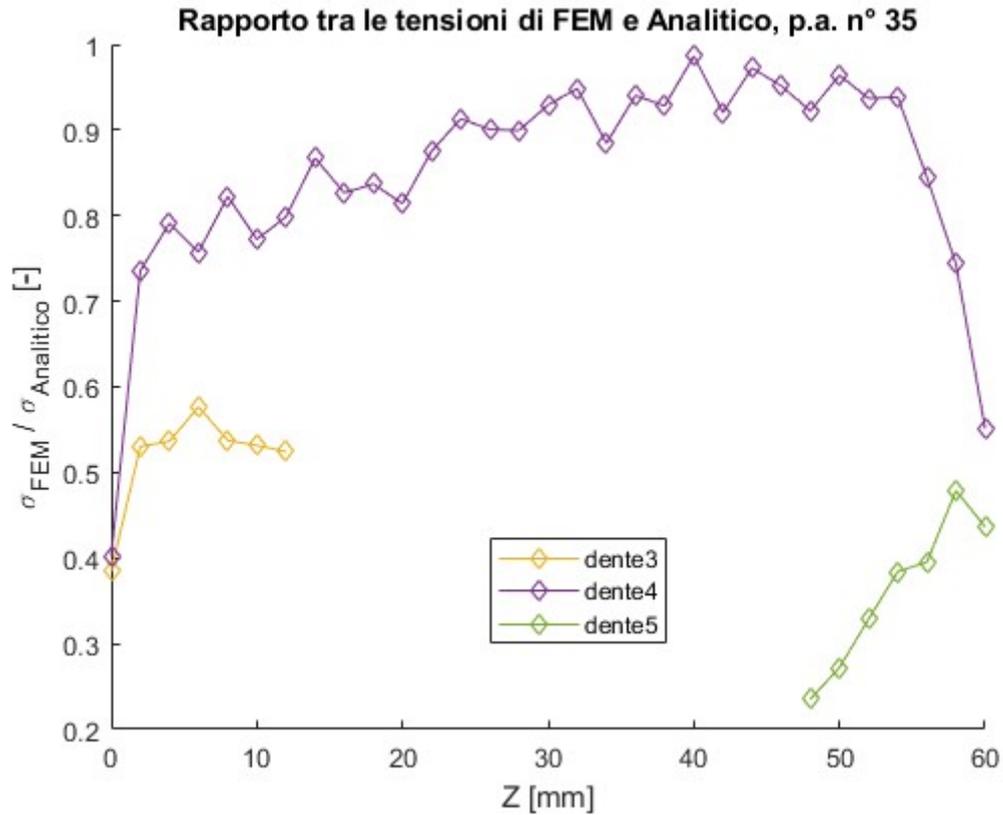
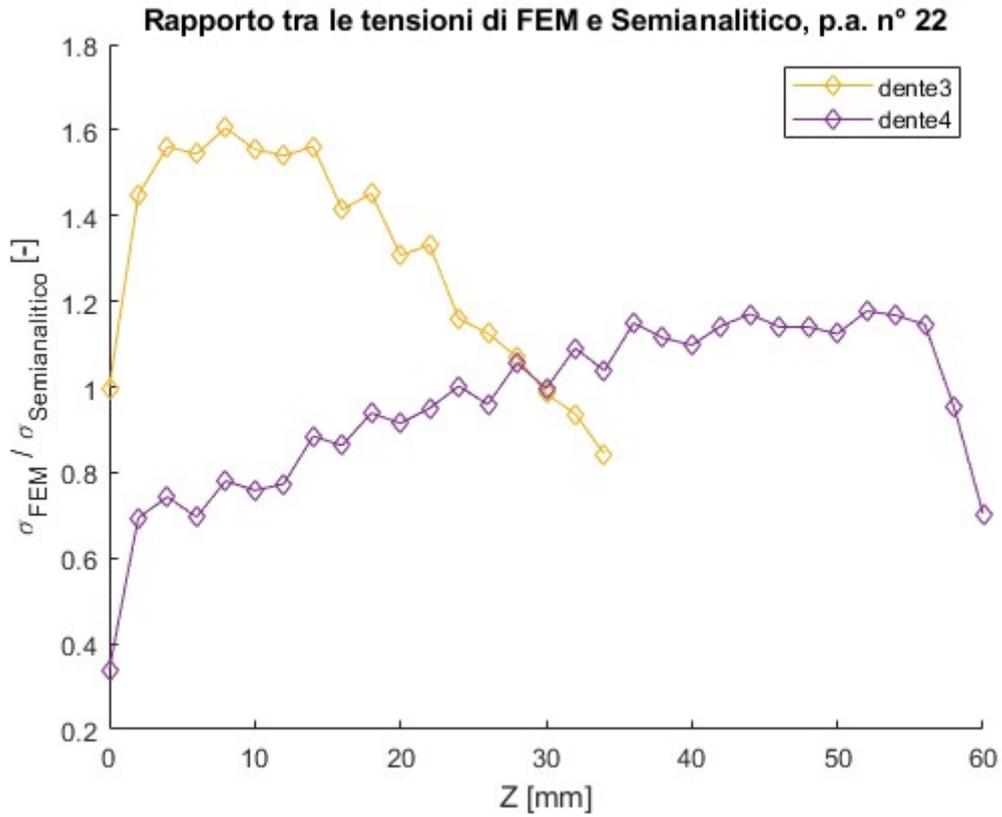


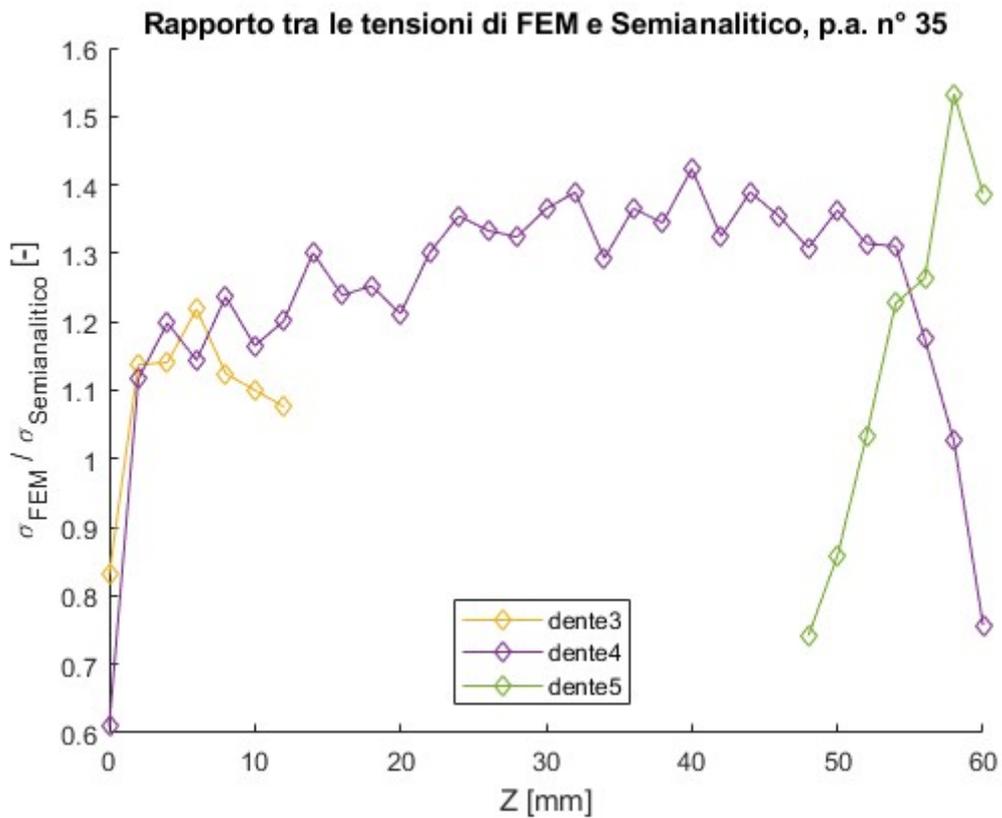
Figura 6.5: Rapporto tra le tensioni di FEM e modello analitico, 3 coppie di denti in presa.

### 6.2.3 Confronto tra FEM e modello semianalitico

Le figure 6.4 e 6.5 mostrano i risultati del confronto in termini di rapporto tra le tensioni del modello FEM e le tensioni del modello semianalitico, rispettivamente nelle configurazioni a 2 e a 3 coppie di denti in presa. I due grafici mostrano tendenzialmente un rapporto superiore al valore unitario e quindi tale modello sottostima la tensione a fondo dente. Tali risultati sono ottenuti considerando un fattore di correzione della tensione pari a quello calcolato secondo normativa con valore 1.8134.



**Figura 6.6:** Rapporto tra le tensioni di FEM e modello semianalitico, 2 coppie di denti in presa.



**Figura 6.7:** Rapporto tra le tensioni di FEM e modello semianalitico, 3 coppie di denti in presa.

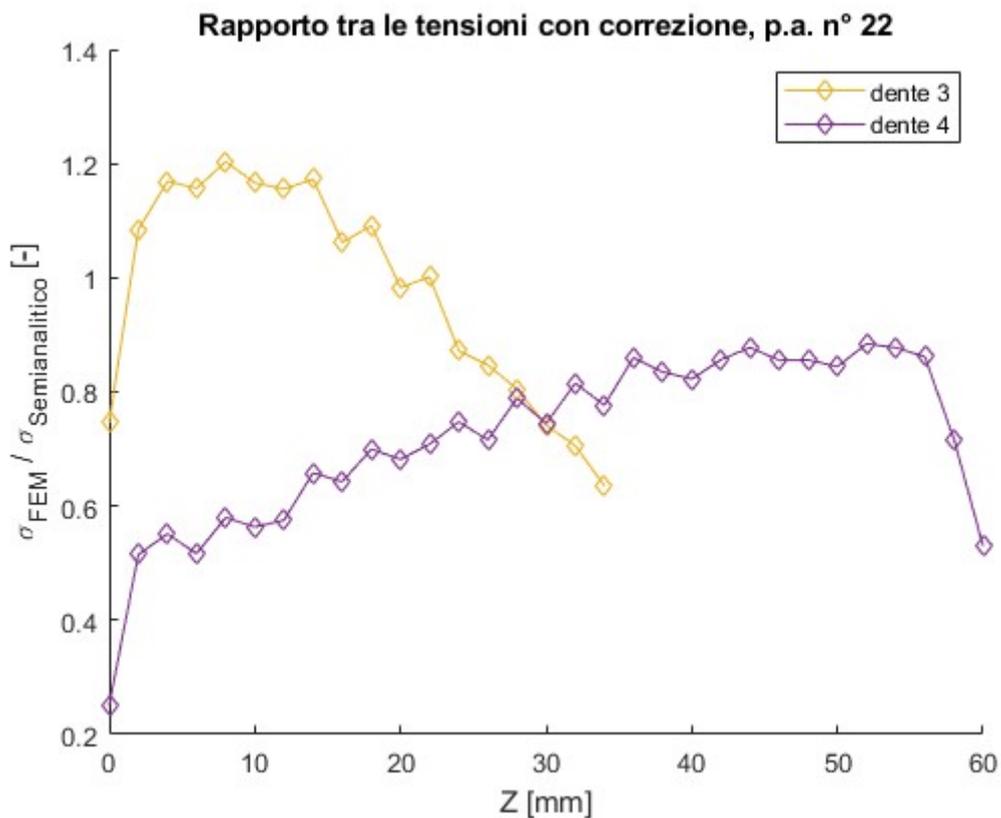
Data l'evidente sottostima è stato scelto di incrementare il fattore di correzione della tensione del 30% in modo tale da avvicinare il rapporto al valore unitario e cercare di mantenere le tensioni del modello FEM inferiori a quelle del modello semianalitico. Il fattore di intaglio  $Y_{S1}$  corretto risulterà quindi pari a 2.3574.

Le figure 6.8 e 6.9 mostrano i risultati dei rapporti tra le tensioni ottenuti apportando tale correzione rispettivamente nelle configurazioni a 2 e a 3 coppie di denti in presa. Nelle figure 6.10 e 6.11 sono riportati i corrispondenti valori di tensione del modello semianalitico dopo la correzione.

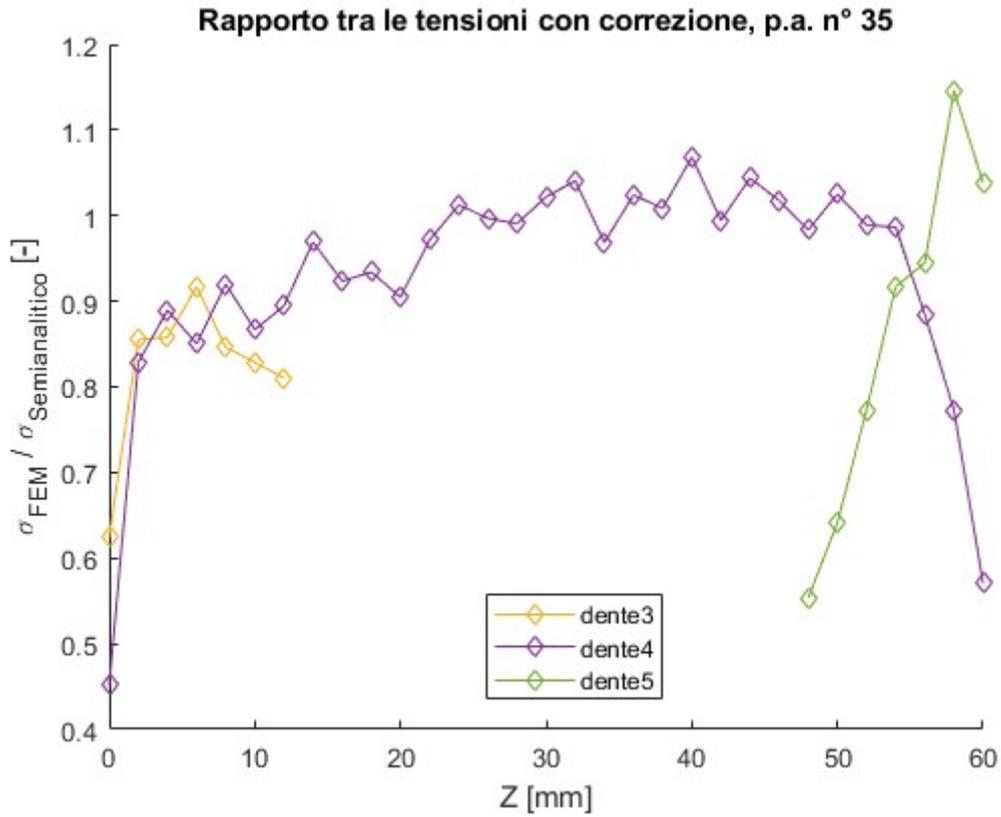
Nella configurazione a due denti in presa si nota che, nella prima parte della larghezza di fascia permane una sottostima massima delle tensioni circa pari al 20% sul dente 3 dovuta ad un andamento prima crescente e poi decrescente della tensione ottenuta tramite il modello FEM. Sul dente 4 si nota invece un rapporto ovunque inferiore ad uno con andamento medio crescente con la coordinata Z giustificato dalla differente pendenza tra le curve dei due modelli.

Nella configurazione a 3 denti in presa si ottengono buoni risultati sui denti 3 e 4, mentre sul dente 5 i valori sono anche in questo caso giustificati dalla differente pendenza tra le curve dei due modelli.

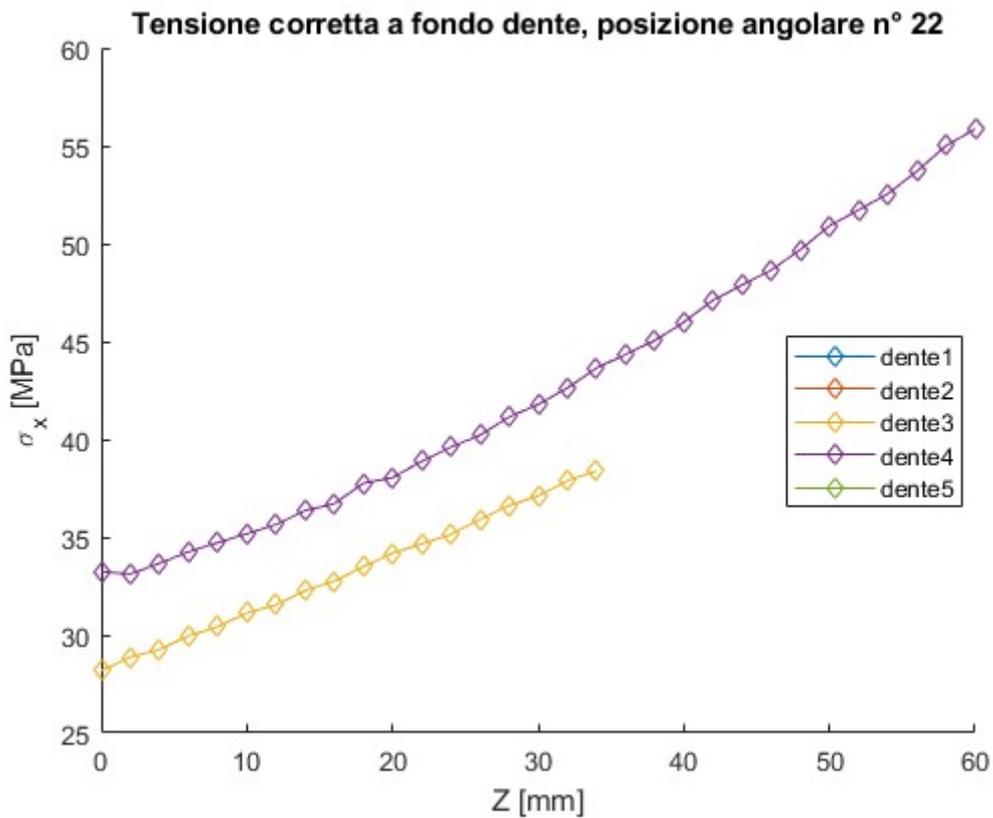
Analogamente al caso a denti dritti sono stati confrontati i risultati di spostamento della figura 4.23 del modello semianalitico con quelli del FEM della figura 5.14 e valutando un punto sulla circonferenza di testa lontano dalla linea di contatto a metà larghezza di fascia si ottengono spostamenti coerenti pari a 0.001 mm.



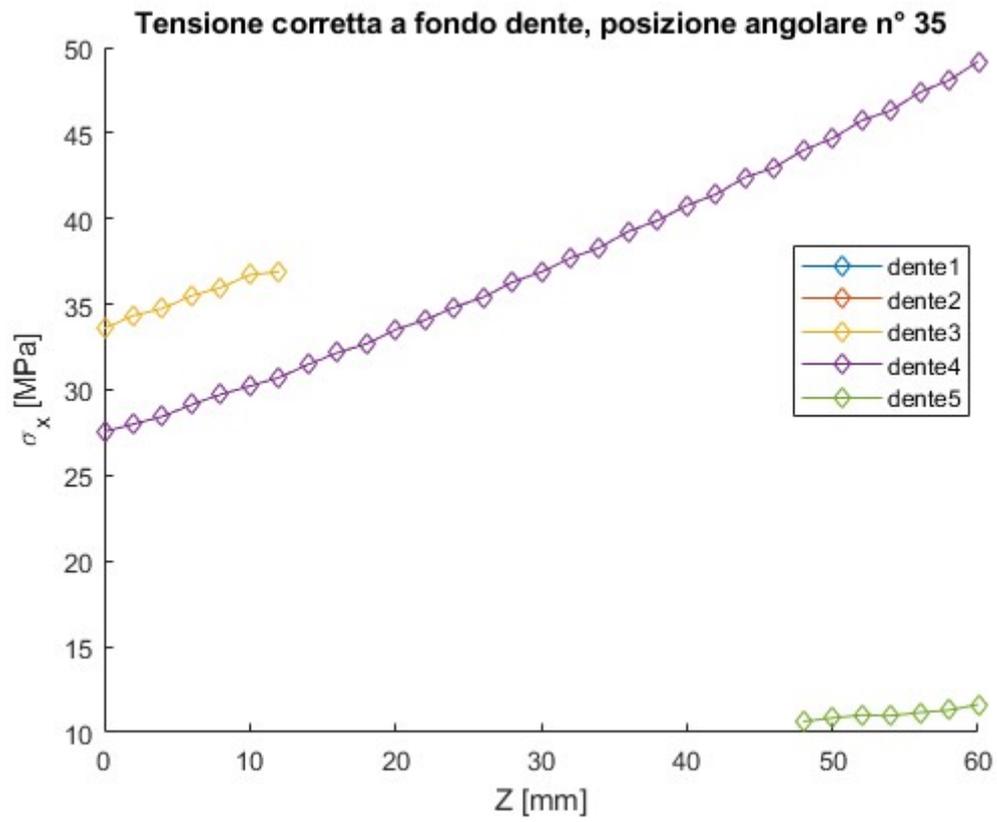
**Figura 6.8:** Rapporto tra le tensioni di FEM e semianalitico dopo la correzione, 2 coppie di denti in presa.



**Figura 6.9:** Rapporto tra le tensioni di FEM e semianalitico dopo la correzione, 3 coppie di denti in presa.



**Figura 6.10:** Tensione corretta a fondo dente, 2 coppie di denti in presa.



**Figura 6.11:** Tensione corretta a fondo dente, 3 coppie di denti in presa.

# Conclusioni

Il presente lavoro di tesi ha permesso di analizzare la tensione a fondo dente con metodi alternativi rispetto a quello della norma di riferimento ISO 6336. Utilizzando tali metodi è stato possibile analizzare lo stato di sollecitazione dei denti in contatto durante l'ingranamento.

Nel caso di ruote a denti dritti la tensione a fondo dente è stata analizzata in funzione della posizione angolare e considerata costante lungo la larghezza di fascia.

Per le ruote a denti elicoidali la tensione a fondo dente è stata esaminata, ad ogni posizione angolare, in funzione della coordinata assiale della ruota.

Contrariamente alla norma, il punto in cui viene applicato il carico e il corrispondente angolo di inclinazione della forza rispetto alla normale alla mezzeria del dente non sono unici ma variano in funzione della posizione angolare. Nel caso a denti elicoidali, per effetto dell'angolo d'elica, si è considerata la variabilità del punto di applicazione del carico anche in funzione della coordinata assiale della ruota e a cui corrisponde una variazione della tensione lungo tale asse.

Nei denti dritti, dal confronto tra i risultati dei modelli, è emerso che la norma produce valori di stress tendenzialmente maggiori rispetto agli altri modelli. In particolare, le tensioni a fondo dente ottenute con i modelli analitico e semianalitico danno risultati molto simili tra loro e di poco inferiori nel caso semianalitico.

Il modello semianalitico è quindi quello che si avvicina di più ai risultati del FEM e, nel primo caso, essendo minori gli spostamenti è coerente il fatto che ad una rigidità maggiore corrispondano tensioni più elevate rispetto al FEM.

Nei denti elicoidali si è visto che la tensione dovrebbe variare lungo la larghezza di fascia del dente e che questo non accade nel calcolo secondo normativa a seguito delle assunzioni fatte. Dai risultati del modello analitico si ottiene in generale una sovrastima degli stress a fondo dente tendenzialmente maggiore sui denti parzialmente in contatto in direzione assiale.

Nel modello semianalitico è stato opportuno incrementare il fattore di intaglio di una quota pari al 30% rispetto al valore calcolato secondo normativa e in questo modo si sono ottenuti risultati più vicini al FEM rispetto a quelli del modello analitico.

Anche nel caso a denti elicoidali il modello semianalitico è quello che si avvicina di più ai risultati del FEM e, essendo analoghi gli spostamenti, è coerente il fatto le tensioni siano simili.

# Bibliografia

- [1] Carlo Ferraresi, Terenziano Raparelli, *Meccanica applicata*, CLUT - Torino, 2007.
- [2] Antonio Gugliotta, Giovanni Belingardi, *Ingranaggi cilindrici a denti dritti*, Slide del Corso di Costruzione di Macchine.
- [3] <https://www.koreindustries.com/getting-familiar-with-the-nomenclature-of-gears/>
- [4] [https://www.mcurie.edu.it/files/ruggiero.antonio/Ruote\\_a\\_denti\\_elicoidalidocx.pdf](https://www.mcurie.edu.it/files/ruggiero.antonio/Ruote_a_denti_elicoidalidocx.pdf)
- [5] <http://dma.ing.uniroma1.it/users/broggiato/cdm/ancona/no/ecdm-ps/dispense/Ingranaggi2.pdf>
- [6] BS ISO 6336-1, *Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors*, 2019.
- [7] BS ISO 6336-3, *Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 3: Calculation of tooth bending strength*, 2019.
- [8] [https://www.researchgate.net/figure/Typical-cutting-methods-of-spur-gears-2-a-shaping-b-forming-and-c-hobbing\\_fig1\\_282268647](https://www.researchgate.net/figure/Typical-cutting-methods-of-spur-gears-2-a-shaping-b-forming-and-c-hobbing_fig1_282268647)
- [9] Toni Jabbour, Ghazi Asmar, *Tooth stress calculation of metal spur and helical gears*, 2015.
- [10] Luca Goglio, *Fondamenti di meccanica strutturale*, 2016.
- [11] Aurelio Somà, *Fondamenti di meccanica strutturale*, Levrotto & Bella – Torino, 2016.
- [12] Alberto Carpinteri, *Scienza delle costruzioni 1*, Pitagora Editrice, Bologna, 1992.
- [13] A. Gugliotta, *Elementi finiti – Parte 1*, Politecnico di Torino, maggio 2002.
- [14] Odone Belluzzi, *Scienza delle costruzioni*, Zanichelli, 1989.
- [15] Giancarlo Genta, *Vibration Dynamics and Control*, Springer, 2009.
- [16] [https://www.sesamx.io/blog/standard\\_linear\\_beam\\_element/](https://www.sesamx.io/blog/standard_linear_beam_element/)
- [17] [http://help.solidworks.com/2019/italian/SolidWorks/SWHelp\\_List.html?id=4a96b6af662b4481be095defdfc2776#Pg0](http://help.solidworks.com/2019/italian/SolidWorks/SWHelp_List.html?id=4a96b6af662b4481be095defdfc2776#Pg0)