POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Uso di Polinomi di Lagrange nell'Analisi Lineare e Nonlineare di Strutture Laminate



Relatore prof. Erasmo Carrera

Correlatori: prof. Alfonso Pagani dott. Riccardo Augello Studente Daniele SCANO

ANNO ACCADEMICO 2020-2021

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il Prof. Erasmo Carrera per l'opportunità di svolgere una tesi durante un periodo non semplice, come quello che tutti stiamo affrontando, e il Prof. Alfonso Pagani per i suoi suggerimenti. Un grande ringraziamento va, inoltre, al Dott. Riccardo Augello per il suo prezioso contributo nell'affrontare le simulazioni numeriche e nella stesura della tesi.

Un grazie sincero va ai miei compagni di corso, Daniele, Dario e Mauro che mi hanno accompagnato in questi anni difficili del Politecnico.

Infine un grosso abbraccio alla mia famiglia, a mia madre, a mio padre, e a mio fratello per il loro grande supporto.

Indice

Prefazione 8 Т Introduzione teorica 10Meccanica dei laminati 131 Materiali ortotropi 131.11.2Teorie dei laminati 171.2.1171.2.219Carrera Unified Formulation (CUF) 212 2.1Le tre formulazioni 212.223Matrice di Rigidezza 2.3233 Modello Beam 27273.13.1.1Matrice di Rigidezza 29Vettore dei carichi 303.1.23.2313.3 313.4353.4.1353.4.2Formulazione isoparametrica 384 Modello Piastra 39394.14.1.1414.1.2Vettore dei carichi 424.242Espansioni di Taylor 1D (TE) 4.343

	4.4	Espansioni di Lagrange 1D (LE)444.4.1Coordinate normalizzate444.4.2Formulazione isoparametrica44	$5\\6\\7$
5	Moc 5.1 5.2 5.3 5.4	ello Guscio49Relazioni geometriche50Vettori base505.2.1Vettori base 2D505.2.2Derivata covariante50Guscio a simmetria sferica50Analisi con la CUF50	$9 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6$
6	Uso 6.1 6.2 6.3 6.4	della CUF per l'analisi dei laminati59Introduzione ai metodi ESL e LW596.1.1 Uso dell'espansione di Taylor606.1.2 Uso dell'espansione di Lagrange Layer-Wise61Metodo Equivalence Single Layer con polinomi di Lagrange626.2.1 Caso CUF 1D646.2.2 Caso CUF 2D64Global/Local applicato a ESL Lagrange63Node Dependent Kinematics (NDK)636.4.1 Formulazione CUF 1D646.4.3 Assemblaggio della matrice di rigidezza74	990245678814
7	Intr lazio 7.1	oduzione alle non linearità geometriche applicate alla formu- ne CUF 1D73Equazioni di governo non lineari747.1.1 Equazioni di equilibrio747.1.2 Linearizzazione di Newton-Raphson747.1.3 Nucleo fondamentale della matrice di rigidezza secante747.1.4 Nucleo fondamentale della matrice di rigidezza tangente747.1.5 Forma simmetrica della matrice di rigidezza secante84Applicazione al Global/Local e NDK84	56678922
Π	Si	nulazioni numeriche 83	3
8	Ana 8.1	isi di strutture monostrato con formulazione CUF 1D 84 Analisi di una trave incastrata con sezione quadrata 84 8.1.1 Dati del problema 84 8.1.2 Analisi di convergenza 84 8.1.3 Calcolo degli spostamenti 84 4 4 4	55568

	8.2	Analisi	di una trave incastrata con sezione a I	39
		8.2.1	Dati del problema	39
		8.2.2	Analisi di convergenza)0
		8.2.3	Calcolo degli spostamenti)1
	8.3	Analisi	di una trave incastrata con sezione circolare)3
		8.3.1	Dati del problema)3
		8.3.2	Analisi di convergenza) 4
		8.3.3	Calcolo degli spostamenti)4
9	Ana	lisi di l	laminati 9	99
-	9.1	Analisi	di una trave a laminazione antisimmetrica [0.90]° 9	99
	0.1	9.1.1	Dati del problema	99
		9.1.2	Calcolo degli spostamenti e tensioni	0
	9.2	Analisi	di una trave a laminazione simmetrica [0.90.0]°)4
	0.2	9.2.1	Dati del problema)4
		9.2.1	Calcolo degli spostamenti e tensioni) 1) 5
		0.2.2		
10	Ana	lisi di	una trave a laminazione simmetrica a otto strati 10	19
	10.1	Analisi	con CUF 1D	10
		10.1.1	Analisi di convergenza con Layer Wise Lagrange 11	0
		10.1.2	Analisi di convergenza con Equivalence Single Layer Lagrange 11	1
		10.1.3	Calcolo degli spostamenti e tensioni	12
	10.2	Analisi	con CUF 2D	9
		10.2.1	Analisi di convergenza con Layer Wise Lagrange 11	9
		10.2.2	Analisi di convergenza con Equivalent Single Layer Lagrange 12	20
		10.2.3	Calcolo degli spostamenti e tensioni	20
	10.3	Confro	nto tra formulazioni CUF 1D e 2D	23
		10.3.1	Calcolo degli spostamenti e tensioni 12	23
11	Ana	lisi del	la piastra sandwich di Meyer-Piening 13	51
	11.1	Analisi	con modello CUF 1D	32
		11.1.1	Analisi di convergenza	32
		11.1.2	Calcolo degli spostamenti e tensioni	32
	11.2	Analisi	con modello CUF 2D	38
		11.2.1	Dati del problema	38
		11.2.2	Analisi di convergenza	38
		11.2.3	Calcolo degli spostamenti e tensioni	38
	11.3	Confro	nto tra formulazioni CUF 1D e 2D	15
19	Ano	lici dol	problema di Pipes-Pagano 14	ליו
14	лпа 191	Analici	del problema CUE 1D 14	:1 18
	14.1	19.1.1	Applisi di convergenza	:0 18
		12.1.1 1919	Calcolo dolla tonsioni	±0 (1
		14.1.4		ノ上

	12.2	Analisi del problema o	con CUF 2D	160
		12.2.1 Calcolo delle t	ensioni	160
	12.3	Confronto tra formula	azioni CUF 1D e 2D	168
13	Ana	lisi di una piastra a	tre strati con carico puntuale	173
	13.1	Analisi con metodo C	UF 1D	174
		13.1.1 Analisi di conv	vergenza con Layer Wise Lagrange	174
		13.1.2 Analisi di conv	vergenza con Equivalent Single Lagrange	175
		13.1.3 Calcolo degli s	spostamenti e tensioni	175
	13.2	Analisi con metodo C	UF 2D	179
		13.2.1 Analisi di conv	vergenza con Layer Wise Lagrange	179
		13.2.2 Analisi di conv	vergenza con Equivalent Single Layer Lagrange	181
	10.0	13.2.3 Calcolo degli s	spostamenti e tensioni	181
	13.3	Confronto tra formula	$aziom CUF ID \in 2D \dots $	185
14	Ana	lisi del guscio di Re	en a tre strati	189
	14.1	Analisi di convergenza	a con Layer Wise Lagrange	190
	14.2	Analisi di convergenza	a con Equivalent Single Layer Lagrange	191
	14.3	Calcolo degli spostam	enti e tensioni	192
15	Ana	lisi della piastra di	Pagano-Hatfield a nove strati	195
	15.1	Dati del problema		195
		15.1.1 Analisi di conv	vergenza con Layer Wise Lagrange	196
		15.1.2 Analisi di conv	vergenza con ESL Lagrange	198
	15.2	Calcolo di spostament	ti e tensioni	200
16	Ana	lisi con il metodo G	Global/Local di una trave a tre strati sim-	
	met	rica con formulazion	ne CUF 1D	209
	16.1	Dati del problema		209
	16.2	Analisi con il metodo	Global/Local	210
		16.2.1 Confronto tra	il metodo Global/Local e il metodo NDK (Pri-	
		ma Parte)		214
		16.2.2 Confronto tra	il metodo Global/Local e il metodo NDK (Se-	010
		conda Parte)		218
		za Parte)	11 metodo Global/Local e 11 metodo NDK (1er-	220
17	Ana	lisi con il metodo	Global/Local di una trave a otto strati	
	sim	netrica con formula	zione CUF 2D	223
	17.1	Analisi con il metodo	Global/Local	224
		17.1.1 Confronto tra	il metodo Global/Local e il metodo NDK (Pri-	
		ma Parte)	, - (228
		,		

17.1.2 Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDF conda Parte)	ζ (Se- 231
17.1.3 Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK za Parte)	(Ter- 235
18 Comportamento in post-buckling di una trave a due stra	ati con
formulazione CUF 1D	239
18.1 Dati del problema	239
18.2 Analisi con unica teoria della sezione	240
18.3 Analisi con NDK e Global/Local	243
19 Comportamento in post-buckling di un pannello rinforzato	249
19.1 Dati del problema	249
19.2 Analisi di convergenza per il modello LW	252
19.3 Analisi lineare	253
19.4 Calcolo degli spostamenti per l'analisi in post-buckling	254
19.5 Studio di due modi di buckling della struttura \ldots	256
20 Conclusioni	259
20.1 Vantaggi di ESL LE	259
20.2 Svantaggi di ESL LE	260
20.3 Sviluppi futuri	261
Bibliografia	263

Abstract

In questa tesi discuteremo delle potenzialità della Carrera Unified Formulation (CUF) sia nella formulazione 1D che nella formulazione 2D (comprendendo anche le teorie shell). In particolare incominciamo a studiare delle teorie della sezione con la strategia Equivalent Single Layer Lagrange in varii contesti. La CUF potrebbe essere implementata sia con delle teorie analitiche che con la discretizzazione Finite Element Method (FEM). Dato che il primo metodo è utilizzabile in alcuni determinati frangenti, useremo sempre la FEM.

La tesi è divisa in due parti: Introduzione teorica e Simulazioni numeriche.

Nella prima abbiamo una introduzione teorica in cui diamo dei brevi richiami sulla meccanica dei laminati e sui concetti di Equivalent Single Layer (ESL) e Layer Wise (LW), molto importanti nell'economia della tesi. Successivamente parliamo, con più dovizia di dettagli, della CUF, in particolare nell'ambito dell'analisi lineare statica. Nel capitolo 2 abbiamo mostrato la capacità della formulazione di essere generica e di poter derivare da questa le teorie 1D, 2D e 3D (di cui però non faremo un'analisi approfondita). Nei tre capitoli seguenti parliamo nel dettaglio di Beam (formulazione 1D), Piastra (formulazione 2D) e Guscio (teorie shell). Queste denominazioni non vogliono dire che la singola formulazione non possa essere usata per altri tipi di strutture (ossia la formulazione 2D può essere usata in modo molto efficiente anche per le travi). Abbiamo inoltre descritto le strategie ESL e LW nell'ambito della CUF, introducendo anche la nuova strategia 'ibrida' ESL Lagrange. Siamo passati poi a descrivere i metodi Global/Local (GL) e il Node Dependent Kinematics (NDK), caratteristico della presente formulazione. Infine abbiamo descritto la formulazione 1D nell'ambito dell'analisi non lineare geometrica statica.

Nella seconda parte ci siamo concentrati sullo studio di diverse strutture. Abbiamo analizzato dapprima delle semplici travi monostrato per cominciare a studiare i polinomi di Taylor e di Lagrange nell'ambito lineare. Successivamente abbiamo studiato il comportamento di laminati compositi fatti di materiali ortotropi, di diverse dimensioni e con varie condizioni al contorno (sempre casi lineari). Abbiamo confrontato, quando possibile, le due diverse formulazioni con diverse teorie della sezione. E' presente anche un caso shell. Abbiamo anche studiato i metodi GL e NDK. A conclusione del lavoro, studiamo delle strutture con l'analisi nonlineare sia con un'unica teoria per tutti i nodi FEM che con NDK e Global/Local.

Parte I

Introduzione teorica

Capitolo 1 Meccanica dei laminati

1.1 Materiali ortotropi



Figura 1.1: Sistema di riferimento per un laminato

I laminati più comuni sono i cosiddetti compositi che sono strutture multistrato (soprattutto pannelli curvi e piani) che comprendono un numero veriabile di strati i quali sono uniti tra di loro con speciali collanti (figura 1.1). Inoltre ogni lamina è composta di fibre imbevute in una matrice. Le fibre, per ogni diversa lamina, sono disposte lungo una precisa direzione longitudinale (L) che conferiscono lungo tale direzione un'alta resistenza meccanica. In genere le fibre sono di materiale organico come il carbonio, ma anche di boro e di vetro; mentre la matrice è spesso prodotta con resine epossidiche. Per questo i materiali usati sono ortotropi e vedremo anche come si trasformerà nello specifico la matrice di rigidezza del materiale. Dato che possiamo disporre le fibre in qualsiasi direzione e il numero di lamine da inserire è libero (stante i limiti di peso e di costo), questi elementi strutturali sono molto versatili e possono essere adattati per qualsiasi condizione.

Dopo questa breve overview sui laminati, andremo più nel dettaglio a considerare le proprietà geometriche e meccaniche. In figura 1.1 si può vedere lo schema di un laminato con il sistema di riferimento globale della struttura. La sezione viene indicata da $\Omega = \Omega^1 \bigcup \Omega^2 \bigcup ... \bigcup \Omega^k \bigcup ... \bigcup \Omega^{N_l}$ e giace sul piano xz; dove N_l è il numero totale degli strati e k indica il generico strato del laminato. Infine il campo di spostamenti riferito a questo sistema di riferimento è scritto nel seguente modo (per adesso in maniera del tutto generale):

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = \left\{ \begin{array}{c} u_x(x,y,z) \\ u_y(x,y,z) \\ u_z(x,y,z) \end{array} \right\}$$
(1.1)

Se consideriamo soltanto la teoria classica dell'elasticità, le tensioni e le deformazioni possono essere scritte rispettivamente nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \begin{array}{cccc} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{yz} & \sigma_{xz} & \sigma_{xy} \end{array} \right\}^T$$
(1.2)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left\{ \begin{array}{ccc} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{xy} \end{array} \right\}^T \tag{1.3}$$

In seguito, la relazione più generale che consente di mettere in relazione deformazioni e spostamenti è fornita dalla seguente formula, dove \mathbf{D} è una matrice di operatori differenziali:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{1.4}$$

e, se consideriamo il caso di piccole deformazioni e piccoli angoli di rotazioni, \mathbf{D} è un operatore differenziale lineare:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}$$
(1.5)

Dato che abbiamo dei materiali rinforzati con delle fibre, le proprietà meccaniche dipendono dall'angolo di orientazione delle fibre. Se usiamo il sistema di riferimento del materiale (1,2,3) in figura 1.2 l'asse 3 è parallelo all'orientazione delle fibre, l'asse 2 è perpendicolare ad esse e l'asse 1 punta fuori dal piano. Dunque si ha la legge di Hooke scritta nel modo seguente:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{m}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{m}} \tag{1.6}$$

dove la matrice di rigidezza scritta per il caso di materiale ortotropo è definita come:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$
(1.7)

Le componenti di tensione e di deformazione del sistema materiale sono scritte come:

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \left\{ \begin{array}{cccc} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{23} & \sigma_{13} & \sigma_{12} \end{array} \right\}^T \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_m = \left\{ \begin{array}{ccc} \epsilon_{11} & \epsilon_{22} & \epsilon_{33} & \epsilon_{23} & \epsilon_{13} & \epsilon_{12} \end{array} \right\}^T \tag{1.9}$$

Noi però vogliamo portarci nel sistema di riferimento del problema e dobbiamo



Figura 1.2: Rotazioni delle fibre

usare un matrice di rotazione **T** che modificherà anche la matrice di rigidezza. Se consideriamo una rotazione soltanto attorno all'asse 1 (adesso coincide con l'asse z e di conseguenza $\psi = 0$), abbiamo soltanto l'angolo θ da considerare, assunzione che faremo anche negli esempi successivi, e la legge di Hooke diventa così in coordinate globali:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}\mathbf{C}\mathbf{T}^T\boldsymbol{\epsilon} \tag{1.10}$$

con la matrice di rotazione che ha la forma seguente:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$
(1.11)

Se introduciamo :

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{11} & \widetilde{C}_{12} & \widetilde{C}_{13} & 0 & 0 & \widetilde{C}_{16} \\ \widetilde{C}_{12} & \widetilde{C}_{22} & \widetilde{C}_{23} & 0 & 0 & \widetilde{C}_{26} \\ \widetilde{C}_{13} & \widetilde{C}_{23} & \widetilde{C}_{33} & 0 & 0 & \widetilde{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{C}_{44} & \widetilde{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{C}_{45} & \widetilde{C}_{55} & 0 \\ \widetilde{C}_{16} & \widetilde{C}_{26} & \widetilde{C}_{36} & 0 & 0 & \widetilde{C}_{66} \end{bmatrix}$$
(1.12)

arriviamo alla forma compatta:

$$\boldsymbol{\sigma} = \widetilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\epsilon} \tag{1.13}$$

I coefficienti della matrice $\widetilde{\mathbf{C}}$ dipendono dalle proprietà del materiale e dall'angolo θ (per questa trattazione semplificata) definito in figura 1.2. Riportiamo infine le relazioni che legano i coefficienti della matrice di rigidezza del materiale e quelli della matrice nel sistema di riferimento ruotato:

$$\begin{split} \widetilde{C}_{11} &= m^4 C_{11} + 2m^2 n^2 C_{12} + n^4 C_{22} + 4m^2 n^2 C_{66} \\ \widetilde{C}_{12} &= m^2 n^2 C_{11} + m^4 C_{12} + n^4 C_{12} + m^2 n^2 C_{22} - 4m^2 n^2 C_{66} \\ \widetilde{C}_{13} &= m^2 C_{13} + n^2 C_{23} \\ \widetilde{C}_{16} &= m^3 n C_{11} + m^3 n C_{12} + m n^3 C_{12} + m n^3 C_{22} - 2m^3 n n^2 C_{66} + 2m n^3 C_{66} \\ \widetilde{C}_{22} &= n^4 C_{11} + 2m^2 n^2 C_{12} + m^4 C_{22} + 4m^2 n^2 C_{66} \\ \widetilde{C}_{23} &= n^2 C_{13} + m^2 C_{23} \\ \widetilde{C}_{26} &= m n^3 C_{11} + m^3 n C_{12} + m n^3 C_{12} + m^3 n^2 C_{22} + 2m^3 n^2 C_{66} - 2m n^3 C_{66} \\ \widetilde{C}_{33} &= Q_{33} \\ \widetilde{C}_{36} &= m n C_{13} + m n C_{23} \\ \widetilde{C}_{44} &= m^2 C_{44} + n^2 C_{55} \\ \widetilde{C}_{45} &= -m n C_{44} + m n C_{55} \\ \widetilde{C}_{55} &= n^2 C_{44} + m^2 C_{55} \\ \widetilde{C}_{66} &= m^2 n^2 C_{11} + 2m^2 n^2 C_{12} + m^2 n^2 C_{22} + m^4 C_{66} - 2m^2 n^2 C_{66} - n^4 C_{66} \end{split}$$

in cui:

$$m = \cos\theta, \quad n = \sin\theta \tag{1.15}$$

1.2 Teorie dei laminati

In questi ultimi anni, soprattutto nel mondo aerospaziale, i laminati sono diventati sempre più importanti. A causa di questo ruolo, occorre che si sviluppino tecniche e procedure adatte per il calcolo degli spostamenti e delle tensioni all'interno delle strutture stesse. Poichè tali strutture sono molto complesse, e il livello di dettaglio richiesto, in particolare degli sforzi tangenziali, può essere molto elevato, accade che il costo computazionale possa diventare molto alto se adoperiamo i classici modelli FEM 3D. Per tali motivi, ove possibile, usiamo modelli beam 1D e modelli piastra 2D che possono diminuire di gran lunga i tempi di elaborazione. In particolare, per le teorie 1D useremo sempre la discretizzazione FEM lungo la direzione longitudinale e la teoria CUF per l'espansione della sezione, mentre per le teorie 2D useremo la discretizzazione per la superficie media della piastra e la teoria CUF lungo l'asse normale. Per applicare questi modelli al caso dei laminati, dobbiamo prendere degli accorgimenti e distinguere i casi in cui usiamo i polinomi di Lagrange e di Taylor (ovviamente tenendo conto delle peculiarità delle due formulazioni). Come vedremo in dettaglio, i primi possono essere adoperati nel metodo raffinato Layer Wise (LW) e in un approccio innovativo Equivalent Single Layer (ESL) e che discuteremo più nel dettaglio nei capitoli successivi, mentre i secondi possono essere adoperati esclusivamente nel metodo semplificato Equivalent Single-Layer (ESL).

Poichè abbiamo diversi strati incollati tra di loro, bisogna conoscere in modo molto approfondito le tensioni trasversali all'interfaccia delle lamine, in quanto quest'ultime permettono il corretto incollaggio. Se non siamo in grado di conoscere tali tensioni, si potrebbe verificare il caso in cui applichiamo uno sforzo troppo grande e si verifica il fenomeno della delaminazione, ossia uno scollamento degli strati.

1.2.1 ESL

In questo caso non riusciamo a distinguere i singoli strati, ma si opera un omegenizzazione su tutta la sezione. Infatti usiamo un'unica espressione per gli spostamenti dell'intera sezione. Nei casi classici (se usiamo i polinomi di Taylor questi problemi vengono in gran parte risolti) non si riesce ad avere un comportamento continuo all'interfaccia delle tensioni trasverali, e non si ottengono, nella maggior parte delle occasioni, risultati molto vicini alle soluzioni esatte. Come si vede nella figura 1.3 gli spostamenti sono continui lungo la sezione e questo genera deformazioni continue. Questo crea problemi a causa dell'equazione costitutiva per ogni strato:

$$\boldsymbol{\sigma}^k = \widetilde{\mathbf{C}}^k \boldsymbol{\epsilon} \tag{1.16}$$

Infatti usiamo le deformazioni calcolate come media per andare a delineare le tensioni nei singoli strati grazie alle matrici di rigidezza dei singoli strati.

Bisogna tenere conto che in casi simili a quelli raffigurati in figura 1.3, si usano modelli classici come quello di Eulero-Bernoulli per i casi unidimensionsionali:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u_{x_1} \\ u_y(x, y, z) = u_{y_1} + xu_{y_2} + zu_{y_3} \\ u_z(x, y, z) = u_{z_1} \end{cases}$$
(1.17)

oppure il modello di Kirchoff per i casi piastra:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = & u_{x0}(x, y) - z \frac{\partial u_{z0}}{\partial x} \\ u_y(x, y, z) = & u_{y0}(x, y) - z \frac{\partial u_{z0}}{\partial y} \\ u_z(x, y, z) = & u_{z0}(x, y) \end{cases}$$
(1.18)

mentre successivamente useremo modelli CUF 1D e 2D con espansioni di Taylor e di Lagrange che garantiscono un'accuratezza nel calcolo delle tensioni trasverali migliore.



Figura 1.3: Esempio di modello con ESL

1.2.2 LW

Per ovviare ai problemi riscontrati nei modelli ESL usiamo i modelli Layer-Wise, in cui abbiamo deformazioni discontinue all'interfaccia e non consideriamo più un unico strato equivalente. Ogni strato è calcolato in maniera indipendente. Il campo di spostamenti (figura 1.4) può essere definito in maniera indipendente per ogni strato k:

$$\begin{cases}
 u_x^k(x, y, z) = f(x, y, z) \\
 u_y^k(x, y, z) = g(x, y, z) \\
 u_z^k(x, y, z) = h(x, y, z)
 \end{cases}$$
(1.19)

Gli spostamenti per congruenza devono essere continui; il campo di deformazioni, invece, è discontinuo (infatti le derivate sono discontinue) e le tensioni sono continue.

Anche qui studieremo tutte e due le formulazioni e vedremo come analizzare i campi di spostamento nel particolare delle due formulazioni.



Figura 1.4: Esempio di modello con LW

Capitolo 2

Carrera Unified Formulation (CUF)

2.1 Le tre formulazioni



Figura 2.1: Sistema di riferimento usato nella trattazione

Per calcolare le strutture faremo sempre riferimento alla trattazione CUF, che ha la grande forza di essere formalmente identica, nella sua formulazione matematica, se viene usata per il caso Beam, Piastra o per un Solido. Infatti potremo usare sempre il seguente campo di spostamenti:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{\tau} F_{\tau} \mathbf{u}_{\tau} = F_{\tau} \mathbf{u}_{\tau}$$
(2.1)

 F_{τ} sono le cosiddette funzioni di forma, le quali permettono di modellizzare la sezione della struttura. Inoltre useremo sempre la notazione di Einstein in luogo della notazione estesa per le sommatorie. Per meglio dire, queste funzioni dipendono dal tipo di modello (1D, 2D, 3D) usato. Il sistema di riferimento adoperato è descritto in figura 2.1. Se vogliamo usare una struttura assimilabile a una beam dovremo usare delle funzioni di forma che modellizzano la sezione e quindi dipendenti da xe z; per una piastra le funzioni di forma saranno dipendenti da z, mentre per un solido sono funzioni costanti:

$$1D \to F_{\tau}(x, z) \tag{2.2}$$

$$2D \to F_{\tau}(z)$$
 (2.3)

$$3D \to 1$$
 (2.4)

Inoltre il pedice τ varia da 1 sino a M, il quale indica il numero di termini adoperati nell'espansione; proprio questo numero diventa una variabile poichè scegliendo l'ordine dell'espansione si possono avere infiniti modelli della sezione, senza studiare modelli specifici come nel caso delle formulazioni classiche.

Nel prosieguo della tesi ci occuperemo di diversi tipi di strutture, e le studieremo tramite modelli beam e modelli piastra. Le funzioni di forma adottate per la formulazione 1D e 2D sono, rispettivamente:

$$F_{\tau} = f(x, z) \tag{2.5}$$

$$F_{\tau} = f(z) \tag{2.6}$$

Utilizzeremo due tipi di espansioni: i polinomi di Taylor con metodo ESL e i polinomi di Lagrange con i metodi LW e ESL, scegliendo ovviamente le funzioni di forma specifiche a seconda della formulazione.

Ora che abbiamo scelto le funzioni di forma per la sezione, dobbiamo discretizzare il resto della struttura attraverso il metodo FEM (Finite Element Method). In questo caso adottiamo sempre delle funzioni lagrangiane, che di nuovo dipenderanno da coordinate diverse, a seconda della formulazione usata. Per la beam quindi useremo funzioni unidimensionali lungo y, per la piastra funzioni bidimensionali dipendenti da $x \in y$, mentre il modello solido è un vero modello 3D dipendente da tutte e tre le coordinate. Possiamo dunque riassumere così:

$$1D \to N_i(y)$$
 (2.7)

$$2D \to N_i(x, y)$$
 (2.8)

$$3D \to N_i(x, y, z)$$
 (2.9)

In conclusione, possiamo arrivare a definire il campo di spostamenti per i tre diversi tipi di modelli e definire le incognite $\mathbf{q}_{\tau i}$:

$$1D \to \mathbf{u} = F_{\tau}(x, z) N_i(y) \mathbf{q}_{\tau i} \tag{2.10}$$

$$2D \to \mathbf{u} = F_{\tau}(z)N_i(x,y)\mathbf{q}_{\tau i} \tag{2.11}$$

$$3D \to \mathbf{u} = F_{\tau} N_i(x, y, z) \mathbf{q}_{\tau i}$$
 (2.12)

In questo capitolo adotteremo la notazione semplificata e generale, senza indicare la dipendenza diretta dalle coordinate, per studiare la matrice di rigidezza. Difatti il procedimento per arrivare al cosiddetto 'Nucleo Fondamentale' (FN: Fundamental Nucleus) è formalmente identico per i tre casi. Nei capitoli successivi studieremo più nel dettaglio le formulazioni CUF 1D e 2D. Per poter studiare in modo approfondito il modello guscio, che è la generalizzazione dei modelli piastra, avremo bisogno di un analisi leggermente diversa, svolta nel capitolo 5.

2.2 Matrice di Rigidezza

Per trovare le componenti della matrice di rigidezza dell'elemento si parte dal principio dei lavori virtuali, dove all'inizio si studia il lavoro interno:

$$\delta L_{int} = \int_{V} (\delta \boldsymbol{\epsilon}^{T} \boldsymbol{\sigma}) dV = \delta L_{est}$$
(2.13)

Se si considerano le seguenti formule, riprese dal capitolo 1:

$$\boldsymbol{\sigma} = \widetilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\epsilon} \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{2.15}$$

$$\mathbf{u} = F_{\tau} N_i \mathbf{q}_{\tau i} \tag{2.16}$$

e, facendo bene attenzione a ricordarsi che sto prendendo due sistemi distinti e dunque si dovranno usare altri due diversi indici per le espressioni della discretizzazione, si arriva a:

$$\delta L_{int} = \int_{V} \delta \mathbf{u}^{T} \mathbf{D}^{T} \widetilde{\mathbf{C}} \mathbf{D} \mathbf{u} dV \qquad (2.17)$$

$$\delta L_{int} = \int_{\Omega} \int_{l} \delta \mathbf{q}_{\tau i}^{T} F_{\tau} N_{i} \mathbf{D}^{T} \widetilde{\mathbf{C}} \mathbf{D} F_{s} N_{j} \mathbf{q}_{sj} d\Omega dl \qquad (2.18)$$

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{K}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{sj} \tag{2.19}$$

dove $\mathbf{K}^{ij\tau s}$ è la matrice di rigidezza scritta nella forma dei nuclei fondamentali. Il nucleo fondamentale è una matrice 3×3 che è formalmente indipendente dall'ordine del modello. Ora bisogna procedere all'assemblaggio della matrice di rigidezza per una struttura. Si parte dal creare un matrice di rigidezza del nodo (figura 2.2) dove dobbiamo includere dei nuclei 3×3 in alcune posizioni specifiche. Questi nuclei devono essere disposti in questa matrice $M \times M$ a seconda dei due indici τ e s presi in esame, se consideriamo i nuclei fondamentali come singoli componenti della matrice. Le componenti dunque saranno calcolate a seconda dell'ordine di espansione indicato dal blocchetto. La matrice in realtà sarà una $(3 \times M) \times (3 \times M)$. Questa matrice viene poi inserita nella matrice di rigidezza del singolo elemento (figura 2.3) che avrà dimensioni $N_{NE} \times N_{NE}$ se consideriamo un blocchetto $\tau - s$ come un singolo componente della matrice dell'elemento. Questa matrice infine dovrà essere assemblata nella matrice di rigidezza globale (figura 2.4) con la stessa procedura usata anche per gli altri metodi agli elementi finiti, ossia conoscendo una matrice di connectivity per unificare la struttura.

2.3 Vettore dei carichi

Ora dobbiamo calcolare il lavoro virtuale dei carichi e così potremo trovare il suo Nucleo Fondamentale. Successivamente vedremo come trattare e discretizzare il



Figura 2.2: Procedura grafica per l'assemblaggio della matrice di rigidezza del nodo



Figura 2.3: Procedura grafica per l'assemblaggio della matrice di rigidezza dell'elemento



Figura 2.4: Procedura grafica per l'assemblaggio della matrice di rigidezza globale

carico nelle varie formulazioni e a secondo dei tipi (puntuali, di superficie, di linea). Qui indichiamo un generico carico \mathbf{P} :

$$\delta L_{est} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} = \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T F_{\tau} N_i \mathbf{P}$$
(2.20)

Se adottiamo anche per il carico la formulazione CUF arriviamo a :

$$\delta L_{est} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} = \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T F_{\tau} N_i F_s N_j \mathbf{p}_{sj}$$
(2.21)

Infine, ponendo l'uguaglianza tra il lavoro esterno ed interno, giungiamo all'equazione di Hooke:

$$\delta \mathbf{q}_{\tau i}^T : \quad \mathbf{K}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{sj} = \mathbf{p}_{sj} \tag{2.22}$$

Dopo aver unito tutti gli elementi della struttura possiamo scrivere l'equazione lineare:

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{F} \tag{2.23}$$

Capitolo 3 Modello Beam

3.1 Unione di CUF e FEM



Figura 3.1: Esempio di discretizzazione di una beam

In questo capitolo ci concentriamo sullo sviluppo della formulazione CUF 1D, unita alla discretizzazione FEM. In figura 3.1 vediamo come una struttura possa essere discretizzata tramite degli elementi unidimensionali, e ad ogni punto della discretizzazione corrisponda un'espansione della sezione. Useremo, a seconda delle necessità, elementi B2, B3, B4 Lagrangiani (figura 3.2) che hanno la seguente forma matematica:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-r), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1+r), \quad \begin{cases} r_1 = -1\\ r_2 = +1 \end{cases}$$
(3.1)

$$N_1 = \frac{1}{2}r(1-r), \quad N_2 = \frac{1}{2}r(1+r), \quad N_3 = -(1-r)(1+r), \quad \begin{cases} r_1 = -1\\ r_2 = +1\\ r_3 = 0 \end{cases}$$
(3.2)

$$N_{1} = -\frac{9}{16}(r + \frac{1}{3})(r - \frac{1}{3})(r - 1), \quad N_{2} = \frac{9}{16}(r + \frac{1}{3})(r - \frac{1}{3})(r + 1),$$

$$N_{3} = \frac{27}{16}(r + 1)(r - \frac{1}{3})(r - 1), \quad N_{4} = -\frac{27}{16}(r + 1)(r + \frac{1}{3})(r - 1), \qquad \begin{cases} r_{1} = -1\\ r_{2} = +1\\ r_{3} = -\frac{1}{3}\\ r_{4} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(3.3)$$

dove la coordinata naturale r_i varia da -1 a +1 e r_i indica la posizione del nodo all'interno del sistema naturale della beam.



Figura 3.2: Elementi Beam

Dato che si è espansa la sezione grazie a una teoria di ordine arbitrario e discretizzato l'asse della trave con il metodo degli elementi finiti (usando i polinomi di Lagrange che sono funzioni della coordinata y) si dovranno adottare due indici e si dovranno calcolare $\mathbf{q}_{\tau i}$ che non dipendono dalle coordinate x, y, z:

$$\mathbf{q}_{\tau i} = \{q_{u_{x_{\tau i}}}, q_{u_{y_{\tau i}}}, q_{u_{z_{\tau i}}}\}^T \tag{3.4}$$

con $\tau = 1, ..., M$ numero del termine adoperato nell'espansione, e $i = 1, ..., N_{EN}$ numero del nodo dell'elemento.

Dunque il campo di spostamenti usando CUF e il FEM diventa:

$$\mathbf{u} = F_{\tau}(x, z) N_i(y) \mathbf{q}_{\tau i} \tag{3.5}$$

. **Т**

Se consideriamo un elemento a due nodi e si utilizza un'espansione del primo ordine le variabili diventano :

$$\mathbf{q}_{\tau i} = \left\{ \begin{array}{ccccc} q_{u_{x_{11}}} & q_{u_{y_{11}}} & q_{u_{z_{11}}} & q_{u_{x_{21}}} & q_{u_{y_{21}}} & q_{u_{z_{21}}} & q_{u_{x_{31}}} & q_{u_{y_{31}}} & q_{u_{z_{31}}} \\ q_{u_{x_{12}}} & q_{u_{y_{12}}} & q_{u_{z_{12}}} & q_{u_{x_{22}}} & q_{u_{y_{22}}} & q_{u_{z_{32}}} & q_{u_{y_{32}}} & q_{u_{z_{32}}} \end{array} \right\}^{T}$$

Nel modo seguente possiamo calcolare i gradi di libertà totali dopo aver unito gli elementi della struttura:

$$DOFs = \underbrace{3 \times M}_{\text{n di DOF per nodo}} \times \left[(\underbrace{N_{NE}}_{\text{n di nodi per elemento}} -1) \times \underbrace{NBE}_{\text{n totale di elementi beam}} +1 \right] \quad (3.6)$$

3.1.1 Matrice di Rigidezza

Nel precedente capitolo (2), abbiamo studiato come ricavare il Nucleo Fondamentale e assemblare le varie matrici per giungere alla matrice della struttura nel suo insieme. Ora dobbiamo specificare le nove componenti dell'unità prima di questa matrice. Le componenti variano a seconda della formulazione adoperata. Dato che ormai abbiamo specificato che usiamo materiali ortotropi (si veda il capitolo 1) e abbiamo specificato le coordinate dipendenti delle funzioni di forma per il FEM e la sezione, possiamo scrivere:

dove le virgole indicano le derivate parziali rispetto alle coordinate x,y e z, e inoltre:

$$\triangleleft (...) \triangleright_{\Omega} = \int_{\Omega} (...) dx dz \tag{3.8}$$

$$\left(I_{l}^{ij}, I_{l}^{ij,y}, I_{l}^{i,yj}, I_{l}^{i,yj,y}\right) = \int_{l} \left(N_{i}N_{j}, N_{i}N_{j,y}, N_{i,y}N_{j}, N_{i,y}N_{j,y}\right) dy$$
(3.9)

3.1.2 Vettore dei carichi

Anche i varii tipi di carichi che si incontrano nell'analisi delle strutture necessitano di essere discretizzati ed elaborati nell'ambito della formulazione CUF 1D e dunque bisogna usare la discretizzazione degli elementi e l'espansione della sezione. Come noto possiamo avere tre tipi di carico: carico su una superficie, su una linea e un carico puntuale e in questo paragrafo vedremo appunto come trattare i tre casi.

Carico superficiale Incominciamo col trattare un carico superficiale $p_{\alpha\beta}(y)$ che agisce su una superficie laterale S_{α} di una BEAM. La lettera α indica l'asse perpendicolare alla superficie S_{α} , e può essere x o y, mentre la lettera greca β indica la direzione di carico e può essere cambiata in qualsiasi delle tre lettere indicanti gli assi della BEAM. Così la variazione virtuale del lavoro esterno dovuta al carico sarà

$$\delta L_{est}^{p_{\alpha\beta}} = \int_{S_{\alpha}} \delta u_{\beta\tau} p_{\alpha\beta} d\alpha dy \tag{3.10}$$

e introducendo l'espansione F_{τ} e la discretizzazione FEM:

$$\delta L_{est}^{p_{\alpha\beta}} = \int_{S_{\alpha}} F_{\tau}(\alpha_p) N_i \delta q_{\beta i} p_{\alpha\beta} d\alpha dy \qquad (3.11)$$

ove α_p indica la coordinata di applicazione del carico.

Carico lineare Un carico lineare $l_{\alpha\beta}(y)$ può essere trattato in modo molto simile rispetto al caso della pressione, con la differenza che bisogna integrare su una linea e non su una superficie. In modo analogo la variazione virtuale del lavoro esterno dovuta al carico lineare

$$\delta L_{est}^{l_{\alpha\beta}} = \int_{l} \delta u_{\beta\tau} l_{\alpha\beta} dy \qquad (3.12)$$

e introducendo l'espansione F_{τ} e la discretizzazione FEM:

$$\delta L_{est}^{l_{\alpha\beta}} = \int_{l} F_{\tau}(\alpha_{p}\beta_{p}) N_{i} \delta q_{\beta\tau i} l_{\alpha\beta} dy \qquad (3.13)$$

ove α_p e β_p indicano le coordinate sulla sezione di applicazione del carico.

Carico concentrato Il caso più semplice da applicare alla formulazione CUF è il carico puntuale, in quanto agisce già sui singoli punti, a differenza dei precedenti due carichi dove bisognava discretizzarli per permettere di integrare numericamente e ottenere i lavori esterni virtuali. Se partiamo da un carico concentrato generico

$$\mathbf{P} = \left\{ P_{u_x} P_{u_y} P_{u_z} \right\}^T \tag{3.14}$$

e se svolgiamo le consuete operazioni per trovare la variazione viruale del lavoro esterno, si giunge a

$$\delta L_{est} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} = F_\tau N_i \delta \mathbf{q}_{\tau i} \mathbf{P}$$
(3.15)

In questo modo possiamo identificare correttamente il vettore dei carichi e così trovare in che posizione caricare le variabili.

3.2 Tipi di espansione 2D

Quando utilizziamo le espansioni nel caso beam abbiamo la discretizzazione FEM 1D, mentre lungo lo spessore si usano espansioni che dipendono dalle coordinate x e z e avremo dunque funzioni $F_{\tau}(x, z)$. Queste funzioni possono essere di qualsiasi tipo, a seconda delle necessità: possiamo usare espansioni di Taylor, espansioni di Lagrange o di Legendre o anche espansioni in funzioni trigonometriche. Di seguito ci occuperemo soltanto di alcune di queste equazioni. Qualunque sia il tipo di espansione scelto, la struttura sarà sempre di questa forma

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_{\tau}(x, z)\mathbf{u}_{\tau}(y) \quad \tau = 0, 1, ..., N$$
(3.16)

oppure in forma espansa

$$u(x, y, z) = F_0(x, z)u_0(y) + F_1(x, z)u_1(y) + \dots + F_N(x, z)u_N(y)$$

$$v(x, y, z) = F_0(x, z)v_0(y) + F_1(x, z)v_1(y) + \dots + F_N(x, z)v_N(y)$$

$$w(x, y, z) = F_0(x, z)w_0(y) + F_1(x, z)w_1(y) + \dots + F_N(x, z)w_N(y)$$
(3.17)

ove N è l'ordine di espansione del modello.

3.3 Espansioni di Taylor 2D (TE)

Come primo esempio di espansione parliamo dei polinomi di Taylor. In questo caso per ogni punto della discretizzazione dobbiamo espandere la sezione, ossia andiamo a studiare nel dettaglio cosa succede alla sezione stessa adoperando delle funzioni per i tre spostamenti. Nella figura 3.3 vediamo come da un nodo FEM possiamo ricavare tutte le proprietà della sezione.

Ricordando l'espansione di una generica funzione F_{τ} :

$$\mathbf{u} = F_{\tau} \mathbf{u}_{\tau}, \quad \tau = 1, 2, \dots, M \tag{3.18}$$



Figura 3.3: Espansione della sezione con Taylor per formulazione CUF 1D

dove usiamo M (termini dell'espansione) al posto della lettera N. Inoltre la scelta di F_{τ} e M è arbitraria, ovvero possiamo decidere liberamente l'ordine di espansione. Nella tabella 3.1 F_{τ} e M sono visti come funzioni dell'ordine della sezione.

Ν	М	$F_{ au}$
0	1	$F_1 = 1$
1	3	$F_2 = x, F_3 = z$
2	6	$F_4 = x^2, \ F_5 = xz, \ F_6 = z^2$
3	10	$F_7 = x^3$, $F_8 = x^2 z$, $F_9 = x z^2$, $F_{10} = z^3$
:	:	÷
N	$(N^2 + N + 2)/2$	$F_{(N+1)(N+2)/2} = x^N, \dots, F_{(N+1)(N+2)/2} = z^N$

Tabella 3.1: Forma compatta dei polinomi di Taylor per la formulazione CUF 2D

Si mostra un esempio con un modello del secondo ordine (N = 2):

$$u_{x} = u_{x_{1}} + xu_{x_{2}} + zu_{x_{3}} + x^{2}u_{x_{4}} + xzu_{x_{5}} + z^{2}u_{x_{6}}$$

$$u_{y} = u_{y_{1}} + xu_{y_{2}} + zu_{y_{3}} + x^{2}u_{y_{4}} + xzu_{y_{5}} + z^{2}u_{y_{6}}$$

$$u_{z} = u_{z_{1}} + xu_{z_{2}} + zu_{z_{3}} + x^{2}u_{z_{4}} + xzu_{z_{5}} + z^{2}u_{z_{6}}$$
(3.19)

Questo modello trave ha 18 variabili: 3 costanti (indicano gli spostamenti veri e

propri), 6 lineari, e 9 paraboliche (sono le derivate degli spostamenti) ed è definito un modello *pieno* in quanto abbiamo usato tutti i termini dell'espansione. Si potrebbero adottare anche modelli *ridotti* per diminuire il numero di variabili e ridurre il costo computazionale (nei nostri esempi comunque non utilizzeremo mai questa tecnica):

$$u_{x} = u_{x_{1}} + xu_{x_{2}} + x^{2}u_{x_{4}} + xzu_{x_{5}}$$

$$u_{y} = u_{y_{1}} + xu_{y_{2}} + zu_{y_{3}} + x^{2}u_{y_{4}} + z^{2}u_{y_{6}}$$

$$u_{z} = u_{z_{1}} + zu_{z_{3}} + z^{2}u_{z_{5}} + z^{2}u_{z_{6}}$$
(3.20)

Modelli di beam di ordine - N

Con questa teoria possiamo decidere qualsiasi tipo di espansione e, come abbiamo visto, l'ordine stesso della teoria N è una variabile che scegliamo a seconda dei casi. Dunque un modello di ordine superiore arbitrario può essere definito come:

$$u_{x} = \dots + \sum_{M=0}^{N} x^{N-M} z^{M} u_{x_{\frac{N(N+1)+M+1}{2}}}$$

$$u_{y} = \dots + \sum_{M=0}^{N} x^{N-M} z^{M} u_{y_{\frac{N(N+1)+M+1}{2}}}$$

$$u_{z} = \underbrace{\dots}_{0,\dots,N-1} + \underbrace{\sum_{M=0}^{N} x^{N-M} z^{M} u_{z_{\frac{N(N+1)+M+1}{2}}}}_{\text{ordine-N}}$$
(3.21)

Il numero totale delle variabili del modello per ogni nodo N_{DV} :

$$N_{DV} = 3 \times \frac{(N+1)(N+2)}{2} = 3 \times M \tag{3.22}$$

Nel caso della formulazione agli elementi finiti, N_{DV} indica il numero dei gradi di libertà per ogni nodo. Le componenti di deformazione possono essere scritte:

$$\epsilon_{xx} = \dots + \sum_{M=0}^{N-1} (N-M) x^{N-M-1} z^{M} u_{x \frac{N(N+1)+M+1}{2}}$$

$$\epsilon_{yy} = \dots + \sum_{M=0}^{N} x^{N-M} z^{M} \frac{\partial \left(u_{y \frac{N(N+1)+M+1}{2}}\right)}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \dots + \sum_{M=0}^{N} x^{N-M} z^{M-1} u_{z \frac{N(N+1)+M+1}{2}}$$

$$\epsilon_{xy} = \dots + \sum_{M=0}^{N} x^{N-M} z^{M} \frac{\partial \left(u_{x \frac{N(N+1)+M+1}{2}}\right)}{\partial y}$$

$$+ \sum_{M=0}^{N-1} (N-M) x^{N-M-1} z^{M} u_{y \frac{N(N+1)+M+1}{2}}$$

$$\epsilon_{yz} = \dots + \sum_{M=0}^{N} x^{N-M} z^{M} \frac{\partial \left(u_{z \frac{N(N+1)+M+1}{2}}\right)}{\partial y}$$

$$+ \sum_{M=0}^{N} M x^{N-M} z^{M-1} u_{y \frac{N(N+1)+M+1}{2}}$$

$$\epsilon_{xz} = \dots + \sum_{M=0}^{N-1} (N-M) x^{N-M} z^{M-1} u_{z \frac{N(N+1)+M+1}{2}}$$

$$\cdots + \sum_{M=0}^{N-1} M x^{N-M} z^{M-1} u_{x \frac{N(N+1)+M+1}{2}}$$

$$\cdots + \sum_{M=0}^{N-1} M x^{N-M} z^{M-1} u_{x \frac{N(N+1)+M+1}{2}}$$

$$\cdots + \sum_{M=0}^{N-1} M x^{N-M} z^{M-1} u_{x \frac{N(N+1)+M+1}{2}}$$

Se si vogliono adoperare le teorie classiche si può optare per una teoria di ordine basso, scegliendo in modo opportuno il numero delle variabili. Nel caso di Eulero-Bernoulli (EBBM) il campo di spostamenti diventa:

$$u_{x} = u_{x_{1}}(y)$$

$$u_{y} = u_{y_{1}}(y) - \frac{\partial u_{x_{1}}}{\partial y}x - \frac{\partial u_{z_{1}}}{\partial y}z$$

$$u_{z} = u_{z_{1}}$$
(3.24)

Nel caso, invece, di Timoshenko (TBT) :

$$u_{x} = u_{x_{1}}(y)$$

$$u_{y} = u_{y_{1}} + \phi_{z}(y)x + \phi_{x}(y)z$$

$$u_{z} = u_{z_{1}}$$
(3.25)

3.4 Espansioni di Lagrange 2D (LE)

A differenza dell'espansione di Taylor, creiamo una mesh su tutta la sezione. I punti che sono adoperati veramente nei calcoli sono i punti della mesh 2D, e non consideriamo i punti della discretizzazione beam (figura 3.4).



Figura 3.4: Espansione della sezione con Lagrange per formulazione CUF 1D

3.4.1 Coordinate normalizzate

Quando discretizziamo una sezione di una beam noi cerchiamo di riprodurre la figura reale della struttura, o almeno una figura che si avvicini molto. Dunque la geometria reale degli elementi che compongono la sezione può essere di qualsiasi forma come si può notare nella parte a sinistra delle figure 3.5, 3.6 e 3.7. Quando però bisogna calcolare coll'elaboratore è molto più semplice ricondurci al piano naturale dove si possono usare con relativa facilità le espansioni di Lagrange. Più avanti ci sarà un esempio con degli elementi LE4 in cui si mostra come passare da un sistema generico reale a una geometria normalizzata definita da un quadrato di dimensioni 2×2 e dove il sistema di riferimento è centrato al centro del quadrato stesso (parte a destra delle figure 3.5, 3.6 e 3.7).

Elemento LE4

Il primo elemento di cui si parla è un semplice elemento a quattro nodi (figura 3.5) e le equazioni per ogni punto hanno sempre la stessa struttura (funzione lineare di



Figura 3.5: Elemento LE4

 α per funzione lineare di β)

$$F_{\tau} = \frac{1}{4} (1 + \alpha \alpha_{\tau}) (1 + \beta \beta_{\tau}), \quad \tau = 1, 2, 3, 4$$
(3.26)

Elemento LE9

Il secondo elemento che adotteremo sarà l'elemento a 9 nodi (figura 3.6). In questo caso le formule per i nodi variano a seconda delle posizioni dei nodi e si vede come per i nodi ai vertici si ha la stessa struttura, per i nodi al centro dei lati se ne ha un'altra, e per il nodo centrale se ne ha un'altra ancora. Comunque le funzioni sono paraboliche sia per α che per β .

$$F_{\tau} = \frac{1}{4} (\alpha^{2} + \alpha \alpha_{\tau}) (\beta^{2} + \beta \beta_{\tau}), \quad \tau = 1,3,5,7$$

$$F_{\tau} = \frac{1}{2} \beta_{\tau} (\beta^{2} + \beta \beta_{\tau}) (1 - \alpha^{2}) + \frac{1}{2} \alpha_{\tau} (\alpha^{2} + \alpha \alpha_{\tau}) (1 - \beta^{2}), \quad \tau = 2,4,6,8 \quad (3.27)$$

$$F_{\tau} = (1 - \alpha^{2}) (1 - \beta^{2}), \quad \tau = 9$$

Elemento LE16

L'ultimo elemento che utilizzeremo per l'espansione della sezione sarà l'elemento a 16 nodi (figura 3.7). In questo caso le formule per i nodi variano a seconda delle posizioni dei nodi e si vede come per i nodi ai vertici si ha la stessa struttura, per i nodi al centro dei lati se ne ha un altra, e per i nodi centrali se ne ha un'altra ancora. Comunque le funzioni sono cubiche sia per α che per β .


Figura 3.6: Elemento LE9





$$F_{\tau} = \frac{81}{256} (1 + \alpha \alpha_{\tau}) (1 + \beta \beta_{\tau}) \left(\frac{1}{9} - \alpha^{2}\right) (1 + \beta \beta_{\tau}) \left(\frac{1}{9} - \beta^{2}\right), \quad \tau = 1, 4, 7, 10$$

$$F_{\tau} = \frac{243}{256} (1 - \alpha^{2}) \left(\beta^{2} - \frac{1}{9}\right) \left(\frac{1}{3} + 3\alpha \alpha_{\tau}\right) (1 + \beta \beta_{\tau}), \quad \tau = 2, 3, 8, 9$$

$$F_{\tau} = \frac{243}{256} (1 - \beta^{2}) \left(\alpha^{2} - \frac{1}{9}\right) \left(\frac{1}{3} + 3\beta \beta_{\tau}\right) (1 + \alpha \alpha_{\tau}), \quad \tau = 5, 6, 11, 12 \quad (3.28)$$

$$F_{\tau} = \frac{729}{256} (1 - \alpha^{2}) (1 - \beta^{2}) \left(\frac{1}{3} + 3\alpha \alpha_{\tau}\right) \left(\frac{1}{3} + 3\beta \beta_{\tau}\right), \quad \tau = 13, 14, 15, 16$$

3.4.2 Formulazione isoparametrica

Dando un esempio di calcolo di un integrale $(|J(\alpha, \beta)|$ è il determinante Jacobiano):

$$\int_{\Omega} F_{\tau,x}(x,z) F_{s,z}(x,z) dx dz = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F_{\tau,x}(\alpha,\beta) F_{s,z}(\alpha,\beta) |J(\alpha,\beta)| d\alpha d\beta \quad (3.29)$$
on:

con:

$$F_{\tau,x} = F_{\tau,\alpha}\alpha_{,x} + F_{\tau,\beta}\beta_{,x} \tag{3.30}$$

$$F_{\tau,z} = F_{\tau,\alpha}\alpha_{,z} + F_{\tau,\beta}\beta_{,z} \tag{3.31}$$

ma sapendo che conoscere $\alpha = \alpha(x, z)$ e $\beta = \beta(x, z)$ è difficile allora:

$$F_{\tau,\alpha} = F_{\tau,x} x_{,\alpha} + F_{\tau,z} z_{,\alpha} \tag{3.32}$$

$$F_{\tau,\beta} = F_{\tau,x} x_{,\beta} + F_{\tau,z} z_{,\beta} \tag{3.33}$$

oppure in notazione matriciale:

$$\left\{\begin{array}{c}F_{\tau,\alpha}\\F_{\tau,\beta}\end{array}\right\} = \underbrace{\begin{bmatrix}x_{,\alpha} & z_{,\alpha}\\x_{,\beta} & z_{,\beta}\end{bmatrix}}_{[J]}\left\{\begin{array}{c}F_{\tau,x}\\F_{\tau,z}\end{array}\right\}$$
(3.34)

Riarrangiando l'equazione precedente troviamo:

$$\begin{cases} F_{\tau,x} \\ F_{\tau,z} \end{cases} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} z_{,\beta} & -z_{,\alpha} \\ -x_{,\alpha} & x_{,\beta} \end{bmatrix} \begin{cases} F_{\tau,\alpha} \\ F_{\tau,\beta} \end{cases}$$
(3.35)

Maggiori distorsioni, o addirittura elementi che sono ritirati all'indietro, possono causare un problema con una singolarità. Ora mettiamo un esempio con un elemento LE4 dove vediamo il campo di spostamenti per $x \in y$:

$$x = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + F_4 x_4 \tag{3.36}$$

$$z = F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + F_4 z_4 \tag{3.37}$$

Se dobbiamo calcolare nell'eleboratore la matrice di rigidezze, dobbiamo trovare dei metodi per discretizzare gli integrali e usiamo la quadratura di Gauss. Come esempio riportiamo:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F_{\tau}(\alpha, \beta) F_{s}(\alpha, \beta) |J(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta =$$
$$= \sum_{h} \sum_{k} w_{h} w_{k} F_{\tau}(\alpha_{h}, \beta_{k}) F_{s}(\alpha_{h}, \beta_{k}) |J(\alpha_{h}, \beta_{k})|$$
(3.38)

Le incognite $u_{x1}, ..., u_{z4}$ (nel caso LE4) sono le tre componenti di spostamento per ogni nodo:

• Le incognite del problema sono solo parametri fisici traslazionali;

• Le incognite possono essere posizionate sulle suprfici fisiche sulla struttura.

I gradi di libertà totali della sezione possono essere calcolati come:

$$N_{DV} = N_{punti\ espansione} \times 3 = M \times 3 \tag{3.39}$$

Capitolo 4 Modello Piastra

4.1 Unione di CUF e FEM



Figura 4.1: Esempio di discretizzazione di una piastra

In questo capitolo ci concentriamo sullo sviluppo della formulazione CUF 2D, unita alla discretizzazione FEM. In figura 4.1 vediamo come una struttura possa essere discretizzata tramite degli elementi bidimensionali, e ad ogni punto della discretizzazione corrisponda un'espansione della sezione. Useremo, a seconda delle necessità, elementi Q4 e Q9 Lagrangiani (figura 4.2) che hanno la seguente forma matematica:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i), \quad i = 1, 2, 3, 4$$
(4.1)

$$N_{i} = \frac{1}{4} (\xi^{2} + \xi\xi_{i})(\eta^{2} + \eta\eta_{i}), \quad i = 1, 3, 5, 7$$

$$N_{i} = \frac{1}{2} \eta_{i} (\eta^{2} + \eta\eta_{i})(1 - \xi^{2}) + \frac{1}{2} \xi_{i} (\xi^{2} + \xi\xi_{i})(1 - \eta^{2}), \quad i = 2, 4, 6, 8 \qquad (4.2)$$

$$N_{i} = (1 - \xi^{2})(1 - \eta^{2}), \quad i = 9$$

dove le coordinate naturali $\xi \in \eta$ variano da -1 a +1. Se consideriamo una piastra rettangolare sono definite come segue:

$$\xi = \frac{2(x - x_1) - a}{a}$$

$$\eta = \frac{2(y - y_1) - b}{b}$$
(4.3)

ove a è la dimensione della piastra lungo x, e b è la dimensione lungo y, mentre x_1 e y_1 sono le coordinate globali del nodo 1 dell'elemento.



Figura 4.2: Elementi FEM utilizzati per la piastra

Dato che si è espansa la sezione lungo z grazie a una teoria di ordine arbitrario e discretizzato la superficie media della piastra con il metodo degli elementi finiti (usando i polinomi di Lagrange che sono funzioni delle coordinate x e z) si dovranno adottare due indici e si dovranno calcolare $\mathbf{q}_{\tau i}$ che non dipendono dalle coordinate x, y, z:

$$\mathbf{q}_{\tau i} = \{q_{u_{x_{\tau i}}}, q_{u_{y_{\tau i}}}, q_{u_{z_{\tau i}}}\}^T \tag{4.4}$$

con $\tau = 1, ..., M$ che indica il numero dei termini dell'espansione, e $i = 1, ..., N_{EN}$ numero del nodo dell'elemento.

Dunque il campo di spostamenti usando CUF e il FEM diventa:

$$\mathbf{u} = F_{\tau}(z)N_i(x,y)\mathbf{q}_{\tau i} \tag{4.5}$$

Se consideriamo un elemento FEM a quattro nodi e si utilizza un'espansione del primo ordine di Taylor, le variabili diventano :

$$\mathbf{q}_{\tau i} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} q_{u_{x_{01}}} & q_{u_{y_{01}}} & q_{u_{z_{01}}} & q_{u_{x_{11}}} & q_{u_{y_{11}}} & q_{u_{z_{11}}} \\ q_{u_{x_{02}}} & q_{u_{y_{02}}} & q_{u_{z_{02}}} & q_{u_{x_{12}}} & q_{u_{y_{12}}} & q_{u_{z_{12}}} \\ q_{u_{x_{03}}} & q_{u_{y_{03}}} & q_{u_{z_{03}}} & q_{u_{x_{13}}} & q_{u_{y_{13}}} & q_{u_{z_{13}}} \\ q_{u_{x_{04}}} & q_{u_{y_{04}}} & q_{u_{z_{04}}} & q_{u_{x_{14}}} & q_{u_{y_{14}}} & q_{u_{z_{14}}} \end{array} \right\}^T$$

Nel modo seguente possiamo calcolare i gradi di libertà totali dopo aver unito gli elementi della struttura:

$$DOFs = \underbrace{3 \times M}_{\text{n di DOF per nodo}} \times \underbrace{N_N}_{\text{n totale di nodi}}$$
(4.6)

4.1.1 Matrice di rigidezza

In analogia a quanto fatto per la formulazione CUF 1D, dobbiamo esplicitare le nove componenti del Nucleo Fondamentale della matrice di rigidezza. Dopo aver identificato il genere di materiale usato (ortotropo) e le dipendenze delle funzioni di forma della discretizzazione FEM e della sezione possiamo scrivere:

$$\begin{split} K_{xx}^{ij\taus} &= I_{\Omega}^{ij} \triangleleft F_{\tau,z} \widetilde{C}_{55} F_{s,z} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,yj,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{66} F_{s} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,x,j,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{16} F_{s} \triangleright_{l} \\ &+ I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{16} F_{s} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,x,j,x} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{11} F_{s} \triangleright_{l} \\ K_{xy}^{ij\taus} &= I_{\Omega}^{ij} \triangleleft F_{\tau,z} \widetilde{C}_{45} F_{s,z} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,x,j,x} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{26} F_{s} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,x,j,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{12} F_{s} \triangleright_{l} \\ &+ I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau,z} \widetilde{C}_{45} F_{s} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,x,j,x} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{16} F_{s} \triangleright_{l} \\ K_{xz}^{ij\taus} &= I_{\Omega}^{ij,y} \triangleleft F_{\tau,z} \widetilde{C}_{45} F_{s} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,y,j,y} \triangleleft F_{\tau,z} \widetilde{C}_{55} F_{s} \triangleright_{l} I_{\Omega}^{i,y,j} \triangleleft F_{\tau} + \widetilde{C}_{36} F_{s,z} \triangleright_{l} \\ &+ I_{\Omega}^{i,x,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{13} F_{s,z} \triangleright_{l} \\ K_{yx}^{ij\taus} &= I_{\Omega}^{ij} \triangleleft F_{\tau,z} \widetilde{C}_{45} F_{s,z} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,x,j,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{26} F_{s} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,x,j,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{66} F_{s} \triangleright_{l} \\ &+ I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau,z} \widetilde{C}_{45} F_{s,z} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,x,j,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{26} F_{s} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,x,j,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{26} F_{s} \triangleright_{l} \\ &+ I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau,z} \widetilde{C}_{44} F_{s,z} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,x,j,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{22} F_{s} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,x,j,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{26} F_{s} \triangleright_{l} \\ &+ I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{26} F_{s} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,x,j,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{23} F_{s,z} \triangleright_{l} \\ &+ I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau,z} \widetilde{C}_{36} F_{s,z} \triangleright_{l} \\ &+ I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau,z} \widetilde{C}_{33} F_{s,z} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau,z} \widetilde{C}_{36} F_{s} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{44} F_{s,z} \triangleright_{l} \\ &+ I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{45} F_{s,z} \triangleright_{l} \\ \\ &+ I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau,z} \widetilde{C}_{33} F_{s,z} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,y,y,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{44} F_{s} \triangleright_{l} + I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{45} F_{s} \triangleright_{l} \\ &+ I_{\Omega}^{i,y,y} \triangleleft F_{\tau} \widetilde{C}_{45} F_{s,z} \triangleright_{l} \\ \end{aligned}$$

dove le virgole indicano le derivate parziali rispetto alle coordinate x,y e z, e inoltre:

$$\triangleleft (...) \triangleright_l = \int_{\Omega} (...) dz \tag{4.7}$$

$$\left(I_{\Omega}^{ij}, I_{\Omega}^{i,xj}, I_{\Omega}^{i,yj}, I_{\Omega}^{ij,x}, I_{\Omega}^{ij,y}, I_{\Omega}^{i,xj,x}, I_{\Omega}^{i,xj,y}, I_{\Omega}^{i,yj,x}, I_{\Omega}^{i,yj,x}\right)$$

$$(4.8)$$

$$= \int_{l} \left(N_{i} N_{j}, N_{i,x} N_{j}, N_{i,y} N_{j}, N_{i} N_{j,x}, N_{i} N_{j,y}, N_{i,x} N_{j,x}, N_{i,x} N_{j,y}, N_{i,y} N_{j,x}, N_{i,y} N_{j,y} \right) dy$$

4.1.2 Vettore dei carichi

Anche i varii tipi di carichi che si incontrano nell'analisi delle strutture hanno bisogno di essere discretizzati ed elaborati nell'ambito della formulazione CUF 2D e dunque bisogna usare la discretizzazione degli elementi e l'espansione della sezione. Come noto possiamo avere due tipi di carico: carico su una superficie e un carico puntuale e in questo paragrafo vedremo appunto come trattare i due casi.

Carico superficiale Incominciamo col trattare un carico superficiale $p_{\alpha}(x, y)$ che agisce sulla superficie orizzontale Ω di una piastra. La lettera α indica l'asse della direzione del carico, e può essere x,y o z. Così la variazione virtuale del lavoro esterno dovuta al carico sarà

$$\delta L_{est}^{p_{\alpha}} = \int_{\Omega} \delta u_{\alpha} p_{\alpha} d\Omega \tag{4.9}$$

e introducendo l'espansione F_{τ} e la discretizzazione FEM:

$$\delta L_{est}^{p_{\alpha}} = \int_{\Omega} F_{\tau}(z_p) N_i \delta q_{\alpha \tau i} p_{\alpha} d\Omega$$
(4.10)

ove z_p indica la coordinata di applicazione del carico.

Carico concentrato Il caso più semplice da applicare alla formulazione CUF è il carico puntuale, in quanto agisce già sui singoli punti, a differenza del precedente carico. Se partiamo da un carico concentrato generico

$$\mathbf{P} = \left\{ P_{u_x} P_{u_y} P_{u_z} \right\}^T \tag{4.11}$$

e svolgiamo le consuete operazioni per trovare la variazione viruale del lavoro esterno si giunge a

$$\delta L_{est} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} = F_\tau N_i \delta \mathbf{q}_{\tau i} \mathbf{P} \tag{4.12}$$

In questo modo possiamo identificare correttamente il vettore dei carichi e così trovare in quale posizione caricare le variabili.

4.2 Tipi di espansione 1D

Quando utilizziamo le espansioni nel caso piastra (e guscio) abbiamo la discretizzazione FEM 2D, mentre lungo lo spessore si usano espansioni che dipendono soltanto dalla coordinata z e avremo dunque funzioni $F_{\tau}(z)$. Queste funzioni possono essere di qualsiasi tipo, a seconda delle necessità: possiamo usare espansioni di Taylor, espansioni di Lagrange o di Legendre o anche espansioni in funzioni trigonometriche. Di seguito ci occuperemo soltanto di alcune di queste equazioni. Qualunque sia il tipo di espansione scelto, la struttura sarà sempre di questa forma

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_{\tau}(z)\mathbf{u}_{\tau}(x, y) \quad \tau = 0, 1, .., N$$
(4.13)

oppure in forma espansa

$$u(x, y, z) = F_0(z)u_0(x, y) + F_1(z)u_1(x, y) + \dots + F_N(z)u_N(x, y)$$

$$v(x, y, z) = F_0(z)v_0(x, y) + F_1(z)v_1(x, y) + \dots + F_N(z)v_N(x, y)$$

$$w(x, y, z) = F_0(z)w_0(x, y) + F_1(z)w_1(x, y) + \dots + F_N(z)w_N(x, y)$$
(4.14)

ove N è l'ordine di espansione del modello.

4.3 Espansioni di Taylor 1D (TE)



Figura 4.3: Espansione della sezione con Taylor per formulazione CUF 2D

Ν	М	F_{τ}
0	1	$F_0 = 1$
1	2	$F_1 = z$
2	3	$F_2 = z^2$
3	4	$F_3 = z^3$
÷	:	:
Ν	N+1	$F_N = z^N$

Tabella 4.1: Forma compatta dei polinomi di Taylor per la formulazione CUF 1D

Partiamo dal caso dei polinomi di Taylor. Con questa espansione, bisogna creare una discretizzazione FEM della piastra e per fare ciò adoperiamo sempre delle funzioni lagrangiane, generate da quattro o nove punti (elementi Q4 o Q9). In pratica creiamo una struttura bidimensionale dove per ogni punto della mesh FEM si avrà un'espansione di Taylor dipendendente dalla coordinata z, come raffigurato in figura 4.3. Nella tabella 4.1 vediamo come variano le funzioni F_{τ} all'aumentare dell'ordine N della teoria. Inoltre possiamo calcolare anche il numero di termini dell'espansione M semplicemente aumentando di un'unità il valore di N.

Ora mostriamo un esempio di una teoria del secondo ordine (N = 2):

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + zu_1(x, y) + z^2 u_2(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + zv_1(x, y) + z^2 v_2(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + zw_1(x, y) + z^2 w_2(x, y)$$
(4.15)

Questo modello piastra ha 9 variabili : 3 costanti, 3 lineari e 3 paraboliche ed è definito *pieno* in quanto abbiamo usato tutti i termini dell'espansione. Si potrebbero adottare anche modelli *ridotti* per diminuire il numero di variabili e abbassare il costo computazionale (nella parte di simulazione numerica non li useremo mai):

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + + z^2 u_2(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z v_1(x, y) + (4.16)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + + z^2 w_2(x, y)$$

Modelli di piastra di ordine - N

Come abbiamo visto, sappiamo che possiamo decidere un teoria di ordine arbitrario, a seconda delle necessità del momento. In generale possiamo definire un modello di ordine superiore come:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + zu_1(x, y) + \dots + z^N u_N(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + zv_1(x, y) + \dots + z^N v_N(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + zw_1(x, y) + \dots + z^N w_N(x, y)$$
(4.17)

che in notazione compatta diventa:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}_0(x, y) + z\mathbf{u}_1(x, y) + \dots + z^N \mathbf{u}_N(x, y)$$
(4.18)

Il numero totale delle variabili del modello, N_{DV} :

$$N_{DV} = 3 \times (N+1) = 3 \times M$$
 (4.19)

Nel caso della formulazione agli elementi finiti, N_{DV} indica il numero di gradi di libertà per ogni nodo. Le componenti di deformazione possono essere scritte:

$$\epsilon_{xx} = \dots + z^{N} \frac{\partial u_{N}}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \dots + z^{N} \frac{\partial v_{N}}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \dots + N z^{N-1} w_{N}$$

$$\epsilon_{xy} = \dots + z^{N} \frac{\partial u_{N}}{\partial y} + z^{N} \frac{\partial v_{N}}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yz} = \dots + N z^{N-1} v_{N} + z^{N} \frac{\partial w_{N}}{\partial y}$$

$$\epsilon_{xz} = \underbrace{\dots}_{0,\dots,N-1} + \underbrace{N z^{N-1} u_{N} + z^{N} \frac{\partial w_{N}}{\partial x}}_{\text{ordine-N}}$$

$$(4.21)$$

Se semplicemente si eliminano in modo opportuno alcuni termini dall'espansione di Taylor allora possiamo ricavare le teorie classiche della piastra. Se partiamo dalla teoria di Kirchoff otterremo il campo di spostamenti:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$
(4.22)

(4.23)

Se invece vogliamo la teoria di Reissner-Mindlin otteniamo:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + zu_1(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + zv_1(x, y)$$
(4.24)

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

(4.25)

4.4 Espansioni di Lagrange 1D (LE)

Come per il caso della formulazione CUF 1D, anche nel caso della formulazione CUF 2D possiamo adottare l'espansione si Lagrange al posto dell'espansione di Taylor. Ovviamente in questo caso le funzione Lagrangiane sono dipendenti dalla coordinata z e gli elementi della sezione sono appunto unidimensionali. Useremo



Figura 4.4: Espansione della sezione con Lagrange per formulazione CUF 2D

tre tipi di espansione a 2 nodi (LE2), a 3 nodi (LE3), a 4 nodi (LE4). Anche per il caso piastra noi costruiamo una struttura come nella parte sinistra della figura 4.4, ossia una discretizzazione FEM con un elemento Q9 (puntini in rosso) e per ogni punto FEM abbiamo un'espansione a due nodi. In conclusione il vero modello computazionale è raffigurato nella parte destra della figura 4.4.

4.4.1 Coordinate normalizzate

Quando cerchiamo di discretizzare la sezione di una piastra, inseriamo le coordinate reali della struttura e quindi inseriremo degli elementi con dei punti con coordinate reali. Quando, però, bisogna calcolare con l'elaboratore elettronico è più semplice ricondursi al piano naturale (anche se in questo caso, in verità, siamo su una retta) dove si possono usare con relativa facilità le espansioni di Lagrange. Di seguito vedremo come passare dalla geometria reale a quella normalizzata. Useremo come coordinata naturale ζ_i , che varia da -1 a +1, mentre ζ indica la posizione del nodo all'interno del sistema naturale dell'elemento.

Elemento LE2

Incominciamo con l'elemento più semplice che possiamo adoperare: l'elemento a due nodi LE2 e vediamo le funzioni che adopereremo, scritte per il piano naturale. Le equazioni introdotte sono lineari

$$F_1 = \frac{1}{2}(1-\zeta), \quad F_2 = \frac{1}{2}(1+\zeta), \quad \begin{cases} \zeta_1 = -1\\ \zeta_2 = +1 \end{cases}$$
(4.26)

Elemento LE3

Il secondo elemento che useremo sarà quello a 3 nodi e perciò le equazioni sono di tipo parabolico

$$F_1 = \frac{1}{2}\zeta(1-\zeta), \quad F_2 = \frac{1}{2}\zeta(1+\zeta), \quad F_3 = -(1-\zeta)(1+\zeta), \quad \begin{cases} \zeta_1 = -1\\ \zeta_2 = +1\\ \zeta_3 = 0 \end{cases}$$
(4.27)

Elemento LE4

L'ultimo elemento adottato sarà un'espansione a quattro nodi. Anche qui le formule dei nodi variano a seconda delle posizioni dei nodi. In questo caso le funzioni sono cubiche

$$F_{1} = -\frac{9}{16}(\zeta + \frac{1}{3})(\zeta - \frac{1}{3})(\zeta - 1), \quad F_{2} = \frac{9}{16}(\zeta + \frac{1}{3})(\zeta - \frac{1}{3})(\zeta + 1),$$

$$F_{3} = \frac{27}{16}(\zeta + 1)(\zeta - \frac{1}{3})(\zeta - 1), \quad F_{4} = -\frac{27}{16}(\zeta + 1)(\zeta + \frac{1}{3})(\zeta - 1), \quad \begin{cases} \zeta_{1} = -1\\ \zeta_{2} = +1\\ \zeta_{3} = -\frac{1}{3}\\ \zeta_{4} = \frac{1}{3}\\ (4.28) \end{cases}$$

4.4.2 Formulazione isoparametrica

Vedremo come passare da un integrale scritto dalle coordinate reali a quelle naturali grazie a una trasformazione di coordinate, adoperando il determinante dello Jacobiano. In particolare studiamo l'esempio di un integrale che bisogna calcolare all'interno della matrice di rigidezza:

$$\int_{l} F_{\tau,z}(z) F_{s,z}(z) dz = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F_{\tau,z}(\zeta) F_{s,z}(\zeta) |J(\zeta)| d\zeta$$
(4.29)

Inoltre possiamo calcolare il determinante Jacobiano come:

$$|J(\zeta)| = \frac{dz}{d\zeta} = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{dF_{\tau}(\zeta)}{d\zeta} z_{\tau}$$
(4.30)

dove ζ_{τ} sono le coordinate dei nodi dell'elemento. Possiamo inoltre dire che:

$$\frac{dF_{\tau,z}}{dz} = \frac{1}{|J(\zeta)|} \frac{dF_{\tau,\zeta}}{dz}$$
(4.31)

Se dobbiamo operare poi in modo numerico è conveniente adoperare la formula della quadratura di Gauss per discretizzare gli integrali:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F_{\tau,z}(\zeta) F_{s,z}(\zeta) |J(\zeta)| d\zeta \simeq \sum_{l} w_{l} F_{\tau,z}(\zeta_{l}) F_{s,z}(\zeta_{l}) |J(\zeta_{l})|$$
(4.32)

dove ζ_l sono i punti di integrazione e w_l sono i pesi dell'integrazione.

Infine l'espansione lagrangiana ha le seguenti caratteristiche:

- Le incognite del problema sono solo parametri fisici traslazionali.
- Le incognite possono essere posizionate sulle superfici fisiche sulla struttura. I gradi di libertà totali della sezione possono essere calcolati come:

$$N_{DV} = N_{punti\ espansione} \times 3 = M \times 3 \tag{4.33}$$

Capitolo 5

Modello Guscio



Figura 5.1: Sistema di riferimento per un guscio

Come accennato nel capitolo 2 dobbiamo parlare in modo precipuo del caso guscio, a causa della particolare geometria che ci costringe ad adoperare concetti matematici più complessi, quali le coordinate curvilinee e la derivata covariante. Per semplificare la trattazione useremo la superficie media di un corpo bidimensionale $(\zeta^3 = 0)$. Consideriamo uno spessore costante e le coordinate curvilinee $(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ sono situate sulla superficie media (figura 5.1). La differenza tra gusci e piastra è dovuta alla geometria, poichè usiamo infatti sempre elementi FEM bidimensionali.



Figura 5.2: Sistema di riferimento locale

5.1 Relazioni geometriche

Incominciamo partendo dalla definizione di Tensore di Green-Lagrange (che è un tensore simmetrico) scritto per un sistema di riferimento locale (figura 5.2) :

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$
(5.1)

dove, esplicitando, si ha per ogni componente

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{,i})$$
(5.2)

ove i \mathbf{g}_i sono i vettori base che definiscono il sistema di riferimento in ogni punto, ma non sono necessariamente versori.

5.2 Vettori base

Per studiare i gusci e mettere in relazione il sistema cartesiano con il sistema curvilineo (in cui è più conveniente scrivere le formule per questo tipo di geometria) introduciamo la definizione di mappa 3D:

$$\Phi(\zeta^{1}, \zeta^{2}, \zeta^{3}) = \left\{ \begin{array}{c} x(\zeta^{1}, \zeta^{2}, \zeta^{3}) \\ y(\zeta^{1}, \zeta^{2}, \zeta^{3}) \\ z(\zeta^{1}, \zeta^{2}, \zeta^{3}) \end{array} \right\}$$
(5.3)

che mi permette, appunto, di passare dal sistema cartesiano a quello curvilineo, quindi:

$$\mathbf{g}_{1}(\zeta^{1}, \zeta^{2}, \zeta^{3}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^{1}}
\mathbf{g}_{2}(\zeta^{1}, \zeta^{2}, \zeta^{3}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^{2}}
\mathbf{g}_{3}(\zeta^{1}, \zeta^{2}, \zeta^{3}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^{3}}$$
(5.4)

Per alcune geometrie regolari e semplici la funzione Φ è nota. Φ descrive, in sostanza, un corpo tridimensionale nello spazio. Si assume, per semplicità, che la mappa sia lineare in direzione ζ^3 poichè il guscio è sottile. Quindi nel caso di gusci sottili possiamo avere una formula del tipo:

$$\boldsymbol{\Phi}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = \boldsymbol{\phi}(\zeta^1, \zeta^2) + \zeta^3 \mathbf{a}_3(\zeta^1, \zeta^2)$$
(5.5)

dove ϕ è la mappa della superficie media 2D e \mathbf{a}_3 è il vettore normale alla superficie.

5.2.1 Vettori base 2D

Ora si passa a definire i tre vettori per la base 2D (ossia la base semplificata per i gusci sottili) che sono:

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$$

I primi due vettori sono sempre tangenti alla superficie media:

$$\mathbf{a}_1(\zeta^1, \zeta^2) = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \zeta^1} \tag{5.6}$$

$$\mathbf{a}_2(\zeta^1, \zeta^2) = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \zeta^2} \tag{5.7}$$

mentre il terzo vettore è sempre ortonormale a $\mathbf{a}_1 \in \mathbf{a}_2$:

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{||\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2||} \tag{5.8}$$

E', in pratica, un sottoinsieme di tutte le possibili terne di \mathbf{g}_i :

$$\mathbf{g}_{\alpha} = (\delta_{\alpha}^{\lambda} - \zeta^3 b_{\alpha}^{\lambda}) \mathbf{a}_{\lambda} \tag{5.9}$$

con $\delta^{\lambda}_{\alpha} = \mathbf{a}_{\alpha} \mathbf{a}^{\lambda}$ tensore 2D delta di Kronecker.

Senza addentrarci nel particolare dei dettagli matematici, si possono adoperare due tipi di basi (si vedano ad esempio Borisenko e Tarapov [4] e Carrera *et al.* [21] per approfondimenti):

•Base Covariante: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$

•Base Controvariante: $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$

La base Controvariante è definita in modo tale che:

$$\mathbf{a}_{\alpha}\mathbf{a}^{\lambda} = \delta_{\alpha}^{\lambda} = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \lambda \\ 1 & \alpha = \lambda \end{cases}$$
(5.10)

Ora continuiamo a introdurre alcuni tensori che ci aiutano a studiare i gusci e anche nella manipolazione delle formule:

Prima forma fondamentale (tensore metrico)

$$a_{\alpha\lambda} = \mathbf{a}_{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\lambda} \to \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$$
(5.11)

Ci fornisce delle informazioni sulla metrica del guscio (quanto si deve dilatare o restringere per diventare piastra). Su un sistema curvilineo si percepisce un guscio come una piastra.

Seconda forma fondamentale

$$b_{\alpha}^{\lambda} = \mathbf{a}_{,\alpha}^{\lambda} \cdot \mathbf{a}_{3} = \begin{bmatrix} b_{1}^{1} & b_{1}^{2} \\ b_{2}^{1} & b_{2}^{2} \end{bmatrix}$$
(5.12)

Ci fornisce informazioni su come varia la curvatura lungo la superficie media. Se in direzione ζ^3 , come nel cilindro non c'è nessuna curvatura, allora: $\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3$.

Tensore metrico controvariante

$$a_{\alpha\lambda} \to a^{\alpha\lambda} = \mathbf{a}^{\alpha} \cdot \mathbf{a}^{\lambda} = (a_{\alpha\lambda})^{-1}$$
 (5.13)

Avendo la possibilità di usare due tipi di base, anche il tensore metrico potrà essere scritto in modo diverso (si faccia attenzione infatti agli indici che diventano ora apici).

5.2.2 Derivata covariante

Vediamo come si possono scrivere i campi di spostamenti. Per le piastre i versori coincidono nelle basi covariante e controvariante e abbiamo quindi semplicemente:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}^1, \ \mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}^2, \ \mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3$$
 (5.14)

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3 \tag{5.15}$$

Passando invece ai gusci, avremo due basi diverse e bisogna fare attenzione a come scrivere il campo di spostamenti. Se usiamo una base controvariante avremo la seguente scrittura:

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{a}^1 + u_2 \mathbf{a}^2 + u_3 \mathbf{a}^3 \tag{5.16}$$

per la base covariante invece:

$$\mathbf{u} = u^1 \mathbf{a}_1 + u^2 \mathbf{a}_2 + u^3 \mathbf{a}_3 \tag{5.17}$$

Per poter affrontare in modo corretto il problema bisogna scegliere una delle due forme perchè in generale $u_i \neq u^i$. Inoltre \mathbf{a}^1 e \mathbf{a}^2 dipendono da ζ^1 e ζ^2 e devo derivarle. Perciò dovremo introdurre un nuovo tipo di derivata, la quale dovrà tenere conto delle variazioni di \mathbf{a}^1 e \mathbf{a}^2 , mentre \mathbf{a}^3 rimarrà costante per le considerazioni fatte in precedenza. Adesso ci concentriamo a studiare il campo di spostamenti in cui abbiamo applicato la formulazione CUF, ossia abbiamo discretizzato la sezione, senza adoperare la discretizzazione FEM:

$$\mathbf{s}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = F_\tau(\zeta^3) \mathbf{s}_\tau(\zeta^1, \zeta^2) \tag{5.18}$$

dove:

$$\mathbf{s}_{\tau}(\zeta^{1},\zeta^{2}) = u_{1\tau}\mathbf{a}^{1} + u_{2\tau}\mathbf{a}^{2} + u_{3\tau}\mathbf{a}^{3}$$
(5.19)

In questo modo potremmo analizzare anche soluzioni analitiche, che sono descritte in Carrera [12]. Continuando con lo studio, ora dobbiamo trovare la derivata covariante. Prima di tutto inoltre calcoliamo $\mathbf{s}_{,i} \in \mathbf{s}_{,j}$ per usare il tensore di Green-Lagrange. Se sappiamo che

$$\mathbf{s}_{,3} = F_{\tau,3}(\zeta^3) \mathbf{s}_{\tau}(\zeta^1, \zeta^2) \tag{5.20}$$

$$\mathbf{s}_{,\alpha} = F_{\tau}(\zeta^3) \mathbf{s}_{\tau,\alpha}(\zeta^1, \zeta^2) \tag{5.21}$$

con $\alpha = \zeta^1, \zeta^2$ e $\mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3$, allora possiamo trovare:

$$\mathbf{s}_{\tau,\alpha} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha} (u_{1\tau} \mathbf{a}^1 + u_{2\tau} \mathbf{a}^2)}_{2:\text{con derivata covariante}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha} (u_{3\tau} \mathbf{a}^3)}_{1:\text{con derivata per parti}}$$
(5.22)

Concentriamoci sull'espressione Numero 1:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(u_{3\tau}\mathbf{a}^3) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(u_{3\tau})\mathbf{a}^3 + u_{3\tau}\frac{\partial}{\partial \alpha}(\mathbf{a}^3) = u_{3\tau,\alpha}\mathbf{a}^3 + u_{3\tau}(-b_{\lambda\alpha}\mathbf{a}^\lambda) \quad \lambda = 1,2 \quad (5.23)$$

con $b_{\lambda\alpha} = \mathbf{a}_{\lambda,\alpha} \cdot (\mathbf{a}_3)$, ovvero spostiamo le derivate da \mathbf{a}_3 a \mathbf{a}^{λ} , qui tengo conto della curvatura.

Concentriamoci, invece ora, sull'espressione Numero 2:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (u_{\lambda\tau} \mathbf{a}^{\lambda}) = u_{\lambda\tau|\alpha} \mathbf{a}^{\lambda} + b^{\lambda}_{\alpha} u_{\lambda\tau} \mathbf{a}_{3}$$
(5.24)

In definitiva la derivata covariante può essere scritta come:

$$u_{\tau\lambda|\alpha} = u_{\tau\lambda,\alpha} - \Gamma^{\gamma}_{\lambda\alpha} u_{\tau\gamma} \tag{5.25}$$

 $\Gamma^{\gamma}_{\lambda\alpha}$, $\gamma = 1,2$ è il Simbolo di Christoffel:

$$\Gamma^{\gamma}_{\lambda\alpha} = \mathbf{a}_{\lambda,\alpha} \cdot \mathbf{a}^{\gamma} \tag{5.26}$$

Ci riconduciamo, dunque, sempre alla derivata di $\mathbf{a}^1 \in \mathbf{a}^2$.

5.3 Guscio a simmetria sferica



Figura 5.3: Sistema di riferimento per un cilindro

Dato che ci occuperemo di strutture a guscio di tipo cilindrico, riportiamo una trattazione semplificata in cui è presente una sola curvatura in direzione ζ^3 (figura 5.3).

Mappa 2D

$$\phi(\zeta^1, \zeta^2) = \left\{ \begin{array}{c} \zeta^1 \\ R\sin\left(\frac{\zeta^2}{R}\right) \\ R\cos\left(\frac{\zeta^2}{R}\right) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\}$$
(5.27)

Base covariante

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \zeta^1} = \{1, 0, 0\}^T \tag{5.28}$$

$$\mathbf{a}_{2} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \zeta^{2}} = \left\{ 0, \cos\left(\frac{\zeta^{2}}{R}\right), -\sin\left(\frac{\zeta^{2}}{R}\right) \right\}^{T}$$
(5.29)

$$\mathbf{a}_{3} = \frac{\mathbf{a}_{1} \times \mathbf{a}_{2}}{||\mathbf{a}_{1} \times \mathbf{a}_{2}||} = \left\{0, \sin\left(\frac{\zeta^{2}}{R}\right), \cos\left(\frac{\zeta^{2}}{R}\right)\right\}^{T}$$
(5.30)

Tensore metrico

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(5.31)

Quest'ultimo tensore è detto covariante-covariante (si presti attenzione a come sono diposti gli indici) ed è sempre simmetrico. Indica la variazione della curvatura, ma nel cilindro è sempre costante. Si ha poi dopo vari passaggi:

$$b_{\alpha}^{\lambda} = \mathbf{a}_{,\alpha}^{\lambda} \cdot \mathbf{a}_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}$$
(5.32)

$$\mathbf{g}_{\alpha} = (\delta_{\alpha}^{\lambda} - \zeta^3 b_{\alpha}^{\lambda}) \mathbf{a}_{\lambda} = m_{\alpha}^{\lambda} \mathbf{a}_{\lambda}$$
(5.33)

е

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\zeta^3}{R} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{array} \right\}$$
(5.34)

Teniamo così conto della variazione di spessore lungo il raggio e praticamente ci spostiamo da una visione del cilindro curvo a una in cui vediamo il cilindro come una piastra (figura 5.4).



Figura 5.4: Cambio di sistema di riferimento per il cilindro

Ora devo passare dalla base 2D con $\widetilde{E}_{ij} = \widetilde{E}_{ij}(\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^i)$ alla base 3D che ci serve $E_{ij} = E_{ij}(\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^i)$ e così:

$$\mathbf{g}^{\alpha} = (m_{\alpha}^{\lambda})^{-1} \mathbf{a}_{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 + \frac{R}{1+\zeta^3} \end{bmatrix} \mathbf{a}_{\lambda}$$
(5.35)

 $\operatorname{con}\, H = 1 + \tfrac{\zeta^3}{R}$

Relazioni geometriche

$$\epsilon_{11} = u_{1,1}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{H} u_{2,2} + \frac{u_3}{HR}$$

$$\epsilon_{33} = u_{3,3}$$

$$\gamma_{13} = u_{1,3} + u_{3,1}$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{H} u_{3,2} + u_{2,3} - \frac{u_2}{HR}$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{H} u_{1,2} + u_{2,1}$$
(5.36)

Si vede che i carichi traversali si muovono anche nel piano, il guscio presenta una curvatura. La piastra è il caso degenere in cui $R \to \infty$. I gusci sono strutture precaricate, ovvero il modo di sopportare i carichi è migliore di quello della piastra.

5.4 Analisi con la CUF

A differenza di quanto fatto con le formulazioni 1D e 2D, cambiamo leggermente notazione, poichè ci aiuterà a lavorare con le equazioni. Infatti dividiamo il vettore delle deformazioni in due, in cui il primo (indicato col pedice p) è per le deformazioni sul piano, mentre il secondo (indicato col pedice n) è per le deformazioni fuori dal piano (faremo un discorso analogo anche per le tensioni) :

$$\boldsymbol{\epsilon}_p = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}\}^T, \quad \boldsymbol{\epsilon}_n = \{\epsilon_{13}, \epsilon_{23}, \epsilon_{33}\}^T$$
(5.37)

Inoltre indichiamo gli spostamenti in questo modo:

$$\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T \tag{5.38}$$

Se generalizziamo i risultati trovati nella sezione precedente usando la formulazione CUF e inseriamo la funzione per studiare la sezione $F_{\tau} = F_{\tau}(\xi^3)$:

$$\epsilon_{11} = F_{\tau} u_{\tau,1}$$

$$\epsilon_{22} = F_{\tau} \left[H v_{\tau,2} + H \frac{w_{\tau}}{R} \right]$$

$$\epsilon_{12} = F_{\tau} \left[u_{\tau,2} + H v_{\tau,1} \right]$$

$$\epsilon_{13} = w_{\tau,1} F_{\tau} + u_{\tau,1} F_{\tau,3}$$

$$\epsilon_{23} = F_{\tau} \left[w_{\tau,2} - \frac{v_{\tau}}{R} \right] + F_{\tau,3} H v_{\tau,2}$$

$$\epsilon_{33} = w_{\tau,3} F_{\tau,3}$$
(5.39)

Adoperando anche la discretizzazione FEM 2D per gli spostamenti avremo:

$$\delta \mathbf{u}_{\tau} = N_i(\xi^1, \xi^2) F_{\tau}(\xi^3) \delta \mathbf{q}_{\tau i}, \quad \mathbf{u}_s = N_j(\xi^1, \xi^2) F_s(\xi^3) \delta \mathbf{q}_{sj}, \tag{5.40}$$

Utilizzeremo le seguenti matrici per calcolare le deformazioni in funzione degli spostamenti:

$$\mathbf{D}_{p} = \begin{bmatrix} \partial_{1} & 0 & 0 \\ 0 & H\partial_{2} & 0 \\ \partial_{2} & H\partial_{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{n\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_{1} \\ 0 & 0 & \partial_{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{D}_{nz} = \partial_{3}\mathbf{A}_{nz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}_{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R}H & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(5.41)

In forma compatta possiamo riscrivere:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{p} = F_{\tau} \left(\mathbf{D}_{p} + \mathbf{A}_{p} \right) \left(N_{i} \mathbf{I} \right) \mathbf{q}_{\tau i}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n} = F_{\tau} \left(\mathbf{D}_{n\Omega} - \mathbf{A}_{n} \right) \left(N_{i} \mathbf{I} \right) \mathbf{q}_{\tau i} + F_{\tau,s} \mathbf{A}_{nz} \left(N_{i} \mathbf{I} \right) \mathbf{q}_{\tau i}$$
(5.42)

Dato che studiamo strutture multistrato, useremo l'apice k per indicare le quantità del singolo strato. Le tensioni diventano:

$$\boldsymbol{\sigma}_{p}^{k} = \widetilde{\mathbf{C}}_{pp}^{k} \boldsymbol{\epsilon}_{p}^{k} + \widetilde{\mathbf{C}}_{pn}^{k} \boldsymbol{\epsilon}_{n}^{k}$$
(5.43)

$$\boldsymbol{\sigma}_{n}^{k} = \widetilde{\mathbf{C}}_{np}^{k} \boldsymbol{\epsilon}_{p}^{k} + \widetilde{\mathbf{C}}_{nn}^{k} \boldsymbol{\epsilon}_{n}^{k}$$
(5.44)

con le matrici del materiale:

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{pp}^{k} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{C}}_{11}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{12}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{16}^{k} \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{12}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{22}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{26}^{k} \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{16}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{26}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{36}^{k} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{pn}^{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{C}}_{13}^{k} \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{C}}_{23}^{k} \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{C}}_{36}^{k} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{np}^{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{13}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{23}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{36}^{k} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{nn}^{k} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{C}}_{44}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{45}^{k} & 0 \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{45}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{55}^{k} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{C}}_{66}^{k} \end{bmatrix}$$
(5.45)

Passando alle equazioni di governo, partiamo sempre dal principio dei lavori virtuali con $\delta L_{int} = \delta L_{est}$:

$$\int_{\Omega_k} \int_l \left\{ \delta \boldsymbol{\epsilon}_p^{k^T} \boldsymbol{\sigma}_p^k + \delta \boldsymbol{\epsilon}_n^{k^T} \boldsymbol{\sigma}_n^k \right\} d\Omega_k d\xi^{3k} = \int_{\Omega_k} \int_l \delta \mathbf{u}^k \mathbf{p}^k d\Omega_k d\xi^{3k}$$
(5.46)

con $\mathbf{p}^k = \mathbf{p}^k(\xi^1, \xi^3, \xi^2)$. Al fine di riportare i dominii di integrazione alla superficie mediana di ciascun strato nel sistema delle coordinate curvilinee, bisogna introdurre il parametro H in questo modo:

$$\int_{\Omega_k} \int_l \left\{ \delta \boldsymbol{\epsilon}_p^{k^T} \boldsymbol{\sigma}_p^k + \delta \boldsymbol{\epsilon}_n^{k^T} \boldsymbol{\sigma}_n^k \right\} H d\Omega_k d\xi^{3k} = \int_{\Omega_k} \int_l \delta \mathbf{u}^k \mathbf{p}^k H d\Omega_k d\xi^{3k}$$
(5.47)

 R_k è il raggio di curvatura della superficie media del k-esimo strato e abbiamo $-\frac{h^k}{2} < \xi^{3k} < +\frac{h^k}{2}$, dove h^k è lo spessore del k-esimo strato. Infine abbiamo, come già per i casi plate e beam il Nucleo Fondamentale:

$$\delta \mathbf{q}_{\tau i}^T : \mathbf{K}^{k i j \tau s} \mathbf{q}_{s j}^k = \mathbf{P}_{s j}^k \tag{5.48}$$

Capitolo 6

Uso della CUF per l'analisi dei laminati

6.1 Introduzione ai metodi ESL e LW



Figura 6.1: Struttura laminata e Nuclei Fondamental
i 3×3

Le strutture che studieremo nella parte di simulazioni numeriche saranno, per la gran parte, strutture composite, formate da materiali ortotropi. Nel presente capitolo dovremo vedere come poter applicare le formulazioni CUF 1D e 2D allo studio di queste strutture. Come già dunque spiegato nella parte teorica del metodo CUF, anche qui usiamo discretizzazione FEM in combinazione con le teorie CUF, le quali dovranno essere scelte in maniera approfondita: infatti vi sono delle differenze nell'utilizzo di espansioni di Taylor e di Lagrange. Dato che usiamo il metodo CUF, possiamo notare che per ogni strato della sezione si avrà la sua sottomatrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ (che è parte della matrice più grande $\mathbf{K}^{\tau sij}$ derivante dal fatto di aver usato la FEM, sia essa per una beam o per una piastra) composta dai nuclei fondamentali (in figura 6.1 possiamo vedere la stuttura laminata e i simboli che useremo per indicare le matrici 3X3 del nucleo fondamentale). A seconda delle tecniche adottate le matrici $\mathbf{K}^{\tau s}$ sono assemblate in maniera diversa.

6.1.1 Uso dell'espansione di Taylor



Figura 6.2: Sezione e Matrice assemblata per espansione di Taylor con la formulazione 1D



Figura 6.3: Sezione e Matrice assemblata per espansione di Taylor con la formulazione 2D

Come già visto nella parte introduttiva sulle espansioni, queste ultime sono molto versatili, perchè possiamo impostare noi un grado della teoria, senza dover creare teorie empiriche ad hoc per ogni tipo di problema. La caratteristica peculiare di questo tipo di espansione, inoltre, è che utilizza un campo di spostamenti valido per tutta la sezione e non possiamo suddividere la sezione in sottodominii. Perciò, quando studiamo i laminati, consideriamo una media di tutte le caratteristiche della sezione e dunque gli unici metodi che possono essere adoperati con le espansioni di Taylor sono i cosiddetti Equivalent Single Layer. In questi casi tutte le caratteristiche meccaniche dei vari strati vengono sommate. In pratica i nuclei fondamentali vengono sommati, ovviamente in maniera opportuna a seconda degli indici della teoria di espansione usata . Sebbene usiamo delle teorie che considerano la sezione nella sua globalità, i risultati con Taylor sono molto precisi, poichè non ci limitiamo a usare teorie classiche come le già accennate (Eulero-Bernoulli per la trave o Reissner-Mindlin per la piastra), ma usiamo teorie di ordine molto elevato anche fino a N=20 (sia per la formulazione CUF 1D che 2D). Con tali teorie si può supplire in parte anche al problema della determinazione delle tensioni traversali, come possiamo notare nella parte relativa alle applicazioni, anche se solo con la strategia LW possiamo arrivare a risultati molto precisi.

Formulazione CUF 1D Facciamo un esempio per la formulazione 1D, adoperando una teoria lineare, ossia del primo ordine (N = 1) e scriviamo dunque il campo di spostamenti lungo la sezione:

$$\begin{cases} u_x = u_{x_1} + xu_{x_2} + zu_{x_3} \\ u_y = u_{y_1} + xu_{y_2} + zu_{y_3} \\ u_z = u_{z_1} + xu_{z_2} + zu_{z_3} \end{cases}$$
(6.1)

Vediamo come vi sia un unico campo di spostamenti per tutta la sezione (nella parte sinistra della figura 6.2 abbiamo colorato la sezione completamente di blu per indicare l'omogeneità) Se passiamo poi all'assemblaggio della matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ dobbiamo sapere quale sia il numero di nuclei fondamentali (indicato dalla lettera M) che cambia a seconda dell'ordine del'espansione di Taylor (e dal tipo di formulazione). Per la CUF 1D sappiamo che M = (N + 1)(N + 2)/2 e quindi qui M è pari a 3. Avremo, dunque, una matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ di dimensioni 3×3 . In figura 6.2 vediamo dal punto vista semplificato l'asseblaggio di questa matrice. Notiamo come tutti gli strati siano omogeneizzati e i nuclei fondamentali siano sommati insieme.

Formulazione CUF 2D Per la formulzione 2D, adoperiamo, invece una teoria del terzo ordine (N = 3), che dipenderà in maniera esplicita, diversamente dall'altra formulazione, soltanto dalla coordinata z:

$$\begin{cases}
 u_x = u_{x_0} + zu_{x_1} + z^2 u_{x_2} + z^3 u_{x_3} \\
 u_y = u_{y_0} + zu_{y_1} + z^2 u_{y_2} + z^3 u_{y_3} \\
 u_z = u_{z_0} + zu_{z_1} + z^2 u_{z_2} + z^3 u_{z_3}
 \end{cases}$$
(6.2)

Anche qui il campo di spostamenti è unico per tutta la sezione e nella parte sinistra della figura 6.3 il segmento blu indica l'omogenizzazione (raffiguro un segmento poichè nella CUF 2D, nella parte di implementazione, la sezione della piastra viene costruita con degli elementi beam). Se passiamo poi all'assemblaggio della matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ dobbiamo sapere quale sia il numero di nuclei fondamentali (indicato dalla lettera M) che cambia a seconda dell'ordine del'espansione di Taylor (e dal tipo di formulazione). Per la CUF 2D sappiamo che M = N + 1 e quindi qui M è pari a 4. Avremo, dunque, una matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ di dimensioni 4×4 . In figura 6.3 vediamo dal punto vista semplificato l'asseblaggio di questa matrice. Notiamo come tutti gli strati siano omogeneizzati e i nuclei fondamentali siano sommati insieme.

6.1.2 Uso dell'espansione di Lagrange Layer-Wise



Figura 6.4: Sezione e Matrice assemblata per espansione di Lagrange LW con la formulazione 1D



Figura 6.5: Sezione e Matrice assemblata per espansione di Lagrange LW con la formulazione 2D

Come abbiamo visto nei capitoli precedenti, possiamo usare diversi ordini di espansione di Lagrange a seconda del numero di nodi che compongono gli elementi piani (per CUF 1D) o unidimensioniali (per CUF 2D). Una delle grandi potenzialità di questa strategia è che la sezione può essere discretizzata in tanti sottodominii, che possono avere ordine qualsiasi (facendo sempre attenzione a far combaciare i nodi dei diversi sottodominii) e ad ognuno di essi posso associare una certa laminazione indipendentemente dagli altri. Con queste caratteristiche, ad ogni strato possiamo associare un espansione di Lagrange con caratteristiche meccaniche diverse e quindi per ogni strato possiamo decidere di usare un campo di spostamenti diverso. Questi metodi sono chiamati Layer Wise. Anche in questo caso dobbiamo assemblare un matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ con diversi nuclei fondamentali fondamentali. A differenza del caso TE, qui solo alcuni nuclei fondamentali dei vari strati devono essere sommati tra di loro (per garantire la continuità tra gli strati), mentre gli altri sono distinti. La matrice delle rigidezze aumenta di molto la propria dimensione perchè, appunto, ogni strato ha le sue caratteristiche indipendenti. Comunque, per incrementare le capacità di predizione delle tensioni, potremmo creare altri sottodominii all'interno dello stesso strato. Come di consueto studieremo in parallelo le formulazioni CUF 1D e 2D.

Formulazione CUF 1D Come esempio, vediamo il caso di una sezione divisa in tre strati (k: strato generico), e ognuno di essi è schematizzato da un'espansione LE4 :

$$\begin{cases} u_x^k = F_1 u_{x_1}^k + F_2 u_{x_2}^k + F_3 u_{x_3}^k + F_4 u_{x_4}^k \\ u_y^k = F_1 u_{y_1}^k + F_2 u_{y_2}^k + F_3 u_{y_3}^k + F_4 u_{y_4}^k \\ u_z^k = F_1 u_{z_1}^k + F_2 u_{z_2}^k + F_3 u_{z_3}^k + F_4 u_{z_4}^k \end{cases}$$
(6.3)

dove le funzioni F_{τ} sono state già descritte nei capitoli precedenti. Come possiamo notare la differenza è notevole rispetto ai modelli ESL, perchè dobbiamo scrivere un campo di spostamenti per ogni strato (potremmo usare anche più elementi per ogni layer). Nella parte sinistra della figura 6.4 sono raffigurati i tre sottodominii con colori differenti per evidenziare le loro differenze. Se passiamo poi all'assemblaggio della matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ dobbiamo sapere quale sia il numero di nuclei fondamentali (indicato dalla lettera M) che cambia a seconda dell'ordine del'espansione di Lagrange. Per questo tipo di espansione l'ordine della teoria cinematica N è pari al numero M. Avremo, dunque, per ogni sottodominio, una matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ di dimensioni 4×4 . Con il metodo LW le sottomatrici di ogni elemento della sezione devono essere unite per formare la matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ che viene visualizzata nella figura 6.4.

Formulazione CUF 2D Come esempio, vediamo il caso di una sezione divisa in tre strati (k: strato generico), e ognuno di essi è schematizzato da un'espansione LE3:

$$\begin{cases} u_x^k = F_1 u_{x_1}^k + F_2 u_{x_2}^k + F_3 u_{x_3}^k \\ u_y^k = F_1 u_{y_1}^k + F_2 u_{y_2}^k + F_3 u_{y_3}^k \\ u_z^k = F_1 u_{z_1}^k + F_2 u_{z_2}^k + F_3 u_{z_3}^k \end{cases}$$
(6.4)

dove le funzioni F_{τ} sono state già descritte nei capitoli precedenti. Come possiamo notare la differenza è notevole rispetto ai modelli ESL, perchè dobbiamo scrivere un

campo di spostamenti per ogni strato (potremmo usare anche più elementi per ogni layer). Nella parte sinistra della figura 6.5 sono raffigurati i tre sottodominii con colori differenti per evidenziare le loro differenze (mostriamo un segmento poichè in questa formulazione la sezione è unidimensionale). Se passiamo poi all'assemblaggio della matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ dobbiamo sapere quale sia il numero di nuclei fondamentali (indicato dalla lettera M) che cambia a seconda dell'ordine del'espansione di Lagrange. Per questo tipo di espansione l'ordine della teoria cinematica N è pari al numero M. Avremo, dunque, per ogni sottodominio, una matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ di dimensioni 3×3 . Con il metodo LW le sottomatrici di ogni elemento della sezione devono essere unite per formare la matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$, che viene visualizzata nella figura 6.5.

6.2 Metodo Equivalence Single Layer con polinomi di Lagrange



Figura 6.6: Schema delle diverse disposizioni sulla sezione per LW e ESL per formulazione CUF 1D

In questo lavoro si studia la possibilità di adottare per i laminati una discretizzazione dell'espansione sia per il caso 1D che per il caso 2D. Nella precedente sezione abbiamo già visto i metodi ESL adattati ai polinomi di Taylor e i metodi LW per i polinomi di Lagrange, qui invece vogliamo introdurre un metodo molto versatile che permette di usare ESL con i polinomi di Lagrange e di adottare diverse cinematiche nella stessa sezione. In pratica si riescono a implementare diversi sottodominii nella sezione, come nel caso Layer Wise. Mentre con quest'ultimo metodo siamo vincolati a mettere un sottodominio (o più sottodominii) per ogni strato, con il nuovo metodo riusciamo a includere più strati in un unico elemento Lagrange. Con questo metodo scegliamo noi dove vogliamo avere un'omogenizzazione degli strati, a differenza dell'espansione di Taylor, dove una cinematica valeva necessariamente per tutta la sezione. Questo metodo, dunque è utile, quando si hanno molti strati e se si vogliono studiare in maniera accurata alcuni punti della sezione, risparmiando sui gradi di libertà. Vedremo, infatti, nella parte di simulazione, dei casi in cui inseriamo dei sottodominii con cinematica simil-ESL (in cui abbiamo praticamente più strati per un unico elemento Lagrange) e due cinematiche simil-LW (ossia un elemento Lagrange per ogni strato). Potremo anche analizzare strati di spessore diverso. Ovviamente ci saranno dei vantaggi e degli svantaggi a usare l'ESL Lagrange, che potremo analizzare meglio nella parte dei risultati.

Dato che abbiamo la possibilità di discretizzare la sezione in molti modi (possiamo anche tagliare la sezione in verticale e non in orizzontale), è molto difficile trovare una notazione non troppo prolissa e che sia semplice da leggere. Perciò ogni volta che analizzeremo la struttura riporteremo delle figure per mostrare le varie teorie adottate e useremo la seguente notazione: ELEn-CaseXZ. La prima lettera indica che stiamo utilizzando un metodo Equivalent Single Layer, la seconda e la terza stanno per 'Lagrange Expansion', la lettera n indica l'ordine dell'espansione di Lagrange. Poi, 'Case' è un modo per indicare che stiamo per specificare come andiamo a discretizzare la sezione, la lettera X identifica un numero, che ci dice quanti sottodominii abbiamo utilizzato; infine la lettera Z identifica un carattere dell'alfabeto latino che indica le diverse disposizioni degli elementi Lagrange usando uno stesso numero di sottodominii (si parte da A, poi B, e così di seguito). In figura 6.6 vediamo un esempio per la formulazione 1D ('1' e '2' in grassetto vicino agli schemi indicano due laminazioni diverse). Quando passeremo allo studio dei metodi NDK, Global/Local e al non lineare, cambieremo leggermente la notazione, per non appesantire la lettura. Nei singoli capitoli della parte di Simulazioni numeriche forniremo dettagli maggiori.

Adesso mostreremo degli esempi per le due formulazioni CUF 1D e 2D, dove ci saranno delle figure su come si assemblano le matrici $\mathbf{K}^{\tau s}$.

6.2.1 Caso CUF 1D

Come esempio prenderemo il caso visualizzato in figura 6.7, in cui abbiamo adoperato due elementi Lagrange dello stesso ordine (LE4). L'elemento inferiore (lo denotiamo con la lettera l:low) comprende due strati, mentre l'elemento superiore (lo denotiamo con la lettera t:top) comprende un solo strato. Qui di seguito ci sono i due campi di spostamento:

$$\begin{cases} u_x^l = F_1 u_{x_1}^l + F_2 u_{x_2}^l + F_3 u_{x_3}^l + F_4 u_{x_4}^l \\ u_y^l = F_1 u_{y_1}^l + F_2 u_{y_2}^l + F_3 u_{y_3}^l + F_4 u_{y_4}^l \\ u_z^l = F_1 u_{z_1}^l + F_2 u_{z_2}^l + F_3 u_{z_3}^l + F_4 u_{z_4}^l \end{cases}$$
(6.5)



Figura 6.7: Sezione e Matrice assemblata per espansione di Lagrange ESL con la formulazione 1D

$$\begin{cases} u_x^t = F_1 u_{x_1}^t + F_2 u_{x_2}^t + F_3 u_{x_3}^t + F_4 u_{x_4}^t \\ u_y^t = F_1 u_{y_1}^t + F_2 u_{y_2}^t + F_3 u_{y_3}^t + F_4 u_{y_4}^t \\ u_z^t = F_1 u_{z_1}^t + F_2 u_{z_2}^t + F_3 u_{z_3}^t + F_4 u_{z_4}^t \end{cases}$$
(6.6)

Ora incominciamo a costruire la matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$. Ci dobbiamo ricordare che il numero di elementi di nuclei fondamentali per ogni strato con l'espansione di Lagrange a quattro nodi è M = 4. Avremo, dunque, per ogni strato, una matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ di dimensioni 4×4 . Dunque scopriamo nella figura 6.7 che le rigidezze dei due layer inferiori sono sommate insieme (in maniera analoga a quanto visto per il caso ESL Taylor), mentre per il layer superiore si ha un compartamento analogo a quanto visto per il caso LW Lagrange. Così possiamo assemblare la matrice secondo la formulazione CUF.

6.2.2 Caso CUF 2D

Come esempio prenderemo, per la formulazione CUF 2D, il caso visualizzato in figura 6.8, in cui abbiamo adoperato due elementi Lagrange dello stesso ordine (LE3). Mostriamo, in maniera analoga a quanto fatto per Taylor e LW Lagrange, un segmento poichè in questa formulazione la sezione è unidimensionale. L'elemento inferiore (lo denotiamo con la lettera l:low) comprende due strati, mentre l'elemento superiore (lo denotiamo con la lettera t:top) comprende un solo strato. Qui di seguito ci sono i due campi di spostamento:

$$\begin{cases} u_x^l = F_1 u_{x_1}^l + F_2 u_{x_2}^l + F_3 u_{x_3}^l \\ u_y^l = F_1 u_{y_1}^l + F_2 u_{y_2}^l + F_3 u_{y_3}^l \\ u_z^l = F_1 u_{z_1}^l + F_2 u_{z_2}^l + F_3 u_{z_3}^l \end{cases}$$
(6.7)



ELE:Due Sottodominii

Figura 6.8: Sezione e Matrice assemblata per espansione di Lagrange ESL con la formulazione 2D

$$\begin{cases} u_x^t = F_1 u_{x_1}^t + F_2 u_{x_2}^t + F_3 u_{x_3}^t \\ u_y^t = F_1 u_{y_1}^t + F_2 u_{y_2}^t + F_3 u_{y_3}^t \\ u_z^t = F_1 u_{z_1}^t + F_2 u_{z_2}^t + F_3 u_{z_3}^t \end{cases}$$
(6.8)

Ora incominciamo a costruire la matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$. Ci dobbiamo ricordare che il numero di elementi di nuclei fondamentali per ogni strato con l'espansione di Lagrange a tre nodi è M = 3. Avremo, perciò, per ogni strato, una matrice $\mathbf{K}^{\tau s}$ di dimensioni 3×3 . Dunque scopriamo nella figura 6.8 che le rigidezze dei due layer inferiori sono sommate insieme (in maniera analoga a quanto visto per il caso ESL Taylor), mentre per il layer superiore si ha un compartamento analogo a quanto visto per il caso LW Lagrange. Così possiamo assemblare la matrice secondo la formulazione CUF.

6.3 Global/Local applicato a ESL Lagrange

In questa tesi vorremmo dimostrare come possiamo usare una metodologia Global/Local in unico passo, ovvero uniamo due (o più) parti con teorie della sezione diverse. E' una tecnica differente rispetto a quella che è stata più volte studiata in letteratura (si vedano i lavori di Carrera *et al.* [34] e [49]). Infatti, in questi lavori, nella prima fase usiamo una discretizzazione con un numero moderato di gradi di libertà, mentre nella seconda fase andiamo a studiare solo alcune zone, più o meno estese, in cui aumentiamo i gradi di libertà. Concentrandoci solo sui lavori relativi al passaggio da software commerciali alla formulazione CUF (si vedano ancora [34], [35], [36] e [49]), dobbiamo passare da una teoria in cui si hanno sei gradi di libertà (tre spostamenti e tre rotazioni) a teorie con gradi di libertà qualsiasi, come quelle che si possono trovare nella CUF. Se usiamo i polinomi di Lagrange i gradi di libertà sono gli spostamenti, mentre nei polinomi di Taylor sono spostamenti e le sue derivate. Oltre a queste difficoltà abbiamo bisogno di ricreare le condizioni al contorno per la zona studiata in dettaglio. Per tutte queste considerazioni vogliamo integrare in un unico passo zone con minori gradi di libertà e zone più dettagliate.

Grazie alla formulazione CUF abbiamo due alternative quali l'utilizzo del Node-Dependent Kinematics (di cui parleremo nella prossima sezione) e un Global Local *puro*, ovvero in cui connettiamo elementi con teorie diverse della sezione. Il secondo caso è stato trattato in diversi lavori grazie all'utilizzo dei Moltiplicatori di Lagrange (lavori di Carrera *et al.* [19], [21] e [23]) e del metodo Arlequin (esempi sono i lavori di Carrera *et al.* [3] e [21]), grazie ai quali si riuscivano a unire sezioni che non si sarebbero potute connettere altrimenti (a patto di non usare il metodo NDK). Così possiamo unire i polinomi di Lagrange e di Taylor (si veda il capitolo 16 per le difficoltà inerenti alla loro unione). Questi ultimi due metodi hanno diverse limitazioni: sono di difficile implementazione (soprattutto Arlequin), possono incorrere in problemi di natura numerica e la loro interpretazione fisica non è immediata.

Si è deciso dunque di cambiare approccio e di sfruttare le potenzialità delle teorie ESL Lagrange. In pratica possiamo unire una sezione che ha una teoria ESL Lagrange e una che è descritta da un LW Lagrange. Questo è possibile perchè i gradi di libertà sono per entrambi degli spostamenti (nel capitolo 16 si possono trovare più dettagli). Nella parte di simulazione però vedremo come sorgano dei problemi di spazi vuoti e intersezioni all'interno della struttura, poichè non vi è corrispondenza biunivoca tra i punti di due sezioni contigue. Dovremo essere dunque molto accorti a utilizzare questo nuovo metodo nelle giuste condizioni.

6.4 Node Dependent Kinematics (NDK)

Per poter ovviare ai problemi dovuti al metodo Global/Local in cui non riusciamo a connettere perfettamente due sezioni con discretizzazioni diverse, e ai metodi dei Moltiplicatori di Lagrange e di Arlequin usiamo la metodologia Node Dependent Kinematics. La peculiarità di quest'ultima è la possibilità di usare per ogni nodo della discretizzazione FEM una diversa teoria della sezione, e non avremo alcun problema a unire teorie diverse per nodi contigui. Per fare questo, però, dovremo stare molto attenti alla costruzione della matrice di rigidezza, che rimane sempre quadrata a livello di singolo elemento, ma che diventa rettangolare a livello dei singoli nodi. Vedremo in maniera più specifica questo problema nel paragrafo sull'assemblaggio della matrice. In questo lavoro forniremo solo alcune linee guida teoriche per quanto rigurda l'NDK ESL Lagrange, poichè non ce ne occuperemo nella parte di risultati. In futuri lavori si forniranno maggiori dettagli.

6.4.1 Formulazione CUF 1D

Partiamo ora dallo studio dei laminati con la formulazione 1D. Indicheremo con l'apice (k) il k-esimo strato di una struttura composita. Ovviamente dovremo



Figura 6.9: Elemento B3 di transizione con NDK (Node-Dependent Kinematics)



Figura 6.10: Quattro tipi di elementi B3 usati nel FEM

discretizzare la struttura lungo l'asse y con elementi Beam, e la sezione con la formulazione CUF 1D. Se usiamo questo metodo il campo di spostamenti sarà:

$$\mathbf{u}^{(k)}(\alpha, y, \beta) = N_i(y) F_{\tau}^{i(k)}(\alpha, \beta) \mathbf{q}_{\tau i}^{(k)} \quad \tau = 1, ..., M \quad i = 1, ..., N_{NE}$$
(6.9)

dove M indica come di consueto il numero di termini adoperati per la teoria della sezione e N_{NE} i nodi dell'elemento. Dato che la teoria può variare arbitrariamente a seconda dei nodi, avremo l'apice *i* per le funzioni F_{τ} , per mettere in luce la variabilità delle sezioni. Con questo metodo, infatti, possiamo creare degli elementi Beam con teorie diverse tra i nodi, come mostrato in figura 6.9: abbiamo usato un' espansione di Taylor TE3, una teoria ESL Lagrange ELE9 e una teoria LW LE9. In genere, però, useremo degli elementi più semplici, come quelli in figura 6.10. Adotteremo, dunque, delle combinazioni del tipo TE/LE e ELE/LE, ma non impiegheremo insieme sia ESL TE che ESL LE. In pratica, alcuni elementi saranno *puri* con una sola teoria della sezione, altri, i quali saranno detti di *transizione*, avranno una cinematica variabile.

Quando usiamo ESL TE e ESL LE (per le parti simil-ESL, in cui includiamo

diversi strati) sappiamo che la cinematica vale per tutta la sezione:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = N_i(y) F^i_{\tau}(x, z) \mathbf{q}_{\tau i} \quad \tau = 1, ..., M \quad i = 1, ..., N_{NE}$$
(6.10)

$$\delta \mathbf{u}(x, y, z) = N_j(y) F_s^j(x, z) \delta \mathbf{q}_{sj} \quad s = 1, ..., M \quad j = 1, ..., N_{NE}$$
(6.11)

Per i modelli LW e per le 'parti' LW dei modelli ESL LE:

$$\mathbf{u}(\alpha, y, \beta)^{(k)} = N_i(y) F_{\tau}^{i(k)}(\alpha, \beta) \mathbf{q}_{\tau i}^{(k)} \quad \tau = 1, ..., M \quad i = 1, ..., N_{NE}$$
(6.12)

$$\delta \mathbf{u}(\alpha, y, \beta)^{(k)} = N_j(y) F_s^{j(k)}(\alpha, \beta) \delta \mathbf{q}_{sj}^{(k)} \quad s = 1, ..., M \quad j = 1, ..., N_{NE}$$
(6.13)

Quando deriveremo le equazioni di governo, per essere più generali possibile, useremo sempre i modelli LW LE.

Equazioni di governo

Al fine di trovare i nuclei fondamentali della matrice di rigidezza e del vettore dei carichi, ripartiamo dal ben noto principio dei lavori virtuali:

$$\delta L_{int} = \delta L_{est} \tag{6.14}$$

Concentrandoci sul lavoro interno, ripercorriamo le fasi consuete in maniera analoga a quanto fatto in precedenza :

$$\delta L_{int} = \int_{V} \left(\delta \boldsymbol{\epsilon}^{(k)^{T}} \boldsymbol{\sigma}^{(k)} \right) dV$$
(6.15)

$$\delta L_{int} = \int_{\Omega_k} \int_l \delta \mathbf{q}_{sj}^{(k)^T} F_s^{j(k)} N_j \mathbf{D}^T \widetilde{\mathbf{C}}^{(k)} \mathbf{D} F_{\tau}^{i(k)} N_i \mathbf{q}_{\tau i}^{(k)} dl d\Omega_k$$
(6.16)

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{q}_{sj}^{(k)^T} \mathbf{K}^{(k)ij\tau s} \mathbf{q}_{\tau i}^{(k)}$$
(6.17)

dove abbiamo trovato i nuclei fondamentali di uno strato per la matrice di rigidezza

$$\mathbf{K}^{(k)ij\tau s} = \int_{\Omega_k} \int_l \delta F_s^{j(k)} N_j \mathbf{D}^T \widetilde{\mathbf{C}}^{(k)} \mathbf{D} F_{\tau}^{i(k)} N_i dl d\Omega_k$$
(6.18)

Se passiamo invece al lavoro esterno del carico avremo:

$$\delta L_{est} = \int_{V} \delta \mathbf{u}^{(k)^{T}} \mathbf{p}^{(k)}$$
(6.19)

$$\delta L_{est} = \delta \mathbf{q}_{sj}^{(k)^T} \int_V N_j F_s^{j(k)} \mathbf{p}^{(k)} dV = \delta \mathbf{q}_{sj}^{(k)^T} \mathbf{P}_{sj}^{(k)}$$
(6.20)

e giungiamo infine a:

$$\delta \mathbf{q}_{sj}^{(k)^T} : \mathbf{K}^{(k)ij\tau s} \mathbf{q}_{\tau i}^{(k)} = \mathbf{P}_{sj}^{(k)}$$
(6.21)



Figura 6.11: Elemento Q4 di la transizione con NDK (Node-Dependent Kinematics)

6.4.2 Formulazione CUF 2D

Passiamo allo studio dei laminati con la formulazione 2D. Indicheremo con l'apice (k) il k-esimo strato di una struttura composita. Ovviamente dovremo discretizzare la superficie media con elementi Piastra, e la sezione con la formulazione CUF 2D. Se usiamo questo metodo per gli spostamenti:

$$\mathbf{u}^{(k)}(x,y,z) = N_i(x,y)F_{\tau}^{i(k)}(z)\mathbf{q}_{\tau i} \quad \tau = 0,...,N \quad i = 1,...,N_{NE}$$
(6.22)

dove M indica come di consueto il numero di termini adoperati per la teoria della sezione e N_{NE} i nodi dell'elemento. Dato che la teoria può variare arbitrariamente a seconda dei nodi, avremo l'apice *i* per le funzioni F_{τ} , per mettere in luce la variabilità delle sezioni. Con questo metodo, infatti, possiamo creare degli elementi Piastra con teorie diverse tra i nodi, come mostrato in figura 6.11: abbiamo usato un' espansione di Taylor TE3, una teoria ESL Lagrange ELE3 e una teoria LW LE2. In genere, però, useremo degli elementi più semplici. Adotteremo, dunque, delle combinazioni del tipo TE/LE e ELE/LE, dove non impiegheremo insieme sia ESL TE che ESL LE. In pratica, alcuni elementi saranno *puri* con una sola teoria della sezione, altri, i quali saranno detti di *transizione*, avranno una cinematica variabile.

Quando usiamo ESL TE e ESL LE (per le parti in cui includiamo diversi strati) sappiamo che la cinematica vale per tutta la sezione (con $z = [z_{bottom}, z_{top}]$):

$$\mathbf{u}(x, y, z) = N_i(x, y) F_{\tau}^i(z) \mathbf{q}_{\tau i} \quad \tau = 0, ..., N \quad i = 1, ..., N_{NE}$$
(6.23)

$$\delta \mathbf{u}(x, y, z) = N_j(x, y) F_s^j(z) \delta \mathbf{q}_{sj} \quad s = 0, ..., N \quad j = 1, ..., N_{NE}$$
(6.24)

Per i modelli LW e per le 'parti' LW dei modelli ESL LE (dove $\zeta_k = [-1,1]$):

$$\mathbf{u}(x, y, \zeta_k)^{(k)} = N_i(x, y) F_{\tau}^{i(k)}(\zeta_k) \mathbf{q}_{\tau i}^{(k)} \quad \tau = 0, ..., N \quad i = 1, ..., N_{NE}$$
(6.25)

$$\delta \mathbf{u}(x, y, \zeta_k)^{(k)} = N_j(x, y) F_s^{j(k)}(\zeta_k) \delta \mathbf{q}_{sj}^{(k)} \quad s = 0, ..., N \quad j = 1, ..., N_{NE}$$
(6.26)

Quando deriveremo le equazioni di governo, per essere più generali possibile, useremo sempre i modelli LW LE.

Equazioni di governo

Per semplificare la trattazione, cambieremo leggermente la notazione, introducendo nuove matrici e vettori. Infatti considereremo le componenti delle tensioni e delle deformazioni nel piano (indicate dalla lettera p) e quelle fuori dal piano, (indicate dalla lettera n):

$$\boldsymbol{\sigma}_{p}^{k} = \{\sigma_{xx}^{k}, \sigma_{yy}^{k}, \sigma_{xy}^{k}\}^{T} \quad \boldsymbol{\sigma}_{n}^{k} = \{\sigma_{xz}^{k}, \sigma_{yz}^{k}, \sigma_{zz}^{k}\}^{T}$$
(6.27)

$$\boldsymbol{\epsilon}_{p}^{k} = \{\boldsymbol{\epsilon}_{xx}^{k}, \boldsymbol{\epsilon}_{yy}^{k}, \boldsymbol{\epsilon}_{xy}^{k}\}^{T} \quad \boldsymbol{\epsilon}_{n}^{k} = \{\boldsymbol{\epsilon}_{xz}^{k}, \boldsymbol{\epsilon}_{yz}^{k}, \boldsymbol{\epsilon}_{zz}^{k}\}^{T} \tag{6.28}$$

Possiamo mettere in relazione gli spostamenti e le deformazioni in questo modo

$$\boldsymbol{\epsilon}_p^k = \mathbf{D}_p \mathbf{u}^k \tag{6.29}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_n^k = \left(\mathbf{D}_{np} + \mathbf{D}_{nz}\right) \mathbf{u}^k \tag{6.30}$$

con le matrici degli operatori differenziali

$$\mathbf{D}_{p} = \begin{bmatrix} \partial_{x} & 0 & 0\\ 0 & \partial_{y} & 0\\ \partial_{y} & \partial_{x} & 0 \end{bmatrix}$$
(6.31)

$$\mathbf{D}_{np} = \begin{bmatrix} \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ 0 & 0 & \partial_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{nz} = \begin{bmatrix} \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

Utilizzando la formulazione CUF 2D possiamo anche scrivere:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{p} = F_{\tau}^{i(k)} \mathbf{D}_{p} \left(N_{i} \mathbf{I} \right) \mathbf{q}_{\tau i}^{(k)}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n} = F_{\tau}^{i(k)} \mathbf{D}_{np} \left(N_{i} \mathbf{I} \right) \mathbf{q}_{\tau i}^{(k)} + F_{\tau, z}^{i(k)} \left(N_{i} \mathbf{I} \right) \mathbf{q}_{\tau i}^{(k)}$$
(6.33)
dove **I** è la matrice identità 3×3 .

Scriviamo anche le relazioni tra le deformazioni e le tensioni

$$\boldsymbol{\sigma}_{p}^{k} = \widetilde{\mathbf{C}}_{pp}^{k} \boldsymbol{\epsilon}_{p}^{k} + \widetilde{\mathbf{C}}_{pn}^{k} \boldsymbol{\epsilon}_{n}^{k}$$
(6.34)

$$\boldsymbol{\sigma}_{n}^{k} = \widetilde{\mathbf{C}}_{np}^{k} \boldsymbol{\epsilon}_{p}^{k} + \widetilde{\mathbf{C}}_{nn}^{k} \boldsymbol{\epsilon}_{n}^{k}$$
(6.35)

ed esplicitiamo le matrici dei coefficienti dei materiali:

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{pp}^{k} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{C}}_{11}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{12}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{16}^{k} \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{12}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{22}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{26}^{k} \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{16}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{26}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{36}^{k} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{pn}^{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{C}}_{13}^{k} \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{C}}_{23}^{k} \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{C}}_{36}^{k} \end{bmatrix} \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{np}^{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{13}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{23}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{36}^{k} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{nn}^{k} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{C}}_{44}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{45}^{k} & 0 \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{45}^{k} & \widetilde{\mathbf{C}}_{55}^{k} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\mathbf{C}}_{66}^{k} \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

Al fine di trovare i nuclei fondamentali della matrice di rigidezza e del vettore dei carichi, ripartiamo dal ben noto principio dei lavori virtuali:

$$\delta L_{int} = \delta L_{est} \tag{6.37}$$

Concentrandoci sul lavoro interno possiamo scrivere

$$\delta L_{int} = \int_{V} \left(\delta \boldsymbol{\epsilon}^{(k)^{T}} \boldsymbol{\sigma}^{(k)} \right) dV = \int_{\Omega} \int_{A_{k}} \left(\delta \boldsymbol{\epsilon}^{(k)^{T}} \boldsymbol{\sigma}^{(k)} \right) d\Omega dA_{k}$$
(6.38)

dove A_k è il dominio di integrazione lungo la sezione, per il singolo strato. Infine:

$$\int_{\Omega} \int_{A_k} \left\{ \delta \boldsymbol{\epsilon}_p^{(k)T} \boldsymbol{\sigma}_p^{(k)} + \delta \boldsymbol{\epsilon}_n^{(k)T} \boldsymbol{\sigma}_n^{(k)} \right\} d\Omega dA_k = \delta \mathbf{q}_{sj}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)ij\tau s} \mathbf{u}_{\tau i}^{(k)}$$
(6.39)

Ora vediamo il lavoro esterno. Un generico carico superficiale che agisce su una superficie orizzontale può essere indicato come $p_{\alpha}(x, y)$ e α indica la direzione del carico (x,y,x):

$$\delta L_{est}^{p_{\alpha}} = \int_{\Omega} \delta u_{\alpha}^{(k)} p_{\alpha} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_{\alpha_{\tau i}}^{(k)} N_j F_s^{(k)j}(z_p) p_{\alpha} d\Omega$$
(6.40)

dove z_p indica la coordinata di applicazione del carico. Se il carico esterno di superficie è scritto nel vettore $p_{\alpha}(x, y, z)$ ($\{p_x \ 0 \ 0\}^T, \{0 \ p_y \ 0\}^T, \{0 \ 0 \ p_x\}^T$), il lavoro virtuale del carico diventa:

$$\delta L_{est}^{p_{\alpha}} = \delta \mathbf{q}_{sj}^{(k)^T} \mathbf{P}_{sj}^{(k)} \tag{6.41}$$

e allora si arriva a:

$$\delta \mathbf{q}_{sj}^{(k)^T} : \mathbf{K}^{(k)ij\tau s} \mathbf{q}_{\tau i}^{(k)} = \mathbf{P}_{sj}^{(k)}$$
(6.42)

6.4.3 Assemblaggio della matrice di rigidezza

Dato che l'assemblaggio della matrice di rigidezza è formalmente identico per le formulazioni CUF 1D e 2D, si è deciso di parlarne in un paragrafo apposito, in modo generale. Nei capitoli precedenti, abbiamo visto che la sottomatrice K^{ij} aveva sempre la medesima dimensione $(M \times M)$, perchè usavamo la stessa teoria per tutti i nodi della sezione; ora invece la sottomatrice K^{ij} può essere di dimensioni variabili. Per spiegarci meglio, facciamo un esempio: in un nodo c'è una teoria con $M_i = 2$ termini dell'espansione, in un altro abbiamo una teoria con $M_j = 3$ termini dell'espansione. La matrice \mathbf{K}^{ii} avrà dimensioni 2×2 , la matrice $\mathbf{K}^{ij} 3 \times 3$, la matrice $\mathbf{K}^{ij} 2 \times 3$ e infine la matrice $\mathbf{K}^{ji} 3 \times 2$. In figura 6.12 mostriamo meglio questa disposizione, così come il vettore dei carichi, che deve adattarsi alla nuova matrice.



Figura 6.12: Matrice di rigidezza di un elemento costruita conil metodo NDK (Node-Dependent Kinematics)

Capitolo 7

Introduzione alle non linearità geometriche applicate alla formulazione CUF 1D

Prima di giungere alle equazioni di governo e ai metodi numerici per risolvere i problemi nonlineari, dobbiamo fare alcune considerazioni preliminari e riprendere alcuni concetti che abbiamo già visto nei capitoli precedenti, in cui abbiamo analizzato i casi lineari. In questo capitolo, invece, ci occuperemo di aggiungere le nonlinearità geometriche, mantenendo però sempre un materiale lineare (non consideremo quindi fenomeni di plasticizzazione).

Partiamo, dunque, dalla definizione di campo di spostamenti:

$$\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}^T \tag{7.1}$$

e possiamo scrivere, con una leggera modifica rispetto al capitolo 1, i vettori delle tensioni e delle deformazioni, rispettivamente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \begin{array}{cccc} \sigma_{yy} & \sigma_{xx} & \sigma_{zz} & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{xy} \end{array} \right\}^T$$
(7.2)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left\{ \begin{array}{ccc} \epsilon_{yy} & \epsilon_{xx} & \epsilon_{zz} & \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{xy} \end{array} \right\}^T$$
(7.3)

Anche per lo studio del nonlineare, usiamo dei materiali ortotropi, identificati dalla matrice (si rimanda al capitolo 1 per un'analisi più approfondita):

- - -

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{11} & \widetilde{C}_{12} & \widetilde{C}_{13} & 0 & 0 & \widetilde{C}_{16} \\ \widetilde{C}_{12} & \widetilde{C}_{22} & \widetilde{C}_{23} & 0 & 0 & \widetilde{C}_{26} \\ \widetilde{C}_{13} & \widetilde{C}_{23} & \widetilde{C}_{33} & 0 & 0 & \widetilde{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{C}_{44} & \widetilde{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{C}_{45} & \widetilde{C}_{55} & 0 \\ \widetilde{C}_{16} & \widetilde{C}_{26} & \widetilde{C}_{36} & 0 & 0 & \widetilde{C}_{66} \end{bmatrix}$$
(7.4)

Dato che studiamo le nonlinearità geometriche dobbiamo introdurre il tensore di deformazione di Green-Lagrange non lineare e la sua relazione con il vettore degli spostamenti:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_l + \boldsymbol{\epsilon}_{nl} = (\mathbf{b}_l + \mathbf{b}_{nl})\mathbf{u} \tag{7.5}$$

con le matrici :

$$\mathbf{b}_{l} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_{y} & 0 \\ \partial_{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{z} \\ \partial_{z} & 0 & \partial_{x} \\ 0 & \partial_{z} & \partial_{y} \\ \partial_{y} & \partial_{x} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{nl} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\partial_{y})^{2} & (\partial_{y})^{2} & (\partial_{y})^{2} \\ (\partial_{x})^{2} & (\partial_{x})^{2} & (\partial_{x})^{2} \\ (\partial_{z})^{2} & (\partial_{z})^{2} & (\partial_{z})^{2} \\ (\partial_{z})^$$

dove abbiamo $\partial_x = \frac{\partial(.)}{\partial x}, \ \partial_y = \frac{\partial(.)}{\partial y}$ e $\partial_z = \frac{\partial(.)}{\partial z}$. Come possiamo notare studiamo casi con non linearità completa, ossia dove consideriamo tutti i termini non lineari geometrici. Usiamo questa teoria e non teorie più semplici, come quella sviluppata da Von Karman, perchè spesso non permettono di ottenere risultati accettabili (si rimanda ai lavori di Carrera *et al.* [39] e [56] per vedere come i termini non lineari influenzino le soluzioni).

Dopo questi brevi richiami di meccanica dei laminati, possiamo applicare la formulazione CUF 1D e il metodo FEM per discretizzare una struttura, e possiamo riscrivere, in maniera analoga a quanto visto per il caso lineare, il campo di spostamenti:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_s N_j \mathbf{q}_{sj} = F_s(x, z) N_j(y) \mathbf{q}_{sj}$$
(7.7)

7.1 Equazioni di governo non lineari

7.1.1 Equazioni di equilibrio

Poichè rimaniamo sempre nell'ambito dell'analisi statica, pur aggiungendo le difficoltà delle nonlinearità geometriche, applichiamo il già utilizzato Principio dei lavori virtuali:

$$\delta L_{int} - \delta L_{est} = 0 \tag{7.8}$$

Adoperando le equazioni scritte all'inizio del capitolo, possiamo arrivare a scrivere una formula che è formalmente identica a quelle già incontrate nei casi lineari:

$$\mathbf{K}_{S}^{ij\tau s}\mathbf{q}_{\tau i} - \mathbf{p}_{\tau i} = \mathbf{0} \tag{7.9}$$

in particolare $\mathbf{K}_{S}^{ij\tau s}$ è il nucleo fondamentale della matrice di rigidezza secante, $\mathbf{q}_{\tau i}$ è il vettore delle incognite, mentre $\mathbf{p}_{\tau i}$ è il vettore dei carichi. Se combiniamo i vari nuclei fondamentali all'interno della struttura nello stesso modo visto già nel capitolo 2, giungiamo a un sistema di tre equazioni algebriche per l'intera struttura

$$\mathbf{K}_S \mathbf{q} - \mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{7.10}$$

Nel prosieguo della trattazione vedremo che non possiamo risolvere in maniera semplice questo sistema, dato che siamo in regime non lineare, e dovremo adottare diversi metodi per linearizzare le equazioni nell'intorno di un punto. Per fare questo dovremo introdurre anche il concetto di matrice di rigidezza tangente.

7.1.2 Linearizzazione di Newton-Raphson

L'equazione 7.10 è il passo iniziale per il calcolo della soluzione non lineare, in quanto, non calcoliamo un singolo punto, ma dobbiamo trovare un percorso sforzodeformazione, e potremmo utilizzare diversi strumenti. Di solito si utilizza il metodo di Newton-Raphson (o metodo delle tangenti), ossia uno schema incrementale linearizzato. Possiamo riscrivere l'equazione 7.10 in modo più conveniente, come scritto in Reddy ([60]):

$$\phi_{res} = \mathbf{K}_S \mathbf{q} - \mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{7.11}$$

ove ϕ_{res} indica in vettore delle forze nodali residue (è un parametro che indica quanto siamo lontani dalla soluzione esatta del sistema non lineare). Ora possiamo linearizzare l'ultima equazione scritta grazie a un'espansione di Taylor intorno a una soluzione nota (\mathbf{q}, \mathbf{p}), dove ci fermiamo ai termini del primo ordine:

$$\boldsymbol{\phi}_{res}(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}) = \boldsymbol{\phi}_{res}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{res}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{res}}{\partial \mathbf{p}} \delta \lambda \mathbf{p}_{ref} = \mathbf{0}$$
(7.12)

dove $\frac{\partial \phi_{res}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_T$ è la matrice di rigidezza tangente e $-\frac{\partial \phi_{res}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{I}$. Inoltre, al posto di avere come variabile diretta il vettore dei carichi \mathbf{p} , usiamo il parametro di carico λ che cambia lungo il percorso, mentre manteniamo fisso il vettore \mathbf{p}_{ref} . In definitiva possiamo scrivere: $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}_{ref}$. Giungiamo quindi a

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{q} = \delta \lambda \mathbf{p}_{ref} - \boldsymbol{\phi}_{res} \tag{7.13}$$

Dato che il parametro λ è una variabile, avremo bisogno di aggiungere una equazione per rendere il sistema chiuso: condizione di vincolo $c(\delta \mathbf{q}, \delta \lambda) = 0$.

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \delta \mathbf{q} = \delta \lambda \mathbf{p}_{ref} - \boldsymbol{\phi}_{res} \\ c(\delta \mathbf{q}, \delta \lambda) = 0 \end{cases}$$
(7.14)

A seconda della condizione di vincolo, possiamo implementare diversi schemi di controllo: se imponiamo $\delta \lambda = 0$ allora abbiamo il metodo a controllo di carico, mentre, se imponiamo $\delta \mathbf{q} = \mathbf{0}$ possiamo ricavare un metodo a controllo di spostamento. Dato che con questi metodi si possono riscontrare problemi nel determinare fenomeni come lo snap-back o lo snap-through (per approfondimenti si guardino Crisfield [44] o Carrera [30]), utilizziamo un metodo 'path-following'. Nello specifico adoperiamo il metodo arc-length modificato da Crisfield, che viene ampiamente spiegato nei lavori [44], [30] e [54].

Come vediamo da questa formulazione i calcoli vengono effettuati con la matrice tangente, mentre la matrice secante è usata per calcolare le forze residuali (cioè per vedere quanto siamo lontani dalla soluzione reale). Nelle sezioni seguenti vedremo come ricavare i nuclei fondamentali delle matrici secante e tangente.

7.1.3 Nucleo fondamentale della matrice di rigidezza secante

La matrice di rigidezza secante \mathbf{K}_S può essere ricavata dalla variazione virtuale dell'energia interna:

$$\delta L_{int} = \int_{V} \delta \boldsymbol{\epsilon}^{T} \boldsymbol{\sigma} dV = <\delta \boldsymbol{\epsilon}^{T} \boldsymbol{\sigma} >$$
(7.15)

dove $\langle (.) \rangle = \int_{V} (.) dV$. Se usiamo l'ipotesi delle piccole deformazioni V è il volume iniziale del dominio computazionale, che consideriamo costante.

Possiamo scrivere il vettore delle deformazioni adoperando la discretizzazione degli spostamenti adoperata nella formulazione CUF:

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{B}_l^{\tau i} + \mathbf{B}_{nl}^{\tau i})\mathbf{q}_{\tau i} \tag{7.16}$$

dove $\mathbf{B}_l^{\tau i}$ e $\mathbf{B}_{nl}^{\tau i}$ sono le seguenti matrici:

$$\mathbf{B}_{l}^{\tau i} = \mathbf{b}_{l} \left(F_{\tau} N_{i} \right) = \begin{bmatrix} 0 & F_{\tau} N_{i,y} & 0 \\ F_{\tau,x} N_{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{\tau,z} N_{i} \\ F_{\tau,z} N_{i} & 0 & F_{\tau,x} N_{i} \\ 0 & F_{\tau,z} N_{i} & F_{\tau} N_{i,y} \\ F_{\tau} N_{i,y} & F_{\tau,x} N_{i} & 0 \end{bmatrix}$$
(7.17)

	4	-
	r	۱
	Г	
1	٩,	

$$\mathbf{B}_{nl}^{\tau i} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{x,y}F_{\tau}N_{i,y} & u_{y,y}F_{\tau}N_{i,y} & u_{z,y}F_{\tau}N_{i,y} \\ u_{x,x}F_{\tau,x}N_{i} & u_{y,x}F_{\tau,x}N_{i} & u_{z,x}F_{\tau,x}N_{i} \\ u_{x,x}F_{\tau,z}N_{i} & u_{y,z}F_{\tau,z}N_{i} & u_{z,z}F_{\tau,z}N_{i} \\ u_{x,x}F_{\tau,z}N_{i} + u_{x,z}F_{\tau,x}N_{i} & u_{y,x}F_{\tau,z}N_{i} + u_{y,z}F_{\tau,x}N_{i} & u_{z,x}F_{\tau,z}N_{i} + u_{z,z}F_{\tau,x}N_{i} \\ u_{x,y}F_{\tau,z}N_{i} + u_{x,z}F_{\tau}N_{i,y} & u_{y,y}F_{\tau,z}N_{i} + u_{y,z}F_{\tau}N_{i,y} & u_{z,y}F_{\tau,z}N_{i} + u_{z,z}F_{\tau}N_{i,y} \\ u_{x,x}F_{\tau}N_{i,y} + u_{x,y}F_{\tau,x}N_{i} & u_{y,x}F_{\tau}N_{i,y} + u_{y,y}F_{\tau,x}N_{i} & u_{z,x}F_{\tau}N_{i,y} + u_{z,y}F_{\tau,x}N_{i} \end{bmatrix}$$

$$(7.18)$$

Possiamo scrivere in maniera analoga le deformazioni nel sistema virtuale:

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} = \delta \left(\left(\mathbf{B}_{l}^{sj} + \mathbf{B}_{nl}^{sj} \right) \mathbf{q}_{sj} \right) = \left(\mathbf{B}_{l}^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj} \right) \delta \mathbf{q}_{sj}$$
(7.19)

oppure, se effettuiamo l'operazione di trasposizione:

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}^{T} = \delta \mathbf{q}_{sj}^{T} \left(\mathbf{B}_{l}^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj} \right)^{T}$$
(7.20)

Adesso si può calcolare il lavoro virtuale interno:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{q}_{sj}^{T} < \left(\mathbf{B}_{l}^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj} \right)^{T} \mathbf{C} \left(\mathbf{B}_{l}^{\tau i} + \mathbf{B}_{nl}^{\tau i} \right) > \mathbf{q}_{\tau i}$$

$$= \delta \mathbf{q}_{sj}^{T} \mathbf{K}_{0}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{\tau i} + \delta \mathbf{q}_{sj}^{T} \mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{\tau i} + \delta \mathbf{q}_{sj}^{T} \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{\tau i} + \delta \mathbf{q}_{sj}^{T} \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{\tau i}$$
(7.21)
$$= \delta \mathbf{q}_{sj}^{T} \mathbf{K}_{S}^{ij\tau s} \mathbf{q}_{\tau i}$$

dove la matrice di rigidezza secante è $\mathbf{K}_{S}^{ij\tau s} = \mathbf{K}_{0}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}$. Dunque, $\mathbf{K}_{0}^{ij\tau s}$ è la componente lineare della matrice $\mathbf{K}_{S}^{ij\tau s}$ (è in pratica la matrice di rigidezza lineare), $\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s}$ e $\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}$ rappresentano i contributi non lineari del primo ordine, e $\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}$ rappresenta le non linearità del secondo ordine. Queste quattro matrici sono derivate da:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{0}^{ij\tau s} = \langle \left(\mathbf{B}_{l}^{sj}\right)^{T} \mathbf{C} \mathbf{B}_{l}^{\tau i} > \\ \mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} = \langle \left(\mathbf{B}_{l}^{sj}\right)^{T} \mathbf{C} \mathbf{B}_{nl}^{\tau i} > \\ \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} = 2 < \left(\mathbf{B}_{nl}^{sj}\right)^{T} \mathbf{C} \mathbf{B}_{l}^{\tau i} > \\ \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s} = 2 < \left(\mathbf{B}_{nl}^{sj}\right)^{T} \mathbf{C} \mathbf{B}_{nl}^{\tau i} > \\ \end{cases}$$
(7.22)

Si possono trovare queste matrici in forma esplicita nel lavono di Pagani e Carrera ([54]). Come le matrici di rigidezza $\mathbf{K}^{ij\tau s}$ nel caso lineare, anche queste vengono espresse tramite i nuclei fondamentali 3×3 , con le funzioni F_s e F_{τ} per la sezione, e le funzioni di forma $N_i \in N_j$ per la discretizzazione lungo la beam. Grazie a questo metodo, abbiamo la possibilità di implementare qualunque teoria della sezione. Non ci dilungheremo troppo su questo concetto, in quanto è stato già spiegato nei capitoli precedenti.

Nucleo fondamentale della matrice di rigidezza tangen-7.1.4te

Noi possiamo ricavare il nucleo fondamentale della matrice di rigidezza tangente dalla linearizzazione delle equazioni di equilibrio, usando la serie di Taylor. Considerando che il carico è conservativo, la linearizzzazione della variazione virtuale dei carichi esterni è nullo, ossia $\delta(\delta L_{est}) = 0$. Gli unici termini da linearizzare sono gli operatori deformazioni-spostamenti e le relazioni deformazioni-tensioni. Troviamo la matrice tangente dalla variazione virtuale dell'energia interna:

$$\delta(\delta L_{int}) = \langle \delta(\delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) \rangle = \langle \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} \rangle + \langle \delta(\delta \boldsymbol{\epsilon})^T \boldsymbol{\sigma} \rangle$$
$$= \delta \mathbf{q}_{sj}^T (\mathbf{K}_0^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s}) \mathbf{q}_{\tau i} = \delta \mathbf{q}_{sj}^T \mathbf{K}_T^{ij\tau s} \mathbf{q}_{\tau i}$$
(7.23)

Studiamo separatamente i due contributi non lineari $\mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s} \in \mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s}$. 1)Ora si sviluppa il termine $\langle \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} \rangle$, in cui dobbiamo linearizzare l'equazione costitutiva $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}$ dove ipotizziamo di mantenere costanti i coefficienti del materiale ($\delta \mathbf{C} = 0$). Quindi arriviamo a scrivere:

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \delta \left(\mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \right) = \mathbf{C} \delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C} \left(\mathbf{B}_{l}^{\tau i} + 2 \mathbf{B}_{nl}^{\tau i} \right) \delta \mathbf{q}_{\tau i}$$
(7.24)

e quindi giungiamo a:

$$<\delta\boldsymbol{\epsilon}^{T}\delta\boldsymbol{\sigma}> = \delta\mathbf{q}_{sj}^{T} < \left(\mathbf{B}_{l}^{sj} + 2\mathbf{B}_{nl}^{sj}\right)^{T} \mathbf{C} \left(\mathbf{B}_{l}^{\tau i} + 2\mathbf{B}_{nl}^{\tau i}\right) > \delta\mathbf{q}_{\tau i}$$
$$= \delta\mathbf{q}_{sj}^{T}\mathbf{K}_{0}^{ij\tau s}\delta\mathbf{q}_{\tau i} + \delta\mathbf{q}_{sj}^{T} \left(2\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s}\right)\delta\mathbf{q}_{\tau i} + \delta\mathbf{q}_{sj}^{T}\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}\delta\mathbf{q}_{\tau i} + \delta\mathbf{q}_{sj}^{T} \left(2\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}\right)\delta\mathbf{q}_{\tau i}$$
$$= \delta\mathbf{q}_{sj}^{T} (\mathbf{K}_{0}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{T_{1}}^{ij\tau s})\delta\mathbf{q}_{\tau i}$$
(7.25)

dove $\mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s} = 2\mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} + 2\mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}$ è il contributo nonlineare alla matrice tangente, dovuto alla linearizzazione della legge di Hooke.

2)Ora calcoliamo il secondo addendo, ossia $\langle \delta(\delta \epsilon)^T \sigma \rangle$, che richiede la linearizzaione delle relazione geometriche non lineari. Grazie a Crisfield ([44]) possiamo giungere a:

$$\delta(\delta\boldsymbol{\epsilon}) = \begin{cases} (\delta u_{x,x})_V \,\delta u_{x,x} + (\delta u_{y,x})_V \,\delta u_{y,x} + (\delta u_{z,x})_V \,\delta u_{z,x} \\ (\delta u_{x,y})_V \,\delta u_{x,y} + (\delta u_{y,y})_V \,\delta u_{y,y} + (\delta u_{z,y})_V \,\delta u_{z,y} \\ (\delta u_{x,z})_V \,\delta u_{x,z} + (\delta u_{y,z})_V \,\delta u_{y,z} + (\delta u_{z,z})_V \,\delta u_{z,z} \\ [(\delta u_{x,x})_V \,\delta u_{x,z} + \delta u_{x,x} \,(\delta u_{x,z})_V] + [(\delta u_{y,x})_V \,\delta u_{y,z} + \delta u_{y,x} \,(\delta u_{y,z})_V] \\ + [(\delta u_{z,x})_V \,\delta u_{z,z} + \delta u_{z,x} \,(\delta u_{z,z})_V] \\ [(\delta u_{x,y})_V \,\delta u_{x,z} + \delta u_{x,y} \,(\delta u_{x,z})_V] + [(\delta u_{y,y})_V \,\delta u_{y,z} + \delta u_{y,y} \,(\delta u_{y,z})_V] \\ + [(\delta u_{z,y})_V \,\delta u_{z,z} + \delta u_{z,y} \,(\delta u_{z,z})_V] \\ [(\delta u_{x,x})_V \,\delta u_{x,y} + \delta u_{x,x} \,(\delta u_{x,y})_V] + [(\delta u_{y,x})_V \,\delta u_{y,y} + \delta u_{y,x} \,(\delta u_{y,y})_V] \\ + [(\delta u_{z,x})_V \,\delta u_{z,y} + \delta u_{z,x} \,(\delta u_{z,y})_V] \\ (7.26) \end{cases}$$

dove il pedice V indica le variazioni. Possiamo riformulare l'ultima equazione adoperando la discretizzazione qui proposta, sia per le variabili linearizzate (ovvero $\delta \mathbf{u} = F_{\tau} N_i \delta \mathbf{q}_{\tau i}$) e le variazioni (ovvero $(\delta \mathbf{u})_V = F_s N_j \delta \mathbf{q}_{sj}$):

$$\delta(\delta\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{B}_{nl}^{*} \left\{ \begin{array}{c} \delta q_{x_{\tau i}} \delta q_{x_{sj}} \\ \delta q_{y_{\tau i}} \delta q_{y_{sj}} \\ \delta q_{z_{\tau i}} \delta q_{z_{sj}} \end{array} \right\}$$
(7.27)

o, facendo il trasposto:

$$\delta(\delta\boldsymbol{\epsilon}^{T}) = \left\{ \begin{array}{c} \delta q_{x_{\tau i}} \delta q_{x_{sj}} \\ \delta q_{y_{\tau i}} \delta q_{y_{sj}} \\ \delta q_{z_{\tau i}} \delta q_{z_{sj}} \end{array} \right\}^{T} \left(\mathbf{B}_{nl}^{*}\right)^{T}$$
(7.28)

dove abbiamo

$$\mathbf{B}_{nl}^{*} = \begin{bmatrix} F_{\tau,x}F_{s,x}N_{i}N_{j} & F_{\tau,x}F_{s,x}N_{i}N_{j} & F_{\tau,x}F_{s,x}N_{i}N_{j} \\ F_{\tau}F_{s}N_{i,y}N_{j,y} & F_{\tau}F_{s}N_{i,y}N_{j,y} & F_{\tau}F_{s}N_{i,y}N_{j,y} \\ F_{\tau,z}F_{s,z}N_{i}N_{j} & F_{\tau,z}F_{s,z}N_{i}N_{j} & F_{\tau,z}F_{s,z}N_{i}N_{j} \\ F_{\tau,x}F_{s,z}N_{i}N_{j} + F_{\tau,z}F_{s,x}N_{i}N_{j} & F_{\tau,x}F_{s,z}N_{i}N_{j} + F_{\tau,z}F_{s,x}N_{i}N_{j} \\ F_{\tau,x}F_{s}N_{i}N_{j,y} + F_{\tau}F_{s,z}N_{i,y}N_{j} & F_{\tau,z}F_{s}N_{i}N_{j,y} + F_{\tau}F_{s,z}N_{i,y}N_{j} \\ F_{\tau,x}F_{s}N_{i}N_{j,y} + F_{\tau}F_{s,x}N_{i,y}N_{j} & F_{\tau,x}F_{s}N_{i}N_{j,y} + F_{\tau}F_{s,x}N_{i,y}N_{j} & F_{\tau,x}F_{s}N_{i}N_{j,y} + F_{\tau}F_{s,x}N_{i,y}N_{j} \\ F_{\tau,x}F_{s}N_{i}N_{j,y} + F_{\tau}F_{s,x}N_{i,y}N_{j} \\ F_{\tau,x}F_{s}N_{i}N_{j,y} + F_{\tau}F_{s,x}N_{i,y}N_{j} & F_{\tau,x}F_{s}N_{i}N_{j,y} + F_{\tau}F_{s,x}N_{i,y}N_{j} \\ F_{\tau,x}F_{s}N_{i}N_{j,y} \\ F_{\tau,x}F_{s}N_{i}N_{j,y} \\ F_{\tau,x}F_{s}N_{i}N_{j,y} \\ F_{\tau,x}F_{s}N_{i}N_{j} \\ F_{\tau,x}F_{s}N_{$$

Possiamo ora scrivere:

$$<\delta(\delta\boldsymbol{\epsilon})^{T}\boldsymbol{\sigma}>=\left\langle\left\{\begin{array}{c}\delta q_{x_{\tau i}}\delta q_{x_{s j}}\\\delta q_{y_{\tau i}}\delta q_{y_{s j}}\\\delta q_{z_{\tau i}}\delta q_{z_{s j}}\end{array}\right\}^{T}\left(\mathbf{B}_{nl}^{*}\right)^{T}\boldsymbol{\sigma}\right\rangle$$
(7.30)

e infine:

$$<\delta(\delta\boldsymbol{\epsilon})^{T}\boldsymbol{\sigma}> = \delta\mathbf{q}_{\tau i}^{T} < diag\left(\left(\mathbf{B}_{nl}^{*}\right)^{T}\boldsymbol{\sigma}\right) > \delta\mathbf{q}_{sj}$$
$$= \delta\mathbf{q}_{\tau i}^{T} < diag\left(\left(\mathbf{B}_{nl}^{*}\right)^{T}\left(\boldsymbol{\sigma}_{l}+\boldsymbol{\sigma}_{nl}\right)\right) > \delta\mathbf{q}_{sj}$$
$$= \delta\mathbf{q}_{\tau i}^{T}\left(\mathbf{K}_{\sigma_{l}}^{ij\tau s}+\mathbf{K}_{\sigma_{nl}}^{ij\tau s}\right)\delta\mathbf{q}_{sj}$$
$$= \delta\mathbf{q}_{\tau i}^{T}\mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s}\delta\mathbf{q}_{sj}$$
(7.31)

dove $\langle diag\left(\left(\mathbf{B}_{nl}^{*}\right)^{T}\boldsymbol{\sigma}\right) \rangle$ è una matrice diagonale 3×3 . Sappiamo inoltre che $\boldsymbol{\sigma}_{l} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}_{l}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{nl} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}_{nl}$. L'equazione 7.31 ci mostra il contributo non lineare alla rigidezza tangente, che nasce dalla non linearità geometrica, ed è perciò chiamata rigidezza geometrica. Il nucleo fondamentale è $\mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s} = \mathbf{K}_{\sigma_{l}}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{\sigma_{nl}}^{ij\tau s}$. La forma esplicità di $\mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s}$ è data da:

$$\mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s} = \left(< \sigma_{xx} F_{\tau,x} F_{s,x} N_i N_j > + < \sigma_{yy} F_{\tau} F_s N_{i,y} N_{j,y} >
+ < \sigma_{zz} F_{\tau,z} F_{s,z} N_i N_j > + < \sigma_{xy} F_{\tau,x} F_s N_i N_{j,y} >
+ < \sigma_{xy} F_{\tau} F_{s,x} N_i N_{j,y} > + < \sigma_{xz} F_{\tau,x} F_{s,z} N_i N_j >
+ < \sigma_{xz} F_{\tau,z} F_{s,x} N_i N_j > + < \sigma_{yz} F_{\tau,z} F_s N_i N_{j,y} >
+ < \sigma_{yz} F_{\tau} F_{s,z} N_i N_j > \right) \mathbf{I}$$
(7.32)

dove I è la matrice di identità 3×3 . Ora possiamo sommare i due contributi $\mathbf{K}_{T_1}^{ij\tau s}$ e $\mathbf{K}_{\sigma}^{ij\tau s}$ per giungere al nucleo fondamentale della matrice di rigidezza tangente $\mathbf{K}_{T}^{ij\tau s}$. In analogia alla matrice di rigidezza secante (e alle matrici nel caso lineare), possiamo studiare qualsiasi teoria della sezione. Inoltre si può ricavare che l'espansione del Nucleo Fondamentale della matrice tangente porta a un elemento della matrice simmetrico.

7.1.5 Forma simmetrica della matrice di rigidezza secante

Dobbiamo far notare che la matrice $\mathbf{K}_{S}^{ij\tau s}$ trovata precedentemente non è simmetrica. La non simmetria può portare a difficoltà matematiche e di calcolo computazionale, come i tempi di calcolo e l'uso della memoria. Cerchiamo di trasformare la matrice secante in una matrice simmetrica, esprimendo la variazione dell'energia interna del contributo $\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s}$ (si veda [30]):

$$(\delta L_{int})_{nll} = \langle \delta \boldsymbol{\epsilon}_{nl}^T \boldsymbol{\sigma}_l \rangle = \frac{1}{2} \langle \delta \boldsymbol{\epsilon}_{nl}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_l + \delta \boldsymbol{\epsilon}_{nl}^T \boldsymbol{\sigma}_l \rangle$$
$$= \frac{1}{2} \delta \mathbf{q}_{sj}^T \left(\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{\sigma_l}^{ij\tau s} \right) \mathbf{q}_{\tau j}$$
(7.33)

E, ritornando all'equazione 7.21, la variazione virtuale totale dell'energia interna è:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{q}_{sj}^{T} \left(\mathbf{K}_{0}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{\sigma_{l}}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s} \right) \mathbf{q}_{\tau j}$$
(7.34)

oppure abbiamo:

$$\mathbf{K}_{S}^{ij\tau s} = \mathbf{K}_{0}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{lnl}^{ij\tau s} + \frac{1}{2}\mathbf{K}_{nll}^{ij\tau s} + \frac{1}{2}\mathbf{K}_{\sigma_{l}}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{nlnl}^{ij\tau s}$$
$$= \mathbf{K}_{0}^{ij\tau s} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_{T_{1}}^{ij\tau s} + \mathbf{K}_{\sigma_{l}}^{ij\tau s}\right)$$
(7.35)

Ora abbiamo una matrice di rigidezza seecante simmetrica.

7.2 Applicazione al Global/Local e NDK

Nei casi lineari abbiamo già visto come si possano utilizzare dei metodi per scegliere all'interno della stessa struttura, lungo la discretizzazione della beam, diverse teorie della sezione. Abbiamo affrontato nel capitolo precedente come possiamo unire diverse sezioni con il metodo Global/Local (per maggiori spiegazioni si rimanda alla parte di simulazione numeriche nel capitolo 16). Nello stesso capitolo abbiamo analizzato la teoria sul NDK e le sue potenzialità. Ora non esponiamo in maniera approfondita questi concetti anche per il nonlineare, ma è molto facile trasportarli in questo nuovo contesto. Per il Global/Local dobbiamo infatti unire due elementi con teorie della sezione diverse, mentre per l'NDK abbiamo la libertà di usare per ogni nodo una teoria diversa, ovviamente complicando leggermente la notazione. In definitiva, però, non vi sono sostanziali cambiamenti rispetto al caso lineare e nella parte di simulazioni numeriche mostreremo le loro potenzialità e criticità.

Parte II Simulazioni numeriche

Capitolo 8

Analisi di strutture monostrato con formulazione CUF 1D

- 8.1 Analisi di una trave incastrata con sezione quadrata
- 8.1.1 Dati del problema



Figura 8.1: Sezione quadrata della trave

In questa sezione si studierà il comportamento di una struttura semplice, per incominciare a capire il comportamento delle travi e delle potenzialità della formulazione CUF. In particolare si ha una trave a sezione quadrata incastrata a un estremo. La sua lunghezza lungo l'asse principale y è L = 2m, mentre in figura 8.1 si mostra la geometria della sezione, la cui dimensione dei lati è b = 0.2m. Il materiale della struttura è una lega di alluminio tale per cui il suo modulo di Young è E = 75GPa e il modulo di Poisson è $\nu = 0.33$. Inoltre è incastrata nella sezione a y = 0 ed è caricata nel punto $A = (0.1, 2.0, 0.1)^T m$ da una forza che è diretta verso l'asse negativo delle z e ha modulo F = 50N. In questa analisi si devono valutare gli spostamenti dei punti $A = (0.1, 2.0, 0.1)^T m$ e $B = (-0.1, 2.0, 0.1)^T m$ che sono indicati nella figura 8.1. Si faranno comparazioni tra le soluzioni analitiche, teorie classiche di Eulero-Bernoulli, espansione della sezione con polinomi di Lagrange e uso dei polinomi di Taylor.

N. elementi	Elementi	$-u_z \times 10^3$	$-u_z \times 10^3$
		nel punto A(mm)	nel punto B(mm)
1	B2	0.916	0.883
	B3	1.185	1.154
	B4	1.267	1.234
2	B2	1.095	1.056
	B3	1.267	1.263
	B4	1.310	1.283
3	B2	1.194	1.184
	B3	1.295	1.279
	B4	1.328	1.298
5	B2	1.265	1.232
	B3	1.326	1.310
	B4	1.337	1.311
10	B2	1.313	1.292
	B3	1.342	1.310
	B4	1.347	1.314
15	B2	1.325	1.295
	B3	1.344	1.312
	B4	1.349	1.316
20	B2	1.333	1.302
	B3	1.347	1.314
	B4	1.349	1.316

8.1.2 Analisi di convergenza

Tabella 8.1: Analisi di convergenza usando un elemento LE9 per la sezione quadrata

Prima di poter studiare le differenze tra i modelli, si deve fare un'analisi di convergenza e si è dunque deciso di usare tre tipi di elementi beam per i nodi strutturali: due nodi (B2), tre nodi (B3), quattro nodi (B4) e si è anche variato il



Figura 8.2: Analisi di convergenza usando un elemento LE9 per la sezione quadrata nel punto A



Figura 8.3: Analisi di convergenza usando un elemento LE9 per la sezione quadrata nel punto B

numero degli elementi stessi. Per quanto riguarda lo studio del modello della sezione si sono adoperati i polinomi di Lagrange usando nove nodi (LE9) come nella parte centrale della figura 8.4. Nella tabella 8.1 si vede molto bene come all'aumentare del numero dei nodi dell'elemento la soluzione converga più velocemente. Si sono creati dei diagrammi bilogaritmici che si possono vedere nelle figure 8.2 e 8.3; infatti sull'asse orizzontale si è messo il numero di elementi, mentre sull'asse verticale si sono messi gli spostamenti adimensionalizzati rispetto al valore trovato con 20 elementi B4. Per questi motivi si è deciso di scegliere di adottare nell'analisi successiva 10 elementi beam B4, poichè già con questo numero di elementi FEM si ha una soluzione ottima.

8.1.3 Calcolo degli spostamenti

A questo punto si possono fare dei confronti tra le varie teorie, mantenendo costante il tipo e il numero di elementi FEM (10 B4). Si è deciso di analizzare la teoria di Eulero-Bernoulli EBBM, la teoria di Timoshenko (TBM), e poi si usano tre tipi di discretizzazione per la sezione: a quattro nodi (LE4), a nove nodi (LE9), a sedici nodi (LE16) e nella figura 8.4 si possono vedere le diverse mesh.



Figura 8.4: Schemi di discretizzazione della sezione quadrata

Come si nota nella tabella 8.2 si devono fare confronti con tre tipi di soluzione analitica([24]). La teoria EBBM infatti si avvicina molto alla teoria che considera la sola flessione, mentra la TBM deve essere confrontata con la teoria in cui è presente anche la flessione dovuta al taglio. In entrambi i casi, i punti A e B subiscono lo stesso spostamento per la stessa teoria. Se si vuole studiare anche l'effetto della torsione (infatti la forza non è applicata nel centro di taglio) si adottano teorie più raffinate. Prima si sono adoperate delle classiche espansioni della sezione con Lagrange (LE4, LE9, LE16), dopo si sono studiati diversi modelli di espansione di

Modello	$-u_z \times 10^3$	$-u_z \times 10^3$				
	nel punto A(mm)	nel punto B(mm)				
Soluz	Soluzioni analitica([24])					
Pura flessione	1.333	1.333				
Inclusa flessione di taglio	1.342	1.342				
Inclusa torsione	1.358	1.326				
Usand	lo gli elementi finiti					
EBBM	1.335	1.335				
TBM	1.344	1.344				
LE4	1.130	1.100				
LE9	1.347	1.314				
LE16	1.357	1.311				
$\mathrm{TE1}$	1.356	1.329				
$\mathrm{TE}2$	1.342	1.313				
TE3	1.348	1.315				
TE4	1.355	1.313				
${ m TE5}$	1.359	1.293				
TE10	1.357	1.311				

Tabella 8.2: Calcolo degli spostamenti A e B per trave con sezione quadrata usando diversi modelli

Taylor e si nota che più è alto l'ordine della teoria, più sarà accurata la soluzione e vicina alla soluzione esatta.

8.2 Analisi di una trave incastrata con sezione a I

8.2.1 Dati del problema

In questa sezione si analizzerà il caso di una trave incastrata a un estremo (in y = 0) e caricata all'estremo libero da una forza concentrata. La trave ha una lunghezza di L = 1m, mentre la sezione ha una forma a I (figura 8.5). La sezione, la quale è costante per tutta la lunghezza della trave, ha un'altezza pari a h = 100mm, e una largezza di w = 96mm, mentre le flange hanno uno spessore di $t_1 = 8mm$ e l'anima ha uno spessore di $t_2 = 5mm$. La trave inoltre è composta di un materiale isotropo che ha le seguenti caratteristiche meccaniche: modulo di Young E = 200GPa, modulo di Poisson $\nu = 0.29$. Per quanto riguarda il carico, esso è applicato nel punto B della sezione dell'estremità libera (si veda la figura 8.5) e la forza punta verso l'asse negativo delle z con modulo pari a $F_z = 2000N$. Nella seguente analisi si vogliono determinare gli spostamenti lungo l'asse z del punto B e del punto A, che è al centro della sezione dell'estremità libera. Anche in questo caso



Figura 8.5: Sezione della trave a I



Figura 8.6: Schema della disposizione degli elementi per la sezione a I

si faranno dei confronti tra i risultati ottenuti con l'espansione della sezione usando i polinomi di Lagrange e quelli ottenuti adoperando i polinomi di Taylor. Per quanto riguarda la discretizzazione con gli elementi LE*n* bisogna suddividere la sezione in sottodominii facendo in modo che i punti di due sottodominii contigui combacino. Per semplificare, si è utilizzato sempre un solo tipo di elemento (per esempio solo elementi LE9), e si sono utilizzate due strategie di divisione dell'espansione: uso di 7 elementi e uso di 12 elementi (figura 8.6).

8.2.2 Analisi di convergenza

Per calcolare il numero degli elementi beam usati per la trattazione si adoperano sempre 7 elementi di tipo LE9 nell'espansione della sezione (nella figura 8.6 vi è lo schema della discretizzazione). Come si può vedere nella tabella 8.3 si usano

N. elementi	Elementi	$-u_z$ nel punto A(mm)	$-u_z$ nel punto B(mm)
1	B2	0.718	1.771
	B3	0.922	2.095
	B4	0.960	2.198
2	B2	0.856	1.985
	B3	0.964	2.208
	B4	0.984	2.271
3	B2	0.916	2.101
	B3	0.978	2.252
	B4	0.991	2.295
5	B2	0.956	2.193
	B3	0.989	2.289
	B4	0.997	2.314
10	B2	0.983	2.267
	B3	0.998	2.314
	B4	1.000	2.324
15	B2	0.991	2.292
	B3	1.000	2.321
	B4	1.002	2.327
20	B2	0.995	2.303
	B3	1.000	2.324
	B4	1.003	2.330
30	B2	0.998	2.314
	B3	1.000	2.328
	B4	1.003	2.333

8.2 - Analisi di una trave incastrata con sezione a I

Tabella 8.3: Analisi di convergenza usando 7 elementi LE9 per la sezione a I

tre tipi di elementi B2, B3, B4 e per ogni tipo di elemento si sono usati 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 30 elementi beam. Dopo aver creato la tabella, si sono graficati gli spostamenti adimensionalizzati dei punti A e B rispetto al valore trovato con 30 elementi B4 in relazione al numero di elementi usati (figure 8.7 e 8.8) in un grafico bilogaritmico. Dopo aver fatto queste considerazioni si è trovata la convergenza per 30 elementi B4. Per il nostro scopo, però, si sono decisi di usare 20 elementi B4 perchè i risultati per 20 e 30 elementi sono molti simili. Risparmiamo dunque nel numero dei gradi di libertà.

8.2.3 Calcolo degli spostamenti

Ora invece si faranno delle comparazioni tra i diversi modelli. Nella prima parte della tabella 8.4 vi sono i risultati trovati con il software commerciale Nastran e



Figura 8.7: Analisi di convergenza usando 7 elementi LE9 per la sezione a I nel punto A



Figura 8.8: Analisi di convergenza usando 7 elementi LE9 per la sezione a I nel punto B

Modello	$-u_z$ nel punto A(mm)	$-u_z$ nel punto B(mm)	DOF	
Soluzioni di riferimento([24])				
Nastran 2D	1.006	1.342	61000	
Nastran 3D	0.956	2.316	355800	
	Usando gli elen	nenti finiti		
EBBM	0.951	0.951	183	
TBM	0.964	0.964	305	
7 LE4	0.994	1.985	2928	
7 LE9	1.002	2.329	8235	
7LE16	1.000	2.231	16104	
12 LE4	0.999	2.058	4758	
12 LE9	1.003	2.371	13725	
12 LE 16	1.003	2.404	27084	
TE2	0.956	0.964	1098	
TE6	0.994	1.478	5124	
TE10	1.000	2.071	12078	
TE14	1.001	2.274	21960	

8.3 – Analisi di una trave incastrata con sezione circolare

Tabella 8.4: Calcolo degli spostamenti A e B per trave con sezione a I usando diversi modelli

si possono vedere come i gradi di libertà sono molto elevati. Questi risultati sono comparabili con i casi in cui si adoperano espansioni di Taylor di ordine molto elevato (N = 14), che hanno però molti gradi di libertà in meno rispetto ai primi. Anche se si usano per la sezione delle discretizzazioni più raffinate, ossia 7LE16 e 12LE16, i risultati sono molto vicini al caso Nastran 3D.

8.3 Analisi di una trave incastrata con sezione circolare

8.3.1 Dati del problema

In questa sezione si analizzerà il caso di una trave, incastrata a un estremo (in y = 0), e caricata all'estremo libero da due forze concentrate tali da creare un momento puro (somma delle forze nulla). La trave ha una lunghezza di L = 2m, mentre la sezione ha una forma circolare (figura 8.9). La sezione, che è costante per tutta la lunghezza della trave, ha un raggio pari a r = 0.1m. La trave, inoltre, è composta di un materiale isotropo che ha le seguenti caratteristiche meccaniche: modulo di Young E = 75GPa, modulo di Poisson $\nu = 0.33$. Per quanto riguarda il carico, le forze sono applicate nel punto A e nel punto B della sezione dell'estremita libera (si veda la figura 8.9) e le forze puntano in versi opposti lungo l'asse delle



Figura 8.9: Sezione circolare della trave

z con modulo pari a $F_z = 50N$. Nella seguente analisi si vogliono determinare gli spostamenti lungo l'asse z e del punto A. Anche in questo caso si faranno dei confronti tra i risultati ottenuti con l'espansione della sezione usando i polinomi di Lagrange e quelli ottenuti adoperando polinomi di Taylor. Per quanto riguarda la discretizzazione con gli elementi LEn bisogna suddividere la sezione in sottodominii facendo in modo che i punti di due sottodominii combacino.

8.3.2 Analisi di convergenza

Per fare l'analisi di convergenza si sono variati sia il tipo di elementi (B2, B3, B4) sia il numero di elementi (1, 2, 3, 5, 10, 20, 30, 40) lungo l'asse della trave; mentre per l'espansione si è suddivisa la sezione in 12 elementi di varia grandezza, a causa della difficoltà di discretizzare un cerchio, usando però sempre elementi di tipo LE9: in figura 8.11 vi è uno schema in dettaglio della schematizzazione adottata. Anche in questo caso si è costruita una tabella in cui ad ogni numero di elemento si sono fatte tre simulazioni a seconda del tipo dell'elemento beam. I risultati poi sono stati riportati in un grafico bilogaritmico dove sulle ascisse vi è il numero di elementi, mentre sulle ordinate vi sono gli spostamenti adimensionati rispetto al valore più alto trovato che corrisponde al caso di 40 elementi B4. In seguito a questa analisi si è scelto di usare elementi B4 in quanto la velocità di convergenza è maggiore e inoltre il numero scelto è di 30 elementi per abbassare il costo computazionale.

8.3.3 Calcolo degli spostamenti

Per fare i confronti tra le diverse teorie, in particolare con la soluzione analitica, si sono usati, come accennato poco sopra, 30 elementi B4. Si può notare che le

N. elementi	Elementi	$u_{\star} \times 10^3$
		nel punto A(mm)
1	B2	0.453
	B3	0.456
	B4	0.460
2	B2	0.456
	B3	0.461
	B4	0.468
3	B2	0.458
	B3	0.465
	B4	0.476
5	B2	0.461
	B3	0.474
	B4	0.490
10	B2	0.470
	B3	0.492
	B4	0.515
15	B2	0.478
	B3	0.507
	B4	0.532
20	B2	0.486
	B3	0.518
	B4	0.542
30	B2	0.498
	B3	0.534
	B4	0.554
40	B2	0.508
	B3	0.544
	B4	0.560

Tabella 8.5: Analisi di convergenza usando 12 elementi LE9 per la sezione circolare nel punto A

teorie di Eulero-Bernoulli e Timoshenko portano a risultati nulli poichè calcolano lo spostamento globale della sezione e, dato che vi è una torsione pura, non possono identificarne gli effetti. Si sono calcolati anche gli effetti con una mesh di 12 elementi come per il caso della convergenza, ma non si sono adottati solo elementi LE9 (figura 8.11), ma anche LE4 e LE16. Infine si sono anche calcolati gli spostamenti usando diverse teorie della sezione usando espansioni di Taylor con ordine pari a N = 1,3,5,7,9. I risultati sono molto simili quando si usano mesh più raffinate e ordini di espansione più alti, però si vede che con 12 LE16 i gradi di libertà sono



Figura 8.10: Analisi di convergenza usando 12 elementi LE9 per la sezione circolare nel punto A



Figura 8.11: Discretizzazione della sezione circolare

più del doppio rispetto al caso dell'epansione TE9.

Modello	$u_z \times 10^3$	DOF
	nel punto A(mm)	
S	oluzione analitica([2	24])
	0.452	
Us	ando gli elementi fir	niti
EBBM	0.000	273
TBM	0.000	455
12 LE4	0.600	4641
12 LE9	0.554	15561
12 LE 16	0.610	33033
TE1	0.460	819
TE3	0.489	2730
${\rm TE5}$	0.515	5733
${ m TE7}$	0.537	9828
TE9	0.554	15015

Tabella 8.6: Calcolo degli spostamenti A per trave con sezione circolare usando diversi modelli

Capitolo 9

Analisi di laminati

- 9.1 Analisi di una trave a laminazione antisimmetrica [0,90]°
- 9.1.1 Dati del problema



Figura 9.1: Sezione della trave con laminazione $[0,90]^o$

In questa sezione si studierà il caso di una beam a sezione quadrata con laminazione antisimmetrica (figura 9.1). Nello specifico la trave ha lunghezza L = 2m, mentre le dimensioni sulla sezione sono b = 0.2m lungo la direzione x e h = 0.1mnella direzione z. Per quanto riguarda la disposizione dei layer sulla sezione, si hanno due strati di eguali dimensioni, disposti uno sopra l'altro. Il materiale usato è ortotropo e ha le seguenti caratteristiche : $E_L = 25GPa$, $E_T = E_z = 1GPa$, $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.25$, $G_{LT} = 0.5GPa$, $G_{Tz} = G_{Lz} = 0.2GPa$. La laminazione nei due strati è diversa, ossia nello strato inferiore sono disposte a 0° attorno all'asse z, nello strato superiore a 90°; in entrambi i casi le fibre hanno un'angolo di 0° attorno all'asse longitudinale. Dal punto di vista delle condizioni al contorno, la trave è incastrata a un'estremità, come nei casi precedenti, ed è sollecitata all'estremo libero, da quattro forze di modulo uguale (F = 25N), orientate verso la direzione negativa dell'asse delle z, disposte ai vertici della sezione.

9.1.2 Calcolo degli spostamenti e tensioni



Figura 9.2: Schema delle diverse disposizioni sulla sezione per ESL LE

Per studiare la struttura, si sono usati sempre 7 elementi B4 lungo la direzione longitudinale, mentre per quanto riguarda la sezione si sono adoperati sia modelli Layer Wise che modelli Equivalent Single Layer. Nel primo caso si sono sempre utilizzati due elementi LE4, LE9, LE16 di tipo Lagrangiano. Nel secondo caso invece si sono usate le teorie N=-1 e N=0 (praticamente le teorie classiche di Eulero-Bernoulli e di Timoshenko, rispettivamente) e TE4, TE8, TE11, TE14. Sempre nell'ambito di ESL incominciamo a implementare un approccio innovativo, utilizzando delle espansioni di Lagrange. Diversi sono i modi per disporre gli elementi LEn e per raggruppare gli strati. In figura 9.2 vediamo gli schemi che saranno utilizzati. Nel primo caso abbiamo un solo elemento con strati $[0,90]^{\circ}$. Nel secondo abbiamo due elementi disposti orizzontalmente, ciascuna con stratificazione [0,90]°. Nell'ultimo invece abbiamo due elementi disuguali dove lo strato inferiore ha 2 strati a 0° e 1 strato a 90° di egual misura, mentre lo strato superiore ha un unico strato a 90°. In questo studio non abbiamo più soltanto calcolato gli spostamenti in un punto preciso della trave, ma si sono voluti studiari anche degli andamenti di due tensioni rappresentative dello studio di una struttura composita, ovvero una tensione normale (σ_{yy}) e una tensione trasversale (σ_{yz}) in una precisa sezione della trave. Questi risultati vengono confrontati con un modello a elementi finiti di un codice commerciale tradizionale ([21]). Nella tabella 9.1 sono trascritti, poi, gli

Modello	$-u_z \times 10^3 m$	$\sigma_{yy} \times 10^{-3} Pa$	$\sigma_{yz} \times 10^{-3} Pa$	DOF
	[0, L, h/2]	[0, L/2, h/2]	[0, L/2, -h/4]	
Soluzione di riferimento([21])				
SOLID	3.480	93.30	-11.36	132300
	Usando g	li elementi finiti		
2LE4	3.457	95.07	-8.19	396
2LE9	3.473	93.28	-8.18	990
2 LE 16	3.481	94.37	-11.49	1848
EBBM	3.410	93.44	0.000	66
TBM	3.459	93.43	-0.500	110
TE4	3.478	93.44	-10.17	990
TE8	3.481	93.75	-11.71	2970
TE11	3.481	94.18	-11.57	5148
TE14	3.481	95.07	-11.43	7920
ELE4-Case1A	3.403	94.25	-5.37	264
ELE9-Case1A	3.466	93.41	-7.38	594
ELE16-Case1A	3.463	92.28	-7.72	1056
ELE4-Case2A	3.401	95.92	-5.00	396
ELE9-Case2A	3.467	93.23	-7.39	990
ELE16-Case2A	3.469	93.36	-7.73	1848
ELE4-Case2B	3.439	93.79	-6.33	396
ELE9-Case2B	3.467	93.50	-7.35	990
ELE16-Case2B	3.475	93.76	-9.14	1848

9.1 – Analisi di una trave a laminazione antisimmetrica [0,90]°

Tabella 9.1: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a laminazione antisimmetrica $[0,90]^o$

spostamenti lungo l'asse delle z per un punto della sezione al tip, mentre le tensioni sono calcolate per due punti precisi nella sezione di mezzeria. Nelle figure 9.3, 9.4, 9.5 e 9.6 invece, sono riportati dei grafici che mostrano gli andamenti delle tensioni calcolate con le diverse teorie nella sezione di mezzeria.

Taylor e Lagrange LW

Per quanto riguarda gli spostamenti, i risultati, sin dalle teorie di ordine più basso, si avvicinano di molto al risultato di riferimento. Per le tensioni invece bisogna fare un'analisi più accurata, soprattutto per la tensione trasversale. Nelle tensioni normali (9.3) gli andamenti coincidono sempre, anche perchè le teorie classiche sono adatte per calcolare sforzi normali, e ci possono essere salti tra uno strato e l'altro che dipendono dalla disposizione delle fibre all'interno dei singoli strati. Infatti, le fibre nello strato inferiore sono disposte lungo l'asse longitudinale (0°) possono sopportare meglio gli sforzi assiali. Nelle tensioni trasversali, l'analisi è più



Figura 9.3: Tensioni normali nel laminato antisimmetrico con laminazione $[0,90]^o$



Figura 9.4: Tensioni trasversali nel laminato antisimmetrico con laminazione [0,90]^o

complessa (9.4) e abbiamo bisono di più gradi di libertà per determinare in maniera accurata l'andamento lungo una sezione; dobbiamo ricordarci inoltre che queste



Figura 9.5: Tensioni normali nel laminato antisimmetrico con laminazione $[0,90]^o$ usando il metodo ESL LE



Figura 9.6: Tensioni normali nel laminato antisimmetrico con laminazione $[0,90]^o$ usando il metodo ESL LE

tensioni all'interfaccia devono essere continue perchè sono proprio questi sforzi di taglio che tengono uniti i vari strati della struttura. La teoria di Eulero-Bernoulli non può calcolare le tensioni trasversali, mentre nella teoria di Timoshenko si può calcolare una tensione media per tutta la sezione, senza distinguere tra i vari strati. Le funzioni di Lagrange distinguono i vari strati, ma solo usando 2LE16 si possono avere risultati accurati e si possono avere tensioni continue all'interfaccia. Con le espansioni di Taylor di ordine superiore al primo si ha sempre un andamento continuo e aumentando l'ordine i risultati sono sempre più accurati.

Lagrange ESL

Ora passiamo all'analisi dei risultati con la nuova strategia. Dal punto di vista degli spostamenti (tabella 9.1) i risultati sono molto buoni per tutti i tipi di discretizzazione usati, essendo in linea con le strategie già collaudate di Taylor e Lagrange LW. Anche per questo metodo ESL le tensioni nel laminato sono calcolate in modo molto preciso, evidenziando sempre molto bene anche il salto presente all'interfaccia dei due strati (figura 9.5). I problemi sorgono nel caso delle tensioni trasversali (9.6). Difatti, riportando come soluzione di riferimento quella ottenuta con Taylor TE14, si nota come gli andamenti siano molto differenti. Già con il Layer Wise si notava l'incapacità delle discretizzazioni LE4 e LE9 di determinare in modo preciso questi andamenti, ma qui il fenomeno è amplificato, soprattutto quando si usa un solo elemento per discretizzare la sezione. Si migliora usando due elementi, uno sopra l'altro e soprattutto se usiamo due LE16. In definitiva per il calcolo delle tensioni, in casi con poche laminazioni, è poco utile usare Lagrange ESL e non si notano le sue potenzialità, che possono essere sfruttate a pieno in casi non lineari e con tante laminazioni, ove bisogna adoperare metodi per far diminuire il costo computazionale (nei prossimi capitoli vedremo meglio questi concetti).

9.2 Analisi di una trave a laminazione simmetrica [0,90,0]°

9.2.1 Dati del problema

In questa sezione si studia una trave che ha le stesse caratteristiche e le stesse condizioni al contorno del caso precedente, però la sua laminazione è diversa. Infatti è composta da tre layer di eguali dimensioni con laminazione simmetrica [0,90,0]° (figura 9.7). Inoltre useremo anche qui sempre 7 elementi B4 per la discretizzazione FEM lungo l'asse della trve.



Figura 9.7: Schema della sezione della trave a laminazione simmetrica



Figura 9.8: Schema delle diverse disposizioni sulla sezione per ESL LE

9.2.2 Calcolo degli spostamenti e tensioni

Taylor e Lagrange LW

Anche per questo caso si sono calcolati spostamenti e tensioni per dei punti specifici (tabella 9.2) e si sono adoperate le stesse espansioni. A differenza, però, della struttura precedente si sono usati 3 elementi per l'espansione di Lagrange, uno per ogni strato, mentre per Taylor non vi sono differenze poichè non distingue i vari strati. Per quanto riguarda gli spostamenti, i risultati sono molto attendibili per tutte le teorie usate, e anche per la tensione normale i risultati sono sempre ottimi (figura 9.9), con un salto all'interfaccia e con valori di tensioni in modulo più alti per gli strati con le fibre in direzione dell'asse della trave. Notiamo, inoltre, che si ha un'antisimmetria nell'andamento della tensione. Gli stessi ragionamenti fatti per la trave a laminazione antisimmetrica si possono fare per le tensioni trasversali (figura 9.10), in particolare l'andamento continuo delle tensioni anche per l'interfaccia tra gli strati.

Analisi di laminati

Modello	$-u_z \times 10^3 m$	$\sigma_{yy} \times 10^{-3} Pa$	$\sigma_{yz} \times 10^{-3} Pa$	DOF	
	[0, L, h/2]	[0, L/2, h/2]	[0, L/2, 0]		
Soluzione di riferimento([21])					
SOLID	0.72	311.07	-6.92	132300	
	Usando g	li elementi finiti			
3LE4	0.72	311.37	-6.93	528	
3LE9	0.72	311.10	-6.91	1386	
3LE16	0.72	311.11	-6.92	2640	
EBBM	0.66	311.12	0.000	66	
TBM	0.71	311.13	-4.99	110	
TE4	0.72	310.96	-7.35	990	
TE8	0.72	311.00	-7.03	2970	
TE11	0.72	311.72	-6.89	5148	
TE14	0.72	312.12	-6.89	7920	
ELE4-Case1A	0.71	311.10	-4.98	264	
ELE9-Case1A	0.71	311.08	-4.99	594	
ELE16-Case1A	0.72	311.23	-7.35	1056	
ELE4-Case2A	0.71	311.00	-4.98	396	
ELE9-Case2A	0.71	311.06	-4.99	990	
ELE16-Case2A	0.72	310.04	-6.84	1848	
ELE4-Case2B	0.71	311.07	-5.49	396	
ELE9-Case2B	0.72	311.04	-6.98	990	
ELE16-Case2B	0.72	311.06	-7.26	1848	

Tabella 9.2: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a laminazione simmetrica

Lagrange ESL

Si è adoperata, come nel caso antisimmetrico, la nuova strategia ESL con Lagrange (in figura 9.8 sono raffigurate le discretizzazioni adottate) e si possono trarre considerazioni analoge. I risultati degli spostamenti sono in linea con tutti gli altri modelli adottati (tabella 9.2) e anche le tensioni normali rispecchiano perfettamente l'andamento evidenziato da teorie più raffinate (figura 9.11). Come di consueto le criticità più gravi sorgono per il calcolo delle tensioni trasversali (figura 9.12) che vengono risolte in modo abbastanza buono adoperando le discretizzazioni LE16. Uno dei problemi, poi, di quando si adoperano gli schemi ELEn-Case2B (figura 9.8) è che si crea un salto innaturale tra i due elementi che non si verifica nei modelli ESL Taylor e Lagrange LW: ricordiamoci che l'elemento inferiore è un mix di due strati diversi, mentre quello superiore è composto da un unico strato.



Figura 9.9: Tensioni normali nel laminato simmetrico con laminazione $[0,90,0]^o$



Figura 9.10: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico con laminazione $[0,90,0]^o$



Figura 9.11: Tensioni normali nel laminato simmetrico con laminazione $[0,90,0]^o$ usando il metodo ESL LE



Figura 9.12: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico con laminazione $[0,90,0]^o$ usando il metodo ESL LE
Capitolo 10

Analisi di una trave a laminazione simmetrica a otto strati



Figura 10.1: Schema della sezione della trave con laminazione simmetrica a otto strati

Ora si studierà il caso di un una beam a sezione rettangolare con laminazione simmetrica a 8 strati (figura 10.1). Nello specifico la trave ha lunghezza L = 90mm, mentre le dimensioni sulla sezione sono b = 1mm lungo la direzione x e h = 10mmper la direzione z. Per quanto riguarda la disposizione dei layer sulla sezione, si hanno otto strati di eguali dimensioni, disposti uno sopra l'altro. I materiali adoperati sono entrambi ortotropi e hanno le seguenti caratteristiche : $E_T = E_z =$ 1GPa, $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.25$, $G_{LT} = G_{Tz} = G_{Lz} = 0.5GPa$, l'unica variazione si ha in direzione delle fibre $E_{L,1} = 30GPa$ e $E_{L,2} = 5GPa$. La laminazione negli otto strati è diversa, ossia si ha alternanza tra gli strati al fine di creare una laminazione simmetrica; in entrambi i casi le fibre hanno un'angolo di 0° attorno all'asse longitudinale. Dal punto di vista delle condizioni al contorno, la trave è incastrata a un'estremità, come nei casi precedenti, ed è sollecitata all'estremo libero, da quattro forze di modulo uguale (F = 0.05N), orientate verso la direzione negativa dell'asse delle z, disposte ai vertici della sezione. Si faranno confronti con la soluzione analitica di Surana & Nguyen ([62]).

10.1 Analisi con CUF 1D

10.1.1 Analisi di convergenza con Layer Wise Lagrange



Figura 10.2: Analisi di convergenza usando 8 elementi LE16 per trave a otto strati per formulazione CUF 1D con LW LE

Prima di procedere alle analisi sulle tensioni e sugli spostamenti, bisogna affrontare l'analisi di convergenza. Si sono adoperati sempre 8 LE16. Ci siamo occupati di analizzare tre diversi tipi di discretizzazione FEM per una BEAM (B2, B3, B4) con numero pari di elementi. Abbiamo usato come parametro di confronto lo spostamento verticale del punto [0, L, h/2]: dalla tabella 10.1 e dal diagramma bilogaritmico 10.2 si evince come si vada a convergenza per 10 elementi B4 e perciò nel prosieguo dell'analisi useremo tale discretizzazione per i modelli LW LE e Taylor.

N. elementi	Elementi	$-u_z \times 10^2 mm$
		[0, L, h/2]
4	B2	2.993
	B3	3.040
	B4	3.044
6	B2	3.019
	B3	3.042
	B4	3.047
8	B2	3.029
	B3	3.045
	B4	3.050
10	B2	3.034
	B3	3.047
	B4	3.050

Tabella 10.1: Analisi di convergenza usando 8 elementi LE16 per trave a otto strati per formulazione CUF 1D con LW LE

10.1.2 Analisi di convergenza con Equivalence Single Layer Lagrange



Figura 10.3: Analisi di convergenza usando ELE16-Case2A per trave a otto strati per formulazione CUF 1D con ESL LE

N. elementi Elementi $-u_z \times 10^2 mm$ [0, L, h/2] 2 B2 2.864 B3 3.034 B4 3.039 4 B2 2.992 B3 3.040 B4 3.046 6 B2 3.018 6 B2 3.018 B3 3.043 3.043 B4 3.050 8 8 B2 3.028 B3 3.046 3.054 10 B2 3.033 B4 3.054 3.054 10 B2 3.033 B3 3.049 3.056 12 B2 3.037 B3 3.051 3.056			
$ \begin{bmatrix} 0, L, h/2 \end{bmatrix} \\ 2 & B2 & 2.864 \\ B3 & 3.034 \\ B4 & 3.039 \\ \hline 4 & B2 & 2.992 \\ B3 & 3.040 \\ B4 & 3.046 \\ \hline 6 & B2 & 3.018 \\ B3 & 3.043 \\ B4 & 3.050 \\ \hline 8 & B2 & 3.028 \\ B3 & 3.046 \\ B4 & 3.050 \\ \hline 8 & B2 & 3.028 \\ B3 & 3.046 \\ B4 & 3.054 \\ \hline 10 & B2 & 3.033 \\ B3 & 3.049 \\ B4 & 3.056 \\ \hline 12 & B2 & 3.037 \\ B3 & 3.051 \\ B4 & 3.056 \\ \hline \end{cases} $	N. elementi	Elementi	$-u_z \times 10^2 mm$
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			[0, L, h/2]
$\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $	2	B2	2.864
$\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $		B3	3.034
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		B4	3.039
$\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $	4	B2	2.992
$\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $		B3	3.040
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		B4	3.046
$\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $	6	B2	3.018
$\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $		B3	3.043
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		B4	3.050
B3 3.046 B4 3.054 10 B2 3.033 B3 3.049 B4 3.056 12 B2 3.037 B3 3.051 B4 3.056	8	B2	3.028
B4 3.054 10 B2 3.033 B3 3.049 B4 3.056 12 B2 3.037 B3 3.051 B4 3.056		B3	3.046
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		B4	3.054
B3 3.049 B4 3.056 12 B2 3.037 B3 3.051 B4 3.056	10	B2	3.033
B4 3.056 12 B2 3.037 B3 3.051 B4 3.056		B3	3.049
12 B2 3.037 B3 3.051 B4 3.056		B4	3.056
B3 3.051 B4 3.056	12	B2	3.037
B4 3.056		B3	3.051
		B4	3.056

Tabella 10.2: Analisi di convergenza usando ELE16-Case2A per trave a otto strati per formulazione CUF 1D con ESL LE

Dopo aver studiato la convergenza per un modello LW LE, ora ci occuperemo di analizzare la convergenza con un modello ESL LE: in particolare usiamo due elementi (modello ELE16-Case2A, si veda la figura 10.4). Notiamo dalla figura 10.3 e dalla tabella 10.2 troviamo che si arrivi a convergenza con 10 e 12 elementi B4 con il valore $u_z = -3.056 \times 10^2 mm$, mentre nell'analisi di convergenza con LW Lagrange abbiamo $u_z = -3.050 \times 10^2 mm$. In definitiva, useremo anche per i modelli ESL Lagrange 10 elementi FEM B4.

10.1.3 Calcolo degli spostamenti e tensioni

Ora possiamo discutere dei risultati. Abbiamo usato una teoria classica, in particolare di Timoshenko, un'espansione di Taylor di ordine 9, tre teorie Layer-Wise, una per ogni tipo di espansione di Lagrange; infine abbiamo provato a discretizzare la sezione in diversi modi usando Equivalence Single Layer con Lagrange (in figura 10.4 ci sono gli schemi adottati). Grazie a quest'ultima metodologia, abbiamo la libertà di decidere dove operare in maniera più accurata, soltanto in alcune parti della sezione e di risparmiare molto dal punto di vista computazionale. Abbiamo usato cinque diversi tipi: nel primo usiamo un ESL puro, nel secondo abbiamo

Modello	$-u_z \times 10^2 mm$	$\sigma_{yy} \times 10^3 MPa$	DOF
	[0, L, h/2]	[b/2, L/2, h/2]	
Surana&Nguyen	3.031	720	
TBM	2.988	730	155
TE9	3.054	730	5115
8LE4	3.052	730	1674
8LE9	3.054	730	4743
8LE16	3.050	730	9300
ELE4-Case1A	2.981	730	372
ELE9-Case1A	3.003	730	837
ELE16-Case1A	3.056	730	1488
ELE4-Case2A	2.997	730	558
ELE9-Case2A	3.051	730	1395
ELE16-Case2A	3.056	730	2604
ELE4-Case3A	3.020	730	744
ELE9-Case3A	3.054	730	1953
ELE16-Case3A	3.055	730	3720
ELE4-Case4A	3.037	730	930
ELE9-Case4A	3.054	730	2511
ELE16-Case4A	3.054	730	4836
ELE4-Case3B	3.034	730	744
ELE9-Case3B	3.044	730	1953
ELE16-Case3B	3.050	730	3720

10.1 – Analisi con CUF 1D

Tabella 10.3: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a otto strati per formulazione CUF 1D

diviso la sezione in due metà eguali con un taglio orizzontale, nel terzo l'abbiamo divisa in tre parti, nel quarto l'abbiamo sezionata in quattro parti tali che ognuno abbia 2 strati, nel quinto abbiamo usato tre ESL e all'estremità vi sono due LW per avere delle tensioni molto precise in questi strati. La soluzione di riferimento sarà, come già accennato sopra, quella di Surana & Nguyen ([62]). Se si passa ad analizzare lo spostamento (tabella 10.3) al tip, si vede che, quando usiamo gli TBM e LE4, è parecchio diverso dallo spostamento calcolato con LW LE16, che è la misura migliore. Come si evince, minori sono gli elementi della sezione usati, peggiore sarà il risultato. Se si usano LE16, per qualsiasi strategia si ha sempre un buon risultato e anche TE9 è abbastanza vicino. Passando alle tensioni nel piano σ_{yy} , per qualsiasi modello, anche i più semplici, queste sono sempre molto precise (figure 10.5, 10.6,10.7,10.8). Anche negli esempi precedenti queste tensioni erano sempre corrette. Come di consueto i problemi sorgono con le tensioni trasversali σ_{yz} (nella figura 10.9 ci sono i risultati più precisi per TE9, LE16 e soluzione analitica). Con



Figura 10.4: Schema delle diverse disposizioni sulla sezione per LW e ESL per formulazione CUF 1D



Figura 10.5: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati per le soluzioni di riferimento calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 1D

Timoshenko si riesce solo a vedere una tensione media costante, mentre con TE9, pur essendo un metodo ESL, si riesce ad avere un ottimo risultato. Se si usano LE4



Figura 10.6: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE4 calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 1D



Figura 10.7: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE9 calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 1D



Figura 10.8: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE16 calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 1D



Figura 10.9: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati per le soluzioni di riferimento calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 1D



Figura 10.10: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE4 calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 1D



Figura 10.11: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE9 calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 1D



Figura 10.12: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE16 calcolate a y=L/2 per formulazione CUF 1D



Figura 10.13: Analisi puntuale delle tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 1D

(figura 10.10), si trovano delle tensioni medie per ogni elemento considerato e non si riesce dunque ad avere un risultato preciso. Gli andamenti migliorano per LE9 (figura 10.11): risultati localmente precisi si trovano se usiamo delle cinematiche simil-LW, ovvero in cui includiamo pochi strati in un unico elemento (emblematico è il caso di ELE9-Case3B). Infine, con LE16 (figura 10.12), si hanno sempre risultati abbastanza attinenti con le soluzioni LW LE16 e analitica. Ovviamente se usiamo diversi elementi si hanno variazioni e imprecisioni in corrispondenza delle interfacce degli elementi della sezione. Per migliorare, infine, la conoscenza delle tensioni in corrispondenza delle interfacce degli strati reali della struttura, possiamo adottare la discretizzazione ELE16-Case3C (si veda la figura 10.4). In figura 10.13 abbiamo fatto il confronto tra quest'ultima disposizione che ha 3720 DOF, la disposizione ELE16-Case3B (stessi gradi di libertà), un modello di Taylor (TE7) con 3348 DOF e infine il modello LW 8LE16 con 9300 DOF. Grazie quindi al modello riusciamo ad avere, in un punto preciso, un valore di tensione molto vicino a quello della teoria migliore. Nella tabella 10.4 vi sono i valori puntuali.

Modello	$\sigma_{yz} \times 10^3 MPa$	DOF
	[b/2, L/2, 3h/8]	
TE7	-16.41	3348
8LE16	-17.79	9300
ELE16-Case3C	-17.79	3720
ELE16-Case3B	-15.38	3720

Tabella 10.4: Analisi puntuale delle tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati per formulazione CUF 1D

10.2 Analisi con CUF 2D

10.2.1 Analisi di convergenza con Layer Wise Lagrange

Innanzitutto facciamo un'analisi di convergenza per i modelli Layer Wise. Abbiamo sempre adoperato 8 elementi LE4 per la sezione e analizzato due tipi di discretizzazione FEM: Q4 e Q9. La disposizione degli elementi FEM è del tipo $1 \times m$, ossia un elemento lungo x e m elementi lungo y. Come per la formulazione CUF 1D, il parametro di controllo è lo spostamento verticale calcolato nel punto [0, L, h/2]. Da un confronto con la tabella 10.5 e con il grafico 10.14 scopriamo che si ha la convergenza per 16 elementi Q9. Dunque useremo sempre questa discretizzazione per calcolare spostamenti e tensioni con i casi Layer Wise e Taylor.



Figura 10.14: Analisi di convergenza usando 8 elementi LE4 per trave a otto strati per formulazione CUF 2D con LW LE

10.2.2 Analisi di convergenza con Equivalent Single Layer Lagrange

Poichè analizziamo l'andamento delle grandezze dei modelli ESL Lagrange, vorremmo scoprirne il comportamento anche nell'analisi di convergenza. Come per il LW Lagrange, la grandezza analizzata sarà u_z in [0, L, h/2]. Dato che la struttura in questione è composta da otto strati, le possibilità di creare modelli ESL sono molte: abbiamo scelto il modello ELE4-Case2A. Per quanto riguarda la discretizzazione FEM si sono adoperati gli elementi Q4 e Q9. Anche qui usiamo la disposizione $1 \times m$. In definitiva, osservando la tabella 10.6 e il grafico bilogaritmico 10.15 scopriamo che si ha la convergenza per 18 elementi Q9. Anche per i casi di ESL useremo, però, la mesh a 16 elementi Q9, in maniera analoga ai modelli LW.

10.2.3 Calcolo degli spostamenti e tensioni

In modo analogo a quanto fatto per la formulazione CUF 1D, si sono analizzate molte teorie LW e ESL, che sono state messe a confronto con la soluzione analitica di Surana & Nguyen. Abbiamo studiato la teoria classica di Reissner-Mindlin, una teoria di Taylor con ordine molto alto (TE9), le consolidate teorie LW con i polinomi di Lagrange e infine alcune possibili teorie ESL Lagrange (visualizzate

N. elementi	Elementi	$-u_z \times 10^2 mm$
		[0, L, h/2]
2	Q4	2.070
	Q9	3.019
4	Q4	2.719
	Q9	3.038
6	Q4	2.888
	Q9	3.042
8	Q4	2.951
	Q9	3.045
10	Q4	2.982
	Q9	3.047
12	Q4	3.005
	Q9	3.048
14	Q4	3.017
	Q9	3.049
16	Q4	3.025
	Q9	3.050

Tabella 10.5: Analisi di convergenza usando 8 elementi LE4 per trave a otto strati per formulazione CUF 2D con LW LE

in figura 10.16). Partendo dalla tabella 10.7, dove sono visualizzati i valori puntuali degli spostamenti verticali e delle tensioni σ_{yy} in alcuni punti caratteristici, vediamo come i comportamenti delle teorie ESL sono analoghi a quelli delle teorie LW, pur avendo parecchi gradi di libertà in meno. Se passiamo, invece, allo studio degli andamenti delle tensioni normali σ_{yy} lungo lo spessore possiamo notare cha per tutte le teorie, anche quelle con meno gradi di libertà come la Reissner-Mindlin o ELE2-Case1A, si ha un comportamento sostanzialmente identico (figure 10.17, 10.18, 10.19e 10.20). Passando al caso delle tensioni normali possiamo notare le grandi differenze che vi sono adottando differenti tipi di espansioni Lagrangiane (LE2, LE3 o LE4) e differenti teorie ESL. Le soluzioni di riferimento (analitica, 8LE4 e TE9) sono riportate in figura 10.21. Se ci concentriamo sul grafico 10.22 notiamo che per ogni dominio Lagrangiano vi è una tensione costante, ma si possono riconoscere comortamenti che riscontreremo meglio nelle figure 10.23 e 10.24dove usiamo elementi Lagrangiani con più nodi. In quest'ultimo grafico vediamo come le soluzioni siano sempre molto vicine a quelle di riferimento. A seconda della discretizzazione le soluzioni migliorano sempre di più, partendo dal modello ELE4-Case1, che è molto vicina al caso di TE9 (figura 10.21) fino ad arrivare al modello ELE4-Case3B dove in corrispondenza delle estremità coincide quasi perfettamente con la soluzione di Surana & Nguyen. Per dimostrare in maniera ancora



Figura 10.15: Analisi di convergenza usando ELE4-Case2A per trave a otto strati per formulazione CUF 2D con ESL LE



Figura 10.16: Schema delle diverse disposizioni sulla sezione per ESL LE per formulazione CUF 2D

più evidente le potenzialità di includere parti ESL Lagrange e LW Lagrange abbiamo fatto un'analisi con il modello ELE4-Case3C con 2970 DOF. In figura 10.25 lo

		102
N. elementi	Elementi	$-u_z \times 10^2 mm$
		[0,L,h/2]
2	Q4	2.069
	Q9	3.019
4	Q4	2.719
	Q9	3.038
6	Q4	2.888
	Q9	3.042
8	Q4	2.953
	Q9	3.046
10	Q4	2.985
	Q9	3.049
12	Q4	3.004
	Q9	3.051
14	Q4	3.015
	Q9	3.053
16	Q4	3.024
	Q9	3.054
18	Q4	3.030
	Q9	3.055

Tabella 10.6: Analisi di convergenza usando ELE4-Case2A per trave a otto strati per formulazione CUF 2D con ESL LE

confrontiamo, dunque, con la soluzione 8LE4, una soluzione con un'espansione di Taylor (TE9) e con ELE4-Case3B. Si vede dunque che riusciamo ad avvicinarci in questi due strati esterni (il settimo e l'ottavo) alla soluzione migliore Layer Wise. Nella tabella 10.8 possiamo trovare i valori puntuali.

10.3 Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

10.3.1 Calcolo degli spostamenti e tensioni

In quest'ultima sezione faremo alcuni confronti tra le due formulazioni adottate. Osservando i risultati nel capitolo vediamo come tutte e due le formulazioni diano dei risultati molto simili. Infatti nelle figure 10.26 e 10.27 notiamo che teorie analoghe si comportano allo stesso modo, ovvero, per esempio, le teorie LE9,1D corrispondono alle teorie LE3,2D. Inoltre tutte e due le formulazioni permettono di avere una grande versatilità nello studio delle teorie ESL Lagrange. In tabella

Modello	$-u_z \times 10^2 mm$	$\sigma_{yy} \times 10^3 MPa$	DOF
	[0, L, h/2]	$[\tilde{b}/2, L/2, h/2]$	
Surana&Nguyen	3.031	720	
Reissner-Mindlin	2.988	732	495
TE9	3.049	729	2970
8LE2	3.047	729	2673
8LE3	3.052	729	5049
8 LE4	3.050	729	7425
ELE2-Case1A	2.980	729	594
ELE3-Case1A	3.002	729	891
ELE4-Case1A	3.054	729	1188
ELE2-Case2A	2.996	729	891
ELE3-Case2A	3.050	729	1485
ELE4-Case2A	3.054	729	2079
ELE2-Case3A	3.017	729	1188
ELE3-Case3A	3.052	729	2079
ELE4-Case3A	3.053	729	2970
ELE2-Case4A	3.033	729	1485
ELE3-Case4A	3.052	729	2673
ELE4-Case4A	3.053	729	3861
ELE2-Case3B	3.029	729	1188
ELE3-Case3B	3.042	729	2079
ELE4-Case3B	3.049	729	2970

Analisi di una trave a laminazione simmetrica a otto strati

Tabella 10.7: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a otto strati per formulazione CUF 2D

Modello	$\sigma_{yz} \times 10^3 MPa$	DOF
	[b/2, L/2, 3h/8]	
TE9	-16.41	2970
8LE4	-17.93	7425
ELE4-Case3C	-17.93	2970
ELE4-Case3B	-15.52	2970

Tabella 10.8: Analisi puntuale delle tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati per formulazione CUF 2D

10.9, possiamo anche vedere come i gradi di libertà per la formulazione 2D siano minori.



Figura 10.17: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati per le soluzioni di riferimento calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 2D



Figura 10.18: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE2 calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 2D



Figura 10.19: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE3 calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 2D



Figura 10.20: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE4 calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 2D



Figura 10.21: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati per le soluzioni di riferimento calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 2D



Figura 10.22: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE2 calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 2D



Figura 10.23: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE3 calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 2D



Figura 10.24: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE4 calcolate a y = L/2 per formulazione CUF 2D



Figura 10.25: Analisi puntuale delle tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati calcolate a y=L/2 per formulazione CUF 2D

Modello	$-u_z \times 10^2 mm$	$\sigma_{yy} \times 10^3 MPa$	DOF
	[0, L, h/2]	$[\tilde{b}/2, L/2, h/2]$	
8LE16,1D	3.050	730	9300
8LE4,2D	3.050	729	7425
ELE16-Case1A, 1D	3.056	730	1488
ELE4-Case1A, 2D	3.054	729	1188
ELE16-Case2A, 1D	3.056	730	2604
ELE4-Case2A,2D	3.054	729	2079

Tabella 10.9: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a otto strati, confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D



Figura 10.26: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE4 calcolate a y = L/2. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D



Figura 10.27: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati per ESL LE4 calcolate a y = L/2. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Capitolo 11

Analisi della piastra sandwich di Meyer-Piening



Figura 11.1: Schema della piastra sandwich di Meyer-Piening

Ora si incomincerà a studiare un caso diverso dagli altri precedenti, in quanto si analizzerà una piastra sandwich adoperando dei modelli 1D, facendo dei confronti con modelli 2D (solitamente usati per lo studio di problemi analoghi a quello preso in esame) e con soluzioni analitiche 3D di Pagano (si veda il lavoro di Carrera *et al.* ([14]). Come si può notare dalla figura 11.1, le due facce superiore e inferiore sono molto sottili, e sono composte di un materiale con proprietà meccaniche di gran lunga superiori a quelle del cuore. La piastra ha le seguenti dimensioni: a = 200mm, b = 100mm, h = 12mm, mentre, entrando nel dettaglio degli strati $h_c = 11.4mm$, $h_l = 0.5mm$, $h_u = 0.1mm$. I pedici $l \in u$ indicano lower e upper, rispettivamente, e c core, la parte centrale della piastra. Le proprietà meccaniche del materiale delle lamine sono $E_L = 70000MPa$, $E_T = 71000MPa$, $E_Z = 69000MPa$, $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.3$, $G_{LT} = G_{Tz} = G_{Lz} = 26000MPa$; Le proprietà meccaniche del materiale del cuore sono $E_L = 3MPa$, $E_T = 3MPa$, $E_Z = 2.8MPa$, $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.3$, $G_{LT} = G_{Tz} = G_{Lz} = 1MPa$. La piastra è semplicemente appoggiata sui quattro lati e vi è un carico distribuito (figura 11.1) di 1MPa disposto sulla faccia superiore. Questo carico, comunque, deve essere discretizzato e useremo delle forze puntuali sui nodi della mesh.

11.1 Analisi con modello CUF 1D

11.1.1 Analisi di convergenza

Prima di poter studiare le differenze tra i modelli, si deve fare un'analisi di convergenza e per fare ciò si è deciso di usare tre tipi di elementi beam per i nodi strutturali: due nodi (B2), tre nodi (B3), quattro nodi (B4) e si è anche variato il numero degli elementi stessi. Per quanto riguarda lo studio del modello della sezione si sono adoperati i polinomi di Lagrange usando in particolare 24 elementi LE4 (4 elementi per ciascuna delle lamine esterne e 16 per il cuore). Nella tabella 11.1 si vede molto bene come all'aumentare del numero dei nodi dell'elemento la soluzione converga più velocemente. Si sono creati dei diagrammi bilogaritmici, mostrati nelle figure 11.2 e 11.3; infatti sull'asse orizzontale si è messo il numero di elementi, mentre sull'asse verticale si sono messi gli spostamenti adimensionalizzati rispetto al valore trovato con 16 elementi B4. Per questi motivi si è deciso di scegliere di adottare nell'analisi successiva 12 elementi beam B4, poichè già con questo numero di elementi si ha una soluzione vicina a quella ottimale. Si è usato sempre un numero multiplo di 4 per il numero di elementi per permettere che la forza fosse sempre localizzata intorno al punto (0,100,6)mm.

11.1.2 Calcolo degli spostamenti e tensioni

Prima di incominciare a discutere i risultati bisogna fare un premessa sulla discretizzazione della pressione applicata. Se adoperiamo 12 B4, allora la pressione sarà trasformata in tre forze puntuali, mentre se usiamo 16 B4 (usata per affinare la soluzione) adoperiamo cinque forze puntuali. In pratica abbiamo suddiviso la forza totale di -100N nella parte superiore della piastra in direzione y positiva (in direzione del lato lungo). Per 12 B4, usiamo -25N, -50N, -25N, per 16 B4, usiamo -10N, -15N, -50N, -15N, -10N, con la forza di modulo maggiore in (0,100,6)mm. Inoltre, calcoliamo spostamenti e tensioni lungo lo spessore nella zona centrale della piastra, ossia in (0,100, z)mm. Dopo queste premesse, diciamo che abbiamo confrontato sempre nelle tabelle 11.2 e 11.3 le soluzioni del presente

N. elementi	Elementi	$u_z(mm)$	$u_z(mm)$
		in $(0,100,6)mm$	in $(0, 100, -6)mm$
4	B2	-0.36	-0.21
	B3	-0.61	-0.24
	B4	-0.81	-0.23
8	B2	-0.53	-0.22
	B3	-0.793	-0.23
	B4	-0.924	-0.23
12	B2	-0.64	-0.23
	B3	-0.82	-0.23
	B4	-0.97	-0.23
16	B2	-0.77	-0.23
	B3	-0.92	-0.23
	B4	-0.97	-0.23

11.1 – Analisi con modello CUF 1D

Tabella 11.1: Analisi di convergenza usando 24 elementi LE4 per la piastra sandwich di Meyer-Piening



Figura 11.2: Analisi di convergenza usando 24 elementi LE4 per la piastra sandwich di Meyer-Piening su Upper Layer con CUF 1D

lavoro con la soluzione analitica di Pagano e con un'espansione della sezione con 3 LM2 ([14]) nella faccia superiore e faccia inferiore. Quest'ultimo caso è un modello bidimensionale (formulazione CUF 2D) che adopera 3 espansioni di Lagrange in cui



Figura 11.3: Analisi di convergenza usando 24 elementi LE4 per la piastra sandwich di Meyer-Piening su Lower Layer con CUF 1D



Figura 11.4: Schema della sezione della piastra sandwich di Meyer-Piening con elementi Lagrange per ESL con CUF 1D

si è adoperato il principio variazionale di Reissner e quindi anche le tensioni traversali sono trattate come gli spostamenti, garantendo così una soluzione migliore. Invece qui si è sempre adoperato principio agli spostamenti virtuali. In particolare si sono usati due strategie per i polinomi di Lagrange: abbiamo analizzato sia i casi Layer Wise che l'Equivalent Single Layer.

Modello	2	$u_z(mm)$	$\sigma_{xx}(MPa)$	$\sigma_{yy}(MPa)$	$\sigma_{xy}(MPa)$	DOF
Pagano	Top	-3.78	-241	-624	0	
	Bottom	-3.78	211	580	0	
LM2	Top	-3.76	-224	-596	0	
	Bottom	-3.76	197	556	0	
24 LE4	Top	-0.66	-75	-170	-1.5	3885
	Bottom	-0.66	65	147	1.3	
16LE9	Top	-2.83	-109	-267	-2.5	8991
	Bottom	-2.83	63	203	2.3	
24 LE9	Top	-2.83	-109	-267	-2.6	12987
	Bottom	-2.83	63	203	2.3	
16LE16	Top	-3.80	-280	-489	-2.6	18759
	Bottom	-3.80	208	397	2.4	
24LE16	Top	-3.80	-280	-489	-2.6	27417
	Bottom	-3.80	208	397	2.4	
16 LE 16, 16 B4	Top	-3.79	-318	-621	5.1	24843
	Bottom	-3.79	241	517	4.7	
ELE9-Case4A	Top	-0.024	-46	-41	-0.24	2997
	Bottom	-0.024	-45	-39	-0.35	
ELE16-Case4A	Top	-0.293	-96	-120	4.3	5772
	Bottom	-0.293	4.81	-42	-5.1	
ELE9-Case8A	Top	-1.38	-76	-193	-6.3	4995
	Bottom	-1.38	38	131	-6.5	
ELE16-Case8A	Top	-2.45	-223	-418	2.60	10101
	Bottom	-2.45	149	305	-2.14	

11.1 – Analisi con modello CUF 1D

Tabella 11.2: Calcolo degli spostamenti e tensioni per piastra sandwich di Meyer-Piening per Upper Face (0,100, z)mm con CUF 1D

Lagrange LW

Per questa strategia si sono adottate due discretizzazioni della sezione: 24 elementi o 16 elementi. La struttura della prima è già stata descritta, mentre la seconda è formata da 4 elementi per ogli lamina (disposti lungo l'asse x) e da 8 elementi nel cuore ossia 4 nella parte inferiore e 4 nella parte superiore. Dalle tabelle 11.2 e 11.3 si vede come solo adoperando gli LE16 si possano avere risultati buoni per gli spostamenti, mentre per avere ottimi riscontri sul piano delle tensioni incrementiamo i nodi FEM, soprattutto al fine di ricreare una situazione la più vicina possibile a quella di carico distribuito e dunque adottiamo 16 elementi BEAM e 16 LE16 per la sezione. Si è notato inoltre, che aumentare il numero di elementi del core è inutile, perchè il suo contibuto è molto piccolo. Vediamo poi che le tensioni σ_{xy} sono molto vicine a zero, come nella teoria analitica. Inoltre nelle figure 11.5a, 11.6a, 11.7a si

Modello	2	$u_z(mm)$	$\sigma_{xx}(MPa)$	$\sigma_{yy}(MPa)$	$\sigma_{xy}(MPa)$	DOF
Pagano	Тор	-2.14	-121	-138	0	
-	Bottom	-2.14	127	146	0	
LM2	Top	-2.14	-119	-136	0	
	Bottom	-2.14	125	144	0	
24 LE4	Top	-0.22	-12	-5	0	3885
	Bottom	-0.22	14	29	0	
16 LE9	Top	-2.03	-67	-93	0	8991
	Bottom	-2.03	81	108	0	
24 LE9	Тор	-2.03	-67	-93	0	12987
	Bottom	-2.03	81	108	0	
16LE16	Top	-2.25	-139	-131	0	18759
	Bottom	-2.25	160	151	0	
24 LE 16	Тор	-2.25	-139	-131	0	27417
	Bottom	-2.25	160	151	0	
16 LE 16, B16	Top	-2.24	-136	-125	0	24843
	Bottom	-2.24	158	145	0	
ELE9-Case4A	Top	-0.018	3.9	5.9	-0.44	2997
	Bottom	-0.018	2.1	-5.9	0.15	
ELE16-Case4A	Top	-0.178	-42	-41	0.6	5772
	Bottom	-0.178	106	98	-0.14	
ELE9-Case8A	Top	-0.91	-99	-96	0.94	4995
	Bottom	-0.91	120	113	-0.98	
ELE16-Case8A	Top	-1.30	-108	-93	-9.5	10101
	Bottom	-1.30	130	114	10.7	

Analisi della piastra sandwich di Meyer-Piening

Tabella 11.3: Calcolo degli spostamenti e tensioni per piastra sandwich di Meyer-Piening per Lower Face (0,100, z)mm con CUF 1D

vedono che le tensioni σ_{yy} sono lineari e variano moltissimo, nonostante ciascuna delle due facce abbia uno spessore minore del millimetro e di nuovo la teoria che si avvicina di pù al caso 2D LM2 è quella denominata 16LE16,B16.

Lagrange ESL

Nell'altra strategia adoperata abbiamo usato due schemi che sono raffigurati nella figura 11.4. Di nuovo facciamo i confronti con la teoria bidimensionale LM2 e con la soluzione di Pagano. Nelle tabelle 11.2 e 11.3 si può notare come i risultati si avvicinino ai riferimenti solo adoperando 8 elementi ESL, in cui mischiamo praticamente la strategia LW per la faccia superiore e la strategia ESL per il cuore e la faccia inferiore. Anche per questi casi le tensioni σ_{xy} sono molto vicine a zero. Passando



Figura 11.5: Tensioni normali per piastra sandwich di Meyer-Piening su Upper Face con CUF 1D



Figura 11.6: Tensioni normali per piastra sandwich di Meyer-Piening su Lower Face con CUF 1D

alle tensioni σ_{yy} , le figure 11.5b, 11.6b, 11.7b mostrano buoni risultati aumentando i gradi di libertà, non arrivando, però, alla qualità del modello 16LE16,B16.



Figura 11.7: Tensioni normali per piastra sandwich di Meyer-Piening con CUF 1D

11.2 Analisi con modello CUF 2D

11.2.1 Dati del problema

Ora studieremo grazie alla formulazione 2D la stessa piastra sandwich che abbiamo già analizzato nella sezione precedente, facendo confronti con la soluzione analitica di Pagano e LM2. Quindi, come figura di riferimento useremo di nuovo la 11.1. Anche in questo caso dovremo discretizzare la pressione e trasformarla in forze puntuali. A differenza della formulazione 1D, qui useremo elementi 2D per discretizzare la piastra, mentre per la sezione useremo elementi unidimensionali.

11.2.2 Analisi di convergenza

Prima di calcolare le tensioni e gli spostamenti, dobbiamo analizzare la convergenza della mesh, adoperando sempre 3 elementi Lagrange (3LE3), raffigurati in figura 11.10, per ogni punto della discretizzazione FEM. L'indagine sarà condotta variando il numero di elementi piastra Q4 e Q9 e controllando l'andamento degli spostamenti verticali u_z nei due punti (0,100,6)mm e (0,100, -6)mm. Si è giunti alla conclusione, grazie ai risultati illustrati in tabella 11.4 e ai grafici bilogaritmici 11.8 e 11.9 che si arriva a convergenza con 288 elementi Q9; però nelle analisi successive si adopereranno 240 elementi Q9 (in paricolare: 10 elementi nel lato corto e 24 nel lato lungo) per poter avere un numero minore di gradi di libertà.

11.2.3 Calcolo degli spostamenti e tensioni

Prima di incominciare a discutere i risultati bisogna fare una premessa sulla discretizzazione della pressione applicata : usiamo sempre una forza puntuale nel nodo

N. elementi	Elementi	$u_z(mm)$	$u_z(mm)$
		in $(0,100,6)mm$	in $(0,100,-6)mm$
8	Q4	-0.063	-0.016
	Q9	-1.46	-1.35
32	Q4	-0.14	-0.051
	Q9	-2.14	-1.87
72	Q4	-0.22	-0.099
	Q9	-2.64	-2.09
128	Q4	-0.31	-0.15
	Q9	-3.11	-2.17
200	Q4	-0.40	-0.21
	Q9	-3.55	-2.20
240	Q4	-0.43	-0.23
	Q9	-3.76	-2.21
288	Q4	-0.48	-0.27
	Q9	-3.81	-2.21

 $11.2 - Analisi \ con \ modello \ CUF \ 2D$

Tabella 11.4: Analisi di convergenza usando 3 elementi LE3 per la piastra sandwich Meyer-Piening con CUF 2D



Figura 11.8: Analisi di convergenza usando 3 elementi LE3 per la piastra sandwich Meyer-Piening su Upper Layer con CUF 2D



Figura 11.9: Analisi di convergenza usando 3 elementi LE3 per la piastra sandwich Meyer-Piening su Lower Layer con CUF 2D



Figura 11.10: Schema della sezione con elementi Lagrange per piastra sandwich con CUF 2D



Figura 11.11: Schema della sezione con elementi ESL Lagrange per piastra sandwich con CUF 2D



Figura 11.12: Tensioni normali per piastra sandwich di Meyer-Piening su Upper Face con CUF 2D

centrale situato in (0,100,6)mm di intensità 100N diretta verso il basso. Inoltre, si trovano le grandezze lungo la linea (0,100, z)mm. Dopo questa premessa, diciamo che abbiamo confrontato sempre nelle tabelle 11.5 e 11.6 la soluzione analitica di Pagano e con un'espansione della sezione con 3 LM2 ([14]) nella faccia superiore e faccia inferiore. Invece nel presente lavoro abbiamo adoperato sempre modelli che

Modello	z	$u_z(mm)$	$\sigma_{xx}(MPa)$	$\sigma_{yy}(MPa)$	$\sigma_{xy}(MPa)$	DOF
Pagano	Top	-3.78	-241	-624	0	
	Bottom	-3.78	211	580	0	
LM2	Top	-3.76	-224	-596	0	
	Bottom	-3.76	197	556	0	
TE4	Top	-2.55	4.2	-11	0	15435
	Bottom	-2.55	-57	41	0	
TE8	Top	-3.25	-158	-176	0	27783
	Bottom	-3.25	82	102	0	
TE12	Top	-3.52	-241	-260	0	40131
	Bottom	-3.52	78	100	0	
3LE3	Top	-3.76	-203	-223	0	21609
	Bottom	-3.76	149	172	0	
4LE2	Top	-3.65	-231	-249	0	15435
	Bottom	-3.65	177	199	0	
ELE3-Case1A	Top	-0.035	-97	-92	0	9261
	Bottom	-0.035	-93	-88	0	
ELE4-Case1A	Top	-0.63	-66	-68	0	12348
	Bottom	-0.63	-79	-58	0	
ELE3-Case2A	Top	-1.93	-131	-145	0	15435
	Bottom	-1.93	74	86	0	
ELE4-Case2A	Top	-2.35	-161	-180	0	21609
	Bottom	-2.35	91	107	0	

Analisi della piastra sandwich di Meyer-Piening

Tabella 11.5: Calcolo degli spostamenti e tensioni per piastra sandwich Meyer-Piening per Upper Face (0,100, z)mm con CUF 2D

sfruttassero il principio agli spostamenti virtuali. Abbiamo adottato tre strategie differenti: nella prima si sono usati espansioni di Lagrange Layer Wise, nella seconda si sono adoperati i polinomi di Taylor (e dunque Equivalent Single Layer), mentre nella seconda si è optato per diversi tipi di espansioni Lagrange ESL.

Lagrange LW e Taylor

Per quanto riguarda la strategia Lagrange LW abbiamo usato due tipi di espansione reffigurati in figura 11.10. Grazie alle caratteristiche di queste due espansioni gli spostamenti sono molto vicini alla soluzione analitica (tabelle 11.5 e 11.6). Complessivamente, si nota che le quantità per la faccia inferiore sono calcolate in modo abbastanza preciso(tabella 11.6 e figura 11.13a), mentre molti problemi sorgono per quella superiore, dove si devono adoperare teorie sempre più raffinate e con grande aumento di costo computazionale (tabella 11.5 e figura 11.12a). Se si osservano i dati relativi alle espansioni di Taylor, gli spostamenti e le tensioni sono

Modello	z	$u_z(mm)$	$\sigma_{xx}(MPa)$	$\sigma_{yy}(MPa)$	$\sigma_{xy}(MPa)$	DOF
Pagano	Тор	-2.14	-121	-138	0	
	Bottom	-2.14	127	146	0	
LM2	Top	-2.14	-119	-136	0	
	Bottom	-2.14	125	144	0	
TE4	Top	-1.48	-110	-110	0	15435
	Bottom	-1.48	101	98	0	
TE8	Top	-1.94	-124	-123	0	27783
	Bottom	-1.94	122	121	0	
TE12	Top	-2.09	-151	-150	0	40131
	Bottom	-2.09	163	161	0	
3LE3	Top	-2.21	-127	-125	0	21609
	Bottom	-2.21	139	137	0	
4LE2	Top	-2.15	-148	-145	0	15435
	Bottom	-2.15	161	157	0	
ELE3-Case1A	Top	-0.021	4.7	5.3	0	9261
	Bottom	-0.021	-7.4	-9.4	0	
ELE4-Case1A	Top	-0.39	-116	-115	0	12348
	Bottom	-0.39	148	145	0	
ELE3-Case2A	Top	-1.02	-171	-167	0	15435
	Bottom	-1.02	207	199	0	
ELE4-Case2A	Top	-1.25	-109	-107	0	21609
	Bottom	-1.25	133	127	0	

11.2 – Analisi con modello CUF 2D

Tabella 11.6: Calcolo degli spostamenti e tensioni per piastra sandwich Meyer-Piening per Lower Face (0,100, z)mm con CUF 2D

abbastanza lontani dalle soluzioni più precise, soprattutto per quanto riguarda la piastra superiore, anche se gli andamenti delle tensioni σ_{yy} all'interno degli strati (figure 11.12a,11.13a e 11.14a) sono ben delineati. I risultati migliori per Taylor si osservano con TE12, a discapito però di un elevato numero di gradi di libertà.

Lagrange ESL

Passando, infine all'ultima strategia, abbiamo usato due espansioni: nella prima vi è un unico elemento che comprende tutti gli strati della struttura, nella seconda abbiamo suddiviso la sezione in due domininii in maniera analoga a come già fatto per il caso 1D. Per quanto riguarda il comportamento degli spostamenti (tabelle 11.5 e 11.6) si hanno risulati simili ai casi Taylor, soprattutto al caso TE4, mentre per le tensioni si hanno andamenti molto vicini a quelli di TE12, soprattutto se si osserva l'andamento delle tensioni σ_{yy} nelle figure 11.12b,11.13b e 11.14b.



Figura 11.13: Tensioni normali per piastra sandwich di Meyer-Piening su Lower Face con CUF 2D



Figura 11.14: Tensioni normali per piastra sandwich di Meyer-Piening con CUF 2D
Modello	z	$u_z(mm)$	$\sigma_{xx}(MPa)$	$\sigma_{yy}(MPa)$	$\sigma_{xy}(MPa)$	DOF
24LE16,1D	Тор	-3.80	-280	-489	-2.6	27417
	Bottom	-3.80	208	397	2.4	
3LE3,2D	Top	-3.76	-203	-223	0	21609
	Bottom	-3.76	149	172	0	
ELE16-Case4A,1D	Top	-0.293	-96	-120	4.3	5772
	Bottom	-0.293	4.81	-42	-5.1	
ELE4-Case1A,2D	Top	-0.63	-66	-68	0	12348
	Bottom	-0.63	-79	-58	0	
ELE16-Case8A,1D	Top	-2.45	-223	-418	2.60	10101
	Bottom	-2.45	149	305	-2.14	
ELE4-Case2A,2D	Top	-2.35	-161	-180	0	21609
	Bottom	-2.35	91	107	0	

11.3 Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Tabella 11.7: Calcolo degli spostamenti e tensioni per piastra sandwich Meyer-Piening per Upper Face (0,100, z)mm. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Modello	z	$u_z(mm)$	$\sigma_{xx}(MPa)$	$\sigma_{yy}(MPa)$	$\sigma_{xy}(MPa)$	DOF
24LE16,1D	Тор	-2.25	-139	-131	0	27417
	Bottom	-2.25	160	151	0	
3LE3,2D	Top	-2.21	-127	-125	0	21609
	Bottom	-2.21	139	137	0	
ELE16-Case4A,1D	Top	-0.178	-42	-41	0.6	5772
	Bottom	-0.178	106	98	-0.14	
ELE4-Case1A,2D	Top	-0.39	-116	-115	0	12348
	Bottom	-0.39	148	145	0	
ELE16-Case8A,1D	Top	-1.30	-108	-93	-9.5	10101
	Bottom	-1.30	130	114	10.7	
ELE4-Case2A,2D	Top	-1.25	-109	-107	0	21609
	Bottom	-1.25	133	127	0	

Tabella 11.8: Calcolo degli spostamenti e tensioni per piastra sandwich Meyer-Piening per Lower Face (0,100, z)mm. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Infine confrontiamo alcuni dati tra le due formulazioni, e notiamo che otteniamo risultati vicini tra teorie corrispondenti (come ELE16,1D e ELE4,2D) e per la formulazione 1D abbiamo un numero minore di gradi di libertà (si vedano le figure 11.15 e 11.16, e le tabelle 11.7 e 11.8). Le tensioni nella Upper Face sono molto più difficili da anlizzare, mentre nella Lower Face riusciamo ad avere risultati ottimi.



Figura 11.15: Tensioni normali per piastra sandwich di Meyer-Piening su Upper Face. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D



Figura 11.16: Tensioni normali per piastra sandwich di Meyer-Piening su Lower Face. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Capitolo 12

Analisi del problema di Pipes-Pagano



Figura 12.1: Schema della piastra del problema di Pipes-Pagano

In questo capitolo analizzeremo il caso di una piastra piana sottoposta a due carichi di pressione costante alle estremità tali da generare sull'asse delle x una deformazione uniassiale $\epsilon_0 = \epsilon_{xx}$ costante (Figura 12.1). Nel caso in questione si è deciso di adottare la seguente proporzione per le dimensioni della piastra (come spiegato in [46] e illustrato in 12.1) di a = 2b = 8h e in particolare abbiamo deciso di impostare h = 10mm. Dal punto di vista dell'implementazione, non si sono sceliti due carichi di pressione, ma abbiamo imposto a tutti i punti delle due sezioni $x = \pm a$ uno spostamento $(\pm 10,0,0)mm$. Studieremo il caso di due tipi di laminazione: nel primo avremo una laminazione simmetrica di 4 strati di eguale spessore $[+45, -45]_s^o$, mentre nel secondo la piastra è suddivisa in 8 strati, sempre di eguali dimensioni, con laminazione $[+90,0, +45, -45]_s^o$. Adoperiamo in ogni caso un materiale con le seguenti caratteristiche : $E_L = 137900MPa$, $E_T = E_z =$ 14480MPa, $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.21$, $G_{LT} = G_{Tz} = G_{Lz} = 5860MPa$. Durante l'analisi ci concentrentremo sulle tensioni trasversali $\sigma_{xz} \in \sigma_{zz}$, che saranno riscalate, dividendole per la deformazione ϵ_0 . Grazie a questo riscalamento si possono fare confronti con i risultati trovati in [46] e [59].

12.1 Analisi del problema CUF 1D

12.1.1 Analisi di convergenza

Dato che stiamo studiando due strutture che hanno laminazioni diverse, abbiamo bisogno di fare due analisi distinte. Si è ritenuto di usare come parametro di convergenza la deformazione ϵ_{xx} calcolata nel punto [0,0,0] e non, come di consueto, uno spostamento, in quanto ϵ_{xx} è il parametro indicativo quando ci sono condizioni al contorno simili al nostro caso.

Laminazione $[+45, -45]_s^o$

N. elementi	Elementi	ϵ_{xx}
2	B2	0.125
	B3	0.202
	B4	0.165
4	B2	0.164
	B3	0.162
	B4	0.146
6	B2	0.169
	B3	0.150
	B4	0.155
8	B2	0.167
	B3	0.153
	B4	0.153
10	B2	0.162
	B3	0.153
	B4	0.153

Tabella 12.1: Analisi di convergenza usando 16 elementi LE16 per la piastra di Pipes-Pagano in [0,0,0] per laminazione $[+45,-45]^o$ con CUF 1D



Figura 12.2: Analisi di convergenza usando 32 elementi LE16 per la piastra di Pipes-Pagano per laminazione $[+45, -45]^o$ con CUF 1D

In questo primo caso abbiamo sempre adoperato una discretizzazione della sezione con 16 elementi LE16 (abbiamo adoperato una mesh per l'epansione di 4×4) e abbiamo variato il numero e il tipo di elementi di tipo BEAM. Abbiamo usato sempre un numero pari di elementi lungo l'asse della BEAM e abbiamo fatto un'analisi per tutte e tre i tipi di funzioni Lagrangiane. Dalla tabella 12.1 e dalla figura 12.2, si può notare come con 10 B4 (o con 10 B3) si giunge a convergenza, col valore di 0.153. Come di consueto abbiamo adoperato un grafico bilogaritmico con il numero di elementi e i valori della grandezza analizzata adimensionalizzata con il risultato più preciso. Nel prosieguo useremo sempre 10 elementi B4, variando, però, tipo di espansione.

Laminazione $[90,0,+45,-45]^{o}_{s}$

In questo primo caso abbiamo sempre adoperato una discretizzazione della sezione con 32 elementi LE16 (ossia 4 elementi orizzontali per ogni strato della struttura) e abbiamo variato il numero e il tipo di elementi di tipo BEAM. Anche in questo caso si sono adoperate tutte e tre le espansioni per elementi BEAM. Dalla tabella 12.2 e dalla figura 12.3 si può notare come con 10 B4 (o con 10 B3) si giunge a convergenza, col valore di 0.129, usando un metodo analogo a quello adoperato per la laminazione $[+45, -45]_s^o$. Nel prosieguo useremo sempre 10 elementi B4, variando, però, tipo di espansione.

N. elementi	$\operatorname{Elementi}$	ϵ_{xx}
2	B2	0.125
	B3	0.142
	B4	0.123
4	B2	0.135
	B3	0.129
	B4	0.128
6	B2	0.131
	B3	0.128
	B4	0.130
8	B2	0.131
	B3	0.129
	B4	0.129
10	B2	0.130
	B3	0.129
	B4	0.129

Analisi del problema di Pipes-Pagano

Tabella 12.2: Analisi di convergenza usando 32 elementi LE16 per la piastra di Pipes-Pagano in [0,0,0] per laminazione $[90,0,+45,-45]^o$ con CUF 1D



Figura 12.3: Analisi di convergenza usando 16 elementi LE16 per la piastra di Pipes-Pagano per laminazione $[90,0,+45,-45]^o$ con CUF 1D

12.1.2 Calcolo delle tensioni Laminazione $[+45, -45]_{s}^{o}$



Figura 12.4: Schema della discretizzazione della piastra di Pipes-Pagano con laminazione $[+45, -45]_s^o$ con ESL LE con CUF 1D

Modello	DOF
16LE4	2325
16 LE9	7533
16 LE 16	15717
32 LE4	4185
32 LE9	14229
32 LE16	30225
ELE4-Case4A	930
ELE9-Case4A	2511
ELE16-Case4A	4836
ELE4-Case8A	1395
ELE9-Case8A	4185
ELE16-Case8A	8463

Tabella 12.3: Numero di gradi di libertà usando diversi modelli lungo lo spessore per laminazione $[+45, -45]_s^o$ con 10B4 con CUF 1D

Dopo aver deciso il numero e il tipo di elementi BEAM, si parte a studiare le tensioni normalizzate con la deformazione $\epsilon_{xx} = \epsilon_0$ lungo il semiasse delle y per x = 0



Figura 12.5: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo y all'interfaccia bilaminare z = -5mm per laminazione $[+45, -45]^o$ con 10B4 con CUF 1D



Figura 12.6: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo y all'interfaccia bilaminare z = -5mm per laminazione $[+45, -45]^o$ con 10B4 con ESL LE con CUF 1D



Figura 12.7: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo y all'interfaccia bilaminare z = -5mm per laminazione $[+45, -45]^o$ con 10B4 con CUF 1D



Figura 12.8: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo y all'interfaccia bilaminare z = -5mm per laminazione $[+45, -45]^o$ con 10B4 con ESL LE con CUF 1D



Figura 12.9: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo lo spessore per laminazione $[+45, -45]^o$ in y = 40mm con 10B4 con CUF 1D



Figura 12.10: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo lo spessore per laminazione $[+45, -45]^o$ in y = 40mm con 10B4 con ESL LE con CUF 1D



Figura 12.11: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo lo spessore per laminazione $[+45,-45]^o$ in y=40mm con 10B4 con CUF 1D



Figura 12.12: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo lo spessore per laminazione $[+45,-45]^o$ in y=40mm con 10B4 con ESL LE con CUF 1D

e z = -5mm. In questo caso abbiamo usato due strategie per i polinomi di Lagrange: il Layer Wise e l'Equivalent Single Layer. Per il primo caso abbiamo adoperato 16 elementi e 32 elementi, ossia otto elementi per ogni strato. Nel secondo caso, invece, si sono adottati 4 o 8 elementi come raffigurato in figura 12.4. Per quanto riguarda le tensioni σ_{xz} illustrata nella figura 12.5 notiamo che se aumentiamo il numero elementi della sezione e aumentiamo il grado dei polimomi di Lagrange (nella tabella 12.3 il numero di gradi di libertà), ci avviciniamo alla soluzione LM4 per un caso 2D, ossia usiamo 4 espansioni di Lagrange unidimensionali, adottando insieme il principio variazionale di Reissner. Se invece vogliamo studiare le stesse tensioni (figura 12.6) grazie al metodo ESL LE possiamo notare come i risultati non rispecchino in alcun modo la soluzione di riferimento LM4. Continuando con lo studio delle tensioni negli stessi punti già presentati, possiamo trovare le tensioni σ_{zz} . Nella figura 12.7 riscontriamo per le espansioni più raffinate una vicinanza alla soluzione di Wang & Crossman piuttosto che per la LM4, anche se vi sono ancora parecchie differenze. Di nuovo per il caso di ESL LE (si veda la figura 12.8) i risultati non sono in alcun modo rappresentativi dello stato di tensione. Dopo passiamo a studiare le stesse tensioni lungo lo spessore in y = 40mm dove potremo riscontrare comportamenti analoghi. Le tensioni σ_{xz} calcolate con i Layer Wise (figura 12.9) hanno andamenti simili alle soluzioni di riferimento LM4 e Robbins & Reddy, mentre quelle calcolate con ESL LE non riescono ad avvicinarsi alle soluzioni proposte (12.10). Infine abbiamo studiato le tensioni σ_{zz} e anche usando dei Layer Wise (figura 12.11), vi sono parecchie diversità con le soluzioni 2D più accurate. Come anche per le altre tensioni, le soluzioni ESL LE, raffiguate in figura

12.12 non permettono di avere andamenti corretti. Possiamo in definitiva notare che per il calcolo delle tensioni negli estremi liberi, la strategia ESL è completamente inutile, in quanto non riesce adavvicinarsi agli andamenti delle tensioni, mentre in questo caso conoscere le forti tensioni che si sviluppano tra gli strati è fondamentale (sono quasi delle singolarità, anche se, ovviamente la realtà fisica non permette gli infiniti).

Laminazione $[90,0,+45,-45]_{s}^{o}$

Per questo tipo di laminazione abbiamo studiato le due tensioni soltanto lungo lo spessore in y = 40mm. Qui si usano sempre le consuete due strategie. Per Layer Wise si usano sempre 32 elementi (gia descritti nell'analisi di convergenza), mentre per l'Equivalence Single Layer si usano 4 o 8 strati (si veda la figura 12.13). Se incominciamo a discutere le tensioni σ_{xz} attraverso i modelli Layer Wise (figura 12.14) si nota come le espansioni 32LE9 e 32LE16 si avvicinino di molto alla soluzione di Gaudenzi et al., mentre piccoli problemi insorgono per $z/h = \pm 0.25$, dove ci sono i picchi di tensione tra gli strati. Quando si adottano espansioni ESL LE (figura 12.15) i risultati sono sbagliati. Per le tensioni σ_{xz} possiamo giungere a considerazioni analoghe sia per quanto riguarda Layer Wise in figura 12.16 (dove



Figura 12.13: Schema della discretizzazione della piastra di Pipes-Pagano con laminazione $[[90,0,+45,-45]^o_s$ con ESL LE con CUF 1D

Modello	DOF
32 LE4	4185
32 LE9	14229
32 LE16	30225
ELE4-Case4A	930
ELE9-Case4A	2511
ELE16-Case4A	4836
ELE4-Case8A	1395
ELE9-Case8A	4185
ELE16-Case8A	8463

Tabella 12.4: Numero di gradi di libertà usando diversi modelli lungo lo spessore per $[90,0,+45,-45]_s^o$ con 10B4 con CUF 1D

non si riescono a individuare i picchi) e ESL LE in figura 12.17. In conclusione anche per questa laminazione l'ESL è inadatto a studiare i casi di estremo libero.



Figura 12.14: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo lo spessore per laminazione $[90,0,+45,-45]^o$ in y = 40mm con 10B4 con CUF 1D



Figura 12.15: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo lo spessore per laminazione $[90,0,+45,-45]^o$ in y = 40mm con 10B4 con ESL LE con CUF 1D



Figura 12.16: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo lo spessore per laminazione $[90,0,+45,-45]^o$ in y = 40mm con 10B4 con CUF 1D



Figura 12.17: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo lo spessore per laminazione $[90,0,+45,-45]^o$ in y = 40mm con 10B4 con ESL LE con CUF 1D

12.2 Analisi del problema con CUF 2D

Qui useremo dei modelli 2D per studiare come si comportano i polinomi di Lagrange con LW e ESL nel caso di estremi liberi. Infine usiamo per ogni analisi una mesh 16×16 Q9.

12.2.1 Calcolo delle tensioni



Figura 12.18: Schema della sezione con elementi Lagrange ESL per piastra di Pipes-Pagano

$\textbf{Laminazione}~[+45,-45]^{o}_{s}$

Come primo passo abbiamo analizzato la piastra a laminazione simmetrica in cui abbiamo un numero di strati $N_l = 4$. All'inizio abbiamo adoperato una espansione di Lagrange per ogni strato, garantendo così l'utilizzo di un modello Layer Wise, inoltre abbiamo studiato le tre diverse espansioni a due, tre o quattro nodi (LE2, LE3, LE4). Per migliorare la soluzione (anche se a discapito di un numero più elevato di gradi di libertà, come si evince dalla tabella 12.5) abbiamo costruito un modello in cui ci fossero due espansioni di Lagrange per ogni strato. Inoltre abbiamo adottato anche la strategia Equivalent Single Layer, in cui abbiamo usato 1 o 2 elementi lungo lo spessore come in figura 12.18. Ora si incominciano ad analizzare le primi due tensioni della σ_{xz} (figura 12.19) e σ_{zz} (figura 12.21) che



Figura 12.19: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo y all'interfaccia bilaminare z=-5mm per laminazione $[+45,-45]^o$ con CUF 2D



Figura 12.20: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo y all'interfaccia bilaminare z = -5mm per laminazione $[+45, -45]^o$ per ESL LE con CUF 2D



Figura 12.21: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo y all'interfaccia bilaminare z=-5mm per laminazione $[+45,-45]^o$ con CUF 2D



Figura 12.22: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo y all'interfaccia bilaminare z=-5mm per laminazione $[+45,-45]^o$ per ESL LE con CUF 2D



Figura 12.23: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo lo spessore per laminazione $[+45, -45]^o$ in y = 40mm con CUF 2D



Figura 12.24: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo lo spessore per laminazione $[+45, -45]^o$ in y = 40mm per ESL LE con CUF 2D



Figura 12.25: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo lo spessore per laminazione $[+45,-45]^o$ in y=40mm con CUF 2D



Figura 12.26: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo lo spessore per laminazione $[+45,-45]^o$ in y=40mm per ESL LE con CUF 2D

Modello	DOF
4LE2	16335
4LE3	29403
4LE4	42471
8LE2	29403
8 LE3	55539
8LE4	81675
ELE2-Case1A	6534
ELE3-Case1A	9801
ELE4-Case1A	13068
ELE2-Case2A	9801
ELE3-Case2A	16335
ELE4-Case2A	22869

Tabella 12.5: Numero di gradi di libertà usando diversi modelli lungo lo spessore per laminazione $[+45, -45]_s^o$ con CUF 2D

sono state ricavate lungo l'estremo libero al centro della piastra, lungo il semiasse positivo delle y e alla coordinata z = -5mm con la strategia Layer Wise. In tutte e due i grafici si vede come le tensioni crescono molto verso lo spigolo della piastra e che all'aumentare dei gradi di libertà le differenze tra i modelli diminuiscono sempre di più. Adoperando invece l'ESL nelle, figure 12.20 e 12.22 si nota, come per il caso 1D, l'inadeguatezza della discretizzazione. In seguito dobbiamo analizzare le stesse tensioni sempre ne centro libero, ma ora lungo lo spessore z e per y = 40mm ossia y/b = 1. Per le tensioni σ_{xz} (figura 12.23) avremo una simmetria rispetto al punto centrale e questa caratteristica viene evienziata sin dalle teorie meno raffinate come 4LE2, 4LE3 o 8LE2. Continuando a migliorare i modelli (con i Lagrange a quattro nodi) vediamo come riusciamo a garantire la continuità della funzione all'interfaccia degli strati; in 8LE4 e 8LE3 riusciamo anche a dimostrare che per $z/h = \pm 1$ le tensioni sono nulle. Infine passando alle tensioni σ_{zz} (figura 12.25) possiamo fare analoghe considerazioni, affermando poi che si ha una simmetria rispetto a z = 0. Anche in questo caso le tensioni devono essere sempre continue e in $z/h = \pm 1$ le tensioni si devono annullare in quanto la piastra non è caricata all'estramo libero. Anche per queste ultime due tensioni, l'ESL mostra i suoi limiti (si vedano le figure 12.24 e 12.26).

Laminazione $[90,0,+45,-45]_{s}^{o}$

Per il caso quasi-isotropo abbiamo usato sempre una sola espansione di Lagrange per ogni strato dato che il numero gradi di libertà diventa in fretta molto alto (tabella 12.6). Per la strategia ESL, anche qui abbiamo adoperato due tipi di discretizzazione (figura 12.18). Inoltre abbiamo analizzato le tensioni σ_{xz} (figura



Figura 12.27: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo lo spessore per laminazione $[90,0,+45,-45]^o$ in y=40mm con CUF 2D



Figura 12.28: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo lo spessore per laminazione $[90,0,+45,-45]^o$ in y = 40mm per ESL con CUF 2D



Figura 12.29: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo lo spessore per laminazione $[90,0,+45,-45]^o$ in y=40mm con CUF 2D



Figura 12.30: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo lo spessore per laminazione $[90,0,+45,-45]^o$ in y=40mm per ESL con CUF 2D

Modello	DOF
8LE2	29403
8LE3	55539
8LE4	81675
ELE2-Case1A	6534
ELE3-Case1A	9801
ELE4-Case1A	13068
ELE2-Case2A	9801
ELE3-Case2A	16335
ELE4-Case2A	22869

Tabella 12.6: Numero di gradi di libertà usando diversi modelli lungo lo spessore per $[90,0,+45,-45]_s^o$ con CUF 2D

12.27) e σ_{zz} (figura 12.29) solo lungo lo spessore, nell'estremo libero e in y/b = 1. Anche per questo caso per le tensioni σ_{xz} si ha una simmetria rispetto all'origine, mentre per le σ_{zz} rispetto a z = 0. Di nuovo soltanto con 8LE4 possiamo garantire sempre sia la continuità tra gli strati, che l'annullamento delle tensioni in $z/h = \pm 1$. Di nuovo le tensioni con ESL non possono studiare il problema per l'estremo libero (si veda in figura 12.28 e 12.30).

12.3 Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Laminazione $[90,0,+45,-45]_{s}^{o}$

Modello	DOF
16LE16	15717
8 LE4	81675
ELE16-Case8A	8463
ELE4-Case2A	22869

Tabella 12.7: Numero di gradi di libertà usando diversi modelli lungo lo spessore per laminazione $[+45, -45]_s^o$. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Per la laminazione $[+45, -45]_s^o$ facciamo un confronto tra i migliori risultati delle due formulazioni, quindi mostreremo le teorie 16LE16 e ELE16-Case8A per la CUF 1D, e 8LE4 e ELE4-Case2A per la CUF 2D. Di nuovo vediamo le tensioni σ_{xz} e σ_{zz} sia lungo lo spessore, che lungo y. Nelle figure 12.31, 12.32, 12.33 e 12.34 notiamo che le teorie 2D LW possono indicare meglio l'andamento verso valori molto alti in corrispondenza degli estremi liberi. Di nuovo nessuna teoria ESL LE riesce a identificare questi picchi.



Figura 12.31: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo y all'interfaccia bilaminare z = -5mm per laminazione $[+45, -45]^o$. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D



Figura 12.32: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo y all'interfaccia bilaminare z = -5mm per laminazione $[+45, -45]^o$. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D



Figura 12.33: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo lo spessore per laminazione $[+45, -45]^o$ in y = 40mm. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D



Figura 12.34: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo lo spessore per laminazione $[+45, -45]^o$ in y = 40mm. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Laminazione $[90,0,+45,-45]_{s}^{o}$



Figura 12.35: Tensioni interlaminari σ_{xz} lungo lo spessore per laminazione $[90,0,+45,-45]^{\circ}$ in y = 40mm. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Modello	DOF
32LE16	30225
8LE4	81675
ELE16-Case8A	8463
ELE4-Case2A	22869

Tabella 12.8: Numero di gradi di libertà usando diversi modelli lungo lo spessore per $[90,0,+45,-45]_s^o$. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Per la laminazione $[90,0, +45, -45]_s^o$ facciamo un confronto tra i migliori risultati delle due formulazioni, quindi mostreremo le teorie 32LE16 e ELE16-Case8A per la CUF 1D, e 8LE4 e ELE4-Case2A per la CUF 2D. Di nuovo vediamo le tensioni σ_{xz} e σ_{zz} lungo lo spessore. Nelle figure 12.35 e 12.36 notiamo che le teorie 2D LW possono indicare meglio l'andamento verso valori molto alti in corrispondenza degli estremi liberi. Di nuovo nessuna teoria ESL LE riesce a identificare questi picchi.



Figura 12.36: Tensioni interlaminari σ_{zz} lungo lo spessore per laminazione $[90,0,+45,-45]^o$ in y = 40mm. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Capitolo 13

Analisi di una piastra a tre strati con carico puntuale



Figura 13.1: Schema della piastra a tre strati con carico puntuale centrale

In questo capitolo ci occuperemo di analizzare un piastra a pianta quadrata (a = b) a tre strati con laminazione simmetrica di tipo $[0,90,0]^o$, caricata da una forza puntuale, come raffigurato in figura 13.1; inoltre la condizione al contorno è di piastra semplicemente appoggiata. Noi useremo sempre un carico unitario P_z e la piastra sarà sottile (a/h = 100). Il materiale ortotropo usato per tutti e tre gli strati ha le seguenti caratteristiche: $E_L/E_T = 25$, $E_z = E_T = 1$, $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.25$, $G_{LT}/E_T = 1$, $G_{Tz}/E_T = G_{Lz}/E_T = 1$. Come di consueto faremo riferimento a una soluzione contenuta in letteratura, nello specifico nel lavoro di

Carrera e Ciuffreda ([15]). Nel presente capitolo si utilizzeranno sia modelli CUF 1D che modelli CUF 2D, per dimostrare nello specifico le potenzialità e i limiti della strategia ESL Lagrange. Al fine di fare i confronti tra le varie teorie adotteremo le adimensionalizzazioni per gli spostamenti e le tensioni :

$$\overline{U}_z = \frac{U_z \times 100E_t h^3}{P_z a^3} \tag{13.1}$$

$$\overline{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{P_z} \tag{13.2}$$

Come ultima raccomandazione dobbiamo dire che i risultati degli spostamenti che otteniamo in corrispondenza del carico non sono corrispondenti alla teoria dell'elasticità. Infatti se utilizzassimo le teorie analitiche spiegate in ([15]) avremmo degli spostamenti che tenderebbero all'infinito. Dato che però utilizzeremo delle discretizzazioni FEM non particolarmente fitte, troveremo degli spostamenti piccoli e omogenei per tutte le teorie analizzate.

13.1 Analisi con metodo CUF 1D

13.1.1 Analisi di convergenza con Layer Wise Lagrange



Figura 13.2: Analisi di convergenza usando 32 elementi LE16 per la piastra a tre strati con carico puntuale centrale, usando CUF 1D per LW LE

N. elementi	Elementi	$\overline{U}_z(mm)$
		in $(a/2, b/2, 0)mm$
4	B2	0.3845
	B3	1.987
	B4	2.158
6	B2	0.6703
	B3	2.067
	B4	2.185
8	B2	0.9294
	B3	2.122
	B4	2.189

Tabella 13.1: Analisi di convergenza usando 32 elementi LE16 per la piastra a tre strati con carico puntuale centrale, usando CUF 1D per LW LE

Al fine di effettuare l'analisi di convergenza abbiamo sempre adoperato per la discretizzazione della sezione 32 elementi LE16, ossia 8 elementi per gli strati esterni e 16 elementi per lo strato intermedio, per garantire la condizione al contorno di piastra semplicemente appoggiata nei punti centrali della sezione. Abbiamo analizzato, per quanto riguarda la discretizzazione FEM, gli elementi B2, B3 e B4. Dal grafico bilogaritmico in figura 13.2 e dalla tabella 13.1 si evince come si arrivi a convergenza per 8 elementi B4 e utilizzeremo sempre questa discretizzazione nel prosieguo dell'analisi.

13.1.2 Analisi di convergenza con Equivalent Single Lagrange

Anche per questo caso vogliamo scoprire come si comporta nell'analisi di convergenza un modello ESL Lagrange. Abbiamo deciso di usare sempre il modello ELE16-Case16A (schema raffigurato in figura 13.4). Per quanto concerne la discretizzazione FEM abbiamo analizzato gli elementi BEAM B2, B3 e B4. Si è scelto come grandezza di riferimento lo spostamento verticale al centro della piastra. Osservando la tabella 13.2 e il grafico 13.3, si ha la convergenza per 8 elementi B4 e useremo anche per i modelli ESL Lagrange questa discretizzazione FEM.

13.1.3 Calcolo degli spostamenti e tensioni

In questa sezione ci siamo occupati di analizzare gli spostamenti e le tensioni della piastra, utilizzando la formulazione CUF 1D, facendo confronti con un caso di riferimento ([15]). Come di consueto faremo confronti tra i casi con la strategia LW Lagrange (ormai consolidata) e con la più recente ESL Lagrange. Per la prima



Figura 13.3: Analisi di convergenza per la piastra a tre strati con carico puntuale centrale, usando CUF 1D per ESL LE

N. elementi	Elementi	$\overline{U}_z(mm)$
		in $(a/2, b/2, 0)mm$
4	B2	0.3842
	B3	1.938
	B4	2.158
6	B2	0.6704
	B3	2.087
	B4	2.183
8	B2	0.9296
	B3	2.123
	B4	2.189

Tabella 13.2: Analisi di convergenza usando ELE16-Case16A per la piastra a tre strati con carico puntuale centrale, usando CUF 1D per ESL LE

strategia abbiamo adoperato 3 tipi di discretizzazione: 32LE16 (già utilizzata per l'analisi di convergenza), 24LE9 (ovverossia 8 elementi disposti in orizzontale per ogni strato) e infine 32LE9 (12 elementi per ogni strato). Per la seconda strategia invece abbiamo utilizzato quattro tipi diversi di discretizzazione (presentati in figura 13.4) per esplorare le capacità dell'ESL Lagrange. Non abbiamo analizzato casi con l'espansione di Taylor a causa dell'impossibilità di imporre le condizioni



Figura 13.4: Schema della discretizzazione della piastra a tre strati con carico puntuale centrale per CUF 1D con ESL LE

Modello	\overline{U}_z	$\overline{\sigma}_{xx}$	$\overline{\sigma}_{xz}$	DOF
	in $[a/2, b/2, 0]$	in $[a/2, b/2, h/2]$	in $[0, b/2, 0]$	
Analitico	2.168	7.096	0.0131	
32 LE16	2.189	6.264	0.0111	24375
24 LE9	2.177	4.947	0.0185	8925
36 LE9	2.185	5.663	0.0145	11475
ELE9-Case12A	2.177	5.355	0.0112	5625
ELE4-Case24A	1.552	2.865	0.0004	2925
ELE9-Case24A	2.185	5.633	0.0176	9375
ELE16-Case16A	2.189	6.262	0.0108	13125
ELE16-Case16B	2.221	6.371	0.0176	13125

Tabella 13.3: Calcolo degli spostamenti e tensioni per la piastra a tre strati con carico puntuale, usando CUF 1D

di semplice appoggio ai quattro lati. In prima istanza abbiamo calcolato alcune grandezze caratteristiche del problema in esame: lo spostamento \overline{U}_z e le tensioni $\overline{\sigma}_{xx}$ e $\overline{\sigma}_{xz}$ in alcuni punti di interesse (tabella 13.3). Come si può notare i risultati migliori si ottengono nei casi in cui si adoperano elementi a 16 nodi, anche adoperando la strategia ESL (in particolare il caso ELE16-Case16A si avvicina molto al caso 32LE16 pur avendo quasi la metà dei gradi di libertà). Le altre espansioni riportano risltati buoni per gli spostamenti, mentre per le tensioni ci sono degli scostamenti. In seguito si sono analizzati più nel dettaglio le grandezze calcolate, i



Figura 13.5: Spostamenti \overline{U}_z calcolati in [a/2, b/2, z/h] per la piastra a tre strati con carico puntuale, usando CUF 1D per ESL LE



Figura 13.6: Spostamenti $\overline{\sigma}_{xx}$ calcolati in [a/2, b/2, z/h] per la piastra a tre strati con carico puntuale, usando CUF 1D per ESL LE



Figura 13.7: Spostamenti $\overline{\sigma}_{xz}$ calcolati in [0, b/2, z/h] per la piastra a tre strati con carico puntuale, usando CUF 1D per ESL LE

cui andamenti lungo lo spessore sono raffigurati nei grafici 13.5, 13.6 e 13.7. Qui, per chiarezza, sono esposti solo i risultati più significativi. Gli spostamenti sono vicini alla soluzione di riferimento, così come le tensioni $\overline{\sigma}_{xx}$. Per le tensioni $\overline{\sigma}_{xz}$ i risultati sono distanti dalla soluzione analitica, dove non si riesce a individuare la asimmetria dovuta al carico. In definitiva vediamo come le due soluzioni a 16 nodi siano molto vicine, anche studiando più a fondo le curve delle grandezze. La teoria ELE16-Case16A si avvicina molto alla teoria 32LE16, nonostante vi sia un piccolo scostamento in concomitanza di z = 0 dove è presente l'interfaccia fittizia tra gli elementi ESL. Problemi più grandi ci sono invece per la teoria ELE16-Case16B, che presenta anche un salto tra l'interfaccia tra elementi ESL e LW, caratteristica tipica delle teorie ESL Lagrange (anche miste).

13.2 Analisi con metodo CUF 2D

13.2.1 Analisi di convergenza con Layer Wise Lagrange

Per effettuare l'analisi di convergenza abbiamo sempre adoperato per la discretizzazione della sezione 4 elementi LE4, ossia 1 elemento per gli strati esterni e 2 elementi per lo strato intermedio, per garantire la condizione al contorno di piastra semplicemente appoggiata nei punti centrali della sezione. Abbiamo analizzato, per quanto riguarda la discretizzazione FEM, gli elementi Q4 e Q9,. Poichè si tratta di



Figura 13.8: Analisi di convergenza usando 4 elementi LE4 per la piastra a tre strati con carico puntuale, usando CUF 2D per LW LE

N. elementi	Elementi	$\overline{U}_z(mm)$
		in $(a/2, b/2, 0)mm$
16	Q4	0.2156
	Q9	1.878
36	Q4	0.4101
	Q9	2.047
64	Q4	0.6193
	Q9	2.113
100	Q4	0.8187
	Q9	2.146
144	Q4	0.9971
	Q9	2.164
196	Q4	1.158
	Q9	2.175
256	Q4	1.281
	Q9	2.180

Tabella 13.4: Analisi di convergenza usando 4 elementi LE4 per la piastra a tre strati con carico puntuale, usando CUF 2D per LW LE
una piastra quadrata, si sono adoperati un numero di elementi uguali lungo x e y (mesh n \times n). Dal grafico bilogaritmico in figura 13.8 e dalla tabella 13.4 si evince come si arrivi a convergenza per 256 elementi Q9. Per diminuire il numero di gradi di libertà si è optato per 196 Q9.

13.2.2 Analisi di convergenza con Equivalent Single Layer Lagrange



Figura 13.9: Analisi di convergenza usando ELE4-Case2A per la piastra a tre strati con carico puntuale, usando CUF 2D per ESL LE

In analogia a quanto svolto per la formulazione CUF 1D, faremo un'analisi di convergenza con un modello ESL Lagrange, in particolare ELE4-Case2A, raffigurato in figura 13.10. Inoltre, essendo una piastra a pianta quadrata, abbiamo adoperato una discretizzazione FEM $m \times m$ (numero di elementi ugule lungo x e y) e abbiamo analizzato gli elementi Q4 e Q9. Come parametro di controllo usiamo lo spostamento verticale in (a/2, b/2, 0). La convergenza si ha per 256 elementi Q9, ma useremo, come per i modelli Layer Wise, 196 elementi Q9 (si vedano la tabella 13.5 e la figura 13.9).

13.2.3 Calcolo degli spostamenti e tensioni

Per analizzare la piastra grazie alla formulazione CUF 2D, abbiamo adoperato tre differenti strategie. Con il LW Lagrange abbiamo utilizzato 4LE4 (1 elemento

N. elementi	Elementi	$\overline{U}_z(mm)$
		in $(a/2, b/2, 0)mm$
16	Q4	0.2156
	Q9	1.877
36	Q4	0.4100
	Q9	2.046
64	Q4	0.6193
	Q9	2.113
100	Q4	0.8189
	Q9	2.145
144	Q4	0.9971
	Q9	2.164
196	Q4	1.151
	Q9	2.175
256	Q4	1.285
	Q9	2.178

Analisi di una piastra a tre strati con carico puntuale

Tabella 13.5: Analisi di convergenza usando ELE4-Case2A per la piastra a tre strati con carico puntuale, usando CUF 2D per ESL LE



Figura 13.10: Schema della discretizzazione della piastra a tre strati con carico puntuale centrale, usando CUF 2D con ESL LE

negli strati esterni e 2 nello strato strato intermedio) e 3LE3. Con Taylor si sono usati tre diverse teorie: TE1, TE4, TE9. Per la strategie ESL Lagrange si sono usati tre diversi tipi di discretizzazione che sono esposti nella figura 13.10. Si

Modello	\overline{U}_z	$\overline{\sigma}_{xx}$	$\overline{\sigma}_{xz}$	DOF
	in $[a/2, b/2, 0]$	in $[a/2, b/2, h/2]$	in $[0, b/2, 0]$	
Analitico	2.168	7.096	0.0131	
4LE4	2.175	5.976	0.0137	32799
3LE3	2.175	5.955	0.0136	17661
TE1	2.165	5.529	0.0103	5046
TE4	2.174	5.950	0.0145	12615
TE9	2.175	5.975	0.0137	25320
ELE3-Case1A	2.165	5.523	0.0104	7569
ELE2-Case2A	2.157	5.523	0.0104	7569
ELE3-Case2A	2.174	5.901	0.0164	12615
ELE4-Case2A	2.175	5.971	0.0131	17661
ELE4-Case2B	2.202	6.077	0.0144	17661

13.2 – Analisi con metodo CUF 2D

Tabella 13.6: Calcolo degli spostamenti e tensioni per piastra a tre strati con carico puntuale, usando CUF 2D



Figura 13.11: Spostamenti \overline{U}_z calcolati in [a/2, b/2, z/h] per la piastra a 3 strati con carico puntuale, usando CUF 2D per ESL LE

sono incominciati a studiare gli spostamenti e le tensioni con le diverse teorie in alcuni punti particolarmente importanti. Nella tabella 13.6 si nota come i risultati migliori per le grandezze \overline{U}_z , $\overline{\sigma}_{xx}$ e $\overline{\sigma}_{xz}$ si abbiano per la strategia LW, per TE9 e per ELE4-Case2A. Differenze più marcate si notano per le teorie con gli ordini



Figura 13.12: Spostamenti $\overline{\sigma}_{xx}$ calcolati in [a/2, b/2, z/h] per la piastra a 3 strati con carico puntuale, usando CUF 2D per ESL LE



Figura 13.13: Spostamenti $\overline{\sigma}_{xz}$ calcolati in [0, b/2, z/h] per la piastra a 3 strati con carico puntuale, usando CUF 2D per ESL LE

più bassi di Taylor e di ESL LE, le quali, come di consueto, hanno comportamenti simili. Se andiamo a studiare nel dettaglio gli andamenti degli spostamenti (figura 13.11) e delle tensioni (figure 13.12 e 13.12) vediamo come le teorie con ordine più elevato siano in grado di avvicinarsi molto ai risultati della soluzione analitica. Molto promettente, infine è la teoria ELE4-Case2A, nonostante abbia quasi la metà dei gradi di libertà di 4LE4. Il consueto problema del salto tra l'intefaccia di due dominii (in questo caso ESL LE e LW LE) si ripropone nel modello ELE4-Case2A, che riesce, però, ad avvicinarsi, al netto di questo salto, alla soluzione di riferimento.

Modello	\overline{U}_z	$\overline{\sigma}_{xx}$	$\overline{\sigma}_{xz}$	DOF
	in $[a/2, b/2, 0]$	in $[a/2, b/2, h/2]$	in $[0, b/2, 0]$	
32 LE16,1D	2.189	6.264	0.0111	24375
4LE4,2D	2.175	5.976	0.0137	32799
ELE16-Case16A,1D	2.189	6.262	0.0108	13125
ELE4-Case2A, 2D	2.175	5.971	0.0131	17661
ELE16-Case16B,1D	2.221	6.371	0.0176	13125
ELE4-Case2B, 2D	2.202	6.077	0.0144	17661

13.3 Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Tabella 13.7: Calcolo degli spostamenti e tensioni per la piastra a tre strati con carico puntuale. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

In quest'ultima sezione analizziamo i risultati ottenuti con le due formulazioni CUF 1D e 2D. In tabella 13.7 vediamo gli spostamenti, le tensioni e i gradi di libertà. Abbiamo visto nelle sezioni precedenti come i risultati con la formulazione 2D fossero molto vicini alle soluzioni di riferimento; con le teorie 2D però abbiamo più gradi di libertà delle teorie 1D. In figura 13.14 gli spostamenti hanno andamenti simili e sono molti simili in valore assoluto (si noti la scala). Per quanto concerne le tensioni $\overline{\sigma}_{xx}$ in figura 13.15, i risultati sono molto buoni per tutte le teorie. In figura 13.16 le teorie mostrano, invece, risultati molto più varii. Notiamo che le teorie 2D sono molto vicine. Un'altra caratteristica poi delle teorie ELE16-Case2B e ELE4-Case2B è di avere un salto tra i due sottodominii: in particolare la seconda teoria è di gran lunga migliore della prima.



Figura 13.14: Spostamenti \overline{U}_z lungo z per la piastra a 3 strati con carico puntuale, calcolati in [0, b/2, z/h]. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D



Figura 13.15: Tensioni $\overline{\sigma}_{xx}$ lungo z per la piastra a 3 strati con carico puntuale, calcolati in [0, b/2, z/h]. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D



Figura 13.16: Tensioni $\overline{\sigma}_{xz}$ lungo z per la piastra a 3 strati con carico puntuale, calcolati in [0, b/2, z/h]. Confronto tra formulazioni CUF 1D e 2D

Capitolo 14

Analisi del guscio di Ren a tre strati



Figura 14.1: Schema del guscio di Ren a tre strati

Ci occuperemo ora del problema classico del guscio di Ren, trattato dall'omonimo autore in [61] e da Carrera in [12]. Faremo riferimento ai risultati visualizzati in tali lavori per effettuare delle comparazioni con il metodo ESL Lagrange, usando la formulazione 2D per lo shell. In particolare il guscio studiato in questo capitolo è composto da tre strati, dello stesso materiale, ma con laminazione simmetrica [90,0,90]°. Il materiale ha le seguenti caratteristiche $E_L = 172GPa$, $E_z = E_T =$ 6.9GPa, $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.25$, $G_{LT} = 3.4GPa$, $G_{Tz} = G_{Lz} = 1.4GPa$. Il guscio ha un raggio di curvatura $R_{\beta} = 10m$ (rispetto alla superficie media), altezza pari a h = 2.5m, lunghezza a = 1m e arco di circonferenza $b = R_{\beta} \times \pi/3$ (si veda la figura 14.1). La struttura è caricata sulla sommità, con una pressione trasversale di tipo sinusoidale $p = P_z \sin(n\pi\beta/b) \operatorname{con} P_z = 1$ e il numero di semionde è n = 1; il guscio inoltre è semplicemente appoggiato in $\beta = 0$ e $\beta = b$. Per poter fare i confronti con i risultati trovati in letteratura, dobbiamo adimensionalizzare lo spostamento lungo z e le tensioni, rispettivamente:

$$\overline{U}_z = \frac{U_z \times 10E_t h^3}{P_z R_\beta^4} \tag{14.1}$$

$$\overline{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \frac{h}{P_z R_\beta} \tag{14.2}$$

14.1 Analisi di convergenza con Layer Wise Lagrange



Figura 14.2: Analisi di convergenza usando 6 elementi LE4 per il guscio di Ren a tre strati con carico sinusoidale centrale per LW LE

Prima di poter studiare la struttura, operiamo un'analisi di convergenza. Usiamo sempre sei elementi LE4 per discretizzare la sezione lungo z (due elementi per ogni strato). Il parametro di controllo è lo spostamento \overline{U}_z nel punto centale del guscio, in [b/2, a/2, 0]. Come di consueto useremo sempre due tipi di elementi FEM: Q4 e Q9. Inoltre adopereremo per ogni simulazione due elementi lungo l'asse α e

N. elementi	Elementi	$\overline{U}_z(mm)$
		in $(b/2, a/2, 0)mm$
8	Q4	0.2433
	Q9	0.4572
12	$\mathbf{Q4}$	0.3294
	Q9	0.4592
16	Q4	0.3761
	Q9	0.4595
20	Q4	0.4024
	Q9	0.4596
24	Q4	0.4183
	Q9	0.4596

14.2 – Analisi di convergenza con Equivalent Single Layer Lagrange

Tabella 14.1: Analisi di convergenza usando 6 elementi LE4 per il guscio di Ren a tre strati con carico sinusoidale centrale per LW LE

varieremo solo gli elementi lungo β . Possiamo riscontrare dalla tabella 14.1 e dal grafico bilogaritmico nella figura 14.2 che il risultato migliore si ottiene per il caso con 24 elementi Q9, e tale discretizzazione useremo per il prosieguo dell'analisi del problema.

14.2 Analisi di convergenza con Equivalent Single Layer Lagrange

N. elementi	Elementi	$\overline{U}_z(mm)$
		in $(b/2, a/2, 0)mm$
8	Q4	0.2439
	Q9	0.4542
12	Q4	0.3284
	Q9	0.4556
16	Q4	0.3741
	Q9	0.4559
20	Q4	0.3999
	Q9	0.4560
24	Q4	0.4155
	Q9	0.4560

Tabella 14.2: Analisi di convergenza usando ELE4-Case2A per il guscio di Ren a tre strati con carico sinusoidale centrale per ESL LE



Figura 14.3: Analisi di convergenza usando ELE4-Case2A per il guscio di Ren a tre strati con carico sinusoidale centrale per ESL LE

Per dimostrare le potenzialità dei modelli ESL Lagrange, analizziamo un'analisi di convergenza. Abbiamo scelto il modello ELE4-Case2A (si veda la figura 14.4) e analizzato per la mesh FEM gli elementi Q4 e Q9, con gli elementi disposti allo stesso modo dell'analisi con LW Lagrange. Come parametro di controllo si è usato ancora lo spostamento verticale in (b/2, a/2, 0)mm. Studiando la tabella 14.2 e il grafico bilogaritmico 14.3, notiamo che possiamo concludere l'analisi usando 24 elementi Q9. Anche per i modelli ESL LE useremo dunque questa discretizzazione.

14.3 Calcolo degli spostamenti e tensioni

Ora calcoliamo alcune grandezze interessanti per lo studio del guscio di Ren a tre strati. Usiamo tre tipi di stategie. La prima è il Layer Wise Lagrange: in particolare si sono adoperati le discretizzazioni 6LE2, 6LE3 e 6LE4 (abbiamo messo due elementi per ogni strato). La seconda strategia è adoperare i polinomi di Taylor (quindi usiamo ESL). La terza infine è l'ESL Lagrange: in figura 14.4 sono mostrati gli schemi usati. Partiamo dall'analizzare la tabella 14.3 dove abbiamo studiato lo spostamento verticale \overline{U}_z e la tensione $\overline{\sigma}_{\beta z}$. I risultati si avvicinano alle due soluzioni di riferimento quando usiamo il Layer Wise, le espansioni di Taylor TE4 e TE9 e per i modelli ELE3-Case2A, ELE4-Case2A, ELE4-Case2B. Come di consueto sono migliori le soluzioni per gli spostamenti che per le tensioni. Passando infine



Figura 14.4: Schema della discretizzazione del guscio a tre strati per ESL LE

Modello	\overline{U}_z	$\overline{\sigma}_{\beta z}$	DOF
	in $[b/2, a/2, 0]$	in $[0, b/2, 0]$	
Ren	0.4570	0.476	
Carrera 2003	0.4593	0.487	
6 LE2	0.4490	0.468	2625
6 LE3	0.4592	0.476	4875
6 LE4	0.4596	0.477	7125
TE1	0.4124	0.389	750
TE4	0.4558	0.504	1875
TE9	0.4595	0.477	3750
ELE3-Case1A	0.3998	0.387	1125
ELE2-Case2A	0.4102	0.385	1125
ELE3-Case2A	0.4460	0.536	1875
ELE4-Case2A	0.4560	0.443	2625
ELE4-Case2B	0.4501	0.501	2625

Tabella 14.3: Calcolo degli spostamenti e tensioni per il guscio di Ren a tre strati

allo studio dell'andamento delle tensioni $\overline{\sigma}_{\beta z}$, visualizzate in figura 14.5. Come si può notare nessuna teoria analizzata in questo lavoro riesce a riprodurre i picchi di tensione vicini all'interfacce degli strati, inoltre non riescono ad annullarsi perfettamente alle estremità della piastra. Se studiamo in particolare gli ESL, il migliore modello è l'ELE4-Case2A, anche se si notano problemi all'interfaccia dei due elementi ESL. Come di consueto il caso ELE4-Case2B ha un salto tra l'elemento ESL



Figura 14.5: Tensioni $\overline{\sigma}_{\beta z}$ calcolate in [0,a/2,z] per il guscio di Ren a tre strati per ESL LE

e il LW. Quest'ultimo elemento riesce ad avvicinarsi all'andamento del puro Layer Wise 6LE4.

Capitolo 15 Analisi della piastra di Pagano-Hatfield a nove strati

15.1 Dati del problema



Figura 15.1: Schema della piastra di Pagano-Hatfield a nove strati

Nel presente capitolo studiamo un caso analizzato in letteratura da Pagano e Hatfield ([58]), in cui abbiamo una piastra a pianta quadrata, sottoposta a un carico bisinusoidale del tipo $p = P_z \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a)$ (si veda la figura 15.1). Il materiale utilizzato ha le seguenti caratteristiche $E_L = 172GPa$, $E_z = E_T =$ 6.9GPa, $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.25$, $G_{LT} = 3.4GPa$, $G_{Tz} = G_{Lz} = 1.4GPa$. In particolare noi ci concentreremo sul caso di laminazione a nove strati del tipo $[90,0,90,0,90,0,90,0,90]^{o}$. Il totale dello spessore delle lamine con laminazione a 90^{o} è pari a quello delle lamine a 0^{o} e perciò gli strati hanno spessori diversi in funzione della laminazione, al fine di rispettare questa condizione. Inoltre la piastra è spessa (a/h = 10) ed è semplicemente appoggiata ai quattro lati. Abbiamo analizzato questo caso specifico per studiare la versatilità del metodo ESL LE rispetto ai metodi LW LE e alle espansioni di Taylor. Per questo capitolo adotteremo soltanto la formulazione CUF 2D. Per poter confrontare i risultati ottenuti nel presente lavoro con quelli in letteratura, adotteremo delle adimensionalizzazioni per lo spostamento verticale, per le tensioni trasversali e nel piano:

$$\overline{w} = \frac{\pi^4 w Q h^4}{12 P_z a^4} \tag{15.1}$$

$$\overline{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \frac{h}{P_z a} \tag{15.2}$$

$$\overline{\sigma}_{ii} = \sigma_{ii} \frac{h^2}{P_z a^2} \tag{15.3}$$

con il parametro Q definito nel seguente modo:

$$Q = 4G_{LT} + \frac{[E_L + E_T(1 + 2\nu_{TT})]}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}$$
(15.4)

15.1.1 Analisi di convergenza con Layer Wise Lagrange

N. elementi	Elementi	\overline{w}	$\overline{\sigma}_{xz}$
		(a/2, a/2, 0)	(0, a/2, 0)
4	Q4	1.2051	0.0852
	Q9	1.5212	0.3202
16	Q4	1.4292	0.1935
	Q9	1.5349	0.2713
36	Q4	1.4857	0.2253
	Q9	1.5355	0.2590
64	Q4	1.5071	0.2335
	Q9	1.5356	0.2546
100	Q4	1.5172	0.2388
	Q9	1.5356	0.2524
144	Q4	1.5227	0.2417
	Q9	1.5356	0.2512

Tabella 15.1: Analisi di convergenza per la piastra di Pagano-Hatfield a nove strati usando la formulazione CUF 2D per LW LE



Figura 15.2: Analisi di convergenza di \overline{w} in (a/2, a/2, 0) per la piastra di Pagano-Hatfield a nove strati usando la formulazione CUF 2D per LW LE



Figura 15.3: Analisi di convergenza dello tensione $\overline{\sigma}_{xz}$ in (0, a/2, 0) per la piastra di Pagano-Hatfield a nove strati usando la formulazione CUF 2D per LW LE

Prima di iniziare lo studio dobbiamo effettuare l'analisi di convergenza. Come di consueto, usiamo due tipi di elementi FEM 2D, quali il Q4 e il Q9. Dato che abbiamo una piastra quadrata la discretizzazione avrà lo stesso numero di elementi lungo x e y. Come tipo di espansione della sezione usiamo sempre 9 elementi LE3 (figura 15.4). Al fine di garantire uno studio più accurato abbiamo usato due parametri caratteristici del problema: lo spostamento verticale calcolato nel centro della piastra e la tensione trasversale σ_{xz} in (0, a/2, 0). Osservando la tabella 15.1 e le figure 15.2 e 15.3 notiamo che si arrivi a convergenza per 144 elementi Q9, però per avere un numero più basso di gradi di libertà useremo 100 elementi Q9.

15.1.2 Analisi di convergenza con ESL Lagrange



Figura 15.4: Schema delle diverse disposizioni della sezione della piastra Pagano-Hatfield a nove strati usando la formulazione CUF 2D per ESL LE

Dopo aver fatto l'analisi con il LW Lagrange, vogliamo scoprire il comportamento per l'ESL Lagrange. Anche qui usiamo la stessa discretizzazione FEM del caso LW e studiamo le stesse grandezze. Per quanto riguarda l'espansione della sezione abbiamo adoperato il modello ELE4-Case2A (si veda figura 15.4). Gli andamenti per questa analisi di convergenza sono simili a quelli del metodo LW e abbiamo la convergenza, se guardiamo entrambi i parametri, per 144 elementi Q9. Però, anche per i modelli ESL LE, usiamo 100 elementi Q9 (si vedano la tabella 15.2 e le figure 15.5 e 15.6).



Figura 15.5: Analisi di convergenza di \overline{w} in (a/2, a/2, 0) per la piastra di Pagano-Hatfield a nove strati usando la formulazione CUF 2D per ESL LE



Figura 15.6: Analisi di convergenza dello tensione $\overline{\sigma}_{xz}$ in (0, a/2, 0) per la piastra di Pagano-Hatfield a nove strati usando la formulazione CUF 2D per ESL LE

N. elementi	Elementi	\overline{w}	$\overline{\sigma}_{xz}$
		(a/2, b/2, 0)	(0, a/2, 0)
4	Q4	1.2036	0.0805
	Q9	1.5177	0.3091
16	$\mathbf{Q4}$	1.4259	0.1883
	Q9	1.5309	0.2632
36	Q4	1.4820	0.2172
	Q9	1.5315	0.2527
64	Q4	1.5031	0.2282
	Q9	1.5315	0.2487
100	Q4	1.5131	0.2334
	Q9	1.5315	0.2467
144	Q4	1.5187	0.2368
	Q9	1.5315	0.2456

Analisi della piastra di Pagano-Hatfield a nove strati

Tabella 15.2: Analisi di convergenza per la piastra di Pagano-Hatfield a nove strati usando la formulazione CUF 2D per ESL LE

15.2 Calcolo di spostamenti e tensioni



Figura 15.7: Tensioni normali nella piastra di Pagano-Hatfield a nove strati per le soluzioni di riferimento calcolate in (a/2, a/2, z/h) per formulazione CUF 2D

Modello	\overline{w}	$\overline{\sigma}_{xz}$	$\overline{\sigma}_{xx}$	$\overline{\sigma}_{yz}$	DOF
		(a/2, a/2, 0)	(0, a/2, 0)	(a/2, a/2, h/2)	(a/2,0,0)
Pagano&Hatfield	1.512	0.247	0.551	0.226	
9LE2	1.5248	0.2523	0.5736	0.2306	13230
9LE3	1.5356	0.2524	0.5791	0.2236	24137
9LE4	1.5356	0.2536	0.5792	0.2304	37044
$\mathrm{TE2}$	1.4268	0.1867	0.5206	0.1459	3969
TE4	1.5305	0.2594	0.5768	0.2298	6615
${ m TE6}$	1.5314	0.2511	0.5768	0.2335	9261
TE8	1.5335	0.2617	0.5779	0.2217	11907
ELE2-Case1A	1.4115	0.1857	0.5170	0.1453	2646
ELE3-Case1A	1.4194	0.1862	0.5192	0.1456	3969
ELE4-Case1A	1.5234	0.2593	0.5755	0.2299	5292
ELE2-Case2A	1.4271	0.1873	0.5217	0.1464	3969
ELE3-Case2A	1.5235	0.2905	0.5725	0.2734	6625
ELE4-Case2A	1.5315	0.2467	0.5768	0.2312	9261
ELE2-Case3A	1.4774	0.2468	0.2196	0.5493	5292
ELE3-Case3A	1.5279	0.2492	0.5759	0.2173	9261
ELE4-Case3A	1.5315	0.2518	0.5770	0.2330	13230
ELE2-Case3B	1.4774	0.2147	0.5538	0.1752	5292
ELE3-Case3B	1.4949	0.2146	0.5584	0.1758	9261
ELE4-Case3B	1.5284	0.2542	0.5751	0.2331	13230
ELE2-Case3C	1.4551	0.2042	0.5601	0.1672	5292
ELE3-Case3C	1.4967	0.2263	0.5602	0.1923	9261
ELE4-Case3C	1.5278	0.2592	0.5753	0.2296	13230

15.2 – Calcolo di spostamenti e tensioni

Tabella 15.3: Calcolo degli spostamenti e tensioni per la piastra di Pagano-Hatfield a nove strati usando la formulazione CUF 2D

Abbiamo confrontato diverse teorie usando le tre consuete strategie: il Layer Wise Lagrange, l'Equivalent Single Layer con l'espansione di Taylor e infine l'ESL Lagrange (si veda la figura 15.4 per le discretizzazioni della sezione). Nella tabella 15.3 possiamo studiare i valori puntuali di alcune grandezze importanti come lo spostamento verticale \overline{w} e le tensioni trasversali ($\overline{\sigma}_{xz}, \overline{\sigma}_{yz}$) e normali ($\overline{\sigma}_{xx}$). Faremo riferimento alla soluzione analitica di Pagano & Haftield e alle soluzioni FEM migliori: 9LE4 e TE8. Come di consueto, diminuendo il numero di strati per ogni sottodominio ESL LE e aumentando l'ordine dell'espansione i risultati migliorano e dunque la teoria ESL LE qui analizzata che si comporta meglio per questi valori puntuali è ELE4-Case3A. Invece nelle teorie ELE4-Case3B e ELE4-Case3C sorgono problemi poichè sono composte da due elementi simil-LW e un elemento simil-ESL composto da sette strati (successivamente vedremo le loro potenzialità



Figura 15.8: Tensioni normali nella piastra di Pagano-Hatfield a nove strati per TE calcolate in (a/2, a/2, z/h) per formulazione CUF 2D



Figura 15.9: Tensioni normali nella piastra di Pagano-Hatfield a nove strati per ESL LE2 calcolate in (a/2, a/2, z/h) per formulazione CUF 2D



Figura 15.10: Tensioni normali nella piastra di Pagano-Hatfield a nove strati per ESL LE3 calcolate in (a/2, a/2, z/h) per formulazione CUF 2D



Figura 15.11: Tensioni normali nella piastra di Pagano-Hatfield a nove strati per ESL LE4 calcolate in (a/2, a/2, z/h) per formulazione CUF 2D



Figura 15.12: Tensioni trasversali nella piastra di Pagano-Hatfield a nove strati per le soluzioni di riferimento calcolate in (0, a/2, z/h) per formulazione CUF 2D



Figura 15.13: Tensioni trasversali nella piastra di Pagano-Hatfield a nove strati per TE calcolate in (0, a/2, z/h) per formulazione CUF 2D



Figura 15.14: Tensioni trasversali nella piastra di Pagano-Hatfield a nove strati per ESL LE2 calcolate in (0, a/2, z/h) per formulazione CUF 2D



Figura 15.15: Tensioni trasversali nella piastra di Pagano-Hatfield a nove strati per ESL LE3 calcolate in (0, a/2, z/h) per formulazione CUF 2D



Figura 15.16: Tensioni trasversali nella piastra di Pagano-Hatfield a nove strati per ESL LE4 calcolate in (0, a/2, z/h) per formulazione CUF 2D



Figura 15.17: Analisi puntuale delle tensioni trasversali nella piastra di Pagano-Hatfield a nove strati calcolate in (0, a/2, z/h) per formulazione CUF 2D

nell'individuare tensioni specifiche). In definitiva avendo diminuito i DOF possiamo avere risultati buoni. Ora ci occupiamo degli andamenti della tensione normale $\overline{\sigma}_{xx}$. In figura 15.7 abbiamo le soluzioni di riferimento, che sono molto vicine tra loro. Nelle figure 15.8, 15.9, 15.10 e 15.11 studiamo diverse teorie con espansioni di Taylor e di Lagrange. Come spesso accade queste tensioni sono calcolate in maniera ottima anche dalle teorie con pochi gradi di libertà. Quando passiamo invece alle tensioni trasversali i risultati sono molto più variegati. Useremo come soluzioni di riferimento quelle visualizzate in figura 15.12. I modelli di Taylor di ordine più alto (figura 15.13) approssimano la soluzione analitica e riescono anche ad annullarsi in corrispondenza degli estremi della sezione. Nella figura 15.14 notiamo che i modelli a due nodi LE2 riescono solo a mostrare andamenti costanti all'interno di un elemento. Per i modelli LE3 (figura 15.15) vediamo andamenti lineari che riescono ad avvicinarsi alle soluzioni migliori. Per i modelli LE4, invece, i risultati sono molto vicini (si veda la figura 15.16). Di nuovo possiamo notare come i sottodominii ESL LE mostrino un andamento medio al loro interno e per avere valori vicini alle soluzioni LW in alcuni punti specifici, dobbiamo appunto inserire elementi simil-LW insieme a elementi simil-ESL (come nelle teorie ELEn-Case3B e ELEn-Case3C). Per studiare meglio le capacità di analisi di questi modelli abbiamo comparato quattro teorie: TE8, 9LE4, ELE4-Case3C e ELE4-Case3B. Nella figura 15.17 e nella tabella 15.4 notiamo la capacità del modello ELE4-Case3C di individuare un valore specifico di una tensione, pur utilizzando un terzo dei gradi di libertà della soluzione 9LE4.

$\overline{\sigma}_{xz}$	DOF
[0, a/2, 2h/5]	
0.1464	11907
0.1651	37044
0.1410	13230
0.1639	13230
	$\begin{array}{c} \overline{\sigma}_{xz} \\ [0, a/2, 2h/5] \\ 0.1464 \\ 0.1651 \\ 0.1410 \\ 0.1639 \end{array}$

Tabella 15.4: Analisi puntuale delle tensioni trasversali nella piastra di Pagano-Hatfield a nove strati calcolate in (0, a/2, z/h) per formulazione CUF 2D

Capitolo 16

Analisi con il metodo Global/Local di una trave a tre strati simmetrica con formulazione CUF 1D

16.1 Dati del problema



Figura 16.1: Schema della sezione della trave a laminazione simmetrica

In questo capitolo analizzeremo una struttura, già studiata precedentemente, con il metodo Global/Local. Nello specifico la trave ha lunghezza L = 2m, mentre le dimensioni sulla sezione sezione sono b = 0.2m lungo la direzione x e h = 0.1mper la direzione z. Per quanto riguarda la disposizione dei layer sulla sezione, si hanno tre strati di eguali dimensioni, disposti uno sopra l'altro. Il materiale usato è ortotropo e ha le seguenti caratteristiche : $E_L = 25GPa$, $E_T = E_z = 1GPa$, $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.25$, $G_{LT} = 0.5GPa$, $G_{Tz} = G_{Lz} = 0.2GPa$. La laminazione nei tre strati è simmetrica, del tipo $[0,90,0]^o$. Dal punto di vista delle condizioni al contorno, la trave è incastrata a un'estremità, ed è sollecitata all'estremo libero da quattro forze di modulo uguale (F = 25N), orientate verso la direzione negativa dell'asse delle z, disposte ai vertici della sezione (si veda la figura 16.1). Impiegeremo per ogni analisi svolta sette elementi BEAM B4 per la discretizzazione lungo l'asse della trave.

16.2 Analisi con il metodo Global/Local



Figura 16.2: Schema degli elementi beam B4 per una trave a laminazione simmetrica, usando il metodo Global/Local



Figura 16.3: Schema di due discretizzazioni usate per la sezione della trave a laminazione simmetrica, caso ELE9-3LE4

Vantaggio dell'ESL Lagrange rispetto a Taylor Uno dei nostri obiettivi sarebbe studiare una struttura usando cinematiche diverse in elementi FEM contigui.



Figura 16.4: Comparazione tra un Global/Local con espansioni di Lagrange (caso ELE9-3LE4) e con espansione di Taylor

Infatti sarebbe comodo usare un metodo Equivalent Single Layer LE per alcuni elementi, mentre per altri usare il metodo Layer Wise LE, riuscendo così a diminuire i gradi di libertà, ottenendo però soluzioni ottime in corrispondenza di alcuni punti di interesse. Difatti possiamo unire in maniera molto semplice questi due tipi di sezioni, poichè, in entrambi i casi, ogni punto della sezione studia tre spostamenti fisici e contribuisce a creare la discretizzazione della struttura (i punti della sezione sono punti della discretizzazione). L'espansione di Taylor è differente perchè le sue incognite sono i tre spostamenti e le loro derivate. In pratica non abbiamo punti da poter attaccare ai punti dell'espansione di Lagrange (sia nel caso LW che nel caso ESL). In figura 16.3 vediamo le due sezioni che useremo nella stessa struttura. Queste sezioni saranno utilizzate come visualizzato nella figura 16.2, ossia ELE9 negli elementi indicati con ESL e 3LE4 negli elementi indicati con LW. Nella figura 16.4 mostriamo come riusciamo a connettere due sezioni diverse, facendo perno su alcuni punti in comune (ricordandoci anche che i gradi di libertà sono solo i tre spostamenti). Nella stessa figura, vediamo come non riusciamo a connettere le sezioni TE e LW LE (inoltre sappiamo che i gradi di libertà sono di tipo diverso).

Risultati Ora proviamo ad analizzare questa struttura in varii modi, attraverso varie teorie, sempre adoperando la formulazione CUF 1D. Però prima dobbiamo dire che abbiamo discretizzato la trave attraverso 7 elementi Beam B4. In alcuni elementi abbiamo usato il metodo LW (per delle zone critiche: all'incastro, in mezzeria e dove vi sono i quattro carichi) e in figura 16.2 possiamo vedere la discretizzazione FEM 1D. Usiamo come soluzioni di riferimento una calcolata con un codice commerciale (SOLID) e una LW (3LE16). Abbiamo analizzato cinque tipi di Global/Local: nei primi tre abbiamo sempre usato un elemento LE16 per

Modello	$-u_z \times 10^3 m$	$\sigma_{yy} \times 10^{-3} Pa$	$\sigma_{yz} \times 10^{-3} Pa$	DOF
	[0,L,h/2]	[0, L/2, h/2]	[0, L/2, 0]	
	Soluzione	di riferimento([21])	
SOLID	0.72	311.07	-6.92	132300
	Usando	gli elementi fini	ti	
3LE16	0.72	311.11	-6.92	2640
ELE16-9LE4	0.60	389.27	-6.32	1056
ELE16-9LE9	5.5	242.26	-2.99	2388
ELE16-3LE16	0.87	439.38	-6.27	1920
ELE9-9LE9	1.8	1114.1	-4.90	2034
ELE9-3LE4	1.0	417.12	-5.92	618

Analisi con il metodo Global/Local di una trave a tre strati simmetrica con formulazione CUF 1D

Tabella 16.1: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a laminazione simmetrica usando il metodo Global/Local



Figura 16.5: Tensioni normali nel laminato simmetrico usando il metodo Global/Local

l'ESL. Con ELE16-9LE4 abbiamo una corrispondenza biunivoca tra i punti delle due sezioni, mentre con ELE16-9LE9 e con ELE16-3LE16 solo alcuni punti sono uniti. Per gli ultimi due abbiamo usato sempre un elemento LE9 per l'ESL. Sia per la teoria ELE9-9LE9 che per ELE9-3LE4 non abbiamo una perfetta corrispondenza tra i punti della sezione. Arrivando ai risultati (si vedano la tabella 16.1 e le figure per le tensioni 16.5 e 16.6) vediamo come siano molto distanti dalle due soluzioni



Figura 16.6: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico usando il metodo Global/Local



Figura 16.7: Zoom sull'interfaccia tra il primo e il secondo elemento beam per la trave a laminazione simmetrica, caso ELE9-3LE4

di riferimento. Nemmeno la teoria ELE16-9LE4 riesce ad avvicinarsi e ha problemi anche nell'identificazione degli spostamenti e delle tensioni normali. Adesso, però, bisogna fare un discorso a parte sulle teorie in cui non ci sono punti uguali nelle due sezioni. Abbiamo portato l'esempio, in particolare, del modello ELE9-3LE4. In figura 16.3 vediamo le due sezioni utilizzate e i punti in blu indicano i punti in comune nell'interfaccia. In figura 16.7 possiamo notare che non riusciamo a unificare completamente la struttura quando vi è l'interfaccia tra due elementi con teorie



Figura 16.8: Zoom sull'interfaccia tra il primo e il secondo elemento beam per la trave a laminazione simmetrica, caso ELE16-3LE16

cinematiche differenti. Siamo in presenza di uno spazio vuoto. Tra le teorie Global/Local con gradi di libertà diversi tra le due sezioni, l'unica teoria che si avvicina ai risultati di riferimento è la ELE16-3LE16, grazie ai molti punti in comune e alla capacità degli elementi LE16 di garantire indipendentemente buoni risultati. Possiamo vedere in figura 16.8 come la situazione sia migliorata. Comunque, al netto di queste problematiche, abbiamo dimostrato che possiamo unire due elementi con due discretizzazioni della sezione diverse attraverso i punti in comune, a differenza delle teorie con l'espansione di Taylor. In definitiva, però, per studiare una struttura con teorie diverse senza avere problemi di compenetrazioni e vuori, dovremmo usare i Moltiplicatori di Lagrange o il metodo NDK (Node Dependent Kinematics). Ciononostante, non abbandoneremo questo metodo Global/Local, continuando a studiarlo, al fine di applicarlo ad altri casi, in cui abbiamo molti elementi 1D, e potremo studiare gli spostamenti e le tensioni molto lontano dall'intersezione tra le due sezioni.

16.2.1 Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (Prima Parte)

Dopo aver visto le potenzialità e le criticità del metodo Global/Local, adoperando tre elementi BEAM dove era presente la strategia LW, ora vogliamo applicare questo tipo di espansione solo per l'elemento centrale (si veda la parte superiore della figura 16.9). Negli altri elementi useremo delle teorie ESL Lagrange. Inoltre confronteremo queste teorie con il metodo NDK che, come noto, ci permette di scegliere per ogni nodo un tipo di discretizzazione della sezione. In pratica i quattro nodi di mezzeria saranno sempre nodi con teorie LW LE, gli altri saranno nodi con espansioni di Taylor (figura 16.9). Come sappiamo, con il NDK abbiamo più possibilità di cambiare il tipo di teorie della sezione, però abbiamo deciso di mantenere costante la configurazione dei nodi per fare dei confronti con il Global/Local, dove non possiamo cambiare il tipo di espansione per i nodi di uno stesso elemento. Abbiamo scelto queste disposizioni al fine di confrontare teorie con gradi di libertà simili.



Figura 16.9: Schema degli elementi beam B4 per una trave a laminazione simmetrica, usando il metodo Global/Local e usando il metodo NDK (prima parte)

Modello	$-u_z \times 10^3 m$	$\sigma_{yy} \times 10^{-3} Pa$	$\sigma_{yz} \times 10^{-3} Pa$	DOF
	[0,L,h/2]	[0, L/2, h/2]	[0, L/2, 0]	
3LE9	0.72	311.10	-6.91	1386
$\text{ELE16-3LE9}_{,GL}$	2.18	-280.87	-4.14	1164
$TE2-3LE9_{,NDK}$	0.71	311.07	-6.44	576
$TE4-3LE9_{,NDK}$	0.72	311.13	-6.91	1062
3LE16	0.72	311.11	-6.92	2640
$ELE16-3LE16_{,GL}$	0.86	409.45	-6.95	1344
$TE2-3LE16_{,NDK}$	0.71	311.10	-6.48	804
$TE4-3LE16_{,NDK}$	0.72	311.17	-6.95	1290

Tabella 16.2: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a laminazione simmetrica. Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (prima parte)

Se passiamo al dettaglio delle teorie usate, possono essere divise in due categorie, la prima in cui adoperiamo i LW LE9 e la seconda, invece, dei LW LE16. Ovviamente questi sono adoperati in vari modi, a seconda del momento in cui adoperiamo un metodo FULL LW, un Global/Local oppure un NDK. Infine, quando usiamo il GL, sono presenti sempre teorie ELE16, per aumentare i punti di contatto



Figura 16.10: Tensioni normali nel laminato simmetrico per LW 3LE9. Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK(prima parte)



Figura 16.11: Tensioni normali nel laminato simmetrico per LW 3LE16. Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK(prima parte)


Figura 16.12: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico per LW 3LE9. Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK(prima parte)



Figura 16.13: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico per LW 3LE16. Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK(prima parte)

nelle intersezioni. Ora, come di consueto, i parametri da osservare sono gli spostamenti verticali al tip della trave, e le tensioni σ_{yy} e σ_{yz} in mezzeria. Quando ci concentriamo sullo spostamento u_z (si veda la tabella 16.2) notiamo che i risultati con il Global Local sono distanti dalle soluzioni di riferimento (emblematico è il caso ELE16-3LE9_{,GL}), mentre con il metodo NDK si hanno risultati molto vicini. Passando alle tensioni normali (si vedano la tabella 16.2 e le figure 16.10 e 16.11), la teoria ELE16-3LE9_{,GL} ha grandi problemi nel calcolarle, mentre la teoria ELE16-16LE9_{,GL} si avvicina di più; come di consueto il metodo NDK è ottimo. Per quanto concerne le tensioni trasversali (si vedano la tabella 16.2 e le figure 16.12 e 16.13) si ha un comportamento analogo a quanto visto già per i due precedenti paramenti. In conclusione, il GL può essere uno strumento potente, però deve essere usato con molte accortezze (bisogna sempre tenere presente i problemi all'interfaccia tra due discretizzazioni); ovviamente usando il metodo NDK i problemi questi problemi non esistono, a discapito però di aumentare la complessità dell'implementazione.

16.2.2 Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (Seconda Parte)

In questa seconda parte del confronto, vogliamo capire se si possano ottenere buoni risultati in punti distanti dall'interfaccia tra una sezione ESL Lagrange e una sezione LW LE, in particolare alla fine della trave. Nel metodo Global/Local i primi tre elementi avranno nodi con teorie ESL LE, gli ultimi quattro elementi nodi con teorie LW LE (si veda la figura 16.14). Confronteremo questi risultati, con il metodo NDK, adoperando teorie TE (ovviamente in unione con LW LE). Per avere un numero simile di gradi di libertà inseriamo nove nodi con ESL nella parte iniziale della trave, mentre nei restanti tredici nodi LW LE, come visualizzato in figura 16.14.



Figura 16.14: Schema degli elementi B4 per una trave a laminazione simmetrica, usando il metodo Global/Local e usando il metodo NDK (seconda parte)

16.2 – Analisi con il metodo Global/Local

Modello	$-u_z \times 10^3 m$	$\sigma_{yy} \times 10^{-3} Pa$	$\sigma_{yz} \times 10^{-3} Pa$	DOF
	[0, L, h/2]	[0, L, h/2]	[0, L, 0]	
3LE16	0.72	-24.25	-0.257	2640
9LE16	0.72	-31.57	-0.288	7392
$ELE9-3LE16_{,GL}$	1.74	-24.32	-0.230	1818
$ELE16-3LE16_{,GL}$	0.81	-24.23	-0.254	1992
$TE3-3LE16_{,NDK}$	0.72	-24.25	-0.257	1830
$TE4-3LE16_{,NDK}$	0.72	-24.25	-0.257	1965

Tabella 16.3: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a laminazione simmetrica.Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (seconda parte)



Figura 16.15: Tensioni normali nel laminato simmetrico per LW 3LE16. Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (seconda parte)

Tre sono i metodi adoperati: FULL LW, Global Local e NDK. Per quanto riguarda il primo metodo usiamo sia le teorie 3LE16 che 9LE16 (3 elementi per ogni strato), perchè abbiamo bisogno di più gradi di libertà per studiare le tensioni al tip. Quando, però, usiamo i metodi GL e NDK, rimane sempre la teoria LW 3LE16. Nel GL usiamo sia gli ELE9 che ELE16. Cominciando a vedere il primo parametro, ossia lo spostamento verticale (tabella 16.3) gli spostamenti sono delineati in maniera ottima dalla strategia NDK; invece il Global Local porta con sè diversi problemi. Se guardiamo le tensioni normali (tabella 16.3 e la figura 16.15), la teoria più precisa è 9LE16. Se facciamo un confronto tra tutte le teorie che adoperano



Figura 16.16: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico per LW 3LE16. Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (seconda parte)

3LE16, i risultati sono molto vicini. Analoghe considerazioni possiamo fare per le tensioni trasversali (tabella 16.3 e la figura 16.16), infatti solo la teoria 9LE16 riesce a garantire la continuità delle tensioni e l'annullamento in corrispondenza degli estremi liberi. In questa sezione vediamo che il metodo Global Local lavora molto bene quando calcoliamo parametri distanti dall'interfaccia, anche se problemi possono sorgere quando determiniamo spostamenti al tip di una trave.

16.2.3 Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (Terza Parte)

In questa terza parte del confronto, vogliamo capire se si possano ottenere buoni risultati in punti distanti dall'interfaccia tra una sezione ESL Lagrange e una sezione LW LE, in particolare vicino all'incastro (y = 0.2m). Nel metodo Global/Local gli ultimi tre elementi avranno nodi con teorie ESL LE, i primi quattro elementi nodi con teorie LW LE (si veda la figura 16.17). Confronteremo questi risultati, con il metodo NDK, adoperando teorie TE (ovviamente in unione con LW LE). Per avere un numero simile di gradi di libertà inseriamo nove nodi con ESL nella parte finale della trave, mentre nei restanti tredici nodi LW LE, come visualizzato in figura 16.17.

Anche qui tre sono i metodi adoperati: FULL LW, Global Local e NDK. Per ogni metodo adoperato, si ha la teoria LW 3LE16. Nel GL usiamo sia gli ELE9 che



Figura 16.17: Schema degli elementi beam B4 per una trave a laminazione simmetrica, usando il metodo Global/Local e usando il metodo NDK (terza parte)

Modello	$-u_z \times 10^3 m$	$\sigma_{yy} \times 10^{-3} Pa$	$\sigma_{yz} \times 10^{-3} Pa$	DOF
	[0, L/10, h/2]	[0, L/10, h/2]	[0, L/10, 0]	
3LE16	0.015	561.35	-6.69	2640
$ELE9-3LE16_{,GL}$	0.015	559.82	-6.72	1818
$ELE16-3LE16_{,GL}$	0.015	561.36	-6.69	1992
$\text{TE3-3LE16}_{,NDK}$	0.015	561.35	-6.69	1830
$TE4-3LE16_{,NDK}$	0.015	561.35	-6.69	1965

Tabella 16.4: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a laminazione simmetrica. Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (terza parte)

ELE16. Cominciando a vedere il primo parametro, ossia lo spostamento verticale (tabella 16.4) gli spostamenti sono delineati in maniera ottima da tutti i metodi adottati. Se guardiamo le tensioni normali (tabella 16.4 e la figura 16.18), e alle le tensioni trasversali (tabella 16.4 e la figura 16.19), tutte le teorie sono ottime nel delinearle. In questa sezione vediamo che il metodo Global Local lavori molto bene quando calcoliamo parametri distanti dall'interfaccia, soprattutto se siamo vicini all'incastro.



Figura 16.18: Tensioni normali nel laminato simmetrico per LW 3LE16. Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (terza parte)



Figura 16.19: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico per LW 3LE16. Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (terza parte)

Capitolo 17

Analisi con il metodo Global/Local di una trave a otto strati simmetrica con formulazione CUF 2D



Figura 17.1: Schema della sezione della trave con laminazione simmetrica a otto strati

Ora si studierà il caso di un una beam a sezione rettangolare con laminazione simmetrica a 8 strati(figura 17.1). Nello specifico la trave ha lunghezza L = 90mm, mentre le dimensioni sulla sezione sono b = 1mm lungo la direzione x e h = 10mm per la direzione z. Per quanto riguarda la disposizione dei layer sulla sezione, si

hanno otto strati di eguali dimensioni, disposti uno sopra l'altro. I materiali adoperati sono entrambi ortotropi e hanno le seguenti caratteristiche: $E_T = E_z = 1GPa$, $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.25, \ G_{LT} = G_{Tz} = G_{Lz} = 0.5 GPa$, l'unica variazione si ha in direzione delle fibre $E_{L,1} = 30GPa$ e $E_{L,2} = 5GPa$. La laminazione negli otto strati è diversa, ossia si ha alternanza tra gli strati al fine di creare una laminazione simmetrica; in entrambi i casi le fibre hanno un'angolo di 0° attorno all'asse longitudinale. Dal punto di vista delle condizioni al contorno, la trave è incastrata a un'estremità, ed è sollecitata all'estremo libero, da quattro forze di modulo uguale (F = 0.05N), orientate verso la direzione negativa dell'asse delle z, disposte ai vertici della sezione. Analizzeremo la struttura tramite il metodo Global/Local, che abbiamo già studiato nel capitolo precedente, e il metodo Node Dependent Kinematics con ESL TE. In questa analisi utilizzeremo sempre 16 elementi FEM 2D Q9. In tutti i casi in cui adotteremo il metodo Global/Local useremo la teoria ELE4, ossia la sezione sarà divisa in due domini(figura 17.1). A differenza delle analisi precedenti in cui avevamo una notazione dove indicavamo il numero di elementi e il tipo di polinomio, ora indichiamo il numero di punti di Lagrange usati nella sezione. In questo capitolo la teoria ELE4 ha 7 punti, 8LE3 è composto da 17 punti, mentre 8LE4 ha 25 punti. Per quanto riguarda la notazione dei polinomi di Tavlor non cambia nulla.

17.1 Analisi con il metodo Global/Local



Figura 17.2: Schema di due discretizzazioni usate per la sezione della trave a otto strati, usando il metodo Global/Local

In questa sezione facciamo un'analisi per studiare come le grandezze variano se modifichiamo lo schema di discretizzazione della trave. Come già detto, i nodi FEM legati alla strategia ESL Lagrange adottano la teoria 7LP visualizzata in figura 17.1, i nodi FEM legati alla strategia LW Lagrange adottano o la teoria 17LP o la teoria 25LP. Dato che vogliamo tovare le grandezze in mezzeria, inseriamo le teorie LW LE vicino al centro della trave, e le teorie ESL LE ai lati. Variamo la discretizzazione, aumentando progressivamente il numero dei nodi con strategia LW LE e dimunuendo i nodi con ESL LE. In figura 17.2 abbiamo un esempio del metodo Global/Local, in cui usiamo sei elementi centrali con LW LE e dieci nodi ESL LE. In questo contesto dobbiamo cambiare la notazione per identificare meglio le teorie usate: nella prima parte scriviamo la teoria ESL Lagrange e nella seconda la teoria LW Lagrange; in apice identifichiamo il numero di elementi adoperati per ogni teoria. Prendiamo come esempio $7LP^{\times 12}-25LP^{\times 4}$, ossia usiamo 12 elementi con teoria 7LP e 4 elementi con teoria 25LP.

Modello	$-u_z \times 10^2 mm$	$-u_z \times 10^2 mm$	$\sigma_{yy} \times 10^3 MPa$	$-\sigma_{yz} \times 10^3 MPa$	DOF
	[0, L, h/2]	[0, L/2, h/2]	[b/2, L/2, h/2]	[b/2, L/2, 0]	
17LP	3.052	1.025	729	28.09	5049
$7LP^{\times 12}$ - $17LP^{\times 4}$	4.559	1.258	916	20.87	2961
$7LP^{\times 10}$ - $17LP^{\times 6}$	4.667	1.398	804	23.84	3321
$7LP^{\times 8}$ - $17LP^{\times 8}$	4.829	1.560	763	25.39	3681
$7LP^{\times 6}$ -1 $7LP^{\times 10}$	5.017	1.741	744	26.52	4041
$7LP^{\times 4}$ -1 $7LP^{\times 12}$	5.223	1.931	736	27.21	4401
25 LP	3.050	1.025	729	28.03	7425
$7LP^{\times 12}$ - $25LP^{\times 4}$	3.438	1.078	695	29.21	3537
$7LP^{\times 10}$ - $25LP^{\times 6}$	3.464	1.114	718	28.79	4185
$7LP^{\times 8}$ - $25LP^{\times 8}$	3.503	1.157	723	28.50	4833
$7LP^{\times 6}$ - $25LP^{\times 10}$	3.554	1.205	726	28.31	5481
$7LP^{\times 4}$ - $25LP^{\times 12}$	3.616	1.259	728	28.19	6129

Tabella 17.1: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a otto strati calcolate a y = L/2, usando il metodo Global/Local

Abbiamo studiato alcune grandezze importanti nella mezzeria, quali lo spostamento verticale, le tensioni normali e trasversali; inoltre abbiamo calcolato lo spostamento verticale al tip della trave. Se incominciamo appunto da u_z calcolato in [0, L, h/2] (si veda la tabella 17.1) vediamo che, aumentando il numero di elementi contraddistinti dalla teoria LW LE, questo parametro peggiora sempre di più. Questo è dovuto al fatto che abbiamo due interfacce, e quella più vicina al tip influenzerà sempre di più il calcolo dello spostamento. Anche u_z calcolato in [0, L/2, h/2] è interessato da fenomeni simili (anche se in misura minore, perchè stiamo aumentando i nodi con LW LE). Comunque questo fenomeno è meno evidente con le teorie 7LP-25LP in quanto hanno più punti di connessione rispetto alle teorie 7LP-25LP. Passiamo ora alle tensioni normali σ_{yy} (si vedano la tabella 17.1 e le figure 17.3 e 17.4). Possiamo vedere come aumentando i gradi di libertà



Figura 17.3: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati calcolate a y = L/2, usando il metodo Global/Local per LW LE3



Figura 17.4: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati calcolate a y = L/2, usando il metodo Global/Local per LW LE4



Figura 17.5: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati calcolate a y = L/2, usando il metodo Global/Local per LW LE3



Figura 17.6: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati calcolate a y = L/2, usando il metodo Global/Local per LW LE4

nelle zone centrali la soluzione migliora molto. Anche per le tensioni trasversali σ_{yz} si hanno fenomeni analoghi (tabella 17.1 e figure 17.5 e 17.6). Quando usiamo i polinomi di Lagrange a quattro nodi per ogni elemento (ossia 25 punti di Lagrange totali) si avvicina più velocemente alle soluzioni di riferimento e si possono quasi sovrapporre.

17.1.1 Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (Prima Parte)



Figura 17.7: Schema di due discretizzazioni usate per la sezione della trave a otto strati. Confronto Global/Local e NDK (prima parte)

In questa prima parte del confronto, vogliamo capire se si possano ottenere buoni risultati in punti distanti dall'interfaccia tra una sezione ESL Lagrange e una sezione LW LE, in particolare nella mezzeria della trave. Nel metodo Global/Local gli 8 elementi laterali avranno nodi con teorie ESL LE, gli otto elementi nel mezzo nodi con teorie LW LE (si veda la figura 17.7). Confronteremo questi risultati, con il metodo NDK, adoperando teorie TE (ovviamente in unione con LW LE). Per avere un numero simile di gradi di libertà inseriamo 54 nodi con ESL nelle parti esterne della trave, mentre nei restanti 45 nodi LW LE, come visualizzato in figura 17.7.

Adoperiamo tre metodi: FULL LW, Global Local e NDK. Per ogni metodo adoperato, si hanno le teorie 17LP o 25LP. Nel GL usiamo sia solo la teoria 7LP. Cominciando a vedere il primo parametro, ossia gli spostamenti verticali nella sezione di

17.1 – Analisi con il metodo Global/Local

Modello	$-u_z \times 10^2 mm$	$-u_z \times 10^2 mm$	$\sigma_{yy} \times 10^3 MPa$	$-\sigma_{yz} \times 10^3 MPa$	DOF
	[0, L, h/2]	[0, L/2, h/2]	[b/2, L/2, h/2]	[b/2, L/2, 0]	
17LP	3.052	1.025	729	28.09	5049
7LP-17LP _{,GL}	4.829	1.560	763	25.39	3681
$TE2-17LP_{,NDK}$	3.021	1.012	729	27.37	2781
$\text{TE7-17LP}_{,NDK}$	3.052	1.025	729	28.08	3591
25LP	3.050	1.025	729	28.03	7425
$7LP-25LP_{,GL}$	3.503	1.157	723	28.50	4833
$TE2-25LP_{,NDK}$	3.021	1.012	729	27.32	3861
$\text{TE7-25LP}_{,NDK}$	3.052	1.025	729	28.02	4671

Tabella 17.2: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a otto strati calcolate a y = L/2. Confronto tra Global/Local e NDK (prima parte)



Figura 17.8: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati calcolate a y = L/2. Confronto tra Global/Local e NDK per LW LE3 (prima parte)

mezzeria e nella sezione al tip (tabella 17.2) abbiamo una grande discrepanza quando adoperiamo il metodo Global Local. Se guardiamo le tensioni normali (tabella 17.2 e le figure 17.8 e 17.9) i risultati sono ottimi, anche per la teoria 7LP-17LP_{,GL}, che potrebbe portare più problematiche. Passando alle tensioni trasversali (tabella 17.2 e la figura 17.10 e 17.11), tutte le teorie sono ottime nel delinearle, anche se qualche problema insorge con la teoria 7LP-17LP_{,GL}. In questa sezione vediamo che il metodo Global Local lavori molto bene quando calcoliamo parametri distanti dall'interfaccia. Di nuovo, però, riscontriamo la grande difficoltà quando calcoliamo



Figura 17.9: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto stratical colate a y = L/2. Confronto tra Global/Local e NDK per LW LE4 (prima parte)



Figura 17.10: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati calcolate a y = L/2. Confronto tra Global/Local e NDK per LW LE3 (prima parte)



Figura 17.11: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto straticalcolate a y = L/2. Confronto tra Global/Local e NDK per LW LE4 (prima parte)

gli spostamenti al tip della trave.

17.1.2 Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (Seconda Parte)

In questa seconda parte del confronto, vogliamo capire se si possano ottenere buoni risultati in punti distanti dall'interfaccia tra una sezione ESL Lagrange e una sezione LW LE, in particolare al tip della trave. Nel metodo Global/Local gli 8 elementi vicini all'incastro avranno nodi con teorie ESL LE, gli otto elementi verso il tip nodi con teorie LW LE (si veda la figura 17.12). Confronteremo questi risultati, con il metodo NDK, adoperando teorie TE (ovviamente in unione con LW LE). Per avere un numero simile di gradi di libertà inseriamo 54 nodi con ESL nella parte iniziale della trave, mentre nei restanti 45 nodi LW LE, come visualizzato in figura 17.12.

Adoperiamo tre metodi: FULL LW, Global Local e NDK. Per ogni metodo adoperato, si hanno le teorie 17LP o 25LP. Nel GL usiamo solo la teoria 7LP. Cominciando a vedere il primo parametro, ossia gli spostamenti verticale nella sezione al tip (tabella 17.3) abbiamo una grande discrepanza quando adoperiamo il metodo Global Local. Se guardiamo le tensioni normali (tabella 17.3 e le figure 17.13 e 17.14) i risultati sono ottimi, anche per la teoria 7LP-17LP_{,GL}, che potrebbe portare più problematiche. Passando alle tensioni trasversali (tabella 17.3 e la figura



Figura 17.12: Schema di due discretizzazioni usate per la sezione della trave a otto strati. Confronto Global/Local e NDK (seconda parte)

Modello	$-u_z \times 10^2 mm$	$\sigma_{yy} \times 10^3 MPa$	$-\sigma_{yz} \times 10^3 MPa$	DOF
	[0, L, h/2]	[b/2, L/2, h/2]	[b/2, L/2, 0]	
17LP	3.052	204	11.54	5049
$7LP-17LP_{,GL}$	3.763	204	11.39	3645
$\text{TE2-17LP}_{,NDK}$	3.029	204	11.53	3033
$\text{TE6-17LP}_{,NDK}$	3.052	204	11.54	3609
25LP	3.050	285	11.48	7425
$7LP-25LP_{,GL}$	3.226	285	11.50	4833
$\text{TE2-25LP}_{,NDK}$	3.026	285	11.46	4257
$\text{TE6-25LP}_{,NDK}$	3.049	285	11.47	4833

Tabella 17.3: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a otto strati calcolate a y = L. Confronto tra Global/Local e NDK (seconda parte)

17.15 e 17.16), tutte le teorie sono ottime nel delinearle. In questa sezione vediamo che il metodo Global Local lavori molto bene quando calcoliamo parametri distanti dall'interfaccia. Di nuovo, però, riscontriamo la grande difficoltà quando calcoliamo gli spostamenti al tip della trave. Le tensioni, invece, vengono calcolate senza alcun problema. Spesso, si incontra questo fenomeno nel Global Local: gli spostamenti alle sezioni finali si discostano molto dalle soluzioni di riferimento, mentre le tensioni sono calcolate in maniera molto precisa.



Figura 17.13: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati calcolate a y = L. Confronto tra Global/Local e NDK per LW LE3 (seconda parte)



Figura 17.14: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto stratical
colate a y = L. Confronto tra Global/Local e NDK per LW LE4 (seconda parte)



Figura 17.15: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati calcolate a y = L. Confronto tra Global/Local e NDK per LW LE3 (seconda parte)



Figura 17.16: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto stratical
colate a y = L. Confronto tra Global/Local e NDK per LW LE4 (seconda parte)

17.1.3 Confronto tra il metodo Global/Local e il metodo NDK (Terza Parte)



Figura 17.17: Schema di due discretizzazioni usate per la sezione della trave a otto strati. Confronto Global/Local e NDK (terza parte)

In quest'ultima sezione, vogliamo capire se si possano ottenere buoni risultati in punti distanti dall'interfaccia tra una sezione ESL Lagrange e una sezione LW LE, in particolare vicino all'incastro a y = L/10 della trave (non a y = 0 per evitare di avere problemi connessi con le condizioni al contorno). Nel metodo Global/Local gli 8 elementi esterni avranno nodi con teorie ESL LE, gli otto elementi vicini all'incastro nodi con teorie LW LE (si veda la figura 17.17). Confronteremo questi risultati, con il metodo NDK, adoperando teorie TE (ovviamente in unione con LW LE). Per avere un numero simile di gradi di libertà inseriamo 54 nodi con ESL nelle parti interne della trave, mentre nei restanti 45 nodi LW LE, come visualizzato in figura 17.17.

Adoperiamo tre metodi: FULL LW, Global Local e NDK. Per ogni metodo adoperato, si hanno le teorie 17LP o 25LP. Nel GL usiamo solo la teoria 7LP. Cominciando a vedere il primo parametro, ossia gli spostamenti verticale nella sezione vicina all'incastro (tabella 17.4), gli spostamenti sono calcolati in maniera corretta da tutte le teorie. Nella sezione al tip, invece, abbiamo una grande discrepanza quando adoperiamo il metodo Global Local. Se guardiamo le tensioni normali (tabella 17.4 e le figure 17.18 e 17.19) i risultati sono ottimi, anche per la

Analisi con il metodo Global/Local di una trave a otto strati simmetrica con formulazione CUF 2D

Modello	$-u_z \times 10^2 mm$	$-u_z \times 10^2 mm$	$\sigma_{yy} \times 10^3 MPa$	$-\sigma_{yz} \times 10^3 MPa$	DOF
	[0, L, h/2]	[0, L/10, h/2]	[b/2, L/10, h/2]	[b/2, L/10, 0]	
17LP	3.052	0.079	1333	25.70	5049
$7LP-17LP_{,GL}$	3.770	0.079	1336	26.08	3645
$TE2-17LP_{,NDK}$	3.023	0.079	1333	25.66	3033
$TE6-17LP_{,NDK}$	3.053	0.079	1333	25.69	3609
25LP	3.050	0.079	1333	25.66	7425
$7LP-25LP_{,GL}$	3.237	0.079	1333	25.58	4833
$TE2-25LP_{,NDK}$	3.023	0.079	1333	25.62	4257
$TE6-25LP_{,NDK}$	3.052	0.079	1333	25.65	4833

Tabella 17.4: Calcolo degli spostamenti e tensioni per trave a otto strati calcolate a y = L/10. Confronto tra Global/Local e NDK (terza parte)



Figura 17.18: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto strati calcolate a y = L/10. Confronto tra Global/Local e NDK per LW LE3 (terza parte)

teoria 7LP-17LP_{,GL}, che potrebbe portare più problematiche. Passando alle tensioni trasversali (tabella 17.4 e la figura 17.20 e 17.21), tutte le teorie sono ottime nel delinearle, anche se qualche problema insorge con la teoria 7LP-17LP_{,GL}. In questa sezione vediamo che il metodo Global Local lavori molto bene quando calcoliamo parametri distanti dall'interfaccia. Di nuovo, però, riscontriamo la grande difficoltà quando calcoliamo gli spostamenti al tip della trave. Possiamo, infine, notare che quando calcoliamo le grandezze vicino all'incastro tutti i parametri sono delineati in maniera ottima.



Figura 17.19: Tensioni normali nel laminato simmetrico a otto straticalcolate a y = L/10. Confronto tra Global/Local e NDK per LW LE4 (terza parte)



Figura 17.20: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto strati calcolate a y = L/10. Confronto tra Global/Local e NDK per LW LE3 (terza parte)



Figura 17.21: Tensioni trasversali nel laminato simmetrico a otto stratical
colate a y = L/10. Confronto tra Global/Local e NDK per LW LE4 (terza parte)

Capitolo 18

Comportamento in post-buckling di una trave a due strati con formulazione CUF 1D



Figura 18.1: Schema della sezione della trave a due strati

18.1 Dati del problema

Per capire le potenzialità della formulazione CUF nell'ambito dell'analisi delle non linearità geometriche, studiamo il comportamento in post-buckling di una beam. La sezione iniziale è incastrata, mentre sulla sezione finale è esercitata una forza di compressione e un piccolo difetto di carico d = 0.2N lungo l'asse delle z per rinforzare la diramazione stabile, dopo che si è raggiunto il carico di buckling. La trave ha una lunghezza pari a L = 9m, mentre l'ampiezza della sezione è b = 1m e l'altezza è h = 0.6m (figura 18.1). La trave è composta di due strati con laminazione $[0,45]^o$, sempre dello stesso materiale ortotropo (grafite/epoxy AS4/3501-06) che ha le seguenti proprietà: $E_L = 144.8GPa, E_2 = E_T = E_z = 9.65GPa, \nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.3, G_{LT} = G_{Lz} = 4.14GPa$ e $G_{Tz} = 3.45GPa$. Usiamo sempre venti elementi B4 lungo l'asse della beam. Nella prima sezione del capitolo usiamo un'unica teoria per tutta la teoria della trave, mentre nella seconda confronteremo il metodo NDK con Taylor e il Global/Local illustrato in questa tesi. Le grandezze che prenderemo come riferimento sono gli spostamenti u_y e u_z calcolati al tip della trave, che sono adimensionalizzati con l'altezza della sezione:

$$\overline{u}_y = -\frac{u_y}{h} \tag{18.1}$$

$$\overline{u}_z = \frac{u_z}{h} \tag{18.2}$$

e le tensioni normali σ_{yy} e trasversali σ_{yz} calcolate in mezzeria, adimensionalizzate, rispettivamente:

$$\overline{\sigma}_{yy} = \frac{\sigma_{yy}bh^2}{PL} \tag{18.3}$$

$$\overline{\sigma}_{yz} = \frac{\sigma_{yy}h^2}{P} \tag{18.4}$$

Abbiamo inoltre adimensionalizzato il carico che varia nella simulazione come :

$$\overline{P} = \frac{PL^2}{bh^3 E_2} \tag{18.5}$$

Nell'analisi non lineare delineeremo la curva carico-spostamento in equilibrio statico e perciò potremmo calcolare le tensioni in corrispondenza di diversi carichi. Decidiamo dunque di prendere le tensioni calcolate quando il carico adimensionalizzato è $\overline{P} = 1$.

In questa analisi continueremo a utilizzare la notazione introdotta nel capitolo 17 in cui abbiamo indicato il numero dei punti di Lagrange nella sezione. Inoltre, nel presente capitolo abbiamo introdotto dei colori per indicare il tipo di polinomio adottato: se usiamo degli elementi a 9 nodi abbiamo il colore blu, per gli elementi a 16 nodi il colore rosso. Per esempio ELE9 diventerà blu e sarà denominato 9LP, 2LE9 sarà sempre blu e verrà rinominato 15LP. Per quanto riguarda la notazione delle teorie con i polinomi di Taylor, non cambierà nulla, a parte il fatto che saranno associate al colore nero.

18.2 Analisi con unica teoria della sezione

Come fatto nei capitoli precedenti, dobbiamo confrontare le capacità della nuova strategia ESL Lagrange con quelle già collaudate in letteratura (Taylor e LW Lagrange). Anche nell'analisi nonlineare riscontreremo delle caratteristiche intermedie tra il LW LE e TE, ossia la possibilità di discretizzare in molti modi la sezione e ritrovare andamenti delle tensioni analoghi a Taylor. Useremo per i casi LW Lagrange elementi 15LP e 28LP, per i casi ESL Lagrange 9LP e 16LP (un'unica discretizzazione per tutta la sezione) e per i casi Taylor TE3 e TE4. Nelle figure mostriamo tra parentesi i gradi di libertà della struttura (DOF). Prima di tutto calcoliamo gli spostamenti per dimostrare che questa nuova strategia riesca a catturare le caratteristiche del post-buckling. Nelle figure 18.2 e 18.3 vediamo come tutti i polinomi adoperati, anche quelli nuovi, riescano a delineare in maniera ottima il percorso carico-spostamento. Passando alle tensioni normali in figura 18.4 tutte le teorie si sovrappongono alla teoria più accurata 28LP. Per le tensioni trasversali raffigurate in figura 18.5 gli andamenti sono molto più varii (come di consueto per queste tensioni). L'unica teoria che riesca a soddisfare le condizioni di continuità all'inerfaccia e l'annullamento delle tensioni agli estremi liberi è 28LP. TE4 riesce ad avvicinarsi. Le teorie ESL Lagrange hanno diversi problemi, infatti, a parità di gradi di libertà, si comportano in maniera peggiore rispetto ai corrispondenti polinomi di Taylor.



Figura 18.2: Spostamenti u_y nel laminato a due strati calcolati a y = L.



Figura 18.3: Spostamenti u_z nel laminato a due strati calcolati a y = L.



Figura 18.4: Tensioni normali σ_{yy} nel laminato a due strati calcolate a y = L/2 per il carico adimensionalizzato $PL^2/(bh^3E_2) = 1$.



Figura 18.5: Tensioni trasversali σ_{yz} nel laminato a due strati calcolate a y = L/2per il carico adimensionalizzato $PL^2/(bh^3E_2) = 1$.



Figura 18.6: Schema di due discretizzazioni usate per la sezione della trave a due strati usando il metodo Global/Local

18.3 Analisi con NDK e Global/Local

In questa sezione confrontiamo diversi tipi di teorie. Usiamo prima di tutto delle teorie Full LW LE (ovvero in tutti i nodi FEM ci sono LW LE) 15LP e 28LP, poi una teoria Full Taylor TE2. Adopereremo l'NDK nella combinazione TE2-LWLE. Le teorie LW LE sono presenti nei nodi FEM centrali dal numero 22 al numero 40 partendo dall'incastro, negli altri invece TE2. Infine utilizziamo il metodo Global/Local con le combinazioni 9LP-15LP e 16LP-28LP: nei sei elementi centrali dal numero 8 al 13 usiamo la teoria 28LP (o 15LP), negli altri 16LP (o 9LP). Si veda la figura 18.6.

Partendo dal calcolo dello spostamento al tip lungo l'asse delle y (si vedano le figure 18.7 e 18.8) e dallo spostamento verticale nello stesso punto (figure 18.9 e 18.10), notiamo che tutte le teorie sono in grado di delineare in maniera ottima la curva, a parte la teoria 16LP-28LP, GL. Continuando con le tensioni normali, calcolate in mezzeria, vediamo il loro consueto andamento discontinuo e lineare (si vedano le figure 18.11 e 18.12). Nell'analisi con la teoria TE2 vi è qualche discrepanza, però con 16LP-28LP, GL non riusciamo in alcun modo ad evidenziare il comportamento delle tensioni. Concludendo con le tensioni trasversali, dobbiamo distinguere tra la teoria TE2 (si veda la figura 18.13 oppure 18.14), le teorie in cui abbiamo usato 15LP per la parte Layer Wise (figura 18.13) e le teorie in cui abbiamo usato 28LP per la parte Layer Wise (figura 18.14). Con TE2 abbiamo soltanto un comportamento vicino al lineare. Per tutte le teorie con LW 15LP abbiamo ovviamente un comportamento lineare per ogni strato, però sono tutte molto vicine tra di loro. Quando passiamo alle teorie con LW 28LP, i metodi FULL LW e gli NDK riescono perfettamente a delineare le tensioni, mentre il metodo GL non riesce in alcun modo ad avvicinarsi. Come abbiamo notato nel corso di questa sezione, nell'ambito del metodo GL, non sempre le teorie con più gradi di libertà sono migliori, in quanto il numero di punti di Lagrange connessi tra due teorie è una variabile molto importante. Per questo la teoria 9LP-15LP, GL è migliore della 16LP-28LP, GL.



Figura 18.7: Spostamenti u_y nel laminato a due strati calcolati a y = L con polinomi LE9. Confronto tra metodi NDK e Global/Local.



Figura 18.8: Spostamenti u_y nel laminato a due strati calcolati a y = L con polinomi LE16. Confronto tra metodi NDK e Global/Local.



Figura 18.9: Spostamenti u_z nel laminato a due strati calcolati a y=L con polinomi LE9. Confronto tra metodi NDK e Global/Local.



Figura 18.10: Spostamenti u_z nel laminato a due strati calcolati a y = L con polinomi LE16. Confronto tra metodi NDK e Global/Local.



Figura 18.11: Tensioni normali σ_{yy} nel laminato a due strati calcolate a y = L/2 con polinomi LE9 per il carico adimensionalizzato $PL^2/(bh^3E_2) = 1$. Confronto tra metodi NDK e Global/Local.



Figura 18.12: Tensioni normali σ_{yy} nel laminato a due strati calcolate a y = L/2 con polinomi LE16 per il carico adimensionalizzato $PL^2/(bh^3E_2) = 1$. Confronto tra metodi NDK e Global/Local.



Figura 18.13: Tensioni trasversali σ_{yz} nel laminato a due strati calcolate a y = L/2con polinomi LE9 per il carico adimensionalizzato $PL^2/(bh^3E_2) = 1$. Confronto tra metodi NDK e Global/Local.



Figura 18.14: Tensioni trasversali σ_{yz} nel laminato a due strati calcolate a y = L/2 con polinomi LE16 per il carico adimensionalizzato $PL^2/(bh^3E_2) = 1$. Confronto tra metodi NDK e Global/Local.

Capitolo 19

Comportamento in post-buckling di un pannello rinforzato

19.1 Dati del problema



Figura 19.1: Schema del pannello rinforzato.

In quest'ultimo capitolo dedicato alle simulazioni numeriche, vogliamo replicare il comportamento in post-buckling di un pannello rinforzato in materiale composito. Tale elemento è stato studiato nei laboratori sperimentali. Vorremmo replicare i risultati nel modo più accurato possibile, usando la nuova strategia ESL Lagrange, al fine di ridurre in maniera consistente i gradi di libertà del modello e dunque i tempi di calcolo. Nella figura 19.1 è riportato lo schema del pannello, con il sistema



Figura 19.2: Schema della sezione del pannello rinforzato.



Figura 19.3: Le due laminazioni usate nel pannello rinforzato.

di riferimento. Lungo la direzione y, il pannello si estende per L = 790mm. Nella figura 19.2 mostriamo parte della sezione, in cui sono descritte le dimensioni: h = 39.3mm, $t_1 = 7.32mm$, $h_1 = 9.52mm$, $h_2 = 3.66mm$, b = 270mm e h = 70.0mm.

E' caricato da una forza di pressione diretta versa la direzione y nella sezione iniziale (le frecce rosse indicano proprio la pressione), a y = 0. Per replicare le condizioni al contorno sperimentali, inoltre, abbiamo imposto degli spostamenti ad alcune sezioni: in y = 0 abbiamo $u_x = u_z = 0$, in y = 50mm abbiamo $u_z = 0$, in y = 740mm abbiamo $u_z = 0$, in y = 790mm abbiamo $u_x = u_y = u_z = 0$ (si veda anche la figura 19.1). Ora passiamo alle proprietà del materiale. Abbiamo, come già accennato prima, un materiale composito (AS4) che ha le seguenti proprietà: $E_1 = 1.19 \times 10^5 MPa_z = E_T = E_z = 9.80 \times 10^3 MPa$, $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{zT} = 0.316$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 4.70 \times 10^3 MPa.$

Il pannello è composto da diversi strati, variabili a seconda della zona di interesse. Nella figura 19.3 notiamo come la parte verticale del corrente sia costituita da un numero molto elevato di strati (quaranta) e con laminazioni diverse, mentre nella parte orizzontale del corrente (la parte più spessa) le laminazioni sono cinquantadue. Nella parte considerata propriamente piastra abbiamo trenta strati. Ogni lamina è spessa 0.183mm. Quando vediamo uno strato più spesso, vuol dire che vi sono due strati con la stessa laminazione. Come possiamo vedere ci sono quattro tipi di laminazioni: 90° , 45° , 0° , -45° .

In questo capitolo ci occuperemo nello specifico di calcolare con l'analisi non lineare due spostamenti $(u_y \in u_z)$ in tre punti caratteristici (A, B, C) che possono essere visualizzati in figura 19.1. Il punto A è situato in [0,203.34, -5.86]mm, B in [0,395.00, -5.86]mm e C in [0,586.67, -5.86,]mm. La ragione di questa scelta è dovuta al fatto che nella parte di piastra vera e propria si creano tre gobbe, e i tre punti studiati corrispondono agli apici di queste formazioni caratteristiche del postbuckling.



Figura 19.4: Le tre discretizzazioni usate nell'analisi. Con i colori indichiamo le diverse disposizioni degli strati all'interno dei sottodominii. strati, : 32 strati , : 20 strati, : 20 strati, : 16 strati, : 16 strati (colori uguali corrispondono a disposizioni uguali delle laminazioni).

Nel presente capitolo, dato che dobbiamo necessariamente adoperare dei metodi non lineari, poichè si innescano dei fenomeni di post-buckling nella struttura, usiamo soltanto la formulazione CUF 1D che è stata descritta nella parte teorica. Grazie alla CUF possiamo studiare anche geometrie più complesse. Infatti lungo l'asse delle y troveremo una discretizzazione FEM, mentre nella sezione useremo la formulazione CUF 1D. Per quanto riguarda la mesh FEM, a causa delle complesse condizioni al contorno, adotteremo sempre un elemento B2 per ognuna delle estremità, lunghe 50mm, della piastra; invece la parte centrale sarà discretizzata da sei elementi B4. Passando alla sezione del pannello rinforzato, studieremo tre teorie FULL ESL Lagrange, che, per chiarezza, sono visualizzate nella figura 19.4. Come possiamo vedere, adoperiamo,anche qui, la notazione con i punti di Lagrange: 18ELE9 diventa 103LP, 30ELE9 diventa 167LP e 36ELE9 diventa 181LP.

19.2 Analisi di convergenza per il modello LW



Figura 19.5: Analisi di convergenza in [0,50.00, -5.86]mm per il pannello rinforzato con metodo LW (11355 LP).

Con il modello LW LE9 con 10267 punti di Lagrange (10267LP) non riusciamo a implementare una discretizzazione FEM con 2 B2 e 6 B4 (per un totale di 21 nodi FEM) perchè arriveremmo a 648821 DOF. A causa di queste dimensioni la memoria virtuale del mio computer non è sufficiente e bisognerebbe usare elaboratori elettronici più potenti e veloci. Perciò abbiamo deciso di fare un'analisi di convergenza
Modello	$u_y[m]$	N° punti FEM	DOF
2B2-1B2	0.003206	4	123204
2B2 - 1B3	0.003295	5	154005
2B2-1B4	0.003296	6	184806
2B2-2B2	0.003281	5	154005
2B2-2B3	0.003303	7	215607
2B2-3B2	0.003290	6	184806
2B2-4B2	0.003297	7	215607
2B2-5B2	0.003301	8	246408

Tabella 19.1: Analisi di convergenza in [0,50.00, -5.86]mm per il pannello rinforzato con metodo LW (11355 LP).

la quale, a differenza di quelle contenute nei capitoli precedenti, è molto limitata. Abbiamo usato le condizioni al contorno già analizzate e la forza applicata verso y nella sezione iniziale y = 0 è $F_y = 810000N$ (o, meglio, la pressione per l'area della sezione). Come si può notare dalla figura 19.5 e dalla tabella 19.1, riusciamo ad arrivare a cinque elementi centrali con B2 (i due B2 esterni servono per creare le condizioni al contorno), con B3 a due elementi, mentre con B4, arriviamo a un solo punto. Nel prosieguo dell'analisi lineare utilizzeremo la discretizzazione FEM 2B2-2B3 in quanto ci garantisce il valore migliore.

19.3 Analisi lineare

Modello	$u_y[m]$	$F_y[N]$	$K_y[N/m]$	DOF
ESP1	0.003328	755600	2.2704×10^8	
ESP2	0.003350	759900	2.2684×10^8	
ESP3	0.003337	760700	2.2796×10^{8}	
LW(10267LP)	0.003303	810000	2.4523×10^8	246408
TE1	0.003887	810000	2.0838×10^8	189
${ m TE5}$	0.003322	810000	2.4383×10^8	1323
103LP	0.003326	810000	2.4357×10^{8}	6489
167 LP	0.003326	810000	2.4357×10^{8}	10521
181LP	0.003326	810000	2.4357×10^8	11403

Tabella 19.2: Calcolo dello spostamento e della rigidezza assiali in [0,50.00, -5.86]mm per il pannello rinforzato.

Prima di poter concentrarci sull'analisi non lineare della struttura, dobbiamo dimostrare come i risultati per le analisi lineari siano simili per diversi tipi di teorie.

Comportamento in post-buckling di un pannello rinforzato

Modello	$u_z[m]$	$F_z[N]$	$K_z[N/m]$	DOF
LW(10267LP)	0.375	600000	1.60×10^{6}	246408
TE1	0.409	600000	1.47×10^{6}	189
TE5	0.380	600000	1.58×10^{6}	1323
103LP	0.391	600000	1.53×10^{6}	6489
167LP	0.391	600000	1.53×10^{6}	10521
181LP	0.391	600000	1.53×10^6	11403

Tabella 19.3: Calcolo dello spostamento e della rigidezza trasversali in [0,0,-5.86]mm per il pannello rinforzato.

In questa sezione confrontiamo varii modelli: tre situazioni sperimentali (ESP1, ESP2, ESP3), un modello LW LE9, due modelli Taylor (TE1 e TE5), e i tre modelli ESL LE presentati nella sezione precedente (103LP, 167LP e 181LP). Nella tabella 19.2 abbiamo deciso di prendere, come parametri di confronto, gli spostamenti u_y nel punto [0,50.00, -5.86]mm e la rigidezza assiale K_y . Abbiamo applicato una forza verso l'asse delle y nella sezione y = 0. Possiamo notare che i risultati sono simili tra di loro (con leggere deviazioni rispetto alle analisi sperimentali), mentre la teoria TE1 è molto distante dalle soluzioni di riferimento.

Nella tabella 19.3, invece, studiamo lo spostamento u_z e la rigidezza trasversale K_z . Abbiamo applicato una forza verso l'asse delle z nella sezione y = 0. Inoltre abbiamo cambiato le condizioni al contorno, imponendo un incastro solo nella sezione y = 790mm. Questa analisi è stata condotta solo attraverso simulazioni numeriche. Come possiamo notare le teorie LW, ESL LE e il modello TE5 sono vicine, mentre la teoria TE1 è più distante. In conclusione possiamo incominciare a studiare il problema in maniera più approfondita con ESL Lagrange. Ovviamente nulla ci garantisce che queste teorie siano corrette per il problema in esame e servirebbe fare analisi ulteriori con teorie LW.

19.4 Calcolo degli spostamenti per l'analisi in postbuckling

Ora studiamo il post-buckling, confrontando le tre teorie ESL Lagrange (103LP, 167LP, 181LP). Inoltre dobbiamo dire che abbiamo trasformato la pressione(che varia con il metodo arc-length) vista nella prima sezione, moltiplicandola con l'area della sezione. Incominciamo con il descrivere i due spostamenti u_y e u_z , calcolati al centro della piastra (nel punto B), in [0,395.00, -5.86]mm. Nella figura 19.6 notiamo che le tre teorie siano molto vicine tra di loro e abbiamo un andamento vicino alla linearità. Nella figura 19.7, invece, abbiamo il comportamento tipico del post-buckling: i tre modelli riescono a delineare la prima parte in maniera



Figura 19.6: Spostamenti u_y nel pannello rinforzato calcolati nel punto B (a y = 395.00mm). Confronto tra le tre teorie ESL LE.



Figura 19.7: Spostamenti u_z nel pannello rinforzato calcolati nel punto B (a y = 395.00mm). Confronto tra le tre teorie ESL LE.



Figura 19.8: Spostamenti u_y nel pannello rinforzato calcolati nel punto A (a y = 203.34mm), nel punto B (a y = 395.00mm), nel punto C (a y = 586.67mm) usando la teoria 103LP.

praticamente identica. Ci sono stati problemi computazionali nella parte finale dell'analisi della teoria 181LP, che però non inficiano in maniera particolare la bontà dei risultati (la piastra nella realtà si rompe prima di questo problema numerico).

Dopo aver confrontato tre teorie diverse, scegliamo 103LP (ha infatti il minor numero di gradi di libertà) per calcolare i due spostamenti u_y e u_z nei tre punti caratteristici A, B e C. Nella figura 19.8 raffigurante lo spostamento u_y , abbiamo riprodotto tre curve, una per ogni punto e hanno andamenti simil-lineari. Abbiamo anche inserito due figure della deformata per mostrare come cambi al variare del carico il comportamento della struttura. Nella figura 19.9 investighiamo sullo spostamento u_z . Notiamo di nuovo il classico comportamento nel post-buckling. Inoltre i punti A e B hanno un comportamento simile, mentre il punto C aumenta sempre di più il proprio spostamento trasversale (almeno fino al punto in cui abbiamo fatto l'analisi). Le figure delle deformate illustrano bene questo fenomeno.

19.5 Studio di due modi di buckling della struttura

In questa ultima sezione vedremo come possiamo ottenere diverse curve sforzodeformazione, pur avendo la stessa struttura, usando lo stesso modello, ma variando leggermente i parametri nell'analisi non lineare. Infatti, quando studiamo un



Figura 19.9: Spostamenti u_z nel pannello rinforzato calcolati nel punto A (a y = 203.34mm), nel punto B (a y = 395.00mm), nel punto C (a y = 586.67mm) usando la teoria 103LP.

caso di una struttura che entra nel regime di post-buckling particolarmente complessa, come quella di questo capitolo, possiamo trovare diverse curve di equilibrio. Bastano piccole variazioni nei parametri per spostarci su diverse curve. Questi diversi equilibri non sono caratteristici della sola simulazione numerica, ma sono connaturate nella struttura reale: piccoli difetti di costruzione o di carico possono portarci a risultati molto differenti. Tale problema può essere studiato in prima approssimazione con il buckling lineare (che in questo tesi non tratteremo) dove possiamo ricavare i modi di deformazione della struttura e i valori dei carichi nei quali si presentano (si veda ad esempio [45]). Ritornando all'analisi non lineare, abbiamo trovato due modi di deformarsi della struttura. Il modo 1 era stato già trovato nella sezione precedente, mentre il modo 2 è stato ricavato cambiando leggermente i parametri per l'analisi non lineare. Calcoliamo gli spostamenti assiale e trasversale nel punto B, al centro della piastra. Nei grafici abbiamo inserito le deformate per il solo modo 2. Nella figura 19.10 notiamo che nella parte lineare sono coincidenti, e successivamente le due curve incominciano a discostarsi sempre di più. Per quanto riguarda lo spostamento u_z in figura 19.11 le differenze sono ancora più marcate, e si nota come il comportamento in post-buckling per il modo 2 incominci a un carico più basso.



Figura 19.10: Spostamenti u_y nel pannello rinforzato calcolati nel punto B (a y = 395.00mm). Confronto per diversi modi di buckling usando la teoria 103LP.



Figura 19.11: Spostamenti u_z nel pannello rinforzato calcolati nel punto B (a y = 395.00mm). Confronto per diversi modi di buckling usando la teoria 103LP.

Capitolo 20 Conclusioni

A complemento dei risultati già illustrati nei capitoli precedenti, in questo capitolo conclusivo illustreremo i vantaggi e gli svantaggi della strategia ESL Lagrange. Infatti è bene avere un quadro complessivo di ciò che è possibile fare con questo metodo, il quale è sicuramente molto potente e meno dispendioso rispetto al LW Lagrange, ma ha molti limiti, che abbiamo anche riscontrato precedentemente. Infine proporremo alcune analisi che in futuro potrebbero essere interessanti con questa strategia.

20.1 Vantaggi di ESL LE

Come si è potuto notare il metodo proposto è molto versatile, perchè abbiamo la possibilità di studiare in molti modi una stessa struttura laminata, usando sempre e solo dei polinomi di Lagrange. Questi polinomi, infatti a differenza di quelli di Taylor, possono essere usati per discretizzare sezioni anche molto complicate di una beam o di un piastra, o anche di uno shell. Inoltre siamo molto più liberi dal punto di vista dell'implementazione delle condizioni al contorno, poichè per alcuni casi è difficile (o impossibile) con Taylor garantire tale condizioni.

Ritornando ai polinomi di Lagrange, questi erano utilizzati solo per il metodo Layer Wise, il quale sicuramente garantisce risultati migliori, soprattutto per quanto concerne le tensioni, ma ci porta a un incremento notevole di gradi di libertà, che si traduce nei casi non lineari in un aumento esponenziale del tempo di calcolo. Dunque, al fine di unire le potenzialità dei Lagrange con il costo minore dei metodi ESL, si è deciso di optare per i ESL LE. Come si è visto nella sezione delle simulazioni numeriche, siamo riusciti a studiare una struttura in moltissimi modi e a garantire diversi gradi di accuratezza. In alcuni casi adottavamo un ESL puro, ossia tutta la sezione era un unico dominio, che comprendeva le laminazioni, mentre negli agli casi, usavano diversi dominii che comprendevano un numero di strati scelto da noi. Ad esempio possiamo suddividere un struttura a quattro layer in due domini di uguale dimensione, oppure due dominii, in cui nel primo vi sono tre layer e nel secondo un solo strato, al fine di studiare meglio quest'ultimo layer. Possiamo anche individuare le tensioni all'interfaccia di due layer se mettiamo a cavallo due elementi simil-LW e nel resto della sezione uno o più elementi simil-ESL. In pratica abbiamo usato insieme i metodi ESL e LW. Si riescono dunque a studiare i punti che sono per noi più interessanti. Ovviamente questi discorsi possono essere fatti solo per alcuni casi, perchè potremmo essere interessati a conoscere le tensioni lungo l'intero spessore e solo un Layer Wise può garantirci questa condizione. Come anche per Taylor, i problemi nascono soprattutto per le tensioni, mentre per gli spostamenti, in genere, ve ne sono molto pochi. Se incominciamo a studiare l'influenza del numero di strati, i risultati migliorano con l'aumentare di questi ultimi. Infatti, a parità di tipo di discretizzazione (poniamo il caso di due ESL che dividono a metà la struttura) una beam a otto strati avrà risultati migliori di una a quattro o sei strati.

Abbiamo visto le sua capacità sia per la formulazione 1D che 2D (anche per lo shell) nell'ambito lineare. Queste possono essere usate per studiare travi o piastre, di qualsiasi spessore e riportano buoni risultati. Per poter migliorare le difficoltà di calcolo delle tensioni in alcune sezioni di particolare interesse potremmo implementare in futuro l'NDK anche con ESL LE. Il Global/Local ci ha fornito buoni risultati, seppur con qualche distinguo. Infine abbiamo studiato il nonlineare. I risultati sono ottimi per gli spostamenti nel Full ESL LE e Global/Local e abbiamo comportamenti analoghi a quanto avevamo già per i casi lineari.

20.2 Svantaggi di ESL LE

Uno dei principali svantaggi è sicuramente la perdita di informazioni all'aumentare del numero di strati per ogni dominio ESL. Ovviamente tutte le proprietà dei vari strati verrano uniformate in unico grande strato, e non potremo studiare in maniera opportuna le tensioni in questi strati. Inoltre all'interfaccia dei dominii della sezione ci sono dei salti artificiali per alcune tensioni, che non dovrebbero essere presenti.

Abbiamo detto che è uno strumento molto potente per studiare i laminati, ma non per tutte le condizioni; infatti quando si studiano i casi di estremi liberi (come la piastra di Pipes-Pagano) non si riesce in alcun modo ad ottenere risultati validi. Per il caso di una piastra sandwich abbiamo riscontrato molti problemi sia nel calcolo degli spostamenti che delle tensioni. Nei lavori futuri dovremmo analizzare anche piastre di questo genere, ma con facce superiore e inferiore formate da più lamine. Lo shell ha mostrato un comportamento buono per gli spostamenti, mentre nelle tensioni si vedono i suoi limiti, accentuati anche dal fatto che era una struttura composta da pochi strati, tre in particolare. In definitiva possiamo ribadire la sua difficoltà nel predire le tensioni trasversali quando ci sono pochi strati nella sezione.

Se passiamo poi al Global/Local, vediamo che dobbiamo prestare molta attenzione. Infatti in alcuni frangenti i risultati sono molto promettenti (per esempio quando calcoliamo delle grandezze vicino all'incastro), in altri sono molto lontani dalla soluzione di riferimento. Questo è dovuto soprattutto al fatto che quando colleghiamo due sezioni costruite con due discretizzazioni diverse, la struttura non è unita perfettamente. Questo porta a spazi vuoti e compenetrazioni quando applichiamo dei carichi. Perciò è bene calcolare le grandezze lontano dall'interfaccia delle due sezioni. Aumentando, inoltre, le intersezioni, i risultati possono peggiorare ancora.

Infine, concentrandoci sul nonlineare notiamo gli stessi problemi già riscontrati per il lineare, sia nell'ambito del FULL LW che nel Global/Local.

20.3 Sviluppi futuri

Le potenzialità della nuova strategia potrebbero non esaurirsi negli esempi riportati in questo lavoro, in quanto siamo rimasti sempre nell'ambito del lineare statico e del non lineare geometrico statico. Un campo di interesse, studiato molto anche in letteraratura tramite la formulazione CUF ([8], [9] e [12] solo per citarne alcuni) è l'analisi in frequenza che ha dato ottimi risultati. Inoltre, dovremmo esplorare il vasto mondo del Multifield, in cui uniamo le forze di origine meccanica, trattate in questa tesi, con forze di altro genere come quella elettrica o magnetica, oppure con campi di temperatura ([21], [17] e [33]). Ritengo che la nuova metodologia possa funzionare in questi casi in modo molto valido, dato che anche le teorie con Taylor lavoravano ottimamente.

Infine, sarebbe molto interessante sviluppare un ulteriore tipo di Global/Local applicato all'ambito nonlineare. In molti casi infatti ([37], [38] e [39]) solo alcune sezioni delle strutture si deformano in modo importante, mentre altre hanno deformazioni più modeste, che possono essere studiate con un analisi lineare. In pratica faremmo un'analisi lineare per tutta la struttura e poi andiamo a studiare solo una parte della struttura con un'analisi nonlineare, facendo bene attenzione a definire delle condizioni al contorno all'interfaccia. Dato che queste ultime possono variare nel percorso carico-spostamenti, potremmo fare analisi lineari intermedie per poter cambiare queste condizioni.

Come ultimo suggerimento, dovremmo fare un confronto con i polinomi di Legendre, già ampiamente usati nell'ambito della formulazione CUF ([11], [13], [17] e [25]).

Bibliografia

- M. R. T. Arruda, L. M. S Castro, A. J. M. Ferreira, M. Garrido, J. Gonilha, J. R. Correia, Analysis of composite layered beams using Carrera unified formulation with Legendre approximation, Elsevier, 2017.
- [2] M. R. T. Arruda, L. M. S Castro, A. J. M. Ferreira, D. Martins, *Physically non-linear analysis of beam models using Carrera Unified Formulation, Composite Structures*, 2018.
- [3] F. Biscani, G. Giunta, S. Belouettar, E. Carrera and H. Hu Variable kinematic plate elements coupled via Arlequin method, Int. J. Numer. Meth. Engng (2012), Wiley&Sons, 2012.
- [4] A. I. Borisenko, I. E. Tarapov, translated by Richard A. Silverman Vector and Tensor Analysis with Applications, Dover Books on Mathematics, Courier Corporation, 2012.
- [5] E. Carrera, A study on arc-length-type methods and their operation failures illustrated by a simple model. Comput Struct 1994;50(2):217-29., Elsevier, 1994.
- [6] E. Carrera, Single- vs Multilayer Plate Modelings on the Basis of Reissner's Mixed Theorem, AIAA JOURNAL Vol. 38, No. 2, February 2000, 2000.
- [7] E. Carrera, A priori vs. a posteriori evaluation of transverse stresses in multilayered orthotropic plates, Composite Structures 48 (2000) 245-260, Elsevier, 2000.
- [8] E. Carrera, An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates, Composite Structures 50 (2000)

183-198, Elsevier, 2000.

- [9] E. Carrera, Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells, Appl Mech Rev vol 54, no 4, July 2001, 2001.
- [10] E. Carrera, Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells, Arch. Comput. Meth. Engng. Vol. 9, 2, 87-140 (2002), 2002.
- [11] E. Carrera, L.Demasi, Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 1: Derivation of finite element matrices, Int. J. Numer. Meth. Engng 2002; 55:191-231, 2002.
- [12] E. Carrera, Theories and Finite Elements for Multilayered Plates and Shells: A Unified Compact Formulation with Numerical Assessment and Benchmarking, Arch. Comput. Meth. Engng. Vol. 10, 3, 215-296 (2003), 2003.
- [13] E. Carrera, Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells, Appl Mech Rev vol 56, no 3, May 2003, 2003.
- [14] E. Carrera, L.Demasi, Two Benchmarks to Assess Two-Dimensional Theories of Sandwich, Composite Plates, AIAA JOURNAL Vol. 41, No. 7, July 2003, 2003.
- [15] E. Carrera, A. Ciuffreda, Bending of composites and sandwich plates subjected to localized lateral loadings: a comparison of various theories, Composite Structures 68 (2005) 185-202, Elsevier, 2005.
- [16] E. Carrera, A. Ciuffreda, A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems, Composite Structures 69 (2005) 271-293, Elsevier, 2005.
- [17] E. Carrera, M. Boscolo, Classical and mixed finite elements for static and dynamic analysis of piezoelectric plates, Int. J. Numer. Meth. Engng 2007; 70:1135-1181, John Wiley & Sons, Ltd., 2007.

- [18] E. Carrera, G. Giunta, M. Petrolo, *Beam Structure: classical and advanced theories*, John Wiley and Sons, 2011.
- [19] E. Carrera, A. Pagani, M. Petrolo, Use of Lagrange multipliers to combine 1D variable kinematic finite elements. In: COMPUTERS & STRUCTURES, vol. 129, pp. 194-206., Elsevier, 2013.
- [20] E. Carrera, M.Filippi, E.Zappino, Free vibration analysis of laminated beam by polynomial, trigonometric, exponential and zig-zag theories, Journal of Composite Materials 0(0) 1-18, SAGE, 2013.
- [21] E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo, E. Zappino, *Finite Element Analysis of Structures through Unified Formulation*, John Wiley and Sons, 2014.
- [22] E. Carrera, A. Pagani, Multi-line enhanced beam model for the analysis of laminated composite structures, Composites: Part B 57 (2014) 112–119, Elsevier, 2014.
- [23] E. Carrera, E. Zappino, ANALYSIS OF COMPLEX STRUCTURES COUPLING VARIABLE KINEMATICS ONEDIMENSIONAL MODELS, Proceedings of the ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition IMECE2014 November 14-20, 2014, Montreal, Quebec, Canada, 2014.
- [24] E. Carrera, A. Pagani, Evaluation of the accuracy of classical beam FE models via locking-free hierarchically refined elements, International Journal of Mechanical Sciences, Volume 100, Pages 169-179, 2015.
- [25] E. Carrera, A.G. de Miguel, A. Pagani, M. Petrolo, Analysis of laminated beams via Unified Formulation and Legendre polynomial expansions, Composite Structures, Elsevier, 2016.
- [26] E. Carrera, E. Zappino, T. Cavallo, Static Analysis of Reinforced Thin-Walled Plates and Shells by means of Finite Element Models, International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, Taylor&Francis, 2016.

- [27] E. Carrera, M. Cinefra, Fondamenti di Meccanica Strutturale, CLUT, 2017.
- [28] E. Carrera, E. Zappino, G. Li Multilayered plate elements accounting for refined theories and node-dependent kinematics, Composites Part B (2017), 2017.
- [29] E. Carrera, A. Pagani, S. Valvano Multilayered plate elements accounting for refined theories and node-dependent kinematics, Composites Part B (2017), Elsevier, 2017.
- [30] E. Carrera, A. Pagani, Unified formulation of geometrically nonlinear refined beam theories, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2018.
- [31] E. Carrera, S. Valvano, M. Filippi, Classical, higher-order, zig-zag and variable kinematic shell elements for the analysis of composite multilayered structures, European Journal of Mechanics / A Solids 72 (2018) 97-110, 2018.
- [32] E. Carrera, A. Pagani, S.Valvano Finite element models with node-dependent kinematics for the analysis of composite beam structures, Composites Part B: Engineering Volume 132, 1 January 2018, Pages 35-48, 2018.
- [33] E. Carrera, S.Valvano, G. M. Kulikov, Electro-mechanical analysis of composite and sandwich multilayered structures by shell elements with node-dependent kinematics, International Journal of Smart and Nano Materials, Taylor & Francis 2018.
- [34] E. Carrera, A.G. de Miguel, G.A. Fiordilino, A. Pagani, *Global/local analysis* of free-edge stresses in composite laminates, AIAA SciTech Forum, 2019.
- [35] E. Carrera, G.A. Fiordilino, M. Nagaraja, A. Pagania, M. Montemurro, A global/local approach based on CUF for the accurate and efficient analysis of metallic and composite structures, Engineering Structures 188 (2019) 188-201, Elsevier, 2019.
- [36] E. Carrera, A. G. de Miguel, M. Filippi, I. Kaleel, A. Pagani, M. Petrolo, and E. Zappino, *Global-local plug-in for high-fidelity composite stress analysis*

in Femap/NX Nastran, MECHANICS OF ADVANCED MATERIALS AND STRUCTURES, Taylor & Francis, 2019.

- [37] E. Carrera, A. Pagani, R. Augello, B. Wu Popular benchmarks of nonlinear shell analysis solved by 1D and 2D CUF-based finite elements, Mechanics of Advanced Materials and Structures, Taylor & Francis, 2020.
- [38] E. Carrera, A. Pagani, R. Augello, Large deflection and post-buckling of thin-walled structures by finite elements with node-dependent kinematics, Acta Mech, 2020.
- [39] E. Carrera, A. Pagani, D. Giusa, R. Augello, Nonlinear analysis of thin-walled beams with highly deformable sections, International Journal of Non-Linear Mechanics 128 (2021) 103613, Elsevier, 2021.
- [40] M. Cinefra, E. Carrera, Shell finite elements with different through-thethickness kinematics for the linear analysis of cylindrical multilayered structures, INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, John Wiley & Sons, 2012.
- [41] M. Cinefra, S. Valvano, A variable kinematic doubly-curved MITC9 shell element for the analysis of laminated composites, Mechanics of Advanced Materials and Structures, Taylor & Francis, 2016.
- [42] M. A. Crisfield, A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. Comput Struct 1981;13(1):55-62, 1981.
- [43] M. A. Crisfield, An arc-length method including line searches and accelerations. Int J Numer Methods Eng 1983;19(9):1269-89., 1983.
- [44] M. A. Crisfield, Non-linear finite element analysis of solid and structures, Chichester, England: John Wiley & Sons; 1991.
- [45] M. d'Ottavio, E. Carrera, Variable-Kinematics Approach for Linearized Buckling Analysis of Laminated Plates and Shells. AIAA JOURNAL Vol. 48, No. 9, September 2010, Elsevier, 2010.

- [46] M. d'Ottavio, P. Vidal, E. Valot, O. Polit, Assessment of Plate Theories for Free-Edge Effects. Composites Part B: Engineering, 48, pp.111-121, Elsevier, 2013.
- [47] S. A. Emam, Analysis of shear-deformable composite beams in postbuckling, Composite Structures 94 (2011) 24-30, Elsevier, 2011.
- [48] M. Fafard, B. Massicotte, Geometrical Interpretation of the arc-length method, Computers & Structures Vol. 46, No. 4, pp. 603-615, Pergamon Press Ltd, 1993.
- [49] G. Fiordilino, A. Pagani, E. Carrera, M. Montemurro, Global-local analysis of composite structures. 21ème Journées Nationales sur les Composites, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (ENSAM) - Bordeaux, Jul 2019, Bordeaux, Talence, France, 2019.
- [50] G. A. Kardomateas, C. N. Phan, Three-dimensional elasticity solution for sandwich beams/wide plates with orthotropic phases: The negative discriminant case, Journal of Sandwich Structures and Materials 13(6) 641-661, SAGE, 2011.
- [51] Y. Hui, G. De Pietro, G. Giunta, S. Belouettar, H. Hu, E. Carrera, A. Pagani Geometrically Nonlinear Analysis of Beam Structures via Hierarchical One-Dimensional Finite Elements, Mathematical Problems in Engineering Volume 2018, 2018.
- [52] C. Leclerc, L. Wilson, M. A. Bessa, S. Pellegrino, Characterization of Ultra-Thin Composite Triangular Rollable and Collapsible Booms, 4th AIAA Spacecraft Structures Conference, 2017.
- [53] G. Li, A.G. de Miguel, A. Pagani, E. Zappino, E. Carrera, Finite beam elements based on Legendre polynomial expansions and node dependent kinematics for the global-local analysis of composite structures, European Journal of Mechanics / A Solids (2018), Elsevier, 2018.
- [54] A. Pagani, E. Carrera, Large-deflection and post-buckling analyses of laminated composite beams by Carrera Unified Formulation, Composite Structures, Elsevier, 2017.

- [55] A. Pagani, R. Augello, E. Carrera Frequency and mode change in the large deflection and post-buckling of compact and thin-walled beams, Journal of Sound and Vibration 432 (2018) 88-104, Elsevier, 2018.
- [56] A. Pagani, E. Carrera, and R. Augello, Evaluation of Various Geometrical Nonlinearities in the Response of Beams and Shells, AIAA JOURNAL Vol. 57, No. 8, August 2019, 2019.
- [57] N. J. Pagano, Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending, Mechanics of Composite Materials, 1969.
- [58] N. J. Pagano, S. J. Hatfield, Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites, AIAA Journal, vol. 10, issue 7, pp. 931-933, 1972.
- [59] R. B Pipes, N. J. Pagano, Interlaminar Stresses in Composite Laminates -An Approximate Elasticity Solution, Journal of Applied Mechanics, Vol. 41, No. 3, (1974), pp. 668-672., 1974.
- [60] J.N. Reddy, An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: With Applications to Heat Transfer, fluid Mechanics, and Solid Mechanics, Oxford University Press, Oxford, UK, 2014.
- [61] J. G. Ren, Exact Solutions for Laminated Cylindrical Shells in Cylindrical Bending, Composites Science and Technology 29 (1987) 169-187, Elsevier, 1987.
- [62] K. S. Surana, S. H. Nguyen, Two-dimensional curved beam element with higher-order hierarchical transverse approximation for laminated composites, Computers and Structures, 36:499-511, Pergamon, 1990.
- [63] E. Zappino, G. Li, A. Pagani, E. Carrera, Global-local analysis of laminated plates by node-dependent kinematic finite elements with variable ESL/LW capabilities, Composite Structures, Elsevier, 2017.