POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

# Analisi aeroelastica e controllo di strutture portanti mediante modelli FEM e a parametri discreti

POLITECNICO DI TORINO


**Relatori**

Erasmo Carrera

**Correlatori**

Marco Petrolo

Alfonso Pagani

Rodolfo Azzara

**Candidato**

Luca Viscardi


2020-2021

# Ringraziamenti

Questa tesi rappresenta per me la conclusione di un percorso, lungo e tortuoso, nel quale non sono mancate le difficoltà come le soddisfazioni. Nonostante i molti sacrifici, questi anni mi hanno restituito tanto, non solo in termini di conoscenze, che non sono e non saranno mai abbastanza, ma soprattutto in quelle esperienze che mi hanno permesso di crescere a livello umano. Queste ultime, in particolare, sono strettamente legate a tutte le persone che hanno avuto un ruolo determinante nel permettermi di raggiungere questo obiettivo e alle quali voglio ora esprimere la mia gratitudine.

Ringrazio dunque il Professor Carrera che, durante il corso di Aeroelasticità, ha saputo trasmettermi la passione per questo campo di studi, fornendomi gli strumenti necessari per poter affrontare questo lavoro di tesi. Ringrazio il Professor Petrolo e il Professor Pagani, che hanno messo a mia completa disposizione la loro conoscenza e le loro competenze per la stesura di questo elaborato, incoraggiandomi e supportandomi di volta in volta e permettendomi di fare fronte alle difficoltà incontrate. Un grandissimo e sentitissimo grazie va senza alcun dubbio a Rodolfo, che non mi ha mai fatto mancare la sua disponibilità e che ha rappresentato un supporto continuo nel corso di questi mesi. Il mio più grande rammarico è senza alcun dubbio quello di non aver potuto lavorare a stretto contatto con ognuno di loro per via delle limitazioni imposte da questo triste periodo. Nonostante ciò, anche a distanza il supporto fornitomi non è mai mancato ed è stato per me indispensabile.

E dal più profondo del mio cuore che desidero ringraziare la mia famiglia: mio padre, mia madre, mia sorella, Alessandro e mio nipote Enea, i primi e più importanti fautori di questo piccolo ma importante traguardo.

La mia più sincera e profonda gratitudine va ad Erin, la mia ragazza, che incessantemente ha saputo sostenermi con amore e pazienza, confrontandosi con i lati peggiori del mio carattere, senza mai cedere di un solo passo, in virtù della sua straordinaria forza d'animo.

Sarò per sempre grato a Gianluca, il fratello che la vita mi ha concesso, senza la cui guida e supporto nulla di tutto questo sarebbe stato possibile.

Un gigantesco GRAZIE va a Matteo, Gianluca, Mirko e Andrea, i miei amici più cari. Il legame di amicizia che ci lega ancora oggi, a distanza di molti anni, rappresenta una delle mie più grandi fortune.

A Riccardo va tutta la mia riconoscenza per essere stato il mio sostegno più importante nei mesi più difficili e complessi di questo percorso.

A tutti i parenti che mi hanno incessantemente sostenuto. A tutti gli amici che mi sono sempre stati accanto come Simone, Alessio, Alessandro e Noemi, Luca, Riccardo e Davide. A coloro che hanno reso meravigliosi questi anni universitari, come Luca, Luigi, Karl, Mattia, Gianmarco, Gianluca, Federico, Marco e Claudio. É dal più profondo del mio cuore che desidero ringraziare ognuno di loro per avermi accompagnato e supportato ogni giorno lungo questo cammino.

# Sommario

Un aspetto cruciale nell'ambito del progetto aeronautico è rappresentato dallo studio dei fenomeni aeroelastici, di natura statica o dinamica, i quali derivano dall'interazione combinata di forze aerodinamiche e effetti inerziali ed elastici. Di pari importanza è inoltre la corretta analisi dei carichi agenti sulla struttura, siano essi di manovra o raffica. Poiché la loro corretta determinazione prescinde da analoghe considerazioni in merito all'aerodinamica e ad effetti elastici, risulta evidente come l'aeroelasticità e i carichi agenti risultino fortemente legati fra loro.

Tra i fenomeni aeroelastici di natura dinamica, il flutter rappresenta la condizione critica la cui corretta previsione è un punto chiave per la buona riuscita del progetto stesso. Infatti, tale fenomeno è caratterizzato da vibrazioni autosostenute dal continuo estrarre energia da parte della struttura dal flusso d'aria in cui è immersa, le quali possono potenzialmente comprometterne l'integrità. Tra le varie tipologie di carichi invece, la raffica rappresenta sicuramente un input caratteristico mediante il quale poter valutare la risposta dinamica della struttura.

Definite fenomenologia e tipologia di carico di interesse, lo scopo del presente lavoro di tesi è quello di implementare all'interno del sistema aeroelastico un controllo in retroazione che consenta, per il sistema ad anello chiuso derivante, di ritardare l'insorgere della condizione di flutter e alleviare l'effetto della raffica sulla struttura. L'interazione tra il sistema di controllo e quello aeroelastico prende il nome di aeroservoelasticità.

Come punto di partenza per la definizione del modello aeroservoelastico è stato utilizzato un sistema semplificato a parametri concentrati. I carichi aerodinamici agenti sono stati ottenuti dal modello aerodinamico quasi stazionario di Theodorsen. L'azione del controllo viene espletata per mezzo di una superficie mobile, la cui deflessione viene regolata da una semplice controllore proporzionale-integrativo (PI), sulla base delle misurazioni in corrispondenza dei punti caratteristici del sistema. In questo modo, le forze aerodinamiche complessivamente agenti vengono modificate, consentendo di ottenere gli effetti desiderati.

Il passo successivo consiste nel passaggio al modello aeroservoelastico tridimensionale. In virtù del gran numero di variabili coinvolte, la struttura portante è stata modellata mediante elementi beam 1D di ordine elevato, ottenuti ricorrendo alla Carrera Unified Formulation (CUF), il cui vantaggio risiede in una formulazione

formalmente indipendente dall'ordine scelto per il modello cinematico da considerare, il quale diventa quindi un input dell'analisi. Mediante la CUF, inoltre, è stato possibile ottenere una formulazione compatta sia per le matrici aerodinamiche che per quelle di controllo.

Nel corso della tesi, l'efficacia di tale formulazione viene dimostrata conducendo differenti tipologie di analisi strutturali, statiche, di vibrazioni libere e dinamiche, su strutture solide, in parete sottile, in composito e multicomponenti tipiche dell'industria aerospaziale, come ad esempio longheroni e cassoni alari. Infine, estendo la CUF all'analisi del sistema aeroservoelastico è stato possibile mettere in luce come essa possa prestarsi all'implementazione del sistema di controllo all'interno della formulazione aeroelastica, riuscendo ad ottenere un'analisi accurata e computazionalmente non dispendiosa.

# Indice

# Elenco delle tabelle

# Elenco delle figure

# Capitolo 1

# Introduzione

L'instabilità di flutter così come l'azione di carichi da raffica rappresentano particolari condizioni dinamiche e di carico che influiscono fortemente sul progetto della configurazione strutturale considerata. All'interno di un modello aeroelastico, nel quale si manifesta l'azione combinata di forze elastiche, inerziali e aerodinamiche, l'opportuna introduzione di un sistema di controllo può dunque rappresentare uno strumento efficace da sfruttare per arginare l'effetto di tali fenomeni. Scopo di questa tesi è dunque la definizione di un opportuno modello aeroservoelastico con il quale mostrare come l'azione di un controllo in retroazione consenta, nel primo caso, di ritardare l'insorgere della condizione di flutter e, nel secondo, di attenuare l'azione della raffica.

## 1.1 Definizioni

Come precedentemente anticipato, l'aeroelasticità è un campo di studi interdisciplinare che, in particolare, studia l'interazione tra la deformazione di una struttura elastica all'interno di una corrente e le risultanti forze aerodinamiche agenti sulla struttura stessa e come tale interazione influenza il progetto strutturale.

Una maggiore comprensione dell'aspetto interdisciplinare dell'aeroelasticità è mostrata nella figura 1.1, dovuta al Professor A.R. Collar [1]. Dalla figura si evince chiaramente come, in generale, i fenomeni aeroelastici siano il frutto dell'interazione tra forze elastiche, inerziali e aerodinamiche.

L'aeroelasticità risulta dunque essere un problema di accoppiamento: i carichi aerodinamici sono infatti dipendenti dalla forma del corpo, la quale risulta però essere a sua volta dipendente dai carichi su essa agenti. Tale accoppiamento è un aspetto centrale da analizzare, in una prima fase per poter avere una migliore comprensione del fenomeno e, successivamente, per poter condurre un'analisi che permetta di tenere in conto delle teorie strutturali come di quelle aerodinamiche. Infatti, condurre un'analisi multidisciplinare di questo tipo risulta essere cruciale all'interno

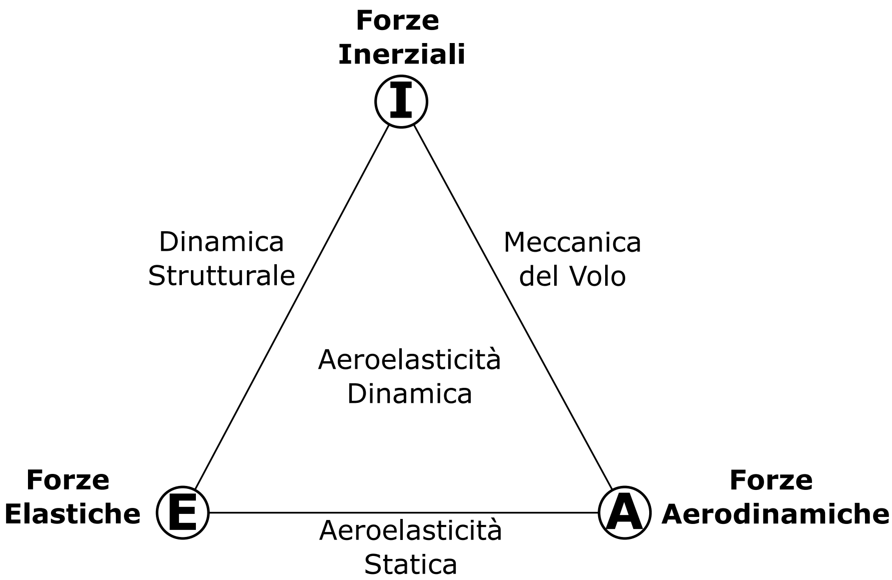



Figura 1.1: Schematizzazione dei campi di studio dell' Aeroelasticità

dello sviluppo del progetto aeronautico, in virtù della necessità di determinare accuratamente la risposta della struttura quando soggetta a carichi aerodinamici. Ecco perché sono molti i contributi presenti in letteratura nei quali diversi autori si sono cimentati nell'indagine di tecniche e metodologie il cui scopo è l'analisi dei fenomeni aeroelastici. A tal proposito vale la pena citare, ad esempio, i testi di Scanlan e Rosenbaum [2], Fung [3], Hancock et alii. [4], Bisplinghoff et alii. [5] e testi più recenti come quelli di Hodges e Pierce [6], Dowell et alii. [7] e Wright e Cooper [8].

## 1.2 Fenomeni Aeroelastici

Nel progetto di un velivolo, i fenomeni aeroelastici possono coinvolgere effetti differenti sulla struttura, la qui gravità e pericolosità può essere minima come estremamente elevata. Se, nella migliore delle ipotesi, il comfort dei passeggeri o dei piloti può venir disturbato dall'insorgere di vibrazioni che producono del rumore, quando tali vibrazioni incominciano a verificarsi su cicli di durata sempre maggiore, la struttura può cominciare a subire del danneggiamento a fatica a livello microscopico. Nella peggiore delle ipotesi, al contrario, l'insorgere di un'instabilità aeroelastica può portare alla distruzione dell'intero velivolo. Risulta quindi necessario studiare appieno questo tipo di fenomeni in modo da poter meglio prevenirne l'insorgere e fare in modo che essi non intacchino le prestazioni del velivolo stesso.

Il primo passo consiste nel definire le due principali categorie all'interno delle quali è possibile collocare tutti i fenomeni di natura aeroelastica. La prima di esse è la cosiddetta Aeroelasticità Statica, i cui problemi tipici sono quelli della divergenza torsionale o dell'inversione dei comandi, accennati in precedenza. Questi problemi sono tutti caratterizzati dall'assenza di qualsiasi effetto legato alle forze di inerzia. Se, al contrario, tali effetti risultano essere importante, si entra nel campo dell'Aeroelasticità Dinamica, nella quale il flutter risulta essere il fenomeno caratteristico.

### 1.2.1 L'Aeroelasticità Statica

Il campo di interesse dell'aeroelasticità statica è lo studio di quei fenomeni che, in fase di volo, sono associati all'interazione tra i carichi aerodinamici indotti da una corrente stazionaria e le risultanti deformazioni elastiche delle superfici portanti. Tali fenomeni, come anticipato in precedenza, sono indipendente dalle forze di inerzia, quindi dalle variazioni nel tempo delle deformazioni strutturali.

All'interno del campo di studio dell'aeroelastica statica, sono essenzialmente due gli aspetti che influiscono, in maniera diversa, sul progetto del velivolo. Il primo è l'effetto delle deformazioni elastiche sulla distribuzione dei carichi aerodinamici o, allo stesso modo, come la distribuzione dei carichi aerodinamici influenzi le deformazioni della struttura, durante quelle che sono le normali condizioni operative del velivolo. Tali effetti ne influenzano profondamente le prestazioni, la manovrabilità, la stabilità, la distribuzione dei carichi strutturali e il controllo.

La seconda classe di problemi, da tenere in conto in fase di progettazione, è invece legata a veri e propri fenomeni di instabilità statica delle superfici portanti, i quali possono avere conseguenze catastrofiche. In particolare, l'instabilità statica a cui si sta facendo riferimento, prende il nome di divergenza ed essa risulta tanto pericolosa da imporre serie limitazioni sull'inviluppo di volo. Questo tipo di instabilità si verifica quando la deformazione delle superfici portanti, sotto l'azione dei carichi aerodinamici, risulta essere tale da comportare un aumento del carico applicato e, tale aumento, può deformare ulteriormente la struttura, portandola infine a rottura. Un aspetto molto importante da sottolineare è che la failure che si verifica non è semplicemente il risultato dell'applicazione di un carico superiore a quello massimo sopportabile dalla struttura. In realtà, ciò che si verifica è una diminuzione della rigidezza effettiva della struttura, proprio a seguito dell'interazione che essa ha con le forze aerodinamiche.

### 1.2.2 L'Aeroelasticità Dinamica

Si ha un fenomeno aeroelastico di natura dinamica quando, all'interno di un sistema meccanico dinamico, nel quale cioè interagiscono le forze di inerzia e quelle elastiche, si includono i carichi aerodinamici. Diversi possono essere i fenomeni aeroelastici di natura dinamica. Ad esempio il *vortex shedding*, cioè il distacco periodico di vortici che si osserva nella scia di strutture generalmente tozze, oppure le oscillazioni di *galloping* che si possono verificare in strutture molto allungate tipiche dell'ingegneria civile, come torri o ponti. Come già preannunciato, in ambito aeronautico il fenomeno aeroelastico di natura dinamica sul quale si vuole porre maggiormente l'attenzione è l'instabilità di flutter, i cui effetti sul velivolo possono essere estremamente pericolosi. Infatti, in presenza di questo tipo di instabilità, può verificarsi la failure dell'intera struttura del velivolo.

Come detto, il flutter è un'instabilità di tipo dinamico, dove quindi interagiscono contemporaneamente forze elastiche, dinamiche e aerodinamiche. Entrando maggiormente nel dettaglio, il flutter può essere considerato come un' oscillazione instabile e autosostenuta, che si manifesta su una struttura flessibile quando si verifica un accoppiamento tra le forze aerodinamiche, agenti sulla struttura, e i suoi modi propri di vibrare. Il risultato di questo mutua interazione, nella quale i carichi aerodinamici acquisiscono maggior energia dal moto vibrazionale potendo così intensificare maggiormente le oscillazioni della struttura, è quindi l'insorgere di un moto oscillatorio fortemente amplificato. Nel momento in cui l'ampiezza delle oscillazioni diventa eccessivamente elevata, si può quindi verificare la failure dell'intera struttura. Appare perciò evidente che, in presenza di strutture sulle quali agiscono forze aerodinamiche, questo tipo di instabilità risulti potenzialmente pericolosa ed è quindi necessario curare attentamente il progetto in modo che essa non si manifesti. Risulta perciò chiaro come, in ambito aeronautico, le superfici portanti siano gli elementi strutturali che più di ogni altro possano andare incontro ad instabilità di flutter. Opportune test e analisi preliminari saranno dunque necessarie per garantire che, all'interno dell'intero inviluppo di volo del velivolo, non si giunga mai in prossimità delle condizioni di flutter.

## 1.3 Modelli aerodinamici e metodologie per l'analisi di Flutter

La trattazione generale fatta nella sezioni precedenti ha permesso di mettere in evidenza come, nell'ambito del progetto di un velivolo aeronautico, l'analisi dei fenomeni aeroelastici assuma un ruolo cruciale.

Volendo entrare maggiormente nel merito delle fenomenologie descritte e della loro analisi numerica, questa sezione viene dedicata alla descrizione delle teorie che sono state sviluppate allo scopo di determinare la condizione di flutter, la quale deve essere accuratamente predetta in virtù dei rischi, precedentemente descritti, associati all'insorgere di tale instabilità. In quest'ambito, sono moltissimi i lavori consultabili in letteratura dal momento che la predizione di tale condizione coinvolge lo studio dell'interazione tra le deformazioni elastiche della struttura e il moto fluido in cui essa è immersa. Dal momento che, tuttavia, la conoscenza completa del campo fluidodinamico (effetti viscosi, di compressibilità o l'effetto della turbolenza) necessitano di metodi numerici dedicati e computazionalmente molto esosi, è necessario ricorrere a modelli aerodinamici semplificati e basati su opportune assunzioni.

I primi modelli aerodinamici per la predizione della condizione di flutter si devono a Theodorshen [9], che intorno agli anni 40 definì una completa metodologia mediante la quale calcolare le caratteristiche di flutter per un profilo a due e tre gradi di libertà sfruttando come modello aerodinamico la ben nota *strip theory*. Combinando opportunamente tale modello aerodinamico insieme a modelli strutturali semplificati fu quindi possibile gettare le basi delle prime metodologie necessarie alla predizione della condizione di flutter. Ad esempio, verso la fine degli anni sessanta, E. Carson Yates Jr [10] derivò una metodologia di analisi delle condizioni di flutter basata su una *modified strip-theory* che per ali ad allungamento finito, con e senza angolo di freccia, fornì condizioni di flutter in ottimo accordo con le prove sperimentali e in un molto ampio range di numeri di Mach, dal basso subsonico all'ipersonico.

Negli anni settanta lo sviluppo dei metodi a pannelli permise di arricchire ulteriormente il campo delle tecniche numeriche per la determinazione della condizione di flutter. In particolare, il Doublet Lattice Method, o DLM, la cui formulazione fu definita da Albano e Rodden in [11] per poi essere ulteriormente raffinata da Rodden et al. in [12], rappresentò, in prima istanza, un valido strumento per la determinazione dei carichi aerodinamici non stazionari per configurazioni strutturali non planari (come piani di coda a T, ad esempio) [13] e, successivamente, il modello aerodinamico più affidabile per condurre analisi di flutter lineari in campo subsonico, in virtù di questi tre aspetti: l'accuratezza delle analisi di flutter che si ottengono (da intendere in assenza di fenomeni tipici dei regimi transonici o di separazioni della corrente); il non eccessivo costo computazionale, che non risulta essere troppo dissimile da quello di modelli molto più semplici come le teorie di striscia; la possibilità che esso fornisce di analizzare geometrie relativamente complesse [14]. Sempre in [14], così come in [15], vengono descritti modelli aerodinamici alternativi, che costituiscono lo stato dell'arte attuale nell'ambito dell'aeroelastica computazionale. Se in campo subsonico il DLM risulta essere la scelta migliore per la determinazione dei carichi aerodinamici instazionari necessari per una corretta analisi di flutter, in campo supersonico non vi è un metodo che si è affermato di più rispetto ad altri. Sono molte infatti le metodologie disponibili e tra le più conosciute vale la pena citare, tra i metodi lineari, il Mach box method [16]. Infine, un'importante classe di metodi aerodinamici lineari attualmente presenti fanno parte delle metodologie sviluppate per condurre analisi aeroelastiche in presenza di non linearità nel modello strutturale. In [17] questi modelli sono descritti e applicati a varie tipologie di non linearità strutturali: grandi deformazioni, geometrie e configurazioni non convenzionali (come l'ala chiusa ad esempio) o oscillazioni di ciclo limite.

Lo sviluppo delle potenzialità computazionali, ha permesso di integrare all'interno delle analisi aeroelastiche tecniche numeriche di fluidodinamica computazionale, o CFD, mediante le quali è possibile trattare le equazioni di governo della fluidodinamica, come ad esempio equazioni di Navier-Stokes , di Eulero o le RANS. Ecco perché, nel corso degli ultimi decenni, moltissimi sono stati gli sforzi rivolti allo sviluppo di una appropriata metodologia che consentisse di estendere lo studio dell'interazione fluido-struttura (FSI) a qualunque geometria e regime del moto fluido (cioè tenendo in conto di effetti viscosi o legati alla comprimibilità del fluido). Meritevole di citazione è sicuramente il lavoro di Dowell e Hall [18], nel quale viene data una dettagliata descrizione dei modelli di fluidodinamici attualmente presenti, concludendo infine il lavoro con la definizione di un modello *reduced-order* che ha consentito di fornire un approccio pratico per la definizione di un modello aerodinamico instazionario estremamente efficiente una volta implementato all'interno di diverse tipologie di analisi aeroelastiche e con un ottimo risparmio in termini di costo computazionale. Sempre in questo ambito, è possibile citare Guruswamy [19] dove sono state analizzate differenti tipologie di interazione fluido-struttura in ambito aeroelastico, adottando un modello di fluido complesso descritto dalle equazioni di Navier-Stokes/Eulero applicato a differenti modelli strutturali. Tale lavoro ha permesso di mettere in evidenza come l'interazione dipenda principalmente dal tipo di modello strutturale adottato.

In pubblicazioni più recenti [20] e [21] viene messo ulteriormente in evidenza il grande interesse nella ricerca di modelli di accoppiamento aerodinamica e struttura, i quali definiscono quelle che sono le moderne tecniche di aeroelasticità computazionale, la cui complessità si ripercuote necessariamente sulla necessità di disporre di risorse di calcolo sempre più importanti.

## 1.4 Modelli strutturali 1D

Si vuole ora fornire una panoramica generale sulle differenti teorie presenti in letteratura che hanno portato alla definizione del modello strutturale unidimensionale, noto comunemente come modello beam, largamente impiegato per analizzare il comportamento di strutture caratterizzate da una geometria allungata, cioè da una dimensione spaziale preponderante rispetto alle altre due. Ponti e colonne, in ambito civile e edile, oppure ali (e in generale le superfici portanti) e pale di elicottero in ambito aeronautico, sono solo alcuni esempi di strutture ascrivibili a questo modello 1D, il cui vantaggio è principalmente legato alla sua semplicità e al basso costo computazionale rispetto a modelli 2D (come piastre o gusci) o 3D (solidi). Si capisce molto bene come queste peculiarità del modello si predispongano molto bene ad un'analisi complessa come quella aeroelastica.

Inizialmente, i primi modelli 1D con cui vennero condotte le prime analisi strutturali su ali e superfici portanti si basavano sulle ben note teorie classiche di Eulero-Bernoulli [22], EBBT, e Timoshenko [23], TBM. I risultati forniti da queste teorie sono però limitati dalle ipotesi fondamentali su cui esse si basano. Non è quindi possibile mediante questi modelli una descrizione di quegli effetti tipici delle strutture con bassa snellezza o in parete sottile, o quelli legati all'anisotropia del materiale. Deformazioni fuori dal piano della sezione o accoppiamenti flesso-torsionali sono solo alcuni fenomeni che le teorie classiche non sono quindi in grado di cogliere. Per un'analisi aeroelastica accurata è necessario perciò ricorrere a modelli avanzati che consentano di superare queste limitazioni. Il lavoro di Novozhilov [24] fu proprio indirizzato a definire delle metodologie che consentissero di estendere l'applicazione di modelli strutturali 1D a qualsiasi geometria o condizione al contorno. Recentemente, modelli beam più avanzati sono stati ottenuti attraverso differenti approcci, di cui un recente resoconto dettagliato è consultabile in [25].

Una prima classe di modelli venne ricavata mediante l'introduzione di opportuni fattori di correzione a taglio, come mostrato da Sokolnikoff in [26] e peraltro dagli stessi Timoshenko e Goodier già in [23]. In bibliografia sono molti gli articoli consultabili in merito al calcolo di appropriati fattori di correzione a taglio. In particolare sono meritevoli di citazione i lavori di Gruttman et al. [27] e di Gruttmann e Wagner [28] e [29] dove la valutazione dei coefficienti correttivi a taglio è stata estesa a moltissimi problemi strutturali: tensioni di taglio torsionali e flessionali in travi prismatiche, sezioni trasversali arbitrarie, strutture a parete sottile o spessa, strutture bridge-like.

Un'altra tipologia di approcci prevede invece l'introduzione di una warping function per migliorare il modello di spostamento sulla sezione trasversale della trave. A tal proposito si vedano i lavori di El Fatmi [30] e [31]. Questa tipologia di approccio consentì una migliore descrizione degli stress normali e di taglio, specialmente nel caso di travi tozze e a sezione aperta.

Una metodologia differente per rifinire il modello strutturale è quella basata sulla formulazione di espansioni asintotiche sfruttando un parametro caratteristico della trave (come ad esempio lo spessore della sezione trasversale). Tale approccio venne proposto da Berdichevsky et al. [32] dove venne applicato ad una trave in parete sottile e in materiale anisotropo. Questo lavoro diede origine ad intera corrente di ricerca mirata allo sviluppo delle così dette *variational asymptotic solutions*, VABS, come strumento per la formulazione di teorie strutturali monodimensionali più accurate. Meritevoli di citazione in questo ambito sono il lavoro di Yu e Hodges [33] e di Yu et al. [34].

Shardt [35] formulò una nuova classe di teorie dette *generalized beam theories*, o semplicemente GBT, per travi in parete sottile. Sfruttando una combinazione lineare di opportune funzioni di forma definite su dei tratti con cui è possibile scomporre la sezione trasversale, i metodi GBT hanno permesso di migliorare le teorie classiche.

Molte applicazioni di questi metodi sono state sfruttate per lo studio di diversi problemi strutturali, come in [36] e [37].

Infine, lo sviluppo delle *high-order theories* ha consentito, per mezzo della definizione di modelli di spostamento più raffinati lungo la sezione trasversale della trave, di includere all'interno del modello beam gli effetti non predicibili dalle teorie classiche. Delle prime considerazioni su elementi beam *high order* vennero effettuate da Washizu [38], mentre un modello avanzato fu proposto da Kanok-Nukulchai e Shik-Shin [39] dove venne teorizzato un modello beam con gradi di libertà aggiuntivi che migliorassero la descrizione del comportamento strutturale della trave lungo la sezione trasversale.

### 1.4.1 La Carrera Unified Formulation (CUF)

Quelli citati sono solo alcuni degli innumerevoli lavori presenti in letteratura e focalizzati sulla ricerca di una sempre più raffinata teoria per poter meglio descrivere il comportamento di modelli strutturali monodimesionali. Proprio in virtù di questo grande interesse, Carrera e i suoi collaboratori, nel corso dei primi della prima decade degli anni 2000, hanno sviluppato una teoria 1D caratterizzata da sole variabili generalizzate di spostamento per l'analisi di strutture a sezione compatta e in parete sottile. Modelli *high order* sono quindi ottenuti nell'ambito della *Carrera Unified Formulation*, abbreviata nel seguito con l'acronimo CUF. L'aspetto innovativo della CUF è quello di essere una formulazione gerarchica, nella quale l'ordine della teoria strutturale costituisce un parametro libero, un input, dell'analisi. Questo significa che è possibile ottenere qualsiasi modello raffinato senza alcun bisogno di dover formalmente cambiare le equazioni che in essa compaiono. Questo aspetto rende la CUF applicabile a geometrie e condizioni al contorno del tutto arbitrarie, così come a qualsiasi caratteristiche del materiale senza dover necessariamente introdurre una formulazione *ad hoc*, ma semplicemente implementandola all'interno di una formulazione agli elementi finiti. La CUF venne inizialmente sviluppata per modelli piastra e guscio, [40] [41] e [42], per poi essere estesa a modelli beam 1D [43]. Analisi statiche effettuate in [44] e [45] hanno messo in evidenza come la CUF consenta di ottenere un accurato campo di spostamenti, deformazioni e sforzi anche in presenza di geometrie non convenzionali della sezione trasversale, di effetti legati al taglio e componenti di spostamento fuori dal piano della sezione. Allo stesso modo, le analisi dinamiche condotte in [46] e [47], hanno dimostrato l'efficacia della CUF nell'ottenere valori accurati per le frequenze naturali, nel valutare effetti 3D sui modi di vibrare e nel predire correttamente modi di vibrare di tipo *shell* tipici delle sezioni in parete sottile in presenza di carichi puntuali considerando geometrie della sezione trasversale non convenzionali, travi tozze e un elevato numero di modi da analizzare.

In ambito FSI, la CUF ha avuto largo impiego per ricavare un modello strutturale 1D *high order* da implementare all'interno della formulazione aeroelastica. A tal proposito, si citano i lavori di Varello et al. [48], [49] e di Carrera et al. [50], dove il modello strutturale raffinato 1D e ricavato dalla CUF viene accoppiato al Vortex Lattice Method, o VLM, metodo a pannelli largamente impiegato per il calcolo di carichi aerodinamici stazionari per valutare la risposta aeroelastica statica di superfici portanti. Sempre in tale ambito, meritevole di citazione è un ulteriore lavoro di Varello [51]. Quest'ultimo risulta di particolare interesse dal momento che è stato possibile ottenere una più realistica distribuzione di pressione lungo la superficie alare, e quindi risultati più accurati rispetto al VLM, mediante l'utilizzo del software XFLR5 nel quale viene implementato un metodo a pannelli 3D nel quale la superficie alare è schematizzata come una distribuzione di doppiette e sorgenti. Anche in questo caso, il modello strutturale 1D implementato discende direttamente dalla formulazione CUF. Nell'ambito della CUF applicata all'analisi di flutter, un ottimo riferimento è rappresentato dalle pubblicazioni di Petrolo [52] e [53], dove l'aerodinamica instazionaria agente sulla superficie portante è modellizzata mediante il DLM. In tutti questi ultimi lavori citati, il trasferimento dei carichi aerodinamici, ottenuti dai due metodi a pannelli, sulla mesh strutturale è stato effettuato basandosi sui lavori di Demasi e Livne, [54] e [17], sfruttando il metodo Infinite Plate Spline, IPS, introdotto da Harder e Desmarais [55] e del quale se ne può trovare un'applicazione in [56]. Per concludere, l' aspetto principale che le pubblicazioni citate in questo ambito mettono in risalto è sicuramente il grande vantaggio che la formulazione CUF 1D offre nell'analizzare problemi aeroelastici relativi all'interazione fluido struttura, sia in termini di accuratezza dei risultati che di costo computazionale dell'analisi.

## 1.5 L'implementazione del controllo nelle analisi aeroelastiche

Dopo aver definito i modelli aerodinamici e le tecniche impiegate nelle analisi di flutter e mostrato la tendenza nel ricercare teorie strutturali che costituiscano il miglior compromesso tra accuratezza e risparmio di risorse di calcolo, e la CUF ne rappresenta un chiaro esempio, si vuole ora entrare nel merito del presente lavoro di tesi, fornendo cioè una panoramica generale che metta in evidenza come l'introduzione del controllo all'interno delle analisi aeroelastiche rappresenti una valida soluzione di molteplici problematiche a cui i moderni velivoli aerospaziali sono soggetti.

Quando nel classico problema aeroelastico che, come già largamente argomentato, discende dall'interazione accoppiata tra forze aerodinamiche e deformazioni strutturali, vengono incluse le forze indotte dall'integrazione di una determinata metodologia di controllo è possibile definire una nuova disciplina nota come aeroservoelasticità (ASE). Una rappresentazione qualitativa del problema viene mostrata dalla piramide aeroservoelastica in figura 1.2, estensione del classico triangolo di Collar [1] di figura 1.1, che consente di mettere in luce l'accoppiamento tra le classiche forze aerodinamiche, elastiche, inerziali con quelle risultati dall'applicazione del controllo.

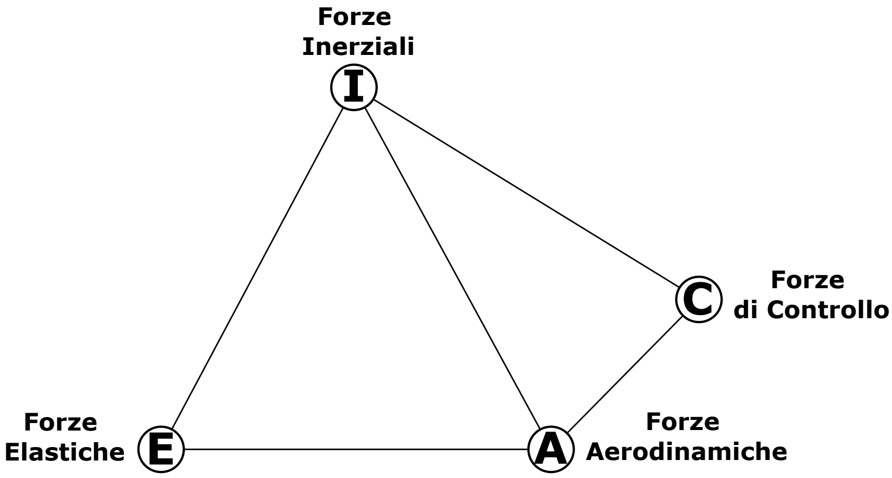



Figura 1.2: Piramide aeroservoelastica

In ambito aeronautico trova largo impiego l'utilizzo di moderni sistemi di controllo di volo, che costituiscono un'architettura estremamente sofisticata e che consentono di fornire notevoli benefici dal punto di vista delle prestazioni [57]. É infatti grazie all'implementazione del controllo nella sistemistica del velivolo che risulta possibile soddisfare i precisi e stringenti requisiti di stabilità, manovrabilità e guida durante tutto l'inviluppo di volo, oltre che consentire di alleviare efficacemente i carichi a cui il velivolo stesso è sottoposto, in modo da estenderne la vita operativa. In virtù di tale aspetto, lo studio di fenomeni aeroservoelastici è molto presente in letteratura, si veda a tal proposito il lavoro di Zimmerman [58] o la più recente pubblicazione di Mukhopadhyay [59] nel quale viene fornita una panoramica storica completa sull'applicazione del controllo in ambito aeroelastico.

Nei moderni velivoli commerciali, nel classico sistema di controllo è possibile integrare inoltre un sottosistema adibito all'attenuazione di carichi di manovra e raffica. Il progetto del velivolo stesso, in particolare, richiede necessariamente una corretta valutazione dei carichi dinamici derivanti dall'azione di raffiche. La regolamentazione aeronautica divide i profili di raffica in discreti, descritti da modelli deterministici, e continui, i quali vengono invece definiti in termini statistici. Nei lavori di Karpel et alii. [60] e di Zole e Karpel [61] è possibile consultare la formulazione del problema aeroservoelastico per questa tipologia di analisi, con le diverse tecniche risolutive e metodologie di controllo applicate alla risposta dinamica a raffiche discrete e continue. In [62] è possibile trovare un ottimo riferimento nel quale sono consultabili le formulazioni proposte nei precedenti articoli citati.

L'azione del controllo, tuttavia, non è solamente limitata all'attenuazione della risposta ad un impulso di raffica. Infatti, essa consente di modificare la risposta aeroelastica del sistema permettendo, almeno in via teorica, di estendere l'inviluppo di volo ritardando l'insorgere della condizione di flutter. A tal proposito, si vedano i lavori di Librescu et alii [63], [64], Yuan et alii. [65] e Na et alii. [66] dove è stato possibile valutare in questo senso le performance relative all'applicazione di differenti strategie di controllo al moto di un profilo alare a due gradi di libertà in presenza di un flap. Una revisione generale delle metodologie presenti nei precedenti articoli è consultabile in [67], nel quale le analisi aeroservoelastiche sono state estese ad una superficie portante 3D e ad un pannello immerso in un flusso supersonico.

## 1.6 Contenuto dell'Elaborato

Lo scopo del presente lavoro di tesi è quello di sviluppare una formulazione del problema aeroelastico in presenza di un controllo in retroazione proporzionale-integrativo e basato su un modello strutturale di ordine elevato. Tale formulazione viene sviluppata inizialmente per modelli a parametri concentrati, in cui la rigidezza flessionale e torsionale della struttura si riduce a quelle delle molle a cui essa è vincolata. La teoria di striscia viene sfruttata come modello aerodinamico, mentre un controllore PI consente di passare alla configurazione ad anello chiuso in cui l'azione del controllo, espletata da una superficie mobile, viene regolata sulla base di misure in punti caratteristici del modello. La scelta di partire da modelli semplici 2D costituisce il primo step per poter estendere l'analisi a configurazioni tridimensionali, integrando il modello aeroservoelastico nella CUF e in una formulazione agli elementi finiti.

Nel primo capitolo vengono fornite alcune nozioni introduttive in merito alla definizione del problema aeroelastico e alla tipologia di fenomeni, statici e dinamici, che lo caratterizzano. Il capitolo viene quindi sviluppato fornendo un'ampia panoramica di riferimenti bibliografici presenti in letteratura riguardo i modelli aerodinamici e le tecniche di analisi impiegate per la determinazione della condizione di flutter, così come riguardo i modelli strutturali 1D. Una breve sezione è dunque dedicata per fornire un quadro generale sull'applicazione della CUF a differenti analisi strutturali 1D e a problemi di interazione fluido struttura. Si conclude quindi con una rassegna di riferimenti bibliografici in merito ad analisi tipiche in ambito aeroservoelastico.

Il secondo capitolo è dedicato alla formulazione del modello strutturale. Partendo da nozioni introduttive di teorie dell'elasticità, si passa alla descrizione della formulazione CUF, dedicando ampio spazio alla trattazione delle funzioni di espansione che saranno largamente impiegate in fase di analisi. Si procede quindi presentando la formulazione agli elementi finiti per il problema strutturale, mostrandone l'integrazione con la CUF e la procedura di derivazione e assemblaggio delle matrici di rigidezza e massa, così come del vettore dei carichi nodali, partendo dalla definizione dei nuclei fondamentali ricavati dall'applicazione del Principio dei Lavori Virtuali. Il capitolo si conclude mostrando come la CUF integrata alla FEM possa essere estesa a strutture laminate e multicomponente.

Nel terzo capitolo si affrontano le metodologie di analisi di problemi dinamici. Sono perciò descritti il metodo di Newmark come il Mode Superposition Method quali tecniche risolutive per il problema dinamico che, nel presente lavoro di tesi, è stato considerato in assenza di smorzamento. La formulazione di queste due metodologie è dunque descritta nei suoi aspetti principali, con lo scopo di mettere in luce come i risultati che essi determinano sia dipendenti da come viene selezionato time-step $\Delta t$, per il metodo di Newmark, e il numero di modi per la sovrapposizione modale. Si conclude quindi descrivendo il tipico esempio di carico inerziale in ambito aeronautico, ovvero il carico da raffica derivante dall'assunzione di modello di raffica discreto uno-meno-coseno.

Il quarto capitolo rappresenta l'anima della formulazione aeroservoelastica. Partendo dalla definizione del classico problema aeroelastico per un modello a parametri discreti, ricavato dall'applicazione delle equazioni di Lagrange, si definisce il classico problema agli autovalori per la determinazione della condizione di flutter. Viene quindi mostrato come si modifica il modello matematico introducendo, per prima, una superficie di controllo che porta ad ottenere una nuova espressione delle forze aerodinamiche e, di seguito, una variazione di incidenza imputabile ad un impulso di raffica. Il capitolo prosegue fornendo alcune nozioni di teoria del controllo, ponendo l'accento sulla definizione del controllore PID. Viene quindi mostrato il modello matematico del sistema aeroservoelastico 2D a seguito dell'implementazione del controllo e la formulazione del problema per analizzarne la stabilità e la risposta alla raffica. Il capitolo si chiude con la rappresentazione stato-spazio del sistema di equazione, la quale è stata quindi implementata nelle analisi.

Nel quinto capitolo vengono raccolte le applicazioni numeriche delle teorie e metodologie di analisi esposte nei precedenti capitoli. Il primo set di risultati riportati è inerente ad analisi statiche di travi in materiale isotropo per diversi valori del rapporto di snellezza. L'effetto della discretizzazione lungo la direzione principale $y$ è riportato assieme al confronto tra differenti modelli strutturali, dalle teorie classiche a modelli di espansione polinomiale di tipo Taylor di ordine differente, valutando i risultati numerici ottenuti in confronto a soluzioni analitiche. L'effetto della correzione del fenomeno di *shear locking* viene dunque indagato. Sono stati quindi introdotti modelli di espansione di Lagrange di ordine differente e mediante diverse combinazioni, mostrando una migliore convergenza di risultati soprattutto nella valutazione degli stress lungo lo spessore per strutture in materiale ortotropo, sia a singolo che multi strato, e multicomponente tipiche delle applicazioni aerospaziali. Un ampio set di analisi dinamiche è stato condotto per mostrare le implicazioni derivanti dall'utilizzo del metodo di Newmark o del mode superposition, considerando principalmente carichi sinusoidali applicati a strutture solide e in parete sottile, così come a strutture multicomponente quali un longherone a due correnti e un cassone rettangolare a quattro correnti. Un'ala completa, la cui sezione è un profilo alare NACA 2415 in presenza di due longheroni, è stata utilizzata come test-case per la valutazione della risposta alla raffica. Si è dunque passati alle analisi aeroelastiche di sezioni tipiche,utilizzando dati presenti in bibliografia, andando a valutare la condizione di flutter in termini di velocità e frequenza per differenti tipologie di modello aerodinamico. L'effetto della variazione degli input del sistema aeroelastico è stato preso in considerazione. Si è dunque analizzata la risposta nel tempo del sistema open loop ad un input di raffica in condizioni di pre-flutter, flutter e post-flutter e l'effetto di una variazione degli input sulla risposta nel tempo del sistema in quest'ultimo caso. Il passo successivo è stato la definizione del modello aeroservoelastico 2D. Come caso di studio è stata considerata una classica lamina piana analizzata in bibliografia. Il modello a parametri concentrati equivalente è stato ottenuto mediante un'opportuna traduzione degli input per il caso considerato, sfruttando un'analisi di vibrazioni libere atta ad individuare le prime frequenze flessionali e torsionali necessarie per il calcolo delle rigidezze equivalenti. L'implementazione del controllo ha permesso di ottenere l'anello chiuso per il modello a parametri concentrati così ottenuto. L'effetto dei gain di controllo sulla stabilità del sistema e sulla risposta nel tempo all'azione della raffica è stato indagato nel dettaglio, insieme all'effetto di una variazione dell'estensione della superficie di controllo, della geometria e del materiale.

Nel capitolo sei sono infine riportati le conclusioni e i possibili sviluppi futuri del presente lavoro.

# Capitolo 2

# Modello Strutturale

In questo capitolo si andrà a descrivere interamente l'impianto teorico del modello trave 1D, su cui si basa questo lavoro di tesi. Per prima cosa, sia introdurranno le notazioni e il sistema di riferimento geometrico del modello. Successivamente si andrà a descrivere il set di equazioni per i campi delle deformazioni e tensioni. Conclusa questa parte introduttiva, si entrerà nel merito della Formulazione Unificata di Carrera (CUF) e della definizione di un modello strutturale avanzato di tipo trave, andando ad analizzare le tipologie di funzioni di espansione che saranno adottate nel corso del presente lavoro. Viene quindi descritta la formulazione agli elementi finiti, andando a definire i principali vettori e matrici che possono essere ricavate dall'applicazione del Principio dei Lavori Virtuali. Infine, saranno forniti alcuni cenni in merito agli approcci Equivalent Single Layer e Layer Wise per strutture laminate e alla metodologia Component-Wise per strutture multicomponenti

## 2.1 Concetti Preliminari

Si consideri il sistema di riferimento cartesiano mostrato in figura 2.1, nel quale si può osservare la geometria della trave. Con $\Omega$ viene indicata la sezione della trave (considerata costante lungo l'asse $y$ della trave) che, secondo la convenzione adottata per la terna di assi ortonormali $x$, $y$ e $z$, giace nel piano $xz$. Sempre secondo tale convenzione, con $y$ si indica l'asse longitudinale della trave tale che $0 \leq y \leq L$, dove L è la lunghezza della trave stessa.

Si può a questo punto definire il vettore degli spostamenti che, nel caso più generale possibile, può essere espresso come:

$$\mathbf{u}(x, y, z; t) = \left\{ u_x \quad u_y \quad u_z \right\}^T \tag{2.1}$$

dove con l'apice $T$ si indica l'operatore di trasposizione. Con $u_x$, $u_y$ e $u_z$ vengono indicate le componenti di spostamento definite lungo gli assi cartesiani di riferimento. Per comodità, nel seguito si andrà ad omettere la dipendenza dalla variabile

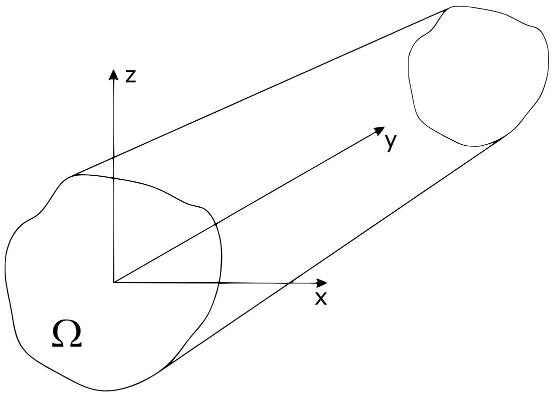



Figura 2.1: Sistema di riferimento della trave

indipendente tempo $t$.

I vettori degli sforzi e delle deformazioni vengono rispettivamente indicati come $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$. In termini delle loro componenti, essi possono essere scritti nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \left\{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy} \right\}^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{xy} \right\}^T \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le componenti dei vettori appena definiti possono a loro volta essere raggruppate nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_p &= \left\{ \sigma_{zz} \quad \sigma_{xx} \quad \sigma_{xz} \right\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p = \left\{ \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{xz} \right\}^T \\ \boldsymbol{\sigma}_n &= \left\{ \sigma_{yz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yy} \right\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n = \left\{ \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yy} \right\}^T \end{aligned} \tag{2.3}$$

dove con il pedice $p$ si indicano le quantità relative alla sezione trasversale della trave $\Omega$, mentre il pedice $n$ fa riferimento alle componenti di sforzo e deformazione nei piani ad essa ortogonali.

Nel caso di piccoli spostamenti rispetto alla lunghezza della trave $L$, la relazione tra deformazioni e spostamenti si può assumere lineare:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{2.4}$$

dove $\mathbf{D}$ è la matrice degli operatori differenziali lineari. In base all'Eq. 2.3, è possibile adottare seguente notazione vettoriale per esprimere le deformazioni in funzione degli spostamenti:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_p &= \mathbf{D}_p\mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n &= \mathbf{D}_n\mathbf{u} = \mathbf{D}_{np}\mathbf{u} + \mathbf{D}_{ny}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove $\mathbf{D}_p$, $\mathbf{D}_{np}$ e $\mathbf{D}_{ny}$ sono le matrici degli operatori differenziali lineari così definite:

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{np} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{ny} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Il legame tra le componenti di stress e deformazione è definito dalla legge di Hooke in forma generalizzata, valida assumendo un comportamento elastico per il materiale che costituisce la trave. In forma compatta essa può essere espressa come:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.7}$$

In base alla 2.3, si può scrivere l'equazione precedente nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_p &= \tilde{\mathbf{C}}_{pp}\boldsymbol{\varepsilon}_p + \tilde{\mathbf{C}}_{pn}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ \boldsymbol{\sigma}_n &= \tilde{\mathbf{C}}_{np}\boldsymbol{\varepsilon}_p + \tilde{\mathbf{C}}_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n \end{aligned} \tag{2.8}$$

Le matrici $\tilde{\mathbf{C}}_{pp}$, $\tilde{\mathbf{C}}_{pn}$, $\tilde{\mathbf{C}}_{np}$ e $\tilde{\mathbf{C}}_{nn}$ sono le matrice dei coefficienti del materiale, definite nel seguente modo:

$$\begin{gathered} \tilde{\mathbf{C}}_{pp} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11}0 & \tilde{C}_{12} & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{44} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{pn} = \tilde{\mathbf{C}}_{np}^T = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C}_{16} & \tilde{C}_{13} \\ 0 & \tilde{C}_{26} & \tilde{C}_{23} \\ \tilde{C}_{45} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{C}}_{nn} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{55} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{66} & \tilde{C}_{36} \\ 0 & \tilde{C}_{36} & \tilde{C}_{33} \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{2.9}$$

La forma esplicita dei coefficienti $[\tilde{C}_{ij}]$ dipende fondamentalmente da tre parametri: il modulo di Young, $E$, il coefficiente di Poisson, $\nu$ e l'angolo di orientamento delle fibre del materiale $\theta$. Quest'ultimo, in particolare, è definito graficamente nella Fig. 2.2: in essa è osservabile la terna cartesiana $x$, $y$ e $z$ che definisce il sistema di riferimento globale della trave, mentre gli assi 1, 2 e 3 individuano il sistema di riferimento locale del materiale.

Si omette l'espressione completa dei coefficienti del materiale, che risulta consultabile in [68] e [69].

A questo punto, prima di proseguire oltre con la descrizione dell'impianto teorico del presente lavoro, è necessario faro una precisazione in merito ai coefficienti dei materiali descritti in precedenza. Infatti, quando si trattano modelli strutturali caratterizzati da una distribuzione costante o lineare delle componenti di spostamento

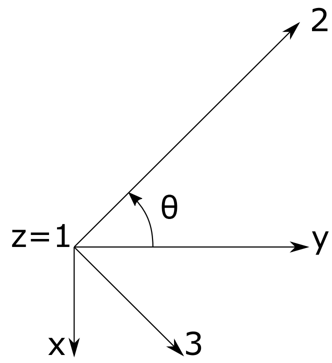



Figura 2.2: Sistema di riferimento del materiale

$u_x$ e $u_z$, è necessario modificare i coefficienti del materiale, in modo da non incorrere nel fenomeno del Poisson Locking [70], dovuto all'accoppiamento tra le deformazioni normali $\varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_{yy}$ e $\varepsilon_{zz}$ espresso dalla definizione stessa del coefficiente di Poisson $\nu$:

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}} \quad i,j = x,y,z \tag{2.10}$$

I modelli trave classici di Eulero-Bernoulli o Timoshenko, ad esempio, sono caratterizzati da componenti di spostamento nel piano della sezione costanti, e ciò comporta che, dal punto di vista cinematico, le deformazioni $\varepsilon_{xx}$ e $\varepsilon_{zz}$ risultano nulle. Tuttavia, in virtù dell'accoppiamento espresso dalla 2.10, discende una distribuzione delle due componenti di deformazione nel piano non più nulla, ma bensì con lo stesso andamento della $\varepsilon_{yy}$, che per i modelli appena citati risulta essere lineare. Questa apparente contraddizione determina una perdita di accuratezza nelle soluzioni per queste tipologie di modelli. Per far fronte a questo particolare fenomeno vengono attuate alcune correzioni tra le quali, come anticipato, l'utilizzo di coefficienti dei materiali modificati o di modelli cinematici di ordine elevato [71].

## 2.2 La Formulazione Unificata di Carrera (CUF)

Terminata la parte introduttiva, si entra ora nel merito della definizione del modello strutturale per la trave, il quale si basa sulla Formulazione Unificata di Carrera, abbreviata nel seguito con l'acronimo CUF. Nell'ambito di tale formulazione, si considera un campo di spostamenti completo nello spazio, nel quale lo spostamento di un generico punto può essere espresso nel seguente modo:

$$\mathbf{u} = F_\tau(x,z)\mathbf{u}_\tau(y), \quad \tau = 1,2,...,M \tag{2.11}$$

dove si introduce la funzione di espansione $F_\tau(x,z)$, con la quale si approssima il campo di spostamenti lungo la sezione trasversale alla coordinata $y$. Con $\mathbf{u}_\tau$ si identifica invece il vettore degli spostamenti, mentre $M$ costituisce il numero di termini dell'espansione. In accordo con la notazione di Einstein, la ripetizione del pedice $\tau$ indica una sommatoria.

Nell'ambito di problemi strutturali monodimensionali, le incognite dipendono dalla coordinata assiale e il comportamento lungo la sezione trasversale non è noto a priori. Teorie classiche, come quella di Eulero-Bernoulli oppure di Timoshenko, consentono di ricavare la distribuzione delle incognite sulla sezione trasversale mediante un approccio assiomatico al problema, andando cioè ad introdurre delle ipotesi sul comportamento meccanico della struttura lungo la sezione. Mediante la CUF, analogamente, il comportamento lungo la sezione trasversale viene postulato a priori, assumendo per le incognite lungo le coordinate $x$ e $z$ un andamento descritto dalla funzione $F_\tau$, la cui tipologia caratterizza la qualità dei risultati forniti e la classe del modello 1D. La scelta di tale funzione, così come il numero di termini dell'espansione $M$, è assolutamente arbitraria. Da ciò ne consegue che differenti funzioni di qualsiasi ordine possono essere implementate nella formulazione per modellare il campo cinematico lungo la sezione trasversale. L'ordine della teoria diventa conseguentemente un input dell'analisi e mediante un opportuno studio di convergenza sarà possibile valutare il numero effettivo di termini da considerare.

Il capitolo prosegue dunque con la descrizione delle funzioni di espansione che si adotteranno nel presente lavoro di tesi: l'espansione basata su polinomi di Taylor e di Lagrange.

### 2.2.1 Funzione di Espansione di Taylor

Nell'ambito della formulazione CUF 1D, l'espansione di Taylor consiste in una serie di MacLaurin che sfrutta polinomi 2D, funzioni di $x^i$ e $z^j$, con $i$ e $j$ interi positivi, per modellare il campo di spostamenti lungo la sezione trasversale della struttura. In tabella 2.1 sono riportati $M$ e $F_\tau$ in funzione di $N$, cioè dell'ordine di espansione scelto, il quale rappresenta l'ordine massimo dei polinomi utilizzati nell'espansione.

| $N$ | $M$ | $F_\tau$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $F_1 = 1$ |
| 1 | 3 | $F_2 = x \ F_3 = z$ |
| 2 | 6 | $F_4 = x^2 \ F_5 = xz \ F_6 = z^2$ |
| 3 | 10 | $F_7 = x^3 \ F_8 = x^2 z, \ F_9 = xz^2 \ F_{10} = z^3$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $N$ | $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ | $F_{(N^2+N+2)/2} = x^N \ F_{(N^2+N+4)/2} = x^{N-1} z \cdots \ F_{N(N+3)/2} = xz^{N-1} \ F_{(N+1)(N+2)/2} = z^N$ |

Tabella 2.1: Polinomi di MacLaurin

Come già anticipato, questo tipo di formulazione consente di implementare teorie di qualsiasi ordine, fornendo semplicemente in input all'analisi $N$. Si ribadisce nuovamente come la scelta di tale parametro risulti essere del tutto arbitraria e che la scelta ottimale di questo valore per un dato problema strutturale può essere determinata solamente mediante una opportuna analisi di convergenza.

Una volta fissato $N$, tutti i termini dell'espansione corrispondente sono dati. Ad esempio, per $N = 1$, si ha il seguente campo di spostamenti nel piano della sezione:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} + x u_{x_2} + z u_{x_3} \\ u_y &= u_{y_1} + x u_{y_2} + z u_{y_3} \\ u_z &= u_{z_1} + x u_{z_2} + z u_{z_3} \end{aligned} \tag{2.12}$$

In questo modo, il modello beam nell'equazione 2.12 presenta nove incognite di spostamento: tre costanti e sei lineari. I termini a destra dell'uguale rappresentano gli spostamenti dell'asse della trave e le derivate prime degli spostamenti. L'espansione lineare completa risulta particolarmente interessante dal momento che da questo modello è possibile derivare le teorie classiche di Eulero-Bernoulli e Timoschenko, le quali ne costituiscono perciò un caso particolare. Il procedimento per la derivazione delle teorie classiche e alcuni esempi numerici nei quali viene mostrato come il modello di espansione lineare consenta di superarne le limitazioni, sono consultabili in [71].

Se con un modello $N = 1$ è possibile includere effetti che le teorie classiche non sono in grado di prevedere, va però precisato che esso potrebbe non risultare sufficientemente accurato per descrivere effetti locali che, ad esempio, si possono manifestare in strutture a parete sottile quando soggette all'applicazione di carichi di schiacciamento. In generale è necessario predisporre di teorie strutturali sempre più raffinate, in modo da poter descrivere la risposta meccanica a più complesse condizioni al contorno, e passare a modelli di ordine più elevato. Come esempio, si riporta un modello di espansione al secondo ordine ($N = 2$):

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} + x u_{x_2} + z u_{x_3} + x^2 u_{x_4} + xz u_{x_5} + z^2 u_{x_6} \\ u_y &= u_{y_1} + x u_{y_2} + z u_{y_3} + x^2 u_{y_4} + xz u_{y_5} + z^2 u_{y_6} \\ u_z &= u_{z_1} + x u_{z_2} + z u_{z_3} + x^2 u_{z_4} + xz u_{z_5} + z^2 u_{z_6} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Il modello 1D fornito conta diciotto variabili di spostamento: tre costanti, sei lineari e nove paraboliche. Ma modelli di ordine ancora superiore sono possibili [73]. L'aspetto importante da sottolineare è che man mano che l'ordine di espansione aumenta, maggiore è il numero delle variabili di spostamento incognite. Si è visto infatti come il passaggio da un $N = 1$ a $N = 2$ abbia portato il numero delle incognite da nove a diciotto. Più in generale, indicando con $N_{DV}$ il numero totale delle variabili di spostamento, si ha:

$$N_{DV} = 3 \times \frac{(N+1)(N+2)}{2} \tag{2.14}$$

In quella che sarà la formulazione agli elementi finiti, $N_{DV}$ indicherà il numero di DOFs per ciascun nodo. Risulta quindi chiaro che la ricerca di una maggiore accuratezza del modello si tradurrà in un costo computazionale più elevato. Quando si andranno ad effettuare le analisi di convergenza, sarà dunque necessario partire da ordini non elevati, in modo da non appesantire fin da subito il calcolo, e aumentare man mano $N$ in modo da poter ricavare il miglior compromesso tra l'accuratezza stessa e il costo computazionale. Una volta raggiunto un ordine tale da ottenere una soluzione numerica stabile e sufficientemente accurata, aumentare ulteriormente $N$ introdurrebbe solamente maggiori tempi di calcolo. Trovare il miglior compromesso che porti a convergenza l'analisi sarà quindi il punto di partenza per determinare la migliore mesh strutturale.

### 2.2.2 Funzioni di Espansione di Lagrange

L'altra classe di funzioni di espansione che verranno sfruttate nel corso di questo elaborato sono i modelli di espansione di Lagrange, i quali sfruttano polinomi di Lagrange per descrivere il campo di spostamenti lungo la sezione trasversale. Nel presente lavoro tre tipologie di polinomi sono stati adottati: a quattro, $L4$, nove, $L9$ e sedici punti, $L16$, definiti su un dominio quadrilatero. In figura 2.3 viene mostrata la posizione dei punti per i tre elementi nel sistema di riferimento naturale. Tali polinomi sono forniti in termini di coordinate normalizzate, in quanto viene sfruttata una formulazione isoparametrica che consente di trasferire geometrie arbitrarie della sezione trasversale, dal piano fisico $x$-$z$, al sistema di riferimento naturale dell'elemento $r$-$s$. In base a questo tipo di approccio, le stesse funzioni per interpolare gli spostamenti lungo la sezione trasversale sono utilizzate anche per interpolare la geometria dell'elemento e non solo il campo di spostamenti. Le funzioni di espansioni polinomiali di Lagrange sono riportate in [72].

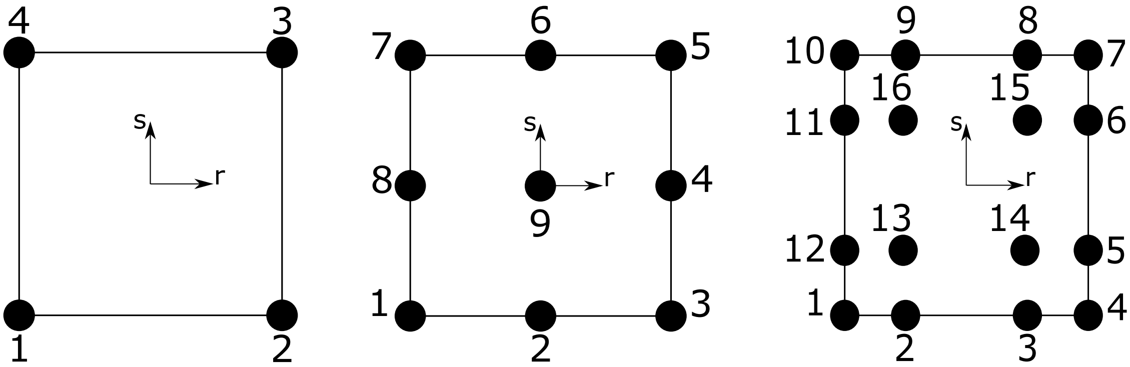
Le funzioni di interpolazione dell'elemento L4 sono date da:

$$F_\tau = \frac{1}{4}\left(1 + r r_\tau\right)\left(1 + s s_\tau\right), \quad \tau = 1,2,3,4 \tag{2.15}$$

dove $r$ e $s$ variano da -1 a +1, mentre $r_\tau$ e $s_\tau$ sono le coordinate dei quattro nodi dell'elemento del sistema di riferimento naturale $r$-$s$, come mostrato in figura 2.3a. Si può notare come questo termine possa essere visto come un'espansione lineare più un termine bilineare. Le coordinate normalizzate dei nodi dell'elemento sono riportate in tabella 2.2.

Per l'elemento L9 si hanno invece i seguenti polinomi:

$$\begin{aligned} F_\tau &= \frac{1}{4}\left(r^2 + r r_\tau\right)\left(s^2 + s s_\tau\right), \quad \tau = 1,3,5,7 \\ F_\tau &= \frac{1}{2} s_\tau^2 \left(s^2 - s s_\tau\right)\left(1 - r^2\right) + \frac{1}{2} r_\tau^2 \left(r^2 - r r_\tau\right)\left(1 - s^2\right), \quad \tau = 2,4,6,8 \\ F_\tau &= \left(1 - r^2\right)\left(1 - s^2\right), \quad \tau = 9 \end{aligned} \tag{2.16}$$




(a) Elemento a quattro nodi L4

(b) Elemento a nove nodi L9

(c) Elemento a sedici nodi L16

Figura 2.3: Elementi di Lagrange in coordinate naturali

| Punto | $r_\tau$ | $s_\tau$ |
|---|---|---|
| 1 | -1 | -1 |
| 2 | 1 | -1 |
| 3 | 1 | 1 |
| 4 | -1 | 1 |

Tabella 2.2: Coordinate elemento L4

dove $r$ e $s$ variano da -1 a +1, mentre $r_\tau$ e $s_\tau$ sono le coordinate dei nove nodi dell'elemento del sistema di riferimento naturale $r$-$s$, come mostrato in figura 2.3b. In questo caso, l'espansione è quadratica, con la presenza di due termini cubici e uno di quarto grado. Le coordinate normalizzate dei nodi dell'elemento sono riportate in tabella 2.3.

Considerando, per esempio, l'elemento L9, il campo di spostamenti che ne deriva è il seguente:

$$
\begin{aligned}
u_x &= F_1 u_{x_1} + F_2 u_{x_2} + F_3 u_{x_3} + F_4 u_{x_4} + F_5 u_{x_5} + F_6 u_{x_6} + F_7 u_{x_7} + F_8 u_{x_8} + F_9 u_{x_9} \\
u_y &= F_1 u_{y_1} + F_2 u_{y_2} + F_3 u_{y_3} + F_4 u_{y_4} + F_5 u_{y_5} + F_6 u_{y_6} + F_7 u_{y_7} + F_8 u_{y_8} + F_9 u_{y_9} \\
u_z &= F_1 u_{z_1} + F_2 u_{z_2} + F_3 u_{z_3} + F_4 u_{z_4} + F_5 u_{z_5} + F_6 u_{z_6} + F_7 u_{z_7} + F_8 u_{z_8} + F_9 u_{z_9}
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

dove $u_{x_1}...u_{z_9}$ rappresentano le variabili di spostamento del problema e costituiscono le componenti delle traslazioni nelle tre direzioni di ciascuno dei 9 nodi dell'elemento, per un totale di 27 incognite da determinare. Si evince come, mediante funzioni di espansione di Lagrange, le incognite del problema sono solo spostamenti traslazionali, con preciso significato fisico, calcolate direttamente sulla superficie del corpo in esame. Questo aspetto risulta particolarmente vantaggioso, dal momento che si ha

| Punto | $r_\tau$ | $s_\tau$ |
|---|---|---|
| 1 | -1 | -1 |
| 2 | 0 | -1 |
| 3 | 1 | -1 |
| 4 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 |
| 7 | -1 | 1 |
| 8 | -1 | 0 |
| 9 | 0 | 0 |

Tabella 2.3: Coordinate elemento L9

la possibilità di avere un modello computazionale che meglio approssima la struttura di partenza.

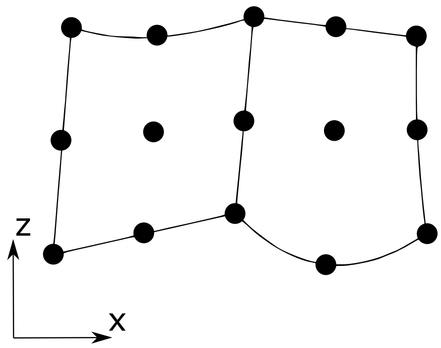



Figura 2.4: 2 elementi L9

Mediante un numero maggiore di elementi per discretizzare la sezione trasversale, come riportato in Fig. 2.4, è possibile ottenere risultati maggiormente accurati senza la necessità di alzare l'ordine di espansione dei polinomi e riuscire così a contenere il numero di incognite da calcolare. In questo modo è inoltre possibile raffinare localmente la mesh strtturale del modello, in modo da un calcolo maggiormente accurata in prossimità di zone della struttura di particolare interesse, in cui, per esempio, sono poste condizioni al contorno, carichi o discontinuità geometriche.

## 2.3 Formulazione agli Elementi Finiti

Il passo successivo consiste nel derivare le equazioni di governo per la formulazione agli elementi finiti.

In generale, il metodo agli elementi finiti, FEM, consente di ottenere una formulazione delle equazioni di governo in forma debole, medianti le quali è possibile superare le limitazione delle soluzioni analitica fornite dalla controparte, cioè dalla formulazione forte. Esse infatti, per poter essere applicate, richiedono specifiche condizioni al contorno, geometrie e carichi. Al contrario, il metodo agli elementi finiti non necessita di particolari condizioni, consentendo di ottenere una soluzione, che sarà però in questo caso approssimata, per condizioni di vincolo, carico arbitrarie e indipendentemente dalla geometria della struttura.

In accordo con la classica formulazione FEM, le variabili di spostamento vengono interpolate lungo l'asse della trave per mezzo di opportune funzioni di forma:

$$\mathbf{u}_\tau(y) = N_i(y)\mathbf{q}_{\tau i} \quad i = 1, ..., N_N \tag{2.18}$$

dove con $N_i$ si indica la funzione di forma 1D, mentre $\mathbf{q}_{\tau i}$ è il vettore degli spostamenti nodali:

$$\mathbf{q}_{\tau i} = \begin{Bmatrix} q_{x_{\tau i}} & q_{y_{\tau i}} & q_{z_{\tau i}} \end{Bmatrix}^T \tag{2.19}$$

dove l'indice $i$ si riferisce all' i-esimo nodo dell'elemento 1D caratterizzato da un numero di nodi $N_N$. Andando ora ad introdurre la formulazione CUF per il campo di spostamenti, espresso in Eq. 2.11, all'interno della formulazione agli elementi finiti nell'Eq. 2.18, si ricava:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_\tau(x, z)N_i(y)\mathbf{q}_{\tau i} \qquad \tau = 1, ..., M \quad i = 1, ..., N_N \tag{2.20}$$

L'indice $\tau$ rappresenta il parametro libero che consente di impostare come input l'ordine di espansione della teoria lungo la sezione trasversale, che definisce il modello trave da adottare secondo la formulazione CUF. L'indice $i$ consente invece di scegliere la discretizzazione lungo l'asse della trave. Un numero maggiore di nodi si traduce in diverse funzioni di forma. La scelta di $M$, del numero di nodi dell'elemento e del numero di elementi beam, determina il numero totale dei gradi di libertà del modello strutturale:

$$DOF_s = 3 \times M \times [(N_N - 1) \times N_{BE} + 1] \tag{2.21}$$

dove $3 \times M$ sono i gradi di libertà per ciascun degli $N_N$ nodi, mentre $N_{BE}$ è il numero di elementi beam utilizzato. Considerando, ad esempio, un modello di espansione lineare completo ($M = 3$) e un elemento beam di due nodi si avrà di conseguenza:

$$\mathbf{q}_{\tau i} = \begin{Bmatrix} q_{x_{11}} & q_{y_{11}} & q_{z_{11}} & q_{x_{21}} & q_{y_{21}} & q_{z_{21}} & q_{x_{31}} & q_{y_{21}} & q_{z_{31}} \\ q_{x_{12}} & q_{y_{12}} & q_{z_{12}} & q_{x_{22}} & q_{y_{22}} & q_{z_{22}} & q_{x_{32}} & q_{y_{32}} & q_{z_{32}} \end{Bmatrix}^T \tag{2.22}$$

per un totale di 18 gradi di libertà da calcolare.

In questo lavoro verranno considerati elementi beam a due, tre e quattro nodi, indicati rispettivamente con $B2$, $B3$ e $B4$, le cui funzioni di forma ad essi associate possono essere consultate in diversi testi relativi alla FEM presenti in letteratura [74], [71].

Per quanto riguarda l'elemento $B2$, le funzioni di forma sono le seguenti:

$$N_1 = +\frac{1}{2}(1-r), \quad N_2 = +\frac{1}{2}(1+r), \quad \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \end{cases} \tag{2.23}$$

Per l'elemento $B3$ si ha invece:

$$N_1 = +\frac{1}{2}r(r-1), \quad N_2 = +\frac{1}{2}r(r+1), \quad N_3 = -(1+r)(1-r), \quad \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \\ r_3 = 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Infine, per l'elemento $B4$, le funzioni di forma sono le seguenti:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{9}{16}\left(r+\frac{1}{3}\right)\left(r-\frac{1}{3}\right)(r-1), \quad N_2 = +\frac{9}{16}\left(r+\frac{1}{3}\right)\left(r-\frac{1}{3}\right)(r+1), \\ N_3 &= +\frac{27}{16}(r+1)\left(r-\frac{1}{3}\right)(r-1), \quad N_4 = -\frac{27}{16}(r+1)\left(r+\frac{1}{3}\right)(r-1), \end{aligned} \quad \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \\ r_3 = -\frac{1}{3} \\ r_4 = +\frac{1}{3} \end{cases} \tag{2.25}$$

dove $r$ è la coordinata naturale che varia da $-1$ a $+1$ e definisce la posizione dei nodi all'interno del dominio dell'elemento.

## 2.4 Equazioni di Equilibrio

Secondo il Principio degli Spostamenti Virtuali (PVD) vale la seguente relazione:

$$\delta L_i = \delta L_{ext} - \delta L_{ine} \tag{2.26}$$

dove $L_i$ è il lavoro interno, l'energia di deformazione, $L_{ext}$ il lavoro dei carichi esterni, $L_{ine}$ il lavoro dei carichi inerziali mentre $\delta$ rappresenta la variazione virtuale Questa equazione costituisce il punto di partenza per poter ricavare l'equazione di equilibrio che governa l'analisi di risposta della struttura che si vuole mettere in atto.

### 2.4.1 Analisi di Risposta Statica

Un'analisi di risposta statica coinvolge gli effetti delle forze elastiche e dell'applicazione di carichi esterni. Il PVD nel caso statico può quindi essere scritto come:

$$\delta L_i = \delta L_{ext} \tag{2.27}$$

Nell'ambito della formulazione agli elementi finiti, la variazione virtuale del lavoro interno si può esprimere come:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \tag{2.28}$$

dove $\mathbf{q}$ è il vettore globale delle incognite nodali e $\mathbf{K}$ l'assemblata matrice di rigidezza globale. La variazione virtuale del lavoro esterno si può invece scrivere come:

$$\delta L_{ext} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{P} \tag{2.29}$$

dove $\mathbf{P}$ è il vettore globale dei carichi nodali. Sostituendo la (2.28) e la (2.29) nella (2.27), si ricava il sistema algebrico finale:

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P} \tag{2.30}$$

Dalla quale è possibile ricavare:

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} \tag{2.31}$$

Dal punto di vista matematico, l'equazione risulta risolvibile nel momento in cui la matrice di rigidezza è invertibile, cioè il determinante di $\mathbf{K}$ è non nullo. Questo vincolo, si traduce fisicamente nel rimuovere qualsiasi tipo di moto di corpo rigido della struttura. Nella pratica, quindi, la matrice $\mathbf{K}$ non sarà mai invertita ma fattorizzata.

### 2.4.2 Analisi di Vibrazioni Libere

Mediante il principio dei lavori virtuali, è possibile legare l'energia di deformazione interna al lavoro dei carichi inerziali:

$$\delta L_{int} = -\delta L_{ine} \tag{2.32}$$

Secondo la formulazione FEM, la variazione virtuale dei carichi inerziali può essere espressa come:

$$\delta L_{ine} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \tag{2.33}$$

dove $\mathbf{M}$ è la matrice di massa globale, mentre $\ddot{\mathbf{q}}$ è il vettore globale delle accelerazioni nodali. Nuovamente, sostituendo le Eq. 2.28 e 2.33 nella 2.32 si ricava:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \tag{2.34}$$

Se a questo punto si assumono per $\mathbf{q}$ delle soluzioni del tipo:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}_k e^{i\omega_k t} \tag{2.35}$$

dove $\mathbf{Q}_k$ indica l'ampiezza della k-esima soluzione armonica di frequenza angolare $\omega_k$ allora, sostituendo l'espressione in 2.35 nell'Eq. 2.34 si ricava il classico problema agli autovalori:

$$\left(-\omega_k^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}\right) \mathbf{Q}_k = 0 \tag{2.36}$$

che permette di determinare la $\omega_k$ frequenza naturale del $\mathbf{Q}_k$ modo di vibrare.

### 2.4.3 Analisi di Risposta Dinamica

In un'analisi di risposta dinamica, infine, si considera il contributo dell'energia di deformazione interna e il lavoro dei carichi carichi esterni e inerziali, considerando quindi l'espressione generale del PVD riportata in Eq. 2.26. In base alle espressioni già introdotte nelle due sottosezioni precedenti, la formulazione agli elementi finiti di questo problema conduce al seguente sistema di equazioni:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P} \tag{2.37}$$

La soluzione di questa equazione necessita di particolari metodi numerici dedicati. Un intero capitolo sarà dedicato all'analisi di due metodi in particolare, i quali saranno utilizzati per le analisi dinamiche successive: il metodo di Newmark e il mode superposition method.

## 2.5 Derivazione della matrice di rigidezza

Si procede ora alla derivazione delle singole matrice coinvolte nelle equazioni di equilibrio della la formulazione FEM.

La prima matrice che si vuole derivare è quella di rigidezza. Per farlo, si riporta l'espressione completa della variazione virtuale dell'energia di deformazione interna:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \tag{2.38}$$

Sostituendo le Eq. 2.5, 2.8 e 2.20 nella 2.38, si ricava un'espressione compatta per variazione virtuale dell'energia interna:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{q}_{sj}^T \mathbf{K}^{\tau sij} \mathbf{q}_{\tau i} \tag{2.39}$$

La $\mathbf{K}^{\tau sij}$ è una matrice di dimensione $3 \times 3$ che costituisce il nucleo fondamentale della matrice di rigidezza. Le sue componenti sono le seguenti:

$$
\begin{aligned}
K_{xx}^{ij\tau s} =&\tilde{C}_{22}\int_\Omega F_{\tau,x}F_{s,x}d\Omega\int_l N_iN_jdy+\tilde{C}_{66}\int_\Omega F_\tau F_sd\Omega\int_l N_{i,y}N_{j,y}dy+\\
&\tilde{C}_{44}\int_\Omega F_{\tau,z}F_{s,z}d\Omega\int_l N_iN_jdy+\tilde{C}_{26}\int_\Omega F_{\tau,x}F_sd\Omega\int_l N_iN_{j,y}dy+\\
&\tilde{C}_{26}\int_\Omega F_\tau F_{s,x}d\Omega\int_l N_{i,y}N_jdy\\
K_{xy}^{ij\tau s} =&\tilde{C}_{66}\int_\Omega F_\tau F_{s,x}d\Omega\int_l N_{i,y}N_jdy+\tilde{C}_{45}\int_\Omega F_{\tau,z}F_{s,z}d\Omega\int_l N_iN_jdy+\\
&\tilde{C}_{23}\int_\Omega F_{\tau,x}F_sd\Omega\int_l N_iN_{j,y}dy+\tilde{C}_{36}\int_\Omega F_\tau F_sd\Omega\int_l N_{i,y}N_{j,y}dy+\\
&\tilde{C}_{26}\int_\Omega F_{\tau,x}F_{s,x}d\Omega\int_l N_iN_jdy\\
K_{xz}^{ij\tau s} =&\tilde{C}_{45}\int_\Omega F_{\tau,z}F_sd\Omega\int_l N_iN_{j,y}dy+\tilde{C}_{12}\int_\Omega F_{\tau,x}F_{s,z}d\Omega\int_l N_iN_jdy+\\
&\tilde{C}_{16}\int_\Omega F_\tau F_{s,z}d\Omega\int_l N_{i,y}N_jdy+\tilde{C}_{44}\int_\Omega F_{\tau,z}F_{s,x}d\Omega\int_l N_iN_jdy\\
K_{yx}^{ij\tau s} =&\tilde{C}_{66}\int_\Omega F_{\tau,x}F_sd\Omega\int_l N_iN_{j,y}dy+\tilde{C}_{45}\int_\Omega F_{\tau,z}F_{s,z}d\Omega\int_l N_iN_jdy+\\
&\tilde{C}_{23}\int_\Omega F_\tau F_{s,x}d\Omega\int_l N_{i,y}N_jdy+\tilde{C}_{36}\int_\Omega F_\tau F_sd\Omega\int_l N_{i,y}N_{j,y}dy+\\
&\tilde{C}_{26}\int_\Omega F_{\tau,x}F_{s,x}d\Omega\int_l N_iN_jdy\\
K_{yy}^{ij\tau s} =&\tilde{C}_{66}\int_\Omega F_{\tau,x}F_{s,x}d\Omega\int_l N_iN_jdy+\tilde{C}_{36}\int_\Omega F_{\tau,x}F_sd\Omega\int_l N_iN_{j,y}dy+\\
&\tilde{C}_{36}\int_\Omega F_\tau F_{s,x}d\Omega\int_l N_{i,y}N_jdy+\tilde{C}_{55}\int_\Omega F_{\tau,z}F_{s,z}d\Omega\int_l N_iN_jdy+\\
&\tilde{C}_{33}\int_\Omega F_\tau F_sd\Omega\int_l N_{i,y}N_{j,y}dy\\
K_{yz}^{ij\tau s} =&\tilde{C}_{45}\int_\Omega F_{\tau,z}F_{s,x}d\Omega\int_l N_iN_jdy+\tilde{C}_{55}\int_\Omega F_{\tau,z}F_sd\Omega\int_l N_iN_{j,y}dy+\\
&\tilde{C}_{13}\int_\Omega F_\tau F_{s,z}d\Omega\int_l N_{i,y}N_jdy+\tilde{C}_{16}\int_\Omega F_{\tau,x}F_{s,z}d\Omega\int_l N_iN_jdy\\
K_{zx}^{ij\tau s} =&\tilde{C}_{45}\int_\Omega F_\tau F_{s,z}d\Omega\int_l N_{i,y}N_jdy+\tilde{C}_{12}\int_\Omega F_{\tau,z}F_{s,x}d\Omega\int_l N_iN_jdy+\\
&\tilde{C}_{16}\int_\Omega F_{\tau,z}F_sd\Omega\int_l N_iN_{j,y}dy+\tilde{C}_{44}\int_\Omega F_{\tau,x}F_{s,z}d\Omega\int_l N_iN_jdy\\
K_{zy}^{ij\tau s} =&\tilde{C}_{45}\int_\Omega F_{\tau,x}F_{s,z}d\Omega\int_l N_iN_jdy+\tilde{C}_{55}\int_\Omega F_\tau F_{s,z}d\Omega\int_l N_{i,y}N_jdy+\\
&\tilde{C}_{13}\int_\Omega F_{\tau,z}F_sd\Omega\int_l N_iN_{j,y}dy+\tilde{C}_{16}\int_\Omega F_{\tau,z}F_{s,x}d\Omega\int_l N_iN_jdy\\
K_{zz}^{ij\tau s} =&\tilde{C}_{55}\int_\Omega F_\tau F_sd\Omega\int_l N_{i,y}N_{j,y}dy+\tilde{C}_{11}\int_\Omega F_{\tau,z}F_{s,z}d\Omega\int_l N_iN_jdy+\\
&\tilde{C}_{45}\int_\Omega F_\tau F_{s,x}d\Omega\int_l N_{i,y}N_jdy+\tilde{C}_{45}\int_\Omega F_{\tau,x}F_sd\Omega\int_l N_iN_{j,y}dy+\\
&\tilde{C}_{44}\int_\Omega F_{\tau,x}F_{s,x}d\Omega\int_l N_iN_jdy
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Si può osservare come, una volta definita la sua espressione formale, la $\mathbf{K}^{\tau sij}$ non dipenda dall'ordine di espansione della teoria, sulla quale non è necessaria alcun tipo di assunzione aprioristica. Inoltre, le espressioni delle singole componenti non dipendono nemmeno dalla scelta di $F_\tau$, ed è perciò possibile ottenere qualsiasi modello cinematico 1D, implementando modelli di espansione di Taylor o Lagrange, senza in alcun modo modificare l'espressione formale. Si può inoltre notare come l'indipendenza si mantenga anche rispetto alla tipologia di elemento finito scelto per discretizzare la trave lungo la sua direzione assiale. Queste caratteristiche rappresentano sicuramente un aspetto vantaggioso della formulazione CUF, mediante la quale è perciò possibile implementare teorie di qualsiasi classe e ordine andando semplicemente a definire le nove componenti del nucleo fondamentale. Maggiori dettagli sulla derivazione della matrice di rigidezza dell'elemento finito e sulla CUF applicata alla formulazione FEM sono forniti in in [71] e [73].

La procedura di assemblaggio, per ottenere la matrice globale di rigidezza, consiste in un processo automatico basato su quattro loop sugli indici $\tau$, $s$, $i$ e $j$. Partendo dal nucleo fondamentale, i cicli sui primi due indici consento di derivare la matrice di rigidezza associata alla teoria con cui si è deciso di modellare la sezione trasversale. La dimensione di tale matrice dipenderà quindi dal massimo valore di $M$ scelto. Entrando nel loop sui dui indici successivi, $i$ e $j$ è possibile derivare la matrice di rigidezza dell'elemento, la cui dimensione dipende dal numero di nodi del beam con cui si è deciso di discretizzare l'asse della trave, cioè $N_N$. Con la classica procedura di assemblaggio FEM [74], si procede quindi all'assemblaggio della matrice di rigidezza globale della struttura, $\mathbf{K}$, considerando tutti gli elementi beam che la discretizzano. La dimensione di $\mathbf{K}$ dipenderà di conseguenza dal numero delle incognite del problema, definito dalla Eq. 2.21. Maggiori dettagli relativi alla procedura di assemblaggio della matrice di rigidezza, partendo dal nucleo fondamentale, sono consultabili in [71] e [73].

## 2.6 Derivazione della matrice di massa

Per ottenere la matrice di massa si consideri la variazione del lavoro dei carichi inerziali si esprime come:

$$\delta L_{ine} = \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \tag{2.41}$$

dove $\rho$ indica la densità del materiale e $\ddot{\mathbf{u}}$ il vettore delle accelerazioni. Sostituendo l'Eq. 2.20, la 2.41 diventa:

$$\delta L_{ine} = \int_l \delta \mathbf{q}_{sj}^T N_j \left[ \int_\Omega \rho \left( F_\tau \mathbf{I} \right) \left( F_s \mathbf{I} \right) d\Omega \right] N_i \ddot{\mathbf{q}}_{\tau i} dy \tag{2.42}$$

dove $\ddot{\mathbf{q}}$ rappresenta il vettore delle accelerazioni nodali, mentre $\mathbf{I}$ è la matrice identità $3 \times 3$. In forma compatta, la 2.42 si può scrivere come:

$$\delta L_{ine} = \delta \mathbf{q}_{sj}^T \mathbf{M}^{\tau sij} \ddot{\mathbf{q}}_{\tau i} \tag{2.43}$$

dove $\mathbf{M}^{\tau sij}$ costituisce la matrice di massa in forma di nucleo fondamentale. Appare evidente come tale matrice risulti essere diagonale e le sue componenti risultano immediatamente ricavabili:

$$\begin{aligned} M_{xx}^{\tau sij} &= M_{yy}^{\tau sij} = M_{zz}^{\tau sij} = \rho \int_{\Omega} F_\tau F_s d\Omega \int_l N_i N_j dy \\ M_{xy}^{\tau sij} &= M_{xz}^{\tau sij} = M_{yx}^{\tau sij} = M_{yz}^{\tau sij} = M_{zx}^{\tau sij} = M_{zy}^{\tau sij} = 0 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Anche nel caso dei termini inerziali che costituiscono la matrice di massa, non è necessaria alcun tipo di assunzione a priori sull'ordine di espansione della teoria, oltre che sulla teoria stessa. Di conseguenza, è possibile ottenere qualsiasi tipo di modello trave di ordine elevato senza modificare la forma delle componenti dei nuclei fondamentali. Per quanto riguarda la derivazione della matrice di massa globale, $\mathbf{M}$, essa risulta essere del tutto analoga alla procedura descritta per l'assemblaggio della matrice di rigidezza globale.

## 2.7 Derivazione del Vettore dei Carichi Nodali

Nell'ambito della FEM, differenti tipologie di carico possono essere implementate nella formulazione: carichi per unità di superficie, per unità di lunghezza o applicati semplicemente in un punto del dominio strutturale. Quest'ultimo, in particolare, rappresenta la tipologia più semplice da trattare per la derivazione del vettore dei carichi nodali e nel seguito se ne esplicita la derivazione. Considerando un carico concentrato $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \left\{ P_{u_x} \quad P_{u_y} \quad P_{u_z} \right\}^T \tag{2.45}$$

applicato nel punto $(x_p, y_p, z_p)$, la variazione di lavoro ch esso determina si può esprimere come:

$$\delta L_{ext} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} \tag{2.46}$$

Sostituendo nella 2.46 l'Eq. 2.20 si ricava:

$$\delta L_{ext} = \delta \mathbf{q}_{sj}^T F_s N_j \mathbf{P} = \delta \mathbf{q}_{sj}^T \mathbf{P}^{sj} \tag{2.47}$$

dove $F_s$ viene valutata in $(x_p, z_p)$, mentre $N_j$ in $y_p$. Quest'ultima equazione permette di individuare le variabili di spostamento sulle quali agisce il carico, identificando le componenti del nucleo che consentono l'assemblaggio del vettore dei carichi nodali globale.

## 2.8 Estensione della Formulazione FEM a Strutture Laminate

Quest'ultima sezione completa il capitolo inerente alla formulazione strutturale del presente lavoro. Si andrà ora a descrivere la procedura di assemblaggio delle matrici

FEM per i differenti modelli di espansione per il campo di spostamenti lungo la sezione trasversale che sono stati descritti in precedenza, cioè i modelli che si basano su polinomi di Taylor e di Lagrange, quando applicati a strutture laminate. Viene posto l'accento su questa trattazione dal momento che i materiali compositi sono ormai di largo impiego nell'industria aerospaziale e occorre perciò fornire maggiori dettagli sulla loro implementazione all'interno di un'analisi agli elementi finiti. Per le strutture multistrato in esame, esistono fondamentalmente due approcci di modellizzazione. Il primo prende il nome di Equivalent Single-Layer, al quale ci si riferisce con l'acronimo ESL; il secondo viene invece definito approccio Layer Wise, indicato con LW.

Nel caso del modello ESL, i contributi di ciascuno strato che costituisce la struttura vengono sommati all'interno della matrice di rigidezza. Ciò che ne risulta è una omogenizzazione delle proprietà di ciascuno strato e il modello risultante viene descritto attraverso un insieme di variabili associate all'intero multistrato. Una più chiara rappresentazione del procedimento di assemblaggio della matrice di rigidezza nell'ambito della CUF per questa tipologia di modello è rappresentata in figura 2.5. Entrambi i modelli TE e LE possono essere utilizzati all'interno di questa tipologia di approccio.

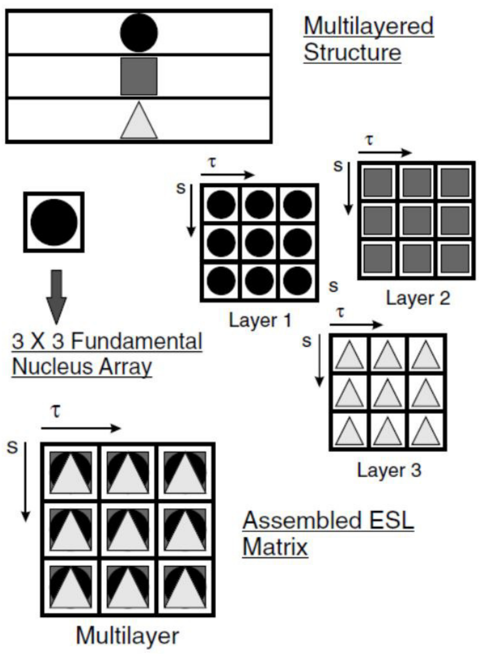



Figura 2.5: Schema di assemblaggio ESL

Nella modellizzazione LW, al contrario della precedente, ogni singolo strato viene definito da un insieme di variabili che lo caratterizzano e l'omogenizzazione delle proprietà avviene solo alle interfacce dei singoli strati.

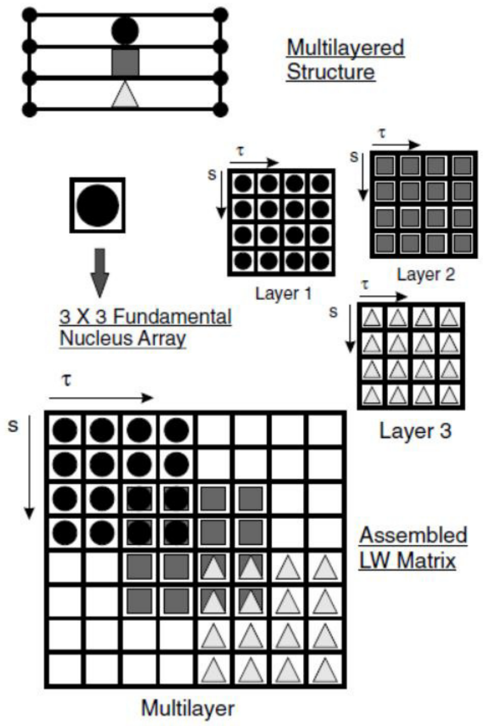



Figura 2.6: Schema di assemblaggio LW

In questo modo, la descrizione della sezione trasversale viene condotta semplicemente considerando differenti elementi LE, o delle loro combinazioni, per ogni strato come è cioè stato fatto nelle precedenti analisi. L'omogenizzazione è quindi condotta in corrispondenza dei nodi della sezioni che sono condivisi all'interfaccia tra uno strato e l'altro. In questo modo ogni singolo layer che costituisce il cross-ply riesce a conservare le sue proprietà e la descrizione del comportamento della sezione risulta più accurata. La procedura di assemblaggio della matrice di rigidezza viene quindi mostrata in figura 2.6, così da meglio comprenderne l'aspetto che distingue questo modello dal precedente. Va comunque specificato che questa tipologia approccio, che è stato implementato solo sfruttando i modelli LE, sarebbe anche adattabile alle espansioni polinomiali di Taylor. In quest'ultimo caso, tuttavia, sarebbe necessario introdurre delle equazioni aggiuntive in modo da poter correttamente imporre le condizioni di interfaccia tra i vari strati.

In [75] è possibile consultare l'estensione degli approcci descritti alla metodologia Component-Wise, in merito alla quale nella sezione successiva saranno forniti alcuni cenni.

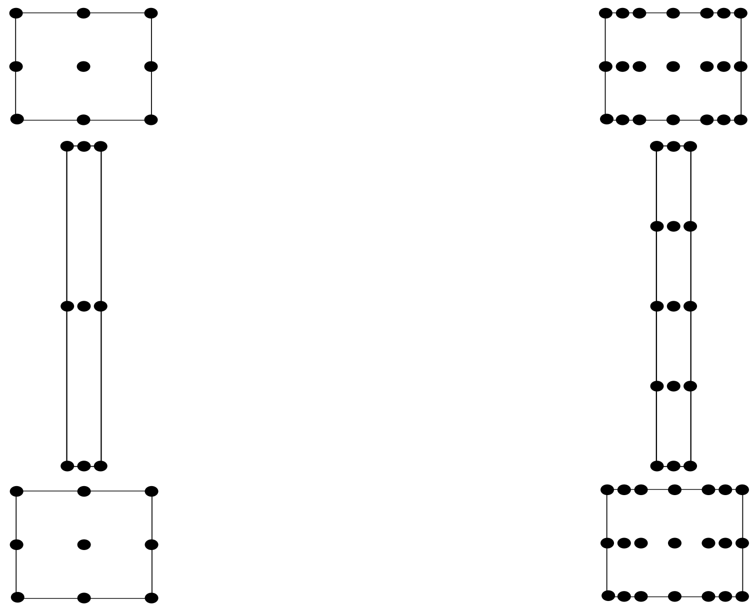
## 2.9 Modelli Component-Wise

Dal momento che parte dei risultati numerici che verranno forniti nel capitolo dedicato sarà relativa all'analisi statica e dinamica (nel capitolo successivo verranno presentate le metodologie di analisi in questo ambito) di strutture rinforzate, di largo impiego in applicazioni aeronautiche, si vogliono ora fornire alcune nozioni relative all'approccio necessario per modellare questo tipo di componenti strutturali nell'ambito della CUF.

Nell'analisi strutturale di configurazioni alari, ciascun componente viene modellato per mezzo di differenti elementi. A titolo d'esempio, riferendosi ad un classico cassone alare costituito da correnti e pannelli, ricorrendo ad elementi beam si modellano i primi, mentre i secondi sono modellati servendosi di elementi piastra bidimensionali. L'aspetto innovativo che la metodologia Component-Wise (CW) introduce quando abbinata alla CUF è quello di modellare ciascun componente per mezzo di elementi finiti 1D di ordine di espansione arbitrario. Il vantaggio che chiaramente deriva da questa tipologia di approccio è quello di non dover ricorrere ad una formulazione ad hoc per ciascuno componente strutturale.

Come largamente discusso nelle sezioni precedenti, mediante la CUF è possibile implementare all'interno della formulazioni strutturale modelli di ordine elevato mediante l'utilizzo polinomi di Taylor o Lagrange. In quest'ultimo caso, la formulazione che ne discende applicata alla metodologia CW consente di modellare la sezione trasversale di ciascun componente mediante elementi di Lagrange. In questa metodologia, ogni elemento mantiene le proprie caratteristiche geometriche e del materiale, venendo poi assemblato con gli altri lungo la sezione trasversale per calcolare la matrice di rigidezza globale. Mediante questa metodologia, è possibile ottenere modelli strutturali maggiormente accurati sfruttando un raffinamento locale della discretizzazione mediante elementi di Lagrange o ricorrendo ad elementi di ordine più elevato. In figura 2.7 vengono mostrati due possibili modelli CW per un pannello rinforzato mediante due correnti, il primo ottenuto sfruttando tre elementi L9, figura 2.7a, il secondo, in figura 2.7b, sfruttando una discretizzazione della sezione trasversale mediante 8 elementi L9.

Sfruttando elementi di Lagrange all'interno dell'approccio CW è possibile considerare la sezione trasversale della struttura come la somma di differenti sotto-domini, ognuno dei quali discretizzato mediante elementi 1D di ordine elevato. Aspetto particolarmente interessante da osservare è che l'utilizzo di questi particolari modelli strutturali consente di imporre la continuità degli spostamenti tra i vari componenti senza dover ricorrere ad alcun artificio matematico. Come ampiamente argomentato in sezione 2.2.2 infatti, per questa tipologia di modelli le incognite sono esclusivamente spostamenti traslazionali. In [75], [76] e [77] è possibile consultare dettagli aggiuntivi a quanto riportato in questa sezione in merito all'applicazione di elementi di Lagrange per modelli Component-Wise.



(a) 3L9 (b) 8L9

Figura 2.7: Modelli Component-Wise per correnti e panello

Discorso differente va invece fatto in merito all'utilizzo di modelli di ordine elevato che fanno uso di polinomi di Taylor quando essi sono sfruttati all'interno della metodologia CW. In questo caso infatti non è possibile imporre semplicemente la continuità degli spostamenti nelle zone di accoppiamento, ma è necessario adottare un approccio matematico dedicato nel quale vengono sfruttati i moltiplicatori di Lagrange. Ulteriori dettagli in merito a tale formulazione non sono qui riportati, ma possono essere consultati in [78] e [79].

# Capitolo 3

# La risposta Dinamica

Questo capitolo sarà dedicato all'analisi di risposta dinamica applicata al modello strutturale appena introdotto. In questo lavoro di tesi, in particolare, l'attenzione sarà rivolta alla risoluzione del problema dinamico non smorzato. Definito dunque il problema, si procederà con la descrizione dei metodi numerici che verranno utilizzati per condurre le analisi dinamiche mostrate nei capitoli successivi, ovvero il metodo di Newmark e la sovrapposizione modale, o mode superposition. Particolare attenzione sarà infine posta sulla descrizione di un modello di raffica che verrà ampiamente utilizzato nel corso del presente lavoro di tesi, ovvero la modellizzazione discreta del tipo 1-meno-coseno. I carichi di raffica, infatti, costituiscono un esempio tipico di carico inerziale nell'ambito aeronautico e la loro azione sulla struttura ne influenza la risposta dinamica, sulla quale agire mediante l'implementazione del sistema di controllo.

## 3.1 Soluzione del Problema Dinamico

Si consideri un sistema strutturale caratterizzato da più gradi di libertà (DOFs). La risposta dinamica che esso esibisce nel momento in cui è soggetto all'azione di carichi variabili nel tempo è descritta dal seguente sistema di equazioni [80]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t) \tag{3.1}$$

dove $\mathbf{M}$ è la matrice di massa, $\mathbf{C}$ quella di smorzamento mentre $\mathbf{K}$ è quella di rigidezza. Con $\mathbf{q}$ si indica il vettore, incognito, delle variabili di spostamento e $\mathbf{P}$ rappresenta infine il vettore dei carichi in funzione del tempo. Nel corso di questo lavoro, come già anticipato, si considererà il problema dinamico in assenza di smorzamento, ovvero ponendo $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. L'equazione 3.1 rappresenta un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficiente costanti, la cui risoluzione prevede l'impiego di particolari tecniche numeriche. In ambito pratico, i principali metodi utilizzati per la risoluzione di problemi dinamici possono essere raggruppati fondamentalmente in due categorie: i metodi a integrazione diretta e i metodi di sovrapposizione modale.

Per quanto riguarda i metodi a integrazione diretta, che prevedono l'utilizzo, ad esempio, di schemi numerici alle differenze centrate o metodi come quello di Houbolt o di Newmark, il sistema di equazioni 3.1 è risolto per mezzo di un certo schema di integrazione numerica nel tempo che permette di ricondursi ad un sistema di equazioni algebriche risolto per ogni passo temporale in cui si decide di discretizzare il dominio del tempo [74]. Delle metodologie citate, il metodo di Newmark, in particolare, è stato ampiamente utilizzato nel corso del presente lavoro di tesi per condurre analisi di risposta dinamica. Ad ogni modo, lo svantaggio principale di questa tipologia di tecniche risolutive è legato al largo impiego di risorse computazionali di cui necessitano. Inoltre, questa tipologia di schemi sono soggetti a problematiche di instabilità numerica. Tuttavia, questa tipologia di metodi trovano comunque largo impiego nell'ambito di problemi di dinamica strutturale. In [81],[82] e [83] il metodo di Newmark è stato adottato per analizzare il comportamento di differenti strutture solide e in parete sottile quando soggette a carichi armonici.

Nel momento in cui il costo computazionale necessario per condurre un'analisi di risposta dinamica mediante metodi a integrazione diretta nel tempo risulta eccessivamente gravoso, sfruttare metodi a sovrapposizione modale costituisce una valida alternativa. Il passaggio in coordinate modali, e quindi alle matrice generalizzate, infatti, consente di ridurre drasticamente le dimensioni del problema, dal momento che la soluzione è ottenibile sfruttando solamente i primi modi di vibrare risultanti dalla soluzione del problema agli autovalori. Proprio per questo aspetto vantaggioso, il *mode superposition method* è stato sfruttato ampiamente in letteratura nell'ambito della dinamica strutturale [74]. In [81], [84] e [83] il metodo è stato applicato su differenti configurazioni strutturali di impiego aerospaziale soggette a carichi armonici o di raffica.

Le sezioni successive saranno quindi dedicate alla descrizione delle tecniche numeriche sopracitate.

## 3.2 Il Metodo di Newmark

Come affermato in [74], nei metodi ad integrazione diretta come il metodo di Newmark, le equazioni del sistema 3.1 sono integrate sfruttando uno schema numerico *step-by-step*. Il termine "diretta" indica che l'integrazione numerica viene eseguita senza effettuare alcuna trasformazione delle equazioni considerate. Il primo aspetto principale di questa tipologia di tecniche risolutive è che l'equazione 3.1 non debba essere soddisfatta per qualunque istante temporale $t$, ma solo per un certo numero discreto di passi temporali $\Delta t$. Da ciò discende che l'equilibrio espresso dall'equazione di governo sarà soddisfatto solo su un numero finito istanti all'interno dell'intervallo temporale considerato. Il secondo aspetto caratteristico è che, all'interno di ogni step temporale $\Delta t$, si assume di conoscere la variazione delle variabili che descrivono il problema, cioè spostamenti, velocità e accelerazioni. Nota quindi la soluzione ad un certo passo temporale $t$, mediante l'integrazione diretta delle equazioni sarà perciò possibile determinare la soluzione all'istante $t + \Delta t$ successivo.

Considerando quindi il generico step temporale $t + \Delta t$, l'Eq. 3.1, specializzata per il problema dinamico non smorzato, può essere discretizzata nel seguente modo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} \tag{3.2}$$

Applicando il metodo di Newmark, la soluzione ad ogni passo temporale viene calcolata assumendo per ciascuno step la seguente espressione per le velocità e gli spostamenti:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{q}}_t + \left[(1-\delta)\,\ddot{\mathbf{q}}_t + \delta\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t \\ \mathbf{q}_{t+\Delta t} &= \mathbf{q}_t + \dot{\mathbf{q}}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{\mathbf{q}} + \alpha\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

dove $\alpha$ e $\delta$ sono parametri introdotti nello schema per assicurare l'accuratezza e la stabilità dell'integrazione. Nell'ambito di questa formulazione, ponendo $\delta = 0.5$ e $\alpha = 0.25$ lo schema che ne deriva è incondizionatamente stabile [74]. Sfruttando la regola dei trapezi, è possibile calcolare $\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$ e $\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$ dall'Eq. 3.3 in termini di $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$. A questo punto, per ciascuno step temporale si risolve la seguente equazione:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_{t+\Delta t} \tag{3.4}$$

dove:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} + \frac{1}{\alpha\left(\Delta t\right)^2}\mathbf{M} \\ \hat{\mathbf{P}} &= \mathbf{P} + \frac{1}{\alpha\left(\Delta t\right)}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_t + \frac{1}{2\alpha}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_t \end{aligned} \tag{3.5}$$

Tale procedura viene ripetuta per tutti gli step con cui è stato discretizzato l'intervallo temporale. Appare comunque chiaro come l'accuratezza della soluzione dipenda direttamente dalla scelta del time-step $\Delta t$. Maggiori dettagli in merito al procedimento risolutivo applicando il metodo di Newmark sono consultabili in [74].

## 3.3 La Sovrapposizione Modale

Come già anticipato, quando il metodo di Newmark o, più in generale, un qualsiasi metodo a integrazione diretta determina un dispendio eccessivamente elevato di risorse computazionali, il mode superposition method costituisce un'importante alternativa per la valutazione della risposta dinamica.

Riferendosi al sistema dinamico non smorzato:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t) \tag{3.6}$$

il vettore delle incognite $\mathbf{q}$, nell'ambito della sovrapposizione modale, può essere espresso nel seguente modo:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(t) \tag{3.7}$$

dove $\mathbf{\Phi}$ è una matrice $DOFs \times m$ nella quale sono contenuti $m$ autovettori $\mathbf{M}$-ortonormali, mentre $\mathbf{x}(t)$ è un vettore, funzione del tempo, di ordine $m$. Sostituendo la 3.7 nell'Eq. 3.6 e pre-moltiplicando ciascun termine per $\mathbf{\Phi}^T$ si ricava l'equazione della dinamica non smorzata in termini di spostamenti modali generalizzati:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{P}(t) \tag{3.8}$$

Con $\mathbf{\Omega}^2$ è indicata la matrice diagonale al cui interno sono contenuti gli autovalori $\omega_i^2$. In virtù della condizione di $\mathbf{M}$-ortogonalità degli autovettori, discendono quindi le seguenti uguaglianze:

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Omega}^2, \quad \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} \tag{3.9}$$

dove $\mathbf{I}$ è la matrice di identità $m \times m$.

Come si può osservare, in assenza di smorzamento l'Eq. 3.8 descrive un sistema di $m$ equazioni disaccoppiate che può essere rappresentato nel seguente modo:

$$\begin{cases} \ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = r_i(t) \\ r_i(t) = \mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{P}(t) \end{cases} \qquad i = 1,2,...,m \tag{3.10}$$

Mediante l'integrale di Duhamel è possibile calcolare la soluzione di ciascuna equazione:

$$x_i(t) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t r_i(\tau)\sin\omega_i\,(t-\tau)\,d\tau + \alpha_i \sin\omega_i t + \beta_i \sin\omega_i t \tag{3.11}$$

dove i parametri $\alpha_i$ e $\beta_i$ si ricavano dalle condizioni iniziali del problema 3.8.

Per una risposta completa del sistema, è necessario calcolare la soluzione per tutte le $m$ equazioni in 3.10. A questo punto, essendo il problema lineare, è possibile determinare l'incognita $\mathbf{q}(t)$ del problema dinamico mediante la sovrapposizione di ciascuna forma modale:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{\Phi_i} x_i(t) \tag{3.12}$$

Tuttavia, il vantaggio di questa tecnica risolutiva, consiste proprio nel fatto che, in generale, è possibile ottenere un'ottima approssimazione della soluzione completa considerando solamente una piccola frazione $n$ delle $m$ equazioni disaccoppiate, con $n \ll m$. É dunque possibile definire una soluzione approssimata $\mathbf{q}^n(t)$ nel seguente modo:

$$\mathbf{q}^n(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Phi_i} x_i(t) \tag{3.13}$$

la cui accuratezza è legata al numero di $n$ modi selezionato per valutare l'approssimazione. In sezione 5.2 verrà dimostrato come sia possibile, in generale, ottenere la convergenza della soluzione mediante un numero esiguo di modi di vibrare, se paragonati al numero di time-step necessari per ottenerla mediante il metodo di Newmark. Sempre in [74] è possibile consultare maggior dettagli in merito a questa tecnica numerica.

## 3.4 I Carichi Inerziali

L'analisi di risposta dinamica si determina a seguito dell'applicazione sul sistema considerato di carichi inerziali. Nell'ambito della CUF la risposta a questa tipologia di sollecitazioni è stata analizzata in [85] e [86]. In generale, il vettore dei carichi equivalenti derivante dall'azione di un campo di accelerazione $\ddot{\mathbf{u}}_0(x, y, z)$, si determina dalla variazione virtuale del lavoro dei carichi esterni:

$$\delta L_{ext} = \int_V \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}}_0 dV \tag{3.14}$$

Un esempio tipico di carichi inerziali sono i carichi da raffica. Essi, in generale, sono dovuti alla variazione dell'angolo d'attacco a seguito dell'azione di una raffica di velocità $u_g$. Supponendo, per semplicità, di considerare una raffica verticale, tale variazione è esprimibile con il seguente rapporto:

$$\Delta\alpha \approx \frac{u_g}{V_\infty} \tag{3.15}$$

dove con $V_\infty$ si indica la velocità di avanzamento del velivolo, ad esempio. La variazione di portanza a seguito dell'azione della raffica può dunque essere espressa come:

$$\Delta L = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S C_{L_\alpha} \Delta\alpha \tag{3.16}$$

dove $\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$ rappresenta la pressione dinamica, $S$ la superficie di riferimento dell'ala e $C_{L_\alpha}$ il coefficiente angolare della curva di portanza. A tale variazione di portanza si determina un incremento del fattore di carico $\Delta n$ esprimibile nel seguente modo:

$$\Delta n = \frac{\Delta L}{W} = \frac{\frac{\rho_\infty}{2} V_\infty u_g}{\frac{W}{S C_{L_\alpha}}} \tag{3.17}$$

### 3.4.1 Il Modello di Raffica Discreto Uno-meno-coseno

In natura, generalmente, le raffiche sono caratterizzate da un profilo continuo ed irregolare. Tuttavia, è possibile adottare un modello ideale e discreto che consenta di modellare la struttura della raffica mediante una funzione del tipo uno-meno-coseno distribuita nel tempo, come mostrato in figura 3.1, e con la seguente espressione:

$$u_g(t) = \frac{1}{2}U_0\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{t_g}\right) \tag{3.18}$$

dove $t_g$ è la durata della perturbazione mentre $U_0$ la velocità massima per il modello di raffica considerato. Sostituendo l'Eq. 3.18 nell'Eq. 3.17 si può ricavare

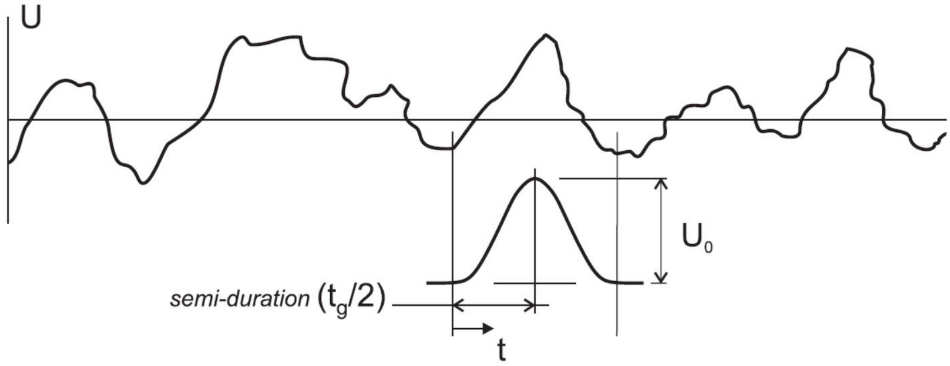



Figura 3.1: Modello di raffica uno-meno-coseno

l'incremento del fattore di carico in funzione del tempo:

$$\Delta n = \frac{\frac{\rho_\infty}{2}V_\infty U_0}{\frac{W}{SC_{L_\alpha}}}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{t_g}\right) \tag{3.19}$$

Noto il $\Delta n$ in funzione del tempo, sarà quindi possibile derivare i carichi da applicare al sistema per la valutazione della sua risposta dinamica.

Il vantaggio principale legato a questa tipologia di visualizzazione del disturbo atmosferico è da ricercarsi nella maggiore semplicità dell'implementazione all'interno dell'analisi e della valutazione della risposta della struttura [81]. Va inoltre precisato come, nel presente lavoro, nelle analisi dinamiche di risposta a carichi di raffica sono stati trascurati effetti aeroelastici che la raffica stessa induce. Infatti, i carichi di raffica determinano una deformazione della struttura, la quale a sua volta si traduce in una modifica delle forze aerodinamiche agenti sulla stessa e, in ultima analisi, in una conseguente modifica del $C_{L_\alpha}$ in Eq. 3.19 [81], [84]. Tale variazione del coefficiente angolare della curva di portanza risulta infatti trascurabile al diminuire dell'angolo di freccia [87].

# Capitolo 4

# L'Aeroservoelasticità

In questo capitolo, si analizza un semplice modello aeroelastico a due gradi di libertà utilizzando come un'espressione intazionaria e semplificata delle forze aerodinamiche; definite le matrici che caratterizzano il sistema di equazioni, viene quindi proposto un metodo per la determinazione della velocità di flutter basato sulla risoluzione del problema agli autovalori. A seguito di questa parte introduttiva, viene quindi mostrato il modello matematico del sistema aeroelastico in presenza di una superficie di controllo e del disturbo introdotto dalla presenza della raffica. Dopo aver fornito alcune nozioni di teoria del controllo, utili all'implementazione di un semplice controllore proporzionale integrativo, viene quindi mostrata la rappresentazione stato-spazio delle equazioni con la quale sarà possibile valutare la risposta del sistema.

## 4.1 Analisi Aeroelastica di una Sezione Tipica

La più semplice configurazione aeroelastica a cui fare riferimento per l'analisi di flutter è quella rappresentata in figura 4.1. Essa prende il nome di sezione tipica e la si può assimilare, ad esempio, ad una sezione di profilo alare lungo un'ala finita della quale si assume la rigidezza flessione e torsionale concentrata nelle due molle. Proprio in virtù del basso grado di complessità che lo caratterizza, nella letteratura riguardante l'aeroelasticità si può trovare un largo utilizzo di questo modello [2], [3], [4], [5], [6], [7]. La descrizione della geometria e dei parametri principali della sezione tipica presentata nel seguito seguirà quella fatta da Hodges e Pierce in [6].

In riferimento alla figura 4.1, si possono notare alcuni punti caratteristici. Nello specifico, con $P$ viene indicato l'asse elastico, con $C$ il centro di massa, con $Q$ il centro aerodinamico (che si assume collocato al quarto anteriore, in base alla teoria dei profili sottili in campo subsonico) e infine con $T$ si indica la posizione del quarto posteriore. Con $e$ e $a$ si indicano i parametri adimensionali (quindi $-1 \leq e \leq 1$ e $-1 \leq a \leq 1$) che definiscono, rispettivamente, la posizione dei punti $C$ e $P$. Per

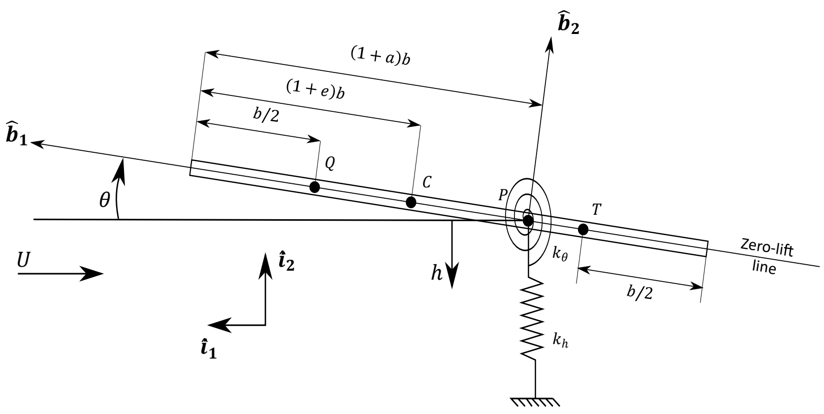



Figura 4.1: Geometria di una sezione tipica

$e = a = 0$, centro di massa e asse elastico si collocano a metà della corda della sezione. Quando $e$ ed $a$ assumono valori negativi (o positivi), centro di massa e asse elastico si spostano verso il bordo di attacco (o di fuga). Un parametro geometrico molto importante che caratterizza il sistema è rappresentato dalla porzione di corda che identifica la distanza tra il centro di massa e l'asse elastico. Tipicamente, questa distanza viene adimensionata rispetto alla corda media $b$, potendo così definire il cosiddetto parametro di squilibrio statico, indicato con $x_\theta = e - a$. Per valori positivi di $x_\theta$, il centro di massa risulta essere posteriore all'asse elastico, collocandosi in prossimità del bordo di fuga. Per valori positivi, al contrario, il centro di massa risulta essere collocato anteriormente rispetto all'asse elastico e prossimo al bordo di attacco. I gradi di libertà del sistema, misurati in corrispondenza dell'asse elastico, sono indicati con $h$ (positivo verso il basso) e $\theta$ e rappresentano la traslazione e la rotazione rigida nel piano della sezione. Questi due moti sono vincolati dalla presenza delle due molle, di costante elastica $k_h$ e $k_\theta$.

### 4.1.1 Sistema di Equazioni del Problema Aeroelastico

La metodologia per ricavare le equazioni del moto si basa sull'applicazione delle equazioni di Lagrange. Di conseguenza, definite l'energia cinetica e potenziale, del sistema, indicate rispettivamente con $K$ e $P$, e le forze generalizzate, $Q_i$, associate ai gradi di libertà e risultanti dall'azione dei carichi aerodinamici si può scrivere:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i}\right) = Q_i \qquad (i = 1,2,...,n) \tag{4.1}$$

Per il caso considerato, $n = 2$, $q_1 = h$ e $q_2 = \theta$. Note le espressioni dei termini che compaiono nell'Eq. 4.1, le equazioni del moto diventano:

$$\begin{aligned} & m\left(\ddot{h} + bx_\theta\ddot{\theta}\right) + k_h h = -L \\ & I_P\ddot{\theta} + mbx_\theta\ddot{h} + k_\theta\theta = M_{\frac{1}{4}} + b\left(\frac{1}{2} + a\right)L = M \end{aligned} \tag{4.2}$$

dove con $m$ si indica la massa della struttura e con $I_P = I_C + mb^2x_\theta^2$ il momento di inerzia polare rispetto all'asse elastico ($I_C$ è il momento di inerzia rispetto al centro di massa). Con $L$ si indica la portanza (che si può notare essere in verso opposto ad $h$), mentre con $M$ si indica il momento aerodinamico complessivo ($M_{\frac{1}{4}}$ rappresenta il momento aerodinamico applicato in $Q$). La derivazione completa delle equazioni non viene qui riportata, ma per maggiori dettagli è possibile riferirsi a [6].

Per quanto riguarda l'espressione delle forze aerodinamiche, si è scelto di utilizzare un modello bidimensionale instazionario semplificato di questo tipo:

$$\begin{aligned} & L = 2\pi\rho_\infty bU\left[U\theta + \dot{h} - b\left(\frac{1}{2} + a\right)\dot{\theta}\right] \\ & M_{\frac{1}{4}} = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

dove con $\rho_\infty$ si indica la densità della corrente di monte in moto a velocità $U$. Da questa espressione si può notare che, in accordo con la teoria dei profili sottili, la pendenza, $a$, della curva di portanza è stata assunta uguale a $2\pi$.

Le equazioni del moto rappresentate nell'Eq. 4.1 possono essere scritte adottando una notazione matriciale compatta che permette di rappresentarle nella forma di un classico sistema dinamico del secondo ordine:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D_a}\dot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{K} + \mathbf{K_a}\right)\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

dove con $\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} h & \theta \end{Bmatrix}^T$ si indica il vettore dei gradi di libertà. Con $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$ si indicano le matrici di massa e rigidezza strutturali riportate nell'Eq.4.5:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & mbx_\theta \\ mbx_\theta & I_P \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Andando a sostituire l'espressione delle forze aerodinamiche, riportate nell'Eq. 4.3, si ricavano immediatamente le matrici $\mathbf{D_a}$ e $\mathbf{K_a}$, di smorzamento aerodinamico e di rigidezza aerodinamica rispettivamente, riportate nell'Eq. 4.6:

$$\mathbf{D_a} = \begin{bmatrix} 2\pi\rho_\infty bU & -2\pi\rho_\infty b^2U\left(\frac{1}{2} + a\right) \\ -2\pi\rho_\infty b^2U\left(\frac{1}{2} + a\right) & 2\pi\rho_\infty b^2U\left(\frac{1}{2} + a\right)^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K_a} = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi\rho_\infty bU^2 \\ 0 & -2\pi\rho_\infty b^2U^2\left(\frac{1}{2} + a\right) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Come si può notare, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$ sono matrici simmetriche, al contrario di $\mathbf{D_a}$ e $\mathbf{K_a}$. In virtù di tale condizione, i gradi di libertà risultano accoppiati e, proprio in virtù di tale accoppiamento, il sistema può dar luogo al flutter. Altro aspetto su cui porre l'attenzione è che il sistema risulta essere omogeneo. Di conseguenza, non è possibile determinare la risposta dei gradi di libertà che caratterizzano il modello. Tuttavia, è possibile studiarne la stabilità andando a risolvere il problema agli autovalori.

### 4.1.2 Soluzione del Problema agli Autovalori

Il sistema aeroelastico rappresentato nell'Eq. 4.4 può essere risolto sfruttando una soluzione agli autovalori per determinarne le frequenze e gli smorzamenti relativi ad una specifica condizione di volo (definita dalla densità e dalla velocità della corrente di monte). Inoltre, benché tale sistema sia caratterizzato solo da due gradi di libertà, la procedura qui introdotta ha carattere del tutto generale, applicabile cioè ad un sistema aeroelastico ad $N$ gradi di libertà.

La prima operazione consiste nell'introdurre la seguente espressione banale:

$$\mathbf{I}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{I}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \tag{4.7}$$

dove $\mathbf{I}$ rappresenta la matrice identità, di dimensione $N \times N$ (nel caso considerato $2 \times 2$). Combinando l'Eq. 4.7 con l'Eq. 4.4, è possibile ottenere la seguente formulazione:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\left(\mathbf{K} + \mathbf{K_a}\right) & -\mathbf{D_a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

Questa equazione può essere riscritta nella seguente forma:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{K} + \mathbf{K_a}\right) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D_a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.9}$$

o in forma compatta:

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{4.10}$$

Come si può notare, l'Eq. 4.10 è un'equazione al primo ordine ma si noti come la matrice $\mathbf{A}$ abbia dimensione $2N \times 2N$, cioè il doppio di quelle del sistema aeroelastico definite nelle Eq. 4.5 e 4.6. A questo punto, si assuma per l'incognita $\mathbf{x}$ una soluzione armonica tale che:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0}e^{\lambda t} \tag{4.11}$$

In questo modo, l'Eq. 4.10 può essere scritta forma classica del problema agli autovalori, ovvero:

$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda\right)\mathbf{x_0} = \mathbf{0} \tag{4.12}$$

Per un sistema oscillante, come il sistema aeroelastico considerato, gli autovalori $\lambda_j$, con $j = 1,2,...,N$, della matrice $\mathbf{A}$ sono coppie complesse coniugate, la cui parte immaginaria rappresenta la frequenza di oscillazione mentre la parte reale lo smorzamento del $j$-esimo grado di libertà in corrispondenza della condizione di volo considerata. Nel momento in cui la parte reale dell'autovalore si annulla o, per meglio dire, nel momento in cui essa cambia di segno, passando da valori negativi a positivi, ecco che il sistema instabile per quella condizione di volo. Di conseguenza, valutando gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ per differenti condizioni di volo, è possibile determinare, ad esempio, la velocità in corrispondenza della quale il sistema diventerà instabile (con una risposta nel tempo caratterizzata da oscillazioni divergenti). In questo modo, oltre ad avere un'indicazione importante sulla stabilità del sistema, sarà possibile definire i range di velocità entro i quali andare a valutare la risposta del sistema aeroservoelastico, il quale verrà descritto nelle sezioni successive.

## 4.2 Modello Matematico di una Sezione Tipica con Superficie di Controllo

Si supponga ora di includere all'interno del modello della sezione tipica una superficie di controllo, come mostrato in figura 4.2. In questo modello semplificato, la rigidezza della molla con cui la superficie mobile è vincolata alla sezione e gli effetti inerziali ad essa associata vengono trascurati. Pertanto la superficie di controllo non è coinvolta nelle dinamiche di base dell'ala, ma agisce semplicemente come un dispositivo di controllo libero di deflettersi dell'angolo $\beta$ richiesto.

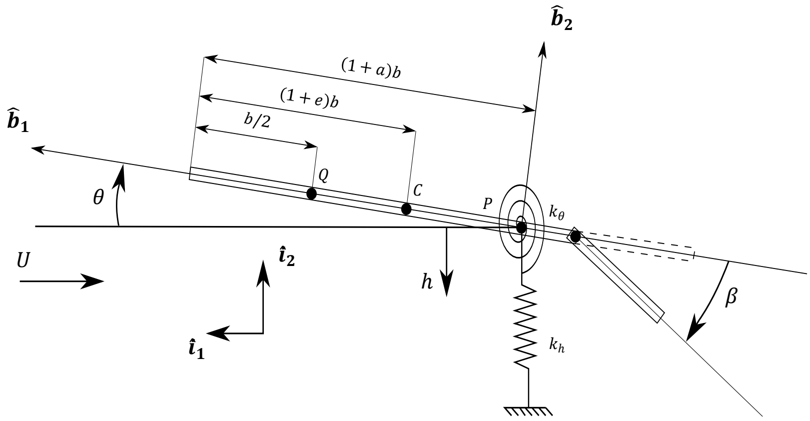



Figura 4.2: Sezione tipica con superficie di controllo

Con l'inclusione della superficie mobile, la portanza e il momento aerodinamico complessivo si modificano nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
L &= 2\pi\rho_\infty bU\left[U\theta + \dot{h} - b\left(\frac{1}{2}+a\right)\dot{\theta}\right] + \rho_\infty bU^2 a_c\beta \\
M &= b\left(\frac{1}{2}+a\right)L + 2\rho_\infty b^2U^2 b_c\beta
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

dove compaiono ora le componenti di portanza e momento aggiuntive a seguito della deflessione $\beta$ della superficie di controllo. Con $a_c$ e $b_c$ sono indicati, rispettivamente, i coefficienti di portanza e momento della superficie di controllo che, nel caso di un profilo bidimensionale, sono definiti dalla seguente equazione [3]:

$$
a_c = \frac{a}{\pi}\left[\cos^{-1}(1-2EE) + 2\sqrt{EE(1-EE)}\right], \quad b_c = -\frac{a}{\pi}(1-EE)\sqrt{EE(1-EE)}
\tag{4.14}
$$

dove $a$ rappresenta il coefficiente angolare della curva della portanza in funzione dell'angolo di attacco, considerato uguale a $2\pi$, mentre $EE$ il rapporto tra la corda della superficie di controllo e la corda totale della sezione.

Il sistema aeroelastico, in presenza della superficie di controllo, può essere rappresentato dalla seguente equazione:

$$
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D_a}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}+\mathbf{K_a})\,\mathbf{q} = \mathbf{g}\beta
\tag{4.15}
$$

dove si può notare come, a destra dell'uguale, compare ora un termine forzante dovuto alla deflessione della superficie di controllo e rappresentato dal vettore $\mathbf{g}$ che assume la seguente espressione:

$$
\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} -\rho_\infty U^2 b a_c \\ \rho_\infty U^2\left[b^2 a_c\left(\frac{1}{2}+a\right) + 2b^2 b_c\right] \end{Bmatrix}
\tag{4.16}
$$

## 4.3 Inclusione dei Termini di Raffica

A questo punto della trattazione, risulta molto interessante mostrare come includere nel sistema aeroelastico, comprendente la superficie di controllo, l'effetto indotto dalla presenza di una raffica verticale uniforme di velocità $u_g$. In questo modo, è possibile introdurre nel sistema un disturbo a cui il sistema aeroservoelastico vero e proprio, che verrà introdotto nel seguito, dovrà fare fronte.

In presenza di una raffica caratterizzata da una certa componente di velocità, l'effetto che si osserva è un istantaneo cambiamento dell'angolo di attacco, il quale, in prima approssimazione, può essere assunto uguale al rapporto tra la $u_g$ stessa e la velocità della corrente $U$, ovvero:

$$
\Delta\theta = \frac{u_g}{U}
\tag{4.17}
$$

Di conseguenza, nell'espressione della portanza sarà necessario considerare una componente aggiuntiva oltre a quelle già considerate nell'approssimazione instazionaria. Nello specifico, si avrà dunque:

$$L = 2\pi\rho_\infty bU\left[U\theta + \dot{h} - b\left(\frac{1}{2} + a\right)\dot{\theta} + \Delta\theta\right] + \rho_\infty bU^2 a_c\beta \tag{4.18}$$

Il sistema aeroelastico si modifica ulteriormente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D_a}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K_a})\,\mathbf{q} = \mathbf{g}\beta + \mathbf{f}\Delta\theta \tag{4.19}$$

e si definisce un ulteriore vettore forzante dovuto alla presenza della raffica e definito nel seguente modo:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} -2\pi\rho_\infty bU^2 \\ 2\pi\rho_\infty b^2U^2\left(\frac{1}{2} + a\right) \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

Noto l'andamento nel tempo della velocità di raffica, approssimandolo ad esempio con il modello uno-meno-coseno descritto in sezione 3.4.1, si può quindi valutare la risposta del sistema a questa tipologia di disturbo.

## 4.4 Introduzione al Controllo

Nel seguito verranno quindi esaminati alcuni semplici concetti di teoria del controllo, utili per meglio comprende la trattazione che verrà fatta nel seguito delle equazioni per il modello aeroservoelastico. Ottimi riferimenti bibliografici inerenti agli aspetti che a breve verranno descritti sono i testi di Raven [88] e Dorf e Bishop [89].

### 4.4.1 Sistemi ad Anello Aperto e Chiuso

Si consideri l'Eq. 4.19. Essa non è altro che la rappresentazione matematica di un elementare sistema ad anello aperto, in quanto consente di valutare la risposta o, per meglio dire, l'output del modello a seguito dell'applicazione su di esso di uno o più input esterni che, nel caso in esame, consistono nelle azioni combinate di superficie di controllo e raffica. Una rappresentazione qualitativa invece, che efficacemente descrive questo elementare sistema open loop è osservabile in figura 4.3.


Figura 4.3: Sistema ad anello aperto elementare

A questo sistema è possibile includere un controllore, come mostrato in figura 4.4. In questo modo, in riferimento sempre al caso considerato, l'azione della superficie di controllo non è più ascrivibile al semplice input esterno agente sul sistema, ma si tratta ora di un input di controllo necessario per ottenere una determinata risposta e risulta dipendente da come il controllore viene progettato, sfruttando dati raccolti in base ad esperienze precedenti o rilevazioni sperimentali ad esempio. Tuttavia, questa tipologia di configurazione presenta lo svantaggio di non consentire una misurazione diretta della grandezza da controllare, necessaria per stimare l'azione del controllo sul sistema stesso e, di conseguenza, correggere l'input del controllore nel caso in cui l'output del sistema non corrisponda a quello desiderato. Inoltre, il controllo che si ottiene da questa tipologia di configurazione non è in grado di compensare alcun disturbo esterno al sistema, come quello rappresentato dalla raffica.

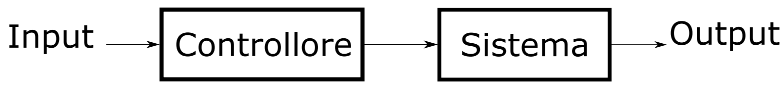



Figura 4.4: Sistema di controllo ad anello aperto

Una soluzione alternativa per ottenere un determinato effetto, un certo output, da parte del sistema è quella di effettuare un confronto continuo tra la risposta che si vuole ottenere e quella che effettivamente il sistema sta producendo. In questo modo, è possibile aggiornare continuamente l'output effettivo finché la differenza con quello richiesto tende ad annullarsi. La configurazione di controllo alternativa che espleta il funzionamento appena descritto è quella rappresentata in figura 4.5, dove viene mostrato quelle che è comunemente definito sistema ad anello chiuso. Come si può osservare, la caratteristica principale di tale set-up è quella di reintrodurre l'output all'interno del sistema, che risulta quindi essere retroazionato, in modo così da poterlo confrontare con l'input in ingresso. La differenza tra i due segnali, alla quale è possibile riferirsi semplicemente come errore, viene passata al controllore il quale è progettato per fornire l'output richiesto dal sistema.

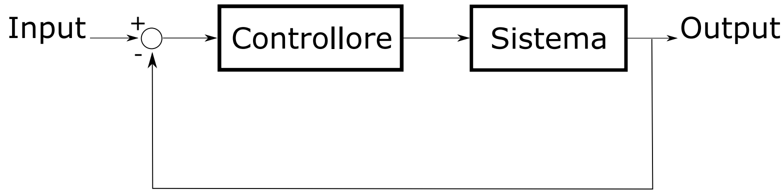



Figura 4.5: Sistema di controllo ad anello chiuso

### 4.4.2 Controllo Proporzionale Integrativo Derivativo (PID)

Nella sezione precedente, si è sottolineato un aspetto molto importante del sistema ad anello chiuso, cioè come in tale configurazione il controllo che esso realizza sia il risultato di un confronto continuo tra una risposta desiderata e quella che si sta ottenendo. Come detto, ci si può riferire alla loro differenza definendo il segnale di errore, indicato con $E(t)$. Nell'ambito delle differenti strategie di controllo che possono essere applicate, quella più semplice e comune consiste quindi nel progettare il controllore in modo che l'output di controllo venga regolato da una combinazione lineare del segnale di errore stesso (azione Proporzionale), del suo integrale nel tempo (azione Integrale) e della sua derivata nel tempo (azione Derivativa). In questo modo è possibile definire un controllore Proporzionale-Integrativo-Derivativo, comunemente indicato come controllore PID, la cui variabile di controllo che esso determina, $h_{PID}(t)$, può essere espressa dalla seguente equazione:

$$h_{PID}(t) = K_p E(t) + K_i \int E(t)\ dt + K_d \frac{dE}{dt} \tag{4.21}$$

dove con $K_p$, $K_i$ e $K_d$ sono i guadagni del proporzionale, integrativo e derivativo rispettivamente. Il valore di questi tre termini è generalmente determinati ricorrendo a regole empiriche, ma una ulteriore verifica delle prestazioni del sistema è comunque necessaria.

Il termine proporzionale determina la velocità della risposta. Il termine integrale, che effettua una regolazione in base ai valori passati dell'errore, consente di migliorare l'accuratezza della risposta stazionaria del sistema. Infine, l'azione derivativa, grazie alla quale la regolazione tiene conto della velocità di variazione dell'errore, consente di ottenere benefici in termini di stabilità della risposta. Tuttavia, dal momento che quest'ultima azione tende ad incrementare la sensibilità del controllore, essa viene spesso tralasciata nell'implementazione del PID, al quale solitamente si preferisce la versione PI, cioè proporzionale-integrativo. Proprio quest'ultima tipologia sarà quella che verrà implementata nel sistema aeroservoelastico in analisi.

## 4.5 Modello Aeroservoelastico Bidimensionale

Dopo aver valutato come viene modificato il modello matematico rappresentativo della sezione tipica a seguito dell'inclusione al suo interno di superficie di controllo e raffica, Eq. 4.19, e aver fornito le nozioni necessarie di teoria del controllo, si è ora pronti a definire il modello aeroservoelastico. Per farlo, è necessario introdurre il sistema di controllo.

### 4.5.1 Implementazione del Sistema di Controllo

Come illustrato nella sezione precedente, la maniera più semplice per includere un sistema di controllo è sfruttare un controllore PI, avendo spiegato quali sono le complicazioni derivanti dall'utilizzo dell'azione derivativa. Implementando questo tipo di approccio all'interno del sistema aeroelastico di riferimento, l'angolo di deflessione della superficie di controllo risulta essere direttamente proporzionale alla velocità e allo spostamento del sistema. Si supponga, per semplicità, che in corrispondenza del bordo di attacco della sezione sia posizionato un trasduttore e che la deflessione della superficie di controllo che esso determina risulti proporzionale allo spostamento, $z$, e alla velocità, $\dot{z}$, a cui esso è soggetto. In questo modo si ha:

$$\beta = K_v \dot{z} + K_d z \tag{4.22}$$

dove $K_v$ e $K_d$ sono i guadagni del PI. Per la sezione tipica considerata, lo spostamento e la velocità del bordo di attacco sono:

$$z = -h + (1+a)b\theta \Longrightarrow \dot{z} = -\dot{h} + (1+a)b\dot{\theta} \tag{4.23}$$

Sostituendo l'Eq. 4.23 nell'Eq. 4.22, si ricava l'espressione finale della deflessione della superficie di controllo:

$$\begin{aligned} \beta &= K_v \left[-\dot{h} + (1+a)b\dot{\theta}\right] + K_d \left[-h + (1+a)b\theta\right] \\ &= K_v \left\{-1 \quad (1+a)\,b\right\} \dot{\mathbf{q}} + K_d \left\{-1 \quad (1+a)\,b\right\} \mathbf{q} \end{aligned} \tag{4.24}$$

La risposta del sistema viene quindi retroazionata, così da determinare l'angolo di equilibratore definito dalla legge di controllo nell'Eq. 4.24 con il quale determinare la risposta aggiornata a seguito dell'azione del controllo. Una rappresentazione qualitativa del modello aeroservoelastico, comprendente l'input esterno di raffica e il controllo in retroazione appena descritto, è osservabile nello schema a blocchi in figura 4.6.

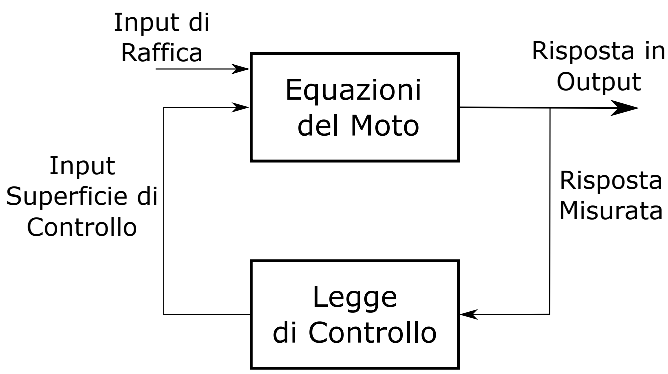



Figura 4.6: Schema a blocchi del sistema aeroservoelastico

### 4.5.2 Analisi di Stabilità del Sistema ad Anello Chiuso

Per poter valutare la stabilità del sistema ad anello chiuso è necessario includere la legge di controllo in retroazione, espressa dall'Eq. 4.24, all'interno dell'Eq 4.15. In questo modo, il sistema di equazioni del moto della sezione tipica in presenza di una superficie di controllo diventa:

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{D_a\dot{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K_a})\,\mathbf{q} = \mathbf{g}\beta = K_v\mathbf{g}\begin{Bmatrix}-1 & (1+a)\,b\end{Bmatrix}\mathbf{\dot{q}} + K_d\mathbf{g}\begin{Bmatrix}-1 & (1+a)\,b\end{Bmatrix}\mathbf{q} \tag{4.25}$$

In modo da semplificare la notazione, si introduce la seguente uguaglianza:

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} -\rho_\infty U^2 b a_c \\ \rho_\infty U^2\left[b^2 a_c\left(\frac{1}{2}+a\right)+2b^2 b_c\right]\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} \tag{4.26}$$

Così facendo, l'Eq 4.25 diventa:

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{D_a\dot{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K_a})\,\mathbf{q} = K_v\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1 & (1+a)\,b\end{Bmatrix}\mathbf{\dot{q}} + K_d\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1 & (1+a)\,b\end{Bmatrix}\mathbf{q} \tag{4.27}$$

Definendo le seguenti matrici di feedback:

$$\mathbf{D_g} = K_v\begin{bmatrix} -g_1 & g_1(1+a)b \\ -g_2 & g_2(1+a)b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K_g} = K_d\begin{bmatrix} -g_1 & g_1(1+a)b \\ -g_2 & g_2(1+a)b \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Sostituendo queste nuove matrici nell'Eq. 4.27 si ottiene il sistema finale:

$$\mathbf{M\ddot{q}} + (\mathbf{D_a} - \mathbf{D_g})\,\mathbf{\dot{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K_a} - \mathbf{K_g})\,\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{4.29}$$

Si può a questo punto procedere con l'analisi di stabilità del sistema. L'Eq. 4.29 ha una validità assolutamente generale ed è quindi possibile effettuare un'analisi di stabilità con lo stesso procedimento descritto per il sistema aeroelastico classico, andando cioè a risolvere il problema agli autovalori descritto nell'Eq. 4.12, dove per il sistema ad anello chiuso considerato si avrà:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{K_a} - \mathbf{K_g}) & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D_a} - \mathbf{D_g}) \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Appare evidente come, rispetto al caso classico, la dinamica del sistema risulta ora alterata dalla presenza delle matrici di feedback, le quali introducono nel sistema dei contributi di rigidezza e smorzamento aggiuntivi. Questo aspetto andrà perciò a modificare il comportamento aeroelastico e, in un'ultima analisi, la velocità di flutter. Sarà dunque possibile andare ad analizzare la stabilità del sistema non solo al variare della condizione di volo, ma anche e per differenti combinazioni dei gain $K_v$ e $K_d$ e valutarne l'effetto sul calcolo della condizione di flutter.

### 4.5.3 Riposta alla Raffica del Sistema ad Anello Chiuso

Andando ad includere nell'Eq. 4.29 del sistema ad anello chiuso la forzante, rappresentata dall'azione della raffica, si ricava:

$$\mathbf{M\ddot{q}} + (\mathbf{D_a} - \mathbf{D_g})\,\mathbf{\dot{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K_a} - \mathbf{K_g})\,\mathbf{q} = \mathbf{f}\Delta\theta \tag{4.31}$$

ed è ora possibile valutare la risposta del sistema alla raffica in presenza di un controllo in retroazione. Determinata la risposta, è possibile calcolare direttamente la deflessione della superficie di controllo sfruttando l'Eq. 4.24.

Bisogna però sottolineare un aspetto legato all'implementazione della legge di controllo. Se assumere $\beta$ linearmente dipendente dallo spostamento e dalla velocità del modello può rappresentare, da un lato, una tipologia di controllo efficiente per attenuare la risposta alla raffica, dall'altro è necessario non trascurare la fattibilità tecnologica di tale implementazione. Infatti, ad esempio, possono essere presenti limitazioni sulla massima escursione che la superficie di controllo può realizzare (ad esempio $\pm 15°$). Benché quindi si stia facendo riferimento ad un modello semplificato, l'analisi deve comunque collocarsi all'interno di opportuni limiti di fattibilità e ciò sarà possibile andando a selezionare valori opportuni dei gain $K_v$ e $K_d$.

### 4.5.4 Rappresentazione Stato-Spazio

La risoluzione dell'Eq. 4.31 può avvenire nel dominio del tempo ricavando da essa il sistema stato-spazio corrispondente, il quale si basa sui cosiddetti stati del sistema. Gli stati, o variabili di stato, di una dato sistema dinamico sono definiti come quell'insieme minimo di variabili tale che la loro conoscenza al generico istante $t_0$, in aggiunta alle informazioni provenienti dagli input applicati in qualsiasi istante $t > t_0$, sono sufficienti a determinare lo stato del sistema per qualsiasi istante $t > t_0$ [90]. Definiti quanti e quali stati del sistema considerare, la sua dinamica è dunque completamente definita.

La modellazione mediante variabili di stato consente di modellare qualsiasi set di equazioni differenziali nella seguente forma matriciale:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \tag{4.32}$$

Indicando con $N$ il numero di variabili di stato che definiscono il sistema, con $NI$ gli input considerati e $NO$ gli output, $\mathbf{x}$ è il vettore di stato $N \times 1$, $\mathbf{u}$ il vettore $NI \times 1$ degli input e $\mathbf{y}$ il vettore $NO \times 1$ degli output. Con $\mathbf{A}$ si indica la matrice di stato $N \times N$, con $\mathbf{B}$ la matrice $N \times NI$ degli input, con $\mathbf{C}$ la matrice $NO \times N$ degli output, mentre con $\mathbf{D}$ la matrice $NI \times NO$ di collegamento input-output. L'Eq. 4.32 può quindi essere risolta nel dominio del tempo ricorrendo all'integrazione numerica per ottenere la risposta del generico sistema a qualsiasi input.

A questo punto, non resta che modellare l'Eq. 4.31 del secondo ordine in un modello stato-spazio del primo ordine. Si introduca a tal proposito il seguente vettore di stato:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} h \\ \theta \\ \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \Longrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \tag{4.33}$$

Per il caso bidimensionale considerato, l'input del sistema è rappresentato dalla raffica:

$$\mathbf{u} = \left\{ \Delta\theta \right\} \tag{4.34}$$

In questo modo, è possibile scrivere l'Eq. 4.31 nella forma 4.32 con:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{K} + \mathbf{K_a} - \mathbf{K_g}\right) & -\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{D_a} - \mathbf{D_g}\right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Come si può notare, la matrice di stato non è altro che la matrice di sistema del problema agli autovalori per l'anello chiuso. Analogamente a quanto visto per l'analisi di stabilità, ridurre un problema dinamico del secondo ordine in un modello stato-spazio del primo, comporta la risoluzione di un problema di dimensioni doppie (cioè con il doppio delle equazioni coinvolte) rispetto al problema originario. Si supponga ora che la risposta del sistema sia data in termini di spostamento e velocità della sezione, cioè:

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} z \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \tag{4.36}$$

Nel caso in cui il vettore di output faccia riferimento, ad esempio, a misure relative al bordo di attacco della sezione, ricorrendo all'Eq. 4.23, si avrà:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & (1+a)b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & (1+a)b \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

Appare chiaro che la matrice $\mathbf{C}$ si possa adattare per qualsiasi tipo di output del sistema. Se, ad esempio, si volesse valutare la risposta del sistema in termini dei soli stati che lo caratterizzano, cioè $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, appare chiaro che la matrice $\mathbf{C}$ sarà semplicemente $\mathbf{C} = \mathbf{I}_N$, con $\mathbf{I}$ matrice identità di ordine $N = 4$, essendo questo il numero degli stati che descrivono la dinamica del sistema bidimensionale considerato. Infine, normalmente, si assume $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

Note quindi le matrice del modello stato-spazio, possono essere risolte nel dominio del tempo così da ricavare gli stati del sistema ad anello chiuso, contenuti nel vettore $\mathbf{x}$, e l'output misurato $\mathbf{y}$, a seguito dell'input di raffica. Questa tipologia di modellazione, oltre che consentire di ricavare immediatamente una risposta nel dominio del tempo, consente anche di implementare all'interno del modello l'effetto di non linearità strutturali e di controllo.

# Capitolo 5

# Risultati Numerici

Il presente capitolo è dedicato all'applicazione numerica dei concetti teorici visti nei capitoli precedenti. Il primo set di analisi è dedicato alla valutazione della risposta statica di travi a sezione solida e in materiale isotropo al variare della geometria, della mesh e del modello strutturale. La correzione del fenomeno dello shear locking viene dunque discussa. Travi in materiale ortotropo, a singolo e multistrato, sono state analizzate, fornendo alcuni commenti in merito all'utilizzo di differenti modelli strutturali per la valutazione della distribuzione degli stress lungo lo spessore. L'analisi è stata dunque estesa a strutture rinforzate in modo da valutare differenti modelli CW. Varie configurazioni strutturali sono state prese in considerazione per la valutazione della risposta dinamica a carichi sinusoidali applicati a strutture solide, in parete sottile e rinforzate considerando differenti modelli strutturali. La valutazione della risposta nel tempo ad una carico di raffica per un'ala completa conclude il set di analisi dinamiche. Si passa dunque alle analisi aeroelastiche sfruttando modelli a parametri concentrati dei quali è stata determinata la condizione di flutter al variare del modello aerodinamico e degli input del sistema. Il controllo in retroazione è stato infine implementato e l'effetto sulla stabilità e sulla risposta alla raffica del sistema è stato ampiamente discusso considerando, inoltre, differenti valori di estensione della superficie di controllo el'effetto della geometria e del materiale.

## 5.1 Analisi statiche

Le prime analisi che verranno discusse hanno come obbiettivo quello di andare a valutare il miglior compromesso tra mesh strutturale e modello di espansione adottato, considerando il caso molto semplice di una trave a sezione solida in materiale isotropo, soggetta a flessione e in due differenti configurazioni geometriche. Si andrà quindi a discutere in merito al fenomeno dello shear locking. Analoghe analisi saranno svolte nei confronti di travi in materiale ortotropo a singolo strato e a tre strati cross-ply con laminazione 0/90/0, concentrandosi maggiormente sulla distribuzione degli stress lungo lo spessore, in modo da poter valutare quale modello ne consenta una maggiormente accurata descrizione. Si concluderà quindi discutendo in merito alla valutazione della risposta statica di strutture rinforzate multi-componente quali un cassone costituito da due correnti e un pannello e un cassone rettangolare.

### 5.1.1 Trave in Materiale Isotropo

Si consideri una trave a sezione solida in materiale isotropo della quale in figura, 5.1, è possibile osservare la geometria sezione trasversale e il relativo sistema di riferimento considerato. La trave è a sezione compatta quadrata con $b = h = 0.2\ m$. Il materiale, come anticipato, è isotropo e caratterizzato da un modulo di Young $E = 75\ GPa$, un coefficiente di Poisson $\nu = 0.33$ e una densità $\rho = 2700\ kg/m^3$. Due differenti valori del rapporto di snellezza saranno considerati, ovvero $L/h = 100$ e $L/h = 10$, dove con $L$ si indica la lunghezza della trave. In $y = 0$ è applicato il vincolo di incastro, mentre nel centro della sezione a $y = L$ è applicato un carico concentrato lungo la direzione $z$ di intensità $F_z = -50\ N$. Un'integrazione SELI è attivata in modo così da poter correggere il fenomeno dello shear locking. Considerazioni in merito verranno fatte più precisamente nel seguito.

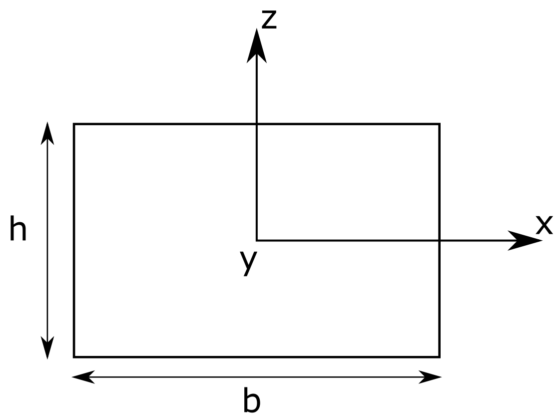



Figura 5.1: Trave analizzata e sistema di riferimento

Il comportamento meccanico della trave sarà analizzato in termini di spostamento all'estremo libero, valutato in corrispondenza del punto di applicazione del carico. Per confronto, si riporta quindi la formulazione analitica del massimo spostamento all'estremo libero fornito dalla teoria di Eulero-Bernoulli applicata al'equazione della linea elastica:

$$u_{zb} = \frac{F_z L^3}{3EI} \tag{5.1}$$

dove con $I$ si indica il momento di inerzia della sezione.

I primi risultati che vengono riportati e discussi, tabelle 5.1 e 5.2, sono relativi all'utilizzo di differenti mesh strutturali, considerando le teorie classiche di Eulero e Timoshenko, indicate con EBBT e TBT, e modelli più raffinati ottenuti mediante polinomi di Taylor di ordine N per modellare il campo di spostamenti lungo la sezione trasversale.

| No. Elementi | EBBM | TBT | N=1 | N=2 | N=3 | N=4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_z \times 10^2$ $[m]$, $u_{zb} \times 10^2 = -1.333$ $[m]$ | | | | | | |
| B2 | | | | | | |
| 1 | -1.000 | -1.000 | -1.000 | -0.893 | -0.893 | -0.893 |
| 2 | -1.250 | -1.250 | -1.250 | -1.064 | -1.064 | -1.064 |
| 3 | -1.296 | -1.296 | -1.296 | -1.164 | -1.164 | -1.164 |
| 4 | -1.313 | -1.313 | -1.313 | -1.209 | -1.209 | -1.209 |
| 5 | -1.320 | -1.320 | -1.320 | -1.236 | -1.236 | -1.236 |
| 10 | -1.330 | -1.330 | -1.330 | -1.286 | -1.286 | -1.286 |
| 20 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.310 | -1.310 | -1.310 |
| 40 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.322 | -1.322 | -1.322 |
| B3 | | | | | | |
| 1 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.157 | -1.157 | -1.157 |
| 2 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.244 | -1.244 | -1.244 |
| 3 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.274 | -1.274 | -1.274 |
| 4 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.289 | -1.289 | -1.289 |
| 5 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.298 | -1.298 | -1.298 |
| 10 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.315 | -1.315 | -1.315 |
| 20 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.324 | -1.324 | -1.324 |
| 40 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.329 | -1.329 | -1.329 |
| B4 | | | | | | |
| 1 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.239 | -1.239 | -1.239 |
| 2 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.286 | -1.286 | -1.286 |
| 3 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.302 | -1.302 | -1.302 |
| 4 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.310 | -1.310 | -1.310 |
| 5 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.314 | -1.314 | -1.314 |
| 10 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.324 | -1.324 | -1.324 |
| 20 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.328 | -1.329 | -1.329 |
| 40 | -1.333 | -1.333 | -1.333 | -1.331 | -1.331 | -1.331 |

Tabella 5.1: Effetto della mesh strutturale sullo spostamento trasversale $u_z$ considerando differenti teorie. Rapporto di snellezza $L/h = 100$

Come mostrato in tabella 5.1, in riferimento alla trave caratterizzata da un rapporto di snellezza $L/h = 100$, si può notare come, per $N \geq 2$, la differenza nei risultati ottenuti, in termini di spostamento trasversale all'estremo libero, risulti minima a parità di mesh strutturale adottata. Inoltre, si può osservare come i risultati ottenuti mediante un modello lineare $N = 1$ combacino con quelli ricavate considerando le teorie classiche di Eulero-Bernoulli e Timoshenko. Si può quindi desumere che l'effetto del taglio per la configurazione geometrica considerata risulti essere trascurabile. Si può inoltre notare come, per la geometria considerata, le teorie classiche, a parità di mesh adottata, consentano di descrivere accuratamente la risposta statica della trave.

L'effetto della correzione del Poisson Locking [70] è osservabile in figura 5.2 dove, considerando una mesh di elementi beam a due nodi, i valori ottenuti di spostamento trasversale all'estremo libero sono stati riportati per differenti modelli strutturali. Si può osservare infatti come, a parità di numero di elementi, un modello $N = 1$ mostri un più rapido rateo a convergenza rispetto a modelli di ordine superiore, con i quali si ha convergenza alla soluzione analitica adottando un numero maggiore di elementi finiti. Il modello lineare, in questo caso, risulta dunque più accurato di modelli di ordine più elevato.

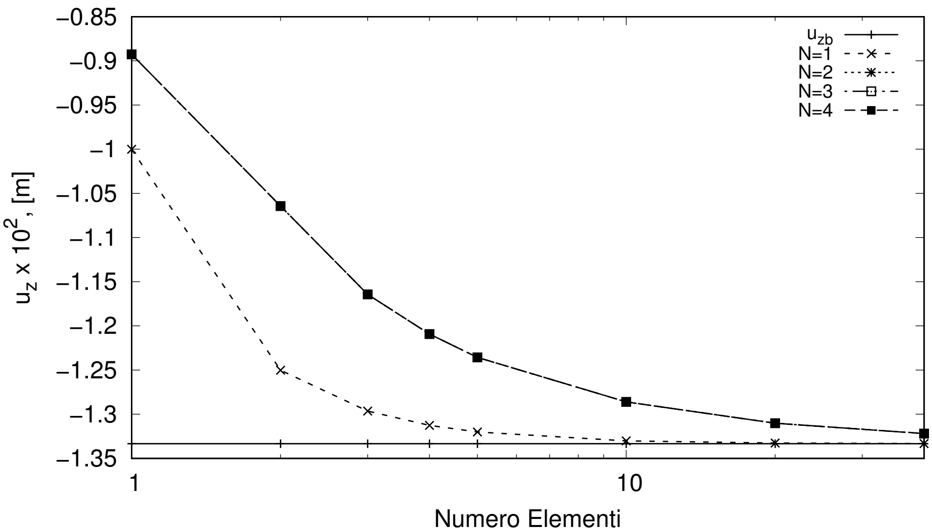



Figura 5.2: Analisi di convergenza per elemento $B2$ al variare dell'ordine di espansione utilizzato. Caso $L/h = 100$

Per concludere, in figura 5.3 sono riportati i valori di $u_z$ a fissato modello strutturale e facendo variare la mesh. Infatti, considerando $N = 4$ si può notare come, a parità di numero di elementi finiti considerati, elementi B3 e B4 permettano di ottenere più rapidamente la convergenza della soluzione numerica a quella analitica nell'Eq. 5.1 rispetto ad elementi finiti a due nodi e, in particolare, gli elementi B4 mostrano un più rapido andamento a convergenza e per questa ragione saranno largamente impiegati nelle analisi successive. La figura mette inoltre in evidenza come, in generale, indipendente dal tipo di elemento finito scelto per discretizzare la struttura lungo la direzione $y$, un raffinamento della mesh, cioè un aumento del numero di elementi, migliori la convergenza della soluzione numerica, incrementando perciò la flessibilità della struttura.

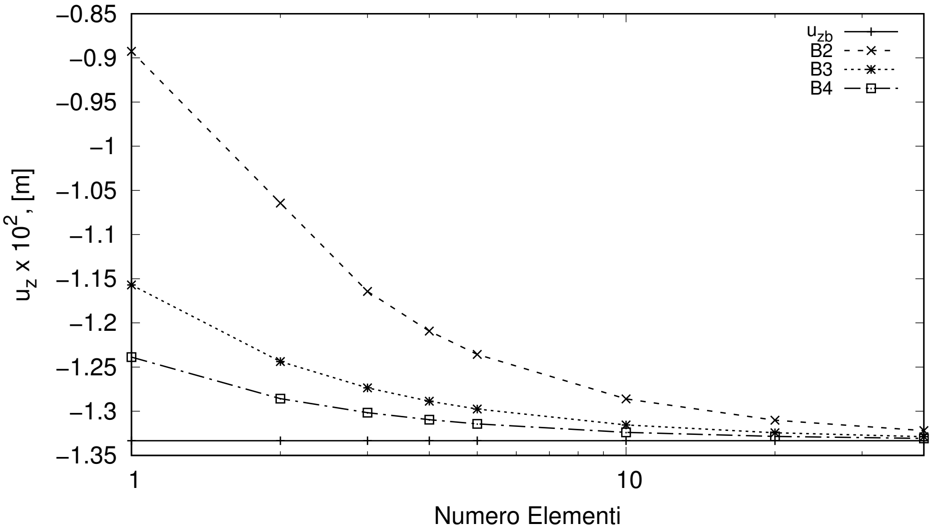



Figura 5.3: Analisi di convergenza per espansione mediante polinomio di Taylor $N = 4$ al variare degli elementi beam utilizzati. Caso $L/h = 100$

Per quanto riguarda la trave caratterizzata da $L/h = 10$, invece, come osservabile in tabella 5.2, l'aumento dell'ordine di approssimazione del modello risulta via via più influente e si può osservare come, per ottenere una piena convergenza dei risultati a parità di mesh strutturale utilizzata, sia necessario adottare almeno polinomi di Taylor cubici, cioè $N = 3$. Per questa configurazione geometrica, al contrario della precedente, l'effetto del taglio risulta essere maggiormente importante, in quanto i risultati forniti dal modello EBBT differiscono da quelli ricavati con i modelli TBT e $N = 1$. Si può quindi concludere come il modello di Eulero-Bernoulli nel caso di una trave tozza sia caratterizzato da una maggiore rigidezza rispetto ai modelli più accurati che consentano di prevedere l'effetto del taglio e, in generale, aumentare l'ordine di espansione del modello consente di ottenere una più accurata descrizione della risposta statica di travi tozze come quella considerata.

Si è anticipato in precedenza come i risultati presenti in questa sezione, siano stati ottenuti mediante un'integrazione selettiva delle funzioni di forma. Questa tipologia di tecnica numerica risulta necessaria per poter contrastare lo shear locking. Infatti, nel momento in cui si assumono a priori dei modelli cinematici, possono nascere dei fenomeni locali che, una volta che il modello viene utilizzato nel calcolo FEM, possono provocare delle problematiche nella convergenza della soluzione. Lo shear locking, in particolare, consiste in un fenomeno di natura numerica che si

| No. Elementi | EBBM | TBT | N=1 | N=2 | N=3 | N=4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_z \times 10^5$ $[m]$, $u_{zb} \times 10^5 = -1.333$ $[m]$ | | | | | | |
| B2 | | | | | | |
| 1 | -1.000 | -1.009 | -1.009 | -0.901 | -0.903 | -0.903 |
| 2 | -1.250 | -1.259 | -1.259 | -1.073 | -1.075 | -1.075 |
| 3 | -1.296 | -1.305 | -1.305 | -1.173 | -1.175 | -1.175 |
| 4 | -1.313 | -1.321 | -1.321 | -1.217 | -1.219 | -1.219 |
| 5 | -1.320 | -1.329 | -1.329 | -1.243 | -1.245 | -1.245 |
| 10 | -1.330 | -1.339 | -1.339 | -1.293 | -1.295 | -1.295 |
| 20 | -1.333 | -1.341 | -1.341 | -1.315 | -1.317 | -1.317 |
| 40 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.324 | -1.326 | -1.327 |
| B3 | | | | | | |
| 1 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.165 | -1.167 | -1.167 |
| 2 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.251 | -1.253 | -1.254 |
| 3 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.281 | -1.283 | -1.283 |
| 4 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.295 | -1.298 | -1.298 |
| 5 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.304 | -1.306 | -1.306 |
| 10 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.320 | -1.322 | -1.322 |
| 20 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.326 | -1.328 | -1.329 |
| 40 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.328 | -1.330 | -1.332 |
| B4 | | | | | | |
| 1 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.247 | -1.249 | -1.249 |
| 2 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.293 | -1.295 | -1.295 |
| 3 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.308 | -1.310 | -1.310 |
| 4 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.315 | -1.317 | -1.318 |
| 5 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.319 | -1.321 | -1.322 |
| 10 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.326 | -1.328 | -1.329 |
| 20 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.328 | -1.330 | -1.332 |
| 40 | -1.333 | -1.342 | -1.342 | -1.329 | -1.331 | -1.332 |

Tabella 5.2: Effetto della mesh strutturale sullo spostamento trasversale $u_z$ considerando differenti teorie. Rapporto di snellezza $L/h = 10$

manifesta quando lo spessore della trave diminuisce in relazione alla sua lunghezza. In particolare, esso consiste in una sovrastima della rigidezza a taglio della trave, diventando infinita quando lo spessore tende a zero [71]. Un modo per evitare la comparsa di questo effetto è quello di sfruttare un'integrazione ridotta dei termini della matrice di rigidezza relativi al taglio, dove per ridotta si intende un'integrazione in un minor numero di punti della sezione trasversale. Maggiori dettagli in merito alle metodologie per arginare il fenomeno dello shear locking sono forniti in [91], [71] e [73]. Dai risultati riportati in tabella 5.3, si può notare come tale correzione risulti essere molto efficiente sopratutto nel caso in cui $L/h = 100$, coerentemente con quanto scritto precedentemente. L'effetto risulta peraltro molto forte nel caso vengano adottati elementi $B2$, mentre per nel caso di $B3$ e $B4$ la correzione risulta meno determinante e la soluzione corretta è ottenibile senza alcun tipo di correzione dell'integrazione, soprattutto sfruttando un maggior numero di elementi. In generale, l'utilizzo di modelli di ordine elevato consente di arginare l'insorgere di questa instabilità numerica.

| No. Elementi | B2 | B2* | B3 | B3* | B4 | B4* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L/h = 100$, $u_z \times 10^2$ $[m]$, $u_{zb} \times 10^2 = -1.333$ $[m]$ | | | | | | |
| 1 | -0.893 | -0.0004 | -1.157 | -0.950 | -1.239 | -1.226 |
| 2 | -1.064 | -0.0014 | -1.244 | -1.191 | -1.286 | -1.278 |
| 3 | -1.164 | -0.0032 | -1.274 | -1.246 | -1.302 | -1.296 |
| 4 | -1.209 | -0.0056 | -1.289 | -1.270 | -1.310 | -1.306 |
| 5 | -1.236 | -0.0088 | -1.298 | -1.284 | -1.314 | -1.311 |
| 10 | -1.286 | -0.035 | -1.315 | -1.311 | -1.324 | -1.323 |
| 20 | -1.310 | -0.128 | -1.324 | -1.323 | -1.329 | -1.328 |
| 40 | -1.322 | -0.397 | -1.329 | -1.329 | -1.331 | -1.331 |
| $L/h = 10$, $u_z \times 10^5$ $[m]$, $u_{zb} \times 10^5 = -1.333$ $[m]$ | | | | | | |
| 1 | -0.903 | -0.035 | -1.167 | -0.988 | -1.249 | -1.240 |
| 2 | -1.075 | -0.127 | -1.254 | -1.222 | -1.295 | -1.292 |
| 3 | -1.175 | -0.254 | -1.283 | -1.272 | -1.310 | -1.309 |
| 4 | -1.219 | -0.390 | -1.298 | -1.293 | -1.318 | -1.317 |
| 5 | -1.245 | -0.521 | -1.306 | -1.304 | -1.322 | -1.321 |
| 10 | -1.295 | -0.951 | -1.322 | -1.322 | -1.329 | -1.329 |
| 20 | -1.317 | -1.206 | -1.329 | -1.329 | -1.332 | -1.332 |
| 40 | -1.327 | -1.297 | -1.332 | -1.332 | -1.332 | -1.332 |

Con $(.)^*$ si indica l'integrazione completa

Tabella 5.3: Effetto dell'integrazione selettiva su $u_z$ per differenti mesh strutturali. $N = 4$

Si vogliono ora arricchire le analisi fin qui effettuate introducendo modelli strutturali derivanti dall'utilizzo di polinomi di Lagrange, mediante i quali è possibile discretizzare la sezione trasversale ricorrendo a elementi L4, L9 e L16 [92]. Una prima analisi che si può condurre per confrontare le teorie fin'ora utilizzate e quelle che verranno invece adottate nel seguito, può essere quella volta ad esaminare il numero di DOFs coinvolti nel calcolo, riportati in tabella 5.4. In virtù delle considerazioni fatte fino a questo momento, elementi beam a quattro nodi sono utilizzati per discretizzare la trave lungo la direzione longitudinale. L'aspetto interessante, è il minor numero di DOFs coinvolti nell'analisi per gli elementi L4 e L9 rispetto a modelli

| No.Elementi | N=1 | N=2 | N=3 | N=4 | 1L4 | 2x1L4 | 2x2L4 | 1L9 | 1L16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DOFs | | | | | | | | | |
| 1 | 36 | 72 | 120 | 180 | 48 | 72 | 108 | 108 | 192 |
| 2 | 63 | 126 | 210 | 315 | 84 | 126 | 189 | 189 | 336 |
| 3 | 90 | 180 | 300 | 450 | 120 | 180 | 270 | 270 | 480 |
| 4 | 117 | 234 | 390 | 585 | 156 | 234 | 351 | 351 | 624 |
| 5 | 144 | 288 | 480 | 720 | 192 | 288 | 432 | 432 | 768 |
| 10 | 279 | 558 | 930 | 1395 | 372 | 558 | 837 | 837 | 1488 |
| 20 | 549 | 1098 | 1830 | 2745 | 732 | 1098 | 1647 | 1647 | 2928 |
| 40 | 1089 | 2178 | 3630 | 5445 | 1452 | 2178 | 3267 | 3267 | 5808 |

Tabella 5.4: Gradi di libertà al variare del numero di elementi B4 adottati nella mesh e del modello strutturale

di espansione di tipo Taylor con $N \geq 3$. Quindi, rispetto a modelli più raffinati, la discretizzazione della sezione mediante elementi di Lagrange consente quindi di ridurre il carico computazionale. Si osserva, inoltre, come la combinazione di $2 \times 2$ elementi L4 permetta di ottenere un costo computazionale, in termini di gradi di libertà da calcolare, identico a quello di un solo elemento L9. Infine, l'elemento L16 risulta essere quello che invece comporta un costo computazionale più gravoso.

Nella tabella 5.5 lo spostamento trasversale $u_z$ è stato valutato per differenti modelli strutturali e al variare del numero di elementi B4 utilizzati nella mesh strutturale per $L/h = 100$. Come anticipato in precedenza, la correzione del Poisson

| No. Elementi | N=1 | N=2 | 1L4 | 1L9 | 1L16 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_z \times 10^2$ $[m]$, $u_{zb} \times 10^2 = -1.333$ $[m]$ | | | | | |
| 1 | -1.333 | -1.239 | -1.072 | -1.239 | -1.239 |
| 2 | -1.333 | -1.286 | -1.093 | -1.286 | -1.286 |
| 3 | -1.333 | -1.302 | -1.101 | -1.302 | -1.302 |
| 4 | -1.333 | -1.310 | -1.105 | -1.310 | -1.310 |
| 5 | -1.333 | -1.314 | -1.107 | -1.314 | -1.314 |
| 10 | -1.333 | -1.324 | -1.111 | -1.324 | -1.324 |
| 20 | -1.333 | -1.328 | -1.114 | -1.328 | -1.329 |
| 40 | -1.333 | -1.331 | -1.114 | -1.331 | -1.331 |

Tabella 5.5: Valori di spostamento trasversale, al variare del numero di elementi B4 adottati nella mesh e del modello strutturale. Caso $L/h = 100$

Locking per la configurazione geometrica considerata consente di ottenere mediante $N = 1$ un miglior andamento a convergenza rispetto a modelli strutturali di ordine più elevato e questo aspetto risulta confermato anche introducendo modelli di Lagrange.

Nella tabella 5.6 sono riportati i corrispondenti risultati calcolati considerando $L/h = 10$. Al contrario della geometria considerata in precedenza, in questo caso

| No. Elementi | N=1 | N=2 | N=3 | N=4 | 1L4 | 1L9 | L16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_z \times 10^5$ $[m]$, $u_{zb} \times 10^5 = -1.333$ $[m]$ | | | | | | | |
| 1 | -1.342 | -1.247 | -1.249 | -1.249 | -1.080 | -1.247 | -1.249 |
| 2 | -1.342 | -1.293 | -1.295 | -1.295 | -1.101 | -1.293 | -1.295 |
| 3 | -1.342 | -1.308 | -1.310 | -1.310 | -1.108 | -1.308 | -1.310 |
| 4 | -1.342 | -1.315 | -1.317 | -1.318 | -1.111 | -1.315 | -1.317 |
| 5 | -1.342 | -1.319 | -1.321 | -1.322 | -1.112 | -1.319 | -1.321 |
| 10 | -1.342 | -1.326 | -1.328 | -1.329 | -1.115 | -1.326 | -1.328 |
| 20 | -1.342 | -1.328 | -1.330 | -1.332 | -1.115 | -1.328 | -1.331 |
| 40 | -1.342 | -1.329 | -1.331 | -1.332 | -1.115 | -1.329 | -1.331 |

Tabella 5.6: Valori di spostamento trasversale al variare del numero di elementi B4 adottati nella mesh e del modello strutturale. Caso $L/h = 10$

l'ordine di accuratezza del modello risulta molto importante per poter ottenere una maggiore accuratezza dei risultati. Infatti, sono necessari polinomi di Taylor almeno del terzo ordine per ottenere risultati soddisfacenti. Tuttavia, una discretizzazione della sezione trasversale mediante 1L9 consente di ottenere una buona convergenza ma con un costo computazionale decisamente inferiore. in virtù di quanto mostrato in tabella 5.4. Con l'elemento L16 l'andamento a convergenza risulterebbe anche migliore ma il costo computazionale della simulazione aumenta. Da questo punto di vista, il modello L9 risulta il compromesso migliore tra accuratezza e costo di calcolo.

| No. Elementi | 1L4 | $2 \times$ 1L4 | $1 \times$ 2L4 | $2 \times$ 2L4 |
|---|---|---|---|---|
| $u_z \times 10^2$ $[m]$, $u_{zb} \times 10^2 = -1.333$ $[m]$ | | | | |
| B4 | | | | |
| 1 | -1.072 | -1.111 | -1.165 | -1.191 |
| 2 | -1.093 | -1.138 | -1.200 | -1.230 |
| 3 | -1.101 | -1.147 | -1.212 | -1.243 |
| 4 | -1.105 | -1.152 | -1.218 | -1.250 |
| 5 | -1.107 | -1.155 | -1.222 | -1.254 |
| 10 | -1.111 | -1.160 | -1.229 | -1.262 |
| 20 | -1.114 | -1.163 | -1.232 | -1.266 |
| 40 | -1.114 | -1.164 | -1.234 | -1.268 |

Tabella 5.7: Valori di $u_z$ per differenti combinazioni di elementi L4. Caso $L/h = 100$

Per quanto riguarda l'utilizzo di 1L4, si nota come il rateo di convergenza risulti molto più lento rispetto al caso 1L9 e di 1L16. Una soluzione, potrebbe essere

| No. Elementi | 1L4 | $2 \times$ 1L4 | $1 \times$ 2L4 | $2 \times$ 2L4 |
|---|---|---|---|---|
| $u_z \times 10^5$ $[m]$, $u_{zb} \times 10^5 = -1.333$ $[m]$ | | | | |
| B4 | | | | |
| 1 | -1.080 | -1.118 | -1.173 | -1.199 |
| 2 | -1.101 | -1.144 | -1.208 | -1.237 |
| 3 | -1.108 | -1.153 | -1.219 | -1.249 |
| 4 | -1.111 | -1.156 | -1.225 | -1.255 |
| 5 | -1.112 | -1.158 | -1.228 | -1.259 |
| 10 | -1.115 | -1.161 | -1.233 | -1.264 |
| 20 | -1.115 | -1.161 | -1.234 | -1.266 |
| 40 | -1.115 | -1.161 | -1.235 | -1.266 |

Tabella 5.8: Valori di $u_z$ per differenti combinazioni di elementi L4. Caso $L/h = 10$

quella di introdurre più di un elemento a discretizzare la sezione. Nelle tabelle 5.7 e 5.8 sono mostrati i miglioramenti ottenuti nel comportamento a convergenza delle soluzioni numeriche, andando ad introdurre 2L4 in direzione $x$, 2L4 in direzione $z$ e infine 2L4 in entrambe le direzioni. Si può osservare come un raffinamento della mesh lungo la coordinata verticale della sezione risulti maggiormente efficace rispetto a quello lungo la direzione orizzontale. Rispetto a queste due tipologie di distribuzione degli elementi L4, utilizzare $2 \times$ 2L4 evidenzia una maggiore efficace nel portare a convergenza la soluzione numerica, a dimostrazione del fatto gioca un ruolo importante il numero di elementi coinvolti e non solo il modo in cui essi sono distribuiti.

### 5.1.2 Trave Monostrato in Materiale Ortotropo

Si consideri una trave incastrata in materiale ortotropo, alla quale è applicato un carico concentrato al centro della sezione nell'estremo libero lungo la direzione $z$ e di intensità è di $-1$ $N$. In figura 5.4 viene mostrata la geometria della sezione trasversale, dove $b$ vale 0.2 $m$ mentre lo spessore $h$ vale 0.01 $m$. La lunghezza $L$ della trave è di 2 $m$. Le caratteristiche del materiale sono le seguenti: il modulo di Young lungo la direzione tangenziale, $E_L$, vale 20 $GPa$, mentre quelli lungo le direzioni trasversali sono uguali a 10 $GPa$. Il coefficiente di Poisson, $\nu$, vale 0.25 ed è lo stesso in tutte le direzioni. Il modulo di rigidezza a taglio, $G$, vale 5 $GPa$ ed è lo stesso in tutte e tre le direzioni. Le analisi sono state condotte discretizzando la trave lungo la direzione longitudinale mediante 20 elementi B4 (e tale è da intendersi la mesh strutturale adottata se non diversamente indicato), dal momento che nelle sezioni precedenti si è dimostrato come questo tipo di discretizzazione abbia fornito ottimi risultati a convergenza.

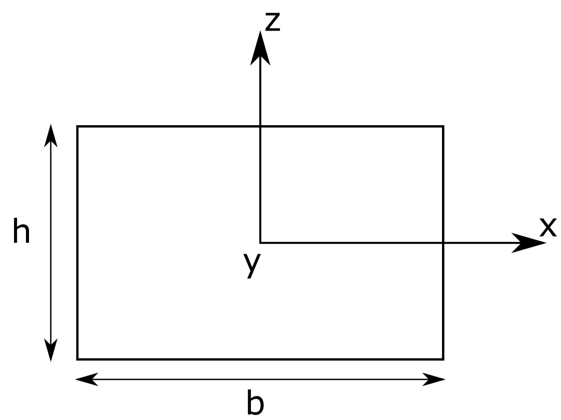



Figura 5.4: Sezione trasversale trave single-layer in materiale ortotropo

In tabella 5.9 sono riportati, per le diverse teorie, i valori di massimo spostamento trasversale $u_z$ nell'estremo libero, in corrispondenza del punto di applicazione del carico. Si può notare come, in generale, i modelli classici forniscano soluzioni

| | $u_z \times 10^{-3}\ m$ | $u_z^* \times 10^{-3}\ m$ | DOFs |
|---|---|---|---|
| EBBT | -8.000 | -7.999 | 183 |
| TBT | -8.000 | -7.999 | 183 |
| N=1 | -8.000 | -8.000 | 549 |
| N=2 | -7.889 | -7.889 | 1098 |
| N=3 | -7.960 | -7.959 | 1830 |
| N=4 | -7.963 | -7.963 | 2745 |
| 1 L4 | -7.336 | -7.336 | 732 |
| 1 L9 | -7.960 | -7.959 | 1647 |
| $2 \times 2$ L9 | -7.961 | -7.960 | 4575 |

Tabella 5.9: Spostamento trasversale del centro della sezione a $y = L$ con e senza correzione del locking. 20B4

caratterizzate da una minore rigidezza. Inoltre, lo spostamento calcolato con EBBT e TBT è lo stesso determinato con il modello di espansione di Taylor lineare. Si può quindi concludere che il contributo della deformazione a taglio introdotto dal modello $N = 1$ e della componente lineare di spostamento nel piano risulta essere trascurabile in questo caso. La sezione si mantiene quindi rigida nel suo piano. Con $u_z^*$ si considerano i risultati calcolati senza alcuna correzione del locking, la quale invece è stata applicata per il calcolo della $u_z$. Si può notare come l'effetto di tale correzione non sia stato determinante nel calcolo dello spostamento trasversale, in accordo con quanto visto in tabella 5.3 dove è stato messo in luce come l'utilizzo di elementi a quattro nodi consenta di arginare questo tipo di instabilità numerica. Si può inoltre osservare come i modelli polinomiali di tipo Taylor abbiano un andamento a convergenza più lento rispetto a quelli di Lagrange. In particolare, si nota come la soluzione a convergenza sia ottenibile sfruttando un solo elemento L9, col vantaggio però di avere un costo computazionale inferiore rispetto a polinomi di Taylor di ordine elevato, come mostrato nella terza colonna in cui sono riportati i DOFs coinvolti nel calcolo. Questo aspetto risulta essere molto vantaggioso, in quanto è possibile ottenere una descrizione del comportamento lungo la sezione trasversale decisamente più preciso senza la necessità di ricorrere, in generale, ad analisi computazionalmente più dispendiose. Inoltre, il raffinamento ottenuto utilizzando la combinazione $2 \times 2$L9 ha confermato la convergenza della soluzione. Le potenzialità di questi modelli risultano quindi particolarmente evidenti. Ad ogni modo, in merito alla valutazione degli spostamenti, sia modelli TE di ordine elevato che modelli LE, o combinazioni di essi, forniscono risultati accurati

### 5.1.3 Trave a tre strati Cross-ply 0/90/0 in Materiale Ortotropo

Si considera una trave a tre strati, incastrata all'estremo in $y = 0$ e alla quale è applicato un carico lungo l'asse $z$ nel centro della sezione all'estremo libero e di intensità pari a $-1 \cdot 10^{-3}$ $N$. In figura 5.5 viene mostrata la geometria della sezione trasversale del singolo strato, dove $b$ vale 0.1 $m$ mentre lo spessore $h_k$ vale 0.001 $m$ ($k = 1,2,3$), quindi lo spessore totale della sezione trasversale risulta essere $h = 0.003$ $m$. La laminazione degli strati è 0/90/0. La lunghezza $L$ della trave è di 2 $m$. Il materiale di ogni singolo strato è ortotropo, con le seguenti caratteristiche:

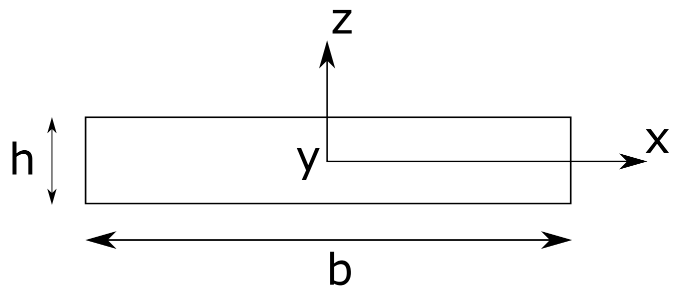



Figura 5.5: Sezione trasversale del k-esimo strato del cross-ply

il modulo di Young nella direzione dell'asse longitudinale è $E_L = 40$ $GPa$, quelli invece nelle direzioni trasversali valgono 4 $GPa$. Il coefficiente di Poisson $\nu$ vale 0.25 ed è lo stesso per tutte le direzioni. Anche il modulo di rigidezza a taglio, $G$, è lo stesso in tutte e tre le direzioni e il suo valore è di 1 $GPa$. Analisi relative al caso di studio scelto sono riportate in [93].

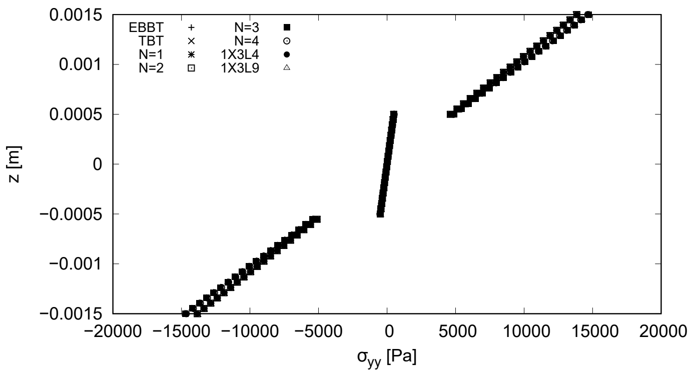
In tabella 5.10, vengono riportati i risultati in termini di spostamento trasversale nel punto di carico per le diverse teorie considerate, in presenza o meno della correzione del Poisson locking. In particolare, si indica con $u_z^*$ lo spostamento trasversale calcolato senza la correzione. Nella terza colonna sono riportati i gradi di libertà coinvolti nel calcolo, in modo da fornire un'indicazione in merito al costo computazionale dell'analisi. Anche per il multi-strato cross ply valgono le conside-

| | $u_z \times 10^{-4}\ m$ | $u_z^* \times 10^{-4}\ m$ | DOFs |
|---|---|---|---|
| EBBT | -3.065 | -3.065 | 183 |
| TBT | -3.065 | -3.065 | 183 |
| N=1 | -3.065 | -3.065 | 549 |
| N=2 | -3.057 | -3.057 | 1098 |
| N=3 | -3.059 | -3.059 | 1830 |
| N=4 | -3.060 | -3.060 | 2745 |
| $1 \times 3$ L4 | -3.043 | -3.043 | 1464 |
| $1 \times 3$ L9 | -3.061 | -3.060 | 3843 |
| $2 \times 3$ L9 | -3.060 | -3.060 | 6405 |

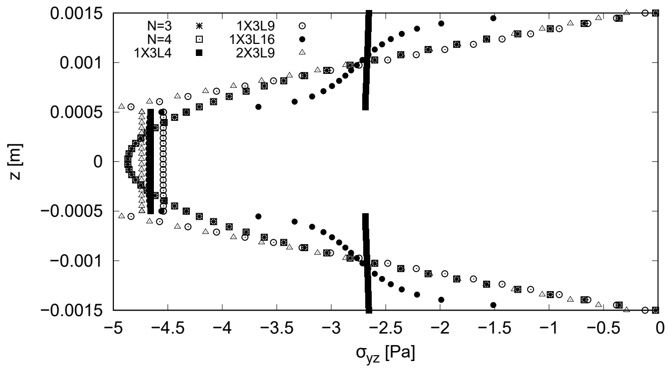
Tabella 5.10: Spostamento trasversale del centro della sezione a $y = L$. 20B4

razioni fatte per la trave monostrato in merito agli spostamenti trasversali calcolati in corrispondenza del punto di applicazione del carico e all'efficacia della correzione per lo shear locking. Si può osservare infatti come l'utilizzo di modelli di ordine elevato risulti necessario per ottenere la convergenza della soluzione numerica e che l'integrazione selettiva per correggere lo shear locking non sia stata determinante nel calcolo della soluzione. Inoltre, si osserva come la convergenza nel caso dei modelli LE risulti essere molto più rapida pur essendo, in questo caso, maggiormente dispendiosa.

In figura 5.6 viene riportata la distribuzione degli stress lungo lo spessore della trave, rispettivamente la $\sigma_{yy}$ nella sezione di incastro in figura 5.6a e la $\sigma_{yz}$ a $x = 0$ nella sezione intermedia in figura 5.6b. La variazione della tensione normale $\sigma_{yy}$ lungo lo spessore è ben descritta da tutte le teorie, in quanto si riesce in tutti i casi a cogliere la differente laminazione dei tre strati e l'effetto che essa ne comporta sulla distribuzione. In questo caso non si riesce quindi a cogliere il beneficio rilevante da teorie di ordine elevato e, per poterlo fare, è possibile riferirsi ai risultati riportati in tabella 5.10. A differenza della trave a singolo strato analizzata in precedenza, nel caso del cross-ply risulta ora molto più chiaro quanto meglio si prestino i modelli strutturali che sfruttando elementi di Lagrange all'analisi delle sezioni non omogenee e, più in generale, l'importanza dell'utilizzo di modelli di ordine più elevato al crescere della complessità del problema in esame. Infatti, quanto affermato per la $\sigma_{yy}$, non lo si può dire per la distribuzione degli stress di taglio. Ponendo l'attenzione sulla figura 5.6b, si osserva come i modelli ottenuti sfruttando polinomi di Taylor, benché di ordine elevato, non riescano in alcun modo a descrivere in maniera corretta la variazione della $\sigma_{yz}$ lungo i tre strati e, nello specifico, si può notare come




(a) Distribuzione della $\sigma_{yy}$ lungo lo spessore a $x = 0$ e $y = 0$




(b) Distribuzione della $\sigma_{yz}$ lungo lo spessore a $x = 0$ e $y = L/2$

Figura 5.6: Distribuzione degli stress lungo lo spessore per differenti modelli strutturali. Trave a tre strati cross ply 0/90/0 soggetta a carico concentrato. 20B4

la laminazione del cross-ply non viene minimamente colta dal modello e la sezione viene vista come un monostrato. Al contrario, i modelli LE, riescono ad evidenziare correttamente il comportamento della tensione di taglio nello strato intermedio ma si osserva come sia comunque necessario usare elementi L9, o una combinazione di essi, e L16 per riuscire meglio a coglierne l'intera distribuzione lungo tutto lo spessore della trave. La ragione di questo interessante aspetto è da ricercarsi nel differente approccio alla modellizzazione della sezione trasversale cioè l'Equivalent Single Layer, adottato dai modelli di tipo Taylor, e il Layer Wise per modelli di Lagrange. In quest'ultimo caso, in particolare, ogni singolo layer che costituisce il cross-ply riesce a conservare le sue proprietà e la descrizione del comportamento della sezione risulta di conseguenza più accurata. Si rimanda alla sezione 2.8 la descrizione dei differenti approcci adottati e al lavoro di Carrera e Petrolo [93] per consultare maggiori dettagli in merito all'applicazione che ne viene fatta a strutture laminate. Si può quindi concludere come le considerazioni fatte in merito alla valutazione degli spostamenti non siano allo stesso modo valide per la valutazione della distribuzione degli stress, dal momento che in questo caso sono necessari modelli strutturali dedicati per consentirne una corretta predizione quando si vogliono esaminare strutture a sezione non omogenea.

### 5.1.4 Cassone a due correnti e pannello

Si vogliono ora estendere le analisi statiche fin qui effettuate ad una tipica struttura di impiego aerospaziale. Si tratta del cassone alare costituito da due correnti e un pannello, del quale la sezione trasversale è rappresentata in figura 5.7 e la cui importanza risiede nel fatto che esso possa essere impiegato per modellare il longherone. L'altezza del cassone vale $h = 1\ m$ e il rapporto $L/h$ è uguale a 3. I correnti sono a sezione quadrata e di area $A_s = 0.9 \times 10^{-3}\ m^2$, mentre lo spessore del pannello vale $t = 1 \times 10^{-3}$. In $y = 0$ al longherone è applicato il vincolo di incastro. La trave è in

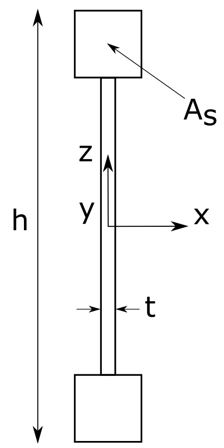



Figura 5.7: Sezione del cassone a due correnti e un pannello

materiale isotropo, le cui caratteristiche sono le seguenti: $E = 75\ GPa$, $\nu = 0.33$, $\rho = 2700\ kg/m^3$. Nel centro della sezione intermedia è applicato un carico puntuale di intensità $P_{z_0} = 1000\ N$. Lungo la direzione assiale la struttura è stata modellata mediante 10 elementi B4.

In tabella 5.11 sono riportati i risultati ottenuti, per differenti teorie, in termini di spostamento trasversale nel punto di applicazione del carico. I risultati sono stati confrontanti conducendo l'analisi mediante le teorie classiche, differenti ordini di espansione per modelli Taylor-like e per ultima una combinazione di 8 elementi L9 sfruttando l'approccio Component Wise. Si nota che, per questa tipologia di struttura, è necessario modellare la sezione trasversale almeno mediante polinomi di Taylor cubici, ottenendo però una più precisa convergenza per ordini di espansione

| | $u_z \times 10^5$ $[m]$ | DOFs |
|---|---|---|
| EBBM | 3.0460 | 93 |
| N=1 | 4.9857 | 279 |
| N=2 | 4.8475 | 558 |
| N=3 | 7.3119 | 930 |
| N=4 | 7.2941 | 1395 |
| N=5 | 7.6839 | 1953 |
| N=7 | 7.7932 | 3348 |
| N=10 | 7.8383 | 6138 |
| 8L9 | 8.0449 | 4743 |

Tabella 5.11: Effetto dei differenti ordini di espansione sullo spostamento trasversale nel punto di applicazione del carico. Cassone a due correnti e pannello soggetto a carico concentrato $P_{z_0} = 1000$ $N$

più elevati. Inoltre, l'aspetto forse più interessante, consiste nel fatto che l'approccio CW permette di ottenere uno spostamento trasversale molto prossimo a quello ricavato per polinomi di Taylor di ordine 10, coinvolgendo nel calcolo più di un migliaio di gradi di libertà in meno e rappresentando quindi un ottimo compromesso tra l'accuratezza del risultato ottenuto e il costo computazionale dell'analisi per questo primo esempio di struttura rinforzata.

### 5.1.5 Cassone rettangolare

Dopo aver valutato la risposta statica del cassone costituito da due correnti e un pannello, si estende l'analisi alla wingbox, la quale costituisce il modello del cassone alare vero e proprio. In figura 5.8 viene riportata la sezione trasversale rettangolare del cassone, le cui caratteristiche geometriche sono le seguenti: $L = 3$ $m$, $b = 1$ $m$, $h = 0.5$ $m$. I pannelli hanno spessore $t = 2 \times 10^{-3}$ $m$ e l'are della sezione quadrata dei correnti vale $A_s = 1.6 \times 10^{-3}$ $m^2$. La trave è in alluminio, con le seguenti caratteristiche meccaniche: $E = 75$ $GPa$, $\nu = 0.33$ e $\rho = 2700$ $kg/m^3$. La trave è incastrata nella sezione a $y = 0$. Una mesh strutturale di 10 elementi B4 è stata utilizzata per modellare la trave lungo la direzione assiale $y$. Al tip e nel centro del corrente numero 1 è applicato un carico concentrato di intensità $P_z = 10000$ $N$.

In tabella 5.12 sono riportati i risultati ottenuti, in termini di spostamento trasversale $u_z$ del punto di carico, per differenti teorie. Come si può osservare dai risultati proposti, modellando il campo di spostamenti lungo la sezione trasversale del cassone mediante teorie classiche o polinomi di Taylor di ordine non è elevato, non è possibile ottenere una risposta statica accurata. In particolare, si nota come la teoria classica di Eulero-Bernoulli e ordini di espansione fino a $N = 5$ forniscano risultati al massimo inferiori del 50% rispetto allo spostamento calcolato da modelli

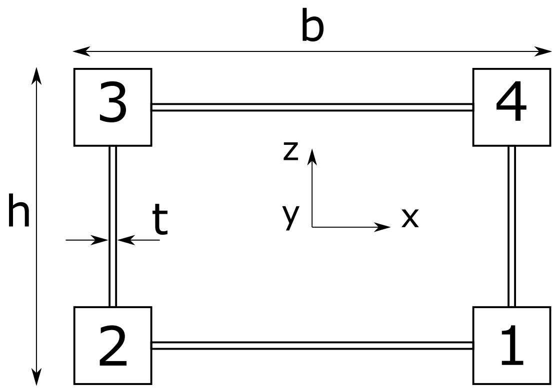
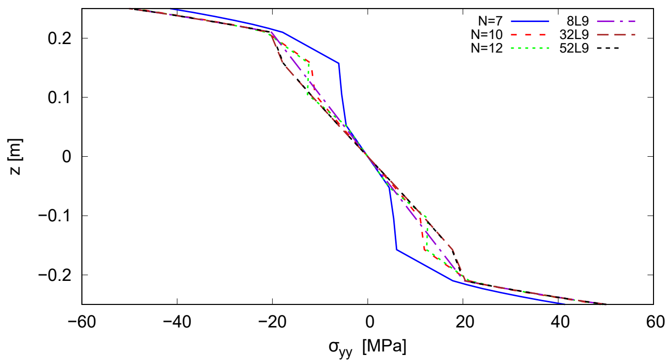



Figura 5.8: Sezione del cassone a quattro correnti e quattro pannelli

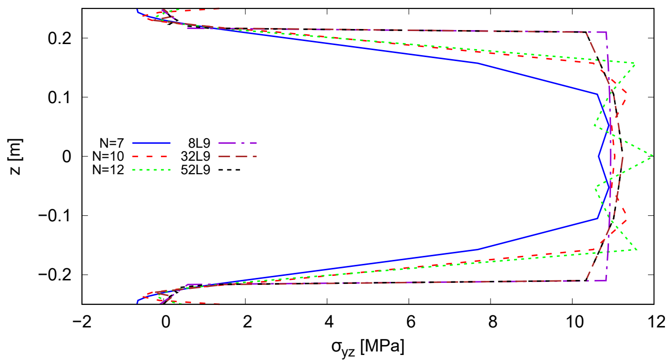
di ordine superiore. Solamente con valori di $N$ maggiori o uguali a 10 è invece possibile ottenere un valore di $u_z$ accurato. Tuttavia, mediante combinazioni di elementi L9 si riesce ad ottenere rapidamente la convergenza della risposta statica. In particolare, mediante una combinazione di 8L9 si riesce ad ottenere lo stesso risultato, in termini di spostamento trasversale del punto di carico, che si otterrebbe con modelli Taylor-like di ordine elevato, coinvolgendo però nel calcolo un numero molto inferiore di gradi di libertà. L'accuratezza del risultato ottenuto e il notevole risparmio di risorse computazionali, porta perciò a scegliere di adottare come modello strutturale per la valutazione della risposta dinamica in termini di spostamento trasversale (che verrà valutata nelle sezioni successive) mediante una discretizzazione di 8 elementi L9.

| | $u_z$ $[m]$ | DOFs |
|---|---|---|
| EBBM | 0.0021 | 93 |
| N=1 | 0.0023 | 279 |
| N=2 | 0.0023 | 558 |
| N=3 | 0.0028 | 930 |
| N=4 | 0.0030 | 1395 |
| N=5 | 0.0033 | 1953 |
| N=7 | 0.0051 | 3348 |
| N=10 | 0.0060 | 6138 |
| N=12 | 0.0061 | 8463 |
| 8L9 | 0.0061 | 5952 |
| 32L9 | 0.0062 | 18600 |
| 52L9 | 0.0062 | 27342 |

Tabella 5.12: Effetto dei differenti ordini di espansione sullo spostamento trasversale nel punto di applicazione del carico. Cassone rettangolare soggetto a carico concentrato applicato nel centro del corrente 1




(a) Distribuzione dello stress $\sigma_{yy}$ lungo lo spessore della trave nella sezione di incastro a $x = 0.48\ m$




(b) Distribuzione dello stress $\sigma_{yz}$ lungo lo spessore della trave nella sezione mediana a $x = 0.48\ m$

Figura 5.9: Distribuzione degli stress lungo lo spessore per differenti modelli. Cassone rettangolare soggetto a carico concentrato applicato nel centro del corrente 1

Discorso differente viene invece fatto per la valutazione degli stress. Infatti, rispetto ai modelli strutturali analizzati in precedenza, la complessità geometrica del cassone necessità di un modello maggiormente raffinato per poter valutare al meglio la distribuzione degli sforzi. Nella figura 5.9 sono riportate le distribuzione degli stress $\sigma_{yy}$ e $\sigma_{yz}$ lungo lo spessore della trave in due sezioni caratteristiche, ovvero nella sezione di incastro e in quella intermedia rispettivamente. I valori ottenuti sono stati ricavati per mezzo di teorie di ordine elevato, basandosi sui risultati riportati in termini di $u_z$, mostrati in tabella 5.12, e che sono stati precedentemente commentati. Come si può notare, una corretta distribuzione degli sforzi la si ottiene principalmente mediante combinazioni di elementi L9, le quali sfruttano la metodologia CW. Ciò lo si può particolarmente notare nella distribuzione della $\sigma_{yz}$ lungo lo spessore, riportata in figura 5.9b. Per questa ragione, nel seguito l'analisi della risposta dinamica degli stress sarà condotta mediante una mesh strutturale di 52L9, accettando un carico computazionale molto elevato per non dover rinunciare in un'accurata descrizione della distribuzione degli sforzi per questa tipologia di struttura.

## 5.2 Analisi dinamica applicata a strutture solide e in parete sottile

Le analisi successive saranno dedicate alla valutazione della risposta nel tempo di strutture metalliche tipiche degli impieghi aerospaziali quando soggette a carichi inerziali. In questa sezione, in particolare, l'attenzione sarà rivolta all'applicazione del metodo di superimposizione modale e allo schema di integrazione diretto di Newmark. Le diverse strutture che saranno analizzate sono state modellate applicando l'approccio Component-Wise (CW), basato formulazione CUF, e che consente di modellare strutture a più componenti sfruttando, per ciascuno di essi, lo stesso elemento finito di ordine superiore. L'aspetto importante di questo approccio, come descritto in sezione 2.9, è l'imposizione della continuità degli spostamenti per la realizzazione dell'accoppiamento dei singoli componenti, in modo così da non dover introdurre alcun espediente matematico. Così facendo, si ottiene una distribuzione degli sforzi coerente per l'intera struttura.

Le analisi riportate saranno caratterizzate da un livello di complessità crescente in termini non solo di geometria, ma anche che di risorse computazionali impiegate. Nello specifico, si incomincerà con strutture classiche, cioè una trave a sezione compatta e una in parete sottile. Ad esse faranno seguito le analisi di strutture tipiche delle applicazioni aerospaziali, ovvero il pannello rinforzato da due correnti e la wingbox. Per questi casi verrà valutata la risposta nel tempo a seguito dell'applicazione di carichi dinamici di tipo sinusoidale. Per concludere, si andrà ad analizzare la risposta dinamica di un'ala completa soggetta ad un carico di raffica.

Scopo di quest'ultima sezione sarà, oltre che mostrare l'efficacia dell'approccio CW, andare ad analizzare le differenze tra i metodi risolutivi proposti per la valutazione della risposta dinamica delle strutture analizzate. Per tutte le simulazione effettuate è stato trascurato lo smorzamento all'interno del problema dinamico.

### 5.2.1 Trave a sezione quadrata e compatta soggetta a carico sinusoidale

Si consideri una trave semplicemente appoggiata, a sezione compatta e quadrata osservabile in figura 5.10. La lunghezza dei lati, della sezione è di 0.1 $m$, mentre il rapporto $L/h$ vale 100. La trave è in materiale isotropo, caratterizzata da un modulo di young $E = 75\ GPa$, un coefficiente di Poisson $\nu = 0.33$ e da una densità

$\rho = 2700\ kg/m^3$. Lungo la direzione assiale $y$, la trave è stata modellata per mezzo

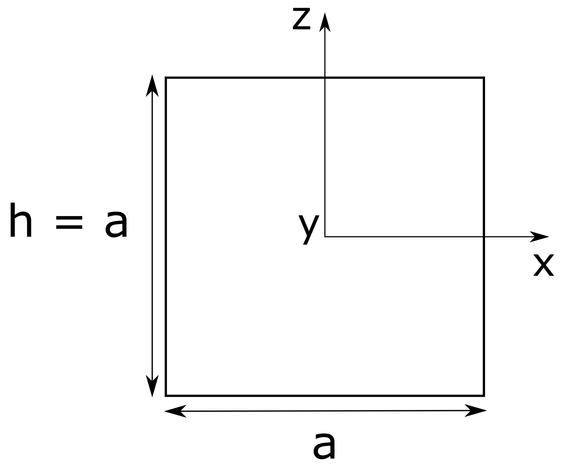



Figura 5.10: Sezione quadrata della trave

di 10 elementi B4. Sulla trave agisce un carico sinusoidale, applicato al centro della sezione all'estremo libero, e esprimibile nel seguente modo:

$$P_z(t) = P_{z0} \sin(\omega t)$$

dove l'ampiezza del carico vale $P_{z0} = -1000\ N$ mentre la frequenza angolare $\omega = 7\ rad/s$.

Per quanto riguarda il modello strutturale adottato, si faccia riferimento alla tabella 5.13. In essa i risultati sono riportati, per diverse teorie strutturali, in termini di massimo valore dello spostamento trasversale, $u_{z_{max}}$, valutato nel centro della sezione a $y = L/2$ e calcolato mediante il metodo di Newmark sull'intervallo temporale [0,8] $s$. Per l'analisi sono stati considerati 2000 step temporali, corrispondenti ad un $\Delta t = 0.004\ s$, che in [82] gli autori, a seguito di una opportuna un'analisi di convergenza nella quale viene mostrata la dipendenza dei risultati dalla scelta del time-step, hanno dimostrato fornisca una risposta nel tempo in ottimo accordo con quella valutata per via analitica. Ciò che però interessa mettere in evidenza è l'effetto dei differenti modelli utilizzati. Si può osservare come, per il caso considerato, i risultati forniti da modelli ad elevato ordine di espansione siano in ottimo accordo con quelli ricavati mediante la teoria classica di Eulero-Bernoulli, dal momento che incrementi dell'ordine $N$ non comportano differenze significative. In conclusione, per la descrizione del comportamento di travi snelle a sezione compatta e soggetta a soli carichi di flessione, la teoria classica si dimostra un modello sufficientemente affidabile. A dimostrazione di ciò, si può osservare la risposta in funzione del tempo, riportata in figura 5.11.

Dopo aver messo in evidenza la risposta nel tempo al variare delle differenti teorie, si procede ora con l'analisi di convergenza vera e propria, volta alla determinazione del corretto $\Delta t$ per il metodo di Newmark, così come del numero di modi

| | $u_{z_{max}}$ $[m]$ | $DOFs$ |
|---|---|---|
| EBBM | 0.06078 | 93 |
| N=3 | 0.06061 | 930 |
| N=7 | 0.06061 | 3348 |

Tabella 5.13: Effetto dei differenti ordini di espansione sul massimo spostamento trasversale nel centro della sezione intermedia a $t = 7.928$ $s$ per una trave a sezione quadrata soggetta a carico sinusoidale. Metodo di Newmark ($\Delta t = 0.004$ $s$)

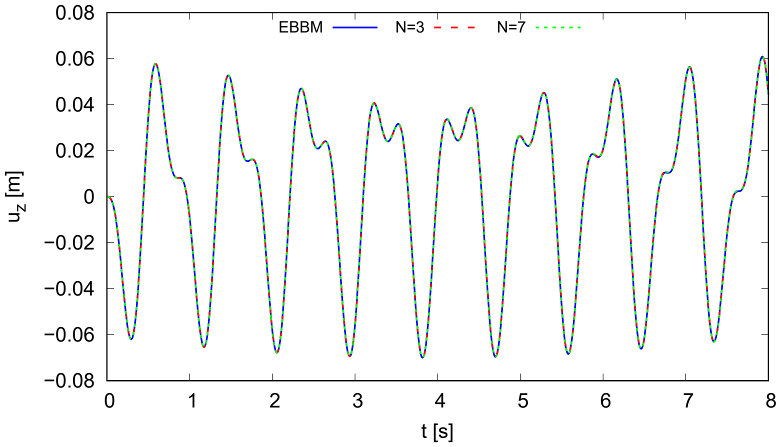
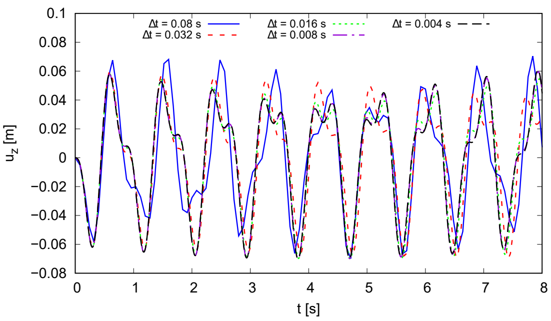


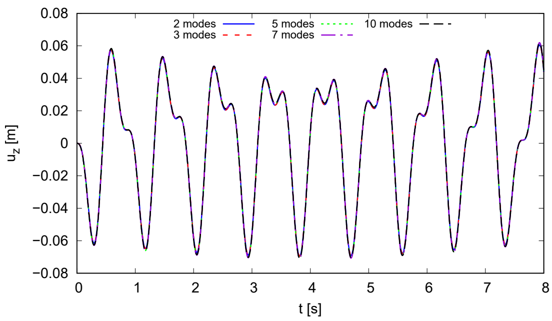

Figura 5.11: Spostamento trasversale in funzione del tempo valutato nel centro della sezione intermedia per differenti teorie. Trave a sezione quadrata soggetta a carico sinusoidale. Metodo di Newmark ($\Delta t = 0.004$ $s$)

opportuno nell'ambito della sovrapposizione modale. Essa è stata condotta utilizzando un'espansione mediante polinomi di Taylor cubici lungo la sezione trasversale, per la quale è stato appena dimostrato come rappresenti un ottimo compromesso tra le teorie classiche e quelle di ordine più elevato. I risultati ricavati sono osservabili in figura 5.12.

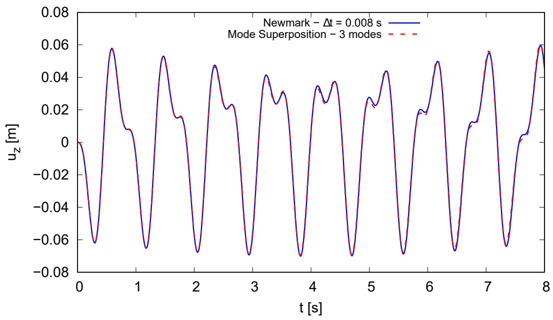
Per prima, in figura 5.12a, si mostra l'analisi a convergenza effettuata allo scopo di confrontare le risposte nel tempo per differenti valori di $\Delta t$, includendo a quelli analizzati in [82] altri valori del time-step. Il primo aspetto che risulta immediatamente riscontrabile è che la scelta di un time-step elevato, come $\Delta t = 0.08$ $s$, corrispondente a 100 step del metodo di Newmark, non fornisca risultati numerici soddisfacenti se confrontati con quelli ottenuti mediante $\Delta t$ sempre più piccoli o, analogamente, con un numero crescente di time-step. Ma osservando con maggiore attenzione l'andamento in corrispondenza dei picchi, si può notare come anche adottando più del doppio dei time-step precedenti ($\Delta t = 0.032$ $s$ corrisponde a 250 time-step), non sia possibile ottenere una convergenza dei risultati, la quale invece si ottiene per $\Delta t = 0.008$ $s$, ovvero per 1000 time-step. Infatti si può notare come i




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark




(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method

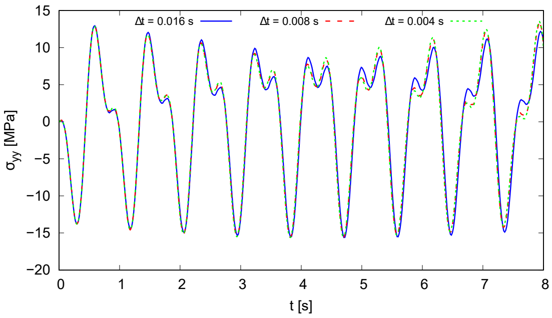



(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.008\ s$) e il mode superposition (3 modi)

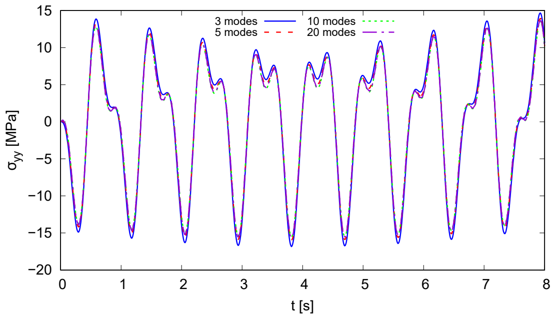
Figura 5.12: Spostamento trasversale in funzione del tempo valutato nel centro della sezione intermedia. Trave a sezione quadrata soggetta a carico sinusoidale. N=3

risultati ottenuti siano in ottimo accordo con quelli ricavati per $\Delta t = 0.004\ s$, dimostrando come 1000 step temporali in meno siano comunque sufficienti ad ottenere la convergenza della soluzione, con conseguente risparmio di risorse computazionali. A questo punto, la valutazione dello spostamento trasversale in funzione del tempo e nel centro della sezione intermedia viene effettuata utilizzando il metodo mode superposition. In figura 5.12b viene mostrata l'analisi di convergenza del numero di modi, così da poter valutare quanti di essi sono necessari per una corretta analisi. Per prima cosa si può notare come, a differenza del metodo di Newmark, con la sovrapposizione modale l'andamento a convergenza risulti essere molto più rapido. Inoltre, per questo tipo di analisi, si osserva come con solamente 3 modi si giunga alla completa convergenza dei risultati della simulazione. Infine, nella figura 5.12c, viene mostrato il confronto tra i due metodi proposti. Si può osservare come entrambe le metodologie risultino equivalentemente efficaci nella valutazione della risposta temporale in termini di spostamento trasversale. Bisogna però porre l'attenzione su un ulteriore aspetto. Dal momento che solo 3 modi sono necessari per ottenere un'accurata risposta nel tempo, per questa tipologia di analisi risulta preferibile adottare la sovrapposizione modale, a seguito dell'evidente risparmio di risorse computazionali che consente di ottenere.

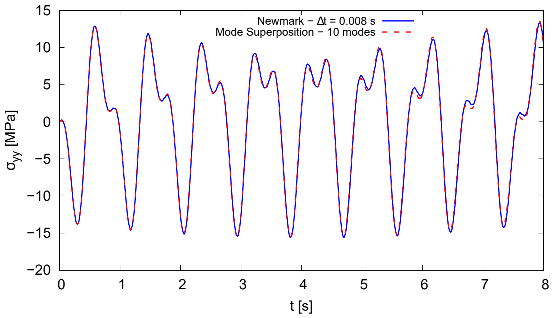
Il passo successivo consiste nella valutazione degli stress. In maniera del tutto analoga a quanto fatto per lo spostamento trasversale, viene ripetuta l'analisi di convergenza per il $\Delta t$ di Newmark e per il numero di modi, andando a valutare la time-history dello stress in direzione normale, $\sigma_{yy}$, e di quello di taglio, $\sigma_{yz}$. I risultati ottenuti possono essere dunque visionati nelle figure 5.13 e 5.14.




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark



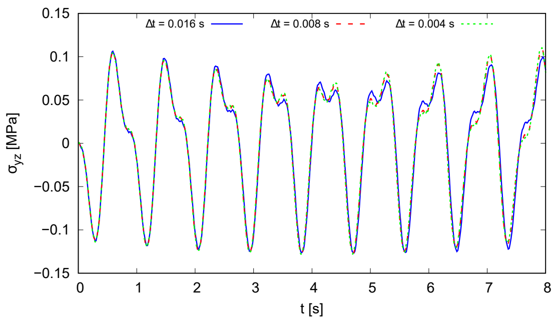

(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method



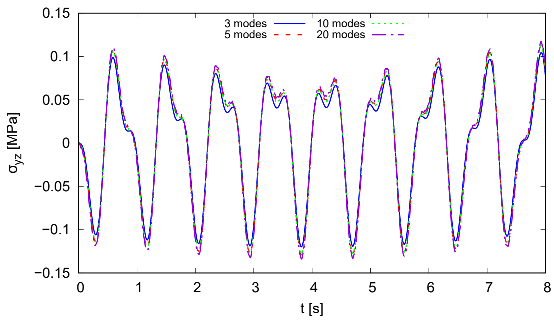

(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.008\ s$) e il mode superposition (10 modi)

Figura 5.13: Stress nella direzione normale in funzione del tempo valutato ad un quarto della trave ($x = 0\ m$, $z = 0.05\ m$). Trave a sezione quadrata soggetta a carico sinusoidale. L16

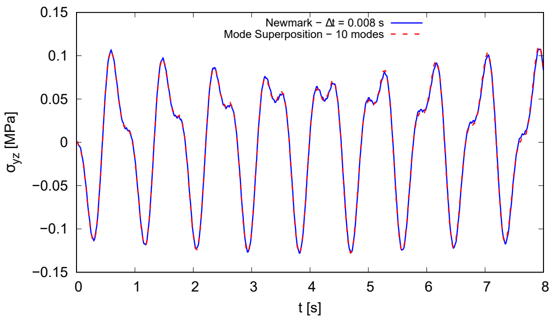
Nelle figure 5.13a e 5.14a viene mostrata l'analisi di convergenza sul $\Delta t$ per la valutazione della distribuzione degli stress in funzione del tempo, mentre nelle figure 5.13b e 5.14b si può valutare la convergenza del numero di modi. Infine, nelle figure 5.13c e 5.14c si riporta il confronto tra i due metodi risolutivi, sfruttando




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark




(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method

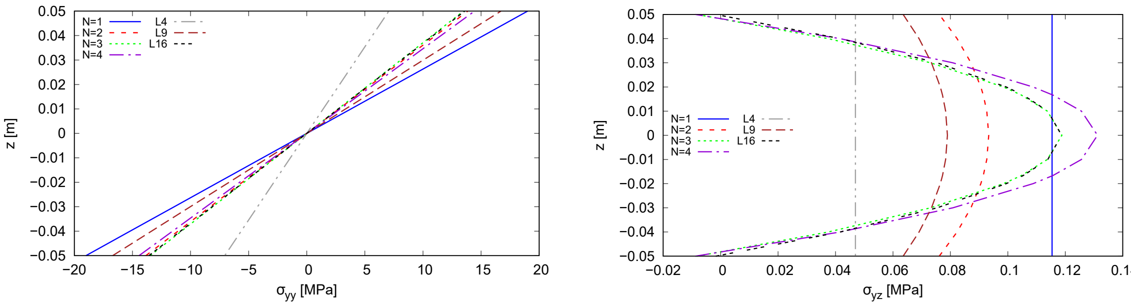



(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.008\ s$) e il mode superposition (10 modi)

Figura 5.14: Stress di taglio valutato ad un quarto della trave ($x = 0\ m$, $z = 0\ m$). Trave a sezione quadrata soggetta a carico sinusoidale. L16

un $\Delta t = 0.008\ s$ per Newmark (quindi 1000 step temporali), e 10 modi per la sovrapposizione modale, in accordo con le analisi di convergenza effettuate. Anche per la valutazione degli stress, la sovrapposizione modale consente una convergenza più rapida dei risultati, essendo necessarie poche forme modali se confrontate con il numero di time-step necessari per il metodo di Newmark. La sovrapposizione modale consente quindi di ottenere un importante risparmio di risorse di calcolo per questa tipologia di analisi, il che rappresenterà un vantaggio quando si andranno a valutare le risposte dinamiche di strutture più complesse.

A differenza di quanto fatto per la valutazione della risposta dinamica in termini di spostamento trasversale, per le analisi condotte sugli stress è stato scelto di modellare il campo di spostamenti lungo la sezione trasversale della trave mediante dei polinomi di Lagrange cubici (L16). Tale scelta viene giustificata dalla valutazione della distribuzione degli stress lungo lo spessore della trave (valutata in corrispondenza del picco raggiunto dagli stress nel corso della loro evoluzione nel tempo, ovvero a $t = 7.92\ s$, determinato mediante la sovrapposizione modale, in virtù delle considerazioni precedenti), la quale è stata quindi confrontata con i risultati ottenuti mediante differenti modelli per il campo di spostamenti lungo la sezione trasversale, utilizzando cioè sia polinomi di Taylor che altre combinazioni di elementi Lagrangiani. I risultati ottenuti sono mostrati nella figura 5.15. Come




(a) Distribuzione dello stress $\sigma_{yy}$ lungo lo spessore della trave per differenti modelli

(b) Distribuzione dello stress $\sigma_{yz}$ lungo lo spessore della trave per differenti modelli

Figura 5.15: Distribuzione degli stress lungo lo spessore nel centro della sezione ad un quarto della trave a $t = 7.92\ s$. Trave a sezione quadrata soggetta a carico sinusoidale. Mode superposition method (10 modi)

si può notare, se è possibile valutare la distribuzione della $\sigma_{yy}$ lungo lo spessore mediante modelli di ordine non eccessivamente elevato, ciò non è possibile per valutare correttamente la distribuzione dello sforzo di taglio trasversale, la cui corretta valutazione è possibile solamente mediante modelli di ordine più elevato. In questo modo, è possibile concludere che l'aver modellato la sezione trasversale della trave mediante un'approssimazione polinomiale cubica del tipo L16 sia stata una scelta coerente.

### 5.2.2 Trave a sezione rettangolare in parete sottile soggetta a carico sinusoidale

Il secondo caso analizzato consiste nella risposta dinamica di una trave incastrata a sezione rettangolare in parete sottile, figura 5.16. Il lato $a$ misura $1\ m$, la trave ha una lunghezza pari a $L = 10\ m$, il rapporto $L/h$ vale 10 e lo spessore è $t = 0.005\ m$. La trave è in materiale isotropo, caratterizzato dalle seguenti proprietà: $E = 69\ GPa$, $\nu = 0.33$, $\rho = 2700\ kg/m^3$. Il carico a cui la trave è soggetta è di tipo sinusoidale, di ampiezza $P_{z_0} = -10000\ N$ e frequenza angolare $\omega = 30\ rad/s$. Il punto di applicazione corrisponde al punto 1, indicato in figura 5.16, a $y = L/4$. La trave è stata modellata mediante 10 elementi B4 lungo la direzione assiale.

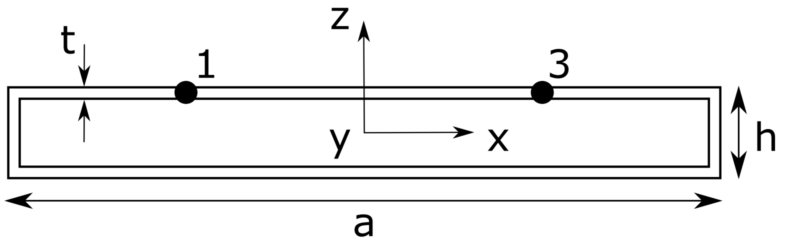



Figura 5.16: Sezione rettangolare in parete sottile

Come illustrato in [46], questa tipologia di trave manifesta deformazioni lungo la sezione trasversale. Infatti, in [82] gli autori, conducendo un'analisi statica preliminare, mettono in evidenza come questo modello strutturale non sia consistente con le ipotesi cinematiche su cui si basano le teorie della trave classiche, mediante le quali si ottengono risultati non sufficientemente accurati. Al contrario, per poter ottenere lo stato di deformazione reale della sezione, sono necessarie teorie di ordine elevato, ovvero modelli di espansione di tipo Taylor di ordine almeno $N = 10$.

L'analisi dinamica è stata condotta lungo l'intervallo temporale [0,1.5] $s$. In tabella 5.14 sono riportati i risultati in termini di massimo spostamento trasversale nel punto di carico, per differenti teorie, utilizzando $\Delta t = 0.00075\ s$ (corrispondente a 2000 time-step) con il quale si ha convergenza dei risultati, come mostrato in [82]. In figura 5.17 viene mostrata invece la risposta nel tempo in termini di spostamento

| | $u_{z_{max}}$ $[m]$ | DOFs |
|---|---|---|
| EBBM | 0.02311 | 93 |
| N=4 | 0.02194 | 1395 |
| N=7 | 0.04423 | 3348 |
| N=10 | 0.05957 | 6138 |
| 10L9 | 0.05724 | 5580 |

Tabella 5.14: Effetto dei differenti ordini di espansione sul massimo spostamento nel punto 1 di applicazione del carico a $t = 1.413\ s$. Trave a sezione rettangolare in parete sottile soggetta a carico sinusoidale. Metodo di Newmark ($\Delta t = 0.00075\ s$)

trasversale nel punto di applicazione del carico. Accanto ai risultati ottenuti tramite il modello cinematico di Eulero-Bernoulli e mediante differenti valori dell'ordine di espansione dei polinomi di Taylor, vengono proposti anche quelli ricavati mediante una discretizzazione della sezione trasversale con 10 elementi L9, sfruttando l'approccio CW. Come si può notare, teorie di ordine non elevato forniscono risultati similari. All'aumentare dell'ordine di espansione dei polinomi di Taylor si osserva invece sia un importante aumento del valore di picco, sia una sostanziale modifica dell'andamento di $u_z$ in funzione del tempo. Tuttavia, si può osservare come l'utilizzo di un modello basato su polinomi di Lagrange quadratici e dell'approccio

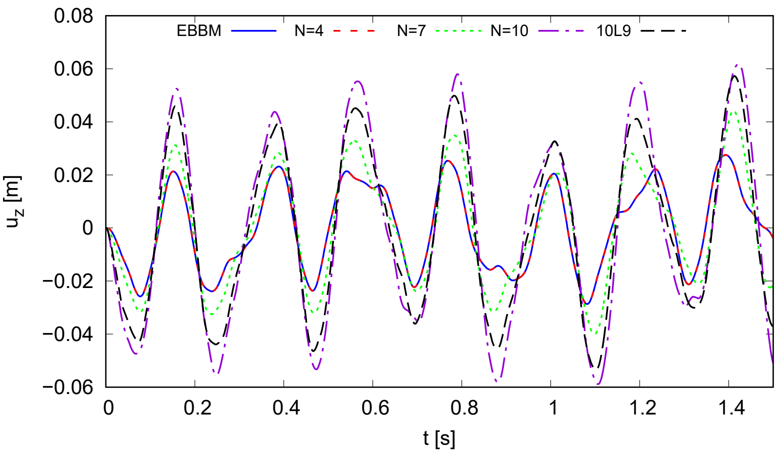
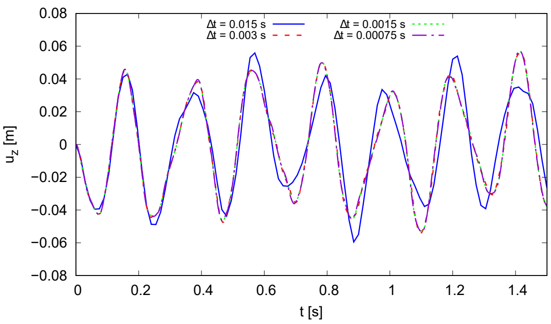



Figura 5.17: Spostamento trasversale in funzione del tempo valutato nel punto 1 di applicazione carico. Trave a sezione rettangolare in parete sottile soggetta a carico sinusoidale. Metodo di Newmark ($\Delta t = 0.00075\ s$)

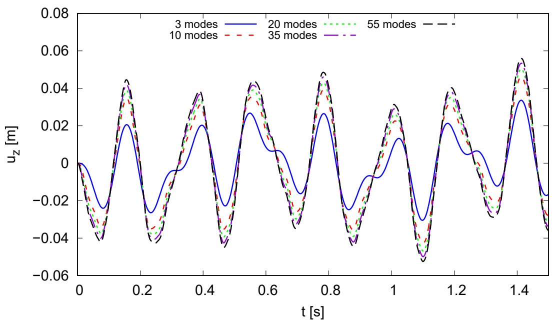
CW consenta di ottenere una migliore aderenza con i risultati ricavati per $N = 10$, sia in termini di valori massimi che di andamento dello spostamento trasversale nel tempo. Tale aspetto consente quindi di validare questo modello, in modo da poter ottenere inoltre un non trascurabile guadagno ne costo computazionale delle simulazioni. Per questo motivo le analisi di convergenza successive sono state condotte sfruttando una discretizzazione di 10L9 lungo la sezione trasversale e l'approccio CW.

Una volta che è stato validato il modello strutturale, si procede con l'analisi di convergenza per il $\Delta t$ del metodo di Newmark e per il numero di modi. Nella figura 5.18 viene riportata l'analisi di convergenza per lo spostamento trasversale in funzione tempo, nel punto di applicazione del carico. In figura 5.18a viene mostrata l'analisi di convergenza sul time-step per il metodo di Newmark. Come si può osservare, il valore appropriato di $\Delta t$ risulta essere $\Delta t = 0.003\ s$, corrispondente a 500 step temporali. Lo spostamento trasversale in funzione del tempo, nel punto di applicazione del carico, al variare del numero di modi è invece mostrato in figura 5.18b. Come si può notare, 35 modi sono sufficienti per ottenere la convergenza dei risultati. Infine, nella figura 5.18c, viene riportato il confronto tra i due metodi. Anche per questo modello strutturale si può osservare come i due metodi forniscano risposte nel tempo similari e risultino perciò essere entrambi opportuni per condurre l'analisi dinamica della trave in esame. Analogamente al caso precedente, si può inoltre osservare come la sovrapposizione modale consenta una valutazione molto precisa dello spostamento trasversale con un numero di modi inferiori rispetto agli step temporali necessari al metodo di Newmark.

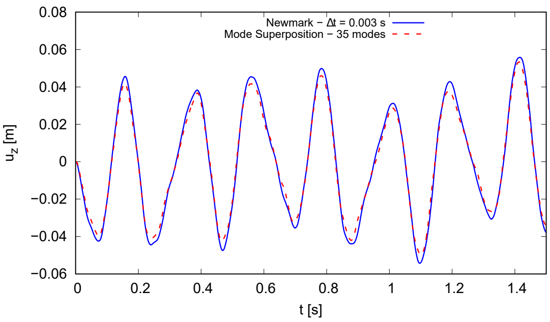
Come per il caso precedente, l'analisi prosegue con la valutazione degli stress. Nelle figure 5.19 e 5.20 viene mostrato lo studio sulla convergenza per il $\Delta t$ nel




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark



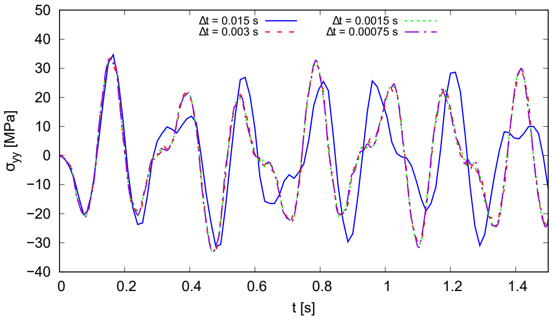

(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method



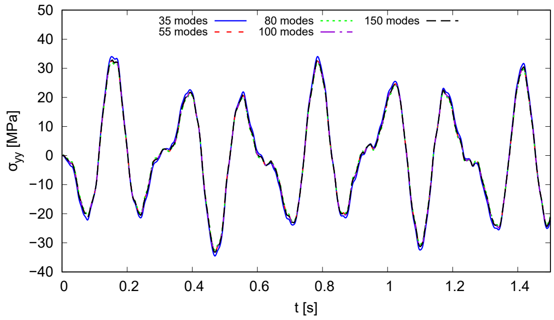

(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.003$ $s$) e il mode superposition (35 modi)

Figura 5.18: Spostamento trasversale in funzione del tempo valutato nel punto 1 di applicazione del carico. Trave a sezione rettangolare in parete sottile soggetta a carico sinusoidale. 10L9

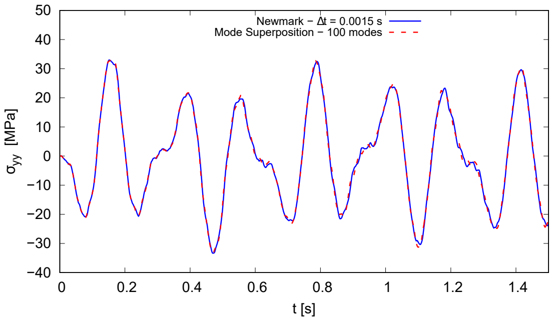
metodo di Newmark e per il numero di modi per la sovrapposizione modale, con relativo confronto tra i due metodi, per la valutazione degli stress $\sigma_{yy}$ e $\sigma_{yz}$ rispetto al tempo nella sezione intermedia a $x = 0.495$ $m$, $z = 0.0495$ $m$ e a $x = 0.495$ $m$, $z = 0$ $m$ rispettivamente. Come si può osservare dalle figure 5.19a e 5.20a il $\Delta t$ necessario per ottenere la convergenza degli stress è $\Delta t = 0.003$ $s$, corrispondente a 1000 step temporali. Per quanto riguarda la sovrapposizione modale, dalle figure 5.19b e 5.20b si osserva come almeno 100 modi siano necessari per ottenere risultati convergenti. Le figure 5.19c e 5.20c mostrano che le scelta del $\Delta t$ e del numero di modi derivanti dall'analisi di convergenza consenta di validare i due metodi per l'analisi della risposta nel tempo degli stress per questa tipologia di struttura. Aspetto interessante che vale la pena di sottolineare è che, per questa configurazione strutturale, l'analisi di convergenza degli sforzi abbia mostrato la necessità di utilizzare una discretizzazione temporale più fine così come un numero maggiore di modi, rispetto a quanto ottenuto per la valutazione dello spostamento trasversale.




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark



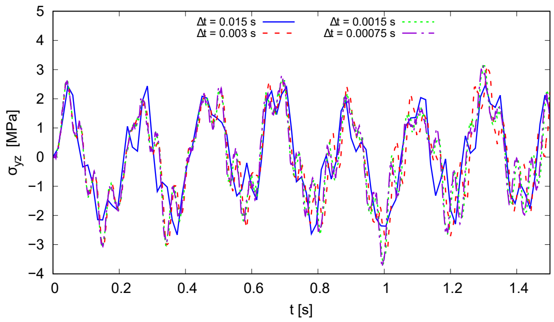

(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method



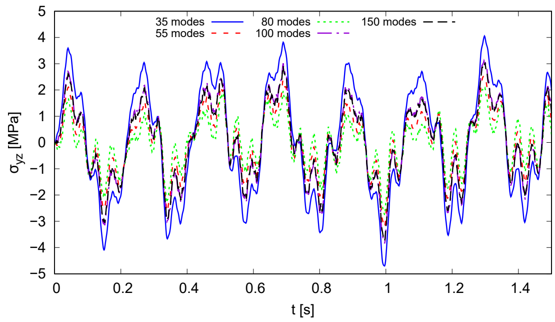

(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.003\ s$) e il mode superposition (100 modi)

Figura 5.19: Stress nella direzione normale in funzione del tempo valutato nella sezione intermedia ($x = 0.495\ m$, $z = 0.0495\ m$). Trave a sezione rettangolare in parete sottile soggetta a carico sinusoidale. 10L9

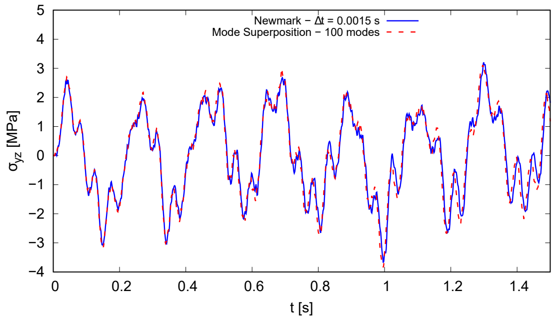
L'analisi si conclude mostrando la distribuzione degli stress lungo lo spessore, figura 5.21, ottenute utilizzando differenti modelli strutturali, adottando la sovrapposizione modale (utilizzando i 100 modi per quali si ottiene la convergenza) una volta definito l'istante temporale in cui l'evoluzione degli stress nel tempo presenta un massimo. Il confronto è stato fatto tra modelli polinomiali di tipo Taylor di ordine differente e una mesh di 10L9 che sfrutta la metodologia CW. Come si può osservare, teorie di ordine non elevato non consentono una corretta valutazione della distribuzione degli stress lungo lo spessore. Tuttavia, l'utilizzo di una discretizzazione mediante 10L9 e dell'approccio CW ha permesso di ottenere valori compatibili con quelli calcolati mediante l'utilizzo modelli polinomiali di tipo Taylor di ordine $N = 10$, oltre che una distribuzione degli stress lungo la sezione trasversale più consistente con il modello strutturale analizzato. Il tutto con un non trascurabile




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark




(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method



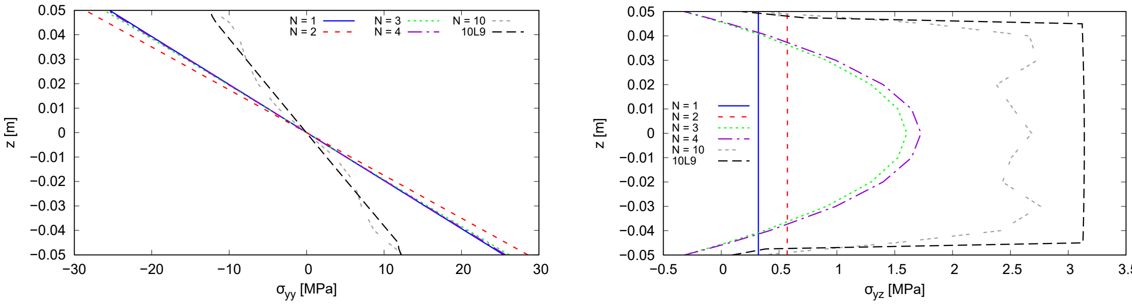

(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.003\ s$) e il mode superposition (100 modi)

Figura 5.20: Stress taglio in funzione del tempo valutato nella sezione intermedia ($x = 0.495\ m$, $z = 0\ m$). Trave a sezione rettangolare in parete sottile soggetta a carico sinusoidale. 10L9

risparmio di risorse di calcolo che a maggior ragione consente di validare il modello utilizzato nel corso delle analisi appena descritte.

### 5.2.3 Cassone a due correnti e pannello soggetto a carico sinusoidale

Si consideri nuovamente il cassone a due correnti e pannello riportato in figura 5.7. La geometria, le caratteristiche del materiale, le condizioni di vincolo e la mesh strutturale sono le stesse adottate per l'analisi statica in sezione 5.1.4. Per la valutazione della risposta dinamica, viene applicato sul longherone, nel centro della sezione intermedia, un carico sinusoidale di ampiezza $P_{z_0} = 1000\ N$ e frequenza angolare $\omega = 7\ rad/s$. La risposta è stata valutata lungo l'intervallo temporale [0,4] $s$.




(a) Distribuzione dello stress $\sigma_{yy}$ lungo lo spessore della trave per differenti modelli

(b) Distribuzione dello stress $\sigma_{yz}$ lungo lo spessore della trave per differenti modelli

Figura 5.21: Distribuzione degli stress lungo lo spessore nella sezione intermedia in $x = 0.495\ m$ a $t = 1.299\ s$. Trave a sezione rettangolare in parete sottile soggetta a carico sinusoidale. Mode superposition method (100 modi)

| | $u_{z_{max}} \times 10^5\ [m]$ |
|---|---|
| EBBM | 3.0371 |
| N=1 | 5.2046 |
| N=2 | 5.1974 |
| N=3 | 7.9175 |
| N=4 | 8.3710 |
| N=5 | 8.9251 |
| N=7 | 9.1399 |
| N=10 | 9.3401 |
| 8L9 | 9.6566 |

Tabella 5.15: Effetto dei differenti ordini di espansione sul massimo spostamento trasversale nel punto di applicazione del carico a $t = 2.02\ s$. Cassone a due correnti e pannello soggetto a carico sinusoidale. Metodo di Newmark ($\Delta t = 0.002\ s$)

In tabella 5.15 sono stati riportati i risultati in termini di massimo spostamento trasversale nel punto di applicazione del carico sinusoidale, calcolati con i modelli CUF utilizzati per l'analisi statica. In figura 5.22 è mostrata invece la time-history della $u_z$ lungo l'intervallo temporale esaminato. Per effettuare il confronto tra le diverse teorie, si è deciso di utilizzare il metodo di Newmark con $\Delta t = 0.002\ s$ (che assicura la convergenza dei risultati, come mostrato in figura 5.23a). Così come per le analisi statiche, anche per l'analisi dinamica l'applicazione di modelli L9 e della metodologia CW mostra un ottimo accordo con i risultati calcolati mediante espansioni di Taylor di ordine elevato, sia in termini di valori di picco che di andamento della risposta nel tempo. Riuscendo dunque a fornire risultati accurati e con un notevole risparmio di risorse computazionali, la combinazione di elementi L9

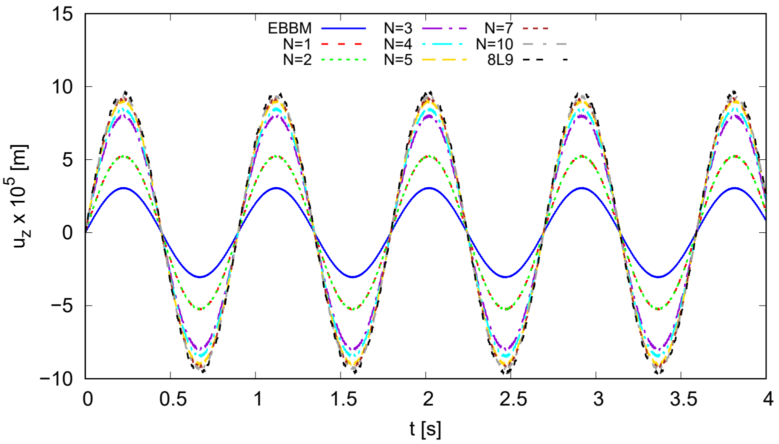
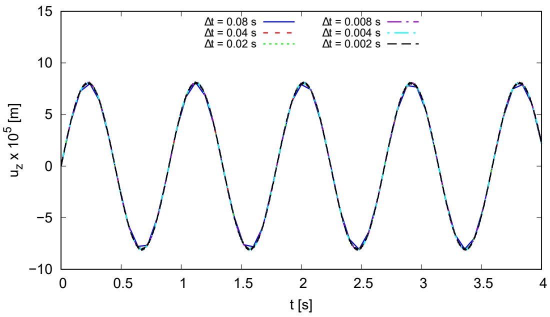



Figura 5.22: Spostamento trasversale in funzione del tempo valutato nel punto di applicazione carico. Cassone a due correnti e un pannello soggetto a carico sinusoidale. Metodo di Newmark ($\Delta t = 0.002\ s$)

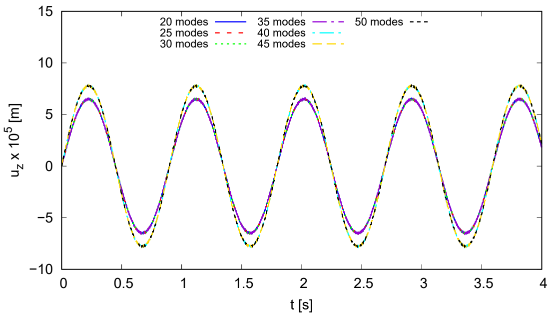
che sfrutta l'approccio CW può considerarsi validata per le analisi di convergenza successive.

A questo punto si procede con il confronto della risposta nel tempo, in termini di spostamento trasversale $u_z$ nel centro della sezione mediana, per differenti valori di time-step del metodo di Newmark e di numero di modi per la sovrapposizione modale. Per quanto riguarda il metodo di Newmark, figura 5.23a, si può osservare come, pur impiegando valori di time-step molto differenti fra loro, l'andamento a convergenza risulti molto rapido e un passo di integrazione pari a $\Delta t = 0.02\ s$ (corrispondente a 200 time-step), risulta un valore più che sufficiente per garantire la convergenza della risposta temporale. Nella figura 5.23b viene invece mostrato l'effetto del numero di modi sullo spostamento trasversale in funzione del tempo. In questo caso, 40 modi sono necessari per ottenere una piena convergenza della risposta dinamica. Dal confronto tra i due metodi, riportato in figura 5.23c, si può concludere che le scelte fatte, in termini di time-step e numero di modi da utilizzare, permettano di ottenere un ottimo matching dei risultati ricavati coi due metodi.

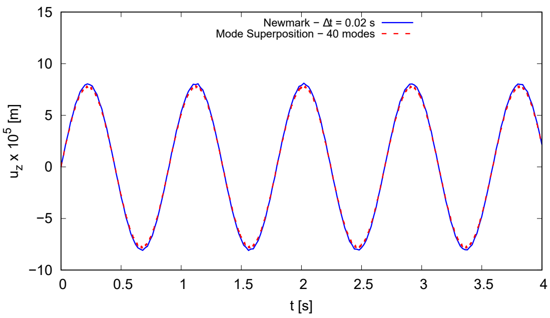
Il passo successivo consiste nell'analisi a convergenza per il time-step e il numero di modi per la distribuzione degli stress nel tempo. Per questa tipologia di analisi è stata attivata la correzione MITC per il locking [94]. Nelle figure 5.24 e 5.25 sono riportate le analisi di convergenza per il metodo di Newmark e la sovrapposizione modale, con relativo confronto dei risultati ottenuti, per gli stress $\sigma_{yy}$ e $\sigma_{yz}$ in funzione del tempo, valutati rispettivamente nel corrente superiore alla sezione di incastro e nel centro della sezione ad un quarto del longherone. Come mostrato nelle figure 5.24a e 5.25a, per questa tipologia di struttura si ha una convergenza molto rapida della risposta degli stress nel tempo sfruttando il metodo di Newmark, come si può




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark



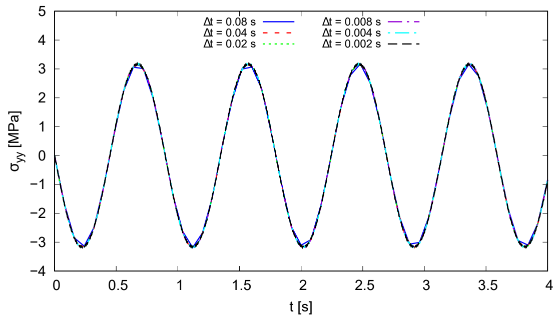

(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method



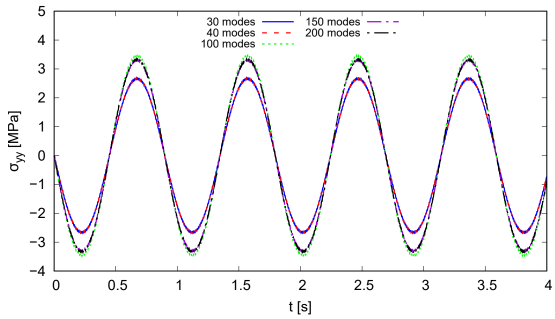

(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.02\ s$) e il mode superposition (40 modi)

Figura 5.23: Spostamento trasversale valutato nel centro della sezione mediana. Cassone con due correnti e un pannello soggetto a carico sinusoidale. L9

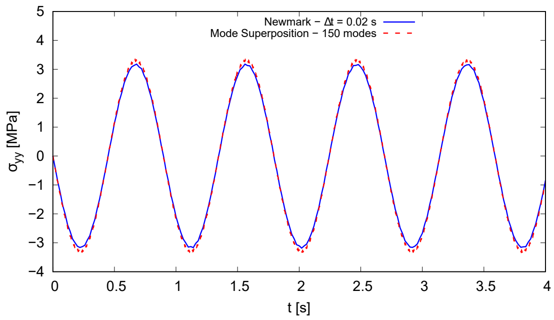
notare da un comportamento quasi indipendente dal passo temporale $\Delta t$ utilizzato. In definitiva, l'analisi ha permesso di determinare un $\Delta t = 0.02\ s$ per la piena convergenza degli stress. Nelle figure 5.24b e 5.25b è stato riportato l'effetto del numero di modi sull'andamento degli stress in funzione del tempo, calcolato mediante la sovrapposizione modale. Come si osserva, la convergenza degli stress necessita un numero di modi molto superiore rispetto a quelli necessari per ottenere la convergenza dello spostamento trasversale, dal momento che sono necessari ben 150 forme modali. Inoltre, rispetto ai modelli strutturali precedentemente analizzati, per il longherone è necessario un numero di modi superiore per far convergere l'andamento degli stress nel tempo. Quindi, se per i casi precedenti la sovrapposizione modale ha rappresentato un notevole risparmio di risorse computazionali rispetto al metodo di Newmark, con l'aumentare della complessità della struttura da analizzare questo guadagno si riduce considerevolmente. Per concludere, nelle figure 5.24c e 5.25c,




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark




(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method

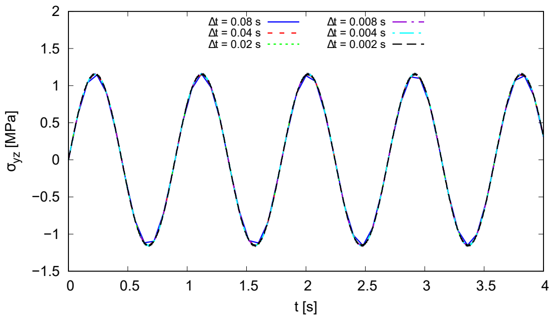



(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.02\ s$) e il mode superposition (150 modi)

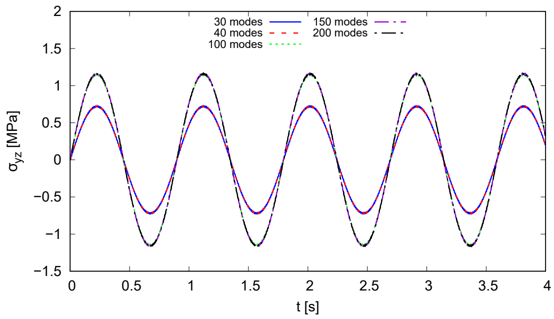
Figura 5.24: Stress nella direzione normale valutato nel corrente superiore nella sezione di incastro. Cassone con due correnti e pannello soggetto a carico sinusoidale. L9

viene mostrato il confronto tra i due metodi analizzati. Appare chiaro come, indipendente dal carico computazionale che queste metodologie risolutive comportano, l'accuratezza dei risultati ottenuti risulta per entrambi molto elevata.

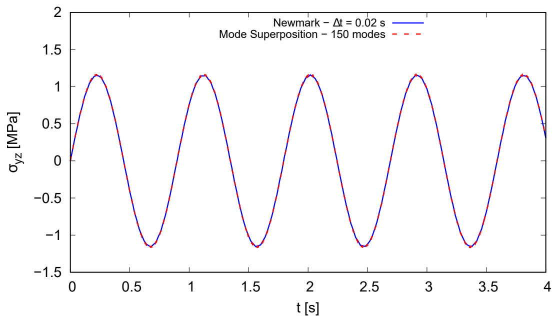
Per completezza, si conclude riportando l'analisi a convergenza della distribuzione degli stress lungo lo spessore della trave, confrontando tra i differenti modelli strutturali che sono state utilizzati per valutare la risposta statica e dinamica del longherone. Da quanto osservabile in figura 5.26, si può notare come teorie di ordine non elevato forniscano risultati poco accurati. Infatti, osservando sia la distribuzione lungo lo spessore delle tensioni normali $\sigma_{yy}$ in figura 5.26a sia quella relativa agli sforzi di taglio riportati in figura 5.26b, solamente mediante modelli Taylor-like di ordine elevato o con una combinazione di elementi L9 adottando la metodologia CW è possibile ottenere una corretta distribuzione degli sforzi. A tal proposito, si può infatti notare come solamente questi modelli riescano a prevedere correttamente il




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark




(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method



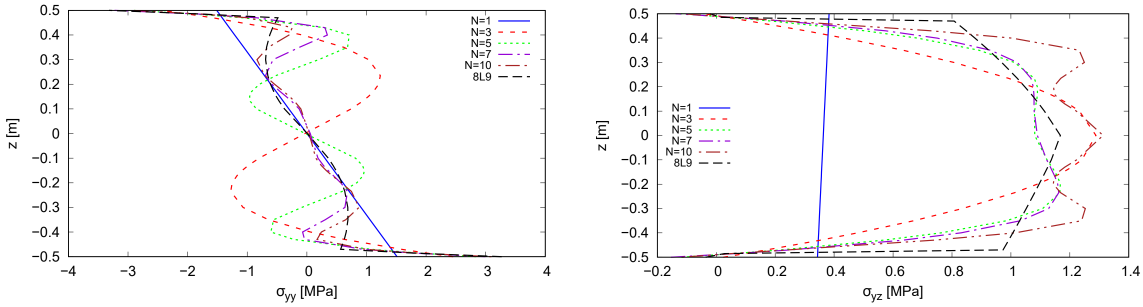

(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.02\ s$) e il mode superposition (150 modi)

Figura 5.25: Stress di taglio valutato nel centro della sezione ad un quarto della trave. Cassone con due correnti e pannello soggetto a carico sinusoidale. L9

contributo a flessione fornito dal pannello e le concentrazioni di tensione nei correnti, come osservabile in figura 5.26a. Allo stesso modo, nella figura 5.26b si può notare come teorie di ordine non elevato forniscano una distribuzione del taglio non convergente, se non addirittura del tutto errata, rispetto a quella ottenuta grazie a modelli più raffinati. Tuttavia, solamente per mezzo della metodologia CW si riesce ad ottenere una distribuzione più accurata della $\sigma_{yz}$, soprattutto lungo il pannello e nei punti di interfaccia coi correnti. Per queste ragioni, oltre che per il minor numero di gradi di libertà coinvolti nel calcolo, il modello L9 adottato risulta preferibile per prevedere il corretto comportamento strutturale per il longherone analizzato.

### 5.2.4 Cassone rettangolare soggetto a carico sinusoidale

Si consideri il cassone rettangolare in figura 5.8. La geometria, le caratteristiche del materiale, le condizioni di vincolo e la mesh strutturale adottata sono le stesse




(a) Distribuzione dello stress $\sigma_{yy}$ lungo lo spessore della trave nella sezione di incastro

(b) Distribuzione dello stress $\sigma_{yz}$ lungo lo spessore della trave a $x = 0$ e $y = L/4$

Figura 5.26: Distribuzione degli stress lungo lo spessore a $t = 1.120\ s$. Cassone a due correnti e un pannello soggetto a carico sinusoidale. Mode superposition method (150 modi)

utilizzate nell'analisi statica precedentemente condotta in sezione 5.1.5. Si vuole ora procedere con la valutazione della risposta dinamica del cassone, quando soggetto a un carico sinusoidale di ampiezza $P_{z_0} = 10000\ N$ e frequenza angolare $\omega = 3\ rad/s$ applicato nel centro del corrente indicato col numero 1 e a $y = L$. L'analisi è stata condotta lungo l'intervallo temporale [0,2] $s$ e, come fatto fino a questo momento, le risposte nel tempo in termini di spostamento trasversale e stress sono state valutate mediante il metodo di Newmark e la sovrapposizione modale.

In tabella 5.16 viene riportato il massimo spostamento trasversale valutato nel punto di applicazione del carico sinusoidale e calcolato con i differenti modelli CUF proposti per l'analisi statica. Il calcolo è stato effettuato utilizzando il metodo di Newmark con $\Delta t = 0.001$ (che come si può osservare in figura 5.28a, garantisce pienamente la convergenza della risposta dinamica). Nella figura 5.27 è invece riportata la time-history della $u_z$ lungo l'intervallo scelto per l'analisi. Come si può notare dai risultati proposti, le considerazioni fatte nell'ambito dell'analisi statica per la mesh 8L9 sono estendibili anche alla valutazione della risposta dinamica. La metodologia CW fornisce quindi risultati accurati, in termini di valori di picco e andamento della risposta, al pari di modelli Taylor-like con ordine di espansione molto elevato, avendo in più il vantaggio di coinvolgere nel calcolo un numero decisamente inferiore di gradi di libertà. La scelta di questa modellizzazione del campo di spostamenti lungo la sezione trasversale risulta quindi corretta anche per valutare la risposta dinamica del cassone in termini di $u_z$.

Una volta definito come modellare la sezione trasversale, si procede con lo studio di convergenza per il $\Delta t$ nel metodo di Newmark e per il numero di modi della sovrapposizione modale, figura 5.28, andando a valutare l'effetto che questi due

| | $u_z$ $[m]$ |
|---|---|
| EBBM | 0.00215 |
| N=1 | 0.00234 |
| N=2 | 0.00233 |
| N=3 | 0.00277 |
| N=4 | 0.00305 |
| N=5 | 0.00323 |
| N=7 | 0.00513 |
| N=10 | 0.00596 |
| N=12 | 0.00604 |
| 8L9 | 0.00618 |

Tabella 5.16: Effetto dei differenti ordini di espansione sullo spostamento trasversale nel punto di applicazione del carico a $t = 0.54$ $s$. Cassone rettangolare soggetto a carico sinusoidale applicato nel centro del corrente 1. Metodo di Newmark ($\Delta t = 0.001$ $s$)

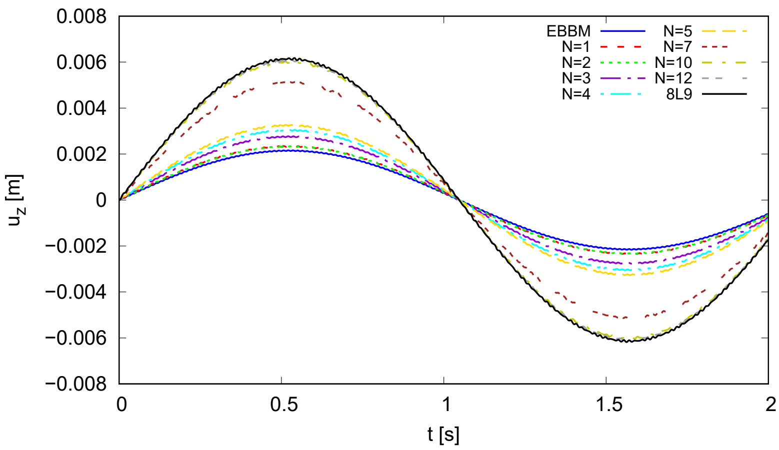
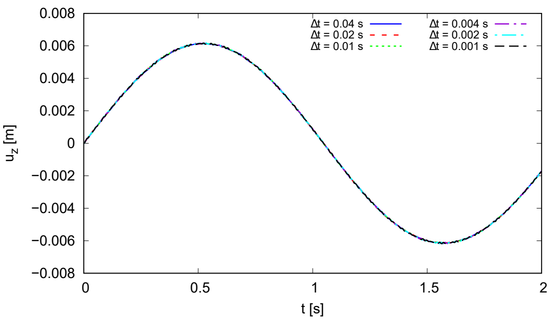
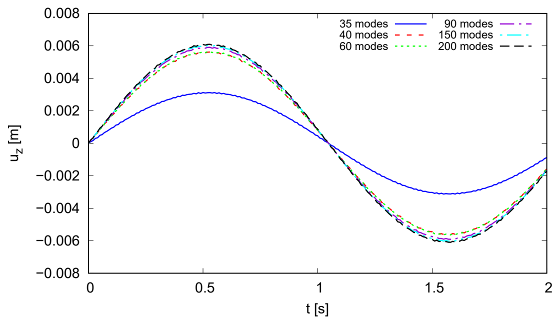



Figura 5.27: Spostamento trasversale in funzione del tempo valutato nel punto di applicazione carico. Cassone rettangolare soggetto a carico sinusoidale applicato nel centro del corrente 1. Metodo di Newmark ($\Delta t = 0.001$ $s$)

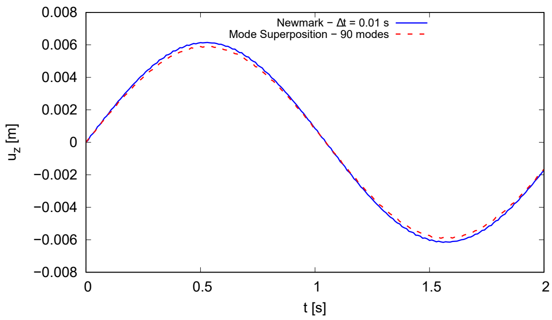
parametri hanno sull'andamento nel tempo dello spostamento $u_z$ nel punto di applicazione del carico armonico. Come si può notare dalla figura 5.28a, per questa tipologia di struttura si ha un andamento a convergenza molto rapido mediante il metodo di Newmark in quanto si osserva che anche una discretizzazione temporale non eccessivamente fine consenta di valutare la risposta nel tempo con accuratezza. In base ai risultati ricavati si è scelto un valore del time-step tale che $\Delta t = 0.01$ $s$ (corrispondente a 200 step temporali). L'effetto del numero di modi sulla risposta dinamica è invece mostrato in figura 5.28b. Si può osservare come, al contrario del




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark




(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method

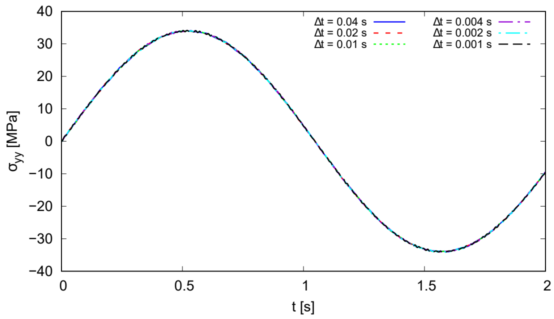



(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.01\ s$) e il mode superposition (90 modi)

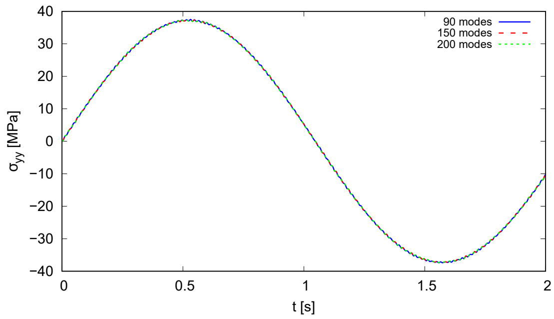
Figura 5.28: Spostamento trasversale in funzione del tempo valutato nel punto di applicazione del carico. Cassone rettangolare soggetto a carico sinusoidale applicato nel centro del corrente 1. 8L9

metodo precedente, si abbia un andamento a convergenza meno rapido. Tuttavia, si riesce ad ottenere una risposta dinamica sufficientemente accurata con un numero di modi comunque contenuto. In particolare, si può notare come 90 modi consentano un'accurata valutazione dell'andamento di $u_z$ lungo l'intervallo temporale esaminato. Infine, in figura 5.28c, si può osservare come le valutazioni appena fatti sul $\Delta t$ e sul numero di modi permettano di ricavare risultati confrontabili e ugualmente accurati per entrambi i metodi proposti.

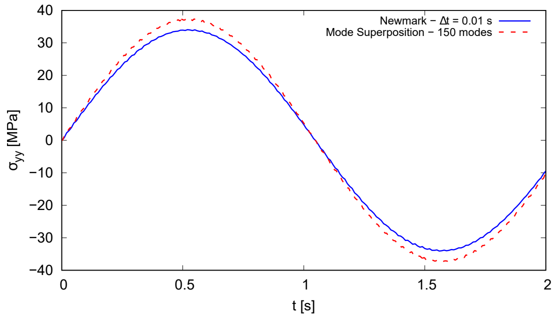
Lo studio del comportamento a convergenza prosegue con la valutazione della risposta dinamica degli stress, $\sigma_{yy}$ e $\sigma_{yz}$, nel tempo. In base a quanto ricavato dall'analisi statica in relazione alla distribuzione degli stress lungo lo spessore, in questa fase si sfrutterà una discretizzazione di 52L9 per modellare la sezione trasversale del cassone, in relazione a quanto determinato dall'analisi statica in sezione 5.1.5. Nelle figure 5.29 e 5.30 viene mostrato lo studio a convergenza sul time-step del metodo




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark



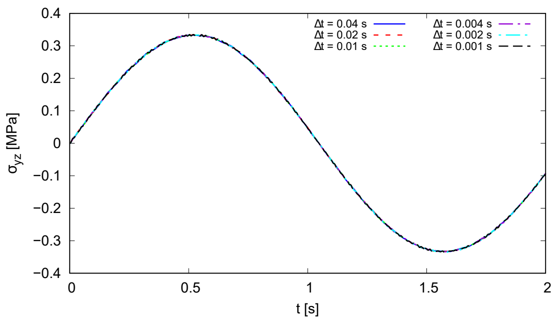

(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method



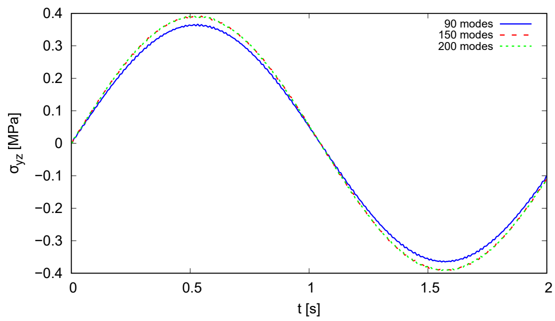

(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.01\ s$) e il mode superposition (150 modi)

Figura 5.29: Stress nella direzione normale in funzione del tempo valutato nel centro del corrente 1 nella sezione di incastro. Cassone rettangolare soggetto a carico sinusoidale applicato nel centro del corrente 1. 52L9

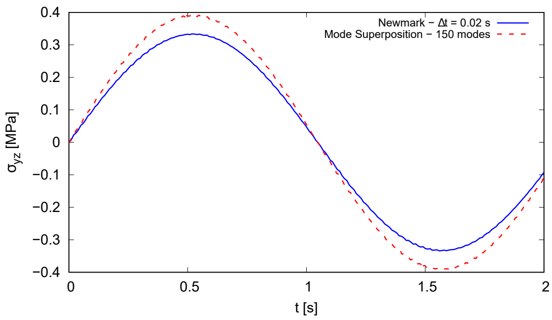
di Newmark e sul numero di modi per la sovrapposizione modale, con relativo confronto fra i due metodi, in relazione alla variazione nel tempo delle $\sigma_{yy}$ e $\sigma_{yz}$, valute nel corrente 1 nella sezione di incastro e a $y = L/2$ rispettivamente. In generale, per entrambe le tipologie di stress la convergenza dei risultati è risultata essere molto rapida per entrambi i metodi. Se per il metodo di Newmark, come osservabile nelle figure 5.29a e 5.30a, è possibile adottare lo stesso time-step $\Delta t = 0.01\ s$ che consente la convergenza della $u_z$, per la sovrapposizione modale l'analisi di stress necessita di un maggior numero di modi per giungere a convergenza. Infatti, come si osserva nella 5.30b, almeno 150 modi sono necessari per ottenere la convergenza della $\sigma_{yz}$. Il confronto tra i due metodi, mostrato nelle figure 5.29c e 5.30c, mette in luce un buon accordo dell'andamento nel tempo per le due tipologie di stress, con una differenza nei valori di picco, che per il metodi di sovrapposizione modale risultano




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark




(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method

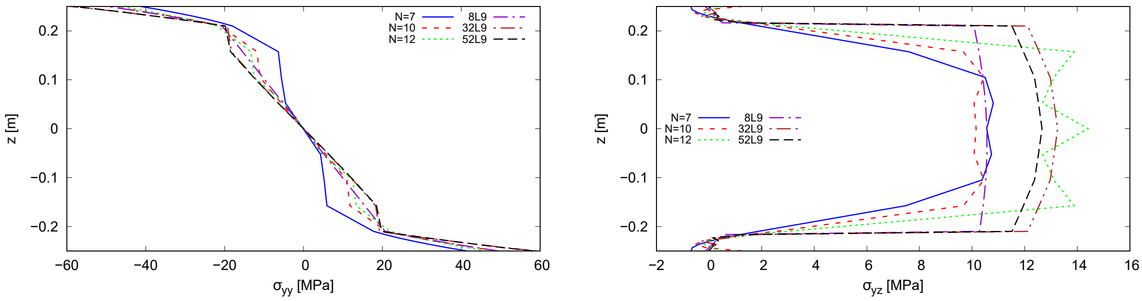



(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.01\ s$) e il mode superposition (150 modi)

Figura 5.30: Stress di taglio in funzione del tempo valutato nel centro del corrente 1 nella sezione a $y = L/2$. Cassone rettangolare soggetto a carico sinusoidale applicato nel centro del corrente 1. 52L9

essere leggermente più elevati. In ogni caso, si può concludere come entrambi i metodi risultino essere sufficientemente accurati per condurre l'analisi dinamica della distribuzione degli sforzi in funzione del tempo, fornendo risultati soddisfacenti.

Per completezza, si riporta infine la distribuzione degli stress lungo lo spessore. La figura 5.31, mostra le distribuzioni di $\sigma_{yy}$ e $\sigma_{yz}$ lungo la coordinata $z$ della sezione trasversale, rispettivamente all'incastro e nella sezione mediana, ricavate applicando la sovrapposizione modale e considerando 150 modi, dal momento che nell'analisi precedente si è dimostrato come siano in numero sufficiente da ottenere la convergenza della distribuzione degli stress nel tempo. I risultati mostrati confermano quanto anticipato dall'analisi statica. Solo teorie sufficientemente raffinate riescono infatti a cogliere la corretta distribuzione degli sforzi lungo lo spessore della trave. In particolare, si evince come i modelli di espansione lagrangiani che sfruttano combinazioni di elementi L9 e la metodologia CW forniscano un'accuratezza sicuramente




(a) Distribuzione dello stress $\sigma_{yy}$ lungo lo spessore della trave a $x = 0.48\ m$ e nella sezione di incastro

(b) Distribuzione dello stress $\sigma_{yz}$ lungo lo spessore della trave a $x = 0.48\ m$ e nella sezione intermedia

Figura 5.31: Distribuzione degli stress lungo lo spessore a $t = 0.532\ s$. Cassone rettangolare soggetto a carico sinusoidale applicato nel centro del corrente 1. Mode superposition method (150 modi)

superiore in confronto a modelli basati su espansioni di tipo Taylor di ordine elevato, e ciò risulta particolarmente evidente osservando la distribuzione della $\sigma_{yz}$ lungo lo spessore, riportata in figura 5.31b, mentre un miglior accordo dei risultati ottenuti si riesce ad ottenere osservando la distribuzione della $\sigma_{yy}$ riportata in figura 5.31a.

### 5.2.5 Ala completa soggetta a carico di raffica

Per ultima, viene analizzata la risposta dinamica di un'ala completa. La sezione dell'ala consiste in un profilo NACA 2415, al quale sono aggiunti 2 longheroni, figura 5.32. La corda del profilo vale $c = 1\ m$, mentre la lunghezza dell'ala vale $L = 6\ m$ Il Lo spessore dei pannelli vale $3 \times 10^{-3}\ m$, mentre quello delle anime dei longheroni vale $5 \times 10^{-3}\ m$. La dimensione delle solette, assieme all'analisi di vibrazioni libere, è riportata in [76]. La struttura è in materiale isotropo, le cui proprietà sono: $E = 75\ GPa$, $\nu = 0.33$ e $\rho = 2700\ kg/m^3$. All'ala è applicato il vincolo di incastro in corrispondenza della radice. L'ala è stata discretizzata lungo

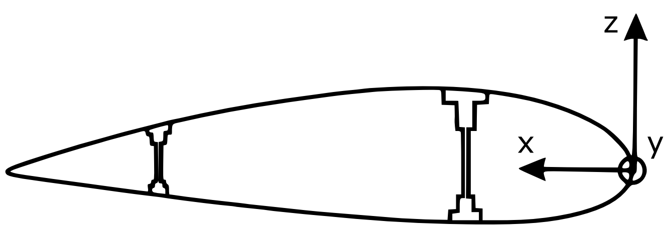


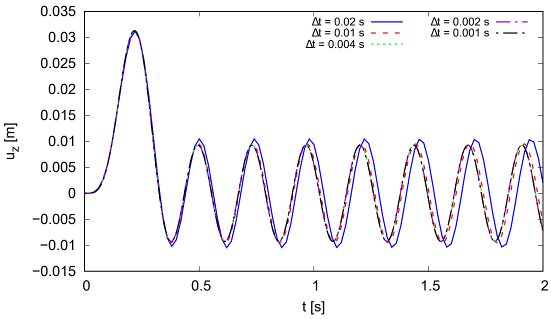

Figura 5.32: Sezione ala

la direzione dell'apertura, $y$, mediante 9 elementi B4, mentre una mesh di 49L9 è stata scelta per discretizzare la sezione trasversale sfruttando la metodologia CW. Il confronto tra i risultati ottenuti dall'analisi dinamica mediante differenti teorie e configurazioni strutturali dell'ala è riportato in [84].

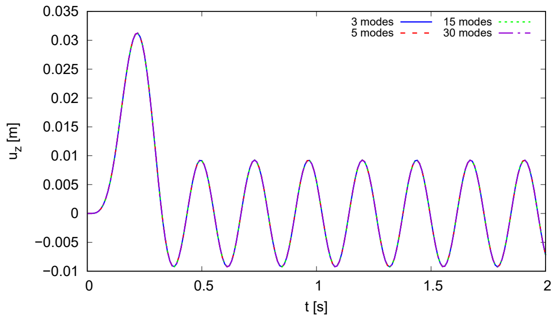
Per questa configurazione strutturale, è stata attuata un'analisi dinamica per valutare l'effetto di una raffica verticale, adottando per essa il modello temporale discreto uno-meno-coseno. Sono noti il carico alare $W/S = 378.6\ kg/m^2$, la velocità di volo $U_\infty = 80\ m/s$ e le condizioni di volo (sea level). Con un'accelerazione di gravità pari a quelle terrestre, si considera una raffica di intensità pari a $U_0 = 10\ m/s$ e durata $t_g = 0.4\ s$. Adottando l'ipotesi di fluido inviscido, è stato possibile stimare $C_{L_\alpha} = 7.6\ rad^{-1}$ mediante i software XFLR5 e XFoil [84].

In analogia ai casi precedenti, in questa sezione si andrà a effettuare uno studio di convergenza per il metodo di Newmark e la sovrapposizione modale, lungo l'intervallo temporale [0,2] $s$, in termini di spostamento trasversale e stress. In figura 5.33 viene riportato l'effetto di $\Delta t$ e del numero di modi sulla risposta nel tempo in termini di $u_z$ valutata al bordo di attacco nella sezione al tip. Come si può osservare, adottando la sovrapposizione modale si ha un evidente risparmio di risorse computazionali. Il metodo di Newmark, infatti, necessita per questo tipo di struttura di un time-step $\Delta t = 0.004\ s$, corrispondente a 500 step temporali, per ottenere piena convergenza della risposta temporale, figura 5.33a. D'altra parte, solamente 3 modi sono necessari per valutare perfettamente l'andamento dello spostamento trasversale nel tempo, come mostrato in figura 5.33b. Complessivamente, entrambi i metodi consentono una corretta e accurata analisi della risposta dinamica dell'ala e questo lo si può vedere dal loro confronto in figura 5.33c. Tuttavia, come già anticipato, il calcolo risulta meno gravoso utilizzando la sovrapposizione modale.

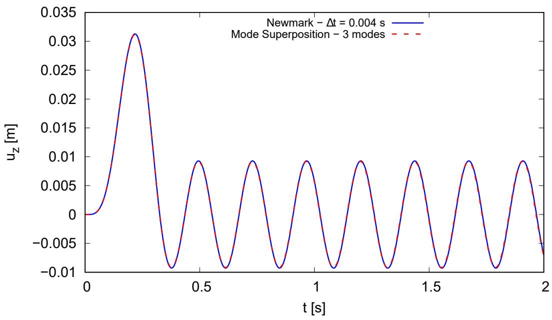
Il comportamento a convergenza viene ora valutato in termini di stress. Nelle figure 5.34 e 5.35 viene riportata la risposta nel tempo in termini di stress, $\sigma_{yy}$ e $\sigma_{yz}$, valutati in $x = 2.25\ m$ e $z = 0.02\ m$ e rispettivamente alla radice dell'ala e in $y = L/2$. Il metodo di Newmark fornisce un andamento a convergenza per un passo di discretizzazione temporale $\Delta t = 0.004\ s$, cioè per 500 step, e ciò è osservabile nelle figure 5.34a e 5.35a. Nuovamente, la sovrapposizione modale determina un andamento più rapido a convergenza e ciò risulta essere chiaramente visibile dalle figure 5.34b e 5.35b, dalle quali è possibile concludere come 15 modi siano necessari per ottenere la convergenza della risposta dinamica nel tempo in termini di stress. Si può notare come, rispetto allo spostamento trasversale, un numero maggiore di modi è necessario per portare gli sforzi a convergenza. I risultati ottenuti per entrambi i metodi mostrano un perfetto accordo dei risultati ottenuti, come mostrato nelle figure 5.34c e 5.35c. In conclusione, sia il metodo di Newmark che la sovrapposizione modale si dimostrano essere entrami ugualmente accurati per la valutazione della risposta nel tempo degli stress quando l'ala è sottoposta ad un carico di raffica. La differenza risiede nelle risorse di calcolo necessarie per effettuare l'analisi e, da questo




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark




(b) Analisi di convergenza del numero di modi per il mode superposition method



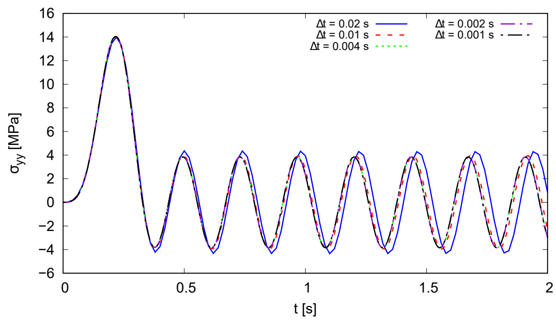

(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.0104\ s$) e il mode superposition (3 modi)

Figura 5.33: Spostamento trasversale in funzione del tempo valutato al bordo di attacco della sezione al tip. Ala soggetta a carico di raffica. 49L9

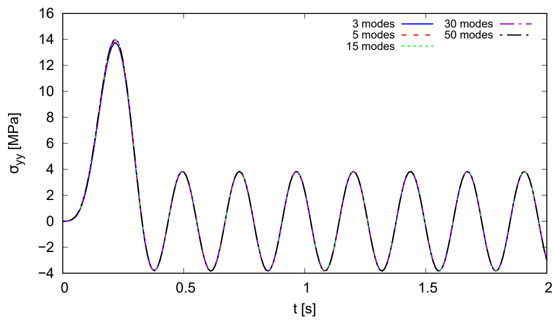
punto di vista, ricorrere alla sovrapposizione modale risulta maggiormente efficace. In [83] sono consultabili ulteriori valutazioni in merito alla distribuzione degli sforzi $\sigma_{yy}$ e $\sigma_{yz}$ lungo lo spessore.

## 5.3 Analisi Aeroelastica di una Sezione Tipica

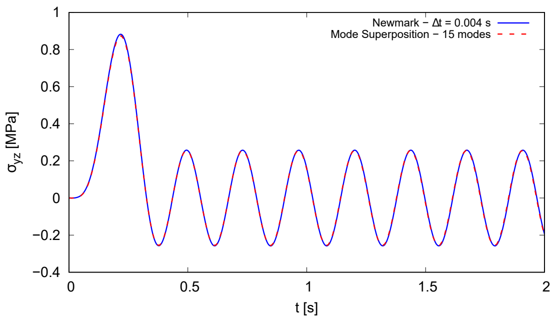
In questa sezione viene riportata l'analisi aeroelastica di una sezione tipica, la cui geometria è osservabile in figura 4.1. Lo scopo di questa analisi è quello di valutare le condizioni di flutter del modello, in termini di velocità e frequenza, andando a valutare l'andamento della parte reale e immaginaria degli autovalori al variare della velocità, risolvendo cioè il problema classico agli autovalori nell'Eq. 4.12. In questo modo sarà possibile determinare la condizione di flutter in corrispondenza del valore di velocità in cui la parte reale degli autovalori cambia di segno, passando cioè a valori negativi a positivi.




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark



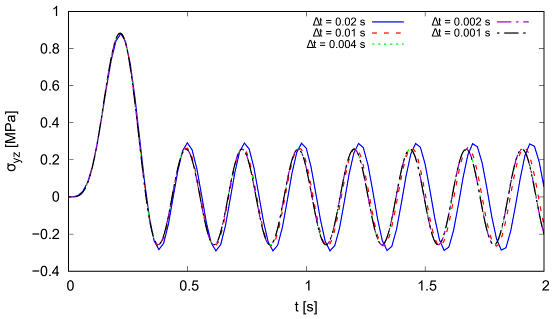

(b) Analisi di convergenza del numero di modi per la sovrapposizione modale



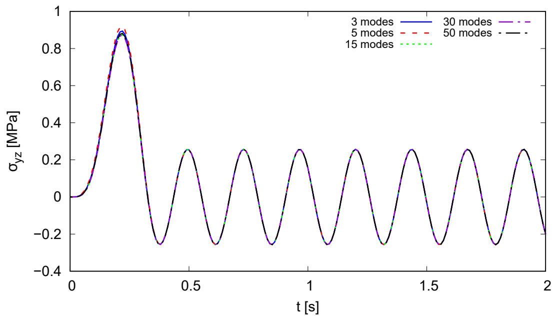

(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.004\ s$) e sovrapposizione modale (15 modi)

Figura 5.34: Stress nella direzione normale in funzione del tempo valutato alla radice in $x = 0.25\ m$ e $z = 0.02\ m$. Ala soggetta a carico di raffica. 49L9

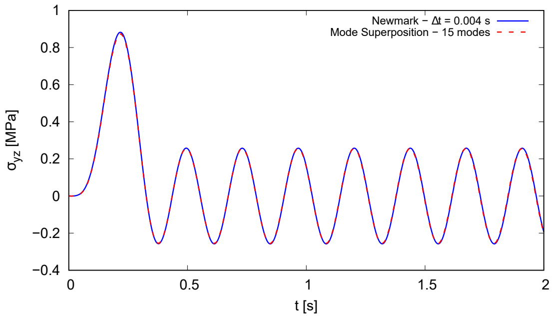
Le analisi, di natura prettamente preliminare, verranno effettuate considerando due diversi modelli aerodinamici: si andrà cioè ad implementare un modello aerodinamico stazionario e, di seguito, il modello aerodinamico instazionario semplificato riportato nell'Eq. 4.2. Lo scopo è quello di mostrare l'effetto della teoria aerodinamica sulla stabilità del modello considerato, sull'andamento quindi degli autovalori al variare della velocità di volo e sulla condizione di flutter vera e propria. Inoltre, in base a queste analisi sarà possibile definire il campo operativo in cui valutare, successivamente, il modello aeroservoelastico. Infine, verranno proposti dei set di risultati che consentano di valutare come la stabilità del sistema venga influenzata nel momento in cui si agisce variando alcuni input che lo caratterizzano. In questo modo, sarà possibile dedurre alcune importanti considerazioni su come l'intervento su certi parametri del sistema possa influenzare positivamente o negativamente la condizione di flutter.




(a) Analisi di convergenza per il time-step, $\Delta t$, per il metodo di Newmark




(b) Analisi di convergenza del numero di modi per la sovrapposizione modale




(c) Confronto tra il metodo di Newmark ($\Delta t = 0.004\ s$) e sovrapposizione modale (15 modi)

Figura 5.35: Stress di taglio in funzione del tempo valutato in $x = 0.25\ m$, $y = L/2$ e $z = 0.02\ m$. Ala soggetta a carico di raffica. 49L9

### 5.3.1 Aerodinamica Stazionaria

Si consideri una sezione tipica come quella riportata in figura 4.1 considerando il seguente set di input: $a = -0.2$, $e = -0.1$, $c = 2b = 0.5$, $m = 5\ kg/m$ e $I_P = 0.1\ kgm$. Si ricordi che $a$ è il parametro adimensionale che individua la posizione del centro di taglio, mentre $e$ la posizione del centro di massa; con $m$ è indicata la massa per unità di lunghezza della sezione, mentre $I_P$ il momento di inerzia polare rispetto all'asse elastico. A differenza delle rigidezze $k_h$ e $k_\theta$, è uso comune avere come input le frequenze naturali del sistema in condizioni di velocità nulla, ovvero $f_h = 3\ Hz$ e $f_\theta = 15\ Hz$, con le quali risulta immediato risalire ai valori di rigidezze delle molle mediante le seguenti relazioni:

$$f_h = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_h}{m}}, \quad f_\theta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_\theta}{I_P}} \tag{5.2}$$

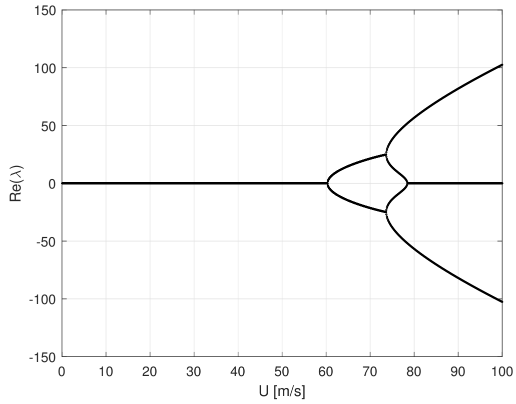
Infine, la densità dell'aria è stata assunta costante e pari a $\rho_\infty = 1.225\ kg/m^3$. Se non indicato differentemente, tutte le analisi che coinvolgono il modello della sezione tipica faranno uso del set di input appena descritto.

Come anticipato, in questa analisi preliminare si farà uso di un modello aerodinamico stazionario semplificato, ottenibile andando ad imporre, nell'Eq. 4.3, $\dot{h} = 0$ e $\dot{\theta} = 0$. Si capisce immediatamente come, da tale assunzione, ne deriva $\mathbf{D_a} = \mathbf{0}$ e, di conseguenza, il sistema dinamico aeroelastico del secondo di cui nel seguito si andrà ad analizzare la stabilità si riduce semplicemente a:

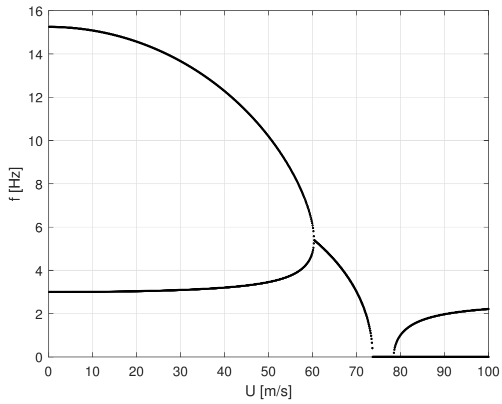
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K_a})\,\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{5.3}$$

dove si ricorda che $\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} h & \theta \end{Bmatrix}^T$, rappresenta il vettore dei gradi di libertà del sistema.

La risoluzione del problema in Eq. 4.12 consente di calcolare di valutare gli autovalori $\lambda$ della matrice di sistema $\mathbf{A}$ al variare della condizione di volo. Per l'analisi considerata, le $\lambda_j$ coppie complesse coniugate sono state calcolate per il seguente range di velocità: $0\ m/s \leq U \leq 100\ m/s$. I risultati sono riportati in termini di parte reale dell'autovalore, rappresentativa dello smorzamento del sistema, e in termini di frequenza, calcolata come $f = \frac{Im(\lambda)}{2\pi}$ (dove con $Im(\lambda)$ si indica la parte immaginaria dell'autovalore) al variare della velocità, come si può osservare dalla figura 5.36. Come si può notare dal grafico, all'aumentare della velocità le frequenze relative ai due gradi di libertà in figura 5.36b (il ramo ascendente fa riferimento al moto di traslazione del profilo, cioè ad $h$, mentre il ramo discendente alla rotazione $\theta$) tendono a convergere in corrispondenza dello stesso valore, mentre lo smorzamento, osservabile in figura 5.36a, rimane nullo, condizione dovuta al fatto che il sistema, in assenza di smorzamenti strutturali e aerodinamici, ha globalmente uno smorzamento nullo. Tale comportamento si mantiene fino ad un particolare valore di velocità di interessa per l'analisi, ovvero $U_F = 60.4\ m/s$. Come si può osservare, per questo valore di velocità la parte reale dell'autovalore esibisce un cambiamento di segno, passando da valori precedentemente nulli a valori positivi e negativi per i due rami. Il passaggio a valori maggiori di zero, permette di identificare in quel particolare valore di velocità proprio la velocità di flutter, in corrispondenza della quale il sistema diventa instabile. In altre parole, per $U \leq U_F$ i modi del sistema saranno caratterizzati da semplici oscillazioni armoniche non smorzate mentre, quando lo smorzamento del sistema diventa positivo, ecco che le oscillazioni diverranno instabili e divergenti. Aspetto interessante che vale la pena di notare è che, in corrispondenza della velocità di flutter, si può osservare la coalescenza delle frequenze di oscillazioni dei gradi di liberà, condizione che consente di individuare la frequenza di flutter del sistema, ovvero $f_F = 5.395\ Hz$. Si tenga presente che, nonostante il comportamento appena descritto, l'individuazione della condizione di flutter mediante la risoluzione del problema agli autovalori avviene in corrispondenza del passaggio dello smorzamento, quindi della parte reale dell'autovalore, da valori negativi o nulli, a valori positivi.




(a) Smorzamento




(b) Frequenza

Figura 5.36: Andamento dello smorzamento (parte reale dell'autovalore) e della frequenza (parte immaginaria) del sistema al variare della velocità. Aerodinamica stazionaria

I commenti fin qui riportati fanno riferimento ad un modello aerodinamico stazionario, che non tiene cioè conto delle azioni aerodinamiche legate alle oscillazioni del profilo. Ciò si introduce in una risposta poco realistica del sistema, soprattutto se paragonata a quella determinabile mediante prove sperimentali. Le maggiori fonti di inaccuratezza derivanti a questa tipologia di modello sono legate al valore calcolato per la velocità di flutter, che non risulta essere corretto, e all'aver determinato valori di smorzamento nulli per velocità $U \leq U_F$ [6]. Per poter rimediare a queste inaccuratezze è necessario includere all'interno del modello aerodinamico gli effetti instazionari, sfruttando una teoria aerodinamica più sofisticata, come si andrà a fare nella sezione successiva.

### 5.3.2 Aerodinamica Instazionaria

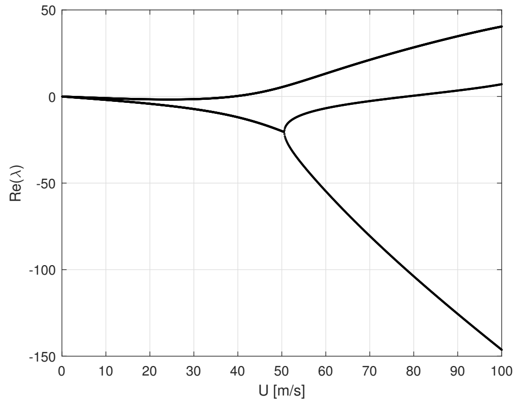
Per lo stesso range di velocità, ovvero $0\ m/s \leq U \leq 100\ m/s$, si vuole ora andare a valutare la stabilità del sistema con il modello aerodinamico descritto nell'Eq. 4.3. In questo modo, il sistema aeroelastico dinamico del secondo ordine che ne deriva è descritto dalla seguente equazione:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D_a}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K_a})\,\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{5.4}$$

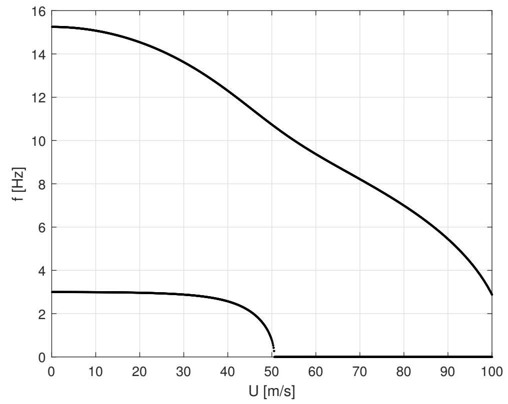
con $\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} h & \theta \end{Bmatrix}^T$. I risultati derivanti dall'analisi di stabilità del sistema dinamico sono nuovamente riportati in termini di smorzamento e frequenza del sistema al variare della velocità di volo, come mostrato in figura 5.37.

Come si può notare, rispetto al caso precedente l'introduzione dello smorzamento aerodinamico all'interno del sistema aeroelastico ha determinato una profonda modifica degli andamenti di smorzamento e frequenza. A livello qualitativo, dalla figura 5.37a si può osservare come, fin dai valori più bassi di velocità, il sistema risulta essere smorzato, aspetto sicuramente più realistico rispetto al caso stazionario dove, come si ha avuto modo di esaminare, il sistema non mostrava alcun tipo di smorzamento fino al sopraggiungere della condizione di flutter. Inoltre, si può osservare come, approssimativamente fino ad $U \cong 25\ m/s$, il sistema esibisce complessivamente uno smorzamento negativo. Per valori di velocità superiori, uno dei due rami inverte tale tendenza, portandosi verso valori maggiori fino ad annullarsi, portando il sistema in flutter, alla $U_F = 39\ m/s$. Si può quindi notare che, includendo nel modello aerodinamico i termini instazionari, il sistema diventa instabile per velocità inferiori. Il valore determinato, chiaramente, anche in questo caso non rappresenta il valore effettivamente corretto della velocità di flutter, dal momento che la teoria aerodinamica considerata, benché sicuramente più realistica rispetto a quella adottata nel caso stazionario, rappresenta ancora un modello semplificato. Infatti, per poter ottenere un comportamento ancora più aderente a quello reale, sarebbe necessario considerare un'espressione di $L$ e $M_{\frac{1}{4}}$ più complessa, nella quale siano coinvolti non solo gli effetti instazionari legati alla dinamica del sistema, quindi i termini $h$, $\theta$, $\dot{h}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{h}$ e $\ddot{\theta}$, ma anche gli effetti instazionari legati ai moti propri del fluido. Il vantaggio di questa rappresentazione semplificata risiede principalmente nell'aver un'espressione molto semplice delle forze aerodinamiche in funzione del tempo, la quale ben si presta all'implementazione per la risoluzione del problema agli autovalori e l'implementazione della legge di controllo per il modello aeroservoelastico.

Per quanto riguarda la parte immaginaria degli autovalori al variare della velocità, riportata in figura 5.37b, si può osservare come il fenomeno della coalescenza, osservabile nel caso di aerodinamica stazionaria in corrispondenza della condizione di flutter, risulta ora essere assente. Tuttavia, si può osservare come la tendenza ad avvicinarsi risulti comunque essere ancora presente. In questo caso si determina una




(a) Smorzamento




(b) Frequenza

Figura 5.37: Andamento dello smorzamento (parte reale dell'autovalore) e della frequenza (parte immaginaria) del sistema al variare della velocità. Aerodinamica quasi stazionaria

frequenza di flutter $f_F = 12.44\ Hz$, anch'essa differente dal valore determinato per il caso stazionario. Questo aspetto, analogamente a quanto detto per la velocità di flutter, è legato all'utilizzo di un modello aerodinamico semplificato.

### 5.3.3 Effetto della Variazione degli Input del Sistema

Come sottolineato in precedenza, il modello aerodinamico utilizzato, essendo semplificato, comporta delle limitazioni sull'accuratezza dell'analisi di stabilità del sistema. Tuttavia, è comunque possibile andare ad analizzare come quest'ultima possa essere influenzata in maniera differente nel momento in cui vengono variati alcuni input caratteristici del sistema stesso, ottenendo così alcune indicazioni importanti per lo studio della sezione tipica. Per completezza, si vogliono perciò arricchire le analisi fin'ora effettuate andando a valutare come la condizione di flutter possa essere modificata nel momento in cui:

- si varia la massa del sistema;
- si varia la densità dell'aria;
- si varia la differenza tra le frequenza naturali del sistema in condizioni di velocità nulla.

Tutti i risultati riportati nel seguito derivano dall'analisi di stabilità effettuata considerando il modello aerodinamico quasi-stazionario semplificato, che ha dimostrato ottenere risultati più realistici. Inoltre, gli input che non verranno modificati nel corso di queste analisi, sono da considerarsi uguali a quelli utilizzati nelle due sezioni precedenti.

Per prima cosa, come anticipato, si vuole valutare l'effetto della massa sulla condizione di flutter. I risultati ottenuti, in termini di velocità e frequenza di flutter, sono riportati nella tabella 5.17.

| $m$ $[kg/m]$ | $U_F$ $[m/s]$ | $f_F$ $[Hz]$ |
|---|---|---|
| 1 | 20.23 | 14.36 |
| 2.5 | 30.14 | 13.53 |
| 5 | 39 | 12.44 |
| 10 | 47.97 | 10.89 |
| 25 | 57.49 | 8.412 |

Tabella 5.17: Effetto della massa del sistema sulla condizione di flutter. Input: $a = -0.2$, $e = -0.1$, $c = 0.5$, $I_P = 0.1$ $kgm$, $\rho_\infty = 1.225$ $kg/m^3$, $f_h = 3$ $Hz$, $f_\theta = 15$ $Hz$. Aerodinamica quasi stazionaria

Come si può osservare dai risultati riportati, l'aumento della massa ha un effetto positivo sulla dinamica del sistema, in quanto consente di ritardare l'insorgere del flutter. Tuttavia, va anche sottolineato come, osservando i valori di massa estremi considerati, l'aver aumentato la massa di ben venticinque volte ha determinato una velocità di flutter di solo tre volte superiore rispetto al caso $m = 1$ $kg/m$. Questo significa che, in fase di progetto, considerare masse superiori per ritardare l'insorgere di instabilità può portare ad aumenti considerevoli del peso della struttura. Questo aspetto, risulta essere in contraddizione con le filosofie di progetto in ambito aeronautico, volte più al contenimento delle masse coinvolte invece che al loro aumento. Tuttavia, la tabella 5.17 fornisce comunque una prima indicazione importante su come poter agire in ambito progettuale per scongiurare fenomeni di flutter.

A questo punto, si vuole valutare come la condizione di volo influenzi la stabilità del sistema considerando l'effetto della densità della corrente, parametro rappresentativo della quota di volo. I risultati ottenuti sono riportati in tabella 5.18. Come si

| $\rho_\infty$ $[kg/m^3]$ | $U_F$ $[m/s]$ | $f_F$ $[Hz]$ |
|---|---|---|
| 0.5 | 61.05 | 12.44 |
| 0.8 | 48.27 | 12.44 |
| 1.225 | 39 | 12.44 |

Tabella 5.18: Effetto della densità sulla condizione di flutter. Input: $a = -0.2$, $e = -0.1$, $c = 0.5$, $m = 5\ kg/m$, $I_P = 0.1\ kgm$, $f_h = 3\ Hz$, $f_\theta = 15\ Hz$. Aerodinamica quasi stazionaria

può osservare, la variazione della densità dell'aria influenza la condizione di flutter principalmente nel computo della velocità in corrispondenza della quale l'instabilità si manifesta. L'aspetto interessante su cui porre l'attenzione è il fatto che, per valori bassi di densità, il sistema diventa instabile in corrispondenza di velocità di flutter più elevate, cioè l'instabilità viene ritardata quando la densità diminuisce. Questo aspetto, permette di concludere facilmente come le condizioni operative in cui il sistema rischia maggiormente di diventare instabile sono quelle caratterizzate da quote non elevate. Di conseguenza, in fase di progetto sarà opportuno verificare l'insorgere del flutter per voli a bassa quota e agire in modo tale che siano scongiurate dinamiche instabili per tutto il tempo in cui è richiesto operare in queste specifiche condizioni di volo.

Si conclude il set di analisi andando a valutare la stabilità nel momento in cui si agisce sulla distanza tra le frequenze proprie di oscillazione del sistema. La condizione di flutter viene cioè valutata modificando il parametro $f_\theta$ e risultati ottenuti sono riportati in tabella 5.19.

| $f_\theta$ $[Hz]$ | $U_F$ $[m/s]$ | $f_F$ $[Hz]$ |
|---|---|---|
| 5 | 11.11 | 4.327 |
| 10 | 25.48 | 8.349 |
| 15 | 39 | 12.44 |
| 20 | 52.43 | 16.55 |
| 25 | 65.71 | 20.67 |

Tabella 5.19: Effetto di $f_\theta$ sulla condizione di flutter. Input: $a = -0.2$, $e = -0.1$, $c = 0.5$, $m = 5\ kg/m$, $I_P = 0.1\ kgm$, $\rho_\infty = 1.225\ kg/m^3$, $f_h = 3\ Hz$. Aerodinamica quasi stazionaria

Come si può notare dai risultati ottenuti, la differenza tra le due frequenze proprie di oscillazione del sistema ha una grossa influenza sulla condizione di flutter.

In particolare, si può osservare come, nel momento in cui le frequenze sono molto prossime tra di loro, si ha una forte riduzione della velocità di flutter, dal momento che l'interazione tra i due modi, la quale è la causa scatenante dell'evoluzione instabile del sistema, si verifica più rapidamente. Al contrario, quando la differenza tra $f_h$ e $f_\theta$ diventa più importante, il sistema evolve in maniera instabile a velocità superiori. La spiegazione di questo aspetto è immediatamente deducibile dall'Eq. 5.2. Infatti, il legame matematico tra $f_\theta$ e $k_\theta$ permette di notare immediatamente come l'aumento della frequenza propria di oscillazione torsionale del sistema si traduce in una rigidezza torsionale che aumento con potenza di due. Una soluzione progettuale per ritardare l'insorgere di dinamiche instabile si può quindi concludere sia quella di agire sulla rigidezza del sistema, così da aumentare il gap tra le frequenze proprie di oscillazione del sistema. In questo modo, è possibile riuscire ad estendere il range di velocità entro il quale non si verifica alcun fenomeno instabile, senza dover intervenire sulla massa del sistema, la quale a dimostrazione di ciò, è stata tenuta costante. Ovviamente, nel momento in cui l'analisi di questa tipologia di problematiche viene estesa a configurazioni maggiormente realistiche, è necessario avere cura del fatto che la scelta di una certa soluzione non comporti l'insorgere di altre meccanismi di instabilità del sistema.

### 5.3.4 Implementazione della Raffica e Valutazione della Risposta Aeroelastica

Per concludere questo set di analisi aeroelastiche preliminari relative alla sezione tipica, può essere interessante osservare la risposta nel tempo dei gradi di libertà del sistema. Dal momento che l'analisi di stabilità comporta la risoluzione del problema agli autovalori, il quale si ricordi essere un problema omogeneo, per poter analizzare una risposta nel tempo è necessario introdurre all'interno delle equazioni un termine non omogeneo, che non è altro che un input con cui eccitare il sistema aeroelastico. Si vuole cioè valutare la risposta del sistema ad anello aperto elementare riportato in figura 4.3.

In modo da poter prendere maggiore confidenza con le analisi che verranno effettuate sul sistema aeroservoelastico, può essere interessante esaminare la risposta aeroelastica in seguito ad una perturbazione di raffica, utilizzando il modello discreto di tipo uno-meno-coseno. In questo modo, sarà inoltre possibile arricchire le analisi fin qui effettuate con alcuni grafici che permetteranno, inoltre, di validare le considerazioni fin qui effettuate nell'ambito dell'analisi di stabilità. Ricordando che, a seguito dell'introduzione della raffica, l'effetto immediatamente riscontrabile è un istantaneo cambiamento dell'angolo di attacco, variazione che è stata indicata nel presente lavoro con $\Delta\theta$, la cui espressione è riportata nell'Eq. 4.17, il sistema non omogeneo di cui valutare la risposta è il seguente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D_a}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K_a})\,\mathbf{q} = \mathbf{f}\Delta\theta \tag{5.5}$$

Come detto, il modello di raffica implementato segue la funzione uno-meno-coseno. Si consideri dunque un profilo di raffica caratterizzato da una velocità di design $U_0 = 1\ m/s$, di durata $t_g = 0.5\ s$ e che si sviluppa a partire dall'istante $t_0 = 0\ s$. Il profilo di raffica, riportato in termini di velocità $u_g$ in funzione del tempo è riportato in figura 5.38.

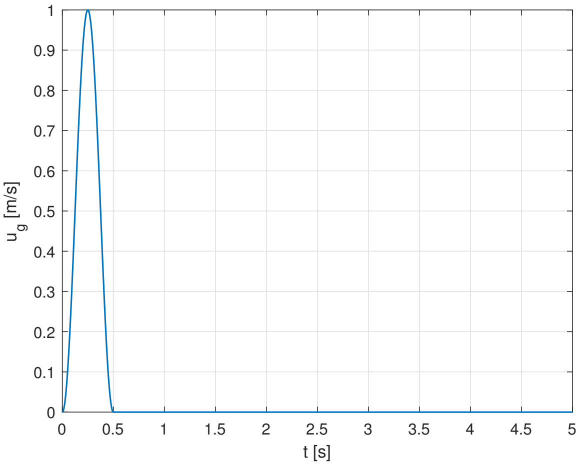
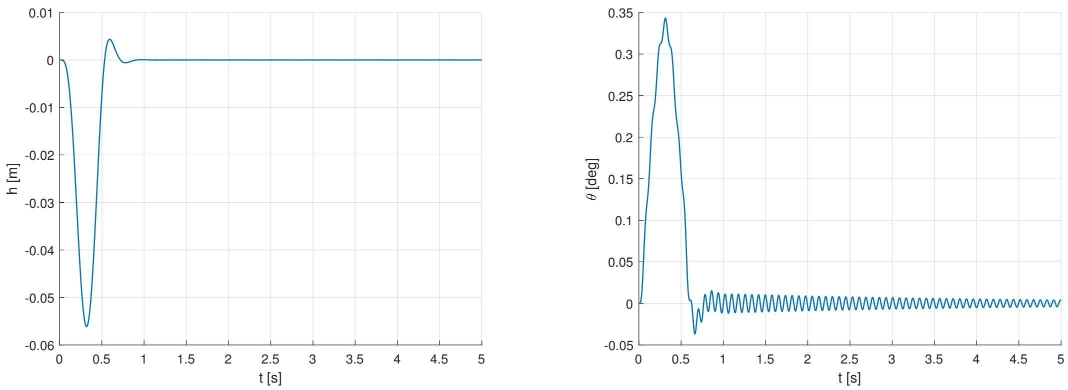



Figura 5.38: Profilo di raffica. $U_0 = 1\ m/s$, $t_g = 0.5\ s$

Definito il profilo di raffica che eccita il sistema è ora possibile andare a valutarne la risposta nel tempo in termini di $h$ e $\theta$. Gli input sono gli stessi considerati nell'analisi di stabilità, nel momento in cui qualcuno di essi verrà modificato sarà indicato nel testo. Il modello aerodinamico implementato è quello quasi-stazionario. Per una maggiore chiarezza, si riportano nel seguito le analisi che a breve verranno esaminate:

- valutazione della risposta nel tempo dei gradi di libertà del sistema a seguito di un input di raffica per una velocità inferiore a quella di flutter;
- valutazione della risposta nel tempo dei gradi di libertà del sistema a seguito di un input di raffica in corrispondenza della velocità di flutter e in condizioni post-flutter;
- valutazione dell'effetto della variazione degli input sulla risposta nel tempo dei gradi di libertà del sistema quando perturbato dalla raffica.

Come anticipato, una prima valutazione della risposta del sistema viene fatta in condizioni di pre-flutter. In questo modo, è possibile valutare se le indicazioni fornite dall'analisi di stabilità, riassumibili nei grafici in figura 5.37, risultino essere confermate dalla risposta nel tempo per i due modi del sistema. In figura 5.39 sono quindi riportati $h$ e $\theta$ in funzione del tempo a seguito dell'input di raffica applicato al modello aeroelastico per una velocità $U = 38\ m/s$, in condizioni prossime a quelle di flutter ma ancora all'interno del range di velocità in cui la risposta del sistema risulta stabile.



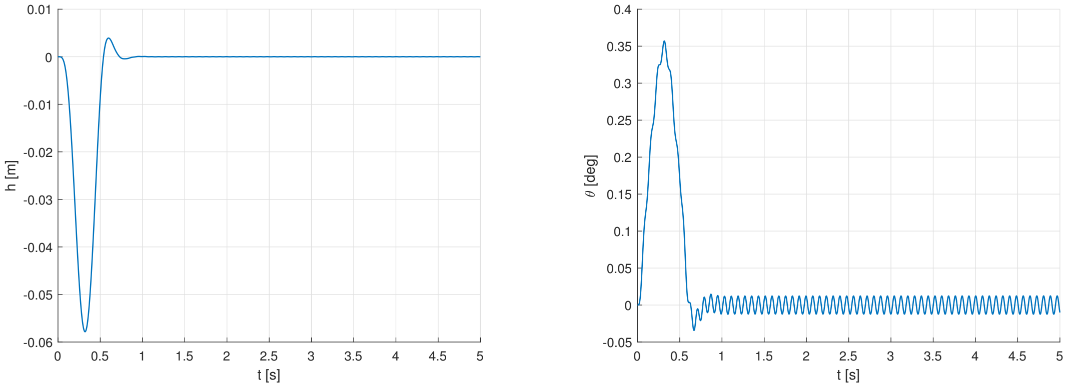

(a) Plunge

(b) Pitch

Figura 5.39: Risposta aeroelastica sistema in condizioni di pre-flutter. $U = 38\ m/s$ e raffica con $U_0 = 1\ m/s$, $t_g = 0.5\ s$

In accordo con l'analisi di stabilità riportata in figura 5.37, al di sotto della condizione di flutter, che si ricordi essere in corrispondenza di $U_F = 39\ m/s$, il sistema esibisce una risposta nel tempo stabile. Infatti, per entrambi i gradi di libertà è osservabile una risposta oscillatoria smorzata e non divergente per il valore di velocità considerato, benché molto prossimo alla $U_F$. Si può inoltre notare come la risposta nel tempo per $h$, figura 5.39a, si porti ad un valore stazionario nullo dopo circa un secondo (oscillazioni sono in realtà ancora presenti, ma la loro ampiezza risulta essere trascurabile o comunque molto prossima allo zero), al contrario di quella di $\theta$ che presenta comunque un comportamento oscillatorio marcato negli istanti temporali successivi. Questo aspetto è confermato da quanto mostrato nel grafico 5.37a, dal momento che il ramo relativo a $\theta$, che sarà poi quello che portare in instabilità il sistema, è caratterizzato da un valore di smorzamento che, per la velocità considerata, risulta essere ormai prossimo ad annullarsi, al contrario di quello relativo ad $h$ che staziona stabilmente a valori negativi.

A questo punto, si procede con la valutazione della risposta nel tempo del sistema in condizioni di flutter, cioè esattamente in corrispondenza dell'annullamento della parte reale dell'autovalore. I risultati ottenuti per $h$ e $\theta$ sono riportati in figura 5.40. Ponendosi esattamente in corrispondenza della velocità di flutter, il sistema risulta essere in una condizione al limite di stabilità. L'annullamento dello smorzamento determina una risposta puramente armonica e questo aspetto risulta essere particolarmente osservabile nella risposta nel tempo per $\theta$, riportata in figura 5.40b.



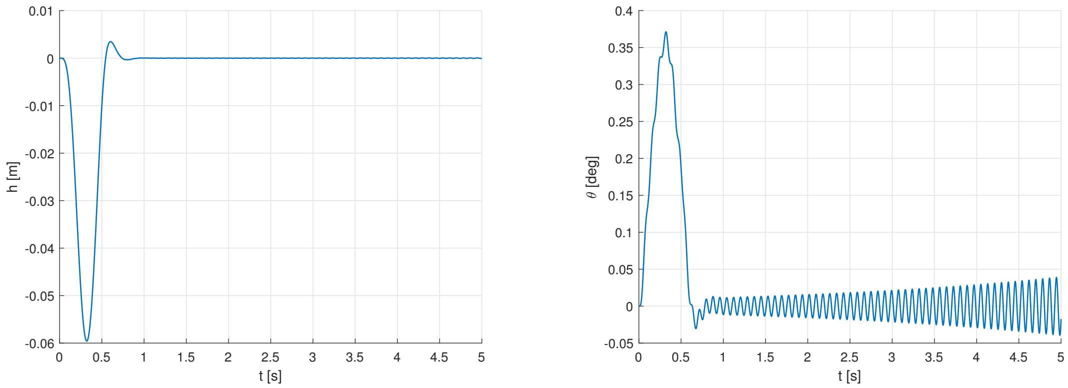

(a) Plunge

(b) Pitch

Figura 5.40: Risposta aeroelastica sistema in condizioni di flutter. $U = U_F = 39\ m/s$ e raffica con $U_0 = 1\ m/s$, $t_g = 0.5\ s$

Si può infatti notare come, esaurito il breve transitorio in cui agisce la raffica, le oscillazioni di pitch non sono più ad ampiezza decrescente, come visto in condizioni di pre-flutter, ma si mantengono ad ampiezza costante lungo tutto l'intervallo temporale considerato. Dei due gradi di libertà, anche in questo caso sembra essere $\theta$ a risentire maggiormente del disturbo introdotto dalla raffica e dell'evoluzione della dinamica del sistema. La risposta nel tempo di $h$, figura 5.40a, sembra invece analoga al caso precedente, cioè stabile dopo un breve transitorio. In realtà sono presenti oscillazioni armoniche semplici anche per questo grado di libertà ma, come nel caso precedente, le ampiezze risultano essere trascurabili se comparate a quelle relative alla risposta ne tempo di $\theta$.

Infine, si vuole ora mostrare la risposta nel tempo in condizioni di post-flutter, cioè considerando il sistema instabile. I risultati ottenuti sono riportati in figura 5.41. Superata la condizione limite di stabilità, il sistema manifesta una risposta nel tempo instabile, come osservabile specialmente in figura 5.41b per il grado di libertà $\theta$, caratterizzata da oscillazioni ad ampiezza crescente che si auto sostengono. Questo risultato è perfettamente in accordo con quanto ottenuto dall'analisi di stabilità, dal momento che lo smorzamento del sistema risulta ora essere positivo. Quindi, se per i casi precedenti, a seguito della raffica, il sistema riusciva comunque ad esibire una risposta non divergente una volta conclusasi la perturbazione, superata la velocità di flutter l'accoppiamento che si verifica tra i due modi si traduce in una risposta instabile. L'aspetto interessante è che, per come definito $\Delta\theta$, l'aumento di velocità determina una variazione dell'angolo di attacco inferiore, essendo $\Delta\theta \propto \frac{1}{U}$. Questo significa che l'evoluzione della dinamica del sistema non dipende dal tipo di perturbazione introdotta ma, coerentemente con le analisi effettuate, dalla sua stabilità intrinseca, valutabile risolvendo il problema agli autovalori omogeneo.

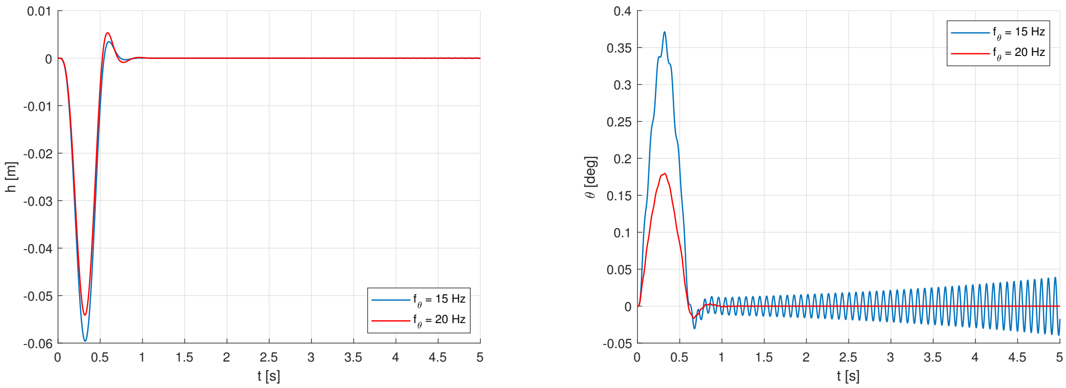



(a) Plunge (b) Pitch

Figura 5.41: Risposta aeroelastica sistema in post-flutter. $U = 40\ m/s$ e raffica con $U_0 = 1\ m/s$, $t_g = 0.5\ s$

Per concludere, può essere interessante valutare come, agendo sugli input, è possibile modificare la risposta dinamica del sistema e, nel caso specifico, ritardare l'insorgere del flutter. L'obbiettivo è quindi quello di arricchire con un supporto grafico i risultati ottenuti in relazione alla modifica di alcuni input caratteristici per la sezione tipica. In base alle considerazioni fatte, si è visto in particolare come, a parità di condizione di volo, per ritardare l'insorgere di instabilità sia possibile agire o sulla massa del sistema, come osservabile in tabella 5.17, oppure andando a modificare il gap tra le frequenze proprie di oscillazione del sistema, andando cioè ad aumentarne la rigidità, come mostrato nella tabella 5.19. Dal momento che un aumento di massa non sempre si sposa con le scelte di progetto, si è scelto in questa fase di valutare la risposta dinamica del sistema agendo sul parametro $f_\theta$.

In figura 5.42 viene riportato il confronto della risposta nel tempo del sistema in condizioni di post-flutter, considerando due differenti valori di $f_\theta$ o, in alternativa, due differenti valori della rigidezza $k_\theta$. Come si può osservare, l'aumento di rigidezza torsionale del sistema ha avuto principalmente due effetti, peraltro facilmente prevedibili: il primo, osservabile in particolare in figura 5.42b, è la stabilizzazione del sistema, il quale manifesta una risposta non più divergente in corrispondenza delle condizioni di post-flutter, dove invece per il valore di riferimento $f_\theta = 15\ Hz$ si osservava una dinamica divergente della risposta in $\theta$. Questo risultato conferma perfettamente quanto riportato in tabella 5.19, dove già si era messo in evidenza il fatto che un incremento della rigidezza torsionale consenta di posticipare l'insorgere di instabilità. Il secondo aspetto è una forte attenuazione dell'ampiezza della risposta, in quanto risulta particolarmente riscontrabile una forte attenuazione del massimo valore di $\theta$ calcolato in corrispondenza del picco della raffica. Questo risultato è un'ovvia conseguenza dall'incremento di rigidità torsionale che rende il




(a) Plunge

(b) Pitch

Figura 5.42: Risposta aeroelastica sistema in post-flutter. $U = 40\ m/s$ e raffica con $U_0 = 1\ m/s$, $t_g = 0.5\ s$

sistema meno deformabile in pitch. Interessante è osservare come tale attenuazione coinvolga anche il grado di libertà $h$ e ciò è da imputare al fatto che il sistema risulta strutturalmente accoppiato, essendo il parametro di squilibrio statico $x_\theta$ non nullo.

## 5.4 Modello Aeroservoelastico Bidimensionale

Questa sezione sarà interamente dedicata all'analisi del modello aeroservoelastico bidimensionale. Si andranno quindi ad applicare le equazioni e i concetti visti nel Capitolo 4 al caso di una trave isotropa.

La prima parte di analisi consisterà quindi nella traduzione degli input necessari al modello bidimensionale. A partire dalla configurazione 3D, si andranno perciò a ricavare i parametri caratteristici della sezione tipica in modo da potersi ricondurre ad un'analisi a parametri concentrati. Mediante l'applicazione del modello aerodinamico semplificato quasi-stazionario si andrà quindi a valutare la stabilità del sistema.

Dopo questa parte introduttiva, si entra nel merito dell'analisi aeroservoelastica. Per prima si andrà a valutare la risposta del sistema ad un input di raffica. Viene dunque implementato il controllo PI all'interno del sistema, il quale sarà ora retroazionato. A questo punto, si indagherà la stabilità dell'anello chiuso andando a valutare l'effetto dei gain sugli autovalori del sistema e sulla velocità di flutter. Infine, scelto un valore opportuno per i guadagni del PI, non solo in termini di stabilità del sistema ma anche di implementazione tecnologica (valutando cioè la deflessione della superficie di controllo), si concluderà la sezione analizzando la risposta nel tempo alla raffica del sistema controllato, confrontandola con quella dell'anello aperto senza controllo.

### 5.4.1 Valutazione della Condizione di Flutter per una Lamina Piana Isotropa

L'analisi di stabilità del modello considerato è presente in bibliografia [52] dove, in particolare, è stato analizzato l'effetto dell'angolo di freccia, $\Lambda$, sulla condizione di flutter mediante differenti metodi numerici. Dal momento che in questa fase preliminare si farà riferimento al modello equivalente a parametri concentrati bidimensionale e ad una modello aerodinamico semplificato, si considererà la configurazione classica $\Lambda = 0°$. In figura 5.43 viene dunque riportata la sezione della trave, mentre le caratteristiche geometriche del modello sono le seguenti: $L = 0.305\ m$, $c = 0.076\ m$, $t = 0.001\ m$. La trave è in materiale isotropo con $E = 73.8\ GPa$, $\nu = 0.337$ e $\rho = 2768\ kg/m^3$.

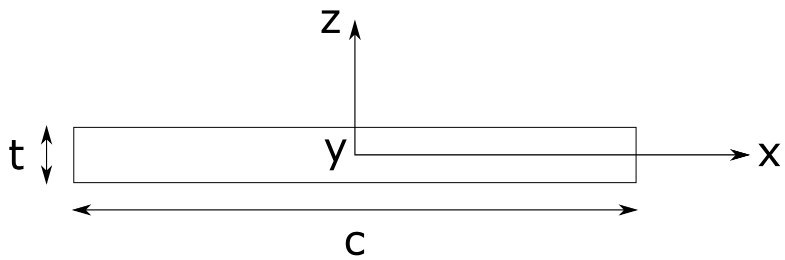



Figura 5.43: Geometria della sezione

Definite le caratteristiche della lamina, si è passati alla traduzione degli input necessari alla definizione del modello a parametri concentrati. Per la valutazione del parametro di squilibrio statico si possono assumere, per la sezione considerata, che i centri di massa e taglio siano posti in corrispondenza della corda media, $b = c/2$. Si avrà dunque $e = 0$, $a = 0$, da cui ne deriva $x_\theta = 0$. La massa e l'inerzia polare sono state calcolate sfruttando la geometria della sezione e le caratteristiche del materiale nelle seguenti relazioni: $m = ct\rho$, $I_P = m/12 * [(t^2 + c^2) + (c/2)^2 * (x_\theta^2)]$.

Per quanto riguarda le frequenze proprie di oscillazione del sistema è necessario effettuare un'analisi di vibrazione libere della struttura. In tabella 5.20 vengono dunque riportate le prime tre frequenze naturali per la configurazione considerata, confrontando differenti modelli di espansione. Tale confronto, benché non strettamente necessario, ha l'utilità di evidenziare come un'analisi più approfondita del modello strutturale utilizzato sia comunque da tenere in considerazione quando si vuole effettuare un'analisi preliminare a parametri concentrati di strutture più complesse. Lungo la direzione longitudinale la trave è stata discretizzata mediante 10 elementi B4. Come si può osservare, teorie di ordine elevato sono necessarie per prevedere correttamente i modi naturali del sistema. Si può altresì notare come sia necessario considerare ordini di espansione di ordine pari a $N = 2$ almeno, per prevedere correttamente i modi torsionali del sistema. Si può notare come, da questo ordine di espansione in avanti, si giunge rapidamente ad una convergenza delle frequenze calcolate. Appare interessante osservare come ricorrere a modelli LE possa ridurre il costo computazionale del calcolo. Per questo motivo, le frequenze proprie di oscillazione del sistema $f_h$ e $f_\theta$ sono state imposte uguali alle prime frequenze flessionale e torsionale valutate con il modello 1L9. Note le frequenze, è immediato calcolare le rigidezze per il modello a parametri concentrati di riferimento sfruttando l'Eq. 5.2.

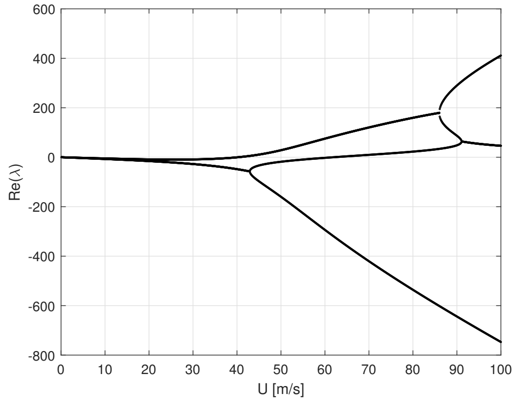
| | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | DOFs |
|---|---|---|---|---|
| EBBT | 8.967 | 56.193 | 157.375 | 279 |
| N=1 | 8.966 | 56.191 | 157.359 | 279 |
| N=2 | 9.539 | 59.676 | 73.827* | 558 |
| N=3 | 9.207 | 57.543 | 73.072* | 930 |
| N=4 | 9.198 | 57.504 | 73.055* | 1395 |
| 1L9 | 9.204 | 57.533 | 73.079* | 837 |

$(.)^*$ Indica un modo torsionale

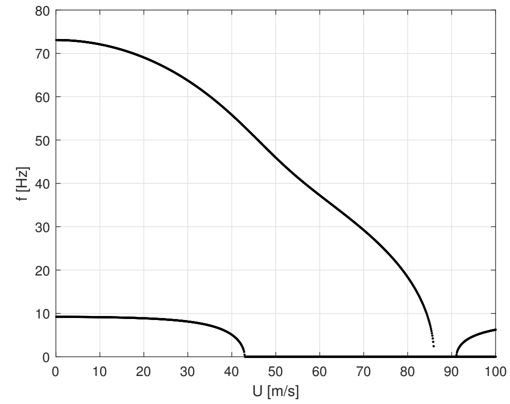
Tabella 5.20: Effetto del modello di espansione sulle frequenze di vibrazione del sistema [Hz]. 10B4

Definiti gli input necessari per l'analisi bidimensionale, si procede quindi con la valutazione della condizione di flutter del sistema, riportando l'andamento della parte reale e immaginaria degli autovalori al variare della velocità di volo, analogamente a quanto fatto nella sezione precedente. I risultati ottenuti sono riportati in figura 5.44. Dal punto di vista qualitativo valgono le stesse considerazioni fatte nella sezione precedente, in cui l'analisi di stabilità è stata applicata al modello della sezione tipica. Di conseguenza, in questa fase non si andranno a riportare ulteriori commenti in merito, in quanto si possono anche in questo effettuare della valutazioni del tutto analoghe. Aspetto importante per le analisi successive è l'individuazione della condizione di flutter che, per il caso considerato, avviene ad una velocità $U_F = 40.3\ m/s$ alla quale corrisponde una frequenza di flutter $f_F = 55.53\ Hz$. Va precisato che, rispetto alla condizione di flutter appena determinata, i relativi risultati in letteratura per questa tipologia di modello si discostano da quelli determinati. Ma questo aspetto è coerente con l'analisi semplificata che si sta conducendo a differenza di quanto fatto, ad esempio, in [52] dove l'analisi è stata condotta implementando una formulazione agli elementi finiti 3D per la trave accoppiata con un modello aerodinamico instazionario derivante dal DLM, tipico metodo a pannelli che consente di costruire un modello aerodinamico più preciso di quello che è stato invece adottato per le analisi di stabilità attuali, dove l'instazionarietà è implementata, in maniera semplificata, considerando semplicemente i modi del sistema.

Nota la velocità di flutter del sistema, si è in possesso, innanzitutto, di un'importante indicazione del range di velocità entro il quale valutare la risposta dinamica del modello, la quale avrà quindi un andamento deducibile proprio dall'analisi di stabilità appena effettuata; inoltre, una volta implementato il controllo, sarà interessante valutare come la variazione dei gain possa proprio influenzare il valore di velocità di flutter calcolato o, più in generale, la stabilità vera e propria del sistema aeroservoelastico.




(a) Smorzamento




(b) Frequenza

Figura 5.44: Andamento dello smorzamento (parte reale dell'autovalore) e della frequenza (parte immaginaria) del sistema al variare della velocità. Aerodinamica quasi stazionaria. Lamina Isotropa

### 5.4.2 Implementazione del Controllo e Analisi di Stabilità dell'Anello Chiuso

Si vuole ore valutare la stabilità del sistema aeroservoelastico, ricavato dall'implementazione della legge di controllo all'interno delle ben note equazioni aeroelastiche per il modello strutturale considerato. Come mostrato nella sezione 4.5.2, sfruttando un controllo PI in retroazione come quello espresso dall'Eq. 4.22, l'equazione rappresentativa della configurazione ad anello chiuso per il problema aeroservoelastico che ne discende è la seguente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D_a} - \mathbf{D_g})\,\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K_a} - \mathbf{K_g})\,\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{5.6}$$

L'equazione è scritta in assenza del disturbo di raffica dal momento che, in questa fase, si vuole focalizzare l'attenzione sulla stabilità del nuovo sistema ottenuto. Come già anticipato, si può osservare la presenza delle due nuove matrici aggiuntive, $\mathbf{D_g}$ e $\mathbf{K_g}$, definite matrici di feedback i cui coefficienti sono funzione, oltre che delle condizioni di volo e delle caratteristiche della superficie di controllo (le analisi sono state effettuare considerando il rapporto tra corda della superficie mobile e quella della lamina tale che $E = 0.1$), anche dei gain $K_d$ e $K_v$.

Nelle analisi successive si è dunque valutata la stabilità del sistema in Eq. 5.6 indagando, in particolare, l'effetto sulla dinamica del sistema per differenti combinazioni dei gain di controllo, cioè variando i coefficienti delle matrici di feedback. In questo modo, è possibile avere un'idea più chiara di come il sistema di controllo, e quindi la rigidezza e lo smorzamento aggiuntivi che esso introduce nel sistema, ne influenzi la stabilità. Questo aspetto è molto importante dal momento che, ricorrendo a questa tipologia di analisi, è possibile avere una prima indicazione del range entro qui valutare i valori di $K_d$ e $K_v$ necessari per il sistema controllo per quando si andrà a valutare la risposta nel tempo del sistema a seguito del disturbo di raffica.

In figura 5.45 sono riportati gli autovalori del sistema in corrispondenza della velocità $U = 34\ m/s$ considerando l'effetto del solo guadagno del proporzionale $K_d$, avendo imposto cioè $K_v = 0$. Come si può osservare, il guadagno del proporzionale è stato fatto variare nel range $-3 \leq K_d \leq 7$ e la velocità scelta è inferiore a quella in corrispondenza della quale si verifica il flutter. Per $K_d = 0$ sono riportati gli autovalori del sistema aeroelastico non controllato e, coerentemente con il valore di velocità scelto, si può osservare come la parte reale di nessuno di essi si colloca nel semipiano positivo delle ascisse. Questo aspetto conferma ulteriormente le considerazioni fatte in merito alla stabilità del sistema aeroelastico in esame e riportate in sezione 5.4.1. In merito ai restanti valori considerati, si può notare come, in generale, la stabilità del sistema si modifica nel momento in cui si utilizzano valori elevati del parametro di guadagno proporzionale. In particolare, per $K_d = 5$ e $K_d = 7$ la parte reale degli autovalori si colloca nel semipiano positivo, condizione rappresentativa di una dinamica instabile per il valore di velocità considerato. Questo aspetto, in

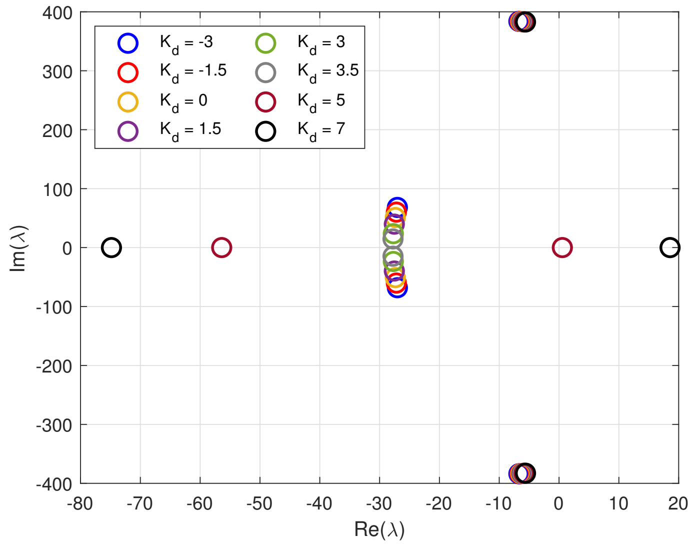



Figura 5.45: Autovalori del sistema aeroservoelastico al variare del guadagno $K_d$. $K_v = 0$, $U = 34\ m/s$

ultima analisi, risulta essere traducibile in un abbassamento della velocità di flutter rispetto al caso non controllato, relativo cioè a $K_d = 0$. L'effetto del valore dei gain sulla velocità di flutter sarà comunque meglio analizzato a breve. Per concludere, si può osservare come, al contrario, valori negativi di $K_d$ non comportano un'evoluzione instabile del sistema, dal momento che gli autovalori ad essi associati risultano essere caratterizzati da un parte reale negativa.

In figura 5.46 viene riportato l'effetto combinato dei gain $K_d$ e $K_v$ sulla velocità di flutter. Questo grafico consente di completare le considerazioni effettuate in merito alla figura 5.45. Infatti, se in quel caso si era osservato come valori elevati di $K_d$ determinavano un'evoluzione instabile del sistema, con conseguente abbassamento del valore di velocità di flutter rispetto al caso non controllato, risulta ora maggiormente evidente come la variazione del guadagno del proporzionale possa influenzare la condizione di flutter. Nel grafico 5.46 si può osservare infatti come l'aumento del gain $K_d$ determina un rapido decremento della $U_F$, che si porta a valori più bassi rispetto a quanto determinato per il sistema aeroelastico in assenza di controllo. Al contrario, valori negativi di $K_d$, i quali hanno dimostrato mantenere il sistema stabile, hanno determinato un incremento della velocità di flutter. L'effetto del guadagno del proporzionale è stato inoltre valutato in combinazione con valori differenti di $K_v$, mettendo in evidenza incrementi via via più consistenti quando il valore di $K_v$ risulta essere negativo. In generale, quindi, si può concludere come la variazione dei gain del PI e, di conseguenza, dei coefficienti delle matrici di feedback consente

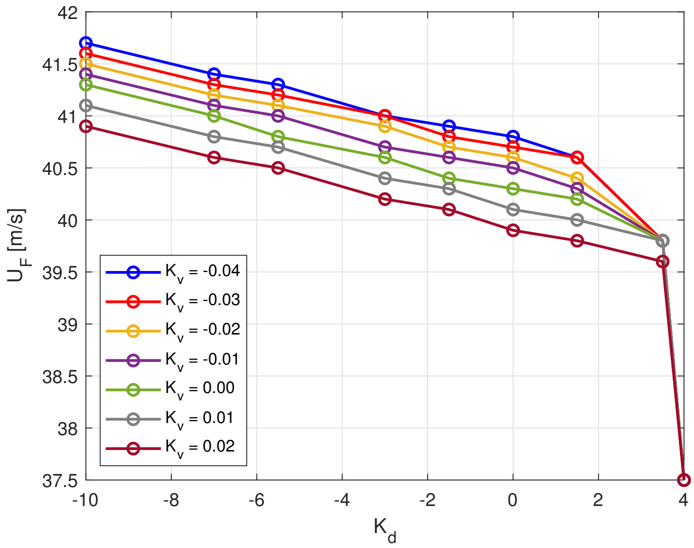



Figura 5.46: Effetto dei guadagni $K_d$ e $K_v$ sulla velocità di flutter

di modificare la stabilità del sistema. La scelta della combinazione corretta, tuttavia, non può derivare semplicemente da questa tipologia di analisi ma, al contrario, necessita di una ulteriore valutazione, ad essa complementare, della deflessione della superficie mobile a seguito dell'azione del sistema di controllo.

### 5.4.3 Risposta alla Raffica

Dopo aver valutato la stabilità dell'anello chiuso al variare dei guadagni del controllo PI, il passo successivo consiste nella valutazione della risposta alla raffica a seguito dell'introduzione del controllo. Come mostrato nella sezione 4.5.3, includendo il termine forzante di raffica all'interno della Eq. 5.45, si ottiene il seguente sistema:

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \left(\mathbf{D_a} - \mathbf{D_g}\right)\mathbf{\dot{q}} + \left(\mathbf{K} + \mathbf{K_a} - \mathbf{K_g}\right)\mathbf{q} = \mathbf{f}\Delta\theta \tag{5.7}$$

Se ora, partendo da quest'ultima equazione, ci si riconduce alla forma stato-spazio mostrata in sezione 4.32, è possibile valutare la risposta dinamica del sistema a seguito dell'implementazione al suo interno del controllo in retroazione, che si ricordi essere proporzionale allo spostamento, $z$, e alla velocità, $\dot{z}$, misurati rispetto al bordo di attacco della lamina:

$$\beta = K_v\dot{z} + K_d z \tag{5.8}$$

In questa sezione si andrà quindi a valutare come l'introduzione del controllo influenzi la risposta della struttura alla raffica e, inoltre, come essa possa essere influenzata variando i guadagni del controllore PI implementato nel sistema. Sarà quindi possibile valutare che tipo di deflessione della superficie mobile comporta il controllo scelto, sfruttando l'Eq. 5.8. L'analisi sarà infine arricchita con ulteriori risultati volti in qualche modo a validare le conclusioni ricavate dall'analisi di stabilità dell'anello chiuso. Infine, fissata la legge di controllo e, di conseguenza, i valori di $K_v$ e $K_d$, si conclude l'analisi con alcuni commenti in merito all'effetto della variazione dell'estensione della superficie mobile, in modo da poter includere in questa sezione ulteriori e importanti considerazioni sull'implementazione del controllo all'interno di questo sistema semplificato.

In figura 5.47 si riporta il profilo di raffica considerato per le analisi del sistema aeroservoelastico. Come si può notare, in questa fase si è scelto di considerare un input di raffica molto rapido ma che, nonostante ciò, ha comunque un effetto sulla dinamica del sistema.

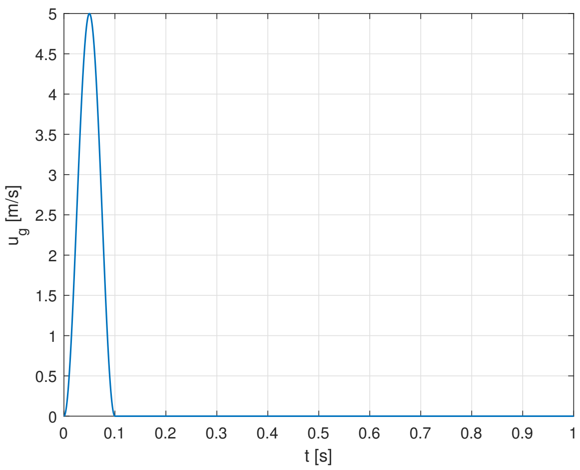
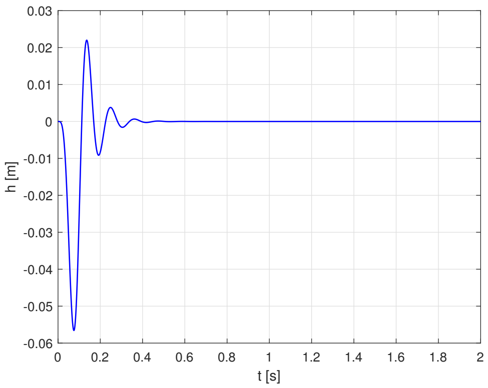


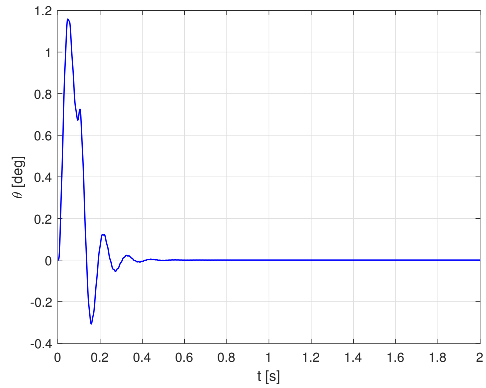

Figura 5.47: Profilo di raffica. $U_0 = 5\ m/s$, $t_g = 0.1\ s$

Nella figura 5.48 viene riportata la risposta alla raffica del sistema non controllato, in termini dei gradi di libertà $h$, figura 5.48a, e $\theta$, figura 5.48b, e dello spostamento $z$ del bordo di attacco, figura 5.48c. Dalle figure si può osservare quanto anticipato in precedenza ovvero che, benché il disturbo risulti molto rapido, esso determina comunque una risposta nel tempo del sistema. Si può notare inoltre come essa sia stabile, coerentemente con il valore di velocità scelto per l'analisi, ben al di sotto del valore corrispondente alla condizione di flutter.

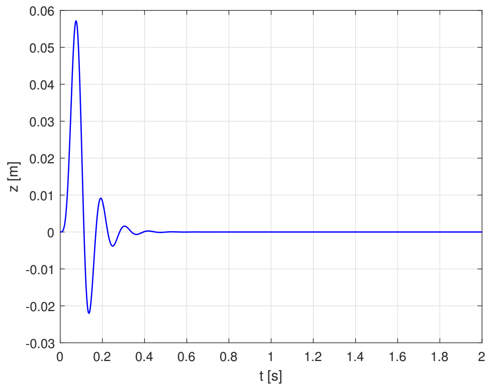
Nella figura 5.49 viene riportato il confronto tra la risposta del sistema in assenza del controllo e quella a seguito della sua applicazione, sfruttando una legge di controllo derivante dall'imposizione di $K_v = -0.04$ e $K_d = 0$ (cioè sfruttando una legge di controllo proporzionale alla velocità in corrispondenza del bordo di attacco). Come in figura 5.48, la risposta è stata valutata in termini dei gradi di libertà e dello spostamento al bordo di attacco. In figura 5.50 viene invece riportato l'andamento nel tempo della deflessione dell'equilibratore a seguito dell'applicazione della legge




(a) Plunge



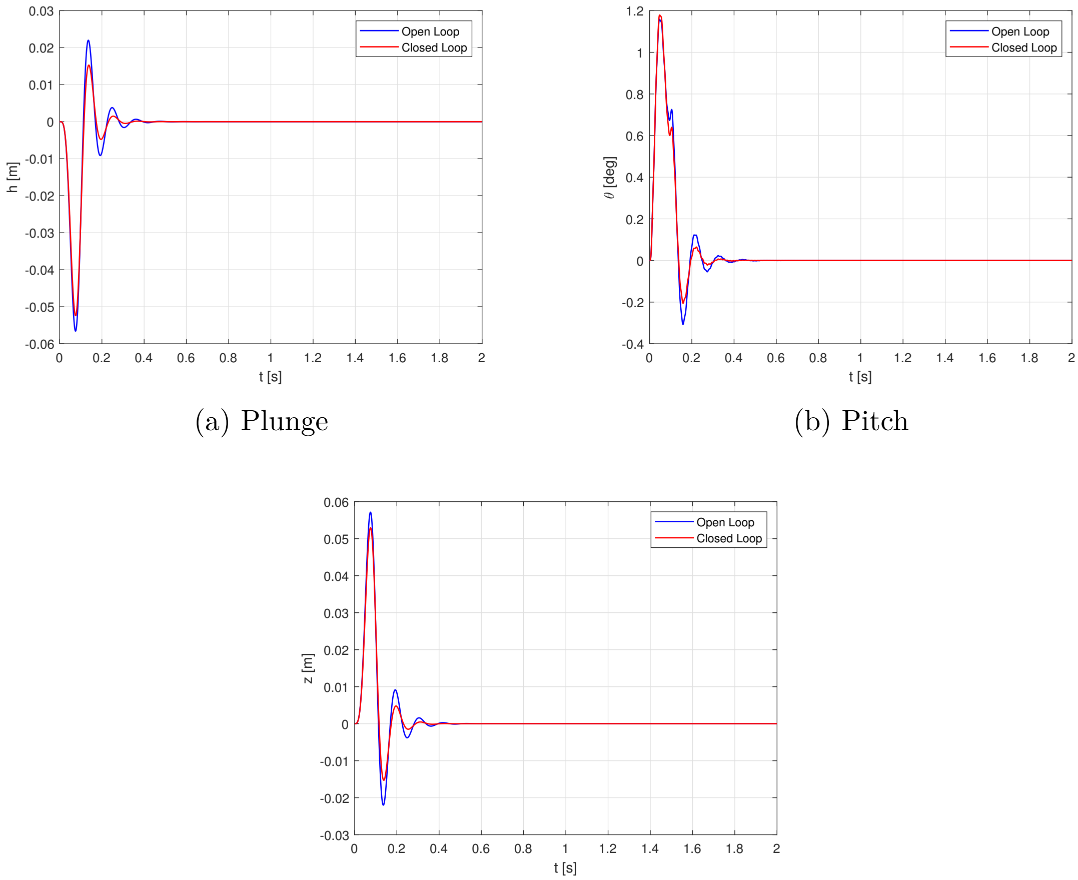

(b) Pitch




(c) Spostamento nel bordo di attacco

Figura 5.48: Risposta alla raffica dell'anello aperto. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$

di controllo ottenuta con i valori dei guadagni considerati. Come si può notare, l'introduzione del controllo consenta di ridurre il tempo impiegato dalle variabili considerate per decadere. Inoltre, in riferimento alla figura 5.49c, dove viene riportata una risposta complessiva del sistema (cioè come effetto combinato dei gradi di libertà che lo caratterizzano, ricordando l'Eq 4.23 in sezione 4.5.1) si può notare come il controllo consenta di ottenere inoltre uno smorzamento della risposta del sistema, andando semplicemente a confrontare i valori di picco calcolati con e senza sistema di controllo. Per quanto riguarda la deflessione della superficie mobile, in figura 5.50, si può osservare come la scelta di $K_v = -0.04$ e $K_d = 0$ consenta di ottenere un' escursione di $\beta$ nel tempo ben all'interno del range prestabilito, $\beta = \pm 15°$, in quanto deflessione superiori risultano difficilmente realizzabili ed implementabili a livello tecnologico. In conclusione, si può affermare come questa prima valutazione




(a) Plunge

(b) Pitch

(c) Spostamento nel bordo di attacco

Figura 5.49: Risposta alla raffica dell'anello chiuso. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. Guadagni di controllo: $K_v = -0.04$, $K_d = 0$

del sistema controllato abbia portato a risultati soddisfacenti.

Volendo inizialmente considerare il solo effetto di $K_v$, la scelta del valore di $-0.04$, a fissato $K_d = 0$, è da ricondursi alla figura 5.46 dove si può osservare come, rispetto al caso non controllato, l'utilizzo di questo valore di gain consenta di incrementare maggiormente la velocità di flutter. A tal proposito, infatti, si riporta in figura 5.51 l'andamento del grado di libertà $\theta$ in funzione del tempo per una velocità $U = 40.5\ m/s$, superiore quindi alla velocità di flutter calcolata per la lamina piana. Come risulta evidente dalla figura, per il valore di velocità scelto il sistema in assenza di controllo esibisce una risposta instabile. Al contrario, si può osservare come l'introduzione del controllo consenta di ottenere una risposta nel tempo non divergente. Questo aspetto permette di sottolineare come, per prima cosa, quanto ricavato e affermato nel corso della valutazione della stabilità dell'anello

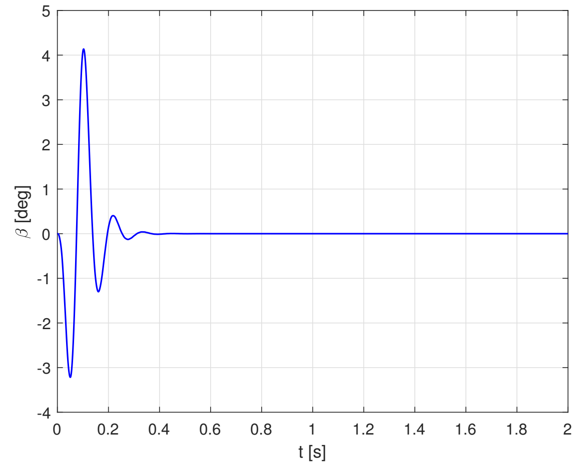



Figura 5.50: Deflessione della superficie di controllo. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. Guadagni di controllo: $K_v = -0.04$, $K_d = 0$

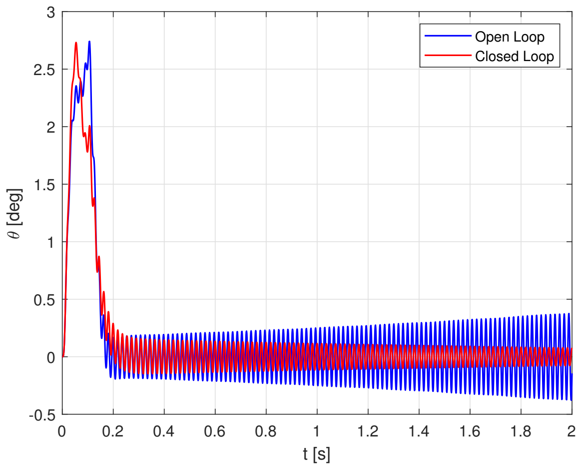



Figura 5.51: Risposta di Pitch in condizioni di post flutter. $U = 40.5\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. Guadagni di controllo: $K_v = -0.04$, $K_d = 0$

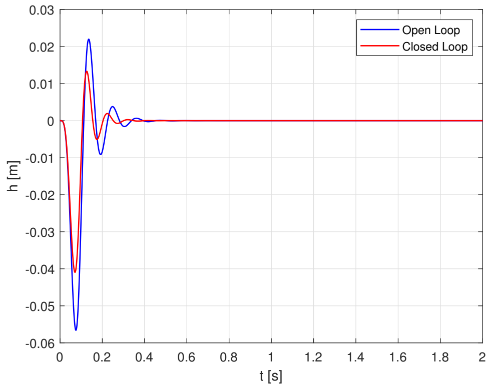
chiuso risulti corretto. Inoltre, aspetto forse più importante, si può osservare come l'introduzione del controllo nel sistema consenta di ritardare l'insorgere di dinamiche instabili posticipando, per l'appunto, la condizione di flutter.

Si vuole ora valutare, a fissato valore di $K_v$ per l'integrativo, l'effetto del parametro $K_d$ sulla risposta alla raffica del sistema aeroservoelastico. Una prima valutazione viene effettuata in termini dei picchi massimi calcolati per lo spostamento al bordo di attacco e per la deflessione della superficie di controllo. A tal proposito, in tabella 5.21 sono riportati in valore assoluto $\beta_{max}$, $z^+_{max}$ e $z^-_{max}$, rispettivamente massima deflessione della superficie di controllo e massimo spostamento positivo e negativo del bordo di attacco, calcolati al variare del guadagno del proporzionale $K_d$.

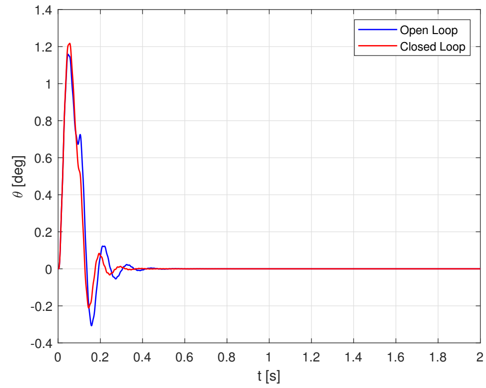
| $K_d$ | $\lvert\beta_{max}\rvert[°]$ | $z^+_{max}[m]$ | $z^-_{max}\ [m]$ |
|---|---|---|---|
| Open Loop: $z^+_{max} = 0.05716\ m$, $z^-_{max} = 0.02201\ m$ | | | |
| 4 | 16.09 | 0.0653 (+14.24%) | 0.0155 (-29.58%) |
| 3.5 | 13.99 | 0.0635 (+11.09%) | 0.0156 (-29.12%) |
| 1.5 | 7.18 | 0.0571 (-0.10%) | 0.0156 (-29.12%) |
| 0 | 4.14 | 0.0530 (-7.28%) | 0.0153 (-30.49%) |
| -1.5 | 6.01 | 0.0494 (-13.58%) | 0.0147 (-33.21%) |
| -3 | 9.05 | 0.0462 (-19.17%) | 0.0144 (-34.58%) |
| -5.5 | 13.76 | 0.0416 (-27.22%) | 0.0133 (-39.57%) |
| -7 | 16.24 | 0.0392 (-31.42%) | 0.0127 (-42.30%) |
| -10 | 20.47 | 0.0351 (-38.59%) | 0.0114 (-48.21%) |
| (.): Variazione percentuale rispetto al valore Open Loop | | | |

Tabella 5.21: Massimo valore di spostamento nel bordo di attacco e di deflessione della superficie di controllo al variare del guadagno proporzionale $K_d$. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. $K_v = -0.04$.

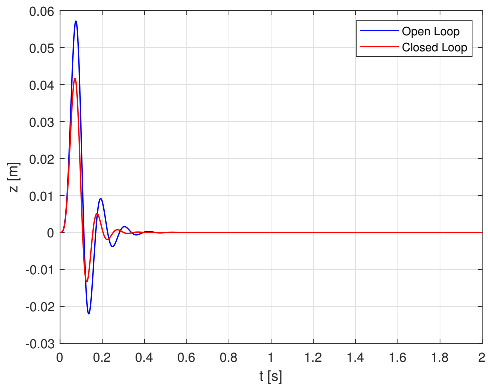
Come si può osservare dai risultati riportati, valori positivi del guadagno del proporzionale tendono a ad incrementare lo spostamento massimo positivo in corrispondenza del bordo di attacco, rispetto al caso non controllato. Al contrario, il massimo spostamento negativo risulta subire un decremento se confrontato con il duale in assenza di controllo. Inoltre, si può osservare come valori crescenti di $K_d$ comportano un incremento del massimo valore assoluto di deflessione della superficie mobile, il quale arriva anche a superare il valore massimo ammissibile di 15°. In virtù di tali considerazioni, il valore positivo che ha determinato risultati più soddisfacenti dal punto di vista della risposta dell'anello chiuso è $K_d = 3.5$. Valutando, invece, i valori negativi di $K_d$, si può osservare come, in generale, essi consentano di ottenere un maggiore abbattimento dello spostamento massimo positivo e negativo in corrispondenza del bordo di attacco. Tuttavia, valori eccessivamente negativo comportano un superamento del massimo valore consentito di $\beta$. Senza dimenticare di voler realizzare un controllo che sia comunque fattibile dal punto di vista tecnologico, il valore di guadagno che meglio si presta al controllo e che tenga conto delle considerazioni fin qui fatte risulta essere $K_d = -5.5$, con il quale si riesce ad ottenere un'attenuazione di $z^+_{max}$ rispetto al caso non controllato intorno al 30%, mentre $z^-_{max}$ si riduce di circa il 40%. Bisogna però tenere conto di un ulteriore aspetto, peraltro già analizzato nel corso dell'analisi di stabilità. Osservando la figura 5.46 si può osservare come i valori considerati influenzino in maniera differente la stabilità del sistema. Nello specifico, si può osservare come la combinazioni di guadagni per il PI $K_v = -0.04$ e $K_d = 1.5$ comporti un abbassamento del valore della velocità di flutter, persino al di sotto di quella determinata per il caso non controllato, cioè in corrispondenza di $K_v = 0$ e $K_d = 0$. Al contrario, sfruttando valori negativi per il guadagno proporzionale, si è visto come sia possibile posticipare l'insorgere della condizione di flutter la quale, per $K_v = -0.04$ e $K_d = -5.5$ si porta a velocità sicuramente superiori rispetto al valore calcolato per il modello aeroelastico non controllato. In conclusione, si può quindi desumere come la scelta di quest'ultima combinazione risulti quella maggiormente soddisfacente, non solo dal punto di vista del controllo ma anche da quello della stabilità del sistema ad anello chiuso.




(a) Plunge




(b) Pitch




(c) Spostamento nel bordo di attacco

Figura 5.52: Risposta alla raffica dell'anello chiuso. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. Guadagni di controllo: $K_v = -0.04$, $K_d = -5.5$

Nella figura 5.52 viene quindi riportata la risposta del sistema per la combinazione di guadagni scelta e nella figura 5.53 la deflessione della superficie mobile ottenuta. Come si può osservare dalla figura 5.52c, l'efficacia del controllo PI implementato con i valori prescelti dei guadagni del proporzionale e dell'integrativo risulta evidente, riducendo l'escursione dello spostamento del bordo di attacco della lamina. Inoltre, dalla figura 5.53 si osserva come l'escursione dell'angolo di deflessione $\beta$ risulta essere correttamente all'interno dei limiti prestabiliti.

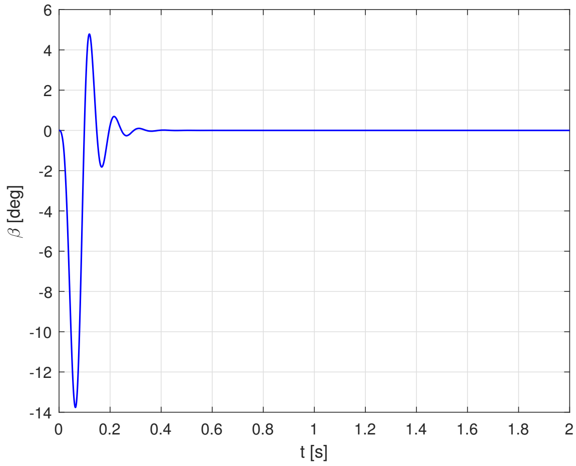



Figura 5.53: Deflessione della superficie di controllo. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. Guadagni di controllo: $K_v = -0.04$, $K_d = -5.5$

In figura 5.54 viene infine riportata la risposta nel tempo in termini di $\theta$ per la combinazione scelta di $K_v$ e $K_d$. Come si può osservare, benché il sistema non controllato esibisca ampiamente un comportamento dinamico instabile, l'applicazione del controllo consente al sistema aeroservoelastico di mantenere una dinamica stabile e non divergente.

### 5.4.4 Effetto Estensione Superficie di Controllo

Un ulteriore aspetto interessante da analizzare è come la risposta alla raffica possa essere influenzata nel momento in cui si modifica la superficie di controllo cioè, dal punto di vista pratico, quando si considerano per essa differenti valori di estensione, considerando fissati i guadagni del controllore PI. Si ricordi, infatti, che i coefficienti aerodinamici $a_c$ e $b_c$, la cui espressione è riportata nell'Eq. 4.14 in sezione 4.2, sono funzione del coefficiente angolare di portanza e del parametro $EE$, rapporto tra la corda dell'equilibratore e la corda della lamina. Si vuole perciò mostrare in questa fase come la geometria della superficie mobile possa determinare una risposta differente del modello aeroservoelastico.

In tabella 5.22 vengono riportati il valore assoluto del massima deflessione della superficie di controllo e i valori massimi, positivi e negativi, di spostamento al bordo

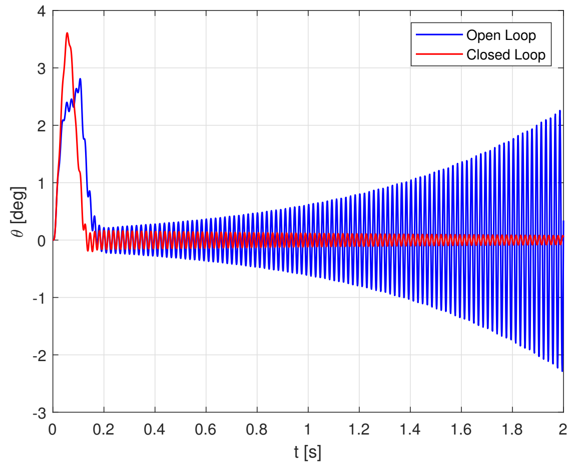



Figura 5.54: Risposta di Pitch in condizioni di post flutter. $U = 41\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. Guadagni di controllo: $K_v = -0.04$, $K_d = -5.5$.

| $EE$ | $\lvert\beta_{max}\rvert[°]$ | $z^+_{max}[m]$ | $z^-_{max}\ [m]$ |
|---|---|---|---|
| Open Loop: $z^+_{max} = 0.05716\ m$, $z^-_{max} = 0.02201\ m$ | | | |
| 0.1 | 13.76 | 0.0416 (-27.22%) | 0.0133 (-39.57%) |
| 0.2 | 12.33 | 0.0372 (-34.92%) | 0.0110 (-50.02%) |
| 0.3 | 11.41 | 0.0344 (-39.82%) | 0.0096 (-56.38%) |
| 0.4 | 10.75 | 0.0324 (-43.32%) | 0.0086 (-60.93%) |
| 0.5 | 10.23 | 0.0308 (-46.12%) | 0.0078 (-64.56%) |
| (.): Variazione percentuale rispetto al valore Open Loop | | | |

Tabella 5.22: Massimo valore di spostamento nel bordo di attacco e di deflessione della superficie di controllo al variare del rapporto tra la corda della superficie mobile e quella della lamina. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. $K_v = -0.04$, $K_d = -5.5$.

di attacco al variare del parametro geometrico $E$. Tali risultati mettono in mostra un aspetto particolarmente interessante. Si può notare infatti come, senza in alcun modo alterare il sistema di controllo, agendo sulla geometria della superficie mobile, andando cioè a considerarne un'estensione maggiore, si ottiene una diminuzione sia del massimo valore calcolato di deflessione $\beta$, ma anche una diminuzione dei valori di picco di spostamento al bordo di attacco, ottenendo un'ulteriore attenuazione della risposta alla raffica espressa dalle variazioni percentuali. Si può dunque concludere che, nel progetto e nel dimensionamento del sistema di controllo, insieme all'azione combinata dei guadagni del controllore proporzionale integrativo, un altro fattore da considerare è la geometria della superficie mobile, il cui ruolo è poi quello di realizzare effettivamente il controllo imposto dal PI. Così facendo, è possibile ottenere un miglioramento della stessa azione di controllo, senza tuttavia alterare i guadagni del controllore i quali, in ultima analisi, ne caratterizzano il dimensionamento.

Nelle figure 5.55 e 5.56 vengono riportati, in forma grafica, i concetti appena espressi. Per rendere più chiaramente leggibile i grafici è stato scelto di riportare i risultati riferendosi all'intervallo temporale $0\ s \leq t \leq 0.5\ s$, invece che riportargli su tutto l'intervallo considerato per le analisi. Dalla figura 5.55 risulta particolarmen-

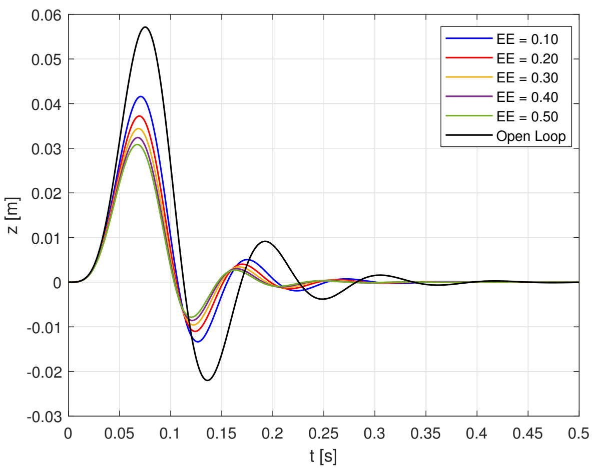



Figura 5.55: Effetto del rapporto tra la corda della superficie mobile e quella della lamina sullo spostamento al bordo di attacco. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. Guadagni di controllo: $K_v = -0.04$, $K_d = -5.5$.

te evidente come la geometria della superficie mobile consente di migliorare l'azione del controllo sulla risposta del sistema alla raffica, senza dover agire sui parametri del controllore. Analogamente, in figura 5.56 si osserva come un'estensione della superficie di controllo che sia il 50% della corda permetta di contenere maggiormente l'escursione della superficie mobile. Ovviamente, aumentare di cinque volte l'estensione della superficie di controllo, benché sicuramente benefico dal punto di vista della risposta al disturbo agente sul sistema, dovrebbe portare a considerare degli aspetti aggiuntivi in merito all'effettiva realizzazione e movimentazione della superficie mobile stessa. Nell'ottica del modello semplificato considerato, questi risultati consentono comunque di fornire importanti indicazioni su quali siano i parametri da tenere in conto e su cui agire per la realizzazione di un sistema aeroservoelastico.

### 5.4.5 Effetto Geometria e Materiale

Si vogliono ora arricchire le analisi fin qui effettuate, integrando uno studio parametrico in cui i risultati vengono analizzati per differenti valori di lunghezza $L$ della

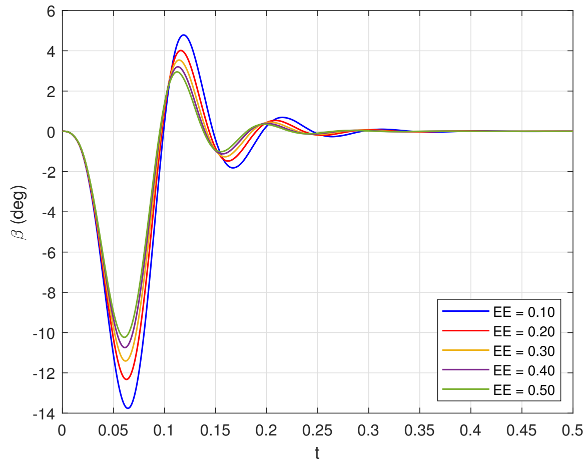



Figura 5.56: Effetto del rapporto tra la corda della superficie mobile e quella della lamina sulla deflessione $\beta$ della superficie di controllo. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. Guadagni di controllo: $K_v = -0.04$, $K_d = -5.5$.

lamina. In questo modo, è possibile inserire tra i parametri fin qui considerati anche l'effetto di una eventuale variazione di geometria del sistema sulla risposta alla raffica.

Seguendo la medesima sequenza di analisi effettuate per il modello di riferimento, caratterizzato si ricordi da una lunghezza $L = 0.305\ m$, in tabella 5.23 vengono riportate le prime tre frequenze proprie del sistema considerando una lunghezza pari alla metà di $L$ e una pari al doppio. I risultati ottenuti, sono quindi confrontati per differenti teorie (per conoscere il numero di gradi di libertà coinvolti nel calcolo, riferirsi alla tabella 5.20). Le considerazioni fatte in merito all'effetto della teoria

| | $L = 0.1525$ | | | $L = 0.611$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
| EBBM | 35.866 | 224.764 | 629.435 | 2.242 | 14.049 | 39.345 |
| N=1 | 35.865 | 224.728 | 629.183 | 2.242 | 14.048 | 39.344 |
| N=2 | 38.223 | 161.530* | 239.380 | 2.373 | 14.808 | 35.413* |
| N=3 | 37.362 | 157.851* | 232.070 | 2.280 | 14.279 | 35.264* |
| N=4 | 37.304 | 157.703* | 231.915 | 2.279 | 14.272 | 35.257* |
| L9 | 37.338 | 157.864* | 232.026 | 2.280 | 14.277 | 35.266* |

$(.)^*$ Indica un modo torsionale

Tabella 5.23: Effetto della lunghezza $L$ $[m]$ della lamina sulle frequenze di vibrazione del sistema [Hz]. 10B4

utilizzata fatte per la tabella 5.20 sono da considerarsi valide anche in questo caso.

Modelli di espansione di Taylor almeno del secondo ordine sono necessari per poter cogliere il primo modo torsionale, mentre la convergenza dei risultati richiede l'utilizzo di polinomi cubici ma essendo computazionalmente più conveniente utilizzare un polinomio cubico di Lagrange, si farà riferimento ai risultati ottenuti per questo modello di espansione. Si può inoltre notare come variare la lunghezza della lamina abbia un'influenza molto importante sui modi del sistema. Infatti, dimezzando la lunghezza della lamina si ottiene una prima frequenza flessionale maggiore del triplo della corrispondente per $L = 305\ m$ e riportata in tabella 5.20. Analogamente, anche la prima torsionale subisce un aumento di più del doppio. Al contrario, raddoppiando la lunghezza della lamina porta ad una forte diminuzione delle due frequenze considerate, come si può osservare soprattutto dalla prima flessionale che si riduce di quasi quattro volte. Ricordando l'Eq. 5.2, dalle frequenze appena calcolate è possibile stimare i valori di rigidezza flessionale e torsionale delle molle nell'analisi a parametri concentrati in atto. Le considerazioni fatte si tradurranno dunque in una differente stabilità del sistema che nel seguito verrà quindi analizzata.

Analogamente a quanto fatto in sezione 5.4.2, si riporta in tabella 5.24 l'analisi di stabilità dell'anello chiuso confrontando, per differenti combinazioni dei guadagni del controllore PI, l'effetto sulla velocità di flutter e quindi sulla stabilità dinamica delle due nuove configurazioni geometriche della lamina. Come riferimento, si considerino i valori di velocità di flutter calcolati per l'anello aperto, ottenuti risolvendo il classico problema agli autovalori per il sistema non controllato. Il primo

| | L = 0.1525 | L=0.611 |
|---|---|---|
| $K_d$ | $U_F$ | $U_F$ |
| Open Loop | 85.2 | 19.6 |
| | $K_v = -0.03$ | $K_v = -0.04$ |
| -10 | 88.1 | 20.2 |
| -7 | 87.6 | 20 |
| -5.5 | 87.3 | 20 |
| -3 | 86.9 | 19.9 |
| -1.5 | 86.6 | 19.8 |
| 0 | 86.3 | 19.7 |
| 1.5 | 86.1 | 15.4 |
| 3.5 | 85.7 | 10.3 |
| 4 | 85.7 | 9.6 |

Tabella 5.24: Effetto dei guadagni $K_d$ e $K_v$ sulla velocità di flutter, $U_F$ $[m/s]$, al variare della lunghezza $L$ $[m]$ della lamina

aspetto su cui è necessario effettuare alcune valutazioni, consiste nel valore di $U_F$ determinato per il sistema dinamico in assenza del controllo. Si può notare, infatti, come la variazione di geometria abbia influito fortemente sulla stabilità del sistema,

dal momento che l'aver raddoppiato la lunghezza della lamina si è tradotto in un forte decremento della velocità di flutter, mentre considerare una lunghezza pari alla metà del valore di partenza ha determinato l'effetto opposto. Questo aspetto risulta essere una logica conseguenza dell'analisi dei modi di vibrare della lamina al variare di $L$, riportata in tabella 5.23. La variazione di geometria ha infatti determinato una modifica delle frequenze proprie di oscillazione del sistema e, di conseguenza, una variazione delle rigidezze flessionali e torsionali delle molle. Nello specifico, tanto più la lunghezza considerata è ridotta tanto più il sistema incrementa la sua rigidezza, mentre il considerare una lunghezza maggiore determina l'effetto opposto. La geometria ha dunque un effetto tangibile sulla stabilità del sistema non controllato, osservabile in una condizione instabile differente rispetto al caso di riferimento.
Valutata la stabilità dell'anello aperto, si è quindi considerata la stabilità del sistema ad anello chiuso riportando i valori di velocità di flutter determinati per differenti combinazione dei gain di controllo, in maniera analoga a quanto effettuato in figura 5.46. Per questa analisi parametrica, sono stati selezionati i valori di $K_v$ che hanno determinato maggiori incrementi della velocità di flutter e, una volta fissati, sono stati quindi riportati i valori di $U_F$ per differenti combinazioni del guadagno proporzionale $K_d$. In generale, è osservabile come valori di $K_d$ negativi consentano di posticipare l'insorgere dell'instabilità, mentre valori positivi hanno l'effetto opposto. L'aspetto interessante nell'ambito dell'analisi parametrica è il fatto che la configurazione caratterizzata da una lunghezza $L = 0.611\ m$ sia maggiormente suscettibile al crescere del valore del guadagno del proporzionale dal momento che, ad esempio, un valore di $K_d = 4$ determina un forte abbassamento della velocità di flutter, che risulta subire un decremento di circa del 50% rispetto al caso non controllato. Al contrario, l'effetto di $K_d$ sulla configurazione geometrica più compatta risulta essere meno forte poiché, in corrispondenza dello stesso valore di $K_d$, si ricava una velocità di flutter comunque superiore rispetto al caso non controllato. Considerazioni analoghe possono essere effettuate per valori di $K_d$ negativi. Infatti, benché come detto in generale si ottiene un aumento del valore di $U_F$, si può osservare come esso sia tanto più forte quanto più la lunghezza della lamina risulti inferiore rispetto al caso classico. La geometria del sistema risulta quindi essere un fattore determinante anche nel momento in cui si considera la stabilità del sistema in presenza del controllo e, di conseguenza, il settaggio dei guadagni del controllore deve essere effettuato considerando questo ulteriore aspetto.

L'analisi prosegue con la valutazione della risposta alla raffica di figura 5.47. Dal momento che l'analisi è stata condotta per un valore di velocità di 20 $m/s$, il confronto con i risultati ottenuti dal caso di riferimento verrà effettuato considerando il valore di lunghezza della lamina pari a $L = 0.1525\ m$, poiché si è visto come, per una lunghezza pari al doppio, il sistema risulta essere instabile per il valore di velocità considerato. In tabella 5.25 sono quindi riportati i valori massimi di escursione $\beta$ della superficie mobile e i picchi, positivi e negativi, di spostamento del bordo di attacco della lamina per il caso considerato. Il primo risultato su cui

| $K_d$ | $\lvert\beta_{max}\rvert[°]$ | $z^+_{max}[mm]$ | $z^-_{max}[mm]$ |
|---|---|---|---|
| Open Loop: $z^+_{max} = 2.9338\ mm$, $z^-_{max} = 0.1067\ mm$ | | | |
| 4 | 0.73 | 2.9743 (+1.38%) | 0.1103 (+3.37%) |
| 3.5 | 0.65 | 2.9683 (+1.18%) | 0.1095 (+2.62%) |
| 1.5 | 0.34 | 2.9444 (+0.36%) | 0.1061 (-0.56%) |
| 0 | 0.18 | 2.9267 (-0.24%) | 0.1036 (-2.91%) |
| -1.5 | 0.31 | 2.9091 (-0.84%) | 0.1011 (-5.24%) |
| -3 | 0.54 | 2.8917 (-1.43%) | 0.0986 (-7.59%) |
| -5.5 | 0.93 | 2.8631 (-2.41%) | 0.0946 (-11.34%) |
| -7 | 1.17 | 2.8461 (-2.99%) | 0.0923 (-13.50%) |
| -10 | 1.63 | 2.8126 (-4.13%) | 0.0878 (-17.71%) |

(.): Variazione percentuale rispetto al valore Open Loop

Tabella 5.25: Massimo valore di spostamento nel bordo di attacco e di deflessione della superficie di controllo al variare del guadagno proporzionale $K_d$. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. $K_v = -0.03$. $L = 0.1525\ m$

si vuole concentrare l'attenzione è quanto ottenuto dalla risposta del sistema non controllato. Rispetto al caso di riferimento si può notare come, a parità di input di raffica applicato al sistema, la risposta dinamica valutata in termini di massimo valore positivo e negativo di spostamento al bordo di attacco risulti essere attenuata essendo inferiore di un'ordine di grandezza. Questo risultato è ovviamente coerente con la maggiore rigidezza flessionale e torsionale che caratterizza la configurazione geometrica considerata. Di maggiore interesse appare, invece, come l'applicazione del controllo influenzi i risultati ottenuti. Per prima cosa si può notare come, in analogia con i risultati riportati in tabella 5.21, valori positivi del guadagno proporzionale non comportano un'attenuazione dei picchi di spostamento positivo, i quali invece risultano subire un incremento. A differenza di quanto mostrato in tabella 5.21, questo comportamento è riscontrabile anche per $z^-_{max}$. Anche in questo caso quindi, valori di $K_d$ minori o uguali a zero sono preferibili per ottenere un'attenuazione della risposta alla raffica invece che un'amplificazione. In generale, si può comunque notare come, per i valori selezionati di $K_d$, il controllo non determina variazioni importanti rispetto a quanto calcolato per il sistema non controllato, se non nei valori di massimo spostamento negativo. Per quanto riguarda i valori di $z^+_{max}$, l'introduzione del controllo comporta variazioni molto più contenute rispetto al caso non controllato. In conclusione, per questa tipologia di problema, l'effetto del controllo risulta essere meno determinante per ottenere un'attenuazione della risposta dinamica all'input di raffica scelto e ciò risulta particolarmente evidente dai massimi valori $\beta_{max}$ di escursione della superficie di controllo, i quali risultano essere di pochi gradi. La maggiore rigidezza strutturale che caratterizza la configurazione geometrica in esame comporta quindi una minore azione da parte del sistema di controllo in relazione alle caratteristiche del disturbo di raffica scelto per effettuare il confronto tra i due casi.

Si riporta quindi in figura 5.57 la risposta alla raffica in termini di spostamento del bordo di attacco per la combinazione di guadagni del controllore $K_v = -0.03$ e $K_d = -10$, la quale ha permesso di ottenere una migliore attenuazione dei valori di picco calcolati per il sistema non controllato. Nella figura 5.58 è invece riportata la corrispondente deflessione della superficie mobile per la combinazione di guadagni considerata. I risultati riportati confermano quanto affermato in relazione alla tabella 5.25. Si può infatti notare come l'azione del controllo risulti molto meno evidente rispetto al caso $L = 0.305\ m$, aspetto avvalorato dalla piccola deflessione a cui è soggetta la superficie di controllo. Tuttavia, è comunque osservabile l'attenuazione dello spostamento massimo positivo oltre che un più rapido decadimento della risposta nel tempo.

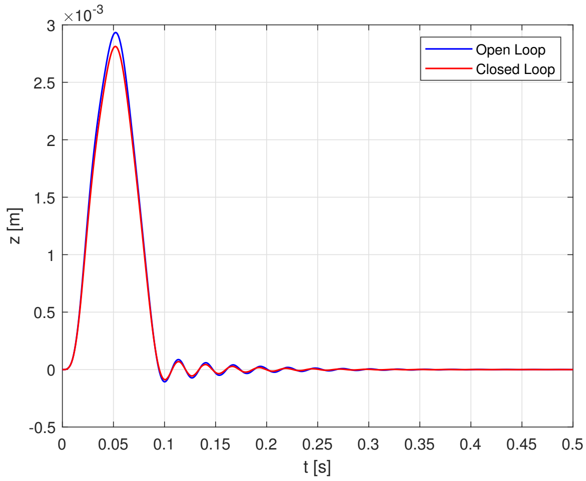



Figura 5.57: Risposta alla raffica dell'anello chiuso in termini di spostamento del bordo di attacco della lamina. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. Guadagni di controllo: $K_v = -0.03$, $K_d = -10$. $L = 0.1525\ m$

Si vuole ora proseguire l'analisi parametrica considerando l'effetto sul sistema aeroservoelastico dell'utilizzo di un materiale differente. Riprendendo dunque la configurazione geometrica di partenza, caratterizzata da una lunghezza $L = 0.305\ m$, si consideri un materiale isotropo con le seguenti caratteristiche: $E = 72\ GPa$, $\nu = 0.3$ e $\rho = 213.8684\ kg/m^3$. Analogamente a quanto fatto nel momento in cui è stata considerata una differente configurazione geometrica, si riportano in tabella 5.26 le prime tre frequenze proprie di oscillazione del sistema calcolate per differenti teorie. Le considerazioni fatte per le analisi precedenti in merito alla convergenza dei risul-

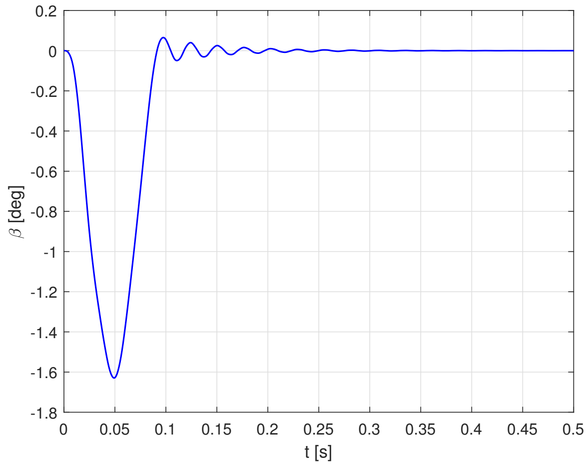



Figura 5.58: Deflessione della superficie di controllo. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. Guadagni di controllo: $K_v = -0.03$, $K_d = -10$. $L = 0.1525\ m$

| | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | DOFs |
|---|---|---|---|---|
| EBBT | 31.862 | 199.680 | 559.221 | 279 |
| N=1 | 31.862 | 199.672 | 559.165 | 279 |
| N=2 | 33.802 | 211.463 | 262.671* | 558 |
| N=3 | 32.676 | 204.241 | 260.205* | 930 |
| N=4 | 32.646 | 204.115 | 260.143* | 1395 |
| 1L9 | 32.665 | 204.209 | 260.227* | 837 |

(.)* Indica un modo torsionale

Tabella 5.26: Effetto del modello di espansione sulle frequenze di vibrazione del sistema [Hz]. 10B4

tati in base al modello di espansione utilizzato e il carico computazionale coinvolto nell'analisi risulta essere nuovamente valide. Analogamente a quanto fatto in precedenza, si selezionano dunque le prime frequenze proprie di oscillazione flessionale e torsionale, con le quali sarà possibile calcolare le rigidezze del modello a parametri concentrati sfruttando l'Eq. 5.2.

Si vuole ora analizzare la stabilità di questo nuovo sistema, come fatto nei casi precedenti, andando per prima cosa a valutare la velocità in corrispondenza della quale si verifica il flutter e, subito dopo, analizzare come la stabilità del sistema venga influenzata dall'implementazione del controllo. Si riportano dunque in tabella 5.27 i valori calcolati di velocità di flutter derivanti dall'analisi di stabilità dell'anello aperto e chiuso. Come nei casi precedenti, sono riportati i risultati al variare del guadagno proporzionale a fissato valore di $K_v$, scelto in modo tale da ottenere i massimi incrementi di velocità di flutter. Come si può osservare, intorno ad una velocità di

| $K_d$ | $U_F$ |
|---|---|
| Open Loop | 39.9 |
| $K_v = 0.02$ | |
| | |
| -10 | 42.4 |
| -7 | 42 |
| -5.5 | 41.8 |
| -3 | 41.5 |
| -1.5 | 41.3 |
| 0 | 41.1 |
| 1.5 | 40.9 |
| 3.5 | 39.3 |
| 4 | 37 |

Tabella 5.27: Effetto dei guadagni $K_d$ e $K_v$ sulla velocità di flutter, $U_F$ $[m/s]$

circa 40 $m/s$ nel sistema non controllato insorge una dinamica instabile. Risulta dunque interessante osservare come, nonostante frequenze proprie di oscillazione flessionale e torsionale dello stesso ordine di grandezza di quelle calcolate per il caso $L = 0.1525$ $m$, riportate in tabella 5.23, l'utilizzo di un materiale di densità inferiore, che comporta quindi un sistema più leggero, compensa negativamente l'aumento di rigidezza. Il tutto si traduce quindi in un valore di velocità di flutter corrispondente a poco meno della metà del valore calcolato per $L = 0.1525$ $m$. Come già anticipato in sezione 5.3.3, la dinamica del sistema risulta quindi fortemente influenzata dalla sua massa. Un altro aspetto interessante su cui focalizzare l'attenzione è la scelta del valore di $K_v$. Si può infatti osservare come, a differenza dei casi precedenti, in questo caso il valore del guadagno del controllo integrativo che consente di incrementare il più possibile la velocità di flutter risulti essere un valore maggiore di zero. Questo risultato consente di mettere in luce come il sistema di controllo non sia indipendente dagli input che caratterizzano il sistema considerato, ma venga anzi influenzato da una loro possibile variazione. L'effetto del guadagno proporzionale risulta invece essere in linea con i risultati fin qui riportati, dal momento che si osserva nuovamente come valori negativi del gain consentano di ottenere i maggiori incrementi della velocità di flutter, al contrario dei valori positivi che ne determinano invece un decremento.

Si conclude quindi l'analisi andando a valutare la risposta all'input di raffica di figura 5.47. A tal proposito, si riportano in tabella 5.28 i massimi valori di deflessione della superficie mobile e i massimi valore positivo, quest'ultimo confrontati con i corrispondenti valori ottenuti per il sistema non controllato (i valori di picco negativi sono stati esclusi dall'analisi dal momento che non si sono ottenuti valori apprezzabili per il confronto. Questo aspetto sarà maggiormente chiaro nel seguito). Come si può osservare dai risultati riportati, l'azione della raffica sul sistema

| $K_d$ | $\|\beta_{max}\|[°]$ | $z^+_{max}$ $[m]$ |
|---|---|---|
| Open Loop: $z^+_{max} = 0.04684$ $m$, $z^-_{max} \approx 0.0$ $m$ | | |
| 4 | 14.91 | 0.0636 (+35.75%) |
| 3.5 | 12.62 | 0.0611 (+30.50%) |
| 1.5 | 5.20 | 0.0528 (+12.71%) |
| 0 | 1.67 | 0.0478 (+2.10%) |
| -1.5 | 4.30 | 0.0437 (-6.76%) |
| -3 | 7.18 | 0.0402 (-14.29%) |
| -5.5 | 11.27 | 0.0354 (-24.52%) |
| -7 | 13.33 | 0.0330 (-29.60%) |
| -10 | 16.70 | 0.0290 (-38.01%) |
| (.): Variazione percentuale rispetto al valore Open Loop | | |

Tabella 5.28: Massimo valore di spostamento nel bordo di attacco e di deflessione della superficie di controllo al variare del guadagno proporzionale $K_d$. $U = 20$ $m/s$, raffica con $U_0 = 5$ $m/s$ e $t_g = 0.1$ $s$. $K_v = 0.02$

determina valori massimi positivi di spostamento del bordo di attacco della lamina, mentre i picchi negativi sono pressoché nulli. L'azione del controllo, esercitata attraverso una variazione del guadagno del proporzionale, si può osservare determini un'attenuazione del picco di spostamento al bordo di attacco solamente per valori di $K_d$ negativi. Questo risultato avvalora maggiormente la scelta di guadagni minori di zero che determinano quindi benefici sia dal punto di vista del controllo che della stabilità del sistema, come mostrato in tabella 5.27. Tuttavia, per il caso studiato, si può osservare come valori eccessivamente negativi determinino una deflessione massima della superfici di controllo al di sopra del limite scelto di 15°. Di conseguenza, un valore di $K_d$ che ben si presta all'implementazione del sistema di controllo risulta essere $K_d = -7$, con il quale è possibile ottenere, oltre che uno spostamento della condizione di flutter verso velocità superiori rispetto al caso non controllato, anche un'attenuazione del valore massimo di spostamento.

In figura 5.59 viene dunque riportata la risposta dinamica della lamina in termini di spostamento del bordo di attacco. Come si può osservare, l'azione del controllo si manifesta principalmente in una diminuzione dello spostamento massimo positivo, mentre i valori massimi negativi del sistema con e senza controllo sono pressoché confrontabili. Risulta comunque possibile osservare come, nuovamente, la risposta dinamica in presenza del controllo tenda ad annullarsi più rapidamente. Nella figura 5.60 viene riportata la corrispondente deflessione della superficie di controllo, la quale risulta correttamente essere all'interno dei limiti prestabiliti.

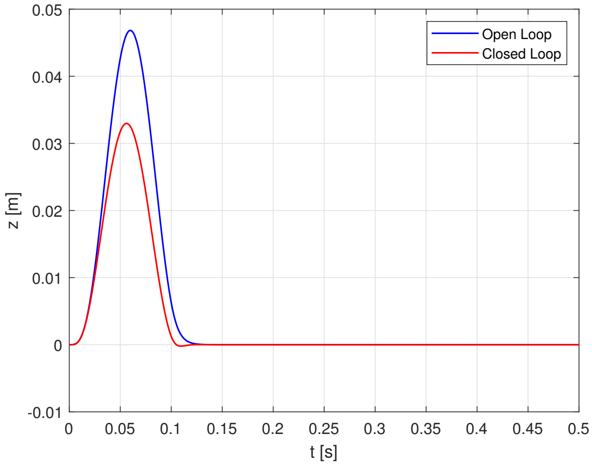



Figura 5.59: Risposta alla raffica dell'anello chiuso in termini di spostamento del bordo di attacco della lamina. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. Guadagni di controllo: $K_v = 0.02$, $K_d = -7$

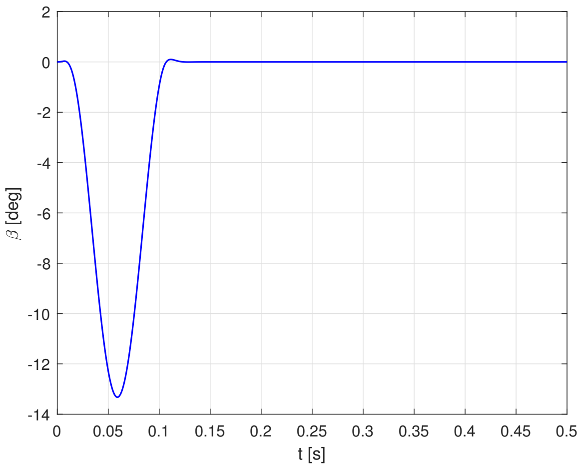



Figura 5.60: Deflessione della superficie di controllo. $U = 20\ m/s$, raffica con $U_0 = 5\ m/s$ e $t_g = 0.1\ s$. Guadagni di controllo: $K_v = 0.02$, $K_d = -7$

# Capitolo 6

# Conclusioni

Un controllo proporzionale integrativo è stato implementato all'interno del classico sistema aeroelastico. La stabilità dell'anello chiuso retroazionato è stata quindi valutata calcolando la condizione di flutter per differenti combinazioni di valori dei gain di controllo, così come la risposta ad un input di raffica sfruttando un modello discreto uno-meno-coseno.

## 6.1 Organizzazione dell'Elaborato

Nella prima parte del presente elaborato viene dedicato ampio spazio alla descrizione del modello strutturale unidimensionale basato sulla Carrera Unified Formulation (CUF). Vantaggio principale legato all'impiego di tale formulazione è la possibilità di ottenere un modello cinematico di ordine arbitrariamente elevato assumendo un'espansione polinomiale delle variabili lungo la sezione trasversale. Infatti, mediante la CUF l'ordine di espansione diventa ora un'input dell'analisi, da settare opportunamente a seconda del problema in esame. Nel presente lavoro di tesi è stato fatto largo impiego di due differenti modelli strutturale rifiniti, ovvero modelli TE e LE. I primi sfruttano polinomi di Taylor di ordine arbitrariamente elevato per modellare il campo di spostamenti lungo la sezione trasversale e maggiore è l'ordine scelto, maggiore sarà il numero di variabili coinvolti nel calcolo. La seconda classe di modelli considerati si basa sull'utilizzo di polinomi di Lagrange per modellare il campo di spostamenti lungo la sezione trasversale e per opportunamente discretizzarla. In questo caso, le incognite del problema sono pure variabili di spostamento. Implementando i modelli CUF descritti all'interno della formulazione agli elementi finiti (FEM), è possibile ricavare tutte le matrici e i vettori che compaiono all'interno delle equazioni di equilibrio sfruttando una metodologia di assemblaggio basata sui cosiddetti nuclei fondamentali, la cui espressione formale delle componenti è indipendente dall'ordine della teoria scelta. Infine, largo spazio è stato dedicato alla descrizione delle metodologie adottate per modellare strutture laminate e multicomponente, entrambe largamente impiegate in ambito aerospaziale. Nel primo caso, sono stati descritti gli approcci detti Equivalent Single Layer, ESL, che sfrutta modelli TE, e Layer Wise, LW, il quale sfrutta invece modelli LE. Nel primo caso si ha una omogenizzazione delle proprietà di ciascuno strato, mentre nel secondo caso si ha l'omogenizzazione delle proprietà solo in corrispondenza dei nodi di interfaccia tra uno strato e la'altro, cosicché ogni strato possa conservare le proprietà che lo caratterizzano. L'analisi delle strutture multi-componente è invece condotta adottando l'approccio Component-Wise, CW, grazie al quale gli elementi che compongono la sezione trasversale sono modellati mediante elementi finiti 1D di ordine di espansione arbitrario. Sfruttando modelli LE è inoltre possibile considerare la sezione trasversale della struttura come somma di sotto-domini, ciascuno dei quali discretizzato in maniera opportuna, tra i quali viene imposta la continuità degli spostamenti senza ricorrere ad alcun artificio matematico.

Ampio spazio è stato dunque dedicato alla descrizione delle metodologie impiegate per la valutazione della risposta dinamica delle strutture quando soggette a carichi inerziali. Tra i metodi a integrazione diretta, il metodo di Newmark sfrutta caratteristiche espressioni del campo degli spostamenti e di velocità nelle quali l'opportuno settaggio delle costanti che vi compaiono garantisce la stabilità dello schema. Aspetto caratteristico di questo metodo, come nel caso di tutti i metodi ad integrazione diretta delle equazioni nel tempo, è la dipendenza dei risultati dal time-step $\Delta t$ selezionato. Un'alternativa molto valida al metodo di Newmark è rappresentata dal Mode Superposition Method, il quale sfrutta un'espressione delle equazioni in coordinate modali grazie alle quali è possibile ottenere una valutazione sufficientemente accurata della risposta dinamica del sistema mediante la sovrapposizione di una opportuna frazione delle forme modali calcolate. Il numero di modi scelto determina dunque l'accuratezza del metodo. Tra le tipologie di carichi inerziali del problema dinamico, il carico di raffica è stato descritto considerando per la raffica verticale un modello discreto del tipo uno-meno-coseno distribuito nel tempo.

Il cuore dell'elaborato è rappresentato dalla definizione del modello matematico del sistema aeroservoelastico. Per prima cosa è stato considerato l'esempio classico della sezione tipica. Tramite questo modello è stato possibile ricavarne le equazioni che del moto considerando una opportuna teoria aerodinamica che ha permesso di includere nel sistema oltre alle ben note matrici strutturali di massa e rigidezza, le matrici di rigidezza e smorzamento aerodinamico. La stabilità del modello è determinabile grazie alla risoluzione del problema agli autovalori, per differenti condizioni operative valutate in termini di velocità e densità del flusso. Il passo successivo è stato considerare il modello in presenza di una superficie di controllo la cui azione è regolata da un sistema di controllo proporzionale-integrativo, (PI), in retroazione, caso particolare del classico controllo proporzionale-integrativo-derivativo, (PID), che nei sistemi di controllo trova largo impiego. Il sistema aeroservoelastico così definito è caratterizzato dalla presenza di due nuove matrici, dette matrici di feedback, le quali influenzano la stabilità del sistema retroazionato ad anello chiuso così ottenuto. Implementando infine un semplice input di raffica e sfruttando una rappresentazione stato-spazio delle equazioni è dunque possibile valutarne la risposta nel tempo.

L'elaborato si conclude con vasto set di esempi numerici nei quali l'applicazione dei concetti teorici mostrati ha permesso di ricavare importanti conclusioni che verranno descritte nella sezione successiva.

## 6.2 Osservazioni Conclusive

In merito alla valutazione della risposta statica per le configurazioni strutturali considerate è possibile riportare le seguenti conclusioni:

- I modelli CUF 1D utilizzati hanno mostrato un'ottima convergenza dei risultati e permesso di ottenere uno strumento efficace per la predizione dello spostamento nel punto di carico per configurazioni caratterizzate da un basso rapporto di snellezza o da una maggiore complessità, per le quali non sono applicabili le teorie classiche.
- Nel caso di strutture laminate e rinforzate, i modelli LE hanno consentito una più accurata predizione della distribuzione degli stress lungo lo spessore, nel primo caso adottando l'approccio Layer-Wise e, nel secondo, mediante la definizione di modelli Component-Wise. Tale aspetto è stato maggiormente messo in luce dalle distribuzioni di sforzo di taglio ottenute.
- In termini di costo computazionale, l'applicazione di modelli LE ha permesso di coinvolgere nel calcolo un numero minore di gradi di libertà soprattutto nei casi in cui modelli TE di ordine elevato risultavano necessari per ragioni di accuratezza delle risposta.

Le analisi dinamiche hanno invece messo in luce i seguenti aspetti:

- Sia il metodo di Newmark che la sovrapposizione modale si sono dimostrati metodi accurati per valutare la risposta nel tempo di differenti configurazioni strutturali quando soggette a carichi inerziali.
- Il metodo di sovrapposizione modale ha dimostrato comportare un notevole risparmio di tempi di calcolo, dal momento che la valutazione delle risposte nel tempo in termini di spostamenti o stress ha richiesto l'utilizzo di poche forme modali se confrontate con il numero di time-step necessari al metodo di Newmark per ottenere la convergenza della soluzione. Rispetto alla valutazione dello spostamento in funzione del tempo, un numero maggiore di modi è stato comunque necessario per ottenere la convergenza degli stress.

- Anche nelle analisi dinamiche i modelli Component-Wise LE hanno permesso di ottenere distribuzioni degli stress maggiormente accurate rispetto a modelli TE di ordine elevato, consente un importante risparmio delle risorse di calcolo.

Le analisi del modello aeroservoelastico consentono di concludere che:

- Il valore da assegnare ai gain di controllo integrativo e proporzionale non può non prescindere da una valutazione della stabilità del sistema ad anello chiuso. In questo senso, è stato mostrato come selezionando correttamente i valori di $K_v$ e $K_d$ sia possibile agire differentemente sulla condizione di flutter.

- Selezionando opportunamente il valore dei gain di controllo è stato possibile ottenere ottime attenuazioni della risposta del sistema ad un input di raffica senza superare i limiti prestabiliti di escursione della superficie mobile. In questo modo, la combinazione dei gain $K_v$ e $K_d$ scelti ha permesso di ottenere benefici non solo dal punto di vista della stabilità ma anche nella risposta a forzanti esterne se confrontati con i corrispondenti risultati ricavati per l'anello aperto in assenza di controllo.

- Agire sulla geometria della superficie mobile consente di migliorare l'azione del controllo sulla risposta all'input di raffica.

- L'efficacia del controllo implementato è risultata inalterata a seguito della modifica della geometria e del materiale del modello considerato.

## 6.3 Sviluppi Futuri

Il presente lavoro di tesi ha come scopo quello di mostrare come implementare all'interno delle equazioni del moto caratteristiche del sistema aeroelastico una semplice, quanto efficace, legge di controllo in retroazione. I risultati ottenuti per modelli a parametri discreti sulla stabilità e la risposta ad un input di raffica esterno possono quindi rappresentare un ottimo punto di partenza per procedere allo sviluppo di questo elaborato. A tal proposito, i passi immediatamente successivi a quanto riportato consistono in:

- Ricavare le matrici strutturali, aerodinamiche e di controllo utilizzando la CUF all'interno della formulazione agli elementi finiti, in modo da estendere le analisi effettuate a configurazioni tridimensionali dalle più semplici, come la lamina in presenza della superficie di controllo analizzata, a quelle più complesse come ali in presenza di superfici mobili o velivoli completi.

- Eventualmente perfezionare il modello aerodinamico, passando dalla teoria di striscia ad un metodo a pannelli come il DLM. In questo caso il problema risulta essere formulato in frequenza e, per ottenere una risposta nel tempo dal sistema stato-spazio, risulta necessario ricorrere ad una approssimazione razionale dell'operatore aerodinamico. Questo metodo risulta essere largamente impiegato e in bibliografia sono molti i riferimenti nei quali ne viene mostrata un'applicazione in problemi di posticipazione della condizione di flutter e di attenuazione della risposta a carichi di raffica [62].

- Alternativamente al modello discreto utilizzato, un possibile step successivo può essere quello di considerare un modello continuo di raffica in modo da poter valutare la risposta del sistema controllato a raffiche turbolente.

- Utilizzare strategie di controllo alternative a quello proporzionale-integrativo in retroazione implementato nel presente elaborato

# Bibliografia


[1] A.R. Collar, “The First Fifty Years of Aeroelasticity”, Aerospace, vol. 5, no. 2, (Royal Aeronautical Society), pp. 12–20, 1978

[2] R. H. Scanlan, R. Rosenbaum, "Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter", Macmillan, New York, 1951

[3] Y. Fung, "An Introduction to the Theory of Aeroelasticity", Dover (original 1955), New York, 1969

[4] G. Hancock, J. Wright, A. Simpson, "On the teaching of the principles of wing flexure-torsion flutter", The Aeronautical Journal, 89(888), 285-305, 1985. DOI:10.1017/S0001924000015050

[5] R.L. Bisplinghoff, H. Ashley, and R.L. Halfman, "Aeroelasticity", Addison-Wesley, Cambridge, 1995

[6] D.H. Hodges, G.A. Pierce, “Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity”, Cambridge University Press, 2002

[7] E.H. Dowell, R. Clark, D. Cox, H.C. Curtiss, J.W. Edwards, K.C. Hall, D.A. Peters, R. Scanlon, E. Simiu, F. Sisto, T.W. Strganac, "A Modern Course in Aeroelasticity", Solid Mechanics and Its applications, 4th revised and enlarged edn, Springer, 2004

[8] J. R. Wright, J. E. Cooper, "Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads", John Wiley & Sons Ltd, 2007

[9] T. Theodorsen, “General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter”, NACA Rept. 496, 1934

[10] E. Yates, "Modified-Strip-Analysis Method for Predicting Wing Flutter at Subsonic to Hypersonic Speeds", Journal of Aircraft 3(1), 25-29, 1966

[11] E. Albano, W.P. Rodden, "A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows", AIAA Journal 7 (2), 279–285, 1969

[12] W.P. Rodden, P. Taylor, S. J. McIntosh, "Further refinement of the subsonic doublet-lattice method", Journal of Aircraft 35 (5), 720–726, 1998

[13] T. Kalman, W.P. Rodden, J.P. Giesing, "Application of the Doublet-Lattice Method to Nonplanar Configurations in Subsonic Flow". Journal of Aircraft, 8(6), 406–413, 1971. DOI:10.2514/3.59117

[14] R. Yurkovich, "Status of unsteady aerodynamic prediction for flutter of highperformance aircraft". Journal of Aircraft 40 (5), 832–842, 2003

[15] D. Schuster, D. Liu, L. Huttsell, "Computational aeroelasticity: success, progress, challenge", Journal of Aircraft 40 (5), 843–856, 2003

[16] G. Zatarian, P. Hsu, "Theoretical studies on the prediction of unsteady air loads on elastic wings", TR 56-97,Wright Air Development Center, 1955

[17] L. Demasi, E. Livne, "Dynamic aeroelasticity of structurally nonlinear configurations using linear modally reduced aerodynamic generalized forces", AIAA Journal 47 (1), 2009

[18] E.H. Dowell, K.C. Hall, "Modeling of fluid-structure interaction", Annual Review of Fluid Mechanics 33, 445–490, 2001

[19] G.P. Guruswamy, "A review of numerical fluids/structures interface methods for computations using high-fidelity equations", Computers & Structures 80(1), 31–41, 2002

[20] C. Farhat, P. Geuzaine, G. Brown, "Application of a three-field non-linear fluid-structure formulation to the prediction of the aeroelastic parameters of an F-16 fighter" Computers & Fluids 32(3), 3–29, 2003

[21] R. Kamakoti, W. Shyy, “Fluid–Structure Interaction for Aeroelastic Applications,” Progress in Aerospace Sciences 40(8), 535–558, DOI: 10.1016/j.paerosci.2005.01.001, 2004

[22] L. Euler, "De curvis elasticis", Bousquet, Lausanne and Geneva, 1744

[23] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, "Theory of elasticity", McGraw-Hill, New York, 1970

[24] V.V. Novozhilov, "Theory of elasticity", Pergamon Press, Oxford, 1961

[25] E. Carrera, M. Petrolo, E. Zappino, "Performance of CUF approach to analyze the structural behavior of slender bodies" Journal of Structural Engineering, 2012. DOI:10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000402,

[26] I.S. Sokolnikoff, "Mathematical Theory of Elasticity", McGrw-Hill, 1956

[27] F, Gruttmann, R. Sauer, W. Wagner, “Shear stresses in prismatic beams with arbitraty cross-sections”, International Journal for Numerical Methods in Engineering 45, 865-889, 1999

[28] F. Gruttmann, W. Wagner, “Shear correction factors in Timoshenko’s beam theory for arbitrary shaped cross-sections”, Computational Mechanics 27, 199-207, 2001

[29] W. Wagner, F. Gruttmann, “A displacement method for the analysis of flexural shear stresses in thin-walled isotropic composite beams”, Computers and Structures 80, 1843-1851, 2002

[30] R. El Fatmi, "Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. Part I: A general beam theory", International Journal of Solids and Structures, 44(18-19), 5912–5929, 2007

[31] R. El Fatmi, "Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. Part II: Analytical and numerical applications", International Journal of Solids and Structures, 44(18-19), 5930–5952, 2007

[32] V.L. Berdichevsky, E. Armanios, and A. Badir, "Theory of anisotropic thin-walled closed-cross-section beams", Composites Engineering, 2(5-7), 411–432, 1992

[33] W. Yu, D.H. Hodges, "Generalized Timoshenko theory of the variational asymptotic beam sectional analysis", Journal of the American Helicopter Society, 50(1), 46–55, 2005

[34] W. Yu, V.V. Volovoi, D.H. Hodges, X. Hong, "Validation of thevariational asymptotic beam sectional analysis (VABS)", AIAA Journal, 40(10), 2105–2113, 2002

[35] R. Schardt, "Generalized beam theory-an adequate method for coupled stability problems", Thin-Walled Structures 19, 161–180, 1994

[36] N. Silvestre, "Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials", Thin-Walled Structures 40(9), 791–820, 2002

[37] P. Dinis, D. Camotim, N. Silvestre, “GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary branched open cross-sections”, Thin-Walled Structures 44, 20-38, 2006

[38] K. Washizu, "Variational methods in elasticity and plasticity", Pergamon Press, Oxford, 1968

[39] W. Kanok-Nukulchai, Y. Shik Shin, “Versatile and improved higher-order beam elements.”, Journal of Structural Engineering 110, 2234–2249, 1984

[40] E. Carrera, "A class of two dimensional theories for multilayered plates analysis", Atti Accademia delle Scienze di Torino, Memorie Scienze Fisiche, 19-20, 49–87, 1995

[41] E. Carrera, "Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells", Archives of Computational Methods in Engineering, 9(2), 87–140, 2002

[42] E. Carrera, "Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking", Archives of Computational Methods in Engineering, 10(3), 216–296, 2003

[43] E. Carrera, G. Giunta, "Refined beam theories based on a unified formulation", International Journal of Applied Mechanics, 2(1), 117–143, 2010

[44] E. Carrera, G. Giunta, P. Nali, M. Petrolo, "Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries", Computers and Structures, 88 (5-6), 283–293, 2010. DOI: 10.1016/j.compstruc.2009.11.002

[45] E. Carrera, E. Zappino, M. Petrolo, "Advanced elements for the static analysis of beams with compact and bridge-like sections", Journal of Structural Engineering 56, 49–61, 2012

[46] E. Carrera, M. Petrolo, P. Nali, “Unified formulation applied to free vibrations finite element analysis of beams with arbitrary section”, Shock and Vibrations 17, 1–18, 2010. DOI: 10.3233/SAV-2010-0528

[47] E. Carrera, M. Petrolo, A. Varello, “Advanced beam formulations for free vibration analysis of conventional and joined wings”, Journal of Aerospace Engineering, 2012. DOI:10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000130

[48] A. Varello, L. Demasi, E. Carrera, G. Giunta, "An improved beam formulation for aeroelastic applications", 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, AIAA Paper 2010-3032, 2010

[49] A. Varello, E. Carrera, L. Demasi, “Vortex Lattice Method Coupled with Advanced One-Dimensional Structural Models”, Journal of Aeroelasticity and Structural Dynamics 2.2, 53-78, 2011. DOI: 10.3293/asdj.2011.10

[50] E. Carrera, A. Varello, L. Demasi, “A refined structural model for static aeroelastic response and divergence of metallic and composite wings”, CEAS Aeronautical Journal 4.2, 175-189, 2013. DOI: 10.1007/s13272-013-0063-2, 175–189

[51] A. Varello, A. Lamberti, E. Carrera, “Static Aeroelastic Response of Wing-Structures Accounting for InPlane Cross-Section Deformation”, International Journal of Aeronautical and Space Sciences 14.4, 310–323, 2013. DOI: 10.5139/IJASS.2013.14.4.310, 2013

[52] M. Petrolo, "Advanced 1D structural models for flutter analysis of lifting surfaces", International Journal of Aeronautical and Space Sciences, 13(2), 199-209, 2012

[53] M. Petrolo, "Flutter analysis of composite lifting surfaces by the 1D Carrera Unified Formulation and doublet lattice method", Composite Structures 95, 539-546, 2012

[54] L. Demasi, E. Livne, "Aeroelastic coupling of geometrically nonlinear structures and linear unsteady aerodynamics: two formulations", Journal of Fluids and Structures 25, 918–935, 2009

[55] R. Harder, R.N. Desmarais, "Interpolation using surface splines", Journal of Aircraft, 9(2), 189–192, 1972

[56] W. Rodden, R. Harder, D. Bellinger, "Aeroelastic addiction to Nastran",NASA, Technical Report Contractor 3094, 1979

[57] R. Pratt, "Flight control systems: practical issues in design and implementation", The Institution of Electrical Engineers, UK, 2000

[58] H. Zimmermann, "Aeroservoelasticity", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 90(13), 719–35, 1991

[59] V. Mukhopadhyay, "Historical perspective on analysis and control of aeroelastic responses", J. Guidance Control Dyn. 26, 673–684, 2003

[60] M. Karpel, B. Moulin, P.C. Chen, "Dynamic Response of Aeroservoelastic Systems to Gust Excitation", Journal of Aircraft, 42(5), 1264–1272, 2005. DOI:10.2514/1.6678

[61] A. Zole, M. Karpel, "Continuous gust response and sensitivity derivatives using state-space models", Journal of Aircraft, 31(5), 1212–121, 1994. DOI:10.2514/3.46632

[62] Zona Technology, "ZAERO Theoretical Manual", Scottsdale, AZ, Ver. 7.2, 2004

[63] L. Librescu, P. Marzocca, C.H. Chung, I.J. Jeong "Active aeroelastic control of 2-D wing-flap systems in a compressible/incompressible flow field and exposed to blast pulses" IMECE 2003-43392. In: Proc. 2003 ASME Int. Mechanical Engineering Congress and Exposition, Washington, D.C, pp. 15–21,2003

[64] L. Librescu, P. Marzocca, C.H. Chung, M. Kwak "Active aeroelastic control of 2D wing flap systems operating in an incompressible flowfield and impacted by a blast pulse", J. Sound Vibr. 83, 685–706, 2005

[65] Y. Yuan, P. Yu, L. Librescu, P. Marzocca "Aeroelasticity of time-delayed feedback control of two-dimensional supersonic lifting surfaces", J. Guidance Control Dyn. 27, 795–803, 2004

[66] S.S. Na, L. Librescu, P. Marzocca, C.H. Chung "Aeroelastic response of flapped wing system using robust control methodology" AIAA Paper 2004-1673. In: Proc. 45th AIAA/ASME/ ASCE/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conf., Palm Springs, CA, 19–22, 2004

[67] L. Librescu, P. Marzocca, "Advances in the linear/nonlinear control of aeroelastic structural systems", Acta Mechanica, 178(3-4), 147–186, 2004. DOI:10.1007/s00707-005-0222-6

[68] S.W. Tsai , “Composite Design”, 4th edn. Dayton, Think Composites, 1988

[69] J.N. Reddy, “Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and Analysis”, CRC Press, 2nd edn., 2004

[70] E. Carrera, S. Brischetto, “Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed multilayered plate theory”, Composite Structures 82(4), 549-562, 2008

[71] E. Carrera, G. Giunta, M. Petrolo, "Beam Structures: Classical and Advanced Theories", John Wiley & Sons, 2011

[72] E. Oñate, "Structural Analysis with the Finite Element Method: Linear Statics", Volume 1, Springer, 2009

[73] E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo, E. Zappino, "Finite Element Analysis of Structures through Unified Formulation", John Wiley & Sons, ISBN 978-1-119-94121-7, 2014

[74] K. J. Bathe, "Finite element procedure", Prentice hall, 1996

[75] E. Carrera, M. Maiarù, M. Petrolo, "Component-wise analysis of laminated anisotropic composites", International Journal of Solids and Structures, 49(13):1839-1851, 2012

[76] E. Carrera, A. Pagani, M. Petrolo, "Component-wise method applied to vibration of wing structures", Journal of Applied Mechanics, 80(4), 041012, 2013

[77] E. Carrera, A. Pagani, M. Petrolo, "Classical, Refined, and Component-Wise Analysis of Reinforced-Shell Wing Structures", AIAA Journal, 51(5), 1255–1268, 2013. DOI:10.2514/1.j052331

[78] E. Carrera, A. Pagani "Analysis of reinforced and thin-walled structures by multi-line refined 1D/beam models", International Journal of Mechanical Sciences, 75:278-287, 2013

[79] E. Carrera, A. Pagani, "Multi-line enhanced beam model for the analysis of laminated composite structures", Composites Part B: Engineering, 57:112-119, 2014

[80] E. Volterra, E. C. Zachmanoglou. "Dynamics of Vibrations". Charles E. Merill Books Inc., Ohio, USA, 1965.

[81] A. Pagani," Component-wise models for static, dynamic and aeroelastic analyses of metallic and composite aerospace structures", PhD thesis, Politecnico di Torino, 2015

[82] E. Carrera, A. Varello, "Dynamic response of thin-walled structures by variable kinematic one-dimensional models", Journal of Sound and Vibration, 331(24), 5268-5282, 2012

[83] R. Azzara, E. Carrera, M. Filippi, A. Pagani "Time Response Stress Analysis of Solid and Reinforced Thin-Walled Structures by Component-Wise Models", International Journal Of Structural Stability & Dynamics, Vol. 20, 2020. DOI: 10.1142/S0219455420430105

[84] A. Pagani et al., "Dynamic response of aerospace structures by means of refined beam theories", Aerosp. Sci. Technol., 2015. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2015.08.005

[85] E. Carrera, A. Pagani, F. Zangallo, "Thin-walled beams subjected to load factors and non-structural masses". International Journal of Mechanical Sciences, 81:109–119, 2014. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.02.015

[86] E. Carrera, A. Pagani, F. Zangallo, "Comparison of various 1D, 2D and 3D FE models for the analysis of thin-walled box with transverse ribs subjected to load factors". Finite Elements in Analysis and Design, 95:1-1, 2015

[87] H. Hoblit, "Gust Loads on Aircraft: Concepts and Applications", Education Series. AIAA, Washington, USA, 1988.

[88] F.H. Raven, "Automatic Control Engineering", 5th edn, McGraw-Hill, 1994

[89] R.C. Dorf, R.H. Bishop, "Modern Control Systems", 10th edn, Prentice-Hall, 2004

[90] R. E. Kalman, "Mathematical description of linear dynamical systems", J. SIAM Control Ser. A, 1, 152-192, 1963. DOI: https://doi.org/10.1137/0301010

[91] M. Cinefra, E. Carrera, P. Nali "MITC technique extended to variable kinematic multilayered plate elements", Composite Structures 92, 1888–1895, 2010

[92] E. Carrera, M. Petrolo, "Refined Beam Elements with only Displacement Variables and Plate/Shell Capabilities", Meccanica, 47, 537–556, 2011. DOI: 10.1007/s11012-011-9466-5

[93] E. Carrera, M. Petrolo, "Refined one-dimensional formulations for laminated structure analysis", AIAA Journal 50(1), 176 –189, 2012. DOI: 10.2514/1.J051219

[94] E. Carrera, A.G. de Miguel, A. Pagani, "Extension of MITC to higher-order beam models and shear locking analysis for compact, thin-walled, and composite structures", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 112(13), 1889-1908, 2017