

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Stima preliminare del propellente necessario per missioni di rendez-vous con Near-Earth asteroids



Relatore

Prof. Lorenzo Casalino

Candidato

Emilio Ivaldi

A.A. 2020/2021

Ringrazio il Professor Lorenzo Casalino per la disponibilità con cui mi ha aiutato nella stesura di questa tesi, aiutandomi con la sua conoscenza della materia, e fornendomi gli strumenti utili alla realizzazione di questa ricerca.

Ringrazio i miei genitori e tutta la mia famiglia, che mi hanno sempre sostenuto in questo percorso universitario; ringrazio soprattutto Elisa per essere sempre al mio fianco, e anche tutti gli amici conosciuti in questi anni accademici.

ASTRATTO

Questo lavoro si prefigge lo scopo di presentare un metodo algebrico per poter valutare il consumo di propellente di una trasferta verso un asteroide di tipo NEA. Questi ultimi hanno un'orbita simile a quella terrestre, con perielio massimo di 1.3 AU. Esistono già modelli molto precisi per missioni di questo tipo, che richiedono però l'integrazione delle equazioni del moto e pertanto comportano un elevato costo computazionale. Il metodo qui proposto, sebbene utilizzi modelli matematici più semplici come la risoluzione di sistemi algebrici, assicura velocità di esecuzione e sufficiente accuratezza delle soluzioni, permettendo così l'analisi di molti più asteroidi target in minor tempo. Una volta effettuata una prima separazione tra le varie trasferte, è sempre possibile studiare con metodi più precisi le traiettorie ottimali verso gli asteroidi di maggior interesse.

Il modello su cui si basa questo lavoro deriva da quello proposto da Edelbaum nel 1961 che sotto determinate ipotesi, come la bassa spinta dello spacecraft e le piccole variazioni dei parametri orbitali tra l'orbita di partenza e quella di arrivo, permette di ottenere i valori che descrivono la missione. L'approssimazione proposta da Edelbaum ha come obiettivo quello di minimizzare il tempo di percorrenza tra l'orbita iniziale e finale attraverso delle leggi di controllo ottimale. Poiché in questo lavoro il parametro da minimizzare non è il tempo, bensì il consumo, è necessaria una riformulazione del modello di partenza al fine di soddisfare i requisiti richiesti; inoltre, le leggi di controllo vengono sostituite con delle versioni di più semplice utilizzo, dette leggi di controllo subottimale.

Una missione di rendez-vous con un asteroide NEA già in programma da parte dell'ESA per il 2023, denominata M-ARGO, è usata come riferimento per le specifiche di missione, tra le quali troviamo la possibile finestra di lancio, il tempo di volo, la tipologia dei propulsori e i valori di spinta ed impulso specifico. In particolare viene considerato un modello approssimato di propulsione elettrica (SEP), nel quale la spinta è inversamente proporzionale al quadrato della distanza Sole – spacecraft e l'impulso specifico è ritenuto costante.

L'obiettivo di questa tesi riguarda più in dettaglio l'analisi dei diversi consumi che si ottengono suddividendo le manovre in archi propulsi situati in prossimità degli apsidali. Verranno confrontati i risultati ottenuti suddividendo la manovra sia in 3 che in 4 archi; dalla teoria ci si aspetta una diminuzione del consumo all'aumentare del numero di archi, mentre sarà evidente come non per tutti gli asteroidi ciò sia valido. Saranno ricercate le cause che portano a questa discrepanza, tentando la risoluzione del problema.

ABSTRACT

This work aims to present an algebraic method to evaluate the propellant consumption of a trajectory to a NEA type asteroid. The latter has an orbit similar to that of the Earth, with a maximum perihelion of 1.3 AU. There are already very precise models for missions of this type, which however require the integration of the equations of motion and therefore involve a high computational cost. The method proposed herein, although it uses simpler mathematical models such as the resolution of algebraic systems, ensures speed of execution and sufficient accuracy of the solutions, thus allowing the analysis of many more target asteroids in less time. Once a first separation has been made among the various trajectories, it is always possible to study the optimal trajectories towards the most interesting asteroids with more precise methods.

The model this work is based on derives from the one proposed by Edelbaum in 1961 which, under certain assumptions, such as the low thrust of the spacecraft and the small variations of the orbital parameters between the departure and arrival orbit, allows to obtain the values which describe the mission. The approximation proposed by Edelbaum aims to minimize the travel time between the initial and final orbit through optimal control laws. Since in this work the parameter to be minimized is not time, but consumption, a reformulation of the starting model is necessary in order to satisfy the required specifications; moreover, the control laws are replaced with simpler versions, called suboptimal control laws.

A rendez-vous mission with a NEA already scheduled by ESA for 2023, called M-ARGO, is used as a reference for the mission specifications, among which we find the possible launch window, the time of flight, the type of thrusters and the thrust and specific impulse values. In particular, an approximate model of electric propulsion (SEP) is considered, in which the thrust is inversely proportional to the square of the Sun - spacecraft distance and the specific impulse is considered constant.

The objective of this thesis concerns in more detail the analysis of the different consumptions obtained by dividing the maneuvers into propelled arcs located near the apsides. The results obtained by dividing the maneuver into both 3 and 4 arcs will be compared; the theory expects a decrease in consumption as the number of arcs increases, while it will be clear that this is not valid for all asteroids. The causes leading to this discrepancy will be sought, attempting to sort out the problem.

INDICE

1. GLI ASTEROIDI

1.1	Descrizione degli asteroidi	1
1.2	NEA	4
1.3	Determinazione del rischio di collisione	6
1.4	Metodi per evitare la collisione	7
1.5	Effetto YORP	9
1.6	Missioni verso asteroidi	10
1.7	Missione M-ARGO	13

2. LE MANOVRE DI TRASFERIMENTO

2.1	Problema dei due corpi	16
2.2	Parametri orbitali	17
2.3	Classificazione delle manovre	18
2.4	Fionda gravitazionale	19
2.5	Cambio di piano	20
2.6	Trasferta di Hohmann	20
2.7	Trasferta di Sternfeld	21
2.8	Manovra di rendez-vous	22
2.9	Problema di Lambert	24

3. LA PROPULSIONE

3.1	Introduzione	25
3.2	Classificazione delle perdite	26
3.3	Propulsione chimica	28
3.4	Propulsione elettrica	29
3.5	Tipologie di spinta e di impulso specifico	34

4. MODELLO TEORICO

4.1	Introduzione	37
4.2	Approssimazione di Edelbaum	37
4.3	Riformulazione del problema di Edelbaum	41
4.4	Leggi di controllo ottimale	42
4.5	Leggi di controllo subottimale	45
4.6	Fattore di correzione	47

5. RISULTATI	
5.1 Introduzione	49
5.2 Il metodo di Edelbaum	50
5.3 Formula interpolante	54
6. CONCLUSIONI	67
BIBLIOGRAFIA & SITOGRAFIA	68

INDICE DELLE FIGURE

1. GLI ASTEROIDI

1.1	Distribuzione degli asteroidi del Sistema Solare	1
1.2	Distribuzione delle lacune di Kirkwood	2
1.3	Tipiche orbite di un NEA e di un PHA	4
1.4		5
	a. Asteroide Atira	
	b. Asteroide Aten	
	c. Asteroide Apollo	
	d. Asteroide Amor	
1.5	Rappresentazione della scala Torino	6
1.6	Simulazione del passaggio di Apophis il 13 aprile 2029	7
1.7	I due diversi effetti Yarkovsky	10
1.8	Il CubeSat della missione M-Argo	14

2. LE MANOVRE DI TRASFERIMENTO

2.1	Le diverse orbite al variare dell'eccentricità	17
2.2	Le caratteristiche dell'orbita nel piano	17
2.3	Rappresentazione del piano orbitale	18
2.4	Fionda gravitazionale	19
2.5	Trasferta di Hohmann	20
2.6	Trasferta di Sternfeld	21
2.7	Manovra di rendez-vous con trasferta di Hohmann	22

3. LA PROPULSIONE

3.1	Diagramma di corpo libero di uno spacecraft in atmosfera	26
3.2	Differenza tra propulsione chimica ed elettrica	28
3.3	Impianto propulsivo di un razzo a propulsione chimica	29
3.4	Schemi di un resistogetto e di un arcogetto	30
3.5	Schema di un propulsore a ioni	31
3.6	Schemi di un propulsore ad effetto Hall	32
3.7	Schemi di un MPD e di un PPT	33
3.8	Spinta in funzione della distanza dal Sole	35
3.9	Impulso specifico in funzione della distanza dal Sole	35
3.10	Confronto tra i modelli di spinta	36
3.11	Confronto tra i modelli di impulso specifico	36

4. MODELLO TEORICO

4.1	Le tre componenti di accelerazione	38
4.2	Le proiezioni dell'accelerazione	39
4.3	Approssimazione $\alpha \cong v$	40
4.4	Confronto tra le approssimazioni di β	41
4.5	Andamento della legge ottimale	45

5. RISULTATI

5.1	Relazione tra ΔV e de	55
5.2	Le tre parabole interpolanti	58

1. GLI ASTEROIDI

1.1 Descrizione degli asteroidi

Con il termine asteroide si intende un corpo celeste avente ridotte dimensioni, spesso inferiori al chilometro di diametro, con una composizione chimica simile ai pianeti di tipo roccioso e privo di atmosfera. La maggior parte degli asteroidi presenti nel Sistema Solare fa parte della cosiddetta fascia principale, ovvero una regione compresa tra le orbite di Marte e Giove; le orbite degli asteroidi presenti hanno semiasse maggiore compreso tra le 2.1 e le 3.6 AU (AU = Astronomical Unit). All'interno di questa fascia è presente Cerere, con i suoi quasi 1000 km di diametro è il più grande asteroide del Sistema Solare interno, ed è stato il primo ad essere scoperto nel 1801 dall'italiano Giuseppe Piazzi^[1], seguito da Pallade e Vesta con 500 km di diametro ciascuno; questi sono anche gli unici tre asteroidi della fascia principale aventi forma quasi sferica.

Esistono tuttavia altre zone al di fuori della fascia principale:

- la zona dei troiani e dei greci di Giove, ovvero quegli asteroidi che rispettivamente seguono (gruppo di Patroclo) o precedono (gruppo di Achille) Giove lungo la sua orbita sfasati di 60° , stazionando nei cosiddetti punti lagrangiani del sistema Sole - Giove, ovvero quei punti dove le forze gravitazionali di questi due corpi si annullano vicendevolmente;
- la zona degli asteroidi centauri, che comprende gli asteroidi che si trovano tra le orbite di Giove e di Nettuno;
- la fascia di Kuiper, che comprende gli asteroidi che orbitano oltre Nettuno, e di cui fanno parte anche pianeti nani come Plutone ed Eris.
- la nube di Oort, la regione più esterna del Sistema Solare, da cui provengono le comete a lungo periodo, e di cui il primo oggetto scoperto è stato il planetoidale Sedna.

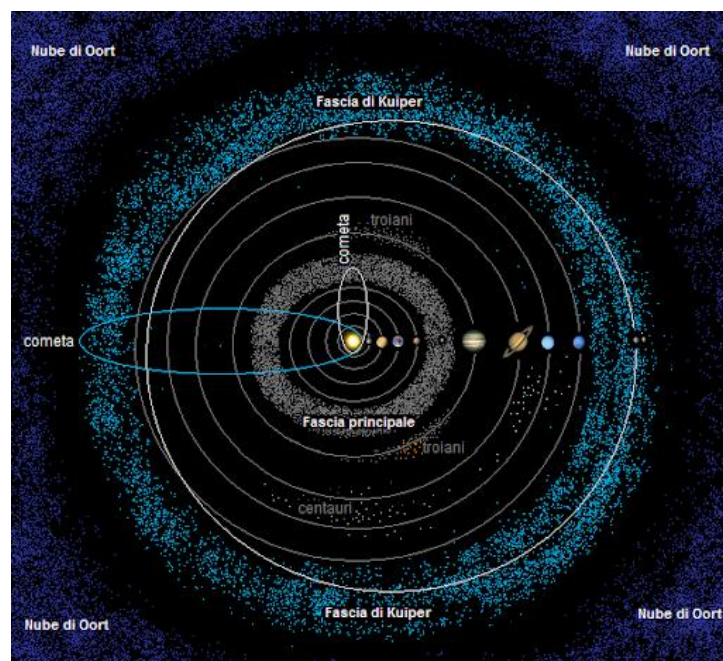


Figura 1.1 Distribuzione degli asteroidi del Sistema Solare

^[1] Astronomo italiano, Direttore dell'Osservatorio Astronomico di Palermo (Ponte in Valtellina, 1746 – Napoli, 1826)

La fascia principale rimane comunque quella che si conosce maggiormente e che ha più interesse scientifico; in passato si supponeva che derivasse dalla disgregazione di un proto - pianeta, ma secondo la teoria planetesimale di Viktor Sergeevich Safronov^[2], oggi comunemente accettata, si è formata invece come mancata aggregazione di frammenti spaziali a causa dell'influenza gravitazionale del gigante gassoso Giove. Prove a sostegno di questa tesi sono le cosiddette lacune di Kirkwood **[1.1]**, ovvero “buchi” nella distribuzione degli asteroidi in funzione del semiasse maggiore (e quindi del periodo orbitale). La risonanza con Giove ha portato, nel corso di milioni di anni, all'espulsione dall'orbita di alcuni asteroidi, con la conseguente formazione di queste lacune.

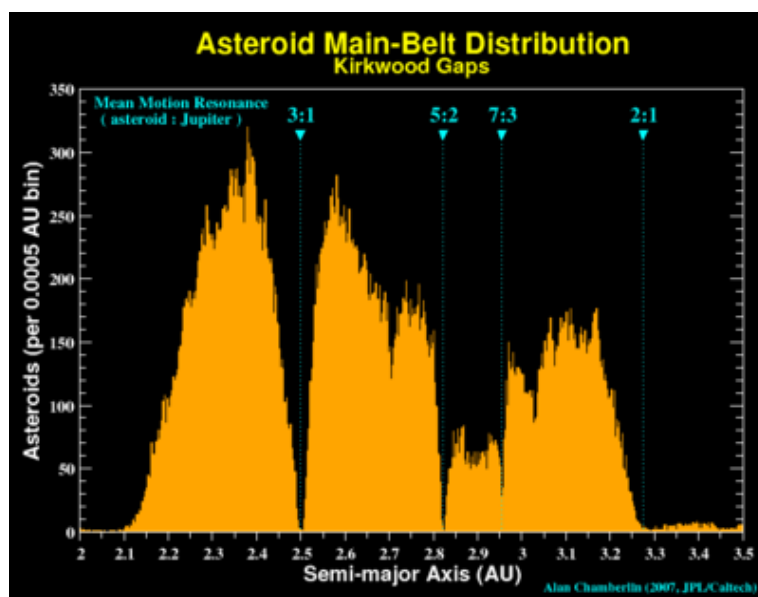


Figura 1.2 Distribuzione delle lacune di Kirkwood

Nel 1918 Kiyotsugu Hirayama^[3] catalogò gli asteroidi della fascia principale a seconda dei loro parametri orbitali, individuando 9 famiglie principali (nella sua prima pubblicazione **[1.2]** le famiglie Coronioide, Eos e Temi), chiamate in suo onore famiglie Hirayama. Qui di seguito possiamo vedere una tabella dove troviamo il nome ed il valore di questi parametri.

Nome famiglia	Semiasse maggiore (AU)	Eccentricità orbitale	Inclinazione orbitale (°)
Eos	2.99 – 3.03	0.01 – 0.13	8.0 – 12.0
Eunomia	2.53 – 2.72	0.08 – 0.22	11.1 – 15.8
Flora	2.15 – 2.35	0.03 – 0.23	1.5 – 8.0
Igea	3.06 – 3.24	0.09 – 0.19	3.5 – 6.8
Coronioide	2.83 – 2.91	0.00 – 0.11	0.0 – 3.5
Maria	2.50 – 2.71	0.065	12.0 – 17.0
Nisa	2.41 – 2.50	0.12 – 0.21	1.5 – 4.3
Temi	3.08 – 3.24	0.09 – 0.22	0.0 – 3.0
Vesta	2.26 – 2.48	0.03 – 0.16	5.0 – 8.3

^[2] Astronomo russo, ha sviluppato il modello della nebulosa primordiale (Velikie Luki, 1917 – Mosca, 1999)

^[3] Astronomo giapponese, focalizzò i suoi studi sugli asteroidi (Sendai, 1874 – Tokyo, 1943)

A seconda della composizione chimica e delle caratteristiche fisiche, è possibile invece suddividere gli asteroidi in categorie utilizzando diverse classificazioni. Secondo la suddivisione proposta da David J. Tholen^[4] nel 1984 **[1.3]**, esistono 14 tipologie di asteroidi, ma di queste sono 3 quelle principali:

- tipo C: la lettera C indica carbonacei. Corrispondono a circa il 75% di tutti gli asteroidi conosciuti e sono concentrati principalmente nella parte esterna della fascia principale, intorno alle 2.7 AU. La loro rilevazione è molto difficile perché hanno albedo estremamente bassa (0.03) e quindi riflettono pochissima luce solare. Hanno composizione identica a quella della nebulosa primordiale, con la mancanza di idrogeno elio e altri gas volatili, e quindi si suppone siano rimasti immutati sin dai tempi della formazione del Sistema Solare 4.6 miliardi di anni fa;
- tipo S: la lettera S indica silicati, poiché sono costituiti principalmente da elementi di questa famiglia (silicati metallici di nichel, ferro, magnesio). Sono il 17% degli asteroidi conosciuti, e si trovano nella regione interna della fascia principale, a circa 2.2 AU. Sono più luminosi di quelli del tipo C;
- tipo M: la lettera M indica metalli, infatti i componenti di questo gruppo sono costituiti principalmente da ferro e nichel. Rappresentano solo l'8% del totale degli asteroidi, e si pensa derivino da antichi corpi celesti sufficientemente grandi da generare il calore necessario per fondere il proprio materiale, facendo precipitare gli elementi pesanti e lasciando affiorare in superficie la parte rocciosa, andata poi perduta nel corso dei milioni di anni. Tra i tre tipi sono quelli che presentano albedo maggiore (0.1 – 0.18) e quindi sono i più visibili.

Alcuni altri gruppi minori sono:

- tipo G: sottogruppo del tipo C, si differenzia da quest'ultimo per le modalità di assorbimento dell'ultravioletto;
- tipo E: la lettera E indica enstatite, presenta asteroidi di ridotte dimensioni che orbitano nella parte interna della fascia principale, simili al tipo M, ma con un'albedo elevata (0.3);
- tipo V: probabili frammenti dell'asteroide Vesta.

Esiste anche una classificazione più recente (2002) introdotta da Schelte J. Bus^[5] e Richard P. Binzel^[6], che ha ampliato il numero di tipologie, portandolo a 24 **[1.4]**. Sono comunque in aggiornamento nuove catalogazioni, anche in relazione a successive osservazioni, sia operate dalla Terra che per mezzo di invii di sonde per esplorazioni degli asteroidi della fascia principale.

^[4] Astronomo statunitense ancora in attività all'Università delle Hawaii (Huntsville, 1955)

^[5] Astronomo statunitense, lavora al NASA Infrared Telescope Facility (New York, 1956)

^[6] Astronomo statunitense Professore di Scienze Planetarie al MIT di Boston (Washington Court House, 1958)

1.2 NEA

Gli asteroidi denominati NEA (near-Earth asteroids) sono asteroidi che presentano un'orbita simile a quella terrestre con perielio massimo di 1.3 AU, e sono considerati una potenziale minaccia (Potentially Hazardous Asteroid, PHA) nel momento in cui si verificano le seguenti due condizioni: la loro orbita dista da quella terrestre meno di 0.05 AU e devono avere dimensioni di almeno 140 m. La maggior parte dei NEA si pensa arrivi dalla fascia principale, la cui orbita è stata disturbata dall'influenza gravitazionale di Giove.

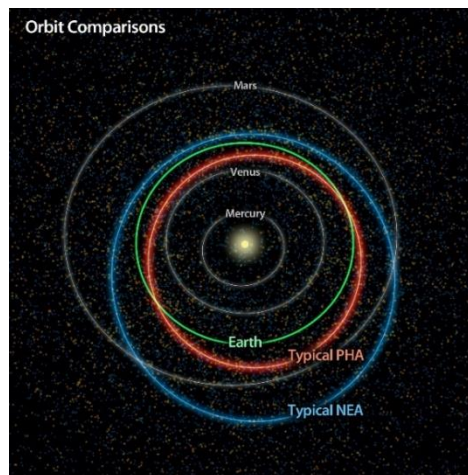


Figura 1.3 Tipiche orbite di un NEA e di un PHA

Al 27 Settembre 2020, sul sito della ESA [*\[1.5\]*](#) risultano conosciuti 23.735 NEA, di cui 1087 potenzialmente pericolosi e 157 di questi ultimi addirittura con dimensioni superiori a 1 km di diametro; un impatto col nostro pianeta da parte di un corpo del genere provocherebbe sicuramente enormi cataclismi.

Sebbene vengano studiati per valutare la loro pericolosità, i NEA sono però anche estremamente interessanti dal punto di vista della ricerca scientifica, perché gli asteroidi più semplici da raggiungere con sonde automatizzate. Oltre all'aspetto puramente scientifico, ci si è resi conto del loro potenziale come fonte di risorse di importante valore economico. In un prossimo futuro si prevede che lo sfruttamento minerario sui NEA e sugli asteroidi in generale diverrà una possibilità concreta, soprattutto da parte delle agenzie private. In particolare si cercherà di estrarre l'acqua, presente sugli asteroidi in alcuni tipi di minerali, per mezzo di forni nei quali viene separata dalla roccia in cui è contenuta. Altrettanto importante sarà l'estrazione di metalli preziosi (es. il platino), abbondanti su alcuni tipi di asteroidi ma rari sulla Terra, necessari a molte attuali tecnologie. Progetti ancora più ambiziosi prevedono di estrarre dagli asteroidi le materie prime necessarie al combustibile dei razzi, in modo tale che sia possibile rifornirli durante il loro viaggio, diminuendo quindi notevolmente le loro dimensioni (un razzo, di media, è composto per il 90% da carburante) e abbassandone di conseguenza il costo per essere lanciati. In questo modo sempre più aziende, soprattutto private, potrebbero investire in missioni spaziali, dando il via a un ciclo virtuoso che aprirebbe sempre di più la strada verso un futuro di colonizzazione umana dello spazio. Sarà dunque necessario un ammodernamento del "Trattato sullo spazio extra-atmosferico" (Outer Space Treaty, OST), che quando fu stipulato nel 1967 ovviamente non poteva prevedere una possibilità come l'estrazione mineraria sugli asteroidi.

Per quanto riguarda l'aspetto più scientifico dello studio di questi corpi celesti, i NEA vengono suddivisi in quattro famiglie:

- Asteroidi Atira, gruppo il cui afelio è inferiore al perielio terrestre, e quindi la loro orbita risulta sempre contenuta all'interno di quella della Terra.
- Asteroidi Aten, gruppo la cui orbita ha il semiasse maggiore inferiore a 1 AU, il loro afelio è maggiore del perielio terrestre;
- Asteroidi Apollo, il cui semiasse maggiore è superiore a 1 AU, ma il perielio è inferiore a 1.017 AU;
- Asteroidi Amor, che hanno raggio medio dell'orbita compreso tra quello della Terra e di Marte, e il loro perielio è compreso tra 1.017 AU e 1.3 AU. Pertanto, questa categoria di oggetti interseca spesso l'orbita marziana, ma non quella terrestre. Secondo alcune recenti teorie, si ritiene che anche i due satelliti di Marte, Phobos e Deimos, altro non siano che due asteroidi Amor che sono stati catturati dalla gravità del pianeta.

Attraverso un simulatore orbitale, presente sul sito della ESA precedentemente citato, visualizziamo le orbite di quattro asteroidi, ognuno rappresentante uno dei gruppi appena descritti.

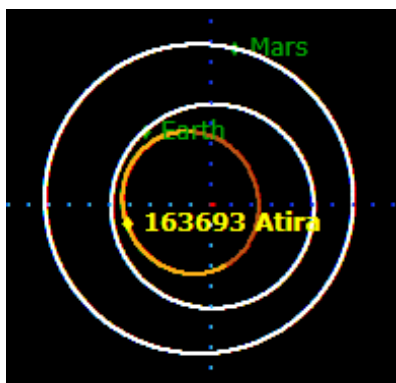


Figura 1.4.a Asteroide Atira

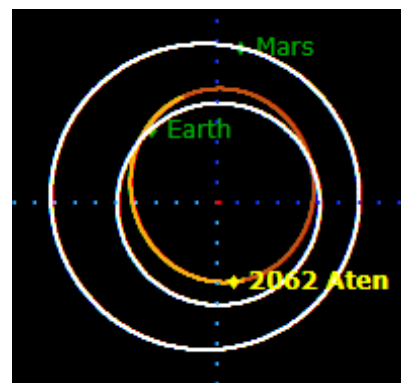


Figura 1.4.b Asteroide Aten

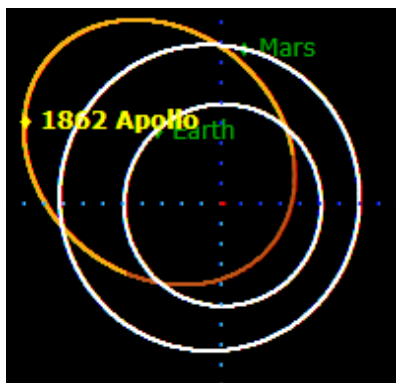


Figura 1.4.c Asteroide Apollo

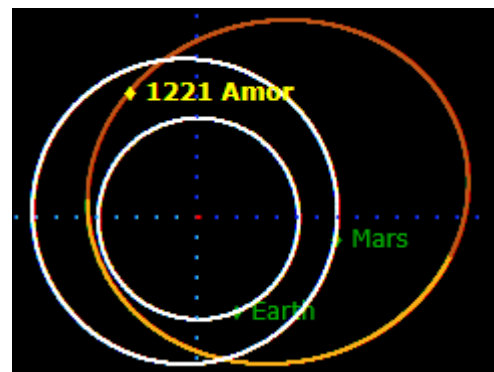


Figura 1.4.d Asteroide Amor

In base a queste orbite risulta chiaro come siano soprattutto gli asteroidi di tipo Aten e Apollo a costituire un pericolo per la Terra, dato che ne intersecano l'orbita; gli asteroidi di tipo Atira e Amor, invece, non rappresentano una minaccia per il nostro pianeta.

1.3 Determinazione del rischio di collisione

Per valutare la probabilità e la pericolosità di un impatto con un NEO (near - Earth object), una categoria di cui fanno parte sia i NEA, ma anche comete ed altri corpi cosmici, sono state ideati a partire dagli ultimi anni del secolo scorso due diversi metodi di classificazione, uno più qualitativo (scala Torino [1.6]) e uno più quantitativo (scala Palermo [1.7]). Vediamoli in dettaglio, cercando di evidenziarne le caratteristiche principali.

- Scala Torino

Ideata dal professor Richard P. Binzel nel 1995, ha subito due modifiche nel 1999 e nel 2005. Questa classificazione usa una scala di valori da 0 a 10, dove lo 0 indica probabilità nulla di impatto di un corpo di grandi dimensioni, oppure un impatto con oggetti comparabili al pulviscolo spaziale che quotidianamente colpisce il nostro pianeta, che non crea nessun danno poiché brucia nell'atmosfera. Il valore 10 invece rappresenta l'estremo opposto, ovvero una probabilità praticamente certa di impatto con un oggetto in grado di provocare disastri a livello globale, e probabilmente l'estinzione di moltissime forme di vita, essere umano compreso.

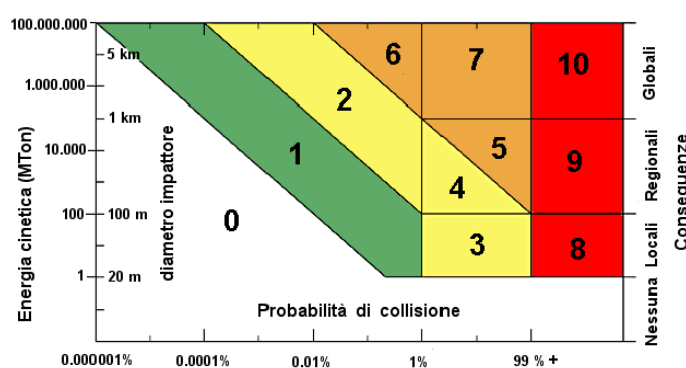


Figura 1.5 Rappresentazione della scala Torino

L'asteroide con il più alto valore della scala Torino finora calcolato è stato 99942 Apophis, un asteroide Aten che al momento della sua scoperta nel 2004 aveva un valore pari a 4, successivamente declassato a 0 nel 2006. Ci sarà un passaggio ravvicinato con questo asteroide il 13 aprile 2029 ad appena 30.000 km dalla Terra. Questo avvicinamento porterà ad un cambiamento nell'orbita dell'asteroide, che passerà ad essere di tipo Apollo. Si verificherà un secondo passaggio vicino alla Terra il 13 aprile 2036 con probabilità stimata di 1 sulla scala Torino. Per avere maggiore accuratezza su questa seconda previsione bisognerà aspettare l'effettivo cambio di orbita di Apophis nel 2029.

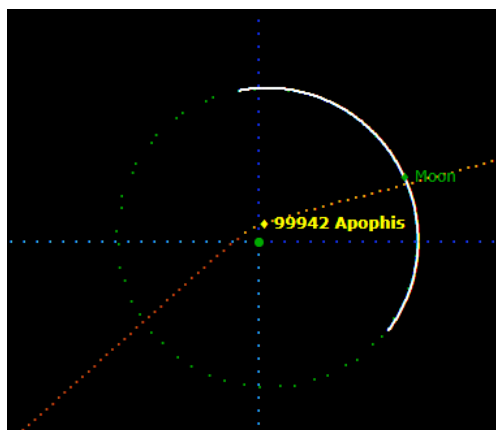


Figura 1.6 Simulazione del passaggio di Apophis il 13 aprile 2029

- Scala Palermo

La scala Palermo è una scala logaritmica, che tiene in conto sia la probabilità che l'energia cinetica dell'impatto. Il valore 0 della scala Palermo corrisponde ad un rischio pari al rischio di fondo, cioè il rischio medio che un oggetto di dimensioni uguali o maggiori a quello considerato possa avere un impatto con la Terra nello stesso periodo di tempo considerato.

La formula con la quale si determina il rischio di fondo è:

$$f_B = 0.03 E^{-0.8}$$

dove E indica l'energia dell'impatto in megatoni.

Il valore che fornisce la scala Palermo è invece:

$$P = \log_{10} \frac{p_i}{T f_B}$$

dove p_i rappresenta la probabilità di impatto e T il tempo (in anni).

Un valore di P pari a 1 significa un rischio 10 volte superiore di impatto rispetto al rischio di fondo; il già citato Apophis aveva nel 2004 un valore nella scala Palermo pari a 1.12, ovvero un rischio 12.6 volte superiore al rischio di fondo, che rappresenta il record assoluto per questa scala.

1.4 Metodi per evitare la collisione

Attualmente non esistono strumenti che ci permettano di difenderci da una collisione con un asteroide pericoloso, per questo è importante studiare tutti i possibili metodi con cui deviare la sua orbita, per poterne analizzare l'efficacia e la fattibilità. E' altrettanto importante riuscire ad intervenire con largo anticipo, è sufficiente infatti una piccola spinta data a milioni di chilometri dalla Terra per deviare un asteroide quel tanto che basta per evitare una collisione disastrosa. In questo caso si rende necessario conoscere un potenziale impatto già molti anni prima che esso si verifichi; se si scoprisse un asteroide a una distanza relativamente "prossima" alla Terra, la spinta necessaria a deviarlo aumenterebbe esponenzialmente, rendendo quindi sempre più difficile l'impresa.

- Impatto cinetico

L'idea alla base di questo metodo è molto semplice: sfruttando il principio della conservazione della quantità di moto, si utilizza una sonda facendola impattare ad alta velocità contro l'asteroide, deviandolo. Per quanto la sonda possa viaggiare velocemente, a causa dell'enorme differenza tra le due masse in gioco l'asteroide si sposterebbe solamente di una piccolissima quantità, ma potrebbero essere sufficienti, accumulati per milioni di chilometri, ad evitare l'impatto. Come già anticipato, è fondamentale conoscere con largo anticipo il pericolo, perché per costruire la sonda e arrivare all'asteroide occorrerebbe un lungo lasso di tempo.

Nei prossimi anni la NASA verificherà la fattibilità di un'operazione di questo genere grazie alla missione DART (Double Asteroids Redirection Test) [1.8]. Con partenza fissata nel 2021, la sonda arriverà l'anno successivo al bersaglio della missione, l'asteroide binario 65803 Didymos, composto dall'asteroide principale Didymos e dal satellite Dimorphos. La scelta è ricaduta su questo particolare asteroide sia perché non pericoloso né prima né dopo il cambio d'orbita, sia perché è un sistema binario, e quindi è più semplice verificare una variazione dei parametri orbitali rispetto ad un sistema singolo.

La simulazione dell'impatto della sonda sul satellite Dimorphos stima che ci sarà un cambiamento di circa 250 secondi nel periodo del sistema binario, meno dell'1% rispetto alle circa 12 ore che impiega Dimorphos per girare intorno a Didymos, ma comunque misurabile. La sonda colpirà l'asteroide a una velocità di circa 6 km/s con i suoi 500 kg di peso (contro le 528 milioni di tonnellate del sistema binario), lasciando un cratere grande tra i 6 e i 17 metri.

Una seconda missione denominata Hera [1.9] dell'Agenzia Spaziale Europea (ESA) partirà nel 2024 ed arriverà nel 2026, andando a studiare più da vicino gli effetti dovuti alla precedente missione DART e verificando sia il cratere formatosi che le variazioni dell'orbita del sistema binario.

- Trattore gravitazionale

Un altro sistema utile per spostare un asteroide dalla sua orbita potrebbe essere quello del trattore gravitazionale: la sonda utilizzata, invece di impattare contro l'asteroide come nel caso precedentemente affrontato, si avvicinerebbe sufficientemente a quest'ultimo tanto da instaurare un'attrazione gravitazionale piccola (ma non trascurabile) tra i due corpi. In questo modo spostando la sonda l'asteroide ne verrebbe attratto e, esercitando questa forza per mesi e mesi, esso si allontanerebbe di decine o centinaia di metri dall'orbita che lo porterebbe ad impattare. Questo sistema potrebbe essere sfruttato anche per avvicinare un asteroide alla Terra, in modo da poterlo sfruttare per ricerca scientifica e/o scopi commerciali, con benefici inaspettati.

I due metodi appena analizzati hanno come presupposto il potersi preparare ad un impatto anni ed anni prima che questo possa effettivamente verificarsi, ma come ci si potrebbe difendere se scopriremo l'asteroide solo con pochi mesi di anticipo?

- Esplosione nucleare

Se fosse impossibile in termini di costo, tempo e fattibilità deviare un asteroide dalla propria orbita, un'altra soluzione sarebbe quella di distruggerlo prima che impatti col nostro pianeta. Per realizzare la missione si potrebbe usare il vasto arsenale di armi nucleari, l'arma più potente attualmente a disposizione. Un bombardamento massiccio di armi nucleari porterebbe alla disgregazione dell'asteroide in frammenti più piccoli, ma molto del successo della missione dipenderebbe dalla composizione fisica dell'asteroide stesso, che potrebbe non frantumarsi nelle modalità previste. Inoltre, non è detto che i frammenti siano meno pericolosi dell'asteroide nella sua interezza: essi potrebbero comunque impattare con il nostro pianeta e creare gravi danni, se avessero dimensioni sufficientemente grandi. L'uso della tecnologia nucleare è inoltre non di così semplice utilizzo a livello socio-politico, pertanto potrebbe essere un sistema di difesa assolutamente attuabile a livello tecnologico, ma impraticabile da un punto di vista pratico.

1.5 Effetto YORP

Un particolare fenomeno che bisogna tenere in conto per una determinazione precisa dell'orbita di un asteroide è il cosiddetto effetto YORP (prende il nome dai suoi quattro scopritori, Yarkovsky^[7] – O'Keefe – Radzievskii – Paddack): un asteroide non subisce soltanto l'attrazione gravitazionale da parte del Sole e degli altri pianeti, ma anche altri fattori possono influenzarne l'orbita. Bisogna pertanto conoscere a fondo la natura di questi fenomeni, poiché potrebbero far variare, sia positivamente che negativamente, la stima del rischio di impatto di un asteroide sulla Terra. L'effetto YORP è l'unione di tre diversi fattori, di cui il principale e primo ad essere stato scoperto fu l'effetto Yarkovsky, ipotizzato nel 1900. Gli altri due effetti invece sono:

- effetto Radzievskii: una variazione del momento angolare di un asteroide è causata dalle differenze di albedo che hanno le diverse parti della sua superficie;
- effetto Paddack - O'Keefe: una variazione del momento angolare dell'asteroide deriva dall'irregolarità della forma dell'asteroide stesso.

Tornando all'effetto Yarkovsky, esso si basa su un fenomeno legato alla radiazione solare che agisce sull'asteroide. La superficie che viene illuminata dal Sole, quella in cui è "giorno", ovviamente subisce un riscaldamento, mentre poi si raffredda quando non viene più illuminata. A causa di questa differenza nella temperatura, un asteroide tende ad irradiare più energia dalla parte più calda; nasce quindi una forza che agisce sull'asteroide stesso, modificando la sua orbita. L'effetto sul breve termine è piccolissimo a causa della minima forza risultante e dell'enorme massa che alcuni asteroidi possono avere, ma nel corso di milioni di anni può portare un asteroide a cambiare notevolmente la sua orbita. L'effetto Yarkovsky è stato per la prima volta misurato su un asteroide denominato 6489 Golevka su un arco temporale di 12 anni, ed è stato quantificato uno scostamento della sua orbita di ben 15 chilometri.

^[7] Ingegnere civile e astronomo russo, fu presidente della Società Tecnologica Russa (Vitebsk, 1844 – Heidelberg, 1902)

Il fenomeno appena descritto prende il nome di effetto Yarkovsky diurno, per distinguerlo da uno analogo, l'effetto Yarkovsky stagionale, scoperto solamente nel 1998. La forza che si origina in questo caso dipende dall'inclinazione dell'asse dell'asteroide stesso: come sulla Terra infatti, anche gli asteroidi hanno un emisfero maggiormente illuminato per notevoli periodi di tempo. Dalle zone maggiormente illuminate, pertanto, viene emessa una quantità di radiazione superiore rispetto all'emisfero meno illuminato, provocando un cambiamento dell'inclinazione dell'orbita.

Effetto Yarkovsky

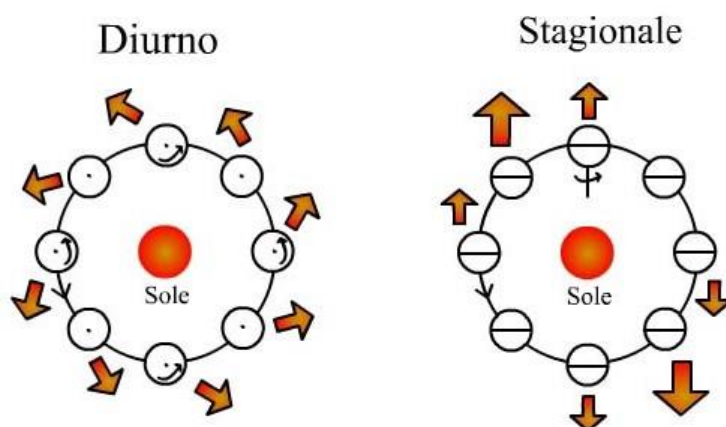


Figura 1.7 I due diversi effetti Yarkovsky

Come già detto, questi fenomeni vennero tutti unificati nell'effetto YORP nel 2000, e la conferma della sua veridicità è arrivata nel 2007, attraverso degli studi compiuti su due asteroidi, 1862 Apollo e 2000 PH5, quest'ultimo ribattezzato 54509 YORP in onore della scoperta fatta.

In futuro sarà sempre più importante studiare a fondo questo fenomeno, per misurazioni più precise delle orbite degli asteroidi; saranno quindi necessarie delle missioni che possano studiare approfonditamente la superficie di questi corpi celesti, per avere stime più accurate dell'intensità della forza che si viene a generare, in relazione all'albedo della superficie stessa.

1.6 Missioni verso asteroidi

Abbiamo evidenziato come lo studio dei NEA e degli asteroidi in generale è fondamentale sia per la sicurezza del nostro pianeta sia da un punto di vista scientifico, permettendo agli scienziati una miglior comprensione dell'origine del Sistema Solare e della sua evoluzione nel corso dei miliardi di anni; per questo, a fianco alle osservazioni da Terra, sono state lanciate diverse missioni per esplorare questi mondi lontani. Non tutte le missioni avevano come scopo principale il sorvolo o l'atterraggio su un asteroide, ma possono averli incontrati durante il loro percorso verso l'obiettivo, raccogliendo comunque dei dati utili allo studio di questi corpi del Sistema Solare.

Nome missione	Agenzia	Data di partenza	Asteroidi interessati
Galileo	NASA	18 ottobre 1989	951 Gaspra, 243 Ida
NEAR Shoemaker	NASA	17 febbraio 1996	253 Mathilde e 433 Eros
Cassini - Huygens	NASA/ESA/ASI	15 ottobre 1997	2685 Masursky
Deep Space 1	NASA	24 ottobre 1998	9969 Braille
Stardust	NASA	7 febbraio 1999	5535 Annefrank
Hayabusa	JAXA	9 maggio 2003	25143 Itokawa
Rosetta	ESA	2 marzo 2004	2867 Steins e 21 Lutetia
New Horizons	NASA	19 gennaio 2006	132524 APL
Dawn	NASA	27 settembre 2007	Vesta e Cerere
Chang'e 2	CNSA	1 ottobre 2010	4179 Toutatis
Hayabusa 2	JAXA	3 dicembre 2014	162173 Ryugu
Osiris - Rex	NASA	9 settembre 2016	101955 Bennu

- Galileo

La sonda, il cui scopo era raggiungere Giove per poterlo studiare, fu la prima in assoluto ad incontrare un asteroide (951 Gaspra, 29 ottobre 1991) e successivamente il primo sistema binario (243 Ida e il suo satellite Dattilo, 28 agosto 1993). Proseguì poi il suo percorso verso Giove e concluse la sua missione nel 2003.

- NEAR Shoemaker (Near Earth Asteroid Rendez-vous)

La sonda sorvolò prima l'asteroide 253 Mathilde il 27 giugno 1997, per poi arrivare il 14 febbraio 2000 all'obiettivo principale della missione, 433 Eros. NEAR orbitò per un anno intorno all'asteroide, scattando foto e studiandone la composizione. Fu infine fatta precipitare in maniera controllata su Eros, riuscendo a resistere all'atterraggio e a raccogliere dati per altre due settimane prima del definitivo spegnimento.

- Cassini – Huygens

La sonda aveva come obiettivo primario lo studio di Saturno e dei suoi satelliti ed anelli; composta da due elementi, l'orbiter Cassini (di produzione NASA) e il lander Huygens (ideato dall'ESA), durante il suo viaggio verso Saturno effettuò il flyby dell'asteroide 2685 Masursky il 23 gennaio 2000. Il 1° luglio 2004 raggiunse Saturno, diventando la prima sonda ad entrare nella sua orbita. A partire dal 26 aprile 2017 cominciò il cosiddetto “Gran finale”, ovvero 22 sorvoli all'interno degli anelli del pianeta, terminato il 15 settembre 2017, quando la sonda entrò nell'atmosfera di Saturno e conseguentemente si disintegrò.

- Deep Space 1

La missione principale della sonda consisteva nel testare nuove tecnologie adottate per la prima volta in campo spaziale, quali il propulsore ionico e il sistema di navigazione autonomo, detto Autonav. La sua missione secondaria è stata il sorvolo di due diversi corpi celesti, l'asteroide 9969 Braille (28 luglio 1999) e la cometa Borrelly (22 settembre 2001).

- Stardust

Lo scopo della missione era la raccolta di materiale dalla coda della cometa 81P/Wild, tramite uno speciale materiale denominato aerogel, che ha permesso di intrappolare al suo interno i campioni desiderati; la sonda si avvicinò alla cometa il 2 gennaio 2004, e la capsula contenente i campioni è arrivata sulla Terra il 15 gennaio 2006. Prima di raggiungere la cometa, la sonda ha effettuato un flyby dell'asteroide 5535 Annefrank il 2 novembre 2002, effettuando diverse fotografie della sua superficie.

- Hayabusa

La sonda vanta il primato di essere stata la prima in assoluto ad aver riportato sulla Terra un campione dalla superficie di un asteroide. Arrivata nell'orbita designata intorno all'asteroide Itokawa il 4 ottobre 2005, tentò il rilascio del rover Minerva il 12 novembre; a causa di un errore però, mancò la superficie. Atterrata il 25 novembre 2005, Hayabusa raccolse i campioni previsti e ripartì verso la Terra, dove bruciò nell'atmosfera il 13 giugno 2010, mentre la capsula contenente i campioni venne protetta dallo scudo termico e atterrò in Australia.

- Rosetta

Lo scopo principale della missione è stato il raggiungimento della cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, ma durante il suo percorso per raggiungerla la sonda ha sorvolato due asteroidi, 2867 Šteins (5 settembre 2008) e 21 Lutetia (10 luglio 2010), per poi arrivare in prossimità della cometa il 6 agosto 2014. La sonda prevedeva anche un lander denominato Philae, atterrato il 12 novembre dello stesso anno. Purtroppo le comunicazioni col lander si sono interrotte pochi giorni dopo, a causa della mancata ricarica dei suoi pannelli solari.

- New Horizons

La sonda aveva come obiettivo lo studio del sistema binario formato dal pianeta nano Plutone e dal suo satellite principale Caronte. Durante il suo viaggio, la sonda effettuò un sorvolo a lunga distanza con l'asteroide 132524 APL il 13 giugno del 2006. Grazie all'effetto di fionda gravitazionale ottenuto durante il fly-by di Giove il 28 febbraio 2007, New Horizons raggiunse Plutone il 14 luglio 2015, permettendo agli scienziati di raccogliere una notevole quantità di dati. Il 1° gennaio 2019 ha sorvolato l'oggetto transnettuniano 486958 Arrokoth (denominato anche "Ultima Thule"), il corpo celeste più lontano mai raggiunto da una sonda spaziale.

- Dawn

Si tratta della prima missione nella storia dell'esplorazione spaziale ad aver orbitato attorno a due diversi corpi celesti. Arrivata intorno a Vesta nel luglio 2011, la sonda è ripartita un anno dopo in direzione di Cerere, dove è giunta il 6 marzo 2015. Lo scopo della missione è stato quello di ottenere una miglior comprensione della formazione del Sistema Solare a partire dalla nebulosa primordiale da cui è nato, per cui si sono studiati i due più grandi asteroidi della fascia principale.

- Chang'e 2

La sonda cinese fu lanciata per una missione di mappatura della superficie lunare, con una qualità superiore alla sonda precedente Chang'e 1 che aveva operato tra il 2007 e il 2009. Avendo imbarcato una quantità di carburante maggiore di quella necessaria, la sua missione è stata prolungata dirigendo la sonda verso il punto lagrangiano L2, per verificare manovre di controllo dell'assetto. Completata anche questa parte della missione, ci fu un secondo prolungamento e Chang'e 2 effettuò quindi il sorvolo dell'asteroide 4179 Toutatis il 13 dicembre 2012. Si prevede il rientro della sonda sulla Terra nella prima metà degli anni 2020.

- Hayabusa 2

Questa missione è molto simile alla missione Hayabusa per scopo, ma ovviamente con un impianto tecnico-scientifico notevolmente superiore a quest'ultima. Infatti, per questa missione, sono stati aggiunti 3 rover Minerva (tutti e tre atterrati, al contrario di quello della missione Hayabusa) e anche un lander Mascot. Il 27 giugno 2018 Hayabusa 2 raggiunse Ryugu, ripartendo l'anno successivo (13 novembre 2019) per riportare sulla Terra i campioni raccolti. La capsula con i campioni è rientrata il 6 dicembre 2020, mentre la sonda principale prosegue verso altri due asteroidi, il primo dei quali verrà raggiunto nel 2026 e il secondo nel 2031.

- Osiris - Rex (Origins Spectral Interpretation Resource Identification Security Regolith Explorer)

Si tratta della prima missione della NASA di questo genere e, come per le missioni Hayabusa, lo scopo della sonda è quello di raccogliere campioni dalla superficie dell'asteroide Bennu (si stima all'incirca tra 60 grammi e 2 kg di regolite) e di riportarli sulla Terra nel 2023. La sonda ha effettuato il rendez-vous con l'asteroide il 3 dicembre 2018.

Una grande differenza con le missioni giapponesi è che la sonda non atterrerà sulla superficie, ma preleverà campioni attraverso il braccio robotico TAGSAM (Touch - and - Go Sample Arm Mechanism) [1.10]. Erano disponibili al massimo tre tentativi per recuperare il materiale, ma è bastato un unico tentativo il 20 ottobre 2020 per raggiungere il quantitativo previsto. Bennu, attraverso una simulazione condotta dall'astronomo italiano Andrea Milani Comparetti^[8], presenta ben otto potenziali impatti col nostro pianeta tra il 2169 e il 2199 [1.11]. La probabilità è comunque inferiore allo 0.07% per tutti gli impatti, ma avendo Bennu un diametro di 560 m, sarebbe quindi distruttivo se dovesse colpirci.

1.7 Missione M-ARGO

Questa tesi si prefigge l'obiettivo di convalidare un metodo di stima rapida per trovare il minimo ΔV , e quindi il minimo consumo di propellente, per una missione a propulsione elettrica verso un NEA. Il tipo di missione a cui si fa riferimento è denominata M-ARGO (Miniaturised Asteroid Remote Geophysical Observer), una missione dell'ESA [1.12]. In origine prevista con partenza nel 2021, ha visto posticipare la sua finestra di lancio tra il 2023 e il 2025. Essa prevede l'utilizzo di un sistema di CubeSat operante nello spazio profondo; si tratta della prima missione nella quale i CubeSat sono progettati per lavorare così lontani dalla Terra.

^[8] Matematico ed astronomo italiano, è stato Docente dell'Università di Pisa (Firenze, 1948 – Ghezzano, 2018)

Lo scopo della missione è quello di effettuare un rendez-vous con un NEA di dimensioni inferiori ai 50 m, avente rapida rotazione e superficie priva di regolite. Sono stati identificati circa 150 asteroidi possibili per questa missione, con una distanza media dalla Terra di 150 milioni di chilometri; tra questi, solamente cinque sono risultati sufficientemente interessanti ed hanno meritato ulteriori analisi riguardo l'ottimizzazione della manovra di avvicinamento. La missione prevede un tempo massimo di volo di tre anni, mentre il tempo operativo attorno all'asteroide sarà di circa sei mesi.

Il CubeSat trasporta con sé due strumenti miniaturizzati: un altimetro laser e una camera multispettrale, per mappare la superficie dell'asteroide e per la ricerca di minerali idrati, che potrebbero in futuro essere estratti da altre missioni. I dati vengono inviati a Terra attraverso un trasponder specificatamente progettato operante in banda X e un'antenna ad alto guadagno. Essi vengono raccolti da stazioni di terra ESTRACK dell'ESA di dimensioni tra i 15 e i 35 m, ma anche il radiotelescopio Sardinia (San Basilio, Sardegna) di 64 m di diametro può essere utile per riceverne i dati.



Figura 1.8 Il CubeSat della missione M-ARGO

Le caratteristiche della missione vengono riassunte nella seguente tabella [1.13].

Attributo	Specifiche	
Volume complessivo	12 unità CubeSat (226x226x340 mm)	
Volume del payload	1 unità CubeSat	
Propulsione	- Motore a ioni, gimbal, PPU (Power Processing Unit), neutralizzatore - Due serbatoi per il propellente (Xeno) & sistema di alimentazione (max 2.8 kg)	
Comunicazioni	- Trasponder DS in banda X con ranging/doppler per la risoluzione ad alta definizione delle immagini - 4 antenne omni-direzionali - Un'antenna ad alto guadagno con possibilità di dispiegarsi	
Potenza	- Pannelli fissi (6U facce) + batteria a ioni Litio - 2 pannelli solari dispiegabili con meccanismo SADM (Solar Array Drive Mechanism)	
	<i>6 pannelli</i>	<i>8 pannelli</i>
Potenza @ 1 AU	93 W	120 W
Spinta @ 1 AU	1.7 mN	2.4 mN
Impulso specifico @1 AU	3050 s	3180 s
Massa complessiva	21.6 kg	22.3 kg
AOCS (Attitude and Orbit Control System)	- Sensori: camera VISNAV (per la navigazione autonoma), star tracker, 6 sensori solari, IMU (sistema giroscopico) - Attuatori: 3 reactions wheels, 8 propulsori a Xeno	
Gestione dati	Avionica modulare con processore di dati del payload	
Controllo termico	Passivo con radiatori & heaters	

2. LE MANOVRE DI TRASFERIMENTO

2.1 Problema dei due corpi

La meccanica orbitale è fondata sul Problema dei due corpi, una semplificazione del ben più complesso Problema ad N corpi. Esso si basa su diverse ipotesi, che qui vediamo riassunte:

- si considerano solamente due corpi, di cui uno di massa notevolmente maggiore rispetto all'altro ($M_1 \gg m_2$);
- i corpi sono considerati sferici e il loro centro di massa coincide col baricentro;
- le uniche forze in gioco sono le forze gravitazionali che si sviluppano tra i due corpi.

La legge che descrive questo problema viene definita a partire dalla legge della dinamica di Newton e la sua formulazione è

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}$$

dove r è la distanza tra i centri di massa dei due corpi e μ è il parametro gravitazionale del corpo attorno a cui si sta sviluppando l'orbita, pari a

$$\mu = GM_1$$

con G costante gravitazionale universale che vale $6,67259 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$.

Per una qualsiasi orbita vale la costanza delle seguenti due quantità, dato che il campo gravitazionale è conservativo e non agiscono forze esterne sul sistema:

- Energia specifica per unità di massa $E = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = cost$
- Momento angolare $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{V} = cost$

Integrando due volte l'equazione del Problema dei due corpi e considerando le quantità appena descritte, si ottiene l'equazione di una conica in coordinate polari

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \nu}$$

dove $P = a(1 - e^2)$ è il semilatus rectum, ovvero la distanza tra un fuoco e il punto sull'ellisse, di cui il fuoco stesso ne è la proiezione; a , ν ed e sono tre parametri orbitali che analizzeremo insieme ad altri nel prossimo paragrafo.

L'equazione della conica rappresenta l'orbita sulla quale viaggia l'oggetto di massa minore, mentre il corpo di massa maggiore è situato in uno dei fuochi della conica stessa, in accordo con la 1ª legge di Keplero. Per quanto riguarda le velocità, considerando in particolare un'orbita circolare, si hanno:

- Velocità tangenziale $V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$
- Velocità angolare $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}}$

2.2 Parametri orbitali

Vediamo un breve richiamo sui parametri orbitali (anche detti kepleriani) necessari alla descrizione del moto di un corpo celeste, cominciando da quelli che ne descrivono le caratteristiche nel piano.

- e , eccentricità, definisce la forma dell'orbita
 - se $e = 0$, l'orbita è una circonferenza
 - se $0 < e < 1$, l'orbita è un'ellisse
 - se $e = 1$, l'orbita è una parabola
 - se $e > 1$, l'orbita è un'iperbole

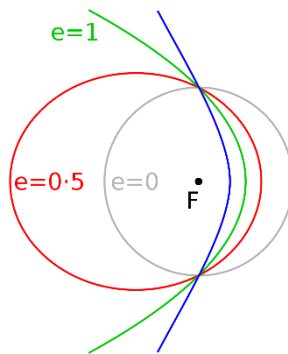


Figura 2.1 Le diverse orbite al variare dell'eccentricità

- a , semiasse maggiore, definisce la dimensione dell'orbita
- v , anomalia vera, rappresenta la posizione del corpo ad un determinato tempo t . E' l'angolo formato tra il periastro e il corpo (es. al periastro vale 0° , all'apoastro vale 180°)

Possiamo quindi definire r la distanza tra lo spacecraft e il fuoco nel quale è situato il corpo; in particolare:

- raggio al periastro $r_p = a(1 - e)$, è la distanza minima dal corpo situato nel fuoco
- raggio all'apoastro $r_a = a(1 + e)$ è la distanza massima dal corpo situato nel fuoco

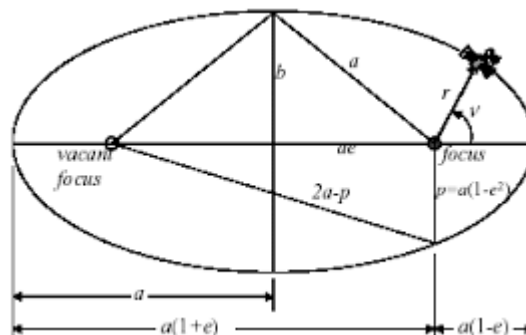


Figura 2.2 Le caratteristiche dell'orbita nel piano

Si definiscono poi altri parametri orbitali che descrivono l'orbita fuori dal piano:

- i , inclinazione, è l'angolo tra il piano orbitale e quello di riferimento (equatoriale)
- Ω , ascensione retta del nodo ascendente (RAAN, Right Ascension of the Ascending Node), è l'angolo che il nodo ascendente forma col punto vernale, misurato in senso antiorario
- ω , argomento del periastro, è l'angolo tra il nodo ascendente e il periastro, misurato nel piano orbitale

L'intersezione tra il piano orbitale e quello equatoriale forma una linea detta linea dei nodi; la linea che invece unisce periastro e apoastro viene chiamata linea degli apsidi.

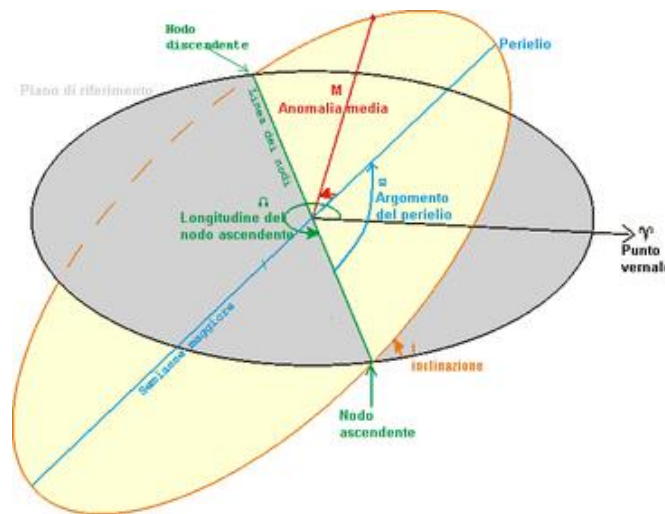


Figura 2.3 Rappresentazione del piano orbitale

2.3 Classificazione delle manovre

La manovra orbitale (detta anche manovra primaria) di un satellite artificiale è un cambio nei suoi parametri orbitali, in modo tale che esso modifichi la sua traiettoria per poter arrivare dove richiede la sua specifica missione. Esiste anche un secondo tipo di manovra, denominata ausiliaria, che invece ha come scopo il mantenimento dell'orbita desiderata, contrastando quindi le perturbazioni esterne che la potrebbero alterare.

Tra le manovre primarie esistono due grandi famiglie, divise a seconda del modo in cui la spinta viene erogata:

- manovre impulsive, la spinta viene fornita per un tempo molto breve rispetto alla durata complessiva della missione (secondi/minuti rispetto a mesi o anni);
- manovre non impulsive, in cui la spinta viene erogata per tempi non infinitesimi rispetto alla durata complessiva della missione.

Le manovre impulsive vengono ulteriormente suddivise a seconda del numero di impulsi:

- manovra ad un impulso (es. fionda gravitazionale e cambio di piano);
- manovra a due impulsi (es. trasferta di Hohmann);
- manovra a tre impulsi (es. trasferta di Sternfeld);
- manovra a N impulsi.

2.4 Fionda gravitazionale

Chiamata anche traiettoria a gravità assistita, questa particolare manovra può essere considerata come una manovra impulsiva che non sfrutta il propellente della sonda stessa, ma utilizza la gravità del pianeta che si sta sorvolando come “motore”, permettendo un aumento della velocità della sonda (o un rallentamento, a seconda dall’effetto che si vuole ottenere) [2.1].

Se il pianeta sorvolato fosse immobile nello spazio, più la sonda gli si avvicina più viene accelerata, ma una volta superato il pianeta la gravità la farebbe rallentare, poiché deve essere sempre soddisfatto il principio di conservazione dell’energia, vanificando la prima fase di accelerazione. Il metodo della fionda gravitazionale funziona proprio perché i pianeti non sono immobili, ma ruotano intorno al Sole (per trasferte all’interno del Sistema Solare è trascurabile il moto del Sole rispetto al centro della Via Lattea). In questo modo, l’energia cinetica della sonda rispetto al pianeta non cambia prima o dopo il flyby, ma calcolandola in riferimento eliocentrico l’aumento di velocità della sonda è bilanciato da un rallentamento del pianeta. Data la grande differenza di masse in gioco, risulta evidente come il cambiamento della velocità ΔV del pianeta sia minimo rispetto a quello della sonda, questo perché l’energia cinetica è pari a $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ e quindi, maggiore è la massa, minore è il ΔV a parità di energia cinetica.

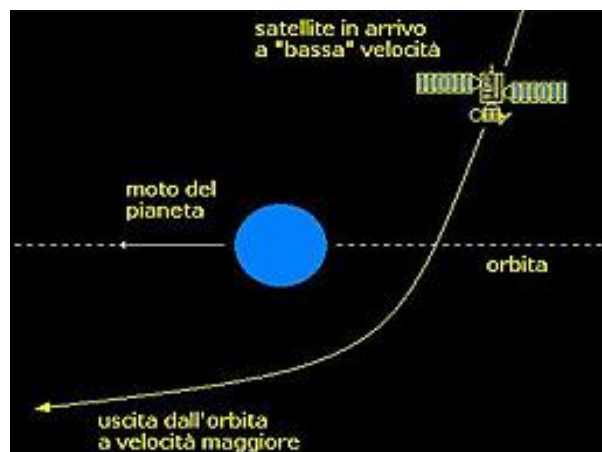


Figura 2.4 Fionda gravitazionale

Questa manovra viene sfruttata soprattutto per missioni che si svolgono nel Sistema Solare esterno, che richiederebbero troppo combustibile per essere effettuate senza questo effetto. Presenta tuttavia alcuni difetti: il primo è il grande aumento del tempo necessario alla missione, poiché spesso devono essere effettuati più flyby dei pianeti del Sistema Solare interno (solitamente Venere e la Terra stessa), invece di optare per una traiettoria più diretta verso l’obiettivo. Un altro inconveniente è che il sorvolo deve essere effettuato alla quota minore possibile rispetto al pianeta per guadagnare più energia possibile, ma in caso di pianeta con atmosfera l’attrito potrebbe rallentare troppo la sonda, facendole perdere addirittura più energia di quella che guadagna col flyby.

Per concludere, l’utilizzo di questo tipo di trasferta è ormai ben consolidato nell’esplorazione del Sistema Solare, e ha permesso missioni spaziali altrimenti quasi impossibili, o con costi esorbitanti, verso i pianeti più distanti dalla Terra.

2.5 Cambio di piano

Il cambio di piano è una manovra spesso richiesta per i satelliti operanti attorno alla Terra, soprattutto per quelli che devono sorvolare zone ad elevate latitudini. Per operare tale cambio, è necessario andare a modificare l'inclinazione i , lasciando invariati gli altri parametri. L'ottimizzazione di questa manovra si ottiene svolgendola in corrispondenza di uno dei due nodi dell'orbita; effettuata in altre posizioni dell'orbita comporterebbe anche la variazione della RAAN.

L'impulso di velocità deve valere:

$$\Delta V = 2V \sin \Delta\left(\frac{i}{2}\right)$$

dove V è la componente trasversale di velocità nel punto della manovra, mentre $\Delta\left(\frac{i}{2}\right)$ è la variazione dell'inclinazione tra i due piani orbitali.

2.6 Trasferta di Hohmann

La trasferta di Hohmann^[1] è una manovra orbitale studiata nel 1925 che permette ad un satellite di spostarsi da una prima orbita circolare (1) ad una seconda orbita (3) anch'essa circolare che sia coplanare e confocale alla prima [2.2].

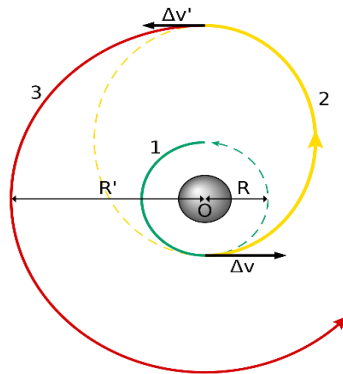


Figura 2.5 Trasferta di Hohmann

Il trasferimento avviene secondo due impulsi tangenti alle orbite circolari, e il percorso tra queste due orbite segue una traiettoria semiellittica (2), la cui eccentricità è pari a $e = \frac{R' - R}{R' + R}$ ed è la minima tra tutte le orbite che legano (1) e (3). I punti nei quali vengono applicati i due impulsi sono il peripasto ($r_p = R$) e l'apopasto ($r_a = R'$) della semiellisse di Hohmann.

Il valore del ΔV da fornire sarà pari a $\Delta V = V_{H1} - V_{C1}$, dove le due velocità sono

- velocità sull'orbita 1 prima dell'impulso $V_{C1} = \sqrt{\frac{\mu}{R}}$
- velocità sull'orbita 2 dopo l'impulso $V_{H1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+R'} \right)}$

^[1] Ingegnere tedesco che diede un notevole contributo allo studio della dinamica orbitale (Hardheim, 1880 – Essen, 1945)

In modo analogo si può definire $\Delta V'$; la somma dei valori assoluti dei due ΔV è a pari al ΔV_{TOT} della trasferta.

Si può dimostrare che questa trasferta è quella che presenta il minimo ΔV_{TOT} (e quindi il minimo consumo di propellente) tra tutte le manovre a due impulsi, se il rapporto tra i raggi delle orbite finale ed iniziale è inferiore a 11,94. La manovra di Hohmann però è anche la più lunga in termini di tempo di percorrenza, ed esso è pari a $t_H = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ in accordo con la 3^a legge di Keplero.

2.7 Trasferta di Sternfeld

La trasferta di Sternfeld^[2] fu definita nel 1934 ed è una manovra biellittica bitangente a tre impulsi. Essa unisce l'orbita circolare (1) all'orbita circolare (3) passando per il punto (2), in cui si incontrano le due semiellissi di trasferimento [2.3]. Tutte le coniche, come per la trasferta di Hohmann, risultano complanari e confocali.

La prima semiellisse che collega l'orbita (1) a (2) ha semiasse maggiore $a_1 = \frac{r_1 + r_{supp}}{2}$, mentre la seconda semiellisse che collega (2) all'orbita (3) ha $a_2 = \frac{r_{supp} + r_3}{2}$, dove r_{supp} è il raggio di una circonferenza di supporto passante per (2) con centro posizionato sul corpo principale M_1 .

Ciascuna semiellisse è tangente a due circonferenze:

- la prima all'orbita (1) e alla circonferenza di supporto;
- la seconda alla circonferenza di supporto e all'orbita (3).

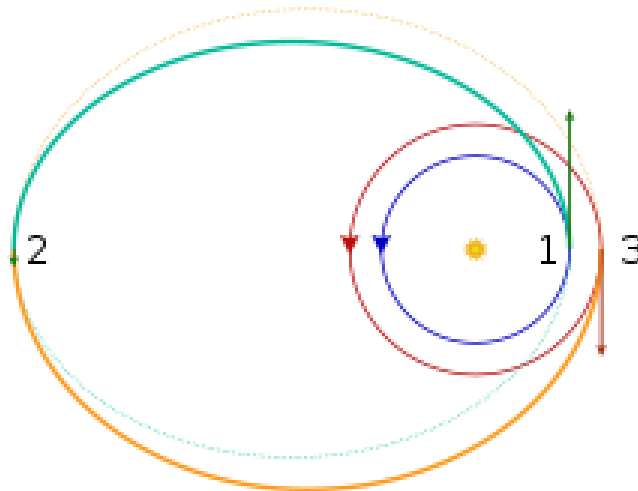


Figura 2.6 Trasferta di Sternfeld

^[2] Ingegnere polacco, uno dei fondatori della moderna scienza aerospaziale (Sieradz, 1905 – Mosca, 1980)

Le tre manovre impulsive necessarie a compiere l'intera trasferta avvengono ai periastri e all'apoastro (2) delle semiellissi; in particolare quest'ultimo impulso è tanto più piccolo quanto più l'apoastro (2) risulta lontano. Se (2) tendesse all'infinito si parlerebbe di manovra biparabolica e il corrispondente ΔV tenderebbe a zero.

I singoli ΔV possono essere calcolati in maniera analoga all'esempio mostrato per la manovra di Hohmann, la somma dei loro moduli rappresenta il ΔV_{TOT} della trasferta.

Sebbene il tempo di trasferimento dall'orbita di raggio minore a quella di raggio maggiore sia superiore rispetto a quello della trasferta di Hohmann, la manovra di Sternfeld risulta più conveniente in termini di ΔV_{TOT} se il rapporto tra i raggi è maggiore di 11,94.

2.8 Manovra di rendez-vous

Il rendez-vous [2.4] è l'incontro tra due oggetti in orbita, come può essere l'aggancio tra due navicelle (in quel caso si parla più propriamente di docking) oppure l'entrata nell'orbita di un corpo celeste da parte di una sonda. Affinchè ciò avvenga, è necessario che i due corpi si trovino nello stesso punto dello spazio nello stesso istante di tempo. La manovra di rendez-vous non è una manovra a sé stante rispetto alle altre, ma ne costituisce un particolare caso, infatti può essere effettuato un rendez-vous tramite una qualsiasi manovra generica. La particolarità del rendez-vous è quindi il dover raggiungere una determinata orbita in un preciso punto dello spazio e ad uno specifico istante di tempo. Vediamo il caso di un rendez-vous con una trasferta di Hohmann di una sonda che parte dalla Terra e si dirige verso Marte.

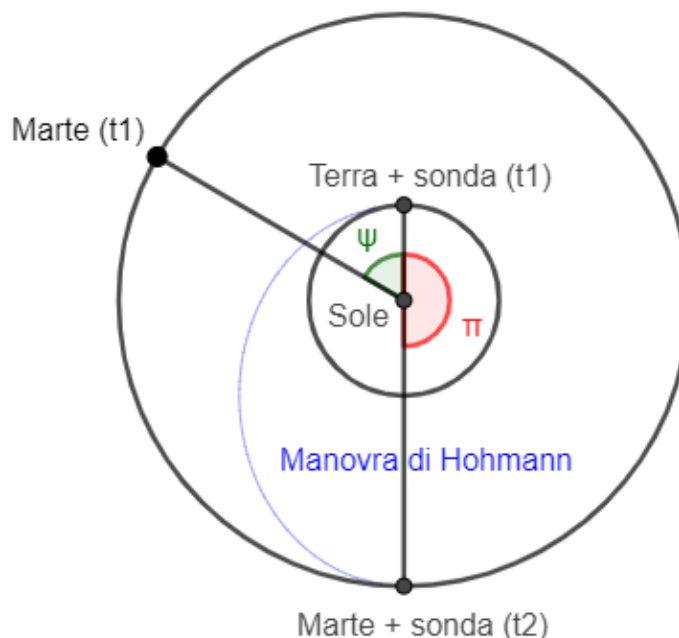


Figura 2.7 Manovra di rendez-vous con trasferta di Hohmann

Come si vede dalla figura, ψ rappresenta l'angolo di fase tra i due pianeti, ovvero quell'angolo che permette il rendez-vous tra Marte e la sonda al tempo t_2 ; per geometria deve valere

$$\pi = \psi + \omega_M \tau_H$$

con ω_M velocità angolare media di Marte e τ_H la durata della trasferta di Hohmann

$$\omega_M = \sqrt{\frac{\mu}{r_M^3}}$$

$$\tau_H = \frac{T_H}{2}$$

T_H rappresenta il periodo dell'orbita di Hohmann calcolato attraverso la 3^a legge di Keplero

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Ovviamente la legge di Keplero fornisce il periodo di rivoluzione di un'ellisse intera, ma la trasferta di Hohmann è una semiellisse, per cui si considera solamente metà periodo.

L'angolo di fase ψ si ripresenta esattamente ogni periodo sinodico τ_S seguendo la legge valida per due generici pianeti

$$\omega_1 \tau_S = \omega_2 \tau_S \pm 2\pi n$$

Si possono quindi fare delle osservazioni:

- se ω_1 e ω_2 sono simili tra loro, τ_S aumenta molto e quindi la possibilità di un rendez-vous si ripresenta dopo molto tempo (es. Terra - Marte, il periodo sinodico è circa 2 anni);
- se $\omega_2 \rightarrow 0$ (ciò significa che il raggio dell'orbita del pianeta di arrivo è molto grande) allora τ_S è circa ugual al periodo del pianeta più veloce (quindi circa un anno terrestre).

Il ritorno sulla Terra con una seconda trasferta di Hohmann dovrebbe tenere in conto il tempo di attesa τ_W affinché si ripresenti l'angolo di fase (N.B. ψ Terra - Marte $\neq$ ψ Marte - Terra).

Per conoscere il tempo di attesa occorre uguagliare l'angolo percorso dalla sonda con quello percorso dalla Terra.

$$\pi + \omega_M \tau_W + \pi = \omega_T (\tau_{H1} + \tau_W + \tau_{H2}) + 2kn$$

Il primo π rappresenta l'angolo che la sonda compie durante la trasferta di andata, mentre il secondo quella di ritorno; il termine $\omega_M \tau_W$ è invece l'angolo dell'orbita che la sonda compie stazionando su Marte.

Su Marte τ_W vale 2 anni terrestri e le trasferte di Hohmann durano circa 6 mesi l'una, quindi una missione di andata e ritorno per Marte durerebbe circa 3 anni.

2.9 Problema di Lambert

Il Problema di Lambert^[3] o TPBVP (Two-point Boundary Value Problem) è di notevole importanza per le manovre orbitali, ma soprattutto per quelle di rendez-vous. Esso consiste nel determinare un'orbita partendo da due vettori posizione e dal tempo di volo assegnato [2.5].

L'ipotesi fondamentale del Problema è che un corpo, soggetto a una forza gravitazionale, si sposti da un punto P_1 a un punto P_2 lungo una conica, in un determinato tempo T .

L'enunciato del teorema è il seguente:

“Il tempo necessario a un corpo per spostarsi tra due punti di una traiettoria conica è funzione solamente della somma delle distanze dei due punti dall'origine della forza, della distanza lineare tra i due punti e dal semiasse maggiore della conica.”

Descrivendolo in altro modo, il Problema di Lambert può essere espresso come l'aggiunta di condizioni al contorno per risolvere l'equazione del Problema dei due corpi, trovando così $\vec{r}(t)$ che risolve il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \\ \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1 \\ \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2 \end{cases}$$

^[3] Matematico e fisico svizzero, fu un pioniere della geometria non euclidea (Mulhouse, 1728 – Berlino, 1777)

3. LA PROPULSIONE

3.1 Introduzione

La propulsione spaziale è la capacità di generare una forza in grado di controllare il moto di uno spacecraft che si trova già in orbita rispetto al corpo da cui è stato lanciato. Essa può essere convenzionalmente divisa in due tipologie:

- la propulsione primaria permette di modificare l'orbita dello spacecraft tramite un cambio di velocità;
- la propulsione ausiliaria consente di mantenere l'orbita prefissata nonostante disturbi esterni (es. forze gravitazionali) che tenderebbero a modificare la traiettoria.

Il principio alla base della propulsione spaziale è la conservazione della quantità di moto tra lo spacecraft stesso e il propellente che esso rilascia per poter effettuare le manovre richieste.

Si può esprimere la spinta risultante come

$$T = \dot{m}_p c$$

dove $\dot{m}_p$ rappresenta la portata di propellente e c è la velocità efficace di scarico.

Una misura dell'efficacia della propulsione è l'impulso totale

$$I_{TOT} = \int_0^{t_f} T dt$$

che nel caso di spinta costante diventa semplicemente

$$I_{TOT} = T \cdot \Delta t$$

Non è però completamente soddisfacente poiché non considera la massa di propellente

$$m_p = \int_0^{t_f} \dot{m}_p dt$$

che nel caso di portata costante diventa

$$m_p = \dot{m}_p \cdot \Delta t$$

Pertanto, si introduce un nuovo parametro che viene denominato impulso specifico

$$I_{SP} = \frac{I_{TOT}}{m_p g_0}$$

Se consideriamo sia la spinta che la portata costanti, esso può essere riscritto in funzione della velocità efficace di scarico

$$I_{SP} = \frac{I_{TOT}}{m_p g_0} = \frac{T \Delta t}{\dot{m}_p \Delta t g_0} = \frac{T}{\dot{m}_p g_0} = \frac{c}{g_0}$$

e quindi ha come unità di misura i secondi, ovvero il tempo per cui il razzo ha una spinta pari al suo peso sulla superficie della Terra ($g_0 = 9.8066 \frac{m}{s^2}$ è l'accelerazione di gravità sulla Terra a livello del mare).

La variazione di velocità ideale (assenza di forze esterne, spinta parallela e concorde alla velocità), ovvero il parametro che quantifica il costo di una manovra, è pari a

$$\Delta V = \int_0^{t_f} \frac{T}{m} dt = \int_0^{t_f} \frac{\dot{m}_p c}{m} dt$$

Con le seguenti ipotesi

- considerando $c = \text{cost}$
- ricordando che il flusso di combustibile è $\frac{dm}{m} = -\dot{m}_p$
- operando un cambio di variabile

posso riscriverla, sapendo che $m_f = m_0 - m_p$ (massa finale = massa iniziale – massa propellente), come

$$\Delta V = -c \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = -c \ln \frac{m_f}{m_0}$$

Invertendo quest'ultima formula si ottiene la cosiddetta equazione del razzo o equazione di Tsiolkovsky^[1]

$$m_f = m_0 e^{-\Delta V/c}$$

da cui si evince come, per ΔV elevati, la massa finale è notevolmente inferiore rispetto a quella di partenza; il peso del razzo è quindi in larga parte dovuto al propellente, mentre il peso del payload ne rappresenta solo una piccola percentuale.

3.2 Classificazione delle perdite

La variazione di velocità descritta nel paragrafo precedente fa riferimento a un caso ideale; nella realtà, ovviamente, esistono dei fenomeni che fanno sì che il ΔV necessario a compiere una determinata missione sia maggiore del ΔV appena calcolato.

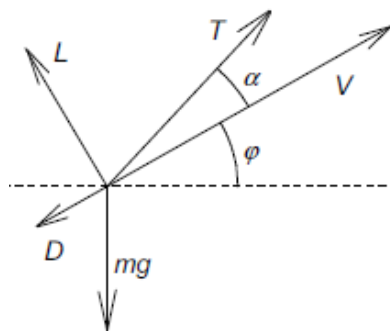


Figura 3.1 Diagramma di corpo libero di uno spacecraft in atmosfera

Possiamo notare due diversi angoli: α è l'angolo di disallineamento della spinta T rispetto alla direzione del moto V , mentre φ rappresenta il flight path angle, ovvero l'angolo tra la traiettoria e l'orizzonte.

^[1] Ingegnere russo, precursore e massimo esponente agli esordi dell'astronautica (Izhevskoye, 1857 – Kaluga, 1935)

Scrivendo un bilancio di forze

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{D}$$

proiettandolo lungo la direzione di $\vec{V}$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T}{m} \cos \alpha - \frac{D}{m} - g \sin \varphi$$

e sommando e sottraendo il termine $\frac{T}{m}$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T}{m} - \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) - \frac{D}{m} - g \sin \varphi$$

Integrando, si nota come il primo termine del secondo membro dell'equazione sia il ΔV ideale calcolato nel paragrafo precedente, mentre i restanti tre sono dei termini dovuti alle perdite.

- Perdite per disallineamento

$$P_D = \int_{t_o}^{t_f} \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) dt$$

Le perdite per disallineamento si annullano quando la spinta è parallela e concorde alla direzione dello spacecraft ($\alpha = 0^\circ$), ma spesso non vengono annullate, poiché avere un piccolo disallineamento può essere utile a ridurre altri tipi di perdite.

- Perdite per resistenza

$$P_R = \int_{t_o}^{t_f} \frac{D}{m} dt$$

Le perdite per resistenza sono dovute alla resistenza aerodinamica, esprimibile come

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S c_D$$

In ambiente atmosferico è evidente che a bassa quota la densità dell'aria sia maggiore, e quindi sia opportuna una velocità inferiore per non avere troppe perdite; a quote maggiori, invece, la densità diminuisce notevolmente, quindi si possono avere delle velocità superiori senza eccessive perdite. Nel vuoto dello spazio la resistenza risulta nulla qualunque sia la velocità, poiché la densità è pari a zero, e quindi è nulla anche la corrispettiva perdita.

- Perdite per gravità

$$P_G = \int_{t_o}^{t_f} g \sin \varphi dt$$

Le perdite per gravità nascono in presenza di campi gravitazionali nei quali lo spacecraft si trova ad operare, sia che esso voglia allontanarsi che avvicinarsi al corpo che crea il campo gravitazionale stesso.

Se lo spacecraft si volesse allontanare, la gravità lo frenerebbe; viceversa, se volesse avvicinarsi al corpo dovrebbe rallentare, mentre la forza di gravità lo attirerebbe e tenderebbe comunque ad accelerarlo.

Operando la sostituzione $dr = V \sin \varphi dt$, è possibile riscrivere la formula come

$$P_G = \int_{r_o}^{r_f} \frac{g}{V} dr = \left(\frac{g}{V} \right)_{medio} \Delta r$$

Per minimizzare questo tipo di perdite, dato che non si può agire su g (accelerazione gravitazionale) o sul Δr (che viene assegnato dalla missione), dalla formula precedente si nota come occorra avere un'elevata velocità; di conseguenza, rimanere il meno tempo possibile all'interno del campo gravitazionale. Pertanto, queste perdite sono particolarmente elevate nel caso di propulsione elettrica che, come vedremo nei prossimi paragrafi, richiedono tempi di passaggio tra un'orbita e un'altra anche di diversi mesi.

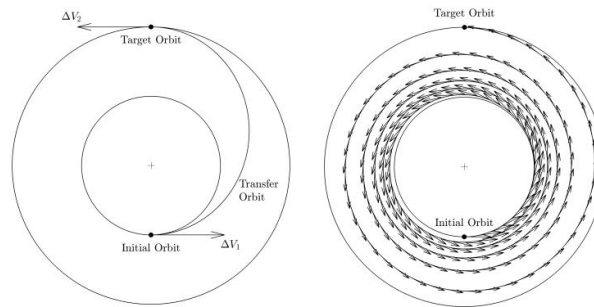


Figura 3.2 Differenza tra propulsione chimica ed elettrica

Esiste infine un altro tipo di perdita, anche se non direttamente osservabile dalla trattazione precedente, ma derivante da una semplice osservazione logica. Immaginiamo che lo spacecraft debba modificare la sua orbita passando da un certo raggio r_1 a un altro raggio r_2 ; è possibile calcolare, attraverso le regole della meccanica orbitale, il ΔV necessario alla manovra. Per minimizzare il consumo è opportuno fornire esattamente il ΔV richiesto, facendo in modo che la velocità che si raggiunge all'orbita finale sia nulla. Infatti, se si fornisse un ΔV minore non potrei mai portare a compimento la manovra; se invece fosse superiore, una volta raggiunta l'orbita di raggio r_2 si dovrebbe anche “frenare” (ovvero spingere in direzione opposta) per immettersi nell'orbita designata, consumando una quantità maggiore di combustibile rispetto al caso ottimale.

3.3 Propulsione chimica

La propulsione chimica è, insieme alla propulsione elettrica, uno dei due possibili modi per produrre l'energia necessaria a generare la spinta.

Ciò avviene tramite delle reazioni chimiche esotermiche tra il combustibile e l'ossidante (es. LH2 e LOX) che avvengono nella camera di combustione e i gas che vengono prodotti subiscono un'espansione in un ugello dal quale fuoriescono con la velocità efficace di scarico.

Attraverso dei bilanci di potenze, è possibile ottenere la relazione

$$c = \sqrt{2h_c} = \sqrt{2c_p T_c}$$

con h_c entalpia statica del propellente e T_c temperatura della camera di combustione.

La propulsione chimica presenta quindi lo svantaggio di avere un limite superiore al valore della velocità efficace di scarico (che è legata all'impulso specifico) dovuto al tipo di propellente che viene utilizzato.

Nonostante questa limitazione (che come vedremo non sarà presente nella propulsione elettrica) la propulsione chimica è molto utilizzata perché la sua configurazione è estremamente semplice (combustibile + ossidante + camera di combustione + ugello) e perché, tra le due tipologie, è l'unica che permette di sfuggire all'attrazione gravitazionale della Terra, poiché in grado di generare elevate spinte.



Figura 3.3 Impianto propulsivo di un razzo a propulsione chimica

3.4 Propulsione elettrica

In alternativa alla precedente, in ambito spaziale viene utilizzata anche la propulsione elettrica, caratterizzata da spinte notevolmente inferiori rispetto alla sua controparte chimica, ma anche da un consumo di propellente minore. Le diverse modalità di produzione della potenza elettrica identificano tre diverse categorie di propulsori.

- Propulsori elettrotermici

Per quanto riguarda i propulsori elettrotermici, essi possono essere definiti come una soluzione ibrida tra la propulsione chimica e quella elettrica: infatti, hanno la stessa architettura dei motori chimici (camera + ugello), ma la potenza non è fornita da una reazione chimica, bensì da una resistenza elettrica per mezzo dell'effetto Joule. Il propellente gassoso quindi, dopo essere stato scaldato, espande nell'ugello proprio come nella propulsione chimica. La formula con cui è possibile determinare la velocità efficace di scarico si può ricavare con bilanci energetici simili a quelli del caso chimico, ottenendo quindi in termini termodinamici

$$c = \sqrt{2h_c} = \sqrt{2c_p T_c}$$

Come per la propulsione chimica, quindi, esiste un limite superiore per la velocità efficace di scarico, legato alla massima temperatura raggiungibile nella camera. Inoltre, si vede che anche il tipo di propellente influenza questo parametro. Ricordando infatti che

$$c_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R^*}{M}$$

si nota come siano preferibili gli elementi che abbiano piccola massa molare, su tutti l'idrogeno. Purtroppo esso non è di facile utilizzo, perché necessita di una conservazione criogenica, ed inoltre presenta il fenomeno della dissociazione chimica, che inficia molto le prestazioni del motore; in alternativa si usano composti chimici come l'idrazina o l'ammoniaca.

In termini di potenza elettrica, è possibile esprimere la velocità efficace come

$$c = \sqrt{2 \frac{P_E}{\dot{m}_p}}$$

Allo scopo di avere un valore elevato, si può aumentare la potenza elettrica (a discapito però di generatori grandi e pesanti) o diminuire la portata, il cui svantaggio risiede nella riduzione della spinta, con conseguente incremento dei tempi di missione.

Esistono due diverse tipologie di propulsori elettrotermici, i resistogetti e gli arcogetti.

Per i primi, il calore viene generato da una resistenza elettrica e si dividono in

- direct contact: la resistenza è immersa nel propellente, il calore si diffonde per convezione;
- sealed-cavity: la resistenza è separata dal propellente per evitare che venga danneggiata dal propellente stesso; il calore si propaga per irraggiamento dalla resistenza ad uno scambiatore di calore, per convezione dallo scambiatore al propellente.

Negli arcogetti, è all'interno del fluido stesso che viene fatto innescare l'arco elettrico per generare il calore necessario. Non essendoci una resistenza elettrica, che può sopportare temperature solo fino a circa 3000 K, è possibile raggiungere anche i 10000 K.

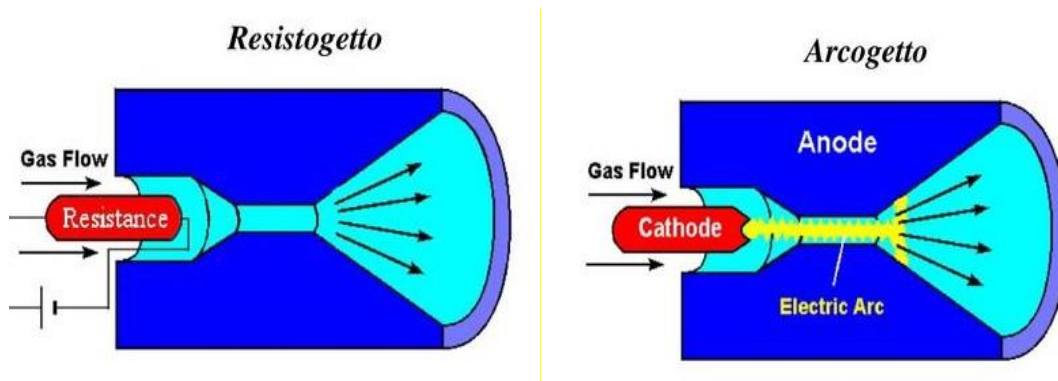


Figura 3.4 Schemi di un resistogetto e di un arcogetto

- Propulsori elettrostatici

I propulsori elettrostatici a ioni per generare la spinta sfruttano del propellente ionizzato che viene accelerato da forze elettrostatiche. Si può osservare come convenga accelerare solamente gli ioni positivi e non gli elettroni rimanenti; poiché questi ultimi hanno massa piccola rispetto ai primi, il loro contributo alla spinta è molto ridotto.

Affinchè un propulsore a ioni possa funzionare, sono necessari tre passaggi fondamentali:

- ionizzazione;
- accelerazione degli ioni;
- neutralizzazione.

Nella fase di ionizzazione vengono “creati” gli ioni positivi, e ciò può essere ottenuto attraverso un bombardamento di elettroni (tecnologia americana) oppure per radiofrequenza (tecnologia europea): in entrambi i casi, degli elettroni colpiscono atomi neutri, causandone la ionizzazione. Nella fase successiva, delle griglie forate cariche elettricamente (screen grid e accelerator grid) attirano gli ioni appena prodotti, accelerandoli e permettendone il passaggio nei fori. Se si emettessero solamente ioni positivi, avrei un eccesso di carica negativa sul propulsore stesso, che riattrarrebbe gli ioni appena espulsi, annullando l’effetto della spinta. Per questo motivo è necessario che, per ogni ione positivo, venga emesso un corrispondente elettrone in grado di neutralizzare la carica in eccesso. Un limite fisico a questo tipo di propulsori è dovuto alla legge di Child, che lega la massima densità di corrente, a sua volta correlata alla densità di spinta, al potenziale di griglia.

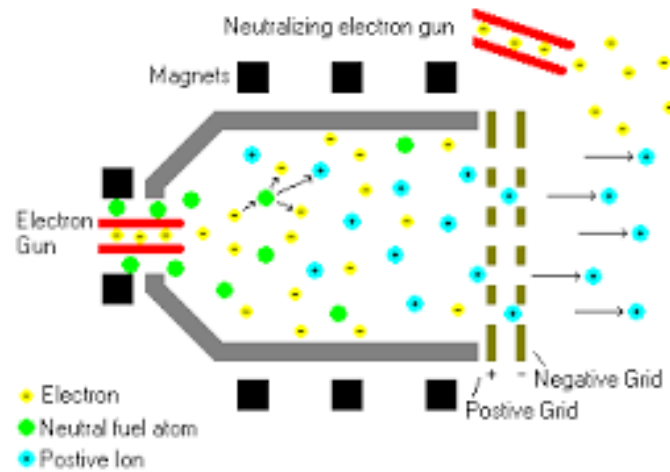


Figura 3.5 Schema di un propulsore a ioni

Un caso ibrido tra i propulsori elettrostatici e quelli elettromagnetici (che saranno descritti nel prossimo punto) sono i cosiddetti propulsori ad effetto Hall, che hanno tra i loro vantaggi quello di non essere soggetti alla legge di Child, poiché accelerano un plasma quasi neutro. Il loro funzionamento si basa sulla sovrapposizione degli effetti di un campo elettrico e di uno magnetico, mutuamente perpendicolari, che agiscono su un propellente gassoso, tipicamente Xenon o altri gas nobili, prima ionizzandolo e poi accelerandolo.

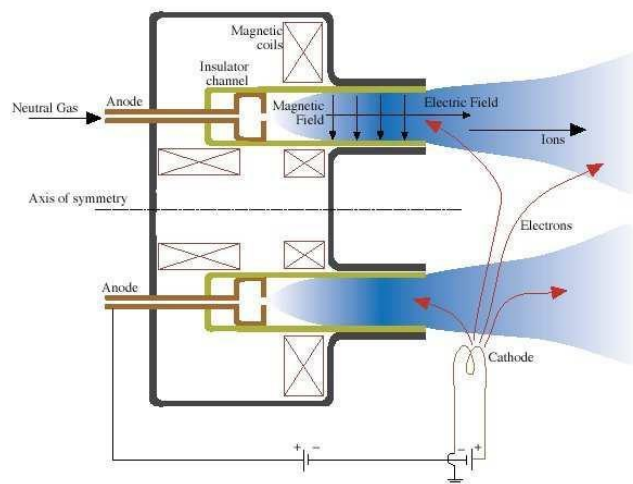


Figura 3.6 Schemi di un propulsore ad effetto Hall

- Propulsori elettromagnetici.

Nel caso di propulsori elettromagnetici, il propellente ionizzato viene accelerato da forze elettromagnetiche dovute all'interazione delle cariche con campi magnetici.

Si possono distinguere, a seconda del funzionamento, due tipi principali di propulsori elettromagnetici:

- stazionari (funzionamento continuo);
- instazionari (funzionamento pulsato).

Un tipo di propulsore stazionario è un propulsore MPD (Magnetoplasma Dinamico), che a sua volta può essere distinto a seconda della modalità con la quale viene generato il campo magnetico B :

- MPD self-field, B è autoindotto;
- MPD applied-field, per il quale il campo magnetico è imposto dall'esterno, che porta comunque alla nascita di un B autoindotto di intensità minore rispetto al caso precedente.

Gli MPD derivano la loro architettura da quella degli arcogetti, ma l'accelerazione del fluido non avviene più con modalità fluidodinamiche, ma attraverso le forze elettromagnetiche.

La caratteristica principale dei propulsori elettromagnetici instazionari, invece, è il funzionamento pulsato che permette al motore stesso di sopportare, per intervalli di tempo dell'ordine dei microsecondi, temperature e intensità di corrente molto più elevate rispetto al caso a funzionamento continuo. In questo modo il rendimento della macchina cresce significativamente, pur mantenendo una temperatura media che risulta essere tanto minore quanto più piccolo è l'intervallo di tempo di accensione. Un modello di propulsore instazionario è il PPT (Pulsed Plasma Thruster), che usa un propellente solido vaporizzato dalla scarica di corrente stessa.

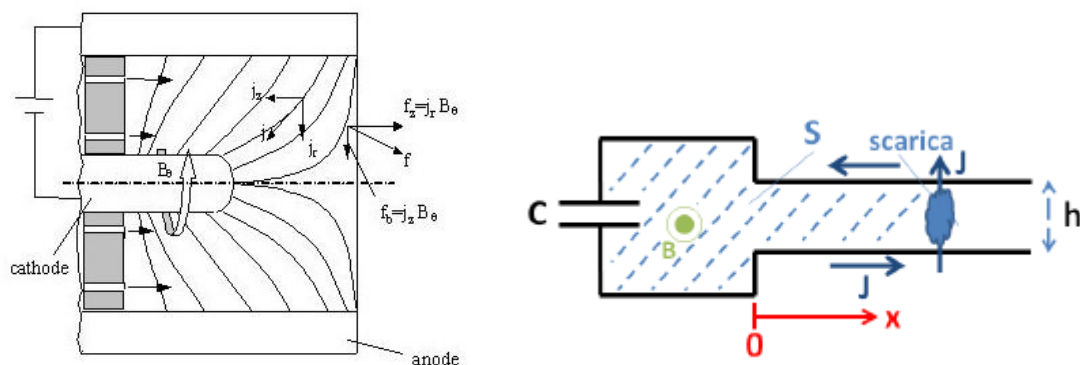


Figura 3.7 Schemi di un MPD (sx) e di un PPT (dx)

Il bilancio energetico che caratterizza i propulsori elettrostatici ed elettromagnetici è

$$\eta P_E = \dot{m}_P \frac{c^2}{2} = \frac{Tc}{2}$$

dove ηP_E rappresenta la potenza elettrica fornita, moltiplicata per il rendimento.

Dalla formula ricaviamo che

$$c = \frac{2\eta P_E}{T}$$

Secondo questa relazione non si hanno limiti teorici al valore della velocità efficace di scarico poiché è sufficiente aumentare il valore di P_E ; in realtà essa non potrà aumentare indefinitamente a causa delle limitazioni tecnologiche.

Spesso questa potenza viene fornita da pannelli solari montati sul satellite stesso, ma più in generale può derivare da un generatore di corrente. Una legge empirica che lega la massa del generatore alla potenza elettrica che esso può fornire è

$$m_G = \alpha P_E$$

Il coefficiente α è chiamato massa specifica del generatore ed è legato al livello tecnologico del generatore stesso. Nell'ottica dell'ottimizzazione sia del peso che dello spazio occupato, si cerca quindi di avere valori di α più piccoli possibile; in questo modo un piccolo generatore può produrre elevata potenza.

A seconda dei valori di potenza erogati dal generatore, si possono distinguere diverse categorie di propulsori elettrici, schematizzate nella seguente tabella.

Nome	Potenza disponibile	Missione tipica
Microthruster	$\cong$ qualche W	Controllo di precisione
1 kW class thruster	0.5 – 10 kW	Mantenimento dell'orbita, inserimento in orbita di piccoli satelliti
5-10 kW class thruster	5 – 10 kW	Inserimento in orbita GEO
100 kW class thruster	$\cong$ qualche centinaio di kW	Esplorazione umana nello spazio (attualmente non ancora disponibili)

Tra la seconda e la terza categoria non esiste una distinzione molto netta per quanto riguarda le potenze disponibile a bordo.

La differenza più importante tra la propulsione chimica ed elettrica è che la spinta prodotta con la seconda è notevolmente inferiore, anche di diversi ordini di grandezza, rispetto alla prima; di conseguenza anche le accelerazioni possibili saranno piccole, determinando un notevole incremento del tempo necessario a percorrere la traiettoria richiesta.

Per l'impulso specifico si hanno diversi range di valori a seconda del tipo di propulsione adottata:

- propulsione chimica $I_{SP} \leq 450 \text{ s}$
- propulsione elettrotermica $I_{SP} = 300 - 700 \text{ s}$
- propulsione elettrostatica/elettromagnetica $I_{SP} = 1500 - 5000 \text{ s}$

3.5 Tipologie di spinta e di impulso specifico

Tra diversi modelli di spinta e di impulso specifico basati sulla propulsione elettrica, descriviamo quelli presenti nell'articolo [3.1].

- Nuclear Electric Propulsion (NEP)

Questo tipo di propulsione riceve l'energia elettrica necessaria alla spinta da un generatore a fissione nucleare. Il modello utilizzato per descriverla è quello più semplice, poiché considera costanti sia la spinta che l'impulso specifico, indipendentemente dalla distanza della sonda dal Sole, cosa che invece non accadrà con gli altri due modelli.

- Solar Electric Propulsion (SEP)

A differenza della NEP questa propulsione utilizza, per generare la potenza elettrica necessaria, dei pannelli solari montati direttamente sul satellite, fissi oppure dispiegabili in orbita. Il modello che meglio caratterizza la SEP considera la spinta e l'impulso specifico non più costanti, ma con un certo andamento in funzione della distanza tra il Sole e la sonda. Poiché l'irradiazione solare (espressa in $\frac{W}{m^2}$) decresce all'aumentare della distanza con la nostra stella, anche l'energia elettrica disponibile diminuisce e conseguentemente diminuiscono sia la spinta che l'impulso.

Le formule che vengono utilizzate per la descrizione di questo modello sono:

- Potenza fornita dai pannelli solari fissi sulla sonda (espressa in W)

$$P_{bfp} = -40.588 r_S^3 + 173.49 r_S^2 - 259.19 r_S + 141.86$$

- Potenza fornita dai pannelli solari dispiegabili (espressa in W)

$$P_{SW} = -40.588 r_S^3 + 173.49 r_S^2 - 259.19 r_S + 141.86$$

dove con r_S si indica la distanza tra il Sole e lo spacecraft.

- Potenza complessiva in ingresso (espressa in W)

$$P_{in} = \min\{\eta(P_{SW} - \max\{13.75 - P_{bmp}; 0\}); 120\}$$

dove $\eta = 0.92$ rappresenta il rendimento di trasmissione della potenza. Il valore 13.75 W indica la potenza costante richiesta dalla strumentazione, mentre 120 W è il limite di potenza superiore dovuto a limitazioni termiche.

- Spinta massima (espressa in mN)

$$T_{MAX} = \frac{(26.27127 P_{in} - 708.973)}{1000}$$

- Impulso specifico (espresso in s)

$$I_{SP} = -0.0011 P_{in}^3 + 0.175971 P_{in}^2 + 4.193797 P_{in} + 2073.213$$

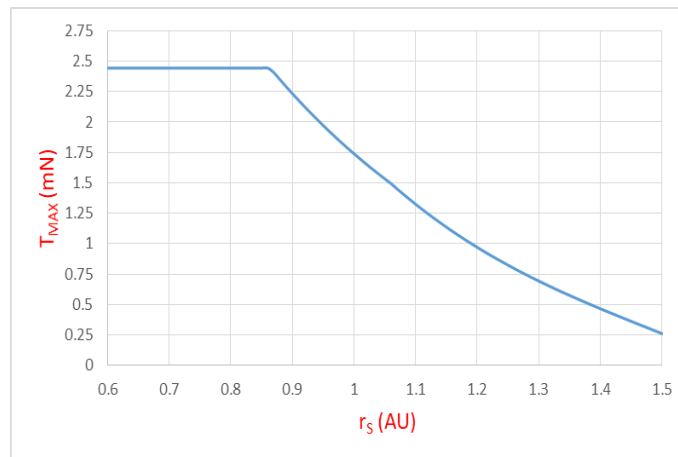


Figura 3.8 Spinta in funzione della distanza dal Sole

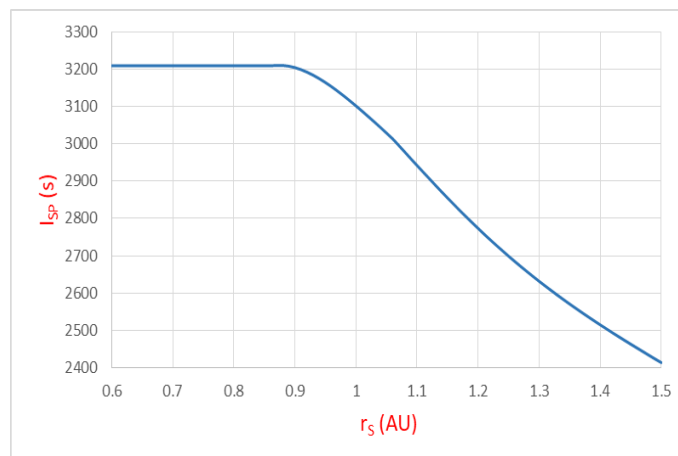


Figura 3.9 Impulso specifico in funzione della distanza dal Sole

- Metodo approssimato

Il modello che descrive la SEP risulta molto preciso, ma non sempre è conveniente ricorrervi perché il costo computazionale e il tempo di calcolo sono particolarmente elevati. In un primo approccio al problema è possibile invece ragionare tramite un metodo approssimato, che però fornisca risultati sufficientemente accurati. Occorre quindi cercare il miglior metodo possibile che permetta un'analisi più veloce del problema rispetto al metodo SEP, perdendo ovviamente un po' della precisione che quest'ultimo fornirebbe. Un buon compromesso tra tempi di calcolo e accuratezza del risultato può derivare dal metodo approssimato usato in questa tesi, che considera la spinta inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole, mentre l'impulso specifico è considerato costante.

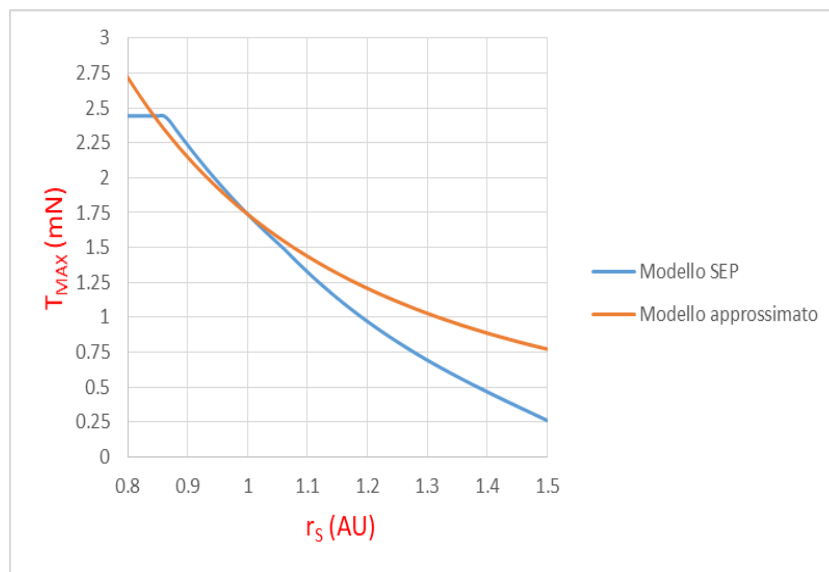


Figura 3.10 Confronto tra i modelli di spinta

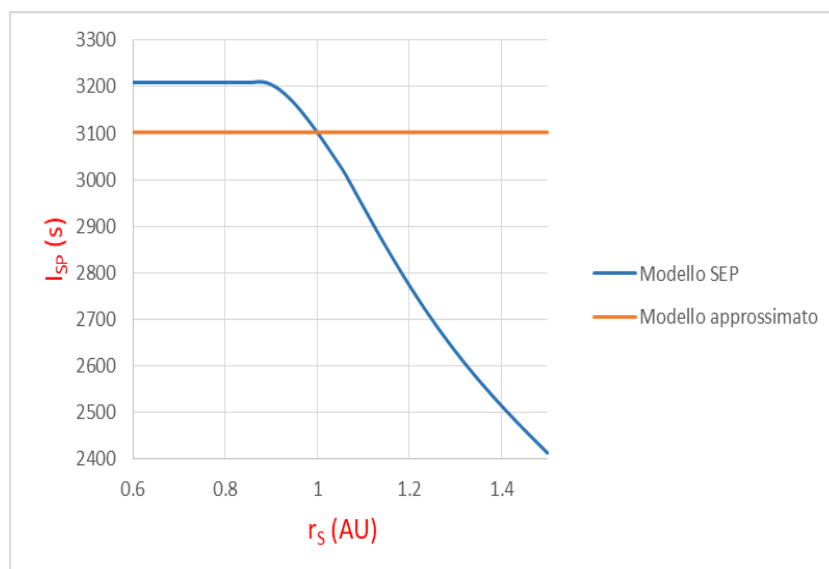


Figura 3.11 Confronto tra i modelli di impulso specifico

4. MODELLO TEORICO

4.1 Introduzione

Nell'articolo di Mereta e Izzo precedentemente citato ([3.1]), confrontando diverse metodologie di propulsione per una missione di rendez-vous con un NEA, gli autori hanno catalogato un campione di 143 possibili target. Il caso di studio è stato sviluppato a partire dalla missione M-Argo, già descritta nel paragrafo 1.6, sebbene con parametri leggermente differenti raggruppati in tabella.

Attributo	Specifiche
Massa complessiva iniziale	20 kg
Massa di propellente massima	2.5 kg (compresi nella massa iniziale)
Impulso specifico	3100 s
Spinta @ 1 AU	1.74 mN
Data di partenza	1° gennaio 2020 – 31 dicembre 2023
Tempo per la missione massimo	3 anni

I risultati ottenuti si dimostrano complessivamente accurati rispetto a un metodo diretto non lineare utilizzato come confronto; tuttavia, alcuni valori differiscono anche significativamente dalla soluzione esatta. Una spiegazione potrebbe essere ricercata nel fatto che i metodi esaminati da Mereta e Izzo non sono stati implementati appositamente per una missione verso un NEA.

Nel lavoro [4.1] gli autori si sono focalizzati sullo sviluppo di un metodo mirato per l'analisi di una missione a minimo consumo di propellente per un rendez-vous con un NEA, basato sull'approssimazione di Edelbaum^[1] che verrà analizzata più in dettaglio in seguito. Questo nuovo approccio è stato rivolto solamente a 75 asteroidi dei 143 esaminati precedentemente, ovvero quelli che presentavano il minor consumo di propellente. Il notevole vantaggio di questo metodo è quello di non dover ricorrere a complesse integrazioni delle equazioni differenziali del moto, ma solo alla risoluzione numerica di un sistema di equazioni algebriche. Ciò consente di ridurre notevolmente il tempo di calcolo necessario, permettendo un'analisi rapida di un elevato numero di possibili asteroidi target, senza tuttavia perdite nell'accuratezza della soluzione.

Un ulteriore perfezionamento dei risultati è stato ottenuto nella pubblicazione [4.2], dalla quale questa tesi prende l'avvio. Il miglioramento deriva dall'introduzione del cosiddetto fattore di correzione, ovvero un coefficiente che tenga in conto della geometria della particolare trasferta considerata.

4.2 Approssimazione di Edelbaum

Come visto precedentemente, la nostra missione di riferimento viene effettuata con uno spacecraft a propulsione elettrica; la caratteristica principale di questo tipo di propulsione è una spinta molto più piccola rispetto a quella chimica, distribuita però per un lungo periodo di tempo in quelli che saranno poi definiti archi di spinta dell'orbita. Date le sue caratteristiche, la propulsione elettrica non è infatti adatta alle manovre impulsive.

^[1] Ingegnere aeronautico statunitense, lavorò in molte università americane tra cui il MIT (Hartford, 1932 – Lynn, 1977)

Con lo sviluppo di questo tipo di propulsione sui satelliti artificiali, si è reso necessario un nuovo modello che potesse descrivere una trasferta a bassa spinta; tra i primi, venne elaborato quello di Edelbaum nel 1961, che considerava una trasferta tra due orbite con piccola eccentricità (orbite quasi circolari) e bassa inclinazione.

L'approssimazione di Edelbaum [4.3] ha come obiettivo quello di minimizzare il tempo di percorrenza tra le due orbite. In realtà, lo scopo della missione M-ARGO e quindi quello di questo lavoro è ottenere una trasferta a consumo minimo, a cui non corrisponde evidentemente il tempo minimo. Solitamente infatti, il tempo impiegato in una trasferta a consumo minimo è superiore al tempo minimo calcolabile col metodo proposto da Edelbaum. Sarà quindi necessario apportare delle modifiche a questo modello, utilizzando tecniche che sono state sviluppate nel tempo proprio allo scopo di adattarsi alle richieste delle differenti missioni.

Esprimiamo in forma matematica le ipotesi semplificative del modello di Edelbaum già evidenziate in precedenza:

- Bassa spinta $\rightarrow a_V, a_N, a_W \ll g = \frac{\mu}{r^2}$
- Piccola eccentricità $\rightarrow e \cong 0 \rightarrow r \cong a \cong P, V \cong \sqrt{\frac{\mu}{r}}$
- Bassa inclinazione $\rightarrow i \cong 0 \rightarrow \sin i \cong i, \cos i \cong 1, \theta \cong \Omega + \omega + \nu$

Per il nostro insieme di 75 asteroidi, le limitazioni dovute all'approssimazione di Edelbaum sono state quantitativamente riscritte usando tre semplici condizioni:

- $i < 5^\circ$
- $\Delta a < 0.2$
- $e < 0.25$

Nell'elenco considerato sono 13 gli asteroidi per cui almeno una delle precedenti relazioni non è verificata, pertanto questi ultimi non verranno considerati.

Per quanto riguarda la spinta, nella figura seguente schematizziamo le tre componenti di accelerazione tangenziale, radiale e perpendicolare al piano del moto di una sonda intorno ad un'orbita.

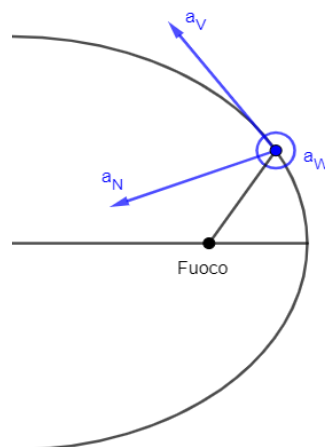


Figura 4.1 Le tre componenti di accelerazione

Le tre componenti possono essere espresse in funzione della spinta, proiettando l'accelerazione che essa produce in un sistema di assi cartesiani ortogonali coordinati (α è l'angolo tra il vettore velocità e la spinta nel piano, β è l'angolo che la spinta forma col piano dell'orbita).

$$a_V = \frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta$$

$$a_N = \frac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta$$

$$a_W = \frac{T}{m} \sin \beta$$

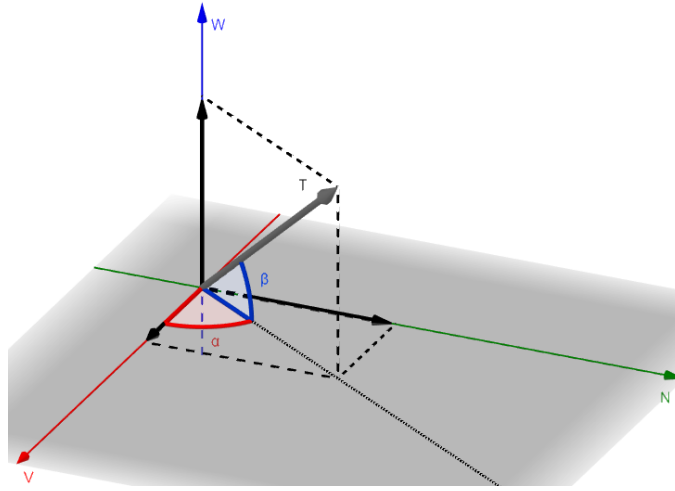


Figura 4.2 Le proiezioni dell'accelerazione

Per descrivere in maniera completa il moto lungo l'orbita, occorre risolvere le equazioni differenziali planetarie di Lagrange scritte in forma gaussiana semplificata:

$$\frac{da}{dt} = 2 \frac{r}{V} a_V$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{V} (2 \cos v a_V + \sin v a_N)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{V} \cos(\omega + v) a_W$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{iV} \sin(\omega + v) a_W$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{eV} (2 \sin v a_V - \cos v a_N)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}} = \frac{V}{r}$$

Le equazioni $\frac{d\Omega}{dt}$ e $\frac{d\omega}{dt}$ presentano una singolarità quando i ed e sono nulli (orbite circolari con inclinazione nulla $\rightarrow$ non è possibile definire periastro e RAAN); poiché queste considerazioni sono tra le ipotesi della teoria di Edelbaum, le due equazioni corrispondenti vengono trascurate e le grandezze Ω e ω vengono assunte costanti.

Consideriamo ora tre diversi casi, che descrivono la direzione migliore in cui dirigere la spinta a seconda dell'effetto che si vuole ottenere:

- Variazione del solo semiasse maggiore

Nel caso di $\Delta a > 0 \rightarrow \alpha = \beta = 0^\circ$

Nel caso di $\Delta a < 0 \rightarrow \alpha = 180^\circ, \beta = 0^\circ$

Poiché si ha spinta tangenziale alla traiettoria applicata in modo continuo lungo tutta un'orbita circolare, la variazione complessiva di e è nulla, mentre i è nullo in ogni punto della traiettoria.

L'unica componente di accelerazione rimane solo $|a_V| = \frac{T}{m}$, le altre due si annullano.

- Variazione della sola eccentricità

La soluzione ottimale per avere la massima variazione dell'eccentricità prevede $\beta = 0^\circ$, $\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \nu$, quest'ultima formula ben approssimabile con $\alpha \cong \nu$.

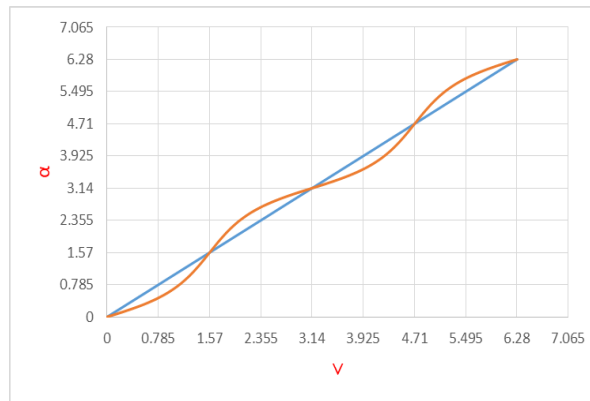


Figura 4.3 Approssimazione $\alpha \cong \nu$

Le componenti di accelerazione diventano quindi

$$a_V = \frac{T}{m} \cos \nu$$

$$a_N = \frac{T}{m} \sin \nu$$

$$a_W = 0$$

In altri termini, la condizione trovata implica una spinta solo nel piano con direzione sempre perpendicolare alla linea degli apsidali. Le variazioni di a e i sono nulle su un giro completo.

- Variazione sia del semiasse maggiore che dell'inclinazione

Nel caso in cui si volesse modificare contemporaneamente semiasse maggiore ed inclinazione, la soluzione di Edelbaum prevede $\alpha = 0^\circ, 180^\circ$ a seconda se Δa positivo o negativo e $\tan \beta = k \cos(\omega + \nu)$, con k funzione di Δa e Δi .

Anche per questa formula esiste una versione approssimata di più comodo utilizzo, rappresentata da $\beta = \bar{\beta} \cdot \text{segno}[\cos(\omega + \nu)]$, con $\bar{\beta}$ una costante che varia ad ogni giro dell'orbita.

Per quanto riguarda le componenti dell'accelerazione, diventano così

$$|a_V| = \frac{T}{m} \cos \beta$$

$$a_N = 0$$

$$a_W = \frac{T}{m} \sin \beta$$

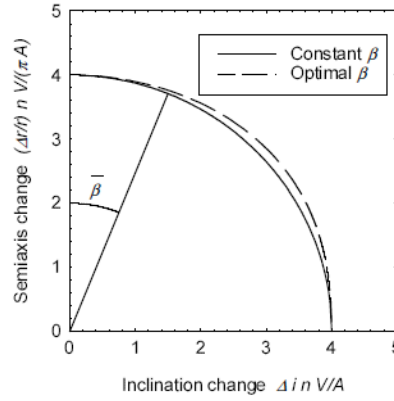


Figura 4.4 Confronto tra le approssimazioni di β

Vediamo come il massimo $\frac{\Delta a}{a}$ si abbia in corrispondenza di $\bar{\beta}$ piccoli, mentre il massimo Δi lo si abbia per $\bar{\beta}$ grandi.

In traiettorie che si sviluppano per più rivoluzioni, ad ogni giro si dovrà scegliere un diverso valore della costante $\bar{\beta}$, che si può determinare imponendo la semplice equazione

$$V \sin \beta = V_0 \sin \beta_0, \text{cioè } \frac{\sin \beta}{\sqrt{r}} = \text{cost}$$

dove V_0 e β_0 sono conosciuti a partire dalle condizioni iniziali.

Dalla precedente formula risulta chiaro che un cambio di inclinazione, detto anche cambio di piano, è più conveniente a raggi alti, dove le velocità sono piccole e di conseguenza l'angolo β è grande.

L'approssimazione di Edelbaum fornisce valori accurati solo quando il numero di rivoluzioni è un intero, poiché utilizza le variazioni medie dei parametri lungo un'orbita come base per le stime del consumo. Se il numero di rivoluzioni non fosse intero, il risultato sarebbe inaccurato poiché le variazioni di eccentricità e inclinazione dipendono dalla posizione dello spacecraft lungo l'orbita e non sono funzioni lineari del tempo di volo e dell'angolo percorso v .

4.3 Riformulazione del problema di Edelbaum

Le equazioni di Gauss – Lagrange descritte nel paragrafo precedente avevano il limite di essere mal poste in caso di orbite a bassa inclinazione e piccola eccentricità, che però è proprio il tipo di orbita che dovremo analizzare per il lavoro di questa tesi; si introducono quindi due nuove coppie di variabili, per poter eliminare le singolarità del problema nella precedente formulazione.

- Due componenti di eccentricità, legate alla posizione angolare della linea degli apsi
 - $e_x = e \cos(\Omega + \omega)$
 - $e_y = e \sin(\Omega + \omega)$
- Due componenti di inclinazione, legate alla posizione angolare della linea dei nodi
 - $i_x = i \cos \Omega$
 - $i_y = i \sin \Omega$

Si possono quindi riscrivere le equazioni planetarie usando come variabile indipendente non più il tempo, ma la longitudine θ , introducendo l'accelerazione adimensionata $A = \frac{a}{g} = \frac{T/m}{\mu/r^2}$

$$\frac{da}{d\theta} = 2rA \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{de_x}{d\theta} = A \cos \beta (2 \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha)$$

$$\frac{de_y}{d\theta} = A \cos \beta (2 \sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha)$$

$$\frac{di_x}{d\theta} = A \sin \beta \cos \theta$$

$$\frac{di_y}{d\theta} = A \sin \beta \sin \theta$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{r^3}{\mu}}$$

4.4 Leggi di controllo ottimale

Riscritte le equazioni che descrivono il problema di Edelbaum, il passo successivo è quello di determinare le leggi di controllo che, per una trasferta tra due orbite, ne minimizzano il tempo di volo. Il problema può essere risolto assegnando il tempo iniziale, assumendo spinta continua per tutto il trasferimento e velocità angolare costante; infine si massimizza $-\theta_f$ dato il valore iniziale θ_0 .

Si definisce ora l'operatore Hamiltoniano, ottenuto moltiplicando le prime cinque precedenti relazioni per una variabile ausiliaria λ (diversa per ciascuna equazione, ma comunque tutte costanti) e poi sommandole.

$$H = A \left[\lambda_a 2r \cos \alpha \cos \beta + \lambda_{e_x} (2 \cos \theta \cos \alpha \cos \beta + \sin \theta \sin \alpha \cos \beta) + \right. \\ \left. \lambda_{e_y} (2 \sin \theta \cos \alpha \cos \beta - \cos \theta \sin \alpha \cos \beta) + \lambda_{i_x} \cos \theta \sin \beta + \lambda_{i_y} \sin \theta \sin \beta \right]$$

Le leggi del controllo ottimale vengono ottenute imponendo la stazionarietà dell'Hamiltoniano rispetto agli angoli α e β

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial \beta} = 0$$

Vengono definite le seguenti quantità per poter risolvere il problema

- $\lambda_e = \pm \sqrt{\lambda_{e_x}^2 + \lambda_{e_y}^2}$, il segno viene scelto in modo tale da essere concorde a λ_a
- $\theta_e = \tan^{-1} \frac{\lambda_{e_y}}{\lambda_{e_x}}$, con $\lambda_{e_x} = \lambda_e \cos \theta_e$ $\lambda_{e_y} = \lambda_e \sin \theta_e$
- $\theta_i = \tan^{-1} \frac{\lambda_{i_y}}{\lambda_{i_x}}$, con $\lambda_{i_x} = \lambda_i \cos \theta_i$ $\lambda_{i_y} = \lambda_i \sin \theta_i$

Le leggi di controllo ottimale devono, oltre che annullare le derivate parziali dell'Hamiltoniano, anche massimizzarlo come previsto dal principio del massimo di Pontryagin^[2], per cui si trova:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{2[\lambda_a r + \lambda_e \cos(\theta - \theta_e)]}{X_\alpha} \\ \sin \alpha &= \frac{\lambda_e \sin(\theta - \theta_e)}{X_\alpha} \\ \cos \beta &= \frac{\sqrt{4[\lambda_a r + \lambda_e \cos(\theta - \theta_e)]^2 + [\lambda_e \sin(\theta - \theta_e)]^2}}{X_\beta} \\ \sin \beta &= \frac{\lambda_i \cos(\theta - \theta_i)}{X_\beta}\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}X_\alpha &= \sqrt{4[\lambda_a r + \lambda_e \cos(\theta - \theta_e)]^2 + [\lambda_e \sin(\theta - \theta_e)]^2} \\ X_\beta &= \sqrt{4[\lambda_a r + \lambda_e \cos(\theta - \theta_e)]^2 + [\lambda_e \sin(\theta - \theta_e)]^2 + [\lambda_i \cos(\theta - \theta_i)]^2}\end{aligned}$$

Poiché l'Hamiltoniano è omogeneo rispetto alle variabili aggiunte in precedenza, fissato il valore di una di esse, le altre possono essere scalate in maniera arbitraria. Il problema risulta quindi essere definito conoscendo cinque incognite, di cui una è la longitudine finale θ_f e le altre sono quattro variabili aggiuntive; si otterranno quindi i valori desiderati di a, e_x, e_y, i_x, i_y .

Possiamo rianalizzare i tre casi già visti nel paragrafo 4.2 alla luce delle formulazioni precedenti delle leggi di controllo ottimale:

- Variazione del solo semiasse maggiore
 - $\lambda_{e_x} = \lambda_{e_y} = \lambda_{i_x} = \lambda_{i_y} = 0$
 - $\beta = 0^\circ$
 - $\alpha = 0^\circ, 180^\circ$ a seconda se $\lambda_a, \Delta a$ risultano positivi o negativi
- Variazione della sola eccentricità
 - $\lambda_a = \lambda_{i_x} = \lambda_{i_y} = 0$
 - $\beta = 0^\circ$
 - $\alpha = \tan^{-1} \left[\frac{1}{2} \tan(\theta - \theta_e) \right] \cong \theta - \theta_e$

^[2] Matematico sovietico, lavorò in molti campi tra cui la topologia algebrica e differenziale (Mosca, 1908 – Mosca, 1988)

- Variazione di semiasse maggiore e inclinazione

- $\lambda_{e_x} = \lambda_{e_y} = 0$
- $\alpha = 0^\circ, 180^\circ$ in base al segno di $\lambda_a, \Delta a$
- $\beta = \tan^{-1} \left[\frac{\lambda_i \cos(\theta - \theta_i)}{2r\lambda_a} \right]$

Si può osservare che, dopo una rivoluzione, nel caso in cui si voglia avere variazione del solo semiasse maggiore o della sola eccentricità, si debba avere $\beta = 0^\circ$; per il secondo caso deve valere anche

$$\frac{\Delta e_y}{\Delta e_x} = \tan \theta_e$$

Nel caso in cui si vogliano modificare contemporaneamente sia semiasse maggiore che inclinazione, dovrà essere verificato che

$$\frac{\Delta i_y}{\Delta i_x} = \tan \theta_i$$

Per ognuno di questi tre casi, Edelbaum calcolò i valori di ΔV :

- Variazione del solo semiasse maggiore

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2} \frac{\Delta a}{r}$$

- Variazione della sola eccentricità

$$\frac{\Delta V}{V} \cong 0.649 \Delta e$$

- Variazione di semiasse maggiore e inclinazione

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\pi}{2} \Delta i$$

Questi tre casi sono molto particolari poiché solo uno o al massimo due parametri orbitali vengono modificati, lasciando invariati gli altri. E' possibile però avere molte altre combinazioni di questi parametri che non hanno una soluzione fornita da una semplice formula. In ogni caso il ΔV necessario può essere calcolato, in prima valutazione, come la somma vettoriale dei ΔV necessari alla modifica di ogni singolo parametro, considerando quindi $\Delta a, \Delta e$ e Δi indipendenti tra loro. Si può quindi scrivere

$$\Delta V = \sqrt{(k_a \Delta a)^2 + (k_e \Delta e)^2 + (k_i \Delta i)^2}$$

dove

$$k_a = \frac{1}{2} \frac{V_0}{a_0}$$

$$k_e = 0.649 V_0$$

$$k_i = \frac{\pi}{2} V_0$$

I nuovi valori introdotti fanno riferimento all'orbita media tra quella iniziale e finale e vengono calcolati come

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0}}$$

$$a_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

4.5 Leggi di controllo subottimale

Poiché le leggi di controllo ottimale prevedono la risoluzione di un problema di ottimo, spesso di difficile soluzione o con costi computazionali elevati, può essere utile trovarne un'approssimazione in modo tale che il problema sia risolvibile per via algebrica. Come ipotesi vengono considerate piccole variazioni dei tre parametri orbitali che stiamo considerando (semiasse maggiore, eccentricità, inclinazione).

Per quanto riguarda l'angolo α si vede come la sua legge di controllo ottimale dipenda da $\frac{\lambda_a}{\lambda_e}$ e dall'angolo θ_e , l'angolo per cui la spinta è parallela (concorde o discorde) alla traiettoria dello spacecraft.

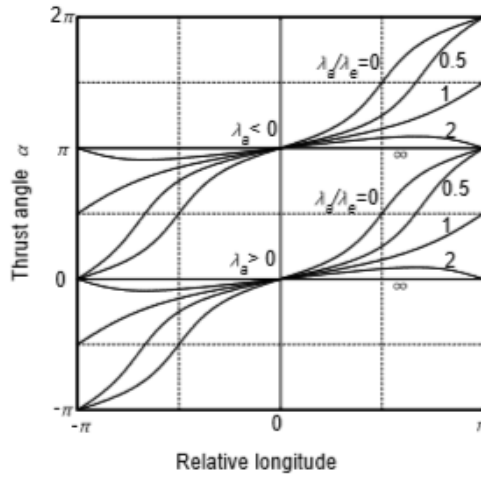


Figura 4.5 Andamento della legge ottimale

Nell'intervallo $-\pi < \theta - \theta_e < \pi$ la legge è comunque ben approssimabile da

$$\alpha = \begin{cases} \Lambda(\theta - \theta_e) & \text{se } \lambda_a, \lambda_e > 0 \\ \Lambda(\theta - \theta_e) + \pi & \text{se } \lambda_a, \lambda_e < 0 \end{cases}$$

Il valore Λ è un parametro che varia tra 0 e 1 e che dipende dal rapporto $\frac{\lambda_a}{\lambda_e}$.

Per $\Lambda = 0$ si ha spinta solo in direzione tangenziale, per $\Lambda = 1$ si ha la spinta in direzione costante: nel primo caso quindi si ha solo variazione di semiasse maggiore, nel secondo di sola eccentricità.

Le equazioni planetarie in funzione della longitudine θ possono essere riscritte alla luce delle leggi di controllo subottimale appena formulate; consideriamo solo il caso in cui $\lambda_a, \lambda_e > 0$, si sostituisce $\alpha = \Lambda(\theta - \theta_e)$ e si ottiene

$$\frac{da}{d\theta} = 2rA \cos \beta \cos[\Lambda(\theta - \theta_e)]$$

$$\frac{de_x}{d\theta} = A \cos \beta \{2 \cos \theta \cos[\Lambda(\theta - \theta_e)] + \sin \theta \sin[\Lambda(\theta - \theta_e)]\}$$

$$\frac{de_y}{d\theta} = A \cos \beta \{2 \sin \theta \cos[\Lambda(\theta - \theta_e)] - \cos \theta \sin[\Lambda(\theta - \theta_e)]\}$$

Integrando tra la longitudine iniziale θ_0 e quella finale θ_f è possibile ottenere

$$\begin{aligned}\Delta a &= \frac{2rA \cos \beta}{\Lambda} \{ \sin[\Lambda(\theta_f - \theta_e)] - \sin[\Lambda(\theta_0 - \theta_e)] \} \\ \Delta e_x &= \frac{3A \cos \beta}{2(1 - \Lambda)} \{ \sin[(1 - \Lambda)\theta_f + \Lambda\theta_e] - \sin[(1 - \Lambda)\theta_0 + \Lambda\theta_e] \} \\ &\quad + \frac{A \cos \beta}{2(1 + \Lambda)} \{ \sin[(1 + \Lambda)\theta_f - \Lambda\theta_e] - \sin[(1 + \Lambda)\theta_0 - \Lambda\theta_e] \} \\ \Delta e_y &= \frac{3A \cos \beta}{2(1 - \Lambda)} \{ -\cos[(1 - \Lambda)\theta_f + \Lambda\theta_e] + \cos[(1 - \Lambda)\theta_0 + \Lambda\theta_e] \} \\ &\quad + \frac{A \cos \beta}{2(1 + \Lambda)} \{ -\cos[(1 + \Lambda)\theta_f - \Lambda\theta_e] + \cos[(1 + \Lambda)\theta_0 - \Lambda\theta_e] \}\end{aligned}$$

Per valutarle dopo una rivoluzione, basta imporre che $\theta_0 = \theta_e - \pi$ e $\theta_f = \theta_e + \pi$, ottenendo così

$$\begin{aligned}(\Delta a)_{2\pi} &= \frac{4Ar \cos \beta}{\Lambda} \sin(\Lambda\pi) \\ (\Delta e_x)_{2\pi} &= \left[\frac{3A}{1 - \Lambda} - \frac{A}{1 + \Lambda} \right] \cos \beta \sin(\Lambda\pi) \cos \theta_e \\ (\Delta e_y)_{2\pi} &= \left[\frac{3A}{1 - \Lambda} - \frac{A}{1 + \Lambda} \right] \cos \beta \sin(\Lambda\pi) \sin \theta_e \\ (\Delta e)_{2\pi} &= \sqrt{(\Delta e_x)_{2\pi}^2 + (\Delta e_y)_{2\pi}^2} = \left[\frac{3A}{1 - \Lambda} - \frac{A}{1 + \Lambda} \right] \cos \beta \sin(\Lambda\pi)\end{aligned}$$

Analizziamo come diventano le precedenti relazioni nel caso in cui si abbiano i valori di Λ più significativi.

- $\Lambda = 0$ (spinta in direzione tangenziale)

$$(\Delta a)_{2\pi} = 4\pi Ar \cos \beta$$

$$(\Delta e_x)_{2\pi} = 0$$

$$(\Delta e_y)_{2\pi} = 0$$

$$(\Delta e)_{2\pi} = 0$$

- $\Lambda = 1$ (spinta in direzione costante)

$$(\Delta a)_{2\pi} = 0$$

$$(\Delta e_x)_{2\pi} = 3\pi A \cos \beta \cos \theta_e$$

$$(\Delta e_y)_{2\pi} = 3\pi A \cos \beta \sin \theta_e$$

$$(\Delta e)_{2\pi} = \sqrt{(\Delta e_x)_{2\pi}^2 + (\Delta e_y)_{2\pi}^2} = 3\pi A \cos \beta$$

La legge ottimale che invece regola β risulta notevolmente più complessa, poiché è funzione di $\frac{\lambda_a}{\lambda_e}$, θ_e , $\frac{\lambda_a}{\lambda_i}$, θ_i ; si può però assumere che $\beta = \text{cost}$ a tratti, a seconda di dove si trovi lo spacecraft lungo l'orbita. Viene quindi descritta tramite la legge subottimale

$$\beta = \begin{cases} \pm\beta_s & \text{per } \theta_e - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_e + \frac{\pi}{2} \\ \pm\beta_l & \text{per } \theta_e + \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_e + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

dove il segno di β_s e di β_l dipende dal segno di $\cos(\theta - \theta_i)$.

Riprendendo le equazioni riguardanti l'inclinazione viste nel paragrafo 4.3

$$\frac{di_x}{d\theta} = A \sin \beta \cos \theta \qquad \frac{di_y}{d\theta} = A \sin \beta \sin \theta$$

ed integrandole tra gli estremi di una mezza rivoluzione, indifferentemente tra $\left[\theta_e - \frac{\pi}{2}; \theta_e + \frac{\pi}{2}\right]$ oppure $\left[\theta_e + \frac{\pi}{2}; \theta_e + \frac{3\pi}{2}\right]$, è possibile calcolare le variazioni

$$(\Delta i_x)_\pi = 2A \sin \beta \cos \theta_e$$

$$(\Delta i_y)_\pi = 2A \sin \beta \sin \theta_e$$

$$(\Delta i)_\pi = \sqrt{(\Delta i_x)_\pi^2 + (\Delta i_y)_\pi^2} = 2A \sin \beta$$

Sebbene la legge di controllo subottimale preveda due diversi valori per l'angolo β , a seconda di quale semicirconferenza si stia considerando, nella nostra trattazione è stato considerato costante su tutta la circonferenza. In genere, infatti, gli archi di spinta sono relativamente corti e coinvolgono tratti di una semicirconferenza nella quale viene utilizzato un solo valore di β ; pertanto, usare due valori diversi di β non comporta differenze.

4.6 Fattore di correzione

Il fattore di correzione è stato introdotto nel lavoro **[4.2]** per migliorare ulteriormente la precisione dei risultati fornita dall'approssimazione, tenendo conto dell'interazione tra il cambio di orbita nel piano (Δa , Δe) e il cambio di piano (Δi). Esso è funzione di vari parametri orbitali e in particolare della posizione relativa delle linee di nodi ed apsidi, che andranno ad influenzare il consumo di propellente finale. Si considera una correzione del Δi con un coefficiente K che può essere scritto come:

$$K = k_0 + k_1 k_2 k_3$$

Descriviamo ora i quattro termini che sono stati usati nella precedente definizione:

- $k_0 = 0.6$
Rappresenta il costo del cambio di piano effettuato in un nodo. Il valore esatto sarebbe $2/\pi$, ma poiché l'utilizzo di una legge subottimale sovrastima i consumi, utilizzare un valore inferiore di k_0 mitiga questo effetto.

- $k_1 = 1 - \cos(2\omega_T)$
 ω_T rappresenta l'angolo tra la linea dei nodi e degli apsidali dell'asteroide considerato. Vengono penalizzati gli effetti della spinta quando i nodi e gli apsidali si trovano in quadratura tra loro ($\omega_T = \pi/2; 3\pi/2$), mentre non vi è penalità quando si trovano vicini ($\omega_T = 0; \pi; 2\pi$).
- $k_2 = 1.5 e_T$
 e_T rappresenta l'eccentricità dell'asteroide target. L'effetto di questo coefficiente è tanto più rilevante quanto maggiore è l'eccentricità; infatti, per asteroidi aventi grandi valori di eccentricità, è fondamentale che le accensioni siano localizzate il più vicino possibile al perielio e all'afelio, mentre per valori piccoli possono essere poste ai nodi riducendo il costo del cambio di piano
- $k_3 = \frac{3 + \cos \Delta\theta}{4}$
 $\Delta\theta$ è la lunghezza angolare dell'arco di spinta della manovra. Il fattore k_3 corregge gli effetti penalizzanti che si verificano quando $\Delta\theta$ supera i 90° di ampiezza, ovvero quando all'interno dell'arco di spinta sono contenute sia la linea dei nodi che quella degli apsidali.

5. RISULTATI

5.1 Introduzione

Il modello da cui prende spunto questa tesi, come già scritto varie volte nel corso della trattazione, è la missione M-ARGO dell'ESA, le cui date di partenza spaziano dal 1° gennaio 2020 al 31 dicembre 2023, mentre il tempo di volo massimo è 3 anni.

Ricordiamo come il nostro sia un problema a consumo minimo, non a tempo minimo; in quest'ultimo caso è abbastanza facile intuire che la soluzione migliore sia quella a spinta continua, per minimizzare il tempo di volo necessario. Per quanto riguarda una trasferta a consumo minimo, invece, risulta più efficiente una spinta concentrata in archi propulsi, mentre il resto della trasferta viene effettuata a motori spenti (si parla quindi di fase di coasting).

Prendendo come riferimento la propulsione di tipo chimico, che sfrutta manovre impulsive concentrate al periastro o all'apoastro dell'orbita, (manovre che occupano un arco molto piccolo rispetto all'orbita complessiva), si cerca anche nel caso della propulsione elettrica di imitare il più possibile questo schema. Non essendo però adatta per manovre di questo tipo, nel caso della propulsione elettrica l'arco di spinta sarà distribuito per un certo angolo non trascurabile dell'orbita, localizzato il più possibile nell'intorno degli apsidali. La soluzione ottimale prevede che l'arco propulsivo necessario per la missione venga suddiviso in due sotto-archi più piccoli concentrati uno al periastro e uno all'apoastro, questo perché più l'arco di spinta è breve, minore sarà il consumo di propellente.

Lo scenario precedente vale nel caso di missioni con tempo di volo uguale o inferiore ad un anno; nel caso di missione con tempo di volo superiore ad un anno (come quello analizzato), la manovra che deve essere compiuta può essere suddivisa, oltre che in maniera "spaziale", anche in maniera "temporale". Ognuno dei due sotto-archi che si avrebbero nel caso di missione con durata di un anno, può essere frazionato n volte (con n il numero di anni a disposizione per la missione), poiché lo spacecraft passerà n volte sia al periastro che all'apoastro, prima di completare la sua missione.

La soluzione migliore è quella di suddividere in parti uguali il sotto-arco di spinta, per cui ogni arco è quindi un n -esimo di quello iniziale, migliorando i consumi perché ciascuno di essi ha dimensioni ridotte e con minori variazioni dei parametri orbitali. Il numero totale di archi di spinta che si avranno quindi per una missione di n anni sarà pari al doppio, $2n$. Deve comunque essere verificato che la somma delle singole variazioni dei parametri orbitali sia uguale a quella richiesta dall'intera manovra, altrimenti non potrei portare a compimento la missione.

La teoria ci dice quindi che, a parità di missione, se si effettuano meno di $2n$ archi propulsi il consumo sarà maggiore perché ciascun arco avrà dimensioni maggiori, mentre nel caso se ne effettuino di più il consumo sarà minore, ma non potrà essere soddisfatta la condizione di tempo massimo imposta dalla missione stessa. Nel seguito del capitolo analizzeremo proprio quest'ultimo aspetto, non interessandoci del completamento della missione nei tempi previsti.

5.2 Il metodo di Edelbaum

- Input del codice

Riprendendo il paragrafo [4.1](#), vediamo ora nella seguente tabella le caratteristiche principali dei 62 asteroidi che sono stati analizzati in questo lavoro, avendo già eliminato i 13 asteroidi che non rispettano le approssimazioni di Edelbaum. Questi valori saranno elaborati dal codice Fortran utilizzato per restituire degli output, tra i quali quello di nostro maggiore interesse è il consumo, che saranno studiati nel prosieguo della trattazione.

	Nome	a (AU)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)	Famiglia	Perielio (AU)	Afelio (AU)
2	2016 TB57	1.102241	0.123172	0.29833	147.79768	294.83046	Apollo	0.9665	1.238
3	2013 WA44	1.10046	0.060475	2.3022	176.73105	56.51291	Amor	1.0339	1.167
4	2013 BS45	0.991734	0.08375	0.77255	150.69433	83.36499	Aten	0.9086	1.0746
5	2016 CF137	1.090447	0.100125	2.44474	301.4955	132.54674	Apollo	0.9813	1.1996
6	2014 YD	1.072141	0.08662	1.73574	34.11615	117.64006	Apollo	0.9793	1.165
7	2015 BM510	0.946808	0.121533	1.58896	357.34108	267.87545	Aten	0.8318	1.0619
8	2014 SD304	1.167882	0.108383	2.29384	19.29891	7.62817	Amor	1.0413	1.2951
9	2012 EC	1.15165	0.137425	0.91346	333.90622	306.07875	Apollo	0.9934	1.3099
10	2009 CV	1.115763	0.150727	0.9427	181.35789	22.40127	Apollo	0.9476	1.284
11	2009 OS5	1.144264	0.096778	1.69524	120.85205	145.36018	Amor	1.034	1.2621
12	2004 JN1	1.085072	0.175519	1.49981	2.11706	143.97027	Apollo	0.8946	1.2761
13	2003 SM84	1.125361	0.081947	2.79555	87.37361	186.67718	Amor	1.0332	1.2176
14	2012 UV136	1.007334	0.139238	2.21338	288.60724	209.90009	Apollo	0.8642	1.1461
15	1996 XB27	1.188883	0.057893	2.46453	58.18181	179.4124	Amor	1.1200	1.2577
16	2017 BF29	1.181142	0.134128	2.61351	203.76606	302.3885	Amor	1.0226	1.3398
17	2001 QJ142	1.06209	0.086187	3.10374	63.96691	184.38497	Apollo	0.9706	1.1536
18	2013 EM89	1.178027	0.116635	2.41113	189.94806	355.55956	Amor	1.0406	1.3154
19	2012 HK31	1.073756	0.120735	2.20518	96.69206	222.66983	Apollo	0.9442	1.2034
20	2013 PA7	1.153948	0.08773	3.47195	93.27771	341.33642	Amor	1.0528	1.2552
21	2015 PL57	1.120451	0.144108	1.63058	115.25573	112.62783	Apollo	0.9591	1.2819
22	2016 TB18	1.077533	0.084243	1.52703	305.6114	190.32947	Apollo	0.9867	1.1683
23	2012 UW68	1.136125	0.155389	2.47224	102.39246	15.37622	Apollo	0.9596	1.3127
24	2017 HK1	0.90902	0.147072	1.50986	258.73011	141.14066	Aten	0.7754	1.0428
25	2004 VJ1	0.943698	0.164116	1.29396	332.27382	233.32456	Aten	0.7889	1.0986
26	2015 TZ24	1.191495	0.100437	3.34998	3.17384	359.80345	Amor	1.0718	1.3108
27	1999 AO10	0.912113	0.11087	2.62267	7.98271	313.1764	Aten	0.8111	1.0131
28	2014 YN	0.892219	0.134309	1.20836	15.83461	239.38267	Aten	0.7727	1.0116
29	2007 TF15	1.108846	0.044788	4.25325	28.85938	193.1249	Amor	1.0592	1.1585
30	2001 CQ36	0.937748	0.177137	1.25811	344.37986	30.79177	Aten	0.7717	1.1038
31	2014 EK24	1.008134	0.070121	4.8049	63.74735	340.58769	Apollo	0.9377	1.0792
32	2010 HA	0.959832	0.195902	2.18279	185.72315	251.30161	Aten	0.7719	1.1478
33	2005 TG50	0.92344	0.134485	2.40091	200.933	344.37452	Aten	0.7993	1.0478
35	2008 TX3	1.179258	0.186612	2.38149	249.85083	193.28145	Apollo	0.9592	1.3993
36	2006 FH36	0.954942	0.198561	1.58699	154.73736	280.7215	Aten	0.7654	1.1446
37	2007 UY1	0.951139	0.175371	1.01915	273.5733	337.81675	Aten	0.7839	1.1177

38	2013 XY20	1.130599	0.106429	2.86269	18.18564	78.63363	Apollo	1.0101	1.2575
39	2015 VV	1.136581	0.104595	4.00704	177.1898	212.78419	Amor	1.0178	1.2555
40	2006 QV89	1.192059	0.224416	1.07141	236.72043	166.06011	Apollo	0.925	1.461
43	2000 AE205	1.164572	0.137691	4.45933	150.32337	271.63028	Apollo	1.0043	1.325
44	2007 DD	0.987424	0.11579	2.62417	77.57071	329.00174	Aten	0.8731	1.1016
45	2014 MF18	0.886046	0.162357	2.61412	350.35217	102.21195	Aten	0.746	1.0295
46	2009 RT1	1.155508	0.106202	4.15037	136.50157	159.65927	Amor	1.0328	1.2776
49	2016 FY2	0.869326	0.177426	1.86792	204.97144	150.003	Aten	0.7153	1.0237
50	2003 LN6	0.856207	0.210049	0.6603	211.56551	214.65202	Aten	0.6764	1.036
51	2013 HP11	1.184592	0.125323	4.15585	9.49144	208.65591	Amor	1.0362	1.3331
52	2014 UY	1.174326	0.172837	3.56453	245.6405	218.82543	Apollo	0.9713	1.3774
53	2017 EB3	1.039211	0.152532	2.83968	247.51396	25.62126	Apollo	0.8808	1.198
55	2009 HC	1.039281	0.125662	3.77839	269.89652	203.7947	Apollo	0.9087	1.17
58	2014 QH33	1.085281	0.184885	2.83194	264.44685	335.98649	Apollo	0.8848	1.2859
60	2011 AA37	1.095854	0.016786	3.81702	131.50884	275.70971	Amor	1.0776	1.1142
61	2017 HZ4	0.907959	0.215439	1.81218	312.19368	67.29972	Aten	0.7128	1.1073
63	2001 BB16	0.854636	0.172441	2.02573	195.55951	122.56381	Aten	0.7081	1.0025
64	2012 UY68	1.174975	0.228339	2.9005	35.75782	70.30228	Apollo	0.9067	1.4431
66	2012 WH	0.90732	0.144997	4.09441	8.69122	235.19608	Aten	0.7757	1.0388
67	2016 UE	1.05686	0.152006	1.08815	296.49775	181.06334	Apollo	0.8962	1.2176
69	2015 FG36	1.10007	0.168389	3.51409	300.57002	328.81456	Apollo	0.9149	1.2853
70	2006 XP4	0.873024	0.214979	0.51458	346.04353	293.81418	Aten	0.6857	1.0599
71	2013 RV9	1.167299	0.200129	3.51056	108.75607	332.67464	Apollo	0.9338	1.4009
73	2010 WR7	1.04621	0.235299	1.56256	159.13837	20.45077	Apollo	0.7999	1.2926
74	2017 BF30	1.044848	0.130208	3.62346	256.13793	123.09318	Apollo	0.9089	1.1807
75	2011 CG2	1.177483	0.158584	2.75733	283.85193	293.22975	Apollo	0.9908	1.3637
76	2016 TP11	1.03671	0.177694	1.53755	108.17018	168.6058	Apollo	0.8525	1.2209

- Analisi del codice Fortran

L'implementazione del problema di ricerca della soluzione ottimale per una trasferta a consumo minimo verso un NEA è stata realizzata tramite un codice in linguaggio Fortran, di cui analizziamo brevemente i passaggi chiave.

Le quantità che dovranno essere calcolate, in particolare angoli, velocità, accelerazioni e tempi, vengono adimensionalizzati mediante opportuni fattori di conversione. Vengono inoltre definiti i valori delle specifiche di missione (vedi paragrafo 4.1) e i margini entro i quali sono verificate le approssimazioni dell'ipotesi di Edelbaum (paragrafo 4.2).

Il codice riceve in input da un file tutti i parametri orbitali necessari all'analisi descritti nella tabella precedente; il programma lavorerà suddividendo la missione nel numero scelto di archi che l'utente ha la possibilità di inserire da tastiera.

Per ciascuna manovra al perielio e all'afelio vengono poi calcolate le variazioni dei parametri orbitali, in funzione delle variazioni totali e del numero di archi, come

$$\Delta a_p = \frac{\Delta a + \Delta e}{2n}$$

$$\Delta e_{P_x} = \Delta a_P \frac{\Delta e_x}{\Delta e}$$

$$\Delta e_{P_y} = \Delta a_P \frac{\Delta e_y}{\Delta e}$$

$$\Delta e_P = \sqrt{\Delta e_{P_x}^2 + \Delta e_{P_y}^2}$$

per le manovre al perielio, mentre all'afelio varranno

$$\Delta a_A = \frac{\Delta a - \Delta e}{2n}$$

$$\Delta e_{A_x} = -\Delta a_A \frac{\Delta e_x}{\Delta e}$$

$$\Delta e_{A_y} = -\Delta a_A \frac{\Delta e_y}{\Delta e}$$

$$\Delta e_A = \sqrt{\Delta e_{A_x}^2 + \Delta e_{A_y}^2}$$

Per quanto riguarda la variazione dell'inclinazione, essa viene calcolata come differenza tra i valori relativi all'asteroide considerato e quelli della Terra

$$\Delta i_x = i_{ast_x} - i_{T_x} = (i \cos \Omega)_{ast} - (i \cos \Omega)_T$$

$$\Delta i_y = i_{ast_y} - i_{T_y} = (i \sin \Omega)_{ast} - (i \sin \Omega)_T$$

Ciascuna di queste due quantità viene moltiplicata per il fattore di correzione citato nel paragrafo 4.6, per migliorare la precisione del metodo utilizzato; viene infine calcolata

$$\Delta i = \sqrt{\Delta i_x^2 + \Delta i_y^2}$$

Introducendo una variabile chiamata *rip*, che ripartisce la manovra svolta al perielio rispetto alla manovra complessiva attuata su una rivoluzione

$$rip = \frac{|\Delta a + \Delta e|}{|\Delta a + \Delta e| + |\Delta a - \Delta e|}$$

i nuovi valori della variazione dell'inclinazione per ogni rivoluzione diventano

$$\Delta i_P = \frac{\Delta i \cdot rip}{n}$$

$$\Delta i_A = \frac{\Delta i(1 - rip)}{n}$$

Si definisce una discretizzazione angolare per l'orbita, con passo di 1°, per trovare così i possibili punti di partenza della missione; per poter svolgere la procedura iterativa necessaria a risolvere il nostro problema a consumo minimo, si devono determinare i valori di Λ , θ_e , $\Delta\theta_e$ e β al fine di calcolare le variazioni di Δa , Δe_x e Δe_y .

Questa procedura richiede l'individuazione di valori di tentativo da cui iniziare a svolgere l'analisi. In particolare, vengono scelti come valori iniziali

$$\Lambda = \frac{-1 + \sqrt{1 + 16 r \frac{\Delta e}{\Delta a} \left(1 + r \frac{\Delta e}{\Delta a}\right)}}{4 \left(1 + r \frac{\Delta e}{\Delta a}\right)}$$

$$\theta_e = \tan^{-1} \frac{\Delta e_y}{\Delta e_x}$$

$$\beta = \sin^{-1} \frac{k_i \cdot \Delta i}{\Delta V}$$

Per ultimo, facendo riferimento alle leggi di controllo subottimale del paragrafo 4.5, ipotizzando una legge lineare tra la variazione del semiasse maggiore e $\Delta\theta_e$ pari a

$$\Delta a = (\Delta a)_{2\pi} \frac{\Delta\theta_e}{2\pi}$$

si ricava, come valore di inizializzazione

$$\Delta\theta_e = \frac{2\pi \cdot \Delta a}{(\Delta a)_{2\pi}}$$

Le leggi di controllo subottimale vengono poi implementate e sono determinati su un'intera rivoluzione i parametri Δa , Δe_x e Δe_y attraverso le relative formule descritte nel paragrafo 4.5; questi ultimi valori sono poi confrontati con quelli desiderati, e vengono corretti secondo un metodo di Newton per rendere nulli gli errori.

Tramite un ciclo sono eseguite le principali operazioni per la determinazione dei parametri necessari al calcolo della posizione e della lunghezza degli archi di spinta; in base al segno di Δa viene scelta la legge

$$\alpha = \Lambda(\theta - \theta_e)$$

se Δa positivo, altrimenti

$$\alpha = \Lambda(\theta - \theta_e) + \pi$$

per il calcolo dell'angolo che la spinta forma con la direzione del moto.

Tramite un processo iterativo si definisce un nuovo valore di β che porti al raggiungimento del Δi desiderato; all'interno di questo ciclo ogni volta viene valutata l'accelerazione considerando la massa media, per mezzo della formula

$$a = \frac{T}{m_{media}} |\cos \beta|$$

Viene infine calcolato, integrando questa accelerazione nel tempo, il ΔV ; tra tutti i valori trovati ne viene selezionato il minimo. Questa procedura è ripetuta sia per la manovra effettuata al perielio che per quella all'afelio: i due ΔV minimi così trovati vengono sommati e forniscono il ΔV totale sulla singola rivoluzione.

Le variabili più importanti di nostro interesse sono rese in output su alcuni file, in modo da poter essere facilmente consultabili.

5.3 Formula interpolante

Per la determinazione dei parametri delle 62 missioni verso i NEA, il codice esegue per ciascuna di esse tutta l'analisi di Edelbaum; questa si presenta più veloce rispetto ai metodi di ottimizzazione esatti, che richiedono l'integrazione delle equazioni del moto per fornire il risultato, ma ha comunque tempi di calcolo dell'ordine di qualche secondo per asteroide. Nel caso si dovesse analizzare un elevato numero di traiettorie, i tempi necessari per ottenere i risultati diventerebbero quindi non trascurabili.

Per poter ridurre i tempi di calcolo dell'analisi di Edelbaum si è pensato di effettuare la medesima per un insieme di asteroidi che chiameremo "standard", di introdurre un'approssimazione analitica dei risultati e di applicarla ai 62 asteroidi "veri", trovando quindi una stima più veloce del consumo rispetto al metodo fin qui utilizzato.

Inoltre, il metodo proposto da Edelbaum ha mostrato alcune incongruenze, una in particolare il fatto che non per tutti gli asteroidi si abbia avuto una riduzione del consumo passando da $n = 3$ a $n = 4$, (che sono stati i casi analizzati) come invece ci si sarebbe aspettato in base alla teoria. Queste, molto probabilmente, derivano da effetti legati alle stime della massa media che vengono effettuate all'interno del codice, e dalle correzioni che vengono applicate al di , entrambi effetti che sono difficilmente eliminabili senza stravolgere il processo. Pertanto, l'uso dell'interpolazione dei dati dovrebbe (almeno in parte) risolvere il problema.

Vediamo più in dettaglio il metodo di interpolazione applicato.

Il calcolo della massa di propellente consumata dipende direttamente dai valori dei due ΔV derivanti dalle manovre di accensione presenti ad ogni rivoluzione dello spacecraft. Poiché vale:

$$m_p = m_0 - m_f$$

dove m_0 è la massa iniziale della sonda, m_f è la massa a fine missione e m_p la massa di propellente consumata, e ricordando la formula di Tsiolkovsky

$$m_f = m_0 e^{-\Delta V/c}$$

è possibile riscrivere la formula precedente come

$$m_p = m_0 - m_0 e^{-\Delta V/c} = m_0 (1 - e^{-\Delta V/c})$$

I parametri che intervengono nella formula sono:

- m_0 , pari a 20 kg per la missione analizzata
- c è la velocità efficace di scarico ($c = I_{sp} g_0$)
- ΔV è la somma del ΔV_1 (relativo alla manovra al periastro) e ΔV_2 (manovra all'apoaastro) effettuata sulla singola rivoluzione moltiplicata per n , il numero di rivoluzioni che lo spacecraft compie nella sua missione

Dopo aver studiato i valori forniti dal codice relativi ai 62 asteroidi "veri" si è notato come, con buona approssimazione, vi sia una dipendenza quadratica tra il de della singola manovra e il corrispettivo ΔV ; ciò ha portato all'idea di far variare in modo omogeneo il de per un set di 75 asteroidi fittizi, e di esprimere quindi il ΔV mediante un'unica formula parabolica che possa racchiudere al suo interno sia il contributo del de che quello del di .

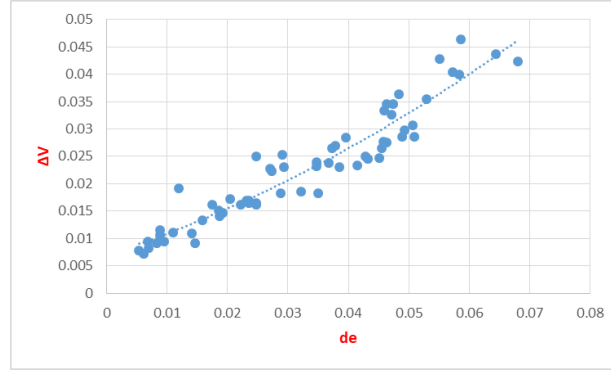


Figura 5.1 Relazione tra ΔV e de

Questo insieme di asteroidi è stato studiato imponendo determinati parametri orbitali, in modo tale che il valore di da sia nullo per ciascuno di essi e che il de totale vari secondo una legge lineare

$$de = \frac{j}{180}$$

dove j è il contatore relativo all'asteroide, ed è quindi un numero compreso tra 1 e 75.

Per quanto riguarda l'inclinazione, l'idea è stata quella di porre direttamente in relazione il di con il de , utilizzando un parametro $k = \frac{di}{de}$ calcolato per mezzo dei di e de relativi alla singola manovra. Poiché il de della singola manovra è pari a

$$de_1 = de_2 = \frac{da + de}{2n} = \frac{de}{2n}$$

mentre il di viene calcolato come

$$di_1 = di_2 = \frac{di}{n}$$

il rapporto che sussiste tra di e de totali è pari alla metà di quello calcolato tra il di e il de relativi alla singola manovra.

Il range di valori per k dei 62 asteroidi "veri" varia tra 0 e 0.5 per la quasi totalità di essi (fanno eccezione i n° 31 e 55), mantenendosi pressochè costante sia per la manovra al perielio che all'afelio e anche in modo indipendente dal numero n di rivoluzioni effettuate dallo spacecraft. Pertanto, allo scopo di determinare la formula quadratica interpolante pensata per esprimere il dV , si sono scelti tre diversi valori di k (0, 0.25 e 0.5) relativi alla manovra, a cui corrispondono le relazioni tra di e de totali

$$di = 0; di = 0.125 \cdot de; di = 0.25 \cdot de$$

Per ognuno dei 75 asteroidi è stata svolta l'analisi di Edelbaum imponendo, di volta in volta, una tra le tre relazioni precedenti; per rendere il più possibile omogenea la trattazione degli asteroidi di prova, sono stati trascurati dal codice gli effetti legati al fattore di correzione, alla variabile rip e alla massa media, imponendoli pari a 1. Tutte le soluzioni sono state ottenute scegliendo il caso $n = 3$.

Ognuno dei tre casi fornisce in output i valori del dV e del de , le cui relazioni possono essere approssimate da equazioni del tipo

$$dV_{0.5} = a_{0.5}de^2 + b_{0.5}de$$

$$dV_{0.25} = a_{0.25}de^2 + b_{0.25}de$$

$$dV_0 = a_0de^2 + b_0de$$

avendo imposto il passaggio delle parabole interpolanti per l'origine.

L'idea generale è quella di interpolare per mezzo di una parabola le tre curve precedenti, esprimendo il dV attraverso un'unica formula di equazione

$$dV = a(k) \cdot de^2 + b(k) \cdot de$$

I coefficienti di quest'ultima possono essere espressi come funzioni anch'esse paraboliche rispetto al k , nel seguente modo

$$a(k) = aa \cdot k^2 + ba \cdot k + ca$$

$$b(k) = ab \cdot k^2 + bb \cdot k + cb$$

I sei coefficienti di queste equazioni vengono calcolati imponendo che

$$a(k) = a_{0.5}, b(k) = b_{0.5} \quad \text{quando } k \text{ (manovra) è pari ad } 0.5$$

$$a(k) = a_{0.25}, b(k) = b_{0.25} \quad \text{quando } k \text{ (manovra) è pari ad } 0.25$$

$$a(k) = a_0, b(k) = b_0 \quad \text{quando } k \text{ (manovra) è pari ad } 0$$

e risolvendo i sistemi 3x3 che ne derivano.

La trattazione è stata effettuata una prima volta sfruttando i risultati derivanti dalla manovra al periastro; dopo aver ricavato l'equazione della parabola interpolante, questa è stata applicata agli asteroidi veri. Ottenuto il valore del dV ed aver quindi calcolato il consumo, quest'ultimo è stato confrontato con quello già noto fornito da un metodo indiretto, che rappresenta la stima più precisa e corretta per missioni del genere di quella presa in esame. Le differenze maggiori tra i valori dei due metodi sono state trovate per asteroidi aventi grandi raggi all'apoaastro; si è quindi scelto di utilizzare i dati riferiti a quest'ultima manovra per cercare di migliorare i risultati.

Nella seguente tabella sono presenti i valori dei de e dei dV derivanti dall'analisi di Edelbaum applicata agli asteroidi fittizi, dai quali sono state poi ricavate le tre parabole interpolanti.

k = 0		k = 0.25		k = 0.5	
de2	dV2	de2	dV2	de2	dV2
0.000926	0.0004683	0.000926	0.000591	0.000926	0.00086
0.001852	0.0009406	0.001852	0.001188	0.001852	0.00173
0.002778	0.0014215	0.002778	0.001788	0.002778	0.00260
0.003704	0.0019078	0.003704	0.002395	0.003704	0.00347
0.004630	0.0024000	0.004630	0.003004	0.004630	0.00434
0.005556	0.0028977	0.005556	0.003617	0.005556	0.00522
0.006481	0.0033999	0.006481	0.004239	0.006481	0.00610
0.007407	0.0039147	0.007407	0.004862	0.007407	0.00698

0.008333	0.0044229	0.008333	0.005492	0.008333	0.00787
0.009259	0.0049520	0.009259	0.006121	0.009259	0.00875
0.010185	0.0054759	0.010185	0.006760	0.010185	0.00964
0.011111	0.0059986	0.011111	0.007395	0.011111	0.01053
0.012037	0.0065468	0.012037	0.008045	0.012037	0.01141
0.012963	0.0070857	0.012963	0.008686	0.012963	0.01230
0.013889	0.0076216	0.013889	0.009340	0.013889	0.01319
0.014815	0.0081612	0.014815	0.009987	0.014815	0.01409
0.015741	0.0087180	0.015741	0.010641	0.015741	0.01498
0.016667	0.0092881	0.016667	0.011294	0.016667	0.01587
0.017593	0.0098397	0.017593	0.011948	0.017593	0.01677
0.018519	0.0103907	0.018519	0.012603	0.018519	0.01767
0.019444	0.0109482	0.019444	0.013259	0.019444	0.01856
0.020370	0.0115060	0.020370	0.013916	0.020370	0.01946
0.021296	0.0120925	0.021296	0.014573	0.021296	0.02037
0.022222	0.0126475	0.022222	0.015231	0.022222	0.02127
0.023148	0.0132200	0.023148	0.015890	0.023148	0.02217
0.024074	0.0137846	0.024074	0.016549	0.024074	0.02308
0.025000	0.0143496	0.025000	0.017209	0.025000	0.02398
0.025926	0.0149143	0.025926	0.017870	0.025926	0.02489
0.026852	0.0154793	0.026852	0.018531	0.026852	0.02580
0.027778	0.0160445	0.027778	0.019193	0.027778	0.02671
0.028704	0.0166099	0.028704	0.019856	0.028704	0.02763
0.029630	0.0171750	0.029630	0.020519	0.029630	0.02854
0.030556	0.0177401	0.030556	0.021183	0.030556	0.02946
0.031481	0.0183054	0.031481	0.021848	0.031481	0.03038
0.032407	0.0188708	0.032407	0.022513	0.032407	0.03130
0.033333	0.0194363	0.033333	0.023179	0.033333	0.03223
0.034259	0.0200018	0.034259	0.023846	0.034259	0.03316
0.035185	0.0205673	0.035185	0.024514	0.035185	0.03409
0.036111	0.0211328	0.036111	0.025182	0.036111	0.03502
0.037037	0.0216986	0.037037	0.025852	0.037037	0.03596
0.037963	0.0222647	0.037963	0.026522	0.037963	0.03691
0.038889	0.0228311	0.038889	0.027193	0.038889	0.03787
0.039815	0.0233977	0.039815	0.027866	0.039815	0.03882
0.040741	0.0239643	0.040741	0.028540	0.040741	0.03979
0.041667	0.0245314	0.041667	0.029215	0.041667	0.04076
0.042593	0.0250990	0.042593	0.029892	0.042593	0.04173
0.043519	0.0256673	0.043519	0.030573	0.043519	0.04271
0.044444	0.0262360	0.044444	0.031255	0.044444	0.04369
0.045370	0.0268053	0.045370	0.031945	0.045370	0.04468
0.046296	0.0273750	0.046296	0.032634	0.046296	0.04567
0.047222	0.0279457	0.047222	0.033325	0.047222	0.04667
0.048148	0.0285188	0.048148	0.034020	0.048148	0.04767
0.049074	0.0290907	0.049074	0.034714	0.049074	0.04869
0.050000	0.0296682	0.050000	0.035417	0.050000	0.04971

0.050926	0.0302498	0.050926	0.036128	0.050926	0.05073
0.051852	0.0308242	0.051852	0.036846	0.051852	0.05177
0.052778	0.0314107	0.052778	0.037572	0.052778	0.05281
0.053704	0.0319998	0.053704	0.038305	0.053704	0.05386
0.054630	0.0325919	0.054630	0.039041	0.054630	0.05492
0.055556	0.0331769	0.055556	0.039783	0.055556	0.05599
0.056481	0.0337647	0.056481	0.040528	0.056481	0.05707
0.057407	0.0343761	0.057407	0.041279	0.057407	0.05816
0.058333	0.0349775	0.058333	0.042035	0.058333	0.05927
0.059259	0.0355745	0.059259	0.042797	0.059259	0.06038
0.060185	0.0361940	0.060185	0.043564	0.060185	0.06151
0.061111	0.0368116	0.061111	0.044337	0.061111	0.06266
0.062037	0.0374434	0.062037	0.045116	0.062037	0.06382
0.062963	0.0380834	0.062963	0.045902	0.062963	0.06500
0.063889	0.0387279	0.063889	0.046695	0.063889	0.06619
0.064815	0.0393773	0.064815	0.047495	0.064815	0.06741
0.065741	0.0400312	0.065741	0.048304	0.065741	0.06864
0.066667	0.0406905	0.066667	0.049120	0.066667	0.06990
0.067593	0.0413550	0.067593	0.049945	0.067593	0.07118
0.068519	0.0420256	0.068519	0.050779	0.068519	0.07249
0.069444	0.0427015	0.069444	0.051623	0.069444	0.07382

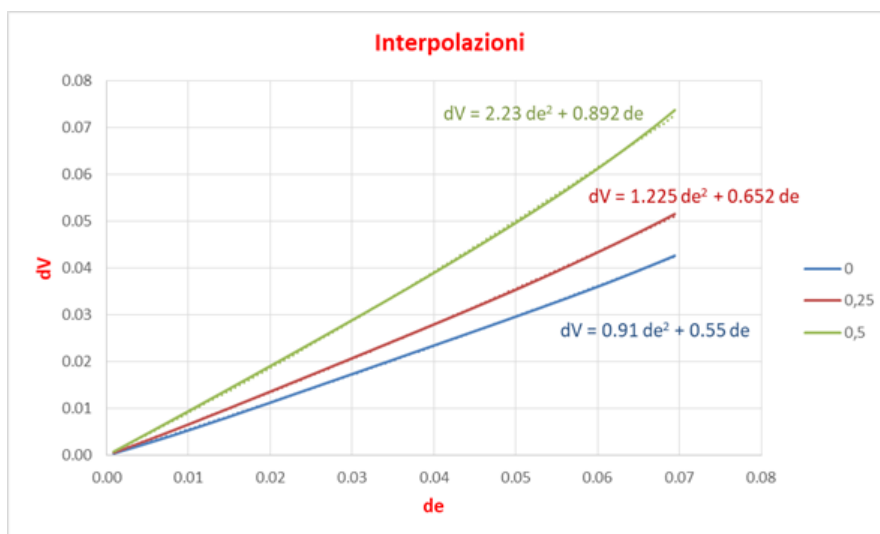


Figura 5.2 Le tre parabole interpolanti

Avendo adesso a disposizione i 6 coefficienti per le tre parabole, è possibile risolvere i due sistemi 3x3, potendo infine ricavare l'espressione per la formula generale interpolante, che risulta essere

$$dV = (5.5 k^2 - 0.12 k + 0.91) \cdot de^2 + (1.1 k^2 + 0.14 k + 0.55) \cdot de$$

Nella seguente tabella sono riassunti i parametri per il calcolo del consumo attraverso la formula appena descritta, applicata agli asteroidi “veri” nel caso di $n = 3$, dopo aver reintrodotto i valori esatti del fattore di correzione e della variabile *rip*.

La colonna “Consumo Edelbaum” fa riferimento alla massa di propellente consumata, calcolata dal codice non modificato di partenza.

	de1	di1	k1	dV1	de2	di2	k2	dV2	Consumo calcolato	Consumo Edelbaum
2	0.03499	0.00117	0.03340	0.02057	0.00090	0.00003	0.03345	0.00050	1.2008	1.0871
3	0.02881	0.00692	0.24023	0.01964	0.00468	0.00112	0.24023	0.00305	1.2905	1.2297
4	0.01455	0.00135	0.09270	0.00853	0.01730	0.00160	0.09270	0.01019	1.0706	1.0831
5	0.02939	0.01092	0.37163	0.02356	0.00076	0.00028	0.37224	0.00058	1.3698	1.3450
6	0.02480	0.00661	0.26669	0.01728	0.00075	0.00020	0.26681	0.00050	1.0185	0.9763
7	0.01406	0.00170	0.12104	0.00839	0.03179	0.00385	0.12104	0.01952	1.5753	1.6293
8	0.04559	0.00683	0.14974	0.02926	0.01038	0.00156	0.14990	0.00629	1.9845	1.8713
9	0.05096	0.00349	0.06841	0.03119	0.00041	0.00003	0.06856	0.00023	1.7644	1.6266
10	0.04508	0.00288	0.06383	0.02728	0.00649	0.00041	0.06383	0.00370	1.7404	1.6413
11	0.04286	0.00682	0.15920	0.02762	0.00523	0.00084	0.15979	0.00317	1.7303	1.6070
12	0.04146	0.00398	0.09608	0.02542	0.01310	0.00126	0.09608	0.00768	1.8539	1.7837
13	0.03731	0.01159	0.31069	0.02806	0.00448	0.00140	0.31150	0.00317	1.7538	1.6832
14	0.02222	0.00626	0.28175	0.01569	0.01978	0.00557	0.28175	0.01390	1.6657	1.6979
15	0.04326	0.00690	0.15943	0.02789	0.01971	0.00315	0.15982	0.01224	2.2252	2.0329
16	0.05060	0.00826	0.16328	0.03313	0.00978	0.00160	0.16367	0.00599	2.1723	2.0679
17	0.02708	0.01128	0.41663	0.02298	0.00638	0.00266	0.41690	0.00518	1.5883	1.5902
18	0.04895	0.00703	0.14368	0.03143	0.01040	0.00149	0.14373	0.00627	2.0979	1.9653
19	0.03472	0.00887	0.25546	0.02432	0.01013	0.00259	0.25591	0.00679	1.7481	1.7027
20	0.03790	0.01197	0.31579	0.02872	0.01342	0.00425	0.31707	0.00972	2.1365	2.0482
21	0.04579	0.00742	0.16197	0.02971	0.00564	0.00092	0.16279	0.00342	1.8562	1.7641
22	0.02472	0.00640	0.25892	0.01708	0.00112	0.00029	0.25916	0.00074	1.0208	0.9875
23	0.04590	0.01337	0.29126	0.03423	0.00053	0.00015	0.29350	0.00036	1.9334	1.8926
24	0.00822	0.00147	0.17828	0.00509	0.03855	0.00690	0.17898	0.02511	1.6986	1.8199
25	0.01871	0.00172	0.09183	0.01104	0.03747	0.00344	0.09188	0.02277	1.8916	1.9714
26	0.04936	0.00905	0.18337	0.03286	0.01448	0.00265	0.18338	0.00909	2.3200	2.1789
27	0.00610	0.00136	0.22252	0.00392	0.03539	0.00787	0.22253	0.02394	1.5723	1.6703
28	0.00692	0.00061	0.08811	0.00400	0.04284	0.00378	0.08816	0.02619	1.6980	1.8017
29	0.02729	0.01161	0.42549	0.02345	0.00900	0.00383	0.42557	0.00743	1.7352	1.6765
30	0.01918	0.00150	0.07808	0.01123	0.03992	0.00312	0.07810	0.02415	1.9753	2.0712
31	0.01187	0.01147	0.96657	0.02117	0.00915	0.00885	0.96657	0.01618	2.0792	1.8693
32	0.02348	0.00299	0.12716	0.01429	0.03686	0.00469	0.12716	0.02292	2.0722	2.1518
33	0.00945	0.00191	0.20172	0.00599	0.03497	0.00706	0.20181	0.02315	1.6414	1.7474
35	0.05838	0.01275	0.21843	0.04086	0.00138	0.00031	0.22157	0.00088	2.3092	2.2939
36	0.02314	0.00238	0.10296	0.01384	0.03816	0.00393	0.10300	0.02337	2.0725	2.1628
37	0.02349	0.00221	0.09425	0.01398	0.03978	0.00375	0.09438	0.02429	2.1280	2.1776
38	0.03674	0.00879	0.23921	0.02536	0.00680	0.00163	0.23934	0.00445	1.6780	1.6137
39	0.03960	0.01217	0.30746	0.02979	0.00593	0.00182	0.30747	0.00418	1.9004	1.8515
40	0.06811	0.00532	0.07815	0.04300	0.00409	0.00032	0.07946	0.00234	2.4952	2.4794
43	0.04836	0.01526	0.31553	0.03735	0.00650	0.00206	0.31628	0.00464	2.3221	2.2967
44	0.01582	0.00595	0.37624	0.01241	0.02000	0.00753	0.37626	0.01583	1.5927	1.6435
45	0.00533	0.00102	0.19087	0.00332	0.04332	0.00827	0.19093	0.02876	1.7996	1.9394
46	0.04634	0.01521	0.32818	0.03625	0.00550	0.00181	0.32903	0.00398	2.2302	2.1686

49	0.00877	0.00104	0.11883	0.00518	0.05233	0.00623	0.11912	0.03314	2.1302	2.2922
50	0.00886	0.00037	0.04218	0.00501	0.05678	0.00241	0.04243	0.03463	2.1997	2.4124
51	0.05298	0.01263	0.23840	0.03757	0.00855	0.00204	0.23847	0.00561	2.3840	2.2900
52	0.05508	0.01746	0.31708	0.04315	0.00304	0.00097	0.32050	0.00216	2.4939	2.4843
53	0.03471	0.00911	0.26255	0.02451	0.02163	0.00568	0.26270	0.01493	2.1890	2.1676
55	0.02476	0.01337	0.53979	0.02493	0.01166	0.00630	0.54006	0.01137	2.0240	2.0387
58	0.04713	0.01160	0.24608	0.03338	0.01870	0.00462	0.24696	0.01261	2.5291	2.5136
60	0.01859	0.00805	0.43284	0.01584	0.01336	0.00579	0.43288	0.01125	1.5306	1.4821
61	0.02036	0.00255	0.12513	0.01231	0.05104	0.00641	0.12563	0.03241	2.4637	2.5998
63	0.00684	0.00081	0.11878	0.00402	0.05529	0.00657	0.11892	0.03516	2.1759	2.3413
64	0.06444	0.01151	0.17861	0.04373	0.00611	0.00110	0.18001	0.00377	2.6063	2.6218
66	0.01094	0.00300	0.27387	0.00749	0.04183	0.01146	0.27389	0.03032	2.1038	2.2227
67	0.03213	0.00411	0.12782	0.01984	0.01317	0.00169	0.12800	0.00789	1.5652	1.5079
69	0.04746	0.01348	0.28402	0.03517	0.01410	0.00402	0.28496	0.00984	2.4785	2.4738
70	0.01745	0.00042	0.02418	0.00995	0.05977	0.00145	0.02420	0.03637	2.5454	2.7519
71	0.05867	0.01842	0.31403	0.04608	0.00290	0.00092	0.31786	0.00206	2.6385	2.6849
73	0.04637	0.00361	0.07783	0.02832	0.03096	0.00241	0.07785	0.01847	2.5699	2.5297
74	0.02906	0.01253	0.43114	0.02526	0.01410	0.00608	0.43142	0.01187	2.0679	2.0853
75	0.05727	0.01412	0.24655	0.04129	0.00190	0.00047	0.24931	0.00124	2.3502	2.3322
76	0.03851	0.00514	0.13346	0.02412	0.02627	0.00351	0.13355	0.01614	2.2321	2.1683

Il confronto tra i valori dei due consumi evidenzia come vi sia una differenza tra i due metodi di calcolo utilizzati, ed in generale si può notare una sovrastima del consumo calcolato per mezzo delle interpolazioni nei confronti di quello fornito dal codice di Edelbaum. Si rendono quindi necessarie delle correzioni per ridurre le differenze tra i due metodi.

Una prima correzione è stata introdotta per tenere in conto l'effetto del cambio del parametro da a raggi elevati: in base alla legge

$$\frac{da}{a} = 2 \frac{dV}{V}$$

risulta evidente come, a parità di dV , il da che si ottiene a raggi elevati (a grande, V piccola) sia superiore di quello che si potrebbe avere a raggi bassi (a piccolo, V grande), rappresentando quindi una sovrastima. Per correggere questo effetto è stata introdotta una condizione che riguarda il valore del raggio al periastro dell'asteroide: se quest'ultimo risulta maggiore di 1, il valore del dV ottenuto tramite la formula interpolante viene diviso per la radice quadrata del raggio al periastro stesso e prende il nome di dV_{post_corr} .

Un altro effetto che provoca una distanza tra i valori forniti dai due metodi deriva dall'aver imposto la massa media pari a 1; dal momento che vale la formula

$$dV = \int \frac{T}{m} dt$$

si vede come il dV sia proporzionale al tempo di spinta. Se la massa media diminuisce, si ottiene lo stesso dV in minor tempo e conseguentemente si ha una riduzione proporzionale del consumo.

La correzione andrebbe quindi applicata sia alla massa che al tempo, ma vista la proporzionalità viene effettuata una riduzione virtuale del dV ; è stata quindi studiata un'iterazione sul valore stesso del dV , in modo da simulare la riduzione della massa passando tra una manovra e l'altra, attraverso la formula

$$dV_{post_iter} = dV_{post_corr} \cdot m_{media} = dV_{post_corr} \cdot \left(\frac{m_0 + m_f}{2} \right)$$

Ricordando Tsiolkovsky, riscriviamo la formula precedente come

$$dV_{post_iter} = dV_{post_corr} \cdot \left(\frac{m_0 + m_0 e^{-dV/c}}{2} \right) = dV_{post_corr} \cdot \frac{m_0 \cdot (1 + e^{-dV/c})}{2}$$

dove alla prima iterazione il dV all'esponente è pari a dV_{post_corr} , mentre dalla seconda in poi assume il valore del precedente dV_{post_iter} calcolato. L'iterazione viene svolta fintanto che la differenza in valore assoluto tra questi due dV non sia inferiore a 10^{-12} .

L'applicazione di queste due correzioni porta ad un avvicinamento tra i valori del consumo ottenuti per mezzo della formula interpolante e quelli dell'analisi di Edelbaum; vediamo nella tabella la differenza tra questi valori, sia nel caso di $n = 3$ che 4.

n = 3			n = 4		
Consumo post_iter	Consumo Edelbaum	Errore	Consumo post_iter	Consumo Edelbaum	Errore
1.1669	1.0871	7.33%	1.1524	1.0729	7.41%
1.2320	1.2297	0.18%	1.2190	1.2096	0.77%
1.0434	1.0831	-3.67%	1.0371	1.1233	-7.67%
1.3260	1.3450	-1.41%	1.3176	1.3363	-1.40%
0.9938	0.9763	1.80%	0.9848	0.9717	1.35%
1.5178	1.6293	-6.84%	1.5030	1.6923	-11.19%
1.8606	1.8713	-0.57%	1.8351	1.8025	1.81%
1.6929	1.6266	4.08%	1.6637	1.5442	7.74%
1.6708	1.6413	1.80%	1.6471	1.5769	4.45%
1.6365	1.6070	1.83%	1.6169	1.5738	2.74%
1.7754	1.7837	-0.47%	1.7534	1.7992	-2.55%
1.6582	1.6832	-1.48%	1.6476	1.6690	-1.28%
1.6018	1.6979	-5.66%	1.5993	1.7465	-8.43%
2.0088	2.0329	-1.18%	1.9859	2.0192	-1.65%
2.0453	2.0679	-1.09%	2.0153	1.9825	1.66%
1.5299	1.5902	-3.79%	1.5276	1.5892	-3.88%
1.9629	1.9653	-0.12%	1.9334	1.9071	1.38%
1.6779	1.7027	-1.46%	1.6704	1.7118	-2.42%
1.9870	2.0482	-2.99%	1.9803	2.0365	-2.76%
1.7775	1.7641	0.76%	1.7581	1.7203	2.20%
0.9960	0.9875	0.86%	0.9880	0.9862	0.18%
1.8483	1.8926	-2.34%	1.8395	1.8517	-0.66%
1.6322	1.8199	-10.32%	1.6191	1.8675	-13.30%
1.8100	1.9714	-8.19%	1.7908	2.0546	-12.84%

2.1324	2.1789	-2.13%	2.1001	2.1230	-1.08%
1.5151	1.6703	-9.29%	1.4966	1.6893	-11.41%
1.6317	1.8017	-9.44%	1.6098	1.8154	-11.32%
1.6225	1.6765	-3.22%	1.6079	1.6634	-3.34%
1.8867	2.0712	-8.91%	1.8648	2.1552	-13.47%
1.9815	1.8693	6.00%	2.0169	1.8989	6.21%
1.9751	2.1518	-8.21%	1.9527	2.2456	-13.04%
1.5792	1.7474	-9.62%	1.5627	1.7949	-12.94%
2.1899	2.2939	-4.53%	2.1703	2.1874	-0.78%
1.9753	2.1628	-8.67%	1.9541	2.2620	-13.61%
2.0259	2.1776	-6.96%	2.0066	2.2654	-11.42%
1.6056	1.6137	-0.51%	1.5862	1.5855	0.05%
1.8036	1.8515	-2.59%	1.7766	1.7966	-1.11%
2.3572	2.4794	-4.93%	2.3128	2.2857	1.19%
2.1975	2.2967	-4.32%	2.1716	2.2212	-2.23%
1.5340	1.6435	-6.66%	1.5363	1.6942	-9.32%
1.7254	1.9394	-11.03%	1.7005	1.9491	-12.76%
2.0881	2.1686	-3.71%	2.0695	2.1103	-1.93%
2.0279	2.2922	-11.53%	1.9974	2.2930	-12.89%
2.0910	2.4124	-13.32%	2.0559	2.4074	-14.60%
2.2219	2.2900	-2.97%	2.1834	2.1927	-0.42%
2.3561	2.4843	-5.16%	2.3537	2.4122	-2.42%
2.0812	2.1676	-3.99%	2.0790	2.1888	-5.02%
1.9312	2.0387	-5.27%	1.9583	2.0728	-5.53%
2.3876	2.5136	-5.01%	2.3872	2.4903	-4.14%
1.4260	1.4821	-3.79%	1.4165	1.4874	-4.77%
2.3289	2.5998	-10.42%	2.3034	2.6734	-13.84%
2.0694	2.3413	-11.61%	2.0344	2.3150	-12.12%
2.4565	2.6218	-6.30%	2.4196	2.4546	-1.42%
2.0039	2.2227	-9.84%	1.9760	2.2471	-12.07%
1.5085	1.5079	0.04%	1.4965	1.5458	-3.19%
2.3422	2.4738	-5.32%	2.3400	2.4411	-4.14%
2.4021	2.7519	-12.71%	2.3617	2.7668	-14.64%
2.4852	2.6849	-7.44%	2.4907	2.5783	-3.40%
2.4240	2.5297	-4.18%	2.3921	2.5630	-6.67%
1.9712	2.0853	-5.47%	1.9877	2.1129	-5.93%
2.2269	2.3322	-4.51%	2.2108	2.2484	-1.67%
2.1203	2.1683	-2.22%	2.1037	2.2178	-5.14%

Gli errori tra il consumo ottenuto dopo aver svolto le correzioni e quello fornito da Edelbaum sono molto contenuti e forniscono pertanto una buona indicazione per la validità delle scelte intraprese. Come ulteriore verifica della bontà del metodo, il consumo appena calcolato per il caso $n = 3$ è stato messo a confronto con quello derivante dal metodo indiretto. Si noti come l'errore risultante sia confrontabile con quello che si ha paragonando il metodo di Edelbaum a quello di ottimizzazione esatta.

	Consumo post_iter	Consumo Edelbaum	Consumo indiretto	Errore post_iter - indiretto	Errore Edelbaum - indiretto
2	1.1669	1.0871	1.0562	10.48%	2.93%
3	1.2320	1.2297	1.1974	2.89%	2.70%
4	1.0434	1.0831	1.0066	3.66%	7.60%
5	1.3260	1.3450	1.4336	-7.51%	-6.18%
6	0.9938	0.9763	1.1071	-10.23%	-11.82%
7	1.5178	1.6293	1.4517	4.55%	12.23%
8	1.8606	1.8713	1.5896	17.05%	17.72%
9	1.6929	1.6266	1.5679	7.97%	3.74%
10	1.6708	1.6413	1.5367	8.73%	6.81%
11	1.6365	1.6070	1.4670	11.55%	9.55%
12	1.7754	1.7837	1.6507	7.55%	8.06%
13	1.6582	1.6832	1.6750	-1.00%	0.49%
14	1.6018	1.6979	1.7370	-7.79%	-2.25%
15	2.0088	2.0329	1.7672	13.67%	15.04%
16	2.0453	2.0679	1.7644	15.92%	17.20%
17	1.5299	1.5902	1.7383	-11.99%	-8.52%
18	1.9629	1.9653	1.6838	16.57%	16.72%
19	1.6779	1.7027	1.8182	-7.71%	-6.35%
20	1.9870	2.0482	1.8033	10.19%	13.58%
21	1.7775	1.7641	1.7882	-0.60%	-1.35%
22	0.9960	0.9875	1.0234	-2.67%	-3.51%
23	1.8483	1.8926	1.9101	-3.23%	-0.92%
24	1.6322	1.8199	1.7560	-7.05%	3.64%
25	1.8100	1.9714	1.7722	2.13%	11.24%
26	2.1324	2.1789	1.9495	9.38%	11.77%
27	1.5151	1.6703	1.5367	-1.41%	8.70%
28	1.6317	1.8017	1.6030	1.79%	12.39%
29	1.6225	1.6765	1.7674	-8.20%	-5.14%
30	1.8867	2.0712	1.8559	1.66%	11.60%
31	1.9815	1.8693	1.8574	6.68%	0.64%
32	1.9751	2.1518	1.9307	2.30%	11.45%
33	1.5792	1.7474	1.6832	-6.18%	3.81%
35	2.1899	2.2939	2.1363	2.51%	7.38%
36	1.9753	2.1628	1.9701	0.27%	9.78%
37	2.0259	2.1776	2.0429	-0.83%	6.59%
38	1.6056	1.6137	1.5071	6.53%	7.08%
39	1.8036	1.8515	1.8700	-3.55%	-0.99%
40	2.3572	2.4794	2.2340	5.51%	10.98%
43	2.1975	2.2967	2.2365	-1.75%	2.69%
44	1.5340	1.6435	1.7034	-9.94%	-3.51%
45	1.7254	1.9394	1.7620	-2.07%	10.07%
46	2.0881	2.1686	2.1505	-2.90%	0.84%
49	2.0279	2.2922	2.1412	-5.29%	7.05%
50	2.0910	2.4124	2.1053	-0.68%	14.58%

51	2.2219	2.2900	2.2058	0.73%	3.82%
52	2.3561	2.4843	2.2895	2.91%	8.51%
53	2.0812	2.1676	2.2421	-7.18%	-3.32%
55	1.9312	2.0387	2.0270	-4.73%	0.58%
58	2.3876	2.5136	2.4971	-4.39%	0.66%
60	1.4260	1.4821	1.5304	-6.82%	-3.15%
61	2.3289	2.5998	2.4285	-4.10%	7.06%
63	2.0694	2.3413	2.1020	-1.55%	11.38%
64	2.4565	2.6218	2.4655	-0.36%	6.34%
66	2.0039	2.2227	2.2216	-9.80%	0.05%
67	1.5085	1.5079	1.5172	-0.58%	-0.61%
69	2.3422	2.4738	2.4807	-5.58%	-0.28%
70	2.4021	2.7519	2.4187	-0.69%	13.78%
71	2.4852	2.6849	2.5338	-1.92%	5.96%
73	2.4240	2.5297	2.3343	3.84%	8.37%
74	1.9712	2.0853	2.1166	-6.87%	-1.48%
75	2.2269	2.3322	2.1843	1.95%	6.77%
76	2.1203	2.1683	2.1669	-2.15%	0.07%

Errori al di sotto del 10% vengono ritenuti ottime approssimazioni, mentre tra il 10 e il 15% sono ancora accettabili; solamente gli asteroidi n° 8, 16 e 18 presentano, in entrambi i confronti, degli errori poco superiori al 15%, e un numero considerevole di asteroidi ha errore inferiore al 10%. Si può quindi affermare che le scelte effettuate hanno prodotto risultati soddisfacenti, e ciò è un'ulteriore prova a sostegno dell'uso di questa metodologia. Allo scopo di estendere l'uso della procedura adottata per questa stima più rapida sui consumi, si è considerato anche il caso $n = 2$, oltre che ai casi 3 e 4 già analizzati. Vediamo la formula (dopo aver effettuato le correzioni) applicata ai 62 asteroidi veri.

	Consumo post_iter n = 2	Consumo post_iter n = 3	Consumo post_iter n = 4	Rapporto n = 2/3	Rapporto n = 3/4
2	1.1957	1.1669	1.1524	1.025	1.013
3	1.2579	1.2320	1.2190	1.021	1.011
4	1.0558	1.0434	1.0371	1.012	1.006
5	1.3379	1.3260	1.3176	1.009	1.006
6	1.0110	0.9938	0.9848	1.017	1.009
7	1.5474	1.5178	1.5030	1.020	1.010
8	1.9112	1.8606	1.8351	1.027	1.014
9	1.7511	1.6929	1.6637	1.034	1.018
10	1.7183	1.6708	1.6471	1.028	1.014
11	1.6741	1.6365	1.6169	1.023	1.012
12	1.8192	1.7754	1.7534	1.025	1.013
13	1.6759	1.6582	1.6476	1.011	1.006
14	1.6023	1.6018	1.5993	1.000	1.002
15	2.0537	2.0088	1.9859	1.022	1.012
16	2.1050	2.0453	2.0153	1.029	1.015
17	1.5301	1.5299	1.5276	1.000	1.002

18	2.0214	1.9629	1.9334	1.030	1.015
19	1.6896	1.6779	1.6704	1.007	1.005
20	1.9991	1.9870	1.9803	1.006	1.003
21	1.8150	1.7775	1.7581	1.021	1.011
22	1.0107	0.9960	0.9880	1.015	1.008
23	1.8651	1.8483	1.8395	1.009	1.005
24	1.6559	1.6322	1.6191	1.015	1.008
25	1.8479	1.8100	1.7908	1.021	1.011
26	2.1968	2.1324	2.1001	1.030	1.015
27	1.5520	1.5151	1.4966	1.024	1.012
28	1.6751	1.6317	1.6098	1.027	1.014
29	1.6515	1.6225	1.6079	1.018	1.009
30	1.9302	1.8867	1.8648	1.023	1.012
31	1.9175	1.9815	2.0169	0.968	0.982
32	2.0198	1.9751	1.9527	1.023	1.011
33	1.6117	1.5792	1.5627	1.021	1.011
35	2.2388	2.1899	2.1703	1.022	1.009
36	2.0175	1.9753	1.9541	1.021	1.011
37	2.0643	2.0259	2.0066	1.019	1.010
38	1.6436	1.6056	1.5862	1.024	1.012
39	1.8574	1.8036	1.7766	1.030	1.015
40	2.4496	2.3572	2.3128	1.039	1.019
43	2.2562	2.1975	2.1716	1.027	1.012
44	1.5237	1.5340	1.5363	0.993	0.999
45	1.7751	1.7254	1.7005	1.029	1.015
46	2.1317	2.0881	2.0695	1.021	1.009
49	2.0890	2.0279	1.9974	1.030	1.015
50	2.1609	2.0910	2.0559	1.033	1.017
51	2.2991	2.2219	2.1834	1.035	1.018
52	2.3859	2.3561	2.3537	1.013	1.001
53	2.0872	2.0812	2.0790	1.003	1.001
55	1.8752	1.9312	1.9583	0.971	0.986
58	2.4023	2.3876	2.3872	1.006	1.000
60	1.4443	1.4260	1.4165	1.013	1.007
61	2.3829	2.3289	2.3034	1.023	1.011
63	2.1392	2.0694	2.0344	1.034	1.017
64	2.5420	2.4565	2.4196	1.035	1.015
66	2.0597	2.0039	1.9760	1.028	1.014
67	1.5311	1.5085	1.4965	1.015	1.008
69	2.3633	2.3422	2.3400	1.009	1.001
70	2.4825	2.4021	2.3617	1.033	1.017
71	2.5197	2.4852	2.4907	1.014	0.998
73	2.4880	2.4240	2.3921	1.026	1.013
74	1.9390	1.9712	1.9877	0.984	0.992
75	2.2710	2.2269	2.2108	1.020	1.007
76	2.1538	2.1203	2.1037	1.016	1.008

Il confronto del consumo a diverso valore di n avvalora l'ipotesi effettuata nell'introduzione di questo capitolo, ovvero che il consumo debba diminuire all'aumentare del numero di rivoluzioni svolte dallo spacecraft. Nel passaggio da $n = 2$ a 3, solamente per 4 asteroidi ciò non è verificato, avendo essi un rapporto dei consumi inferiore all'unità, mentre nel passaggio da $n = 3$ a 4, ai quattro asteroidi precedenti se ne aggiunge un quinto.

Una motivazione, che può essere ritenuta valida per gli asteroidi n° 31 e 55, riguarda il valore del loro k .

	k (n = 2)	k (n = 3)	k (n = 4)
31	0.9269	0.9666	0.9880
55	0.5010	0.5398	0.5593

Come si vede, il k per questi due asteroidi è al di fuori dei limiti che abbiamo definito per l'interpolazione ($0 < k < 0.5$), e pertanto presentano un leggero errore sulla legge del consumo.

Per quanto riguarda gli asteroidi n° 44 e 74 nel passaggio da $n = 2$ a 3, e i n° 44, 71 e 74 da 3 a 4, il loro k rientra nei limiti imposti, quindi non è evidente capire la motivazione dell'errore: per quasi tutti loro (eccetto il n° 74 da $n = 2$ a 3) gli errori sono però inferiori all'1%, pertanto sono assolutamente accettabili.

6. CONCLUSIONI

Il lavoro presentato ha preso spunto dalla missione M-ARGO, ovvero una missione di rendez-vous con un NEA (near-Earth asteroid), focalizzandosi sul consumo di propellente, selezionando una lista di 75 possibili asteroidi target. A partire dal tipo di propulsione ipotizzata per questo tipo di missione, ovvero quella elettrica, è stata adottata l'approssimazione di Edelbaum. Questa approssimazione, però, impone dei limiti alle caratteristiche fisiche delle orbite degli asteroidi interessati per poter essere sufficientemente precisa, e per questo motivo il numero di asteroidi è sceso a 62.

E' stata poi necessaria una riformulazione del metodo di Edelbaum per adattarlo ai nostri scopi: mentre Edelbaum si focalizza su un'orbita di trasferimento dalla Terra all'asteroide compiuta nel minor tempo possibile, lo scopo di questo lavoro è stato quello di minimizzare il consumo per la trasferta.

Dopo aver analizzato i risultati che fornisce il codice, si è cercato di trovare un metodo alternativo che permetta di calcolare il consumo senza dover svolgere l'analisi di Edelbaum per ognuno degli asteroidi in elenco, operazione che richiede una certa quantità di tempo. Si è quindi pensato di sfruttare un set di asteroidi "standard", trovando una formula interpolante per i risultati di questi ultimi e sfruttandola per gli asteroidi "veri".

I risultati ottenuti con questo metodo sono stati poi confrontati sia con quelli di Edelbaum sia con quelli forniti da un metodo indiretto, che devono essere considerati come quelli più corretti e veritieri. Data la piccola differenza tra i risultati ottenuti dall'interpolazione e quelli derivanti dal metodo indiretto, si può quindi concludere che è possibile sfruttare le formule interpolanti per calcolare il consumo, unendo alla velocità di esecuzione l'accuratezza dei risultati.

BIBLIOGRAFIA & SITOGRAFIA

- [1.1] https://www.treccani.it/enciclopedia/lacune-di-kirkwood_%28Enciclopedia-della-Scienza-e-della-Tecnica%29/
- [1.2] K. Hirayama, "Groups of asteroids probably of common origin", *Astronomical Journal* (Ottobre 1918), pp. 185-188
- [1.3] D. J. Tholen, "Asteroid taxonomic classifications", *Asteroids II*, University of Arizona Press (1989), pp. 1139-1150
- [1.4] S. J. Bus and R. P. Binzel, "Phase II of the Small Main-belt Asteroid Spectroscopy Survey: A feature-based taxonomy", *Icarus* (2002), Vol. 158 p. 146
- [1.5] <http://neo.ssa.esa.int/>
- [1.6] https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/torino_scale.html
- [1.7] https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/palermo_scale.html
- [1.8] <https://web.archive.org/web/20190602141452/http://dart.jhuapl.edu/The-Spacecraft/>
- [1.9] http://www.esa.int/Safety_Security/Hera/Hera
- [1.10] <https://www.nasa.gov/feature/goddard/2020/osiris-rex-begins-its-countdown-to-tag>
- [1.11] A. Milani et al., "Long term impact risk for (101955) 1999 RQ36", *Icarus* (2009), Vol. 203 pp. 460–471
- [1.12] https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2019/11/M-Argo
- [1.13] https://www.colorado.edu/event/ippw2018/sites/default/files/attached-files/smallprobes_4_ippw_2018_m-argo_a_stand-alone_deep_space_cubesat_system_for_low-cost_science_and_exploration_missions_conference_final.pdf (slide 3)
- [2.1] <https://solarsystem.nasa.gov/basics/chapter4-1/#gravity>
- [2.2] <https://solarsystem.nasa.gov/basics/chapter4-1/#hohmann>
- [2.3] A. Sternfeld, "Sur les trajectoires permettant d'approcher d'un corps attractif central à partir d'une orbite képlérienne donnée", *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (Paris), Vol. 198, pp. 711 – 713
- [2.4] L. Casalino, Slide "Space Propulsion", *Corso di Laurea Magistrale Propulsione Spaziale* (2019), pp. 57-60
- [2.5] G. Mengali, "Meccanica del volo spaziale", Ed. Plus. (2001)
- [3.1] A. Mereta, D. Izzo, "Target selection for a small low-thrust mission to near-Earth asteroids", arXiv:1802.02418v1 [astro-ph.EP], 7 Feb 2018
- [4.1] L. Casalino, L. Mascolo, A. Bosa, "Fast estimation method for trajectories to near-Earth asteroids", *AAS 19-761*, 2019, pp. 3089-3100, *Advances in the Astronautical Sciences Series*, Vol. 171

- [4.2] L. Casalino, L. Mascolo, A. De Iuliis, “Fast and accurate estimation of fuel-optimal trajectories to near-Earth asteroids”, IAC-20-C1,7,10,x59339
- [4.3] L. Casalino, Slide “Space Propulsion”, Corso di Laurea Magistrale Propulsione Spaziale (2019), pp. 65-69