

POLITECNICO DI TORINO

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Orientamento Spazio

Tesi di Laurea Magistrale

**Ottimizzazione di traiettorie per
missioni a flyby multipli con
Asteroidi Near-Earth**



Relatore
prof. Lorenzo Casalino

Candidato
Lorenzo Montagna

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

Questa tesi è soggetta alla Creative Commons Public License versione 4.0 o posteriore. L'enunciato integrale della Licenza in versione 4.0 è reperibile all'indirizzo internet <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.it>. Si è liberi di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare questo materiale con qualsiasi mezzo e formato alle seguenti condizioni:

- ◇ **Attribuzione** – bisogna attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da colui al quale è stata data quest'opera in licenza, in questo caso il Politecnico di Torino. Occorre inoltre fornire un link alla licenza e indicare se sono state effettuate delle modifiche, facendo ciò in qualsiasi maniera ragionevole possibile
- ◇ **Non commerciale** – Non si può utilizzare il materiale per scopi commerciali.
- ◇ **Non opere derivate** – Non si può alterare o trasformare questo materiale, né usarlo per crearne un altro.

Ogni volta che si usa o si distribuisce quest'opera, lo si deve fare secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.

In ogni caso si possono concordare con il titolare dei diritti d'autore (il Politecnico di Torino, in questo caso) utilizzi di quest'opera non consentiti da questa licenza.



Sommario

A partire dalla fine degli anni '90 l'interesse verso gli asteroidi orbitanti nei pressi della Terra, conosciuti come Near-Earth Asteroids (NEAs), è cresciuto esponenzialmente, principalmente per il rischio di potenziali collisioni catastrofiche con il nostro pianeta. Recentemente, l'attenzione verso questi oggetti è cresciuta ancor di più, sia in un'ottica di studio della genesi del Sistema Solare, sia con l'obiettivo di un'economia spaziale basata anche sull'estrazione dei minerali contenuti in essi. Con lo scopo di visitarli, nasce la proposta ANIME: una sonda CubeSat 12U con una massa di 21 kg equipaggiata con propulsione ionica caratterizzata da bassa spinta ed elevato impulso specifico. La missione prevede un consumo massimo di propellente di 1.5 kg ed una durata inferiore a due anni, durante i quali avverranno due flyby intermedi con due diversi NEAs ed un rendezvous finale.

Lo scopo di questa tesi è di cercare delle traiettorie alternative a quella già trovata per venire incontro ad eventuali cambiamenti nella finestra di lancio della missione. Per conseguire ciò, si è fatto utilizzo di una tecnica conosciuta col nome di teoria del controllo ottimale: attraverso la definizione di equazioni aggiuntive da aggregare al sistema di equazioni differenziali che governano il problema, è possibile minimizzare una funzione costo che rappresenta il parametro da ottimizzare, in questo caso la massa al termine della trasferta. Facendo uso di una lista di asteroidi che presentano un passaggio ravvicinato con la Terra nei prossimi anni, sono stati ricercati quelli ideali per il rendezvous, ovvero che presentano una velocità relativa con la Terra di bassa entità. In seguito, sono stati scelti altri due NEAs con cui compiere i flyby intermedi con l'obiettivo di consumare il minor quantitativo di propellente possibile.

Complessivamente sono state trovate 18 soluzioni: esse presentano il rendezvous con gli asteroidi 2000 SG344 o 2012 TF79, il primo dei quali preferibile vista la dimensione maggiore, possedendo poi flyby con una lista molto diversificata di NEAs intermedi, alcuni numbered e altri unnumbered. Tra queste, la traiettoria Earth - 1997 NC1 - 2000 QK130 - 2012 TF79 risulta la più economica, con solamente 0.93 kg di propellente utilizzato e sorvoli due PHA di grandi dimensioni e velocità relative ai flyby di entità contenuta. Sono state poi trovate molte traiettorie con flyby con il Potentially Hazardous Object 2001 WN5, il quale nel 2028 realizzerà un passaggio molto ravvicinato con la Terra a soli 250 000 km. Alcune di esse, inoltre, vengono realizzate con consumi molto ridotti, sempre dell'ordine del kilogrammo.

L'elaborato presenta quindi un possibile approccio ad un problema piuttosto complesso, mostrando che è possibile ottenere delle soluzioni efficaci. I risultati sono infine degni di nota in quanto, sebbene si tratti di un'analisi sotto alcuni aspetti piuttosto semplificata, si è riusciti ad incontrare traiettorie di importanza scientifica considerevole ed accompagnate da consumi di propellente molto contenuti grazie all'utilizzo della propulsione ionica sopra citata, la quale permette di aumentare il carico utile sulla sonda.

Summary

Since the late 1990s, the interest towards asteroids orbiting in proximity with the Earth, known as Near-Earth Asteroids (NEAs), has grown exponentially, mainly due to the risk of potential catastrophic collisions with our planet. In recent years, the attention towards these objects has increased even more, with the goal of studying the genesis of the Solar System, but also aiming towards the creation of a new space economy based also on the extraction of minerals contained in them. With the objective of visiting them, the ANIME proposal was born: a CubeSat 12U probe with a mass of 21 kg equipped with ionic propulsion characterized by low thrust and high specific impulse. The mission foresees a maximum fuel consumption of 1.5 kg and a duration lower than two years, during which two intermediate flybys will take place with two different NEAs and a final rendezvous.

The purpose of this thesis is to look for alternative trajectories to the one already found to meet any changes in the mission launch window. To achieve this, a technique known as the optimal control theory was used: by defining additional equations to be aggregated to the system of differential equations governing the problem, it is possible to minimize a cost function that represents the parameter to be optimized, in this case the mass of the probe at the end of the transfer. Using a list of asteroids that have a close passage with the Earth in the next few years, the ideal ones for a rendezvous maneuver have been sought, that is, those that have a low relative speed to Earth. Then, two other NEAs were chosen with which to make a flyby with the aim of consuming the least amount of propellant possible.

Altogether, 18 solutions were found: they all have the final rendezvous with the asteroids 2000 SG344 or 2012 TF79, the first of which is preferable given the larger size, then possessing flybys with a very diversified list of intermediate NEAs, some of them numbered and others unnumbered. Among these, the Earth - 1997 NC1 - 2000 QK130 - 2012 TF79 trajectory is the most economical, with only 0.93 kg of propellant used and flybys with large PHAs characterized by relative speeds of small entity. Many flyby trajectories were then found with the Potentially Hazardous Object 2001 WN5, which in 2028 will make a very close approach with Earth at only 250 000 km. Some of them, moreover, are achieved with very low fuel consumption, once again just around a kilogram.

This thesis therefore presents a possible approach to a rather complex problem,

showing that it is possible to obtain effective solutions. The results are also noteworthy because, although it is a rather simplified analysis in some respects, it was possible to find trajectories of considerable scientific importance and accompanied by very low propellant consumption thanks to the use of the aforementioned ion propulsion, which allows to increase the payload on the probe.

Indice

Elenco delle figure	10
Elenco delle tabelle	13
1 Introduzione	15
1.1 Cenni di propulsione spaziale	16
1.2 Processo di lavoro	18
1.2.1 Scelta del modello e metodo di risoluzione	18
1.2.2 Selezione degli asteroidi	18
1.2.3 Analisi dei risultati	18
1.2.4 Introduzione alla teoria del controllo ottimale	19
2 Definizione della missione	21
2.1 Near-Earth Objects	21
2.1.1 Aspetti astronomici e scientifici dei NEAs	23
2.2 Missioni a flyby multipli	27
2.3 Caratteristiche della missione	28
3 Richiami di meccanica orbitale	31
3.1 Principi generali della gravità e meccanica orbitale	31
3.1.1 Forza di attrazione gravitazionale	31
3.1.2 Problema degli n -corpi	32
3.1.3 Problema dei due corpi	33
3.1.4 Sfera di influenza	34
3.1.5 Energia potenziale in un campo gravitazionale	35
3.1.6 Invarianti del moto	35
3.1.7 Equazione della traiettoria: le coniche	36
3.1.8 Generalità sulle possibili orbite	37
3.2 Posizione in funzione del tempo	40
3.3 Sistemi di coordinate	42
3.3.1 Sistema eliocentrico – eclittico	42
3.3.2 Sistema geocentrico – equatoriale (ECI)	42

3.3.3	Sistema perifocale	43
3.4	Parametri orbitali classici	44
3.4.1	Determinazione dei parametri orbitali noti posizione e velocità	45
3.4.2	Determinazione dei vettori posizione e velocità noti i parametri orbitali	46
3.4.3	Trasformazione di coordinate	46
3.5	Riferimenti temporali	47
3.6	Manovre orbitali	48
3.6.1	Costo della manovra e parametri della propulsione	49
3.6.2	Manovre con propulsione elettrica	50
3.6.3	Rendezvous	52
4	Modelli matematici del problema	53
4.1	Tipo di trasferta	54
4.1.1	Modello impulsivo	54
4.1.2	Modello continuo	56
4.1.3	Scelta del tipo di trasferta	56
4.2	Equazioni del moto	56
4.2.1	Problema degli n-corpi	57
4.2.2	Problema dei due corpi	57
4.2.3	Scelta delle equazioni del moto	58
4.3	Scrittura delle equazioni del moto	59
5	Funzione obiettivo e formulazione del problema	61
5.1	Tipi di funzione obiettivo	62
5.1.1	Funzioni obiettivo di Mayer	63
5.1.2	Funzioni obiettivo di Lagrange	64
5.2	Scalarizzazione della funzione obiettivo	65
5.3	Formulazione del problema di ottimizzazione	66
5.4	Scelta della funzione obiettivo	68
6	Metodi risolutivi e teoria del controllo ottimale	69
6.1	Approcci risolutivi	70
6.1.1	Approcci analitici	70
6.1.2	Approcci numerici	70
6.2	Tecniche di risoluzione	72
6.2.1	Inclusioni differenziali	72
6.2.2	Metodi di shooting	73
6.2.3	Tecniche di collocazione	74
6.3	Scelta del metodo risolutivo	75
6.4	Teoria del controllo ottimale	75
6.4.1	Vincoli di uguaglianza al bordo	76

6.4.2	Vincoli di uguaglianza lungo il percorso	78
6.4.3	Archi singolari	79
6.4.4	Estensione ai vincoli di disuguaglianza	79
6.4.5	Estensione ad una traiettoria divisa in sottointervalli	79
6.5	Algoritmi di risoluzione	82
6.5.1	Risoluzione di equazioni differenziali e integrazione	83
6.5.2	Risoluzione di sistemi non lineari	84
6.6	Presentazione del problema in esame	85
7	Presentazione degli asteroidi candidati per rendezvous finale	89
7.1	Algoritmo di selezione preliminare	89
7.2	Asteroidi con possibili rendezvous	90
7.3	Asteroidi con traiettorie di riferimento realizzabili	91
7.3.1	Panoramica su 2012 TF79 e 2000 SG344	92
7.4	Considerazioni aggiuntive sugli asteroidi candidati	93
7.5	Procedimento per la ricerca di soluzioni	96
7.5.1	Altri parametri significativi per la scelta degli asteroidi	98
8	Considerazioni iniziali sulle sequenze ottenute	99
9	Traiettorie aventi rendezvous con 2000 SG344 e partenza a fine 2025	103
9.1	Traiettoria 14: Earth – 2018 WX1 – 2000 RS11 – 2000 SG344	103
9.2	Traiettoria 12: Earth – 2008 TZ3 – 2000 RS11 – 2000 SG344	109
9.3	Traiettoria 11: Earth – 1997 NC1 – 2000 QK130 – 2000 SG344	115
10	Traiettorie aventi rendezvous con 2000 SG344 e partenza a fine 2027	121
10.1	Traiettoria 28: Earth – YORP – 2016 HO3 – 2000 SG344	121
10.2	Traiettoria 23: Earth – 2001 WN5 – 2016 HO3 – 2000 SG344	128
10.3	Traiettoria 25: Earth – 2001 WN5 – 2005 EE – 2000 SG344	134
11	Traiettorie aventi rendezvous con 2012 TF79	139
11.1	Traiettoria 33: Earth – 2015 WN1 – YORP – 2012 TF79	141
11.2	Traiettoria 42: Earth – YORP – 2000 QK130 – 2012 TF79	146
11.3	Traiettoria 41: Earth – 1997 NC1 – 2000 QK130 – 2012 TF79	151
12	Conclusioni	157
12.1	Gruppi con 2000 SG344	157
12.2	Gruppi con 2012 TF79	158
12.3	Considerazioni finali	159
	Bibliografia	161

Elenco delle figure

1.1	Confronto tra le diverse macro-categorie di propulsione	16
2.1	Suddivisione dei NEAs	22
2.2	Censimento in termini di massa per i diversi NEAs trovati	24
2.3	Lacune di Kirkwood nella fascia principale degli asteroidi	26
2.4	Effetto Yarkovsky	27
3.1	Problema degli n -corpi	33
3.2	Differenti possibili coniche e schematizzazione dei loro parametri caratteristici	38
3.3	Orbita ellittica e circonferenza ausiliaria circoscritta	41
3.4	Sistema eliocentrico – eclittico	43
3.5	Sistema geocentrico – equatoriale	43
3.6	Sistema perifocale	44
3.7	Angoli di Eulero definiti per la descrizione di un’orbita	45
3.8	Differenza tra un giorno solare e un giorno siderale	48
3.9	Traiettoria a spirale tipica di una spinta continua	51
3.10	Avvicinamento all’ISS visto dal sistema LVLH	52
4.1	Schema di massima per la definizione di un modello	54
4.2	Schema generale di una trasferta impulsiva	55
5.1	Macro-suddivisione dei possibili tipi e quantità di obiettivi	62
6.1	Schematizzazione del problema ai valori al contorno in analisi	69
6.2	Principali differenze tra i diversi approcci risolutivi	71
6.3	Tecnica di shooting per un caso diretto e uno indiretto	74
7.1	Parametri orbitali degli asteroidi candidati	95
7.2	Rappresentazione in un grafico tempo – raggio della traiettoria 10 Earth – 2000 SG344	97
9.2	Traiettoria 14: riferimento eliocentrico – eclittico	105
9.3	Traiettoria 14: riferimento ECI	106

9.4	Traiettoria 14: raggio della traiettoria	106
9.5	Traiettoria 14: parametri orbitali	107
9.6	Traiettoria 14: massa, spinta totale e potenza elettrica	107
9.7	Traiettoria 14: Vettori spinta	108
9.8	Traiettoria 14: spinta lungo i 3 assi e modulo	109
9.9	Traiettoria 12: riferimento eliocentrico – eclittico	110
9.10	Traiettoria 12: raggio della traiettoria	111
9.11	Traiettoria 12: riferimento ECI	112
9.12	Traiettoria 12: parametri orbitali	113
9.13	Traiettoria 12: massa, spinta totale e potenza elettrica	113
9.14	Traiettoria 12: Vettori spinta	114
9.15	Traiettoria 12: spinta lungo i 3 assi e modulo	115
9.16	Traiettoria 11: riferimento eliocentrico – eclittico	116
9.17	Traiettoria 11: parametri orbitali	117
9.18	Traiettoria 11: massa, spinta totale e potenza elettrica	117
9.19	Traiettoria 11: riferimento ECI	118
9.20	Traiettoria 11: raggio della traiettoria	119
9.21	Traiettoria 11: spinta lungo i 3 assi e modulo	119
9.22	Traiettoria 11: vettori spinta	120
10.1	Rappresentazione in un grafico tempo – raggio della traiettoria di riferimento 20 Earth – 2000 SG344	122
10.2	Traiettoria 28: riferimento eliocentrico – eclittico	123
10.3	Traiettoria 28: riferimento ECI	124
10.4	Traiettoria 28: raggio della traiettoria	125
10.5	Traiettoria 28: parametri orbitali	125
10.6	Traiettoria 28: massa, spinta totale e potenza elettrica	126
10.7	Traiettoria 28: spinta lungo i 3 assi e modulo	126
10.8	Traiettoria 28: vettori spinta	127
10.9	Traiettoria 23: riferimento eliocentrico – eclittico	129
10.10	Traiettoria 23: riferimento ECI	130
10.11	Traiettoria 23: raggio della traiettoria	131
10.12	Traiettoria 23: parametri orbitali	131
10.13	Traiettoria 23: massa, spinta totale e potenza elettrica	132
10.14	Traiettoria 23: spinta lungo i 3 assi e modulo	132
10.15	Traiettoria 23: vettori spinta	133
10.16	Traiettoria 25: riferimento ECI	135
10.17	Traiettoria 25: riferimento eliocentrico – eclittico	136
10.18	Traiettoria 25: raggio della traiettoria	136
10.19	Traiettoria 25: parametri orbitali	137
10.20	Traiettoria 25: massa, spinta totale e potenza elettrica	137
10.21	Traiettoria 25: spinta lungo i 3 assi e modulo	137

10.22	Traiettoria 25: vettori spinta	138
11.1	Rappresentazione in un grafico tempo – raggio della traiettoria di riferimento 30 Earth – 2012 TF79	140
11.2	Rappresentazione in un grafico tempo – raggio della traiettoria di riferimento 40 Earth – 2012 TF79	140
11.3	Traiettoria 33: riferimento ECI	142
11.4	Traiettoria 33: riferimento eliocentrico – eclittico	143
11.5	Traiettoria 33: raggio della traiettoria	143
11.6	Traiettoria 33: parametri orbitali	144
11.7	Traiettoria 33: massa, spinta totale e potenza elettrica	144
11.8	Traiettoria 33: spinta lungo i 3 assi e modulo	144
11.9	Traiettoria 33: vettori spinta	145
11.10	Traiettoria 42: riferimento eliocentrico – eclittico	147
11.11	Traiettoria 42: riferimento ECI	147
11.12	Traiettoria 42: raggio della traiettoria	148
11.13	Traiettoria 42: parametri orbitali	148
11.14	Traiettoria 42: massa, spinta totale e potenza elettrica	149
11.15	Traiettoria 42: spinta lungo i 3 assi e modulo	149
11.16	Traiettoria 42: vettori spinta	150
11.17	Traiettoria 41: riferimento eliocentrico – eclittico	152
11.18	Traiettoria 41: riferimento ECI	152
11.19	Traiettoria 41: raggio della traiettoria	153
11.20	Traiettoria 41: parametri orbitali	153
11.21	Traiettoria 41: massa, spinta totale e potenza elettrica	154
11.22	Traiettoria 41: spinta lungo i 3 assi e modulo	154
11.23	Traiettoria 41: vettori spinta	155

Elenco delle tabelle

2.1	Specifiche della missione	29
4.1	Confronto tra tre possibili approcci al problema a due corpi ristretto	58
7.1	Possibili incontri con asteroidi dotati di bassa velocità relativa	91
7.2	Traiettorie di riferimento con 2012 TF79 e 2000 SG344	92
7.3	Confronto tra 2012 TF79 e 2000 SG344	93
8.1	Asteroidi e date dei flyby	99
8.2	Durata, incremento di velocità e propellente usato	100
8.3	Velocità relative e differenza di raggio rispetto alla Terra	101
8.4	Sfasamento rispetto alla Terra e magnitudine assoluta dell'asteroide visitato	101
9.1	Principali caratteristiche della traiettoria 14	104
9.2	Principali caratteristiche della traiettoria 12	109
9.3	Principali caratteristiche della traiettoria 11	115
10.1	Principali caratteristiche della traiettoria 28	122
10.2	Principali caratteristiche della traiettoria 23	128
10.3	Principali caratteristiche della traiettoria 25	134
11.1	Principali caratteristiche della traiettoria 33	141
11.2	Principali caratteristiche della traiettoria 42	146
11.3	Principali caratteristiche della traiettoria 41	151

Capitolo 1

Introduzione

Il lavoro di tesi presentato in questo elaborato si pone l'obiettivo di ricercare delle traiettorie che una sonda dovrà realizzare per visitare alcuni asteroidi che si trovano nei pressi della Terra. Per conseguire ciò, si utilizzerà un sistema propulsivo a bassa spinta, il quale è intrinsecamente più complesso da analizzare viste le deboli forze e i lunghi tempi di attuazione. D'altra parte, queste caratteristiche consentono una grande libertà nella scelta della traiettoria, permettendo l'implementazione di tecniche di ottimizzazione con lo scopo di ricercare la migliore. Il lavoro prende ispirazione, ed in un certo senso continua, l'elaborato realizzato in [1], trattando però una missione diversa sia nei requisiti che negli obiettivi.

In questo contesto nasce quindi l'idea presentata: a partire da alcuni parametri di progetto di una sonda, si definiranno le equazioni della dinamica che la governano e si delinea una strategia di ottimizzazione per la ricerca della soluzione migliore che rispetti i vincoli al contorno imposti e che realizzi preferibilmente due flyby e un rendezvous con asteroidi near-Earth.

Nel primo capitolo si vuole riassumere brevemente quali saranno gli elementi cardine dell'analisi e il processo di lavoro seguito. Nei capitoli successivi verrà innanzitutto esposta in dettaglio la missione ([cap. 2](#)), per quanto riguarda sia le specifiche della sonda sia gli obiettivi. Dopo aver poi richiamato i concetti teorici essenziali per la comprensione dell'elaborato nel [cap. 3](#), si presenterà il set di equazioni differenziali della dinamica che definiscono il comportamento dello spacecraft. Verrà poi introdotto il concetto di *funzione obiettivo*, necessario per delineare in seguito un metodo per la ricerca di una traiettoria ottimale, di cui verrà data una presentazione introduttiva nelle sezioni successive di questo capitolo. Chiariti quindi tutti gli aspetti teorici, si descriveranno gli asteroidi scelti come target per un rendezvous, con lo scopo di visitarli e studiarli per un lungo periodo di tempo. Infine, si aggiungeranno dei flyby intermedi con altri asteroidi al fine di poter studiare più corpi celesti possibili con una singola missione.

1.1 Cenni di propulsione spaziale

Prima di introdurre la teoria del controllo ottimale, risulta necessario specificare la tecnica propulsiva scelta per la missione. Esistono sostanzialmente due macro-categorie di sorgente di energia per la propulsione spaziale: *chimica* ed *elettrica*. Esiste in realtà anche una propulsione nucleare, ma è attualmente di impiego limitatissimo se non nullo visti i rischi di un eventuale fallimento della missione. Per realizzare degli opportuni confronti, si definisce il parametro *impulso specifico*, il quale verrà poi approfondito nel [cap. 2](#):

$$I_{sp} = \frac{T}{\dot{m}_p \cdot g_0}$$

dove T è la spinta prodotta dal sistema propulsivo, \dot{m}_p è la portata di propellente e g_0 l'accelerazione di gravità al sea level. Questo parametro rappresenta di fatto la spinta ottenibile per unità di portata di propellente espulso ed è un eccellente indice di confronto: se si fissa il valore di portata, un propellente con impulso specifico alto è in grado di produrre più spinta di uno con un valore minore, ovvero è più "prestazionale".

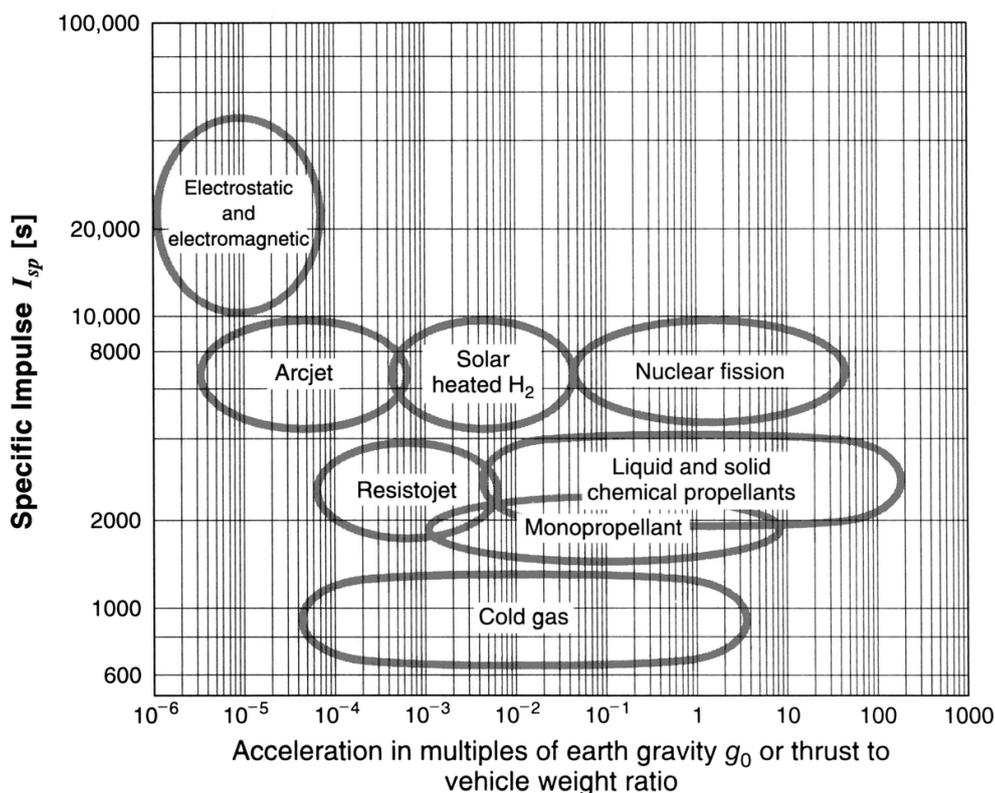


Figura 1.1. Confronto tra le diverse macro-categorie di propulsione [2].

In Fig. 1.1 si può osservare un chiaro confronto tra le diverse tecniche propulsive: è evidente che la propulsione elettrica sia quella con l'impulso specifico di gran lunga maggiore, ma le accelerazioni prodotte sono $3 \div 8$ ordini di grandezza più bassi. Questo accade perché la propulsione chimica sfrutta l'energia liberata da una reazione, tipicamente di combustione, e accelera i gas prodotti in un ugello. Ciò implica una portata di propellente espulso dell'ordine delle centinaia di kg/s che quindi produce una forza notevole, anche se con efficienze più basse. Ciò permette di realizzare brevi accensioni ma molto intense, non ideali per le applicazioni in esame.

Il discorso è diametralmente opposto per la propulsione elettrica: la spinta viene generata dall'accelerazione di ioni attraverso un intenso campo elettromagnetico, ma la portata di questi ultimi è molto ridotta, tipicamente dell'ordine dei mg per i propulsori a spinta maggiore, limitando la forza realizzabile che sarà quindi dell'ordine dei mN. Ciò non le permette ad esempio che venga utilizzata per la manovra di ascensione ed uscita dall'atmosfera, ma si rivela di eccellente utilizzo per missioni che necessitano di un ingente sforzo propulsivo dopo l'inserimento in orbita, ovvero trasferte interplanetarie o verso orbite geostazionarie, missioni di tipo *sample & return* o, come nel caso in esame, di flyby multipli. La forza propulsiva ridotta diventa inoltre un vantaggio quando si cerca di realizzare una traiettoria ottimale poiché permette di compiere una manovra molto precisa e concede di modellare la spinta nella maniera più opportuna per realizzare l'obiettivo desiderato.

Gli svantaggi legati a questa tecnologia sono però molteplici: la limitata autorità del propulsore diventa particolarmente problematica quando si è in presenza di grandi forze di disturbo esterne, ad esempio in presenza di forti campi magnetici, resistenza atmosferica o gravità intensa. In questi casi, la già limitata spinta può diventare non sufficiente a realizzare la manovra desiderata e, nei casi peggiori, potrebbe essere addirittura più debole del disturbo stesso, rendendola del tutto inefficace. Essa è poi legata alla potenza elettrica disponibile, la quale è inversamente proporzionale al quadrato del raggio dell'orbita, complicando lo studio del *power budget* e rendendola poco adatta per il controllo orbitale per missioni verso i pianeti esterni del Sistema Solare; si potrebbe eventualmente sostituire la sorgente di energia con un *radioisotope thermoelectric generator*, ma sarebbe più conveniente utilizzare un propulsore a fissione nucleare per le migliori prestazioni. Inoltre, i lunghi tempi di attuazione inducono un maggiore tempo di utilizzo delle risorse di controllo di Terra, tramutandosi in costi di gestione più elevati. Infine, dal punto di vista matematico occorrerà modellare la spinta con passi di integrazione molto brevi vista la grande variabilità del modulo e della direzione della spinta stessa, che si tramuta in complicazioni computazionali visti i lunghi intervalli di accensione.

In conclusione, però, i vantaggi legati alla continuità della spinta e i ridotti consumi sono essenziali per la realizzazione della missione in esame e prevalgono sugli svantaggi. Ciò quindi permetterà di realizzare un modello opportuno per lo studio dell'ottimo.

1.2 Processo di lavoro

Il processo di lavoro è sostanzialmente diviso in tre macro-passaggi:

1. Scelta del modello e ricerca di un metodo di risoluzione.
2. Selezione degli asteroidi.
3. Analisi dei risultati.

1.2.1 Scelta del modello e metodo di risoluzione

Definiti quindi gli obiettivi della missione e i parametri dello spacecraft, nel [cap. 4](#) verrà scelto un modello matematico che descriva il comportamento della sonda: ne esistono molteplici, con diverse ipotesi semplificative più o meno attuabili a seconda del caso in esame. Si descriveranno quindi quali sono gli aspetti che permettono di usarne uno piuttosto che un altro e si attuerà una scelta giustificata.

L'aspetto successivo, trattato nel [cap. 5](#), sarà la definizione della già citata funzione obiettivo: questa può assumere molteplici formulazioni più o meno complesse in base alle esigenze della traiettoria. Verranno quindi presentate le formulazioni più comuni, i loro utilizzi e le peculiarità, per poter scegliere quella più opportuna per il caso in esame.

Infine, nel [cap. 6](#), si studieranno approcci e metodi di risoluzione del problema. Una prima infarinatura verrà presentata nella [sez. 1.2.4](#).

1.2.2 Selezione degli asteroidi

Questo aspetto sarà trattato nel [cap. 7](#), dove verrà scelta la metodologia opportuna per la ricerca delle traiettorie migliori. Si cercheranno gli asteroidi che presentano le caratteristiche ideali per un rendezvous e si analizzerà come introdurre dei flyby intermedi senza incrementare eccessivamente l'utilizzo di propellente. Ciò avverrà con il supporto di alcuni documenti reperibili dal web ed altri realizzati ad-hoc per questo lavoro.

1.2.3 Analisi dei risultati

L'ultimo aspetto, trattato nei [capitoli 8, 9, 10 e 11](#), sarà la presentazione dei risultati ottenuti dall'esecuzione del codice di calcolo: verranno analizzati i parametri più importanti delle traiettorie e la loro evoluzione temporale, confrontando le caratteristiche, i pregi ed i difetti di ognuna. Infine, nel [cap. 12](#), si trarranno le conclusioni sul lavoro compiuto.

1.2.4 Introduzione alla teoria del controllo ottimale

La teoria del controllo ottimale è una delle possibili tecniche disponibili per la ricerca di una soluzione ottimale di un problema. Prima ancora di introdurla, occorre scegliere quella che viene chiamata *funzione obiettivo*, ovvero un parametro che tiene in considerazione molteplici aspetti della missione e rappresenta l'elemento che va minimizzato o massimizzato. Alla luce di ciò, si può quindi scegliere il metodo con cui risolvere il problema. Come si vedrà più in dettaglio nei capitoli successivi, si può optare per un metodo analitico o numerico, quest'ultimo a sua volta diviso in diretto o indiretto, ognuno di essi con pregi e difetti. La teoria del controllo ottimale è un approccio risolutivo applicabile ad un metodo numerico indiretto e si basa sulla ricerca di una legge di controllo, ovvero l'evoluzione temporale del vettore dei controlli, che permetta di minimizzare la suddetta funzione obiettivo e che rispetti i vincoli imposti. Per realizzare ciò si definisce un set di parametri aggiuntivi, detti *co-stati* o *moltiplicatori di Lagrange*, i quali sono strettamente connessi ad uno ad uno ai parametri fisici del problema e alle condizioni di ottimo. Definendo quindi ulteriori equazioni aggiuntive che li coinvolgono, sarà possibile riscrivere il problema e, scegliendo un metodo opportuno, risolverlo ottenendo una soluzione ottimale.

Appare quindi evidente lo stretto legame tra propulsione a bassa spinta, in particolare quella elettrica, con il controllo ottimale: la continuità della spinta si adatta perfettamente alla ricerca della legge di controllo opportuna in quanto garantisce una grande variabilità del vettore dei controlli in ogni istante, rispetto al tipico carattere impulsivo della propulsione chimica. Questo permette di minimizzare il quantitativo di propellente necessario, evitando di dover ridurre la massa del payload a causa di un utilizzo di una traiettoria sub-ottimale.

Ad ogni modo, è opportuno precisare che la teoria del controllo ottimale presenta alcuni svantaggi non trascurabili che verranno meglio descritti nel seguito. Pertanto, non è l'unica strada percorribile per la ricerca di una soluzione e occorrerà valutare attentamente e con occhio critico i risultati ottenuti.

Capitolo 2

Definizione della missione

Dopo aver fornito una introduzione generale dell'elaborato, in questo capitolo si vuole presentare il contesto in cui la missione si svolgerà in termini di parametri di progetto della sonda, condizioni al contorno del problema stesso e degli obiettivi da conseguire. Innanzitutto verranno mostrati e catalogati i corpi celesti noti come Near-Earth Objects (NEOs) e, in seguito, si passerà alla descrizione del satellite.

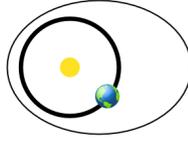
2.1 Near-Earth Objects

Per *Near-Earth Objects* (NEOs) si intendono i corpi del Sistema Solare aventi perielio inferiore a 1.3 au. Essi sono a loro volta divisi in *Near-Earth Asteroids* (NEAs) e *Near-Earth Comets* (NECs), questi ultimi presentanti una seconda restrizione riguardante il loro periodo orbitale, il quale deve essere inferiore a 200 anni. I NEAs sono a loro volta divisi in quattro distinte categorie, presentati anche in [Fig. 2.1](#), in funzione della forma della loro orbita:

- ***Amors***: asteroidi con orbita esterna a quella terrestre, pertanto non intersecante. Possiedono un semiasse maggiore più grande del raggio medio terrestre e perielio maggiore dell'afelio della Terra. La loro orbita spesso interseca quella di Marte.
- ***Apollos***: asteroidi con orbita intersecante quella terrestre. Il loro semiasse maggiore è più grande di quello della Terra, ma il loro perielio è minore dell'afelio terrestre.
- ***Atens***: asteroidi con orbita intersecante quella terrestre. Il loro semiasse maggiore è minore di quello della Terra, ma il loro afelio è maggiore del perielio terrestre.
- ***Atiras***: asteroidi con orbita interna a quella terrestre, pertanto non intersecante. Possiedono un semiasse maggiore minore di quello terrestre e un afelio minore del perielio terrestre.

Amors

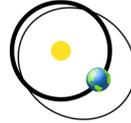
Earth-approaching NEAs with orbits exterior to Earth's but interior to Mars' (named after asteroid (1221) Amor)



$$a > 1.0 \text{ AU} \\ 1.017 \text{ AU} < q < 1.3 \text{ AU}$$

Apollos

Earth-crossing NEAs with semi-major axes larger than Earth's (named after asteroid (1862) Apollo)



$$a > 1.0 \text{ AU} \\ q < 1.017 \text{ AU}$$

Atens

Earth-crossing NEAs with semi-major axes smaller than Earth's (named after asteroid (2062) Aten)



$$a < 1.0 \text{ AU} \\ Q > 0.983 \text{ AU}$$

Atiras

NEAs whose orbits are contained entirely within the orbit of the Earth (named after asteroid (163693) Atira)



$$a < 1.0 \text{ AU} \\ Q < 0.983 \text{ AU}$$

(q = perihelion distance, Q = aphelion distance, a = semi-major axis)

Figura 2.1. Suddivisione dei NEAs [Courtesy of NASA/JPL-CalTech].

In riferimento alla Fig. 2.1, per una migliore comprensione si ricordano i seguenti parametri relativi alla Terra:

Semiassse maggiore	$a_{\oplus} = 1.0 \text{ au}$
Afelio	$Q_{\oplus} = 1.017 \text{ au}$
Perielio	$q_{\oplus} = 0.983 \text{ au}$

A loro volta, i NEAs possono anche essere considerati *Potentially Hazardous Asteroids* (PHAs), definiti come asteroidi che possiedono una *Minimum Orbit Intersection Distance* (MOID) minore o uguale a 0.05 au e una magnitudine assoluta minore o uguale a 22.0. In altre parole, i PHAs sono tutti gli asteroidi che, secondo le attuali previsioni delle loro orbite, passeranno a una distanza minore di circa 7.5 milioni di km dalla Terra e possiedono un diametro stimato maggiore di circa 140 m.

Il passaggio da magnitudine assoluta, cioè una misura della luminosità dell'oggetto, alla sua dimensione non è immediato; si faccia riferimento alla seguente relazione [3]:

$$D = \frac{1329}{\sqrt{A}} \cdot 10^{-\frac{H}{5}}$$

Essa permette di stimare il valore del diametro di un asteroide D conoscendone l'albedo A , ovvero la percentuale di luce riflessa rispetto a quella ricevuta, e la

magnitudine assoluta nella banda del visibile H . Quest'ultima è facilmente misurabile, mentre l'albedo dipende dalla composizione chimica che può variare molto. Tra le varie classi di composizione, i valori sono tipicamente compresi tra 0.2 e 0.06. Ipotizzando ragionevolmente di utilizzare il valore medio di 0.14, si ottiene proprio un diametro pari a circa 140 m. Questo valore non è ad ogni modo arbitrario: attraverso alcuni studi, è possibile stimare che un oggetto di dimensioni di circa 150 m sarebbe già in grado di raggiungere il suolo terrestre e provocare localmente danni, mentre un oggetto di 1 km è in grado di causare un impatto fino a 40 000 Mt, con crateri di dimensioni pari a 10 km [4]. Sebbene queste siano solo stime, ci si può rendere conto della pericolosità di questi oggetti e quanto sia importante catalogarli e studiarli al fine di prevenire futuri impatti.

A titolo di confronto, si può analizzare l'evento di Chelyabinsk, dove il 15 febbraio 2013 una meteora di dimensioni stimate di 20 m è entrata in atmosfera ad una velocità di circa 20 km/s. Nonostante sia esplosa in aria ad una quota di circa 30 km, l'onda d'urto ha provocato ingenti danni e il ferimento di 1500 persone [5]. Un altro importante evento accadde a Tunguska il 30 giugno 1908, dove un asteroide di circa 100 m di diametro esplose a pochi chilometri dal suolo, distruggendo 2000 km² di foresta [6]. Si osservi che entrambi i corpi non rientrano nella definizione di PHA, ma sono stati comunque capaci di provocare danni.

I NEAs, così come tutti gli altri corpi minori del Sistema Solare, sono poi divisi tra *numbered* e *unnumbered*: i primi sono oggetti di cui si ha una conoscenza più approfondita dell'orbita in seguito a ripetute osservazioni, mentre la precisione sui parametri orbitali dei secondi è minore. Successivamente alla scoperta di un nuovo corpo, esso viene provvisoriamente aggiunto alla lista degli unnumbered e solo dopo un'opportuna serie di osservazioni e studi gli si potrà assegnare una designazione.

2.1.1 Aspetti astronomici e scientifici dei NEAs

A partire dal 1998 attraverso una cooperazione internazionale si è avviato il programma *Spaceguard* con l'intento di catalogare i NEAs e prevenirne impatti con la Terra. Inizialmente il focus delle osservazioni era rivolto ai corpi più grandi, cioè con diametro maggiore di 1 km, a causa della loro maggiore pericolosità. Si è poi estesa la ricerca, con l'obiettivo di studiare anche i corpi di dimensione minore. Ciò ha comportato la necessità di nuove e più precise tecnologie, permettendo la scoperta di una moltitudine di NEOs anche grazie alla missione NASA NEOWISE.

In Fig. 2.2 si può osservare come sono suddivisi in termini di massa i NEOs finora trovati: degli oltre 25 000 catalogati, meno di 1000 sono con dimensioni maggiori di 1 km, mentre la maggior parte di essi possiede un diametro minore di 140 m, ovvero non tali da essere considerati PHAs. Si può poi osservare che il numero di asteroidi di grandi dimensioni è grosso modo costante da molti anni: questo perché sono relativamente semplici da trovare, pertanto si stima che siano ormai quasi tutti noti.

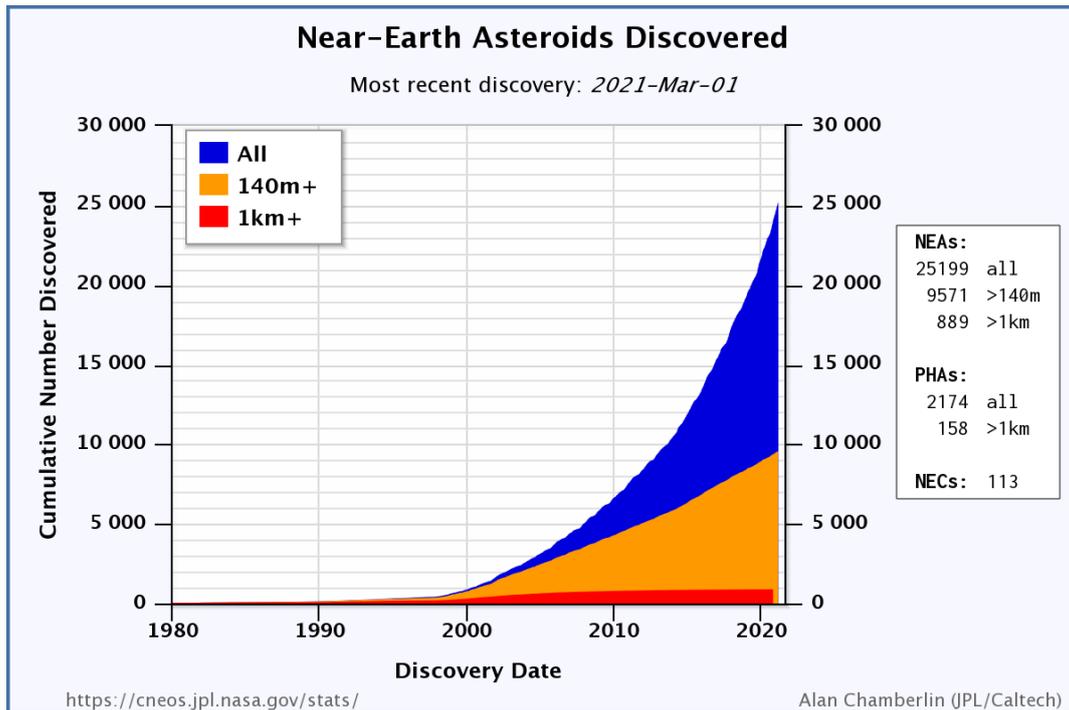


Figura 2.2. Censimento in termini di massa per i diversi NEAs trovati (aggiornato al 1 marzo 2021) [Courtesy of NASA/JPL-CalTech].

Il primo aspetto che ha spinto le agenzie spaziali a interessarsi ai NEA è stato quindi quello di sorveglianza e prevenzione di futuri impatti viste le già citate notevoli energie in gioco, con conseguenti rischi. A proposito di ciò, sono state studiate missioni di prova e analisi con l'obiettivo di trovare soluzioni per deviare efficacemente un asteroide dalla sua rotta di collisione con la Terra. Tra esse, si annoverano studi preliminari di fattibilità per la deviazione del PHA Apophis per mezzo di un gravity tractor [7], o il *Double Asteroid Redirection Test*, una missione che ha lo scopo di deviare una piccola luna del NEA Didymos [8].

Oltre all'aspetto di sorveglianza, i NEAs sono obiettivi ideali per missioni scientifiche a basso costo vista la loro vicinanza alla Terra e la loro bassa gravità, permettendo studi di tipo astronomico e geochimico sulla storia del sistema solare e della sua formazione. Inoltre, in un'ottica rivolta ad una New Space Economy, estrarre minerali dagli asteroidi potrebbe essere una buona fonte di risorse per il futuro [9]. I NEAs presentano una composizione fisico – chimica molto variegata: silicati, carbonati, composti basaltici, e metalli. Ciò dimostra che la loro formazione non ha un'origine unica, rendendoli un ottimo specchio della storia del sistema solare, testimoni di aggregazioni e collisioni nel corso dei millenni sin dalla condensazione della nebulosa solare.

La storia evolutiva degli asteroidi è ancora non del tutto chiara, in particolare

nelle prime fasi della loro vita: è stato evidenziato che un insieme di polveri di dimensioni millimetriche, chiamate *chondrules*, si può aggregare per effetto delle forze viscosi. Quando però le dimensioni dell'aggregato raggiungono l'ordine del centimetro, le accelerazioni centrifughe sembrerebbero di gran lunga più forti delle forze gravitazionali o viscosi e l'ammasso di *chondrules* non è più in grado di crescere [10]. Quando poi il corpo raggiunge le dimensioni del kilometro, l'attrazione gravitazionale diventa tale da catturare altre polveri o corpi minori e lo mantiene compatto. Il passaggio dalle dimensioni del centimetro ÷ metro al kilometro non è però mai stato chiarito in maniera univoca: alcune simulazioni dimostrano che in presenza di vortici turbolenti intensi sia possibile proseguire la formazione dell'asteroide attraverso l'aggregazione di polveri [11], ma rimangono dei dubbi a riguardo. Molti dei NEAs rientrano proprio nelle dimensioni intermedie, rendendoli perfetti per approfondire la conoscenza dei fenomeni che ne governano la formazione e chiarire i dubbi ancora esistenti.

Vista la loro posizione nello spazio, la vita stimata di un NEA è dell'ordine dei milioni di anni a causa della scarsa stabilità dell'orbita: è infatti comune che possano impattare con i pianeti interni, o venir proiettati verso lo spazio profondo per effetto di uno swing by, o semplicemente decadendo verso il Sole. Questo fa supporre che non si siano originati nell'orbita attuale, ma provengano in realtà principalmente dalla fascia di asteroidi principale tra Marte e Giove [12]. A dimostrazione che effettivamente i NEAs provengono dalla fascia principale, grazie al rendezvous avvenuto con il NEA Bennu compiuto dalla sonda NASA OSIRIS-REx si è osservato sulla sua superficie la presenza di rocce provenienti dall'asteroide della fascia principale Vesta [13], il quale in passato ha subito due forti impatti [14], liberando molti frammenti. Esistono poi due fenomeni legati alla migrazione degli asteroidi verso orbite più interne: le *lacune di Kirkwood* e l'*effetto Yarkovsky*.

Lacune di Kirkwood

Se si osserva la distribuzione di asteroidi nella fascia principale in termini di semiasse maggiore (Fig. 2.3), per determinati valori di esso la quantità di asteroidi è praticamente nulla. Ciò accade perché un asteroide in un'orbita che possiede quel valore di semiasse maggiore si trova in risonanza orbitale con Giove, ovvero i periodi orbitali del Gigante Gassoso e dell'asteroide stesso sono in un rapporto preciso. Questo accade in particolare con le orbite circolari, ma più in generale anche quando l'asteroide presenta un'orbita eccentrica o inclinata. Per questi asteroidi, la gravità di Giove genera disturbi orbitali notevoli, provocandone la migrazione in altre regioni dello spazio dando origine a queste caratteristiche lacune che prendono il nome dal rapporto dei periodi, ad esempio *risonanza 3:1*. È stato osservato che circa il 61% dei NEOs è proviene dalla fascia di asteroidi interna ($a < 2.5$ au), il 24% dalla fascia centrale ($2.5 \text{ au} < a < 2.8 \text{ au}$), l'8% dalla fascia esterna ($a > 2.8 \text{ au}$) e il restante 6% dalla famiglia delle comete gioviane [15].

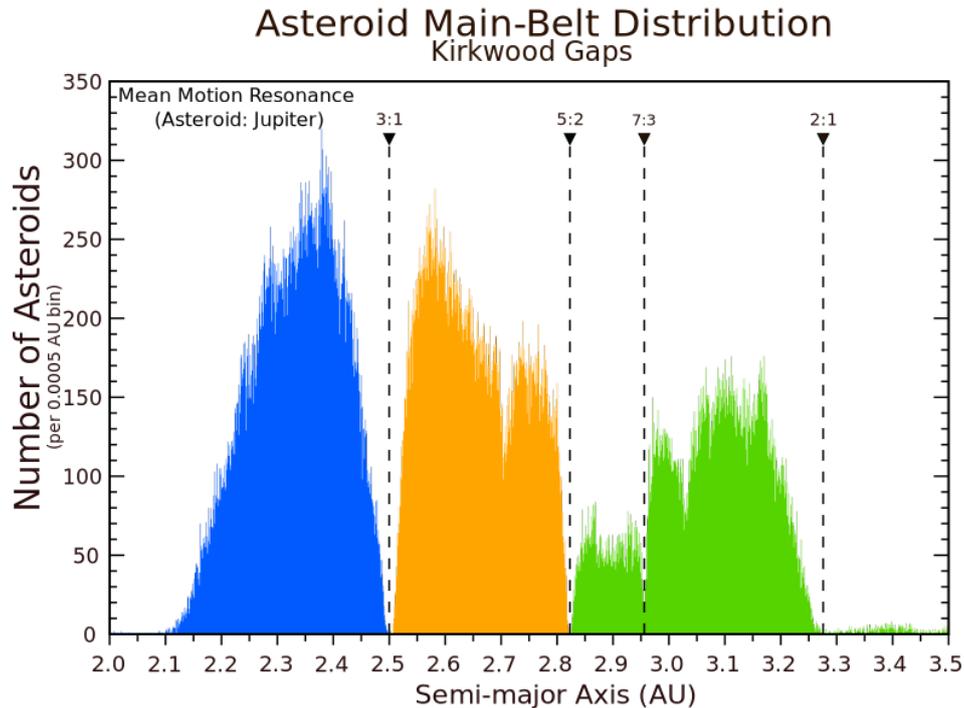


Figura 2.3. Lacune di Kirkwood nella fascia principale degli asteroidi [Courtesy of NASA/JPL-CalTech].

Effetto Yarkovsky

Quando un asteroide viene illuminato dalla radiazione solare, esso assorbirà energia e la re-irradierà secondo la legge di Stefan-Boltzmann. Per effetto però dell'inerzia termica, esiste un ritardo temporale tra il picco di immissione e il picco di emissione. Se perciò un asteroide possiede una rotazione attorno al suo asse, il picco di assorbimento avverrebbe a "mezzogiorno" mentre il picco di emissione nel "pomeriggio", generando una forza non nulla e non-radiale. Se, ad esempio, l'asteroide ruota in maniera prograda, la forza risultante produce un aumento del semiasse (Fig. 2.4, a sinistra), viceversa se lo spin è retrogrado. Se invece l'asteroide non è dotato di moto di rotazione, durante il suo moto di rivoluzione metà del satellite sarà illuminato e l'altra metà no, seguendo un ciclo "stagionale". Facendo riferimento alla Fig. 2.4 di destra, sebbene il picco di assorbimento avvenga nei punti A e C, il picco di emissione avverrà in B e D, producendo una forza frenante che riduce il semiasse maggiore. Le forze in gioco sono in entrambi i casi molto piccole, ma è stato dimostrato che nel corso del tempo possono portare a variazioni significative, fino a spostare asteroidi di dimensioni inferiori a 20 km verso le regioni affette da risonanza gravitazionale [16].

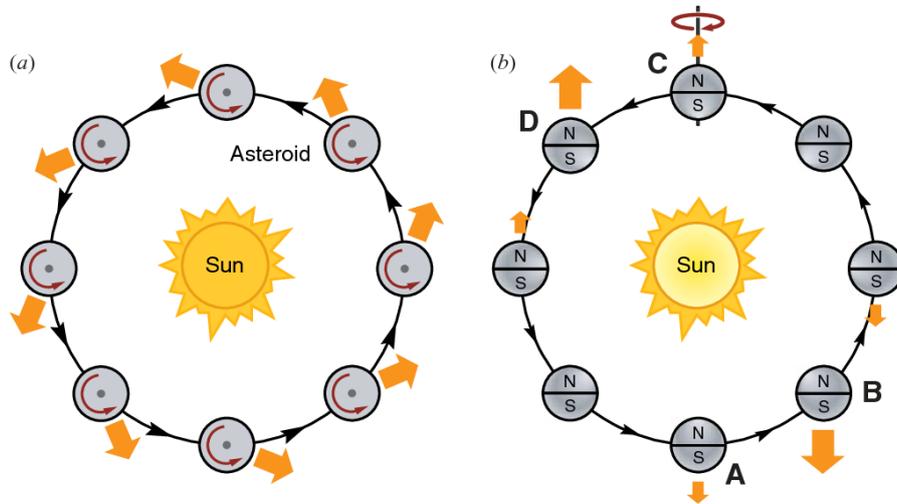


Figura 2.4. Effetto Yarkovsky per un asteroide rotante (a) e stagionale (b) [17].

2.2 Missioni a flyby multipli

Chiarito che i NEA possono essere ottimi obiettivi scientifici, occorre ora pianificare e disegnare una missione per studiarli. Innanzitutto è opportuno segnalare che gli asteroidi in questione non sono affatto vicini tra loro, ovvero non esiste un sistema simile alla fascia di asteroidi o gli anelli di Saturno. Per questo motivo risulterebbe di scarso, se non nullo, interesse realizzare missioni in cui una sonda viene posta in campo Near-Earth con l'intento di studiare gli asteroidi che incontra. Ciò che invece si può realizzare è una missione con flyby multipli, in quanto permetterebbe di analizzare diversi NEAs con il medesimo equipaggiamento, riducendo i costi. Per la selezione dei target, si possono utilizzare diversi approcci in funzione delle esigenze e delle preferenze della missione: ad esempio, si può scegliere di realizzare il maggior numero di flyby possibili col minimo consumo, senza tenere in conto gli aspetti scientifici, oppure favorire certi asteroidi per le loro proprietà, pur consumando di più, oppure una via di mezzo.

Questo tipo di missioni porta con sé una problematica non trascurabile: è necessario conoscere con estrema accuratezza i parametri orbitali dei NEA al fine di intercettarli. Infatti, essendo oggetti piccoli, anche minimi errori potrebbero compromettere la buona riuscita delle misurazioni, inficiandone il buon esito.

Per poter collezionare un maggior numero di dati e incrementare il valore scientifico della missione, si può valutare l'inserimento di un rendezvous finale: questa manovra aggiunge una complessità maggiore, ma vista la debole gravità dei NEAs non sono necessarie manovre di avvicinamento eccessivamente complesse ed è sufficiente un lento *close-in* con il corpo in esame.

2.3 Caratteristiche della missione

Per la realizzazione di questa tesi, si è deciso di utilizzare il design *Asteroid Nodal Intersection Multiple Encounters* (ANIME) proposto all’Agenzia Spaziale Italiana (ASI) come risposta al bando per la ricerca di nuove missioni CubeSat [18]. Esso si pone come obiettivo lo studio di alcuni NEAs attraverso l’esecuzione di un rendezvous finale e due flyby intermedi, visitandone così tre diversi. È già stata proposta una possibile traiettoria (Earth – 2006 HZ51 – 2004 QD14 – 2000 SG344 con partenza a fine 2026), ma si è deciso di cercare opzioni alternative con l’obiettivo di fornire delle traiettorie di ”backup” in caso non fosse più possibile realizzare la missione già proposta. Si è quindi scelto un target finale ottimale dal punto di vista dei consumi per la fase di rendezvous e si è poi cercato di introdurre almeno due NEAs intermedi.

La sonda in esame è un CubeSat 12U che possiede una massa iniziale di 21 kg ed è dotata di un singolo *radiofrequency ion thruster* modello Busek BIT-3, dotato di spinta nominale (cioè a 1 au) di 1 mN e impulso specifico di 2100 s ipotizzato costante. Questo implica che anche la velocità effettiva di scarico c sarà costante e di conseguenza la spinta varierà con la portata, la quale dipende dalla potenza elettrica disponibile, che a sua volta dipende dall’inverso del quadrato del raggio:

$$P_{elec} = \frac{P_{elec,1au}}{r^2}$$

$$P_T = \eta P_{elec} = \frac{1}{2} \dot{m} c^2 = \frac{Tc}{2} \quad \implies \quad P_{elec} = \frac{Tc}{2\eta}$$

dove η è l’efficienza propulsiva ipotizzata pari al 62.5% ed r è valutato in au. Con questi valori, si ottiene che la potenza elettrica nominale è pari a 16.475 W. Nella realtà l’efficienza propulsiva è minore di quella assunta, pertanto la potenza elettrica nominale richiesta dovrà essere maggiore, ma questo influisce poco sullo scopo della tesi e sarà poi opportuno riscalare i valori. La massa di propellente disponibile è di 1.5 kg e permette, con i valori di spinta e di impulso specifico precedentemente presentati, di ottenere un valore di ΔV_{max} circa pari a 1.5 km/s.

Il principale strumento scientifico della sonda è la *Near Earth Multiple Object CAMera* (NEMOCAM), un telescopio *off-the-shelf* Ritchey-Chrétien modificato e derivato da una camera Simeria Sense Ltd TriScape 100 capace di analizzare lo spettro 400 – 670 nm attraverso un filtro RGB Bayer. Questo strumento permetterà di ottenere immagini con risoluzione del decimetro per i flyby e del centimetro durante la fase di rendezvous del NEA finale. Esso però ha una vita nello spazio garantita di soli 2 anni, andando a limitare la durata massima della missione. Al fine di ottenere dati sufficienti e di buona qualità, si richiede che la velocità relativa tra asteroide e sonda durante i flyby non superi preferibilmente i 10 km/s.

Vengono ora imposte altre importanti ipotesi:

- Si ipotizza che il satellite, alla partenza, si trovi già al di fuori della sfera di influenza terrestre, di poco in ritardo sull’orbita, e che possieda una velocità

relativa rispetto alla Terra nulla. Ciò implica che, ai fini della tesi, la fase di lancio non verrà mai considerata e si suppone già studiata ed eseguita.

- Il tempo di permanenza nei pressi dell'asteroide è considerato nullo. Nella realtà è di qualche ora, ma risulta trascurabili rispetto alla durata della missione. Inoltre, si ipotizza che l'asteroide non eserciti alcuna forza gravitazionale sulla sonda.
- Per tenere in considerazione che il propulsore potrebbe essere spento in alcuni momenti per ragioni impreviste, si ipotizza conservativamente che la spinta possieda un duty cycle nominale del 90%. Questo viene ridotto al 70% 15 giorni prima dei flyby o rendezvous per tenere in considerazione le fasi di guida e navigazione, in cui la sonda aggiusta la sua traiettoria, e i periodi di spinta nulla necessari a realizzare le osservazioni durante i flyby stessi.
- I parametri orbitali dei NEAs sono considerati esatti. Per questa ragione, è preferibile scegliere asteroidi numbered, dei quali si ha una maggior precisione sui loro parametri orbitali.

L'ultima è forse l'ipotesi maggiormente irrealistica, ma trattandosi di un'analisi preliminare di fattibilità può essere considerata accettabile. Chiaramente, questo implica la necessità di futuri studi di approfondimento ulteriori onde evitare grosse correzioni della traiettoria, ad ogni modo realizzabili se si riesce ad avere un buon margine di propellente residuo.

In conclusione, si è deciso di presentare in [Tab. 2.1](#) un riassunto delle specifiche della missione: essa contiene tutto quello che è già stato detto in precedenza, ma in maniera più schematica.

Tabella 2.1. Specifiche della missione.

Obiettivi	2 flyby e 1 rendezvous	Impulso specifico	2100 s
Durata max	2 anni	Spinta nominale	1 mN
Massa iniziale	21 kg	Potenza nominale	16.475 W
ΔV_{max}	1.5 km/s	Efficienza propulsiva	62.5%
$V_{rel_{max}}$	≈ 10 km/s	Duty cycle nominale	90%
$m_{fuel_{max}}$	1.5 kg	Duty cycle flyby	70%

Capitolo 3

Richiami di meccanica orbitale

Si vuole ora proseguire presentando una breve panoramica dei concetti teorici essenziali su cui si basa la fisica del problema analizzato nella tesi. Verranno quindi descritte le leggi fondamentali che governano i moti nello spazio, passando poi agli aspetti chiave della definizione delle orbite. Infine, verranno introdotti i parametri legati alla propulsione per poter presentare le principali caratteristiche delle manovre orbitali. Per la realizzazione di questo capitolo, si è fatto utilizzo di [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25] [26] e [27].

Nel seguito la notazione in grassetto indicherà un vettore, mentre il medesimo simbolo non in grassetto indica il suo modulo, ossia ad esempio $\|\mathbf{r}\| = r$.

3.1 Principi generali della gravità e meccanica orbitale

3.1.1 Forza di attrazione gravitazionale

Legge di gravitazione universale. *Si considerino due punti materiali M ed m posti in due punti dello spazio distinti e separati da una distanza r . Essi si attraggono a vicenda lungo la loro congiungente con una forza proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza, ovvero*

$$F = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

dove $G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ è la costante di Gravitazione Universale.

Nella realtà le masse non sono puntiformi, ma la legge può essere facilmente estesa a corpi a simmetria sferica e anche a corpi di forma qualsiasi purché la loro distanza sia molto maggiore della loro dimensione caratteristica.

La legge può anche essere espressa in termini vettoriali definendo ad esempio la distanza \mathbf{r} come il vettore che congiunge M ad m . Ne consegue che la forza esercitata da M su m è:

$$\mathbf{F} = -G \frac{M \cdot m}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

Il segno negativo presente nell'equazione è dovuto al fatto che la forza è attrattiva e muove m verso M , quindi in verso opposto al vettore \mathbf{r} . Chiaramente vale anche l'analogo.

3.1.2 Problema degli n -corpi

Per problema degli n -corpi si intende lo studio del moto di un insieme di n -masse m_1, m_2, \dots, m_n distribuite in uno spazio euclideo e che interagiscono tra di loro solo mediante forze gravitazionali. Esso rappresenta in maniera generale il sistema in esame, dove il satellite è la n -esima massa assoggettata alle forze gravitazionali degli altri $n - 1$ corpi celesti.

Si ipotizza che tutte le altre forze, come ad esempio quelle elettromagnetiche, siano trascurabili. Inoltre, le masse sono ipotizzate costanti nel tempo e dotate di simmetria sferica. Una rappresentazione schematica del problema è visibile in Fig. 3.1.

Si definisca un sistema di riferimento inerziale centrato in un punto qualsiasi O : si può descrivere un vettore posizione \mathbf{r}_i relativo alla massa i -esima e conseguentemente il vettore distanza del corpo j rispetto al corpo i come $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$. Con queste definizioni, si può ora valutare la forza esercitata dalla massa i sulla massa j :

$$\mathbf{F}_{ji} = -G \frac{m_i \cdot m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}$$

Eseguendo lo stesso procedimento per tutte le altre masse, si ottiene infine che:

$$\mathbf{F}_j = -G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{m_i \cdot m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}$$

Si ricorda poi la seconda legge della dinamica di Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{r}})$$

dove $\dot{\mathbf{r}}$ è la velocità del corpo e che, nel caso in cui la massa sia costante nel tempo, assume la forma

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

Si supponga ora che la massa i sia quella del satellite e la massa j quella del Sole; grazie alla precedente legge è possibile riscrivere il problema degli n -corpi attraverso

opportuni passaggi algebrici come segue:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ij} = -G \frac{m_i + m_j}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^3} \mathbf{r}_{ij} - Gm_n \sum_{\substack{n \\ n \neq i \\ n \neq j}} \left(\frac{\mathbf{r}_{nj}}{\|\mathbf{r}_{nj}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_{ni}}{\|\mathbf{r}_{ni}\|^3} \right) \quad (3.1)$$

Questa notazione è nella forma di un'equazione differenziale di secondo grado e presenta un primo termine legato alla forza che agisce tra i due corpi e un secondo interpretabile come l'effetto dei disturbi gravitazionali prodotti dagli altri $n - 2$ corpi celesti. È possibile scrivere allo stesso modo un totale di altre $n - 1$ equazioni differenziali che saranno però accoppiate, non rendendo possibile trovare una soluzione analitica (tranne per il caso $n = 2$) e sarà necessario fare ricorso a metodi numerici.

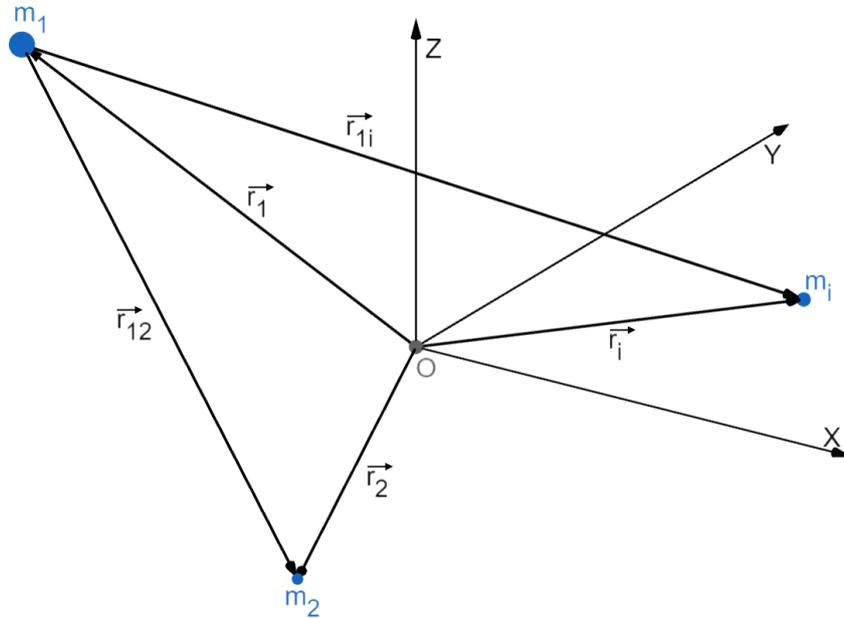


Figura 3.1. Problema degli n -corpi.

3.1.3 Problema dei due corpi

Il caso più semplice del problema degli n -corpi è quello con $n = 2$. Richiamando l'Eq. (3.1), in questo caso il secondo termine sarà nullo poiché non sono presenti altri corpi:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -G \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}$$

La condizione appena presentata è del tutto ideale e irrealistica, ma quando due masse si trovano molto vicine tra loro rispetto alle altre i disturbi gravitazionali

degli altri corpi diventano trascurabili e il problema dei due corpi descrive con buona approssimazione la fisica del sistema. Ciò accade anche quando una delle masse (in questo caso il Sole) è molto maggiore delle altre (Terra e altri corpi celesti) e la seconda massa in analisi (il satellite) si trova a distanze sufficientemente elevate dagli altri corpi. Inoltre, se una delle due masse è molto minore dell'altra il problema si semplifica ulteriormente: la forza che il corpo piccolo esercita sul corpo grande è irrilevante ed è possibile porre l'origine del sistema di riferimento al centro del corpo grande, il quale sarà considerabile inerziale. Questo prende il nome di *problema dei due corpi ristretto*:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{M + m}{r^3} \mathbf{r}$$

con \mathbf{r} il vettore posizione del corpo piccolo, in quanto ora le distanze sono assolute. Poiché $M \gg m$, si ottiene che:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G \cdot M}{r^3} \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = 0 \quad (3.2)$$

dove si è introdotta la costante gravitazionale planetaria $\mu = GM$. Essa vale, per il Sole, $\mu = 1.327 \cdot 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Definire il problema in questa forma presenta molteplici vantaggi: innanzitutto l'origine si trova in un punto semplice da definire. Inoltre, trattandosi di un sistema inerziale, non compariranno termini apparenti legati alle accelerazioni dell'origine semplificando ulteriormente i calcoli.

3.1.4 Sfera di influenza

Si vuole ora analizzare quando il modello dei due corpi ristretto risulti sufficientemente accurato in questa trattazione. Si consideri il satellite in questione (di massa trascurabile) soggetto ai campi gravitazionali di Terra e Sole. Oltre a ciò, si deve tenere in esame la presenza di una forza centrifuga legata alla rotazione della Terra attorno al Sole; poiché la sonda decolla dalla Terra, anche lei sarà assoggettata alla forza centrifuga e questa cambierà in funzione della distanza rispetto al Sole, minore quando si avvicina e maggiore quando si allontana. Esisterà nello spazio il luogo dei punti dove la somma vettoriale delle tre forze sarà nulla e si dimostra che, con buona approssimazione, esso è una sfera centrata nel corpo minore (in questo caso la Terra) di raggio:

$$r_{SOI} = D \left(\frac{m_{Earth}}{m_{Sun}} \right)^{2/5}$$

Ciò significa che, quando il satellite si troverà sufficientemente al di fuori di questa sfera, la gravità del Sole sarà la forza predominante e il modello a due corpi ristretto satellite-Sole diventa valido, mentre al suo interno occorrerà ricorrere al modello satellite-Terra. Ai confini della sfera, tutti e tre i corpi andranno analizzati.

Nel problema in esame, tipicamente la sonda si allontanerà in maniera piuttosto significativa dalla Terra, rendendo di fatto il modello a due corpi ristretto satellite-Sole una approssimazione sufficientemente precisa del caso reale.

3.1.5 Energia potenziale in un campo gravitazionale

Si vuole ora calcolare il lavoro compiuto per muovere il corpo piccolo da un punto A ad un punto B contrastando la forza di gravità:

$$\mathcal{L} = \int_A^B \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \frac{\mu}{r^2} dr = -\frac{\mu}{r_B} + \frac{\mu}{r_A} = \mathcal{U}_B - \mathcal{U}_A$$

Si può osservare che il lavoro non dipende dalla traiettoria seguita, dimostrando che il campo gravitazionale è conservativo. È stata introdotta l'energia potenziale

$$\mathcal{U} := -\frac{\mu}{r} + C$$

dove C è una costante integrativa arbitraria, assunta per convenzione uguale a zero; ciò significa che il corpo avrà energia potenziale nulla quando si trova a distanza infinita dal corpo principale, mentre negli altri casi sarà negativa.

3.1.6 Invarianti del moto

Si consideri l'Eq. (3.2) e la si moltiplichi scalarmente per la velocità $\dot{\mathbf{r}}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$$

Tramite passaggi algebrici si ottiene che:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0$$

Questa equazione rappresenta la conservazione dell'energia meccanica: all'interno della parentesi compaiono le energie potenziale e cinetica specifiche, la cui somma deve essere costante nel tempo in assenza di altri disturbi.

In maniera simile, si pre-moltiplichi vettorialmente l'Eq. (3.2) per il vettore posizione \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = 0$$

Da cui si ottiene che:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \frac{d\mathbf{h}}{dt} = 0$$

Il prodotto vettoriale all'interno della parentesi rappresenta il momento angolare, il quale è perpendicolare ai vettori \mathbf{r} e $\dot{\mathbf{r}}$, di conseguenza perpendicolare al piano del moto, ed è costante. Questo implica che le orbite dei corpi celesti giacciono su un piano, detto appunto piano orbitale, e sono caratterizzate da un momento angolare costante.

3.1.7 Equazione della traiettoria: le coniche

Si vuole ora cercare di risolvere l'Eq. (3.2): è possibile trovare una prima soluzione in termini di vettore posizione che permette però solo di descrivere la forma dell'orbita. La soluzione completa in funzione del tempo è più complessa a causa della doppia integrazione e verrà presentata in seguito.

Per ottenere la prima soluzione, si post-moltiplica vettorialmente l'Eq. (3.2) per il momento angolare \mathbf{h} , ottenendo dopo alcuni passaggi:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{e}$$

dove \mathbf{B} è un vettore arbitrario costante con le stesse dimensioni di μ , pertanto il vettore *eccentricità* \mathbf{e} sarà adimensionale e si può dimostrare che è perpendicolare ad \mathbf{h} , ovvero giacente nel piano orbitale e definisce la linea degli apsi.

Moltiplicando scalarmente la precedente equazione per \mathbf{r} si ottiene un'equazione scalare risolvibile che diventa dopo alcuni rimaneggiamenti:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos \nu} \quad (3.3)$$

dove ν è l'angolo tra i vettori \mathbf{e} ed \mathbf{r} (anche denominato θ nelle figure che seguono), chiamato *anomalia vera*, e chiaramente $\|\mathbf{e}\| = e \geq 0$. Si può osservare che quando $\nu = 0$ il raggio ha valore minimo, mentre quando $\nu = \pi$ il raggio è massimo. Si può anche definire il *semilatus rectum* $p = h^2/\mu$, ovvero la distanza tra il punto P della conica e il fuoco quando $\nu = \pi/2$. Per averne una rappresentazione chiara, si veda la Fig. 3.2.

L' Eq. (3.3) è l'equazione di una conica, ovvero il luogo dei punti P giacenti su un piano tali per cui la loro distanza da un certo punto (detto fuoco) e la distanza da una certa retta (chiamata direttrice) siano in un rapporto costante e pari ad e , detta appunto eccentricità della conica. Questo insieme di curve rappresenta le possibili orbite che un oggetto può seguire quando è soggetto alla forza gravitazionale di un altro corpo; al variare dell'eccentricità (la quale dipende dall'energia e dal momento angolare) si possono trovare diverse possibili forme: ellisse, circonferenza, parabola o iperbole.

Leggi di Keplero

Come appena mostrato in maniera rigorosa, l'ellisse può essere una delle possibili forme di un'orbita. Già agli inizi del 1600 lo studioso Keplero enunciò tre leggi riguardanti le orbite dei pianeti del Sistema Solare, descrivendole come ellittiche. Sebbene, come già visto, questa non sia l'unica possibilità, si è deciso di riportarle per omaggiare un pioniere dell'astronomia.

Prima Legge di Keplero. L'orbita di ogni pianeta è un'ellisse con il Sole ad uno dei fuochi e l'altro fuoco libero.

Seconda Legge di Keplero. La linea che unisce i pianeti al Sole spazza aree uguali in tempi uguali, ovvero la velocità areolare dA/dt è risultata costante. Ciò implica che tanto maggiore è il raggio del pianeta tanto più lento si muove.

Terza Legge di Keplero. Il quadrato del periodo orbitale è proporzionale al cubo della distanza media dal Sole, la quale è funzione del semiasse maggiore dell'ellisse.

3.1.8 Generalità sulle possibili orbite

Come visto in precedenza, è possibile identificare quattro macro-tipi di orbita, tutte con una certa simmetria e due fuochi. Definiamo ora alcune grandezze geometriche caratteristiche, tutte osservabili in Fig. 3.2:

- *Semilatus rectum* p : semiapertura della conica in corrispondenza del fuoco.
- *Semiasse maggiore* a : semidistanza tra gli apsi (apoastro e periastro).
- *Semidistanza focale* c : semidistanza tra i due fuochi.
- *Semiasse minore* b : semidistanza tra gli anti-apsidi.

Esse sono poi legate ad alcune grandezze fisiche nel caso delle orbite:

$$a^2 - b^2 = c^2 \quad p = a(1 - e^2) \quad e = \frac{c}{a}$$

$$r_{min} = \frac{p}{1 - e} = a(1 - e) \quad r_{max} = \frac{p}{1 + e} = a(1 + e)$$

legate a loro volta tra loro da alcune relazioni:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}} \quad E = -\frac{\mu}{2a} \quad p = \frac{h^2}{\mu}$$

Orbita ellittica

Si tratta dell'orbita di tutti i pianeti del Sistema Solare: è una curva chiusa con periodo costante e con due fuochi distinti e interni alla curva stessa. È caratterizzata dalla relazione:

$$r + r' = 2a$$

ovvero la somma delle distanze del punto P dai due fuochi è costante. Le distanze dei due apsi sono facilmente valutabili:

$$r_a - r_p = 2c$$

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

dove l'eccentricità è compresa tra 0 e 1. Il periodo orbitale è calcolabile come:

$$T_p = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$$

dove questa relazione è proprio la terza legge di Keplero. Quest'ultima è una prova non rigorosa che le orbite dei pianeti sono ellittiche ma, come si è già detto, esistono altre possibili orbite.

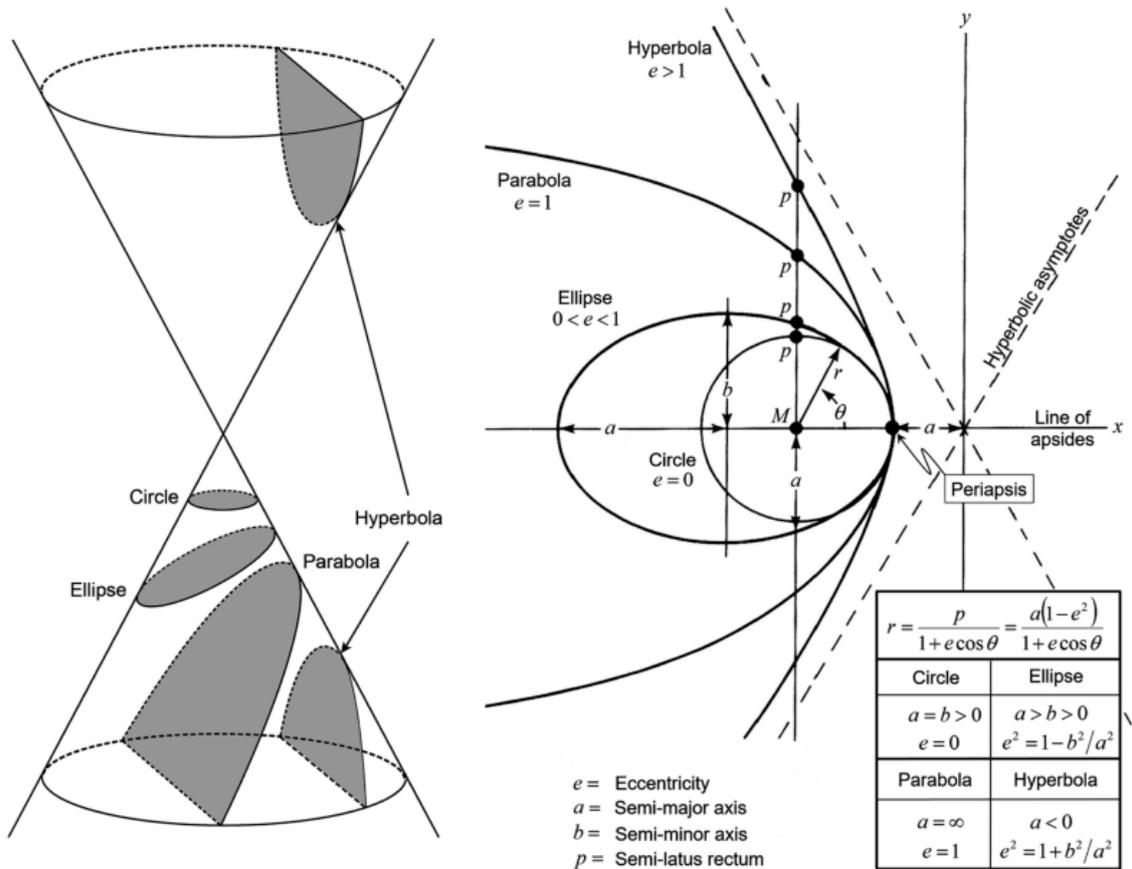


Figura 3.2. Differenti possibili coniche e schematizzazione dei loro parametri caratteristici [23].

Orbita circolare

L'orbita circolare è un'orbita ellittica degenera dove i fuochi sono coincidenti e l'eccentricità è nulla. Le relazioni dell'ellisse continuano ad essere valide, ma si otterrà che il raggio è costante e pari al semiasse maggiore. Si può inoltre valutare

la velocità dell'orbita circolare, che è chiaramente costante:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}}$$

Questa viene anche denominata *prima velocità cosmica* e rappresenta la velocità che un corpo m_1 deve possedere affinché possieda un'orbita circolare attorno ad un corpo m_2 .

Orbita parabolica

Si tratta di un altro caso degenere dell'ellisse, in questo caso con eccentricità pari a 1. È un'orbita aperta, in cui uno dei due fuochi si trova all'infinito, molto rara in natura. Per questa orbita il semilatus rectum si definisce come $p = 2r_p$, dove r_p è la distanza del periastro dal fuoco, mentre il semiasse maggiore e la semi-distanza focale assumono valore infinito. Tuttavia, fisicamente rappresenta il caso in cui un corpo possiede sufficiente energia cinetica per "sfuggire" agli effetti della gravità del corpo centrale e uscire dalla sua sfera di influenza senza mai ritornarci, raggiungendo ad una distanza infinita velocità nulla rispetto ad esso. Si può dimostrare che, ad una certa distanza r , la velocità che il corpo deve avere per sfuggire alla gravità, nota come *seconda velocità cosmica*, è:

$$V_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_c}} = \sqrt{2}V_c$$

In altre parole, un corpo m_1 in un'orbita circolare attorno ad m_2 deve essere accelerato del 41.4% affinché riesca a sfuggirne.

Orbita iperbolica

È il caso con eccentricità $e > 1$ ed è composta da due rami, di cui solo uno fisico. Per questa orbita semiasse maggiore e semi-distanza focale assumono nuovamente valori finiti ma negativi e vale la relazione:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Si può anche valutare l'inclinazione δ degli asintoti con la relazione:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{e}$$

Quando un oggetto si trova in un'orbita iperbolica esso è in grado non solo di sfuggire alla sfera di influenza del corpo centrale, ma di farlo con una velocità non nulla per $r \rightarrow \infty$; essa viene chiamata *velocità di eccesso iperbolico*:

$$v_{inf} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

3.2 Posizione in funzione del tempo

La conoscenza della forma di un'orbita non è però sufficiente per studiare il moto di un corpo, in quanto spesso potrebbe essere opportuno conoscerne la posizione in diversi istanti temporali. Per fare ciò, occorre risolvere l'Eq. (3.2) per esplicitare la dipendenza dal tempo. Si può innanzitutto dimostrare che la velocità angolare è calcolabile come:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

Sostituendola nell'Eq. (3.3) ed integrando si ottiene:

$$\frac{\mu^2}{h^3} (t - t_p) = \int_0^\nu \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2}$$

dove t_p è una costante integrativa, tipicamente posta nulla, chiamata *tempo al passaggio al periastro*, dove per definizione $\nu = 0$. L'integrale a secondo membro è risolvibile analiticamente.

Per un'orbita circolare $e = 0$ e il problema si semplifica, producendo:

$$\nu = t \frac{h^3}{\mu^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{r^{3/2}} = \frac{2\pi}{T_p} t$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla definizione del periodo orbitale per un'orbita circolare. Per l'ellisse il problema è più complesso, ma comunque riconducibile al precedente. Esistono soluzioni analitiche anche per iperbole e parabola, ma esulano dallo scopo della tesi. Facendo riferimento alla Fig. 3.3, si scelga un punto R sull'orbita ellittica raggiunto dopo un tempo t misurato dal periastro P (dove si è transitati all'istante t_p): l'area spazzata dal raggio sarà pari a:

$$A_t = \frac{\pi ab}{T_p} (t - t_p)$$

Si costruisca ora una circonferenza circoscritta all'ellisse, ovvero dotata di raggio pari al semiasse maggiore a e si definisca l'angolo *anomalia eccentrica* E come in figura. È noto che le coordinate y del cerchio e dell'ellisse sono in rapporto costante secondo la relazione:

$$y_{ellisse} = \overline{XR} = \frac{b}{a} \cdot y_{cerchio} = \frac{b}{a} \cdot \overline{XR'}$$

Questo permette di calcolare l'area spazzata dall'ellisse riscalandolo l'area del cerchio che è più semplice da calcolare. In particolare, attraverso opportune considerazioni geometriche, si ottiene che:

$$A_t = \frac{ab}{2} (E - e \sin E)$$

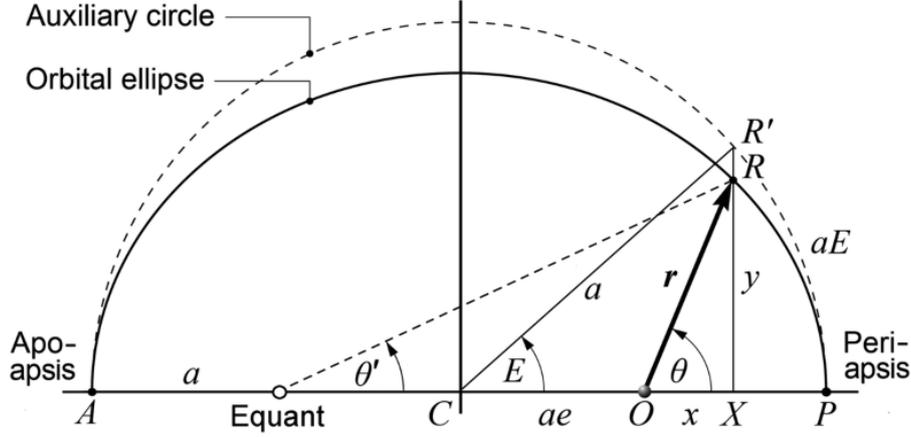


Figura 3.3. Orbita ellittica e circonferenza ausiliaria circoscritta [23].

Sostituendo nella relazione precedente, si giunge infine a:

$$M = E - e \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_p) = \frac{2\pi}{T_P} (t - t_p) \quad (3.4)$$

Questa prende il nome di *equazione di Keplero* ed è di essenziale importanza per lo studio dell'orbita di un corpo. In essa è stata definita l'*anomalia media* M : fisicamente essa rappresenta l'angolo che un corpo fittizio avrebbe spazzato in un tempo t se stesse percorrendo l'orbita circolare precedentemente costruita e descritta. La relazione tra anomalia eccentrica ed anomalia media è un'equazione trascendente: noto M , E si può trovare solo in maniera iterativa.

Supponendo più in generale che il tempo venga misurato rispetto ad un riferimento diverso t_0 , l'Eq. (3.4) può essere generalizzata come:

$$M = M_0 + 2k\pi + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_0)$$

dove k è il numero di orbite complete realizzate dal corpo tra i due istanti temporali. Per completare il problema è necessario trovare una relazione tra anomalia eccentrica e anomalia vera. Si può dimostrare che:

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2}$$

Con questo set di equazioni sarà possibile studiare il problema esposto nella tesi: dato un corpo celeste di cui si conosce la forma dell'orbita e l'anomalia vera iniziale ν_0 , si può calcolare l'anomalia eccentrica iniziale E_0 e di conseguenza l'anomalia media M_0 . Scelto un istante temporale t , si può a quel punto calcolare M , poi E ed infine ν , conoscendo quindi la posizione precisa del corpo in quell'istante temporale.

3.3 Sistemi di coordinate

Nelle precedenti sezioni si è introdotto il concetto di sistema di riferimento, ma è opportuno ora darne una definizione più rigorosa; innanzitutto per sistema di riferimento si intende un sistema rispetto al quale si osserva un determinato fenomeno. Ne esistono di diversi tipi, con differenti tipi di coordinate, ma ci si limiterà ad introdurre una semplice terna cartesiana definita da:

- un'origine O ;
- l'orientamento del piano $\hat{x} - \hat{y}$;
- la direzione principale \hat{x} ;
- il verso della normale al piano, ovvero il verso di \hat{z} .

Chiaramente, \hat{y} viene scelto perpendicolare a \hat{x} e \hat{z} e tale da generare una terna destrorsa. Come si vedrà nella sez. 4.2.3, sarà più conveniente ricondursi ad un sistema di coordinate sferiche, ma la trasformazione da una terna cartesiana ad una sferica è semplice.

Un sistema di riferimento può poi essere inerziale, ovvero non soggetto ad accelerazioni, oppure no. Nella realtà tutti i sistemi sono non inerziali, ma nella maggior parte dei casi le accelerazioni a cui sono soggetti sono trascurabili e si può considerare il sistema come inerziale.

Vengono ora presentati i sistemi di riferimento che verranno utilizzati nel seguito.

3.3.1 Sistema eliocentrico – eclittico

Il sistema è centrato nel centro di massa del Sole e il piano fondamentale è quello dell'eclittica, ovvero dove giace l'orbita terrestre. La direzione \mathbf{X} è data dalla linea degli equinozi, ovvero l'intersezione tra il piano equatoriale terrestre e l'eclittica. Il verso di \mathbf{X} viene definito come il vettore che punta dalla Terra al Sole nel primo giorno di Primavera dell'emisfero settentrionale. In questa trattazione, essa è considerata costante anche se nella realtà ruota di circa $50''$ ogni anno per effetto della precessione degli equinozi, valore del tutto trascurabile durante la breve durata della missione. Il verso di \mathbf{Z} è quello del momento angolare del moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole.

3.3.2 Sistema geocentrico – equatoriale (ECI)

L'origine del sistema di riferimento è il centro di massa della Terra mentre il piano fondamentale è quello equatoriale. Il verso della direzione principale \mathbf{I} è ancora una volta scelto diretto verso il Sole nel giorno dell'equinozio di Primavera, anche noto come *First point of Aries* o *Vernal point*; l'asse \mathbf{K} è scelto diretto verso il Polo Nord. Si noti quindi che il sistema non è solidale alla Terra, la quale ruota attorno all'asse

\mathbf{K} , e non è propriamente inerziale in quanto è soggetto al moto di rivoluzione, oltre che ai disturbi gravitazionali degli altri corpi celesti.

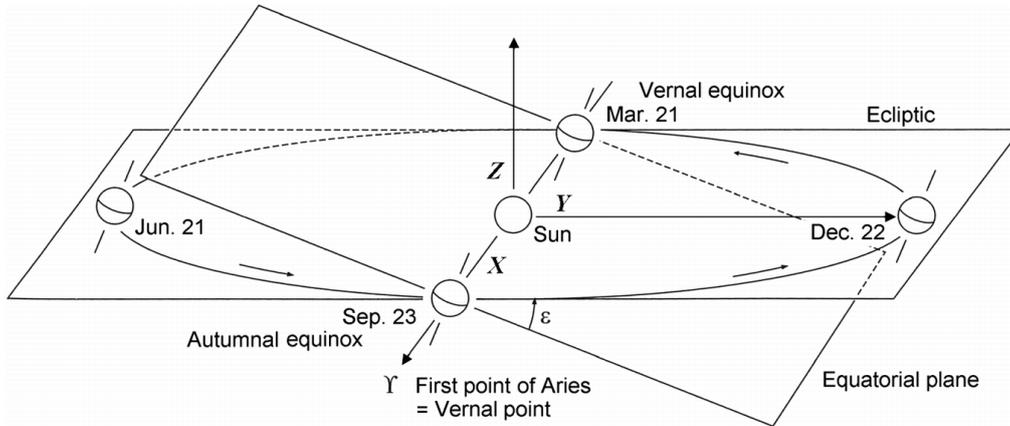


Figura 3.4. Sistema eliocentrico – eclittico [25].

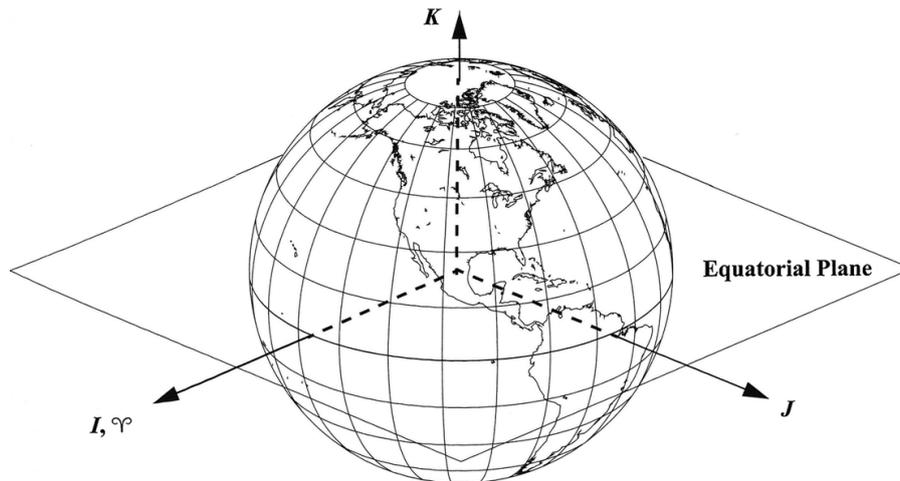


Figura 3.5. Sistema geocentrico – equatoriale [25].

3.3.3 Sistema perifocale

È il sistema più conveniente per studiare il moto di un corpo lungo la sua orbita in quanto è facile definire i parametri orbitali che verranno presentati in seguito. L'origine è posta nel centro di massa del corpo celeste principale, il quale occupa uno dei due fuochi dell'orbita. La direzione principale \mathbf{p} è la linea degli apsidi, dall'origine verso il periastro. L'asse \mathbf{w} è invece orientato come il momento angolare del corpo stesso.

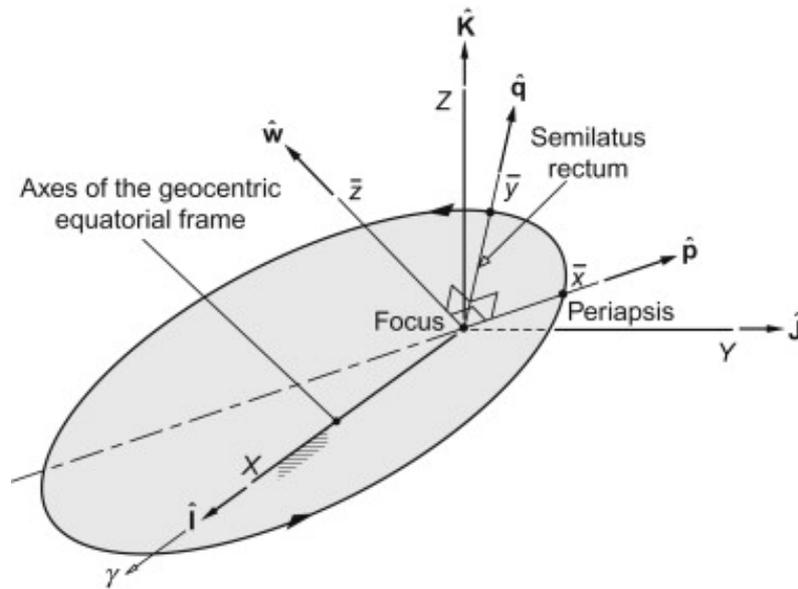


Figura 3.6. Sistema perifocale [22].

3.4 Parametri orbitali classici

Si è visto che per definire la forma di un'orbita sono necessari due soli parametri: il semiasse maggiore a e l'eccentricità e . Per definire poi la posizione del corpo lungo quell'orbita è stata introdotta l'anomalia vera ν misurata a partire dal periastron (a volte sostituito dall'anomalia media M). Occorre ora definirne l'orientamento nello spazio e ciò avviene con l'introduzione di tre angoli di Eulero osservabili in Fig. 3.7. Essi si definiscono come segue:

1. Si localizza l'intersezione tra l'eclittica e il piano equatoriale del corpo principale; essa sarà una linea detta *linea dei nodi*. Si definisce nodo ascendente il punto dove l'orbita attraversa il piano equatoriale da "sotto" a "sopra". Si può quindi definire il parametro *longitudine del nodo ascendente* Ω come l'angolo giacente sul piano di riferimento del corpo centrale compreso tra la sua direzione principale \mathbf{X} e il nodo ascendente \mathbf{N} .
2. L'angolo diedro compreso tra piano orbitale e piano equatoriale è chiamato *inclinazione* i , misurato secondo la regola della mano destra. Esso è anche l'angolo tra l'asse \mathbf{Z} e il momento angolare del corpo orbitante \mathbf{h} .
3. Si definisce *argomento del periastron* ω l'angolo giacente sul piano orbitale compreso tra la linea dei nodi e il periastron stesso.

Con la conoscenza di questi sei parametri è possibile conoscere la posizione del corpo nello spazio. In alcuni casi però essi non sono ideali in quanto soggetti a casi indeterminati:

- Se l'inclinazione è nulla (orbita complanare al piano equatoriale) ω e Ω non sono distinguibili; si considera solo la loro somma che viene detta *longitudine del periastro*.
- Se l'eccentricità è nulla (orbita circolare) ω e ν non sono distinguibili; si considera solo la loro somma che viene detta *argomento della latitudine*.
- Se sia l'eccentricità che l'inclinazione sono nulle ω , Ω e ν non sono distinguibili; si considera solo la loro somma che viene detta *longitudine vera*.

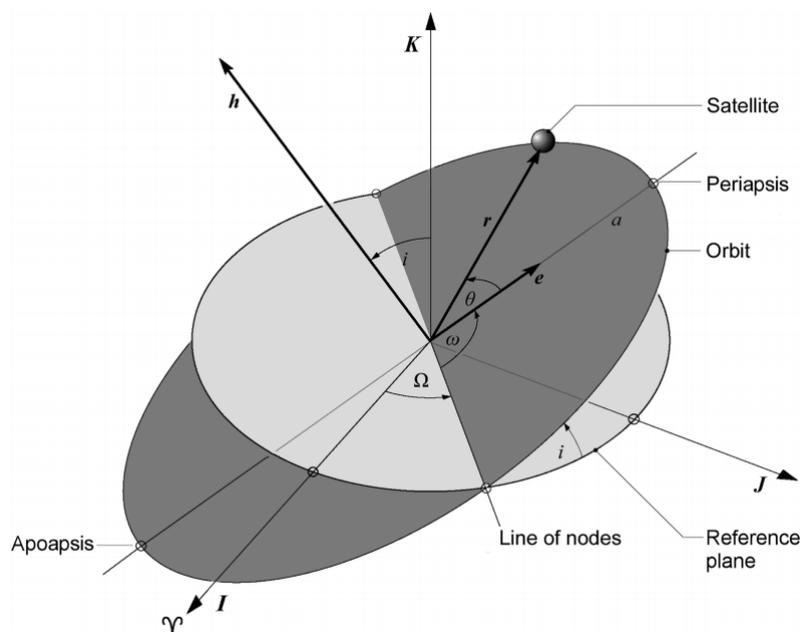


Figura 3.7. Angoli di Eulero definiti per la descrizione di un'orbita. Si noti come essi siano stati valutati rispetto al sistema ECI, ma sono del tutto analoghi se si considera un sistema inerziale diverso [25].

3.4.1 Determinazione dei parametri orbitali noti posizione e velocità

A partire dalla conoscenza dei vettori posizione \mathbf{r} e velocità $\dot{\mathbf{r}}$ in un sistema di riferimento centrato nel corpo principale è possibile calcolare gli appena citati parametri orbitali.

Si era già visto che:

$$\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{e}$$

dove il momento angolare è calcolato come $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$. Dal suo modulo è possibile calcolare il valore del semilatus rectum e di conseguenza il semiasse maggiore:

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2)$$

Si può poi definire il vettore dei nodi $\mathbf{n} := \mathbf{Z} \times \mathbf{h}$. Da ciò, si può dimostrare che con le seguenti relazioni è possibile ricavare gli altri parametri:

$$\begin{aligned} i &= \arccos\left(\frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{Z}}{h}\right) & \nu &= \arccos\left(\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{er}\right) \\ \Omega &= \arccos\left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{X}}{n}\right) & \omega &= \arccos\left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}}{ne}\right) \end{aligned}$$

dove \mathbf{X} , \mathbf{Y} e \mathbf{Z} sono i tre assi del sistema di riferimento del corpo centrale.

3.4.2 Determinazione dei vettori posizione e velocità noti i parametri orbitali

È il problema inverso a quello precedente ed è di maggiore rilevanza in questa tesi in quanto sono noti i parametri orbitali degli asteroidi e si vuole sapere dove si trovano nello spazio d un certo istante. Nel sistema perifocale si ha che:

$$\mathbf{r} = r \cos \nu \hat{\mathbf{p}} + r \sin \nu \hat{\mathbf{q}} + 0\hat{\mathbf{w}} \quad \text{con} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$$

dove p è il semilatus rectum mentre $\hat{\mathbf{p}}$, $\hat{\mathbf{q}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$ sono i tre versori del sistema di riferimento perifocale. Per la velocità occorre derivare rispetto al tempo la distanza, ottenendo:

$$\dot{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [-\sin \nu \mathbf{p} + (e + \cos \nu) \mathbf{q} + 0\mathbf{w}]$$

3.4.3 Trasformazione di coordinate

I parametri appena presentati sono definiti nel sistema di riferimento perifocale, mentre per alcune applicazioni è più conveniente fare uso di un sistema centrato nel corpo principale attraverso una trasformazione di coordinate. La trattazione che segue riguarda questo tipo di trasformazione ma può essere generalizzata semplicemente.

Consideriamo la terna del corpo principale $\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{Z}}$ e una terna perifocale $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{w}}$. Attraverso tre rotazioni successive, con ad ognuna di esse associata un'opportuna matrice di rotazione, è possibile fare in modo che la prima coincida con la seconda:

1. Rotazione attorno all'asse $\hat{\mathbf{Z}}$ di un angolo Ω :

$$[R_3(\Omega)] = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Rotazione attorno all'asse \hat{Y} di un angolo i ; in questo modo $\hat{Z} \equiv \hat{w}$:

$$[R_1(i)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

3. Rotazione attorno all'asse \hat{w} di un angolo ω :

$$[R_3(\omega)] = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Occorre prestare attenzione all'ordine della moltiplicazione in quanto il prodotto tra matrici non è commutativo. Si può perciò definire la matrice di rotazione complessiva:

$$[Q]_{Xp} = [R_3(\omega)][R_1(i)][R_3(\Omega)]$$

Per passare dal sistema perifocale al sistema del corpo centrale le tre rotazioni vanno eseguite nell'ordine opposto. Osservando che le tre matrici sono ortogonali, la loro inversa è la trasposta. Ne consegue che questa proprietà vale anche per il loro prodotto e quindi occorre solo trasporre la matrice appena presentata:

$$[Q]_{pX} = [Q]_{Xp}^T = [R_3(\Omega)][R_1(i)][R_3(\omega)]$$

Per cui, noto il vettore posizione nel sistema perifocale, si può trovare il vettore corrispondente nel sistema centrale attraverso la relazione

$$\mathbf{r}_X = [Q]_{pX} \mathbf{r}_p$$

3.5 Riferimenti temporali

È altrettanto importante definire un sistema di riferimento per scandire il tempo, ovvero scegliere una maniera per misurarlo ed un istante temporale di riferimento. La misura inizialmente più ovvia è quella del giorno, ma presenta in realtà alcuni problemi nella sua definizione: si definisce *giorno solare* il tempo necessario perché il Sole transiti due volte sullo stesso meridiano. Come però si può osservare in [Fig. 3.8](#), durante questo tempo la Terra ha compiuto un po' più di una rotazione completa attorno al suo asse in quanto nel frattempo si è spostata lungo la sua orbita: si definisce quindi *giorno siderale* il tempo necessario affinché la Terra compia una rotazione completa attorno al proprio asse, il quale è intuitivamente più breve di quello solare. Per ovviare a queste complicazioni sono state redatte delle definizioni molto precise del tempo, in particolare dei secondi e degli anni, ma ciò esula dallo scopo della tesi.

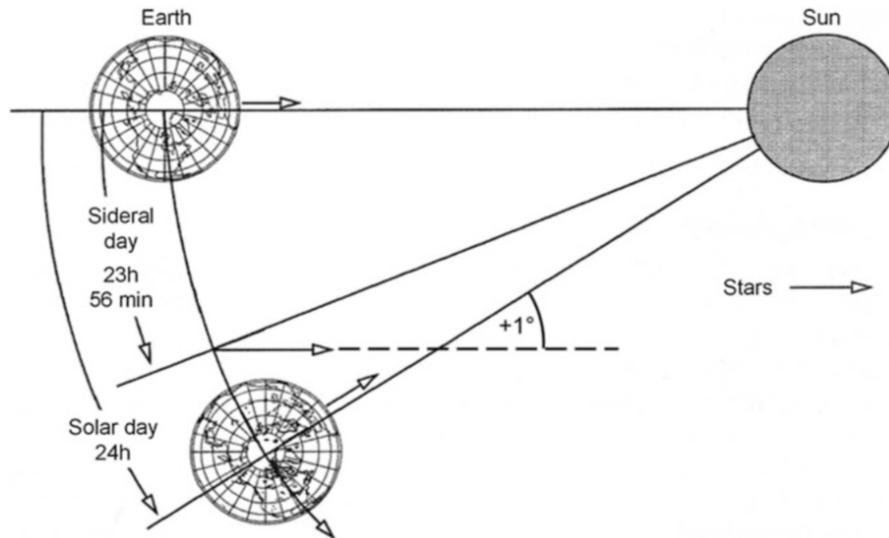


Figura 3.8. Differenza tra un giorno solare e un giorno siderale [25].

Occorre invece definire la *Julian Date* JD: essa è una misura del tempo a partire dal 1 Gennaio 4713 a.C. alle ore 12:00 UT. Si tratta di una misura dei giorni siderali trascorsi a partire dal sopra citato JD0, ed è parametro particolarmente utile per scandire il tempo in astronomia in quanto non è affetto dalle problematiche della definizione del tempo tipiche dei calendari civili, come quello Gregoriano. Una importante data è la J2000.0, ovvero il 1 Gennaio 2000 alle ore 12:00 UT, utilizzata spesso come riferimento per la definizione dei parametri orbitali.

I valori assunti al giorno d'oggi dalla JD sono però molto elevati, pertanto spesso si fa riferimento alla *Modified Julian Date* (MJD), ovvero la Julian Date ridotta di 2 400 000.5, dove il valore .5 è aggiunto per spostare il tempo MJD0 a mezzanotte.

3.6 Manovre orbitali

Fino ad ora si sono analizzate le orbite ipotizzando che queste siano costanti. Nella realtà, durante una missione spaziale è invece opportuno modificare alcuni parametri orbitali della sonda con l'obiettivo di raggiungere determinati punti nello spazio. Quando ciò avviene, il corpo è soggetto ad una spinta T realizzata attraverso l'espulsione di una massa \dot{m}_p , ovvero non è più soggetto solo a forze gravitazionali. Si prosegue ora con una breve introduzione ai parametri tipici della propulsione, per poi presentare gli aspetti essenziali delle manovre orbitali.

3.6.1 Costo della manovra e parametri della propulsione

Per prima cosa vengono introdotte alcune grandezze fondamentali: le già citate portata di propellente espulso \dot{m}_p e spinta T sono legate dalla grandezza *velocità efficace di scarico* c , che rappresenta la velocità a cui il propellente viene espulso dall'ugello nell'ipotesi di pressione esterna nulla.

$$T = \dot{m}_p \cdot c$$

Altro parametro importante è l'*impulso totale* I_t che tiene conto di tutti i contributi di spinta durante un intervallo di tempo, tipicamente l'istante iniziale dell'accensione del propulsore t_0 e quello finale t_f :

$$I_t := \int_{t_0}^{t_f} T dt$$

L'impulso totale è però legato alla sola spinta ottenuta e non tiene in conto del consumo di propellente necessario per ottenerla. Per poter quindi realizzare un confronto più bilanciato, viene definito l'*impulso specifico*:

$$I_{sp} := \frac{I_t}{m_p g_0} = \frac{T}{\dot{m}_p g_0} = \frac{c}{g_0} \quad [s]$$

dove m_p è la massa di propellente disponibile. Questo era già stato citato nel [cap. 1](#) e si era visto che permetteva di descrivere l'"efficienza" del propellente, trattandosi di un'accelerazione per unità di portata.

Si può quindi introdurre la *Rocket equation* derivata da Tsiolkovsky:

$$\frac{m_f}{m_i} = \exp\left(-\frac{\Delta V}{c}\right)$$

Questa equazione è di essenziale importanza per lo studio della propulsione spaziale: scelto il tipo di propulsione (c) e dato un certo quantitativo di combustibile $m_p = m_i - m_f$, qual è il ΔV ottenibile? Oppure, noto qual è il valore di ΔV necessario per realizzare una certa manovra, quanto propellente è necessario per realizzarla?

La seconda domanda è strettamente connessa al lavoro affrontato nella tesi: note le posizioni degli asteroidi, occorre eseguire una serie di manovre per poterli incontrare. Si noti come il rapporto m_f/m_i dipenda in maniera esponenziale dal reciproco dell'impulso specifico, ovvero tanto maggiore sarà questo parametro tanto meno propellente sarà necessario per realizzare un certo ΔV , andando a dimostrare come la scelta della propulsione elettrica sia ideale per ridurre i consumi.

Si consideri ora il satellite dotato di velocità \mathbf{V}_1 ; si vuole realizzare un certo $\Delta \mathbf{V}$ affinché possieda una velocità dopo la manovra \mathbf{V}_2 : poiché si tratta di grandezze vettoriali, è necessario utilizzare il teorema di Carnot per valutarne il modulo:

$$V_2^2 = V_1^2 + \Delta V^2 - 2V_1 \Delta V \cos(\pi - \beta)$$

dove β è l'angolo tra i due vettori. A esso si associa una variazione di energia che il satellite subirà e questa rappresenta il costo della manovra in quanto è legato al consumo di propellente:

$$\Delta E_k = \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} = \frac{1}{2}\Delta V(\Delta V + 2V_1 \cos \beta)$$

Per massimizzare il cambio di energia a parità di ΔV , l'angolo tra le due velocità deve essere nullo o uguale a π . Inoltre, tanto più sarà alta la velocità iniziale tanto più efficace sarà il cambio di velocità in quanto parte di esso non verrà "sprecato" per contrastare effetti gravitazionali. Nel caso trattato nella tesi, molto raramente l'angolo β sarà nullo, pertanto per massimizzare il cambio di energia il parametro discriminante sarà proprio la velocità iniziale, la quale è legata alla posizione lungo l'orbita della sonda. Ci saranno perciò, a parità di propellente usato, istanti migliori o peggiori per realizzare un certo ΔV .

Va infine segnalato che le precedenti due relazioni sono valide nell'ipotesi che la spinta avvenga istantaneamente, cosa che nel caso di propulsione ionica non avviene. Le considerazioni fatte però continuano a valere in generale.

3.6.2 Manovre con propulsione elettrica

Si potrebbero presentare le molto comuni manovre a uno o due impulsi, ma sarebbe superfluo in quanto, come si è già detto, nel caso in analisi la propulsione è realizzata attraverso un ion thruster con bassi livelli di spinta che quindi necessitano di tempi di accensione lunghi per raggiungere valori significativi. Per l'analisi di una generica manovra si considera l'approssimazione di Edelbaum, caratterizzata da varie ipotesi:

- Orbite quasi circolari ($a \approx p \approx r$; $e \approx 0$; $E \approx M \approx \nu$).
- Orbite a bassa inclinazione ($i \approx 0$).
- Accelerazioni piccole rispetto alla velocità circolare $V_c^2 = \mu/r^2$.

La traiettoria descritta è una graduale variazione della velocità che conduce alla descrizione di una traiettoria a spirale come quella in Fig. 3.9. Si può suddividere la spinta in tre componenti e osservarne gli effetti sui parametri orbitali:

- La componente tangenziale $T_t \parallel \mathbf{V}$ permette di variare l'energia, ovvero a , e ed ω .
- La componente perpendicolare $T_r \perp \mathbf{V}$ non varia il modulo di \mathbf{V} , ma varia e ed ω . È utilizzata per il cambio della linea degli apsi.
- La componente fuori dal piano T_w che varia i e Ω , ovvero i parametri connessi all'orientamento dell'orbita.

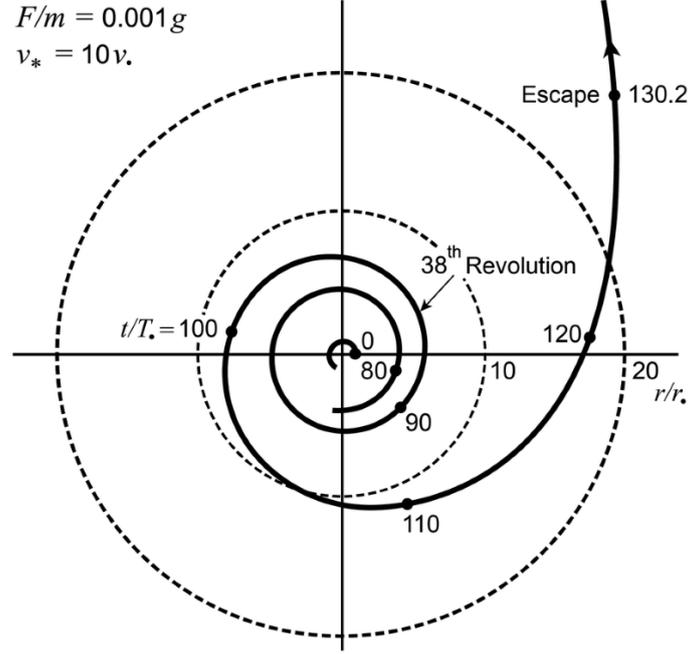


Figura 3.9. Traiettoria a spirale tipica di una spinta continua. Il pedice \bullet fa riferimento alle condizioni iniziali. Solo le ultime 2 rivoluzioni sono state rappresentate in quanto la spirale è inizialmente molto compatta e variazioni significative si osservano solo ai limiti della sfera di influenza [24].

Per scomporre la spinta si sono definiti due angoli α e β , il primo nel piano e il secondo fuori. È possibile dimostrare che:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 2 \frac{T_t}{m} \frac{a}{V} \\ \dot{e} &= \left[2 \frac{T_t}{m} \cos \nu - \frac{T_r}{m} \sin \nu \right] \frac{1}{V} \\ \dot{i} &= \frac{T_w}{m} \frac{1}{V} \cos(\omega + \nu) \end{aligned}$$

Note queste relazioni, si può ancora dimostrare che:

- Per massimizzare la variazione di semiasse maggiore $\alpha = \beta = 0$, ovvero spinta puramente tangenziale. Questo comporta anche una variazione di eccentricità, ma mantenendo accesi i propulsori lungo un'intera orbita questa si annulla.
- Per massimizzare la variazione di eccentricità deve valere che $\tan \alpha = 0.5 \tan \nu$ e $\beta = 0$. Questo significa che, approssimando $\alpha \approx \nu$ e definita la direzione del periastro, occorre spingere sempre in direzione perpendicolare al periastro.
- Per massimizzare la variazione di inclinazione $\beta = \pm 90^\circ$ e α indeterminato.

3.6.3 Rendezvous

La missione in esame possiede tre fasi importanti durante la sua durata: i due flyby e il rendezvous finale. Il primo è il semplice passaggio ravvicinato tra la sonda e l'asteroide e non presenta particolari complicazioni nella sua realizzazione: occorre solamente che le due traiettorie si intersechino in almeno un punto dove i due corpi si dovranno trovare simultaneamente.

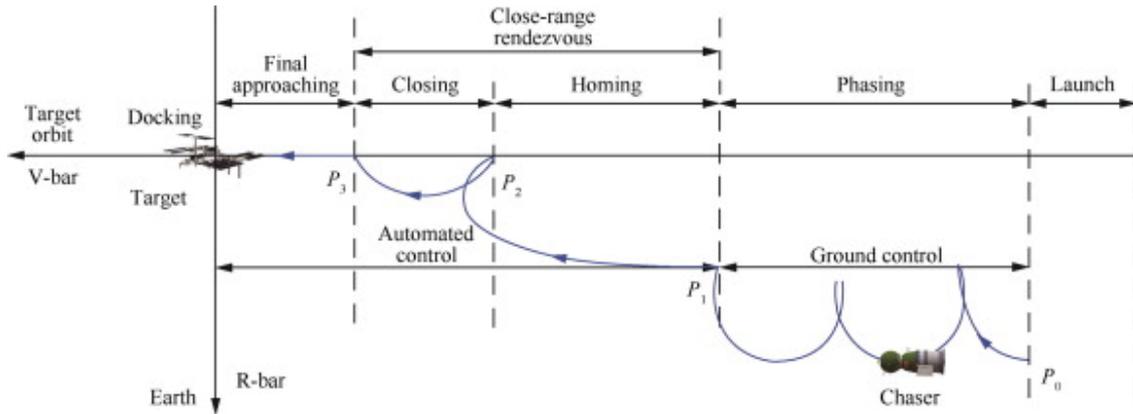


Figura 3.10. Avvicinamento all'ISS visto dal sistema LVLH. La traiettoria è molto simile ad un generico rendezvous e composta da piccole traiettorie circolari che riducono progressivamente la distanza tra chaser e target. [28].

Un rendezvous è invece una manovra più complessa dove due corpi, un chaser attivo e un target passivo, si troveranno a pochi metri di distanza e con velocità relativa nulla. È tipicamente una manovra lunga che inizia molto prima dell'effettiva conclusione attraverso la fase di *phasing*, dove il chaser modifica la sua traiettoria in modo che raggiunga l'altra con velocità relativa molto bassa. Quando effettivamente il chaser avrà raggiunto il target, inizierà la fase di *proximity operations*, ovvero una serie di manovre che porteranno i due corpi sulla stessa orbita e via via più vicini fino al *final approach* che in alcuni casi può includere anche un contatto. Per uno studio più semplice del rendezvous nelle fasi finali si fa spesso uso di un sistema di riferimento locale quasi inerziale centrato nel centro di massa del target chiamato *Local Vertical Local Horizontal* (LVLH). Questo accade perché è di maggiore importanza il moto relativo tra i due corpi piuttosto che il moto assoluto rispetto ad un corpo centrale, ad esempio il Sole. Una traiettoria tipica di rendezvous è presentata in Fig. 3.10.

Capitolo 4

Modelli matematici del problema

Dopo aver descritto gli aspetti fisici principali dell'ambiente in cui si svolgerà la missione, risulta necessario realizzare una scelta per la definizione del modello opportuno per descrivere la dinamica del satellite durante il suo moto. Questo aspetto sarà anche di grande importanza per l'introduzione delle tecniche di ottimizzazione che si vedranno in seguito.

Si definisce *modello* un sistema di equazioni differenziali ordinarie che rappresentano l'evoluzione, ovvero la storia temporale, dello stato di un sistema. Si può scrivere nella forma generale

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

dove t è la variabile indipendente tempo, \mathbf{x} è il vettore di stato composto in generale da n componenti in grado di descrivere completamente lo stato attuale del sistema e \mathbf{u} è il vettore dei controlli, ovvero connesso agli input attuabili dal sistema per variarne il comportamento. In generale il vettore di stato e dei controlli hanno dimensioni diverse in quanto non è sempre possibile realizzare un controllo per ogni variabile di stato. Nel caso in esame, lo stato della sonda può essere ben descritto dalla sua posizione e dalla velocità.

In generale non esiste un modello univoco per la descrizione di un sistema: tipicamente è possibile crearne uno che tenga conto di tutte le possibili fenomenologie legate al sistema stesso, ma è solitamente molto complesso e di difficile applicazione in ambiti di studio standard. Ciò che avviene perciò è l'introduzione di ipotesi che semplificano il problema e rendono il modello più snello e semplice. Un esempio è già stato visto con il passaggio dal modello da n a 2 corpi.

La scelta del modello influenza quindi notevolmente la risoluzione del problema e la precisione dei risultati. Per quanto riguarda la meccanica del volo spaziale esistono due principali scelte da compiere, schematizzate in [Fig. 4.1](#): il tipo di trasferta,

connesso alla definizione del vettore dei comandi \mathbf{u} , ed equazioni del moto, le quali influenzano la forma delle equazioni differenziali del sistema. Si affronterà ora la scelta della trasferta e, in seguito, il modello del moto.

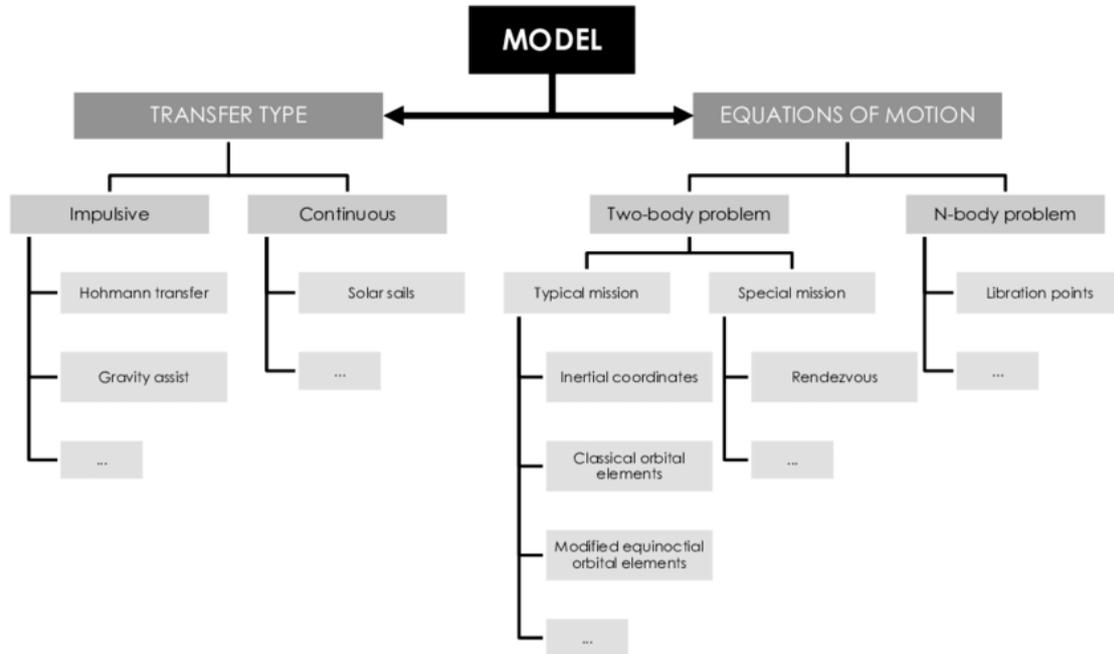


Figura 4.1. Schema di massima con le possibili ramificazioni per la definizione di un modello [29].

4.1 Tipo di trasferta

La scelta del tipo di trasferta è strettamente legato al tipo di propulsione utilizzata. Se si fa utilizzo di quella chimica si può assumere che le manovre avvengano impulsivamente, mentre con propulsione elettrica questa ipotesi è difficilmente applicabile. Le principali differenze verranno ora messe in luce.

4.1.1 Modello impulsivo

Come anticipato, questo modello viene utilizzato quando si fa uso di propulsione chimica, caratterizzata da un alto livello di spinta ma con impulso specifico ridotto che rendono necessarie solo brevi accensioni per ottenere il risultato desiderato. Il modello può essere utilizzato anche per propulsioni a bassa spinta, a patto però che le fasi di accensione siano brevi rispetto alla durata complessiva della missione

ed accettando che il risultato finale contenga degli errori di approssimazione non trascurabili.

Il modello impulsivo permette di realizzare delle assunzioni semplificative ipotizzando che la posizione del satellite sia costante durante la fase di accensione del propulsore. Questo comporta che il vettore dei comandi sarà identicamente nullo per tutta la durata della missione in quanto queste avverranno in un tempo nullo e le manovre saranno rappresentate da discontinuità di velocità (e quindi di energia e di parametri orbitali) in diversi punti della missione che descriveranno le diverse accensioni realizzate dal sistema propulsivo. Una rappresentazione semplificata è osservabile in Fig. 4.2.

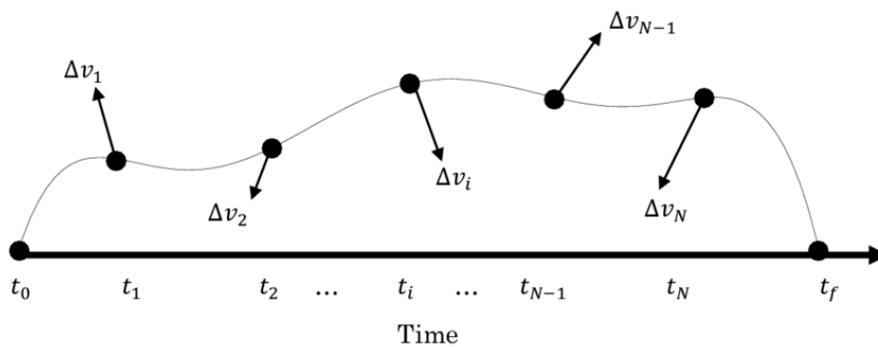


Figura 4.2. Schema generale di una trasferta impulsiva, dove la traiettoria è suddivisa in segmenti separati da diversi ΔV_i ipotizzati istantanei [29].

Il modello è molto semplice ma piuttosto accurato, specie quando le accelerazioni in gioco sono notevoli, in quanto le variazioni dei parametri orbitali saranno molto grandi e risentiranno in minima misura degli errori di approssimazione. La semplicità si trova non solo nella definizione delle discontinuità, ma anche nella soluzione delle equazioni del moto: nell'ipotesi che il problema possa essere analizzato secondo il modello a due corpi ristretto, sarà necessario suddividere la missione in diversi segmenti separati dalle diverse accensioni. In ognuno di essi basterà semplicemente propagare il modello kepleriano visto nel cap. 3 senza necessità di integrazione conoscendo istante per istante posizione e velocità del satellite, il quale seguirà semplicemente una delle coniche.

Il problema di ottimizzazione in questo caso è quindi quello di trovare l'istante temporale, il modulo e la direzione ottimali dei diversi ΔV per realizzare la missione ottimizzando i parametri desiderati, ad esempio la durata o la massa finale.

Un modello ibrido e più avanzato è quello dell'*impulsive thrusting* dove la missione è modellata come impulsiva, ma le accensioni vengono localmente studiate come continue e con tempi di accensione non nulli. Questo migliora la precisione complessiva anche se ne aumenta la complessità, ma ancora una volta è valido solo quando la missione è di durata ben superiore rispetto alle fasi di accensione.

4.1.2 Modello continuo

Quando la spinta avviene in un arco temporale non trascurabile rispetto alla durata della missione, il modello impulsivo non è più in grado di produrre risultati attendibili e occorre utilizzare il modello continuo. Questo risulta sicuramente più preciso, ma più complesso da analizzare. Questo diventa necessario per sistemi propulsivi a bassa spinta a causa dei tempi prolungati richiesti per riuscire ad ottenere variazioni significative della traiettoria, come si era già visto in Fig. 3.9.

La sostanziale differenza tra il modello continuo e quello impulsivo è nella definizione del vettore dei comandi, ora non più identicamente nullo $\mathbf{u}(t) \neq 0$, e l'assenza di discontinuità di velocità. Il problema diventa quindi più complesso in quanto non è più possibile applicare la propagazione kepleriana dell'orbita ma occorre attuare un'integrazione lungo la traiettoria. Nel caso più generale di applicazione del modello ad n -corpi, il problema diventerà quindi una estensione di quello già presentato nel capitolo precedente attraverso l'Eq. (3.1):

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{\Gamma}$$

dove $\mathbf{\Gamma}$ è un vettore contenente altre accelerazioni che non siano quelle gravitazionali, tra cui la spinta connessa al vettore dei comandi $\mathbf{u}(t)$ o perturbazioni dovute alla pressione solare o resistenza atmosferica. Si può osservare che, imponendo $\mathbf{u}(t) = 0$, si ricade nel modello impulsivo in quanto esso è semplicemente una semplificazione del problema continuo.

4.1.3 Scelta del tipo di trasferta

Alla luce di quanto appena presentato, si può concludere che nel caso in esame in questa tesi il modello continuo è indubbiamente da preferire: come si vedrà in seguito, infatti, gli asteroidi da intercettare presentano orbite che necessitano di significative variazioni della traiettoria del satellite affinché vengano raggiunti e, facendo utilizzo di un sistema propulsivo a bassa spinta, è chiaro che saranno necessari tempi di attuazione lunghi. Questa scelta complicherà sicuramente il problema, ma permetterà anche un'ottimizzazione migliore in quanto si avrà la possibilità di agire sul vettore dei comandi cercandone una forma ottimale per la traiettoria scelta ed aumentando la flessibilità della soluzione.

4.2 Equazioni del moto

La seconda importante scelta da attuare è quella riguardante le equazioni del moto che governano la fisica del problema. Esistono moltissimi aspetti che ne influenzano la scelta e le eventuali ipotesi semplificative che è possibile attuare; tra questi, il principale è la scelta di quanti corpi considerare per la realizzazione del modello

gravitazionale, ovvero se optare per un problema a 2, 3 o n corpi. Risulta altresì importante definire il sistema di riferimento e il tipo di coordinate, in quanto esso influenza non solo la forma delle equazioni in caso il sistema non sia inerziale, ma modifica anche la definizione del vettore di stato. Il modello potrà poi includere la presenza di perturbazioni di varia entità e origine come già osservato in precedenza.

4.2.1 Problema degli n -corpi

Quando la missione prevede la permanenza della sonda in uno spazio soggetto a diverse forze gravitazionali dovute a differenti masse, la scelta più opportuna ricade nel modello degli n -corpi già presentato nel [cap. 3](#). Alcuni possibili situazioni dove questo modello è ideale sono le missioni verso la Luna, oppure verso Saturno e Giove, caratterizzati da grandi masse e da molti satelliti naturali, alcuni di essi con dimensioni comparabili a quelle della Luna terrestre. Un caso invece di problema dei tre corpi ristretto è quello dei punti di librazione (anche detti *punti di Lagrange*), ovvero punti nello spazio dove vi è un equilibrio nell'attrazione gravitazionale di due corpi e un satellite è in grado di orbitare attorno a quel punto senza fare uso di propellente. Gli esempi appena citati non sono però connessi al caso in esame, pertanto ulteriori approfondimenti sarebbero superflui.

Un caso intermedio è quello delle missioni interplanetarie, dove la sonda attraversa diverse regioni dello spazio caratterizzate da differenti masse principali: alla partenza e all'arrivo essa si trova nei pressi di un pianeta e la gravità di quest'ultimo sarà sicuramente più significativa di tutte le altre, pertanto il modello a due corpi ristretto sarà sufficientemente accurato. Nella fase di trasferta interplanetaria il satellite si troverà invece in campo eliocentrico e si può assumere che l'unica massa rilevante sarà quella del Sole e ancora una volta si potrà usare il modello a due corpi. Al confine della sfera di influenza, invece, la forza attrattiva del pianeta e del Sole saranno confrontabili e sarà opportuno utilizzare un modello a tre corpi. Questa tecnica è chiamata *patched conic approximation* ed è lo standard per la risoluzione delle missioni interplanetarie.

4.2.2 Problema dei due corpi

Questo modello è già stato introdotto e approfondito nel [cap. 3](#) ed è, come già detto, una semplificazione del modello a n -corpi. Esso viene usato, in particolare la sua variante ristretta, quando si analizza il moto di un satellite che si trova in un campo gravitazionale dove la forza attrattiva di uno dei corpi celesti è sufficientemente maggiore delle altre. È il caso ad esempio di un satellite orbitante la Terra, oppure in campo eliocentrico e sufficientemente distante da altri corpi. Vista la massa molto piccola della sonda, nel seguito si sottintende che il modello a due corpi considerato sarà proprio quello ristretto.

Uno dei vantaggi principali di questo modello è, oltre alla sua semplicità, la possibilità di considerare come origine del sistema di riferimento inerziale la massa del corpo più grande, ad esempio il Sole. Questo semplifica notevolmente il problema in quanto le equazioni stesse sono semplici ed in ogni caso facilmente estendibili ad altri sistemi di riferimento. La posizione e la velocità del satellite saranno quindi espresse attraverso una terna di coordinate cartesiane, cilindriche o sferiche.

Un altro possibile approccio al problema è la soluzione mediante i parametri orbitali già presentati nella sez. 3.4. Questa opzione è di facile comprensione fisica e presenta il vantaggio di avere chiara la posizione del corpo senza passare attraverso un vettore di stato, ma è complesso estenderla ad altre forme e sistemi di riferimento. Tenendo conto della presenza di accelerazioni di origine perturbativa, le equazioni che descrivono la variazione nel tempo dei parametri stessi sono descritte in [26, Capitolo 9] e risultano di derivazione piuttosto complessa. Il problema diventa ancor maggiore se si considera la presenza di molte singolarità, rendendole di interesse pratico piuttosto limitato.

Esistono altresì i parametri orbitali modificati equinoziali, i quali non hanno un significato fisico preciso ma non presentano le singolarità tipiche dei parametri orbitali classici. Le equazioni in questo caso risultano ancora complesse (si veda [30, Capitolo 6] per ulteriori dettagli) ma facilmente implementabili e sono di particolare utilità quando si analizzano trasferte interplanetarie con swing-by con altri corpi.

A titolo di confronto, in Tab. 4.1 è possibile analizzare i pro e i contro di ogni soluzione proposta.

Tabella 4.1. Confronto tra tre possibili approcci al problema a due corpi ristretto [29].

	Coordinate inerziali	Parametri orbitali classici	Parametri orbitali equinoziali modificati
Significato fisico	Normale	Alto	Basso
Estensibilità ad altre forme	Facile	Difficile	Difficile
Singolarità	No	Sì	No
Complessità delle equazioni	Bassa	Alta	Media

4.2.3 Scelta delle equazioni del moto

Alla luce di quanto visto e delle informazioni presentate nel cap. 2, è possibile scegliere quale set di equazioni del moto risulti più opportuno per la missione in esame. Poiché per ipotesi il satellite inizia il suo viaggio al di fuori della sfera di influenza della Terra e la massa degli asteroidi è relativamente bassa, il modello a due corpi ristretto con un sistema di riferimento inerziale centrato nel Sole risulta la

scelta più opportuna. Ciò snellirà le equazioni da impiegare senza inficiare in maniera significativa i risultati trovati, che saranno comunque sufficientemente precisi.

Si è scelto poi di fare uso di coordinate sferiche per la definizione della posizione e della velocità in quanto risultano maggiormente versatili e semplici da applicare. Riguardo invece alle perturbazioni contenute nel vettore \mathbf{T} , si è deciso di trascurare sorgenti esterne come pressione solare o forze magnetiche, oltre che ovviamente forze atmosferiche in quanto ci si trova a distanze tali da considerare lo spacecraft nel vuoto.

4.3 Scrittura delle equazioni del moto

Si è quindi visto che il problema assumerà una forma generale del tipo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

dove \mathbf{T} rappresenta di fatto le accelerazioni dovute ai controlli. Si definiscono poi il raggio r , la latitudine θ e la longitudine ϕ e le velocità radiale $u = \dot{r}$, tangenziale in direzione Est v e tangenziale in direzione Nord w rispetto al riferimento locale. Si è poi aggiunta l'equazione della portata, la quale non è propria del modello ma è una caratteristica del sistema propulsivo. Si ottiene perciò il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \\ u \\ v \\ w \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \cos \phi \\ \frac{w}{r} \\ -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} \\ -\frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \phi \\ -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \phi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{T}{m} \sin \gamma_T \\ \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \\ \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \\ \frac{T}{c} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

dove gli angoli γ_T e ψ_T son gli angoli di elevazione e di heading della spinta \mathbf{T} rispetto al piano orizzontale; per convenzione, il primo è positivo verso l'alto (ovvero verso il Nord), mentre il secondo in senso antiorario a partire dal parallelo.

Il problema non è però ancora completo: sebbene tramite questo set di equazioni si è in grado di trovare una soluzione imponendo le opportune condizioni al contorno,

questa sarà solamente una delle possibile traiettorie che la sonda può seguire e non si hanno informazioni sulla sua qualità in termini di consumi. Diventa quindi necessario introdurre degli elementi matematici che permettano di comprendere se il risultato trovato sia ottimale o no. Lo step successivo è quindi quello di definire l'opportuno strumento matematico di ottimizzazione e la scelta di un procedimento per la ricerca di una soluzione, aspetti che verranno trattati nei successivi due capitoli.

Capitolo 5

Funzione obiettivo e formulazione del problema

Dopo aver delineato il problema in esame attraverso la definizione di un set di equazioni differenziali, occorre definirne le condizioni al contorno per poterne trovare una soluzione. Queste vengono tipicamente definite a partire dai requisiti di missione, come ad esempio una precisa durata, un limite sui consumi o sulla distanza da compiere, oppure sul fattore di carico che lo spacecraft dovrà sopportare (ad esempio in termini di carichi termici, aerodinamici o di radiazione): In questo capitolo si presenterà una formulazione matematica generale delle condizioni al contorno che, per il caso in esame, possono poi essere dedotte a partire dagli obiettivi e dai vincoli che erano già stati anticipati e riassunti nella [Tab. 2.1](#). Ciò verrà fatto dopo aver introdotto il concetto di funzione costo poiché risulterà più chiaro.

Al fine poi di realizzare un'ottimizzazione occorre tradurre i requisiti di ottimo in un linguaggio numerico, ovvero in una *funzione costo*. Questa denominazione non deve trarre in inganno: non si tratta infatti di un costo economico, ma di una definizione generale di qualcosa che risulta "difficile da ottenere" e pertanto visualizzabile come un costo che si vuole minimizzare. Essa prende anche il nome di *funzioni obiettivo*, con questa denominazione più comune nel linguaggio informatico mentre la prima tipica del controllo ottimale che verrà presentato in seguito.

Le funzioni costo sono tipicamente scalari e a più variabili. In alcuni casi sono rappresentate da quantità fisiche e tangibili (come ad esempio una massa, o un valore di ΔV) e per raggiungere un ottimo occorre minimizzarle o massimizzarle. Ciò non è però sempre vero, in quanto è molto comune dover ottimizzare diversi aspetti, come ad esempio massimizzare la massa finale e al contempo minimizzare il tempo di trasferta o i carichi esterni. In questo caso, l'ottimo di un parametro non coincide con l'ottimo degli altri e occorrerà introdurre una funzione costo complessiva da massimizzare/minimizzare che tenga conto delle diverse quantità fisiche opportunamente pesate; servirà quindi definirla in una maniera comune,

perdendo così una visualizzazione tangibile. Risulta pertanto ovvio che la funzione obiettivo non è unica ma varia da missione a missione.

5.1 Tipi di funzione obiettivo

Nella forma più generale, una funzione costo può essere espressa come:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) := \varphi(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

dove t_0 e t_f sono i tempi iniziale e finale della missione, \mathbf{x} il vettore di stato e \mathbf{u} quello dei comandi. Si può osservare che essa è composta da un termine dipendente solo dalle condizioni finali, detto di *Mayer*, e uno dipendente dall'intera traiettoria seguita, detto di *Lagrange* (o di costo corrente). Non è raro incontrare problemi che possiedano funzioni costo dotati di entrambi i termini, ma è molto più comune che compaia solo il termine di Mayer in quanto spesso quel che ha maggiore importanza è il "risultato finale". Si noti che, definendo opportune variabili ausiliarie, è possibile semplificare la funzione obiettivo generale riconducendosi ad una formulazione di Mayer ($L = 0$) o di Lagrange ($\varphi = 0$).

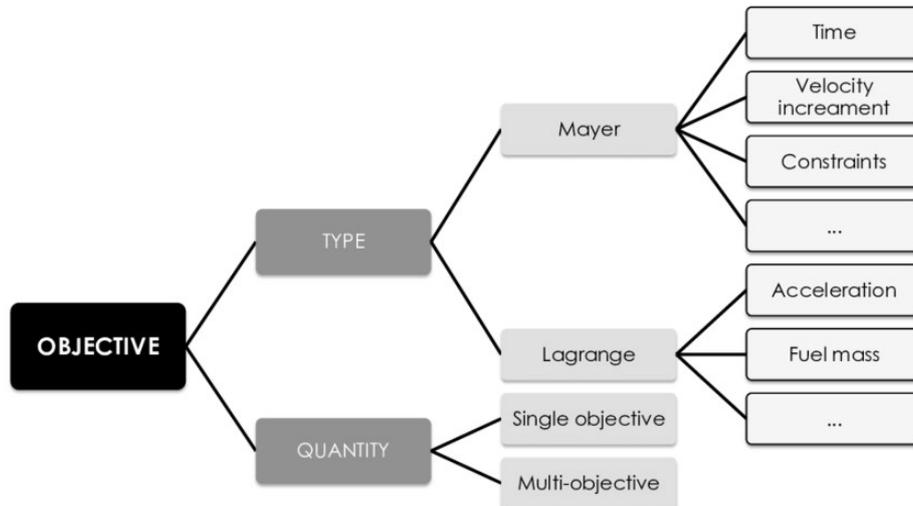


Figura 5.1. Macro-suddivisione dei possibili tipi e quantità di obiettivi [29].

In Fig. 5.1 si può osservare uno schema riassuntivo dei possibili obiettivi della missione: in termini di quantità, come già detto, si può avere un singolo parametro da ottimizzare o più di uno, con una funzione costo che dovrà tenere conto tutti i fattori opportunamente pesati. Per quanto concerne il tipo, appare chiaro che a ciascun obiettivo si può associare una funzione di Mayer o di Lagrange; ad esempio, se si

volessero ottimizzare i già citati fattori di carico, occorrerà definirli attraverso una funzione di Lagrange in quanto bisognerà tenere conto di tutta la loro evoluzione lungo la traiettoria e non solo del valore finale. Invece, il ΔV complessivo è un parametro caratteristico dell'istante finale e potrà essere definito attraverso una funzione di Mayer. Ad ogni modo, i due casi più comuni di ottimizzazione sono la minimizzazione della massa o dei controlli da attuare sul veicolo.

Si noti come la definizione di una funzione obiettivo non ha nulla a che vedere con l'imposizione di un vincolo; piuttosto, definiti gli obiettivi di missione, essa cerca un modo per minimizzare/massimizzare determinati parametri riuscendo comunque a completare ciò che la missione si prefissa.

Nel seguito verranno presentate le più comuni, ma si tenga presente che non sono le uniche: per particolari missioni saranno necessari altri criteri, ad esempio per le costellazioni di satelliti dove si devono tenere in considerazione aspetti come le distanze relative. Per ulteriori approfondimenti sugli utilizzi delle diverse funzioni si rimanda a [29].

5.1.1 Funzioni obiettivo di Mayer

In questa categoria ricadono tutte le funzioni obiettivo connesse ad una variabile caratteristica (tipicamente di stato) relativa all'istante finale della traiettoria.

Tempo

È il caso più semplice di tutti; prevede semplicemente di porre come obiettivo il valore stesso del tempo finale:

$$J := t_f$$

Alcuni esempi di utilizzo si trovano nelle missioni di tipo scientifico con equipaggiamenti con durata limitata, in quanto si vuole minimizzare il tempo di trasferta e iniziare lo studio al più presto.

Incremento di velocità

Quando l'obiettivo è minimizzare lo sforzo propulsivo, è comune esprimere la funzione costo in termini di ΔV . Questo è vero in particolare quando si fa uso del modello impulsivo poiché la definizione dell'incremento di velocità complessivo è semplicemente la somma dei valori assoluti degli incrementi

$$J := \sum_{i=1}^N \|\Delta \mathbf{V}_i\|$$

Si noti che, per realizzare un certo ΔV , è necessario consumare del propellente, pertanto i due aspetti sono strettamente connessi. È possibile esprimere questa condizione anche con l'utilizzo del modello continuo, ma è più complesso e meno funzionale.

Condizioni iniziali e finali

Tipicamente le condizioni iniziali e finali rappresentano dei vincoli al bordo del problema, ad esempio rappresentando il punto di partenza e la meta della traiettoria. Tuttavia, è possibile invece considerarle come vincoli liberi e porle come funzioni obiettivo, ad esempio se si desidera percorrere la maggior distanza possibile con un determinato quantitativo di propellente. Si possono quindi esprimere come

$$J := \chi(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f))$$

dove χ è la funzione dei vincoli.

5.1.2 Funzioni obiettivo di Lagrange

Questo tipo di funzioni vengono utilizzate quando i parametri da ottimizzare sono una grandezza variabile durante la missione ed il loro andamento è l'obiettivo dell'ottimizzazione stessa. Ciò che si fa, quindi, è un'integrazione lungo l'intera traiettoria dei parametri stessi per poterli trattare come una funzione obiettivo.

Accelerazione

Il parametro che più comunemente viene ottimizzato attraverso una funzione di Lagrange è l'accelerazione, intesa come quella prodotta dal sistema propulsivo e non dalle perturbazioni esterne, pertanto minimizzarla implica ridurre al minimo l'utilizzo della spinta durante la trasferta. Esistono diverse espressioni per l'accelerazione, la più comune delle quali è la seguente:

$$J := \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \gamma^2 dt$$

dove γ è il modulo dell'accelerazione prodotta dal sistema propulsivo. Questa formulazione risulta molto versatile in quanto si adatta bene a tecniche di interpolazione polinomiale per la ricerca del vettore di stato.

Un'altra formulazione molto comune specialmente per missioni a bassa spinta e modello continuo è la seguente:

$$J := \Delta V_{tot} = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} dt$$

dove x , y e z sono le tre componenti dell'accelerazione in un sistema di riferimento cartesiano, ma la formulazione è adatta a qualsiasi set di coordinate. Con questa scrittura il modulo dell'accelerazione viene integrato nel tempo, ottenendo quindi un incremento di velocità. Si tratta perciò dell'estensione al caso con modello a spinta continua della funzione obiettivo relativa al ΔV precedentemente espressa con formulazione di Mayer.

In alternativa, si può esprimere come:

$$J := \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt$$

Questa formulazione diventa vantaggiosa nel caso particolare dove c è costante: infatti, come già detto nel [cap. 3](#), si ha che $T = c\dot{m}$; pertanto integrando la funzione e considerando a denominatore una massa media durante la missione m_{avg} si ottiene che:

$$J \propto \frac{m_f - m_0}{m_{avg}}$$

Supponendo fissata la massa iniziale, la funzione obiettivo diventa dipendente solo dalla massa finale, riconducendosi ad una forma simile alla funzione di Mayer già vista in precedenza.

Massa di propellente

Sebbene la massa di propellente sia connessa alla massa finale, la formulazione mediante una funzione di Lagrange risulta più conveniente sotto alcuni aspetti. Innanzitutto in questo caso si ottiene che:

$$J := \int_{t_0}^{t_f} m_p(t) dt$$

dove m_p è la massa di propellente ad un generico istante. È quindi evidente la dipendenza dal tempo pertanto, a parità di massa di propellente utilizzato, una missione più breve avrà una funzione costo diversa rispetto ad una missione più lunga e questa differenza si perderebbe se si considerasse solo il valore di massa finale attraverso una formulazione di Mayer $J = m_f$.

5.2 Scalarizzazione della funzione obiettivo

Sino ad ora sono state presentate diverse funzioni obiettivo per diversi possibili parametri da ottimizzare. Come è però già stato detto in precedenza, è possibile che gli obiettivi siano molteplici e sia necessario introdurre più termini all'interno della funzione costo. Avviene perciò un trade-off, in quanto l'ottimo di un aspetto è in generale non coincidente con l'ottimo di un altro e, anzi, molto spesso sono contrastanti, ad esempio se si volessero minimizzare sia i consumi che la durata della missione.

È perciò necessario realizzare un processo di scalarizzazione, ovvero introdurre dei coefficienti moltiplicatori per i vari termini al fine di "pesarne" i contributi e

prediligere un aspetto piuttosto che un altro. In generale la formulazione è del tipo:

$$J := \sum_{i=1}^n \alpha_i J_i$$

dove α_i è un coefficiente che determina l'importanza relativa e J_i è una generica funzione costo, di Mayer o di Lagrange. Lo scopo dei pesi è anche quello di "portare" tutti i termini sullo stesso ordine di grandezza, in quanto questi potrebbero differire di molto. α può essere un numero puro, oppure un prodotto tra grandezze costanti con l'obiettivo di normalizzare la funzione. Nel caso in cui le diverse funzioni J_i abbiano un segno discorde è possibile elevare le funzioni stesse al quadrato in modo che abbiano tutte segno concorde.

5.3 Formulazione del problema di ottimizzazione

La scelta della funzione obiettivo è l'aspetto più complicato della definizione del problema: esistono innanzitutto infinite combinazioni di funzioni diverse e di pesi, la cui scelta è puramente connessa ai requisiti e agli obiettivi di missione. Inoltre, introdurre troppi aspetti da ottimizzare può rendere la richiesta computazionale esageratamente onerosa e con scarsi risultati, in quanto il trade-off sarà molto distante dai punti di ottimo delle singole funzioni, rendendo la soluzione complessivamente scadente.

Avendone compreso le principali caratteristiche, è ora possibile presentare il problema di ottimizzazione in maniera generale e in seguito definirlo nel caso in esame. Si era già visto nel [cap. 4](#) che un problema può essere risolto attraverso la definizione di un sistema di equazioni differenziali del tipo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

Per poterlo risolvere è necessario introdurre delle condizioni di vincolo:

$$\boldsymbol{\chi}_- \leq \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq \boldsymbol{\chi}_+$$

dove $\boldsymbol{\chi}_-$ e $\boldsymbol{\chi}_+$ rappresentano i limiti superiori ed inferiori delle condizioni di vincolo. Si osservi come questa espressione sia del tutto generale e che nel caso particolare in cui $\boldsymbol{\chi}_- = \boldsymbol{\chi}_+$ il vincolo è di uguaglianza ma continua ad avere validità. Esprimendo questi vincoli si va a limitare i possibili valori di vettori di stato e dei controlli e si permette di ottenere una soluzione. Se la funzione dei vincoli $\boldsymbol{\chi}$ dipende a sua volta dal tempo, essa viene definita *vincolo di percorso*.

L'espressione appena presentata si può poi specificare nel caso del tempo iniziale e finale come segue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_{0,-} &\leq \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0), t_0) \leq \boldsymbol{\chi}_{0,+} \\ \boldsymbol{\chi}_{f,-} &\leq \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), t_f) \leq \boldsymbol{\chi}_{f,+} \end{aligned}$$

Quando ciò accade, la funzione χ prende il nome di *vincolo al bordo*. Queste vengono ricavate, per il problema in esame, dalle condizioni al contorno, come ad esempio l'istante temporale scelto per la partenza, oppure la massa di propellente e la posizione iniziale. Inoltre, dai limiti fisici del problema è possibile ricavare altre condizioni, tipicamente di percorso, come ad esempio che la spinta prodotta dal sistema propulsivo sia compresa tra 0 mN e un valore massimo che dipende dalla potenza elettrica disponibile. È evidente che le prime sono caratteristiche della singola traiettoria, mentre le seconde sono legate al satellite stesso, quindi valgono sempre indipendentemente dal percorso scelto.

Viene poi introdotta la funzione costo vista in precedenza, che in generale assume la forma completa e scalarizzata:

$$J = \sum_{i=1}^n \alpha_i J_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

L'obiettivo è quindi quello di ricercare i valori di vettori di stato e dei controlli tali che la funzione costo risulta massimizzata/minimizzata e che rispettino i vincoli imposti, sia al bordo che di percorso. Questo vale a dire ricercare la traiettoria migliore, sia dal punto di vista del percorso sia dal punto di vista della richiesta di controllo.

Spesso, quando una missione contiene alcune tappe intermedie necessarie (come nel caso in esame i flyby) la traiettoria viene divisa in P fasi, dette *archi*, collegati tra loro. Si riformula quindi la funzione costo

$$J = \sum_{k=1}^P J^{(k)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

dove $J^{(k)}$ è la funzione costo della fase k -esima. Il problema assume perciò la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}^{(k)}(t) = f(\mathbf{x}^{(k)}(t), \mathbf{u}^{(k)}(t), t) \quad k = 1, \dots, P$$

Resta comunque necessario rispettare le condizioni al contorno e di percorso precedentemente introdotte, opportunamente modificate sui diversi archi k -esimi. Sarà poi necessario introdurre dei vincoli di collegamento tra i diversi archi, in quanto la traiettoria non deve presentare discontinuità:

$$L_-^{(s)} \leq L^{(s)}(\mathbf{x}^{(l_s)}(t_f^{(l_s)}), \mathbf{u}^{(l_s)}(t_f^{(l_s)}), t_f^{(l_s)}, \mathbf{x}^{(r_s)}(t_0^{(r_s)}), \mathbf{u}^{(r_s)}(t_0^{(r_s)}), t_0^{(r_s)}) \leq L_+^{(s)}$$

dove s rappresenta una coppia di archi collegati ed l_s ed r_s l'arco di sinistra e di destra della coppia. Chiaramente, il collegamento ha significato solo quando i due archi sono distinti.

5.4 Scelta della funzione obiettivo

Per il problema in esame si è deciso di optare per una formulazione semplice della funzione obiettivo:

$$J := m_f$$

Si vuole quindi ottimizzare solamente il valore di massa finale al termine della trasferta, senza tenere in considerazione ad esempio la funzione massa del propellente. Questa decisione non è però avventata: innanzitutto si ricorda che si sta trattando una missione in fase di avanprogetto, pertanto non è necessario richiedere precisioni eccessive. Inoltre, una funzione obiettivo semplice permette di snellire il problema, specie dal punto di vista computazionale. C'è poi da considerare che si ha un vincolo esplicito sulla durata della missione, pertanto soluzioni con bassi consumi e durate elevate verranno comunque scartate. Si osserva infine che, poiché la velocità effettiva di scarico è ipotizzata costante, così come la massa iniziale, l'incremento di velocità ΔV è univocamente legato alla massa finale.

Capitolo 6

Metodi risolutivi e teoria del controllo ottimale

Nei capitoli precedenti sono stati introdotti gli strumenti matematici necessari per la soluzione del problema, in particolare nel [cap. 4](#) è stato definito il set di equazioni che descrivono la dinamica del satellite nella sua traiettoria, mentre nel [cap. 5](#) è stata introdotta la funzione costo utilizzata per definire i parametri l'ottimizzazione e le condizioni al contorno, sebbene espresse in maniera qualitativa e non quantitativa. Schematicamente quindi il problema può essere rappresentato come in [Fig. 6.1](#). Per poter procedere alla risoluzione occorre ancora definire un importantissimo aspetto: la metodologia necessaria per la soluzione del problema di ottimo, sia dal punto di vista matematico che computazionale.

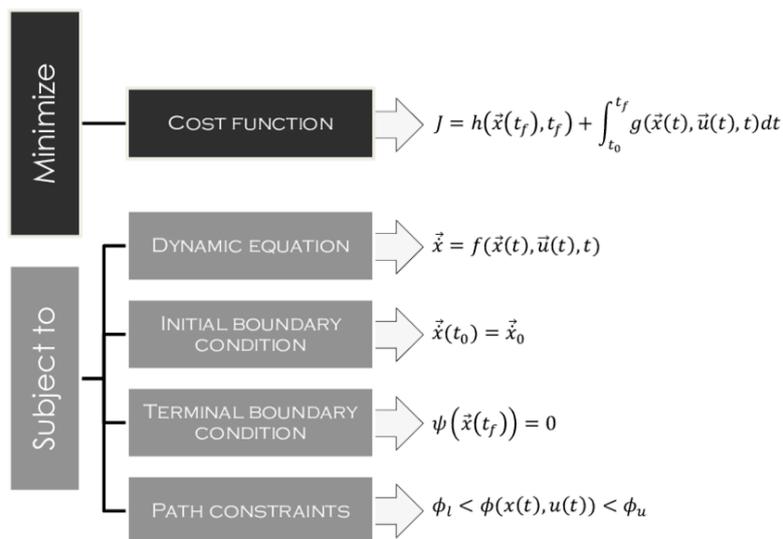


Figura 6.1. Schematizzazione del problema ai valori al contorno in analisi [29].

Innanzitutto è importante chiarire la differenza tra *ottimizzazione di traiettorie* e *controllo ottimale*, le quali vengono spesso considerate come dei sinonimi: nel primo caso gli input sono parametri statici ed è necessario trovarne il set che ottimizza la funzione obiettivo, scegliendo quindi il "percorso migliore". Si parla invece di controllo ottimale quando gli input sono delle funzioni.

Per quanto concerne i metodi risolutivi, esistono sostanzialmente due approcci: analitico e numerico; il primo ricerca la soluzione in forma chiusa ed è però di difficile applicazione per casi complessi in quanto la soluzione tipicamente non esiste, mentre il secondo passa attraverso un processo di discretizzazione del problema ed è a sua volta diviso in metodi diretti o indiretti.

Nel seguito verranno per prima cosa presentati i possibili approcci al problema in esame, seguiti poi dalla teoria del controllo ottimale e dei principi su cui si basa, i quali sono essenziali per i metodi indiretti. Infine, si passerà alla descrizione dettagliata delle tecniche utilizzate per la soluzione del problema.

6.1 Approcci risolutivi

Come già introdotto, la scelta dell'approccio di risoluzione è il primo passo verso la ricerca della soluzione stessa. Il problema in esame è infatti completamente definito, sia in termini di equazioni della dinamica che delle condizioni al contorno e funzione costo; occorre solamente attuare una scelta sul tipo di approccio da utilizzare per la ricerca della soluzione. Per le seguenti due sezioni si è fatto principalmente riferimento a [29] e [31].

6.1.1 Approcci analitici

Un approccio analitico presenta il principale vantaggio di fornire una soluzione esatta e priva di errori del problema, rendendola desiderabile vista anche la totale assenza di sforzo computazionale. Tuttavia, ciò accade raramente in quanto la soluzione esatta spesso non esiste tranne in casi molto semplici o altamente semplificati; un esempio è l'approssimazione di Edelbaum per bassa spinta già presentata nel [cap. 3](#): essa è una soluzione esatta ad un problema complesso, ma si fonda su ipotesi semplificative molto stringenti che ne limitano l'applicazione in quanto si discostano notevolmente dalla realtà se applicate per manovre lunghe.

6.1.2 Approcci numerici

Gli approcci numerici sono diventati ormai di larghissimo utilizzo nel campo dell'ottimizzazione, in quanto oramai la potenza computazionale installata nei calcolatori ordinari più recenti è sufficiente a risolvere anche casi piuttosto complessi. Essi presentano per natura degli errori di discretizzazione ma, data la loro buona versatilità,

sono di gran lunga preferibili, anche nel caso in esame. Essi si dividono poi in metodi diretti ed indiretti, i quali vengono ora confrontati e schematizzati in Fig. 6.2.

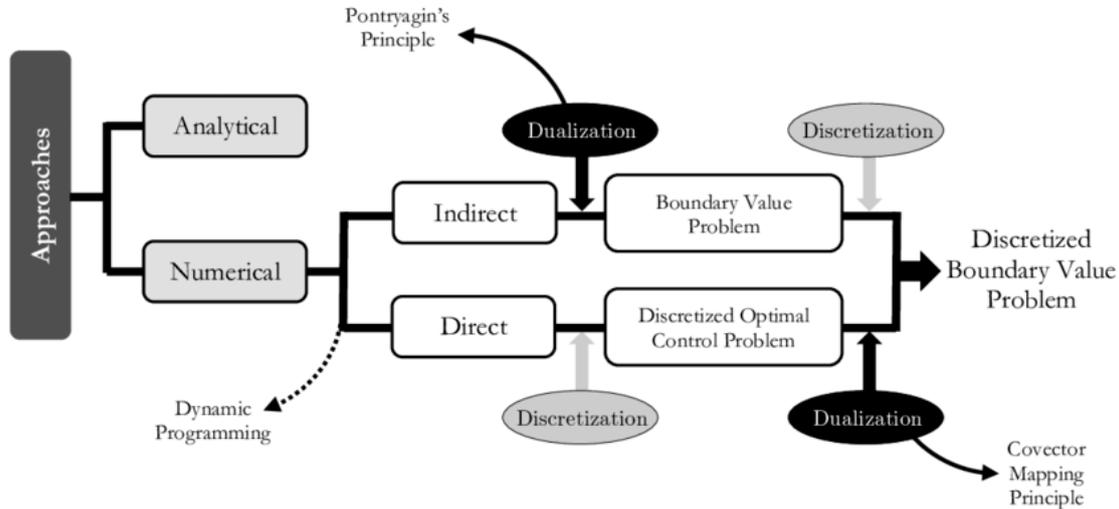


Figura 6.2. Principali differenze tra i diversi approcci risolutivi [29].

Metodi diretti

Un metodo numerico diretto applica una discretizzazione dei vettori di stato e dei controlli (o solo di quest'ultimo) ottenendo un problema ancora non lineare di ricerca dell'ottimo, necessitando quindi di una programmazione non lineare per la risoluzione. Ciò avviene attraverso la discretizzazione del dominio temporale del problema che viene diviso in un numero finito di istanti tra cui le equazioni di stato verranno integrate numericamente. Questo porta con sé la necessità di definire un numero molto elevato di vincoli di continuità di tipo non lineare che complicano il problema stesso.

I principali vantaggi di questa tecnica sono la sua relativa semplicità di applicazione e la presenza di un dominio di convergenza molto esteso, rendendoli capaci di produrre una soluzione nella maggior parte dei casi. Spesso però questa non è veramente ottimale e risulta molto approssimata, oltre a necessitare di un'elevata potenza computazionale per essere raggiunta visto l'oneroso numero di vincoli tra gli istanti temporali, rendendo questo metodo più lento nel raggiungimento della soluzione. Si può però pensare di ottenere una prima stima della soluzione con un metodo diretto sfruttandone l'alto dominio di convergenza, per poi passare ad una soluzione più precisa con metodi più raffinati ma con limitati domini di convergenza.

Un metodo molto comune è lo *shape-based method*, dove si discretizza solo il vettore di stato e si includono i controlli nella funzione obiettivo: variando i valori del

vettore di stato (ovvero la forma della traiettoria, da cui il nome), attraverso metodi basati sul gradiente si ottiene l'andamento dei controlli necessari per realizzarla.

Metodi indiretti

I metodi indiretti si basano invece su una filosofia completamente diversa, basata sul principio di dualità: si cerca di derivare analiticamente a partire dalle condizioni di ottimo un set di parametri ausiliari e privi di significato fisico, detti moltiplicatori di Lagrange, i quali sono connessi ad uno ad uno ai parametri reali. Il problema viene quindi riformulato, trasformandosi ancora una volta un sistema di equazioni differenziali non lineari con vincoli al contorno di tipo più esteso, ma che tiene in considerazione dei parametri direttamente collegati alla condizione di ottimo che permettono di ottenere una soluzione approssimata ma molto precisa. La teoria su cui si fondano questi metodi è quella del controllo ottimale che verrà presentata in seguito.

Appare chiaro che l'aggiunta di nuovi parametri complica il problema. Inoltre, è necessaria un'attenta analisi analitica per la scrittura delle condizioni di ottimo, da cui si derivano anche le equazioni per i moltiplicatori di Lagrange e le altre condizioni necessarie per la risoluzione. Infine, è di essenziale importanza la definizione della prima iterazione di tentativo, sia al contorno sia nei punti dei flyby intermedi, la quale sarà collegata ai suddetti moltiplicatori, i quali possiedono valori e ordini di grandezza totalmente sconosciuti a priori. Ciò rende questi metodi poco robusti e con uno scarsissimo dominio di convergenza.

6.2 Tecniche di risoluzione

Prima di procedere alla scelta del metodo effettivamente utilizzato per la risoluzione del problema, si presentano le tecniche tipiche utilizzate per l'applicazione dei metodi numerici ad un problema di ottimo.

6.2.1 Inclusioni differenziali

È una tecnica che è possibile applicare solo ai metodi diretti e si basa sull'applicazione di vincoli di disuguaglianza sulla derivata temporale del vettore di stato nei diversi istanti di tempo discreti. Queste sono ottenute sostituendo nell'equazione della dinamica i limiti inferiori e superiori del controllo. Se la condizione di disuguaglianza è soddisfatta, lo stato del sistema è fisicamente ottenibile con una spinta compresa nel range indicato. Questa tecnica elimina la dipendenza esplicita dai controlli, rendendo il problema di ottimo legato alla sola ricerca dei vettori di stato ammissibili. Lo svantaggio è però che il metodo è spesso numericamente instabile ed è problema-dipendente, inadatto quindi quando si analizza una vasta gamma di possibili traiettorie con diversi asteroidi.

6.2.2 Metodi di shooting

Sono delle tecniche utilizzabili sia per metodi diretti che indiretti e permettono di ottenere l'andamento delle variabili di stato a partire dalla conoscenza dei controlli ipotizzata come sommatoria di funzioni del tipo

$$\mathbf{u}(t) \approx \sum_{i=1}^m a_i \psi_i(t)$$

dove ψ_i sono funzioni note, ad esempio delle leggi di controllo standard, mentre i coefficienti a_i sono i parametri da ricercare per l'ottimizzazione.

Nella scrittura precedente si è fatto uso della tecnica di *single-shooting*, dove i controlli sono stati interpolati lungo tutto il dominio. Questa tecnica può essere estesa al *multiple-shooting*: si suddivide il problema in $M + 1$ sottointervalli dove si approssimano i controlli con la stessa formulazione precedente. Occorre però introdurre delle condizioni di continuità alle diverse interfacce

$$\mathbf{x}(t_{j-}) - \mathbf{x}(t_{j+}) = 0$$

le quali complicano il problema a causa dell'aggiunta della ricerca di queste radici. Inoltre, i parametri di ottimizzazione a_i nei vari sottointervalli sono tutte incognite da trovare, aumentando la dimensione del problema.

Per un metodo diretto *single-shooting* la procedura di risoluzione è piuttosto semplice da applicare: si fornisce in input una prima stima dei coefficienti a_i , si valuta il vettore \mathbf{u} e si integra l'equazione della dinamica tra t_0 e t_f partendo dalle condizioni al contorno (tipicamente quella iniziale t_0). Si calcola quindi l'errore sulla condizione di arrivo e, se non verificano entro una certa tolleranza i vincoli o la funzione costo non è minima, si modificano i parametri di ottimizzazione e si reitera fino a convergenza ottenendo in output i parametri stessi. Nel caso di metodo *multiple-shooting*, il procedimento è analogo ma suddiviso in diversi sottointervalli.

Appare chiaro che le equazioni della dinamica vengano solo integrate e non intese come una sorta di vincolo di percorso, aspetto che invece sarà essenziale nel seguito: questo implica che un errore di stima iniziale viene pesantemente amplificato dalla lunga integrazione temporale provocando un'alta instabilità numerica e un dominio di convergenza limitato. Il problema viene in parte mitigato se si utilizza il *multiple-shooting*, in quanto gli intervalli di integrazione sono più ristretti.

La tecnica, come detto prima, può essere utilizzata anche per un metodo indiretto, con la differenza che in questo caso il problema della dinamica è caratterizzato dal vettore complessivo

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix}$$

dove $\boldsymbol{\lambda}(t)$ sono i moltiplicatori di Lagrange associati alle variabili di stato, dette anche di *co-stato*. Per il caso di *multiple-shooting*, la condizioni di continuità prende

quindi la forma

$$\mathbf{y}(t_{j-}) - \mathbf{y}(t_{j+}) = 0$$

Il procedimento per ottenere la soluzione è analogo a quello visto precedentemente per i metodi diretti, con la differenza che ad ogni iterazione occorrerà valutare anche il valore delle condizioni al contorno incognite. Inoltre, anche in questo caso è necessario stimare anche i valori di primo tentativo delle variabili di co-stato, le quali come già detto in precedenza possono assumere valori totalmente imprevedibili, rendendo la tecnica poco robusta. Esistono alcune considerazioni che permettono di definire con certezza i valori dei suddetti moltiplicatori agli estremi, ma queste verranno presentate in seguito quando verrà introdotta la teoria del controllo ottimale.

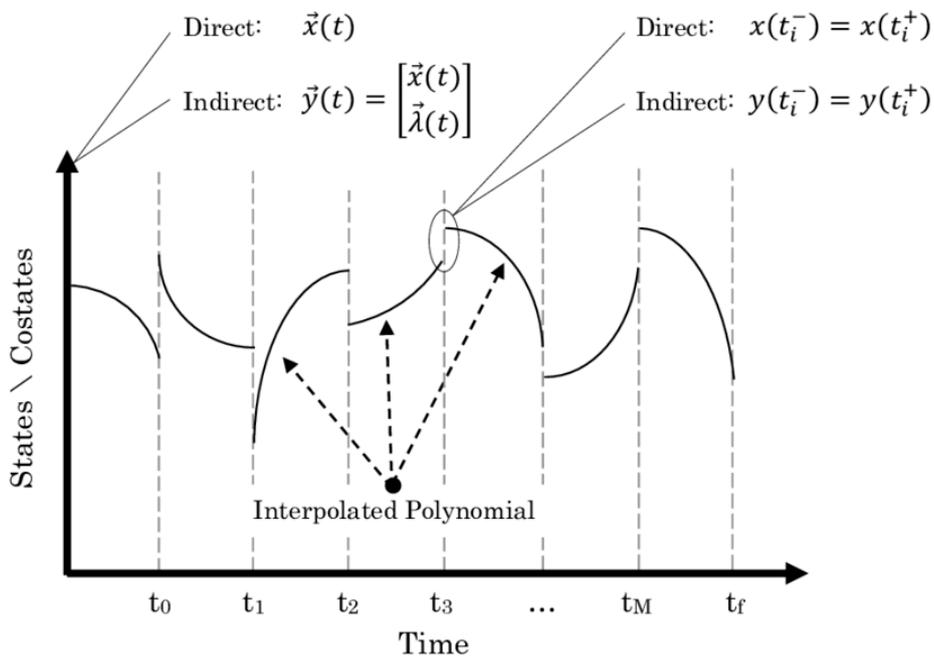


Figura 6.3. Tecnica di shooting per un caso diretto e uno indiretto [29].

6.2.3 Tecniche di collocazione

Anche questa tecnica è applicabile sia per metodi diretti che indiretti ma, rispetto alle tecniche di shooting, con questa si cerca di approssimare l'intera equazione della dinamica attraverso procedure di quadratura o di interpolazione. L'espressione trovata deve possedere agli estremi i valori del vettore di stato descritto dalle condizioni al bordo e deve verificarne le derivate prime; se ciò accade, vengono definiti altri nodi interni all'intervallo, detti *punti di collocazione*, dove viene imposta un'uguaglianza tra la funzione interpolante e l'equazione di stato e la si verifica,

reiterando il processo finché l'errore non sarà sufficientemente basso. Chiaramente, all'interfaccia tra i diversi sottointervalli comparirà anche qui una condizione di continuità del vettore di stato.

Di fatto quindi questa tecnica prevede la discretizzazione della traiettoria in piccoli segmenti dove i comandi sono circa uniformi e sottoposti a delle disuguaglianze che le vincolino. L'ottimo viene trovato imponendo la minimizzazione della spinta in quei tratti, mentre globalmente il parametro analizzato è la velocità caratteristica dello spacecraft nello stato finale della traiettoria.

Esistono diversi approcci possibili basati su questo metodo, ognuno con pregi e difetti, ma ciò esula dallo scopo della tesi.

6.3 Scelta del metodo risolutivo

Alla luce di quanto presentato fino ad ora, si può escludere con certezza l'utilizzo di un approccio analitico per la ricerca della soluzione in quanto essa non esiste. Occorrerà perciò optare per un **metodo numerico**.

Confrontando pregi e difetti dei metodi diretti ed indiretti, ci si può chiedere se sia preferibile una soluzione meno precisa (e potenzialmente non ottimale) tipica dei metodi diretti rispetto ad una soluzione con un'alta precisione ma difficile da ottenere a causa del piccolo dominio di convergenza, ovvero un metodo indiretto. Visto il limitato quantitativo di carburante e la spinta bassa del sistema propulsivo, si vuole ottenere una traiettoria la più corretta possibile per minimizzare le successive correzioni e ridurre al minimo l'utilizzo di propellente, pertanto appare chiaro che il **metodo indiretto** è preferibile. Proprio per questo, la sezione che segue presenterà la teoria del controllo ottimale su cui si basa il metodo scelto.

Per quanto concerne le tecniche, il metodo di collocazione presenta delle intrinseche complessità che poco si adattano al problema. Conviene perciò utilizzare una tecnica di **multiple-shooting**, dove le suddivisioni tra intervalli saranno i diversi flyby che la sonda compierà con gli asteroidi: questo permetterà di stimare facilmente le condizioni iniziali dei diversi archi in quanto note a partire dall'arco precedente. Inoltre, definendo previamente la struttura delle leggi di controllo la ricerca dei coefficienti a_i è di fatto una sorta di *tuning* del sistema.

6.4 Teoria del controllo ottimale

Alla luce delle scelte fatte, si può proseguire nella realizzazione di questo capitolo introducendo la teoria del controllo ottimale. Si ricorda che essa si basa, come tutti i metodi indiretti, sulla scrittura di incognite ausiliarie (detti *moltiplicatori di Lagrange* o *variabili di co-stato*) connesse sia alla condizione di ottimo che alle singole variabili fisiche del problema. Per la stesura di questa sezione si è fatto riferimento a [30], a cui si rimanda in caso si desideri approfondire la trattazione.

6.4.1 Vincoli di uguaglianza al bordo

Per comprendere al meglio i meccanismi della suddetta teoria, può essere utile presentare dapprima un caso semplice di problema di ottimizzazione con condizioni di uguaglianza al bordo che verrà successivamente arricchito di aspetti più complessi.

Si consideri il caso di un satellite percorrente una traiettoria monofase e non soggetta a vincoli di percorso dove occorre trovare il vettore dei controlli $\mathbf{u}(t)$ che minimizza una certa funzione obiettivo:

$$J = \varphi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

Il sistema è sempre soggetto alle equazioni della dinamica

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (6.1)$$

ad una condizione al contorno di uguaglianza

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), t_f) = 0 \quad (6.2)$$

mentre le condizioni al tempo iniziale fissato t_0 sono note $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ e il valore del tempo finale t_f è libero. Si può osservare come l'Eq. (6.1) possa essere interpretata come un vincolo di percorso mentre l'uguaglianza al tempo finale come un vincolo puntuale. È possibile definire una funzione obiettivo Lagrangiana aumentata, noto anche come funzionale Lagrangiano

$$\hat{J} := [\varphi + \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\chi}]_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}^T(t) (\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \dot{\mathbf{x}}) dt \quad (6.3)$$

dove si può notare che i moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\nu}$, noti come *costanti aggiunte* non dipendono dal tempo, mentre quelli connessi alle equazioni della dinamica $\boldsymbol{\lambda}(t)$ sì e sono noti col nome di *variabili aggiunte* o di *co-stato*. Se le condizioni al contorno e le equazioni di stato sono rispettate, risulta chiaro che $J = \hat{J}$. Per alleggerire la notazione, si definiscono il *Hamiltoniano*

$$H := \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

e la funzione ausiliaria

$$\Phi := \varphi + \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\chi}$$

permettendo, dopo aver effettuato un'integrazione per parti, di riscrivere l'Eq. (6.3) come segue:

$$\hat{J} = \Phi_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - [\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}(t) dt$$

Al fine di trovare l'ottimo del funzionale, occorre porre la prima variazione $\delta\hat{J} = 0$, da cui si ricavano le relazioni note come le *equazioni di Eulero – Lagrange* relative alle variabili aggiunte

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (6.4)$$

e quelle relative ai controlli

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \quad (6.5)$$

dove le derivazioni parziali sono considerate come un vettore colonna. Per completare il problema, sono necessarie delle equazioni aggiuntive dette di *trasversalità*

$$\lambda_{t_f} = \frac{\partial \Phi_{t_f}}{\partial \mathbf{x}}$$

il cui scopo è aggiungere dei vincoli ulteriori per le variabili non tempo – dipendenti. Occorre però definire un'ulteriore condizione poiché il tempo finale è libero, ovvero che

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial t_f} = 0$$

in quanto un'ulteriore variazione del tempo finale produrrebbe una riduzione del funzionale \hat{J} . Questa condizione porta alla definizione della seguente equazione aggiuntiva:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \right) \Big|_{t=t_f} = 0$$

Se invece, più in generale, si è in presenza di una funzione temporale che lega il vettore di stato finale al tempo finale $\mathbf{x}(t_f) = \boldsymbol{\psi}(t_f)$, la condizione di trasversalità assume la forma più generale

$$H(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f), t_f) = \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \dot{\boldsymbol{\psi}}(t_f)$$

Si può anche fissare il punto iniziale della traiettoria ma non il tempo di partenza, considerando quindi t_0 come un parametro di ottimizzazione. In questo caso si giunge ad una espressione del tipo:

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = 0$$

Risulta interessante notare che le equazioni dei controlli Eq. (6.5) sono formalmente indipendenti dalla ricerca dell'ottimo del funzionale aumentato \hat{J} ; in altre parole, l'andamento temporale del vettore dei controlli lungo la traiettoria è quello che massimizza (se si cercano i massimi di J) o minimizza (se si cercano i minimi) l'Hamiltoniano H . Questo non è altro che il *Principio di Pontryagin* [32]:

Principio di Pontryagin. Sia \mathcal{U} è l'insieme dei controlli ammissibili. Sia $\mathbf{u}^*(t) \in \mathcal{U}$ per $t \in [t_0, t_f]$ tale che la corrispondente traiettoria $\mathbf{x}^*(t)$ rispetti la condizione al contorno $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ (con \mathbf{x}_0 noto). Affinché $\mathbf{u}^*(t)$ e $\mathbf{x}^*(t)$ siano ottimali, allora dovrà esistere un vettore continuo non nullo $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$ associato a $\mathbf{u}^*(t)$ e $\mathbf{x}^*(t)$ tale che:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^* &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}^* &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \\ \mathbf{u}^* &= \arg \max_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\end{aligned}$$

ovvero che $\mathbf{u}^*(t)$ massimizza H .

Occorre prestare un'attenzione ulteriore quando il vettore dei controlli è limitato, ovvero quando è compreso tra un valore minimo ed un valore massimo ammissibile (come nel caso in esame, dove si ricorda che la spinta nominale a 1 au è pari ad 1 mN); si considera solo il caso di valore esplicito e costante, omettendo la situazione in cui il vincolo è a sua volta dipendente dal tempo o dal vettore di stato. Si hanno due possibilità:

- Se il valore del controllo ottimale ottenuto attraverso l'Eq. (6.5) ricade nel dominio dei controlli ammissibili, allora il vincolo non interviene e il valore trovato è quello ottimale.
- Viceversa, se il valore ottenuto non ricade nel dominio, allora il valore ottimale è quello che si ha ad uno dei due estremi del dominio di ammissibilità e il controllo si dice vincolato.

6.4.2 Vincoli di uguaglianza lungo il percorso

In un caso più generale compaiono dei vincoli algebrici di uguaglianza lungo il percorso

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = 0$$

oltre ai già citati vincoli al contorno di uguaglianza $\boldsymbol{\chi}$. Il trattamento dei vincoli di percorso nella risoluzione del problema dipende dal rango della matrice delle derivate parziali $\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{u}$:

- Se la matrice è di rango massimo, allora il procedimento visto in precedenza è ancora valido ma con un Hamiltoniano diverso

$$H := \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}$$

con $\boldsymbol{\mu}$ moltiplicatori di Lagrange della funzione vincolo di percorso. Questa diversa definizione modificherà a sua volta le equazioni dei controlli e delle variabili aggiunte.

- Se invece la matrice non è di rango massimo, allora si deriva il vincolo \mathbf{g} rispetto al tempo t definendo un nuovo vincolo \mathbf{g}' . Questo è matematicamente equivalente al vincolo originale a patto che quest'ultimo venga applicato in un punto della traiettoria. Si può quindi ridefinire l'Hamiltoniano con \mathbf{g}' al posto di \mathbf{g} . Se poi $\partial\mathbf{g}'/\partial\mathbf{u}$ non è di rango massimo si ripete il procedimento n volte finché $\partial\mathbf{g}^n/\partial\mathbf{u}$ non sarà di grado massimo. Questo metodo però rende il problema meno robusto agli errori numerici e non è sempre possibile applicarlo.

6.4.3 Archi singolari

Un aspetto importante affinché il problema sia effettivamente risolvibile è legato all'Eq. (6.5): infatti, essa ha soluzione unica solo se la matrice $\partial^2 H/\partial\mathbf{u}^2$ è non singolare, ovvero ha rango massimo. Se ciò non accade, il problema viene definito ad *arco singolare* e vengono applicate metodologie simili a quelle viste nella sezione precedente. Ciò accade ad esempio quando l'Hamiltoniano H è lineare rispetto ad \mathbf{u} , evento tipico nelle equazioni differenziali ordinarie prive di vincoli di percorso.

6.4.4 Estensione ai vincoli di disuguaglianza

Il caso più generale possibile a singolo arco presenta vincoli di disuguaglianza lungo il percorso del tipo:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \geq 0$$

Per questi problemi, occorre distinguere gli istanti temporali in cui la disuguaglianza è attiva ($\mathbf{g} \geq 0$) o quando è inattiva ($\mathbf{g} = 0$). Si suddivide quindi il dominio in archi dove i vincoli sono attivi (utilizzando l'Hamiltoniano modificato) o disattivi (trattati come il caso semplice iniziale). La difficoltà sta nel fatto che non è noto a priori quanti sono gli archi con vincoli attivi e dove compaiono i punti di giunzione. In essi, è probabile che sia il vettore dei controlli \mathbf{u} sia le variabili aggiunte $\boldsymbol{\lambda}$ siano discontinue, necessitando l'aggiunta di condizioni "di salto", ovvero delle condizioni al contorno imposte nei punti di giunzione.

6.4.5 Estensione ad una traiettoria divisa in sottointervalli

Si considera ora il caso di una traiettoria descritta dal set di equazioni della dinamica Eq. (6.1) e suddivisa in P sottointervalli, detti *archi*, all'interno dei quali le variabili sono continue. L'intervallo j -esimo inizia al tempo $t_{(j-1)_+}$ e si conclude al tempo t_{j_-} , dove i segni $+$ e $-$ indicano rispettivamente il valore assunto subito dopo e prima del punto in esame. In quei punti, il vettore di stato assume i valori $\mathbf{x}_{(j-1)_+}$ e \mathbf{x}_{j_-} rispettivamente. Questa formulazione permette di tenere in conto le eventuali discontinuità tipiche di una manovra impulsiva (massa e ΔV) o di un flyby prolungato (tempo), oltre a permettere di formulare in maniera differente il secondo termine dell'Eq. (6.1) nei diversi archi.

Vengono poi imposte delle condizioni al contorno di tipo misto, ovvero che coinvolgono sia gli estremi della traiettoria sia i punti di giunzione tra i diversi archi, i quali possono essere intesi come contorni interni. Esse sono in generale non lineari e nella forma

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}_{(j-1)_+}, \mathbf{x}_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-}) = 0 \quad j = 1, \dots, P$$

Possono esistere anche dei vincoli sui controlli, pertanto occorrerà prestare attenzione alla possibilità che il valore del controllo ottimale non ricada nel dominio di ammissibilità.

La funzione obiettivo complessiva prende quindi la forma

$$J = \varphi(\mathbf{x}_{(j-1)_+}, \mathbf{x}_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad j = 1, \dots, P$$

e il funzionale aumentato diventa

$$\hat{J} = \varphi + \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} (L + \boldsymbol{\lambda}^T(t) (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) dt \quad j = 1, \dots, P$$

che, dopo l'integrazione per parti, può essere riformulata come segue:

$$\begin{aligned} \hat{J} = & \varphi + \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j (\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}^T \mathbf{x}_{(j-1)_+} - \boldsymbol{\lambda}_{j_-}^T \mathbf{x}_{j_-}) + \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} (L + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}) dt \quad j = 1, \dots, P \end{aligned}$$

Risulta inoltre più conveniente definire l'Hamiltoniano come:

$$H = L + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}$$

Si può ora procedere alla differenziazione per ottenere la variazione prima del funzionale aumentato $\delta \hat{J}$:

$$\begin{aligned} \delta \hat{J} = & \left(-H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)_+}} \right) \delta t_{(j-1)_+} + \\ & + \left(H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_-}} \right) \delta t_{j_-} + \\ & + \left(\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\nu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)_+} + \\ & + \left(-\boldsymbol{\lambda}_{j_-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} + \boldsymbol{\nu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{j_-} + \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) dt \quad j = 1, \dots, P \end{aligned}$$

dove la notazione tra parentesi quadre rappresenta una matrice. Si noti che nell'integrale finale compaiono le equazioni Eq. (6.4) e Eq. (6.5), in accordo con quanto detto in precedenza.

Annullando poi i coefficienti degli altri quattro termini è possibile ottenere le condizioni al contorno aggiuntive per le variabili aggiunte:

$$-\lambda_{j_-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} + \boldsymbol{\nu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, P \quad (6.6)a$$

$$\lambda_{j_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j_+}} + \boldsymbol{\nu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j_+}} \right] = 0 \quad j = 0, \dots, P - 1 \quad (6.6)b$$

$$H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_-}} = 0 \quad j = 1, \dots, P \quad (6.6)c$$

$$-H_{j_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_+}} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_+}} = 0 \quad j = 0, \dots, P - 1 \quad (6.6)d$$

dove la notazione j_+ e j_- indica l'istante temporale prima e dopo il punto di giunzione j , in quanto occorre tenere in considerazione eventuali discontinuità.

Alcuni aspetti interessanti possono essere considerati dall'analisi di queste relazioni. Innanzitutto, considerando una variabile del vettore di stato x , le prime due equazioni Eq. (6.6)a e Eq. (6.6)b forniscono informazioni sulla relativa variabile aggiunta λ_x :

- Se la variabile di stato x è assegnata all'istante iniziale (in $\boldsymbol{\chi}$ compare $x_0 - a = 0$ con a noto), allora la variabile aggiunta λ_{x_0} è priva di condizioni e si dice "libera". L'analogo accade al tempo finale.
- Viceversa, se x_0 (o analogamente x_f) non compare nelle condizioni al contorno o nella funzione φ , allora la rispettiva variabile aggiunta in quel punto sarà $\lambda_{x_0} = 0$ (analogamente $\lambda_{x_f} = 0$).
- Se una variabile di stato è continua in una giunzione (in $\boldsymbol{\chi}$ compare $x_{j_+} = x_{j_-}$), allora sarà continua anche la variabile aggiunta in quella giunzione.
- Se invece la variabile di stato è continua in una giunzione ed assegnata, allora la variabile aggiunta è discontinua e i valori prima e dopo la giunzione sono slegati.

Analizzando invece l'Hamiltoniano, se esso non dipende esplicitamente dal tempo le condizioni Eq. (6.6)c e Eq. (6.6)d permettono di concludere che:

- Se il tempo iniziale t_0 non compare esplicitamente nè nelle condizioni al contorno nè nella funzione φ , allora l'Hamiltoniano è nullo all'istante iniziale $H_0 = 0$. Vale l'analogo per il tempo finale.

- Se il tempo intermedio t_j non compare esplicitamente nelle condizioni al contorno o in φ (vale solo la continuità del tempo $t_{j+} = t_{j-}$), allora l'Hamiltoniano è continuo in quel punto.
- Se il tempo intermedio t_j è invece esplicitato, l'Hamiltoniano presenta in quel punto una discontinuità "libera".

Rimaneggiando le equazioni precedenti in maniera da eliminare la dipendenza dalle costanti aggiunte ν , si ottengono delle condizioni al contorno di ottimo per l'arco j -esimo

$$\sigma(\mathbf{x}_{(j-1)_+}, \mathbf{x}_{j-}, \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}, \boldsymbol{\lambda}_{j-}, t_{(j-1)_+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, P$$

che, combinate con le condizioni Eq. (6.2), completano il sistema di equazioni differenziali fornito da Eq. (6.1) e Eq. (6.4), mentre il controllo si valuta con l'Eq. (6.5).

6.5 Algoritmi di risoluzione

Dopo aver chiarito gli aspetti essenziali della teoria del controllo ottimale, si può proseguire con la preparazione dell'algoritmo risolutivo per la soluzione attraverso un metodo indiretto con tecnica di shooting. Esso consiste nella realizzazione di un codice computazionale contenente una serie di istruzioni che permettono di compiere una serie sufficiente di iterazioni per giungere possibilmente a convergenza. La struttura degli algoritmi dipende fortemente dal metodo scelto, pertanto in questa sezione si è deciso di dare risalto alle metodologie per l'approccio selezionato senza dilungarsi eccessivamente. Ad ogni modo, per ulteriori approfondimenti si rimanda a [31].

Qualsiasi metodo numerico, indiretto o diretto che sia, deve contenere un sotto-algoritmo che si occupi della risoluzione delle equazioni differenziali e di integrazione numerica. Questo non è però sufficiente per trovare la soluzione e, a seconda del metodo, occorre un secondo sotto-algoritmo:

- Per i metodi indiretti è necessario anche un algoritmo di risoluzione di sistemi non lineari di equazioni algebriche originarie da vincoli di percorso o dalle equazioni aggiuntive.
- Per i metodi diretti si necessita invece di un algoritmo di risoluzione dei problemi di ottimizzazione non lineare connessi alla forma stessa del problema.

Per i motivi sopra citati, in questa trattazione ci si concentrerà solo sui due sotto-algoritmi necessari per un metodo indiretto.

6.5.1 Risoluzione di equazioni differenziali e integrazione

Si consideri un generico problema ai valori iniziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

e si consideri un intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ con $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k$ noto. Per valutare il valore \mathbf{x}_{k+1} si integra l'equazione precedente ottenendo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) dt$$

Per risolvere numericamente questo integrale esistono due metodi: *time-marching* e *collocation*. Per questo problema si è optato per il metodo di *time-marching* che pertanto sarà l'unico presentato. Si tenga presente inoltre che la scelta del metodo deve essere coerente all'interno del problema e deve essere la stessa anche per la valutazione degli integrali presenti, ad esempio, nel termine di Lagrange della funzione obiettivo.

Con il metodo di *time-marching* la soluzione ad un nodo k -esimo è valutata tenendo in considerazione le informazioni note a riguardo del nodo corrente e precedenti. Queste si dividono a loro volta tra metodi *multi-step* e *multi-stage*.

Metodi multi-step

Nei metodi multi-step, la valutazione al tempo k -esimo è ottenuta tenendo in conto le informazioni dei j nodi precedenti opportunamente pesati. I metodi più semplici a singolo step sono quelli di Eulero, rappresentati dalla relazione

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h_k [\theta \mathbf{f}_k + (1 - \theta) \mathbf{f}_{k+1}]$$

dove $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_k), t_k)$ e $\theta \in [0, 1]$; quando $\theta = 1$ si ottiene il metodo di *Eulero esplicito in avanti*, con $\theta = 0.5$ il *metodo di Crank-Nicolson* e con $\theta = 0$ *Eulero esplicito all'indietro*. Esistono poi dei metodi più complessi dove vengono tenuti in considerazione fino a $j > 1$ step precedenti, come ad esempio quello di Adams-Moulton, metodo implicito che è stato scelto per la realizzazione dell'algoritmo presente in questa tesi in una forma a passo e ordine variabile. Si riportano le espressioni fino al quarto ordine:

$$\begin{aligned} j = -1 : \quad & \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \cdot \mathbf{f}_{k+1} \quad (\text{Eulero implicito all'indietro}) \\ j = 0 : \quad & \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2} \cdot (\mathbf{f}_{k+1} + \mathbf{f}_k) \quad (\text{Regola dei trapezi}) \\ j = 1 : \quad & \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \cdot \left(\frac{5}{12} \mathbf{f}_{k+1} + \frac{2}{3} \mathbf{f}_k - \frac{1}{12} \mathbf{f}_{k-1} \right) \\ j = 2 : \quad & \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \cdot \left(\frac{3}{8} \mathbf{f}_{k+1} + \frac{19}{24} \mathbf{f}_k - \frac{5}{24} \mathbf{f}_{k-1} + \frac{1}{24} \mathbf{f}_{k-2} \right) \end{aligned}$$

Metodi multi-stage

Per questi metodi l'intervallo temporale $[t_k, t_{k+1}]$ viene suddiviso in M sottointervalli $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ dove

$$\tau_j = t_k + h_k \alpha_j \quad j = 1, \dots, M \quad h_k = t_{k+1} - t_k \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1$$

e i nodi τ_j sono detti *stage*. Si può quindi approssimare l'integrale attraverso formule di quadratura

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) dt \approx h_k \sum_{j=1}^M \beta_j \mathbf{f}(\mathbf{x}_j, \tau_j)$$

È però necessario conoscere il valore della funzione nei vari nodi interni, valutati con l'espressione

$$\mathbf{x}(\tau_j) = \mathbf{x}_k + h_k \sum_{n=1}^M \gamma_{jn} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \tau_n)$$

dove γ è un coefficiente legato al metodo scelto, tra i quali i più conosciuti sono quelli della famiglia dei metodi di Runge-Kutta.

6.5.2 Risoluzione di sistemi non lineari

È necessario costruire anche un risolutore di sistemi di equazioni non lineari algebriche tipiche delle condizioni di ottimo aggiuntive che si originano a partire dall'imposizione dell'ottimo. Il problema quindi si traduce in una ricerca delle radici di un generico sistema

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}) = 0$$

Esistono diversi metodi molto semplici, come quello di bisezione o delle secanti, ma questi sono applicabili solo nei casi monodimensionali. Si ricorre pertanto alla famiglia dei metodi di Newton: a partire da una stima iniziale della radice \mathbf{z}^0 , iterativamente la soluzione viene ricercata attraverso lo schema risolutivo

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k - r \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{z}} \right]_{\mathbf{z}^k}^{-1} \mathbf{a}(\mathbf{z}^k) = \mathbf{z}^k + r \mathbf{p}^k(\mathbf{z}^k)$$

fino a quando l'errore relativo non soddisfa una certa tolleranza. Nell'espressione precedente, il parametro r è detto *fattore di rilassamento* necessario a "pesare" il contributo correttivo del vettore di puntamento $\mathbf{p}^k(\mathbf{z}^k)$. Nel metodo di Newton originario $r = 1$ e il termine di puntamento è di fatto l'espansione in serie di Taylor arrestata al prim'ordine. Per migliorare la stabilità del metodo si impongono valori piccoli di r con l'obiettivo di spostarsi lentamente nell'intorno della prima stima ed evitare instabilità numerica: il codice giungerà a convergenza più lentamente, ma si riduce il rischio di divergenza visto il già ristretto dominio di convergenza del metodo

di Newton. In questo lavoro di tesi, si è optato per $r = 0.01$, straordinariamente $r = 0.02$.

Si osservi che il metodo è fortemente dipendente dalla stima iniziale e dalla non-singularità della matrice delle derivate parziali: nel caso di stima iniziale lontana dalla radice reale, è possibile che il metodo non converga, o converga ad una soluzione non ottimale, mentre con la matrice singolare il metodo non funziona. Esistono tecniche che permettono di evitare questi casi particolari ma la loro trattazione esula dallo scopo della tesi.

6.6 Presentazione del problema in esame

Tutti gli strumenti sono ora pronti per la formulazione del caso in esame in questa tesi. Si ricorda che si è optato per un metodo indiretto con tecniche di shooting basate sulla teoria del controllo ottimale con una funzione costo $J = m_f$, piuttosto semplice da trattare; per l'integrazione si farà uso del metodo di Adams – Moulton a passo e ordine variabile, mentre per i sistemi di equazioni non lineari si fa uso di un metodo della famiglia di Newton con $r = 0.01$.

Il problema in esame presenta le seguenti particolarità:

- L'intervallo di integrazione è suddiviso in sottointervalli, i quali hanno come estremi i diversi flyby.
- In ogni sottointervallo le equazioni differenziali possono assumere un'espressione diversa in base alla convenienza.
- La durata dei suddetti intervalli è in generale non nota a priori.
- Le condizioni al contorno sono miste, ovvero coinvolgono sia gli estremi interni sia quelli esterni.
- Le variabili possono essere discontinue all'interfaccia tra i contorni interni, con valore incognito dopo il flyby.

Tra queste, la non conoscenza della durata dei diversi archi è il primo problema da risolvere per poter attuare correttamente l'integrazione. A tal proposito, risulta conveniente introdurre una variabile ε al posto della variabile indipendente tempo durante le integrazioni. Nel generico arco j , essa è definita come:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j}$$

dove τ_j è la durata incognita dell'intervallo. In questo modo, gli estremi di integrazione sono ora dei numeri interi diversi per i vari archi: ad esempio, nell'arco $j = 2$ si ha che $1 \leq \varepsilon \leq 2$.

Come si era osservato in precedenza, per una risoluzione con metodo indiretto il vettore di stato e co-stato diventa ora

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix}$$

E il sistema di equazioni differenziali che regola il problema assume la forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}, t)$$

Si deve però tenere in considerazione la presenza di alcuni parametri incogniti ma costanti, come ad esempio la già citata durata degli intervalli, pertanto è più conveniente riscrivere il problema introducendo il vettore

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

dove \mathbf{c} è il vettore dei parametri costanti. Si può quindi introdurre il sistema di equazioni differenziali finale

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \varepsilon) \tag{6.7}$$

dove si può facilmente osservare che valgono le seguenti relazioni

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{d\mathbf{y}}{dt} \qquad \frac{d\mathbf{c}}{d\varepsilon} = 0$$

Si possono poi introdurre le condizioni al contorno nella forma generale

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{s}) = 0$$

dove \mathbf{s} è un vettore contenente i valori assunti dalle diverse variabili ai diversi contorni esterni o interni $\varepsilon = 0, 1, \dots, n$ e i parametri costanti incogniti:

$$\mathbf{s} = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \mathbf{c})$$

Alcuni valori di s sono incogniti e la risoluzione del problema sta proprio nella ricerca di questi valori al fine di rispettare le equazioni differenziali sopra introdotte, i vincoli al bordo e le condizioni di ottimo. Questo avviene con un processo iterativo a partire da un primo valore di tentativo \mathbf{p}_1 . In un'ottica più generale, si ipotizza che nessun valore iniziale sia noto; alla r -esima iterazione si integrano l'Eq. (6.7) lungo tutta la traiettoria (tenendo conto di eventuali discontinuità) fissando i valori iniziali a partire dall'iterazione precedente, ovvero

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{p}^r$$

Al termine dell'integrazione, si determina il valore delle variabili di stato (e co-stato) nei diversi contorni Ψ^r e si calcola l'errore rispetto alle condizioni al contorno $\Psi(\mathbf{s})$. Se questo è inferiore ad un limite imposto (si è optato per un errore massimo $E_{max} = \max|\Psi^r - \Psi| \leq 10^{-7}$) si può concludere che si è raggiunta la convergenza; se ciò non avviene, si modifica il valore iniziale di una variazione $\Delta\mathbf{p}$.

Si consideri una generica variazione $\Delta\mathbf{p}$: essa produce una variazione dei valori alle condizioni al contorno (troncato al prim'ordine) di

$$\Delta\Psi = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}} \right] \Delta\mathbf{p}$$

Poiché l'obiettivo è annullare l'errore, ovvero $\Delta\Psi = -\Psi^r$, ad ogni nuova iterazione $r + 1$ i valori iniziali verranno corretti di

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}^{r+1} - \mathbf{p}^r = - \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}} \right]^{-1} \Psi^r$$

finché l'errore non sarà inferiore alla tolleranza richiesta. Occorre però calcolare la matrice delle derivate parziali appena introdotta; ciò è possibile osservando che

$$\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{s}} \right] \left[\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\mathbf{p}} \right]$$

dove il primo termine è ottenuto derivando le condizioni al contorno imposte, mentre il secondo termine contiene le derivate delle condizioni al contorno rispetto ai valori iniziali, ovvero i valori assunti ai contorni ($\varepsilon = 0, 1, \dots, n$) dalla matrice

$$\left[\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\mathbf{p}} \right] = [\mathbf{g}(\varepsilon)]$$

Questa è ottenuta a partire dalla derivazione del sistema di equazioni differenziali Eq. (6.7) rispetto ai valori iniziali della iterazione r -esima

$$\left[\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} \right) \right] = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\mathbf{p}} \right] = \left[\frac{d\mathbf{g}}{d\varepsilon} \right]$$

che viene infine integrata rispetto alla variabile ε . Esplicitando la matrice Jacobiana del sistema principale, si ottiene che

$$\left[\frac{d\mathbf{g}}{d\varepsilon} \right] = \left[\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{z}} \right] \left[\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{z}} \right] [\mathbf{g}]$$

Attraverso questa formulazione si possono utilizzare le proprietà di simmetria di alcuni termini della matrice Jacobiana. Inoltre, si può osservare che ad ogni iterazione r -esima, poiché si fissa $\mathbf{z}(0) = \mathbf{p}^r$, i valori iniziali ad ogni iterazione sono

$$[\mathbf{g}(0)] = \left[\frac{\partial\mathbf{z}(0)}{\partial\mathbf{p}^r} \right] = [\mathbf{I}]$$

ovvero la matrice identità.

Esprimendo inoltre la matrice \mathbf{g} in questo modo non si incorre nel problema di derivazione rispetto ad ε che si ha in presenza di discontinuità delle variabili in un certo punto di raccordo i ; questo permette di ottenere i valori di \mathbf{z} e $[\mathbf{g}]$ dopo la discontinuità attraverso la conoscenza di una relazione \mathbf{h} che le lega:

$$\mathbf{z}_{i_+} = \mathbf{h}(\mathbf{z}_{i_-}) \quad [\mathbf{g}_{i_+}] = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{z}} \right] [\mathbf{g}_{i_-}]$$

permettendo anche di definire il vettore \mathbf{s} con i soli valori prima delle discontinuità in quanto quelli dopo saranno trovati grazie ad \mathbf{h} .

Si può in realtà trovare il valore di $\Delta \mathbf{p}$ attraverso una valutazione numerica della matrice $[\partial \Psi / \partial \mathbf{p}]$: la riga j viene trovata variando la riga stessa di un valore Δp_j piccolo (e fissando tutti gli altri) per poi integrare l'Eq. (6.7), valutare le nuove condizioni al contorno e calcolare $\Delta \Psi^T / \Delta p_j$. Questa procedura permette spesso una soluzione più rapida, ma è meno precisa rispetto al metodo precedente rendendo l'algoritmo più instabile vista l'elevata sensibilità.

In maniera simile si può valutare la matrice Jacobiana $[\partial \Psi / \partial \mathbf{s}]$, ma anche in questo caso l'approccio analitico è più preciso. Si è comunque inserito il metodo numerico di valutazione per poterli confrontare e convalidare i valori trovati analiticamente.

La linearizzazione introdotta per il calcolo della correzione $\Delta \mathbf{p}$ induce errori che possono provocare la non convergenza del metodo; pertanto sono stati introdotti alcuni accorgimenti per migliorarla:

- Viene introdotto un coefficiente K_1 per ridurre il peso della correzione $\Delta \mathbf{p}$ ed allontanarsi meno dalla stima precedente. Si ha quindi che

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1 \Delta \mathbf{p}$$

con $K_1 = 0.1 \div 1$ da prove empiriche su casi di test.

- Al termine di ogni iterazione si confronta l'errore sulle condizioni al contorno E_{max}^{r+1} con quello all'iterazione precedente. Se $E_{max}^{r+1} \leq K_2 E_{max}^r$, allora si procede ad una nuova iterazione. Il valore del coefficiente K_2 deve essere maggiore di 1 in quanto nelle prime iterazioni è facile che avvengano oscillazioni che fanno crescere l'errore; si è osservato che con $K = 2 \div 3$ si ottengono buoni risultati.
- Se invece la condizione non è rispettata, si esegue una nuova iterazione con la correzione $\Delta \mathbf{p}$ dimezzata, ripetendo fino ad un massimo di cinque volte questo processo. Se la disuguaglianza continua a non essere rispettata, il processo viene quindi arrestato segnalando che non si è giunti a convergenza.

Il problema è infine del tutto definito ed è quindi possibile procedere alla fase più attiva del lavoro, ovvero la ricerca delle soluzioni.

Capitolo 7

Presentazione degli asteroidi candidati per rendezvous finale

Richiamando le caratteristiche presentate nel [cap. 2](#), la missione prevede due flyby con due diversi asteroidi Near-Earth seguiti da un rendezvous finale. Al fine di realizzare il rendezvous, occorre che l'ultimo asteroide possieda una velocità relativa rispetto al satellite la più bassa possibile viste le limitate quantità di propellente a disposizione e i bassi livelli di spinta ottenibili con la propulsione elettrica. In questa sezione verrà presentato innanzitutto un piccolo algoritmo di scrematura degli asteroidi per selezionare quelli potenzialmente raggiungibili; a seguire, verranno introdotti gli asteroidi candidati per il rendezvous finale, sia in termini di caratteristiche fisiche sia di traiettoria.

7.1 Algoritmo di selezione preliminare

Occorre dotarsi di un primo strumento di scrematura degli asteroidi: è infatti facilmente reperibile l'elenco aggiornato dei *Small-Bodies*, sia numbered che unnumbered, in un documento ASCII contenente i loro parametri orbitali riferiti ad un sistema eliocentrico-eclittico J2000 [33]. In due file distinti se ne annoverano circa un milione, ma di questi la maggior parte sono asteroidi della fascia principale, pertanto non interessanti allo scopo della tesi.

Vista la struttura dei file ASCII in dotazione, viene naturale pensare di propagare l'orbita kepleriana dei corpi celesti ed analizzare se, in un futuro compatibile con la missione, questi incontrino l'orbita terrestre. Viene quindi presentato il processo logico per la selezione preliminare, per ulteriori dettagli si veda [1, Capitolo 4]. Nel seguito, si ipotizzerà un utilizzo del modello a due corpi ristretto e che i parametri

orbitali siano costanti ed esatti; ciò non è chiaramente vero, ma poiché si tratta di una prima scrematura l'ipotesi è del tutto accettabile e plausibile.

A partire dai parametri orbitali dei corpi, li si vuole differenziare in due macro-categorie di possibili target:

1. Asteroidi con inclinazione inferiore a 5° e con perielio o afelio nei pressi della Terra, ovvero compreso nel range 0.9 – 1.1 au.
2. Asteroidi anche ad alta inclinazione con uno dei due nodi sufficientemente prossimo alla Terra, ovvero sempre nel range 0.9 – 1.1 au.

Per realizzare ciò, per ogni corpo si calcolano i raggi ai nodi e agli apsi: se almeno uno di questi valori rispetta le condizioni sopra elencate, allora gli asteroidi vengono inseriti in una prima lista di possibili candidati.

Parallelamente, utilizzando i parametri orbitali terrestri, è possibile valutare una serie di posizioni che la Terra occuperà in una finestra di possibili incontri a partire da metà del 2025 fino alla fine del 2029.

A questo punto, per gli asteroidi della prima classe, si valuta in che epoca si troveranno agli apsi compatibili. Se l'epoca rientra nell'intervallo sopra citato, si valuta la differenza tra l'anomalia vera della Terra in quell'epoca e quella dell'asteroide: se questa è sufficientemente piccola, dell'ordine di $\pm 10^\circ$, allora l'asteroide viene inserito nella lista degli asteroidi target.

Per gli asteroidi della seconda classe si valuta l'epoca del passaggio ai nodi e, in maniera simile a quanto fatto con i NEAs della prima classe, si valuta se quest'epoca sia compatibile con un eventuale flyby nell'intervallo di tempo scelto. In caso affermativo, analogamente, si valuta la differenza di anomalia vera con la Terra e si scelgono solamente gli asteroidi con sfasamento di $\pm 10^\circ$.

Si possono fare alcune considerazioni sui risultati ottenuti con questo metodo: esso fornisce solamente una possibile posizione di incontro, ma potrebbero essercene di migliori dal punto di vista dei consumi che sulla carta però sembrerebbero non ideali. Inoltre, non si tiene in conto che, in realtà, è possibile raggiungere asteroidi con sfasamenti maggiori, in particolare se accompagnati da flyby intermedi anch'essi a sfasamenti elevati.

7.2 Asteroidi con possibili rendezvous

Dopo aver ottenuto una lista dei possibili target, sono stati realizzati due documenti contenenti gli incontri con i suddetti: `dep2025.xlsx` e `dep2027.xlsx`. Il primo propone quelli tra metà 2025 fino a fine 2028, il secondo da fine 2027 a fine 2029. Grazie a questi è possibile ricercare asteroidi che presentino una velocità relativa V_{rel} in uno dei possibili incontri sufficientemente bassa, indicativamente inferiore a 2 km/s. Inoltre, per come è strutturata la missione, la partenza avverrà non prima

dell'inizio del 2025, pertanto il rendezvous dovrà avvenire non prima dell'inizio del 2027.

Queste limitazioni restringono il numero di asteroidi candidati a 5, per un totale di sei possibili incontri che si possono osservare in [Tab. 7.1](#).

Tabella 7.1. Possibili incontri con asteroidi dotati di bassa velocità relativa.

Incontro [dd/mm/yyyy]	Asteroide	Raggio [au]	Sfasamento $\Delta\theta$ [deg]	V_{rel} [km/s]	Mag. H
12/04/2027	2012 TF79	1.051	-2.2	1.066	27.4
25/04/2027	2015 JD3	1.063	9.3	1.608	25.5
27/04/2027	2019 UO1	1.073	2.12	1.508	25.0
11/11/2027	2015 JD3	1.054	-5.8	1.744	25.5
03/04/2028	2000 SG344	0.967	-1.71	1.631	24.7
31/05/2028	2015 MC54	1.041	4.46	1.779	26.8

Innanzitutto tutti i possibili incontri avvengono con asteroidi unnumbered e 2015 JD3 compare per due volte in quanto passerà in due diverse epoche in prossimità della Terra. Tra gli altri asteroidi, 2012 TF79 è quello con V_{rel} minore, mentre 2000 SG344 risulta quello con magnitudine maggiore, sebbene la sua dimensione stimata sia di 37 m. Nelle sezioni successive verranno presentati dettagli ulteriori a riguardo di questi ultimi due che, come si vedrà a breve, saranno gli unici che si è in grado di raggiungere con costi contenuti.

7.3 Asteroidi con traiettorie di riferimento realizzabili

Noti i possibili target per il rendezvous, sono state ricercate alcune soluzioni di riferimento in cui venivano inseriti ad uno ad uno gli asteroidi citati in [Tab. 7.1](#) al fine di ottenere una possibile traiettoria con il solo rendezvous finale. Sfortunatamente, solo con due di essi si sono ottenuti dei risultati soddisfacenti: 2012 TF79 e 2000 SG344; con gli altri corpi o non si era in grado di giungere a convergenza o la traiettoria trovata risultava eccessivamente dispendiosa, oltre il limite consentito di 1.5 km/s.

Nella [Tab. 7.2](#) è possibile osservare le 4 traiettorie ottenute con solo rendezvous: tutte presentano durate inferiori ai 2 anni come da requisito, sebbene sia un valore di importanza secondaria per ora in quanto potrebbe variare di molto per effetto dei flyby intermedi. Di maggiore rilevanza sono invece gli eccellenti consumi; questo permette una buona libertà nella selezione dei target intermedi, in quanto si ha a disposizione un budget di propellente maggiore. In particolare, la traiettoria 20 è

quella con consumi minori, mentre la traiettoria 30 con i più elevati, ma comunque di poco maggiore a 1 km/s.

Le traiettorie appena presentate saranno di essenziale importanza per le analisi successive a flyby multipli presentate nei prossimi capitoli, in quanto saranno di riferimento per considerarne vantaggi e svantaggi, oltre che per visualizzare eventuali pattern ricorrenti utilizzabili in futuro per ulteriori analisi e per velocizzare il processo di scelta degli asteroidi. Va inoltre osservato che la manovra di rendezvous risulta molto dispendiosa: i consumi per raggiungere l'asteroide in questione ed avere la sua stessa orbita e velocità sono complessivamente circa i 2/3 del propellente massimo disponibile. Ciò non deve però sorprendere, in quanto è necessario spingere molto per riuscire ad annullare la velocità relativa e nel frattempo spostarsi nello spazio. Ad ogni modo, il margine per l'inserimento di due flyby aggiuntivi è più che sufficiente.

Tabella 7.2. Traiettorie di riferimento con 2012 TF79 e 2000 SG344.

	Traiettoria 10	Traiettoria 20	Traiettoria 30	Traiettoria 40
Asteroide	2000 SG344	2000 SG344	2012 TF79	2012 TF79
Durata [years]	1.88	1.91	1.91	1.91
Data partenza	10/12/2025	08/11/2027	19/06/2025	04/02/2026
Data arrivo	28/10/2027	05/10/2029	17/05/2027	03/01/2028
m_f/m_i ¹	0.71553	0.72094	0.71299	0.71717
ΔV [km/s]	0.96881	0.81373	1.04209	0.92169

7.3.1 Panoramica su 2012 TF79 e 2000 SG344

Risulta opportuno fornire una breve presentazione degli asteroidi candidati per il rendezvous finale, sia in termini di parametri orbitali sia in termine di caratteristiche fisiche.

Innanzitutto è opportuno specificare che 2000 SG344 è stato per molto tempo considerato un PHA con probabilità di impatto tra le più elevate, salvo poi venir rimosso dall'elenco attraverso studi ulteriori della sua orbita e dimensione. In [Tab. 7.3](#) si è deciso di non presentare l'incertezza sui parametri orbitali dei due asteroidi per non appesantirla, ma si può aggiungere che essi siano comunque piuttosto precisi, nel caso peggiore dell'ordine del millesimo di grado. 2012 TF79 possiede un'orbita totalmente esterna a quella terrestre e non la intersezione mai, mentre 2000 SG344 presenta due incroci. Viene inoltre fatto presente che la soluzione dell'orbita ottenuta

¹Per come è strutturato l'output del codice di calcolo, i valori del rapporto delle masse vanno riscalati rispetto al valore 0.75, ovvero un consumo nullo equivale a $m_f/m_i = 0.75$.

per 2000 SG344 risale al 2017, pertanto i parametri presenti nei file utilizzati per l'esecuzione del codice sono aggiornati; ciò non è invece vero per 2012 TF79, la cui orbita è stata rivalutata a Gennaio 2021. Questo non deve però preoccupare, in quanto è vero che le traiettorie ottenute conterranno un intrinseco errore, ma visti i margini di propellente sono del tutto correggibili.

Per quanto riguarda le dimensioni, 2000 SG344 ha un diametro stimato intorno ai 37 m, mentre 2012 TF79 di circa 10 m, ben 4 volte più piccolo ma comunque di dimensioni sufficienti a provocare danni locali in caso di impatto, sebbene ad oggi sia del tutto improbabile.

Tabella 7.3. Confronto tra 2012 TF79 e 2000 SG344 (aggiornato al 6 Marzo 2021) [Credits to NASA/JPL-CalTech].

	2000 SG344	2012 TF79	
Categoria	Aten	Apollo	
PHA	No	No	
a	0.97742	1.04982	au
e	0.06693	0.03819	–
i	0.11224	1.00547	deg
ω	275.38534	265.68097	deg
Ω	191.89193	199.87616	deg
M	239.64879	135.43781	deg
q	0.91200	1.00973	au
Q	1.04284	1.08992	au
Periodo	352.95602	392.89037	d
	0.97	1.08	years
Velocità angolare media n	1.01996	0.91629	deg/d
Magnitudine assoluta H	24.7	27.39	–

7.4 Considerazioni aggiuntive sugli asteroidi candidati

È possibile osservare un interessante aspetto analizzando la [Tab. 7.2](#): le traiettorie di riferimento trovate non sempre rispecchiano i possibili incontri presentati nella [Tab. 7.1](#). Questo accade per diversi motivi:

1. L'incontro avverrebbe in un tempo sfavorevole per eventuali altri flyby precedenti.

2. Possono esistere combinazioni maggiormente favorevoli con manovre a prima vista non ottimali e fuori dal piano dell'eclittica.
3. L'asteroide si trova in un'orbita favorevole per altri rendezvous in tempi diversi.

Questi aspetti mettono in luce che il metodo utilizzato per la realizzazione del documento `dep2025.xlsx` è sicuramente efficace per permettere una scrematura iniziale, permettendo all'utente di fare unicamente riferimento ai possibili incontri con gli asteroidi, ma come si è già detto non è in grado di presentare nel complesso tutte le possibili opzioni disponibili. A titolo di esempio si considerino le combinazioni basate sulle traiettorie 10 e 40 che si vedranno nel [cap. 8](#): esse presentano non solo un rendezvous finale in una data non ipotizzata nel documento `dep2025.xlsx`, ma anche uno sfasamento finale ben al di fuori del limite imposto in fase di scrematura, pur essendo traiettorie molto promettenti.

Esiste poi un aspetto che, almeno in prima approssimazione, accomuna tutti gli asteroidi candidati presenti in [Tab. 7.1](#): la loro orbita. Essi presentano infatti dei parametri orbitali relativamente simili tra loro, e a loro volta simili a quelli della Terra, spiegando il perché essi siano coloro che possiedono velocità relativa più bassa. Si può quindi cercare di delineare quali siano gli aspetti essenziali affinché un asteroide sia un buon candidato.

Per prima cosa, è chiaro che il satellite possiede una velocità rispetto al Sole che non si discosta molto da quella della Terra. Da richiesta infatti il ΔV complessivo non deve superare 1.5 km/s e alla partenza il ΔV rispetto alla Terra è ipotizzato nullo. Nell'ipotesi mai verificata che le spinte realizzate dal satellite avvengano sempre tangenziali all'orbita e nello stesso verso, ciò provocherebbe una variazione del $\pm 5\%$ rispetto alla velocità della Terra (che, si ricorda, essere in media di 29.78 km/s). Per questo motivo, risulta di rilevanza trascurabile l'effetto delle spinte sulle analisi che seguono e si può considerare la velocità del satellite circa uguale a quella della Terra.

A questo punto, si possono realizzare alcune semplici considerazioni:

- Asteroide con semiasse minore rispetto a quello terrestre: tramite semplici considerazioni a partire dalla conservazione dell'energia lungo l'orbita, appare chiaro che la sua velocità inerziale quando si trova nei pressi di 1 au risulta minore di quella terrestre.

$$-\frac{\mu}{2a_{ast}} = -\frac{\mu}{r[\approx 1 \text{ au}]} + \frac{V^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2 \left(\frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{2a_{ast}} \right)}$$

Infatti, il secondo termine all'interno della radice risulta minore di quello della Terra, dimostrando che l'asteroide sarà più lento e pertanto insorgerà la presenza di un ΔV tra l'asteroide e il satellite.

- Asteroide con semiasse maggiore rispetto a quello terrestre: il discorso è del tutto analogo al caso precedente, ma con il risultato opposto, ovvero velocità maggiore del corpo celeste rispetto al satellite.

- Asteroide con eccentricità maggiore rispetto a quella terrestre: poiché la velocità è una grandezza vettoriale, occorre tenere in conto anche della direzione di essa, sempre tangente alla traiettoria; pertanto, al momento dell'incontro essa possiederà un angolo non nullo rispetto a quella terrestre, inducendo di conseguenza una velocità relativa. Un caso particolare è quello in cui l'asteroide venga incontrato al suo perielio: questo è infatti l'unico caso in cui, anche con eccentricità elevate, sarebbe possibile avere una velocità relativa bassa.
- Asteroide con inclinazione maggiore rispetto a quella terrestre: in maniera del tutto analoga all'eccentricità, compare un angolo non nullo che induce una velocità relativa.

Chiaramente, queste condizioni appena riportate possono essere compresenti per un determinato asteroide. Si è quindi osservato che la condizione ideale è che esso abbia parametri simili a quelli terrestri al fine di minimizzare la velocità relativa permettendo un rendezvous poco dispendioso.

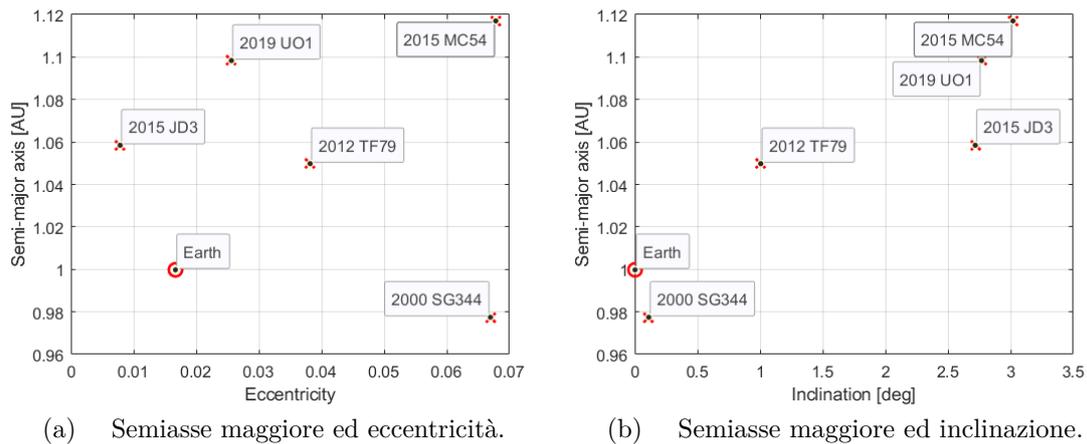


Figura 7.1. Parametri orbitali degli asteroidi candidati.

Osservando la Fig. 7.1, appare evidente che i tre NEAs scartati presentano un'inclinazione piuttosto proibitiva. Da semplici considerazioni geometriche, ipotizzando che satellite e asteroide possiedano la stessa velocità in modulo, è possibile ricavare una relazione per il ΔV :

$$\Delta V = 2 \cdot |V| \cdot \sin \Delta i$$

Per avere una stima generale, se assumiamo che il modulo della velocità sia quello della Terra e $\Delta i = 2.5^\circ$ si ottiene un valore di ΔV di circa 2.6 km/s, totalmente non compatibile con la missione. 2015 MC54 presenta poi sia elevata eccentricità che semiasse maggiore, rendendolo chiaramente meno adatto. 2019 UO1 e 2015 JD3

compensano l'eccessiva inclinazione con una eccentricità simile a quella terrestre, ma nella pratica rimangono difficili da raggiungere, per lo meno nella finestra di lancio scelta. 2000 SG344 presenta un'inclinazione ed un semiasse maggiore compatibili con quelli terrestri, compensando così l'elevata eccentricità e rendendolo un candidato interessante. Infine, 2012 TF79 presenta parametri nella media, senza eccellere in nessuno di essi, ma sufficientemente simili da permettere di realizzare un rendezvous a costi contenuti.

Risultano quindi confermati i criteri con cui un asteroide potrebbe risultare più o meno idoneo per una manovra di rendezvous. Per i motivi sopra citati, si potrebbero eseguire ulteriori analisi con asteroidi presenti nel documento e non, in quanto è probabile che esistano altri NEO in grado di permettere la realizzazione di rendezvous con bassi consumi.

7.5 Procedimento per la ricerca di soluzioni

Nei capitoli successivi verranno mostrate ed analizzate le migliori traiettorie ottenute, ma occorre prima presentare il processo logico utilizzato per la scelta degli asteroidi intermedi, il quale risulta piuttosto semplice.

Per prima cosa si prende in considerazione la traiettoria con solo rendezvous finale e si realizza una prima analisi di massima per la scelta degli asteroidi intermedi; per fare ciò, è sufficiente diagrammare in funzione del tempo i valori del raggio della traiettoria, come ad esempio in Fig. 7.2. Attraverso questa rappresentazione, è possibile osservare quale sarebbe la traiettoria ottimale (in termini di raggio) che il satellite realizzerebbe in assenza di altri flyby intermedi. Risulta quindi intuitivo che un asteroide può essere un ottimo candidato per un flyby intermedio se si trova nei pressi della traiettoria di riferimento.

Osservando l'andamento del raggio è possibile innanzitutto definire i due periodi migliori per i flyby intermedi, ovvero quando la traiettoria, che segue un andamento circa sinusoidale, si trova nei punti di massimo e minimo. Questo perché in quegli archi temporali il satellite si troverà a variare poco il suo raggio, permettendo quindi una scelta più ampia tra gli asteroidi candidati per i flyby.

Il primo parametro che si va a confrontare è il raggio dell'asteroide intermedio all'epoca del possibile sorvolo con il raggio a cui si trova la sonda a quella medesima epoca. Se i valori sono simili, l'asteroide può essere un potenziale target.

La condizione precedente non è però sufficiente, in quanto si deve anche tenere conto dello sfasamento tra Terra e asteroide in quella certa epoca. Affinché il satellite sia in grado di raggiungere l'asteroide, occorre che questo presenti anche un valore di sfasamento compatibile con quello che il satellite possiede. Realizzare però un ulteriore diagramma non presenta particolari vantaggi in quanto l'andamento dell'anomalia è monotono crescente, fornendo poche informazioni utili. È però possibile stimarne il valore a partire da semplici considerazioni sulla conservazione dell'energia lungo l'orbita: quando il satellite si trova a raggio maggiore rispetto

a quello terrestre, la sua velocità sarà minore ed accumulerà un ritardo rispetto alla Terra; viceversa, quando si trova a raggi maggiori accumulerà un anticipo. Pertanto, sempre facendo riferimento alla Fig. 7.2, per il primo flyby converrà ricercare asteroidi con raggi maggiori di quello terrestre nel range 1.03 – 1.05 au e con un ritardo sull’orbita rispetto alla Terra. Per il secondo, invece, sarà opportuno scegliere asteroidi con raggi compresi tra 1.00 – 0.97 au e ancora in ritardo vista la lunga precedente permanenza a raggi maggiori di quello terrestre.

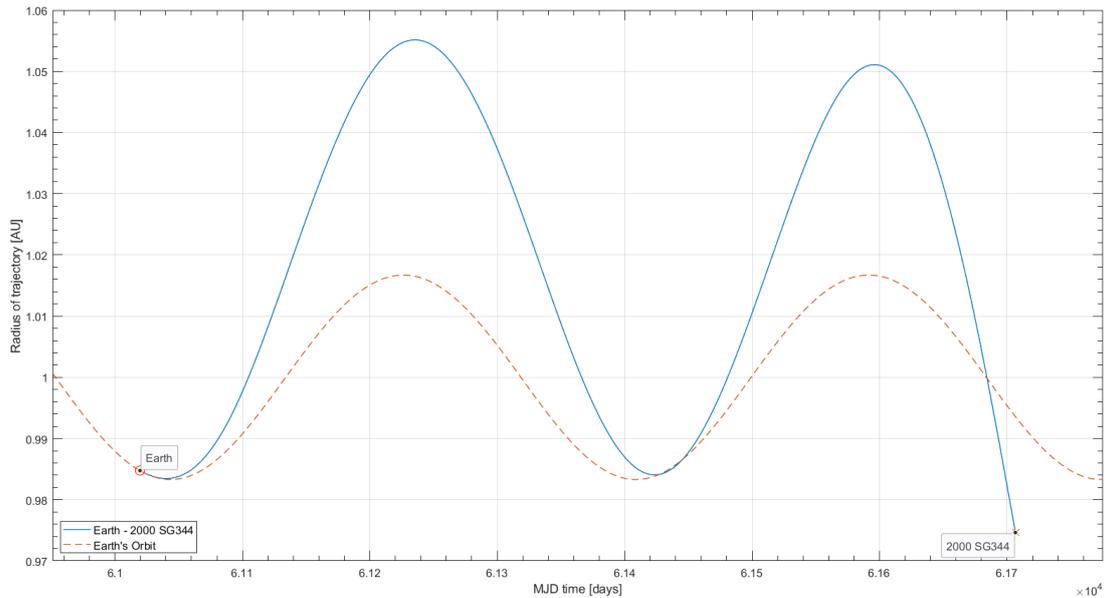


Figura 7.2. Rappresentazione in un grafico tempo – raggio della traiettoria 10 Earth – 2000 SG344.

Chiarita la logica utilizzata, si procede con la ricerca di un primo target per la prima finestra che rispetti i sopra citati criteri: si ricerca una soluzione che ne prevede un sorvolo e la si analizza (se converge); in particolare si osserva di quanto si è discostata in termini di raggio dal caso di riferimento, la variazione sul ΔV e del rapporto delle masse m_f/m_i . Se la traiettoria rispetta tutti i vincoli di missione, viene salvata in un documento a parte e si aggiunge l’asteroide intermedio in una lista.

Allo stesso modo, si cerca un asteroide per il secondo flyby. Si combinano poi gli asteroidi trovati per i due flyby e, se la traiettoria risultante continua a rispettare i vincoli di missione, allora può essere considerata come una soluzione realizzabile ed aggiunta in una lista di missioni possibili; in caso negativo, viene scartata e si prosegue con una nuova combinazione. Al termine della procedura, si confrontano i diversi aspetti di tutte le traiettorie ottenute per concludere quali siano le migliori, ma ciò sarà l’oggetto dei capitoli successivi.

7.5.1 Altri parametri significativi per la scelta degli asteroidi

Esistono ancora altri parametri da tenere in considerazione per concludere se un asteroide risulti o meno interessante da visitare, e di conseguenza se la traiettoria trovata sia o meno valida dal punto di vista realizzativo.

Per prima cosa, un asteroide numbered è preferibile ad un asteroide unnumbered per la maggiore precisione dei suoi parametri orbitali. In secondo luogo, è importante che la sua velocità relativa rispetto alla Terra sia bassa; questo perché gli asteroidi in questione sono piuttosto piccoli, basti pensare che tra quelli trovati il più esteso (1990 MU) presenta una magnitudine assoluta di 14.1 e raggio stimato di 2.8 km. Appare quindi chiaro che una velocità relativa eccessiva produrrebbe una quasi impossibilità di realizzare operazioni scientifiche precise, ed è pertanto preferibile che la V_{rel} sia inferiore ai 10 km/s. Connesso a questo aspetto, anche il parametro di magnitudine diventa rilevante, in quanto tanto più risulta basso, tanto più sarà esteso l'asteroide, rendendone più facile l'individuazione e la raccolta di dati.

Capitolo 8

Considerazioni iniziali sulle sequenze ottenute

Prima di proseguire nell'analisi dettagliata delle traiettorie più interessanti, vengono proposte una serie di tabelle complessive contenenti i parametri più significativi di tutte le traiettorie trovate, permettendo così una prima overview del lavoro svolto. Le sequenze sono state numerate a partire dalla rispettiva traiettoria di riferimento, e un numero in grassetto corrisponde ad una traiettoria che verrà approfondita nei capitoli successivi. Per ragioni di spazio, si è ommesso in [Tab. 8.1](#) il fatto che tutte le traiettorie partano dalla Terra e verrà quindi dato per scontato. Inoltre, gli asteroidi il cui nome compare con un asterisco* sono asteroidi unnumbered.

Tabella 8.1. Asteroidi e date dei flyby.

#	Asteroidi visitati	Partenza	Flyby 1	Flyby 2	Rendezvous
10	2000 SG344*	10/12/2025	–	–	28/10/2027
11	1997 NC1 - 2000 QK130 - 2000 SG344*	22/12/2025	29/06/2026	17/03/2027	19/11/2027
12	2008 TZ3 - 2000 RS11 - 2000 SG344*	11/11/2025	05/05/2026	25/03/2027	21/10/2027
13	2018 WX1* - 2000 QK130 - 2000 SG344*	16/12/2025	03/06/2026	19/03/2027	13/11/2027
14	2018 WX1* - 2000 RS11 - 2000 SG344*	10/12/2025	05/06/2026	24/03/2027	08/11/2027
15	2018 WX1* - 2018 MC5* - 2000 SG344*	10/12/2025	02/06/2026	09/09/2026	19/11/2027
20	2000 SG344*	08/11/2027	–	–	05/10/2029
21	2008 TZ3 - 2005 EE - 2000 SG344*	08/11/2027	08/05/2028	05/01/2029	05/10/2029
22	2001 WN5 - 2016 HO3 - 2000 SG344*	08/11/2027	26/06/2028	23/11/2028	15/10/2029
23	2001 WN5 - 2016 HO3 - 2000 SG344* ¹	12/11/2027	25/06/2028	24/11/2028	10/10/2029
24	2001 WN5 - 2013 EM20 - 2000 SG344*	08/11/2027	21/06/2028	08/12/2028	05/10/2029
25	2001 WN5 - 2005 EE - 2000 SG344*	08/11/2027	24/06/2028	07/01/2029	05/10/2029
26	2001 WN5 - 2006 WX1 - 2000 SG344*	08/11/2027	24/06/2028	06/02/2029	05/10/2029

¹Sequenza con flyby anticipato, si veda la [sez. 10.2](#) per ulteriori dettagli.

Tabella 8.1. Continuazione.

#	Asteroidi visitati	Partenza	Flyby 1	Flyby 2	Rendezvous
27	2001 WN5 - 2010 DW1 - 2000 SG344 ^{*2}	11/11/2027	29/06/2028	11/02/2029	09/10/2029
28	YORP - 2016 HO3 - 2000 SG344 [*]	08/11/2027	25/07/2028	23/11/2028	05/10/2029
30	2012 TF79 [*]	19/06/2025	–	–	17/05/2027
31	2008 TZ3 - 2012 TF79 [*]	13/10/2025	–	08/05/2026	11/09/2027
32	2015 WN1 [*] - 1997 NC1 - 2012 TF79 [*]	19/06/2025	09/11/2025	27/06/2026	29/05/2027
33	2015 WN1 [*] - YORP - 2012 TF79 [*]	19/06/2025	10/11/2025	26/07/2026	23/05/2027
40	2012 TF79 [*]	04/02/2026	–	–	03/01/2028
41	1997 NC1 - 2000 QK130 - 2012 TF79 [*]	11/02/2026	28/06/2026	19/03/2027	27/12/2027
42	YORP - 2000 QK130 - 2012 TF79 [*]	11/02/2026	29/07/2026	17/03/2027	10/01/2028

Tabella 8.2. Durata, incremento di velocità e propellente usato.

#	Durata [years]	ΔV_1 [km/s]	ΔV_2 [km/s]	ΔV_3 [km/s]	ΔV_{tot} [km/s]	m_f/m_i ³	m_f [kg]	Fuel used [kg]
10	1.881	–	–	0.96881	0.96881	0.71553	20.03497	0.96503
11	1.910	0.18068	0.39221	0.89234	1.46522	0.69849	19.55780	1.44220
12	1.942	0.57564	0.25975	0.65703	1.49243	0.69757	19.53198	1.46802
13	1.910	0.59523	0.14226	0.70370	1.44118	0.69931	19.58064	1.41936
14	1.910	0.46811	0.16846	0.62537	1.26194	0.70542	19.75181	1.24819
15	1.942	0.48100	0.08618	0.89106	1.45824	0.69873	19.56443	1.43557
20	1.910	–	–	0.81373	0.81373	0.72094	20.18641	0.81359
21	1.910	0.41382	0.57483	0.33012	1.31878	0.70348	19.69737	1.30263
22	1.936	0.33046	0.28262	0.49228	1.10536	0.71043	19.89203	1.10797
23	1.910	0.57285	0.15172	0.50073	1.22531	0.70668	19.78698	1.21302
24	1.910	0.53277	0.35297	0.28344	1.16918	0.70861	19.84098	1.15902
25	1.910	0.26062	0.35680	0.36006	0.97748	0.71523	20.02654	0.97346
26	1.910	0.35293	0.46346	0.27569	1.09208	0.71126	19.91540	1.08460
27	1.910	0.40710	0.35441	0.50122	1.26274	0.70539	19.75105	1.24895
28	1.910	0.56719	0.38572	0.50409	1.45700	0.69877	19.56561	1.43439
30	1.910	–	–	1.04209	1.04209	0.71299	19.96380	1.03620
31	1.910	–	0.33239	0.97058	1.30298	0.70402	19.71249	1.28751
32	1.942	0.15922	0.30135	0.81784	1.27841	0.70486	19.73603	1.26397
33	1.926	0.16300	0.27138	0.76392	1.19829	0.70761	19.81295	1.18705
40	1.910	–	–	0.92169	0.92169	0.71717	20.08085	0.91915
41	1.871	0.23608	0.27384	0.42362	0.93355	0.71676	20.06930	0.93070
42	1.910	0.52854	0.36849	0.21347	1.11050	0.71063	19.89760	1.10240

²Sequenza non valida perché presenta flyby con 2001 WN5 dopo il suo close approach, si veda la sez. 10.2 per ulteriori dettagli.

³Si ricorda che i valori vanno riscaldati rispetto al valore 0.75, ovvero un consumo nullo equivale a $m_f/m_i = 0.75$.

Tabella 8.3. Velocità relative e differenza di raggio rispetto alla Terra.

#	V_{rel_1} [km/s]	V_{rel_2} [km/s]	Δr_0 ⁴	Δr_1	Δr_2	Δr_3
10	–	–	$8.85 \cdot 10^{-6}$	–	–	–0.0190
11	8.633	8.501	$1.07 \cdot 10^{-5}$	0.0173	0.0177	–0.0389
12	9.925	11.383	$2.81 \cdot 10^{-6}$	0.0362	–0.0105	–0.0128
13	8.611	8.814	$9.83 \cdot 10^{-6}$	0.0368	0.0107	–0.0337
14	8.434	11.448	$8.85 \cdot 10^{-6}$	0.0434	–0.0130	–0.0285
15	8.784	5.037	$8.85 \cdot 10^{-6}$	0.0306	0.0171	–0.0389
20	–	–	$1.92 \cdot 10^{-6}$	–	–	–0.0278
21	9.356	9.636	$1.92 \cdot 10^{-6}$	0.0242	–0.0610	–0.0278
22	10.080	5.355	$1.92 \cdot 10^{-6}$	0.0004	–0.0533	–0.0360
23	10.170	5.260	$2.96 \cdot 10^{-6}$	0.0058	–0.0530	–0.0317
24	10.940	6.740	$1.92 \cdot 10^{-6}$	0.0222	–0.0461	–0.0278
25	10.392	10.073	$1.92 \cdot 10^{-6}$	0.0069	–0.0491	–0.0278
26	10.438	12.165	$1.92 \cdot 10^{-6}$	0.0088	–0.0453	–0.0278
27	9.297	13.439	$2.74 \cdot 10^{-6}$	–0.0176	–0.0048	–0.0309
28	7.434	5.485	$1.92 \cdot 10^{-6}$	–0.0057	–0.0542	–0.0278
30	–	–	$-1.04 \cdot 10^{-5}$	–	–	0.0608
31	9.579	–	$-3.86 \cdot 10^{-6}$	–	0.0256	0.0702
32	8.843	8.835	$-1.31 \cdot 10^{-5}$	–0.0086	0.0151	0.0643
33	8.759	7.233	$-1.04 \cdot 10^{-5}$	–0.0049	–0.0009	0.0626
40	–	–	$1.32 \cdot 10^{-5}$	–	–	0.0309
41	8.634	8.128	$1.28 \cdot 10^{-5}$	0.0160	0.0107	0.0333
42	6.693	8.019	$1.28 \cdot 10^{-5}$	0.0114	0.0193	0.0290

Tabella 8.4. Sfasamento rispetto alla Terra e magnitudine assoluta dell'asteroide visitato.

#	$\Delta\nu_0$ [°]	$\Delta\nu_1$ [°]	$\Delta\nu_2$ [°]	$\Delta\nu_3$ [°]	Mag. ₁	Mag. ₂	Mag. ₃
10	–0.0782	–	–	–18.7845	–	–	24.70
11	–0.0784	–0.9262	–7.2817	–17.7392	17.90	21.10	24.70
12	–0.0778	–3.1828	–11.2036	–18.9146	20.40	19.00	24.70
13	–0.0783	–3.3021	–7.2556	–18.1098	24.10	21.00	24.70
14	–0.0782	–3.3964	–11.2330	–18.4115	24.10	19.00	24.70
15	–0.0782	–3.2273	–7.5474	–17.7393	24.10	25.10	24.70
20	–0.0778	–	–	5.6789	–	–	24.70
21	–0.0778	–3.6043	4.2900	5.6789	20.40	21.20	24.70
22	–0.0778	0.0029	5.3389	6.1706	18.20	24.30	24.70

⁴Il valore di Δr_0 è stato aggiunto per completezza e, come prevedibile, è circa nullo in quanto il satellite parte nei pressi della Terra. Questa lieve discrepanza è dovuta alle approssimazioni numeriche.

Tabella 8.4. Continuazione.

#	$\Delta\nu_0$ [°]	$\Delta\nu_1$ [°]	$\Delta\nu_2$ [°]	$\Delta\nu_3$ [°]	Mag. ₁	Mag. ₂	Mag. ₃
23	-0.0778	-0.1469	5.3541	5.8935	18.20	24.30	24.70
24	-0.0778	-0.5109	-2.3252	5.6789	18.20	19.90	24.70
25	-0.0778	-0.1739	4.5578	5.6788	18.20	21.20	24.70
26	-0.0778	-0.2215	8.9824	5.6788	18.20	19.50	24.70
27	-0.0778	0.6096	14.5807	5.8439	18.20	19.90	24.70
28	-0.0778	-0.5692	5.2785	5.6788	22.70	24.30	24.70
30	-0.0803	-	-	-4.9856	-	-	27.40
31	-0.0779	-	-2.9778	-16.6827	-	20.40	27.40
32	-0.0803	0.4099	-0.6412	-6.0119	26.50	17.90	27.40
33	-0.0803	0.5026	-0.5535	-5.4915	26.50	22.70	27.40
40	-0.0796	-	-	-25.2014	-	-	27.40
41	-0.0798	-0.7604	-7.2554	-24.8984	17.90	21.10	27.40
42	-0.0798	-0.6630	-7.2843	-25.4429	22.70	21.10	27.40

A partire dalle già citate 4 traiettorie con singolo rendezvous finale, sono state trovate un totale di 18 missioni, 13 con 2000 SG344 e 5 con 2012 TF79. Risulterebbe inoltre eccessivo presentare tutti i grafici delle prestazioni per ogni traiettoria trovata, tra cui alcune di esse meno rilevanti a causa di alti consumi e bassa importanza scientifica. Nei successivi 3 capitoli verranno quindi mostrate in dettaglio solo quelle maggiormente significative.

Per il gruppo di traiettorie 10, trattate nel [cap. 9](#), è subito evidente che la sequenza 15 è caratterizzata da due flyby con asteroidi unnumbered e di piccole dimensioni, pertanto sicuramente meno interessante; Invece, la traiettoria 14 è quella con consumi minori, mentre la 11 e la 12 intercettano quattro asteroidi numbered diversi, tutti PHA. È pertanto chiaro che queste ultime tre saranno quelle maggiormente rilevanti.

Per il gruppo 20 ([cap. 10](#)), tutte le traiettorie presentano ottimi risultati: si è scelto di presentare la numero 23 per alcune importanti ripercussioni tecnico-scientifiche legate al PHA 2001 WN5 che verranno discusse successivamente, così come per la 25 dotata di eccellenti consumi, mentre la numero 28 possiede velocità relative ai flyby molto contenute.

Per le famiglie legate a 2012 TF79, invece, si è deciso di accorpare le soluzioni nel [cap. 11](#). Il motivo si evince dalle tabelle precedenti, in cui si può osservare che il numero di soluzioni trovate è piuttosto limitato e con la sequenza 31 intrinsecamente meno rilevante visto il singolo flyby intermedio. Verranno quindi presentate le tre soluzioni migliori, ovvero la 33, la 41 e la 42, con le ultime due dotate di consumi eccellenti.

Capitolo 9

Traiettorie aventi rendezvous con 2000 SG344 e partenza a fine 2025

Le missioni presentate in questo capitolo sono basate sulla traiettoria osservabile in [Fig. 9.1](#). Come è possibile intuire dalla forma della sinusoide, al fine di raggiungere l'asteroide occorre accumulare un ingente ritardo sin dall'inizio della traiettoria. Questo aspetto è risultato cruciale per la selezione degli asteroidi intermedi, in particolare per il primo flyby. Infatti, sebbene con alcuni di essi è stata trovata una soluzione, i consumi si sono dimostrati elevati, di poco inferiori al limite consentito.

9.1 Traiettoria 14: Earth – 2018 WX1 – 2000 RS11 – 2000 SG344

La traiettoria Earth – 2018 WX1 – 2000 RS11 (PHA) – 2000 SG344 risulta essere, tra le sequenze ottenute a partire dal riferimento precedentemente mostrato, quella con i consumi più bassi. La ragione di questo risultato è da ricercarsi nella posizione del primo asteroide raggiunto, l'unnumbered 2018 WX1, in quanto non causa una deviazione significativa della traiettoria, producendo una variazione piccola del ΔV : mentre la traiettoria di riferimento era caratterizzata da un ΔV di 0.9688 km/s, aggiungere solo questo flyby intermedio porta il valore di ΔV a 1.0131 km/s, una differenza di poco più di 44 m/s. È pertanto l'aggiunta del flyby con l'asteroide numbered 2000 RS11 la ragione di un consumo ben maggiore: questo presenta anche una velocità relativa al flyby superiore al limite consentito. Ciò può essere comunque accettato vista le sue notevoli dimensioni (magnitudine assoluta di 19 con dimensione stimata di circa 600 m).

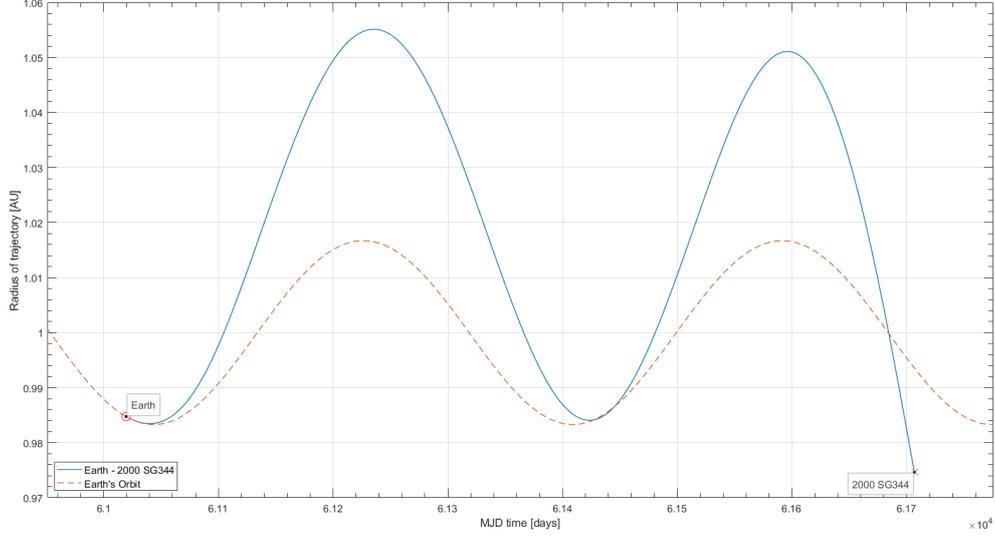


Figura 9.1. Rappresentazione in un grafico tempo – raggio della traiettoria di riferimento 10 Earth – 2000 SG344.

Tabella 9.1. Principali caratteristiche della traiettoria 14.

	Corpo	Data flyby	V_{rel} [km/s]	ΔV [km/s]
Partenza	Earth	10/12/2025	–	–
Primo flyby	2018 WX1	26/06/2026	8.434	0.468 11
Secondo flyby	2000 RS11 (PHA)	17/03/2027	11.448	0.168 46
Rendezvous	2000 SG344	08/11/2027	–	0.625 37
		Dur. 1.91 y	Max 11.448	Tot. 1.261 94

Attraverso l'analisi delle Fig. 9.4, Fig. 9.5, Fig. 9.8 e Fig. 9.7 è possibile comprendere la strategia propulsiva: immediatamente dopo la partenza vengono accesi i propulsori per un lungo periodo di tempo, con una componente della spinta radiale uscente e una tangenziale concorde alla traiettoria; questo permette di incrementare l'eccentricità, l'inclinazione (attraverso una componente di spinta T_z) e il semiasse maggiore (che è legato all'energia dell'orbita). L'aumento del semiasse provoca un aumento del periodo orbitale, necessario per indurre un ritardo rispetto alla Terra e raggiungere 2018 WX1, mentre l'aumento di eccentricità induce un aumento dell'ampiezza dell'oscillazione di Δr . Nel secondo arco è invece necessario incrementare il valore del perielio per poter raggiungere l'asteroide 2000 RS11, portando ad una seconda accensione più breve con una significativa componente tangenziale opposta al moto (per ridurre l'energia dell'orbita) e una componente radiale per incrementare

ancora una volta l'eccentricità. Nel terzo arco inizia la fase di rallentamento del satellite fino a raggiungere 2000 SG344, incontrato con un ritardo sull'orbita di quasi 20° : avvengono due distinte accensioni con componente tangenziale opposta al moto in modo da ridurre significativamente il semiasse maggiore, mentre l'inclinazione rimane circa costante e l'eccentricità aumenta ancora, specialmente durante la prima accensione.

Risulta interessante osservare che, poiché si era ipotizzata la velocità efficace di scarico c costante, la portata di propellente segue esattamente l'andamento della spinta totale, semplicemente riscalata rispetto alla grandezza c . Per questo motivo, si è deciso di non rappresentarla in quanto ridondante. Ad ogni modo, in Fig. 9.6 si è deciso di presentare sia l'andamento della massa che la spinta totale, ed è evidente che quando essa è non nulla la massa si riduce.

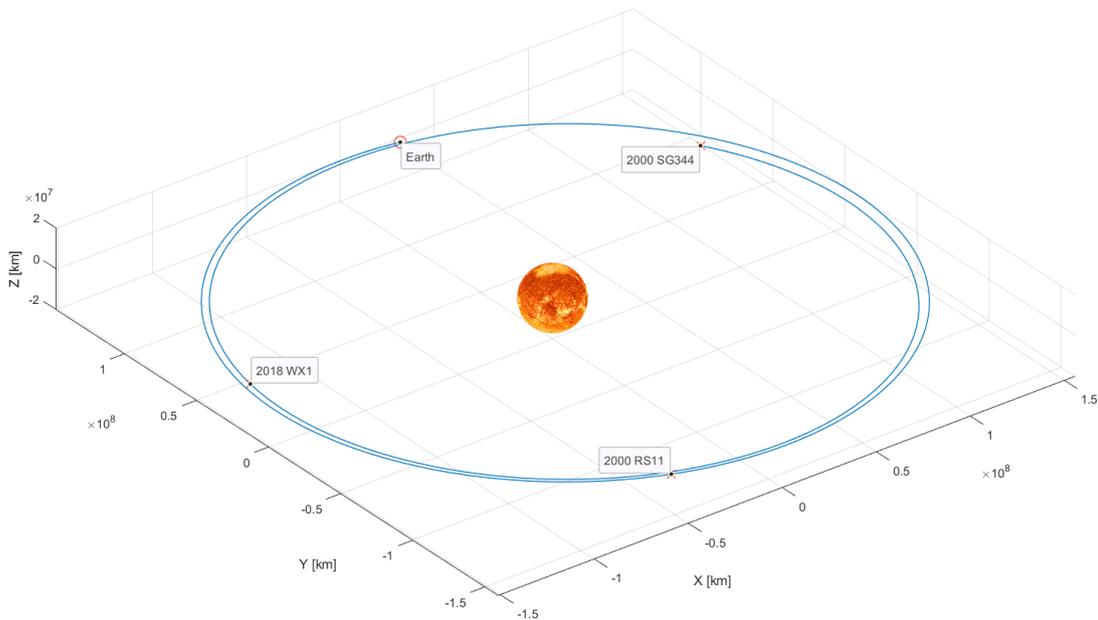


Figura 9.2. Rappresentazione della traiettoria in un riferimento eliocentrico – eclittico.

Un altro aspetto peculiare è l'andamento della spinta totale analizzato rispetto alla potenza, osservabile sempre in Fig. 9.6 e già anticipata nel cap. 2: poiché l'unica sorgente di potenza disponibile è quella solare estratta dai pannelli, essa varia seguendo l'oscillazione del raggio della traiettoria. Per ipotesi, si è deciso infatti che i pannelli sono sempre orientati in maniera ottimale verso il Sole e viene trascurato il loro degrado. Ne consegue che la portata di elettroni accelerati per produrre spinta sia direttamente proporzionale alla potenza elettrica disponibile, la quale è inversamente proporzionale al quadrato del raggio. È quindi chiaro che la spinta

viene influenzata dalla potenza disponibile: quando il raggio aumenta, la potenza diminuisce e, di conseguenza, anche la spinta. Questi ultimi aspetti sono validi per tutte le traiettorie ottenute e non verranno più ripetute nel seguito.

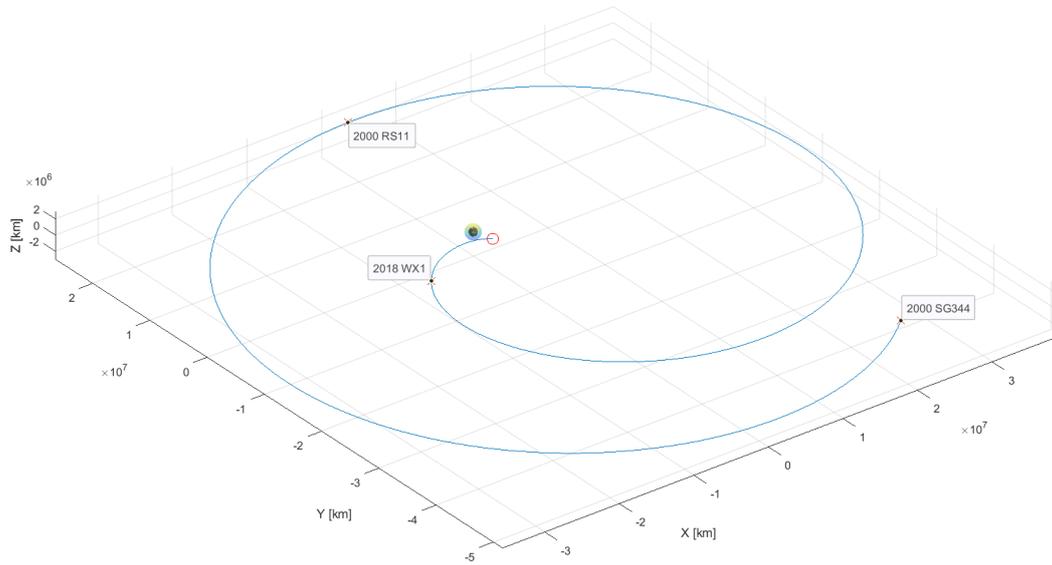


Figura 9.3. Rappresentazione della traiettoria nel sistema di riferimento ECI.

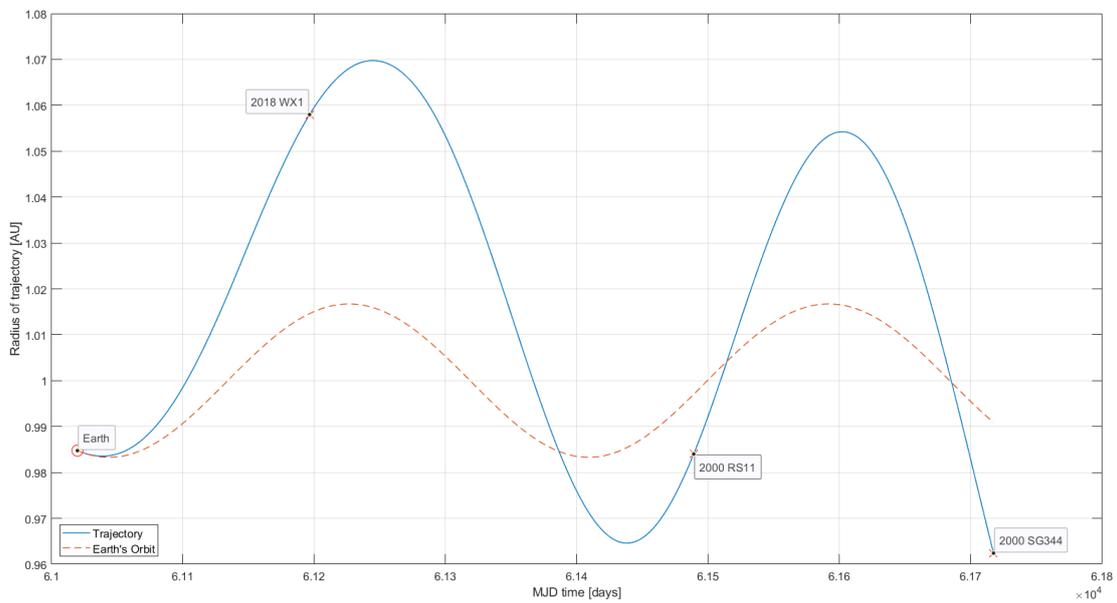


Figura 9.4. Andamento del raggio della traiettoria.

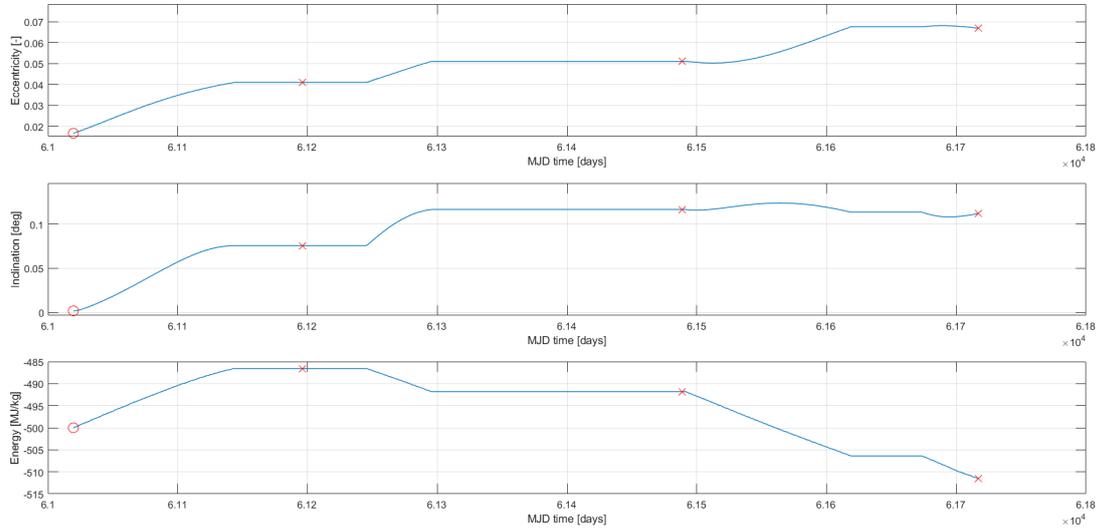


Figura 9.5. Andamento dei parametri orbitali eccentricità, inclinazione ed energia.

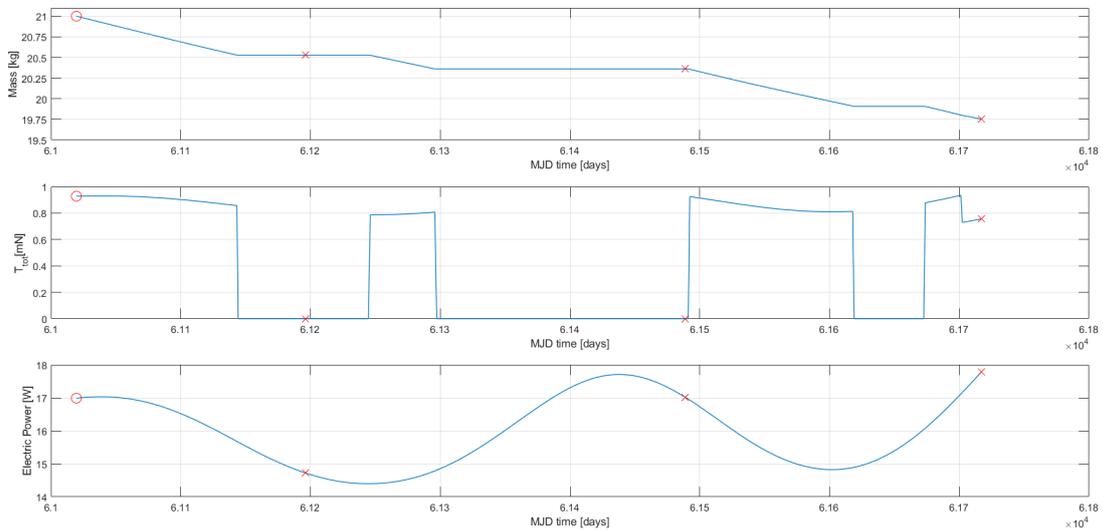
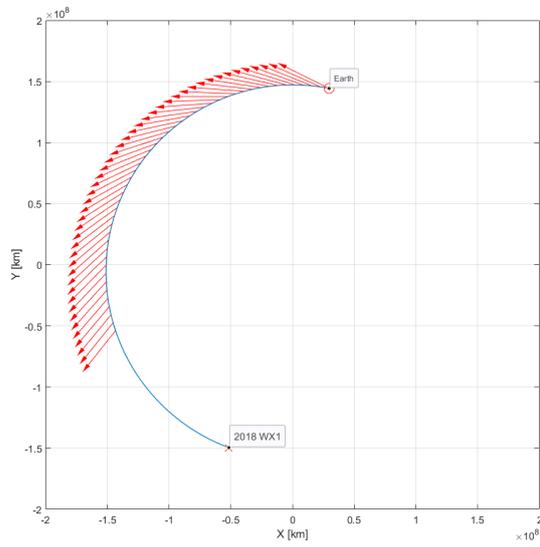
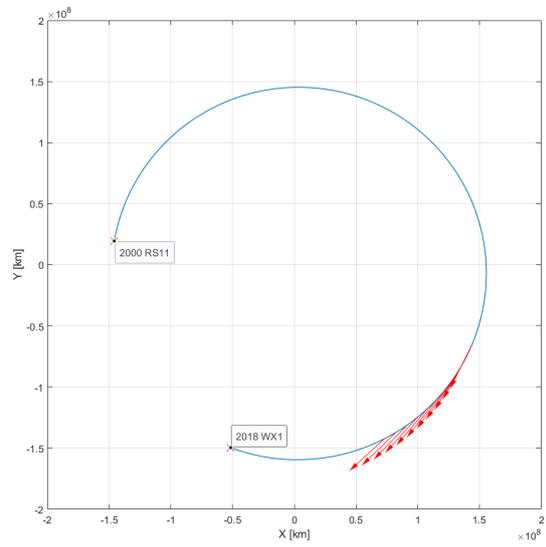


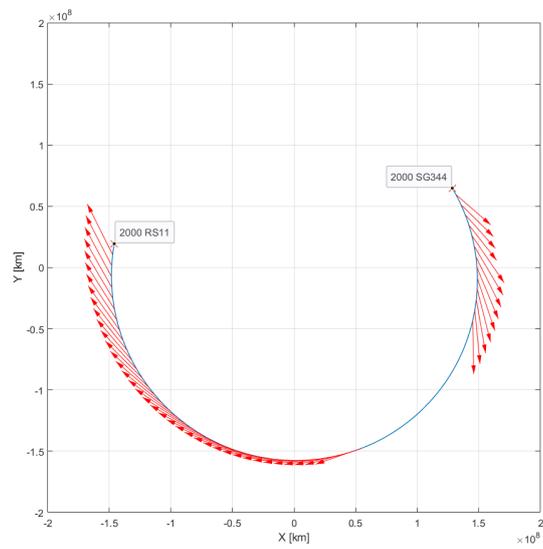
Figura 9.6. Andamento della massa, spinta totale e potenza elettrica lungo la traiettoria.



(a) Arco 1.



(b) Arco 2.



(c) Arco 3.

Figura 9.7. Vettori spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y.

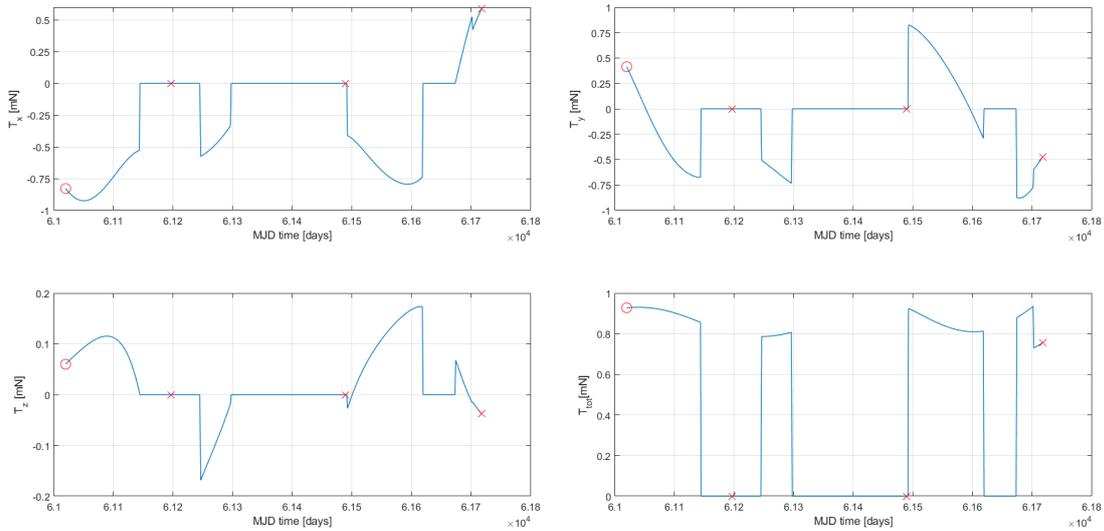


Figura 9.8. Spinta lungo i 3 assi e modulo.

9.2 Traiettoria 12: Earth – 2008 TZ3 – 2000 RS11 – 2000 SG344

La traiettoria appena studiata presentava un valore buono dei consumi ma, a causa del fatto che 2018 WX1 è unnumbered e di piccole dimensioni, la sua importanza dal punto di vista scientifico è intrinsecamente ridotta, anche per effetto della velocità al flyby relativamente alta. La traiettoria qui presentata invece induce un consumo notevolmente maggiore, è composta dal medesimo secondo asteroide ma da un primo NEA diverso, il numbered 2008 TZ3 (PHA). Questo presenta una velocità al flyby molto vicina al limite, ma le sue dimensioni ($H = 20.4$) lo rendono comunque interessante.

Tabella 9.2. Principali caratteristiche della traiettoria 12.

	Corpo	Data flyby	V_{rel} [km/s]	ΔV [km/s]
Partenza	Earth	11/11/2025	–	–
Primo flyby	2008 TZ3 (PHA)	05/05/2026	9.925	0.575 64
Secondo flyby	2000 RS11 (PHA)	25/03/2027	11.383	0.259 75
Rendezvous	2000 SG344	21/10/2027	–	0.657 03
		Dur. 1.94 y	Max 11.383	Tot. 1.492 43

Osservando la [Tab. 9.2](#) si può subito notare che la durata della missione è maggiore di quella vista in precedenza: la differenza è piccola, solo 12 giorni, ma necessaria in quanto per durate minori la soluzione presenta consumi maggiori del limite consentito. Si può infatti notare che questi sono già piuttosto elevati, al limite dell'accettabilità, ma poiché si tratta di una missione con flyby intermedi con asteroidi numbered si è deciso comunque di presentarla. Inoltre, la partenza è anticipata di quasi un mese rispetto alle altre traiettorie presenti in [cap. 8](#): questo è dovuto alla posizione del primo asteroide 2008 TZ3, il quale viene incontrato in anticipo rispetto alla Terra, ma ad un raggio significativamente maggiore.

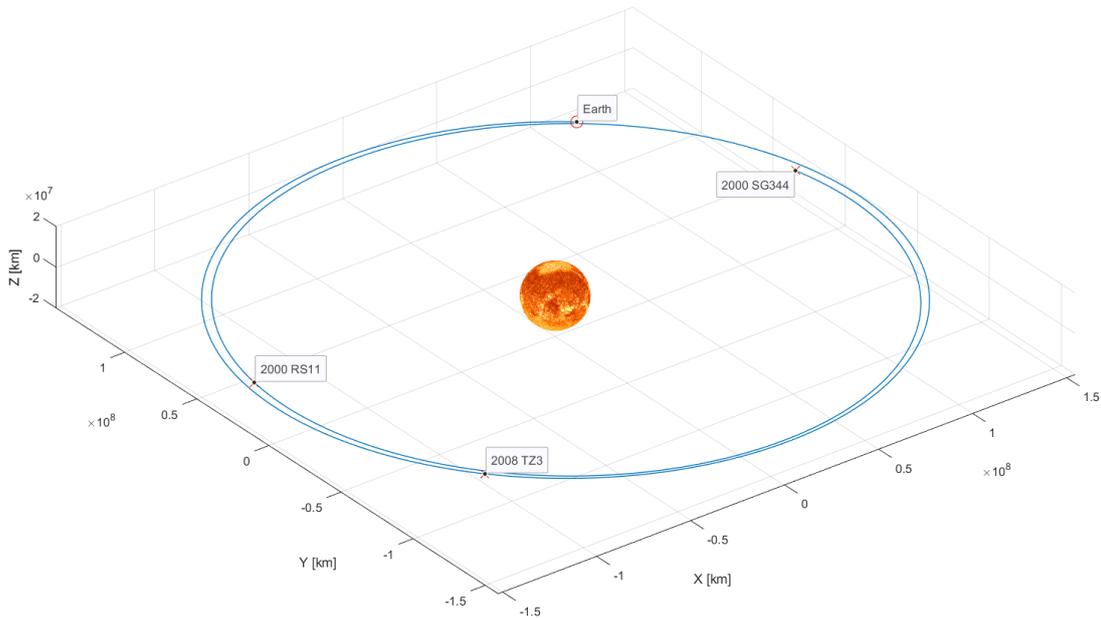


Figura 9.9. Rappresentazione della traiettoria in un riferimento eliocentrico – eclittico.

Facendo riferimento alle [Fig. 9.10](#), [Fig. 9.12](#), [Fig. 9.15](#) e [Fig. 9.14](#) è possibile analizzare come viene gestita la propulsione: in maniera simile alla traiettoria precedente, viene eseguita una lunga fase di spinta iniziale con l'obiettivo di modificare sensibilmente semiasse maggiore, inclinazione ed eccentricità. Questa prima fase di spinta presenta un comportamento molto complesso lungo l'asse z : partendo da un valore positivo non nullo, diventa sempre maggiore fino a raggiungere un massimo di circa 0.65 mN per poi crollare piuttosto rapidamente a 0 . Avviene poi una seconda fase di spinta nel secondo arco, molto più breve e con una prima parte più intensa, che ancora una volta induce un aumento del semiasse maggiore per raggiungere il target. Nel secondo arco, un'altra fase di spinta con una ingente componente radiale incrementa i già citati parametri. Viene poi seguita da una fase di spinta più lunga

con una ingente componente tangenziale opposta alla direzione del moto per ridurre il semiasse ed aumentare il perielio, mentre l'eccentricità continua a crescere. Dopo aver raggiunto 2000 RS11, due lunghe fasi di spinta producono la riduzione del semiasse e l'ennesimo incremento di eccentricità necessari per raggiungere 2000 SG344 con velocità relativa nulla.

Osservando la Fig. 9.11b, si può osservare un aspetto assolutamente non trascurabile: nelle prime fasi della missione la traiettoria attraversa la sfera di influenza della Terra (si ricorda che la Terra non è rappresentata in scala, mentre la sfera di influenza sì). Questo aspetto fa cadere l'ipotesi secondo la quale il moto del satellite può essere studiato attraverso un problema dei 2 corpi ristretto. Per questa ragione, le considerazioni fatte finora perdono parzialmente di valore, in quanto la traiettoria trovata potrebbe essere ancora valida e promettente, ma necessita di studi ulteriori e modelli più accurati. Poiché l'attraversamento della sfera di influenza avviene nelle prime fasi, potrebbe essere possibile utilizzare una diversa tecnica di immissione in orbita con l'obiettivo di porre il satellite in una posizione più favorevole.

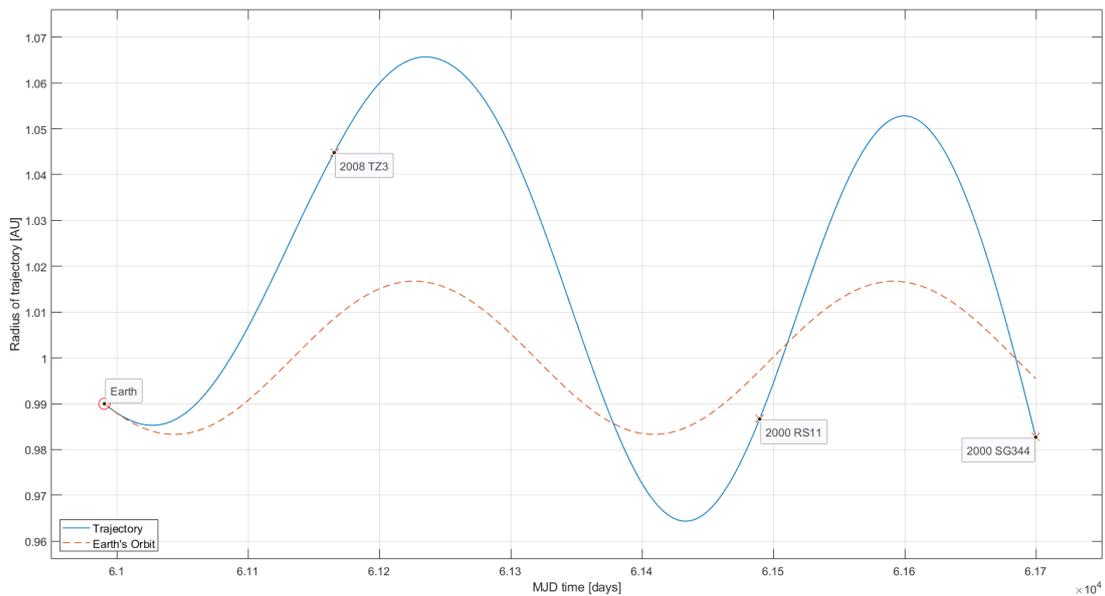
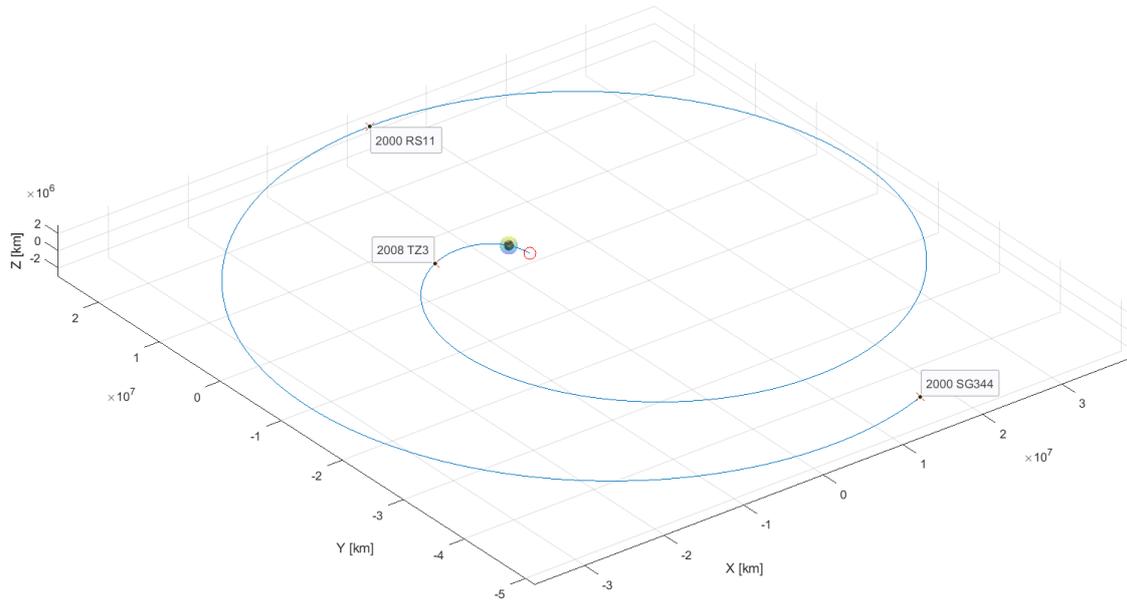
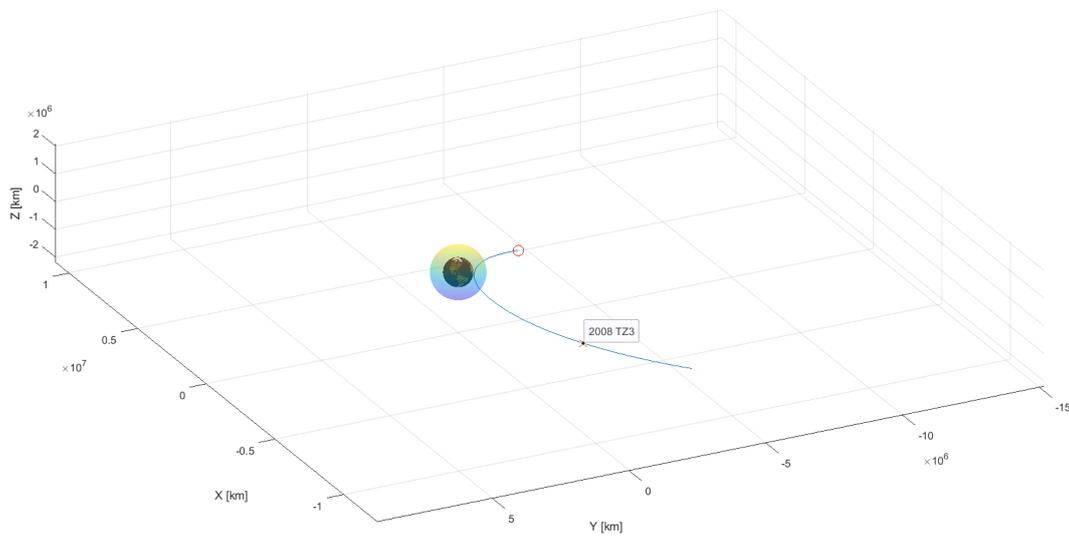


Figura 9.10. Andamento del raggio della traiettoria.



(a) Vista standard.



(b) Dettaglio sulla parte iniziale.

Figura 9.11. Rappresentazione della traiettoria nel sistema di riferimento ECI.

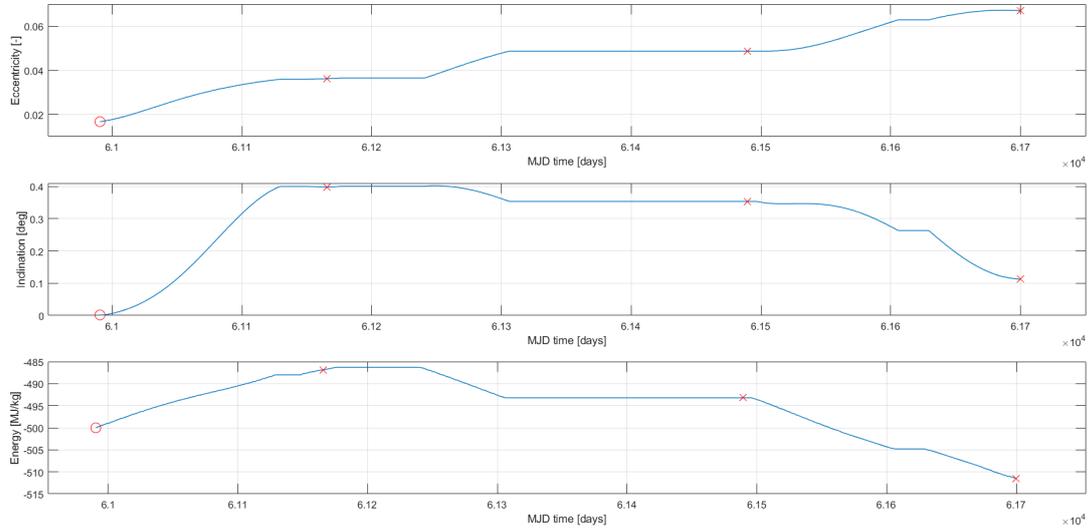


Figura 9.12. Andamento dei parametri orbitali eccentricità, inclinazione ed energia.

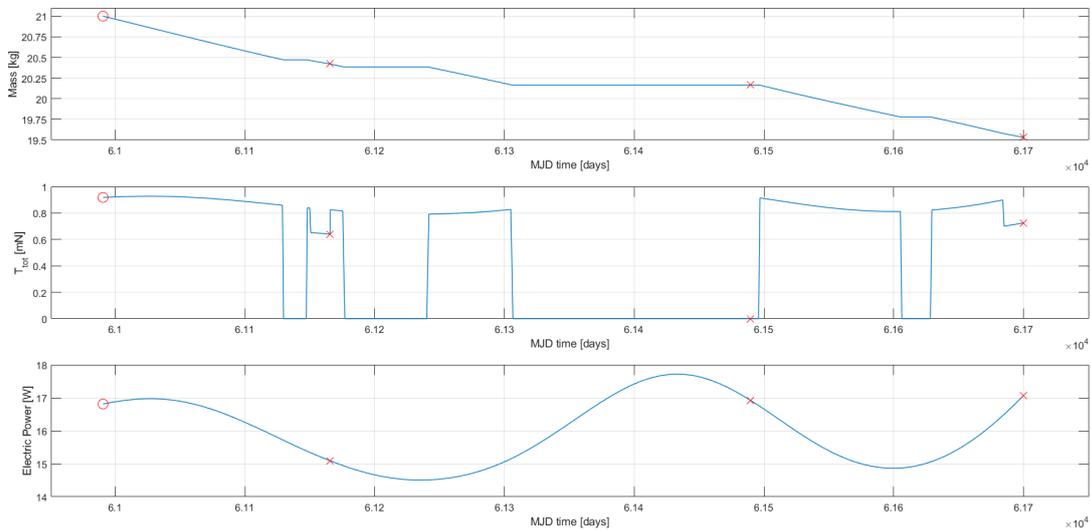
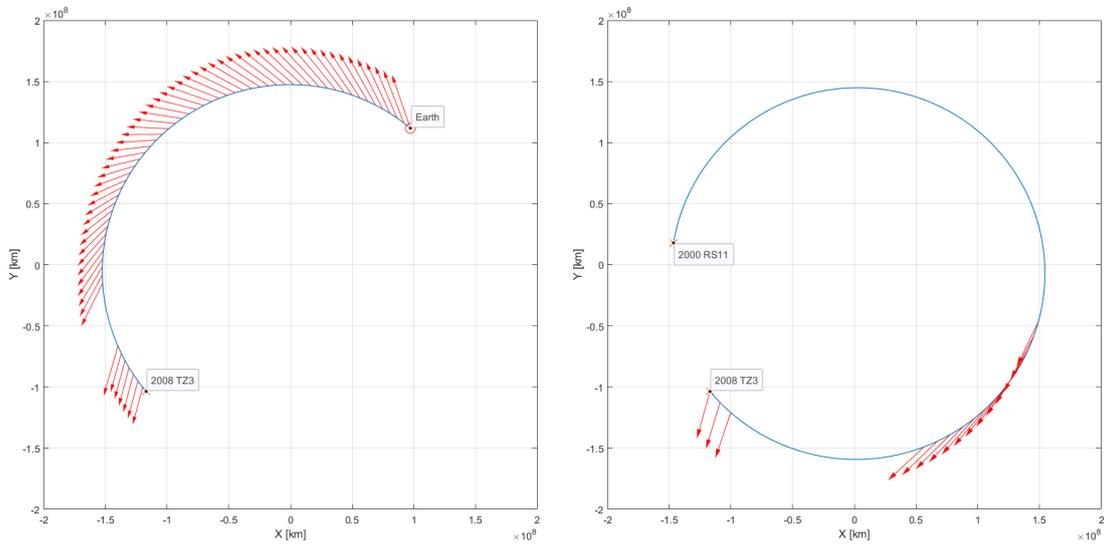
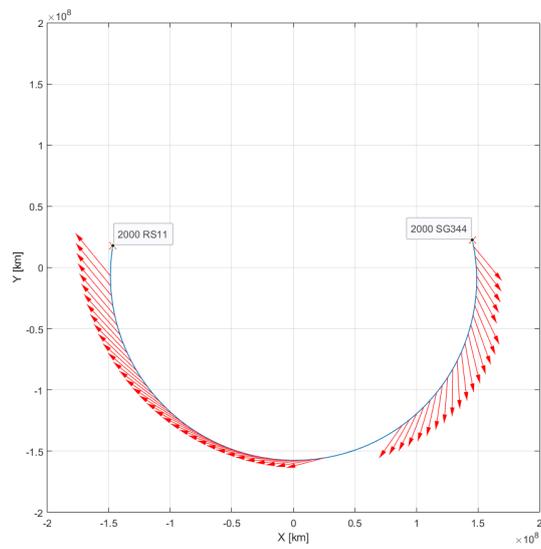


Figura 9.13. Andamento della massa, spinta totale e potenza elettrica lungo la traiettoria.



(a) Arco 1.

(b) Arco 2.



(c) Arco 3.

Figura 9.14. Vettori spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y.

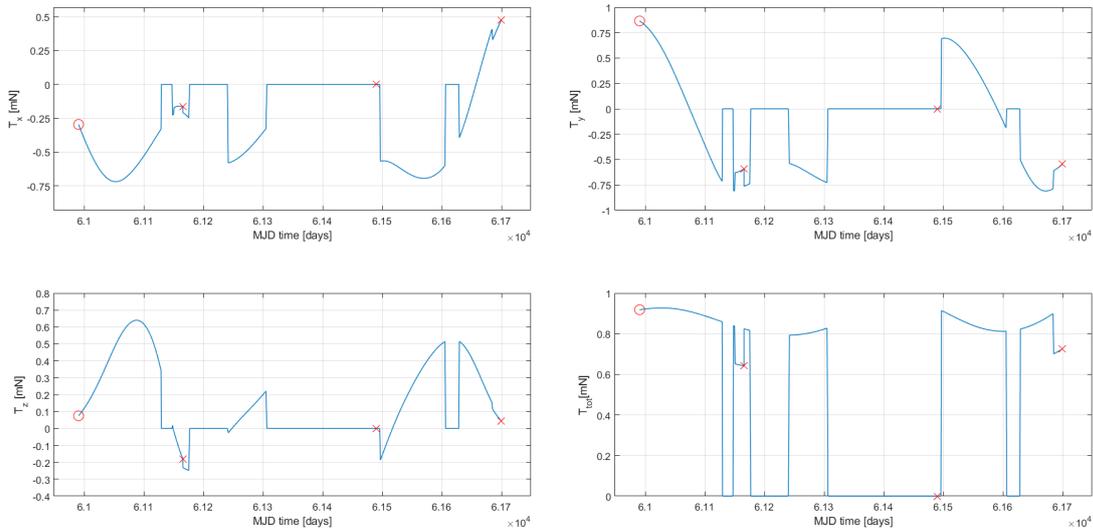


Figura 9.15. Spinta lungo i 3 assi e modulo.

9.3 Traiettoria 11: Earth – 1997 NC1 – 2000 QK130 – 2000 SG344

Anche questa ultima traiettoria con partenza a fine 2025 è caratterizzata da due flyby con asteroidi numbered e di notevoli dimensioni, entrambi diversi da quelli visti in precedenza, l’Aten 1997 NC1 (PHA) e l’Apollo 2000 QK130 (PHA): il primo presenta una magnitudine di 17.9, la più piccola tra tutti gli asteroidi che vengono presentati in questa tesi, il secondo di 21.1. Inoltre, le velocità ai flyby sono accettabili e buone, specie considerando le dimensioni degli asteroidi.

Tabella 9.3. Principali caratteristiche della traiettoria 11.

	Corpo	Data flyby	V_{rel} [km/s]	ΔV [km/s]
Partenza	Earth	22/12/2025	–	–
Primo flyby	1997 NC1 (PHA)	29/06/2026	8.633	0.180 68
Secondo flyby	2000 QK130 (PHA)	17/03/2027	8.501	0.392 21
Rendezvous	2000 SG344	19/11/2027	–	0.892 34
		Dur. 1.91 y	Max 8.633	Tot. 1.465 22

Un altro aspetto peculiare di questa traiettoria è che affinché i consumi e la durata rimangano inferiori ai limiti, è stato necessario posticipare la partenza di

circa 10 giorni: ciò è reso possibile dalla particolare traiettoria che il satellite compie, la quale si discosta molto da quella di riferimento in Fig. 9.1, ma poco da quella della Terra.

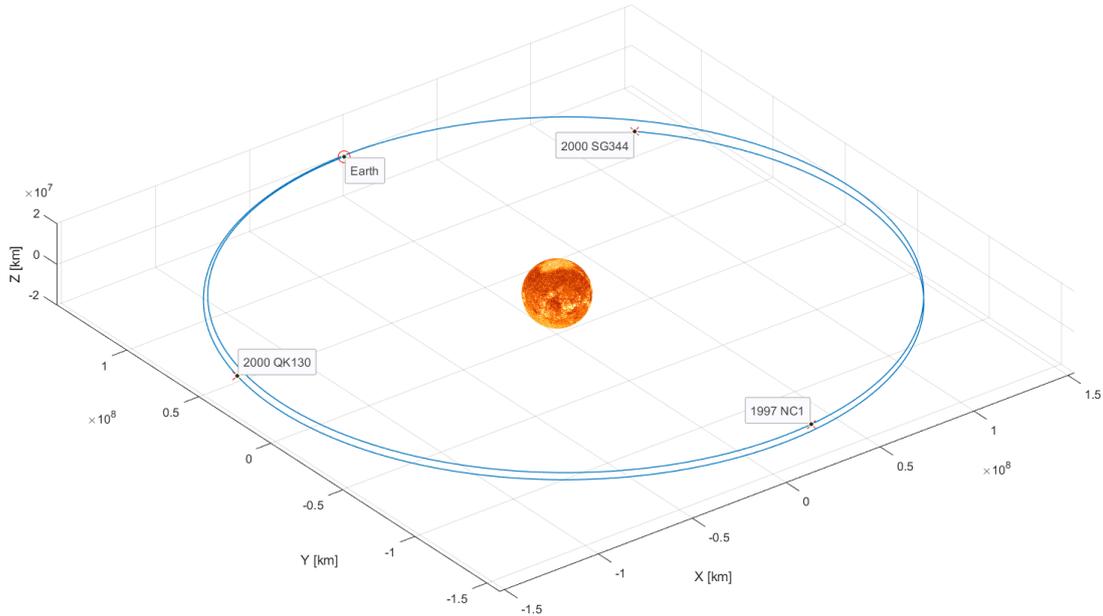


Figura 9.16. Rappresentazione della traiettoria in un riferimento eliocentrico – eclittico.

Osservando la Tab. 9.3 è possibile notare che i consumi durante il primo arco sono molto più contenuti delle altre traiettorie prese in analisi, nel secondo arco sono nella media, mentre nel terzo crescono in maniera significativa, fino a rendere questa traiettoria più dispendiosa della prima analizzata. Il motivo di ciò appare chiaro nelle Fig. 9.22 e Fig. 9.21: nel primo arco avviene una sola fase di spinta con direzione quasi completamente tangenziale al fine incrementare semiasse maggiore ed eccentricità. Ciò si discosta molto da cosa si era visto nelle precedenti traiettorie, le quali presentavano fasi di spinta più lunghe e con componenti radiali, con lo scopo di incrementare maggiormente il semiasse maggiore; qui invece il primo afelio risulta essere di poco minore a 1.04 au (Fig. 9.20). Nel secondo arco una prima lunga fase di spinta provoca un ulteriore aumento del semiasse maggiore ma, soprattutto, una crescita dell'inclinazione: questo avviene perché, nell'ottica di rendere meno dispendioso l'ultimo arco, risulta più conveniente incontrare l'asteroide 2000 QK130 con alcuni giorni di anticipo rispetto all'ideale. La ragione di questa preferenza appare ovvia osservando il terzo arco: è necessario spingere per tutta la sua durata, con l'obiettivo di ridurre il semiasse maggiore e l'inclinazione, e al contempo incrementare l'eccentricità.

La lunga fase di spinta è la sorgente dell'incremento nei consumi visto in precedenza e rende questa traiettoria meno interessante, sebbene contempi due flyby con asteroidi numbered. Dal punto di vista tecnico, infatti, mantenere accesi i propulsori per un periodo così lungo potrebbe risultare complesso e potenzialmente dannoso, inducendo malfunzionamenti e consumi maggiori in caso di errori che, visto il margine piccolo a disposizione, risulterebbero non accettabili.

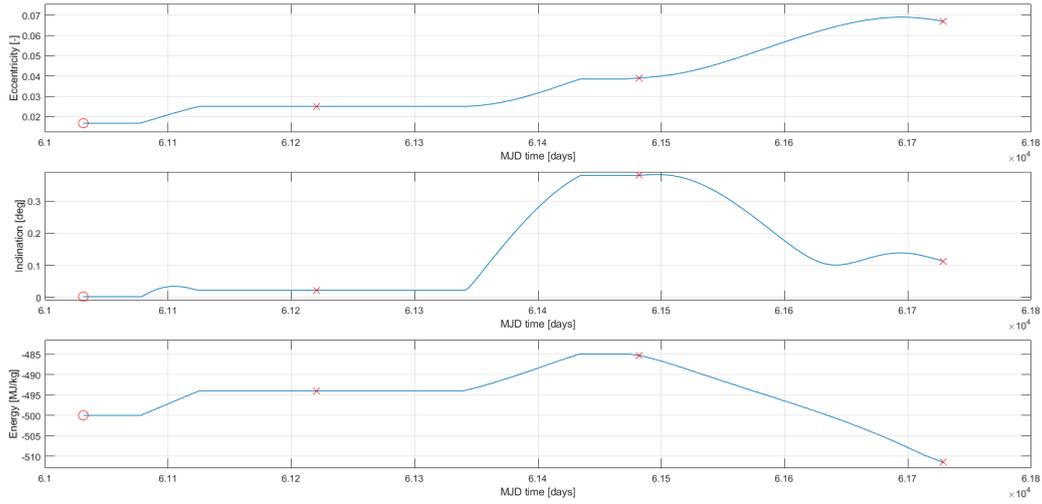


Figura 9.17. Andamento dei parametri orbitali eccentricità, inclinazione ed energia.

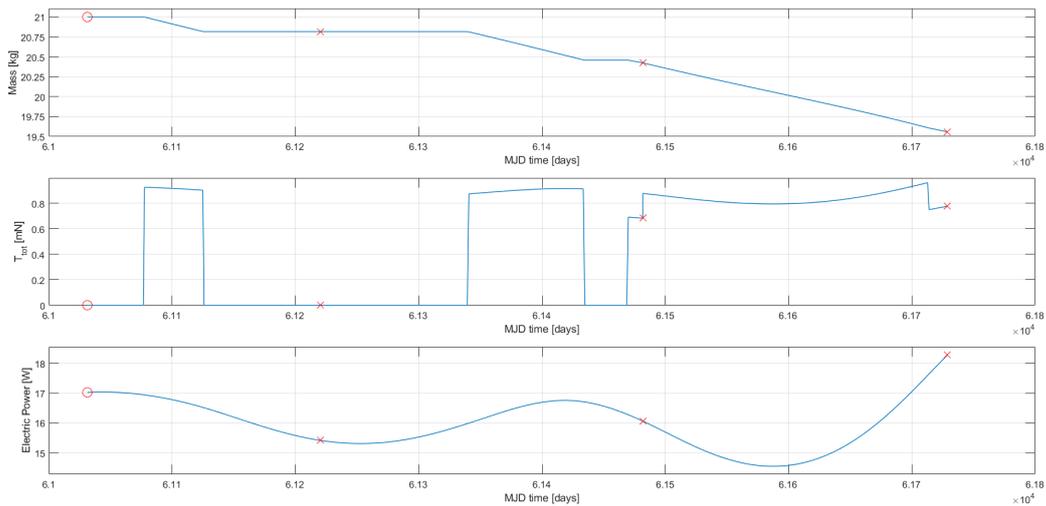
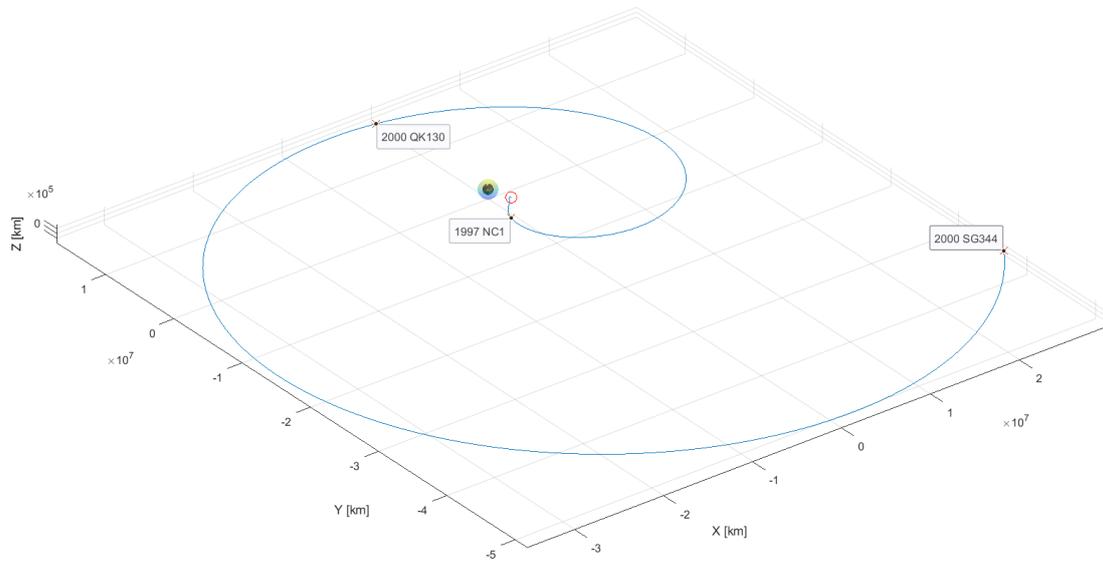
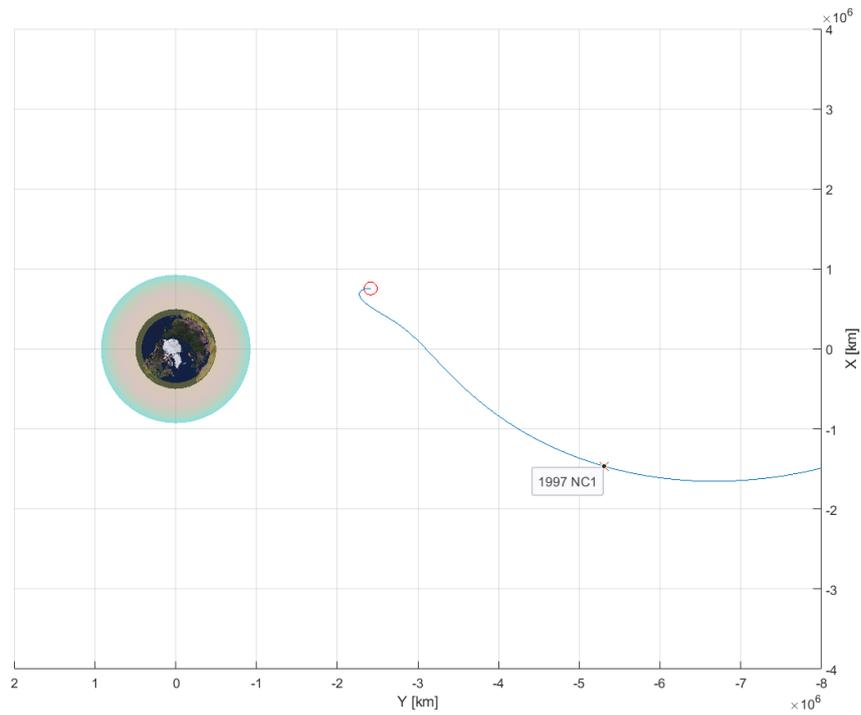


Figura 9.18. Andamento della massa, spinta totale e potenza elettrica lungo la traiettoria.



(a) Vista standard.



(b) Dettaglio sulla parte iniziale.

Figura 9.19. Rappresentazione della traiettoria nel sistema di riferimento ECI.

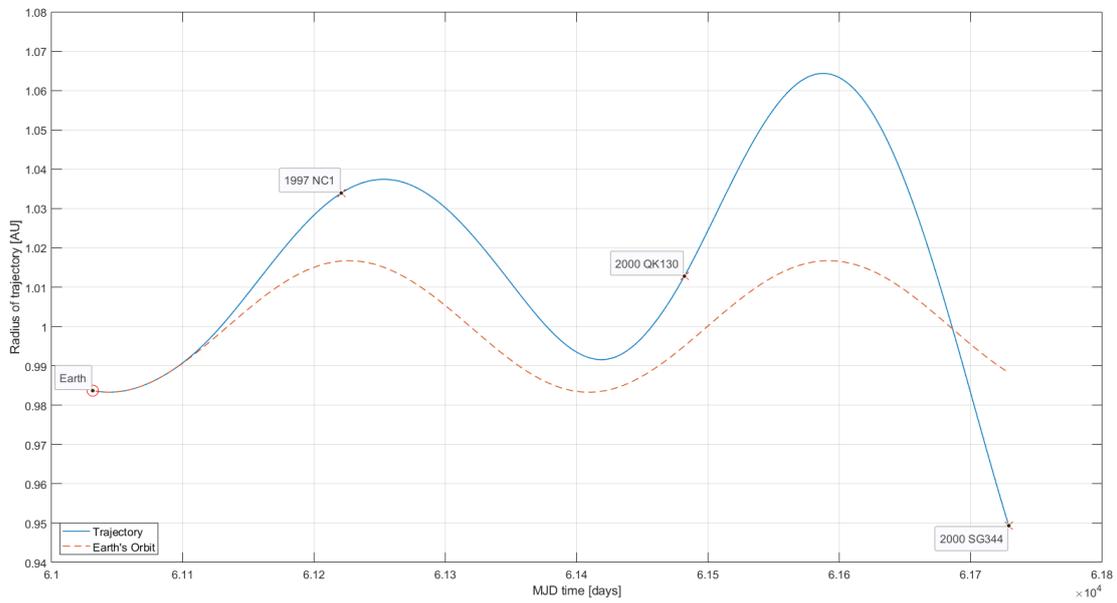


Figura 9.20. Andamento del raggio della traiettoria.

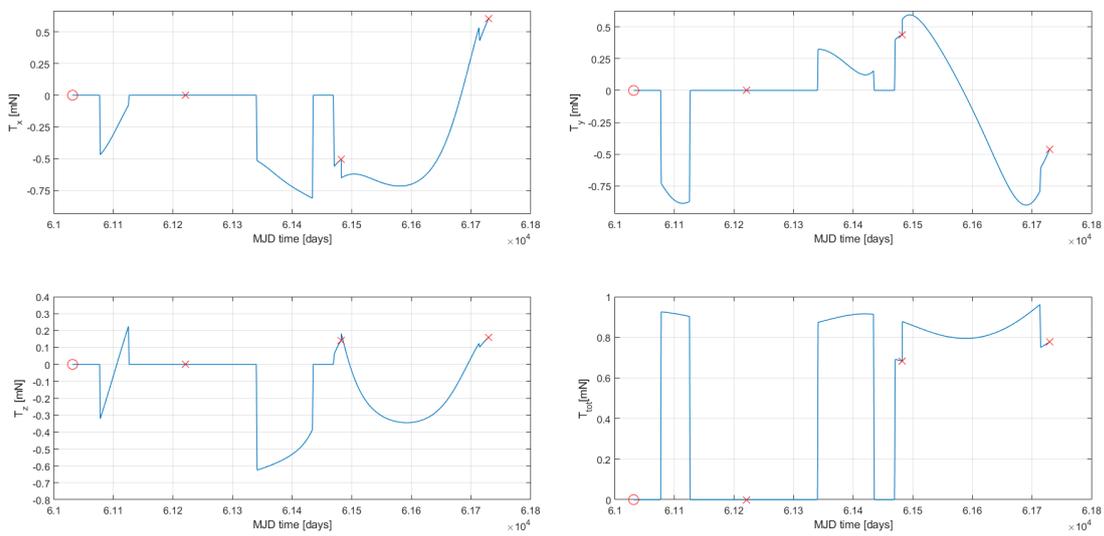
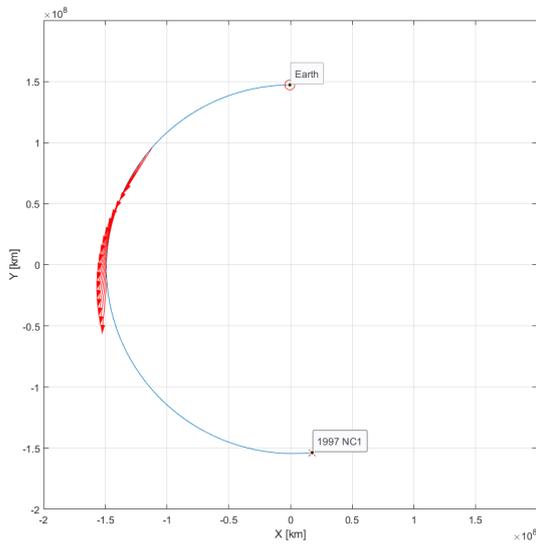
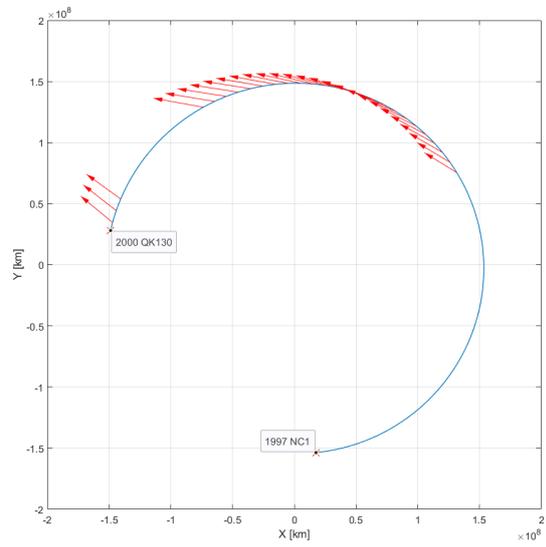


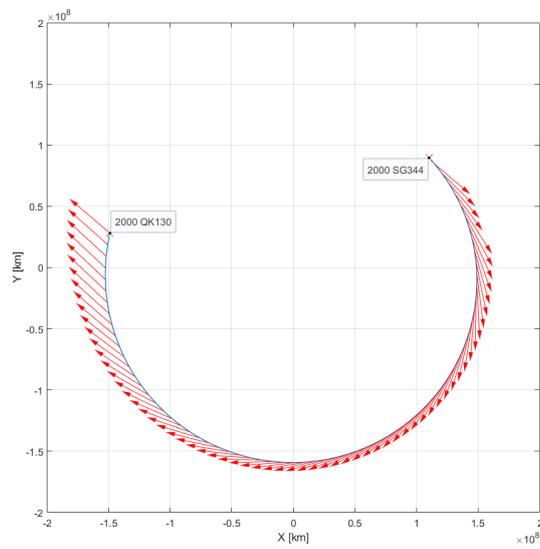
Figura 9.21. Spinta lungo i 3 assi e modulo.



(a) Arco 1.



(b) Arco 2.



(c) Arco 3.

Figura 9.22. Vettori spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y.

Capitolo 10

Traiettorie aventi rendezvous con 2000 SG344 e partenza a fine 2027

Si prosegue ora con le missioni più significative con partenza a fine 2027 e rendezvous finale con l'asteroide 2000 SG344. Sebbene quest'ultimo sia lo stesso corpo studiato nel capitolo precedente, il diverso periodo di partenza impone che tutti gli asteroidi per i flyby intermedi vengano rivisti.

La traiettoria di riferimento è mostrata in [Fig. 10.1](#). Un aspetto che salta subito all'occhio è che per i primi 250 giorni circa essa non si discosta minimamente dall'orbita terrestre. A conferma di ciò, altre simulazioni con partenze posticipate fino a maggio 2028 producevano variazioni trascurabili dei consumi, da 0.8137 km/s a 0.8090 km/s, una differenza di appena 47 m/s circa. Questo comportamento ha portato a tentare un'altra traiettoria con partenza ritardata, purtroppo senza risultati. Va però segnalato che il documento `dep2027.xlsx` non contiene asteroidi unnumbered, i quali forse avrebbero permesso di trovare combinazioni interessanti, pertanto ulteriori analisi potrebbero essere svolte. Ad ogni modo, i consumi della traiettoria di riferimento sono i più bassi tra quelli analizzati in questa tesi, rendendola particolarmente interessante.

10.1 Traiettoria 28: Earth – YORP – 2016 HO3 – 2000 SG344

Tra le traiettorie generate a partire dalla missione di riferimento 20, questa è quella con il consumo più alto. Ridurre ancora i consumi è risultato impossibile, pur provando a spostare la partenza e nonostante la durata sia davvero al limite. La ragione per cui viene comunque presentata è che presenta le velocità relative al flyby minori

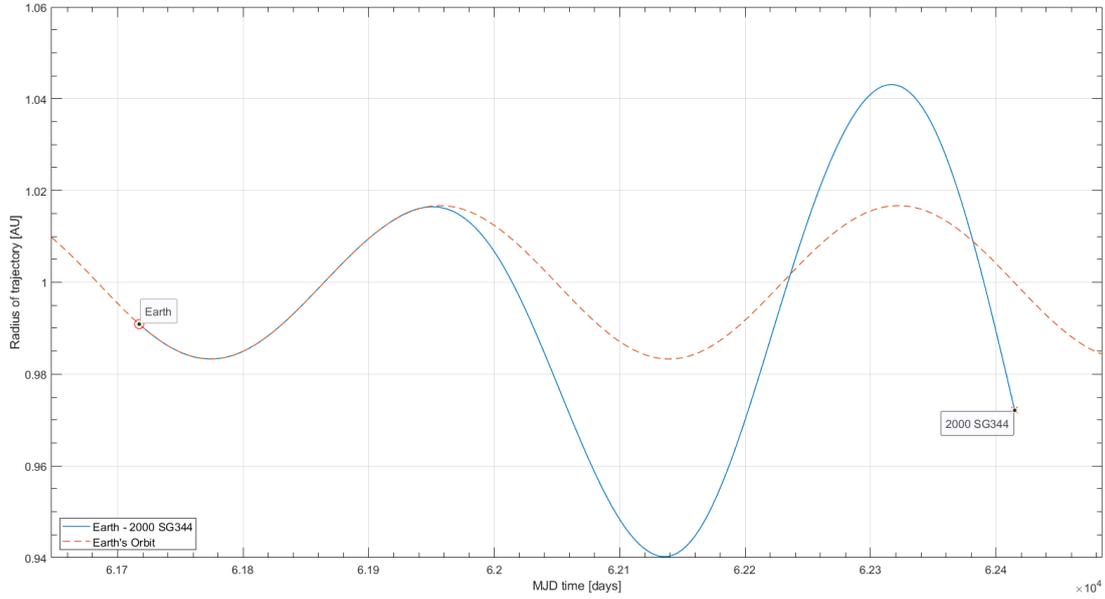


Figura 10.1. Rappresentazione in un grafico tempo – raggio della traiettoria di riferimento 20 Earth – 2000 SG344.

tra quelle trovate per questo gruppo di traiettorie, il che risulta molto utile viste le relativamente piccole dimensioni degli asteroidi intermedi. Attraverso le Fig. 10.7 e

Tabella 10.1. Principali caratteristiche della traiettoria 28.

	Corpo	Data flyby	V_{rel} [km/s]	ΔV [km/s]
Partenza	Earth	27/10/2027	–	–
Primo flyby	YORP	25/07/2028	7.434	0.582 10
Secondo flyby	2016 HO3	22/11/2028	5.485	0.351 77
Rendezvous	2000 SG344	17/10/2029	–	0.499 80
		Dur. 1.97 y	Max 7.434	Tot. 1.433 67

Fig. 10.8 si possono analizzare le fasi di accensione del propulsore: una prima fase relativamente breve induce una variazione trascurabile di eccentricità e semiasse maggiore, quasi come fosse uno station keeping, mentre nel frattempo una componente di spinta lungo l'asse z negativa induce una variazione di inclinazione. Una seconda accensione ne aumenta ancora il valore, raggiungendo gli 0.6° , l'eccentricità cresce mentre il semiasse maggiore diminuisce per ridurre il periastro, manovra necessaria per raggiungere dapprima YORP e in seguito 2016 HO3 (noto anche col

nome di Kamo‘oalewa). Nel secondo arco è principalmente l’inclinazione a cambiare in maniera significativa, mentre l’eccentricità cresce per aumentare l’ampiezza delle oscillazioni del raggio. Nel terzo arco avvengono due distinte fasi di spinta, entrambe quasi totalmente tangenziali: la prima concorde al moto, producendo una significativa crescita di semiasse maggiore ed eccentricità, la seconda in direzione opposta per rallentare a sufficienza e compiere il rendezvous finale.

Un aspetto interessante della traiettoria, così come lo sarà per anche per le successive, è che l’asteroide 2000 SG344 viene incontrato con anticipo rispetto alla Terra. Ciò avviene anche per il flyby con 2016 HO3 ma non per YORP, indice che sostituendo per il primo flyby un asteroide con le caratteristiche opportune si potrebbe avere un guadagno nei consumi. La particolare traiettoria piuttosto sconnessa da seguire per raggiungere YORP è ben visibile in [Fig. 10.3b](#).

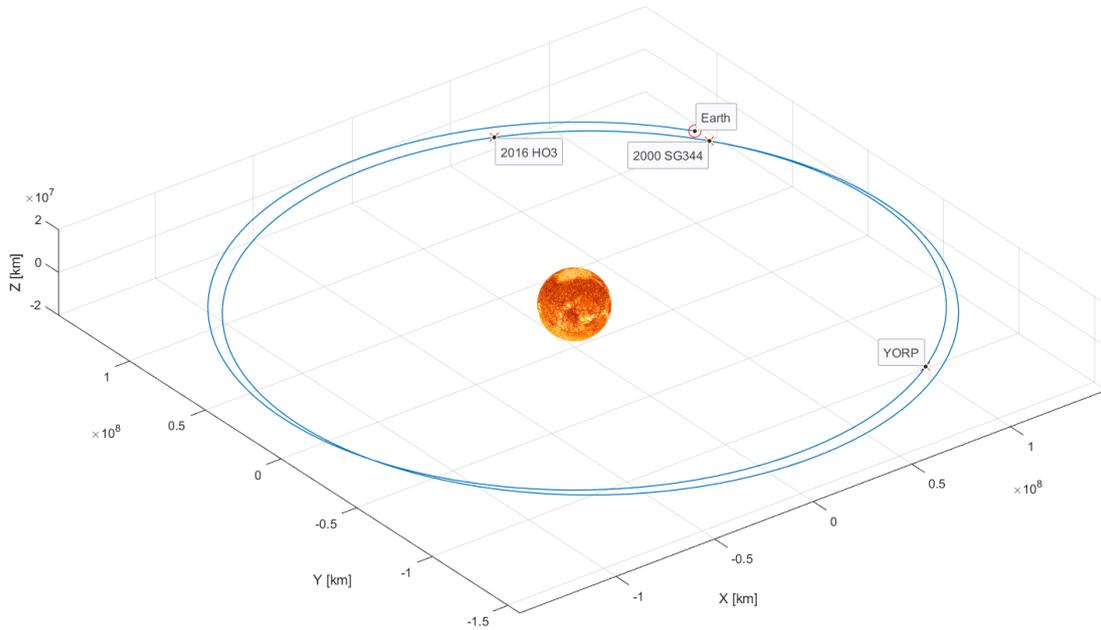
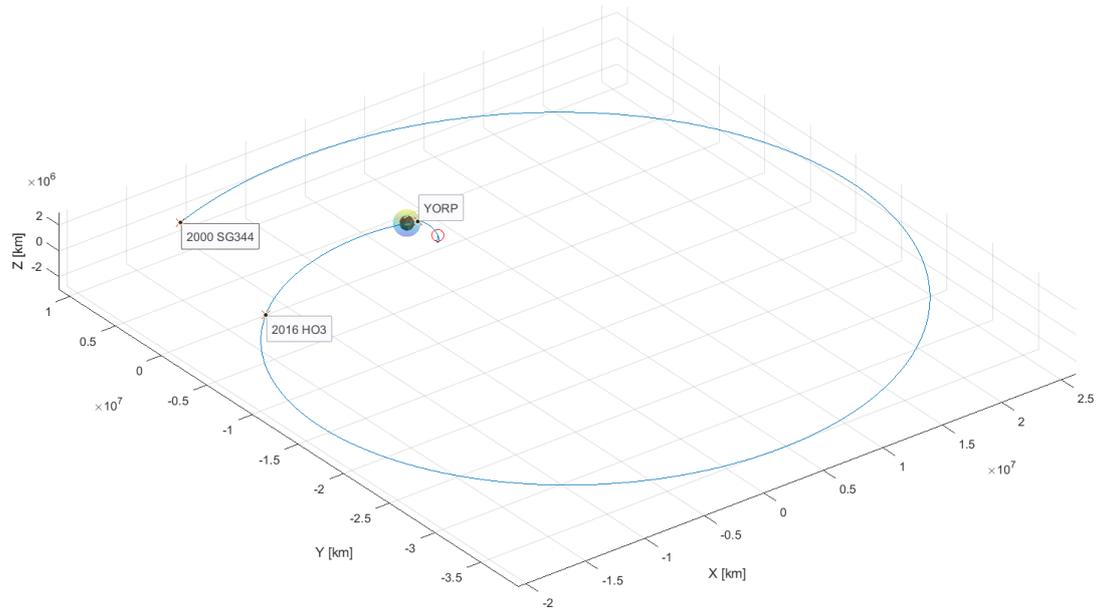
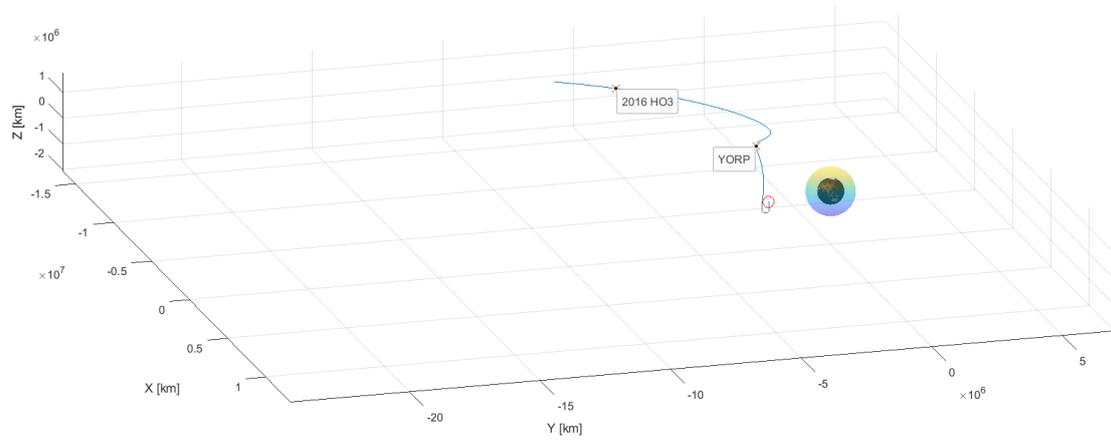


Figura 10.2. Rappresentazione della traiettoria in un riferimento eliocentrico – eclittico.



(a) Vista standard.



(b) Dettaglio sulla parte iniziale.

Figura 10.3. Rappresentazione della traiettoria nel sistema di riferimento ECI.

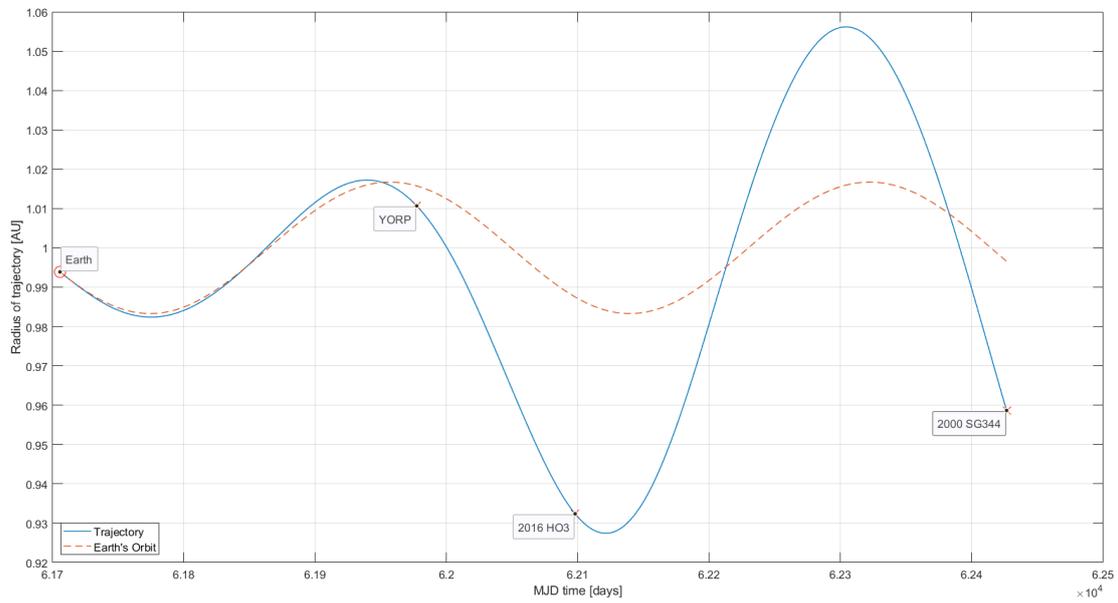


Figura 10.4. Andamento del raggio della traiettoria.

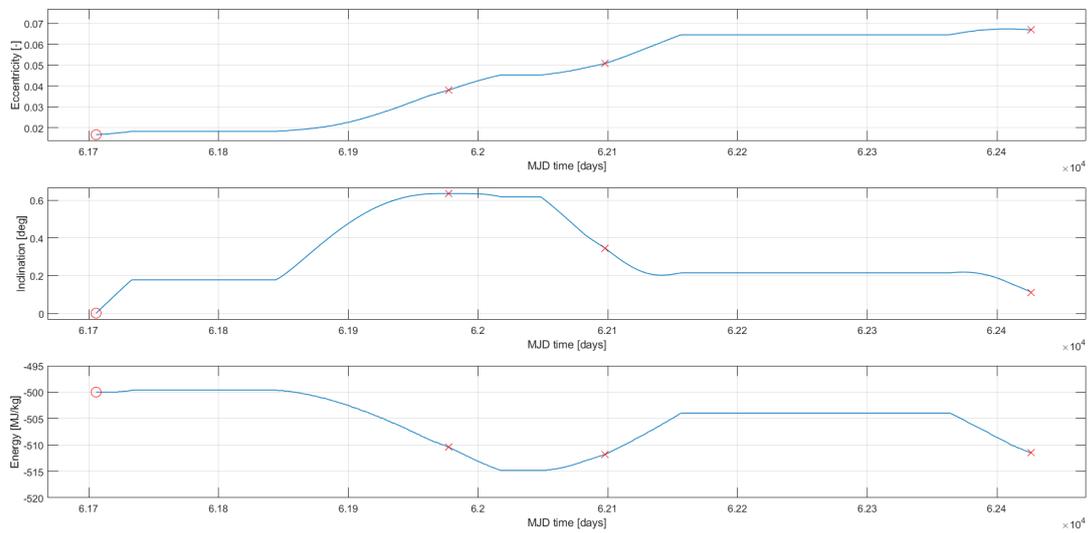


Figura 10.5. Andamento dei parametri orbitali eccentricità, inclinazione ed energia.

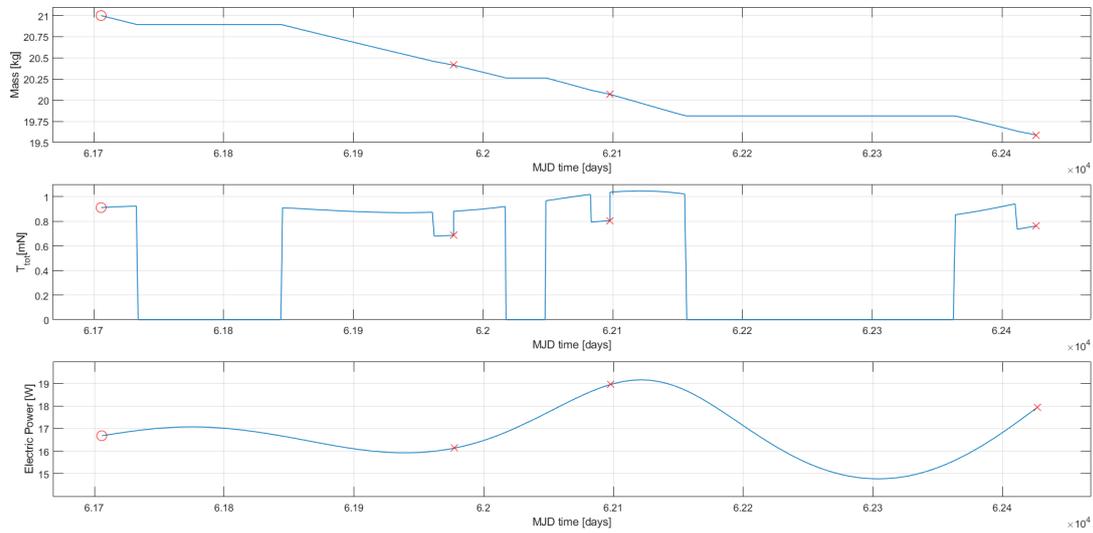


Figura 10.6. Andamento della massa, spinta totale e potenza elettrica lungo la traiettoria.

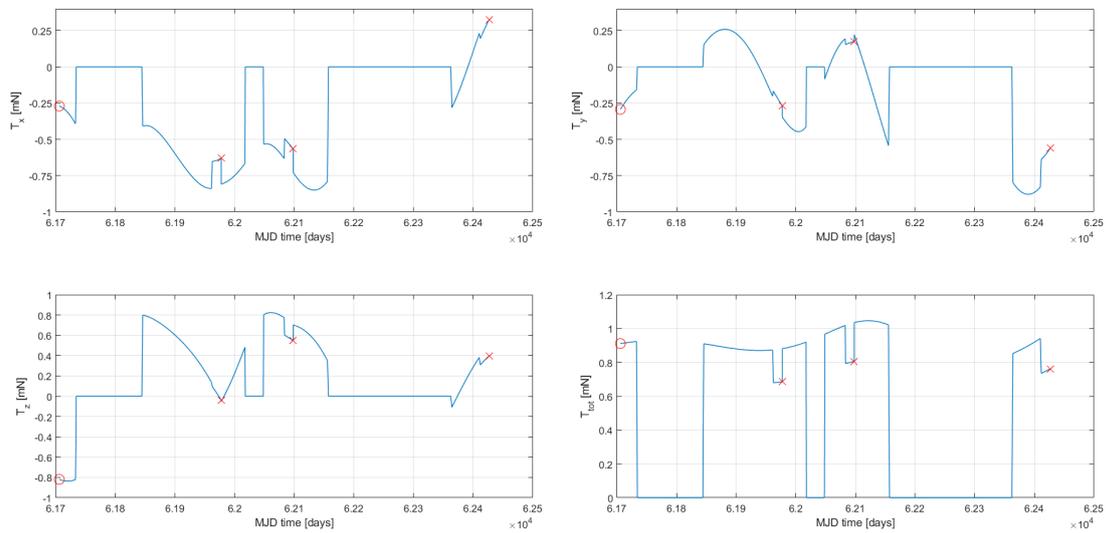
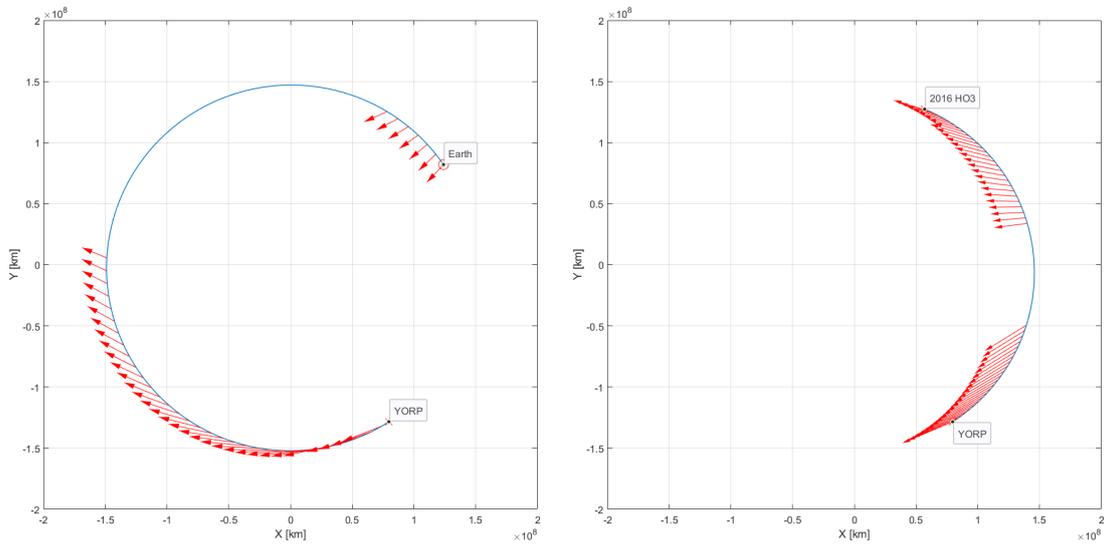
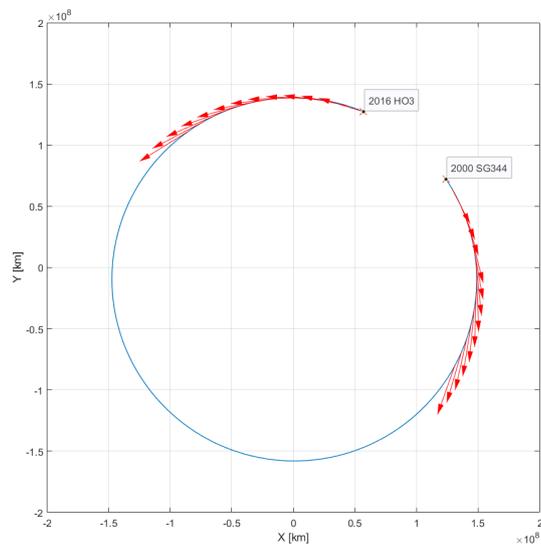


Figura 10.7. Spinta lungo i 3 assi e modulo.



(a) Arco 1.

(b) Arco 2.



(c) Arco 3.

Figura 10.8. Vettori spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y.

10.2 Traiettorie 23: Earth – 2001 WN5 – 2016 HO3 – 2000 SG344

Per questa seconda traiettoria si è optato per mantenere lo stesso secondo asteroide viste le interessanti caratteristiche, ma si è sostituito il primo con il numbered 2001 WN5 (PHA). Se si fa riferimento al database NASA riguardante i futuri close approaches da parte di NEOs [34], compare che in data 26/06/2028 2001 WN5 si troverà ad una distanza minima dalla Terra di 0.001 66 au, ovvero circa 250 000 km, proprio lo stesso giorno in cui avverrebbe il flyby. Questo comporta che:

1. Dal punto di vista scientifico, un flyby risulta di elevatissima importanza scientifica in quanto si analizzerebbe da vicino un asteroide di dimensioni notevoli (stimate tra 580 m e 1.3 km) e che rappresenta un potenziale pericolo in caso di impatto.
2. Dal punto di vista pratico, 2001 WN5 entrerebbe all'interno della sfera di influenza terrestre (che si ricorda essere di raggio 0.006 21 au) nella mattina del 25/06/2028, violando un'ipotesi del modello: ciò comporta che la traiettoria 22 perda di significato. Inoltre, durante il close approach l'asteroide sarà soggetto ad uno swing-by che ne modificherà l'orbita e la velocità, andando a violare l'ipotesi di parametri orbitali costanti ed esatti. Ne consegue che le traiettorie che prevedono un flyby con questo asteroide dopo il 26/06/2028 (come le traiettorie 22 e 26) perdano di significato.

Alla luce di ciò, si è deciso di forzare una soluzione con flyby con 2001 WN5 nella notte tra il 24 e il 25 Giugno e presentare questa variazione. Questo comporta chiaramente che la traiettoria sia sub-ottimale e con consumi più alti seppur buoni, ma verifichi tutte le ipotesi. Per poter osservare le differenze tra le due traiettorie si rimanda al [cap. 8](#), dove si potrà anche notare che 2001 WN5 compare in molte altre traiettorie grazie al suo close approach che lo rende una tappa versatile vista la vicinanza con la Terra e che permetterà al satellite di raggiungere un vasto set di NEAs per il secondo flyby.

Tabella 10.2. Principali caratteristiche della traiettoria 23.

	Corpo	Data flyby	V_{rel} [km/s]	ΔV [km/s]
Partenza	Earth	08/11/2027	–	–
Primo flyby	2001 WN5 (PHA)	25/06/2028	10.170	0.572 85
Secondo flyby	2016 HO3	24/11/2028	5.260	0.151 72
Rendezvous	2000 SG344	10/10/2029	–	0.500 73
		Dur. 1.91 y	Max 10.170	Tot. 1.225 31

Riguardo questa traiettoria, la velocità relativa al flyby con 2001 WN5 è maggiore del limite imposto (anche se di poco), ma vista la dimensione dell'asteroide stesso e la sua importanza scientifica si può comunque considerare accettabile. Per il secondo flyby, 2016 HO3 continua a permettere una bassa velocità relativa, oltre a consumi molto bassi.

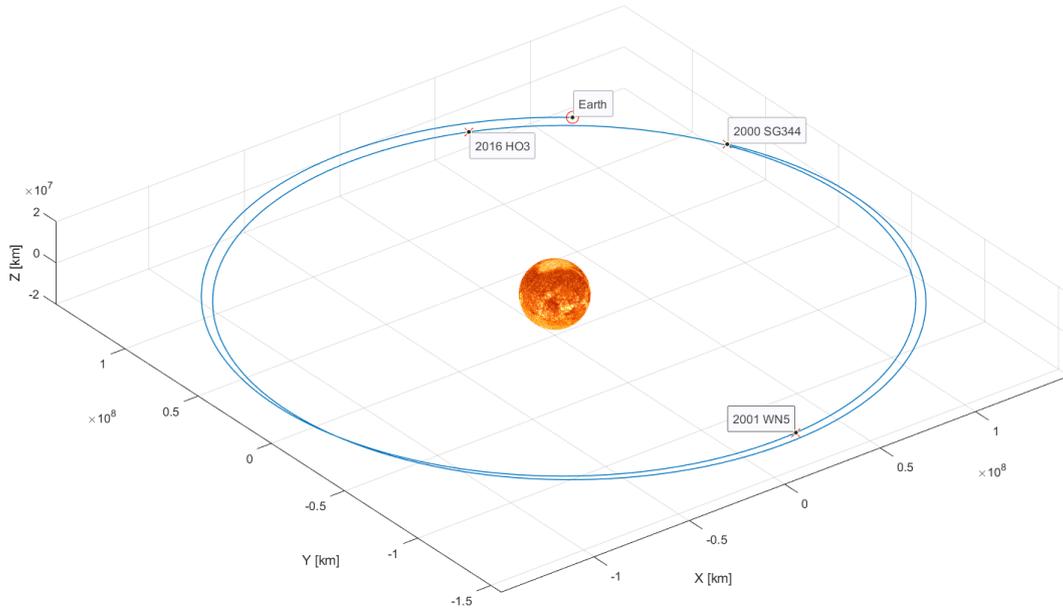
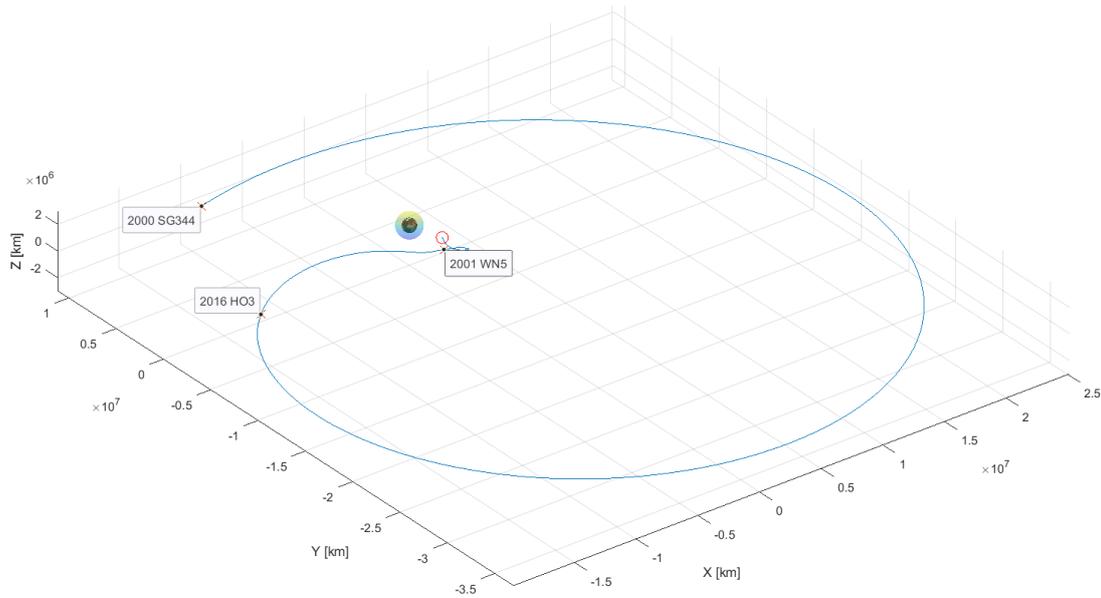


Figura 10.9. Rappresentazione della traiettoria in un riferimento eliocentrico – eclittico.

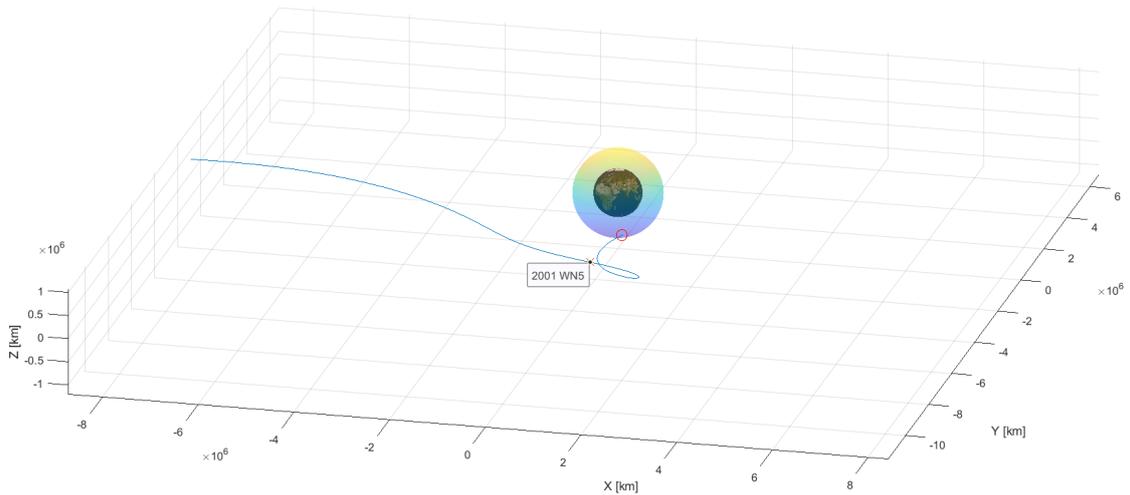
Inizialmente due distinte fasi propulsive piuttosto ravvicinate modificano leggermente i parametri orbitali: la prima, più lunga, subito dopo la partenza e con componente principalmente radiale verso l'interno, mentre la seconda in prossimità del perielio e con componente principalmente tangenziale concorde al moto, rendendola particolarmente efficace. Una terza fase di spinta, più lunga e simile a quella vista nella traiettoria precedente, riduce l'energia dell'orbita mentre aumenta inclinazione ed eccentricità. Complessivamente, il primo arco non ha permesso una riduzione apprezzabile dei consumi a causa della necessità di forzare il flyby in un'epoca sub-ottimale, mentre nel secondo arco si ha un risparmio significativo in termini di ΔV rispetto alla traiettoria precedente. Ciò si può spiegare dalla fase di spinta che avviene immediatamente dopo il primo flyby, quindi nei pressi dell'afelio: questa aumenta l'eccentricità mentre riduce il semiasse maggiore, necessario a raggiungere 2016 HO3. Nel terzo arco, una prima accensione nei pressi del perielio permette di aumentare il semiasse maggiore e l'eccentricità e, al termine di questo arco, la solita accensione di frenata riduce il semiasse maggiore e rallenta il satellite

fino al rendezvous.

In Fig. 10.10b si può ben osservare le fasi iniziali della traiettoria, dove il satellite si mantiene nei pressi della Terra compiendo piccole manovre fino a raggiungere 2001 WN5, per poi accelerare e allontanarsi da esso. Globalmente inoltre l'inclinazione rimane sempre piuttosto bassa, minore delle altre combinazioni osservate.



(a) Vista standard.



(b) Dettaglio sulla parte iniziale.

Figura 10.10. Rappresentazione della traiettoria nel sistema di riferimento ECI.

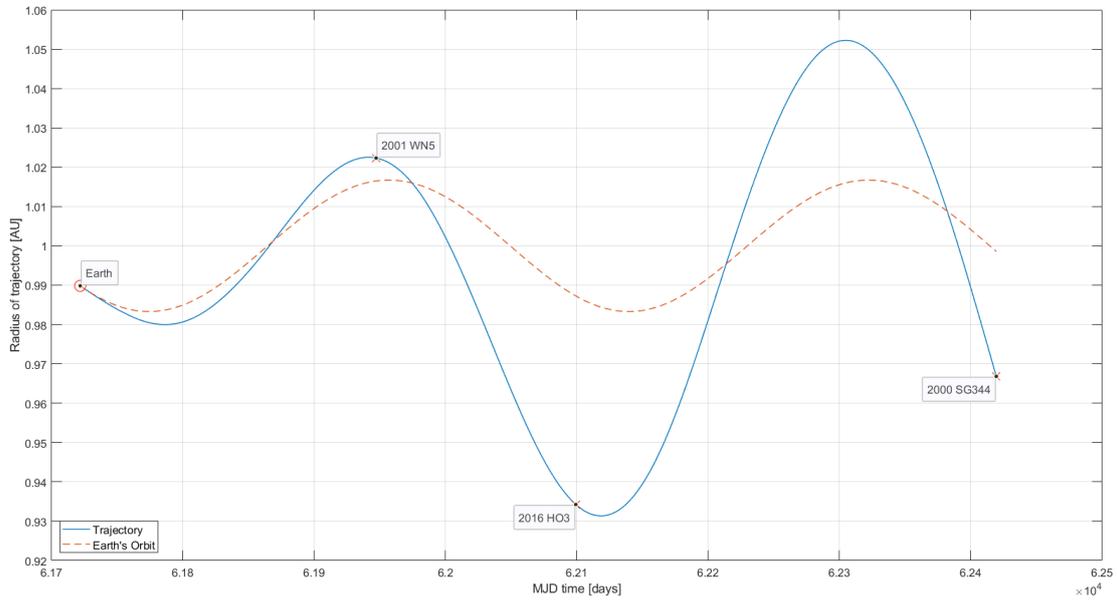


Figura 10.11. Andamento del raggio della traiettoria.

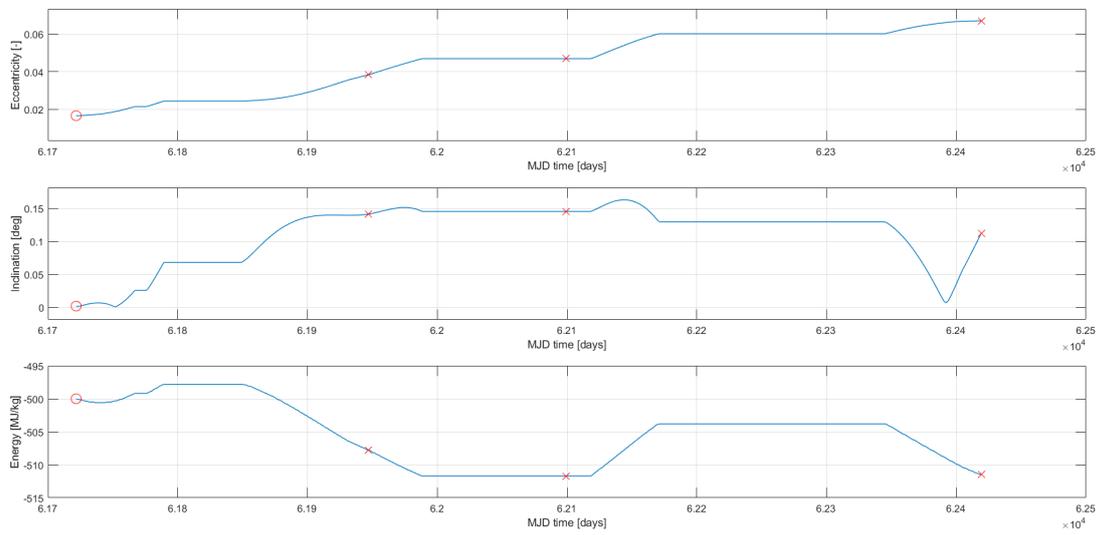


Figura 10.12. Andamento dei parametri orbitali eccentricità, inclinazione ed energia.

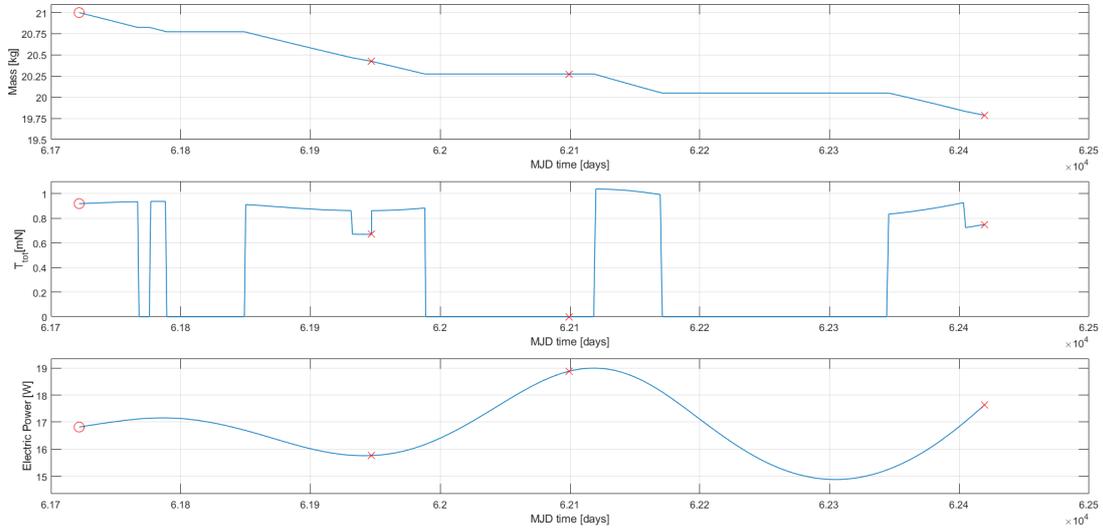


Figura 10.13. Andamento della massa, spinta totale e potenza elettrica lungo la traiettoria.

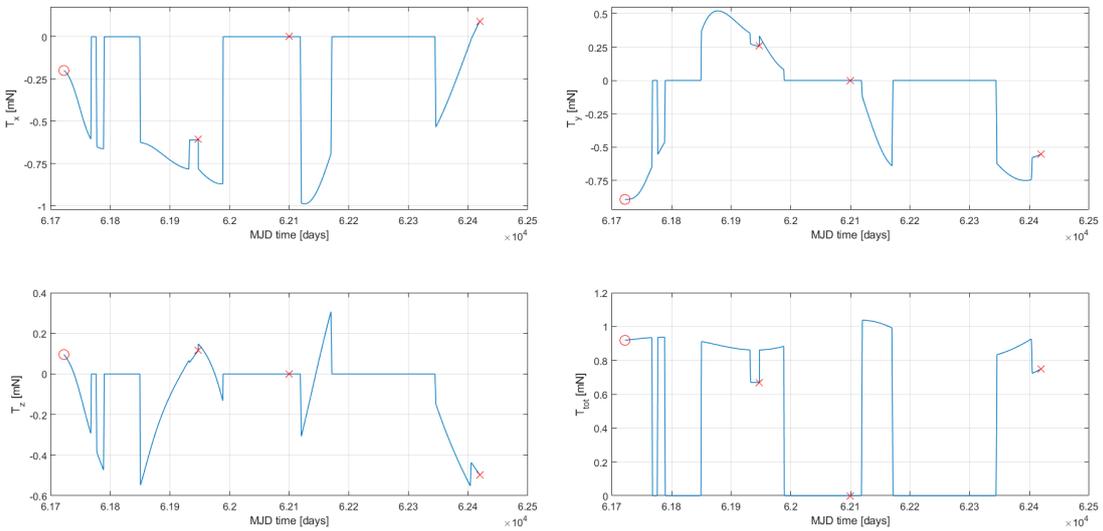
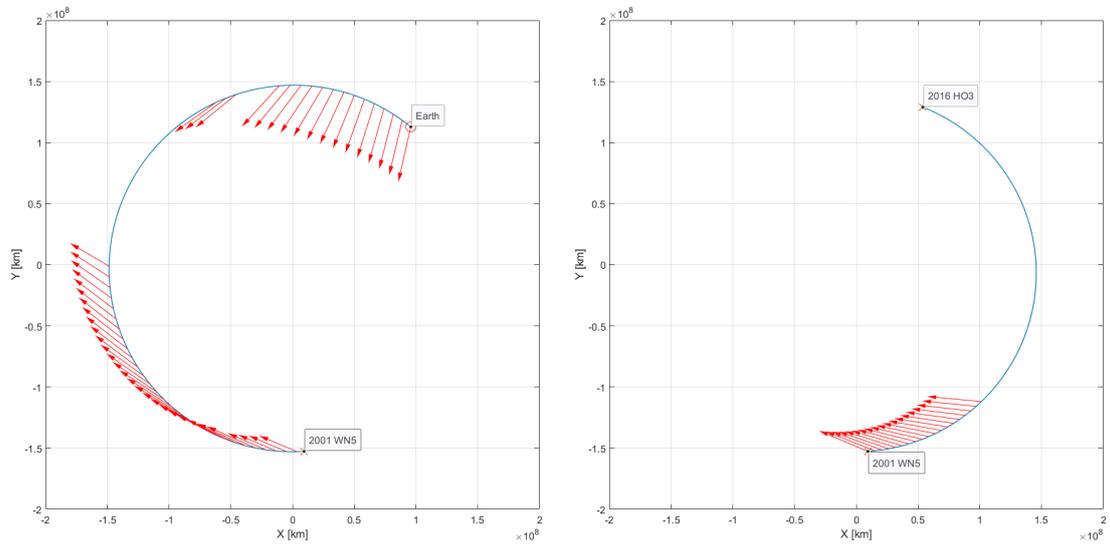
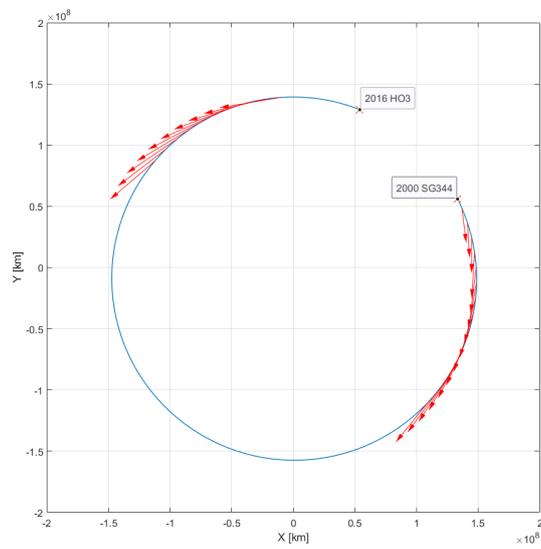


Figura 10.14. Spinta lungo i 3 assi e modulo.



(a) Arco 1.

(b) Arco 2.



(c) Arco 3.

Figura 10.15. Vettori spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y.

10.3 Traiettorie 25: Earth – 2001 WN5 – 2005 EE – 2000 SG344

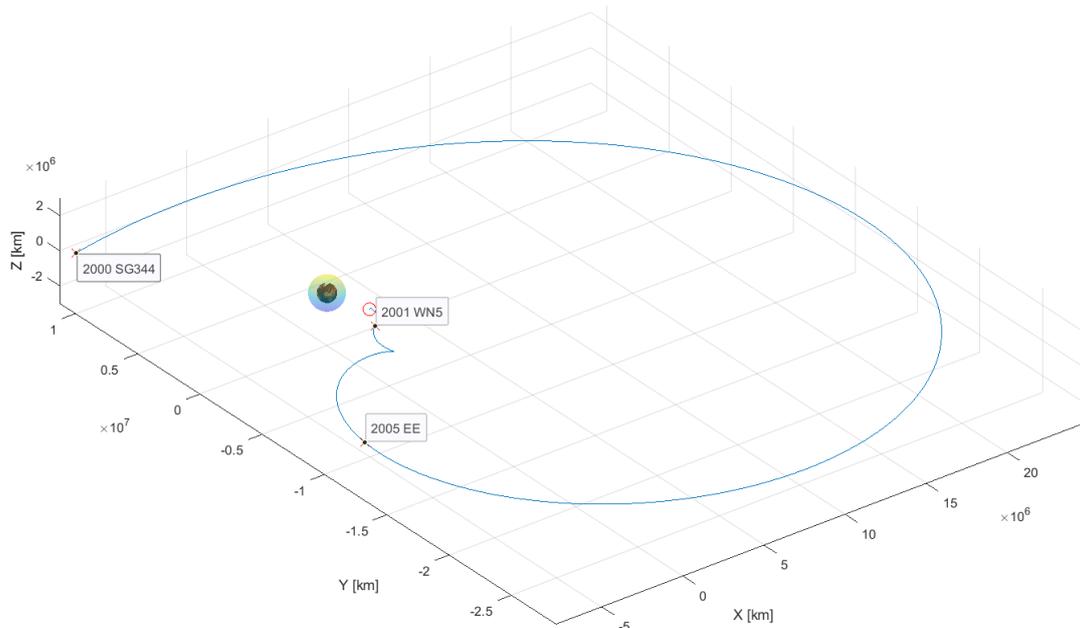
La traiettoria qui presentata è la più economica tra tutte quelle incontrate finora. Rispetto al riferimento 20, si ha un incremento di soli 0.16 km/s circa, risultando addirittura più economica della traiettoria di riferimento 30 e poco più dispendiosa del riferimento 10, pur presentando due flyby intermedi. Possiede inoltre un flyby con il già citato 2001 WN5 due giorni prima del suo close approach con la Terra, pertanto ancora al di fuori della sfera di influenza terrestre, rendendo la soluzione accettabile. Per il secondo flyby, invece, 2005 EE (PHA) possiede una velocità relativa di poco maggiore al consentito e una dimensione media, rendendolo un candidato non eccellente.

Tabella 10.3. Principali caratteristiche della traiettoria 25.

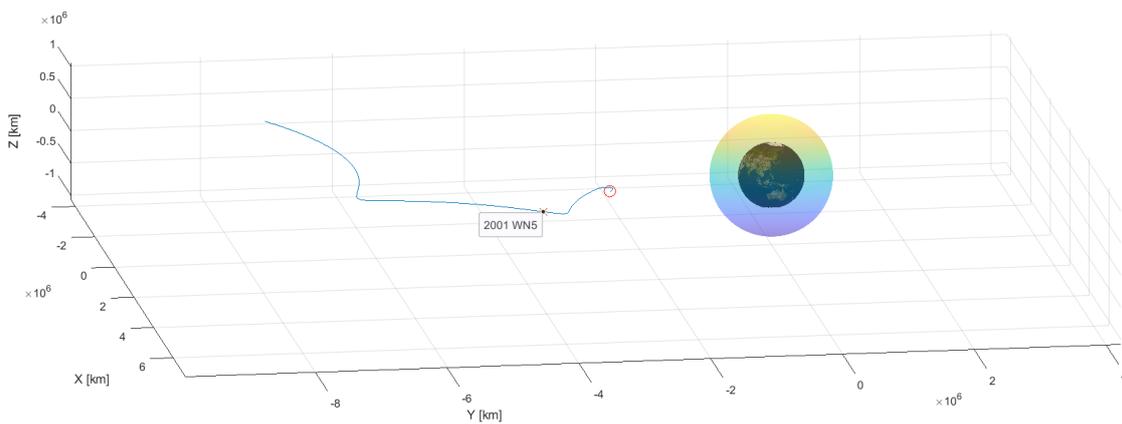
	Corpo	Data flyby	V_{rel} [km/s]	ΔV [km/s]
Partenza	Earth	08/11/2027	–	–
Primo flyby	2001 WN5 (PHA)	24/06/2028	10.392	0.260 62
Secondo flyby	2005 EE (PHA)	07/01/2029	10.073	0.356 80
Rendezvous	2000 SG344	05/10/2029	–	0.360 06
		Dur. 1.91 y	Max 10.372	Tot. 0.977 48

Già a partire dal primo arco i consumi si riducono in maniera considerevole grazie alle molto più brevi accensioni visibili in Fig. 10.15: la prima spinta è molto breve e radiale interna, seguita da una seconda breve accensione nei pressi del perielio; la terza, invece, è più lunga e con una componente tangenziale frenante, ma ad ogni modo ben più breve di quella trovata nella traiettoria precedente, permettendo globalmente una riduzione di quasi 0.3 km/s. Il secondo arco è invece più dispendioso rispetto alla traiettoria 23 per effetto di una lunga manovra frenante che avviene al suo inizio, necessaria per ridurre il periastro e raggiungere l'asteroide 2005 EE, incontrato esattamente al perielio della traiettoria. Tra la fine del secondo arco e l'inizio del terzo una manovra di accelerazione incrementa tutti e tre i parametri orbitali: poiché ciò avviene nel periastro, la manovra risulta particolarmente efficiente. Una seconda accensione in prossimità dell'afelio riduce il semiasse maggiore e incrementa l'eccentricità, indirizzando così il satellite verso l'asteroide 2000 SG344. La particolarità maggiore della traiettoria è che per completare il rendezvous non è necessario realizzare un'accensione finale frenante, una caratteristica unica tra le traiettorie finora trattate: questa è la ragione del ridotto consumo e che rende la missione maggiormente interessante.

Il significativo avanzo di propellente che si ha a fine missione permette una maggiore versatilità di questa traiettoria: si può cercare di ridurre la velocità al flyby, cercando una soluzione sub-ottimale che minimizzi questi parametri, oppure ancora studiare una fase scientifica più complessa, con uno studio approfondito del rendezvous. Ciò però necessita di ulteriori analisi che però esulano dallo scopo di questa tesi.



(a) Vista standard.



(b) Dettaglio sulla parte iniziale.

Figura 10.16. Rappresentazione della traiettoria nel sistema di riferimento ECI.

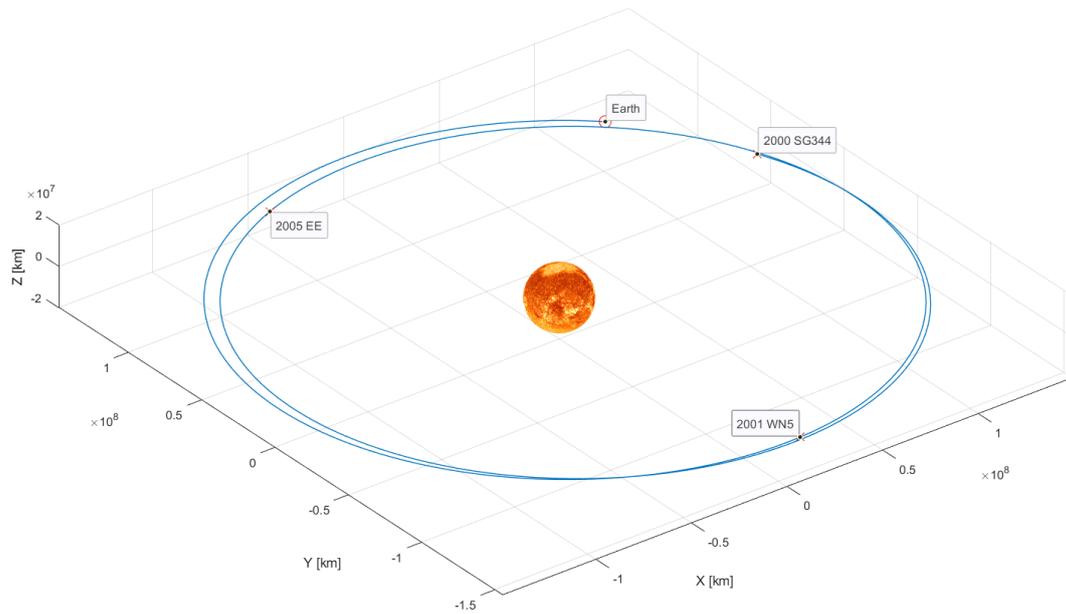


Figura 10.17. Rappresentazione della traiettoria in un riferimento eliocentrico – eclittico.

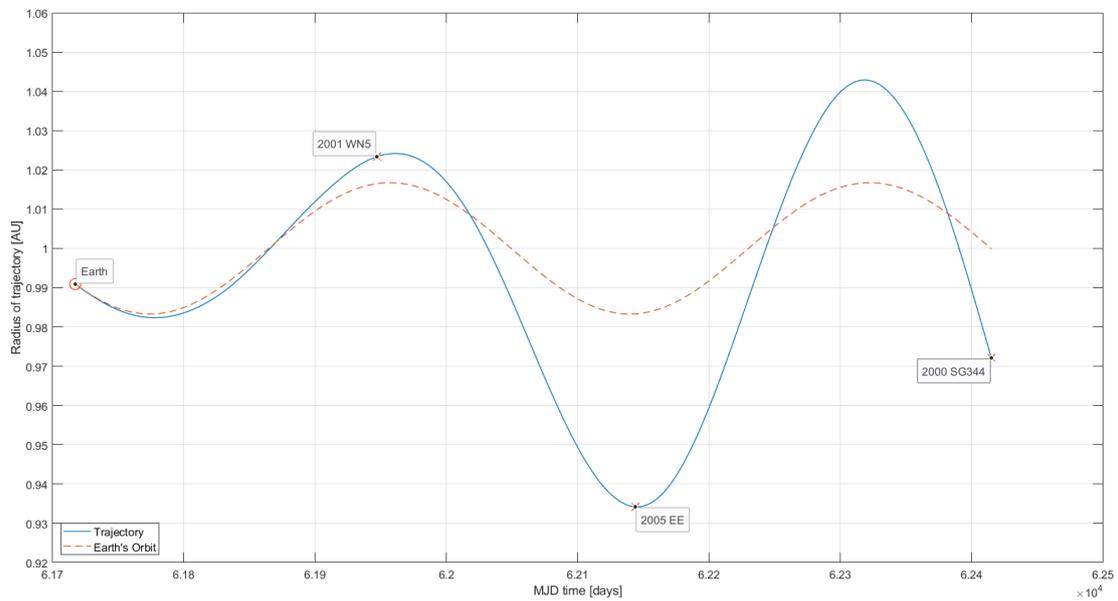


Figura 10.18. Andamento del raggio della traiettoria.

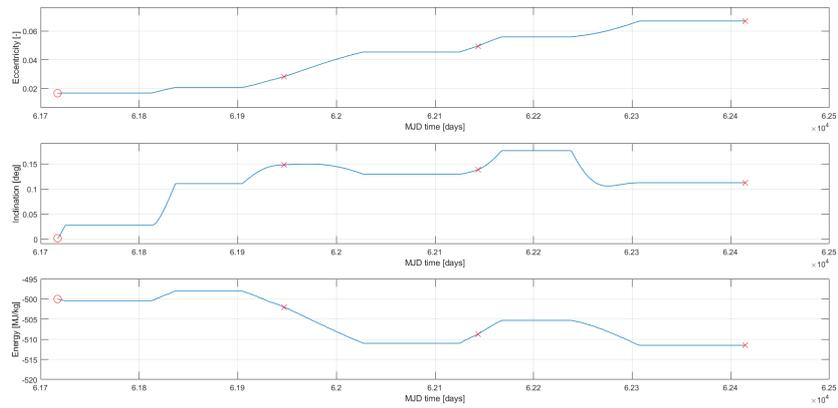


Figura 10.19. Andamento dei parametri orbitali eccentricità, inclinazione ed energia.

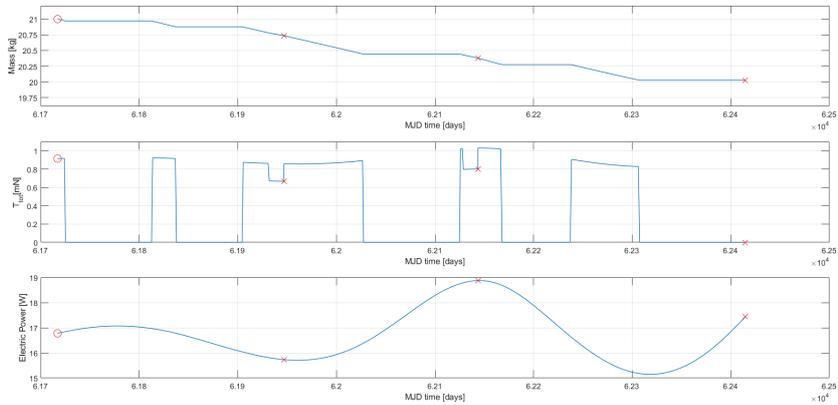


Figura 10.20. Andamento della massa, spinta totale e potenza elettrica lungo la traiettoria.

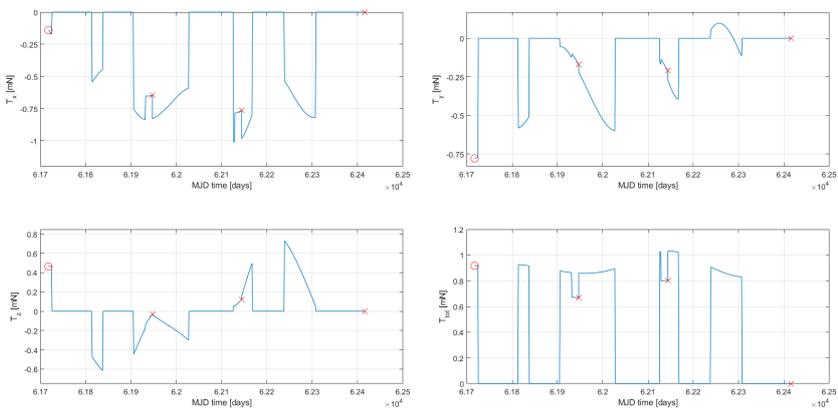
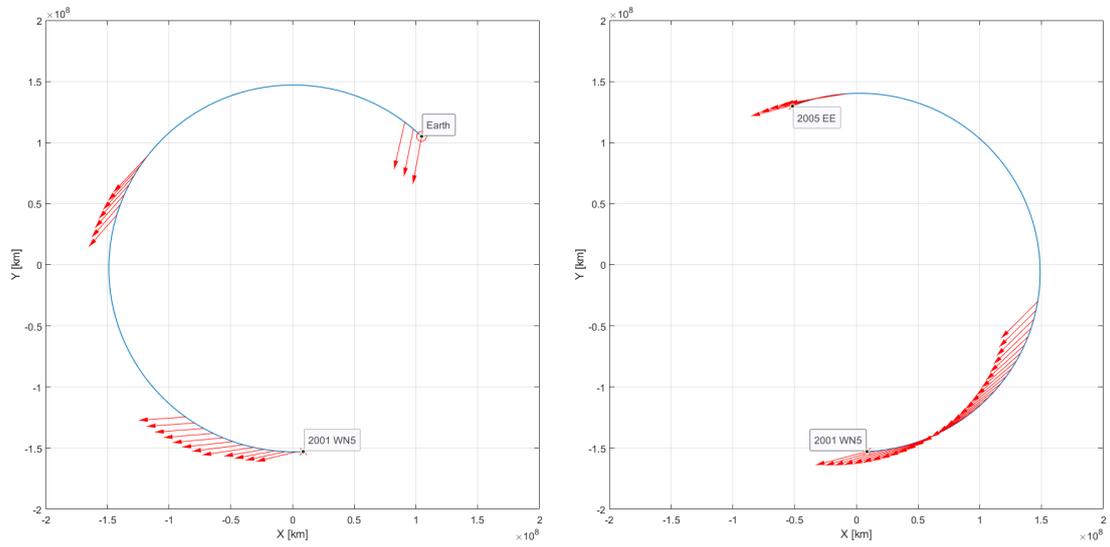
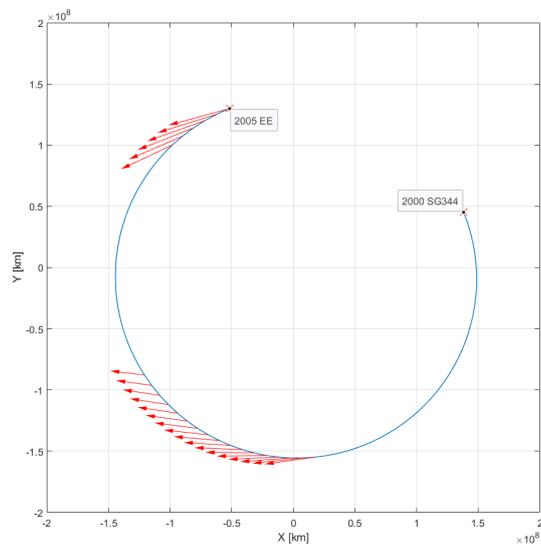


Figura 10.21. Spinta lungo i 3 assi e modulo.



(a) Arco 1.

(b) Arco 2.



(c) Arco 3.

Figura 10.22. Vettori spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y.

Capitolo 11

Traiettorie aventi rendezvous con 2012 TF79

In questo quarto e ultimo capitolo dedicato alla presentazione dei risultati ottenuti verranno analizzate le sequenze ottenute a partire dai rendezvous con l'asteroide 2012 TF79. Sebbene siano state trovate due possibili traiettorie di riferimento, esse verranno presentate nello stesso capitolo visto il limitato numero di traiettorie ottenute a causa dei pochi asteroidi intermedi raggiungibili.

La traiettoria 30 (Fig. 11.1) non solo presenta il ΔV maggiore tra tutte quelle trovate, ma la finestra temporale per la partenza risulta scomoda per la realizzazione dei due flyby intermedi: per il secondo flyby non ci sono problemi particolari, ma per il primo è raggiungibile solo un asteroide unnumbered, 2015 WN1, per di più di piccole dimensioni ($H = 26.5$).

Nei vari tentativi compiuti per cercare una soluzione alternativa migliore, si è osservato che per i primi 6 mesi la traiettoria 30 rimane comunque molto vicina all'orbita terrestre. Si è pensato perciò di ritardare la partenza e si è incontrata una seconda soluzione di ottima qualità, ovvero la traiettoria di riferimento 40 (Fig. 11.2), la seconda più economica: questa permette di realizzare come primo flyby quello che con la traiettoria 30 era il secondo, oltre a concedere una buona scelta per il successivo flyby visto il sostanzioso ritardo che è necessario accumulare per raggiungere 2012 TF79.

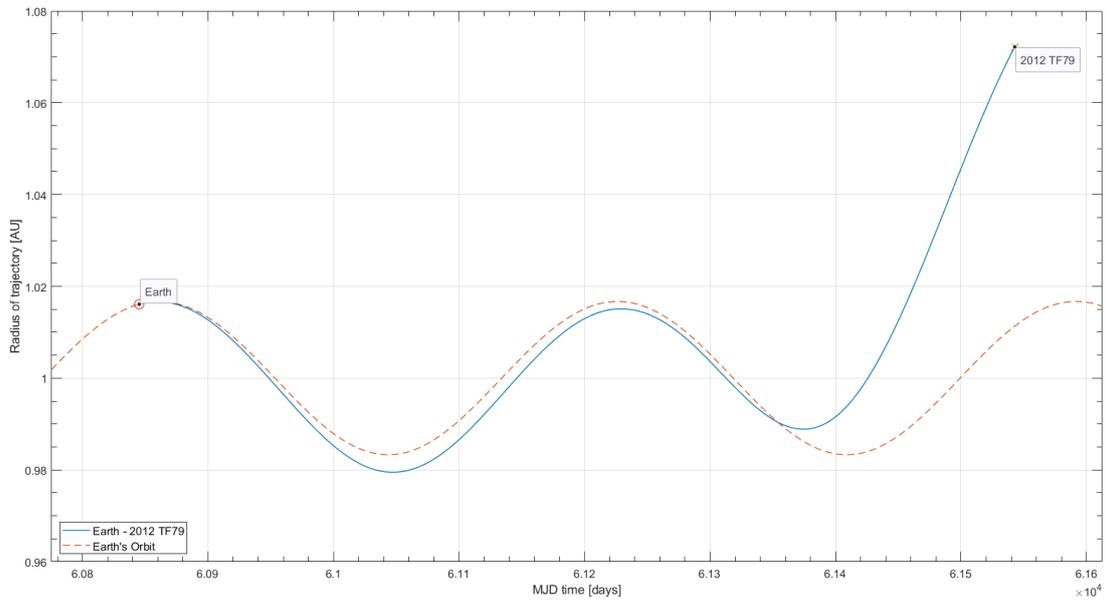


Figura 11.1. Rappresentazione in un grafico tempo – raggio della traiettoria di riferimento 30 Earth – 2012 TF79.

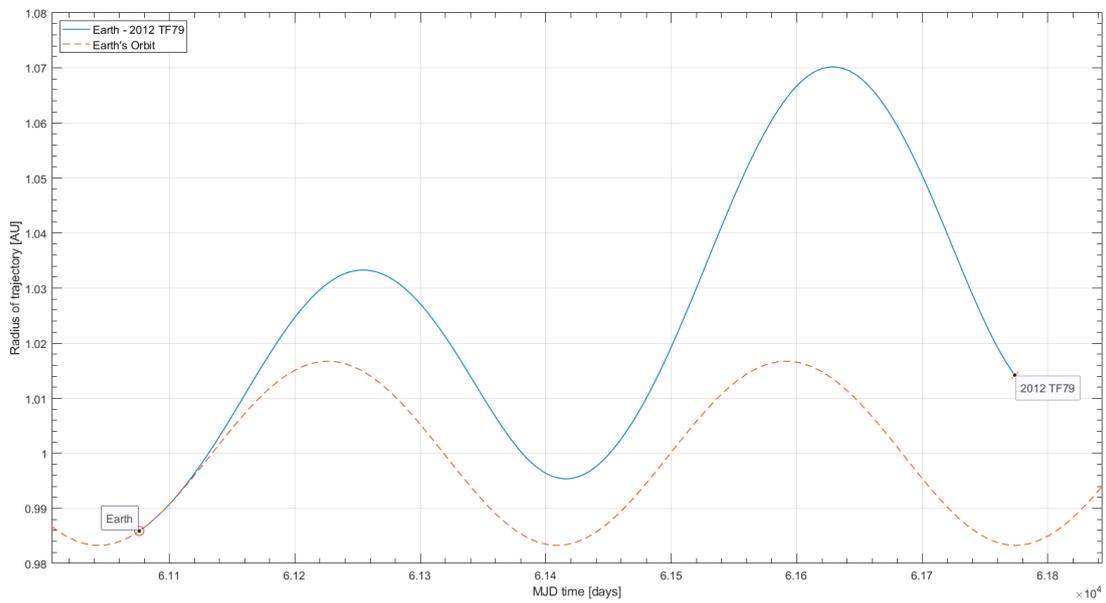


Figura 11.2. Rappresentazione in un grafico tempo – raggio della traiettoria di riferimento 40 Earth – 2012 TF79.

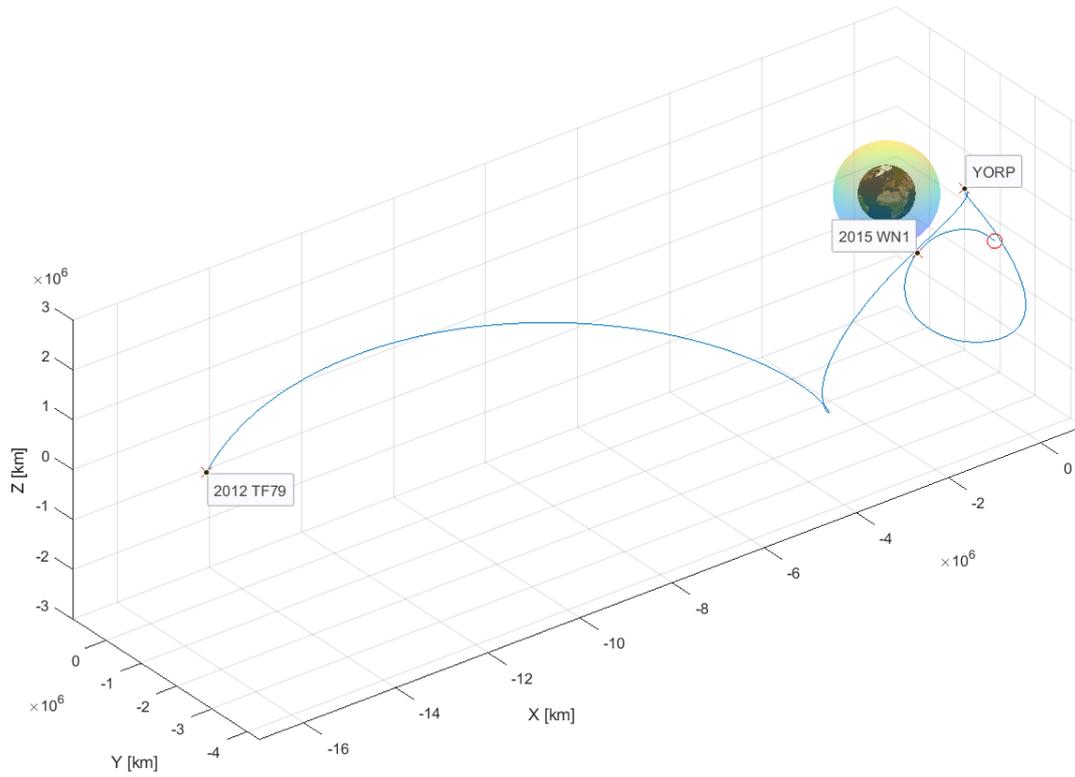
11.1 Traiettorie 33: Earth – 2015 WN1 – YORP – 2012 TF79

La traiettoria in questione presenta il consumo più basso tra quelle trovate a partire dalla traiettoria di riferimento 30. Poiché le altre traiettorie incontrate presentano o un solo flyby intermedio o 2 flyby di cui il primo con l'unnumbered 2015 WN1 e consumi maggiori, si è ritenuto la suddetta la più interessante.

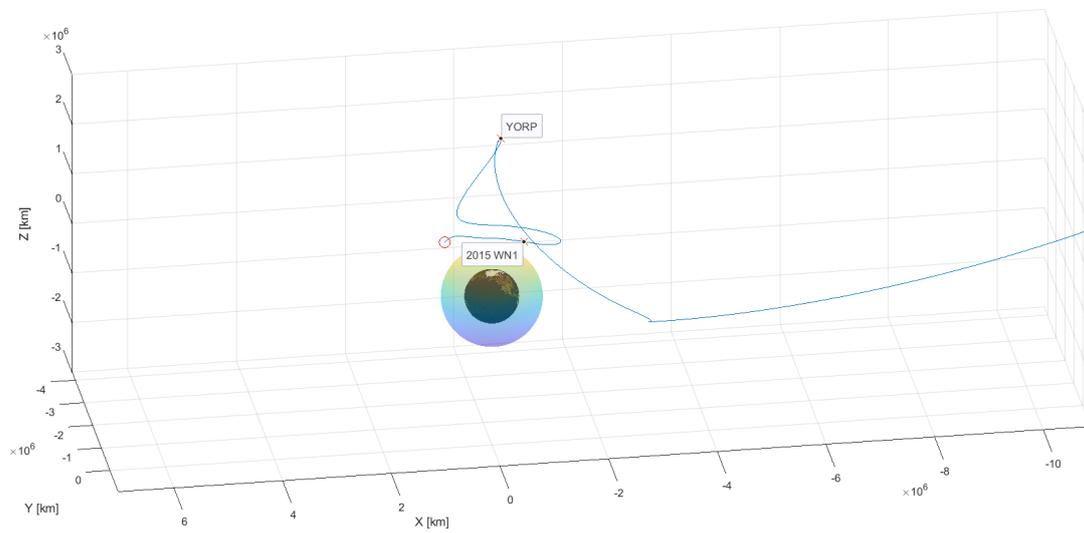
Tabella 11.1. Principali caratteristiche della traiettoria 33.

	Corpo	Data flyby	V_{rel} [km/s]	ΔV [km/s]
Partenza	Earth	19/06/2025	–	–
Primo flyby	2015 WN1	10/11/2025	8.759	0.163 00
Secondo flyby	YORP	26/07/2026	7.233	0.271 38
Rendezvous	2012 TF79	23/05/2027	–	0.763 92
		Dur. 1.93 y	Max 8.759	Tot. 1.198 29

La traiettoria rimane piuttosto compatta sull'orbita terrestre, discostandosi solamente nella fase finale per poter raggiungere infine 2012 TF79. Ciò comporta che il satellite si trovi sempre molto vicino alla Terra durante i primi due flyby, come è facilmente osservabile attraverso la Fig. 11.3. Di fatto, come si osserva in Fig. 11.5, il satellite oscilla seguendo un andamento circa sinusoidale molto simile a quello terrestre ma sfasato rispetto alla Terra. Questo sfasamento viene ottenuto attraverso un periodo di spinta all'inizio del primo arco, che genera variazioni piccole di semiasse maggiore ed eccentricità. Come si vede infatti in Fig. 11.6, queste due ultime grandezze variano molto poco durante i primi due archi, mentre nel frattempo l'inclinazione raggiunge già valori significativi, nell'intorno di 0.6° , come è facilmente intuibile visti gli ingenti valori di spinta T_z in questi due archi (Fig. 11.8). Nel terzo arco invece è necessario aumentare il semiasse e l'eccentricità per raggiungere 2012 TF79, e ciò avviene attraverso due lunghe accensioni con componente tangenziale concorde alla direzione del moto. Nel frattempo è necessario anche incrementare ulteriormente l'inclinazione fino a circa 1° per annullare l'angolo tra il satellite e l'asteroide 2012 TF79 e poter realizzare il rendezvous.



(a) Vista standard.



(b) Dettaglio sulla parte iniziale.

Figura 11.3. Rappresentazione della traiettoria nel sistema di riferimento ECI.

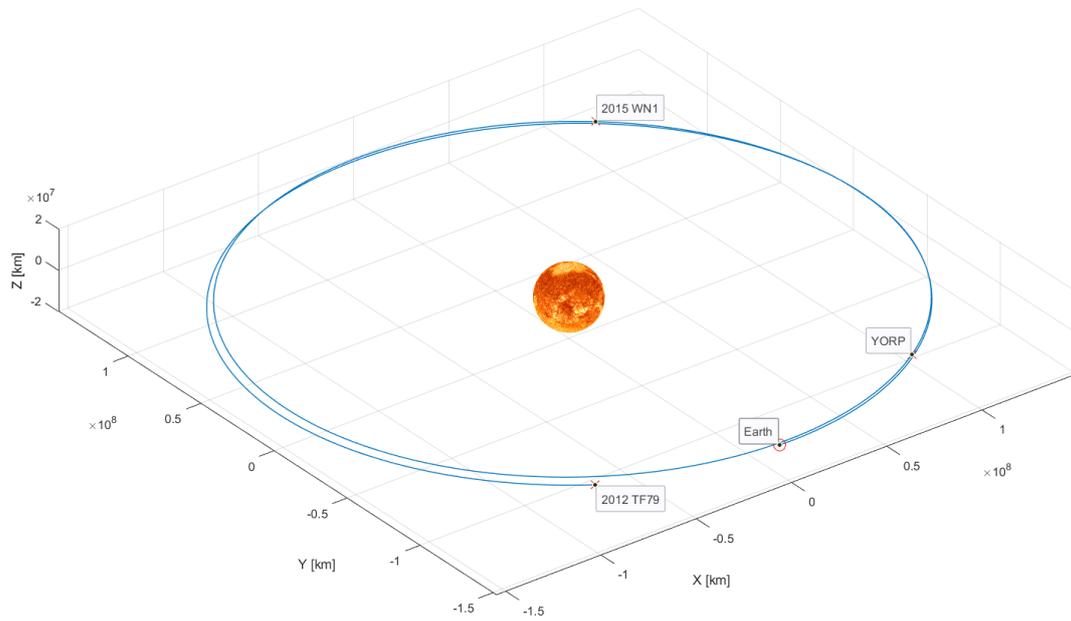


Figura 11.4. Rappresentazione della traiettoria in un riferimento eliocentrico – eclittico.

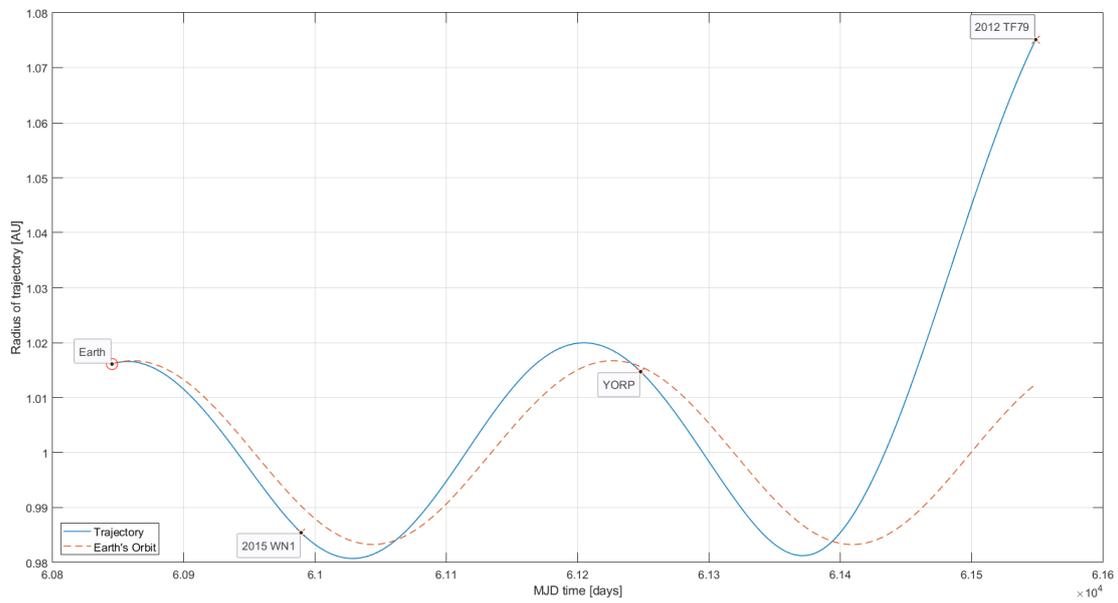


Figura 11.5. Andamento del raggio della traiettoria.

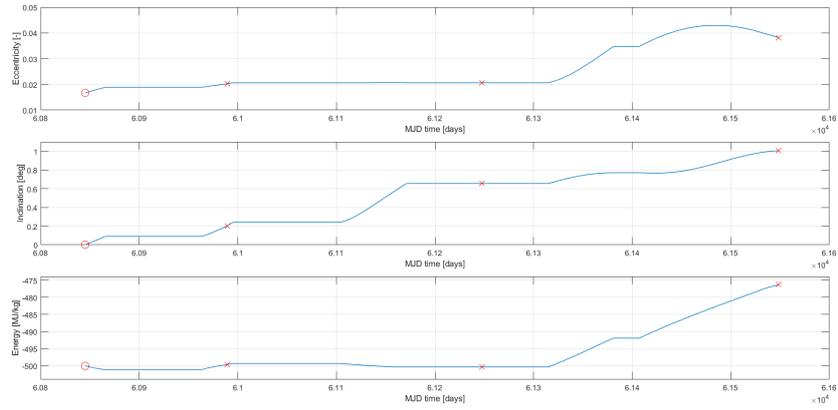


Figura 11.6. Andamento dei parametri orbitali eccentricità, inclinazione ed energia.

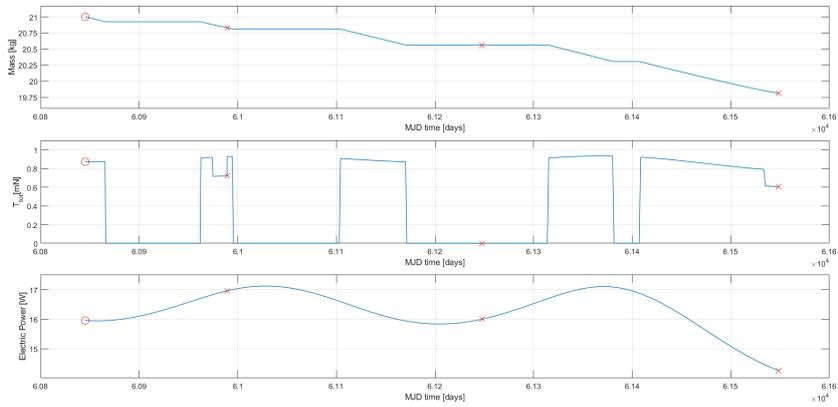


Figura 11.7. Andamento della massa, spinta totale e potenza elettrica lungo la traiettoria.

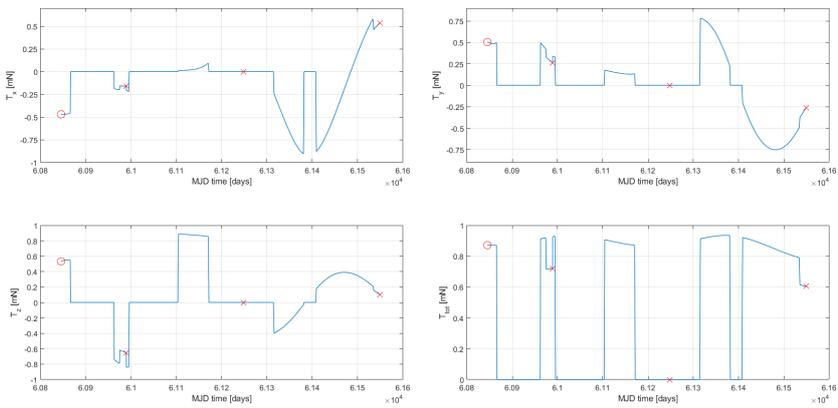
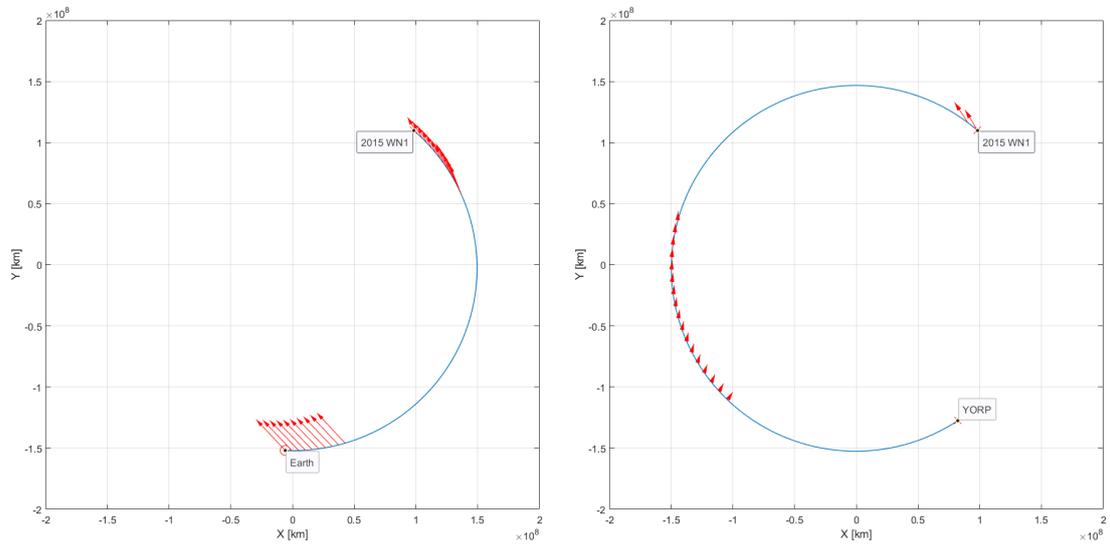
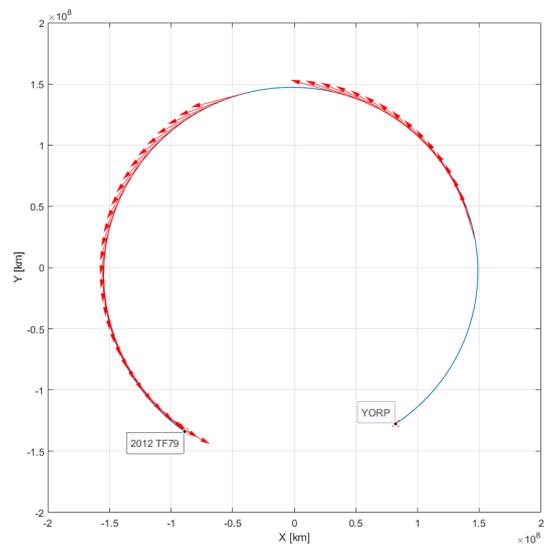


Figura 11.8. Spinta lungo i 3 assi e modulo.



(a) Arco 1.

(b) Arco 2.



(c) Arco 3.

Figura 11.9. Vettori spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y.

11.2 Traiettorie 42: Earth – YORP – 2000 QK130 – 2012 TF79

La combinazione in questione, così come la successiva, è realizzata a partire dalla traiettoria di riferimento presente in Fig. 11.2. Rispetto ad essa, l'aggiunta di due flyby comporta un incremento di ΔV pari a poco meno di 0.2 km/s, un risultato molto buono. Compare nuovamente l'asteroide YORP già visto nei capitoli precedenti, in questo caso per il secondo flyby e 3 giorni dopo rispetto alla traiettoria precedente, e il PHA 2000 QK130. Si può anche notare che gli asteroidi scelti per i flyby intermedi sono gli stessi che si erano selezionati per le traiettorie presentate nel cap. 9, questo perché la partenza delle due missioni è molto simile, con una differenza di poco più di 2 mesi, ed entrambe necessitano di un accumulo di ritardo per il raggiungimento dell'ultimo asteroide.

Tabella 11.2. Principali caratteristiche della traiettoria 42.

	Corpo	Data flyby	V_{rel} [km/s]	ΔV [km/s]
Partenza	Earth	11/02/2026	–	–
Primo flyby	YORP	29/07/2026	6.693	0.528 54
Secondo flyby	2000 QK130 (PHA)	17/03/2027	8.019	0.368 49
Rendezvous	2012 TF79	10/01/2028	–	0.213 47
		Dur. 1.91 y	Max 8.019	Tot. 1.110 50

Osservando la Tab. 11.2, un aspetto che appare subito evidente è che i primi due archi sono la maggior sorgente del consumo, mentre il terzo è molto poco dispendioso; ciò ha posto l'attenzione sul fatto che, a parità di asteroide finale e di periodo per il lancio, potrebbe esserci una combinazione migliore per i primi due flyby.

Analizzando il primo arco, è subito evidente la causa dell'alto consumo: compare lunga accensione con componente principalmente tangenziale concorde al moto. Sebbene in Fig. 11.16 le frecce sono piccole, osservando la Fig. 11.15 si vede che la componente lungo z di spinta, necessaria per l'aumento di inclinazione per incontrare dapprima YORP e infine 2012 TF79, è piuttosto corposa e si protrae per quasi tutto l'arco. Nel secondo segmento compaiono due accensioni con componente prettamente tangenziale e concorde al moto che provocano l'aumento di semiasse ed eccentricità poco prima di raggiungere 2000 QK130. Nel terzo arco si ha invece un'accensione finale tangenziale concorde quasi in prossimità dell'incontro con 2012 TF79 che permetterà la sonda di raggiungere infine il target.

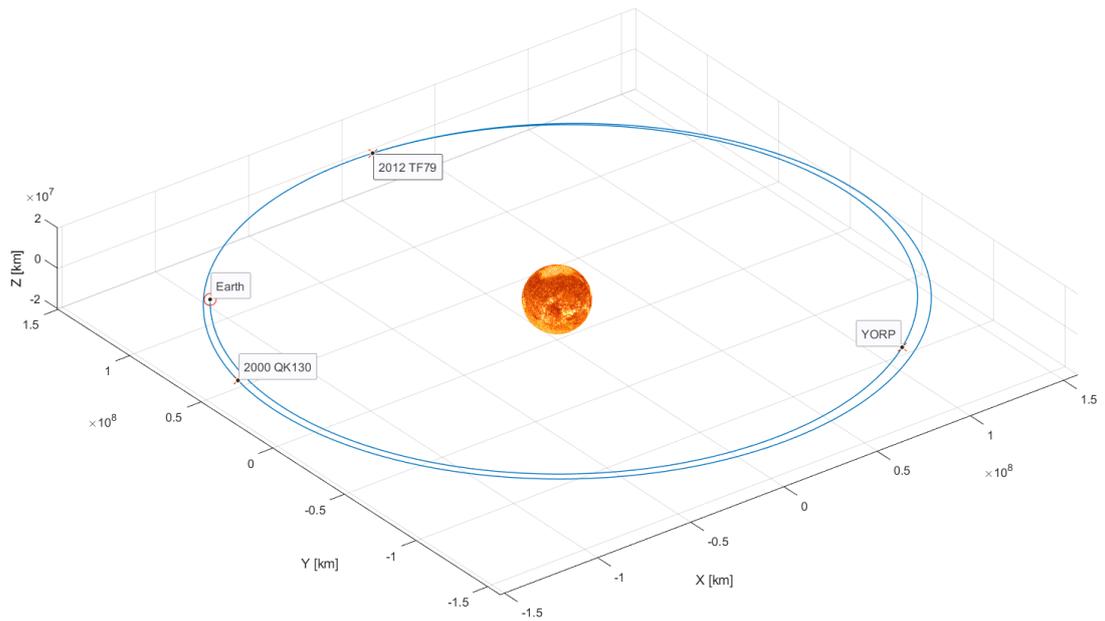


Figura 11.10. Rappresentazione della traiettoria in un riferimento eliocentrico – eclittico.

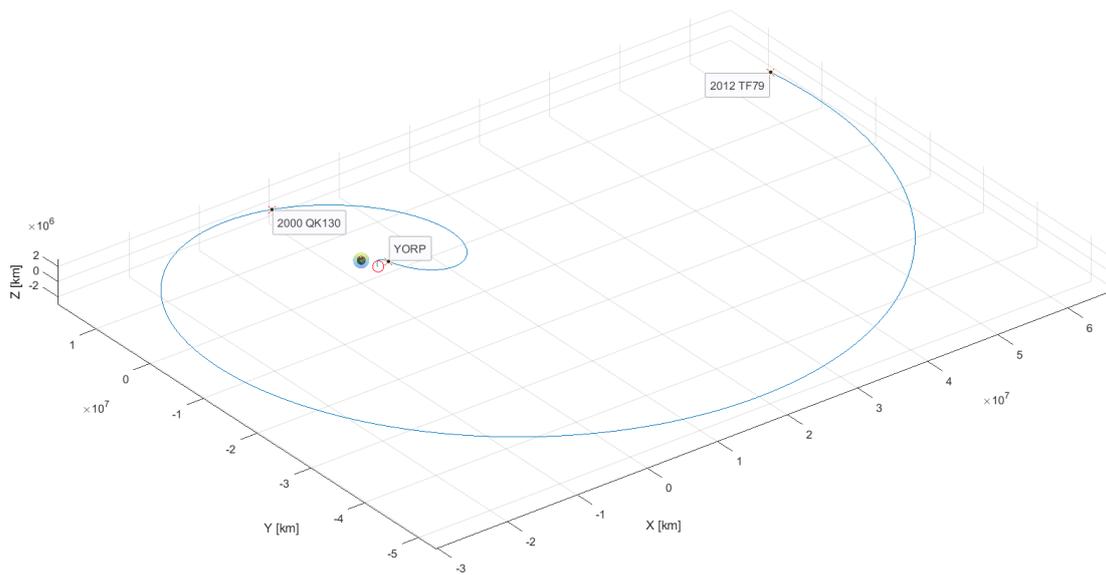


Figura 11.11. Rappresentazione della traiettoria nel sistema di riferimento ECI.

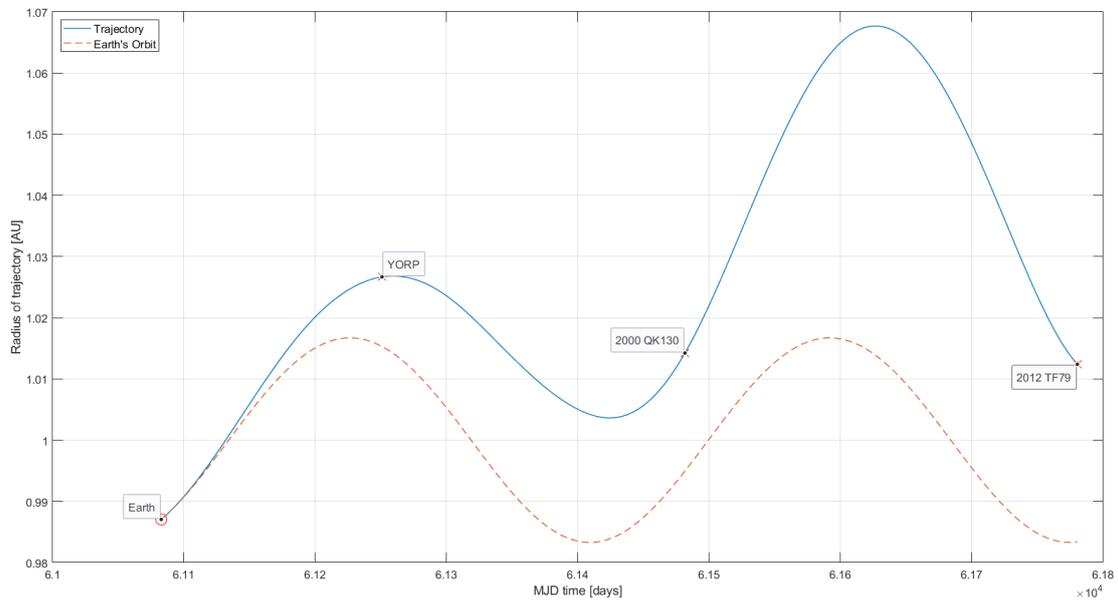


Figura 11.12. Andamento del raggio della traiettoria.

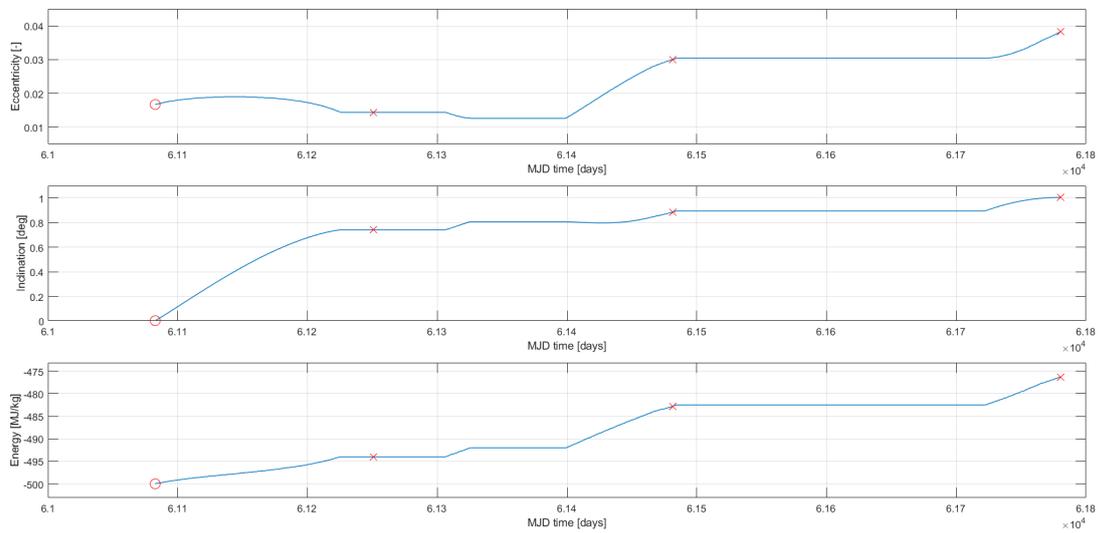


Figura 11.13. Andamento dei parametri orbitali eccentricità, inclinazione ed energia.

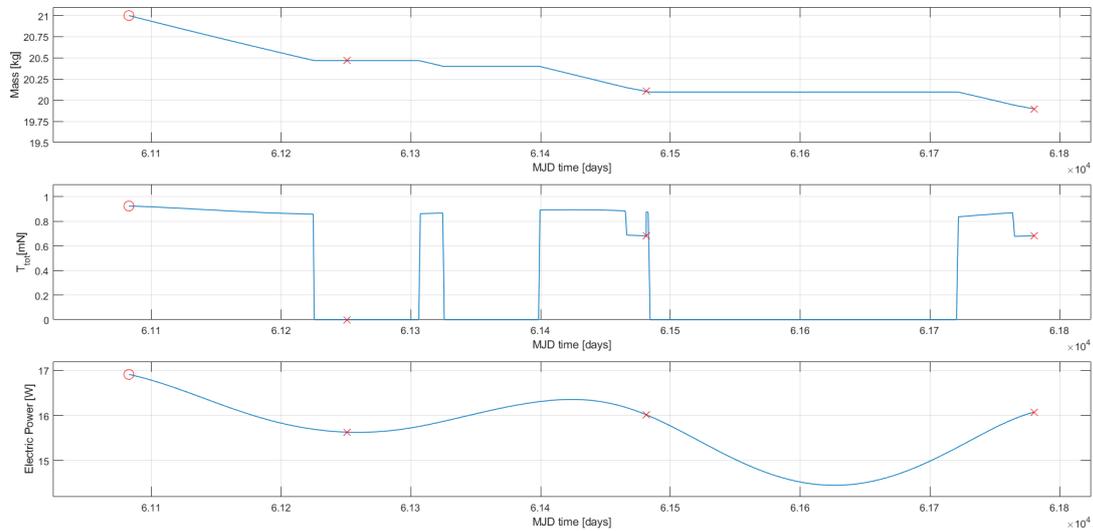


Figura 11.14. Andamento della massa, spinta totale e potenza elettrica lungo la traiettoria.

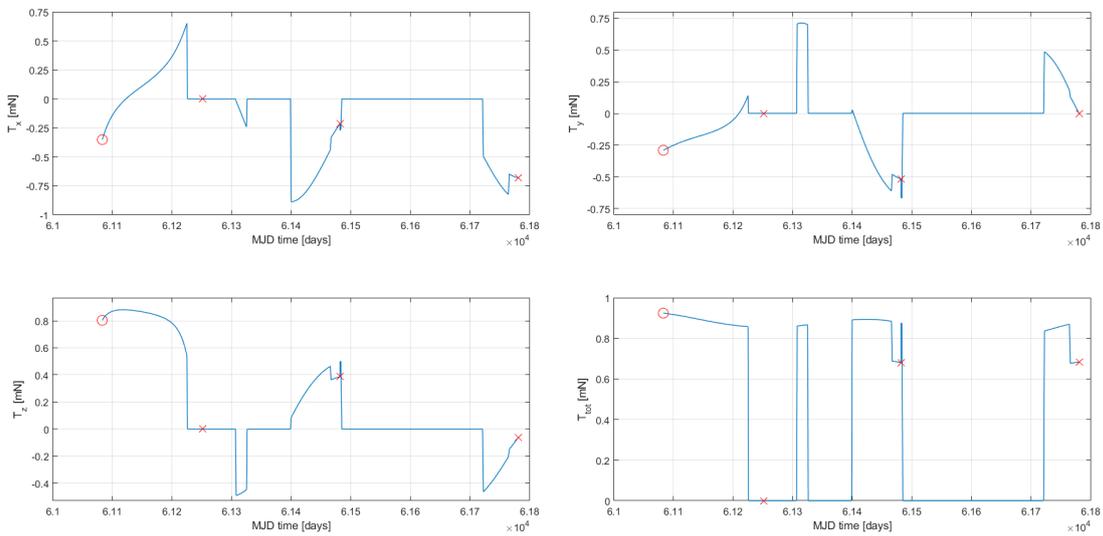
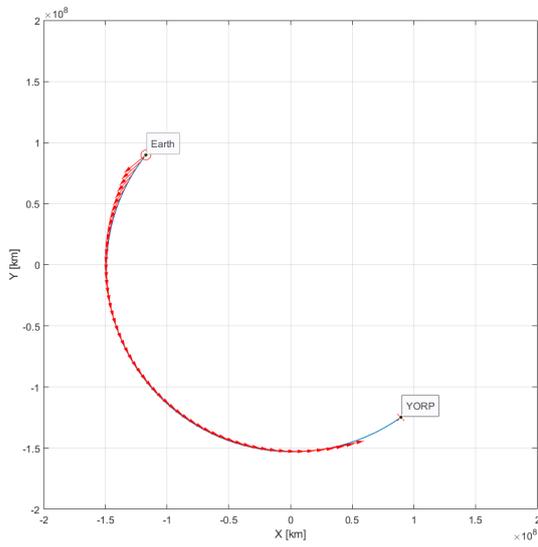
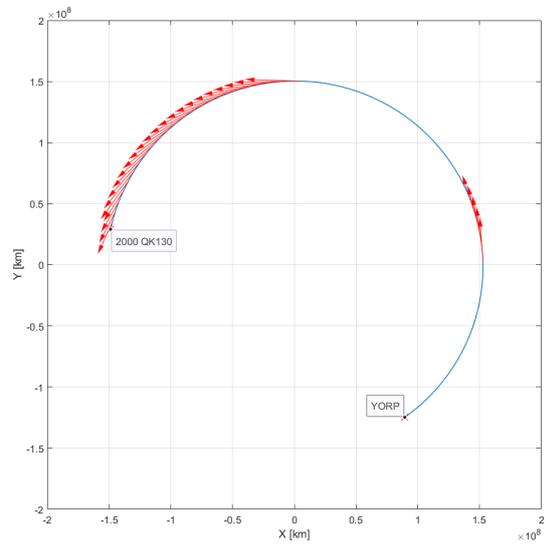


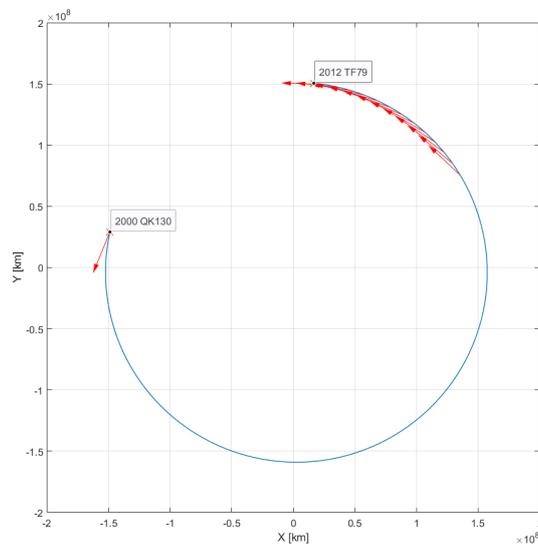
Figura 11.15. Spinta lungo i 3 assi e modulo.



(a) Arco 1.



(b) Arco 2.



(c) Arco 3.

Figura 11.16. Vettori spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y.

11.3 Traiettorie 41: Earth – 1997 NC1 – 2000 QK130 – 2012 TF79

L'ultima combinazione presentata è la più economica tra tutte quelle trovate, con una sorprendente differenza di soli 11.86 m/s rispetto alla traiettoria di riferimento 40. Il risultato è degno di nota, in quanto permette un enorme risparmio in termini di consumi e concedendo maggiore libertà in caso di correzioni. Oltre a ciò, i due asteroidi intermedi sono i già citati 1997 NC1 e 2000 QK130, entrambi PHA e di grandi dimensioni, i quali verranno incontrati con velocità relative piuttosto basse, permettendone un buono studio. Infine, si tratta anche della missione più breve, concedendo alla fase scientifica finale con 2012 TF79 un lungo tempo di raccolta dati. Tutti gli aspetti appena citati sono desiderabili per la missione, la cui unica pecca è proprio l'ultimo asteroide, piuttosto piccolo e non Earth-crossing.

Tabella 11.3. Principali caratteristiche della traiettoria 41.

	Corpo	Data flyby	V_{rel} [km/s]	ΔV [km/s]
Partenza	Earth	11/02/2026	–	–
Primo flyby	1997 NC1 (PHA)	28/06/2026	8.634	0.236 08
Secondo flyby	2000 QK130 (PHA)	19/03/2027	8.128	0.273 84
Rendezvous	2012 TF79	27/12/2027	–	0.423 62
		Dur. 1.87 y	Max 8.634	Tot. 0.933 55

Si possono distinguere quattro distinte fasi di accensione che avvengono nei pressi del picco di potenza elettrica disponibile (Fig. 11.21), rendendole molto efficienti. Nel primo arco avviene una prima spinta con componente principalmente tangenziale e concorde al moto, oltre ad una componente T_z necessaria per il primo incremento di inclinazione. I motori restano poi spenti durante il primo flyby e verranno accessi solo a metà del secondo arco, quando ancora una volta la spinta sarà prettamente tangenziale concorde e con aumento di inclinazione. A ridosso del secondo flyby avviene la terza accensione, che continuerà anche dopo, e che porterà la sonda verso semiassi maggiori ben più grandi, necessari in quanto si ricorda che 2012 TF79 è un asteroide Apollo. Una quarta ed ultima fase di spinta porta infine lo spacecraft ad aggiustare la sua traiettoria fino a raggiungere il sopra citato target finale.

Osservando la Fig. 11.20 si vede chiaramente che i parametri orbitali rappresentati sono monotoni crescenti. Ciò è di fatto un grande vantaggio, in quanto l'energia spesa dal sistema propulsivo viene impiegata sempre "nella stessa direzione", senza dover realizzare una sorta di "avanti e indietro" come ad esempio avveniva nelle traiettorie del cap. 10.

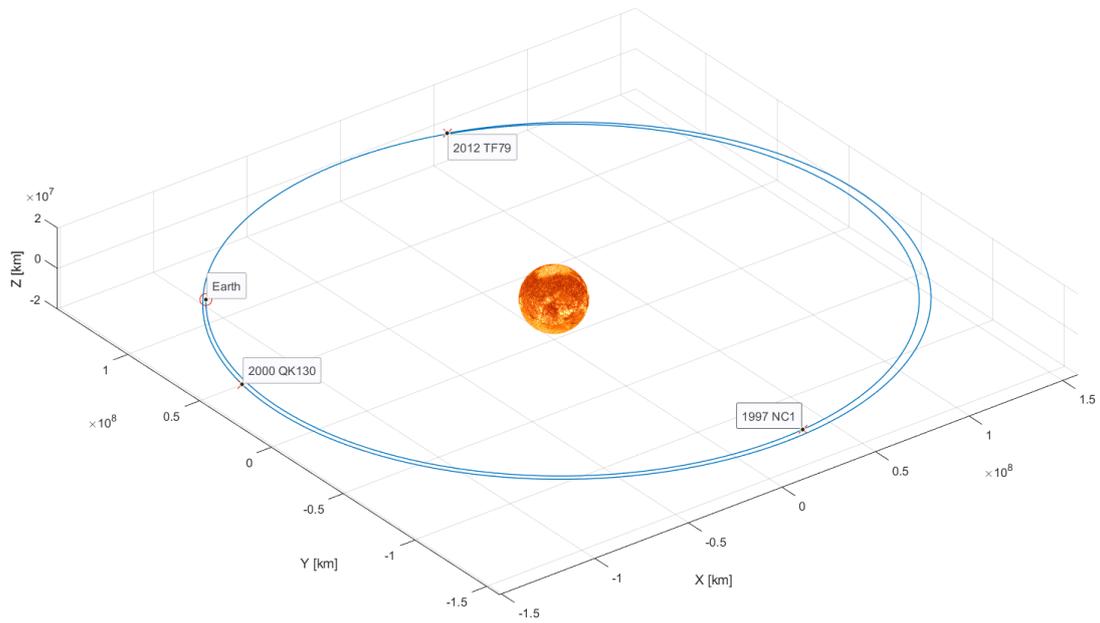


Figura 11.17. Rappresentazione della traiettoria in un riferimento eliocentrico – eclittico.

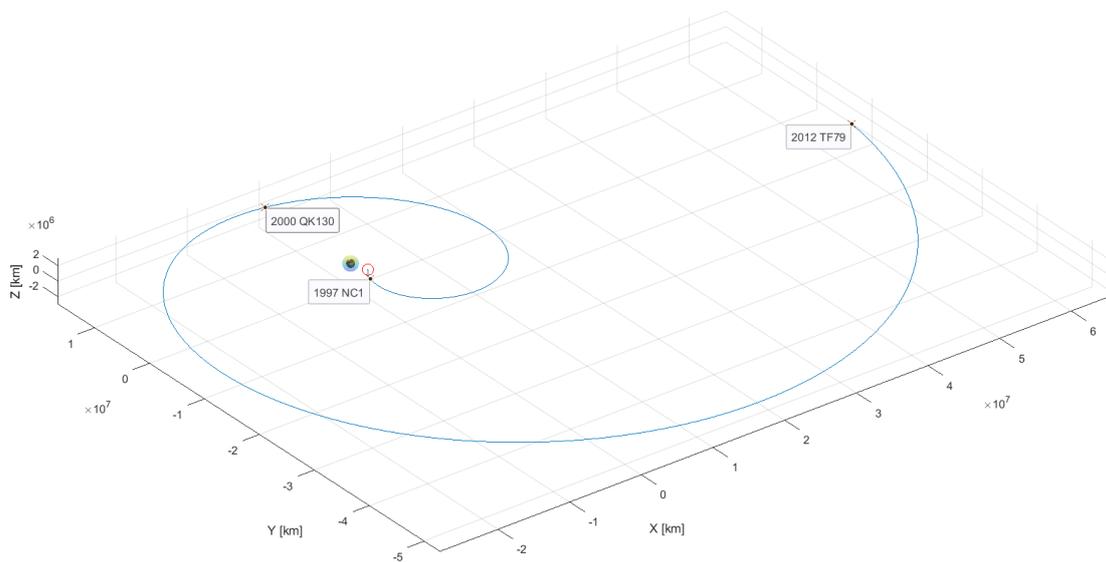


Figura 11.18. Rappresentazione della traiettoria nel sistema di riferimento ECI.

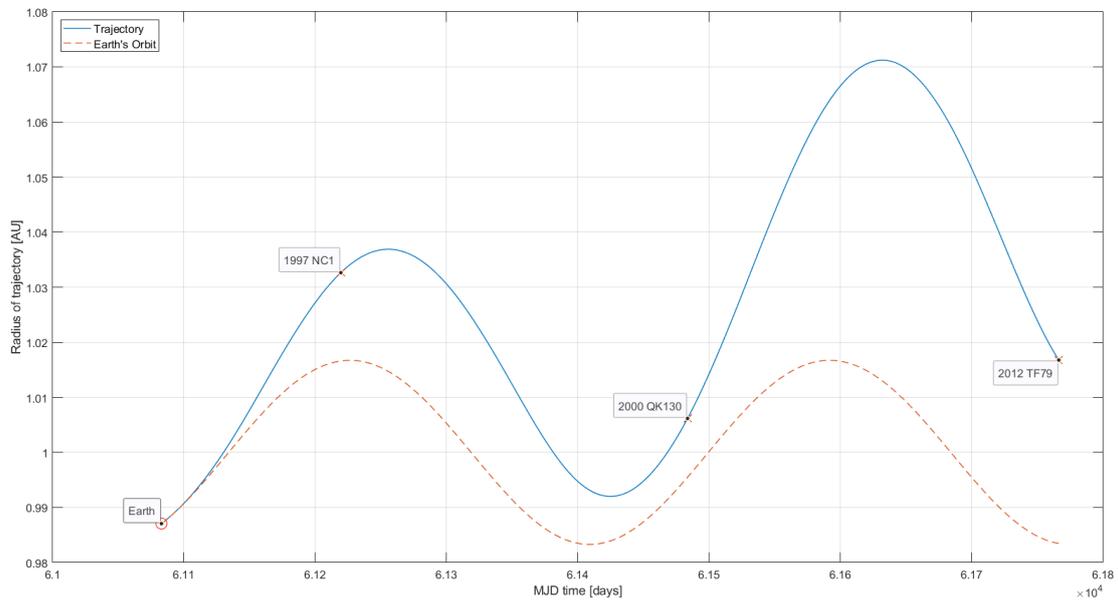


Figura 11.19. Andamento del raggio della traiettoria.

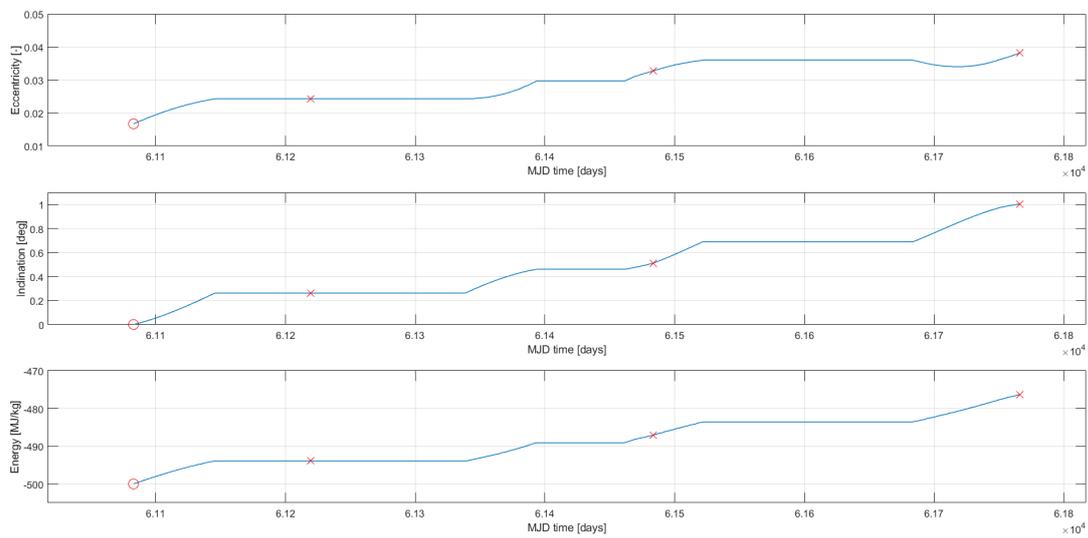


Figura 11.20. Andamento dei parametri orbitali eccentricità, inclinazione ed energia.

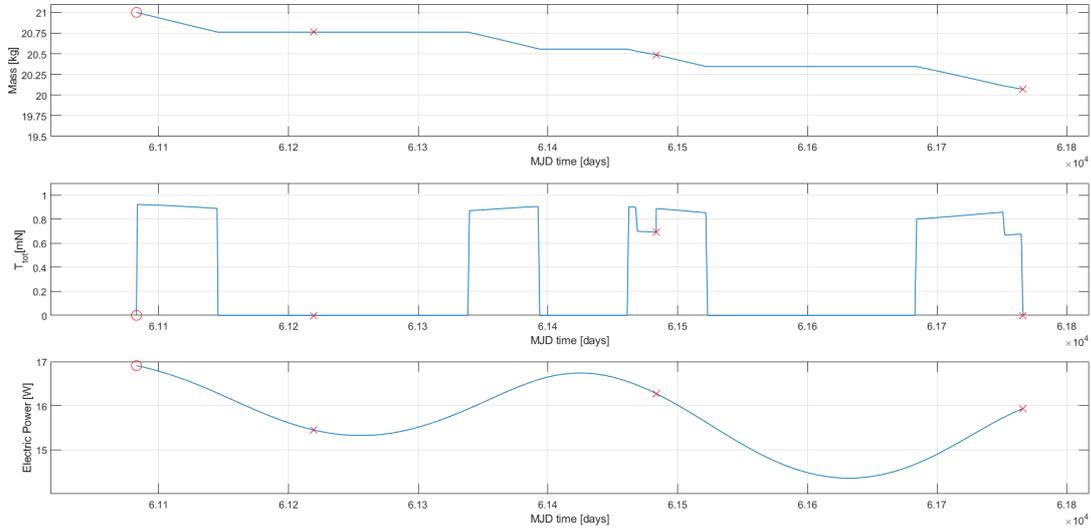


Figura 11.21. Andamento della massa, spinta totale e potenza elettrica lungo la traiettoria.

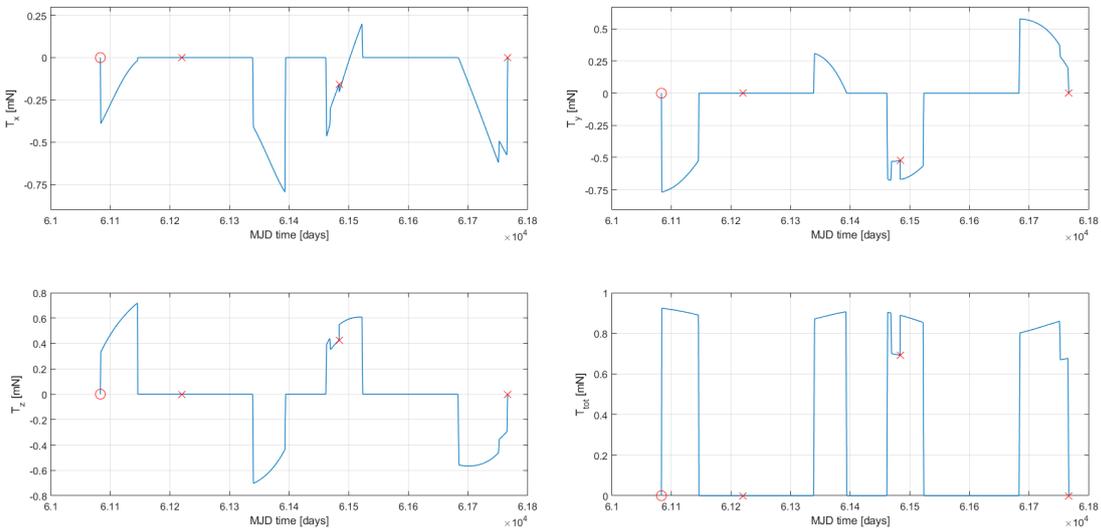
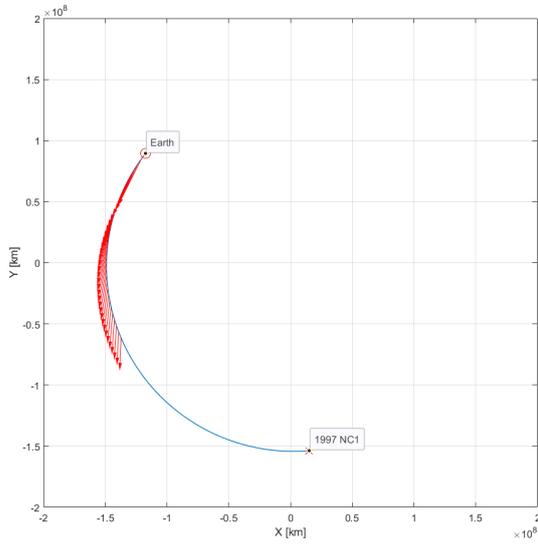
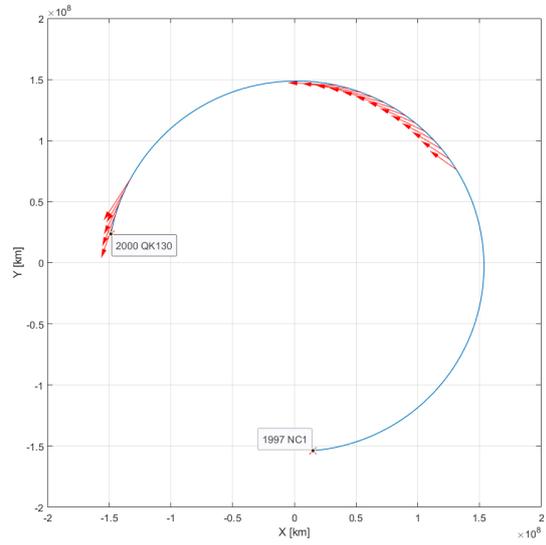


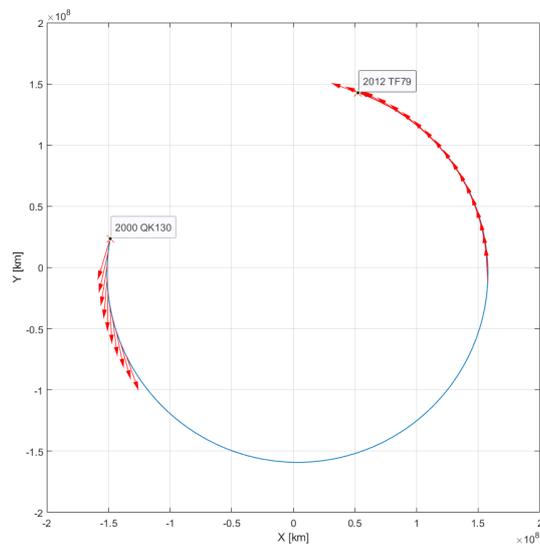
Figura 11.22. Spinta lungo i 3 assi e modulo.



(a) Arco 1.



(b) Arco 2.



(c) Arco 3.

Figura 11.23. Vettori spinta lungo i 3 archi nel piano X-Y.

Capitolo 12

Conclusioni

Si è infine giunti al termine del lavoro ed è quindi possibile trarre alcune importanti conclusioni.

Innanzitutto, tra le diverse traiettorie trovate, compare una vasta gamma di asteroidi con proprietà molto variegata, sia in termini di dimensione che di comportamento. Una buona quantità di esse (16 su 18) presenta almeno un incontro con PHA, tra cui molte con il già citato 2001 WN5. Due sequenze possono essere realizzate con consumi inferiori ad 1 kg di propellente, rendendole tecnicamente molto interessanti. Le missioni, poi, si differenziano per due distinte finestre di lancio che verranno trattate in seguito.

Si procede ora ad un'analisi più dettagliata per i diversi gruppi di missioni.

12.1 Gruppi con 2000 SG344

I gruppi basati sulle traiettorie 10 e 20 condividono lo stesso asteroide finale della missione ANIME originale, permettendo dei confronti principalmente per quanto concerne i consumi e i flyby intermedi.

Gruppo 10

Per il gruppo 10 con partenza a fine 2025 la missione migliore dal punto di vista dei consumi è la 14 Earth – 2018 WX1 – 2000 RS11 (PHA) – 2000 SG344, che però possiede un primo flyby con un asteroide unnumbered, pertanto non in grado di soddisfare in maniera ottimale gli obiettivi preposti. Le missioni 11 e 12 presentano invece entrambe due flyby con asteroidi numbered e PHA di grosse dimensioni che ne elevano la rilevanza, ma gli alti consumi non le rendono ideali. Tra le due, la numero 12 Earth – 2008 TZ3 (PHA) – 2000 RS11 (PHA) – 2000 SG344 possiede anche una velocità relativa durante il secondo flyby non eccellente, pertanto tra tutte la migliore resta la numero 11 Earth – 1997 NC1 (PHA) – 2000 QK130 (PHA) – 2000 SG344.

Gruppo 20

Il gruppo 20 è invece ben più interessante per molteplici motivi. Innanzitutto, come già detto, l'asteroide con cui realizzare il rendezvous è sempre 2000 SG344, mentre i flyby intermedi sono tutti realizzati con soli asteroidi numbered. La missione 28 Earth – YORP – 2016 HO3 – 2000 SG344 presenta dei consumi non eccezionali, ma le velocità relative al flyby sono tra le più basse di tutte elevandone la rilevanza scientifica. Le altre missioni presentano consumi buoni, ma la presenza in quasi tutte del PHA 2015 WN1 ha complicato la ricerca della soluzione a causa del suo close-approach che ha portato all'imposizione di vincoli sub-ottimali. L'opportunità però di visitare un asteroide di così alta importanza scientifica è un fattore assolutamente non trascurabile e rende questo set di combinazioni maggiormente degno di rilevanza. Se infine si valuta la missione 25 Earth – 2015 WN1 (PHA) – 2005 EE (PHA) – 2000 SG344 ci si trova di fronte ad una combinazione straordinariamente interessante: i consumi sono inferiori ad 1 kg, le velocità relative ai due flyby sono relativamente alte ma del tutto accettabili viste le dimensioni degli asteroidi stessi, rendendola fino ad ora la missione migliore tra quelle trovate.

12.2 Gruppi con 2012 TF79

I gruppi 30 e 40, invece, possiedono un diverso asteroide conclusivo, 2012 TF79. Questo è più piccolo del già citato 2000 SG344, ma non per questo meno rilevante, specialmente nell'ottica di una lunga permanenza: per le ragioni scientifiche già viste nel [cap. 2](#), un asteroide di così piccola dimensione risulterebbe molto interessante per lo studio di quali siano le forze che mantengono unito l'oggetto.

Gruppo 30

Il gruppo 30 purtroppo non possiede missioni degne di nota: esiste un solo asteroide facilmente raggiungibile nella finestra temporale del primo flyby, l'unnumbered 2015 WN1, un oggetto piccolo e con una velocità di incontro non tale da suscitare un particolare interesse. Questo gruppo è perciò destinato a venir considerato come il meno appetibile. A maggior ragione, in un periodo di tempo simile co-esistono le missioni del gruppo 10, ben più rilevanti sotto molteplici punti di vista.

Gruppo 40

Il gruppo 40 possiede solo due missioni trovate, ma entrambe di rilevanza elevata: la missione 42 Earth – YORP – 2000 QK130 (PHA) – 2012 TF79 presenta già consumi buoni e i due flyby intermedi sono resi maggiormente significativi dalla bassa velocità relativa, in particolare con YORP, che lo rende un ottimo target per la raccolta di informazioni. Invece, la traiettoria 41 Earth – 1997 NC1 (PHA) – 2000 QK130 (PHA) – 2012 TF79 è non solo quella con i consumi più bassi in

assoluto e con durata della trasferta contenuta, ma possiede anche velocità relative ai flyby sufficientemente basse e dimensioni degli asteroidi intermedi elevate, oltre al fatto che entrambi sono dei Potentially Hazardous Objects. Tutti questi aspetti rendono la missione appena citata la migliore in assoluto.

12.3 Considerazioni finali

Si possono definire due finestre di lancio sostitutive distinte: la prima opzione è caratterizzata dalle missioni con partenza tra fine 2025 e inizio 2026 con i gruppi 10 e 40 e, in alternativa, la seconda finestra di lancio sarebbe alla fine del 2027 con le missioni del gruppo 20. Per la prima opzione, la traiettoria 41 risulta la migliore tra tutte quelle trovate in questo lavoro, mentre per la seconda le missioni 25 e 23 sono entrambe buone: Tra esse, la numero 25 è da preferire se si vogliono ridurre i consumi a discapito di una maggiore velocità relativa nel secondo flyby (sebbene sia un PHA di medie dimensioni), mentre la numero 23 è dotata di maggiori consumi ma un secondo flyby a velocità molto contenuta.

In conclusione, sono stati incontrati tre aspetti "irrisolti" che potrebbero essere motivo di ulteriore indagine:

- Come era già stato anticipato nel [cap. 7](#), il metodo utilizzato per la scrematura dei possibili target è buono per un'analisi iniziale, ma potrebbe aver escluso alcuni asteroidi che si sarebbero potuti trovare in una posizione ideale per alcune delle traiettorie studiate e sono invece stati totalmente ignorati. Si potrebbe estendere quindi i limiti di accettabilità per la scrematura, con il rischio però di inserire molti asteroidi totalmente irraggiungibili, oppure rendere i criteri più o meno stringenti in funzione della scelta del target finale, con connesse complicazioni nella realizzazione dei documenti.
- Il metodo indiretto utilizzato possiede per natura un limitato dominio di convergenza: a parità di asteroidi scelti, è spesso capitato che piccole variazioni dei valori di primo tentativo dei moltiplicatori di Lagrange abbiano portato ad una convergenza o meno della soluzione. Esistono alcune tecniche di stima dei suddetti valori, ma non sempre sono in grado di essere applicate. Sebbene si è confidenti che il lavoro compiuto sia stato eseguito accuratamente, alcune soluzioni possibili potrebbero non essere state trovate a causa di una stima sbagliata del primo tentativo.
- La limitata spinta disponibile potrebbe fortemente inficiare la buona riuscita della missione. Sebbene infatti il margine di propellente disponibile per le missioni a consumi minori è del tutto sufficiente per eventuali correzioni, l'effetto delle forze di disturbo esterne potrebbe nel concreto rendere alcune manovre scarsamente efficaci o del tutto non realizzabili. Si suggerisce quindi di compiere degli studi più approfonditi della fisica del problema per validare le traiettorie trovate e renderle a tutti gli effetti realizzabili.

Bibliografia

- [1] F. Ferrari. “Ottimizzazione di traiettorie per fly-by multipli di asteroidi Near-Earth con veicoli spaziali a bassa spinta”. Politecnico di Torino, 2020. URL: <http://webthesis.biblio.polito.it/id/eprint/15715>.
- [2] U. Walter. “1. Rocket Fundamentals”. In: *Astronautics: The Physics of Space Flight*. Third Edition. Springer International Publishing, 2018, pp. 1–35. DOI: [10.1007/978-3-319-74373-8_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-74373-8_1).
- [3] A. W. Harris e A. W. Harris. “On the Revision of Radiometric Albedos and Diameters of Asteroids”. In: *Icarus* 126.2 (1997), pp. 450–454. DOI: [10.1006/icar.1996.5664](https://doi.org/10.1006/icar.1996.5664).
- [4] G. S. Collins, H. J. Melosh e R. A. Marcus. “Earth Impact Effects Program: A Web-based computer program for calculating the regional environmental consequences of a meteoroid impact on Earth”. In: *Meteoritics & Planetary Science* 40.06 (2005), pp. 817–840. DOI: [10.1111/j.1945-5100.2005.tb00157.x](https://doi.org/10.1111/j.1945-5100.2005.tb00157.x).
- [5] O. P. Popova et al. “Chelyabinsk Airburst, Damage Assessment, Meteorite Recovery, and Characterization”. In: *Science* 342.6162 (2013), pp. 1069–1073. DOI: [10.1126/science.1242642](https://doi.org/10.1126/science.1242642).
- [6] P. Farinella et al. “Probable asteroidal origin of the Tunguska Cosmic Body”. In: *Astronomy & Astrophysics* 377.03 (2001), pp. 1081–1097. DOI: [10.1051/0004-6361:20011054](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20011054).
- [7] *Deflecting a Hazardous Near-Earth Object*. 1st IAA Planetary Defense Conference: Protecting Earth from Asteroids. Apr. 2009.
- [8] E. Adams et al. “Double Asteroid Redirection Test: The Earth Strikes Back”. In: *2019 IEEE Aerospace Conference*. 2019, pp. 1–11. DOI: [10.1109/AERO.2019.8742007](https://doi.org/10.1109/AERO.2019.8742007).
- [9] S. D. Ross. *Near-Earth Asteroid Mining*. Space Industry Report. California Institute of Technology, dic. 2001.
- [10] J. Blum e G. Wurm. “The growth mechanisms of macroscopic bodies in protoplanetary disks.” In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 46 (set. 2008), pp. 21–56. DOI: [10.1146/annurev.astro.46.060407.145152](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.46.060407.145152).

-
- [11] A. Johansen et al. “New Paradigms For Asteroid Formation”. In: *Asteroids IV*. A cura di P. Michel et al. 2015, pp. 471–492. DOI: [10.2458/azu_uapress_9780816532131-ch025](https://doi.org/10.2458/azu_uapress_9780816532131-ch025).
- [12] A. Morbidelli et al. “Origin and Evolution of Near-Earth Objects”. In: *Asteroids III*. 2002, pp. 409–422.
- [13] D. N. DellaGiustina et al. “Exogenic basalt on asteroid (101955) Bennu”. In: *Nature Astronomy* 5.1 (gen. 2021), pp. 31–38. DOI: [10.1038/s41550-020-1195-z](https://doi.org/10.1038/s41550-020-1195-z).
- [14] P. Schenk et al. “The Geologically Recent Giant Impact Basins at Vesta’s South Pole”. In: *Science* 336.6082 (2012), pp. 694–697. DOI: [10.1126/science.1223272](https://doi.org/10.1126/science.1223272).
- [15] W. F. Bottke et al. “Debiased Orbital and Absolute Magnitude Distribution of the Near-Earth Objects”. In: *Icarus* 156.2 (2002), pp. 399–433. DOI: [10.1006/icar.2001.6788](https://doi.org/10.1006/icar.2001.6788).
- [16] W. F. Bottke Jr. et al. “The Effect of Yarkovsky Thermal Forces on the Dynamical Evolution of Asteroids and Meteoroids”. In: *Asteroids III*. 2002, pp. 395–408.
- [17] W. F. Bottke et al. “The Yarkovsky and YORP effects: Implications for Asteroid Dynamics”. In: *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 34.1 (2006), pp. 157–191. DOI: [10.1146/annurev.earth.34.031405.125154](https://doi.org/10.1146/annurev.earth.34.031405.125154).
- [18] *ANIME: the “Asteroid Nodal Intersection Multiple Encounters”: CubeSat mission to explore Near-Earth Asteroid diversity*. 52nd Lunar e Planetary Science Conference. 2021.
- [19] R. R. Bate, D. D. Mueller e J. E. White. “1. Two-Body Orbital Mechanics & 2. Orbit Determination from Observations & 4. Position and Velocity as a function of time”. In: *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Publications, 1971. ISBN: 0-486-60061-0.
- [20] H. D. Curtis. “2. The Two-Body Problem”. In: *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Third Edition. Butterworth-Heinemann, 2014, pp. 59–144. DOI: [10.1016/B978-0-08-097747-8.00002-5](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-097747-8.00002-5).
- [21] H. D. Curtis. “3. Orbital Position as a Function of Time”. In: *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Third Edition. Butterworth-Heinemann, 2014, pp. 145–186. DOI: [10.1016/B978-0-08-097747-8.00003-7](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-097747-8.00003-7).
- [22] H. D. Curtis. “4. Orbits in Three Dimensions”. In: *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Third Edition. Butterworth-Heinemann, 2014, pp. 187–237. DOI: [10.1016/B978-0-08-097747-8.00004-9](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-097747-8.00004-9).
- [23] U. Walter. “7. Orbits”. In: *Astronautics: The Physics of Space Flight*. Third Edition. Springer International Publishing, 2018, pp. 165–277. DOI: [10.1007/978-3-319-74373-8_7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-74373-8_7).

-
- [24] U. Walter. “8. Orbital Maneuvering”. In: *Astronautics: The Physics of Space Flight*. Third Edition. Springer International Publishing, 2018, pp. 279–383. DOI: [10.1007/978-3-319-74373-8_8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-74373-8_8).
- [25] U. Walter. “13. Reference Frames”. In: *Astronautics: The Physics of Space Flight*. Third Edition. Springer International Publishing, 2018, pp. 661–675. DOI: [10.1007/978-3-319-74373-8_13](https://doi.org/10.1007/978-3-319-74373-8_13).
- [26] D. A. Vallado. “1. Coordinate and Time Systems”. In: *Fundamentals of Astrodynamics and Application*. Forth Edition. 2013. ISBN: 978-0-387-71831-6.
- [27] G. Colasurdo e G. Avanzini. *Astrodynamics*. Lug. 2006.
- [28] Y. Luo, J. Zhang e G. Tang. “Survey of orbital dynamics and control of space rendezvous”. In: *Chinese Journal of Aeronautics* 27.1 (2014), pp. 1–11. DOI: [10.1016/j.cja.2013.07.042](https://doi.org/10.1016/j.cja.2013.07.042).
- [29] J. Shirazi, L. Abolfazl e J. Ceberio. “Spacecraft trajectory optimization: A review of models, objectives, approaches and solutions”. In: *Progress in Aerospace Sciences* 102 (ago. 2018). DOI: [10.1016/j.paerosci.2018.07.007](https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2018.07.007).
- [30] J. T. Betts. *Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*. 2010. DOI: [10.1137/1.9780898718577](https://doi.org/10.1137/1.9780898718577).
- [31] A. Rao. “A Survey of Numerical Methods for Optimal Control”. In: *Advances in the Astronautical Sciences* 135 (ago. 2009).
- [32] “1. The Maximum Principle”. In: L. S. Pontryagin et al. *The Mathematical Theory of Optimal Process*. A cura di L. W. Neustadt. Trad. da K. N. Tirogoff. Interscience Publishers, 1962, pp. 9–74. ISBN: 0-470-69381-9.
- [33] NASA/JPL CalTech. *Small-Body Orbital Elements*. Accessed on: 05/03/2021. URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/?sb_elem.
- [34] NASA/JPL CalTech. *NEO Earth Close Approaches*. Accessed on: 05/03/2021. URL: <https://cneos.jpl.nasa.gov/ca/>.