



Politecnico di Torino

Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

**Determinazione dei parametri di contatto in
un attacco pala di tipo dovetail**

Studente

GLORIOSO Matteo, 258375

Relatore

Prof. BOTTO Daniele

Anno Accademico 2020-2021

Abstract

Il progetto dei rotori palettati delle turbine aeronautiche richiede degli accurati modelli dinamici per una corretta stima delle frequenze di risonanza e delle tensioni causate dalle vibrazioni, fondamentali per la previsione della vita a fatica dei componenti.

La rigidità e lo smorzamento dei giunti disco-pala costituiscono attualmente una delle incertezze di tali modelli.

L'attrito presente nelle interfacce di contatto di tali attacchi è infatti causa di un comportamento non lineare dei giunti, dovuto all'alternarsi di stati di adesione e strisciamento delle superfici durante le vibrazioni. Tale fenomeno rende la rigidità e lo smorzamento di ogni giunto dipendenti dal carico centrifugo e dall'ampiezza di vibrazione della paletta.

Allo stato dell'arte i codici di calcolo agli elementi finiti utilizzano speciali elementi di contatto per simulare tale tipologia di non linearità. Tali elementi richiedono la definizione di tre parametri, la cui stima è attualmente oggetto di ricerca: il coefficiente di attrito tra le superfici e le rigidità di contatto normale e tangenziale.

Gli obiettivi raggiunti nel presente lavoro sono:

- la misura del comportamento dinamico di un tipico giunto a coda di rondine in funzione del carico centrifugo e dell'ampiezza di vibrazione della paletta;
- la stima delle rigidità di contatto per il giunto in esame.

Nel dettaglio:

- è stato definito ed applicato un metodo sperimentale per misurare l'influenza dei giunti dovetail sul comportamento dinamico delle palette;
- i valori sperimentali di frequenza e smorzamento sono stati presentati in funzione del carico centrifugo e dell'ampiezza di vibrazione della paletta;
- è stato definito un metodo numerico-sperimentale per la determinazione della rigidità di contatto normale e tangenziale per il giunto in esame;
- le rigidità di contatto ottenute sono state confrontate con i valori previsti da un modello teorico del contatto.

English version:

The design of bladed disks of turbo engines requires accurate dynamic models to correctly estimate the resonance frequencies and the stresses due to vibrations, which are fundamental for the fatigue design of the components.

The stiffness and damping of blade-disk joints are currently among the uncertainties of such models.

The friction in the contact interfaces of these joints is the cause of a non-linear behaviour of the attachments, due to the switching of stick and slip states of contact surfaces during vibrations. This phenomenon makes joint stiffness and damping dependent on the centrifugal load and on the amplitude of vibration of the blade.

The state-of-the-art FEM softwares make use of special contact elements to simulate such type of non-linearity. Such elements require three parameters to be defined, the valuation of which is currently subject matter of research: the friction coefficient, the normal contact stiffness and the tangential contact stiffness.

The reached targets of the present work are:

- the measurement of the dynamic behaviour of a common dovetail joint as function of the centrifugal load and of the amplitude of vibration of the blade;
- the valuation of the contact stiffnesses of the analysed joint.

In detail:

- an experimental method has been developed to measure the influence of dovetail joints on the dynamic behaviour of blades;
- the experimental values of frequencies and damping have been presented as a function of the centrifugal load and of the amplitude of vibration of the blade;
- a numerical-experimental method has been defined for the identification of the normal and tangential contact stiffnesses of the examined joint;
- the obtained contact stiffnesses have been compared with values predicted by a theoretical model of the contact.

Indice

Abstract	3
1 Introduzione	15
1.1 Stato dell'arte	17
1.1.1 Modelli di contatto	17
1.1.2 Metodi di simulazione numerica	19
1.1.3 Validazioni sperimentali	20
1.2 Obiettivo della tesi	21
1.3 Struttura della tesi	22
1.3.1 Prove dinamiche	23
1.3.2 Simulazioni Numeriche	23
1.3.3 Stima teorica k_n, k_t	24
I Prove dinamiche	25
2 Banco Prova	27
2.1 Schema del Banco	28
2.2 Strumenti	30
2.2.1 Struttura di supporto e trazione del campione	30
2.2.2 Sistema di eccitazione dinamica del campione	30
2.2.3 Sistema di misura della velocità di vibrazione	33
2.2.4 Sistema di misura della Forza di Trazione	33
2.2.5 Sistema di raccolta ed acquisizione dati	34
2.3 Procedura operativa	35
2.3.1 Accensione degli strumenti	35
2.3.2 Impostazione dei parametri del software di acquisizione dati	36
2.3.3 Calibrazione Strain Gauges	36
2.3.4 Misurazioni	37
2.4 Limitazioni tecniche	38
3 Analisi del Segnale	39
3.1 Estrazione del segnale $v(t)$ di decadimento libero	39
3.1.1 Riduzione del segnale all'intervallo di decadimento libero	39
3.1.2 Filtraggio del segnale	40
3.2 Individuazione dei parametri modali	43
3.2.1 Metodo FREEVIB	43
3.3 Validazione del codice con modello ad 1 D.O.F.	46

3.3.1	Modello di contatto strisciante	46
3.3.2	Metodo di integrazione temporale	47
3.3.3	Confronto tra i parametri modali teorici e quelli ottenuti con il metodo FREEVIB	48
3.4	Risultati delle analisi delle misure	51
3.4.1	Primo Modo Flessionale	51
3.4.2	Secondo Modo Flessionale	56
3.4.3	Stima degli errori	60
II	Simulazioni Numeriche	63
4	Procedura generale della simulazione agli Elementi Finiti	65
5	Modello agli Elementi Finiti - ANSYS®	67
5.1	Definizione della Mesh	67
5.2	Introduzione dell'effetto irrigidente dello sforzo normale	69
5.2.1	Sistema dei carichi	69
5.2.2	Sistema dei vincoli e soluzione dei sostegni elastici fittizi	70
5.2.3	Trave: risultati dell'effetto irrigidente	71
5.2.4	Slots: effetto irrigidente trascurabile	72
5.3	Riduzione CMS del modello	73
5.3.1	Riduzione di Craig-Bampton	73
5.3.2	Scelta dei Master Nodes	74
5.4	Verifica della riduzione ed importazione dei modelli	75
6	Ricerca della rigidezza di contatto normale k_n e tangenziale k_t -MATLAB®	77
6.1	Assemblaggio dell'assieme	77
6.1.1	Assemblaggio dei superelementi	78
6.1.2	Vincoli ai supporti	79
6.1.3	Matrice di connettività	81
6.1.4	Elemento di Contatto	81
6.2	Ricerca di k_n e k_t	84
6.2.1	Non linearità del problema	85
6.2.2	Ricerca della soluzione (k_n, k_t) per ogni forza assiale	86
6.2.3	Propagazione dell'errore delle misure e Spazio delle soluzioni	87
6.2.4	Stima dell'errore di k_n, k_t e ricerca della soluzione con minimo errore	88
6.3	Risultati della ricerca di k_N, k_t	91
7	Stima teorica delle rigidzze di contatto	95
7.1	Modello di Contatto	95
7.1.1	Distribuzioni 2D di pressione e taglio	96
7.2	Rigidzza tangenziale	97
7.3	Rigidzza normale	98
7.4	Confronto dei valori ottenuti con quelli teorici	99
8	Conclusioni	101
	Ringraziamenti	103

III Appendice	105
9 Stima teorica dell'Effetto Irrigidente della Forza di Trazione	107
9.1 Modello dinamico della trave con effetto irrigidente	107
9.2 Modello dinamico della trave senza effetto irrigidente	109
10 Codici ANSYS APDL	113
10.1 Codice APDL per l'introduzione dei supporti elastici	113
10.2 Codice APDL per la riduzione di Craig-Bampton	116
10.3 Codice APDL per l'esportazione dell'elenco dei master nodes della trave	120
10.4 Codice APDL per l'esportazione dell'elenco dei master nodes dello slot a $X > 0$	121
10.5 Codice APDL per l'esportazione dell'elenco dei master nodes dello slot a $X < 0$	122
Riferimenti bibliografici	123

Elenco delle figure

1.1	Tipiche interfacce di contatto [35]	15
1.2	Giunto Dovetail in esame, condizioni al contorno	16
1.3	Esempio di ciclo di isteresi della forza di contatto tangenziale	17
1.4	k_{eq} e c_{eq} di un sistema ad 1 DOF, metodo SHBM [29]	17
1.5	Modelli di contatto a parametri concentrati [35]	18
1.6	Modello dell'indentatore piatto pressato sul semispazio piano [44]	19
2.1	Corpo analizzato, con estremità di tipo dovetail	27
2.2	Banco prova	28
2.3	Schema del Banco Prova	29
2.4	Struttura di supporto e trazione del campione	30
2.5	Segnale di ingresso per lo shaker	31
2.6	Generatore di segnale (a) e strumento di acquisizione dati (b)	31
2.7	Amplificatore del segnale per lo shaker	32
2.8	Shaker TIRA S514 e dettaglio della sua punta	32
2.9	Puntatore Laser e punti di misurazione della velocità	33
2.10	Polytec OFV-5000 Vibrometer controller	33
2.11	Sistema di misura della deformazione	34
2.12	Blocco di connessione dei cavi BNC	35
3.1	Esempio di segnale $v(t)$ ottenuto dal banco prova	39
3.2	Esempio di segnale ristretto all'intervallo di decadimento libero	40
3.3	Schema di un filtro passa basso [47]	40
3.4	filtro Passa Banda FIR di Parks-McClellan utilizzato	41
3.5	Esempio di segnale filtrato e delle componenti residue	42
3.6	Vibrazioni della struttura di supporto	42
3.7	Esempio di Inviluppo, Frequenza naturale e Smorzamento istantanei (caso $p=30\text{bar}$)	44
3.8	Esempio di dipendenza non lineare $f_n(A)$ e $\eta(A)$ ottenute con il metodo FREEVIB	45
3.9	Modello 1 D.O.F. con contatto strisciante per validazione FREEVIB	46
3.10	Schema Predictor-Corrector	48
3.11	Modello 1 D.O.F. : Integrazione diretta	49
3.12	Applicazione del metodo FREEVIB al modello 1 DOF	50
3.13	Rigidezza e smorzamento equivalenti previsti dal SHBM	50
3.14	Punto di misurazione Primo Modo Flessionale	51
3.15	Primo Modo Flessionale: Smorzamento in funzione dell'Ampiezza	52
3.16	Primo Modo Flessionale: Frequenza in funzione dell'Ampiezza	53
3.17	Effetto della forza di trazione su f_n e η in condizioni di Adesione	54
3.18	Primo flessionale: frequenza naturale in funzione di Ampiezza di vibrazione e Trazione	55

3.19	Prima flessionale: smorzamento in funzione di Ampiezza di vibrazione e Trazione .	55
3.20	Punto di misurazione Secondo Modo Flessionale	56
3.21	Seconda Flessionale: Frequenza= f_n (Ampiezza), Smorzamento= η (Ampiezza) per diversi valori di corrente efficace A_{RMS} inviata allo shaker	57
3.22	Effetto della forza di trazione su f_n e η in condizioni di Adesione	58
3.23	Seconda flessionale: frequenza in funzione di Ampiezza di vibrazione e Trazione . .	59
3.24	Seconda flessionale: smorzamento in funzione di Ampiezza di vibrazione e Trazione	59
3.25	Primo Modo Flessionale: Stima dell'errore - contact Status: STICK	60
3.26	Secondo Modo Flessionale: Stima dell'errore - contact Status: STICK	61
4.1	Giunto Dovetail in esame	65
4.2	Schema dell'elemento di contatto [35]	65
5.1	Modello FEM del simulacro di pala e degli slots	67
5.2	Nodi all'interfaccia di contatto	68
5.3	Dettaglio del Giunto Dovetail nel modello FEM	68
5.4	Sistema dei carichi per l'analisi statica	70
5.5	Sistema dei vincoli per l'analisi statica	70
5.6	Effetto irrigidente della forza assiale sulla trave (ANSYS)	72
5.7	Slot: effetto irrigidente trascurabile	72
5.8	Nodi masterper il modello ridotto	75
5.9	Effetto irrigidente per il R.O.M. della trave	76
5.10	Forme Modali del R.O.M. della trave	76
5.11	Verifica R.O.M. Slots tramite il confronto delle frequenze	76
6.1	Assemblaggio delle matrici di massa dei superelementi	78
6.2	Assemblaggio delle matrici di rigidezza dei superelementi	78
6.3	Nodi alla base dei supporti	79
6.4	Matrice di massa globale dopo l'aggiunta dei vincoli	80
6.5	Matrice di rigidezza globale dopo l'aggiunta dei vincoli	80
6.6	Elemento di contatto lineare	81
6.7	Rotazione delle coordinate degli elementi di contatto	82
6.8	Assemblaggio degli elementi di contatto	83
6.9	Selezione delle frequenze in completa adesione dei contatti	84
6.10	Selezione delle frequenze f_{STICK} per $F_{ax} > 12kN$	85
6.11	Esempio dipendenza non lineare della frequenza da k_n, k_t	86
6.12	Ricerca globale del minimo (inferiore alla tolleranza:=incertezza)	88
6.13	Soluzione (k_n, k_t) con minimo errore (F=12kN)	90
6.14	Errori percentuali di k_n e k_t	90
6.15	Risultati del confronto delle frequenze per la ricerca di k_n, k_t	92
6.16	Primo Modo Flessionale	93
6.17	Secondo Modo Flessionale	93
7.1	Modello dell'indentatore (1) sul semispazio piano (2) [44]	95
7.2	Geometria del contatto	96
7.3	97
7.4	98

7.5	Confronto k_n teorico vs numerico-sperimentale	100
7.6	Confronto k_t teorico vs numerico-sperimentale	100
9.1	Concio elementare della trave deformata	107

Elenco delle tabelle

5.1	Verifica dei supporti elastici	71
5.2	Effetto irrigidente della forza assiale sulla trave (ANSYS)	71
6.1	Errore delle frequenze misurate interpolate per le forze del FEM	87
6.2	Risultati finali della ricerca di k_n, k_t	91

Capitolo 1

Introduzione

Uno dei principali aspetti del progetto meccanico dei rotori palettati delle turbine aeronautiche consiste nella verifica dell'integrità strutturale per fatica ad alto numero di cicli (HCF - High Cycle Fatigue). Per tale verifica risulta necessario prevedere lo stato di tensione dei componenti dovuto alle vibrazioni. Tale obiettivo è raggiunto tramite le simulazioni numeriche, che richiedono dunque accurati modelli dinamici.

I rotori palettati, poiché assieme di molti componenti, presentano tipicamente un'alta densità modale, ovvero un ampio numero di frequenze di risonanza prossime tra loro. Inoltre la variabilità delle condizioni operative dei motori aeronautici implica un ampio spettro dell'eccitazione dinamica dovuta alle forze aerodinamiche. Tali aspetti rendono infatti un progetto dinamico in cui siano evitate tutte le possibili condizioni di risonanza. Per tale motivo è necessario controllare l'ampiezza di vibrazione attraverso lo smorzamento presente nel sistema, le cui principali fonti sono: lo smorzamento del materiale, aerodinamico e quello dovuto all'attrito nelle interfacce di contatto. Quest'ultimo fornisce il contributo principale della dissipazione di energia e grazie alla sua facile realizzazione (anche se non progettazione) costituisce il più frequente metodo di smorzamento passivo delle ampiezze di vibrazione delle turbine aeronautiche. Le più comuni fonti di smorzamento per attrito dei dischi palettati sono le interfacce di contatto di: giunti disco-pala, "shrouds", "underplatform dampers", visibili in figura 1.1. Questi ultimi sono dispositivi appositamente introdotti nel sistema per ridurre le vibrazioni.



Figura 1.1: Tipiche interfacce di contatto [35]

Un problema intrinseco di tale tipologia di smorzamento risiede nella natura non lineare delle forze di contatto, che rende complesse e computazionalmente costose le simulazioni numeriche. Infatti le forze scambiate nelle interfacce non possono essere approssimate come linearmen-

te dipendenti dagli spostamenti, poiché dipendono dallo stato del contatto: completa adesione, micro-strisciamento, macro-strisciamento, separazione. La condizione del contatto dipende, oltre che dai materiali, dalla rugosità e dalla geometria del contatto, anche dalle forze di precarico normale alle superfici e dall'ampiezza delle vibrazioni. Nel caso dei giunti disco-pala tali condizioni al contorno sono definite dalla forza centrifuga a cui è soggetta la paletta e dall'ampiezza della vibrazione della stessa causata dalle forzanti aerodinamiche (figura 1.2).

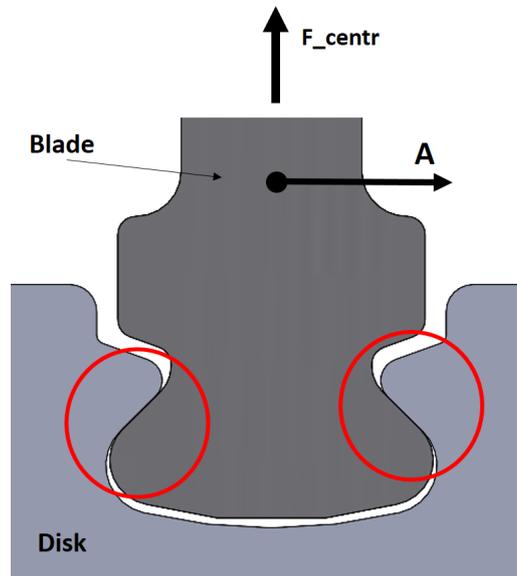


Figura 1.2: Giunto Dovetail in esame, condizioni al contorno

I codici commerciali agli elementi finiti permettono la simulazione di tale non linearità soltanto tramite l'integrazione temporale diretta delle equazioni del moto. Tale metodo richiede tempi e/o potenze di calcolo molto grandi, che rendono infattibili le analisi parametriche tipiche della fase di progetto. Una soluzione adottata dall'industria è quindi l'utilizzo di modelli dinamici lineari, con la completa e costante adesione delle interfacce di contatto. In tali modelli è inserito uno smorzamento viscoso relativo dell'ordine di $\zeta = 2 \cdot 10^{-3}$ [1] per considerare lo smorzamento del materiale, aerodinamico e dovuto all'attrito. Tale metodo implica degli errori nella stima delle tensioni dovute alle vibrazioni non sempre accettabili, poiché le non linearità dei contatti introducono variazioni nelle frequenze di risonanza e nelle ampiezze di vibrazione non trascurabili.

Dunque è stata svolta un'intensa ricerca per sviluppare modelli di contatto ed efficienti metodi di soluzione delle equazioni non lineari del moto.

1.1 Stato dell'arte

1.1.1 Modelli di contatto

I risultati principali della ricerca di modelli di contatto sono:

- Il contatto presenta 3 possibili stati: micro-strisciamento (o “microslip”), macro-strisciamento (o “gross-slip”) e separazione (o “lift-off”). La completa adesione del contatto è un caso limite della condizione di micro-strisciamento. Nel dettaglio il microslip è definito come il parziale strisciamento delle regioni ai margini del contatto. Al diminuire del pre-carico normale o all'aumentare dell'ampiezza di vibrazione tangenziale lo strisciamento si propaga all'interno della regione di contatto fino al totale scorrimento di tutta l'interfaccia (gross-slip).
- Durante le vibrazioni l'effetto di saturazione della forza tangenziale dovuto allo strisciamento (Legge di Coulomb: $|T| \leq \mu N_0$) causa l'alternarsi degli stati di microslip e gross-slip e la formazione di un ciclo di isteresi tra la forza di contatto tangenziale e lo spostamento relativo delle superfici di interfaccia.

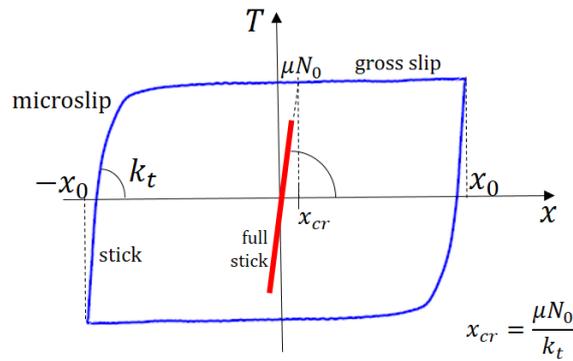


Figura 1.3: Esempio di ciclo di isteresi della forza di contatto tangenziale

- Dal ciclo di isteresi è possibile estrarre una rigidità ed uno smorzamento equivalente del contatto. La rigidità k_{eq} può essere interpretata come la pendenza complessiva del ciclo, mentre lo smorzamento c_{eq} è associato all'energia dissipata dalla forza non conservativa dell'attrito, che è in relazione all'area del ciclo. Tali parametri dipendono dall'ampiezza di vibrazione x_0 , dal pre-carico N_0 , dal materiale e dalla geometria del contatto.

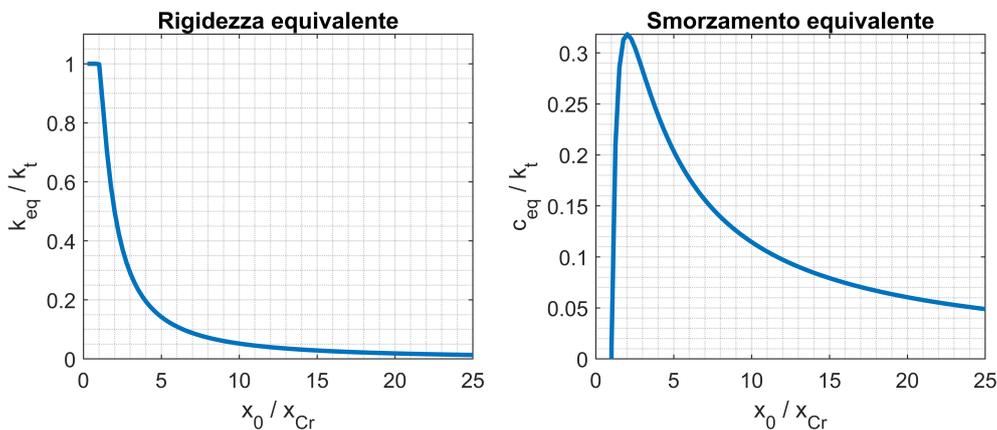


Figura 1.4: k_{eq} e c_{eq} di un sistema ad 1 DOF, metodo SHBM [29]

Parametri concentrati

Sono stati sviluppati molti modelli a parametri concentrati per l'implementazione di elementi di contatto punto-punto nei codici di simulazione agli elementi finiti:

- Griffin [31] ha proposto un modello con spostamento relativo tangenziale 1D e precarico normale N_0 costante (figura 1.5a).

$$T = \begin{cases} k_t(x - w) & \text{stick: } |T| < \mu N_0, \dot{w} = 0 \\ \mu N_0 \text{sgn}(\dot{w}) & \text{slip: } |T| = \mu N_0, \dot{w} \neq 0 \end{cases}$$

- Yang et al. [21] hanno esteso il modello 1D al caso di precarico normale variabile. Tale modello è stato successivamente adottato da Petrov ed Ewins [22] per lo sviluppo degli elementi di contatto;
- Salinturk e Ewins [32] e Menq e Yang [33] hanno definito un modello con precarico normale costante e spostamento relativo tangenziale bidimensionale;
- Yang e Menq [34] hanno studiato il modello 2D con precarico normale variabile.

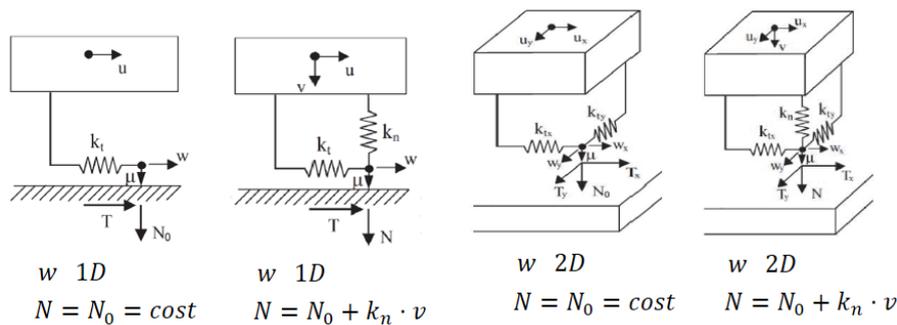


Figura 1.5: Modelli di contatto a parametri concentrati [35]

L'utilizzo di tali modelli richiede la definizione di tre parametri: il coefficiente d'attrito μ , le rigidità di contatto normale k_n e tangenziale k_t .

Sono state svolte molte campagne sperimentali, di seguito descritte, per la caratterizzazione di tali parametri.

Tuttavia l'infattibilità di una completa caratterizzazione sperimentale dovuta all'estrema variabilità dei materiali, delle condizioni operative (come carichi e temperatura) e delle geometrie di contatto ha condotto la ricerca verso lo sviluppo di modelli analitici per la definizione di tali parametri.

Teoria elastica del continuo

I modelli analitici sviluppati sono basati sulla meccanica continua del contatto.

I contatti striscianti tra superfici sferiche sono stati studiati da Mindlin et al. in [39],[10], dove sono state trovate le espressioni analitiche del ciclo di isteresi per tale tipologia di contatti.

Nel campo delle vibrazioni dei dischi palettati, la teoria di Mindlin è stata applicata in [40],[41] per prevedere il comportamento degli underplatform damper con contatti sferici.

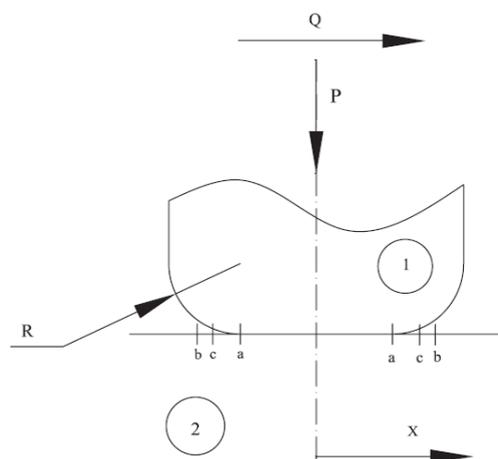


Figura 1.6: Modello dell'indentatore piatto pressato sul semispazio piano [44]

Il contatto bidimensionale tra superfici conformi -tipiche dei giunti disco-pala- è stato analizzato da Shtayerman [42], il quale ha ottenuto il campo di tensione in un indentatore piatto con i bordi arrotondati, pressato su un mezzo-spazio piano (figura 1.6).

I suoi risultati sono stati ripresi da Ciavarella et al. [43] per estendere la trattazione al caso di contatto strisciante bidimensionale. In [44] l'Ing. Allara ha applicato la teoria del potenziale tridimensionale di Boussinesq-Cerruti alle distribuzioni di pressione e taglio per ricavare gli spostamenti di tale modello, ha proposto un metodo per la definizione del ciclo di isteresi per tale tipologia di contatto ed ha definito una procedura numerico-analitica per il calcolo della rigidità di contatto tangenziale.

1.1.2 Metodi di simulazione numerica

I modelli di contatto sopra citati sono utilizzati in codici di calcolo appositamente sviluppati per risolvere le equazioni non lineari del moto con metodi più efficienti dell'integrazione temporale diretta impiegata nei software commerciali.

Per il calcolo della risposta forzata nel dominio delle frequenze, una tecnica ampiamente adottata è il Metodo del Bilanciamento Armonico (HBM-Harmonic Balance Method) proposto da Cardona et al. [20] ed applicato in [20], [22], [23], [24], [32], [25], [26]: le variabili periodiche (spostamenti e forze) sono espresse come sovrapposizione di componenti armoniche ricavate dall'analisi di Fourier e l'equilibrio di forze è imposto per ogni armonica, trasformando le equazioni differenziali non lineari originali in un sistema di equazioni algebriche non lineari. Zucca et al. [25],[26] hanno successivamente dimostrato che è possibile il calcolo simultaneo delle componenti statiche e dinamiche delle forze di contatto.

Per il calcolo di risposte non periodiche, come il decadimento libero ed in generale i transitori, Gastaldi et al. [28] hanno proposto tecniche di integrazione temporale in cui le non linearità di contatto sono ottenute tramite sequenza temporale di sistemi lineari, ovvero approssimando il sistema non lineare di equazioni con un sistema lineare a tratti.

1.1.3 Validazioni sperimentali

La necessità di validare tali metodi di soluzione, modelli di contatto e stime teoriche dei loro parametri ha spinto la ricerca verso due tipologie di campagne sperimentali.

- Nelle prove dinamiche in micro scala è studiato il comportamento locale dei contatti, misurando Forze e spostamenti e dunque il ciclo di isteresi, ricavando i parametri di contatto: rigidezza k_{eq} e smorzamento c_{eq} equivalenti;
- Nelle prove dinamiche in macro scala è analizzato il comportamento globale dei corpi (tipicamente rotor palettati), misurando la risposta forzata nel dominio delle frequenze o il decadimento libero (nel dominio del tempo) al variare delle condizioni al contorno (Forza centrifuga, Forze di eccitazione dinamica) per confrontare tali risposte con quelle ottenute dalle simulazioni numeriche.

Misurazioni in micro-scala

I contatti striscianti tra superfici sferiche sono stati analizzati per la prima volta da Mindlin et al. [10], i quali hanno misurato i cicli di isteresi per superfici convesse. Johnson [11] ha misurato l'isteresi statica e dinamica di sfere d'acciaio pressate su superfici piane. Goodman e Brown [12] hanno preso in esame sfere d'acciaio oscillanti tra due piani paralleli in compressione. Filippi et al. hanno misurato -per superfici sferiche in contatto con superfici piane-: il coefficiente d'attrito, i cicli di isteresi e la rigidezza di contatto tangenziale a temperatura ambiente [13] e ad alta temperatura [14].

I contatti striscianti tra superfici conformi sono stati esaminati da Botto et al. [9], i quali hanno realizzato un banco prova in grado di garantire il contatto piano nonostante l'usura delle superfici ed hanno misurato i cicli di isteresi, il coefficiente d'attrito e la rigidezza tangenziale di contatto al variare del carico normale e della frequenza di eccitazione. Ewins et al. in [6] e [7] hanno misurato il coefficiente di attrito e la rigidezza tangenziale per un contatto piano per diversi materiali e condizioni di carico.

Misurazioni in macro-scala

Le prime analisi sperimentali dell'effetto dei contatti striscianti sul comportamento dinamico globale di rotor di turbine aeronautiche sono state svolte da Goodman e Klumpp [15], i quali hanno misurato i cicli di isteresi per giunti disco-pala soggetti ad un carico di compressione uniforme. In tale studio è stata dimostrata l'importanza dello smorzamento per attrito e la sua dipendenza dal carico normale.

In [1] l'Ing. Allara ha progettato un banco prova per studiare il comportamento dei giunti disco-pala a coda di rondine ("dovetail") al variare del carico centrifugo e dell'ampiezza delle vibrazioni. In tale lavoro una trave è stata fissata alle sue estremità tramite giunti dovetail, è stata posta in trazione ed è stata fatta vibrare con eccitatori elettromagnetici, misurando la sua risposta durante il decadimento libero delle oscillazioni. I segnali ottenuti sono stati analizzati con opportuni metodi per ricavare la frequenza e lo smorzamento del sistema non lineare, in funzione del carico di trazione e dell'ampiezza di vibrazione. Il suddetto banco prova e parte del metodo di analisi costituiscono la base della parte sperimentale della presente tesi.

Lo stesso banco prova di [1] è stato utilizzato in [16] per misurare la risposta forzata nel dominio della frequenza, necessaria a validare i codici basati sull'Harmonic Balance Method.

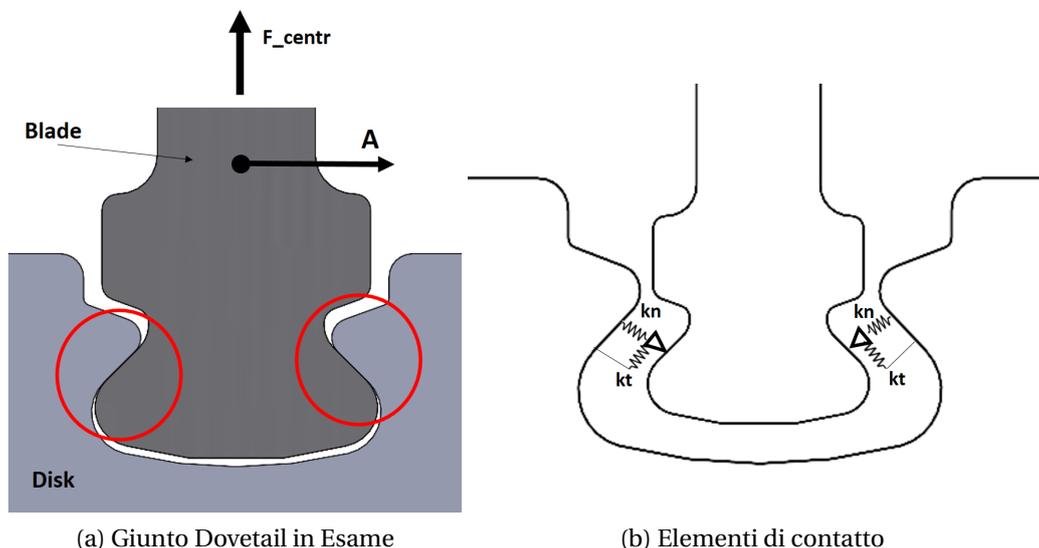
In [17] sono state svolte prove dinamiche simili a quelle presentate in [1]. In [18] è esaminato il comportamento di una trave a sbalzo fissata ad un'estremità con un giunto disco-pala. Un pre-carico normale al contatto è fornito tramite viti. Il sistema è posto su una piattaforma oscillante. Sono provate varie geometrie del giunto. In [19] lo stesso metodo è applicato a palette contigue per studiare la distribuzione di tensione e l'effetto intaglio negli attacchi pala.

In [8] sono misurati contemporaneamente il comportamento dinamico globale di un paletta in contatto con underplatform dampers ed il comportamento locale dei contatti, per mettere in relazione le curve di prestazione di tali smorzatori (macro-scala) con le caratteristiche del contatto k_{eq}, c_{eq} (micro-scala).

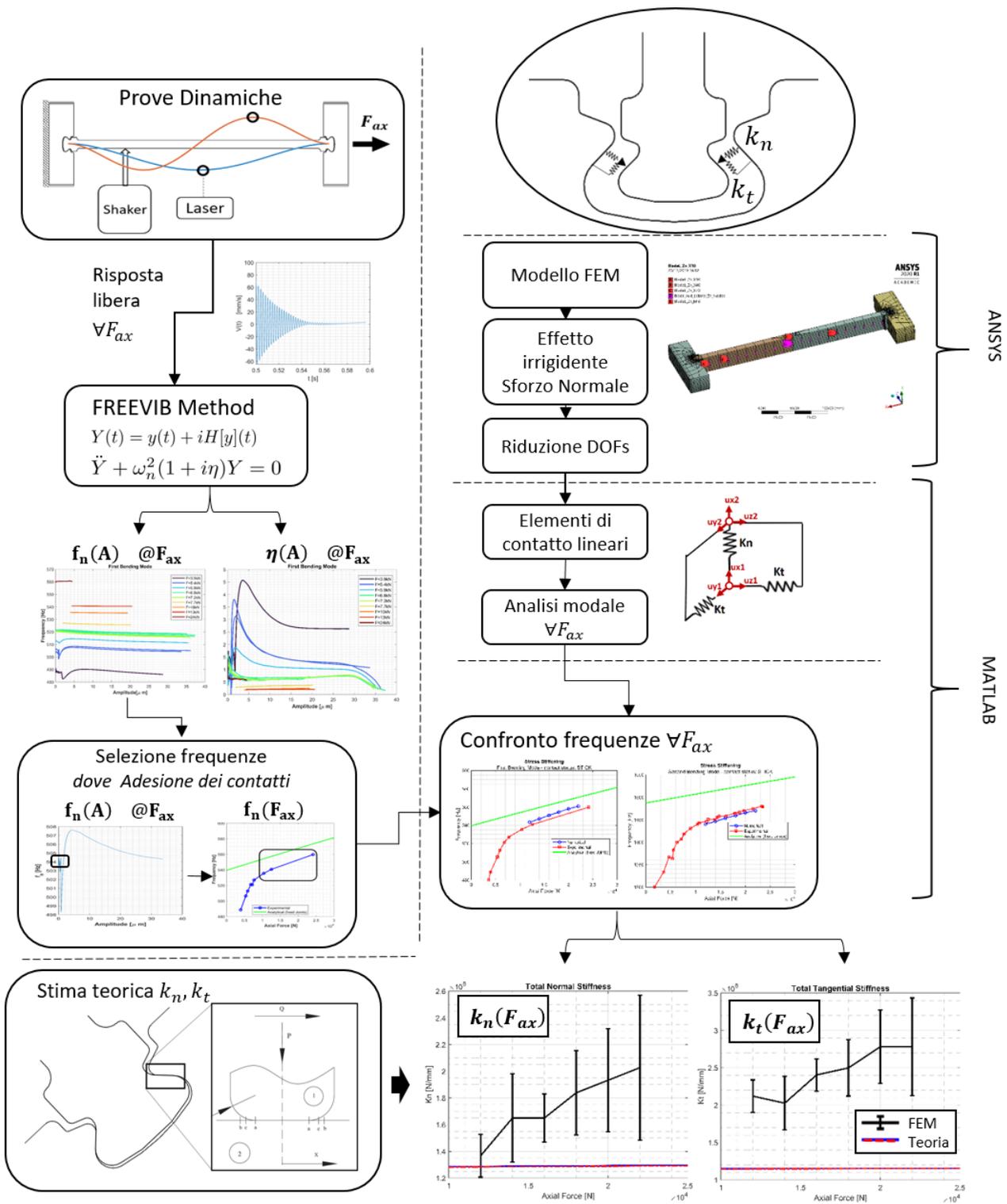
1.2 Obiettivo della tesi

Il presente lavoro appartiene alla categoria delle validazioni sperimentali effettuate tramite misurazioni di risposte dinamiche di assiemi meccanici (macro-scala). Nel dettaglio è stato analizzato il comportamento dinamico di un tipico giunto a coda di rondine ("dovetail") utilizzato nei rotor delle turbine per il collegamento delle palette al disco (figura 1.7a). L'obiettivo della tesi è triplice:

1. Approfondire la comprensione delle prestazioni dinamiche del giunto in esame, misurando la frequenza e lo smorzamento di un simulacro di pala in funzione della forza centrifuga e dell'ampiezza di vibrazione della stessa: $f_n = f_n(F_{centr}, A) \quad \eta = \eta(F_{centr}, A)$;
2. Fornire un database di misure della risposta del simulacro durante il decadimento libero delle oscillazioni, per validare i nuovi metodi di integrazione temporale non lineare (come quelli proposti in [28]);
3. Ricavare dalle misure macroscopiche le rigidzze di contatto normale k_n e tangenziale k_t (figura 1.7b) al fine di:
 - (a) Fornire i parametri necessari ai modelli di contatto utilizzati nelle simulazioni numeriche, a complemento delle suddette misure delle risposte dinamiche, per la validazione dei nuovi codici di calcolo;
 - (b) Validare le stime teoriche di tali parametri proposte in [44]



1.3 Struttura della tesi



1.3.1 Prove dinamiche

Per analizzare il comportamento dinamico del giunto dovetail in esame è stato utilizzato il banco prova descritto in [1]. Nel dettaglio:

- Una trave fissata alle estremità con giunti a coda di rondine (di seguito indicata come “simulacro di pala”) è stata posta in trazione e fatta vibrare con un eccitatore elettro-meccanico (shaker), misurando tramite un interferometro laser le velocità di alcuni punti.
 - Sono stati effettuati due gruppi di misurazioni per esaminare il primo ed il secondo modo flessionale orizzontale della trave.
 - Ogni misurazione ha fornito la risposta della trave durante il decadimento libero delle oscillazioni, successivo ad un’eccitazione oscillatoria con frequenza prossima a quella della forma modale in analisi. Tale risposta è stata ottenuta tramite la misura della velocità $v(t)$ dell’antinodo del modo in esame.
 - Ogni misurazione è stata svolta per un dato valore di forza di trazione.
- Le misure della risposta libera sono state processate con il metodo FREEVIB proposto da Feldman in [2] per l’analisi di sistemi non lineari. Per ogni misurazione (a fissata forza di trazione F_{ax}) è stata ricavata la frequenza naturale e lo smorzamento (fattore di perdita η) in funzione dell’ampiezza di vibrazione A dell’antinodo del modo in esame.

1.3.2 Simulazioni Numeriche

Per la ricerca dei valori di k_n e k_t è stata seguita la seguente procedura:

1. Il modello del simulacro di pala è stato discretizzato con il metodo agli elementi finiti implementato in ANSYS®, così come i supporti della trave (slots), prestando particolare attenzione alla coincidenza dei nodi nelle interfacce di contatto.
2. Sono state svolte in ANSYS® analisi statiche non lineari sulla sola trave al variare della forza assiale di trazione, per ottenere l’effetto irrigidente di tale forza sulla matrice di rigidezza del simulacro, utilizzata in seguito.
3. I gradi di libertà del modello sono stati ridotti in ANSYS® con la tecnica della Component Mode Synthesis di Craig-Bampton [37] e le matrici di massa e rigidezza del modello ridotto sono state importate in MATLAB®. I nodi master utilizzati per la riduzione sono i nodi di contatto ed ulteriori nodi necessari alla visualizzazione dei modi.
4. I modelli ridotti della trave e dei supporti sono stati assemblati in MATLAB® introducendo degli elementi di contatto lineari, ovvero che non implementano lo stato di strisciamento o separazione del contatto. I parametri di tali elementi sono i valori di k_n e k_t oggetto della presente ricerca.
5. E’ stato scritto un codice MATLAB® per la ricerca di k_n e k_t per ogni forza di trazione. Tale codice confronta le frequenze del primo e secondo modo flessionale del modello FEM con le corrispondenti frequenze ottenute dall’analisi delle misure, nell’intervallo di Forze assiali di Trazione ed Ampiezze di vibrazione in cui è stata riscontrata completa adesione dei contatti (no microslip), che implica la linearità del sistema.

1.3.3 Stima teorica k_n, k_t

- Sono state calcolate le rigidezze di contatto k_n, k_t tramite il modello teorico dell'indentatore dai bordi arrotondati premuto su una superficie piana, proposto in [44].
- I valori teorici sono stati confrontati con quelli ottenuti dalla procedura numerico-sperimentale.

Parte I

Prove dinamiche

Capitolo 2

Banco Prova

Per analizzare il comportamento dinamico del giunto dovetail in esame al variare della forza centrifuga e dell'ampiezza di vibrazione è stata analizzata la risposta libera successiva ad un'eccitazione oscillatoria del sistema di seguito descritto. E' stato utilizzato parte di un banco prova già esistente, la cui progettazione ed impiego sono descritti in [1].

In [1] è esclusa l'idea di simulare una forza centrifuga su una paletta tramite un sistema di carico, poiché esso potrebbe introdurre ulteriore smorzamento. La soluzione lì trovata è analizzare il comportamento dinamico di una trave supportata ai due estremi da giunti di tipo dovetail, come visibile in figura 2.1, trazionata ad un'estremità.

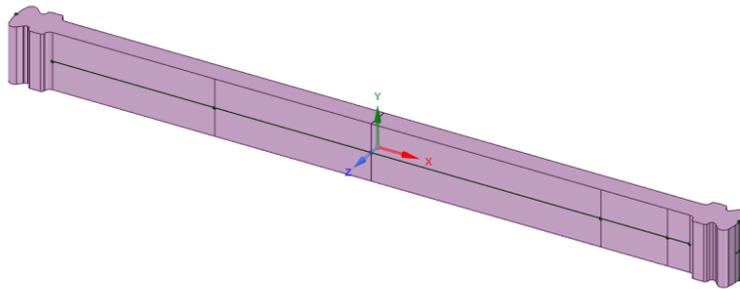


Figura 2.1: Corpo analizzato, con estremità di tipo dovetail

Le principali differenze tra il comportamento dinamico di una paletta e quelle del corpo in esame sono le seguenti:

1. Le palette dei rotori hanno forme modali approssimabili a quelle di una trave incastrata ad un estremo, mentre il corpo analizzato è assimilabile ad una trave incastrata ad entrambe le estremità;
2. La sezione trasversale del corpo è rettangolare (26mm x 10mm) e costante lungo tutto l'asse della trave, a differenza di una vera paletta;
3. La forza centrifuga di una paletta è massima alla radice e diminuisce verso l'estremità. Il corpo in esame ha uno Sforzo Normale costante lungo l'asse longitudinale.

Tuttavia, poiché l'energia dissipata dai giunti dipende dalla forza sulla sezione trasversale in prossimità del giunto stesso, la trave del presente banco prova dissipa la stessa energia di una paletta avente pari forza agente sull'attacco pala.

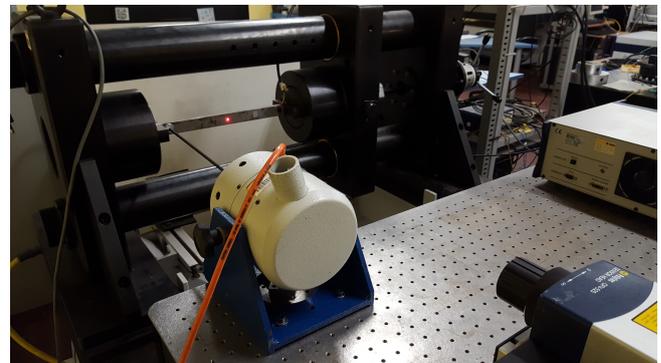
2.1 Schema del Banco

Il banco prova del presente lavoro è costituito da 5 sottosistemi, visibili nello schema di figura 2.3.

1. il sistema di supporto e trazione della trave progettato in [1] , visibile nelle figure 2.2a, 2.2b. Tale sistema presenta due traverse, di cui una fissa -solidale ad un supporto (di tipo dovetail) della trave- ed una mobile -solidale al supporto dell'altra estremità della trave-. Quest'ultima traversa è collegata ad un attuatore idraulico che permette la trazione della trave.
2. il sistema di eccitazione dinamica della trave, costituito da un generatore di segnale, un amplificatore del segnale e dall'eccitatore elettrodinamico ("shaker", fig.2.2b).
3. il sistema di misura della velocità di vibrazione, costituito da un'interferometro laser (fig. 2.2b) - indirizzato su particolari punti della trave (antinodo del primo modo flessionale o del secondo modo flessionale) - e dal suo strumento di controllo.
4. il sistema di misura della Forza di Trazione, costituito da due sottosistemi indipendenti per permettere un duplice controllo delle misurazioni. Il primo sottosistema è composto da un manometro che fornisce la pressione all'interno dell'attuatore idraulico. Il secondo sottosistema è costituito da estensimetri posti sulla trave e dal loro sistema di acquisizione dati, indicato con HBM nello schema di figura 2.3.
5. il sistema di raccolta ed acquisizione dati, costituito dai cavi BNC, per trasportare i segnali analogici di velocità e deformazione, dal blocco di connessione BNC e dallo strumento di acquisizione dei dati situato all'interno dello Chassis NI PXIe 1073.



(a) Trave e supporti



(b) Shaker, Laser, Struttura di supporto

Figura 2.2: Banco prova

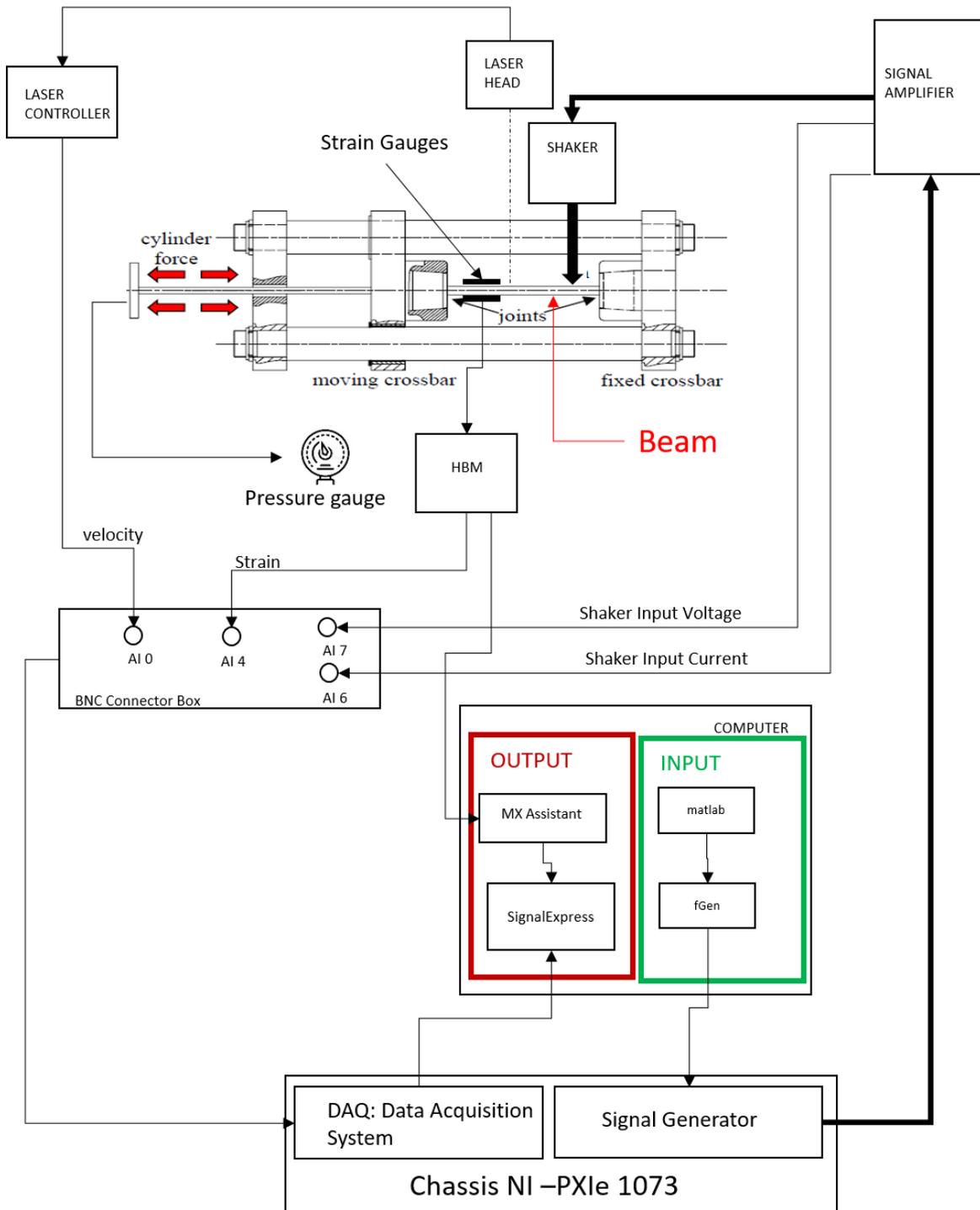


Figura 2.3: Schema del Banco Prova

2.2 Strumenti

2.2.1 Struttura di supporto e trazione del campione

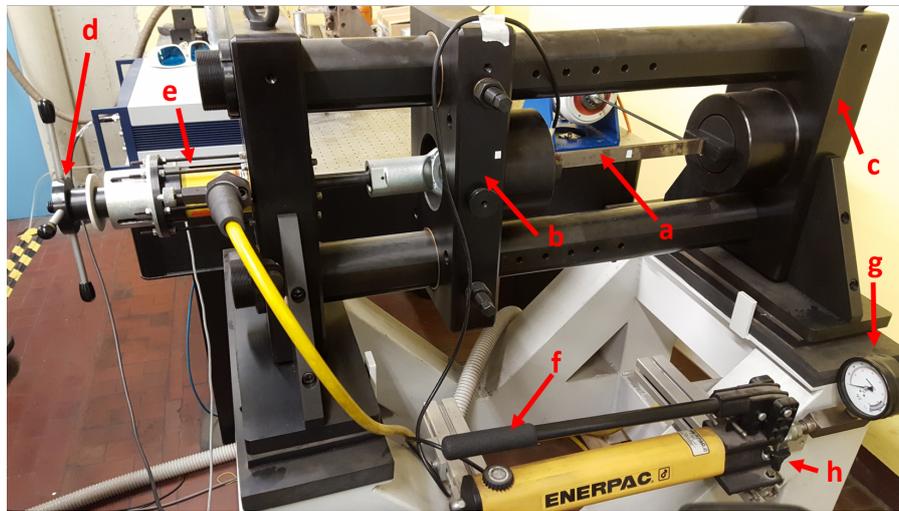


Figura 2.4: Struttura di supporto e trazione del campione

Lo schema di funzionamento della struttura di supporto, progettata in [1], è simile a quello di una macchina per le prove di trazione dei provini. La trave (fig. 2.4 (a)) con le estremità a coda di rondine (chiamata nel presente lavoro anche “simulacro di pala”) è fissata su dei supporti (slot) di tipo dovetail , ognuno dei quali simula l'alloggiamento presente nei rotor di turbine per l'attacco della radice di pala.

Tali supporti sono solidali alle traverse (b) e (c). La traversa (c) è fissa, mentre (b) è mobile lungo l'asse longitudinale della trave. Quest'ultima traversa è collegata ad un attuatore idraulico (e) ed ad un attuatore manuale a vite azionato dalla leva (d).

Quest'ultimo permette di imporre un basso carico di trazione per fissare la trave ai supporti ad inizio prova e, viceversa, di liberarla a fine prova. L'attuatore idraulico (e) fornisce il carico di trazione principale ed una valvola a globo (h) permette il mantenimento di tale carico per tutta la durata della prova. La pressione del sistema è gestita tramite la pompa a mano (f) ed è visualizzabile nel manometro (g). A fine prova è necessario aprire la valvola (h) per annullare la differenza di pressione all'interno dell'attuatore (e).

2.2.2 Sistema di eccitazione dinamica del campione

L'eccitazione dinamica del simulacro di pala è realizzata tramite lo shaker elettrodinamico TIRA S514 visibile in figura 2.2b. Esso è stato comandato in corrente tramite l'amplificatore TIRA BAA 500, il quale amplifica il segnale proveniente dal generatore di segnale NI-PXI 5412, gestito dal software “fGen”, che permette l'importazione di un generico segnale di input in formato testo.

Segnale di input

Nel presente lavoro è stato analizzato il decadimento libero delle vibrazioni di determinati modi della trave. Per ottenere la risposta libera del corpo associata alla forma modale in esame è

stata utilizzata la tipologia di segnale di ingresso visibile in figura 2.5, creato tramite un codice MATLAB®.

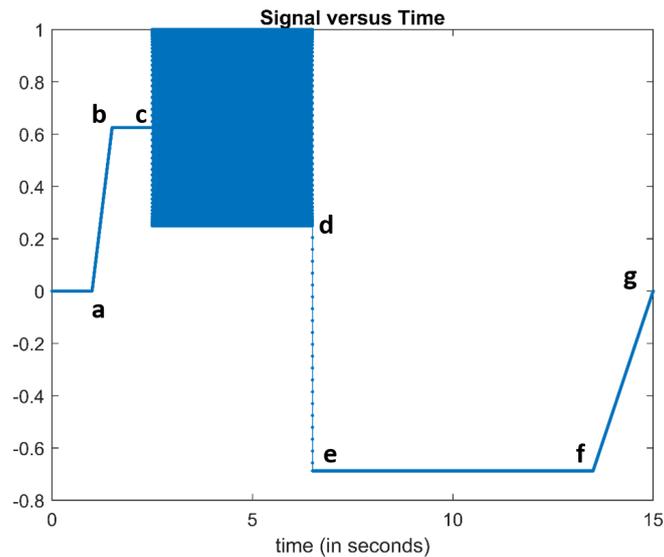


Figura 2.5: Segnale di ingresso per lo shaker

Il segnale di input di figura 2.5 può essere interpretato come la posizione della punta (“stinger”) dello shaker ad ogni istante temporale. Per poter osservare la risposta libera della trave è stato necessario eccitare il corpo con vibrazioni a frequenze prossime a quelle della forma modale in esame (tratto c-d), per poi distaccare istantaneamente dalla trave la sorgente della forzante oscillatoria (d), ovvero lo stinger. Per evitare il distacco della punta durante l’eccitazione è stato necessario fornire un precarico statico iniziale (a-b) maggiore dell’ampiezza di vibrazione.

La misura della risposta della trave durante il decadimento libero delle vibrazioni è stata effettuata nell’intervallo temporale (e-f) i cui lo stinger era completamente distaccato dal corpo. Nel tratto finale (f-g) la punta dello shaker è fatta ritornare alla posizione iniziale.

Generatore di segnale

Il segnale sopra descritto è stato letto dal software “fGen”, che richiede in ingresso valori normalizzati tra [-1,1]. Tale programma gestisce il segnale di voltaggio in uscita dal generatore di segnale NI-PXI 5412 (fig. 2.6(a)), permettendo anche di incrementare i valori in uscita fino a [-5,5], massimo consentito in ingresso all’amplificatore TIRA BAA 500.

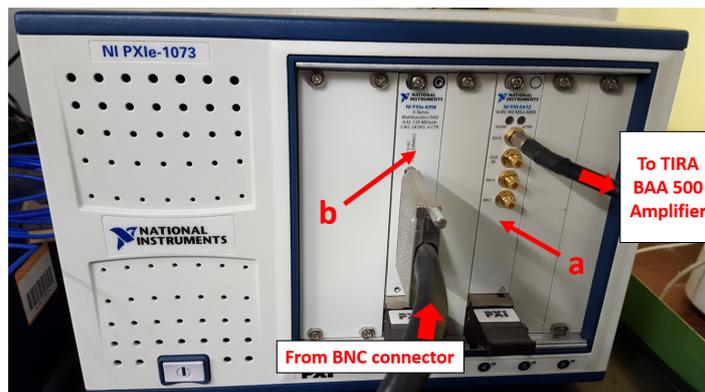


Figura 2.6: Generatore di segnale (a) e strumento di acquisizione dati (b)

Amplificatore del segnale

L'amplificatore TIRA BAA 500 acquisisce in ingresso il segnale in voltaggio del generatore NI-PXI 5412. E' stato impostato il controllo in corrente dello shaker (comando (a) in figura 2.7), in modo tale che la corrente in uscita fosse pari al segnale di ingresso incrementato di un guadagno determinato manualmente tramite il potenziometro (e). Il limite massimo di corrente è definibile tramite il comando (d). Il display (f) mostra i valori efficaci di corrente e voltaggio del segnale di uscita. I segnali di uscita (g,h) sono inviati al blocco dei connettori BNC per poter visualizzare successivamente il corretto funzionamento dell'amplificatore. Tali uscite forniscono segnali in voltaggio con 1/10 dell'ampiezza del segnale inviato allo shaker.



Figura 2.7: Amplificatore del segnale per lo shaker

Shaker

Lo shaker TIRA S514 è stato fissato rigidamente tramite viti ad un banco tecnico che permette il totale disaccoppiamento dello shaker dalla struttura di supporto del simulacro di pala. La punta dello shaker è stata appoggiata su un supporto in alluminio solidale alla trave, sul quale è stato effettuato un intaglio conico non passante per l'alloggiamento della punta, necessario ad evitare lo strisciamento tangenziale della stessa durante la fase di eccitazione del simulacro di pala.

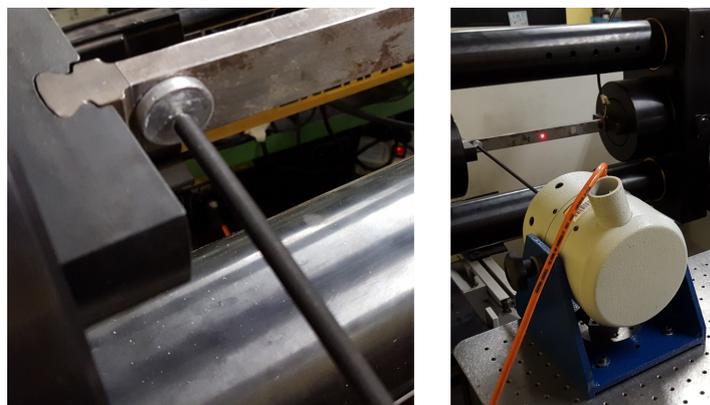


Figura 2.8: Shaker TIRA S514 e dettaglio della sua punta

2.2.3 Sistema di misura della velocità di vibrazione

Puntatore Laser

E' stato utilizzato l'interferometro laser Polytec OFV-525 per misurare la velocità di vibrazione di determinati punti del simulacro di pala. Nel dettaglio, poiché le misurazioni sono state effettuate eccitando la trave con frequenze prossime a quelle del primo modo flessionale orizzontale (1B) o del secondo modo flessionale orizzontale (2B), il laser è stato puntato verso l'antinodo della forma modale in esame (figura 2.9), avente per definizione la massima ampiezza di vibrazione.

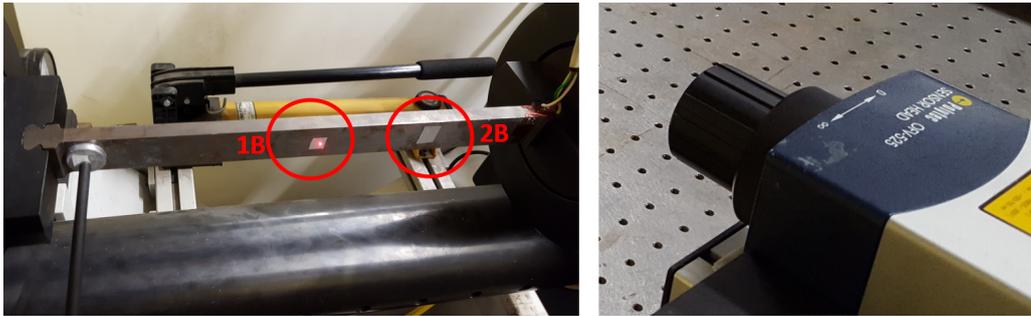


Figura 2.9: Puntatore Laser e punti di misurazione della velocità

Controllore del Laser

Per controllare il puntatore laser è stato utilizzato lo strumento Polytec OFV-5000, impostando la modalità di acquisizione del segnale Velocity Decoder VD-01-S, che permette una risoluzione massima di $0.2\mu m/s/\sqrt{Hz}$. Il segnale di voltaggio in uscita è proporzionale alla velocità misurata secondo il fattore $(\frac{1V}{10mm/s})$.



Figura 2.10: Polytec OFV-5000 Vibrometer controller

2.2.4 Sistema di misura della Forza di Trazione

La forza di trazione è stata misurata tramite due sottosistemi indipendenti.

Manometro

il primo sottosistema è costituito dal manometro Enerpac GP-10S, visibile in figura 2.4 (g). Esso fornisce la differenza di pressione all'interno dell'attuatore idraulico (e). Nota l'area efficace del pistone dalle specifiche tecniche, è possibile calcolare la forza di trazione:

$$F = A_{cil} \cdot p \quad A_{cil} = 17.9cm^2$$

La precisione dello strumento è fornita nel manuale dello stesso ed è pari a

$$\frac{\delta p}{p} = 1\% \quad \text{a fondo scala: 700 bar}$$

Estensimetri

Il secondo sottosistema è costituito da estensimetri a ponte di Wheatstone (fig. 2.11a) per misurare la deformazione assiale ϵ della trave. Tramite essa è infatti possibile ricavare la forza dall'espressione:

$$F = A \cdot \sigma = A \cdot E \epsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 26\text{mm} \times 10\text{mm} \\ E = 210\text{GPa} \quad (\text{acciaio SAE1040}) \end{array} \right.$$

Il segnale di deformazione (voltage) è inviato allo strumento di acquisizione dati dedicato HBM QuantumX MX410B (figura 2.11b) tramite il cavo (a). Tale strumento è collegato alla postazione computer tramite il cavo Ethernet (c), necessario per la calibrazione degli Strain Gauges. Il segnale di deformazione è quindi inviato (b) al connettore dei cavi BNC per il successivo invio al sistema di acquisizione dati generale del banco prova.

La calibrazione degli estensimetri è stata effettuata tramite il software dedicato "MX Assistant".

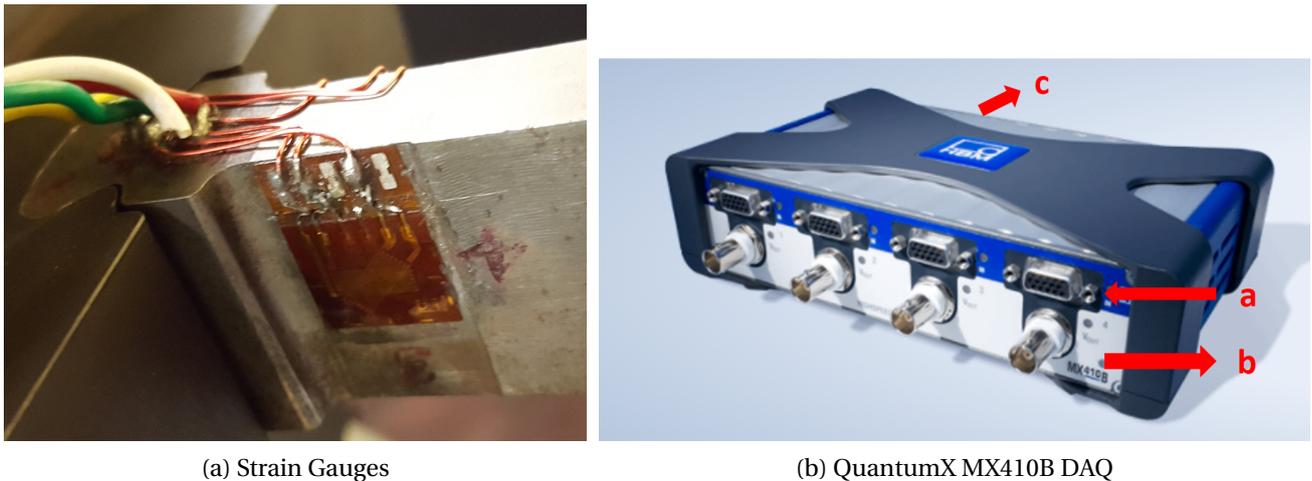


Figura 2.11: Sistema di misura della deformazione

Avendo verificato l'equivalenza dei due sottosistemi per la misura della forza di trazione, la maggior parte delle misurazioni è stata effettuata soltanto con il manometro Enerpac GP-10S.

2.2.5 Sistema di raccolta ed acquisizione dati

I segnali della velocità misurata dal laser, della deformazione ricavata dagli estensimetri e della corrente di input dello shaker sono raccolti dal blocco NI BNC-2110 (figura 2.12) ed inviati allo strumento di acquisizione dati NI PXIe-6356 visibile in figura 2.6(b).

I dati sono stati visualizzati in tempo reale tramite il software SignalExpress2015. Ogni misurazione è stata salvata nel formato nativo .TDMS della National Instruments, per poter essere successivamente importata in MATLAB per ulteriori analisi.

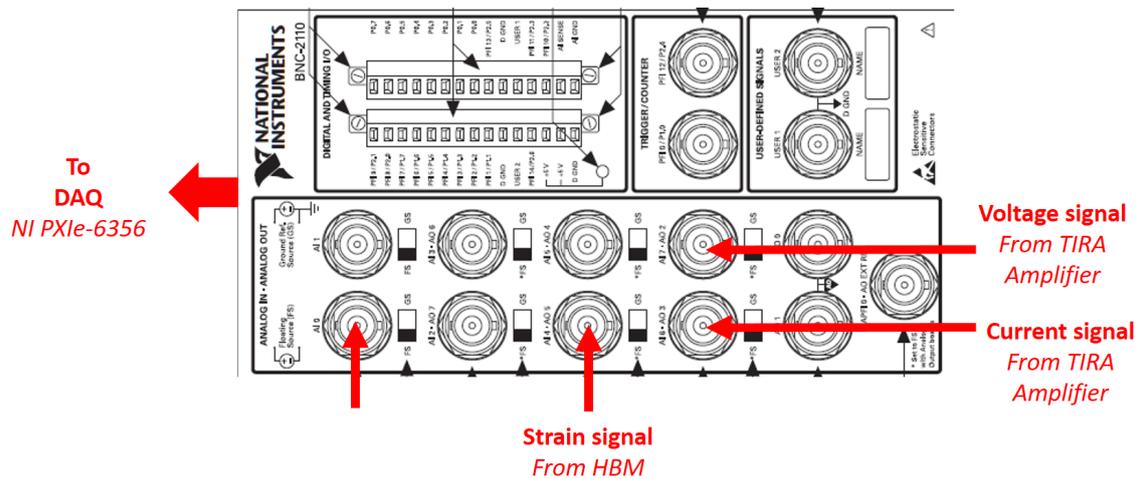


Figura 2.12: Blocco di connessione dei cavi BNC

2.3 Procedura operativa

Sono stati effettuati due gruppi di misurazioni. Il primo è stato dedicato all'analisi del primo modo flessionale orizzontale della trave. Nel secondo gruppo di misurazioni è stato studiato il secondo modo flessionale orizzontale della trave.

Ogni misurazione ha fornito la risposta libera della trave successiva ad un'eccitazione oscillatoria con frequenza prossima a quella della forma modale in analisi. Tale risposta è stata ottenuta tramite la misura della velocità $v(t)$ dell'antinodo del modo in esame.

Ogni misurazione è stata svolta per un dato valore di forza di trazione, utilizzato come parametro del presente esperimento.

Si riportano di seguito nel dettaglio le procedure operative utilizzate.

2.3.1 Accensione degli strumenti

Gli strumenti del banco prova seguono il seguente ordine di accensione:

1. Accensione dello Chassis NI PXI 1073
2. Accensione del Computer
3. Accensione di HBM QuantumX MX410B e verifica della presenza degli indicatori luminosi verdi per il quarto canale
4. Puntamento del Sensor Head Polytec OFV-525 con copertura di sicurezza inserita
5. Accensione di Polytec vibrometer controller OFV-5000
6. Rimozione della copertura di sicurezza del Sensor Head Polytec OFV-525
7. Azzeramento del potenziometro del guadagno dell'amplificatore TIRA BAA 500
8. Accensione dell'amplificatore TIRA BAA 500

2.3.2 Impostazione dei parametri del software di acquisizione dati

1. Apertura del software “SignalExpress2015>freevibtestwithAmplif”
2. Definizione della durata delle misurazioni: “Recording Options> Stop Conditions> Duration:10[s]”
3. Definizione della frequenza di campionamento: “DAQmx Acquire> Configuration Sample to read (per second): 100k”
4. Definizione della cartella di destinazione per il salvataggio delle misure: “Recording Option> Log Summary> Log Destination Folder:...”
5. Controllo della corretta acquisizione del segnale: “Data view>”deselezione del comando “Recording While Running”; “Run”; “Stop Run”
6. Definizione del fattore di scala per la velocità: “DAQmx Acquire> Channel:LaserSP-ai0> Settings> Custom Scaling> Slope: (10mm/s per 1V)”
7. Definizione del fattore di scala per la forza:“DAQmx Acquire> Channel:StrainGage-ai4> Settings> Custom Scaling> Slope: (436800 N per 1V)” Tale fattore deriva dalla seguente espressione:

$$\begin{cases} F = A \cdot E \varepsilon = (26 \times 10) \text{mm}^2 \cdot 210 \text{GPa} \cdot \varepsilon = (54.6 \cdot 10^6 \text{N}) \varepsilon [m/m] \\ F = X \cdot \underbrace{\left(\frac{10 \text{V}}{80000 \mu\text{m}/\text{m}} \right)}_{MXAssistant} \varepsilon [m/m] \end{cases} \Rightarrow X = 436800 \text{N/V}$$

2.3.3 Calibrazione Strain Gauges

1. Inserimento di barre magnetiche per il sostegno temporaneo della trave
2. Rimozione manuale della punta dello shaker
3. Scarico totale della forza di trazione tramite la leva (d) di figura 2.4
4. Apertura del software: “Desktop>MX Assistant”
5. Riconnesione degli strumenti: “File>Reconnect”
6. Selezione del canale di ingresso del segnale:“Channels>4 (SG full bridge 120 ohm)”
7. Impostazione dei parametri degli estensimetri:“Amplitude settings (double click)»Sensor Adaptation>Gauge Factor:2.04; Bridge Factor: 2.6”
8. Calibrazione degli estensimetri:“Channels>Zero”
9. Controllo dell’avvenuta calibrazione: “Scope>Signals>xChan:4; Scope>Start: verifica della deformazione costante e nulla nel grafico temporale $t - \varepsilon$ visualizzato
10. Impostazione del segnale di output:“Output>Channel4>Type>(right click)>A-OUT (Analogic Output)”

11. Verifica della lettura del segnale di output da parte dello strumento di acquisizione dei dati NI PXIe-6356:
 - (a) Apertura del software “SignalExpress2015>freevibtestwithAmplif”
 - (b) Deselezione del comando “Recording While Running” per visualizzare la Forza di Trazione senza salvare i dati
 - (c) Verifica della Forza costante e nulla nel primo grafico temporale, associato agli strain gauges (Analogic Input 4 del blocco BNC-2110)

2.3.4 Misurazioni

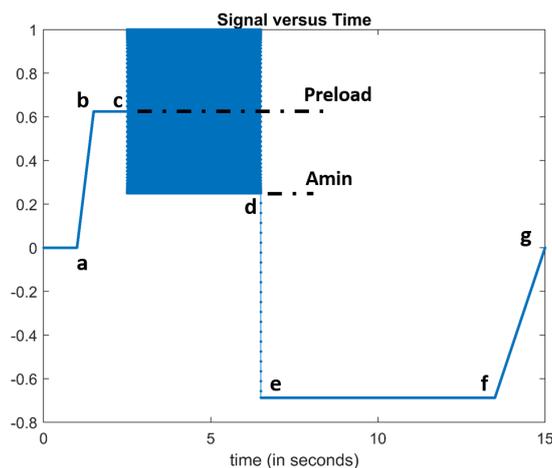
1. Applicazione di un precarico di trazione tramite la leva (d) di figura 2.4 per fissare la trave (precedentemente libera) ai supporti
2. Rimozione dei magneti temporanei
3. Applicazione del carico di trazione tramite la pompa a mano (f) di figura 2.4
4. Lettura della pressione del sistema nel manometro (g) (figura 2.4)
5. Stima iniziale della frequenza del primo o secondo modo flessionale tramite un Hammer Test:
 - (a) Rimozione della punta dello shaker, se già in posizione sulla trave
 - (b) Apertura del software “SignalExpress2015> Hammertest”
 - (c) Inizio della misura: Comando “Run”
 - (d) Applicazione di un'eccitazione impulsiva sulla trave
 - (e) Fine della misura: “Stop Run”
 - (f) visualizzazione dello Spettro di frequenze del segnale della velocità misurata dal laser
 - (g) individuazione grafica della frequenza avente potenza maggiore
6. Posizionamento della punta dello shaker
7. Definizione del segnale di input dello shaker:
 - (a) Creazione del segnale di eccitazione avente frequenza pari a quella stimata con l'hammer test. Tale segnale è generato in formato testo tramite un codice MATLAB
 - (b) Importazione del segnale nel software che gestisce il generatore di segnale NI PXI 5412: “Desktop> fGen.exe> Load Waveform> ...”
8. Definizione del guadagno dell'amplificatore TIRA BAA 500 tramite il potenziometro (e) di figura 2.7
9. Apertura del software “SignalExpress2015>freevibtestwithAmplif”
10. Attivazione del salvataggio delle misure tramite il comando “Recording While Running”
11. Inizio della misurazione: “Comando Run”

12. Inizio dell'eccitazione della trave tramite lo shaker: "fGen.exe> Start"
13. Fine della misurazione
14. Trasferimento del file .tdms contenente la misurazione in un database per svolgere tramite MATLAB le analisi descritte nel capitolo successivo.

2.4 Limitazioni tecniche

Il campo di analisi (Forza, Ampiezza) delle misurazioni è stato limitato dai seguenti fattori tecnologici:

1. la massima corrente di funzionamento dello shaker , pari a 11 A, ha definito il limite superiore dell'ampiezza di vibrazione della trave durante l'eccitazione. Tale ampiezza corrisponde a quella iniziale della risposta libera $v(t)$, utilizzata nella successiva analisi per l'estrazione dei parametri modali di frequenza naturale $f_n = f_n(A(t))$ e smorzamento $\eta = \eta(A(t))$. Per massimizzare tale ampiezza è stato ridotto il valore minimo A_{min} dell'eccitazione nel segnale di input dello shaker.



2. Lo strisciamento non voluto della punta dello shaker sulla trave durante l'eccitazione della stessa ha ridotto l'ampiezza delle vibrazioni. Per contrastare tale fenomeno è stato creato un apposito alloggiamento di alluminio per la punta, reso solidale alla trave. E' stato inoltre aumentato il precarico della punta tramite la variabile *Preload* del segnale di input. Tale aumento ha comportato una diminuzione dell'ampiezza di eccitazione, che è stata compensata con un aumento del guadagno dell'amplificatore TIRA BAA 500.
3. Il distacco non istantaneo della punta dello shaker ha causato un'eccitazione impulsiva successiva a quella oscillatoria, invalidando le misure dove tale fenomeno si è presentato. Ciò è stato evitato ponendo particolare attenzione al precarico della punta dello shaker sulla trave. Tale precarico deve essere imposto soltanto tramite il segnale di input creato in MATLAB, ovvero lo stinger deve toccare l'alloggiamento di alluminio senza alcun precarico dovuto all'avvitamento manuale dello stesso.

Capitolo 3

Analisi del Segnale

Dopo aver ottenuto il segnale della velocità $v(t)$ per ogni valore di forza di trazione F_{ax} applicata e per ogni modo di interesse (Primo e Secondo modo flessionale), si è potuta analizzare la velocità nell'intervallo di decadimento libero per ottenere -con il metodo di seguito descritto- la dipendenza non lineare dei parametri modali (frequenza naturale f_n , smorzamento η) dall'ampiezza di vibrazione.

$$f_n = f_n(A, F_{ax}) \quad \eta = \eta(A, F_{ax})$$

3.1 Estrazione del segnale $v(t)$ di decadimento libero

3.1.1 Riduzione del segnale all'intervallo di decadimento libero

Analizzando l'involuppo del segnale di velocità ottenuto dal banco prova sono stati individuati i punti di inizio eccitazione e di distacco della punta dello shaker dal simulacro di pala.

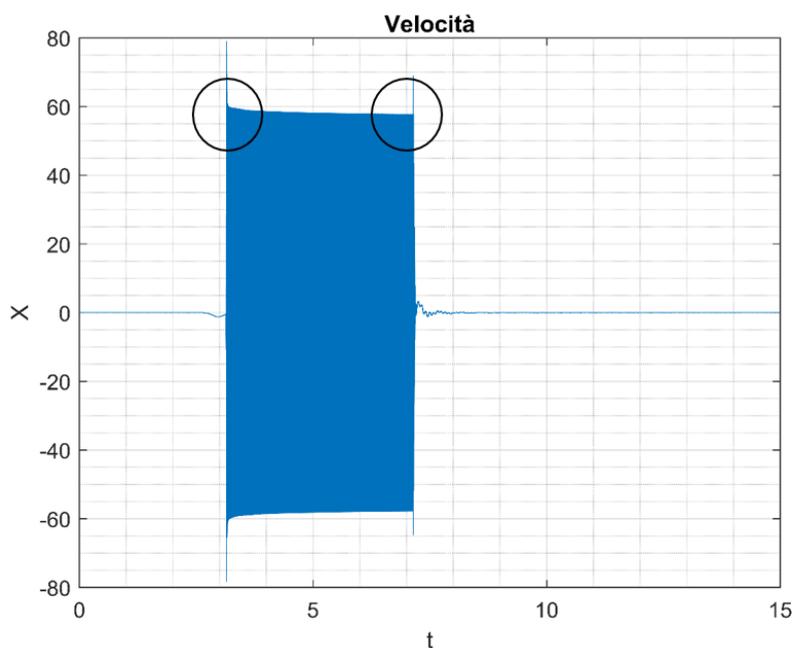


Figura 3.1: Esempio di segnale $v(t)$ ottenuto dal banco prova

Si è quindi considerato il segnale soltanto nell'intervallo di tempo dall'istante di distacco della punta dello shaker all'istante in cui l'ampiezza dell'involucro raggiunge 1/1000 dell'ampiezza iniziale (massima).

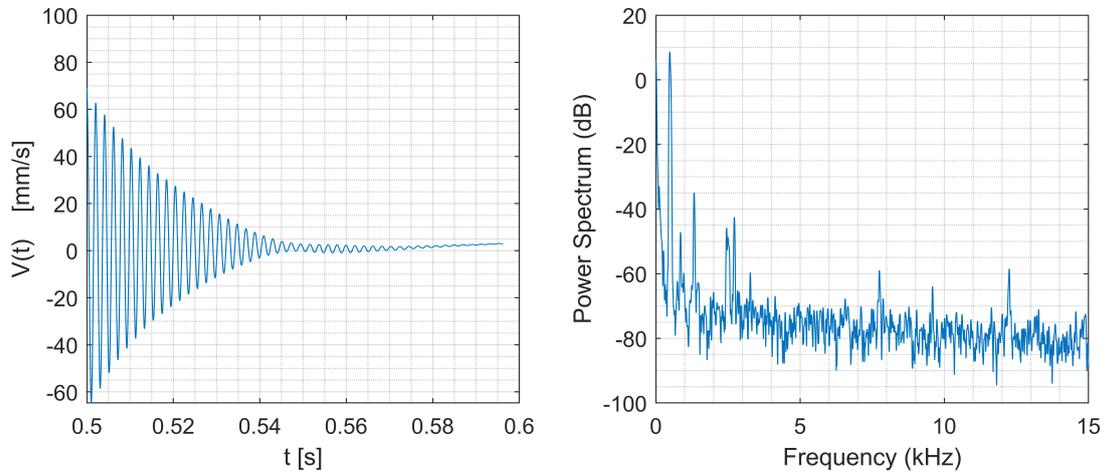


Figura 3.2: Esempio di segnale ristretto all'intervallo di decadimento libero

3.1.2 Filtraggio del segnale

Il segnale così ridotto è ancora la sovrapposizione di tutti i modi di vibrare del simulacro, come si può osservare dallo spettro del segnale di figura 3.2.

Si è quindi implementato un filtro per estrarre la componente modale principale senza alterare la fase del segnale, necessaria per la successiva individuazione dei parametri modali. E' stato utilizzato un filtro Passa Banda ad Impulso Finito (FIR) di Parks-McClellan il cui ordine è stato definito automaticamente all'interno del codice in modo tale da avere un ripple di $1 \cdot 10^{-4} dB$ nella banda passante e un ripple di $-40dB$ nella restante banda di frequenze.

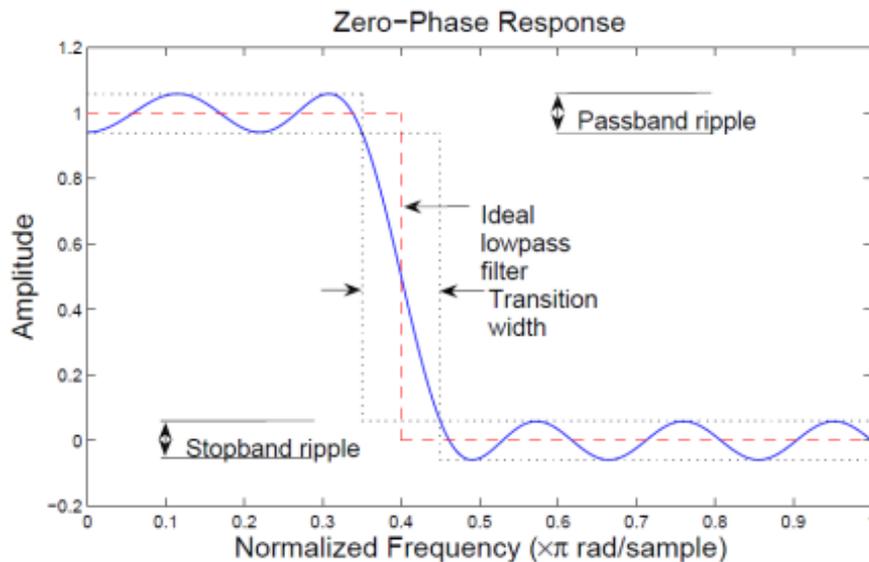


Figura 3.3: Schema di un filtro passa basso [47]

La banda passante è stata centrata sulla frequenza della componente di potenza maggiore, ovvero sul modo eccitato dallo shaker, definendo l'ampiezza di banda in modo tale da escludere gli altri

modi di vibrare del simulacro, le cui frequenze sono stimabili dallo spettro del segnale non filtrato.

$$\begin{cases} f_{stop1} = 0.5 \cdot f_n \\ f_{pass1} = 0.6 \cdot f_n \\ f_{pass2} = 1.5 \cdot f_n \\ f_{stop2} = 1.6 \cdot f_n \end{cases}$$

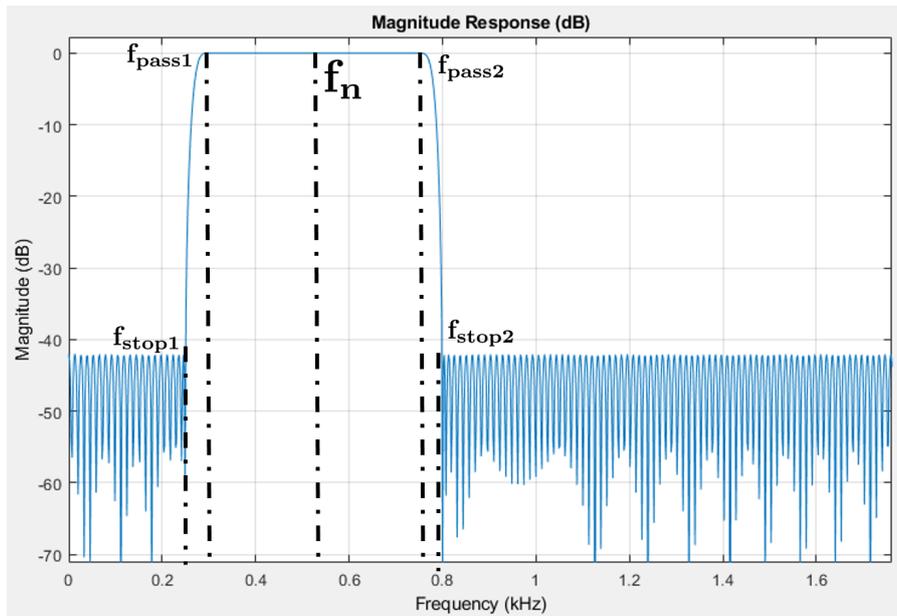


Figura 3.4: filtro Passa Banda FIR di Parks-McClellan utilizzato

Per non alterare la fase, il filtro sopra progettato è stato utilizzato nella “procedura di filtraggio a fase-zero”, implementata dalla MathWorks® nella funzione “filtfilt”:

1. filtraggio del segnale
2. inversione della sequenza temporale del segnale filtrato
3. filtraggio del nuovo segnale

Il segnale così ottenuto presenta:

- Distorsione di fase nulla;
- Funzione di trasferimento del filtro pari al quadrato dell’ampiezza della funzione di trasferimento del filtro originario. Tale effetto non modifica significativamente la funzione di trasferimento progettata, poiché essa ha ampiezza unitaria (a meno del ripple di $1 \cdot 10^{-4} dB$) nella banda passante e di $-40dB$ nella restante banda.
- Un ordine del filtro doppio di quello originario

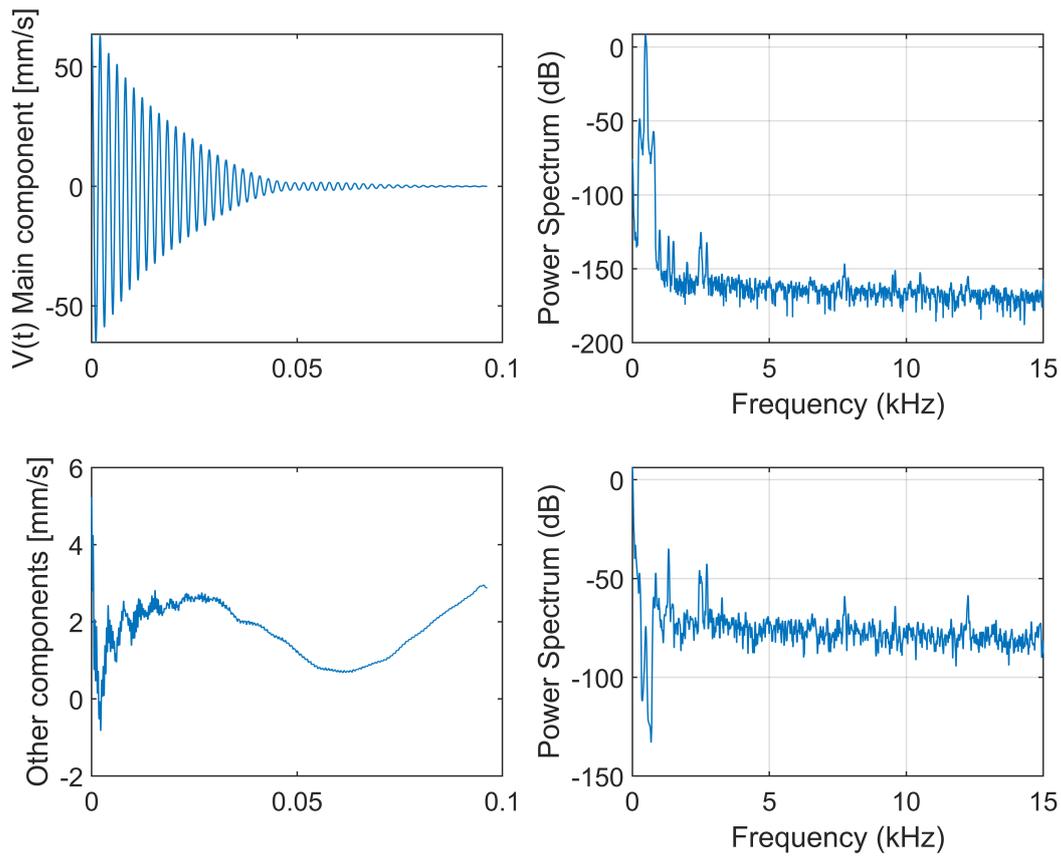


Figura 3.5: Esempio di segnale filtrato e delle componenti residue

Osservando il segnale filtrato, di cui vi è un esempio in figura 3.5, si può notare una componente residua alla bassa frequenza di circa 11 Hz . La presenza di tale componente, non attribuibile ai modi del simulacro di pala - che presenta una prima flessionale a circa 490 Hz - non ha permesso l'utilizzo di un semplice filtro passa basso ed ha portato all'implementazione del filtro passa banda sopra descritto. La sorgente di tale componente a bassa frequenza è stata individuata nella struttura di supporto del simulacro puntando il laser su di essa ed analizzando il segnale della velocità. Tale ipotesi è confermata dalla grande inerzia del supporto, che implica quindi delle basse frequenze di vibrazione.

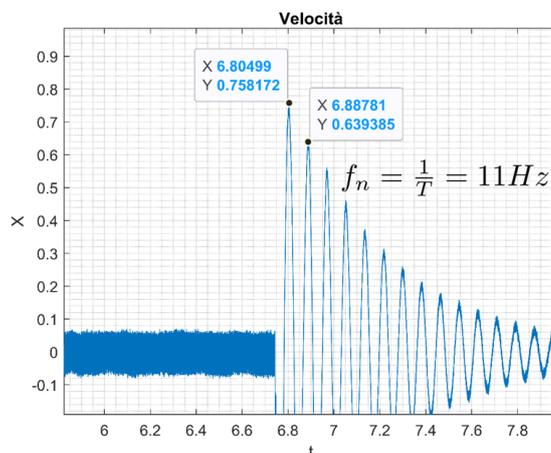


Figura 3.6: Vibrazioni della struttura di supporto

3.2 Individuazione dei parametri modali

Per individuare la dipendenza non lineare della frequenza naturale f_n e dello smorzamento η dall'ampiezza di vibrazione è stata utilizzata la teoria dei segnali analitici e della trasformata di Hilbert, seguendo il metodo "FREEVIB" proposto da Feldman in [2] per sistemi non lineari, approfondito dallo stesso nel libro [3] ed applicato a sistemi lineari in [4]. Tale metodo è stato inoltre utilizzato nel lavoro di Allara, Filippi e Gola [1], di cui il presente lavoro si propone come continuazione.

3.2.1 Metodo FREEVIB

Secondo la teoria dei segnali analitici un segnale reale $y(t)$ può essere rappresentato con un segnale analitico

$$Y(t) = y(t) + i\tilde{y}(t) = A(t) \cdot e^{i\varphi(t)} \quad \text{con} \quad A^2 = y^2 + \tilde{y}^2 \quad \tan\varphi = \frac{\tilde{y}}{y}$$

dove $\tilde{y}(t)$ è la trasformata di Hilbert del segnale originario:

$$\tilde{y}(t) = H[y(t)] = \frac{1}{\pi t} * y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

e $A(t), \varphi(t)$ sono rispettivamente Ampiezza (o "Involuppo") istantanea e Fase istantanea, funzioni a valori reali del tempo.

Si consideri ora l'equazione di un sistema ad un singolo grado di libertà.

Le principali fonti di smorzamento delle vibrazioni del simulacro di pala sono lo smorzamento strutturale e lo smorzamento per attrito nel giunto a coda di rondine, quest'ultimo sorgente della non linearità oggetto della presente ricerca. Entrambe le tipologie di smorzamento possono essere assunte indipendenti dalla frequenza, come affermato in [1] per lo smorzamento per attrito e in [5] per lo smorzamento strutturale. E' stato quindi utilizzato il modello di smorzamento isteretico di Kelvin, analizzato in [5], per rappresentare gli smorzamenti in esame:

$$m\ddot{y}(t) - d \cdot H[y(t)] + k \cdot y(t) = 0$$

moltiplicando per i e applicando la trasformata di Hilbert ($H[\cdot] = \tilde{\cdot}$) ad entrambi i membri:

$$\begin{cases} m\ddot{y} & -d \cdot \tilde{y} + k \cdot y = 0 \\ i \cdot m\ddot{\tilde{y}} & +i \cdot d \cdot y + i \cdot k \cdot \tilde{y} = 0 \end{cases}$$

dove si è fatto uso delle proprietà della trasformata:

$$H[H[y]] = -y \quad H\left[\frac{dy}{dt}\right] = \frac{dH[y]}{dt}$$

Sommando le due equazioni si ottiene:

$$m(\ddot{y} + i\ddot{\tilde{y}}) + id(y + i\tilde{y}) + k(y + i\tilde{y}) = 0$$

ovvero

$$m\ddot{Y} + idY + kY = 0$$

Definendo

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad \eta = \frac{d}{k} = \text{Loss Factor}$$

l'equazione diventa:

$$\ddot{Y} + \omega_n^2(1 + i\eta)Y = 0 \quad (3.1)$$

Definito il modello, si deriva il segnale analitico come descritto in [2]:

$$\begin{aligned} Y &= y(t) + i\tilde{y}(t) = A(t) \cdot e^{i\varphi(t)} \\ \dot{Y} &= \frac{d}{dt}(A(t) \cdot e^{i\varphi(t)}) = \dot{A}e^{i\varphi} + iA\dot{\varphi}e^{i\varphi} = Y \left[\frac{\dot{A}}{A} + i\dot{\varphi} \right] \\ \ddot{Y} &= Y \left[\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 + i2\omega\frac{\dot{A}}{A} + i\dot{\omega} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

sostituendo nell'equazione del modello e dividendo per Y :

$$\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 + i2\omega\frac{\dot{A}}{A} + i\dot{\omega} + \omega_n^2(1 + i\eta) = 0$$

Si ottengono quindi due equazioni, una per la parte reale ed una per la parte immaginaria:

$$\begin{cases} \frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 + \omega_n^2 = 0 \\ 2\omega\frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega} + \eta\omega_n^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n^2 = \omega^2 - \frac{\ddot{A}}{A} \\ \eta = -\frac{1}{\omega_n^2} \left(2\omega\frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega} \right) \end{cases} \quad (3.3)$$

Tutte le quantità a secondo membro delle espressioni 3.3 sono valori istantanei del segnale, ovvero dipendono dal tempo, dunque anche i parametri modali $\omega_n(t)$ e $\eta(t)$ così ottenuti sono grandezze istantanee. Poiché anche l'ampiezza di vibrazione del decadimento libero è una funzione (biunivoca) del tempo $A = A(t)$ (figura 3.7), è possibile determinare graficamente la relazione non lineare esistente tra l'ampiezza A ed i parametri modali ω_n e η , di cui si riporta un esempio di risultato in figura 3.8.

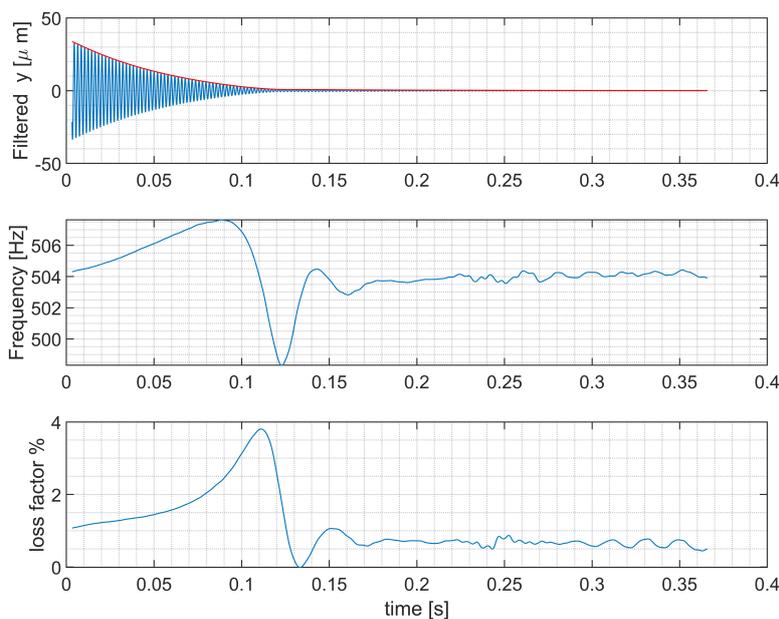


Figura 3.7: Esempio di Inviluppo, Frequenza naturale e Smorzamento istantanei (caso p=30bar)

MODAL PARAMETERS

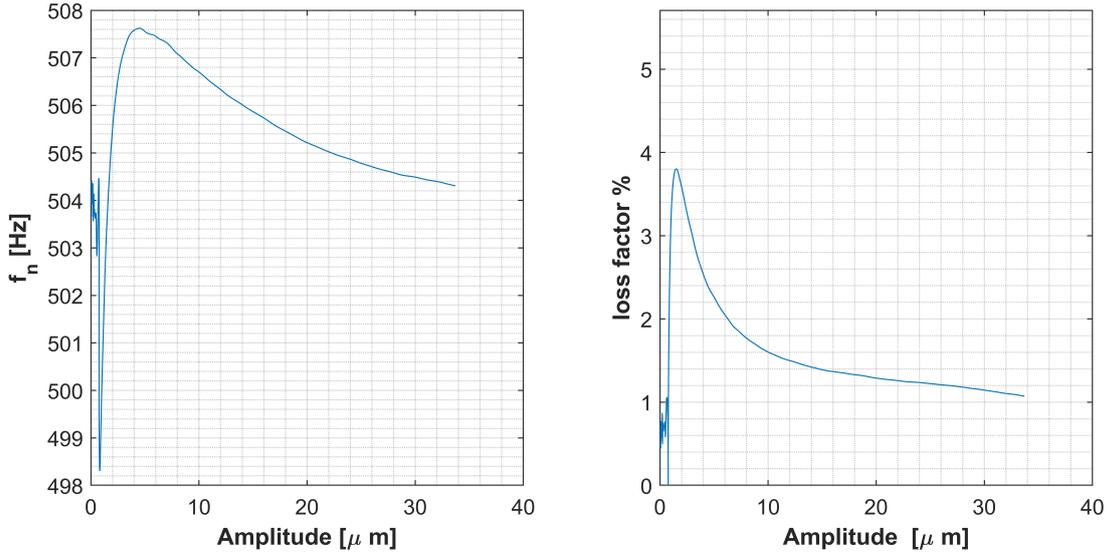


Figura 3.8: Esempio di dipendenza non lineare $f_n(A)$ e $\eta(A)$ ottenute con il metodo FREEVIB

Per ricavare le grandezze a secondo membro delle equazioni 3.3, da cui dipendono i parametri modali, sono state scritte le loro espressioni in funzione di

$$y, \dot{y}, \ddot{y}, \quad \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}, \ddot{\tilde{y}}$$

Dalle equazioni 3.2

$$\dot{Y} = \dot{y} + i\dot{\tilde{y}} = Y \left[\frac{\dot{A}}{A} + i\omega \right] = (y + i\tilde{y}) \left[\frac{\dot{A}}{A} + i\omega \right] = \left(\frac{\dot{A}}{A} y - \omega \tilde{y} \right) + i \left(\omega y + \frac{\dot{A}}{A} \tilde{y} \right)$$

da cui:

$$\begin{cases} \dot{y} = (-\tilde{y})\omega + (y)\frac{\dot{A}}{A} \\ \dot{\tilde{y}} = (+y)\omega + (\tilde{y})\frac{\dot{A}}{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}(t) = \frac{1}{A^2} (+y\dot{\tilde{y}} - \dot{y}\tilde{y}) \\ \dot{\frac{A}{A}}(t) = \frac{1}{A^2} (+y\dot{y} + \tilde{y}\dot{\tilde{y}}) \end{cases} \quad (3.4)$$

ed analogamente dalla terza equazione di 3.2:

$$\begin{aligned} \ddot{Y} = \ddot{y} + i\ddot{\tilde{y}} &= Y \left[\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 + i2\omega\frac{\dot{A}}{A} + i\dot{\omega} \right] = (y + i\tilde{y}) \left[\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 + i2\omega\frac{\dot{A}}{A} + i\dot{\omega} \right] = \\ &= \left[y \left(\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 \right) - \tilde{y} \left(2\omega\frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega} \right) \right] + i \left[\tilde{y} \left(\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 \right) + y \left(2\omega\frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega} \right) \right] \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{cases} \ddot{y} = \left(-y\omega^2 - \tilde{y}2\omega\frac{\dot{A}}{A} \right) + (y)\frac{\ddot{A}}{A} + (-\tilde{y})\dot{\omega} \\ \ddot{\tilde{y}} = \left(-\tilde{y}\omega^2 + y2\omega\frac{\dot{A}}{A} \right) + (\tilde{y})\frac{\ddot{A}}{A} + (+y)\dot{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}(t) = \frac{y\ddot{\tilde{y}} - \tilde{y}\ddot{y}}{A^2} - 2\omega\frac{\dot{A}}{A} \\ \dot{\frac{A}{A}}(t) = \frac{y\ddot{y} + \tilde{y}\ddot{\tilde{y}}}{A^2} + \omega^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Nel caso in esame è nota la velocità $v(t) = \dot{y}(t)$ mentre lo spostamento y e l'accelerazione \ddot{y} sono stati ricavati rispettivamente per integrazione e differenziazione numerica. I segnali $\tilde{y}, \dot{\tilde{y}}, \ddot{\tilde{y}}$ sono stati ottenuti applicando la trasformata numerica di Hilbert a y, \dot{y}, \ddot{y} .

Per applicare la trasformata di Hilbert, differenziare ed integrare i segnali sono stati utilizzati i codici MATLAB® forniti in [48] dallo stesso Feldman, autore del metodo FREEVIB. Nel dettaglio la differenziazione e la trasformazione di Hilbert sono implementati tramite filtri di Parks-McClellan

applicati all'interno di una procedura di filtraggio a fase-zero simile a quella descritta nella precedente sezione dedicata al filtraggio del segnale. L'integrazione è implementata con il metodo dei trapezi ed al risultato è sottratta l'eventuale componente costante, estratta con un filtro a media mobile.

3.3 Validazione del codice con modello ad 1 D.O.F.

La non linearità oggetto del presente lavoro è dovuta all'attrito nel contatto tra la radice della pala (estremità del simulacro di pala) e gli inserti dei supporti (slot) creati per l'alloggiamento della stessa. Per tale motivo si è scelto un semplice modello ad un grado di libertà avente la stessa tipologia di non linearità per validare il codice che implementa il metodo FREEVIB.

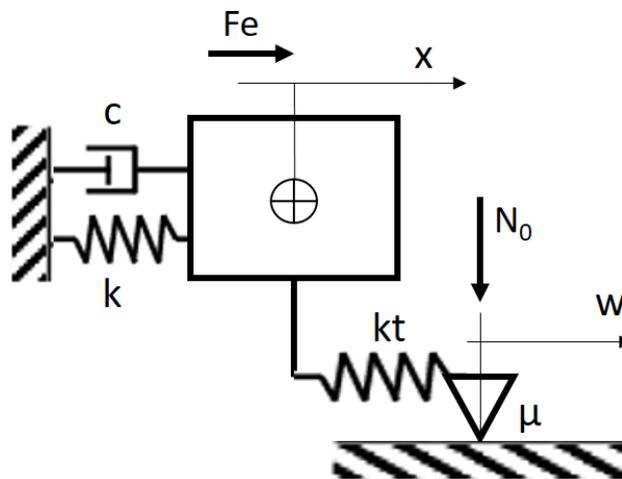


Figura 3.9: Modello 1 D.O.F. con contatto strisciante per validazione FREEVIB

3.3.1 Modello di contatto strisciante

E' stato adottato il modello di contatto "spring-slider" sviluppato ed applicato da molti autori (si veda per esempio [21],[22],[23],[24]), qui utilizzato nella sua formulazione più semplice avente una forza di precarico normale N_0 costante, una rigidezza tangenziale k_t ed un coefficiente di attrito μ (figura 3.9).

Lo spostamento del singolo grado di libertà è indicato con x , mentre lo strisciamento relativo con w .

La forza tangenziale al contatto T varia in base allo stato del contatto (adesione o strisciamento):

$$T(t) = \begin{cases} k_t \cdot (x(t) - w(t)) & \text{stick (adesione)} \\ \mu \cdot N_0 \cdot \text{sign}(\dot{w}) & \text{slip (strisciamento)} \end{cases}$$

dove gli stati di contatto sono definiti come:

$$\begin{cases} \dot{w} = 0 & \text{stick} \\ \dot{x} = \dot{w} \neq 0 & \text{slip} \end{cases}$$

La transizione da uno stato di contatto all'altro è dettata dai seguenti criteri, analizzati in dettaglio in [21]:

$$\begin{cases} \text{transizione: stick} \rightarrow \text{slip} & \text{quando} & |T| = \mu \cdot N_0 \\ \text{transizione: slip} \rightarrow \text{stick} & \text{quando} & \dot{w} = 0 \end{cases}$$

3.3.2 Metodo di integrazione temporale

Metodo di Newmark

Per l'integrazione temporale delle equazioni di equilibrio del sistema

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{F}_c(\mathbf{q}_{n+1}, \dot{\mathbf{q}}_{n+1}) = \mathbf{F}_e$$

è stato adottato il Metodo di Newmark, in cui si assume:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_\gamma & \text{con} & \ddot{\mathbf{q}}_\gamma = (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} & 0 \leq \gamma \leq 1 \\ \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}_\beta & \text{con} & \ddot{\mathbf{q}}_\beta = (1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} & 0 \leq 2\beta \leq 1 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = f(\mathbf{q}_{n+1}) = \frac{1}{2\beta} \left[\frac{\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n - \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n}{\Delta t^2/2} - (1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_n \right] \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} = g(\mathbf{q}_{n+1}) = \dot{\mathbf{q}}_n + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma \Delta t \cdot f(\mathbf{q}_{n+1}) \end{cases}$$

ottenendo, per ogni passo temporale n-esimo di ampiezza Δt , il seguente sistema di equazioni, nella sola incognita \mathbf{q}_{n+1} :

$$\mathbf{M}f(\mathbf{q}_{n+1}) + \mathbf{C}g(\mathbf{q}_{n+1}) + \mathbf{K}\mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{F}_c(\mathbf{q}_{n+1}, g(\mathbf{q}_{n+1})) = \mathbf{F}_e$$

Per i parametri γ, β sono stati scelti i valori: $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ che garantiscono la stabilità (incondizionata) del metodo e la mancanza di smorzamento numerico, come affermato in [27] ed in [28]. L'ampiezza Δt del passo temporale è stata scelta in modo tale da garantire la convergenza del metodo $\omega \Delta t < 2$ [27] e come compromesso tra la vicinanza della soluzione a quella esatta ed i tempi di calcolo richiesti:

$$\Delta t = 0.02 \cdot \frac{2}{\max\{\omega_{nSTICK}\}}$$

dove ω_{nSTICK} è la pulsazione naturale del sistema in condizioni di completa adesione.

Il sistema di equazioni (una sola equazione per il sistema ad 1 D.O.F in esame) deve essere risolto iterativamente ad ogni passo di integrazione a causa della non linearità introdotta dalla forza di contatto \mathbf{F}_c . Tale forza è stata gestita con il metodo di seguito esposto.

Stato e Forza di contatto

Lo stato del contatto ad ogni passo temporale (e la conseguente Forza tangenziale) è determinato tramite il metodo di Previsione-Correzione utilizzato in [23],[24],[28]:

1. PREDICTOR STEP: si assume che al passo (n+1)-esimo il contatto sia in stick:

$$\begin{aligned} Hp: \quad \dot{w} = 0 & \Rightarrow w_{n+1}^P = w_n \\ T^P & = k_t \cdot (x_{n+1} - w_{n+1}^P) \end{aligned}$$

si calcola la soluzione $x_{n+1}^P = \mathbf{q}_{n+1}^P$ con il metodo di Newmark;

2. CORRECTOR STEP: si verifica la validità dell'assunzione sullo stato del contatto:

If $|T^P| < \mu N_0$ then
 contatto effettivamente in stick $\Rightarrow x_{n+1} = x_{n+1}^P$
 else
 contatto in slip: $\begin{cases} T_{n+1} = \mu N_0 \cdot \text{sign}(T^P) \\ w_{n+1} = x_n - \frac{T_{n+1}}{k_t} \end{cases}$
 x_{n+1} ricalcolato con Newmark con la vera T_{n+1}
 end

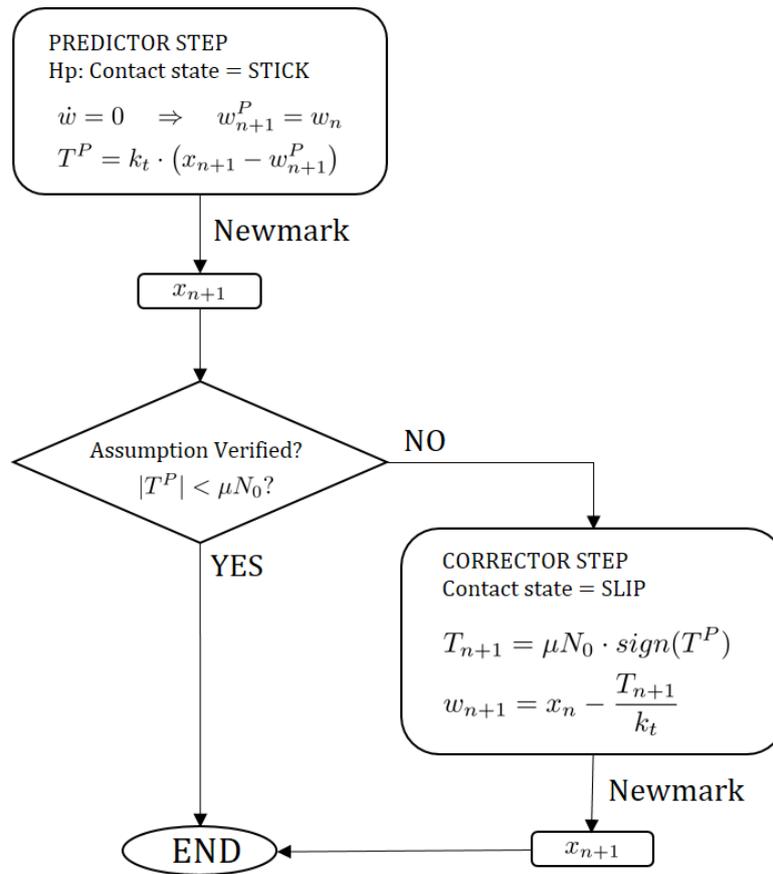


Figura 3.10: Schema Predictor-Corrector

3.3.3 Confronto tra i parametri modali teorici e quelli ottenuti con il metodo FREEVIB

La versione del metodo FREEVIB sviluppata nel presente lavoro può essere applicata soltanto a sistemi che presentano smorzamento indipendente dalla frequenza, come lo smorzamento strutturale e quello dovuto all'attrito. Il modello ad un grado di libertà utilizzato per la validazione del codice dovrebbe quindi avere uno smorzamento strutturale (e non viscoso) oltre a quello del contatto strisciante. Tuttavia l'integrazione temporale di sistemi contenenti lo smorzamento strutturale del modello di Kelvin richiede particolari metodi per ottenere una soluzione stabile, come l'integrazione indietro nel tempo per le coordinate modali associate ai poli instabili, presentata in

[5]. Lo smorzamento strutturale e quello viscoso presentano la seguente equivalenza per i sistemi lineari:

$$\eta = 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}$$

che nel caso di decadimento libero, dove $\omega = \omega_n$ per il caso lineare, diventa:

$$\eta = 2\zeta$$

Nel presente lavoro si adotterà quindi un modello ad un D.O.F con smorzamento viscoso per verificare i valori di frequenza e smorzamento quando il contatto è in completa adesione.

Successivamente si adotterà un modello senza smorzamento per verificare l'andamento non lineare di smorzamento (dovuto al contatto) e frequenza in funzione dell'ampiezza di vibrazione, confrontando i risultati con gli andamenti teorici ottenuti con il Metodo del Bilanciamento di una Singola Armonica (SHBM) presentati in [29].

Verifica dei valori durante la piena adesione

I parametri per il modello ad 1 D.O.F sono stati scelti in modo arbitrario, ottenendo lo smorzamento η , la frequenza naturale f_n durante la completa adesione del contatto (sistema lineare) e l'ampiezza di oscillazione critica X_{Cr} oltre la quale è possibile lo strisciamento [29].

$$\begin{aligned} k_t &= 4 \cdot 10^6 N/m \\ \mu &= 0.08 \\ N_0 &= 5000 N \\ M &= 0.700 kg \\ K &= 4.2 \cdot 10^6 N/m \\ \zeta &= 2.5 \cdot 10^{-3} \\ C &= \zeta \cdot 2\sqrt{M(K + k_t)} \\ X(t=0) &= 100 \cdot X_{Cr} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \eta &= 2\zeta = 0.5 \cdot 10^{-2} \\ f_n &= 544.73 Hz \\ X_{Cr} &= \frac{\mu N_0}{k_t} = 100 \mu m \\ F_{cmax} &= \mu N_0 = 400 N \end{aligned}$$

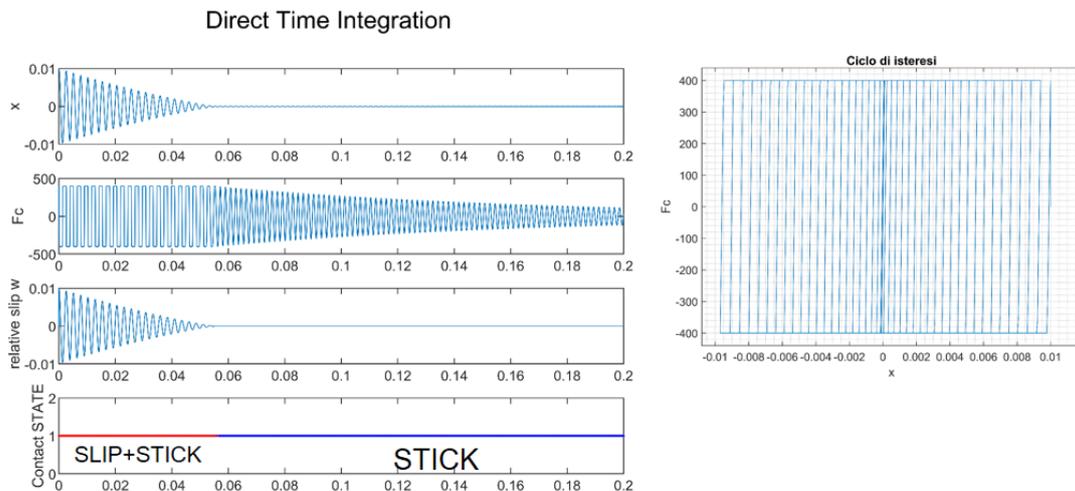


Figura 3.11: Modello 1 D.O.F : Integrazione diretta

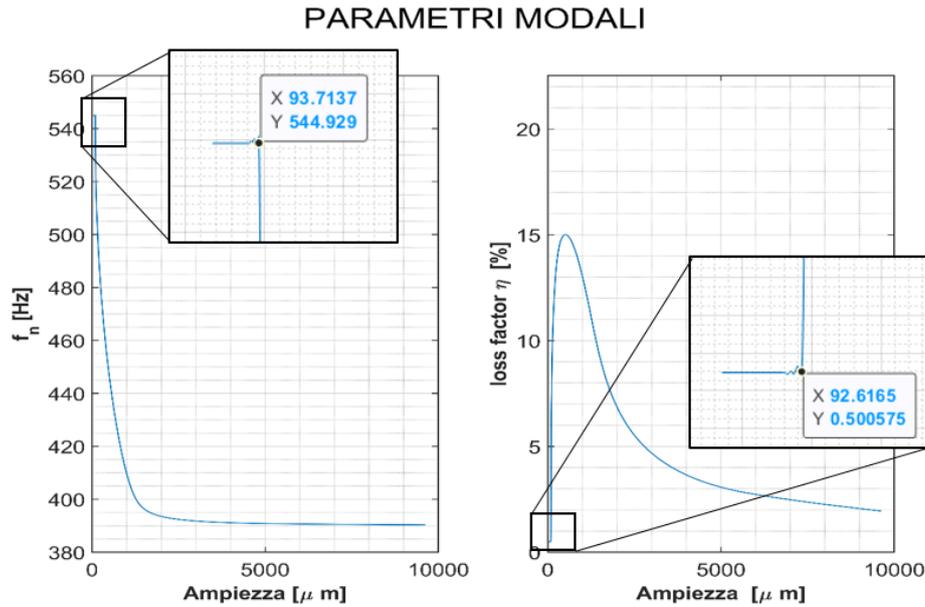


Figura 3.12: Applicazione del metodo FREEVIB al modello 1 DOF

In figura 3.12 è possibile osservare il risultato dell'applicazione del metodo FREEVIB al modello ad un grado di libertà in esame. La frequenza ottenuta in condizioni di adesione corrisponde a quella teorica ($f_n = 544.73[Hz]$) con un errore di 0.03%, lo smorzamento ($\eta = 5 \cdot 10^{-3}$) con un errore dello 0.11%. L'ampiezza di vibrazione critica $X_{Cr} = \frac{\mu N_0}{k_t} = 100\mu m$ presenta l'errore maggiore, del 6.3%.

Verifica dell'andamento non lineare

Il comportamento della non linearità corrisponde a quello previsto teoricamente dal Single Harmonic Balance Method [29], secondo il quale il contatto strisciante può essere rappresentato con una rigidità equivalente ed uno smorzamento equivalente:

$$\frac{k_{eq}}{k_t} = \frac{1}{\pi} \left(\theta_B - \frac{1}{2} \sin(2\theta_B) \right) \quad \frac{c_{eq}}{k_t} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(x_0/x_{Cr})} \cdot \left(1 - \frac{1}{(x_0/x_{Cr})} \right)$$

dove

$$\theta_B = \arccos \left(1 - \frac{2}{(x_0/x_{Cr})} \right) \quad x_{Cr} = \frac{\mu N_0}{k_T} \quad x_0 = \text{Ampiezza di oscillazione}$$

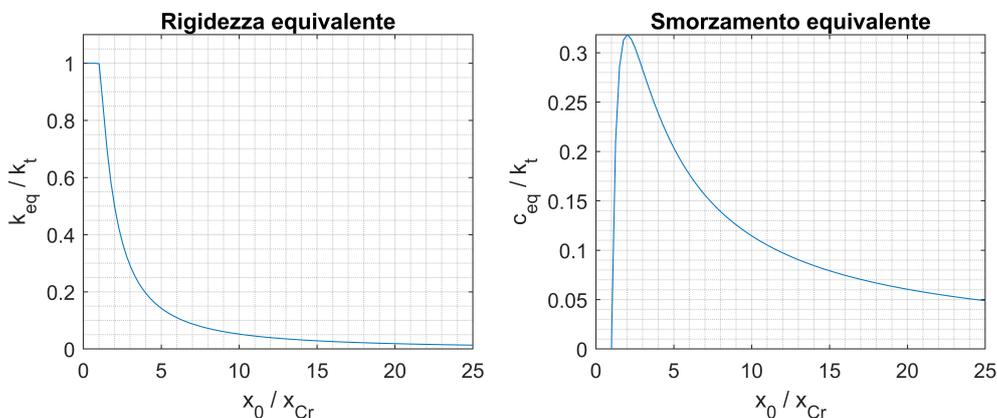


Figura 3.13: Rigidezza e smorzamento equivalenti previsti dal SHBM

3.4 Risultati delle analisi delle misure

Nella presente sezione si riportano e commentano i risultati delle analisi delle misure.

3.4.1 Primo Modo Flessionale

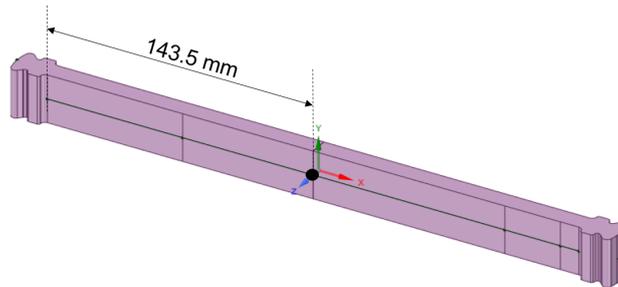


Figura 3.14: Punto di misurazione Primo Modo Flessionale

Effetto dell'ampiezza di vibrazione su frequenza e smorzamento

Smorzamento

La dipendenza dello smorzamento dall'ampiezza di vibrazione, visibile in figura 3.15 richiama quella prevista dal Single Harmonic Balance Method [29] analizzata nella sezione precedente (figura 3.13).

Tuttavia è necessario precisare che l'ampiezza di vibrazione riportata nei grafici delle figure 3.16, 3.15, 3.18, 3.19 è quella del punto indicato in figura 3.14, corrispondente all'antinodo del primo modo flessionale. L'andamento dello smorzamento previsto dal SHBM invece è riportato in funzione dell'ampiezza di oscillazione dei gradi di libertà dei punti di contatto, che nel caso in esame sono i punti di contatto dei giunti a coda di rondine (estremità del simulacro di pala).

Per piccole ampiezze di vibrazione è possibile osservare uno smorzamento costante, ovvero indipendente dall'ampiezza, indice della completa adesione delle zone di contatto, che implica dunque la linearità del sistema in esame.

Per ampiezze maggiori di un valore critico lo smorzamento presenta un ripido aumento, indice dell'inizio del possibile strisciamento nelle zone di contatto e dell'instaurarsi del ciclo di isteresi dovuto all'alternarsi tra stati di adesione e di strisciamento durante ogni ciclo di oscillazione.

La dissipazione di energia dovuta a tale fenomeno presenta un massimo in funzione dell'ampiezza di vibrazione, come è possibile notare in figura 3.15, oltre il quale lo smorzamento diminuisce.

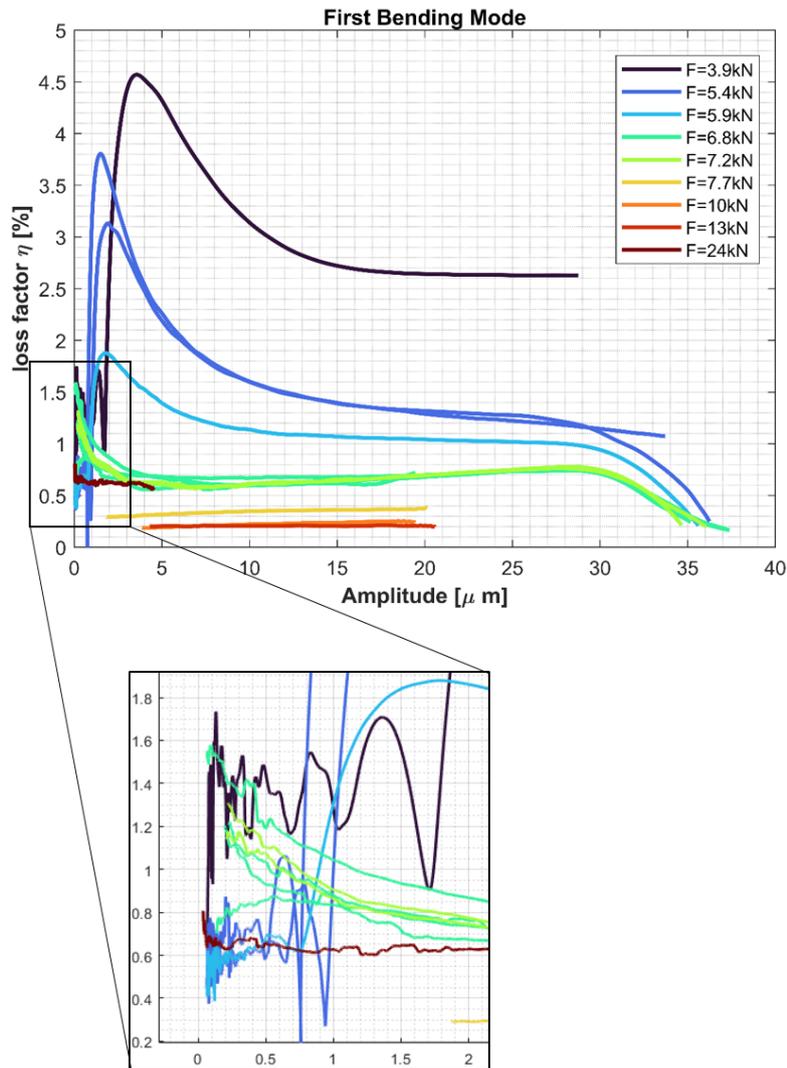


Figura 3.15: Primo Modo Flessionale: Smorzamento in funzione dell'Ampiezza

Frequenza

La dipendenza della frequenza dall'ampiezza di vibrazione, visibile in figura 3.16, si discosta da quella prevista dal Single Harmonic Balance Method [29] analizzata precedentemente. Ciò è probabilmente dovuto ai seguenti fattori:

- In figura 3.16 la frequenza è mostrata in funzione dell'ampiezza di oscillazione dell'antinodo del primo modo flessionale, diverso dal punto di contatto, come spiegato in dettaglio nel paragrafo precedente.
- La frequenza del primo modo flessionale mostrata in figura 3.16 dipende dalla combinazione dei comportamenti delle quattro zone di contatto (due per ogni giunto a coda di rondine). Nei grafici del SHBM di figura 3.13 si analizza invece il singolo contatto.

Per piccole ampiezze di vibrazione è possibile comunque osservare una frequenza costante, ovvero indipendente dall'ampiezza, indice della completa adesione delle zone di contatto, che implica dunque la linearità del sistema in esame.

Per ampiezze maggiori di un valore critico la frequenza presenta una ripida diminuzione, indice dell'inizio del possibile strisciamento nelle zone di contatto e dell'instaurarsi del ciclo di isteresi dovuto all'alternarsi tra stati di adesione e di strisciamento durante ogni ciclo di oscillazione. Si ipotizza che l'irrigidimento (aumento della frequenza) osservabile all'aumentare dell'ampiezza di vibrazione (per bassi valori di forza di trazione) sia dovuto alla variazione di forza normale alle zone di contatto causata dalla flessione della trave. Un'aumento di tale forza normale infatti potrebbe implicare l'adesione di una zona di contatto che invece, nell'ipotesi di forza normale costante, sarebbe in condizioni di strisciamento.

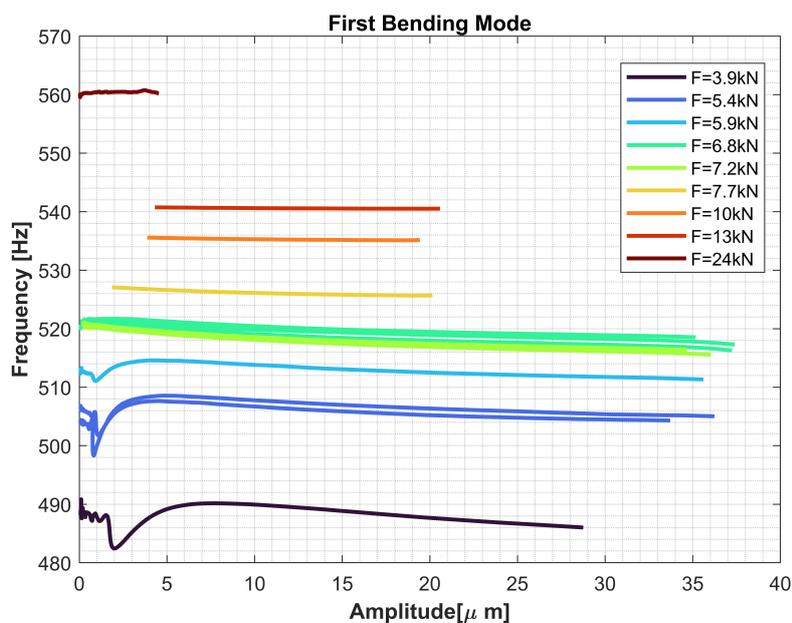


Figura 3.16: Primo Modo Flessionale: Frequenza in funzione dell'Ampiezza

Effetto della Forza di trazione su frequenza e smorzamento

Smorzamento

In figura 3.15 è possibile osservare una riduzione del massimo dello smorzamento (massimo rispetto all'ampiezza di vibrazione) all'aumentare della forza di trazione F esercitata sul simulacro di pala.

Tale comportamento può essere spiegato ipotizzando che non tutte le quattro zone di contatto siano nello stato di macrostrisciamento (ampiezza dello spostamento al contatto maggiore di quello critico), ma che vi sia qualche zona di contatto nello stato di microstrisciamento ("microslip"), ovvero di strisciamento solo ai bordi dell'area di contatto [1]. Tale ipotesi è compatibile con la precedente supposizione della variazione di forza normale alle zone di contatto causata dalla flessione della trave.

In tale ipotesi, un aumento della forza di trazione implicherebbe un aumento della forza normale al contatto e (per le zone in microslip) un aumento dell'area di contatto in completa adesione ed una riduzione dell'area periferica soggetta a strisciamento, con conseguente riduzione della dissipazione di energia e quindi di smorzamento.

Osservando l'ingrandimento di figura 3.15 si è notato che all'aumentare della forza di trazione l'ampiezza critica - dopo la quale lo smorzamento presenta una ripida crescita - diminuisce. Tale

comportamento è inverso a quello del singolo grado di libertà analizzato precedentemente (figura 3.13). Questa differenza è probabilmente dovuta al fatto che in figura 3.16 lo smorzamento è mostrato in funzione dell'ampiezza di oscillazione dell'antinodo del primo modo flessionale e non dell'ampiezza del punto di contatto. Le diverse combinazioni degli stati di macroslip e microslip delle quattro zone di contatto ipotizzate sopra potrebbero ulteriormente influire sui risultati ottenuti.

Nel secondo grafico di figura 3.17 si può osservare lo smorzamento in condizioni di adesione (tratto iniziale costante nella curva ampiezza-smorzamento) in funzione della forza di trazione.

Frequenza

In figura 3.15 è possibile osservare un aumento del valore medio della frequenza (medio rispetto all'ampiezza di vibrazione) all'aumentare della forza di trazione F esercitata sul simulacro di pala. Tale effetto irrigidente è ben visibile anche in figura 3.17, dove è riportato anche l'andamento teorico ricavato dal modello della trave di Eulero-Bernoulli incastrata ai due estremi, modificato per considerare il momento frenante dovuto allo sforzo normale nella configurazione deformata della trave [30], riportato in appendice.

In figura 3.17 è inoltre possibile notare che per forze assiali minori di circa $12kN$ l'andamento della frequenza si discosta da quello teorico. Tale fenomeno è stato riscontrato anche in [1], dove si ipotizza che per bassi valori della forza di trazione sia presente microslip nelle zone di contatto, diminuendo l'effettiva rigidità del giunto a coda di rondine.

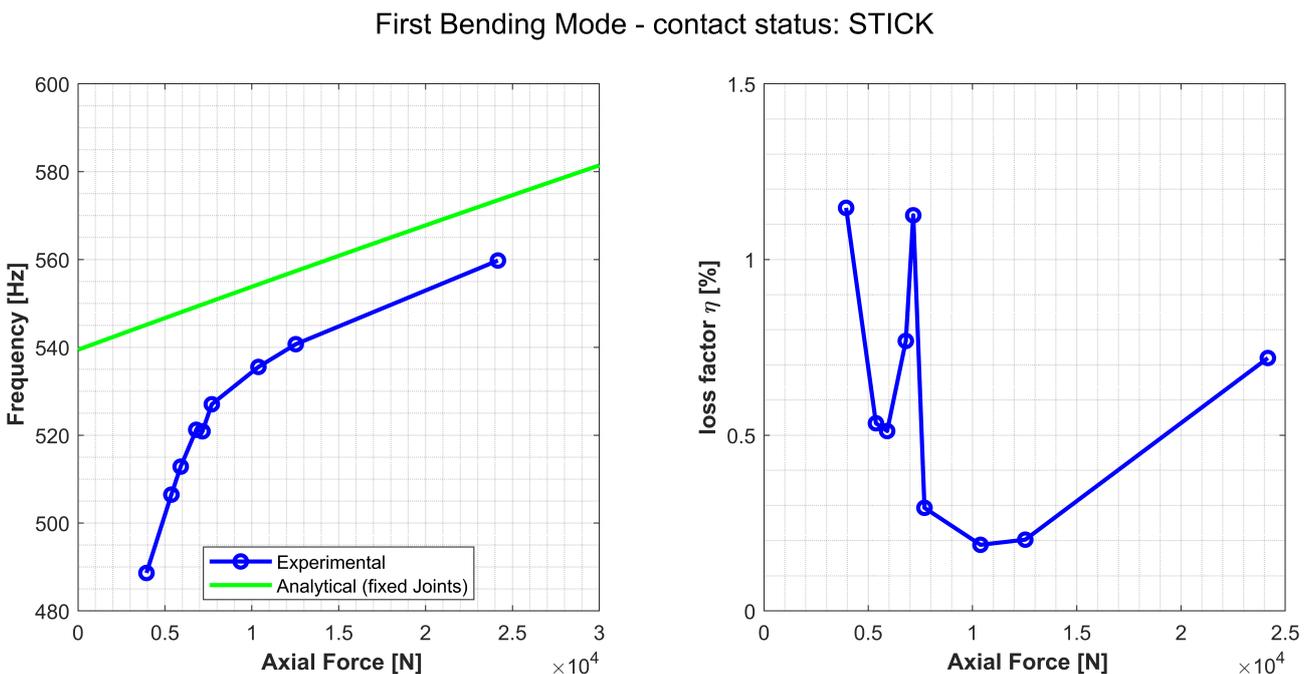


Figura 3.17: Effetto della forza di trazione su f_n e η in condizioni di Adesione

Visualizzazione degli effetti combinati di Forza e Ampiezza

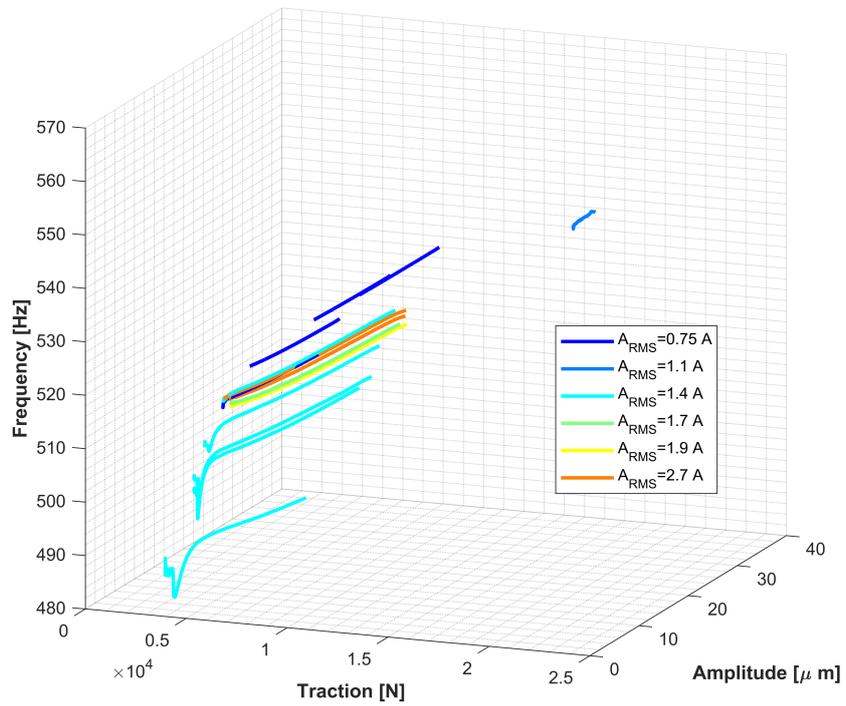


Figura 3.18: Prima flessionale: frequenza naturale in funzione di Ampiezza di vibrazione e Trazione

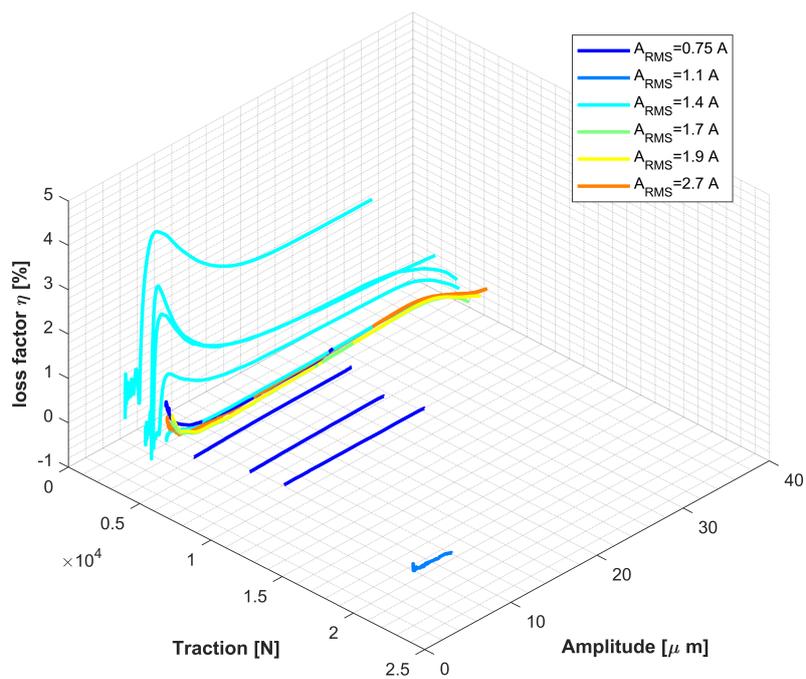


Figura 3.19: Prima flessionale: smorzamento in funzione di Ampiezza di vibrazione e Trazione

3.4.2 Secondo Modo Flessionale

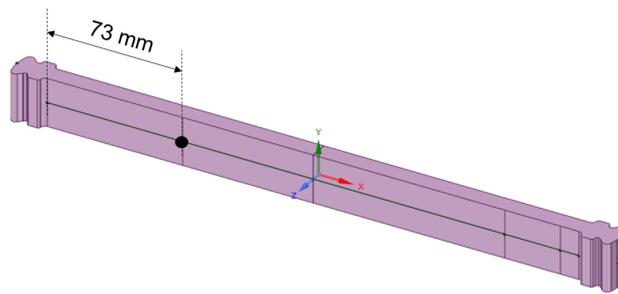


Figura 3.20: Punto di misurazione Secondo Modo Flessionale

Effetto dell'ampiezza di vibrazione su frequenza e smorzamento

Smorzamento

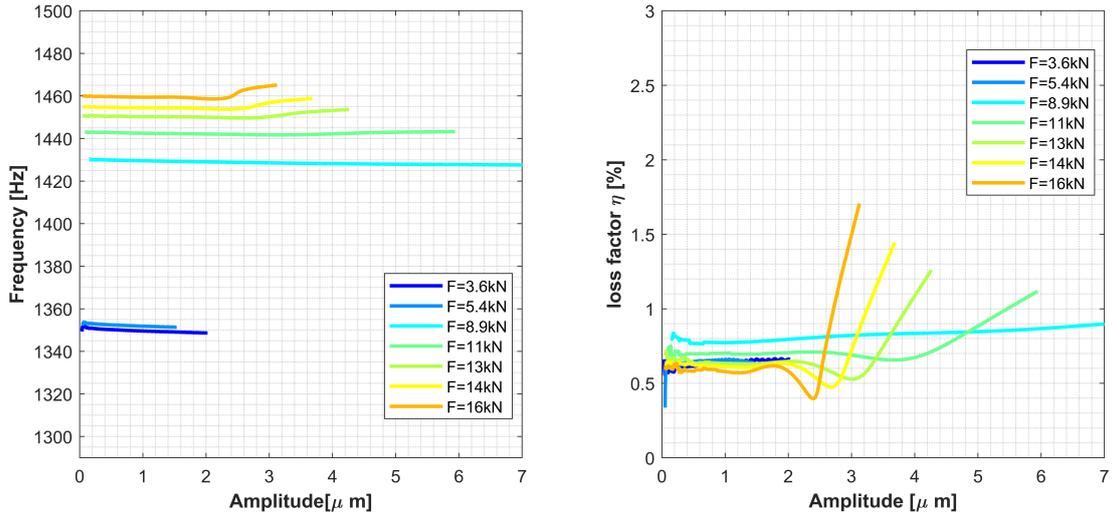
La dipendenza dello smorzamento del secondo modo flessionale (figura 3.21) dall'ampiezza di vibrazione del punto indicato in figura 3.20 richiama quella trovata per il primo modo. Si può infatti osservare un tratto iniziale di smorzamento costante - non dipendente dall'ampiezza - ed un'ampiezza critica, oltre la quale inizia lo strisciamento al contatto, causa della ripida crescita dello smorzamento.

A parità di forza di Trazione (si veda $F = 16\text{ kN}$) è stato notato che l'ampiezza critica dipende dalla corrente efficace A_{RMS} data in input allo shaker. Tale corrente definisce l'ampiezza dell'oscillazione della forza eccitante prima del distacco della punta dello shaker dalla trave e quindi l'ampiezza della vibrazione della trave all'inizio del decadimento libero. Si è ipotizzato che tale variabilità risieda nel fatto precedentemente sottolineato che l'ampiezza riportata in ascissa è quella della vibrazione di un antinodo del modo della trave, mentre l'ampiezza critica che definisce gli stati di strisciamento e adesione è quella riferita alla vibrazione dei punti nella zona di contatto.

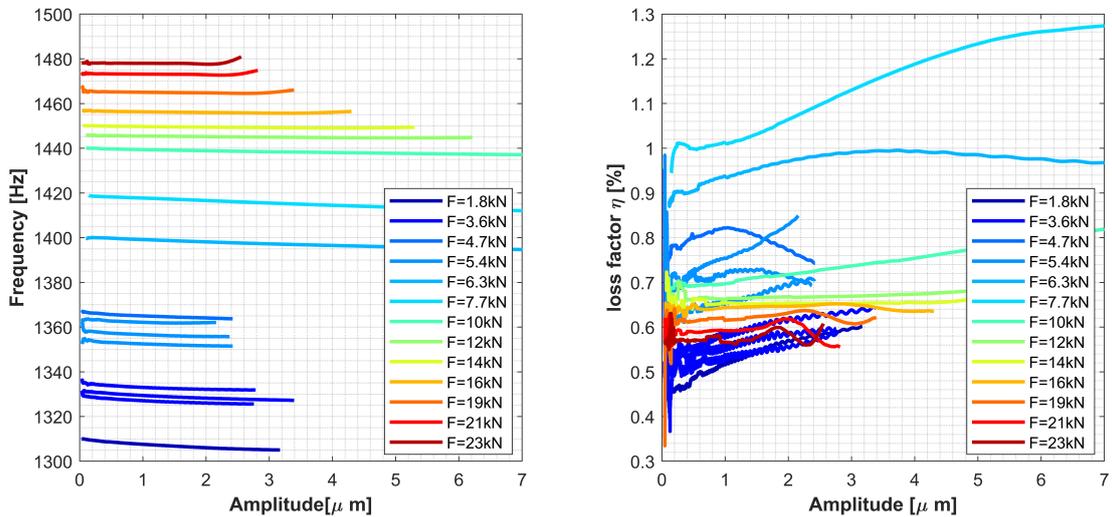
Frequenza

La dipendenza della frequenza dall'ampiezza di vibrazione (figura 3.21) presenta un tratto costante per bassi valori di ampiezza, indice della completa adesione delle zone di contatto.

Second Bending Mode $A_{RMS} = 2.3 \text{ A}$



Second Bending Mode $A_{RMS} = 2.7 \text{ A}$



Second Bending Mode $A_{RMS} = 3.1 \text{ A}$

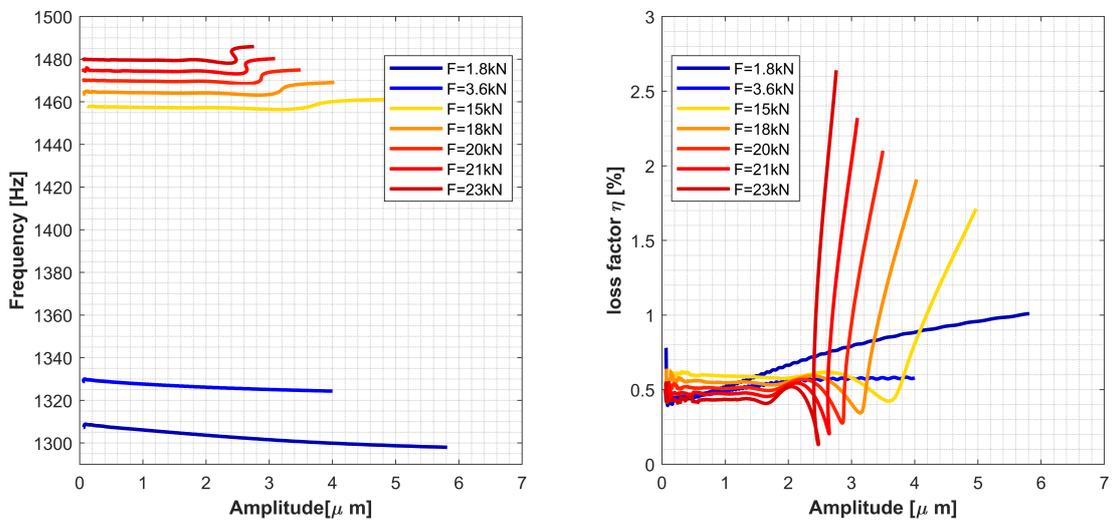


Figura 3.21: Seconda Flessionale: Frequenza= f_n (Ampiezza), Smorzamento= η (Ampiezza) per diversi valori di corrente efficace A_{RMS} inviata allo shaker

Effetto della Forza di trazione su frequenza e smorzamento

Smorzamento

Osservando la figura 3.21 ed il secondo grafico di figura 3.22 è possibile notare che lo smorzamento in condizioni di completa adesione presenta un massimo per circa $8kN$, oltre il quale diminuisce all'aumentare della forza di trazione. Anche in questa dipendenza è stata trovata una leggera variabilità dei risultati in funzione della corrente A_{RMS} in ingresso allo shaker.

Dai grafici di figura 3.21 si può osservare una diminuzione dell'ampiezza critica all'aumentare della forza di trazione, fenomeno presente anche per il primo modo flessione, a cui si rimanda per un'ipotesi di spiegazione.

Frequenza

L'andamento della frequenza in funzione della forza di trazione (figure 3.22, 3.21) ripropone l'effetto irrigidente già riscontrato per il primo modo flessionale, con lo scostamento delle frequenze misurate da quelle teoriche per bassi valori di forza, fenomeno probabilmente dovuto al microslip [1] nei contatti.

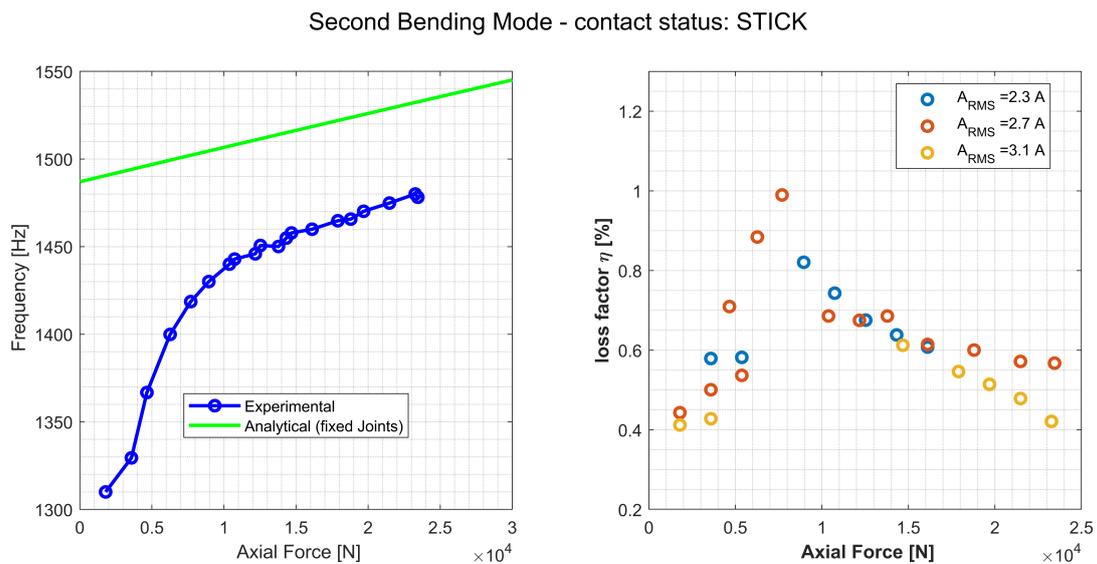


Figura 3.22: Effetto della forza di trazione su f_n e η in condizioni di Adesione

Visualizzazione degli effetti combinati di Forza e Ampiezza

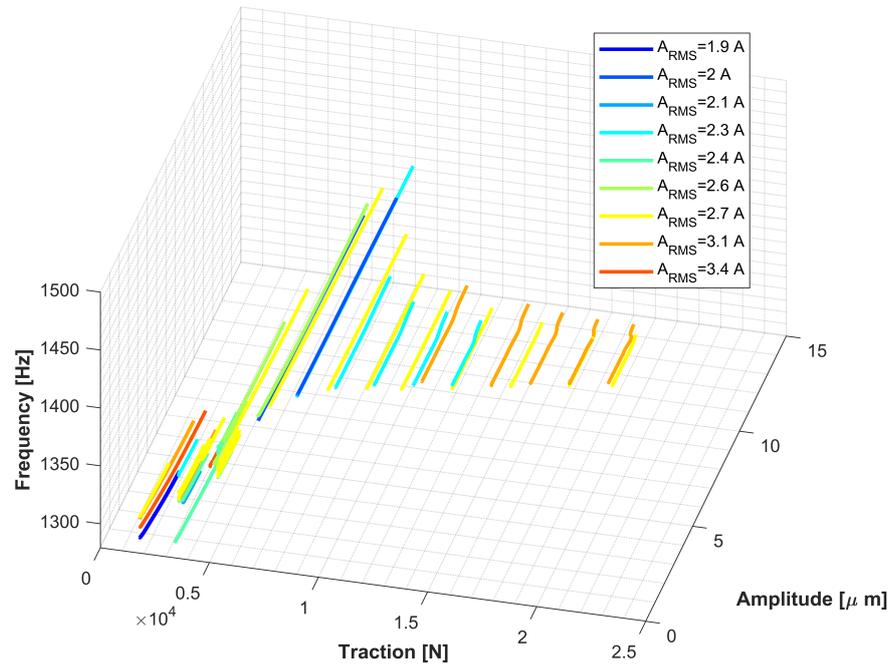


Figura 3.23: Seconda flessionale: frequenza in funzione di Ampiezza di vibrazione e Trazione

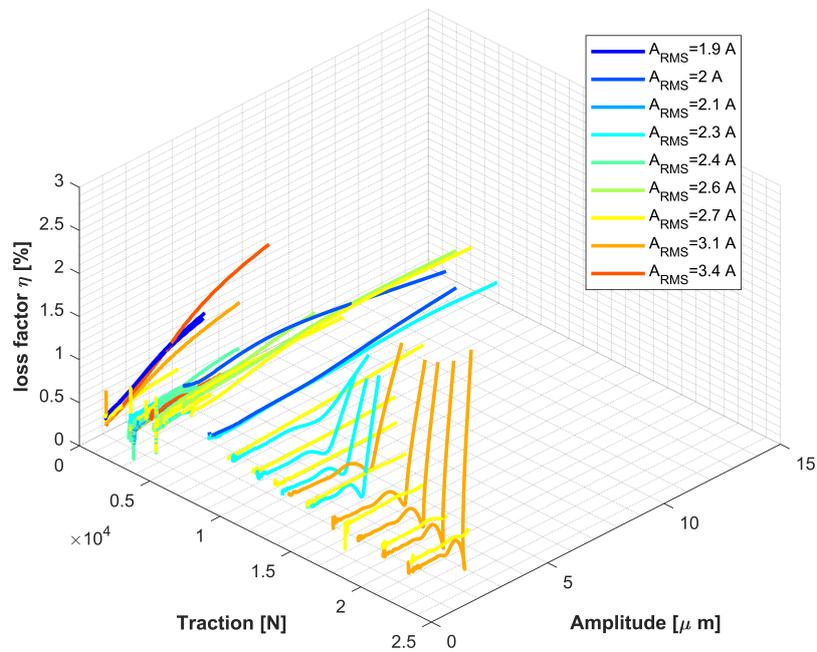


Figura 3.24: Seconda flessionale: smorzamento in funzione di Ampiezza di vibrazione e Trazione

3.4.3 Stima degli errori

Le possibili fonti di errore della procedura di misurazione seguita sono le seguenti:

1. l'incertezza della forza assiale di trazione dovuta alla precisione del manometro utilizzato per misurare la pressione dell'attuatore;
2. l'incertezza della velocità del punto misurato dovuta alla precisione dell'interferometro laser e la conseguente propagazione di tale errore nella procedura dell'analisi del segnale

La prima tipologia di errore è stata facilmente stimata considerando la precisione del manometro:

$$\frac{\delta p}{p} = 1\% \quad @700bar \quad F = A_{cil} \cdot p \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta F}{F} = 1\%$$

L'errore dovuto all'incertezza della velocità e alla sua propagazione nell'analisi invece è stato stimato come segue.

L'analisi dell'errore è stata svolta solo nel campo di ampiezze di vibrazione per cui i contatti possono essere considerati in piena adesione, ovvero dove frequenza e smorzamento presentano un andamento costante, non dipendente dall'ampiezza.

Per ogni forza assiale, è stata calcolata la media $\bar{f}_j, \bar{\eta}_j$ e la deviazione standard $(\sigma_f)_j, (\sigma_\eta)_j$ di ogni j -esima misura di frequenza e smorzamento.

$$f_j = \bar{f}_j \pm (\sigma_f)_j \quad (\sigma_f)_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (f_i - \bar{f})^2}$$

$$\eta_j = \bar{\eta}_j \pm (\sigma_\eta)_j \quad (\sigma_\eta)_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (\eta_i - \bar{\eta})^2}$$

E' stata quindi calcolata la media dei valori medi di tutte le misure effettuate alla stessa forza assiale ed è stata calcolata la propagazione dell'errore tramite la formula:

$$x = \frac{\sum_j x_j}{N} \quad \delta x = \sqrt{\sum_j \left(\frac{\partial x}{\partial x_j} (\sigma_x)_j \right)^2} = \sqrt{\sum_j \left(\frac{1}{N} (\sigma_x)_j \right)^2} \quad x = f, \eta$$

Fax [N]	fn [Hz]	δfn [Hz]	δfn/fn	η	δη	δη/η
3580	480.03	0.28	0.058%	0.04864	0.00034	0.7%
3938	488.64	0.50	0.103%	0.01147	0.00249	21.7%
5370	505.32	0.11	0.022%	0.00573	0.00074	12.9%
5907	512.84	0.20	0.039%	0.00512	0.00066	12.8%
6802	521.14	0.07	0.013%	0.01121	0.00024	2.1%
7160	520.55	0.03	0.007%	0.01174	0.00030	2.6%
7697	527.05	0.02	0.004%	0.00293	0.00002	0.6%
10382	535.54	0.01	0.002%	0.00188	0.00001	0.6%
12530	540.72	0.01	0.001%	0.00203	0.00001	0.2%
24165	559.77	0.12	0.021%	0.00720	0.00041	5.8%

Figura 3.25: Primo Modo Flessionale: Stima dell'errore - contact Status: STICK

Fax [N]	f_n [Hz]	δf_n [Hz]	$\delta f_n/f_n$	η	$\delta \eta$	$\delta \eta/\eta$
1790	1300.42	0.10	0.007%	0.00456	0.00023	5.1%
3401	1292.21	0.20	0.015%	0.00418	0.00030	7.2%
3580	1333.48	0.18	0.013%	0.00511	0.00021	4.2%
3759	1328.07	0.21	0.016%	0.00391	0.00058	14.9%
4654	1366.83	0.14	0.010%	0.00757	0.00062	8.2%
5012	1361.97	0.49	0.036%	0.00731	0.00014	2.0%
5191	1364.20	0.17	0.012%	0.00638	0.00017	2.7%
5370	1363.86	0.26	0.019%	0.00679	0.00025	3.7%
5549	1382.93	0.12	0.009%	0.00739	0.00029	3.9%
6265	1399.80	0.11	0.008%	0.00880	0.00005	0.6%
7160	1406.46	0.15	0.010%	0.01152	0.00007	0.6%
7697	1418.69	0.09	0.006%	0.00975	0.00016	1.7%
8950	1430.47	0.09	0.006%	0.00828	0.00009	1.1%
10382	1440.05	0.07	0.005%	0.00684	0.00003	0.4%
10740	1443.01	0.13	0.009%	0.00731	0.00018	2.5%
12172	1445.92	0.04	0.003%	0.00684	0.00011	1.6%
12530	1450.65	0.06	0.004%	0.00691	0.00017	2.5%
13783	1450.10	0.03	0.002%	0.00696	0.00017	2.4%
14320	1454.84	0.02	0.001%	0.00627	0.00015	2.4%
14678	1457.82	0.04	0.002%	0.00618	0.00007	1.1%
16110	1458.34	0.07	0.005%	0.00615	0.00008	1.3%
17900	1464.49	0.35	0.024%	0.00541	0.00031	5.6%
18795	1466.33	0.77	0.053%	0.00527	0.00089	17.0%
19690	1470.16	0.06	0.004%	0.00522	0.00012	2.4%
21480	1474.05	0.06	0.004%	0.00531	0.00009	1.8%
23270	1480.02	0.17	0.011%	0.00452	0.00038	8.5%
23449	1478.18	0.03	0.002%	0.00567	0.00002	0.3%

Figura 3.26: Secondo Modo Flessionale: Stima dell'errore - contact Status: STICK

Parte II

Simulazioni Numeriche

Capitolo 4

Procedura generale della simulazione agli Elementi Finiti

L'obiettivo della parte numerica del presente lavoro è trovare i valori di rigidezza tangenziale k_t e normale k_n delle zone di contatto del giunto dovetail analizzato (figura 4.1). In particolare tali valori rappresentano i parametri di input dei tipici elementi di contatto Nodo-a-Nodo utilizzati nelle simulazioni numeriche [35], [22], [21], [23], [36].

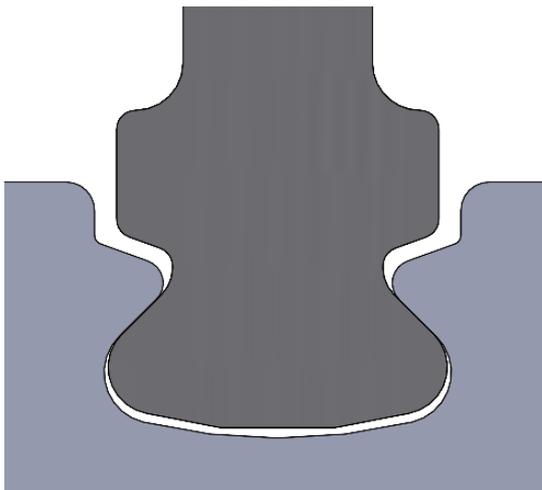


Figura 4.1: Giunto Dovetail in esame

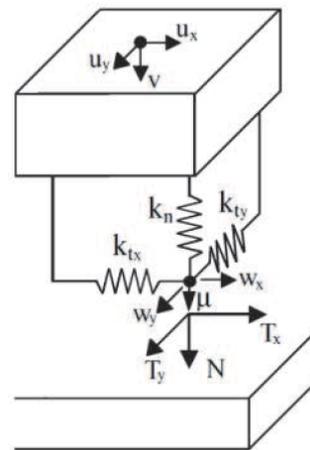


Figura 4.2: Schema dell'elemento di contatto [35]

Per la ricerca dei valori di k_n e k_t è stata seguita la seguente procedura:

1. Il modello della trave con le due estremità a coda di rondine (dovetail) è stato discretizzato con il metodo agli elementi finiti implementato in ANSYS®, così come i supporti della trave (slots), prestando particolare attenzione alla coincidenza dei nodi nelle interfacce di contatto.
2. Sono state svolte in ANSYS® analisi statiche non lineari sulla sola trave al variare della forza assiale di trazione, per ottenere l'effetto irrigidente di tale forza nelle matrici di rigidezza della trave, utilizzate in seguito.
3. I gradi di libertà del modello sono stati ridotti in ANSYS® con la tecnica della Component Mode Synthesis di Craig-Bampton [37] e le matrici di massa e rigidezza del modello ridotto

sono state importate in MATLAB®. I nodi master utilizzati per la riduzione sono i nodi di contatto ed ulteriori nodi necessari alla visualizzazione dei modi.

4. I modelli ridotti della trave e dei supporti sono stati assemblati in MATLAB® introducendo degli elementi di contatto lineari, ovvero che non implementano lo stato di strisciamento o separazione del contatto. I parametri di tali elementi sono i valori di k_n e k_t oggetto della presente ricerca.
5. E' stato scritto un codice MATLAB® per la ricerca di k_n e k_t . Tale codice confronta le frequenze del primo e secondo modo flessionale del modello FEM con le corrispondenti frequenze ottenute dall'analisi delle misure, nell'intervallo di Forze assiali di Trazione in cui è stata riscontrata completa adesione dei contatti (no microslip, si veda figura 3.17) che implica la linearità dei contatti.

Capitolo 5

Modello agli Elementi Finiti - ANSYS®

5.1 Definizione della Mesh

Il modello è stato discretizzato con una mesh strutturata, dove possibile. Sono stati utilizzati elementi lineari esaedrici ad 8 nodi SOLID185, la cui dimensione è stata gradualmente ridotta nelle vicinanze delle zone di contatto (figura 5.1).

BladeL_Zn_X10
20/12/2020 16:52

- A** BladeL_Zn_X10
- B** BladeL_Zn_X40
- C** BladeL_Zn_X73
- D** Blade_mid_Lateral_Zn_Nodes
- E** BladeL_Zn_Mid

ANSYS
2020 R1
ACADEMIC

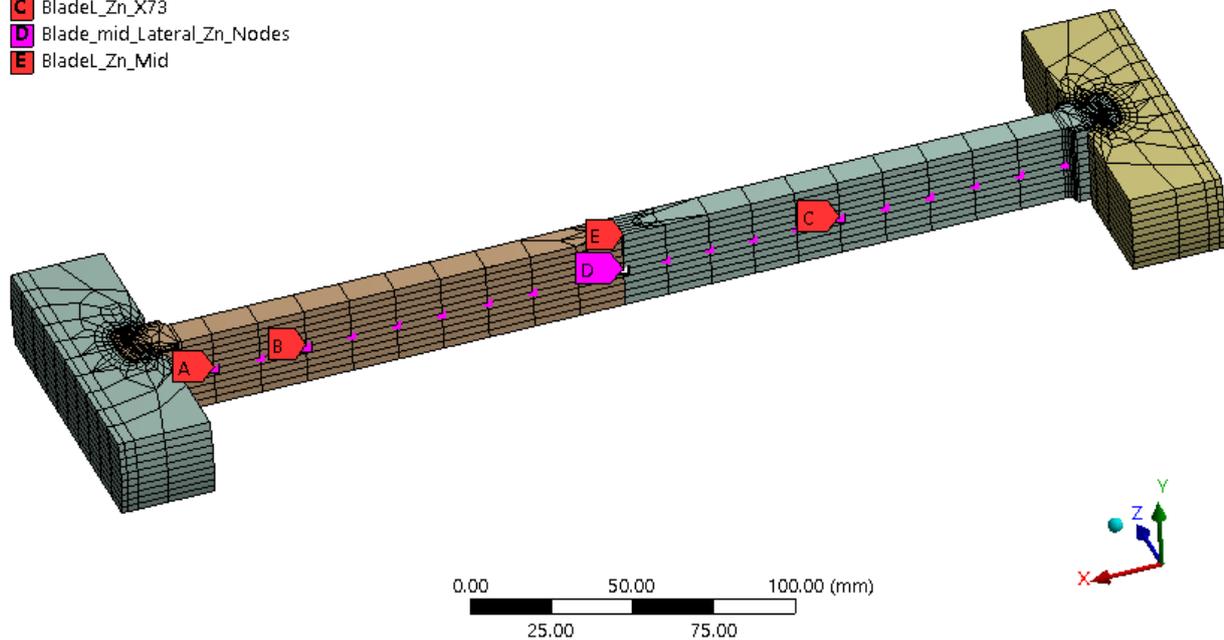


Figura 5.1: Modello FEM del simulacro di pala e degli slots

Al fine di poter utilizzare elementi di contatto Nodo-a-Nodo nel successivo assemblaggio in MATLAB®, è stata imposta la coincidenza dei nodi della trave e degli slots nelle interfacce di contatto geometrico (figure 5.2 , 5.3).

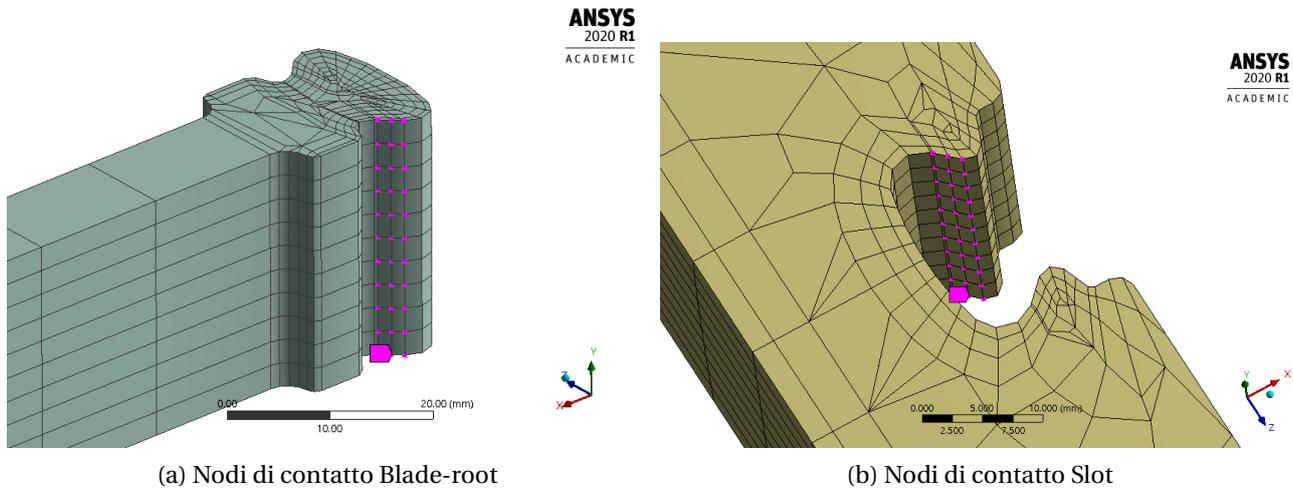


Figura 5.2: Nodi all'interfaccia di contatto

Nel dettaglio, sono stati utilizzati 33 nodi per ognuna delle quattro aree di contatto: 11 nodi lungo l'asse Y per 3 nodi in direzione tangenziale all'interfaccia.

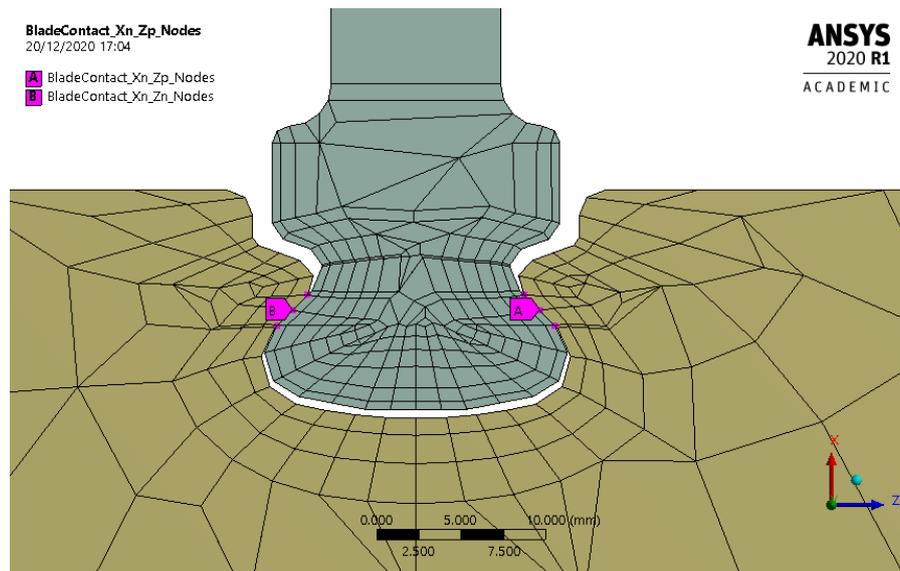


Figura 5.3: Dettaglio del Giunto Dovetail nel modello FEM

Si noti che per poter successivamente inserire degli elementi di contatto, i nodi all'interfaccia devono essere distinti e coincidenti soltanto nella posizione, ovvero per ogni coppia di nodi aventi la stessa posizione, il numero di identificazione del nodo della trave deve essere diverso da quello del nodo dello slot.

Tuttavia, poiché la distinzione tra nodi della trave e degli slot per le interfacce è necessaria soltanto durante l'assemblaggio dei corpi in MATLAB®, mentre in ANSYS® trave e slots verranno analizzati singolarmente, è stata seguita la seguente procedura, per permettere una veloce identificazione dei nodi coincidenti in MATLAB®:

1. I nodi di interfaccia coincidenti sono stati resi unici (stesso numero di identificazione per slot e trave) tramite il comando “Shared topology” del software CAD di ANSYS SpaceClaim, prima della creazione della mesh su ANSYS Mechanical;
2. E' stata creata la mesh in ANSYS Mechanical tenendo attivi tutti i corpi: slots e trave;
3. In ANSYS Mechanical sono stati soppressi tutti i corpi tranne uno, su cui è stata eseguita l'analisi statica e l'esportazione delle matrici di seguito esposte;
4. E' stata ripetuta la procedura del precedente punto per ogni corpo (la trave e i due supporti);
5. I codici utilizzati In MATLAB per l'importazione delle matrici e dei nodi utilizzano un nuovo sistema di numerazione per i nodi di ogni corpo, ovvero utilizzano l'indice della posizione del nodo nel vettore contenente tutti i nodi del corpo. Ciò ha permesso l'identificazione dei nodi coincidenti tramite la semplice ricerca dei nodi aventi lo stesso ID usato in ANSYS.

La suddetta procedura è equivalente all'utilizzo di nodi distinti e coincidenti in ANSYS (disattivando il comando “Shared Topology”) associata ad una ricerca dei nodi aventi la stessa posizione in MATLAB.

5.2 Introduzione dell'effetto irrigidente dello sforzo normale

Per considerare la non linearità dovuta all'effetto irrigidente della forza assiale di trazione è stato necessario svolgere delle analisi statiche sulla sola trave al variare della forza. In particolare per ogni forza è stato calcolato lo stato di tensione e da questo è stata ricavata la matrice di rigidezza aggiuntiva ΔK_F (comando PSTRES di ANSYS), che verrà considerata nella successiva riduzione CMS del modello.

$$K = K_{F=0} + \Delta K_F \quad \text{con} \quad \Delta K_F = \int_{vol} [S_g]^T [\sigma] [S_g] dvol$$

dove $[\sigma]$ è il tensore degli sforzi e $[S_g]$ è la matrice delle derivate delle funzioni di forma [36].

5.2.1 Sistema dei carichi

La trave è stata caricata su entrambe le estremità con forze normali alle zone di contatto, simulando la condizione limite di forze tangenziali nulle al contatto. La forza di riferimento di ogni analisi statica è la forza assiale F_{ax} visibile in figura 5.4. I carichi normali al contatto N_0 sono stati quindi imposti in funzione della forza assiale. Dall'equilibrio delle forze:

$$N_0 = \frac{F_{ax}/2}{\sin \theta} \quad \text{con} \quad \theta = 45^\circ$$

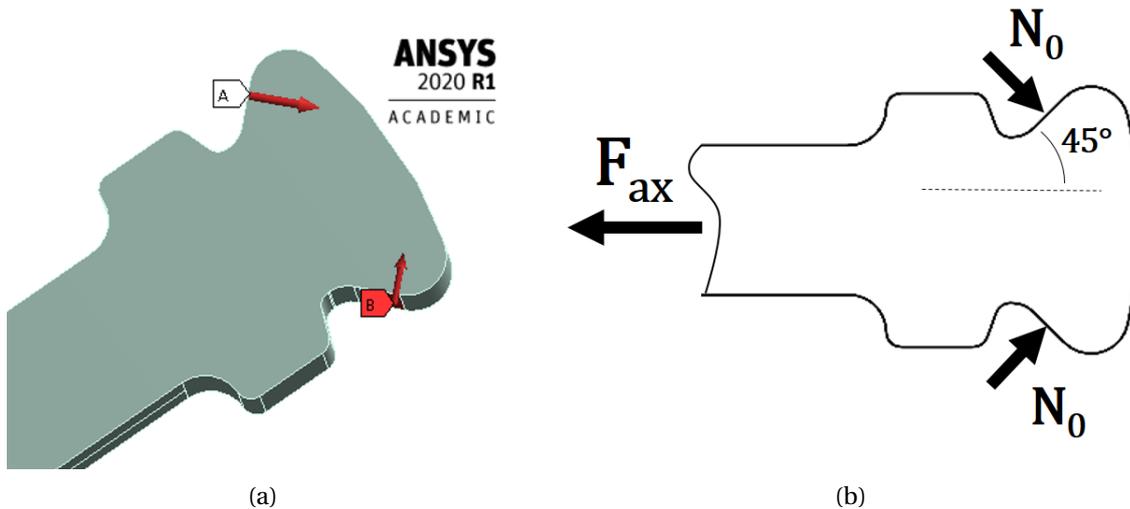


Figura 5.4: Sistema dei carichi per l'analisi statica

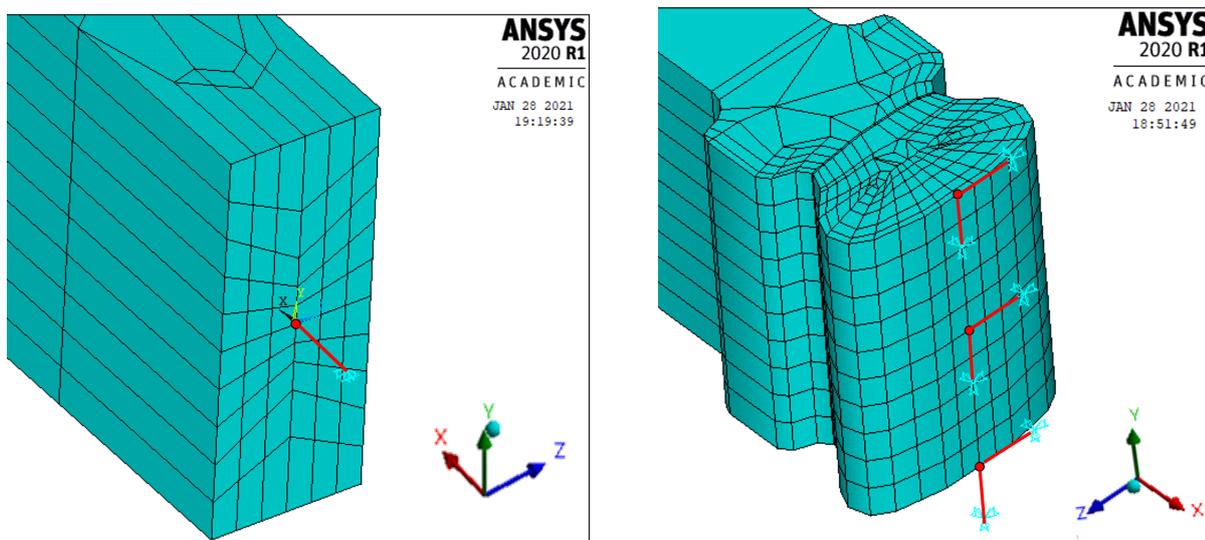
5.2.2 Sistema dei vincoli e soluzione dei sostegni elastici fittizi

La trave così caricata è soggetta ad un sistema di forze autoequilibrato, non necessita di reazioni vincolari. Tuttavia il software ANSYS® non permette comunque di svolgere l'analisi statica senza l'introduzione di vincoli.

Per evitare che l'inserimento di vincoli artificiali potesse influenzare la successiva ricerca dei valori di rigidezza normale k_n e tangenziale k_t , è stato implementato un particolare sistema di vincoli costituito da sostegni elastici unidirezionali realizzati con l'elemento ANSYS COMBIN14, aventi rigidezze prossime a zero ($K = 1 \cdot 10^{-4} N/mm$).

Nel dettaglio sono stati inseriti dei supporti agenti lungo Y e lungo Z per tre nodi ad ogni estremità della trave ed un supporto lungo X per il nodo al centro.

Si noti che nel modello realmente utilizzato le estremità di ogni supporto elastico sono coincidenti: i supporti mostrati in figura 5.5 sono stati creati al solo scopo esplicativo.



(a) supporto elastico K_x al centro della trave

(b) supporto elastici K_y e K_z alle estremità

Figura 5.5: Sistema dei vincoli per l'analisi statica

Confronto modale trave libera-trave con sostegni elastici

Per verificare che il sistema di vincoli adottato non influenzasse il comportamento dinamico della trave - alla base della successiva ricerca dei valori di rigidezza normale k_n e tangenziale k_t - sono state confrontate le frequenze dei modi propri della trave libera con quelle della trave vincolata con i supporti elastici (figura 5.1), senza alcun effetto irrigidente.

Soltanto le frequenze dei modi rotazionali di corpo rigido presentano qualche lieve differenza, mentre i modi flessionali di interesse non sono influenzati dal sistema di supporti adottato.

MODO	TRAVE LIBERA	TRAVE con supporti elastici
	f [Hz]	f [Hz]
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0.15
5	0	1.09
6	0	1.11
7	476.75	476.76
8	1162.9	1162.9
9	1284.6	1284.6
10	2613.6	2613.6
11	2869.3	2869.3
12	3154.8	3154.8

Tabella 5.1: Verifica dei supporti elastici

5.2.3 Trave: risultati dell'effetto irrigidente

Per verificare il calcolo della matrice di rigidezza aggiuntiva ΔK_F , dopo ogni analisi statica associata alla forza assiale F_{ax} i-esima, è stata svolta su ANSYS un'analisi modale (lineare) con la matrice di rigidezza

$$K = K_{(F=0)} + \Delta K_F$$

(è possibile effettuare tale procedura attivando l'effetto prestress tramite il comando PSTRES).

E' stato riscontrato un aumento del valore delle frequenze all'aumentare della forza assiale, come previsto dai modelli teorici [30].

F [N]		1	5000	10000	15000	20000	25000	30000
MODO		f [Hz]						
x	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
y	2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
z	3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Rx	4	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Ry	5	1.1	74.7	105.5	129.1	149.0	166.4	182.2
Rz	6	1.1	76.4	108.0	132.2	152.6	170.6	186.8
1Fy	7	476.8	498.8	519.9	540.1	559.6	578.4	596.6
1Fz	8	1162.9	1172.6	1182.3	1191.8	1201.3	1210.7	1220.0
2Fy	9	1284.6	1302.0	1319.1	1336.0	1352.7	1369.2	1385.5
3Fy	10	2613.6	2627.9	2642.1	2656.3	2670.4	2684.5	2698.4

Tabella 5.2: Effetto irrigidente della forza assiale sulla trave (ANSYS)

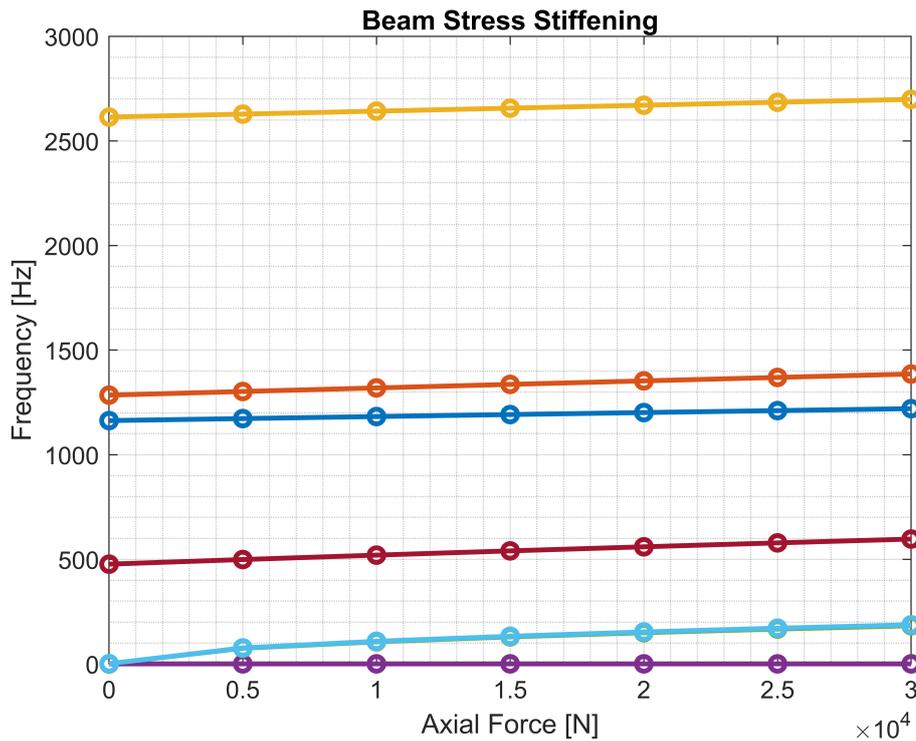


Figura 5.6: Effetto irrigidente della forza assiale sulla trave (ANSYS)

5.2.4 Slots: effetto irrigidente trascurabile

In un'analisi preliminare è stato introdotto l'effetto irrigidente anche per gli slot. Per questa analisi statica sono stati vincolati i nodi alla base dei supporti ed è stata applicata una forza diretta lungo l'asse X sulle superfici di contatto (figura 5.7 (a)). E' stato riscontrato un effetto irrigidente totalmente trascurabile (figura 5.7 (b)) e si è quindi deciso di esportare in MATLAB (con la procedura di seguito descritta) il modello dei supporti senza carichi né vincoli, per poi applicare eventuali vincoli direttamente nelle successive analisi svolte nei codici MATLAB®.

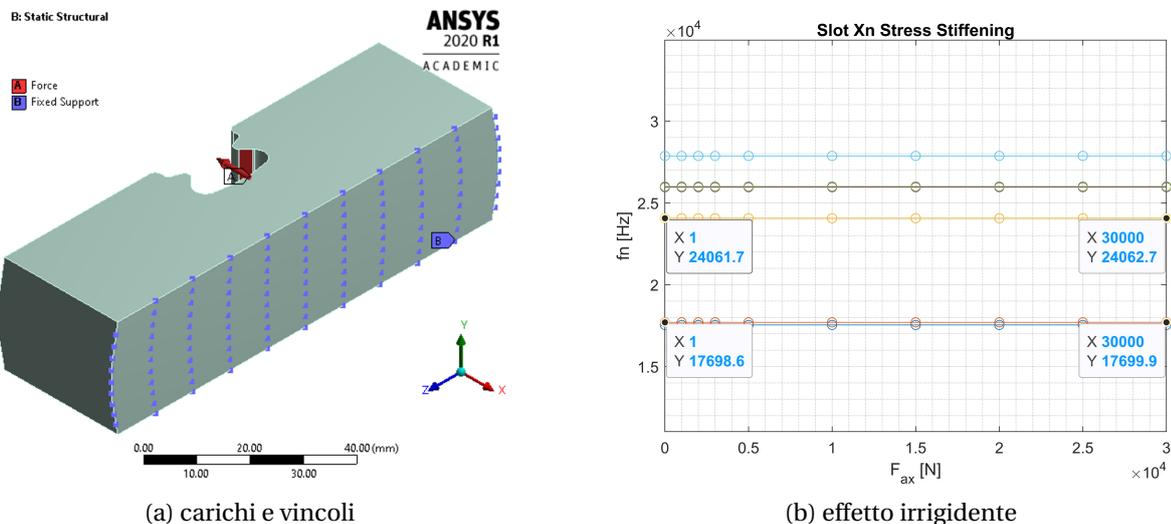


Figura 5.7: Slot: effetto irrigidente trascurabile

5.3 Riduzione CMS del modello

La ricerca dei valori di rigidità normale k_n e tangenziale k_t è stata svolta, come successivamente spiegato, confrontando le frequenze del primo e secondo modo flessionale del modello FEM con le corrispondenti frequenze ottenute dall'analisi delle misure.

Tale procedura ha richiesto l'utilizzo di un metodo di ricerca globale al variare di k_n, k_t . Poiché con tale metodo è necessario svolgere molte analisi modali, per diminuire il costo computazionale si è deciso di ridurre preliminarmente i gradi di libertà dei modelli di trave e supporti con un procedimento appartenente alla famiglia delle "Component Mode Synthesis".

In particolare, è stato utilizzato il metodo di riduzione proposto da Craig-Bampton [37], tecnica già implementata nel software ANSYS®, il cui codice è disponibile in appendice.

5.3.1 Riduzione di Craig-Bampton

Il metodo consiste nell'attuare un cambiamento di coordinate delle equazioni del moto, in modo da ottenere una descrizione del sistema con un numero ridotto di coordinate generalizzate.

Il primo passo consiste nel suddividere i gradi di libertà del modello in "master DOFs" - che saranno presenti anche nel modello ridotto finale - e "slave DOFs". Dato il sistema di equazioni del moto (libero):

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\}$$

si può effettuare il seguente partizionamento:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} M_{mm} & 0 \\ 0 & M_{ss} \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix}$$

Definendo i "Modi Statici" $[\bar{\Phi}_C]$ come gli spostamenti dei "slave DOFs" dovuti agli spostamenti dei "master DOFs", si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m \\ F_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [K_{sm}]\{u_m\} + [K_{ss}]\{u_s\} = \{0\}$$

$$\Rightarrow \quad \{u_s\} = \underbrace{-[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{u_m\}}_{[\bar{\Phi}_C]}$$

Vengono definiti i "Modi Interni" $[\Phi_N]$ come i modi della struttura quando tutti i "master DOFs" sono vincolati:

$$\omega^2[M_{ss}][\Phi_N] = [K_{ss}][\Phi_N]$$

Si assume ora che, quando tutti i "master DOFs" sono vincolati, gli spostamenti degli "slave DOFs" possono essere approssimati con la combinazione di un sottoinsieme dei modi interni:

$$\{u_s\} = [\Phi_N]\{p_N\} = [\bar{\Phi}_N]\hat{\Phi}_N \begin{Bmatrix} \bar{p}_N \\ \hat{p}_N \end{Bmatrix} \simeq [\bar{\Phi}_N]\{\bar{p}_N\}$$

Si adotta un nuovo sistema di coordinate generalizzate formato dai gradi libertà "master" e dalle coordinate $\{\bar{p}_N\}$:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ \bar{p}_N \end{Bmatrix}$$

Quindi gli spostamenti degli “slave DOFs” possono essere scritti in funzione delle nuove coordinate utilizzando i Modi Statici e i Modi Interni:

$$\{u_s\} = [\bar{\Phi}_C]\{u_m\} + [\bar{\Phi}_N]\{\bar{p}_N\}$$

ovvero i gradi di libertà iniziali ed il nuovo sistema di coordinate generalizzate sono legati dalla matrice di trasformazione:

$$\begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{\Phi}_C & \bar{\Phi}_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ \bar{p}_N \end{Bmatrix} \Rightarrow \{u\} = [\alpha]\{p\}$$

Le equazioni del moto della struttura nelle nuove coordinate sono dunque:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \Rightarrow [\alpha]^T ([M][\alpha]\{\ddot{p}\} + [K][\alpha]\{p\}) = \{0\} \Rightarrow [\bar{M}]\{\ddot{p}\} + [\bar{K}]\{p\} = \{0\}$$

Si ottengono dunque le matrici $[\bar{M}]$, $[\bar{K}]$ del sistema ridotto:

$$[\bar{K}] = [\alpha]^T [K] [\alpha] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{mm} & 0 \\ 0 & \bar{K}_{NN} \end{bmatrix} \quad [\bar{M}] = [\alpha]^T [M] [\alpha] = \begin{bmatrix} \bar{M}_{mm} & \bar{M}_{mN} \\ \bar{M}_{Nm} & \bar{M}_{NN} \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned} \bar{K}_{mm} &= [K_{mm}] + [K_{ms}][\bar{\Phi}_C] \\ \bar{K}_{NN} &= [\bar{\Phi}_N]^T [K_{ss}] [\bar{\Phi}_N] \quad (\text{matrice diagonale}) \\ \bar{M}_{mm} &= [M_{mm}] + [\bar{\Phi}_C]^T [M_{ss}] [\bar{\Phi}_C] \\ \bar{M}_{mN} &= [\bar{M}_{Nm}]^T = [\bar{\Phi}_C]^T [M_{ss}] [\bar{\Phi}_N] \\ \bar{M}_{NN} &= [\bar{\Phi}_N]^T [M_{ss}] [\bar{\Phi}_N] \quad (\text{matrice diagonale}) \end{aligned}$$

5.3.2 Scelta dei Master Nodes

Per la riduzione dei modelli di trave e supporti sono stati utilizzati i primi 100 modi interni.

Trave

I nodi master scelti per la trave (a cui corrispondono i master DOFs) sono:

- 33 nodi per ognuna della 4 interfacce di contatto (figure 5.2, 5.8 (b));
- 21 nodi lungo l’asse longitudinale della trave, per ognuno dei due lati (figure 5.8 (b), 5.1) per poter visualizzare le forme modali del modello ridotto.

Il modello ridotto della trave presenta quindi un totale di 622 gradi di libertà:

$$N_{DOF} = (33 \times 4 + 21 \times 2) \times (3\text{dofs/node}) + 100\text{modes} = 622\text{dofs}$$

Supporti

Per ognuno dei due supporti sono stati scelti i seguenti nodi master:

- 33 nodi per ognuna delle 2 interfacce di contatto (figure 5.2, 5.8);
- 8 nodi, corrispondenti ai vertici del supporto (figura 5.8 (b)), per la visualizzazione dei modi;
- 117 nodi alla base del supporto (figura 5.8 (b)), per poter essere successivamente vincolati in MATLAB (o per applicare eventuali forze di trazione in analisi statiche successive, non svolte nel presente lavoro).

Il modello ridotto di ogni supporto presenta quindi un totale di 673 gradi di libertà, e di 322 g.d.l. dopo aver vincolato i nodi alla base:

$$N_{DOF} = (33 \times 2 + 8 + 117) \times (3\text{dofs/node}) + 100\text{modes} = 673\text{dofs}$$

$$N_{DOF-constrained} = (33 \times 2 + 8) \times (3\text{dofs/node}) + 100\text{modes} = 322\text{dofs}$$

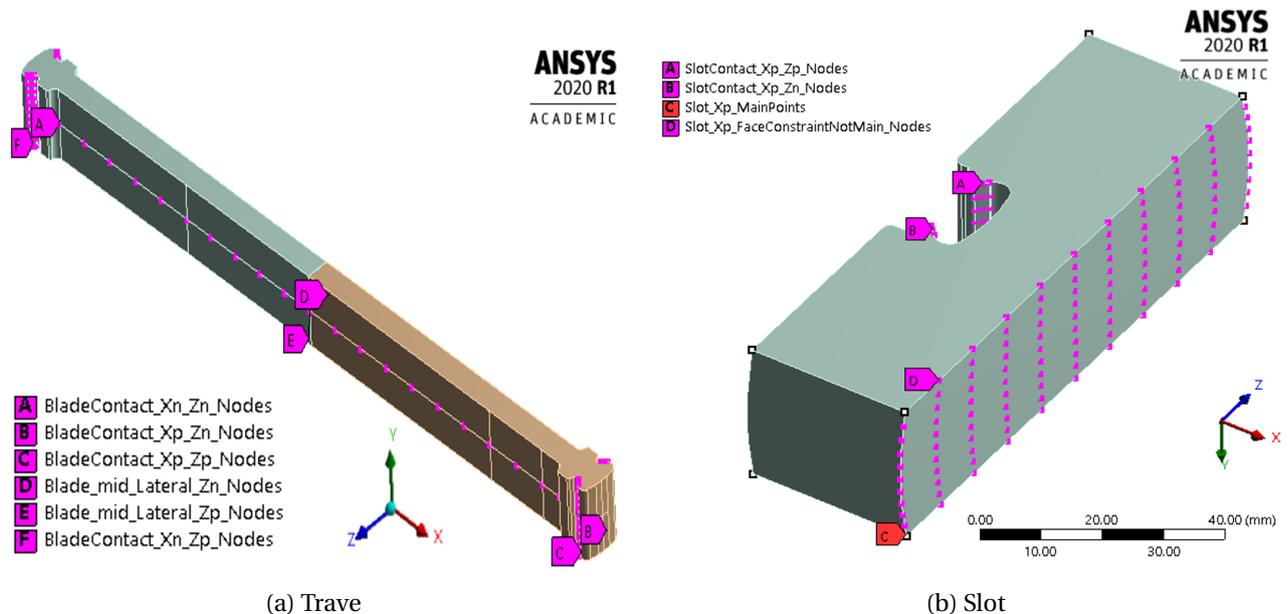


Figura 5.8: Nodi master per il modello ridotto

Definiti i Nodi master per la trave e per i supporti, è stata svolta su ANSYS® la riduzione di ognuno dei tre modelli (la trave e i due slot) e sono state esportate le rispettive matrici ridotte $[\bar{M}]$, $[\bar{K}]$.

5.4 Verifica della riduzione ed importazione dei modelli

Le matrici dei modelli ridotti sono state importate in MATLAB® e per ogni modello (trave e i due supporti) è stata eseguita l'analisi modale (comando "eig"®). Le frequenze ottenute sono state confrontate con quelle derivanti dall'analisi modale dei rispettivi modelli non ridotti, effettuata su ANSYS®. È stata ottenuta corrispondenza con una differenza massima percentuale di 0.05%. In particolare l'effetto irrigidente della forza assiale sul modello di ordine ridotto della trave (figura 5.10) è stato confrontato con i risultati della tabella 5.2 e della figura 5.6.

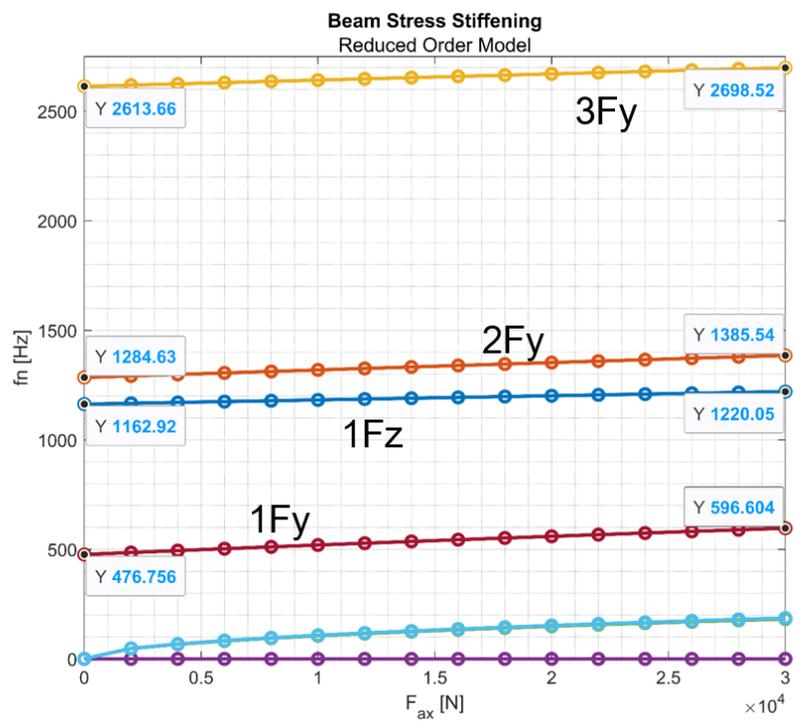


Figura 5.9: Effetto irrigidente per il R.O.M. della trave

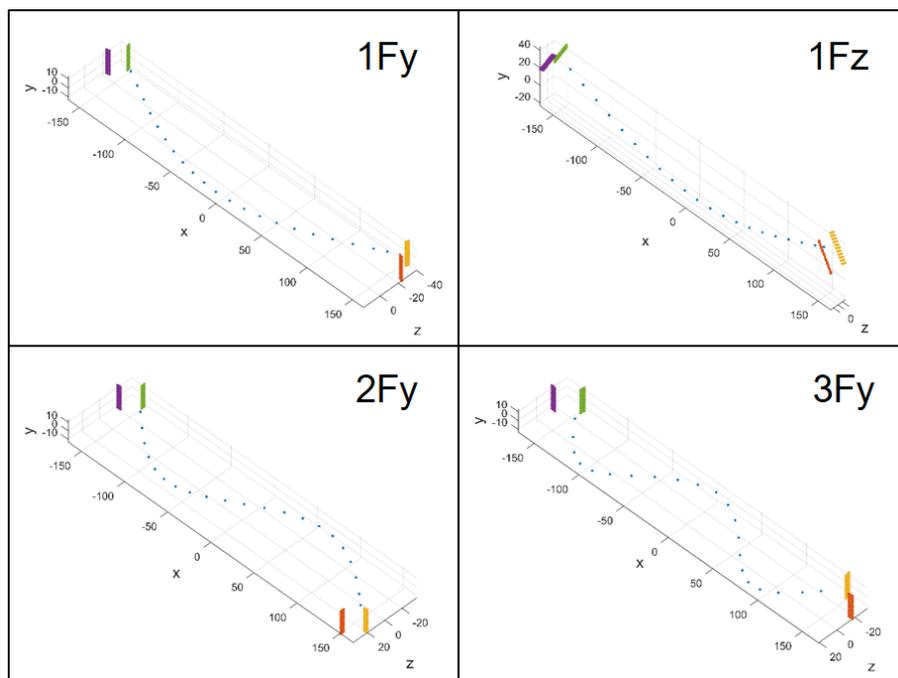


Figura 5.10: Forme Modali del R.O.M. della trave

SLOT	MODE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R.O.M. (Matlab)	f [Hz]	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	6484.6	9421.8	9766.9	20676	20997	21313
Original Model (Ansys)	f [Hz]	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	6484.4	9421.4	9766.2	20673	20989	21306

Figura 5.11: Verifica R.O.M. Slots tramite il confronto delle frequenze

Capitolo 6

Ricerca della rigidità di contatto normale k_n e tangenziale k_t -MATLAB®

Dopo aver importato in MATLAB le matrici $[\bar{M}]$, $[\bar{K}]$ dei modelli ridotti della trave e dei due supporti, di seguito indicati come superelementi, sono state assemblate le matrici $[M_{GLOB}]$ e $[K_{GLOB}]$ dell'assieme completo (trave + 2 slot). Tale procedura è stata ripetuta per ogni matrice $[\bar{K}]_i$ della trave, che contiene l'effetto irrigidente della Forza assiale di trazione i -esima.

Sono stati vincolati i nodi alla base degli slot e sono stati aggiunti degli elementi di contatto alle interfacce, definiti dai parametri k_n e k_t .

Il modello globale, in tal modo pronto per l'analisi modale, è stato utilizzato all'interno di una procedura di ricerca di k_n e k_t in cui vengono confrontate le frequenze del primo e secondo modo flessionale del modello FEM con le corrispondenti frequenze ottenute dall'analisi delle misure.

6.1 Assemblaggio dell'assieme

I gradi di libertà dei modelli ridotti sono stati ordinati come descritto in figura 6.1.

In particolare, nel vettore dei D.O.F. della trave sono stati inseriti in ordine:

1. i g.d.l. dei nodi master delle interfacce di contatto nelle posizioni ad X positiva, con Z positiva e negativa; ad X negativa, con Z positiva e negativa;
2. i g.d.l. dei nodi master ai lati della trave, per Z positiva e per Z negativa
3. i g.d.l. associati ai modi interni N derivanti dalla riduzione di Craig-Bampton.

nel vettore dei D.O.F. degli slot sono stati inseriti in ordine:

1. i g.d.l. dei nodi master delle interfacce di contatto nelle posizioni a Z positiva e negativa;
2. i g.d.l. dei nodi V ai vertici dei supporti;
3. i g.d.l. dei nodi B alla base dei supporti (successivamente vincolati);
4. i g.d.l. associati ai modi interni N derivanti dalla riduzione di Craig-Bampton.

I vettori dei g.d.l. dei singoli super-elementi sono stati inseriti nel vettore dei nodi globali secondo l'ordine: slot a X negativa, Trave, Slot a X positiva (figura 6.1).

6.1.1 Assemblaggio dei superelementi

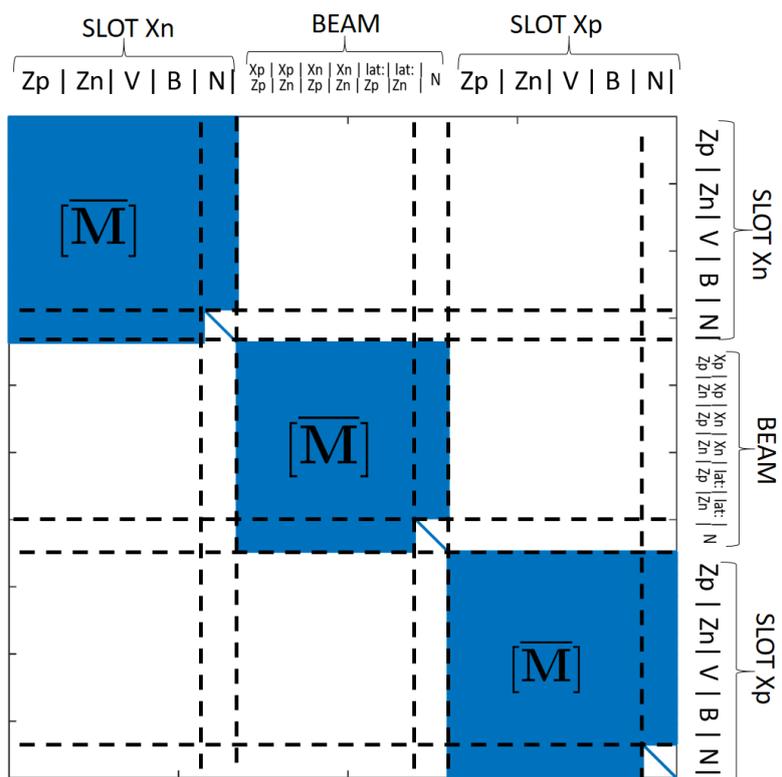


Figura 6.1: Assemblaggio delle matrici di massa dei superelementi

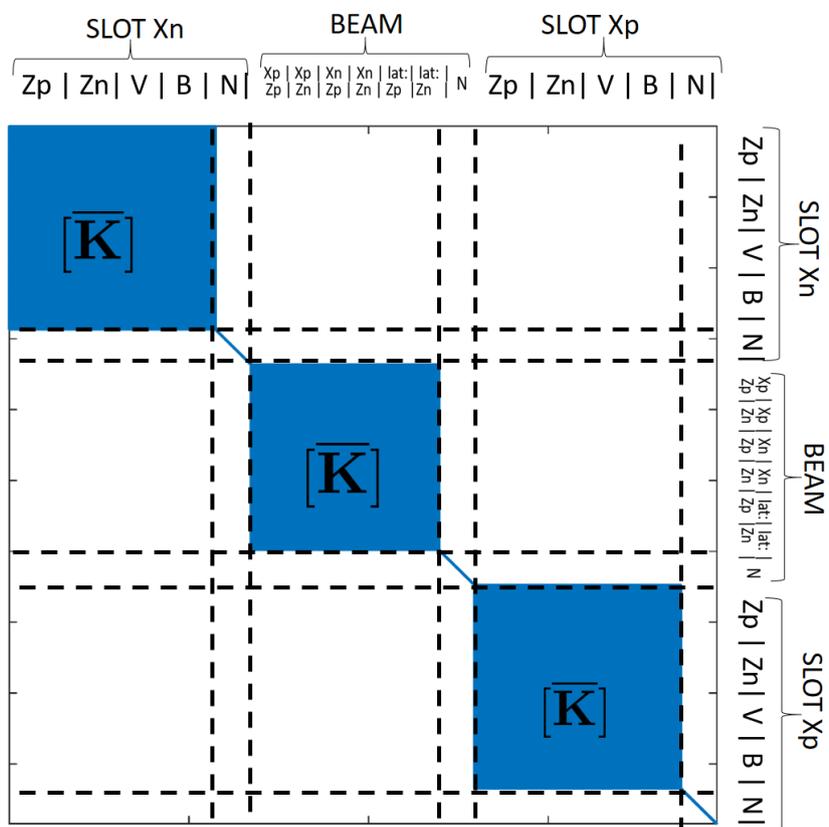


Figura 6.2: Assemblaggio delle matrici di rigidità dei superelementi

6.1.2 Vincoli ai supporti

Per le successive analisi modali (lineari) è stato necessario vincolare i nodi alla base dei supporti. Tali nodi sono stati precedentemente inseriti tra i nodi master per poter eventualmente svolgere analisi statiche applicando su di essi i carichi (analisi non svolte nel presente lavoro).

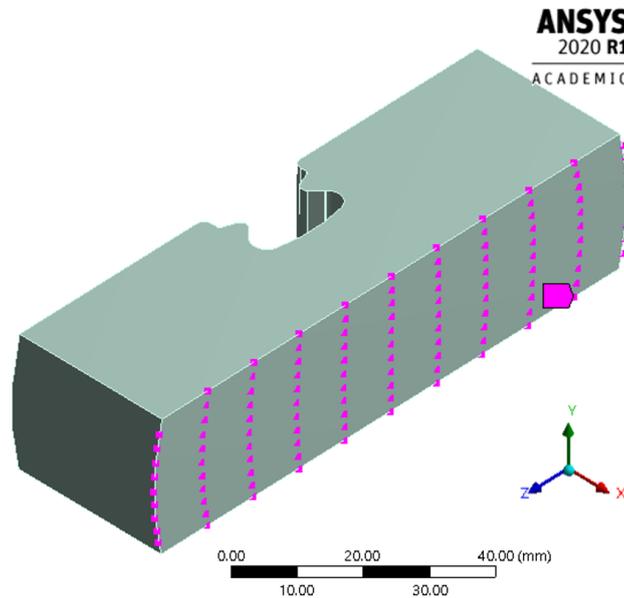


Figura 6.3: Nodi alla base dei supporti

Dividendo i gradi di libertà tra quelli effettivamente liberi (F) e quelli vincolati (C) è stato possibile partizionare le matrici di massa e rigidezza.

$$(-\omega^2 [M_{GLOB}] + [K_{GLOB}]) \{ \mathbf{q} \} = \{ \mathbf{0} \} + \{ R_v \}$$

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} [M_{FF}] & [M_{FC}] \\ [M_{CF}] & [M_{CC}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{FF}] & [K_{FC}] \\ [K_{CF}] & [K_{CC}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_C = \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ R_v \end{Bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{cases} \boxed{(-\omega^2 [M_{FF}] + [K_{FF}]) \{ \mathbf{q}_F \} = \{ \mathbf{0} \}} \\ (-\omega^2 [M_{CF}] + [K_{CF}]) \{ \mathbf{q}_F \} = \{ R_v \} \end{cases}$$

Le analisi modali sono state quindi svolte utilizzando le matrici $[M_{FF}]$, $[K_{FF}]$, ottenute dalle matrici globali $[M_{GLOB}]$, $[K_{GLOB}]$ eliminando le righe e le colonne corrispondenti ai gradi di libertà delle basi (B) dei due supporti. La struttura delle matrici risultanti è visibile in figura 6.4 e 6.5.

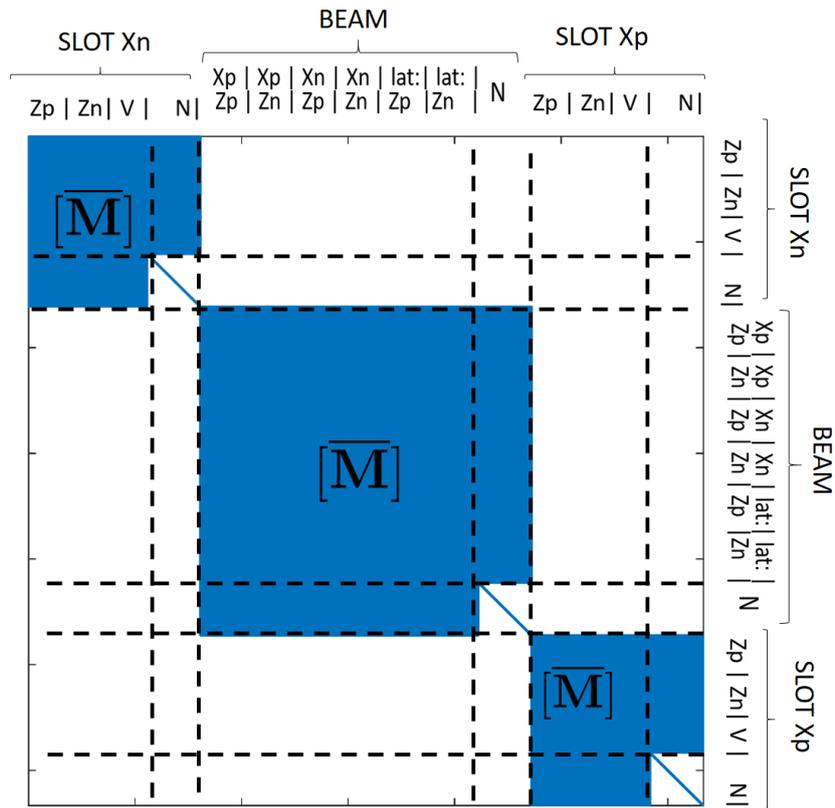


Figura 6.4: Matrice di massa globale dopo l'aggiunta dei vincoli

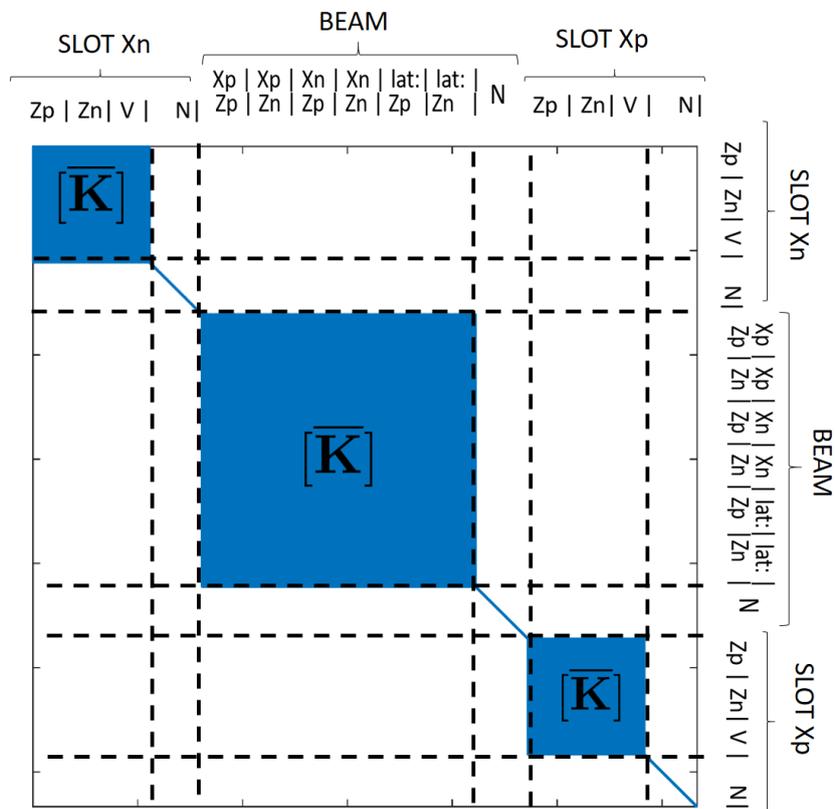


Figura 6.5: Matrice di rigidezza globale dopo l'aggiunta dei vincoli

6.1.3 Matrice di connettività

Per inserire gli elementi di contatto alle interfacce, è stato necessario definire preliminarmente una matrice di connettività per associare i gradi di libertà dei nodi coincidenti di trave e supporti. Ogni riga della matrice di connettività corrisponde ad una coppia di nodi coincidenti tra i quali dovrà essere inserito un elemento di contatto.

$$CONNECTIVITY = \begin{bmatrix} \overbrace{(\text{Xdof} \quad \text{Ydof} \quad \text{Zdof})}^{Beam} & \overbrace{(\text{Xdof} \quad \text{Ydof} \quad \text{Zdof})}^{SlotXn} \\ \vdots & \vdots \\ \overbrace{(\text{Xdof} \quad \text{Ydof} \quad \text{Zdof})}^{Beam} & \overbrace{(\text{Xdof} \quad \text{Ydof} \quad \text{Zdof})}^{SlotXp} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

I nodi coincidenti sono stati identificati cercando i nodi aventi lo stesso numero di identificazione utilizzato in ANSYS, secondo la procedura descritta nella sezione dedicata alla definizione della Mesh in ANSYS. E' stato verificato che tale metodo è equivalente alla ricerca dei nodi aventi la stesse coordinate.

6.1.4 Elemento di Contatto

Sono stati creati degli elementi di contatto lineari, ovvero che non implementano lo strisciamento né la separazione del contatto.

Matrice di rigidità in coordinate locali

$$K_{(e)}^L = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 & -k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 & 0 & -k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t & 0 & 0 & -k_t \\ -k_n & 0 & 0 & k_n & 0 & 0 \\ 0 & -k_t & 0 & 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & -k_t & 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \quad U^L = \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{z1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \\ U_{z2} \end{Bmatrix}$$

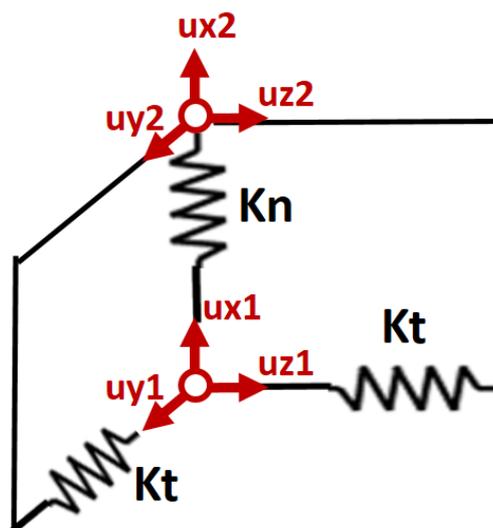


Figura 6.6: Elemento di contatto lineare

Matrice di rigidezza in coordinate globali

Per passare dal sistema locale a quello globale è stata utilizzata la matrice di rotazione $[\Lambda]$. Infatti, poiché l'energia potenziale totale è invariante rispetto al sistema di riferimento:

$$\{U_{(e)}^L\} = [\Lambda_{(e)}^L] \{U_{(e)}^G\}$$

$$\left. \begin{aligned} U_P &= \frac{1}{2} \{U_{(e)}^G\}^T [K_{(e)}^G] \{U_{(e)}^G\} \\ U_P &= \frac{1}{2} \{U_{(e)}^L\}^T [K_{(e)}^L] \{U_{(e)}^L\} = \frac{1}{2} ([\Lambda_{(e)}] \{U_{(e)}^G\})^T \cdot [K_{(e)}^L] \cdot ([\Lambda_{(e)}] \{U_{(e)}^G\}) = \frac{1}{2} \{U_{(e)}^G\}^T \left([\Lambda_{(e)}]^T [K_{(e)}^L] [\Lambda_{(e)}] \right) \cdot \{U_{(e)}^G\} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow [K_{(e)}^G] = [\Lambda_{(e)}]^T [K_{(e)}^L] [\Lambda_{(e)}]$$

dove la matrice di rotazione è data dalla relazione:

$$\{U^L\} = \begin{Bmatrix} U_{x1}^L \\ U_{y1}^L \\ U_{z1}^L \\ U_{x2}^L \\ U_{y2}^L \\ U_{z2}^L \end{Bmatrix} = [\Lambda_{(e)}^L] \{U_{(e)}^G\} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{0} & \mathbf{s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{s} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{0} & \mathbf{s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{s} & \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{x1}^G \\ U_{y1}^G \\ U_{z1}^G \\ U_{x2}^G \\ U_{y2}^G \\ U_{z2}^G \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} c := \cos \theta \\ s := \sin \theta \end{cases}$$

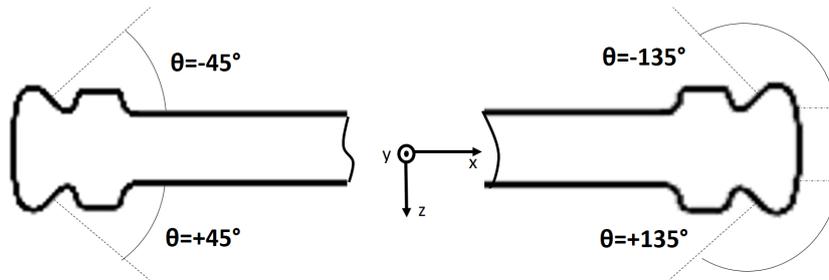


Figura 6.7: Rotazione delle coordinate degli elementi di contatto

Assemblaggio degli elementi di contatto

Per ogni coppia di nodi coincidenti è stato quindi inserito un elemento di contatto aggiungendo la matrice dell'elemento (in coordinate globali) $[K_{(e)}^G]$ alla matrice globale dell'assieme $[(K_{GLOB})_{FF}]$.

I D.O.F. dei nodi 1 e 2 dell'elemento di contatto corrispondono, nel sistema globale, rispettivamente ai D.O.F. del nodo della trave e del nodo del supporto indicati in ogni riga della matrice di connettività precedentemente creata.

La procedura di assemblaggio è verificabile osservando la struttura della matrice globale risultante, mostrata in figura 6.8.

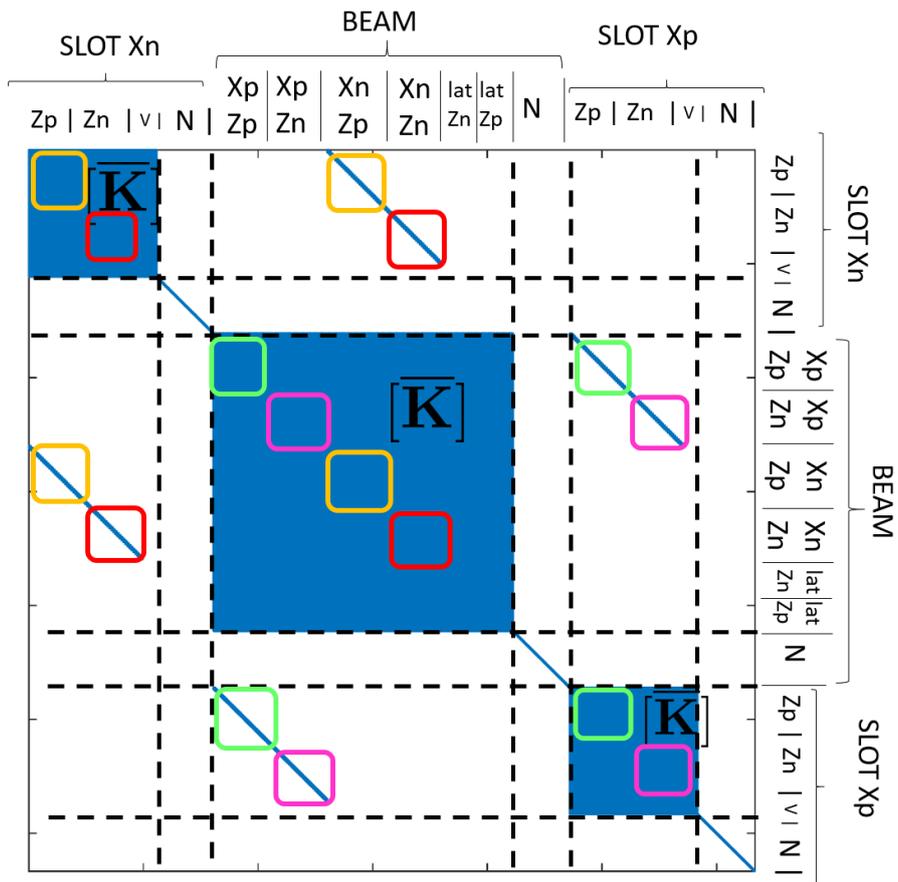


Figura 6.8: Assemblaggio degli elementi di contatto

6.2 Ricerca di k_n e k_t

La matrice globale $[(K_{GLOB})_{FF}]$ dipende quindi dai valori dei parametri k_n, k_t oggetto della presente ricerca. Per ottenere una stima di tali valori sono state confrontate le frequenze del modello FEM con le frequenze misurate, per il primo modo e per il secondo modo flessionale, per ogni forza assiale di trazione.

Il modello FEM qui creato presenta degli elementi di contatto che non implementano lo strisciamento né la separazione. Quindi, per ogni forza assiale F_{ax} , si ha un modello lineare del sistema. Per confrontare le frequenze naturali di tale modello con quelle misurate, è stato necessario estrarre dalle misure le frequenze ottenute durante la completa adesione delle regioni di contatto.

In particolare, analizzando le curve $f_n(A)$ ottenute dalle misure per ogni forza assiale, è stata selezionata la frequenza nel tratto in cui presenta un'andamento costante f_{STICK} , indice della completa adesione dei contatti e della linearità del sistema per quell'intervallo di ampiezze di vibrazione (figura 6.9).

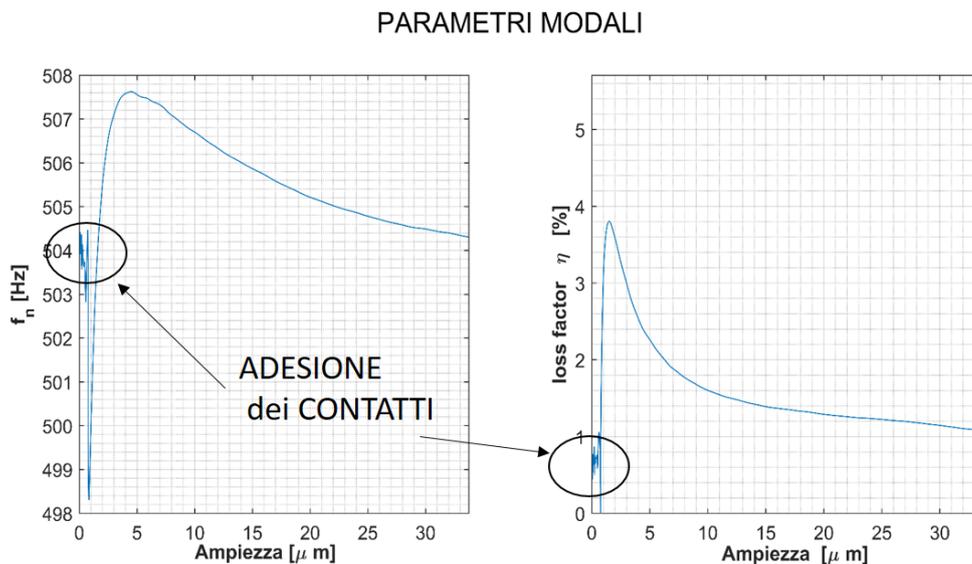


Figura 6.9: Selezione delle frequenze in completa adesione dei contatti

In figura 6.10 sono stati riportati i valori delle frequenze estratte al variare della forza assiale di trazione. Tali curve sono state confrontate con quelle teoriche ottenute dal modello della trave di Eulero-Bernoulli (vincolata alle due estremità) modificato per considerare l'effetto irrigidente della forza di trazione [30], riportato in appendice.

Lo scostamento delle frequenze misurate dall'andamento lineare teorico per bassi valori di trazione è attribuibile al microslip dei contatti [1]. Nella successiva analisi quindi sono state utilizzate soltanto le frequenze f_{STICK} ottenute per forze assiali di trazione maggiori di $12kN$, dove i contatti possono essere considerati in completa adesione e quindi il sistema ha un comportamento lineare, confrontabile con quello del modello agli elementi finiti.

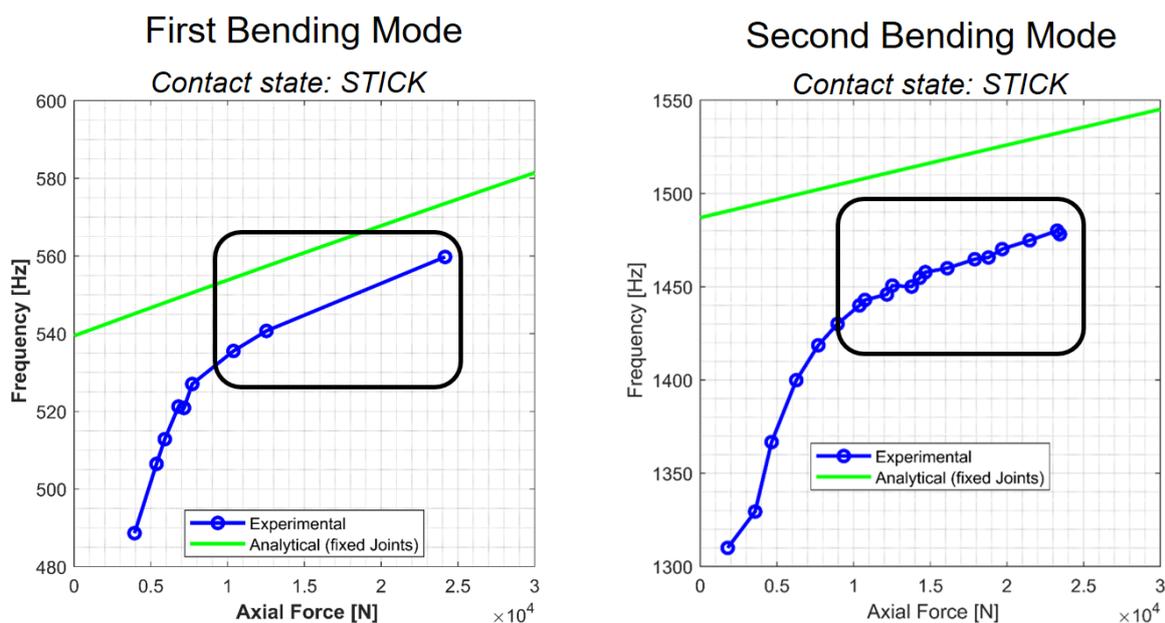


Figura 6.10: Selezione delle frequenze f_{STICK} per $F_{ax} > 12kN$

6.2.1 Non linearità del problema

Le frequenze del modello FEM lineare (per ogni forza assiale di trazione) sono state ottenute dalla classica analisi modale lineare. Considerando le matrici globali $[M] = [(M_{GLOB})_{FF}]$, $[K] = [(K_{GLOB})_{FF}]$:

$$[M]\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + [K_i(k_n, k_t)]\{\mathbf{q}(t)\} = \mathbf{0} \quad \forall F_{ax} \text{ i-esima}$$

la soluzione lineare è di tipo armonico:

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \{\bar{\mathbf{q}}\}e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad (-\omega^2 M + K_i)\{\bar{\mathbf{q}}\} = \mathbf{0}$$

Escludendo la soluzione banale $\{\bar{\mathbf{q}}\} = \mathbf{0}$, le altre possibili soluzioni (autovettori) si ottengono per quei valori di ω^2 (autovalori del problema generalizzato) per cui la matrice $(-\omega^2 M + K)$ non è invertibile. Tale condizione è verificata quando:

$$\det(-\omega^2 M + K_i(k_n, k_t)) = 0 \quad \forall F_i$$

da cui si ottiene il polinomio caratteristico, le cui radici $\omega_{n,i}^2$ sono gli autovalori cercati:

$$\sum_{j=0}^{Ndof} a_j(k_n, k_t) \cdot (\omega_{n,i}^2)^j = 0 \quad \forall F_i$$

La pulsazione naturale $\omega_n = 2\pi f_n$ di ogni modo n-esimo dipende dai coefficienti a_j del polinomio caratteristico, che sono funzioni non lineari dei parametri k_n, k_t . Quindi le frequenze di ogni modo dipendono non linearmente da k_n, k_t :

$$(f_n)_{FEM} = f_n(k_n, k_t) \quad \text{non lineare} \quad (\text{figura 6.11})$$

il confronto

$$(f_n)_{MISURE} - (f_{n,i})_{FEM}(k_n, k_t) = 0 \quad \forall F_i \quad n = \begin{cases} 1B: \text{First Bending Mode} \\ 2B: \text{Second Bending Mode} \end{cases}$$

ha richiesto quindi un metodo locale iterativo o uno globale per la ricerca della soluzione (k_n, k_t) .

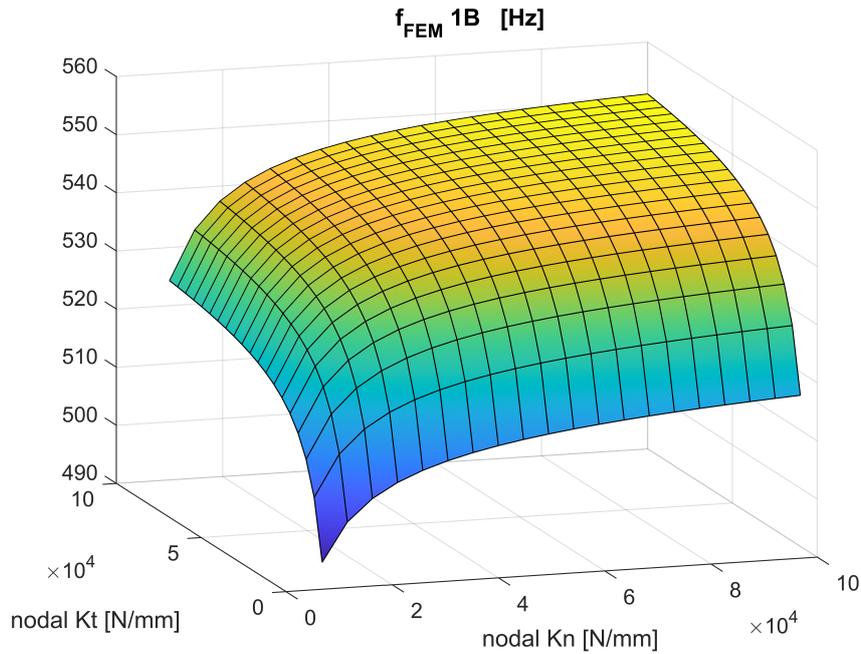


Figura 6.11: Esempio dipendenza non lineare della frequenza da k_n, k_t

6.2.2 Ricerca della soluzione (k_n, k_t) per ogni forza assiale

Poiché le incognite del problema sono due (k_n, k_t) , è stato necessario considerare almeno due equazioni per ottenere una soluzione.

Si è deciso quindi di ricercare la soluzione (k_n, k_t) per ogni forza assiale i -esima, imponendo il confronto tra le frequenze misurate e quelle del modello FEM, per il primo ed il secondo modo flessionale:

$$\begin{cases} (f_{1B})_{FEM}(k_n, k_t) - (f_{1B})_{MISURE} = 0 \\ (f_{2B})_{FEM}(k_n, k_t) - (f_{2B})_{MISURE} = 0 \end{cases} \quad \forall F_i$$

che può essere scritta in forma vettoriale come:

$$\{\Delta f\} = \begin{Bmatrix} (\Delta f)_{1B}(k_n, k_t) \\ (\Delta f)_{2B}(k_n, k_t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La funzione $\{\Delta f\} : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ così ottenuta non si annulla in alcun punto (ovvero non vi sono (k_n, k_t) tali da soddisfare entrambi i confronti $(\Delta f)_{1B}, (\Delta f)_{2B}$), ma presenta solo dei minimi. Ciò è causato dal non aver ancora considerato l'errore su $\{\Delta f\}$ dovuto agli errori delle misure e ad un eventuale errore del modello FEM. Il sistema di equazioni quindi diventa:

$$\{|\Delta f|\} < \delta \{\Delta f\}$$

Tale sistema è stato risolto con una ricerca globale -sul dominio (k_n, k_t) - della condizione:

$$\|\{\Delta f\}\| < \delta \|\{\Delta f\}\|$$

dove $\|\{\Delta f\}\|$ è la norma euclidea del vettore $\{\Delta f\}$ e $\delta \|\{\Delta f\}\|$ è l'errore della norma, calcolato con la teoria della propagazione degli errori, come di seguito descritto. E' stata utilizzata la norma per poter visualizzare la ricerca in grafici tridimensionali. In tal modo infatti sono presenti due variabili (k_n, k_t) ed un valore scalare della funzione obiettivo: $\|\{\Delta f\}\|$.

6.2.3 Propagazione dell'errore delle misure e Spazio delle soluzioni

$$\|\{\Delta f\}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\Delta f)_i^2}$$

Dalla teoria della propagazione degli errori, data una funzione q delle variabili $x_j = \bar{x}_j \pm \delta x_j$, l'incertezza massima δq è data da:

$$\delta q = \sum_j \left| \frac{\partial q}{\partial \bar{x}_j} \right| \delta x_j$$

nel caso in esame

$$q = \|\{\Delta f\}\| = \sqrt{(f_{FEM} - f_{MIS})_{1B}^2 + (f_{FEM} - f_{MIS})_{2B}^2}$$

$$\delta \|\{\Delta f\}\| = \frac{1}{\|\{\Delta f\}\|} \cdot [|\Delta f|_{1B} (\delta f_{1B_{MIS}} + \delta f_{1B_{FEM}}) + |\Delta f|_{2B} (\delta f_{2B_{MIS}} + \delta f_{2B_{FEM}})]$$

dove $\delta f_{1B_{MIS}}, \delta f_{2B_{MIS}}$ sono le incertezze delle misure e $\delta f_{1B_{FEM}}, \delta f_{2B_{FEM}}$ sono gli errori del modello FEM -arbitrariamente definiti- inseriti per tenere in considerazione l'eventuale non validità delle assunzioni fatte, tra cui la linearità del sistema, ovvero la completa adesione delle regioni di contatto.

Nel dettaglio, poiché le forze assiali di ogni punto (F_{ax}, f_{MIS}) delle misure non corrisponde necessariamente ad una delle forze assiali utilizzate per il calcolo agli elementi finiti, è stato necessario interpolare linearmente le frequenze delle misure per ottenere una stima della frequenza alla stessa forza utilizzata nel modello FEM. Quindi è stato necessario calcolare la propagazione dell'errore delle misure in questo processo di interpolazione:

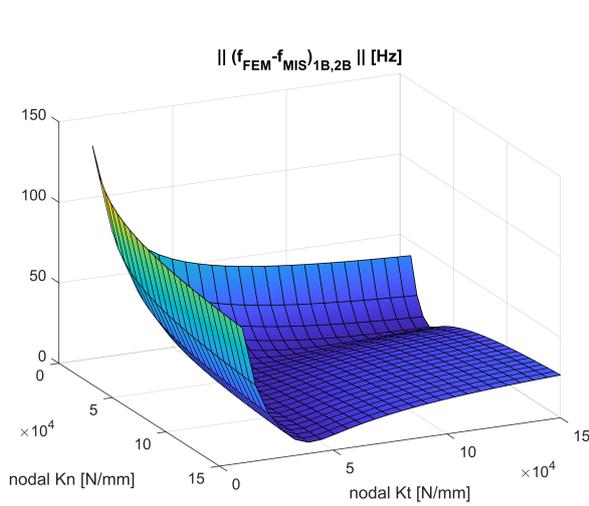
$$f(F) = f_1 + \frac{f_2 - f_1}{F_2 - F_1} (F - F_1) \quad \begin{cases} F = \text{Forza utilizzata nel FEM} \\ f_1, f_2 = \text{frequenze misurate} \\ F_1, F_2 = \text{forze misurate} \end{cases}$$

Ipotizzando errori indipendenti e casuali:

$$\delta f = \sqrt{\sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \delta x_j \right)^2} \quad x_j = f_1, f_2, F_1, F_2$$

F	[kN]	12	14	16	18	20	22
δf 1B MIS	[Hz]	0.24	0.19	0.19	0.22	0.28	0.34
δf 2B MIS	[Hz]	0.22	0.89	0.09	0.46	0.37	0.56

Tabella 6.1: Errore delle frequenze misurate interpolate per le forze del FEM



(a)

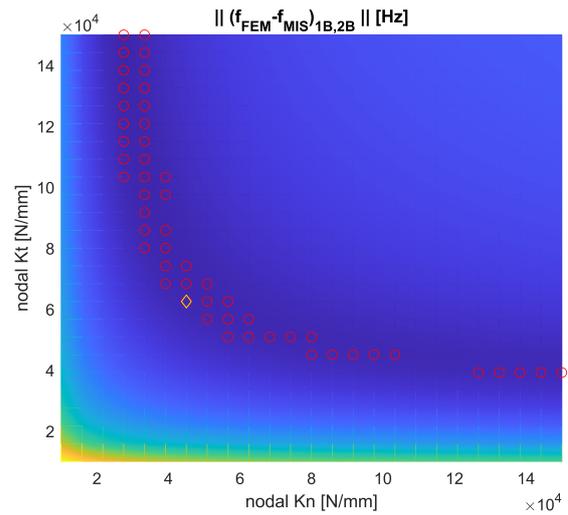
(b) Esempio di spazio delle soluzioni (cerchi rossi) - ($F_{ax} = 12kN$)

Figura 6.12: Ricerca globale del minimo (inferiore alla tolleranza:=incertezza)

Come è possibile osservare in figura 6.12(b), le possibili soluzioni (k_n, k_t) trovate appartengono ad una curva con andamento simile ad un'iperbole equilatera.

6.2.4 Stima dell'errore di k_n, k_t e ricerca della soluzione con minimo errore

Per definire una soluzione unica tra l'insieme di quelle possibili (definito come sopra) è stato stimato l'errore associato alle rigidezze (k_n, k_t) di ogni punto dell'insieme delle soluzioni. È stato quindi considerato come soluzione finale il punto con il minimo errore. La procedura seguita per la stima dell'errore è descritta in dettaglio in [38].

La funzione vettoriale costituita dalle frequenze $(f_{1B})_{FEM}(k_n, k_t), (f_{2B})_{FEM}(k_n, k_t)$:

$$\mathbf{f}(k_n, k_t) = \begin{Bmatrix} (f_{1B})_{FEM}(k_n, k_t) \\ (f_{2B})_{FEM}(k_n, k_t) \end{Bmatrix}$$

può essere approssimata nell'intorno del punto di soluzione $(k_n, k_t)_0$ con lo sviluppo di Taylor utilizzando lo Jacobiano:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{f}(n, \mathbf{k})}{\partial k_j} \right)_{\mathbf{k}_0} (k_j - k_{0j}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k} = \begin{Bmatrix} k_n \\ k_t \end{Bmatrix} \\ \mathbf{k}_0 = \text{punto di soluzione} \\ j = 1, 2 \\ n = \text{modi } 1B, 2B \end{array} \right.$$

che in forma matriciale diventa:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{J}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_{1B}}{\partial k_n} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1B}}{\partial k_t} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{2B}}{\partial k_n} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2B}}{\partial k_t} \end{bmatrix}$$

il generico errore sulla frequenza nell'intorno della soluzione -indicata con "0"- può quindi essere scritto in funzione del generico errore sulle rigidezze:

$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{J} \delta \mathbf{k}$$

Viene definita la matrice diagonale

$$[1/\sigma^2] = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{1B}^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{2B}^2 \end{bmatrix}$$

contenente l'inverso delle varianze (= quadrato delle deviazioni standard) degli errori delle misure delle frequenze. Pre-moltiplicando per $\mathbf{J}^T [1/\sigma^2]$:

$$\mathbf{J}^T [1/\sigma^2] \delta \mathbf{f} = \mathbf{J}^T [1/\sigma^2] \mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{k}$$

da cui:

$$\delta \mathbf{k} = \mathbf{C} \mathbf{J}^T [1/\sigma^2] \cdot \delta \mathbf{f} \quad \mathbf{C} = (\mathbf{J}^T [1/\sigma^2] \mathbf{J})^{-1}$$

Indicando con $\langle x \rangle$ il valore atteso di x , la matrice delle covarianze delle rigidezze del punto di soluzione considerato $\mathbf{k}_0 = \{k_n, k_t\}_0$ può essere calcolata come segue:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{k}}^2 &= \begin{bmatrix} \sigma_{nn}^2 & \sigma_{nt}^2 \\ \sigma_{tn}^2 & \sigma_{tt}^2 \end{bmatrix} = \langle \delta \mathbf{k} \delta \mathbf{k}^T \rangle = \langle \mathbf{C} \mathbf{J}^T [1/\sigma^2] \delta \mathbf{f} (\mathbf{C} \mathbf{J}^T [1/\sigma^2] \delta \mathbf{f})^T \rangle = \\ &= \langle \mathbf{C} \mathbf{J}^T [1/\sigma^2] \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f}^T [1/\sigma^2]^T \mathbf{J} \mathbf{C}^T \rangle = \\ &= \mathbf{C} \mathbf{J}^T [1/\sigma^2] \langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f}^T \rangle [1/\sigma^2] \mathbf{J} \mathbf{C}^T \end{aligned}$$

Assumendo gli errori δf_j delle misure delle frequenze statisticamente non correlati:

$$\langle \delta \mathbf{f} \delta \mathbf{f}^T \rangle = \begin{bmatrix} \sigma_{1B^2} & 0 \\ 0 & \sigma_{2B^2} \end{bmatrix} := [\sigma^2]$$

da cui:

$$\sigma_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{C} \mathbf{J}^T [1/\sigma^2] [\sigma^2] [1/\sigma^2] \mathbf{J} \mathbf{C}^T = \mathbf{C} (\mathbf{J}^T [1/\sigma^2] \mathbf{J}) \mathbf{C}^T = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{C}^T = \mathbf{C}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla simmetria della matrice \mathbf{C} . In conclusione:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \sigma_{nn}^2 & \sigma_{nt}^2 \\ \sigma_{tn}^2 & \sigma_{tt}^2 \end{bmatrix} = \sigma_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{C} = (\mathbf{J}^T [1/\sigma^2] \mathbf{J})^{-1} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_{1B}}{\partial k_n} & \frac{\partial \mathbf{f}_{1B}}{\partial k_t} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{2B}}{\partial k_n} & \frac{\partial \mathbf{f}_{2B}}{\partial k_t} \end{bmatrix} \quad [1/\sigma^2] = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{1B}^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{2B}^2 \end{bmatrix}}$$

In tal modo è ottenuta la matrice delle covarianze delle rigidezze per ogni punto dell'insieme delle soluzioni trovate precedentemente.

Per ricercare la soluzione con il minimo errore è stata utilizzata la seguente misura dell'errore complessivo:

$$Err = \|\sigma_{\mathbf{k}}^2\|_2$$

Nel punto di soluzione finale, avente $\min \|\sigma_{\mathbf{k}}^2\|_2$, le deviazioni standard delle due rigidezze k_{n0}, k_{t0} sono rispettivamente σ_{nn} e σ_{tt} . Quindi si può scrivere:

$$\boxed{k_n = k_{n0} \pm \sigma_{nn} \quad k_t = k_{t0} \pm \sigma_{tt}}$$

Un esempio del punto di minimo errore tra l'insieme dei punti di soluzione trovati per $F_{ax} = 12kN$ è visibile in figura 6.13 (rombo giallo).

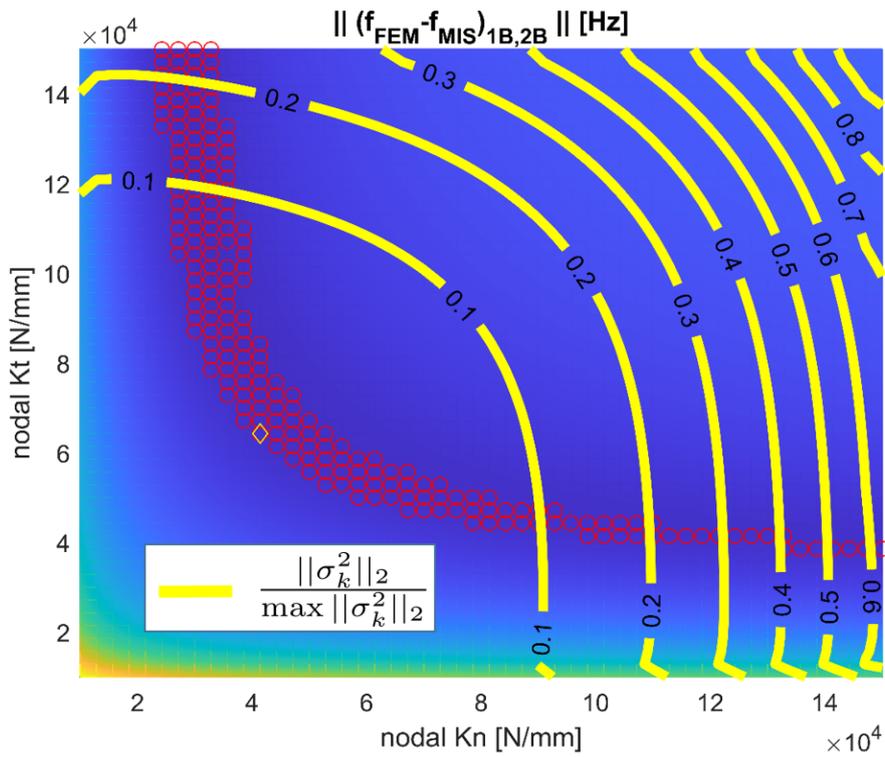


Figura 6.13: Soluzione (k_n, k_t) con minimo errore ($F=12\text{kN}$)

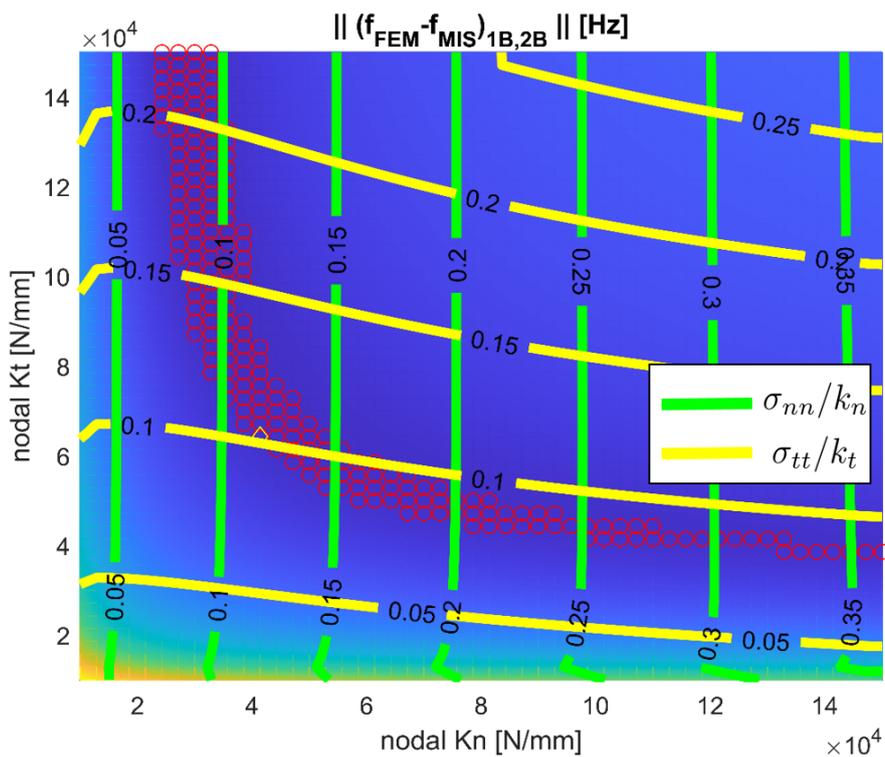


Figura 6.14: Errori percentuali di k_n e k_t

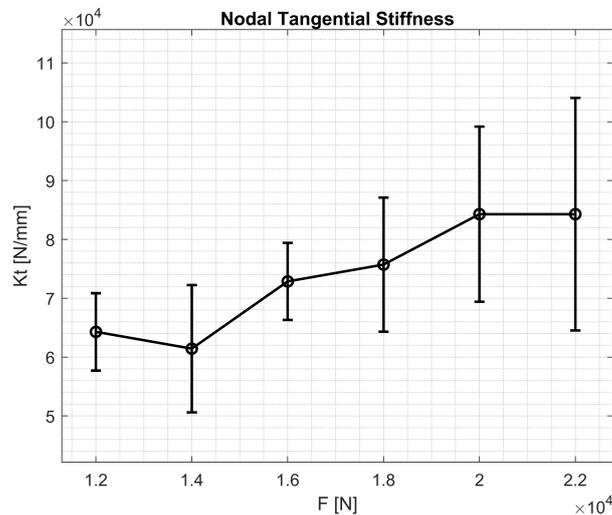
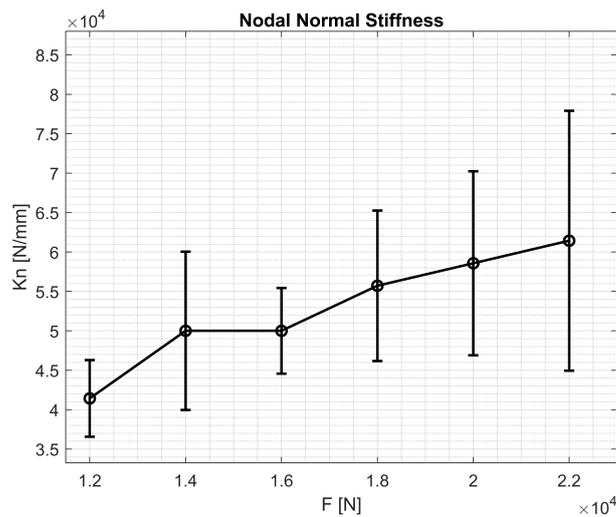
6.3 Risultati della ricerca di k_N, k_t

La procedura per la ricerca di k_n e k_t fin qui descritta è stata effettuata per ogni forza assiale i -esima dell'intervallo visibile in figura 6.10.

Si riportano di seguito i risultati. Si noti che le rigidezze trovate sono quelle nodali. Per stimare le rigidezze complessive di ogni regione di contatto è necessario moltiplicare i risultati per il numero di nodi (33) utilizzati per ogni interfaccia.

F [kN]	k_n [N/mm]	$\sigma_{nn} = \delta k_n$ [N/mm]	$\delta k_n / k_n$ [%]	k_t [N/mm]	$\sigma_{tt} = \delta k_t$ [N/mm]	$\delta k_t / k_t$ [%]
12	41428.6	4866.6	11.7%	64285.7	6587.2	10.2%
14	50000.0	10042.7	20.1%	61428.6	10822.9	17.6%
16	50000.0	5439.4	10.9%	72857.1	6550.7	9.0%
18	55714.3	9546.3	17.1%	75714.3	11395.6	15.1%
20	58571.4	11672.8	19.9%	84285.7	14891.4	17.7%
22	61428.6	16485.4	26.8%	84285.7	19768.3	23.5%

Tabella 6.2: Risultati finali della ricerca di k_n, k_t



Le rigidezze ottenute sono associate alle frequenze del modello agli elementi finiti visibili nella figura 6.15.

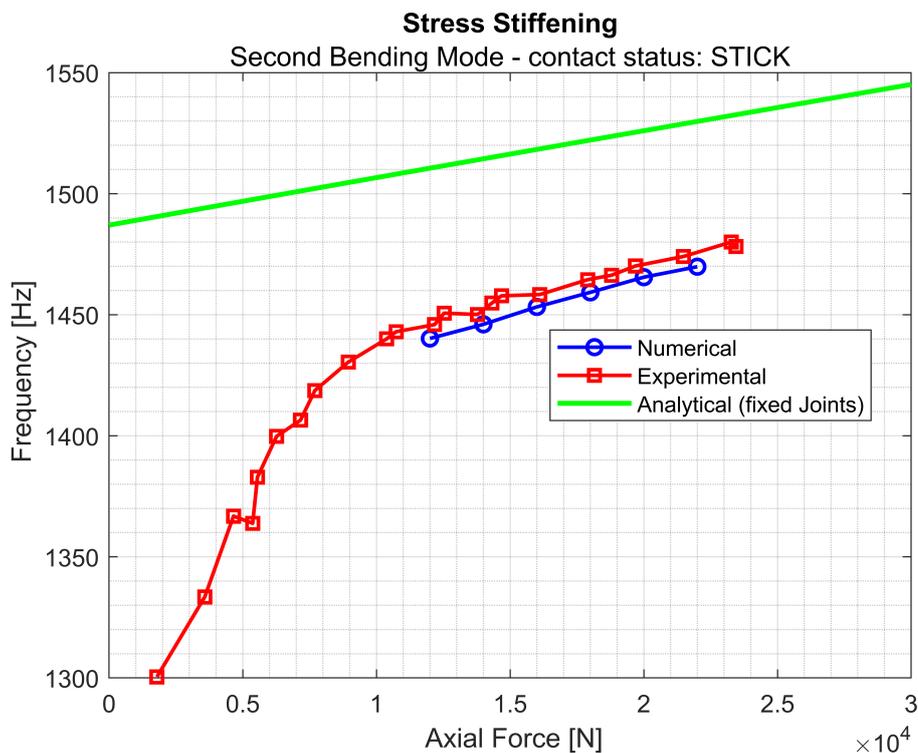
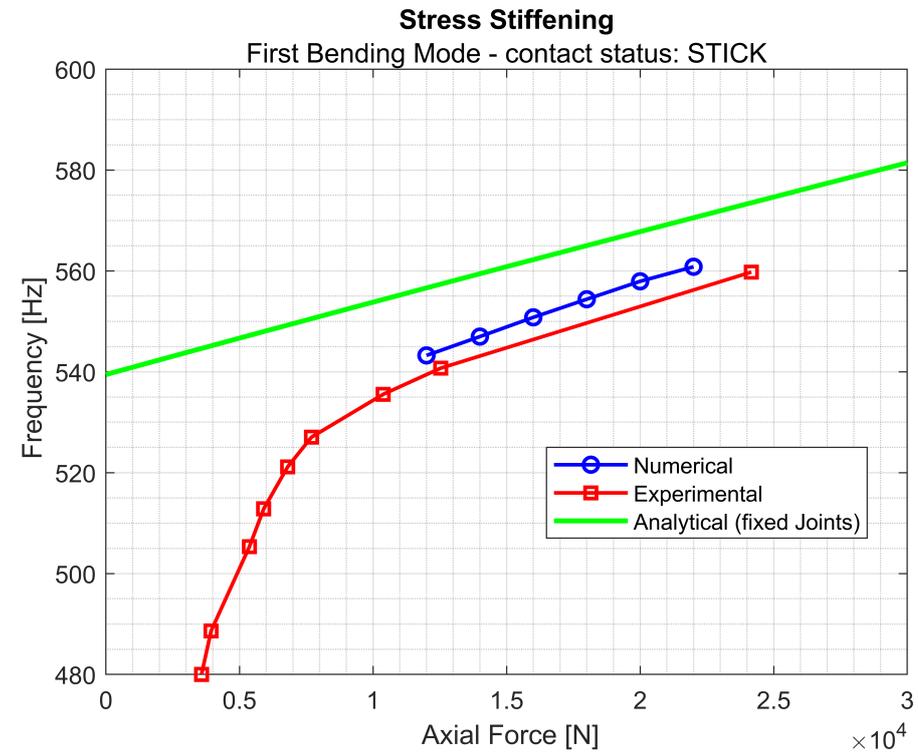


Figura 6.15: Risultati del confronto delle frequenze per la ricerca di k_n, k_t

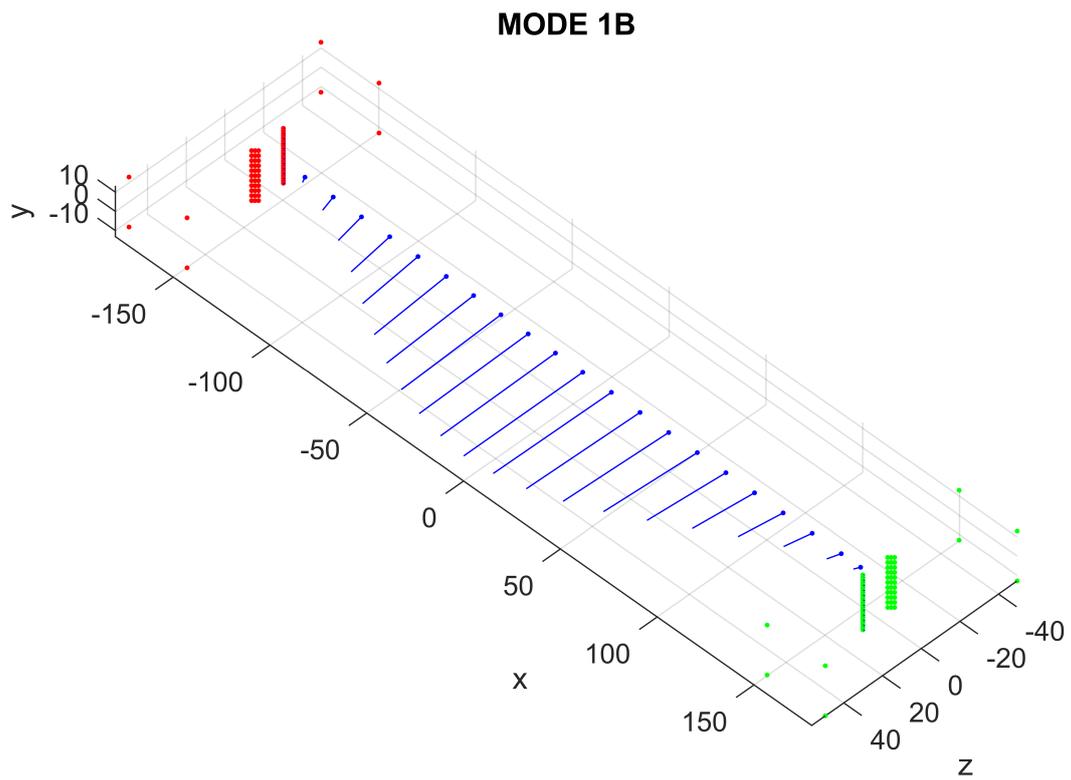


Figura 6.16: Primo Modo Flessionale

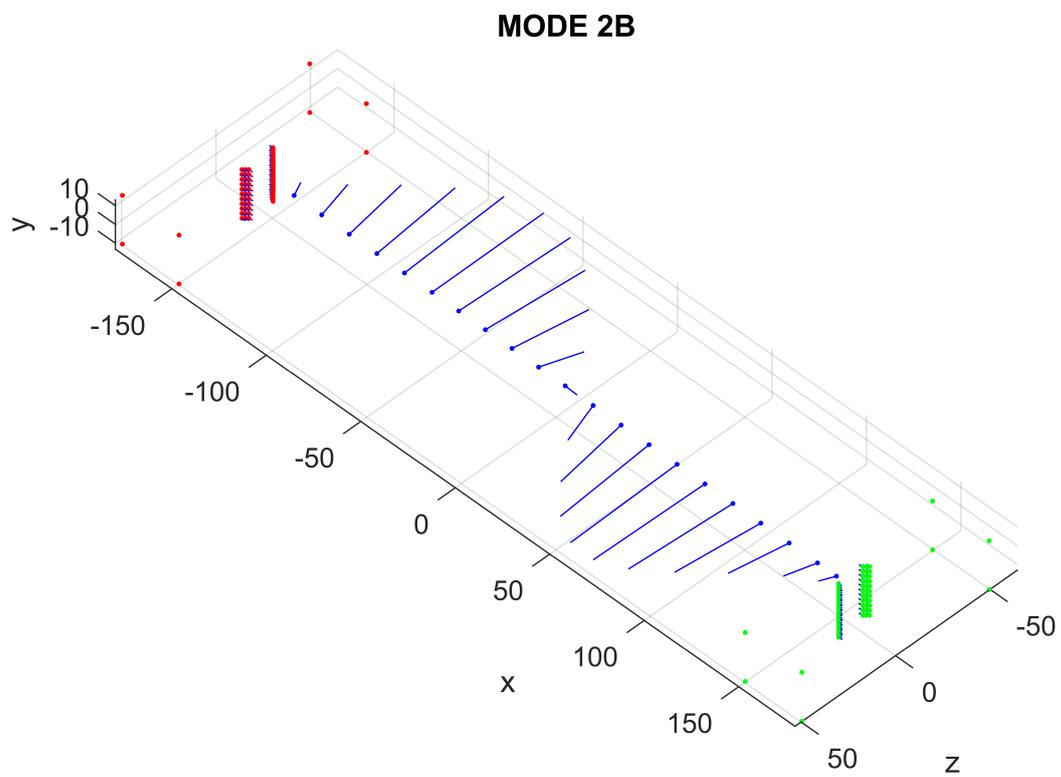


Figura 6.17: Secondo Modo Flessionale

Capitolo 7

Stima teorica delle rigidzze di contatto

7.1 Modello di Contatto

Il contatto strisciante tra superfici conformi è stato studiato teoricamente in [44], dove il modello dell'indentatore (figura 7.1) con i bordi arrotondati pressato sul semispazio piano - utilizzato in [43] - è esteso al caso tridimensionale e gli spostamenti sono calcolati tramite la teoria del potenziale sviluppata da Cerruti e Bussinesq [45].

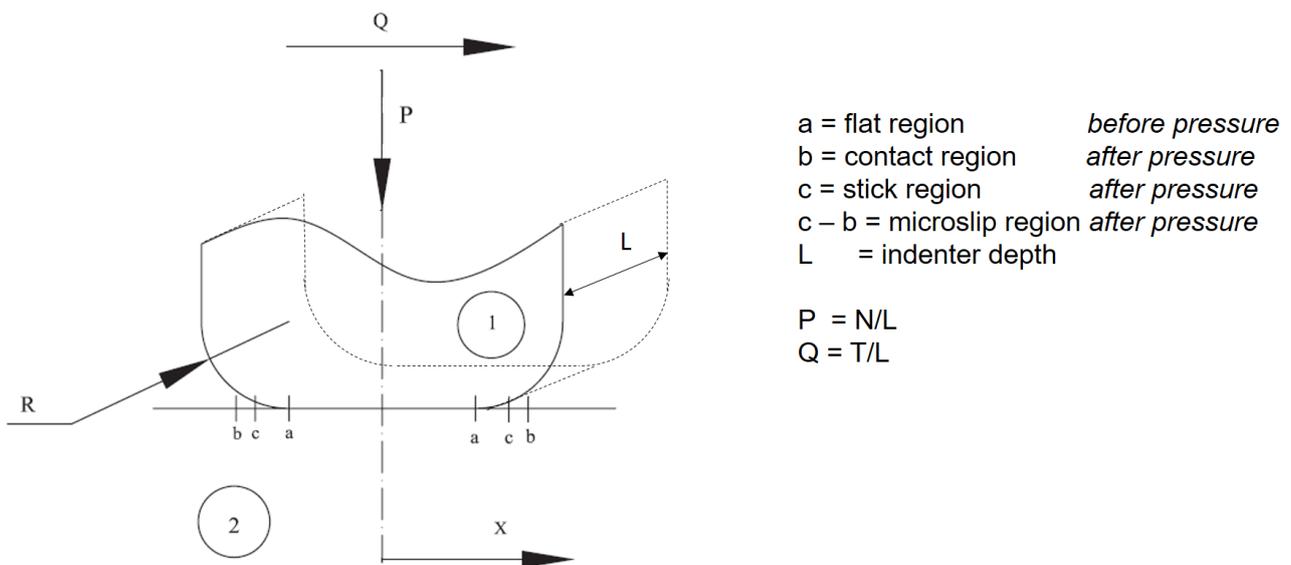


Figura 7.1: Modello dell'indentatore (1) sul semispazio piano (2) [44]

La geometria del contatto del giunto dovetail in esame presenta delle differenze rispetto al modello dell'indentatore, come è possibile osservare in figura 7.2. Per applicare il modello teorico sono quindi stati utilizzati i seguenti parametri:

Geometria		Materiale (acciaio SAE 1040)	
a [mm]	2.5665/2	E [GPa]	210
R [mm]	2.50	ν	0.3
L [mm]	26	μ	0.42 [46]

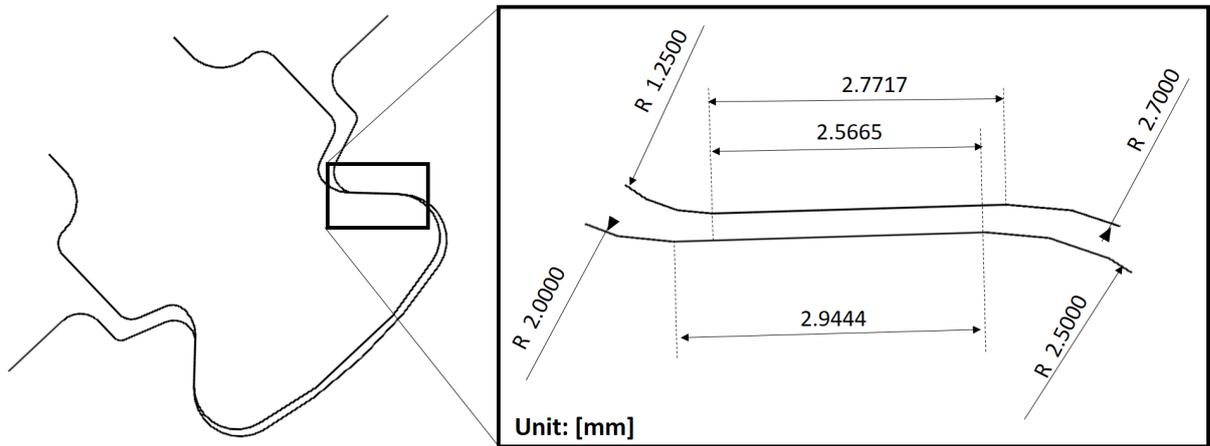


Figura 7.2: Geometria del contatto

E' stato utilizzato il raggio di curvatura maggiore tra $R = 2.5\text{mm}$ e $R = 1.25\text{mm}$

Per ricavare le rigidezze di contatto sono state calcolate le derivate delle Forze (Tangenziale o Normale) rispetto ai corrispondenti spostamenti ottenuti con la procedura descritta in [44].

In particolare in [44] le distribuzioni bidimensionali di pressione e sforzo di taglio ricavate in [43] sono utilizzate come punto di partenza per ricavare gli spostamenti del caso tridimensionale.

7.1.1 Distribuzioni 2D di pressione e taglio

Pressione

La larghezza della regione di contatto b è funzione della geometria (a, R), del carico normale per unità di lunghezza ($P = N/L$) e del materiale ($E, \nu \rightarrow E^*$). Essa può essere ricavata risolvendo l'equazione proposta in [43]:

$$\frac{a}{b} = \sin \varphi_0 \quad \frac{4PR}{a^2 E^*} = \frac{\pi - 2\varphi_0}{2 \sin^2 \varphi_0} - \cot \varphi_0 \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} = 2 \frac{1 - \nu^2}{E}$$

Definendo φ come:

$$\frac{x}{b} = \sin \varphi$$

la distribuzione di pressione bidimensionale [43] è:

$$\frac{bp(\varphi)}{P} = \frac{2/\pi}{\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0} \left\{ (\pi - 2\varphi_0) \cos \varphi + \ln \left[\left| \frac{\sin(\varphi + \varphi_0)}{\sin(\varphi - \varphi_0)} \right|^{\sin \varphi} \cdot \left| \tan \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \tan \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right|^{\sin \varphi_0} \right] \right\}$$

Sforzo di Taglio

Lo sforzo di taglio può essere scritto come sovrapposizione di due distribuzioni [44],[43]:

$$q_x(x) = \mu p(x) - q^*(x)$$

dove $\mu p(x)$ è lo sforzo di taglio che si avrebbe se il contatto fosse in completo strisciamento è q^* può essere ricavato in modo analogo a $p(x)$. L'ampiezza della regione di adesione c è ottenuta risolvendo:

$$\sin \theta_0 = \frac{a}{c} \quad \frac{4PR}{a^2 E^*} \left(1 - \frac{Q}{\mu P}\right) = \frac{\pi - 2\theta_0}{2 \sin^2 \theta_0} - \cot \theta_0$$

e definendo θ come:

$$\frac{x}{c} = \sin \theta$$

la distribuzione correttiva q^* è data dall'espressione:

$$\frac{c q^*(\theta)}{\mu P - Q} = -\frac{2/\pi}{\pi - 2\theta_0 - \sin 2\theta_0} \left\{ (\pi - 2\theta_0) \cos \theta + \ln \left[\left| \frac{\sin(\theta + \theta_0)}{\sin(\theta - \theta_0)} \right|^{\sin \theta} \cdot \left| \tan \frac{\theta + \theta_0}{2} \tan \frac{\theta - \theta_0}{2} \right|^{\sin \theta_0} \right] \right\}$$

7.2 Rigidezza tangenziale

Utilizzando le distribuzioni di pressione e taglio sopra riportate, tramite la teoria del potenziale di Boussinesq-Cerruti [45] è possibile valutare lo spostamento tangenziale u_{x1}, u_{x2} [44] dei due corpi e quindi il loro spostamento relativo δ_x in funzione del carico normale $N = P \cdot L$ e tangenziale $T = Q \cdot L$:

$$\delta_x = u_{x1} - u_{x2} = \frac{2}{\pi E^*} \left[-\int_{-b}^b q_x(r) \ln \left| \frac{r}{b} \right| dr + Q \left(\ln \left| \frac{r}{b} \right| + \frac{\nu}{1-\nu} \right) \right] = f(P, Q)$$

E' stata quindi calcolata numericamente la rigidezza tangenziale al variare della forza normale N:

$$k_t(N) = \left(\frac{\partial T}{\partial \delta_x} \right)_{\delta_x=0} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \delta_x}{\partial T}(N, T) \right)_{T=0}}$$

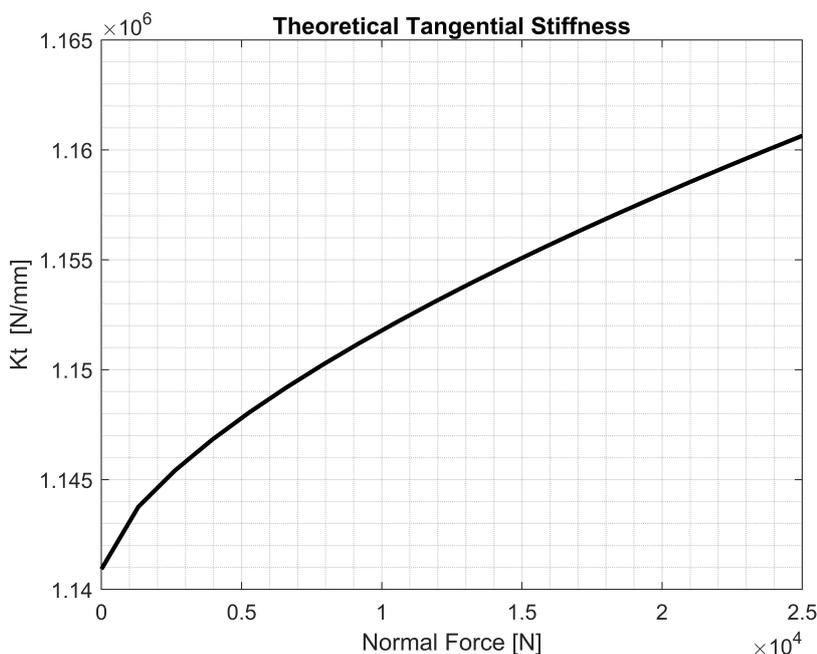


Figura 7.3

7.3 Rigidezza normale

Analogamente a quanto fatto per la rigidezza tangenziale, dalla distribuzione di pressione è possibile calcolare gli spostamenti normali u_{z1}, u_{z2} tramite la teoria del potenziale [45] studiando separatamente l'influenza della pressione sullo spostamento u_z , ovvero analizzando il caso in cui $q_x = 0$:

$$u_z = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{\Sigma} p(r,s) \cdot \frac{1}{\rho(r,s)} dr ds \quad \rho = \sqrt{(r-x)^2 + (s-y)^2 + z^2}$$

nel caso in esame è assunta una distribuzione $p = p(r)$ costante lungo L.

$$\begin{aligned} u_{z0} = u_z(x=y=z=0) &= \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{-b}^b p(r) \cdot \left(\int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{r^2+s^2}} ds \right) dr \\ &= \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{-b}^b p(r) \cdot \left[\ln \left| s + \sqrt{s^2+r^2} \right| \right]_{-L/2}^{L/2} dr = \\ &= \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{-b}^b p(r) \cdot \ln \left| \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}} \right| dr \end{aligned}$$

Dunque lo spostamento relativo è:

$$\delta_z = u_{z1} - u_{z2} = \frac{1}{\pi E^*} \int_{-b}^b p(r) \cdot \ln \left| \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}} \right| dr$$

E' stata quindi calcolata numericamente la rigidezza normale al variare della forza normale N:

$$k_n(N) = \frac{\partial N}{\partial \delta_z} = \frac{1}{\frac{\partial \delta_z}{\partial N}(N)}$$

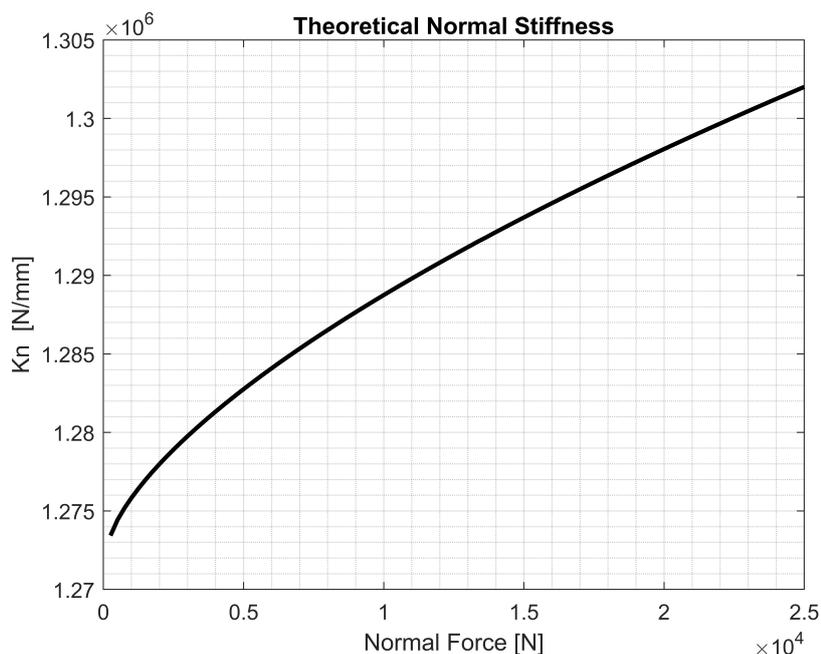


Figura 7.4

7.4 Confronto dei valori ottenuti con quelli teorici

Per confrontare le rigidezze teoriche k_n, k_t del contatto con le rigidezze nodali ottenute dal modello FEM è stato necessario moltiplicare tali rigidezze per il numero di nodi all'interfaccia (33).

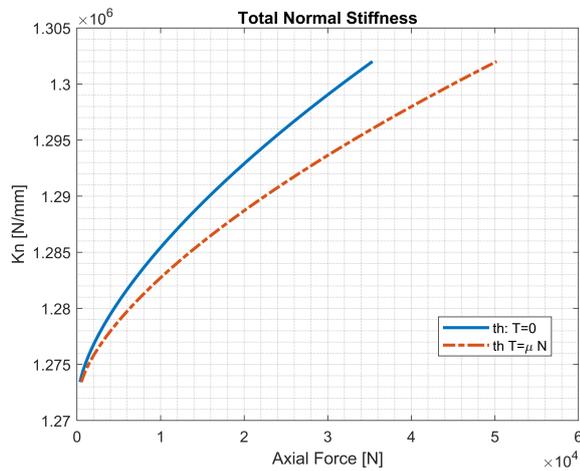
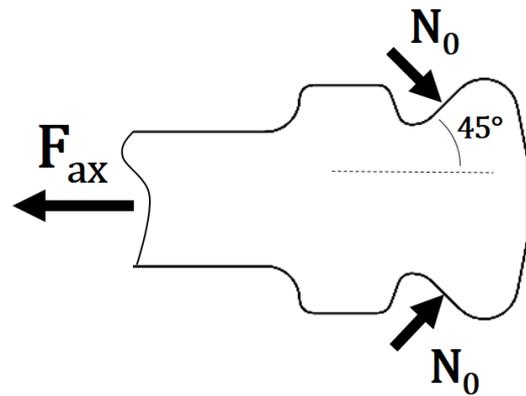
$$(k_n)_{tot} = 33 \cdot (k_n)_{nodal} \quad \left(\frac{\delta k_n}{k_n} \right)_{tot} = \left(\frac{\delta k_n}{k_n} \right)_{nodal}$$

$$(k_t)_{tot} = 33 \cdot (k_t)_{nodal} \quad \left(\frac{\delta k_t}{k_t} \right)_{tot} = \left(\frac{\delta k_t}{k_t} \right)_{nodal}$$

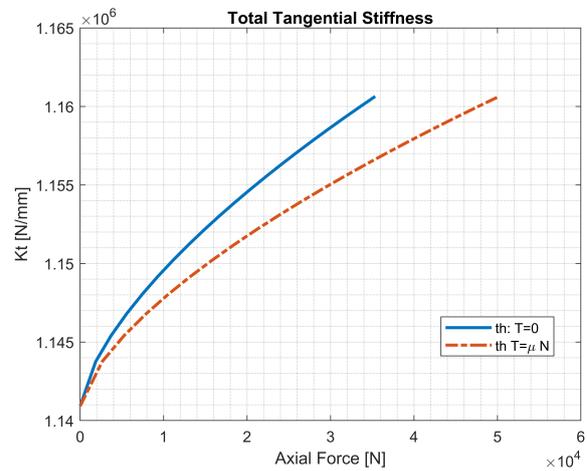
Le rigidezze teoriche sono funzioni della forza normale N , invece i risultati del presente lavoro sono riportati in funzione della forza assiale di trazione. Per confrontare i risultati sono stati considerati i casi limite $T = 0$ e $T = \mu N$:

$$2(N \sin \theta + T \cos \theta) = F_{ax}$$

$$F_{ax} = \begin{cases} (2 \sin \theta) \cdot N & @T = 0 \\ 2(\sin \theta + \mu \cos \theta) \cdot N & @T = \mu N \end{cases}$$



(a)



(b)

Riportando quindi il confronto tra le rigidezze ottenute e quelle teoriche (figure 7.5, 7.6) si è notato che la procedura numerico-sperimentale utilizzata nel presente lavoro fornisce delle rigidezze superiori a quelle del modello analitico ed una dipendenza delle rigidezze dalla forza assiale più marcata di quella teorica.

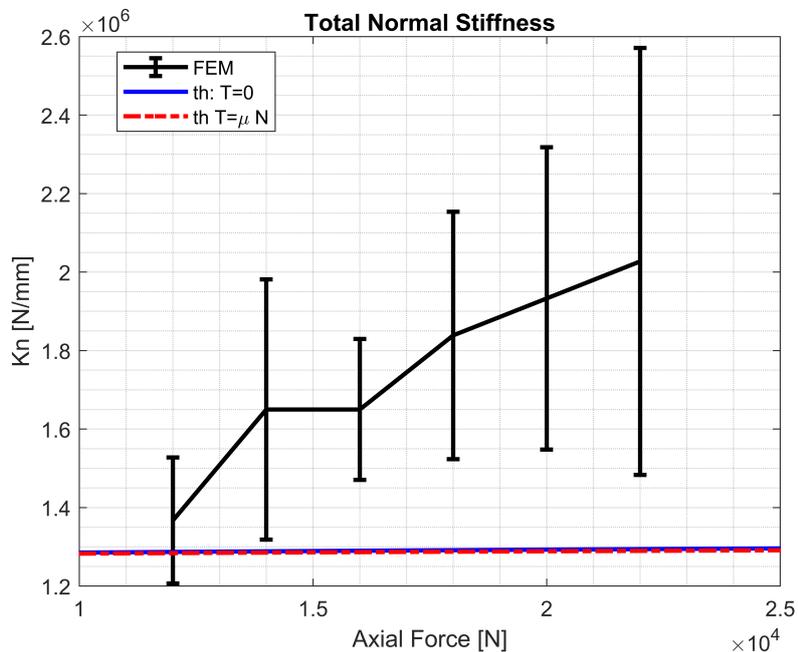


Figura 7.5: Confronto k_n teorico vs numerico-sperimentale

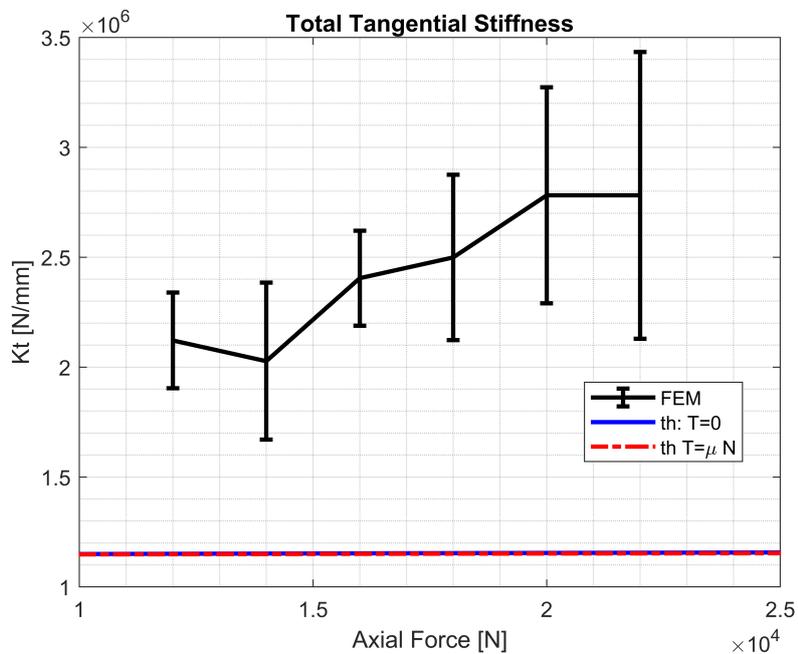


Figura 7.6: Confronto k_t teorico vs numerico-sperimentale

Capitolo 8

Conclusioni

Sintesi del lavoro

- E' stato definito un metodo sperimentale per l'identificazione dei parametri modali (frequenza e smorzamento) di un sistema che simula le vibrazioni di una paletta di turbina collegata al disco tramite un giunto di tipo dovetail.

Sono stati investigati il primo ed il secondo modo flessionale orizzontale del sistema.

La frequenza e lo smorzamento sono stati estratti dalla risposta libera del sistema successiva ad un'eccitazione oscillatoria con frequenza prossima a quella della forma modale in esame.

E' stata ottenuta la dipendenza non lineare di frequenza e smorzamento dall'ampiezza di vibrazione, al variare della forza assiale di trazione (simulante la forza centrifuga della paletta)

- E' stato definito un metodo numerico-sperimentale per la determinazione della rigidità normale k_n e tangenziale k_t di contatto per il sistema in esame
- Le rigidità ottenute sono state confrontate con quelle di un modello teorico del contatto

Osservazioni finali sui risultati delle misurazioni

- All'aumentare della Forza Centrifuga lo smorzamento diminuisce. Ciò è probabilmente dovuto alla riduzione dell'area di micro-strisciamento delle regioni di contatto [1]
- All'aumentare della Forza Centrifuga la frequenza naturale di ogni modo aumenta, come previsto dai modelli analitici [30]
- Nell'intervallo di Forze Assiali analizzato ($F_{ax} < 25kN$, analoghe alle Forze centrifughe per la paletta), la dipendenza non lineare delle frequenze naturali e dello smorzamento dall'ampiezza di vibrazione non è trascurabile.
- Il comportamento lineare del giunto dovetail, ovvero la piena adesione dei contatti, si presenta soltanto per piccole ampiezze di vibrazione ed elevati carichi centrifughi ($F_{ax} > 8kN$ e $A < 2\mu m$ per il primo modo flessionale; $F_{ax} > 12kN$ e $A < 2\mu m$ per il secondo modo flessionale)
- La dipendenza delle frequenze naturali dalla Forza Centrifuga differisce da quella prevista dai modelli analitici [30] per valori della Forza minori di $12kN$. Tale differenza è imputabile al micro-strisciamento dei contatti [1]

- Le precedenti osservazioni implicano che per basse forze centrifughe l'effetto della non linearità di contatto deve essere considerato per una corretta stima delle frequenze di risonanza. Si è notato infine che tale intervallo di Forze centrifughe corrisponde alle velocità di rotazione delle turbine associabili alla fase di discesa del volo degli aeromobili.

Osservazioni finali sui risultati della ricerca numerica di k_n, k_t

- Le rigidezze k_n, k_t ottenute presentano una non trascurabile dipendenza dalla Forza Assiale (analoga alla Forza Centrifuga della paletta), mostrando un andamento crescente all'aumentare della forza.
- Tale andamento è riscontrabile anche nel modello teorico del contatto adottato nel presente lavoro per confronto dei risultati. Tuttavia la variazione di rigidezza prevista da tale modello analitico è trascurabile rispetto alla variazione ottenuta con la procedura numerico-sperimentale qui proposta.
- I valori teorici delle rigidezze risultano essere circa la metà di quelli qui ricavati. Ciò è probabilmente dovuto alla non perfetta corrispondenza tra la geometria del modello teorico e quella del contatto reale.
- L'incertezza relativamente grande delle rigidezze ottenute con il metodo numerico-sperimentale (dell'ordine del 15%) è dovuta alla debole sensibilità della frequenza naturale alla variazione di rigidezza dei contatti.

Possibili ulteriori Sviluppi

La ricerca delle rigidezze k_n, k_t è stata qui realizzata utilizzando elementi lineari di contatto e confrontando soltanto le frequenze del modello con quelle misurate, nell'intervallo di Forze e ampiezze per cui il sistema presenta un comportamento lineare. L'ampiezza di vibrazione non è stata utilizzata per la suddetta ricerca.

Un possibile sviluppo per includere questa ulteriore condizione e possibilmente ridurre l'incertezza delle rigidezze ottenute consiste nel:

- L'implementazione dell'elemento di contatto non lineare
- Simulazione della risposta libera del sistema tramite integrazione temporale diretta comprendente il comportamento non lineare dei contatti
- Confronto dei risultati delle simulazioni con le misurazioni effettuate nel presente lavoro.

Ringraziamenti

Tale lavoro non sarebbe stato possibile senza il sostegno dei miei genitori, che hanno sempre avuto fiducia in me e mi hanno sorretto nei momenti di difficoltà, dandomi la forza per superare tutte le avversità incontrate.

Ringrazio inoltre il professore Daniele Botto per la sua disponibilità fuori dal comune offertami per lo sviluppo del presente lavoro e per avermi dato l'opportunità di approfondire argomenti attualmente oggetto di ricerca.

Ringrazio il dottorando Hadi Dastani per avermi introdotto all'utilizzo del banco prova.

Ringrazio infine i miei compagni ed amici di corso, che hanno indiscutibilmente arricchito e reso ancor più entusiasmante l'esperienza universitaria.

Parte III
Appendice

Capitolo 9

Stima teorica dell'Effetto Irrigidente della Forza di Trazione

L'effetto irrigidente dovuto alla forza assiale di trazione è stato inizialmente stimato analiticamente tramite il metodo proposto in [30].

9.1 Modello dinamico della trave con effetto irrigidente

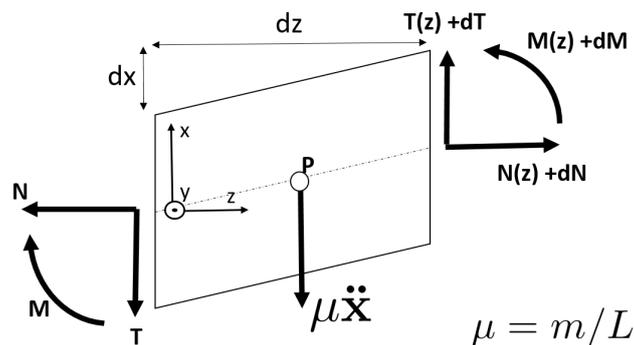


Figura 9.1: Concio elementare della trave deformata

Le equazioni di equilibrio del concio elementare della trave deformata sono:

$$\begin{cases} dT - \mu \ddot{x} dz = 0 \\ N - N - dN = 0 \\ M + dM - M + T \frac{dz}{2} \cdot 2 + dT \frac{dz}{2} - N dx - dN \frac{dx}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dT}{dz} = \mu \ddot{x} \\ \frac{dN}{dz} = 0 \\ \frac{dM}{dz} + T - N \frac{dx}{dz} = 0 \end{cases}$$

Derivando l'ultima equazione in z:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} + \frac{dT}{dz} - \frac{d}{dz} \left(N \frac{dx}{dz} \right) = 0$$

utilizzando le altre due equazioni di equilibrio:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} + \mu \ddot{x} - N \frac{d^2 x}{dz^2} = 0 \tag{9.1}$$

Da considerazioni geometriche:

$$dw = x \tan(-d\alpha_y) \simeq -x \cdot d\alpha_y \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} = -\frac{d\alpha_y}{dz} \cdot x = -k_y \cdot x$$

$$M = - \int \sigma_{zz} \cdot x dA = - \int E \varepsilon_{zz} x dA = + \int E k_y x^2 dA = E k_y I_y \quad \Rightarrow \quad k_y = \frac{M}{EI_y}$$

$$\alpha_y \simeq \tan \alpha_y = \frac{dx}{dz} \quad \Rightarrow \quad k_y = \frac{1}{r} = \frac{d\alpha_y}{dz} = \frac{d^2 x}{dz^2} \quad \Rightarrow \quad M = EI_y \frac{d^2 x}{dz^2}$$

Sostituendo in 9.1:

$$EI_y \frac{d^4 x}{dz^4} + \mu \ddot{x} - N \frac{d^2 x}{dz^2} = 0 \quad (9.2)$$

Applicando il metodo di separazione delle variabili: $x(z, t) = X(z) \cdot q(t)$

$$EI_y \frac{d^4 X}{dz^4} q + \mu X \ddot{q} - N \frac{d^2 X}{dz^2} q = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu X \ddot{q} + \left[EI_y \frac{d^4 X}{dz^4} - N \frac{d^2 X}{dz^2} \right] \cdot q = 0$$

Assumendo soluzione armonica $q(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ e dividendo per $q(t)$:

$$-\omega^2 \mu X + EI_y \frac{d^4 X}{dz^4} - N \frac{d^2 X}{dz^2} = 0 \quad (9.3)$$

Adimensionalizzando z: $Z = z/L$:

$$\frac{EI_y}{L^4} \frac{d^4 X}{dZ^4} - \frac{N}{L^2} \frac{d^2 X}{dZ^2} - \mu \omega^2 X = 0$$

moltiplicando per X ed integrando in z per la lunghezza della trave:

$$\frac{EI_y}{L^4} \int_0^1 X \frac{d^4 X}{dZ^4} dZ - \frac{N}{L^2} \int_0^1 X \frac{d^2 X}{dZ^2} dZ - \mu \omega^2 \int_0^1 X^2 dZ = 0$$

Imponendo le condizioni al contorno della trave incastrata alle due estremità:

$$\begin{cases} X(Z=0) = 0 \\ \alpha_y(Z=0) = \frac{dX}{dZ} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X(Z=1) = 0 \\ \alpha_y(Z=1) = \frac{dX}{dZ} = 0 \end{cases}$$

il primo integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X \frac{d^4 X}{dZ^4} dZ &= \left[X \cdot \frac{d^3 X}{dZ^3} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dX}{dZ} \frac{d^3 X}{dZ^3} dZ = \\ &= - \left\{ \left[\frac{dX}{dZ} \cdot \frac{d^2 X}{dZ^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{d^2 X}{dZ^2} \right)^2 dZ \right\} = + \int_0^1 \left(\frac{d^2 X}{dZ^2} \right)^2 dZ \end{aligned}$$

il secondo integrale diventa:

$$\int_0^1 X \frac{d^2 X}{dZ^2} dZ = \left[X \frac{dX}{dZ} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{dX}{dZ} \right)^2 dZ = - \int_0^1 \left(\frac{dX}{dZ} \right)^2 dZ$$

Quindi:

$$\frac{EI_y}{L^4} \int_0^1 \left(\frac{d^2 X}{dZ^2} \right)^2 dZ + \frac{N}{L^2} \int_0^1 \left(\frac{dX}{dZ} \right)^2 dZ - \mu \omega^2 \int_0^1 X^2 dZ = 0$$

La pulsazione naturale ω può essere dunque stimata con l'espressione:

$$\omega^2 = \frac{EI_y}{\mu L^4} \frac{\int_0^1 \left(\frac{d^2 X}{dZ^2} \right)^2 dZ}{\int_0^1 X^2 dZ} + N \cdot \frac{1}{\mu L^2} \frac{\int_0^1 \left(\frac{dX}{dZ} \right)^2 dZ}{\int_0^1 X^2 dZ} = (\omega_n^2)_{N=0} + N \cdot \frac{1}{\mu L^2} \frac{\int_0^1 \left(\frac{dX}{dZ} \right)^2 dZ}{\int_0^1 X^2 dZ} \quad (9.4)$$

dove $(\omega_n^2)_{N=0}$ è la pulsazione naturale ricavata dal modello della trave senza effetto irrigidente -di seguito descritto- e la forma modale X è approssimata con quella del seguente modello.

9.2 Modello dinamico della trave senza effetto irrigidente

$$+EI_y \frac{d^4 X}{dz^4} - \omega^2 \mu X = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^4 X}{dz^4} - \beta^4 X = 0 \quad \text{con } \beta^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI_y}$$

la cui soluzione è nota:

$$X(z) = A \cos(\beta z) + B \sin(\beta z) + D \cosh(\beta z) + E \sinh(\beta z)$$

definendo per semplicità di notazione:

$$c = \cos(\beta L) \quad s = \sin(\beta L) \quad ch = \cosh(\beta L) \quad sh = \sinh(\beta L)$$

imponendo le condizioni al contorno:

$$X(z=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -D$$

$$X(z=L) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ac + Bs + Dch + Esh = 0$$

$$\frac{dX}{dz} = -A\beta \sin(\beta z) + B\beta \cos(\beta z) + D\beta \sinh(\beta z) + E\beta \cosh(\beta z)$$

$$\frac{dX}{dz}(z=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -E$$

$$\frac{dX}{dz}(z=L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(-As + Bc + Dsh + Ech) = 0$$

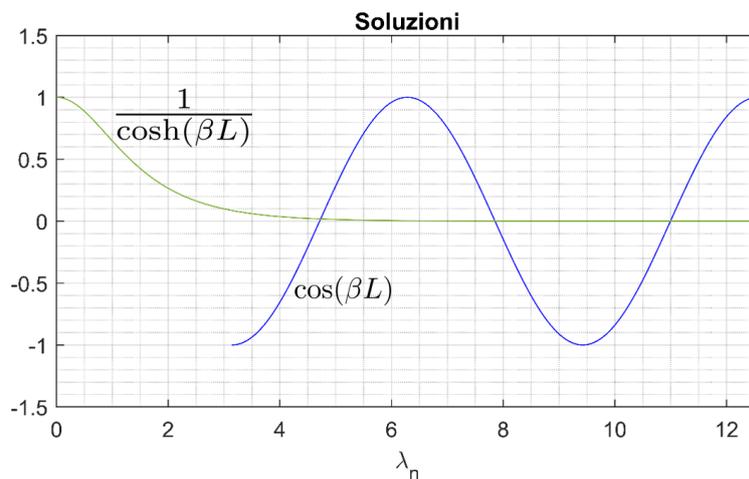
Mettendo a sistema le quattro espressioni trovate:

$$\begin{bmatrix} (ch-c) & (sh-s) \\ (sh+s) & (ch-c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

la cui soluzione non banale è trovata annullando il determinante:

$$\cos(\beta L) \cdot \cosh(\beta L) = +1$$

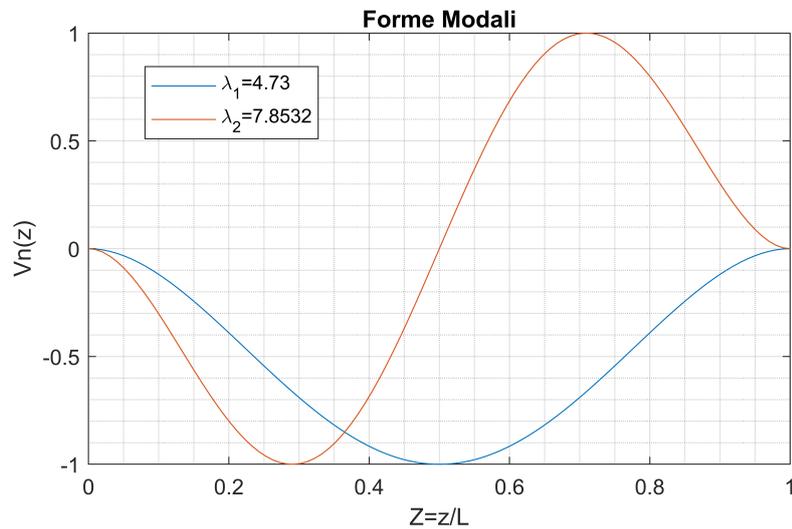
$$\lambda_n = \beta L \quad \beta^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI_y} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \left(\frac{\lambda_n}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\mu}}$$



Possono quindi essere calcolate le forme modali:

$$D_n = -\frac{sh-s}{ch-c} E_n \quad \beta z = \frac{\lambda_n}{L} \cdot z = \lambda_n Z$$

$$X_n(Z) = E_n \left[\sinh(\lambda_n Z) - \sin(\lambda_n Z) - \left(\frac{\sinh(\lambda_n L) - \sin(\lambda_n L)}{\cosh(\lambda_n L) - \cos(\lambda_n L)} \right) (\cosh(\lambda_n Z) - \cos(\lambda_n Z)) \right]$$

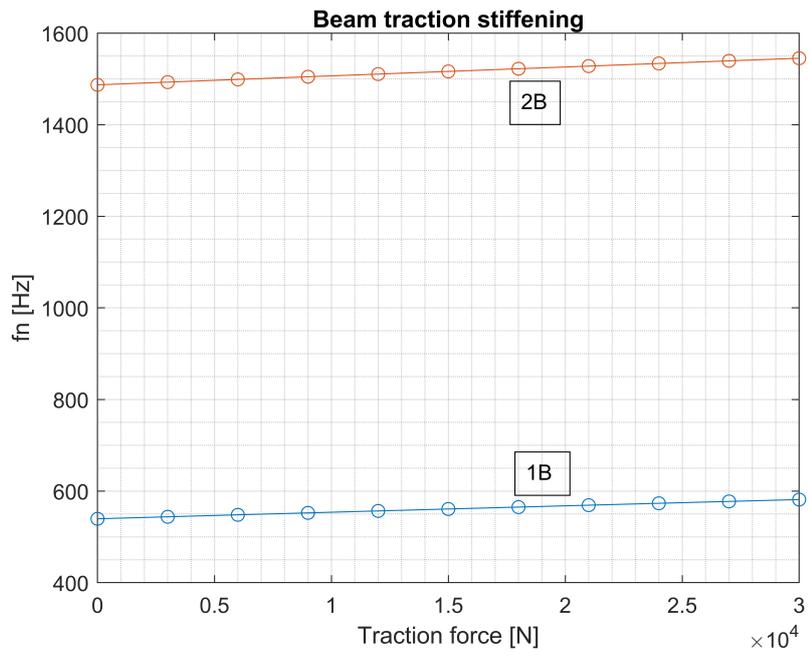


GEOMETRIA		MAT		FORZA	
L	312.1 mm	E	205 Gpa	Fmax	30000 N
b	10 mm	rho	7845 kg/m3		
h	26 mm				

con $I_y = \frac{1}{12}hb^3$

Quindi tramite l'espressione 9.4 è stato potuto calcolare l'effetto irrigidente:

F [%]	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
F [N]	0	3000	6000	9000	12000	15000	18000	21000	24000	27000	30000
n λn	fn [Hz]										
1 4.730	539.5	543.8	548.1	552.4	556.6	560.8	565.0	569.2	573.3	577.4	581.4
2 7.853	1487.0	1492.9	1498.8	1504.7	1510.5	1516.3	1522.1	1527.9	1533.7	1539.4	1545.1



Capitolo 10

Codici ANSYS APDL

10.1 Codice APDL per l'introduzione dei supporti elastici

Il seguente codice è stato inserito come comando APDL nell'analisi statica del modello ANSYS, all'interno di ANSYS Mechanical Workbench. Con tale procedura il comando è inserito nell'ambiente /SOLU. E' stato necessario uscire da tale ambiente con il comando FINISH, entrare nell'ambiente di pre-processing con il comando /PREP7, per poi ritornare in /SOLU alla fine della macro. Se utilizzato direttamente su APDL tale macro può essere direttamente inserita in /PREP7, senza i comandi iniziali e finali sopra descritti.

```
!===== SPRING SUPPORT =====  
FINISH  
  
/PREP7  
*GET,nodemax,NODE, ,NUM,MAX !highest node number in the model  
*get ,maxtype,ETYP, ,NUM,MAX ! highest element type  
*get , maxmat,MAT, ,NUM,MAX ! highest material type  
*get ,maxreal,RCON, ,NUM,MAX ! highest real constant  
! Set maxtype, maxmat and maxreal to the highest value of all three  
* if ,maxtype , gt ,maxmat, then  
maxmat=maxtype  
* else  
maxtype=maxmat  
* endif  
* if , maxreal , gt , maxtype , then  
maxtype=maxreal  
maxmat=maxreal  
* else  
maxreal=maxtype  
* endif
```

!----- INPUT PARAMETERS -----

! previously create a node component (named selection in workbench)
! called 'Node4Spring2Ground' or modify this name in line:
! CMSEL, s, Node4Spring2Ground, node

DX2ground=0
DY2ground=0
DZ2ground=0

*if, sqrt(DX2ground**2 +DY2ground**2 +DZ2ground**2), ne, 0, then
!(not coincident nodes)

KspringID=maxreal+1
!.....:
R, KspringID, 1 ! K=1 N/mm :
!.....:
*else ! if Dx=Dy=Dz=0 (coincident nodes)
!set this parameters (else unused):

KX_springID=maxreal+1
KY_springID=maxreal+2
KZ_springID=maxreal+3

!.....:
R, KX_springID, 0 ! K= ... N/mm :
R, KY_springID, 1e-4!1.0 ! K= ... N/mm :
R, KZ_springID, 1e-4!1.0 ! K= ... N/mm :
!.....:

*endif

!-----

!.....
CMSEL, s, Node4Spring2Ground, node!
!.....:
*get, L_Bodynodes, node, 0, count !Get the number of nodes
! in the selected set
*dim, Bodynodes, array, L_Bodynodes
*vget, Bodynodes, node, , nlist !get numbers of nodes
!of the selected component
!*vec, Bnodes, d, import, apdl, Bodynodes !Verify nodes by printing
!on command windows
!* print, Bnodes
allsel

```

!-----
* if , sqrt( DX2ground**2 +DY2ground**2 +DZ2ground**2) , ne, 0 , then
springTypeID=maxtype+1
ET, springTypeID ,COMBIN14
! default: keyopt(2)=0 => orientation defined
!
! by the 2 nodes (not coincident)
*dim, Groundnodes, array , L_Bodynodes
!-----
TYPE, springTypeID
REAL, KspringID
!-----create ground nodes with an offset ,
! based on pattern nodes: Bodynodes -----
*DO, i , 1 , L_Bodynodes
nodemax=nodemax+1
Groundnodes ( i )=nodemax
N, Groundnodes ( i ) , nx ( Bodynodes ( i ) )+DX2ground , ny ( Bodynodes ( i ) )+DY2ground , ...
. . . . nz ( Bodynodes ( i ) )+DZ2ground
E, Bodynodes ( i ) , Groundnodes ( i )
D, Groundnodes ( i ) , all , 0
*ENDDO

* else !----- COINCIDENT NODES -----
*dim, Groundnodes, array , 3*L_Bodynodes
springXTypeID=maxtype+1
ET, springXTypeID ,COMBIN14
KEYOPT, springXTypeID , 2 , 1 !keyopt(2)= orientation x (=1)
TYPE, springXTypeID
REAL, KX_springID
*DO, i , 1 , L_Bodynodes
nodemax=nodemax+1
Groundnodes ( i )=nodemax
N, Groundnodes ( i ) , nx ( Bodynodes ( i ) ) , ny ( Bodynodes ( i ) ) , nz ( Bodynodes ( i ) )
E, Bodynodes ( i ) , Groundnodes ( i )
D, Groundnodes ( i ) , all , 0
*ENDDO

springYTypeID=maxtype+2
ET, springYTypeID ,COMBIN14
KEYOPT, springYTypeID , 2 , 2 !keyopt(2)= orientation
TYPE, springYTypeID
REAL, KY_springID
*DO, i , L_Bodynodes+1 , 2*L_Bodynodes
nodemax=nodemax+1
Groundnodes ( i )=nodemax

```

```

N,Groundnodes ( i ) , nx (Bodynodes ( i -L_Bodynodes ) ) , ...
      ... ny (Bodynodes ( i -L_Bodynodes ) ) , nz (Bodynodes ( i -L_Bodynodes ) )
E,Bodynodes ( i -L_Bodynodes ) , Groundnodes ( i )
D,Groundnodes ( i ) , all , 0
*ENDDO

springZtypeID=maxtype+3
ET, springZtypeID , COMBIN14
KEYOPT, springZtypeID , 2 , 3 !keyopt(2)= orientation
TYPE, springZtypeID
REAL, KZ_springID
*DO, i , 2*L_Bodynodes+1 , 3*L_Bodynodes
nodemax=nodemax+1
Groundnodes ( i )=nodemax
N,Groundnodes ( i ) , nx (Bodynodes ( i -2*L_Bodynodes ) ) , ...
      ... ny (Bodynodes ( i -2*L_Bodynodes ) ) , nz (Bodynodes ( i -2*L_Bodynodes ) )
E,Bodynodes ( i -2*L_Bodynodes ) , Groundnodes ( i )
D,Groundnodes ( i ) , all , 0
*ENDDO

*endif

allsel

FINISH
/solu

```

10.2 Codice APDL per la riduzione di Craig-Bampton

Per ridurre un modello (Slot o trave) è stata utilizzata la seguente macro. Se non è necessario introdurre l'effetto irrigidente, come per gli slot, tale macro deve essere posta dopo un'analisi statica o modale, indifferentemente. Si devono però commentare le linee di codice inserite per introdurre l'effetto irrigidente, indicate con “!PAY ATTENTION: CHANGED FOR PRESTRESS” ed attivare le analoghe linee di comando qui commentate:

```

/ filename , CMS_Gen , 1
seopt , CMS_Gen , 2 , 1
se , CMS_Gen

```

Se invece si deve introdurre l'effetto irrigidente (trave), è necessario porre tale macro dopo un'analisi statica. Inoltre nell'analisi statica devono essere inseriti i seguenti comandi:

```

PSTRES,ON !to be used in future analysis
EMATWRITE,YES ! .emat necessary for prestress in substructuring analysis

```

La macro è:

```

!.....

```

```

!
! ANSYS-Script 'CMS_Reduction'
!
! Autor:          xxx
!
! Date:          29.04.2010
!
! Description:   CMS Reduction (fixed or free)
!
!.....:

/prep7
csys,0          !activate a previous coordinate system: 0=Cartesian
nrotat,all     !rotate nodal coordinate system into the active system
finish

!.....:
!
! Begin-Phase (Generation Pass)
!.....:

! Parameter
normal_modes = 100          ! Slave Mode Number

! Model Name
!/ filename ,CMS_Gen,1      !change jobname for the analysis:
!                          1=start new log,error,lock,page files.
!                          old log,error are saved; old lock,page file
!PAY ATTENTION: CHANGED FOR PRESTRESS
/FILNAME, file ,0 !use current lock,log,error
                    !and PAGE FILES (such as .ESAV or .EMAT
                    !                          necessary for prestress)

!.....:
!
! Solution-Phase (Generation Pass)
!.....:
/solu

! Analysis Definition
antype,substr          !substructure generation analysis
PSTRES,ON              !PAY ATTENTION
SEOPT, file ,2,1      !PAY ATTENTION: CHANGED FOR PRESTRESS
!seopt ,CMS_Gen,2,1   !Substruct Analysis option: Name, (
                    !generate: 2=K,M; 3=K,M,C),
                    !(print: 1=load + matrices)

```

```

!                                valid only within first step load
cmsopt, fix ,normal_modes      ! CMS option:
                                ! fix=fixed-interface method (Craig-Bampton),
                                ! Number of normal modes

! Master Nodes Selection

cmsel, s ,BladeContact_Xp_Zp_Nodes      !select Component Name (group of nodes) =
                                ! Named selection in Workbench
cmsel, a ,BladeContact_Xp_Zn_Nodes      !s=select a new set;
                                !a= add a new set to the current one

cmsel, a ,BladeContact_Xn_Zp_Nodes
cmsel, a ,BladeContact_Xn_Zn_Nodes
cmsel, a ,Blade_mid_Lateral_Zp_Nodes
cmsel, a ,Blade_mid_Lateral_Zn_Nodes
m, all , all                          !Defines master dofs for
                                !substructures generation analysis

! Select the whole model
allsel

! Solve
solve

! Solution End
finish

!.....
!                                :
! Begin-Phase (Use Pass)          :
!.....
finish

! Start new Model
/clear ,nostart      !clear Database, nostart= Do not reread
                    !start130.ans after clearing

! Parameter
num_mode = 1                ! Modes Number

! MModel Name
/filename ,CMS_Use,1      !change jobname for the analysis:
!                          !start new log ,error ,lock ,page files .
!                          !old log ,error are saved; old lock ,
!                          !page files are deleted

```

```

!.....
!
! Preprocessor-Phase (Use Pass)
!.....
/prep7

! Element Type
et,1,matrix50      !Defines a local element type: typeID=1, typeName

! Writing the Element File
! ematwrite,yes

! Reduced Model Name
type,1             !sets type pointer to typeID=1
SE,file           !PAY ATTENTION: CHANGED FOR PRESTRESS
!se,CMS_Gen       !Defines a superlement(=substructure),
                  !Filename .SUB generated with SEOPT

! Preprocessor End
finish

!.....
!
! Solution-Phase (Generation Pass)
!.....
/solu

! Analysis Definition
num_mode = 1
antype,modal      !Dummy Modal Analysis to create .full with K,M
modopt,lanb,num_mode !Modal Analysis option: lanB=Block Lanczos,
                  !Number of modes
wrfull,1         !Stop solution after assembling global
                  !matrices of load step N=1
solve

!.....
!
! Auxiliary-Phase
!.....
/aux2

! Output file with the reduced matrices
! /output,matrix_hcb.txt !redirects text output to file matrix_hcb.txt

! List contents of the superelement

```

```

! selist ,1,3

! Default Settings fot Data files
/output          !redirects text output to default output file
/header, defa    !set page heading print controls to
                ! default specifications
/format, defa    !set format to default specifications

! Reduced Order Matrices [K] and [M]
file ,CMS_Use, full          !specifies datafile where results
                            ! are to be found: CMS_Use.full
hbmatt,M,txt , , ascii , mass,no,yes
hbmatt,K,txt , , ascii , stiff ,no,yes !write assembled global matrix in
                                        ! Harwell-Boeing format, matrix=M,
!                                       formatfile=txt , ,formASCII or
                                        !binary,no=do not write right-hand side

finish

```

10.3 Codice APDL per l'esportazione dell'elenco dei master nodes della trave

Tale macro può essere inserita dopo la definizione della mesh del modello, prima della riduzione di Craig-Bampton.

```

!/HEADER,OFF,OFF,OFF,OFF,OFF,OFF,OFF
!/OUTPUTFileName,Extension,--,Location=
!(blank=at top of the file; APPEND=appended to existing file)
/OUTPUT, BladeContact_Xp_Zp_Nodes,txt , ,
NLIST,   BladeContact_Xp_Zp_Nodes , , ,COORD,NODE , , ,!INTERNAL
                                                !list also internal node, if existent

/OUTPUT, BladeContact_Xp_Zn_Nodes,txt , ,
NLIST,   BladeContact_Xp_Zn_Nodes , , ,COORD,NODE , , ,

/OUTPUT, BladeContact_Xn_Zp_Nodes,txt , ,
NLIST,   BladeContact_Xn_Zp_Nodes , , ,COORD,NODE , , ,

/OUTPUT, BladeContact_Xn_Zn_Nodes,txt , ,
NLIST,   BladeContact_Xn_Zn_Nodes , , ,COORD,NODE , , ,
!-----
/OUTPUT, Blade_mid_Lateral_Zp_Nodes,txt , ,
NLIST,   Blade_mid_Lateral_Zp_Nodes , , ,COORD,NODE , , ,

/OUTPUT, Blade_mid_Lateral_Zn_Nodes,txt , ,

```

```
NLIST, Blade_mid_Lateral_Zn_Nodes , , COORD,NODE, , ,
```

```
!-----
```

```
/OUTPUT, BladeL_Zn_X10_Nodes , txt , ,
```

```
NLIST, BladeL_Zn_X10_Nodes , , COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT, BladeL_Zn_X40_Nodes , txt , ,
```

```
NLIST, BladeL_Zn_X40_Nodes , , COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT, BladeL_Zn_X73_Nodes , txt , ,
```

```
NLIST, BladeL_Zn_X73_Nodes , , COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT, BladeL_Zn_Mid_Nodes , txt , ,
```

```
NLIST, BladeL_Zn_Mid_Nodes , , COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT, BladeL_Zp_X10_Nodes , txt , ,
```

```
NLIST, BladeL_Zp_X10_Nodes , , COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT, BladeL_Zp_X40_Nodes , txt , ,
```

```
NLIST, BladeL_Zp_X40_Nodes , , COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT, BladeL_Zp_X73_Nodes , txt , ,
```

```
NLIST, BladeL_Zp_X73_Nodes , , COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT, BladeL_Zp_Mid_Nodes , txt , ,
```

```
NLIST, BladeL_Zp_Mid_Nodes , , COORD,NODE, , ,
```

```
!-----
```

```
/OUTPUT
```

```
/HEADER, Defa
```

10.4 Codice APDL per l'esportazione dell'elenco dei master nodes dello slot a X>0

Tale macro può essere inserita dopo la definizione della mesh del modello, prima della riduzione di Craig-Bampton.

```
/OUTPUT, SlotContact_Xp_Zp_Nodes , txt , ,
```

```
NLIST, SlotContact_Xp_Zp_Nodes , , COORD,NODE, , , !INTERNAL
```

```
!list also internal node, if existent
```

```
/OUTPUT, SlotContact_Xp_Zn_Nodes , txt , ,
```

```
NLIST, SlotContact_Xp_Zn_Nodes , , COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT, Slot_Xp_MainNodes , txt , ,
```

```
NLIST, Slot_Xp_MainNodes , , COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT, Slot_Xp_FaceConstraintNotMain_Nodes , txt , ,  
NLIST, Slot_Xp_FaceConstraintNotMain_Nodes , , ,COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT  
/HEADER, Defa
```

10.5 Codice APDL per l'esportazione dell'elenco dei master nodes dello slot a $X < 0$

Tale macro può essere inserita dopo la definizione della mesh del modello, prima della riduzione di Craig-Bampton.

```
/OUTPUT, SlotContact_Xn_Zp_Nodes , txt , ,  
NLIST, SlotContact_Xn_Zp_Nodes , , ,COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT, SlotContact_Xn_Zn_Nodes , txt , ,  
NLIST, SlotContact_Xn_Zn_Nodes , , ,COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT, Slot_Xn_MainNodes , txt , ,  
NLIST, Slot_Xn_MainNodes , , ,COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT, Slot_Xn_FaceConstraintNotMain_Nodes , txt , ,  
NLIST, Slot_Xn_FaceConstraintNotMain_Nodes , , ,COORD,NODE, , ,
```

```
/OUTPUT  
/HEADER, Defa
```

Bibliografia

- [1] Allara, M., Filippi, S., Gola, M.M., 2006, *An Experimental Method For The Measurement Of Blade-Root Damping*, Proceedings of ASME Turbo Expo 2006, GT2006-90774
- [2] Feldman, M., 1994, *Non-Linear System Vibration Analysis Using Hilbert Transform -I. Free Vibration Analysis Method FREEVIB*, Mechanical System and Signal Processing, 8, pp. 119-127
- [3] Feldman, M., 2011, *Hilbert Transform Applications in Mechanical Vibration*, John Wiley & Sons
- [4] Agneni, A., Balis-Crema, L., 1989, *Damping Measurements from Truncated Signal via Hilbert Transform*, Mechanical System and Signal Processing, 3, pp. 1-13
- [5] Inaudi, J.A., Makris, N., 1996, *Time-Domain Analysis Of Linear Hysteretic Damping*, Earthquake Engineering And Structural Dynamics, 25, pp. 529-545
- [6] Schwingshackl C.W., Petrov E.P., Ewins D.J., 2012 *Measured and estimated friction interface parameters in a nonlinear dynamic analysis*, Mechanical Systems and Signal Processing, 28, pp. 574-584
- [7] Stanbridge A.B., Ewins D.J., Sanliturk K.Y., Ferreira J.V., 2001, *Experimental Investigation of Dry Friction Damping and Cubic Stiffness Non-Linearity*, Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference, Pittsburgh, PA, USA
- [8] Umer M., Botto D., 2019, *Measurement of contact parameters on under-platform dampers coupled with blade dynamics*, International Journal of Mechanical Sciences, 159, pp. 450-458
- [9] Lavella, M.; Botto, D.; Gola, M.M., 2011, *Test Rig for Wear and Contact Parameters Extraction for Flat-on-Flat Contact Surfaces*, In Proceedings of the ASME/STLE 2011 Joint Tribology Conference, Los Angeles, CA, USA, pp. 24-26
- [10] Mindlin, R.D., Mason, W.P., Osmer, T.F., Deresiewicz, H., 1952, *Effects of an Oscillating Tangential Force on the Contact Surfaces of Elastic Spheres*, Proceedings of the First US National Congress of Applied Mechanics, pp. 203-208
- [11] Johnson K.L., 1955, *Surface Interaction Between Elastically Loaded Bodies Under Tangential Forces*, Proceedings of Royal Society of London, Ser.A, A230, pp. 531-549
- [12] Goodman L.E., Brown C.B., 1962, *Energy Dissipation in Contact Friction: Constant Normal and Cyclic Tangential Loading*, ASME Journal of Applied Mechanics, 29, pp. 17-22

- [13] Filippi S., Akay, A., Gola, M.M., 2004, *Measurement of Tangential Contact Hysteresis During Microslip*, ASME Journal of Tribology, 126, pp. 482-489
- [14] Filippi S., Rodrigues E.B., Gola M.M., 2006, *Experimental Characterization of Contact Hysteresis at High Temperatures*, Proceedings of the ASME Turbo Expo GT2006, Barcellona, Spain
- [15] Goodman L.E., Klumpp J.H., 1956, *Analysis of Slip Damping with Reference to Turbine-Blade Vibration*, ASME Journal of Applied Mechanics, 23, pp. 421-429
- [16] Firrone C.M., Bertino I., 2015, *Experimental Investigation on the Damping Effectiveness of Blade Root Joints*, Experimental Mechanics, 55, pp. 981-988
- [17] Coro A., Marquina F.J., Alonso R., Gutierrez A., Ewins D.J., Girini G., 2008, *Friction Damping Modeling in High Stress Contact Areas using Microslip Friction Model*, Proceedings of ASME Turbo Expo 2008, June 9-13, Berlin
- [18] Asai K., Sakurai S., Kudo T., Ozawa N., Ikeda T., 2009, *Evaluation of Friction Damping in Dove-tail Root Joints based on Dissipation Energy on Contact Surfaces*, Proceedings of ASME Turbo Expo 2009, June 8–12, Orlando, Florida
- [19] Simmons H.R., Iyengar V., 2011, *Effect of Non Uniform Blade Root Friction and Sticking on Disk Stresses*, Proceedings of ASME Turbo Expo 2011, June 6–10, Vancouver, Canada
- [20] Cardona A., Lerusse A., Geradin M., 1998, *Fast Fourier Nonlinear Vibration Analysis*, Computational Mechanics, 22-2, pp. 128-142
- [21] Yang, B.D., Chu, M.L., Menq, C.H., 1998, *Stick-Slip-Separation Analysis And Non-Linear Stiffness And Damping Characterization Of Friction Contacts Having Variable Normal Load*, Journal of Sound and Vibration, 210(4), pp. 461-481
- [22] Petrov, E.P.; Ewins, D.J., 2003, *Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Disks*, ASME Journal of Turbomachinery, 125, pp- 364-371
- [23] Siewert, C., Panning, L., Wallaschek, J., Richter, C., 2010, *Multiharmonic Forced Response Analysis of a Turbine Blading Coupled by Nonlinear Contact Forces*, ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 132, 082501
- [24] Zucca, S., Firrone, C.M., 2012, *Nonlinear Dynamics of Mechanical Systems with Friction Contacts: Harmonic Balance Method and Multiple Solutions*, Proceedings of ISMA 2012, pp. 1017-1030
- [25] Zucca S., Firrone C.M., Gola M.M., 2012, *Numerical Assessment of friction Damping at Turbine Blade Root Joints by Simultaneous Calculation of the Static and Dynamic Contact Loads*, Nonlinear Dynamics, 67, pp. 1943-1955
- [26] Zucca S., Firrone C.M., Gola M.M., 2011, *The effect of Underplatform Dampers on the Forced Response of Bladed Disks by a Coupled Static/Dynamic Harmonic Balance Method*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 46-2, pp. 363-375

- [27] Newmark,N.,1959, *A Method of Computation for Structural Dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division,85,pp. 67-94
- [28] Gastaldi,C.,Berruti,T.M.,2018, *Competitive Time Marching Solution Methods for Systems with Friction-Induced Nonlinearities*, Applied Sciences,8(2),291
- [29] Menq,C.,Griffin,J.H.,1985, *A Comparison of Transient and Steady State Finite Element Analyses of the Forced Response of a Frictionally Damped Beam*, ASME Journal of Vibrations,Acoustics,Stress and Reliability in Design,107,pp. 19-25
- [30] Bokaian,A.,1990, *Natural Frequencies of Beams under Tensile Axial Loads* Journal of Sounds and Vibration,142,pp. 481-498
- [31] Griffin, J.H.,1980, *Friction Damping of Resonant Stresses in Gas Turbine Engine Airfoils*, Journal of Engineering for Power, 102-2, pp.329-333
- [32] Sanliturk, K.Y., Ewins, D.J., 1996, *Modelling Two-dimensional Friction Contact and its Application using Harmonic Balance Method*, Journal of Sound and Vibration, 193-2, pp. 511-523
- [33] Menq, C.H., Yang ,B.D. , 1998, *Non-Linear Spring Resistance and Friction Damping of Frictional Constraint having Two-Dimensional Motion*, Journal of Sound and Vibration, 217, pp. 127-143
- [34] Yang, B.D. , Menq, C.H., 1998, *Characterization of 3D Contact Kinematics and Prediction of Resonant Response of Structures having 3D Frictional Constraint*, Journal of Sound and Vibration, 217-5, pp.909-925
- [35] Zucca,S.,Firrone,C.M.,2011, *Modelling Friction Contacts in Structural Dynamics and its Application to Turbine Bladed Disks*, Numerical Analysis - Theory and Application, pp.301-334
- [36] *Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications*, Ansys®Mechanical Help
- [37] Craig,R.R., Bampton,M.C.C.,1968, *Coupling of Substructures for Dynamic Analyses*, AIAA Journal, 12, pp. 1313-1319
- [38] Richter,P.H.,1995, *Estimating Errors in Least-Squares Fitting*, NASA TDA Progress Report,42-122, pp. 107-124
- [39] Mindlin, R.D., 1949, *Compliance of Elastic Bodies in Contact*, Journal of Applied Mechanics, 16, pp. 259-268
- [40] Koh K.H., Griffin J.H., Filippi S., Akay A., 2005, *Characterization of turbine blade friction dampers*, ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 12
- [41] Koh K.H., Griffin J.H., 2006, *Dynamic Behaviour of Spherical Friction Dampers and its Implication to Damper Contact Stiffness*, Proceedings of the ASME Turbo Expo GT2006,Barcelona,Spain

- [42] Shtayerman I.Y.,1949, *Contact Problem of the Theory of Elasticity*, Gostekhteorizdat, Moscow and Leningrad
- [43] Ciavarella, M., Hills, D.A., Monno,G.,1998, *The Influence of Rounded Edges on Indentation by a Flat Punch*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 212, pp. 319-328
- [44] Allara,M.,2009, *A model for the Characterization of Friction Contacts in Turbines Blades*, Journal of Sound and Vibration, 320, pp. 527-544
- [45] Johnson,K.L.,1985, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge
- [46] Fuller,D.D.,1956 *Theory and Practice of Lubrication for Engineers*, Wiley, New York, p. 2.44
- [47] <https://it.mathworks.com/help/signal/ug/practical-introduction-to-digital-filter-design.html>
- [48] <https://ht.net.technion.ac.il/matlab-simulink/4-2/>