

POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Ottimizzazione di traiettorie orbitali tra
Near-Earth Asteroids



Relatore

Prof. Casalino Lorenzo

Candidato

Pavel kirdoun

Aprile 2021

Indice

Sommario	1
LISTA DELLE FIGURE.....	3
LISTA DELLE TABELLE	5
1. INTRODUZIONE.....	6
2. OTTIMIZZAZIONE DI TRAIETTORIE SPAZIALI.....	10
2.1. Teoria del controllo ottimale.....	11
2.2. Problema differenziale ai limiti	19
2.3. Definizione del problema	26
2.4. Equazioni di stato e variabili aggiunte.....	29
2.5. Condizioni al contorno	33
2.6. Condizioni iniziali.....	34
3. RISULTATI	37
3.1. 2008 UA202	40
3.2. 2017 SV19.....	44
3.3. 2014 QN266.....	48
3.4. 2018 PN22	52
3.5. 2013 WA44	56
3.6. 2009 BD	60
3.7. Confronto	64
4. CONCLUSIONI	69
Bibliografia.....	70

Sommario

L'argomento principale di questa tesi tratta l'ottimizzazione approssimata di traiettorie verso asteroidi Near-Earth partendo da Apophis (99942), intese come possibile prolungamento di una missione che lo già raggiunto.

Nello sviluppo di una missione spaziale il peso del combustibile è considerato uno dei fattori più rilevanti in termini di costi di un trasferimento orbitale. Diventa quindi fondamentale minimizzare la quantità necessaria di propellente per effettuare con successo tutte le manovre. Il problema di ottimo diventa quello di ricercare la strategia che permetta di portare a termine il trasferimento orbitale rendendo massima la massa al termine della manovra.

La ricerca di soluzioni significative avviene ricercando soluzioni approssimate o con metodi numerici. Questa tesi si focalizza principalmente sui metodi numerici ed in particolare sulle tecniche di ottimizzazione indiretta, le quali offrono un'elevata precisione numerica, un numero limitato di parametri e tempi di calcolo limitati.

Il metodo descritto ed utilizzato in questa tesi è basato sulla Teoria del Controllo Ottimale, la quale si fonda sul calcolo variazionale.

Verranno studiate, cercando di trovare le soluzioni approssimate, traiettorie per sei asteroidi appartenenti ai Near-Earth Asteroids, asteroidi la cui orbita può intersecare quella della Terra. La partenza avviene dall'asteroide Apophis (99942), appartenente anch'esso ai Near-Earth asteroids.

“Se comprendiamo l’universo, in qualche modo lo controlliamo” – cit. Stephen Hawking.

LISTA DELLE FIGURE

Figura 1: Orbita dell'asteroide 2008 UA202.....	40
Figura 2: Massa finale al variare della durata per missioni verso 2008 UA202.	41
Figura 3: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 14/10/2032 durata 870 giorni).....	42
Figura 4: Traiettoria percorsa del satellite (Partenza 14/10/2032 durata 870 giorni).....	43
Figura 5: Andamento di Switching Function, Energia, Inclinazione, afelio, perielio ed eccentricità in funzione dei giorni di missione.....	43
Figura 6: Orbita dell'asteroide 2017 SV19.....	44
Figura 7: Massa finale al variare della durata per missioni verso 2017 SV19.	45
Figura 8: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 11/12/2032 durata 580 giorni).....	46
Figura 9: Traiettoria percorsa del satellite (Partenza 11/12/2032 durata 580 giorni).....	47
Figura 10: Andamento di Switching Function, Energia, Inclinazione, afelio, perielio ed eccentricità in funzione dei giorni di missione.....	47
Figura 11: Orbita dell'asteroide 2014 QN266.	48
Figura 12: Massa finale al variare della durata per missioni verso 2014 QN266.	49
Figura 13: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 20/06/2032 durata 750 giorni).....	50
Figura 14: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 20/06/2032 durata 750 giorni).....	50
Figura 15: Andamento di Switching Function, Energia, Inclinazione, afelio, perielio ed eccentricità in funzione dei giorni di missione.....	51
Figura 16: Orbita dell'asteroide 2018 PN22.	52
Figura 17: Massa finale al variare della durata per missioni verso 2018 PN22.....	53
Figura 18: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 03/06/2033 durata 810 giorni).....	54
Figura 19: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 03/06/2033 durata 810 giorni).....	54
Figura 20: Andamento di Switching Function, Energia, Inclinazione, afelio, perielio ed eccentricità in funzione dei giorni di missione.....	55
Figura 21: Orbita dell'asteroide 2013 WA44.....	56
Figura 22: Massa finale al variare della durata per missioni verso 2013 WA44.	57
Figura 23: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 20/06/2032 durata 639 giorni).....	58
Figura 24: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 20/06/2032 durata 639 giorni).....	58
Figura 25: Andamento di Switching Function, Energia, Inclinazione, afelio, perielio ed eccentricità in funzione dei giorni di missione.....	59
Figura 26: Orbita dell'asteroide 2009 BD.	60
Figura 27: Massa finale al variare della durata per missioni verso 2009 BD.....	61
Figura 28: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 14/10/2032 durata 523 giorni).....	62
Figura 29: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 20/06/2032 durata 639 giorni).....	63
Figura 30: Andamento di Switching Function, Energia, Inclinazione, afelio, perielio ed eccentricità in funzione dei giorni di missione.....	63
Figura 31: Massa finale al variare della durata partendo il 20/06/2032.....	65
Figura 32: Massa finale al variare della durata partendo il 17/08/2032.....	65
Figura 33: Massa finale al variare della durata partendo il 14/10/2032.....	66

Figura 34: Massa finale al variare della durata partendo il 11/12/2032..... 66
Figura 35: Massa finale al variare della durata partendo il 07/02/2033..... 66
Figura 36: Massa finale al variare della durata partendo il 06/04/2033..... 67
Figura 37: Massa finale al variare della durata partendo il 03/06/2033..... 67

LISTA DELLE TABELLE

Tabella 1: Parametri orbitali di Apophis e degli asteroidi selezionati	37
Tabella 2: Parametri orbitali dell'asteroide 2008 UA202.	40
Tabella 3: Parametri orbitali dell'asteroide 2017 SV19.	44
Tabella 4: Parametri orbitali dell'asteroide 2014 QN266.	48
Tabella 5: Parametri orbitali 2018 PN22.	52
Tabella 6: Parametri orbitali asteroide 2013 WA44.	56
Tabella 7: Parametri orbitali 2009 BD.	60

1. INTRODUZIONE

Da quando Giuseppe Piazzi nel 1801, dall'Osservatorio astronomico di Palermo, scoprì Cerere, il numero degli asteroidi conosciuti è cresciuto progressivamente. Inizialmente venne considerato come un nuovo pianeta, in quanto la sua esistenza era in pieno accordo con la previsione della legge di Titius-Bode. Questa legge empirica associa ad un numero intero i vari pianeti e permette di conoscere il semiasse dell'orbita con discreta precisione. Essa veniva soddisfatta da tutti i pianeti del sistema solare lasciando un posto vuoto tra Marte e Giove, occupato da Cerere. Dalla sua scoperta, grazie all'evoluzione delle tecniche di osservazione, alla costruzione di un numero crescente di telescopi in tutto il mondo, e al miglioramento della sensibilità dei rivelatori, il numero di asteroidi conosciuti è cresciuto ad un ritmo esponenziale.

Esistono diversi motivi per cui risulta importante concentrare gli sforzi e studiare questi corpi. Essi hanno caratteristiche non trovabili altrove, grazie alle quali si sono dimostrate molte ipotesi teoriche non rivelabili dai pianeti del nostro sistema solare.

Un enorme contributo è stato apportato alla meccanica celeste, la quale cerca di risolvere il problema degli n-corpi. Ossia, poter predire come si muovono gli oggetti, in particolare quelli artificiali, sotto l'influenza della forza gravitazionale di molti corpi celesti.

Studiando le orbite di questi innumerevoli 'corpuscoli' celesti si sono scoperte le risonanze di moto medio e quelle secolari. In particolare, quelle di moto medio, vengono associate a delle lacune nella distribuzione dei semiassi maggiori dell'orbita degli asteroidi, dette appunto lacune di Kirkwood. Più in generale, le risonanze sono causa di un'evoluzione dinamica di tipo caotico delle orbite asteroidali, prevenendo la formazione di un corpo celeste nella regione di spazio tra Marte e Giove. In altri casi, però, le conseguenze finali delle risonanze sono diverse e si possono creare delle regioni isolate di stabilità. Un esempio a conferma di ciò sono i Troiani, asteroidi collocati nell'intorno dei due punti lagrangiani L4 ed L5 del sistema Sole-Giove, due punti dell'orbita di Giove che si muovono precedendolo e seguendolo di 60°.

Osservando la luce riflessa dagli asteroidi si è visto come essi possono essere suddivisi in tre categorie. Quelli più scuri (tipo "C"), come rivelato dall'analisi spettrale, risultano essere quelli più antichi, contenenti silicati e composti organici. Poi abbiamo corpi rocciosi più chiari (tipo "S"), composti da ferro, nichel e silicati di magnesio. Infine, troviamo quelli più rari e più riflettenti, in cui si trovano prevalentemente composti di ferro e nichel (tipo "M"). Si sospetta che essi provengano da un corpo grande abbastanza da permettere la fusione del proprio nucleo, ed in seguito ad una collisione vengono espulsi dei frammenti metallici dal suo interno.

Scoperto nel 2014, Apophis, appartenente agli asteroidi Near-Earth, è passato dall'essere una minaccia ad una opportunità. Una volta escluse le possibilità di impatto con la Terra nel passaggio ravvicinato del 2029 e del 2036, questo asteroide di poco più di 300 metri di diametro è diventato obiettivo di missioni attuabili con sonde robotiche.

Soprattutto a causa dell'effetto Yarkovsky, una ri-emissione termica anisotropa della radiazione solare assorbita, che cambia la velocità e la direzione di Apophis. L'obiettivo è quindi di portare una missione robotica in orbita attorno a questo asteroide, sfruttando l'approccio ravvicinato del 2029, per acquisire importanti conoscenze scientifiche.

Una volta acquisiti dati a sufficienza dall'orbita attorno ad Apophis (99942) si potrebbe prolungare la missione verso lo studio di altri asteroidi.

Nella seguente tesi verrà esaminata la propagazione di quest'orbita verso sei diversi target, con lo scopo di evidenziare la traiettoria più conveniente in termini di tempo e di consumo di carburante.

Il seguente elaborato dal titolo "Ottimizzazione di traiettorie orbitali tra Near-Earth Asteroids" tenta di fornire un contributo nell'ambito della diminuzione del peso del combustibile utilizzato durante i trasferimenti orbitali dei veicoli spaziali.

E' noto che il costo di tali trasferimenti è sovente uno dei fattori più rilevanti nello sviluppo delle missioni spaziali. La ricerca del cosiddetto ottimo, volto a minimizzare la quantità necessaria di propellente per svolgere le diverse manovre del veicolo, è stata sviluppata secondo la teoria del controllo ottimale.

La teoria del controllo ottimale è un problema matematico che dipende da vincoli differenziali e algebrici ed è perciò basata a partire dal calcolo variazionale.

Nello svolgimento del mio elaborato, la teoria del controllo ottimale viene applicata ad un sistema di equazioni il quale determina le condizioni di contorno. Tali condizioni sono le condizioni al bordo e le condizioni iniziali. I suddetti fattori sono a loro volta influenzati dalla tipologia di orbita all'interno della quale si svolge la missione.

Le condizioni di contorno sono state analizzate a partire da N traiettorie, calcolate a partire dall'asteroide Apophis. Una volta imposte le condizioni al contorno è perciò possibile risolvere il sistema di equazioni differenziali.

Durante la risoluzione del problema relativo alla soluzione delle equazioni differenziali, ho constatato che all'inizio qualcuno o nei casi peggiori tutti i valori del vettore sono sconosciuti, così il problema si traduce da un problema ai valori al contorno (Boundary Value Problem) ad un problema ai valori iniziali (Initial Value Problem).

Per risolvere tale impasse viene implementato un codice numerico, che risolve il problema dei valori iniziali con un metodo indiretto il quale utilizza parametri adimensionali.

Nell'ultima parte della tesi ho preparato un commento dei risultati ottenuti.

2. OTTIMIZZAZIONE DI TRAIETTORIE SPAZIALI

La traiettoria del veicolo spaziale ha un grande peso sulla fattibilità e sul costo della missione. Ridurre al minimo, quindi, il consumo di propellente per portare a termine tutte le manovre necessarie durante l'esecuzione della missione risulta fondamentale per ridurre costi ed avere a disposizione più massa da dedicare al payload. Per poter ottenere questi risultati occorre trovare un metodo di ottimizzazione efficace. Il problema consiste nel trovare una legge di controllo che renda massimo o minimo un determinato indice di controllo. Il consumo di propellente nel nostro caso dovrà essere minimo o, ugualmente, la massa finale al termine della missione dovrà essere massima. Per la ricerca di soluzioni significative il problema di ottimo viene risolto cercando delle soluzioni approssimate oppure tramite dei metodi numerici.

Esistono tre metodi numerici: metodi diretti, i quali permettono di ricavare la condizione di ottimo discretizzando la traiettoria in archi, ad ogni arco vengono associate delle funzioni di controllo che vengono descritte da un elevato numero di parametri. L'ottimizzazione di questi parametri avviene tramite tecniche NLP (Non Linear Programming). I metodi indiretti, sfruttando i principi del calcolo variazionale, offrono un'elevata precisione numerica ed un importante contenuto teorico. Consentono, inoltre, di ottenere la soluzione ottimale con un numero limitato di parametri e tempi di calcolo limitati. Ed infine gli algoritmi evolutivi che partono da un ampio numero di soluzioni che evolvono verso la soluzione ottimale. In questa tesi verranno approfonditi i metodi indiretti i quali hanno un'alta precisione numerica e

possono trovare una soluzione di ottimo con un limitato numero di parametri ed un limitato costo computazionale.

Nonostante i vantaggi del metodo indiretto rispetto a quello diretto, esso include anche degli svantaggi: occorre derivare le espressioni analitiche rispetto alle condizioni necessarie, in quanto può risultare complicato, e l'intervallo di convergenza del programma può risultare alquanto piccolo, portando l'introduzione di variabili aggiunte per riuscire a risolvere il problema di ottimo.

È anche importante notare come la capacità del programma di riuscire a raggiungere la soluzione numerica sia dipendente dalla soluzione tentativo che viene assegnata prima di iniziare la procedura. Quindi l'approccio teorico aiuta a raggiungere la soluzione di problemi più complessi ricercando la soluzione di problemi più semplici e a mano a mano aumentando la complessità.

Verrà di seguito esaminata la teoria del controllo ottimale su cui si basa l'ottimizzazione indiretta.

2.1. Teoria del controllo ottimale

L'approccio indiretto per l'ottimizzazione utilizza la Teoria del Controllo Ottimale (Optimal Control Theory), la quale è basata sul calcolo variazionale e viene specificatamente rielaborata per adattarsi al meglio all'ottimizzazione delle traiettorie interplanetarie. Essa sfrutta le capacità della procedura numerica selezionata per risolvere il Problema dei Valori al Contorno (Boundary Value Problem) che viene fuori dall'applicazione della teoria del controllo ottimale.

La teoria del controllo ottimale viene applicata ad un generico sistema che viene descritto da un vettore di variabili di stato x . L'evoluzione di questo sistema tra gli istanti iniziali e quelli finali (contorni esterni) viene descritta mediante delle equazioni differenziali, quest'ultime sono funzioni di x , del vettore dei controlli u e della variabile indipendente tempo t :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (1)$$

Successivamente si procede a suddividere la traiettoria, tra il punto iniziale e quello finale, in un numero n di sotto-intervalli, definiti archi. Il j -esimo arco inizia al tempo $t_{(j-1)+}$ e termina al tempo t_{j-} , dove le variabili di stato sono $x_{(j-1)+}$ e x_{j-} rispettivamente, dove i segni $-$ e $+$ indicano i valori assunti dalle variabili subito prima e subito dopo il punto considerato. In questo modo vengono prese in considerazione anche le discontinuità delle variabili (es. manovra impulsiva) e del tempo (es. fly-by) tra archi adiacenti. All'interno degli archi le variabili di stato e le variabili di controllo sono continue mentre nei punti di connessione dei vari archi vengono applicati dei vincoli.

Vengono quindi imposte le condizioni al contorno di tipo misto, in genere non lineari, le quali tengono conto dei valori delle variabili di stato e della variabile indipendente tempo ai contorni esterni e anche a quelli interni:

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

Lo scopo principale del problema di ottimo consiste nella ricerca dei valori di massimo e minimo di un funzionale che viene descritto, nella sua forma più generale, come:

$$J = \varphi(x_{(j-1)_+}, x_{j-}, t_{(j-1)_+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} \Phi(x(t), u(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

Esso è composto da due termini: la funzione φ , che dipende dai valori assunti dalle variabili e dal tempo ai contorni (interni ed esterni), e l'integrale esteso a tutta la traiettoria della funzione Φ , che dipende dal tempo e dai valori assunti in ogni punto da variabili e controlli. Inoltre, introducendo le variabili ausiliarie ci si può ricondurre ai casi $\varphi = 0$ (formulazione di Lagrange) o $\Phi = 0$ (formulazione di Mayer, preferita in questo caso).

A questo punto è utile riscrivere il funzionale inserendo i moltiplicatori di Lagrange, le costanti μ , associati alle condizioni al contorno, e le variabili λ , denominate anche variabili aggiunte, che sono associate alle equazioni di stato. Il funzionale, dopo l'introduzione dei moltiplicatori, diventa:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T (f - \dot{x})) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

Dove il simbolo “*” indica la derivata rispetto al tempo.

Entrambi i funzionali J e J^* dipendono dal tempo, dalle variabili di stato x e dalle loro derivate \dot{x} (in particolare dai valori che le variabili x_j e il tempo t_j assumono negli estremi di ogni arco) e dai controlli u . Se le condizioni al contorno e le equazioni di stato sono soddisfatte, i due funzionali e i loro valori agli estremi coincidono. Per eliminare la dipendenza dalle derivate delle variabili \dot{x} si integra per parti ottenendo:

$$\begin{aligned}
 J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j (\lambda_{(j-1)_+}^T x_{(j-1)_+} - \lambda_{j_-}^T x_{j_-}) + \\
 + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} (\Phi + \lambda^T f - \dot{\lambda}^T x) dt \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{5}$$

In seguito, si può eseguire una differenziazione in modo da ottenere la variazione prima del funzionale stesso δJ^* (in questo caso le parentesi quadre indicano una matrice):

$$\begin{aligned}
 \delta j^* = & \left(-H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)_+}} \right) \delta t_{(j-1)_+} \\
 & + \left(H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j_-}} \right) \delta t_{j_-} + \\
 & + \left(\lambda_{(j-1)_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j-1)_+}} + \mu^T \left[\frac{\delta \chi}{\delta x_{(j-1)_+}} \right] \right) \delta x_{(j-1)_+} \\
 & + \left(-\lambda_{j_-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_-}} + \mu^T \left[\frac{\delta \chi}{\delta x_{j_-}} \right] \right) \delta x_{j_-} + \\
 & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial x} \delta u \right) dt \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{6}$$

Dove H viene chiamato come Hamiltoniano del sistema e definito dalla seguente equazione:

$$H = \Phi + \lambda^T f \quad (7)$$

La condizione di ottimo si verifica quando il funzionale è stazionario e quindi la sua variazione prima si deve annullare per qualunque scelta delle variazioni δx , δu , $\delta x_{(j-1)_+}$, δx_{j-} , $\delta t_{(j-1)_+}$, δt_{j-} compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno. Scegliendo opportunamente le costanti e le variabili da introdurre, permette di annullare contemporaneamente il coefficiente di ciascuna delle variazioni nell'espressione (6). Viene assicurata quindi la stazionarietà del funzionale espressa dalla condizione $\delta J^* = 0$. Per ogni punto della traiettoria vengono, quindi, annullati i coefficienti di δx e δu all'interno dell'integrale. Infine, quello che risulta da questa semplificazione sono, le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (8)$$

E le equazioni algebriche per i controlli:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (9)$$

Andando alla ricerca dei massimi o minimi di J risulta che le leggi di controllo sono indipendenti e così anche le condizioni al contorno.

Bisogna altresì controllare se uno dei controlli sia soggetto ad un vincolo: deve appartenere ad un determinato dominio di ammissibilità (il modulo della spinta, ad esempio, deve essere compreso tra il valore minimo 0 e quello massimo T_{max}). Non verranno presi in esame casi dove il vincolo dipende dal tempo o dalle variabili di stato, ma solo dove il tempo è esplicito e costante. In presenza di vincolo, il valore di ottimo del controllo in ogni punto della traiettoria è quello che, appartenendo al dominio di ammissibilità, rende massimo, se si cercano i massimi, o minimo, se si cercano i minimi di J , l'Hamiltoniano (7) in quel punto (Principio di Massimo di Pontryagin).

Si avranno quindi due possibilità:

- Controllo non vincolato: se appartiene al dominio, il valore ottimale del controllo è dato dall'equazione (9) e quindi il vincolo non interviene in quel punto;
- Controllo vincolato: se il valore fornito dell'equazione (9) non appartiene al dominio, il valore ottimale del controllo è agli estremi del dominio.

Se l'Hamiltoniano è lineare rispetto ad uno dei controlli vincolati si ha un caso particolare, in quanto nell'equazione (9) il controllo non compare esplicitamente e non può quindi essere determinato. Per massimizzare J si hanno nuovamente due possibilità:

- Se nell'equazione (7) il coefficiente di controllo non è nullo, allora H è massimizzato per il valore massimo del controllo se il coefficiente è positivo e minimo se è negativo, in accordo con il Principio di Pontryagin;
- Se nell'equazione (7) il coefficiente di controllo è nullo durante un intervallo finito di tempo (arco singolo), allora è necessario imporre l'annullamento di tutte le derivate successive del coefficiente rispetto al tempo, fino a quando in una di esse non appare esplicitamente il controllo. Il controllo ottimale viene quindi determinato azzerando quest'ultima derivata.

Ora andremo a generalizzare le condizioni al contorno per il j -esimo arco. Si scrivono inizialmente le condizioni che derivano dal considerarlo un estremo finale del $(j-1)$ -esimo sotto-intervallo o come estremo iniziale del j -esimo sotto-intervallo. Se si vanno ad annullare nell'ordine i coefficienti δx_{j-} , δx_{j+} , δt_{j-} , δt_{j+} nell'espressione (6), si ottiene:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

$$\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j+}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j+}} \right] = 0 \quad j = 0, \dots, n - 1 \quad (11)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (12)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n - 1 \quad (13)$$

Dove i pedici j_- e j_+ indicano i valori assunti rispettivamente subito prima e subito dopo il punto j (è necessaria la distinzione tra i due, in quanto, come già detto in precedenza, si possono verificare delle discontinuità nei punti di giunzione dei sotto-intervalli). Le equazioni (10) e (12) non hanno significato all'inizio della traiettoria ($j = 0$), mentre le equazioni (11) e (13) non ne hanno alla sua fine ($j = n$). Andando ad eliminare le costanti aggiunte μ dalle equazioni (10), (11), (12) e (13) si ottengono le condizioni al contorno di ottimo del tipo:

$$\sigma(x_{(j-1)_+}, x_{j_-}, \lambda_{(j-1)_+}, \lambda_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-}) = 0 \quad (14)$$

Le quali completano il sistema differenziale dato dalle equazioni (1) e (8) con le condizioni assegnate (2).

Considerando una generica variabile di stato x con particolari condizioni al contorno, le equazioni (10) e (11) forniscono particolari condizioni di ottimo per la variabile aggiunta corrispondente λ_x :

- Se la variabile di stato x è assegnata esplicitamente all'istante iniziale (il vettore delle condizioni imposte χ contiene l'equazione $x_0 - a = 0$ con a valore assegnato), non ci sono condizioni sulla corrispondente variabile aggiunta;
- Se il valore iniziale della variabile di stato x_0 non compare né nella funzione φ né nelle condizioni al contorno, la corrispondente variabile aggiunta è nulla all'istante iniziale ($\lambda_{x_0} = 0$);

- Se una variabile di stato è continua e non assegnata al punto interno i (χ contiene l'equazione $x_{j+} = x_{j-}$), la corrispondente variabile aggiunta è anch'essa continua ($\lambda_{j+} = \lambda_{j-}$);
- Se una variabile di stato è continua e assegnata esplicitamente ad un contorno interno ($x_{j+} = x_{j-} = a$), la corrispondente variabile aggiunta ha una discontinuità "libera", il valore di $\lambda_{x_{j+}}$ è indipendente da $\lambda_{x_{j-}}$ e deve essere determinato dalla procedura di ottimizzazione.

Se H non dipende esplicitamente dal tempo, anche le equazioni (12) e (13) forniscono, in alcuni casi, particolari condizioni al contorno:

- Se il tempo iniziale t_0 non compare esplicitamente né nelle condizioni al contorno né nella funzione φ , l'Hamiltoniano è nullo all'istante iniziale;
- Se il tempo intermedio t_j non compare esplicitamente nella funzione φ , l'Hamiltoniano è continuo in j ($H_{j+} = H_{j-}$);
- Se il tempo t_j è esplicitamente assegnato, l'Hamiltoniano ha in quel punto una discontinuità "libera".

2.2. Problema differenziale ai limiti

In questo paragrafo andremo ad analizzare il metodo diretto utilizzato per ottimizzare i trasferimenti orbitali. Il metodo utilizzato applica la teoria del controllo ottimale al sistema di equazioni (1) dotato di condizioni al contorno che dipendono dal tipo di orbite tra cui si svolge la missione.

Il metodo applicato riformula il sistema di equazioni differenziali in un problema differenziale ai limiti (BVP) in cui i valori iniziali delle variabili risultano incogniti. Per risolvere questo problema si vanno a cercare i valori iniziali per i quali si riescono a soddisfare tutte le condizioni, imposte e di ottimo, integrando numericamente il sistema differenziale.

Vedremo ora come il problema viene formulato per adattarsi alle caratteristiche del metodo BVP e come si procede alla sua risoluzione.

La teoria del controllo ottimale si riassume come un problema matematico dipendente da vincoli differenziali e algebrici, come detto in precedenza. Inizialmente parte dei valori iniziali delle variabili di stato e aggiunte sono incogniti, quindi il problema di ottimo si esprime come un problema differenziale ai limiti descritto dalle equazioni differenziali (1) e (8). I controlli vengono stabiliti dalle equazioni algebriche (9), rafforzati dalle condizioni al contorno imposte (2) e di ottimo (14). Le caratteristiche che rappresentano il problema sono le seguenti:

- L'intervallo d'integrazione è suddiviso in sotto-intervalli in cui le equazioni possono avere differente espressione;
- La durata di ciascun intervallo è incognita;
- Le condizioni al contorno possono essere non lineari e coinvolgere i valori delle variabili sia ai contorni esterni che a quelli interni;
- Le variabili possono essere discontinue ai contorni interni e il loro valore dopo la discontinuità può essere incognito.

Il problema maggiore di questa tecnica di ottimizzazione sta proprio nel risolvere il problema ai limiti che risulta dal loro impiego. Il metodo è indispensabile per la sua soluzione e bisogna ricercare l'analogia tra le sue caratteristiche e quelle

del problema in esame. La soluzione del problema differenziale ai limiti viene ricercata riducendo quest'ultimo a diversi problemi ai valori iniziali che vengono portati alla convergenza applicando il metodo di Newton.

Il primo passo è risolvere l'indeterminatezza della durata di ciascun intervallo: viene applicato un cambio di variabile, solo ai fini dell'integrazione, sostituendo la variabile tempo t con una nuova variabile ε . Essa viene specificata all'interno di ciascun sottointervallo, quindi generalizzando attraverso la relazione per il j -esimo intervallo:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (15)$$

Con τ_j che rappresenta la durata del sottointervallo, in genere incognita. Essa delimita i contorni interni ed esterni del sottointervallo, i quali corrispondono a valori interi consecutivi della nuova variabile indipendente ε .

Riferendoci al sistema di equazioni generico, per delineare il problema, dato da (1) e (8) in cui le espressioni (9) vengono sostituite dai controlli. Si ottiene quindi un problema differenziale delle variabili non più distinte tra quelle di stato e aggiunte:

$$\frac{dy}{dt} = f^*(y, t) \quad (16)$$

Tenendo presente che nell'equazione differenziale precedente vengono prese in considerazione i parametri costanti, tra cui la durata dei sottointervalli τ_j o i valori delle variabili in seguito ad una discontinuità. Si preferisce, per comodità, adottare un nuovo vettore $z = (y, c)$ che al suo interno racchiude le variabili di stato aggiunte e il vettore dei parametri costanti c . Si prosegue di seguito applicando un cambio di variabile indipendente, quindi il sistema di equazioni differenziali diventa:

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = f(z, \varepsilon) \quad (17)$$

Esplicitando il secondo membro delle equazioni (17), per le variabili di stato e aggiunte si ha:

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{dy}{dt} \quad (18)$$

Mentre per i parametri costanti si ha:

$$\frac{dc}{d\varepsilon} = 0 \quad (19)$$

Le condizioni al contorno sono genericamente espresse, senza distinguere tra le condizioni imposte e di ottimo, come:

$$\Psi(s) = 0 \quad (20)$$

Dove s è un vettore che contiene i valori che le variabili assumono in ogni contorno (interno ed esterno) $\varepsilon = 0, 1, \dots, n$ e i parametri incogniti:

$$s = (y_0, y_1, \dots, y_n, c) \quad (21)$$

La ricerca della soluzione si riassume nel determinare i valori iniziali delle variabili attraverso un procedimento iterativo. I valori di alcune di queste variabili inizialmente sono incogniti, mentre alla fine della procedura devono assumere dei valori che soddisfino le equazioni (20). Si presuppone che all'inizio nessuno dei valori sia noto. Per iniziare la procedura, alla prima iterazione è necessario scegliere i valori di tentativo p^1 . Alla r -esima iterazione si integrano le equazioni (17) con i valori iniziali p^r che risultano dall'iterazione precedente, fissando perciò:

$$z(0) = p^r \quad (22)$$

Si prosegue integrando le equazioni lungo tutta la traiettoria tenendo conto delle eventuali discontinuità ai contorni interni. In seguito vengono determinati i valori delle variabili di stato e al termine dell'integrazione si calcola l'errore sulle condizioni al contorno Ψ^r alla r -esima iterazione.

Bisogna tenere in conto che una piccola variazione Δp porta a variare l'errore sulle condizioni al contorno di:

$$\Delta\Psi = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial p} \right] \Delta p \quad (23)$$

Tenendo solo in considerazione i termini del primo ordine. Avendo però necessità di annullare questo errore sulle condizioni al contorno, volendo ottenere quindi $\Delta\Psi = -\Psi^r$, i valori iniziali ad ogni iterazione vengono corretti di una quantità:

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[\frac{\partial\Psi}{\partial p} \right]^{-1} \Psi^r \quad (24)$$

Fin quando non vengano verificate le condizioni al contorno (20) con la precisione voluta.

Il problema reale, nel nostro caso, risulta notevolmente semplificato, in quanto, alcuni dei valori delle variabili sono noti. Il vettore p viene ridotto alla stima di soltanto le componenti incognite di $z(0)$, mentre il vettore Ψ viene ridotto alle sole condizioni al contorno non esplicite al tempo iniziale.

La matrice che compare nell'equazione (24) si può valutare anche numericamente. La i -esima riga viene ottenuta variando la i -esima componente del vettore p di una piccola quantità Δp ed in seguito integrando le equazioni (17). Di seguito si calcola la variazione delle condizioni al contorno $\Delta\Psi(\Delta p)$ e, linearizzando,

si ottiene la riga corrispondente a $\Delta\Psi^T/\Delta p$. L'adozione di questa procedura ci consente di risolvere in una maniera più rapida e semplice il problema differenziale ai limiti in alcuni casi, ma non sempre in grado di garantire la convergenza.

Per il calcolo dello Jacobiano invece si è preferito, invece, di mantenere una valutazione analitica e utilizzare i valori ottenuti numericamente. L'integrazione delle equazioni differenziali del sistema principale e di quello omogeneo avviene attraverso un metodo a passo e ordine variabile basato sulle formule di Adams. Quest'ultimo è un metodo lineare multi-step utilizzato per la soluzione numerica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Richiedendo una precisione pari a 10^{-7} , viene richiesto che l'errore massimo $E_{max} = \max_i(\psi_i)$ sulle condizioni al contorno sia inferiore a questo valore. Dal momento che la linearizzazione applicata per il calcolo della correzione Δp data dall'equazione (24), introduce errori che possono compromettere la convergenza facendo aumentare anziché diminuire l'errore sulle condizioni al contorno. Vengono quindi apportate delle modifiche per migliorare la procedura:

- I valori iniziali vengono corretti di una frazione della quantità determinata, per evitare di allontanarsi troppo dalla soluzione:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p \quad (32)$$

Dove K_1 è un fattore che varia da 0,1 a 1 a seconda che la soluzione di partenza sia lontana o vicina a quella cercata.

- Alla fine di ogni iterazione, una volta che è stato definito il vettore di tentativo p^{r+1} con l'equazione precedente (32) e integrate le equazioni del moto, si

paragona l'errore massimo sulle condizioni al contorno E_{max}^{r+1} con quello ottenuto al termine dell'iterazione precedente E_{max}^r . Se $E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r$ si procede con una nuova iterazione. Il valore di K_2 deve essere superiore all'unità, poiché nelle prime iterazioni per poter convergere alla soluzione, l'errore sulle condizioni al contorno può aumentare; un valore $K_2 = 2 \div 3$ garantisce buoni risultati.

- Se, al contrario, l'errore alla nuova iterazione risulta maggiore rispetto al precedente, si dimezza la correzione da apportare. I nuovi valori di tentativo saranno:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p / 2$$

Si compara quindi, il nuovo errore massimo ottenuto con quello dell'iterazione precedente e, in caso sia necessario, si ripete nuovamente la bisezione. Viene impostato un numero massimo di 5 bisezioni, dopo le quali la procedura si interrompe, il che significa che la soluzione di tentativo scelta non è in grado di portare alla convergenza per il caso preso in esame.

2.3. Definizione del problema

L'analisi preliminare delle traiettorie dei satelliti viene affrontata tipicamente considerando la massa del satellite puntiforme sotto l'influenza di un singolo corpo celeste, di modo che sia possibile utilizzare il modello dei due corpi per studiare le traiettorie interplanetarie; in particolare viene di solito utilizzato l'approssimazione patched-conic nell'analisi iniziale.

Per descrivere le soluzioni ottimali per le traiettorie si utilizza un sistema di riferimento eliocentrico si sfruttano le equazioni del problema dei due corpi per descrivere il moto del satellite attraverso gli asteroidi. Le equazioni differenziali del moto sono:

$$\frac{dr}{dt} = V \quad (34)$$

$$\frac{dV}{dt} = g + \frac{T}{m} \quad (35)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (36)$$

Dove r è il vettore posizione, V il vettore velocità, g è l'accelerazione gravitazionale, mentre la variazione della massa nel tempo viene espressa dal rapporto tra il vettore della spinta T e la velocità di scarico effettiva. Inoltre è anche possibile vedere l'Hamiltoniano, che viene definito dall'equazione (7):

$$H = \lambda_r^T v + \lambda_v^T \left(g + \frac{T}{m} \right) - \lambda_m \frac{T}{c} \quad (37)$$

e l'equazione di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte (8) fornisce:

$$\left[\frac{d\lambda_r}{dt} \right]^T = -\lambda_r^T \left[\frac{\partial g}{\partial r} \right] \quad (38)$$

$$\left[\frac{d\lambda_v}{dt} \right]^T = -\lambda_r^T \quad (39)$$

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{\lambda_v T}{m^2} \quad (40)$$

Dove la matrice gradiente della gravità appare nell'equazione (38).

Le equazioni (34)-(36) e (38)-(39) costituiscono il sistema di equazioni differenziali, che viene integrato numericamente.

La direzione della spinta e il suo modulo sono tipicamente le variabili di controllo, le quali devono massimizzare H in accordo con il Principio di Massimo di Pontryagin. La direzione ottimale della spinta è ovviamente parallela al vettore aggiunto velocità λ_v .

Si introduce la *switching function*:

$$S_F = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (41)$$

Così è possibile riscrivere l'equazione (37):

$$H = \lambda_r^T v + \lambda_v^T g - T S_F \quad (42)$$

Il modulo della spinta assume il suo massimo quando la *switching function* S_F è positiva, altrimenti zero quando S_F è negativa, nuovamente, per massimizzare l'Hamiltoniano.

Si verificano archi singolari quando S_F rimane uguale a zero durante un tempo finito; l'equazione (42) non è sufficiente per decidere il modulo ottimale della spinta.

Per migliorare l'accuratezza del metodo numerico, la traiettoria viene suddivisa in archi in cui la spinta è massima e altri in cui la spinta è zero.

Il numero e l'ordine degli archi vengono assegnati a priori mentre le lunghezze temporali dei singoli archi sono sconosciute. Le condizioni al contorno per la condizione di ottimo impongono che la 'switching function' S_F sia uguale a zero nelle estremità di ogni arco di spinta.

La procedura numerica fornisce la soluzione di ottimo che corrisponde alla struttura della traiettoria assegnata a priori.

La soluzione viene poi controllata in accordo con il Principio di Massimo di Pontryagin, se il PMP viene violato vengono rimossi o inseriti archi di spinta o archi con spinta zero, tenendo in conto sempre il comportamento di S_F per ottenere una soluzione migliore.

2.4. Equazioni di stato e variabili aggiunte

Riferendoci ad un sistema inerziale eliocentrico in coordinate sferiche la posizione di un satellite viene descritta dal raggio r , dalla longitudine ϑ e dalla latitudine ϕ :

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \\ \vartheta \\ \phi \end{bmatrix} \quad (43)$$

Mentre la velocità viene descritta da un sistema di riferimento locale con la componente radiale u (diretta verso lo Zenit), la direzione verso est v e la direzione nord w :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (44)$$

Le equazioni di stato per il sistema di riferimento considerato sono:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (45)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{v}{r \cos \phi} \quad (46)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (47)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \quad (48)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \quad (49)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{r} + \frac{v^2}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \quad (50)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (51)$$

Dove γ_T e ψ_T sono gli angoli di elevazione (flight path angle) e l'angolo di rotta (heading) del vettore spinta T e ne determinano la direzione (vengono misurati

rispettivamente dal piano orizzontale, con angoli positivi verso l'alto, e in senso antiorario dal parallelo, con angoli positivi verso Nord).

Considerando l'equazione (6) possiamo valutare l'Hamiltoniano H :

$$\begin{aligned}
 H = & \lambda_r + \lambda_\vartheta \frac{v}{r \cos \phi} + \lambda_\phi \frac{w}{r} \\
 & + \lambda_u \left(-\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \right) \\
 & + \lambda_v \left(-\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \right) \\
 & + \lambda_w \left(-\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \right) - \lambda_m \frac{T}{c}
 \end{aligned} \tag{52}$$

Dalla teoria del controllo ottimale si possono ottenere le equazioni algebriche dei controlli:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \tag{53}$$

Con questa ultima equazione è possibile determinare il valore ottimale del controllo γ_T e ψ_T , è sufficiente infatti derivare l'Hamiltoniano rispetto a γ_T e ψ_T e porli uguali a zero.

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma_T} = 0 \tag{54}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_T} = 0 \quad (55)$$

Da quest'ultime è possibile ottenere i valori ottimali per gli angoli di spinta:

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (56)$$

$$\cos \gamma_T \cos \psi_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \quad (57)$$

$$\cos \gamma_T \sin \psi_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \quad (58)$$

dove $\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2}$ è il modulo del vettore primario, parallelo alla direzione ottimale della spinta.

Ora, dalle equazioni di Eulero-Lagrange con la Teoria del Controllo Ottimale:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (59)$$

Considerando le equazioni differenziali delle variabili aggiunte:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = \frac{1}{r^2} \left[\lambda_\vartheta \frac{v}{\cos \phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u \left(-\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \lambda_v (-uv + v w \tan \phi) \right. \\ \left. + \lambda_w (-uw - v^2 \tan \phi) \right] \end{aligned} \quad (60)$$

$$\dot{\lambda}_\vartheta = 0 \quad (61)$$

$$\dot{\lambda}_\phi = \frac{1}{r \cos^2 \phi} (-\lambda_\vartheta v \sin \phi - \lambda_v v w + \lambda_w v^2) \quad (62)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) \quad (63)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left(-\lambda_\vartheta \frac{1}{\cos \phi} - 2\lambda_u v + \lambda_v (u - w \tan \phi) + 2\lambda_w v \tan \phi \right) \quad (64)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} (-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v v \tan \phi + \lambda_w u) \quad (65)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_v \quad (66)$$

Le equazioni differenziali ottenute vengono inserite all'interno del sistema di equazioni differenziali.

2.5. Condizioni al contorno

Una volta ottenute le equazioni differenziali, è necessario imporre le condizioni al contorno. Verranno analizzate N traiettorie a partire dall'asteroide Apophis al tempo t_0 con arrivo sugli asteroidi N ai tempi t_{f_N} . Per ogni traiettoria è necessario imporre qualche condizione al contorno, in particolare al tempo t_0 la posizione e la velocità del satellite deve essere uguale alla posizione e velocità di Apophis. Si suppone, per semplicità di calcolo, una massa iniziale alla partenza da Apophis di $800kg$.

$$r_{S/C}(t_0) = r_{Apophis}(t_0) \quad (67)$$

$$V_{S/C}(t_0) = V_{Apophis}(t_0) \quad (68)$$

$$m_0(t_0) = 800kg \quad (69)$$

Alla fine della missione la velocità e la posizione del satellite saranno uguali a quelli del satellite di destinazione:

$$r_{S/C}(t_f) = r_{Asteroida}(t_f) \quad (70)$$

$$V_{S/C}(t_f) = V_{Asteroida}(t_f) \quad (71)$$

I tempi t_0 e t_f possono essere imposti oppure ottimizzati.

2.6. Condizioni iniziali

Una volta che si sono imposte le condizioni al contorno è possibile risolvere il sistema di equazioni differenziali. Per soddisfare le condizioni al contorno è necessario partire con le giuste condizioni iniziali, contenute nel vettore y , le quali sono integrate dal sistema di equazioni differenziali. Il vettore condizioni iniziali:

$$y = [t_0 \quad t_f \quad r_0 \quad \vartheta_0 \quad \phi_0 \quad u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \lambda_{r0} \quad \lambda_{\vartheta0} \quad \lambda_{\phi0} \quad \lambda_{u0} \quad \lambda_{v0} \quad \lambda_{w0}] \quad (72)$$

Dove t_0 è il tempo iniziale di partenza da Apophis, mentre t_f è il tempo di arrivo sull'asteroide; r_0 , ϑ_0 , e ϕ_0 indicano la posizione iniziale e rappresentano rispettivamente il raggio, la longitudine e la latitudine in coordinate sferiche in un sistema di riferimento inerziale, la velocità viene espressa da u_0 (componente radiale verso lo Zenit), v_0 (componente in direzione Est) e w_0 (componente in direzione Nord) in un sistema di riferimento locale.

Le variabili aggiunte sono: λ_{r_0} , λ_{ϑ_0} , λ_{ϕ_0} , λ_{u_0} , λ_{v_0} , λ_{w_0} . Come si è visto prima, le variabili aggiunte sono indispensabili per ottenere la direzione ottimale per la spinta:

$$T \sin \gamma_t = T \frac{\lambda_u}{\lambda_v} \quad (73)$$

$$T \cos \gamma_t \cos \phi_t = T \frac{\lambda_v}{\lambda_v} \quad (74)$$

$$T \cos \gamma_t \sin \phi_t = T \frac{\lambda_w}{\lambda_v} \quad (75)$$

La spinta ottenuta risulta parallela al vettore primer λ_v .

Sfortunatamente all'inizio qualcuno o nei casi peggiori tutti i valori del vettore sono sconosciuti, così il problema si traduce da un problema ai valori al contorno (Boundary Value Problem) ad un problema ai valori iniziali (Initial Value Problem). Per risolvere il problema viene adottato un metodo di tentativo, in particolare si considera una soluzione di tentativo iniziale p_0 .

Assunto un valore per t_0 è immediato avere i corrispondenti valori di r_0 , ϑ_0 , ϕ_0 , u_0 , v_0 , w_0 relativi all'orbita di Apophis. Mentre per le variabili aggiunte λ_{r_0} , λ_{ϑ_0} , λ_{ϕ_0} ,

λ_{u0} , λ_{v0} e λ_{w0} si possono utilizzare i valori di una soluzione precedente, ad esempio un asteroide con parametri orbitali simili a quello analizzato. In assenza di una soluzione precedente, il vettore primer $\lambda_V = [\lambda_{u0} \lambda_{v0} \lambda_{w0}]$ viene scelto parallelo in direzione, concorde o discorde in verso al vettore velocità V , tale da avere la *switching function* $S_F > 0$. Le restanti variabili aggiunte λ_{r0} , $\lambda_{\theta0}$ e $\lambda_{\phi0}$ invece vengono prese con valori vicini allo zero.

Definita la soluzione tentativo, la si integra all'interno del sistema di equazioni differenziali. Successivamente, si confronta la soluzione con le condizioni al contorno da soddisfare, se l'errore che viene fuori dal confronto risulta minore della tolleranza imposta, si sono trovati i valori iniziali del problema, altrimenti sarà necessario modificare il vettore iniziale p_0 e re-integrarlo fino a che l'errore sarà ridotto alla tolleranza richiesta.

Quando vengono trovati i valori iniziali, si può ottenere la soluzione per la traiettoria ottimale, con la loro tendenza lungo tutto l'arco temporale. Conoscendo la massa iniziale e finale si può quindi ottenere, tramite l'equazione di Tsiolkovsky, il ΔV :

$$\Delta V = c \ln \frac{m_0}{m_f} \quad (76)$$

Per risolvere il problema ai valori iniziali viene implementato un codice numerico. Il codice risolve il problema ai valori iniziali al contorno con un metodo indiretto che utilizza parametri adimensionali.

3. RISULTATI

Prima di valutare le traiettorie ottimali è necessario scegliere gli asteroidi. Il processo di selezione è stato basato sulla capacità di raggiungere gli asteroidi in tempi brevi e con un ridotto consumo di carburante. Per mantenere basso il consumo di carburante è necessario scegliere gli asteroidi tra quelli che hanno parametri orbitali simili a quelli di Apophis e distanza angolare relativamente bassa.

Si andrà ad analizzare la fattibilità di diverse traiettorie, con partenza l'asteroide Apophis e destinazione gli asteroidi schematizzati nella tabella 1.

Per ogni asteroide verranno prese in considerazione differenti traiettorie, variando la data di partenza e la durata della missione.

ASTEROIDE	a (deg)	e	i (deg)	w (deg)	Ω (deg)	M (deg)
2004 MN4	1.1042	0.1894	2.2083	71.1559	203.5327	269.3749
(Apophis)						
2008 UA202	1.0332	0.0686	0.2633	300.9235	21.1121	62.3779
2017 SV19	1.0632	0.0406	1.3032	156.7976	343.8407	24.6772
2014 QN266	1.0527	0.0923	0.4883	61.5897	171.1095	206.2476
2018 PN22	0.9972	0.0392	4.3850	219.1760	317.0775	36.3127
2013 WA44	1.1005	0.0605	2.3022	176.7311	56.5130	84.1320
2009 BD	1.0098	0.0416	0.3849	109.8710	58.1276	349.7265

Tabella 1: Parametri orbitali di Apophis e degli asteroidi selezionati.

Poiché l'aumento della durata della missione comporta una riduzione del consumo di carburante e la diminuzione del ΔV e viceversa, si esegue uno studio facendo variare la durata.

La prima data utile di partenza considerata è il 20 giugno del 2032, l'ultima il 3 giugno del 2033, mentre le durate variano da 1,5 a 3 anni circa.

Per effettuare le varie analisi delle traiettorie comprese nel range di partenze e durate prefissato si utilizza un codice FORTRAN sviluppato per risolvere il problema di ottimo usando un processo iterativo. Il codice è stato usato per valutare la variazione della massa finale nell'intervallo considerato, in quest'ottica il problema di ottimo permette di trovare una strategia per cui la missione interplanetaria venga portata a termine con la massa finale massima e/o consumando meno propellente possibile. Ottimizzando il consumo di quest'ultimo si garantisce maggiore disponibilità di massa per le apparecchiature utilizzate durante la missione.

Il codice FORTRAN implementato permette di analizzare diverse traiettorie semplicemente inserendo dei dati in input, che una volta elaborati iterativamente restituiscono la traiettoria. Il dato principalmente considerato nel nostro caso in uscita dal programma è appunto la massa finale al termine della missione.

Per analizzare al meglio l'andamento della massa finale rimanente al termine della missione vengono creati dei grafici. Vengono realizzati diversi tipi di grafico mantenendo di volta in volta fissi alcuni parametri e facendone variare altri; ciò permette di avere una migliore lettura dell'andamento della massa e/o del ΔV al variare di un dato parametro.

Di seguito verranno analizzate le traiettorie verso gli asteroidi elencati precedentemente ed in particolare verranno riportare le analisi delle traiettorie che mostrano il miglior compromesso tra massa finale e durata della missione.

3.1. 2008 UA202

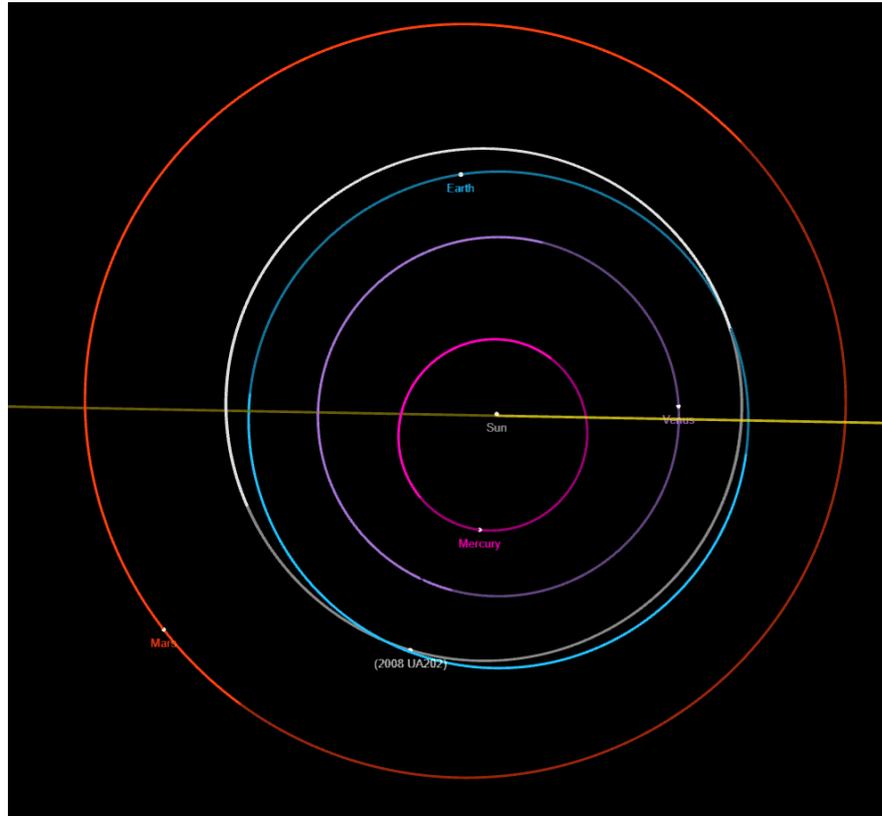


Figura 1: Orbita dell'asteroide 2008 UA202.

Parametri orbitali 2008 UA202	
a (AU)	1.0332
e	0.0686
i (AU)	0.2633
w (AU)	300.9235
Ω (AU)	21.1121
M (AU)	62.3779

Tabella 2: Parametri orbitali dell'asteroide 2008 UA202.

Si osserva dalla figura 2 come per questa traiettoria sia preferibile fissare la data di partenza relativamente presto, tra metà Giugno 2032 e metà Ottobre 2032, per durate tra 523 e 814 giorni; prolungando la missione fino a 872 giorni si può anche valutare di partire a metà Dicembre.

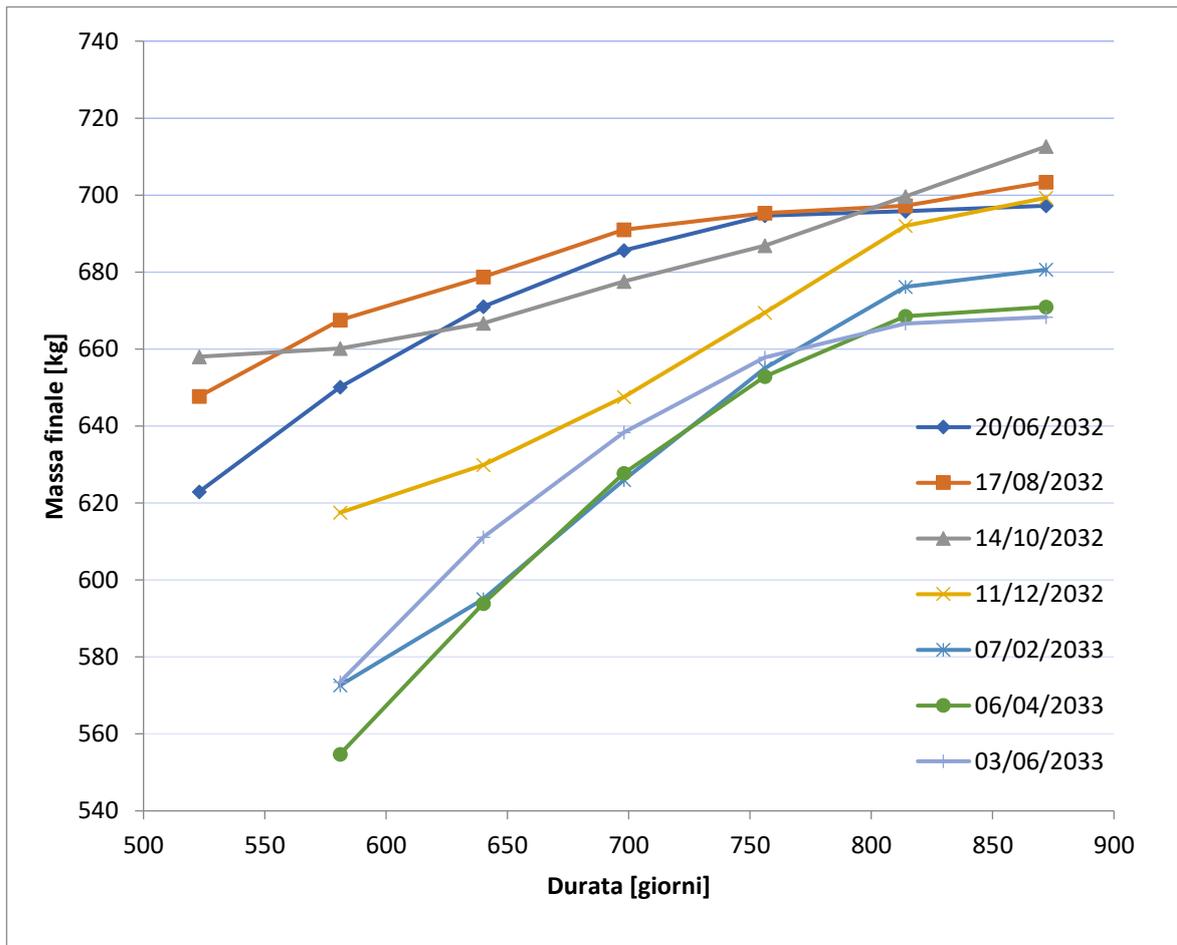


Figura 2: Massa finale al variare della durata per missioni verso 2008 UA202.

Verrà quindi presa in analisi la traiettoria con partenza il 14 Giugno 2032 con durata di 870 giorni. Dalla figura 3 si può notare come la differenza di inclinazione tra le orbite di Apophis e di 2008 UA202 sia marcata.

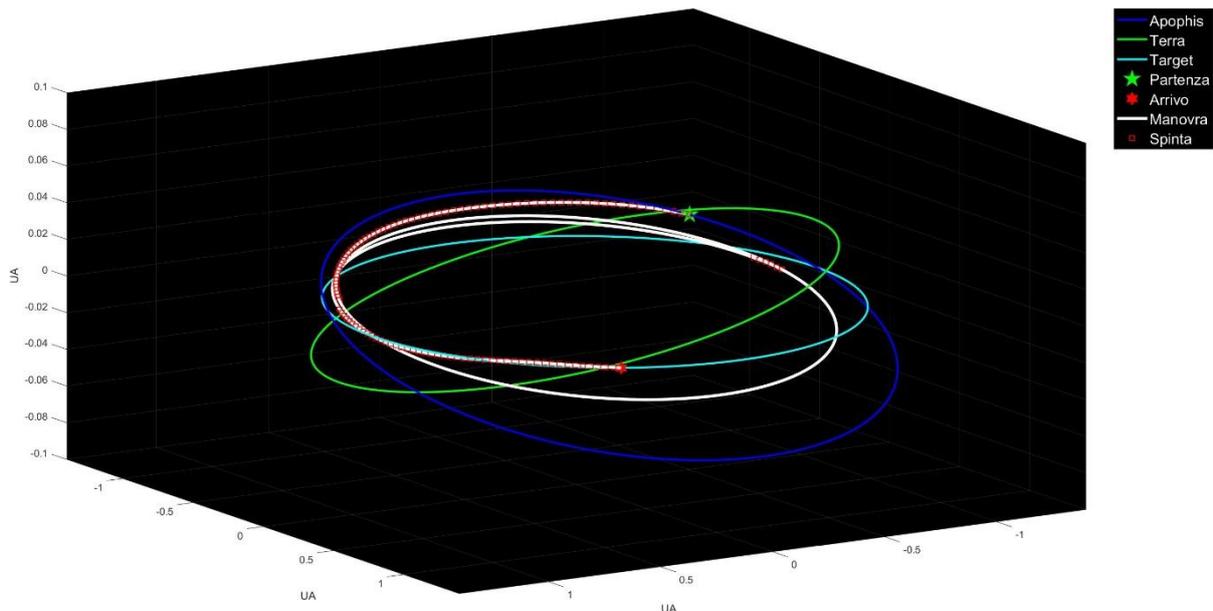


Figura 3: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 14/10/2032 durata 870 giorni).

Per raggiungere la destinazione si hanno tre archi di spinta, il primo e l'ultimo relativamente grandi mentre il secondo è soltanto un piccolo aggiustamento. Il primo arco, con durata di circa 100 giorni, riduce drasticamente l'afelio, porta l'eccentricità della traiettoria ad un valore prossimo a quello del target. Anche la differenza di inclinazione tra le due orbite viene ridotta in parte. Dopo più di 500 giorni, dove il satellite è rimasto in attesa di avere una migliore fasatura con il target, si ha il secondo piccolo arco di spinta che corregge ulteriormente l'inclinazione. Infine abbiamo l'ultimo arco di spinta consistente che fornisce l'afelio richiesto da 2008 UA 202. L'inclinazione in questo tratto viene ridotta notevolmente portandola a coincidere con quella dell'obiettivo. Il costo totale della manovra è di $\Delta V = 3.7427 \text{ km/s}$.

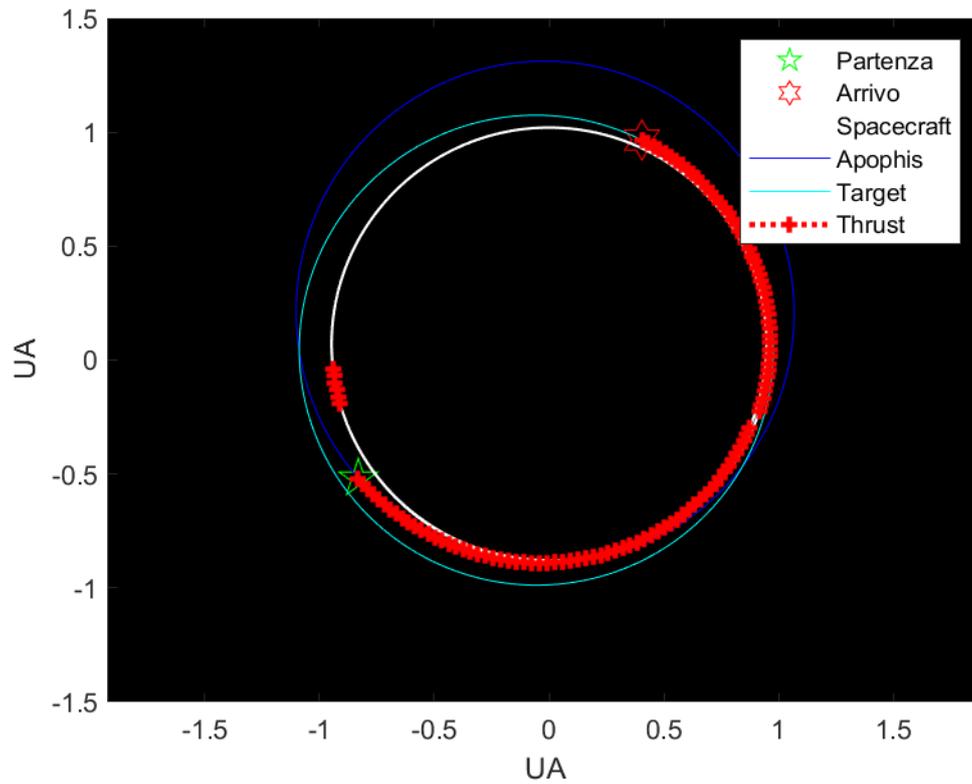


Figura 4: Traiettoria percorsa del satellite (Partenza 14/10/2032 durata 870 giorni).

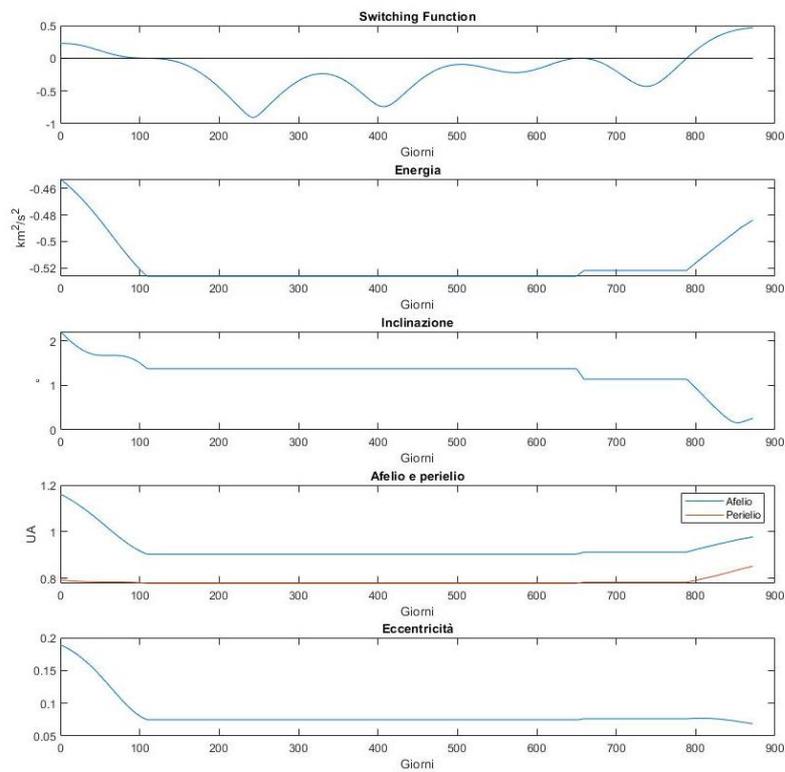


Figura 5: Andamento di Switching Function, Energia, Inclinazione, afelio, perielio ed eccentricità in funzione dei giorni di missione.

3.2. 2017 SV19

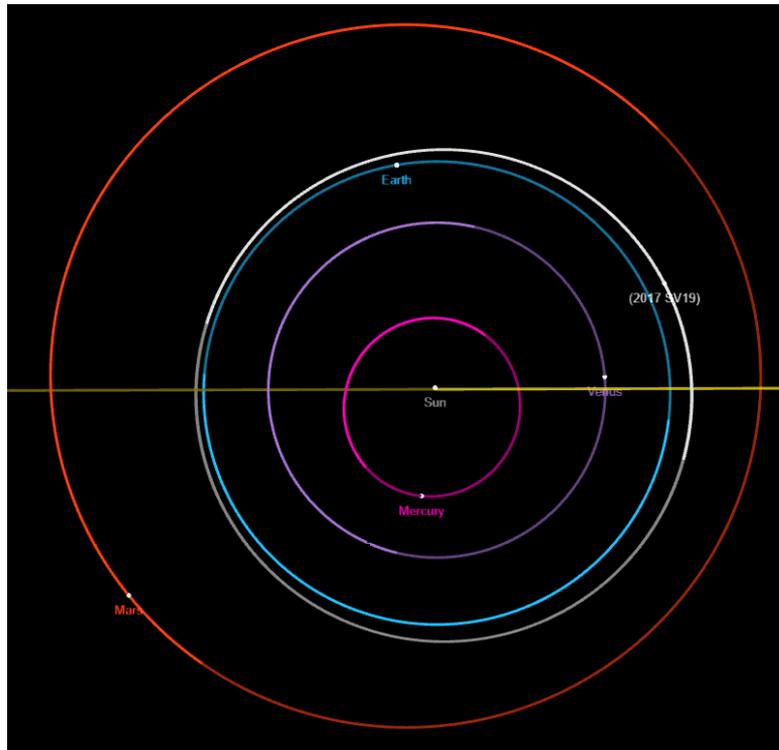


Figura 6: Orbita dell'asteroide 2017 SV19.

Parametri orbitali 2017 SV19	
a (AU)	1.0632
e	0.0406
i (AU)	1.3032
w (AU)	156.7976
Ω (AU)	343.8407
M (AU)	24.6772

Tabella 3: Parametri orbitali dell'asteroide 2017 SV19.

Per missioni brevi (tra 460 e 530 giorni) la partenza preferibile si attesta intorno a metà Agosto 2032 mentre oltre i 530 giorni si vede chiaramente che conviene partire a metà Dicembre 2032 e la massa finale risulta pressoché costante allungando la durata fino a 880 giorni. Per missioni da 640 e 698 giorni si hanno delle finestre di lancio a metà Agosto 2032 e fine Giugno dello stesso anno rispettivamente, mentre per missione lunga (oltre 800 giorni) si potrebbe lanciare anche a inizio Giugno 2033.

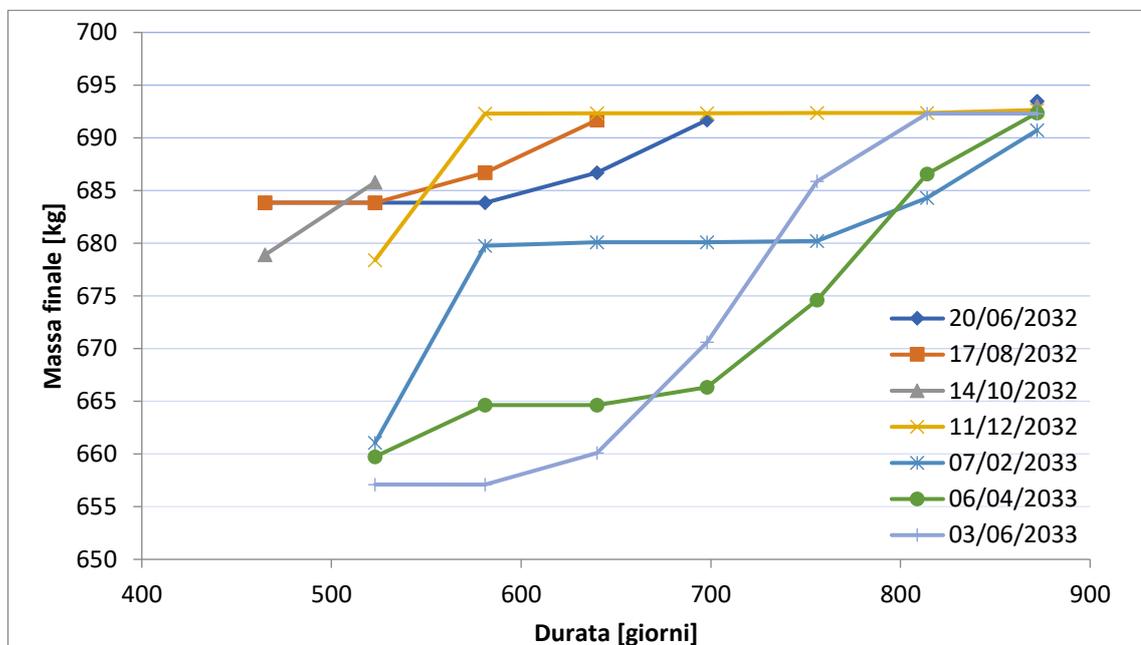


Figura 7: Massa finale al variare della durata per missioni verso 2017 SV19.

Dalla figura 7 è anche possibile vedere come, per alcune sezioni, la massa finale sia costante. Per queste finestre di lancio la missione si conclude con un arco senza propulsione e con delle piccole correzioni poco prima dell'arrivo a target. Essendo possibile eseguire il viaggio in tempo diversi, ma con lo stesso consumo di

carburante rende molto favorevole sfruttare queste traiettorie. In particolare, viene analizzata la traiettoria con partenza 11/12/2032 con durata 580 giorni.

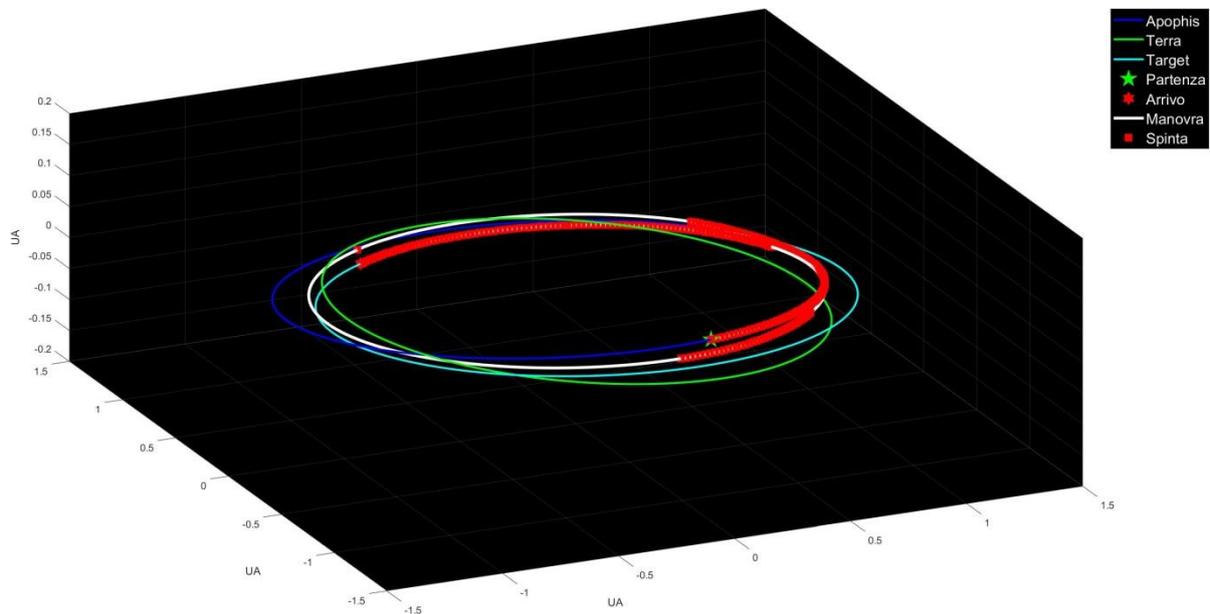


Figura 8: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 11/12/2032 durata 580 giorni).

La traiettoria in analisi presenta 3 archi di spinta, quello iniziale e quello finale sono relativamente lunghi (più di 100 giorni) e forniscono correzioni più marcate. Il primo riduce notevolmente l'inclinazione e l'afelio, accentuati in Apophis, portando l'orbita su un piano con inclinazione minore di quella di 2017 SV19. Quest'ultimo parametro viene aumentato fino al valore del target nel secondo tratto propulso, mentre viene ridotto ulteriormente l'afelio. L'ultimo tratto fornisce il perielio necessario; inoltre, mentre inizialmente riduce l'eccentricità, negli ultimi 30 giorni alza il valore dell'afelio a quello target (posizionato dalla parte opposta di quello di Apophis). Questa traiettoria risulta essere abbastanza costosa viste le correzioni necessarie con un $\Delta V = 4,6795 \text{ km/s}$.

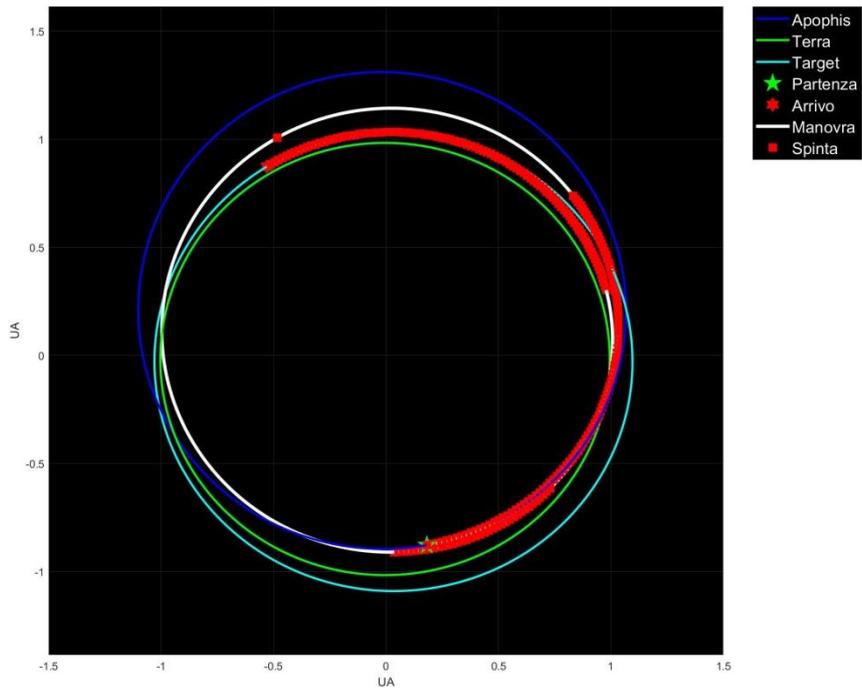


Figura 9: Traiettoria percorsa del satellite (Partenza 11/12/2032 durata 580 giorni).

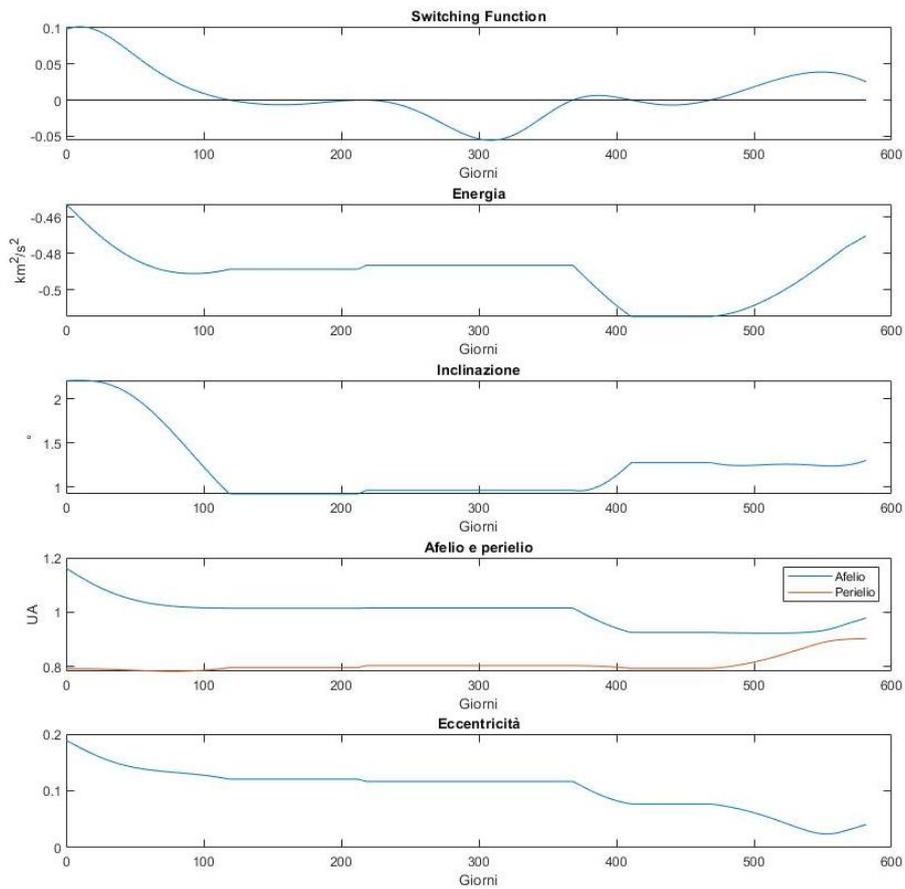


Figura 10: Andamento di Switching Function, Energia, Inclinazione, afelio, perielio ed eccentricità in funzione dei giorni di missione.

3.3. 2014 QN266

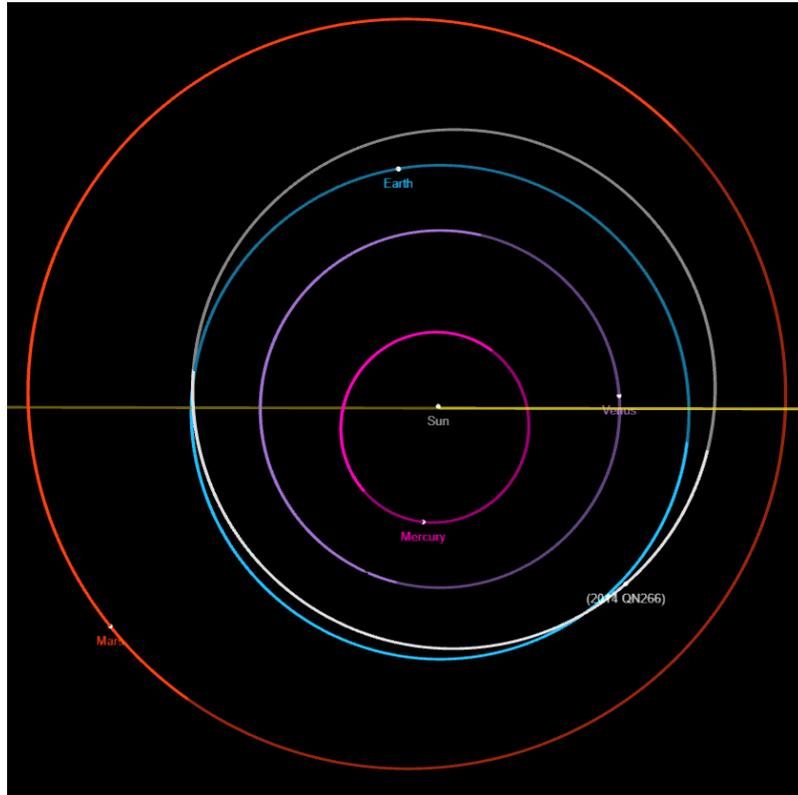


Figura 11: Orbita dell'asteroide 2014 QN266.

Parametri orbitali 2014 QN266	
a (AU)	1.0527
e	0.0923
i (AU)	0.4883
w (AU)	61.5897
Ω (AU)	171.1095
M (AU)	206.2476

Tabella 4: Parametri orbitali dell'asteroide 2014 QN266.

In questo caso qualsiasi durata si scelga per la missione si osserva che si hanno diverse opportunità favorevoli per partenze tra fine Giugno 2032 e metà Ottobre 2032. Per durate lunghe (oltre 800 giorni) si può anche posticipare l'inizio della missione a partire da Dicembre 2032 fino a Giugno 2033. Si analizza il caso con partenza il 20 Giugno 2032 e durata 750 giorni.

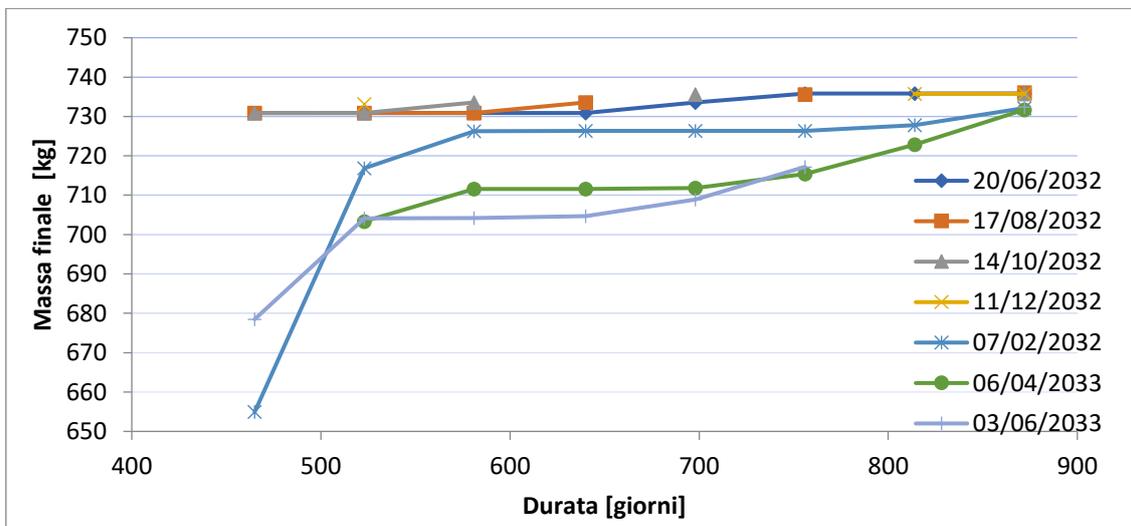


Figura 12: Massa finale al variare della durata per missioni verso 2014 QN266.

Dalle figure 13 e 14 si può osservare facilmente la presenza di tre archi di spinta: il primo breve che apporta qualche piccola correzione all'eccentricità, il secondo e il terzo più lunghi separati da una pausa di più di un anno. Questa lunga assenza di spinta conferma quello che si evince dalla figura 12, è possibile partire nell'estate del 2032 con durate superiori ai 550 giorni oppure posticipare la partenza ad Ottobre riducendo il tempo sotto i 500 giorni, consumando sempre la stessa quantità di propellente.

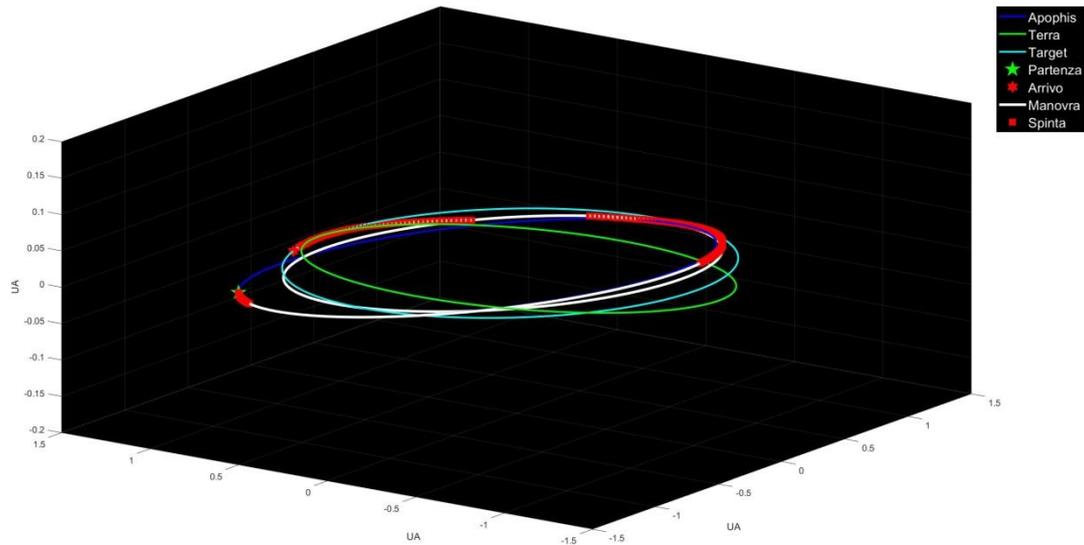


Figura 13: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 20/06/2032 durata 750 giorni).

Avendo un'orbita molto simile ad Apophis, sono necessarie poche correzioni di orbita. Come detto in precedenza, il primo arco di spinta corregge lievemente l'eccentricità dell'orbita, il secondo al contrario è quello principale dove vengono ridotte maggiormente inclinazione, eccentricità ed afelio.

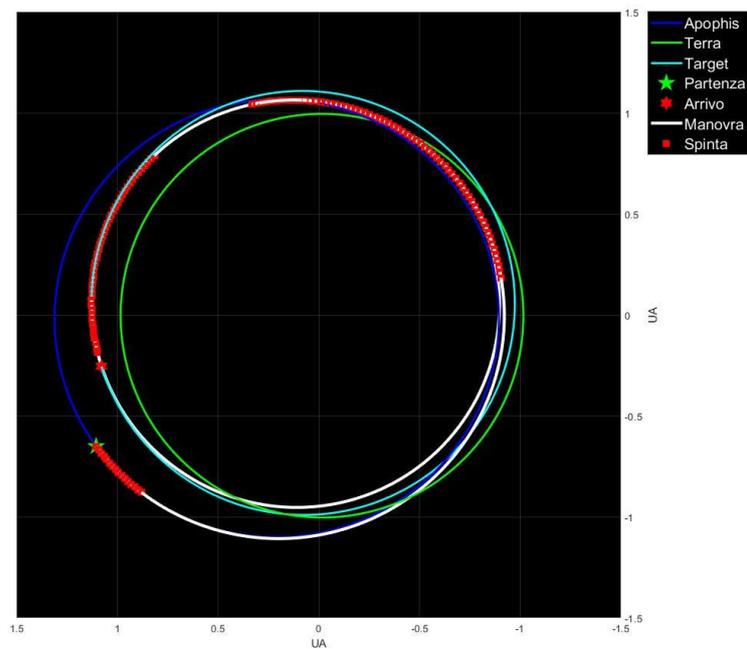


Figura 14: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 20/06/2032 durata 750 giorni).

Dopo un anno di arco non propulso, abbiamo il terzo e ultimo tratto di spinta, che abbassa ulteriormente i valori di eccentricità e inclinazione portandoli a quelli del target e fornisce il perielio necessario per entrare in orbita attorno a 2014 QN266.

Al contrario di quella precedente questa traiettoria risulta essere decisamente più conveniente dal punto di vista del consumo di propellente e durata di missione, con un $\Delta V = 2,7052 \text{ km/s}$.

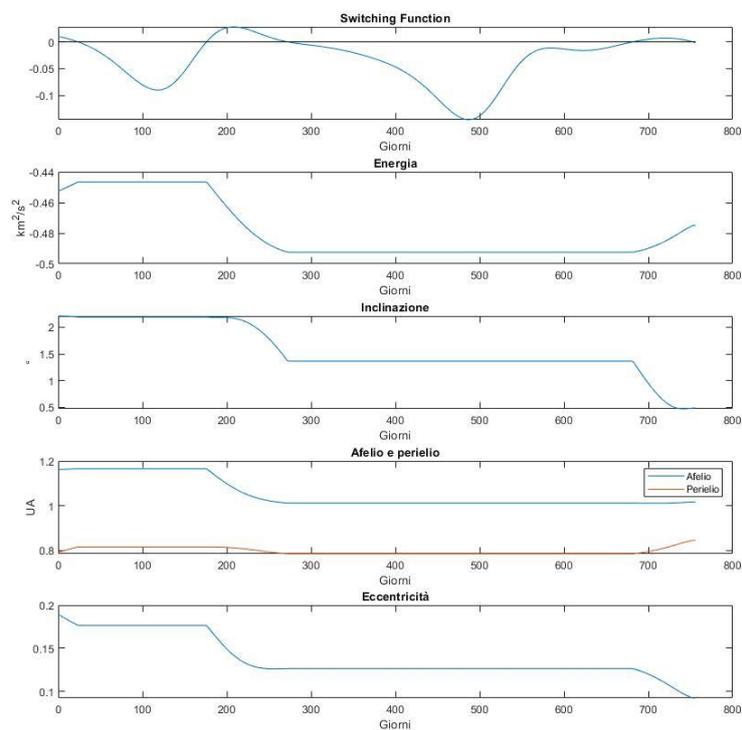


Figura 15: Andamento di Switching Function, Energia, Inclinazione, afelio, perielio ed eccentricità in funzione dei giorni di missione.

3.4. 2018 PN22

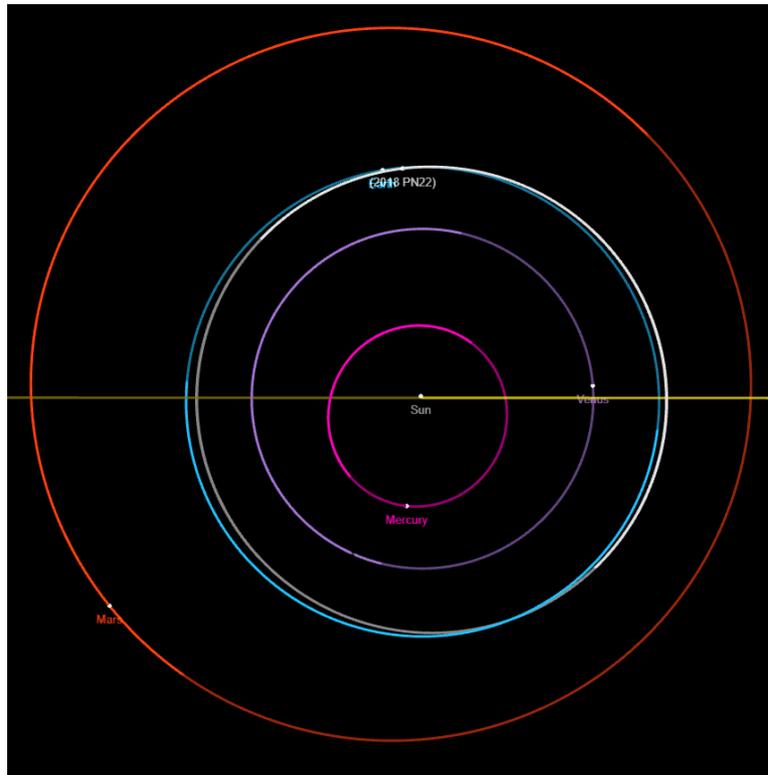


Figura 16: Orbita dell'asteroide 2018 PN22.

Parametri orbitali 2018 PN22	
a (AU)	0.9972
e	0.0392
i (AU)	4.3850
w (AU)	219.1760
Ω (AU)	317.0775
M (AU)	36.3127

Tabella 5: Parametri orbitali 2018 PN22.

Per questa traiettoria si vede chiaramente che non è per niente conveniente avere missioni corte, più del 40% della massa sarebbe da dedicare al propellente lasciando poco più del 50% di massa al lancio da dedicare alle apparecchiature. La finestra di lancio più conveniente risulta essere Giugno 2033 con una durata di almeno 700 giorni. Allungando la missione di altri 100 giorni si risparmia un altro 5% di massa da dedicare al propellente.

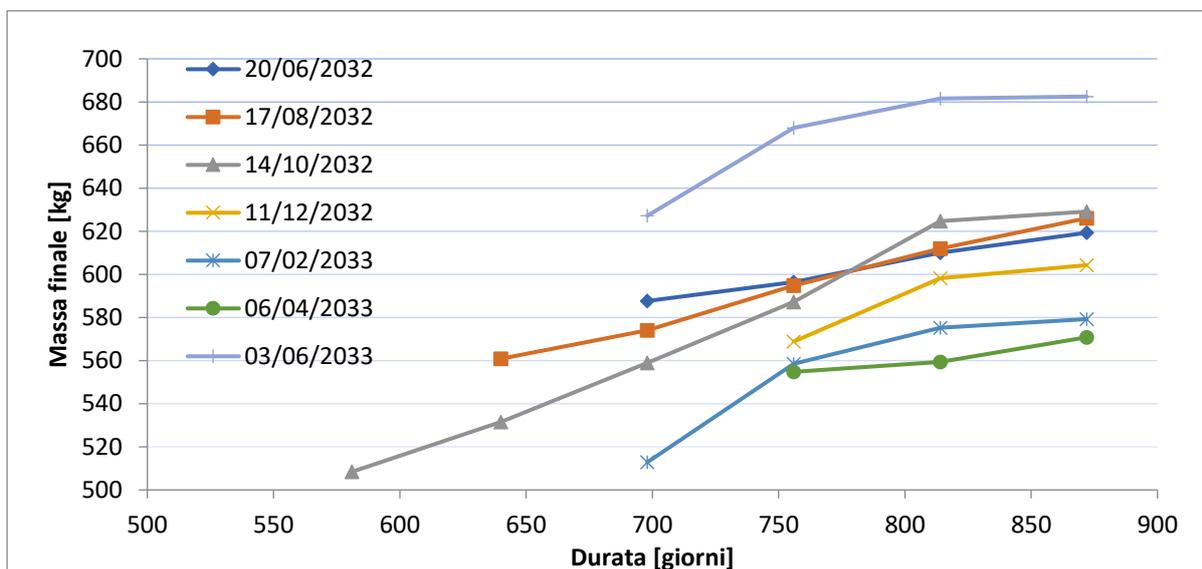


Figura 17: Massa finale al variare della durata per missioni verso 2018 PN22.

Il motivo principale per cui questo asteroide risulta particolarmente sconveniente da raggiungere è dovuto dal fatto che le orbite di questi due asteroidi sono particolarmente differenti. Dalla figura 18 e dal grafico dell'inclinazione di figura 19 risulta chiaro che uno dei fattori che alza il consumo è proprio la necessità di dover correggere la differenza di inclinazione tra le orbite dei due asteroidi.

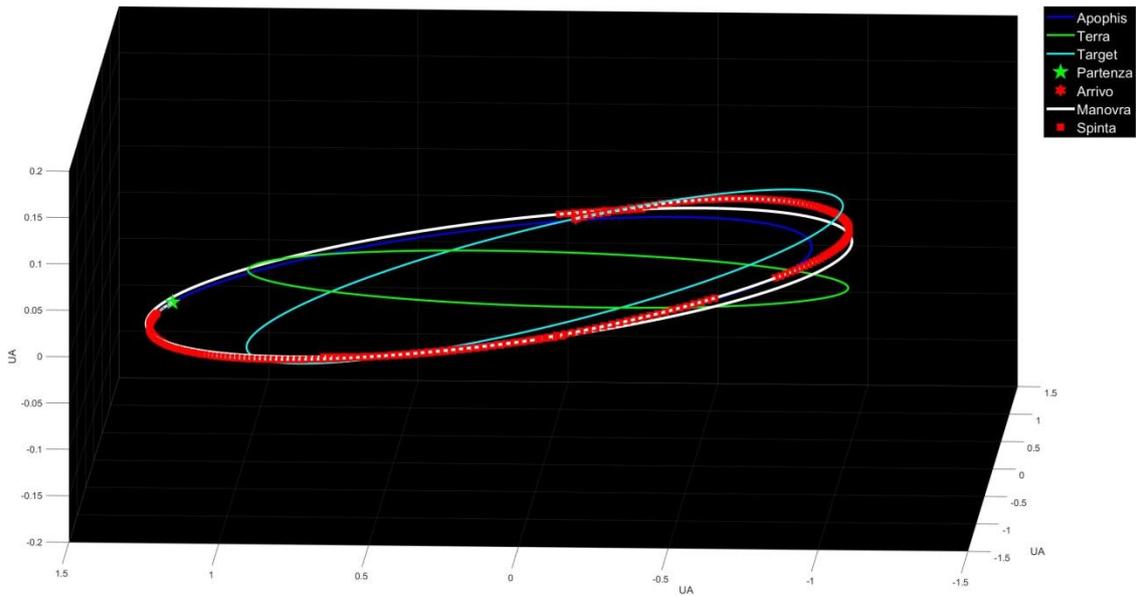


Figura 18: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 03/06/2033 durata 810 giorni).

Viene presa in analisi la traiettoria con partenza il 3 Giugno 2033 con durata superiore agli 800 giorni. Si hanno quattro archi di spinta, il primo molto lungo (superiore ai 150 giorni) fornisce il perielio necessario per recuperare la sfasatura tra i due pianeti e riduce in parte l'eccentricità.

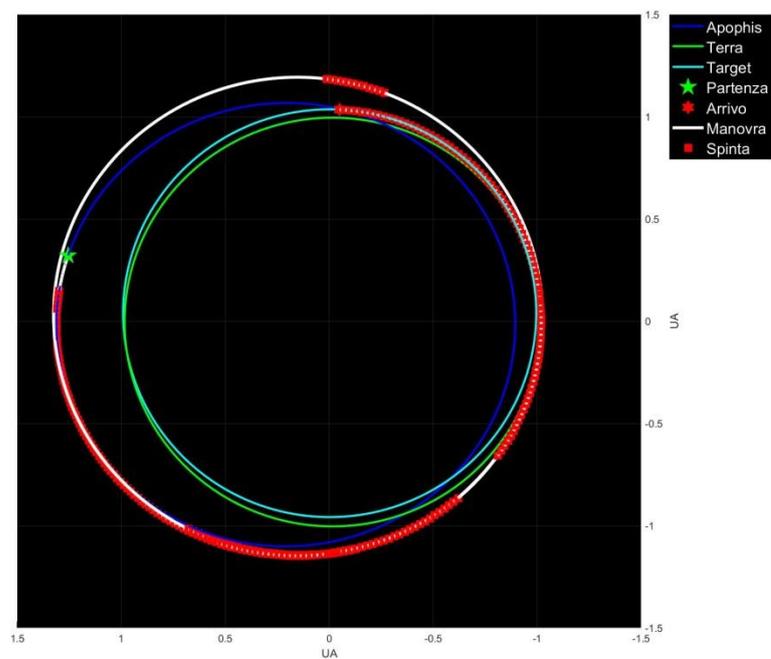


Figura 19: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 03/06/2033 durata 810 giorni).

Il secondo è molto breve e effettua soltanto delle piccole correzioni. Il terzo e il quarto sono quasi collegati, nonostante quest'ultimo sia decisamente più consistente. In quest'ultimo arco di spinta vengono ridotti l'afelio e l'eccentricità in favore dell'inclinazione. Per raggiungere la destinazione è necessario un $\Delta V = 2,7052 \text{ km/s}$.

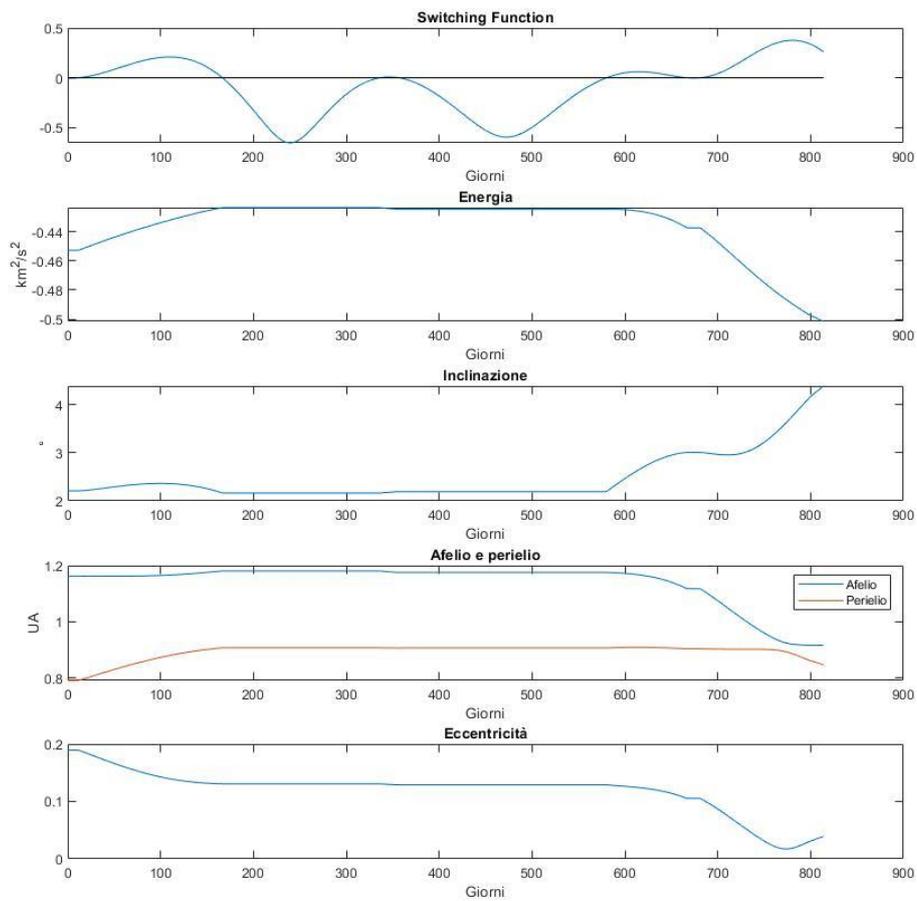


Figura 20: Andamento di Switching Function, Energia, Inclinazione, afelio, perielio ed eccentricità in funzione dei giorni di missione.

3.5. 2013 WA44

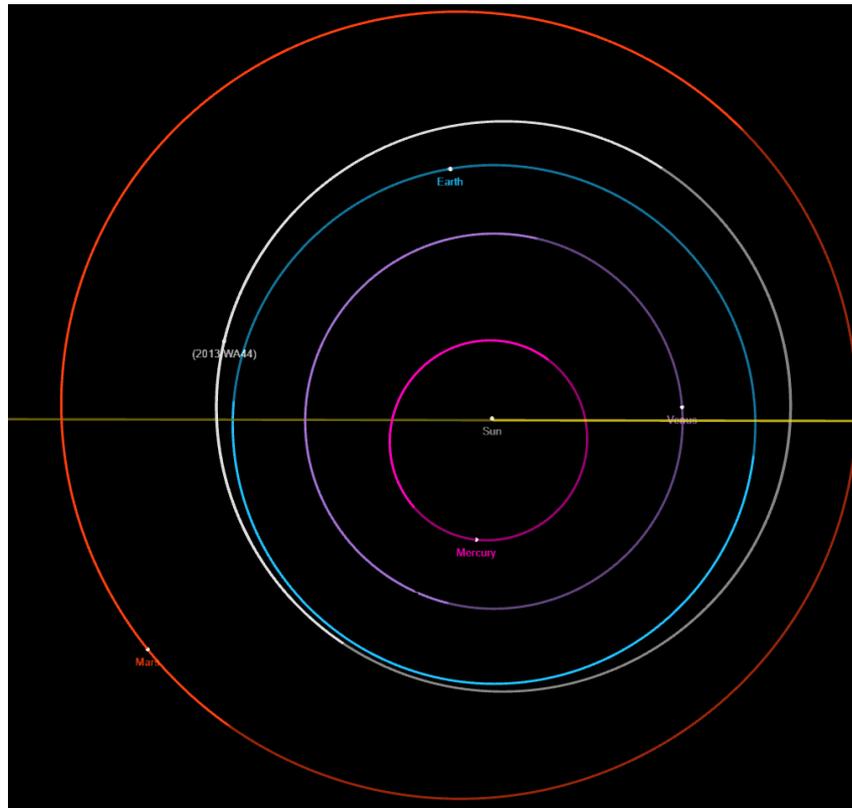


Figura 21: Orbita dell'asteroide 2013 WA44.

Parametri orbitali 2013 WA44

a (AU)	1.1005
e	0.0605
i (AU)	2.3022
w (AU)	176.7311
Ω (AU)	56.5130
M (AU)	84.1320

Tabella 6: Parametri orbitali asteroide 2013 WA44.

In questo caso si vede come per diverse finestre di lancio e durate di missione si può arrivare ad ottenere un consumo minimo di propellente pari a circa il 30% della massa alla partenza; per missioni brevi (tra 460 e 600 giorni) la partenza migliore è preferibile a inizio Febbraio 2032 mentre per quelle più lunghe (tra 600 e 850 giorni circa) si hanno più possibilità (tra fine Giugno e metà Agosto 2032 e tra Febbraio e Giugno 2033).

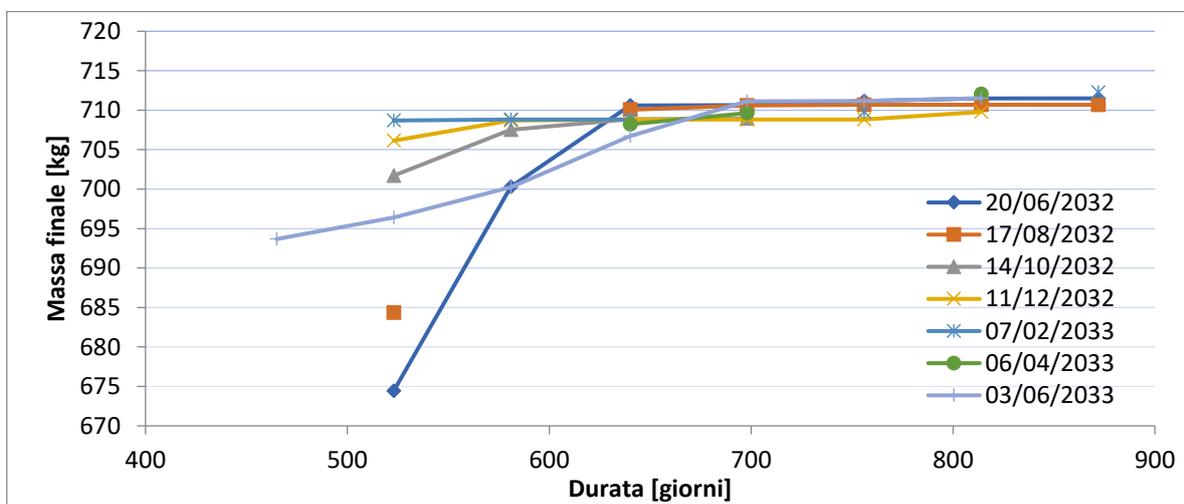


Figura 22: Massa finale al variare della durata per missioni verso 2013 WA44.

Si analizza la traiettoria con partenza il 20 Giugno 2032 e durata 640 giorni. In questo caso gli archi di spinta sono quattro, anche se i primi due hanno soltanto una breve interruzione. I primi due riducono l'inclinazione e l'eccentricità e aumentano l'afelio, per poter ridurre l'anticipo di fase di Apophis; il secondo arco è quello più dominante con durata superiore ai 150 giorni. Durante questa fase viene ridotta l'eccentricità e lievemente l'afelio, mentre il perielio viene portato ad un valore prossimo a quello del target. L'inclinazione subisce un'oscillazione, prima l'orbita

viene raddrizzata poi viene inclinata nuovamente una volta recuperata la differenza di fase con 2013 WA44.

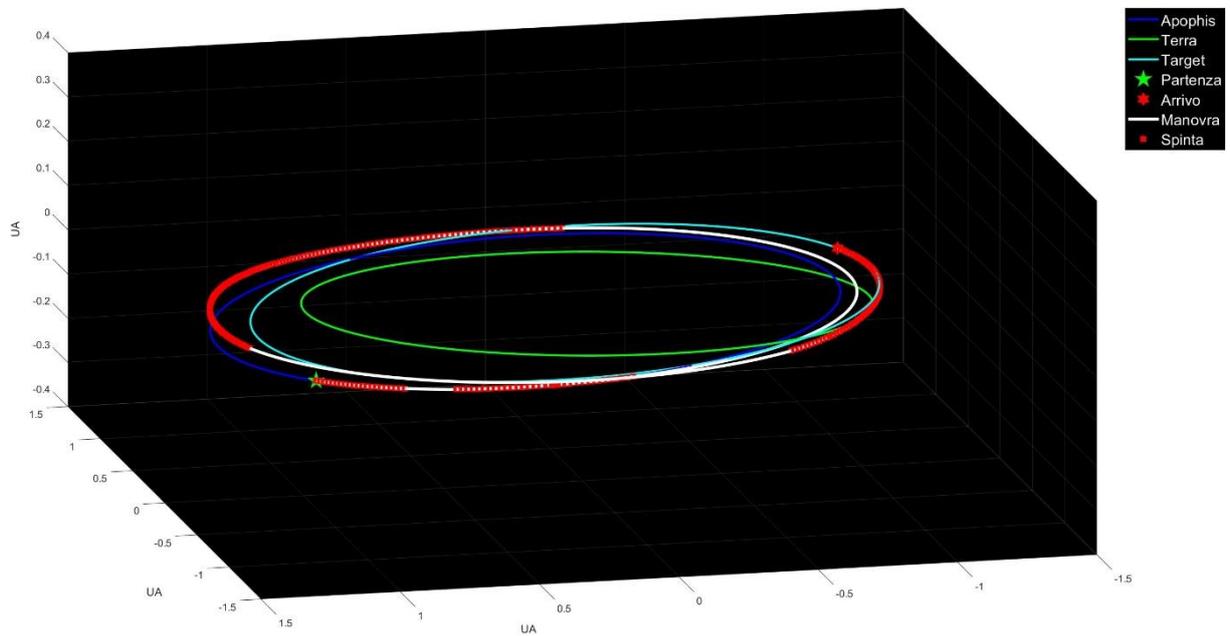


Figura 23: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 20/06/2032 durata 639 giorni).

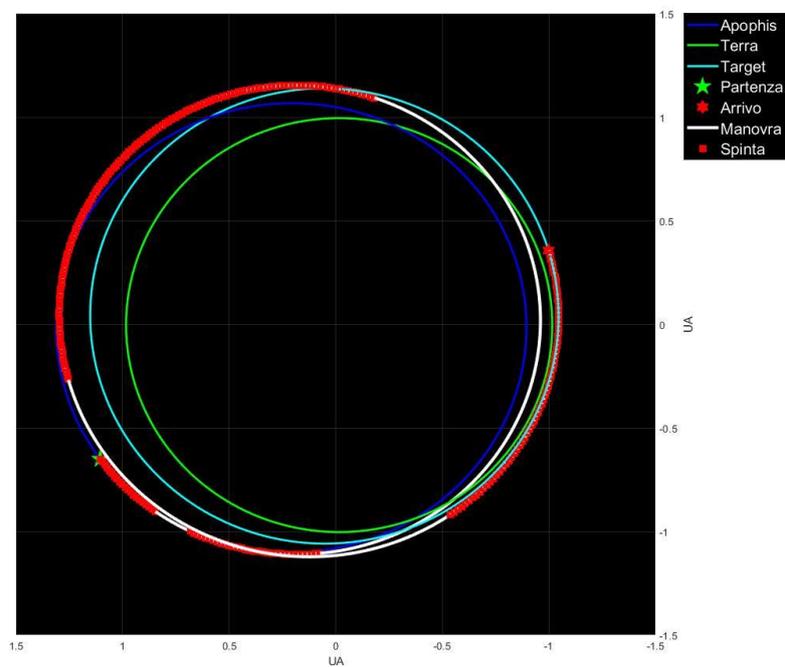


Figura 24: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 20/06/2032 durata 639 giorni).

Nell'ultimo arco di spinta vengono ridotti l'eccentricità e l'afelio portandoli ai valori del target, l'inclinazione invece viene rialzata per raggiungere l'obiettivo.

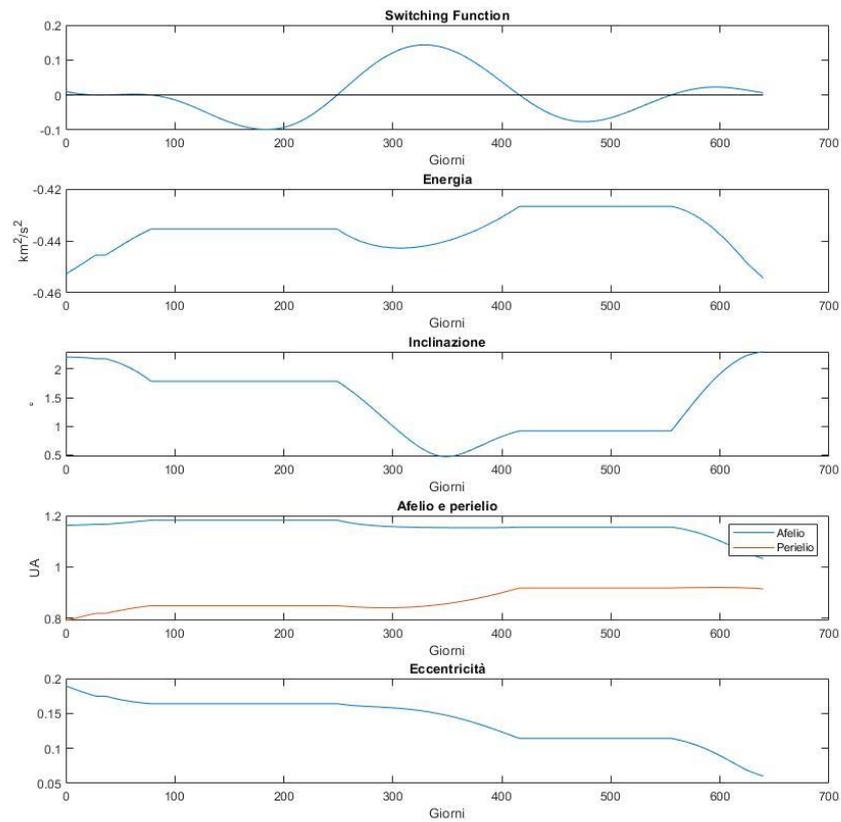


Figura 25: Andamento di Switching Function, Energia, Inclinazione, afelio, perielio ed eccentricità in funzione dei giorni di missione.

3.6. 2009 BD

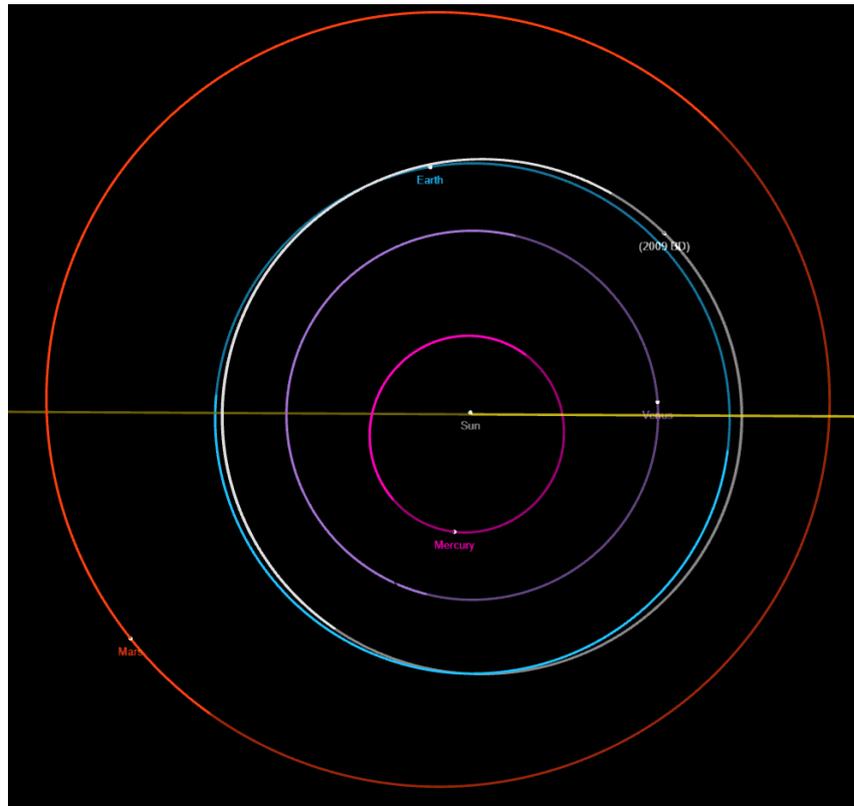


Figura 26: Orbita dell'asteroide 2009 BD.

Parametri orbitali 2009 BD	
a (AU)	1.0098
e	0.0416
i (AU)	0.3849
w (AU)	109.8710
Ω (AU)	58.1276
M (AU)	349.7265

Tabella 7: Parametri orbitali 2009 BD.

Nell'ultimo caso in esame si vede che il minimo consumo si ferma poco sopra al 30% della massa totale. In particolare, per durate intorno ai 500 giorni la finestra di lancio si ha tra fine Giugno e metà Dicembre 2032. Aumentando la durata della missione a 640 giorni si diminuisce il consumo a poco meno del 30% ma le finestre di lancio si concentrano tra metà Agosto e metà Ottobre 2032. Oltre i 750 giorni non si trovano più soluzioni per le finestre di lancio sopra elencate; per missione di durate superiori non si vede la convenienza in quanto aumenta il consumo e bisogna posticipare la data di partenza da dopo Dicembre 2032.

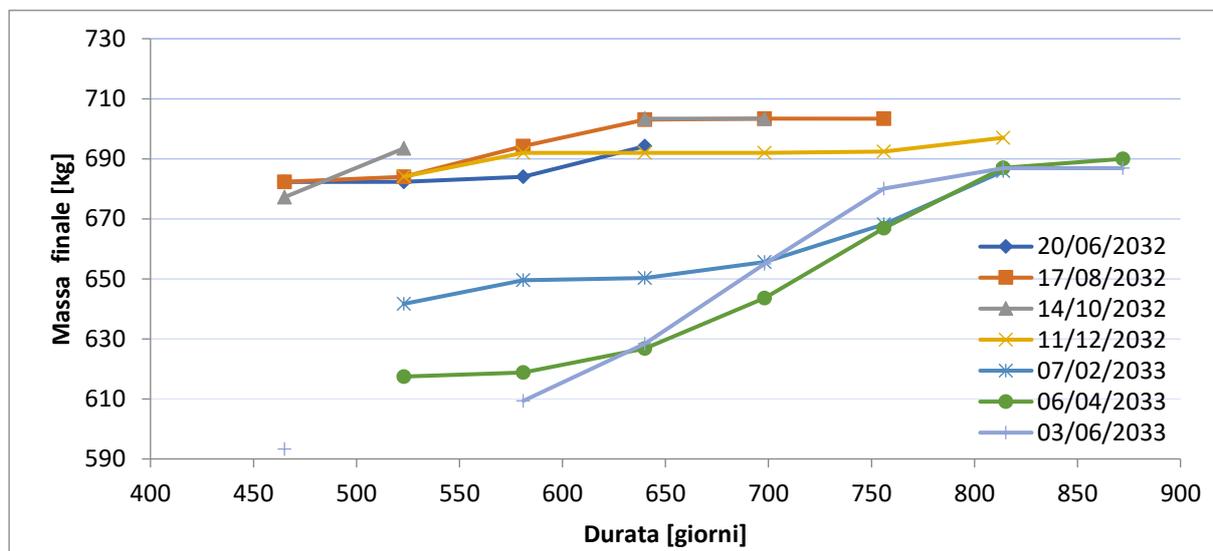


Figura 27: Massa finale al variare della durata per missioni verso 2009 BD.

Il caso preso in esame ha una traiettoria con partenza il 14/10/2032 con durata 520 giorni. Gli archi di spinta sono tre, e dalla figura 30 si può notare come l'arco predominante sia il primo (durata di poco inferiore ai 150 giorni), dove vengono ridotte drasticamente inclinazione ed eccentricità. Anche l'afelio viene ridotto per poi essere riportato al valore del target nel secondo arco.

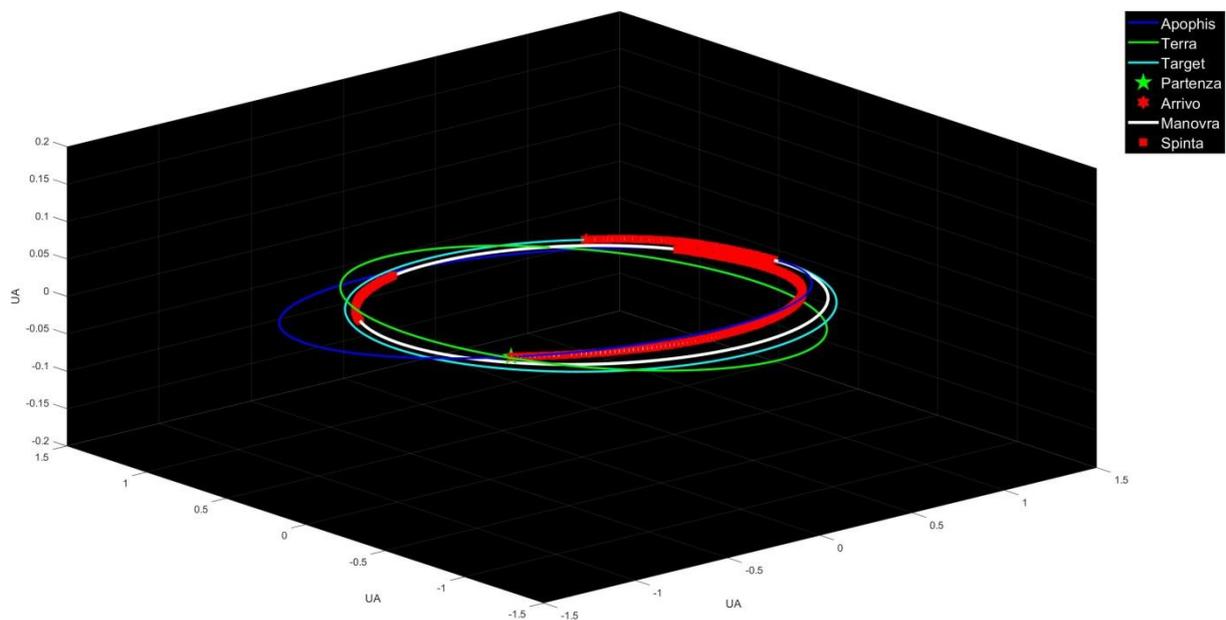


Figura 28: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 14/10/2032 durata 523 giorni).

Nell'ultimo tratto propulso viene corretta al valore finale l'inclinazione e l'eccentricità, e viene fornito il perielio per raggiungere 2009BD.

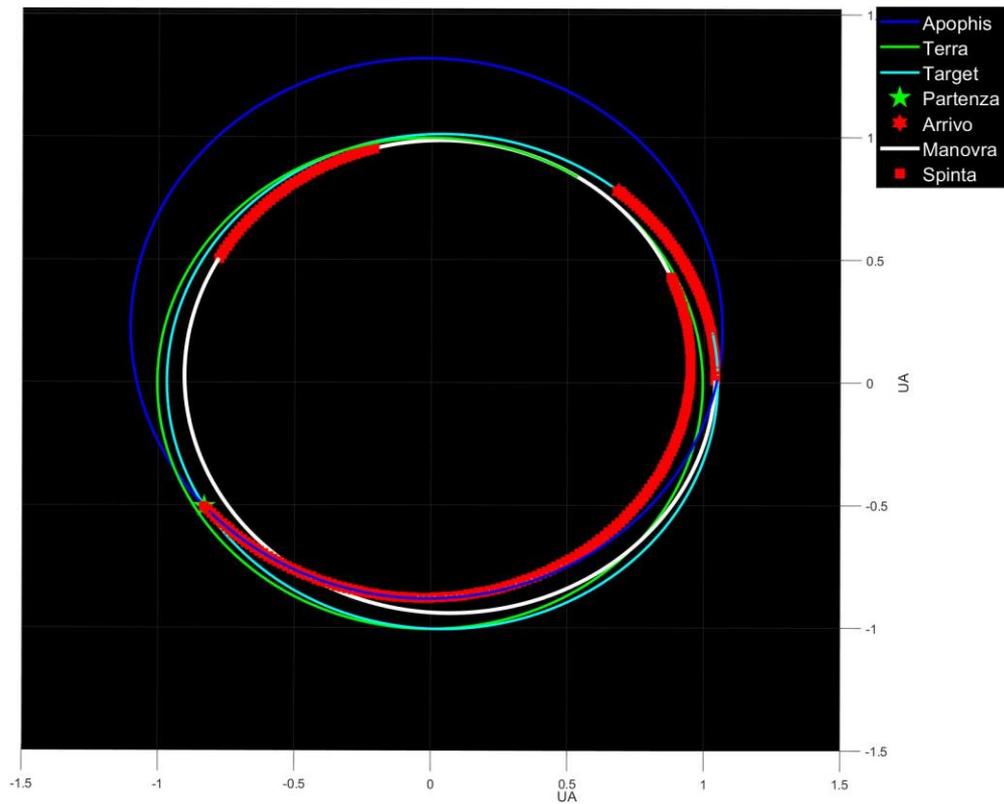


Figura 29: Traiettoria percorsa dal satellite (partenza 20/06/2032 durata 639 giorni).

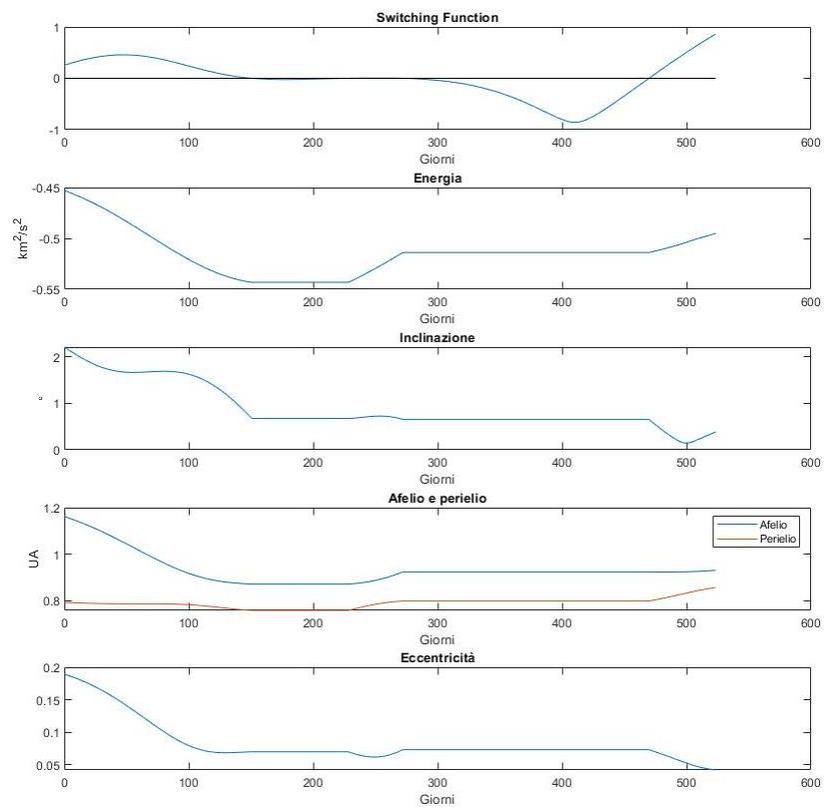


Figura 30: Andamento di Switching Function, Energia, Inclinazione, afelio, perielio ed eccentricità in funzione dei giorni di missione.

Da questi grafici è possibile notare come la massa cresca al crescere della durata della missione, ovviamente più tempo è disponibile per espletare la missione più propellente si riesce a risparmiare: è possibile fare delle manovre che richiedono un ΔV minore perché è possibile utilizzare il propulsore solo nelle zone più favorevoli, e si ha più tempo per ottenere una corretta fasatura con l'obiettivo.

Un'altra particolarità che si può evidenziare è come anche la data di partenza influisca sul consumo di carburante, una partenza posticipata può ridurre notevolmente il ΔV necessario per portare a termine la missione.

Si può altresì notare come per qualche sezione la massa finale sia costante; una motivazione per poter spiegare questo fenomeno risiede nel fatto che la missione finisca con un arco non propulso che si aggiunge alla durata richiesta, quando la missione potrebbe terminare prima. In queste sezioni la durata è ottimale perché si può programmare la traiettoria con tempi diversi ma con lo stesso consumo di carburante.

3.7. Confronto

È da tenere in considerazione una possibile missione dopo il raggiungimento dell'asteroide, quindi può essere preferibile risparmiare carburante allungando il tempo di missione, o altresì raggiungere prima l'asteroide per avere una finestra di lancio ottimale per il successivo.

Se invece si fissa la data di partenza e si mettono a confronto le varie missioni si può vedere chiaramente che in tutti i casi la destinazione che risulta meno dispendiosa è quella verso 2014 QN266. Un altro fenomeno che balza subito all'occhio è come per la maggior parte delle finestre di lancio, il consumo di

propellente rimane costante al variare della durata della missione; partendo nel 2033 convergono missioni lunghe, in ogni caso la massa che si ha in partenza da Apophis viene ridotta di circa il 25%, 30 nei casi peggiori. Lanciando dopo Aprile 2033 per determinate durate di missione risulta parimente conveniente lanciare in direzione di 2013 WA44.

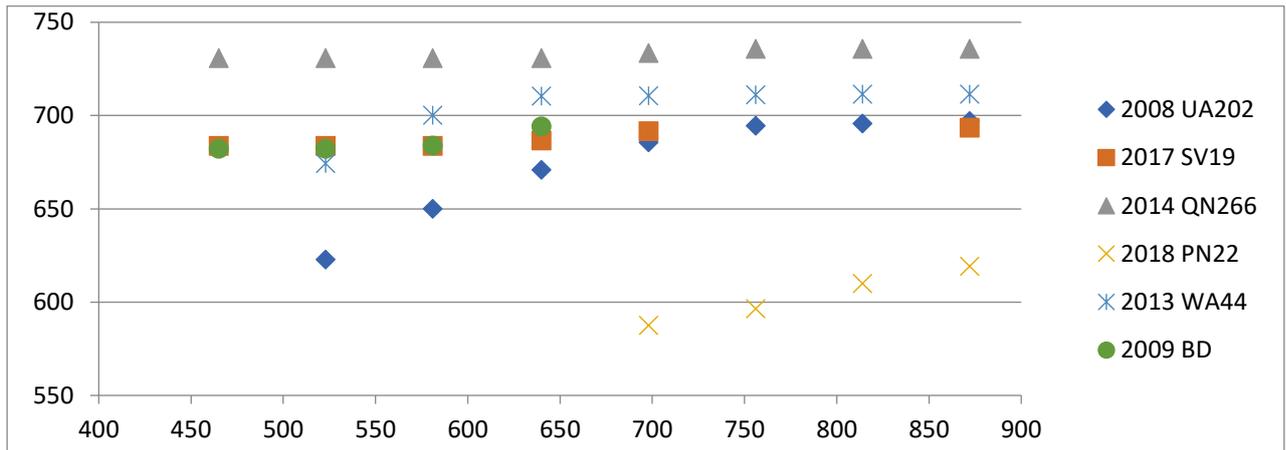


Figura 31: Massa finale al variare della durata partendo il 20/06/2032.

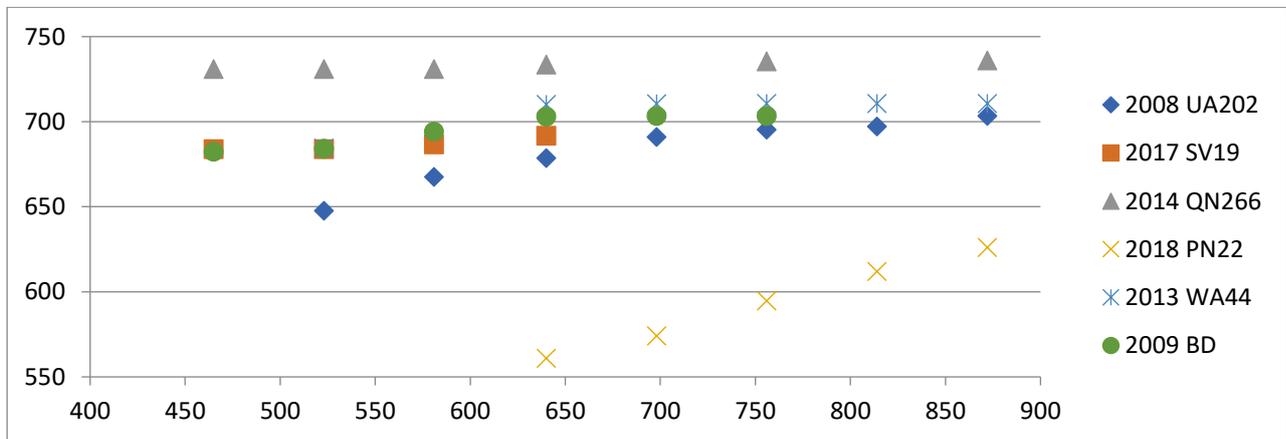


Figura 32: Massa finale al variare della durata partendo il 17/08/2032.

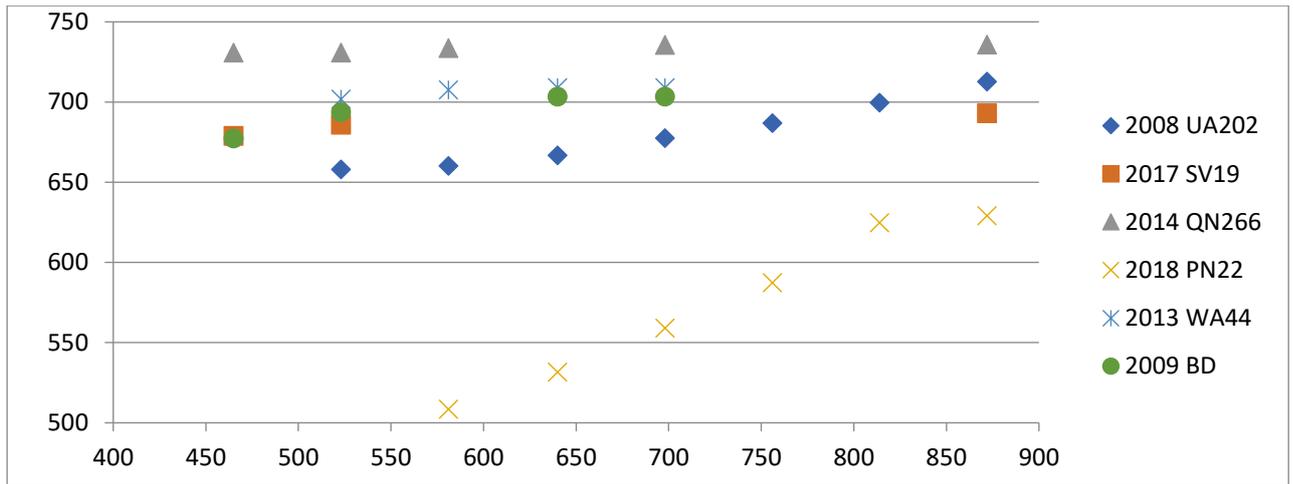


Figura 33: Massa finale al variare della durata partendo il 14/10/2032.

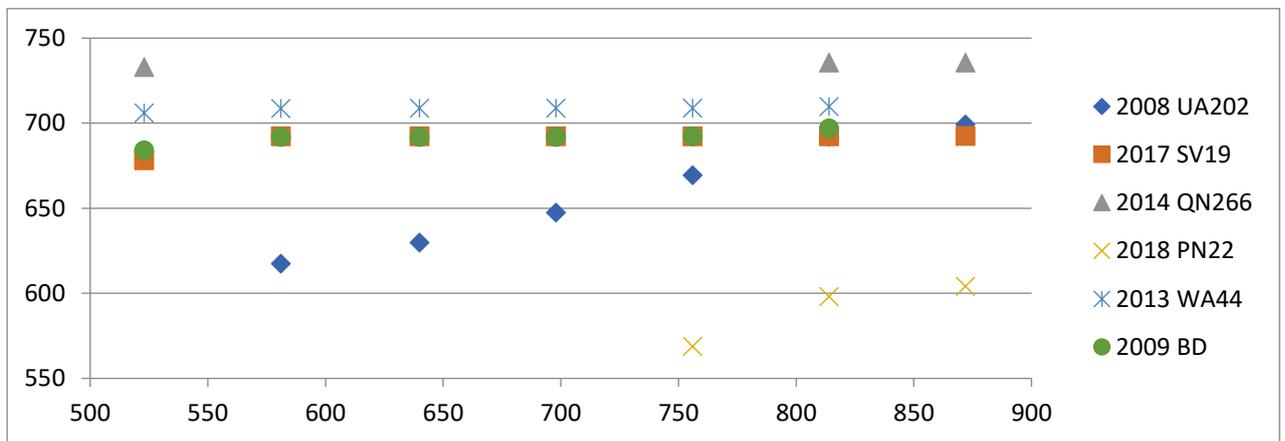


Figura 34: Massa finale al variare della durata partendo il 11/12/2032.

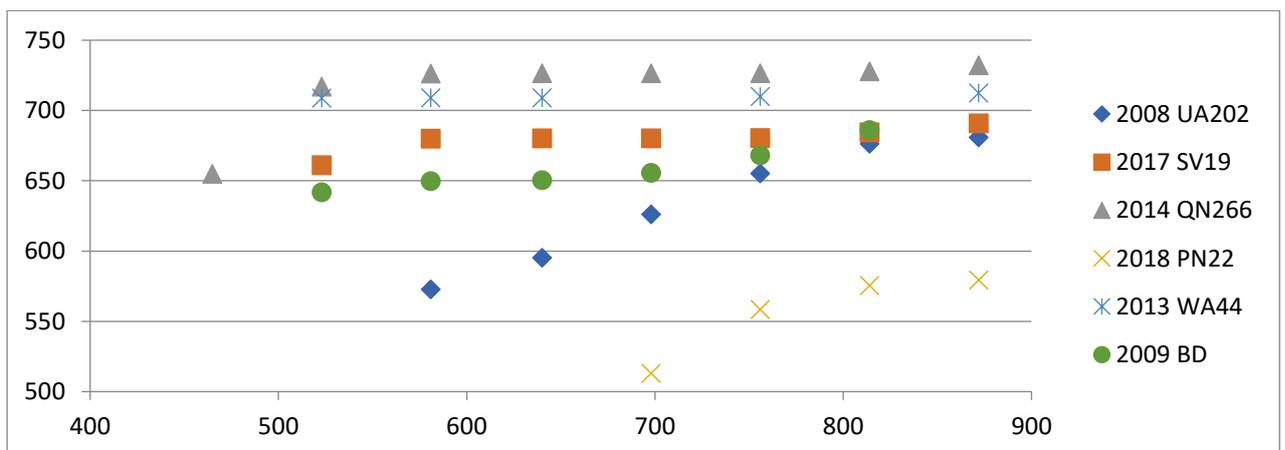


Figura 35: Massa finale al variare della durata partendo il 07/02/2033.

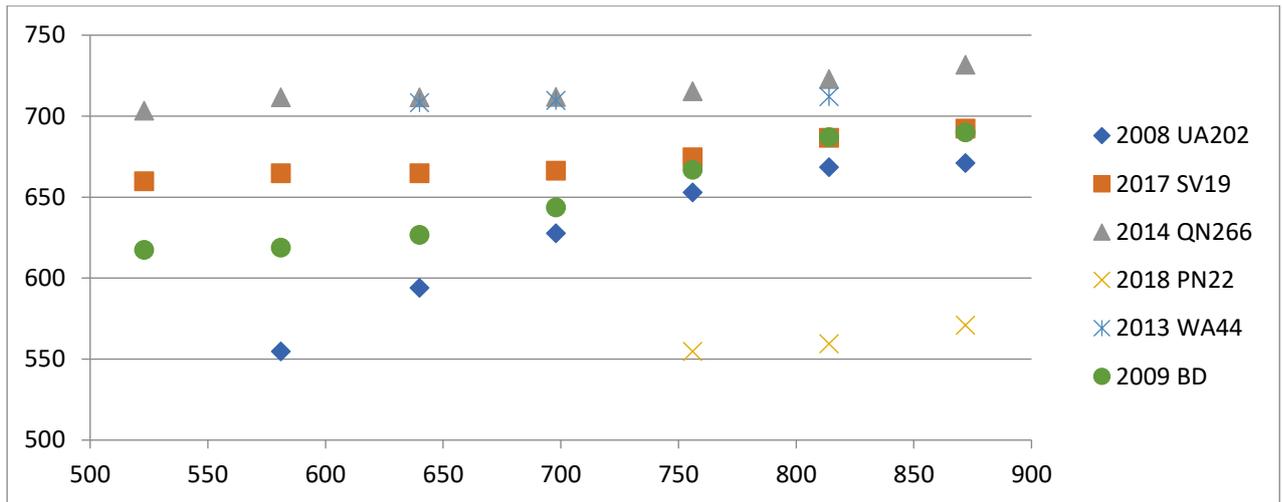


Figura 36: Massa finale al variare della durata partendo il 06/04/2033.

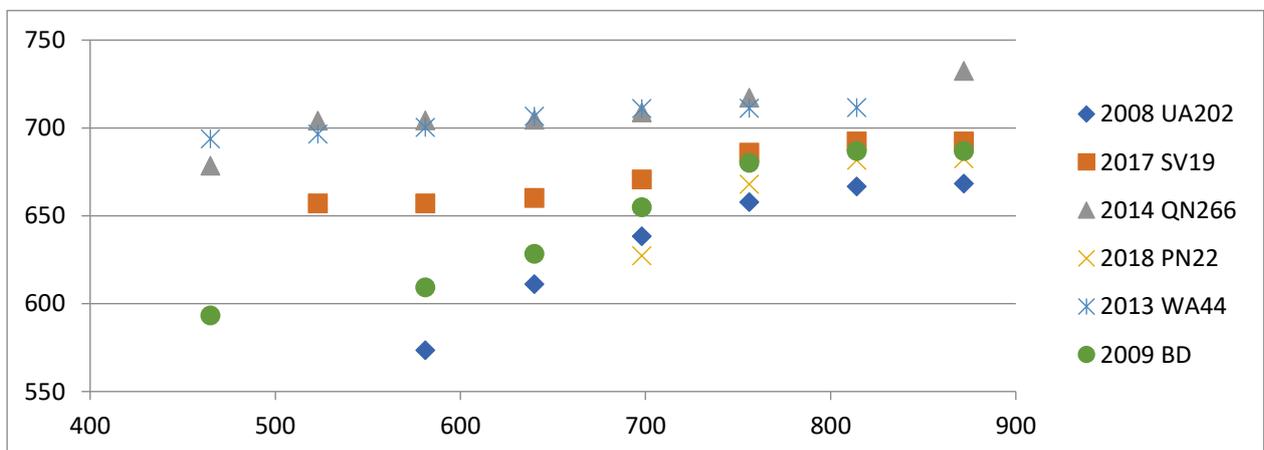


Figura 37: Massa finale al variare della durata partendo il 03/06/2033.

Si può notare come nei grafici ci siano delle interruzioni dovute alla non convergenza del programma. Questa mancanza è principalmente dovuta a difficoltà numeriche del programma di calcolo, il quale riesce a trovare un arco di spinta piccolo, ma non abbastanza da garantire la convergenza del calcolo. Un'altra spiegazione potrebbe risiedere nell'esistenza di una soluzione che consente di avvicinarsi molto all'asteroide ma non abbastanza da permettere il rendez-vous. Bisogna sottolineare che questo accade quando la massa è praticamente costante,

quindi per risolvere il problema basta solamente variare di poco il tempo di partenza e/o la durata così da trovare una soluzione molto prossima al caso considerato.

Diverso è il caso dove le interruzioni sono più marcate, la soluzione è proprio assente. Non esistono traiettorie possibili per l'arco temporale di partenze e durata della missione considerata.

4. CONCLUSIONI

E' stata analizzata la fattibilità di diverse traiettorie, partendo dall'asteroide Apophis con destinazioni, considerando differenti traiettorie variando la data di partenza e la durata della missione. Con la finalità di svolgere l'analisi delle traiettorie è stato implementato un codice FORTRAN, sviluppato per risolvere il problema di ottimo usando un processo iterativo.

Dai grafici è possibile notare come la massa cresca al crescere della durata della missione, ovviamente più tempo è disponibile per espletare la missione più propellente si riesce a risparmiare: è possibile fare delle manovre che richiedono un ΔV minore perché è possibile utilizzare il propulsore solo nelle zone più favorevoli, e si ha più tempo per ottenere una corretta fasatura con l'obiettivo.

E', inoltre, evidente come tutti i casi in cui la destinazione è meno dispendiosa è quella verso 2014 QN266.

Infine, si può notare come nei grafici ci siano delle interruzioni dovute alla non convergenza del programma. Questa mancanza è principalmente dovuta a difficoltà numeriche del programma di calcolo, il quale riesce a trovare un arco di spinta piccolo, ma non abbastanza da garantire la convergenza del calcolo. Un'altra spiegazione potrebbe risiedere nell'esistenza di una soluzione che consente di avvicinarsi molto all'asteroide ma non abbastanza da permettere il rendez-vous.

Nel caso in cui le interruzioni siano più marcate, sfortunatamente la soluzione è del tutto assente.

Bibliografia

- [1] Nasa, jet propulsion laboratory, asteroids
- [2] Roger R. Bate, Donald D. Mueller, Jerry E. White, "Fundamentals of Astrodynamics", Dover Publications, 1971.
- [3] Lorenzo Casalino, Matthew A. Vavrina. "Optimal power partitioning for electric thrusters", AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, 2018.
- [5] Lorenzo Casalino, "Ottimizzazione Indiretta di traiettorie spaziali".
- [6] Lorenzo Casalino, "Equazioni in coordinate sferiche".
- [7] <https://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi#top>
- [8] <https://www.newscientist.com/article/2206906-osiris-rex-spacecraft-captures-closest-ever-image-of-asteroid-bennu/>
- [9] <http://www.space.com/22993-nasa-slam-captured-asteroid-moon.html>
- [10] <https://www.nasa.gov/press-release/goddard/2019/sugars-in-meteorites>
- [11] <https://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi#top>
- [12] An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory Version 0.2 By Lawrence C. Evans, Department of Mathematics University of California, Berkeley
- [13] [The Yarkovsky effect for \(99942\) Apophis and observational predictions for the upcoming 2020-2021 close approach to Earth - NASA/ADS \(harvard.edu\)](#)