

POLITECNICO DI TORINO

Collegio di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

**Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aerospaziale**



Tesi di Laurea Magistrale

Validazione numerica e sperimentale di un metodo per lo shape-sensing di travi in parete sottile

Relatore

Prof. Ing. Marco Gherlone

Candidato

Angelo Intile

APRILE 2021

Indice

Sommario	1
Abstract	3
1. Shape sensing	5
1.1 Metodi shape sensing	5
1.1.1 Metodi basati sull'integrazione numerica di deformazioni	5
1.1.2 Metodi che utilizzano funzioni di base globali o continue a tratti	7
1.1.3 Metodi che impiegano reti neurali (NN)	8
1.1.4 Metodi basati su un principio variazionale discreto agli elementi finiti	8
1.2 Estensimetri ottici per lo shape sensing	8
1.2.1 Principi operativi e tecnologie	9
1.2.1.1 Sensori in fibra ottica a reticolo di Bragg (FBG)	10
1.2.1.2 Sensori in fibra ottica Rayleigh Back-Scattering (RBS)	12
1.2.2 Perché utilizzare estensimetri ottici?	16
2. Metodo di ricostruzione	17
2.1 Disaccoppiamento delle deformazioni	17
2.1.1 Coordinate Settoriali	19
2.1.1.1 Area settoriale	20
2.1.1.2 Caratteristiche geometriche della sezione trasversale	20
2.1.1.3 Calcolo Coordinate Settoriali Principali	21
2.2 Algoritmi strutturali per singole tipologie di carico	23
2.3 Algoritmi ricostruzione torsione	24
2.3.1 Algoritmo ricostruzione \mathbf{u}_w	25
2.3.2 Algoritmo ricostruzione $\boldsymbol{\varphi}$	25
2.4 Algoritmi ricostruzione flessione	25
2.5 Algoritmi ricostruzione flesso-torsione	26
2.4.1 Algoritmo ricostruzione \mathbf{w}	27
2.4.2 Algoritmo ricostruzione $\boldsymbol{\varphi}$	27
3. Validazione numerica FEM	29
3.1 Trave a sbalzo con sezione trasversale ad Ω	29
3.1.1 Ricostruzione deformata trave soggetta a torsione	32
3.1.2 Ricostruzione deformata trave soggetta a flesso-torsione	35
3.1.3 Confronto risultati modello FEM con e senza RBE2	38
3.2 Trave a sbalzo con sezione trasversale a C	41

3.2.1 Ricostruzione deformata trave soggetta a flessione	43
3.2.2 Ricostruzione deformata trave soggetta a flesso-torsione	44
4. Fase sperimentale	51
4.1 Dimensioni trave con sezione a C sperimentale	51
4.2 Ricostruzione deformata con algoritmi FEM	52
4.2.1 Ricostruzione deformata trave soggetta a flessione	53
4.2.2 Ricostruzione deformata trave soggetta a flesso-torsione	55
4.3 Set-up sperimentale	58
4.4 Prova di flessione	61
4.5 Prova di flesso-torsione	63
Conclusioni	69
Riferimenti bibliografici	71

*Un ringraziamento particolare va
al mio relatore, il Professore Marco Gherlone,
che mi ha seguito, con la sua infinita disponibilità,
nella realizzazione di questa tesi.*

*Alla mia famiglia, ai miei amici e ai miei compagni
di università. Grazie per essere stati miei complici,
ognuno a suo modo, in questo percorso intenso ed
entusiasmante, nel bene e nel male.*

*Infine, vorrei dedicare questo traguardo a me stesso,
che possa essere l'inizio di una lunga e brillante
carriera professionale.*

Sommario

Con il termine “*shape sensing*” ci si riferisce alla capacità di determinare come una struttura si deforma, a partire dalla conoscenza dei valori di deformazione (strain) in certi punti. Si tratta di tecniche di rilevamento della deformata di strutture, sulle quali negli ultimi anni si sta incrementando particolarmente l’attività di ricerca e sperimentazione, con lo sviluppo di tecniche sempre più efficaci.

Disponendo sulla struttura vari sensori di deformazione, attraverso opportune tecniche, si può risalire a quella che è la deformata della struttura. Ciò fornisce una prospettiva interessante di queste metodologie, che in campo aeronautico, possono essere utilizzate ad esempio per ricostruire durante il volo la deformata delle semiali, e sapere quindi qual è la freccia al tip della stessa, piuttosto che l’angolo di torsione.

Lo scopo del seguente lavoro di tesi è quello di verificare numericamente e sperimentalmente questi approcci su una trave in parete sottile, utilizzando nella parte sperimentale un sistema di misurazione basato sulle fibre ottiche, il cui vantaggio è l’elevata densità di punti di misura.

Nel primo capitolo verrà condotta una panoramica generale sullo shape-sensing e le varie metodologie esistenti, e qualche dettaglio sugli estensimetri ottici. Successivamente, nel secondo capitolo, ci si concentrerà sul metodo di shape-sensing adottato, partendo dalle teorie su cui si basa, per poi passare alla determinazione degli algoritmi di ricostruzione. Nel terzo capitolo, si procederà con la validazione FEM del metodo di ricostruzione, facendo una analisi sui vari fattori che influenzano la ricostruzione fino al modello FEM della trave testata in laboratorio. Infine, nel quarto capitolo, verrà presentata la parte sperimentale del seguente lavoro, per poi concludere con la discussione dei risultati ottenuti.

Abstract

The term “shape sensing” refers to the ability to determine how a structure deforms, starting from the knowledge of the strain values in some points. These are techniques for detecting the deformation of structures, on which in recent years the research and experimentation activity has been particularly increased, with the development of increasingly effective techniques.

By placing various deformation sensors on the structure, through appropriate techniques, it is possible to trace what is the deformation of the structure. This provides an interesting perspective of these methodologies, which in the aeronautical field, they can be used, for example, to reconstruct the deformation of the wings during flight, and therefore know what the deflection at the tip is, rather than the angle of torsion.

The purpose of the following thesis is to numerically and experimentally verify these approaches on a thin-walled beam, using in the experimental part a measurement system based on optical fibers, the advantage of which is the high density of measurement points.

In the first chapter a general overview on shape-sensing and the various existing methodologies will be conducted, and some details about optical strain gauges. Subsequently, in the second chapter, we will focus on the shape-sensing method adopted, starting from the theories on which it is based, and then moving on to the determination of the reconstruction algorithms. In the third chapter, we will proceed with the FEM validation of the reconstruction method, making an analysis on the various factors that influence the reconstruction up to the FEM model of the beam tested in the laboratory. Finally, in the fourth chapter, the experimental part of the following work will be presented, to then conclude with the discussion of the results obtained.

1. Shape sensing

Lo shape sensing è la capacità di determinare come una struttura, anche semplice, si deforma, a partire dalla conoscenza dei valori di deformazione (strain) in certi punti. Ci sono vari metodi che permettono di fare questo e risultano essere molto interessanti perché in prospettiva possono essere utilizzati su strutture alari o fusoliere, per monitorare durante il loro utilizzo i vari parametri di interesse (freccia, angolo di torsione, ecc). Disponendo infatti più sensori sulla struttura che si vuole monitorare, e conoscendo quindi i valori di strain in vari punti della stessa, si può risalire, attraverso diverse tecniche appunto, alla deformata della struttura. Si parla di monitoraggio della salute strutturale (SHM), sempre più rilevante insieme alla crescente domanda di sicurezza e integrità strutturale, che consente di avere una maggiore sicurezza e una manutenzione più efficiente, soprattutto in termini di costi. Infatti, la conoscenza dell'effettivo stato di salute strutturale può consentire una previsione più accurata dei guasti e quindi una minore manutenzione da eseguire sulla base dei dati effettivi. Gli algoritmi di ricostruzione della deformata si basano quasi esclusivamente su misurazioni di deformazione, poiché in commercio sono disponibili sensori di deformazione precisi e leggeri, in particolare sensori a reticolo in fibra di Bragg (FBG) [1].

1.1 Metodi shape sensing

Si possono distinguere quattro categorie in cui vengono raggruppate le principali metodologie esistenti di shape sensing:

- 1) Metodi basati sull'integrazione numerica di deformazioni misurate sperimentalmente;
- 2) Metodi che utilizzano funzioni di base globali o continue a tratti per approssimare il campo di spostamento;
- 3) Metodi che impiegano reti neurali (NN);
- 4) Metodi basati su un principio variazionale discreto agli elementi finiti.

Di seguito verrà fatta una panoramica su queste quattro categorie per poi focalizzarci sul metodo in esame in questo lavoro di tesi.

1.1.1 Metodi basati sull'integrazione numerica di deformazioni

I metodi basati sull'integrazione numerica di deformazioni, sono fondati sulle teorie classiche della trave. A riguardo, è stata sviluppata da Ko e i suoi collaboratori, la teoria dello spostamento di Ko [7, 8, 9]. Le teorie dello spostamento sono state sviluppate per una varietà di strutture con l'obiettivo di fornire previsioni di forma in tempo reale per i veicoli aerospaziali durante il volo. Tali teorie sono state inizialmente sviluppate per una trave a sbalzo, con lo scopo di prevedere la deformata di Helios [7], un aereo ad energia solare sviluppato dalla NASA (figura 1.1). L'idea chiave di Ko [7] è quella di ricostruire la deflessione e la rotazione di strutture simili a travi attraverso l'integrazione di deformazioni assiali misurate in punti equispaziati, attraverso estensimetri o fibre ottiche, su delle linee di misura lungo l'asse della trave stessa. Vengono analizzati diversi tipi di carico, oltre che travi e piastre. In Ko et al. [8] vengono ulteriormente sviluppate le equazioni relative a travi non uniformi, esprimendole in termini di parametri geometrici. La teoria di Ko è stata applicata alle semiali a doppia

rastremazione del velivolo a pilotaggio remoto Ikhana [9], in figura 1.2, utilizzando due linee di misura sul dorso delle due semiali. Tale applicazione ha confermato l'elevata efficacia del metodo nella ricostruzione sia della deflessione che dell'angolo di torsione della semiala. In Ko et al. [10] è stato condotto un test di carico al suolo di un'ala del Global Observer, un altro velivolo a pilotaggio remoto, utilizzando un sistema di rilevamento della deformazione in fibra ottica distribuiti su due linee di misura, ed in aggiunta un sistema di fotogrammetria per ottenere gli spostamenti di convalida (figura 1.3). Uno dei metodi appartenenti a questa categoria è quello oggetto di questa tesi, che verrà approfondito nel capitolo 2.



Figura 1.1 - Velivolo Helios NASA [7]

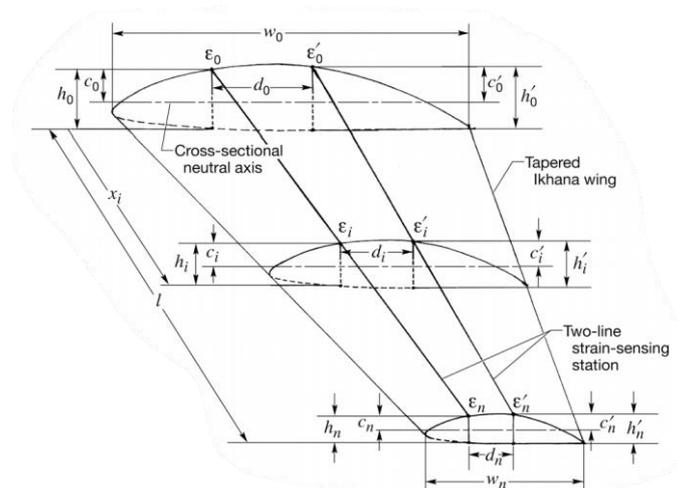


Figura 1.2 - Semiala velivolo a pilotaggio remoto Ikhana [9]



Figura 1.3 - Ala sinistra del Global Observer durante i test di carico [10]

1.1.2 Metodi che utilizzano funzioni di base globali o continue a tratti

Nei metodi che utilizzano funzioni di base, si fa ricorso a un set di funzioni spaziali definito a priori ed i relativi pesi che si adattano alle deformazioni misurate. In tali metodi le incognite sono proprio i pesi, che sono determinati con misurazioni discrete della deformazione. Una volta determinati i pesi, tenendo conto delle condizioni al contorno, si ottiene il campo di spostamento attraverso relazioni deformazione-spostamento. Poiché le relazioni deformazione-spostamento sono definite sfruttando le ipotesi della trave di Eulero-Bernoulli e della piastra di Kirchhoff, tali metodi sono limitati all'utilizzo su travi o piastre sottili. Per le funzioni di base vengono utilizzati polinomi o spline polinomiali. Quando si fa ricorso a funzioni di base globali, il numero di punti di misurazione della deformazione deve essere uguale o maggiore del numero dei pesi sconosciuti; mentre, quando si fa ricorso a funzioni di base continue a tratti, generalmente è richiesto un numero di punti di misurazione maggiore [11].

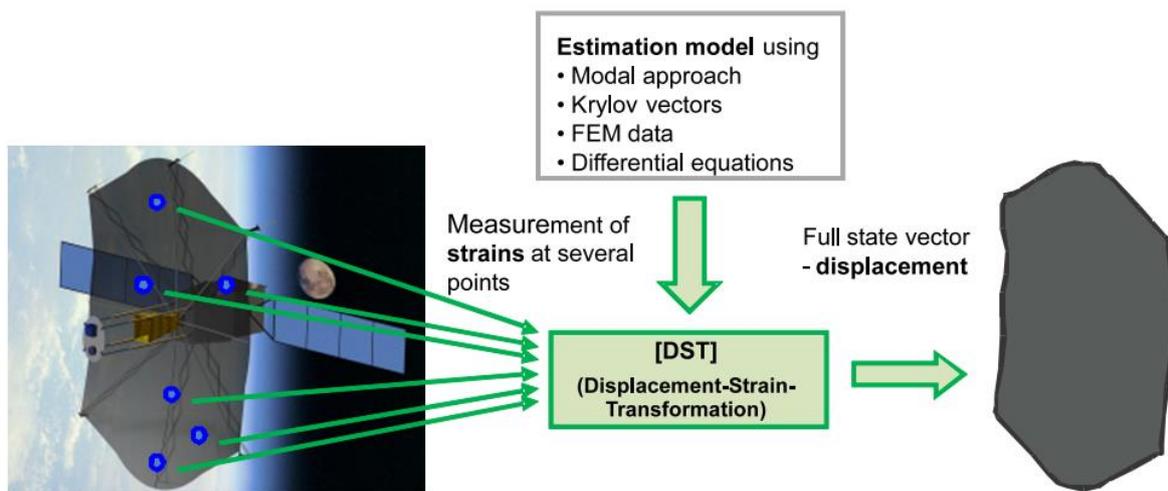


Figura 1.4 - Diagramma schematico del processo di stima del campo di spostamento [14]

Nel caso particolare in cui vengono utilizzate come funzioni di base i modi normali, gli algoritmi di ricostruzione del campo di spostamenti prendono il nome di Metodo Modale (MM) o Teoria della Trasformazione Modale (TTM) [12-13]. Se da un lato la valutazione sperimentale delle forme modali è abbastanza onerosa, dall'altro non è richiesta alcuna conoscenza delle proprietà del materiale. Tuttavia, usando un numero ridotto di sensori per la misurazione della deformazione, si ottengono risultati insoddisfacenti, eccetto che il posizionamento dei sensori non sia ottimizzato [14]. In breve, il metodo modale, si basa sulla conoscenza delle forme modali della struttura in esame. Ipotizzando di ottenere attraverso un modello agli elementi finiti tali informazioni, nel caso di una piastra, la deflessione del j -esimo nodo può essere espressa in funzione delle n forme modali come:

$$w_j \cong \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x_j, y_j) \quad \leftrightarrow \quad w = \Phi a \quad (1.1)$$

dove Φ è la matrice delle forme modali e a è il vettore delle coordinate modali incognite.

Applicando le relazioni spostamento-deformazione, si può esprimere il vettore delle deformazioni come:

$$\varepsilon = \Psi a \quad (1.2)$$

dove Ψ è la matrice delle forme modali relative alle deformazioni.

Risolvendo la (1.2) mediante l'utilizzo della matrice pseudo-inversa di Moore-Penrose, e sostituendo nella 1.1, si ottiene lo spostamento:

$$w = \Phi(\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \varepsilon \quad (1.3)$$

1.1.3 Metodi che impiegano reti neurali (NN)

Una rete neurale è una mappa generale tra input e output che richiede un addestramento per ottenere una corretta classificazione; poiché la deformazione allo spostamento è lineare, potremmo formare una semplice "rete neurale lineare" tra gli input (deformazione) e gli output (configurazione di spostamento) [15]. Tuttavia, uno degli svantaggi di questi metodi è che la loro accuratezza dipende fortemente dalla scelta dei casi di carico utilizzati per l'addestramento [16].

1.1.4 Metodi basati su un principio variazionale discreto agli elementi finiti

Nei metodi basati su approcci variazionali, un appropriato funzionale errore viene minimizzato sull'intero dominio del problema, confrontando le deformazioni stimate e misurate, comunemente nel senso dei minimi quadrati [17]. Uno di questi è il metodo degli elementi finiti inverso (iFEM), introdotto da Tessler e Spangler [18-19], che impiega una formulazione variazionale basata sui minimi quadrati discretizzando il dominio del problema utilizzando elementi finiti continui di classe C^0 . L'approccio è adatto per modellare geometrie complesse e consente di ricostruire risposte sia statiche che dinamiche senza alcuna conoscenza preliminare delle proprietà del materiale o delle condizioni di carico della struttura. Dall'introduzione iniziale dell'iFEM, l'approccio è stato applicato con successo su una varietà di strutture semplici e complesse. Le formulazioni iFEM esistenti utilizzano l'ipotesi semplificativa di "piccoli spostamenti", quindi, l'applicazione di questi metodi a problemi con grandi spostamenti genererà degli errori significativi nella previsione della forma deformata. Il primo tentativo di risoluzione a questo problema è stato condotto da Tessler et al. [20], adottando una modifica dell'iFEM lineare standard, in cui l'iFEM lineare viene utilizzato su un numero di fasi di carico e la variazione incrementale della deformazione su ogni fase viene sommata per determinare la deformata finale della struttura; una procedura simile al metodo degli elementi finiti non lineari, che sfrutta una serie di incrementi di spostamento lineare per ricreare la curva carico-spostamenti di natura non lineare. Sostanzialmente con l'iFEM si ricostruisce il campo di spostamenti a partire dalle deformazioni, che a sua volta serve per calcolare il campo totale di deformazioni, stress e risultanti.

1.2 Estensimetri ottici per lo shape sensing

Gli estensimetri ottici [21], detti anche sensori di deformazione in fibra ottica, vengono utilizzati per misurare la deformazione, ma possono anche essere utilizzati per misurare temperatura, accelerazione o dislocazione. A differenza degli estensimetri elettrici tradizionali,

gli estensimetri ottici non usano la corrente elettrica; la loro tecnologia si basa, infatti, sulla luce che si propaga attraverso una fibra.

Una fibra ottica in genere è costituita da una fibra di vetro o silice e da un rivestimento in plastica (figura 1.5). È simile alla fibra normale utilizzata per le telecomunicazioni, e può essere lunga anche diversi chilometri e avere molti punti di misura distribuiti per la sua lunghezza. La fibra è costituita da due strati: il nucleo centrale e un rivestimento esterno con densità inferiore. La fibra di silice è avvolta in un rivestimento protettivo in plastica. Poiché per trasmettere la luce attraverso la fibra si utilizza un laser, la differenza di densità tra il nucleo e il rivestimento diventa fondamentale perché, si viene a creare una barriera che incanala la luce all'interno della fibra evitandone la dispersione.

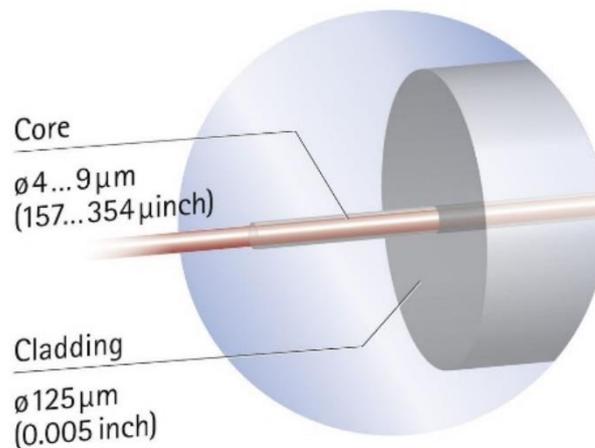


Figura 1.5 - Struttura di una fibra ottica [21]

1.2.1 Principi operativi e tecnologie

Negli ultimi due decenni, l'utilizzo delle fibre ottiche e dei relativi componenti ottici è notevolmente aumentato, in particolare nel settore delle telecomunicazioni, consentendo di migliorare le prestazioni e ridurre i costi. In base al loro principio di funzionamento, i sensori in fibra ottica sviluppati fino ad oggi possono essere classificati in tre tipi principali [22]: interferometrici, basati su reticoli e distribuiti. In figura 1.6 si riporta una schematizzazione dei vari tipi di sensori in fibra ottica e dei vari principi di funzionamento.

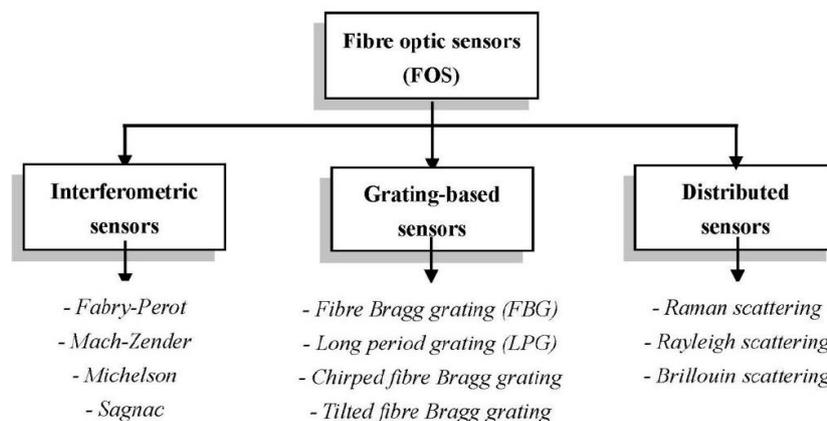


Figura 1.6 - Tipologie sensori in fibra ottica e relativi principi di funzionamento [22]

In generale, i sensori interferometrici sono adatti per misure puntuali, mentre quelli distribuiti e basati su reticoli possono essere utilizzati rispettivamente per misure distribuite e quasi distribuite.

I sensori ottici interferometrici si basano sulla variazione della differenza di fase ottica tra due onde luminose con la stessa frequenza, causata dalla variazione della quantità fisica che si vuole misurare. Il principale vantaggio di tali sensori è l'elevata risoluzione, che ad esempio, per misure di deformazioni può superare $1 \mu\epsilon$; mentre il principale svantaggio relativo all'uso dei citati sensori nel monitoraggio della salute strutturale, consiste nel fatto che la loro applicazione è limitata ad un numero relativamente basso di punti di misura. Nell'ambito del monitoraggio strutturale, soprattutto in campo aerospaziale, i sensori più diffusi ed utilizzati sono quelli a reticolo di Bragg (FBG) e quelli distribuiti basati sul Rayleigh scattering.

1.2.1.1 Sensori in fibra ottica a reticolo di Bragg (FBG)

Un sensore FBG è ottenuto inducendo, mediante luce ultravioletta o laser ad eccimeri, una variazione periodica dell'indice di rifrazione in un tratto di qualche mm lungo la direzione assiale del core di una fibra ottica in vetro di silice. Quando della luce infrarossa con spettro a larga banda si propaga lungo la fibra, il reticolo agisce in riflessione come un filtro passa-banda, retroriflettendo un segnale luminoso molto stretto centrato ad una lunghezza d'onda λ_B , detta di Bragg, caratteristica del reticolo stesso. Una qualsiasi perturbazione del reticolo (ad esempio per deformazione meccanica e/o dilatazione termica) comporta una variazione del valore di λ_B . L'analisi spettroscopica di λ_B permette perciò il monitoraggio delle deformazioni subite dal reticolo di Bragg. Le grandezze in gioco sono messe in relazione tra loro nella formula di Bragg:

$$\lambda_B = 2 n_{eff} \Lambda \quad (1.4)$$

dove n_{eff} è l'indice modale o indice di rifrazione efficace per la propagazione della luce nel modo fondamentale della fibra ottica monomodale, mentre Λ è il passo del reticolo. L'effetto della diffrazione può essere descritto mediante singole riflessioni che hanno luogo su ciascun piano del reticolo; tutte le onde riflesse interferiscono costruttivamente generando un fascio di luce retroriflesso alla lunghezza d'onda di Bragg. Le componenti spettrali che non soddisfano l'equazione di Bragg vengono trasmesse attraverso il reticolo.

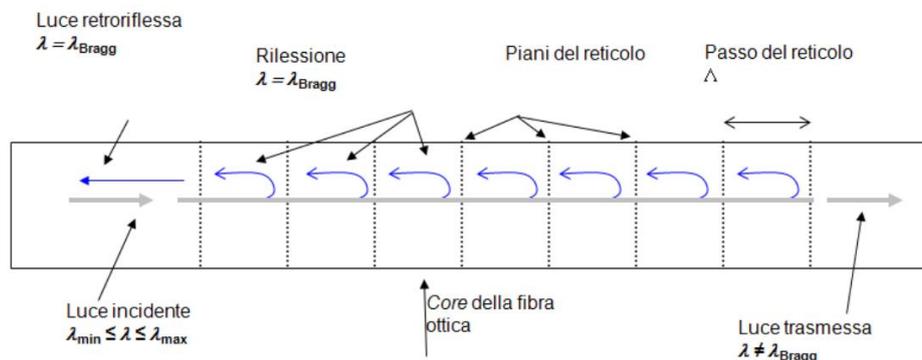


Figura 1.7 - Funzionamento di un sensore di Bragg in fibra ottica [23]

Il valore λ_B di un particolare sensore FBG può essere deciso in fase produttiva, variando il passo Λ del reticolo.

Quindi, se si invia nella fibra ottica in direzione del reticolo uno spettro luminoso a banda larga, il reticolo risponde retroriflettendo un segnale centrato alla lunghezza d'onda di Bragg, permettendo la trasmissione dello spettro complementare.

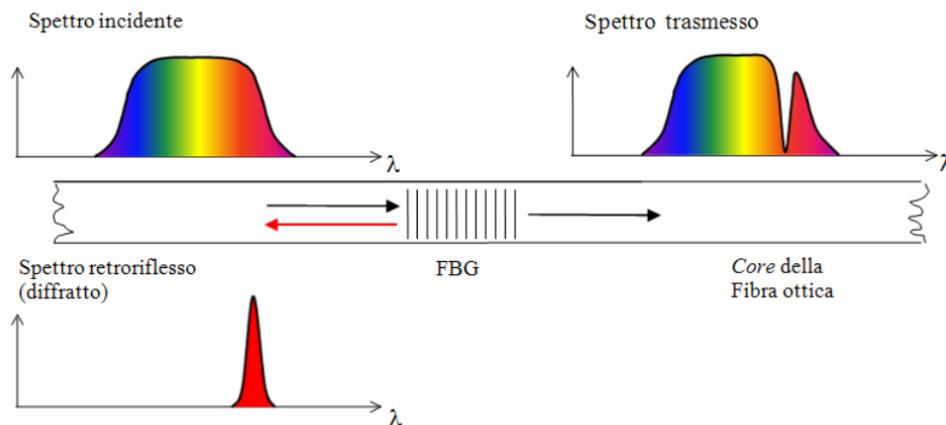


Figura 1.8 - Risposta di un sensore FBG per incidenza di un fascio di luce con spettro a banda larga [23]

L'operazione di invio della luce lungo la fibra ottica e la successiva analisi dello spettro retroriflesso dal reticolo per la misura di λ_B si chiama interrogazione o demodulazione del sensore.

Se si considera un allungamento o contrazione della fibra, in seguito ad una sollecitazione meccanica e termica ad esempio, si ha una variazione sia dell'indice di rifrazione che del passo del reticolo (detti rispettivamente effetto fotoelastico e termoelastico). Ciò comporta una variazione della lunghezza d'onda di Bragg, che dipende da tali grandezze (figura 1.9).

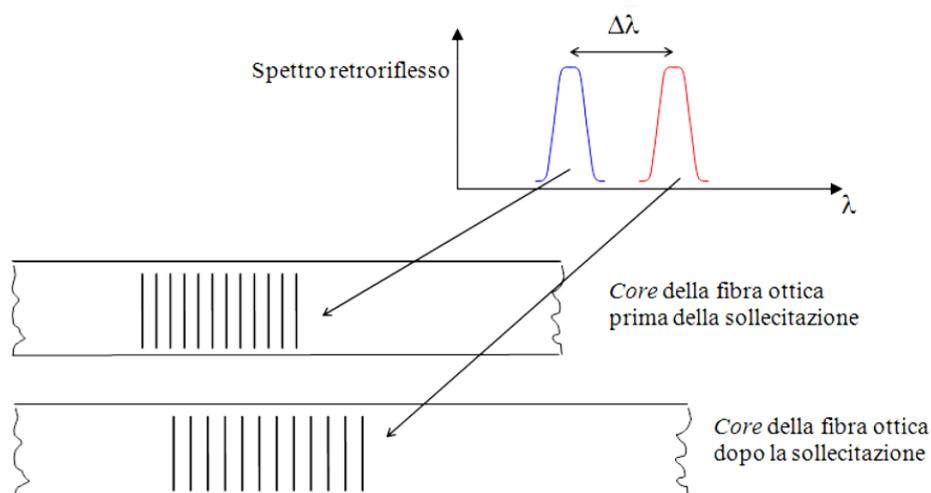


Figura 1.9 - Variazione del segnale del sensore FBG in seguito alla deformazione geometrica del reticolo di Bragg e della variazione dell'indice di rifrazione [23]

Per cui, il sensore FBG, variando la sua configurazione geometrica ed il suo indice di rifrazione, codifica strain meccanici e variazioni di temperatura in una grandezza spettrale che costituisce la risposta del sensore stesso. Si dimostra che l'effetto dovuto allo strain meccanico si può scrivere come:

$$\Delta\lambda_B^{mecc} = \lambda_B \left(1 - \frac{n_{eff}^2}{2} [P_{12} - \nu(P_{11} + P_{12})] \right) \varepsilon = \lambda_B S_\varepsilon \varepsilon \quad (1.5)$$

dove P_{11} e P_{12} sono i componenti del tensore fotoelastico, ν è il coefficiente di Poisson ed S_ε è il gauge factor caratteristico del sensore.

Scrivendo anche l'effetto dovuto alla temperatura:

$$\Delta\lambda_B^{term} = \lambda_B S_T \Delta T \quad (1.6)$$

con una relazione del tutto analoga a quella dell'effetto meccanico, ma nella quale si introduce la sensibilità alla temperatura S_T , si arriva a scrivere la seguente equazione per il calcolo della variazione della grandezza spettrale dovuta all'effetto termo-meccanico:

$$\Delta\lambda_B = \lambda_B [S_\varepsilon \varepsilon + S_T \Delta T] \quad (1.7)$$

Una volta determinato il $\Delta\lambda_B$ è possibile ricavare quindi la deformazione attraverso la relazione:

$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = \left(1 - \frac{n_{eff}^2}{2} [P_{12} - \nu(P_{11} + P_{12})] \right) \varepsilon = (1 - \rho_e) \varepsilon \quad (1.8)$$

dove ρ_e è il coefficiente deformativo-ottico.

1.2.1.2 Sensori in fibra ottica Rayleigh Back-Scattering (RBS)

I sensori in fibra ottica basati sul fenomeno fisico dello scattering di Rayleigh [24], offrono rispetto ai sensori FBG una maggiore densità di misura. Quando una luce coerente viene fatta passare all'interno della fibra ottica, incontra delle fluttuazioni nello spazio dell'indice di rifrazione (scatterers), pertanto la luce viene riflessa in tutte le direzioni (scattering di Rayleigh), anche all'indietro (backscattering).

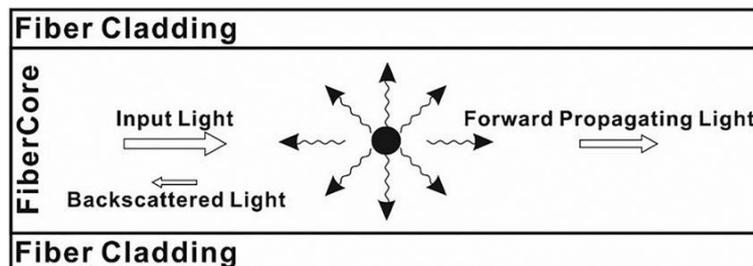


Figura 1.10 - Schematizzazione dello scattering di Rayleigh all'interno di una fibra ottica [25]

Se la luce coerente immessa all'interno della fibra ha una durata dell'impulso W e frequenza ν all'istante di tempo $t = 0$, si ottiene all'ingresso della fibra un'onda di backscatter:

$$e(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \exp\left(-\alpha \frac{c\tau_i}{n_f}\right) \exp\{2\pi\nu j(t - \tau_j)\} \text{rect}\left(\frac{t - \tau_j}{W}\right) \quad (1.9)$$

dove:

- α_i e τ_i sono rispettivamente l'ampiezza e il ritardo dell' i -esima onda riflessa;
- N è il numero totale di onde riflesse;
- α è la costante di attenuazione della fibra;
- n_f è l'indice di rifrazione della fibra;
- il termine $\text{rect}\left(\frac{t - \tau_j}{W}\right)$ è pari a 1 quando $0 \leq \frac{t - \tau_j}{W} \leq 1$, altrimenti è nullo.

Il ritardo τ_i è il tempo necessario affinché la luce di input percorra la fibra fino al punto di scattering e ritorni all'ingresso della stessa, ed è legato alla distanza z_i (distanza tra l'inizio della fibra e il punto di scattering) mediante la relazione:

$$\tau_i = \frac{2n_f z_i}{c} \quad (1.10)$$

La potenza associata all'onda riflessa $p(t)$ è divisa in due componenti:

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) \quad (1.11)$$

$$p_1(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \exp\left(-2\alpha \frac{c\tau_i}{n_f}\right) \text{rect}\left(\frac{t - \tau_j}{W}\right) \quad (1.12)$$

$$p_2(t) = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1+1}^N \alpha_i \alpha_j \cos \phi_{ij} \exp\left\{-\alpha \frac{c(\tau_i - \tau_j)}{n_f}\right\} \text{rect}\left(\frac{t - \tau_j}{W}\right) \text{rect}\left(\frac{t - \tau_j}{W}\right) \quad (1.13)$$

La componente $p_1(t)$ rappresenta la somma delle potenze delle onde riflesse indipendentemente l'una dall'altra, che non ha grandi variazioni al variare di strain, temperatura o frequenza ν . La componente $p_2(t)$ invece, rappresenta l'interferenza tra le onde riflesse in punti diversi, dove la quantità $\phi_{ij} = 2\pi\nu(\tau_i - \tau_j)$ rappresenta la differenza di fase tra le onde riflesse i -esima e j -esima. Sostituendo la relazione di τ_i nella relazione di ϕ_{ij} :

$$\phi_{ij} = \frac{4\pi\nu n_f s_{ij}}{c} \quad (1.14)$$

Per cui il termine $p_2(t)$ è funzione di ν , n_f e s_{ij} . Essendo noto che n_f e s_{ij} dipendono dalle variazioni di strain e temperatura, anche $p_2(t)$ varierà con esse. Grazie a questa relazione è possibile risalire alle variazioni di deformazione e temperatura in ogni punto della fibra ottica, purché si riesca a controllare in modo preciso la frequenza ν del laser.

Per misurare la variazione di strain o temperatura tra due punti corrispondenti ad un intervallo di tempo compreso tra T_a e T_b , si misura al tempo T_a la potenza di backscatter

(variando gradualmente la frequenza del laser ν), che sarà funzione della frequenza e della posizione, $p_a(\nu, z)$. La distanza z , rappresenta la distanza tra il punto di ingresso della fibra e il punto di backscattering, ed è ottenuta convertendo il tempo t con la relazione:

$$z = \frac{(t - 0.5W)c}{2n_f} \quad (1.15)$$

Successivamente, si effettua una nuova misurazione della potenza di backscatter al tempo T_b . Se non ci sono variazioni di strain o temperatura, $p_a(\nu, z)$ e $p_b(\nu, z)$ saranno simili; viceversa, se strain o temperatura variano, le due potenze saranno diverse.

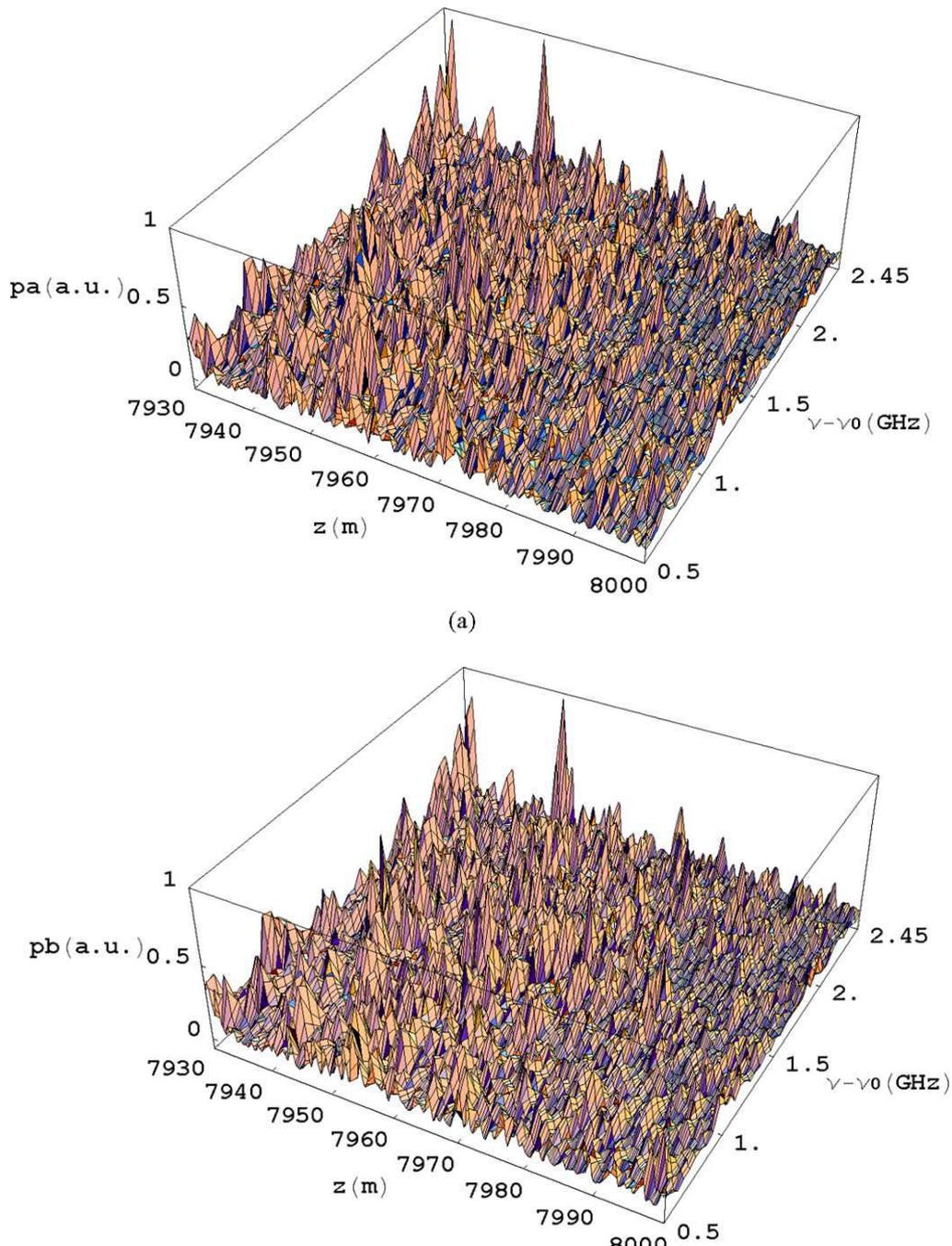


Figura 1.11 - Misura della potenza di backscatter dell'ultimo tratto di 70 m di una fibra ottica lunga 8 km (a) al tempo T_a , $p_a(\nu, z)$, e (b) al tempo T_b , $p_b(\nu, z)$ [24]

Quindi, le variazioni di strain o temperatura causano uno shift della potenza di backscatter $p_b(v, z)$ nel dominio della frequenza del laser. A questo punto bisogna calcolare la cross-correlazione tra $p_a(v, z)$ e $p_b(v, z)$:

$$R_{ab}(f, z) = \frac{\sum_{i=1}^K (p_a(v_i, z) - \bar{p}_a(z))(p_b(v_i + f, z) - \bar{p}_b(z))}{\left\{ \left(\sum_{i=1}^K (p_a(v_i, z) - \bar{p}_a(z))^2 \right) \left(\sum_{i=1}^K (p_b(v_i + f, z) - \bar{p}_b(z))^2 \right) \right\}^{0.5}} \quad (1.16)$$

dove K è il numero di frequenze che contribuiscono alla cross-correlazione.

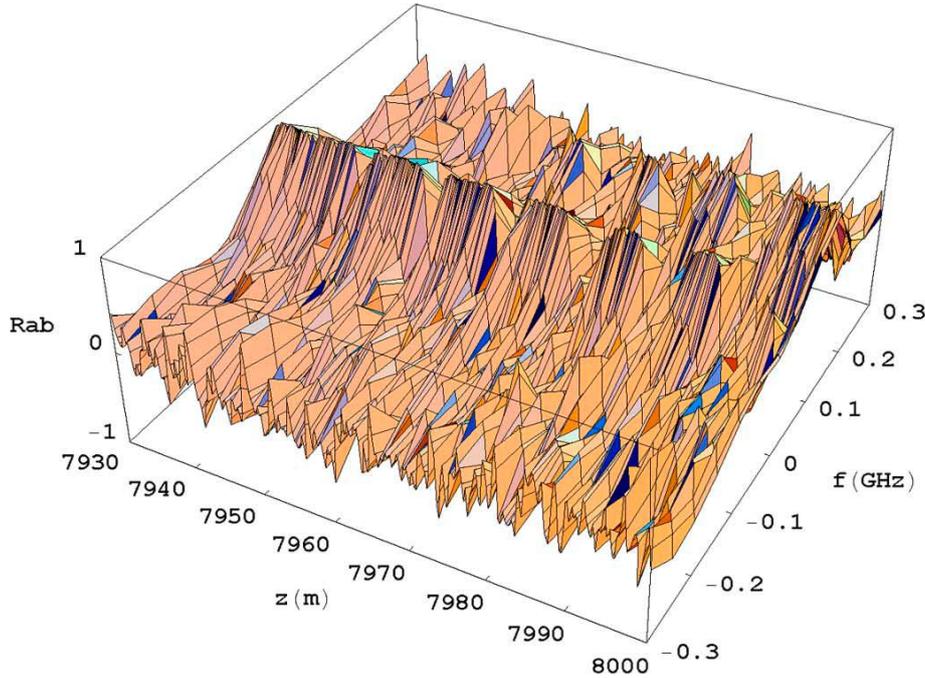


Figura 1.12 - Cross-correlazione tra $p_a(v, z)$ e $p_b(v, z)$ [24]

Se lo strain o la temperatura non cambiano nell'intervallo di tempo considerato, $R_{ab}(f, z)$ avrà il suo massimo in corrispondenza di $f = 0$. Invece, se vi sono cambiamenti di strain o temperatura, il massimo di $R_{ab}(f, z)$ si avrà in corrispondenza di $f = \Delta v$. Pertanto, è possibile conoscere la variazione della frequenza del laser, Δv , dalla posizione del picco della cross-correlazione per ogni valore di z .

La variazione della frequenza del laser che compensa le variazioni di strain $\Delta \epsilon$ o di temperatura ΔT sono [26]:

$$\frac{\Delta v}{v_0} \approx -0.78 \Delta \epsilon \quad (1.17)$$

$$\frac{\Delta v}{v_0} \approx -(6.92 \cdot 10^{-6}) \Delta T \quad (1.18)$$

Utilizzando queste due relazioni di conversione, dove v_0 è la frequenza nominale del laser, è possibile stimare la variazione di strain o temperatura.

1.2.2 Perché utilizzare estensimetri ottici?

Ci sono diversi motivi per cui è vantaggioso utilizzare gli estensimetri ottici piuttosto che altri tipi di sensori, tra cui [27]:

- gli estensimetri ottici possono essere monitorati attraverso una singola unità di interrogazione remota, senza complessità di cablaggio e collegamento di molti sensori;
- non essendo alimentati elettricamente, sono la scelta migliore per applicazioni in cui l'impiego dell'energia elettrica necessaria per il funzionamento degli estensimetri tradizionali potrebbe costituire un problema, come ad esempio in ambienti con forti interferenze elettromagnetiche (spazio), o ad alto rischio di esplosione (raffinerie);
- le piccolissime dimensioni di una fibra ottica consentono loro di essere posizionati su superfici o strutture, o essere posti all'interno di piccoli dispositivi, facendo diventare così l'oggetto auto-sensibile;
- i sensori a fibra ottica sono immuni ai campi elettromagnetici esterni;
- alta densità di punti di misura;

Per evidenziare le dimensioni e la semplicità di utilizzo dei sensori in fibra ottica, in figura 1.7 è possibile vedere il confronto tra 21 estensimetri elettrici e 628 estensimetri ottici installati su una semiala.

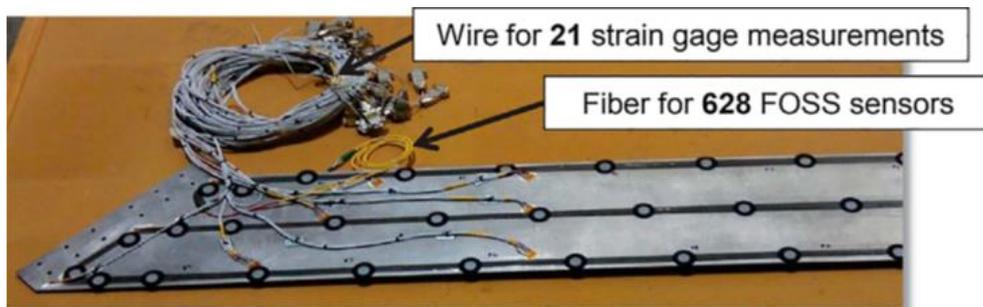


Figura 1.7 - Confronto complessità e dimensioni tra 21 estensimetri elettrici e 628 estensimetri ottici [23]

2. Metodo di ricostruzione

In questo capitolo viene esposto il metodo di ricostruzione (shape sensing) utilizzato nel seguente lavoro di tesi, proposto da Hao Xu [2]. Si tratta di un metodo basato sull'integrazione numerica di strain, in grado di ricostruire la deformata di travi con sezioni speciali in parete sottile soggette a carichi singoli o accoppiati tra cui tensione/compressione, flessione uniassiale/deviata e torsione. Il metodo si basa su un set di equazioni che consentono di disaccoppiare le deformazioni dovute alle singole tipologie di carico, ottenuto dalla combinazione tra la teoria classica della torsione di strutture in parete sottile e le ipotesi di Eulero-Bernoulli. Utilizzando quindi degli algoritmi di calcolo appositamente sviluppati per i diversi tipi di carico e sfruttando l'ipotesi di sovrapposizione lineare, è possibile ricostruire il campo di spostamenti in tutti i punti di travi in parete sottile.

2.1 Disaccoppiamento delle deformazioni

Basandoci sulle ipotesi di piccole deformazioni di Eulero-Bernoulli per la trave, è possibile integrare le formulazioni di tensione/compressione, flessione deviata e torsione in termini di deformazioni assiali. Facendo riferimento agli assi baricentrici della trave, il campo di spostamenti della trave di Eulero-Bernoulli è il seguente:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u(x) - \frac{dw(x)}{dx}z - \frac{dv(x)}{dx}y + u^w(x) \\ v_y(x, y, z) = v(x) - z\varphi(x) \\ w_z(x, y, z) = w(x) + y\varphi(x) \end{cases} \quad (2)$$

dove: $u_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$ e $w_z(x, y, z)$ sono gli spostamenti rispettivamente in direzione x , y , z dei generici punti della trave, di coordinate (x, y, z) , soggetta all'effetto combinato dei vari tipi di carichi; $u^w(x)$ è lo spostamento assiale causato dall'ingobbamento della trave per effetto della torsione; $\varphi(x)$ è la rotazione attorno all'asse x .

La relazione geometrica strutturale nel caso di tensione/compressione è:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.1)$$

nella quale ε_x e u sono rispettivamente la deformazione e lo spostamento assiale lungo x .

Nel caso di flessione deviata, la deformazione assiale può essere espressa come:

$$\varepsilon_x = -\frac{d^2v}{dx^2} \cdot y - \frac{d^2w}{dx^2} \cdot z \quad (2.2)$$

nella quale v e w sono rispettivamente gli spostamenti lungo l'asse y e z , facendo riferimento al sistema di assi x - y - z centrato sul baricentro della sezione mostrato in figura 2.1(a).

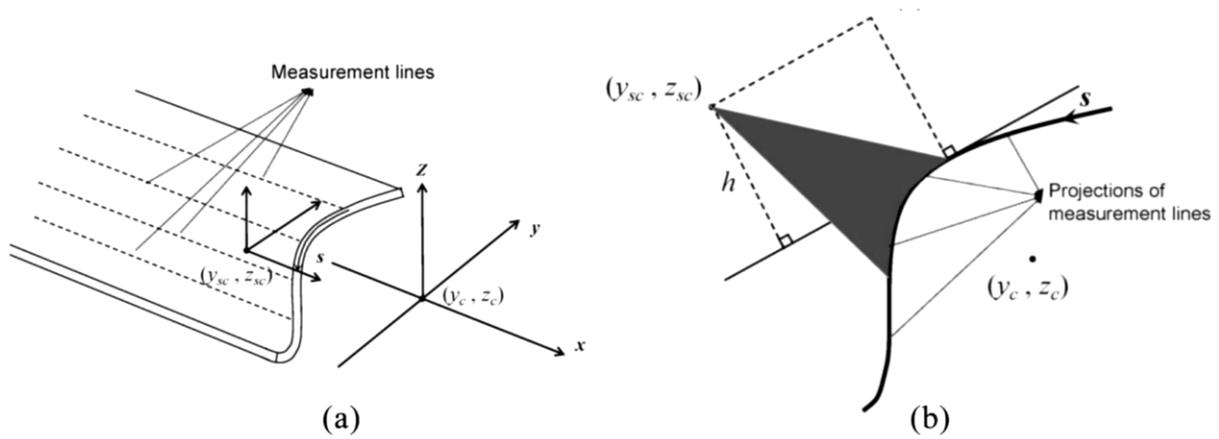


Figura 2.1 - Sistema di riferimento baricentrico di una trave (a) con generica sezione in parete sottile (b), con linee di misura installate sulla superficie della trave lungo l'asse x [2]

Per quanto riguarda la torsione di travi in parete sottile di sezioni aperte, si ha uno spostamento assiale della trave dovuto all'ingobbamento (o *warping*) della sezione [3,4]:

$$u^w = -\omega(s) \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.3)$$

dove u^w è appunto lo spostamento assiale dovuto al fenomeno di warping; φ è l'angolo di rotazione della sezione attorno all'asse x in figura 2.1(a); s è la coordinata che coincide con la linea media della sezione, mentre $\omega(s)$ indica la coordinata settoriale della sezione, ovvero la funzione di ingobbamento, che per una sezione aperta è così definita:

$$\omega(s) = \int_0^s h(s) ds \quad (2.4)$$

L'integrale che definisce la coordinata settoriale rappresenta due volte l'area spazzata da un vettore che ruota avendo come polo il centro di taglio della sezione (y_{sc}, z_{sc}), e che va dal punto di zero warping alla tangente in qualsiasi punto nel piano medio della sezione trasversale, come illustrato in figura 2.1(b). Si precisa che la coordinata settoriale $\omega(s)$ presente nella 2.3 non è esattamente quella definita in modo teorico nella 2.4, bensì è frutto di un certo procedimento di calcolo che verrà discusso più in dettaglio nel sottoparagrafo successivo.

Sostituendo la 2.3 nella 2.1 si ricava la deformazione assiale nel caso di deformazione a torsione vincolata:

$$\varepsilon_x = -\omega(s) \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad (2.5)$$

Quindi la deformazione assiale dovuta all'accoppiamento dei carichi di trazione/compressione, flessione deviata e torsione, si può esprimere integrando le equazioni (2.1), (2.2) e (2.5):

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2} \cdot y - \frac{d^2w}{dx^2} \cdot z - \frac{d^2\varphi}{dx^2} \cdot \omega(s) \quad (2.6)$$

Come si può osservare, l'equazione (2.6) include le derivate degli spostamenti generalizzati, cioè u , v , w e φ . Tali termini derivati possono essere disaccoppiati e calcolati secondo adeguate strategie di misurazione della deformazione. Ad esempio, supponendo che le deformazioni siano misurate lungo quattro linee di misura sulla superficie della trave parallele all'asse x della trave, come mostrato in figura 2.1(a), è possibile stabilire un sistema di 4 equazioni a partire dall'equazione (2.6):

$$\frac{du}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2} \cdot y_i - \frac{d^2w}{dx^2} \cdot z_i - \frac{d^2\varphi}{dx^2} \cdot \omega(s_i) = \varepsilon_i \quad (2.7)$$

$(i = 1, 2, 3, 4)$

Data una generica sezione della trave, i termini y_i , z_i e $\omega(s_i)$ sono conosciuti, ed è quindi possibile determinare le quattro derivate incognite relative alle varie tipologie di carico, risolvendo la (2.7) in tutte le sezioni trasversali della trave. Naturalmente, a seconda della condizione di carico l'equazione (2.7) si semplifica, di conseguenza il numero di linee di misura necessarie si riduce.

Ad esempio, se si considera la combinazione di carico tra flessione uniassiale (lungo l'asse y o z) e torsione, l'equazione (2.7) diventa:

$$-\frac{d^2w}{dx^2} \cdot z_i - \frac{d^2\varphi}{dx^2} \cdot \omega(s_i) = \varepsilon_i \quad (2.8)$$

$(i = 1, 2)$

nella quale sono necessarie solamente due linee di misura della deformazione.

Se si considera invece una singola tipologia di carico, ad esempio torsione, la (2.8) si semplifica ulteriormente:

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} \cdot \omega(s_i) = \varepsilon_i \quad (i = 1) \quad (2.9)$$

nella quale è necessaria solamente una linea di misura.

2.1.1 Coordinate Settoriali

L'utilizzo di coordinate settoriali è inevitabile quando si studiano elementi rettilinei in parete sottile con sezioni trasversali aperte. Il comportamento torsionale di questo tipo di elementi è governato da alcune proprietà settoriali fondamentali come la posizione del centro di taglio, e la costante di warping. Quando si ha a che fare con questa tipologia di elementi, si ci riferisce alla superficie mediana dell'elemento. Le superfici mediane sono definite dalle linee di contorno (che definiscono la forma della sezione trasversale e si trovano a metà dello spessore) e dai generatori (linee parallele all'asse della trave). Tali elementi hanno inoltre una debole rigidità torsionale e, quindi, la loro risposta è principalmente governata dalla deformazione di torsione (nel caso di sezioni aperte e non simmetriche circolarmente, si ha in aggiunta anche il fenomeno dell'ingobbamento). Mentre le coordinate cartesiane sono definite da un punto e due assi, le coordinate settoriali sono definite da un punto (il polo) e un'origine settoriale (origine della linea di contorno). Di seguito si riporta il metodo proposto da Gil-Martín [5] per il calcolo delle coordinate settoriali.

2.1.1.1 Area settoriale

Si consideri la linea di contorno della sezione trasversale di una trave in parete sottile di sezione aperta rappresentata in figura 2.2.

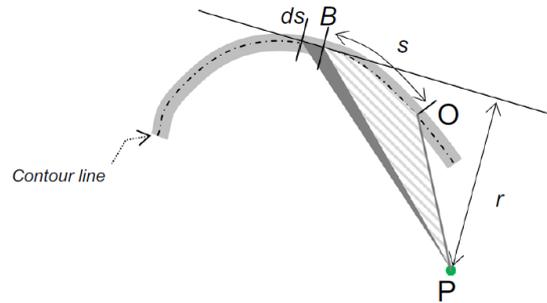


Figura 2.2 - Definizione di area settoriale [5]

Sia P un punto sul piano in cui è contenuta la linea di contorno (chiamato polo) e O un punto sulla linea di contorno (linea media) considerata come l'origine della coordinata lungo la linea media (coordinata della linea media). Sia r la distanza perpendicolare da P alla tangente alla linea media in un punto arbitrario sulla linea media, B, situata ad una distanza s dal punto O. Si noti che in figura 2.2 il prodotto $d\Omega = r \cdot ds$ rappresenta il doppio dell'area del triangolo grigio scuro (definito dai vertici P e B, e dal punto della linea media posta a distanza ds da B).

Secondo Vlasov [6], l'area settoriale o coordinata settoriale (ω) del punto B situata ad una distanza s misurata lungo la linea media dall'origine O, è definita come:

$$\omega = \int_0^s r ds \quad (2.10)$$

Pertanto, la coordinata settoriale corrispondente a un punto la cui coordinata della linea media è s corrisponde al doppio dell'area spazzata dal raggio vettore dall'origine O al generico punto distante s dall'origine. Nella figura 2.2, la coordinata settoriale del punto B è il doppio dell'area a strisce (in grigio). Quindi, l'area settoriale di un punto arbitrario sulla linea di contorno è una funzione di: (1) le coordinate cartesiane del punto arbitrario, (2) la posizione del polo (P) e (3) l'origine (O) adottata.

Per quanto riguarda il segno dell'area settoriale, si ha convenzionalmente che è positiva se il raggio vettore PO si sposta in senso antiorario, viceversa è negativa.

2.1.1.2 Caratteristiche geometriche della sezione trasversale

Si può dimostrare che esiste una relazione uno-a-uno tra le coordinate cartesiane e le coordinate settoriali per i punti sulla linea media della sezione trasversale, e quindi, qualsiasi punto della sezione trasversale è perfettamente determinato dalla sua coordinata settoriale in relazione a un polo P e all'origine della coordinata della linea media, O.

In analogia con le precedenti relazioni, è possibile definire le caratteristiche geometriche della sezione trasversale in coordinate settoriali (tabella 2.1).

Geometrical characteristic of the cross section in Cartesian coordinates		
Static moments		$S_y = \int_A y dA \quad S_z = \int_A z dA$
Moments of inertia		$I_y = \int_A y^2 dA \quad I_z = \int_A z^2 dA$
Product of inertia		$I_{yz} = \int_A yz dA$
Geometrical characteristic of the cross section in Sectorial coordinates		
Sectorial static moment		$S_\omega = \int_A \omega dA$
Sectorial moment of inertia or warping constant		$I_\omega = \int_A \omega^2 dA$
Sectorial products of inertia		$S_{\omega y} = \int_A \omega y dA \quad S_{\omega z} = \int_A \omega z dA$
Principal coordinate systems of reference		
Cartesian	$S_y = 0 \quad S_z = 0$ (centroid or gravity center)	$I_{yz} = 0$
Sectorial	$S_{\omega y} = 0 \quad S_{\omega z} = 0$ (shear center)	$S_\omega = 0$

Tabella 2.1 - Analogia caratteristiche geometriche [5]

A è l'area della sezione trasversale, y e z sono le coordinate cartesiane nel piano della sezione trasversale. Nelle prime due sezioni della tabella 2.1, le proprietà della sezione trasversale possono essere riferite a coordinate arbitrarie sia cartesiane che settoriali, ovvero il polo (P) può essere posizionato in qualsiasi punto arbitrario nel piano della sezione trasversale e l'origine della linea media (O) può essere qualsiasi punto della linea media.

Tuttavia, al fine di semplificare la formulazione, nella pratica ingegneristica tra tutti i possibili sistemi di riferimento vengono adottati i cosiddetti sistemi di riferimento principali. Nella terza sezione della tabella 2.1 vengono mostrate le condizioni da soddisfare affinché si abbiano i sistemi di riferimento principali. In particolare, nel caso di interesse, per ottenere un sistema principale di coordinate settoriali, devono essere soddisfatte le condizioni $S_{\omega y} = S_{\omega z} = 0$; tali condizioni vengono soddisfatte ponendo il polo nel centro di taglio della sezione trasversale.

2.1.1.3 Calcolo Coordinate Settoriali Principali

Per ottenere le coordinate settoriali principali viene proposto [5] di includere come variabile l'area settoriale all'origine di s , ω_0 . Il valore di ω_0 viene ottenuto imponendo la condizione di momento statico settoriale nullo, cioè $S_\omega = 0$. In tal modo si ottengono facilmente le aree settoriali della sezione trasversale riferite alle coordinate settoriali principali e la corrispondente costante di deformazione (I_ω). Il diagramma di flusso da seguire per il calcolo delle coordinate settoriali principali proposto è mostrato in figura 2.3.

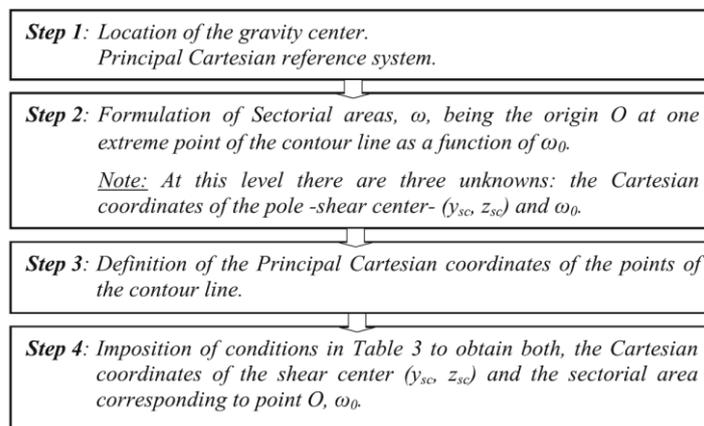


Figura 2.3 - Diagramma di flusso calcolo coordinate settoriali principali [5]

Vediamo adesso un esempio di calcolo su una sezione a C riportata in figura 2.4(a).

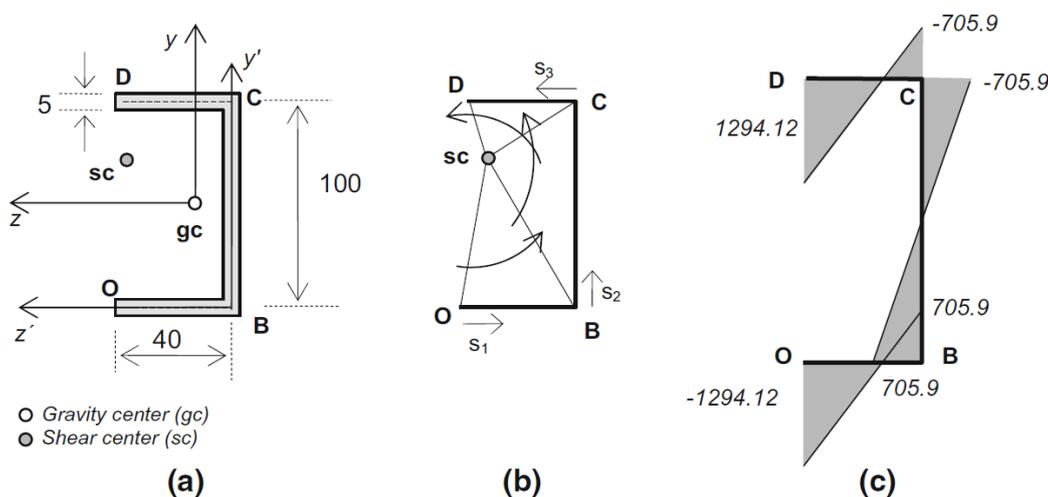


Figura 2.4 - Dimensioni sezione trasversale (a), definizione coordinate lungo la linea media (b) e diagramma coordinate settoriali [mm²] (c) [5]

Si noti che la posizione del centro di taglio non è quella riportata nella figura, bensì verrà determinata con il metodo proposto.

Step 1: Per semplicità, per determinare la posizione del baricentro si considera il sistema di coordinate cartesiane $y' - z'$ con origine nel punto B . Vista la simmetria $y'_{gc} = 50$ mm, bisogna quindi calcolare la sola coordinata z'_{gc} . Imponendo che il momento statico della sezione trasversale (S_z) si nullo, si ottiene $z'_{gc} = 50$ mm. Quindi da adesso in poi si considera il sistema di coordinate cartesiane principale $y - z$.

Step 2: L'origine della linea di contorno viene posta nell'estremo O , mentre le coordinate lungo la linea media s_1 , s_2 e s_3 sono definite come indicato in figura 2.4(b). È possibile inoltre notare come in questo caso le aree settoriali sono tutte positive perché il raggio vettore si muove sempre in verso antiorario (figura 2.4(b)). Le aree settoriali dei punti lungo la linea media sono espresse come:

$$\begin{aligned}
\omega_1(s_1) &= \omega_0 + s_1(50 + y_{sc}) \\
\omega_2(s_2) &= \omega_1(40) + s_2(8.89 + z_{sc}) \\
\omega_3(s_3) &= \omega_2(100) + s_3(50 - y_{sc})
\end{aligned} \tag{2.11}$$

dove ω_0 è l'area settoriale in corrispondenza al punto O adottato come origine.

Step 3: Le coordinate cartesiane principali dei punti relativi alla linea media sono:

$$\begin{aligned}
y_1(s_1) &= -50 \\
y_2(s_2) &= -50 + s_2 \\
y_3(s_3) &= 50
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
z_1(s_1) &= (40 - 8.89) - s_1 \\
z_2(s_2) &= -8.89 \\
z_3(s_3) &= -8.89 + s_3
\end{aligned}$$

Step 4: Le coordinate del centro di taglio rispetto al baricentro della sezione e, l'area settoriale nel punto d'origine O, vengono ottenute imponendo le condizioni mostrate in tabella 2.1, relativamente al sistema di riferimento principale settoriale. Si ha quindi il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite (avendo posto $dA = t \cdot ds$):

$$\begin{aligned}
S_{\omega y} &= \int_0^{40} \omega_1(s_1) \cdot y_1(s_1) t ds_1 + \int_0^{100} \omega_2(s_2) \cdot y_2(s_2) t ds_2 + \int_0^{40} \omega_3(s_3) \cdot y_3(s_3) t ds_3 = 0 \\
S_{\omega z} &= \int_0^{40} \omega_1(s_1) \cdot z_1(s_1) t ds_1 + \int_0^{100} \omega_2(s_2) \cdot z_2(s_2) t ds_2 + \int_0^{40} \omega_3(s_3) \cdot z_3(s_3) t ds_3 = 0 \\
S_{\omega} &= \int_0^{40} \omega_1(s_1) t ds_1 + \int_0^{100} \omega_2(s_2) t ds_2 + \int_0^{40} \omega_3(s_3) t ds_3 = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Sostituendo nel sistema di equazioni le espressioni (2.11) e (2.12), e risolvendo il sistema si determinano le tre incognite ricercate: z_{sc} , y_{sc} , ω_0 . A questo punto è possibile rappresentare il diagramma delle aree settoriali (figura 2.4(c)) sfruttando le relazioni (2.11).

In alternativa, se si conoscono già le coordinate del centro di taglio, basta semplicemente utilizzare la condizione $S_{\omega} = 0$, dalla quale si otterrà il valore di ω_0 .

2.2 Algoritmi strutturali per singole tipologie di carico

Gli spostamenti u , v , w e φ , associati ai singoli tipi di carico, possono essere calcolati attraverso i termini derivativi determinati dalla risoluzione dell'equazione (2.7). Supponendo che ci siano $n + 1$ punti di misurazione della deformazione lungo ciascuna linea di misurazione, distribuiti con una distanza uniforme pari a Δl , può essere stabilito un set di $n + 1$ equazioni in $n + 1$ sezioni trasversali, che risolte ci danno i valori dei termini derivativi lungo l'asse della trave. Per le zone $x_{i-1} < x < x_i$, dove x_{i-1} e x_i sono le coordinate di due punti di misura adiacenti lungo l'asse della trave, facendo l'ipotesi di distribuzione lineare per i termini derivati si ha:

$$\gamma(x) = \gamma_{i-1} - (\gamma_{i-1} - \gamma_i) \frac{x - x_{i-1}}{\Delta l} \quad (2.14)$$

dove γ è un termine generalizzato che denota il generico termine derivativo dell'equazione (2.7), ovvero du/dx , d^2v/dx^2 , d^2w/dx^2 e $d^2\varphi/dx^2$. A questo punto sono stati derivati degli algoritmi strutturali di integrazione a tratti del primo e secondo ordine di γ :

$$\gamma_i^I = \frac{\Delta l}{2} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j + \gamma_i \right] + \gamma_0^I \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.15a)$$

$$\gamma_i^{II} = \frac{\Delta l^2}{6} \left[(3i - 1)\gamma_0 + 6 \sum_{j=1}^{i-1} (i - j)\gamma_j + \gamma_i \right] + \Delta l \gamma_0^I + \gamma_0^{II} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.15b)$$

dove γ_0^I e γ_0^{II} sono le condizioni al contorno in x_0 , che ad esempio, per una trave incastrata valgono $\gamma_0^I = \gamma_0^{II} = 0$. Attraverso l'algoritmo strutturale di integrazione del primo ordine è possibile quindi calcolare u , dv/dx , dw/dx e $d\varphi/dx$, con quest'ultimo termine che può essere utilizzato per calcolare attraverso la (2.3) lo spostamento di warping u^w ; mentre attraverso l'algoritmo del secondo ordine è possibile calcolare v , w e φ . Ovviamente il fattore principale che influenza l'accuratezza della ricostruzione della deformata è la densità di punti di misurazione della deformazione. Nel caso di bassa densità di punti di misurazione si potrebbe ricorrere ad una approssimazione di ordine superiore anziché lineare come quella adottata in questo caso.

2.3 Algoritmi ricostruzione torsione

Come visto in precedenza, nel caso di torsione occorre una sola linea di misura. L'equazione di partenza da considerare è la (2.9), da cui si ricava:

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} \cdot \omega(s_1) = \varepsilon_1 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_1}{\omega(s_1)} = \gamma \quad (2.16)$$

Possiamo inoltre scrivere che:

$$\gamma^I = \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.17a)$$

$$\gamma^{II} = \varphi \quad (2.17b)$$

Per quanto riguarda la torsione, le grandezze di interesse che si vogliono ricostruire sono lo spostamento assiale di warping, u^w , e la rotazione attorno all'asse x , φ .

2.3.1 Algoritmo ricostruzione u^w

La relazione che definisce lo spostamento di warping è la (2.3), da cui:

$$u^w(s) = -\omega(s) \frac{d\varphi}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{u^w(s)}{\omega(s)} \quad (2.18)$$

Pertanto, in virtù della (2.17a), l'algoritmo strutturale di integrazione da utilizzare per la ricostruzione di u^w è quello del primo ordine. Andando a sostituire la (2.16) e la (2.18) nell'algoritmo di integrazione del primo ordine si ottiene:

$$-\frac{u^w(s)}{\omega(s)} = \frac{\Delta l}{2} \left[-\frac{\varepsilon_{1_0}}{\omega(s_1)} + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \left(-\frac{\varepsilon_{1_j}}{\omega(s_1)} \right) - \frac{\varepsilon_{1_i}}{\omega(s_1)} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.19)$$

Rielaborando:

$$u^w(s) = \frac{\Delta l}{2} \frac{\omega(s)}{\omega(s_1)} \left[\varepsilon_{1_0} + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_{1_j} + \varepsilon_{1_i} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.20)$$

Si precisa che il pedice 1 sta ad indicare il numero della linea di misura presa in considerazione, quindi in questo caso significa che le ε sono quelle misurate lungo la linea di misura 1.

2.3.2 Algoritmo ricostruzione φ

Per quanto riguarda la ricostruzione della rotazione attorno all'asse x, in virtù della (2.17b), l'algoritmo strutturale di integrazione da utilizzare è quello del secondo ordine. Sostituendo la (2.16) e la (2.17b) nell'algoritmo di integrazione del secondo ordine si ottiene:

$$\varphi_i = \frac{\Delta l^2}{6} \left(-\frac{1}{\omega(s_1)} \right) \left[(3i-1)\varepsilon_{1_0} + 6 \sum_{j=1}^{i-1} (i-j)\varepsilon_{1_j} + \varepsilon_{1_i} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.21)$$

2.4 Algoritmi ricostruzione flessione

Nel caso di flessione l'equazione da utilizzare è:

$$\varepsilon_x = -\frac{d^2 w}{dx^2} \cdot z \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_x}{z} \quad (2.22)$$

Anche in questo caso, come per la torsione, occorre una sola linea di misura. L'unica grandezza di interesse per questa tipologia di carico è la freccia w , per cui l'algoritmo di integrazione da utilizzare è quello del secondo ordine. Per cui sostituendo la (2.22) nell'algoritmo di integrazione del secondo ordine si ottiene:

$$w_i = \frac{\Delta l^2}{6} \left(-\frac{1}{z_1} \right) \left[(3i-1)\varepsilon_{1_0} + 6 \sum_{j=1}^{i-1} (i-j)\varepsilon_{1_j} + \varepsilon_{1_i} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.23)$$

2.5 Algoritmi ricostruzione flesso-torsione

Nel caso di flesso-torsione occorrono due linee di misura. L'equazione di partenza da considerare è la (2.8), si è in presenza quindi di un sistema di 2 equazioni in 2 incognite:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 w}{dx^2} \cdot z_1 - \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cdot \omega(s_1) = \varepsilon_1 \\ -\frac{d^2 w}{dx^2} \cdot z_2 - \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cdot \omega(s_2) = \varepsilon_2 \end{cases} \quad (2.24)$$

nelle quali i pedici 1 e 2 si riferiscono alle due linee di misura.

Rielaborando si ottiene:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \left(-\varepsilon_1 - \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cdot \omega(s_1) \right) \frac{1}{z_1} \quad (2.25a)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{z_1 \cdot \varepsilon_2 - z_2 \cdot \varepsilon_1}{\omega(s_1) \cdot z_2 - \omega(s_2) \cdot z_1} \quad (2.25b)$$

Per proseguire con la determinazione degli algoritmi di ricostruzione delle grandezze desiderate, bisogna tenere a mente che:

$$\gamma = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \quad ; \quad \gamma = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.26a)$$

$$\gamma^I = \frac{d\varphi}{dx} \quad ; \quad \gamma^I = \frac{dw}{dx} \quad (2.26b)$$

$$\gamma^{II} = \varphi \quad ; \quad \gamma^{II} = w \quad (2.26c)$$

In questo caso le grandezze di interesse che si vogliono ricostruire sono lo spostamento trasversale lungo l'asse z , w , e la rotazione attorno all'asse x , φ . Nel caso in cui si volesse ricostruire anche lo spostamento di warping, si può utilizzare l'algoritmo utilizzato nel caso di torsione pura.

Si precisa che in questo caso, la ricostruzione dello spostamento trasversale lungo l'asse z è quello relativo al centro di taglio.

2.4.1 Algoritmo ricostruzione w

La relazione che definisce lo spostamento verticale w è la (2.25a), che tenendo conto della (2.25b) diventa:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left(-\varepsilon_1 - \frac{(z_1 \cdot \varepsilon_2 - z_2 \cdot \varepsilon_1)}{(\omega(s_1) \cdot z_2 - \omega(s_2) \cdot z_1)} \cdot \omega(s_1) \right) \frac{1}{z_1} \quad (2.27)$$

Pertanto, in virtù della (2.24c), l'algoritmo strutturale di integrazione da utilizzare per la ricostruzione di w è quello del secondo ordine. Quindi, andando a sostituire la (2.26c) e la (2.27) nell'algoritmo di integrazione del primo ordine, si ottiene:

$$\begin{aligned} w = & \frac{\Delta l^2}{6} [(3i - 1) \cdot (-\varepsilon_{10} - m \cdot n \cdot \omega(s_1)) \frac{1}{z_1} + \\ & + 6 \left(\left(-\frac{1}{z_1} + m \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \omega(s_1) \right) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} (i-j) \cdot \varepsilon_{1j} - m \cdot \omega(s_1) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} (i-j) \cdot \varepsilon_{2j} \right) + \\ & + \varepsilon_{1j} \left(-\frac{1}{z_1} + m \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \omega(s_1) \right) - m \cdot \omega(s_1) \cdot \varepsilon_{2j}] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Avendo posto:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{\omega(s_1) \cdot z_2 - \omega(s_2) \cdot z_1} \\ n &= z_1 \cdot \varepsilon_2 - z_2 \cdot \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.4.2 Algoritmo ricostruzione φ

Per quanto riguarda la ricostruzione della rotazione attorno all'asse x , in virtù della (2.26c), l'algoritmo strutturale di integrazione da utilizzare è quello del secondo ordine. Sostituendo allora la (2.26c) e la (2.25b) nell'algoritmo di integrazione del secondo ordine si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{\Delta l^2}{6} [(3i - 1) \cdot m \cdot n + 6 \cdot m (z_1 \cdot \sum_{j=1}^{i-1} (i-j) \cdot \varepsilon_{2j} + \\ & - z_2 \cdot \sum_{j=1}^{i-1} (i-j) \cdot \varepsilon_{1j}) + m \cdot (z_1 \cdot \varepsilon_{2i} - z_2 \cdot \varepsilon_{1i})] \end{aligned} \quad (2.30)$$

3. Validazione numerica FEM

Così come proposto da Hao Xu [2], per verificare l'efficacia del metodo di ricostruzione si effettua una validazione numerica basata su una analisi FEM. Innanzitutto si procede con la validazione FEM del metodo riproducendo il modello proposto in [2], per poi passare al modello della trave che verrà utilizzata nella prova sperimentale.

3.1 Trave a sbalzo con sezione trasversale ad Ω

La trave utilizzata in [2] è una trave a sbalzo in alluminio (DURAL), lunga 900 mm, con sezione trasversale ad Ω , mostrata in figura 3.1.

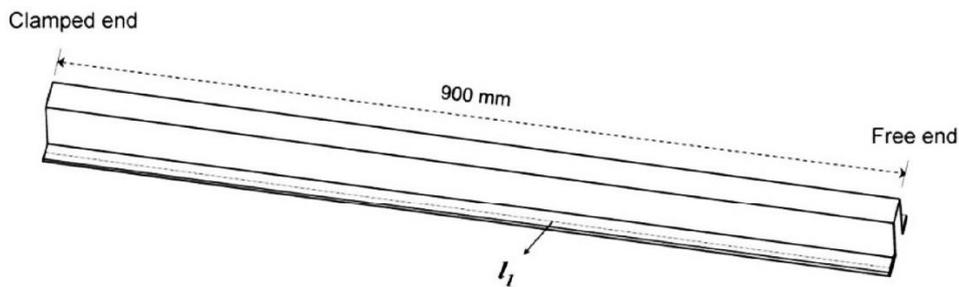


Figura 3.1 - Trave a sbalzo con sezione trasversale ad Ω [2]

Tale tipologia di trave è molto utilizzata nelle strutture aeronautiche (come irrigidimenti ad esempio), e la sezione ad Ω è considerata una geometria relativamente complessa che permette di convalidare quindi l'efficacia del metodo, che può essere applicato in teoria anche ad altri tipi di sezione, sia aperte che chiuse. In figura 3.2 viene riportata la geometria della sezione trasversale con le relative dimensioni (leggermente differenti da quelle di Hao Xu [2]); mentre in figura 3.3 viene riportata la distribuzione delle coordinate settoriali. Si considerano due linee di misura, l_1 ed l_2 , le cui proiezioni nella sezione trasversale sono indicate con p_1 e p_2 .

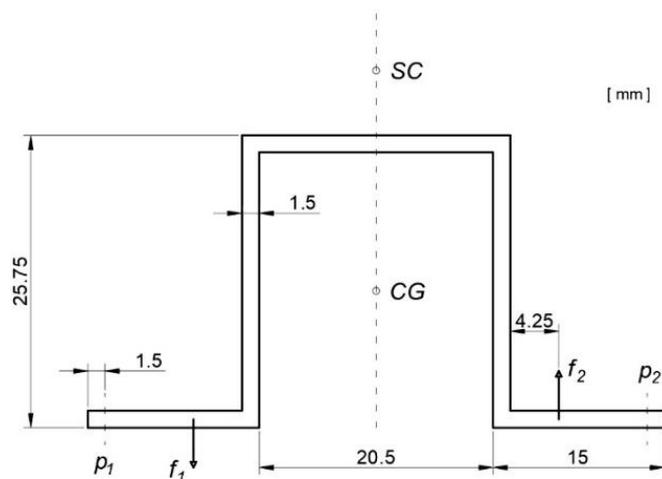


Figura 3.2 - Dimensioni sezione trasversale ad Ω [2]

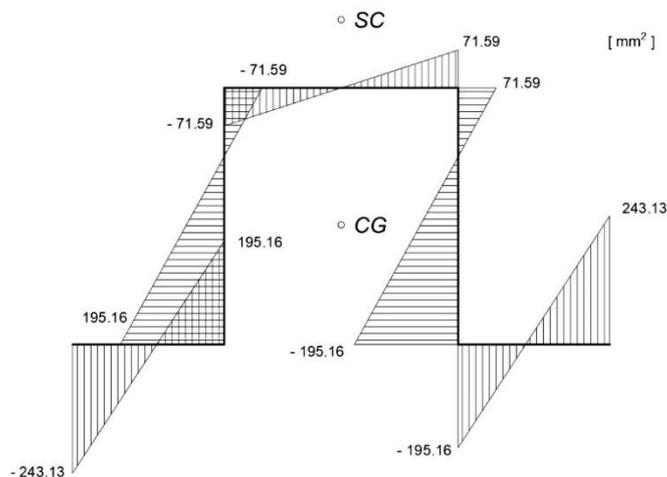


Figura 3.3 - Distribuzione coordinate settoriali sezione ad Ω [2]

Per l'analisi FEM è stato utilizzato il software MSC PATRAN/NASTRAN. Il modello è stato realizzato con proprietà 2D SHELL, considerando la linea media della sezione trasversale. Il materiale utilizzato è il DURAL che ha le seguenti caratteristiche: $E = 73.1 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$, $\rho = 2.78 \text{ g/cm}^3$. Per quanto riguarda invece la mesh, è stata realizzata abbastanza fitta con una taglia di circa $1.5 \times 1 \text{ mm}$, utilizzando il comando mesh seed ed elementi Quad4, per un totale di 57600 elementi. Avere una mesh molto fitta significa avere una elevata densità di punti di misurazione (ottenibile in laboratorio con sensori a fibra ottica), e quindi una migliore accuratezza di ricostruzione. In particolare, nel modello FEM, sono presenti 901 punti di misurazione distribuiti con una distanza adiacente di 1 mm. In figura 3.4 si riporta il dettaglio della mesh sulla porzione della trave all'estremo libero. È stata realizzata inoltre una versione del modello FEM con l'utilizzo di un RBE2 sulla sezione di estremità (figura 3.5), che collega tutti i nodi della sezione al baricentro in modo rigido, per cercare di rendere il comportamento della trave più simile a quello previsto dalle ipotesi della trave, e cioè che la sezione rimanga rigida. Infatti, essendo i carichi applicati puntualmente sulla sezione di estremità potrebbero verificarsi delle deformazioni locali che potrebbero creare degli errori.

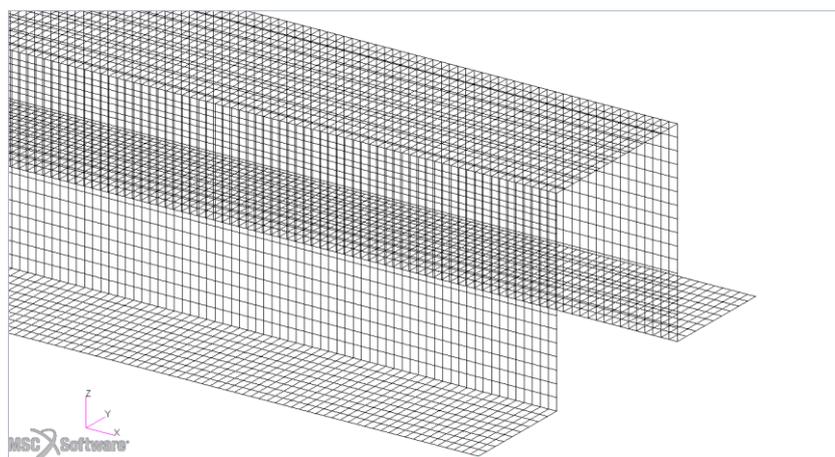


Figura 3.4 - Dettaglio mesh estremo libero trave

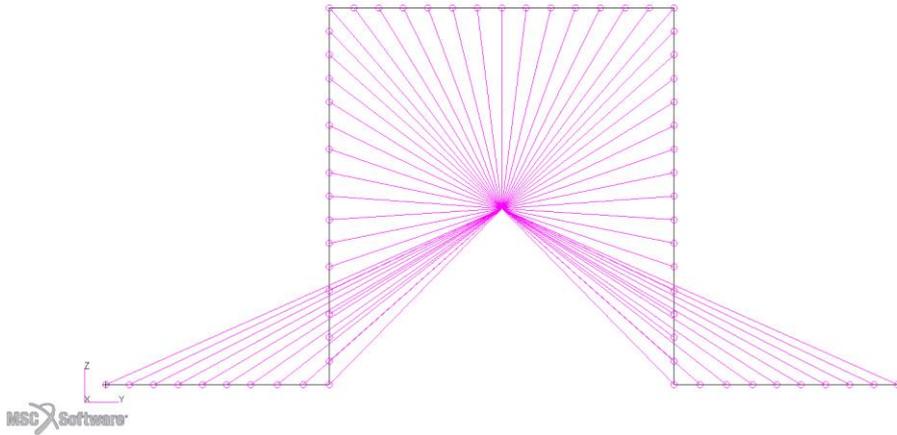


Figura 3.5 - Sezione di estremità con RBE2

Per quanto riguarda i carichi, nel modello proposto sono state analizzate due tipologie di sollecitazione: torsione e flesso-torsione. La sollecitazione di torsione è stata applicata attraverso la coppia di forze $f_1 - f_2$ mostrata in figura 3.2; mentre la sollecitazione di flesso-torsione è stata applicata attraverso la sola forza f_1 .

Torsione	f_1 [N]	37.5
Flesso -Torsione	$ f_1 = f_2 $ [N]	

Tabella 3.1 - Valori carichi

Implementando quindi, sul software MATLAB, gli algoritmi di ricostruzione visti in precedenza, sono stati ricostruite le deformate nei due casi di sollecitazione.

3.1.1 Ricostruzione deformata trave soggetta a torsione

Di seguito si riporta l'andamento degli strain lungo le due linee.

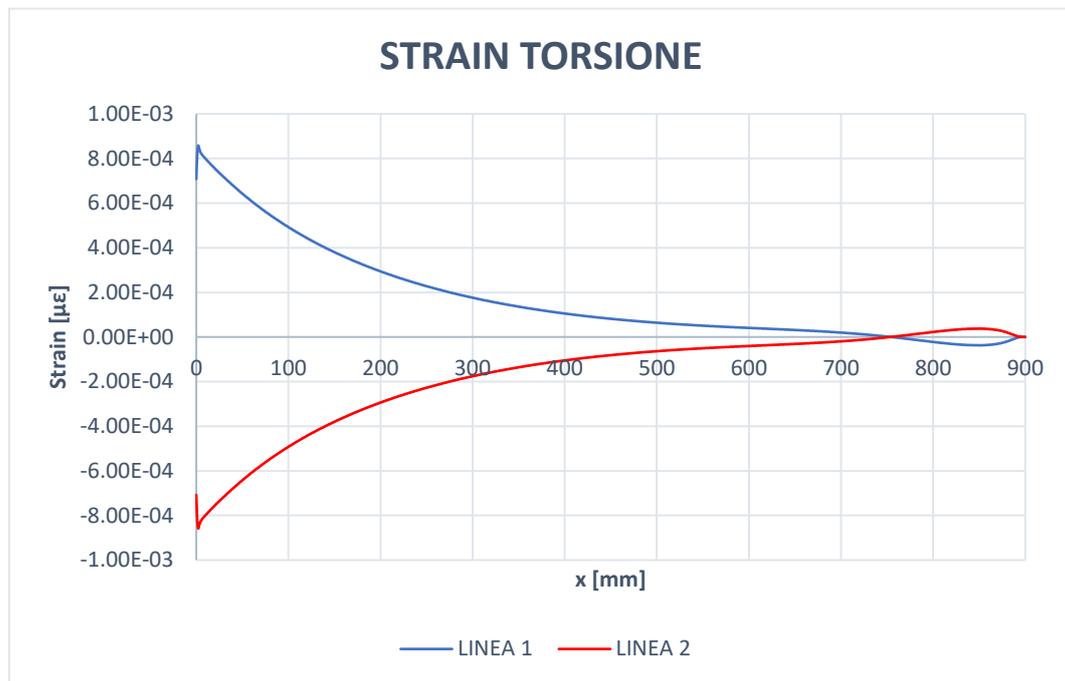


Figura 3.6 - Andamento strain trave soggetta a torsione lungo le due linee di misura

Per il caso di sola torsione, gli algoritmi utilizzati sono il (2.20) e il (2.21). Si riportano di seguito i grafici relativi allo spostamento di warping lungo la linea di misura 1 e 2 (figure 3.7 e 3.8).

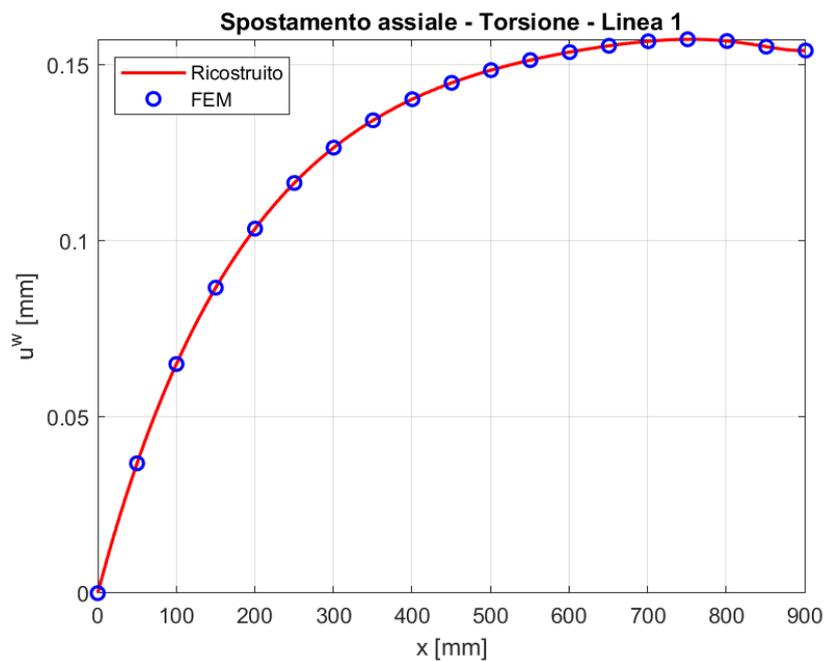


Figura 3.7 - Spostamento di warping linea di misura 1, ricostruito e FEM

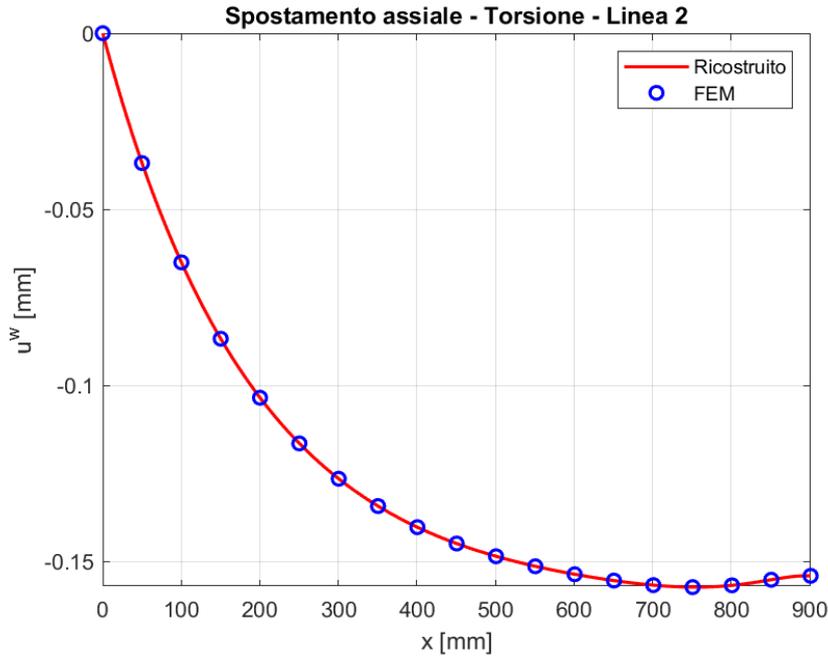


Figura 3.8 - Spostamento di warping linea di misura 2, ricostruito e FEM

Come è possibile notare dai grafici, la ricostruzione dello spostamento di warping è molto soddisfacente, si ha infatti una sovrapposizione delle due curve relative al valore ricostruito e quello FEM.

Un fattore che influenza parecchio l'accuratezza della ricostruzione è la posizione della linea di misura. Infatti, ad esempio, nel caso estremo in cui la linea di misura viene posizionata in un punto sulla sezione in corrispondenza del quale la coordinata settoriale è nulla, si otterrebbero dei risultati errati, in quanto il denominatore delle (2.20) e (2.21) scomparirebbe. Quindi questo è un aspetto molto importante da attenzionare per evitare errori nei risultati di ricostruzione.

Si riportano adesso i grafici relativi alla ricostruzione dell'angolo di torsione dei punti lungo la linea di misura 1 e 2 (figure 3.9 e 3.10).

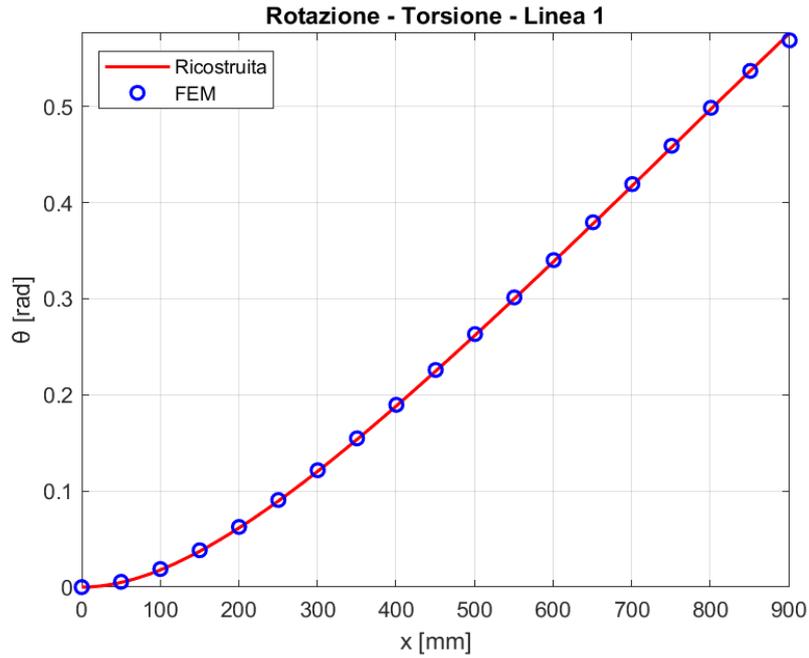


Figura 3.9 - Angolo di torsione linea di misura 1, ricostruito e FEM

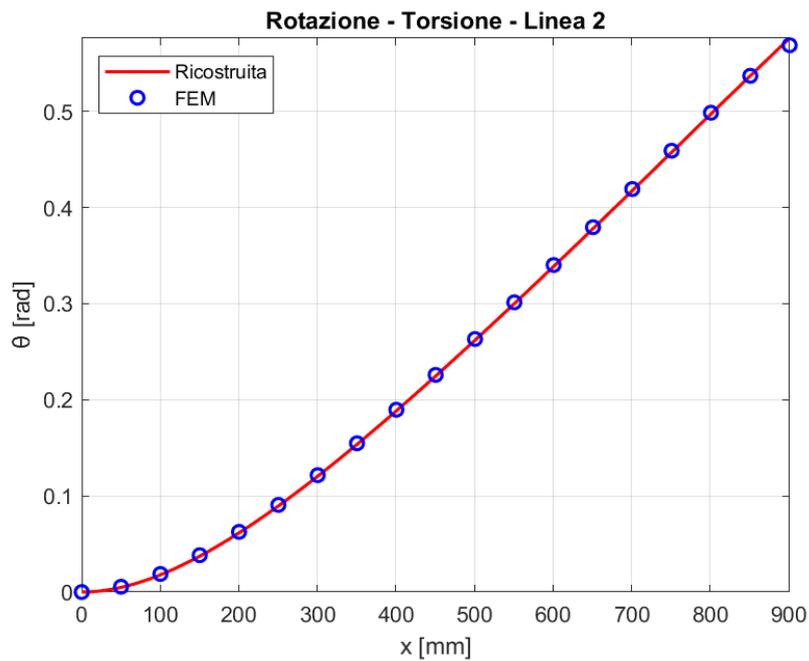


Figura 3.10 - Angolo di torsione linea di misura 2, ricostruito e FEM

Anche per quanto riguarda l'angolo di torsione si ha una ricostruzione soddisfacente, con un errore percentuale tra ricostruito e FEM all'estremo libero di circa l'1.3 %.

3.1.2 Ricostruzione deformata trave soggetta a flesso-torsione

Di seguito si riporta l'andamento degli strain lungo le due linee.

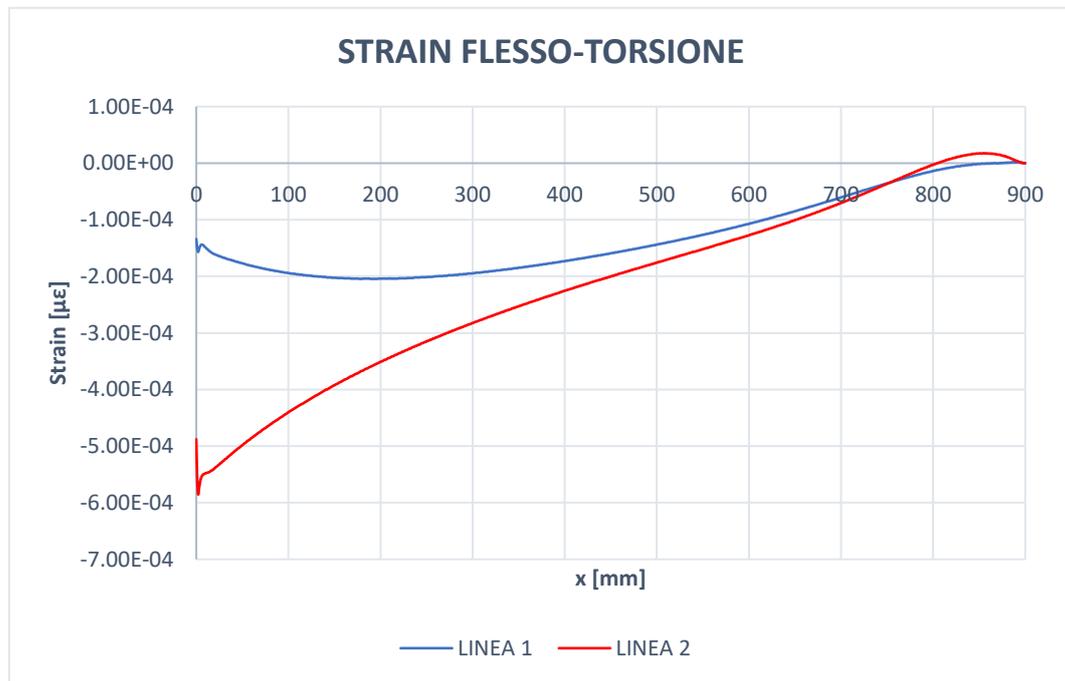


Figura 3.11 - Andamento strain trave soggetta a flesso-torsione lungo le due linee di misura

Per il caso di flesso-torsione, gli algoritmi utilizzati sono il (2.26) e il (2.28). Ma, come detto in precedenza, con questi due algoritmi vengono ricostruiti rispettivamente lo spostamento w del centro di taglio e la rotazione φ attorno all'asse x . Quindi, oltre a confrontare i valori ricostruiti e FEM relativi al centro di taglio, si può determinare il valore dello spostamento w nelle due linee di misura, o in qualsiasi altro punto della sezione trasversale, utilizzando la relazione:

$$w_z = w(x) + y \cdot \varphi(x) \quad (3.1)$$

dove y è la distanza lungo l'asse y del punto considerato rispetto al centro di taglio.

Vengono riportati di seguito i grafici relativi alla ricostruzione dello spostamento trasversale lungo l'asse z del centro di taglio e della rotazione attorno all'asse x (figure 3.13 e 3.14), confrontati con lo spostamento e rotazione del punto di mezzeria della sezione trasversale, che sta sull'asse di simmetria così come il centro di taglio, in quanto il centro di taglio non è un punto appartenente alla sezione, e quindi non direttamente valutabile dai risultati FEM. In questo caso il confronto è corretto, poiché verificando dal FEM si nota che il punto di mezzeria della sezione trasversale si abbassa lungo z della stessa quantità del centro di taglio, e non subisce una ulteriore deflessione dovuta alla torsione, com'è possibile vedere in figura 3.12.

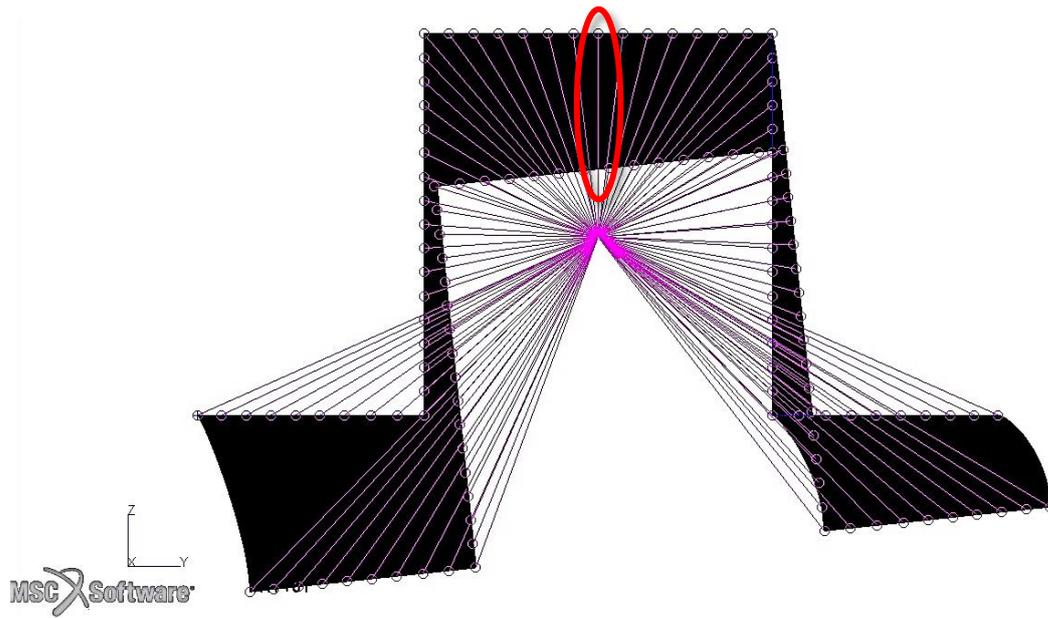


Figura 3.12 - Dettaglio spostamento trasversale linea di mezzeria

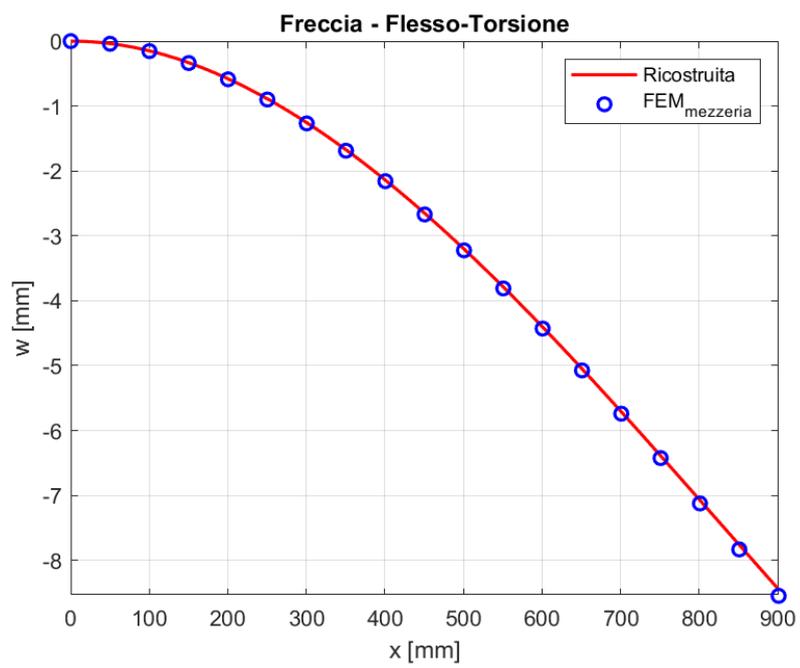


Figura 3.13 - Spostamento trasversale centro di taglio, ricostruito e FEM

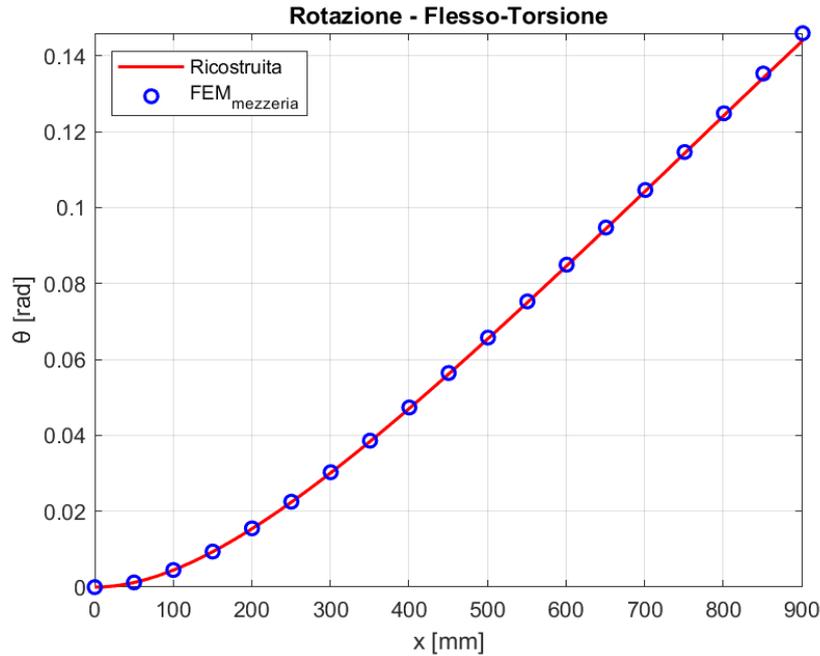


Figura 3.14 - Angolo di torsione, ricostruito e FEM

Anche in questo caso, guardando i grafici si evince che la ricostruzione è abbastanza efficace, sia per lo spostamento w che per la rotazione. L'errore percentuale dello spostamento w all'estremo libero assume un valore dell'1.15 %; mentre l'errore percentuale relativo all'angolo di torsione all'estremo libero assume un valore dell'1.35 %.

Una volta ricostruiti lo spostamento del centro di taglio e l'angolo di torsione, come detto in precedenza, attraverso la (3.1) è possibile ricostruire lo spostamento w_z delle due linee di misura, di cui si riportano i grafici in figura 3.15 e 3.16.

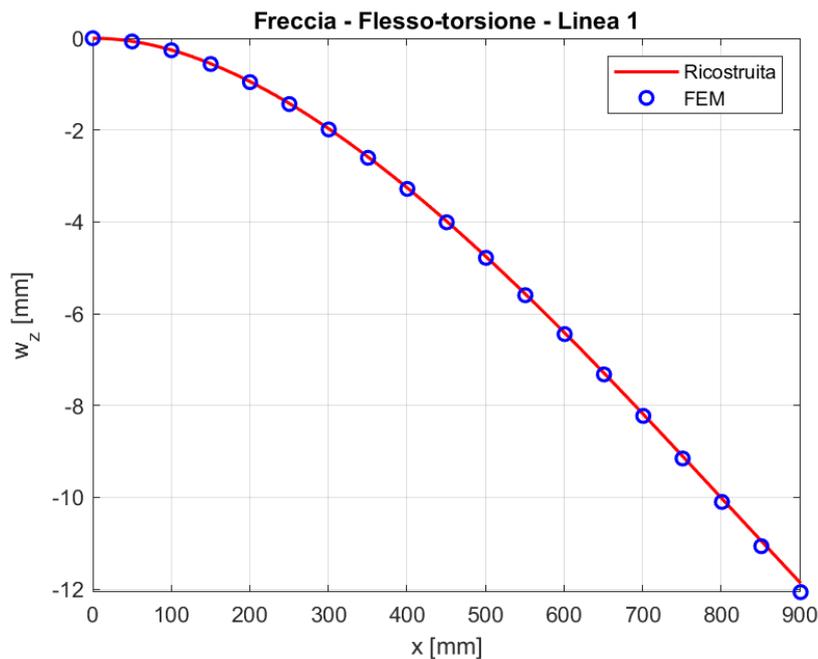


Figura 3.15 - Spostamento w , ricostruito e FEM, relativo alla linea 1

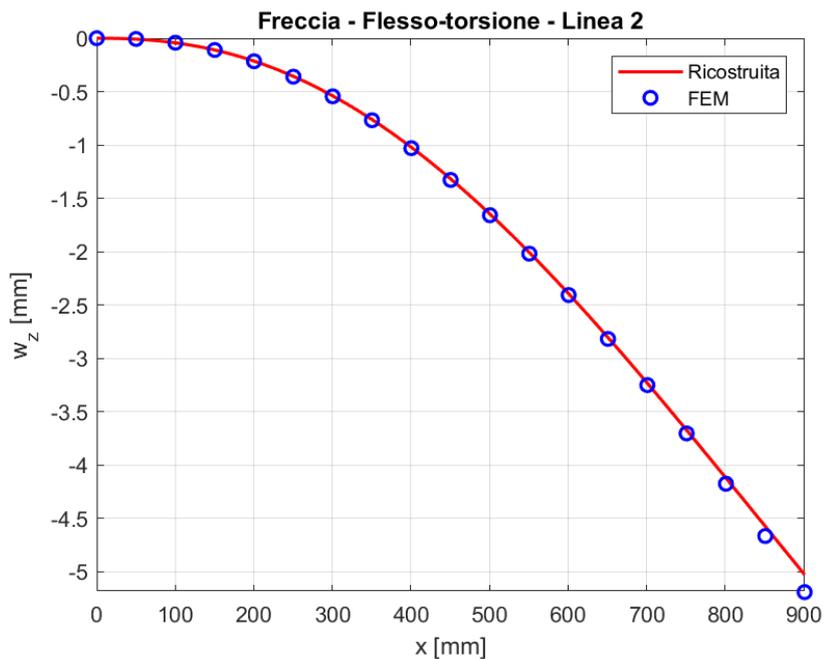


Figura 3.16 - Spostamento w, ricostruito e FEM, relativo alla linea 2

Si ha, rispettivamente per lo spostamento w lungo linea 1 e 2, un errore dell'1.62 % e del 3.14 %.

3.1.3 Confronto risultati modello FEM con e senza RBE2

Vengono confrontati adesso i risultati ottenuti utilizzando il modello FEM con e senza RBE2.

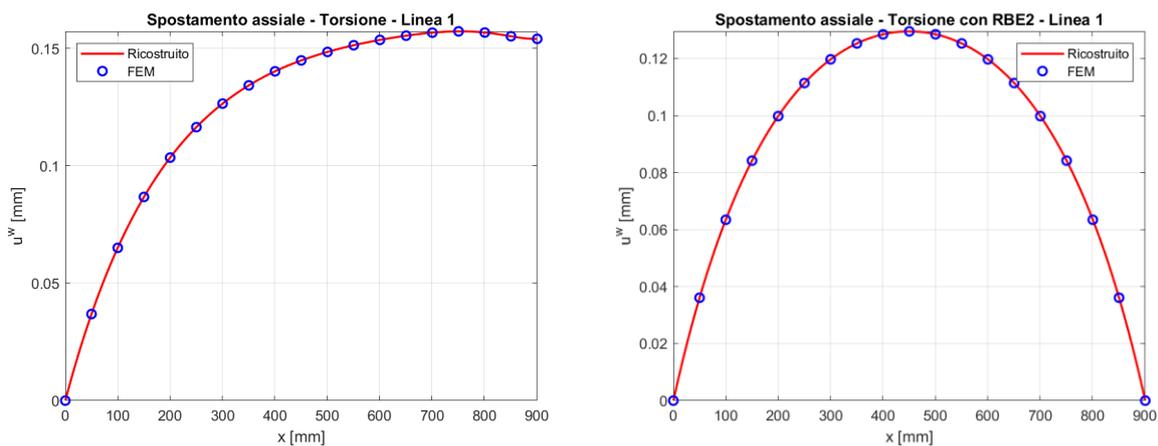


Figura 3.17 - Spostamento di warping senza RBE2 (sx) e con RBE2 (dx)

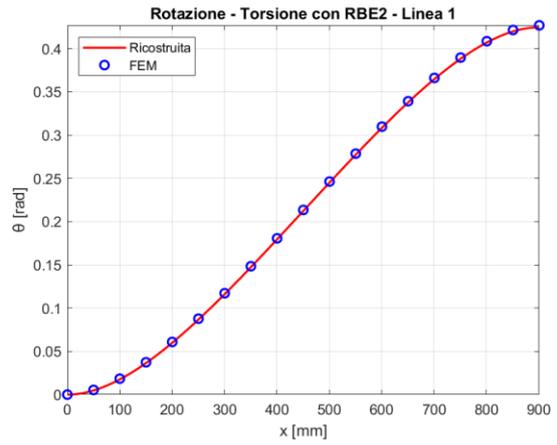
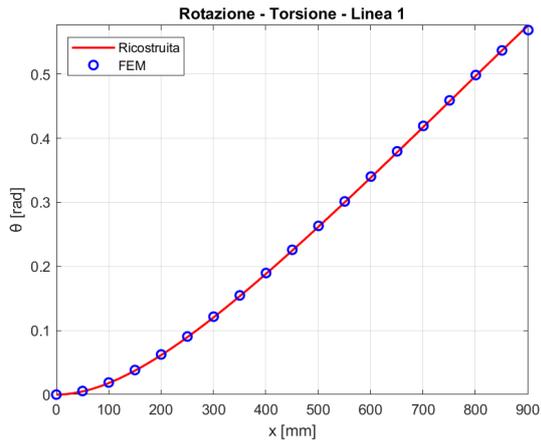


Figura 3.18 - Angolo di torsione senza RBE2 (sx) e con RBE2 (dx)

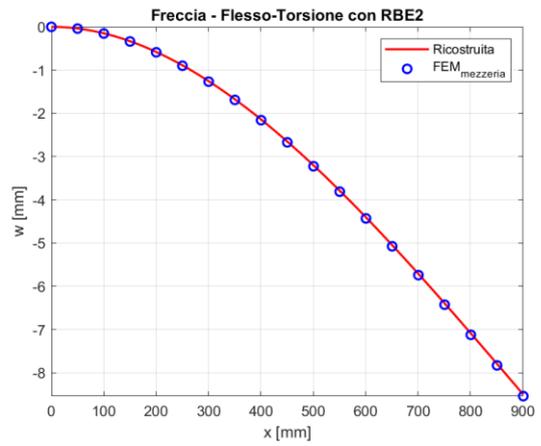
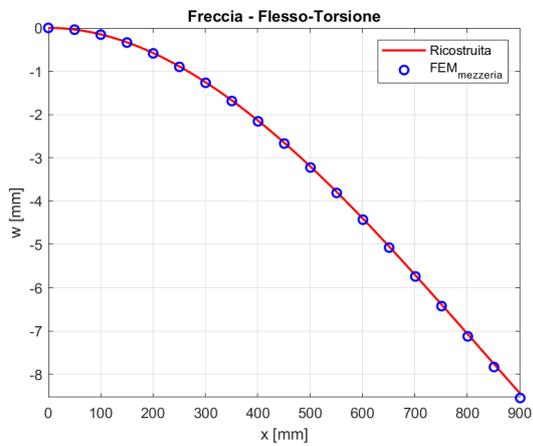


Figura 3.19 - Spostamento w senza RBE2 (sx) e con RBE2 (dx)

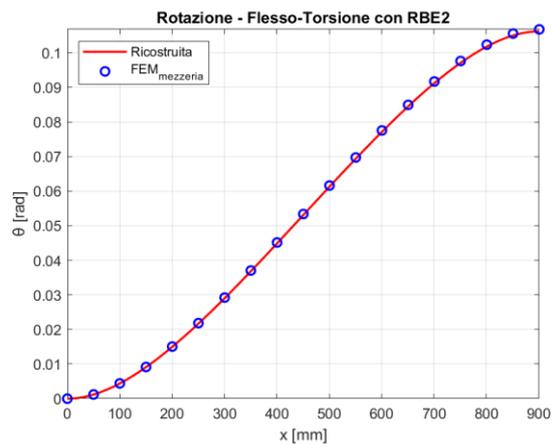
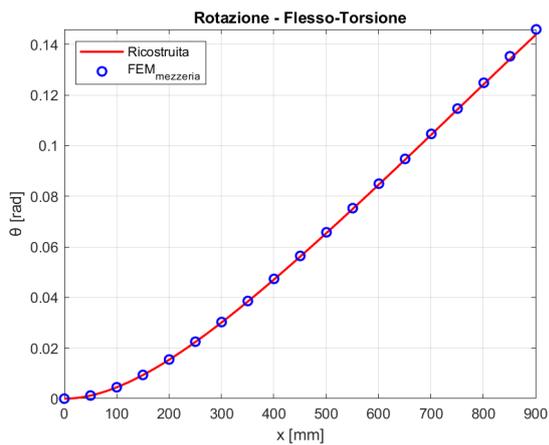


Figura 3.20 - Angolo di torsione senza RBE2 (sx) e con RBE2 (dx)

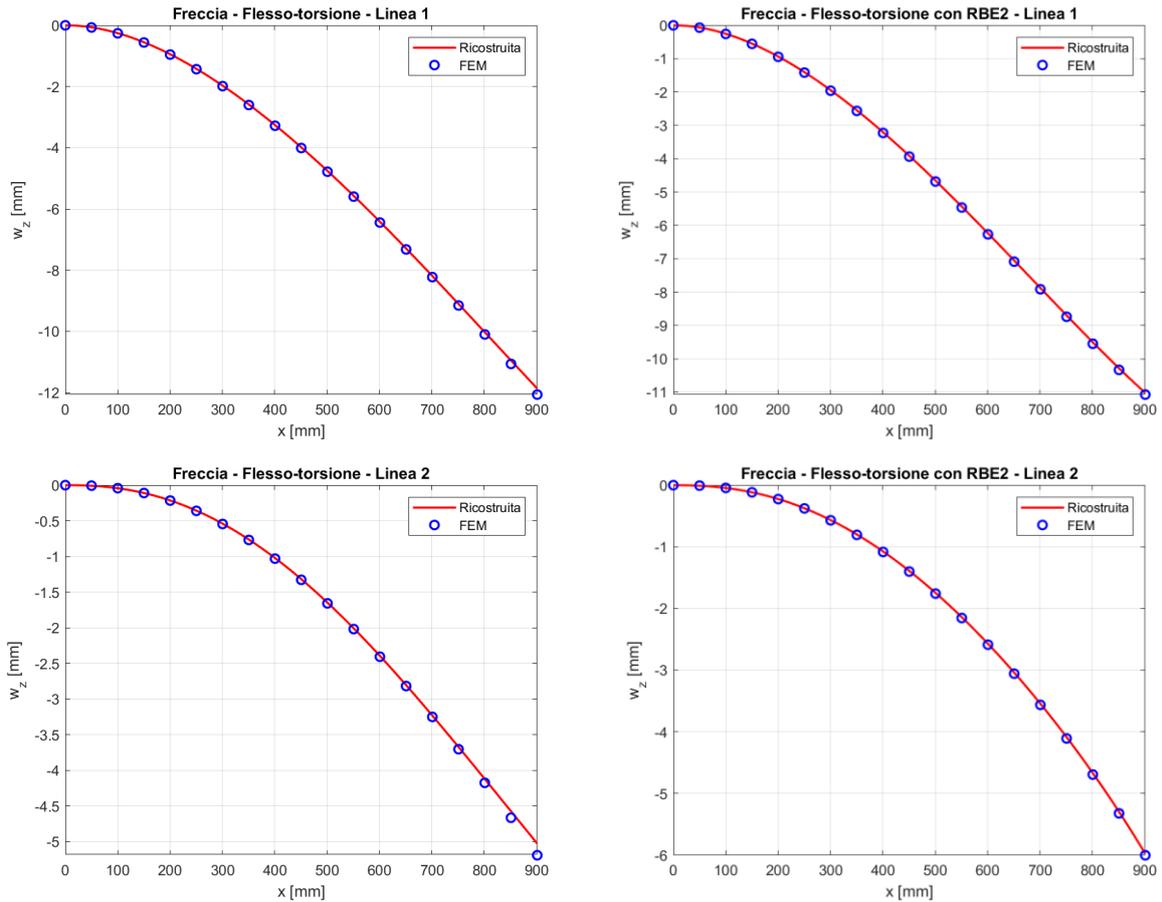


Figura 3.21 - Spostamento w senza RBE2 (sx) e con RBE2 (dx)

La differenza principale si ha nell'andamento dello spostamento assiale, che nel caso del modello FEM con RBE2 va a zero nell'estremo libero, ciò probabilmente è dovuto alla presenza dell'RBE2 che impone una sorta di vincolo sullo spostamento assiale della sezione di estremità. Per quanto riguarda la bontà della ricostruzione, si ha che gli errori percentuali all'estremo libero si riducono di oltre il 50 %, com'è possibile vedere nella tabella 2.2.

		SENZA RBE2	CON RBE2
TORSIONE	u_w^1	1.67	0.57
	φ_1	2.23	0.61
	u_w^2	11.21	6.11
	φ_1	0.33	0.21
FLESSO - TORSIONE	w	0.10	0.05
	φ	0.02	0.004
	w_1	5.30	3.46
	w_2	6.91	4.31

Tabella 3.2 - Errori percentuali

3.2 Trave a sbalzo con sezione trasversale a C

Prima di passare al modello della trave a C utilizzata sperimentalmente in laboratorio, si procede con una validazione FEM su una generica sezione a C avente le dimensioni e le coordinate settoriali riportate rispettivamente nelle figure 3.22 e 3.23. Le due linee di misura considerate sono quelle indicate con p_1 e p_2 . La lunghezza della trave è di 900 mm.

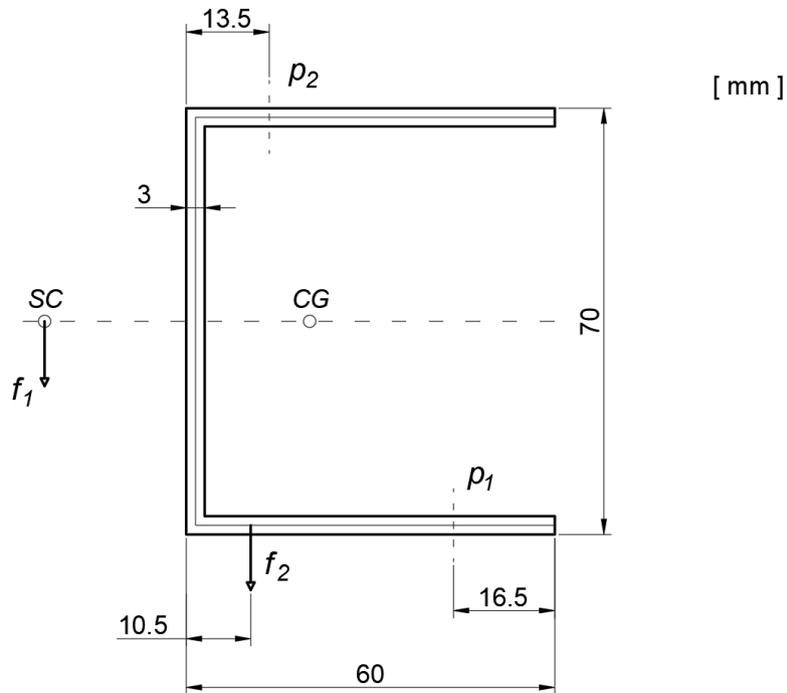
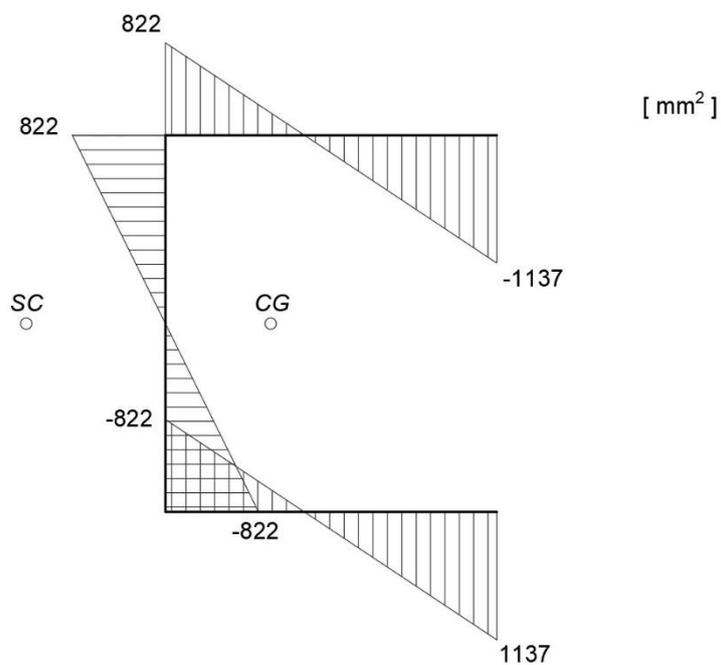


Figura 3.22 - Dimensioni sezione trasversale a C



Anche in questo caso il modello FEM è stato realizzato con proprietà 2D SHELL, utilizzando come materiale il medesimo della trave utilizzata in laboratorio, ovvero una Lega 6060 avente le seguenti caratteristiche: $E = 68033 Pa$, $\nu = 0.3347$. Lungo l'asse della trave, e quindi in ogni linea di misura, sono presenti 601 punti di misurazione distribuiti con una distanza adiacente di 1.5 mm. Per quanto riguarda le tipologie di sollecitazione, in questo caso si vogliono analizzare la flessione e la flessione-torsione. Il carico di flessione-torsione è rappresentato dal vettore f_2 in figura 3.22; il carico di flessione deve essere applicato nel centro di taglio (f_1 in figura 3.22). Ma essendo il centro di taglio un punto non appartenente alla sezione stessa, è stato necessario ricorrere ad un RBE2 (figura 3.24) in modo da collegare il centro di taglio alla sezione di estremità della trave, e poter quindi applicare il carico di flessione.

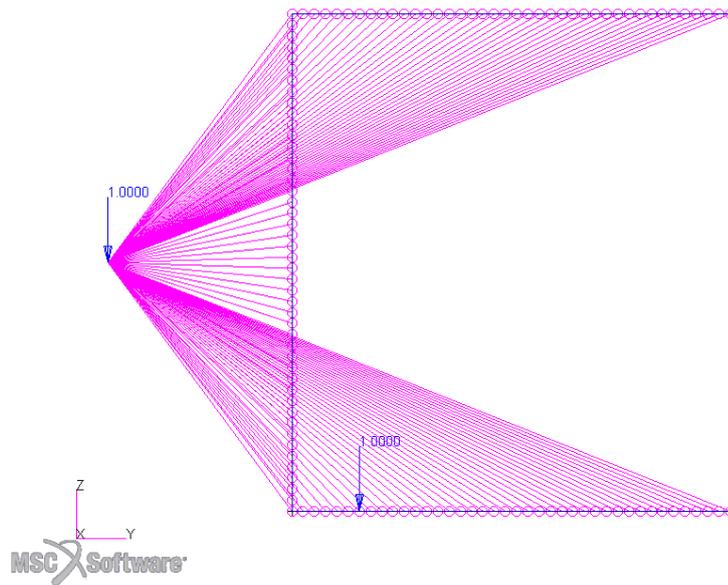


Figura 3.24 - Dettaglio sezione di estremità con RBE2

Entrambi i carichi utilizzati, di flessione e flessione-torsione, sono pari ad 1 N.

3.2.1 Ricostruzione deformata trave soggetta a flessione

Di seguito si riporta l'andamento degli strain lungo le due linee.

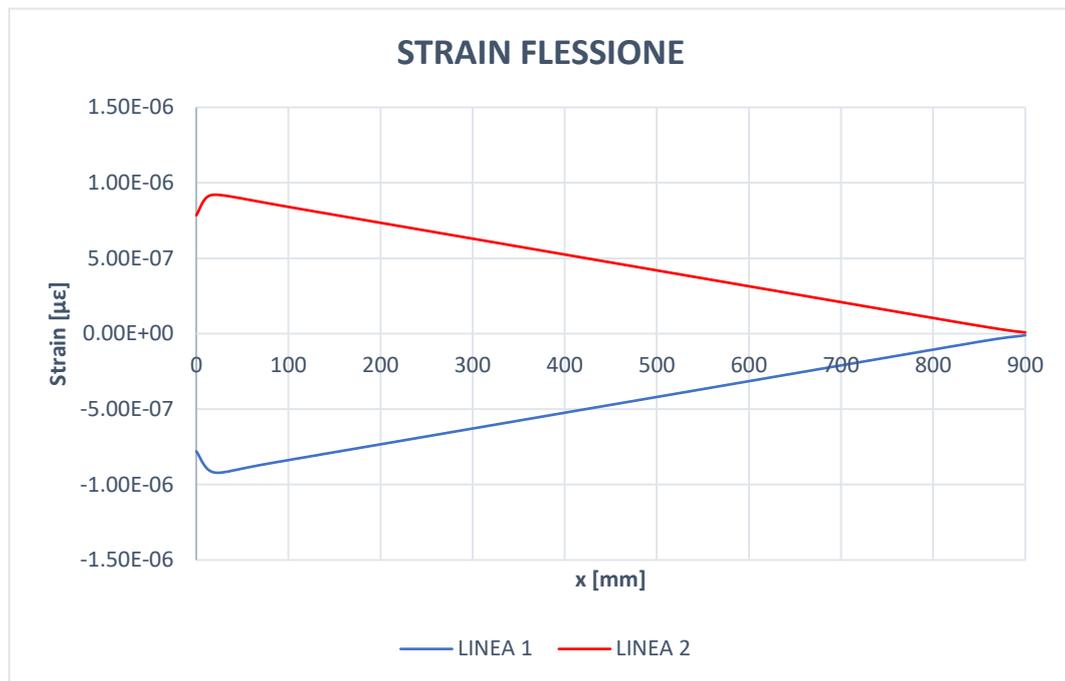


Figura 3.25 - Andamento strain trave soggetta a flessione lungo le due linee di misura

Per il caso di flessione, l'algoritmo da utilizzare è il (2.23), che necessita l'utilizzo di una sola linea di misura. Di seguito, in figura 3.26 e 3.27, si riportano i grafici dello spostamento w relativo alle due linee di misura.

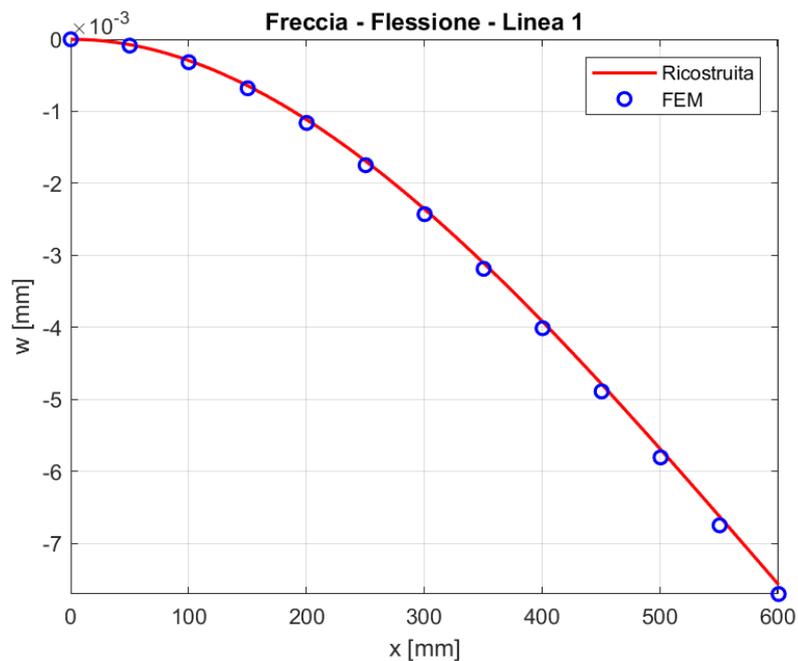


Figura 3.26 - Spostamento w , ricostruito e FEM, relativo alla linea 1

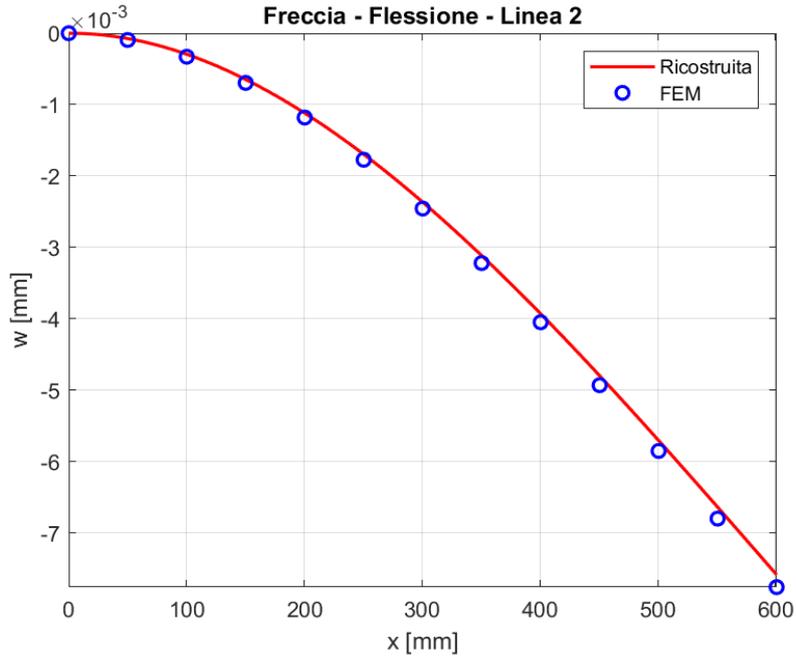


Figura 3.26 - Spostamento w , ricostruito e FEM, relativo alla linea 2

Si ha, rispettivamente per lo spostamento w lungo linea 1 e 2, un errore dell'1.67 % e del 2.23 %.

3.2.2 Ricostruzione deformata trave soggetta a flesso-torsione

Di seguito si riporta l'andamento degli strain lungo le due linee.

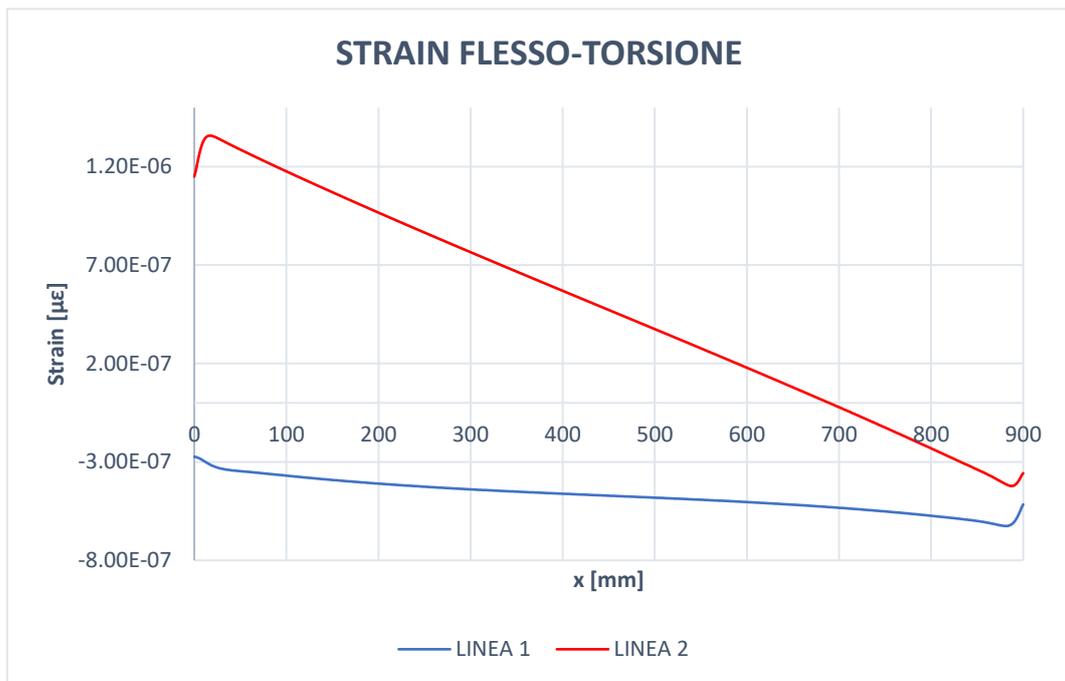


Figura 3.27 - Andamento strain trave soggetta a flesso-torsione lungo le due linee di misura

Come già visto in precedenza, per il caso di flesso-torsione gli algoritmi utilizzati sono il (2.26) e il (2.28), ed in aggiunta la relazione (3.1). Inoltre, utilizzando l'algoritmo (2.20) relativo al caso di torsione, è possibile ricostruire anche lo spostamento assiale (warping).

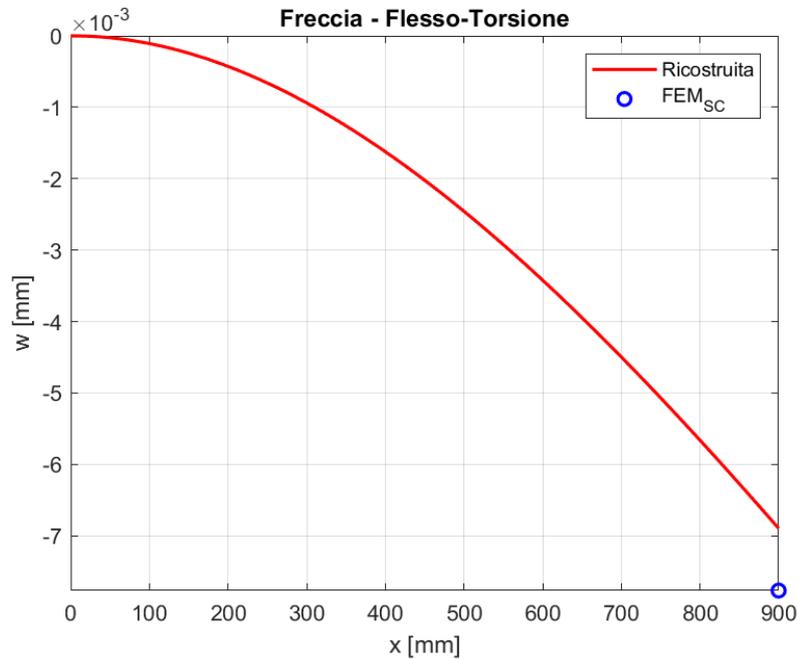


Figura 3.28 - Spostamento w, ricostruito e FEM

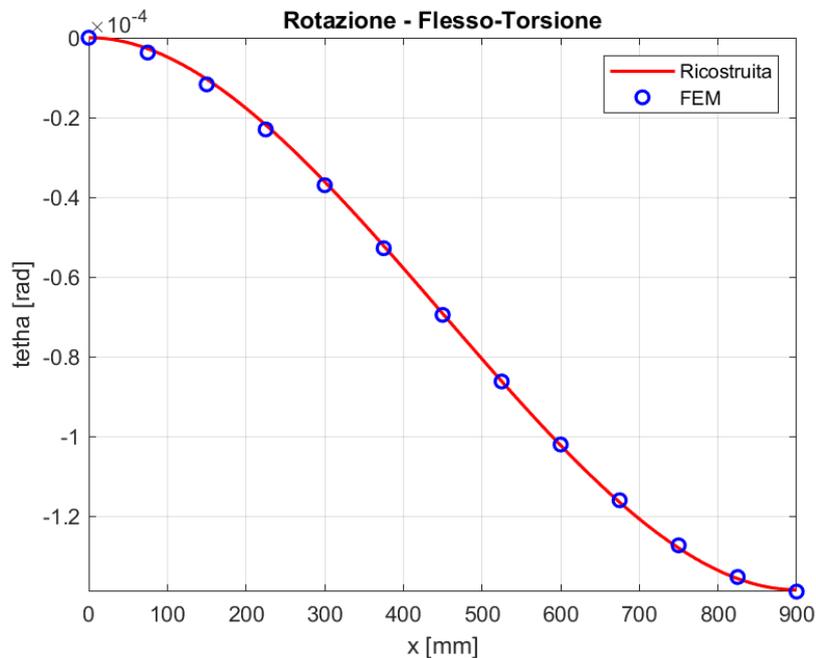


Figura 3.29 - Angolo di torsione, ricostruito e FEM

In questo caso, il confronto ricostruito-FEM per quanto riguarda lo spostamento w è stato fatto considerando lo spostamento FEM del centro di taglio, il cui valore si ha solamente sulla sezione di estremità grazie alla presenza dell'RBE2; mentre per quanto riguarda l'angolo di

torsione, è stata presa come linea FEM per il confronto una generica linea posta sul tratto orizzontale superiore della sezione a C, dopo aver verificato che la rotazione è praticamente la stessa in tutti i nodi di una sezione, sezione per sezione.

Dai grafici si può subito notare che la ricostruzione della rotazione avviene in maniera molto efficace, si ha infatti un errore dello 0.33 %; mentre la ricostruzione dello spostamento w non avviene in maniera accurata, si ha infatti un errore dell'11.21 %.

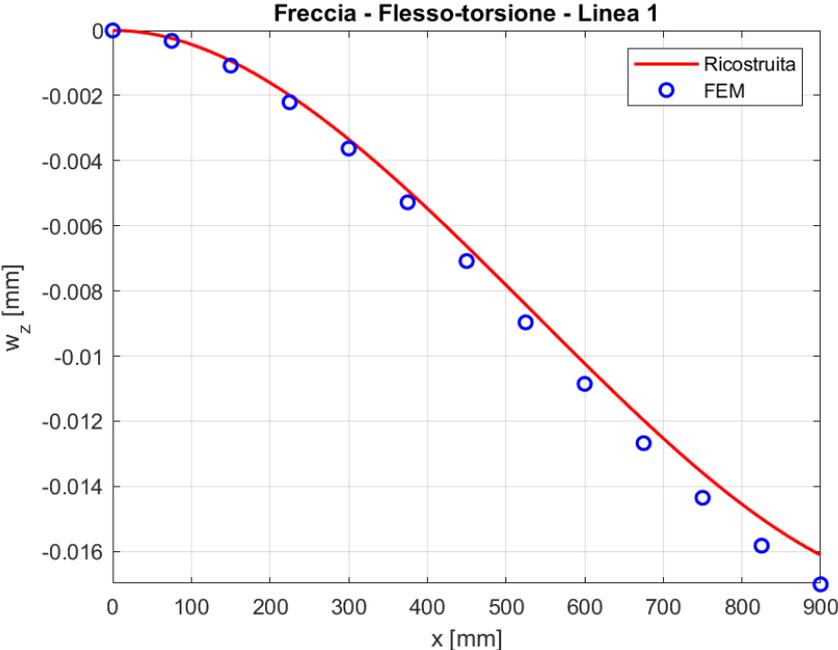


Figura 3.30 - Spostamento w , ricostruito e FEM, relativo alla linea 1

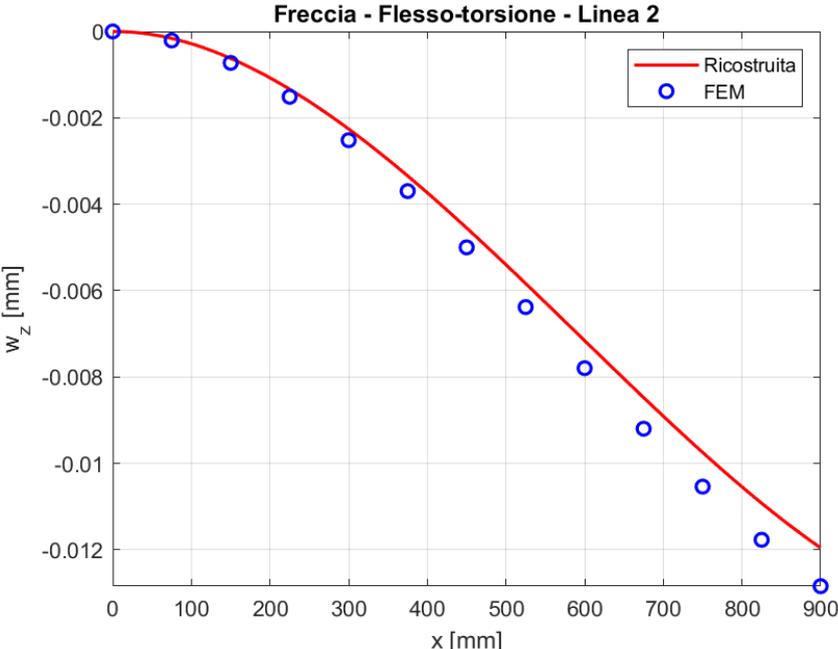


Figura 3.31 - Spostamento w , ricostruito e FEM, relativo alla linea 2

Anche la ricostruzione della freccia lungo le due linee di misura mediante l'utilizzo della relazione (3.1) non avviene in maniera molto accurata, gli errori sono pari al 5.30 % lungo la linea 1 e al 6.91 % lungo la linea 2.

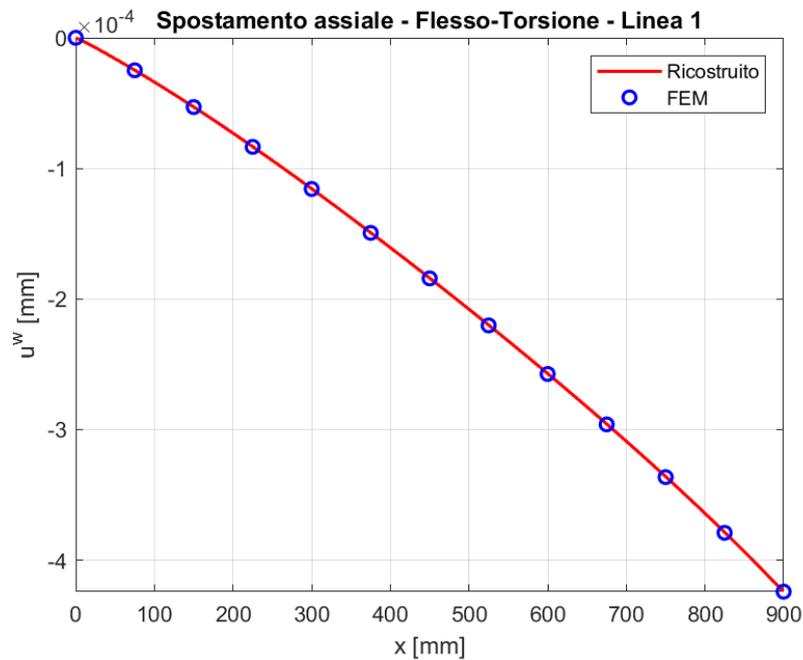


Figura 3.32 - Spostamento di warping linea di misura 1, ricostruito e FEM

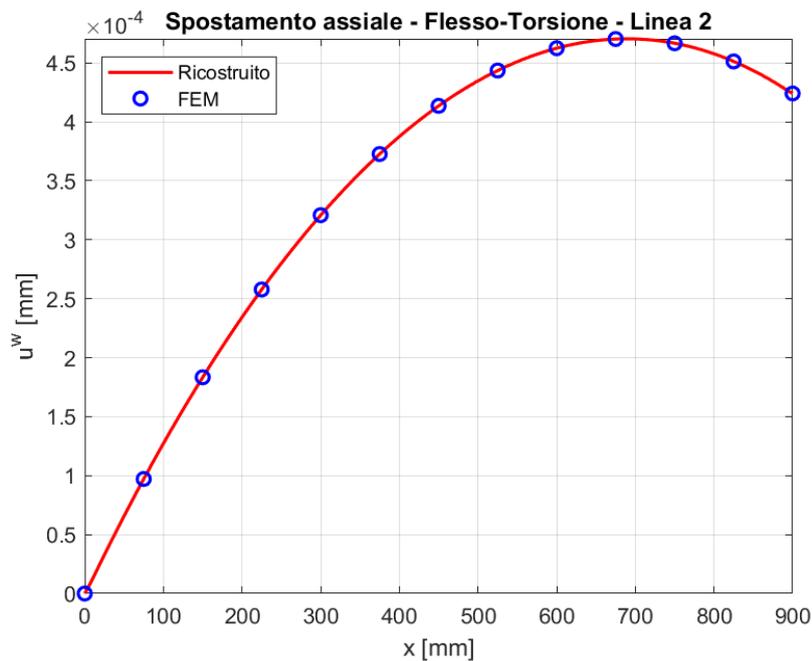


Figura 3.33 - Spostamento di warping linea di misura 2, ricostruito e FEM

La ricostruzione dello spostamento di warping lungo entrambe le linee di misura invece, avviene in maniera molto accurata, si ha infatti rispettivamente un errore dello 0.05 % e 0.004 %.

Quello che si nota alla luce di questi risultati è che, a differenza del caso precedente in cui la sezione era ad Ω , in questo caso in cui la sezione trasversale è a C si ha qualche problema nella ricostruzione dello spostamento w nel caso di flesso-torsione, mentre le altre grandezze vengono ricostruite abbastanza bene con errori molto piccoli. Analizzando i due casi, le uniche differenze risiedono, oltre che nella forma della sezione, nello spessore della sezione che nel caso a C è pari al doppio del caso ad Ω e, nella snellezza della trave che, mentre nel caso della sezione ad Ω è pari a 34.95 (altezza sezione diviso lunghezza trave), nel caso della sezione a C è pari a 12.86.

Per cercare di capire la causa di questi errori è stata condotta un'analisi sulla variazione degli errori al variare della snellezza, di cui si riportano di seguito gli andamenti.

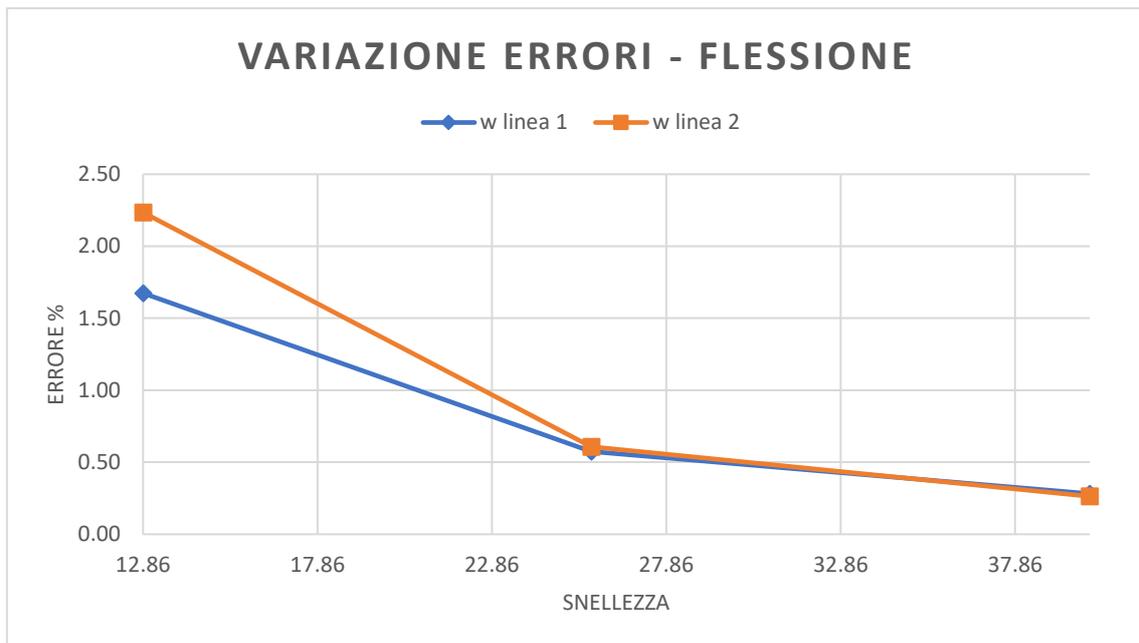


Figura 3.34 - Variazione errori percentuali flessione al variare della snellezza

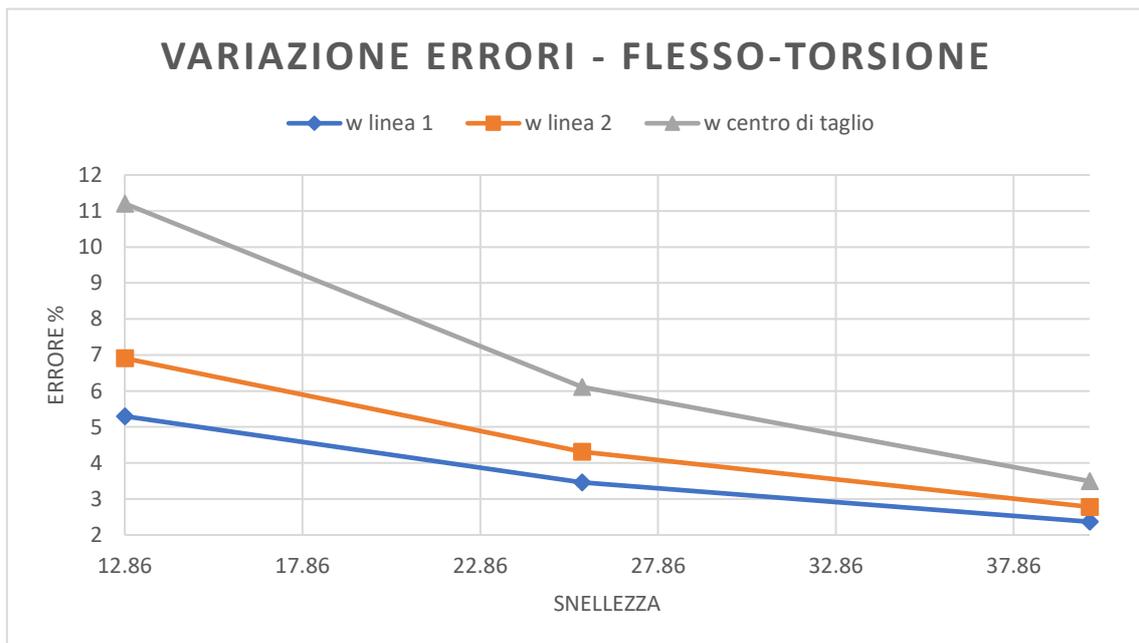


Figura 3.35 - Variazione errori percentuali flesso-torsione al variare della snellezza

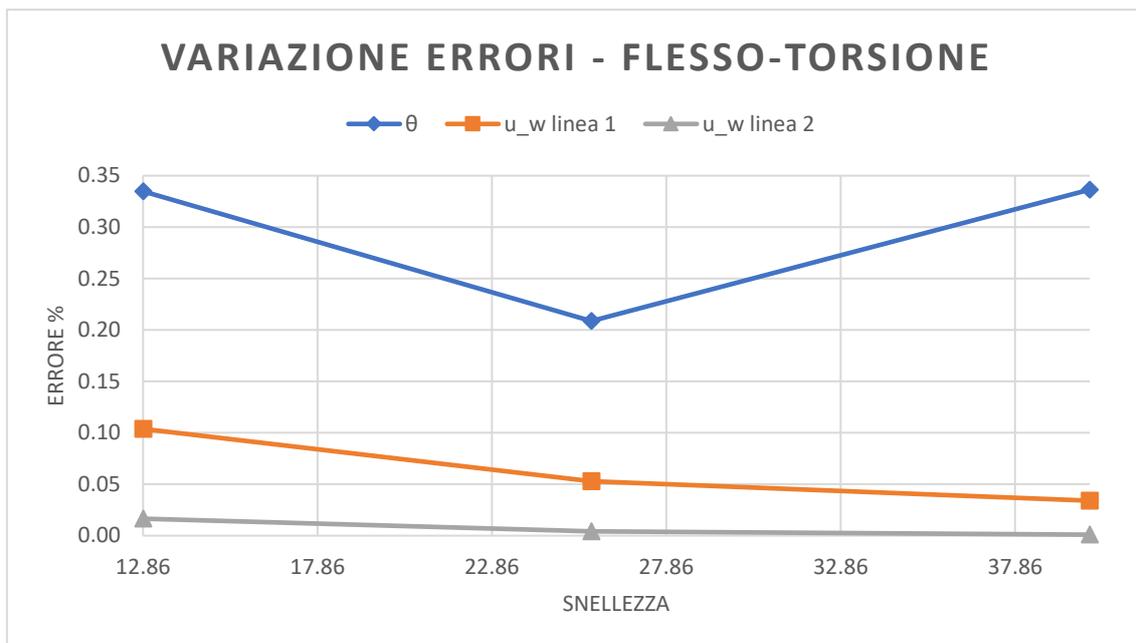


Figura 3.36 - Variazione errori percentuali flesso-torsione al variare della snellezza

		SNELLEZZA		
		12.86	25.71	40
E R R O R I %	w_1 (flessione)	1.67	0.57	0.28
	w_2 (flessione)	2.23	0.61	0.26
	w	11.21	6.11	3.49
	φ	0.33	0.21	0.34
	u_{w1}	0.10	0.05	0.03
	u_{w2}	0.02	0.004	0.001
	w_1	5.30	3.46	2.37
	w_2	6.91	4.31	2.78

Tabella 3.3 - Variazione errori percentuali al variare della snellezza

Come si può evincere dai grafici e dai valori in tabella 3.3, all'aumentare della snellezza si ha una diminuzione degli errori percentuali, anche se comunque gli errori relativi alla ricostruzione dello spostamento w sono leggermente più elevati rispetto al caso della sezione ad Ω . Si ha infatti nel caso della trave a C con una snellezza di 40 (di poco maggiore a quella della sezione ad Ω che era 35) un errore del 3.49 % sul centro di taglio, contro lo 0.44 % della sezione ad Ω con RBE2; un errore del 2.37 % sulla linea 1 e del 2.78 % sulla linea 2, contro rispettivamente lo 0.46 % e lo 0.36 % della sezione ad Ω con RBE2.

4. Fase sperimentale

Nel corrente capitolo verrà dapprima condotta una valutazione sulle dimensioni che dovrà avere la trave in parete sottile da utilizzare per la prova in laboratorio, in virtù delle considerazioni fatte in precedenza riguardo alla snellezza. Una volta scelte le dimensioni della trave verrà proposta la ricostruzione della deformata attraverso gli algoritmi già validati in precedenza, facendo un'analisi sulla bontà della ricostruzione. Fatto ciò si proseguirà con la prova sperimentale in laboratorio sulla trave scelta, ricostruendo dunque la deformata attraverso gli algoritmi, questa volta però utilizzando gli strains misurati attraverso la prova sperimentale.

4.1 Dimensioni trave con sezione a C sperimentale

Alla luce delle considerazioni fatte alla fine del precedente capitolo, quello che si evince è che uno dei parametri che influenza la bontà della ricostruzione, soprattutto nel caso di una sezione trasversale a C, è la snellezza. Per cui, per la trave da utilizzare sperimentalmente in laboratorio, si è cercato di scegliere una sezione a C che avesse delle dimensioni tali da avere una snellezza abbastanza elevata con lunghezze della trave stessa non troppo elevate. Un altro fattore che potrebbe influire sulla bontà del metodo di ricostruzione è lo spessore della sezione. Per queste ragioni, la sezione scelta ha le dimensioni riportate in figura 4.1.

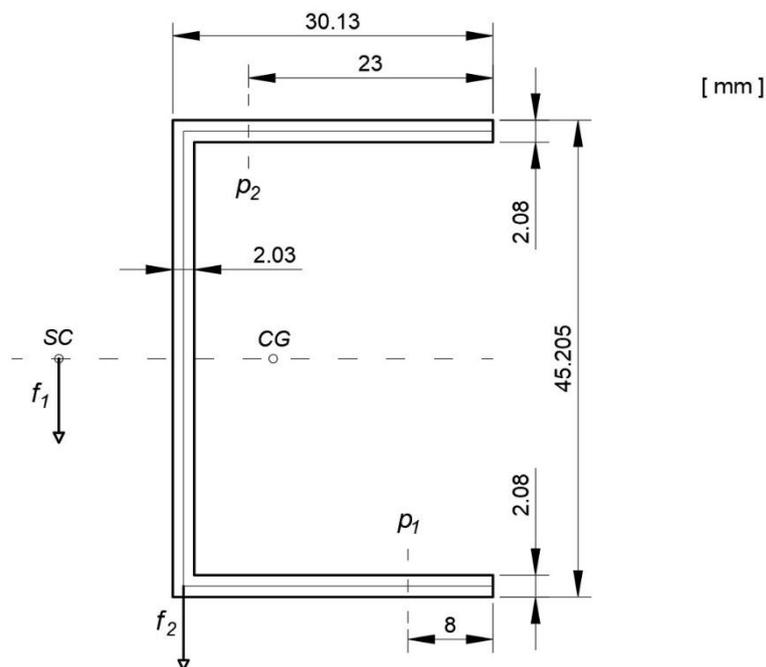


Figura 4.1 - Dimensioni sezione trasversale a C sperimentale

Le dimensioni riportate in figura sono quelle misurate in laboratorio. La lunghezza scelta per la trave è pari a 1100 mm, per una snellezza quindi pari a 25.33. Il materiale della trave è una Lega 6060 avente le seguenti caratteristiche: $E = 68033 Pa$, $\nu = 0.3347$. In figura 4.2 invece, si riporta la distribuzione delle coordinate settoriali.

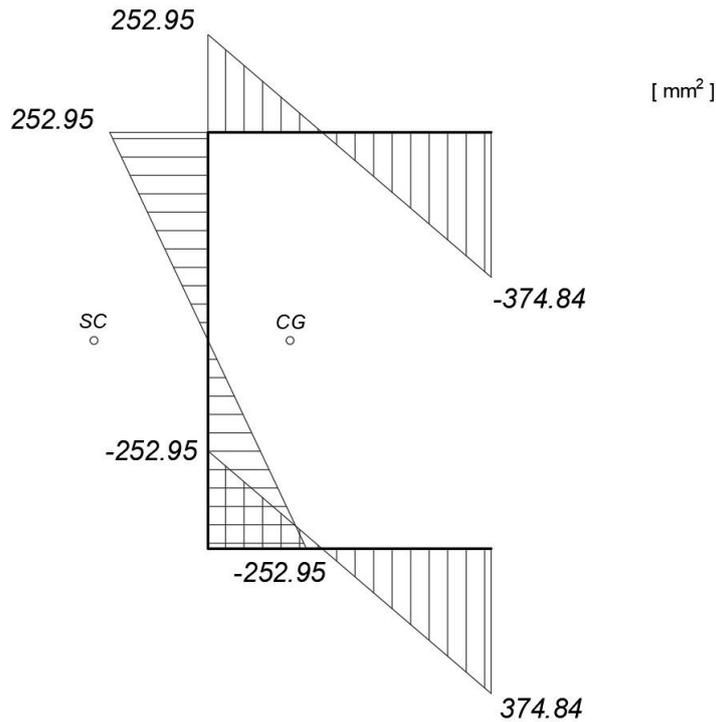


Figura 4.2 - Distribuzione coordinate settoriali sezione a C sperimentale

4.2 Ricostruzione deformata con algoritmi FEM

Prima di passare alla prova sperimentale in laboratorio, procediamo con una ricostruzione della deformata attraverso gli algoritmi utilizzando gli strain provenienti da una analisi FEM.

Il modello FEM (figura 4.3) è stato realizzato con proprietà 2D SHELL, ed una mesh composta da 111100 elementi Quad4. Lungo l'asse della trave, e quindi in ogni linea di misura, sono presenti 1101 punti di misurazione distribuiti con una distanza adiacente di 1 mm. Le tipologie di sollecitazione che si vogliono analizzare sono flessione e flesso-torsione. Il carico di flesso-torsione è rappresentato dal vettore $f_2 = 34.35 N$ in figura 4.1; il carico di flessione è il vettore $f_1 = 39.24 N$ applicato nel centro di taglio in figura 4.1. Entrambi i carichi sono stati scelti opportunamente per evitare lo snervamento in qualsiasi punto della trave.

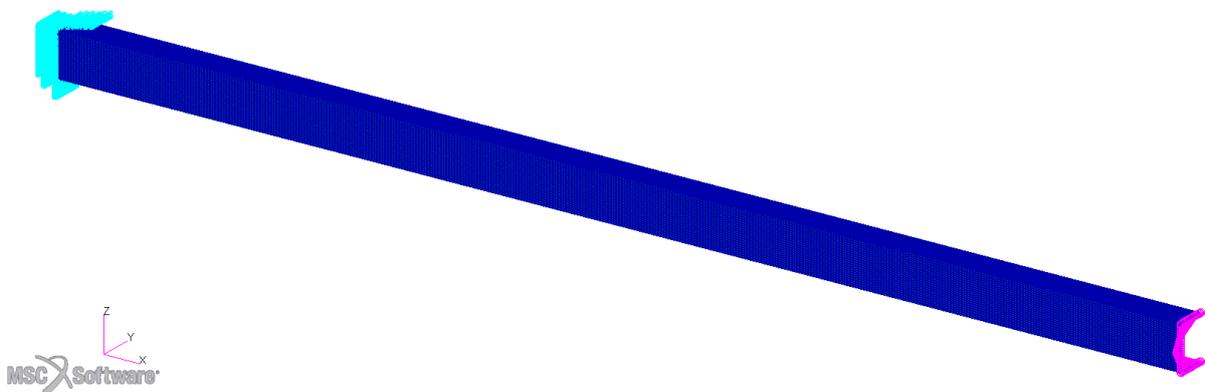


Figura 4.3 - Modello FEM trave a C sperimentale

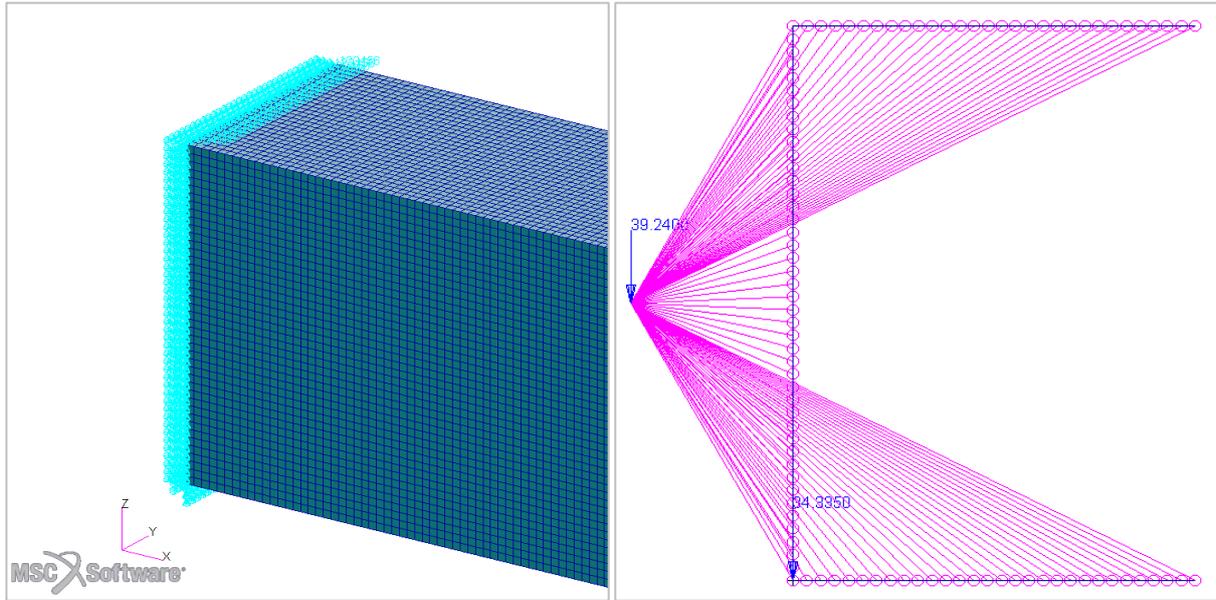


Figura 4.4 - Dettaglio sezione di incastro e di estremità

4.2.1 Ricostruzione deformata trave soggetta a flessione

Di seguito si riporta l'andamento degli strain lungo le due linee.

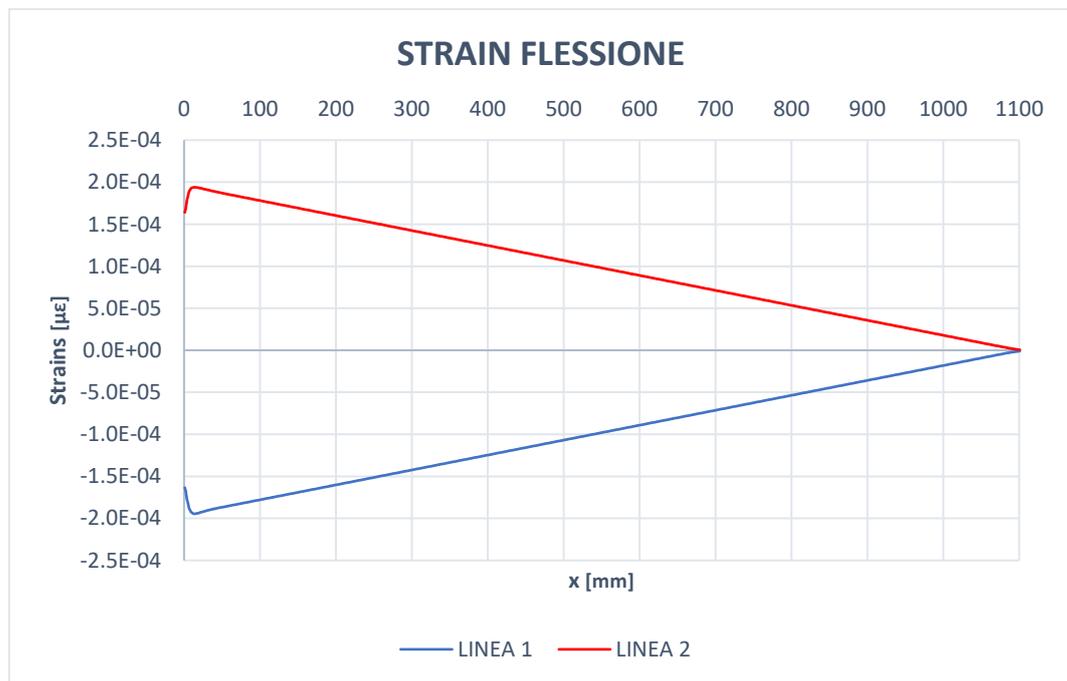


Figura 4.5 - Andamento strain trave soggetta a flessione lungo le due linee di misura

In figura 4.6 e 4.7 si riportano i risultati grafici della ricostruzione sotto l'effetto del carico di flessione applicato sul centro di taglio della sezione.

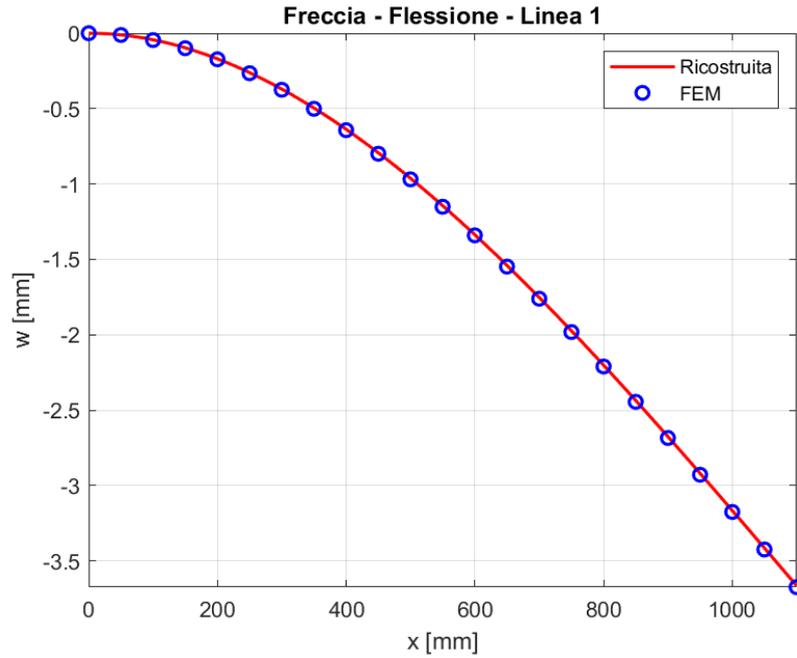


Figura 4.6 - Spostamento w , ricostruito e FEM, relativo alla linea 1

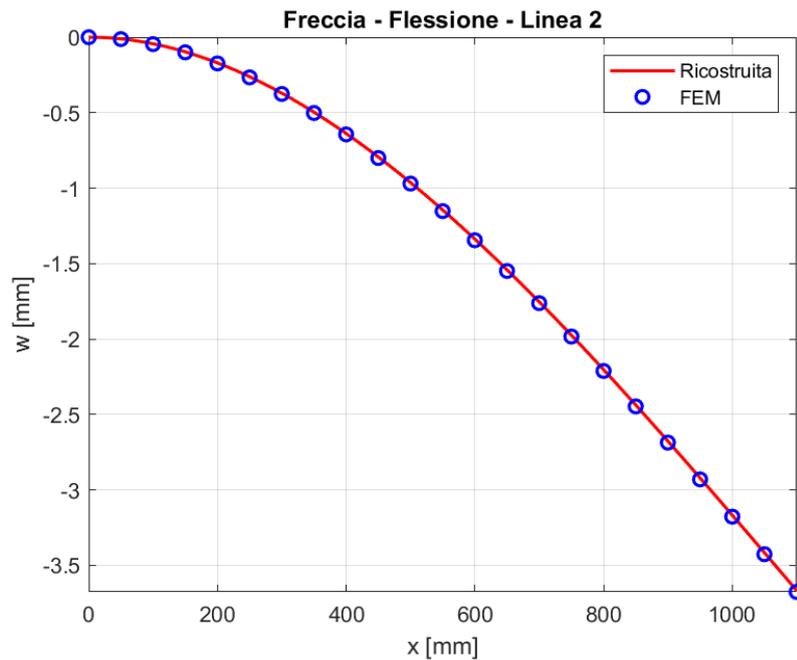


Figura 4.7 - Spostamento w , ricostruito e FEM, relativo alla linea 2

Come si può notare già dai grafici, la ricostruzione dello spostamento w dovuto al carico di flessione avviene in maniera molto accurata, con un errore dello 0.26 % e dello 0.57 % rispettivamente in corrispondenza della linea 1 e 2 all'estremo libero della trave.

4.2.2 Ricostruzione deformata trave soggetta a flesso-torsione

Di seguito si riporta l'andamento degli strain lungo le due linee.

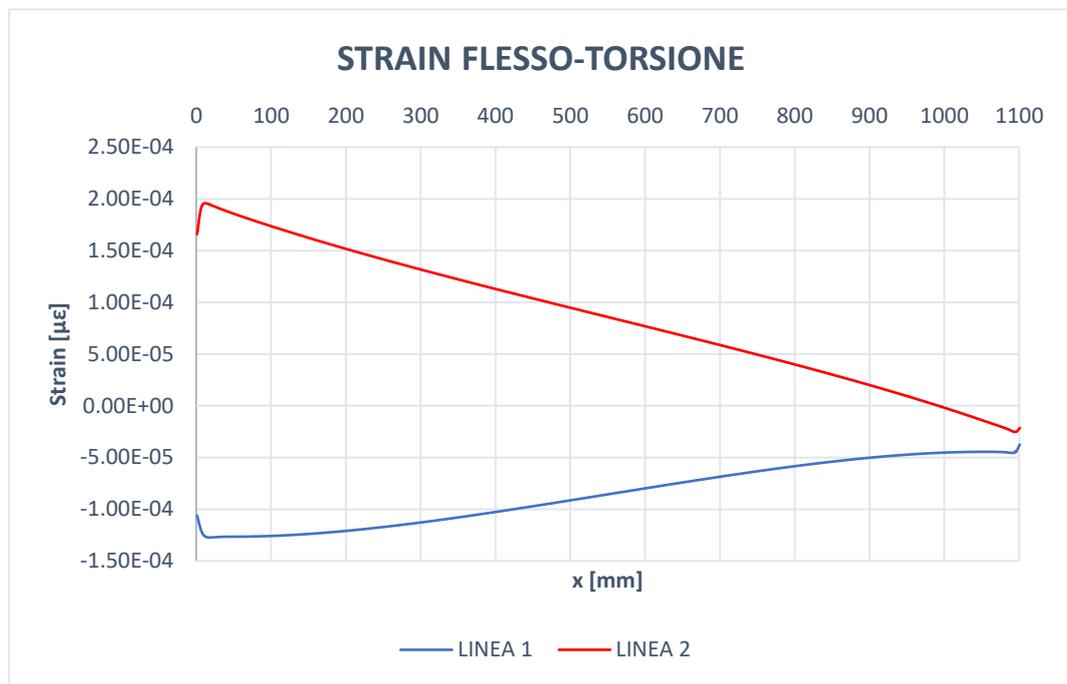


Figura 4.8 - Andamento strain trave soggetta a flesso-torsione lungo le due linee di misura

Si riportano a seguire i risultati grafici della ricostruzione sotto l'effetto del carico di flesso-torsione.

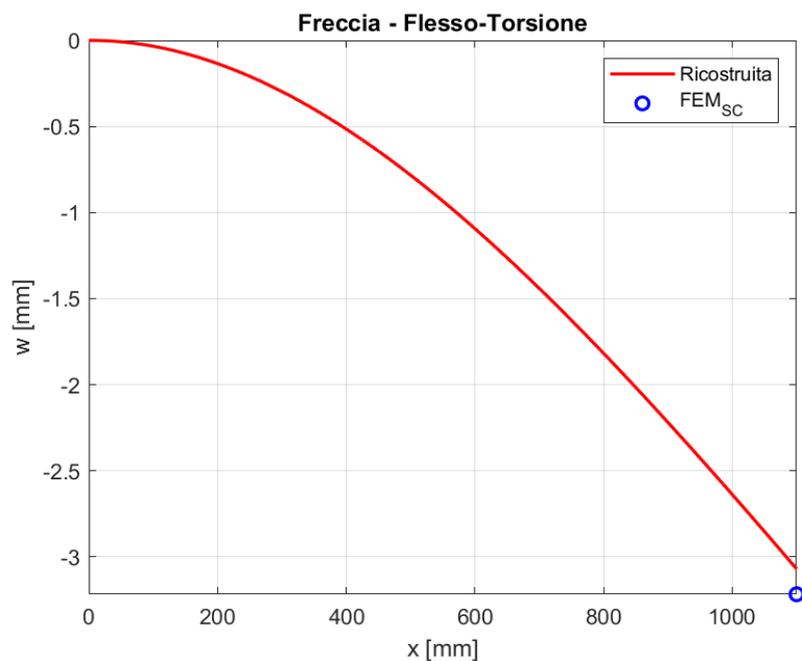


Figura 4.9 - Spostamento w , ricostruito e FEM

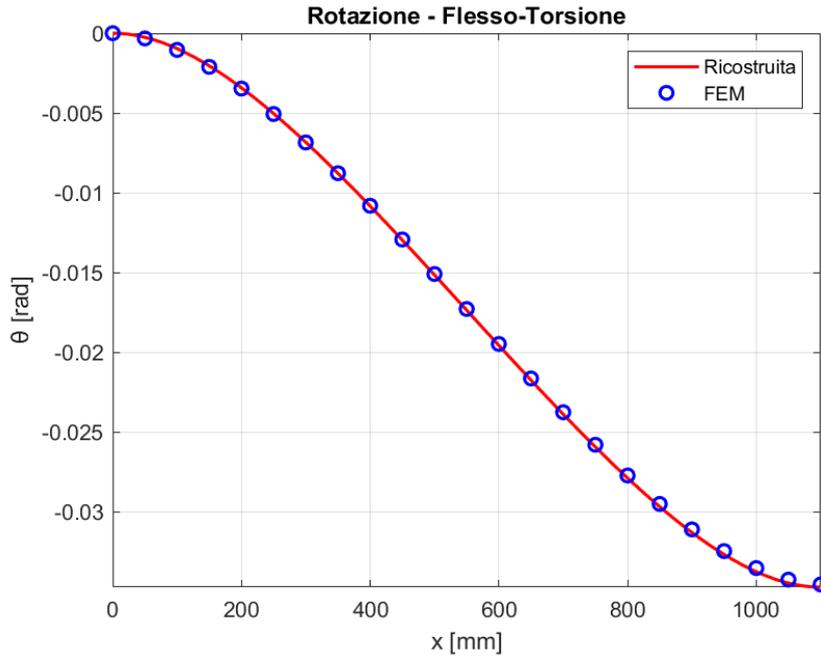


Figura 4.10 - Angolo di torsione, ricostruito e FEM

L'errore all'estremo libero della trave sulla ricostruzione dello spostamento w del centro di taglio è relativamente piccolo, pari al 4.57 %; mentre l'errore sulla ricostruzione dell'angolo di torsione è molto piccolo, pari allo 0.48 %.

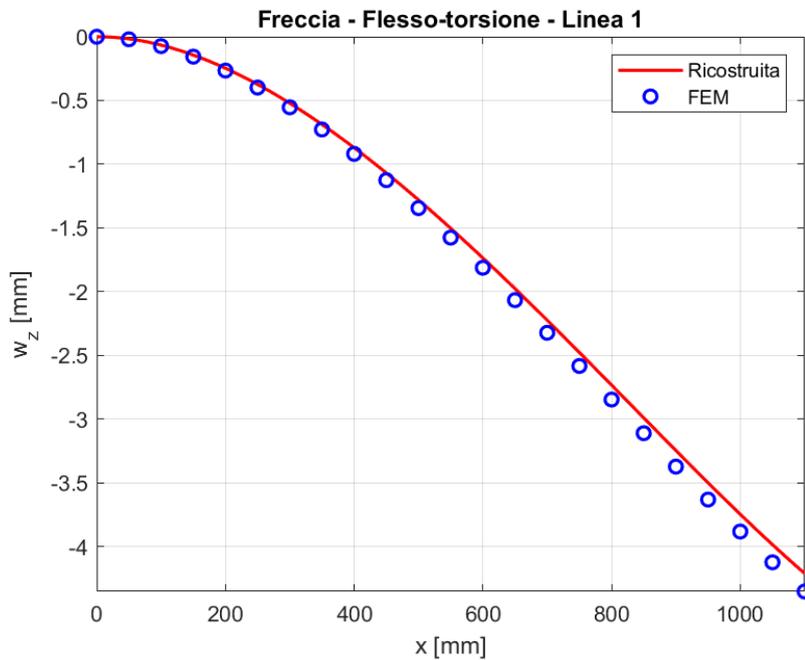


Figura 4.11 - Spostamento w , ricostruito e FEM, relativo alla linea 1

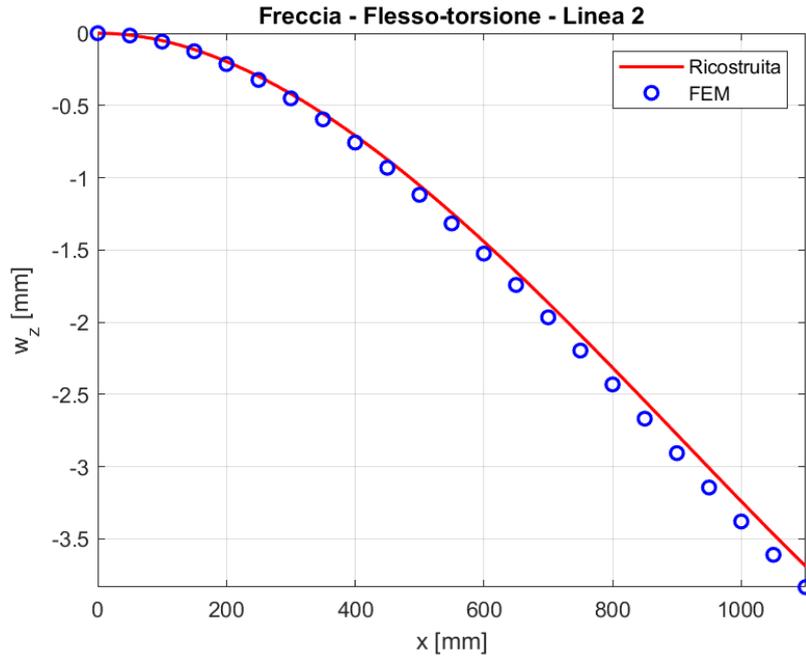


Figura 4.12 - Spostamento w , ricostruito e FEM, relativo alla linea 2

Così come la ricostruzione dello spostamento w del centro di taglio, anche la ricostruzione dello spostamento w lungo le due linee di misura non avviene in maniera molto accurata così come per le altre grandezze, con un errore all'estremo libero del 3.26 % e 3.76 % rispettivamente per la linea 1 e 2.

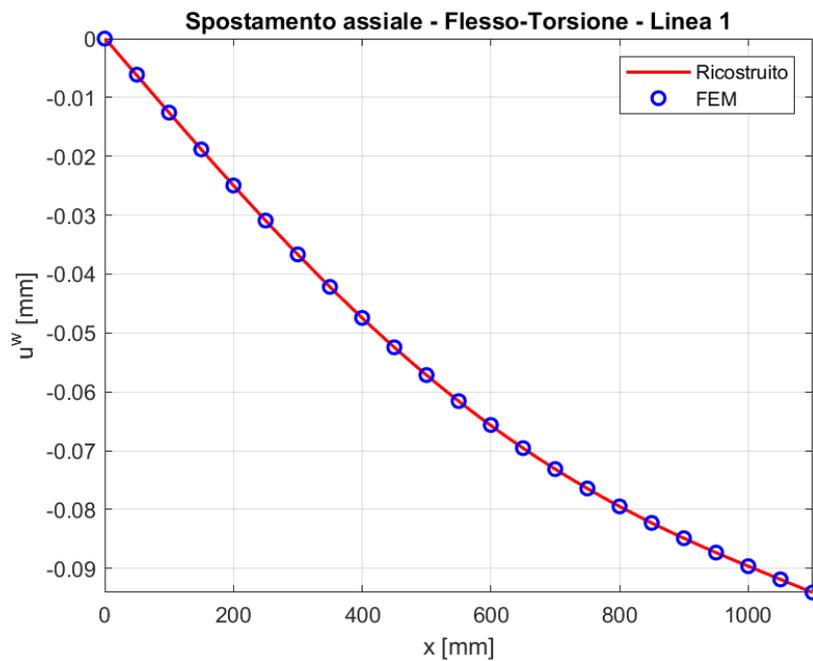


Figura 4.13 - Spostamento di warping linea di misura 1, ricostruito e FEM

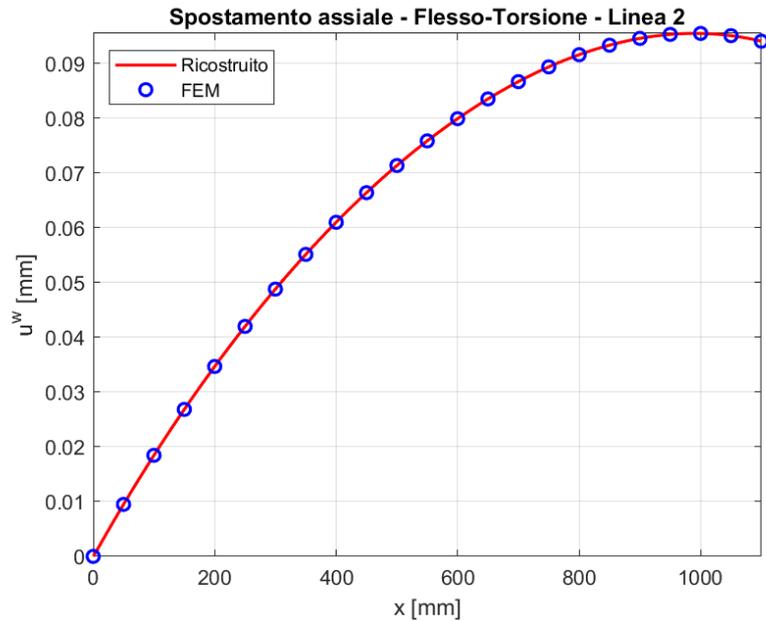
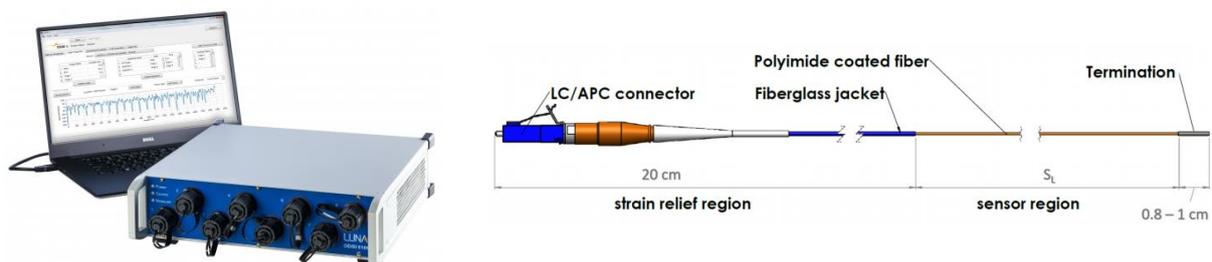


Figura 4.14 - Spostamento di warping linea di misura 2, ricostruito e FEM

Infine, lo spostamento di warping, che viene ricostruito in maniera praticamente perfetta in ambedue le linee, con un errore all'estremo libero dello 0 % in entrambe.

4.3 Set-up sperimentale

A questo punto si passa alla prova sperimentale in laboratorio. Per ottenere una elevata densità di punti di misurazione anche nella prova sperimentale, è stato utilizzato un sistema di misurazione degli strains basato su sensori in fibra ottica Rayleigh Back-Scattering (RBS). In particolare, è stato utilizzato il sistema di misurazione ad alta definizione della LUNA Inc, costituito dal software ODiSI, l'interrogatore ODiSI e il sensore di deformazione in fibra ottica. In figura 4.15 sono riportati rispettivamente gli elementi che costituiscono il sistema di misurazione e le specifiche del sensore di deformazione ottico [28].



PARAMETER	SPECIFICATIONS	UNITS
Fiber type	Polyimide coated low bend loss fiber	-
Strain Relief	20 cm, fiberglass	-
Sensor termination	Standard 220 °C sensor: 1 cm, 304 stainless steel	-
	High temp. 300 °C sensor: 0.8 cm, glass	-
Sensor diameter	155	µm
Termination diameter	286	µm
Minimum bend radius	10	mm
Operating temperature - sensing region	-40 to 220 or -40 to 300	°C
Operating temperature - connector	-60 to 150	°C

Figura 4.15 - Sistema di misurazione Luna Inc [28]

La distanza minima tra un punto di misura e l'altro è pari a 0.65 mm. Tramite il software ODiSI è possibile scegliere tale distanza, e nel nostro caso si è optato per una distanza adiacente tra un punto di misura e il successivo pari a 1.3 mm.

Per prima cosa è stato necessario incollare la fibra lungo le due linee di misura stabilite, indicate con p_1 e p_2 in figura 4.1. In figura 4.16 viene mostrato il posizionamento e l'incollaggio della fibra lungo la linea di misura 1.

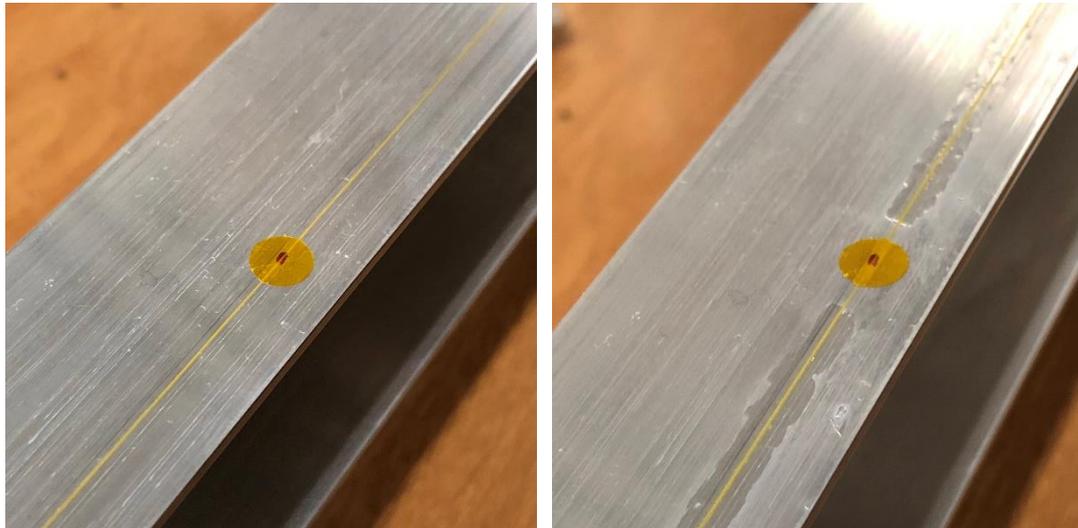


Figura 4.16 - Sensore fibra ottica linea di misura 1

Vi è un limite fisico per quanto riguarda l'incollaggio della fibra sull'intera lunghezza della trave, ovvero, essa non può partire esattamente dalla coordinata $x = 0$ e finire nel punto esatto in cui si ha l'estremo libero della trave, per ovvi motivi pratici. Per cui una volta incollata la fibra, la si collega all'interrogatore (a sua volta collegato al pc), e attraverso la funzione "Touch to Locate" presente sul software, si vanno a definire i punti di inizio e fine di ogni linea di misura, toccando semplicemente la fibra nei punti di interesse. Nella figura 4.17 viene mostrato lo schema di incollaggio della fibra sulla trave, con le distanze dall'incastro e dall'estremo libero dei relativi punti di inizio e fine linea di misura.

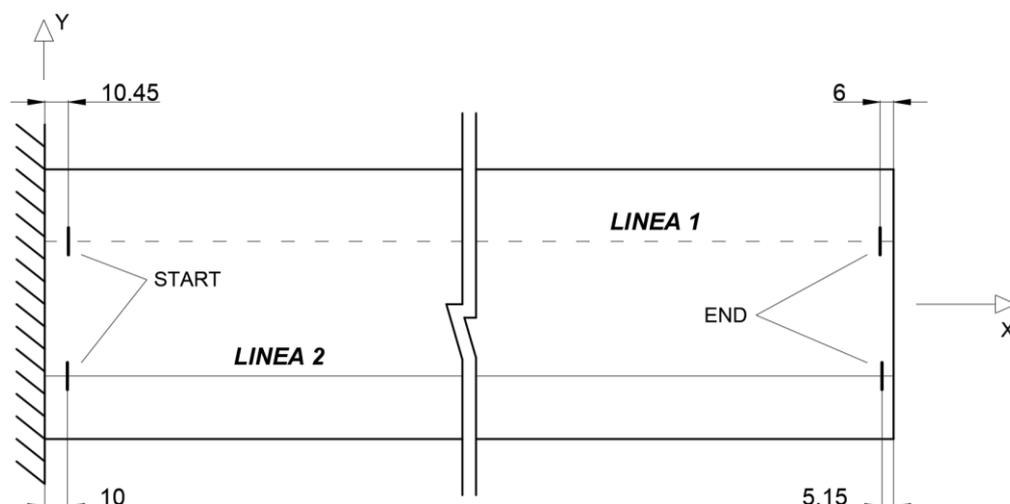


Figura 4.17 - Schema incollaggio sensori fibra ottica

Oltre ai sensori in fibra ottica, sulla trave sono stati disposti vari estensimetri, utili per altri scopi che non rientrano in questo lavoro di tesi. In figura 4.18 viene mostrata la trave incastrata con tutti i sensori ed all'estremo libero il sistema di carico, oltre a due LVDT per misurare lo spostamento w . Il carico è stato applicato mediante l'utilizzo di pesetti da 0.5 kg.

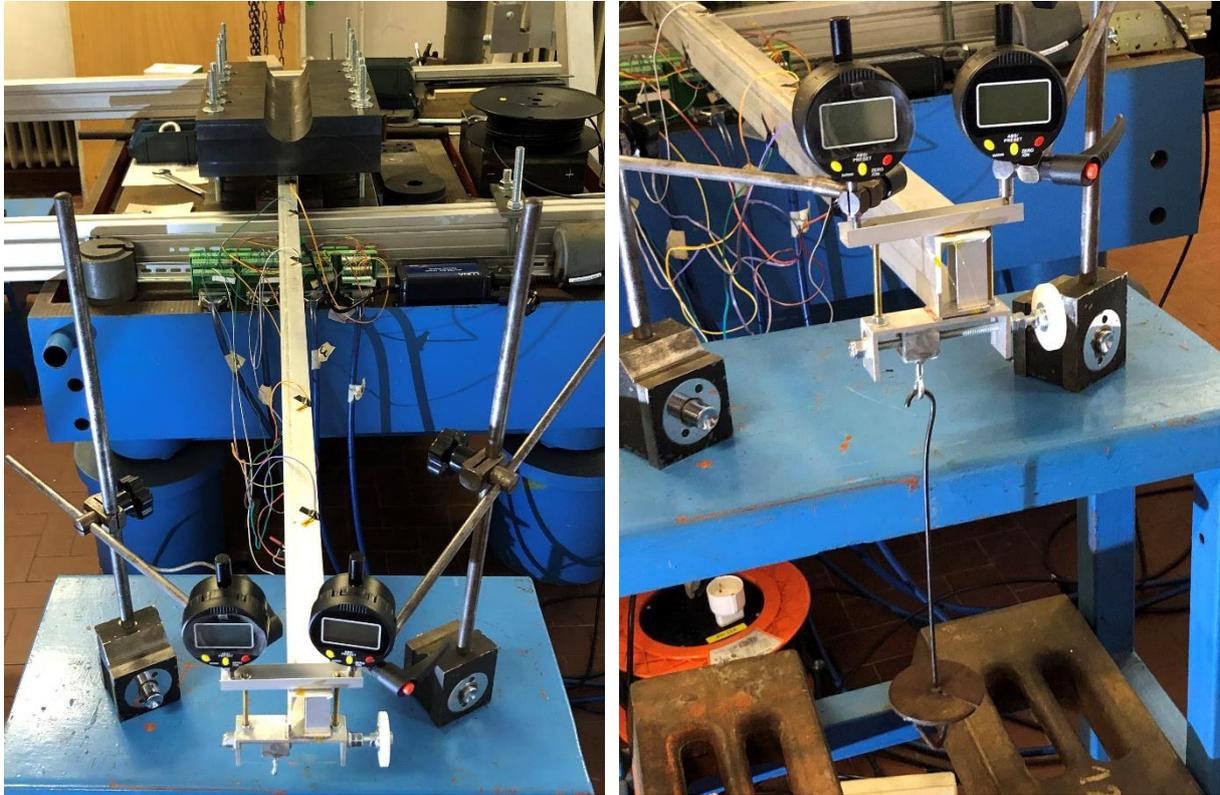


Figura 4.18 - Trave incastrata con sensori applicati, sistema di carico ed LVDT

4.4 Prova di flessione

Per la prova di flessione, così come nel modello FEM, il carico è stato applicato in corrispondenza del centro di taglio, verificando in maniera pratica che gli spostamenti forniti sul display dei due LVDT erano uguali. Il massimo carico raggiunto è pari a 4 kg, ad incrementi di 0.5 kg. In tabella 4.1 vengono riportati per ogni livello di carico i corrispondenti valori di spostamento forniti dai due LVDT.

Carico applicato [Kg]	Misurazioni spostamenti LVDT [mm]	
	LVDT sinistro	LVDT destro
0.5	-0.489	-0.514
1	-0.998	-1.019
1.5	-1.502	-1.568
2	-2.008	-2.074
2.5	-2.528	-2.605
3	-3.054	-3.105
3.5	-3.579	-3.639
4	-4.106	-4.148

Tabella 4.1 - Spostamenti w in corrispondenza dei vari livelli di carico

Si può notare che ad ogni livello di carico si ha una buona corrispondenza tra i due LVDT, il che significa che il carico è applicato quasi perfettamente sul centro di taglio. In figura 4.19 si può vedere il confronto tra gli strain sperimentali e quelli FEM, che ne evidenzia una buona corrispondenza.

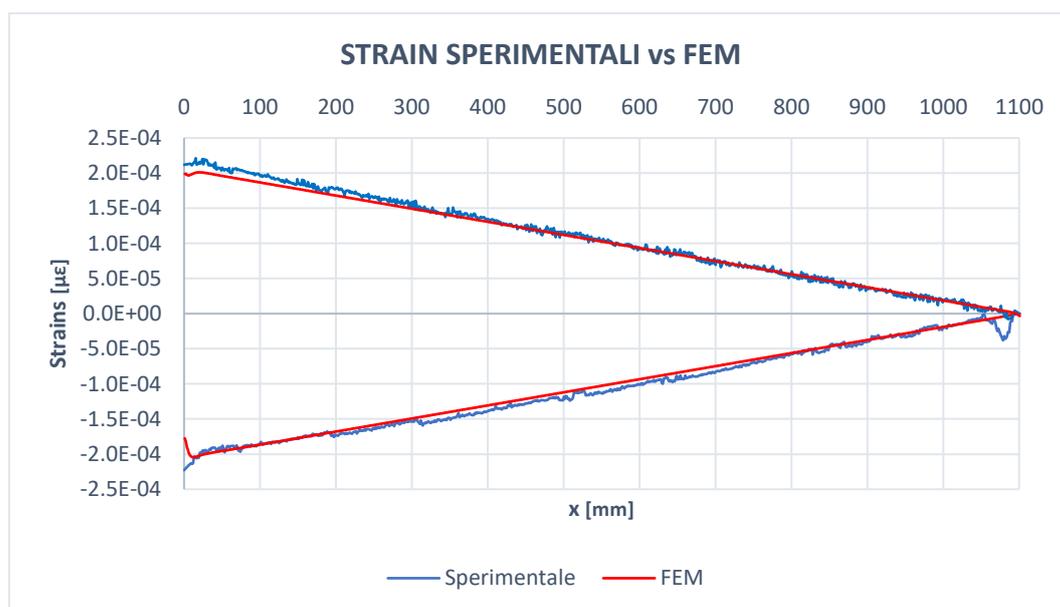


Figura 4.19 - Confronto strain sperimentali - FEM trave soggetta a flessione

Per determinare lo spostamento w sperimentale esatto delle due linee di misura, a partire dalle misurazioni fornite dai due LVDT, si sfrutta la conoscenza della distanza tra i due LVDT e la loro posizione rispetto alla linea media. Infatti, sapendo che la distanza tra i due LVDT è pari a 90.5 mm e che la distanza dell'LVDT di sinistra è distante 43.3 mm dalla linea media verticale della sezione a C, è possibile ricavare tramite una regressione lineare tra i due spostamenti forniti degli LVDT lo spostamento w delle due linee di misura, come mostrato in figura 4.20.

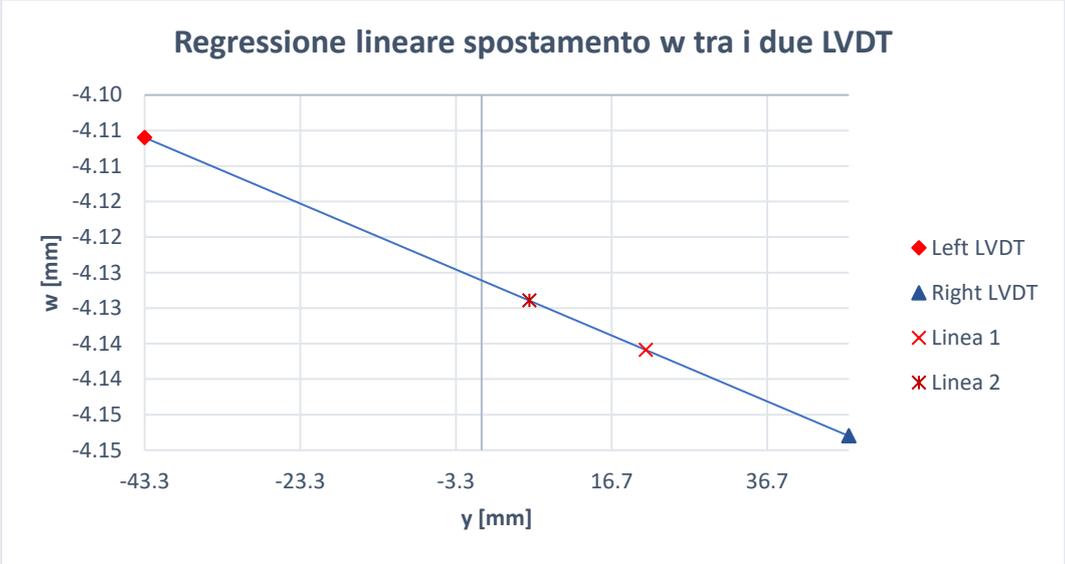


Figura 4.20 - Determinazione spostamenti w linea 1 e 2

Quindi si procede alla ricostruzione della deformata della trave a flessione, sotto l'effetto del carico massimo di 4 kg, con gli algoritmi.

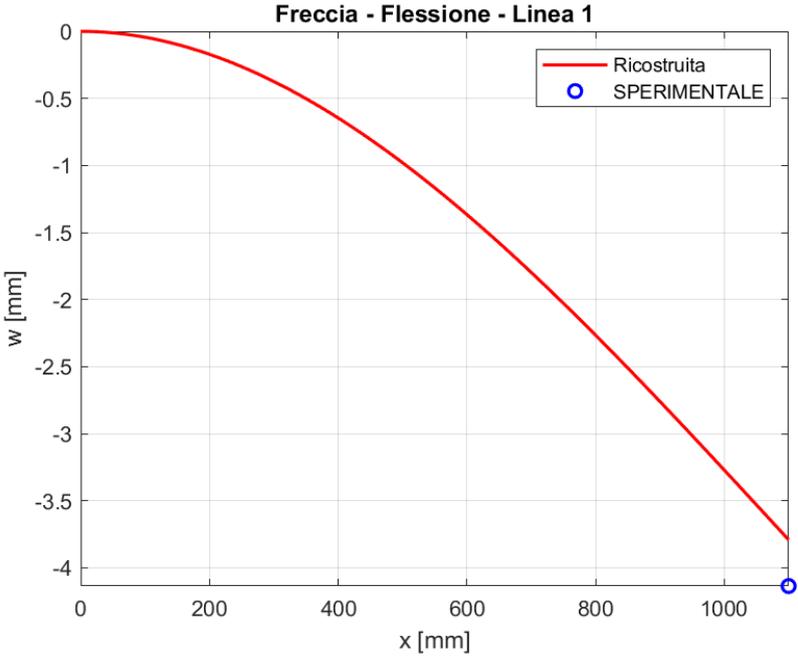


Figura 4.21 - Spostamento w , ricostruito e sperimentale, relativo alla linea 1

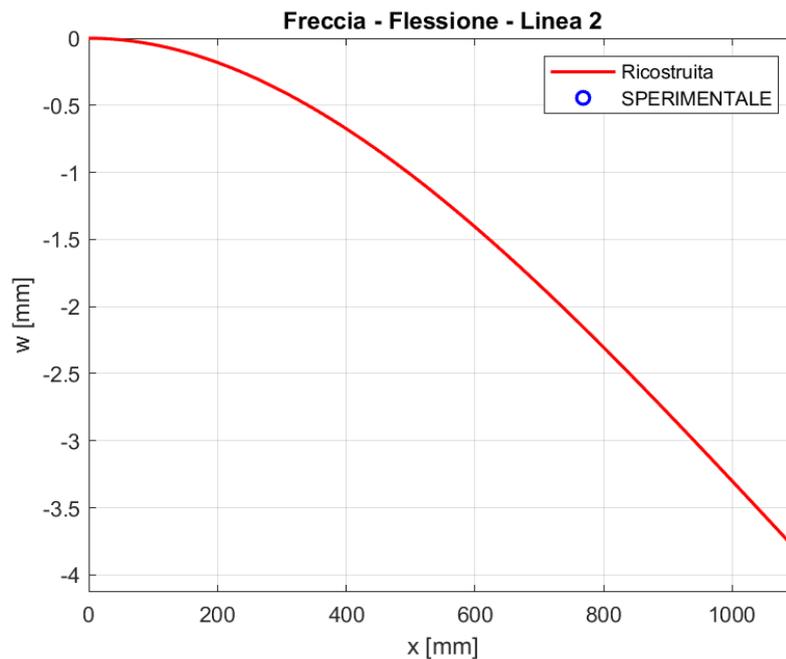


Figura 4.22 - Spostamento w , ricostruito e sperimentale, relativo alla linea 2

Come si può vedere già graficamente, la ricostruzione non avviene in modo molto accurato, ma comunque l'errore non è elevatissimo. Una volta determinati gli spostamenti esatti delle due linee di misura è possibile calcolare gli errori tra ricostruzione e valori sperimentali.

	LINEA 1	LINEA 2
w sperimentale [mm]	- 4.136	- 4.129
w ricostruito [mm]	- 3.737	- 3.763
Errore [%]	9.64	8.87

Tabella 4.2 - Errori percentuali spostamento w sperimentale-ricostruito

Gli errori non sono molto elevati, e quindi anche per il caso di flessione sperimentale la ricostruzione è abbastanza efficace.

4.5 Prova di flessione-torsione

Per la prova di flessione-torsione, così come nel modello FEM, il carico è stato applicato in corrispondenza della linea media verticale della sezione a C. Il massimo carico raggiunto è pari a 3.5 kg, ad incrementi di 0.5 kg. In tabella 4.3 vengono riportati per ogni livello di carico i corrispondenti valori di spostamento forniti dai due LVDT.

Carico applicato [Kg]	Misurazioni spostamenti LVDT [mm]	
	LVDT sinistro	LVDT destro
0.5	-0.403	-0.675
1	-0.821	-1.307
1.5	-1.244	-1.964
2	-1.665	-2.617
2.5	-2.114	-3.253
3	-2.575	-3.879
3.5	-3.032	-4.498

Tabella 4.3 - Spostamenti w in corrispondenza dei vari livelli di carico

In figura 4.23 si può vedere il confronto tra gli strain sperimentali e quelli FEM, che evidenzia qualche piccola differenza lungo la linea 1.

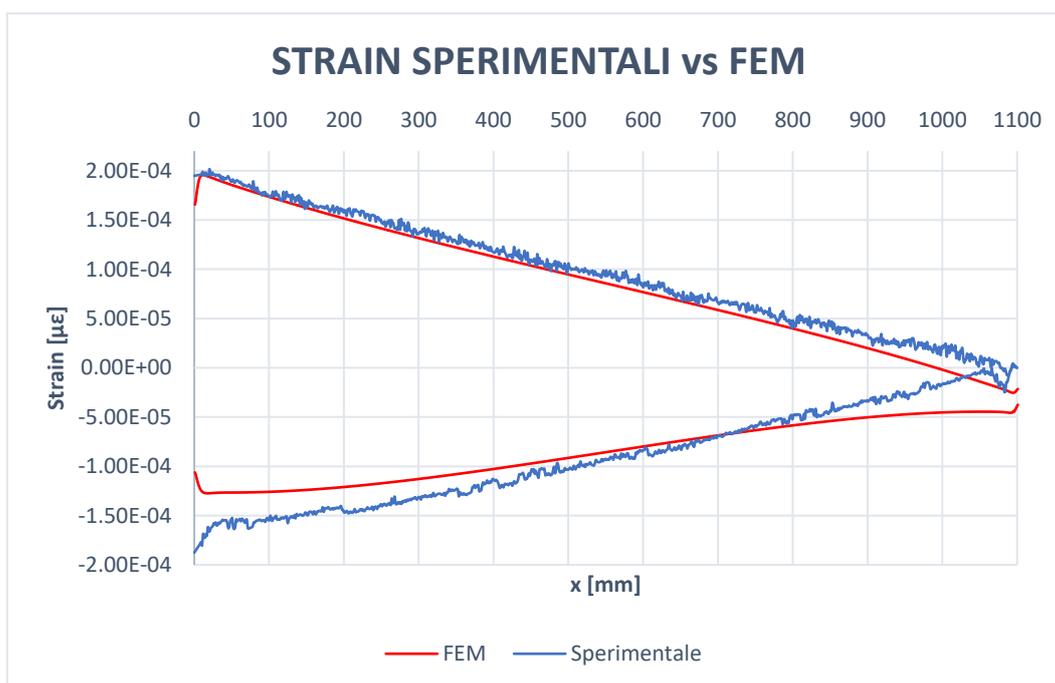


Figura 4.23 - Confronto strain sperimentali - FEM trave soggetta a flessione-torsione

Si determina quindi lo spostamento w sperimentale di entrambe le linee di misura attraverso la regressione come già fatto nel caso di flessione.

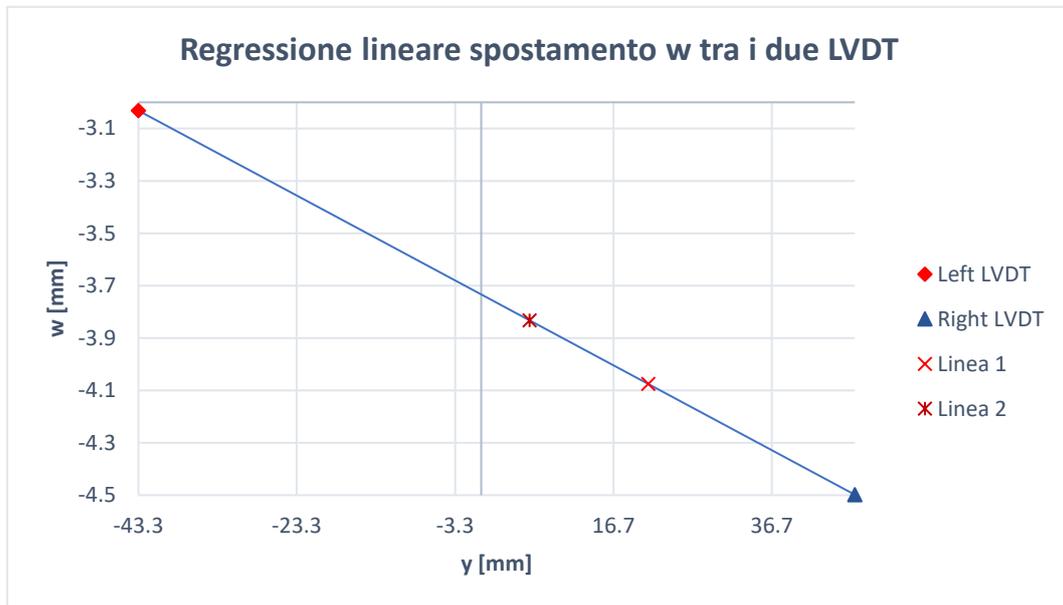


Figura 4.24 - Determinazione spostamenti w linea 1 e 2

Fatto ciò si procede con la ricostruzione della deformata della trave a flesso-torsione, sotto l'effetto del carico massimo di 3.5 kg, con gli algoritmi.

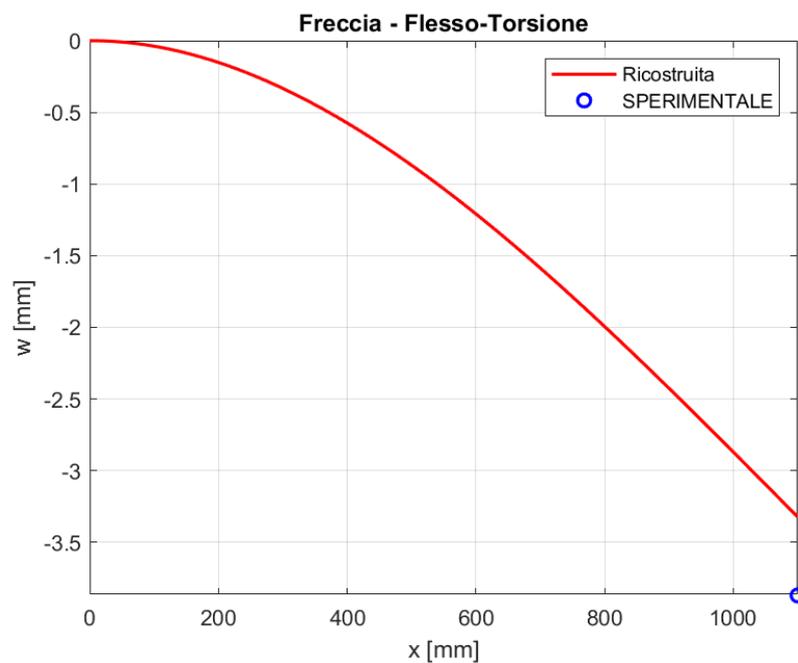


Figura 4.25 - Spostamento w , ricostruito e sperimentale

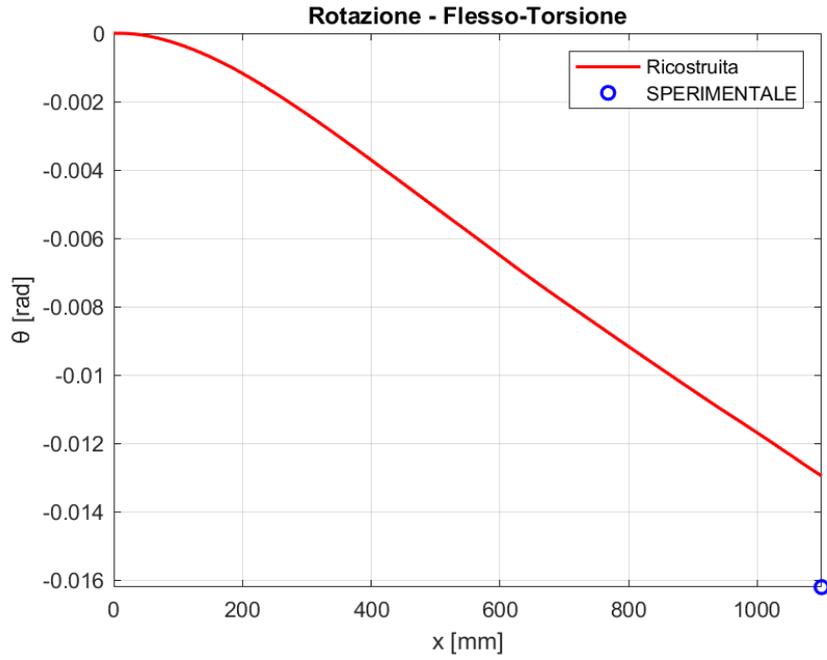


Figura 4.26 - Angolo di torsione, ricostruito e sperimentale

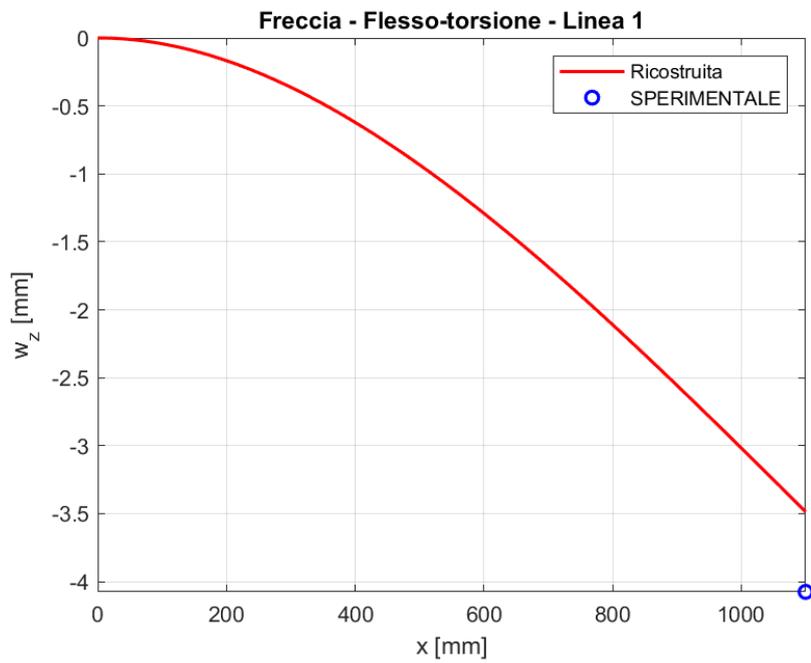


Figura 4.27 - Spostamento w , ricostruito e sperimentale, relativo alla linea 1

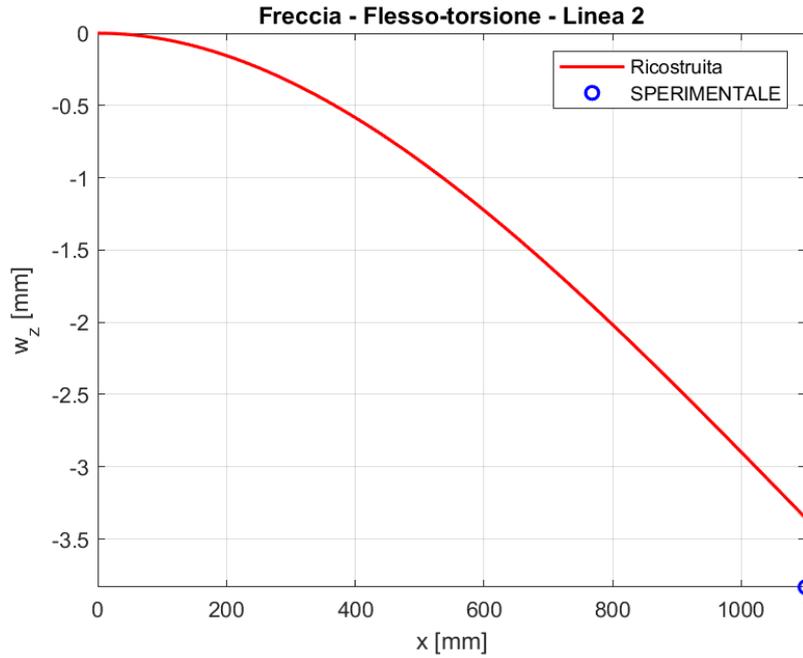


Figura 4.28 - Spostamento w , ricostruito e sperimentale, relativo alla linea 2

Anche in questo caso la ricostruzione non avviene in modo accurato, con degli errori riportati in tabella 4.4.

	w_{CG}	w_{z1}	w_{z2}	φ_{CG}
Sperimentale [mm]	-3.87	-4.08	-3.83	-0.0162
Ricostruito [mm]	-3.28	-3.43	-3.43	-0.0128
Errore [%]	15.36	15.67	13.71	20.86

Tabella 4.4 - Errori percentuali sperimentale-ricostruito

La rotazione sperimentale è stata calcolata come:

$$\varphi = \frac{LVDT_{destra} - LVDT_{sinistra}}{\text{interasse LVDT}} \quad (4.1)$$

Una possibile spiegazione all'elevato errore del 20.86 % sull'angolo di torsione, potrebbe essere dovuta al fatto che il contributo degli strain dovuto alla torsione è piccolo rispetto a quello dovuto alla flessione, come è possibile vedere nella figura 4.29.

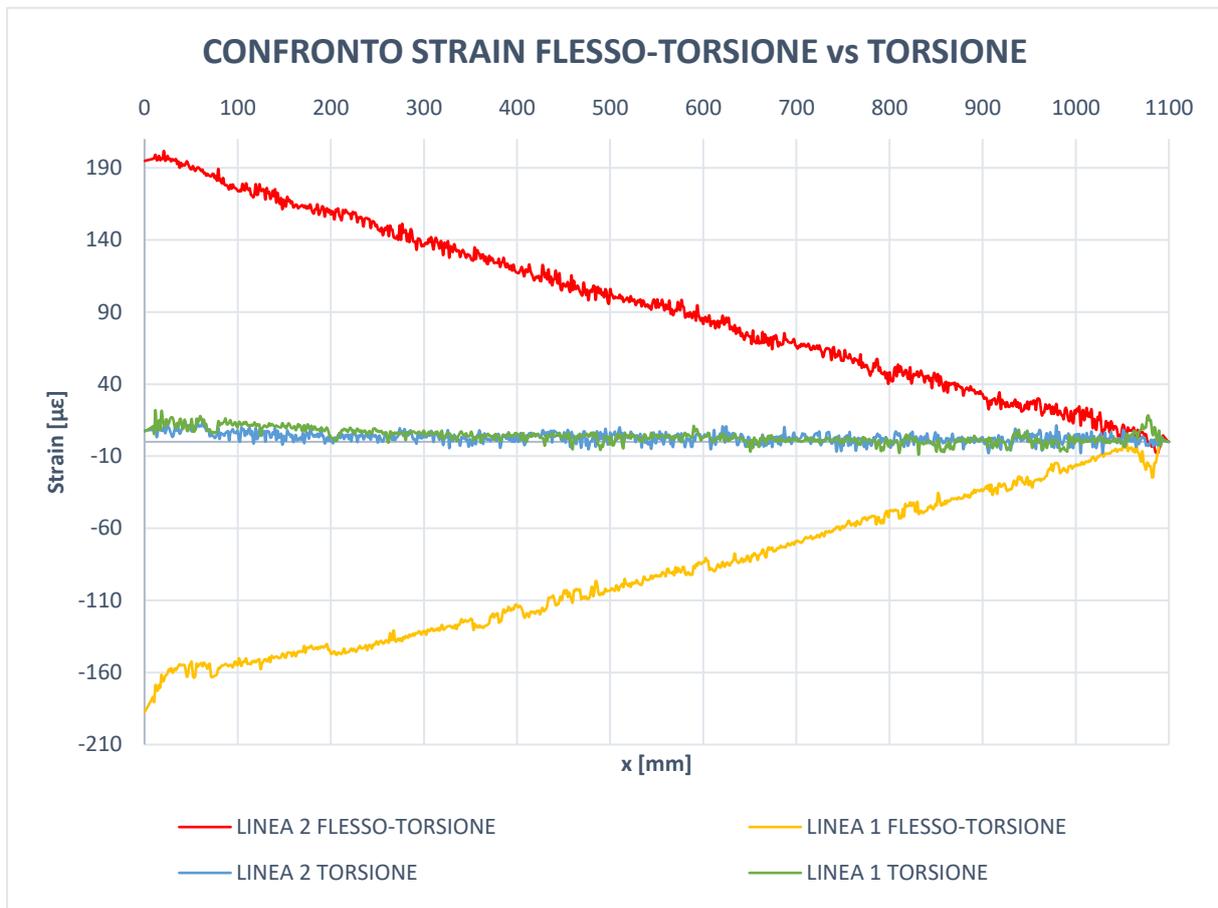


Figura 4.29 - Confronto strain flessio-torsione vs torsione

Gli strain di torsione sono stati calcolati sottraendo agli strains di flessio-torsione gli strain di flessione al medesimo livello di carico.

Per cui, come si vede dal grafico, essendo gli strain di torsione molto più piccoli rispetto a quelli di flessio-torsione, è molto difficile determinare un valore dell'angolo di torsione sperimentale accurato.

Conclusioni

Lo scopo del seguente lavoro di tesi è stato quello di validare, numericamente e sperimentalmente, un metodo di shape-sensing di travi in parete sottile, basato sull'integrazione numerica di deformazioni. Partendo dalla teoria che sta alla base del metodo, sono stati ricavati gli algoritmi di ricostruzione della deformata per vari casi di carico.

Quindi si è proceduto come primo step alla validazione numerica FEM su due travi con diversa sezione trasversale, una ad Ω ed una a C. Dopo aver realizzato i modelli e condotto le analisi FEM mediante l'utilizzo dei software MSC PATRAN/NASTRAN, da cui sono stati estrapolati gli strains, attraverso uno script sviluppato sul software MATLAB sono stati implementati gli algoritmi di ricostruzione.

Successivamente, come secondo step, è stata condotta una prova in laboratorio, dove è stata testata una trave con sezione trasversale a C, in due configurazioni di carico: flessione e flesso-torsione. Per la misurazione degli strains sperimentali, si è fatto ricorso all'utilizzo di estensimetri ottici, che consentono di avere un'elevata densità di punti di misurazione.

Analizzando i risultati si possono trarre le seguenti conclusioni. Per quanto riguarda la trave ad Ω , che è stata validata solo numericamente, la ricostruzione avviene in maniera molto accurata, con errori percentuali sotto l'1 % (con RBE2 all'estremo libero), sia nel caso di torsione che di flesso-torsione. Per quanto riguarda invece la trave a C, che è stata validata sia sperimentalmente che numericamente, si hanno delle differenze. Dal punto di vista numerico, si ha un'ottima ricostruzione sia dello spostamento trasversale nel caso di flessione, sia dell'angolo di torsione e spostamento di warping nel caso di flesso-torsione; ma per quanto riguarda invece lo spostamento trasversale nel caso di flesso-torsione, sia del centro di taglio che delle due linee di misura, si hanno degli errori più elevati. Nel cercare di capire quale sia il motivo di tali errori più elevati si è scoperto che un fattore che influenza tali errori è la snellezza della trave, anche se, pur aumentando la snellezza gli errori rimangono leggermente più elevati se paragonati a quelli ottenuti con la sezione ad Ω . Dal punto di vista sperimentale invece, in entrambi i casi di carico si ottengono dei risultati accettabili, con errori relativamente bassi, ad eccezione dell'angolo di torsione, per il quale si ha un errore più elevato, giustificabile con il fatto che gli strains di torsione sono molto piccoli rispetto agli strains di flessione, pertanto non consentono di ottenere un valore sperimentale molto accurato dell'angolo di torsione.

Quindi, in conclusione, il metodo di ricostruzione analizzato funziona piuttosto bene, tranne che per qualche caso in cui si hanno degli errori leggermente più elevati, in particolare ad esempio per quanto riguarda lo spostamento trasversale nel caso di flesso-torsione per la trave con sezione trasversale a C. Futuri studi potranno essere concentrati pertanto sulla ricerca del motivo per cui si hanno questi errori in quel caso particolare.

Riferimenti bibliografici

- [1] Gherlone M., Cerracchio P., Mattone M., Shape sensing methods: Review and experimental comparison on a wing-shaped plate, *Progress in Aerospace Sciences*, Volume 99, 2018, Pages 14-26, ISSN 0376-0421.
- [2] Xu, H., Zhou, Q., Yang, L., Liu, M., Gao, D., Wu, Z., & Cao, M. (2020). Reconstruction of full-field complex deformed shapes of thin-walled special-section beam structures based on in situ strain measurement. *Advances in Structural Engineering*, 23(15), 3335-3350.
- [3] Loughlan J and Ata M (1995) The restrained torsional response of open section carbon fibre composite beams. *Composite Structures* 32(1-4): 13-31.
- [4] Loughlan J and Ata M (1998) The analysis of carbon fibre composite box beams subjected to torsion with variable twist. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 152(3-4): 373-391.
- [5] Gil-Martín, L.M., Hernández-Montes, E. Principal Sectorial coordinate system. *Arch Appl Mech* 90, 305–312 (2020).
- [6] Vlasov, V.Z.: *Thin Walled Elastic Beams*. Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem (1961).
- [7] W.L. Ko, W.L. Richards, V.T. Fleischer, *Displacement Theories for In-flight Deformed Shape Predictions of Aerospace Structures*, 2007. NASA/TP-2007–214612.
- [8] Ko WL and Fleischer VT (2009) Further Development of Ko Displacement Theory for Deformed Shape Predictions of Nonuniform Aerospace Structures (NASA/TP-2009-214643). Washington, DC: NASA.
- [9] W.L. Ko, W.L. Richards, V.T. Fleischer, *Applications of the Ko Displacement Theory to the Deformed Shape Predictions of the Doubly-tapered Ikhana Wing*, 2009. NASA/TP-2009–214652.
- [10] C.V. Jutte, W.L. Ko, C.A. Stephens, J.A. Bakalyar, W.L. Richards, A.R. Parker, *Deformed Shape Calculation of a Full-scale Wing Using Fiber Optic Strain Data from a Ground Loads Test*, 2011. NASA/TP-2011–215975.
- [11] George C. Kirby III, Tae W. Lim, R. Weber, Albert Bosse, C. Povich, Shalom Fisher, "Strain-based shape estimation algorithms for a cantilever beam," *Proc. SPIE* 3041, *Smart Structures and Materials 1997: Smart Structures and Integrated Systems*, (6 June 1997).
- [12] A.C. Pisoni, C. Santolini, D.E. Hauf, S. Dubowsky, *Displacements in a vibrating body by strain gauge measurements*, in: *Proceedings of the 13th International Conference on Modal Analysis*, 1995. Nashville.
- [13] H.I. Kim, L.H. Kang, J.H. Han, *Shape estimation with distributed fiber Bragg grating sensors for rotating structures*, *Smart Mater. Struct.* 20 (2011) 1–11.
- [14] S. Rapp, L.H. Kang, J.H. Han, U.C. Mueller, H. Baier, *Displacement field estimation for a two-dimensional structure using fiber Bragg grating sensors*, *Smart Mater. Struct.* 18 (2009), 025006.

- [15] Z. Mao, M. Todd, Comparison of shape reconstruction strategies in a complex flexible structure, in: Proceedings of the SPIE 6932, Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems, San Diego, 2008
- [16] R. Bruno, N. Toomarian, M. Salama, Shape estimation from incomplete measurements: a neural-net approach, *Smart Mater. Struct.* 3 (1994) 92–97
- [17] A. Tessler, R. Roy, M. Esposito, C. Surace, M. Gherlone, "Shape Sensing of Plate and Shell Structures Undergoing Large Displacements Using the Inverse Finite Element Method", *Shock and Vibration*, vol. 2018, Article ID 8076085, 8 pages, 2018.
- [18] A. Tessler and J. L. Spangler, A Variational Principle for Reconstruction of Elastic Deformation of Shear Deformable Plates and Shells, NASA/TM-2003-212445, NASA, Washington, DC, USA, 2003.
- [19] A. Tessler and J. L. Spangler, "A least-squares variational method for full-field reconstruction of elastic deformations in shear-deformable plates and shell," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, no. 2–5, pp. 327–339, 2005.
- [20] A. Tessler, J. Spangler, M. Gherlone, M. Mattone, and M. Di Sciuva, "Deformed shape and stress reconstruction in plate and shell structures undergoing large displacements: application of inverse finite element method using fiber-Bragg-grating strains," in *Proceedings of 10th World Congress on Computational Mechanics*, Sao Paulo, Brazil, 2012.
- [21] <https://www.hbm.com/it/6827/article-how-does-an-optical-strain-gauge-actually-work/>
- [22] Di Sante, R. Fibre Optic Sensors for Structural Health Monitoring of Aircraft Composite Structures: Recent Advances and Applications. *Sensors* 2015, 15, 18666-18713.
- [23] https://www.bo.infn.it/~dona/proposal_FIBRAGG_2009.pdf
- [24] Y. Koyamada, M. Imahama, K. Kubota and K. Hogari, "Fiber-Optic Distributed Strain and Temperature Sensing With Very High Measurand Resolution Over Long Range Using Coherent OTDR," in *Journal of Lightwave Technology*, vol. 27, no. 9, pp. 1142-1146, May1, 2009
- [25] Lu, Ping & Lalam, Nageswara & Badar, Mudabbir & Liu, Bo & Chorpening, Benjamin & Buric, Michael & Ohodnicki, P.R.. (2019). Distributed optical fiber sensing: Review and perspective. *Applied Physics Reviews*. 6. 041302.
- [26] M. Imahama, Y. Koyamada, and K. Hogari, "Restorability of Rayleigh backscatter traces measured by coherent OTDR with precisely frequency- controlled light source," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E91-B, pp. 1243–1246, Apr. 2008.
- [27] Amanzadeh M., Aminossadati S. M., Kizil M. S., & Rakić A. D. (2018). Recent developments in fibre optic shape sensing. *Measurement*, 128, 119–137.
- [28] <https://lunainc.com/sites/default/files/assets/files/datasheets/HD%20Strain%20Sensors.pdf>