



POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica LM-33

Tesi di Laurea Magistrale

**Analisi dinamica delle  
sollecitazioni  
di una torre eolica**

Relatore

Prof. Alessandro Fasana

Candidato

Maria Anna dell'Aquila

Matricola: 264963

ANNO ACCADEMICO 2020-2021

La  
dedica  
di questa tesi  
è divisa  
in sette modi:  
ai miei nonni,  
a mia madre  
a mio padre  
a mio fratello,  
ai miei amici,  
ai miei colleghi,  
e a tutti voi,  
se siete  
rimasti  
con me  
fin proprio  
alla  
fine.

## **BREVI RINGRAZIAMENTI**

Vorrei aprire queste poche righe ringraziando il Prof. Ing. Alessandro Fasana per la fiducia che ha riposto in me accettando il ruolo di relatore e per essere sempre stato di supporto lungo questo percorso di tesi.

Una famosa frase di Woody Allen recita: “Se vuoi far ridere Dio, raccontagli i tuoi progetti”. La laurea a distanza non era certo quello che sognavo quando ho scelto il Politecnico e Torino come luogo di studi, ma poi ho capito che l'importante è tagliare questo traguardo con tutte le persone a cui tengo accanto a me...o a distanza ma comunque vicine.

Sono davvero contenta di poter affermare che le persone da me precedentemente ringraziate più di due anni fa sono ancora i perni saldi della mia vita e sono certa che rimarranno tali, ma a volte non si ringrazia mai abbastanza, per cui, mi perdonerò chi legge, se mi ripeterò.

Il mio più grande GRAZIE va alla mia famiglia, a mia madre, mio padre e mio fratello, che mi sono stati sempre accanto e hanno supportato (e a volte sopportato) la mia scelta di vivere lontano da casa. Grazie perché siamo riusciti a colmare quasi 1000 km con le chiamate giornaliere, i pacchi da giù e le panzerottate infinite. Non ve lo dico mai abbastanza, ma è solo grazie al vostro sostegno e ai vostri sacrifici che oggi sto realizzando un altro sogno.

Ancora grazie alle mie amiche di una vita, Giada, Giulia, Maria, Michela e Annalisa che non mi hanno mai abbandonato nemmeno per un secondo, nonostante la distanza. So che se mi guardassi intorno, vi troverei sempre accanto a me e sono sicura che sarà così per gli anni a venire. Grazie a chi in questi due anni ha voluto scoprire con me la bellezza di Torino, permettendo di unire questi mondi e a chi, sono certa, lo farà nel prossimo futuro.

Grazie a chi non mi ha mai fatto sentire sola nemmeno per un giorno a Torino, ad Antonella, Arianna e Chiara. Questo ‘Erasmus in terra Torinese’ non

sarebbe stato lo stesso senza di loro perché ogni momento era buono per un caffè, un calice di vino o un cannolo, parlando dei detti terlizzesi e di qualsiasi altra cosa ci passasse per la testa. Grazie per le cene chiassose e poco sobrie e per le serate da ricordare. Per merito vostro ora ho un pezzo di Torino nel mio cuore e spero che voi abbiate un pezzo di Puglia nel vostro.

Ringrazio quelli che sarebbe riduttivo chiamare compagni di studio, Miki, Pierpi, Michele e Francesco, perché non importa quanto fosse difficile un esame, bastava un pranzo insieme o una canzone per alleggerire qualsiasi sessione di studio. Ringrazio anche Domenico, perché, pur non essendo più compagni di corso, ci siamo aiutati a vicenda, stimolandoci ogni giorno con nuovi progetti.

Un ultimo ringraziamento a tutti coloro che sono stati accanto a me in questo percorso, a tutti i professori e i colleghi che ho incontrato in questi cinque anni.

*Mario A. dell'Aquila*

# INDICE

INDICE DELLE FIGURE .....	VI
SOMMARIO.....	1
1. INTRODUZIONE.....	3
1.1. L'energia eolica e gli aerogeneratori.....	3
1.2. Caratterizzazione della torre in esame.....	4
2. CARICHI SULLA TORRE .....	8
2.1. Design Load Cases .....	8
2.2. Tipi di carico .....	11
2.3. Carichi dovuti alla pressione del vento .....	12
2.3.1. Velocità di riferimento .....	12
2.3.2. Condizioni del vento normali.....	13
2.3.3. Condizioni del vento estreme.....	15
2.3.4. Pressione del vento sulla torre .....	19
2.3.5. Pressione del vento delle pale sulla torre .....	21
2.4. Altri carichi rilevanti .....	23
2.4.1. Carichi sismici.....	23
2.4.2. Shadowing.....	26
3. METODOLOGIE DI ANALISI .....	28
3.1. Analisi non lineare.....	28
3.1.1. Analisi multilink con pendoli inversi.....	28
3.1.2. Principio di Hamilton.....	36
3.2. Analisi lineare.....	44
3.2.1. Definizione e soluzione dell'autoproblema differenziale .....	46

3.2.2.	Analisi della risposta forzata – Metodo di Galerkin .....	52
3.3.	Analisi agli Elementi Finiti (FEM) .....	54
4.	ANALISI NUMERICA .....	61
4.1.	Analisi Modale .....	61
4.2.	Analisi Armonica .....	66
4.3.	Analisi Transiente.....	73
4.4.	Analisi di risposta spettrale per i carichi sismici .....	76
4.5.	Analisi a Fatica .....	79
5.	CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI.....	84
5.1.	Controllo con Tuned Mass Damper (TMD).....	84
5.2.	Controllo con Elastoplastic Coil Spring Damper (CSD).....	95
6.	CONCLUSIONI.....	99
	BIBLIOGRAFIA .....	i

## INDICE DELLE FIGURE

Figura 1-1 Curva di Potenza FD25-60 .....	6
Figura 1-2 Sistema di riferimento torre eolica .....	6
Figura 2-1 Carichi su una torre eolica - (a) carichi gravitazionali - (b) carichi ciclici - (c) carichi stocastici .....	11
Figura 2-2 Normal Wind Profile della FD25-60.....	14
Figura 2-3 Normal Turbulence Model da IEC 61400-1.....	15
Figura 2-4 Extreme Operating Gust.....	16
Figura 2-5 Extreme Direction Change .....	18
Figura 2-6 Extreme Coherent Gust with Direction Change ad altezza navicella .....	18
Figura 2-7 Forza del vento sulla torre .....	21
Figura 2-8 Forza delle pale sulla torre .....	22
Figura 2-9 Spettro elastico dell'accelerazione .....	26
Figura 2-10 Tower shadow in due diverse configurazioni.....	27
Figura 3-1 Configurazione deformata.....	29
Figura 3-2 Configurazione indeformata.....	29
Figura 3-3 Carichi agenti sulla torre .....	30
Figura 3-4 FDB i-esimo elemento .....	31
Figura 3-5 FDB Ultimo elemento .....	31
Figura 3-6 FDB Primo elemento.....	32
Figura 3-7 Modello multilink a pendoli inversi – deformate dei primi tre modi in funzione dell'angolo .....	35
Figura 3-8 Configurazione indeformata (nero) e deformata (blu) .....	37
Figura 3-9 Definizione di curvatura.....	39
Figura 3-10 Sistema massa molla smorzatore.....	44
Figura 3-11 Cantilever Beam Tip .....	46
Figura 3-12 Modi flessionali della trave incastrata libera con massa .....	50

Figura 3-13 Confronto tra le frequenze proprie della cantilever beam con (blu) e senza (rossa) massa .....	51
Figura 3-14 Elemento trave - funzioni di forma .....	56
Figura 3-15 Elementi finiti - primi tre modi per N=100 .....	60
Figura 4-1 Modelli di torre eolica: a) diametro costante senza massa; b) diametro costante con massa all'estremità; c) rastremato senza massa; d) rastremato con massa. ....	62
Figura 4-2 Confronto tra le deformate e le frequenze .....	65
Figura 4-3 Recettanza - a) smorzamento nullo - b) smorzamento $\xi=0.02$ - c) smorzamento $\xi=0.05$ .....	69
Figura 4-4 Analisi armonica - impostazione dei carichi .....	70
Figura 4-5 Spostamento - a) smorzamento nullo - b) smorzamento $\xi=0.02$ - c) smorzamento $\xi=0.05$ .....	71
Figura 4-6 Spostamento a $f=0.75$ Hz - a) smorzamento nullo - b) smorzamento $\xi=0.02$ - c) smorzamento $\xi=0.05$ .....	72
Figura 4-7 Carico analisi transiente .....	74
Figura 4-8 Analisi transiente - Smorzamento nullo - a) deformazione totale - b) deformazione direzionale asse x .....	75
Figura 4-9 Analisi transiente - Smorzamento 0.02 - a) deformazione totale - b) deformazione direzionale asse x .....	75
Figura 4-10 Analisi transiente - Smorzamento 0.05 - a) deformazione totale - b) deformazione direzionale asse x .....	76
Figura 4-11 Spettro elastico dell'accelerazione .....	77
Figura 4-12 Risultati dell'analisi - Directional Deformation (sinistra) e Directional Acceleration (a destra) .....	78
Figura 4-13 Curva teorica di Wohler in scala Log Log .....	79
Figura 4-14 Curva di Wohler per l'acciaio S235J0 .....	80
Figura 4-15 Carichi equivalenti a fatica per $10^7$ cicli e 20 anni di vita .....	80
Figura 4-16 Carico alterno simmetrico .....	81

Figura 4-17 Analisi statica - a) Tensione equivalente di Von Mises b) Deformazione totale .....	81
Figura 4-18 Analisi a fatica - a) Cicli di vita b) Coefficiente di sicurezza ..	82
Figura 5-1 Schema di un Tuned Mass Damper.....	85
Figura 5-2 Aerogeneratore con TMD classico (a) e TMD pendolo (b) - Figura tratta da [28] .....	85
Figura 5-3 Schema a due gradi di libertà con pendolo TMD.....	89
Figura 5-4 Recettanza del sistema SDOF equivalente.....	91
Figura 5-5 Recettanza dopo l'inserimento del TMD .....	92
Figura 5-6 Costruzione molla in Ansys Workbench.....	93
Figura 5-7 Risposta in frequenza - a sinistra: primo approccio - a destra: secondo approccio .....	93
Figura 5-8 Risposta in frequenza per $F_b$ - a sinistra: primo approccio (Ansys sopra e Matlab sotto) - a destra: secondo approccio (Ansys sotto e Matlab sotto).....	94
Figura 5-9 Coil Spring Damper - Schema e caratteristiche principali .....	95
Figura 5-10 Aerogeneratore con CSD .....	97

## SOMMARIO

La produzione di elettricità sfruttando la potenza del vento è una risorsa energetica pulita, rinnovabile e a basso impatto ambientale. La struttura snella e flessibile delle torri può però subire eccessivi livelli di vibrazione, per cui, in questo lavoro di tesi, si è deciso di eseguire un'analisi delle sollecitazioni di una turbina minieolica da 60 kW.

Dopo aver definito le caratteristiche tecniche e meccaniche, si sono calcolati tutti i carichi a cui, durante la vita utile, la torre è soggetta, normati a livello nazionale, europeo e mondiale e si è definita la configurazione di forze da studiare.

La dinamica della torre è stata analizzata utilizzando diversi modelli matematici. Dapprima è stato considerato un approccio non lineare, ricavando le equazioni del moto attraverso due metodologie: analisi multilink con pendoli inversi e utilizzando il principio variazionale di Hamilton. In seguito, si è passati ad un'analisi lineare, considerando dapprima la torre come un sistema SDOF massa-molla-smorzatore e successivamente come una trave continua incastrata ad un'estremità e con una massa, rappresentante navicella e rotore, all'altra (cantilever beam tip). Si sono ricavate le prime tre frequenze naturali del sistema e le relative forme modali, che sono state confrontate con quelle della trave incastrata-libera. Si è costruito, inoltre, un modello FEM utilizzando il metodo di discretizzazione di Galerkin e definendo delle funzioni di forma lineari. Il sistema di equazioni ricavato è stato implementato in un codice Matlab e usato per studiare la risposta dinamica del sistema quando soggetto a carichi periodici (analisi armonica). Inoltre, si è svolta un'analisi modale su quattro modelli costruiti in Ansys Workbench (torre a diametro costante con/senza massa e torre rastremata con/senza massa). Le frequenze modali di tutti i modelli considerati sono state comparate con quelle ottenute dai metodi analitici. Sul modello di torre rastremata con massa

all'estremità, il più vicino alla realtà, si è svolta un'analisi armonica e si sono confrontati i risultati con l'analisi svolta su Matlab. Per completare lo studio, sono state svolte anche l'analisi transiente, per valutare la risposta del sistema a carichi non periodici, l'analisi sismica, quando il sistema è soggetto a carichi sismici, e l'analisi a fatica, al fine di scongiurare crolli dovuti a sollecitazioni cicliche.

Infine, si è svolto uno studio sui principali metodi di controllo delle vibrazioni, atti a smorzare la risposta dinamica della torre e a garantire il corretto funzionamento della stessa. Due approcci sono stati considerati e confrontati: controllo con smorzatore di massa sintonizzato (TMD) e con smorzatore a molla elicoidale (CSD).

# 1. INTRODUZIONE

## 1.1. L'energia eolica e gli aerogeneratori

Le fonti energetiche considerate inesauribili, ovvero in grado di rigenerarsi con continuità, sono classificate come rinnovabili. In particolare, l'energia eolica è sempre stata una delle fonti energetiche rinnovabili più diffuse sin dall'antichità. Le prime testimonianze di mulini a vento risalgono al VII secolo d.C. in Iran, ma si stima che già nel 3000 a.C. gli Egizi e i Fenici sapessero come sfruttare l'energia prodotta dal vento [1].

Con il tempo le turbine eoliche si sono diffuse in tutto il mondo e si sono evolute fino ad arrivare ai moderni aerogeneratori, costituiti da una torre, cilindrica o reticolare, una navicella e un rotore, di solito a due o tre pale, installati a terra (*on shore*) o in mare (*off shore*).

Gli aerogeneratori sono classificati principalmente in base alla disposizione dell'asse del rotore, che può essere verticale o orizzontale. Gli aerogeneratori ad asse orizzontale (HAWT) sono i più diffusi e sono ulteriormente suddivisibili in categorie in base alla potenza, come mostrato in Tabella 1.

Tabella 1 Classificazione degli aerogeneratori

<b>TIPOLOGIA</b>	<b>POTENZA GENERATORE</b>
<b>Micro eolico</b>	$P < 1 \text{ kW}$
<b>Mini eolico</b>	$1 \text{ kW} < P < 100 \text{ kW}$
<b>Medio eolico</b>	$100 \text{ kW} < P < 1000 \text{ kW}$
<b>Grande eolico</b>	$P > 1000 \text{ kW}$

La scelta di una di queste categorie dipende dall'uso e dal luogo per cui sono progettate. Sul suolo italiano, secondo l'ultimo rapporto a metà dell'anno 2020, sono installate 7114 turbine eoliche per un totale di 10.527 MW, con Puglia (1592 turbine e 2.517 MW) e Sicilia (1530 turbine e 1.865 MW) in

testa tra le regioni. Nonostante l'Italia sia indietro rispetto ad altre potenze europee, la tendenza degli ultimi anni conferma la crescita dell'eolico passando dal 2.1% di eolico su totale delle fonti rinnovabili del 2001 ad un 17.5% del 2019, raggiungendo con qualche anno di anticipo gli obiettivi rinnovabili 2020. Il prossimo obiettivo definito dal Piano Nazionale Integrato Energia e Clima (PNIEC), da raggiungere entro il 2030, è del 30% di rinnovabili sui consumi complessivi [2]. Al momento non sono presenti in Italia turbine *off shore*, seppur esistano dei progetti della *Mediterranean Wind Offshore*.

## 1.2. Caratterizzazione della torre in esame

In questo lavoro di tesi si analizzeranno i carichi e le conseguenti sollecitazioni prodotte da essi su una torre eolica. Per far ciò, dobbiamo prima definire le caratteristiche geometriche e tecniche dell'aerogeneratore stesso. L'Italia è un paese che sta sviluppando fortemente il mercato eolico, ma, al contrario delle grandi potenze asiatiche quali Cina e Giappone, preferisce distribuire la potenza da generare in tante turbine di potenza contenuta che formino un parco eolico piuttosto che costruirne una che concentri in sé tutta la potenza esprimibile. Inoltre, con l'attuale sistema incentivante, si è avuta una grande diffusione di turbine minieoliche anche per utilizzo privato, con una spesa contenuta e ampi benefici economici [3]. Date le precedenti motivazioni, si è scelto di studiare una turbina FD25-60 da 60 kW, che negli anni si è attestata come standard per il mercato minieolico italiano [4], ad esempio installata in territorio pugliese, quale Candela (Fg) ad un'altitudine di 474 m s.l.m. [5].

Di seguito, in Tabella 2, sono riportate le caratteristiche principali dell'aerogeneratore in esame, mentre in Figura 1-1 è mostrato come varia la velocità del vento ad altezza navicella al variare della potenza generata.

In particolare, da questo grafico si può evincere la velocità del vento ad altezza navicella a cui corrisponde la massima potenza che sarà utilizzata nei calcoli delle forze applicate alla struttura,  $V_{hub} = 9 \frac{m}{s}$  per una potenza di  $P=59.9$  kW.

La velocità angolare del rotore cambia al variare delle condizioni del vento grazie alla presenza di un inverter e di un sistema frenante, ma a regime, per il minieolico in esame, si può considerare pari  $\omega_r = 45 \text{ rpm} = 4.71 \frac{rad}{s}$ , per cui  $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 0.75 \text{ Hz}$  e  $T_r = \frac{1}{f_r} = 1.33 \text{ s}$ .

Tabella 2 Caratteristiche geometriche e tecniche dell'aerogeneratore FD 25-60

<b>Modello</b>	Ghre Power 25-60
<b>Classe di Progetto</b>	IEC WTGS III/B
<b>Vita di Progetto</b>	20 anni
<b>Diametro Rotore</b>	25 m
<b>Navicella</b>	Altezza dal suolo L=36 m
<b>Orientamento</b>	Controvento, 3 pale
<b>Velocità nominale del vento</b>	11 m/s
<b>Velocità di cut-in</b>	3 m/s
<b>Velocità di cut-out</b>	18 m/s
<b>Peso</b>	Navicella e rotore 7000 kg Densità Torre $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$
<b>Potenza elettrica nominale</b>	59.9 kW, trifase, 400 VAC, 50 Hz

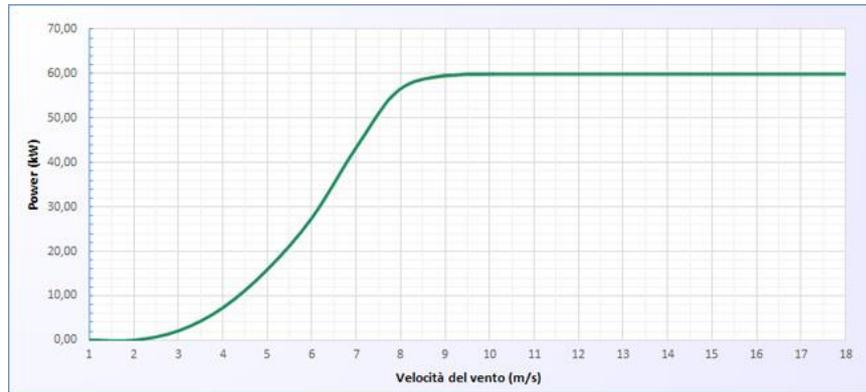


Figura 1-1 Curva di Potenza FD25-60

Di seguito, in Figura 1-2, è riportato il sistema di riferimento che sarà usato per tutte le analisi trattate in questo lavoro di tesi.

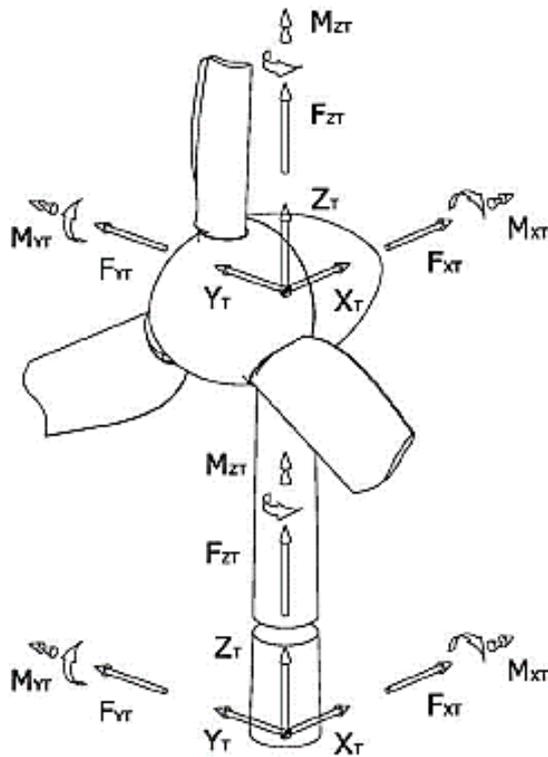


Figura 1-2 Sistema di riferimento torre eolica

La torre è costruita in acciaio S355J0, con un modulo elastico  $E=2.1 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, densità  $\rho=7850$  kg/m<sup>3</sup> e un momento di inerzia  $I$ . Per il calcolo del momento di inerzia e dell'area, si è ipotizzata una corona circolare a sezione costante. Dato un diametro esterno  $D=2000$  mm e diametro interno  $d=1800$  mm, il momento di inerzia e l'area risultano essere pari a:

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = 2.701 * 10^{11} \text{ mm}^4 = 0.2701 \text{ m}^4 \quad (1.1)$$

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 0.5969 \text{ m}^2 \quad (1.2)$$

## 2. CARICHI SULLA TORRE

Durante la loro vita utile, gli aerogeneratori sono soggetti a varie tipologie di carichi. Per poter assicurare il corretto funzionamento della turbina per tutta la durata prevista, è necessario verificare che essa resista a tutti i carichi con un margine di sicurezza sufficiente.

Ci si riferisce alle IEC 61400 -1 [6] per definire i casi di carico a cui la torre deve sottostare durante il funzionamento. I casi di carico sono costruiti combinando situazioni progettuali della turbina eolica con varie condizioni esterne [7].

Le situazioni progettuali comprendono la maggior parte delle condizioni che l'aerogeneratore sperimenterà nella sua vita utile e sono divise in condizioni operative e condizioni temporanee. Le condizioni operative comprendono la produzione di potenza, la condizione di inattività e la condizione di fermo, mentre le condizioni temporanee includono il trasporto, l'installazione, i vari guasti, le riparazioni e il manutenzione.

### 2.1. Design Load Cases

Le seguenti combinazioni, definite dalla IEC 61400- 1 [6], costituiscono un numero minimo di situazioni da studiare:

- Situazioni operative normali e condizioni esterne normali;
- Situazioni operative normali e condizioni esterne estreme;
- Situazione di guasto e condizioni esterne varie;
- Trasporto, installazione e manutenzione e condizioni esterne varie;

Nella seguente Tabella 3, estratta dalla IEC 61400-1, sono riportati diversi esempi di casi di carico che la quasi totalità delle turbine sperimenta nel corso della sua vita utile. Per ogni caso di carico, il tipo appropriato di analisi è indicato dalle lettere F (analisi di carichi a fatica) o U (analisi di carichi

ultimi). A loro volta, i casi di carico indicati con U sono classificati come normali (N), anormali (A) e trasporto (T). Di seguito, l'esplicazione degli anagrammi in Tabella 3:

- ECD → Extreme coherent gust with direction change → Raffica lineare estrema con cambio di direzione
- EDC → Extreme direction change → Cambio di direzione estremo
- EOG → Extreme operating gust → Raffica estrema durante il funzionamento
- EWM → Extreme wind speed model → Modello delle velocità del vento estremo
- EWS → Extreme wind shear → Gradiente estremo del vento
- NTM → Normal turbulence model → Modello normale di turbolenza
- ETM → Extreme turbulence model → Modello estremo di turbolenza
- NWP → Normal wind profile → Modello di profilo normale del vento

Tabella 3 Design Load Cases IEC 61400-1

Situazioni progettuali	Casi di carico progettuali	Stato del vento	Altri stati	Tipo di analisi	Coefficienti parziali di sicurezza
1) Produzione di potenza	1.1	NTM $V_{in} < V_{hub} < V_{out}$	Per l'estrapolazione di eventi estremi	U	N
	1.2	NTM $V_{in} < V_{hub} < V_{out}$		F	
	1.3	ETM $V_{in} < V_{hub} < V_{out}$		U	N
	1.4	ECD $V_{hub} = V_r \pm 2 \text{ m/s}, V_r$		U	N
	1.5	EWS $V_{in} < V_{hub} < V_{out}$		U	N
2) Produzione di potenza più	2.1	NTM $V_{in} < V_{hub} < V_{out}$	Guasto nel sistema di controllo o perdita della rete elettrica	U	N

insorgenza di guasti	2.2	NTM $V_{in} < V_{hub} < V_{out}$	Guasto nel sistema di protezione o guasto elettrico interno precedente	U	A
	2.3	EOG $V_{hub} = V_r \pm 2 \text{ m/s e } V_{out}$	Guasto elettrico interno o esterno inclusa perdita di rete elettrica	U	A
	2.4	NTM $V_{in} < V_{hub} < V_{out}$	Guasto nel sistema di controllo, protezione o elettrico, incluso perdita di rete elettrica	F	
3) Avvio	3.1	NWP $V_{in} < V_{hub} < V_{out}$		F	
	3.2	EOG $V_{hub} = V_r \pm 2 \text{ m/s e } V_{out}$		U	N
	3.3	EDC $V_{hub} = V_r \pm 2 \text{ m/s e } V_{out}$		U	N
4) Spegnimento normale	4.1	NWP $V_{in} < V_{hub} < V_{out}$		F	
	4.2	NTM $V_{hub} = V_r \pm 2 \text{ m/s e } V_{out}$		U	N
5) Spegnimento di emergenza	5.1	EWM $V_{hub} = V_r \pm 2 \text{ m/s e } V_{out}$		U	N
6) Parcheggio (ferma o al minimo)	6.1	NTM periodo di ricorrenza 50 anni		U	N
	6.2	EWM periodo ricorrenza 50 anni	Perdita di corrente elettrica	U	A
	6.3	EWM periodo di ricorrenza 1 anno	Disallineamento estremo dell'imbardata	U	N
	6.4	NTM $V_{hub} < 0.7 V_{ref}$		F	
7) Parcheggio e insorgenza di guasti	7.1	EWM periodo di ricorrenza 1 anno		U	A
8) Trasposto, assemblaggio, mantenimento e riparazione	8.1	NTM $V_{maint}$ deve essere constatato dal produttore		U	T
	8.2	EWM periodo di ricorrenza 1 anno		U	A

## 2.2. Tipi di carico

Le turbine eoliche sono soggette a diversi tipi di carico che possono essere classificati come segue [8]:

*Carichi dovuti al peso proprio della struttura* → Comprendono tutte le forze di inerzia dovute al peso proprio della torre, della navicella e delle pale.

*Carichi Aerodinamici Ciclici* → Sono dovuti al fatto che la turbina è immersa in un flusso di vento non uniforme con profilo di velocità variabile. Creano nella torre deflessioni direttamente proporzionali al carico applicato. Comprendono i carichi sulla torre e sulle pale.

*Carichi Stocastici* → Sono compresi tutti i carichi che variano in maniera randomica, come i carichi sismici o la turbolenza del vento.

Nella Figura 2-1 sono riportati i tre tipi diversi di carico applicati alla struttura durante l'intero periodo di vita utile.

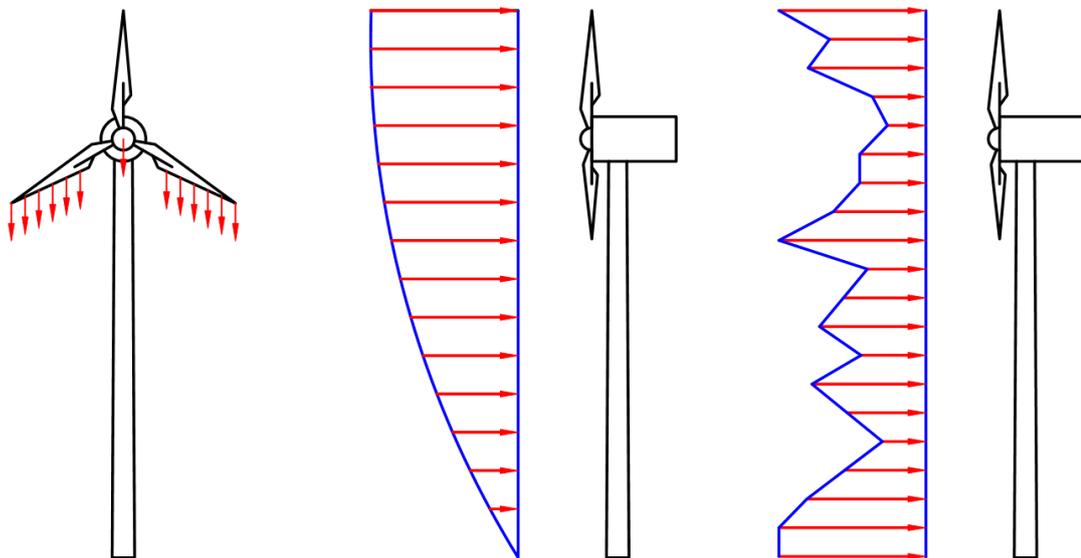


Figura 2-1 Carichi su una torre eolica - (a) carichi gravitazionali - (b) carichi ciclici - (c) carichi stocastici

### 2.3. Carichi dovuti alla pressione del vento

Poiché l'obiettivo principale delle turbine eoliche è la produzione di energia elettrica sfruttando la spinta del vento, risulta chiaro che i carichi principali a cui è sottoposta la torre riguardano l'energia eolica. In particolare, la velocità del vento aumenta con l'altezza della torre, generando un gradiente di velocità. Al variare della velocità cambiano i carichi impressi all'aerogeneratore, perciò è fondamentale procedere nella giusta scelta della velocità di funzionamento, della velocità di spunto, al di sotto della quale la potenza disponibile non basta a vincere le resistenze aerodinamiche (*cut in speed*) e della velocità di arresto, la massima oltre cui imporre un fermo (*cut out speed*) per evitare danneggiamenti alle pale e all'intera struttura. La velocità di cut in è tipicamente compresa tra gli 11 e i 14 km/h, mentre la velocità di cut out è circa 89 km/h [9], anche se questi valori dipendono fortemente dalla taglia della torre eolica e dalla massima potenza producibile. Nel caso in esame  $v_{cut\ in} = 3 \frac{m}{s} = 10.8 \frac{km}{h}$  e  $v_{cut\ out} = 18 \frac{m}{s} = 64.8 \frac{km}{h}$

Prendendo come riferimento la norma IEC 61400-1 [6], si procede a calcolare la velocità del vento e la sua distribuzione nelle condizioni di funzionamento che si verificano più frequentemente durante la vita di una turbina eolica.

#### 2.3.1. Velocità di riferimento

Prima di calcolare le velocità nelle diverse condizioni di funzionamento, la norma IEC 61400-1 divide le turbine in tre classi principali, più una riferita alle turbine speciali, al variare della velocità di riferimento del vento e dei parametri di turbolenza, come mostrato in Tabella 4.

Tabella 4 Wind Turbine Class IEC 61400-1

Wind turbine class			I	II	III	S
$V_{ref}$	(m/s)		50	42.5	37.5	Valori specificati dal costruttore
A	$I_{ref}(-)$	alta turbolenza	0.16			
B	$I_{ref}(-)$	media turbolenza	0.14			
C	$I_{ref}(-)$	bassa turbolenza	0.12			

Dove

$V_{ref}$  è la velocità media di riferimento del vento su un periodo di 10 minuti  
 $I_{ref}$  è il valore atteso dell'intensità della turbolenza a 15 m/s. (Cfr. paragrafo successivo)

La turbina sotto esame in questo lavoro di tesi si colloca nella classe III<sub>B</sub> come segnalato dal produttore.

### 2.3.2. Condizioni del vento normali

#### Normal Wind Profile Model (NWP)

Il profilo della velocità del vento,  $V(z)$ , si riferisce alla velocità media del vento in funzione dell'altezza della torre  $z$  ed è calcolabile dalla legge di potenza di Hellman (3.1):

$$V(z) = V(z_{hub}) \left( \frac{z}{z_{hub}} \right)^\alpha \quad (2.1)$$

Con

$z_{hub}$ : altezza della navicella  $z_{hub} = 36 \text{ m}$

$V(z_{hub})$ : velocità del vento all'altezza della navicella  $V(z_{hub}) = 9 \text{ m/s}$

$\alpha$  può essere assunto pari a 0.2

Il profilo della velocità del vento dell'aerogeneratore in esame è mostrato in Figura 2-2.

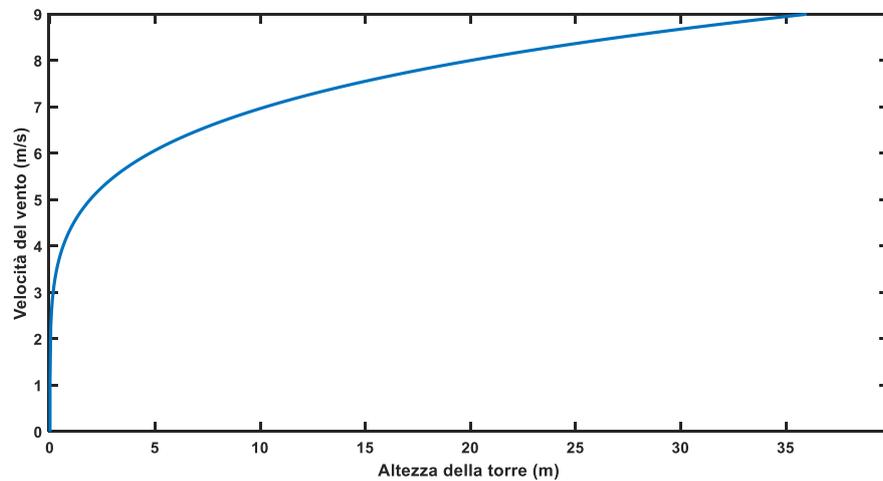


Figura 2-2 Normal Wind Profile della FD25-60

### Normal Turbulence Model (NTM)

Con l'espressione turbolenza si indicano le variazioni randomiche della velocità del vento mediate su 10 minuti. È divisa in tre componenti: longitudinale, cioè lungo la direzione della velocità media del vento, laterale e normale.

Per dare una misura dell'irregolarità del vento (livello di turbolenza), si ricorre alla deviazione standard della turbolenza  $\sigma_1$ , invariante con l'altezza della torre eolica, data da:

$$\sigma_1 = I_{ref}(0.75 V_{hub} + b); \quad b = 5.6 \frac{m}{s} \quad (2.2)$$

Nella Figura 2-3 sono mostrati i valori della deviazione standard della turbolenza  $\sigma_1$  e l'intensità della turbolenza  $\frac{\sigma_1}{V_{hub}}$  al variare di  $V_{hub}$ . Nel caso in esame  $\sigma_1 = 1.729 \frac{m}{s}$  e  $\frac{\sigma_1}{V_{hub}} = 0.192$ , indicati con un cerchio rosso.

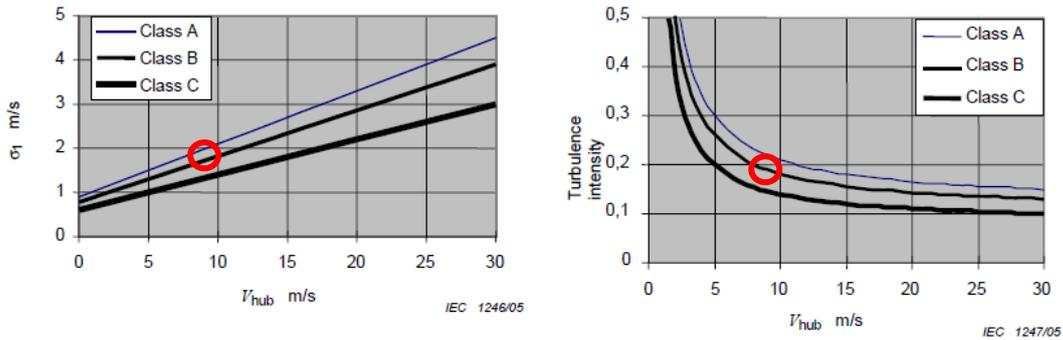


Figura 2-3 Normal Turbulence Model da IEC 61400-1

### 2.3.3. Condizioni del vento estreme

#### Extreme Wind Speed Model (EWM)

Per il modello della velocità del vento in condizioni estreme a regime possiamo calcolare la velocità  $V_{e50}$  con un periodo di ricorrenza di 50 anni e la velocità  $V_{e1}$  con un periodo di ricorrenza di 1 anno, entrambe funzione dell'altezza  $z$  della torre eolica:

$$V_{e50} = 1.4 V_{ref} \left( \frac{z}{z_{hub}} \right)^{0.11} \quad (2.3)$$

$$V_{e1}(z) = 0.8 V_{e50}(z) \quad (2.4)$$

#### Extreme Operating Gust (EOG)

Calcoliamo la velocità delle raffiche all'altezza della navicella  $V_{gust}$  con la seguente relazione:

$$V_{gust} = \min \left\{ 1.35(V_{e1} - V_{hub}); 3.3 \left( \frac{\sigma_1}{1 + 0.1 \left( \frac{D}{\lambda_1} \right)} \right) \right\} \quad (2.5)$$

Con

$\sigma_1$  è la deviazione standard della turbolenza longitudinale definita dall'eq. (2.2)

D è il diametro del rotore

$A_1 = \begin{cases} 0.7 z & \text{per } z \leq 60 \text{ m} \\ 42 \text{ m} & \text{per } z \geq 60 \text{ m} \end{cases}$  (2.6) è il parametro di scala della turbolenza longitudinale all'altezza della navicella.

Definito ciò, possiamo calcolare la velocità del vento come

$$V(z, t) = \begin{cases} V(z) - 0.37V_{gust} \sin\left(\frac{3\pi t}{T}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ V(z) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.7)$$

Con  $T=10.5$  s

In Figura 2-4 è mostrato l'andamento della velocità di raffica all'altezza della navicella  $V_{hub}$  dell'aerogeneratore in esame al variare del tempo.

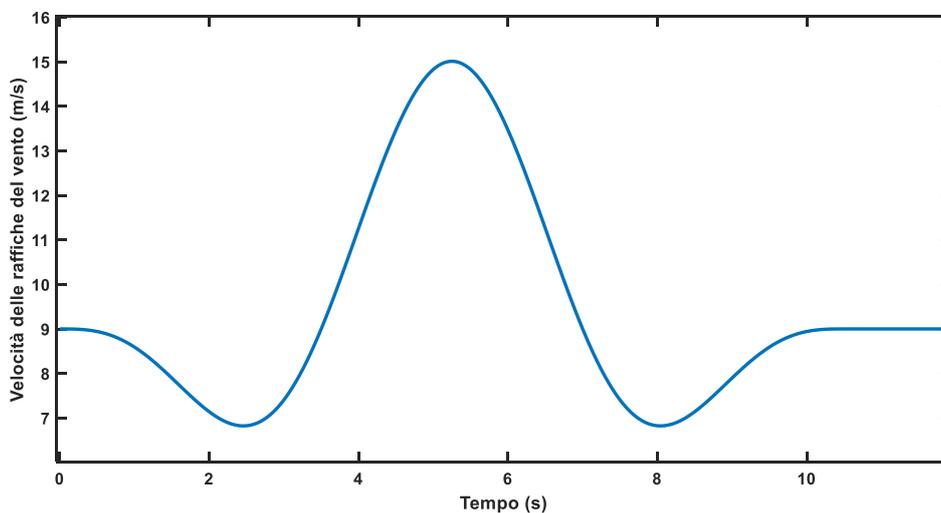


Figura 2-4 Extreme Operating Gust

### Extreme Turbulence Model (ETM)

Il modello di turbolenza in casi estremi deve usare il profilo del vento in condizioni normali, equazione (2.1), e la turbolenza con la componente longitudinale della deviazione standard data da:

$$\sigma_1 = c I_{ref} \left( 0.072 \left( \frac{V_{ave}}{c} + 3 \right) \left( \frac{V_{hub}}{c} - 4 \right) + 10 \right); \quad c = 2 \frac{m}{s} \quad (2.8)$$

### Extreme Direction Change (EDC)

L'ampiezza del cambio di direzione estremo,  $\theta_e$ , può essere calcolata usando la relazione:

$$\theta_e = \pm 4 \arctan \left( \frac{\sigma_1}{V_{hub} \left( 1 + 0.1 \left( \frac{D}{\lambda_1} \right) \right)} \right) \quad (2.9)$$

L'angolo  $\theta_e$  è limitato all'intervallo  $\pm 180^\circ$  e il suo andamento in funzione del tempo è dato da:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0^\circ & \text{per } t < 0 \\ \pm 0.5\theta_e \left( 1 - \cos \left( \pi \frac{t}{T} \right) \right) & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ \theta_e & \text{per } t > T \end{cases} \quad (2.10)$$

Con  $T=6$  s durata del cambio di direzione estremo. Alla fine del transitorio, si assume che la direzione rimanga costante. Si riporta, in Figura 2-5, l'andamento del transitorio in corrispondenza dell'altezza della navicella della turbina in esame.

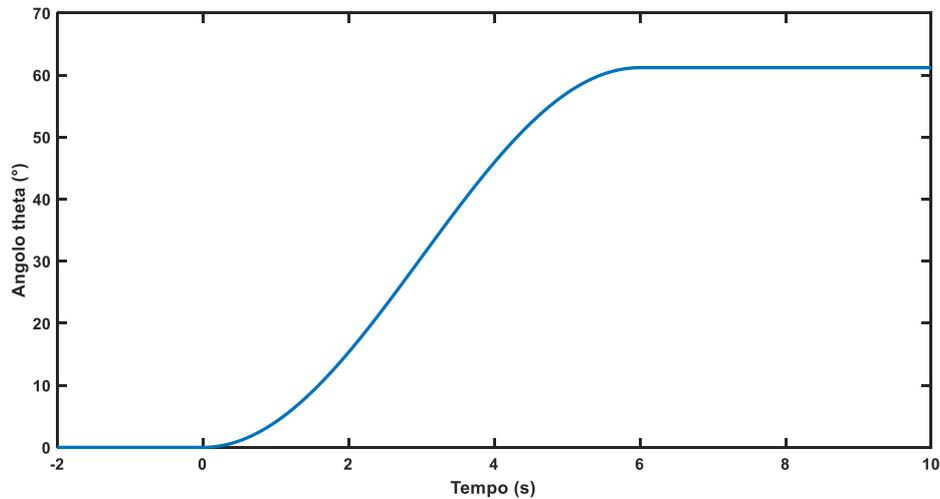


Figura 2-5 Extreme Direction Change

Extreme Coherent Gust with Change Direction (ECD)

La raffica lineare in condizioni estreme con cambio di direzione deve avere un'ampiezza di  $V_{gc} = 15 \frac{m}{s}$  e la velocità del vento deve essere definita da:

$$V(z, t) = \begin{cases} V(z) & \text{per } t < 0 \\ V(z) + 0.5V_{cg} \left(1 - \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right)\right) & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ V(z) + V_{cg} & \text{per } t > T \end{cases} \quad (2.11)$$

Con  $T=10$  s si indica il tempo di ascesa. Si riporta, in Figura 2-6, l'andamento del vento in corrispondenza dell'altezza della navicella della turbina in esame.

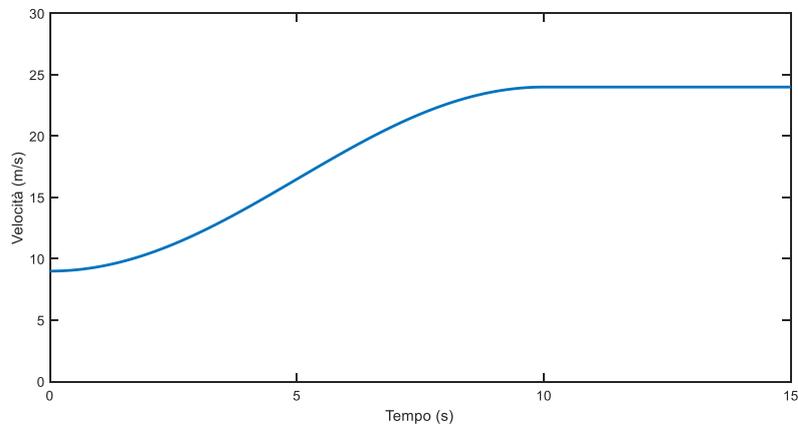


Figura 2-6 Extreme Coherent Gust with Direction Change ad altezza navicella

### 2.3.4. Pressione del vento sulla torre

La torre sarà sottoposta principalmente alla pressione del vento, esprimibile in funzione dell'altezza della torre  $z$ , secondo il procedimento illustrato nelle Norme Tecniche per le Costruzioni 2018 [10] e di seguito riportato.

$$p(z) = q_r c_e c_p c_d \quad (2.12)$$

Dove

$q_r$  è la pressione cinetica di riferimento calcolata come  $q_r = \frac{1}{2} \rho_{aria} v_r^2$  (2.13);

$v_r$  è la velocità di riferimento del vento che nel nostro caso, con tempo di ritorno pari a 50 anni coincide con la velocità base di riferimento  $v_b = c_a v_{b,0}$ . Nel caso in analisi, con installazione in Puglia e altitudine minore di 500 m,  $c_a$  ha valore unitario mentre  $v_{b,0}$ , velocità base di riferimento al livello del mare è ricavata dalla seguente tabella

Tab. 3.3.I - Valori dei parametri  $v_{b,0}$ ,  $a_v$ ,  $k_s$

Zona	Descrizione	$v_{b,0}$ [m/s]
1	Valle d'Aosta, Piemonte, Lombardia, Trentino Alto Adige, Veneto, Friuli Venezia Giulia (con l'eccezione della provincia di Trieste)	25
2	Emilia Romagna	25
3	Toscana, Marche, Umbria, Lazio, Abruzzo, Molise, Puglia, Campania, Basilicata, Calabria (esclusa la provincia di Reggio Calabria)	27
4	Sicilia e provincia di Reggio Calabria	28
5	Sardegna (zona a oriente della retta congiungente Capo Teulada con l'Isola di Maddalena)	28
6	Sardegna (zona a occidente della retta congiungente Capo Teulada con l'Isola di Maddalena)	28
7	Liguria	28
8	Provincia di Trieste	30
9	Isole (con l'eccezione di Sicilia e Sardegna) e mare aperto	31

$\rho$  è la densità dell'aria assunta convenzionalmente pari  $\rho_{aria} = 1,25 \text{ kg/m}^3$ ;

$c_e$ , coefficiente di esposizione, dipende dall'altezza  $z$  ed è dato dalla formula

$$\begin{cases} c_e(z) = k_r c_t \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \left[7 + c_t \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)\right] & \text{per } z \geq z_{min} \\ c_e(z) = c_e(z_{min}) & \text{per } z < z_{min} \end{cases} \quad (2.14)$$

Con  $k_r, z_0, z_{min}$  da tabella in funzione della categoria esposizione del sito, nel nostro caso III, e  $c_t$  coefficiente di topografia, posto pari a 1;

Tab. 3.3.II - Parametri per la definizione del coefficiente di esposizione

Categoria di esposizione del sito	$K_r$	$z_0$ [m]	$z_{min}$ [m]
I	0,17	0,01	2
II	0,19	0,05	4
III	0,20	0,10	5
IV	0,22	0,30	8
V	0,23	0,70	12

$c_p$  è il coefficiente di pressione, posto in questo caso pari a 1 o altrimenti determinato da prove sperimentali in galleria del vento;

$c_d$  è il coefficiente dinamico e può essere posto cautelativamente pari a 1.

Moltiplicando la pressione così ottenuta per la sezione perpendicolare al flusso del vento  $A$  si ottiene la forza del vento sulla nostra torre.

$$F_w(z) = \frac{1}{2} \rho_{aria} v_r^2 A c_e c_p c_d \quad (2.15)$$

In cui  $A$  è calcolabile come la metà della superficie laterale di un tronco conico, calcolabile come segue, dato  $r_1 = 1000 \text{ mm}$  e  $r_2 = 800 \text{ mm}$ .

$$A = \frac{\pi}{2} (r_1 + r_2) a \quad \text{con l'apotema } a = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} \quad (2.16)$$

In Figura 2-7 è riportato l'andamento della forza al variare dell'altezza della torre.

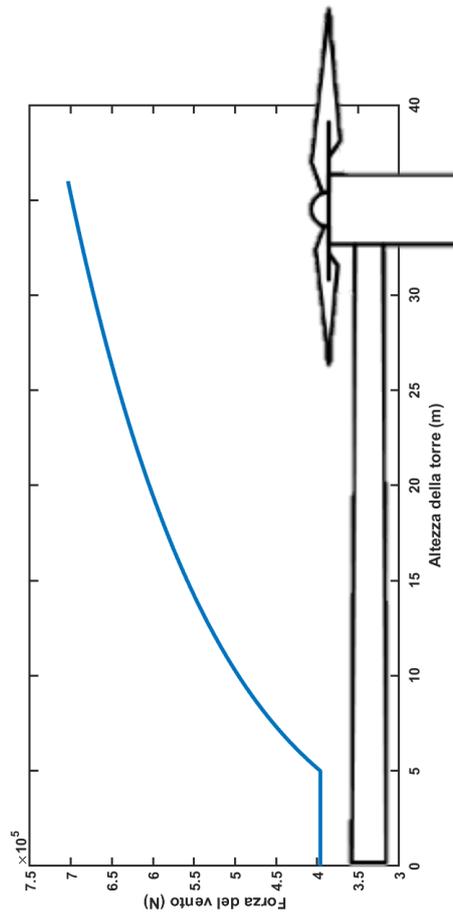


Figura 2-7 Forza del vento sulla torre

### 2.3.5. Pressione del vento delle pale sulla torre

Il vento incide anche sulle pale del rotore, creando una forza armonica incidente sulla torre, con ampiezza pari a:

$$F_{b0} = \frac{1}{2} \rho_{aria} V_{hub}^2 A_b = \frac{1}{2} \rho_{aria} V_{hub}^2 \pi R^2 \quad (2.17)$$

In cui  $\rho_{aria}$  e  $V_{hub}$  sono stati definiti nei paragrafi precedenti, mentre  $R = 12.5\text{ m}$  è il raggio del rotore. Poiché il rotore ruota ad una velocità angolare  $\omega_r$  e la forza delle pale è concentrata all'altezza del rotore stesso, essa diventa, al variare del tempo:

$$F_b = F_{b0} \delta(z - L) \sin(3\omega_r t) \quad (2.18)$$

Di seguito, in Figura 2-8, è riportato l'andamento di  $F_b$  in funzione del tempo.

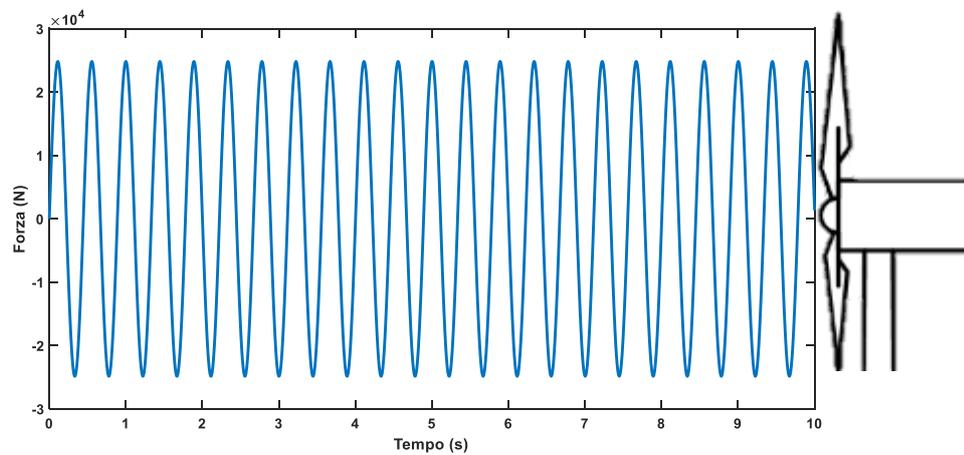


Figura 2-8 Forza delle pale sulla torre

Allo stesso modo definiamo il momento dovuto alla rotazione delle pale che, alla potenza massima generata, sarà pari a:

$$C_b = \frac{P}{\omega_r} \quad (2.19)$$

## 2.4. Altri carichi rilevanti

### 2.4.1. Carichi sismici

Nell'Appendice C e nel capitolo 11 delle norme IEC 61400-1 [6] è studiata l'influenza dei fenomeni sismici che devono essere considerati in particolare per torri eoliche installate in aree considerate sismicamente attive. Viene considerato nell'analisi esclusivamente il primo modo flessionale e si assume che l'intera struttura sia soggetta alla stessa accelerazione.

Se l'area è considerata a rischio terremoti, bisogna progettare la turbina in modo che resista ai carichi sismici, su un periodo di ricorrenza di 475 anni. In questo senso, si usano le funzioni di densità spettrale, in particolar modo gli spettri di pseudo risposta [7]. Lo spettro di risposta è un diagramma che fornisce il massimo valore della risposta al variare del periodo di oscillazione. Dallo spettro di risposta si può evincere per quali frequenze di funzionamento la risposta sulle strutture risulta massima e di conseguenza evitare il collasso delle stesse.

Gli spettri di pseudo risposta per una struttura sono definiti per spostamento, velocità e accelerazione e forniscono il diagramma dei valori massimi della risposta in funzione del periodo naturale del sistema  $T$ . Il prefisso pseudo si riferisce alla caratteristica equivalente del sistema SDOF e dipende esclusivamente dal periodo naturale della struttura e dallo smorzamento. Definito  $S_D$  lo spettro di pseudo risposta dello spostamento,  $S_V$  quello della velocità e  $S_A$  quello dell'accelerazione, essi sono relazionati tra loro come segue:

$$S_A(\omega) = \omega^2 S_D(\omega) \quad e \quad S_V(\omega) = \omega S_D(\omega) \quad (2.20)$$

Con  $\omega$  frequenza di oscillazione.

Poiché la norma IEC 61400-1 non fornisce ulteriori indicazioni sull'azione sismica, d'ora in poi ci si riferirà alle Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni NTC del 2018 [10] per delineare una metodologia di calcolo e verifica dei carichi sismici.

Lo spettro di risposta in accelerazione relativo alla componente orizzontale del moto sismico  $S_e$  è definito come segue

$$S_e(T) = \begin{cases} a_g S \eta F_o \left[ \frac{T}{T_B} + \frac{1}{\eta F_o} \left( 1 - \frac{T}{T_B} \right) \right] & \text{per } 0 \leq T < T_B \\ a_g S \eta F_o & \text{per } T_B \leq T < T_C \\ a_g S \eta F_o \left( \frac{T_C}{T} \right) & \text{per } T_C \leq T < T_D \\ a_g S \eta F_o \left( \frac{T_C T_D}{T} \right) & \text{per } T_D \leq T \end{cases} \quad (2.21)$$

Con:

$a_g$  accelerazione orizzontale massima al sito, ricavato dalla tabella 1 dell'Allegato A delle NTC18 [11]. Per la nostra installazione  $a_g = 0.370g \frac{m}{s^2}$

$T$  periodo della vibrazione;

$S$  coefficiente che tiene conto della categoria di sottosuolo e delle condizioni topografiche, definito come  $S = S_S S_T$  dove  $S_S$  è il coefficiente di amplificazione stratigrafica (da  $S_S = 1$ ) e  $S_T$  il coefficiente di amplificazione topografica (da Tabella 6  $S_T = 1$ );

$\eta$  è il fattore che altera lo spettro di risposta elastico per coefficienti di smorzamento viscoso  $\xi$  diversi da 5% definito da  $\eta = \sqrt{10/(5 + \xi)} \geq 0.55$  (2.22). Nel caso in esame, ipotizziamo  $\eta = 1$ , di conseguenza uno smorzamento  $\xi=5\%$ ;

$F_o$  fattore che amplifica l'amplificazione spettrale massima, minimo 2.2, ricavato dalla tabella 1 dell'Allegato A delle NTC08 [11],  $F_o = 2.44$ ;

$T_C$  è il periodo corrispondente all'inizio del tratto a velocità costante dello spettro  $T_C = C_c T_C^*$  (2.23) con  $C_c$  dipendente dalla categoria del sottosuolo (da Tabella 5, nel nostro caso  $C_c = 1$ ) e  $T_C^*$  è il valore di riferimento per la determinazione del periodo di inizio del tratto a velocità costante dello spettro in accelerazione orizzontale;  $T_C^* = 0.29$  s è ricavato dalla tabella 1 dell'Allegato A delle NTC08 [11];

$T_B$  è il periodo corrispondente all'inizio del tratto ad accelerazione costante ed è pari a  $T_B = \frac{T_C}{3}$  (2.24) ;

$T_D$  è il periodo corrispondente all'inizio del tratto a spostamento costante ed è pari a  $T_B = 4 \frac{a_g}{g} + 1.6$  (2.25);

Tab. 3.2.IV – Espressioni di  $S_s$  e di  $C_c$

Categoria sottosuolo	$S_s$	$C_c$
A	1,00	1,00
B	$1,00 \leq 1,40 - 0,40 \cdot F_o \cdot \frac{a_g}{g} \leq 1,20$	$1,10 \cdot (T_C^*)^{-0,20}$
C	$1,00 \leq 1,70 - 0,60 \cdot F_o \cdot \frac{a_g}{g} \leq 1,50$	$1,05 \cdot (T_C^*)^{-0,33}$
D	$0,90 \leq 2,40 - 1,50 \cdot F_o \cdot \frac{a_g}{g} \leq 1,80$	$1,25 \cdot (T_C^*)^{-0,50}$
E	$1,00 \leq 2,00 - 1,10 \cdot F_o \cdot \frac{a_g}{g} \leq 1,60$	$1,15 \cdot (T_C^*)^{-0,40}$

Tabella 5 Valori di  $S_s$  e  $C_c$

Tab. 3.2.V – Valori massimi del coefficiente di amplificazione topografica  $S_T$

Categoria topografica	Ubicazione dell'opera o dell'intervento	$S_T$
T1	-	1,0
T2	In corrispondenza della sommità del pendio	1,2
T3	In corrispondenza della cresta di un rilievo con pendenza media minore o uguale a 30°	1,2
T4	In corrispondenza della cresta di un rilievo con pendenza media maggiore di 30°	1,4

Tabella 6 Valori di  $S_T$

Il grafico, qui di seguito riportato in Figura 2-9, è stato ottenuto mediante il software fornito dal Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici e si presenta con un tratto a campana iniziale dovuto alla risonanza, al termine del quale inizia a decrescere fino a tendere asintoticamente allo zero per periodi di oscillazione molto elevati. Si considera lo spettro di risposta di progetto per lo stato limite di vita (SLV), stato limite di danno o collasso (SLD e SLC) e stato limite di operatività (SLO).

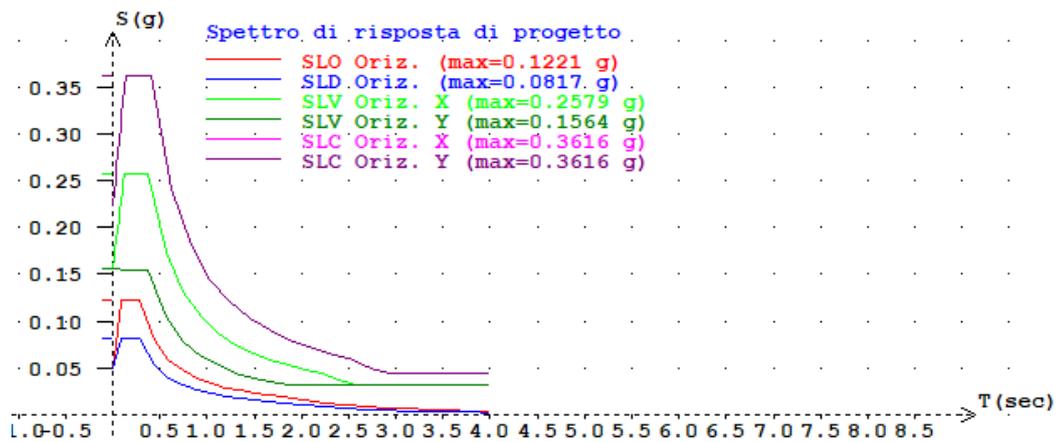


Figura 2-9 Spettro elastico dell'accelerazione

Poiché, come abbiamo precedentemente calcolato, il periodo di oscillazione del nostro aerogeneratore è  $T=1.33$  s allora c'è un margine di sicurezza sufficiente per assicurare il corretto funzionamento e generazione di potenza.

Dato lo spettro elastico dell'accelerazione, è possibile calcolare, tramite le equazioni (2.20) gli spettri elastici dello spostamento e della velocità.

#### 2.4.2. Shadowing

L'effetto del *tower shadow* (letteralmente 'ombreggiamento della torre') si riferisce all'alterazione del normale profilo del vento a causa della presenza della torre. Al passaggio di ciascuna delle pale in corrispondenza della torre, esse sperimentano un profilo del vento modificato, in particolare la velocità del flusso diminuisce e diventa minima. Ciò modifica la risposta vibrazionale

della torre e dell'aerogeneratore. Il fenomeno dello shadowing varia al variare della tipologia di turbina e dal luogo dell'installazione, in particolare è molto rilevante se una turbina è installata sottovento (*downwind*), mentre è trascurabile se la turbina è installata controvento (*upwind*), come mostrato nella Figura 2-10 [12]. Questo fenomeno non sarà ulteriormente trattato in questo lavoro di tesi.

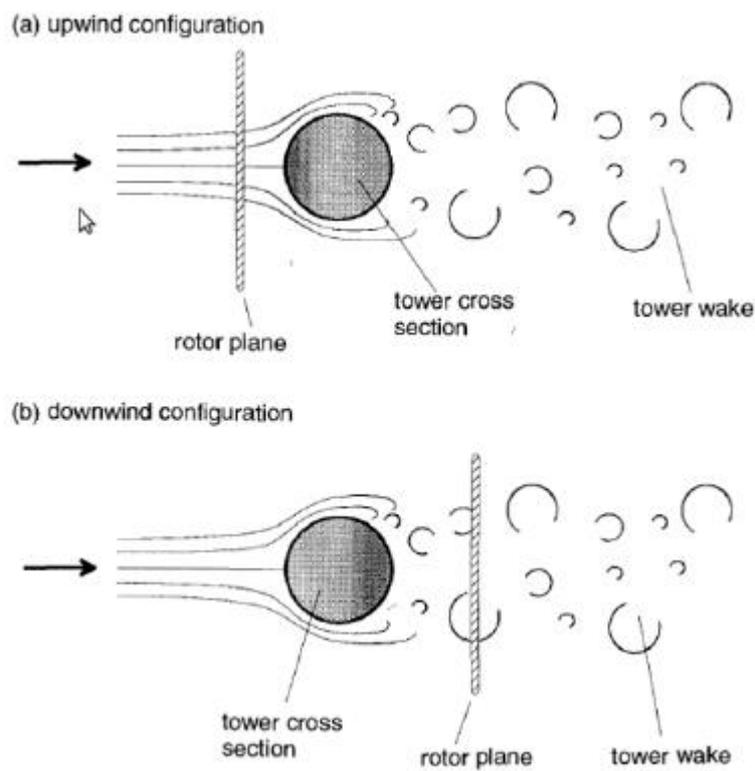


Figura 2-10 Tower shadow in due diverse configurazioni

### 3. METODOLOGIE DI ANALISI

Questo capitolo presenta le principali metodologie di analisi atte a schematizzare il comportamento della torre eolica al variare delle sollecitazioni a cui è sottoposta.

#### 3.1. Analisi non lineare

Si effettuerà dapprima un'analisi non lineare, in cui si considerano appunto le nonlinearità del materiale e geometriche. Si considererà anche la configurazione deformata della torre e ciò porterà ad effettuare un'analisi del secondo ordine.

##### *3.1.1. Analisi multilink con pendoli inversi*

Uno dei possibili approcci al problema propone di discretizzare la torre come un insieme di pendoli inversi [13] [14]. Un pendolo inverso è un pendolo semplice rovesciato, con una massa vincolata ad un'asta rigida, che permette di mantenere una distanza costante dal perno. Il pendolo inverso è in una posizione di equilibrio instabile, poiché basta la minima perturbazione per perdere la configurazione di equilibrio originale (perno e massa allineati lungo l'asse dell'asta), quindi per mantenere la configurazione di equilibrio il perno deve essere mobile e deve essere in grado di assecondare gli spostamenti della massa.

Modelliamo quindi la torre come una serie di masse  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  collegate tra loro da aste di lunghezza  $(l_1, l_2, \dots, l_n)$  e rigidezza  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Il sistema ha  $n$  gradi di libertà, le rotazioni delle travi  $\theta_i$ , ed è mostrato in Figura 3-2. Nella realtà il sistema avrebbe infiniti gradi di libertà, perciò all'aumentare di  $n$  aumenta anche l'accuratezza della discretizzazione. Nella Figura 3-1 invece è mostrata una delle possibili configurazioni deformate della struttura.



Figura 3-2 Configurazione indeformata

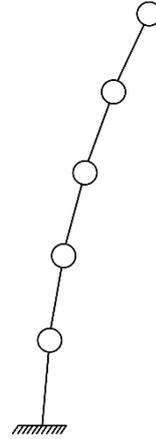


Figura 3-1 Configurazione deformata

Lo spostamento trasversale dalla configurazione d'equilibrio della singola trave  $u_m$  è legato alla rotazione e allo spostamento della trave precedente ( $u_{m-1}, \theta_{m-1}$ ) con l'equazione (3.1), valida per le piccole rotazioni

$$u_m = u_{m-1} + \theta_{m-1}l_{m-1} \quad (3.1)$$

L'obiettivo dell'analisi è ricavare le equazioni di moto del sistema che saranno espresse come

$$[M]\{\ddot{\theta}\} + [C]\{\dot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = \{F_0(t)\} - \{m a_g\} \quad (3.2)$$

dove  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  sono le matrici di massa, smorzamento e rigidità, mentre  $\{\ddot{\theta}\}$ ,  $\{\dot{\theta}\}$ ,  $\{\theta\}$  sono l'accelerazione, velocità e spostamento angolare. Infine,  $a_g$  è l'accelerazione del terreno e  $F_0(t)$  è il vettore delle forzanti del sistema, raggruppante i seguenti carichi, già descritti in precedenza e mostrati in Figura 3-3:

- Il peso proprio della struttura comprendente torre, pale e navicella  $P_{tot}$  e le forze di gravità e di inerzia di ciascun elemento;

- La forza del vento distribuita lungo la torre  $F_w$ , che è randomica, ma si può assumere nulla sul basamento e crescente con l'aumentare dell'altezza  $z$ ;
- La forza del vento concentrata sulle pale del rotore, data dalla grande superficie delle stesse,  $F_b$ , e il momento creato dalla rotazione delle pale,  $C_b$ ;

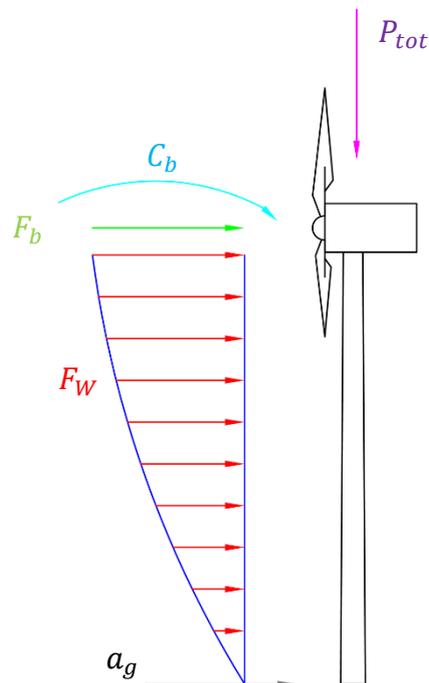


Figura 3-3 Carichi agenti sulla torre

Costruiamo di seguito i diagrammi di corpo libero per il primo (Figura 3-6), l' $i$ -esimo (Figura 3-4) e l'ultimo elemento della struttura (Figura 3-5), evidenziando che la forza del vento e le forze di inerzia agiscono nel baricentro dell'elemento, coincidente con il centro geometrico.

Ultimo elemento

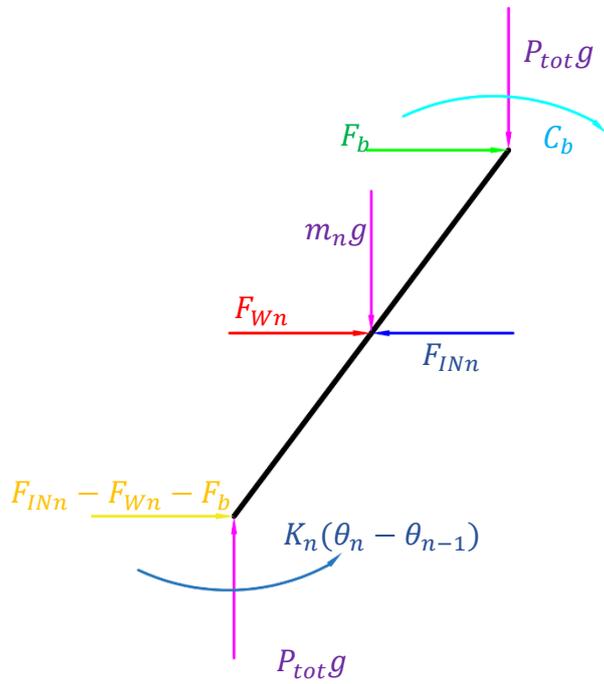


Figura 3-5 FDB Ultimo elemento

i-esimo elemento

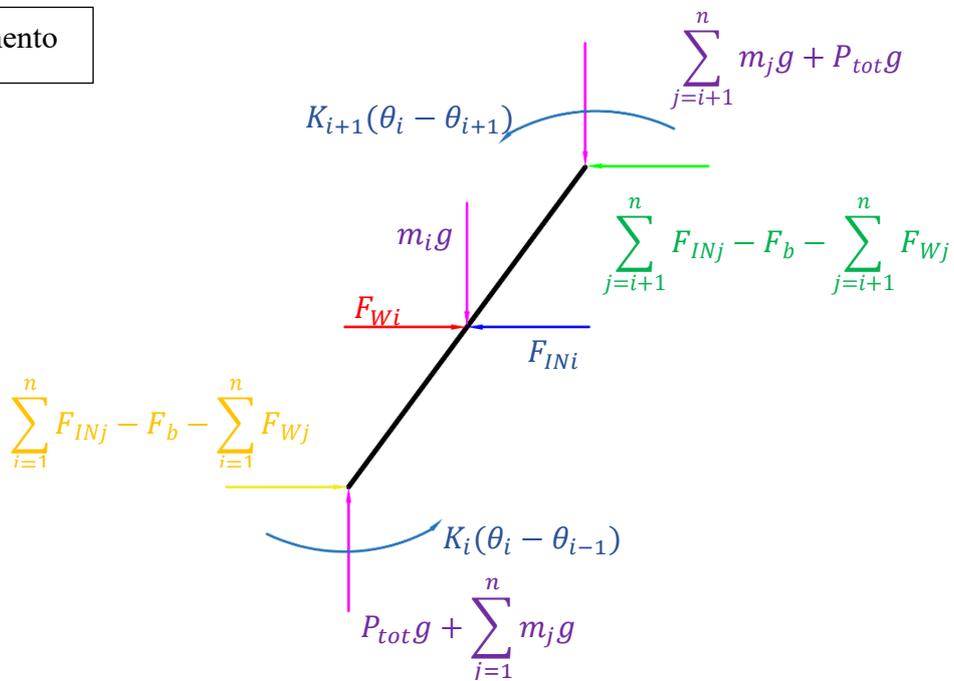


Figura 3-4 FDB i-esimo elemento

Primo elemento

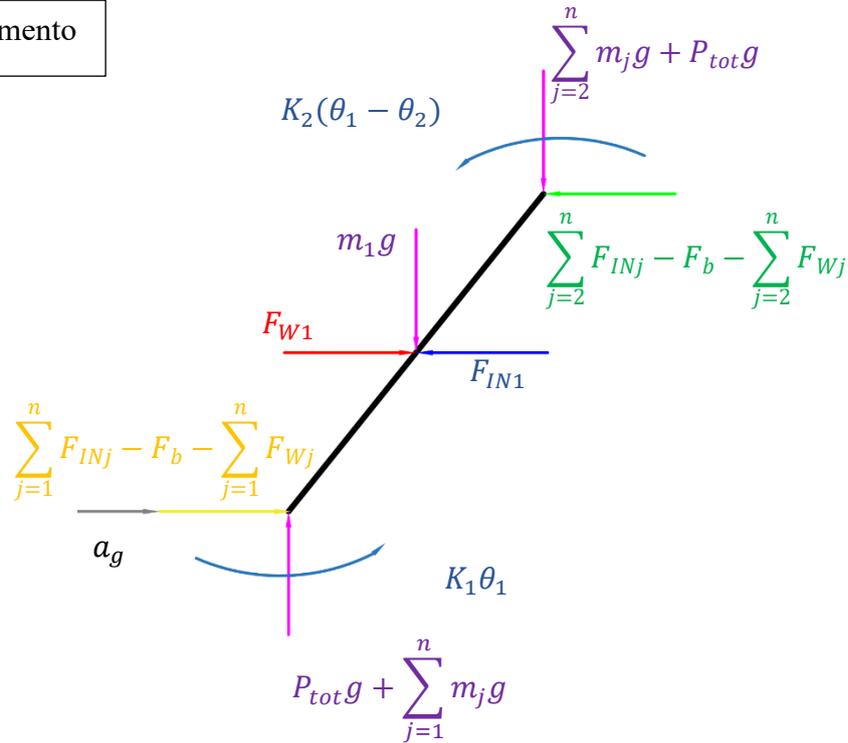


Figura 3-6 FDB Primo elemento

Possiamo costruire quindi l'equilibrio dei singoli elementi, considerando piccole rotazioni ( $\sin\theta \approx \theta$ ,  $\cos\theta \approx 1$ )

- Ultimo elemento (n-esimo)

$$-C_b + K_n(\theta_n - \theta_{n-1}) + (F_{INn} - F_{Wn} - 2F_b) \frac{l_n}{2} - (2P_{tot} + m_n)g \theta_n \frac{l_n}{2} + \frac{m_n l_n^2}{12} \ddot{\theta}_n = 0 \quad (3.3)$$

Con

$$F_{INn} = m_n \left( \frac{l_n}{2} \ddot{\theta}_n + l_{n-1} \ddot{\theta}_{n-1} + \dots + l_1 \ddot{\theta}_1 \right) + m_n a_g \quad (3.4)$$

- i-esimo elemento

$$K_i(\theta_i - \theta_{i-1}) + K_{i+1}(\theta_i - \theta_{i+1}) + (F_{INi} - F_{Wi}) \frac{l_i}{2} - \left( P_{tot} + \sum_{j=i+1}^n m_j \right) g \theta_i l_i - m_i g \frac{l_i}{2} \theta_i$$

$$+ \left( \sum_{j=i+1}^n F_{INj} - F_b - \sum_{j=i+1}^n F_{Wj} \right) l_i + \frac{m_i l_i^2}{12} \ddot{\theta}_i = 0 \quad (3.5)$$

Con

$$F_{INi} = m_i \left( \frac{l_i}{2} \ddot{\theta}_i + l_{i-1} \ddot{\theta}_{i-1} + \dots + l_1 \ddot{\theta}_1 \right) + m_i a_g \quad (3.6)$$

- Primo elemento

$$K_2(\theta_1 - \theta_2) + K_1 \theta_1 + (F_{IN1} - F_{W1}) \frac{l_1}{2} - \left( P_{tot} + \sum_{j=2}^n m_j \right) g \theta_1 l_1 - m_1 g \frac{l_1}{2} \theta_1$$

$$+ \left( \sum_{j=2}^n F_{INj} - F_b - \sum_{j=2}^n F_{Wj} \right) l_1 + \frac{m_1 l_1^2}{12} \ddot{\theta}_1 = 0 \quad (3.7)$$

Con

$$F_{IN1} = \frac{m_1 l_1}{2} \ddot{\theta}_1 + m_1 a_g \quad (3.8)$$

Raccogliamo tutte le equazioni sviluppate in un sistema matriciale del tipo mostrato nell'equazione (3.2). La matrice di massa è una matrice [nxn] esplicitabile come segue

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.9) \text{ con}$$

$$M_{ii} = \frac{m_i l_i^2}{3} + \sum_i^n m_{i+1} l_i^2 \quad (3.10)$$

$$M_{ij} = \frac{m_i l_i l_j}{2} + \sum_i^n m_{i+1} l_i l_j \quad (3.11)$$

Consideriamo lo smorzamento di Rayleigh, quindi una combinazione lineare della matrice di massa e rigidezza

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3.12)$$

La matrice di smorzamento, di conseguenza si presenta come segue:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.13) \text{ con} \quad C_{ii} = \alpha M_{ii} + \beta K_{ii} \quad (3.14)$$

$$C_{ij} = \alpha M_{ij} + \beta K_{ij} \quad (3.15)$$

La matrice di rigidezza è una matrice tridiagonale poiché ogni elemento sarà in relazione soltanto con il precedente e con il successivo

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.16) \text{ con} \quad K_{ii} = K_i + K_{i+1} - gl_i \left( \frac{m_i}{2} + P_{tot} + \sum_{i+1}^n m_i \right) \quad (3.17)$$

$$K_{ij} = -K_i \quad \text{per } i = j \pm 1 \quad (3.18)$$

$$K_{ij} = 0 \quad \text{per } i \neq j \pm 1 \quad (3.19)$$

Con

$$\alpha = \frac{Ml}{EI} \quad K_i = \frac{M}{\alpha} = \frac{EI}{l}$$

ricavato dalla teoria delle travi, per una trave incastrata con un momento all'estremità libera.

Infine, consideriamo i termini al secondo membro, rappresentativi dei carichi del vento e di quelli sismici. Il vettore delle forze del vento si può esprimere come segue:

$$F_0(t) = [F_1 \dots F_i \dots F_n]^T \quad (3.20)$$

Con

$$F_i = C_b + l_i \left( F_{Wn} + \dots + F_{Wi+1} + \frac{F_{Wi}}{2} + F_b \right) \quad (3.21)$$

Mentre il vettore relativo alle azioni sismiche è rappresentabile come di seguito indicato:

$$m a_g = [A_1 \dots A_i \dots A_n]^T \quad (3.22) \quad e \quad A_i = a_g l_i \left( m_n + \dots + m_{i+1} + \frac{m_i}{2} \right) \quad (3.23)$$

Questo sistema può essere risolto utilizzando l'analisi modale o con metodi di integrazione numerica espliciti o impliciti, quale il metodo di Newmark.

Di seguito, si è risolto il problema agli autovalori considerando la torre divisa in N=400 elementi di lunghezza pari a 0,09 m ciascuno. Ipotizzando uno smorzamento nullo, si risolve con Matlab il sistema MDOF a N gradi di libertà  $[M]\{\ddot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = 0$  ricavando gli autovalori e gli autovettori, che saranno poi confrontati con i valori ottenuti con le altre tipologie di analisi, mostrato in Tabella 7.

Tabella 7 Frequenze proprie - approccio multilink

Modo	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
$\omega_i$ [rad/s]	8.6940	55.1167	155.4359	306.4303	509.103
F [Hz]	1.3837	8.7721	24.7384	48.7699	81.0264
T [s]	0.7227	0.11399	0.04042	0.0205	0.0123

Le deformate in funzione dell'angolo  $\theta$  relative ai primi tre modi sono mostrate in Figura 3-7.

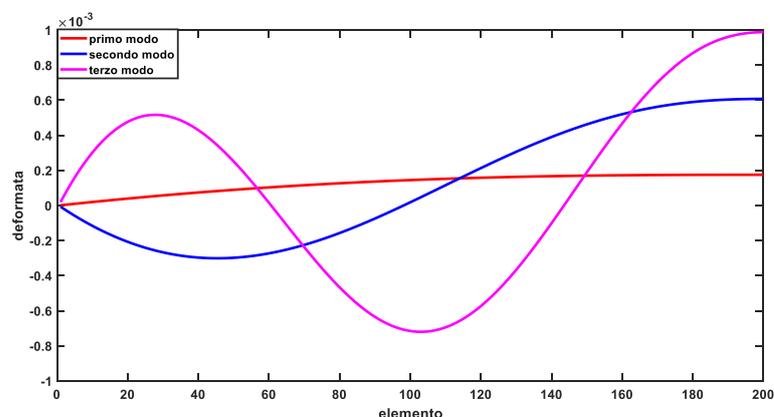


Figura 3-7 Modello multilink a pendoli inversi – deformate dei primi tre modi in funzione dell'angolo

### 3.1.2. Principio di Hamilton

Un altro approccio attuabile per studiare le vibrazioni sulla torre si basa sul ricavare l'equazione del moto di un corpo continuo partendo dal principio variazionale di Hamilton, il quale afferma che il moto naturale di un sistema fisico tende a minimizzare l'integrale temporale della lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$  quindi le deformate saranno punti stazionari della stessa [15] [16] [17]. Ciò si traduce nella seguente equazione

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W^{nc} dt = 0 \quad (3.24)$$

La lagrangiana del sistema è esprimibile come differenza tra l'energia cinetica  $T$  e l'energia potenziale  $U$  dell'aerogeneratore.

$$L = T - U \quad (3.25)$$

Definiamo il sistema di coordinate della torre, che sarà sottoposta agli stessi calcoli già precedentemente citati e che saranno inseriti nella trattazione delle forze non conservative  $W^{nc}$ .

Il sistema da studiare, una trave incastrata ad un'estremità e libera all'altra, è mostrato in Figura 3-8. Per ogni punto della struttura possiamo esplicitare la posizione, la velocità e l'accelerazione, esprimibili dalle seguenti relazioni:

$$r = x \hat{i} + z \hat{k} \quad (3.26)$$

$$v = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial z}{\partial t} \hat{k} \quad (3.27)$$

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \hat{i} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \hat{k} \quad (3.28)$$

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \quad (3.29)$$

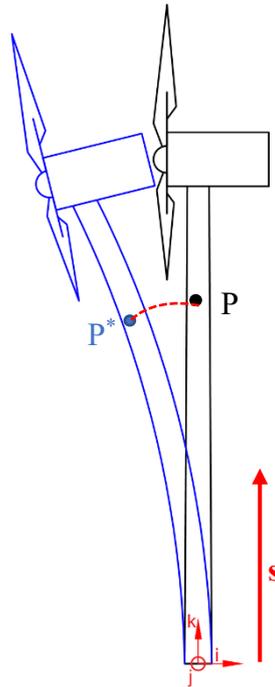


Figura 3-8 Configurazione indeformata (nero) e deformata (blu)

Definiamo un punto  $P(X,Z)$  sulla configurazione indeformata, che dopo la deformazione sarà  $P^*(x,z)$ , mentre  $s$  sarà la variazione dell'altezza della torre elicoidale, da 0 a  $L$ . Per il calcolo dell'energia cinetica e potenziale si è seguito l'approccio di Dellezzopolles [17].

### Energia cinetica

Di seguito è riportata l'espressione per l'energia cinetica e la sua derivata. Per semplificare l'analisi verrà considerata la massa uniformemente distribuita lungo la torre

$$T = \int_0^L \frac{m}{2} |v|^2 ds \quad (3.30)$$

Con  $m$  massa per unità di lunghezza, che verrà supposta costante lungo  $z$ .

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \left(\frac{m}{2}\right) \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \left[ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \right] ds dt \quad (3.31)$$

Integriamo per parti da  $t_1$  a  $t_2$ , considerando che il sistema è incastrato da un lato ( $\delta x(t_1) = \delta z(t_1) = \delta x(t_2) = \delta z(t_2) = 0$ )

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \left(\frac{m}{2}\right) \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 ds dt + \left(\frac{m}{2}\right) \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 ds dt \quad (3.32)$$

Deriviamo l'equazione (3.32) e otteniamo l'espressione dell'energia cinetica:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L m \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2 \delta x ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L m \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)^2 \delta z ds dt \quad (3.33)$$

### Energia potenziale

L'energia potenziale si può scrivere come somma di due componenti, una relativa all'energia potenziale gravitazionale e una all'energia potenziale elastica.

$$U = U_g + U_e \quad (3.34)$$

L'energia potenziale gravitazionale può essere calcolata dalla sua definizione e derivata come segue, per calcolarne la variazione:

$$U_g = -(mg) \int_0^L z ds \quad (3.35)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} U_g dt = -mg \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta z ds dt \quad (3.36)$$

L'energia potenziale elastica invece è calcolabile facendo riferimento alla meccanica non lineare e al modello di torre di Eulero Bernoulli, poiché la deformazione della torre non è lineare. Definiamo la curvatura come la derivata dell'angolo  $\theta$  rispetto ad  $s$ , dove  $\theta$  è l'angolo formato dalla tangente alla deformata con l'asse verticale, definito come nella Figura 3-9 successiva.

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial s} \quad (3.37)$$

Con

$$\cos \theta = \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{\partial x}{\partial Z} \quad (3.38)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{\partial z}{\partial Z} \quad (3.39)$$

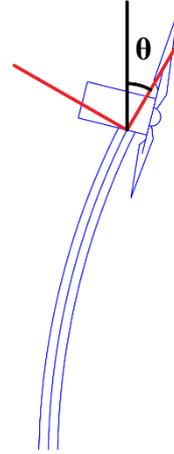


Figura 3-9 Definizione di curvatura

Con  $X, Z$  coordinate del punto  $P$  nella configurazione indeformata, e  $x, z$  coordinate del punto  $P^*$  nella configurazione deformata.

Manipoliamo l'espressione della curvatura come segue.

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial s} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \quad (3.40)$$

Sostituiamo all'interno dell'equazione (3.40) le equazioni (3.39) e (3.38), ottenendo l'equazione successiva:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\left[ \frac{\partial x}{\partial Z} \frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} - \frac{\partial z}{\partial Z} \frac{\partial^2 x}{\partial Z^2} \right]}{(1 + \varepsilon)^2} \quad (3.41)$$

Ipotizziamo che la torre sia inestensibile ( $\varepsilon=0$  e  $\partial Z = \partial s$ ), condizione espressa nell'equazione (3.42), e calcoliamo l'espressione della curvatura che sarà usata nell'energia potenziale elastica.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} = \sqrt{1 - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = -\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2\right)}} \quad (3.43)$$

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2\right)}} \quad (3.44)$$

Per le seguenti applicazioni, si esegue l'espansione di Taylor del quadrato della curvatura, come mostrato nell'equazione (3.45)

$$\kappa^2 = \frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2} \cong \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2\right] + O(4) \quad (3.45)$$

Prima di procedere al calcolo dell'energia potenziale elastica, si riportano di seguito delle utili manipolazioni della condizione di inestensibilità e della sua derivata. In particolare, calcoliamo lo sviluppo di Taylor dell'equazione (3.42) e, integrando, otteniamo un'espressione unica per la variabile z, equazione (3.47).

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2} \cong 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + O(4) \quad (3.46)$$

$$z = \int_0^s \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2\right) ds \quad (3.47)$$

Dalla derivata dell'equazione (3.42), mostrata nell'equazione (3.43), isoliamo la variazione della derivata di z in relazione a s e ne calcoliamo lo sviluppo in serie di Taylor nell'equazione (3.50).

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) \delta \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) \delta \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = 0 \quad (3.48)$$

$$\delta \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right) = - \frac{\left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)}{\left( \frac{\partial z}{\partial s} \right)} \delta \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \quad (3.49)$$

$$\frac{1}{\frac{\partial z}{\partial s}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2}} \cong 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + O(4) \quad (3.50)$$

Sostituiamo l'equazione (3.50) nell'equazione (3.49) e otteniamo l'equazione (3.51)

$$\delta \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right) = - \frac{\left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \delta \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)}{\sqrt{1 - \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2}} = \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \right] \delta \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \quad (3.51)$$

Possiamo ora integrare per parti l'equazione (3.51) ottenuta, considerando che alla base della torre c'è un incastro perciò  $\delta x = 0$  per  $s = 0$ .

$$\delta z = - \int_0^s \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \delta \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^3 \delta \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right] ds \quad (3.52)$$

$$\delta z = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^3 \right] \delta x - \int_0^s \left[ \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \right] \delta x ds \quad (3.53)$$

Possiamo quindi procedere al calcolo dell'espressione dell'energia potenziale elastica, richiamando la condizione d'inestensibilità, per cui la deformazione della linea centrale della torre è nulla,  $\varepsilon = 0$ .

$$U_e = \frac{E}{2} \int_0^L [A\varepsilon^2 + I(1 + \varepsilon)^2 \kappa^2] ds \rightarrow U_e = \frac{EI}{2} \int_0^L [k^2] ds \quad (3.54)$$

Dove E è il modulo di elasticità dell'acciaio, mentre A ed I sono rispettivamente l'area e il momento di inerzia della sezione trasversale della torre.

Deriviamo l'espressione dell'energia potenziale elastica e integriamola da  $t_1$  a  $t_2$ , ottenendo l'equazione (3.55), in cui andremo a sostituire l'equazione (3.45).

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} U_e dt = \frac{EI}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \left[ \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \right] \right] ds dt \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} U_e dt = EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L & \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \left( \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \right) \right] \delta x ds dt \\ & - EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right)^2 \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right) \right] \delta x ds dt \quad (3.56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} U_e dt = EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L & \left[ \left( \frac{\partial^4 x}{\partial s^4} \right) + 4 \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \left( \frac{\partial^3 x}{\partial s^3} \right) + \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right)^3 \right] \delta x ds dt \\ & + EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^4 x}{\partial s^4} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \right] \delta x ds dt \quad (3.57) \end{aligned}$$

L'equazione (3.57) risulta essere l'energia potenziale elastica del sistema da sostituire nell'equazione (3.34).

### Lavoro delle forze non conservative

Il lavoro delle forze non conservative comprende il lavoro compiuto da tutte le forze agenti sul sistema. Per semplificare la trattazione, esso verrà momentaneamente posto uguale a zero per ricavare l'equazione non lineare della risposta libera del sistema e verrà reintrodotta in seguito, nell'analisi lineare.

$$\int_{t_1}^{t_2} W^{nc} dt = 0 \quad (3.58a)$$

Per quanto riguarda lo smorzamento, si considera un coefficiente generico di smorzamento  $\xi$ , per cui esso sarà espresso come:

$$C = 2\xi\omega m \frac{\partial x}{\partial t} \quad (3.58b)$$

Equazione del moto non lineare

Prima di scrivere l'equazione del moto, si procede ad esplicitare la variabile  $z$  nelle equazioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale elastica in funzione di  $x$ , facendo uso delle due relazioni precedentemente calcolate nelle equazioni (3.47) e (3.53) e della derivata di secondo ordine dell'equazione (3.47).

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \int_0^s - \left[ \left( \frac{\partial \partial x}{\partial t \partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial^2 \partial x}{\partial t^2 \partial s} \right) \right] ds \quad (3.59)$$

Sostituiamo le precedenti equazioni nell'equazione (3.33) e otteniamo, dopo una serie di semplificazioni e manipolazioni, l'espressione dell'energia cinetica:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = & - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ m \int_0^L \left( \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \int_0^s \left[ \left( \frac{\partial \partial x}{\partial t \partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial^2 \partial x}{\partial t^2 \partial s} \right) \right] ds \right) \delta x \right\} dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ m \int_0^L \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \left( \int_s^L \int_0^s \left[ \left( \frac{\partial \partial x}{\partial t \partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial^2 \partial x}{\partial t^2 \partial s} \right) \right] ds \right) \delta x ds \right\} dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L m \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \delta x ds dt \quad (3.60) \end{aligned}$$

Allo stesso modo, sostituiamo le equazioni nell'energia potenziale gravitazionale, equazione (3.36), per ottenere l'espressione seguente, equazione (3.61).

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} U_g dt = & mg \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^3 \right] \delta x ds dt \\ & + mg \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (s - L) \left[ \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \right] \delta x ds dt \quad (3.61) \end{aligned}$$

Raggruppiamo l'equazione (3.57), (3.60), (3.61) derivandole rispetto al tempo e a  $\delta x$  in un'unica espressione, che sarà l'equazione di moto non lineare del sistema:

$$\begin{aligned}
& m \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \int_0^s \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right] ds \\
& - m \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \int_s^L \int_0^s \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right] ds ds + m \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \\
& + EI \left[ \left( \frac{\partial^4 x}{\partial s^4} \right) + 4 \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \left( \frac{\partial^3 x}{\partial s^3} \right) + \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right)^3 + \left( \frac{\partial^4 x}{\partial s^4} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \right] + 2\xi\omega m \frac{\partial x}{\partial t} \\
& + mg \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^3 \right] + mg(s-L) \left[ \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \right] = 0 \quad (3.62)
\end{aligned}$$

### 3.2. Analisi lineare

Poiché per entrambi i metodi precedentemente illustrati le soluzioni analitiche non sono percorribili e necessiterebbero di analisi numeriche, si è deciso di linearizzare il problema. Come già mostrato nel Paragrafo 3.1.1 e nell'equazione (3.2), il modello può essere schematizzato come un MDOF, le cui equazioni di equilibrio dinamico sono:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F_0(z, t)\} - \{m a_g\} \quad (3.63)$$

Il modo più semplice per modellizzare la torre eolica è approssimarla ad un sistema massa-molla-smorzatore, mostrato in Figura 3-10 [18].

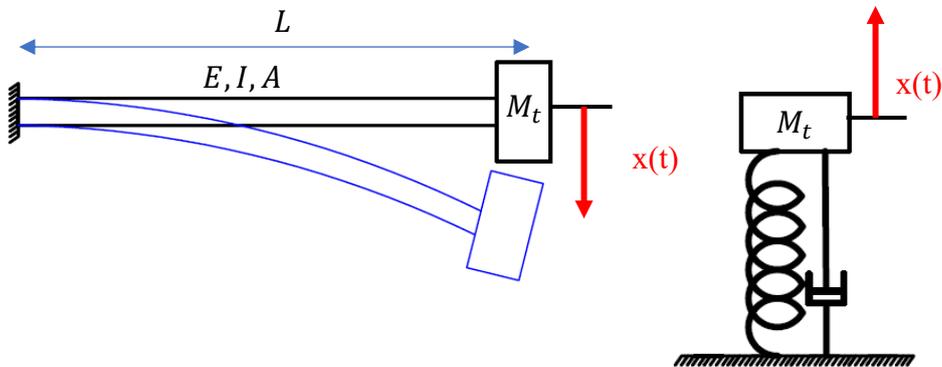


Figura 3-10 Sistema massa molla smorzatore

Si assume che la massa all'estremità della trave sia pari alla massa della navicella più un terzo della massa della torre e che il carico concentrato all'estremità libera sia pari a  $F = \left(M_t + \frac{1}{3}\rho AL\right)g$ . Dalla teoria dei materiali si ha che la deflessione della trave e di conseguenza la rigidezza della molla equivalente sia pari a:

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI} \quad K = \frac{F}{\delta} = \frac{3EI}{L^3} \quad (3.64)$$

È quindi possibile calcolare la frequenza propria del sistema ad un grado di libertà equivalente.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M_t + \frac{1}{3}\rho AL}} = 7.59 \text{ rad/s} \quad (3.65)$$

Questo approccio, troppo semplicistico, non sarà ulteriormente trattato perché la massa della torre eolica non è trascurabile, per cui i risultati ottenuti sono distanti da quelli calcolati con l'analisi modale del sistema continuo, che saranno mostrati di seguito.

Passiamo dal sistema MDOF dell'equazione (3.63) all'analisi del modello continuo, assimilando la torre eolica ad una trave di Eulero Bernoulli incastrata con una massa all'estremità libera (*cantilever beam tip*), mostrata in Figura 3-11. Indichiamo con  $M_t$  e  $I_t$  rispettivamente il peso e il momento di inerzia della massa concentrata e con  $m, E, I$  rispettivamente la massa per unità di lunghezza, il modulo elastico e il momento di inerzia della trave.

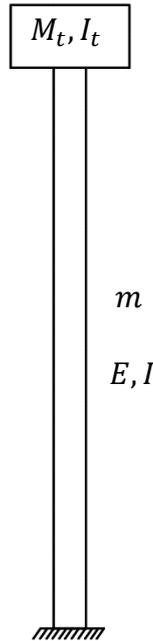


Figura 3-11 Cantilever Beam Tip

L'equazione (3.66) mostra l'andamento delle vibrazioni flessionali forzate per una trave continua con una massa all'estremità, in presenza di smorzamento [19].

$$\begin{aligned}
 [m + M_t \delta(z - L)] \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + 2\xi \omega m \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 x(z, t)}{\partial z^4} \\
 = F_w(z) + F_b \sin(3\omega_r t) \delta(z - L) - m a_g \delta(z) \quad (3.66)
 \end{aligned}$$

Dove  $m$  è la massa per unità di lunghezza della torre,  $M_t$  è la massa concentrata del rotore e della navicella, mentre gli altri termini sono stati già descritti nei paragrafi precedenti.

### 3.2.1. Definizione e soluzione dell'autoproblema differenziale

Analizziamo l'equazione che descrive le vibrazioni flessionali libere di una cantilever beam tip priva di smorzamento [20], mostrata nell'equazione (3.67):

$$\mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = 0 \quad (3.67)$$

Con  $\mu = m + M_t \delta(z - L)$ .

Ipotizziamo una soluzione a variabili separate, in cui lo spostamento  $x$  è definito come moltiplicazione di due funzioni armoniche, una dipendente esclusivamente dallo spazio, detta autofunzione, e la seconda dipendente esclusivamente dal tempo, detta coordinata modale.

$$x(z, t) = \varphi(z) \eta(t) \quad (3.68)$$

Poniamo  $\eta(t) = \eta_0 \sin(\omega t + \alpha)$  (3.67) e la sostituiamo nell'equazione (3.66), ottenendo l'equazione (3.69):

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \varphi(z) + EI \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} \eta(t) &= 0 \\ -\omega^2 \mu \varphi(z) \eta_0 \sin(\omega t + \alpha) + EI \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} \eta_0 \sin(\omega t + \alpha) &= 0 \\ EI \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - \omega^2 \mu \varphi(z) &= 0 \quad (3.69) \end{aligned}$$

Definiamo  $\beta^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI}$  (3.70) e la sostituiamo per ricavare l'autofunzione  $\varphi(z)$ , espressa come segue:

$$\varphi(z) = A \cos(\beta z) + B \sin(\beta z) + C \cosh(\beta z) + D \sinh(\beta z) \quad (3.71)$$

Dove A,B,C,D sono le costanti da determinare imponendo le condizioni al contorno del sistema.

Imponiamo le condizioni al contorno, facendo riferimento al sistema modellato come trave incastrata con una massa all'estremità [21].

*Estremità incastrata:* spostamento nullo e pendenza nulla

$$\varphi(0) = 0 \quad (3.72) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (3.73)$$

*Estremità con massa: momento nullo e taglio nullo*

$$\left[ EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \omega^2 I_t \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=L} = 0 \quad (3.74)$$

$$\left[ EI \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} + M_t \omega^2 \varphi \right]_{z=L} = 0 \quad (3.75)$$

Date le condizioni al contorno, risolviamo l'equazione (3.76)

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - \beta^4 \varphi(z) = 0 \quad (3.76)$$

Applicando le condizioni (3.72) e (3.73) riduciamo il sistema a sole due variabili, A e B.

$$A + C = 0$$

$$B + D = 0$$

Perciò possiamo riscrivere  $\varphi(z)$  come segue:

$$\varphi(z) = A(\cos(\beta z) - \cosh(\beta z)) + B(\sin(\beta z) - \sinh(\beta z)) \quad (3.77)$$

Risolviamo quindi un sistema matriciale di due equazioni, (3.74) e (3.75) in due incognite, mostrato nell'equazione (3.78):

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta L) + \cosh(\beta L) - \frac{\beta^3 I_t}{m} (\sin(\beta L) + \sinh(\beta L)) & \sin(\beta L) + \sinh(\beta L) + \frac{\beta^3 I_t}{m} (\cos(\beta L) - \cosh(\beta L)) \\ \sin(\beta L) + \sinh(\beta L) + \frac{\beta M_t}{m} (\cos(\beta L) - \cosh(\beta L)) & -\cos(\beta L) - \cosh(\beta L) + \frac{\beta M_t}{m} (\sin(\beta L) - \sinh(\beta L)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

Escludendo le soluzioni banali, per cui A=0 e B=0, si calcola il determinante della matrice dei coefficienti e lo si pone uguale a zero per ottenere l'equazione caratteristica del sistema studiato.

$$\left[ \cos(\beta L) + \cosh(\beta L) - \frac{\beta^3 I_t}{m} (\sin(\beta L) + \sinh(\beta L)) \right] \left[ -\cos(\beta L) - \cosh(\beta L) + \frac{\beta M_t}{m} (\sin(\beta L) - \sinh(\beta L)) \right] - \left[ \sin(\beta L) + \sinh(\beta L) + \frac{\beta^3 I_t}{m} (\cos(\beta L) - \cosh(\beta L)) \right] \left[ \sin(\beta L) + \sinh(\beta L) + \frac{\beta M_t}{m} (\cos(\beta L) - \cosh(\beta L)) \right] = 0 \quad (3.79)$$

Moltiplicando i singoli termini e raccogliendo e semplificando i termini comuni si ottiene l'equazione caratteristica mostrata nell'equazione (3.80), che, risolta, darà gli autovalori del sistema.

$$1 + \cos(\beta L) \cosh(\beta L) + \frac{\beta M_t}{m} (\cos(\beta L) \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \cosh(\beta L)) - \frac{\beta^3 I_t}{m} (\sin(\beta L) \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) \sinh(\beta L)) + \frac{\beta^4 M_t I_t}{m^2} (1 - \cos(\beta L) \cosh(\beta L)) = 0 \quad (3.80)$$

Se si ipotizza, per semplificare, una massa puntiforme e dunque  $I_t = 0$ , si ottiene l'equazione (3.81) e la corrispondente autofunzione è mostrata nell'equazione (3.82).

$$1 + \cos(\beta L) \cosh(\beta L) + \frac{\beta M_t}{m} (\cos(\beta L) \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \cosh(\beta L)) = 0 \quad (3.81)$$

$$\varphi_i(z) = A_i [\cos(\beta_i z) - \cosh(\beta_i z) + \sigma_i (\sin(\beta_i z) - \sinh(\beta_i z))] \quad (3.82)$$

Con  $A_i$  costante modale e

$$\sigma_i = \frac{\sin(\beta_i z) - \sinh(\beta_i z) + \frac{\beta_i M_t}{m} (\cos(\beta_i z) - \cosh(\beta_i z))}{\cos(\beta_i z) + \cosh(\beta_i z) - \frac{\beta_i M_t}{m} (\sin(\beta_i z) - \sinh(\beta_i z))} \quad (3.83)$$

Dove  $r=1,2..$  sono i modi di oscillazione del sistema, per ognuno dei quali si può calcolare la frequenza naturale non smorzata, tramite l'equazione (3.84).

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (3.84)$$

Gli autovalori così ottenuti soddisfano la condizione di ortogonalità, per cui

$$\int_0^L m \varphi_i \varphi_j dz = \begin{cases} m_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.85)$$

$$\int_0^L \varphi_i EI \frac{\partial \varphi_j}{\partial z^4} dz = \begin{cases} k_i = m_i \omega_i^2 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.86)$$

Per semplificare ulteriormente la trattazione, si potrebbe ipotizzare di utilizzare il modello di trave incastrata ad un'estremità e libera all'altra in cui l'equazione (3.81) si riduce all'equazione (3.81b).

$$1 + \cos(\beta L) \cosh(\beta L) = 0 \quad (3.81b)$$

In seguito, si confronteranno questi valori approssimati con i valori reali dati dall'analisi FEM della struttura.

Le soluzioni della (3.79) sono ottenute numericamente tramite software Matlab e sono riassunte nella Tabella 8. Nella Figura 3-12, sono mostrate le prime tre forme modali.

Tabella 8 Valori delle costanti - trave incastrata libera con massa all'estremità

Modo	i=1	i=2	i=3
$\beta_i L$	1.8042	4.5374	7.6190

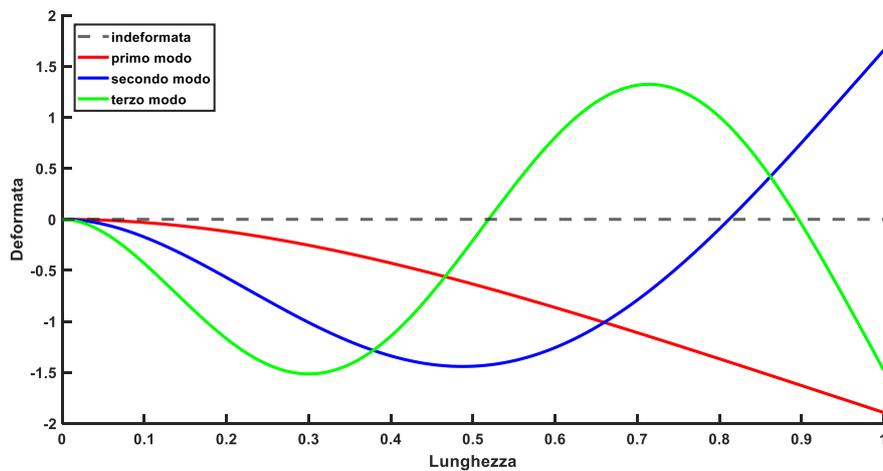


Figura 3-12 Modi flessionali della trave incastrata libera con massa

Dati i valori delle costanti è possibile stimare le prime tre frequenze proprie della struttura, mostrati in Tabella 9.

Modo	i=1	i=2	i=3
$\omega_i$ [rad/s]	8.739	55.271	155.8355
F [Hz]	1.391	8.797	24.802
T [s]	0.7189	0.113	0.040

Tabella 9 Parametri fondamentali dei primi tre modi con massa

Di seguito, invece, è riportato in Figura 3-13 il confronto tra i primi tre modi della trave senza massa, in rosso, e le frequenze proprie per la trave con massa, in blu, precedentemente calcolate. In Tabella 10 sono mostrate le prime tre frequenze proprie della trave senza massa [20]:

Modo	i=1	i=2	i=3
$\beta_i L$	1.875	4.694	7.855
$\omega_i$ [rad/s]	9.439	59.1537	165.6322
F [Hz]	1.502	9.415	26.361
T [s]	0.665	0.106	0.03793

Tabella 10 Parametri fondamentali dei primi tre modi senza massa

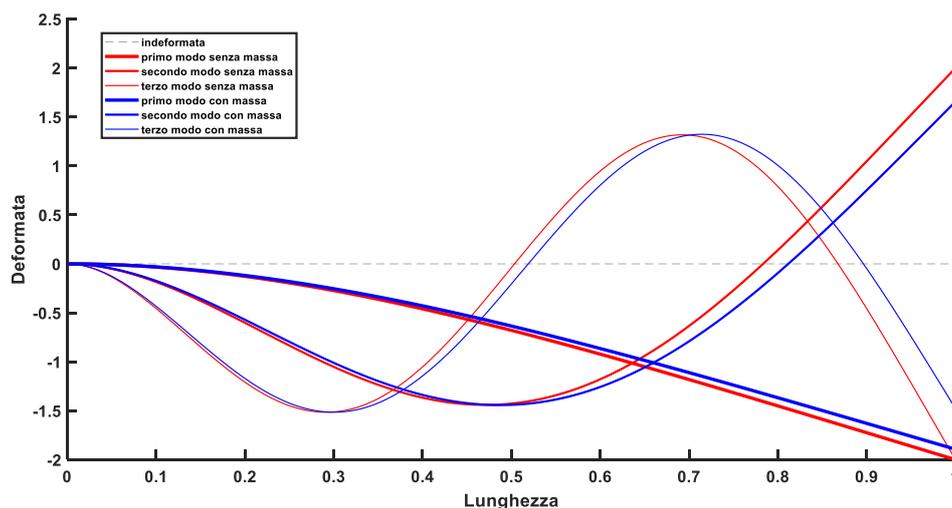


Figura 3-13 Confronto tra le frequenze proprie della cantilever beam con (blu) e senza (rossa) massa

Riprendendo l'equazione (3.66), possiamo considerare il singolo modo, equazione (3.87). Poiché il sistema ha infiniti modi di vibrare, possiamo calcolare la risposta generale come sommatoria dei singoli contributi di tutti i modi flessionali, mostrata nell'equazione (3.88). Infine, sostituendo l'espressione della coordinata modale e dell'autofunzione, otteniamo l'espressione finale del movimento del sistema, nell'equazione (3.89)

$$x_i(z, t) = \varphi_i(z) \eta_i(t) \quad (3.87)$$

$$x(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(z) \eta_i(t) \quad (3.88)$$

$$x(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [\cos(\beta z) - \cosh(\beta z) + \sigma_i(\sin(\beta z) - \sinh(\beta z))] \eta_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.89)$$

### 3.2.2. Analisi della risposta forzata – Metodo di Galerkin

Data la complessità del problema, per analizzare la risposta forzata della struttura useremo il metodo di discretizzazione di Galerkin che permette di pervenire ad una formulazione debole e approssimata, a causa di un residuo  $R$  non nullo da minimizzare [19]. Il metodo di Galerkin permette di passare da un'analisi continua ad una discreta del problema, ponendosi come intermezzo tra una soluzione analitica e una soluzione agli elementi finiti, trattata in seguito in questo lavoro di tesi.

Per prima cosa si procede a dividere la struttura in una griglia di punti nell'intervallo  $0 \leq z \leq L$  e ciò crea di conseguenza degli intervalli. I punti così definiti sono i nodi della struttura e saranno indicati con  $z_k$ , con  $k=1,2,\dots,n$ .

Poiché l'obiettivo della discretizzazione è conoscere la deformata della cantilever beam tip, per ognuno dei nodi così definiti approssimiamo la deformata con un prodotto tra una funzione di forma  $\varphi_j(z)$  e un parametro

dipendente solo dal tempo  $q_j(t)$  incognito. La soluzione del problema, riportata nell'equazione (3.90), assume quindi la seguente forma:

$$x(z, t) \cong x_h(z, t) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(z) q_j(t) \quad (3.90)$$

Questa soluzione è approssimata, perché nella realtà si avranno infiniti nodi ed infiniti gradi di libertà, per cui esisterà un errore nel dominio pari alla differenza tra la soluzione reale e la soluzione approssimata. Si definisce quindi una funzione residua da minimizzare nel dominio  $D \in [0, L]$ , mostrata nell'equazione (3.91):

$$R[x(z, t)] = \sum_{j=1}^N \left\{ [m + M_t \delta(z - L)] \varphi_j \frac{\partial^2 q_j}{\partial t^2} + 2\xi\omega m \varphi_j \frac{\partial q_j}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 \varphi_j}{\partial z^4} q_j - F_w(z) - F_b \sin(3\omega_r t) \delta(z - L) + m a_g \delta(z) \right\} \quad (3.91)$$

Annullando il prodotto tra il residuo così definito e la funzione di forma, si ottiene un sistema di equazioni lineari che ha come sole variabili le coordinate generalizzate  $q_j$  del sistema discretizzato.

$$\int_0^L R[x_h(z, t)] \varphi_j(z) dz = 0 \quad \text{con } j = 1, 2 \dots N \quad (3.92)$$

Sostituendo l'espressione del residuo, mostrata nell'equazione (3.91), si ricava il sistema di N equazioni in N incognite, descritto nell'equazione (3.93)

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \left[ \int_0^L [m + M_t \delta(z - L)] \varphi_j(z) \varphi_i(z) \frac{\partial^2 q_j}{\partial t^2} dz + \int_0^L 2\xi \omega m \varphi_j(z) \varphi_i(z) \frac{\partial q_j}{\partial t} dz \right. \\
& \quad \left. + \int_0^L EI \frac{\partial^4 \varphi_i(z)}{\partial z^4} \frac{\partial^4 \varphi_j(z)}{\partial z^4} q_j dz \right] \\
& = \sum_{j=1}^N \int_0^L (F_w(z) + F_b \sin(3\omega_r t) \delta(z - L) - m a_g \delta(z)) \varphi_i(z) dz \quad (3.93)
\end{aligned}$$

Il sistema può essere scritto in forma compatta nell'equazione (3.94) ed è risolvibile con un'integrazione numerica, implicita o esplicita, tramite un codice Matlab.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\} \quad (3.94)$$

Con M, C e K, rispettivamente massa generalizzata, smorzamento generalizzato e rigidezza generalizzata, espressi nell'equazione (3.95) e f vettore generalizzato dei carichi.

$$\begin{aligned}
[M] &= \int_0^L m \varphi(z) \varphi(z) dz + M_t \varphi^2(L) \\
[C] &= \int_0^L 2\xi \omega m \varphi(z) \varphi(z) dz \quad (3.95) \\
[K] &= EI \int_0^L \frac{\partial^4 \varphi_i(z)}{\partial z^4} \frac{\partial^4 \varphi_j(z)}{\partial z^4} dz
\end{aligned}$$

### 3.3. Analisi agli Elementi Finiti (FEM)

La scelta della funzione di forma è fondamentale per la formulazione agli elementi finiti. Esse descrivono la cinematica dell'elemento tramite un numero finito di parametri e, attraverso l'introduzione di vincoli cinematici, si fa in modo che l'elemento si muova e si deformi secondo leggi imposte [22].

Le funzioni di forma devono soddisfare le condizioni di:

*Completezza*

- Devono essere continue all'interno dell'elemento e possedere derivata fino all'ordine  $n$ ;
- Devono rappresentare il moto rigido corrispondente ad energia di deformazione nulla;
- Devono rappresentare uno stato di deformazione costante.

*Compatibilità*

- Non ci devono essere discontinuità tra due elementi adiacenti.

Se si verificano entrambe le condizioni di completezza e compatibilità la funzione di forma è detta conforme. Tipicamente le funzioni di forma sono espresse da funzioni polinomiali, poiché sono facilmente derivabili e approssimano con errore trascurabile gli spostamenti incogniti.

È necessario, prima di esplicitare la funzione di forma, definire il grado della funzione stessa in modo che risponda alle proprietà precedentemente citate. Nel caso in esame, si richiama l'equazione (3.92) e si esplicita il residuo per un unico elemento, come mostrato nell'equazione (3.96).

$$\int_0^L R[x_h(z, t)]\varphi_j(z)dz = 0 \text{ con } j = 1, 2 \dots N \quad (3.92)$$

$$\int_0^L \varphi_j \left[ [m + M_t \delta(z - L)] \frac{\partial^2 x_e}{\partial t^2} + 2\xi\omega m \frac{\partial x_e}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 x_e}{\partial z^4} - F_w(z) - F_b \sin(3\omega_r t) \delta(z - L) + ma_g \delta(z) \right] dz \quad (3.96)$$

Consideriamo il termine di ordine massimo, corrispondente alla rigidità della trave e lo integriamo per parti due volte.

$$\int_0^L \varphi_j EI \frac{\partial^4 x_e}{\partial z^4} dz = \varphi_j EI \frac{\partial^3 x_e}{\partial z^3} - \int_0^L \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} EI \frac{\partial^3 x_e}{\partial z^3} dz =$$

$$= \varphi_j EI \frac{\partial^3 x_e}{\partial z^3} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} EI \frac{\partial^2 x_e}{\partial z^2} + \int_0^L \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} EI \frac{\partial^2 x_e}{\partial z^2} dz \quad (3.97)$$

Per soddisfare la conformità delle funzioni di forma, perciò, è sufficiente una funzione polinomiale di terzo grado che ammetta derivata seconda, espressa nell'equazione (3.98).

$$x_e(z, t) = a + bz + cz^2 + dz^3 = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_r \end{Bmatrix} = [\varphi(z)]\{q(t)\} \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial x_e(z, t)}{\partial z} = b + 2cz + 3dz^2 \quad (3.99)$$

Dove a, b, c e d sono le costanti incognite che devono essere calcolate imponendo le condizioni al contorno. Si considera l'elemento trave riportato in Figura 3-14 e si esplicitano nell'equazione (3.100) lo spostamento e la rotazione dell'elemento trave nei due estremi.

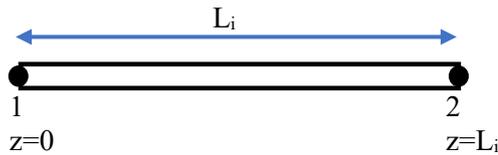


Figura 3-14 Elemento trave - funzioni di forma

$$\begin{aligned} x_e(0) &= a \\ \frac{\partial x_e(0)}{\partial z} &= b \\ x_e(L_i) &= a + bL_i + cL_i^2 + dL_i^3 \\ \frac{\partial x_e(L)}{\partial z} &= b + 2cL_i^2 + 3dL_i^2 \end{aligned} \quad (3.100)$$

Possiamo scrivere le quattro condizioni precedentemente riportate anche in forma matriciale, equazione (3.101).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_e(0) \\ \frac{\partial x_e(0)}{\partial z} \\ x_e(L_i) \\ \frac{\partial x_e(L)}{\partial z} \end{Bmatrix} \rightarrow [A]\{a\} = \{q\} \quad (3.101)$$

Dove  $\{q\}$  è il vettore delle condizioni al contorno del singolo elemento trave. Possiamo quindi invertire la matrice  $[A]$  e ricavare il vettore delle costanti  $\{a\}$ , equazione (3.102), che andremo a sostituire nell'equazione (3.98) per calcolare le funzioni di forma.

$$\{a\} = [A]^{-1}\{q\} \quad (3.102) \quad \text{con} \quad [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_e(z, t) &= a + bz + cz^2 + dz^3 = [1 \ z \ z^2 \ z^3] \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} \\ &= [1 \ z \ z^2 \ z^3][A]^{-1}\{q\} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4]\{q\} \quad (3.103) \end{aligned}$$

Con  $[\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4]$  delle funzioni di forma esplicitate come segue nelle equazioni (3.104):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - \frac{3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3} & (3.104) \quad \varphi_2 &= z - \frac{2z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \\ \varphi_3 &= \frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3} & \varphi_4 &= -\frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \end{aligned}$$

Si sostituiscono le funzioni di forma così ottenute nell'equazione (3.96) e si ricava la formulazione del problema agli elementi finiti. Al secondo membro dell'equazione si trovano le forze di taglio  $S$  e il momento flettente  $M$  interni e le forze esterne.

$$\begin{aligned} &\int_0^L [m + M_t \delta(z - L)]\{\varphi\}[\varphi]dz \{\ddot{q}\} + \int_0^L 2\xi\omega m\{\varphi\}[\varphi]dz \{\dot{q}\} \\ &+ \int_0^L EI\{\varphi''\}[\varphi'']dz \{q\} \quad (3.105) \\ &= \begin{Bmatrix} S_1 \\ M_1 \\ S_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \int_0^L \{\varphi\}[F_w(z) + F_{b0} \sin(3\omega_r t) \delta(z - L) - ma_g \delta(z)]dz \end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned}
 S_1 &= -EI \frac{\partial^3 q}{\partial z^3} \Big|_{z=0} & S_2 &= -EI \frac{\partial^3 q}{\partial z^3} \Big|_{z=L} \\
 M_1 &= EI \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \Big|_{z=0} & S_2 &= EI \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \Big|_{z=L}
 \end{aligned} \quad (3.106)$$

Risolvendo le moltiplicazioni tra matrici e gli integrali, si ottengono le matrici di rigidezza e di massa per l'elemento trave. La matrice di massa così costruita sarà detta *consistent* poiché usa lo stesso modello di spostamento usato per la matrice di rigidezza, ma può essere sostituita dalla matrice di massa *lumped*, di formulazione più semplice [22]. Entrambe le matrici sono approssimate, in particolare la matrice consistent, equazione (3.108), sovrastimerà le frequenze naturali esatte, mentre la matrice le lumped, equazione (3.109) sottostimerà.

$$[K] = \int_0^L EI \{\varphi''\} [\varphi''] dz = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned}
 [M] &= \int_0^L EI \{\varphi\} [\varphi] dz \\
 &= \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} + M_t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.108)
 \end{aligned}$$

$$[M] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} mL & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mL & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} + M_t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

Per quanto riguarda le forze esterne applicate alla torre, essi si esplicitano come segue, nell'equazione (3.110)

$$\int_0^L F_w(z)\{\varphi\}dz + \int_0^L F_{b0} \sin(3\omega_r t) \delta(z-L)\{\varphi\}dz - \int_0^L ma_g \delta(z)\{\varphi\}dz \quad (3.110)$$

Per i carichi concentrati, si sfrutta la proprietà della funzione Delta di Dirac, per cui  $\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\delta(z-z_0)dz = g(z_0)$  (3.111), come mostrato di seguito, mentre il carico distribuito in esame ha una dipendenza logaritmica per cui si effettuerà l'integrale numericamente.

$$\int_0^L F_w(z)\{\varphi\}dz + F_{b0} \sin(3\omega_r t) \{\varphi(L)\} - ma_g \{\varphi(0)\}$$

$$\int_0^L F_w(z)\{\varphi\}dz + F_{b0} \sin(3\omega_r t) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - ma_g \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.112)$$

Se consideriamo la torre eolica come un insieme di n travi assemblate, le matrici di massa lumped e di rigidità del sistema assemblato, indicate con un asterisco sono mostrate nelle equazioni (3.113) e (3.114).

$$[K]^* = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{11}^2 + K_{22}^1 & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{11}^i + K_{22}^{i-1} & K_{12}^i \\ 0 & 0 & K_{21}^i & K_{11}^n + K_{22}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

Con

$$K_{11}^i = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L \\ 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad K_{12}^i = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{21}^i = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad K_{12}^i = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[M]^* = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n + M_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_n \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Calcolati gli autovalori del sistema, si otterranno  $2n$  frequenze proprie. Il sistema così assemblato può essere scritto in maniera compatta nell'equazione (3.115), coincidente con l'equazione (3.94).

$$[M]*\{\ddot{q}\} + [C]*\{\dot{q}\} + [K]*\{q\} = \int_0^L F_w(z)\{\varphi\}dz + F_{b0} \sin(3\omega_r t) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - ma_g \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.115)$$

Il sistema ricavato nell'equazione (3.115) è stato implementato in un codice Matlab per calcolare le frequenze proprie che sono mostrate in Tabella 11 e in Figura 3-15, per  $N=100$ .

Tabella 11 Frequenze proprie - approccio FEM

Modo	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
$\omega_i$ [rad/s]	8.7387	55.2716	155.8368	307.2032	510.3757
F [Hz]	1.3908	8.7967	24.8022	48.8929	81.2288
T [s]	0.719	0.1137	0.0403	0.0205	0.0123

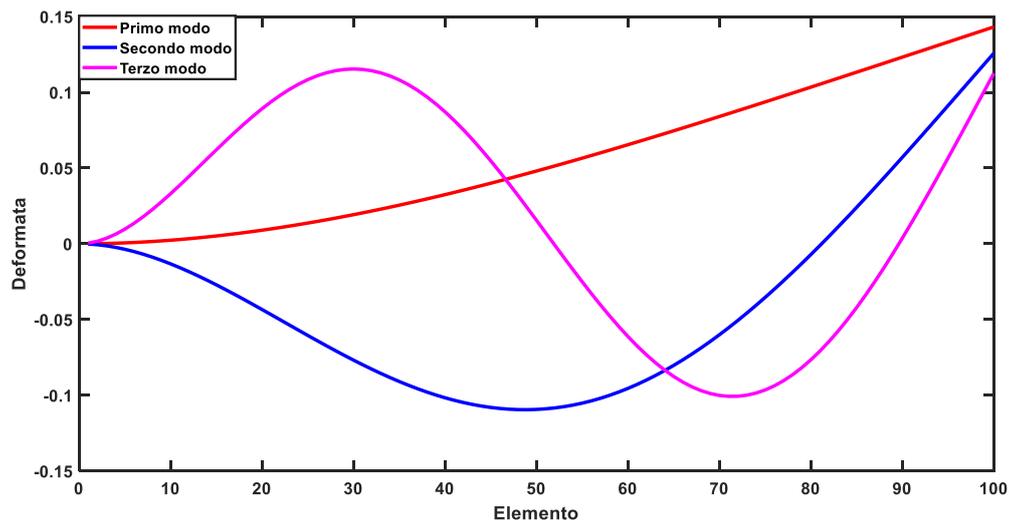


Figura 3-15 Elementi finiti - primi tre modi per  $N=100$

## 4. ANALISI NUMERICA

### 4.1. Analisi Modale

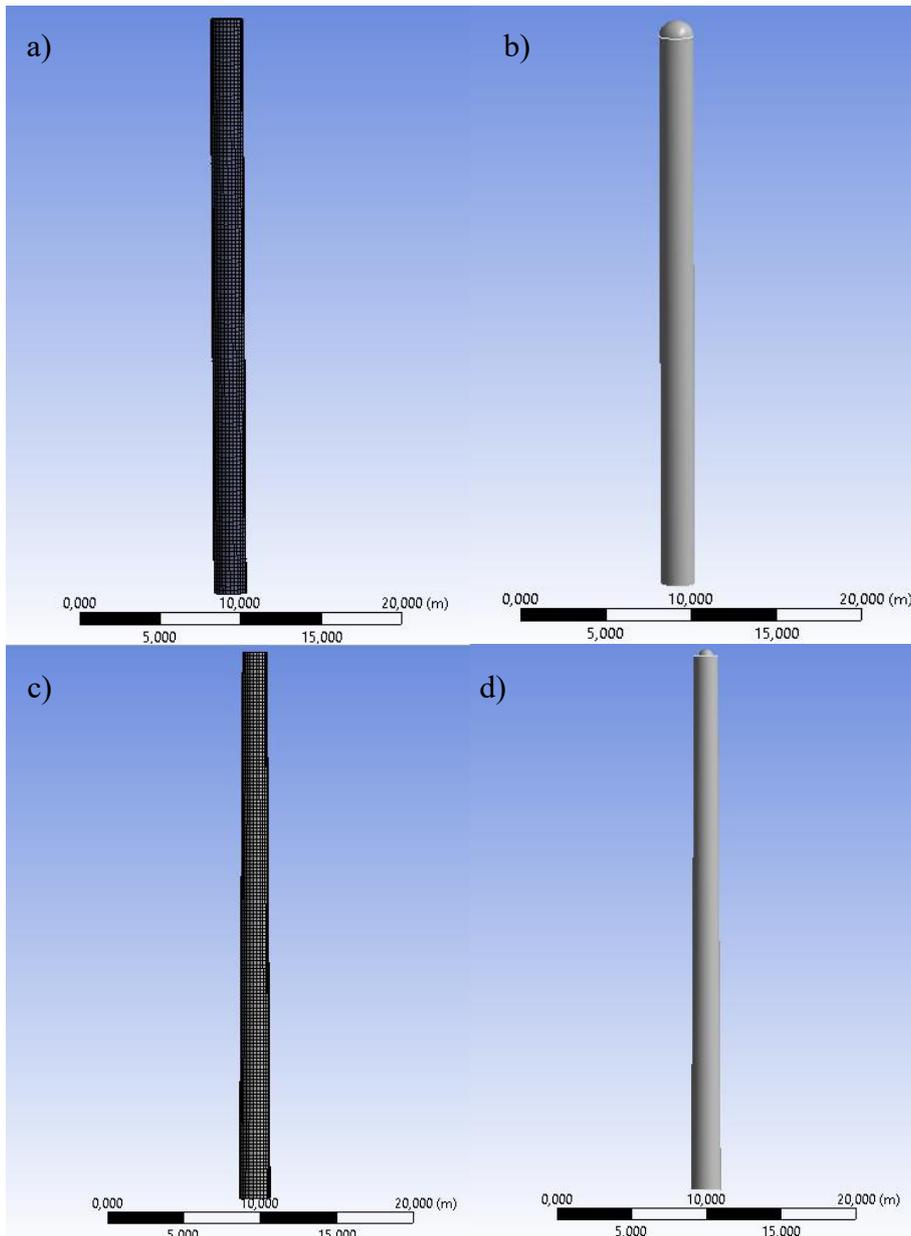
L'analisi modale è lo studio del comportamento dinamico della struttura e permette la determinazione delle frequenze proprie, in base ai vincoli a cui la struttura è sottoposta. Nel capitolo precedente si sono calcolate analiticamente le frequenze proprie corrispondenti ai primi tre modi fondamentali, approssimando la torre ad una cantilever beam e considerando anche la presenza di una massa, considerando la torre come una successione di pendoli inversi o creando un modello agli elementi finiti. Si procede ora a modellizzare la torre su Ansys Workbench R2020 per validare i risultati ottenuti attraverso la procedura analitica. Si richiamano in Tabella 12 le dimensioni della torre in analisi.

*Tabella 12 Caratterizzazione geometrica della torre eolica*

<b>Modello</b>	<b>Ghre Power 25-60</b>
<b>Potenza elettrica nominale</b>	59.9 kW, trifase, 400 VAC, 50 Hz
<b>Altezza navicella</b>	36 m
<b>Diametro esterno alla base</b>	2 m
<b>Diametro esterno ad altezza navicella</b>	1.6 m
<b>Spessore concio</b>	0.1 m
<b>Peso</b>	Navicella e rotore 7000 kg Densità Torre $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$

Per poter analizzare come variano le frequenze proprie al variare della geometria della torre eolica, si sono costruiti quattro diversi modelli, ciascuno più realistico dell'altro, riportati in Figura 4-1, e su ognuno di essi si è svolta l'analisi modale:

- a) Torre cilindrica a diametro costante;
- b) Torre cilindrica a diametro costante con massa all'estremità;
- c) Torre rastremata;
- d) Torre rastremata con massa all'estremità;



*Figura 4-1 Modelli di torre eolica: a) diametro costante senza massa; b) diametro costante con massa all'estremità; c) rastremato senza massa; d) rastremato con massa.*

La navicella sarà simulata come una massa puntiforme concentrata MASS21 ad altezza  $z = 36$  m, collegata alla torre attraverso elementi rigidi MPC184 a densità nulla, usati per interfacciare modelli rigidi con modelli flessibili. Tutti i modelli sono incastrati all'estremità inferiore per simulare il vincolo della fondazione in cemento armato e sono meshati con elementi SOLID186.

In Tabella 13 sono mostrate le frequenze proprie dei primi dieci modi dei modelli considerati. Il numero dei modi da analizzare è stato scelto in modo tale che il fattore cumulativo di partecipazione della massa arrivi ad un valore prossimo al 95% e ciò avviene, per tutte le direzioni, tra il settimo e il decimo modo. Tutti i modelli sono simmetrici, per cui si hanno le stesse frequenze nel piano XZ e nel piano YZ, semplicemente sfasate di  $90^\circ$ . Nella realtà, il modello non è simmetrico, poiché la massa della navicella e del rotore non sono distribuite allo stesso modo all'estremità della torre.

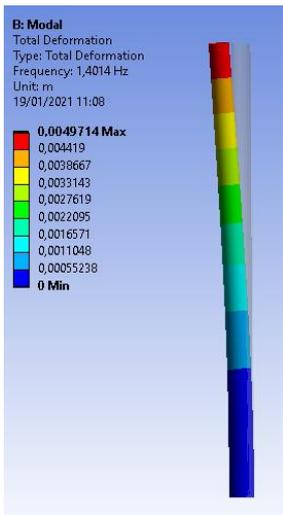
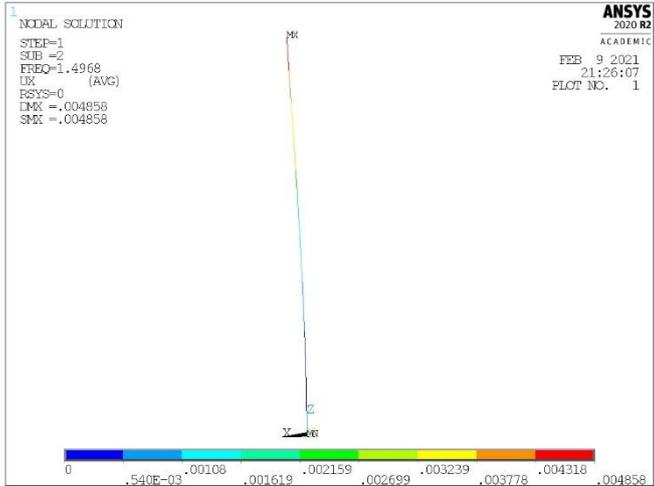
MODI	MODELLO FEM N=100 [Hz]	MULTILINK N=400 [Hz]	BEAM SENZA MASSA [Hz]	BEAM CON MASSA [Hz]	DIAMETRO COSTANTE SENZA MASSA [Hz]	DIAMETRO COSTANTE CON MASSA [Hz]	RASTREMATA SENZA MASSA [Hz]	RASTREMATA CON MASSA [Hz]
1	1.3908	1.3837	1,502	1,391	1,497	1,3861	1,5399	1,4014
2			1,502	1,391	1,497	1,3862	1,5399	1,4014
3	8.7967	8.7721	9,415	8,797	9,128	8,5483	8,5633	7,8824
4			9,415	8,797	9,128	8,5487	8,5634	7,8824
5	-	-	-	-	22,275	22,275	25,564	25,564
6	24.8022	24.7384	26,361	24,802	24,561	23,21	22,538	20,989
7			26,361	24,802	24,562	23,211	22,538	20,989
8	-		-	-	35,940	34,509	37,676	35,885
9	48.8922	48.7699			45,695	43,527	41,954	39,48
10					45,693	43,527	41,954	39,47

Tabella 13 Frequenze proprie dei primi dieci modi della torre eolica

Si può notare come, a caratteristiche simili, corrispondano frequenze simili, per cui i modelli analitici considerati nel Capitolo 3 sono validati e abbastanza accurati per studiare il sistema. Ad esempio, la prima frequenza naturale del sistema Beam con Massa differisce dal corrispondente modello Ansys solamente per lo 0.35 %, mentre la terza ha un errore relativo del 6.4%.

In Figura 4-2 si riporta una comparazione dei primi tre modi dei modelli Beam senza Massa e Torre rastremata con Massa all'estremità, modellati in Ansys, che risultano essere rispettivamente il modello più lontano e più vicino alle condizioni reali della torre. Nella seconda colonna è riportato l'errore percentuale per ciascun modo, calcolato come nell'equazione (4.1).

$$\%error = \frac{|f_{rastremata} - f_{beam}|}{f_{rastremata}} \times 100 \quad (4.1)$$

	<b>ERRORE PERCENTUALE</b>	<b>TORRE RASTREMATA CON MASSA</b>	<b>CANTILEVER BEAM SENZA MASSA</b>
Primo modo	7.17%	 <p><b>B: Modal</b> Total Deformation Type: Total Deformation Frequency: 1,4014 Hz Unit: m 19/01/2021 11:08</p> <p>0,0049714 Max 0,004419 0,0038667 0,0033143 0,0027619 0,0022095 0,0016571 0,0011048 0,0005238 0 Min</p>	 <p>1 NODAL SOLUTION STEP=1 SUB =2 FREQ=1,4968 UX (AVG) USYS=0 UMX =,004858 SMX =,004858</p> <p>ANSYS 2020 R2 ACADEMIC FEB 9 2021 21:26:07 PLOT NO. 1</p> <p>0 .540E-03 .00108 .001619 .002159 .002699 .003239 .003778 .004318 .004858</p>

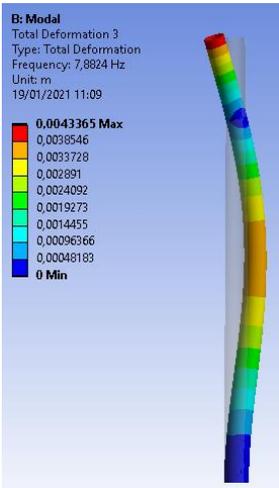
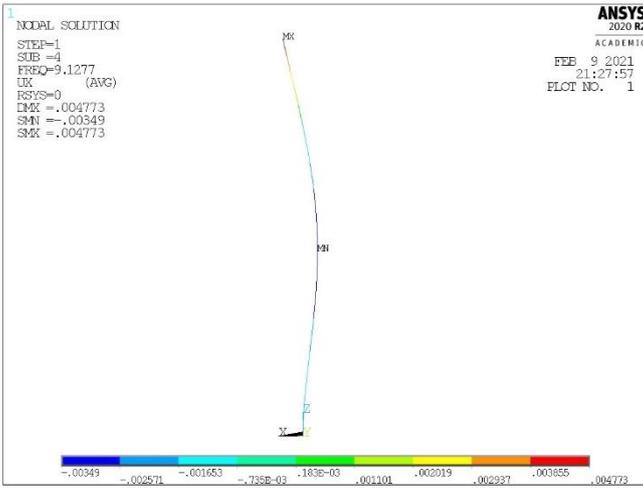
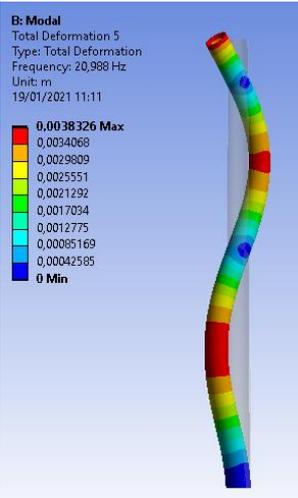
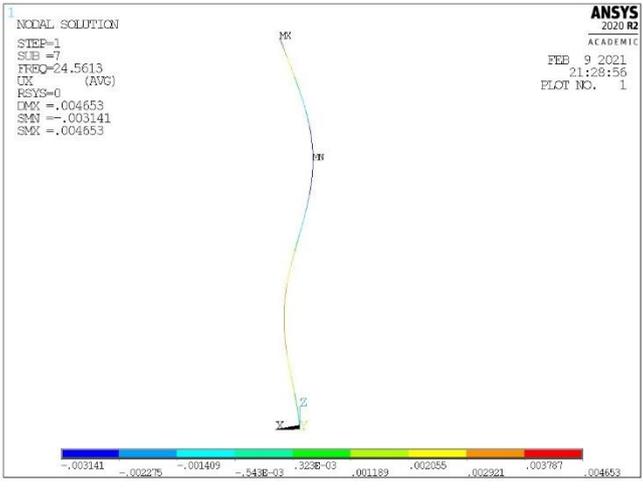
<p>Secondo modo</p>	<p>19.42%</p>		
<p>Terzo modo</p>	<p>25.59%</p>		

Figura 4-2 Confronto tra le deformate e le frequenze

Si sottolinea come all'aumentare dei modi considerati, l'errore percentuale aumenti, facendo risultare il modello semplificato non adeguato ad ulteriori analisi. Per questo motivo, di seguito sarà usato il modello agli elementi finiti della torre rastremata con la massa all'estremità per effettuare un'analisi armonica e transiente.

## 4.2. Analisi Armonica

Si procede ora a valutare la risposta del sistema nel dominio delle frequenze, in presenza di una forzante di tipo armonico. Se si applica una forzante a partire dall'istante  $t=0$ , con la struttura ferma, la risposta mostrerà un transitorio iniziale, che si esaurisce dopo un certo tempo, in presenza di smorzamento, a seguito del quale la struttura oscillerà con ampiezza costante. Richiamiamo l'equazione (3.115) e applichiamo due diverse tecniche di soluzione per calcolare la risposta alla forzante armonica [20]:

- Metodo diretto
- Metodo di sovrapposizione modale

$$[M]^*\{\ddot{q}\} + [C]^*\{\dot{q}\} + [K]^*\{q\} = \{F_0\} \cos(\omega t) = \{F_0\} e^{i\omega t} \quad (3.115)$$

### Metodo diretto

Poiché l'equazione del moto è lineare, cerchiamo una soluzione nella forma mostrata nell'equazione (4.2) e la sostituiamo nell'equazione del moto, equazione (4.3).

$$\{q\} = \{q_0\}e^{i\omega t} \quad \{\dot{q}\} = \{q_0\}i\omega e^{i\omega t} \quad \{\ddot{q}\} = -\{q_0\}\omega^2 e^{i\omega t} \quad (4.2)$$

$$(-\omega^2[M]^* + i\omega[C]^* + [K]^*)\{q_0\} = \{F_0\} \quad (4.3)$$

Dove  $(-\omega^2[M]^* + i\omega[C]^* + [K]^*) = [K_{din}]$  è la matrice di rigidezza dinamica. Possiamo ottenere il vettore  $\{q_0\}$  dall'equazione (4.4), calcolando l'inverso della matrice di rigidezza dinamica, che sarà la matrice di recettanza  $[\alpha(\omega)]$ :

$$\{q_0\} = [\alpha(\omega)]\{F_0\} \quad (4.4)$$

### Metodo di sovrapposizione modale

Per evitare l'inversione della matrice, si esegue una trasformazione modale diretta, premoltiplicando per  $[\Psi]^T$  entrambi i membri dell'equazione (3.115) e ricordando che

$$\{q(t)\} = [\Psi]\{\eta(t)\} = \sum_{r=1}^n \{\Psi_r\} \eta_r \quad (4.5)$$

Dove  $[\Psi]$  è la matrice modale, costituita dagli autovettori del sistema, e  $\{\eta(t)\}$  è il vettore delle coordinate modali. Otteniamo così un sistema di  $n$  equazioni disaccoppiate, mostrato nell'equazione (4.6).

$$(-\omega^2 M_r + i\omega C_r + K_r)\eta_r(t) = \{\Psi_r\}^T \{F_0\} e^{i\omega t} \quad (4.6)$$

Con  $\eta_r(t) = \eta_{r0} e^{i\omega t}$ . Definiti  $\omega_r^2 = \frac{K_r}{M_r}$  e  $2\xi_r \omega_r = \frac{C_r}{M_r}$  e normalizzando gli autovettori, per ciascun modo  $r$  si ha

$$\eta_{r0} = \frac{\{\phi_r\}^T \{F_0\}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\xi_r \omega_r \omega)} \quad (4.7)$$

E, di conseguenza

$$\{q_0\} = \sum_{r=1}^n \frac{\{\phi_r\} \{\phi_r\}^T \{F_0\}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\xi_r \omega_r \omega)} \quad (4.8)$$

Si definisce la recettanza, come

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{q_{j0}}{F_{k0}} \Big|_{F_i=0 \forall i \neq k} \quad (4.9)$$

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\xi_r \omega_r \omega)} \quad (4.10)$$

Dove  $k$  indica il grado di libertà in cui è applicata la forza, mentre  $j$  il grado di libertà in cui andiamo a valutare la risposta.

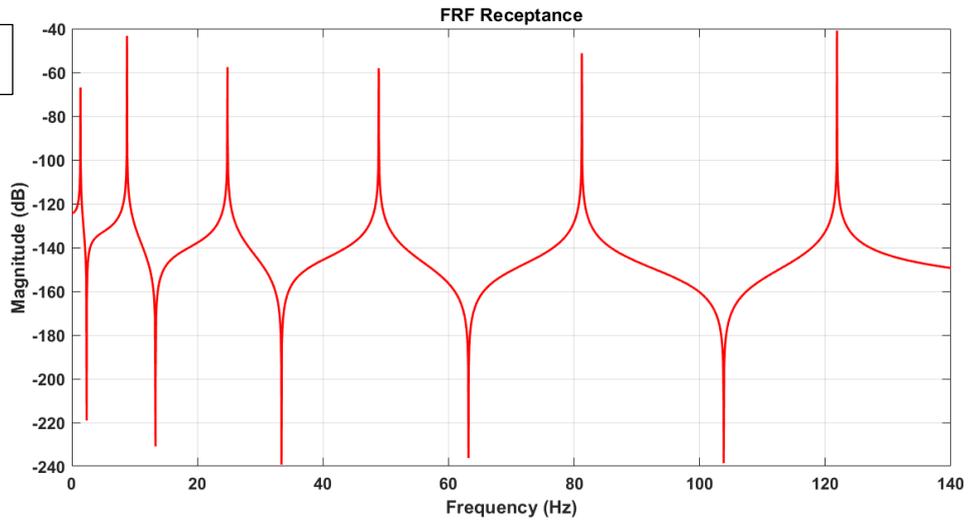
Definiamo quindi le frequenze di risonanza come quelle che rendono massimo il modulo della recettanza, pari al numero di gradi di libertà scelto. Se la struttura non è smorzata, sono presenti anche delle frequenze di antirisonanza, in cui la recettanza è nulla.

Per la nostra analisi si è utilizzato il modello FEM ricavato nel paragrafo 3.3 e si è divisa la struttura in 100 elementi, ciascuno lungo 3.6 m. La struttura, perciò, avrà 200 gradi di libertà, ma si considereranno solo le prime sei frequenze proprie, poiché le frequenze di ordine superiore non hanno importanza strutturale. In Figura 4-3 è riportata la recettanza  $\alpha_{200,200}$ , corrispondente all'estremità libera, ricavata con il software MATLAB, al variare del coefficiente di smorzamento (nullo, 2%, 5%). Si può notare come il massimo della risposta corrisponda alle frequenze di risonanza, riportate in Tabella 14 (Cfr. Tabella 11).

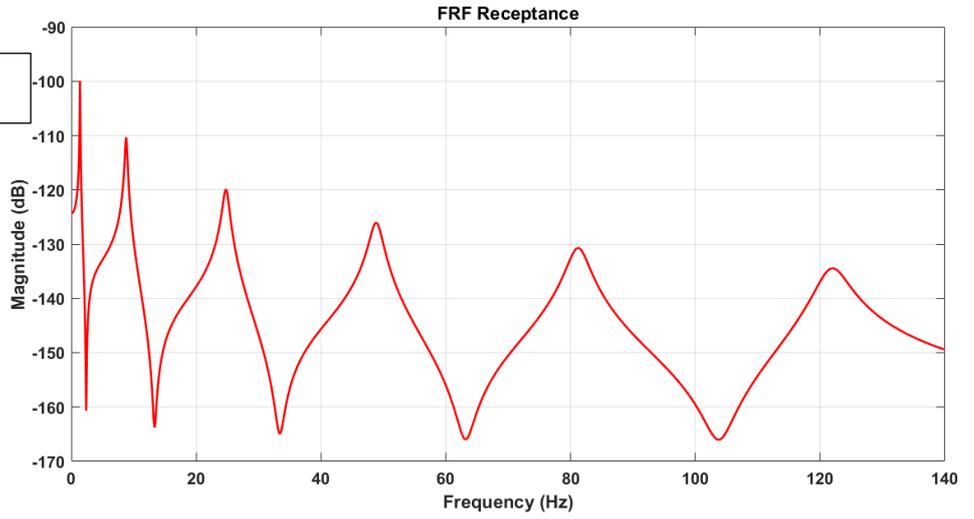
<b>Modo</b>	<b>i=1</b>	<b>i=2</b>	<b>i=3</b>	<b>i=4</b>	<b>i=5</b>	<b>r=6</b>
<b><math>\omega_i</math> [rad/s]</b>	8.7387	55.2716	155.8368	307.2032	510.3757	765.6519
<b>F [Hz]</b>	1.3908	8.7967	24.8022	48.8929	81.2288	121.8573

*Tabella 14 Frequenze di risonanza - recettanza*

a)  $\alpha_{200,200}$  per  $\xi = 0$



b)  $\alpha_{200,200}$  per  $\xi = 0.02$



c)  $\alpha_{200,200}$  per  $\xi = 0.05$

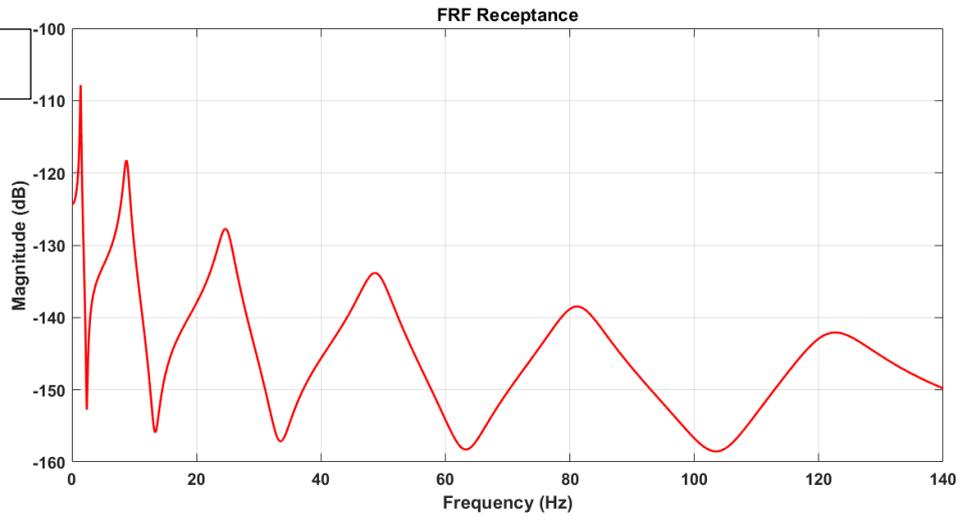
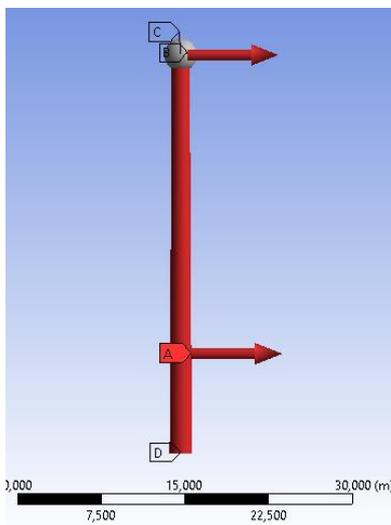


Figura 4-3 Recettanza - a) smorzamento nullo - b) smorzamento  $\zeta=0.02$  - c) smorzamento  $\zeta=0.05$

La stessa tipologia di analisi è svolta attraverso il software Ansys Workbench R2020. Si considera il modello della torre eolica rastremata con massa all'estremità a cui sono applicati i carichi descritti nella pagine precedenti di questa relazione. Poiché il carico dato dalla rotazione delle pale sulla torre, equazione (2.18), dipende dal tempo, considereremo il caso di carico peggiore, per cui  $\sin(3\omega_r t) = 1$  e, di conseguenza,  $F_b = F_{b0}$ . Sono trascurati i carichi sismici, i quali saranno trattati separatamente in una successiva analisi. La struttura così composta è mostrata in Figura 4-4, insieme alle frequenze proprie precedentemente calcolate con l'analisi modale.



- A: forza distribuita su tutta la torre  $F_w(z)$
- B: forza concentrata all'estremità  $F_b = F_{b0}$
- C: massa puntiforme  $M_t$
- D: incastro all'estremità

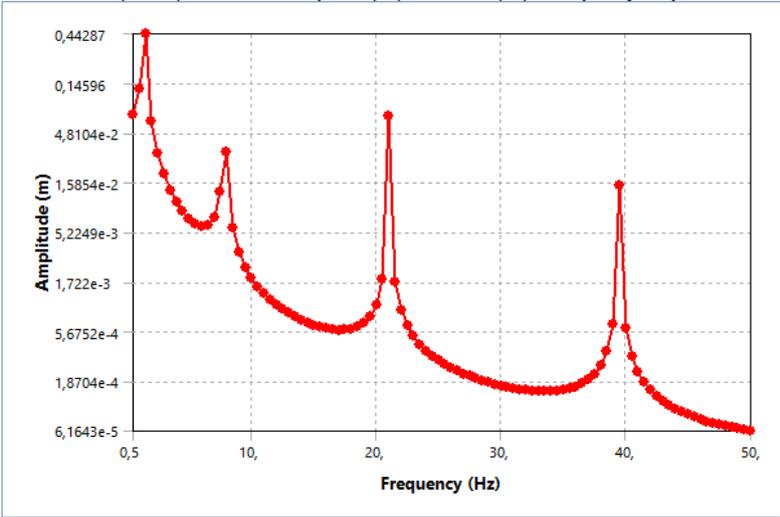
TORRE RASTREMATA CON MASSA [Hz]
1,4014
7,8824
20,989
39,48

Figura 4-4 Analisi armonica - impostazione dei carichi

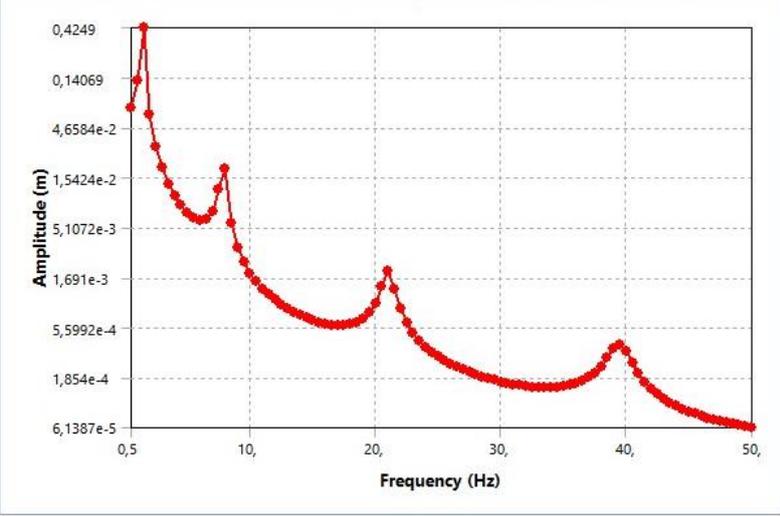
In Figura 4-5 è mostrata la deformazione della struttura al variare della frequenza, per valori di smorzamento nullo,  $\xi = 0.02$  e  $\xi = 0.05$ . Il massimo valore di spostamento, per la struttura non smorzata è pari a  $\delta_{max} = 0.442 m$ , negli intorni della prima frequenza propria della struttura, che pur diminuendo all'aumentare dello smorzamento, rimane sempre critico. Si sottolinea, quindi, l'importanza di non far lavorare mai la turbina eolica a frequenze più alte rispetto a quella di funzionamento prevista, pari a  $f = 0.75 Hz$ , per la quale si ha un valore di spostamento pari a  $\delta = 0.0728 m$  per  $\xi = 0$  e  $\delta = 0.065 m$  per  $\xi = 0.05$ .

FIGURE 4  
Model (B4, C4) > Harmonic Response (C5) > Solution (C6) > Frequency Response

a)  $\delta$  per  $\xi = 0$



b)  $\delta$  per  $\xi = 0.02$



c)  $\delta$  per  $\xi = 0.05$

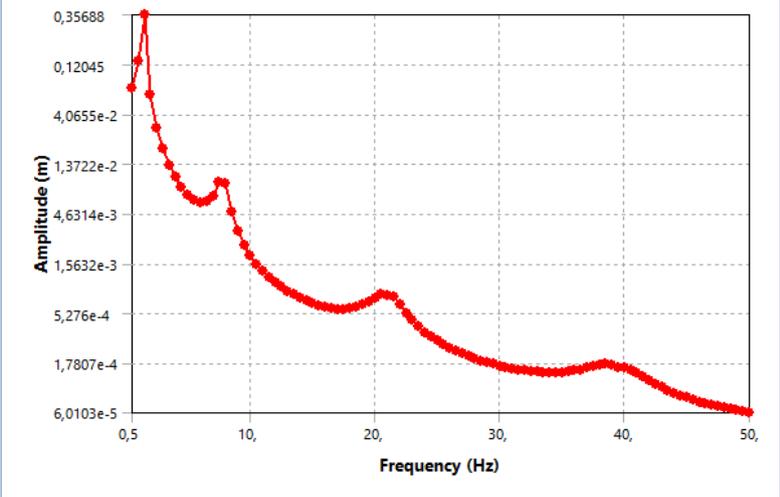


Figura 4-5 Spostamento - a) smorzamento nullo - b) smorzamento  $\xi=0.02$  - c) smorzamento  $\xi=0.05$

Per poter confrontare le due soluzioni, utilizziamo il principio di separazione degli effetti, considerando esclusivamente la forza delle pale sulla torre  $F_{b0} = 24850 \text{ N}$  applicata all'estremità libera e ricavando i risultati sia per il modello FEM, costruito in Matlab (Figura 4-3), che per quello modellato in Ansys Workbench, mostrato in Figura 4-6. Si valuta la risposta alla frequenza di funzionamento della turbina,  $f = 0.75 \text{ Hz}$ , in Tabella 15.

Tabella 15 Confronto tra gli spostamenti - analisi armonica

Smorzamento	Recettanza dB (m/N)	$\delta$ Matlab (m)	$\delta$ Ansys (m)
$\xi=0$	$-122.2703 (7.699 \cdot 10^{-7})$	0.019134	0.01304
$\xi=0.02$	$-122.2740 (7.6946 \cdot 10^{-7})$	0.019121	0.01299
$\xi=0.05$	$-122.2930 (7.667 \cdot 10^{-7})$	0.01894	0.01273

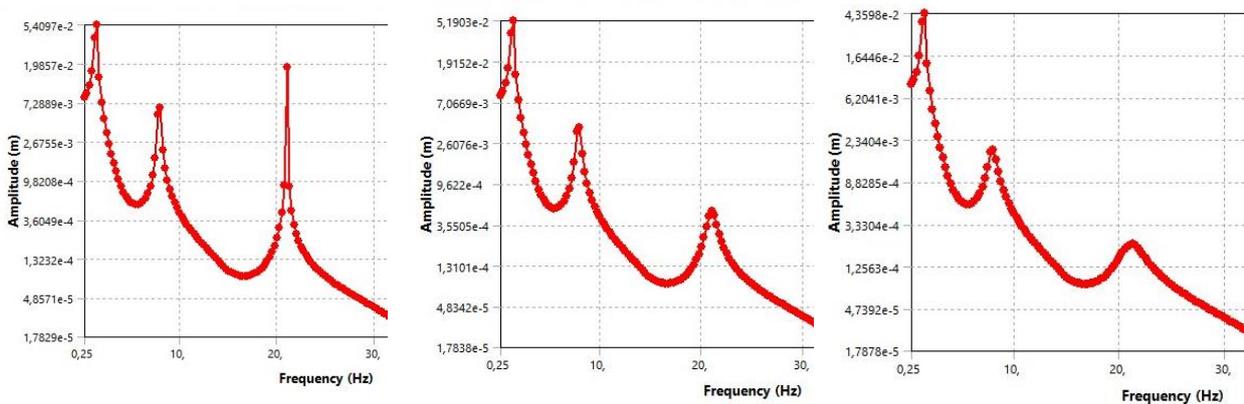


Figura 4-6 Spostamento a  $f=0.75 \text{ Hz}$  - a) smorzamento nullo - b) smorzamento  $\xi=0.02$  - c) smorzamento  $\xi=0.05$

Le differenze tra gli spostamenti trovano giustificazione nelle differenze geometriche tra modelli e nel fatto che i modelli studiati presentano frequenze naturali diverse. L'ordine di grandezza dello spostamento è, però, lo stesso, per cui i risultati sono stati considerati soddisfacenti.

### 4.3. Analisi Transiente

L'analisi transiente permette di valutare come reagisce il sistema in analisi in risposta ad un carico dipendente dal tempo di tipo non periodico. Si utilizzano le stesse tecniche precedentemente descritte nell'analisi armonica, in caso di smorzamento proporzionale e costante. In alternativa si possono usare metodi di integrazione diretta, impliciti ed espliciti, in presenza di uno smorzamento generico. A monte dell'analisi transiente devono esserci l'analisi strutturale statica e l'analisi modale. L'analisi modale è stata svolta precedentemente, mentre l'analisi strutturale statica sarà svolta contestualmente all'analisi transiente.

In questa analisi vale il teorema di Betti, o di reciprocità, che afferma che, dati due sistemi equilibrati di forze, il lavoro che le forze del primo sistema compiono sugli spostamenti causati dal secondo è uguale al lavoro che le forze del secondo sistema compiono sugli spostamenti prodotti dal primo. Ciò avviene poiché le matrici di massa e di rigidezza sono simmetriche, per cui è indifferente scambiare il punto di applicazione con il punto di lettura dei risultati [22].

Nell'analisi in esame, si considererà il carico applicato in corrispondenza della massa rigida rappresentante la navicella e il rotore e i risultati saranno letti in corrispondenza dell'estremità della torre. Si otterrà la risposta nel tempo dello spostamento, al variare del coefficiente di smorzamento. Il carico applicato sarà assimilabile ad un impulso, durerà esclusivamente 0.05 s e sarà pari in modulo a  $F_{tot} = F_{b0} + F_w(h_{torre})$ . È importante la scelta del passo di integrazione che deve essere di almeno un decimo del periodo della frequenza più alta da considerare nell'analisi. Il numero di frequenze da tenere in considerazione si sceglie in base al proprio fattore di partecipazione, poiché bisogna scegliere un numero di modi che coinvolga almeno il 90% della massa nella direzione di applicazione del carico, asse x. Nel caso in analisi,

si considereranno dieci modi, in cui l'ultimo avrà una frequenza  $f=39.4803$  Hz e  $T=0.025$  s, per cui  $t_{integ} < 0.0025$  s. Si sceglie  $t_{integ} = 0.002$ . Il carico è applicato in tre blocchi, mostrati in Figura 4-7:

- *Blocco 1*  $0 < t < 3$  s: la struttura è a riposo e nessun carico è applicato;
- *Blocco 2*  $3 < t < 3.05$  s: viene applicato un carico pari a  $F_{tot} = F_{b0} + F_w(h_{torre}) = 518.668$  kN;
- *Blocco 3*  $3.05 < t < 10$ : non esistono carichi applicati alla struttura, la quale si muove solo per effetto del carico impulsivo.

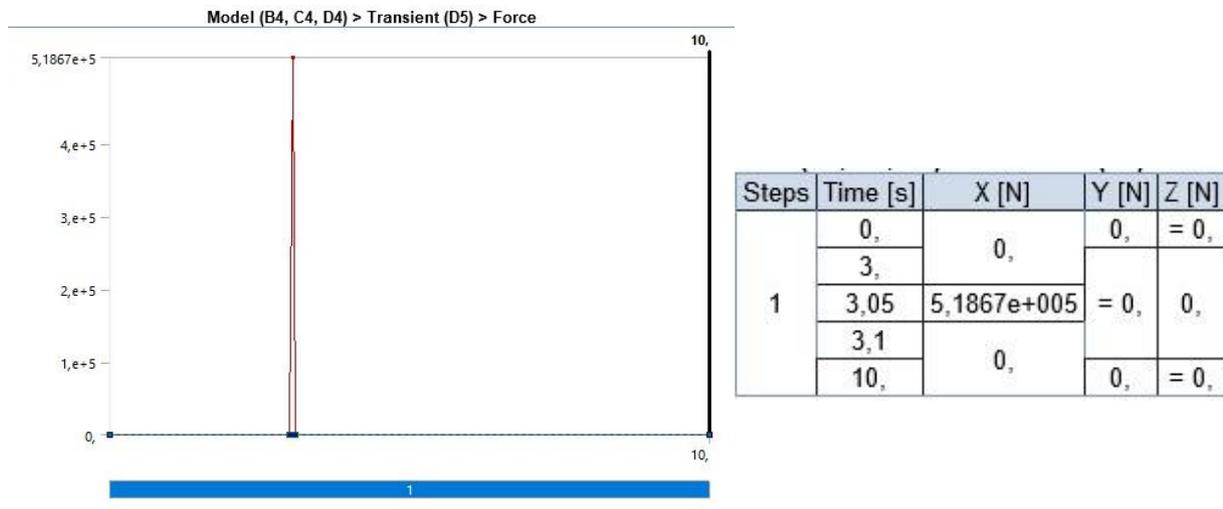


Figura 4-7 Carico analisi transiente

Nelle seguenti figure (Figura 4-8, Figura 4-9, Figura 4-10) è riportato l'andamento della deformazione totale e direzionale (asse x) dell'estremità libera della torre in funzione del tempo, al variare del coefficiente di smorzamento. In particolare, in verde è riportata la deformazione massima, in rosso la deformazione minima e il blu la media. Si sottolinea come, all'aumentare dello smorzamento, la risposta della struttura diminuisce fino a quasi annullarsi per  $\xi=5\%$ .

### Smorzamento nullo

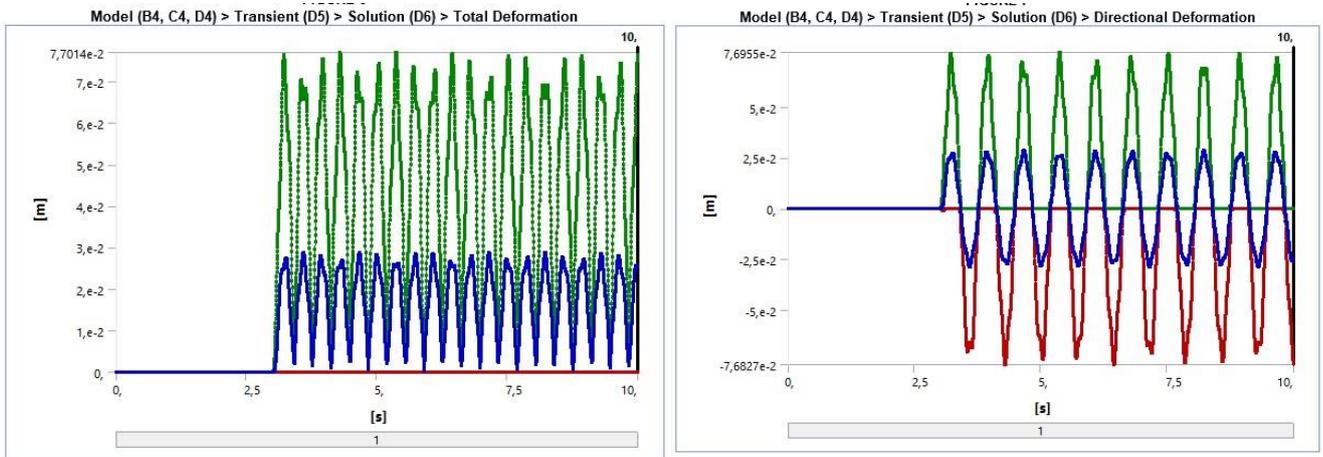


Figura 4-8 Analisi transiente - Smorzamento nullo - a) deformazione totale - b) deformazione direzionale asse x

### Smorzamento $\zeta=0.02$

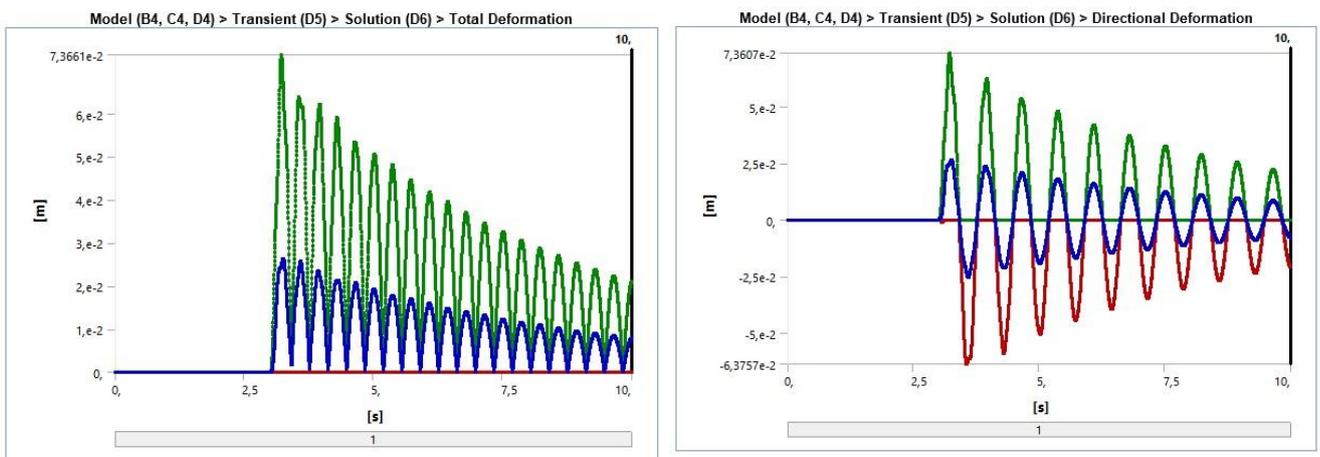


Figura 4-9 Analisi transiente - Smorzamento 0.02 - a) deformazione totale - b) deformazione direzionale asse x

Smorzamento  $\zeta=0.05$

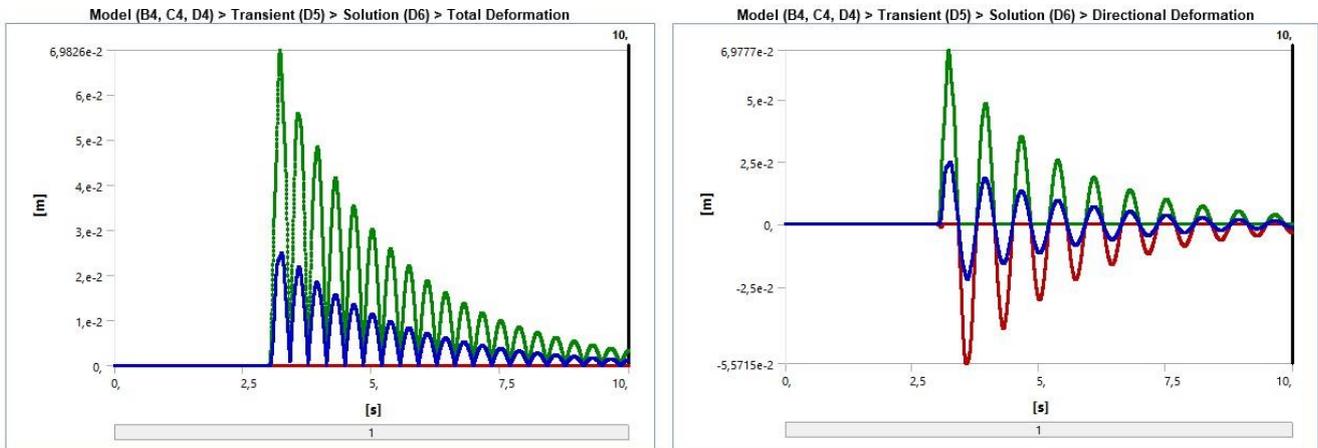


Figura 4-10 Analisi transiente - Smorzamento 0.05 - a) deformazione totale - b) deformazione direzionale asse x

#### 4.4. Analisi di risposta spettrale per i carichi sismici

Infine, si esegue sulla struttura un'analisi di risposta spettrale per valutare le sollecitazioni sismiche sulla struttura. L'analisi di risposta spettrale (*Response Spectrum Analysis – RSA*) è un metodo di analisi statistica dinamica lineare che misura la risposta strutturale ai carichi stocastici, quali gli eventi sismici, e calcola la massima risposta modale dagli spettri usando la sovrapposizione modale [23] [24]. In questo modo si può calcolare la massima deflessione della struttura al variare della frequenza e verificare che esso sia nei limiti previsti e che, di conseguenza, la struttura riesca a resistere durante i possibili eventi sismici che caratterizzeranno la sua vita utile.

L'input dell'analisi di seguito svolta è lo spettro relativo allo stato limite di collasso in direzione X dell'accelerazione alla base della struttura, ricavato nella Figura 2-9, richiamata di seguito, che mostra in ascissa il periodo di riferimento T e in ordinata il massimo valore dell'accelerazione ricavata per quel periodo  $a_g$ , per un valore di smorzamento pari a  $\xi=5\%$ , scelto convenzionalmente nel paragrafo 2.4.1.

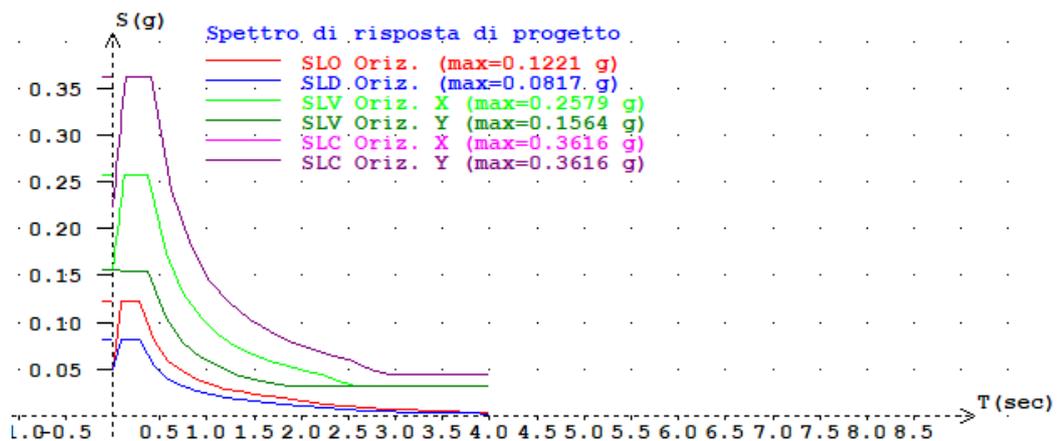


Figura 4-11 Spettro elastico dell'accelerazione

L'analisi è stata svolta attraverso il tool Response Spectrum di Ansys Workbench, avendo a monte risolto l'analisi modale per ottenere i modi propri della torre eolica. Nel tool di Ansys Workbench non è possibile inserire altre tipologie di carico che non siano sottoforma di spettro, per cui non saranno tenuti in considerazione i carichi precedentemente analizzati. Di conseguenza, lo spostamento che si otterrà sarà solo dovuto al carico sismico, quindi sottostimato poiché la torre, anche se non funzionante, sarà comunque soggetta alle sollecitazioni del vento.

Dato il periodo di ogni modo proprio, è possibile ricavare la corrispondente Pseudo accelerazione dal grafico in Figura 2-9 (Cfr. pagina 21). Combinando i picchi per ogni modo, si ottiene la risposta totale della struttura in termini di spostamento. I metodi per la combinazione modale sono principalmente due:

- Somma dei valori assoluti di tutti i picchi dei vari modi, ma non è realistica perché assume che tutti i picchi siano in fase;
- SRSS (Radice quadrata della somma dei quadrati) che non tiene conto dell'interazione mutuale tra i modi;
- CQC (Combinazione Quadratica Completa) che tiene conto parzialmente dell'interazione mutua tra i modi.

Per la nostra analisi, data la presenza di frequenze vicine tra di loro, si userà il metodo CQC. In Figura 4-12 si riportano la deformazione e l'accelerazione direzionale lungo l'asse X. Si può notare come entrambe mostrino il proprio valore massimo in corrispondenza dell'estremità libera; in particolare la deformazione ha un valore massimo pari a  $\delta = 0.0429 \text{ m}$ , mentre l'accelerazione presenta un valore massimo di  $a_g = 0.461 \text{ g} = 4.5312 \text{ m/s}^2$ .

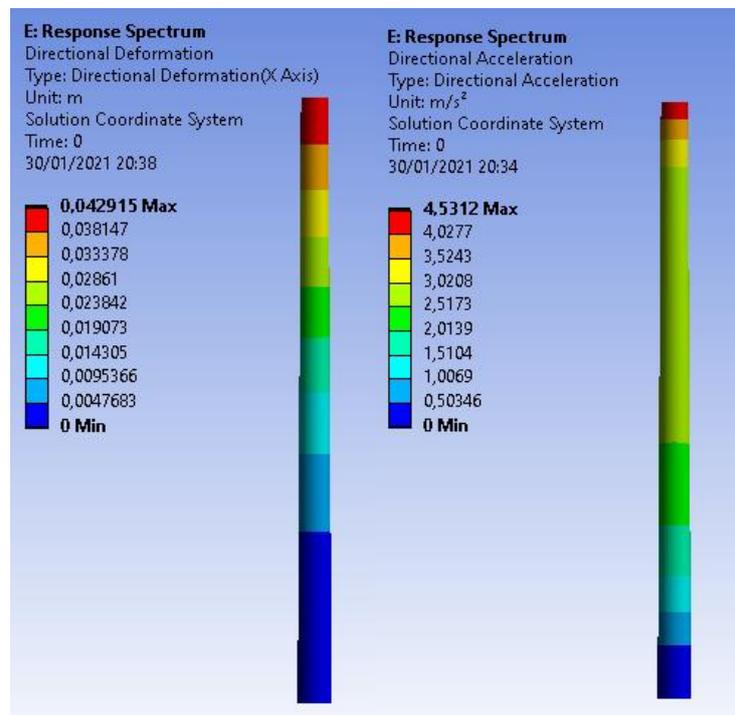


Figura 4-12 Risultati dell'analisi - Directional Deformation (sinistra) e Directional Acceleration (a destra)

## 4.5. Analisi a Fatica

Le torri eoliche rientrano nei casi definiti dall'Eurocodice 3 in cui è necessaria la valutazione della resistenza a fatica, in quanto elementi soggetti a vibrazioni indotte dal vento [25]. La verifica a fatica ha l'obiettivo di assicurare il corretto funzionamento della struttura durante l'intera vita di progetto e di evitare il collasso a causa di fenomeni di fatica, cioè del graduale propagarsi di una cricca a seguito di sollecitazioni cicliche sotto la tensione di rottura. Considerando la struttura soggetta a sollecitazioni comprese tra un limite superiore  $\sigma_s$  ed un limite inferiore  $\sigma_i$ , possiamo definire la tensione media e l'ampiezza come segue.

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_s + \sigma_i) \quad \sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_s - \sigma_i) \quad (4.11)$$

Wohler stabilì che, per ogni valore della  $\sigma_m$ , esiste un valore massimo dell'ampiezza  $\sigma_a$  per il quale il materiale può resistere indefinitamente, detto limite di fatica [26]. Definiamo quindi la curva di Wohler, mostrata in Figura 4-13 che definisce, per ogni valore dell'ampiezza  $\sigma_a$ , il numero di cicli per cui si è verificata la rottura su un provino normato.

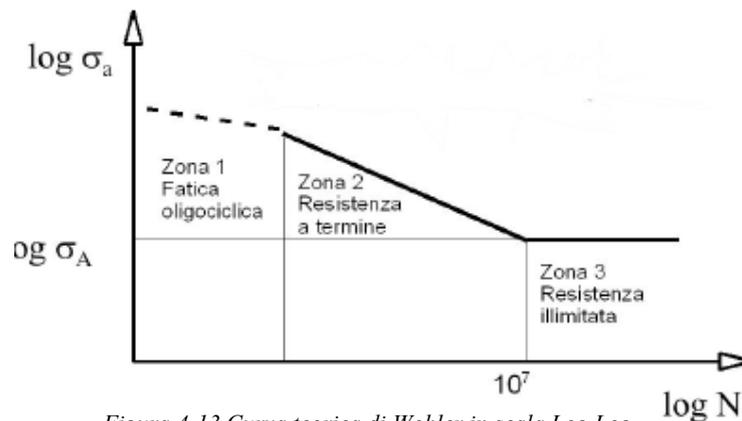


Figura 4-13 Curva teorica di Wohler in scala Log Log

Nel caso in esame, la curva di Wohler dell'acciaio S235J0 usato per la torre è riportata in Figura 4-14, in scala semilogaritmica, ricavata da Ansys.

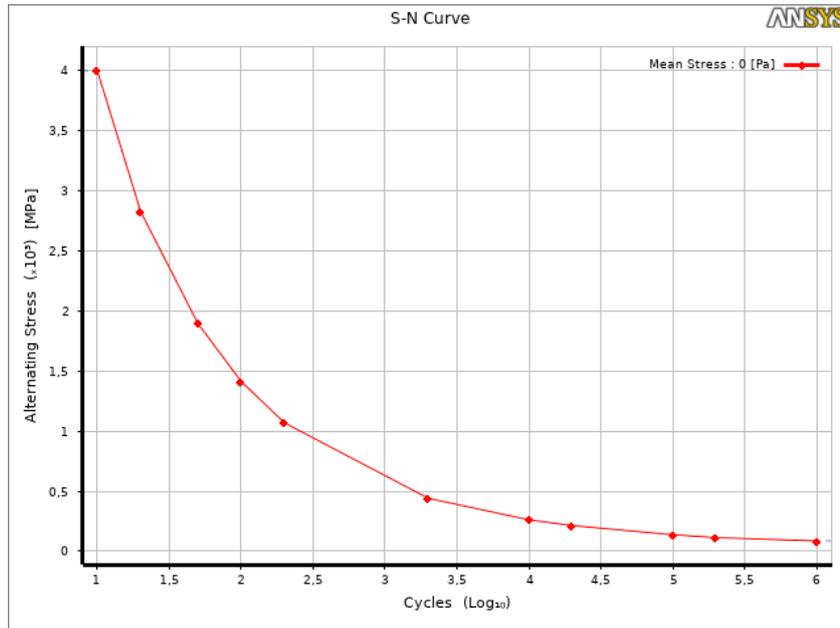


Figura 4-14 Curva di Wohler per l'acciaio S235J0

Il limite di fatica, per il materiale in esame è  $\sigma = 86,2 \text{ MPa}$ , per cui, per ogni sollecitazione al di sotto di quel valore, la torre avrà vita infinita. Per il carico a fatica si è considerata la configurazione riportata nell'Eurocodice 1, relativa ai carichi equivalenti allo Stato Limite di Danno (SLD), per un numero di cicli pari a  $10^7$  e una vita utile di 20 anni, mostrati in Figura 4-15 al variare della pendenza della curva di Wholer [27]. In particolare, il carico è stato considerato costante e alterno tra limiti simmetrici, di conseguenza con  $\sigma_m = 0$  e  $\Delta\sigma = \sigma_s = -\sigma_i$ , come si può vedere in Figura 4-16.

(DELs) Damage Equivalent Loads calculated for 1e7 cycles for a turbine lifetime of 20 years							
	Inverse SN slope	Mx	My	Mz	Fx	Fy	Fz
		[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kN]	[kN]	[kN]
Tower top	3	15,2	120,4	124,5	18,2	10,1	6,8
	4	12,5	88,1	90,7	14,9	8,0	5,0
	5	12,7	81,4	83,4	14,6	7,9	4,8
	6	13,3	80,1	81,5	14,7	8,2	4,8
	7	13,9	81,1	82,1	15,0	8,6	5,1
	8	14,7	83,1	83,7	15,4	9,0	5,3
	9	15,5	85,5	85,8	15,8	9,5	5,6
	10	16,4	88,2	88,1	16,3	10,1	5,9
	11	17,5	90,9	90,4	16,8	10,7	6,2
	12	18,6	93,5	92,8	17,4	11,5	6,5

Figura 4-15 Carichi equivalenti a fatica per 10e7 cicli e 20 anni di vita

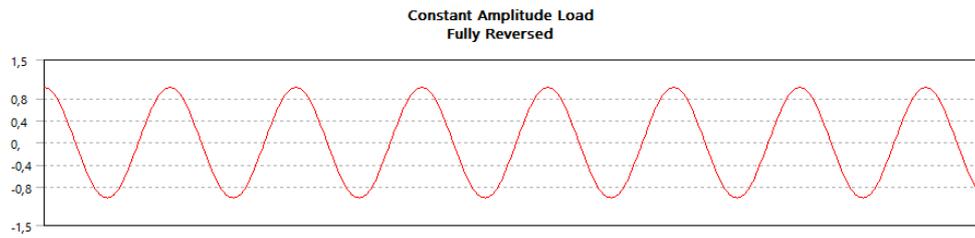


Figura 4-16 Carico alterno simmetrico

Per prima cosa si è svolta un'analisi statica, applicando alla torre i carichi succitati e valutando la deformazione totale e la tensione equivalente di Von Mises (Figura 4-17). La massima deflessione della torre è  $\delta = 0.073 \text{ m} = 7.3 \text{ cm}$ , mentre la massima tensione equivalente è  $\sigma = 29.85 \text{ MPa}$ , in corrispondenza dell'estremità ancora al suolo. Essendo la tensione massima al di sotto del limite di fatica, ci si aspetta una durata infinita della torre.

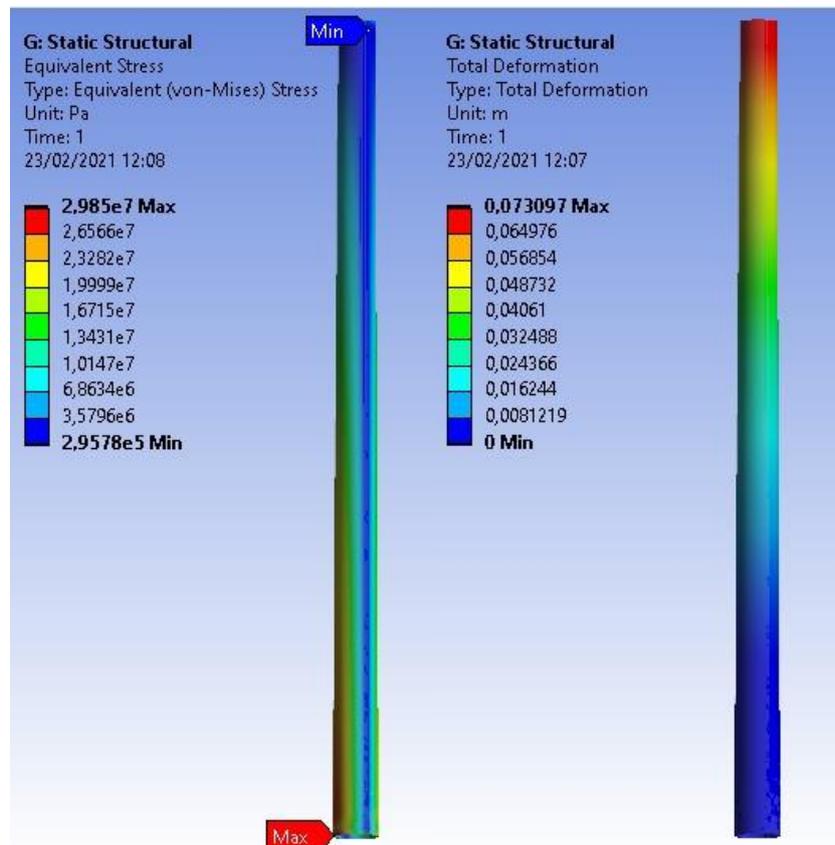


Figura 4-17 Analisi statica - a) Tensione equivalente di Von Mises b) Deformazione totale

L'analisi a fatica è stata condotta attraverso il Fatigue Tool di Ansys Workbench, il quale permette di ricavare il coefficiente di sicurezza e la vita a fatica. Si mostrano i risultati nella Figura 4-18.

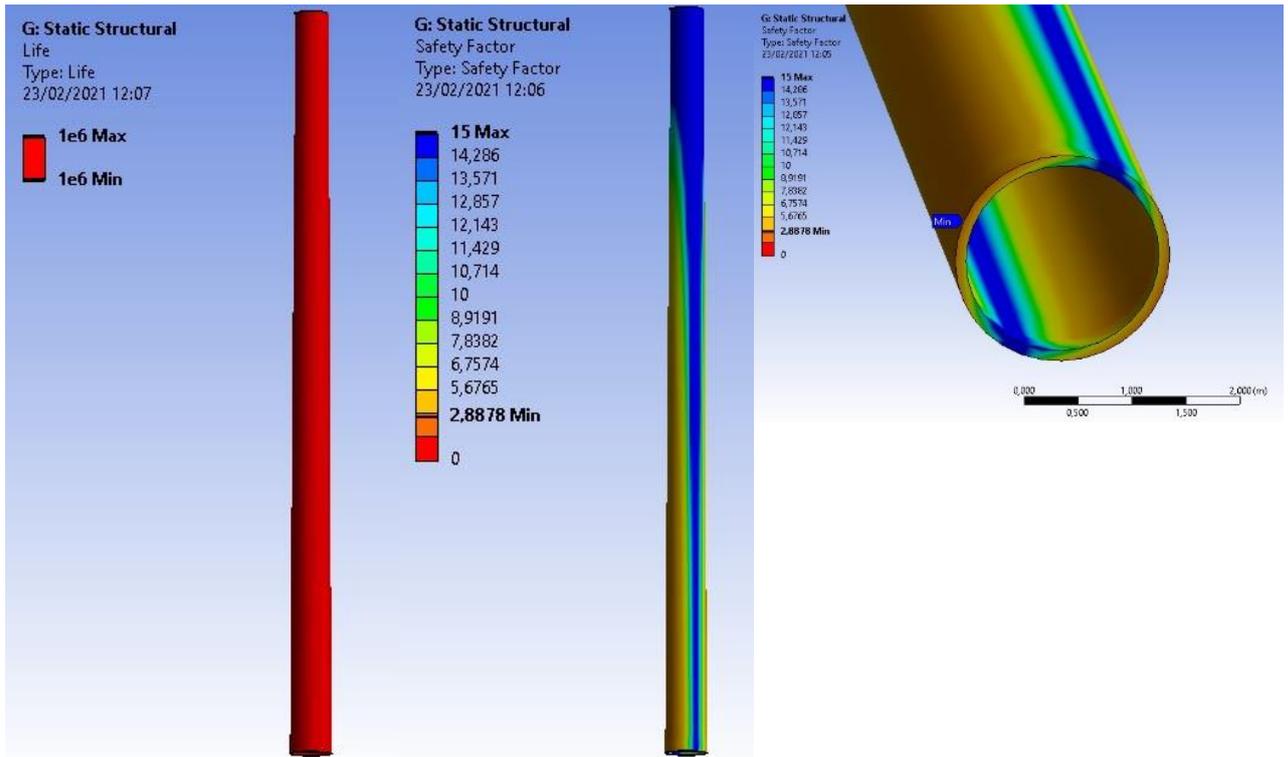


Figura 4-18 Analisi a fatica - a) Cicli di vita b) Coefficiente di sicurezza

Come si può notare dai risultati, il coefficiente di sicurezza è sempre maggiore di 1 e la vita prevista dalla torre è ovunque maggiore di  $10^6$  cicli, per cui è escluso un collasso per fatica. Il minimo coefficiente di sicurezza (CS = 2.8878) si ottiene in corrispondenza della massima tensione equivalente di Von Mises, ciò evidenzia che la zona di interfaccia acciaio-calcestruzzo armato sarà una zona critica, poiché vi sono presenti saldature e collegamenti bullonati.

Si sottolinea, tuttavia, che in questa analisi si è considerata la torre come un concio unico, mentre nella realtà le torri eoliche sono costruite come conci sovrapposti di diametro progressivamente decrescente saldati tra loro e presentano elementi che ne diminuiscono la resistenza a fatica, quali aperture per porte e i collegamenti bullonati con la base in calcestruzzo armato. L'analisi a fatica di questi elementi esula dallo scopo della tesi, ma potrà essere riconsiderata per scopi futuri.

## 5. CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI

Come si è visto nelle precedenti pagine, le torri eoliche oscillano per effetto del vento e delle sollecitazioni sismiche. Tuttavia, queste vibrazioni possono inficiare il corretto funzionamento della turbina stessa. Una soluzione risiederebbe nell'aumentare la sezione della torre per incrementarne la rigidità, ma ciò comporterebbe maggiori costi e maggior ingombro, perciò si rende necessario l'utilizzo di dispositivi esterni atti a smorzare le vibrazioni. I sistemi di controllo delle vibrazioni possono essere attivi, se modificano la dinamica del sistema grazie ad un'energia esterna che li alimenta, o, viceversa, passivi.

Gli aerogeneratori sono strutture che non prevedono la presenza dell'uomo a meno di azioni manutentive per cui, per la maggior parte delle volte, sono dotati di sistemi di controllo passivo. Il controllo delle vibrazioni può avvenire a livello del rotore con dispositivi quali i *blade pitch control*, che cambiano l'angolo di incidenza delle pale, a livello della navicella, con i *Tuned Mass Damper* (TMD), o a livello della base della torre, usando dispositivi quali i *Coil Spring Dampers* (CSD). In questo lavoro di tesi, si analizzeranno solamente gli ultimi due metodi, poiché hanno una diretta influenza sullo spostamento della torre.

### 5.1. Controllo con Tuned Mass Damper (TMD)

Uno smorzatore a massa accordata (*Tuned Mass Damper TMD*), mostrato schematicamente in Figura 5-1, è un sistema di controllo delle vibrazioni passivo costituito da una massa aggiuntiva collegata alla struttura mediante una molla e un ammortizzatore. Il sistema viene sintonizzato in modo tale da oscillare in controfase e, di conseguenza, smorzare la risposta globale del sistema per un ristretto intervallo di frequenze. Questo presuppone quindi un'elevata accuratezza nella sintonizzazione, perché un qualsiasi errore

potrebbe portare ad un mancato effetto o addirittura ad un'amplificazione della vibrazione.

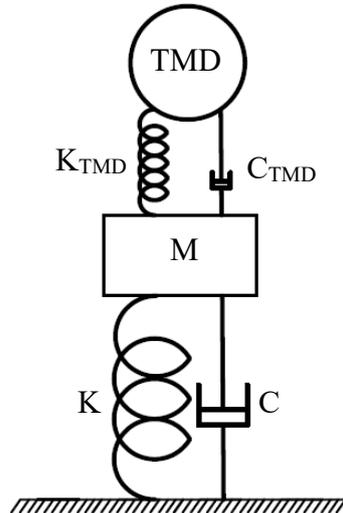


Figura 5-1 Schema di un Tuned Mass Damper

Negli aerogeneratori sono principalmente usati due tipi di TMD, mostrati in Figura 5-2 [28]:

- a) Una massa ancorata alla parte inferiore della posteriore della navicella che trasla lungo due binari;
- b) Una massa sospesa e collegata alla navicella da cavi (*pendulum*).

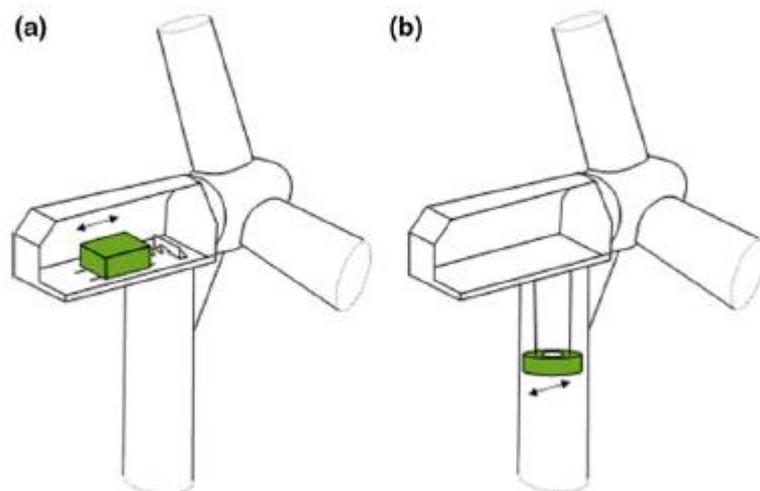


Figura 5-2 Aerogeneratore con TMD classico (a) e TMD pendolo (b) - Figura tratta da [28]

Una parte fondamentale della progettazione risiede nella determinazione dei parametri del Tuned Mass Damper. Numerosi studi sono stati condotti per quanto riguarda il calcolo dei parametri ottimali per un TMD. I criteri più utilizzati per ottenere frequenza naturale e smorzamento per tutti i tipi di TMD sono quelli di Den Hartog e Warburton [29] [30]. Definito  $\mu$  come il rapporto tra la massa del TMD e la massa modale della struttura e  $f$  come la frequenza naturale della struttura, il criterio di Den Hartog (1928) si esplicita nelle equazioni (5.1) e (5.2), mentre il criterio di Warburton (1980) è mostrato nelle equazioni (5.3) e (5.4). La differenza principale risiede nel fatto che il criterio di Warburton, sviluppato cronologicamente dopo partendo dagli studi di Den Hartog, può essere usato anche per sollecitazioni stocastiche quali terremoti.

$$\text{Den Hartog} \quad f_{TMD,opt} = f \frac{1}{1 + \mu} \quad (5.1)$$

$$\xi_{TMD,opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (5.2)$$

$$\text{Warburton} \quad f_{TMD,opt} = f \frac{\sqrt{1 - \frac{\mu}{2}}}{1 + \mu} \quad (5.3)$$

$$\xi_{TMD,opt} = \sqrt{\frac{\mu \left(1 - \frac{\mu}{4}\right)}{4(1 + \mu) \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}} \quad (5.4)$$

Per quanto riguarda il TMD a pendolo, invece, Zuluaga [31] propone delle relazioni per calcolare la lunghezza e lo smorzamento ottimale quando la struttura è sottoposta ad una forza aleatoria, mostrati nelle equazioni (5.5) e (5.6).

$$L_{opt} = \frac{(2g(\mu + 1) + 2\sqrt{(\mu g + g)^2 + 2\omega_p \omega^2(\mu + 2)})}{2\omega^2(\mu + 2)} (\mu + 1) \quad (5.5)$$

$$\xi_{opt} = \frac{\sqrt{\mu(\mu+2)(3\mu+4)(\mu+1)}}{2\omega^2(\mu+2)^2} A \quad (5.6)$$

$$A = \sqrt{(\mu g + g)^2 + \omega_p \omega^2 (\mu + 2) + g(\mu + 1) \sqrt{(\mu g + g)^2 + 2\omega_p \omega^2 (\mu + 2)}}$$

Con  $\omega$  frequenza della struttura da smorzare e  $\omega_p^2 = \frac{K_{TMD}}{M_{TMD}} \left[ \frac{Nm}{kg} \right]$  (5.7)

rapporto tra rigidezza e massa del pendolo TMD , diverso dalla frequenza

naturale del TMD che sarà  $\omega_{TMD}^2 = \frac{K_{TMD} + M_{TMD} g L_{opt}}{M_{TMD} L_{opt}^2} \left[ \left( \frac{rad}{s} \right)^2 \right]$  (5.8a).

In particolare, la lunghezza L del pendolo determinerà la frequenza naturale, che aumenterà al diminuire della lunghezza considerata, come mostrato nell'equazione (5.8b).

$$\omega_{TMD} = \sqrt{\frac{g}{L_{opt}}} \quad (5.8b)$$

Per quanto riguarda l'aerogeneratore in esame, si seguirà la procedura proposta da Avila [32] per dimensionare un *pendulum TMD* con lo scopo di smorzare gli effetti delle sollecitazioni sulla torre.

Richiamiamo l'equazione che regola la dinamica del nostro sistema, equazione (3.66), indicando genericamente tutte le sollecitazioni che interessano la torre con  $F(z,t)$ .

$$[m + M_t \delta(z - L)] \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + 2\xi \omega m \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 x(z, t)}{\partial z^4} = F(z, t) \quad (3.66)$$

Dal sistema a parametri distribuiti si vuole determinare il sistema SDOF equivalente, per cui, ipotizzando, come fatto nell'equazione (3.68), una soluzione a variabili separate, assumiamo che l'autofunzione  $\varphi(z)$  relativa al modo che deve essere controllato dal TMD sia descritta dall'equazione (5.9) [32] e sostituiamo per ottenere l'equazione (5.10).

$$x(z, t) = \varphi(z) \eta(t) \quad (3.68)$$

$$\varphi(z) = 1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right) \quad (5.9)$$

$$x(z, t) = \varphi(z) \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right)\right] \quad (5.10)$$

Sostituendo l'equazione (5.9) nell'equazione (3.105) si ricavano la massa generalizzata (eq. 5.12), la rigidità generalizzata (eq. 5.13) e lo smorzamento generalizzato (eq. 5.14) del sistema SDOF equivalente, definito dall'equazione (5.11).

$$M^* \ddot{x} + C^* \dot{x} + K^* x = F \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} M^* &= M_t + \int_0^L m \{\varphi\}^2 dz = M_t + m \int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right)\right]^2 dz \\ &= M_t + \frac{m}{2\pi} \left[3\pi z + L \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) - 8L \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)\right]_0^L = \\ &= M_t + \frac{mL}{2\pi} (3\pi - 8) \quad (5.12) \end{aligned}$$

$$K^* = \int_0^L EI \{\varphi''\}^2 dz = EI \frac{\pi^4}{16L^4} \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right) dz = EI \frac{\pi^4}{16L^4} \left[\frac{L}{2}\right] = \frac{EI \pi^4}{32L^3} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} C^* &= \int_0^L 2\xi\omega m \{\varphi\} [\dot{\varphi}] dz = 2\xi\omega m \int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right)\right]^2 dz \\ &= \frac{\xi\omega m}{\pi} \left[3\pi z + L \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) - 8L \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)\right]_0^L = \\ &= \frac{\xi\omega m}{\pi} (3\pi - 8) \quad (5.14) \end{aligned}$$

Sostituendo i dati geometrici definiti nei capitoli precedenti e considerando uno smorzamento nullo, si ottiene  $M^* = 45251 \text{ kg}$  e  $K^* = 3700695 \frac{N}{m}$  per una frequenza propria di  $\omega=9.043 \text{ rad/s}$  ( $f=1.4392 \text{ Hz}$ ), molto vicina alla prima frequenza propria del nostro sistema.

Dopo aver ottenuto il sistema ad un grado di libertà rappresentante la torre, inseriamo il pendolo TMD, trasformandolo in un sistema a due gradi libertà, cioè lo spostamento  $x(t)$  globale del sistema e la rotazione del pendolo  $\theta(t)$ . Il sistema da studiare è mostrato in Figura 5-3.

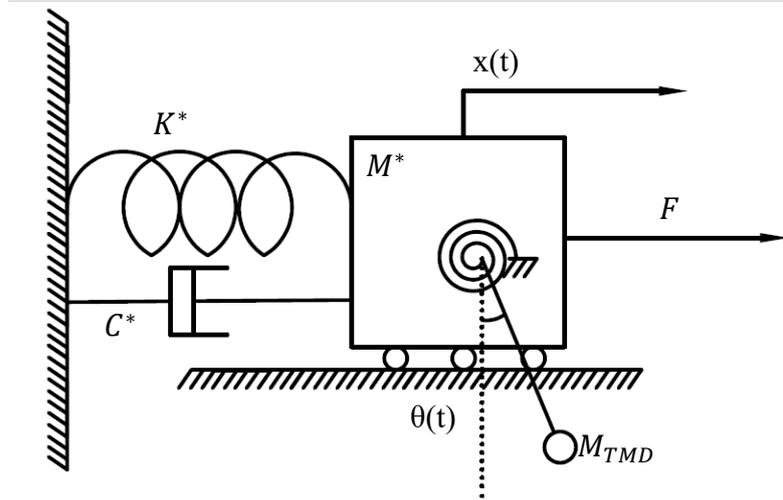


Figura 5-3 Schema a due gradi di libertà con pendolo TMD

Definite con  $M_{TMD}$ ,  $L_{TMD}$ ,  $C_{TMD}$  e  $K_{TMD}$  rispettivamente la massa, la lunghezza, lo smorzamento e la rigidità del pendolo, si imposta il sistema che raccoglie le equazioni del moto della massa rappresentante l'aerogeneratore e del pendolo TMD, mostrato nell'equazione (5.15) e in forma matriciale nell'equazione (5.16), valida per piccole oscillazioni.

$$\begin{cases} M^* \ddot{x} + M_{TMD} \ddot{x} + M_{TMD} L_{TMD} \ddot{\theta} + C^* \dot{x} + K^* x = F(t) \\ M_{TMD} L_{TMD}^2 \ddot{\theta} + M_{TMD} \ddot{x} L_{TMD} + C_{TMD} \dot{\theta} + K_{TMD} \theta + M_{TMD} g L \theta = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\begin{bmatrix} M^* + M_{TMD} & M_{TMD} L_{TMD} \\ M_{TMD} L_{TMD} & M_{TMD} L_{TMD}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C^* & 0 \\ 0 & C_{TMD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^* & 0 \\ 0 & K_{TMD} + M_{TMD} g L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Dato il sistema matriciale, si possono ricavare le funzioni di risposta in frequenza, considerando  $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ ,  $\theta(t) = \theta_0 e^{i\omega t}$  e  $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$  e sostituendoli per ottenere l'equazione (5.17).

$$\begin{bmatrix} -(M^* + M_{TMD})\omega^2 + C^*i\omega + K^* & -M_{TMD}L_{TMD}\omega^2 \\ -M_{TMD}L_{TMD}\omega^2 & -M_{TMD}L_{TMD}^2\omega^2 + C_{TMD}i\omega + K_{TMD} + M_{TMD}gL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Prima di valutare gli effetti del TMD sull'aerogeneratore, si esplicitano i parametri che saranno utilizzati nei calcoli. Il valore ottimale del rapporto di massa sarebbe  $\mu=0.05$  ma esso è un limite superiore in termini di fattibilità [33], perciò si userà  $\mu=0.02$ , da cui

$$M_{TMD} = \mu M^* = 905.02 \text{ kg}$$

Per il calcolo di  $K_{TMD}$ , si sono seguiti due diversi approcci, entrambi approssimati, poiché la rigidezza è scelta in funzione delle applicazioni pratiche e, in alcuni casi, può anche essere in grado di adattarsi per poter rispondere ad un range più ampio di frequenze.

Il primo approccio consiste nel ricavare  $K_{TMD}$ ,  $L_{OPT}$  e  $\omega_P$  da un sistema formato dalle equazioni (5.5) (5.7) (5.8a – 5.8b), mostrato nell'equazione (5.18).

$$\begin{cases} L_{opt} = \frac{(2g(\mu + 1) + 2\sqrt{(\mu g + g)^2 + 2\omega_P\omega^2(\mu + 2)})}{2\omega^2(\mu + 2)} (\mu + 1) \\ \omega_P^2 = \frac{K_{TMD}}{M_{TMD}} \\ \frac{g}{L_{opt}} = \frac{K_{TMD} + M_{TMD}gL_{opt}}{M_{TMD}L_{opt}^2} \end{cases} \quad (5.18)$$

Da cui si ricava  $L_{opt} = 0.23452 \text{ m}$ ,  $K_{TMD} = 1869.92 \text{ Nm}$ ,  $\omega_P = 1.43 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{TMD} = 6.467 \text{ rad/s}$ .

Il secondo approccio consiste, invece, nel ricavare  $\omega_{TMD} = 8.86 \text{ rad/s}$  dall'equazione (5.1),  $L_{opt} = 0.1248 \text{ m}$  dall'equazione (5.8b) e  $K_{TMD} = 995.03 \text{ Nm}$  dall'equazione (5.8a).

Considerando una molla torsionale, per cui la rigidezza è definita come  $K = \frac{EI}{L}$  e il momento di inerzia come  $I = \frac{\pi d^4}{64}$ , possiamo calcolare il diametro del filo che collega la massa sintonizzata alla torre. Per il primo approccio si ottiene  $d = 0.0143 \text{ mm}$ , mentre per il secondo approccio  $d = 0.0104 \text{ mm}$ , entrambi valori realistici che permettono di validare le assunzioni fatte.

Per quanto riguarda il coefficiente di smorzamento, si ricava  $\xi_{opt} = 0.2095$  per il primo approccio e  $\xi_{opt} = 0.1739$  per il secondo approccio.

La recettanza del sistema SDOF equivalente con smorzamento interno pari a  $\xi=0.5\%$  è mostrata in Figura 5-4. Si evidenzia che la massima ampiezza si ha nell'intorno della frequenza propria della struttura ed è pari a  $\alpha = -91.39 \text{ dB}$ , mentre per la frequenza di funzionamento della struttura ( $f=0.75 \text{ Hz}$ ), si ha un valore di  $\alpha = -128.6 \text{ dB}$ .

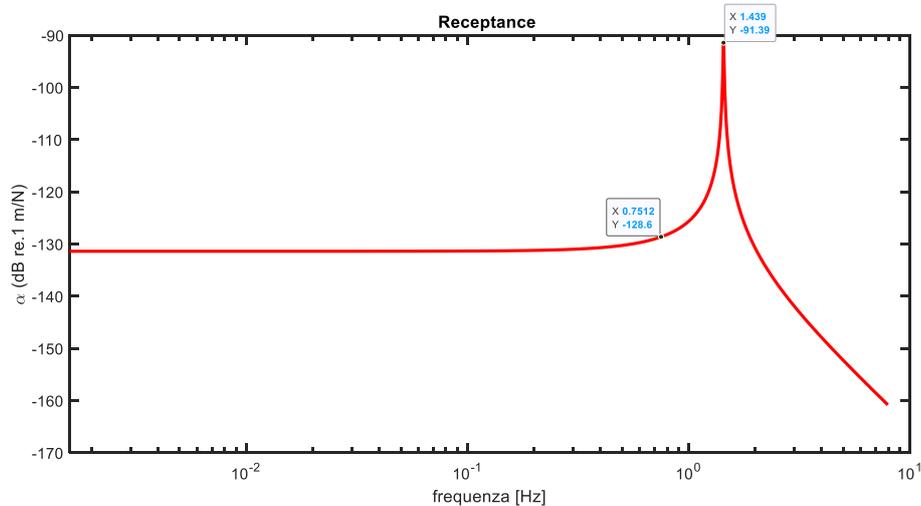
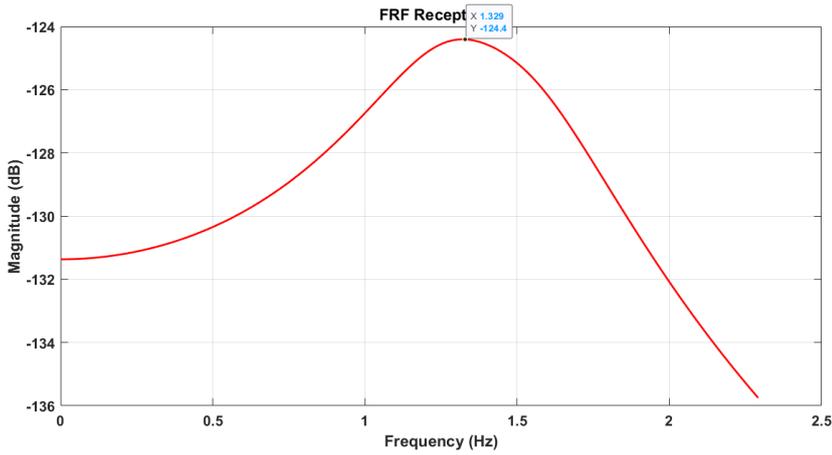


Figura 5-4 Recettanza del sistema SDOF equivalente

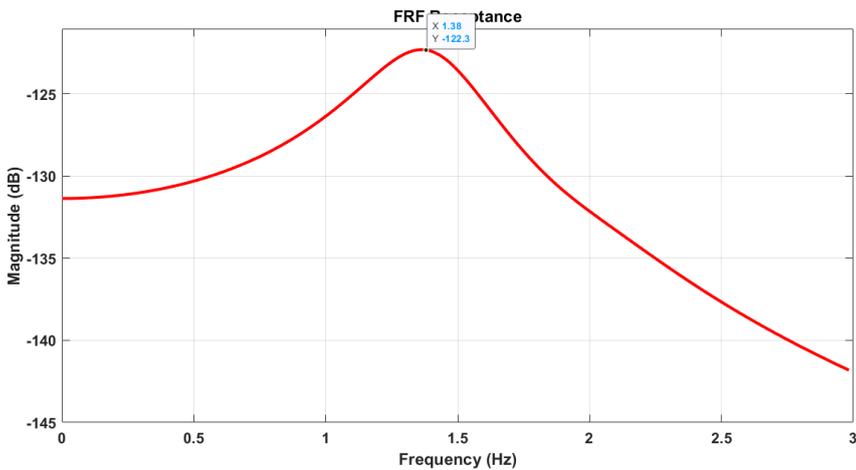
In Figura 5-5 sono mostrate le recettanze del sistema smorzato con il TMD dimensionato con i due diversi approcci. Si può notare che per entrambe le recettanze, la frequenza a cui corrisponde la massima ampiezza si sposta verso sinistra e non esiste più un picco molto marcato. Di conseguenza,

entrambe le progettazioni assolvono al compito di smorzare le vibrazioni, dato che, a parità di carico, si ottiene una deformazione ridotta del 44.7 % per il primo approccio e del 43.68 % per il secondo approccio.



1° approccio

	Max	Funzionamento
<b>f [Hz]</b>	1.329	0.75
<b><math>\alpha</math> [dB]</b>	-124.4	-128.9
<b><math>\alpha</math> [m/N]</b>	$6.025 \cdot 10^{-7}$	$3.58 \cdot 10^{-7}$



2° approccio

	Max	Funzionamento
<b>f [Hz]</b>	1.38	0.75
<b><math>\alpha</math> [dB]</b>	-122.3	-128.8
<b><math>\alpha</math> [m/N]</b>	$7.673 \cdot 10^{-7}$	$3.63 \cdot 10^{-7}$

Figura 5-5 Recettanza dopo l'inserimento del TMD

Un modello di TMD è stato anche costruito in Ansys, collegando la massa alla torre con una molla di rigidità pari a  $K_{TMD}$  e lunghezza  $L_{opt}$ , come mostrato in Figura 5-6

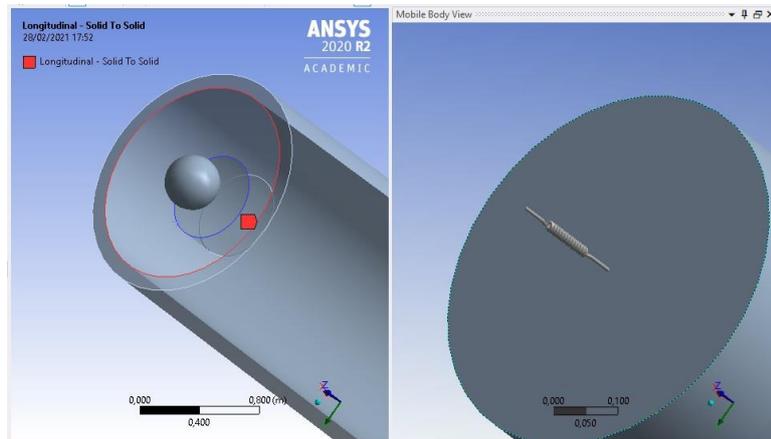


Figura 5-6 Costruzione molla in Ansys Workbench

In Figura 5-7 sono mostrate le risposte in frequenza, per condizioni di carico di funzionamento, per entrambi gli approcci. Si sottolinea che la risposta risulta nettamente smorzata, dato che si passa da  $\delta_{max} = 0.442 \text{ m}$  (per  $f=1.4014 \text{ Hz}$ ) (cfr. pag. 72) a  $\delta_{max,TMD} = 0.062739 \text{ m}$  (per  $f=1.312 \text{ Hz}$ ) per il primo approccio e  $\delta_{max} = 0.072946 \text{ m}$  (per  $f=1.323 \text{ Hz}$ ) per il secondo. Per quanto riguarda la frequenza di funzionamento,  $f=0.75 \text{ Hz}$ , essa presenta una deformazione di circa  $\delta=0.035 \text{ m}$  per entrambe le configurazioni.

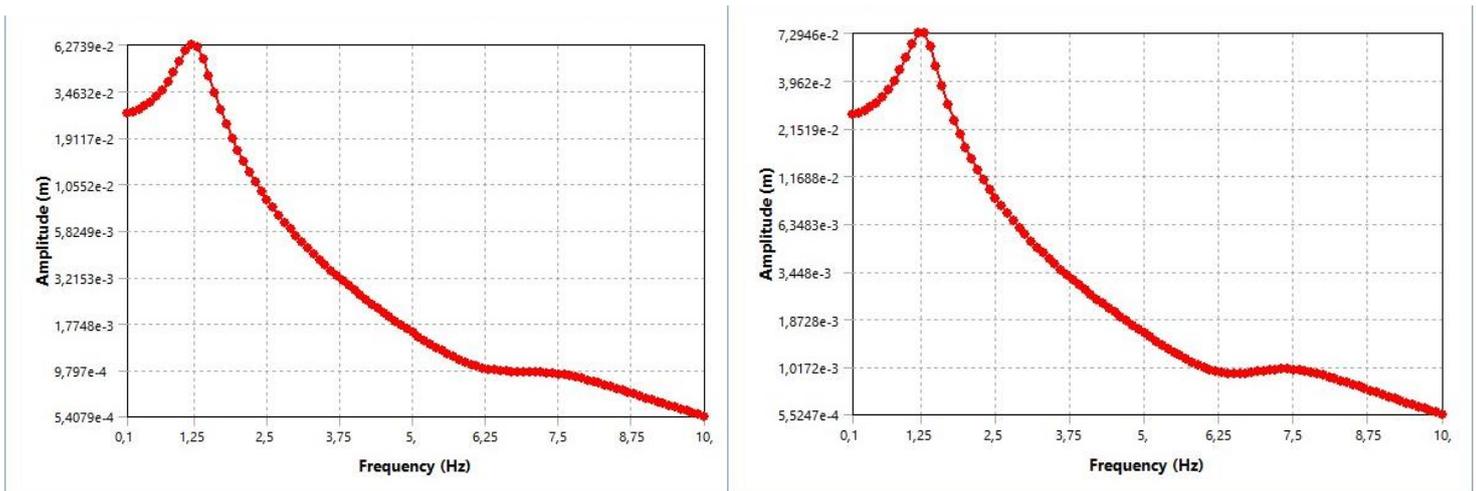


Figura 5-7 Risposta in frequenza - a sinistra: primo approccio - a destra: secondo approccio

Ripetendo ciò che è stato fatto per l'analisi armonica, si confronta in Figura 5-8 il valore dello spostamento ottenuto con Matlab con quello ottenuto su Ansys, considerando la torre sollecitata all'estremità libera da un carico  $F_b=24850$  N. Il massimo spostamento per il primo approccio è  $\delta=0.01497$  m (per  $f=1.329$  Hz) mentre per il secondo approccio è  $\delta=0.01905$  m (per  $f=1.37$  Hz), confrontato con lo spostamento ottenuto dal modello costruito in Ansys Workbench, per cui  $\delta=0.00767$  m per il primo approccio e  $\delta=0.00887$  m, come mostrato in Figura 5-8, sia per Matlab che per Ansys.

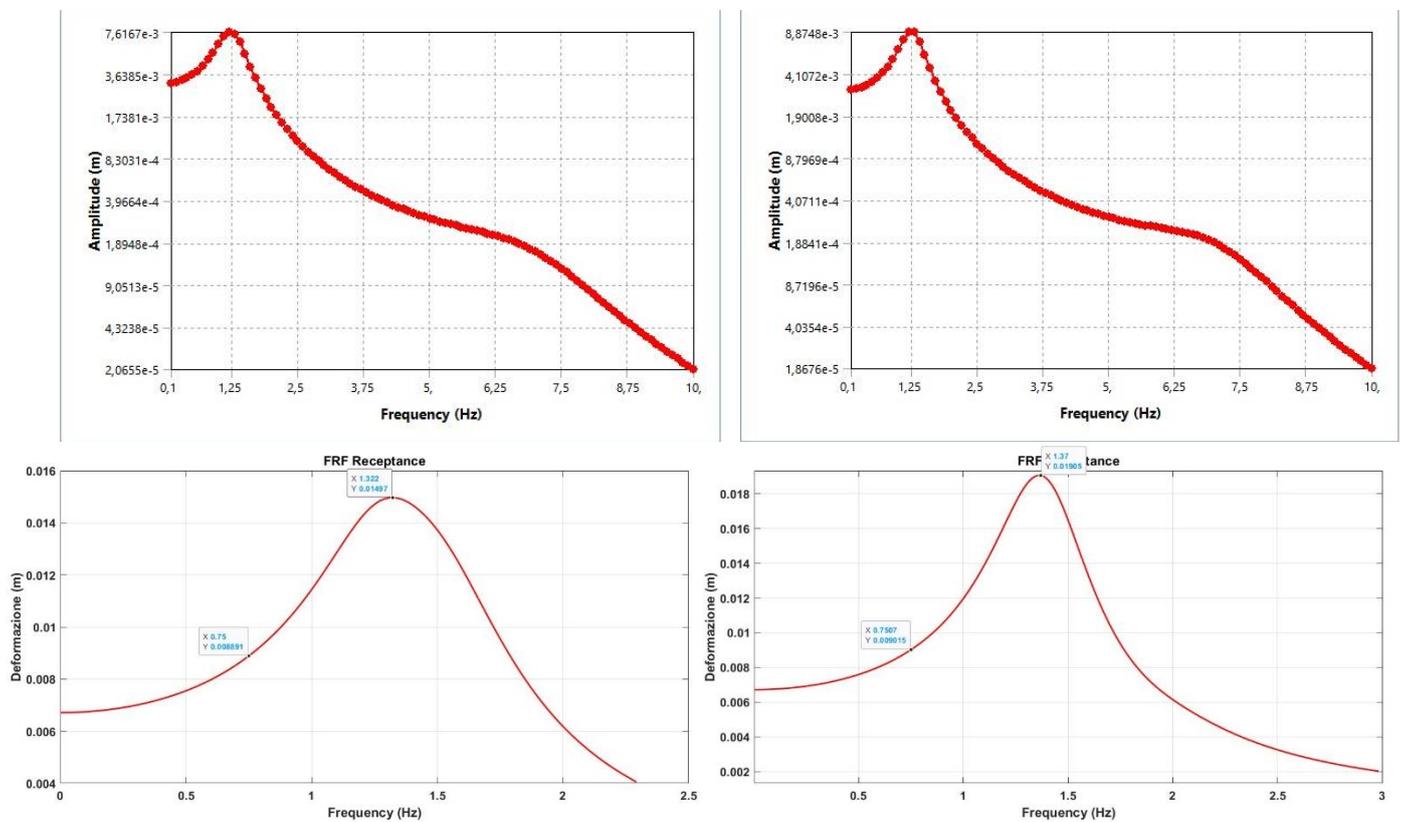


Figura 5-8 Risposta in frequenza per  $F_b$  - a sinistra: primo approccio (Ansys sopra e Matlab sotto) - a destra: secondo approccio (Ansys sotto e Matlab sotto)

Non c'è corrispondenza esatta tra i risultati, ma ciò è riconducibile alle numerose approssimazioni fatte per ricavare il sistema SDOF equivalente e alle differenze geometriche dei modelli.

## 5.2. Controllo con Elastoplastic Coil Spring Damper (CSD)

Un altro metodo per smorzare le vibrazioni causate principalmente da eventi sismici risiede nell'installazione di smorzatori a molle elicoidali (*elastoplastic coil spring dampers CSD*) posti alla base dell'aerogeneratore [34]. Esse sono molle ad elica in acciaio che fungono anche da smorzatori in risposta ad un carico dinamico, ottenendo ottime prestazioni non essendoci concentrazione di tensione ma anche perché la molla ad elica può utilizzare la caratteristica di isteresi dell'acciaio.

Un esempio generico di molla è mostrato in Figura 5-9 e ne sono evidenziate le caratteristiche principali.

D: diametro medio della molla;

d: diametro della singola elica;

P: passo tra le eliche;

$L = \pi D N_a$ : lunghezza attiva della molla;

$C = D/d$ : indice della molla, generalmente tra 6-12.

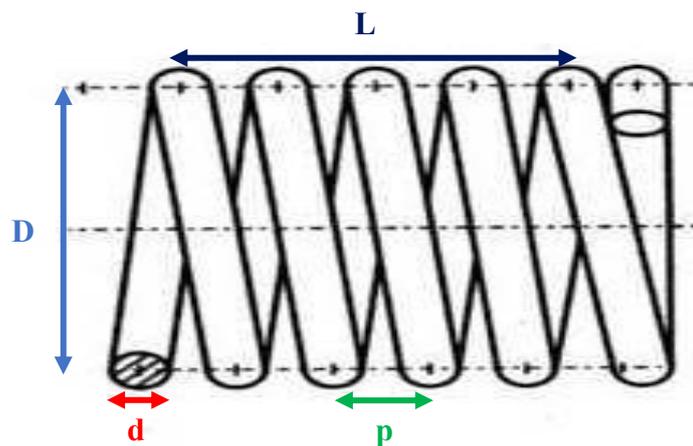


Figura 5-9 Coil Spring Damper - Schema e caratteristiche principali

Si definiscono attive  $N_a$  (*active coil*) le eliche che prendono parte alla deflessione della molla quando il carico è applicato. In genere, le eliche intermedie sono attive, mentre la prima e l'ultima sono inattive.

Dalla teoria delle molle [26], si ricava la deflessione  $\delta$  di una molla in risposta ad un determinato carico  $F$ , nell'equazione (5.19) e la massima tensione di taglio  $\tau_{max}$ , calcolata secondo il criterio di Tresca e mostrata nell'equazione (5.20).

$$\delta = \frac{8FD^3N_a}{G d^4} \quad (5.19)$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \tau_{ultimate} = W \frac{8 F D}{\pi d^3} \quad (5.20)$$

Dove  $G$  è il modulo di elasticità tangenziale, mentre  $W$  è il fattore di Wahl, definito nell'equazione (5.21)

$$W = \frac{1 - 0.25C}{1 - C} + \frac{0.615}{C} \quad (5.21)$$

Data la deflessione della molla è possibile calcolare la rigidezza, come mostrato nell'equazione (5.22).

$$K = \frac{F}{\delta} = \frac{G d^4}{8D^3N_a} \quad (5.22)$$

Unendo le equazioni (5.22), (5.20) e (5.21) è possibile esplicitare la deflessione in funzione dell'indice della molla, il risultato è mostrato nell'equazione (5.23).

$$\delta = \frac{\tau}{W} \pi D N_a \frac{1}{G} \left( \frac{D}{d} \right) = \frac{C \tau L}{W G} \quad (5.23)$$

Si considera la nostra torre soggetta ad una sollecitazione sismica e si schematizza il sistema aerogeneratore – CSD come in Figura 5-10 [35].

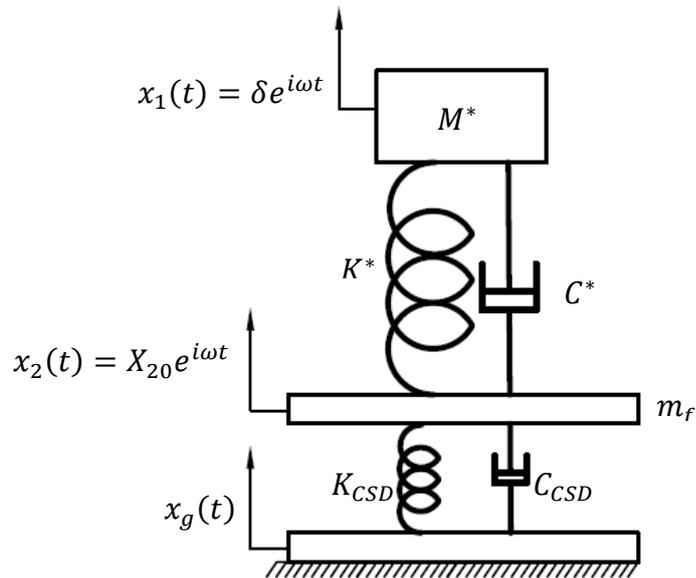


Figura 5-10 Aerogeneratore con CSD

La turbina eolica è approssimata ad un sistema SDOF utilizzando i dati ricavati nel paragrafo (5.1) (Cfr. Pagina 90). Tra la turbina e la base si crea quindi un intermezzo flessibile che permetta di minimizzare le vibrazioni causate da un'azione sismica o da una qualsiasi eccitazione alla base.

Non avendo dati pratici a disposizione circa le molle ad elica utilizzabili per una turbina minieolica, si procederà ad un'analisi esclusivamente teorica e parametrica del sistema, perciò si definiscono le equazioni del moto nell'equazione (5.25), ipotizzando un'accelerazione del terreno pari a  $\ddot{x}_g = a_g$ .

$$\begin{cases} M^* \ddot{x}_1 + C^*(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K^*(x_1 - x_2) = 0 \\ +m_f \ddot{x}_2 + C_{CSD}(\dot{x}_2 - \dot{x}_g) - C^*(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - K^*(x_1 - x_2) + K_{CSD}(x_2 - x_g) = 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

Introduciamo delle variabili per concentrarci sugli spostamenti relativi:

$$y_1 = x_1 - x_2 \quad y_2 = x_2 - x_g \quad (5.26)$$

$$\begin{cases} M^* \ddot{y}_1 + M^* \ddot{y}_2 + C^* \dot{y}_1 + K^* y_1 = -M^* a_g \\ m_f \ddot{y}_2 + C_{CSD} \dot{y}_2 + K_{CSD} y_2 - C^* \dot{y}_1 - K^* y_1 = -m_f a_g \end{cases} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M^* & M^* \\ 0 & m_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C^* & 0 \\ -C^* & C_{CSD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^* & 0 \\ -K^* & K_{CSD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \\ = - \begin{Bmatrix} M^* \\ m_f \end{Bmatrix} a_g \end{aligned} \quad (5.28)$$

Per rendere simmetriche le matrici, si effettua una combinazione lineare delle due equazioni, addizionando la prima alla seconda e sostituendola alla stessa. Di fatto, quindi, si considera la traslazione congiunta del sistema base – torre.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M^* & M^* \\ M^* & M^* + m_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C^* & 0 \\ 0 & C_{CSD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^* & 0 \\ 0 & K_{CSD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \\ = - \begin{Bmatrix} M^* \\ M^* + m_f \end{Bmatrix} a_g \end{aligned} \quad (5.29)$$

Poiché  $m_f \ll M^*$  si può anche trascurare l'effetto della massa della fondazione e il sistema si semplifica ulteriormente come di seguito:

$$\begin{bmatrix} M^* & M^* \\ M^* & M^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C^* & 0 \\ 0 & C_{CSD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^* & 0 \\ 0 & K_{CSD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} M^* \\ M^* \end{Bmatrix} a_g \quad (5.30)$$

La frequenza propria del sistema 1DOF incastrato alla base è  $\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}}$  a cui è associato il periodo  $T$ , mentre se inseriamo un intermezzo flessibile, introduciamo una nuova frequenza propria  $\omega_f = \sqrt{\frac{K_{CSD}}{M^* + m_f}}$  [35]. Poiché  $K_{CSD}$  è nettamente minore di  $K^*$ ,  $\omega_f \ll \omega$  e di conseguenza  $T_f \gg T$ . Il periodo lungo di vibrazione è il fattore che permette l'isolamento e la riduzione delle vibrazioni, poiché si sposta il punto di funzionamento della struttura intera nell'analisi sismica (cfr. pagina 77) [36].

Nella progettazione degli smorzatori a molla elicoidale si terranno quindi conto di tutti questi parametri e si procederà, anche attraverso l'analisi sperimentale, alla scelta ottimale del dispositivo di smorzamento adeguato.

## 6. CONCLUSIONI

Le torri per turbine eoliche sono costruite come strutture snelle e alte e ciò comporta anche che siano flessibili e vulnerabili alle vibrazioni causate dal carico del vento e da altri carichi, quali le azioni sismiche. In questo lavoro di tesi, si è studiato il comportamento dinamico di una torre eolica con diversi approcci, sia analitici che numerici. Dapprima si sono elencati tutti i carichi a cui è sottoposta la torre e si è scelta la configurazione di carichi da studiare.

In un primo momento si è partiti da modelli non lineari, ricavando le equazioni del moto considerando la torre come un sistema multilink di pendoli inversi o come trave continua, usando il principio di Hamilton. In seguito, si è semplificato il modello, considerando la torre come una cantilever beam con/senza massa all'estremità e ricavandone le prime frequenze proprie. A questi modelli analitici è stato affiancato un modello agli elementi finiti, costruito dapprima analiticamente e in seguito su software, quali Matlab e Ansys.

Sono state svolte cinque diverse tipologie di analisi: modale, armonica, transiente, sismica e a fatica. Nell'analisi modale sono stati confrontate le prime frequenze proprie ottenute dai diversi modelli analitici e numerici e si è raggiunta un'ottima convergenza, per cui tutti i modelli possono considerarsi validati. Nell'analisi armonica si è confrontata la risposta della struttura FEM costruita su Matlab con la torre simulata in Ansys, al variare dello smorzamento. Gli spostamenti ottenuti differiscono a causa delle semplificazioni geometriche del modello FEM, ma l'ordine di grandezza è lo stesso, per cui si ritengono i risultati soddisfacenti.

Le rimanenti analisi sono state svolte esclusivamente sul modello di torre rastremata con massa costruito in Ansys e hanno portato alla definizione e misura delle deformazioni in caso di carico transiente, carico sismico e carico a fatica.

Infine, si è svolta una breve analisi sulle metodologie di controllo principali per le vibrazioni. Ci si è focalizzati principalmente sulle due tipologie principali, il controllo con Tuned Mass Damper (TMD) e il controllo con Elastoplastic Coil Spring Damper (CSD).

Sono stati considerati due approcci per ricavare i parametri ottimali del TMD. Si è aggiunta una massa nel modello di torre costruita in Ansys e si è confrontata la risposta ad un carico armonico con il modello torre - TMD costruito su Matlab. Per entrambi i modelli si sono evidenziate risposte attenuate rispetto al caso non smorzato, ma non confrontabili tra loro a causa delle forti semplificazioni. Infine, si sono definite le principali caratteristiche di una CSD e si è delineato un modello matematico di progettazione e analisi dell'isolamento alla base.

Sviluppi futuri possono riguardare l'applicazione pratica delle precedenti analisi, costruendo un modello in scala della turbina analizzata e sottoponendola a diverse modalità di carico, in modo tale da confrontare i risultati sperimentali con quelli numerici e analitici. Ciò permetterebbe di applicare anche fisicamente i vari metodi di controllo delle vibrazioni e confrontare i risultati con le analisi teoriche e numeriche. Infine, si potrebbero considerare ulteriori fenomeni trascurati in questa analisi, quali lo shadowing, o diverse modalità di funzionamento, quali le modalità estreme o di fermo di sicurezza.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Lac, «Breve storia dell'energia eolica: all'origine della via del vento,» TuttoGreen, 8 Maggio 2019. [Online]. Available: <https://www.tuttogreen.it/breve-storia-dell%E2%80%99energia-eolica-all%E2%80%99origine-della-via-del-vento/>. [Consultato il giorno 23 Febbraio 2021].
- [2] ANEV, «Associazione Nazionale Energia del Vento,» 2020.
- [3] C. Mongillo, «Rinnovabili.it,» Mauro Spagnolo, Settembre 2014. [Online]. Available: <https://www.rinnovabili.it/miniguide/minieolico-costi-incentivi-potenzialita-696/>. [Consultato il giorno 9 Dicembre 2020].
- [4] G. Power, «Ghre Power,» [Online]. Available: <https://www.ghrepower.it/turbina-eolica-ghre60.php#prettyPhoto>. [Consultato il giorno 10 Dicembre 2020].
- [5] «Comuni Italiani,» 2019. [Online]. Available: [comuni-italiani.it/071/009/clima.html](http://comuni-italiani.it/071/009/clima.html). [Consultato il giorno 9 Dicembre 2020].
- [6] I. I. E. Commission, 61400- 1 Wind Turbines - Part 1: Design Requirements, Geneva, Switzerland, 2010.
- [7] Guidelines for Design of Wind Turbines, Copenhagen: Riso, D.N,V, 2002.
- [8] Hau, Wind Turbines - Fundamentals, Technologies, Applications, Economics, IEEE Electrical Insulation Magazine, 2003.
- [9] «Energy.gov Offices,» [Online]. Available: <https://www.energy.gov/eere/articles/how-do-wind-turbines-survive-severe-storms>. [Consultato il giorno 02 Dicembre 2020].
- [10] M. d. i. e. d. trasporti, Norme Tecniche per le Costruzioni, Ministero della Giustizia, 2018.
- [11] M. d. i. e. d. trasporti, Allegato A - Nuove Norme Tecniche 2008, 2008.
- [12] F. Zahle, Evaluation of tower shadow effects on various wind turbine concepts, DTU, 2009.

- [13] M. A. Sassi, «Nonlinear Dynamic Analysis of Wind Turbine Towers Subject to Design Wind and Seismic Loads,» Board of Trustees of the Colorado School of Mines, Golden, Colorado.
- [14] Ritschel, «Wind Turbines and Earthquakes,» Windrad Engineering, 2003.
- [15] B. Franzini, «Dynamic Nonlinear Analysis of a Wind Turbine Tower,» Sao Paolo, 2017.
- [16] M. H. Meesala, «Response variations of a cantilever beam tip mass system with nonlinear and linearized boundary conditions,» *Journal of Vibration and Control*, pp. 1-12, 218.
- [17] Dellezzopolles, Analise Dinamica de Torres de Energia Eolica, Universidad de Brasilia: Engenharia Civil e Ambiental, 2011.
- [18] S. S. Rao, Mechanical Vibrations Fifth Edition, Miami: Pearson, 2010.
- [19] S. Avila, «Numerical Modeling of the Dynamic Behavior of a Wind Turbine Tower,» *Advances Vibration Engineering*, 2016.
- [20] S. M. Alessandro Fasana, Meccanica delle Vibrazioni, Torino: CLUT, 2006.
- [21] D. J. I. Alper Erturk, Modal Analysis of a Cantilever Beam Tip, John Wiley & Sons,Ltd, 2011.
- [22] A. Gugliotta, Elementi Finiti, Torino: Otto Editore, 2002.
- [23] J. Napier, «CSI Knowledge Base,» 04 04 2014. [Online]. Available: [https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Response-spectrum+analysis#:~:text=Response%2Dspectrum%20analysis%20\(RSA\),of%20an%20essentially%20elastic%20structure..](https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Response-spectrum+analysis#:~:text=Response%2Dspectrum%20analysis%20(RSA),of%20an%20essentially%20elastic%20structure..) [Consultato il giorno 30 01 2021].
- [24] R. A. Kjørlaug, «Seismic Response of Wind Turbines due to Earthquake and Wind Loading,» *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2014*, 2014.
- [25] E. 1993-1-1, Eurocodice 3 - Progettazione delle strutture di acciaio, 1993.
- [26] R. Giovannozzi, Costruzioni di Macchine, Patron editore.
- [27] d. M. Anna, «Analisi Dinamica della Base di un aerogeneratore,» Bari, 2018.

- [28] O. A. Francesca Taddei, «Vibration Mitigation of Wind Turbine Tower with Tuned Mass Dampers,» *Advances in Industrial Control*, 2014.
- [29] D. Hartog, «Reccomendations of the Buildings Ground Dynamics,» DGGT, Berlin, 2002.
- [30] Warbuton, «Optimum absorber parameter fot simple systems,» 1980.
- [31] A. L. Zuluaga, «Vibration control of structures subjected to dynamic loads using tuned pendulum-shaped mass dampers,» 2007.
- [32] S. Avila, «Genetic Optimizzazioni of Tower Vibrations with Pendulum TMD,» 2015.
- [33] F. Industriale, «Smorzatori a massa risonante - scheda tecnica».
- [34] H. K. Osamu Furuya, «Fundamental Design of Response Control Technology for Aerogenerator against Seismic Motion and Wind Load,» in *Proceedings of the Asme*, Vancouver, 2016.
- [35] J. Kelly, *Design of Seismic Isolated Structures*, 1999.
- [36] T.-C. Wu, «Design of Base Isolation System for Buildings».