

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

Progettazione di un attenuatore d'impatto per vetture da Formula SAE con l'impiego di codici FEM

Relatore

Prof. Marco Gherlone

Candidato

Mario Trapanese

Anno Accademico 2020/2021

“Non ho idoli. Ammiro il duro lavoro, la dedizione e la competenza”
Ayrton Senna

Sommario

CAPITOLO I - Introduzione 1

1.1	La Formula SAE	1
1.2	Impact Attenuator (IA) e Anti-Intrusion Plate (AIP)	3
1.3	Cenni al Concetto di Energia	5
1.4	Cenni al Meccanica degli Urti	6

CAPITOLO II - Formulazione del Problema Elastico 8

2.1	Relazioni Geometriche	8
2.2	Equazioni di Compatibilità	15
2.3	Equazioni di Equilibrio	15
2.4	Relazioni Costitutive	21
2.5	Condizioni al Contorno	25

CAPITOLO III - Metodi di risoluzione del Problema Elastico 27

3.1	Metodo delle Differenze Finite	27
3.2	Metodi Variazionali	28
3.3	Metodi ai Residui Pesati	30
3.4	Metodi agli Elementi Finiti (FEM)	33
3.4.1	Discretizzazione	35
3.4.2	Elemento nel Sistema di Riferimento Locale	36
3.4.3	Elemento nel Sistema di Riferimento Globale	38
3.4.4	Assemblaggio, Soluzione e Convergenza	39

CAPITOLO IV - Meccanica del Materiale 42

4.1	Curve Tensione-Deformazione	42
4.1.1	Curve Tensione-Deformazione Materiali Metallici	43
4.1.2	Curve Tensione-Deformazione Materiali Ceramiche	47
4.1.3	Curve Tensione-Deformazione Materiali Polimerici	48
4.1.4	Curve Tensione-Deformazione Materiali Compositi a Matrice Polimerica (PMC)	56
4.2	Plasticità, Viscoelasticità e Viscoplasticità	59
4.2.1	Modelli di Plasticità	60
4.2.2	Modelli di Viscoelasticità	65
4.2.3	Modelli di Viscoplasticità	69
4.3	Criteri di Resistenza	76
4.3.1	Criteri di Resistenza per Materiali Isotropi	77
4.3.2	Criteri di Rottura per Laminati Compositi	80

CAPITOLO V - Problemi non lineari 84

5.1	Metodi di Soluzione per Problemi non lineari	85
5.2	Comportamento Non Lineare del Materiale	89
5.2.1	Viscoelasticità	89
5.2.2	Plasticità	91

5.2.3	Viscoplasticità	95
5.3	Non Linearità Geometrica	96
5.4	Problemi di Contatto	101

CAPITOLO VI - Problemi Dinamici 107

6.1	Soluzione per semi-discretizzazione	107
6.2	Soluzione per discretizzazione	110
6.2.1	SSpj	110
6.2.2	GNpj	112
6.2.3	Condizioni di Stabilità dell'algoritmo	113
6.2.4	Mass Lumping	116
6.3	Problemi di Dinamica non Lineare	117

CAPITOLO VII – Preprocessing 119

7.1	Scelta dei Parametri Variabili	119
7.2	Modellazione CAD	120
7.2.1	Modellazione CAD AIP	120
7.2.2	Modellazione CAD IA	129
7.3	Meshing	132
7.3.1	Mesh AIP	132
7.3.2	Mesh IA	139
7.3.3	Barriera ed elementi rigidi	146
7.4	Definizione Set	149
7.5	Creazione Load Collectors	151
7.6	Creazione Materiali e definizione laminato	153
7.7	Definizione ed Assegnazione delle Proprietà	158
7.8	Definizione Contatti	165
7.9	Definizione Output Card	167

CAPITOLO VIII - Postprocessing, scelta della configurazione e ottimizzazione 172

8.1	Postprocessing	172
8.1.1	Configurazione Numero 1	173
8.1.2	Configurazione Numero 2	174
8.1.3	Configurazione Numero 3	176
8.1.4	Configurazione Numero 4	178
8.1.5	Configurazione Numero 5	180
8.1.6	Configurazione Numero 6	182
8.2	Scelta della Configurazione	185
8.3	Ottimizzazione	185
8.3.1	Configurazione Ottimizzata Numero 1	186
8.3.2	Configurazione Ottimizzata Numero 2	189
8.3.3	Configurazione Ottimizzata Numero 3	192
8.3.4	Configurazione Ottimizzata Numero 4	194
8.3.5	Configurazione Ottimizzata Numero 5	198
8.3.6	Configurazione Ottimizzata Numero 6	201

Indice delle Figure

Figura 1: Logo Formula ATA, evento ufficiale italiano FSAE	1
Figura 2: circuito Skid Pad, [5]	2
Figura 3: SC19 durante una prova di Skid Pad	2
Figura 4: sistema di riferimento veicolo, [6]	3
Figura 5: drop test, [7]	4
Figura 6: urto frontale tra due punti materiali, [8]	6
Figura 6: spostamento del punto M, [9]	8
Figura 7: angoli taglienti, [9]	13
Figura 8: campo di azioni interne, [9]	16
Figura 9: sistema di riferimento locale, [9]	17
Figura 10: tetraedro elementare, [9]	17
Figura 11: componenti di tensione rispetto agli assi coordinati, [9]	18
Figura 12: Esempi di mesh, [13]	35
Figura 13: Mesh di elementi QUAD con problema di meccanismi, [12]	41
Figura 14: Macchina di prova	43
Figura 15: Diagrammi tensione-deformazione metalli, [16]	44
Figura 16: Curva tensione-deformazione acciai basso-legati, [16]	45
Figura 17: Recupero elastico e incrudimento, [17]	45
Figura 18: Curva tensione reale-deformazione reale, [18]	46
Figura 19: Meccanismo di rottura del provino, [19]	46
Figura 20: Curva tensione-deformazione leghe alluminio, [16]	47
Figura 21: Approssimazione bi-lineare, [20]	47
Figura 22: Rottura fragile, [21]	48
Figura 23: Diagramma tensione-deformazione ceramici, [22]	48
Figura 24: Struttura polimeri, [24]	49
Figura 25: Strutture amorfa, semicristallina e cristallina, [23]	50
Figura 26: Volume specifico in funzione della temperatura, [25]	50
Figura 27: Diagramma tensione-deformazione polimeri TP, [26]	52
Figura 28: Variazione del modulo elastico con la temperatura	53
Figura 29: Diagramma tensione-deformazione polimeri TP se $T_g < T < T_m$	53
Figura 30: Catene del TP	54
Figura 31: Deformazione viscoelastica (a sinistra) e deformazione viscoplastica (a destra), [27]	55
Figura 32: Esempio diagramma tensione-deformazione polimeri TI, [28]	55
Figura 33: Diagramma tensione-deformazione elastomeri, [29]	56
Figura 34: Tipi di rinforzante, [30]	57
Figura 35: Diagramma tensione-deformazione tipi principali di fibra, [31]	57
Figura 36: Diagramma tensione-deformazione composito, [32]	59
Figura 37: Rottura materiale composito, [15]	59
Figura 38: Evoluzione componenti di deformazione in un ciclo di carico-scarico, [33]	60
Figura 39: Dominio elastico	61
Figura 40: Modello elasto-plastico perfetto (a sinistra) e modello elasto-plastico incrudente (a destra)	62
Figura 41: Convessità del dominio elastico e legge normale del flusso plastico	63
Figura 42: Isteresi ciclo di carico-scarico, [42]	65
Figura 43: Analogia meccanica modello di Maxwell a 2 elementi	67
Figura 44: Analogia meccanica modello di Kelvin-Voigt a 2 elementi	67

Figura 45: Modello di Zener con rappresentazione di Maxwell (a sinistra) e con rappresentazione di Kelvin-Voigt (a sinistra)	68
Figura 46: Modello di Jeffreys-Lethersich con rappresentazione di Jeffreys (a sinistra) e di Lethersich (a sinistra)	68
Figura 47: Modello di Norton-Hoff, [54]	70
Figura 48: Schema modello di Bingham-Norton, [55]	70
Figura 49: Modello di Bingham-Norton, [56]	71
Figura 50: Fenomeno di kink-pair, [57]	73
Figura 51: Proiezione superficie di rottura nel piano $\sigma_{III} = 0$, [61]	77
Figura 52: Confronto superfici di snervamento criterio di Tresca e criterio di von Mises, [62]	79
Figura 53: Confronto criterio di Tresca e criterio di von Mises sul piano $\sigma_{III} = 0$, [63]	80
Figura 54: Sistema di riferimento lamina, [64]	80
Figura 55: Confronto criteri intra-laminari, [65]	82
Figura 56: Esempio di PFA su un laminato composto da 3 ply, [66]	83
Figura 47: Soluzioni multiple, [68]	85
Figura 48: Metodo di Newton-Raphson, [68]	86
Figura 49: Metodo di Newton-Raphson con utilizzo ad ogni iterazione di KT_1 (a sinistra) e di KT_0 (a destra), [68]	88
Figura 50: Metodo delle secanti, [68]	88
Figura 51: Superficie di snervamento 2D, [68]	91
Figura 52: Modello elasto-plastico 1D (a), viscoplastico 1D (b) e viscoplastico generalizzato (c), [68]	95
Figura 53: Problema di contatto, [68]	101
Figura 54: Contatto modellato con il FEM, [68]	101
Figura 55: Node-to-node contact, [68]	102
Figura 56: Node-to-surface contact, [68]	104
Figura 57: Confronto mesh degenera (sinistra) e mesh di buona qualità (destra), [70]	116
Figura 58: Creazione nodi	120
Figura 59: Creazione nodo origine mediante coordinate	121
Figura 60: Creazione superficie	121
Figura 61: Creazione superficie	122
Figura 62: Traslazione	122
Figura 63: Duplicazione e traslazione superficie	123
Figura 64: Creazione solido	123
Figura 65: Creazione solido	124
Figura 66: Strumento di modellazione CAD superfici CATIA	124
Figura 67: Creazione cella esagonale elementare	125
Figura 68: Estrusione cella elementare	125
Figura 69: Strumento di modellazione CAD solidi CATIA	126
Figura 70: Creazione solido	126
Figura 71: Strumento di matrice rettangolare	127
Figura 72: Importazione geometria da CAD	127
Figura 73: Comando midsurface	128
Figura 74: Estrazione superficie media	128
Figura 75: Creazione skin sandwich	129
Figura 76: Schizzo base IA 5x2 semionde	129
Figura 77: Funzione Prisma	130
Figura 78: Sformo	130
Figura 79: Svuotamento	131
Figura 80: Schizzo base IA 5x3 semionde	132
Figura 81: Funzione automesh	133
Figura 82: Settaggio numero di elementi	133
Figura 83: Solid map	134
Figura 84: Generazione mesh 3D	134
Figura 85: Verifica qualità mesh	135
Figura 86: Verifica qualità mesh	135
Figura 87: Comando delete	136

Figura 88: Eliminazione elementi 2D di origine	136
Figura 89: Mesh skin	137
Figura 90: Mesh core honeycomb	138
Figura 91: Mesh complessiva	138
Figura 92: Verifica qualità mesh	139
Figura 93: Mesh superficie frontale con funzione automesh	139
Figura 94: Verifica qualità mesh automatica	140
Figura 95: Divisione superficie frontale IA 5x3 semionde	140
Figura 96: Mesh manuale superficie frontale IA 5x3 semionde	141
Figura 97: Verifica qualità mesh manuale superficie frontale IA 5x3 semionde	141
Figura 98: Mesh superficie laterale IA 5x3 semionde	142
Figura 99: Verifica qualità mesh superficie laterale IA 5x3 semionde	142
Figura 100: Free edges	143
Figura 101: Comando di equivalence	143
Figura 102: Mesh complessiva IA 5x3 semionde	144
Figura 103: Divisione superficie frontale IA 5x2 semionde	144
Figura 104: Verifica qualità mesh superficie frontale IA 5x2 semionde	145
Figura 105: Mesh complessiva IA 5x2 semionde	145
Figura 106: Verifica qualità mesh complessiva IA 5x2 semionde	146
Figura 107: Modello FEM barriera	146
Figura 108: Barriera (in giallo) e rispettivo elemento rigido (in viola)	147
Figura 109: Tool di modifica elementi	147
Figura 110: Assegnazione massa	148
Figura 111: Elemento rigido AIP	148
Figura 112: Definizione set condizioni al contorno ed iniziali	149
Figura 113: Definizione set approccio ply based	150
Figura 114: Set IA1 e IA2	150
Figura 115: Set IA3 e IA4	151
Figura 116: Set IA5 e IA6	151
Figura 117: Definizione velocità iniziale	151
Figura 118: Definizione incastro	152
Figura 119: Definizione massa	153
Figura 120: Scheda M2 per la definizione di Al-5052 e Al-7075	154
Figura 121: Scheda M25 per la definizione del CFRP	155
Figura 122: Scheda creazione ply	155
Figura 123: Scheda definizione laminato	156
Figura 124: Scheda definizione laminato superficie frontale IA	157
Figura 125: Scheda definizione laminato superficie laterale IA	157
Figura 126: Scheda definizione laminato skin superiore AIP	158
Figura 127: Scheda definizione laminato skin inferiore AIP	158
Figura 128: Scheda P17_STACK di definizione della superficie frontale (sinistra) e laterale (destra) dell'IA	159
Figura 129: Scheda P17_STACK di definizione dello skin superiore (sinistra) ed inferiore (destra) dell'AIP	160
Figura 130: Rappresentazione 3D dei ply sulla superficie laterale dell'IA	161
Figura 131: Rappresentazione 3D dei ply sugli skin dell'AIP	161
Figura 132: Scheda P1_SHELL di definizione dell'honeycomb (sinistra) e della barriera (destra)	162
Figura 133: Datasheet fornitore honeycomb, [73]	163
Figura 134: Scheda P14_SOLID di definizione dell'AIP in configurazione classica	164
Figura 135: Assegnazione proprietà e materiali elementi deformabili (sinistra) ed elementi rigidi (destra)	164
Figura 136: Scheda definizione contatto TYPE2	165
Figura 137: Scheda definizione contatto TYPE7	166
Figura 138: Tool Engine File Assistant	168
Figura 139: Settaggio parametri Engine File Assistant e generazione output cards	168
Figura 140: Tool creazione manuale Control Cards	168
Figura 141: Inserimento manuale Card elementi solidi	169

Figura 142: Calcolo accelerazioni	169
Figura 143: Inserimento time step minimo	170
Figura 144: Time step ed errore sulla massa	170
Figura 145: Errore sull'energia	171
Figura 146: Funzione mass calc	173
Figura 147: Tensione equivalente di Von Mises su AIP Configurazione Numero 1	173
Figura 148: Energia assorbita Configurazione Numero 1	173
Figura 149: Decelerazioni Configurazione Numero 1	174
Figura 150: Deflessione massima AIP Configurazione Numero 1	174
Figura 151: Tensione equivalente di Von Mises su AIP Configurazione Numero 2	175
Figura 152: Energia assorbita Configurazione Numero 2	175
Figura 153: Decelerazioni Configurazione Numero 2	176
Figura 154: Deflessione massima AIP Configurazione Numero 2	176
Figura 155: Tensione equivalente di Von Mises su AIP Configurazione Numero 3	177
Figura 156: Energia assorbita Configurazione Numero 3	177
Figura 157: Decelerazioni Configurazione Numero 3	178
Figura 158: Deflessione massima AIP Configurazione Numero 3	178
Figura 159: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Numero 4	179
Figura 160: Energia assorbita Configurazione Numero 4	179
Figura 161: Decelerazioni Configurazione Numero 4	180
Figura 162: Deflessione massima AIP Configurazione Numero 4	180
Figura 163: Tensione equivalente di Von Mises su AIP Configurazione Numero 5	181
Figura 164: Energia assorbita Configurazione Numero 5	181
Figura 165: Decelerazioni Configurazione Numero 5	182
Figura 166: Deflessione massima AIP Configurazione Numero 5	182
Figura 167: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Numero 6	183
Figura 168: Energia assorbita Configurazione Numero 6	183
Figura 169: Decelerazioni Configurazione Numero 6	184
Figura 170: Deflessione massima AIP Configurazione Numero 6	184
Figura 171: Stack sequence skin superiore AIP Configurazione Ottimizzata 1	186
Figura 172: Stack sequence skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata 1	186
Figura 173: Stack sequence superficie laterale IA Configurazione Ottimizzata 1	187
Figura 174: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata Numero 1	187
Figura 175: Energia assorbita Configurazione Ottimizzata Numero 1	188
Figura 176: Decelerazioni Configurazione Ottimizzata Numero 1	188
Figura 177: Deflessione massima AIP Configurazione Ottimizzata Numero 1	189
Figura 178: Stack sequence superficie laterale IA Configurazione Ottimizzata 2	189
Figura 179: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata Numero 2	190
Figura 180: Energia assorbita Configurazione Ottimizzata Numero 2	190
Figura 181: Decelerazioni Configurazione Ottimizzata Numero 2	191
Figura 182: Deflessione massima AIP Configurazione Ottimizzata Numero 2	191
Figura 183: Stack sequence skin superiore AIP Configurazione Ottimizzata 3	192
Figura 184: Stack sequence skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata 3	192
Figura 185: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata Numero 3	193
Figura 186: Energia assorbita Configurazione Ottimizzata Numero 3	193
Figura 187: Decelerazioni Configurazione Ottimizzata Numero 3	194
Figura 188: Deflessione massima AIP Configurazione Ottimizzata Numero 3	194
Figura 189: Stack sequence skin superiore AIP Configurazione Ottimizzata 4	195
Figura 190: Stack sequence skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata 4	195
Figura 191: Stack sequence superficie laterale IA Configurazione Ottimizzata 4	196
Figura 192: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata Numero 4	196
Figura 193: Energia assorbita Configurazione Ottimizzata Numero 4	197
Figura 194: Decelerazioni Configurazione Ottimizzata Numero 4	197
Figura 195: Deflessione massima AIP Configurazione Ottimizzata Numero 4	197

Figura 196: Stack sequence skin superiore AIP Configurazione Ottimizzata 5	198
Figura 197: Stack sequence skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata 5	198
Figura 198: Stack sequence superficie laterale IA Configurazione Ottimizzata 5	199
Figura 199: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata Numero 5	199
Figura 200: Energia assorbita Configurazione Ottimizzata Numero 5	200
Figura 201: Decelerazioni Configurazione Ottimizzata Numero 5	200
Figura 202: Deflessione massima AIP Configurazione Ottimizzata Numero 5	200
Figura 203: Stack sequence superficie laterale IA Configurazione Ottimizzata 6	201
Figura 204: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata Numero 6	202
Figura 205: Energia assorbita Configurazione Ottimizzata Numero 6	202
Figura 206: Decelerazioni Configurazione Ottimizzata Numero 6	203
Figura 207: Deflessione massima AIP Configurazione Ottimizzata Numero 6	203
Figura 208: Confronto crash test fisico e simulato FEM, [74]	205

Indice delle Tabelle

Tabella 1: punteggi massimi, [5]	3
Tabella 2: Funzionali canonici elasticità lineare, [11]	34
Tabella 3: Proprietà generali classi di materiali, [13]	42
Tabella 4: Proprietà fibre di rinforzo, [30]	58
Tabella 5: Parametri input scheda MAT2	153
Tabella 6: Relazione tra ply e set di definizione	157
Tabella 7: Contatti modello AIP classico	167
Tabella 8: Contatti modello AIP sandwich	167
Tabella 9: Configurazioni proposte	172
Tabella 10: Performance Configurazione Numero 1	174
Tabella 11: Performance Configurazione Numero 2	176
Tabella 12: Performance Configurazione Numero 3	178
Tabella 13: Performance Configurazione Numero 4	180
Tabella 14: Performance Configurazione Numero 5	182
Tabella 15: Performance Configurazione Numero 5	184
Tabella 16: Sintesi performance	184
Tabella 17: Sistema di punteggio	185
Tabella 18: Punteggi configurazioni	185
Tabella 19: Relazione tra ply e set di definizione IA Configurazione Ottimizzata Numero 1	186
Tabella 20: Confronto performance Configurazione Numero 4 e Configurazione Ottimizzata Numero 1	188
Tabella 21: Relazione tra ply e set di definizione IA Configurazione Ottimizzata Numero 2	189
Tabella 22: Confronto performance Configurazione Numero 4 e Configurazione Ottimizzata Numero 2	191
Tabella 23: Confronto performance Configurazione Numero 4 e Configurazione Ottimizzata Numero 3	194
Tabella 24: Relazione tra ply e set di definizione IA Configurazione Ottimizzata Numero 2	194
Tabella 25: Confronto performance Configurazione Numero 4 e Configurazione Ottimizzata Numero 4	196
Tabella 26: Relazione tra ply e set di definizione IA Configurazione Ottimizzata Numero 5	198
Tabella 27: Confronto performance Configurazione Numero 4 e Configurazione Ottimizzata Numero 5	201
Tabella 28: Relazione tra ply e set di definizione IA Configurazione Ottimizzata Numero 6	201
Tabella 29: Confronto performance Configurazione Numero 4 e Configurazione Ottimizzata Numero 6	202
Tabella 30: Confronto assoluto	203
Tabella 31: Variazione assoluta rispetto alla Configurazione Numero 4	204
Tabella 32: Variazione percentuale rispetto alla Configurazione Numero 4	204

Prefazione

La sicurezza rappresenta, ad oggi, uno dei punti cardine nei regolamenti degli sport motoristici, ma non sempre, specie nei primi anni di competizione, è stato così. Inizialmente, il tema della sicurezza non era nemmeno indagato ed i regolamenti menzionavano solamente delle indicazioni che quasi nessun team seguiva, in quanto tali indicazioni limitavano le performance delle vetture. Allo stesso tempo, la federazione stessa era poco propensa ad imporre dei regolamenti più stringenti, poiché questi avrebbero limitato lo spettacolo, unico vero parametro su cui si basava il motorsport nella sua fase primordiale. Questo portò, negli anni, ad una serie praticamente infinita di incidenti spesso gravi o addirittura mortali.



Ferrari 126 C2 di Gilles Villeneuve dopo l'incidente nelle prove sul circuito di Zolder, 1982, [1] e [2]

Lo spartiacque tra epoca classica e moderna, sotto il punto di vista della sicurezza, può essere considerato l'incidente mortale occorso ad Ayrton Senna nel GP di San Marino del 1994. Prima di questo evento spesso si tendeva a giustificare la morte di un pilota in gara a due fattori:

- errori del pilota stesso legati alla scarsa bravura o all'inesperienza;
- inaffidabilità di alcune vetture all'interno del paddock;



Williams fw16 di Ayrton Senna dopo l'incidente del GP di Imola, 1994, [3]

La morte di Senna mutò radicalmente tali convinzioni poiché il pilota brasiliano era probabilmente il miglior pilota in griglia (assieme ad un giovane Schumacher in rampa di lancio) e guidava la migliore macchina del paddock (Williams Racing veniva da due titoli costruttori consecutivi e ne vinse 5 in totale negli anni '90).

Da quel momento in poi, ci si convinse che fosse necessario rivedere l'intera filosofia del motorsport in favore di un maggior livello di sicurezza. Per prima cosa si operò una modifica del layout dei diversi tracciati, eliminando i tratti più pericolosi (ad esempio il famigerato *Curvone del Tamburello*, costato la vita a Senna, fu sostituito da una chicane molto più lenta, riducendo così anche la velocità del rettilineo successivo che porta alla *Tosa*, altra curva estremamente veloce e tecnica) per poi modificare le norme relative ai sistemi di sicurezza attiva e passiva presenti sulle stesse monoposto.



Incidente tra Charles Leclerc e Fernando Alonso nel GP del Belgio, 2018, [4]

Ad oggi, il livello di sicurezza si è alzato moltissimo, tanto che incidenti anche a velocità relativamente elevate raramente portano a conseguenze gravi o addirittura fatali per i piloti, a differenza di quanto avveniva in passato. Tale risultato è stato raggiunto in anni di ricerca su materiali ed architetture di sistemi in grado di assorbire gli urti.

L'obiettivo del presente lavoro di tesi è la progettazione del complesso costituito da un attenuatore di impatto (*impact attenuator - IA*) e la relativa paratia di supporto (*anti-intrusion plate - AIP*), due componenti di sicurezza passiva atti a garantire l'incolumità del pilota in caso di impatto frontale, destinati all'impiego su una vettura da Formula SAE (la *SC2I*, prototipo del team studentesco *Squadra Corse PoliTo*).

Per la fase di progettazione, si è adottato un approccio totalmente computazionale, facendo largo uso di codici FEM, i quali costituiscono, al giorno d'oggi, un ausilio indispensabile all'attività di design. La notevole versatilità di questo tipo di solutori ha permesso di studiare l'effetto e quantificare l'influenza di un gran numero di variabili diverse (dalla geometria, ai materiali, all'orientazione delle fibre ed alla stack sequence dei materiali compositi, per citarne alcune) sui risultati finali.

Come sempre in ambito ingegneristico, la soluzione finale rappresenta un trade-off tra performance pure, praticità costruttiva e costo finale della soluzione scelta.

CAPITOLO I - Introduzione

1.1 La Formula SAE

La formula SAE (Society of Automotive Engineers) è una competizione ingegneristica universitaria internazionale che prevede la progettazione e la costruzione di una monoposto stile formula che sarà poi valutata attraverso una serie di prove atte a testarne la bontà di design e l'efficienza ingegneristica. Tale competizione risulta attualmente divisa in tre categorie distinte:

- Classe 1C: veicoli a propulsione termica (CV);
- Classe 1E: veicoli a propulsione elettrica (EV);
- Classe 1D: veicoli a guida autonoma o driverless (DV);

A tali tre categorie se ne aggiunge una quarta denominata Classe 3, alla quale partecipano i team che si limitano a presentare il solo progetto della vettura, senza poi prendere parte alle prove.



Figura 1: Logo Formula ATA, evento ufficiale italiano FSAE

L'idea alla base della Formula SAE è che un'azienda fittizia contatti il team per la realizzazione di un prototipo di auto da corsa con determinate caratteristiche, che occupi il segmento di mercato dedicato ai piloti non professionisti, definiti come *weekend autocross racers*.

Ciascun evento della competizione inizia con una serie di ispezioni tecniche (cosiddette *techs*) da parte dei giudici, atte a verificare che la vettura risulti conforme al regolamento, specie per quanto concerne l'incolumità del pilota. Nello specifico, la procedura prevede.

- pre-ispezione;
- ispezione accumulatori (solo EV);
- ispezione parte elettrica (solo EV);
- ispezione parte meccanica;
- ispezione sistema di guida autonoma (solo DV);
- tilt test;
- pesa veicolo;
- noise test (solo CV);
- rain test (solo EV);
- brake test;
- EBS test (solo DV);

Superata la fase di investigazione iniziale, se il veicolo è dichiarato conforme, ha inizio l'evento vero e proprio che si articola in una serie di prove che si dividono in due tipologie: prove statiche e prove dinamiche. Nello specifico le prove sono:

- prove statiche:
 - business plan presentation: presentazione di dieci minuti nella quale si evidenzia l'abilità del team nello sviluppo di un modello di business che dimostri le potenzialità del proprio

prodotto (il prototipo di auto da corsa) di generare profitto per gli investitori (i giudici, in questo caso);

- cost and manufacturing: valutazione del grado di comprensione da parte del team del processo di manifattura e dei costi associati alla costruzione di un prototipo, incluse le decisioni di compromesso, quelle di *buy or make* (comprare un prodotto/servizio da un'azienda esterna o svilupparlo internamente) e la differenza tra la produzione di un prototipo e quella di serie;
- engineering design: valutazione del processo ingegneristico per lo sviluppo del progetto (non sono valutati i componenti sviluppati da enti esterni e poi montati già pronti sulla vettura);
- prove dinamiche:
 - skid pad: prova cronometrata su un circuito particolare a forma di 8 (Figura 2), costituito da due coppie di cerchi concentrici delimitati da coni. È considerato *giro* la percorrenza della singola corona circolare, tuttavia il pilota deve percorrerle entrambe poiché il tempo finale è calcolato come media dei tempi di percorrenza delle due (più eventuali penalità);
 - acceleration: prova cronometrata su un circuito rettilineo lungo 75 m e largo 5 m;
 - autocross: prova cronometrata su un circuito misto (rettilinei, curve larghe, tornanti a gomito, slalom tra coni e chicane) di lunghezza inferiore a 1.5 km;
 - endurance: prova cronometrata di più giri su un circuito misto per una percorrenza totale intorno ai 22 km nella quale è possibile superare le altre vetture in gara (solo in determinati punti, il *ruota-a-ruota* è severamente proibito) ed effettuare cambio di pneumatici e pilota;
 - efficiency: misura del consumo di carburante (CV) o elettrico (EV) effettuata durante la prova di endurance;
 - trackdrive: prova cronometrata di 10 giri su un circuito misto di lunghezza compresa tra i 200 m ed i 500 m dedicato ai prototipi driverless;

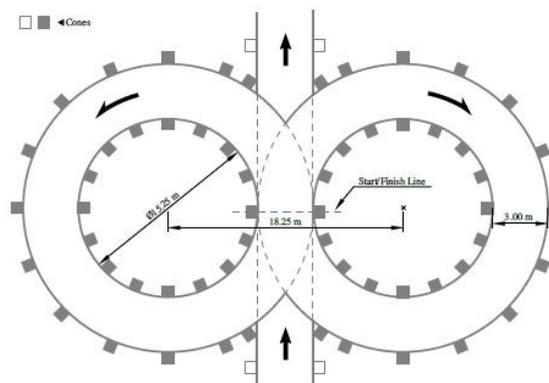


Figura 2: circuito Skid Pad, [5]



Figura 3: SC19 durante una prova di Skid Pad

A ciascuna prova è associato uno specifico punteggio secondo lo schema riportato in Tabella 1.

	CV & EV	DV
Prove Statiche		
Business Plan Presentation	75 punti	75 punti
Cost and Manufacturing	100 punti	100 punti
Engineering Design	150 punti	300 punti
Prove Dinamiche		
Skid Pad	75 punti	75 punti
Acceleration	75 punti	75 punti
Autocross	100 punti	100 punti
Endurance	325 punti	-
Efficiency	100 punti	75 punti
Trackdrive	-	200 punti
Overall	1000 punti	1000 punti

Tabella 1: punteggi massimi, [5]

I punteggi relativi alle singole prove, decurtati delle eventuali penalità che possono essere inflitte in ciascuna di esse (ad esempio far cadere un cono o finire con tutte e quattro le ruote fuori dal tracciato), vengono sommati. Al termine dell'evento il team che ha totalizzato il punteggio complessivo maggiore viene dichiarato vincitore della competizione.

1.2 Impact Attenuator (IA) e Anti-Intrusion Plate (AIP)

L'impact attenuator (IA) e l'anti-intrusion plate (AIP) sono due componenti strutturali presenti sulle monoposto da FSAE.

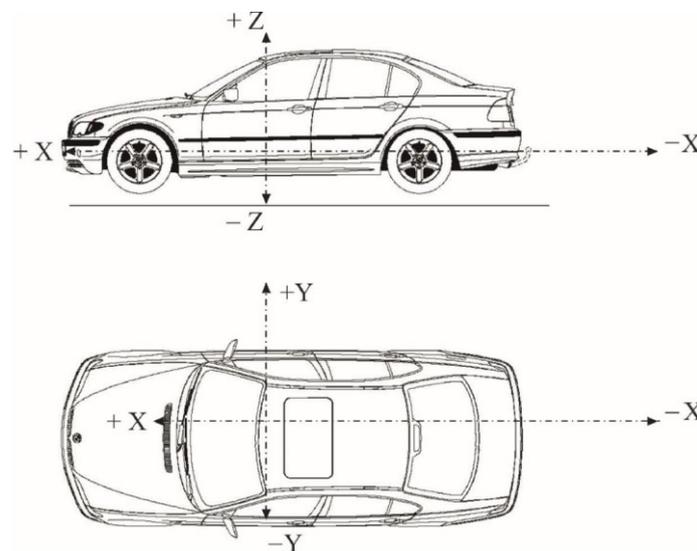


Figura 4: sistema di riferimento veicolo, [6]

Nello specifico, l'IA è definito dal regolamento FSAE come *un dispositivo posizionato nella parte anteriore della vettura, deformabile, che assorbe energia nel caso avvenga un urto*. Risulta, quindi, essere un dispositivo di sicurezza passiva che, in caso di urto frontale, deformandosi plasticamente, assorbe l'energia cinetica dell'impatto. L'AIP è, invece, la paratia necessaria a supportare l'IA e che ne consente il collegamento con il resto dello chassis. Tale collegamento deve essere realizzato, come dichiarato da regolamento, con un minimo di 8 viti M8.

Il regolamento prevede poche indicazioni per il design di tali componenti, motivo per cui al progettista è lasciata ampia libertà d'azione. Nello specifico, le restrizioni riguardano:

- dimensioni minime IA ammesse: 200 mm x 200 mm x 100 mm (rispettivamente x, y e z nel sistema di riferimento veicolo, mostrato in Figura 4);
- decelerazioni massime di picco: 40 g;
- decelerazione media massima: 20 g;

Accanto a questo, è necessario tenere presente che non sono ammesse configurazioni geometriche dell'IA con sezione frontale aperta o che eccedano le dimensioni dell'AIP e che non è consentito nella maniera più assoluta che l'IA sfondi l'AIP in caso di urto.

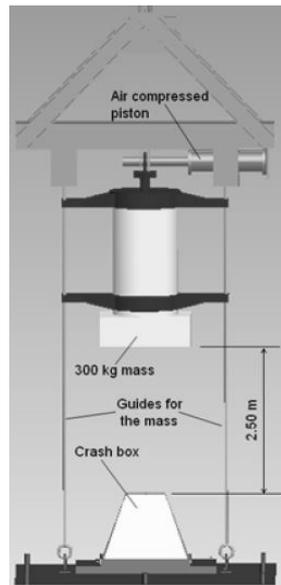


Figura 5: drop test, [7]

A livello sperimentale, la prova di impatto prevede che il complesso costituito da IA e AIP decelerati una massa pari a 300 kg lanciata ad una velocità pari a 7 m/s. Accanto alle verifiche relative a decelerazioni ed energia assorbita, bisogna assicurarsi che nessuna parte dell'AIP presenti una deflessione permanente rispetto alla posizione occupata originariamente superiore a 25 mm. Solitamente, per la prova sperimentale, si ricorre ad un *drop test* (Figura 5) nel quale si lascia cadere un maglio di massa nota da un'altezza tale da assicurarsi la rappresentatività della prova. Nota la massa, è possibile determinare l'altezza di caduta del maglio andando semplicemente ad uguagliare energia cinetica ed energia potenziale:

$$E_k = E_h \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = m g h \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} \quad (1)$$

essendo:

- $E_k = \frac{1}{2} m v^2$: energia cinetica del maglio;
- m : massa del maglio;
- v : velocità di impatto;
- $E_h = m g h$: energia potenziale gravitazionale;
- g : accelerazione di gravità;
- h : altezza di rilascio;

1.3 Cenni al Concetto di Energia

L'energia può essere definita come la *capacità di un sistema di compiere lavoro*, indipendentemente dal fatto che tale lavoro venga effettivamente svolto o meno. Nel Sistema Internazionale (SI) la sua unità di misura è il Joule (J), definito come:

$$1J = 1 N \cdot 1 m = 1 kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$$

L'energia risulta, inoltre, essere una grandezza:

- *estensiva*: l'energia totale di un sistema di corpi è data dalla somma delle energie dei singoli corpi;
- *invariante*: la variazione di energia totale di un sistema isolato è nulla (*principio di conservazione dell'energia totale*);

Ricordando che, per definizione, un *sistema si dice isolato nel caso non scambi energia e/o massa con l'ambiente esterno*, l'insieme di IA, AIP e barriera impattante può, con buona approssimazione, essere considerato tale.

Sotto tali ipotesi, escludendo la presenza di forme di energia particolari (nucleare, magnetica o chimica ad esempio), è possibile imporre il seguente bilancio energetico:

$$\Delta E_{k,t} + \Delta E_{k,r} + \Delta E_h = \Delta U + R \quad (2)$$

essendo:

- $E_{k,t} = \frac{1}{2} m v^2$: energia cinetica traslazionale del sistema di corpi;
- $E_{k,r} = \frac{1}{2} I \omega^2$: energia cinetica rotazionale del sistema di corpi;
- $E_h = m g h$: energia potenziale gravitazionale;
- U : energia di deformazione;
- R : energia dissipata per altri effetti (ad esempio attrito);

Data la fisica del problema è possibile supporre trascurabili:

- la variazione di quota del CG;
- l'energia cinetica rotazionale sia prima che dopo l'impatto;

Il bilancio energetico precedente può essere riscritto nella forma:

$$\Delta E_{k,t} = \Delta U + R \quad (3)$$

L'energia di deformazione ΔU può essere divisa in:

- ΔU_{el} : energia di deformazione elastica;
- ΔU_{pl} : energia di deformazione plastica;

Da cui l'equazione (3) può essere riscritta nella forma:

$$\Delta E_{k,t} = \Delta U_{el} + \Delta U_{pl} + R \quad (4)$$

Ricordando i valori di riferimento di massa e velocità del maglio per la prova sperimentale d'impatto previsti da regolamento e riportati nella sezione precedente, è possibile calcolare l'energia (minima) che il sistema costituito da IA e AIP dovrà essere in grado di assorbire e quindi dissipare:

$$\Delta E_{k,t} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 300 \text{ kg} \cdot \left(7 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 7350 \text{ J}$$

Si noti che l'energia di deformazione elastica viene rilasciata nel momento in cui la sollecitazione esterna viene meno; al contrario, la componente plastica risulta essere effettivamente dissipata. Alla dissipazione dell'energia cinetica appena calcolata contribuiranno, quindi, solo le componenti ΔU_{pl} e R .

1.4 Cenni al Meccanica degli Urto

L'urto può essere definito come *l'interazione (collisione) tra due o più corpi*. Nello studio della meccanica degli urti è importante ricordare la definizione di tre quantità fisiche che rivestono una notevole importanza:

- $\vec{p} = m \vec{v}$: quantità di moto;
- $\vec{J} = \Delta \vec{p} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}(t) dt$: impulso della forza;
- $E_M = E_k + E_h$: energia meccanica;

Si noti che il tempo d'urto è abbastanza limitato (dell'ordine dei millisecondi nel caso di urti anelastici) a fronte di variazioni di quantità di moto molto consistenti. Da questo e dalla definizione di impulso, è possibile notare che le forze derivanti dall'impatto (forze interne al sistema) sono estremamente elevate e saranno, pertanto, più intense di diversi ordini di grandezza rispetto alle forze esterne al sistema. Questo ci permette di ipotizzare con ottima approssimazione che il sistema in esame sia *isolato*, per cui è lecito supporre:

- la *conservazione della quantità di moto totale* nel tempo:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow m_{in} \vec{v}_{in} = m_{fin} \vec{v}_{fin} \quad (5)$$

- la trascurabilità dei potenziali delle forze esterne:

$$E_M = E_k \quad (6)$$

avendo indicato con il pedice *in* le condizioni iniziali (prima dell'urto) e con il pedice *fin* quelle finali (dopo l'urto).

In generale, gli urti possono essere classificati in:

- urti elastici: eventi nei quali si ha la conservazione sia della quantità di moto, sia dell'energia meccanica (e quindi cinetica);
- urti anelastici: eventi nei quali si ha la conservazione della sola quantità di moto;

Supponiamo di andare a considerare un semplice urto frontale tra due corpi materiali (Figura 6).

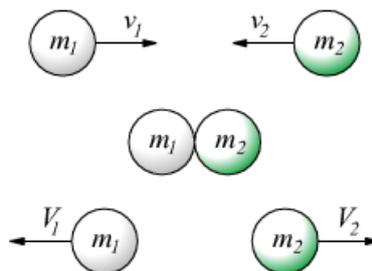


Figura 6: urto frontale tra due punti materiali, [8]

Nel caso in cui l'urto risulti essere *elastico*, per risolvere il problema sarà sufficiente imporre la conservazione delle due grandezze citate in precedenza. Nello specifico, questo equivale alla risoluzione del sistema di equazioni scalari:

$$\begin{cases} m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} = m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2 \end{cases} \quad (7)$$

da cui, supponendo note le masse e le velocità iniziali dei due corpi materiali, è possibile ricavare le velocità finali:

$$\begin{cases} v_{1,fin} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,in} + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_{2,in} \\ v_{2,fin} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1,in} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{2,in} \end{cases} \quad (8)$$

Nel caso in cui l'urto risulti essere *anelastico*, è possibile imporre la conservazione della sola quantità di moto. Risulta utile richiamare, in questo caso, la relazione che lega la velocità relativa dei corpi a seguito dell'urto a quella degli stessi prima dell'urto:

$$v_{1,fin} - v_{2,fin} = -\epsilon(v_{1,in} - v_{2,in}) \quad (9)$$

essendo $0 \leq \epsilon \leq 1$ il *coefficiente di ritorno*, legato alle proprietà elastiche dei due corpi materiali. Esso assumerà valore pari a:

- 0 nel caso di *urto perfettamente anelastico*;
- 1 nel caso di *urto perfettamente elastico*;

Facendo riferimento alla conservazione della quantità di moto e all'espressione (9) è possibile determinare l'espressione delle velocità a seguito dell'urto anche nel caso anelastico:

$$\begin{cases} v_{1,fin} = \frac{(m_1 - \epsilon m_2) v_{1,i} + m_2(1 + \epsilon) v_{2,i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2,fin} = \frac{(m_2 - \epsilon m_1) v_{2,i} + m_1(1 + \epsilon) v_{1,i}}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (10) \quad (9)$$

Negli urti anelastici si ha, quindi, una quota di energia meccanica che viene dissipata e trasformata, conformemente al *I principio della termodinamica*, in energia interna del sistema, divisa rispettivamente in calore e lavoro termodinamico (energia di deformazione plastica).

Nel caso in cui l'urto non sia mono-dimensionale, come supposto in precedenza, il concetto resta lo stesso: sarà necessario andare ad imporre la conservazione di energia meccanica e quantità di moto in forma vettoriale invece che scalare, ottenendo così un sistema con un numero maggiore di equazioni.

CAPITOLO II - Formulazione del Problema Elastico

Nell'ambito della *meccanica del continuo*, un corpo può essere definito come un *insieme di punti materiali identificabili con i punti geometrici di una certa regione dello spazio fisico a cui è possibile associare una certa massa e quindi una funzione densità di massa che ne permetta una misura*. Dal punto di vista pratico un corpo continuo è, quindi, un sistema fisico tale che la dimensione dei fenomeni osservati risulti tale da non essere influenzata dalla struttura molecolare e/o atomica.

Il comportamento del corpo continuo sotto sollecitazioni esterne può essere descritto mediante due modelli:

- *corpo rigido*: la distanza tra una qualsiasi coppia di punti interna al corpo resta sempre e comunque costante (approccio tipico della *meccanica razionale*);
- *corpo deformabile*: la distanza tra le coppie di punti del corpo può variare (approccio della *Scienza delle Costruzioni*);

Nella realtà ogni corpo soggetto a carichi esterni reagisce deformandosi e generando al suo interno delle azioni (*tensioni*) necessarie affinché sia possibile raggiungere un equilibrio.

2.1 Relazioni Geometriche

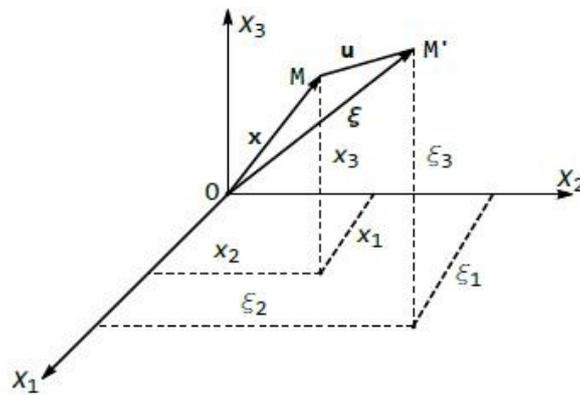


Figura 6: spostamento del punto M, [9]

Si consideri un corpo B e si fissi un certo sistema di riferimento. Dato un generico punto M all'interno del corpo B , esso avrà, nella configurazione indeformata, le coordinate (x_1, x_2, x_3) . All'applicazione della sollecitazione esterna il corpo B subirà una trasformazione, per cui si porterà in B' e, coerentemente, il punto M si porterà in M' di coordinate (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Facendo riferimento a Figura 6 risulta possibile scrivere:

$$\xi_i = x_i + u_i \quad i = 1, 2, 3 \quad \Leftrightarrow \quad \{\xi\} = \{x\} + \{u\} \quad (11)$$

essendo $\{u\} = \overline{MM'}$ il vettore *spostamento*. Si noti che, per ragioni fisiche, le componenti del vettore $\{x\}$ sono supposte essere funzioni continue e derivabili.

Sia ora N un punto nell'intorno di M di coordinate $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ ed N' il suo trasformato. Esso avrà coordinate $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$ e sarà possibile scrivere:

$$\overline{ON'} = \overline{ON} + \overline{NN'} \quad \Leftrightarrow \quad \{\xi\} + \{d\xi\} = \{x\} + \{dx\} + \{u\} + \{du\} \quad (12)$$

Essendo che le componenti di spostamento sono, come già detto, funzioni continue e derivabili è possibile andare a calcolare lo *sviluppo in serie di Taylor* delle stesse attorno al punto M . Operando nella maniera appena descritta e supponendo di arrestare lo sviluppo al primo ordine è possibile scrivere:

$$\begin{cases} u_1 + du_1 = u_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_M dx_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)_M dx_2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)_M dx_3 \\ u_2 + du_2 = u_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)_M dx_1 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)_M dx_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)_M dx_3 \\ u_3 + du_3 = u_3 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)_M dx_1 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)_M dx_2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)_M dx_3 \end{cases} \quad (13)$$

o in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_M \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{\mathbf{du}\} = [\mathbf{H}]\{\mathbf{dx}\} \quad (14)$$

essendo $[\mathbf{H}]$ la *matrice delle componenti del gradiente di spostamento*.

La stessa relazione può essere riscritta facendo uso della notazione di Einstein in forma tensoriale:

$$u_i + du_i = u_i + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_M dx_j = u_i + H_{ij}dx_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (15)$$

Come è facilmente osservabile, la matrice $[\mathbf{H}]$ non è simmetrica tuttavia, essendo quadrata, gode della proprietà secondo la quale è possibile scomporla in due sottomatrici di cui una sia simmetrica e l'altra antisimmetrica:

$$[\mathbf{H}] = \frac{1}{2}([\mathbf{H}] + [\mathbf{H}]^T) + \frac{1}{2}([\mathbf{H}] - [\mathbf{H}]^T) = [\boldsymbol{\epsilon}] + [\boldsymbol{\Omega}] \quad (16)$$

essendo:

$$[\boldsymbol{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

È possibile notare che:

- $[\boldsymbol{\epsilon}]$ tiene conto dell'effettiva deformazione del segmento \overline{MN} ;

- $[\mathbf{\Omega}]$ tiene conto di una componente di deformazione cilindrica e della rotazione rigida del segmento \overline{MN} ;

Inserendo la relazione (14) nella (12):

$$\{\xi\} + \{d\xi\} = \{x\} + \{dx\} + \{u\} + [\mathbf{H}]\{dx\} \quad (17)$$

da cui, tenendo conto di (11):

$$\{d\xi\} = \{dx\} + [\mathbf{H}]\{dx\} = ([\mathbf{I}] + [\mathbf{H}])\{dx\} = [\mathbf{F}]\{dx\} \quad (18)$$

essendo $[\mathbf{I}]$ la *matrice identità* 3x3. Nella relazione precedente, è stata introdotta $[\mathbf{F}]$ detta *matrice delle componenti del gradiente di deformazione*, definita dalla relazione:

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{I}] + [\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (19)$$

La relazione (18) può essere riscritta in maniera esplicita:

$$\begin{cases} d\xi_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ d\xi_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ d\xi_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3 \end{cases} \quad (20)$$

o ancora, in maniera più compatta, facendo uso della notazione tensoriale:

$$d\xi_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dx_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (21)$$

essendo δ l'*operatore di Kronecker* definito da:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Si riconsideri, quindi, il vettore $\overline{MN} = \{dx\} = \{dx_1, dx_2, dx_3\}^T$; ricordando che la lunghezza è pari alla norma del vettore è possibile scrivere:

$$|\overline{MN}| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = \sqrt{\{dx\}^T \{dx\}} \quad (21)$$

A seguito dell'applicazione del carico esterno il vettore \overline{MN} si trasforma, come già detto, in $\overline{M'N'} = \{d\xi\} = \{d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3\}^T$ e, ragionando in maniera analoga al caso precedente:

$$|\overline{M'N'}| = \sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2} = \sqrt{\{d\xi\}^T \{d\xi\}} \quad (22)$$

Ricordando che, dalla relazione (18), $\{d\xi\} = [\mathbf{F}]\{dx\}$ è possibile andare a scrivere:

$$|\overline{M'N'}| = \sqrt{\{d\xi\}^T \{d\xi\}} = \sqrt{\{dx\}^T [\mathbf{F}]^T [\mathbf{F}] \{dx\}} \quad (23)$$

da cui ancora:

$$|\overline{M'N'}|^2 - |\overline{MN}|^2 = \{dx\}^T [\mathbf{F}]^T [\mathbf{F}] \{dx\} - \{dx\}^T \{dx\} = \{dx\}^T ([\mathbf{F}]^T [\mathbf{F}] - [\mathbf{I}]) \{dx\} = 2\{dx\}^T [\mathbf{D}] \{dx\} \quad (24)$$

nella quale è stato introdotto il tensore $[D]$ detto *tensore di Green-Lagrange* definito da:

$$[D] = \frac{1}{2}([F]^T[F] - [I]) = \frac{1}{2}([H] + [H]^T + [H]^T[H])$$

È, quindi, possibile andare a svolgere i prodotti matriciali ed esplicitare le espressioni dei termini di $[D]$. Si noti che, essendo $[D]$ simmetrica sarà sufficiente calcolare solamente 6 componenti:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ d_{12} = d_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ d_{13} = d_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ d_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ d_{23} = d_{32} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ d_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Le espressioni precedenti possono essere riassunte in forma tensoriale:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (26)$$

Il segmento \overline{MN} subirà, pertanto, un *allungamento percentuale* pari a:

$$E_{MN} = \frac{|\overline{M'N'}| - |\overline{MN}|}{|\overline{MN}|} = \frac{|\overline{M'N'}|}{|\overline{MN}|} - 1$$

da cui, invertendo:

$$|\overline{M'N'}| = (1 + E_{MN})|\overline{MN}| \quad (27)$$

da cui:

$$|\overline{M'N'}|^2 - |\overline{MN}|^2 = (1 + E_{MN})^2 |\overline{MN}|^2 - |\overline{MN}|^2 = E_{MN}(2 + E_{MN})|\overline{MN}|^2 \quad (28)$$

ed inserendo (28) in (24):

$$E_{MN}(2 + E_{MN})|\overline{MN}|^2 = 2\{\mathbf{dx}\}^T [D] \{\mathbf{dx}\} \quad (29)$$

da cui ancora, dividendo ambo i membri per $2|\overline{MN}|^2$:

$$E_{MN} \left(1 + \frac{E_{MN}}{2} \right) = \frac{\{\mathbf{dx}\}^T}{|\overline{MN}|} [D] \frac{\{\mathbf{dx}\}}{|\overline{MN}|} = \{\mathbf{l}\}^T [D] \{\mathbf{l}\} \quad (30)$$

avendo introdotto $\{\mathbf{l}\}$, vettore contenente i *coseni direttori* del segmento $|\overline{MN}|$, definito dalla relazione:

$$\{\mathbf{L}\} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dx_1}{|\overline{\mathbf{MN}}|} \\ \frac{dx_2}{|\overline{\mathbf{MN}}|} \\ \frac{dx_3}{|\overline{\mathbf{MN}}|} \end{Bmatrix}$$

La relazione (30) permette il calcolo esplicito della deformazione che il segmento $|\overline{\mathbf{MN}}|$ subisce sotto il carico esterno:

$$\begin{aligned} \epsilon_{MN} &= E_{MN} \left(1 + \frac{E_{MN}}{2} \right) = \{\mathbf{L}\}^T [\mathbf{D}] \{\mathbf{L}\} = \\ &= d_{ij} l_i l_j = d_{11} l_1^2 + d_{22} l_2^2 + d_{33} l_3^2 + 2(d_{12} l_1 l_2 + d_{23} l_2 l_3 + d_{13} l_1 l_3) \quad (31) \end{aligned}$$

Andando a considerare $\overline{\mathbf{MN}} = \{\mathbf{dx}\}^T = \{dx_1, 0, 0\}^T$ parallelo a x_1 e considerando che in questo caso $\{\mathbf{L}\} = \{1, 0, 0\}^T$:

$$\epsilon_{11} = E_{x_1} \left(1 + \frac{E_{x_1}}{2} \right) = d_{11} \quad (32)$$

da cui:

$$E_{x_1} = \sqrt{1 + 2d_{11}} - 1 \quad (33)$$

In maniera perfettamente analoga, considerando un segmento parallelo a x_2 e x_3 :

$$\begin{aligned} E_{x_2} &= \sqrt{1 + 2d_{22}} - 1 \\ E_{x_3} &= \sqrt{1 + 2d_{33}} - 1 \end{aligned} \quad (34)$$

Da (33) e (34) appare evidente che gli elementi diagonali del tensore di Green-Lagrange forniscano un'indicazione degli allungamenti percentuali di segmenti passanti per il punto M e paralleli agli assi.

I tre elementi d_{11} , d_{22} e d_{33} prendono il nome di *componenti normali della deformazione*.

Si considerino ora due segmenti $\overline{\mathbf{OM}} = \{\mathbf{dx}_1\}$ parallelo a x_1 e $\overline{\mathbf{ON}} = \{\mathbf{dx}_2\}$ parallelo a x_2 . Essendo tali due segmenti paralleli agli assi del sistema di riferimento considerato, i coseni direttori saranno rispettivamente $\{1, 0, 0\}^T$ e $\{0, 1, 0\}^T$.

All'applicazione del carico, i segmenti $\overline{\mathbf{OM}} = \{\mathbf{dx}_1\}$ e $\overline{\mathbf{ON}} = \{\mathbf{dx}_2\}$ saranno trasformati rispettivamente in $\overline{\mathbf{OM}}' = \{\mathbf{d\xi}_1\}$ e $\overline{\mathbf{ON}}' = \{\mathbf{d\xi}_2\}$ e, in maniera analoga, anche i coseni direttori subiranno una trasformazione che può essere definita attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} &= \frac{d\xi_1}{|OM'|} = \frac{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{1 + E_{x_1}} \\
\lambda_{21} &= \frac{d\xi_2}{|OM'|} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + E_{x_1}} \\
\lambda_{31} &= \frac{d\xi_3}{|OM'|} = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{1 + E_{x_1}} \\
\lambda_{12} &= \frac{d\xi_1}{|ON'|} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1 + E_{x_2}} \\
\lambda_{22} &= \frac{d\xi_2}{|ON'|} = \frac{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{1 + E_{x_2}} \\
\lambda_{32} &= \frac{d\xi_3}{|ON'|} = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{1 + E_{x_2}}
\end{aligned} \quad (35)$$

Ricordando che:

$$\begin{aligned}
\cos(\{d\xi_1\}, \{d\xi_2\}) &= \lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22} + \lambda_{31}\lambda_{32} = \\
&= \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{(1 + E_{x_1})(1 + E_{x_2})} = \frac{2d_{12}}{(1 + E_{x_1})(1 + E_{x_2})}
\end{aligned}$$

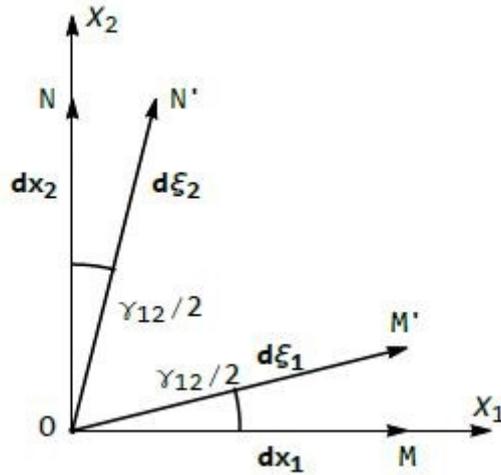


Figura 7: angoli taglienti, [9]

e facendo riferimento a Figura 7:

$$\cos(\{d\xi_1\}, \{d\xi_2\}) = \frac{2d_{12}}{(1 + E_{x_1})(1 + E_{x_2})} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin \gamma_{12} \quad (36)$$

In maniera perfettamente analoga:

$$\begin{aligned}
\cos(\{d\xi_1\}, \{d\xi_3\}) &= \frac{2d_{13}}{(1 + E_{x_1})(1 + E_{x_3})} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{13}\right) = \sin \gamma_{13} \\
\cos(\{d\xi_2\}, \{d\xi_3\}) &= \frac{2d_{23}}{(1 + E_{x_2})(1 + E_{x_3})} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{23}\right) = \sin \gamma_{23}
\end{aligned} \quad (37)$$

Gli angoli γ_{12} , γ_{13} e γ_{23} prendono il nome di *angoli taglienti*, mentre le componenti d_{12} , d_{13} e d_{23} quello di *componenti tangenziali della deformazione*.

Le relazioni (33, (34, (36 e (37 prendono il nome di *relazioni geometriche*; esse legano gli spostamenti dei punti di un corpo B alle deformazioni subite dallo stesso.

Spesso, nella pratica, sia le variazioni percentuali di lunghezza (E_{x_1} , E_{x_2} e E_{x_3}) che le variazioni angolari (γ_{12} , γ_{13} e γ_{23}) possono essere considerate trascurabili rispetto all'unità. In questi casi si parla di *ipotesi di piccole deformazioni*:

$$\begin{aligned} E_{x_i} &\ll 1 \\ \gamma_{ij} &\ll 1 \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (38$$

Sotto tali ipotesi le relazioni geometriche possono essere notevolmente semplificate. Per quanto riguarda le variazioni percentuali di lunghezza riportate per comodità:

$$\begin{aligned} E_{x_1} &= \sqrt{1 + 2d_{11}} - 1 \\ E_{x_2} &= \sqrt{1 + 2d_{22}} - 1 \\ E_{x_3} &= \sqrt{1 + 2d_{33}} - 1 \end{aligned} \quad (39$$

facendo uso dello sviluppo in serie di Taylor della funzione radice arrestato al primo ordine:

$$\sqrt{1 + 2d_{ii}} = 1 + d_{11} - \frac{d_{11}^2}{2} + \frac{d_{11}^3}{2} + o[d_{11}^4] \quad i = 1, 2, 3 \quad (40$$

da cui:

$$\begin{aligned} E_{x_1} &= d_{11} \\ E_{x_2} &= d_{22} \\ E_{x_3} &= d_{33} \end{aligned} \quad (41$$

e ricordando (31:

$$\epsilon_{MN} = E_{MN} \left(1 + \frac{E_{MN}}{2} \right) \approx E_{MN}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} = d_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \epsilon_{22} = d_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \epsilon_{33} = d_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (42$$

In maniera perfettamente analoga per le variazioni angolari:

$$\begin{aligned} \sin \gamma_{12} &= \frac{2d_{12}}{(1+E_{x_1})(1+E_{x_2})} \\ \sin \gamma_{13} &= \frac{2d_{13}}{(1+E_{x_1})(1+E_{x_3})} \\ \sin \gamma_{23} &= \frac{2d_{23}}{(1+E_{x_2})(1+E_{x_3})} \end{aligned} \quad (43$$

facendo riferimento allo sviluppo in serie di Taylor per la funzione seno:

$$\sin \gamma_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{ij}^3}{6} + o[\gamma_{ij}^4] \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (44$$

e considerando che:

$$(1 + E_{x_i})(1 + E_{x_j}) \approx 1 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (45$$

da cui:

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma_{12}}{2} = d_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\
 \frac{\gamma_{13}}{2} = d_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\
 \frac{\gamma_{23}}{2} = d_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)
 \end{aligned} \quad (46)$$

2.2 Equazioni di Compatibilità

Si suppongano assegnate:

- le tre funzioni $u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2(x_1, x_2, x_3)$ e $u_3(x_1, x_2, x_3)$ che descrivono il *campo di spostamenti*;
- le sei funzioni ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} , γ_{12} , γ_{13} e γ_{23} che descrivono il *campo di deformazioni*;

È possibile dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché:

- assegnato il campo di spostamenti sia possibile determinare il campo di deformazioni per derivazione;
- assegnato il campo di deformazioni sia possibile determinare il campo di spostamenti per integrazione;

è che:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) \\
 \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} \right) \\
 \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} \right) \\
 2 \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} \\
 2 \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} \\
 2 \frac{\partial^2 \gamma_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2}
 \end{aligned} \quad (47)$$

Le relazioni (47) prendono il nome di *equazioni di compatibilità o congruenza interna*.

2.3 Equazioni di Equilibrio

Come accennato nella parte introduttiva del presente capitolo, se si considera un corpo opportunamente vincolato e caricato, esso reagirà, coerentemente con il modello di corpo deformabile, deformandosi e producendo un sistema di azioni interne atte a stabilire una condizione di equilibrio.

Le forze possono essere divise in:

- *forze di volume* $\{\mathbf{X}\}$;
- *forze di superficie esterne* $\{\mathbf{p}\}$: azioni esercitate sul bordo ∂B del corpo in esame da altri corpi;
- *forze di superficie interne* $\{\mathbf{t}\}$: azioni esercitate tra le varie porzioni in cui idealmente è possibile suddividere il corpo;

Il concetto di *forze di volume* è molto ampio e racchiude in sé forze di natura anche molto diversa tra loro come quelle *di campo* (ad esempio gravitazionale e/o elettromagnetica) o quelle *di inerzia*. Tutte queste forze hanno in comune il fatto di essere proporzionali alla quantità di materia (volume) di cui è composto il corpo in esame.

Supponendo di considerare l'intero corpo B , affinché sia verificata la condizione di equilibrio è necessario che:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \{\mathbf{p}\} dS + \int_B \{\mathbf{X}\} dV &= \{\mathbf{0}\} \\ \int_{\partial B} \{\mathbf{r}\} \wedge \{\mathbf{p}\} dS + \int_B \{\mathbf{r}\} \wedge \{\mathbf{X}\} dV &= \{\mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (48)$$

essendo:

- $\{\mathbf{r}\}$: vettore posizione;
- \wedge : operatore prodotto vettoriale;

Si supponga, ora, di sezionare il corpo B in due corpi (B_1 e B_2) con un generico piano Π , passante per $P \subset B$ e definito dal versore normale $\{\mathbf{n}\}$. L'*assioma di Eulero* afferma che l'azione esercitata da B_1 su B_2 attraverso un intorno ΔA del punto P sia equivalente ad un campo di azioni interne definito su ΔA . In altre parole, essendo per ipotesi B in equilibrio, anche B_1 e B_2 lo saranno di conseguenza; perché tale equilibrio sia soddisfatto devono necessariamente nascere delle azioni all'interfaccia tra i due corpi (Figura 8).

Siano pertanto:

- $\{\mathbf{R}_n\}$: forza risultante agente su ΔA ;
- $\{\mathbf{M}_n\}$: momento risultante agente su ΔA ;

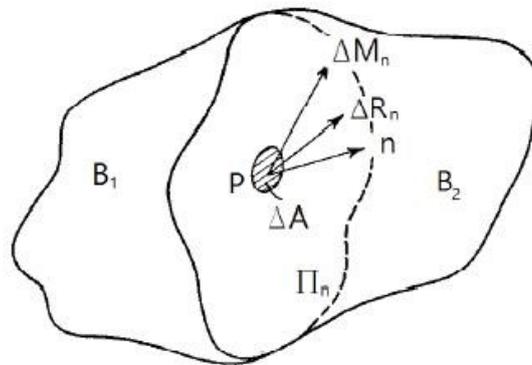


Figura 8: campo di azioni interne, [9]

Facendo ora riferimento all'*ipotesi di Cauchy*, è possibile supporre che:

- $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\{\mathbf{R}_n\}}{\Delta A} = \{\mathbf{t}_n\}$;
- $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\{\mathbf{M}_n\}}{\Delta A} = \{\mathbf{0}\}$;

Il vettore $\{\mathbf{t}_n\}$ è detto *vettore tensione relativo al punto P e al piano di normale $\{\mathbf{n}\}$* e sarà funzione sia del punto P che del vettore $\{\mathbf{n}\}$. Esso può essere scomposto in una terna d'assi locale tale che uno di tali assi coincida con la normale a ΔA e gli altri due siano giacenti nel piano (Figura 9):

$$\{\mathbf{t}_n\} = \sigma_n \{\mathbf{n}\} + \tau_{np} \{\mathbf{p}\} + \tau_{nq} \{\mathbf{q}\} \quad (49)$$

essendo:

- $\{\mathbf{n}\}$, $\{\mathbf{p}\}$ e $\{\mathbf{q}\}$ i versori associati a tali assi;

- σ_n : componente di tensione normale;
- τ_{np} e τ_{nq} : componenti di tensione tangenziali;

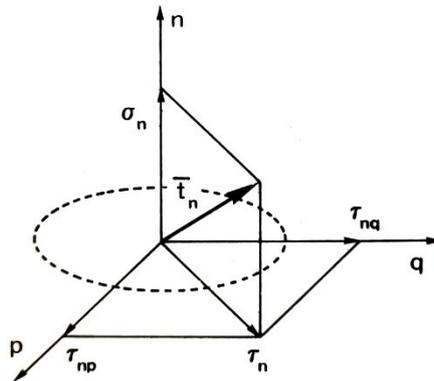


Figura 9: sistema di riferimento locale, [9]

Si noti che la definizione data di $\{t_n\}$ non risulta essere operativa; anche assegnato il punto P , la tensione resta funzione del vettore $\{n\}$ che identifica la normale del piano di taglio, motivo per cui, esistendo infiniti piani di taglio passanti per il punto P , esisteranno infiniti vettori tensione $\{t_n\}$.

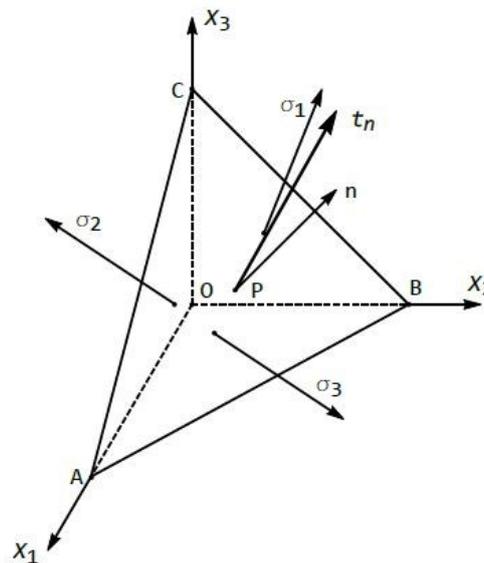


Figura 10: tetraedro elementare, [9]

Si consideri il tetraedro elementare di volume dV nell'intorno del punto P e si indichino con dA_{x_1} , dA_{x_2} e dA_{x_3} le tre facce parallele ai piani coordinati e con dA la faccia obliqua avente come normale $\{n\}$. Siano, inoltre, $\{t_n\}$ il vettore tensione agente nel punto P e $\{\sigma_1\}$, $\{\sigma_2\}$ e $\{\sigma_3\}$ le tensioni relative ai tre piani coordinati (Figura 10). Essendo $\{t_n\}$, $\{\sigma_1\}$, $\{\sigma_2\}$ e $\{\sigma_3\}$ vettori, essi possono essere scomposti nelle rispettive componenti rispetto ad un sistema di riferimento qualsiasi. Considerando il sistema di assi coordinati si ha (Figura 11):

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{t}_n\} &= \begin{pmatrix} t_{n_1} \\ t_{n_2} \\ t_{n_3} \end{pmatrix} \\
 \{\boldsymbol{\sigma}_1\} &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} \\
 \{\boldsymbol{\sigma}_2\} &= \begin{pmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \\
 \{\boldsymbol{\sigma}_3\} &= \begin{pmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (50)$$

Si definisce:

- *faccia positiva*: faccia la cui normale è concorde con il corrispondente asse coordinato;
- *faccia negativa*: faccia la cui normale è disconcorde rispetto al corrispondente asse coordinato;

Si noti che, per convenzione, σ_{ij} :

- indica la componente di tensione che agisce lungo j sulla faccia con normale diretta lungo i ;
- sarà positiva:
 - se concorde all'asse coordinato su una faccia positiva;
 - se discorde all'asse coordinato su una faccia negativa;

Sia, infine, $\{\mathbf{X}\} = \{X_1, X_2, X_3\}^T$ il vettore delle forze di volume agenti sul tetraedro.

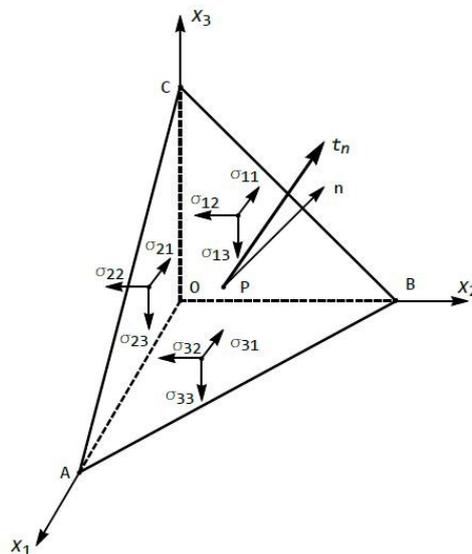


Figura 11: componenti di tensione rispetto agli assi coordinati, [9]

Supponendo che le facce siano di dimensioni sufficientemente ridotte da poter ritenere costante il valore delle tensioni sulle stesse, è possibile imporre l'equilibrio alla traslazione nelle tre direzioni identificate dal sistema di assi coordinati:

$$\begin{aligned}
 t_{n_1} dA - (\sigma_{11} dA_{x_1} + \sigma_{21} dA_{x_2} + \sigma_{31} dA_{x_3}) + X_1 dV &= 0 \\
 t_{n_2} dA - (\sigma_{12} dA_{x_1} + \sigma_{22} dA_{x_2} + \sigma_{32} dA_{x_3}) + X_2 dV &= 0 \\
 t_{n_3} dA - (\sigma_{13} dA_{x_1} + \sigma_{23} dA_{x_2} + \sigma_{33} dA_{x_3}) + X_3 dV &= 0
 \end{aligned} \quad (51)$$

da cui, dividendo per dA :

$$\begin{aligned} t_{n_1} - \left(\sigma_{11} \frac{dA_{x_1}}{dA} + \sigma_{21} \frac{dA_{x_2}}{dA} + \sigma_{31} \frac{dA_{x_3}}{dA} \right) + X_1 \frac{dV}{dA} &= 0 \\ t_{n_2} - \left(\sigma_{12} \frac{dA_{x_1}}{dA} + \sigma_{22} \frac{dA_{x_2}}{dA} + \sigma_{32} \frac{dA_{x_3}}{dA} \right) + X_2 \frac{dV}{dA} &= 0 \\ t_{n_3} - \left(\sigma_{13} \frac{dA_{x_1}}{dA} + \sigma_{23} \frac{dA_{x_2}}{dA} + \sigma_{33} \frac{dA_{x_3}}{dA} \right) + X_3 \frac{dV}{dA} &= 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Considerando che:

$$\begin{aligned} \frac{dA_{x_1}}{dA} &= n_1 \\ \frac{dA_{x_2}}{dA} &= n_2 \\ \frac{dA_{x_3}}{dA} &= n_3 \end{aligned} \quad (53)$$

$$dV = \frac{1}{3} h dA \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0$$

essendo n_1, n_2 ed n_3 i coseni direttori della normale $\{\mathbf{n}\}$, definiti dalle relazioni:

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(\{\mathbf{n}\}, x_1) \\ n_2 &= \cos(\{\mathbf{n}\}, x_2) \\ n_3 &= \cos(\{\mathbf{n}\}, x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{n_1} - \left(\sigma_{11} \frac{dA_{x_1}}{dA} + \sigma_{21} \frac{dA_{x_2}}{dA} + \sigma_{31} \frac{dA_{x_3}}{dA} \right) + X_1 \frac{dV}{dA} &= 0 \\ \text{Inserendo, quindi, (53) in } t_{n_2} - \left(\sigma_{12} \frac{dA_{x_1}}{dA} + \sigma_{22} \frac{dA_{x_2}}{dA} + \sigma_{32} \frac{dA_{x_3}}{dA} \right) + X_2 \frac{dV}{dA} &= 0 \quad (52) \\ t_{n_3} - \left(\sigma_{13} \frac{dA_{x_1}}{dA} + \sigma_{23} \frac{dA_{x_2}}{dA} + \sigma_{33} \frac{dA_{x_3}}{dA} \right) + X_3 \frac{dV}{dA} &= 0 \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} t_{n_1} &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \\ t_{n_2} &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \\ t_{n_3} &= \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{aligned} \quad (54)$$

o, in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} t_{n_1} \\ t_{n_2} \\ t_{n_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{\mathbf{t}_n\} = [\boldsymbol{\sigma}]^T \{\mathbf{n}\} \quad (55)$$

avendo introdotto il tensore $[\boldsymbol{\sigma}]$ detto *tensore degli sforzi o delle tensioni*.

La (55) può essere riscritta in forma sintetica facendo uso della notazione tensoriale:

$$t_{n_i} = \sigma_{ij} n_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (56)$$

Si consideri, a questo punto, un generico volume $V \subset B$ e sia ∂V la sua frontiera. Perché tale volume risulti in equilibrio devono essere soddisfatte le equazioni cardinali:

$$\begin{aligned} \int_V \{\mathbf{X}\} dV + \int_{\partial V} \{\mathbf{t}_n\} dA &= \{\mathbf{0}\} \\ \int_V \{\mathbf{r}\} \wedge \{\mathbf{X}\} dV + \int_{\partial V} \{\mathbf{r}\} \wedge \{\mathbf{t}_n\} dA &= \{\mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (57)$$

Sia, per primo, *l'equilibrio alla traslazione*. Esso può essere espresso in forma tensoriale come:

$$\int_V X_i dV + \int_{\partial V} t_{n_i} dA = 0 \quad (58)$$

Facendo riferimento alla relazione (56, si ottiene:

$$\int_V X_i dV + \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j dA = 0 \quad (59)$$

Ricordando il *teorema della divergenza*:

$$\int_{\partial V} f n_i dA = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV \quad (60)$$

Supponendo, pertanto, che il campo di tensioni sia *continuo e derivabile* (ipotesi del teorema della divergenza), la (59 può essere riscritta come:

$$\int_V X_i dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = 0 \quad (61)$$

Da cui, essendo il volume V arbitrario:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (62)$$

che può essere riscritta in maniera esplicita:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 &= 0 \end{aligned} \quad (63)$$

Le tre relazioni (63 prendono il nome di *equazioni indefinite di equilibrio*.

Si consideri, ora, la seconda equazione di (57, cioè l'*equilibrio alla rotazione* attorno ad un polo qualsiasi:

$$\int_V \{\mathbf{r}\} \wedge \{\mathbf{X}\} dV + \int_{\partial V} \{\mathbf{r}\} \wedge \{\mathbf{t}_n\} dA = \{\mathbf{0}\}$$

Tale relazione può essere scritta per componenti andando ad esplicitare il prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} \int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) dV + \int_{\partial V} (r_2 t_{n_3} - r_3 t_{n_2}) dA &= 0 \\ \int_V (r_3 X_1 - r_1 X_3) dV + \int_{\partial V} (r_3 t_{n_1} - r_1 t_{n_3}) dA &= 0 \\ \int_V (r_1 X_2 - r_2 X_1) dV + \int_{\partial V} (r_1 t_{n_2} - r_2 t_{n_1}) dA &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

Considerando solo la prima equazione e facendo riferimento alla relazione (56, si ottiene:

$$\int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) dV + \int_{\partial V} [r_2 (\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3) - r_3 (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3)] dA = 0 \quad (65)$$

da cui, facendo nuovamente uso del teorema della divergenza:

$$\int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) dV + \int_{\partial V} \left[\frac{\partial (r_2 \sigma_{13})}{\partial x_1} + \frac{\partial (r_2 \sigma_{23})}{\partial x_2} + \frac{\partial (r_2 \sigma_{33})}{\partial x_3} - \frac{\partial (r_3 \sigma_{12})}{\partial x_1} - \frac{\partial (r_3 \sigma_{22})}{\partial x_2} - \frac{\partial (r_3 \sigma_{32})}{\partial x_3} \right] dA = 0 \quad (66)$$

Ricordando la *regola di derivazione del prodotto*:

$$\begin{aligned} \int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) dV + \int_{\partial V} \left[r_2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \sigma_{13} \frac{\partial r_2}{\partial x_1} + r_2 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{23} \frac{\partial r_2}{\partial x_2} + r_2 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \sigma_{33} \frac{\partial r_2}{\partial x_3} + \right. \\ \left. - r_3 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - \sigma_{12} \frac{\partial r_3}{\partial x_1} - r_3 \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} - \sigma_{22} \frac{\partial r_3}{\partial x_2} - r_3 \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} - \sigma_{32} \frac{\partial r_3}{\partial x_3} \right] dA = 0 \quad (67) \end{aligned}$$

È possibile notare che:

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j} = \delta = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

per cui la (67 può essere ridotta a:

$$\int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) dV + \int_{\partial V} \left[r_2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + r_2 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{23} + r_2 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - r_3 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - r_3 \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} r_3 \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} - \sigma_{32} \right] dA = 0 \quad (68)$$

ed inserendo le (63:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (69)$$

In maniera perfettamente analoga, considerando le altre due equazioni di equilibrio alla rotazione:

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (70)$$

Le equazioni (69 e (70 possono essere riassunte in forma tensoriale come segue:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{se } i \neq j \quad (71)$$

La condizione espressa da (71 prende il nome di *reciprocità delle tensioni taglianti* ed indica che il tensore degli sforzi $[\sigma]$ risulta simmetrico.

2.4 Relazioni Costitutive

Le *relazioni costitutive* o *equazioni costitutive* sono un modello teorico che permette di tradurre in termini matematici le caratteristiche fenomenologiche di un materiale. In termini più semplici, esse definiscono una serie di classi di materiali teorici che fungono da modello per i materiali reali.

Nell'ambito della meccanica del continuo, esistono tre tipi di relazioni costitutive:

- *vincoli cinematici interni* sulle possibili deformazioni che il corpo può subire (ad esempio vincolo di rigidità o incompressibilità);
- *assunzioni sulla forma dello stato tensionale interno*;
- *relazioni tra stato di sollecitazione e di deformazione*;

Nello specifico, facendo riferimento a quest'ultima categoria è possibile notare che il tensore delle tensioni $[\sigma]$ ed il tensore delle deformazioni $[\epsilon]$ non sono tra di loro indipendenti, infatti:

$$[\sigma] = f([\epsilon]) \quad (72)$$

essendo f una generica funzione che descriva la legge costitutiva, la cui forma dipende dal tipo di modello scelto (elastico, plastico, elasto-plastico, viscoso, visco-elastico e così via).

Si supponga, per semplicità, di scegliere un modello di tipo elastico. In questo caso è possibile scrivere:

$$[\sigma] = [\mathbf{C}][\epsilon] \quad (73)$$

essendo $[\mathbf{C}]$ il *tensore di elasticità*. Per coerenza rispetto alla regola del prodotto tensoriale, $[\mathbf{C}]$ risulta essere un tensore del quarto ordine contenente 81 costanti elementi.

La (73 può essere riscritta in forma tensoriale come:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} \epsilon_{hk} \quad i, j, h, k = 1, 2, 3 \quad (74)$$

Considerando, a questo punto, la simmetria del tensore degli sforzi e di quello delle deformazioni è possibile notare che:

$$c_{ijhk} = c_{jihk} \quad c_{ijhk} = c_{ijkh} \quad (75)$$

cioè:

- la simmetria del tensore degli sforzi implica la simmetria rispetto ai primi due indici;
- la simmetria del tensore delle deformazioni implica la simmetria rispetto agli ultimi due indici;

La proprietà espressa dalle relazioni (75) è detta *proprietà di simmetria minore* e implica che il numero di elementi indipendenti nel tensore di elasticità scenda a 36 unità.

Questo ci fornisce un approccio alternativo; andando a sfruttare la simmetria di $[\sigma]$ e $[\epsilon]$ è possibile riorganizzare gli elementi indipendenti in due vettori:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (76)$$

da cui la (74) può essere riscritta nella forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1123} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2223} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3323} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1223} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1312} & c_{1313} & c_{1323} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} & c_{2313} & c_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

Facendo ricorso all'*ipotesi di Green*: il lavoro delle tensioni, compiuto per unità di volume, in corrispondenza di una variazione infinitesima di deformazione è il differenziale esatto di una funzione.

In termini matematici, considerando un corpo B soggetto alle forze di volume $\{X\}$ e a quelle superficiali $\{p\}$, è possibile scrivere:

$$dW = \int_B \{X\} \cdot \{du\} dV + \int_{\partial B} \{p\} \cdot \{du\} dA \quad (77)$$

essendo:

- dW : variazione infinitesima di lavoro;
- $\{du\}$: spostamento infinitesimo;

La (77) può essere riscritta in forma tensoriale:

$$dW = \int_B X_i du_i dV + \int_{\partial B} p_i du_i dA \quad (78)$$

da cui, ricordando la (56):

$$dW = \int_B X_i du_i dV + \int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j du_i dA \quad (79)$$

ed utilizzando il teorema della divergenza:

$$dW = \int_B X_i du_i dV + \int_B \frac{\partial(\sigma_{ij} du_i)}{\partial x_j} dV \quad (80)$$

Ricordando, quindi, la regola di derivazione di un prodotto:

$$dW = \int_B X_i du_i dV + \int_B \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} du_i dV + \int_B \frac{\partial du_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV \quad (81)$$

ed infine, tenendo conto delle (63):

$$dW = \int_B \sigma_{ij} \frac{\partial du_i}{\partial x_j} dV = \int_B \sigma_{ij} d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV = \int_B \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV \quad (82)$$

L'ipotesi di elasticità di Green consiste nel supporre l'esistenza di un potenziale elastico ϕ tale per cui:

$$dW = \int_B d\phi dV = \int_B \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV \quad (83)$$

L'esistenza di tale potenziale elastico implica la *proprietà di simmetria maggiore* del tensore elasticità $[\mathbf{C}]$, cioè:

$$c_{ijhk} = c_{hki j} \quad (84)$$

per cui il numero di elementi indipendenti di $[\mathbf{C}]$ scende a 21 unità.

Per cui la matrice $[\mathbf{C}]$ sarà del tipo:

- *materiali anisotropi* (nessun piano di simmetria):

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1123} \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2223} \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3323} \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1223} \\ c_{1113} & c_{2213} & c_{3313} & c_{1213} & c_{1313} & c_{1323} \\ c_{1123} & c_{2223} & c_{3323} & c_{1223} & c_{1323} & c_{2323} \end{bmatrix} \quad (85)$$

- *materiali monoclini* (un piano di simmetria):

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & c_{3312} & 0 & 0 \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & c_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & c_{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1323} & c_{2323} \end{bmatrix} \quad (86)$$

- *materiali ortotropi* (due piani di simmetria ortogonali tra loro):

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{2323} \end{bmatrix} \quad (87)$$

- *materiali trasversalmente isotropi* (un asse di simmetria):

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{2323} \end{bmatrix} \quad (88)$$

- *materiali isotropi* (due assi di simmetria ortogonali tra loro):

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \end{bmatrix} \quad (89)$$

Solitamente, in ambito ingegneristico, si fa riferimento alle costanti ingegneristiche e non a quelle elastiche; la matrice delle costanti ingegneristiche per un materiale anisotropo sarà:

$$[\mathbf{C}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & \frac{\eta_{12,11}}{G_{12}} & \frac{\eta_{13,11}}{G_{13}} & \frac{\eta_{23,11}}{G_{23}} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & \frac{\eta_{12,22}}{G_{12}} & \frac{\eta_{13,22}}{G_{13}} & \frac{\eta_{23,22}}{G_{23}} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & \frac{\eta_{12,33}}{G_{12}} & \frac{\eta_{13,33}}{G_{13}} & \frac{\eta_{23,33}}{G_{23}} \\ \frac{\eta_{11,12}}{E_{11}} & \frac{\eta_{22,12}}{E_{22}} & \frac{\eta_{33,12}}{E_{33}} & \frac{1}{G_{12}} & \frac{\mu_{13,12}}{G_{13}} & \frac{\mu_{23,12}}{G_{23}} \\ \frac{\eta_{11,13}}{E_{11}} & \frac{\eta_{22,13}}{E_{22}} & \frac{\eta_{33,13}}{E_{33}} & \frac{\mu_{12,13}}{G_{12}} & \frac{1}{G_{13}} & \frac{\mu_{23,13}}{G_{23}} \\ \frac{\eta_{11,23}}{E_{11}} & \frac{\eta_{22,23}}{E_{22}} & \frac{\eta_{33,23}}{E_{33}} & \frac{\mu_{12,23}}{G_{12}} & \frac{\mu_{13,23}}{G_{13}} & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix}$$

avendo definito:

- tre moduli di Young: E_{11} , E_{22} e E_{33} ;
- tre moduli di taglio: G_{12} , G_{13} e G_{23} ;
- sei coefficienti di Poisson: ν_{12} , ν_{13} , ν_{23} , ν_{21} , ν_{31} e ν_{32} ;
- nove coefficienti di mutua influenza del secondo tipo: $\eta_{11,12}$, $\eta_{11,13}$, $\eta_{11,23}$, $\eta_{22,12}$, $\eta_{22,13}$, $\eta_{22,23}$, $\eta_{33,12}$, $\eta_{33,13}$ e $\eta_{33,23}$;
- sei coefficienti di Chentsov: $\mu_{12,13}$, $\mu_{12,23}$, $\mu_{13,12}$, $\mu_{13,23}$, $\mu_{23,12}$, $\mu_{23,13}$;

Ricordando inoltre la simmetria di $[C]$ dovrà essere:

$$\begin{aligned} -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}}, & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} &= -\frac{\nu_{13}}{E_{11}}, & \frac{\eta_{12,11}}{G_{12}} &= \frac{\eta_{11,12}}{E_{11}}, & \frac{\eta_{13,11}}{G_{13}} &= \frac{\eta_{11,13}}{E_{11}}, & \frac{\eta_{23,11}}{G_{23}} &= \frac{\eta_{11,23}}{E_{11}} \\ -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} &= -\frac{\nu_{23}}{E_{22}}, & \frac{\eta_{12,22}}{G_{12}} &= \frac{\eta_{22,12}}{E_{22}}, & \frac{\eta_{13,22}}{G_{13}} &= \frac{\eta_{22,13}}{E_{22}}, & \frac{\eta_{23,22}}{G_{23}} &= \frac{\eta_{22,23}}{E_{22}}, & \frac{\eta_{12,33}}{G_{12}} &= \frac{\eta_{33,12}}{E_{33}} \\ \frac{\eta_{13,33}}{G_{13}} &= \frac{\eta_{33,13}}{E_{33}}, & \frac{\eta_{23,33}}{G_{23}} &= \frac{\eta_{33,23}}{E_{33}}, & \frac{\mu_{13,12}}{G_{13}} &= \frac{\mu_{12,13}}{G_{12}}, & \frac{\mu_{23,12}}{G_{23}} &= \frac{\mu_{12,23}}{G_{12}}, & \frac{\mu_{23,13}}{G_{23}} &= \frac{\mu_{13,23}}{G_{13}} \end{aligned}$$

Per gli altri tipi di materiale sarà sufficiente fare riferimento alle relazioni (86, (87, (88, (89.

2.5 Condizioni al Contorno

Perché il problema sia risolvibile, condizione necessaria ma non sufficiente è che siano assegnate delle opportune condizioni al contorno alle equazioni di campo. Le condizioni al contorno possono essere di due tipologie:

- *meccaniche o naturali*: condizioni al contorno su forze e momenti;
- *cinematiche o prescritte*: condizioni al contorno su spostamenti e rotazioni;

In termini matematici, sia B il corpo in esame e ∂B la sua frontiera. È possibile scrivere:

$$\partial B = \partial B_m \cup \partial B_c$$

essendo:

- ∂B_m : parte della frontiera su cui sono assegnate le condizioni al contorno meccaniche;
- ∂B_c : parte della frontiera su cui sono assegnate le condizioni al contorno cinematiche;

Su ∂B_m si imporrà un determinato valore delle forze superficiali $\{\bar{\mathbf{p}}\}^T = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3\}$, mentre su ∂B_c si imporrà un determinato valore del vettore spostamento $\{\bar{\mathbf{u}}\}^T = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.

Il problema elastico può, quindi, essere enunciato nella seguente maniera:

Sia B un corpo elastico e ∂B la sua frontiera. Si suppongano assegnate le condizioni al contorno $\{\mathbf{p}\} = \{\bar{\mathbf{p}}\}^T = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3\}$ su ∂B_m e $\{\mathbf{u}\} = \{\bar{\mathbf{u}}\}^T = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ su ∂B_c e sia $\{\mathbf{X}\} = \{X_1, X_2, X_3\}^T$ il vettore delle forze di volume.

Occorre determinare:

- tre componenti di spostamento u_i ;
- sei componenti di deformazione ϵ_{ij} ;
- sei componenti di tensione σ_{ij} ;

tali che per ogni punto del corpo siano soddisfatte:

- tre equazioni indefinite di equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0$$

- sei relazioni geometriche:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

- sei equazioni costitutive:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} \epsilon_{hk}$$

e tali per cui siano soddisfatte:

- condizioni al contorno meccaniche:

$$\bar{p}_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{su } \partial U_m$$

- condizioni al contorno cinematiche:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{su } \partial U_c$$

CAPITOLO III - Metodi di risoluzione del Problema Elastico

Come è possibile osservare, il problema elastico, formulato ed enunciato nel capitolo precedente, consta di 15 equazioni in 15 incognite correlate da opportune condizioni al contorno e, nel caso dinamico, anche da condizioni iniziali; esso può essere formulato in due maniere:

- *approcci agli spostamenti*: spostamenti assunti come variabili primarie del problema, giungendo ad un sistema di tre equazioni differenziali alle derivate parziali di ordine elevato;
- *approcci alle forze*: tensioni assunte come variabili primarie del problema, giungendo ad un sistema di sei equazioni differenziali alle derivate parziali di ordine più basso;

Comunque siano scelte le variabili primarie del problema è possibile ricercare:

- *soluzioni esatte*;
- *soluzioni approssimate*;

Una soluzione esatta al problema elastico in senso assoluto non esiste; ne esistono, infatti, alcune per casi specifici, piuttosto semplici e, quindi, di scarso interesse ingegneristico. Per questo motivo, nei problemi reali, si preferisce sempre utilizzare metodi di risoluzione approssimata. In particolare, i metodi di risoluzione approssimata più utilizzati sono:

- *metodo delle differenze finite*;
- *metodi variazionali*;
- *metodi ai residui pesati*;
- *metodi agli elementi finiti*;

3.1 Metodo delle Differenze Finite

Il *metodo delle differenze finite* è un metodo di risoluzione numerica per le equazioni differenziali che si basa su due principi:

- definizione di una *mesh* del continuo (cioè una griglia di punti);
- approssimazione delle derivate con formule di derivazione numerica;

Definita la *mesh* (in particolare la distanza tra i nodi indicata con h), fissato il generico nodo x_j è possibile approssimare l'operatore di derivata con :

- *rapporto incrementale in avanti*:

$$f'(x_j) \simeq \frac{f(x_j + h) - f(x_j)}{h}$$

- *rapporto incrementale all'indietro*:

$$f'(x_j) \simeq \frac{f(x_j) - f(x_j - h)}{h}$$

- *rapporto incrementale centrato*:

$$f'(x_j) \simeq \frac{f\left(x_j + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_j - \frac{h}{2}\right)}{h}$$

Solitamente si utilizzano rapporti incrementali centrati poiché forniscono risultati migliori.

Il metodo delle differenze finite raramente è utilizzato per la risoluzione dei problemi elasto-statici; al contrario, esso è molto spesso implementato nei problemi dinamici per la risoluzione rispetto alla variabile tempo.

3.2 Metodi Variazionali

Sia V un generico spazio vettoriale definito sul campo C dei numeri reali o complessi. Si definisce trasformazione lineare un'applicazione che trasformi lo spazio V nello spazio W definito su $C' \subseteq C$, tale da conservare le operazioni di:

- somma di vettori;
- moltiplicazione per uno scalare;

Si definisce funzionale, una qualsiasi funzione che, dato un elemento di uno spazio vettoriale, restituisce un valore nel campo di definizione dello stesso. In particolare, se la trasformazione associata a tale funzione è lineare si parla di funzionale lineare. Si definisce spazio duale di V lo spazio $L(V, C)$ dei funzionali lineari su V . Se C è:

- campo dei numeri complessi si parla di forma sesquilineare;
- campo dei numeri reali si parla di forma quadratica;

Possibili esempi di funzionali lineari sono il prodotto di un vettore riga per un vettore colonna o l'operatore di integrale definito.

Nell'ambito dell'analisi strutturale, i funzionali generati attraverso l'integrale definito rivestono particolare importanza. Si consideri, ad esempio, la funzione:

$$F = F(t, \{\mathbf{x}\}, v(t, \{\mathbf{x}\}), v^{(1)}(t, \{\mathbf{x}\}), \dots, v^{(n)}(t, \{\mathbf{x}\}))$$

essendo:

- t : variabile indipendente tempo;
- $\{\mathbf{x}\}$: variabile indipendente posizione;
- $v(t, \{\mathbf{x}\})$: generica funzione;
- $v^{(i)}(t, \{\mathbf{x}\})$: derivata di ordine i -esimo di $v(t, \{\mathbf{x}\})$;

Il funzionale di interesse sarà nella forma:

$$I(v) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\int_{\Omega} F(t, \{\mathbf{x}\}, v(t, \{\mathbf{x}\}), v^{(1)}(t, \{\mathbf{x}\}), \dots, v^{(n)}(t, \{\mathbf{x}\})) d\{\mathbf{x}\} \right] dt \quad (90)$$

Obiettivo del calcolo variazionale è la determinazione delle condizioni di stazionarietà del funzionale $I(v)$, cioè determinare le funzioni $v^{(i)}(t, \{\mathbf{x}\})$ tali che il funzionale assuma valore stazionario. Per fare ciò si suppone nota la funzione v e si esplora il comportamento del funzionale nell'intorno della funzione stessa, cioè:

$$v \rightarrow \tilde{v} = v + \delta v$$

avendo indicato con δv una variazione virtuale di v , cioè una variazione arbitraria, infinitesima e a variabili indipendenti $\{\mathbf{x}\}$ e t bloccate.

A fronte di una variazione di v si ha una variazione di $F(v)$:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial v^{(1)}} \delta v^{(1)} + \dots + \frac{\partial F}{\partial v^{(n)}} \delta v^{(n)} \quad (91)$$

Si noti che in (91) non compaiono variazioni rispetto a $\{\mathbf{x}\}$ e t poiché, per ipotesi, esse sono bloccate essendo la variazione virtuale.

Variando la funzione $F(v)$ si avrà di conseguenza una variazione anche del funzionale $I(v)$:

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_f} \left[\int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial v^{(1)}} \delta v^{(1)} + \dots + \frac{\partial F}{\partial v^{(n)}} \delta v^{(n)} \right) d\{\mathbf{x}\} \right] dt \quad (92)$$

Si noti che è necessario spostare l'operatore di derivata dalle variazioni virtuali attraverso l'integrazione per parti poiché non si conoscono, a priori, le proprietà di tali derivate.

Andando ad annullare la (92) si ottengono:

- equazione di Eulero;
- condizioni al contorno variazionalmente consistenti;

Il più famoso metodo variazionale per la ricerca di soluzioni approssimate è il *metodo di Rayleigh-Ritz*.

Si supponga di considerare un problema elastico formulato in termini degli spostamenti e si supponga di volerlo risolvere minimizzando $I(u)$, un generico funzionale soggetto a *condizioni al contorno di tipo geometrico*. Si supponga, inoltre, di approssimare il campo di spostamenti nella forma:

$$u_N = \phi_0 + \sum_{n=1}^N c_n \phi_n$$

essendo:

- ϕ_i : i -esima *funzione di forma*;
- c_i : i -esima *costante di combinazione lineare*;

Sostituendo gli spostamenti in forma approssimata all'interno del funzionale si ottiene:

$$I(u) = H(\phi_0, \dots, \phi_N, c_1, \dots, c_N) \quad (93)$$

Supponendo note le funzioni di forma, il funzionale dipenderà unicamente dalle costanti di combinazione lineare che diventano l'incognita del problema. Dovendo minimizzare $I(u)$, dovrà essere:

$$\frac{\partial I(c_1, \dots, c_N)}{\partial c_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (94)$$

Si ottiene, pertanto, un sistema di N equazioni algebriche nelle N incognite c_i che, risolto, permette di trovare la soluzione approssimata.

Per la scelta delle funzioni di forma è importante prestare attenzione ai seguenti aspetti:

- devono costituire un *sistema completo*, cioè in grado di generare, per espansione in serie qualunque funzione dello spazio funzionale (costituiscono una base dello spazio funzionale stesso);
- ϕ_0, \dots, ϕ_N devono soddisfare unicamente le condizioni al contorno di tipo geometrico e, in particolare:
 - ϕ_1, \dots, ϕ_N devono essere scelte in maniera tale da soddisfare singolarmente la parte omogenea delle condizioni al contorno;

- ϕ_0 deve essere scelta in maniera tale da soddisfare la parte non omogenea delle condizioni al contorno;

Per la scelta delle funzioni di forma, generalmente, si fa uso della *procedura di Williams* che può essere riassunta come segue:

1. si costruisce una funzione che soddisfi le condizioni al contorno sulla derivata di ordine superiore;
2. si procede per integrazioni successive generando delle costanti di integrazione;
3. si determinano le costanti di integrazione imponendo il soddisfacimento delle condizioni al contorno sulle derivate di ordine inferiore;

È possibile notare che il metodo di Rayleigh-Ritz non è altro che l'applicazione del *principio del minimo potenziale totale (TPE)* ad uno spazio funzionale discreto, generato dalle funzioni di forma, invece che ad uno spazio funzionale infinito generato da uno sviluppo in serie completo.

3.3 Metodi ai Residui Pesati

Si supponga di considerare un generico problema di equilibrio elastico formulato agli spostamenti u e sia esso descritto da:

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{F}(u) \quad (95)$$

essendo \mathcal{L} ed \mathcal{F} due operatori differenziali, con \mathcal{F} di ordine superiore.

Si consideri, ora, la soluzione approssimata:

$$u_N = \phi_0 + \sum_{n=1}^N c_n \phi_n$$

essendo:

- c_n : costanti di combinazione lineare;
- ϕ_n : funzioni di forma;

La scelta delle funzioni di forma è vincolata al rispetto dei seguenti requisiti:

- ϕ_0, \dots, ϕ_N linearmente indipendenti;
- ϕ_1, \dots, ϕ_N scelte in maniera tale da soddisfare la parte omogenea delle condizioni al contorno;
- ϕ_0 scelta in maniera tale da soddisfare la parte non omogenea delle condizioni al contorno;

Introducendo la soluzione approssimata nella (94), l'equazione di campo non risulterà identicamente soddisfatta:

$$\mathcal{L}(u_N) \neq \mathcal{F}(u_N)$$

per cui si genera un *residuo* pari da:

$$R = \mathcal{L}(u_N) - \mathcal{F}(u_N) \quad (96)$$

Si noti che $R = 0$ uniformemente sull'intero dominio solo nel caso in cui $u_N \equiv u$, cioè se la soluzione approssimata coincide con quella esatta.

Ovviamente minore sarà il residuo, più vicina sarà la soluzione approssimata a quella reale. Allo stesso tempo è sconsigliabile utilizzare una *minimizzazione puntuale* di R poiché è molto probabile che, in tal caso, esistano dei punti con un residuo praticamente nullo ed altri con residuo estremamente elevato. Per questa ragione si preferisce minimizzare l'espressione:

$$\int_{\Omega} W \cdot R \, d\Omega \quad (97)$$

essendo:

- Ω : dominio di definizione de problema;
- W : *funzione peso*;

Il minimo si avrà nel caso in cui la (97) sia nulla; questo equivale, ricordando la definizione di prodotto scalare, all'ortogonalità tra W ed R . Quello che si ricerca, quindi, nei metodi ai residui pesati è l'ortogonalità tra la funzione peso e il residuo.

Dal punto di vista operativo, la procedura di risoluzione può essere così riassunta:

1. scelta delle funzioni di tentativo u_N ;
2. scelta delle funzioni peso W (e quindi del criterio di minimizzazione del residuo);
3. calcolo della soluzione approssimata;
4. determinazione del residuo;
5. minimizzazione;

Si noti che la scelta delle funzioni di tentativo determina il modo di risoluzione:

- *metodo classico*: scelta delle funzioni di tentativo in maniera tale che soddisfino le condizioni al contorno. In questo caso le costanti di combinazione lineare c_n sono determinate imponendo che la soluzione approssimata soddisfi l'equazione di campo (94);
- *metodo al contorno*: scelta delle funzioni di tentativo in maniera tale che soddisfino l'equazione di campo (94). In questo caso le costanti di combinazione lineare c_n sono determinate imponendo che la soluzione approssimata soddisfi le condizioni al contorno;
- *metodo misto*: scelta delle funzioni di tentativo in maniera tale che soddisfino l'equazione di campo (94) e una parte delle condizioni al contorno. In questo caso le costanti di combinazione lineare c_n sono determinate imponendo che la soluzione approssimata soddisfi la restante parte delle condizioni al contorno;

Si noti che metodo misto e metodo al contorno sono poco utilizzati poiché, generalmente, è molto raro trovare delle funzioni di tentativo che soddisfino direttamente l'equazione di campo.

Nel caso più generale sarà possibile andare, quindi, a definire dei residui sulle condizioni al contorno (residuo al bordo) ed eventualmente anche sulle condizioni iniziali perfettamente analoghi al residuo dell'equazione di campo definito dalla (95).

In base alla scelta delle funzioni peso W si hanno i diversi metodi. In particolare:

- *metodo delle collocazioni*: si impone che la soluzione reale e quella approssimata coincidano in un numero fissato di punti, per cui:

$$W_i = \delta(\{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}_i\}) \Rightarrow \int_{\Omega} \delta(\{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}_i\}) \cdot R(\{\mathbf{x}\}) \, d\Omega = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (98)$$

essendo:

- $\delta(\{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}_i\}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \{\mathbf{x}\} \neq \{\mathbf{x}_i\} \\ +\infty & \text{se } \{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x}_i\} \end{cases}$: *delta di Dirac*;
- $\{\mathbf{x}_i\}$: i -esimo punto in cui la soluzione reale è nota;

Il metodo delle collocazioni è utilizzato in quei casi in cui si abbiano una serie di misurazioni in determinati punti del dominio per estrapolare valori in punti prossimi a quelli nei quali si conosce la soluzione esatta (punti di misura); se utilizzato per estrapolare valori lontani dai punti di misura o informazioni relative alle derivate non risulta molto accurato.

- *metodo di Petrov-Galërkin*: si scelgono come funzioni peso W_i le funzioni di forma ϕ_i , per cui:

$$W_i = \phi_i \Rightarrow \int_{\Omega} \phi_i R_i d\Omega = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (99)$$

- *metodo dei minimi quadrati*: si scelgono come funzioni peso W_i i residui stessi, per cui:

$$W_i = R_i \Rightarrow \int_{\Omega} R_i^2 d\Omega = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (100)$$

I metodi ai residui pesati maggiormente noti ed utilizzati in ambito strutturale sono, però, altri due:

- *metodo di Galërkin*;
- *metodo di Galërkin generalizzato*;

Il *metodo di Galërkin* consiste nell'andare a definire le N funzioni di forma ϕ_i in maniera tale che esse non siano semplicemente linearmente indipendenti ma che costituiscano un *insieme completo*, cioè costituiscano una base dello spazio funzionale di definizione della soluzione. Definite, in questo modo, le funzioni di forma si assume che le funzioni peso coincidano con queste e si impone l'ortogonalità, cioè:

$$\int_{\Omega} \phi_i R_i d\Omega = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

La sostanziale differenza rispetto al *metodo di Petrov-Galërkin* risiede proprio nella proprietà di completezza della base dello spazio funzionale. È proprio tale proprietà a garantire la *convergenza* della soluzione approssimata a quella esatta al crescere di N .

Si noti che in tutti i metodi ai residui pesati considerati fino ad ora, l'approccio è stato di tipo classico, cioè le funzioni di tentativo (e quindi anche le funzioni di forma) sono state scelte in maniera tale da soddisfare tutte le condizioni al contorno, sia geometriche che meccaniche.

Il *metodo di Galërkin generalizzato* si basa sull'assumere un campo di funzioni di forma che sia completo e che soddisfi solo le condizioni al contorno di tipo geometrico. In questa maniera si generano due residui:

- R_E : residuo dell'equazione di campo;
- R_M : residuo delle condizioni al contorno di tipo meccanico;

In tale metodo si andrà ad imporre l'annullamento del residuo totale definito come somma, opportunamente pesata, dei due residui singoli. Per la scelta delle funzioni peso W_i si può fare la seguente distinzione:

- $W_i = \phi_i$ per R_E ;
- derivate di ϕ_i di ordine opportuno (scelto facendo riferimento all'ordine di derivazione che compare nella singola condizione al contorno meccanica per R_M);

Si noti che il *metodo di Galërkin generalizzato* costituisce una versione del *Principio dei Lavori Virtuali (PLV)* in uno spazio discreto. L'annullamento del residuo relativo all'equazione di campo e dei residui relativi alle condizioni al contorno di tipo meccanico rappresenta, infatti, l'annullamento della variazione virtuale della somma dell'energia di deformazione elastica e del lavoro dei carichi esterni.

3.4 Metodi agli Elementi Finiti (FEM)

I *metodi agli elementi finiti (FEM)* rappresentano, ad oggi, lo stato dell'arte per quanto riguarda la simulazione numerica di numerosi problemi ingegneristici. Tale popolarità è, essenzialmente, legata al fatto che il FEM si presta molto bene a problemi nei quali:

- il dominio presenti una forma geometrica molto complessa e/o variabile nel tempo;
- l'accuratezza richiesta non sia omogenea su tutto il dominio;
- la soluzione manchi di regolarità;

L'idea alla base di tali metodi è la *discretizzazione del continuo* attraverso un certo numero di sottounità (*elementi finiti*) su cui è più semplice la determinazione di una soluzione, passando così da una *formulazione continua* ad una *formulazione discreta* del problema. Effettuata la suddivisione del continuo, gli elementi finiti risulteranno connessi tra loro in un certo numero di punti (*nodi*) che definiscono una griglia computazionale comunemente chiamata *mesh*. In corrispondenza di tali nodi vengono definite le *quantità nodali* che rappresentano l'incognita del problema; il valore di tali incognite all'interno del singolo elemento sarà calcolato come combinazione (lineare o non lineare, a seconda dell'*ordine* dell'elemento stesso) delle stesse ai nodi mediante opportune funzioni dette *funzioni di forma*.

Per lo sviluppo del singolo elemento solitamente si utilizzano *forme deboli di principi variazionali*, ottenute definendo:

- *master field* ;
- *weak connection*;

Le variabili del problema elastico sono i tre campi di spostamento, deformazione e tensione. La variabile primaria, assunta a priori, è detta *master field*, mentre le variabili secondarie, derivate attraverso le diverse relazioni da quella primaria, sono dette *slave fields*. Si noti che è possibile avere formulazioni variazionali:

- *single field*: una sola variabile assunta come primaria;
- *multi-field o mixed*: più variabili primarie;

Per *connection*, invece, si intendono le relazioni che legano i diversi campi tra loro (equazioni costitutive, relazioni geometriche, equilibrio e condizioni al contorno). Esse possono essere:

- *strong connection*: relazione valida in *forma locale* (punto per punto nel dominio di definizione del problema);
- *weak connection*: relazione valida *in media*, cioè in forma integrale mediante una funzione peso;

Si noti che la relazione tra uno slave field e il master field da cui esso deriva sarà sempre di tipo strong.

Il processo può, quindi, essere riassunto come segue:

1. si assume un master field (o più di uno nel caso di formulazioni mixed) che sarà soggetto alla variazione;
2. si scelgono le weak connections;
3. si costruisce una variazione prima mediante le tecniche del calcolo variazionale (*moltiplicatori di Lagrange, integrazione per parti o omogeneizzazione delle variazioni*) ottenendo un'espressione del tipo

$$\delta\Pi = 0 \quad (101)$$

4. si riconosce la (101) come la variazione esatta del funzionale Π ;

Ricordando i tre campi incogniti del problema elastico (spostamenti, deformazioni e tensioni) si ottengono i *funzionali canonici dell'elasticità lineare*, presentati in Tabella 2.

Tipo	Master Field	Nome
Single Field	Spostamenti	Energia Potenziale Totale (TPE)
Single Field	Tensioni	Energia Potenziale Complementare Totale (TCPE)
Single Field	Deformazione	-
Mixed 2-field	Spostamenti e Tensioni	Hellinger-Reissner (HR)
Mixed 2-field	Spostamenti e Deformazioni	de Veubeke (dV)
Mixed 2-field	Deformazioni e Tensioni	-
Mixed 3-field	Spostamenti, Deformazioni e Tensioni	Hu-Washizu (HW)

Tabella 2: Funzionali canonici elasticità lineare, [11]

Nella scelta di master field e slave field è bene tenere a mente che, a livello numerico, i processi di:

- *derivazione numerica* tendono ad amplificare gli errori;
- *integrazione numerica* tendono a ridurre l'errore;

A questo riguardo, è possibile notare che, generalmente, il master field è descritto in maniera abbastanza accurata, al contrario gli slave fields saranno piuttosto grezzi, specie nel caso in cui essi siano ricavati attraverso processi di derivazione numerica.

I funzionali canonici maggiormente utilizzati sono:

- Energia Potenziale Totale (TPE):

$$\Pi_{\text{TPE}} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^u \epsilon_{ij}^u dV - \int_V X_i u_i dV - \int_{\partial V} \bar{p}_i u_i dS$$

- Hellinger-Reissner (HR):

$$\Pi_{\text{HR}} = \int_V \left(\sigma_{ij} \epsilon_{ij}^u - \frac{1}{2} \sigma_{ij} C_{ijkl} \sigma_{kl} \right) dV - \int_V X_i u_i dV - \int_{\partial V} p_i u_i dS$$

- Hu-Washizu (HW):

$$\Pi_{\text{HW}} = \int_V \left[\sigma_{ij} (\epsilon_{ij}^u - \epsilon_{ij}) + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^\xi \epsilon_{ij} \right] dV - \int_V X_i u_i dV - \int_{\partial V} p_i u_i dS$$

Avendo indicato con:

- σ_{ij}^u : campo di tensioni derivato da quello di spostamento assunto come master slave;
- ϵ_{ij}^u : campo di deformazioni derivato da quello di spostamento assunto come master slave;
- σ_{ij}^ξ : campo di tensioni derivato da quello di deformazioni assunto come master slave;

Nell'ambito dei codici FEM commerciali, gli elementi sono sviluppati praticamente sempre a partire dal TPE, per cui le variabili primarie sono sempre gli *spostamenti nodali*. Considerando, quindi, il classico problema elastico formulato agli spostamenti, il processo di risoluzione con un metodo agli elementi finiti può essere così riassunto:

1. si suddivide il corpo continuo in un certo numero di *elementi finiti*;
2. si assumono gli spostamenti come *variabili nodali incognite*;

3. si definisce un insieme di funzioni (*funzioni di forma*) che permetta di rappresentare gli spostamenti all'interno di ciascun elemento in funzione degli *spostamenti nodali* (valore assunto dagli spostamenti in corrispondenza dei nodi);
4. si definisce per derivazione il *campo di deformazioni* e attraverso la legge costitutiva del materiale quello di *tensioni*;
5. si definisce, in funzione dei carichi esterni, un sistema di *carichi nodali*;
6. si perviene ad un *sistema discreto* che ha come incognite gli *spostamenti nodali*;
7. si risolve il sistema discreto così generato con tecniche per sistemi algebrici di elevate dimensioni;

Il vantaggio rispetto ai metodi ai residui pesati risiede proprio nel fatto che questi ultimi richiedono un'approssimazione della soluzione sull'intero dominio; al contrario, nei metodi agli elementi finiti l'approssimazione è effettuata sul singolo elemento.

3.4.1 Discretizzazione

Il primo passo per la risoluzione di un problema elastico con un metodo agli elementi finiti è, come già detto, la *discretizzazione del dominio* tramite elementi finiti che si colleghino tra loro mediante i nodi, così da definire la mesh.

Il processo di creazione della mesh prende il nome di *meshatura* del dominio ed è, probabilmente, la parte più importante dell'intero processo poiché da essa discende la bontà dei risultati finali. La meshatura può essere effettuata mediante algoritmi automatici (*automesh*) implementati sui comuni software CAE commerciali o gestita in maniera manuale dall'analista. Ovviamente, la creazione di mesh in forma manuale genera modelli estremamente più accurati rispetto all'utilizzo dell'*automesh* ma, allo stesso tempo, richiede tempi di modellazione molto più elevati, specie nel caso di componenti di dimensioni elevate. Nella maggior parte dei casi si genera una mesh globale e grossolana attraverso l'utilizzo degli algoritmi automatici per poi affinare manualmente il modello nelle zone maggiormente critiche, dove l'*automesh* non è in grado di generare mesh di buona qualità.

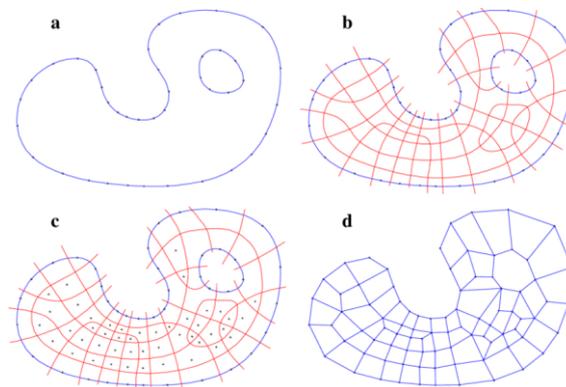


Figura 12: Esempi di mesh, [13]

Come detto in precedenza, la bontà dei risultati finali dipende da due parametri:

- *numero di elementi*;
- *bontà della mesh*;

Maggiore è il numero degli elementi, migliori saranno i risultati finali ma, allo stesso tempo, maggiori saranno le risorse richieste per il calcolo della soluzione, il che si traduce, essenzialmente, in tempi di simulazione più alti e necessità di computer più performanti.

Solitamente si opera in maniera graduale: per le prime analisi si utilizzano mesh con un numero di elementi non troppo elevato, così da ottenere un buon numero di risultati in tempi ragionevoli, riuscendo ad indagare gli effetti globali, per poi infittire, in un secondo momento, la mesh per indagare gli effetti locali con maggiore accuratezza.

3.4.2 Elemento nel Sistema di Riferimento Locale

Nei metodi agli elementi finiti esistono sempre almeno due sistemi di riferimento:

- *sistema di riferimento locale* relativo al singolo elemento;
- *sistema di riferimento globale o struttura* relativo all'intero componente;

Le equazioni vengono formulate nel sistema di riferimento locale dell'elemento per poi essere risolte nel sistema struttura.

Accanto a tali due sistemi di riferimento nel caso di materiali ortotropi, quali, ad esempio, i compositi a matrice polimerica rinforzati con fibre, ne esiste un terzo chiamato *sistema di riferimento materiale*, ruotato di un certo angolo rispetto al sistema di riferimento locale dell'elemento, rispetto al quale si conoscono le proprietà meccaniche del materiale (E_1, E_2, ν_{12} e così via).

Si supponga, quindi, di essere nel sistema di riferimento locale di un generico elemento; il FEM porta alla scrittura dell'espressione:

$$\{\mathbf{F}\}^{(e)} = [\mathbf{M}]^{(e)}\{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(e)} + [\mathbf{C}]^{(e)}\{\dot{\mathbf{q}}\}^{(e)} + [\mathbf{K}]^{(e)}\{\mathbf{q}\}^{(e)} \quad (102)$$

essendo:

- $\{\mathbf{F}\}^{(e)}$: vettore dei carichi nodali equivalenti;
- $[\mathbf{M}]^{(e)}$: matrice di massa dell'elemento;
- $[\mathbf{C}]^{(e)}$: matrice di smorzamento dell'elemento;
- $[\mathbf{K}]^{(e)}$: matrice di rigidità dell'elemento;
- $\{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(e)}$: vettore delle accelerazioni nodali;
- $\{\dot{\mathbf{q}}\}^{(e)}$: vettore delle velocità nodali;
- $\{\mathbf{q}\}^{(e)}$: vettore degli spostamenti nodali;

Per la formulazione del problema con il metodo agli elementi finiti è necessario andare a definire i campi di spostamento, deformazioni e tensioni in funzione delle incognite nodali (spostamenti, nel caso in esame).

La relazione tra gli spostamenti all'interno dell'elemento e gli spostamenti nodali è espressa da:

$$\{\mathbf{u}\}^{(e)} = [\mathbf{N}]^{(e)}\{\mathbf{q}\}^{(e)} \quad (103)$$

essendo $[\mathbf{N}]^{(e)}$ la matrice contenente le *funzioni di forma*, assunte a priori.

Noto il campo di spostamenti, facendo uso delle relazioni geometriche, è possibile determinare il campo di deformazioni:

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)} = [\mathbf{V}]^{(e)}\{\mathbf{u}\}^{(e)} = [\mathbf{V}]^{(e)}[\mathbf{N}]^{(e)}\{\mathbf{q}\}^{(e)} = [\mathbf{B}]^{(e)}\{\mathbf{q}\}^{(e)} \quad (104)$$

essendo:

- $[\mathbf{V}]^{(e)}$: la matrice contenente gli *operatori differenziali*;
- $[\mathbf{B}]^{(e)} = [\mathbf{V}]^{(e)}[\mathbf{N}]^{(e)}$: la matrice contenente le *derivate delle funzioni di forma*;

Infine, facendo riferimento alle relazioni costitutive del materiale è possibile determinare il campo di spostamenti in funzione delle variabili nodali:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^{(e)} = [\mathbf{C}]^{(e)} (\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)} - \{\boldsymbol{\epsilon}_0\}^{(e)}) + \{\boldsymbol{\sigma}_0\}^{(e)} \quad (105)$$

essendo:

- $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}^{(e)}$: stato di tensione residuo;
- $\{\boldsymbol{\epsilon}_0\}^{(e)}$: stato di deformazione residuo;

Facendo ora riferimento al *Principio dei Lavori Virtuali (PLV)* è possibile scrivere:

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{est} \quad (106)$$

Si consideri, quindi, un generico elemento soggetto a:

- carichi nodali $\{\mathbf{F}_N\}^{(e)}$;
- carichi di superficie $\{\mathbf{p}\}^{(e)}$;
- carichi di volume $\{\mathbf{X}\}^{(e)}$;

tali da produrre:

- un campo di *spostamenti nodali virtuali* $\delta\{\mathbf{q}\}^{(e)}$;
- un campo di *spostamenti virtuali* $\delta\{\mathbf{u}\}^{(e)}$;
- un campo di *deformazioni virtuali* $\delta\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)}$;
- un campo di *tensioni reali* $\{\boldsymbol{\sigma}\}^{(e)}$;

Esplicitando \mathcal{L}_{int} facendo uso della (105):

$$\mathcal{L}_{int} = \int_V \delta\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}^{(e)} dV = \int_V \delta\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)} \cdot [[\mathbf{C}]^{(e)} (\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)} - \{\boldsymbol{\epsilon}_0\}^{(e)}) + \{\boldsymbol{\sigma}_0\}^{(e)}] dV$$

da cui, ricordando (104):

$$\mathcal{L}_{int} = \int_V \delta\{\mathbf{u}\}^{(e)T} [\mathbf{B}]^{(e)} [[\mathbf{C}]^{(e)} (\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)} - \{\boldsymbol{\epsilon}_0\}^{(e)}) + \{\boldsymbol{\sigma}_0\}^{(e)}] dV =$$

e infine, esplicitando i calcoli:

$$\mathcal{L}_{int} = \delta\{\mathbf{q}\}^{(e)T} \left(\int_V [\mathbf{B}]^{(e)} [\mathbf{C}]^{(e)} [\mathbf{B}]^{(e)} dV \{\mathbf{q}\}^{(e)} - \int_V [\mathbf{B}]^{(e)} [\mathbf{C}]^{(e)} \{\boldsymbol{\epsilon}_0\}^{(e)} dV + \int_V [\mathbf{B}]^{(e)} [\mathbf{C}]^{(e)} \{\boldsymbol{\sigma}_0\}^{(e)} dV \right)$$

Esplicitando questa volta \mathcal{L}_{est} :

$$\mathcal{L}_{est} = \delta\{\mathbf{q}\}^{(e)T} \{\mathbf{F}_N\}^{(e)} + \int_V \delta\{\mathbf{u}\}^{(e)T} \{\mathbf{X}\}^{(e)} dV + \int_V \delta\{\mathbf{u}\}^{(e)T} \{\mathbf{p}\}^{(e)} dS$$

e facendo uso di (103):

$$\mathcal{L}_{est} = \delta\{\mathbf{q}\}^{(e)T} \left(\{\mathbf{F}_N\}^{(e)} + \int_V [\mathbf{N}]^{(e)T} \{\mathbf{X}\}^{(e)} dV + \int_V [\mathbf{N}]^{(e)T} \{\mathbf{p}\}^{(e)} dS \right)$$

Inserendo le due espressioni di \mathcal{L}_{int} e \mathcal{L}_{est} appena determinate in (106) si arriva all'espressione:

$$\{\mathbf{F}_N\}^{(e)} + \{\mathbf{F}_V\}^{(e)} + \{\mathbf{F}_S\}^{(e)} + \{\mathbf{F}_{\sigma_0}\}^{(e)} + \{\mathbf{F}_{\epsilon_0}\}^{(e)} = [\mathbf{K}]^{(e)} \{\mathbf{q}\}^{(e)} \quad (107)$$

essendo:

- $\{\mathbf{F}_N\}^{(e)} = \{\mathbf{F}\}^{(e)}$: vettore dei carichi nodali;
- $\{\mathbf{F}_V\}^{(e)} = \int_V [\mathbf{N}]^{(e)T} \{\mathbf{X}\}^{(e)} dV$: vettore dei carichi nodali di volume equivalenti;
- $\{\mathbf{F}_S\}^{(e)} = \int_V [\mathbf{N}]^{(e)T} \{\mathbf{p}\}^{(e)} dS$: vettore dei carichi nodali di superficie equivalenti;

- $\{\mathbf{F}_{\sigma_0}\}^{(e)} = - \int_V [\mathbf{B}]^{(e)} [\mathbf{C}]^{(e)} \{\boldsymbol{\sigma}_0\}^{(e)} dV$: vettore dei carichi nodali equivalenti associati al campo di tensioni iniziali;
- $\{\mathbf{F}_{\epsilon_0}\}^{(e)} = - \int_V [\mathbf{B}]^{(e)} [\mathbf{C}]^{(e)} \{\boldsymbol{\epsilon}_0\}^{(e)} dV$: vettore dei carichi nodali equivalenti associati al campo di deformazioni iniziali;
- $[\mathbf{K}]^{(e)} = \int_V [\mathbf{B}]^{(e)} [\mathbf{C}]^{(e)} [\mathbf{B}]^{(e)} dV$: matrice di rigidità dell'elemento;

Supponendo, quindi, di considerare tra le forze di volume le forze di inerzia:

$$\{\mathbf{X}\}^{(e)} = -\rho \{\ddot{\mathbf{u}}\}^{(e)} \quad (108)$$

essendo ρ la densità.

Tenendo conto della (103), la (108) può essere riscritta come:

$$\{\mathbf{X}\}^{(e)} = -\rho \{\ddot{\mathbf{u}}\}^{(e)} = -\rho [\mathbf{N}]^{(e)} \{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(e)} \quad (109)$$

Da cui il lavoro virtuale associato alle forze di inerzia sarà:

$$\mathcal{L}_{int} = - \int_V \left(\delta \{\mathbf{u}\}^{(e)T} \rho \{\ddot{\mathbf{u}}\}^{(e)} \right) dV = -\delta \{\mathbf{q}\}^{(e)T} \int_V \left([\mathbf{N}]^{(e)T} \rho [\mathbf{N}]^{(e)} \right) dV \{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(e)} = -\delta \{\mathbf{q}\}^{(e)T} [\mathbf{M}]^{(e)} \{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(e)} \quad (110)$$

avendo definito la matrice di massa dell'elemento come:

$$[\mathbf{M}]^{(e)} = \int_V \left([\mathbf{N}]^{(e)T} \rho [\mathbf{N}]^{(e)} \right) dV$$

Se la definizione delle matrici di rigidità $[\mathbf{K}]^{(e)}$ e di massa $[\mathbf{M}]^{(e)}$ è possibile senza particolari problemi, definire la matrice di smorzamento $[\mathbf{C}]^{(e)}$ è decisamente più complesso. Solitamente si utilizza un approccio noto come *proportional damping* nel quale essa è assunta come combinazione lineare di $[\mathbf{K}]^{(e)}$ e $[\mathbf{M}]^{(e)}$:

$$[\mathbf{C}]^{(e)} = \alpha [\mathbf{K}]^{(e)} + \beta [\mathbf{M}]^{(e)} \quad (111)$$

La parte di smorzamento derivante dalla matrice di rigidità è detta *strain damping*, mentre quella derivante dalla matrice di massa è detta *kinetic damping*. La procedura non è semplice, infatti è possibile notare che se le frequenze maggiormente smorzate sono:

- basse frequenze:

$$[\mathbf{C}]^{(e)} \propto [\mathbf{M}]^{(e)}$$

- alte frequenze:

$$[\mathbf{C}]^{(e)} \propto [\mathbf{K}]^{(e)}$$

In generale sarà, quindi, necessario tarare il modello caso per caso.

Per cui facendo riferimento alla (106) si perviene alla relazione già evidenziata in precedenza e riportata per completezza:

$$\{\mathbf{F}\}^{(e)} = [\mathbf{M}]^{(e)} \{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(e)} + [\mathbf{C}]^{(e)} \{\dot{\mathbf{q}}\}^{(e)} + [\mathbf{K}]^{(e)} \{\mathbf{q}\}^{(e)} \quad (102)$$

Si noti, quindi, che (102) rappresenta un sistema di equazioni differenziali ordinarie (ODE) aventi come incognite gli spostamenti nodali.

3.4.3 Elemento nel Sistema di Riferimento Globale

Si noti che (102) non può ancora essere risolta poiché essa risulta scritta nel sistema di riferimento locale per cui il problema non ammette soluzione univoca.

Determinate, pertanto, le matrici $[\mathbf{M}]^{(e)}$, $[\mathbf{C}]^{(e)}$ e $[\mathbf{K}]^{(e)}$ è necessario il passaggio al sistema di riferimento globale. Tale operazione è necessaria in quanto i due sistemi di riferimento risultano ruotati tra loro di un certo angolo ed è mediata da una matrice, indicata con $[\boldsymbol{\lambda}]^{(e)}$ che contiene i coseni direttori del sistema di riferimento locale rispetto al sistema di riferimento globale.

Operando come descritto:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{u}\}^{(e)} &= [\boldsymbol{\lambda}]^{(e)}\{\mathbf{u}\}^{(g)} \\ \{\mathbf{F}\}^{(e)} &= [\boldsymbol{\lambda}]^{(e)}\{\mathbf{F}\}^{(g)} \\ [\mathbf{K}]^{(g)} &= [\boldsymbol{\lambda}]^{(e)T} [\mathbf{K}]^{(e)} [\boldsymbol{\lambda}]^{(e)} \\ [\mathbf{C}]^{(g)} &= [\boldsymbol{\lambda}]^{(e)T} [\mathbf{C}]^{(e)} [\boldsymbol{\lambda}]^{(e)} \\ [\mathbf{M}]^{(g)} &= [\boldsymbol{\lambda}]^{(e)T} [\mathbf{M}]^{(e)} [\boldsymbol{\lambda}]^{(e)}\end{aligned}$$

essendo le quantità indicate con l'apice (g) riferite al sistema di riferimento globale. Tenendo conto delle relazioni appena scritte, la (102) diventa:

$$\{\mathbf{F}\}^{(g)} = [\mathbf{M}]^{(g)}\{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(g)} + [\mathbf{C}]^{(g)}\{\dot{\mathbf{q}}\}^{(g)} + [\mathbf{K}]^{(g)}\{\mathbf{q}\}^{(g)} \quad (112)$$

Si noti che (112) è formalmente analoga a (102) ma risulta riferita al sistema di riferimento struttura.

3.4.4 Assemblaggio, Soluzione e Convergenza

Il passaggio dal sistema di riferimento locale al sistema di riferimento struttura è effettuato per ogni elemento costituente la mesh e, al termine di tale processo, il contributo di rigidezza di ogni singolo elemento confluisce nella matrice di rigidezza del sistema completo. Tale processo prende il nome di *assemblaggio* della matrice di rigidezza globale. Nell'assemblaggio è estremamente importante che ogni singolo contributo venga inserito nella posizione corretta; questo è assicurato dalla *matrice di connectivity* la quale contiene informazioni relative alla numerazione dei nodi di ogni elemento rispetto alla posizione della struttura totale.

Prima di poter effettuare l'assemblaggio, è necessario che siano soddisfatte due condizioni:

- *congruenza degli spostamenti* sia all'interno del singolo elemento che nel passaggio tra due elementi adiacenti;
- *equilibrio ai nodi* tra azioni interne ed esterne;

Si noti che la *congruenza degli spostamenti* non è un problema all'interno del singolo elemento poiché essa è assicurata dalla continuità delle funzioni di forma.

Operando, quindi, in maniera tale da avere congruenza degli spostamenti ed equilibrio ai nodi è possibile espandere la matrice di rigidezza del singolo elemento tramite la matrice di connectivity in maniera tale che essa abbia dimensioni compatibili al vettore degli spostamenti nodali e a quello dei carichi nodali equivalenti. Si sommano, a questo punto, le componenti di rigidezza relative ai medesimi gradi di libertà dei diversi elementi e si determina la struttura finale della matrice di rigidezza dell'intera struttura.

La costruzione della matrice di massa avviene esattamente nella stessa maniera e, determinate sia la matrice di massa che quella di rigidezza per combinazione è possibile determinare, come esposto in precedenza, la matrice di smorzamento.

Il sistema così ottenuto non è ancora risolvibile in quanto *singolare*: l'assenza di vincoli fa sì che la struttura sia soggetta, sotto i carichi rappresentati dal vettore dei carichi nodali equivalenti, ad un moto di corpo rigido che non produce deformazione, per cui, coerentemente, l'energia di deformazione è nulla. Vincolando la struttura si arriva alla scrittura del sistema:

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{R}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{LL}] & [\mathbf{M}_{LV}] \\ [\mathbf{M}_{VL}] & [\mathbf{M}_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\mathbf{q}}_L\} \\ \{\ddot{\mathbf{q}}_V\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{LL}] & [\mathbf{C}_{LV}] \\ [\mathbf{C}_{VL}] & [\mathbf{C}_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{q}}_L\} \\ \{\dot{\mathbf{q}}_V\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{LL}] & [\mathbf{K}_{LV}] \\ [\mathbf{K}_{VL}] & [\mathbf{K}_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q}_L\} \\ \{\mathbf{q}_V\} \end{Bmatrix} \quad (113)$$

essendo:

- $\{F\}$: vettore delle forze nodali relative ai gradi di libertà non vincolati;
- $\{R\}$: vettore delle *reazioni vincolari*;
- $\{\ddot{q}_L\}$: vettore delle *accelerazioni nodali relative ai gradi di libertà non vincolati*;
- $\{\ddot{q}_V\}$: vettore delle *accelerazioni nodali relative ai gradi di libertà vincolati*;
- $\{\dot{q}_L\}$: vettore delle *velocità nodali relative ai gradi di libertà non vincolati*;
- $\{\dot{q}_V\}$: vettore delle *velocità nodali relative ai gradi di libertà vincolati*;
- $\{q_L\}$: vettore dei *gradi di libertà nodali non vincolati*;
- $\{q_V\}$: vettore dei *gradi di libertà nodali vincolati*;
- $[M_{LL}]$, $[C_{LL}]$ e $[K_{LL}]$: *sottomatrici di massa, smorzamento e rigidezza che competono ai gradi di libertà non vincolati*;
- $[M_{VV}]$, $[C_{VV}]$ e $[K_{VV}]$: *sottomatrici di massa, smorzamento e rigidezza che competono ai gradi di libertà vincolati*;
- $[M_{LV}] = [M_{VL}]^T$, $[C_{LV}] = [C_{VL}]^T$ e $[K_{LV}] = [K_{VL}]^T$: *sottomatrici di massa, smorzamento e rigidezza miste*;

Il sistema rappresentato da (113 può essere risolto, andando così a determinare $\{R\}$, $\{q_L\}$, $\{\dot{q}_L\}$ e $\{\ddot{q}_L\}$. Noti gli spostamenti nodali è possibile, mediante (103, (104 e (105, determinare i campi di spostamento, deformazione e tensione in ogni punto della struttura.

Si noti che la soluzione ottenuta attraverso il FEM risulta approssimata per diversi motivi:

1. nella scelta delle funzioni di forma può capitare che la congruenza degli spostamenti risulti verificata all'interno dei singoli elementi (requisito automaticamente soddisfatto se le funzioni di forma scelte sono continue) ma violata localmente nei punti, nelle linee e nelle superfici che demarcano un elemento dall'altro;
2. concentrando le forze nei nodi, l'equilibrio sarà sicuramente soddisfatto in forma globale (cioè l'intera struttura è certamente in equilibrio) ma può accadere che localmente (all'interno o nell'intorno di singoli elementi) esso non risulti verificato;
3. la scelta delle funzioni di forma condiziona precisione del calcolo e, conseguentemente, la taglia della mesh;
4. la scomposizione del problema con metodi ad elementi finiti è, come già detto, equivalente alla minimizzazione del potenziale totale in uno spazio discreto generato dalle N funzioni di forma, invece che continuo. Tale discrepanza fa sì che la rigidezza della struttura schematizzata FEM risulti superiore a quella effettiva della struttura reale, pertanto, a parità di carico esterno, il FEM restituirà spostamenti (e quindi anche deformazioni e stress) leggermente sottostimati;

Accanto a questi aspetti, sempre presenti indipendentemente da ogni altro parametro, ci sono ancora da considerare:

- *errori di modellazione*:
 - errore legato al modello teorico su cui è basato il singolo elemento;
 - errore di approssimazione geometrica, derivante dall'approssimazione di una geometria con una serie di elementi di forma prestabilita;
- *errore numerico*;

Si noti che, in linea generale, errori di modellazione ed errore numerico rappresentano qualcosa su cui è possibile avere un controllo più o meno diretto. Scegliendo opportunamente il tipo di elemento e incrementando il numero degli stessi, gli errori di modellazione possono essere ridotti; allo stesso tempo, però, un numero di elementi più elevato si traduce in un maggior numero di equazioni da risolvere, con conseguente propagazione di errori di natura numerica. Inoltre, le matrici di massa, smorzamento e rigidezza sono definite attraverso integrali che vengono svolti in maniera numerica facendo uso di *formule di*

quadratura di Gauss. Nelle *formule di quadratura di Gauss*, si definisce un certo numero di punti detti *di Gauss* sui quali costruire un'approssimazione polinomiale della funzione integranda; se n è il numero di tali punti, sarà possibile integrare esattamente al più un polinomio di grado $2n - 1$. È pratica estremamente comune nei software FEM commerciali ridurre il numero di *punti di Gauss* con l'obiettivo di ridurre i tempi di calcolo (procedura di *sotto-integrazione* o *integrazione ridotta*). Tale procedura, però, risulta essere molto dannosa poiché introduce ulteriore errore numerico nel modello e, al limite, può generare il fenomeno dei *meccanismi* o *hourglass* (Figura 13) cioè modi di deformazione di corpo rigido a zero energia, non fisici, che possono generare ulteriore errore numerico. Oltre a questo, una sotto-integrazione troppo spinta può portare la matrice di rigidità a diventare singolare (e quindi non invertibile), per cui il sistema discreto non ammetterà più soluzione univoca anche nel sistema di riferimento globale.

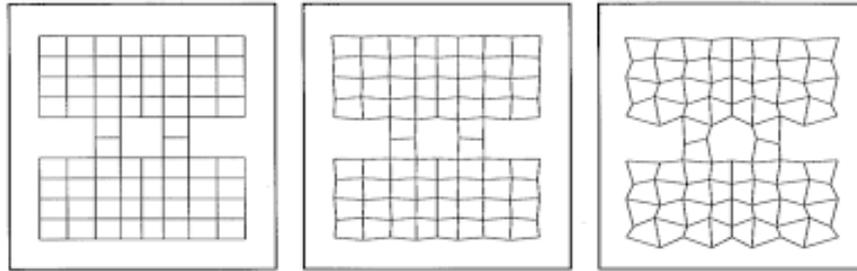


Figura 13: Mesh di elementi QUAD con problema di meccanismi, [12]

Si noti che, avendo fissato un numero di gradi di libertà finito (le incognite nodali), il minimo reale del funzionale potenziale totale non potrà essere raggiunto. Al crescere del numero di elementi è, però, auspicabile che la soluzione fornita dal FEM si avvicini a quella reale, cioè il metodo deve essere convergente. La *convergenza* è garantita dal rispetto dei seguenti requisiti:

- le funzioni di forma devono essere tali da non generare deformazione nel caso in cui gli spostamenti nodali siano dovuti a movimenti di corpo rigido;
- le funzioni di forma devono essere tali da ammettere uno stato di deformazione costante;
- lo stato di deformazione deve mantenersi finito nel passaggio tra elementi adiacenti;

Tali requisiti risultano essere automaticamente soddisfatti nel caso in cui si scelga, come funzioni di forma, un sistema di *ordine m completo*.

Supponendo, quindi, che i requisiti appena enunciati siano rispettati, detti:

- h : dimensione dell'elemento (lunghezza nel caso di elementi 1D, area nel caso di elementi 2D o volume nel caso di elementi 3D);
- p : ordine del polinomio costituente le funzioni di forma;

L'ordine di convergenza sarà:

- campo di spostamenti: $O(h^{p+1})$;
- campo di deformazione e campo di tensione: $O(h^{p-m+1})$;
- energia: $O(h^{2(p-m+1)})$;

Risulta, pertanto, evidente che convergerà per prima l'energia, poi il campo di spostamenti ed infine quelli di deformazione e tensione.

Quanto appena detto è valido in assenza di *punti di singolarità* i cui effetti sul modello possono essere imprevedibili.

CAPITOLO IV - Meccanica del Materiale

Come già accennato in precedenza, un qualunque corpo vincolato e soggetto ad un sistema di carichi esterni reagisce deformandosi e producendo un sistema di azioni interne atte a ristabilire la condizione di equilibrio. Il lavoro esterno, dato dal prodotto tra carico esterno e spostamenti da esso prodotti, causerà un incremento dell'energia interna del corpo, compatibilmente con il *I principio della termodinamica*, per cui, essendo la configurazione indeformata quella a minor energia interna, il sistema di azioni interne sarà tale da cercare di riportare il corpo in quest'ultima.

Dal punto di vista microstrutturale, il carico esterno produce una variazione delle distanze di legame tra i vari atomi costituenti il corpo in esame, per cui il sistema di azioni interne atte a garantire il nuovo equilibrio deriva dall'attrazione elettromagnetica reciproca tra tali atomi. Tale attrazione è caratteristica univoca del tipo di atomo che compone il corpo e quindi del materiale stesso di cui esso è composto. Studiare la meccanica del materiale dal punto di vista atomico risulta però impossibile, per cui si ricorre alla *caratterizzazione del materiale*. La caratterizzazione del materiale consiste in una campagna di prove sperimentali atte a determinare delle quantità misurabili che permettano di quantificare la risposta del corpo in corrispondenza di un'azione esterna nota.

In generale, i materiali possono essere divisi in tre grandi classi:

- *materiali metallici*;
- *materiali ceramici*;
- *materiali polimerici*;
-

Le proprietà delle tre classi sono riassunte in maniera estremamente generale in Tabella 3.

	Metalli	Ceramici	Polimeri
Densità	medio-alta	medio-alta	bassa
Temperatura di Fusione	alta-bassa	alta	bassa
Durezza	media	alta	bassa
Duttilità	buona	molto bassa	alta
Resistenza	media	alta	bassa
Rigidezza	media	alta	bassa
Proprietà Termiche	medie	alte	basse
Proprietà Elettriche	conduttori	isolanti	isolanti
Proprietà Chimiche	medio-basse	eccellenti	buone

Tabella 3: Proprietà generali classi di materiali, [14]

È anche possibile combinare materiali appartenenti a classi diverse per incrementare una o più prestazioni specifiche, ottenendo così un *materiale composito*. Un esempio classico è rappresentato dai *compositi a matrice polimerica rinforzati mediante fibre ceramiche (ad esempio fibre in carbonio)*, nei quali si cerca di unire il basso peso offerto dalla matrice polimerica alle elevate proprietà meccaniche della fibra ceramica.

4.1 Curve Tensione-Deformazione

La prima prova di caratterizzazione del materiale è sempre una *prova di trazione* su un provino la cui forma e le cui dimensioni sono specificate da normativa. Tale tipologia di prova è utile a determinare alcuni parametri fondamentali relativi al materiale in esame quali:

- *modulo elastico E*;

- *carico di rottura UTS;*
- *allungamento percentuale a rottura A%;*

Dal punto di vista fenomenologico, un provino di sezione A_0 e lunghezza L_0 soggetto ad un carico di trazione F subirà un allungamento e , coerentemente, perché si conservi la massa, una riduzione di sezione (*fenomeno di strizione*). Detti A la sezione istantanea ed L la lunghezza istantanea, è possibile definire:

- *tensione nominale:*

$$S = \frac{F}{A_0} \quad (114)$$

- *deformazione nominale:*

$$e = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{L}{L_0} - 1 \quad (115)$$

- *tensione reale:*

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0} \frac{A_0}{A} = S (1 + e) \quad (116)$$

- *deformazione reale:*

$$\epsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \ln(e + 1) \quad (117)$$

Essendo che, di norma, $e \ll 1$ (almeno in campo elastico) è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} S &\simeq \sigma \\ \epsilon &\simeq e \end{aligned}$$

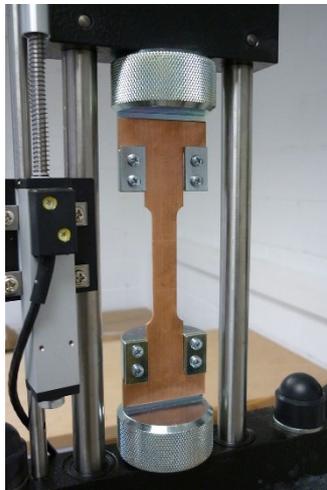


Figura 14: Macchina di prova

La macchina di prova presenta una traversa mobile che permette di imprimere il carico al provino. Essa è, inoltre, equipaggiata con una *cella di carico* che permette una misura del carico impresso, istante per istante, mentre il provino è provvisto di uno o più estensimetri che permettono di misurare l'allungamento dello stesso. Noti tali parametri e note sezione e lunghezza iniziale è possibile calcolare tensione e deformazione nominali e costruire così la curva tensione deformazione.

4.1.1 Curve Tensione-Deformazione Materiali Metallici

I materiali metallici sono materiali *duttili*, cioè materiali che, prima di arrivare a rottura, subiscono una consistente deformazione di tipo plastico.

Le curva tensione-deformazione in questo tipo di materiali presenta:

- *campo elastico*: primo tratto del diagramma nel quale scaricando il provino si ha un completo recupero della deformazione, cioè esso torna alle dimensioni originali;
- *campo plastico*: secondo tratto che si estende fino al punto di rottura del materiale nel quale scaricando il provino non si ha un completo recupero delle dimensioni iniziali ma, al contrario, si osserva una componente di deformazione residua irreversibile;

Il passaggio tra i due tratti si ha nel punto che definisce la condizione di *snervamento* del materiale. Tale passaggio può essere:

- molto netto come nel caso degli *acciai a basso tenore di carbonio*, nei quali si osserva un tratto caratterizzato da oscillazioni;
- meno chiaro come per le *leghe di alluminio* o gli *acciai ad alto tenore di carbonio*, nei quali la curva si mantiene abbastanza regolare;

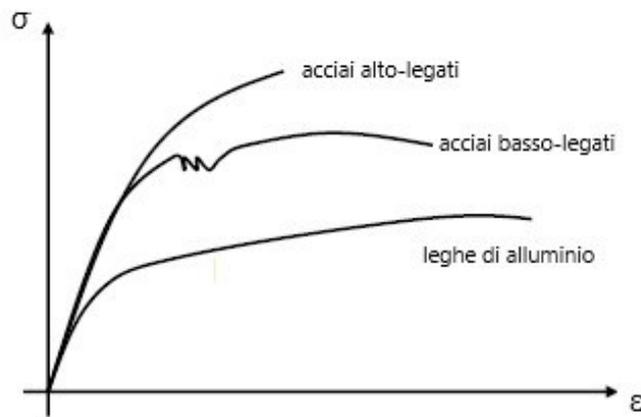


Figura 15: Diagrammi tensione-deformazione metalli, [16]

In ogni caso, sia che si consideri una curva simile a quella degli acciai basso-legati, sia che si consideri una curva simile a quelle delle leghe di alluminio o degli acciai alto-legati, il primo tratto è del tutto simile. In corrispondenza di livelli di carico (e quindi di tensione) ridotti, si è in *campo elastico*; esso si estende, come detto in precedenza, fino al valore di tensione di snervamento. Tale campo può a sua volta essere suddiviso in due sottocampi:

- *campo elastico lineare*;
- *campo elastico non lineare*;

Il *campo elastico lineare* è il primissimo tratto della curva che si estende da un valore di tensione nullo fino al valore di *tensione limite di proporzionalità* σ_p ; in tale tratto il rapporto tra tensione σ e deformazione ϵ si mantiene costante e pari a:

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \tan \beta = E$$

essendo E il *modulo di Young* o *modulo di elasticità* del materiale.

Superato il valore di tensione limite di proporzionalità si passa al *campo elastico non lineare* che si estende a partire dal valore di tensione limite di proporzionalità fino al valore di *tensione limite elastico* σ_e identificato come il livello di tensione a partire dal quale è possibile misurare deformazioni irreversibili apprezzabili. Se il materiale si trova in campo elastico non lineare, la linea di carico e quella di scarico sono ancora coincidenti (cioè il provino non accumula ancora deformazione irreversibile), tuttavia non risulta più valida la legge di Hooke, quindi il rapporto tra tensione e deformazione non è costante.

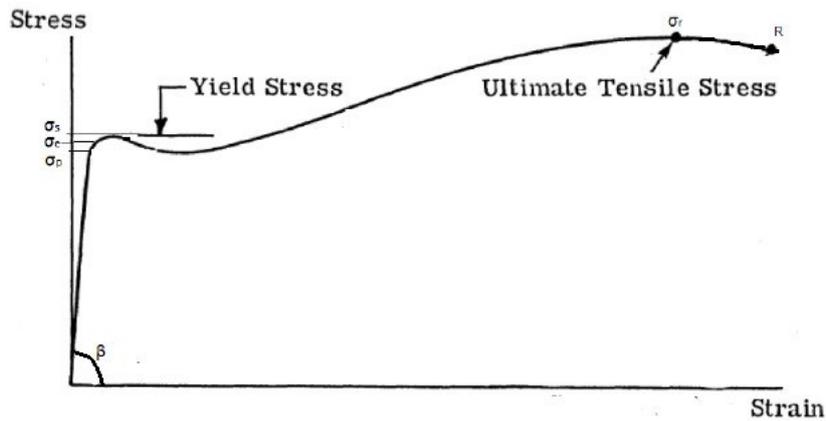


Figura 16: Curva tensione-deformazione acciai basso-legati, [16]

Con un ulteriore incremento di carico si raggiunge la *tensione di snervamento del materiale* σ_y in corrispondenza della quale si osserva un aggiustamento dei piani cristallini che genera un forte incremento di deformazione a carico costante; questo rappresenta un segno inequivocabile del passaggio al campo plastico, caratterizzato da forte non linearità. Come già accennato e come evidenziato in Figura 17, quando il materiale supera la tensione di limite elastico, linea di carico e linea di scarico non sono più coincidenti. Sarà, pertanto, presente una certa *deformazione residua* anche a carico nullo che può essere determinata percorrendo, a partire dal punto in esame, una curva equivalente al campo elastico.

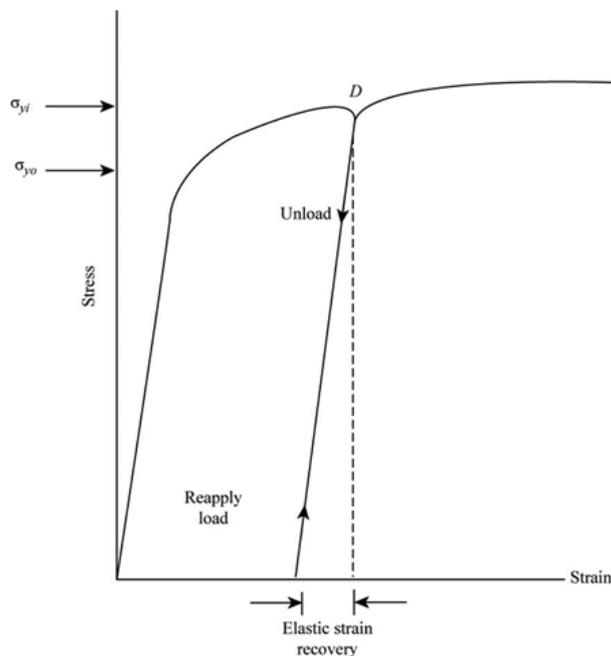


Figura 17: Recupero elastico e incrudimento, [17]

Se caricato nuovamente, il materiale seguirà una linea di carico differente poiché le deformazioni plastiche portano alla creazione e all'accumulo di dislocazioni che tendono ad interferire tra loro, bloccandosi reciprocamente. Il risultato finale è, quindi, una riduzione del modulo elastico, per cui la retta che definisce il campo lineare elastico avrà una pendenza inferiore, a fronte di un aumento della tensione di proporzionalità e riduzione dell'allungamento percentuale a rottura.

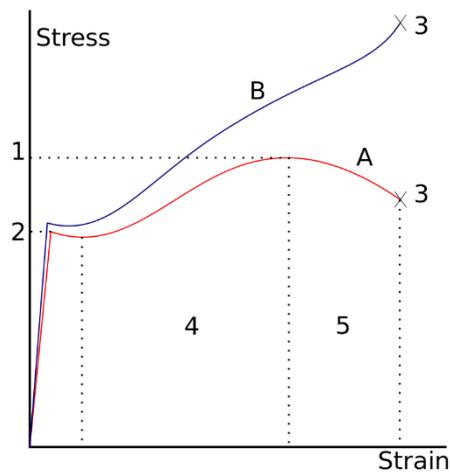


Figura 18: Curva tensione reale-deformazione reale, [18]

Il campo plastico ha un'estensione più o meno grande a seconda della duttilità del materiale e arriva fino al *punto di rottura R*, passando per la *tensione ultima* del materiale σ_r (valore massimo della tensione nominale). È importante notare che il punto di rottura *R* non si trova in corrispondenza della σ_r , ma si trova a valle di un tratto discendente della curva, per cui, apparentemente, potrebbe sembrare che la rottura avvenga in corrispondenza di un livello di carico inferiore a quello massimo. In realtà sarebbe necessario considerare il *fenomeno della strizione*. Dal punto di vista fenomenologico, arrivati in corrispondenza del carico ultimo σ_r si osserva una deformazione non più su scala globale ma su scala locale, infatti una specifica sezione presenterà un'importante riduzione dimensionale. Diagrammando, quindi, la tensione reale, tenendo conto della sezione effettiva, la curva $\sigma - \epsilon$ è sempre crescente, per cui la rottura avviene, effettivamente, in corrispondenza del valore di carico massimo (Figura 18).

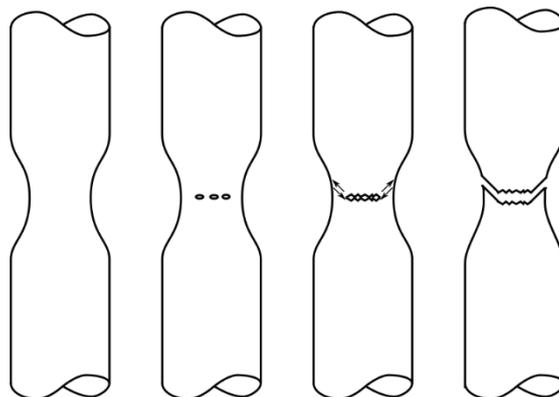


Figura 19: Meccanismo di rottura del provino, [19]

La rottura del provino può, quindi, essere schematizzata come rappresentato in Figura 19:

1. strizione;
2. formazione di micro-cricche;
3. coalescenza delle micro-cricche;
4. rottura;

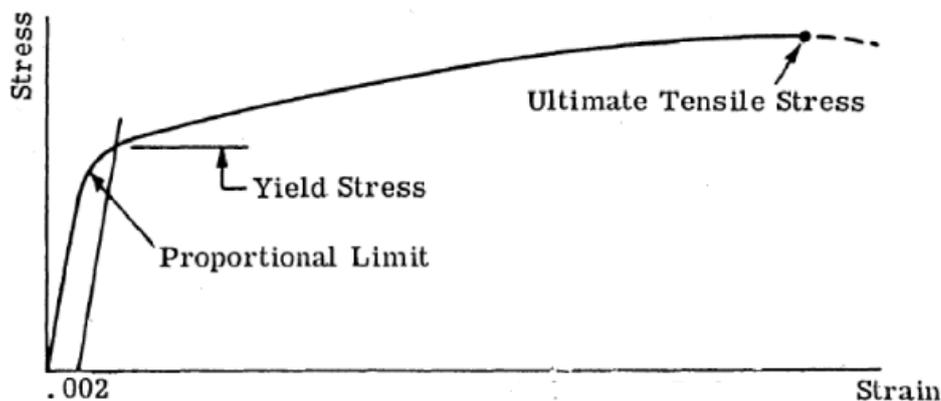


Figura 20: Curva tensione-deformazione leghe alluminio, [16]

Per i materiali metallici che non presentano il fenomeno dello snervamento, la descrizione della curva tensione-deformazione è del tutto analoga. La sola differenza risiede nel fatto che, non essendo possibile definire la tensione di snervamento come avveniva nel caso precedente, si assume, per ipotesi, che essa sia pari alla tensione in corrispondenza della quale la deformazione plastica residua sia pari allo 0.2%, spesso indicata come $\sigma_{0.2}$.

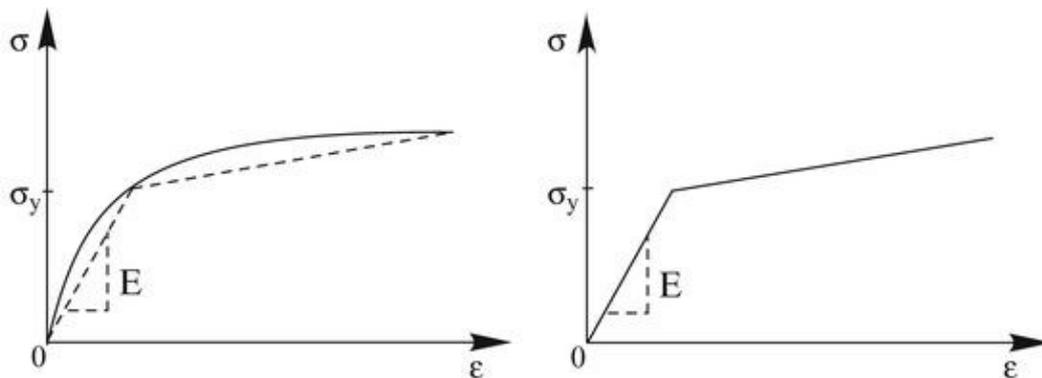


Figura 21: Approssimazione bi-lineare, [20]

Dal punto di vista analitico non è semplicissimo gestire una non linearità così spinta, motivo per cui, generalmente, si fa uso di modelli semplificati come le approssimazioni bilineari. In questo tipo di modelli si approssima la curva tensione deformazione con due tratti lineari:

- campo elastico: andamento lineare con pendenza pari al modulo di Young E fino alla tensione di snervamento σ_y ;
- campo plastico: andamento lineare dalla tensione di snervamento a quella di rottura, con una pendenza inferiore al tratto precedente;

4.1.2 Curve Tensione-Deformazione Materiali Ceramiche

I materiali ceramici sono materiali *fragili* per cui sono caratterizzati da un campo elastico molto esteso ed un campo plastico estremamente ridotto. Questo incide in maniera pesantemente negativa anche sull'energia che il materiale è in grado di assorbire prima di arrivare a rottura.

La rottura, in questo tipo di materiali, avviene in maniera improvvisa, senza le avvisaglie tipiche dei materiali metallici (snervamento, strizione e deformazione plastica). Tale meccanismo di rottura rende i materiali ceramici abbastanza pericolosi poiché non si hanno indicazioni relative al sopraggiungere delle condizioni critiche. Essi non sono, pertanto, solitamente utilizzati in maniera massiccia nel settore

aerospaziale e in quello automobilistico se non in componenti nei quali siano richieste elevate prestazioni in ambienti a temperature importanti o chimicamente reattivi.



Figura 22: Rottura fragile, [21]

Il diagramma tensione-deformazione di un materiale ceramico (Figura 23) è molto più semplice rispetto a quelli tipici dei materiali metallici; esso consta, come nel caso precedente, di un:

- primo tratto lineare coincidente con il comportamento elastico del materiale che si estende fino alla tensione di snervamento;
- secondo tratto non lineare, poco esteso, coincidente con il campo plastico del materiale che si estende a partire dalla tensione di snervamento fino alla tensione ultima del materiale;

Il campo plastico è estremamente ristretto, tanto che spesso si assume un comportamento elastico fino a rottura. Tale semplicità può essere riscontrata anche dal punto di vista analitico, poiché è possibile assumere per il legame costitutivo del materiale, con buona approssimazione, un andamento lineare fino a rottura.

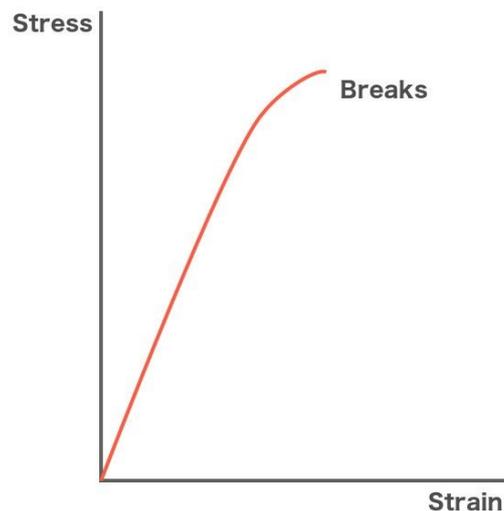


Figura 23: Diagramma tensione-deformazione ceramici, [22]

4.1.3 Curve Tensione-Deformazione Materiali Polimerici

Un polimero è una macromolecola formata da un numero più o meno elevato di unità ripetitive che possono essere uguali o meno tra loro, unite mediante legami di tipo covalente. In base alla posizione delle unità ripetitive si possono avere polimeri:

- *lineari*: le unità ripetitive formano una semplice catena;

- *ramificati*: le unità ripetitive formano una catena con alcune ramificazioni che si dipartono dalla stessa;
- *reticolati*: le unità ripetitive formano più catene unite tra loro;

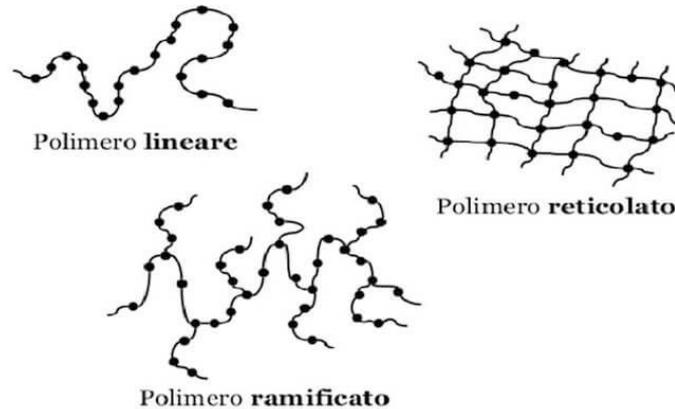


Figura 24: Struttura polimeri, [24]

Ovviamente le proprietà meccaniche dei diversi casi saranno differenti e, in particolare, maggiore è il *grado di reticolazione* del polimero, maggiori saranno le proprietà di resistenza e rigidezza a fronte, però, di una riduzione di duttilità.

Il numero di polimeri diversi che possono essere ottenuti è estremamente elevato, in quanto per ottenere un polimero diverso è sufficiente variare il processo produttivo, la lunghezza delle catene, i gruppi funzionali che si ripetono e innumerevoli altri fattori. In ogni caso è possibile dividere la classe dei polimeri in tre sottoclassi:

- *termoplastici (TP)*;
- *termoindurenti (TI)*;
- *elastomeri*;

I *polimeri termoplastici* sono costituiti da catene lineari o ramificate intrecciate tra loro ma tra le quali sono assenti legami stabili ma solo deboli legami secondari (forze di Van der Waals, ad esempio), per cui sono generalmente del tutto *non reticolati* o, al limite, parzialmente cristallini. L'assenza di connessioni stabili tra le diverse catene fa sì che essi risultino flessibili e abbastanza resistenti a temperatura ambiente ma subiscano rammollimento incrementando la temperatura.

I *polimeri termoindurenti* sono anch'essi costituiti da catene lineari o ramificate, tuttavia, in questo caso, tra le diverse catene sono presenti forti legami di natura covalente che generano una struttura decisamente più *reticolata* rispetto al caso precedente. I legami covalenti sono decisamente più forti rispetto ai legami secondari tipici dei polimeri termoplastici per cui, all'aumentare della temperatura, i polimeri termoindurenti conservano meglio le proprietà meccaniche di rigidezza e resistenza.

Gli *elastomeri* risultano essere una via di mezzo tra le due classi precedenti: presentano alcuni legami trasversali tra le diverse catene ma tali legami sono decisamente inferiori, in numero, al caso dei polimeri termoindurenti, generando una struttura *debolmente reticolata*. La caratteristica tipica degli elastomeri è la capacità di subire enormi allungamenti completamente reversibili.

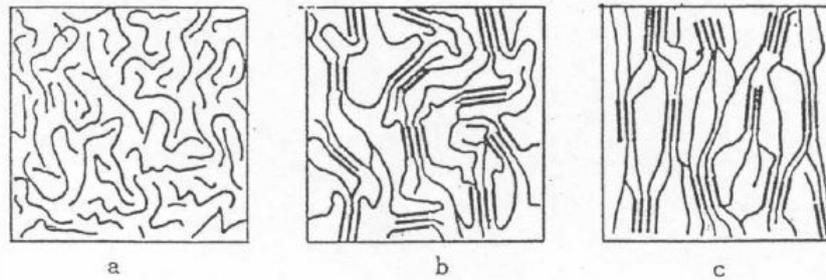


Figura 25: Strutture amorfa, semicristallina e cristallina, [23]

Altro aspetto significativo è la maniera in cui le catene che costituiscono il polimero occupano un determinato volume. Nello specifico si possono avere strutture:

- *amorfe* (Figura 25-a): catene disposte in maniera del tutto disordinata;
- *cristalline* (Figura 25-c): catene perfettamente impacchettate e ripiegate (condizioni estremamente difficile da raggiungere);
- *semicristalline* (Figura 25-b): alternanza di zone a struttura cristallina dette *cristalliti* e zone a struttura amorfa;

È possibile definire il *grado di cristallinità* come *rapporto percentuale tra peso della parte di polimero cristallina e peso della parte di polimero amorfa*. La cristallinità è un parametro di notevole importanza poiché da essa dipendono praticamente tutte le altre caratteristiche fisiche e meccaniche del polimero finale. Tra gli altri parametri che incidono sulla cristallinità, quello di maggior peso è senza dubbio la temperatura; uno dei metodi per la determinazione del grado di cristallinità di un polimero è la *densimetria* che consiste, essenzialmente, nell'andare ad investigare la variazione di volume specifico in funzione della temperatura (Figura 26).

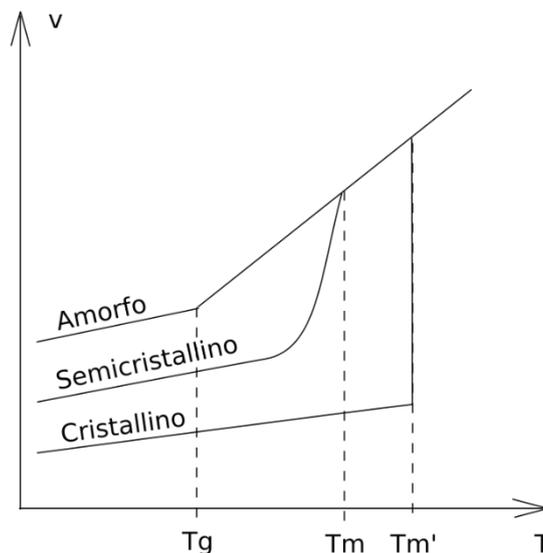


Figura 26: Volume specifico in funzione della temperatura, [25]

Supponendo di partire da una generica condizione per cui $T > T_m'$ il polimero risulterà inizialmente liquido. Come è possibile osservare, al diminuire della temperatura si ha, conseguentemente, una riduzione del volume specifico legato alla riduzione del volume del liquido; la relazione tra v e T è abbastanza lineare e, quindi, caratterizzata da una certa pendenza.

Nel caso in cui la struttura del polimero sia *perfettamente cristallina*, il raggiungimento della T'_m comporta la *solidificazione* del materiale, per cui si osserva una brusca riduzione del volume specifico legata alla transizione di fase. A seguito della solidificazione, al diminuire della temperatura il volume specifico continua a ridursi con una relazione ancora lineare ma caratterizzata da una pendenza inferiore rispetto alla condizione precedente.

Nel caso in cui la struttura del polimero risulti, invece, completamente *amorfa* al raggiungimento della T'_m non si ha solidificazione ma si passa alla condizione di *liquido sottoraffreddato*; la solidificazione non avviene in maniera netta, in corrispondenza di una specifica temperatura, ma avviene, al contrario, in maniera graduale poiché è possibile individuare un intervallo di temperatura ($T_g < T < T'_m$) all'interno del quale si ha un progressivo aumento della viscosità fino al raggiungimento di valori tali per cui apparentemente il polimero sembrerebbe solido ma, in realtà, all'interno non sono ancora presenti tutti quei legami che permettono di definire lo stato solido. Dal punto di vista sperimentale, la legge di variazione del volume specifico in funzione della temperatura resta la stessa (lineare con la stessa pendenza della condizione liquida) fino al raggiungimento della T_g detta *temperatura di transizione vetrosa* in corrispondenza della quale si verifica una riduzione della pendenza della correlazione lineare. Al di sotto della T_g il polimero può effettivamente essere considerato solido (*vetrificazione*). Per cui, riassumendo, è possibile osservare che:

- $T > T'_m$: stato liquido;
- $T_g < T < T'_m$: stato gommoso;
- $T < T_g$: stato vetroso;

Infine, nel caso di polimeri a struttura *semicristallina* è possibile osservare una riduzione importante del volume specifico a partire da un certo valore di temperatura T_m ma, tale riduzione, è comunque abbastanza graduale in un range di temperature più ristretto rispetto al caso di struttura amorfa. Tale riduzione è legata al fatto che, in corrispondenza di T_m la parte cristallina tenderà a solidificare mentre la parte amorfa si comporterà da liquido sottoraffreddato. Per cui, riassumendo, è possibile osservare che:

- $T > T'_m$: stato liquido;
- $T_g < T < T'_m$: parte amorfa allo stato gommoso e parte cristallina allo stato cristallino;
- $T < T_g$: parte amorfa allo stato vetroso e parte cristallina allo stato cristallino;

Si noti che, come detto in precedenza, per i polimeri una struttura completamente cristallina è una condizione praticamente irraggiungibile, per cui riassumendo ed escludendo il caso appena citato:

- *polimero a struttura amorfa*:
 - $T > T_g$: catene libere di scorrere per cui il polimero risulta *estremamente deformabile* e dotato di *scarse proprietà meccaniche*;
 - $T < T_g$: movimento delle catene impedito dai legami per cui il polimero risulta duro, rigido e fragile;
- *polimero a struttura semicristallina*:
 - $T > T_g$: polimero *rigido e tenace*;
 - $T < T_g$: polimero *rigido e fragile*;

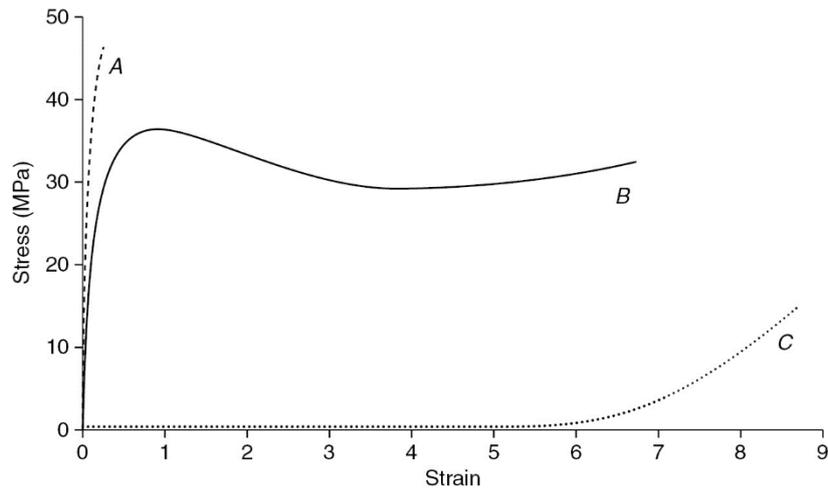


Figura 27: Diagramma tensione-deformazione polimeri TP, [26]

È possibile, ora, passare alla descrizione dei diagrammi tensione-deformazione. Si consideri un *polimero termoplastico (TP)*. Come appare evidente dai discorsi fatti in precedenza, il comportamento meccanico di un provino in materiale polimerico dipende dal rapporto reciproco tra *temperatura di esercizio*, *temperatura di transizione vetrosa* T_g e *temperatura di fusione* T_m . Una variazione di proprietà meccaniche così importante con la temperatura di esercizio pone, ovviamente, dei limiti per quanto riguarda le applicazioni strutturali; nello specifico, nel caso di polimero con struttura:

- *amorfa* è possibile l'utilizzo per applicazioni strutturali solo se la temperatura di esercizio risulta al di sotto di quella di transizione vetrosa;
- *semicristallina* è possibile l'utilizzo per applicazioni strutturali anche se la temperatura di esercizio risulta leggermente al di sopra di T_g ma sempre al di sotto della T_m , poiché la parte cristallina del polimero conserva le proprie caratteristiche meccaniche;

Da questo si evince anche che maggiore è il grado di cristallinità, minore sarà l'effetto della temperatura sulle proprietà meccaniche del polimero, a patto di restare sempre e comunque al di sotto della temperatura di fusione.

Allo stesso tempo, però, il comportamento meccanico cambia in maniera radicale. Facendo riferimento a Figura 27 è possibile notare che se:

- $T < T_g$ (*curva A*): la parte amorfa si trova allo stato vetroso mentre quella cristallina si trova allo stato cristallino per cui il comportamento sarà fragile;
- $T_g < T < T_m$ (*curva B*): la parte amorfa si trova allo stato gommoso mentre quella cristallina si trova allo stato cristallino per cui si avrà un certo campo plastico più o meno esteso;
- $T > T_m$ (*curva C*): l'intero polimero si trova allo stato liquido, per cui opporrà una resistenza praticamente nulla, fino al distacco di vena fluida;

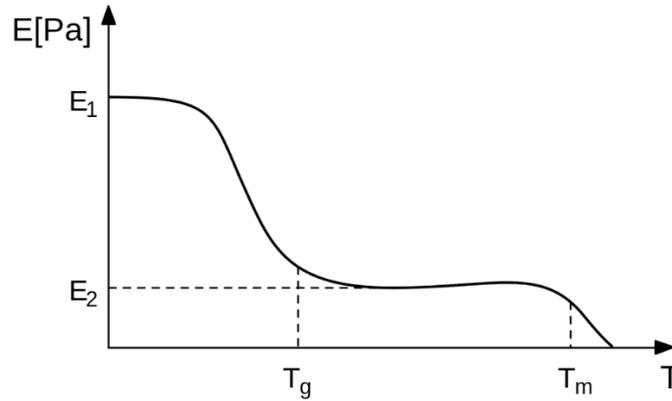


Figura 28: Variazione del modulo elastico con la temperatura

La temperatura di esercizio ha, infatti, un enorme effetto sulla presenza dei legami secondari tra le catene; tale effetto produce un'influenza anche macroscopica che si riflette in una progressiva riduzione del modulo elastico con la temperatura (**Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**). Esso risulterà massimo nel caso in cui la temperatura di esercizio sia al di sotto della *temperatura di transizione vetrosa* (T_g) poiché in questa situazione il polimero si trova allo *stato vetroso* nel quale i legami secondari sono stabili. Al di sopra della temperatura di transizione vetrosa il polimero si trova allo stato gommoso se la temperatura di esercizio risulta al di sotto della T_m (*temperatura di fusione* del polimero) o fluido nel caso in cui essa ecceda la T_m . Ovviamente il polimero allo stato gommoso presenta un modulo elastico molto ridotto per poi annullarsi del tutto allo stato fluido.

Si consideri, quindi, il caso di un polimero termoplastico a struttura semicristallina con una temperatura di impiego intermedia tra la T_g e la T_m . La curva tensione deformazione è quella presentata in Figura 29. In tal caso, se sottoposto ad un carico di trazione, il provino in materiale polimerico termoplastico reagisce, inizialmente, deformandosi in maniera elastica. L'estensione del campo elastico è abbastanza ridotta per cui, anche per carichi non eccessivamente elevati, si passa al campo plastico la cui estensione è decisamente maggiore e infine alla regione di rottura la quale avviene in corrispondenza del valore di tensione massimo. Come fatto notare in precedenza, un incremento della temperatura di esercizio produce una riduzione delle proprietà meccaniche per cui, a parità di carico applicato si osserva una deformazione decisamente maggiore.

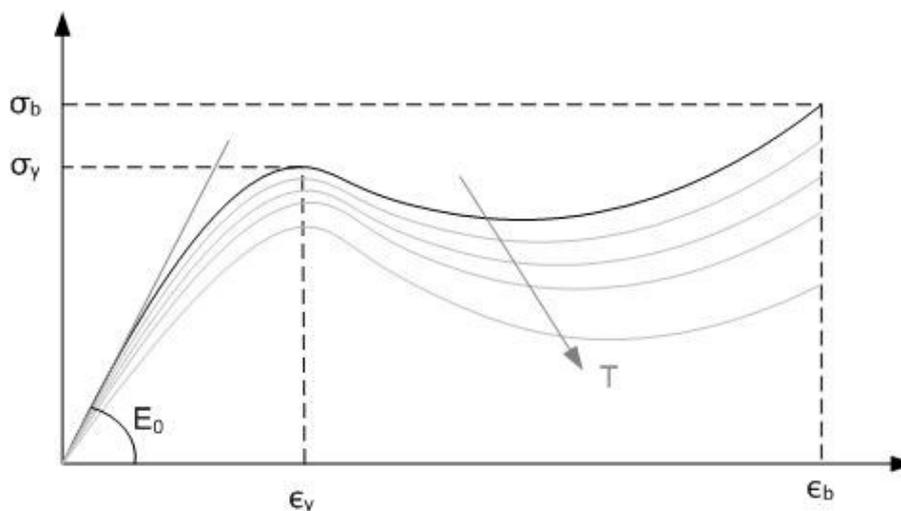


Figura 29: Diagramma tensione-deformazione polimeri TP se $T_g < T < T_m$

Se nel caso dei metalli la deformazione plastica è legata al moto delle dislocazioni, il motivo della deformazione di tipo plastico per i polimeri è profondamente diverso: applicando un carico di trazione le catene polimeriche che costituiscono il materiale tendono a *sbrogliarsi* e, quindi, ad allinearsi nella direzione di applicazione del carico (Figura 30); cambiando l'ordine delle catene polimeriche cambia anche il volume occupato dalle stesse, motivo per cui è possibile osservare anche in questo caso il fenomeno della *strizione*. L'allineamento delle catene è parzialmente impedito dai soli legami secondari tra le catene stesse, i quali però non oppongono una resistenza troppo elevata, motivo per cui il campo plastico dei materiali polimerici TP è quasi a sforzo costante. Nel momento in cui tutte le catene sono allineate, la sezione resterà costante e, a partire da questo punto, la direzione di applicazione del carico risulta allineata ai legami covalenti tra le sottounità del polimero stesso; tali legami sono chimicamente di natura più forte ed opporranno, pertanto, maggiore resistenza fino a che, tuttavia, il valore del carico esterno diventa così elevato da rompere tali legami.

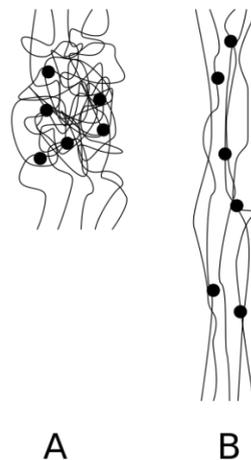


Figura 30: Catene del TP

Altro aspetto molto interessante da notare è la sostanziale differenza di risposta al carico tra materiali polimerici e materiali ceramici e metallici. Si supponga di considerare una sollecitazione costante nel tempo a partire dall'istante iniziale $t_0 = 0$, tale da generare una risposta in campo elastico. Nel caso di un materiale metallico o ceramico, la risposta sarà caratterizzata da una semplice deformazione elastica che si annulla nell'istante in cui viene meno il carico esterno.

Un materiale termoplastico ha una risposta diversa: accanto alla deformazione ϵ_{el} , mantenendo costante il livello di sollecitazione, il materiale continua a deformarsi, subendo, quindi, un'ulteriore parte di deformazione ϵ_{vis} detta *viscoelastica*. Come è possibile notare dal diagramma a sinistra di Figura 31, nel momento in cui il carico esterno viene meno, la parte elastica della deformazione ϵ_{el} è recuperata in maniera pressoché istantanea mentre il recupero della parte viscoelastica ϵ_{vis} avviene in tempi più lunghi. Il fenomeno della viscoelasticità può essere spiegato nel seguente modo: le catene polimeriche sono aggrovigliate e circondate da spazio essenzialmente vuoto, motivo per cui, a carico costante, esse possono assecondare ulteriormente la sollecitazione esterna attraverso una riorganizzazione delle stesse tale da minimizzare l'energia interna del sistema.

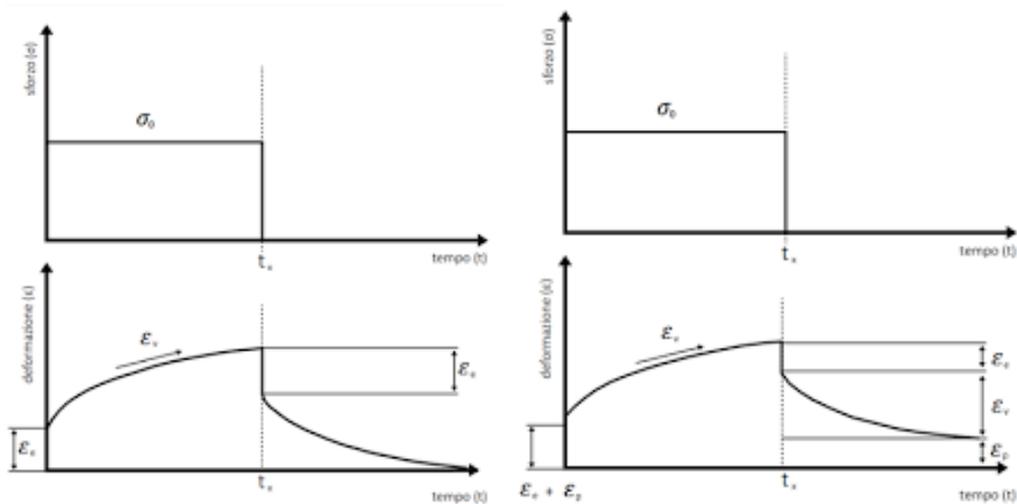


Figura 31: Deformazione viscoelastica (a sinistra) e deformazione viscoplastica (a destra), [27]

In maniera perfettamente analoga, se la sollecitazione esterna è tale da produrre tensioni vicine a quelle di snervamento, il mantenimento del carico produce il passaggio al campo plastico. Nel momento in cui il carico esterno viene meno all'istante t_1 si ha un recupero immediato della componente *elastica* e un recupero più lento della componente *viscoelastica* di deformazione; tuttavia, esiste una componente di deformazione detta *viscoplastica* che non sarà recuperata neppure in tempi più lunghi (diagramma a destra di Figura 31).

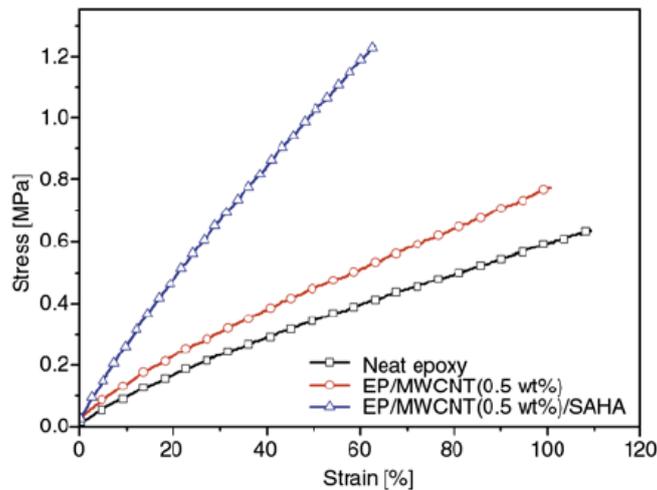


Figura 32: Esempio diagramma tensione-deformazione polimeri TI, [28]

I *polimeri termoidurenti (TI)* sono caratterizzati dalla presenza di forti legami trasversali di natura covalente tra le diverse catene. All'applicazione di un carico esterno il movimento reciproco tra le catene risulta, pertanto, inibito motivo per cui il comportamento risulterà fragile; è infatti possibile osservare un incremento di sforzo e deformazione pressoché lineare fino alla rottura del materiale (Figura 32). Raggiunti livelli di energia di deformazione paragonabili all'energia di legame, non sarà possibile scegliere quali legami rompere, motivo per cui avviene una rottura indistinta sia dei legami trasversali tra le diverse catene sia dei legami che tengono unite le unità ripetitive che formano la singola catena. Tale processo porta, quindi, alla *degradazione del polimero*. Ovviamente, come nel caso dei polimeri termoplastici, anche il comportamento meccanico dei polimeri termoidurenti è influenzato dalla temperatura di impiego anche se in misura molto minore. In particolare, se:

- $T < T_g$: comportamento fragile e perfettamente lineare fino a rottura;

- $T > T_g$: esistenza di un campo plastico molto ridotto con comportamento non completamente fragile e dipendenza (molto piccola) dal grado di reticolazione;

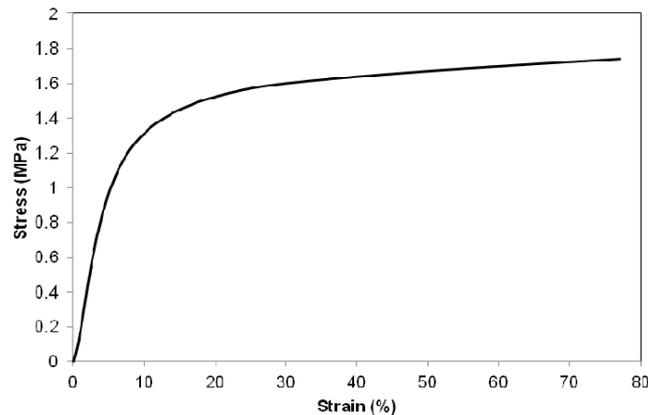


Figura 33: Diagramma tensione-deformazione elastomeri, [29]

Gli elastomeri, infine, sono caratterizzati dalla capacità di subire enormi deformazioni elastiche. Il loro diagramma tensione deformazione, riportato in Figura 33 evidenzia:

- primo tratto elastico lineare poco esteso;
- secondo tratto elastico non lineare estremamente esteso;

Essi sono, pertanto, capaci di assorbire quantitativi di energia elastica estremamente elevati per poi rilasciarli nel momento in cui la sollecitazione viene meno.

4.1.4 Curve Tensione-Deformazione Materiali Compositi a Matrice Polimerica (PMC)

I materiali compositi sono costituiti dall'unione di due elementi:

- *matrice*: materiale base che circonda il rinforzante;
- *rinforzante*: materiale aggiunto per migliorare determinate performance;

Il risultato finale è un materiale con proprietà meccaniche e fisiche intermedie rispetto ai materiali di partenza. La matrice può essere rinforzata aggiungendo:

- *particelle*;
- *fibre corte*;
- *fibre lunghe o continue*;

Il maggior rafforzamento si ha nel caso si utilizzino le fibre lunghe, mentre fibre corte e particelle forniscono un contributo resistenziale via via minore. Alla matrice è possibile aggiungere un secondo elemento non solo per migliorare le proprietà meccaniche e/o fisiche ma anche per modificare parametri di altra natura (ad esempio elettrici o ottici); in questo caso si parla di *compositi funzionali*.

L'utilizzo dei materiali compositi nasce, quindi, con lo scopo di incrementare le caratteristiche di cui una certa classe di materiali è carente senza però perderne i punti di forza. Nello specifico, ricordando Tabella 3, rinforzando i materiali polimerici si cerca di incrementarne:

- proprietà di *resistenza* e di *rigidezza*;
- *stabilità dimensionale al variare della temperatura (CTE)*;
- *temperatura massima di esercizio*;

il tutto cercando, allo stesso tempo, di conservarne la *bassa densità*. In questo caso, la scelta migliore per quanto riguarda il rinforzante ricade su *fibre di natura polimerica o ceramica*.

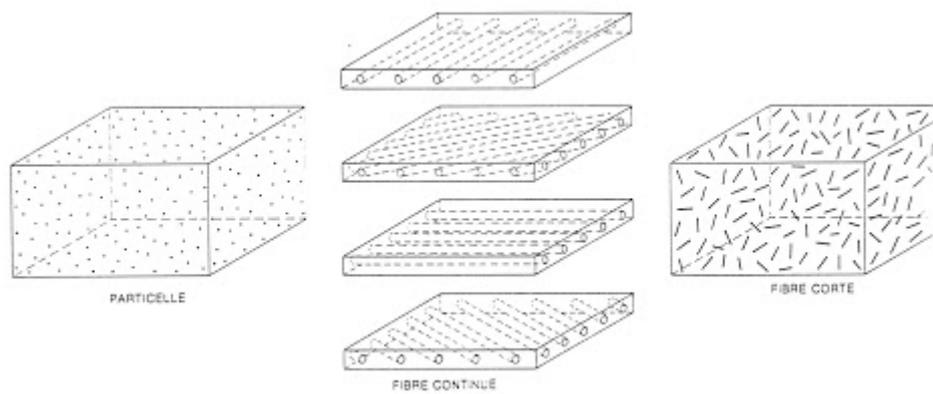


Figura 34: Tipi di rinforzante, [30]

I materiali compositi sono classificati, di solito, in base al tipo di matrice e di fibre rinforzanti utilizzate.

Le matrici, essendo materiali polimerici, possono essere:

- *termoplastiche;*
- *termoindurenti;*

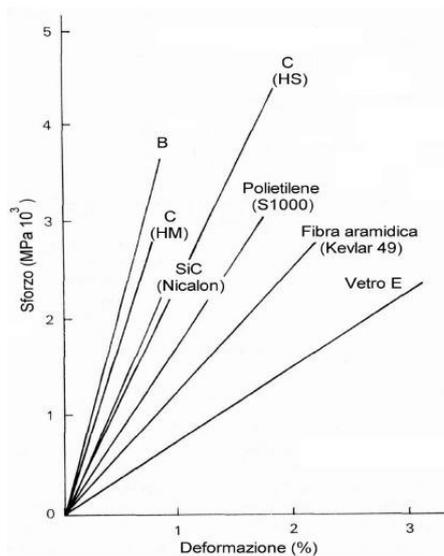


Figura 35: Diagramma tensione-deformazione tipi principali di fibra, [31]

La sostanziale differenza risiede nel fatto che, a seguito del processo di polimerizzazione, fornendo calore le *matrici termoplastiche* ritornano fluide, per cui sarà possibile rimodellare più volte il componente stesso semplicemente fornendo calore. Al contrario, nelle *resine termoindurenti* sono presenti, come fatto notare nel capitolo precedente 4.1.3, legami covalenti trasversali tra le catene; tali legami si rompono fornendo calore, per cui si osserva una degradazione del polimero. La presenza di tali legami spiega, inoltre, le migliori caratteristiche meccaniche e la maggiore temperatura di impiego e, quindi, il maggior impiego delle matrici termoindurenti. In particolare, le matrici termoindurenti possono ancora essere divise in:

- *matrici poli-estere e vinil-estere;*
- *matrici fenoliche;*
- *matrici epossidiche;*
- *matrici poli-immidiche;*
- *matrici bismale-immidiche;*

In linea generale, le matrici poli-estere, vinyl-estere e fenoliche assicurano scarse proprietà meccaniche e adesive, nonché basse temperature di impiego; allo stesso tempo, però, il costo è estremamente ridotto. Le resine epossidiche presentano, invece, ottime proprietà meccaniche e adesive, nonché elevata inerzia chimica, il tutto unito alla capacità di lavorare fino ad una temperatura di circa 200°C; tali proprietà fanno sì che le resine epossidiche rappresentino lo stato dell'arte per quanto riguarda i PMC. Le resine poli-immidiche e bismale-immidiche presentano proprietà meccaniche e adesive lievemente peggiori rispetto alle resine epossidiche e temperature di impiego anche superiori, tuttavia i processi produttivi sono complessi per via della tossicità di alcuni precursori, il che fa lievitare il prezzo.

I principali tipi di fibre rinforzanti sono:

- fibre di Boro;
- fibre di vetro;
- fibre aramidiche (Kevlar, in particolare);
- fibre di carbonio;
- fibre di carburo di silicio;
- fibre poli-etilene;

Le caratteristiche meccaniche delle diverse fibre sono riassunte nel seguente prospetto:

Tipo di Fibra	ρ [g/cm ³]	UTS [MPa]	E [GPa]	α [%]	costo
boro	2.65	3500	420	0.8	elevato
vetro E	2.54	3600	75	2.5	molto basso
vetro S	2.48	4600	86	1	molto basso
carbonio UHM	1.8	2200	850	0.3	medio-alto
carbonio HM	1.8	2700	500	0.7	medio
carbonio IM	1.65	3700	400	0.9	medio
carbonio HS	1.65	4200	320	1.3	medio
carbonio VHS	1.6	5500	240	1.7	medio-alto
aramidica	1.45	2900	130	2.5	basso
poli-etilene	0.97	2960	172	1.7	basso
carburo di silicio	2.6	2900	190	0.9-1.5	elevato

Tabella 4: Proprietà fibre di rinforzo, [31]

Come è possibile notare da Tabella 4, le fibre di carbonio presentano le proprietà meccaniche migliori in assoluto, a fronte di un prezzo intermedio ed una densità comunque abbastanza contenuta. Le fibre aramidiche e poli-etileniche hanno la densità minore in assoluto, tuttavia le proprietà meccaniche non sono sullo stesso livello rispetto alle fibre di carbonio. Fibre di vetro e di boro presentano proprietà meccaniche interessanti ma, allo stesso tempo, la densità elevata ne preclude abbastanza l'utilizzo; l'utilizzo delle fibre di vetro è limitato ai soli casi in cui si vogliono realizzare dei compositi estremamente economici.

In generale, quindi, lo stato dell'arte prevede l'utilizzo di matrici in resina epossidica rinforzate da fibre di carbonio.

Si noti che, come già accennato in precedenza, le caratteristiche finali del composito saranno intermedie tra quelle della matrice e quelle delle fibre. Facendo riferimento a Figura 36, è possibile notare che in una prova di trazione:

- la matrice presenta il comportamento tipico di un materiale polimerico (scarsa resistenza e rigidità ma buona duttilità);
- la fibra di rinforzo presenta il comportamento tipico di un materiale ceramico (elevata rigidità e resistenza ma comportamento fragile);

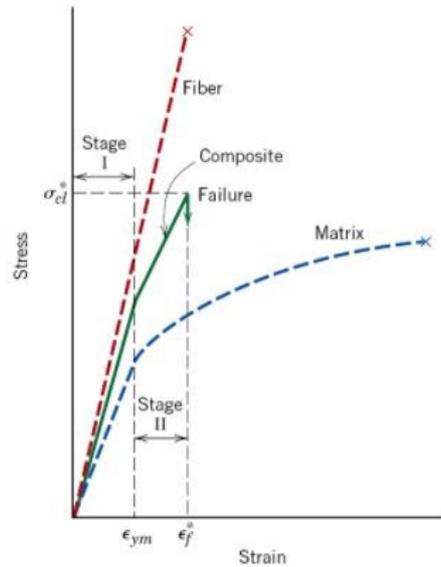


Figura 36: Diagramma tensione-deformazione composito, [32]

Il composito presenterà, globalmente, un comportamento molto simile a quello delle fibre di rinforzo, con l'unica differenza di un piccolissimo campo plastico legato alla presenza della matrice polimerica. Rigidezza e resistenza globali saranno, pertanto, inferiori rispetto a quelle della sola fibra ma molto superiori rispetto a quelle della matrice di base. Al raggiungimento del valore di deformazione per il quale la fibra arriva a rottura, l'intero carico sarà assorbito dalla sola matrice, la quale arriva a rottura in maniera praticamente istantanea. Globalmente, quindi, il comportamento del composito può essere considerato, con ottima approssimazione, lineare elastico fino a rottura.

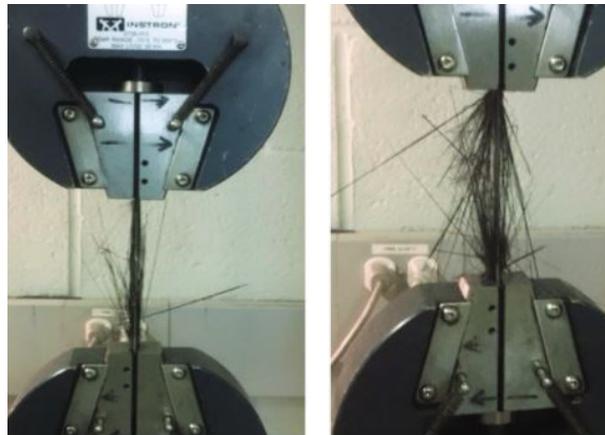


Figura 37: Rottura materiale composito, [15]

Si osservi, inoltre, che per i materiali compositi la rottura avviene in maniera esplosiva con proiezione di schegge, per cui anche l'attività di sperimentazione su tali architetture risulta abbastanza complessa e rischiosa.

4.2 Plasticità, Viscoelasticità e Viscoplasticità

Ragionando in maniera del tutto generale, un materiale soggetto ad un carico esterno subisce una deformazione ϵ che può essere scomposta in diverse componenti (Figura 38). Nello specifico è possibile scrivere:

$$\epsilon = \epsilon^E + \epsilon^{VE} + \epsilon^P + \epsilon^{VP} \quad (118)$$

essendo:

- ϵ : deformazione totale;
- ϵ^E : componente elastica di deformazione;
- ϵ^{VE} : componente viscoelastica di deformazione;
- ϵ^P : componente plastica di deformazione;
- ϵ^{VP} : componente viscoplastica di deformazione;

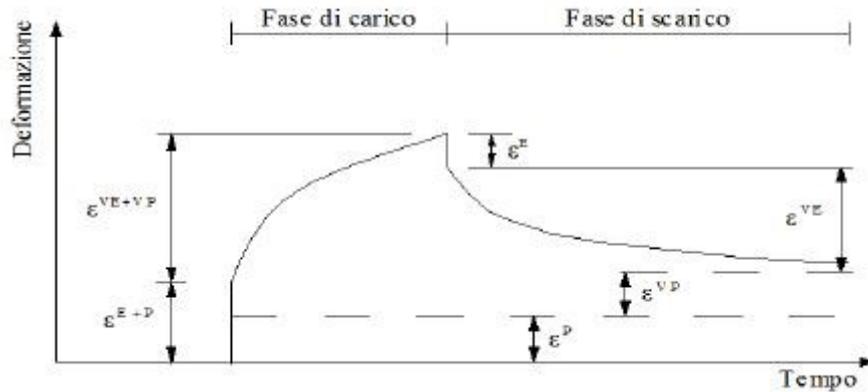


Figura 38: Evoluzione componenti di deformazione in un ciclo di carico-scarico, [33]

Si noti che le componenti ϵ^E e ϵ^{VE} risultano essere *reversibili*, cioè al momento del rilascio del carico esterno tali componenti di deformazione vengono recuperate; al contrario le componenti ϵ^P e ϵ^{VP} risultano essere *irreversibili*, per cui esse non saranno recuperate neppure nel momento in cui il carico esterno viene rilasciato. Inoltre, le componenti di deformazione *viscoelastica* ϵ^{VE} e *viscoplastica* ϵ^{VP} sono dipendenti dal tempo, per cui la (118 può essere riscritta come:

$$\epsilon = \epsilon^{EP} + \epsilon^V \quad (119)$$

essendo:

- $\epsilon^{EP} = \epsilon^E + \epsilon^P$: componente elastoplastica di deformazione;
- $\epsilon^V = \epsilon^{VE} + \epsilon^{VP}$: componente viscosa di deformazione;

Facendo, quindi, riferimento a Figura 38 è possibile notare che nella fase di scarico si ha un recupero immediato della *componente elastica di deformazione* ϵ^E e un recupero più graduale della *componente viscoelastica di deformazione* ϵ^{VE} ; al contrario, come già fatto notare, le *componenti di deformazione viscoplastica* ϵ^{VP} e *plastica* ϵ^P risultano irreversibili e, pertanto, non verranno recuperate neppure dopo un certo intervallo di tempo al termine della sollecitazione esterna. Da ciò è possibile ricavare che la risposta asintotica del materiale tenderà ad un livello di deformazione residua pari alla somma della componente plastica e di quella viscoplastica.

4.2.1 Modelli di Plasticità

La descrizione del campo di deformazione plastica del materiale è un problema estremamente complesso e noto da molto tempo. Le prime teorie moderne, note semplicemente come *deformation theory*, si basavano sull'esistenza di un legame tra tensioni σ e deformazioni ϵ valido globalmente e che lo stesso potesse essere scritto nella forma:

$$\sigma = f(\epsilon)$$

L'approccio delle *deformation theory* prevede unicamente sistemi di carico tali per cui non sia possibile un ritorno elastico in parti del dominio precedentemente plasticizzate; in altri termini tali teorie trattano il problema plastico come un problema elastico non lineare.

In seguito, ha preso piede la *flow theory* o *teoria incrementale della plasticità* che studia la relazione tra un incremento infinitesimo di carico \dot{p} e la correlata risposta della struttura in termini di incrementi di tensione $\dot{\sigma}$, deformazione $\dot{\epsilon}$ e spostamenti \dot{u} . La *flow theory* permette una descrizione più accurata del fenomeno, specie per quanto riguarda il ritorno elastico di punti precedentemente plasticizzati.

La *flow theory* si basa su tre assiomi fondamentali:

1. i materiali presentano una *soglia di resistenza*, cioè le tensioni possibili sono limitate;
2. al termine del ciclo di carico e scarico la struttura non è in grado di recuperare completamente la configurazione iniziale, cioè sono presenti *deformazioni irreversibili*;
3. per bassi livelli di tensione il comportamento è considerabile elastico;

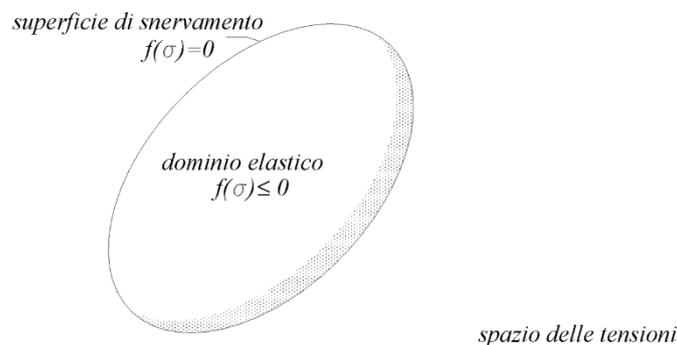


Figura 39: Dominio elastico

L'assioma 1 può essere formalizzato assumendo che per ogni punto della struttura sia possibile definire uno *spazio delle tensioni*, detto *dominio elastico del materiale*, generato dalle *componenti principali di tensione* e delle *invarianti*, i cui punti interni e di frontiera rappresentano gli stati di *tensioni ammissibili* (Figura 39). Tale dominio può essere rappresentato dalla *condizione di ammissibilità plastica*, espressa dalla relazione:

$$f(\sigma) \leq 0 \quad (120)$$

essendo $f(\sigma)$ la *funzione di snervamento*. Tale dominio è funzione di un certo numero di parametri, tra cui temperatura e storia di carico precedente, per cui esso permette la descrizione del comportamento meccanico del materiale a seguito di processi termo-meccanici.

L'assioma 2 può essere formalizzato attraverso la scrittura separata degli incrementi di deformazione:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^E + \dot{\epsilon}^P \quad (121)$$

essendo:

- $\dot{\epsilon}^E$: *componente elastica dell'incremento di deformazione*;
- $\dot{\epsilon}^P$: *componente plastica dell'incremento di deformazione*;

Si noti che solo $\dot{\epsilon}^E$ è dipendente dall'incremento di tensione $\dot{\sigma}$.

L'assioma 3 è formalizzato, infine, ammettendo che componente plastica dell'incremento di deformazione $\dot{\epsilon}^P$ possa essere non nulla solamente nel caso in cui la tensione sia sulla frontiera del dominio elastico, vale a dire:

$$\dot{\epsilon}^P \neq 0 \Leftrightarrow f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (122)$$

Il modello ottenuto a partire da tali assiomi prevede, quindi, tre tipologie di comportamento:

- fase elastica: $f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$;
- fase plastica: $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \cup \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$;
- ritorno elastico: $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \cup \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}) < 0$;

È importante notare che, coerentemente con quanto detto in precedenza, sia le deformazioni elastiche che quelle plastiche sono considerate istantanee e, quindi, tempo-indipendenti; sono, infatti, assenti fenomeni di ritardo viscoso tra le deformazioni elastiche e plastiche e i carichi che hanno determinato le stesse (*rate independent plasticity*).

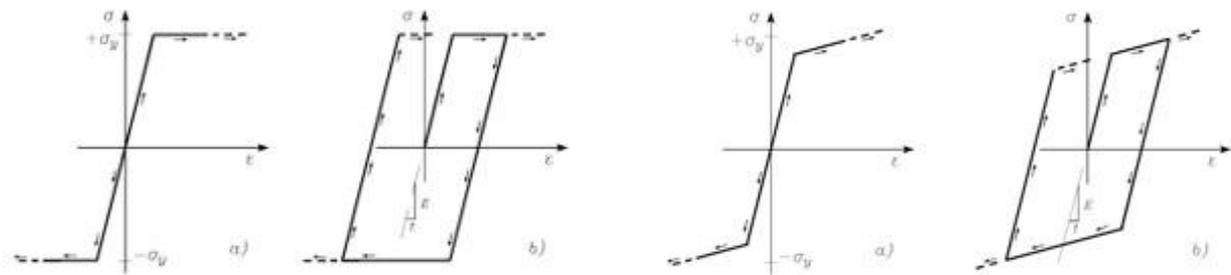


Figura 40: Modello elasto-plastico perfetto (a sinistra) e modello elasto-plastico incrudente (a destra)

Si noti, inoltre, che valgono le seguenti osservazioni:

- se il dominio elastico dipende effettivamente dalla storia di carico si parla di *legge elastoplastica incrudente* (diagramma a destra di Figura 40), altrimenti si parla di *legge elastoplastica ideale* (diagramma a sinistra di Figura 40);
- la formulazione della legge costitutiva in termini di incrementi infinitesimi di tensione e deformazione permette di trattare in maniera più semplice il differente comportamento assunto dal materiale nelle fasi di carico e di scarico, per cui è estendibile a processi di carico del tutto generici;
- il comportamento elastoplastico è *anolonomo* (cioè dipendente dal percorso di carico), infatti la presenza di deformazioni plastiche irreversibili implica che lo stato di tensione e deformazione che si genera nel corpo a seguito dell'applicazione del carico non dipende unicamente dall'entità finale del carico ma anche dalle modalità di applicazione;

Per la formalizzazione della teoria è possibile fare riferimento al *postulato di Drucker* secondo il quale *dato un corpo in una assegnata condizione di tensione e di carico, supponendo di applicare in maniera quasi-statica e poi rimuovere un sistema di forze addizionale, allora:*

- le forze addizionali compiono lavoro non-negativo nella fase di carico;
- le forze addizionali compiono lavoro non-negativo nell'intero ciclo di carico e scarico;

e supponendo la validità dello stesso, è possibile dimostrare che esso è equivalente alla scrittura della relazione:

$$(\boldsymbol{\sigma}_y - \boldsymbol{\sigma}_a) \cdot \dot{\epsilon}^P \geq 0 \quad (123)$$

essendo:

- σ_y : stato di tensione appartenente alla frontiera del dominio elastico;
- σ_a : stato di tensione ammissibile, cioè interno al dominio elastico;
- $\dot{\epsilon}^P$: componente plastica dell'incremento di deformazione associata allo stato di tensione σ_y ;

Un materiale che rispetti il postulato di Drucker soddisfa, pertanto, anche la (123 ed è indicato come *materiale elastoplastico stabile secondo Drucker* o *materiale elastoplastico standard*.

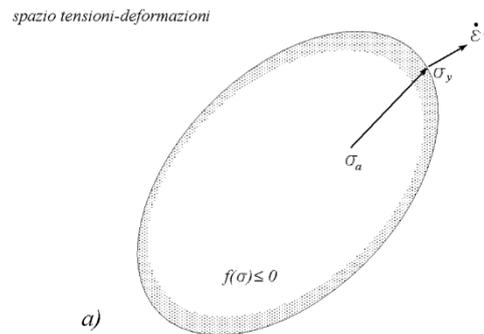


Figura 41: Convessità del dominio elastico e legge normale del flusso plastico

L'assunzione di validità del postulato di Drucker porta alla dimostrazione che per i materiali elastoplastici standard:

- il dominio elastico risulta *convesso*;
- la deformazione plastica è diretta secondo la *normale esterna* alla *superficie di snervamento* (frontiera del dominio elastico);
- non è ammessa una contrazione del dominio elastico, per cui i materiali a *comportamento softening* (e anche i materiali fragili, il cui dominio elastico si annulla rapidamente a seguito della rottura) violano il postulato di Drucker;

In definitiva, si arriva alla scrittura dell'espressione, nota come *legge di flusso*:

$$\dot{\epsilon}^P = \gamma \vec{\nabla} \sigma f(\sigma) \text{ con } \begin{cases} \gamma = 0 & \text{se } f(\sigma) < 0 \\ \gamma = 0 & \text{se } f(\sigma) = 0 \cup \dot{f}(\sigma) < 0 \\ \gamma \geq 0 & \text{se } f(\sigma) = 0 \cup \dot{f}(\sigma) = 0 \end{cases}$$

Supponendo, quindi, che σ_a tenda a σ_y la relazione (123 può essere riscritta nella forma:

$$\dot{\sigma} \cdot \dot{\epsilon}^P \geq 0 \quad (124)$$

Si noti che la (124 risulta valida non solo per i punti appartenenti alla frontiera del dominio elastico ma anche per tutti i punti interni per i quali $f(\sigma) < 0$ per i quali ovviamente $\dot{\epsilon}^P = 0$.

La *legge costitutiva di un materiale elastoplastico standard* può quindi essere riassunta dalle relazioni:

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^E + \dot{\epsilon}^P \\ \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}^E \\ \dot{\epsilon}^P = \gamma \vec{\nabla} \sigma f(\sigma) \\ \dot{\sigma} \cdot \dot{\epsilon}^P \geq 0 \\ f(\sigma) \leq 0 \end{cases}$$

con:

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \text{se } f(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \\ \gamma = 0 & \text{se } f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \cup \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \\ \gamma \geq 0 & \text{se } f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \cup \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \end{cases}$$

Considerando, invece, un materiale *perfettamente elastoplastico*, come già detto in precedenza il dominio elastico si mantiene costante e non risulta dipendente dalla storia di carico; in questo caso il postulato di Drucker porta alla scrittura dell'espressione:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = 0 \quad (125)$$

Notando che:

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}) \vec{\nabla} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (126)$$

e ricordando la *legge di flusso*, secondo la quale:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \gamma \vec{\nabla} \boldsymbol{\sigma} f(\boldsymbol{\sigma})$$

la (125) può essere riscritta come prodotto di due scalari:

$$\gamma \dot{f} = 0 \quad (127)$$

per cui si hanno le due soluzioni:

$$\dot{f} \neq 0 \Rightarrow \gamma = 0, \quad \gamma \neq 0 \Rightarrow \dot{f} = 0$$

La *legge costitutiva di un materiale elastoplastico perfetto* può quindi essere riassunta dalle relazioni:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^E + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = E \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^E \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \gamma \vec{\nabla} \boldsymbol{\sigma} f(\boldsymbol{\sigma}) \\ \gamma \dot{f} = 0 \\ f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \end{cases}$$

con:

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \text{se } f(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \\ \gamma \geq 0 & \text{se } f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \end{cases}$$

La *funzione di snervamento* $f(\boldsymbol{\sigma})$ per come è stata definita fornisce un'indicazione del livello di plasticità raggiunta dal materiale in ogni punto; essa risulta funzione dello stato tensionale nel generico punto, quindi, nel caso di stato di tensione pluriassiale, sarà funzione almeno delle sei componenti indipendenti del tensore di tensione σ_{ij} . Nel caso semplificato di *materiale isotropo* la rappresentazione del dominio elastico può avvenire attraverso le sole *componenti principali di tensione*, indicando, pertanto, queste ultime con σ_I, σ_{II} e σ_{III} è possibile scrivere:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \Rightarrow f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \leq 0$$

In maniera perfettamente analoga, la descrizione della funzione di snervamento nel caso di materiale isotropo può avvenire mediante le invarianti di tensione, da cui, indicando le stesse con J_I, J_{II} e J_{III} :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \Rightarrow f(J_I, J_2, J_3) \leq 0$$

essendo:

- $J_1(\boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}([\boldsymbol{\sigma}]) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$;
- $J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\text{tr}([\boldsymbol{\sigma}])^2 - \text{tr}([\boldsymbol{\sigma}]^2))$;
- $J_3(\boldsymbol{\sigma}) = \det([\boldsymbol{\sigma}])$;

In particolare, nel caso di metalli duttili è possibile dimostrare che la plasticizzazione non dipende nemmeno da condizioni idrostatiche di pressione, cioè è possibile eliminare anche la dipendenza dal primo invariante J_1 .

4.2.2 Modelli di Viscoelasticità

La *viscoelasticità* è un modello matematico che permetta la descrizione di un materiale che presenta un comportamento intermedio tra un solido elastico ed un fluido; la differenza tra le due classi di materiali risiede, essenzialmente, nella risposta ad una sollecitazione esterna. È, infatti, possibile osservare che:

- *materiali puramente viscosi*, coerentemente con la *legge di Newton*, reagiscono originando al loro interno un sistema di *sforzi tangenziali* proporzionali alla velocità di deformazione e alla viscosità se soggetti ad azioni esterne tali da produrre *sollecitazioni tangenziali*. Al contrario, se soggetti a *sforzi normali*, non oppongono alcun tipo di resistenza;
- *materiali puramente elastici*, coerentemente con la *legge di Hooke*, reagiscono originando al loro interno un sistema di *sforzi normali* proporzionali alla deformazione e al modulo di Young se soggetti ad azioni esterne tali da produrre *sollecitazioni normali*, per poi tornare nella condizione indisturbata nel momento in cui la sollecitazione esterna viene meno. Al contrario, se soggetti a *sforzi tangenziali*, non oppongono alcun tipo di resistenza;

Un *materiale viscoelastico* in qualsiasi condizione di carico esterno svilupperà internamente, quindi, sia *sforzi tangenziali* che *sforzi normali*. Nella realtà tutti i materiali presentano un comportamento che si discosta sia dalla condizione puramente viscosa che dal quella puramente elastica, per cui è possibile affermare che ogni materiale presenta sempre, seppur in maniera minima, comportamento viscoelastico.

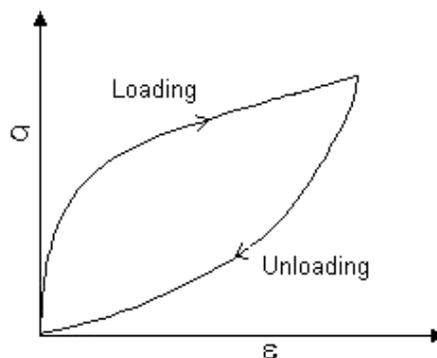


Figura 42: Isteresi ciclo di carico-scarico, [42]

Per i materiali viscoelastici, la viscosità, intesa come costante di proporzionalità tra sforzo e velocità di deformazione è funzione della *velocità di deformazione*, del *tempo* e della *temperatura*; essa consta, inoltre, di due contributi:

- *shear viscosity* cioè la viscosità classica, definita dal rapporto tra gli sforzi tangenziali e la velocità di deformazione;
- *extensional viscosity* o *elongation viscosity*, definita dal rapporto tra sforzi normali e velocità di deformazione;

I materiali viscoelastici presentano alcune caratteristiche peculiari:

- mantenendo costante il livello di sforzo si osserva un incremento di deformazione nel tempo (*fenomeno di scorrimento viscoso* o *creep*);
- mantenendo costante il livello di deformazione si osserva una riduzione dello sforzo nel tempo (*fenomeno di rilassamento degli sforzi*);
- la rigidità del materiale è funzione della velocità di applicazione del carico;
- applicando un carico ciclico è possibile osservare un *fenomeno di isteresi*, con conseguente dissipazione di energia meccanica. Rappresentando il ciclo di carico su un diagramma tensione-deformazione, l'energia dissipata risulta pari all'area del percorso che rappresenta il ciclo stesso (Figura 42);

Legate ai fenomeni di isteresi del ciclo di carico-scarico esistono altre due proprietà tipiche dei *materiali viscoelastici*:

- onde acustiche e vibrazionali subiscono un'attenuazione;
- la velocità di rimbalzo di un oggetto a seguito di un urto con un materiale viscoelastico è inferiore rispetto alla velocità dell'oggetto prima dell'urto;

I modelli di viscoelasticità vengono solitamente divisi in base al numero di sotto-elementi impiegati per la modellazione del fenomeno. Siano quindi:

- σ : *tensione*;
- ϵ : *deformazione*;
- E : *modulo elastico*;
- η : *viscosità*;
- t : *tempo*;

I modelli a due elementi di maggiore impiego sono:

- *modello di Maxwell*;
- *modello di Kelvin-Voigt*;

Nel *modello di Maxwell* la meccanica del materiale è supposta equivalente ad un sistema costituito da uno smorzatore viscoso ed una molla collegati in serie (Figura 43). L'equazione costitutiva risulta, quindi essere:

$$\dot{\epsilon}_{tot} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad (128)$$

essendo:

- ϵ_1 : *deformazione legata al contributo viscoso*;
- ϵ_2 : *deformazione legata al contributo elastico*;

Imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ \epsilon(t_0) = \{\mathbf{0}\} \\ \sigma(t_0) = \sigma_0 \end{cases}$$

Si ottiene la soluzione:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{t_{ril}}} \quad (129)$$

avendo definito $t_{ril} = \frac{\eta}{E}$

Il *modello di Maxwell* è abbastanza accurato nella descrizione del comportamento di materiali viscoelastici con un comportamento elastico limitato ad intervalli temporali abbastanza brevi e con un comportamento viscoso per intervalli di tempo più consistenti; in generale, quindi, esso è utilizzato per la descrizione di materiali viscoelastici liquidi.

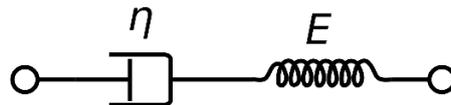


Figura 43: Analogia meccanica modello di Maxwell a 2 elementi

Il *modello di Kelvin-Voigt* è utilizzato per la previsione del comportamento di materiali viscoelastici solidi; per simulare la meccanica del materiale si suppone l'equivalenza ad un sistema costituito da una molla ed uno smorzatore collegati in parallelo (Figura 44). Il legame costitutivo sarà, quindi, espresso dalla relazione:

$$\sigma_{tot} = \sigma_1 + \sigma_2 = E \epsilon + \eta \dot{\epsilon} \quad (130)$$

essendo:

- σ_1 : sforzo legato al contributo viscoso;
- σ_2 : sforzo legato al contributo elastico;

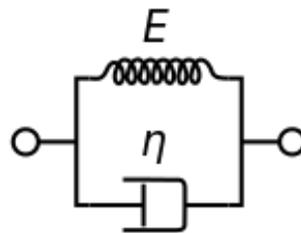


Figura 44: Analogia meccanica modello di Kelvin-Voigt a 2 elementi

Imponendo anche in questo caso opportune condizioni al contorno:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ \epsilon(t_0) = \{0\} \\ \sigma(t_0) = \sigma_0 \end{cases}$$

Si ottiene la soluzione:

$$\epsilon(t) = \frac{1}{E} \sigma_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{t_{ril}}} \right] \quad (131)$$

Il problema maggiore dei sistemi a due elementi è che essi peccano nella descrizione del creep (modello di Maxwell) o del rilassamento degli stress (modello di Kelvin-Voigt).

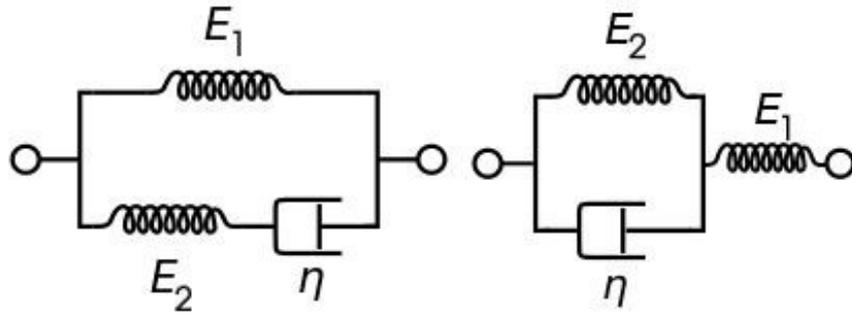


Figura 45: Modello di Zener con rappresentazione di Maxwell (a sinistra) e con rappresentazione di Kelvin-Voigt (a sinistra)

Per quanto riguarda, invece, i modelli a tre elementi, solitamente si fa riferimento al modello di Zener (Figura 45) o al modello di Jeffreys-Lethersich.

Il modello di Zener può essere rappresentato in due maniere differenti:

- *rappresentazione di Maxwell*: una molla collegata in serie ad un dissipatore viscoso ed il tutto collegato in parallelo ad una seconda molla;
- *rappresentazione di Kelvin-Voigt*: una molla collegata in parallelo ad un dissipatore viscoso ed il tutto collegato in serie ad una seconda molla;

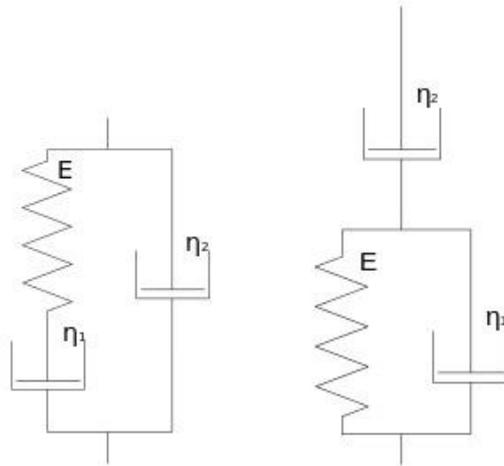


Figura 46: Modello di Jeffreys-Lethersich con rappresentazione di Jeffreys (a sinistra) e di Lethersich (a sinistra)

Nei due casi la relazione costitutiva del materiale diventa:

- *modello di Zener con rappresentazione di Maxwell*:

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma} = E_1 \epsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \dot{\epsilon} \quad (132)$$

- *modello di Zener con rappresentazione di Kelvin-Voigt*:

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \epsilon + \frac{E_1 \eta}{E_1 + E_2} \dot{\epsilon} \quad (133)$$

Per quanto riguarda, invece, il *modello di Jeffreys-Lethersich* le possibili rappresentazioni sono:

- *rappresentazione di Jeffreys*: una molla collegata in serie ad un dissipatore viscoso ed il tutto collegato in parallelo ad un secondo dissipatore viscoso;
- *rappresentazione di Lethersich*: una molla collegata in parallelo ad un dissipatore viscoso ed il tutto collegato in serie ad un secondo dissipatore viscoso;

Nei due casi la relazione costitutiva del materiale diventa:

- *modello di Jeffreys-Lethersich con rappresentazione di Jeffreys*:

$$\sigma + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E} \dot{\sigma} = \eta_2 \dot{\epsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \ddot{\epsilon} \quad (134)$$

- *modello di Jeffreys-Lethersich con rappresentazione di Lethersich*:

$$\sigma + \frac{\eta_1}{E} \dot{\sigma} = (\eta_1 + \eta_2) \dot{\epsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \ddot{\epsilon} \quad (135)$$

I modelli a tre elementi forniscono risultati accettabili nella maggior parte dei casi, tuttavia, esistono delle condizioni di carico e vincolo particolari per le quali i risultati non risultano accurati. Esistono modelli multielemento che possono essere divisi in due categorie:

- *modello di Maxwell generalizzato*: più elementi, ciascuno dei quali costituito da una molla ed un dissipatore viscoso, disposti in serie;
- *modello di Kelvin-Voigt generalizzato*: più elementi, ciascuno dei quali costituito da una molla ed uno smorzatore viscoso, disposti in parallelo;

Al tendere ad infinito del numero di elementi i due modelli tendono a coincidere.

4.2.3 Modelli di Viscoplasticità

La *viscoplasticità* è un modello costitutivo che permette la descrizione del comportamento di un materiale in campo non elastico, la cui risposta risulti dipendente dalla velocità di applicazione del carico. La sostanziale differenza rispetto ai semplici modelli di plasticità risiede nel fatto che, raggiunto un certo livello di carico, la struttura non solo manifesta deformazioni permanenti ma si osserva anche uno scorrimento viscoso che aumenta nel tempo anche a carico costante. Allo stesso tempo, la differenza rispetto al caso viscoelastico risiede nel carattere irreversibile delle deformazioni subite dalla struttura.

Il comportamento viscoelastico del materiale può essere descritto con due tipologie di modello differenti:

- *modelli reologici*: basati sul collegamento in serie o in parallelo di elementi molla, smorzatore e slider;
- *strain-rate dependent plasticity models*;

I principali *modelli reologici* per la descrizione del comportamento viscoplastico del materiale sono:

- *modello di Norton-Hoff*;
- *modello di Bingham-Norton*;

Il *modello di Norton-Hoff* permette la descrizione di *materiali perfettamente viscoplastici*. In questo modello si assume l'assenza della componente elastica di deformazione e di snervamento iniziale, per cui:

$$\epsilon^E = \{0\}, \quad \sigma_y = 0$$

Sotto tali ipotesi la risposta dello smorzatore viscoso sarà:

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}^{VP} \Rightarrow \dot{\epsilon}^{VP} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (136)$$

avendo indicato con η la viscosità che caratterizza lo smorzatore viscoso. Si noti che, nel modello di Norton-Hoff η è una funzione non lineare dello sforzo applicato ed è data dall'espressione:

$$\eta = \lambda \left[\frac{\lambda}{\|\sigma\|} \right]^{N-1} \quad (137)$$

essendo:

- λ : viscosità cinematica;
- N : fitting factor;
- $\|\sigma\| = \sqrt{\sigma_{ij} \sigma_{ij}}$: tensione in norma;

Tenendo conto di (137) l'espressione (136) può essere riscritta come:

$$\dot{\epsilon}^{VP} = \frac{\sigma}{\eta} = \frac{\sigma}{\lambda} \left[\frac{\|\sigma\|}{\lambda} \right]^{N-1} \quad (138)$$

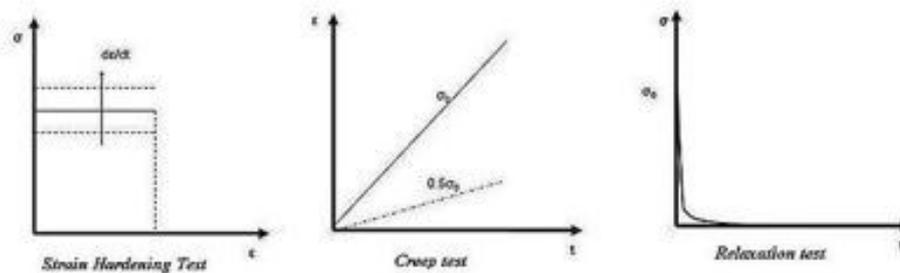


Figura 47: Modello di Norton-Hoff, [54]

Il modello di Bingham-Norton è utilizzato per la descrizione del comportamento di materiali che presentino comportamento elastico e poi perfettamente viscoplastico. Esso consta di uno slider collegato in parallelo con uno smorzatore viscoso ed il tutto collegato in serie ad una molla (Figura 48). In questo caso, a differenza del modello di Norton-Hoff si ha una componente elastica di deformazione ma la velocità di deformazione plastica è funzione della sola tensione di snervamento iniziale (manca la dipendenza dall'incrudimento).

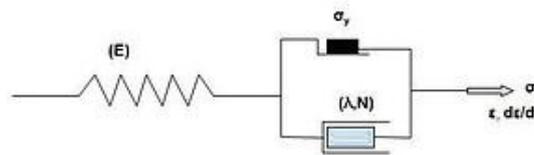


Figura 48: Schema modello di Bingham-Norton, [55]

Facendo, quindi, riferimento a Figura 48 il modello può essere espresso come:

$$\begin{aligned} \sigma &= E \epsilon & \text{se } \|\sigma\| < \sigma_y \\ \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}^E + \dot{\epsilon}^{VP} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\eta} \left[1 - \frac{\sigma_y}{\|\sigma\|} \right] & \text{se } \|\sigma\| \geq \sigma_y \end{aligned} \quad (139)$$

Tenendo, quindi, conto di (138):

$$\begin{aligned} \sigma &= E \epsilon & \text{se } \|\sigma\| < \sigma_y \\ \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}^E + \dot{\epsilon}^{VP} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\lambda} \left[\frac{\|\sigma\|}{\lambda} \right]^{N-1} \left[1 - \frac{\sigma_y}{\|\sigma\|} \right] & \text{se } \|\sigma\| \geq \sigma_y \end{aligned} \quad (140)$$

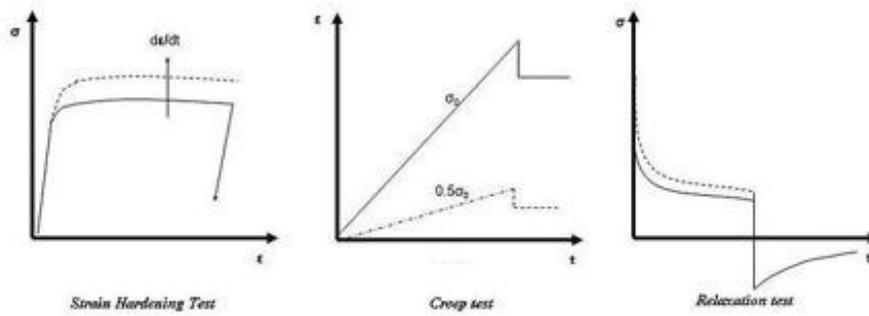


Figura 49: Modello di Bingham-Norton, [56]

I modelli di tipo *strain rate dependent plasticity* possono essere suddivisi in due tipologie:

- *Perzyna formulation*;
- *Duvaut-Lions formulation*;

Nella *Perzyna formulation* il modello costitutivo è rappresentato dalla scrittura:

$$\dot{\epsilon}^{VP} = \frac{\langle f(\sigma, \mathbf{q}) \rangle}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \begin{cases} \frac{f(\sigma, \mathbf{q})}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \sigma} & \text{se } f(\sigma, \mathbf{q}) > 0 \\ \{\mathbf{0}\} & \text{se } f(\sigma, \mathbf{q}) \leq 0 \end{cases} \quad (141)$$

essendo:

- $f(\sigma, \mathbf{q})$: funzione di snervamento;
- σ : tensione;
- \mathbf{q} : vettore di variabili interne che permette la definizione, istante per istante, dello stato del sistema;
- τ : tempo di rilassamento degli stress;

Si noti che per la scrittura di (141) si è fatto uso dell'operatore *brackets di Macaulay* definito dalla relazione:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

Un caso particolare della *Perzyna formulation* è il *modello di flusso di Chaboche*, definito dall'equazione:

$$\dot{\epsilon}^{VP} = \left\langle \frac{f}{f_0} \right\rangle^n (\sigma - \chi)$$

essendo:

- f_0 : valore quasi-statico di f ;
- χ : valore di stress preesistente;

La *Duvaut-Lions formulation* è esattamente analoga e può essere espressa dalla relazione:

$$\dot{\epsilon}^{VP} = \begin{cases} [\mathbf{C}]^{-1} \frac{\sigma - P\sigma}{\tau} & \text{se } f(\sigma, \mathbf{q}) > 0 \\ \{\mathbf{0}\} & \text{se } f(\sigma, \mathbf{q}) \leq 0 \end{cases} \quad (142)$$

dove:

- $[\mathbf{C}]$: tensore di elasticità;

- $P\sigma$: proiezione minore del punto che rappresenta la tensione del sistema nel dominio elastico sul bordo del dominio stesso (tipicamente determinata risolvendo il problema plastico senza componente viscosa);

Come accennato in precedenza, la funzione $f(\sigma, \mathbf{q})$ è detta *funzione di snervamento* e rappresenta, dal punto di vista fisico, l'evoluzione della superficie di snervamento nel tempo. Esistono numerosi modelli di f noti come *leggi di flusso*; quelli più noti sono:

- *modello di Johnson-Cook*;
- *modello di Steinberg-Cochran-Guinan-Lund*;
- *modello di Zerilli-Armstrong*;
- *mechanical threshold stress model*;
- *modello di Preston-Tonks-Wallace*;

Il *modello di Johnson-Cook* è un modello formulato su base totalmente empirica e può essere riassunto nell'espressione:

$$\sigma_y(\epsilon^P, \dot{\epsilon}^P, T) = [A + B (\epsilon^P)^n][1 + C \ln(\dot{\epsilon}^{P*})][1 - (T^*)^m] \quad (143)$$

nella quale:

- ϵ^P : *deformazione plastica equivalente*;
- $\dot{\epsilon}^P$: *velocità di deformazione plastica*;
- A, B, C, m, n : *costanti del materiale determinate sperimentalmente*;
- $\dot{\epsilon}^{P*} = \frac{\dot{\epsilon}^P}{\dot{\epsilon}_0^P}$ con $\dot{\epsilon}_0^P$

$\dot{\epsilon}^{P*}$ e T^* sono dette, rispettivamente, velocità di deformazione plastica normalizzata e temperatura normalizzata; tali due parametri sono definiti dalle relazioni:

$$\dot{\epsilon}^{P*} = \frac{\dot{\epsilon}^P}{\dot{\epsilon}_0^P} \quad T^* = \frac{T - T_0}{T_m - T_0}$$

con:

- $\dot{\epsilon}_0^P$: *velocità di deformazione plastica effettiva determinata in condizioni di test quasi-statico*;
- T_0 : *temperatura di riferimento*;
- T_m : *temperatura di fusione*;

Nel *modello di Steinberg-Cochran-Guinan-Lund* la legge di flusso è data dall'espressione:

$$\sigma_y(\epsilon^P, \dot{\epsilon}^P, T) = [\sigma_a f(\epsilon^P) + \sigma_t(\dot{\epsilon}^P, T)] \frac{\mu(p, T)}{\mu_0} \quad \text{con } \sigma_a f \leq \sigma_{max}, \sigma_t \leq \sigma_p \quad (144)$$

dove:

- σ_a : *componente non-termica del flusso di stress*;
- $f(\epsilon^P)$: *funzione di incrudimento*;
- σ_t : *componente termica del flusso di stress*;
- $\mu(p, T)$: *modulo di taglio (dipendente da pressione e temperatura)*;
- μ_0 : *modulo di taglio in condizioni standard di temperatura e pressione*;
- σ_p : *tensione di Peierls (valore di tensione necessaria al movimento della dislocazione nella cella elementare)*;

Per $\mu(p, T)$ si utilizza, generalmente, il modello di Steinberg-Cochran-Guinan:

$$\mu(p, T) = \mu_0 + \frac{\partial \mu}{\partial p} \frac{p}{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\partial \mu}{\partial T} (T - 300) \quad (145)$$

essendo ρ la densità e ρ_0 il valore di densità in condizioni standard.

Per quanto riguarda la funzione di incrudimento $f(\epsilon^P)$ è possibile assumere:

$$f(\epsilon^P) = [1 + \beta(\epsilon^P + \epsilon_i^P)]^n \quad (146)$$

nella quale:

- β, n : parametri di incrudimento;
- ϵ_i^P : deformazione plastica equivalente iniziale;

La componente termica del flusso di tensioni σ_t può essere ricavata mediante formule di bisezione a partire dall'espressione:

$$\epsilon^P = \left[\frac{1}{C_1} e^{\frac{2U_k}{k_b T} \left(1 - \frac{\sigma_t}{\sigma_p}\right)^2} + \frac{C_2}{\sigma_t} \right]^{-1}$$

nella quale:

- $2U_k$: energia di formazione di un kink-pair in una dislocazione di lunghezza L_d ;
- k_b : costante di Boltzmann;

Le due costanti C_1 e C_2 sono, invece, date dalle espressioni:

$$C_1 = \frac{\rho_d L_d a b^2 v}{2 w^2}, \quad C_2 = \frac{D}{\rho_d b^2}$$

essendo:

- ρ_d : densità di dislocazioni;
- L_d : lunghezza della dislocazione;
- a : distanza tra due valli di Peierls;
- b : modulo del vettore di Burgers;
- v : frequenza di Debye;
- D : coefficiente di resistenza;
- w : larghezza di un kink-loop;

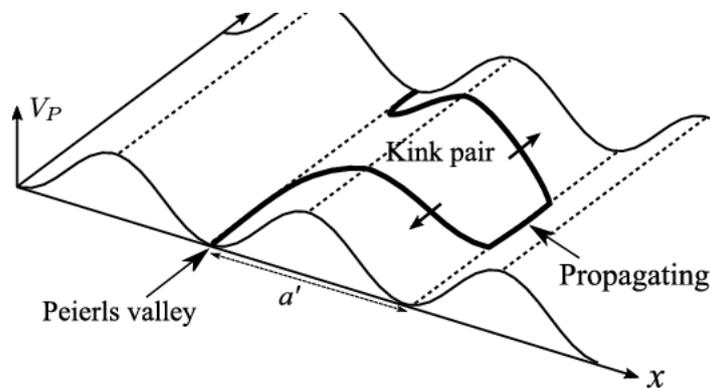


Figura 50: Fenomeno di kink-pair, [57]

Il modello di Zerilli-Armstrong si basa su una meccanica semplificata del moto delle dislocazioni; la legge che descrive il flusso di tensioni è la seguente:

$$\sigma_y(\dot{\epsilon}^P, \epsilon^P, T) = \sigma_a + B e^{-\beta T} + B_0 \sqrt{\dot{\epsilon}^P} e^{-\alpha T} \quad (147)$$

nella quale:

- σ_a : componente non-termica del flusso di stress;
- A, B, B_0, α, β : costanti dipendenti dal materiale;

Nello specifico, per σ_a è possibile fare riferimento alla seguente espressione:

$$\sigma_a = \sigma_g + \frac{k_h}{\sqrt{l}} + K \epsilon^{Pn}$$

nella quale:

- σ_g : componente del flusso di stress legata alla presenza di inclusioni e alla densità iniziale di dislocazioni;
- k_h : intensità di stress microstrutturale;
- l : diametro medio grani;
- K : costante dipendente dal tipo di struttura microcristallina (cubica corpo-centrato, cubica facce-centrate, esagonale compatta);

Per le costanti α e β è possibile fare riferimento alle espressioni:

$$\alpha = \alpha_0 - \alpha_1 \ln(\dot{\epsilon}^P) \quad \beta = \beta_0 - \beta_1 \ln(\dot{\epsilon}^P)$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ e β_1 costanti che dipendono solamente dalla struttura microcristallina del materiale.

Nel *mechanical threshold stress model* il flusso di stress assume la forma:

$$\sigma_y(\dot{\epsilon}^P, \epsilon^P, T) = \sigma_a + (S_i \sigma_i + S_e \sigma_e) \frac{\mu(p, T)}{\mu_0} \quad (148)$$

nella quale:

- σ_a : componente non-termica del flusso di tensioni;
- σ_i : componente del flusso di tensioni legata all'attivazione del moto delle dislocazioni in condizioni di alta temperatura ed all'interazione tra dislocazioni stesse;
- σ_e : componente del flusso di tensioni legata all'evoluzione della microstruttura all'aumentare dell'incrudimento;
- S_i, S_e : scaling factors;

Nello specifico per S_i e S_e è possibile fare riferimento al seguente modello:

$$S_i = \left[1 - \left(\frac{k_b T}{g_{0,i} b^3 \mu(p, T)} \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}_0}{\dot{\epsilon}} \right) \right)^{\frac{1}{q_i}} \right]^{\frac{1}{p_i}}$$

$$S_e = \left[1 - \left(\frac{k_b T}{g_{0,e} b^3 \mu(p, T)} \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}_0}{\dot{\epsilon}} \right) \right)^{\frac{1}{q_e}} \right]^{\frac{1}{p_e}}$$

essendo:

- $g_{0,i}$ e $g_{0,e}$: energia di attivazione normalizzate del moto dislocativo;
- q_i , q_e , p_i e p_e : costanti dipendenti dal materiale;

La componente di deformazione di incrudimento del *mechanical threshold stress* σ_e è, invece, ricavabile mediante un modello empirico noto come *legge di Voce*:

$$\frac{d\sigma_e}{d\epsilon^P} = \theta(\sigma_e) = \theta_0[1 - F(\sigma_e)] + \theta_{IV} F(\sigma_e) \quad (149)$$

essendo:

$$\theta_0 = \alpha_0 + \alpha_1 \ln \dot{\epsilon}^P + \alpha_2 \sqrt{\dot{\epsilon}^P} - \alpha_3 T$$

$$F(\sigma_e) = \frac{\tanh\left(\alpha \frac{\sigma_e}{\sigma_{es}}\right)}{\tanh(\alpha)}$$

in cui:

$$\ln\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{0,es}}\right) = \frac{k_b T}{g_{0,es} b^3 \mu(p, T)} \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_0}{\dot{\epsilon}}\right)$$

essendo:

- θ_0 : incrudimento legato all'accumulo di dislocazioni;
- θ_{IV} : contributo legato alla fase IV di incrudimento;
- α , α_0 , α_1 , α_2 , α_3 : costanti legate al materiale;
- σ_{es} : tensione in corrispondenza di una velocità di deformazione di incrudimento nulla;
- $\sigma_{0,es}$: valore limite di saturazione per σ_{es} a 0K;
- $g_{0,es}$: costante energetica;

Infine, il *modello di Preston–Tonks–Wallace* è utilizzato nel caso di velocità di deformazione molto elevate (dell'ordine di $10^{11} s^{-1}$) e per temperature dell'ordine del punto di fusione del materiale. Tale modello prevede la seguente legge di flusso di stress:

$$\sigma_y(\epsilon^P, \dot{\epsilon}^P, T) = \begin{cases} 2 \left[\tau_s + \alpha \ln \left[1 - \phi e^{-\beta \frac{\theta \epsilon^P}{\alpha \phi}} \right] \right] \mu(p, T), & \text{regime termico} \\ 2 \tau_s \mu(p, T), & \text{regime di shock} \end{cases} \quad (150)$$

nella quale:

$$\alpha = \frac{s_0 - \tau_y}{d}, \quad \beta = \frac{\tau_s - \tau_y}{\alpha}, \quad \phi = e^\beta - 1$$

essendo:

- τ_s : valore di saturazione normalizzato del livello di tensione di incrudimento;
- s_0 : valore di τ_s a 0 K;
- τ_y : valore normalizzato della tensione di snervamento;
- θ : costante di incrudimento;
- d : parametro dimensionale che modifica la legge di Voce;

In particolare, per τ_s e τ_y è possibile fare riferimento alle espressioni:

$$\tau_s = \max \left\{ s_0 - (s_0 - s_\infty) \operatorname{erf} \left[\kappa \tilde{T} \ln \left(\gamma \frac{\dot{\xi}}{\dot{\epsilon}^P} \right) \right], s_0 \left(\frac{\dot{\epsilon}^P}{\gamma \dot{\xi}} \right)^{s_1} \right\}$$

$$\tau_y = \max \left\{ y_0 - (y_0 - y_\infty) \operatorname{erf} \left[\kappa \tilde{T} \ln \left(\gamma \frac{\dot{\xi}}{\dot{\epsilon}^P} \right) \right], \min \left\{ y_1 \left(\frac{\dot{\epsilon}^P}{\gamma \dot{\xi}} \right)^{y_2}, s_0 \left(\frac{\dot{\epsilon}^P}{\gamma \dot{\xi}} \right)^{s_1} \right\} \right\}$$

essendo:

- s_∞ : valore di τ_s in prossimità del punto di fusione;
- (y_0, y_∞) : valori di τ_y rispettivamente a 0 K e in prossimità del punto di fusione;
- κ, γ : costanti tipiche del materiale;
- $\tilde{T} = \frac{T}{T_m}$ essendo T_m la temperatura di fusione;
- s_1, y_1 e y_2 : costanti che caratterizzano il comportamento del materiale ad elevata temperatura;

Infine, per $\dot{\xi}$ è possibile fare riferimento al seguente modello:

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi\rho}{3M} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu(p, T)}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

essendo ρ la densità e M la massa atomica.

4.3 Criteri di Resistenza

La risoluzione del problema elastico porta, noti i carichi applicati al componente, il materiale e le condizioni di vincolo, alla determinazione dei campi di spostamento, deformazione e tensione. Le prove di caratterizzazione del materiale permettono, invece, una misura sperimentale del livello massimo di tensione che il materiale è in grado di sopportare. Il processo di *verifica di resistenza* ha lo scopo di determinare se, nelle assegnate condizioni di esercizio, il componente arriva a rottura o a snervamento.

La difficoltà risiede nel fatto che gli stati tensionali nei componenti strutturali sono multi-assiali, al contrario dello stato mono-assiale che si misura nelle prove sperimentali di caratterizzazione del materiale. Risulta, quindi, necessario andare a definire una *tensione equivalente* che possa essere confrontata con il limite del materiale stesso. Detta σ_{lim} la tensione limite del materiale (può essere sia rottura che snervamento a seconda dei casi), si definisce *tensione ammissibile*:

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_{lim}}{n} \quad (151)$$

essendo $n > 1$ il *coefficiente di sicurezza*. Si noti che la definizione di un coefficiente di sicurezza maggiore dell'unità è necessario per tenere conto delle varie incertezze legate a:

- approssimazione dei modelli per la determinazione del campo di tensioni;
- proprietà meccaniche del materiale;
- condizioni di utilizzo (vincoli imperfetti o livelli di carico superiori a quanto stimato);

La *verifica di resistenza* del componente consiste quindi nell'accertarsi che sia soddisfatta la relazione:

$$\sigma_{eq} < \sigma_{amm} \quad (152)$$

In maniera del tutto analoga è possibile stabilire anche criteri basati sulla massima deformazione, utili soprattutto nel caso di componenti realizzati con materiali fragili; in questo caso sarà necessario verificare che:

$$\epsilon_{eq} < \epsilon_{amm} \quad (153)$$

4.3.1 Criteri di Resistenza per Materiali Isotropi

I criteri di rottura maggiormente utilizzati nel caso di materiali isotropi sono:

- *criterio di Galileo-Rankine o della massima tensione normale;*
- *criterio di Grashof-Saint Venant o della massima deformazione normale;*
- *criterio di Tresca o della massima tensione tangenziale;*
- *criterio di Von Mises o della massima energia di distorsione;*

Si noti che i primi due sono criteri di rottura validi per materiali fragili con resistenza a trazione decisamente inferiore rispetto a quella a compressione, mentre gli ultimi due sono criteri di snervamento validi nel caso di materiali duttili con comportamento a trazione e compressione pressoché equivalente.

Il *criterio di Galileo-Rankine o della massima tensione normale* è un *criterio di rottura* valido per materiali:

- *isotropi;*
- *fragili;*
- *con resistenza a compressione decisamente superiore a quella a trazione;*

Secondo tale criterio, il materiale arriva a rottura nel momento in cui la *tensione normale massima o minima* raggiunge i *valori limite a trazione e compressione*, indicati rispettivamente con σ_r^+ e σ_r^- che possono essere facilmente determinate con prove di trazione e compressione uni-assiale. Gli stati di tensione ammissibili sono quelli definiti dalla relazione:

$$\sigma_r^- \leq \sigma_{max} \leq \sigma_r^+ \quad (154)$$

Facendo, quindi, riferimento alle tensioni principali è possibile definire:

$$\sigma_{max} = \max\{|\sigma_I|, |\sigma_{II}|, |\sigma_{III}|\} \quad (155)$$

da cui (154) diventa:

$$\sigma_r^- \leq \sigma_I \leq \sigma_r^+, \quad \sigma_r^- \leq \sigma_{II} \leq \sigma_r^+, \quad \sigma_r^- \leq \sigma_{III} \leq \sigma_r^+ \quad (156)$$

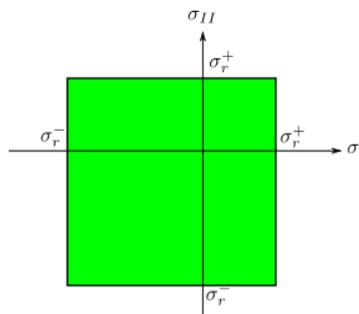


Figura 51: Proiezione superficie di rottura nel piano $\sigma_{III} = 0$, [61]

Si noti che nello spazio tridimensionale generato dalle tensioni principali σ_I , σ_{II} e σ_{III} , la superficie di rottura corrisponde ad un cubo con i lati paralleli agli assi. La proiezione di tale superficie nel piano $\sigma_{III} = 0$ è rappresentata da un quadrato non centrato nell'origine poiché la tensione di rottura a compressione è, solitamente, più elevata di quella a trazione (Figura 51).

Il criterio di *Grashof-Saint Venant* o della massima deformazione normale è un criterio di rottura valido per materiali:

- isotropi;
- fragili;
- con resistenza a compressione decisamente superiore a quella a trazione;

Secondo tale criterio il materiale arriva a rottura nel momento in cui la dilatazione normale massima o minima raggiunge i valori limite di schiacciamento o di allungamento, indicati rispettivamente come ϵ_r^- e ϵ_r^+ . Gli stati di deformazione ammissibili sono, pertanto, stabiliti dalla relazione:

$$\epsilon_r^- \leq \epsilon_{max} \leq \epsilon_r^+ \quad (157)$$

Facendo nuovamente riferimento alle tensioni principali ed essendo per ipotesi il materiale isotropo:

$$\epsilon_r^- = \frac{\sigma_r^-}{E}, \quad \epsilon_r^+ = \frac{\sigma_r^+}{E}$$

da cui:

$$\epsilon_{max} = \max \left\{ \left| \frac{\sigma_I}{E} - \frac{\nu(\sigma_{II} + \sigma_{III})}{E} \right|, \left| \frac{\sigma_{II}}{E} - \frac{\nu(\sigma_I + \sigma_{III})}{E} \right|, \left| \frac{\sigma_{III}}{E} - \frac{\nu(\sigma_I + \sigma_{II})}{E} \right| \right\}$$

Per cui la condizione limite descritta da (157) si traduce in:

$$\sigma_r^- \leq \sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III}) \leq \sigma_r^+, \quad \sigma_r^- \leq \sigma_{II} - \nu(\sigma_I + \sigma_{III}) \leq \sigma_r^+, \quad \sigma_r^- \leq \sigma_{III} - \nu(\sigma_I + \sigma_{II}) \leq \sigma_r^+ \quad (158)$$

Il criterio di *Tresca* o della massima tensione tangenziale è un criterio di snervamento valido per materiali:

- isotropi;
- duttili;
- con resistenza a trazione e compressione equivalenti;
- con snervamento indipendente dalla pressione idrostatica;

Secondo il criterio di *Tresca*, il materiale raggiunge la condizione di snervamento nel momento in cui la tensione tangenziale uguaglia un valore limite indicato come τ_{max} :

$$\tau = \tau_{max} \quad (159)$$

Facendo riferimento alle tensioni principali σ_I , σ_{II} e σ_{III} , è possibile disegnare tre circonferenze sul piano di *Mohr*, aventi come diametro il modulo della differenza delle tensioni principali; per ricavare le tensioni tangenziali sarà, pertanto, sufficiente dividere tali espressioni per due:

$$\tau_{max} = \max \left\{ \frac{|\sigma_I - \sigma_{II}|}{2}, \frac{|\sigma_I - \sigma_{III}|}{2}, \frac{|\sigma_{II} - \sigma_{III}|}{2} \right\} \quad (160)$$

La condizione di snervamento sarà data da:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_y}{2} \quad (161)$$

o, in maniera analoga, definendo la *funzione di snervamento* mediante l'espressione:

$$f(\sigma) = [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 - \sigma_y^2][(\sigma_I - \sigma_{III})^2 - \sigma_y^2][(\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 - \sigma_y^2] = 0 \quad (162)$$

la cui intersezione con il piano $\sigma_{III} = 0$ è un poligono esagonale descritto dalle relazioni:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \pm \sigma_y, \quad \sigma_I = \pm \sigma_y, \quad \sigma_{II} = \pm \sigma_y \quad (163)$$

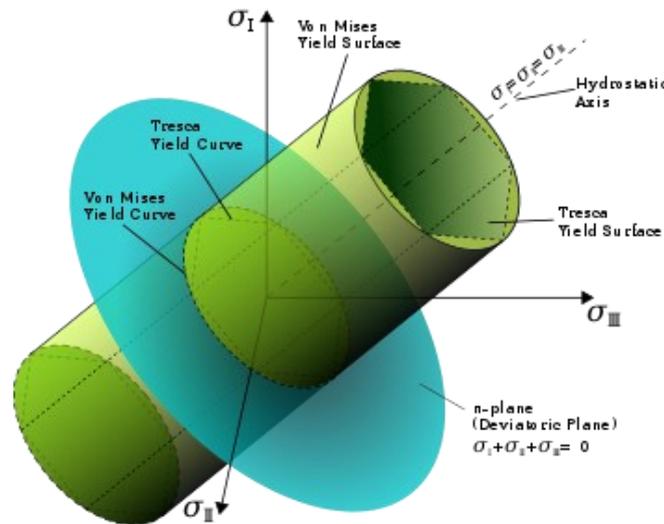


Figura 52: Confronto superfici di snervamento criterio di Tresca e criterio di von Mises, [62]

Il criterio di von Mises o della massima distorsione è un criterio di snervamento valido per materiali:

- isotropi;
- duttili;
- con resistenza a trazione e compressione equivalenti;

Secondo tale criterio, la condizione di snervamento del materiale è raggiunta nel momento in cui l'energia di distorsione arriva ad un valore limite, essendo l'energia di distorsione quella associata alla componente di deformazione che provoca variazioni di forma a volume costante. Tale condizione sull'energia di distorsione può essere espressa andando a definire una tensione equivalente:

$$\sigma_{id,VM} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (164)$$

Nello spazio tridimensionale delle componenti principali di tensione σ_I , σ_{II} e σ_{III} la condizione di snervamento è descritta attraverso la funzione:

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 - \sigma_y^2 = 0 \quad (165)$$

L'intersezione del dominio elastico di von Mises con il piano $\sigma_{III} = 0$ produce un'ellisse centrata nell'origine del piano (σ_I, σ_{II}) dato dall'espressione:

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, 0) = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II} - \sigma_y^2 = 0 \quad (166)$$

Facendo uso delle espressioni (162) e (165) che descrivono i domini elastici e (163) e (166) che descrivono la proiezione dei domini elastici sul piano $\sigma_{III} = 0$, è possibile operare un confronto tra il criterio di Tresca ed il criterio di von Mises; operando in questa maniera è possibile notare che il dominio elastico descritto dal criterio di von Mises circonda il dominio elastico definito dal criterio di Tresca (Figura 52 e Figura 53), per cui il criterio di Tresca risulta più restrittivo del criterio di von Mises. Gli scarti, tuttavia, non sono troppo elevati e, in più, entrambi i criteri forniscono risultati decisamente attendibili e in ottimo accordo con i dati sperimentali; tenendo, inoltre, conto della maggiore semplicità di rappresentazione del dominio attraverso il criterio di von Mises, spesso quest'ultimo viene preferito, specie in contesti computazionali.

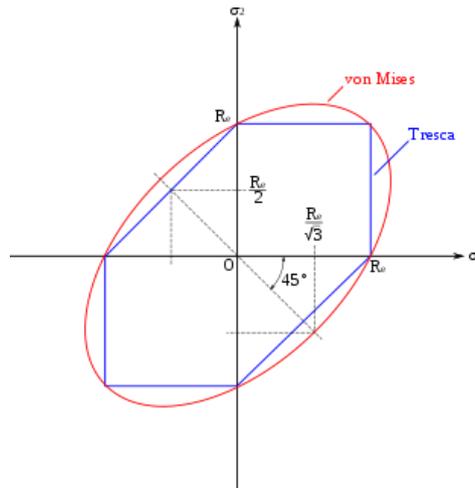


Figura 53: Confronto criterio di Tresca e criterio di von Mises sul piano $\sigma_{III} = 0$, [63]

4.3.2 Criteri di Rottura per Laminati Compositi

La singola lamina che compone un laminato composito risulta avere proprietà ortotrope, motivo per cui non è possibile utilizzare i criteri di resistenza esposti in precedenza. In questo caso, i criteri possono essere divisi in:

- criteri basati sulla tensione e criteri basati sulla deformazione;
- criteri *interattivi* e criteri *non-interattivi*;
- criteri *intra-laminari* e criteri *inter-laminari*;

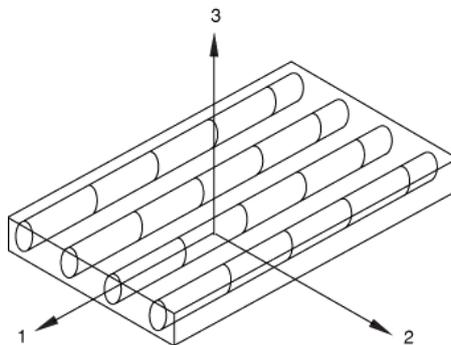


Figura 54: Sistema di riferimento lamina, [64]

In generale, quando si opera una verifica di resistenza che riguarda un materiale composito, si preferisce analizzarne le deformazioni piuttosto che le tensioni poiché, come detto in precedenza, i materiali compositi sono materiali fragili e per i materiali fragili la deformazione a rottura presenta una correlazione sperimentale migliore. Allo stesso tempo, essendo il laminato un materiale al più ortotropo, è necessario considerare che le tensioni nelle varie direzioni vanno ad interagire tra di loro, motivo per cui nasce la necessità di considerare criteri di tipo interattivo. Infine, un laminato composito presenta modi di rottura abbastanza diversi rispetto ad un materiale isotropo; in particolare, volendo semplificare, è possibile osservare:

- rottura *inter-laminare*: cioè i diversi ply che compongono il laminato perdono adesione;
- rottura *intra-laminare*: si verifica la rottura di una lamina;

I principali criteri di verifica per materiali compositi sono:

- *criterio della massima tensione*;
- *criterio della massima deformazione*;
- *criterio di Tsai-Hill*;

- *criterio di Tsai-Wu;*
- *criterio di Hoffmann;*
- *criterio di bonding o delaminazione;*

Tutti i criteri di rottura consistono nell'andare a definire dei *failure index (FI)* che danno un'indicazione di quanto sia vicina la rottura; in particolare, tali *FI* sono frazionari e, nel momento in cui uno di essi arriva al valore unitario si verifica la rottura del laminato.

Il *criterio della massima tensione* e quello *della massima deformazione* sono i criteri più semplici. Essi sono *non interattivi e intra-laminari*, poiché considerano ciascuno componente di tensione e di deformazione in maniera indipendente. Nello specifico:

- *criterio della massima tensione:*

$$\begin{aligned} FI_1 &= \frac{\sigma_1}{X} < 1 \\ FI_2 &= \frac{\sigma_2}{Y} < 1 \\ FI_{12} &= \frac{\tau_{12}}{S} < 1 \end{aligned} \quad (167)$$

essendo:

- σ_1 : tensione in direzione 1 (direzione della fibra);
- X : tensione di rottura in direzione 1;
- σ_2 : tensione in direzione 2 (perpendicolare alla fibra);
- Y : tensione di rottura in direzione 2;
- τ_{12} : tensione tagliante nel piano;
- S : tensione tagliante di rottura nel piano;

- *criterio della massima deformazione:*

$$\begin{aligned} FI_1 &= \frac{\epsilon_1}{X_\epsilon} < 1 \\ FI_2 &= \frac{\epsilon_2}{Y_\epsilon} < 1 \\ FI_{12} &= \frac{\gamma_{12}}{S_\epsilon} < 1 \end{aligned} \quad (168)$$

essendo:

- ϵ_1 : deformazione in direzione 1;
- X_ϵ : deformazione a rottura in direzione 1;
- ϵ_2 : deformazione in direzione 2;
- Y_ϵ : deformazione a rottura in direzione 2;
- γ_{12} : deformazione di taglio nel piano;
- S_ϵ : deformazione di taglio a rottura nel piano;

Tsai-Hill, Tsai-Wu e Hoffmann sono, invece, criteri più complessi.

Essi sono sempre criteri di tipi intra-laminare, ma considerano l'interazione tra gli stati tensionali che si possono avere all'interno di un materiale di tipo ortotropo. Nello specifico i *FI* di tali criteri sono definiti come:

- *criterio di Tsai-Hill:*

$$FI = \frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} < 1 \quad (169)$$

- *criterio di Tsai-Wu:*

$$FI = \frac{\sigma_1^2}{X_T X_C} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{Y_T Y_C} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} + \frac{X_T - X_C}{X_T X_C} \sigma_1 + \frac{Y_T - Y_C}{Y_T Y_C} \sigma_2 + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 < 1 \quad (170)$$

essendo:

- X_T : tensione di rottura a trazione in direzione 1;
- X_C : tensione di rottura a compressione in direzione 1;
- Y_T : tensione di rottura a trazione in direzione 2;
- Y_C : tensione di rottura a compressione in direzione 2;
- F_{12} : coefficiente di correlazione determinato sperimentalmente;

- *criterio di Hoffmann:*

$$FI = \frac{\sigma_1^2}{X_T X_C} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{Y_T Y_C} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} + \frac{X_T - X_C}{X_T X_C} \sigma_1 + \frac{Y_T - Y_C}{Y_T Y_C} \sigma_2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_T X_C} < 1 \quad (171)$$

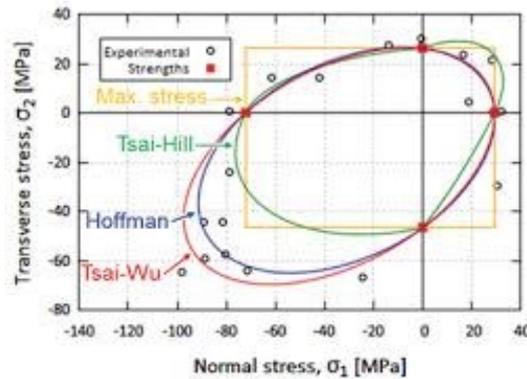


Figura 55: Confronto criteri intra-laminari, [65]

Infine, il *criterio di bonding* o di *delaminazione* è un criterio non interattivo e inter-laminare che consiste nella definizione dei due FI :

$$FI_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{S_B} \quad FI_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{S_B} \quad (172)$$

avendo indicato con S_B l'*interlaminar shear strength (ILSS)*.

Nelle verifiche di rottura dei laminati è importante notare che, nel momento in cui, un failure index arriva al valore unitario si verifica la rottura di un singolo ply; allo stesso tempo, però, la rottura di una singola lamina non equivale alla rottura dell'intero laminato, poiché il carico precedentemente assorbito dalla lamina arrivata a cedimento sarà ripartito tra le lamine ancora integre o parzialmente danneggiate. Questo suggerisce due possibili approcci alla verifica dei laminati:

- *FPF: first ply failure;*
- *PFA: progressive failure analysis;*

Nell'approccio *FPF* si suppone che il cedimento della prima lamina coincida con il cedimento dell'intero laminato. Tale metodo è sicuramente semplice e conservativo, tuttavia porta facilmente al sovradimensionamento strutturale, con ricadute negative sulle performance in generale.

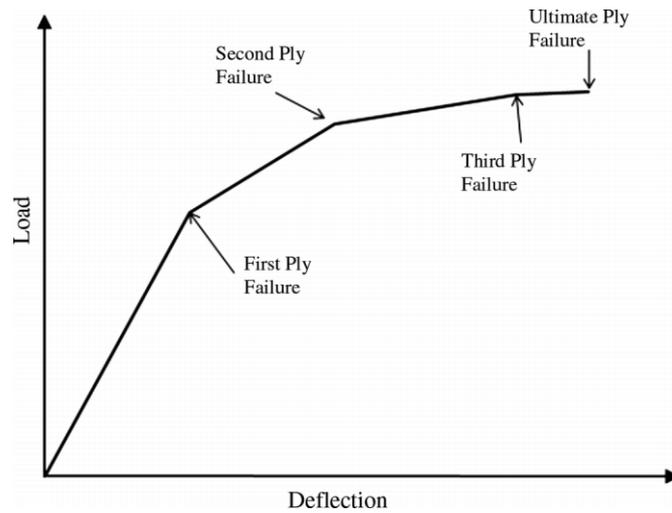


Figura 56: Esempio di PFA su un laminato composto da 3 ply, [66]

Nell'approccio *PFA* si assume che, nel momento in cui il *FI* di una singola lamina arriva al valore unitario (cedimento della lamina), il laminato non ceda per intero. In corrispondenza del carico per il quale avviene il primo cedimento (*FPF*) si osserva una riduzione della pendenza della retta carico-deflessione (Figura 56) coerentemente con il fatto che il cedimento di un ply provoca una riduzione di rigidezza globale. Al verificarsi di ciascun cedimento si ricalcola la matrice di rigidezza del laminato e si risolve un nuovo problema elastico. Quando si verifica il cedimento dell'ultima lamina (*LPF*) si ha la rottura completa del laminato. Appare evidente che l'approccio *PFA* restituisca risultati decisamente più vicini alla realtà; allo stesso tempo, però, esso richiede una serie di iterazione, ad ognuna delle quali è necessario ricalcolare le matrici di rigidezza, motivo per cui il maggiore scoglio di tale metodologia risulta essere proprio l'elevato costo computazionale.

CAPITOLO V - Problemi non lineari

Solitamente, in ambito ingegneristico, si è portati, per ragioni di semplicità e di efficienza computazionale, ad utilizzare approcci e modelli di tipo lineare. Esistono una serie di applicazioni, tuttavia, per le quali un approccio di tipi lineare impedisce di ottenere risultati accurati, motivo per cui si è forzati al passaggio a modelli di tipo non lineare. In ambito prettamente strutturale la non linearità può essere divisa in due forme:

- *comportamento non lineare del materiale;*
- *non linearità geometrica;*

Per *comportamento non lineare del materiale* si intendono tutti quei casi in cui la *legge costitutiva*, che descrive la relazione tra deformazioni e tensioni all'interno di un corpo, si discosta da quella lineare elastica, per cui tensioni e deformazioni non risultano essere proporzionali tra loro. *La non linearità di tipo geometrico*, invece, è legata alla marcata differenza tra condizione deformata e condizione indeformata che rende impossibile la scrittura delle equazioni nel dominio iniziale.

Siano $\{\bar{\mathbf{x}}\}$ il vettore delle coordinate e $\{\mathbf{u}\}$ il vettore degli spostamenti, già definiti in precedenza ed ora richiamati per comodità espositiva:

$$\{\bar{\mathbf{x}}\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Siano, inoltre, $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ il vettore delle tensioni ed $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ il vettore delle deformazioni già definiti in precedenza come:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\}^T$$

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\}^T = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

Facendo riferimento al *Principio dei Lavori Virtuali (PLV)* è possibile scrivere:

$$\int_{\Omega} \delta\{\mathbf{u}\}^T \rho \{\ddot{\mathbf{u}}\} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\{\boldsymbol{\epsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega - \int_{\Omega} \delta\{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{b}\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_m} \delta\{\mathbf{u}\}^T \{\bar{\mathbf{p}}\} d(\partial\Omega_m)$$

avendo indicato con:

- ρ : densità;
- $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$: vettore accelerazione;
- $\{\mathbf{b}\}$: vettore delle forze di campo;
- $\partial\Omega_m$: parte della frontiera su cui sono applicate le condizioni al contorno di tipo meccanico;
- $\{\bar{\mathbf{p}}\}$: condizioni al contorno di tipo meccanico;

Introducendo, quindi, l'approssimazione ad *elementi finiti* e ricordando che gli spostamenti virtuali sono indipendenti dal tempo:

$$\{\mathbf{u}\}(t, \{\bar{\mathbf{x}}\}) = [\mathbf{N}](\{\bar{\mathbf{x}}\}) \{\mathbf{q}\}(t) \quad \delta\{\mathbf{u}\}(\{\bar{\mathbf{x}}\}) = [\mathbf{N}](\{\bar{\mathbf{x}}\}) \delta\{\mathbf{q}\}$$

Facendo riferimento alle *relazioni geometriche* e alla *formulazione ad elementi finiti*:

$$\delta\{\boldsymbol{\epsilon}\} = [\mathbf{V}] \delta\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{V}][\mathbf{N}] \delta\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{B}] \delta\{\mathbf{q}\}$$

Da cui, introducendo le opportune definizioni e ricordando che la variazione virtuale di spostamento $\delta\{\mathbf{q}\}$ è del tutto arbitraria:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + \mathbf{P}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = \{\mathbf{f}\} \quad (173 \ 173)$$

avendo introdotto:

- $[\mathbf{M}]$: matrice di massa del sistema;
- $\{\mathbf{f}\}$: vettore dei carichi nodali equivalenti;
- $\mathbf{P}(\{\boldsymbol{\sigma}\})$: stress divergence term;

Si noti che è proprio lo *stress divergence term* $\mathbf{P}(\{\boldsymbol{\sigma}\})$ definito dalla relazione:

$$\mathbf{P}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = \int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega$$

a definire l'intero carattere non lineare del modello ad elementi finiti.

5.1 Metodi di Soluzione per Problemi non lineari

La risoluzione di un problema non lineare mediante una formulazione agli elementi finiti prevede la risoluzione di un set di equazioni che può essere scritto, facendo riferimento alla relazione (173), come:

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{f}\} - \mathbf{P}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{0}\} \quad (174)$$

avendo indicato con \mathbf{a} un set di parametri che descriva lo stato del sistema (parametri nodali e tempo, nel caso in cui l'analisi sia di tipo dinamico).

Tipicamente i problemi di tipo non lineare presentano soluzioni multiple, motivo per cui, non solo si complica il processo di ricerca della soluzione, ma è altresì possibile arrivare a soluzioni completamente diverse da quella ricercata. Ciò pone l'accento sull'importanza di procedere per piccoli step a partire da una soluzione nota, specie nel caso di problemi di non linearità del materiale, nei quali la relazione costitutiva tra stress e strain è dipendente dal carico.

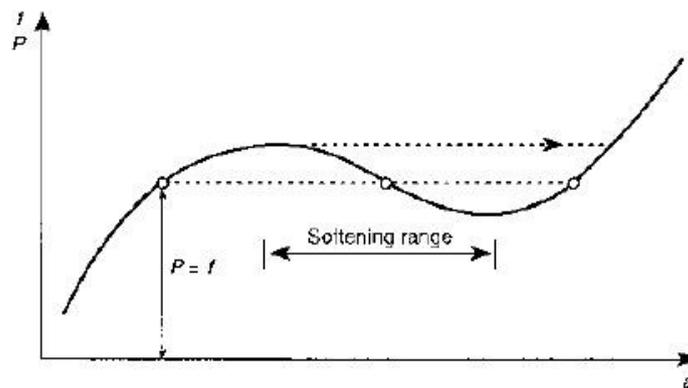


Figura 47: Soluzioni multiple, [68]

Sarà pertanto necessario un approccio di tipo *iterativo*; partendo dalla (174) è possibile scrivere:

$$\boldsymbol{\Psi}_{n+1} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}_{n+1}) = \{\mathbf{f}\}_{n+1} - \mathbf{P}(\mathbf{a}_{n+1}) = \{\mathbf{0}\} \quad (175)$$

partendo da una soluzione nota del tipo:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n, \quad \Psi_n = \{\mathbf{0}\}, \quad \{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{f}\}_n$$

e procedendo per step di carico del tipo:

$$\{\mathbf{f}\}_{n+1} = \{\mathbf{f}\}_n + \Delta\{\mathbf{f}\}_n$$

che genera una variazione dei parametri di stato del sistema:

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta\mathbf{a}_n$$

Si noti che la scelta dell'ampiezza del singolo step di carico è un aspetto cruciale poiché:

- step di carico troppo grandi possono condurre a soluzioni diverse da quella ricercata o addirittura alla divergenza del metodo risolutivo;
- step di carico troppo ridotti generano problemi di costo computazionale;

In ogni caso lo step di carico dovrà essere sufficientemente piccolo da permettere di seguire il cosiddetto *path* di carico. Si noti che, nel caso di *mild non-linearity*, cioè non linearità di tipo molto debole e problema non dipendente dal path di carico, è possibile il raggiungimento della soluzione mediante un unico step di carico, per cui la ricerca della soluzione non avverrà in maniera iterativa. Per cui, riassumendo, l'idea di fondo è quella suddividere il problema non lineare in una serie di sotto-problemi caratterizzati da *mild non-linearity*, procedendo attraverso una serie di piccoli step di carico; la soluzione di ogni sotto-problema ottenuto in corrispondenza del singolo step di carico sarà raggiunta utilizzando un approccio di tipo iterativo. Risolto l'ultimo sotto-problema, il processo iterativo sul carico termina. Quindi, essenzialmente, è possibile notare la presenza di due cicli di iterazione simultanei:

- uno sul problema non lineare completo che genera i sotto-problemi di non linearità debole;
- uno sul singolo sotto-problema di non linearità debole che ne permette la risoluzione;

I metodi numerici maggiormente utilizzati per la risoluzione di questo tipo di problemi sono:

- *metodo di Newton-Raphson*;
- *metodi di Newton-Raphson modificati*;
- *metodo delle secanti incrementali*;

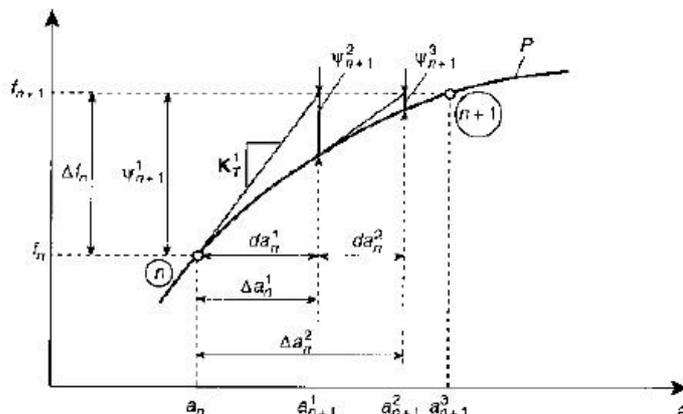


Figura 48: Metodo di Newton-Raphson, [68]

Il *metodo di Newton-Raphson* è il metodo con la *velocità di convergenza* maggiore (a patto che la soluzione di partenza si trovi nel cosiddetto *bacino di attrazione* della soluzione ricercata, così da evitare la *divergenza* del metodo), poiché si suppone sia sufficiente una singola valutazione di Ψ ad ogni passo di iterazione;

questo equivale ad approssimare il problema non lineare come una serie di problemi lineari. Facendo riferimento a (175) è possibile scrivere:

$$\Psi(\mathbf{a}_{n+1}^{i+1}) \simeq \Psi(\mathbf{a}_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}}\right)_{n+1}^i d\mathbf{a}_n^i = \{\mathbf{0}\} \quad (176)$$

Si noti che il pedice indica l'interazione relativa allo step di carico (ciclo iterativo sull'intero problema non lineare mentre l'indice indica l'iterazione relativa al singolo sotto-problema. Detto quindi n un generico step di carico già arrivato a convergenza, il processo iterativo per la convergenza dello step di carico $n + 1$ inizia con:

$$\mathbf{a}_{n+1}^1 = \mathbf{a}_n$$

Introducendo, quindi, la *matrice di rigidezza tangente* $[\mathbf{K}_T]$ definita attraverso la relazione:

$$[\mathbf{K}_T] = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{a}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \quad (177)$$

la (176) può essere riscritta come:

$$\Psi(\mathbf{a}_{n+1}^i) = \Psi_{n+1}^i \simeq [\mathbf{K}_T] d\mathbf{a}_n^i \quad (178)$$

o, in alternativa, mettendo in evidenza l'incremento nella soluzione $d\mathbf{a}_n^i$:

$$d\mathbf{a}_n^i = [\mathbf{K}_T]^{-1} \Psi_{n+1}^i$$

da cui, considerando una serie di incrementi:

$$\mathbf{a}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{a}_{n+1}^i + d\mathbf{a}_n^i = \mathbf{a}_n + \Delta \mathbf{a}_n^i \quad (179)$$

avendo introdotto $\Delta \mathbf{a}_n^i = \sum_{k=1}^i d\mathbf{a}_n^k$.

Come già detto in precedenza il *metodo di Newton-Raphson* è il metodo che presenta la maggiore *velocità di convergenza*, ma, allo stesso tempo presenta alcuni difetti:

- ad ogni iterazione è necessario il calcolo di una *matrice di rigidezza tangente* $[\mathbf{K}_T]$ diversa dalla precedente;
- ad ogni iterazione sarà necessario fattorizzare una matrice diversa per la risoluzione di (178);
- può accadere, specie nel caso in cui siano necessarie molte iterazioni per la convergenza di un singolo step di carico, che la *matrice di rigidezza tangente* $[\mathbf{K}_T]$ perda la proprietà di simmetria, per cui sarà necessario prevedere l'implementazione di solutori per problemi con matrici non simmetriche;

Appare, quindi, evidente che, specie nei casi in cui il numero di parametri di stato del sistema sia elevato (modelli FEM con un numero di elementi molto elevato), il costo computazionale tende a diventare quasi subito proibitivo, motivo per cui sono nati una serie di metodi noti come *metodi di Newton-Raphson modificati*.

Nei *metodi di Newton-Raphson modificati* la *matrice di rigidezza tangente* $[\mathbf{K}_T]$ viene mantenuta costante nel corso del processo di iterazione, per cui il costo computazionale risulta essere notevolmente ridotto rispetto al *metodo di Newton-Raphson* classico. Per quanto riguarda $[\mathbf{K}_T]$ è possibile:

- utilizzare ad ogni iterazione la *matrice di rigidezza tangente* ricavata alla prima iterazione $[\mathbf{K}_T]^1$;
- utilizzare ad ogni iterazione una *matrice di rigidezza tangente* imposta a priori $[\mathbf{K}_T]^0$;
- ricalcolare la *matrice di rigidezza tangente* $[\mathbf{K}_T]$ ogni numero prefissato di iterazioni;

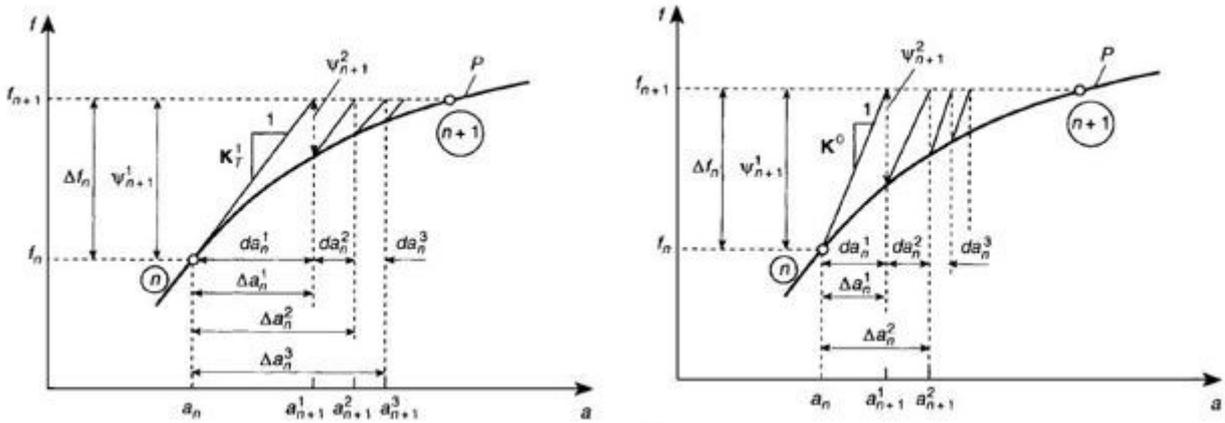


Figura 49: Metodo di Newton-Raphson con utilizzo ad ogni iterazione di $[K_T]^1$ (a sinistra) e di $[K_T]^0$ (a destra), [68]

In ogni caso, i *metodi di Newton-Raphson modificati* consentono un consistente risparmio di costo computazionale ma:

- la velocità di convergenza risulterà sicuramente inferiore al rate quadratico tipico del *metodo di Newton-Raphson* classico e il bacino di attrazione sarà ridotto;
- la convergenza è più difficile, per cui soluzioni convergenti con il *metodo di Newton-Raphson* classico non è detto convergano con *metodi di Newton-Raphson modificati*;

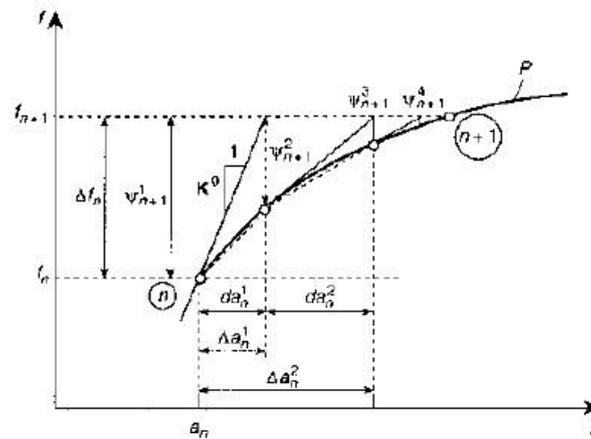


Figura 50: Metodo delle secanti, [68]

Nel *metodo delle secanti* il procedimento è leggermente diverso: si effettua una prima iterazione perfettamente analoga a quella che si avrebbe utilizzando il *metodo di Newton-Raphson* così da determinare:

$$da_n^1 = [K_T]^{-1} \Psi_{n+1}^1$$

Noto il primo incremento del set di parametri che descrive lo stato del sistema da_n^1 è possibile determinare una *matrice di rigidità secante* $[K_S]$ (Figura 50); nota $[K_S]$ si procede in maniera iterativa come nei casi precedenti:

$$da_n^i = [K_S]^{-1} \Psi_{n+1}^i \quad \text{con } i \geq 2 \quad (180)$$

Si noti che $[K_S]$ è determinata ad ogni step di iterazione in maniera tale che risulti soddisfatta la relazione:

$$da^{i-1} = [K_S^i]^{-1} (\Psi^{i-1} - \Psi^i) = [K_S^i]^{-1} \gamma^{i-1} \quad (181)$$

Il *metodo delle secanti* presenta una velocità di convergenza intermedia (*super lineare*) tra i *metodi di Newton-Raphson modificati* ed il *metodo di Newton-Raphson* classico.

Come per tutti i metodi iterativi la soluzione è raggiunta soltanto in maniera asintotica per cui risulta necessario stabilire dei criteri perché il processo termini, cioè devono essere introdotti dei *criteri di convergenza*. Tali criteri consistono nella definizione di un valore di *tolleranza* sulla norma di uno dei parametri del modello; il parametro monitorato con maggiore frequenza è il *residuo*, per cui è possibile scrivere:

$$\|\Psi_{n+1}^i\| \leq \epsilon \|f_{n+1}\| \quad (182)$$

essendo:

$$\|\Psi_{n+1}^i\| = \sqrt{(\Psi_{n+1}^i)^T \Psi_{n+1}^i}$$

In alternativa al confronto tra residuo ed un valore di tolleranza sul carico, è anche possibile un confronto tra il valore del residuo in corrispondenza di una specifica iterata e quello assunto dal residuo alla prima iterazione:

$$\|\Psi_{n+1}^i\| \leq \epsilon \|\Psi_{n+1}^1\|$$

Per quanto riguarda il valore del parametro ϵ che definisce la tolleranza è necessario distinguere dei casi a seconda del metodo iterativo utilizzato:

- *metodo di Newton-Raphson* classico: $\epsilon = 10^{-8}$, cioè metà della precisione di macchina;
- *metodo di Newton-Raphson modificato*: valori comparabili al caso precedente non possono essere raggiunti se non con un numero di iterazioni estremamente elevato, per cui si assume un valore di tolleranza ϵ molto più alto ($\epsilon \approx 0.01 \div 0.001$);

In ogni caso la scelta del valore del *parametro di tolleranza* ϵ risulta essere ancora una volta una scelta di compromesso tra la necessità di precisione, la stabilità dell'algoritmo ed il costo computazionale. Ovviamente è importante notare che l'errore legato al non raggiungimento di una condizione di residuo perfettamente nullo si somma agli altri errori introdotti in precedenza. Accanto a ciò, si noti che anche la scelta dell'ampiezza dello step di carico risulta critica, poiché esso deve essere tenuto ragionevolmente piccolo per preservare l'accuratezza della soluzione (specie nel caso in cui i problemi sia *path dependent*) ma, allo stesso tempo, non eccessivamente ridotto per evitare un processo iterativo praticamente infinito.

5.2 Comportamento Non Lineare del Materiale

Per comportamento non lineare del materiale si intende tutta quella serie di fenomeni per i quali il legame costitutivo tra campo di tensioni e campo di deformazioni risulta essere non lineare elastico.

5.2.1 Viscoelasticità

Come già menzionato in precedenza, nei fenomeni viscoelastici il comportamento del materiale dipende, tra gli altri parametri, dalla storia pregressa, in termini di tensioni e deformazioni. Se dal punto di vista teorico questo non rappresenta un grosso problema, dal punto di vista computazionale tale affermazione equivale alla necessità di dover mantenere tutte le informazioni relative allo stato del componente al susseguirsi delle iterazioni, il che equivale a sua volta, essenzialmente, alla necessità:

- di disporre di importanti quantità di memoria nella quale allocare tutta questa mole di dati;

- di rileggere ad ogni step di iterazione tutta la storia precedente, con conseguenti rallentamenti nel calcolo della soluzione;

I modelli costitutivi per materiali viscoelastici possono essere presentati in:

- *forma differenziale (modello di Maxwell generalizzato);*
- *forma integrale (modello di Kelvin generalizzato);*

Nei modelli in forma differenziale il legame costitutivo del materiale può essere scritto come una parte lineare elastica a cui vengono sommati dei contributi di tensione parziali:

$$\{\sigma\}(t) = [C_0] \{\epsilon\}(t) + \sum_{m=1}^M [C_m] \{q^{(m)}\}(t) \quad (183)$$

essendo:

- $[C_0]$ e $[C_m]$: *matrici delle costanti del materiale;*
- $\{q^{(m)}\}$: *contributi di stress parziali;*

Si noti che, nel caso di modelli lineari, è possibile determinare $\{q^{(m)}\}$ attraverso la risoluzione del sistema di ODE del primo ordine:

$$\{\dot{q}^{(m)}\} + [T_m] \{q^{(m)}\} = \{\dot{\epsilon}\} \quad (184)$$

nella quale $[T_m]$ rappresenta una matrice contenente i *reciproci dei tempi di rilassamento* del materiale. Facendo riferimento alla (184) appare, quindi, evidente che il comportamento del materiale è supposto equivalente ad M sistemi costituiti da una molla ed uno smorzatore viscoso in serie, il tutto in parallelo con una molla singola di costante $[C_0]$; tale tipologia di modello prende il nome di *modello di Maxwell generalizzato* ed il solido così descritto è detto, coerentemente, *solido di Maxwell*.

In maniera del tutto analoga, facendo riferimento ad un modello scritto in forma integrale, è possibile scrivere mediante l'operatore di *convoluzione*:

$$\{\sigma\}(t) = [C](t) \{\epsilon\}(0) + \int_0^t [C](t-t') \frac{\partial \{\epsilon\}}{\partial t'} dt' \quad (185)$$

Si noti che le relazioni (183) e (185) possono essere invertite, esplicitando così le componenti di deformazione; nello specifico:

$$\{\epsilon\}(t) = [S_0] \{\sigma\}(t) + \sum_{m=1}^M [S_m] \{r^{(m)}\}(t) \quad (186)$$

avendo indicato con $[S_0]$ e $[S_m]$ le matrici di cedevolezza del materiale. Anche in questo caso, come in precedenza, le componenti $\{r^{(m)}\}$ possono essere ricavate risolvendo un sistema di ODE del primo ordine:

$$\{\dot{r}^{(m)}\} + [V_m] \{r^{(m)}\} = \{\sigma\} \quad (187)$$

In questo secondo caso il comportamento del materiale è supposto equivalente ad un sistema di M elementi molla e smorzatore viscoso in parallelo, il tutto in serie con un unico elemento molla. Tale modello prende il nome di *modello di Kelvin generalizzato*, da cui il solido sarà detto *solido alla Kelvin*. Come per il modello di Maxwell generalizzato, anche il modello di Kelvin generalizzato può essere espresso in forma integrale mediante l'utilizzo dell'operatore di convoluzione:

$$\{\epsilon\}(t) = [S](t) \{\sigma\}(0) + \int_0^t [S](t-t') \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial t'} dt' \quad (188)$$

Entrambi i modelli proposti possono essere risolti mediante l'utilizzo di tecniche numeriche, determinando, in questa maniera, le componenti di tensione e deformazione e da queste anche la matrice di rigidità tangente.

5.2.2 Plasticità

I *fenomeni di plasticità* sono caratterizzati da un legame non unico tra tensioni e deformazioni. Tale legame risulta, infatti, funzione di numerosi parametri tra i quali un ruolo preponderante è occupato dalla sequenza di carico subita dal materiale; per cui, se nel processo di carico sono stati raggiunti livelli di stress tali da innescare fenomeni plastici, esisterà una parte di deformazione che non sarà recuperata neppure al momento dello scarico.

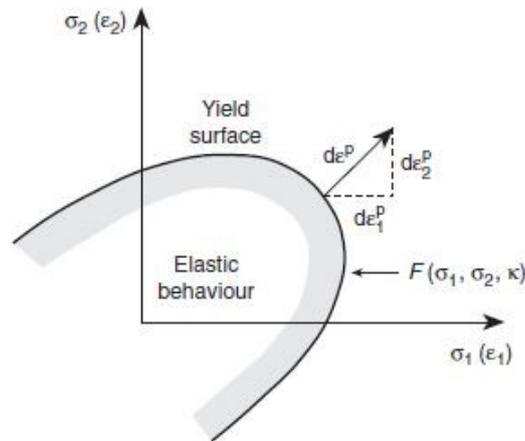


Figura 51: Superficie di snervamento 2D, [68]

In generale, per indagare la condizione di snervamento del materiale, condizione che segna l'ingresso dello stesso in campo plastico, si fa riferimento alla *funzione di snervamento* o *superficie di snervamento* (Figura 51), definita come:

$$F(\{\sigma\}, \kappa, k) = 0 \quad (189)$$

nella quale:

- κ : parametro di incrudimento cinematico (*kinematic hardening*);
- k : parametro di incrudimento isotropo (*isotropic hardening*);

La funzione di snervamento è connessa all'incremento deformazione plastica attraverso la *legge di flusso*, definita come:

$$\{\dot{\epsilon}\} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (190)$$

nella quale $\dot{\lambda}$ è una costante di proporzionalità detta *plastic consistency parameter*. Si noti che in:

- *campo plastico*: $\dot{F} = 0$ e $\dot{\lambda} > 0$;
- *campo elastico*: $\dot{F} \neq 0$ e $\dot{\lambda} = 0$;

Da questo è possibile ricavare:

$$\dot{F} \dot{\lambda} = 0 \quad (191)$$

La (191) è nota come *condizione di Kuhn-Tucker* o *principio di normalità* poiché, dal punto di vista matematico, può essere interpretata come la condizione di perpendicolarità del vettore $\{\dot{\epsilon}\}$ rispetto alla superficie di snervamento. Le restrizioni imposte dalla *condizione di Kuhn-Tucker* possono essere rimosse introducendo in maniera separata una *legge potenziale per il flusso plastico*:

$$Q = Q(\{\sigma\}, k) \quad (192)$$

Facendo, quindi, uso di (192 è possibile definire la velocità di deformazione plastica in maniera analoga al caso precedente:

$$\{\dot{\epsilon}\} = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \quad \text{con } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (193)$$

Con particolare riferimento al valore di Q è possibile distinguere due casi:

- $Q = F$: plasticità associativa;
- $Q \neq F$: plasticità non associativa;

Facendo, ora, nuovamente riferimento alla *funzione di snervamento* è necessario andare a definire in maniera più accurata i parametri k di *incrudimento isotropo* e κ di *incrudimento cinematico*. Il parametro di incrudimento isotropo è definibile in maniera abbastanza semplice mediante la relazione:

$$\dot{k} = \sqrt{\{\dot{\epsilon}^P\}^T \{\dot{\epsilon}^P\}} = \dot{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}}\right)^T \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}}} \quad (194)$$

Si noti che il parametro k è direttamente collegato alla *velocità di lavoro plastico* e, quindi, alle dimensioni del dominio elastico.

La procedura che permette la definizione del *parametro di incrudimento cinematico* κ è, invece, più complessa e prende il nome di *procedura di Prager-Ziegler*. Si rimpiazza la tensione all'interno della *legge di snervamento* (189 con una relazione lineare del tipo:

$$\zeta = \{\sigma\} - \kappa$$

Da cui la (189 diventa:

$$F(\{\sigma\} - \kappa, k) = F(\zeta, k) = 0 \quad (195)$$

Passando, quindi alle derivate:

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = - \frac{\partial F}{\partial \kappa}$$

da cui è possibile notare che il parametro κ è connesso ad una traslazione della superficie di snervamento.

Introducendo, ora, una variabile β connessa al *lavoro coniugato* ed introducendo il *potenziale di incrudimento* \mathcal{H} è possibile scrivere:

$$\kappa = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} \quad (196)$$

da cui:

$$\dot{\beta} = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \kappa} \quad (197)$$

Appare, pertanto, evidente che utilizzando l'espressione (197 come è stata riportata, il modello risultante sarà di *plasticità non associativa*, sostituendo, invece, a Q F è possibile passare ad un modello di *plasticità associativa*. Quindi, in un modello completamente associativo, è necessario che F sia definita in maniera tale da descrivere sia il potenziale plastico che l'incrudimento; in tal caso si fa uso del principio di *massima dissipazione plastica*. Può essere assunta una *forma quadratica* per il *potenziale di incrudimento*:

$$\mathcal{H} = \beta^T [H_K] \beta$$

essendo $[H_K]$ una matrice contenente una serie di parametri che descrivano l'incrudimento del materiale.

Risulta, a questo punto, possibile eliminare la dipendenza da β nell'espressione di $\dot{\kappa}$:

$$\dot{\kappa} = -\dot{\lambda} [\mathbf{H}_K] \frac{\partial Q}{\partial \kappa} = \dot{\lambda} [\mathbf{H}_K] \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \quad (198)$$

Si supponga ora che la deformazione totale sia scomponibile, come mostrato nel precedente capitolo, in una parte elastica ed una parte plastica:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon\}^E + \{\epsilon\}^P \quad (199)$$

Tenendo conto della relazione costitutiva del materiale elastico ed unendovi la $\{\epsilon\} = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}}$ con $\dot{\lambda} \geq 0$ (193):

$$\{\dot{\epsilon}\} = [\mathbf{C}]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \quad (200)$$

È possibile osservare una *velocità di deformazione* plastica dal momento in cui la *variazione di tensione elastica*, definita come $\{\dot{\sigma}\}^E = [\mathbf{C}]\{\dot{\epsilon}\}$ tende a portare la condizione di tensione al di fuori del dominio elastico, cioè oltre la *superficie di snervamento* nel caso in cui la condizione di carico sia tale da generare un incremento di tensione (*fase di carico*). Al contrario, se la condizione di carico è tale per cui si generi una riduzione di tensione (*condizione di scarico*) non si osserverà alcun incremento di deformazione plastica, per cui il rate di deformazione risulterà nullo. Tale sostanziale differenza tra fase di carico e fase di scarico mette in luce la chiara dipendenza dal path di carico.

La *superficie di snervamento* è stata definita attraverso la relazione (189) è possibile scrivere, facendo uso della regola della catena per la derivazione di funzioni composte:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial \{\kappa\}} \right)^T \frac{\partial \{\kappa\}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \{\dot{\sigma}\} + \left(\frac{\partial F}{\partial \{\kappa\}} \right)^T \{\dot{\kappa}\} + \frac{\partial F}{\partial k} \dot{k} = 0 \quad (201)$$

nella quale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} &= \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{xy}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{yx}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{yz}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{zy}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{zx}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{xz}} \\ \frac{\partial F}{\partial \{\kappa\}} &= \frac{\partial F}{\partial \kappa_x} + \frac{\partial F}{\partial \kappa_y} + \frac{\partial F}{\partial \kappa_z} + \frac{\partial F}{\partial \kappa_{xy}} + \frac{\partial F}{\partial \kappa_{yx}} + \frac{\partial F}{\partial \kappa_{yz}} + \frac{\partial F}{\partial \kappa_{zy}} + \frac{\partial F}{\partial \kappa_{zx}} + \frac{\partial F}{\partial \kappa_{xz}} \end{aligned}$$

La (201) può anche essere riscritta nella forma:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \{\dot{\sigma}\} + \left(\frac{\partial F}{\partial \{\kappa\}} \right)^T \{\dot{\kappa}\} - H_i \dot{\lambda} = 0 \quad (202)$$

nella quale è stato introdotto il termine H_i noto come *modulo di incrudimento isotropico*.

Nel caso sia presente anche *incrudimento cinematico*, tenendo conto di (198) è possibile modificare (200) nella forma:

$$[\mathbf{C}]\{\dot{\epsilon}\} = \dot{\zeta} + ([\mathbf{C}] + [\mathbf{H}_K])\dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \quad (203)$$

In maniera analoga, tenendo conto della relazione sulle derivate:

$$\dot{F} = \left(\frac{\partial F}{\partial \{\zeta\}} \right)^T \{\dot{\zeta}\} - H_i \dot{\lambda} = 0 \quad (204)$$

Si noti che le relazioni (203) e (204) possono essere unite attraverso la scrittura matriciale:

$$\begin{Bmatrix} [\mathbf{C}]\{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}] & ([\mathbf{C}] + [\mathbf{H}_K]) \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \\ \left(\frac{\partial F}{\partial \{\zeta\}}\right)^T & H_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\zeta\} \\ \lambda \end{Bmatrix} \quad (205)$$

Si noti che è possibile eliminare la costante λ dalla relazione (205). Risolvendo, infatti la prima equazione rispetto a $\{\zeta\}$ e sostituendo l'espressione ottenuta nella seconda si ottiene:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \{\zeta\}}\right)^T [\mathbf{C}]\{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} - \left[H_i + \left(\frac{\partial F}{\partial \{\zeta\}}\right)^T ([\mathbf{C}] + [\mathbf{H}_K]) \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \right] \lambda = 0 \quad (206)$$

Si noti, ora, che la relazione (200) permette la determinazione della variazione di stress a fronte di una variazione imposta della velocità di deformazione e viceversa; allo stesso tempo, però, in questa relazione compaiono tutte e nove le componenti di tensione. È possibile operare in maniera tale da ottenere una relazione nella quale compaiano solo le sei componenti indipendenti di tensione nella forma:

$$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} = [\mathbf{C}_{ep}]^* \{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} \quad (207)$$

avendo introdotto:

$$[\mathbf{C}_{ep}]^* = [\mathbf{P}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{P}] - \frac{1}{H^*} [\mathbf{P}]^T [\mathbf{C}] \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial F}{\partial \{\zeta\}}\right)^T [\mathbf{C}] [\mathbf{P}]^T \quad (208)$$

essendo:

$$H^* = H_i + \left(\frac{\partial F}{\partial \{\zeta\}}\right)^T ([\mathbf{C}] + [\mathbf{H}_K]) \frac{\partial Q}{\partial \zeta}$$

$$[\mathbf{P}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{C}_{ep}]^*$ prende il nome di *matrice di elasto-plasticità*.

Ricordando, quindi, che nel caso di problemi non lineari è richiesto l'utilizzo di metodi iterativi, il processo consiste nella risoluzione delle relazioni:

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\sigma}\}_{n+1}^k &= \{\boldsymbol{\sigma}\}_n^k + \Delta\{\boldsymbol{\sigma}\}_n^k \\ \{\boldsymbol{\epsilon}\}_{n+1}^k &= \{\boldsymbol{\epsilon}\}_n^k + \Delta\{\boldsymbol{\epsilon}\}_n^k = \{\boldsymbol{\epsilon}\}_n^k + [\mathbf{B}]\Delta\{\mathbf{a}\}_n^k \\ \{\mathbf{a}\}_{n+1}^k &= \{\mathbf{a}\}_n^k + \Delta\{\mathbf{a}\}_n^k \end{aligned}$$

Nel caso di *plasticità ideale*, con H_i e $[\mathbf{H}_K]$ identicamente nulli, la procedura numerica per la risoluzione del problema è abbastanza semplice; è, infatti, possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \Delta\{\boldsymbol{\epsilon}\}_n &= \{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\}_n \Delta t \\ \Delta\{\boldsymbol{\sigma}\}_n &= \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}_n \Delta t \end{aligned} \quad (209)$$

Nei casi di plasticità non ideale è, invece, richiesto l'utilizzo di:

- *metodi espliciti (Runge-Kutta);*

- *metodi impliciti* più complessi;

5.2.3 Viscoplasticità

Nei *fenomeni viscoplastici* si osserva un incremento di deformazione a carico fissato, per cui si è in presenza di fenomeni non lineari e tempo-dipendenti.

Si consideri per primo il caso di *modello unidimensionale* (Figura 52 a e b). In un modello puramente elastoplastico è possibile osservare l'assenza di velocità di deformazione plastica al di sotto della tensione di snervamento del materiale:

$$\dot{\epsilon}^P = 0 \quad \text{se } |\sigma - \sigma_y| < 0$$

Il comportamento viscoplastico può essere simulato aggiungendo, in parallelo all'elemento plastico, un dissipatore viscoso, ottenendo, in questa maniera, l'espressione:

$$\dot{\epsilon}^{VP} = \gamma \langle \phi(\sigma - \sigma_y) \rangle$$

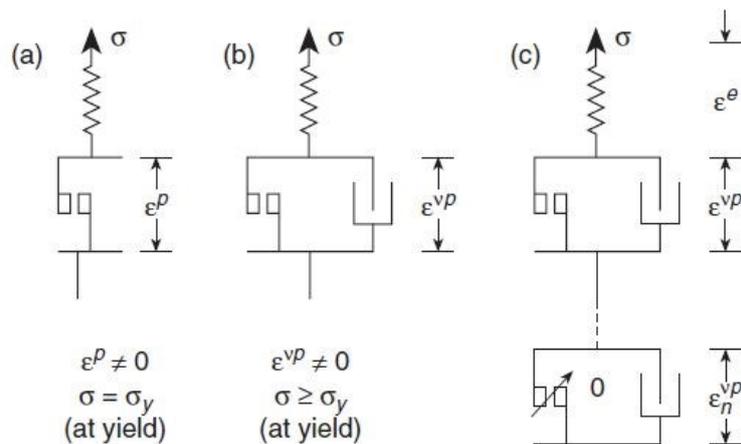


Figura 52: Modello elasto-plastico 1D (a), viscoplastico 1D (b) e viscoplastico generalizzato (c), [68]

Nel caso più generale il problema risulta essere tridimensionale, per cui ϕ risulta funzione della condizione di snervamento $F(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \boldsymbol{\kappa}, k)$ definita dalla relazione (189). Per tenere conto degli effetti viscoplastici è possibile modificare l'espressione (189) nella forma:

$$\gamma \langle \phi(F) \rangle - \dot{\lambda} = 0 \quad (210)$$

Ricordando, quindi, la definizione dell'operatore *brackets di Macaulay*:

$$\langle \phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & , \quad F \leq 0 \\ \phi(F) & , \quad F > 0 \end{cases}$$

Per ragioni di semplicità, spesso si usa una forma di $\phi(F)$ di tipo esponenziale, del tipo:

$$\phi(F) = F^m \quad (211)$$

essendo m un esponente reale e positivo che permetta la descrizione del comportamento viscoplastico.

Il processo iterativo di ricerca di una soluzione del problema formulato in termini viscoplastici è perfettamente analogo al caso di problema formulato in termini plastici, l'unico accorgimento è l'utilizzo di (210) al posto di (189); operando come descritto si perviene, quindi, al sistema espresso in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{C}]^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 Q}{\partial \{\sigma\}^2} & \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \\ \phi' \left(\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right)^T & -H_i - \frac{1}{\gamma \Delta t} \end{bmatrix}_{n+1}^i \begin{Bmatrix} d\{\sigma\}^i \\ d\lambda^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{R}_\sigma\}^i \\ r^i \end{Bmatrix} \quad (212)$$

avendo introdotto:

- $\{\mathbf{R}_\sigma\}$: residuo su $\{\sigma\}$;
- r residuo su λ ;

Si noti che r e ϕ' sono definiti come:

$$\begin{aligned} r_n &= -\phi(F)_n + \frac{1}{\gamma \Delta t} \Delta \lambda_n \\ \phi' &= \frac{d\phi}{dF} \end{aligned} \quad (213)$$

Considerando, infine, il caso in cui il materiale sia modellato come una serie di elementi viscoplastici (Figura 52 caso c), sarà sufficiente considerare i diversi contributi in maniera separata per poi sommarli insieme:

$$\dot{\epsilon}^{VP} = \dot{\epsilon}_1^{VP} + \dot{\epsilon}_2^{VP} + \dots + \dot{\epsilon}_N^{VP}$$

5.3 Non Linearità Geometrica

Si parla di *non linearità di tipo geometrico* nei casi in cui la deformazione non risulta essere di entità ridotta, per cui la configurazione di partenza e quella deformata sono abbastanza differenti da non poter essere confuse, quindi, le equazioni che descrivono il problema devono essere riscritte facendo riferimento alla configurazione deformata. Si noti che la configurazione deformata non è nota a priori ma risulta, invece, un'incognita del problema per cui il processo di risoluzione è intrinsecamente non lineare.

Per formulare un problema di questo tipo mediante un approccio di tipo FEM, solitamente, si fa utilizzo di una *formulazione debole di Galërkin* scritta rispetto alla configurazione di partenza, nella quale gli integrali sono più semplici da svolgere, dato che i domini di integrazione non risultano variabili; in seguito, è possibile operare una trasformazione passando, quindi, alla configurazione deformata.

Si consideri, quindi, una generica formulazione energetica del tipo:

$$\Pi = \int_{\Omega} W(C_{IJ}) d\Omega - \Pi_{ext} \quad (214)$$

essendo:

- $W(C_{IJ})$: funzione che descrive l'energia immagazzinata;
- C_{IJ} : componenti di deformazione di Cauchy-Green;

Supponendo di considerare un *materiale iperelastico*, le tensioni possono essere espresse facendo uso del *tensore di Piola-Kirchhoff (simmetrico)*:

$$S_{IJ} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{IJ}} = \frac{\partial W}{\partial E_{IJ}} \quad (215)$$

essendo $E_{IJ} = \frac{1}{2}(C_{IJ} - \delta_{IJ})$ le *componenti tensoriali di deformazione di Green* (δ_{IJ} rappresenta l'operatore *delta di Kronecker*). Introdotta tali quantità, la funzione energia interna $W(C_{IJ})$ può essere scritta come:

$$W(C_{IJ}) = \frac{1}{2} D_{IJKL} E_{IJ} E_{KL} \quad (216)$$

Utilizzando (216) come espressione di $W(C_{IJ})$ in (215) si ottiene quindi:

$$S_{IJ} = D_{IJKL} E_{KL} \quad (217)$$

Si noti che la relazione appena ricavata risulta essere semplice ma, allo stesso tempo, essa è valida unicamente in casi in cui le deformazioni siano ridotte (gli spostamenti possono, però, comunque essere elevati).

Assumendo, ora, che il potenziale dei carichi esterni possa essere espresso come:

$$\Pi_{ext} = \int_{\Omega} U_I \rho_0 b_I^{(m)} d\Omega + \int_{\partial\Omega_m} U_I \bar{T}_I dS \quad (218)$$

essendo:

- U_I : spostamento rispetto alla configurazione indeformata;
- ρ_0 : densità;
- $b_I^{(m)}$: carico di volume per unità di massa nella configurazione indeformata;
- \bar{T}_I : condizione al contorno di tipo meccanico rispetto alla configurazione indeformata;

Partendo da (214) e da (218), operando una variazione prima è possibile ottenere:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \delta C_{IJ} S_{IJ} d\Omega - \delta\Pi_{ext} \quad (219)$$

$$\delta\Pi_{ext} = \int_{\Omega} \delta U_I \rho_0 b_I^{(m)} d\Omega + \int_{\partial\Omega_m} \delta U_I \bar{T}_I dS \quad (220)$$

È possibile notare che δU_I rappresenta la *variazione virtuale dello spostamento riferito alla configurazione indeformata*. Coerentemente con la definizione di spostamento virtuale, δU_I risulta essere arbitrario nell'intero dominio tranne che su $\partial\Omega_u$, cioè sulla parte del dominio stesso nella quale sono imposte le condizioni al contorno di tipo cinematico.

Definendo ora:

- *vettore posizione nella configurazione indeformata:*

$$\{\mathbf{X}\} = X_I \{\mathbf{E}_I\}$$

- *vettore posizione nella configurazione deformata:*

$$x_i = \phi_i(X_I, t)$$

- *gradiente di deformazione:*

$$F_{iI} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_I}$$

è possibile, quindi, esprimere il *tensore di deformazione di Cauchy-Green* come:

$$C_{IJ} = F_{iI} F_{iJ} \quad (221)$$

Tenendo conto di (221):

$$\frac{1}{2} \delta C_{IJ} S_{IJ} = \delta E_{IJ} S_{IJ} = \delta F_{iI} F_{iJ} S_{IJ} \quad (222)$$

Si noti che la *variazione virtuale del gradiente di deformazione* δF_{iI} può essere espressa in funzione dello spostamento rispetto alla configurazione deformata attraverso la relazione:

$$\delta F_{iI} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_I} = \delta u_{i,I} \quad (223)$$

Sostituendo (223) nell'espressione di $\delta\Pi$ ed integrando per parti si ottiene:

$$\delta\Pi = - \int_{\Omega} \delta u_i \left[(F_{ij} S_{ij})_{,i} + \delta_{ii} \rho_0 b_i^{(m)} \right] d\Omega + \int_{\partial\Omega_m} \delta u_i [F_{ij} S_{ij} N_i - \delta_{ii} \bar{T}_i] dS \quad (224)$$

da cui è possibile ottenere l'equazione di Eulero che descrive la condizione di equilibrio statico del sistema rispetto alla condizione indeformata:

$$(F_{ij} S_{ij})_{,i} + \delta_{ii} \rho_0 b_i^{(m)} = P_{i,i} + \rho_0 b_i^{(m)} = 0 \quad (225)$$

e, analogamente, le condizioni al contorno di tipo meccanico variazionalmente consistenti nella configurazione indeformata:

$$S_{ij} F_{ij} N_i - \delta_{ii} \bar{T}_i = P_{i,i} N_i - \delta_{ii} \bar{T}_i = 0 \quad (226)$$

avendo introdotto P_{ii} che rappresenta le componenti di tensione del *I* tensore di Piola-Kirchhoff (non simmetrico).

In maniera perfettamente analoga, il problema può essere formulato in termini matriciali. Nello specifico, è possibile introdurre:

- *vettore delle tensioni di Piola-Kirchhoff:*

$$\{\mathbf{S}\} = \{S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{31}\}^T$$

- *vettore delle deformazioni di Green:*

$$\{\mathbf{E}\} = \{E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{23}, 2E_{31}\}^T$$

Introducendo, quindi, la variazione virtuale di $\{\mathbf{E}\}$ la (222) può essere riscritta nella forma:

$$\delta E_{ij} S_{ij} = \delta\{\mathbf{E}\}^T \{\mathbf{S}\} \quad (227)$$

Tenendo conto di (221) e (223) e che $E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij})$:

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} F_{ij} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} F_{ji} \right) = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} F_{ij} + \delta u_{j,i} F_{ji}) \quad (228)$$

da cui la variazione virtuale di $\{\mathbf{E}\}$ può essere riscritta come:

$$\delta\{\mathbf{E}\} = \begin{pmatrix} F_{i1} \delta u_{i,1} \\ F_{i2} \delta u_{i,2} \\ F_{i3} \delta u_{i,3} \\ F_{i1} \delta u_{i,2} + F_{i2} \delta u_{i,1} \\ F_{i2} \delta u_{i,3} + F_{i3} \delta u_{i,2} \\ F_{i3} \delta u_{i,1} + F_{i1} \delta u_{i,3} \end{pmatrix} \quad (229)$$

È possibile, a questo punto, introdurre la formulazione ad elementi finiti, per cui:

- *coordinate:*

$$X_I = \sum_{\alpha} N_{\alpha} \tilde{X}_I^{\alpha} \quad (230)$$

- *spostamenti:*

$$u_i = \sum_{\alpha} N_{\alpha} \tilde{u}_i^{\alpha} \quad (231)$$

- *derivate degli spostamenti:*

$$u_{i,l} = \sum_{\alpha} N_{\alpha,l} \tilde{u}_i^{\alpha} \quad (232)$$

Inserendo la formulazione agli elementi finiti nella definizione di $\delta\{\mathbf{E}\}$ si ottiene:

$$\delta\{\mathbf{E}\} = \begin{bmatrix} F_{11}N_{\alpha,1} & F_{21}N_{\alpha,1} & F_{31}N_{\alpha,1} \\ F_{12}N_{\alpha,2} & F_{22}N_{\alpha,2} & F_{32}N_{\alpha,2} \\ F_{13}N_{\alpha,3} & F_{23}N_{\alpha,3} & F_{33}N_{\alpha,3} \\ F_{11}N_{\alpha,2} + F_{12}N_{\alpha,1} & F_{21}N_{\alpha,2} + F_{22}N_{\alpha,1} & F_{31}N_{\alpha,2} + F_{32}N_{\alpha,1} \\ F_{12}N_{\alpha,3} + F_{13}N_{\alpha,2} & F_{22}N_{\alpha,3} + F_{23}N_{\alpha,2} & F_{32}N_{\alpha,3} + F_{33}N_{\alpha,2} \\ F_{13}N_{\alpha,1} + F_{11}N_{\alpha,3} & F_{23}N_{\alpha,1} + F_{21}N_{\alpha,3} & F_{33}N_{\alpha,1} + F_{31}N_{\alpha,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_1^\alpha \\ \delta\tilde{u}_2^\alpha \\ \delta\tilde{u}_3^\alpha \end{Bmatrix} = [\hat{\mathbf{B}}_\alpha] \delta\{\hat{\mathbf{u}}_\alpha\} \quad (233)$$

Si noti che la matrice $[\hat{\mathbf{B}}_\alpha]$ può essere scomposta come:

$$[\hat{\mathbf{B}}_\alpha] = [\mathbf{B}_\alpha] + [\mathbf{B}_\alpha]^{NL} \quad (234)$$

con:

$$[\mathbf{B}_\alpha]^{NL} = \begin{bmatrix} u_{1,1}N_{\alpha,1} & u_{2,1}N_{\alpha,1} & u_{3,1}N_{\alpha,1} \\ u_{1,2}N_{\alpha,2} & u_{2,2}N_{\alpha,2} & u_{3,2}N_{\alpha,2} \\ u_{1,3}N_{\alpha,3} & u_{2,3}N_{\alpha,3} & u_{3,3}N_{\alpha,3} \\ u_{1,1}N_{\alpha,2} + u_{1,2}N_{\alpha,1} & u_{2,1}N_{\alpha,2} + u_{2,2}N_{\alpha,1} & u_{3,1}N_{\alpha,2} + u_{3,2}N_{\alpha,1} \\ u_{1,2}N_{\alpha,3} + u_{1,3}N_{\alpha,2} & u_{2,2}N_{\alpha,3} + u_{2,3}N_{\alpha,2} & u_{3,2}N_{\alpha,3} + u_{3,3}N_{\alpha,2} \\ u_{1,3}N_{\alpha,1} + u_{1,1}N_{\alpha,3} & u_{2,3}N_{\alpha,1} + u_{2,1}N_{\alpha,3} & u_{3,3}N_{\alpha,1} + u_{3,1}N_{\alpha,3} \end{bmatrix} \quad (235)$$

E' possibile notare che se si considera la configurazione indeformata $[\mathbf{B}_\alpha]^{NL}$ è identicamente nulla per cui $[\hat{\mathbf{B}}_\alpha]$ coincide con $[\mathbf{B}_\alpha]$.

Sostituendo, a questo punto, i risultati ricavati in (224):

$$\delta\Pi = (\delta\{\hat{\mathbf{u}}_\alpha\})^T \left(\int_\Omega [\hat{\mathbf{B}}_\alpha]^T \{\mathbf{S}\} d\Omega - \{\mathbf{f}_\alpha\} \right) = 0 \quad (236)$$

avendo definito:

$$\{\mathbf{f}_\alpha\} = \int_\Omega N_\alpha \rho_0 \{\mathbf{b}^{(m)}\} d\Omega + \int_{\partial\Omega} N_\alpha \{\bar{\mathbf{T}}\} dS \quad (237)$$

Per il passaggio dal caso di equilibrio statico a quello di equilibrio dinamico è necessaria l'introduzione delle azioni di inerzia, possibile, ad esempio, utilizzando il *principio di D'Alembert*:

$$\{\mathbf{b}^{(m)}\} \rightarrow \{\mathbf{b}^{(m)}\} - \{\dot{\mathbf{v}}\} = \{\mathbf{b}^{(m)}\} - \{\ddot{\mathbf{x}}\} \quad (238)$$

nella quale è stato introdotto $\{\mathbf{v}\}$, *vettore velocità*. L'introduzione delle azioni di inerzia attraverso il *principio di D'Alembert* modifica l'equilibrio, il quale sarà espresso nella fase di transitorio come:

$$\Psi_1 = \{\mathbf{f}\} - \int_\Omega [\hat{\mathbf{B}}_\alpha]^T \{\mathbf{S}\} d\Omega - [\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{v}}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (239)$$

Supponendo di considerare conclusa la fase di transitorio (*steady state*) è possibile trascurare il termine inerziale è possibile *linearizzare* ed ottenere la *matrice di rigidezza tangente* $[\mathbf{K}_T]$:

$$[\mathbf{K}_T] = \int_\Omega [\hat{\mathbf{B}}_\alpha]^T [\mathbf{C}_T] [\hat{\mathbf{B}}_\alpha] d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial [\hat{\mathbf{B}}_\alpha]^T}{\partial \{\hat{\mathbf{u}}\}} \{\mathbf{S}\} d\Omega - \frac{\partial \{\mathbf{f}\}}{\partial \{\hat{\mathbf{u}}\}} = [\mathbf{K}_M] + [\mathbf{K}_G] + [\mathbf{K}_L] \quad (240)$$

nella quale $[\mathbf{C}_T]$ rappresenta la *matrice dei moduli tangenti*. Da (240) è possibile notare che la matrice di rigidezza tangente può essere, quindi, scomposta in tre termini:

- $[\mathbf{K}_M]$: effetto del materiale;

- $[\mathbf{K}_G]$: effetto legato alla non linearità delle relazioni geometriche (*rigidezza geometrica*);
- $[\mathbf{K}_L]$: effetto della variazione della condizione di carico con la deformazione (*follower forces*);

Note, quindi, le relazioni rispetto alla *configurazione indeformata*, è necessario il passaggio alla *configurazione deformata*. Per fare ciò è necessario:

- passaggio da quantità relative alla configurazione indeformata a quantità relative alla condizione deformata;
- trasformazione dei domini di integrazione;

Per il primo step è sufficiente ricorrere alla regola della catena per la derivazione di funzioni composte, da cui:

$$\frac{\partial}{\partial X_I} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_I} = \frac{\partial}{\partial x_i} F_{iI} \quad (241)$$

Inserendo, quindi, (241) in (228):

$$\delta E_{IJ} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) F_{iI} F_{iJ} = \delta \epsilon_{ij} F_{iI} F_{iJ} \quad (242)$$

per cui (222) può essere riscritta come:

$$\delta E_{iI} S_{IJ} = \delta \epsilon_{ij} F_{iI} F_{iJ} S_{IJ} = \delta \epsilon_{ij} \tau_{ij} = \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} J \quad (243)$$

essendo $J = \det(F_{iI})$.

e infine:

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} J \, d\Omega - \delta \Pi_{ext} = 0 \quad (244)$$

Notando, ora, che $d\omega = J \, d\Omega$ avendo indicato con ω il dominio di integrazione nella configurazione indeformata, per il secondo step è sufficiente scrivere:

$$\Pi = \int_{\omega} \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} \, d\omega - \delta \Pi_{ext} = 0 \quad (245)$$

nella quale:

$$\delta \Pi_{ext} = \int_{\omega} \delta u_i \rho b_i^{(m)} \, d\omega + \int_{\partial\omega} \delta u_i \bar{t}_i \, dS \quad (246)$$

Analogamente, si procede alla trasformazione dei domini degli integrali che definiscono i tre contributi della *matrice di rigidezza tangente* $[\mathbf{K}_T]$ presentati in (240).

Introducendo, quindi, una formulazione agli elementi finiti si arriva alla scrittura di un'equazione formalmente analoga a (239):

$$\boldsymbol{\Psi}_1 = \{\mathbf{f}\} - \int_{\omega} [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} \, d\omega - [\mathbf{M}] \{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (247)$$

Si noti che la presenza della *rigidezza geometrica* e delle *non linearità del materiale* porta alla possibilità di avere $[\mathbf{K}_T]$ non per forza *definita positiva*, il che porta, inevitabilmente, in alcuni casi, ad un *locking* che può essere risolto, ad esempio, mediante *formulazioni di tipo mixed*.

5.4 Problemi di Contatto

I *problemi di contatto* sono una particolare tipologia di problemi di non linearità geometrica nei quali alcuni punti di un corpo vanno in contatto con altri punti dello stesso corpo (*autocontatto*) o di altri corpi. Come facilmente intuibile, i problemi di contatto sono intrinsecamente non lineari, poiché si osserva una *variazione delle condizioni al contorno* in maniera tale da impedire la compenetrazione (*condizione di impenetrabilità*).

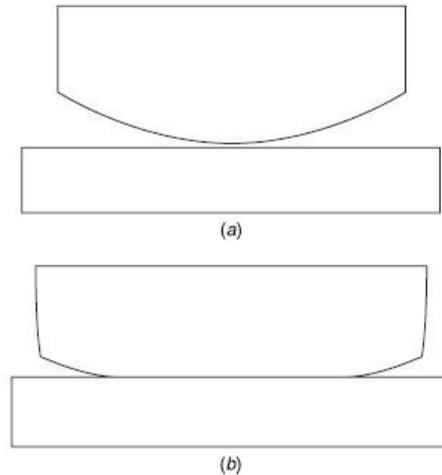


Figura 53: Problema di contatto, [68]

In tale tipologia di problemi le incognite risultano, quindi, essere:

- le parti dei corpi che arrivano in contatto;
- le condizioni al contorno di tipo meccanico che impediscono la compenetrazione (*forze di contatto*);

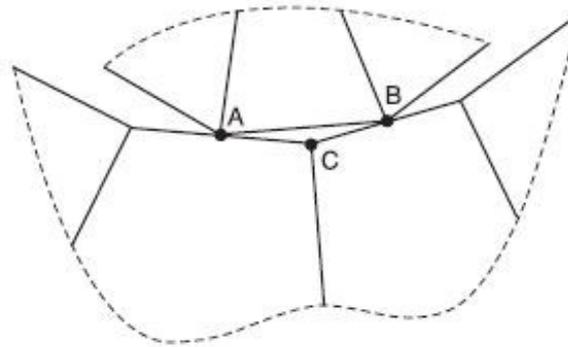


Figura 54: Contatto modellato con il FEM, [68]

Il contatto può essere modellato in due maniere differenti:

- senza attrito (*frictionless contact*): tipologia di contatto più semplice, nella quale l'unica componente di tensione non nulla è quella normale all'interfaccia di contatto;
- con attrito (*frictional contact*): tipologia di contatto più complessa nella quale esiste una componente di tensione tangenziale generata dall'attrito che si verifica all'interfaccia;

Il modello più semplice per la descrizione del fenomeno dell'attrito è il *modello di Coulomb*:

$$|t_s| \leq \mu |t_n| = |t_s|_{lim} \quad (248)$$

essendo:

- t_s : tensione tangenziale all'interfaccia;

- t_n : tensione normale all'interfaccia;
- μ : coefficiente di attrito;

Si noti che se $|t_s|$ risulta al di sotto della condizione limite si parla di *condizione di aderenza*; in caso contrario si parla, invece, di *condizione di strisciamento*, per cui $|t_s|$ risulta identicamente pari a $|t_s|_{lim}$.

L'approccio maggiormente utilizzato per la risoluzione dei problemi di contatto è il FEM, procedendo in questa maniera, però, è necessario prestare attenzione a due aspetti evidenziati in Figura 54:

- non è possibile modellare il contatto in corrispondenza di ogni punto dell'interfaccia, poiché l'approssimazione tramite elementi genera un'interfaccia *segmentata* e, quindi, *non liscia*;
- la *normale ai corpi non è unica* in corrispondenza dell'interfaccia, sempre per effetto della discretizzazione, e questo genera un problema di *manca di continuità della normale* stessa al passaggio dell'interfaccia;

Entrando maggiormente nello specifico, i problemi di contatto possono essere formulati mediante il FEM con due approcci:

- *node-to-node contact*;
- *node-to-surface contact*;

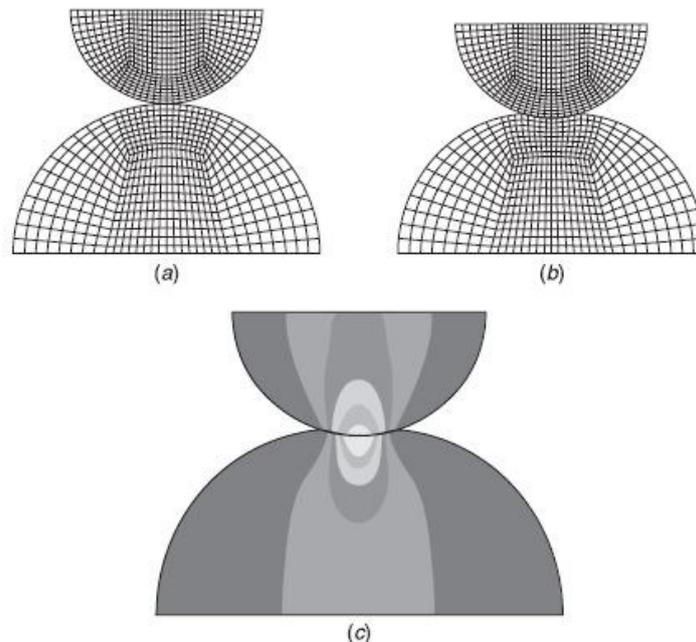


Figura 55: Node-to-node contact, [68]

L'approccio *node-to-node* è basato sulla definizione di due gruppi di nodi sui diversi componenti che entrano in contatto detti *master nodes* e *slave nodes*. È importante notare che la scelta di *master nodes* e *slave nodes* non è banale, poiché essa influenza i risultati dell'analisi FEM dato che, specie nei casi di *contatto unilaterale*, cioè contatti tra un elemento supposto rigido ed uno supposto deformabile; nello specifico è buona norma definire come *master nodes* i nodi appartenenti al componente:

- con *mesh meno fitta*;
- *più rigido*;
- *in movimento* nel caso di analisi dinamiche;

Come detto in precedenza, il primo passo per la risoluzione di un problema di contatto è la determinazione dell'interfaccia di contatto. Detto g il *gap* tra due nodi corrispondenti, uno appartenente al gruppo degli *slave*

nodes ed uno appartenente al gruppo dei *master nodes*, avviene il contatto nel momento in cui tale gap si annulla. Considerando un caso semplice in cui il contatto avvenga lungo una specifica direzione è possibile scrivere:

$$g = x_s - x_m = X_s + u_s - (X_m + u_m) \quad (249)$$

avendo indicato con il pedice m posizioni e spostamento del nodo appartenente al gruppo master e con s quelli relativi al nodo del gruppo slave.

I casi possibili sono, quindi, tre:

- $g > 0$: *contatto assente*;
- $g = 0$: *contatto*;
- $g < 0$: *compenetrazione*;

Si noti che la compenetrazione si verifica in quei modelli che non prevedono modifica di nodi master e nodi slave nel corso del processo iterativo. Verificando per quali coppie di nodi (249) restituisce valore nullo è possibile determinare l'interfaccia di contatto.

Il passo successivo è, invece, la determinazione delle *forze di contatto*, il che può essere fatto mediante diversi metodi. I tre maggiormente utilizzati sono:

- *moltiplicatori Lagrangiani*;
- *penalty functions*;
- *augmented lagrangian*;

Il *metodo dei moltiplicatori Lagrangiani* consiste nel definire un *moltiplicatore* λ da applicare a (249).

Procedendo in questa maniera, per ogni coppia di nodi sarà possibile scrivere il termine energetico relativo al contatto come:

$$\Pi_c = \lambda g \quad (250)$$

da cui, operando una variazione prima:

$$\delta \Pi_c = \delta \lambda g + (\delta u_s - \delta u_m) \lambda \quad (251)$$

Da (251) appare evidente che λ può essere interpretato come una *forza* che deve essere applicata ad ogni nodo perché si eviti la *condizione di compenetrazione*.

Operando una linearizzazione di (251) si ottiene una matrice di rigidità tangente che può essere utilizzata all'interno di un processo di risoluzione di tipo operativo con il *metodo di Newton-Raphson*. Nello specifico la relazione finale può essere scritta come:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du_s \\ du_m \\ d\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\lambda \\ \lambda \\ -g \end{Bmatrix} \quad (252)$$

la quale deve essere *assemblata*, come ogni altro termine, nel processo di assemblaggio del FEM. Ovviamente, il metodo dei moltiplicatori Lagrangiani introduce, per ciascuna coppia di nodi di contatto, un'ulteriore incognita, il che provoca ovviamente una procedura di risoluzione più complessa.

Il metodo delle *penalty functions* permette di evitare le complicazioni risolutive tipiche del metodo dei moltiplicatori lagrangiani. In questo caso il termine energetico può essere espresso nella forma:

$$\Pi_c = \kappa g^2 \quad (253)$$

avendo introdotto κ , indicato come *penalty factor*.

Per ciascuna coppia di nodi sarà, in questo caso, possibile scrivere:

$$\begin{bmatrix} \kappa & -\kappa \\ -\kappa & \kappa \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du_s \\ du_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\kappa g \\ \kappa g \end{Bmatrix} \quad (254)$$

È possibile notare che, in tale approccio, il gap g non si annulla ma, al contrario, raggiunge un valore ridotto, dipendente dalla scelta di κ , il che costituisce il maggiore vantaggio di tale metodo. Allo stesso tempo, però, tale vantaggio è parzialmente minato dal fatto di dover individuare un valore di κ che garantisca una soluzione accettabile; ciò costituisce un problema per niente banale in problemi complessi, specie nel caso in cui si debba modellare un contatto tra elementi 1D o 2D ed elementi 3D.

Il metodo *augmented lagrangian* può essere considerato come una sorta di via di mezzo tra i due metodi precedentemente esposti, poiché esso si basa sulla definizione sia di un penalty factor che di un moltiplicatore lagrangiano. Procedendo, quindi, in questa maniera si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \kappa & -\kappa \\ -\kappa & \kappa \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du_s \\ du_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\lambda_k - \kappa g \\ \lambda_k + \kappa g \end{Bmatrix} \quad (255)$$

In tale metodo l'aggiornamento del moltiplicatore alle varie iterate avviene nella seguente maniera:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \kappa g$$

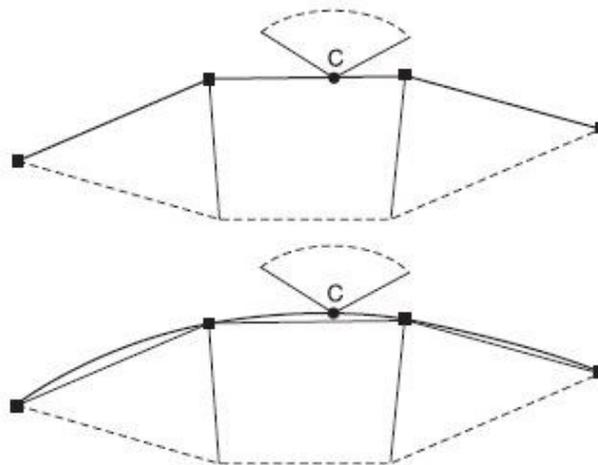


Figura 56: Node-to-surface contact, [68]

Nell'approccio *node-to-surface* il contatto avviene tra un gruppo di nodi (*slave nodes*) ed una superficie (*master surface*). Supponendo una trattazione di tipo bidimensionale (Figura 56), il contatto avviene tra un singolo nodo ed un segmento che può essere descritto per interpolazione come segue:

$$\{\mathbf{x}\} = N_\alpha(\xi) \{\mathbf{x}_\alpha\} \quad (256)$$

Si verifica contatto nel momento in cui il gap g_n tra *slave node* e *master surface* si annulla. Se g_n è positivo, infatti, non è necessaria alcuna modifica nelle equazioni che descrivono l'equilibrio; al contrario, se g_n diviene negativo vuol dire che si è verificata una *condizione di compenetrazione*, per cui sarà necessario inserire all'interno delle equazioni di equilibrio le *forze di contatto*, azioni tali da impedire la condizione appena descritta.

Nell'approccio *node-to-surface* il processo risolutivo è più complesso poiché è necessario verificare, mediante proiezioni e calcolo del gap, quale parte della *master surface* può diventare una potenziale superficie di contatto. Per determinare il gap g_n sarà, quindi, necessario, per ogni step di iterazione, verificare quale punto della *master surface* è più prossimo a ciascuno *slave node*. Per fare ciò è necessario determinare il valore di ξ tale per cui si ha un minimo della funzione:

$$f(\xi) = \frac{1}{2} (\{\mathbf{x}_s\}^T - \{\mathbf{x}\}^T) (\{\mathbf{x}_s\} - \{\mathbf{x}\}) \quad (257)$$

avendo indicato con $\{\mathbf{x}_s\}$ la *posizione dello slave node nella configurazione deformata*.

Ancora una volta è possibile, dopo aver linearizzato, utilizzare il metodo di Newton-Raphson per la ricerca di una soluzione mediante un processo iterativo:

$$[\{\mathbf{x}\}^T,_{\xi} \{\mathbf{x}\},_{\xi} - [\{\mathbf{x}_s\} - \{\mathbf{x}(\xi_i)\}]^T \{\mathbf{x}\},_{\xi\xi}] d\xi_i = \{\mathbf{x}\}^T,_{\xi} (\{\mathbf{x}_s\} - \{\mathbf{x}(\xi_i)\}) = -\frac{df}{d\xi} = R \quad (258)$$

essendo R il residuo del problema che deve essere se non annullato, almeno ridotto al di sotto di una tolleranza imposta.

Indicando, quindi, con C la soluzione di (258) cioè il punto maggiormente prossimo tra slave node e master surface, tenendo conto di (256):

$$\{\mathbf{x}_C\} = N_\alpha(\xi_C) \{\mathbf{x}_\alpha\} \quad (259)$$

Come già fatto notare in precedenza, nel caso di *frictionless contact* l'unica componente di tensione non nulla è quella normale alla superficie di contatto ed essa sarà data da:

$$\{\mathbf{t}\} = \lambda_n \{\mathbf{n}_C\} \quad (260)$$

avendo indicato con λ_n il modulo e con $\{\mathbf{n}_C\}$ il versore normale nel punto C .

Utilizzando, quindi, il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* è possibile determinare il contributo energetico legato al contatto e la corrispondente variazione virtuale:

$$\Pi_C = (\lambda_n \{\mathbf{n}_C\}^T) (g_n \{\mathbf{n}_C\}) A_C \quad (261)$$

$$\delta\Pi_C = [\delta(\lambda_n \{\mathbf{n}_C\}^T) g_n \{\mathbf{n}_C\} + (\delta\{\mathbf{x}_s\}^T - \delta\{\mathbf{x}_C\}^T) \{\mathbf{n}_C\} \lambda_n] A_C \quad (262)$$

essendo A_C la *superficie di contatto* e $\delta\{\mathbf{x}_C\} = N_\alpha \delta\{\mathbf{x}_\alpha\} + \{\mathbf{x}\},_{\xi} \delta\xi_C$.

Nel metodo dei moltiplicatori Lagrangiani, quindi, si introduce per ciascuno slave node un'incognita λ_n che dovrà essere determinata come parte della soluzione globale. Come dimostrato in precedenza nel caso di *node-to-node contact*, è possibile eliminare tali incognite definendo una penalty function; rispetto al caso precedente, però, il processo non risulta così semplice poiché non conoscendo a priori quali nodi della *master surface* entrano in contatto con quali *slave nodes* la matrice di rigidità tangente varia in maniera molto più continuativa nel corso del processo iterativo.

Notando, ora, che:

$$\{\mathbf{n}_C\}^T \{\mathbf{n}_C\} = 1 \quad \{\mathbf{n}_C\}^T \delta\{\mathbf{n}_C\} = 0$$

è possibile riscrivere (262) in forma matriciale:

$$\delta\Pi_C = [\delta\lambda_n, \delta\{\mathbf{x}_s\}^T, \delta\{\mathbf{x}_\alpha\}^T, \delta\xi_C] \left\{ \begin{array}{c} g_n A_C \\ \lambda_n A_C \{\mathbf{n}_C\} \\ -\lambda_n A_C N_\alpha \{\mathbf{n}_C\} \\ -\lambda_n A_C \{\mathbf{x}\}^T,_{\xi} \{\mathbf{n}_C\} \end{array} \right\} \quad (263)$$

Utilizzando, come mostrato in precedenza, il metodo di Newton-Raphson è possibile generare la matrice di rigidità tangente:

$$d(\delta\Pi_C) = \{(\delta\{\mathbf{x}_s\}^T - \delta\{\mathbf{x}_C\}^T) d(\lambda_n \{\mathbf{n}_C\}) + \delta(\lambda_n \{\mathbf{n}_C\}^T) (d\{\mathbf{x}_s\} - d\{\mathbf{x}_C\}) - \lambda_n d(\delta\{\mathbf{x}_C\}^T) \{\mathbf{n}_C\} + g_n \{\mathbf{n}\}^T d[\delta(\lambda_n \{\mathbf{n}_C\})]\} A_C \quad (264)$$

Nel processo di linearizzazione è, in questo caso, necessario utilizzare un metodo che non preveda di dividere per g_n ; questo lo si ottiene andando a definire il versore tangente alla superficie di contatto:

$$\{\mathbf{t}_C\} = \frac{\{\mathbf{x}\}_{,\xi}}{\|\{\mathbf{x}\}_{,\xi}\|} \quad (265)$$

e notando che:

$$\{\mathbf{n}_C\} = \{\mathbf{t}_C\} \wedge \{\mathbf{e}_3\} \quad \delta\{\mathbf{n}_C\} = \delta\{\mathbf{t}_C\} \wedge \{\mathbf{e}_3\} \quad (266)$$

avendo indicato con $\{\mathbf{e}_3\}$ il versore normale al piano di deformazione.

Da (265):

$$\delta\{\mathbf{t}_C\} = \frac{1}{\|\{\mathbf{x}\}_{,\xi}\|} \left[[I] - \{\mathbf{t}_C\}\{\mathbf{t}_C\}^T \right] \delta\{\mathbf{x}\}_{,\xi} = \frac{1}{\|\{\mathbf{x}\}_{,\xi}\|} \{\mathbf{n}_C\}\{\mathbf{n}_C\}^T \delta\{\mathbf{x}\}_{,\xi} \quad (267)$$

da cui, tenendo conto di (266):

$$\delta\{\mathbf{n}_C\} = -\frac{\{\mathbf{x}\}_{,\xi}\{\mathbf{n}_C\}\delta\{\mathbf{x}\}_{,\xi}}{\|\{\mathbf{x}\}_{,\xi}\|^2} \quad (268)$$

Per cui la matrice di rigidità tangente presentata in (263) può essere riscritta nella forma:

$$[\delta\lambda_n, \delta\{\mathbf{x}_s\}^T, \delta\{\mathbf{x}_a\}^T, \delta\xi_C] \begin{bmatrix} 0 & A_C \{\mathbf{n}_C\}^T & -N_\beta A_C \{\mathbf{n}_C\}^T & 0 \\ A_C \{\mathbf{n}_C\} & [\mathbf{0}] & [\mathbf{G}_{s\beta}] & [\mathbf{G}_{s\xi}] \\ -N_\alpha A_C \{\mathbf{n}_C\} & [\mathbf{G}_{as}] & [\mathbf{G}_{\alpha\beta}] & [\mathbf{G}_{\alpha\xi}] \\ 0 & [\mathbf{G}_{\xi s}] & [\mathbf{G}_{\xi\beta}] & [\mathbf{G}_{\xi\xi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda_n \\ d\{\mathbf{x}_s\} \\ d\{\mathbf{x}_a\} \\ d\xi_C \end{Bmatrix} \quad (269)$$

essendo:

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}_{s\beta}] &= -\frac{\lambda_n A_C N_{\beta,\xi}}{\|\{\mathbf{x}\}\|^2} \{\mathbf{x}\}_{,\xi} \{\mathbf{n}_C\} = [\mathbf{G}_{\beta s}]^T \\ [\mathbf{G}_{s\xi}] &= -\frac{\lambda_n A_C \kappa_C}{\|\{\mathbf{x}\}\|^2} \{\mathbf{x}\}_{,\xi} = [\mathbf{G}_{\xi s}]^T \\ [\mathbf{G}_{\alpha\beta}] &= \frac{\lambda_n A_C}{\|\{\mathbf{x}\}\|^2} [N_\alpha N_{\beta,\xi} \{\mathbf{x}\}_{,\xi} \{\mathbf{n}_C\}^T + N_{\alpha,\xi} N_\beta \{\mathbf{n}_C\} \{\mathbf{x}\}_{,\xi}^T - g_n N_{\alpha,\xi} N_{\beta,\xi} \{\mathbf{n}_C\} \{\mathbf{n}_C\}^T] \\ [\mathbf{G}_{\alpha\xi}] &= \frac{\lambda_n A_C \kappa_C}{\|\{\mathbf{x}\}\|^2} [N_\alpha \{\mathbf{x}\}_{,\xi} - g_n N_{\alpha,\xi} \{\mathbf{n}_C\}] \\ G_{\xi\xi} &= \lambda_n A_C \left[1 - \frac{g_n \kappa_C}{\|\{\mathbf{x}\}_{,\xi}\|^2} \right] \end{aligned}$$

CAPITOLO VI - Problemi Dinamici

Non è inusuale, in ambito ingegneristico e, più specificatamente, in ambito strutturale, che la risposta di un sistema ad un input esterno non risulti costante nel tempo; tale effetto può essere legato a:

- *variazione delle condizioni di vincolo* (ad esempio cedimenti vincolari);
- *variazione della condizione di carico* (carichi propriamente dinamici);
- *variazione delle proprietà del materiale*;
- *effetti locali* (buckling);

La maggior parte dei problemi ingegneristici pratici risultano, quindi, essere *problemi di tipo dinamico*. Ciò equivale all'introduzione di una dipendenza dalla *variabile temporale* nei campi incogniti (spostamento, stress e strain) che complica ulteriormente la ricerca di una possibile soluzione, motivo per cui la ricerca di una soluzione totalmente analitica è limitata a casi estremamente semplificati. Inoltre, se soluzioni almeno parzialmente analitiche possono essere individuate nel caso di *sistemi discreti*, questo non è possibile nei problemi che riguardano *sistemi continui*.

Tali considerazioni suggeriscono due possibili approcci alla risoluzione di un *problema dinamico*:

- *semi-discretizzazione*: si procede ad una discretizzazione nelle variabili spaziali per poi ricercare una soluzione in forma analitica nel tempo;
- *discretizzazione*: si procede discretizzando sia il dominio spaziale che quello temporale;

In entrambi i casi, quindi, il primo passo risulta essere la *discretizzazione del dominio spaziale*, la quale produce un sistema di equazioni del tipo:

$$[M]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [C]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [K]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (270)$$

Appare, quindi, evidente che il sistema è modellato in maniera da risultare equivalente ad un insieme di *sistemi massa-molla-smorzatore semplici*.

6.1 Soluzione per semi-discretizzazione

Come appena mostrato, la procedura di discretizzazione del dominio spaziale del problema porta alla scrittura di (270), un sistema di equazioni differenziali ordinarie del II ordine che risultano essere, nel caso generale, *accoppiate e non lineari*. Supponendo per semplicità di trascurare gli effetti non lineari, il sistema risulta essere a coefficienti costanti, per cui è possibile ricercare una soluzione di tipo analitico. La procedura di ricerca di una soluzione per semi-discretizzazione si articola in due fasi:

1. determinazione della *risposta libera*;
2. determinazione della *risposta forzata*;

Nello studio della *risposta libera* si suppone che sul sistema non agiscano carichi esterni; inoltre, data la difficoltà nel modellare in maniera accurata lo smorzamento e l'elevata vicinanza tra comportamento smorzato e comportamento non smorzato, si suppone anche che il sistema sia non smorzato. Sotto tali ipotesi (270) può essere riscritta come:

$$[M]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [K]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (271)$$

Si supponga, a questo punto, di introdurre una soluzione test del tipo:

$$\{\mathbf{u}\} = \{\phi\} e^{j\omega t} \quad (272)$$

Da cui:

$$-\omega^2[\mathbf{M}]\{\phi\} e^{j\omega t} + [\mathbf{K}]\{\phi\} e^{j\omega t} = \{\mathbf{0}\}$$

e notando che $e^{j\omega t} \neq 0$ per ogni valore di ω e t :

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\phi\} = \{\mathbf{0}\} \quad (273)$$

Si noti che (273) rappresenta un sistema di equazioni:

- *algebrico*;
- *omogeneo*;
- *a coefficienti costanti*;
- *lineare*;

Date tali proprietà, esso ammette sicuramente la soluzione triviale $\{\phi\} = \{\mathbf{0}\}$ che, tuttavia, non risulta di interesse. Perché siano presenti altre soluzioni oltre a quella triviale è necessario che il determinante della matrice dei coefficienti del sistema lineare sia nullo, cioè deve essere:

$$\det(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) = 0 \quad (274)$$

Ciò equivale, dal punto di vista matematico, ad un *problema di ricerca di autovalori generalizzato*. Si noti che è possibile il passaggio ad un *problema di ricerca di autovalori classico* introducendo la *matrice dinamica* $[\mathbf{D}]$:

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}] \quad (275)$$

Per cui (274) può essere riscritta come:

$$\det(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) = \det(-\omega^2[\mathbf{I}] + [\mathbf{D}]) = 0 \quad (276)$$

essendo $[\mathbf{I}]$ la *matrice identità N-dimensionale*. La $\det(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) = \det(-\omega^2[\mathbf{I}] + [\mathbf{D}]) = 0$ (276) (o in maniera equivalente la (274) è detta *equazione caratteristica o equazione delle frequenze*.

Determinati gli autovalori dall'equazione caratteristica è possibile ritornare al sistema lineare (273) e determinare i corrispondenti autovettori; dal punto di vista dinamico gli autovalori del sistema prendono il nome di *frequenze proprie* mentre i corrispondenti autovettori si dicono *modi propri* o *forme modali*.

Ovviamente il numero di frequenze proprie e di forme modali del sistema è pari al numero di GDL dello stesso ma, avendo supposto che il determinante della matrice dei coefficienti del sistema lineare sia nullo, non è possibile determinare tutte le N incognite del problema ma solo N-1. Proprio per questo motivo gli autovettori prendono il nome di *forme modali*, poiché risulta possibile determinare la *forma della deformata* ma non il suo valore assoluto. Allo stesso tempo, però, nasce la necessità di una normalizzazione dei *modi propri*. Dati, quindi, due generici modi $\{\phi\}_i$ e $\{\phi\}_j$ risulta utile notare che:

$$\begin{aligned} \{\phi\}_i[\mathbf{M}]\{\phi\}_j &= \begin{cases} m_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \\ \{\phi\}_i[\mathbf{K}]\{\phi\}_j &= \begin{cases} k_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (277)$$

La condizione appena esposta prende il nome di *condizione di ortogonalità dei modi propri rispetto alla matrice di massa e rispetto alla matrice di rigidità*; m_i e k_i prendono, invece, il nome di, rispettivamente, *massa modale e rigidità modale*.

La *condizione di ortogonalità* è una condizione più stringente di quella di semplice *indipendenza lineare*, motivo per cui i modi propri del sistema costituiscono la *base* ideale da cui generare lo spazio vettoriale all'interno del quale ricercare la soluzione. Definendo la *matrice modale* $[\Phi]$ come la matrice contenente per colonne le forme modali del sistema è possibile scrivere:

$$\{\mathbf{u}(t)\} = [\Phi]\{\mathbf{q}(t)\} \quad (278)$$

essendo $\{\mathbf{q}\}$ il *vettore delle coordinate modali* del sistema. La relazione (278) è estremamente importante poiché:

- permette il passaggio dallo spazio vettoriale fisico allo spazio vettoriale modale, generato dalle forme modali del sistema;
- evidenzia che la risposta di ciascun sotto-sistema massa-molla-smorzatore in cui si è supposto di poter dividere il sistema globale dipende da tutti i modi propri dello stesso;

Riconsiderando, quindi, (270) e introducendo (278):

$$[M][\Phi]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [C][\Phi]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [K][\Phi]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{F}\}$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per $[\Phi]^T$:

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{\mathbf{q}\} = [\Phi]^T\{\mathbf{F}\} \quad (279)$$

Definendo:

$$[D_M] = [\Phi]^T[M][\Phi], \quad [D_C] = [\Phi]^T[C][\Phi], \quad [D_K] = [\Phi]^T[K][\Phi] \quad (280)$$

la (279) può essere riscritta come:

$$[D_M]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [D_C]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [D_K]\{\mathbf{q}\} = [\Phi]^T\{\mathbf{F}\} = \{\mathcal{F}\} \quad (281)$$

Ricordando, a questo punto, la *proprietà di ortogonalità dei modi propri* (277) è possibile notare che le matrici $[D_M]$ e $[D_K]$ risultano essere *matrici diagonali*, cioè matrici composte da soli elementi nulli ad eccezione di quelli sulla diagonale principale. $[D_C]$ al contrario non risulta sempre diagonale; allo stesso tempo però, adottando l'approccio del *proportional damping* già evidenziato in precedenza anche $[D_C]$ risulta diagonale, per cui il sistema risulta essere completamente disaccoppiato e, quindi, molto più semplice da risolvere in coordinate modali. Nota la soluzione in coordinate modali è sufficiente ricorrere a (278) per ritornare in coordinate fisiche.

Appare, pertanto, evidente che, essendo il sistema disaccoppiato, la risposta rispetto al singolo GDL sarà del tipo:

$$q_i(t) = e^{-\zeta_i \omega_{n,i} t} \left[q_{0,i} \cos(\omega_{d,i} t) + \frac{\dot{q}_{0,i} + \zeta_i \omega_{n,i} q_{0,i}}{\omega_{d,i}} \sin(\omega_{d,i} t) \right] + \frac{1}{\omega_{n,i}} \int_0^t e^{-\zeta_i \omega_{n,i} (t-\tau)} \sin[\omega_{d,i} (t-\tau)] \mathcal{F}_i(\tau) d\tau$$

essendo:

- ζ_i : *coefficiente di smorzamento* relativo all'i-esimo GDL;
- $\omega_{n,i}$: *frequenza propria non smorzata* dell'i-esimo modo proprio;
- $\omega_{d,i} = \omega_{n,i} \sqrt{1 - \zeta_i^2}$: *frequenza propria smorzata* dell'i-esimo modo proprio;
- $q_{0,i}$ e $\dot{q}_{0,i}$: *posizione e velocità iniziali* dell'i-esimo GDL in coordinate modali;

Per riassumere, la procedura di risoluzione di un problema dinamico con semi-discretizzazione avviene seguendo la seguente scaletta:

1. *semi-discretizzazione del dominio spaziale* ottenendo un sistema di equazioni differenziali alle derivate ordinarie accoppiate del tipo (270);
2. calcolo della *risposta libera non smorzata* per la determinazione di *frequenze e modi propri* del sistema;
3. passaggio da *coordinate fisiche a coordinate modali*, nelle quali il sistema di ODE risulta essere disaccoppiato;
4. risoluzione del problema in coordinate modali;
5. ritorno alle coordinate fisiche mediante ;
6. calcolo del *campo di deformazioni* attraverso le *relazioni geometriche* e del *campo di tensioni* mediante la *legge costitutiva* del materiale;

6.2 Soluzione per discretizzazione

Il *metodo di ricerca di soluzioni per semi-discretizzazione* presenta due grossi problemi che ne minano inevitabilmente l'utilizzo:

- per la risoluzione della risposta transitoria è un metodo *computazionalmente molto oneroso*;
- in presenza di una qualsiasi non linearità non esiste soluzione;

Il metodo di risoluzione per discretizzazione prevede, quindi, che dopo aver discretizzato il dominio spaziale generando un'equazione del tipo (270) si effettui una seconda discretizzazione, del dominio temporale.

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$$

La discretizzazione del dominio temporale può essere effettuata introducendo un' *approssimazione polinomiale* per $\{\mathbf{u}\}$ e per le rispettive derivate; l'ordine di espansione polinomiale p è libero ma, allo stesso tempo, risulta ovvio che debba necessariamente essere $p \geq 2$ per la descrizione accurata del termine inerziale.

In generale esistono algoritmi *single step* e *multistep*; i primi risultano essere preferibili poiché è più semplice gestire l'incremento Δt . Gli algoritmi single step di maggiore successo sono:

- *SSpj (single step with approximation of degree p for equation of order j)*: derivati a partire da metodi ai residui pesati;
- *GNpj (generalized Newmark with approximation of degree p for equation of order j)*: derivati attraverso serie di Taylor troncate;

Detto t_0 il valore iniziale dell'intervallo temporale su cui si calcola la soluzione, nel seguito sarà supposta la conoscenza di $\{\mathbf{u}\}$ e di tutte le sue derivate temporali fino a $p - 1$.

6.2.1 SSpj

Come fatto notare in precedenza, l'idea alla base del metodo è quella di introdurre per $\{\mathbf{u}\}$ e, quindi, per le sue derivate temporali, un' *approssimazione polinomiale*. Detti:

$$\tau = t - t_n \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n$$

è possibile scrivere:

$$\{\mathbf{u}\} \simeq \{\hat{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{u}\}_n + \{\dot{\mathbf{u}}\}_n \tau + \frac{1}{2} \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n \tau^2 + \dots + \frac{1}{p!} \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n \tau^p \quad (282)$$

Calcolando, quindi, $\{\mathbf{u}\}$, $\{\dot{\mathbf{u}}\}$ e $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$ attraverso (282 ed inserendo tali espressioni in (270 è possibile, formulando il problema attraverso un metodo ai residui pesati, ottenere un'espressione ricorsiva per il calcolo di $\{\mathbf{u}\}_n$:

$$\int_0^{\Delta t} W(\tau) \left[[\mathbf{M}] \left(\{\dot{\mathbf{u}}\}_n + \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n \tau + \dots + \frac{1}{(p-2)!} \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n \tau^{p-2} \right) + [\mathbf{C}] \left(\{\dot{\mathbf{u}}\}_n + \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n \tau + \dots + \frac{1}{(p-1)!} \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n \tau^{p-1} \right) + [\mathbf{K}] \left(\{\mathbf{u}\}_n + \{\dot{\mathbf{u}}\}_n \tau + \dots + \frac{1}{p!} \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n \tau^p \right) + \{\mathbf{f}\} \right] dt = \{\mathbf{0}\} \quad (283$$

essendo $W(\tau)$ una generica *funzione peso*.

Introducendo, a questo punto, le due quantità:

$$\theta_k = \frac{\int_0^{\Delta t} W(\tau) \tau^k d\tau}{\int_0^{\Delta t} W(\tau) d\tau} \quad (284$$

$$\{\bar{\mathbf{f}}\} = \frac{\int_0^{\Delta t} W(\tau) \{\mathbf{f}\} d\tau}{\int_0^{\Delta t} W(\tau) d\tau}$$

è possibile riscrivere (283 in una forma più compatta come:

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}^{(p)}\}_n + [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{K}]\{\bar{\mathbf{u}}\}_{n+1} + \{\bar{\mathbf{f}}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (285$$

nella quale:

$$[\mathbf{A}] = \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} [\mathbf{M}] + \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} [\mathbf{C}] + \frac{\Delta t^p}{p!} [\mathbf{K}]$$

$$\{\bar{\mathbf{u}}\}_{n+1} = \sum_{q=0}^{p-1} \frac{\theta_q \Delta t^q}{q!} \{\mathbf{u}^{(q)}\}_n$$

$$\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} = \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\theta_{q-1} \Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \{\mathbf{u}^{(q)}\}_n$$

$$\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} = \sum_{q=2}^{p-1} \frac{\theta_{q-2} \Delta t^{q-2}}{(q-2)!} \{\mathbf{u}^{(q)}\}_n$$

Si noti che $\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1}$, $\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1}$ e $\{\bar{\mathbf{u}}\}_{n+1}$ possono essere calcolati in maniera immediata, per cui per determinare $\{\mathbf{u}^{(p)}\}_n$ è sufficiente invertire (285:

$$\{\mathbf{u}^{(p)}\}_n = -[\mathbf{A}]^{-1} \left[[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{K}]\{\bar{\mathbf{u}}\}_{n+1} + \{\bar{\mathbf{f}}\} \right] \quad (286$$

Si noti che che calcolare $\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1}$, $\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1}$ e $\{\bar{\mathbf{u}}\}_{n+1}$ con le espressioni appena introdotte equivale a definirne a priori una media sull'intervallo Δt considerato.

Noto il valore di $\{\mathbf{u}^{(p)}\}_n$ è possibile determinare tutte le derivate di $\{\mathbf{u}\}_{n+1}$ fino a quella di ordine $p-1$ facendo uso di (282:

$$\{\mathbf{u}\}_{n+1} = \{\mathbf{u}\}_n + \{\dot{\mathbf{u}}\}_n \tau + \frac{1}{2} \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n \tau^2 + \dots + \frac{1}{p!} \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n \tau^p$$

$$\vdots$$

$$\{\mathbf{u}^{(p-1)}\}_{n+1} = \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n + \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n \tau^p \quad (287$$

Per riassumere, quindi, il metodo si basa sui seguenti step:

1. calcolo di θ_k ;
2. calcolo di $\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1}$, $\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1}$ e $\{\bar{\mathbf{u}}\}_{n+1}$ tramite le definizioni;
3. calcolo di $\{\mathbf{u}^{(p)}\}_n$ tramite (286);
4. determinazione della soluzione e delle sue derivate tramite (287);

È importante notare che nel caso in cui $[\mathbf{M}]$ e $[\mathbf{C}]$ siano entrambe matrici diagonali il problema può essere facilmente risolto ponendo $\theta_p = 0$. In questa maniera l'algoritmo è *esplicito*, per cui la risoluzione risulta essere molto semplice ma, allo stesso tempo, esso risulta essere solo *condizionatamente stabile* per cui l'intero processo potrebbe non arrivare a convergenza. Al contrario, ponendo $\theta_p \neq 0$ si genera un algoritmo *implicito* che richiede maggiore onere computazionale per la risoluzione ma risulta essere *incondizionatamente stabile*.

L'algoritmo di questa categoria maggiormente utilizzato è il SS22; dovendo, infatti, risolvere un sistema di ODE del secondo ordine ($j = 2$), sarà necessaria un'approssimazione di $\{\mathbf{u}\}_n$ e $\{\dot{\mathbf{u}}\}_n$ per cui appare evidente la necessità di un ordine polinomiale almeno quadratico ($p = 2$). Considerate tali premesse da (282:

$$\{\mathbf{u}\} \simeq \{\hat{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{u}\}_n + \{\dot{\mathbf{u}}\}_n \tau + \frac{1}{2} \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n \tau^2 \quad (288$$

da cui:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\}_n + [\mathbf{C}]\left(\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + \theta_1 \Delta t \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n\right) + [\mathbf{K}]\left(\{\bar{\mathbf{u}}\}_{n+1} + \frac{1}{2}\theta_2 \Delta t \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n\right) + \{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (289$$

nella quale:

$$\{\bar{\mathbf{u}}\}_{n+1} = \{\mathbf{u}\}_n + \theta_1 \Delta t \{\dot{\mathbf{u}}\}_n, \quad \{\dot{\bar{\mathbf{u}}}\}_{n+1} = \{\dot{\mathbf{u}}\}_n$$

Invertendo (289 come mostrato in precedenza è possibile valutare $\{\ddot{\mathbf{u}}\}_n$ da cui, facendo uso di (287:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}\}_{n+1} &= \{\mathbf{u}\}_n + \Delta t \{\dot{\mathbf{u}}\}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n \\ \{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} &= \{\dot{\mathbf{u}}\}_n + \Delta t \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n \end{aligned}$$

6.2.2 GNpj

Nei metodi *GNpj* si suppone che l'equazione di governo (270 risulti soddisfatta unicamente nei *punti di collocazione*, vale a dire nei punti di estremo dell'intervallo Δt . Operando in quest maniera si arriva alla scrittura:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\}_{n+1} + \{\mathbf{f}\}_{n+1} = \{\mathbf{0}\} \quad (290$$

Come fatto notare in precedenza, tale classe di metodi si basa sull'approssimazione delle derivate tramite l'utilizzo di *serie di Taylor troncate*, per cui:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}\}_{n+1} &= \{\mathbf{u}\}_n + \Delta t \{\dot{\mathbf{u}}\}_n + \dots + \frac{1}{p!} \Delta t^p \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n + \beta_p \frac{1}{p!} \Delta t^p \left(\{\mathbf{u}^{(p)}\}_{n+1} - \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n \right) \\ &\quad \vdots \\ \{\mathbf{u}^{(p-1)}\}_{n+1} &= \{\mathbf{u}^{(p-1)}\}_n + \beta_1 \frac{1}{(p-1)!} \Delta t^{p-1} \left(\{\mathbf{u}^{(p)}\}_{n+1} - \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n \right) \end{aligned} \quad (291$$

Inserendo, quindi, (291 in (290 si arriva ad una relazione nella sola variabile $\{\mathbf{u}^{(p)}\}_{n+1}$ che ne permette la determinazione, da cui, tornando in (290 e considerando i primi tre termini:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{u}\}_{n+1} &= \{\tilde{\mathbf{u}}\}_{n+1} + \beta_p \frac{1}{p!} \Delta t^p \{\mathbf{u}^{(p)}\}_{n+1} \\
\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} &= \{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + \beta_{p-1} \frac{1}{(p-1)!} \Delta t^{p-1} \{\mathbf{u}^{(p)}\}_{n+1} \\
\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} &= \{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + \beta_{p-2} \frac{1}{(p-2)!} \Delta t^{p-2} \{\mathbf{u}^{(p)}\}_{n+1}
\end{aligned} \quad (292)$$

essendo:

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\mathbf{u}}\}_{n+1} &= \{\mathbf{u}\}_n + \Delta t \{\dot{\mathbf{u}}\}_n + \dots + (1 - \beta_p) \frac{1}{p!} \Delta t^p \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n + \dots \\
\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} &= \{\dot{\mathbf{u}}\}_n + \Delta t \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n + \dots + (1 - \beta_{p-1}) \frac{1}{(p-1)!} \Delta t^{p-1} \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n + \dots \\
\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} &= \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n + \Delta t \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n + \dots + (1 - \beta_{p-2}) \frac{1}{(p-2)!} \Delta t^{p-2} \{\mathbf{u}^{(p)}\}_n + \dots
\end{aligned} \quad (293)$$

da cui, invertendo (290):

$$\{\mathbf{u}^{(p)}\}_{n+1} = -[\mathbf{A}]^{-1} \left\{ [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{K}]\{\tilde{\mathbf{u}}\}_{n+1} + \{\mathbf{f}\}_{n+1} \right\} \quad (294)$$

essendo:

$$[\mathbf{A}] = \frac{\beta_{p-2}}{(p-2)!} \Delta t^{p-2} [\mathbf{M}] + \frac{\beta_{p-1}}{(p-1)!} \Delta t^{p-1} [\mathbf{C}] + \frac{\beta_p}{p!} \Delta t^p [\mathbf{K}]$$

Per cui, tenendo conto delle opportune definizioni si arriva alla scrittura definitiva:

$$\{\mathbf{u}^{(p)}\}_{n+1} = -[\mathbf{A}] \left\{ [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{K}]\{\tilde{\mathbf{u}}\}_{n+1} + \{\mathbf{f}\}_{n+1} \right\} \quad (295)$$

L' algoritmo di tale tipologia maggiormente utilizzato per la risoluzione di problemi dinamici è il GN22. Essendo un algoritmo con ordine di espansione polinomiale pari a 2 da (291):

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{u}\}_{n+1} &= \{\mathbf{u}\}_n + \Delta t \{\dot{\mathbf{u}}\}_n + \frac{1}{2} (1 - \beta_2) \Delta t^2 \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 \{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} = \{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 \{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} \\
\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} &= \{\dot{\mathbf{u}}\}_n + (1 - \beta_1) \Delta t \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n + \beta_1 \Delta t \{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} = \{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + \beta_1 \Delta t \{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1}
\end{aligned} \quad (296)$$

e considerando anche la classica equazione della dinamica per sistemi discreti:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\}_{n+1} + \{\mathbf{f}\}_{n+1} = \{\mathbf{0}\} \quad (290)$$

si hanno tre equazioni nelle tre incognite $\{\mathbf{u}\}_{n+1}$, $\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1}$ e $\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1}$, per cui il problema può essere risolto.

Nello specifico, sostituendo (296) in (290):

$$\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} = -[\mathbf{A}]^{-1} \left\{ [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\}_{n+1} + \{\mathbf{f}\}_{n+1} \right\} \quad (297)$$

avendo definito:

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{M}] + \beta_1 \Delta t [\mathbf{C}] + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 [\mathbf{K}]$$

6.2.3 Condizioni di Stabilità dell'algoritmo

Facendo riferimento alle relazioni (285) e (287), nel caso omogeneo risulta possibile scrivere la soluzione generale nella forma:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \mu a_n \\
&\vdots \\
a_{n+1}^{(p-1)} &= \mu a_n^{(p-1)}
\end{aligned} \quad (298)$$

Tale scrittura può essere riassunta in forma matriciale come:

$$[\mathbf{S}]\{\mathbf{X}\}_n = \{\mathbf{0}\} \quad (299)$$

avendo definito:

$$\{\mathbf{X}\}_n = \begin{Bmatrix} a_n \\ \vdots \\ \Delta t^p a_n^{(p)} \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{p-1} & b_p \\ 1-\mu & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(p-1)!} & \frac{1}{p!} \\ 0 & 1-\mu & 1 & \dots & \frac{1}{(p-2)!} & \frac{1}{(p-1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\mu & 1 \end{bmatrix}$$

nella quale:

$$b_0 = \theta_0 \Delta t^2 k \quad \text{con } \theta_0 = 1$$

$$b_0 = \theta_0 \Delta t c + \theta_1 \Delta t^2 k$$

$$b_q = \frac{\theta_{q-2}}{(q-2)!} m + \frac{\theta_{q-1} \Delta t}{(q-1)!} c + \frac{\theta_q \Delta t^2}{q!} k \quad \text{con } q = 2, 3, \dots, p$$

Perché si abbiano soluzioni non triviali è necessario che:

$$\det([\mathbf{S}]) = 0 \quad (300)$$

Tale espressione genera un *polinomio caratteristico* che permette la determinazione degli autovalori della matrice. Come *condizione di stabilità* è sufficiente che sia verificata la disuguaglianza:

$$|\mu| \leq 1 \quad (301)$$

cioè è necessario e sufficiente che il modulo di ciascun autovalore sia inferiore all'unità; si noti, però, che tale relazione risulta valida unicamente nel caso in cui non sian presenti radici del polinomio caratteristico con molteplicità diversa da 1.

In ogni caso, il calcolo degli autovalori, anche operando sul sistema scritto in maniera scalare, non è affatto semplice, motivo per cui si usano delle procedure particolari; le due maggiormente utilizzate sono:

- *z transformation*;
- *Routh-Hurwitz condition*;

La *z transformation* è una procedura che consiste nell'operare una sostituzione di variabili all'interno del polinomio caratteristico generato da (300). Nello specifico si pone:

$$\mu = \frac{1+z}{1-z} \quad (302)$$

Si noti che sia μ che z risultano essere, nel caso generale, variabili di tipo complesso. E' semplice dimostrare che la condizione di stabilità espressa da (301) è equivalente a richiedere che la parte reale di z abbia segno negativo.

La *condizione di Routh-Hurwitz* è applicabile per espressioni polinomiali del tipo:

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n = 0 \quad (303)$$

con $c_0 > 0$. In questo caso la parte reale di ciaascun autovalore risulta essere negativa nel caso in cui:

$$c_1 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_0 & c_2 \end{pmatrix} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{pmatrix} > 0 \quad (304)$$

ed in forma generale:

$$\det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \dots \\ c_0 & c_2 & c_4 & c_6 & \dots \\ 0 & c_1 & c_3 & c_5 & \dots \\ 0 & 0 & c_2 & c_4 & \dots \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix} > 0$$

Considerando, ora, specificatamente l'algorithmo SS22, considerando:

$$a_{n+1} = \mu a_n \quad \dot{a}_{n+1} = \mu \dot{a}_n \quad f = 0 \quad (305)$$

e inserendo tali relazioni in (289 e (391:

$$m \ddot{u}_n + c (\dot{u}_n + \theta_1 \Delta t \ddot{u}_n) + k \left(u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1}{2} \theta_2 \Delta t^2 \ddot{u}_n \right) = 0 \quad (306)$$

da cui:

$$-\mu u_n + u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1}{2} \theta_2 \Delta t^2 \ddot{u}_n = 0 \quad (307)$$

$$-\mu \dot{u}_n + \dot{u}_n + \Delta t \ddot{u}_n + \theta_1 \Delta t \ddot{u}_n = 0 \quad (308)$$

Operando, quindi, il cambio di variabili come descritto in (302:

$$c_0 z^2 + c_1 z + c_2 = 0 \quad (309)$$

essendo:

$$c_0 = 4m + (4\theta_1 - 2)\Delta t c + 2(\theta_2 - \theta_1)\Delta t^2 k$$

$$c_1 = 2\Delta t c + (2\theta_1 - 1)\Delta t^2 k$$

$$c_2 = \Delta t^2 k$$

La condizione di stabilità secondo Routh-Hurwitz sarà:

$$c_0 > 0, \quad c_1 \geq 0, \quad \det \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} > 0$$

o semplicemente:

$$c_0 > 0, \quad c_1 \geq 0, \quad c_2 > 0 \quad (310)$$

Ponendo, ad esempio, $\theta_2 = 0$, la condizione (310 risulta equivalente alla scrittura del sistema:

$$\begin{aligned} 2m + (2\theta_1 - 1)\Delta t c - \theta_1 \Delta t^2 k &\geq 0 \\ 2c + (2\theta_1 - 1)\Delta t c &\geq 0 \end{aligned} \quad (311)$$

In particolare, dalla seconda equazione discende la condizione:

$$\theta_1 \geq \frac{1}{2}$$

Ponendo, nello specifico, $\theta_1 = \frac{1}{2}$ dalla prima equazione di (311) si ottiene:

$$\Delta t^2 \leq \frac{4m}{k} \quad (312)$$

Tale condizione non permette di ottenere in nessun caso uno schema di tipo esplicito, per questo motivo si pone $\theta_1 > \frac{1}{2}$ da cui:

$$\Delta t < \frac{2\theta_1 - 1}{\theta_1} \frac{c}{k} \quad (313)$$

Il problema della determinazione degli autovalori è, come già fatto notare, tutt'altro che semplice. Nei problemi di dinamica strutturale spesso e volentieri si fa utilizzo di una procedura che permetta la valutazione delle performance relative al singolo elemento. Considerando, pertanto, il singolo elemento e supponendo che lo stesso sia dotato di matrice di massa consistente e di un singolo grado di libertà, la condizione di stabilità può essere espressa come:

$$\Delta t < \Delta t_{cr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{h}{c} \quad (314)$$

nella quale h indica la taglia dell'elemento e C rappresenta la *velocità di propagazione dell'onda elastica all'interno dell'elemento*, definita attraverso la relazione:

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (315)$$

È, quindi, interessante notare che è proprio il rapporto tra la taglia minore fra tutti gli elementi presenti nel modello FEM e la velocità di propagazione dell'onda elastica (che dipende unicamente dalle caratteristiche fisiche e meccaniche del materiale) a governare la stabilità dell'algoritmo. Oltre a questo, appare anche evidente che, perché sia assicurata la stabilità, più raffinata è la mesh, minore sarà l'incremento Δt_{cr} e quindi l'incremento massimo possibile; questo si traduce in un doppio effetto negativo sul costo computazionale. Ecco che, quindi, nelle analisi dinamiche risulta estremamente importante verificare l'assenza di elementi di dimensione troppo ridotta all'interno della mesh poiché gli stessi provocano una riduzione complessiva del Δt con conseguente incremento esponenziale del tempo totale di calcolo.

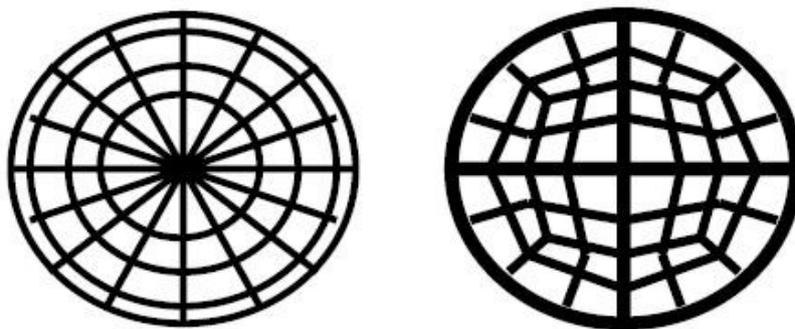


Figura 57: Confronto mesh degenera (sinistra) e mesh di buona qualità (destra), [70]

Per la gestione accurata del tempo di calcolo è preferibile, dal punto di vista pratico, avere una mesh con tutti gli elementi di taglia simile, come quella mostrata a destra in Figura 57.

6.2.4 Mass Lumping

Come fatto notare già più volte, il costo computazionale della analisi FEM dinamiche è estremamente elevato, per cui vengono prese in considerazione una serie di operazioni per abbattere parzialmente l'onere di calcolo. Nello specifico, è possibile osservare che una *diagonalizzazione della matrice delle masse* risulta essere molto conveniente in tal senso, poiché permette di disaccoppiare le equazioni. Tale procedura prende

il nome di *mass lumping* e consiste, come già detto, nel concentrare gli elementi non nulli di $[\mathbf{M}]$ sulla diagonale principale, conservando però in ogni caso la massa totale. Esistono tre metodi:

- *somma degli elementi sulla riga:*

$$\bar{M}_{ii} = \sum_{j=1}^N M_{ij}$$

- *diagonal scaling:*

$$\bar{M}_{ii} = a M_{ii}$$

- *valutazione della matrice di massa con formule di quadratura unicamente sui nodi*, il che porta, date le funzioni di forma tipiche del FEM, ad una matrice di massa diagonale;

Si noti che nelle precedenti espressioni con \bar{M}_{ii} si sono indicati i termini sulla diagonale della *matrice di massa lumped*, unici elementi non nulli della stessa.

Ovviamente le diverse procedure per la diagonalizzazione portano, inevitabilmente, a risultati differenti e non si può dire a priori quale metodologia sia la migliore, in quanto questo dipende dal caso specifico. Inoltre, è bene tenere conto del fatto che il risparmio in termini di costo computazionale ha ripercussioni sull'accuratezza dei risultati, per cui se se ne può fare meno si cerca di evitare un utilizzo troppo massiccio del *mass lumping*.

6.3 Problemi di Dinamica non Lineare

Come fatto notare in precedenza, i problemi dinamici non lineari necessitano di un approccio risolutivo completamente computazionale, poiché i metodi analitici non risultano applicabili. Si consideri, a tal proposito, una formulazione del problema tramite algoritmo GN22:

$$\{\tilde{\mathbf{u}}(t_{n+1})\} \approx \{\mathbf{u}\}_{n+1} \quad (316)$$

Introducendo tale espressione all'interno dell'equazioni di equilibrio dinamico è possibile ottenere, per ogni istante di tempo, l'espressione in forma di residuo:

$$\Psi_{n+1} = \{\mathbf{f}\}_{n+1} - [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} - \mathbf{P}_{n+1} = \{\mathbf{0}\} \quad (317)$$

nella quale:

$$\mathbf{P}_{n+1} = \int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_{n+1} d\Omega = \mathbf{P}(\{\mathbf{u}\}_{n+1}) \quad (318)$$

Facendo riferimento all'algoritmo GN22 è possibile scrivere:

$$\{\mathbf{u}\}_{n+1} = \{\mathbf{u}\}_n + \Delta t \{\dot{\mathbf{u}}\}_n + \frac{1}{2}(1 - \beta_2)\Delta t^2 \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n + \frac{1}{2}\beta_2 \Delta t^2 \{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} \quad (319)$$

$$\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1} = \{\dot{\mathbf{u}}\}_n + (1 - \beta_1)\Delta t \{\ddot{\mathbf{u}}\}_n + \beta_1 \Delta t \{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1} \quad (320)$$

Si noti che β_1 e β_2 sono quantità scelte a priori, motivo per cui (317), (319) e (320) costituiscono un sistema di tre equazioni nelle tre incognite $\{\mathbf{u}\}_{n+1}$, $\{\dot{\mathbf{u}}\}_{n+1}$ e $\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1}$.

Essendo in presenza di un problema di tipo non lineare, la risoluzione richiede, come fatto notare in precedenza, una procedura di tipo iterativo, considerando un classico *schema di Newton-Raphson*:

$$\boldsymbol{\Psi}_{n+1}^{k+1} \simeq \boldsymbol{\Psi}_{n+1}^k + \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^k}{\partial \{\mathbf{u}\}_{n+1}} d\{\mathbf{u}\}_{n+1}^k = \{\mathbf{0}\} \quad (321)$$

avendo definito l'incremento della soluzione come:

$$\{\mathbf{u}\}_{n+1}^{k+1} = \{\mathbf{u}\}_{n+1}^k + d\{\mathbf{u}\}_n^k$$

Il processo iterativo procede fino a che $\{\mathbf{u}\}_{n+1}^1 = \{\mathbf{u}\}_n^k$.

Da (321), invertendo ed introducendo la matrice di rigidezza tangente $[\mathbf{K}_T]$:

$$d\{\mathbf{u}\}_n^k = [\mathbf{K}_T^k]^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{n+1}^k \quad (322)$$

nella quale la matrice di rigidezza all'iterata k $[\mathbf{K}_T^k]$ è stata definita come:

$$[\mathbf{K}_T^k] = - \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^k}{\partial \{\mathbf{u}\}_{n+1}} \quad (323)$$

e tenendo conto di (317) e (319):

$$[\mathbf{K}_T^k] = - \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^k}{\partial \{\mathbf{u}\}_{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{P}^k}{\partial \{\mathbf{u}\}_{n+1}} + [\mathbf{M}] \frac{\partial \{\ddot{\mathbf{u}}\}_{n+1}}{\partial \{\mathbf{u}\}_{n+1}} = \int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] d\Omega + \frac{2}{\beta_2 \Delta t^2} [\mathbf{M}] \quad (324)$$

Il processo iterativo prosegue fino a che:

$$\|\boldsymbol{\Psi}_{n+1}^k\| \leq \epsilon \|\boldsymbol{\Psi}_{n+1}^1\| \quad (325)$$

essendo ϵ un generico valore di *tolleranza*, posto solitamente pari alla metà della precisione di macchina.

CAPITOLO VII – Preprocessing

La *fase di preprocessing* consiste nella preparazione del modello ad elementi finiti che verrà analizzato nella *fase di processing* vero e proprio ed i cui risultati saranno successivamente valutati nella *fase di postprocessing*. Il preprocessing rappresenta la fase di maggiore importanza poiché coincide con la modellazione vera e propria.

La preparazione del modello può essere divisa in due fasi:

- *modellazione CAD*;
- *modellazione FEM*;

7.1 Scelta dei Parametri Variabili

Come fatto notare in precedenza, il design dell'*impact attenuator (IA)* e dell'*anti-intrusion plate (AIP)* presenta pochi vincoli:

- collegamento mediante un minimo di 8 viti M8 o sistema equivalente;
- dimensioni minime IA ammesse: 200 mm x 200 mm x 100 mm (rispettivamente x, y e z nel sistema di riferimento veicolo);
- decelerazioni massime di picco: 40 g;
- decelerazione media massima: 20 g;
- sezione frontale chiusa;
- energia assorbita minima: 7350 J;
- deflessione massima permanente AIP: 25 mm;
- assenza di cedimento dell'AIP;

Oltre a tali vincoli imposti da regolamento è necessario prestare attenzione al costo ed alla semplicità di costruzione, testing e validazione dei componenti. Inoltre, per vincoli legati ad altre aree del design della vettura (Aerodinamica e Dinamica del Veicolo) l'ingombro massimo in direzione x deve mantenersi al di sotto dei 240 mm.

Il numero di variabili in gioco risulta essere, pertanto, estremamente elevato per cui è necessario. Appare da subito evidente come l'*IA* lavori sotto carico di compressione, motivo per cui una prima serie di analisi ha permesso di determinare una particolare forma, ribattezzata *tubolare a semionde*, che permettesse di massimizzare la resistenza in tal senso. Fissata una geometria di massima per l'*IA*, si è deciso di condurre una serie di analisi per lo studio di tre variabili, ritenute le più significative:

- *numero di semi-onde* della configurazione tubolare;
- materiale dell'*IA*;
- configurazione dell'*AIP*;

Entrando maggiormente nello specifico, per quanto riguarda:

- il *numero di semi-onde* della configurazione tubolare si è deciso di focalizzare l'attenzione su due configurazioni:
 - *5x3 semionde*: geometria con 5 semionde in direzione y vettura e 3 semionde in direzione z vettura;
 - *5x2 semionde*: geometria con 5 semionde in direzione y vettura e 2 semionde in direzione z vettura;

- il materiale dell'IA si è studiato l'utilizzo di:
 - *Al-7075*;
 - *CFRP*;
- la configurazione dell'AIP le due versioni proposte sono:
 - piastra massiva da 10 mm in *Al-7075*;
 - piastra sandwich con cuore in *honeycomb* di alluminio e skin in *CFRP*;

7.2 Modellazione CAD

Per la fase di *modellazione CAD* si è utilizzato il software commerciale *CATIA* (acronimo di *Computer Aided Three dimensional Interactive Application*) per le modellazioni più complesse (*core dell'honeycomb* dell'AIP e *tubolare a semionde* per l'IA), mentre, per la modellazione delle parti più semplici (AIP massivo in *Al-7075* e skin per l'AIP con configurazione *honeycomb*) ci si è limitati all'utilizzo delle routine *Hypermesh* che, per compiti abbastanza semplici come quelli citati, risultano più che sufficienti.

7.2.1 Modellazione CAD AIP

Come detto in precedenza, per l'anti-intrusion plate (AIP) sono state previste due configurazioni differenti:

- piastra massiva da 10 mm in *Al-7075*;
- piastra sandwich con cuore in *honeycomb* di alluminio e skin in *CFRP*;

La modellazione CAD della prima configurazione è estremamente semplice, per cui si è deciso di utilizzare direttamente la routine CAD implementata nel solutore FEM commerciale *Hypermesh*.

Il primo passo è la creazione di un nodo, posizionato nell'origine che costituirà il centro della faccia superiore dell'AIP. A tale scopo è sufficiente utilizzare la funzione *nodes* presente sotto il menù *Geom* (Figura 58) che permette, appunto, la creazione di nodi, ad esempio specificandone le coordinate (Figura 59).

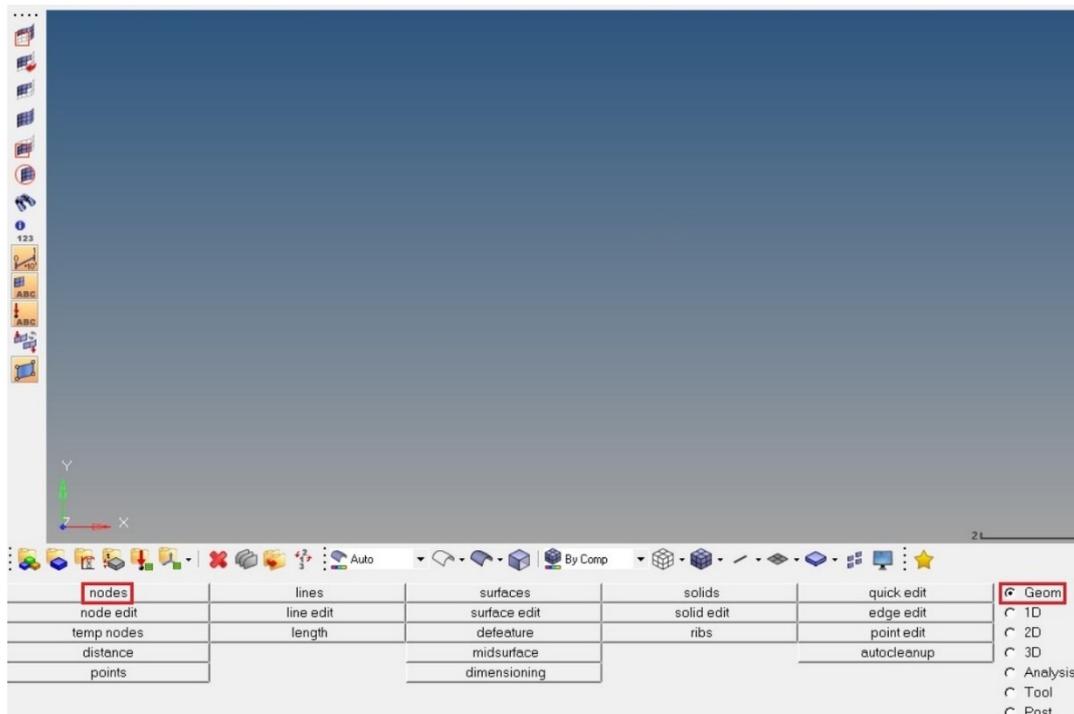


Figura 58: Creazione nodi

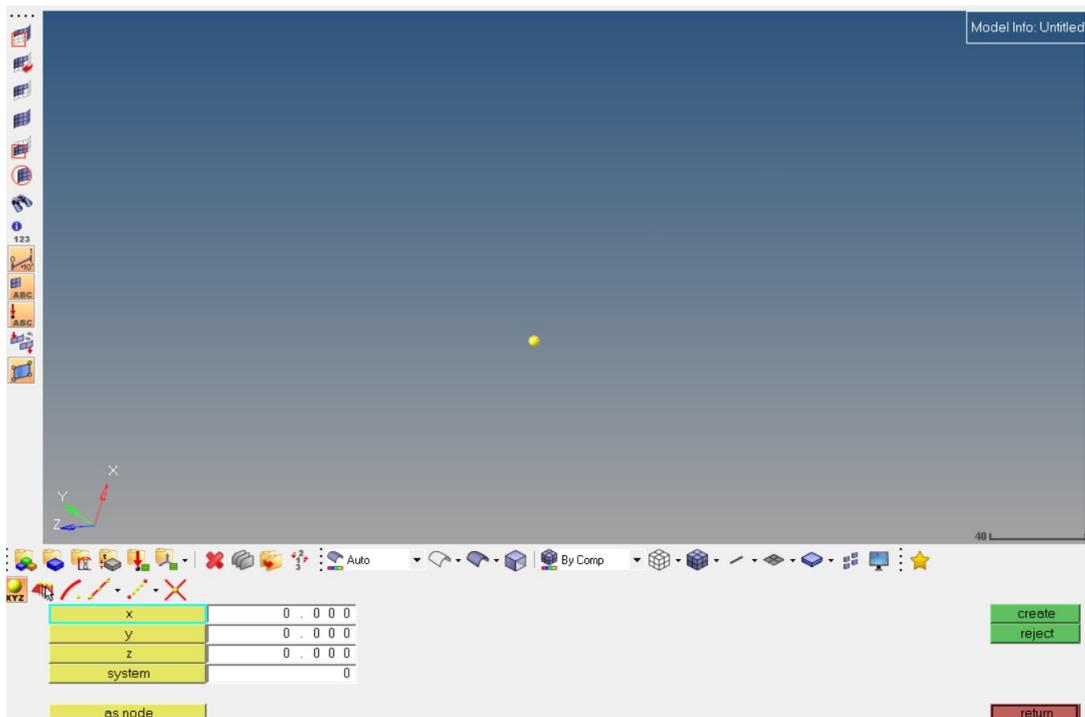


Figura 59: Creazione nodo origine mediante coordinate

Creato il nodo nell'origine è possibile passare alla creazione della superficie; questo è possibile attraverso la funzione *surfaces* presente anch'essa sotto il menù *Geom* (Figura 60) che permette, appunto, la creazione di superfici, ad esempio specificandone (Figura 61):

- *asse della normale alla superficie (x-axis);*
- *punto centrale (B);*
- *dimensione dei lati (size);*

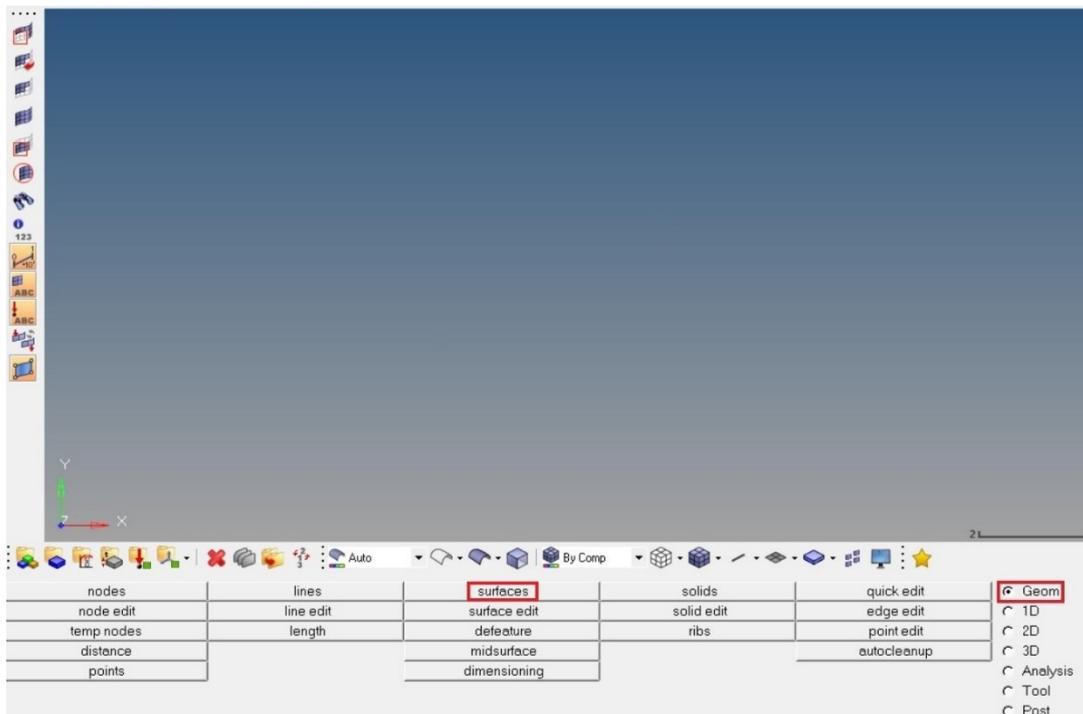


Figura 60: Creazione superficie

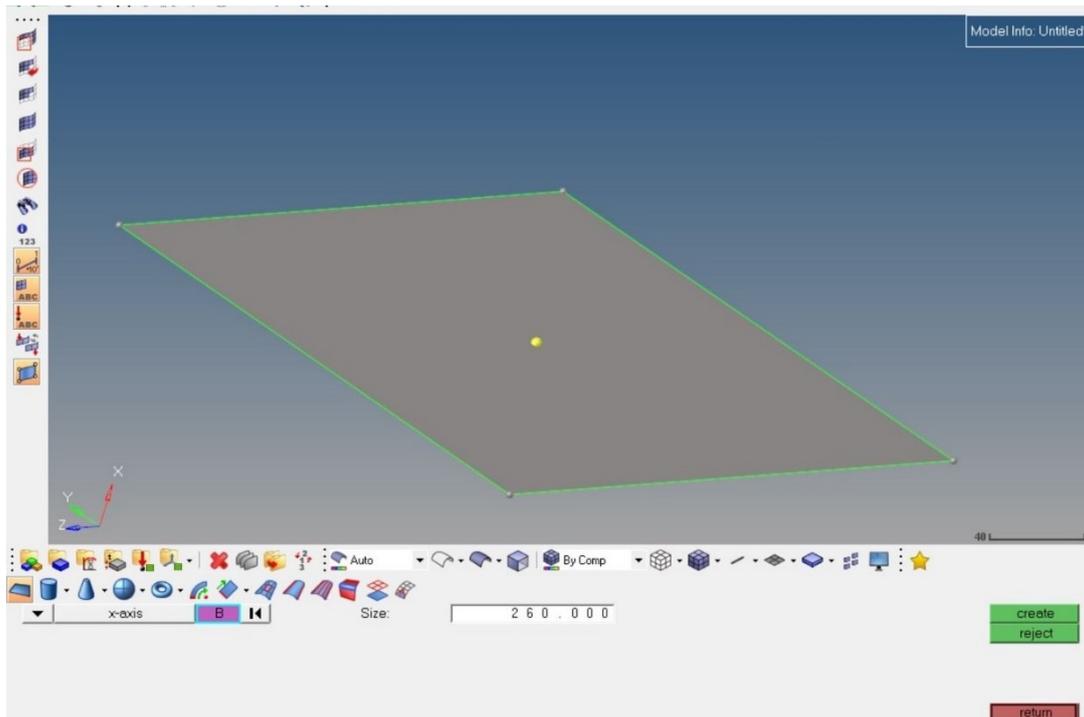


Figura 61: Creazione superficie

Dopo aver creato la superficie che costituirà la faccia superiore dell'AIP è possibile, attraverso la funzione *translate* presente sotto il menu *Tool* (Figura 62) procedere prima alla duplicazione della superficie stessa e poi alla successiva traslazione specificando (Figura 63):

- la *superficie da traslare*;
- la *direzione di traslazione (x-axis)*;
- la *distanza di traslazione (magnitude)*;
- il *verso di traslazione (translate+ o translate-)*;

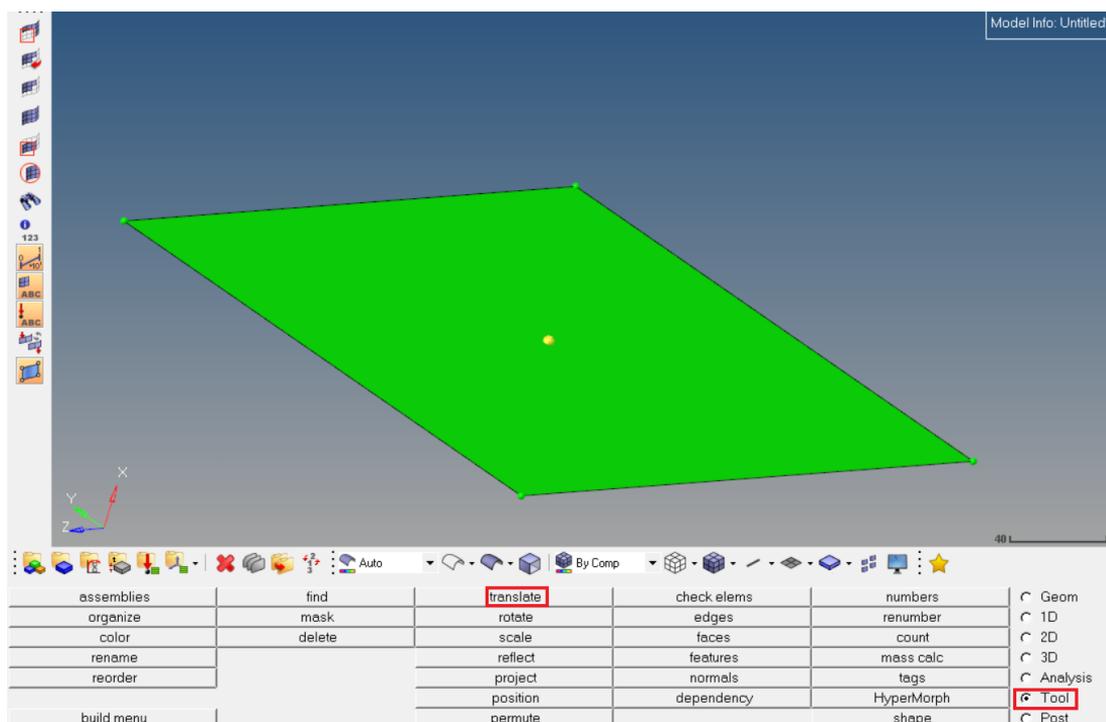


Figura 62: Traslazione

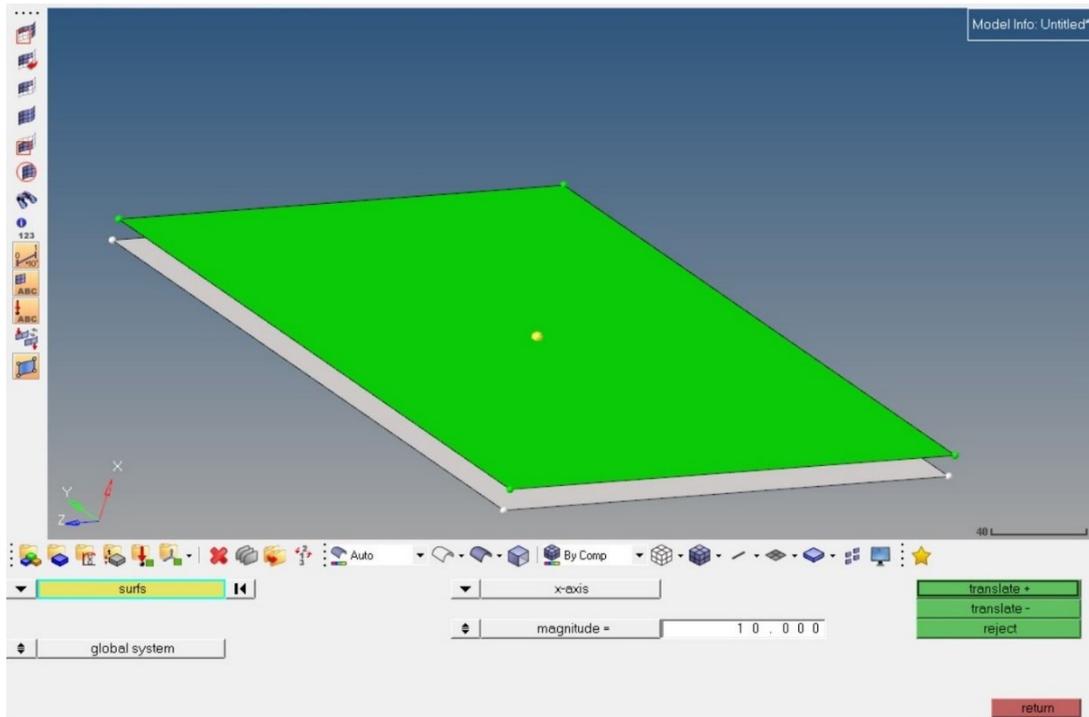


Figura 63: Duplicazione e traslazione superficie

Ottenuta per traslazione anche la superficie che costituirà la faccia inferiore dell'AIP è possibile passare alla creazione del solido vero e proprio mediante la funzione *solids* presente ancora una volta sotto il menù *Geom* (Figura 64). In questo ultimo caso, per la creazione del solido, è sufficiente specificare le superfici tra le quali deve avvenire l'estrusione (Figura 65), cioè è sufficiente selezionare le due superfici create in precedenza.

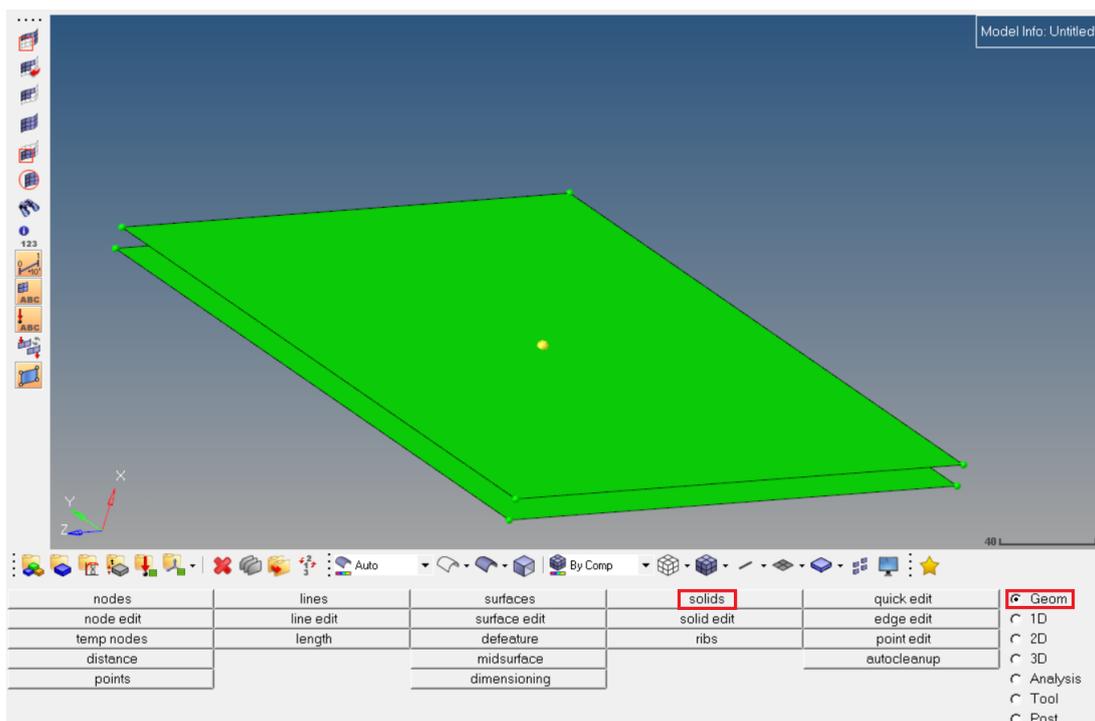


Figura 64: Creazione solido

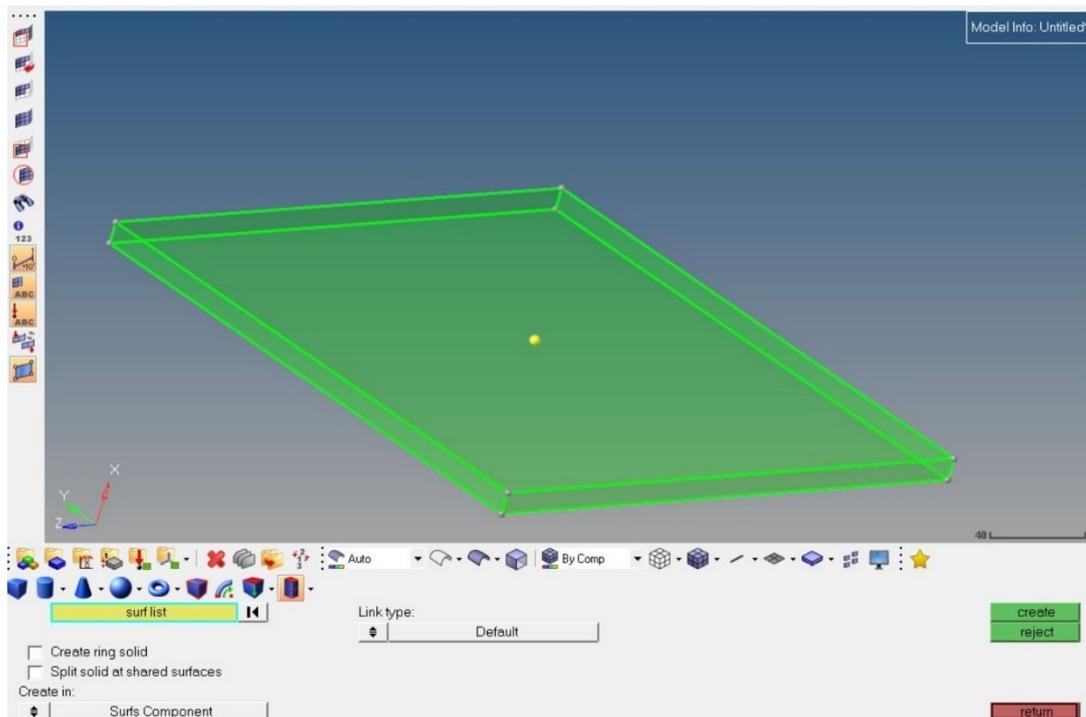


Figura 65: Creazione solido

La modellazione CAD dell'architettura honeycomb è più complessa e necessita, pertanto, dell'utilizzo di software CAD dedicati (CATIA).

Per prima cosa è necessario aprire lo strumento per la modellazione delle superfici, chiamato *Wireframe & Surface Design* presente sotto il menu *Mechanical Design*; essendo, infatti, CATIA un software espressamente orientato alla modellazione CAD, il design 3D e quello 2D sono completamente scissi.

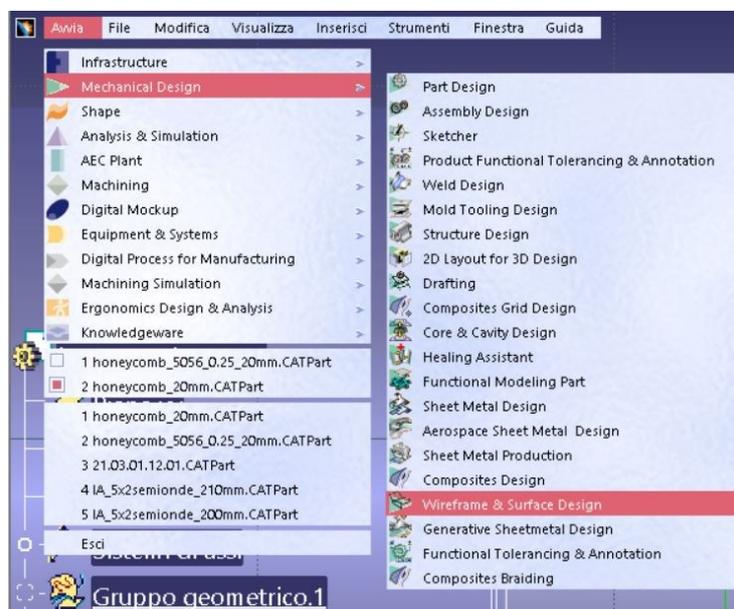


Figura 66: Strumento di modellazione CAD superfici CATIA

Il primo passaggio per la modellazione geometrica dell'honeycomb che costituisce il core del pannello sandwich dell'AIP è la creazione, con relative quote, della *cella elementare esagonale* (Figura 67) come semplice schizzo sul piano y-z. Completato lo schizzo, è possibile utilizzare la *funzione di estrusione* (Figura

68) così da generare una superficie bidimensionale. La funzione estrusione richiede di specificare, oltre ovviamente allo schizzo, anche:

- *direzione di estrusione;*
- *verso di estrusione;*
- *distanza di estrusione;*

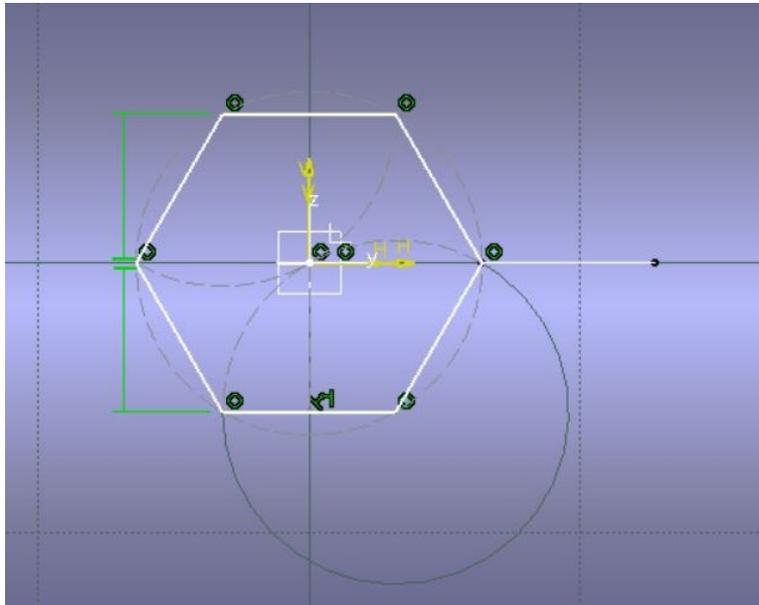


Figura 67: Creazione cella esagonale elementare

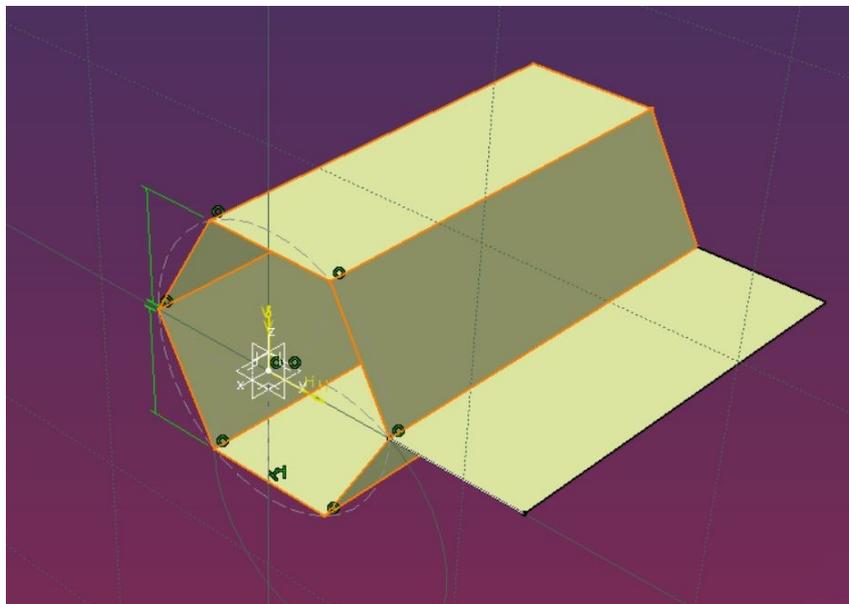


Figura 68: Estrusione cella elementare

Completata l'estrusione è necessario il passaggio da superficie a parte vera e propria, poiché le operazioni successive sono possibili unicamente su componenti dotati di volume. È necessario, quindi, prima il passaggio allo strumento di modellazione 3D chiamato *Part Design*, sempre presente nel menu del *Mechanical Design* (Figura 69) e poi l'assegnazione di uno spessore alle superfici create in precedenza, mediante la funzione *superfici con spessore* (Figura 70).

Tale funzione richiede di specificare:

- *superfici da dotare di spessore;*
- *direzione di estrusione;*
- *spessore;*
- *offset;*

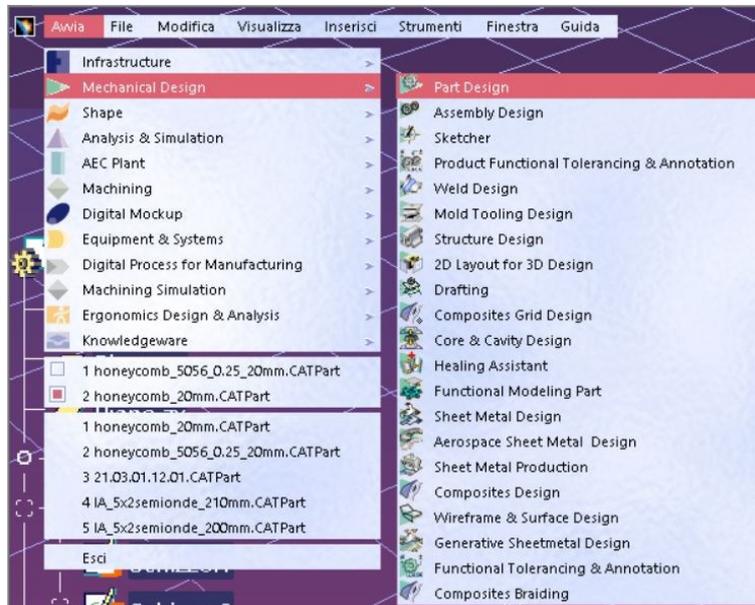


Figura 69: Strumento di modellazione CAD solidi CATIA

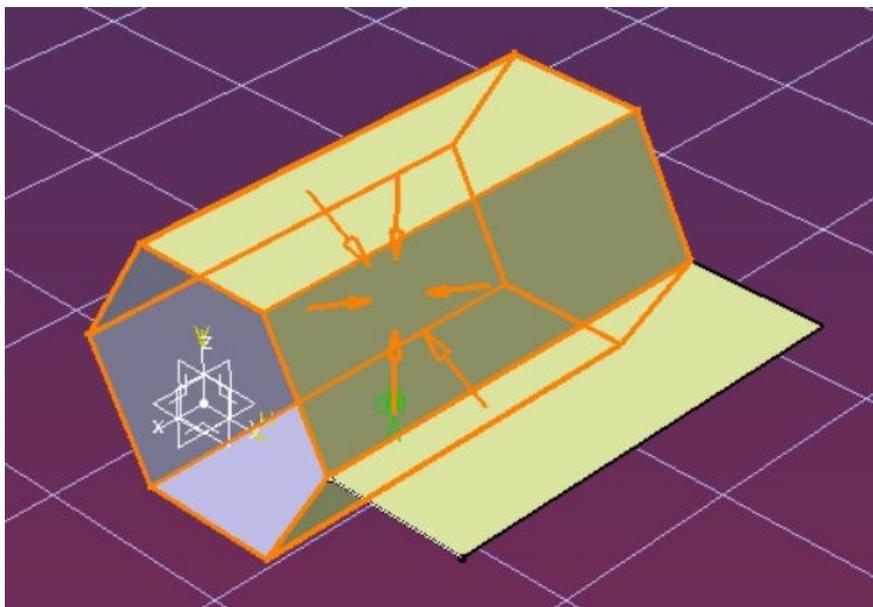


Figura 70: Creazione solido

Ultimata la creazione della cella elementare in formato solido è possibile ripetere tale unità fondamentale in direzione z ed in direzione y mediante una funzione chiamata matrice rettangolare, la quale permette, selezionati *unità ripetitiva*, *numero di ripetizioni* e *direzioni di ripetizione* di ottenere la struttura honeycomb complessiva presentata in Figura 71.

Terminata la fase di modellazione del core del sandwich, è possibile procedere al salvataggio del file come *.std*, formato perfettamente compatibile con Hypermesh.

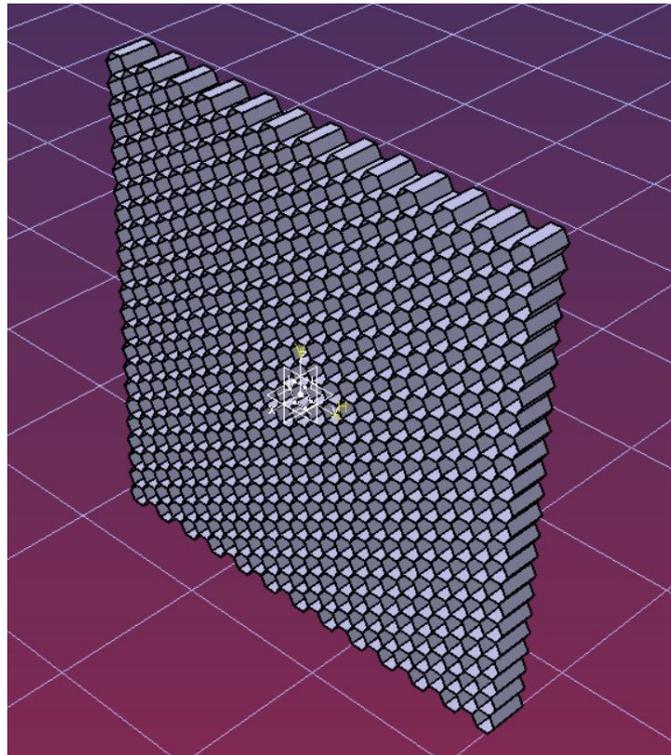


Figura 71: Strumento di matrice rettangolare

Hypermesh consente, tramite l'apposito comando mostrato in Figura 72, l'importazione di interi modelli o, in alternativa, anche della sola parte geometrica da altri file Hypermesh o da CAD.

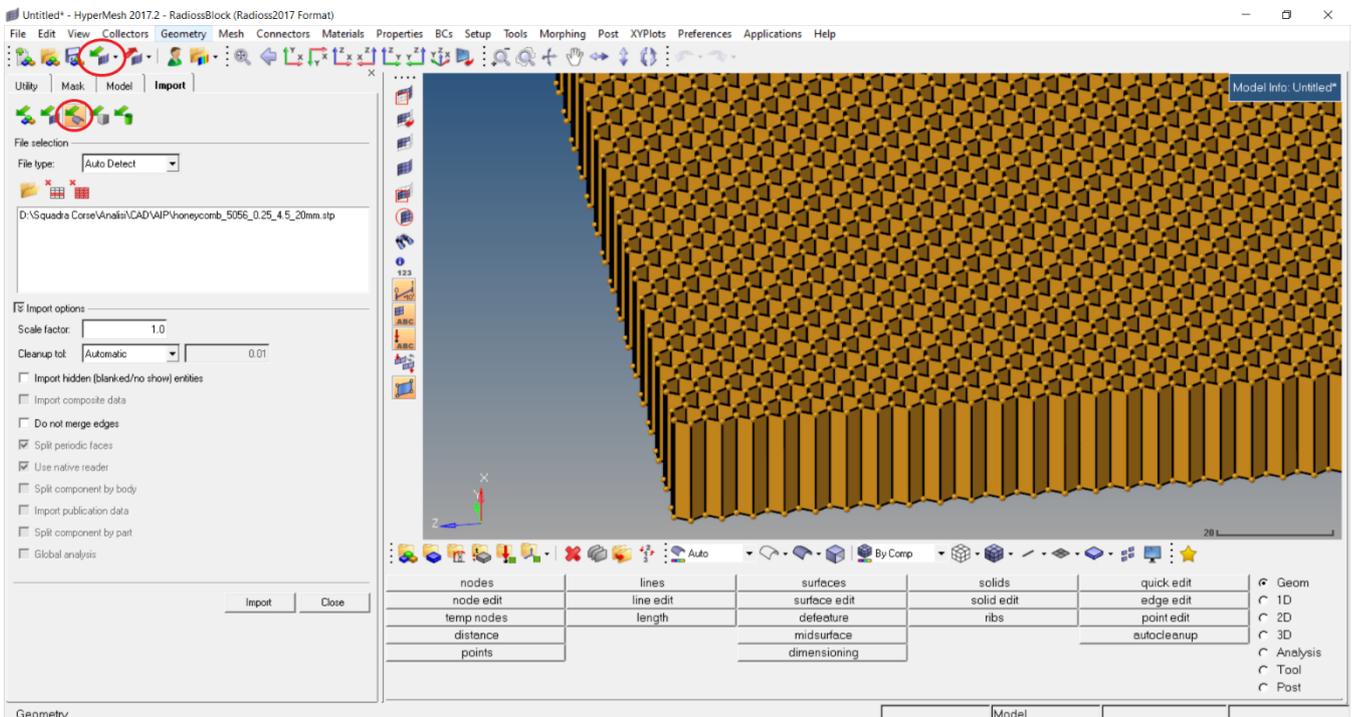


Figura 72: Importazione geometria da CAD

Dopo l'importazione si ottiene, quindi, un corpo 3D in Hypermesh. Essendo le pareti dell'honeycomb estremamente sottili (0.25 in), non risulta conveniente la modellazione mediante elementi solidi, motivo per cui è necessario il passaggio da una geometria 3D ad una 2D, estraendo, quindi, delle superfici medie. Tale operazione è possibile mediante il comando *midsurface* sotto il menu *Geom* (Figura 73 e Figura 74).

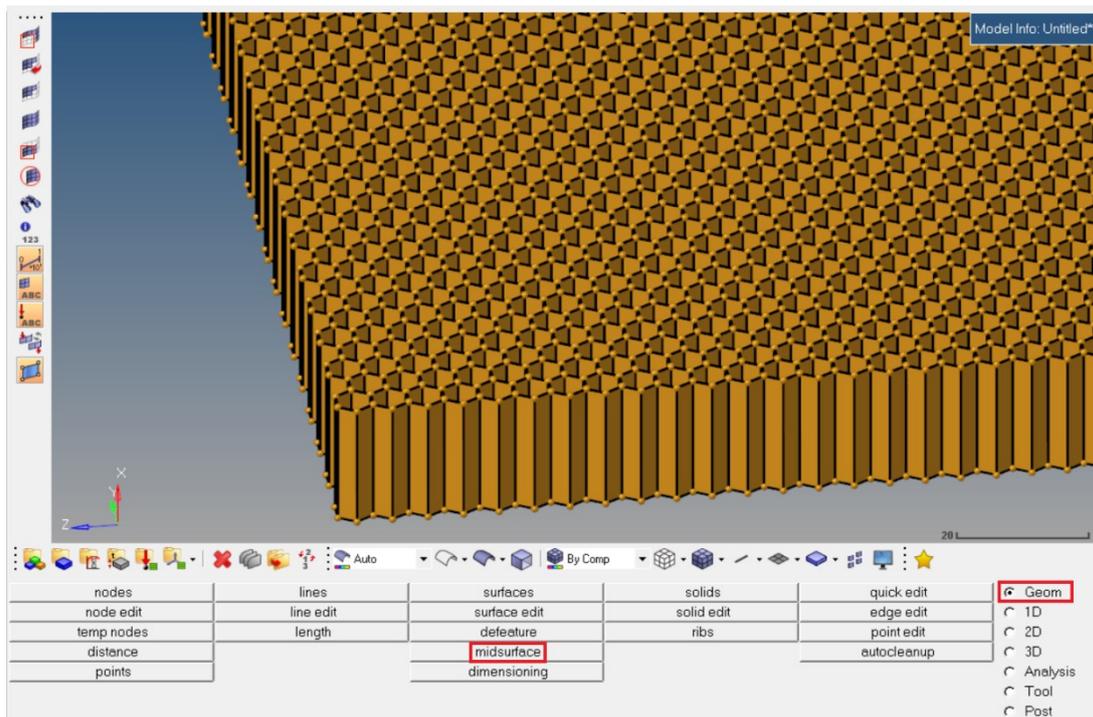


Figura 73: Comando midsurface

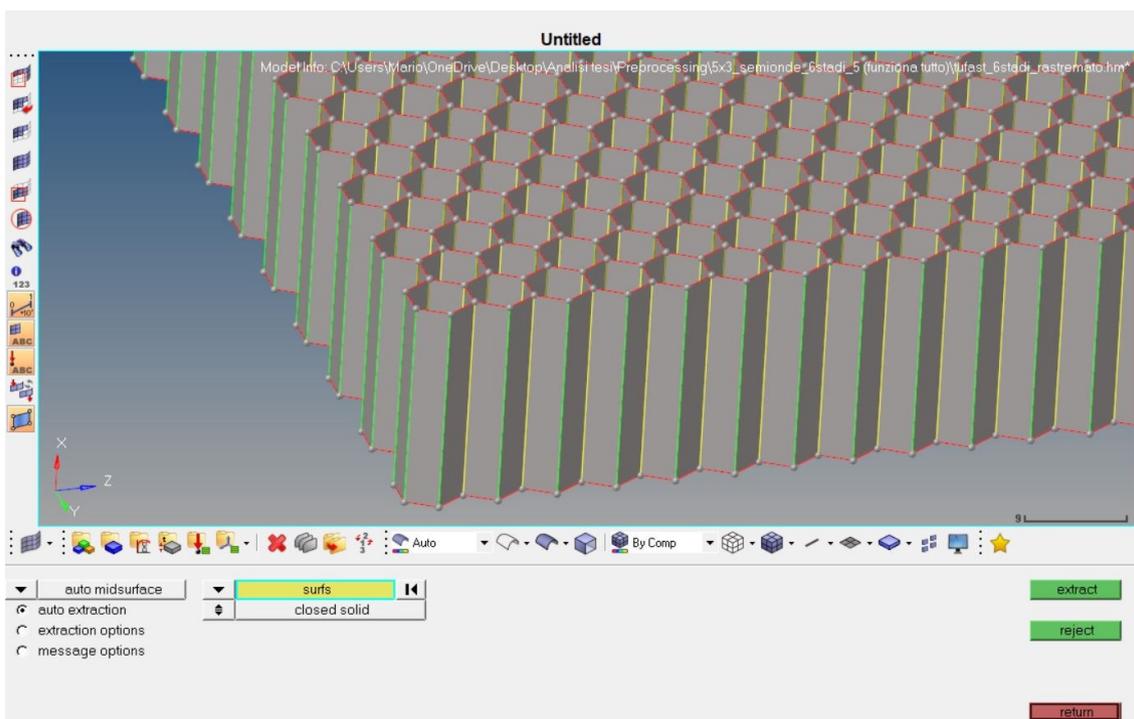


Figura 74: Estrazione superficie media

Ultimate le operazioni sul core del sandwich, è possibile andare a creare anche gli skin dello stesso mediante le routine di Hypermesh. Procedendo, come descritto in precedenza:

1. creare un nodo nel centro dello skin superiore;
2. creare una superficie specificandone asse normale, centro e dimensione dei lati;
3. duplicando e traslando la superficie originale;

Si arriva alla configurazione definitiva presentata in Figura 75.

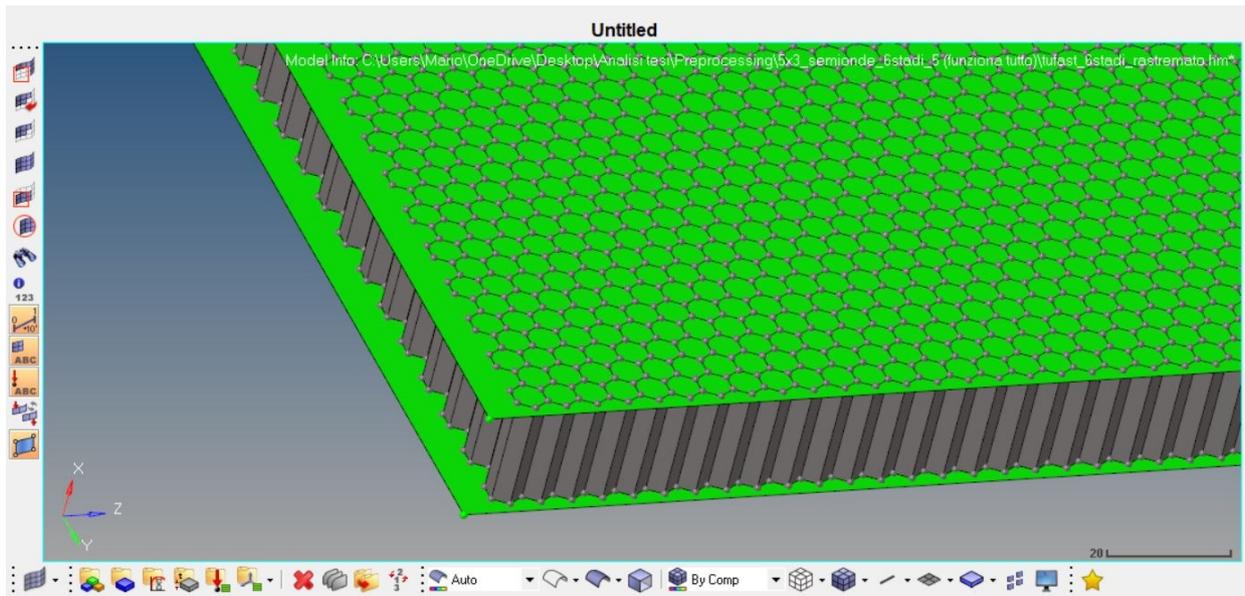


Figura 75: Creazione skin sandwich

7.2.2 Modellazione CAD IA

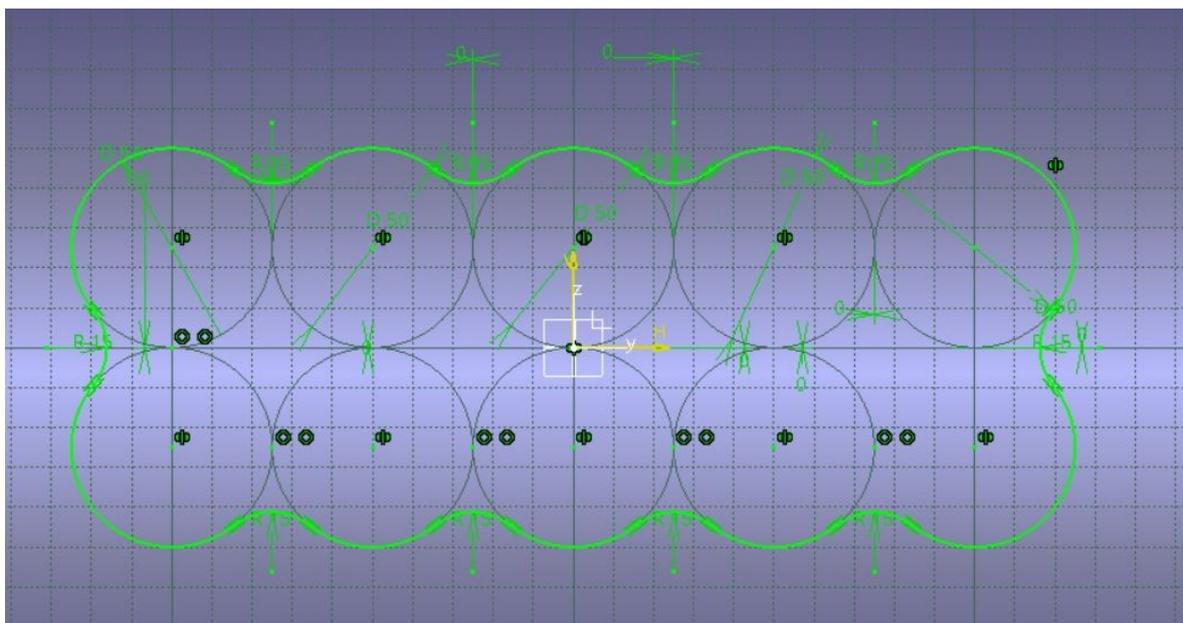


Figura 76: Schizzo base IA 5x2 semionde

Il design della forma *tubolare a semionde* parte dallo schizzo base, costituito da una serie di cerchi tangenti e raccordati tra loro (Figura 76). Si noti che, da regolamento sono richieste, come dimensioni minime:

- 200 mm in direzione x vettura;
- 200 mm in direzione y vettura;
- 100 mm in direzione z vettura;

Per rispondere in maniera efficace a tali vincoli, è richiesto un diametro minimo del singolo cerchio pari a 50 mm, nella configurazione 5x2 semionde, mentre, come mostrato in seguito, nella configurazione 5x3 semionde è possibile ridurre leggermente tale quota.

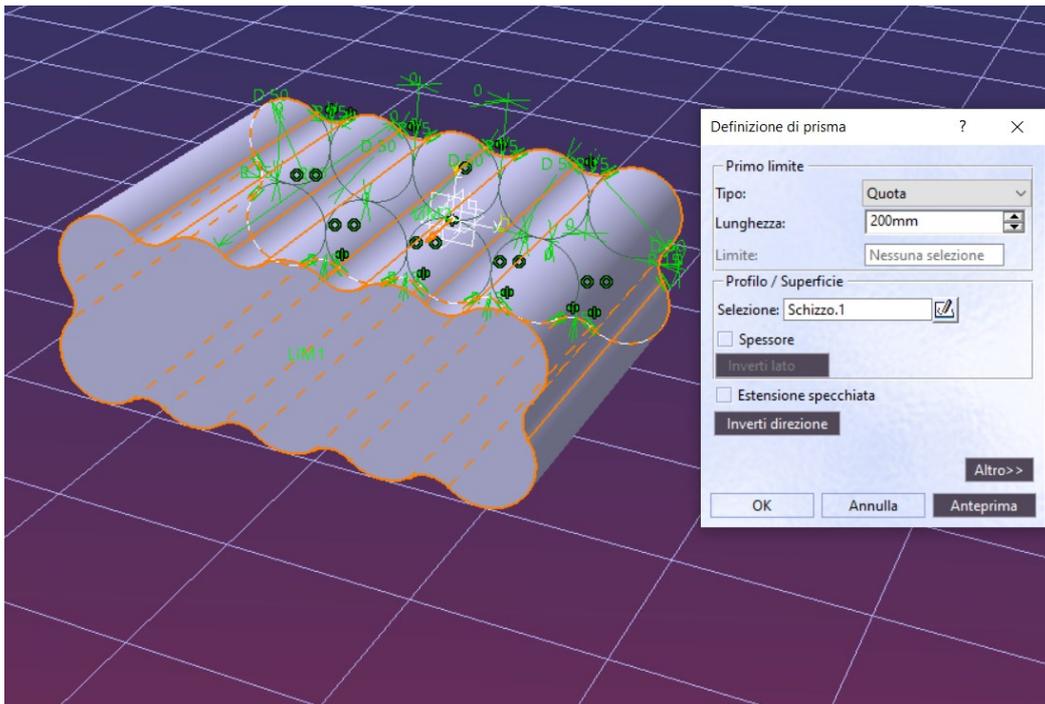


Figura 77: Funzione Prisma

Terminata l'operazione di schizzo è possibile passare all'estrusione della superficie così generata, in maniera tale da produrre un solido. Tale operazione è permessa dalla *funzione Prisma di CATIA* che richiede, oltre allo schizzo, anche di specificare la distanza di estrusione (*lunghezza del prisma*). Sempre coerentemente con i requisiti citati in precedenza, la distanza di estrusione è stata posta pari a 200 mm, cioè il minimo consentito da regolamento, così da poter lasciare un certo margine di manovra sull'AIP.

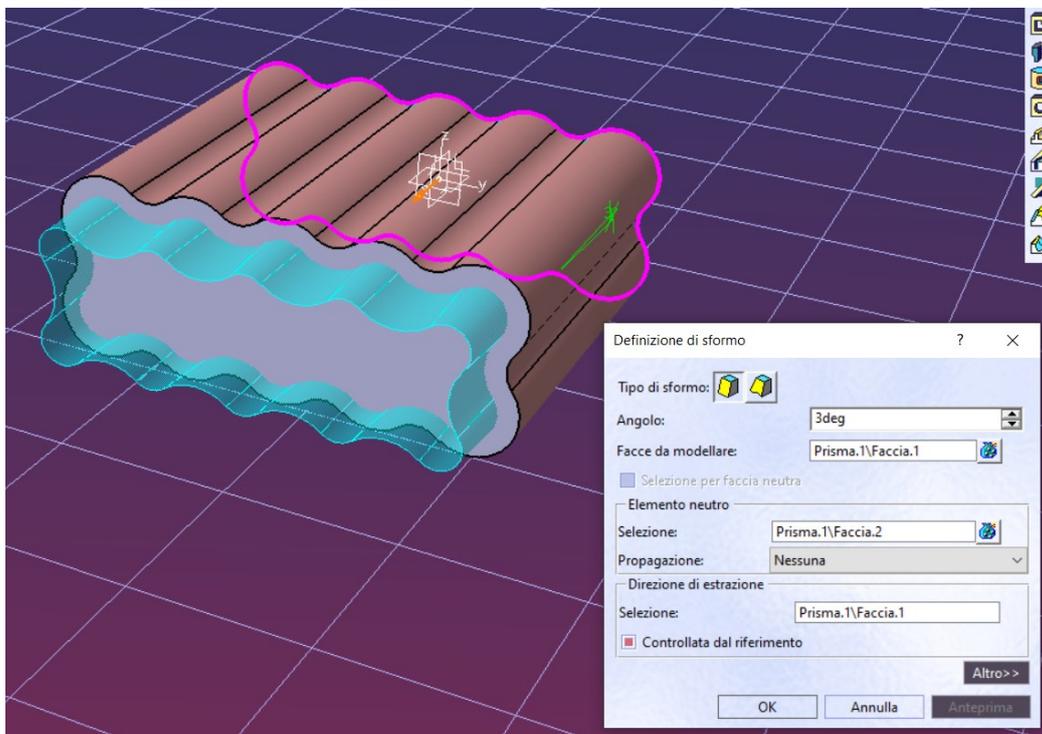


Figura 78: Sforno

Il passo successivo è la rastremazione del solido ottenuto dallo step precedente. Tale operazione è necessaria poiché:

- ha un effetto benefico sulle performance, permettendo una decelerazione più graduale ed un abbassamento della forza impulsiva di contatto che si scarica sull'AIP e che è generata nel momento in cui la barriera tocca l'IA;
- il processo produttivo dei materiali compositi necessita di un certo angolo di spoglia dallo stampo, altrimenti il componente cricca al momento dell'estrazione;

La funzione che permette di ottenere la rastremazione è chiamata *Sformo* (Figura 78) e necessita che si specifichino:

- *prisma da rastremare*;
- *facce da rastremare*;
- *angolo di sformo*;
- *elemento neutro* (facce che non devono subire rastremazione);

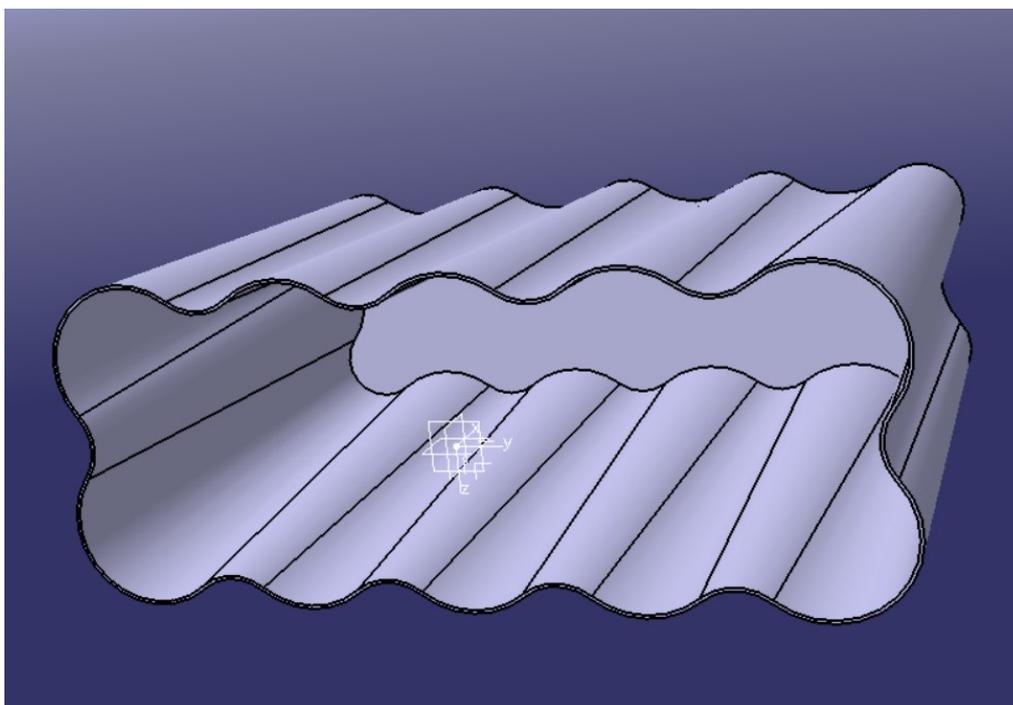


Figura 79: Svuotamento

L'ultima operazione è quella di svuotamento (Figura 79), la quale consente il passaggio da solido massivo a guscio, compatibilmente con la configurazione vuota scelta in tale trattazione. In quest'ultimo step è necessario specificare lo spessore del guscio che si vuole ottenere e quali facce debbano essere eliminate.

Si noti che il processo appena descritto per la configurazione 5x2 semionde è perfettamente analogo anche per la configurazione 5x3 semionde; l'unica variazione tra i due casi è che, nella configurazione 5x3 semionde, come detto in precedenza e come mostrato in Figura 80 è possibile ridurre il diametro dei cerchi tangenti che costituiscono lo schizzo di base. Tale riduzione è possibile poiché l'aggiunta di una semionda in direzione z vettura rende il vincolo dimensionale minimo in tale direzione non stringente come nel caso precedente. Nello specifico tale diametro è stato ridotto fino a 40 mm, poiché al di sotto di tale valore si andrebbe a minare il requisito dimensionale minimo in direzione y vettura.

Anche ora, come nel caso precedente, la geometria CAD dovrà essere importata su Hypermesh e dovrà essere estratta una superficie media tale da permettere la modellazione FEM.

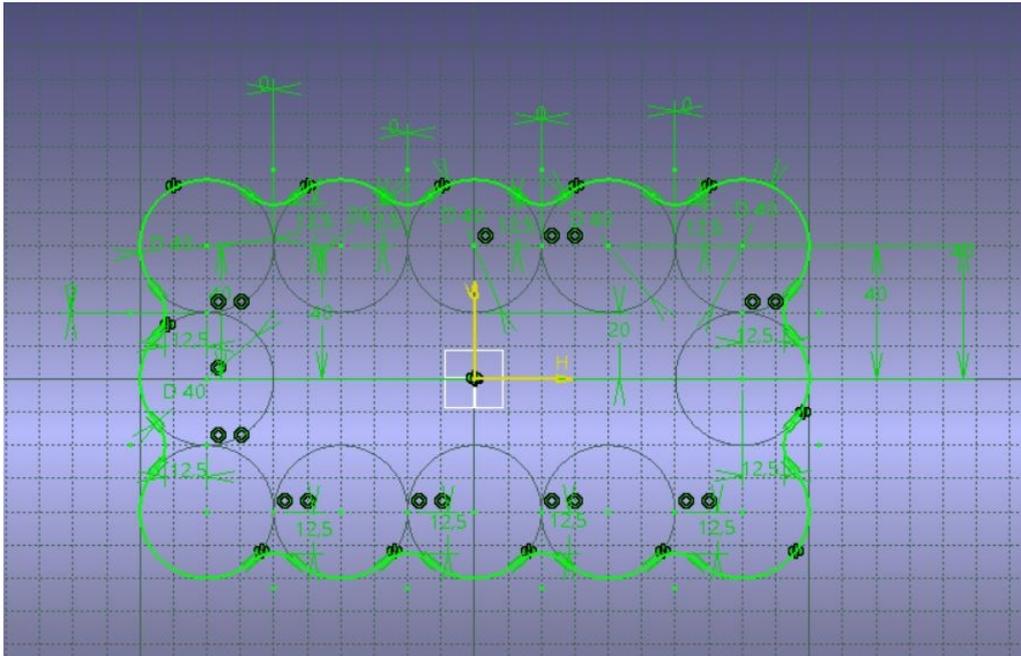


Figura 80: Schizzo base IA 5x3 semionde

7.3 Meshing

L'operazione di meshing è la più importante e più delicata dell'intero processo, poiché da essa dipende la bontà dei risultati che possono essere ottenuti dall'analisi. Esistono algoritmi di generazione automatica di mesh, tuttavia tale metodologia non genera mesh di qualità accettabile se non per geometrie regolari e semplici. Nei casi più complessi, come mostrato nel seguito, è necessario, invece, procedere ad una generazione manuale della mesh. Per la preparazione del modello FEM si è fatto utilizzo del già citato in precedenza software CAE commerciale *Hypermesh* e, in particolare, della routine *Radioss*, focalizzata sulle analisi dinamiche non lineari e sul quelle di crash.

7.3.1 Mesh AIP

Si consideri, per primo, il caso dell'AIP con configurazione classica (piastra in Al-7075 da 10 mm). Da letteratura è noto che l'approssimazione di un solido elastico attraverso un modello di tipo piastra è abbastanza accurato fino ad un rapporto tra spessore e lato maggiore dell'ordine di 1:25, mentre, nel caso in esame, tale rapporto è pari ad 1:26, per cui si è proprio sul limite di validità. Si noti, inoltre, che, dovendo l'AIP essere dimensionato in maniera tale da non subire sfondamento, la valutazione accurata degli stress è estremamente importante. Date tali considerazioni si è deciso di modellare l'AIP in configurazione classica con elementi solidi che, pur causando un incremento sostanziale di costo computazionale, permettono l'ottenimento di risultati molto accurati.

Il primo passo per la generazione di una mesh con elementi solidi è la creazione di una mesh 2D su una faccia del solido in esame. Essendo in questo caso la geometria particolarmente semplice, è possibile utilizzare l'algoritmo di generazione automatica attraverso la funzione *automesh* presente sotto il menu *2D* (Figura 81). Tale funzione permette la generazione di una mesh costituita da elementi di tipo shell specificandone le dimensioni o, in alternativa settando direttamente il numero di elementi da posizionare su ciascun lato. Nel caso in esame si è proceduto proprio in tale seconda maniera, posizionando su ciascun lato

40 elementi, numero sufficiente a descrivere in maniera accurata il comportamento flessionale dell'AIP (Figura 82).

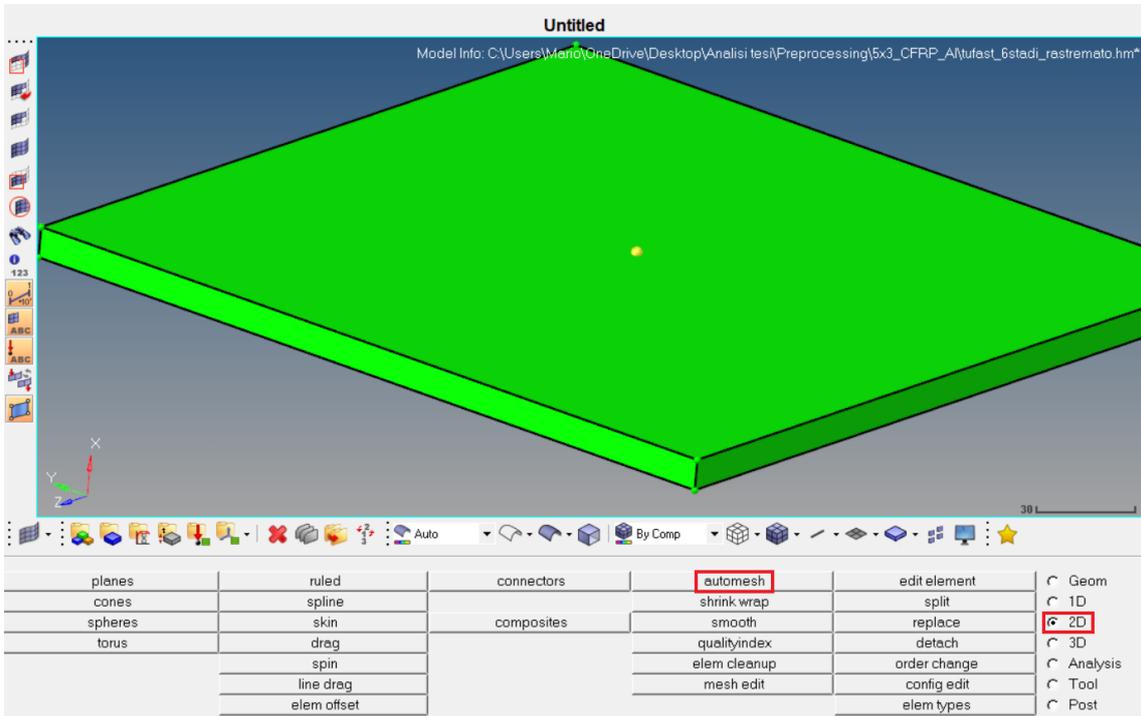


Figura 81: Funzione automesh

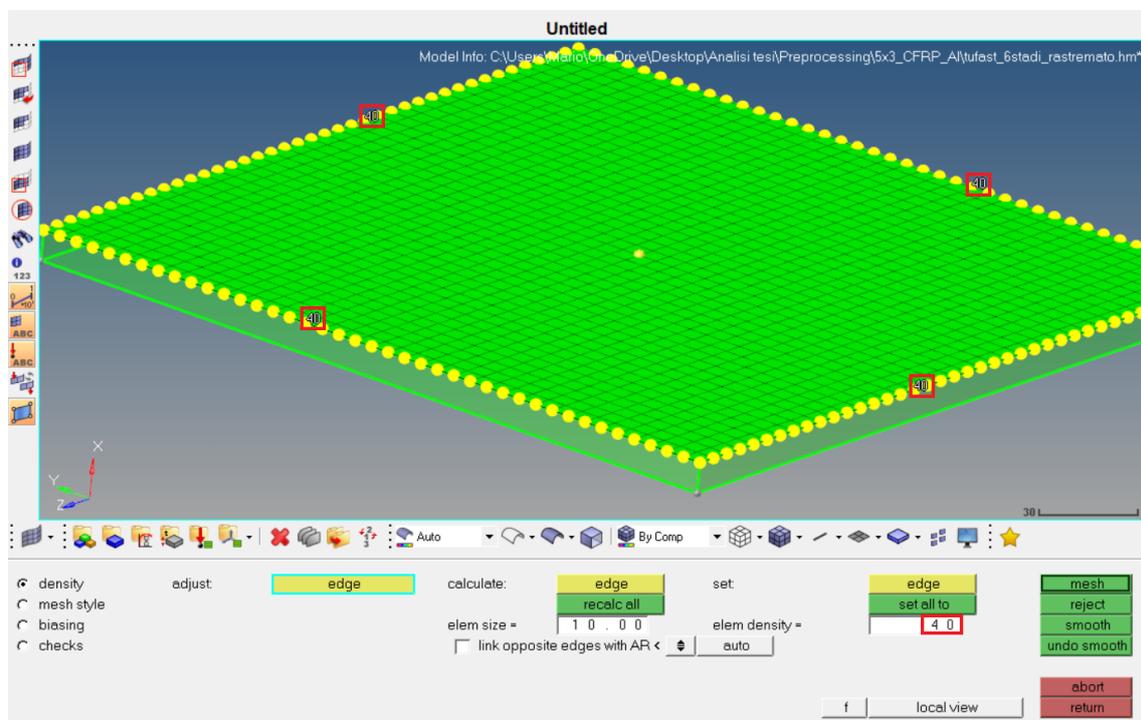


Figura 82: Settaggio numero di elementi

Ultimata la creazione della mesh 2D è possibile passare alla creazione della mesh solida vera e propria, operazione possibile tramite il comando *solid map* nel menu 3D (Figura 83). Tale comando permette la generazione di elementi solidi all'interno di un certo volume che deve essere specificato selezionando il *solido* da meshare, gli *elementi da cui partire* (elementi della mesh 2D creati in precedenza), la *superficie di destinazione* ed il *numero di elementi* (o in alternativa la *taglia*) che devono essere posizionati nello spessore

(Figura 84). Nel caso in esame si è deciso di utilizzare 3 soli elementi nello spessore poiché nei materiali metallici il taglio risulta essere abbastanza ridotto, per cui un numero limitato di elementi permette un alleggerimento dell'onere computazionale senza perdere, allo stesso tempo, troppa accuratezza.

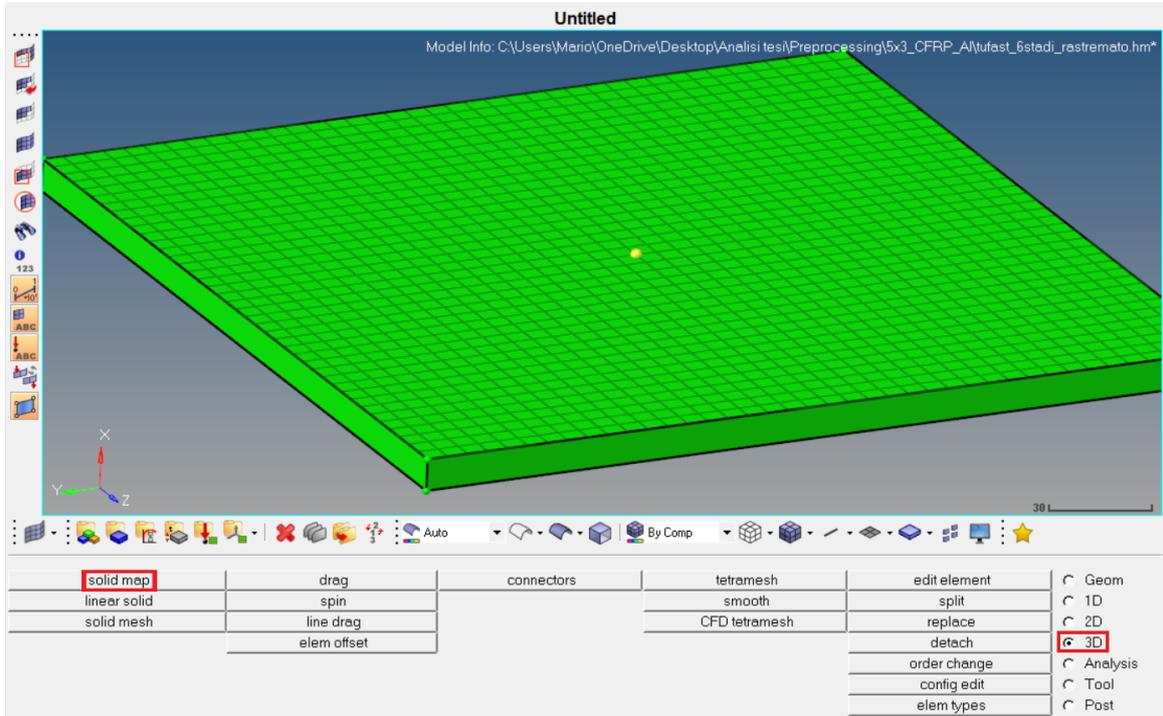


Figura 83: Solid map

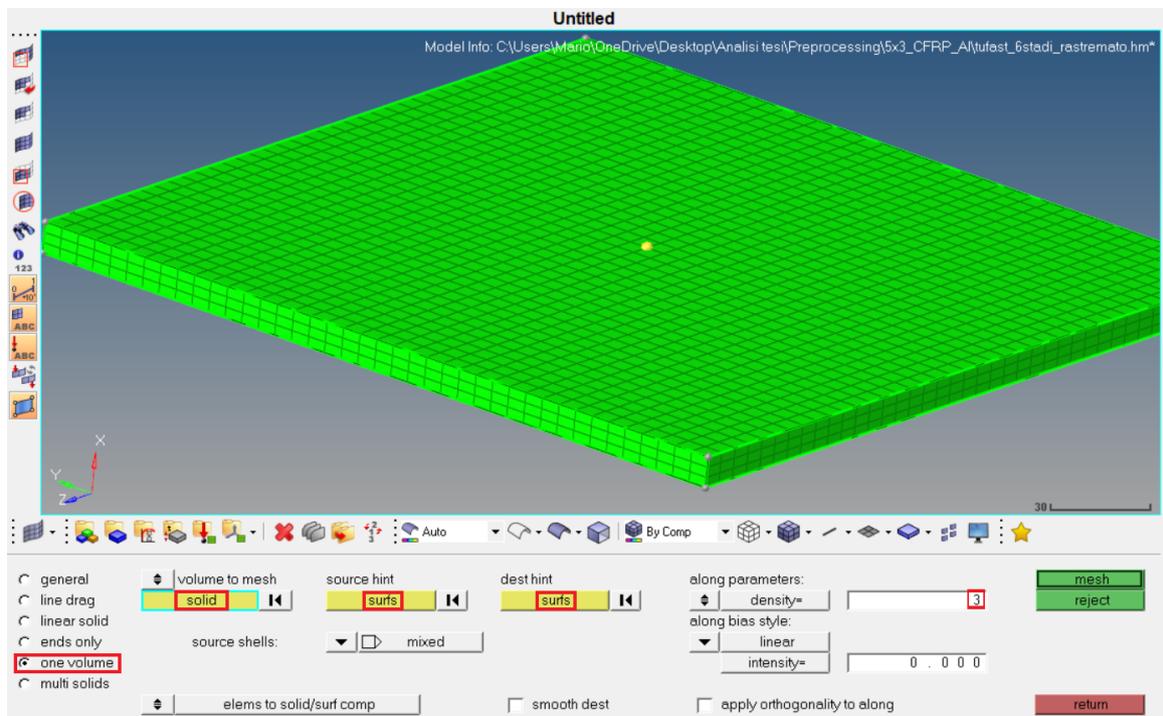


Figura 84: Generazione mesh 3D

Dopo aver creato la mesh è possibile verificarne la qualità attraverso la funzione *quality index*, presente sotto il menu 2D (Figura 85). Tale funzione permette la valutazione di vari parametri atti a quantificare la bontà della mesh come *dimensione massima e minima degli elementi*, *Jacobian Ratio*, *aspect ratio*, *skewness* e *warpage*; tali parametri sono condensati in un unico indice che definisce la bontà della discretizzazione,

indicato come *comp. QI*, il quale deve essere mantenuto quanto più possibile vicino allo 0. Come è possibile notare da Figura 86, la mesh di componenti geometricamente semplici non genera alcun problema, infatti non si hanno elementi che falliscono il controllo sui parametri precedenti ed il *comp. QI* risulta molto basso (0.04).

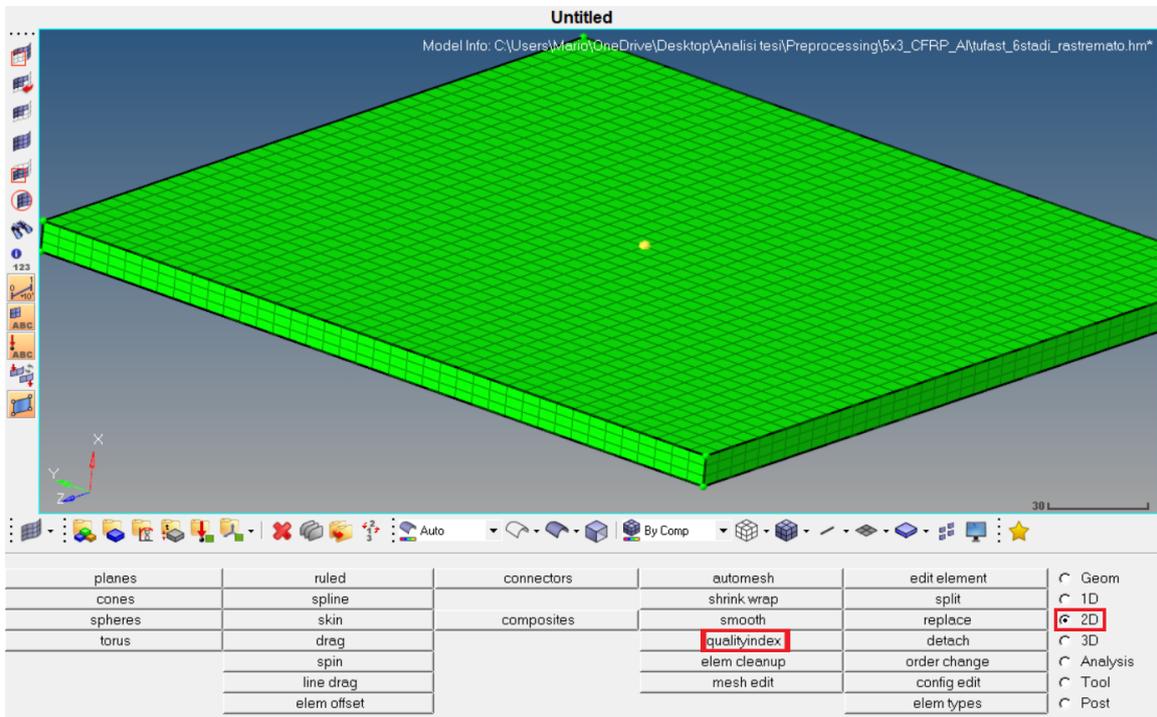


Figura 85: Verifica qualità mesh

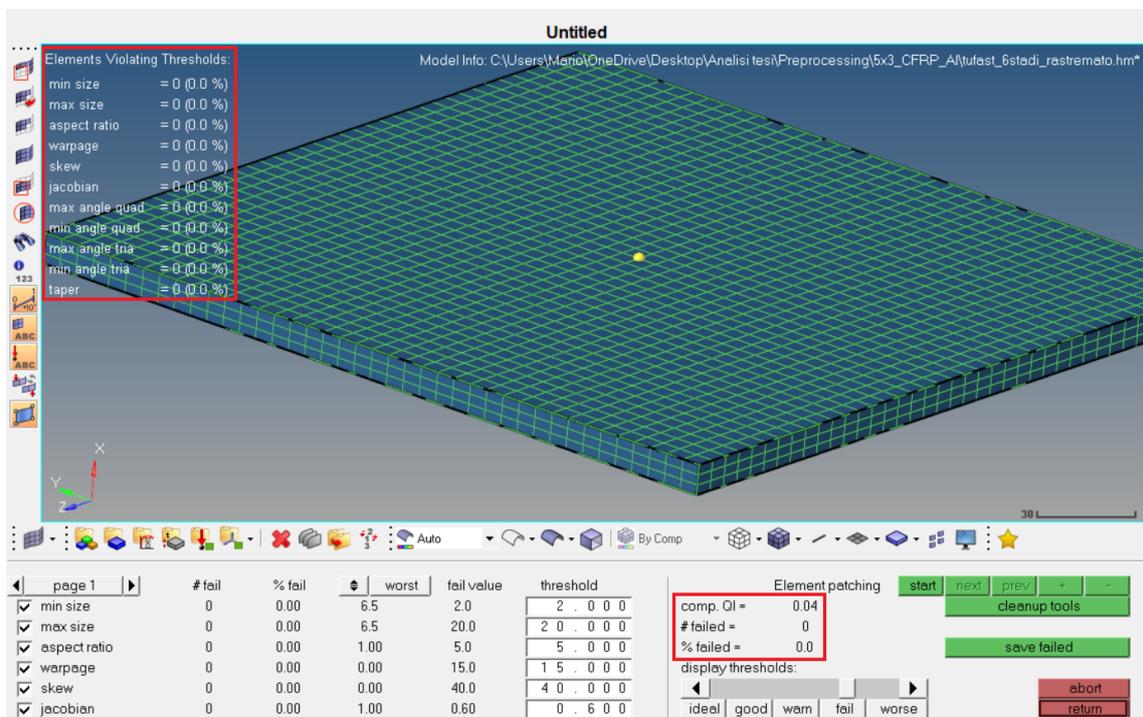


Figura 86: Verifica qualità mesh

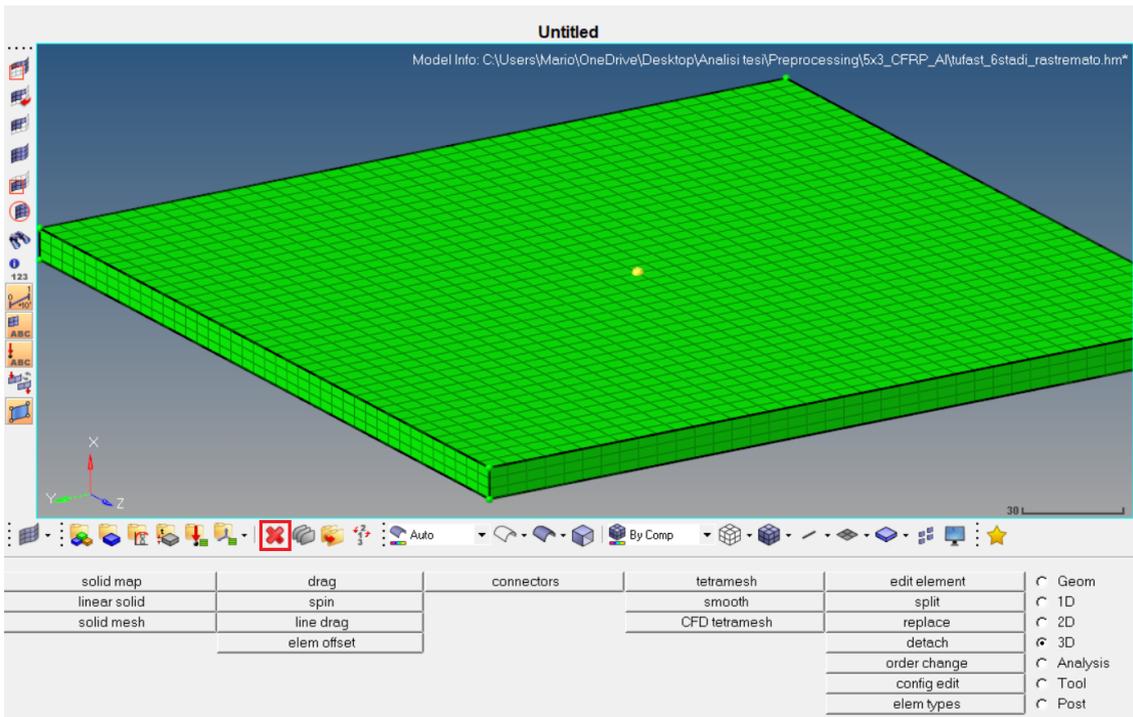


Figura 87: Comando delete

Terminata anche la fase di controllo, il processo di meshing per l'AIP in configurazione classica può essere ritenuto concluso, per cui non resta che cancellare gli elementi della mesh 2D da cui si era partiti per la creazione della mesh solida (Figura 87 e Figura 88).

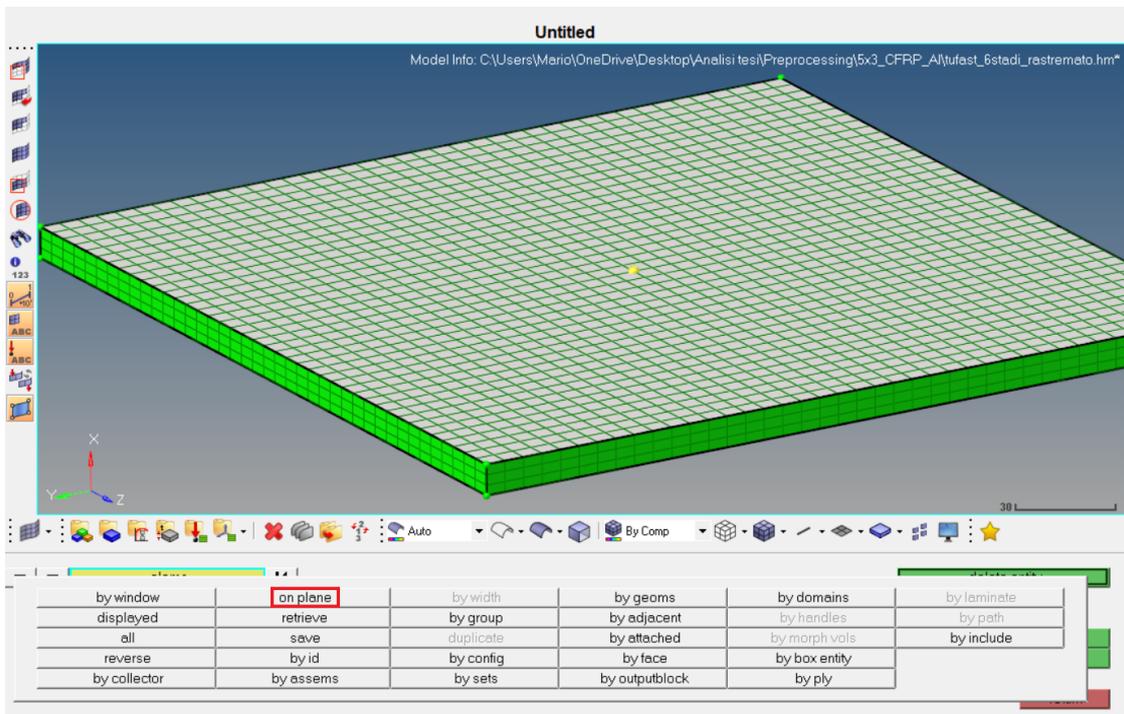


Figura 88: Eliminazione elementi 2D di origine

Si consideri, ora, il caso dell'AIP in configurazione sandwich con il core in honeycomb di alluminio e gli skin in CFRP. La modellazione FEM di un pannello sandwich è notevolmente più complessa poiché esistono, in tale tipo di configurazione, una serie di modi di cedimento legati al *crashing del cuore* il quale presenta una resistenza a taglio trasversale notevolmente inferiore al caso precedente. Esistono diverse maniere per modellare un pannello sandwich. Una prima possibilità, è possibile usare esclusivamente elementi 2D e definire un *materiale equivalente* che tenga conto della ridotta rigidità a taglio trasversale del cuore, tuttavia tale modello non tiene conto della diversa rigidità di skin e honeycomb e dell'incollaggio tra le due parti. Un'altra possibile maniera è utilizzare elementi 2D per gli skin ed elementi 3D con, ancora una volta, un materiale equivalente per il core, tuttavia, anche in questo caso, non si tiene conto dei fenomeni di *crashing* locale del cuore.

Per tenere conto in maniera quanto più accurata possibile di tali fenomeni si è deciso di utilizzare un approccio abbastanza estremo:

- skin modellati con elementi 2D;
- singole celle dell'honeycomb modellate con elementi 2D;

Tale tipo di modellazione risulta essere molto onerosa dal punto di vista computazionale ma, allo stesso tempo, permette di:

- ottenere una descrizione estremamente accurata del comportamento sotto carico del core;
- eliminare gli errori di modellazione derivanti dalla definizione di una materiale equivalente per la descrizione dell'honeycomb;
- modellare accuratamente l'interfaccia tra honeycomb e skin del sandwich tramite la definizione di un modello di contatto;
- risparmiare in termini di costo e tempo sulle prove sperimentali di caratterizzazione del materiale, poiché i dati relativi all'alluminio utilizzato per l'honeycomb sono noti, quindi non è necessario testare l'intera architettura per ricavare determinati parametri che definiscono il campo plastico;

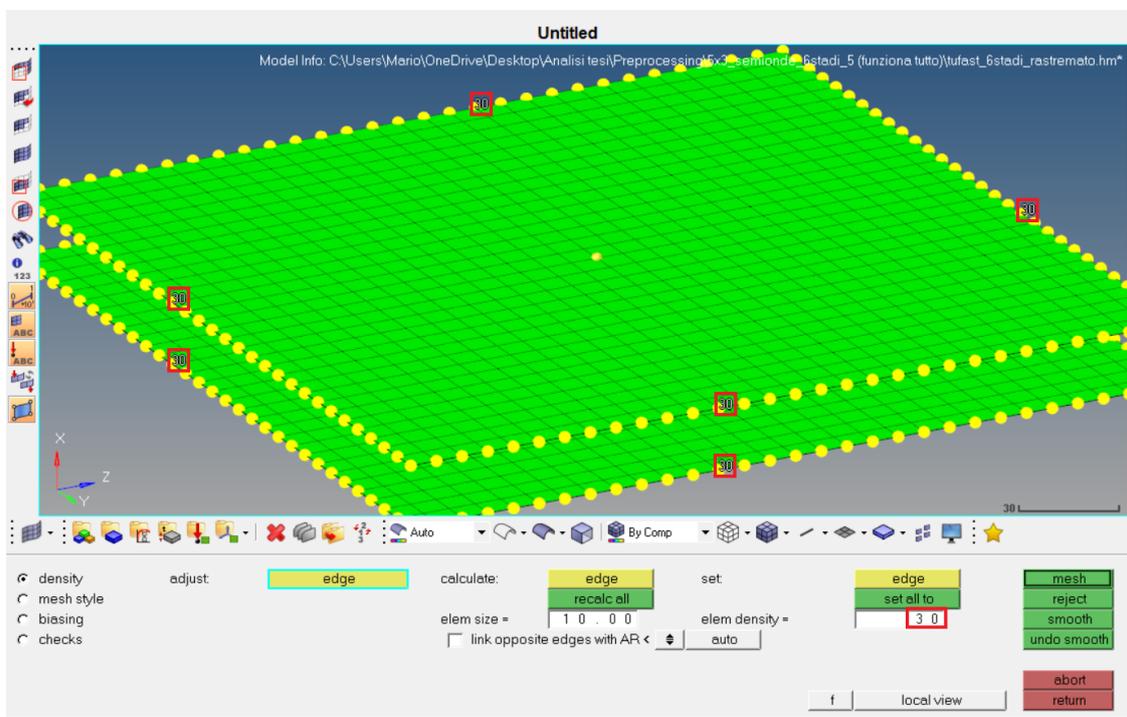


Figura 89: Mesh skin

Entrando, ora, maggiormente nello specifico, la maggiore rigidità degli skin in CFRP rispetto al caso precedente (AI-7075) permette una descrizione abbastanza accurata anche utilizzando un numero inferiore di

elementi; proprio per tale motivo si è deciso di utilizzare per gli skin 30 elementi per ciascun lato quando, nel caso precedente, ne erano stati utilizzati 40 (Figura 89).

Per la mesh dell'honeycomb, invece, si è deciso di discretizzare il tutto mediante un elemento per ciascun lato della cella esagonale e 4 elementi nello spessore (Figura 90). Tale decisione è, essenzialmente, legata al modo di lavorare del core: esso sarà soggetto a carico compressivo di taglio, motivo per cui un'accurata descrizione di tale modo di lavoro richiede diversi elementi lungo lo spessore.

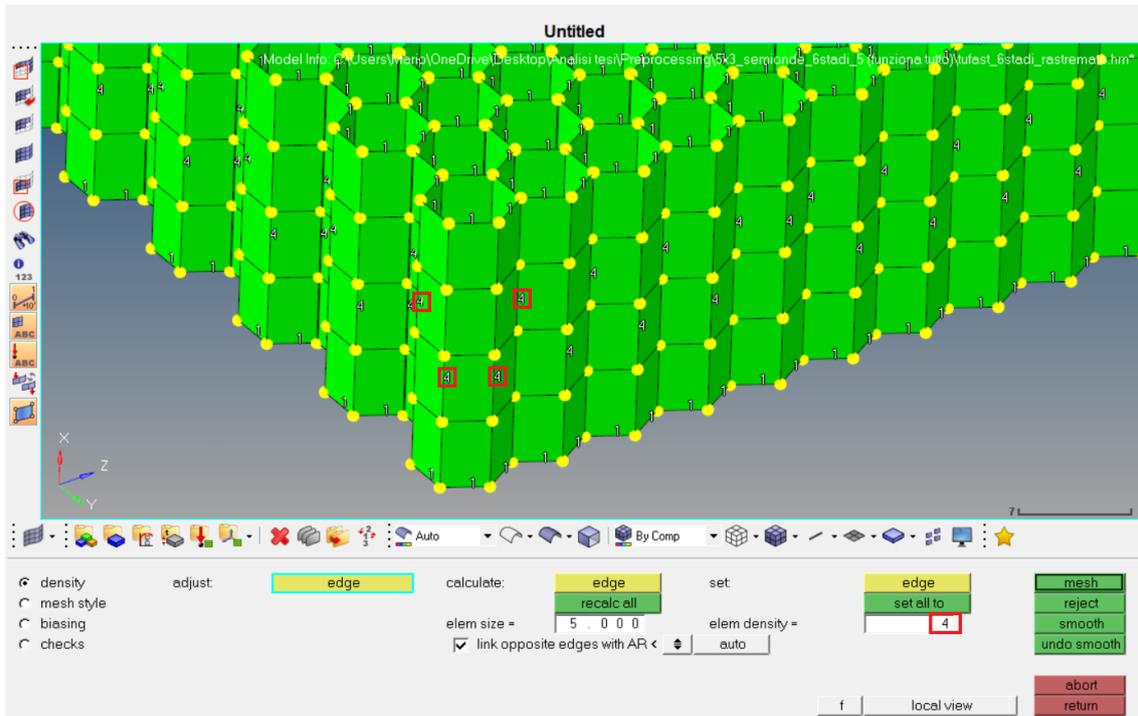


Figura 90: Mesh core honeycomb

La mesh complessiva è presentata in Figura 91. Rispetto al caso precedente nasce, in questo caso, il problema del collegamento tra le diverse mesh il quale è stato gestito mediante la definizione di contatti tra gli skin ed il core. Tale tipo di modellazione permette una descrizione abbastanza buona dell'interfaccia. Una possibile alternativa sarebbe la modellazione effettiva dell'adesivo, tuttavia tale approccio complicherebbe notevolmente il tutto, appesantendo un modello già tutt'altro che leggero.

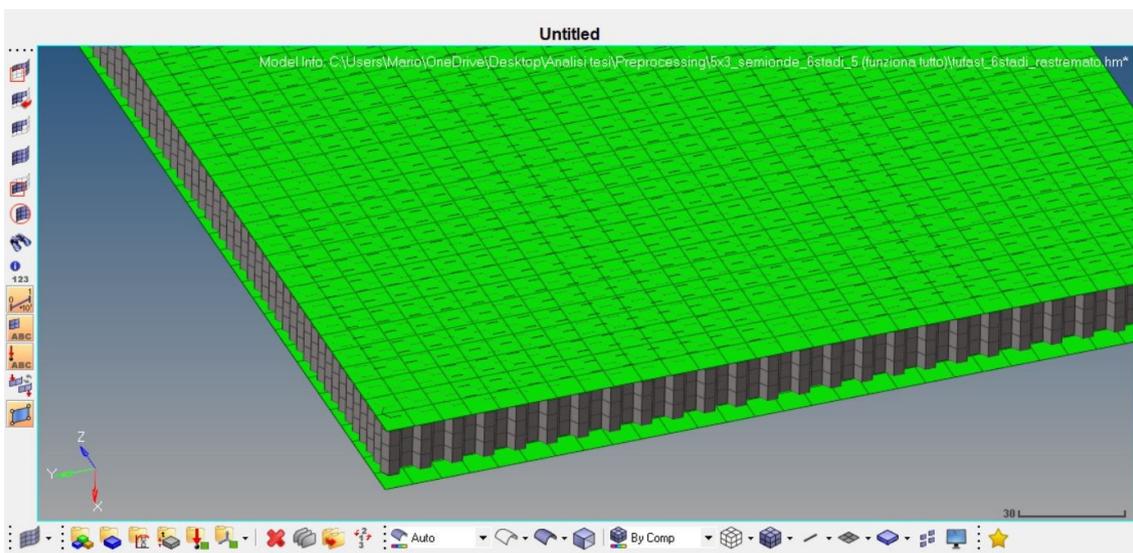


Figura 91: Mesh complessiva

Infine, in Figura 92 è presentata la verifica della qualità della mesh di tale secondo caso. Come facilmente osservabile, come per il caso precedente non esistono elementi che falliscano i check previsti e la mesh è, complessivamente, di notevole qualità (*comp. QI* pari a 0.05), per cui è possibile proseguire oltre nella modellazione.

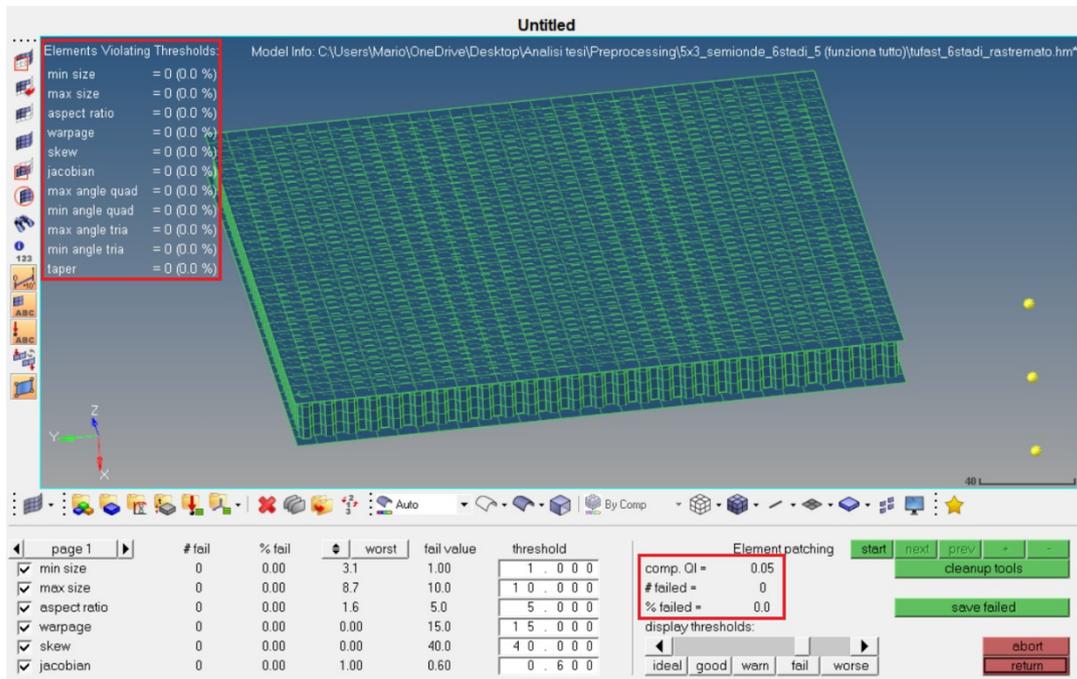


Figura 92: Verifica qualità mesh

7.3.2 Mesh IA

Se la modellazione FEM dell'AIP risulta essere abbastanza semplice, questo non è vero per quanto riguarda l'IA, la cui complessità geometrica non permette la possibilità di utilizzare gli algoritmi di meshatura automatica. Date, quindi, le complessità in gioco si è deciso di suddividere l'IA in due sotto-parti:

- superficie frontale;
- superficie laterale;

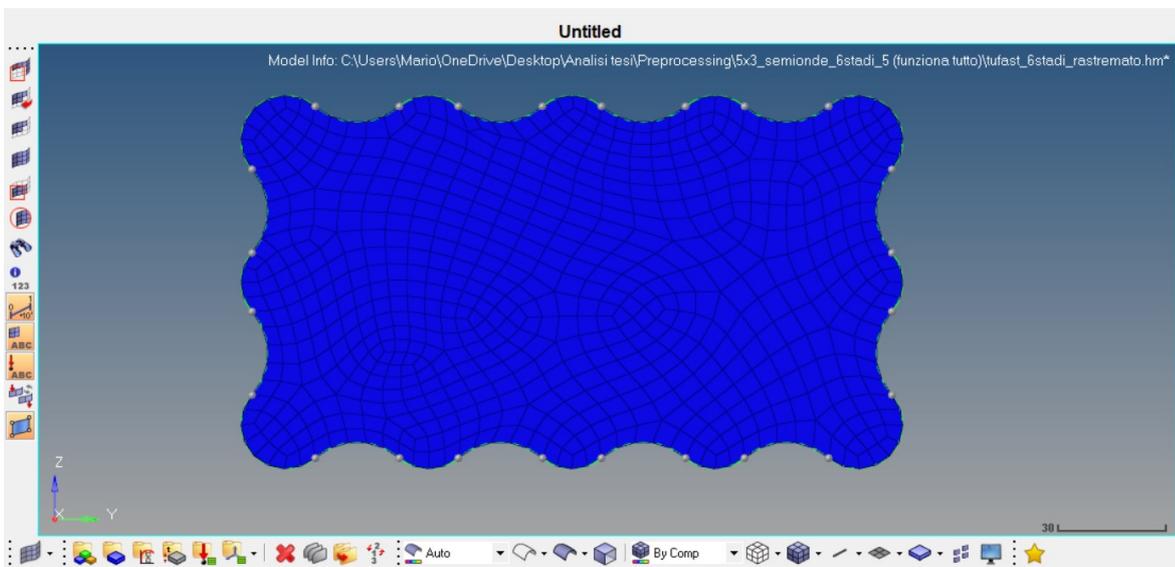


Figura 93: Mesh superficie frontale con funzione automesh

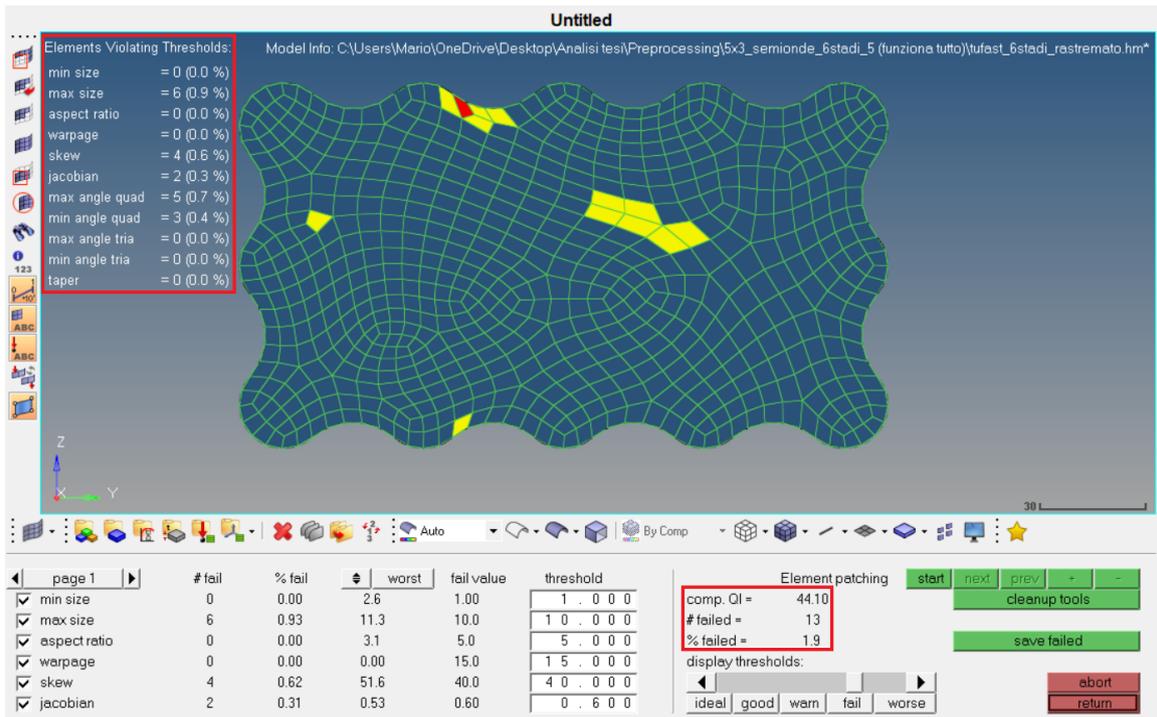


Figura 94: Verifica qualità mesh automatica

Si consideri per prima la configurazione 5x3 semionde e, nello specifico, la superficie frontale della stessa. Utilizzando direttamente la funzione automesh, la mesh generata (Figura 93) sarà di qualità estremamente bassa mancando, inoltre, di simmetria; andando, infatti, ad effettuare il classico check è possibile notare 13 elementi che falliscono i controlli ed una qualità complessiva estremamente bassa con un *comp. QI* pari a 44.1 (Figura 94). Risulta, pertanto, evidente la necessità di una approccio differente, motivo per cui si è deciso di andare a suddividere la superficie frontale in più sotto-superfici semplici così da gestire la creazione della mesh su ciascuna di esse (Figura 95).

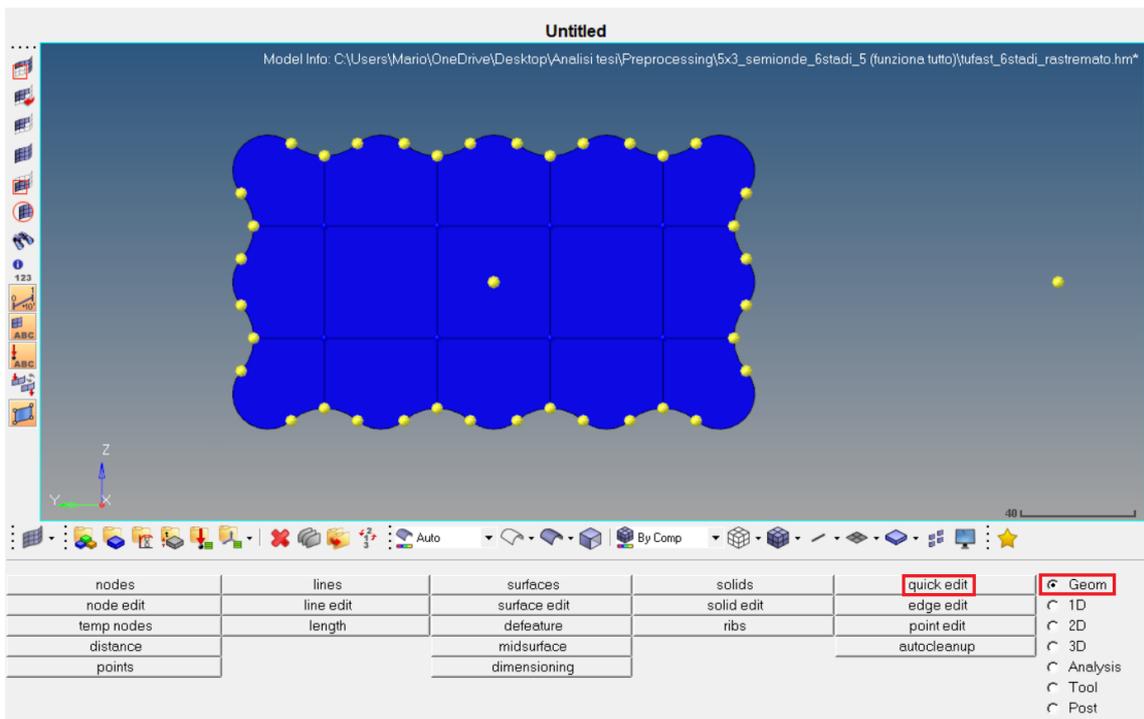


Figura 95: Divisione superficie frontale IA 5x3 semionde

Tale suddivisione permette di generare una mesh molto più regolare della precedente e, soprattutto, simmetrica (Figura 96). Il numero di elementi su ciascun lato di ciascuna superficie è dettato proprio dalla necessità di rendere regolare la mesh stessa. Il risultato finale è una mesh di qualità molto superiore alla precedente con un *comp. QI* pari a 0.06 e nessun elemento che fallisce i check classici (Figura 97).

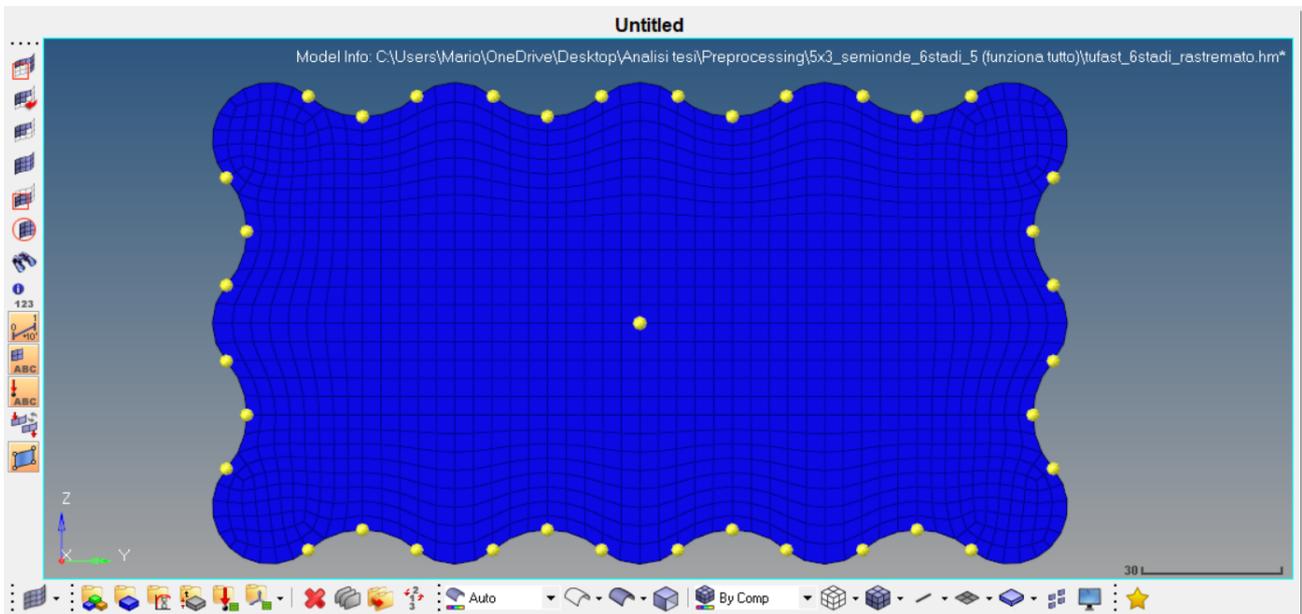


Figura 96: Mesh manuale superficie frontale IA 5x3 semionde

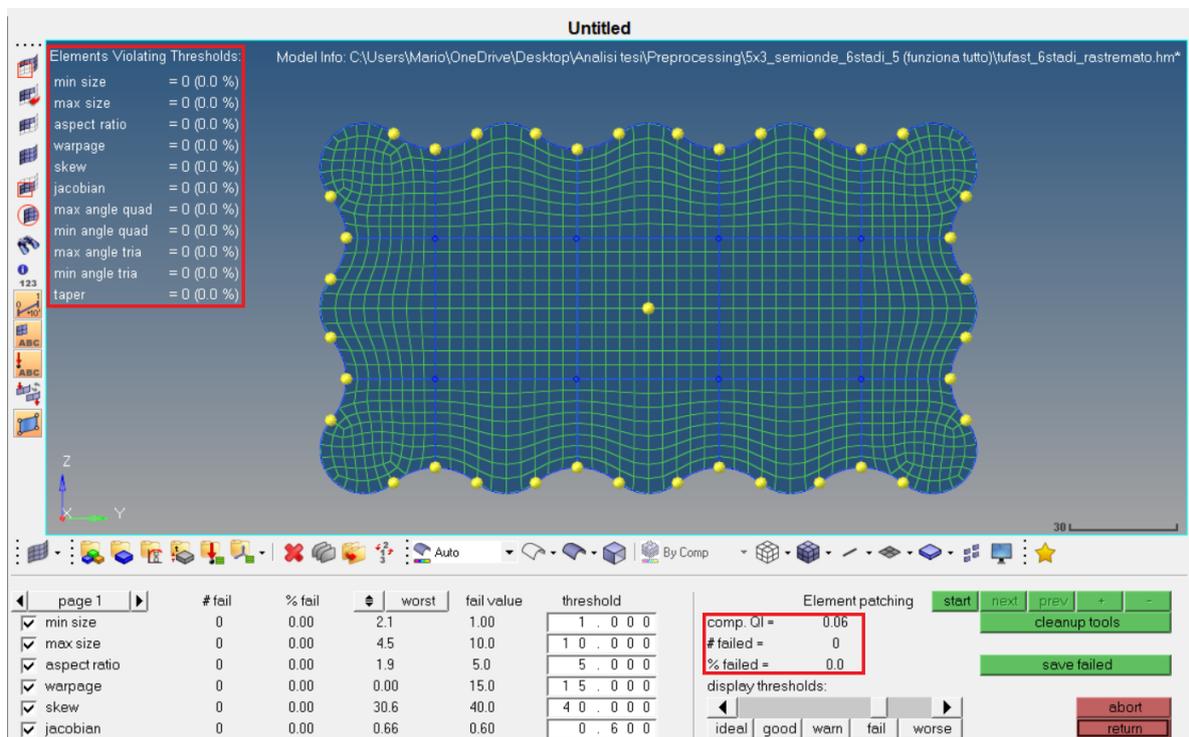


Figura 97: Verifica qualità mesh manuale superficie frontale IA 5x3 semionde

Completata l'operazione di meshing della superficie frontale, è possibile passare alla superficie laterale. In questo caso il numero di elementi è vincolato anche a quello della superficie frontale. L'unico parametro libero resta, pertanto, il numero di elementi in direzione x, posto pari a 50, così da permettere un'accurata descrizione del comportamento in tale direzione e da permettere agli elementi di passare senza problemi i

check sulla qualità. La mesh di tale superficie è presentata in Figura 98, mentre la verifica della qualità della stessa in Figura 99.

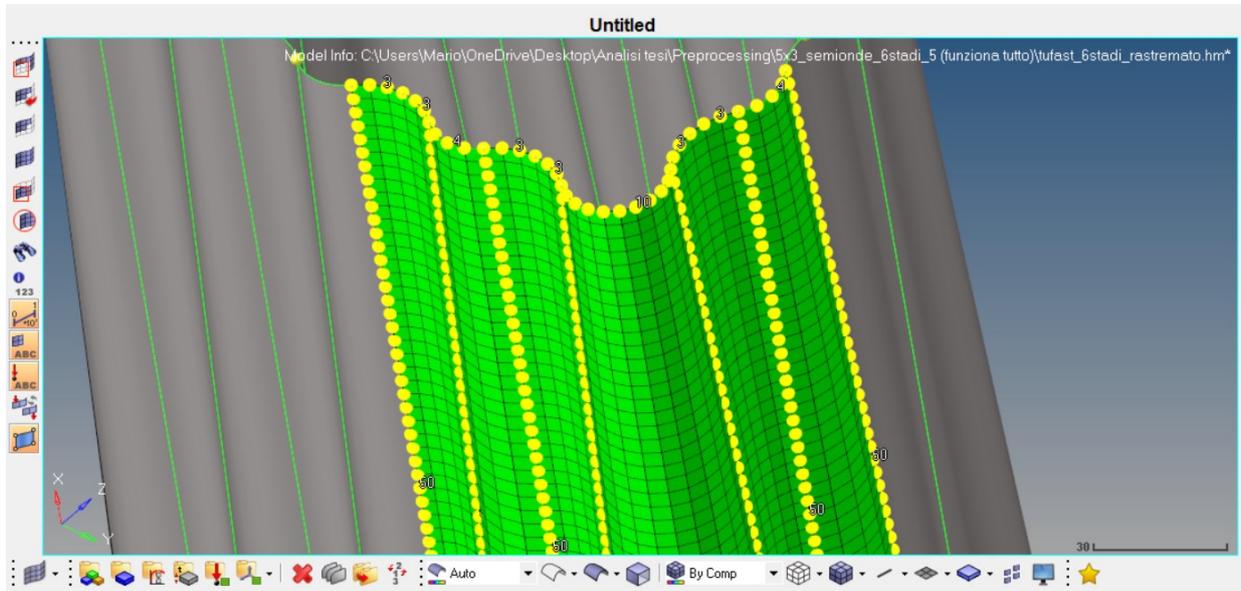


Figura 98: Mesh superficie laterale IA 5x3 semionde

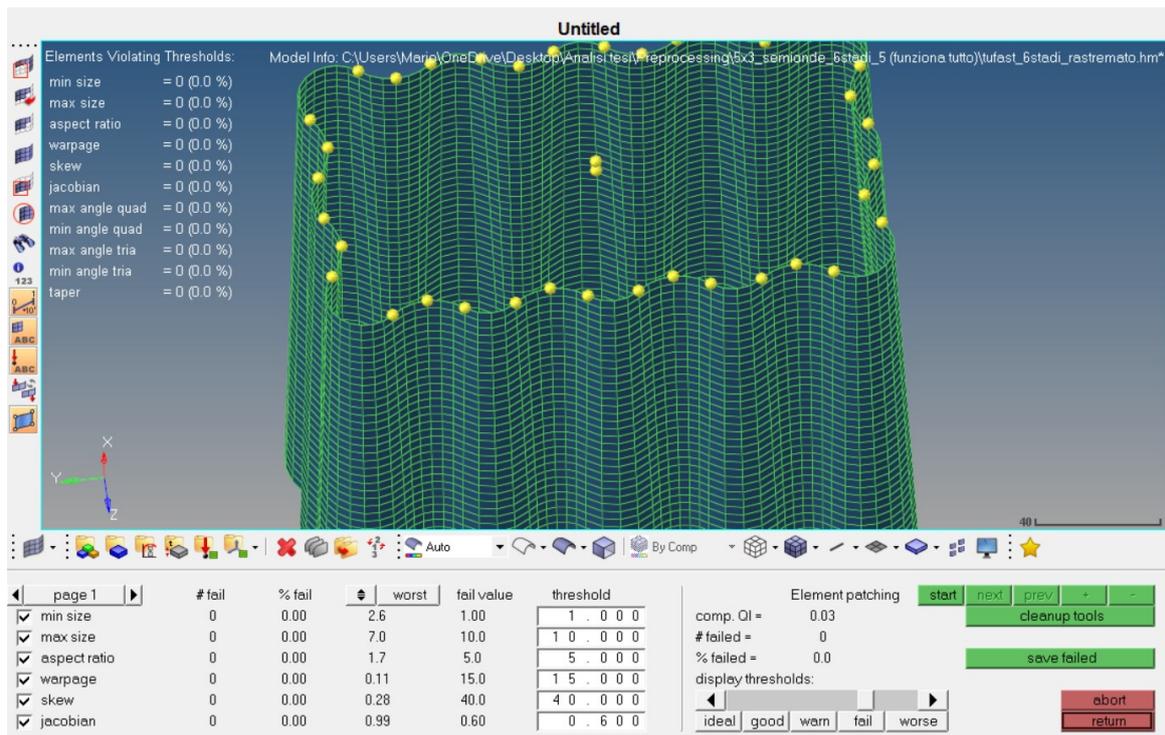


Figura 99: Verifica qualità mesh superficie laterale IA 5x3 semionde

È possibile notare che avendo generato mesh diverse su superfici diverse sarà necessario collegare le diverse parti tra loro, poiché, complessivamente, il componente si deve comportare come un unicum. Tale operazione è possibile mediante la funzione *equivalence* (Figura 101) che permette di eliminare i nodi duplicati, collegando le diverse parti e rendendo quindi unica la mesh. Tale funzione richiede di specificare:

- gli elementi che devono essere collegati insieme;
- un valore di tolleranza, al di sopra della quale le diverse parti della mesh restano divise;

Il risultato finale è presentato in Figura 102.

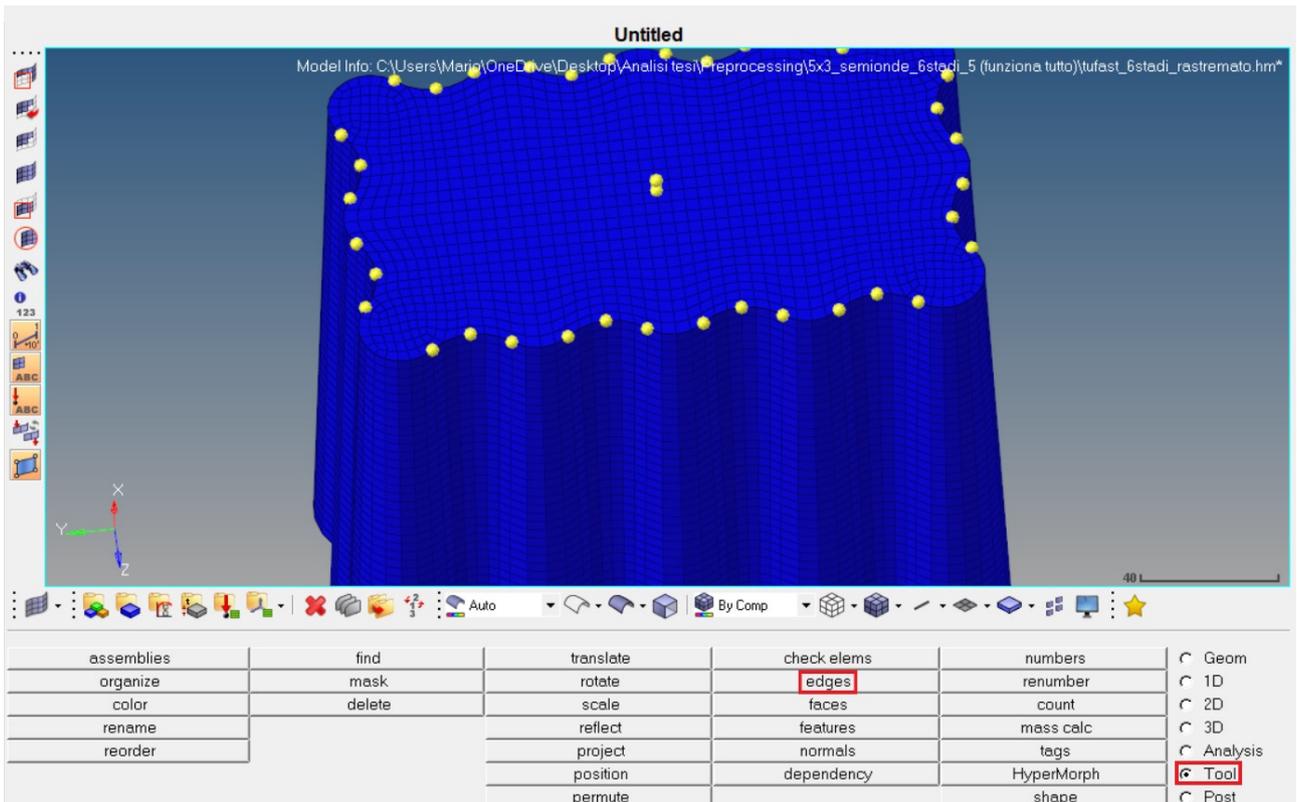


Figura 100: Free edges

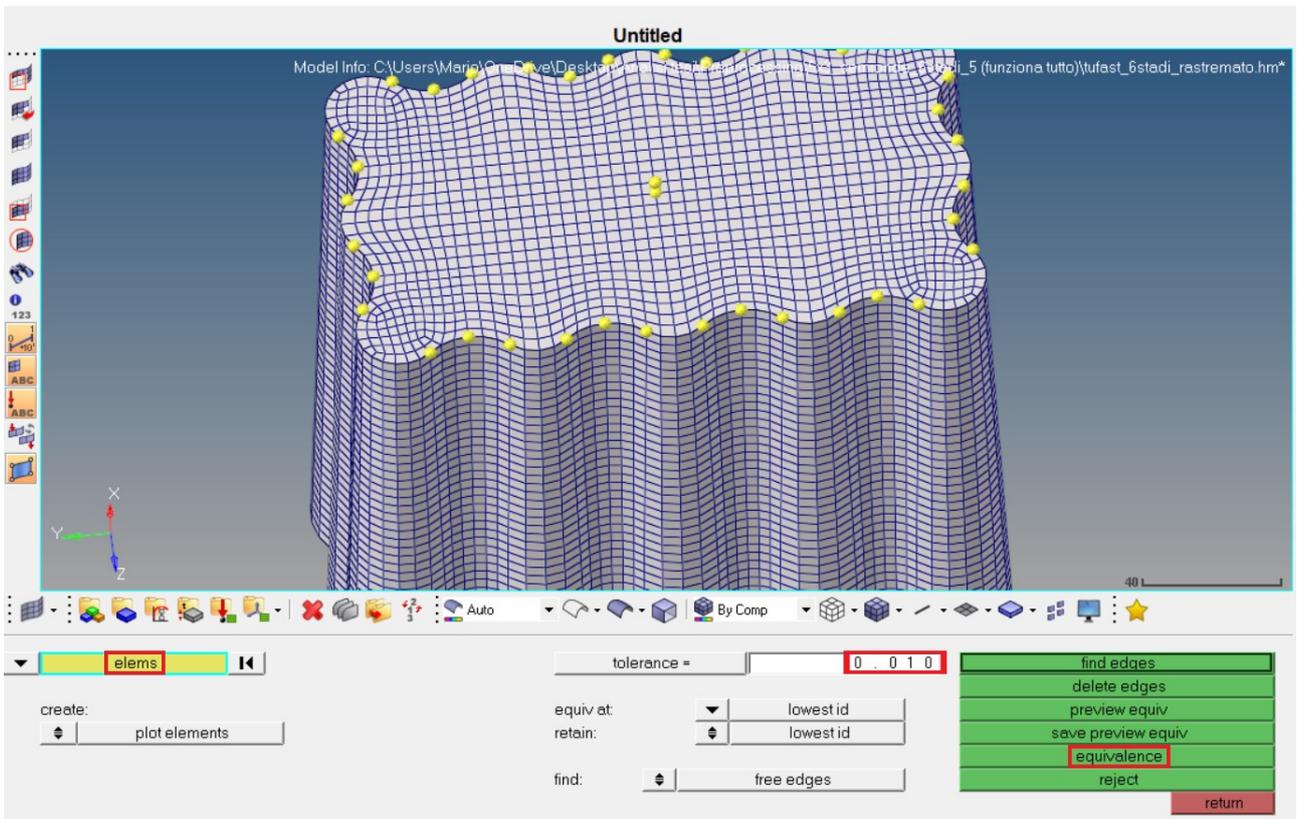


Figura 101: Comando di equivalence

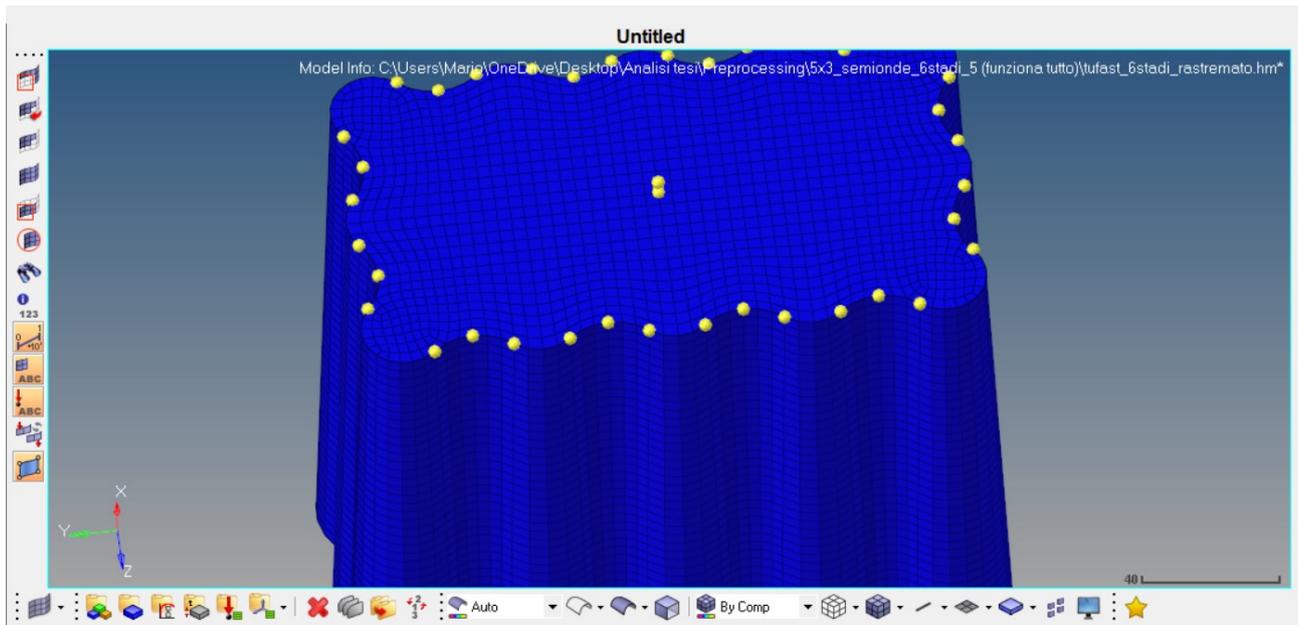


Figura 102: Mesh complessiva IA 5x3 semionde

L'intero processo appena descritto per la configurazione 5x3 semionde si ripete in maniera identica per la configurazione 5x2 semionde e l'unica differenza risiede nel modo in cui la superficie frontale è stata divisa (Figura 103). Tale differenza è, essenzialmente, legata alla dimensione minore della superficie frontale in tale secondo caso.

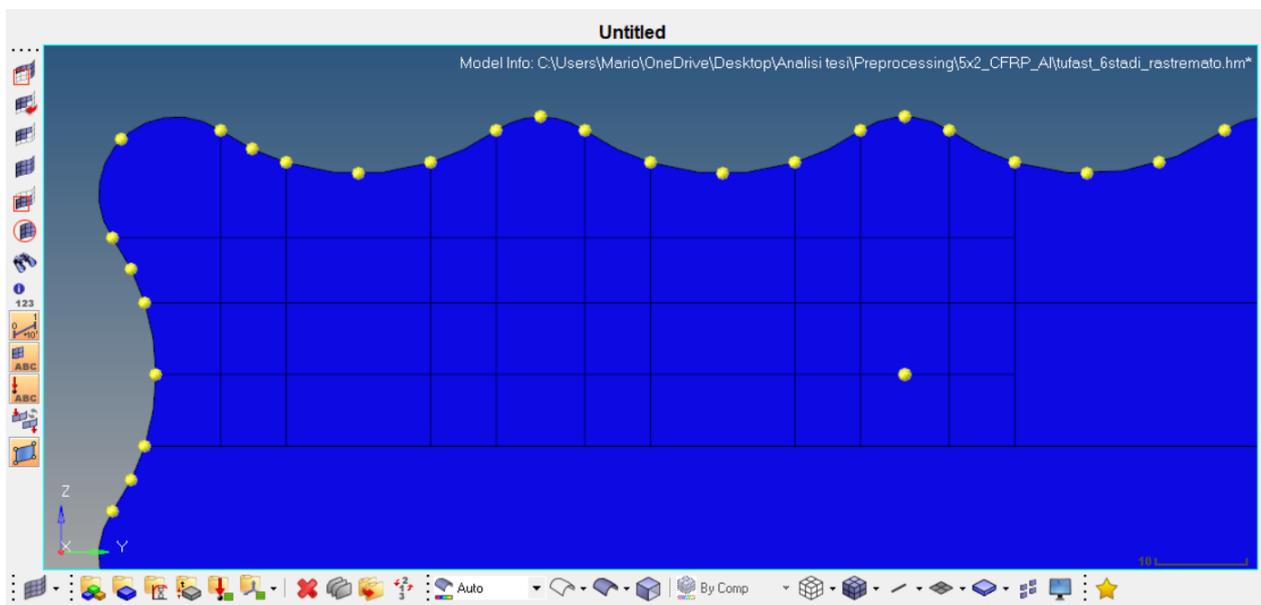


Figura 103: Divisione superficie frontale IA 5x2 semionde

La suddivisione in un numero maggiore di superfici, necessario per generare una mesh regolare anche in tale secondo caso, permette di generare una mesh di qualità addirittura superiore, con un *comp. QI* pari a 0.01, come mostrato in Figura 104.

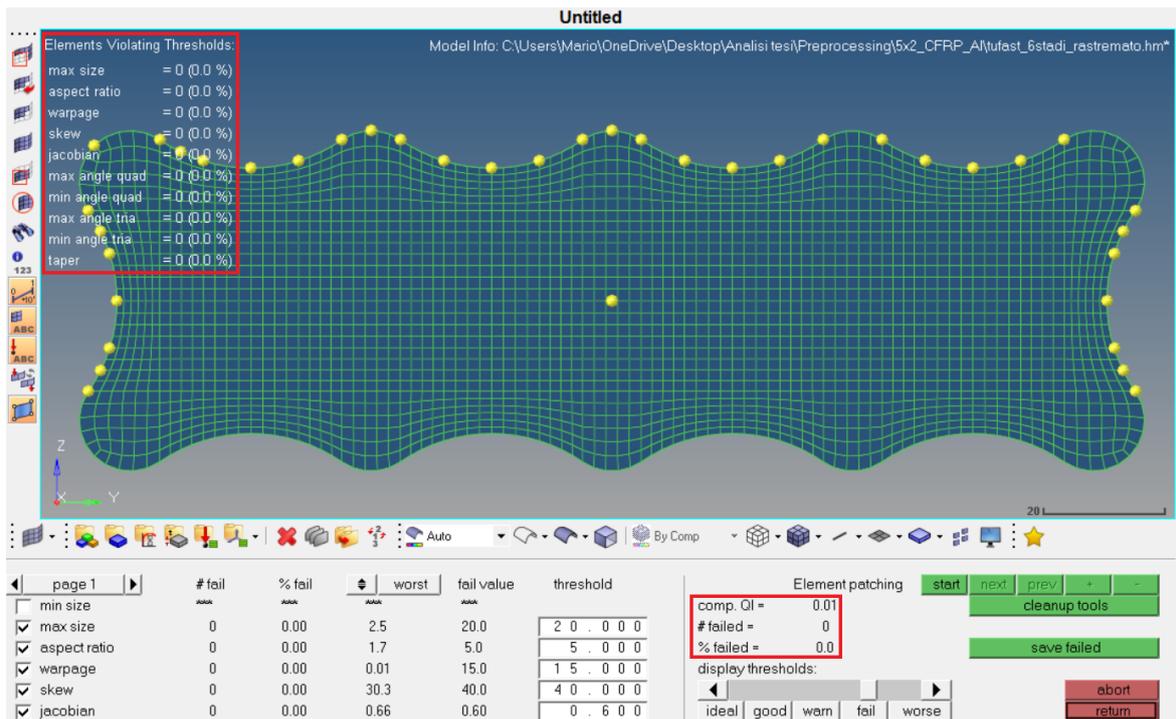


Figura 104: Verifica qualità mesh superficie frontale IA 5x2 semionde

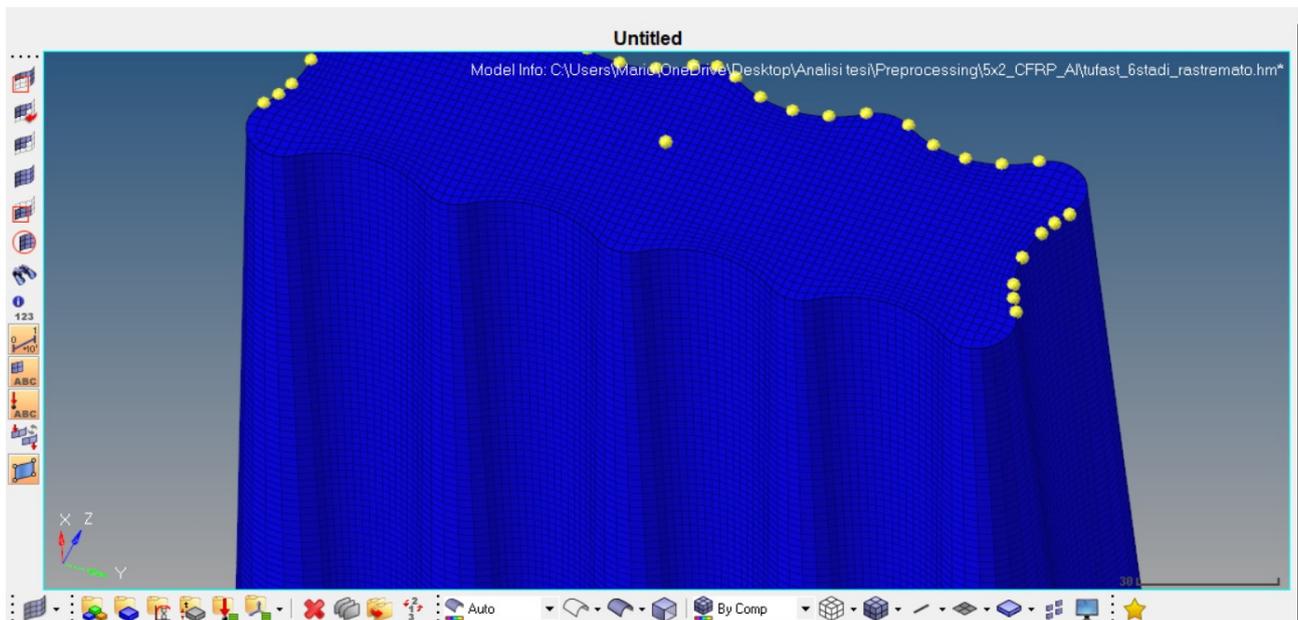


Figura 105: Mesh compressiva IA 5x2 semionde

Complessivamente la mesh della configurazione 5x2 semionde è qualitativamente migliore ma la taglia inferiore degli elementi genera un fortissimo incremento del costo computazionale e, quindi, dei tempi di calcolo; allo stesso tempo, però, questa risulta essere l'unica maniera possibile per generare una mesh regolare e simmetrica.

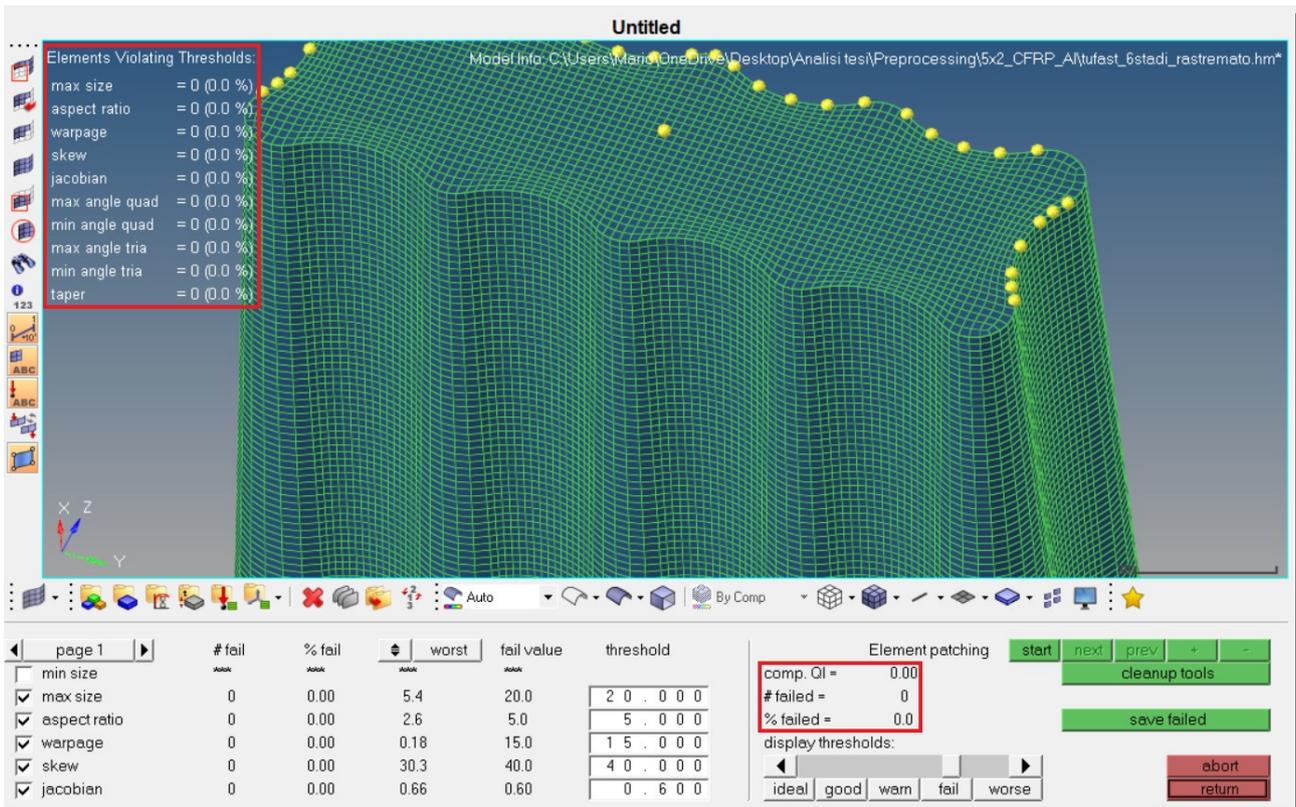


Figura 106: Verifica qualità mesh complessiva IA 5x2 semionde

7.3.3 Barriera ed elementi rigidi

Resta, quindi, da modellare la barriera contro la quale il sistema andrà a collidere. A tale scopo è sufficiente creare una superficie e discretizzarla con un numero molto basso di elementi (Figura 107) poiché non si è interessati al comportamento elastico della barriera ma esclusivamente alle decelerazioni sulla stessa.

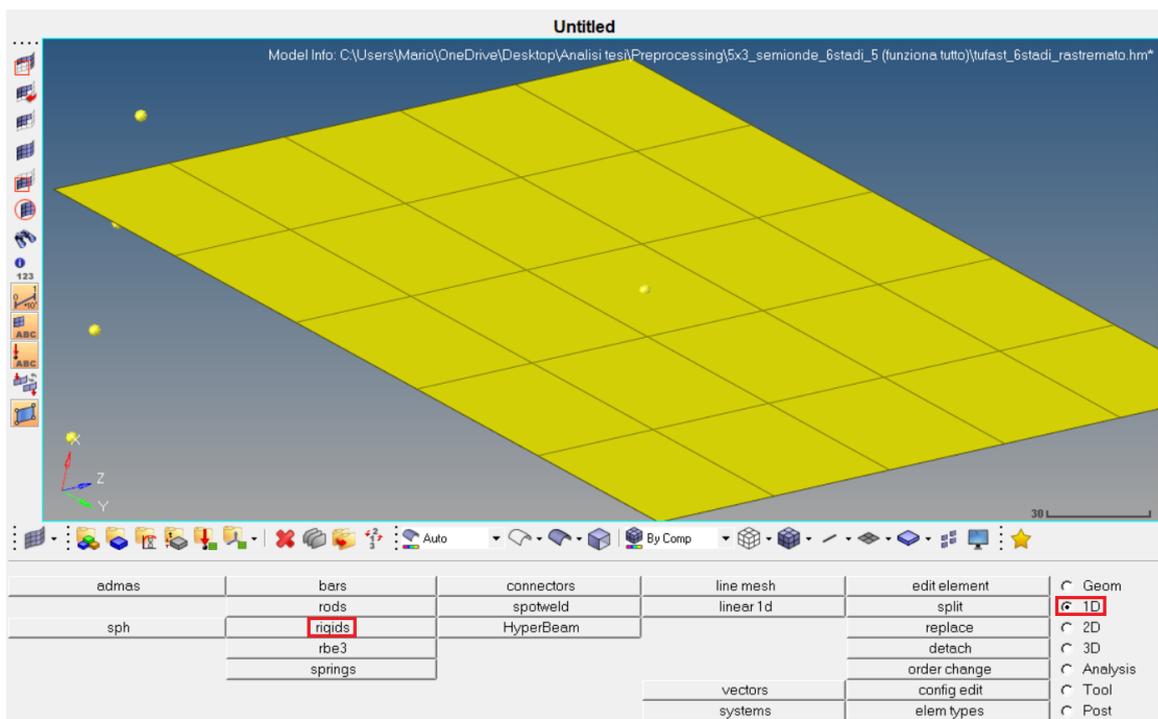


Figura 107: Modello FEM barriera

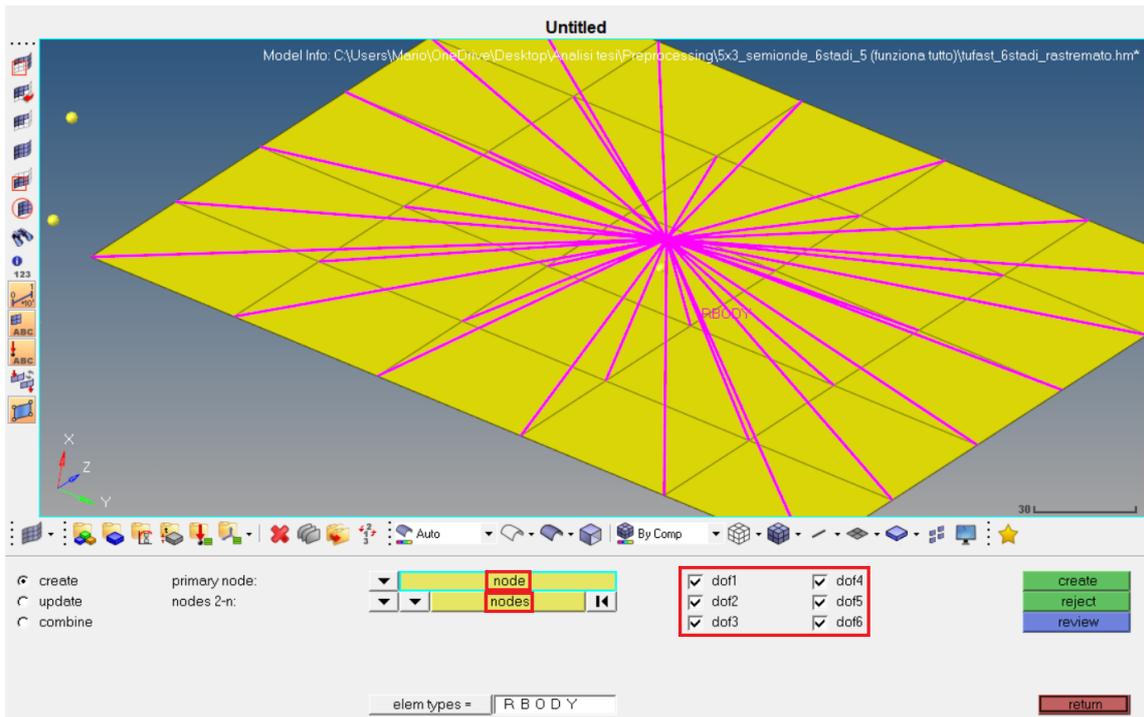


Figura 108: Barriera (in giallo) e rispettivo elemento rigido (in viola)

Ad ogni nodo della barriera dovrà essere assegnata una velocità iniziale, il che è possibile in maniera semplice andando ad utilizzare degli elementi rigidi. Per la definizione degli elementi rigidi, come evidenziato in Figura 108, è necessario specificare:

- un *nodo indipendente*;
- uno o più *nodi dipendenti*;
- *gradi di libertà* che devono essere trasmessi dall'elemento rigido;

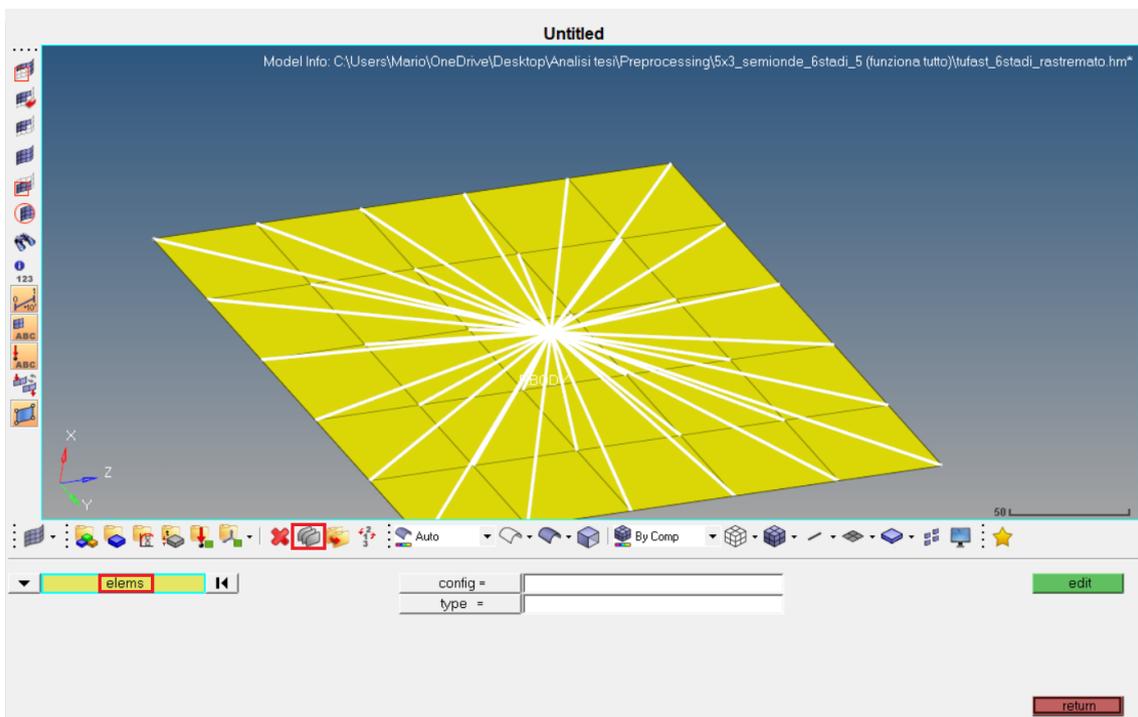


Figura 109: Tool di modifica elementi

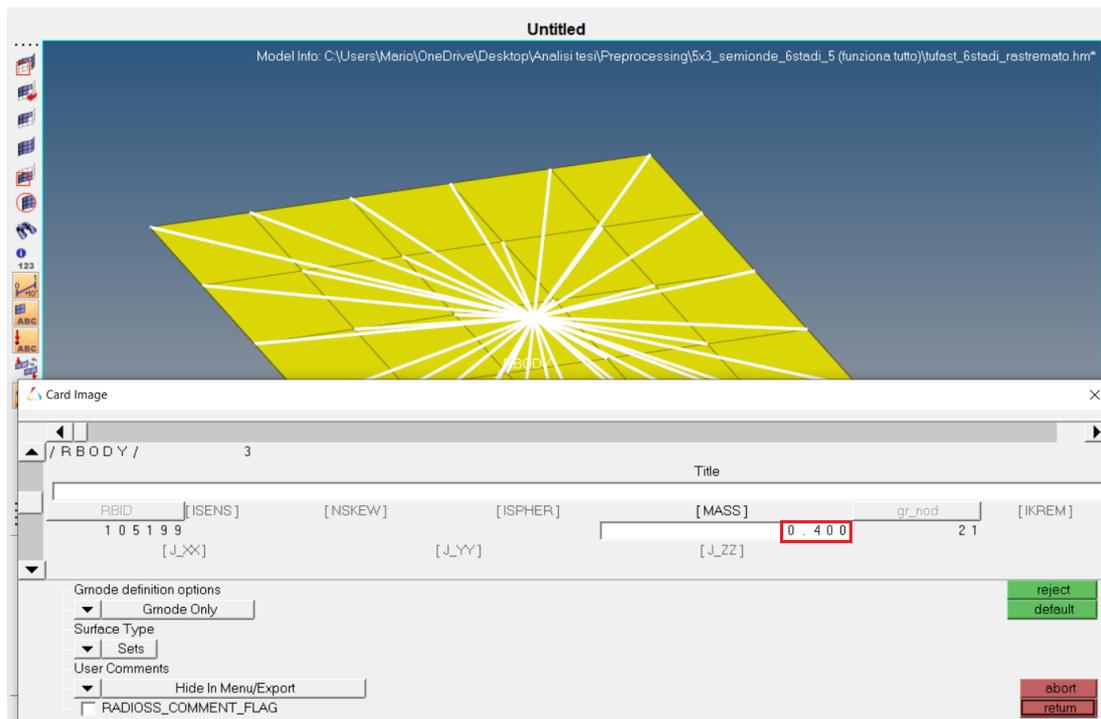


Figura 110: Assegnazione massa

Dopo aver creato l'elemento rigido sulla barriera è necessario andare ad assegnare allo stesso una massa equivalente a quella del maglio attraverso il quale condurre la prova sperimentale. Per effettuare tale operazione è possibile utilizzare il tool di modifica degli elementi (Figura 109) e, dopo aver selezionato l'elemento rigido in questione è possibile assegnarne la massa (pari a 400 Kg nel caso specifico).

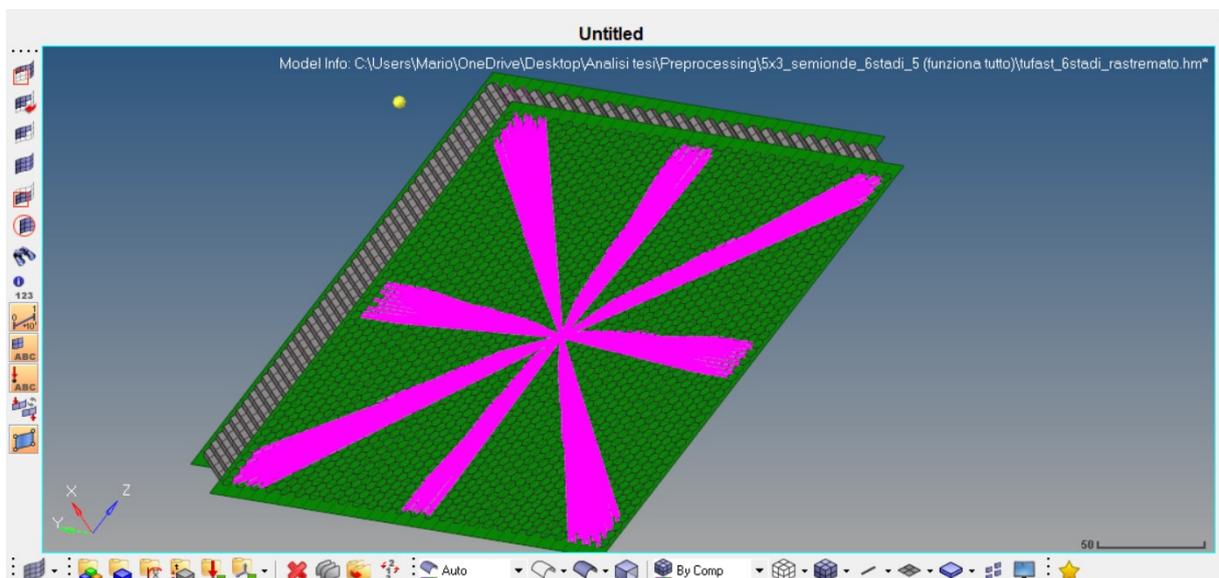


Figura 111: Elemento rigido AIP

Si noti che la condizione al contorno e/o iniziale imposta al nodo indipendente sarà trasmessa in termini di gradi di libertà in maniera unilaterale a tutti i nodi dipendenti. Allo stesso tempo, è importante notare che, avendo definito ogni nodo della barriera come nodo dipendente, il moto relativo tra gli stessi risulta impedito, per cui la barriera si comporta come un sistema infinitamente rigido, per cui non ci sarà un assorbimento di energia elastica da parte della stessa, quindi tutta l'energia cinetica sarà assorbita effettivamente dal sistema costituito da IA e AIP. Questo nella realtà non risulta vero, poiché parte dell'energia cinetica sarà comunque utilizzata per la deformazione plastica della barriera contro cui avviene

l'impatto, tuttavia tale metodologia risulta essere conservativa per cui tale approssimazione può essere accettata di buon grado.

In maniera perfettamente analoga, si ha la definizione di un secondo elemento rigido posizionato sull'AIP che permetta di definire in maniera più semplice le condizioni al contorno imposte dal sistema di vincolo dell'AIP al resto della scocca. Coerentemente con quanto richiesto da regolamento, tale elemento rigido si articola in un sistema di 8 zone atto a simulare gli 8 bulloni M8 come mostrato in Figura 111.

7.4 Definizione Set

Ultimata la fase di creazione della mesh è possibile passare a quella di *definizione dei set*. I *set* non sono altro che un *gruppo entità FEM* (nodi o elementi ad esempio) accomunati da una qualche proprietà che permettono maggiore semplicità nell'assegnazione delle condizioni di carico e di vincolo ma anche nella definizione della stack sequence dei materiali compositi.

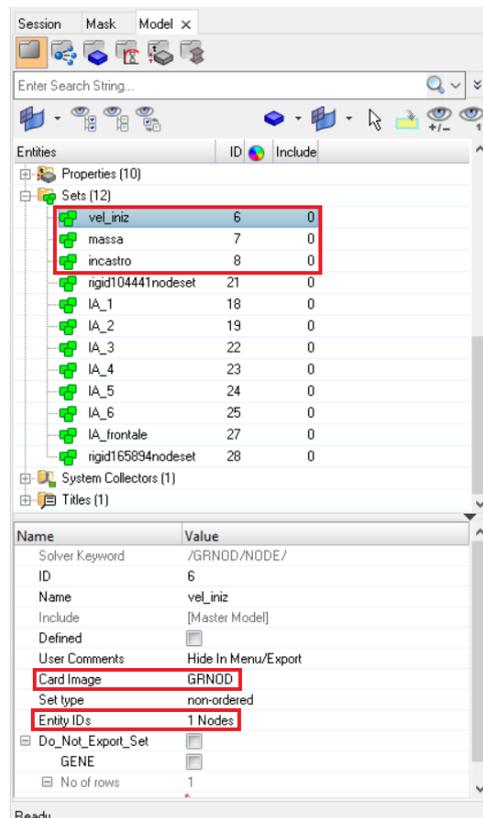


Figura 112: Definizione set condizioni al contorno ed iniziali

Per la definizione dei set che permettono l'assegnazione delle condizioni al contorno è sufficiente definire un set che abbia come *Card Image* GRNOD (il set sarà formato da soli nodi) e selezionare come *Entity IDs* rispettivamente l'ID:

- del nodo indipendente di definizione dell'elemento rigido della barriera per *vel_iniz* e *massa*;
- del nodo indipendente di definizione dell'elemento rigido dell'AIP per *incastro*;

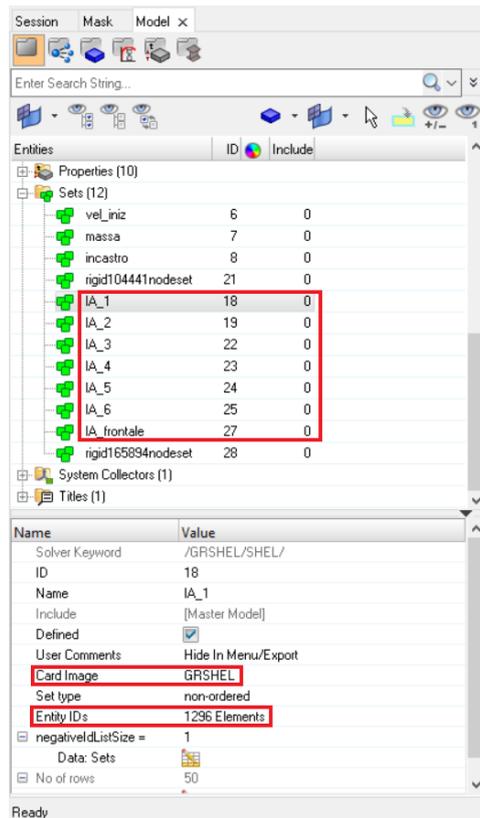


Figura 113: Definizione set approccio ply based

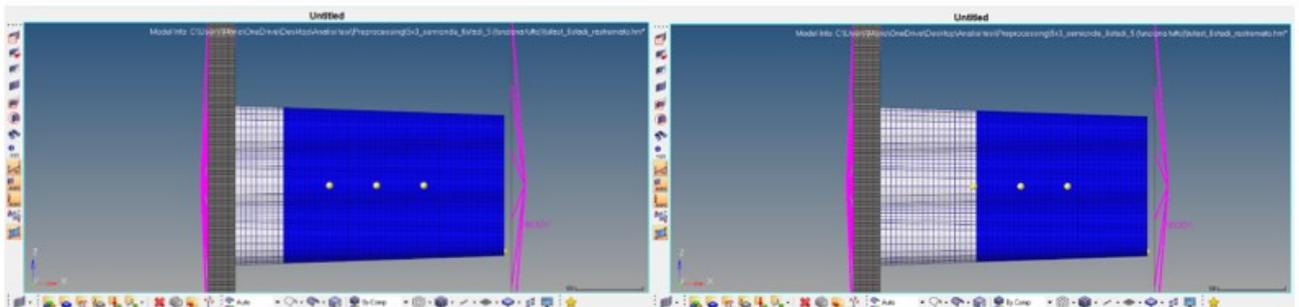


Figura 114: Set IA1 e IA2

Per la definizione della stack sequence del materiale composito si è, invece, deciso di utilizzare un approccio *ply based* il quale permette la creazione, la modifica e l'eliminazione di uno o più ply in tempi estremamente rapidi. Tale approccio si basa sull'andare a definire un insieme di set costituiti ciascuno da tutti gli elementi ai quali deve essere associato un certo ply. Nel caso specifico si è deciso di andare a suddividere l'IA in 6 zone differenti, così da poter variare in ciascuna di esse la stack. Per la definizione di tali set è sufficiente utilizzare come *Card Image* GRSHEL (il set sarà formato da soli elementi shell) e selezionare come *Entity IDs* gli ID degli elementi che competono a ciascun gruppo (Figura 113Figura 113).

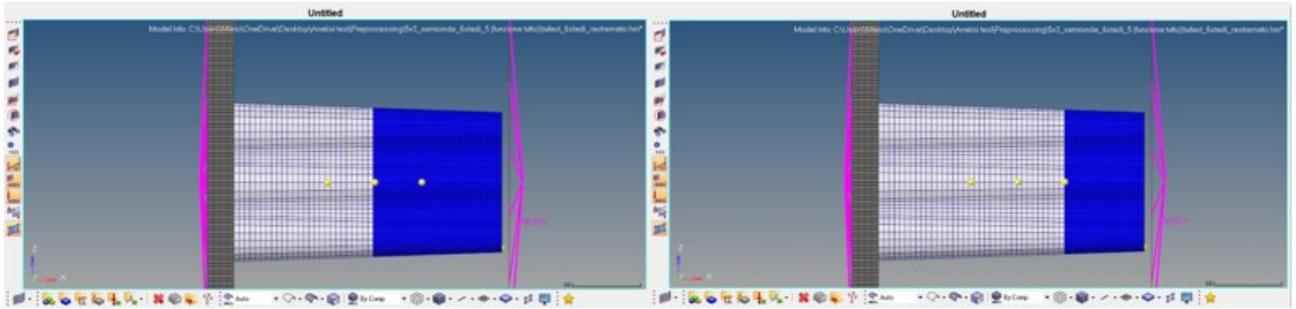


Figura 115: Set IA3 e IA4

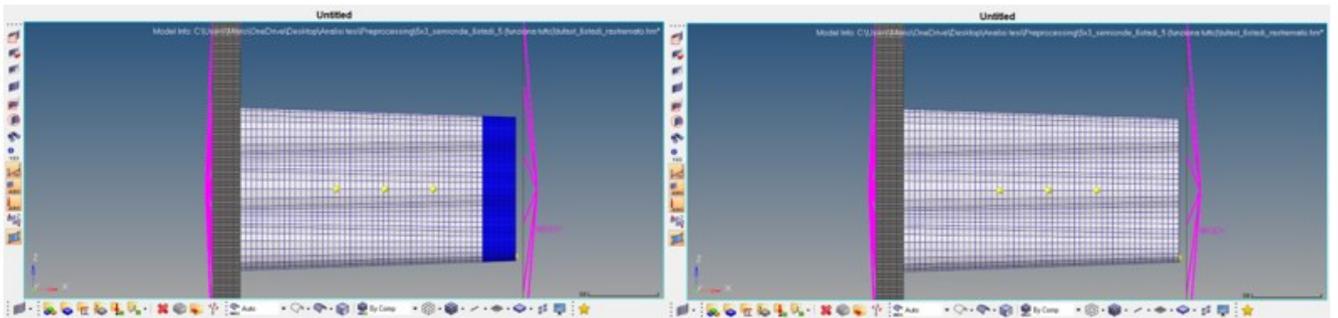


Figura 116: Set IA5 e IA6

7.5 Creazione Load Collectors

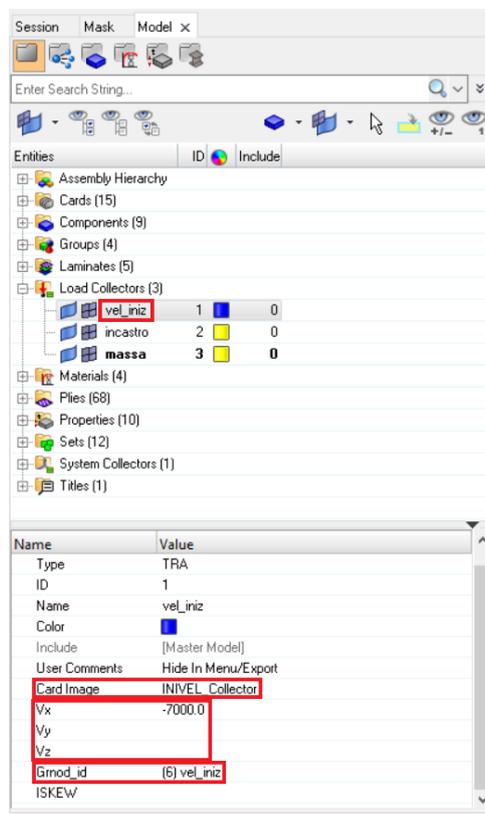


Figura 117: Definizione velocità iniziale

I *load collectors* sono il mezzo attraverso il quale è possibile assegnare al sistema condizioni al contorno sia cinematiche (vincoli) che meccaniche (carichi esterni) e/o condizioni iniziali (necessarie nel caso di analisi di tipo dinamico). Nel caso specifico in esame sono stati definiti tre load collectors:

- *vel_iniz*: velocità iniziale da assegnare ad ogni nodo ed elemento della barriera, così da simulare l'impatto alla velocità prestabilita;
- *incastro*: condizione al contorno cinematica atta a simulare la condizione di vincolo imposta dagli 8 bulloni M8 attraverso i quali è garantito il collegamento tra AIP ed il resto della scocca;
- *massa*: vincolo fittizio, atto a garantire l'assenza di componenti di velocità in direzioni perpendicolari all'asse x veicolo (è come se fosse una guida per il maglio);

Per la definizione della condizione iniziale sulla velocità della barriera è sufficiente selezionare come *Card Image INVEL_Collector*, inserire le componenti di velocità (nel caso in esame si ha solamente una componente di velocità lungo x, pari a -7000 mm/s) e selezionare a quale set di nodi assegnare tale condizione iniziale (si seleziona il set *vel_iniz* creato in precedenza).

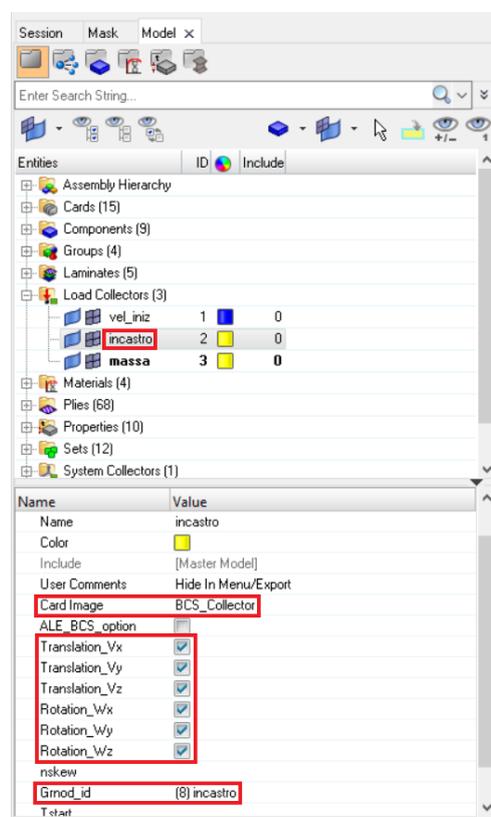


Figura 118: Definizione incastro

La definizione dei vincoli cinematici è abbastanza simile; è, infatti, sufficiente selezionare come *Card Image BCS_Collector*, selezionare quali gradi di libertà devono essere bloccati e, infine, selezionare a quale set di nodi applicare tale condizione cinematica.

Nel caso specifico, avendo supposto che i bulloni si comportino come incastrati, tutti i gradi di libertà dovranno essere bloccati e si applicherà tale condizione al contorno al set *incastro* creato nel passaggio precedente (Figura 118). In maniera del tutto analoga, dovendo simulare la guida del maglio, il *load collector massa* vedrà bloccati tutti i gradi di libertà eccetto la traslazione lungo x e sarà applicato al set omonimo creato in precedenza (Figura 119).

L'utilità della creazione degli elementi rigidi appare ora evidente: risulta sufficiente assegnare le condizioni al contorno e/o iniziali ad un singolo nodo selezionato in fase di creazione dei set perché le stesse siano

assegnate in maniera automatica a tutti i nodi collegati attraverso gli elementi rigidi; cambiando tali condizioni non sarà, quindi, necessario ri-selezionare nuovamente tutti i nodi ma solo modificare il set.

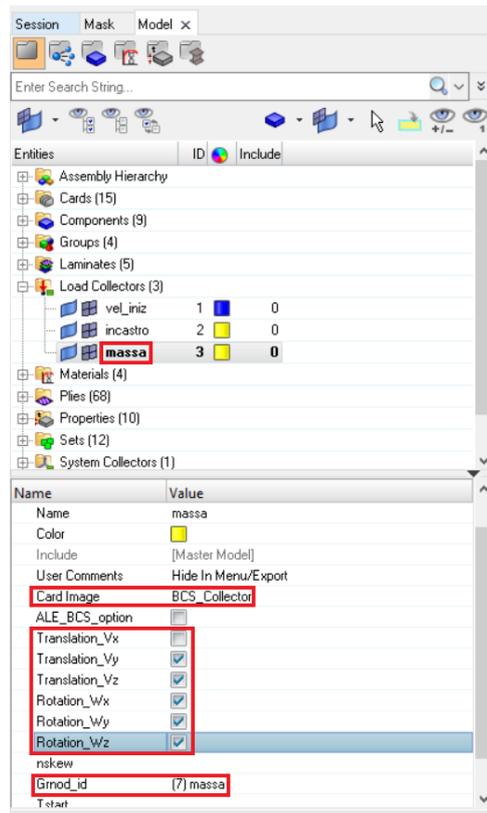


Figura 119: Definizione massa

7.6 Creazione Materiali e definizione laminato

Il passo successivo è la creazione dei materiali, definiti attraverso apposite *schede* in base al modello costitutivo che si vuole utilizzare. Nello specifico sarà necessario definire tre materiali:

- *Al-5052*: utilizzato per la struttura dell'honeycomb;
- *Al-7075*: utilizzato per l'AIP in versione classica ed inizialmente anche per l'IA;
- *CFRP*: utilizzato per l'IA e per gli skin dell'AIP nella versione sandwich;

Al-5052 ed *Al-7075* possono essere definiti, entrambi, con la medesima scheda chiamata *M2_PLAS_JOHNS_ZERIL* che definisce un materiale con un comportamento elasto-plastico (Figura 120). Per la definizione di tale tipologia di materiali sono necessari alcuni parametri atti a definire il campo plastico (ad esempio parametri plastici e di incrudimento), tuttavia è possibile definire il tutto in maniera semplificata utilizzando l'opzione *Iflag* che permette una completa definizione del comportamento del materiale attraverso i parametri *densità* ρ , *modulo elastico* E , *modulo di Poisson* ν , *tensione di snervamento* σ_y , *tensione di rottura* UTS e *allungamento percentuale a rottura* E_{UTS} . I parametri di definizione per i due materiali sono riassunti in Tabella 5, tenendo conto che come unità di misura si è scelto di utilizzare *tonnellate-mm-s*:

Materiali	ρ [tonn/mm ³]	E [MPa]	ν [-]	σ_y [MPa]	UTS [MPa]	E_{UTS} [-]
Al-5052	2.68	70300	0.33	193	230	0.12
Al-7075	2.78	70300	0.33	500	570	0.12

Tabella 5: Parametri input scheda MAT2

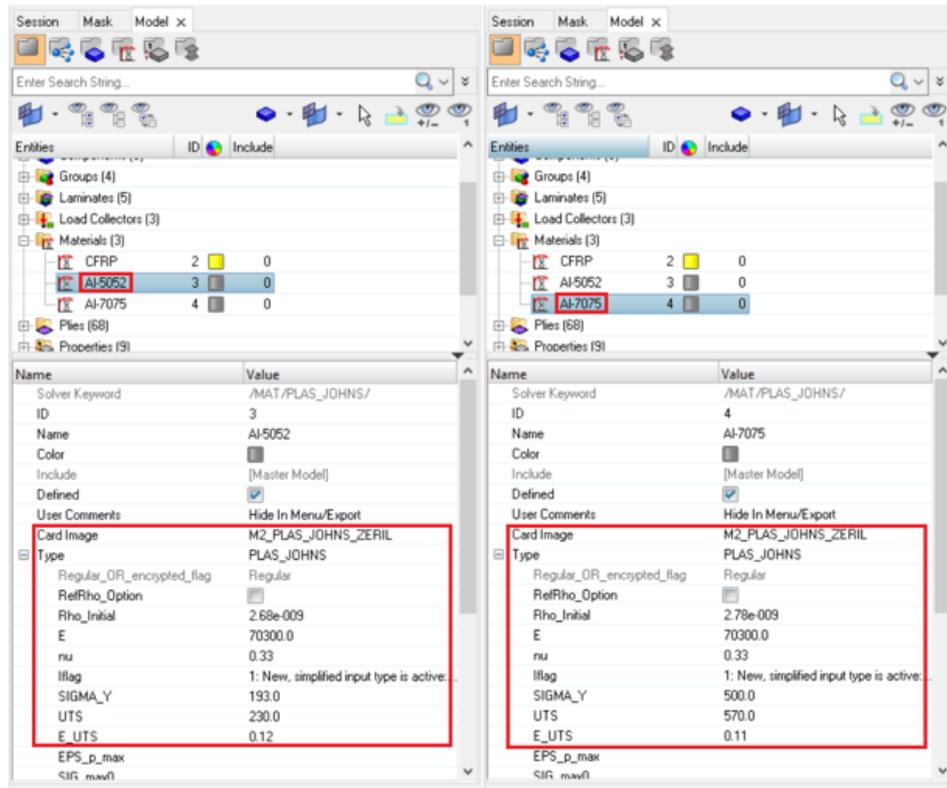


Figura 120: Scheda M2 per la definizione di AI-5052 e AI-7075

La scheda di definizione del CFRP è chiamata *M25_COMP SH* e risulta essere decisamente più complessa della precedente, richiedendo un numero più elevato di parametri.

Un materiale composito formato da fibre di rinforzo in una matrice polimerica è, infatti, ortotropo motivo per cui sarà necessario l’inserimento di parametri di rigidità nelle varie direzioni (E_{11} , E_{22} , E_{33} , ν_{12} , G_{12} , G_{13} e G_{23}).

Accanto a tali parametri è, inoltre, importante notare la necessità di definire il *criterio di rottura* per il singolo ply oltre che quello per l’intero laminato (flag *Ioff*). La definizione del criterio di rottura richiede ulteriori parametri quali:

- tensioni che definiscono il campo elastico e plastico sia a trazione che a compressione nelle varie direzioni ($\sigma_{1,yt}$, $\sigma_{2,yt}$, $\sigma_{1,yc}$, $\sigma_{2,yc}$, $\sigma_{12,yt}$, $\sigma_{12,yc}$);
- deformazioni di rottura e deformazioni limite (ϵ_{f_1} , ϵ_{f_2} , ϵ_{m_1} , ϵ_{m_2} , ϵ_{t_1} , ϵ_{t_2});
- lavoro massimo di deformazione plastica ($W_{p,max}$);
- danneggiamento massimo (d_{max});

Infine, sono necessari anche dei parametri che vadano a definire l’incrudimento, anche se minimo, subito dal composito in fase di deformazione plastica (*b* ed *n*).

Per i valori numerici specifici si è fatto riferimento ai datasheet dei fornitori da cui i diversi materiali sono stati acquistati.

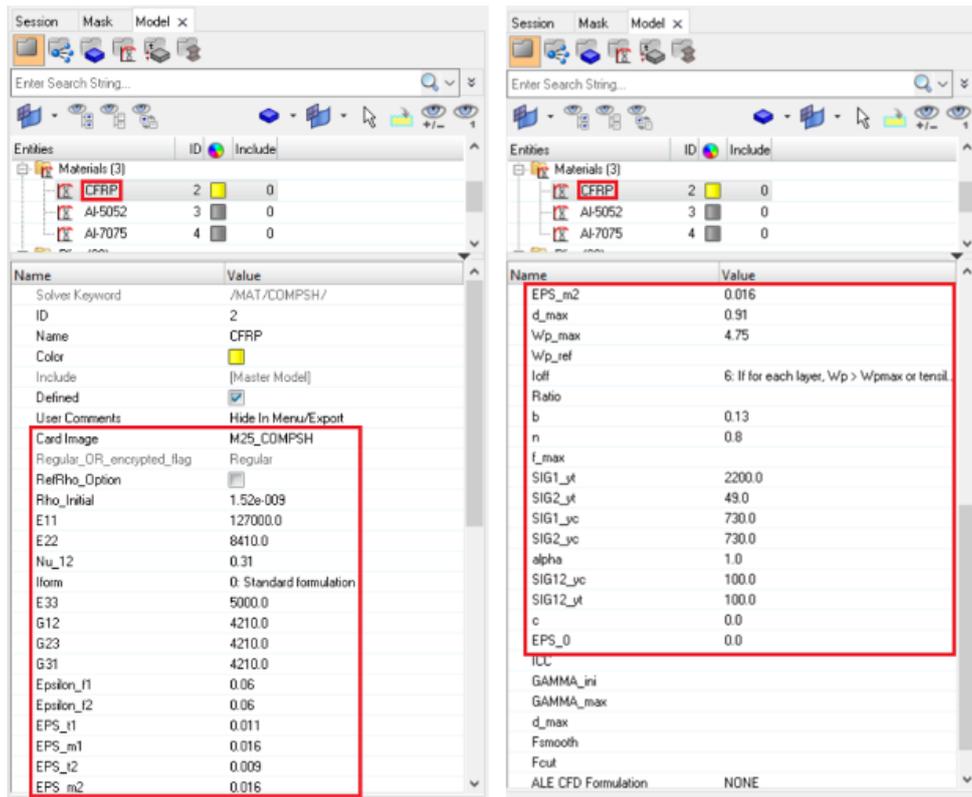


Figura 121: Scheda M25 per la definizione del CFRP

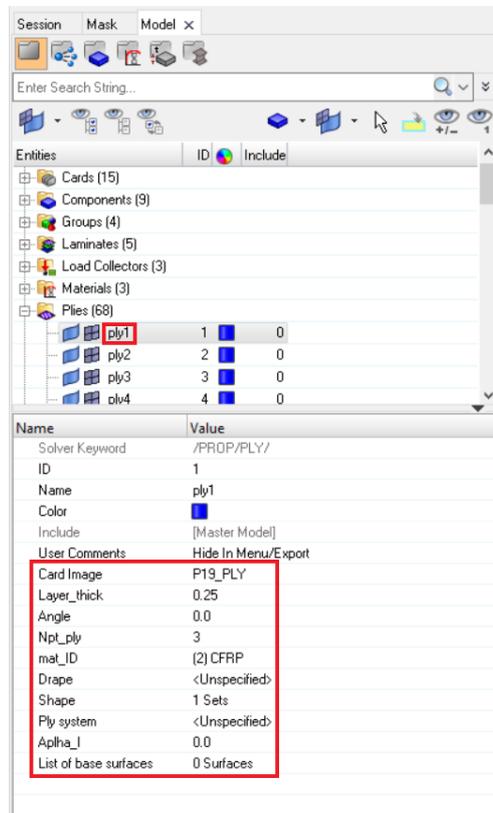


Figura 122: Scheda creazione ply

Define laminate:

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
ply_frontale1	13	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply_frontale2	14	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		

Figura 124: Scheda definizione laminato superficie frontale IA

Define laminate:

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
ply1	1	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply2	2	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply3	3	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply4	4	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply5	5	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply6	6	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
ply7	7	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply8	8	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply9	9	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply10	10	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply11	11	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
ply12	12	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		

Figura 125: Scheda definizione laminato superficie laterale IA

Per quanto riguarda i set di assegnazione dei diversi ply dell'AIP si ha:

Ply Numero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Set	IA6	IA6	IA6	IA6	IA5	IA5	IA5	IA4	IA4	IA3	IA2	IA2

Tabella 6: Relazione tra ply e set di definizione

Infine, per gli skin dell'AIP in configurazione sandwich sono stati utilizzati 16 ply, come osservabile dalle stack definite in Figura 126 e Figura 127.

Define laminate:

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
AIP_skin_superiore_ply1	21	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply2	22	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply3	23	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply4	24	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply5	29	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply6	30	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply7	31	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply8	32	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply9	49	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply10	50	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply11	51	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply12	52	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply13	57	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply14	58	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply15	59	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply16	60	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		

Figura 126: Scheda definizione laminato skin superiore AIP

Define laminate:

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
AIP_skin_inferiore_ply1	25	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply2	26	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply3	27	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply4	28	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply5	33	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply6	34	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply7	35	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply8	36	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply9	53	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply10	54	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply11	55	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply12	56	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply13	61	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply14	62	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply15	63	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply16	64	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		

Figura 127: Scheda definizione laminato skin inferiore AIP

7.7 Definizione ed Assegnazione delle Proprietà

Il passo successivo è la definizione delle *proprietà* e l'associazione delle stese ai vari componenti, cioè associare agli elementi di ciascun componente un certo modello e determinate caratteristiche (ad esempio lo spessore nel caso degli elementi 2D).

Per i componenti in materiale composito modellati con elementi 2D la scheda di definizione della proprietà è chiamata *P17_STACK* (Figura 128 e Figura 129). Tale scheda risulta essere abbastanza complessa richiedendo diversi parametri:

- *Ishell*: tipologia di formulazione dell'elemento shell;
- *Ismstr*: flag relativo alla formulazione per *piccole deformazioni*;
- *Z0*: offset del piano di riferimento;
- *Istrain*: flag per il calcolo delle deformazioni in fase di postprocessing;
- *Ithick*: flag per il calcolo delle risultanti di tensione;
- *Iplas*: flag per la plasticità nel caso di campo di tensioni piano;
- V_x , V_y e V_z : versori di definizione del sistema di riferimento dell'elemento;
- *Iorth*: flag relativo al sistema di riferimento dell'elemento;
- *Ipos*: flag di definizione del piano di definizione del vettore di riferimento;
- *Laminate*: laminato associato alla specifica proprietà;

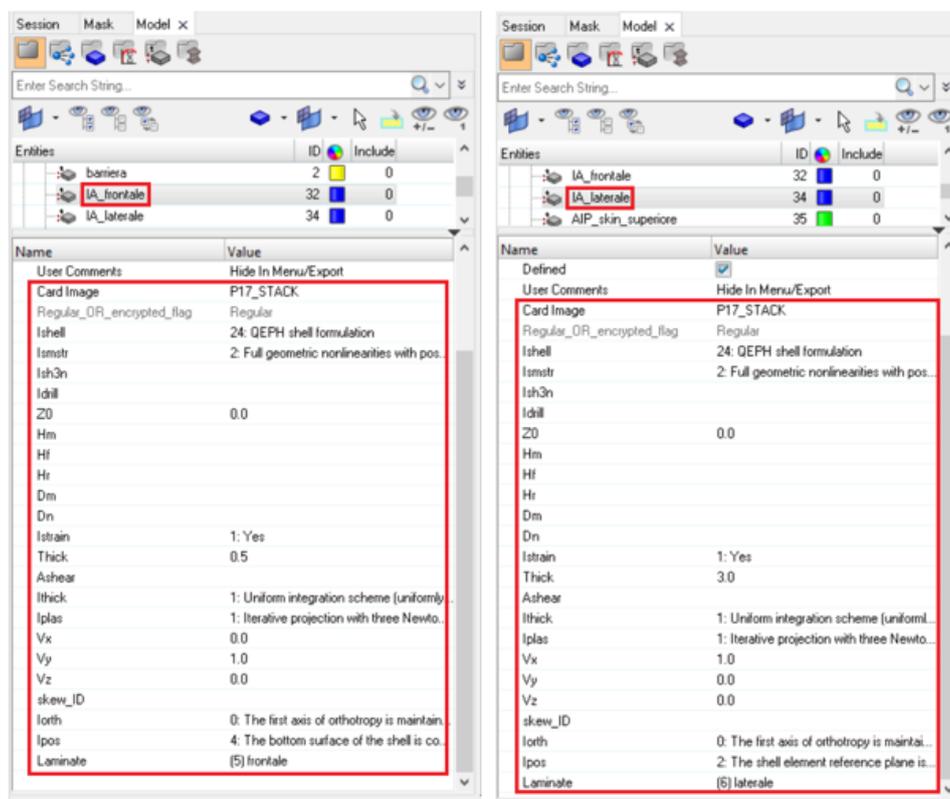


Figura 128: Scheda *P17_STACK* di definizione della superficie frontale (sinistra) e laterale (destra) dell'IA

Per tutti i laminati compositi si è scelto di utilizzare:

- *Ishell*: 24 *QEPH formulation (Quadrilateral ElastoPlastic Physical Hourglass Control)* cioè una tipologia di elementi QUAD con formulazione specifica per i problemi di natura elastoplastica con controllo avanzato dei meccanismi;
- *Ismstr*: 2 formulazione completamente non lineare con possibile passaggio alla formulazione alle piccole deformazioni con input manuale attraverso *RADIOSS*;
- *Istrain*: 1;
- *Ithick*: 1 schema di integrazione uniforme con distribuzione dei punti di integrazione uniforme tra i ply e/o nello spessore;
- *Iplas*: 1 Metodo di Newton con 3 step iterativi;

- *lorth*: 0 l'angolo di definizione della lamina è mantenuto costante rispetto ad un asse X di un sistema di riferimento co-rotazionale con l'elemento;

Si noti che per la *P17_STACK* non è necessario l'inserimento dello spessore poiché esso è automaticamente definito avendo definito in precedenza lo spessore di ciascun ply ed il numero di ply di ogni laminato.

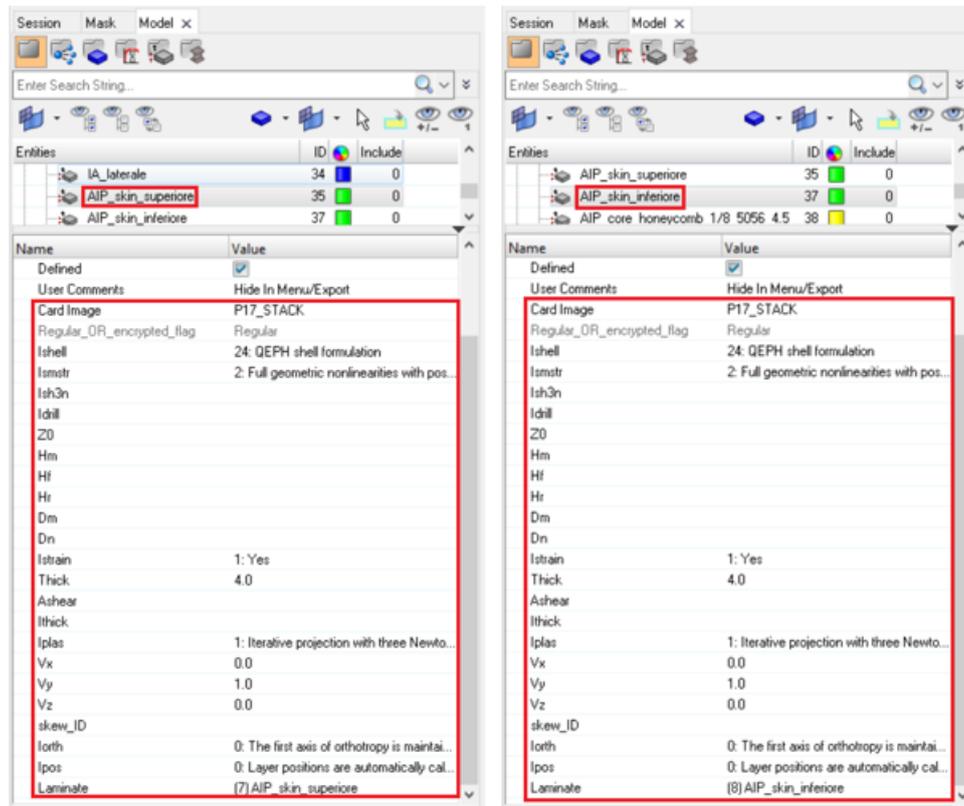


Figura 129: Scheda *P17_STACK* di definizione dello skin superiore (sinistra) ed inferiore (destra) dell'AIP

Oltre al laminato, anche i versori di definizione del sistema di riferimento degli elementi variano nelle proprietà dei diversi laminati coerentemente con la posizione degli stessi:

- $V_x = 0, V_y = 1$ e $V_z = 0$ per il laminato che definisce la superficie frontale dell'IA e per gli skin dell'AIP;
- $V_x = 1, V_y = 0$ e $V_z = 0$ per il laminato che definisce la superficie laterale dell'IA;

Oltre al sistema di riferimento degli elementi l'altra sostanziale differenza risiede nel parametro *Ipos*:

- 4 per il laminato che definisce la superficie frontale dell'IA: come piano di riferimento si prende la superficie inferiore dell'elemento, per cui la crescita del laminato avviene verso il basso;
- 2 per il laminato che definisce la superficie laterale dell'IA: il piano di riferimento è posizionato a *Z0* dalla superficie inferiore dell'elemento, per cui la crescita del laminato avviene verso l'esterno (Figura 130);
- 0 per il laminato che definisce gli skin dell'AIP: calcolo automatico della posizione dei diversi layer (Figura 131);

Tali scelte sono legate alla coerenza con il processo successivo di manufacturing (laminazione e polimerizzazione in stampo).

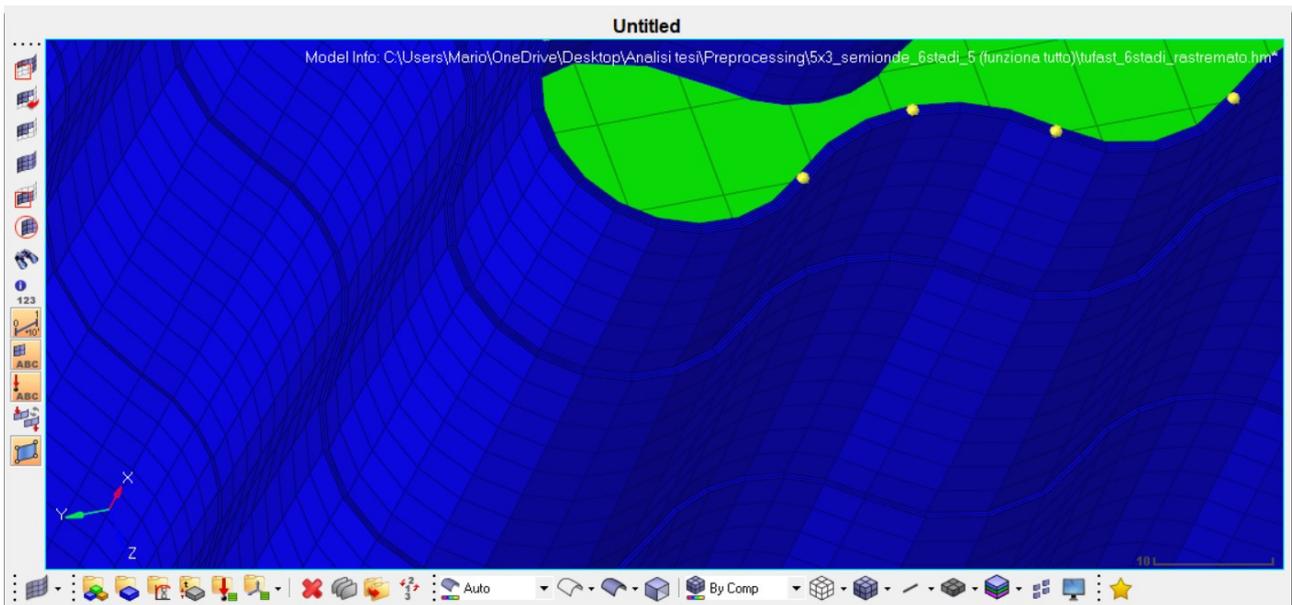


Figura 130: Rappresentazione 3D dei ply sulla superficie laterale dell'IA

Per i componenti in materiale metallico modellati con elementi 2D la scheda di definizione della proprietà è chiamata *PI_SHELL* (Figura 132Figura 129). Tale scheda è simile alla precedente *PI7_STACK* ma più semplice, richiedendo un numero inferiore di parametri (mancano $Z0$, V_x , V_y e V_z , $Iorth$, $Ipos$ e $Laminate$):

- *Ishell*: tipologia di formulazione dell'elemento shell;
- *Ismstr*: flag relativo alla formulazione per *piccole deformazioni*;
- *N*: numero di punti di integrazione;
- *Istrain*: flag per il calcolo delle deformazioni in fase di postprocessing;
- *Thick*: spessore degli elementi;
- *Ithick*: flag per il calcolo delle risultanti di tensione;
- *Iplas*: flag per la plasticità nel caso di campo di tensioni piano;

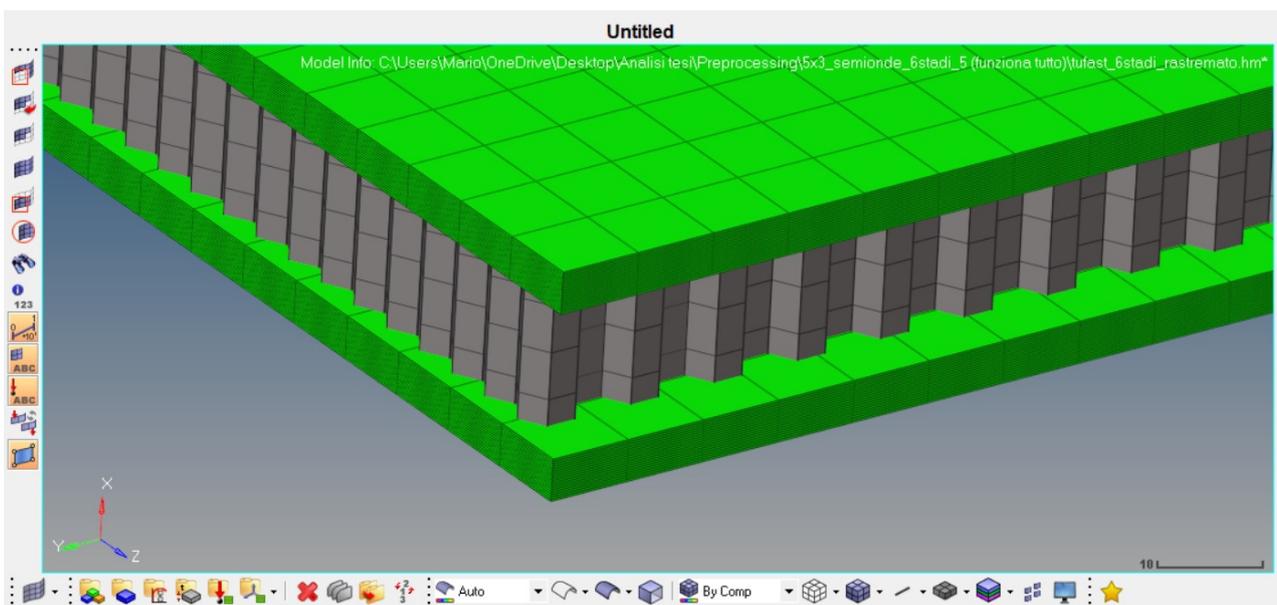


Figura 131: Rappresentazione 3D dei ply sugli skin dell'AIP

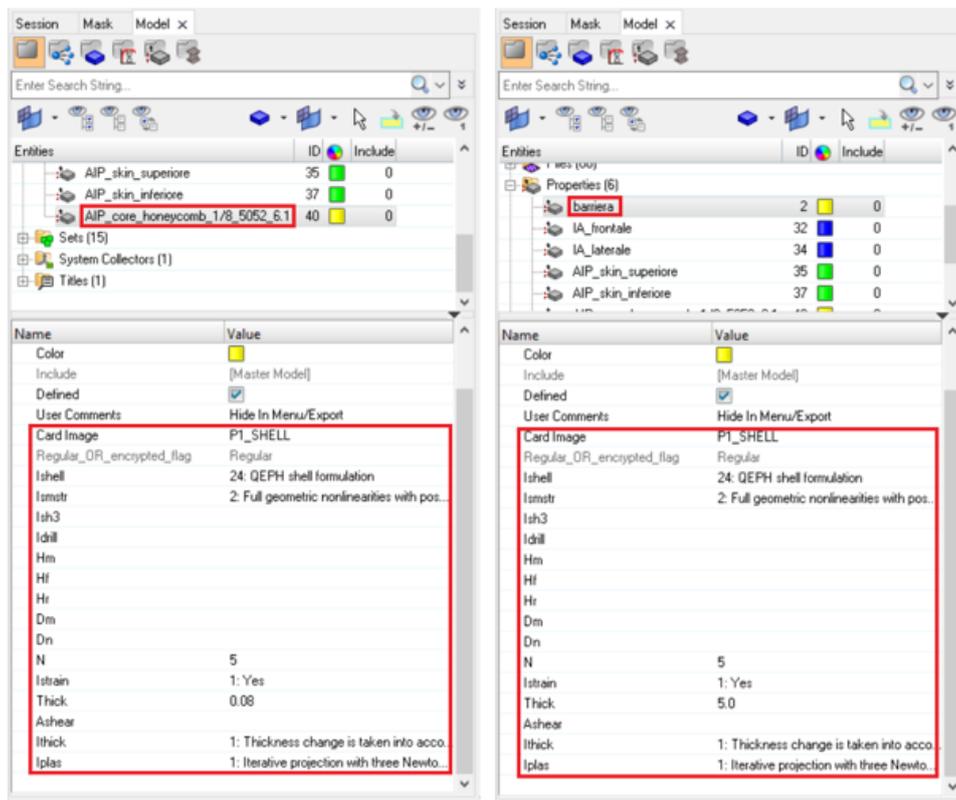


Figura 132: Scheda P1_SHELL di definizione dell'honeycomb (sinistra) e della barriera (destra)

Nello specifico, si è scelto di utilizzare:

- *Ishell*: 24 QEPH formulation (*Quadrilateral ElastoPlastic Physical Hourglass Control*) come nel caso precedente;
- *Ismstr*: formulazione completamente non lineare con possibile passaggio alla formulazione alle piccole deformazioni con input manuale attraverso *RADIOSS*;
- *N*: 5 (numero di punti di integrazione tipico per applicazioni dinamiche secondo i riferimenti bibliografici utilizzati);
- *Istrain*: 1;
- *Thick*: 0.08 per l'honeycomb (derivante dai datasheet del fornitore, Figura 133);
- *Ithick*: 1 i cambiamenti di spessore legati alla deformazione sono tenuti in considerazione;
- *Iplas*: 1 Metodo di Newton con 3 step iterativi;

Si noti che la scheda di definizione della proprietà della barriera (parte destra di Figura 132) è fittizia poiché, come fatto notare in precedenza, avendo collegato tutti i nodi della barriera ad un singolo nodo indipendente al quale è assegnata una condizione sulla velocità iniziale tramite elemento rigido, il moto relativo tra i nodi stessi risulta impedito, per cui essa si comporta, effettivamente, come un sistema infinitamente rigido. Tale proprietà è, tuttavia, necessaria poiché il software richiede che ad ogni componente sia associata una proprietà, in assenza della quale il modello FEM non può essere analizzato.

5052 Alloy Hexagonal Aluminum Honeycomb – Specification Grade

Both CR-PAA and CR III corrosion-resistant coating

Hexcel Honeycomb Designation Cell Size – Alloy – Foil Gauge	Nominal Density pcf	Compressive					Crush Strength psi	Plate Shear					
		Bare		Stabilized		L Direction		W Direction					
		Strength psi	min	Strength psi	min	Modulus ksi		Strength psi	Modulus ksi	Strength psi	Modulus ksi		
1/16 – 5052 – .0007	6.5	950	740	1000	780	275	505x	560	440	90.0	350	270	40.0
1/16 – 5052 – .001	9.2	1500	1170	1550	1200	420	750x	850	660	150.0	520	400	53.0
1/16 – 5052 – .0015	12.4	2430	1900	2650	2000	650	1200x	1150	900	210.0	715	560	65.0
1/8 – 5052 – .0007	3.1	285	200	300	215	75	130	210	155	45.0	130	90	22.0
1/8 – 5052 – .001	4.5	550	375	570	405	150	260	340	285	70.0	220	168	31.0
1/8 – 5052 – .0015	6.1	980	650	1020	680	240	450	560	455	98.0	340	272	41.0
1/8 – 5052 – .002	8.1	1500	1000	1560	1100	350	750	800	670	135.0	470	400	54.0
1/8 – 5052 – .0025	10.0	2100p	1575p	2250p	1685p	500x	1050x	980p	735p	175.0p	550p	415p	65.0p
1/8 – 5052 – .003	12.0	2700	2100	2900	2200	900	1350x	1940i	1250i	210.0x	1430i	1000i	78.0x
5/32 – 5052 – .0007	2.6	220	150	240	160	55	90	165	120	37.0	100	70	19.0
5/32 – 5052 – .001	3.8	395	285	410	300	110	185	270	215	56.0	165	125	26.4
5/32 – 5052 – .0015	5.3	690	490	720	535	195	340	420	370	84.0	270	215	36.0
5/32 – 5052 – .002	6.9	1080	770	1130	800	285	575	590	540	114.0	375	328	46.4
5/32 – 5052 – .0025	8.4	1530	1070	1600	1180	370	800	760	690	140.0	475	420	56.0
3/16 – 5052 – .0007	2.0	160	90	175	100	34	60	120	80	27.0	70	46	14.3
3/16 – 5052 – .001	3.1	290	200	335	215	75	130	210	155	45.0	125	90	22.0
3/16 – 5052 – .0015	4.4	520	360	550	385	145	250	330	280	68.0	215	160	30.0
3/16 – 5052 – .002	5.7	820	560	860	600	220	390	460	410	90.0	300	244	38.5
3/16 – 5052 – .0025	6.9	1120	770	1175	800	285	575	590	540	114.0	375	328	46.4
3/16 – 5052 – .003	8.1	1600	1000	1720	1100	350	750	725	670	135.0	480	400	54.0
1/4 – 5052 – .0007	1.6	90	60	100	70	20	40	85	60	21.0	50	32	11.0
1/4 – 5052 – .001	2.3	190	120	210	130	45	75	140	100	32.0	85	57	16.2
1/4 – 5052 – .0015	3.4	340	240	370	250	90	150	230	180	50.0	140	105	24.0
1/4 – 5052 – .002	4.3	500	350	540	370	140	230	320	265	66.0	200	155	29.8
1/4 – 5052 – .0025	5.2	690	500	760	510	190	335	410	360	82.0	265	200	35.4
1/4 – 5052 – .003	6.0	990	630	1100	660	235	430	530	445	96.0	340	265	40.5
1/4 – 5052 – .004	7.9	1420	970	1490	1050	340	725	700	650	130.0	440	390	52.8
3/8 – 5052 – .0007	1.0	50	20	55	20	10	25	45	32	12.0	30	20	7.0
3/8 – 5052 – .001	1.6	90	60	95	70	20	40	85	60	21.0	50	32	11.0
3/8 – 5052 – .0015	2.3	190	120	200	130	45	75	135	100	32.0	80	57	16.2
3/8 – 5052 – .002	3.0	285	190	310	200	70	120	200	145	43.0	125	85	21.2
3/8 – 5052 – .0025	3.7	370	270	410	285	105	180	250	200	55.0	160	115	26.0
3/8 – 5052 – .003	4.2	520	335	560	355	135	220	310	255	65.0	200	150	29.0
3/8 – 5052 – .004	5.4	740	500	800	535	200	360	430	380	86.0	280	228	36.8
3/8 – 5052 – .005	6.5	950	700	1000	750	265	505	545	500	105.0	350	300	43.5

Figura 133: Datasheet fornitore honeycomb, [73]

Per i componenti in materiale metallico modellati con elementi 3D la scheda di definizione della proprietà è chiamata *P14_SOLID* (Figura 134Figura 129) ed è la più semplice, poiché richiede soltanto tre parametri:

- *ISOLID*: tipologia di formulazione dell'elemento solido;
- *Ismstr*: flag relativo alla formulazione per *piccole deformazioni*;
- *Icpre*: flag per la formulazione nel caso di pressione costante;

Nel caso specifico si è scelto di utilizzare:

- *ISOLID*: 14 HA8 cioè elementi privi di fenomeni di locking, co-rotazionali, integrazione completa e numero di punti di Gauss variabile;
- *Ismstr*: non linearità completa;
- *Icpre*: 3 nessuna sotto-integrazione;

Terminato il processo di definizione delle proprietà è possibile assegnare le stesse, assieme ai materiali, come mostrato nella parte sinistra di Figura 135. Per gli elementi rigidi, invece, non è necessaria

l'assegnazione di proprietà e materiali, poiché è sufficiente spuntare l'opzione *Rbody/Admas* (parte destra di Figura 135).

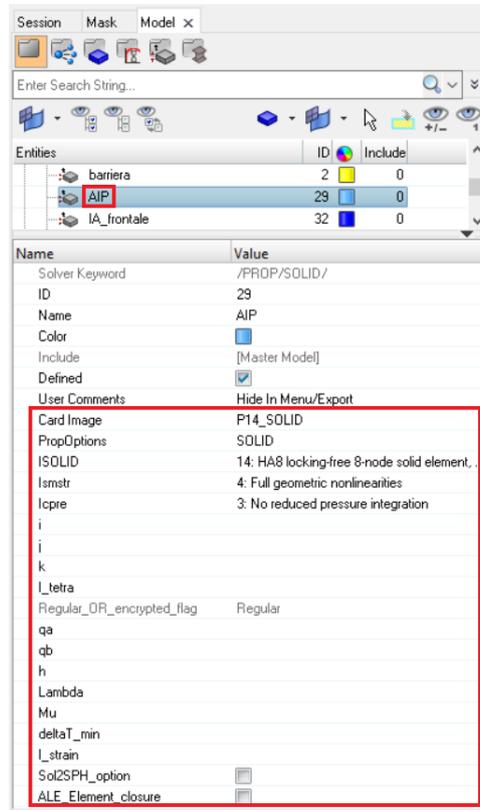


Figura 134: Scheda P14_SOLID di definizione dell'AIP in configurazione classica

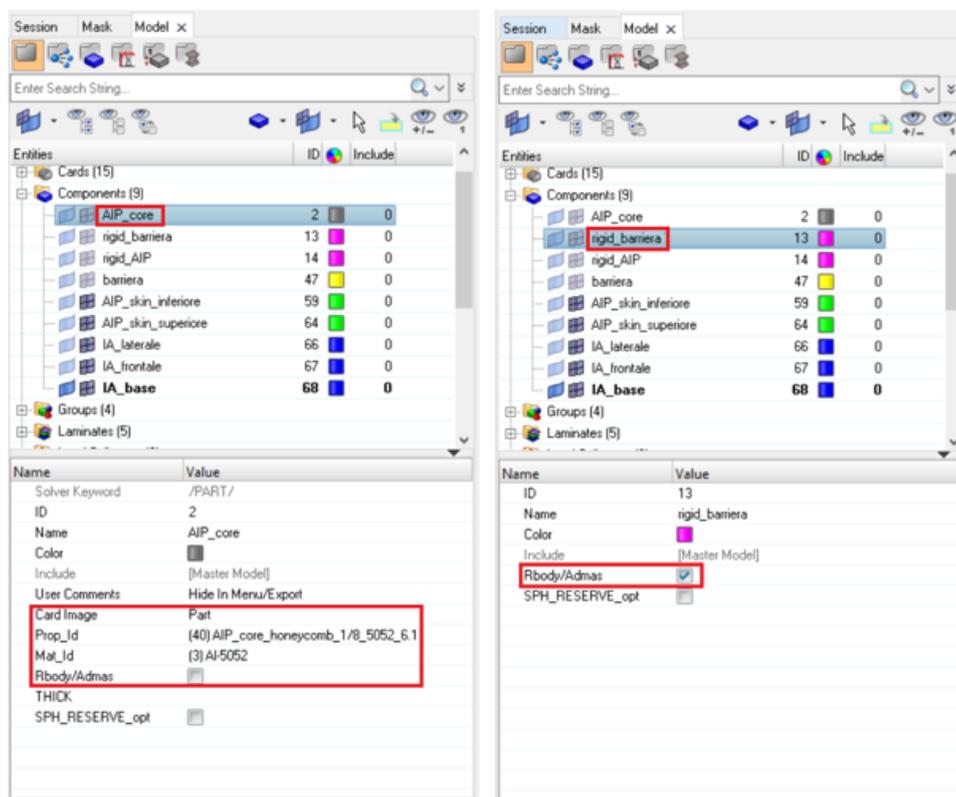


Figura 135: Assegnazione proprietà e materiali elementi deformabili (sinistra) ed elementi rigidi (destra)

7.8 Definizione Contatti

L'ultimo step di modellazione FEM è la definizione dei *contatti* tra le mesh dei diversi componenti. Le due tipologie di contatto utilizzate sono:

- *TYPE2*;
- *TYPE7*;

Il *TYPE2* è una tipologia di contatto utilizzate nel caso di *tied contact*, cioè nel caso in cui le mesh risultano già essere inizialmente in contatto, per cui si tratta di una *condizione cinematica* più che di un vero e proprio contatto e permette la trasmissione di forze e momenti dai nodi definiti come *slave nodes* alla superficie definita come *master surface*. Tale tipologia di contatto assicura, inoltre, il completo equilibrio sia a livello di forze che di momenti.

Come è possibile osservare da Figura 136, la definizione di un contatto *TYPE2* richiede:

- *slave nodes e master surface*;
- *ignore*: flag per ignorare gli *slave nodes* se nella ricerca non si trova nessun *master segment*;
- *Spotflag*: flag di definizione della tipologia di formulazione;

Nel caso specifico si è scelto di utilizzare:

- *ignore*: 2 gli *slave nodes* che non hanno proiezione sul *master segment* inizialmente vengono cancellati ed una nuova ricerca viene effettuata se *dsearch* diviene nullo;
- *Spotflag*: 0 *Default* raccomandato per elementi shell con integrazione completa e per elementi solidi;

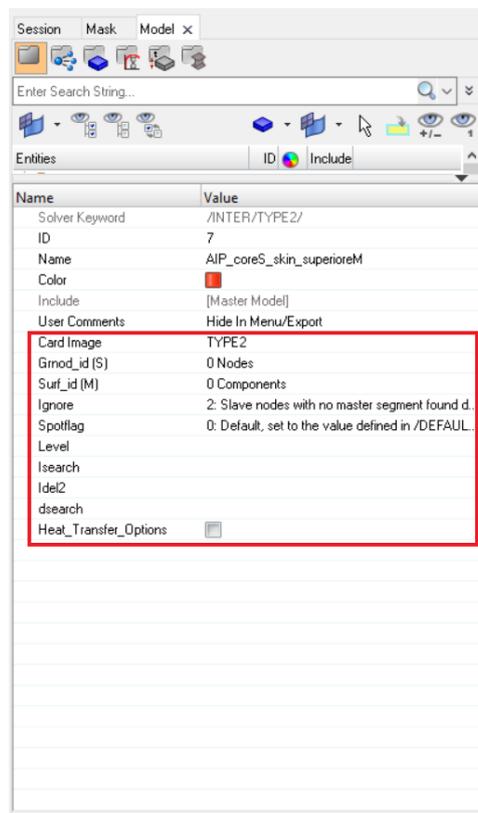


Figura 136: Scheda definizione contatto TYPE2

Il *TYPE7* è una tipologia di contatto per uso generale molto utilizzata nelle analisi di impatto tra solidi, sia ad elevata che a bassa velocità (per interazioni tra fluidi e solidi è necessario utilizzare altre formulazioni). Come le altre tipologie di contatto si basa sulla ricerca del segmento di impatto ma, a differenza di tali altre tipologie, la ricerca viene effettuata in maniera diretta nel *TYPE7 contact*; inoltre, non si hanno limitazioni

sulla ricerca, per cui vengono individuati tutti i possibili contatti, incluso il *self contact*. Infine, il vantaggio maggiore è la possibilità di considerare una rigidezza non costante, bensì che si incrementa man mano che la penetrazione tra le due mesh viene prevenuta.

Come è possibile osservare da Figura 137, la definizione di un contatto *TYPE7* è più complessa, richiedendo un numero maggiore di parametri:

- *slave nodes e master surface*;
- *Istf*: flag relativo alla rigidezza;
- *Igap*: flag relativo al gap;
- *Idel*: flag relativo all'eliminazione di nodi e/o segmenti di impatto;
- *Fscale_gap*: fattore di riduzione del gap;
- *Irem_gap*: flag per la disattivazione degli slave nodes nel caso in cui la taglia degli elementi diventi inferiore al valore di gap (self contact);
- *Fric*: coefficiente di attrito;
- *Gapmin*: valore minimo del gap (cioè della distanza tra le mesh) perché si attivi il contatto;
- *Inacti*: flag di disattivazione dell'incremento di rigidezza;

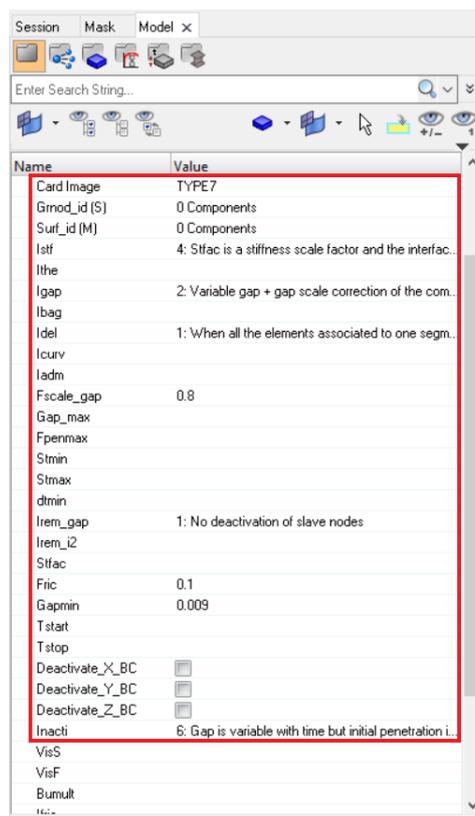


Figura 137: Scheda definizione contatto TYPE7

Nel caso specifico si è scelto di utilizzare:

- *Istf*: 4 l'incremento di rigidezza viene calcolato tenendo conto delle caratteristiche sia della master surface che degli slave nodes (*Stfac* = 0, per cui si tiene conto dei due componenti in egual misura);
- *Igap*: 2 gap variabile a cui si somma un fattore correttivo;
- *Idel*: 1 l'eliminazione di un segmento di contatto avviene quando tutti gli elementi associati allo stesso sono eliminati;

- *Fscale_gap*: 0.8 (valore di default);
- *Irem_gap*: 1 nessuna disattivazione;
- *Fric*: 0.1 (valore ricavato da letteratura);
- *Gapmin*: 0.009 (valore di compromesso, minore è il gap maggiore è la precisione ma minore è la stabilità dell'algoritmo);
- *Inacti*: gap variabile nel tempo ma è calcolata anche la compenetrazione iniziale;

Si noti che nella configurazione con AIP classico, è sufficiente la definizione di due soli contatti:

- *barriera-IA*;
- *IA-AIP*;

Al contrario, nella configurazione con AIP sandwich i contatti da definire saranno quattro:

- *barriera-IA*;
- *IA-skin superiore AIP*;
- *skin superiore AIP-honeycomb*;
- *honeycomb- skin inferiore AIP*;

E', infine, importante notare come la scelta di master e slave non sia casuale; perché il modello fornisca i migliori risultati e l'algoritmo risolutivo risulti stabile è buona norma scegliere come master il componente:

- più rigido;
- con la mesh meno fitta;
- in movimento;

Contatto	Tipo	Master	Slave
<i>Barriera-IA</i>	<i>TYPE7</i>	barriera	IA
<i>IA-AIP</i>	<i>TYPE2</i>	AIP	IA

Tabella 7: Contatti modello AIP classico

Definito il componente master, lo slave risulta definito di conseguenza. Tenendo conto di quanto appena detto, per i due casi in esame è possibile riassumere la creazione dei contatti facendo riferimento ai prospetti Tabella 7 (configurazione con AIP classica) e Tabella 8 (configurazione con AIP sandwich).

Contatto	Tipo	Master	Slave
<i>Barriera-IA</i>	<i>TYPE7</i>	Barriera	IA
<i>Core-Skin Superiore</i>	<i>TYPE2</i>	Skin superiore	Core
<i>Core-Skin Inferiore</i>	<i>TYPE2</i>	Core	Skin inferiore
<i>Skin Superiore-IA</i>	<i>TYPE2</i>	Skin superiore	IA

Tabella 8: Contatti modello AIP sandwich

7.9 Definizione Output Card

Restano, infine, da definire le *Output Card* cioè le schede che definiscono l'analisi in termini di:

- *tempo totale di simulazione*;
- *frequenza di creazione delle animazioni*;
- *risultati richiesti*;

La creazione delle *Output Card* può essere effettuata in maniera manuale ma richiede numerosi passaggi, per cui, data l'esistenza di un tool di generazione automatico, spesso si preferisce tale seconda via. Il tool automatico è detto *Engine File Assistant* ed è presente sotto il menu *Tools* (Figura 138).

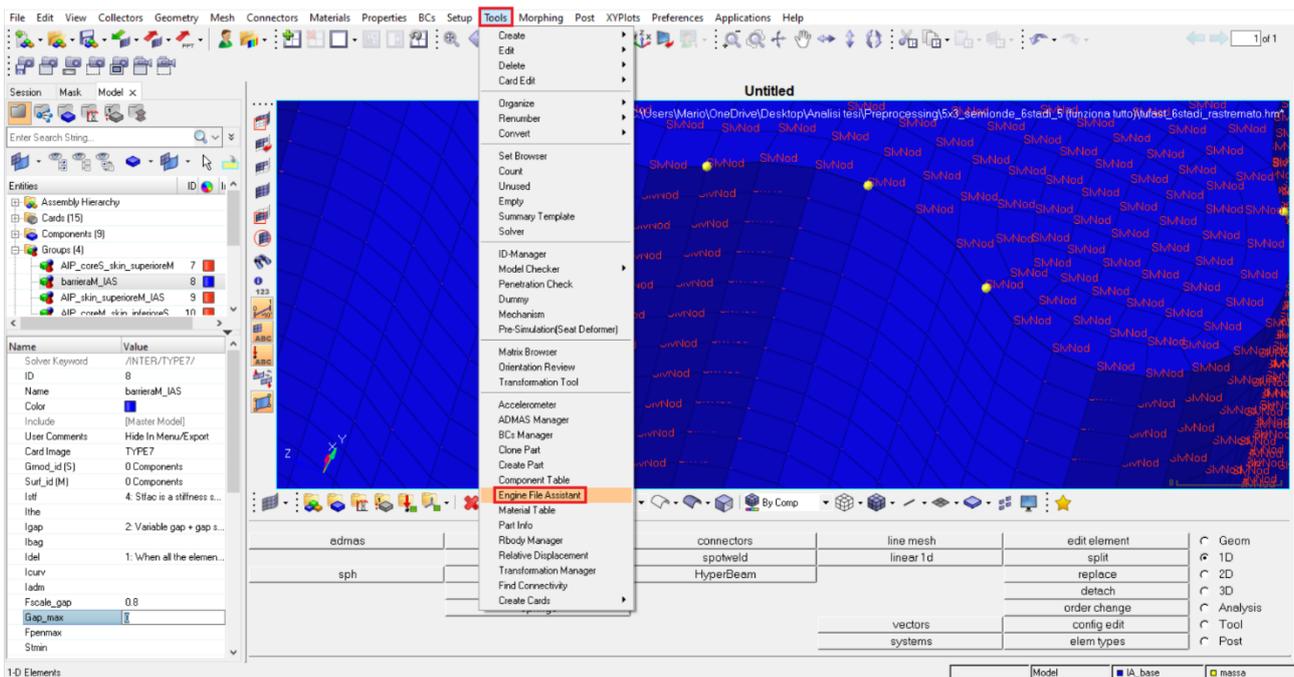


Figura 138: Tool Engine File Assistant

Engine File Assistant richiede l'inserimento del tempo totale di analisi e della frequenza di generazione delle animazioni; inoltre è possibile anche generare le più comuni *Output Cards* in maniera automatica, spuntando l'opzione *Generate default output request* (Figura 139).

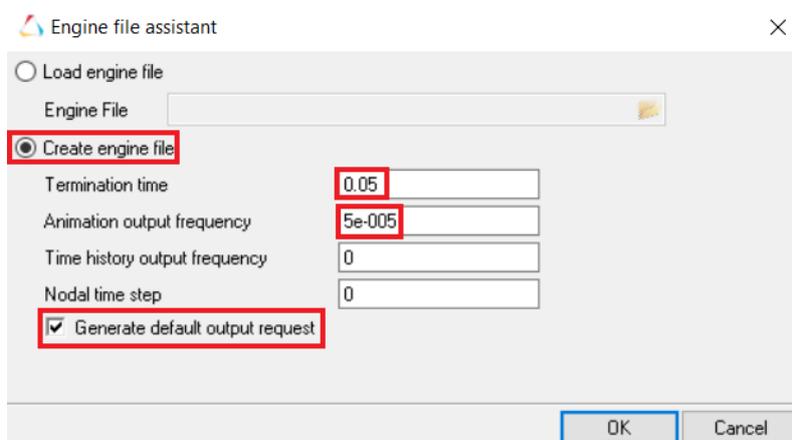


Figura 139: Settaggio parametri Engine File Assistant e generazione output cards

Come detto, però, tale tool di generazione automatica è in grado di generare solamente le *Output Cards* relative ai risultati più comuni (spostamenti, energia totale, energia cinetica, energia interna, tensioni e deformazione per elementi 2D, ...); per risultati meno comuni è necessario inserire le *Output Cards* specifiche attraverso la funzione manuale mostrata in Figura 140.

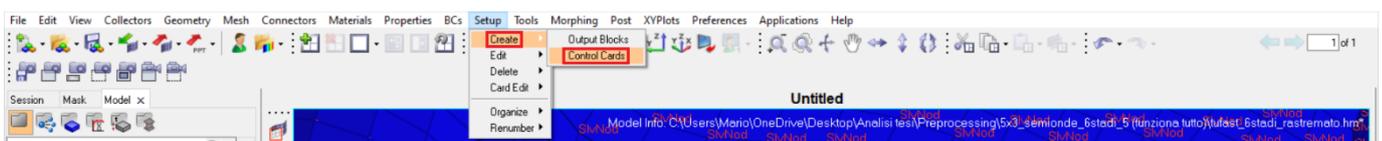


Figura 140: Tool creazione manuale Control Cards

Tale procedura risulta essere necessaria, ad esempio, per visualizzare i risultati relativi ad elementi solidi, per cui sarà necessario inserire manualmente tali schede (Figura 141) per il modello con AIP in configurazione classica.

Card Name	Control Buttons
ENG_ALE	
ENG_ALE_2	
ENG_ALE_3	
ENG_ALE_4	
ENG_ALESUB	
ENG_ANIM_BRICK_TDEL	delete, disable, enable
ENG_ANIM_BRICK_TENS	delete, disable, enable
ENG_ANIM_BRICK_TENS_STRAIN	
ENG_ANIM_BRICK_TENS_STRESS	
ENG_ANIM_BRICK_VDAM	
ENG_ANIM_CUT_1	
ENG_ANIM_CUT_2	
ENG_ANIM_CUT_3	next, prev, return
ENG_ANIM_DT	

Figura 141: Inserimento manuale Card elementi solidi

Prima di procedere con l'analisi è, ancora, necessario settare la richiesta di calcolo delle accelerazioni, poiché esse il calcolo delle stesse non avviene in maniera automatica. A tale scopo è necessario spuntare l'opzione ACC nella Control Card ENG_ANIM_VECT (Figura 142).

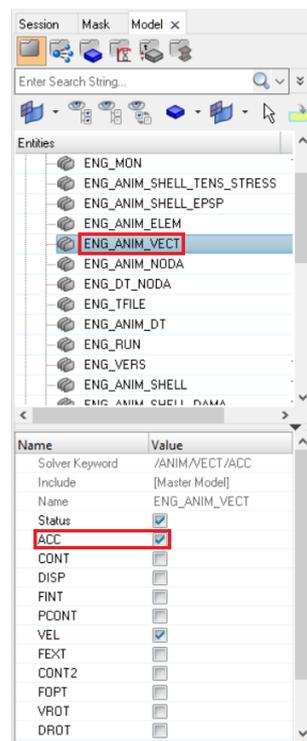


Figura 142: Calcolo accelerazioni

Come fatto notare in precedenza, nelle analisi dinamiche, il time step e la taglia della mesh sono collegati così da rendere stabile l'algoritmo di risoluzione del modello FEM, per tale motivo, fissata una certa taglia della mesh, la dimensione dell'elemento più piccolo dell'intero modello della mesh fissa l'ampiezza del time step. Tuttavia, bisogna tenere in considerazione che durante l'analisi la deformazione degli elementi porta ad una modifica delle dimensioni degli stessi e, coerentemente, si avrà una riduzione del time step. In alcuni casi può capitare che la riduzione diventi molto importante, per cui i tempi di analisi tendono a divenire estremamente lunghi; per scongiurare tale eventualità, è possibile fissare un time step minimo facendo uso di una procedura chiamata *mass scaling* (Figura 143).

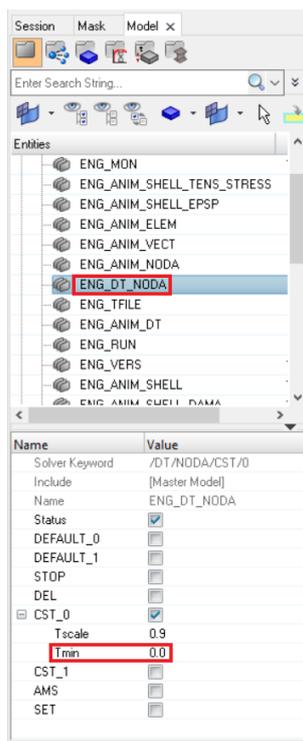


Figura 143: Inserimento time step minimo

La procedura di mass scaling consiste, essenzialmente, nell'aggiungere una massa non fisica al sistema, per cui si genera un errore sulla massa quantificato dal parametro dM/M (Figura 144).

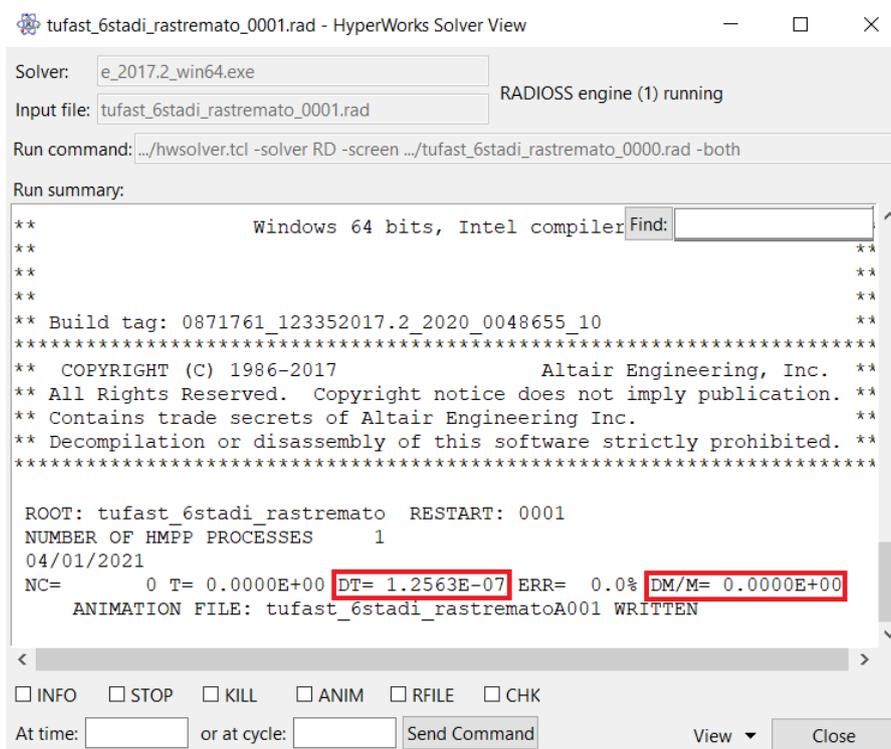


Figura 144: Time step ed errore sulla massa

Tale errore sulla massa deve restare contenuto, poiché variazioni importanti di massa provocano variazioni importanti del comportamento dinamico del sistema; proprio per tale motivo non è possibile settare un time step minimo troppo elevato, altrimenti i risultati dell'analisi risulterebbero completamente errati. Allo stesso

tempo è, anche, necessario monitorare *l'errore sull'energia ERR* (Figura 145); esso, in linea teorica, dovrebbe essere:

- negativo;
- abbastanza piccolo in valore assoluto;
- decrescente;

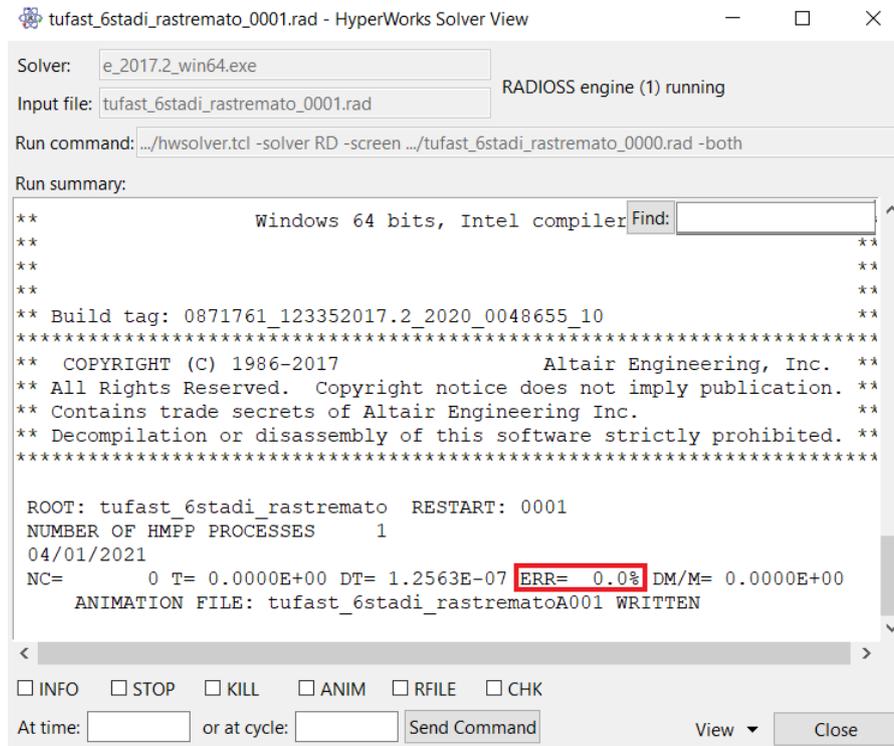


Figura 145: Errore sull'energia

CAPITOLO VIII - Postprocessing, scelta della configurazione e ottimizzazione

Terminata la fase di processing, ovvero la fase di risoluzione vera e propria del modello FEM, si procede alla fase di *postprocessing* che consiste nell'analisi dei risultati ottenuti. Nello specifico, in tale trattazione sono proposte 6 configurazioni diverse, riassunte in Tabella 9, coerentemente con i *parametri variabili* scelti nel capitolo precedente. Si noti, inoltre, la presenza di due configurazioni apparentemente identiche (*Configurazione Numero 1* e *Configurazione Numero 2*); ciò che varia, in questo caso, è lo spessore del guscio di Al-7075 che costituisce l'IA. Dopo la fase di postprocessing si procede alla *scelta della configurazione* migliore e ad una parziale *ottimizzazione* della stessa.

Configurazione Numero	Geometria	Materiale IA	Tipo AIP
1	5x3 semionde	Al-7075	classico
2	5x3 semionde	Al-7075	classico
3	5x3 semionde	CFRP	classico
4	5x3 semionde	CFRP	honeycomb
5	5x2 semionde	CFRP	classico
6	5x2 semionde	CFRP	honeycomb

Tabella 9: Configurazioni proposte

8.1 Postprocessing

Coerentemente con i requisiti richiesti da regolamento, i risultati di interesse da indagare nelle analisi sono:

- *tensioni su AIP (AIP in configurazione classica);*
- *failure index (AIP in configurazione sandwich);*
- *energia assorbita;*
- *decelerazioni;*
- *deflessione massima AIP;*

Si noti che le accelerazioni, così come gli spostamenti, sono calcolati nodo per nodo, per cui è necessario scegliere un nodo specifico per la lettura dei risultati relativi alle decelerazioni e alla deflessione massima subita dall'AIP.

Nella prova sperimentale gli accelerometri sono posizionati, solitamente, sul maglio, motivo per cui, per coerenza, si è scelto di indagare le decelerazioni sul nodo indipendente di definizione dell'elemento rigido della barriera. Allo stesso tempo, considerando la condizioni di carico e di vincolo dell'AIP è lecito supporre che i punti che subiscono maggiore deflessione sono quelli in zona centrale, per cui si è deciso di indagare i risultati sulla deflessione nel nodo centrale della faccia inferiore dell'AIP.

Accanto a ciò, anche la *massa* un ruolo centrale; essa può essere calcolata mediante un apposita funzione chiamata *mass calc* presente sotto il menu *Tool*.

assemblies	find	translate	check elems	numbers	Geom
organize	mask	rotate	edges	renumber	1D
color	delete	scale	faces	count	2D
rename		reflect	features	mass calc	3D
reorder		project	normals	tags	Analysis
		position	dependency	HyperMorph	Tool
		permute		shape	Post

Figura 146: Funzione mass calc

8.1.1 Configurazione Numero 1

La Configurazione Numero 1 presenta:

- IA in configurazione 5x3 semionde in Al-7075 con uno spessore di 3 mm;
- AIP in configurazione classica;

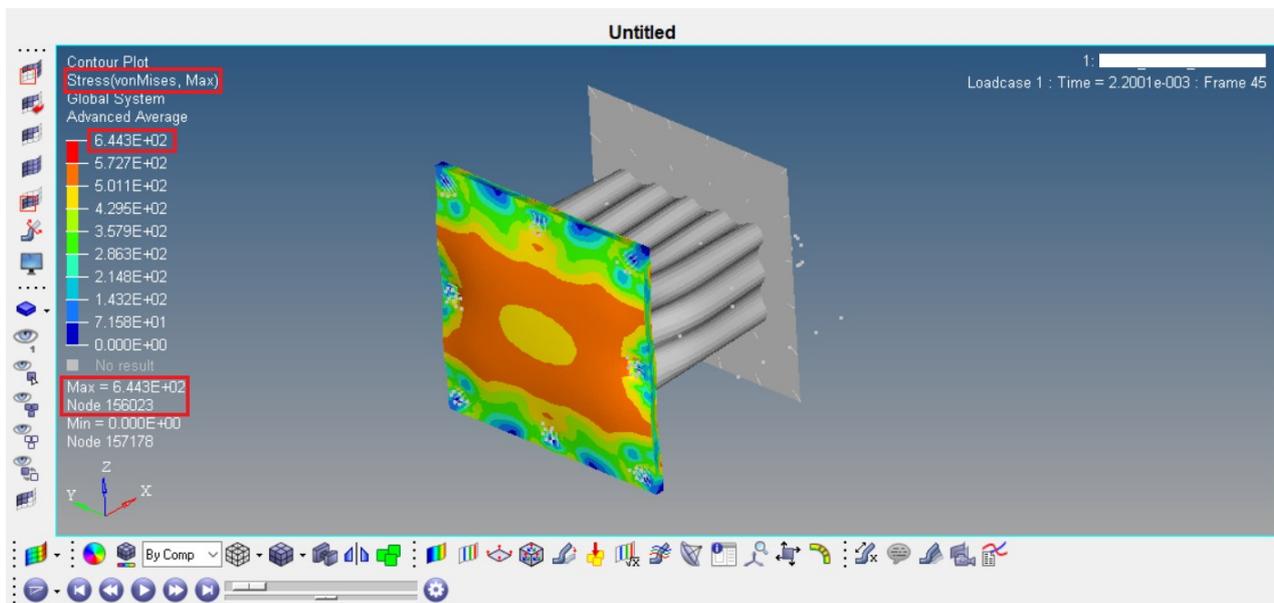


Figura 147: Tensione equivalente di Von Mises su AIP Configurazione Numero 1

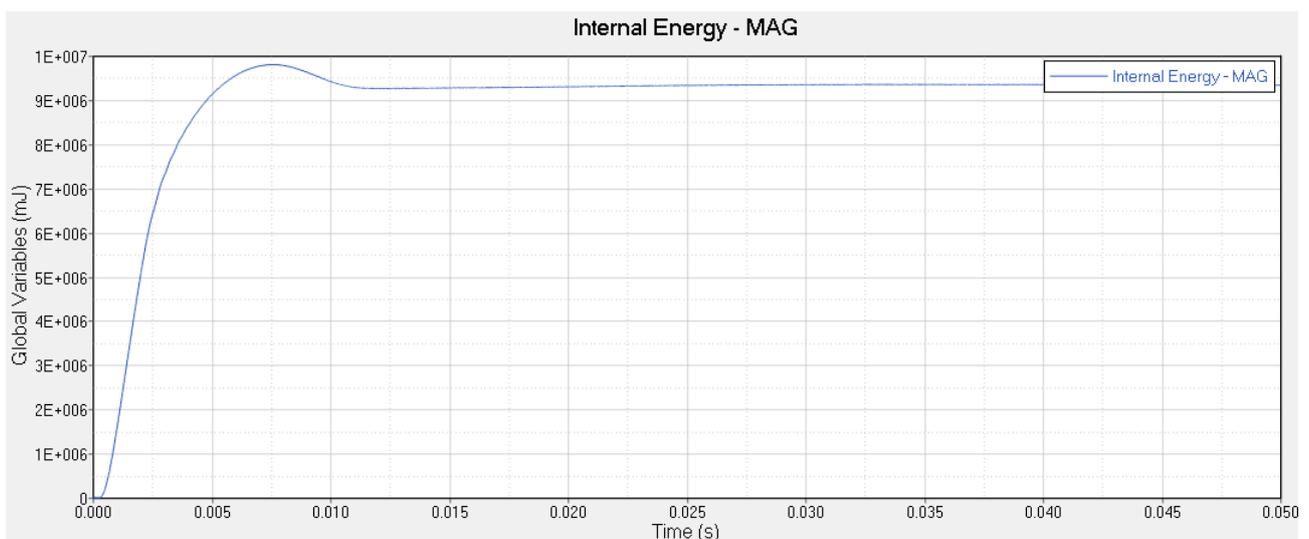


Figura 148: Energia assorbita Configurazione Numero 1

Come è possibile osservare da Figura 147, la tensione equivalente di Von Mises è ampiamente al di sopra dell'UTS dell'AL-7075 (che si ricorda essere pari a circa 570 MPa), per cui è praticamente certo che l'AIP

subisca sfondamento; anche le decelerazioni non rispettano i requisiti imposti da regolamento, quindi tale configurazione deve necessariamente essere scartata. L'energia assorbita è, invece, ampiamente sufficiente ($> 9000 J$, Figura 148), così come risulta rispettato il requisito sulla massima deflessione permanente (Figura 150).

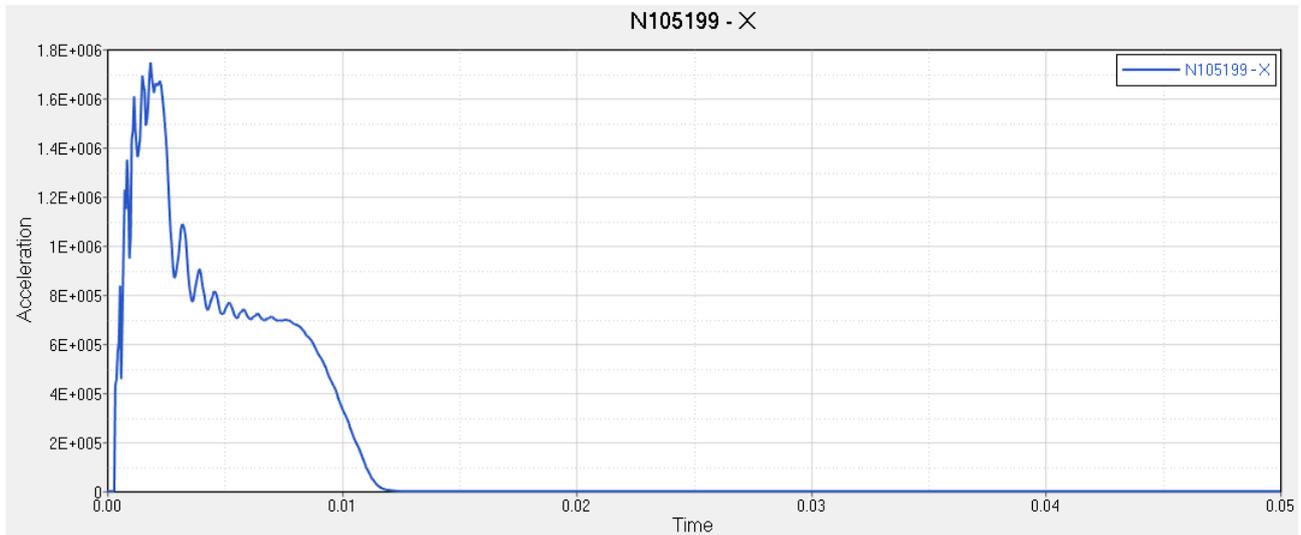


Figura 149: Decelerazioni Configurazione Numero 1

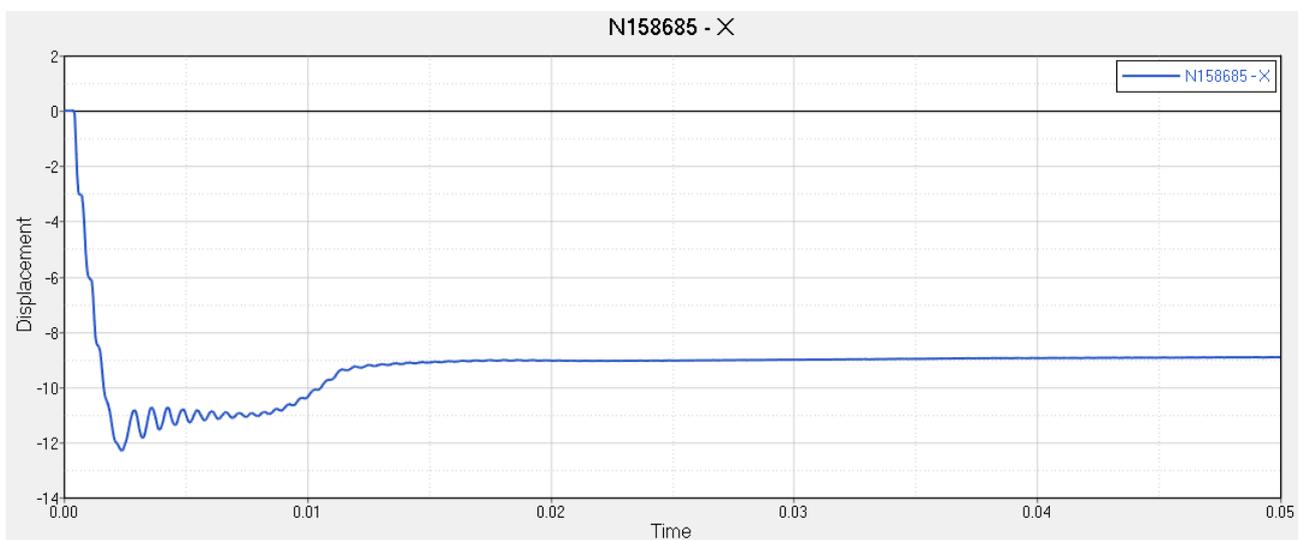


Figura 150: Deflessione massima AIP Configurazione Numero 1

Per completezza espositiva sono comunque riportati i risultati completi in termini di performance:

Configurazione Numero	Sfondamento AIP	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
1	SI	> 9	≈ 178	≈ 72	≈ 9	≈ 3.1

Tabella 10: Performance Configurazione Numero 1

8.1.2 Configurazione Numero 2

La Configurazione Numero 2 presenta:

- IA in configurazione 5x3 semionde in Al-7075 con uno spessore di 1 mm;
- AIP in configurazione classica;

Come è possibile osservare da Figura 151, la tensione equivalente di Von Mises è poco al di sotto dell'UTS dell'AL-7075, per cui è presumibile che l'AIP subisca sfondamento; anche le decelerazioni non rispettano i requisiti imposti da regolamento, quindi anche tale configurazione deve necessariamente essere scartata.

L'energia assorbita è, invece, ampiamente sufficiente ($> 9000\text{ J}$, Figura 152), così come risulta rispettato il requisito sulla massima deflessione permanente (Figura 154).

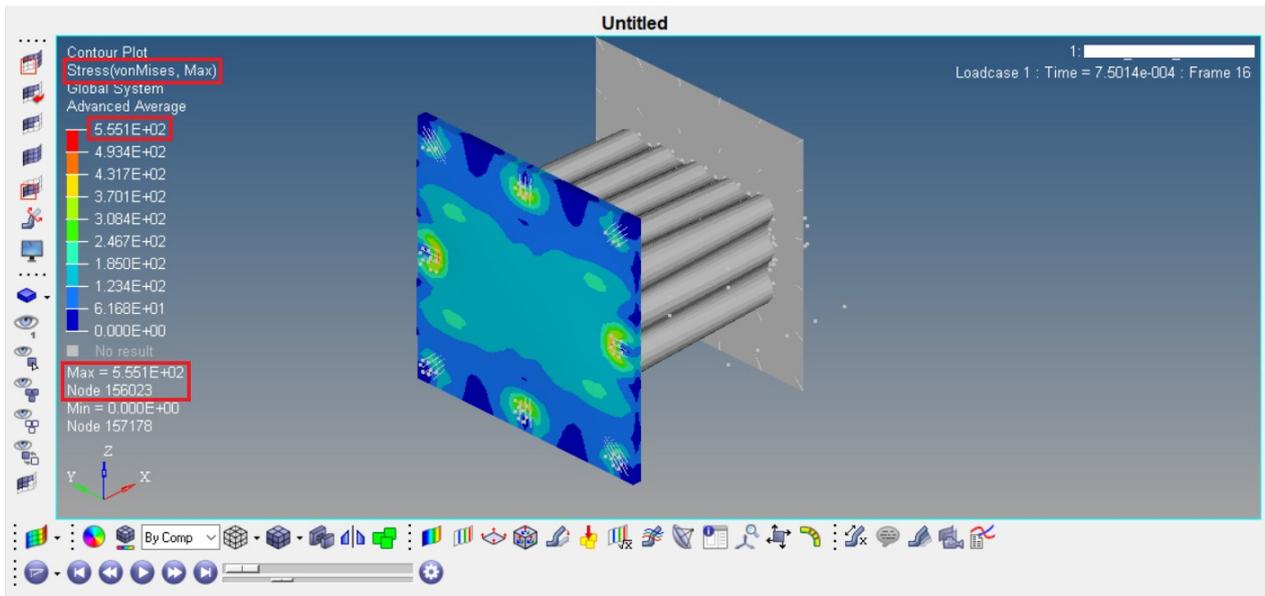


Figura 151: Tensione equivalente di Von Mises su AIP Configurazione Numero 2

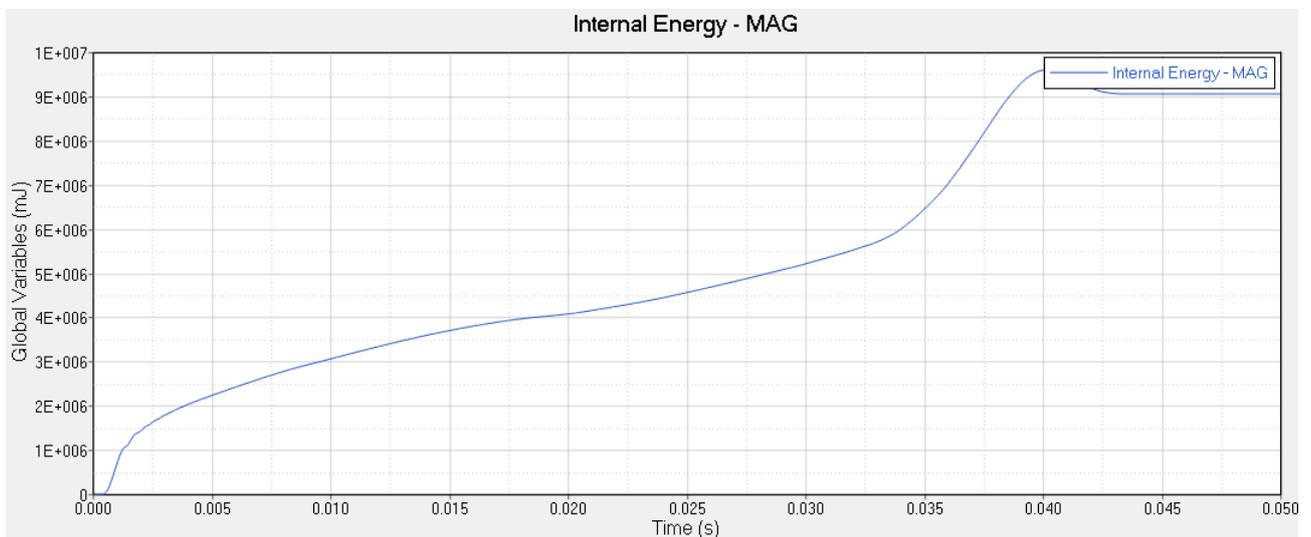


Figura 152: Energia assorbita Configurazione Numero 2

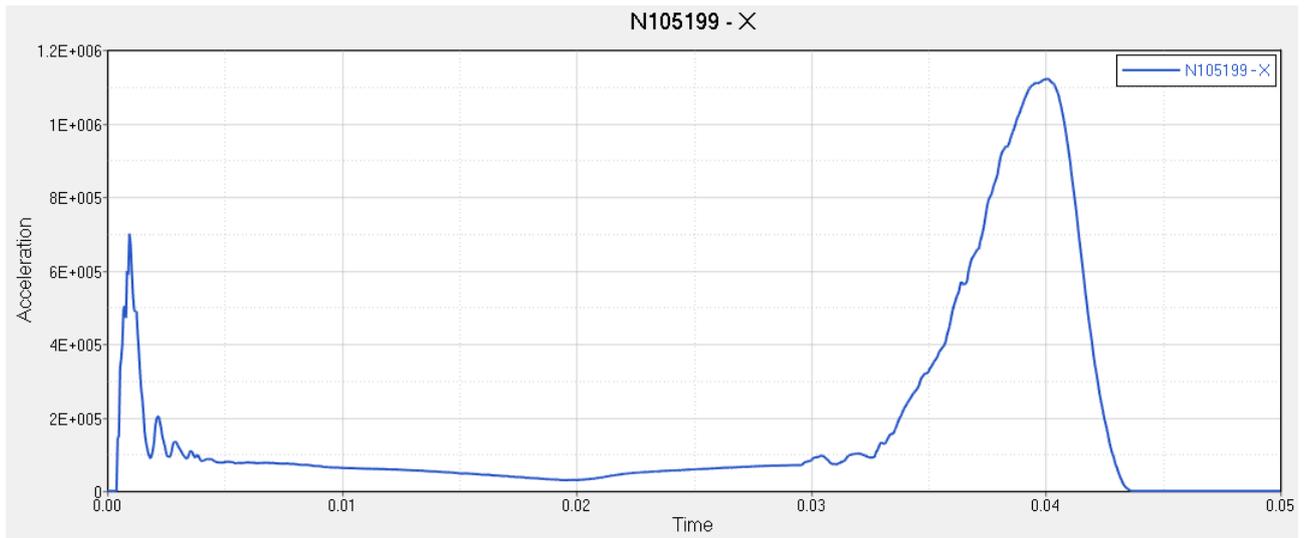


Figura 153: Decelerazioni Configurazione Numero 2

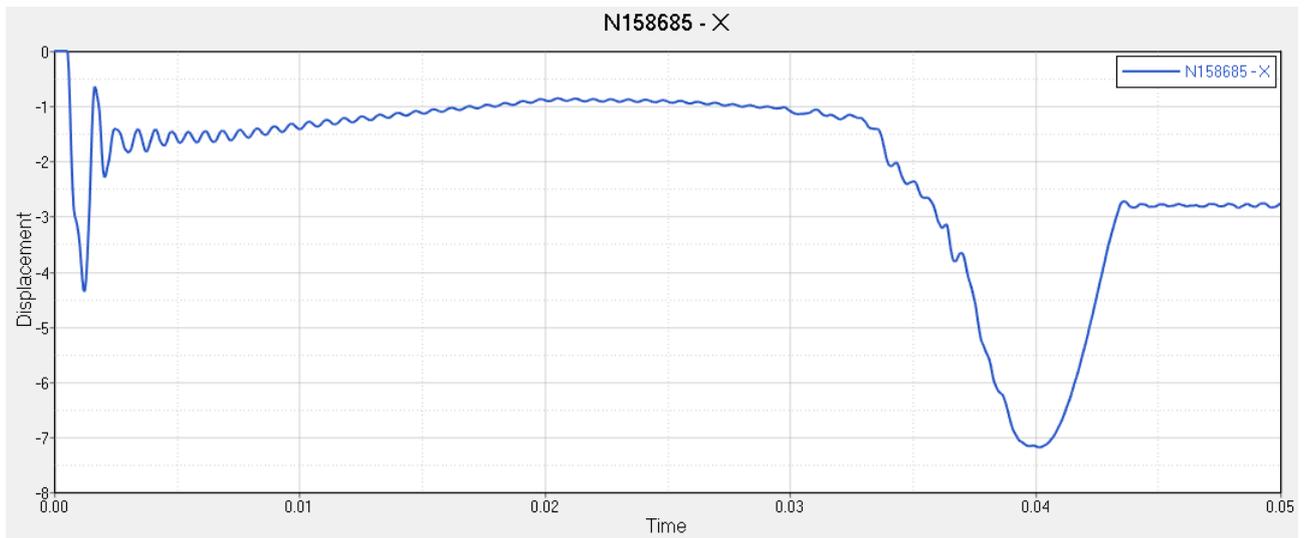


Figura 154: Deflessione massima AIP Configurazione Numero 2

Come nel caso precedente, per completezza espositiva sono comunque riportati i risultati completi in termini di performance:

Configurazione Numero	Sfondamento AIP	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
2	PROBABILE	> 9	≈ 114.3	≈ 20.54	≈ 2.8	≈ 2.3

Tabella 11: Performance Configurazione Numero 2

8.1.3 Configurazione Numero 3

La Configurazione Numero 3 presenta:

- IA in configurazione 5x3 semionde in CFRP;
- AIP in configurazione classica;

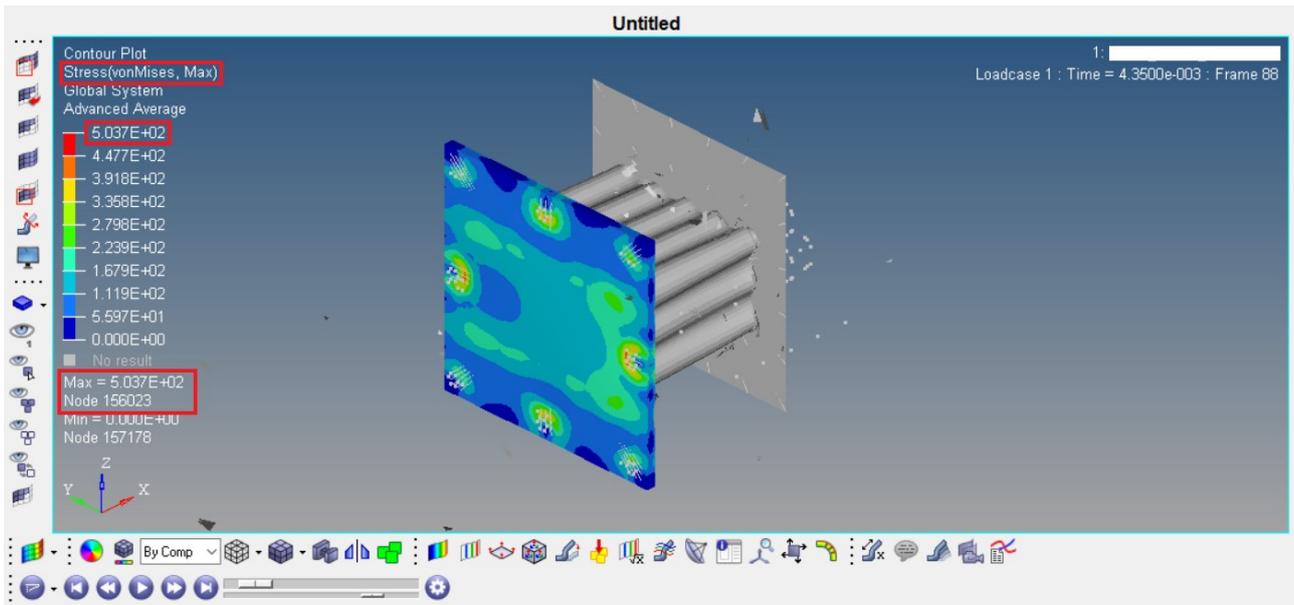


Figura 155: Tensione equivalente di Von Mises su AIP Configurazione Numero 3

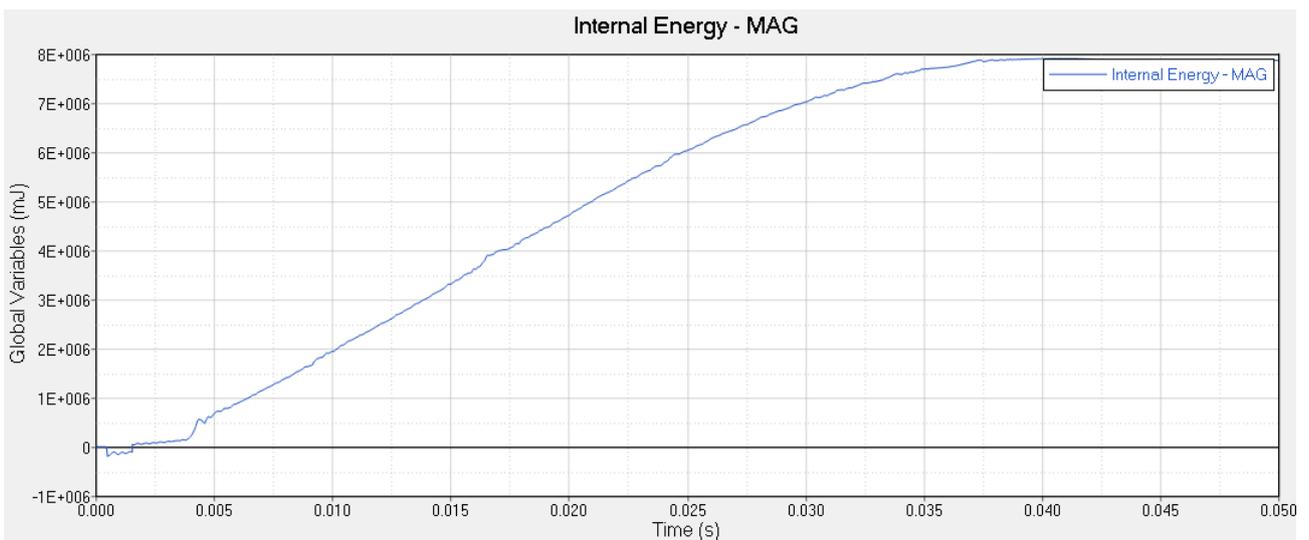


Figura 156: Energia assorbita Configurazione Numero 3

Come è possibile osservare da Figura 155, la tensione equivalente di Von Mises è ragionevolmente al di sotto dell'UTS dell'AL-7075, per cui è presumibile che l'AIP non subisca sfondamento; anche l'energia assorbita risulta essere sufficiente ($\approx 8000 J$, Figura 156), così come risulta rispettato il requisito sulla massima deflessione permanente (Figura 158). Come per i casi precedenti, però, le decelerazioni non risultano ancora essere sufficientemente basse; esse, tuttavia, eccedono di poco i limiti prefissati da regolamento, per cui è presumibile che studiando una stack sequence specifica tale requisito possa essere rispettato.

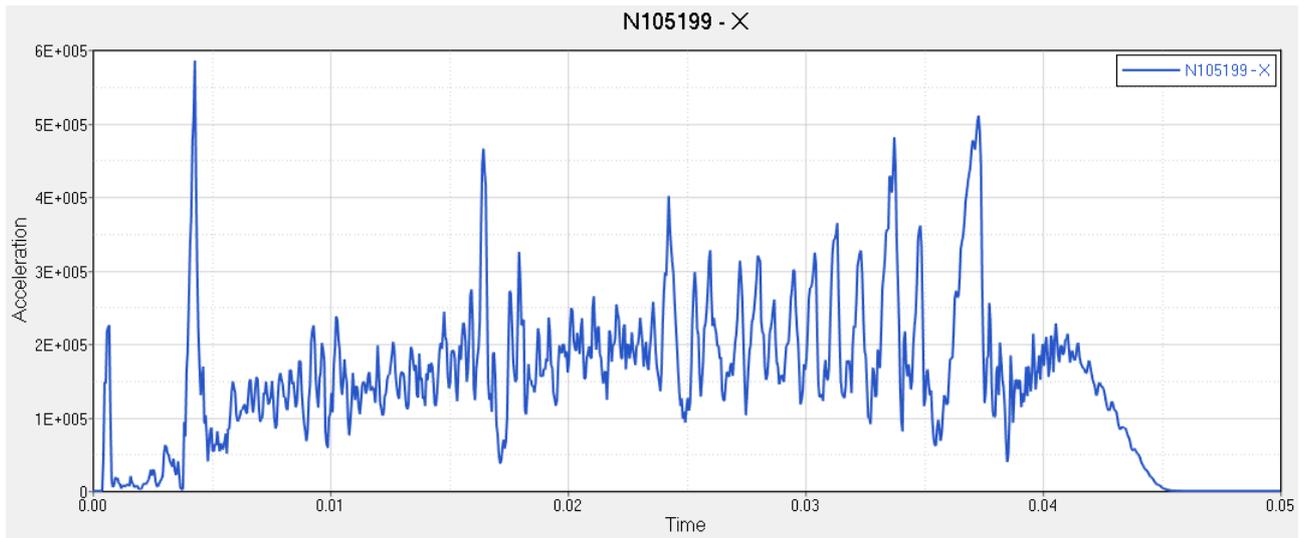


Figura 157: Decelerazioni Configurazione Numero 3

I risultati completi in termini di performance per tale configurazione risultano essere:

Configurazione Numero	Sfondamento AIP	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
3	NO	> 8	≈ 59.69	≈ 16.22	≈ 0.25	≈ 2.35

Tabella 12: Performance Configurazione Numero 3

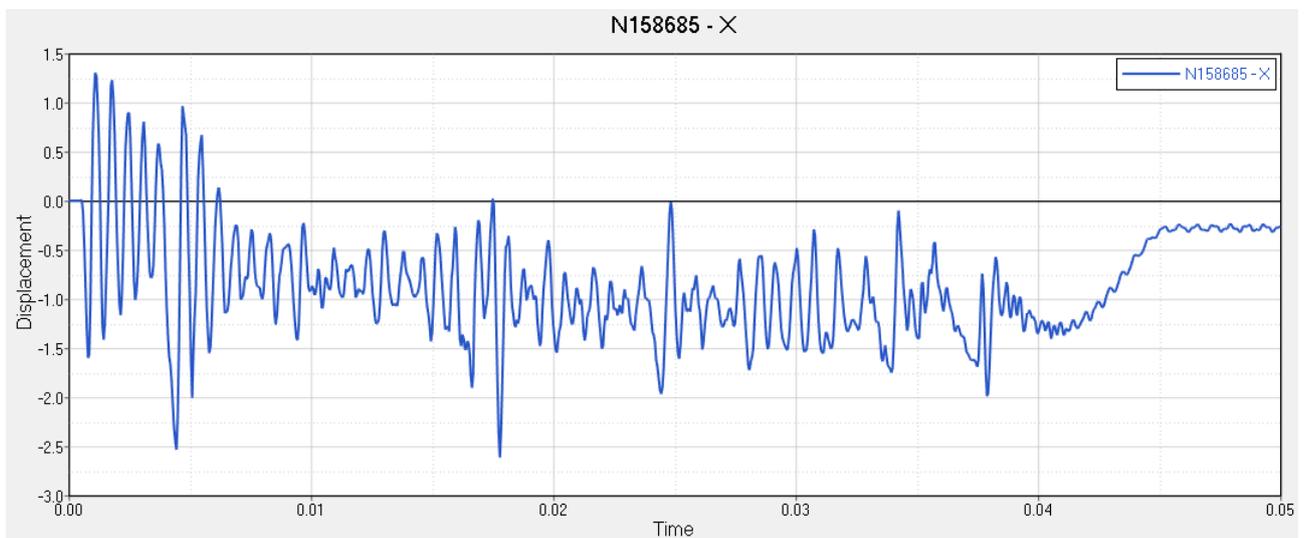


Figura 158: Deflessione massima AIP Configurazione Numero 3

8.1.4 Configurazione Numero 4

La Configurazione Numero 4 presenta:

- IA in configurazione 5x3 semionde in CFRP;
- AIP in configurazione sandwich;

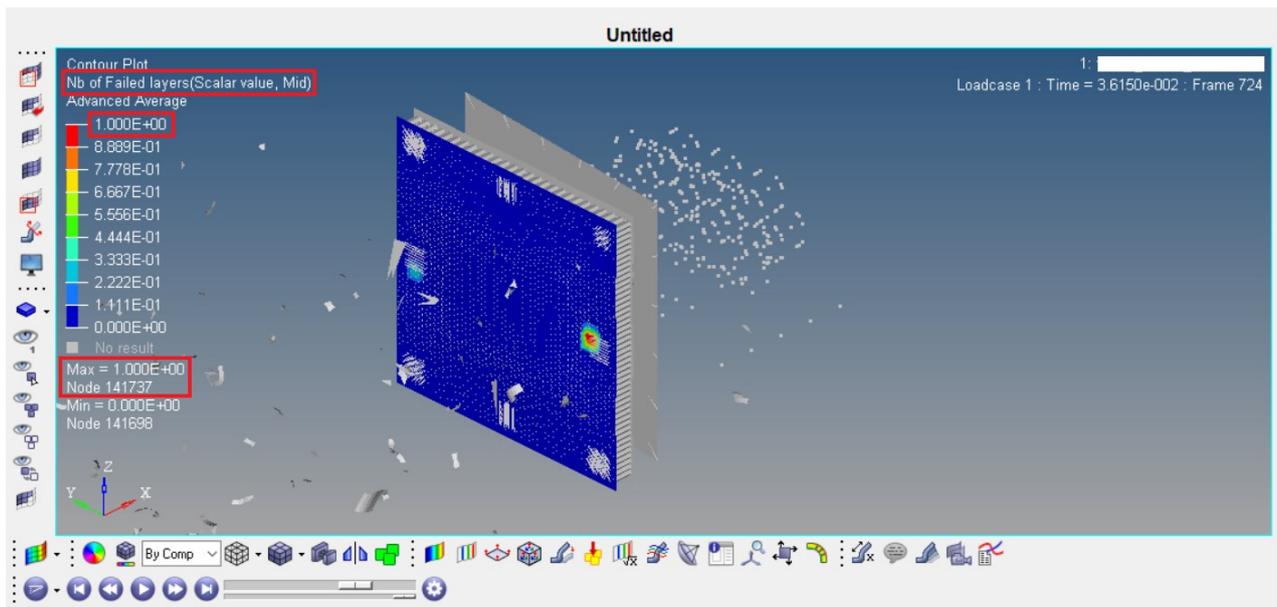


Figura 159: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Numero 4

Per l'AIP in configurazione sandwich non è possibile utilizzare la tensione equivalente di Von Mises per indagare il cedimento del componente poiché tale modello risulta valido solo per componenti metallici; in questo caso è necessario indagare i *failure index (FI)* del composito o, in alternativa, direttamente *il numero di ply dello skin inferiore che arrivano a cedimento*. Nel caso specifico, come appare evidente da Figura 159, è possibile osservare che si ha il cedimento di una sola delle sedici lamine che compongono il laminato, motivo per cui è ragionevole supporre che non si arrivi a sfondamento dell'AIP. Osservando, inoltre Figura 160, Figura 161 e Figura 162 appare evidente che anche gli altri requisiti risultano essere soddisfatti, motivo per cui la Configurazione Numero 4 è considerabile potenzialmente utilizzabile.

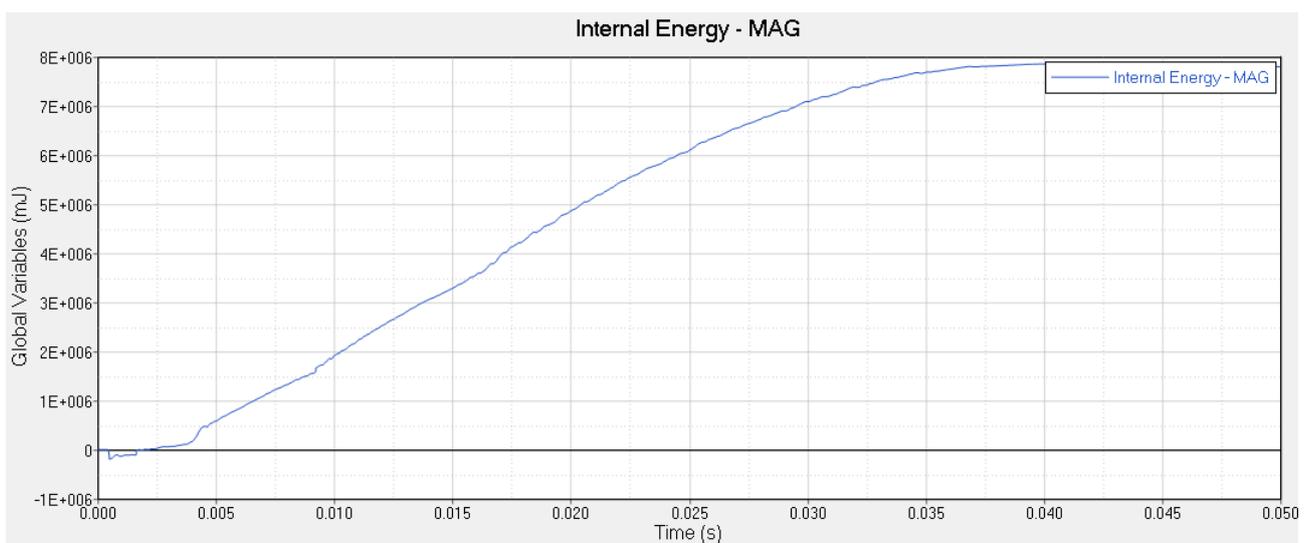


Figura 160: Energia assorbita Configurazione Numero 4

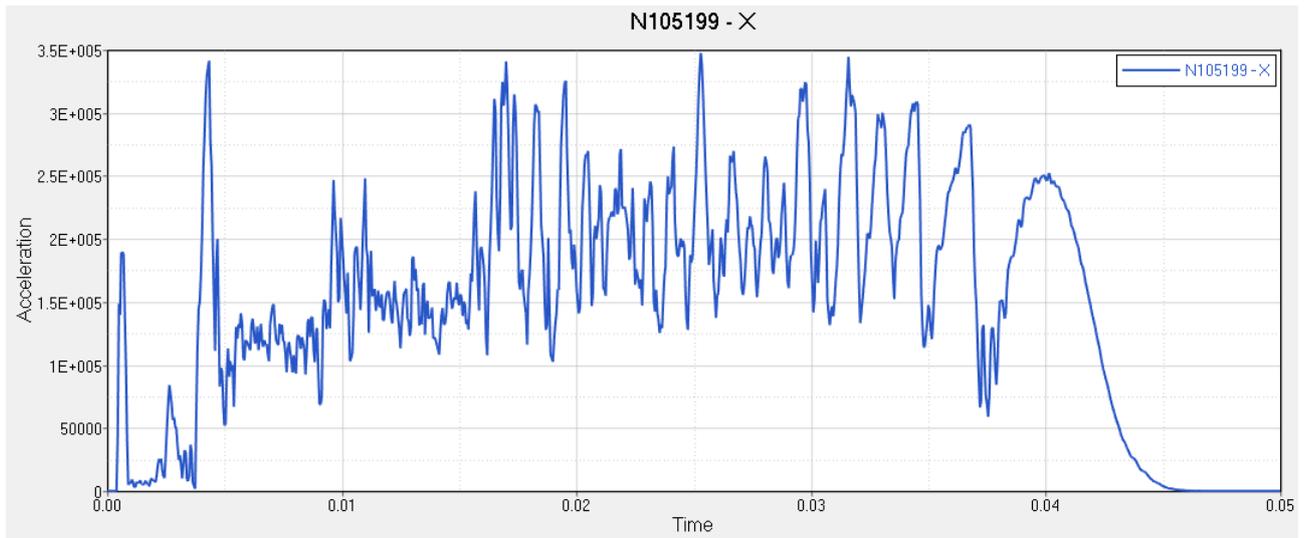


Figura 161: Decelerazioni Configurazione Numero 4

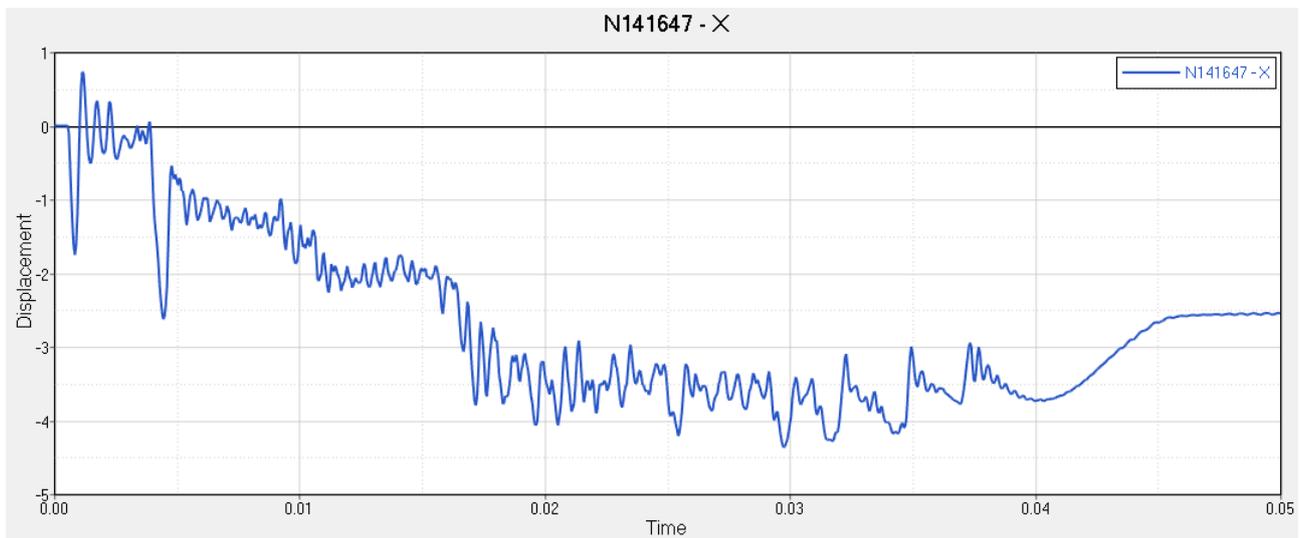


Figura 162: Deflessione massima AIP Configurazione Numero 4

I risultati completi in termini di performance per tale configurazione risultano essere:

Configurazione Numero	Sfondamento AIP	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
4	NO	> 8	≈ 35.43	≈ 16.34	≈ 2.5	≈ 1.53

Tabella 13: Performance Configurazione Numero 4

8.1.5 Configurazione Numero 5

La Configurazione Numero 5 presenta:

- IA in configurazione 5x2 semionde in CFRP;
- AIP in configurazione classica;

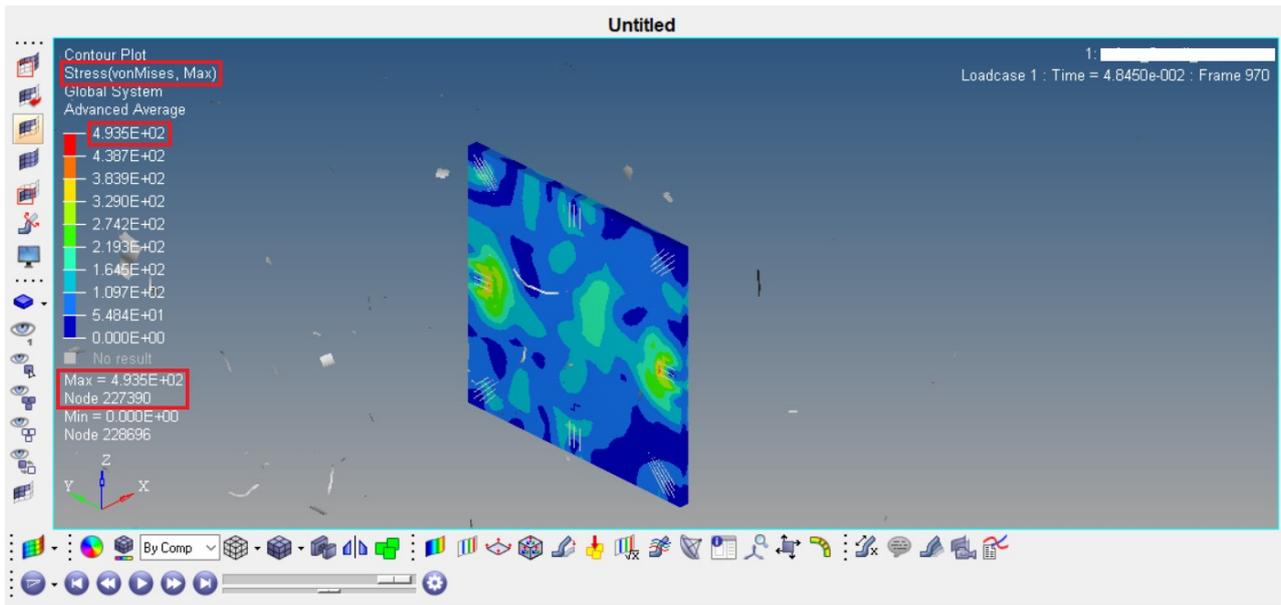


Figura 163: Tensione equivalente di Von Mises su AIP Configurazione Numero 5

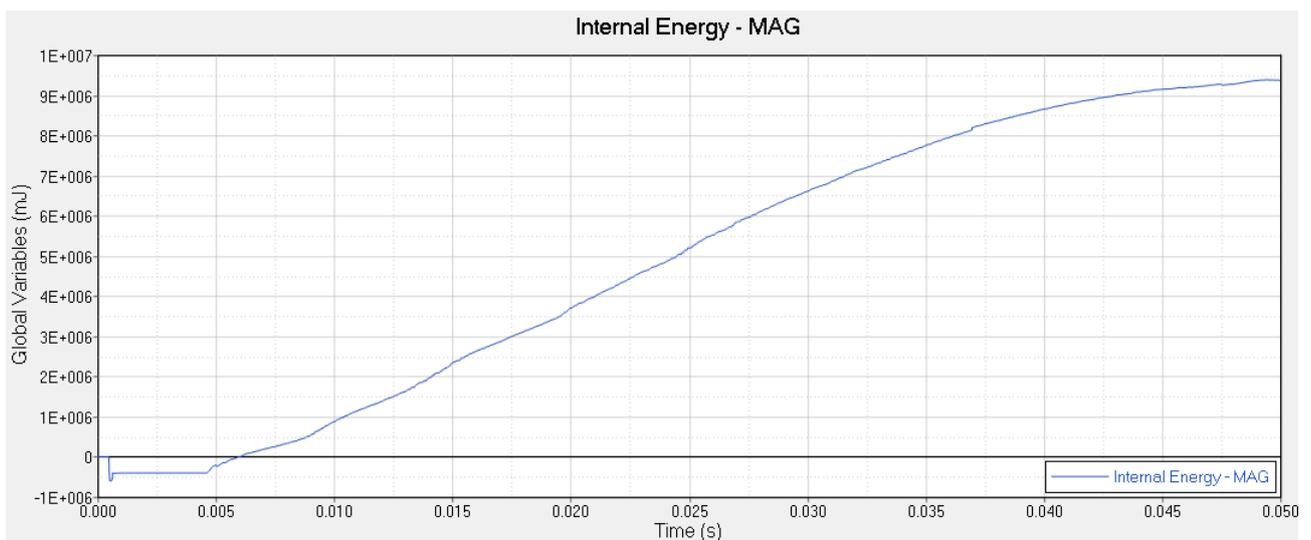


Figura 164: Energia assorbita Configurazione Numero 5

Come è possibile osservare da Figura 163, la tensione equivalente di Von Mises è ragionevolmente al di sotto dell'UTS dell'AL-7075, per cui è presumibile che l'AIP non subisca sfondamento; anche l'energia assorbita risulta essere sufficiente ($\approx 9500 J$, Figura 164), così come risulta rispettato il requisito sulla massima deflessione permanente (Figura 166). Come per la Configurazione Numero 3 le decelerazioni eccedono di poco i limiti prefissati da regolamento, per cui è presumibile che studiando una stack sequence specifica tale requisito possa essere rispettato.

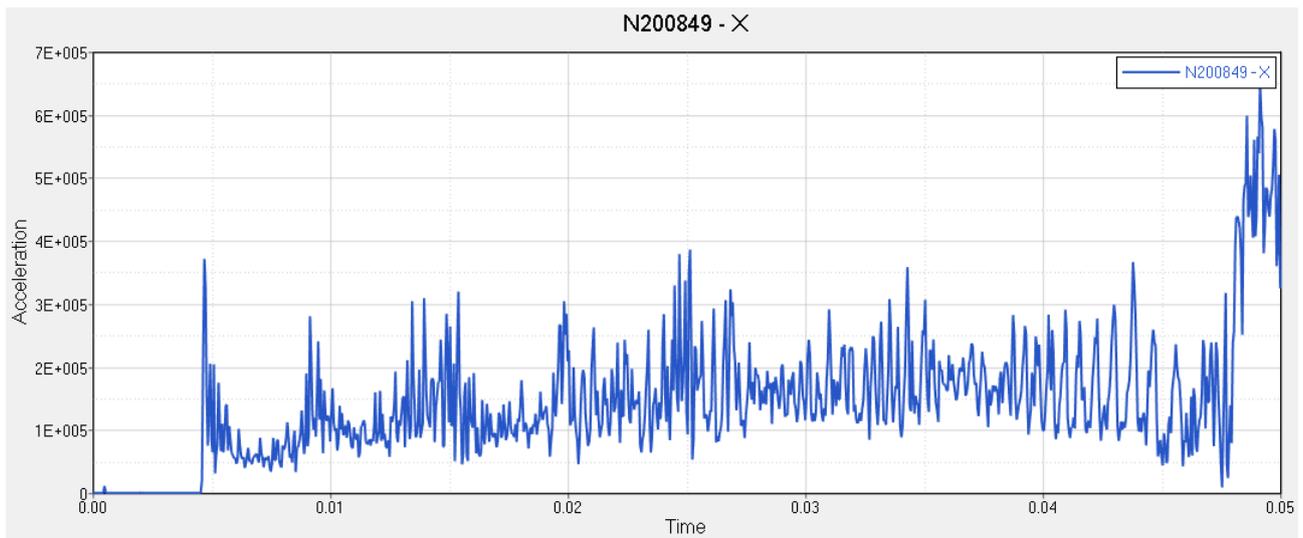


Figura 165: Decelerazioni Configurazione Numero 5

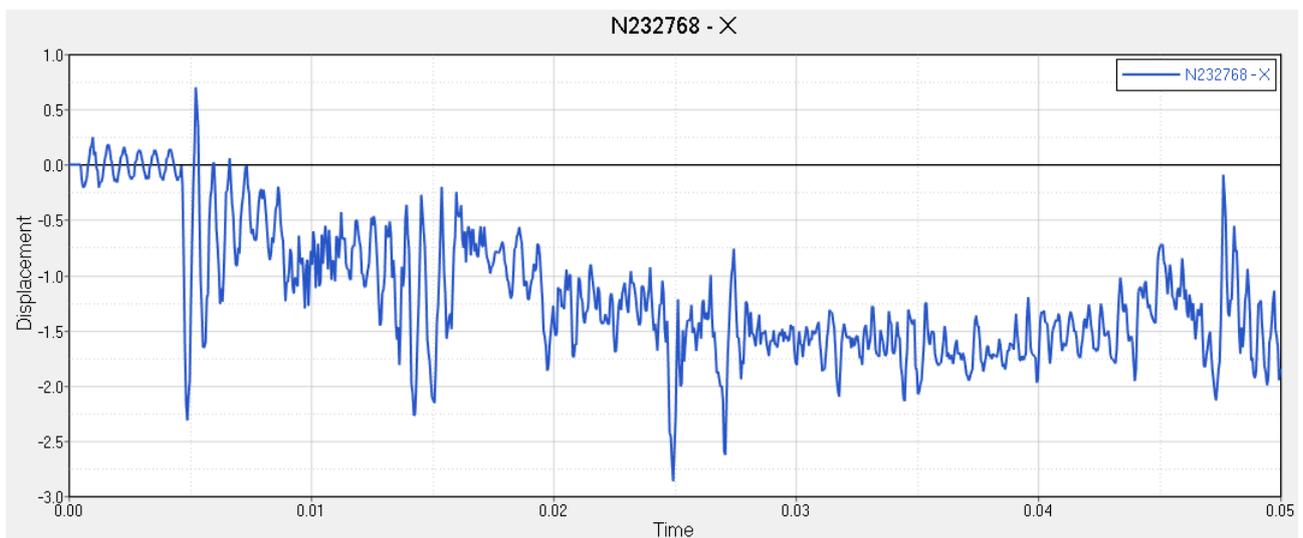


Figura 166: Deflessione massima AIP Configurazione Numero 5

I risultati completi in termini di performance per tale configurazione risultano essere:

Configurazione Numero	Sfondamento AIP	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
5	NO	> 9	≈ 66.4	≈ 16.2	≈ 1.5	≈ 2.23

Tabella 14: Performance Configurazione Numero 5

8.1.6 Configurazione Numero 6

La Configurazione Numero 4 presenta:

- IA in configurazione 5x2 semionde in CFRP;
- AIP in configurazione sandwich;

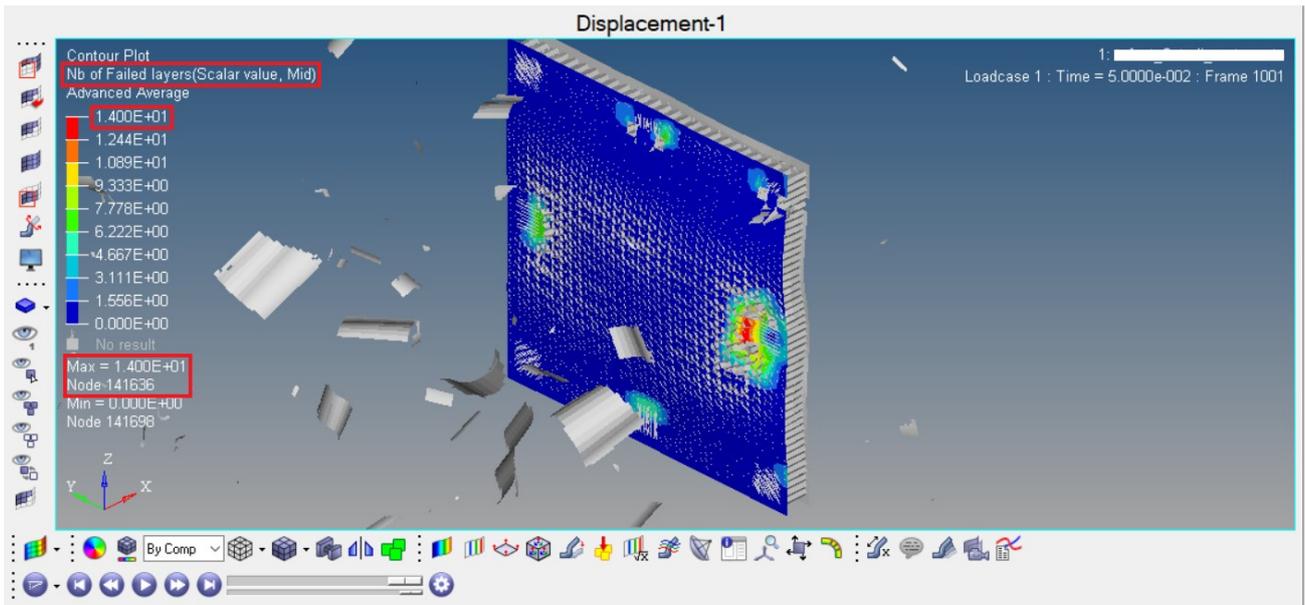


Figura 167: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Numero 6

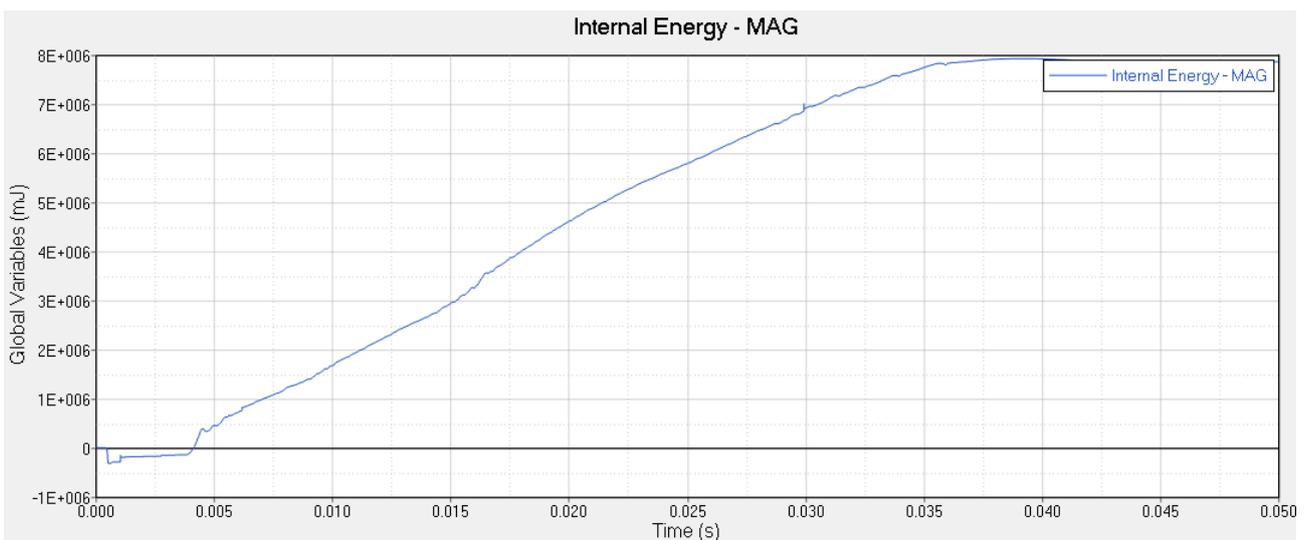


Figura 168: Energia assorbita Configurazione Numero 6

Per tale configurazione, come mostrato in Figura 167, si ha la rottura di 14 dei 16 ply che compongono lo skin inferiore dell'AIP, motivo per cui è ragionevole supporre che si arrivi a sfondamento dell'AIP; inoltre, anche le decelerazioni presentano un picco che oltrepassa i limiti consentiti da regolamento (Figura 169). Al contrario, per quanto riguarda energia assorbita (Figura 168) e deflessione permanente dell'AIP (Figura 170), la configurazione proposta non presenta alcun problema.

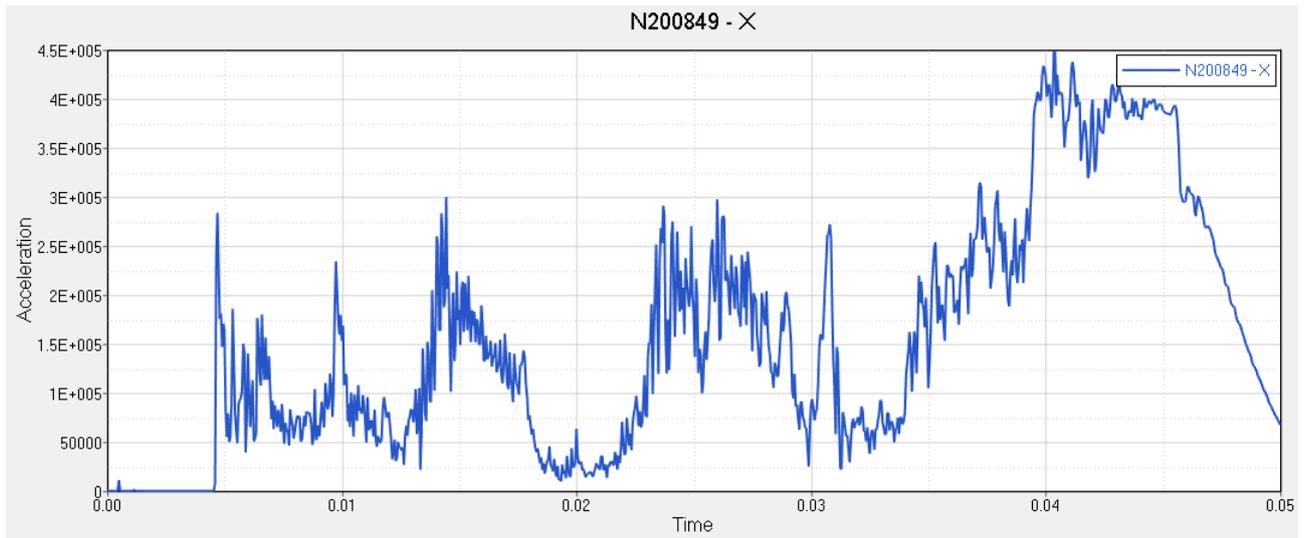


Figura 169: Decelerazioni Configurazione Numero 6

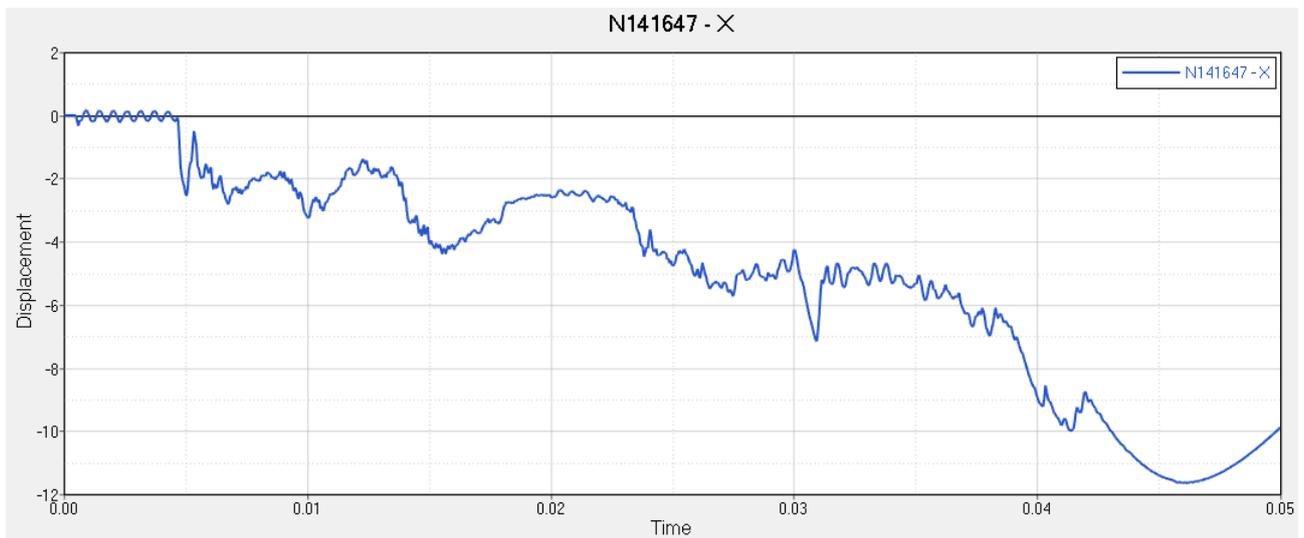


Figura 170: Deflessione massima AIP Configurazione Numero 6

Configurazione Numero	Sfondamento AIP	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
6	SI	> 8	≈ 45.71	≈ 17.24	≈ 10	≈ 1.31

Tabella 15: Performance Configurazione Numero 5

È possibile, quindi, riassumere il tutto in un unico prospetto finale:

Configurazione Numero	Sfondamento AIP	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
1	SI	> 9	≈ 178	≈ 72	≈ 9	≈ 3.1
2	PROBABILE	> 9	≈ 114.3	≈ 20.54	≈ 2.8	≈ 2.3
3	NO	> 8	≈ 59.69	≈ 16.22	≈ 0.25	≈ 2.35
4	NO	> 8	≈ 35.43	≈ 16.34	≈ 2.5	≈ 1.53
5	NO	> 9	≈ 66.4	≈ 16.2	≈ 1.5	≈ 2.23
6	PROBABILE	> 8	≈ 45.71	≈ 17.24	≈ 10	≈ 1.31

Tabella 16: Sintesi performance

8.2 Scelta della Configurazione

Come già fatto notare in precedenza, la *competizione FSAE* non mira unicamente alla performance pura ma anche alla valutazione di aspetti di design ingegneristico, motivo per cui, oltre ai parametri prestazionali, è necessario considerare anche altri fattori quali:

- *costo*;
- *semplicità costruttiva*;
- *semplicità di testing*;

Per la scelta della configurazione migliore è stato, quindi, ideato un sistema di punteggi su tre livelli (0, 1 e 2) che può essere riassunto nel prospetto:

Punteggio	0	1	2
Sfondamento AIP	<i>SI</i>	<i>PROBABILE</i>	<i>NO</i>
Energia Assorbita [kJ]	<7	> 8	> 9
Decelerazione Massima [g]	> 100	< 50	<40
Decelerazione Media [g]	> 50	< 25	< 20
Deflessione Permanente AIP [mm]	> 7	< 5	< 3
Massa [kg]	> 3	< 2.5	< 2
Costo [\$]	<i>elevato</i>	<i>medio</i>	<i>basso</i>
Semplicità costruttiva e di testing	<i>complesso</i>	<i>medio</i>	<i>semplice</i>

Tabella 17: Sistema di punteggio

Stimare il costo, la semplicità costruttiva e quella di testing non è semplicissimo; in linea di massima ci si è basati sull'assunzione che componenti in materiale composito e architetture di tipo sandwich risultino essere generalmente più costosi, meno semplici da realizzare e più difficili da testare rispetto alle architetture classiche.

Tenendo conto di questo e del sistema di punteggio di Tabella 17 è possibile determinare i punteggi raggiunti da ciascuna configurazione e, di conseguenza, quale configurazione risulta essere maggiormente promettente. Il tutto è sintetizzato in Tabella 18 dalla quale è possibile osservare che le due configurazioni maggiormente promettenti sono la *Configurazione Numero 4* e la *Configurazione Numero 5*; delle due si è scelto di utilizzare la *Configurazione Numero 4* poiché si è preferito massimizzare le performance in termini di massa rispetto alla semplicità costruttiva.

Configurazione Numero	1	2	3	4	5	6
Sfondamento AIP	0	1	2	2	2	1
Energia Assorbita [kJ]	2	2	1	1	2	2
Decelerazione Massima [g]	0	0	0	2	0	1
Decelerazione Media [g]	0	1	2	2	2	2
Deflessione Permanente AIP [mm]	0	1	2	2	2	0
Massa [kg]	0	1	1	2	1	2
Costo [\$]	2	2	1	0	1	0
Semplicità costruttiva e di testing	2	2	1	0	1	0
Totale	6/16	10/16	10/16	11/16	11/16	8/16

Tabella 18: Punteggi configurazioni

8.3 Ottimizzazione

Determinata la configurazione maggiormente promettente, si è proceduto alla *modifica della stack sequence* della stessa per cercare di migliorare ulteriormente le performance.

8.3.1 Configurazione Ottimizzata Numero 1

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
AIP_skin_superiore_ply1	21	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply2	22	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply3	23	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply4	24	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply5	29	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply6	30	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply7	31	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply8	32	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply9	49	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply10	50	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply11	51	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply12	52	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply13	57	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply14	58	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		

Figura 171: Stack sequence skin superiore AIP Configurazione Ottimizzata 1

Da Figura 159 è possibile notare che solamente uno dei sedici ply che costituiscono l’AIP arriva a cedimento; questo è un chiaro indice del sovradimensionamento dell’AIP stesso, motivo per cui si è deciso di eliminare 2 ply da ciascuno skin del pannello sandwich e modificare la stack sequence degli stessi, così da rendere più semplici le operazioni di costruzione (Figura 171 e Figura 172). Allo stesso tempo, anche la stack sequence sulla superficie laterale dell’IA è stata modificata con il medesimo intento (Figura 173). Come è possibile osservare, infatti, nella Configurazione Ottimizzata 1 sono presenti unicamente ply a $\pm 45^\circ$. Anche i set di assegnazione dei ply dell’AIP sono variati come mostrato in:

Ply Numero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Set	IA6	IA6	IA6	IA6	IA6	IA5	IA4	IA4	IA3	IA2	IA1	IA1

Tabella 19: Relazione tra ply e set di definizione IA Configurazione Ottimizzata Numero 1

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
AIP_skin_inferiore_ply1	25	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply2	26	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply3	27	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply4	28	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply5	33	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply6	34	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply7	35	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply8	36	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply9	53	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply10	54	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply11	55	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply12	56	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply13	61	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply14	62	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		

Figura 172: Stack sequence skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata 1

Define laminate:

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
ply1	1	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply2	2	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
ply3	3	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply4	4	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
ply5	5	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply6	6	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
ply7	7	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply8	8	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
ply9	9	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply10	10	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
ply11	11	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply12	12	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		

Figura 173: Stack sequence superficie laterale IA Configurazione Ottimizzata 1

La riduzione di rigidità e resistenza dovuta all'eliminazione di 2 ply per ciascuno skin dell'AIP provoca, in questo caso, il cedimento di 3 dei 14 ply che compongono lo skin inferiore (Figura 174); tale numero risulta, però, ancora sufficientemente basso da considerare la configurazione proposta più che sicura, potendo ritenere che l'IA non sfondi l'AIP. Allo stesso tempo, i livelli di energia assorbita (Figura 175) e di decelerazioni sia di picco che media si mantengono all'incirca sugli stessi livelli precedenti. Si osserva, invece, un incremento della deflessione permanente sull'AIP, legato alla minore rigidità degli skin, che, tuttavia, non preoccupa, poiché si è sempre ampiamente al di sotto dei valori limite fissati da regolamento (Figura 177). La rimozione dei 4 ply totali, unita alla variazione di stack sull'IA, permette un risparmio sulla massa pari al 17%.

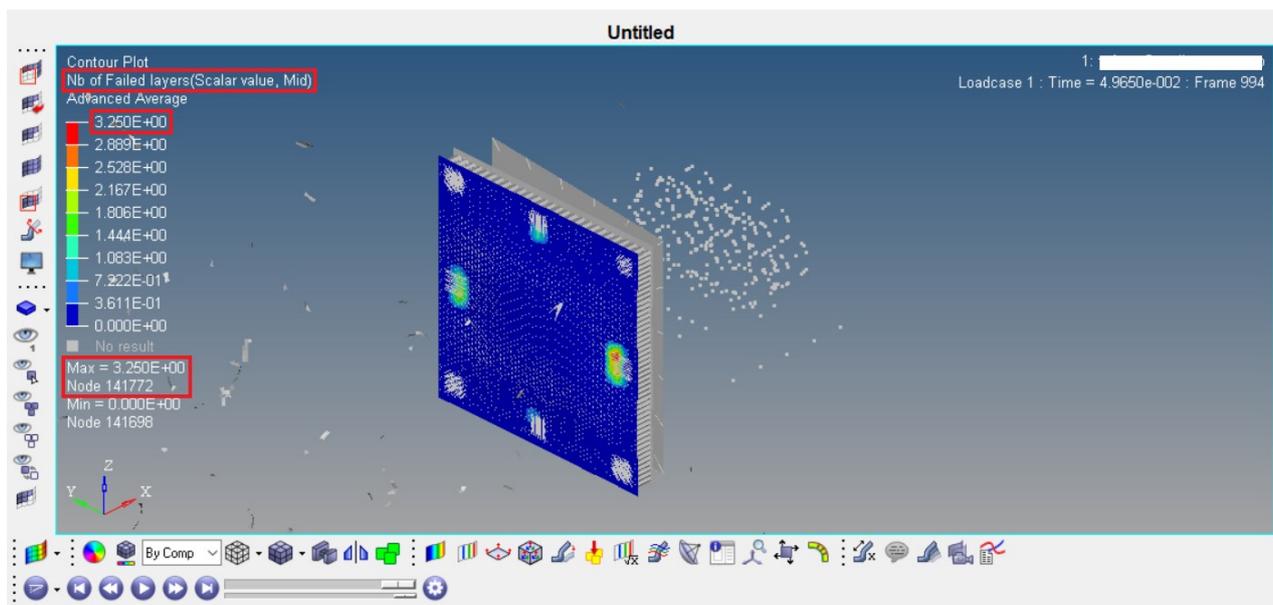


Figura 174: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata Numero 1

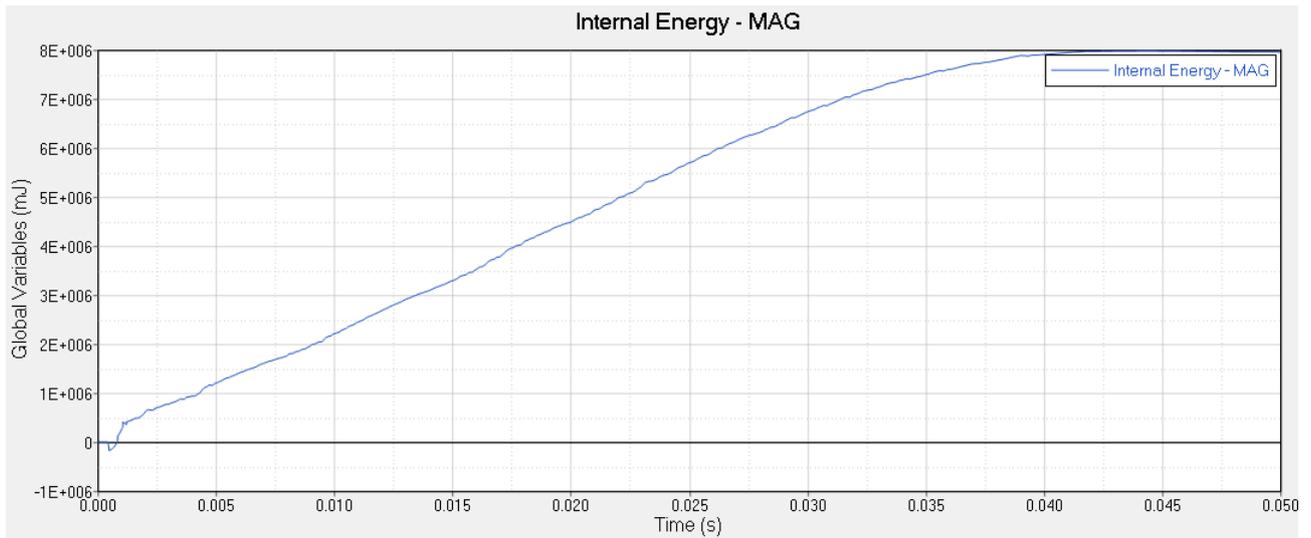


Figura 175: Energia assorbita Configurazione Ottimizzata Numero 1

Configurazione	Numero Ply Ceduti	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
<i>Ottimizzata Numero 1</i>	3	> 8	≈ 37	≈ 15	≈ 5	≈ 1.27
<i>Numero 4</i>	1	> 8	≈ 35.43	≈ 16.34	≈ 2.5	≈ 1.53
<i>Variatione Assoluta</i>	+2	0	+1.57	-1.34	+2.5	-0.26
<i>Variatione Percentuale</i>	+200 %	0 %	+4.4 %	-8 %	+100 %	-17%

Tabella 20: Confronto performance Configurazione Numero 4 e Configurazione Ottimizzata Numero 1

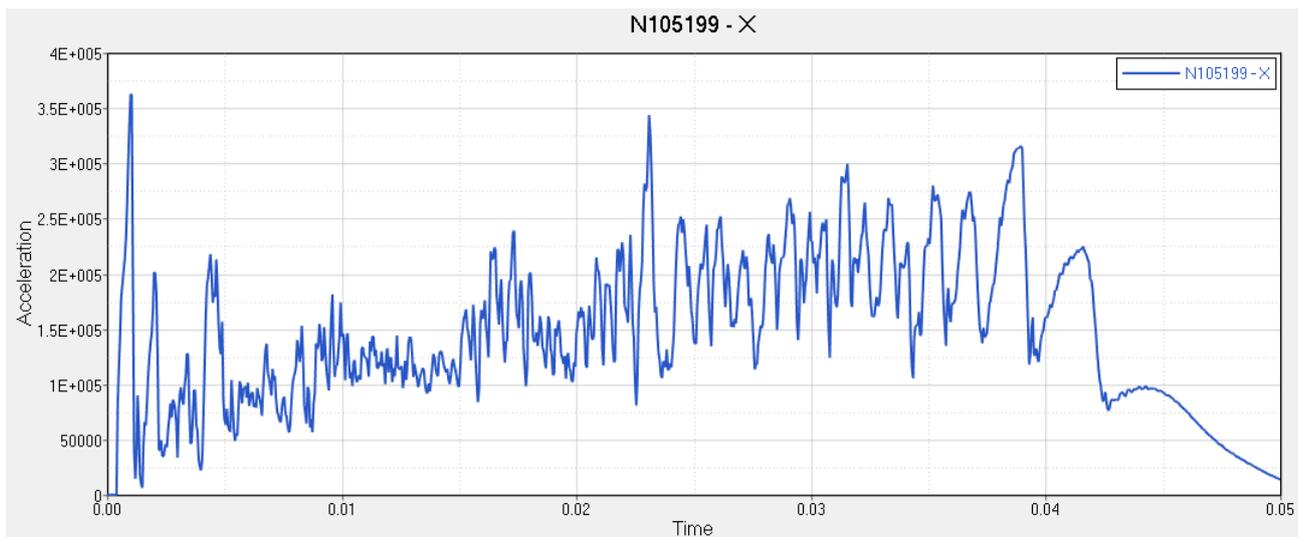


Figura 176: Decelerazioni Configurazione Ottimizzata Numero 1

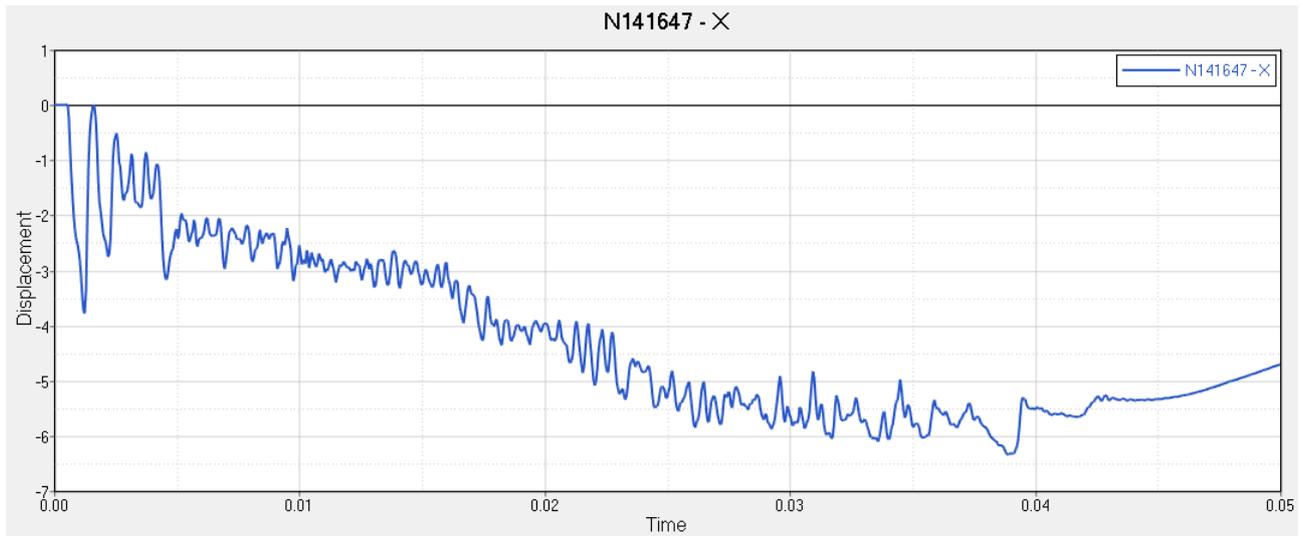


Figura 177: Deflessione massima AIP Configurazione Ottimizzata Numero 1

8.3.2 Configurazione Ottimizzata Numero 2

Ply Numero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Set	IA6	IA6	IA6	IA6	IA6	IA5	IA5	IA5	IA4	IA3	IA2	IA1

Tabella 21: Relazione tra ply e set di definizione IA Configurazione Ottimizzata Numero 2

La *Configurazione Ottimizzata Numero 2* presenta una stack sequence degli skin dell'AIP perfettamente analoga alla *Configurazione Ottimizzata Numero 1* mentre si ha una variazione della stack sequence dell'IA, sia per quanto riguarda l'angolo di orientazione delle fibre (Figura 178), che per quanto riguarda la relazione tra ply e set di definizione (Tabella 21).

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
ply1	1	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply2	2	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply3	3	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply4	4	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply5	5	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply6	6	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply7	7	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply8	8	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply9	9	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply10	10	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply11	11	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply12	12	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		

Figura 178: Stack sequence superficie laterale IA Configurazione Ottimizzata 2

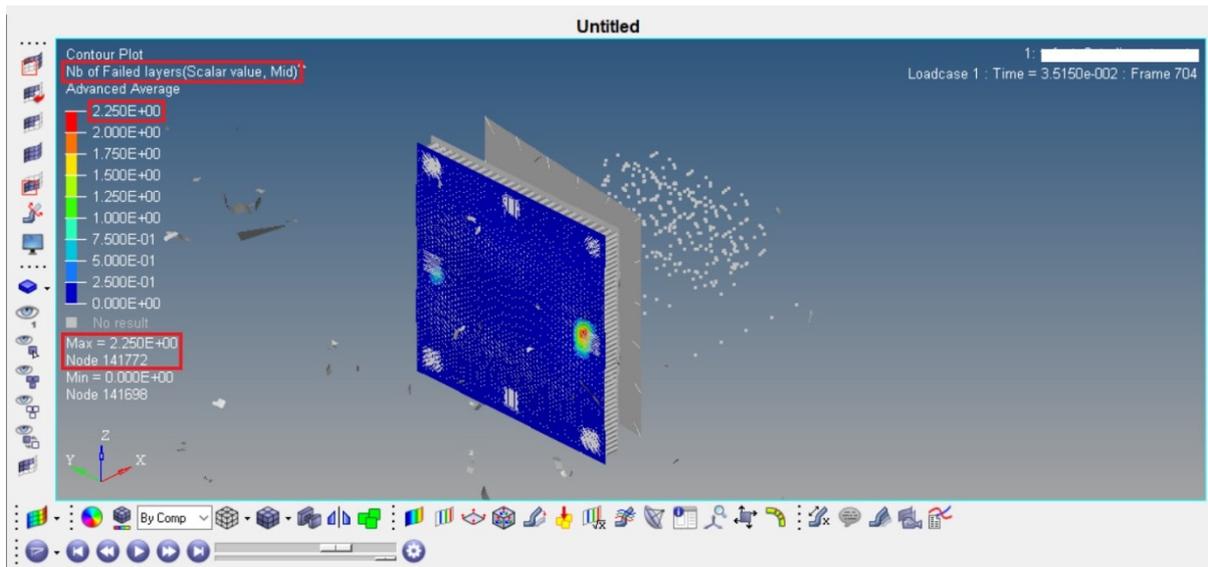


Figura 179: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata Numero 2

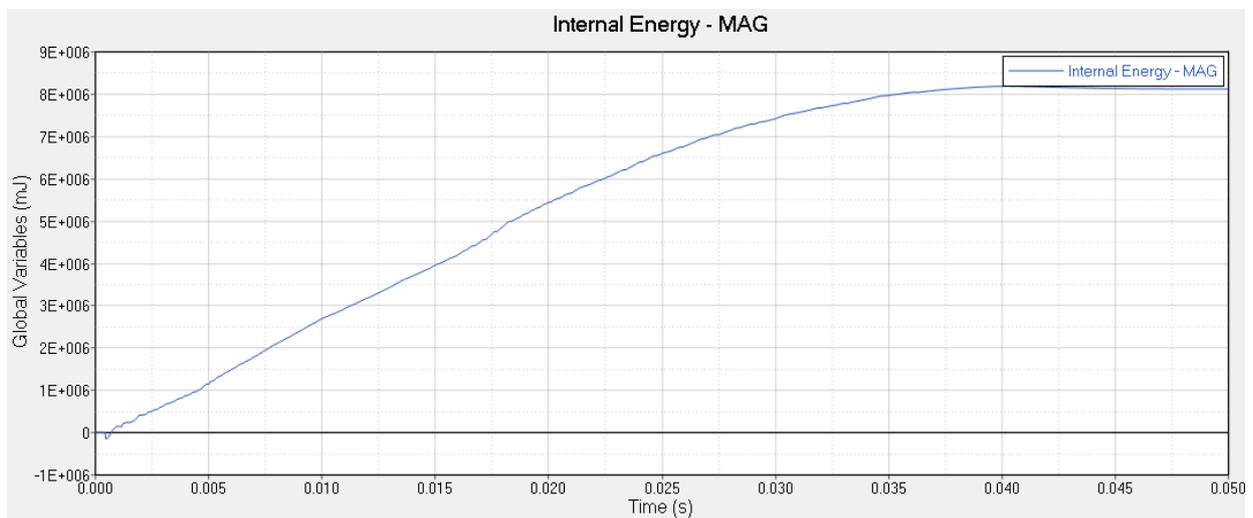


Figura 180: Energia assorbita Configurazione Ottimizzata Numero 2

La riduzione di rigidità e resistenza dovuta all'eliminazione di 2 ply per ciascuno skin dell'AIP provoca, in questo caso, il cedimento di 2 dei 14 ply che compongono lo skin inferiore (Figura 179); tale numero risulta ancora più basso del precedente, motivo per cui tale configurazione può essere considerata ancora più sicura rispetto alla precedente. Allo stesso tempo, i livelli di energia assorbita (Figura 180) e di decelerazioni sia di picco che media si mantengono all'incirca sugli stessi livelli precedenti. Si osserva, invece, un incremento della deflessione permanente sull'AIP, legato alla minore rigidità degli skin, che, tuttavia, non preoccupa, poiché si è sempre ampiamente al di sotto dei valori limite fissati da regolamento (Figura 182). La rimozione dei 4 ply totali, unita alla variazione di stack sull'IA, permette un risparmio sulla massa pari al 13.7%.

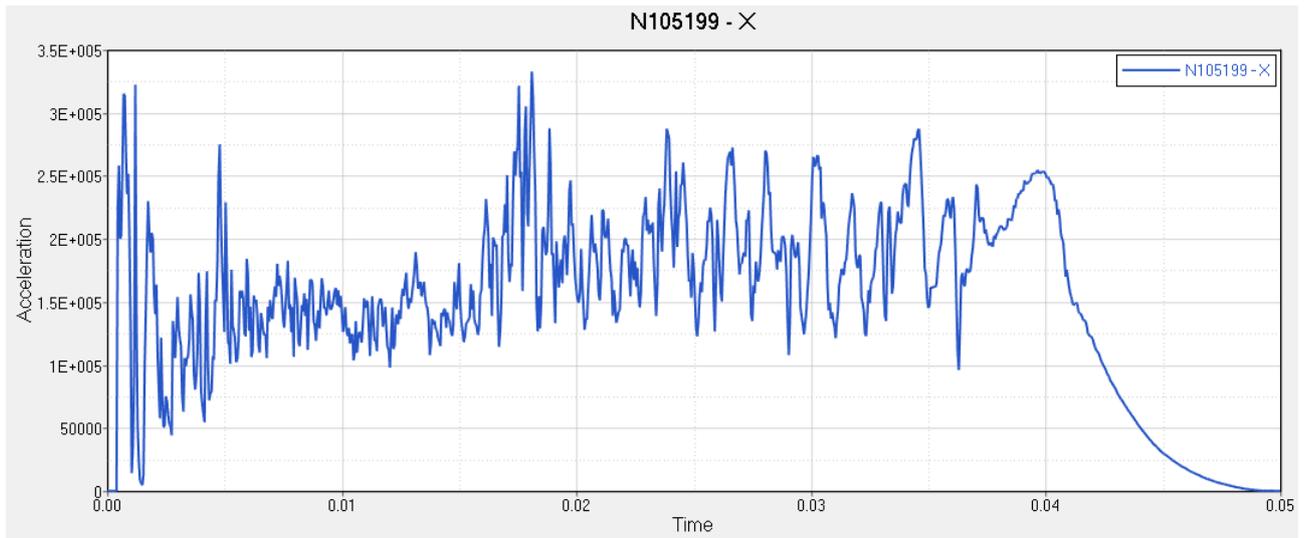


Figura 181: Decelerazioni Configurazione Ottimizzata Numero 2

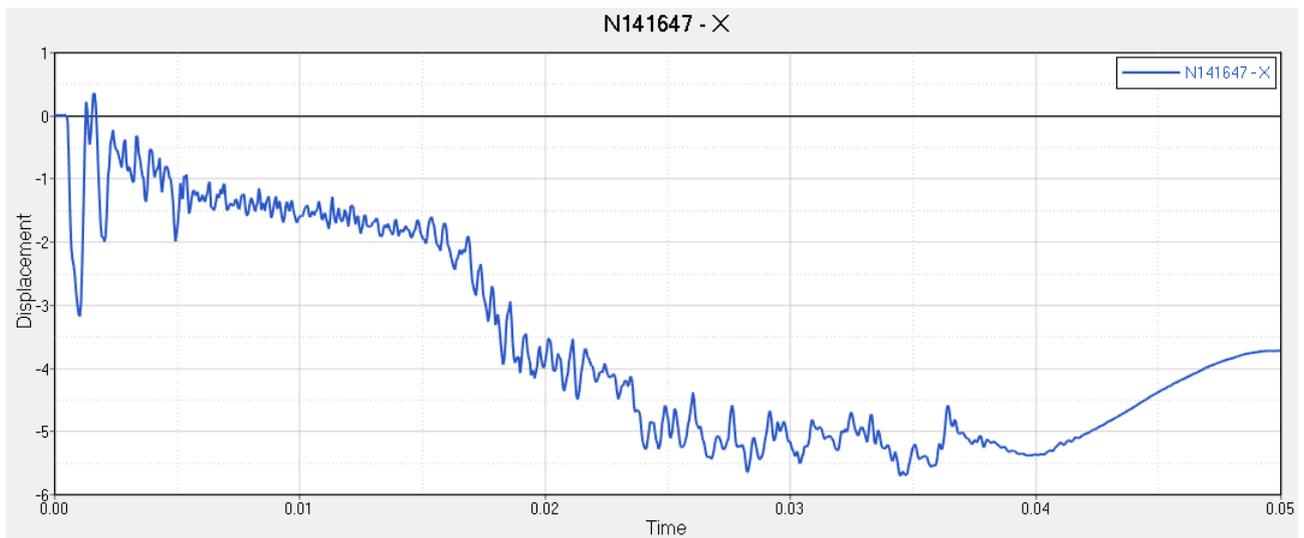


Figura 182: Deflessione massima AIP Configurazione Ottimizzata Numero 2

<i>Configurazione</i>	<i>Numero Ply Ceduti</i>	<i>Energia Assorbita [kJ]</i>	<i>Decelerazione Massima [g]</i>	<i>Decelerazione Media [g]</i>	<i>Deflessione Permanente AIP [mm]</i>	<i>Massa [kg]</i>
<i>Ottimizzata Numero 2</i>	<i>2</i>	<i>> 8</i>	<i>≈ 33.91</i>	<i>≈ 15.52</i>	<i>≈ 3.7</i>	<i>≈ 1.32</i>
<i>Numero 4</i>	<i>1</i>	<i>> 8</i>	<i>≈ 35.43</i>	<i>≈ 16.34</i>	<i>≈ 2.5</i>	<i>≈ 1.53</i>
<i>Variatione Assoluta</i>	<i>+1</i>	<i>0</i>	<i>-1.52</i>	<i>-0.82</i>	<i>+1.2</i>	<i>-0.21</i>
<i>Variatione Percentuale</i>	<i>+100 %</i>	<i>0 %</i>	<i>-4.3 %</i>	<i>-5 %</i>	<i>+48 %</i>	<i>-13.7 %</i>

Tabella 22: Confronto performance Configurazione Numero 4 e Configurazione Ottimizzata Numero 2

8.3.3 Configurazione Ottimizzata Numero 3

Define laminate:

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
AIP_skin_superiore_ply1	21	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply2	22	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply3	23	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply4	24	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply5	29	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply6	30	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply7	31	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply8	32	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply9	49	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply10	50	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply11	51	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply12	52	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply13	57	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply14	58	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		

Figura 183: Stack sequence skin superiore AIP Configurazione Ottimizzata 3

Define laminate:

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
AIP_skin_inferiore_ply1	25	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply2	26	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply3	27	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply4	28	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply5	33	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply6	34	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply7	35	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply8	36	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply9	53	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply10	54	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply11	55	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply12	56	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply13	61	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply14	62	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		

Figura 184: Stack sequence skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata 3

La Configurazione Ottimizzata Numero 3 presenta una stack sequence dell'IA perfettamente analoga a quella della Configurazione Ottimizzata Numero 2, mentre la stack sequence degli skin dell'AIP varia, come mostrato in Figura 183 e Figura 184, con soli ply a 0°/90°.

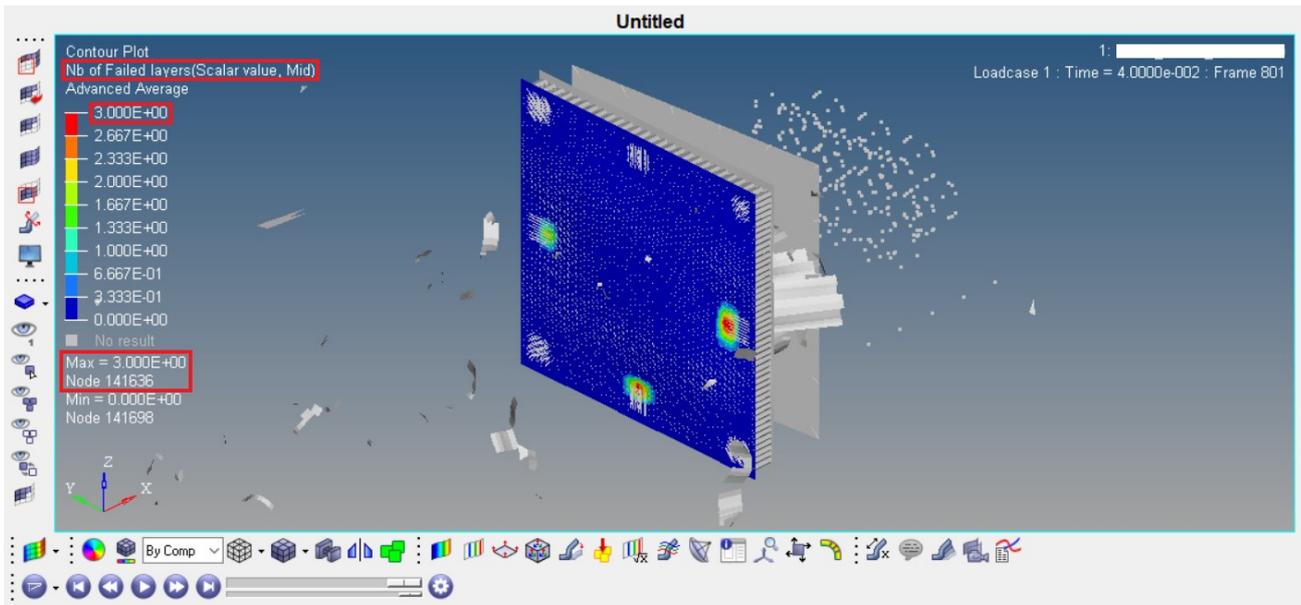


Figura 185: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata Numero 3

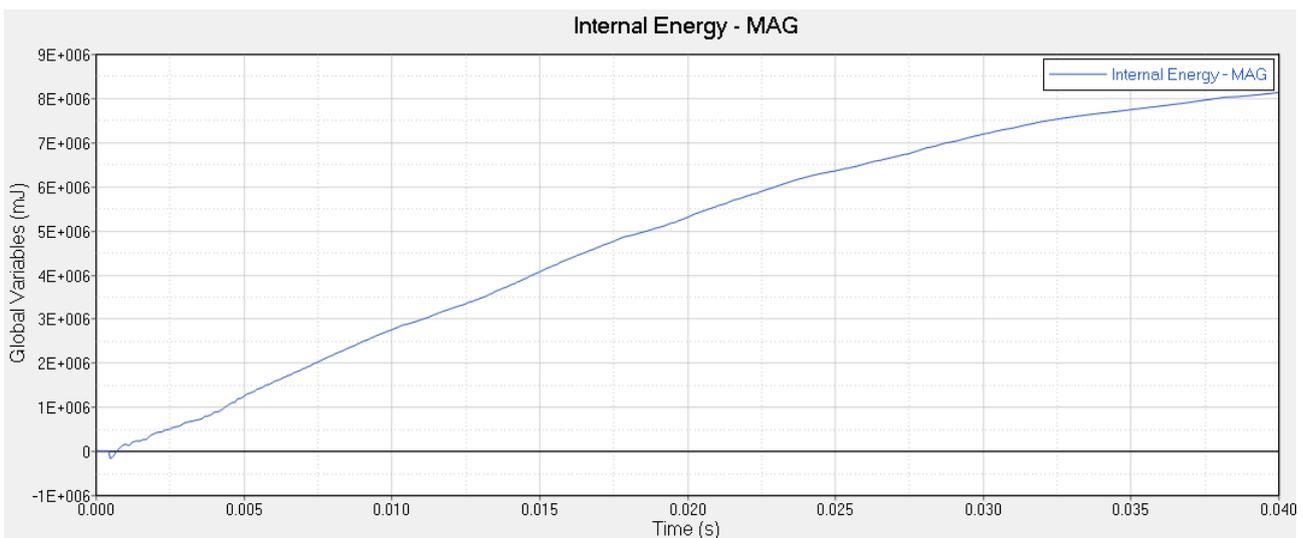


Figura 186: Energia assorbita Configurazione Ottimizzata Numero 3

La riduzione di rigidità e resistenza dovuta all'eliminazione di 2 ply per ciascuno skin dell'AIP provoca, in questo caso, il cedimento di 3 dei 14 ply che compongono lo skin inferiore (Figura 185), per cui, come per la *Configurazione Ottimizzata Numero 1*, si può supporre con certezza che l'AIP non subisca sfondamento. Allo stesso tempo, i livelli di energia assorbita (Figura 186) e di decelerazioni sia di picco che media si mantengono in linea con i livelli precedenti. Si osserva, invece, un incremento della deflessione permanente sull'AIP, legato alla minore rigidità degli skin, che, tuttavia, non preoccupa, poiché si è sempre ampiamente al di sotto dei valori limite fissati da regolamento (Figura 188). La rimozione dei 4 ply totali, unita alla variazione di stack sull'IA, permette un risparmio sulla massa pari al 13.7%.

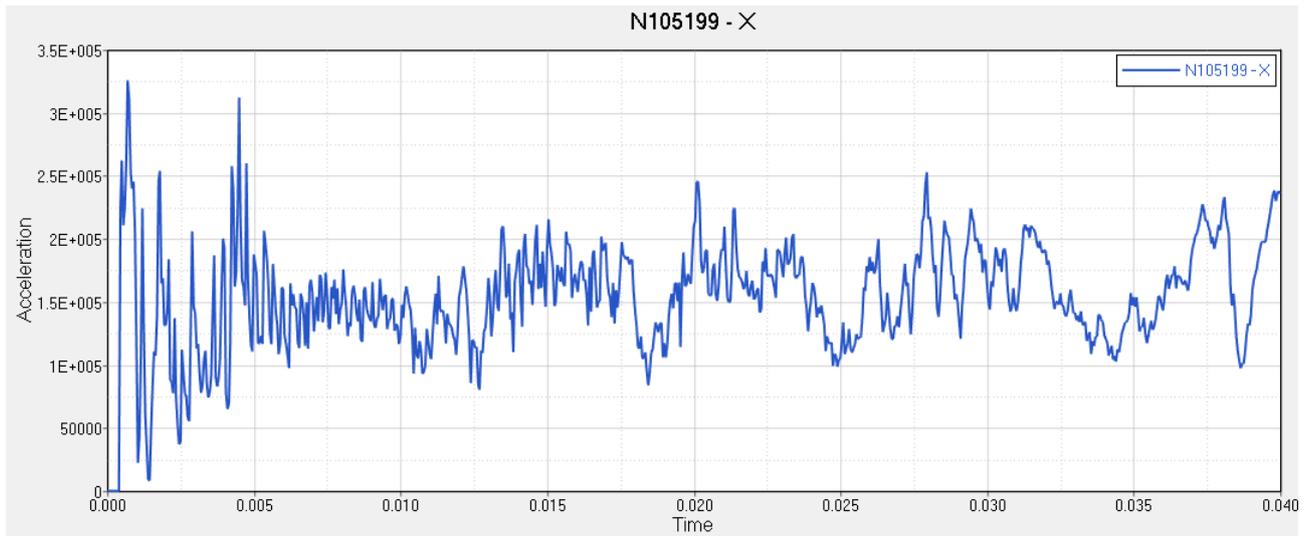


Figura 187: Decelerazioni Configurazione Ottimizzata Numero 3

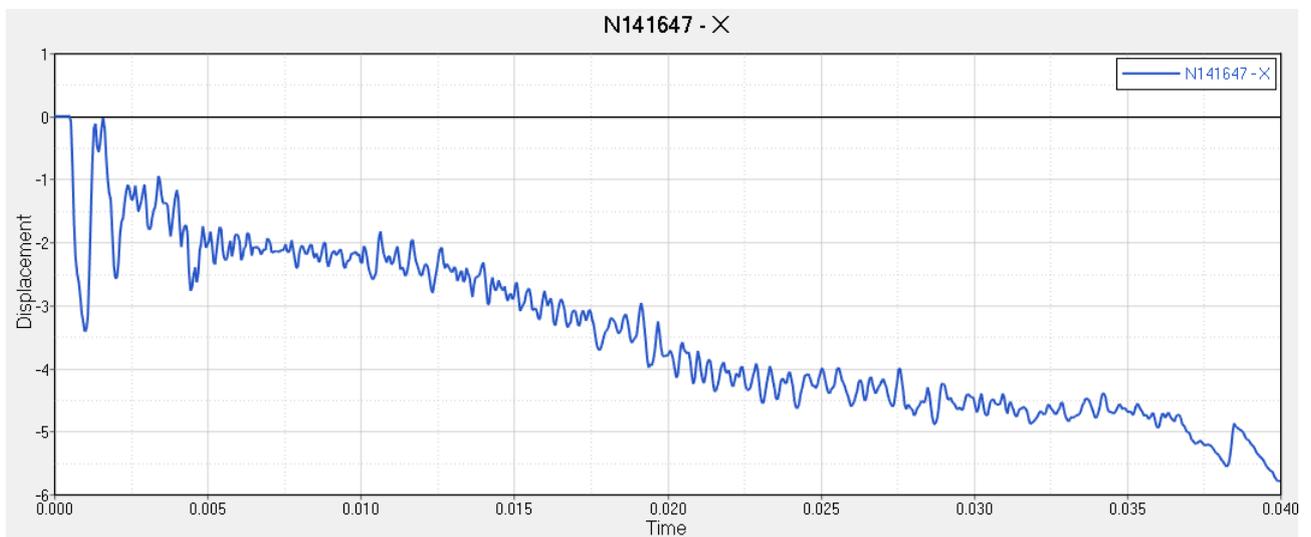


Figura 188: Deflessione massima AIP Configurazione Ottimizzata Numero 3

Configurazione	Numero Ply Ceduti	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
Ottimizzata Numero 3	3	> 8	≈ 33.24	≈ 15.92	≈ 5.7	≈ 1.32
Numero 4	1	> 8	≈ 35.43	≈ 16.34	≈ 2.5	≈ 1.53
Variatione Assoluta	+2	0	-2.19	-0.42	+4.2	-0.21
Variatione Percentuale	+200 %	0 %	-6.2 %	-2.6 %	+168%	-13.7 %

Tabella 23: Confronto performance Configurazione Numero 4 e Configurazione Ottimizzata Numero 3

8.3.4 Configurazione Ottimizzata Numero 4

Ply Numero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Set	IA6	IA6	IA6	IA6	IA6	IA5	IA5	IA5	IA4	IA3	IA2	IA1

Tabella 24: Relazione tra ply e set di definizione IA Configurazione Ottimizzata Numero 2

La Configurazione Ottimizzata Numero 4 presenta una stack sequence diversa sia per quanto riguarda la superficie laterale dell'IA (Figura 191) che per quanto riguarda skin superiore ed inferiore dell'AIP (Figura 189 e Figura 190). In particolare, è possibile osservare che, in tale configurazione, si è deciso di rimuovere

un solo ply per ciascuno skin del sandwich che costituisce l'AIP; inoltre, entrambi gli skin dell'AIP presentano unicamente ply a $\pm 45^\circ$, il che rende particolarmente semplice la costruzione del laminato.

Define laminate:

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
AIP_skin_superiore_ply1	21	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply2	22	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply3	23	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply4	24	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply5	29	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply6	30	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply7	31	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply8	32	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply9	49	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply10	50	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply11	51	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply12	52	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply13	57	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply14	58	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply15	59	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		

Figura 189: Stack sequence skin superiore AIP Configurazione Ottimizzata 4

Define laminate:

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
AIP_skin_inferiore_ply1	25	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply2	26	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply3	27	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply4	28	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply5	33	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply6	34	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply7	35	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply8	36	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply9	53	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply10	54	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply11	55	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply12	56	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply13	61	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply14	62	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply15	63	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		

Figura 190: Stack sequence skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata 4

La rimozione di un solo ply per ciascuno skin provoca una riduzione di rigidità osservabile con l'incremento della deflessione permanente dell'AIP (Figura 195) ma non della resistenza, infatti, come è possibile notare da Figura 192, il numero di ply che arrivano a cedimento è esattamente lo stesso. Energia assorbita (Figura 193) e decelerazione restano, invece, sugli stessi livelli, con una riduzione non troppo marcata della media ed un leggero incremento del picco massimo. La rimozione di soli due ply totali non permette una riduzione significativa della massa (-10.5%).

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
ply1	1	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply2	2	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply3	3	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply4	4	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply5	5	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply6	6	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply7	7	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply8	8	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply9	9	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply10	10	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply11	11	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply12	12	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		

Figura 191: Stack sequence superficie laterale IA Configurazione Ottimizzata 4

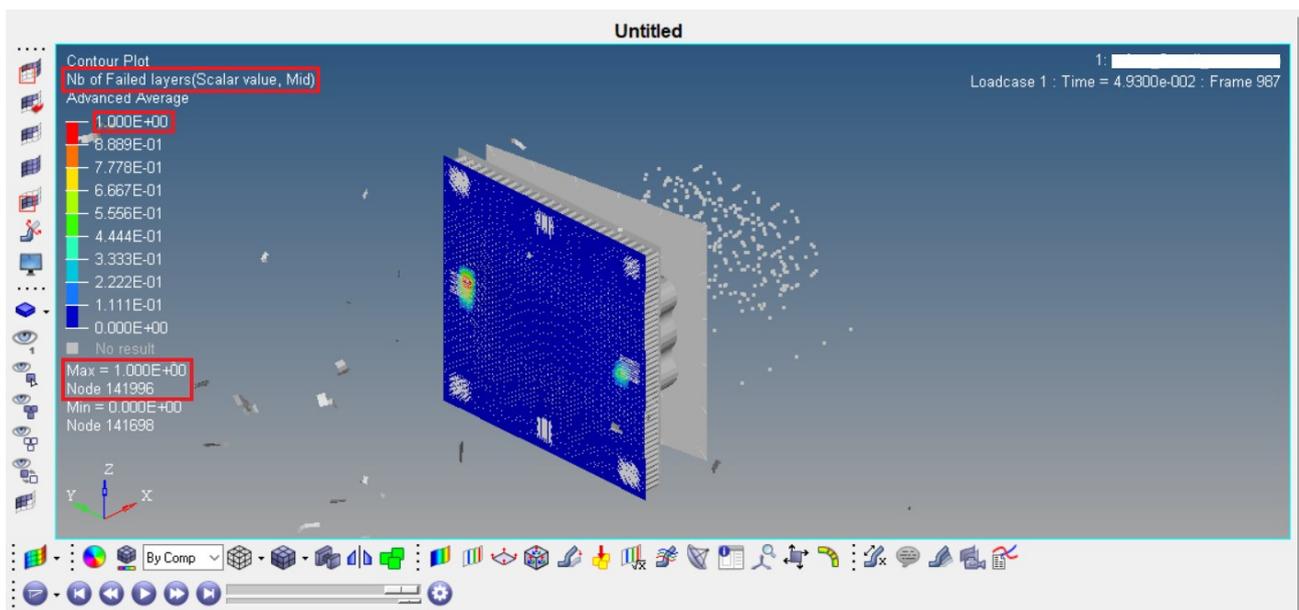


Figura 192: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata Numero 4

Configurazione	Numero Ply Ceduti	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
Ottimizzata Numero 4	1	> 8	≈ 38.72	≈ 15.15	≈ 4	≈ 1.37
Numero 4	1	> 8	≈ 35.43	≈ 16.34	≈ 2.5	≈ 1.53
Variatione Assoluta	0	0	+3.29	-1.19	+1.5	-0.16
Variatione Percentuale	0 %	0 %	+9.3 %	-7.3 %	+60%	-10.5%

Tabella 25: Confronto performance Configurazione Numero 4 e Configurazione Ottimizzata Numero 4

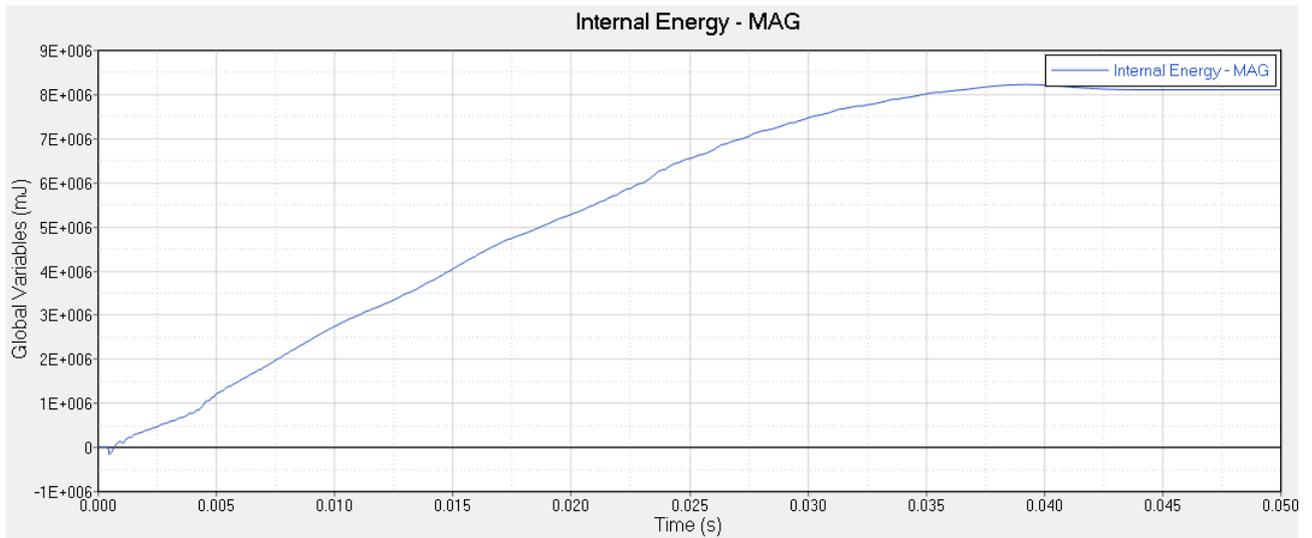


Figura 193: Energia assorbita Configurazione Ottimizzata Numero 4

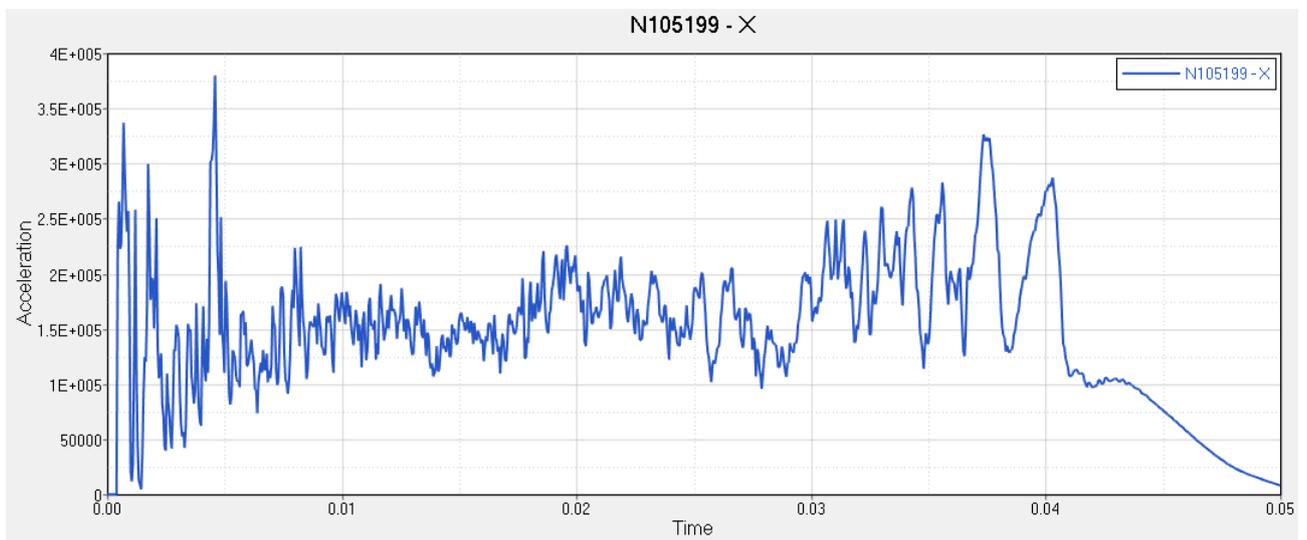


Figura 194: Decelerazioni Configurazione Ottimizzata Numero 4

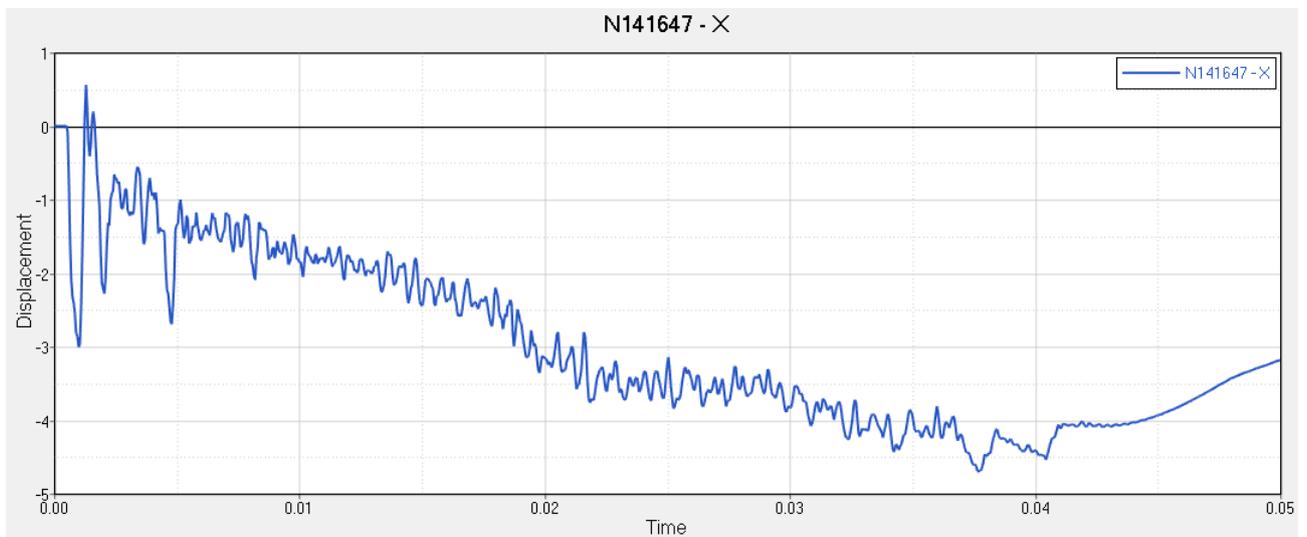


Figura 195: Deflessione massima AIP Configurazione Ottimizzata Numero 4

8.3.5 Configurazione Ottimizzata Numero 5

Define laminate:

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
AIP_skin_superiore_ply1	21	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply2	22	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply3	23	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply4	24	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply5	29	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply6	30	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply7	31	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply8	32	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply9	49	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply10	50	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply11	51	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply12	52	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply13	57	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply14	58	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply15	59	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
AIP_skin_superiore_ply16	60	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		

Figura 196: Stack sequence skin superiore AIP Configurazione Ottimizzata 5

Define laminate:

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
AIP_skin_inferiore_ply1	25	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply2	26	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply3	27	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply4	28	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply5	33	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply6	34	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply7	35	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply8	36	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply9	53	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply10	54	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply11	55	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply12	56	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply13	61	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply14	62	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply15	63	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
AIP_skin_inferiore_ply16	64	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		

Figura 197: Stack sequence skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata 5

Ply Numero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Set	IA6	IA6	IA6	IA6	IA6	IA5	IA5	IA4	IA4	IA3	IA2	IA1

Tabella 26: Relazione tra ply e set di definizione IA Configurazione Ottimizzata Numero 5

La *Configurazione Ottimizzata Numero 5* presenta una stack sequence diversa sia per quanto riguarda la superficie laterale dell'IA (Figura 198) che per quanto riguarda skin superiore e inferiore dell'AIP (Figura 196 e Figura 197). In particolare, è possibile osservare che, in tale configurazione, si è deciso di non rimuovere alcun ply dagli skin del sandwich che costituisce l'AIP, modificandone unicamente l'orientazione.

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
ply1	1	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply2	2	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply3	3	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply4	4	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply5	5	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply6	6	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply7	7	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply8	8	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
ply9	9	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply10	10	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply11	11	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply12	12	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		

Figura 198: Stack sequence superficie laterale IA Configurazione Ottimizzata 5

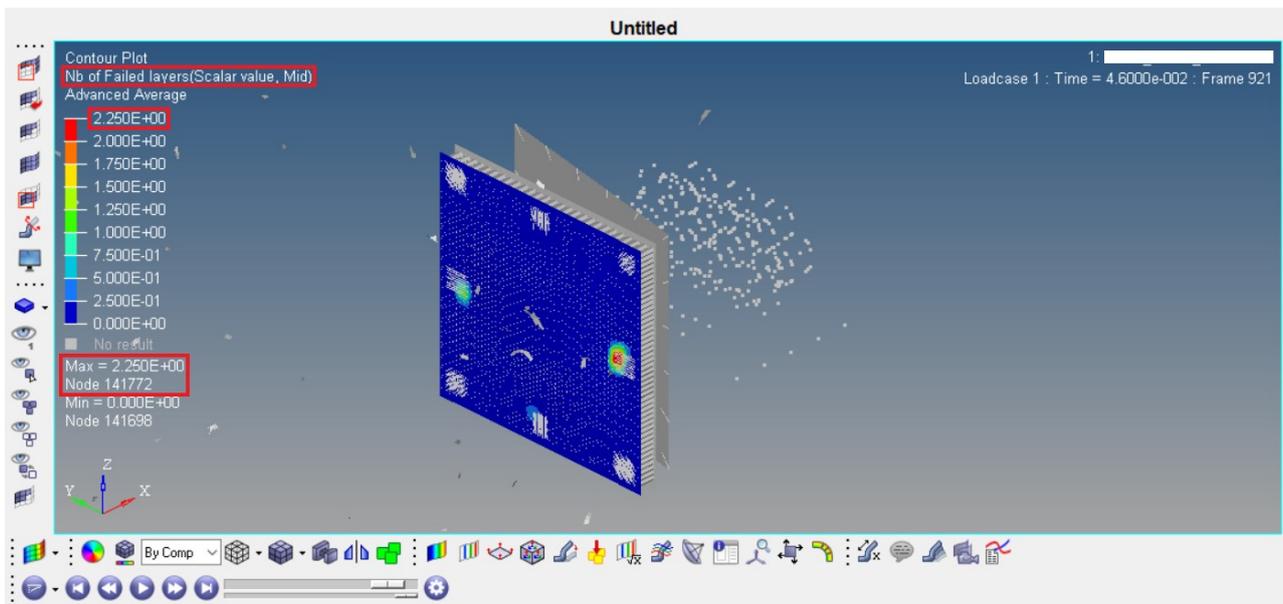


Figura 199: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata Numero 5

La modifica della stack sequence provoca una riduzione di rigidità osservabile con l'incremento della deflessione permanente dell'AIP (Figura 202) ma anche della resistenza, infatti, come è possibile notare da Figura 199, il numero di ply che arrivano a cedimento è di due. Energia assorbita (Figura 193) e decelerazione restano, invece, sugli stessi livelli, con una riduzione non troppo marcata della media ed un leggero incremento del picco massimo. La sola modifica della stack sequence sull'IA non permette una riduzione significativa della massa (-7.2 %).

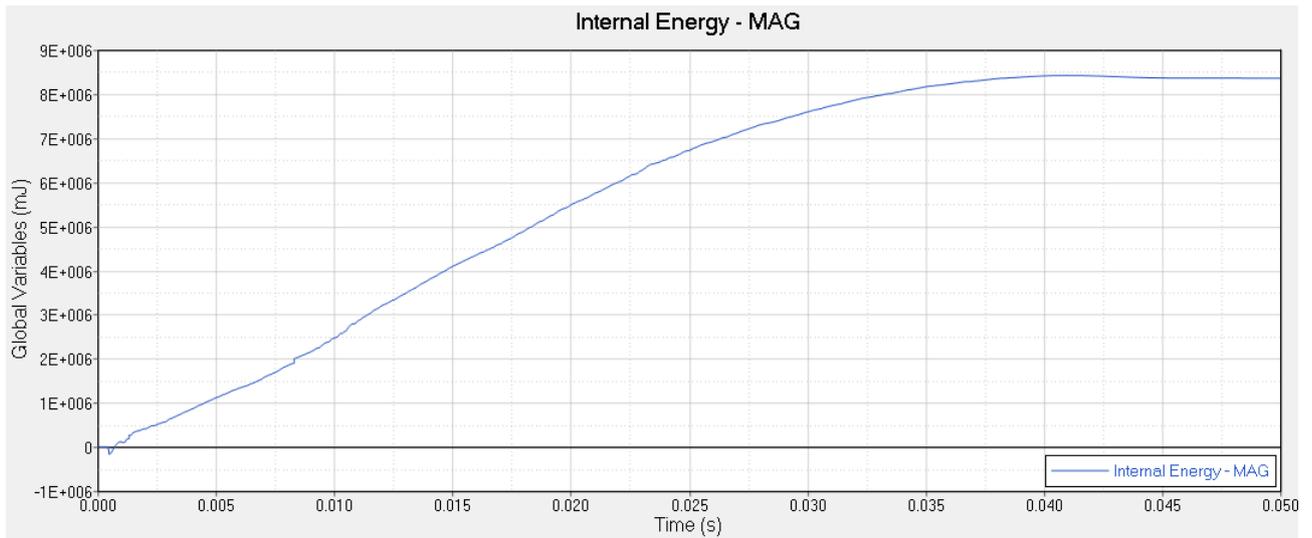


Figura 200: Energia assorbita Configurazione Ottimizzata Numero 5

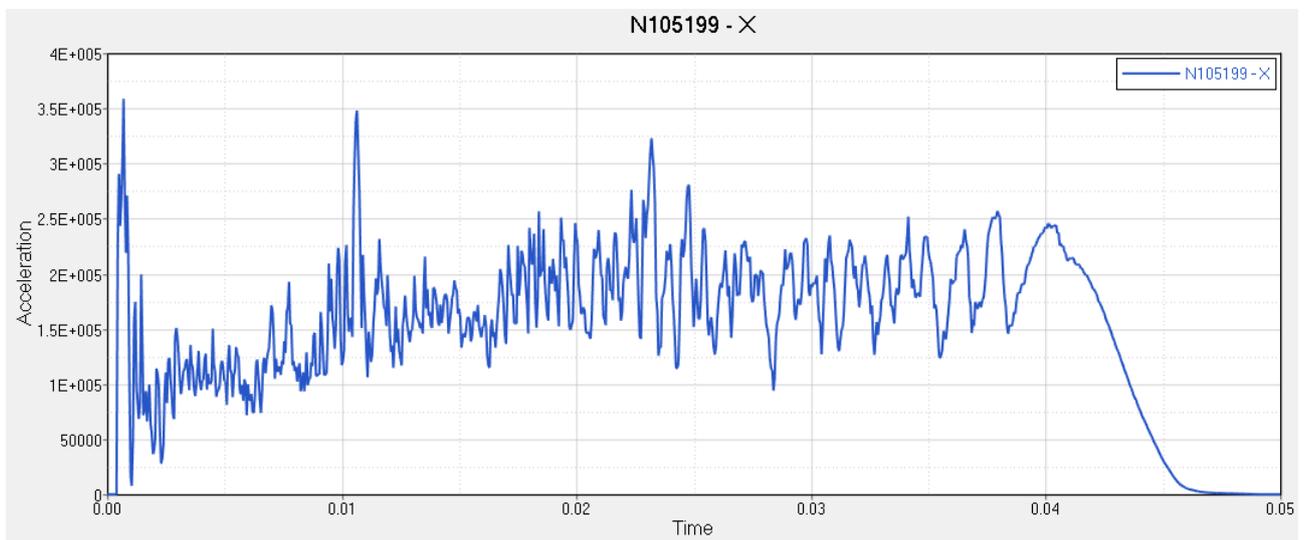


Figura 201: Decelerazioni Configurazione Ottimizzata Numero 5

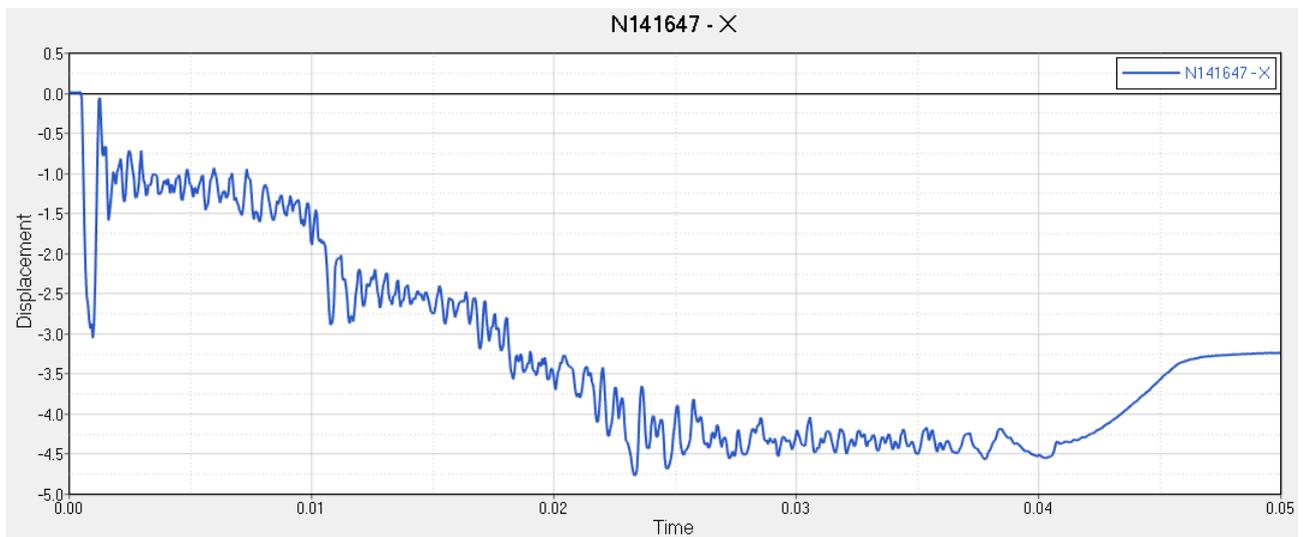


Figura 202: Deflessione massima AIP Configurazione Ottimizzata Numero 5

Configurazione	Numero Ply Ceduti	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
Ottimizzata Numero 5	2	> 8	≈ 36.64	≈ 15.83	≈ 3.3	≈ 1.42
Numero 4	1	> 8	≈ 35.43	≈ 16.34	≈ 2.5	≈ 1.53
Variazione Assoluta	+1	0	+1.21	-0.51	+0.8	-0.11
Variazione Percentuale	+100 %	0 %	+3.4 %	-3.1 %	+32 %	-7.2 %

Tabella 27: Confronto performance Configurazione Numero 4 e Configurazione Ottimizzata Numero 5

8.3.6 Configurazione Ottimizzata Numero 6

Ply Numero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Set	IA6	IA6	IA6	IA6	IA6	IA5	IA5	IA4	IA4	IA3	IA2	IA1

Tabella 28: Relazione tra ply e set di definizione IA Configurazione Ottimizzata Numero 6

Name	Id	Color	Material	Thickness	Orientation	IP	Result	Phi	Zi
ply1	1	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply2	2	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply3	3	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply4	4	■	CFRP	0.25000	90.0	3	no		
ply5	5	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply6	6	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply7	7	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply8	8	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
ply9	9	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		
ply10	10	■	CFRP	0.25000	45.0	3	no		
ply11	11	■	CFRP	0.25000	-45.0	3	no		
ply12	12	■	CFRP	0.25000	0.0	3	no		

Figura 203: Stack sequence superficie laterale IA Configurazione Ottimizzata 6

La Configurazione Ottimizzata Numero 6 presenta una stack sequence relativa alla superficie laterale dell'IA leggermente diversa rispetto alle precedenti, mentre quella relativa agli skin dell'AIP è perfettamente analoga a quella della Configurazione Ottimizzata Numero 5. Come per il caso precedente, quindi, si è deciso di non procedere alla rimozione di alcun ply sugli skin dell'AIP, motivo per cui la riduzione di massa risulta essere ridotta.

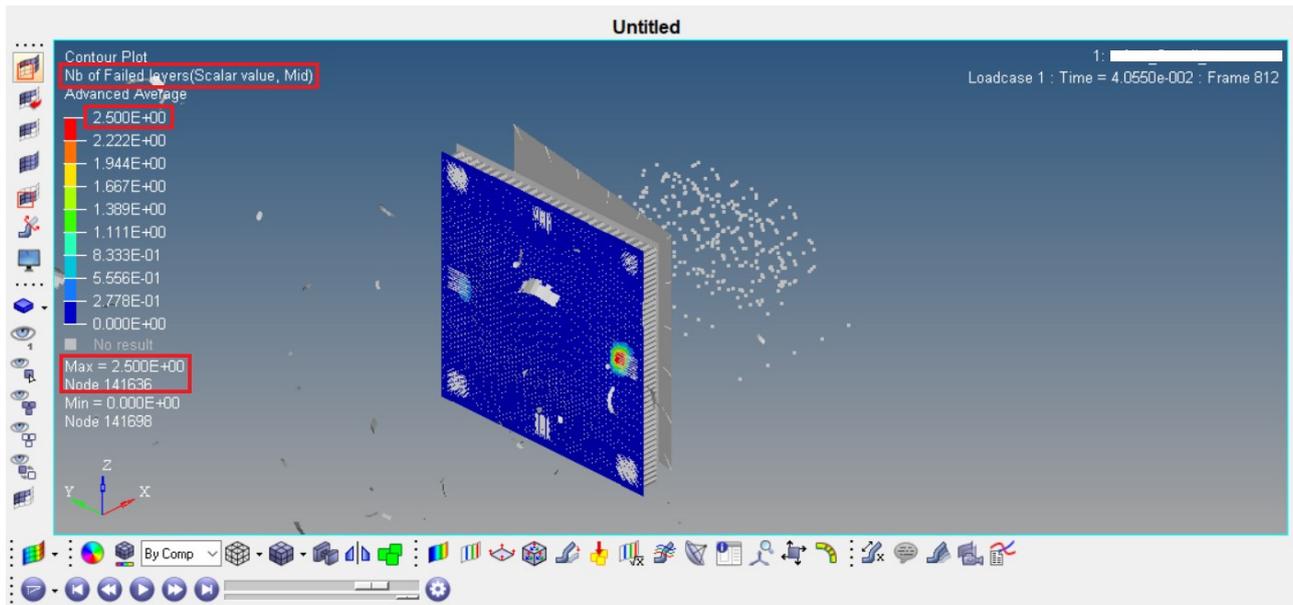


Figura 204: Numero ply ceduti su skin inferiore AIP Configurazione Ottimizzata Numero 6

Come è possibile osservare da Figura 204 e da Figura 207, la modifica di stack sequence induce una riduzione sia della resistenza, poiché il numero di ply arrivati a cedimento risulta essere pari a tre, sia della rigidità, poiché la deflessione permanente dell'AIP è superiore. Come per i casi precedenti, invece, non si osservano modifiche rilevanti per quanto riguarda l'energia assorbita (Figura 205), mentre si osserva una piccola riduzione delle decelerazioni.

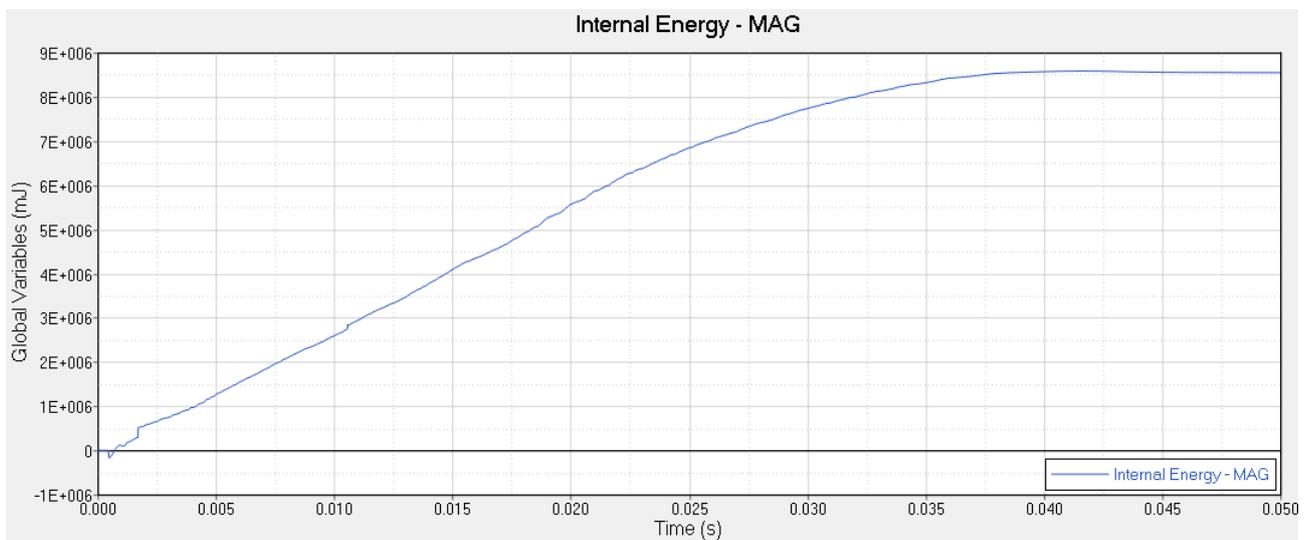


Figura 205: Energia assorbita Configurazione Ottimizzata Numero 6

Configurazione	Numero Ply Ceduti	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
Ottimizzata Numero 6	3	> 8	≈ 36.21	≈ 15.25	≈ 3.3	≈ 1.42
Numero 4	1	> 8	≈ 35.43	≈ 16.34	≈ 2.5	≈ 1.53
Variazione Assoluta	+2	0	+0.78	-1.09	+0.8	-0.11
Variazione Percentuale	+200 %	0 %	+2.2 %	-6.7 %	+32 %	-7.2 %

Tabella 29: Confronto performance Configurazione Numero 4 e Configurazione Ottimizzata Numero 6

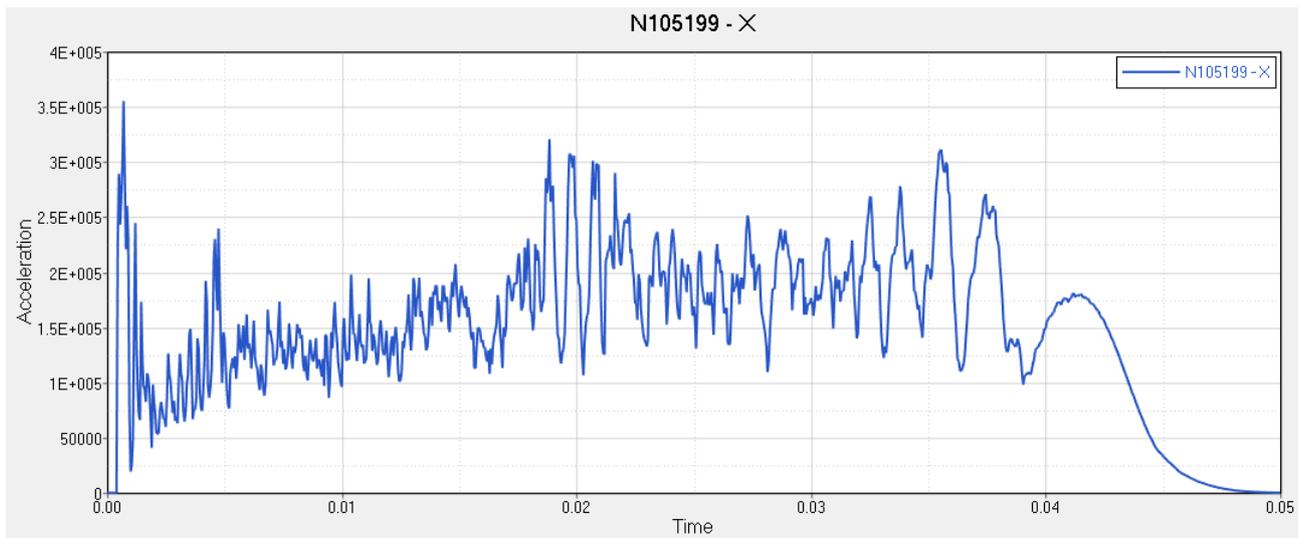


Figura 206: Decelerazioni Configurazione Ottimizzata Numero 6

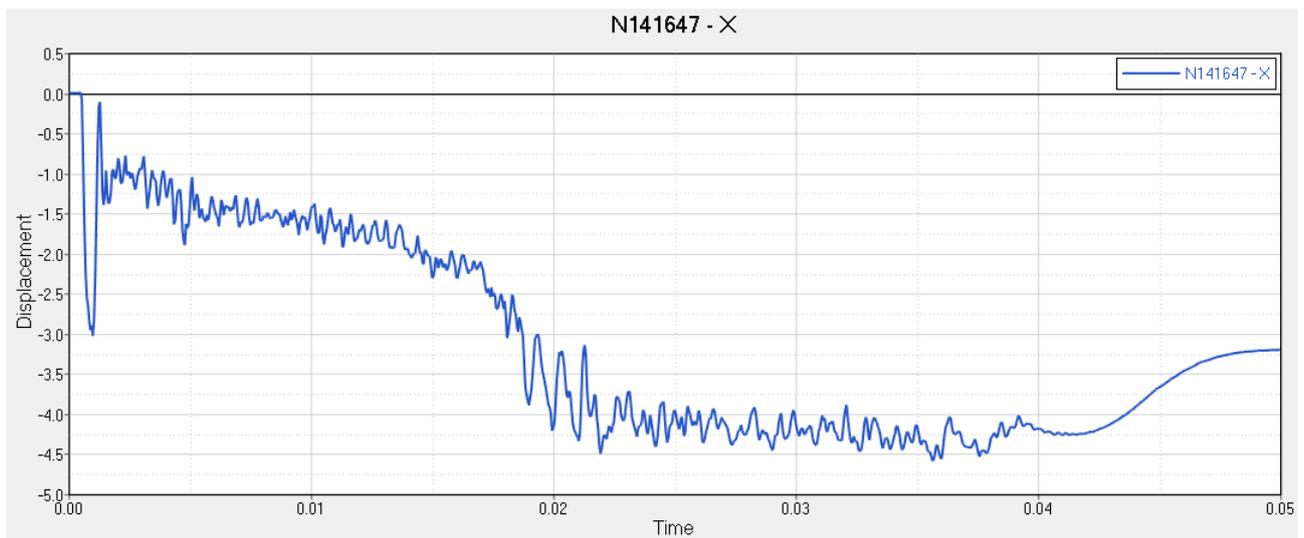


Figura 207: Deflessione massima AIP Configurazione Ottimizzata Numero 6

È possibile, ora, operare un confronto definitivo tra le varie soluzioni proposte:

<i>Configurazione</i>	<i>Numero Ply Ceduti</i>	<i>Energia Assorbita [kJ]</i>	<i>Decelerazione Massima [g]</i>	<i>Decelerazione Media [g]</i>	<i>Deflessione Permanente AIP [mm]</i>	<i>Massa [kg]</i>
<i>Numero 4</i>	<i>1</i>	<i>> 8</i>	<i>≈ 35.43</i>	<i>≈ 16.34</i>	<i>≈ 2.5</i>	<i>≈ 1.53</i>
<i>Ottimizzata Numero 1</i>	<i>3</i>	<i>> 8</i>	<i>≈ 37</i>	<i>≈ 15</i>	<i>≈ 5</i>	<i>≈ 1.27</i>
<i>Ottimizzata Numero 2</i>	<i>2</i>	<i>> 8</i>	<i>≈ 33.91</i>	<i>≈ 15.52</i>	<i>≈ 3.7</i>	<i>≈ 1.32</i>
<i>Ottimizzata Numero 3</i>	<i>3</i>	<i>> 8</i>	<i>≈ 33.24</i>	<i>≈ 15.92</i>	<i>≈ 5.7</i>	<i>≈ 1.32</i>
<i>Ottimizzata Numero 4</i>	<i>1</i>	<i>> 8</i>	<i>≈ 38.72</i>	<i>≈ 15.15</i>	<i>≈ 4</i>	<i>≈ 1.37</i>
<i>Ottimizzata Numero 5</i>	<i>2</i>	<i>> 8</i>	<i>≈ 36.64</i>	<i>≈ 15.83</i>	<i>≈ 3.3</i>	<i>≈ 1.42</i>
<i>Ottimizzata Numero 6</i>	<i>3</i>	<i>> 8</i>	<i>≈ 36.21</i>	<i>≈ 15.25</i>	<i>≈ 3.3</i>	<i>≈ 1.42</i>

Tabella 30: Confronto assoluto

Configurazione	Numero Ply Ceduti	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
Ottimizzata Numero 1	+2	0	+1.57	-1.34	+2.5	-0.26
Ottimizzata Numero 2	+1	0	-1.52	-0.82	+1.2	-0.21
Ottimizzata Numero 3	+2	0	-2.19	-0.42	+4.2	-0.21
Ottimizzata Numero 4	0	0	+3.29	-1.19	+1.5	-0.16
Ottimizzata Numero 5	+1	0	+1.21	-0.51	+0.8	-0.11
Ottimizzata Numero 6	+2	0	+0.78	-1.09	+0.8	-0.11

Tabella 31: Variazione assoluta rispetto alla Configurazione Numero 4

Configurazione	Numero Ply Ceduti	Energia Assorbita [kJ]	Decelerazione Massima [g]	Decelerazione Media [g]	Deflessione Permanente AIP [mm]	Massa [kg]
Ottimizzata Numero 1	+200 %	0 %	+4.4 %	-8 %	+100 %	-17%
Ottimizzata Numero 2	+100 %	0 %	-4.3 %	-5 %	+48 %	-13.7 %
Ottimizzata Numero 3	+200 %	0 %	-6.2 %	-2.6 %	+168%	-13.7 %
Ottimizzata Numero 4	0 %	0 %	+9.3 %	-7.3 %	+60%	-10.5%
Ottimizzata Numero 5	+100 %	0 %	+3.4 %	-3.1 %	+32 %	-7.2 %
Ottimizzata Numero 6	+200 %	0 %	+2.2 %	-6.7 %	+32 %	-7.2 %

Tabella 32: Variazione percentuale rispetto alla Configurazione Numero 4

Considerati i parametri prestazionali riassunti in Tabella 30, Tabella 31 e Tabella 32 e considerata la maggiore semplicità costruttiva legata alla semplicità della stack sequence, la configurazione migliore analizzata risulta essere la *Configurazione Ottimizzata Numero 2*; essa infatti garantisce:

- buon incremento di performance (massa minore e minori decelerazioni medie e di picco);
- ragionevole incremento di deflessione permanente dell'AIP;
- minimo incremento del numero di ply che arrivano a cedimento;
- maggiore semplicità realizzativa;

CAPITOLO IX - Conclusioni e possibili sviluppi futuri

Lo studio dei problemi di crash ha permesso, nel tempo, di incrementare in maniera sostanziale la sicurezza nel campo dell'automotive, sia in termini sportivi (motorsport) sia per i veicoli civili. Come fatto notare in precedenza, però, i problemi di crash rappresentano un classico esempio di problemi nei quali la ricerca di una soluzione del problema in forma analitica è praticamente impossibile, motivo per cui gli unici due approcci possibili sono il calcolo computazionale o le prove sperimentali.

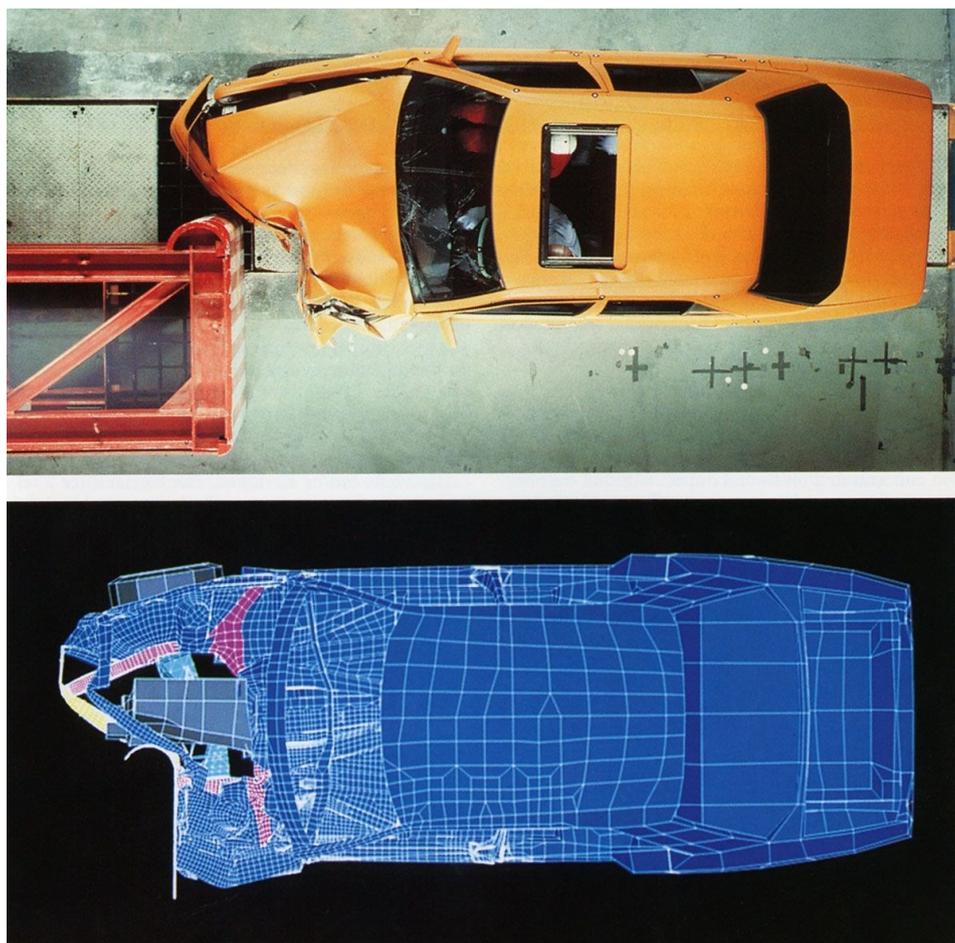


Figura 208: Confronto crash test fisico e simulato FEM, [74]

Allestire prove sperimentali, specie nel caso si utilizzino componenti in materiale composito e/o architettura di tipo honeycomb, richiede un'elevata spesa in termini di tempo e di denaro. Se in alcuni casi particolari il budget è abbastanza alto, per cui i requisiti di costo passano in secondo piano, questo non è quasi mai vero per quanto riguarda il tempo, poiché nel mondo del motorsport e della progettazione, in generale, si è obbligati a lavorare per scadenze.

Ecco che, quindi, la progettazione mediante calcolo computazionale e FEM, in particolare, costituisce un supporto estremamente vantaggioso, economico e veloce che permette di testare, seppur in maniera approssimata, un gran numero di modelli senza doverli effettivamente realizzare. Tali metodologie permettono, quindi, di indagare, in maniera relativamente rapida, quali fattori hanno maggiore influenza sul problema e quali, invece, possono essere trascurati.

Allo stesso tempo, però, i risultati della risoluzione di un modello FEM sono affetti da una serie di errori legati alla modellazione e al calcolo numerico vero e proprio, motivo per cui non si può essere totalmente

certi degli stessi, motivo per cui in ultima analisi sarà sempre e comunque necessario effettuare almeno una prova sperimentale.

Il presente lavoro di tesi ha, come fatto notare nella *prefazione*, lo scopo di descrivere il processo di progettazione del complesso costituito da *IA* e *AIP*, destinati all'impiego sulla vettura da Formula SAE del team studentesco *Squadra Corse PoliTo*, la *SC21*. In tale processo si è scelto di lavorare solo su alcuni parametri mentre molti altri sono stati mantenuti fissi.

Nello specifico, un possibile interessante sviluppo futuro sarebbe l'utilizzo di compositi differenti rispetto ai classici ply di resina epossidica rinforzata tramite fibre di carbonio; in particolare, un'idea potrebbe essere quella di provare ad utilizzare la *fibra aramidica*, ampiamente diffusa in applicazioni che richiedano elevata resistenza ad impatto o, in alternativa, la fibra di vetro che, seppur più pesante, permette un abbattimento notevole dei costi, per cui sarebbe possibile dare maggiore spazio a prove di natura sperimentale.

Un'altra idea potrebbe essere quella di *modificare il core dell'AIP*; considerando, infatti, che la rigidità flessionale di una piastra sandwich è proporzionale allo spessore al cubo del core, aumentare tale spessore, anche di poco, avrebbe un effetto importante sulla resistenza del pannello, permettendo così una riduzione del numero di ply necessari sugli skin e, di conseguenza, una riduzione della massa dell'AIP. Sempre considerando l'honeycomb, un'altra possibilità sarebbe quella di utilizzare un honeycomb con dimensioni della cella o con una densità differenti.

Sempre facendo riferimento ai materiali, un interessante sviluppo potrebbe essere l'utilizzo di *foam* in associazione all'architettura proposta nel presente lavoro; in particolare, l'utilizzo di foam sarebbe possibile:

- in posizione anteriore, per ridurre il picco iniziale di decelerazione;
- come riempitivo, per permettere una riduzione più omogenea della decelerazione;

Altra possibilità è rappresentata dall'aumento del numero di set definiti sull'IA, così da garantire maggiore continuità e gradualità nell'aumento di spessore, di rigidità e di resistenza con ovvi effetti benefici sulla decelerazione di picco e media; si noti, però, che incrementare il numero di set porta a difficoltà maggiori sotto il punto di vista del manufacturing.

Infine, un ultimo sviluppo futuro riguardante la modellazione FEM vera e propria potrebbe essere quello di modellare l'incollaggio tra skin e core dell'AIP e tra AIP e IA in maniera più accurata rispetto al semplice contatto.

Fonti, Bibliografia e Sitografia di riferimento

- [1] <https://www.thelastcorner.it/rubriche/sguardo-al-passato/sguardo-passato-zolder-82-tragedia-gilles-villeneuve.html>
- [2] <https://www.pinterest.dk/pin/427419820879934405/>
- [3] <https://www.foxsports.com.au/motorsport/formula-one/fl-2020-ayrton-senna-death-at-imola-remembered-26-years-on/news-story/9474bfe1b8bd88494f7513ead0f4aa9f>
- [4] <https://www.motorsport-magazin.com/formel1/news-249838-formel-1-monza-2018-halo-cockpitschutz-lob-nach-spa-crash-unfall-sebastian-vettel-ohne-fehlt-fast-was/>
- [5] Formula Student Rules 2020, Vol.1
- [6] <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/HTML/?uri=OJ:L:2019:218:FULL&from=EN>
- [7] Boria S., 2010, *Behaviour of an Impact Attenuator for Formula SAE Car under Dynamic Loading*
- [8] Mazzoldi P., Nigro M., Voci C., *Fisica Volume I: Meccanica e Termodinamica*, Padova, EdiSES, II edizione
- [9] Franciosi C., *Lezioni di Scienza delle Costruzioni*, 2019
- [10] Pieraccini S., *Dispense del corso di Metodi Numerici e Calcolo Scientifico*, Torino, a.a. 2018-2019
- [11] Icardi U., *Dispense del corso di Modellazione numerica e tecniche di simulazione di strutture aerospaziali*, Torino, a.a. 2019-2020
- [12] Livermore Software Technology Corporation (LSTC), *Hourglass (HG) Modes*, 2003-2012
- [13] Dvorkin E., Oate E., Calvo N., Idelsohn S., Mecnica G., *All-Hexahedral Element Meshing By Generating The Dual Mesh*, 1980
- [14] Lombardi M., *Dispense del corso di Scienza e Tecnologia dei Materiali*, Torino, a.a. 2017-2018
- [15] Frulla G., *Dispense del corso di Sperimentazione su Strutture Aerospaziali*, Torino, a.a. 2019-2020
- [16] Di Sciuva M., *Dispense del corso di Strutture Aeronautiche*, Torino, a.a. 2018-2019
- [17] <https://engineering.stackexchange.com/questions/8045/does-unloading-beyond-yield-point-also-affect-tensile-strength>
- [18] Richfield D., *Stress v Strain*, 2009
- [19] Cdang, *Ductile fracture: nucleation of crackss, coalescence and final shear of remaining section*, 2009
- [20] <https://www.semanticscholar.org/paper/2.-Stress-and-Strain-Analysis-and-Measurement/b516297a4f45b2458a521fb1eb33ffc7c23215a9/figure/1>
- [21] Sigmund, *Fractured tensile test specimen of a nodular graphite cast iron*, 2009
- [22] <https://www.scienceabc.com/innovation/what-is-the-stress-strain-curve.html>
- [23] http://corsiadistanza.polito.it/on-line/Materiali/pdf/dispensa_materiali.pdf
- [24] <https://www.chimica-online.it/download/polimerizzazione.htm>
- [25] Pugliesi D., *Variazione del volume specifico con la temperatura per un materiale amorfo, semicristallino e cristallino. Sono indicate la temperatura di fusione (T_m e T_m') e la temperatura di transizione vetrosa (T_g)*, 2011
- [26] Koo J., Basics of Polymer Matrices and Composites. In *Fundamentals, Properties, and Applications of Polymer Nanocomposites*, Cambridge: Cambridge University Press, 2016
- [27] Velasco Latorre J. F., *Analisi del comportamento deformativo dipendente dal tempo delle rocce nello scavo di gallerie attraverso l'implementazione di un modello reologico viscoelastico al metodo delle curve caratteristiche*, Torino, 2019
- [28] Jagtap S., *Preparation and characterization of rubbery epoxy/multiwall carbon nanotubes composites using amino acid salt assisted dispersion technique*, India, 2013
- [29] Shanks R. A., Kong I., *Thermoplastic Elastomers*, RMIT University, Melbourne, 2012
- [30] http://dida.fauser.edu/dispro/carbonar/I_materiali/compositi.html
- [31] Biamino S., *Dispense del corso di Materiali per Applicazioni Aerospaziali*, Torino, a.a. 2020-2021
- [32] Vosynek P., Navrat T., Pec M., Pořizka J., Diviš P., *How the Decrease of Collagen or Mineral Affect the Fracture in the Turkey Long Bones*, Brno, 2014
- [33] Di Mino G., Di Liberto C.M., Bevilacqua A., *Modellazione FEM del comportamento viscoelastoplastico di conglomerati bitumosi per uso stradale*, Palermo, 2010

- [34] Mendelson A., *Plasticity: Theory and Application*, MacMillan, New York, 1968
- [35] Hill R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1998
- [36] Drucker D.C., *A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations*, Proc.Ist. U.S. Natl. Congress Appl. Mech., 1952
- [37] Lubliner J., *Plasticity theory*, Macmillan Publishing, New York, 1990
- [38] Vergani L., *Meccanica dei Materiali*, McGraw-Hill, Milano, 2001
- [39] Baldacci R., Ceradini G., Giangreco E., *Plasticità*, CISIA, Milano, 1974
- [40] Jirasek M., Bazant Z., *Inelastic Analysis of Structures*, Wiley, 2001
- [41] Boresi, A. P., Schmidt, R. J., Sidebottom, O.M., *Advanced Mechanics of Materials*, 5th edition. John Wiley & Sons, 1993
- [42] B.O. Almroth, Stricklin J.A., Saczalski K.J, *In Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects*, Vol. 20, AMD, A.S.M.E., New York, 1976
- [43] Silbey R.J., Alberty R.A., Bawendi G.M., *Physical Chemistry*, 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc, MIT, 2004
- [44] Lemaitre J., Chaboche J. L., *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press 1994
- [45] Dimitrienko Y. I., *Nonlinear continuum mechanics and Large Inelastic Deformations*, Springer, 2011
- [46] <https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/bioelasticity/viscoelasticity-hysteresis.php>
- [47] Perzyna P., *Fundamental Problems in Viscoplasticity*, Advances in Applied Mechanics, Vol. 9, Academic Press, New York, 1966
- [48] François, D., Pineau, A., Zaoui, A., *Mechanical Behaviour of Materials, Volume II: Viscoplasticity, Damage, Fracture and Contact Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, 1993
- [49] Johnson G.R., Cook W.H., *A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates, and High Temperatures.*, The Hague, 1983
- [50] Steinberg D.J., Cochran S.G., Guinan, M.W., *A constitutive model for metals applicable at high-strain rate*, Livermore, 1980
- [51] Zerilli F.J., Armstrong R.W., *Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations*, White Oak, 1987
- [52] Preston D.L., Tonks D.L., Wallace D.C., *Model of plastic deformation for extreme loading conditions*, Los Alamos, 2003
- [53] Kocks U.F., *Realistic constitutive relations for metal plasticity*, Los Alamos, 2001
- [54] Omar.elkhoury, *Perfectly Viscoplastic Solid*, 2009
- [55] Omar.elkhoury, *Schema modello di Bingham-Norton*, 2009
- [56] Omar.elkhoury, *Elastic Perfectly Viscoplastic Solid*, 2009
- [57] Kraych A., Carrez P., Cordier P., *On dislocation glide in MgSiO₃ bridgmanite at high-pressure and high-temperature*, Lille, 2016
- [58] Carpinteri A., *Scienza delle Costruzioni, vol. 1*, III edizione, Pitagora Editrice, Bologna, 1995
- [59] Romeo G., *Dispense del corso di Progettazione di Veicoli Aerospaziali*, Torino, a.a. 2019-2020
- [60] Gherlone M., Cestino E., *Dispense del corso di Analisi di strutture Aerospaziali con l'impiego di codici FEM*, Torino, a.a. 2019-2020
- [61] Principe DiValacchia, *Criterio di resistenza di Rankine per uno stato di sforzo 2D*, 2008
- [62] Rswarbrick, *Von Mises and Tresca yield surfaces in the principle stresses coordinates, including the Deviatoric Plane and the Hydrostatic axis*, 2017
- [63] Cdang, *Comparison of the Tresca and von Mises yield criteria for plane stress by using uniaxial test*, 2008
- [64] <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEMATRefMap/simamat-c-damagefibercomposite.htm>
- [65] HBM-Prenscia, *nCode, Design Life Brochure*, 2018
- [66] Narayanan N.G., Joshi S.N., Dixit U.S., *Advances in Computational Methods in Manufacturing: Select Papers from ICCMM 2019*, Springer; 1st ed. 2019

- [67] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *Finite Element Method, Volume 1: The Basis*, Fifth Edition, Butterworth-Heinemann, 2000
- [68] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *Finite Element Method, Volume 2: Solid Mechanics*, Fifth Edition, Butterworth-Heinemann, 2000
- [69] Di Sciuva M., *Dispense del corso di Dinamica delle Strutture Aerospaziali*, Torino, a.a. 2019-2020
- [70] Kleiven S., Halldin P., Zenkert D., *Dynamic Finite Element Methods - Lecture Notes for SD2450*, Stoccolma, 2001
- [71] Coppola M., *Manuale Catia v5 r14 Solidi – ITA*, 2017
- [72] Altair Hyperworks, *RADIOSS User Guide*, 2017
- [73] Hexcel, *HexWeb Honeycomb Attributes and Properties*, 2019
- [74] <https://www.computerhistory.org/makesoftware/exhibit/car-crash-simulation/>

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare per primo il Prof. Gherlone, relatore di questo lavoro di tesi e la persona più chiara, precisa e disponibile che io abbia incontrato durante il mio percorso accademico.

Un ringraziamento speciale al compianto Prof. Icardi, padre dell'analista FEM che è in me e colui che più di ogni altro mi ha ispirato in quello che faccio.

Un altro ringraziamento dovuto è ai ragazzi di Squadra Corse, in particolare agli Chassis Boys e ai padri Ettore e Jacopo. Avete una passione sfrenata per questo mondo, non perdetela mai.

Dedico questa tesi, frutto e compimento di anni di sacrificio, alla mia famiglia. Ringrazio mia madre e mio padre per il costante sostegno ricevuto negli anni, sia emotivo che economico, ma soprattutto per la libertà che mi avete lasciato nel prendere le mie decisioni, supportandomi in ogni caso; è questa la più grande lezione di vita che mi avete impartito e la cosa che più mi ha fatto crescere. A voi devo tutto.

Ringrazio mia sorella Paola, fonte inesauribile di battute scadenti. A volte, in realtà, vorrei anche ridere ma faccio la parte di quello serio. In quarantena, nonostante tutto, ci siamo divertiti. So di non essere spesso il migliore dei fratelli, ma faccio del mio meglio.

Ringrazio tutti i miei nonni, i miei zii e i miei cugini, ma in particolare Nonna Maria, Zia Rosa, Zio Canio, Antonio e Vito. Casa vostra è stata davvero una seconda casa per me. Ogni volta che si avvicina il Natale non vedo l'ora che arrivi la vigilia per trascorrerla in vostra compagnia.

Un ringraziamento speciale a quelli di "Dà Sott" (Patrizio, Raffaele, Gabriele, Mascolo, Robertino, Vucci, Savino, Walter, Mattia, Kianid, Tiberio, Egidio, Stefano, Michele, Armando, Noemi, Lorenza, Madda), a chi se n'è andato e a chi è rimasto, nonostante tutto. Ognuno di voi mi ha lasciato qualcosa che non dimenticherò mai. Siete stati parte integrante del mio percorso di crescita, vi devo molto.

Ai "Collegiali Ignoranti" (Pelo, Sebba, Iacopo, Lollo, Manzi, Rocco, Fazzi, Gallo, Marco Loconsole, Ciccio Easy, Il Principe, Mimmo Rocca, Michelangelo, Panda, Gioni, Claudio, Danilo "Zacùn", Ivan, Scalora, Marianone "o' draft", Massi, Paoletto, Anthony Junior, Armando, Nunzio detto "Il Presidente", Vito, Paki, Giordanella, Lames, Ingallinesi, Manuel, Varelli, Zolla, Pietroski), la mia prima vera compagnia a Torino. Impossibile ricordare tutte le storie successe negli anni. Mi limito ai grandi classici "Bellomo staccalo", "C'è una conchiglia anche per me?" e "l'isola di Palmarola".

Un grazie doveroso va ai ragazzi del "Pollaio" (Calanni, Iacopo, Lollo, Ciccio, Paolucci, Zolfo, Davide, Micky May, Michelangelo). Mi avete reso una persona infinitamente peggiore di prima, non riesco più a parlare normalmente con la gente e puntualmente quando non so come controbattere in un discorso mi viene voglia di fare il verso del pollo. L'esperimento degli armadietti in comune è uno dei punti più bassi mai toccati in vita mia, però almeno non si comprava il detersivo. Bene così.

Ai tre moschettieri, Schiavone, Michele Maggio e Andrea Santacroce detto Santacruz de La Pampa. Mai visto mangiare tanta pasta in vita mia. Non siete normali. Però almeno Schiavone e Santacroce a calcetto correvano, tu, Micky, nemmeno quello. Male, a tratti malissimo.

A quelli della "Tana" (Marcello, Calanni, Davide, Pier, Imbimbo, Simone, Ilario). Si dice che chi entra anche una volta sola nella tana, cambi per sempre. La verità è che siete semplicemente degli animali e non credo possiate vivere in un contesto sociale e civile normale. È soprattutto per questo che siamo amici. Calanni che canta Pavarotti alle 4 di notte resta uno dei migliori ricordi che io abbia a Torino.

Ai ragazzi di "casetta" (Donato, Raffaele, Patrizio, Russel, Mirko, Gabriele, Luca, Lorenzo Giambattista, Lorenzo Archetti, Pietro, Siria, Francesca, Stascedd, Fabio, Gennaro detto "Il Capitano", Dennis, Lucia), mi

avete insegnato che la stoppa non è un gioco ma uno stile di vita. “Con 27 sei una montagna” cit. PS Siria Piulisci.

A Raffaele. Sei la persona mentalmente più forte che io conosca, ti ammiro molto per questo. Sei stato e sei ancora oggi un modello per me sotto questo punto di vista.

A Patrizio, amico storico. Se c'è una cosa di cui sono sicuro, è che potrò sempre fare affidamento su di te, spero di poterti assicurare lo stesso e che la vita possa riservarti il meglio.

Ai compagni di bevute Russel e Mirko. Se sono riuscito a laurearmi è solo perché vi ho conosciuto troppo tardi. Quanti 31, kebab di Ali e colazioni ad Atella si possono fare in una sola estate? Nel dubbio UP.

Al ragazzi di “Birretta con Nadia” e affiliati (Emilio, Carlo, Manlio, Luigi, Totò, Gero, Rosa e tutti gli altri), primi veri colleghi. Il primo anno mi ha regalato serate e momenti che è impossibile dimenticare (o ricordare?).

Un grazie speciale anche alla PoliTo Crew (Jury, Nazario, Adriano, Giogni, Toni, Gera, Pana, J, Beppe, Iano Raffa il traditore, Marco). Rendere leggere le lezioni del Poli era un'impresa impossibile ma ce l'abbiamo fatta. Anche se siamo ormai sparsi per il mondo e probabilmente non rivedrò più alcuni di voi, conserverò sempre un ricordo eccezionale delle giornate trascorse insieme.

A tutti gli altri, a chiunque sia riuscito a regalarmi anche solo un sorriso in questi anni vanno i miei più sentiti ringraziamenti. Un pezzetto di quel foglio di carta è anche vostro.

Una dedica finale a me stesso, all'averci sempre creduto, al sudore, alla fatica, alle ansie, ai sacrifici e alle rinunce che questo percorso ha comportato. Dopo tutto, ne è valsa la pena.