

POLITECNICO DI TORINO

Collegio di Ingegneria Gestionale

**Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Gestionale**

Tesi di Laurea Magistrale

**Asset Allocation: ottimizzazione bayesiana di
un portafoglio di imprese quotate sul mercato
azionario italiano**



Relatore

prof. Franco Varetto

Candidato

Elisa Guglielmi

Aprile 2021

A nonna Lina, ovunque tu sia, da sempre e per sempre la mia più grande sostenitrice

A mamma, che mi è sempre stata accanto con preziosi consigli ed enorme sostegno

A papà, che ha sempre creduto in me

Ad Antonio, che mi ha supportato e sopportato in ogni istante

Alle emozioni vissute e ad ogni singolo momento condiviso con i miei compagni

A questi anni, che ricorderò per sempre con affetto

Grazie

Indice

1	Introduzione	1
2	Il Modello di Markowitz	3
2.1	Costruzione del Portafoglio	3
2.2	Selezione del Portafoglio	6
2.2.1	La Frontiera efficiente e l'effetto diversificazione.....	7
2.2.2	La selezione del portafoglio efficiente	14
2.3	Punti di debolezza del modello.....	15
3	Capital Asset Pricing Model (CAPM)	17
4	Il modello di Black e Litterman	21
4.1	L'approccio di equilibrio	22
4.2	Le views degli investitori	23
4.3	L'approccio bayesiano.....	24
4.3.1	Caso particolare: aspettative certe.....	28
4.4	Asset Allocation Tattica	29
4.4.1	Processo di analisi delle variazioni	30
4.5	Criticità del modello	31
4.5.1	Lo scalare <i>Weight-on-views</i>	31
4.5.2	La matrice Ψ	32
5	Illustrazione dei dati	33
5.1	Analisi dei dati.....	36
5.1.1	ENEL S.p.A.....	37
5.1.2	Intesa Sanpaolo S.p.A.	40
5.1.3	Eni S.p.A.	42
5.1.4	STMicroelectronics N.V.	44
5.1.5	Generali S.p.A.	47
5.1.6	FCA N.V.	49
5.1.7	UniCredit S.p.A.....	51
5.1.8	Snam S.p.A.....	54
5.1.9	Exor N.V.	56

5.1.10	Atlantia S.p.A.....	58
5.1.11	Campari-Milano S.p.A.	61
5.1.12	DiaSorin S.p.A.	63
5.1.13	Recordati S.p.A.	66
5.1.14	Amplifon S.p.A.	68
5.1.15	Prysmian S.p.A.....	70
5.1.16	Telecom Italia S.p.A.....	73
5.1.17	Tenaris S.A.....	75
5.1.18	Hera S.p.A.	77
5.1.19	Interpump Group S.p.A.	80
5.1.20	Buzzi Unicem S.p.A.....	82
5.2	Conclusione dell'analisi e considerazioni storiche.....	85
6	Efficienza dei mercati.....	87
6.1	Il modello Random Walk	88
6.2	Analisi di efficienza dei dati.....	89
6.2.1	ENEL S.p.A.....	90
6.2.2	Intesa Sanpaolo S.p.A.	91
6.2.3	Eni S.p.A.	93
6.2.4	STMicroelectronics N.V	94
6.2.5	Generali S.p.A.	96
6.2.6	FCA N.V.	98
6.2.7	Unicredit S.p.A.....	99
6.2.8	Snam S.p.A.....	101
6.2.9	Exor N.V.	103
6.2.10	Atlantia S.p.A.....	104
6.2.11	Campari-Milano S.p.A.	106
6.2.12	DiaSorin S.p.A.	108
6.2.13	Recordati S.p.A.	109
6.2.14	Amplifon S.p.A.	111
6.2.15	Prysmian S.p.A.....	112
6.2.16	Telecom Italia S.p.A.....	114

6.2.17	Tenaris S.A.....	116
6.2.18	Hera S.p.A.....	117
6.2.19	Interpump Group S.p.A.....	119
6.2.20	Buzzi Unicem S.p.A.....	121
7	Applicazione del modello di Markowitz.....	123
8	Applicazione del modello di Black e Litterman.....	137
8.1	Approccio di equilibrio.....	137
8.2	Formulazione delle view	150
8.3	Approccio Bayesiano.....	154
8.4	L'impatto delle view.....	166
8.4.1	Analisi di sensitività per singola view.....	169
9	Confronti finali e conclusioni.....	172
	Bibliografia e Sitografia	175

1 Introduzione

L'analisi condotta nel presente lavoro di tesi pone a diretto confronto le caratteristiche, i risultati ed i principali punti di fragilità caratterizzanti i modelli di Asset Allocation.

L'Asset Allocation è quel processo mediante il quale si determina il modo con cui distribuire le proprie risorse tra i diversi asset a disposizione al fine di comporre il portafoglio ottimale per l'investitore stesso; si intende dunque raggiungere quel portafoglio in corrispondenza del quale l'asset manager, in linea con le proprie aspettative ed esigenze, massimizza il rendimento e minimizza la volatilità. L'investitore determina in autonomia la propria posizione sulla frontiera dei portafogli efficienti secondo la propria propensione al rischio: sceglierà dunque portafogli che a parità di rendimento forniscono rischi minori o che, allo stesso modo, per un dato livello di rischio offrono rendimenti maggiori. Tra i portafogli individuati, l'investitore più propenso al rischio si posizionerà nella parte alta della frontiera invece, l'investitore non disposto a subire variazioni inattese del capitale investito, si posizionerà nella parte bassa della frontiera accettando dunque un minor rendimento.

Con l'avvio della moderna teoria del portafoglio si ha una vera e propria formalizzazione a supporto degli investitori del processo di Asset Allocation: la principale innovazione introdotta dal modello di Markowitz (pubblicato nel 1952) è costituita dal principio di diversificazione secondo cui non è necessario che il portafoglio sia composto da un alto numero di titoli affinché si possa considerare diversificato, ma è possibile abbattere notevolmente il rischio se si presta attenzione alla correlazione tra i titoli utilizzati nel processo di costruzione del portafoglio stesso. Creando dunque portafogli ben diversificati composti anche da pochi titoli ben selezionati con bassi livelli di correlazione, si può ripartire il capitale ottimizzando il trade-off media-varianza e osservando una riduzione complessiva del rischio di portafoglio.

Al fine di colmare alcuni limiti del modello di Markowitz, è stato sviluppato in seguito il modello del CAPM, tra le cui ipotesi introdotte, la più significativa è data dal considerare le aspettative degli investitori omogenee. Ne consegue, dunque, che la frontiera efficiente sia la medesima per tutti gli operatori e che il portafoglio di mercato sia l'unico portafoglio rischioso detenibile; è stata, infatti, eliminata la componente soggettiva costituita dalla propensione al rischio dell'investitore.

In questo modello, la sensibilità del rendimento dei singoli titoli alle variazioni che intervengono nel portafoglio di mercato (coefficiente β) costituisce una nuova misura di rischiosità.

Dati i limiti empirici caratterizzanti il modello del CAPM, è stato successivamente sviluppato da Fisher Black e Robert Litterman un nuovo modello che si propone di risolvere le principali criticità dei modelli precedenti.

L'innovazione introdotta dal modello di Black & Litterman è data dalla possibilità di costruire i portafogli potendo combinare, mediante un approccio di tipo bayesiano, l'informazione circa le aspettative personali degli investitori in merito all'andamento futuro degli asset in analisi con

l'informazione derivante dal mercato (rendimenti di equilibrio impliciti ottenuti con la reverse optimization dal CAPM). Dalla fusione delle due fonti informative si ottiene il cosiddetto vettore dei rendimenti attesi di Black & Litterman il cui scostamento da uno degli input dipende dal grado di fiducia con cui sono state espresse le view e dall'entità delle stesse. Il vettore così ottenuto è poi immesso in input al processo di ottimizzazione ed il portafoglio ottimo di Black & Litterman che si ottiene sarà dunque più stabile e meno sensibile alle oscillazioni dei rendimenti in input.

I modelli descritti nei primi capitoli dell'elaborato, sono stati poi applicati al set di dati selezionati per l'analisi, composto da venti imprese del FTSE MIB a maggior capitalizzazione (secondo la classifica al 30/09/20 di Borsa Italiana) nel periodo temporale considerato dal 04/01/2010 al 23/10/2020.

Prima di procedere con l'applicazione dei modelli di Markowitz e di Black & Litterman, è stata verificata l'ipotesi di normalità delle distribuzioni dei rendimenti logaritmici degli asset al fine di poter applicare i modelli descritti e di poter beneficiare di alcune semplificazioni. A tale scopo è stato dapprima visualizzato l'andamento storico dei log-rendimenti di ciascun indice, poi è stata effettuata l'analisi della forza relativa degli indici rispetto al FTSE MIB, sono state calcolate le statistiche utili all'analisi ed infine sono stati tracciati i Q-Q Plot, le distribuzioni di frequenza e le funzioni di densità dei rendimenti di ciascun indice.

In seguito, è stata condotta una verifica di efficienza delle quotazioni e dei log-rendimenti selezionati mediante la stima di una random walk per ciascun indice in esame: a tal fine sono state condotte analisi di regressioni multiple sulle differenze dei log-prezzi fino a quattro lag temporali ed è stata valutata la matrice di correlazione seriale tra i log-rendimenti temporali di ciascun indice.

Infine, come anticipato, sono stati applicati i modelli di Markowitz e di Black & Litterman agli asset in analisi così da confrontare i risultati ottenuti e coglierne le principali differenze: in particolare, a completamento dello studio del modello di B&L, è stata condotta un'analisi di sensitività delle view al fine di valutare l'effetto dell'implementazione delle aspettative degli investitori sul vettore di portafoglio.

2 Il Modello di Markowitz

La moderna teoria di portafoglio ha avuto inizio nel 1952 con la pubblicazione dell'articolo "*Portfolio Selection*" di Harry Markowitz sul "*Journal of Finance*". Esso rappresenta il primo contributo formale di supporto all'investitore che desidera effettuare scelte finanziarie di asset allocation ottimali, finalizzate alla costruzione di un portafoglio efficiente.

Il modello è anche noto come "*ottimizzazione media-varianza*" in quanto, dato uno specifico orizzonte temporale, permette di realizzare la miglior combinazione rischio-rendimento possibile (minimizzazione del rischio misurato dalla varianza e massimizzazione del rendimento atteso).

Le ipotesi fondamentali della teoria di Markowitz sono:

1. Normalità dei rendimenti
2. Investitori avversi al rischio e massimizzazione dell'utilità attesa
3. Selezione dei portafogli in base al criterio media-varianza
4. Orizzonte temporale uniperiodale

L'innovazione della teoria di Markowitz consiste nell'aver introdotto il concetto di correlazione tra titoli in rapporto alla rischiosità del portafoglio stesso: prima di tale modello si era soliti studiare separatamente le caratteristiche dei singoli titoli (in termini di rischio e rendimento), inoltre, un portafoglio si definiva "diversificato" solo se composto da n titoli diversi; di conseguenza il rischio complessivo di portafoglio era dato dalla media ponderata delle rischiosità di ciascun titolo. Markowitz, invece, sottolinea quanto sia necessario considerare la correlazione tra titoli nel processo di costruzione del portafoglio al fine di ottimizzare il binomio media-varianza e ottenere un rendimento atteso maggiore a parità di rischio o una varianza minore a parità di rendimento, rispetto ai portafogli costruiti ignorando gli effetti delle correlazioni tra gli assets. Di conseguenza, un portafoglio si considera ben diversificato se è composto da titoli che non siano caratterizzati da alti livelli di correlazione ($\rho < 1$): solo in tali condizioni si ottiene il cosiddetto "effetto diversificazione" per cui si verifica una riduzione del rischio di portafoglio (o eliminazione nel caso di perfetta correlazione negativa tra i titoli) rispetto alla semplice media ponderata degli scarti quadratici medi dei singoli titoli. Questo accade poiché la varianza del rendimento di un portafoglio composto da molti titoli dipende in misura maggiore dalle loro covarianze che dalle varianze dei singoli titoli. L'uguaglianza tra lo scarto quadratico medio del rendimento di portafoglio e la media ponderata degli scarti quadratici medi dei singoli rendimenti si verifica quando $\rho = 1$.

2.1 Costruzione del Portafoglio

Si consideri un mercato con orizzonte temporale uniperiodale $[t; s]$ con $t = 0$ ed $s = 1$, al di fuori del quale non è consentita alcuna tipologia di transazione e gli effetti delle scelte effettuate in t si producono solo in s .

In t è possibile comprare o vendere sia titoli rischiosi (a_1, \dots, a_n) sia titoli *risk free*. La generica attività rischiosa a_i ha prezzo P_i in t e valore A_i in s (valore noto solo all'epoca finale), con A_i variabile aleatoria. Il valore dei titoli *risk free* all'epoca s è già noto in t , perciò il valore della variabile aleatoria A_i è noto ed è pari a N_i .

Il rendimento (o tasso di rendimento) di un'attività rischiosa a_i è una variabile aleatoria data dalla variazione relativa del valore di mercato nell'orizzonte temporale considerato:

$$R_i = \frac{A_i - P_i}{P_i} = \frac{A_i}{P_i} - 1 \quad (2.1)$$

Nel caso di un titolo *risk free* si ha:

$$R_i = \frac{N_i - P_i}{P_i} = \frac{N_i}{P_i} - 1 = i(t; s) \quad (2.2)$$

con $i(t; s)$ tasso di interesse *risk free* deterministico periodale.

Talvolta si utilizza il *log-rendimento*, definito nel modo seguente:

$$\Gamma_i = \log \frac{A_i}{P_i} = \log(1 + R_i) \quad (2.3)$$

In tal caso, però, si perde la proprietà di linearità; tuttavia è importante osservare che per bassi livelli di rendimento le due definizioni danno risultati simili.

Si assumono le seguenti ipotesi:

- $A_i \geq 0$ e $P_i \geq 0$
- Assenza di arbitraggi¹ rischiosi

¹ L'operazione di arbitraggio ha luogo quando si acquistano o vendono beni o attività finanziarie e contemporaneamente si effettua l'operazione opposta su un mercato o strumento diverso con stesso payout. Il soggetto che pone in essere l'arbitraggio non corre rischi e sfrutta le differenze di prezzo per ottenere profitto [10].

- Possibilità di effettuare vendite allo scoperto² sui titoli rischiosi a_i (assunzione di una posizione corta sui titoli stessi per cui in t si incassa il prezzo P_i ed in s ci si impegna a pagare A_i)
- Attività rischiose rappresentate da titoli azionari quotati in un mercato regolamentato
- Titoli *risk free* rappresentati da zero coupon bond privi di rischio di insolvenza (valore nominale pari a N_i e scadenza in s)
- Rendimenti distribuiti normalmente³
- Investitori razionali

Le definizioni fin qui viste relative a singole attività si applicano e si estendono al caso di un portafoglio π .

Da un punto di vista matematico, un portafoglio è interpretabile come un vettore di n componenti rappresentate dalle quote λ_i acquistate per ciascun titolo (rischioso o non rischioso) a disposizione nel portafoglio stesso (se sono ammesse le vendite allo scoperto si può verificare $\lambda_i \leq 0$).

Come per i titoli, anche per un dato portafoglio π si definisce al tempo t il prezzo P_π e, per la proprietà di linearità del prezzo, si ha:

$$P_\pi = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i \quad (2.4)$$

Il valore di mercato del portafoglio al tempo s , per la proprietà di linearità, è pari a:

$$A_\pi = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \quad (2.5)$$

² Le short sales sono operazioni regolamentate nei mercati reali che consentono di vendere attività finanziarie non possedute e di riacquistarle in seguito ad un prezzo inferiore; il rendimento è positivo se il prezzo dello strumento finanziario scende [11].

³ Se i rendimenti degli n titoli sono distribuiti normalmente qualsiasi portafoglio avrà rendimento distribuito normalmente. Tuttavia si osserva che le code delle distribuzioni empiriche sono più spesse di quelle della Normale (fenomeno della Leptocurtosi), perciò non sempre la distribuzione Normale è la più adatta a rappresentare i rendimenti azionari infatti nella realtà la probabilità di osservare rendimenti distanti dalla media è più alta di quella prevista dalla Normale [12].

Sia ω_i la frazione di capitale investita nell'attività i -esima (quota in forma percentuale) definita nel modo seguente:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i P_i}{P_\pi} \quad (2.6)$$

con $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$.

Se $\omega_i = \frac{1}{n}$ con $i = 1, \dots, n$ il portafoglio si dice equi-ripartito.

Estendendo la definizione (2.1) del rendimento dei singoli titoli al caso di un portafoglio, si ottiene:

$$R_\pi = \frac{A_\pi}{P_\pi} - 1 = \sum_{i=1}^n \omega_i R_i \quad (2.7)$$

Il rendimento di portafoglio è dunque pari alla media ponderata dei rendimenti attesi dei singoli titoli con pesi le quote percentuali dei titoli stessi.

Il rendimento di portafoglio in forma di *log-rendimento* è pari a:

$$\Gamma_\pi = \log \frac{A_\pi}{P_\pi} = \log(1 + R_\pi) \quad (2.8)$$

In tal caso non vale la proprietà di linearità ma si ha: $\Gamma_\pi > \sum_{i=1}^n \omega_i \Gamma_i$.

2.2 Selezione del Portafoglio

La moderna teoria di selezione del portafoglio consiste nello scegliere in t un portafoglio π in modo tale da ottimizzarne il rendimento secondo *l'approccio media-varianza*: avendo a disposizione una serie di titoli rischiosi e non rischiosi $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, si seleziona quel

portafoglio tale per cui sia massimo il valore atteso del rendimento $E(R_{\pi})$ (misura di profitto) e sia minima la varianza del rendimento $var(R_{\pi}) = \sigma_{R_{\pi}}^2$ (misura di rischiosità⁴).

Gli input principali del modello sono il rendimento atteso, la varianza di ogni asset e la covarianza *tra* gli asset: non solo è importante considerare le varianze dei singoli titoli che compongono il portafoglio ma è importante anche studiare le correlazioni tra i titoli e dunque considerare le covarianze. La varianza del rendimento di portafoglio dipende, infatti, in misura maggiore dalle covarianze dei titoli che compongono il portafoglio che dalle singole varianze.

Secondo il modello in analisi, date determinate combinazioni efficienti di media, varianza e covarianza, gli investitori individuano i cosiddetti *portafogli efficienti* selezionando per un dato livello di rischio il portafoglio che massimizza il rendimento atteso e, analogamente, per un certo livello di rendimento atteso, il portafoglio che minimizza il rischio. Un investitore non sceglierà mai un portafoglio o un asset che offra un rendimento minore e allo stesso tempo un rischio maggiore rispetto ad un altro asset o portafoglio.

I decisori effettuano le loro scelte sulla base della *regola della dominanza*: si dice che un portafoglio π_1 domina un portafoglio π_2 ($\pi_1 \succ \pi_2$)⁵ se, a parità di rischio, π_1 ha un rendimento più elevato o se, a parità di rendimento, π_1 è caratterizzato da una rischiosità inferiore. Da tale definizione e dalle considerazioni effettuate in precedenza, ne consegue che un portafoglio si dice *efficiente* se non è dominato da nessun altro portafoglio. L'insieme dei portafogli efficienti determina la cosiddetta *frontiera efficiente*: per ogni possibile livello di rischio, essa individua le combinazioni ottimali di quei titoli che forniscono il maggior rendimento atteso possibile o, allo stesso modo, individua le combinazioni dei titoli che forniscono il minor livello di rischio possibile per ogni dato livello di rendimento. È inoltre necessario considerare che i portafogli efficienti sono ottimi paretiani: non è possibile migliorare il rendimento ed allo stesso tempo non peggiorare la rischiosità.

Secondo *l'approccio media-varianza*, nel processo di scelta del portafoglio ottimo gli investitori seguono due fasi principali:

1. Determinazione della frontiera efficiente
2. Scelta del portafoglio efficiente che massimizza la funzione di utilità del decisore

2.2.1 La Frontiera efficiente e l'effetto diversificazione

Al fine di determinare la frontiera efficiente, è necessario risolvere uno dei seguenti problemi di ottimizzazione vincolata:

⁴ La varianza (o in modo equivalente lo scarto quadratico medio) anche se può non essere considerata una misura del rischio azionario del tutto oggettiva, è però una misura intuitiva in quanto il rischio del mercato azionario è legato alla variabilità dei rendimenti dei titoli intorno al loro valore atteso.

⁵ È importante osservare che due portafogli qualsiasi non sono sempre confrontabili; è il caso in cui π_1 ha sia rendimento che rischio più elevati rispetto a π_2 .

Problema 1

$$\max_{\omega_1, \dots, \omega_n} E(R_{\Pi})$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = \tilde{\sigma}$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

Problema 2

$$\min_{\omega_1, \dots, \omega_n} \sigma_{\Pi}^2$$

$$E(R_{\Pi}) = \tilde{R}$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

Risolvendo tali problemi di ottimizzazione, si determinano le quote ottimali da assegnare a ciascuno degli asset disponibili sul mercato.

Si osserva che i problemi sono statici in quanto le quote nell'orizzonte $[t; s]$ sono mantenute costanti.

Nel caso in cui il portafoglio sia costituito da due titoli rischiosi, il rendimento atteso e la varianza sono pari a:

$$\begin{cases} E(R_{\Pi}) = \omega_1 \cdot E(R_1) + \omega_2 \cdot E(R_2) \\ \sigma_{\Pi}^2 = \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \omega_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \end{cases}$$

Sostituendo il vincolo di bilancio nell'equazione della varianza e risolvendo la condizione del primo ordine rispetto a ω_1 si ottiene:

$$\begin{cases} \omega_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} \\ \omega_2^* = 1 - \omega_1^* = \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} \end{cases}$$

Si osserva che il valore delle quote ottimali dipende dalla correlazione tra i titoli ρ_{12} , per cui si possono esaminare tre casi significativi:

I. Perfetta correlazione negativa ($\rho_{12} = -1$)

Quote ottimali

$$\begin{cases} \omega_1^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \omega_2^* = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \end{cases}$$

Varianza di portafoglio

$$\sigma_{\Pi}^2 = (\omega_1^* \cdot \sigma_1 - \omega_2^* \cdot \sigma_2)^2 = 0$$

II. Perfetta correlazione positiva ($\rho_{12} = 1$)

Quote ottimali

$$\begin{cases} \omega_1^* = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ \omega_2^* = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} \end{cases}$$

Varianza di portafoglio

$$\sigma_{\Pi}^2 = (\omega_1^* \cdot \sigma_1 + \omega_2^* \cdot \sigma_2)^2$$

In questo caso, se sono ammesse vendite allo scoperto, almeno una delle due quote è negativa e dunque la varianza di portafoglio si annulla. Invece, in assenza di vendite allo scoperto, la varianza non si annulla e si allocherà tutta la disponibilità nel titolo meno rischioso.

III. Assenza di correlazione: titoli indipendenti ($\rho_{12} = 0$)

Quote ottimali

$$\begin{cases} \omega_1^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ \omega_2^* = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \end{cases}$$

Varianza di portafoglio

$$\sigma_{\Pi}^2 = \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \omega_2^2 \cdot \sigma_2^2 > 0$$

Come affermato in precedenza, l'effetto diversificazione si verifica ogni qualvolta la correlazione tra i titoli è meno che perfetta ($\rho_{12} < 1$): in tal caso, infatti, lo scarto quadratico medio è inferiore alla media ponderata degli scarti quadratici medi dei singoli titoli.

L'effetto diversificazione è osservabile in Figura 2.1 dove è rappresentato l'insieme dei portafogli efficienti al variare di ρ_{12} nel caso di due titoli: si evince che più bassa è la

correlazione, più accentuata è la curva; dunque l'effetto diversificazione aumenta al diminuire di ρ e la massima accentuazione si ha quando $\rho = -1$ (evento improbabile nella pratica).

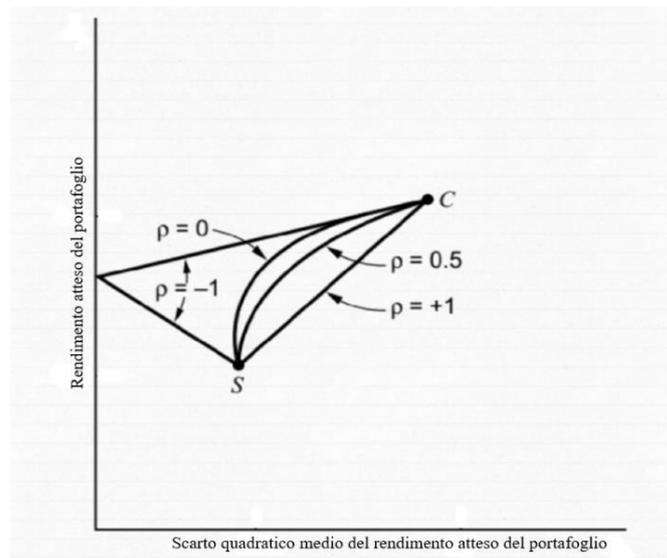


Figura 2.1: Insieme dei portafogli efficienti al variare di ρ (due titoli)

Se il portafoglio è composto da più di due titoli, l'insieme ammissibile dei portafogli è dato dall'area della superficie rappresentata in Figura 2.2 e la frontiera efficiente è rappresentata dal bordo superiore di tale superficie: nessun investitore razionale sceglierebbe un punto sottostante alla frontiera in quanto, a parità di scarto quadratico medio, qualunque punto al di sotto di essa ha rendimento più basso di un punto appartenente alla frontiera.

Considerando che la varianza del rendimento di un portafoglio composto da molti titoli dipende in misura maggiore dalle loro covarianze invece che dalle varianze dei singoli titoli e che all'aumentare del numero di titoli nel portafoglio si riduce la varianza, si può affermare che l'effetto diversificazione è incrementato dall'aggiunta di nuovi titoli nel portafoglio.

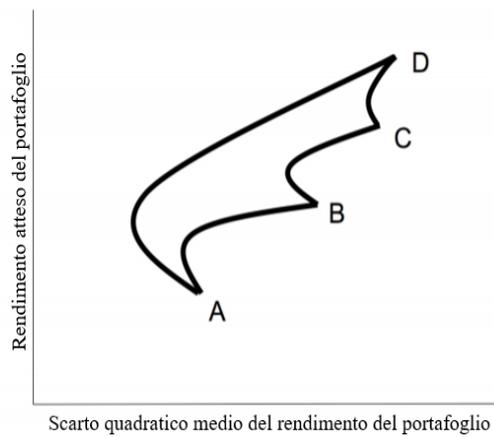


Figura 2.2: Insieme dei portafogli efficienti nel caso di quattro titoli

Sia dato, di seguito, il secondo problema di ottimizzazione statica presentato in precedenza con vincoli di uguaglianza nel caso di due titoli:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\omega_1, \omega_2} \sigma_{\Pi}^2 = \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \omega_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ E(R_{\Pi}) = \omega_1 \cdot \mu_1 + \omega_2 \cdot \mu_2 = \alpha \\ \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{array} \right.$$

Ai fini della sua risoluzione si applica il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, per cui si definisce la seguente funzione lagrangiana:

$$L = \sigma_{\Pi}^2 - \lambda_1 \cdot (\omega_1 + \omega_2 - 1) - \lambda_2 \cdot (E(R_{\Pi}) - \alpha)$$

con λ_1 e λ_2 i moltiplicatori.

Applicando le condizioni necessarie del primo ordine e procedendo per sostituzione, si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1^* = \frac{\alpha - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \\ \omega_2^* = \frac{\mu_1 - \alpha}{\mu_1 - \mu_2} \end{array} \right.$$

Determinando la varianza del portafoglio σ_{Π}^2 , si evince che il rischio è funzione del rendimento atteso α :

$$\sigma_{\Pi}^2 \cdot (\mu_1 - \mu_2)^2 = (\alpha - \mu_2)^2 \cdot \sigma_1^2 + (\mu_1 - \alpha)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2(\alpha - \mu_2) \cdot (\mu_1 - \alpha) \cdot \sigma_{12}$$

Da un punto di vista analitico si osserva che nel piano varianza-rendimento la frontiera efficiente è rappresentata da una parabola, invece, nel piano scarto quadratico-rendimento atteso, è rappresentata da un'iperbole.

Il vertice della curva della frontiera rappresenta il portafoglio con rischio minimo (varianza minima) ed il tratto di curva sottostante il vertice è il ramo non efficiente della frontiera (tali portafogli sono infatti dominati da quelli giacenti sul ramo superiore). I portafogli compresi tra i due rami, invece, sono costituiti da quote positive e non presentano vendite allo scoperto.

Se nei problemi di ottimizzazione in esame le vendite allo scoperto non sono ammesse, è necessario considerare l'ulteriore vincolo di positività delle quote $\omega_i \geq 0$. In tal caso però, la frontiera efficiente non è una conica e dunque non possiede una forma analitica nota, perciò sarà necessario risolvere il problema con metodi numerici.

In tali condizioni, si osserva che la frontiera è dominata da quella ottenuta nel caso precedente e, a parità di rischio, i portafogli efficienti nel caso di assenza di vendite allo scoperto hanno rendimento più basso rispetto a quelli ottenuti in presenza di vendite allo scoperto; ciò accade perché, in tal caso, il numero di portafogli che è possibile comporre è inferiore.

Talvolta è possibile comporre un portafoglio di attività rischiose con un'attività priva di rischio. Supponiamo che il rendimento privo di rischio r_f sia minore del rendimento del portafoglio a varianza minima: il titolo risk free è rappresentato sul piano rischio-rendimento da un punto $P(0; r_f)$ sull'asse delle ordinate. Come mostrato in Figura 2.3, la frontiera efficiente si linearizza e gli investitori che effettuano questo tipo di combinazione si posizionano sulla semiretta uscente da P.

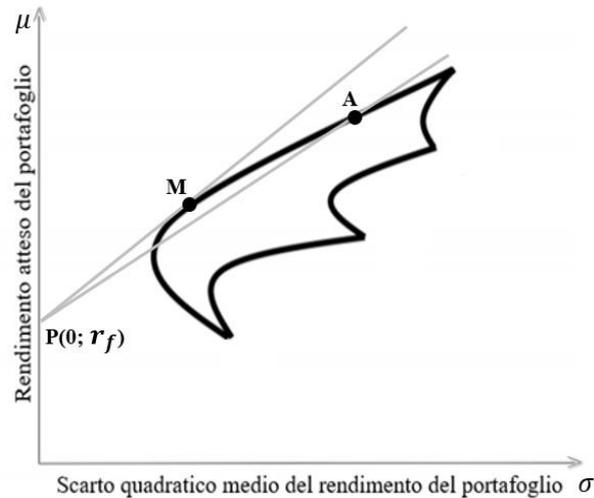


Figura 2.3

Non tutti i portafogli sulla semiretta sono efficienti: confrontando le semirette \overline{PA} e \overline{PM} , si osserva che nessun punto appartenente a \overline{PA} è ottimale in quanto, a parità di scarto quadratico medio, è possibile individuare un punto su \overline{PM} avente un rendimento atteso più elevato; la semiretta \overline{PM} tangente alla frontiera efficiente dei titoli rischiosi è dunque la nuova frontiera efficiente di tutte le attività rischiose e non rischiose.

I punti compresi tra P ed M sono portafogli formati dalla combinazione di somme investite nell'attività priva di rischio e somme investite nel portafoglio di titoli rischiosi M (portafogli ottenuti senza vendite allo scoperto con quote comprese tra zero e uno). I punti oltre M, si ottengono indebitandosi oggi al tasso privo di rischio per investire in M oltre l'effettiva disponibilità (è un esempio di leva finanziaria con presenza di vendite allo scoperto). Un investitore, dunque, decide dove posizionarsi in base alla sua propensione al rischio: un individuo mediamente avverso al rischio potrebbe scegliere un punto compreso tra P ed M e un individuo più propenso al rischio potrebbe scegliere di posizionarsi più vicino ad M o oltre M.

Il punto di tangenza M è il portafoglio ottimo per l'investitore: data una certa propensione al rischio dell'investitore, il "miglior" portafoglio di attività rischiose che si possa detenere è sempre rappresentato dal punto di tangenza M.

In caso di forte avversione al rischio, l'investitore combinerebbe i titoli in M con l'attività priva di rischio, invece, in caso di scarsa avversione al rischio, prenderebbe a prestito l'attività priva di rischio per accrescere l'investimento in M.

Date le coordinate del portafoglio $M(\sigma_M; \mu_M)$, l'equazione della semiretta \overline{PM} è:

$$\mu = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} \cdot \sigma \quad (2.9)$$

2.2.2 La selezione del portafoglio efficiente

Conclusa la fase “obiettiva” di individuazione della frontiera efficiente, si procede alla fase “soggettiva” di scelta del portafoglio ottimale tra tutti i portafogli della frontiera efficiente. Tale scelta dipende dall’avversione al rischio del decisore, perciò si seleziona quel portafoglio efficiente che massimizza la funzione di utilità attesa dell’investitore stesso.

Supponendo che la funzione di utilità del decisore in t sia $u = u(x)$, tra tutti i possibili portafogli efficienti Π si seleziona quello che massimizza l’utilità attesa alla fine del periodo:

$$\max_{\Pi} E[u(A_{\Pi})]$$

Dal momento che i portafogli efficienti si individuano esclusivamente attraverso la media e la varianza (*approccio media-varianza*), affinché l’approccio media-varianza sia compatibile con la teoria dell’utilità attesa è necessario che anche la funzione di utilità sia esprimibile esclusivamente attraverso tali fattori.

Si dimostra che ciò avviene nel caso di una funzione di utilità quadratica e/o nel caso di rendimenti azionari distribuiti normalmente. Sotto tali condizioni si può esprimere $U = U(\mu, \sigma)$ in funzione di media e varianza (in particolare, l’utilità attesa risulta essere crescente rispetto a μ e decrescente rispetto a σ).

Dato un certo livello di utilità \bar{u} , si definiscono le curve di indifferenza dell’investitore con l’equazione implicita:

$$U(\mu, \sigma) = \bar{u}$$

I portafogli appartenenti ad una stessa curva di indifferenza sono equivalenti per il decisore dal punto di vista della sua avversione al rischio e corrispondono a quei portafogli che massimizzano la sua utilità \bar{u} .

Si osserva che le curve di indifferenza poste più in alto corrispondono a valori più alti di \bar{u} : all’aumentare dell’avversione al rischio del decisore, aumenta la convessità della curva. Come mostra la Figura 2.4, il portafoglio ottimo per l’investitore è dunque rappresentato dal punto di tangenza tra la frontiera efficiente e la curva di indifferenza.

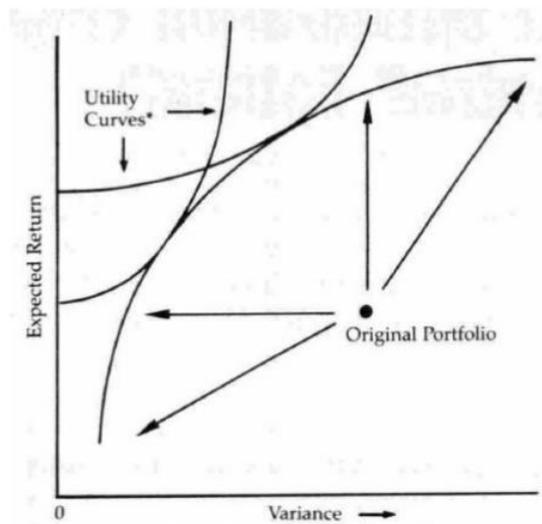


Figura 2.4: Tangenza tra la curva di indifferenza e la frontiera efficiente

2.3 Punti di debolezza del modello

Il modello di selezione del portafoglio di Markowitz presenta alcuni punti di debolezza da cui, nella pratica, derivano diverse difficoltà di applicazione che ne hanno di fatto limitato l'utilizzo.

Tra i principali limiti è innanzitutto necessario considerare la quantità di dati in input richiesti dal modello: tale ammontare rappresenta un "ostacolo" per quanto riguarda il numero di parametri da stimare (rendimenti attesi, varianze e covarianze) e cresce notevolmente con il numero di titoli considerati nel portafoglio.

Dato un portafoglio di n titoli, le coppie di correlazioni sono pari a $\frac{1}{2}n \cdot (n + 1)$ ed il numero di rendimenti attesi è pari a n . L'ammontare totale dei parametri è dunque:

$$\frac{1}{2}n \cdot (n + 1) + n = \frac{1}{2}n \cdot (n + 3)$$

Si può tentare di risolvere tale problema stimando le variabili mediante i dati storici e procedendo al calcolo della loro media. Tuttavia, in questo modo, si possono ottenere stime inadatte sia a rappresentare la situazione attuale che a prevedere comportamenti futuri. Gli output basati sui dati storici, infatti, non considerando il presente e le eventuali aspettative future.

Un altro importante limite del modello di Markowitz è dato dalla massimizzazione dell'errore di stima del portafoglio: tale limite deriva da imprecisioni nella stima degli input necessari al processo di ottimizzazione (errori non evitabili dato che il valore reale degli input è possibile osservarlo solo ex-post). Ciò comporta dunque una distorsione delle caratteristiche del portafoglio ottimo la cui composizione risulta quindi instabile: piccole variazioni dei valori in input possono portare a grandi variazioni nella composizione del portafoglio ottimo.

Si osserva che i portafogli ottimi sono particolarmente sensibili ai rendimenti attesi (il processo di ottimizzazione tende a concentrare la soluzione sui titoli con rendimenti alti). È possibile ridurre l'errore di stima adottando processi di ottimizzazione vincolata (per esempio, vincoli di peso o non ammissibilità di posizioni corte).

È importante considerare che il modello non solo non distingue tra i diversi livelli di confidenza dell'investitore associati alle variabili in input ma permette di esprimere tali views solo in modo assoluto e non relativo.

Non è inoltre possibile confrontare le scelte finanziarie intraprese da soggetti aventi propensioni al rischio differenti: come già visto, il portafoglio ottimo per l'investitore è rappresentato dal punto di tangenza tra la frontiera efficiente e la curva di utilità dell'investitore stesso ed in quanto tale è un portafoglio "soggettivo" e non può essere confrontato con le scelte di un individuo avente una diversa curva di utilità e dunque una diversa propensione al rischio.

Date le numerose difficoltà che l'utilizzo del modello di Markowitz pone nella pratica, gli analisti hanno sviluppato nuovi modelli con l'intento di andare a colmare i punti di fragilità emersi nel modello di Markowitz, al fine di soddisfare al meglio le esigenze degli investitori.

3 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Il modello CAPM, sviluppato da William Sharpe nel 1964, rappresenta un'evoluzione del modello di selezione del portafoglio di Markowitz in quanto si propone di eliminare alcuni dei limiti di quest'ultimo. A tal proposito, introduce le seguenti ipotesi:

- Non ci sono vincoli nel prendere o dare a prestito al tasso risk free
- Assenza di imposte, di costi di transazione e di altre imperfezioni del mercato
- Gli investitori hanno aspettative omogenee sui valori attesi, sulle varianze e sulle covarianze dei rendimenti dei titoli

L'ipotesi più importante del modello è quella riguardante le aspettative omogenee: sotto tale condizione, tutti gli investitori hanno la stessa frontiera efficiente di attività rischiose e, poiché il tasso privo di rischio sarebbe lo stesso per tutti, tutti deterrebbero esattamente il portafoglio di titoli rischiosi $M(\sigma_M; \mu_M)$ definito *Portafoglio di Mercato*. Sotto tali ipotesi è dunque eliminata la componente soggettiva che influenzava notevolmente la scelta del portafoglio ottimo nel modello di Markowitz: qualunque sia la propensione al rischio dell'investitore, il portafoglio di attività rischiose da lui detenuto è sempre rappresentato dal punto di tangenza M e ciò che può variare sono le quote relative a ciascun titolo incluso. Come si è già osservato in Figura 2.3, la frontiera efficiente qui denominata *Capital Market Line (CML)*, è lineare ed è rappresentata dall'espressione (2.9) dove $\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$ è il prezzo per il rischio o *indice di Sharpe* e $(\mu_M - r_f)$ è il premio per il rischio.

È importante sottolineare che la componente di rischio remunerata dal mercato è solo la quota sistematica, ossia quella quota di rischio implicita nell'investimento di una certa attività finanziaria che non è eliminabile attraverso la diversificazione. Come mostrato in Figura 3.1, l'unica componente di rischio eliminabile è quella diversificabile per cui è preferibile investire in un portafoglio composto da un ampio numero di titoli⁶. Si osserva, dunque, che il rischio totale diminuisce al crescere del numero di titoli.

⁶ La volatilità del rendimento di un dato investimento dipende da una componente legata alle caratteristiche specifiche dell'emittente o del settore, eliminabile con la diversificazione (Rischio specifico o diversificabile) e da una seconda componente legata alle oscillazioni dell'economia e dunque non eliminabile con precisi meccanismi di diversificazione (Rischio sistematico).

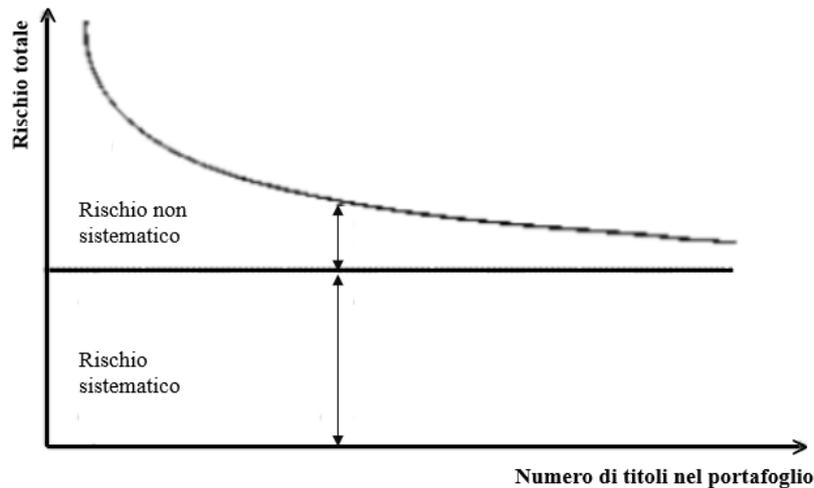


Figura 3.1: Diversificazione e rischio per un portafoglio di N titoli

I teoremi fondamentali del modello CAPM sono i seguenti:

1. Ogni portafoglio giacente sulla CML è perfettamente correlato con il portafoglio di mercato
2. Dato un portafoglio qualsiasi con rendimento μ_{π} e rischio σ_{π} , vale la seguente relazione:

$$\mu_{\pi} = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2} \cdot cov(R_{\pi}, R_M) \quad (3.1)$$

Dato il coefficiente β ⁷ che misura la sensibilità del rendimento di un titolo alle variazioni che intervengono nel portafoglio di mercato (in un portafoglio ampiamente diversificato, β è una misura del rischio sistematico di i):

$$\beta_i = \frac{cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} \quad (3.2)$$

⁷ Dal momento che il rendimento atteso di un titolo è pari alla somma tra il tasso risk-free ed il premio per il rischio (non diversificabile) e dato che il premio dipende soprattutto da β , maggiore è il coefficiente β , maggiore è il rendimento atteso del titolo i . In tal caso il titolo possiede un maggior grado di rischio non diversificabile (rischio remunerato) [15].

L'equazione (3.1) diventa:

$$\mu_{\pi} = r_f + (\mu_M - r_f) \cdot \beta_{\pi} \quad (3.3)$$

L'espressione (3.3) è la relazione fondamentale del modello e rappresenta il legame tra il rendimento atteso e *beta*. Tale espressione è rappresentata graficamente nella Figura 3.2 dalla *Security Market Line* (SML), da cui si evince che il rendimento atteso di un titolo che ha $\beta = 0$ è pari al tasso privo di rischio e che il rendimento atteso di un titolo che ha $\beta = 1$ è pari al rendimento atteso di mercato.

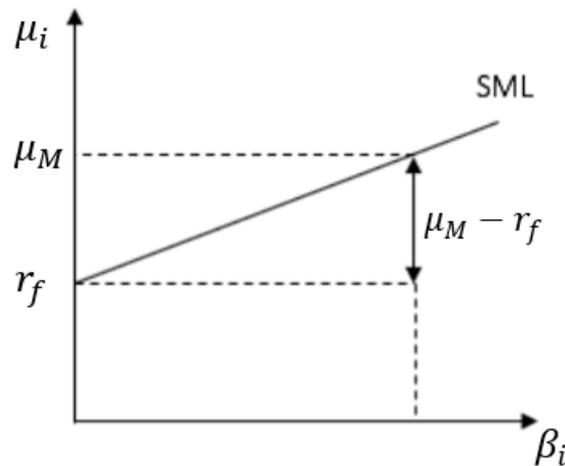


Figura 3.2: Relazione tra il rendimento atteso ed il *beta* di un singolo titolo

I titoli appartenenti alla retta sono efficienti: qualora un titolo si trovasse al di sopra della retta (prezzo troppo basso) o sotto la retta (prezzo troppo alto), si avrebbe un automatico aggiustamento dei prezzi che porterebbe ad aumentare o a diminuire il rendimento dei titoli fino a farli ritornare sulla SML e quindi ad essere nuovamente efficienti (mercato dei capitali efficiente).

Dal momento che vale l'ipotesi per cui gli investitori sono avversi al rischio, è importante osservare che se il premio per il rischio ($\mu_M - r_f$) fosse pari a zero gli individui non investirebbero mai in titoli rischiosi. Dunque, il rendimento atteso del portafoglio di mercato deve essere superiore al rendimento del titolo non rischioso altrimenti questo dominerebbe tutti i titoli rischiosi (il premio per il rischio che l'individuo ottiene quando investe in titoli rischiosi deve essere positivo).

In base al valore assunto da *beta*, è possibile classificare i titoli nel modo seguente:

- Se $0 < \beta_i < 1$: titoli difensivi (realizzano rendimenti inferiori in valore assoluto rispetto a quelli di mercato e reagiscono ai movimenti del mercato attenuandoli)
- Se $\beta_i > 1$: titoli aggressivi (realizzano rendimenti superiori in valore assoluto rispetto a quelli di mercato e reagiscono ai movimenti del mercato amplificandoli)
- Se $\beta_i = 1$: i titoli seguono il mercato (reagiscono ai movimenti del mercato eguagliandoli)

In conclusione, data l'ipotesi di equilibrio tra domanda ed offerta, il CAPM individua dunque una relazione tra il rendimento atteso di un titolo (o di un portafoglio) ed il premio per il rischio: mostra in che modo il rendimento atteso di una attività sia legato al suo *beta*. È un modello efficace ai fini di investimento oltre che un progresso importante compiuto dall'economia finanziaria. Tuttavia, è anch'esso soggetto a diverse critiche: il modello è un costrutto che necessita di essere testato empiricamente ma prima di procedere con i test empirici, è importante capire se è effettivamente possibile sottoporre il CAPM a verifica. A tal proposito, un'importante critica è stata mossa da Richard Roll sul *Journal of Financial Economics*, il quale ha affermato che il CAPM non può essere oggetto di verifica empirica. Dal momento che è impossibile costruire un portafoglio che includa tutte le azioni esistenti, qualunque test si effettui con un indice rappresentativo del mercato, questo si riferirà a quel determinato portafoglio e non al vero portafoglio di mercato. Detto ciò, dunque, il CAPM non può essere testato empiricamente in quanto il portafoglio di mercato sottostante non è osservabile. Inoltre, il *beta* di un titolo non può essere direttamente osservato ma deve essere stimato mediante una determinata metodologia utilizzabile in un test empirico.

4 Il modello di Black e Litterman

Il modello di Black e Litterman sviluppato negli anni novanta presso la Goldman Sachs da Fischer Black e Robert Litterman, si propone di sviluppare e risolvere alcuni punti critici caratterizzanti il modello di Markowitz. Il modello consente di costruire portafogli efficienti secondo il consueto *approccio media-varianza*, caratterizzati però da una maggiore stabilità rispetto ai portafogli costruiti secondo i modelli precedenti.

Il punto di partenza del modello è dato dalla combinazione delle informazioni contenute nei prezzi e nei rendimenti di equilibrio con le informazioni riguardanti le *views* personali degli investitori circa i rendimenti dei mercati; il modello, infatti, permette agli asset manager di formulare aspettative in merito agli asset su cui sono in grado di esprimersi, lasciando la composizione degli altri portafogli all'equilibrio di mercato. Se l'investitore non ha opinioni sui rendimenti, si utilizzano i valori benchmark di mercato, altrimenti, i valori di equilibrio sono calibrati sulla base delle *views* espresse e sul grado di fiducia ad esse connesso.

Gli steps principali del modello sono:

- “Approccio di equilibrio”: si fissa un portafoglio di riferimento neutrale (benchmark di mercato i cui pesi sono definiti dalle capitalizzazioni di mercato) intorno al quale sono ancorati i portafogli risultanti.
- Aspettative soggettive degli operatori: gli investitori possono esprimere le proprie *views* in termini di rendimenti attesi dai mercati, specificando il livello di confidenza attribuito a ciascuna aspettativa.
- Mediante il teorema di Bayes, si combinano i rendimenti di equilibrio con le *views* degli investitori e si ottengono i cosiddetti “rendimenti attesi di Black e Litterman”, i quali sono poi implementati come input nel classico processo di ottimizzazione media-varianza. Il portafoglio ottimo risultante da tale processo, nonostante sia legato alle aspettative dell'investitore, è equilibrato e dunque più stabile rispetto all'output ottenibile dal modello di Markowitz.
- Asset Allocation Tattica: qualora sia necessario aggiornare i dati perché l'investitore vuole esprimere nuove opinioni, si aggiungono le nuove *views* al vettore dei rendimenti attesi ottenuto precedentemente e tale set di dati diventa il nuovo punto di partenza del modello. Dato l'ammontare crescente dei dati immessi nel processo, con il passare del tempo si ottengono così rendimenti sempre più stabili.

I pesi del portafoglio risultante da tale procedura si discostano dai rispettivi valori di equilibrio solo per gli asset su cui l'investitore ha espresso le proprie aspettative soggettive. La misura dello scostamento dipende, inoltre, dal valore del parametro *weight-on-views* τ , il quale, come si vedrà in seguito, influisce sul peso delle *views* rispetto al portafoglio di equilibrio. Di conseguenza, gli asset su cui l'investitore non esprime alcuna opinione, avranno uno scostamento nullo dai valori di equilibrio.

4.1 L'approccio di equilibrio

L'ottimizzazione proposta da Markowitz, oltre a presentare problemi di applicazione pratica, è eccessivamente sensibile agli input stimati ed alle aspettative di rendimento formulate dagli investitori. Per tali motivi è nata la necessità di considerare un punto di riferimento "neutrale" per la costruzione del portafoglio ottimo, intorno al quale strutturare gli input del processo di ottimizzazione.

L'equilibrio ideale di mercato è rappresentato da quel portafoglio che un investitore detiene nel caso in cui non abbia alcuna view sul futuro andamento degli assets. Dunque, Black e Litterman individuano nel portafoglio di mercato quel portafoglio di equilibrio detenuto da tutti i soggetti in condizioni ideali di mercato per cui la domanda e l'offerta si eguagliano ed in cui tutti i soggetti hanno a disposizione le stesse informazioni (ha assenza di views e validità del modello CAPM). È bene precisare che non si presuppone che il mercato sia in equilibrio ma si considera la presenza di "forze naturali" che tendono ad eliminare gli eventuali scostamenti dall'equilibrio.

I rendimenti di equilibrio non sono osservabili ma devono essere stimati mediante i rendimenti medi storici, mediante il modello del CAPM o con la *reverse optimization*. Utilizzando il primo metodo si calcola una stima dei rendimenti a partire dalla media dei valori passati per un certo periodo di tempo attribuendo pesi più o meno alti ai valori più recenti: come già detto in precedenza, questo non è il metodo più adatto per prevedere i comportamenti futuri dei rendimenti. È dunque preferibile utilizzare il CAPM o la *reverse optimization*.

Al fine di sfruttare i meccanismi di equilibrio alla base dei mercati finanziari, i quali possiedono un grado di informazione superiore rispetto a quello dei singoli operatori, originariamente Black e Litterman hanno considerato il CAPM il modello economico ideale per determinare i rendimenti in eccesso di equilibrio da inserire successivamente nel processo di ottimizzazione media-varianza.

Un metodo alternativo per la stima dei rendimenti attesi è costituito dalla *reverse optimization* per cui si definisce *ex ante* un portafoglio di equilibrio e si determinano i rendimenti attesi futuri; per costruzione, inserendo tali rendimenti nel processo di ottimizzazione tradizionale, si ottiene il portafoglio di riferimento stesso. Tale tecnica parte dalla composizione ottimale di portafoglio e mira ad ottenere i rendimenti attesi⁸ mediante il processo di ottimizzazione (meccanismo inverso della massimizzazione della funzione di utilità per cui l'incognita sono i rendimenti attesi ed in input si inseriscono i pesi del portafoglio di equilibrio).

⁸ Si utilizzano i rendimenti in eccesso attesi, in grado di restituire esattamente i pesi del portafoglio di riferimento. I rendimenti in eccesso attesi sono i premi per il rischio dei vari asset (rendimento puro meno il rendimento del titolo *risk free*).

Nell'ottica originaria di sfruttare i meccanismi di equilibrio dei mercati finanziari, appare più corretto scegliere come portafoglio di equilibrio esattamente il benchmark di settore composto da asset con quantità proporzionali alla capitalizzazione di mercato.

L'approccio di ottimizzazione inversa è dunque strettamente connesso al modello del CAPM il quale identifica nel portafoglio di mercato quello di equilibrio. Se l'investitore sceglie come benchmark di riferimento il portafoglio di mercato e se il mercato è in equilibrio, le quote di portafoglio che si ottengono sono esattamente i pesi ottimi.

Ai fini del calcolo dei rendimenti attesi teorici di equilibrio, si assume che essi siano distribuiti secondo una normale multivariata con valore atteso Θ e matrice di varianza-covarianza proporzionale a quella delle covarianze storiche Σ secondo uno *shrinkage factor* τ^9 :

$$E(R) \sim N(\Theta, \tau \cdot \Sigma) \quad (4.1)$$

Σ : matrice di varianza-covarianza dei rendimenti storici (definita positiva)

Θ : vettore dei rendimenti attesi di equilibrio

Dal momento che l'incertezza associata alla media (rendimenti attesi) è inferiore all'incertezza dei singoli rendimenti degli asset, si considera τ uno scalare con valore molto prossimo allo zero.

I rendimenti di equilibrio così ottenuti a partire dal benchmark di mercato, dovranno poi essere "calibrati" secondo le aspettative soggettive espresse dai singoli investitori circa i rendimenti futuri: qualora l'investitore non disponga di alcuna *view*, può acquistare il portafoglio di equilibrio composto secondo la capitalizzazione di mercato, altrimenti, è necessario combinare in modo coerente le aspettative soggettive con l'equilibrio di mercato.

4.2 Le views degli investitori

L'idea alla base del modello è quella di combinare il portafoglio di mercato con le aspettative degli investitori specifiche per ogni asset in termini di sovra/sotto performance. È dunque possibile creare un portafoglio ottimo a partire dal portafoglio di mercato, effettuando su di esso opportune modifiche in base alle aspettative ed al grado di fiducia riposto in esse da parte dell'investitore.

⁹ In termini bayesiani, misura l'incertezza relativa alla stima dei rendimenti di equilibrio attesi. Come visto in precedenza rappresenta, inoltre, il peso delle views degli operatori rispetto all'equilibrio di mercato.

In input al modello, dunque, si inseriscono sia le aspettative che l'investitore ha circa il futuro andamento degli asset sia una matrice, espressione del grado di fiducia riposto nelle views stesse; di conseguenza, il peso delle *views* aumenta al crescere del livello di confidenza.

Una delle novità più importanti introdotte dal modello è data dalla possibilità di esprimere le views sia in termini assoluti (unico tipo di view che un investitore può inserire nel modello di Markowitz) sia in termini relativi e ad ognuna di esse è possibile assegnare un livello di confidenza compreso tra 0% e 100% dipendente dal grado di fiducia che l'investitore ripone nelle singole aspettative. Il livello di confidenza ha così impatto sull'influenza che le views hanno sulla composizione del portafoglio: tanto più alta è la fiducia dell'investitore nelle proprie opinioni, tanto maggiore è la deviazione dal portafoglio di equilibrio, viceversa, se il livello di confidenza dell'aspettativa è basso, la view condiziona in maniera minima le quote del portafoglio e si ha dunque una maggior tendenza del portafoglio finale verso il portafoglio di mercato.

L'ampiezza degli scostamenti dai valori di equilibrio dipende dunque da tre elementi: il livello di confidenza che si ripone nell'aspettativa, la view stessa ed il parametro *weight-on-views* τ . Un'aspettativa accresce notevolmente l'ampiezza dello scostamento dal portafoglio di equilibrio qualora la fiducia riposta in essa sia elevata oppure se il valore stesso della view si scosta molto dal valore "neutrale"; per quanto riguarda il parametro τ , esso influenza il peso relativo da assegnare alle views rispetto al portafoglio neutrale ($\tau \rightarrow 0$).

4.3 L'approccio bayesiano

Dopo aver elaborato e selezionato le due fonti informative principali del modello (l'informazione empirica derivante dal mercato e quella soggettiva a disposizione dell'asset manager), si procede alla loro "fusione" mediante l'utilizzo di un approccio di tipo bayesiano al fine di determinare una stima del vettore dei rendimenti attesi (distribuzione a posteriori). Tale approccio permette, dunque, di combinare le preferenze espresse dall'investitore (distribuzione a priori) con i rendimenti di equilibrio (informazione proveniente da un nuovo campione di dati); i valori stimati sono poi aggiornati periodicamente aggiungendo ai dati osservati in precedenza quelli più recenti.

Alla base di tale approccio si ha il Teorema di Bayes per cui la probabilità condizionata che accada l'evento A dato B è data dal rapporto tra la probabilità condizionata che accada l'evento B dato A per la probabilità che si verifichi A e la probabilità che si verifichi B:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (4.2)$$

Dove:

A e B sono due eventi possibili: A rappresenta i rendimenti attesi dell'asset manager (view soggettive) e B i rendimenti attesi neutrali (di equilibrio)

$P(B|A)$ è la funzione di densità di probabilità dei rendimenti di equilibrio condizionata dai rendimenti attesi

$P(A)$ è la funzione di densità di probabilità dei rendimenti attesi dell'investitore (distribuzione a priori)

$P(B)$ è la funzione di densità di probabilità dei rendimenti di equilibrio (costante di normalizzazione)

$P(A|B)$ è la funzione di densità di probabilità dei rendimenti attesi condizionata ai rendimenti di equilibrio (distribuzione a posteriori)

Come mostrato qualitativamente in Figura 4.1, il teorema di Bayes si propone dunque di fornire un meccanismo formale in grado di sintetizzare le view soggettive con i rendimenti neutrali: le views sono dunque le informazioni a priori da combinare con i rendimenti d'equilibrio al fine di determinare i rendimenti attesi a posteriori di Black e Litterman.

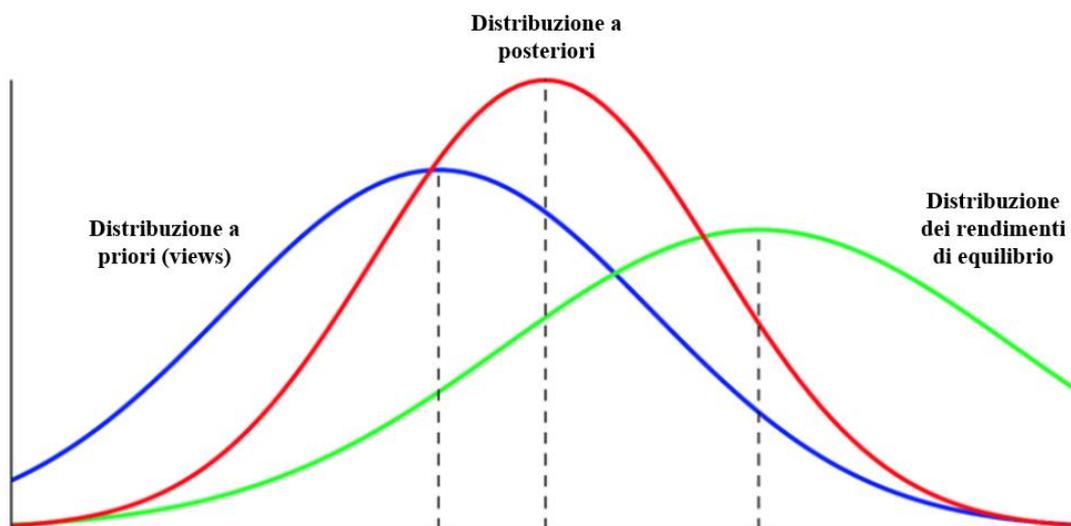


Figura 4.1

Dal momento che si assume che i rendimenti di equilibrio degli asset siano distribuiti normalmente secondo la (4.1), anche la distribuzione a priori $P(A)$ e la distribuzione

condizionata $P(B|A)$ saranno distribuite secondo una normale e, di conseguenza, lo sarà anche la distribuzione a posteriori $P(A|B)$.

Indicando con $E(R) = E(R_{t+1}|I_t)$ il vettore dei rendimenti attesi dell'investitore per l'istante $t+1$ condizionati dal set informativo disponibile in t e con Θ il vettore dei rendimenti neutrali, il teorema di Bayes applicato al modello di Black e Litterman diventa:

$$P(E(R)|\Theta) = \frac{P(\Theta|E(R)) \cdot P(E(R))}{P(\Theta)} \quad (4.3)$$

Dove:

$P(\Theta|E(R))$: probabilità dei rendimenti di equilibrio condizionata alle previsioni dell'investitore

$P(E(R))$: probabilità dei rendimenti attesi (esprime le views)

$P(\Theta)$: probabilità dei rendimenti di equilibrio

$P(E(R)|\Theta)$: probabilità delle previsioni dell'investitore condizionata ai rendimenti di equilibrio

Ipotizzando che l'investitore abbia k diverse opinioni su un totale di n assets, ossia che la probabilità $P(E(R)|\Theta)$ assuma la forma di k vincoli lineari sul vettore di n rendimenti attesi $E(R)$ esprimibili con una matrice P ($k \times n$), si ha che¹⁰:

$$P \cdot E(R) = q + \varepsilon \quad (4.4)$$

Dove:

P è una matrice avente tante righe quante sono le views espresse ($k=0$ se l'asset corrispondente non è soggetto a opinione) e tante colonne n quanti sono gli asset in portafoglio in modo che

¹⁰ Deve sempre valere $k \leq n$, ossia il numero delle views espresse sui mercati deve essere sempre minore o pari al numero degli asset stessi.

ogni elemento della matrice rappresenta il “peso” di un determinato asset in una specifica view¹¹:

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k,1} & \cdots & p_{k,n} \end{pmatrix}$$

q è un vettore ($k \times 1$) che incorpora le view dell’investitore in termini di sopra/sotto performance prevista:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix}$$

ε è un vettore ($k \times 1$) che incorpora i termini d’errore relativi alle views ed in quanto tale esprime l’incertezza dell’operatore rispetto alle proprie views.

Vale $\varepsilon \sim N(0, \Psi)$, con Ψ matrice ($k \times k$) di varianza-covarianza rappresentante l’incertezza delle views:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Psi_k \end{pmatrix}$$

Dal momento che le view formulate dall’asset manager sono indipendenti tra loro, Ψ è una matrice diagonale riportante le varianze dei singoli termini d’errore Ψ_i e i valori sulla diagonale sono pari a zero se l’investitore è assolutamente certo della sua previsione. Man mano che gli elementi sulla diagonale della matrice si avvicinano a zero, le aspettative sono formulate con maggior certezza.

Si osserva che la matrice Ψ incide sulla distribuzione di probabilità dei rendimenti attesi e si deduce che:

$$P \cdot E(R) \sim N(q, \Psi)$$

¹¹ Le righe della matrice definiscono gli asset nel portafoglio interessati dalle views; le colonne definiscono gli asset totali presenti in portafoglio.

La metodologia di calcolo di tale matrice è dunque fondamentale in quanto determina l'influenza delle view sui valori di equilibrio.

Considerando la (4.1), si ha che la funzione di densità di probabilità dei rendimenti di equilibrio condizionata dalle aspettative dell'investitore si distribuisce secondo una Normale nel modo seguente:

$$P(\Theta | E(R)) \sim N(E(R), \tau \cdot \Sigma)$$

Da tale espressione si deduce che i rendimenti di equilibrio condizionati dalle previsioni dell'investitore, sono uguali in media alle previsioni dell'investitore stesse.

Date le distribuzioni precedenti, si deduce che anche la funzione di densità di probabilità dei rendimenti attesi condizionata dai rendimenti di equilibrio $P(E(R) | \Theta)$, si distribuisce secondo una normale multivariata con media:

$$[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1} [(\tau \cdot \Sigma)^{-1} \Theta + P^T \Psi^{-1} q] \quad (4.5)$$

e varianza:

$$[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \Psi^{-1} P]^{-1} \quad (4.6)$$

Il valore atteso della distribuzione dei rendimenti attesi dall'investitore condizionata dai valori di equilibrio, è il risultato fondamentale del modello di Black e Litterman. Esso deriva dall'integrazione delle view specifiche e personali con i valori di equilibrio (operazione detta *blending*). L'entità dello scostamento (o della vicinanza) del vettore dei rendimenti attesi ad uno degli input (views e rendimenti di equilibrio), dipende dalla varianza del portafoglio di mercato e dal livello di confidenza che l'operatore ripone nelle proprie previsioni.

4.3.1 Caso particolare: aspettative certe

Se l'operatore ha un alto livello di fiducia nelle proprie aspettative, il nuovo portafoglio rifletterà maggiormente le sue views che avranno, dunque, maggior peso; viceversa, più basso è il livello di confidenza, maggiore sarà la fiducia nel portafoglio di mercato.

Sebbene questa ipotesi non abbia rilevanza pratica, se l'investitore fosse certo delle proprie aspettative, queste sarebbero espresse in modo esatto (view deterministiche), la loro varianza sarebbe nulla e si avrebbe un classico problema di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \min_{E(R)} (E(R) - \Theta)^T (\tau \cdot \Sigma)^{-1} (E(R) - \Theta) \\ P \cdot E(R) = q \end{cases}$$

Risolvendo il problema con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ottiene il valore ottimo dei rendimenti attesi come segue:

$$E(R) = \Theta + \tau \cdot \Sigma P^T (P(\tau \cdot \Sigma)P^T)^{-1} (q - P\Theta)$$

I rendimenti attesi ottimi così ottenuti, rappresentano il limite estremo verso cui tendono i rendimenti attesi (4.5) all'aumentare del livello di fiducia riposto in ciascuna view.

Nel caso estremo in cui l'investitore non esprima alcuna view sui rendimenti attesi, la distribuzione a posteriori sarà pari a quella di equilibrio e l'asset manager deterrà una fetta del portafoglio di mercato (ponendo $P=0$, si ottiene $E(R) = \Theta$).

4.4 Asset Allocation Tattica

Dopo aver applicato il Teorema di Bayes, al fine di ottenere la nuova composizione del portafoglio ottimale, si inserisce in input al tradizionale processo di ottimizzazione di Markowitz il vettore dei rendimenti attesi di Black e Litterman e si procede al calcolo del portafoglio ottimo, il quale terrà conto anche delle aspettative.

Questa fase di calcolo dei rendimenti di portafoglio rivisitati alla luce delle view espresse dall'investitore è la cosiddetta fase di Asset Allocation Strategica relativa alla costruzione del portafoglio.

Qualora, in futuro, risulti necessario aggiornare i dati con nuove views, queste si aggiungono alla distribuzione risultante dal modello di Black e Litterman e la distribuzione così aggiornata diviene il nuovo punto di partenza del modello. Procedendo in tal modo, si otterranno col passare del tempo rendimenti sempre più stabili dato il crescente ammontare di dati immessi nel processo: la distribuzione a posteriori mostrerà una media più vicina ai dati osservati e una varianza minore dato l'alto numero di informazioni considerato. Il punto di riferimento (l'input del processo), dunque, non è più il portafoglio di mercato ma le quote del portafoglio strategico

che l'asset manager può modificare in base alle sue aspettative; si parla, in tal caso, di Asset Allocation Tattica relativa alla gestione vera e propria del portafoglio.

Nelle due fasi, il vettore dei rendimenti impliciti di equilibrio ottenuti con la *reverse optimization* è pari a:

Asset Allocation Strategica	$\Theta = \lambda \cdot \Sigma \cdot \Omega_B$
Asset Allocation Tattica	$\Theta = \lambda \cdot \Sigma \cdot (PS)$

Con:

Θ : vettore dei rendimenti impliciti di equilibrio

λ : coefficiente di avversione al rischio

Ω_B : vettore delle quote del portafoglio di mercato

PS: vettore delle quote del portafoglio strategico

Si osserva che in seguito alla modifica delle quote del portafoglio di riferimento mediante il processo proposto da Black e Litterman, non variano solo i rendimenti degli asset per cui è stata espressa una view, ma variano anche i rendimenti su cui l'investitore non ha espresso alcuna opinione. Questo avviene poiché il modello, ai fini del calcolo dei rendimenti attesi e delle nuove quote di portafoglio, considera la matrice delle covarianze storiche dei titoli in portafoglio; le views sono infatti una combinazione lineare dei loro rendimenti attesi, della matrice di varianza-covarianza dei rendimenti di equilibrio e della matrice di varianza-covarianza delle views stesse. In questo modo si mitigano gli errori di stima delle views e si previene la formazione di un'eccessiva allocazione su determinati asset.

4.4.1 Processo di analisi delle variazioni

In seguito all'osservazione delle variazioni dei rendimenti della totalità degli asset e all'integrazione delle view, si è avviato uno studio focalizzato sull'analisi degli scostamenti dai pesi strategici di partenza in due casi particolari:

- Presenza di vincoli di peso per gli asset non interessati direttamente dalle view (modifica delle sole quote degli asset coinvolti dalle view, vincolando i pesi degli altri asset ai loro valori strategici)
- Assenza di vincoli di peso (fiducia nelle covarianze storiche di portafoglio con conseguente modifica delle quote di tutti gli asset)

Sebbene l'assenza di vincoli di peso costituisca una scelta più conveniente per l'asset manager, essa lo è solo quando egli sia fermamente convinto delle sue aspettative; si ottengono portafogli con composizioni molto lontane da quelle strategiche ma il limite più importante è dato dalla mancata possibilità di calibrare il grado di fiducia delle aspettative. Per tale motivo, lo studio empirico è stato condotto considerando un approccio alternativo che invece implementa il livello di confidenza riposto dall'asset manager in ciascuna view. Quest'ultimo approccio è preferibile in quanto l'investitore stesso può scegliere il livello di fiducia da riporre nelle view, può determinare l'effettivo scostamento dal portafoglio strategico e può definire il grado di rischio che è disposto a sopportare.

4.5 Criticità del modello

Tra i principali limiti che caratterizzano il modello di Black e Litterman rientra l'ipotesi di base di normalità dei rendimenti, per cui nella pratica potrebbe essere opportuno invece considerare altre distribuzioni. Tra le altre difficoltà è inoltre necessario considerare quelle legate alla costruzione della matrice P in presenza di view relative: dal momento che la riga corrispondente agli asset oggetto della view relativa deve contenere valori la cui somma è pari a zero (i titoli interessati positivamente dalla view sommeranno a 1 e quelli invece interessati negativamente sommeranno a -1), si procede dividendo l'unità per il numero di asset coinvolti positivamente o negativamente affinché tutti i titoli siano pesati in egual misura nel modello. Questo metodo, seppur di semplice applicazione, trascura la capitalizzazione di mercato dei titoli stessi e la dimensione degli asset coinvolti e può perciò portare ad una distorsione della composizione finale del portafoglio. Da qui è nata l'idea di utilizzare uno schema di pesi proporzionale alla capitalizzazione di mercato per cui si considera il peso del singolo asset pari al rapporto tra la capitalizzazione dello stesso e la capitalizzazione di tutti gli asset interessati allo stesso modo dalle views. Le views assolute, invece, non hanno lo stesso problema in quanto prevedono una somma dei valori nella riga di riferimento pari a uno, con il valore unitario posto sull'asset in cui è espressa la view.

Le critiche principali mosse al modello di Black e Litterman riguardano l'utilizzo e la definizione del parametro *weight-on-views* τ e della matrice di varianza-covarianza delle views Ψ ; questi parametri sono astratti e difficili da interpretare e calcolare.

4.5.1 Lo scalare *Weight-on-views*

Come già anticipato, lo scalare τ misura l'incertezza della distribuzione dei rendimenti di equilibrio.

Osservando l'equazione (4.5), ci si può aspettare che τ sia più o meno inversamente proporzionale al peso relativo dei rendimenti di equilibrio Θ , infatti, accresce positivamente il peso delle aspettative rispetto a quello dei valori di equilibrio.

Black e Litterman non stabiliscono una metodologia di calcolo per τ ma suggeriscono che abbia un valore vicino allo zero.

Altri studiosi hanno invece ritenuto che $(\tau \cdot \Sigma)$ rappresentasse lo *standard error* della stima dei rendimenti attesi di equilibrio considerando dunque τ all'incirca pari al rapporto tra 1 ed il numero delle osservazioni.

Un altro tipo di analisi ha invece sostenuto di calibrare il livello di confidenza delle aspettative in modo tale che il rapporto Ψ/τ sia esattamente pari alla varianza delle view $P\Sigma P^T$. In tal modo il valore dello scalare τ sarà irrilevante dato che nel modello rientrerà solo il valore Ψ/τ e, inoltre, non sarà più necessario che l'investitore esprima il proprio livello di confidenza circa le views dal momento che questo è fissato sulla base della loro varianza. Questo aspetto è un vantaggio dal punto di vista della semplificazione del modello ma anche uno svantaggio in quanto pone un limite all'espressione delle proprie opinioni.

In conclusione, il metodo più semplice per calibrare il modello di Black e Litterman è quello di fare assunzioni circa il valore dello scalare τ .

4.5.2 La matrice Ψ

Come già detto in precedenza, la matrice di varianza-covarianza delle aspettative esprime il grado di incertezza delle views dell'investitore: l'*i*-esimo elemento è un valore alto qualora l'investitore non sia sicuro della sua opinione, viceversa, è basso se ripone un certo grado di fiducia nella sua aspettativa. È una matrice diagonale in quanto le views sono indipendenti tra loro, tuttavia, qualora l'investitore fosse assolutamente certo su alcune views è possibile che la matrice contenga zeri anche sulla diagonale (in tal caso non sarebbe una matrice invertibile).

Il problema principale legato alla matrice di confidenza Ψ , è dato dall'assenza di un metodo univoco di calcolo dei suoi valori: Black e Litterman fissano diversi valori nei vari esempi proposti nel loro studio in base al criterio qualitativo per cui a maggiore incertezza corrisponde maggior varianza e viceversa.

Solo in seguito, uno studioso ha proposto un nuovo metodo di calcolo per gli elementi diagonali della matrice: per ciascuna view, si calcola il vettore dei rendimenti attesi utilizzando l'equazione di Black e Litterman nel caso in cui l'investitore abbia assoluta certezza del verificarsi dell'aspettativa espressa e si tratta ciascuna view come se fosse l'unica espressa. Tale metodologia elimina le difficoltà di calcolo dello scalare τ che è, infatti, mantenuto costante e fissa gli elementi della matrice in modo che siano proporzionali alle singole varianze delle views.

Altri metodi di calcolo prevedono che la varianza delle views sia proporzionale alla varianza dei rendimenti di equilibrio oppure prevedono che si calcoli la varianza delle views a partire dalla definizione di un intervallo di confidenza relativo alla stima del rendimento atteso.

5 Illustrazione dei dati

L'indice di riferimento da cui sono stati selezionati i dati oggetto delle successive analisi è il FTSE MIB: esso è il principale indice azionario italiano composto dalle quaranta imprese principali (in termini di capitalizzazione e flottante) quotate sul mercato azionario di Borsa Italiana.

Il set di dati che andrà a comporre il portafoglio e che sarà oggetto delle successive analisi e delle implementazioni dei modelli descritti, è composto dalle quotazioni di chiusura giornaliere aggiustate per dividendi e frazionamenti (così come disponibili da Yahoo Finance). In particolare, sono state selezionate venti imprese del FTSE MIB a maggior capitalizzazione (secondo la classifica al 30/09/20 di Borsa Italiana) rappresentanti settori differenti e per cui sono disponibili i dati storici nell'intervallo di tempo considerato dal 04/01/2010 al 23/10/2020.

Di seguito si riporta l'elenco degli indici selezionati in ordine decrescente per capitalizzazione, con l'indicazione del codice alfanumerico e del settore di appartenenza:

<i>Impresa</i>	<i>Codice alfanumerico</i>	<i>Settore di appartenenza</i>
Enel S.p.A.	ENEL.MI	Energia elettrica e gas
Intesa Sanpaolo S.p.A.	ISP.MI	Servizi bancari
Eni S.p.A.	ENI.MI	Petrolio, gas, energia
STMicroelectronics N.V.	STM.MI	Tecnologia
Generali S.p.A.	G.MI	Assicurazioni
FCA N.V.	FCA.MI	Auto e componentistica
UniCredit S.p.A.	UCG.MI	Servizi bancari
Snam S.p.A.	SRG.MI	Servizi pubblici (utilities)
Exor N.V.	EXO.MI	Servizi finanziari (holding)
Atlantia S.p.A.	ATL.MI	Prodotti e servizi industriali
Campari-Milano S.p.A.	CPR.MI	Alimentare
DiaSorin S.p.A.	DIA.MI	Diagnostica
Recordati S.p.A.	REC.MI	Farmaceutico
Amplifon S.p.A.	AMP.MI	Salute
Prysmian S.p.A.	PRY.MI	Manifatturiero
Telecom Italia S.p.A.	TIT.MI	Telecomunicazioni
Tenaris S.A.	TEN.MI	Materie Prime (siderurgia)

Hera S.p.A.	HER.MI	Servizi pubblici
Interpump Group S.p.A.	IP.MI	Oleodinamica
Buzzi Unicem S.p.A.	BZU.MI	Edilizia e materiali

La variabile aleatoria considerata nelle analisi è rappresentata dai log-rendimenti definiti nel modo seguente:

$$r_t = \ln (p_t/p_{t-1}) \quad (5.1)$$

Con:

p_t : prezzo giornaliero di chiusura al tempo t

p_{t-1} : prezzo giornaliero di chiusura al tempo $t-1$

Dopo aver valutato i rendimenti logaritmici, è stato effettuato il calcolo della loro media, della loro varianza e della deviazione standard e si è proseguito alla valutazione delle performance generali mediante l'indice di Sharpe. Tale indice, come anticipato, misura l'extra-rendimento dell'asset considerato per unità di rischio assunto (i risultati ottenuti sono riportati in Figura 5.1).

Il solo dato del rendimento, infatti, non permette di esprimere nessun tipo di analisi sulla performance dell'indice e dunque risulta necessario valutare un appropriato indice di efficienza al fine di non trascurare il trade-off tra il rendimento atteso ed il rischio ad esso associato.

Il rendimento dipende dal rischio che si intende sostenere e tra gli indicatori utili alla valutazione di tale legame, l'indice di Sharpe è il più diffuso: esso valuta la capacità di un titolo rischioso (o di un portafoglio) di sopra-performare il rendimento dell'attività priva di rischio rapportando il tutto al rischio totale dell'investimento.

Dal momento che il rendimento dell'asset *risk free* considerato (il BOT annuale di ottobre) è attestato su un valore negativo, ai fini del calcolo dell'indice di Sharpe si è assunto un valore nullo.

<i>Codice impresa</i>	<i>Media</i>	<i>Varianza</i>	<i>Dev. Standard</i>	<i>Indice di Sharpe</i>
ENEL.MI	0.0004239	0.0002883	0.0169787	0.0249636
ISP.MI	0.000054	0.0006763	0.0260053	0.0002091
ENI.MI	-0.00014	0.0003	0.01724	-0.00786
STM.MI	0.0007122	0.0006395	0.0252888	0.0281624
G.MI	0.0000035	0.0003168	0.0177999	0.0001991
FCA.MI	0.0006107	0.0007222	0.0268738	0.0227241
UCG.MI	-0.0008120	0.0008942	0.0299032	-0.0271537
SRG.MI	0.0003185	0.0002187	0.0147886	0.0215399
EXO.MI	0.0005043	0.0004711	0.0217039	0.02327
ATL.MI	0.0000685	0.0004233	0.0205735	0.0033277
CPR.MI	0.0006713	0.0002368	0.0153894	0.0436198
DIA.MI	0.0007956	0.0003365	0.0183439	0.0433722
REC.MI	0.0009411	0.0002671	0.0163436	0.0575836
AMP.MI	0.0008957	0.0003627	0.0190451	0.0470291
PRY.MI	0.0003535	0.0004496	0.0212034	0.0166701
TIT.MI	-0.0003609	0.0005188	0.0227771	-0.0158434
TEN.MI	-0.00033	0.0004632	0.021522	-0.01533
HER.MI	0.0003955	0.0002347	0.0153195	0.0258181
IP.MI	0.0008552	0.0003675	0.0191706	0.0446122
BZU.MI	0.0002397	0.0005024	0.0224145	0.0106939

Tabella 5.1

Dal momento che la deviazione standard dei rendimenti è un'intuitiva misura del rischio di mercato poiché strettamente connessa alla variabilità dei rendimenti stessi, è interessante osservare che la volatilità storica maggiore è stata registrata dal titolo UCG.MI (2.99%) e la volatilità storica minore si osserva per SRG.MI (1.48%).

Analizzando i risultati così ottenuti e le informazioni rappresentate in Figura 5.1, dato un certo livello di rischio, si osserva il rendimento medio storico corrispondente e si evince che il titolo con il miglior rapporto rischio-rendimento e dunque con l'indice di Sharpe maggiore è Recordati S.p.A., invece, il titolo che presenta la performance inferiore è UniCredit S.p.A.

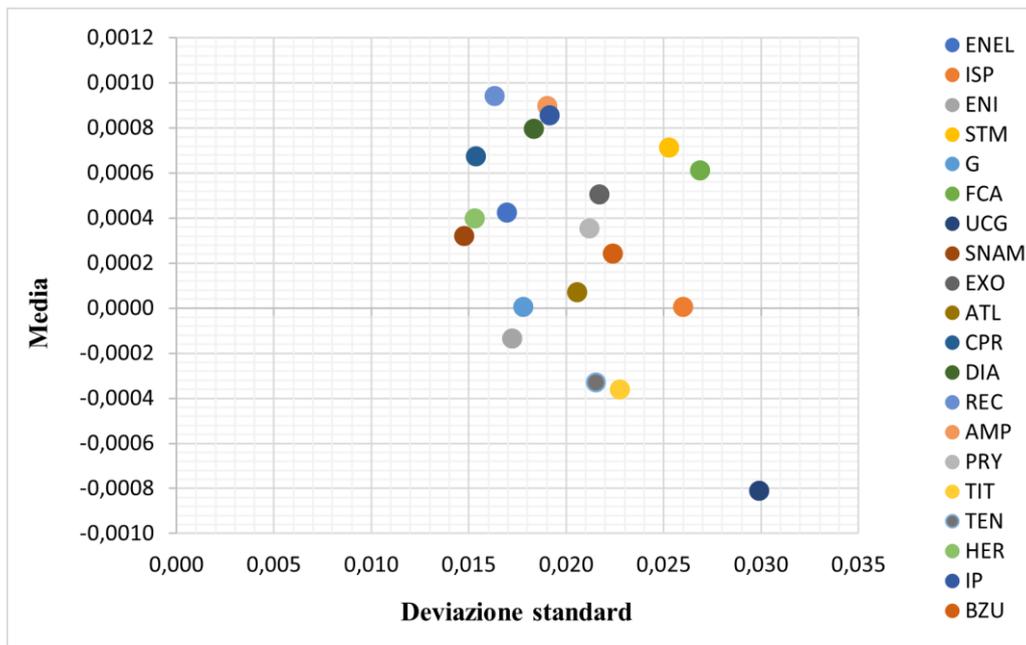


Figura 5.1: Rapporto rischio-rendimento per ciascun titolo

5.1 Analisi dei dati

Al fine di poter applicare i modelli descritti nei capitoli precedenti e di poter beneficiare di alcune semplificazioni, è necessario analizzare approfonditamente la distribuzione temporale dei log-rendimenti così da verificare se è possibile approssimarla effettivamente ad una distribuzione Normale. Tale distribuzione è frequentemente utilizzata perché di facile gestione ma va precisato che sebbene in presenza di periodi di stabilità dei mercati non crea particolari problemi, quando si verificano forti contrazioni delle quotazioni, come si vedrà dalle analisi, l'ipotesi di normalità diventa molto forte. Di conseguenza si ha una sottostima del rischio, in quanto, con l'ipotesi di normalità, si considerano rari, eventi che nella realtà non lo sono (punto di debolezza dei modelli descritti).

Elemento di partenza dei modelli in esame è, infatti, l'ipotesi di normalità dei rendimenti di ogni asset e, di conseguenza, di un qualsiasi portafoglio. Tuttavia, tale assunzione è prettamente teorica in quanto nella realtà la probabilità di osservare rendimenti distanti dal valor medio è più alta di quella prevista dalla Normale (fenomeno della "Leptocurtosi" o delle "code grasse").

Dal momento che tale distribuzione non è sempre la più adatta a rappresentare i rendimenti azionari, è necessario verificare se effettivamente i rendimenti logaritmici degli asset che andranno a comporre il portafoglio possano essere approssimati con una Normale.

A tal fine si ricavano le distribuzioni dei log-rendimenti così da studiarne l'andamento temporale, si applicano opportuni test di normalità e si valutano specifici parametri statistici

descrittivi come l'asimmetria e la curtosi, che aiutano ad analizzare più approfonditamente la distribuzione in esame.

In particolare, l'indice di asimmetria misura la mancanza di simmetria della distribuzione di frequenza: un suo valore positivo indica una asimmetria a destra (allungamento verso destra) ed un valore negativo indica una asimmetria a sinistra (allungamento verso sinistra).

L'indice di curtosi misura il peso dei valori posti nelle code della distribuzione rispetto a quelli dalla zona centrale: un valore positivo è segnale di una forma leptocurtica, invece, un valore negativo segnala una forma platicurtica.

Il test di normalità utilizzato nelle analisi è quello di Shapiro-Wilk¹² i cui risultati sono stati ottenuti mediante il software statistico Jamovi. Tale test fornisce il valore della statistica W (compreso tra 0 e 1) ed il valore del p-value: qualora il valore della statistica W sia troppo piccolo, il test rifiuta l'ipotesi nulla per cui i valori campionari siano distribuiti secondo una variabile casuale normale, invece, tanto più W è vicino a 1, più la distribuzione dei dati è approssimabile ad una Normale.

A supporto della valutazione, per ciascun indice, è stato ricavato il Q-Q Plot che permette di confrontare i quantili della variabile osservata con quelli attesi di una distribuzione normale: se i punti sono allineati alla retta, allora il campione di dati segue con buona approssimazione una distribuzione Normale.

5.1.1 ENEL S.p.A.

Si riporta di seguito l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in analisi:

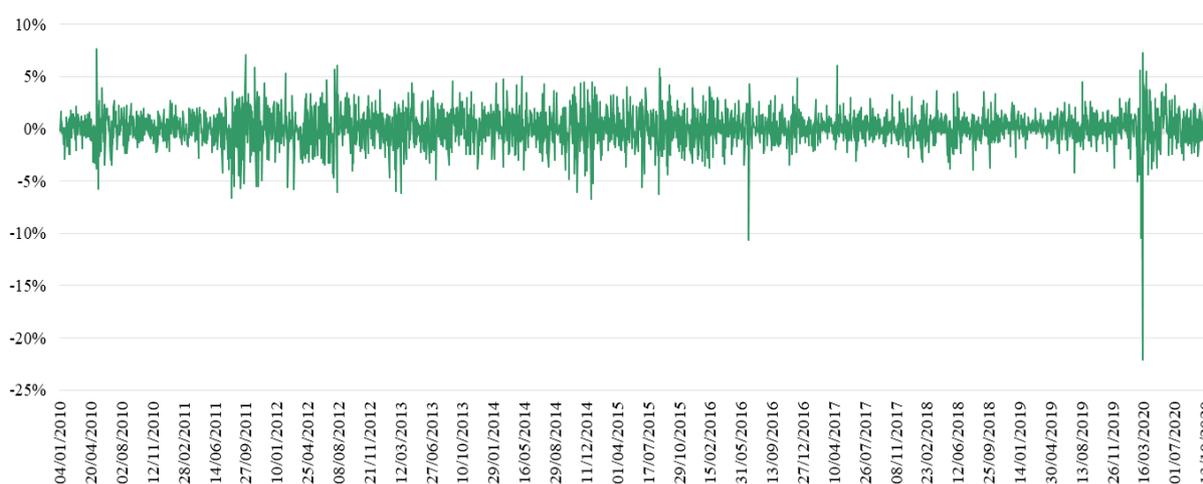


Figura 5.2: Andamento storico dei log-rendimenti di ENEL.MI

¹² È necessario considerare che, in presenza di ampi campioni, il test di Shapiro-Wilk è molto sensibile: può portare a rifiutare l'ipotesi di normalità anche se si osservano variazioni limitate. Per tale motivo, a supporto dell'analisi, ci si serve anche di altre valutazioni.

Analizzando l'andamento in Figura 5.2, si registra un primo picco a maggio 2010 seguito da periodi di pronunciata variabilità tra agosto 2011 e agosto 2012 e tra ottobre 2014 e novembre 2015. Dopo un picco registrato a giugno 2016, si osserva un periodo di maggior stabilità fino a dicembre 2019; successivamente, nel corso del 2020, si registra un picco repentino nel mese di marzo seguito da una variabilità piuttosto sostenuta.

Confrontando le quotazioni dell'indice in analisi con quelle dell'indice di mercato di riferimento (FTSE MIB) nel periodo di tempo in esame, è stata effettuata l'analisi della forza relativa al fine di valutare se il titolo ENEL.MI sovraperforma o sottoperforma il mercato. In Figura 5.3, è mostrato l'andamento del rapporto tra il prezzo giornaliero di chiusura del titolo ENEL.MI ed il prezzo giornaliero di chiusura del FTSE MIB.



Figura 5.3: Analisi della forza relativa tra ENEL.MI e FTSE MIB

È evidente che da gennaio 2010 a gennaio 2016 i due indici hanno sostanzialmente lo stesso andamento per cui si registra un rapporto tra le quotazioni stabile e nessuno dei due indici sovraperforma l'altro se non per lievi variazioni nel periodo. Da gennaio 2016 ad ottobre 2020 si osserva un andamento del rapporto tra le quotazioni crescente: l'indice ENEL.MI sovraperforma costantemente l'indice di mercato.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.0767
Min	-0.221
Asimmetria	-1.05
Curtosi	12.6
Shapiro-Wilk W	0.942
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.1

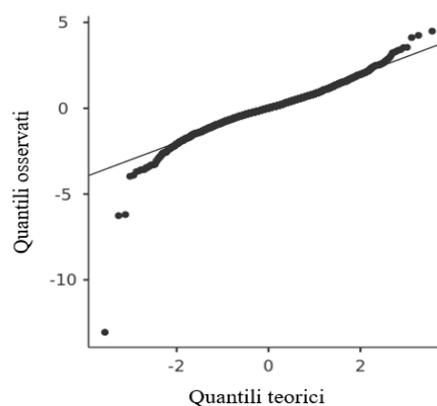


Figura 5.4: Q-Q Plot di ENEL.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

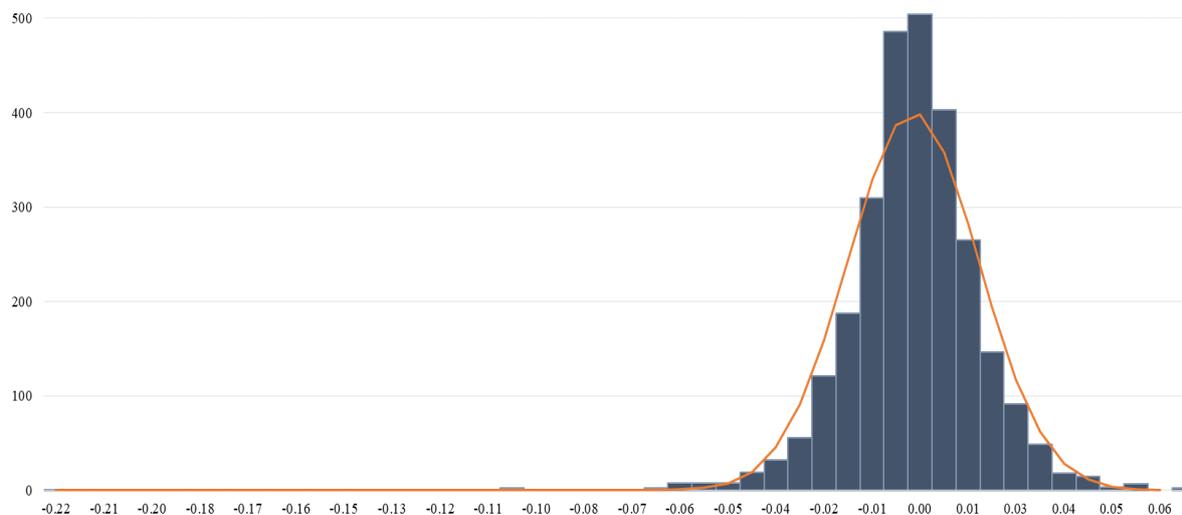


Figura 5.5: Distribuzione dei log-rendimenti di ENEL.MI

Considerando la forte sensibilità del test di normalità in presenza di grandi campioni, dall'analisi dei risultati ottenuti, si evince che, sebbene il p-value del test di normalità sia basso e la curva sia asimmetrica verso sinistra con un indice di curtosi non trascurabile, si ottiene un ottimo allineamento tra i quantili osservati ed i quantili teorici ed il valore della statistica di Shapiro-Wilk è elevato. È possibile dunque concludere che, con buona approssimazione, la distribuzione dei log-rendimenti del titolo ENEL S.p.A. segue una Normale.

5.1.2 Intesa Sanpaolo S.p.A.

Analizzando l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in analisi (Figura 5.6), oltre al picco di maggio 2010, si osservano variazioni particolarmente pronunciate tra agosto 2011 e agosto 2012; successivamente si evince una generale stabilizzazione ad eccezione dei periodi febbraio - giugno 2016 e febbraio - giugno 2020 in cui i rendimenti subiscono drastiche variazioni.

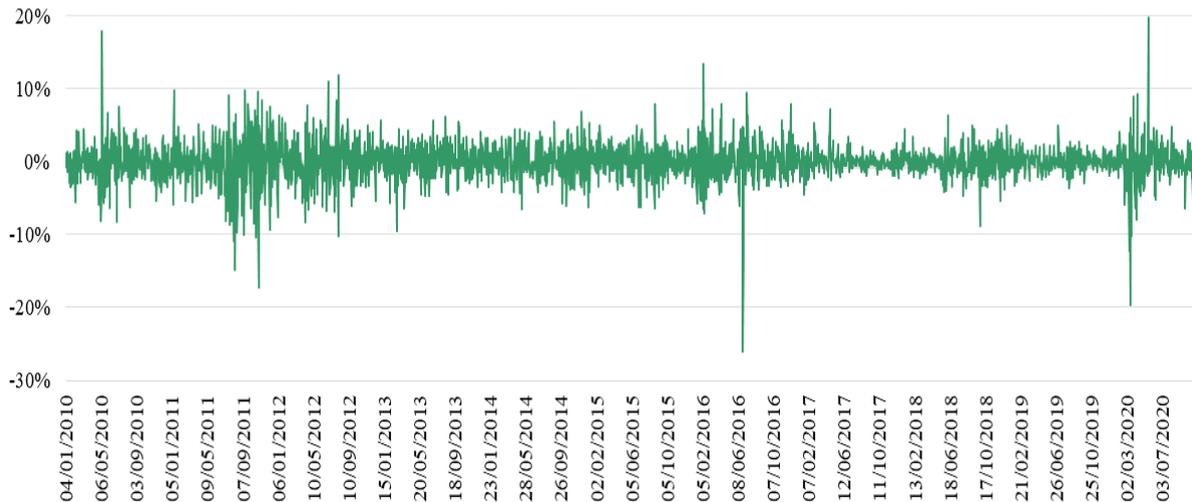


Figura 5.6: Andamento storico dei log-rendimenti di ISP.MI

Confrontando le quotazioni dell'indice in analisi con quelle del FTSE MIB, si è effettuata l'analisi della forza relativa al fine di valutare se il titolo ISP.MI sovraperforma o sottoperforma il mercato:



Figura 5.7: Analisi della forza relativa tra ISP.MI e FTSE MIB

L'andamento decrescente che ha caratterizzato il periodo gennaio 2010 - settembre 2011 segnala una sottoperformance dell'indice ISP.MI rispetto al FTSE MIB. Successivamente (da ottobre 2011 a marzo 2013) si osserva un rafforzamento dell'indice in analisi su quello di mercato seguito da una sovra-performance costante di ISP.MI sul FTSE MIB da marzo 2013 a luglio 2015. Nel periodo successivo, fino al 2020, la forza relativa dei due indici si alterna ma non in modo particolarmente spiccato per cui nel complesso l'andamento del rapporto delle quotazioni si può considerare piuttosto stabile.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.1976
Min	-0.26
Asimmetria	-0.447
Curtosi	9.468
Shapiro-Wilk W	0.923
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.2

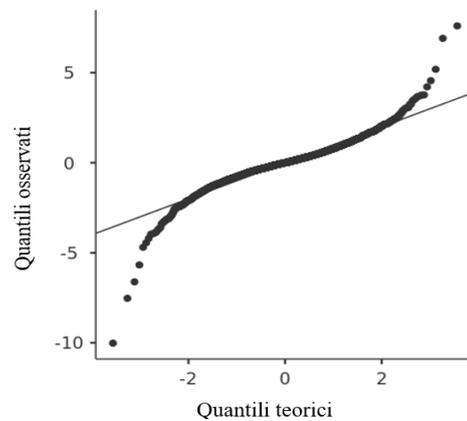


Figura 5.8: Q-Q Plot di ISP.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

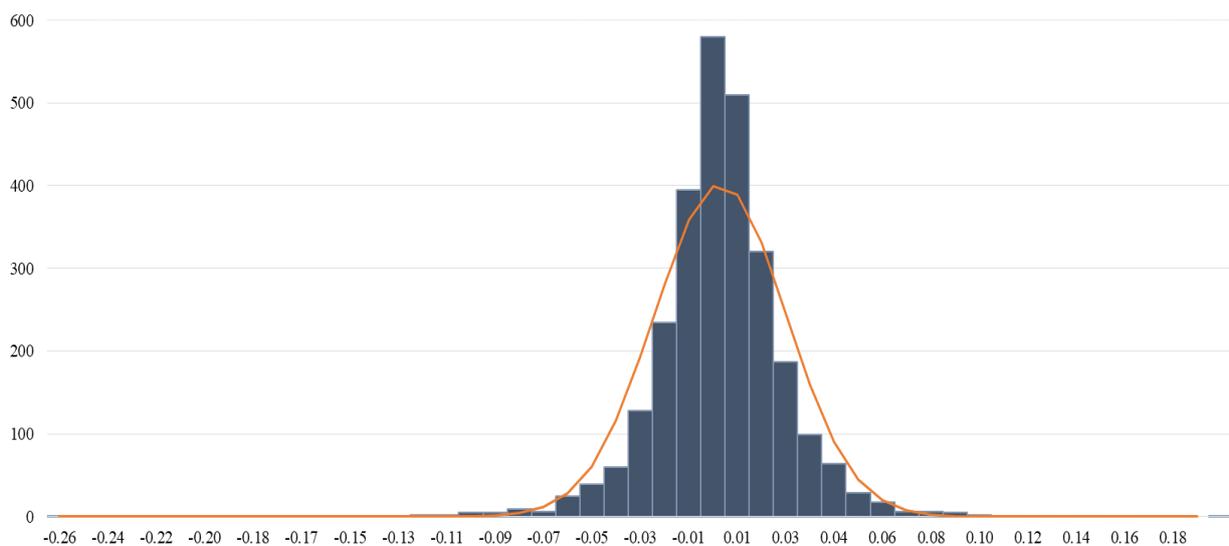


Figura 5.9: Distribuzione dei log-rendimenti di ISP.MI

Dai risultati ottenuti è possibile affermare che, con buona approssimazione, la distribuzione dei log-rendimenti di ISP.MI segue una Normale. Sebbene il p-value sia basso, il valore della statistica W è piuttosto alto e dal Q-Q Plot sembra ci sia un buon allineamento dei punti seppur con scostamenti alle estremità. Si osserva inoltre che la curva presenta un leggero decentramento verso sinistra ed è leptocurtica.

5.1.3 Eni S.p.A.

Dall'andamento dei log-rendimenti del titolo rappresentato in Figura 5.10, si osserva una generale stabilità dei rendimenti con variazioni leggermente pronunciate in brevi periodi come agosto - dicembre 2011 e gennaio 2015 - giugno 2016. Un'evidente drastica variazione è quella registrata a marzo 2020, i cui strascichi sono visibili anche per il resto dell'anno.

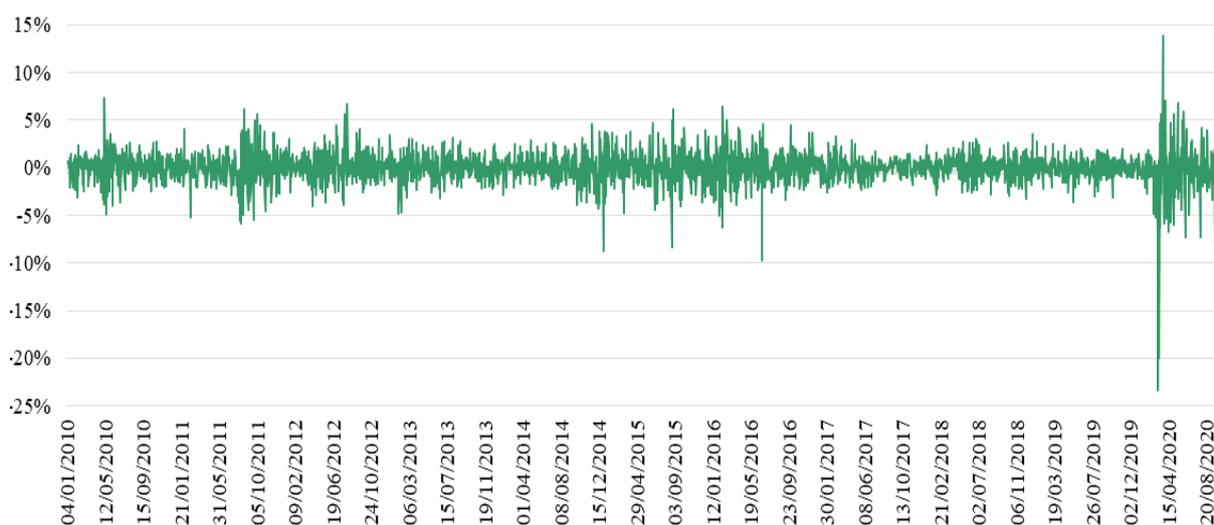


Figura 5.10: Andamento storico dei log-rendimenti di ENI.MI

Analizzando l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice ENI.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB riportato in Figura 5.11, si osserva che tra gennaio 2010 e luglio 2012 il titolo ENI.MI sovraperforma costantemente il FTSE MIB, il quale si rafforza nel periodo immediatamente successivo fino a dicembre 2015 (seppur con un breve indebolimento nel 2014). Dal 2016 la forza relativa si alterna fino a novembre 2018 quando si osserva un andamento costantemente decrescente fino al 2020, segnalando un continuo indebolimento dell'indice ENI.MI rispetto all'indice di mercato.



Figura 5.11: Analisi della forza relativa tra ENI.MI e FTSE MIB

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.139
Min	-0.234
Asimmetria	-1.443
Curtosi	22.209
Shapiro-Wilk W	0.891
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.3

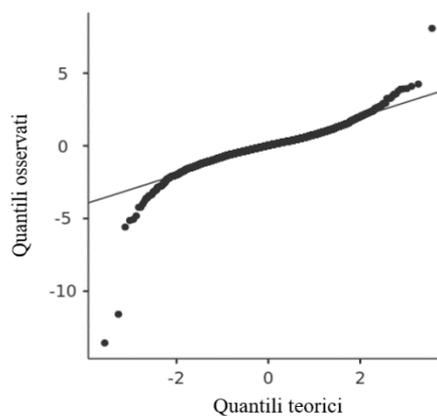


Figura 5.12: Q-Q Plot di ENI.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

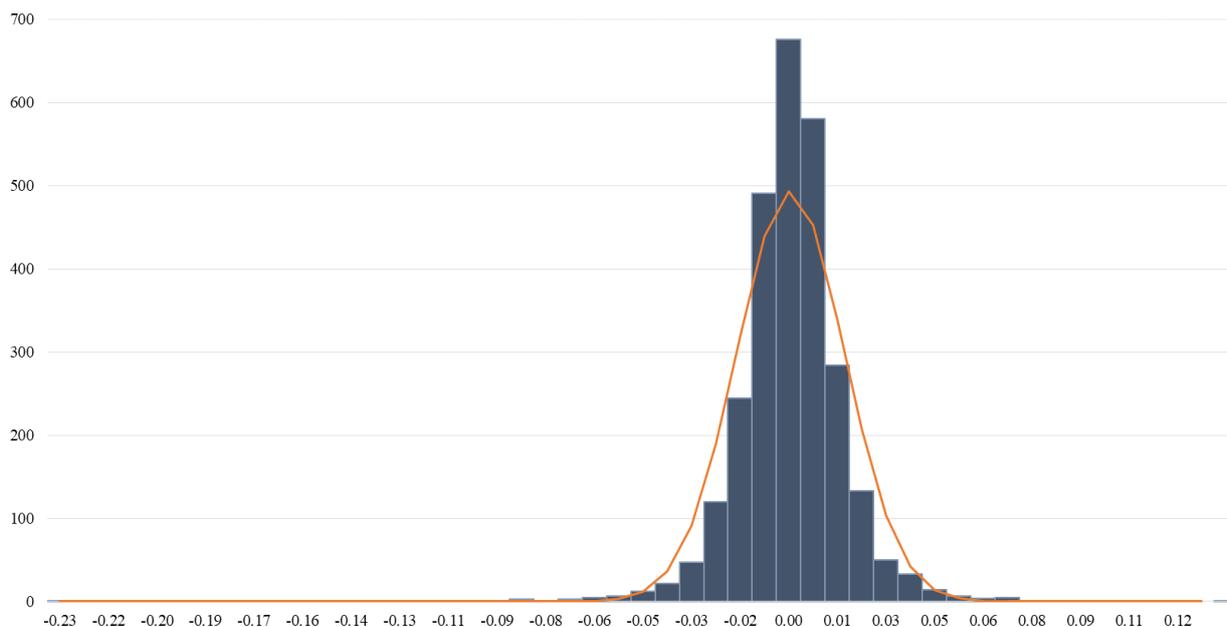


Figura 5.13: Distribuzione dei log-rendimenti di ENI.MI

Data l'asimmetria verso sinistra della distribuzione dei log-rendimenti e la sua evidente leptocurtosi, si potrebbe dedurre che non sia ben approssimabile con una Normale. Tuttavia, dato il valore piuttosto elevato della statistica di Shapiro-Wilk e dato l'ottimo allineamento dei quantili osservati in Figura 5.12, si può concludere che, seppur con una certa approssimazione, i rendimenti dell'indice in esame seguono una distribuzione Normale.

5.1.4 STMicroelectronics N.V.

Osservando l'andamento storico dei log-rendimenti dell'indice in esame, si osservano variazioni pronunciate in specifici periodi quali luglio 2011 – aprile 2012 e ottobre 2018 - maggio 2019 con un picco tra i due periodi ad aprile 2015. La variazione più drastica si è registrata tra febbraio e marzo 2020 con una leggera stabilizzazione nei mesi immediatamente successivi.

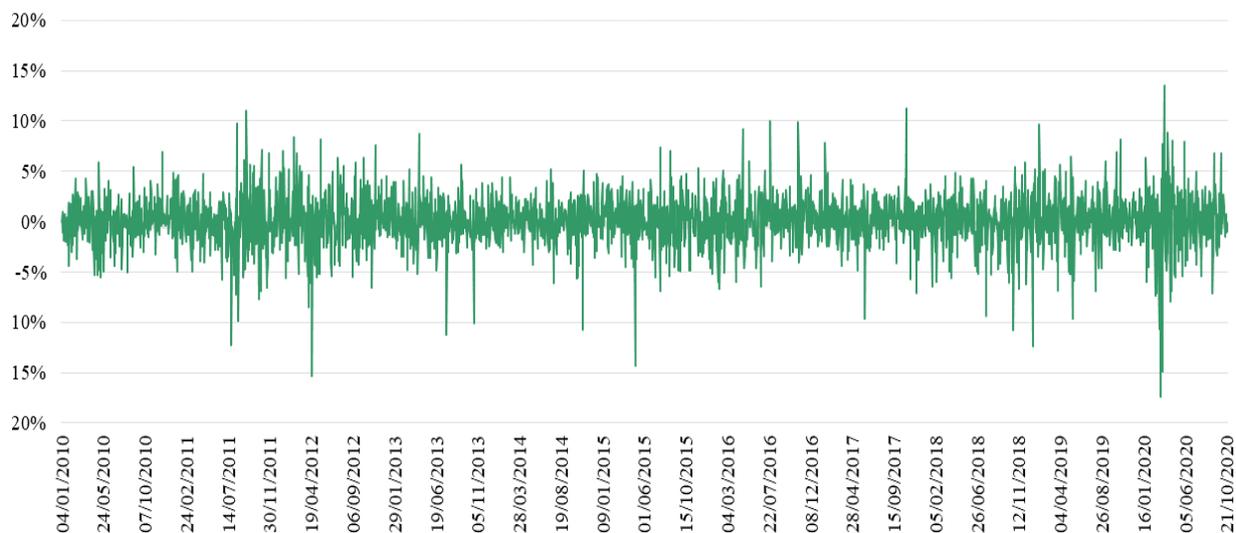


Figura 5.14: Andamento storico dei log-rendimenti di STM.MI

Si riporta di seguito l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice STM.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB:



Figura 5.15: Analisi della forza relativa tra STM.MI e FTSE MIB

Dall'analisi della forza relativa, si evince che nel periodo gennaio 2010 - maggio 2016 le quotazioni sono state relativamente stabili senza particolari sovra/sotto-performance. Per tutto il periodo successivo fino ad oggi, invece, si osserva che il titolo STM.MI ha costantemente sovraperformato il FTSE MIB il quale si è rafforzato solo tra luglio 2018 e gennaio 2019.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.135
Min	-0.17
Asimmetria	-0.443
Curtosi	4.15
Shapiro-Wilk W	0.957
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.4

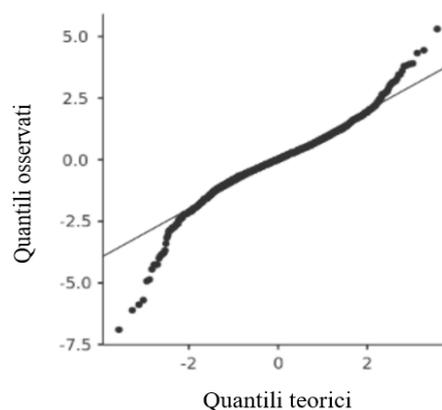


Figura 5.16: Q-Q Plot di STM.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

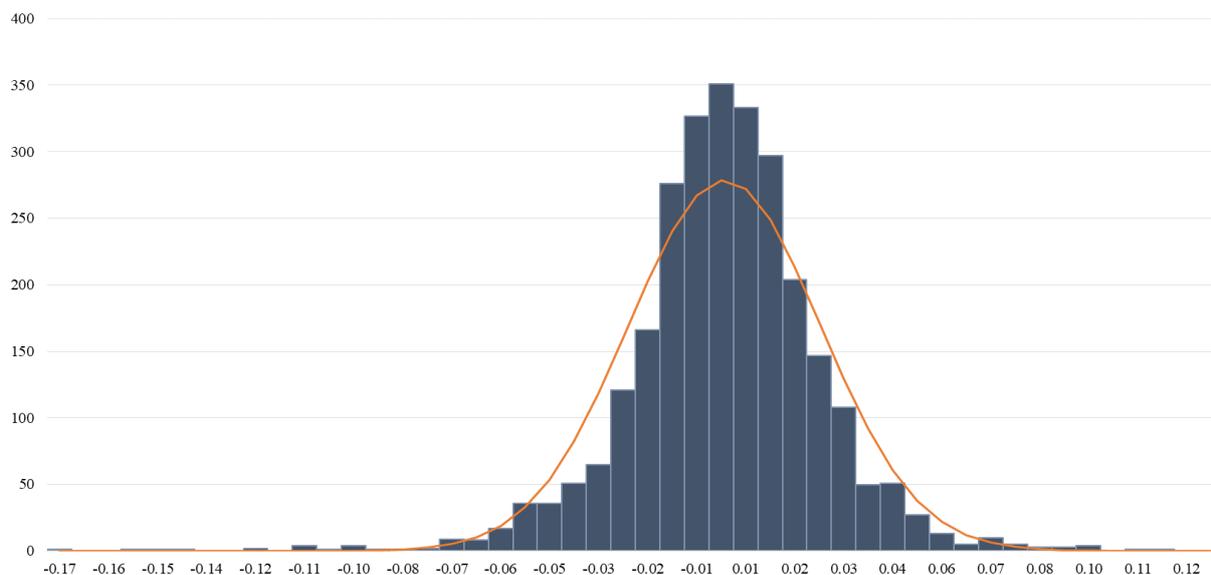


Figura 5.17: Distribuzione dei log-rendimenti di STM.MI

Sebbene per bassi valori dei quantili teorici le osservazioni si discostano dalla distribuzione Normale, dai risultati ottenuti in Tabella 5.4 e da quanto rappresentato in Figura 5.17, è possibile concludere che i log-rendimenti, con buona approssimazione, seguono una distribuzione Normale dato l'alto valore della statistica W ed i bassi valori di asimmetria e curtosi.

5.1.5 Generali S.p.A.

Dall'analisi dell'andamento storico dei log-rendimenti di G.MI raffigurato in Figura 5.18, si osservano variazioni più spiccate a maggio 2010 e nel periodo agosto 2011 - marzo 2013. Successivamente si osserva una prima stabilizzazione dei rendimenti fino a gennaio 2016 e successive variazioni fino a gennaio 2017. Trascorso un secondo periodo di stabilità, si è registrato un picco a marzo 2020 con conseguenti assestamenti nei mesi successivi.

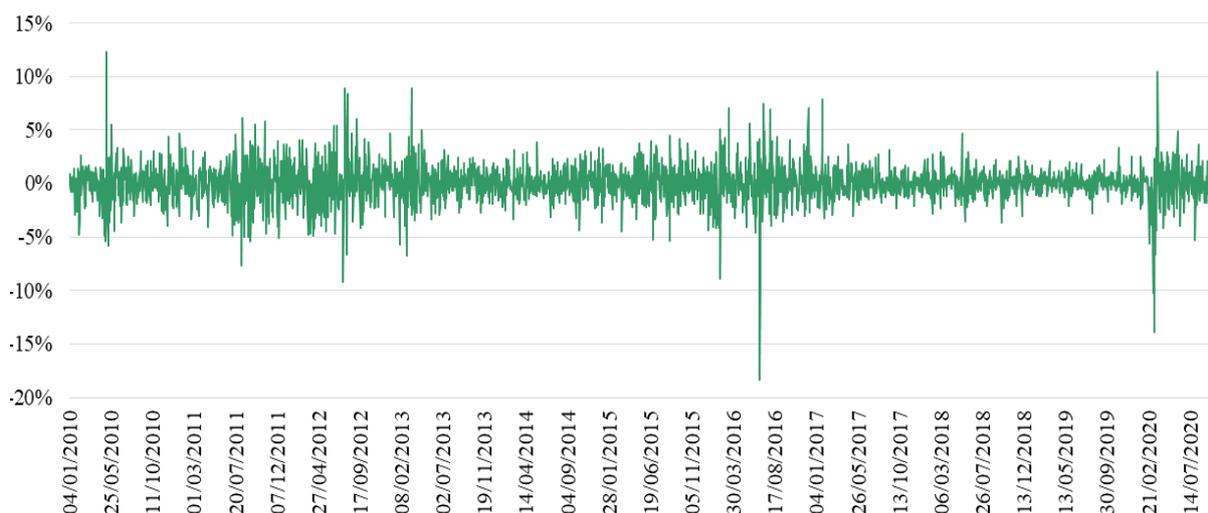


Figura 5.18: Andamento storico dei log-rendimenti di G.MI

Si riporta di seguito l'analisi della forza relativa tra G.MI ed il FTSE MIB:

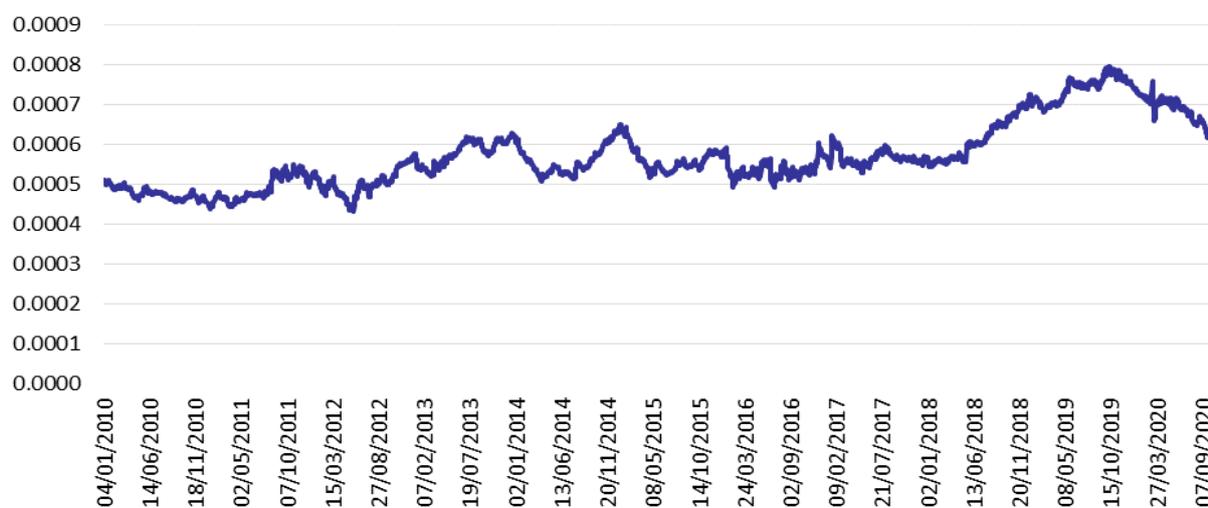


Figura 5.19: Analisi della forza relativa tra G.MI e FTSE MIB

Analizzando l'andamento in Figura 5.19, fino a maggio 2018 si osserva una generale stabilità relativa tra le quotazioni dei due indici, seppur con lievi alternanze di forza nello stesso periodo. Nel periodo successivo, fino a novembre 2019, si registra un andamento crescente della curva e dunque una sovra-performance dell'indice G.MI sul FTSE MIB seguito da un rafforzamento di quest'ultimo nel periodo immediatamente successivo fino al 2020.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.123
Min	-0.18
Asimmetria	-0.449
Curtosi	9.05
Shapiro-Wilk W	0.929
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.5

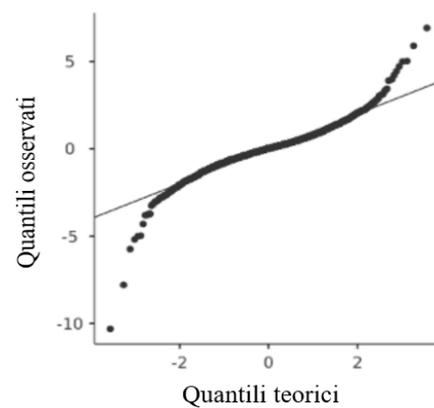


Figura 5.20: Q-Q Plot di G.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

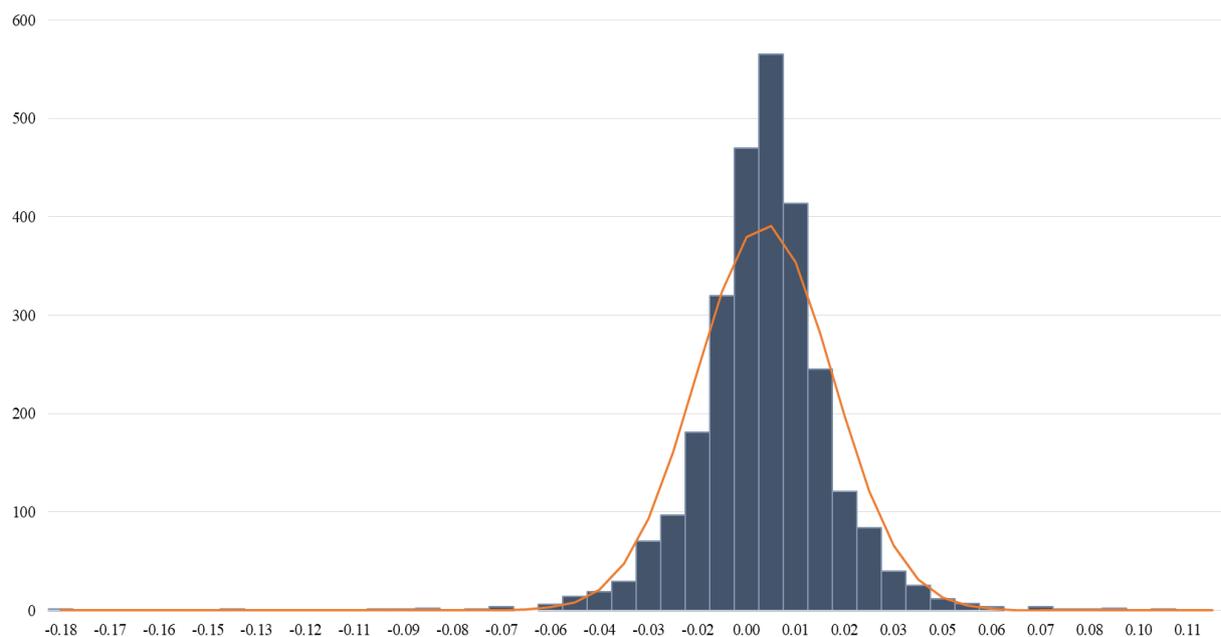


Figura 5.21: Distribuzione dei log-rendimenti di G.MI

Dato l'alto valore della statistica W ed il buon allineamento dei quantili osservati in Figura 5.20, si può dedurre che è possibile approssimare la distribuzione dei rendimenti di G.MI con una Normale, sebbene la distribuzione presenti una leggera asimmetria verso sinistra ed abbia un indice di curtosi non nullo.

5.1.6 FCA N.V.

Analizzando l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in analisi rappresentato in Figura 5.22, si osserva che i rendimenti risultano particolarmente variabili tra luglio 2011 e agosto 2012. Si registrano picchi isolati nel corso del 2014 e successive ulteriori variazioni visibili tra il 2015 ed il 2017. Si osserva, inoltre, un picco rilevante a marzo 2020.

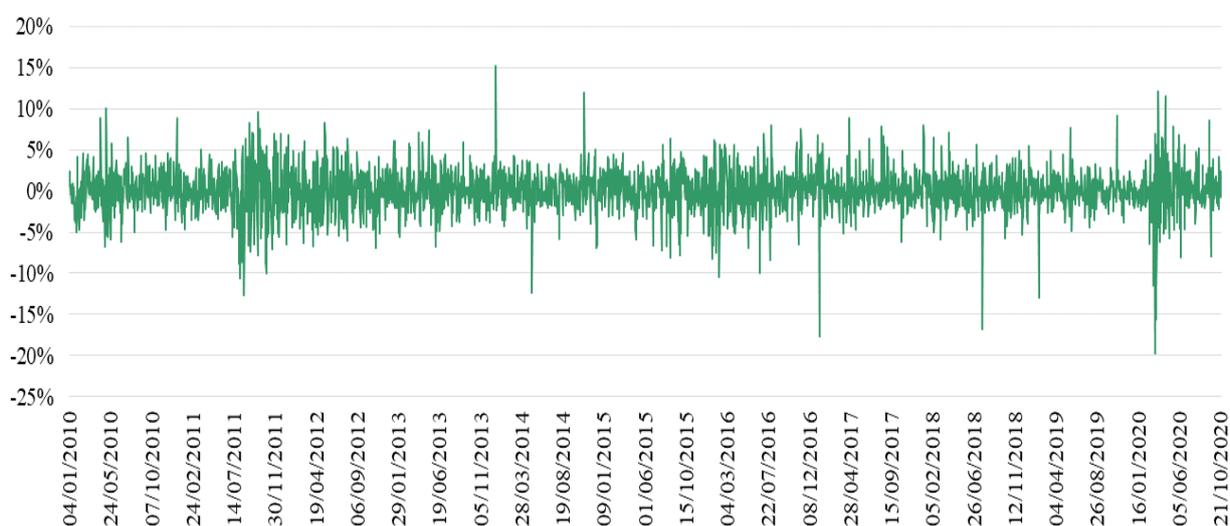


Figura 5.22: Andamento storico dei log-rendimenti di FCA.MI

Si riporta, in Figura 5.23, l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice FCA.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB. Analizzando l'andamento della forza relativa dei due indici, si osserva che da gennaio 2010 a febbraio 2018, l'indice FCA.MI sovraperforma costantemente (in una prima fase lievemente e successivamente con più evidenza) il FTSE MIB, seppur con brevi periodi di forza di quest'ultimo. Da febbraio 2018 a marzo 2020, si osserva un indebolimento di FCA.MI registrando una sotto-performance rispetto all'indice di mercato. Tuttavia l'andamento crescente della curva negli ultimi mesi del 2020 segnala un rafforzamento dell'indice FCA.MI.



Figura 5.23: Analisi della forza relativa tra FCA.MI e FTSE MIB

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.123
Min	-0.18
Asimmetria	-0.418
Curtosi	4.57
Shapiro-Wilk W	0.957
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.6

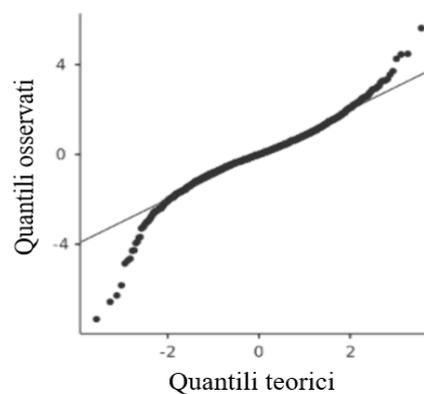


Figura 5.24: Q-Q Plot di FCA.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

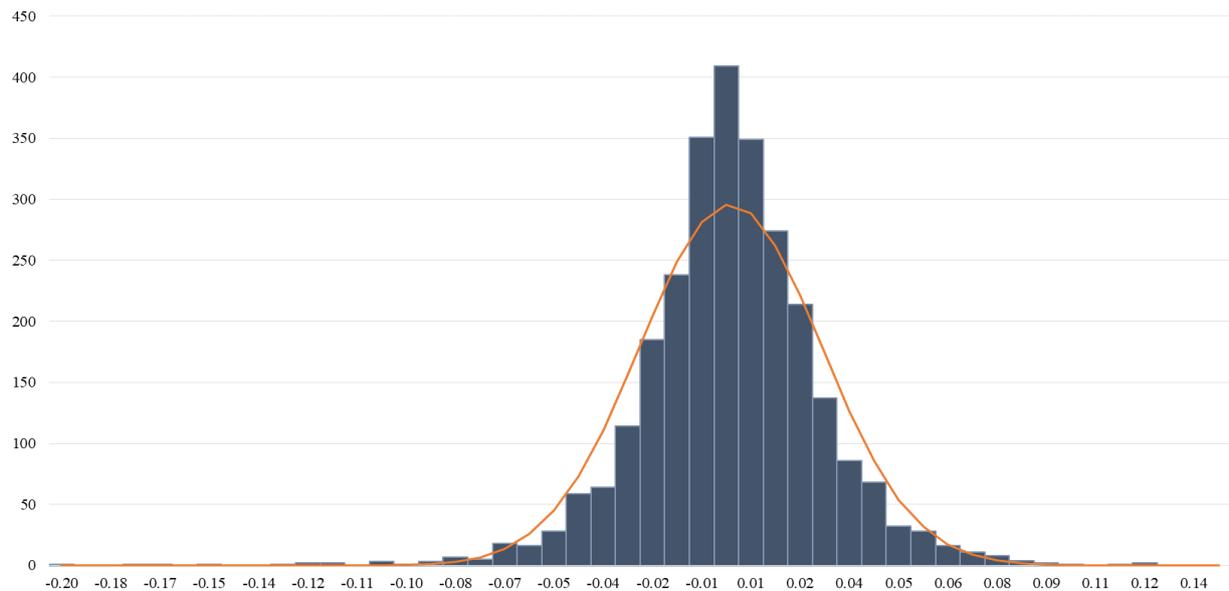


Figura 5.25: Distribuzione dei log-rendimenti di FCA.MI

Dall'analisi dei risultati ottenuti, si può affermare che è possibile approssimare la distribuzione dei rendimenti di FCA.MI con una Normale: sebbene, per bassi valori teorici, dal Q-Q Plot emerga un certo scostamento, si osserva un generale buon allineamento dei quantili e la distribuzione presenta una leggera asimmetria verso sinistra oltre che un indice di curtosi limitato. Sebbene il p-value di Shapiro-Wilk sia basso, come già anticipato si deve considerare la forte sensibilità del test in presenza di grandi campioni, inoltre, la statistica registra un valore molto alto.

5.1.7 UniCredit S.p.A.

Dall'analisi dell'andamento dei log-rendimenti del titolo in analisi, si osserva una diffusa stabilità dei rendimenti ad eccezione di ben precise variazioni emerse in periodi limitati: a partire da un primo picco a maggio 2010, si registrano drastiche variazioni tra luglio 2011 e luglio 2012 e tra gennaio 2016 e febbraio 2017 con un picco a giugno 2016. Dopo un triennio di relativa stabilità, si osserva una repentina variazione dei rendimenti tra febbraio e giugno 2020.

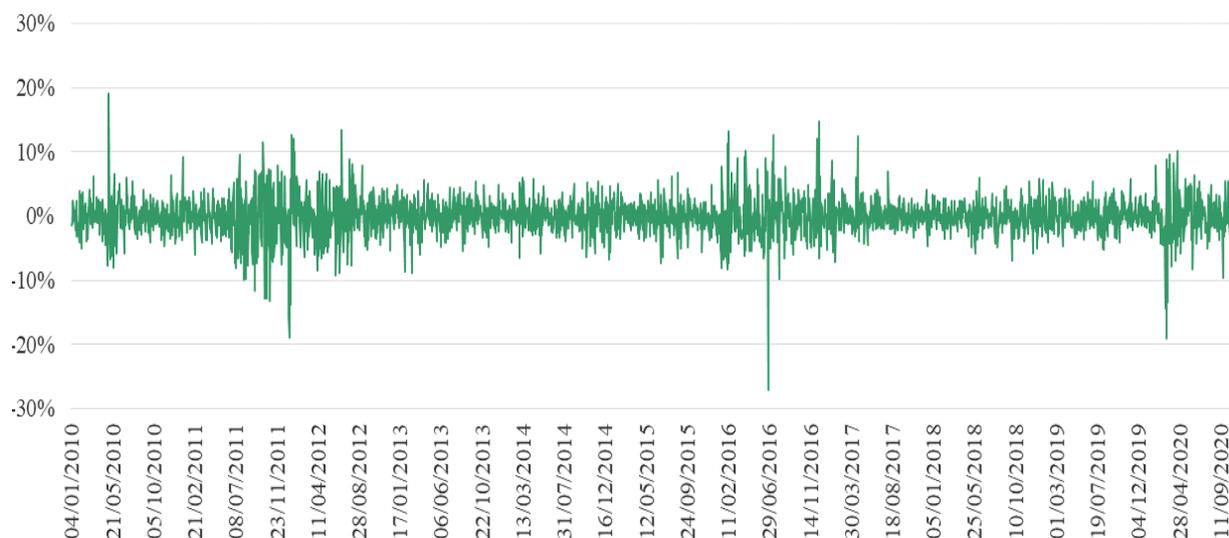


Figura 5.26: Andamento storico dei log-rendimenti di UCG.MI

Confrontando le quotazioni dell'indice in analisi con quelle del FTSE MIB, si è proseguito con l'analisi della forza relativa al fine di valutare se il titolo UCG.MI sovraperforma o sottoperforma il mercato; si riporta di seguito l'andamento del rapporto tra le quotazioni dei due indici:



Figura 5.27: Analisi della forza relativa tra UCG.MI e FTSE MIB

Si osserva un andamento costantemente decrescente, per cui il titolo UCG.MI ha sempre sottoperformato rispetto al FTSE.MIB; in particolare, la forza dell'indice di mercato è evidente nel periodo gennaio 2010 – gennaio 2012; nei periodi successivi l'indice in analisi si è

rafforzato nei confronti del FTSE MIB ma non abbastanza, infatti l'andamento complessivo continua ad essere decrescente.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.19
Min	-0.27
Asimmetria	-0.354
Curtosi	6.44
Shapiro-Wilk W	0.941
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.7

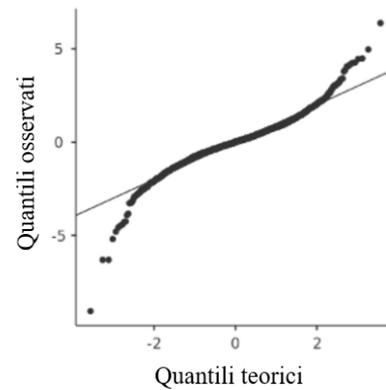


Figura 5.28: Q-Q Plot di UCG.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

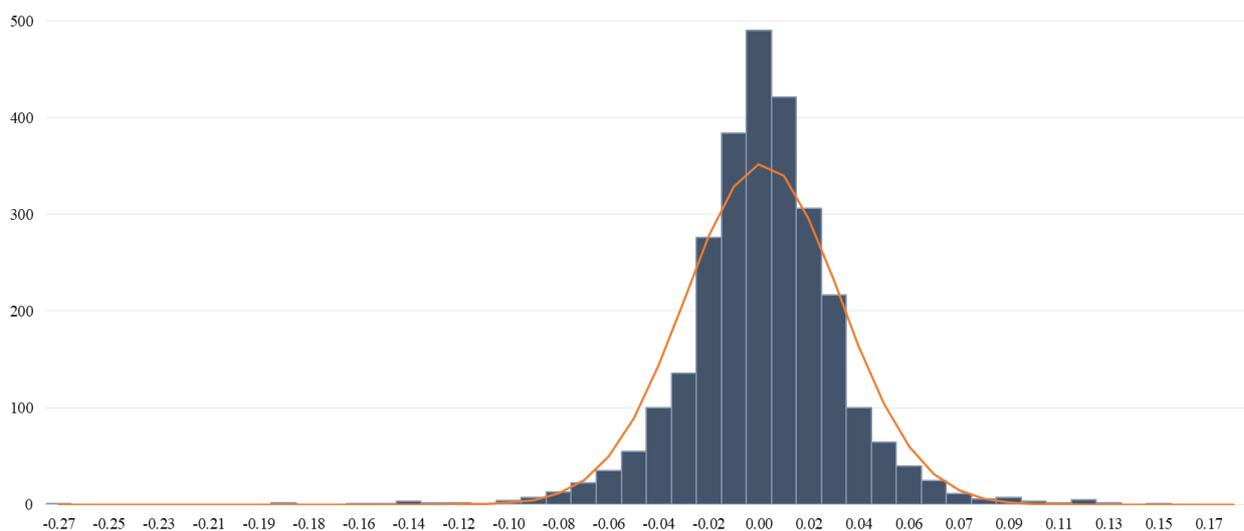


Figura 5.29: Distribuzione dei log-rendimenti di UCG.MI

Dall'analisi dei risultati ottenuti, si evince che sebbene i rendimenti presentino una leggera asimmetria verso sinistra ed un limitato indice di curtosi, si può affermare che è possibile

approssimare la distribuzione dei rendimenti di UCG.MI con una Normale dato l'alto valore della statistica W ed il buon allineamento dei quantili.

5.1.8 Snam S.p.A.

Analizzando l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in analisi rappresentato in Figura 5.30, si evincono rendimenti pressoché stabili con picchi di variazione localizzati in determinati istanti (agosto 2011, novembre 2014 e novembre 2016). Si osservano repentine variazioni nel 2020 con un forte picco nel mese di marzo.

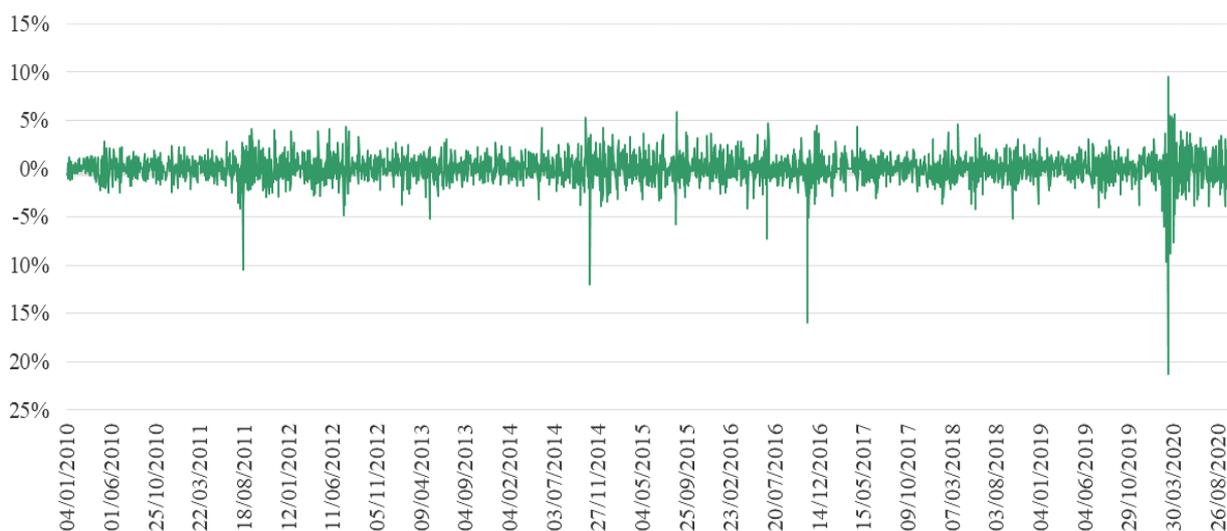


Figura 5.30: Andamento storico dei log-rendimenti di SRG.MI

Si riporta di seguito l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice SRG.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB a supporto dell'analisi della forza relativa:

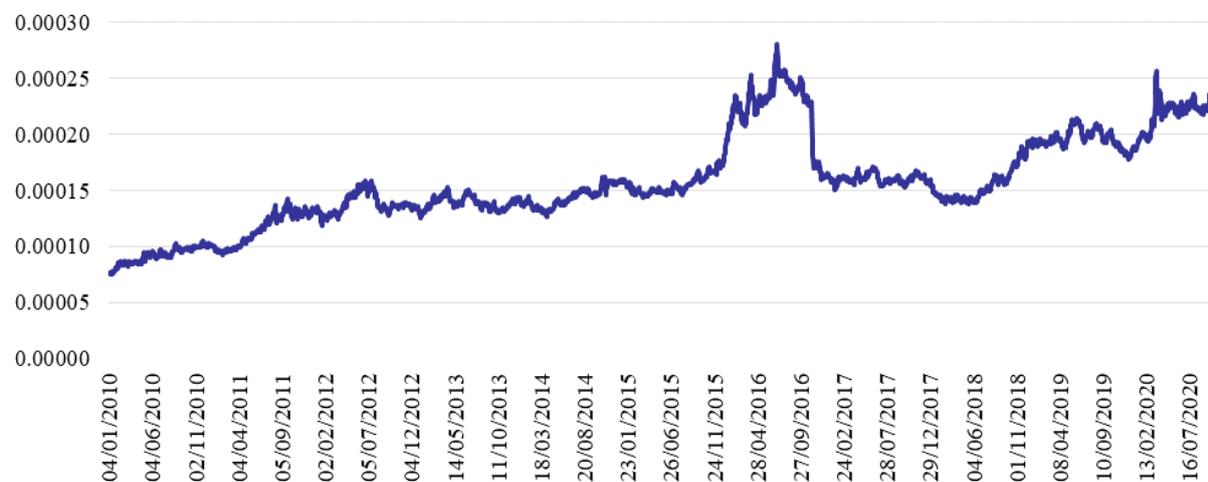


Figura 5.31: Analisi della forza relativa tra SRG.MI e FTSE MIB

Dal grafico si osserva un andamento costantemente crescente da gennaio 2010 a dicembre 2015 con un repentino rafforzamento dell'indice SRG.MI da dicembre 2015 a luglio 2016 seguito da un rafforzamento improvviso del FTSE MIB nei confronti dell'indice in analisi da luglio 2016 a gennaio 2017. Dopo un breve periodo di stabilità relativa tra i due indici, a partire da giugno 2018 si registra una costante sovra-performance di SRG.MI sull'indice di mercato.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.095
Min	-0.21
Asimmetria	-1.98
Curtosi	25.52
Shapiro-Wilk W	0.877
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.8

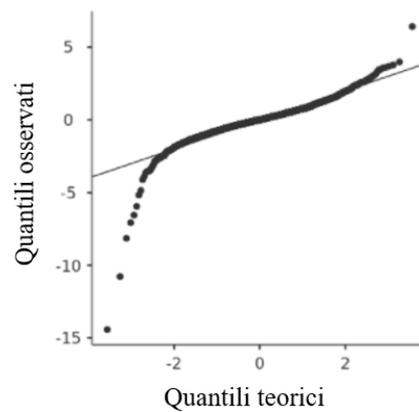


Figura 5.32: Q-Q Plot di SRG.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

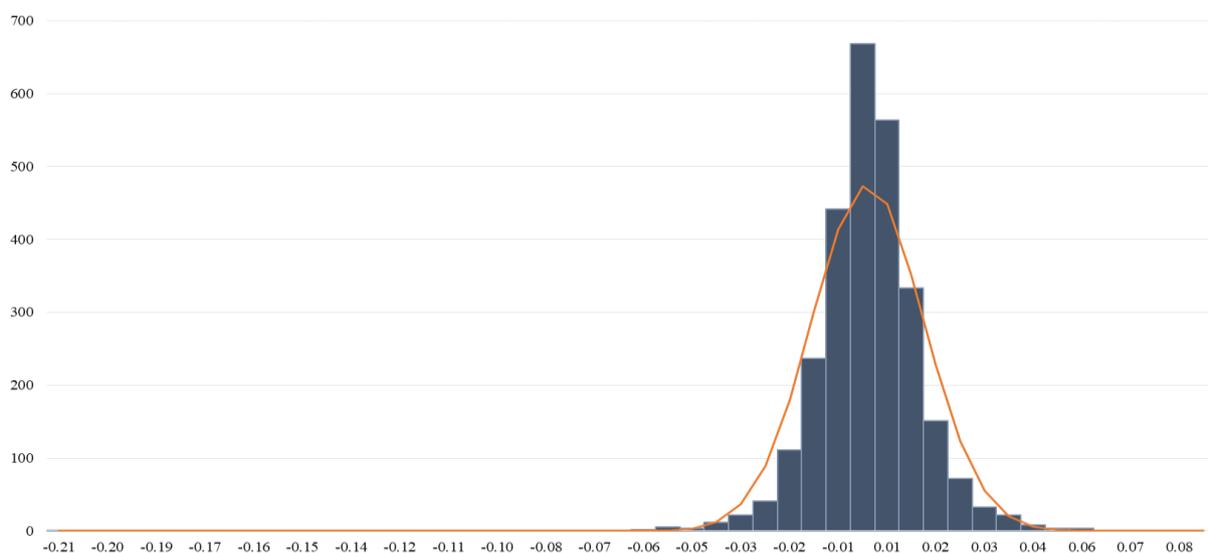


Figura 5.33: Distribuzione dei log-rendimenti di SRG.MI

Analizzando i risultati ottenuti in Tabella 5.1 Tabella 5.8 e osservando gli andamenti in Figura 5.32 ed in Figura 5.33, si può affermare che, sebbene la distribuzione dei rendimenti abbia code grasse ben evidenti ed abbia un indice di asimmetria negativo, segue, con le dovute approssimazioni, una distribuzione normale. Nel Q-Q Plot, ad eccezione di bassi valori, si osserva un allineamento quasi perfetto dei quantili osservati e, inoltre, il test di normalità restituisce un valore della statistica elevato.

5.1.9 Exor N.V.

Analizzando l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in analisi rappresentato in Figura 5.34, si evince nel tempo una variabilità diffusa intervallata da brevi periodi di maggior stabilità. Le principali variazioni con annessi picchi si osservano tra agosto 2011 e agosto 2012 e tra febbraio 2016 e febbraio 2017. Una drastica e spiccata variazione si osserva nel corso del 2020 con due picchi evidenti nel mese di marzo.

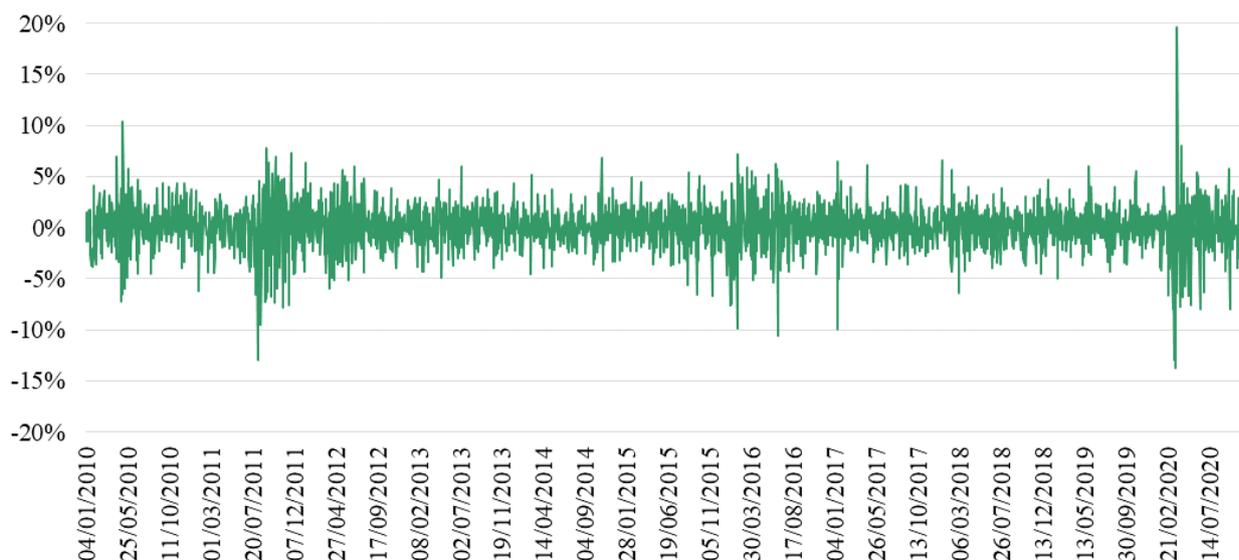


Figura 5.34: Andamento storico dei log-rendimenti di EXO.MI

Si riporta di seguito l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice SRG.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB a supporto dell'analisi di forza relativa:



Figura 5.35: Analisi della forza relativa tra EXO.MI e FTSE MIB

Dall'andamento in Figura 5.35, si evince che il titolo EXO.MI ha costantemente sovraperformato il FTSE MIB durante l'intero intervallo di tempo in esame. L'indice di mercato ha mostrato un rafforzamento nei confronti di EXO.MI nei primi mesi del 2016 e da marzo 2020 in poi.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.1956
Min	-0.14
Asimmetria	-0.255
Curtosi	5.55
Shapiro-Wilk W	0.951
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.9

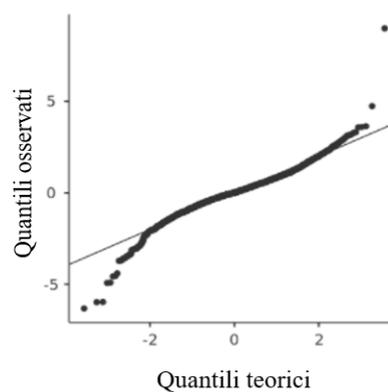


Figura 5.36: Q-Q Plot di EXO.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

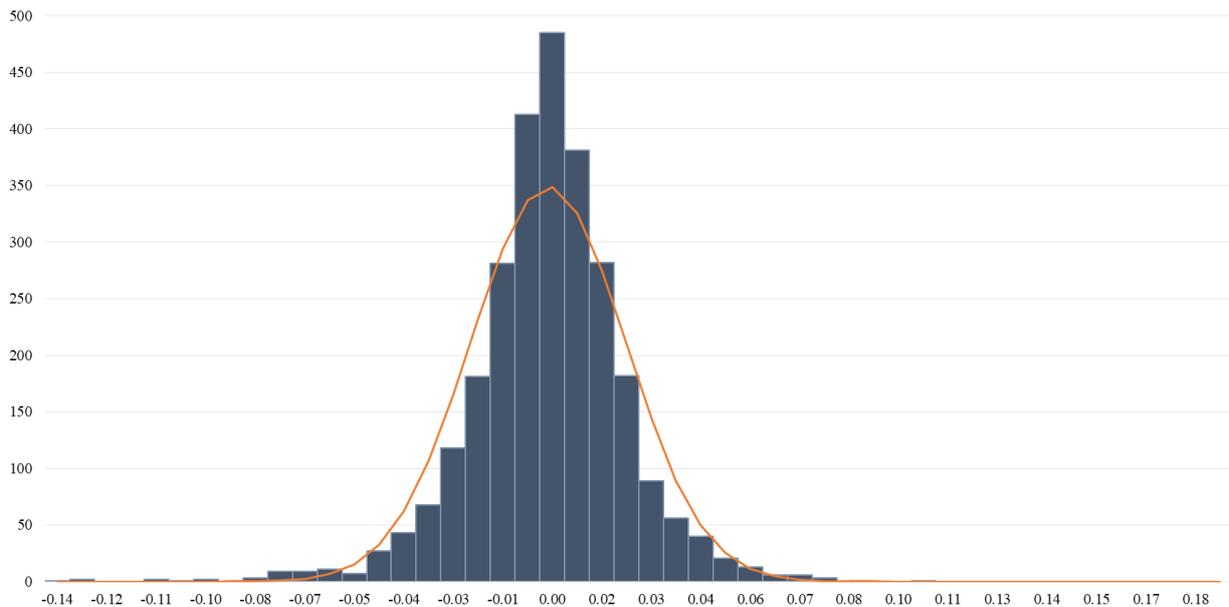


Figura 5.37: Distribuzione dei log-rendimenti di EXO.MI

Dall'analisi dei risultati ottenuti è possibile affermare che i rendimenti di EXO.MI seguono una distribuzione Normale: il valore della statistica del test di normalità è molto elevato e l'andamento dei quantili osservati approssima molto bene quello dei quantili teorici della normale seppur con isolate variazioni. Inoltre, sebbene l'indice di asimmetria sia negativo e l'indice di curtosi positivo, non sono comunque elevati in valore assoluto.

5.1.10 Atlantia S.p.A.

Analizzando, in Figura 5.38, l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in analisi, si osserva una generale stabilità con variazioni leggermente pronunciate nel periodo luglio 2011 – agosto 2012. Si osservano picchi isolati a giugno 2016 e agosto 2018 con successive drastiche variazioni nel corso del 2020 in cui si registrano evidenti picchi nei mesi di marzo, luglio e settembre.

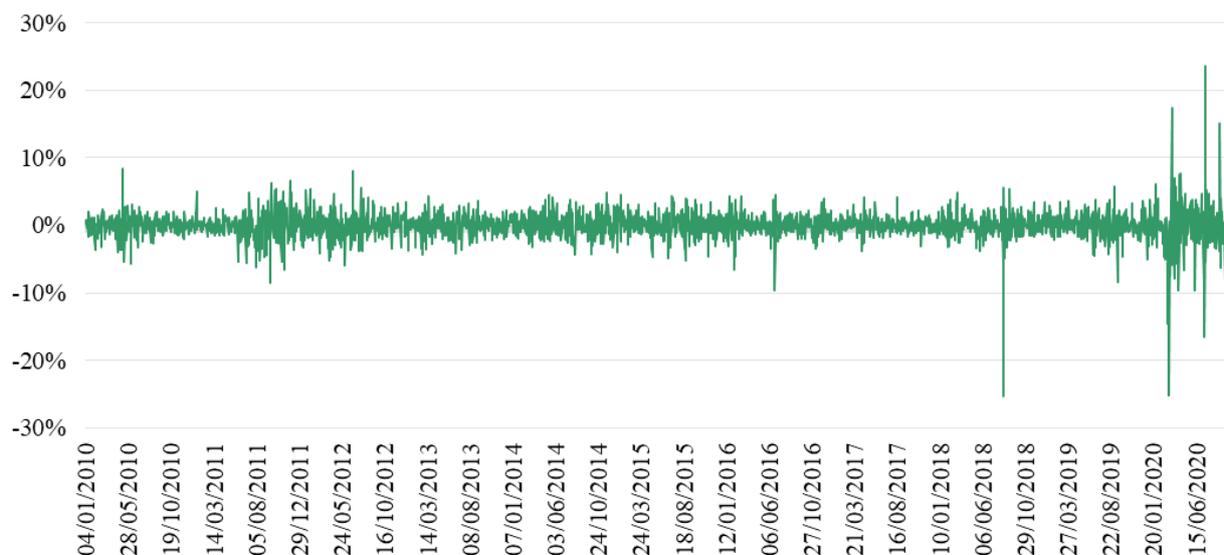


Figura 5.38: Andamento storico dei log-rendimenti di ATL.MI

Si riporta di seguito l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice ATL.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB a supporto dell'analisi di forza relativa:



Figura 5.39: Analisi della forza relativa tra ATL.MI e FTSE MIB

Nel periodo gennaio 2010 – febbraio 2016 si osserva una costante sovra-performance dell'indice ATL.MI rispetto al FTSE MIB, seguita da una maggior stabilità relativa che segnala un progressivo rafforzamento dell'indice di mercato; tra agosto e settembre 2018, infatti, si registra una repentina perdita di forza da parte di ATL.MI seguita da un graduale recupero fino

ad agosto 2019. Tuttavia, nel periodo successivo fino ad oggi, come segnalato dall'andamento decrescente della curva, il FTSE MIB ha costantemente sovra-performato l'indice in analisi.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.236
Min	-0.25
Asimmetria	-0.895
Curtosi	28.81
Shapiro-Wilk W	0.84
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.10

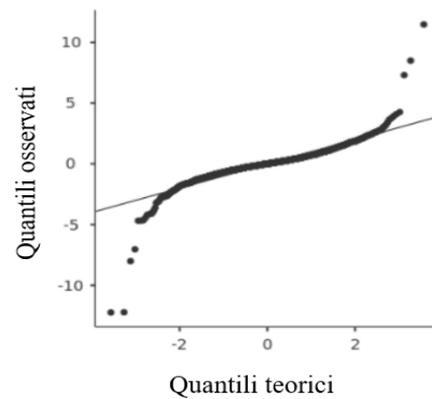


Figura 5.40: Q-Q Plot di ATL.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

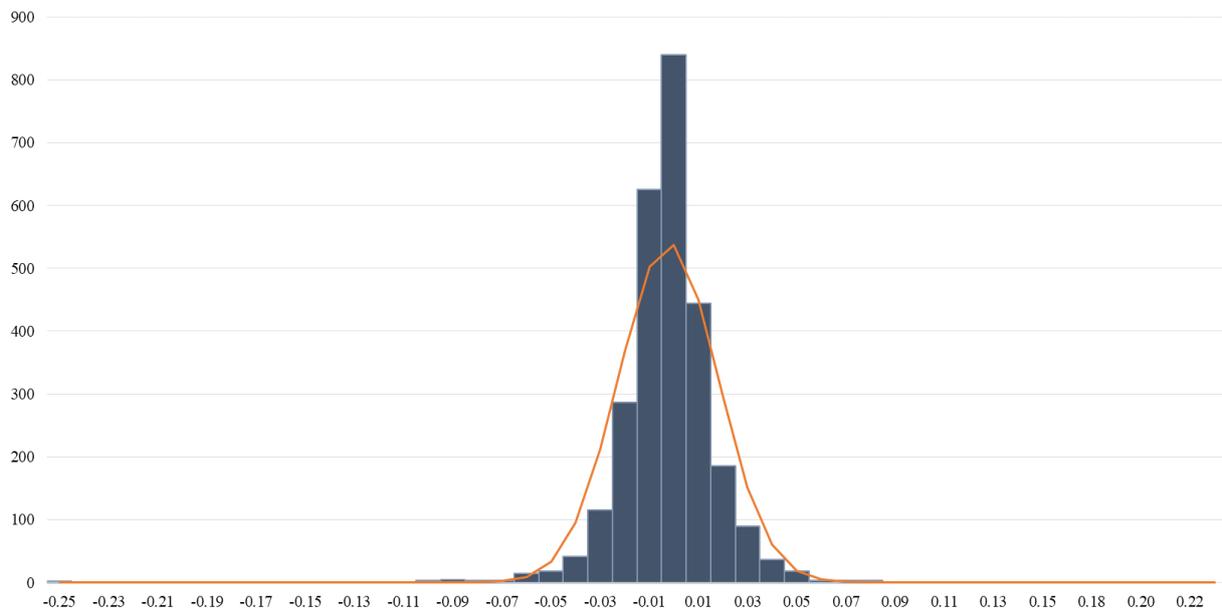


Figura 5.41: Distribuzione dei log-rendimenti di ATL.MI

Analizzando i risultati ottenuti è possibile dedurre che i log-rendimenti di ATL.MI seguano, con una certa approssimazione, una distribuzione Normale: in Figura 5.40 si evince un ottimo allineamento dei quantili osservati e la statistica W presenta un valore piuttosto elevato. È bene segnalare però la presenza di code grasse ed una lieve asimmetria della distribuzione verso sinistra.

5.1.11 Campari-Milano S.p.A.

Analizzando, in Figura 5.42, l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in esame, si osserva una generale stabilità con variazioni lievemente più pronunciate tra agosto 2011 e novembre 2012 e tra agosto 2015 e agosto 2016. Si registrano ampie variazioni nei mesi di marzo e aprile 2020.

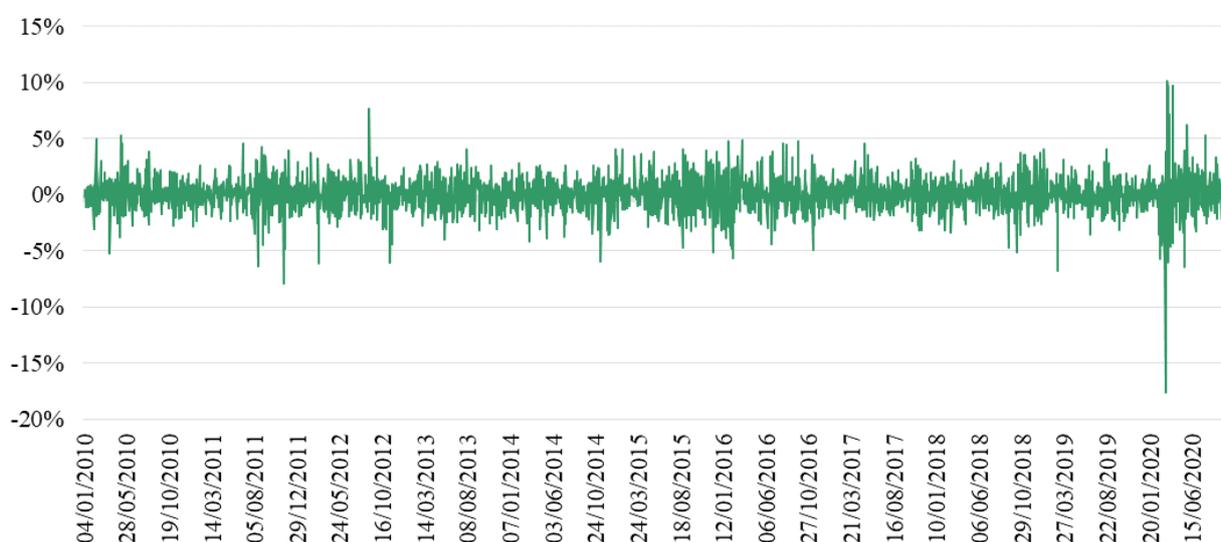


Figura 5.42: Andamento storico dei log-rendimenti di CPR.MI

Dall'analisi dell'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice CPR.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB riportato in Figura 5.43, si evince una complessiva sovraperformance dell'indice in esame rispetto all'indice di mercato ad eccezione di un periodo di stabilità relativa tra marzo 2012 e luglio 2015. Il FTSE MIB si è rafforzato in brevissimi periodi, tra cui, il più evidente, è maggio 2019 – gennaio 2020.



Figura 5.43: Analisi della forza relativa tra CPR.MI e FTSE MIB

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.1013
Min	-0.18
Asimmetria	-0.445
Curtosi	9.452
Shapiro-Wilk W	0.942
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.11

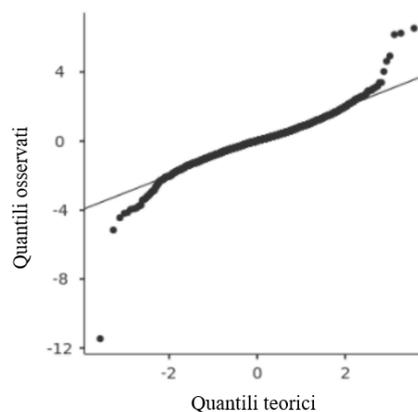


Figura 5.44: Q-Q Plot di CPR.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta in Figura 5.45 la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame.

Dall'analisi dei risultati ottenuti, è possibile affermare che i rendimenti di CPR.MI seguono una distribuzione Normale: l'alto valore della statistica di Shapiro-Wilk ed il buon allineamento dei quantili osservati con i quantili della Normale confermano tale ipotesi, nonostante la distribuzione dei rendimenti presenti una leggera asimmetria verso sinistra e sia leptocurtica.

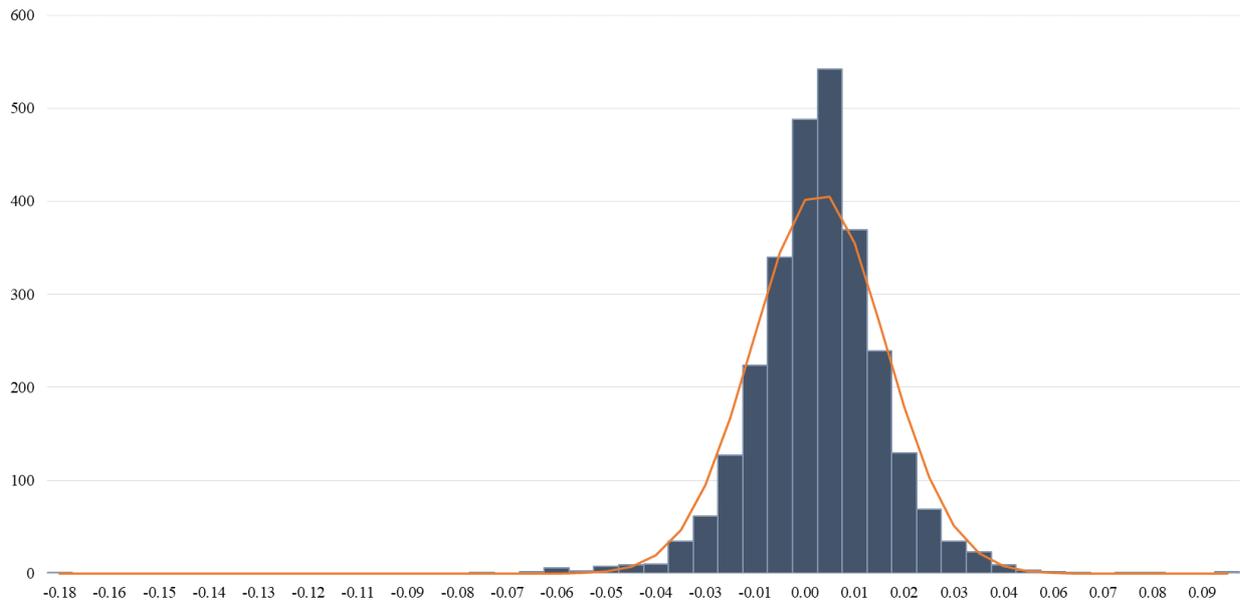


Figura 5.45: Distribuzione dei log-rendimenti di CPR.MI

5.1.12 DiaSorin S.p.A.

Analizzando l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in esame in Figura 5.46, si osserva che i rendimenti presentano sempre una certa variabilità pronunciata con picchi a novembre 2010, agosto e ottobre 2010, novembre 2015, marzo 2016 e agosto 2018. Si registra una variabilità rilevante nel corso del 2020 con picchi nei mesi di marzo, maggio e agosto.

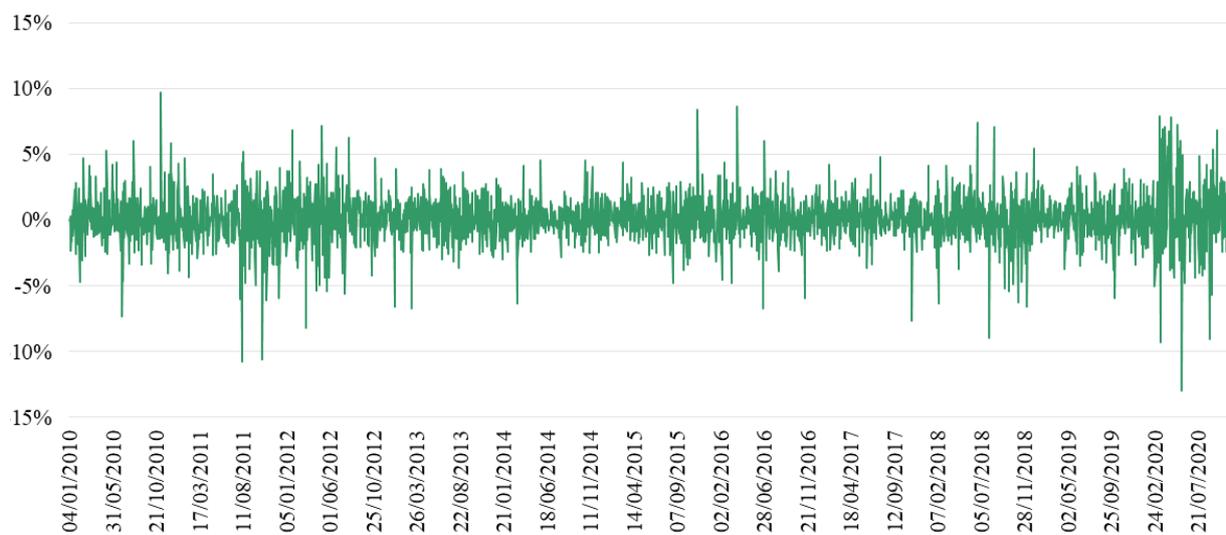


Figura 5.46: Andamento storico dei log-rendimenti di DIA.MI

Si riporta di seguito l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice DIA.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB a supporto dell'analisi di forza relativa:



Figura 5.47: Analisi della forza relativa tra DIA.MI e FTSE MIB

Dall'andamento in Figura 5.47, si evince che dopo un periodo di stabilità delle quotazioni dei due titoli da gennaio 2010 ad ottobre 2015, il titolo DIA.MI si è rafforzato sovraperformando costantemente l'indice di mercato (al netto di minime variazioni) fino a maggio 2020; in particolare, si osserva un repentino rafforzamento dell'indice DIA.MI tra febbraio e maggio 2020, seguito da un indebolimento improvviso tra maggio e settembre 2020. Nell'ultimo mese si osserva nuovamente un andamento crescente della curva segnalando un indebolimento del FTSE MIB ed una ripresa del titolo in analisi.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.097
Min	-0.13
Asimmetria	-0.251
Curtosi	4.51
Shapiro-Wilk W	0.949
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.12

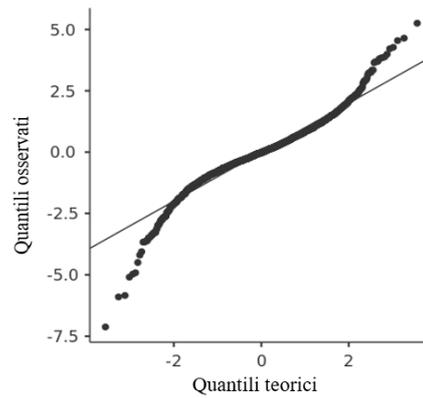


Figura 5.48: Q-Q Plot di DIA.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

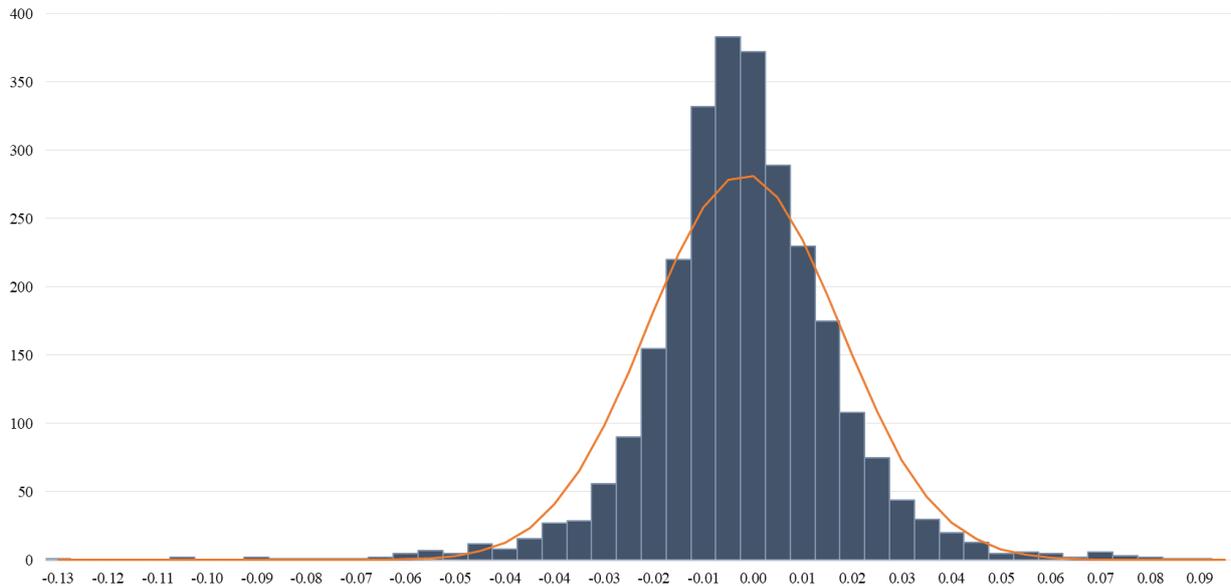


Figura 5.49: Distribuzione dei log-rendimenti di DIA.MI

Analizzando i risultati ottenuti è possibile concludere che la distribuzione dei rendimenti di DIA.MI sia approssimabile con una Normale: ad eccezione di variazioni agli estremi, si ha un buon allineamento dei quantili osservati ed il test di normalità restituisce un valore della statistica elevato. La curva è leggermente asimmetrica verso sinistra e presenta un indice di curtosi positivo ma non molto elevato.

5.1.13 Recordati S.p.A.

Analizzando l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in esame in Figura 5.50, si osserva una generale stabilità dei rendimenti ad eccezione di lievi variazioni più pronunciate tra luglio e novembre 2011, tra luglio 2015 e febbraio 2016 con picchi a febbraio e luglio 2018. La più drastica variazione si registra nel corso del 2020 con picchi nel mese di marzo mai raggiunti prima nell'intervallo di tempo oggetto di analisi.

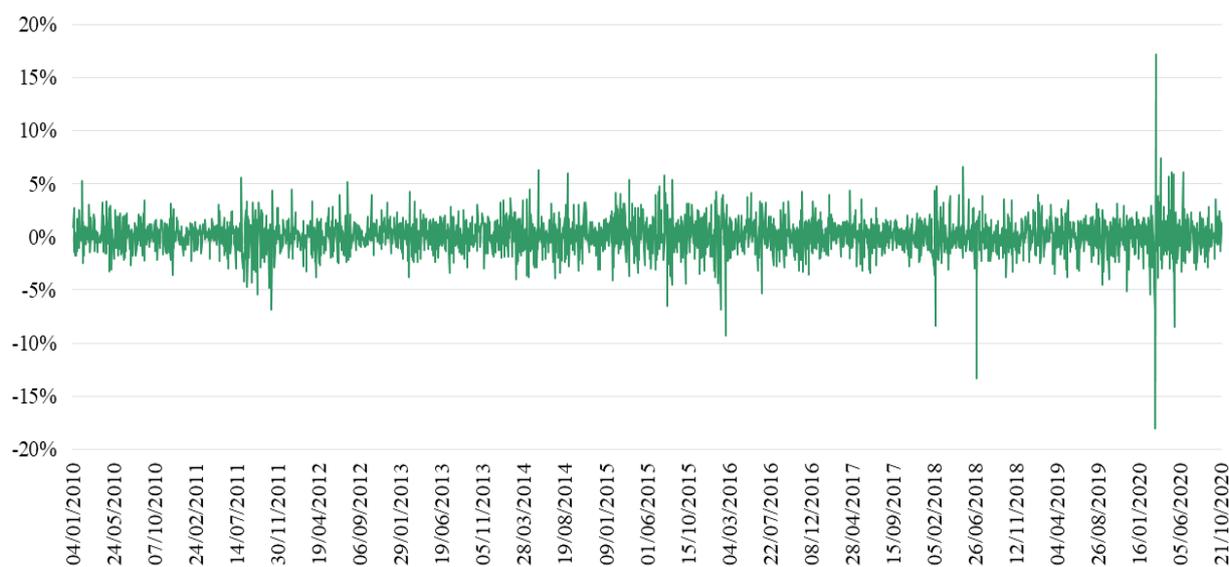


Figura 5.50: Andamento storico dei log-rendimenti di REC.MI

Si riporta di seguito l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice REC.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB a supporto dell'analisi di forza relativa:



Figura 5.51: Analisi della forza relativa tra REC.MI e FTSE MIB

Osservando l'andamento in Figura 5.51, si evince che il titolo in analisi ha costantemente sovraperformato il FTSE MIB da gennaio 2010 ad agosto 2016; successivamente si sono alternati periodi in cui REC.MI si è indebolito rispetto all'indice di mercato e periodi di ripresa. Dopo un periodo di difficoltà per il titolo da settembre 2019 a febbraio 2020, si è registrata una repentina ripresa nel mese di marzo 2020 che però non si è dimostrata stabile dato l'immediato successivo rafforzamento del FTSE MIB; tuttavia nell'ultimo periodo sembra che REC.MI sia ritornato a sovraperformare stabilmente l'indice di mercato.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.17
Min	-0.18
Asimmetria	-0.43
Curtosi	12.92
Shapiro-Wilk W	0.927
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.13

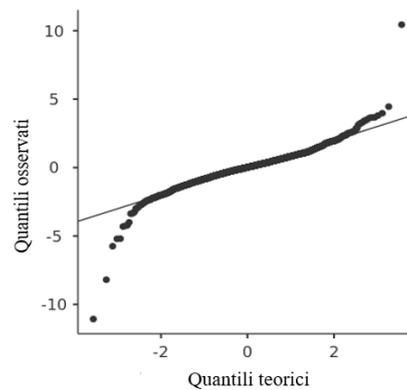


Figura 5.52: Q-Q Plot di REC.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

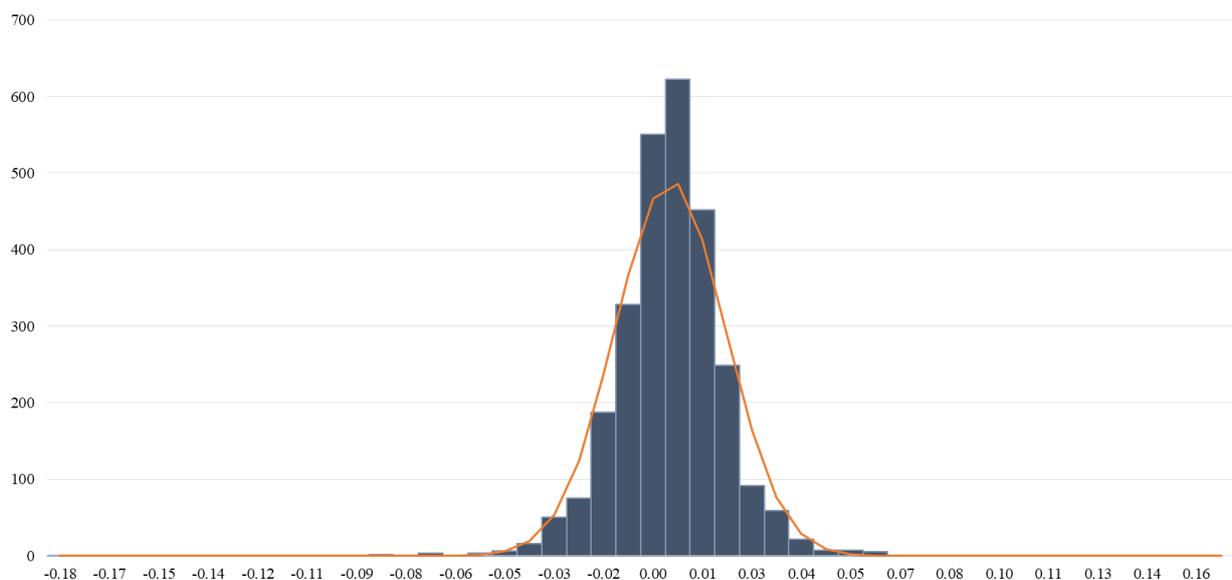


Figura 5.53: Distribuzione dei log-rendimenti di REC.MI

Nonostante la distribuzione presenti un indice di curtosi non trascurabile e sia lievemente asimmetrica verso sinistra, dall'osservazione dei risultati ottenuti si evince un elevato valore della statistica W ed un ottimo allineamento dei quantili (ad eccezione di piccole variazioni in corrispondenza di bassi valori teorici). Si può dunque affermare che la distribuzione dei log-rendimenti del titolo REC.MI sia approssimabile con una Normale.

5.1.14 Amplifon S.p.A.

Analizzando l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in esame in Figura 5.54, si osservano numerose variazioni localizzate tra febbraio e settembre 2010, tra giugno 2011 e febbraio 2012 e tra luglio e agosto 2012. Le variazioni più rilevanti si registrano nel 2020, nel corso del quale (marzo 2020) si è raggiunto il picco più consistente dell'intero intervallo di tempo considerato.

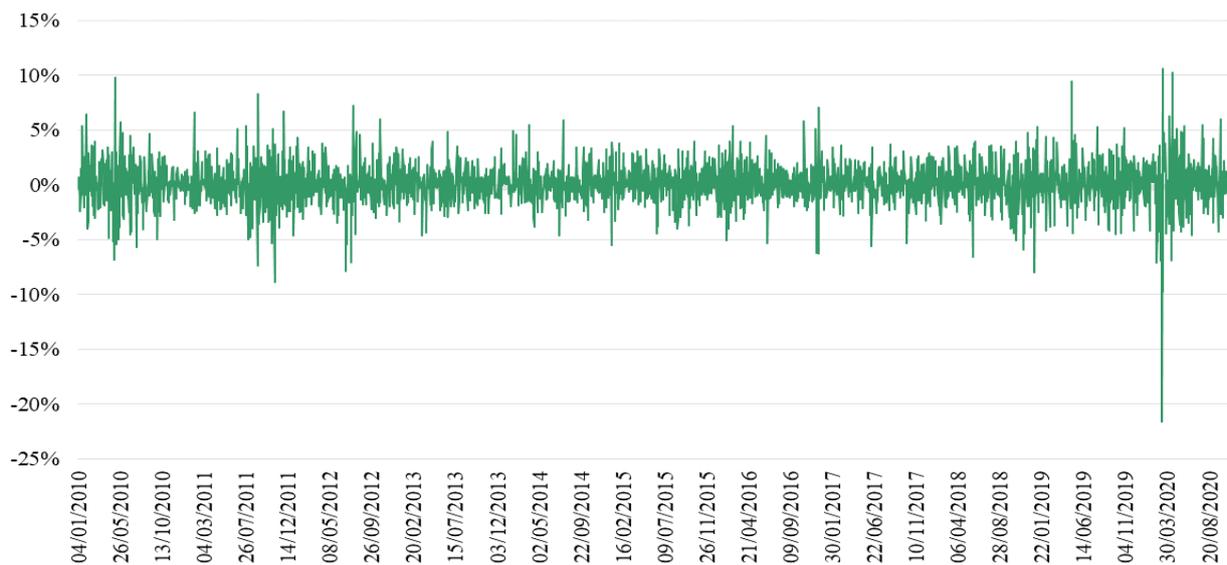


Figura 5.54: Andamento storico dei log-rendimenti di AMP.MI

Si riporta di seguito l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice AMP.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB a supporto dell'analisi di forza relativa:



Figura 5.55: Analisi della forza relativa tra AMP.MI e FTSE MIB

Analizzando l'andamento in Figura 5.55, si osserva che nel periodo gennaio 2010 – novembre 2015 le quotazioni sono tra loro relativamente stabili dato l'andamento del rapporto circa costante. A partire da dicembre 2015 si registra una sovra-performance costante del titolo AMP.MI sul FTSE MIB al netto di brevissimi periodi in cui l'indice di mercato si è dimostrato più forte.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.11
Min	-0.22
Asimmetria	-0.515
Curtosi	8.55
Shapiro-Wilk W	0.946
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.14

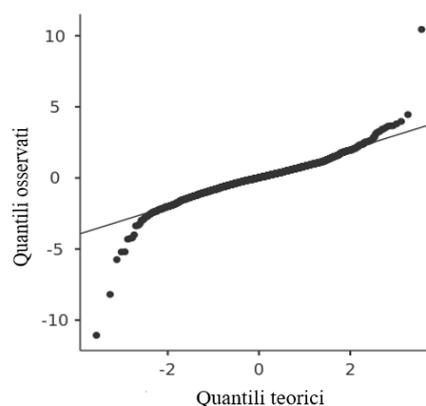


Figura 5.56: Q-Q Plot di AMP.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

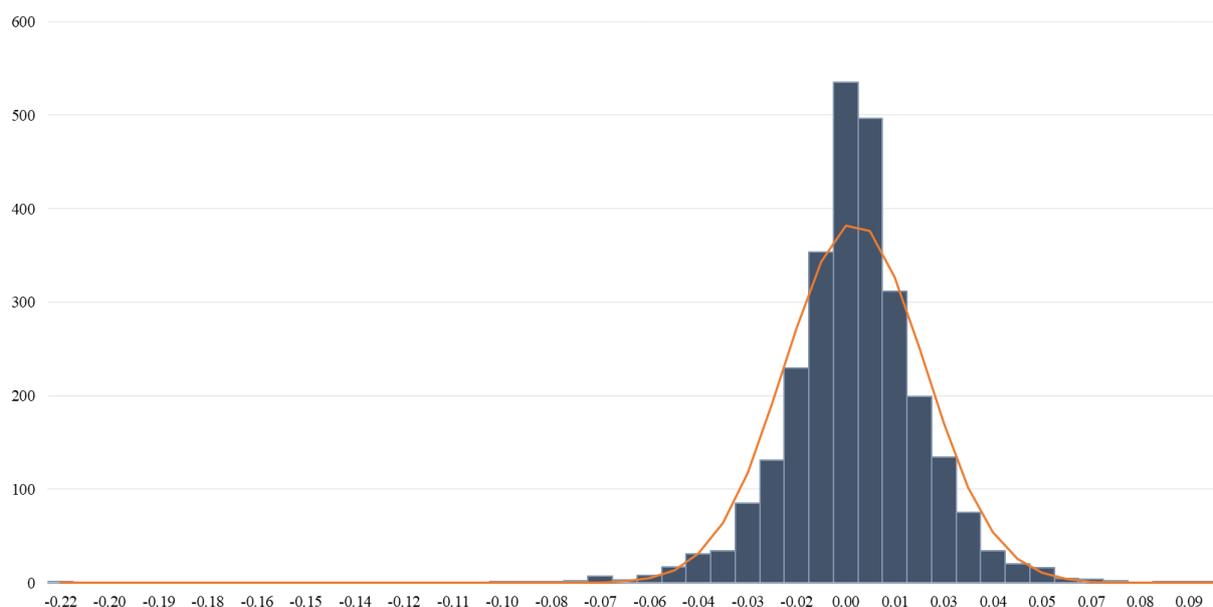


Figura 5.57: Distribuzione dei log-rendimenti di AMP.MI

Dall'analisi dei risultati ottenuti si osserva che la distribuzione è asimmetrica verso sinistra e leptocurtica. Si verifica un ottimo allineamento dei quantili (ad eccezione di pochi punti a maggior distanza dalla curva teorica in corrispondenza di bassi valori) ed il test di normalità restituisce un valore elevato della statistica. Si può dunque affermare che la distribuzione dei log-rendimenti del titolo AMP.MI sia approssimabile con una Normale.

5.1.15 Prysmian S.p.A.

Analizzando l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in esame in Figura 5.58, si osservano variazioni rilevanti fin dall'inizio dell'intervallo di tempo considerato: in particolare, si verificano tra aprile e giugno 2010 e tra agosto e gennaio 2012. Dopo un periodo di maggior stabilità, si osserva un picco rilevante a giugno 2016 e variazioni repentine tra giugno 2018 ed oggi, con il raggiungimento di un picco a marzo 2020.

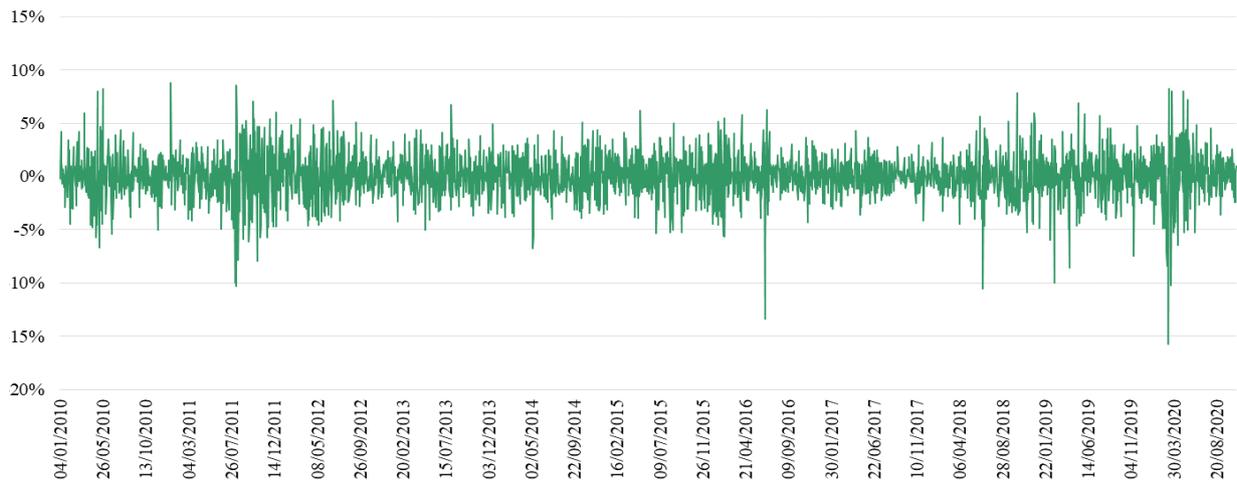


Figura 5.58: Andamento storico dei log-rendimenti di PRY.MI

Dall’analisi dell’andamento del rapporto tra le quotazioni dell’indice PRY.MI e le quotazioni dell’indice di mercato FTSE MIB riportato in Figura 5.59, si evince una generale alternanza della forza relativa tra i due indici in analisi. Da gennaio 2010 ad aprile 2013 si ha una sostanziale dominanza di PRY.MI sul FTSE MIB, il quale, sebbene si rafforzi tra dicembre 2013 e ottobre 2014 continua a sottoperformare rispetto al titolo in analisi per tutto il periodo successivo fino ad ottobre 2016. PRY.MI perde forza in modo evidente tra ottobre 2016 e aprile 2019 per poi sovra-performare nuovamente il FTSE MIB fino ad oggi.



Figura 5.59: Analisi della forza relativa tra PRY.MI e FTSE MIB

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.088
Min	-0.16
Asimmetria	-0.378
Curtosi	3.416
Shapiro-Wilk W	0.97
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.15

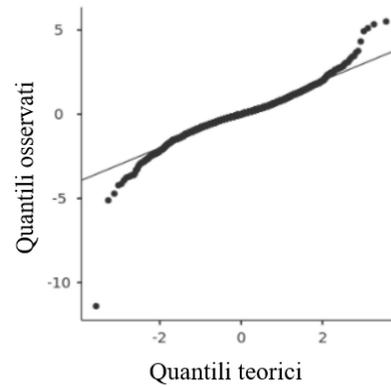


Figura 5.60: Q-Q Plot di PRY.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta in Figura 5.61 la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame.

Dall'analisi dei risultati ottenuti, si evince un ottimo allineamento dei quantili osservati lungo la retta teorica della normale ed un valore elevato della statistica di Shapiro-Wilk. Inoltre, la distribuzione risulta lievemente asimmetrica verso sinistra e presenta un indice di curtosi positivo ma relativamente non elevato. È possibile dunque concludere che la distribuzione dei rendimenti di PRY.MI sia approssimabile con una Normale.

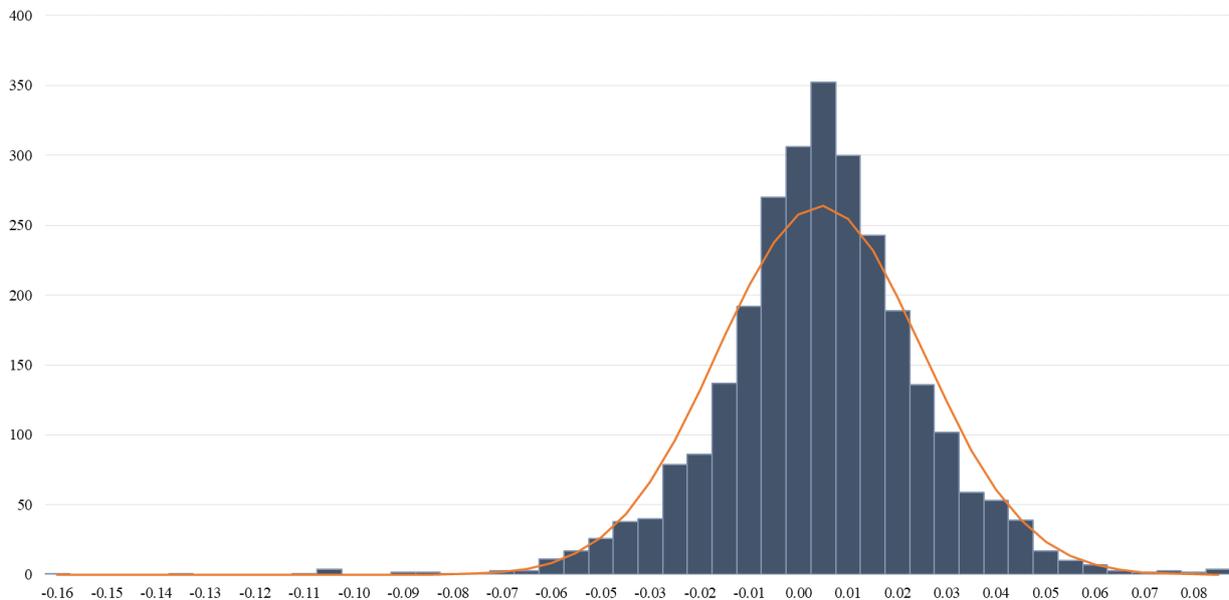


Figura 5.61: Distribuzione dei log-rendimenti di PRY.MI

5.1.16 Telecom Italia S.p.A.

Analizzando l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in esame in Figura 5.62, si osserva una generale variabilità sostenuta nel tempo con brevi periodi di maggior stabilità; i periodi principali interessati dalle variazioni più rilevanti sono maggio-agosto 2010 e luglio 2011 - luglio 2016 in cui si sono registrati picchi evidenti a maggio 2010 e giugno 2016. Si osserva una drastica variazione a marzo 2020 in corrispondenza della quale si è raggiunto un picco consistente.

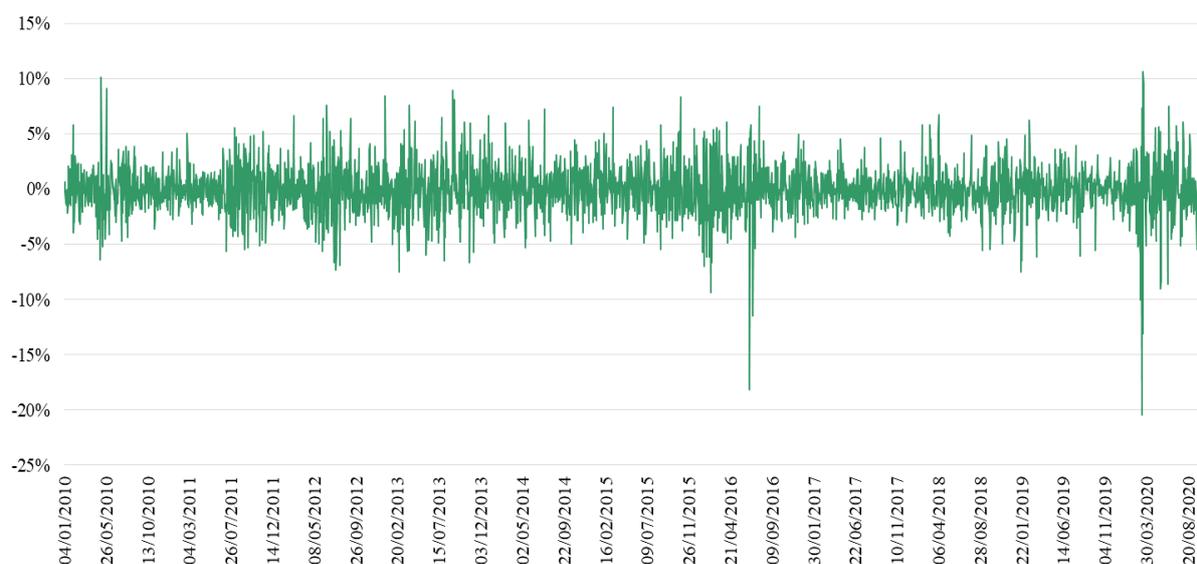


Figura 5.62: Andamento storico dei log-rendimenti di TIT.MI

Si riporta di seguito l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice TIT.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB a supporto dell'analisi di forza relativa:



Figura 5.63: Analisi della forza relativa tra TIT.MI e FTSE MIB

Analizzando l'andamento in Figura 5.63, si evince una generale sotto-performance di TIT.MI rispetto al FTSE MIB ad eccezione di due periodi in cui il titolo in esame risulta essersi rafforzato rispetto all'indice di mercato ed in corrispondenza dei quali, dunque, si registrano andamenti crescenti del rapporto delle quotazioni. Figura 5.55

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.1068
Min	-0.2
Asimmetria	-0.397
Curtosi	5.56
Shapiro-Wilk W	0.958
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.16

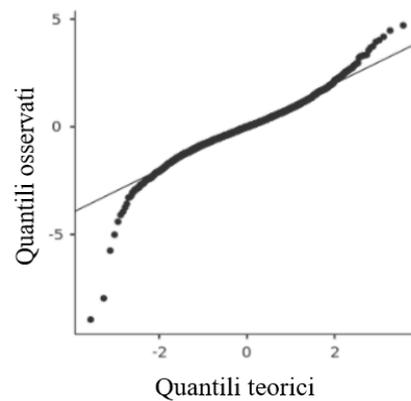


Figura 5.64: Q-Q Plot di TIT.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

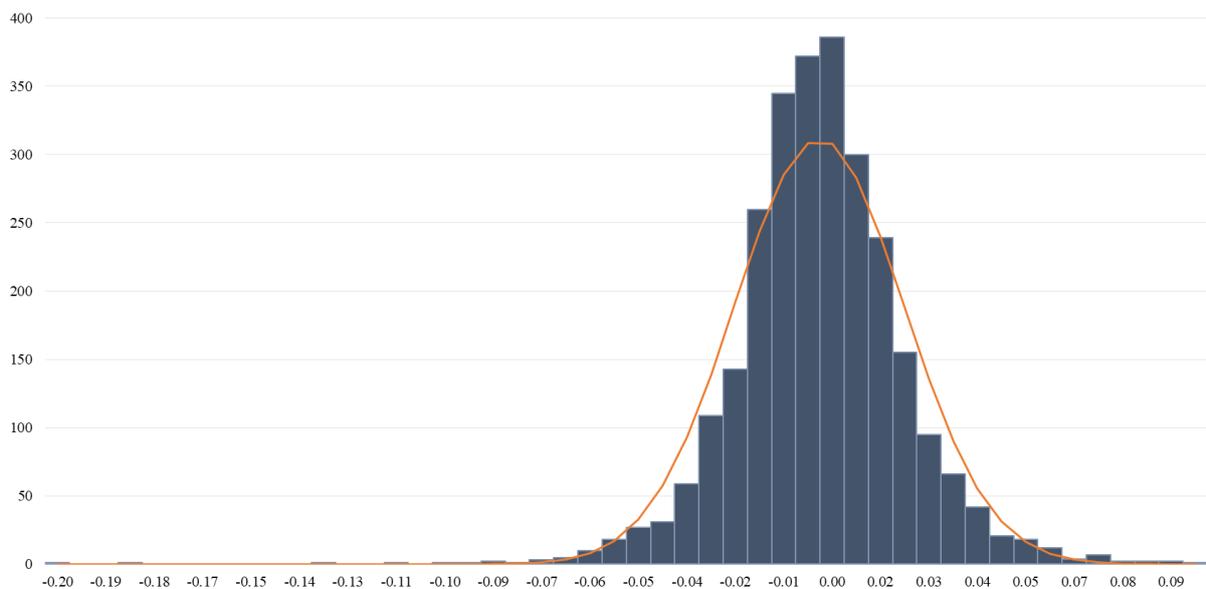


Figura 5.65: Distribuzione dei log-rendimenti di TIT.MI

Dall'analisi dei risultati ottenuti, si osserva un buon allineamento dei quantili osservati con quelli attesi della distribuzione normale ed un valore della statistica W accettabile per cui, sebbene la distribuzione sia decentrata e leptocurtica, si può concludere che la distribuzione dei rendimenti di TIT.MI sia approssimabile con una Normale.

5.1.17 Tenaris S.A.

Si riporta di seguito l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo TEN.MI:

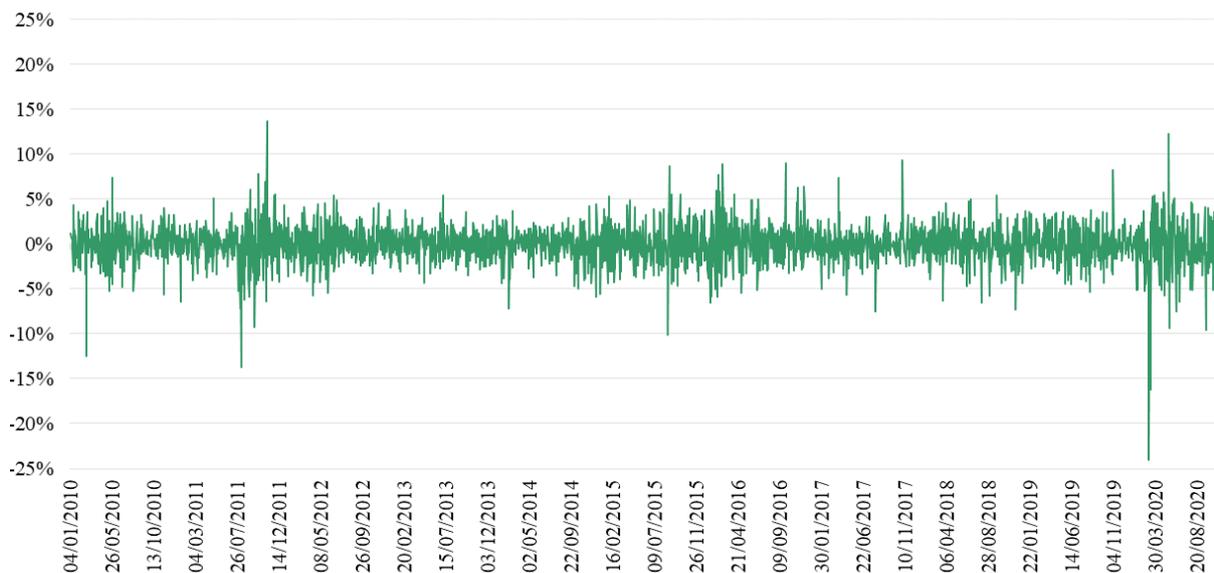


Figura 5.66: Andamento storico dei log-rendimenti di TEN.MI

Analizzando il grafico in Figura 5.66, si osserva un primo picco a febbraio 2010 seguito da una ancor più repentina variazione tra agosto 2011 e giugno 2012. Dopo un periodo di maggior stabilità, i rendimenti subiscono una nuova variazione tra agosto 2015 e maggio 2016; successivamente si verificano picchi sparsi a settembre 2016, marzo, agosto e novembre 2017. La variazione più drastica del decennio si è registrata a marzo 2020 con il raggiungimento del picco più ampio, seguita da importanti variazioni nel corso dell'anno.

Si riporta di seguito l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice TEN.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB a supporto dell'analisi di forza relativa:



Figura 5.67: Analisi della forza relativa tra TEN.MI e FTSE MIB

Analizzando l'andamento in Figura 5.67, si osserva una generale oscillazione della forza relativa tra i due indici: da gennaio 2010 ad agosto 2012 domina il titolo TEN.MI, da agosto 2012 a giugno 2016 si registra un rafforzamento dell'indice di mercato e dunque una sottoperformance di TEN.MI, il quale ha ripreso forza nel periodo immediatamente successivo fino a dicembre 2016. Successivamente il FTSE MIB si è rafforzato nuovamente fino ad ottobre 2017 e dopo un breve periodo in cui il titolo in analisi ha sovraperformato l'indice di mercato, questo è ritornato a dominare a partire da luglio 2018 fino ad oggi. In particolare dal 2019, si registra una forte e costante sotto performance di TEN.MI.

Si riportano in Tabella 5.17, in Figura 5.68 ed in Figura 5.69 i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale: sebbene in corrispondenza dei valori estremi i quantili osservati deviano dalla normalità, si verifica un buon allineamento generale. A conferma del fatto che la distribuzione sia leptocurtica si verifica un indice di curtosi positivo oltre che una leggera asimmetria verso sinistra. La statistica di Shapiro-Wilk è elevata per cui con buona approssimazione si può concludere che la distribuzione dei log-rendimenti sia approssimabile con una Normale.

<i>Statistiche</i>	
Max	0.137
Min	-0.24
Asimmetria	-0.721
Curtosi	9.73
Shapiro-Wilk W	0.937
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.17

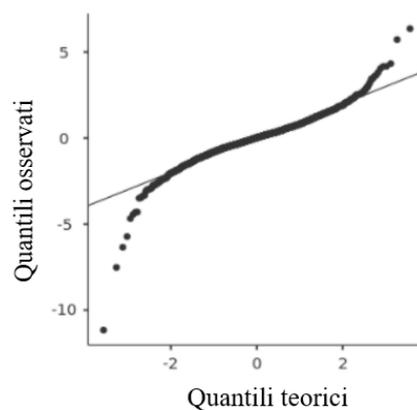


Figura 5.68: Q-Q Plot di TEN.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

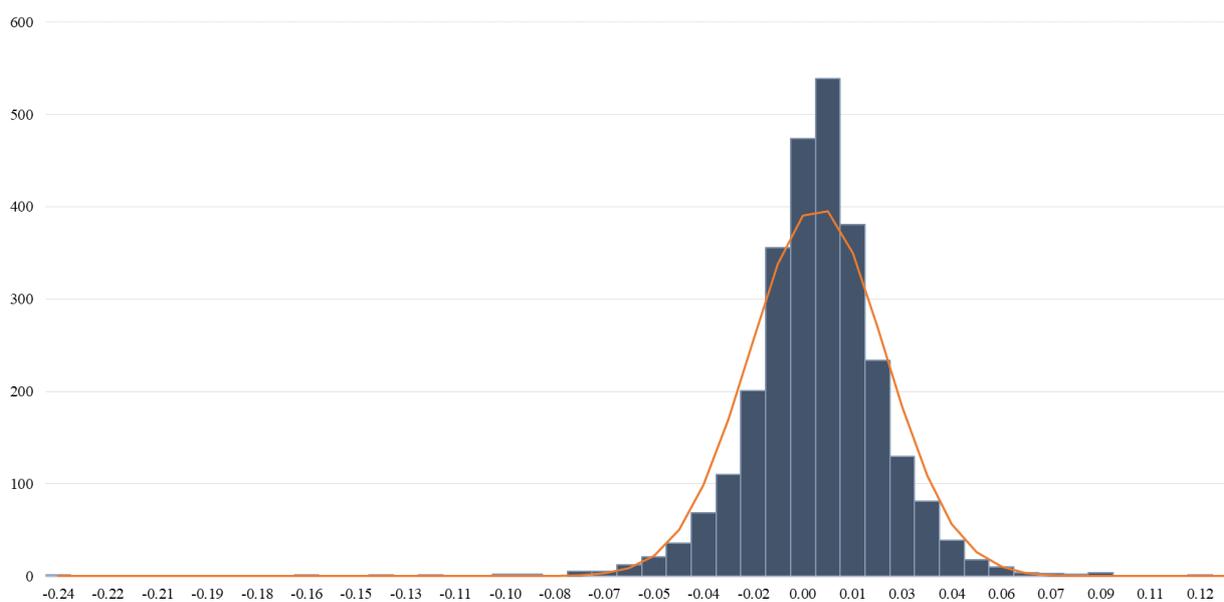


Figura 5.69: Distribuzione dei log-rendimenti di TEN.MI

5.1.18 Hera S.p.A.

Analizzando l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in esame in Figura 5.70, si evince una generale stabilità nel corso del tempo ad eccezione di localizzate variazioni e picchi tra

agosto 2011 e gennaio 2012 e tra luglio 2012 e ottobre 2013. Il più drastico picco del decennio si è verificato a marzo 2020 seguito da una variabilità più contenuta nel corso dell'anno.

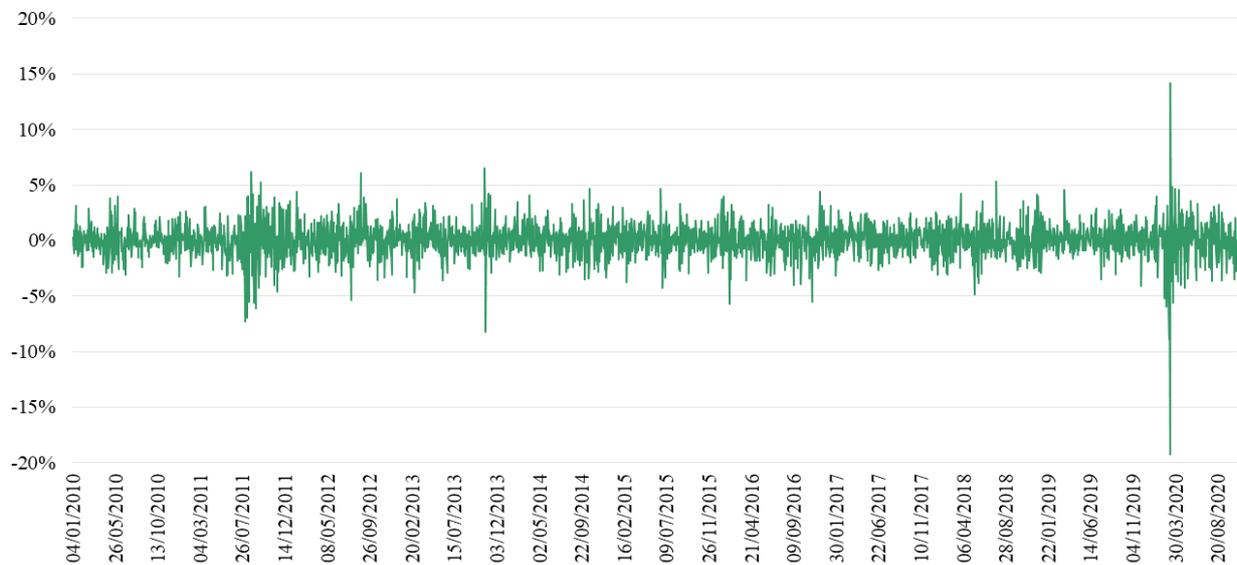


Figura 5.70: Andamento storico dei log-rendimenti di HER.MI

Si riporta di seguito l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice HER.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB a supporto dell'analisi di forza relativa:



Figura 5.71: Analisi della forza relativa tra HER.MI e FTSE MIB

Analizzando l'andamento in Figura 5.71, si osserva una costante sopra-performance dell'indice HER.MI rispetto al FTSE MIB. La sua forza relativa diventa ancor più incisiva tra dicembre 2015 e febbraio 2016; successivamente, tra agosto e dicembre 2016, l'indice di mercato si rafforza fino a dominare HER.MI. Nel periodo successivo si registra nuovamente un andamento costantemente crescente fino a marzo 2020 quando il titolo HER.MI inizia a sottoperformare il FTSE MIB.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.142
Min	-0.19
Asimmetria	-0.7
Curtosi	13.41
Shapiro-Wilk W	0.932
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.18

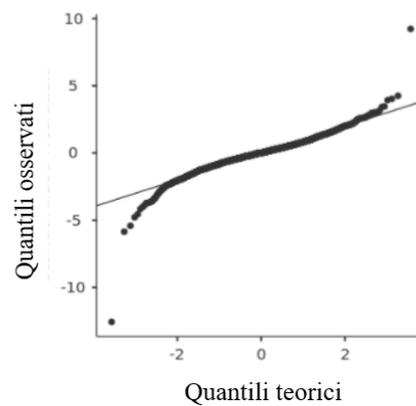


Figura 5.72: Q-Q Plot di HER.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

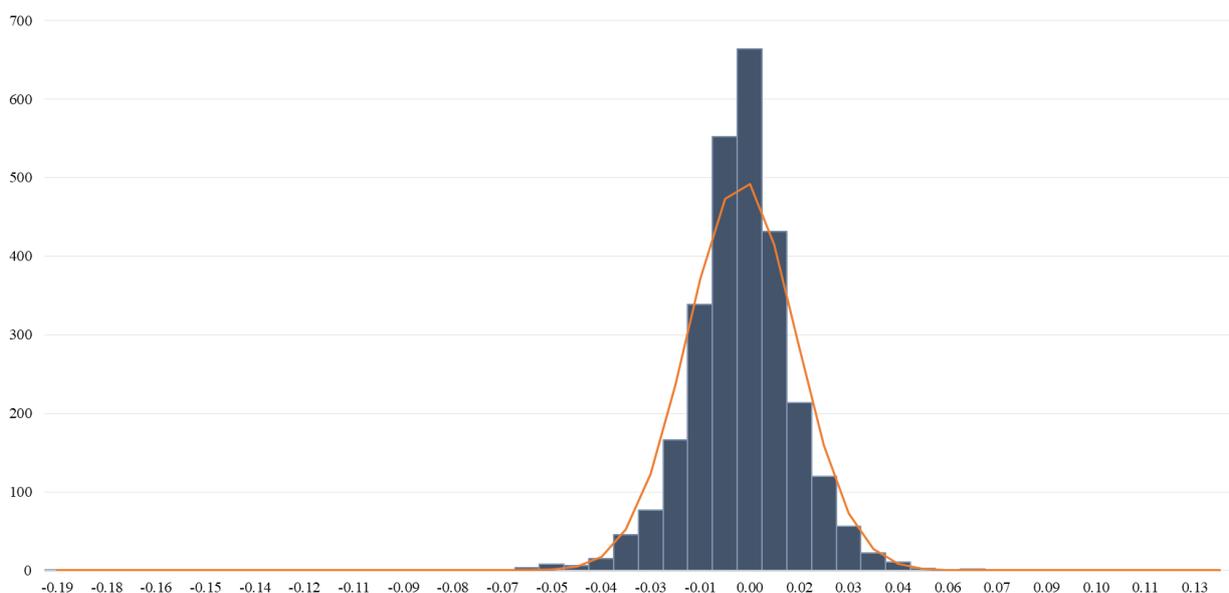


Figura 5.73: Distribuzione dei log-rendimenti di HER.MI

Nonostante la distribuzione presenti un indice di curtosi non trascurabile e sia asimmetrica a sinistra, dall'osservazione dei risultati ottenuti si evince un elevato valore della statistica W ed un ottimo allineamento dei quantili (ad eccezione di piccole variazioni in corrispondenza di bassi valori teorici). Si può dunque affermare che, con buona approssimazione, la distribuzione dei log-rendimenti del titolo HER.MI segua una Normale.

5.1.19 Interpump Group S.p.A.

Analizzando l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in esame in Figura 5.74, si evince fin da subito una forte variabilità nel periodo gennaio 2010 – novembre 2012 con picchi evidenti a maggio 2010, agosto 2011 e novembre 2012. Si registrano forti variazioni anche tra febbraio 2015 e giugno 2016 e da novembre 2018 in poi con ancor più evidenti oscillazioni nel corso del 2020 in cui si sono raggiunti picchi nei mesi di marzo e ottobre.

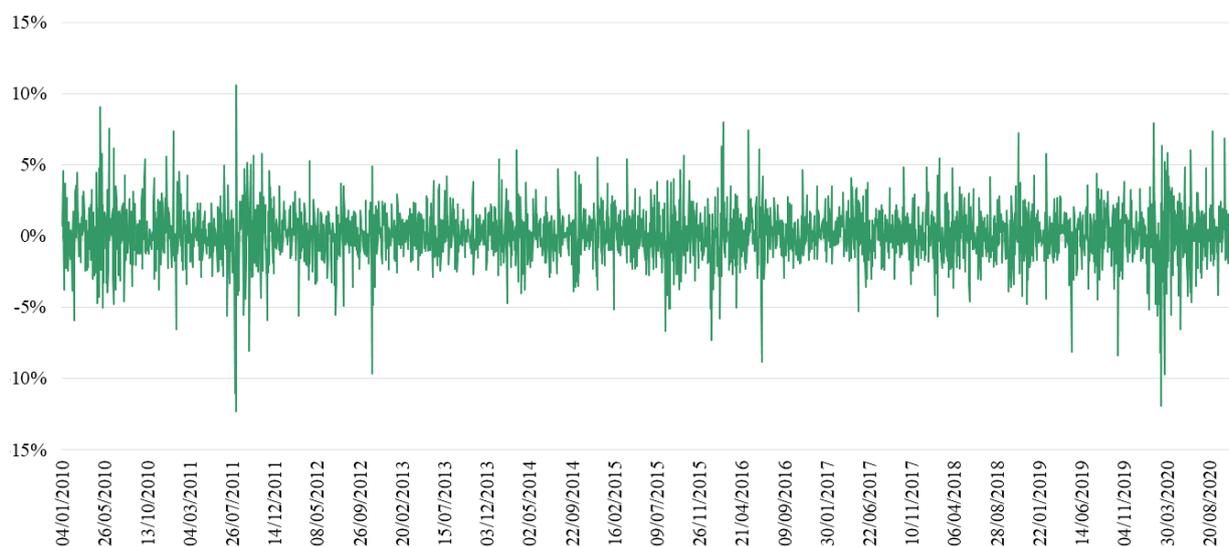


Figura 5.74: Andamento storico dei log-rendimenti di IP.MI

Si riporta di seguito l'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice IP.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB a supporto dell'analisi di forza relativa:



Figura 5.75: Analisi della forza relativa tra IP.MI e FTSE MIB

Analizzando l'andamento in Figura 5.75, da gennaio 2010 a gennaio 2017 si osserva una costante sovra-performance dell'indice IP.MI rispetto al FTSE MIB seguita da un periodo di rafforzamento di quest'ultimo, segnalato da un andamento del rapporto delle quotazioni più stabile. Da maggio 2019 a febbraio 2020, il titolo IP.MI sottoperforma l'indice di mercato per poi rafforzarsi repentinamente tra febbraio e maggio 2020. Dopo un breve periodo di indebolimento conclusosi a giugno 2020, l'indice è tornato, negli ultimi mesi, a sovra-performare il mercato.

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.106
Min	-0.12
Asimmetria	-0.277
Curtosi	4.04
Shapiro-Wilk W	0.956
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.19

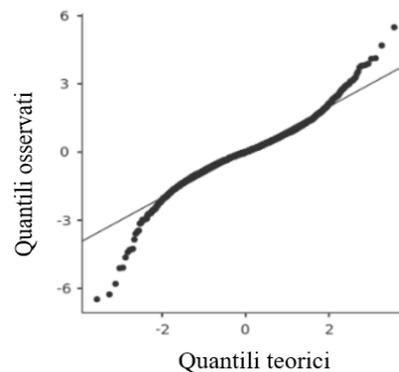


Figura 5.76: Q-Q Plot di IP.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta di seguito la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame:

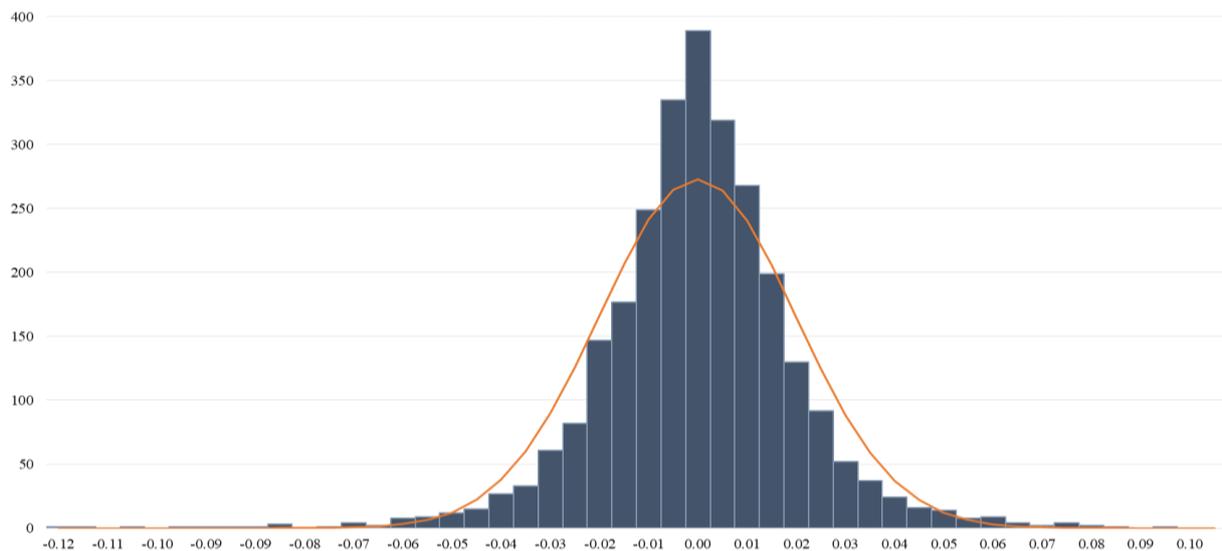


Figura 5.77: Distribuzione dei log-rendimenti di IP.MI

Analizzando i risultati ottenuti è possibile concludere che la distribuzione dei rendimenti di IP.MI segue con buona approssimazione una Normale: ad eccezione di scostamenti agli estremi, si ha un buon allineamento dei quantili osservati ed il test di normalità restituisce un valore della statistica elevato. La curva è leggermente asimmetrica verso sinistra e presenta un indice di curtosi positivo ma non molto elevato.

5.1.20 Buzzi Unicem S.p.A.

Analizzando l'andamento storico dei log-rendimenti del titolo in esame in Figura 5.78, si evince una forte variabilità nell'intero intervallo di tempo in analisi, soprattutto tra agosto 2011 e settembre 2012, tra giugno 2015 e luglio 2016 e da marzo 2020 in poi. I picchi più rilevanti sono stati raggiunti a maggio 2010, agosto 2011, marzo 2014, giugno 2016, marzo e giugno 2020.

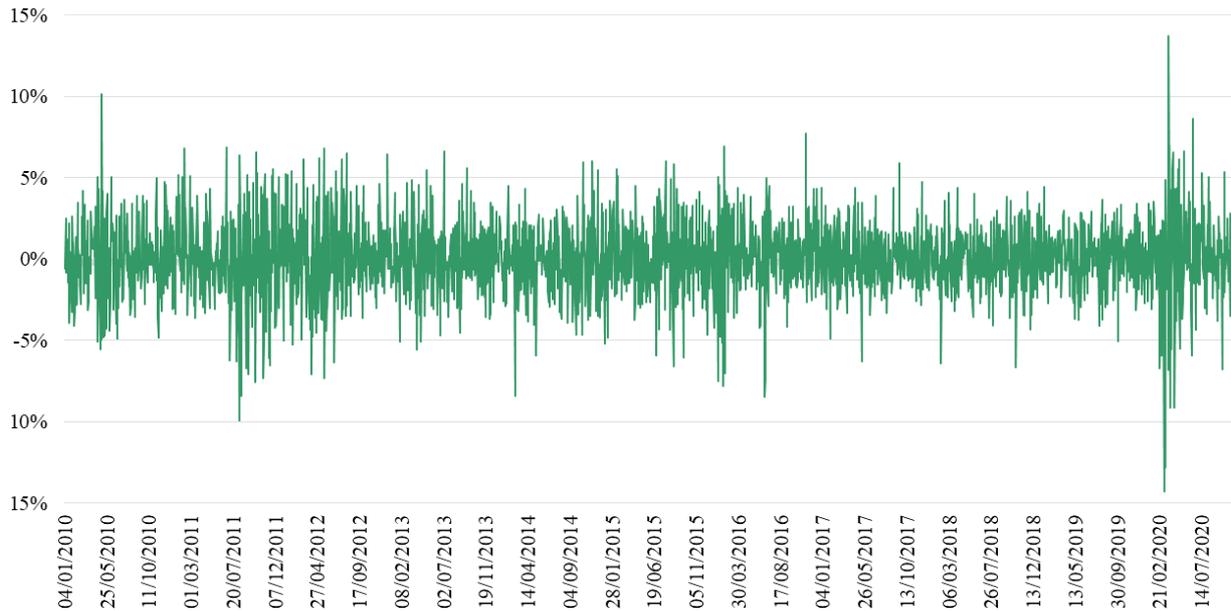


Figura 5.78: Andamento storico dei log-rendimenti di BZU.MI

Dall'analisi dell'andamento del rapporto tra le quotazioni dell'indice BZU.MI e le quotazioni dell'indice di mercato FTSE MIB riportato in Figura 5.79, si evince una generale alternanza della forza relativa dei due indici: in un primo periodo domina BZU.MI fino a marzo 2013 quando il FTSE MIB si rafforza e provoca un andamento decrescente della curva. Il titolo in analisi ritorna a sovraperformare l'indice di mercato da gennaio 2015 a marzo 2017, per poi perdere nuovamente forza fino a dicembre 2018. Dal 2019 si osserva un andamento crescente della curva in corrispondenza del quale si registra una sovra-performance di BZU.MI sul FTSE MIB.



Figura 5.79: Analisi della forza relativa tra BZU.MI e FTSE MIB

Si riportano di seguito i dati utili alla valutazione della bontà di approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con la Normale:

<i>Statistiche</i>	
Max	0.137
Min	-0.14
Asimmetria	-0.14
Curtosi	2.49
Shapiro-Wilk W	0.979
Shapiro-Wilk p	<0.001

Tabella 5.20

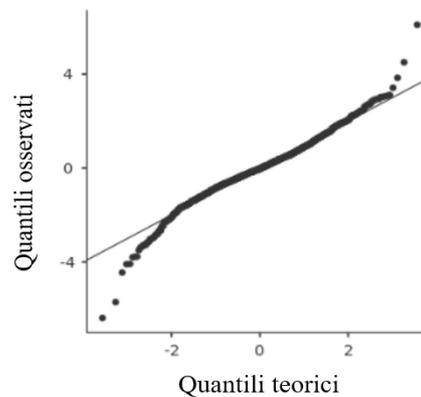


Figura 5.80: Q-Q Plot di BZU.MI

A completamento dell'analisi, inoltre, si riporta in Figura 5.81 la distribuzione di frequenza e la funzione di densità dei rendimenti dell'indice in esame.

Dai risultati ottenuti si evince una buona approssimazione della distribuzione dei log-rendimenti con una Normale, infatti, la statistica di Shapiro-Wilk è elevata ed il Q-Q Plot mostra un allineamento quasi perfetto con i valori teorici della normale (ad eccezione di piccoli scostamenti ai valori estremi). La distribuzione, inoltre, è lievemente asimmetrica verso sinistra e non presenta un indice di curtosi elevato.

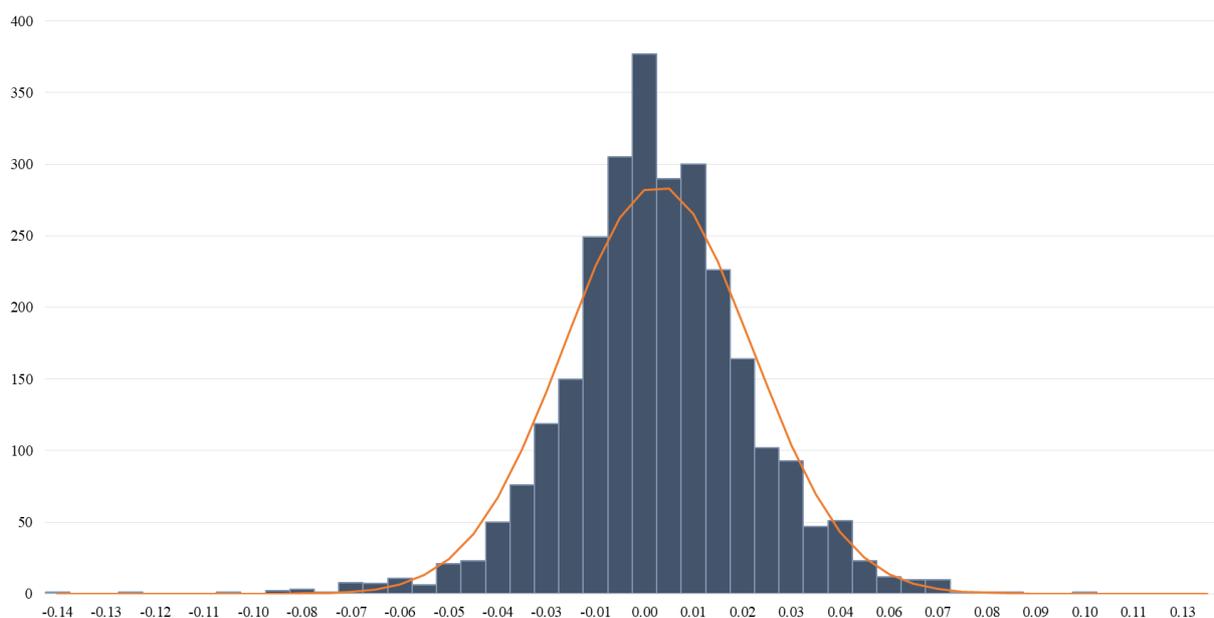


Figura 5.81: Distribuzione dei log-rendimenti di BZU.MI

5.2 *Conclusione dell'analisi e considerazioni storiche*

La fonte di incertezza primaria dei mercati è data dalla variabilità dei prezzi azionari; questa può essere di un'entità tale da influenzare notevolmente ed in breve tempo il valore di un portafoglio di investimento.

Nelle analisi effettuate, la variabilità è stata osservata mediante la visualizzazione delle serie storiche delle variazioni percentuali delle quotazioni degli indici selezionati rappresentanti i rendimenti degli operatori. Dal momento che il rischio del mercato azionario è legato alla variabilità dei rendimenti dei titoli intorno al loro valore atteso, si è individuato lo scarto quadratico medio come misura del rischio.

Dall'analisi della volatilità dei rendimenti effettuata, si evince quanto questa dipenda da numerosi fattori tra cui il settore di appartenenza dell'indice ma anche e soprattutto dal periodo storico di osservazione: in presenza di eventi significativi, tutti gli indici considerati si comportano in modo simile. È il caso, per esempio, del periodo 2010-2011, quando la fase di ripresa dalla recessione del 2009 è stata interrotta dalla nuova fase di crisi del debito sovrano. La crisi ha avuto epicentro in Portogallo, Irlanda e Grecia e si è estesa nel 2011 in Spagna e Italia. In particolare, i titoli bancari sono quelli che ne hanno risentito maggiormente tanto da registrare nel 2011 un alto ribasso. L'Italia ha subito l'apice della crisi nel 2012, quando la dinamica dell'economia globale era ancora debole e quando si è registrato un sovrapprezzo sui rendimenti dei suoi titoli rispetto al Bund tedesco a causa della crisi di fiducia degli operatori di mercato nel rischio sovrano italiano (effetto contagio).

Anche il periodo 2015-2016 si è rivelato particolarmente incerto e deludente per i mercati: dopo l'impatto negativo sui mercati internazionali della caduta della borsa cinese nel 2015, si è registrata nella prima metà del 2016 una forte volatilità inattesa con perdite pesanti soprattutto per l'azionario bancario. Si è verificato un generale clima di incertezza causato da numerosi fattori: il timore di un rallentamento delle economie avanzate, lo scetticismo sull'effettiva capacità delle politiche monetarie di incidere sull'economia in modo significativo e riportare l'inflazione ai livelli-obiettivo e le incertezze di natura politica tra cui la Brexit.

Un altro periodo caratterizzato da un'elevata volatilità generale è l'anno 2020; la diffusione della pandemia da Covid-19 ha generato forti ripercussioni economiche e sociali: l'entità delle variazioni delle quotazioni è elevata ed i movimenti avvengono in modo rapido ed imprevedibile.

A conclusione dell'analisi si osserva che i risultati ottenuti confermano quanto commentato in precedenza per cui l'assunzione di normalità rappresenta un limite alla base dei modelli in analisi. Infatti, la distribuzione Normale non sempre è la più adatta a rappresentare i rendimenti azionari in quanto, nella realtà, la probabilità di osservare rendimenti distanti dalla media è più alta di quella prevista dalla Normale. Tuttavia, con buona approssimazione, si è accettata l'ipotesi di normalità della distribuzione dei log-rendimenti degli indici in esame in modo tale

da poter beneficiare di tutte le semplificazioni e poter applicare i modelli descritti ai fini della costruzione del portafoglio ottimo.

6 Efficienza dei mercati

Il concetto di efficienza dei mercati è alla base di tutte le teorie che spiegano il meccanismo di formazione dei prezzi degli strumenti scambiati e di conseguenza è fondamentale anche per quanto riguarda i modelli quantitativi di selezione di portafoglio. In particolare, si guarda ai meccanismi di formazione dei prezzi ed alle modalità con cui le informazioni influenzano i prezzi delle attività.

Tra le diverse tipologie di efficienza dei mercati finanziari, quella di interesse in tale analisi è l'efficienza di tipo informativo: il mercato secondario¹³ si dice efficiente in senso informativo quando il prezzo risponde con prontezza ed in modo accurato a tutte le informazioni, per cui esso ingloba tutta l'informazione disponibile posseduta in modo disomogeneo dai diversi agenti del mercato. Sotto tale ipotesi, dunque, si elimina qualsiasi possibilità di extra profitto da parte degli operatori che raccolgono direttamente le informazioni sul mercato rispetto a coloro che invece osservano unicamente le oscillazioni dei prezzi, in quanto ciò comporterebbe solo uno spreco di risorse.

In questo modo, il prezzo di equilibrio delle attività finanziarie aggrega l'informazione posseduta dai singoli agenti e si adegua di conseguenza all'arrivo di nuove informazioni.

Secondo la teoria proposta da Eugene Fama, esistono tre diversi livelli di efficienza (informativa) dei mercati:

1. *Efficienza in forma debole*: il prezzo del titolo riflette solo le informazioni contenute nella serie storica dei prezzi passati (fra loro non correlati), perciò i prezzi incorporano solo le notizie che è possibile reperire sul mercato e chi non ha ulteriori informazioni non può trarre vantaggio.
2. *Efficienza in forma semi-forte*: il prezzo del titolo riflette l'informazione racchiusa nei prezzi passati nonché tutte le informazioni pubbliche comunicate dall'impresa, le informazioni contenute nei documenti contabili e quelle divulgate da fonti pubbliche di informazione (notizie, tweet). In tal caso solo chi detiene informazioni private può trarre vantaggio.
3. *Efficienza in forma forte*: il prezzo del titolo riflette tutta l'informazione disponibile, sia pubblica che privata; non è dunque possibile realizzare extra-profitti avendo a disposizione informazioni privilegiate o riservate in quanto queste sono già incluse nei prezzi.

È inoltre importante considerare il periodo temporale: nel medio periodo gli investitori adeguano le proprie aspettative razionali alle nuove informazioni e nel lungo periodo il mercato assorbe totalmente le notizie incorporandole di conseguenza nei prezzi. Si ipotizza che nel lungo periodo gli investitori siano capaci di interpretare in modo razionale ed efficiente le

¹³ Il mercato secondario è il luogo in cui avviene lo scambio di titoli già emessi (già in circolazione). Si distingue, dunque, dal mercato primario in cui ha invece luogo lo scambio e l'offerta di titoli di nuova emissione.

notizie così da ottenere prezzi corretti; l'emotività e le componenti psicologiche legate alla irrazionalità, sono invece considerate "rumore" irrilevante.

6.1 *Il modello Random Walk*

L'ipotesi di efficienza in forma debole secondo cui i prezzi osservati sul mercato riflettono tutta l'informazione contenuta nella serie storica dei prezzi stessi e le assunzioni per cui le future variazioni dei prezzi sono indipendenti e identicamente distribuite, sono alla base del modello di Random Walk.

Nel corso dell'analisi delle serie storiche dei prezzi, Fama ha eseguito diversi test di indipendenza seriale al fine di valutare l'esistenza di correlazioni tra i prezzi nel tempo; partendo dall'assunto che la presenza di autocorrelazione implica l'assenza di indipendenza seriale, Fama ha dimostrato l'assenza di correlazione tra i prezzi dei titoli in tempi distinti, supportando quindi la tesi di efficienza in forma debole.

I movimenti dei prezzi sono imprevedibili proprio perché si verificano solo in risposta all'arrivo di nuove informazioni (imprevedibili per natura).

Come emerge dalla (6.1), secondo la teoria della Random Walk, l'evoluzione delle serie storiche dei prezzi è casuale per cui la miglior previsione del prezzo in $t+1$ può essere fatta solo sulla base del prezzo in t e delle informazioni imprevedibili disponibili sul mercato:

$$X_t = \gamma \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6.1)$$

con ε_t rappresentante le novità in t .

I prezzi ed i rendimenti non seguono alcun trend o regolarità ma si muovono secondo un processo stocastico, perciò non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro. Si dice che il mercato non ha memoria e dunque la sequenza passata di variazioni del prezzo non contiene alcuna informazione relativa a possibili variazioni future.

È bene precisare che la validità del modello di Random Walk è una condizione sufficiente ma non necessaria per parlare di efficienza debole dei mercati: il modello di random walk richiede che l'intera distribuzione dei rendimenti sia indipendente dalle informazioni in un certo istante t , invece, l'efficienza in forma debole richiede che sia solo il valore atteso della distribuzione a dover essere indipendente dalle informazioni in t .

Come anticipato, il metodo di verifica tradizionalmente utilizzato per valutare la casualità delle variazioni dei prezzi è l'analisi di autocorrelazione seriale: qualora il coefficiente di

correlazione seriale sia pari a zero, è confermata l'ipotesi di efficienza in forma debole. Successivamente, sono stati introdotti strumenti statistici più accurati in grado di determinare se il comportamento dei prezzi in esame segua una random walk o meno. Uno dei test statistici più utilizzati è quello di Dickey-Fuller che si fonda sulla costruzione di un modello auto-regressivo derivante dalla (6.1) del tipo:

$$\Delta X_t = (\gamma - 1) \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t = \partial \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6.2)$$

Si procede poi a testare l'ipotesi nulla $H_0: \partial = 0$ contro l'ipotesi alternativa $H_1: \partial \neq 0$, al fine di verificare che il processo in esame sia effettivamente stocastico.

6.2 Analisi di efficienza dei dati

Al fine di verificare l'efficienza debole delle quotazioni (o analogamente dei log-rendimenti) degli indici in esame e la casualità dei processi, si è effettuata la stima di una random walk per ogni impresa selezionata. Seguendo l'impostazione del test di Dickey-Fuller, dunque, le variabili di interesse dell'analisi condotta sono i rendimenti logaritmici e le regressioni che sono state valutate, riguardano le variazioni dei log-prezzi in presenza di lag temporali pari ad uno, due, tre e quattro periodi secondo il seguente modello (livello di significatività $\alpha=5\%$):

Lag temporale = 1 periodo	$r_t = a + b \cdot r_{t-1} + \varepsilon_t$
Lag temporale = 2 periodi	$r_t = a + b \cdot r_{t-1} + c \cdot r_{t-2} + \varepsilon_t$
Lag temporale = 3 periodi	$r_t = a + b \cdot r_{t-1} + c \cdot r_{t-2} + d \cdot r_{t-3} + \varepsilon_t$
Lag temporale = 4 periodi	$r_t = a + b \cdot r_{t-1} + c \cdot r_{t-2} + d \cdot r_{t-3} + e \cdot r_{t-4} + \varepsilon_t$

con $r_t = \ln \left(\frac{p_t}{p_{t-1}} \right)$ il log-rendimento all'istante t .

A supporto della verifica di efficienza dei mercati, successivamente è stata valutata la matrice di correlazione seriale tra i log-rendimenti temporali di ciascun indice in presenza di un lag temporale di quattro periodi.

6.2.1 ENEL S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00045	0.00032	1.38252	0.16692	(-0.00019; 0.00108)
	r_{t-1}	-0.04829	0.01910	-2.52857	0.01151	(-0.08574; -0.01084)
Lag = 2	Intercetta	0.00044	0.00032	1.34824	0.17769	(-0.00020; 0.00107)
	r_{t-1}	-0.04706	0.01913	-2.46016	0.01395	(-0.08456; -0.00955)
	r_{t-2}	0.01763	0.01913	0.92163	0.35680	(-0.01988; 0.05513)
Lag = 3	Intercetta	0.00042	0.00032	1.30334	0.19257	(-0.00021; 0.00106)
	r_{t-1}	-0.04790	0.01914	-2.50220	0.01240	(-0.08544; -0.01036)
	r_{t-2}	0.01888	0.01916	0.98526	0.32458	(-0.01869; 0.05644)
	r_{t-3}	0.01554	0.01914	0.81176	0.41700	(-0.02199; 0.05307)
Lag = 4	Intercetta	0.00046	0.00032	1.41844	0.15618	(-0.00018; 0.0011)
	r_{t-1}	-0.04704	0.01912	-2.45988	0.01396	(-0.08454; -0.00954)
	r_{t-2}	0.01949	0.01914	1.01805	0.30874	(-0.01805; 0.05702)
	r_{t-3}	0.01271	0.01914	0.66410	0.50668	(-0.02482; 0.05024)
	r_{t-4}	-0.05907	0.01912	-3.08904	0.00203	(-0.09656; -0.02157)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.00233	0.00260	0.00292	0.00638
R^2 corretto	0.00196	0.00187	0.00182	0.00492

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Sebbene ad un livello di significatività del 5% si ottenga un valore del p-value basso sia con un $Lag=1$ che con un $Lag=4$, i valori dei coefficienti dei regressori, invece, si assestano sempre su un intorno dello zero. Si osservano, inoltre, valori dei coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesce a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 cresce, pur restando comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice ENEL.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.0485	1	-	-	-
r_{t-2}	0.0200	-0.0489	1	-	-
r_{t-3}	0.0137	0.0204	-0.0486	1	-
r_{t-4}	-0.0599	0.0133	0.0201	-0.0483	1

Dalla matrice in analisi si osservano, con buona approssimazione, coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali circa nulli, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.2 Intesa Sanpaolo S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00002	0.00050	0.04239	0.96619	(-0.00095;0.00099)
	r_{t-1}	-0.02345	0.01908	-1.22936	0.21904	(-0.06086;0.01396)
Lag = 2	Intercetta	0.00002	0.00050	0.03441	0.97255	(-0.00096;0.00099)
	r_{t-1}	-0.02337	0.01912	-1.22202	0.22180	(-0.06086;0.01413)
	r_{t-2}	-0.00426	0.01910	-0.22313	0.82345	(-0.04171;0.03319)
Lag = 3	Intercetta	0.00003	0.00050	0.06966	0.94447	(-0.00094;0.00101)
	r_{t-1}	-0.02348	0.01911	-1.22860	0.21933	(-0.06095;0.01399)
	r_{t-2}	-0.00589	0.01912	-0.30820	0.75795	(-0.04337;0.03159)

	r_{t-3}	-0.04910	0.01909	-2.57211	0.01016	(-0.08654;-0.01167)
Lag = 4	Intercetta	0.00004	0.00050	0.07809	0.93776	(-0.00094;0.000101)
	r_{t-1}	-0.02598	0.01913	-1.35834	0.17447	(-0.06348;0.01152)
	r_{t-2}	-0.00626	0.01911	-0.32772	0.74315	(-0.04372;0.03120)
	r_{t-3}	-0.05016	0.01911	-2.62470	0.00872	(-0.08763;-0.01269)
	r_{t-4}	-0.04864	0.01910	-2.54599	0.01095	(-0.08610;-0.01118)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.000551	0.000560	0.00297	0.00533
R^2 corretto	0.000187	-0.000171	0.00188	0.00387

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Ad un livello di significatività del 5%, si ottengono livelli del p-value accettabili ad eccezione dei risultati ottenuti in presenza di un lag temporale pari a tre e quattro periodi.

I valori dei coefficienti dei regressori, seppur negativi, si assestano sempre in un intorno dello zero; si osservano, inoltre, valori dei coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesce a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 , seppur maggiore, resta comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice ISP.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.0232	1	-	-	-
r_{t-2}	-0.0043	-0.0232	1	-	-

r_{t-3}	-0.0488	-0.0039	-0.0234	1	-
r_{t-4}	-0.0462	-0.0491	-0.0035	-0.0234	1

Dalla matrice in analisi si osservano, con buona approssimazione, coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali circa nulli, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata

6.2.3 Eni S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	-0.000112	0.000328	-0.342502	0.731999	(-0.000755;0.00053)
	r_{t-1}	-0.012119	0.019016	-0.637308	0.523977	(-0.049406;0.025168)
Lag = 2	Intercetta	-0.00010	0.00033	-0.31686	0.75137	(-0.00075;0.00054)
	r_{t-1}	-0.00976	0.01911	-0.51098	0.60941	(-0.04723;0.0277)
	r_{t-2}	0.03343	0.01901	1.75842	0.07879	(-0.00385;0.07071)
Lag = 3	Intercetta	-0.00009	0.00033	-0.27765	0.78131	(-0.00073;0.00055)
	r_{t-1}	-0.01119	0.01912	-0.58496	0.55863	(-0.04868;0.02631)
	r_{t-2}	0.03237	0.01910	1.69456	0.09027	(-0.00509;0.06983)
	r_{t-3}	0.03703	0.01904	1.94523	0.05185	(-0.00030;0.07436)
Lag = 4	Intercetta	-0.00008	0.00033	-0.25790	0.79651	(-0.00073;0.00056)
	r_{t-1}	-0.01107	0.01915	-0.57810	0.56324	(-0.04862;0.02648)
	r_{t-2}	0.03283	0.01913	1.71607	0.08626	(-0.00468;0.07035)
	r_{t-3}	0.03544	0.01914	1.85171	0.06418	(-0.00209;0.07297)
	r_{t-4}	-0.01421	0.01906	-0.74523	0.45620	(-0.05159;0.02317)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.000148	0.001233	0.00251	0.00261
R^2 corretto	-0.000217	0.000502	0.00141	0.00115

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo e valori del p-value accettabili per qualsiasi lag temporale.

I coefficienti dei regressori si assestano sempre su un intorno dello zero e si evincono valori dei coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesce a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 , seppur maggiore, resta comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice ENI.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.0108	1	-	-	-
r_{t-2}	0.0321	-0.0101	1	-	-
r_{t-3}	0.0349	0.0330	-0.0102	1	-
r_{t-4}	-0.0140	0.0365	0.0347	-0.0121	1

Dalla matrice in analisi si osservano, con buona approssimazione, coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali attestati in un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.4 STMicroelectronics N.V

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00072	0.00048	1.49418	0.13524	(-0.00023;0.00167)
	r_{t-1}	0.01014	0.01910	0.53091	0.59553	(-0.02732;0.0476)
Lag = 2	Intercetta	0.00072	0.00048	1.48532	0.13757	(-0.00023;0.00167)
	r_{t-1}	0.01035	0.01911	0.54130	0.58835	(-0.02713;0.04783)
	r_{t-2}	-0.00754	0.01911	-0.39472	0.69308	(-0.04501;0.02993)
Lag = 3	Intercetta	0.00072	0.00048	1.47930	0.13918	(-0.00023;0.00167)
	r_{t-1}	0.01043	0.01912	0.54548	0.58547	(-0.02707;0.04793)
	r_{t-2}	-0.00746	0.01913	-0.39026	0.69638	(-0.04497;0.03004)
	r_{t-3}	0.00498	0.01912	0.26072	0.79433	(-0.03250;0.04247)
Lag = 4	Intercetta	0.00072	0.00048	1.48113	0.13869	(-0.00023;0.00167)
	r_{t-1}	0.01040	0.01914	0.54345	0.58686	(-0.02712;0.04792)
	r_{t-2}	-0.00747	0.01914	-0.39052	0.69618	(-0.04500;0.03005)
	r_{t-3}	0.00512	0.01914	0.26741	0.78917	(-0.03241;0.04264)
	r_{t-4}	-0.00308	0.01914	-0.16086	0.87222	(-0.04060;0.03445)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.000103	0.000162	0.00019	0.000195
R^2 corretto	-0.000262	-0.000568	-0.00091	-0.001268

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo e valori del p-value (ad un livello di significatività del 5%) accettabili per qualsiasi lag temporale.

I valori dei coefficienti dei regressori si assestano sempre su un intorno dello zero; si evidenziano coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli a conferma del fatto che il modello utilizzato non riesca a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 cresce, pur restando comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice STM.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	0.0103	1	-	-	-
r_{t-2}	-0.0073	0.0104	1	-	-
r_{t-3}	0.0049	-0.0072	0.0103	1	-
r_{t-4}	-0.0029	0.0054	-0.0075	0.01	1

Dalla matrice in analisi si osservano coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali circa nulli, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.5 Generali S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00002	0.00034	0.05098	0.95934	(-0.00065;0.00068)
	r_{t-1}	0.03498	0.01904	1.83700	0.06632	(-0.00236;0.07232)
Lag = 2	Intercetta	0.00002	0.00034	0.06247	0.95019	(-0.00064;0.00069)
	r_{t-1}	0.03469	0.01912	1.81412	0.06977	(-0.00281;0.07219)
	r_{t-2}	0.00567	0.01907	0.29747	0.76613	(-0.03172;0.04306)
Lag = 3	Intercetta	0.00003	0.00034	0.08554	0.93184	(-0.00064;0.0007)
	r_{t-1}	0.03469	0.01913	1.81292	0.06995	(-0.00283;0.07221)
	r_{t-2}	0.00621	0.01915	0.32462	0.74550	(-0.03133;0.04376)
	r_{t-3}	-0.01501	0.01909	-0.78661	0.43158	(-0.05244;0.02241)
Lag = 4	Intercetta	0.00004	0.00034	0.11310	0.90996	(-0.00063;0.0007)
	r_{t-1}	0.03370	0.01912	1.76218	0.07815	(-0.00380;0.0712)

r_{t-2}	0.00644	0.01913	0.33662	0.73643	(-0.03107;0.04395)
r_{t-3}	-0.01353	0.01914	-0.70683	0.47974	(-0.05105;0.024)
r_{t-4}	-0.05254	0.01907	-2.75446	0.00592	(-0.08993-0.01514)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.00123	0.00125	0.00147	0.00423
R^2 corretto	0.00087	0.00052	0.00037	0.00277

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Ad un livello di significatività del 5%, si ottengono valori di significatività accettabili ad eccezione del risultato ottenuto in presenza di un lag temporale pari a quattro periodi.

I valori dei coefficienti dei regressori si assestano sempre su un intorno dello zero e si osservano sempre valori del coefficiente di determinazione R^2 e di R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesca a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 , seppur maggiore, resta comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice G.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	0.0346	1	-	-	-
r_{t-2}	0.0068	0.0348	1	-	-
r_{t-3}	-0.0149	0.0072	0.0350	1	-
r_{t-4}	-0.0536	-0.0146	0.0072	0.0352	1

Dalla matrice in analisi si osservano, con buona approssimazione, coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali attestati su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.6 FCA N.V.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00063	0.00051	1.21915	0.22289	(-0.00038;0.00163)
	r_{t-1}	0.00547	0.01907	0.28687	0.77423	(-0.03193;0.04287)
Lag = 2	Intercetta	0.00059	0.00051	1.15132	0.24970	(-0.00042;0.0016)
	r_{t-1}	0.00634	0.01910	0.33169	0.74015	(-0.03112;0.04379)
	r_{t-2}	0.04142	0.01907	2.17218	0.02993	(0.00403;0.07882)
Lag = 3	Intercetta	0.00058	0.00051	1.12808	0.25938	(-0.00043;0.00159)
	r_{t-1}	0.00582	0.01913	0.30400	0.76115	(-0.03170;0.04334)
	r_{t-2}	0.04222	0.01912	2.20844	0.02730	(0.00473;0.0797)
	r_{t-3}	0.00695	0.01913	0.36346	0.71629	(-0.03057;0.0445)
Lag = 4	Intercetta	0.00060	0.00051	1.15986	0.24621	(-0.00041;0.00161)
	r_{t-1}	0.00607	0.01914	0.31698	0.75128	(-0.03147;0.04361)
	r_{t-2}	0.04314	0.01915	2.25349	0.02431	(0.00560;0.08068)
	r_{t-3}	0.00692	0.01918	0.36105	0.71809	(-0.03068;0.04453)
	r_{t-4}	-0.02335	0.01914	-1.21950	0.22276	(-0.06088;0.01419)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R²	0.00003	0.00177	0.00187	0.00241
R² corretto	-0.00034	0.00104	0.00078	0.00095

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Ad un livello di significatività del 5%, si ottengono livelli del p-value

accettabili ad eccezione del valore di significatività in corrispondenza dei coefficienti di r_{t-2} in presenza di lag temporali pari a due, tre e quattro periodi. Tuttavia, i valori dei coefficienti dei regressori sono attestati sempre in un intorno dello zero e si osservano coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (valore di interesse più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) sostanzialmente nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesce a “spiegare” adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 pur crescendo, resta comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l’ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell’indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l’indice FCA.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	0.00646	1	-	-	-
r_{t-2}	0.04225	0.00624	1	-	-
r_{t-3}	0.00734	0.04265	0.00677	1	-
r_{t-4}	-0.02145	0.00743	0.04194	0.00548	1

Con buona approssimazione, dalla matrice in analisi si osservano coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali in un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l’ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.7 Unicredit S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell’indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	-0.00075	0.00057	-1.31513	0.18858	(-0.00187;0.00037)

	r_{t-1}	0.02763	0.01906	1.44976	0.14724	(-0.00974;0.06501)
Lag = 2	Intercetta	-0.00072	0.00057	-1.25332	0.21020	(-0.00183;0.0004)
	r_{t-1}	0.02605	0.01910	1.36366	0.17279	(-0.01141;0.0635)
	r_{t-2}	0.03399	0.01907	1.78277	0.07473	(-0.00339;0.0714)
Lag = 3	Intercetta	-0.00073	0.00057	-1.27601	0.20206	(-0.00185;0.00039)
	r_{t-1}	0.02658	0.01912	1.39027	0.16456	(-0.01091;0.06406)
	r_{t-2}	0.03356	0.01911	1.75613	0.07918	(-0.00391;0.07103)
	r_{t-3}	-0.01832	0.01909	-0.95993	0.33717	(-0.05574;0.0191)
Lag = 4	Intercetta	-0.00078	0.00057	-1.36506	0.17235	(-0.00190;0.00034)
	r_{t-1}	0.02578	0.01911	1.34949	0.17729	(-0.01168;0.06325)
	r_{t-2}	0.03552	0.01910	1.85918	0.06311	(-0.00194;0.07298)
	r_{t-3}	-0.01595	0.01911	-0.83466	0.40398	(-0.05342;0.02152)
	r_{t-4}	-0.05145	0.01907	-2.69739	0.00703	(-0.08885;-0.01405)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.000766	0.00189	0.00215	0.0048
R^2 corretto	0.000402	0.00116	0.00106	0.0033

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo e valori del p-value accettabili ad eccezione del livello in corrispondenza di r_{t-4} con quattro lag temporali.

I valori dei coefficienti dei regressori si assestano sempre su un intorno dello zero e si osservano valori dei coefficienti di determinazione R^2 e di R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesca a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 , seppur maggiore, resta comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice UCG.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	0.0271	1	-	-	-
r_{t-2}	0.0340	0.0268	1	-	-
r_{t-3}	-0.0156	0.0340	0.0270	1	-
r_{t-4}	-0.0512	-0.0167	0.0350	0.0281	1

Con buona approssimazione, dalla matrice in analisi si osservano coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali attestati su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.8 Snam S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00036	0.00028	1.28024	0.20057	(-0.00019;0.00091)
	r_{t-1}	-0.10391	0.01898	-5.47319	0.00000	(-0.14113;-0.06668)
Lag = 2	Intercetta	0.00036	0.00028	1.27704	0.20170	(-0.00019;0.00091)
	r_{t-1}	-0.10371	0.01913	-5.42001	0.00000	(-0.14123;-0.06619)
	r_{t-2}	0.00084	0.01911	0.04383	0.96504	(-0.03663;0.0383)
Lag = 3	Intercetta	0.0004	0.0003	1.2482	0.2121	(-0.0002;0.0009)
	r_{t-1}	-0.1039	0.0191	-5.4343	0.0000	(-0.1415;-0.0664)
	r_{t-2}	0.0043	0.0192	0.2250	0.8220	(-0.0334;0.042)
	r_{t-3}	0.0110	0.0191	0.5771	0.5639	(-0.0265;0.0485)
Lag = 4	Intercetta	0.0004	0.0003	1.2897	0.1973	(-0.0002;0.0009)
	r_{t-1}	-0.1042	0.0191	-5.4425	0.0000	(-0.1418;-0.0667)

r_{t-2}	0.0044	0.0192	0.2288	0.8191	(-0.0333;0.0421)
r_{t-3}	0.0091	0.0193	0.4707	0.6379	(-0.0287;0.0468)
r_{t-4}	-0.0292	0.0191	-1.5259	0.1271	(-0.0667;0.0083)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.0108	0.0108	0.0110	0.0120
R^2 corretto	0.0105	0.0100	0.0099	0.0105

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Ad un livello di significatività del 5%, si ottengono livelli del p-value accettabili ad eccezione del valore di significatività in corrispondenza dei coefficienti di r_{t-1} per qualsiasi lag temporale.

I valori dei coefficienti dei regressori si assestano sempre su un intorno dello zero e si osservano valori dei coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesca a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni.

Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 , seppur maggiore, resta comunque in un intorno dello zero; dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice SRG.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.1048	1	-	-	-
r_{t-2}	0.0140	-0.1046	1	-	-
r_{t-3}	0.0101	0.0148	-0.1047	1	-
r_{t-4}	-0.0310	0.0088	0.0129	0.01040	1

Con buona approssimazione, dalla matrice in analisi si osservano coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali attestati su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.9 Exor N.V.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00055	0.00041	1.31884	0.18733	(-0.00027;0.00136)
	r_{t-1}	-0.03575	0.01905	-1.87599	0.06076	(-0.07311;0.00162)
Lag = 2	Intercetta	0.00052	0.00041	1.26534	0.20586	(-0.00029;0.00134)
	r_{t-1}	-0.03475	0.01912	-1.81742	0.06926	(-0.07225;0.00274)
	r_{t-2}	0.02311	0.01908	1.21145	0.22583	(-0.01430;0.06053)
Lag = 3	Intercetta	0.0005	0.0004	1.3065	0.1915	(-0.0003;0.0014)
	r_{t-1}	-0.0343	0.0191	-1.7935	0.0730	(-0.0719;0.0032)
	r_{t-2}	0.0226	0.0191	1.1782	0.2388	(-0.0150;0.0601)
	r_{t-3}	-0.0041	0.0191	-0.2141	0.8305	(-0.0416;0.0334)
Lag = 4	Intercetta	0.00059	0.00041	1.42068	0.15552	(-0.00022;0.0014)
	r_{t-1}	-0.03508	0.01911	-1.83542	0.06655	(-0.07255;0.0024)
	r_{t-2}	0.02452	0.01912	1.28195	0.19997	(-0.01298;0.06201)
	r_{t-3}	-0.00658	0.01915	-0.34365	0.73114	(-0.04414;0.03097)
	r_{t-4}	-0.06623	0.01909	-3.46901	0.00053	(-0.10367;-0.0288)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.00128	0.00180	0.00177	0.00621
R^2 corretto	0.00092	0.00107	0.00068	0.00475

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Ad un livello di significatività del 5%, si ottengono livelli del p-value

accettabili ad eccezione del valore di significatività in corrispondenza dei coefficiente di r_{t-4} con quattro lag temporali.

I valori dei coefficienti dei regressori si assestano sempre su un intorno dello zero e si osservano valori dei coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesca a “spiegare” adeguatamente la variabilità delle osservazioni.

Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 cresce restando comunque in un intorno dello zero; dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l’ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell’indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l’indice EXO.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.0357	1	-	-	-
r_{t-2}	0.0243	-0.0360	1	-	-
r_{t-3}	-0.0060	0.0253	-0.0354	1	-
r_{t-4}	-0.0652	-0.0057	0.0258	-0.0357	1

Con buona approssimazione, dalla matrice in analisi si osservano coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali attestati su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l’ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.10 Atlantia S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell’indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00008	0.00039	0.20606	0.83676	(-0.00069;0.00085)
	r_{t-1}	-0.01058	0.01902	-0.55618	0.57813	(-0.04786;0.02671)
Lag = 2	Intercetta	0.00008	0.00039	0.20582	0.83695	(-0.00069;0.00085)
	r_{t-1}	-0.00906	0.01912	-0.47372	0.63574	(-0.04654;0.02842)
	r_{t-2}	-0.01809	0.01905	-0.94973	0.34234	(-0.05544;0.01926)
Lag = 3	Intercetta	0.00008	0.00039	0.20765	0.83552	(-0.00069;0.00085)
	r_{t-1}	-0.00950	0.01912	-0.49692	0.61928	(-0.04700;0.028)
	r_{t-2}	-0.01460	0.01914	-0.76255	0.44580	(-0.05213;0.02294)
	r_{t-3}	0.01002	0.01954	0.51304	0.60796	(-0.02829;0.04834)
Lag = 4	Intercetta	0.00009	0.00039	0.22424	0.82259	(-0.00068;0.00086)
	r_{t-1}	-0.01052	0.01914	-0.54956	0.58266	(-0.04804;0.02701)
	r_{t-2}	-0.01559	0.01915	-0.81444	0.41546	(-0.05314;0.02195)
	r_{t-3}	0.01302	0.01964	0.66305	0.50736	(-0.02548;0.05152)
	r_{t-4}	-0.01876	0.01955	-0.95972	0.33728	(-0.05709;0.01957)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.000113	0.000408	0.000401	0.000846
R^2 corretto	-0.000252	-0.000323	-0.000697	-0.000619

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo e valori del p-value (ad un livello di significatività del 5%) accettabili per qualsiasi lag temporale. Inoltre, si evidenziano coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli a conferma del fatto che il modello utilizzato non riesce a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 cresce, pur restando comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice ATL.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.0108	1	-	-	-
r_{t-2}	-0.0151	-0.0092	1	-	-
r_{t-3}	0.0129	-0.0165	0.0028	1	-
r_{t-4}	-0.0182	0.0102	-0.0198	-0.0016	1

Dalla matrice in analisi si evince che i coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali si attestano su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.11 Campari-Milano S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat. t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00072	0.00029	2.44686	0.01447	(0.00014;0.00129)
	r_{t-1}	-0.06913	0.01905	-3.62834	0.00029	(-0.10648;-0.03177)
Lag = 2	Intercetta	0.00074	0.00029	2.52639	0.01158	(0.00017;0.00132)
	r_{t-1}	-0.07085	0.01911	-3.70751	0.00021	(-0.10831;-0.03338)
	r_{t-2}	-0.03407	0.01910	-1.78388	0.07455	(-0.07153;0.03338)
Lag = 3	Intercetta	0.00072	0.00029	2.43163	0.01510	(0.00014;0.00129)
	r_{t-1}	-0.06972	0.01913	-3.64539	0.00027	(-0.10722;-0.03222)
	r_{t-2}	-0.03260	0.01916	-1.70144	0.08897	(-0.07018;0.00497)
	r_{t-3}	0.02430	0.01914	1.26954	0.20436	(-0.01323;0.06182)
Lag = 4	Intercetta	0.00073	0.00030	2.47408	0.01342	(0.00015;0.00131)
	r_{t-1}	-0.06900	0.01914	-3.60415	0.00032	(-0.10654;-0.03146)
	r_{t-2}	-0.03335	0.01918	-1.73843	0.08225	(-0.07096;0.00427)
	r_{t-3}	0.02417	0.01920	1.25890	0.20818	(-0.01348;0.06183)
	r_{t-4}	-0.01146	0.01915	-0.59854	0.54953	(-0.04901;0.02609)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.00478	0.00585	0.00641	0.00654
R^2 corretto	0.00442	0.00512	0.00532	0.00509

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Ad un livello di significatività del 5%, si ottengono livelli del p-value accettabili ad eccezione del valore di significatività in corrispondenza dei coefficienti di r_{t-1} per qualsiasi lag temporale.

I valori dei coefficienti dei regressori si assestano sempre su un intorno dello zero e si osservano valori dei coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesce a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 cresce, pur restando comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice CPR.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.06776	1	-	-	-
r_{t-2}	-0.02996	-0.06829	1	-	-
r_{t-3}	0.02922	-0.02917	-0.06805	1	-
r_{t-4}	-0.01410	0.02838	-0.02898	-0.06829	1

Dalla matrice in analisi si evince che i coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali si attestano su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.12 DiaSorin S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat. t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00079	0.00035	2.26828	0.02339	(0.00011;0.00148)
	r_{t-1}	-0.02757	0.01906	-1.44606	0.14827	(-0.06494;0.00981)
Lag = 2	Intercetta	0.00080	0.00035	2.27677	0.02288	(0.00011;0.00149)
	r_{t-1}	-0.02788	0.01906	-1.46229	0.14378	(-0.06526;0.0095)
	r_{t-2}	0.02109	0.01907	1.10590	0.26887	(-0.01631;0.05849)
Lag = 3	Intercetta	0.00082	0.00035	2.33263	0.01974	(0.00013;0.00151)
	r_{t-1}	-0.02827	0.01912	-1.47834	0.13943	(-0.06576;0.00923)
	r_{t-2}	-0.01631	0.01913	-0.85235	0.39410	(-0.05382;0.02121)
	r_{t-3}	0.02061	0.01909	1.07996	0.28026	(-0.01681;0.05804)
Lag = 4	Intercetta	0.00086	0.00035	2.43505	0.01495	(0.00017;0.00154)
	r_{t-1}	-0.02977	0.01914	-1.55582	0.11987	(-0.06729;0.00775)
	r_{t-2}	-0.01748	0.01913	-0.91355	0.36103	(-0.05499;0.02003)
	r_{t-3}	0.02099	0.01913	1.09699	0.27274	(-0.01653;0.0585)
	r_{t-4}	-0.01501	0.01908	-0.78629	0.43176	(-0.05243;0.02241)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.000763	0.001248	0.00150	0.00190
R^2 corretto	0.000398	0.000517	0.00041	0.00044

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo e valori del p-value (ad un livello di significatività del 5%) accettabili per qualsiasi lag temporale. I coefficienti dei regressori si assestano correttamente su un intorno dello zero e si evidenziano coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli a conferma del fatto che il modello utilizzato non riesca a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che sebbene il valore di R^2 cresca, resta comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice DIA.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.0299	1	-	-	-
r_{t-2}	-0.0170	-0.0281	1	-	-
r_{t-3}	0.0224	-0.0154	-0.0276	1	-
r_{t-4}	-0.0160	0.0213	-0.0155	-0.0274	1

Dall'osservazione della matrice in analisi, con buona approssimazione si evincono coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali attestati su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.13 Recordati S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat. t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00104	0.00031	3.35216	0.00081	(0.00043;0.00165)
	r_{t-1}	-0.10827	0.01900	-5.69913	0.00000	(-0.14552;-0.07102)
Lag = 2	Intercetta	0.00103	0.00031	3.29085	0.00101	(0.00041;0.00164)
	r_{t-1}	-0.10756	0.01911	-5.62782	0.00000	(-0.14504;-0.07008)
	r_{t-2}	0.00841	0.01911	0.44001	0.65996	(-0.02907;0.04588)
Lag = 3	Intercetta	0.00106	0.00031	3.40146	0.00068	(0.00045;0.00168)
	r_{t-1}	-0.10665	0.01913	-5.57625	0.00000	(-0.14416;-0.06915)
	r_{t-2}	0.00485	0.01922	0.25226	0.80086	(-0.03285;0.04254)

	r_{t-3}	-0.03499	0.01911	-1.83080	0.06724	(-0.07247;0.00249)
Lag = 4	Intercetta	0.0011	0.0003	3.5536	0.0004	(0.0005;0.0017)
	r_{t-1}	-0.1077	0.0191	-5.6305	0.0000	(-0.1452;-0.0702)
	r_{t-2}	0.0046	0.0192	0.2391	0.8111	(-0.0331;0.0423)
	r_{t-3}	-0.0391	0.0192	-2.0349	0.0420	(-0.0768;-0.0014)
	r_{t-4}	-0.0374	0.0191	-1.9545	0.0507	(-0.0749;0.0001)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.0117	0.0118	0.0129	0.0142
R^2 corretto	0.0114	0.0111	0.0118	0.0128

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Ad un livello di significatività del 5%, si ottengono livelli del p-value accettabili ad eccezione del valore di significatività in corrispondenza dei coefficienti di r_{t-1} per qualsiasi lag temporale e del coefficiente di r_{t-3} in presenza di quattro lag temporali.

I valori dei coefficienti dei regressori si assestano sempre su un intorno dello zero e si osservano valori dei coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesce a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 cresce, pur restando comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice REC.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.1076	1	-	-	-
r_{t-2}	0.0197	-0.1081	1	-	-

r_{t-3}	-0.0378	0.0203	-0.1087	1	-
r_{t-4}	-0.0290	-0.0380	0.0201	-0.1084	1

Dall'osservazione della matrice in analisi, con buona approssimazione si evincono coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali attestati su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.14 Amplifon S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat. t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00096	0.00036	2.64566	0.00820	(0.00025;0.00167)
	r_{t-1}	-0.05960	0.01905	-3.12834	0.00178	(-0.09696;-0.02224)
Lag = 2	Intercetta	0.00096	0.00036	2.63309	0.00851	(0.00024;0.00167)
	r_{t-1}	-0.05936	0.01912	-3.10458	0.00193	(-0.09686;-0.02187)
	r_{t-2}	0.00264	0.01911	0.13826	0.89005	(-0.03482;0.0401)
Lag = 3	Intercetta	0.000951	0.000365	2.605622	0.009221	(0.000235;0.00167)
	r_{t-1}	0.00095	0.00037	2.60562	0.00922	(0.00024;-0.0218)
	r_{t-2}	-0.05931	0.01913	-3.10000	0.00195	(-0.09683;0.04075)
	r_{t-3}	0.00316	0.01917	0.16498	0.86897	(-0.03443;0.05025)
Lag = 4	Intercetta	0.0010	0.0004	2.7353	0.0063	(0.0003;0.0017)
	r_{t-1}	-0.0587	0.0191	-3.0690	0.0022	(-0.0962;-0.0212)
	r_{t-2}	0.0033	0.0192	0.1699	0.8651	(-0.0343;0.0408)
	r_{t-3}	0.0100	0.0192	0.5236	0.6006	(-0.0275;0.0476)
	r_{t-4}	-0.0453	0.0191	-2.3687	0.0179	(-0.0828;-0.0078)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.00356	0.00355	0.0037	0.00574
R^2 corretto	0.00320	0.00282	0.0026	0.00428

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Ad un livello di significatività del 5%, si ottengono livelli del p-value accettabili ad eccezione del valore di significatività in corrispondenza dei coefficienti di r_{t-1} per qualsiasi lag temporale e del coefficiente di r_{t-4} in presenza di quattro lag temporali.

I valori dei coefficienti dei regressori si assestano sempre su un intorno dello zero e si osservano valori dei coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesce a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che il valore di R^2 cresce, pur restando comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice AMP.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.0594	1	-	-	-
r_{t-2}	0.0058	-0.0592	1	-	-
r_{t-3}	0.0122	0.0061	-0.0598	1	-
r_{t-4}	-0.0466	0.0122	0.0065	-0.0596	1

Dall'osservazione della matrice in analisi, con buona approssimazione si evincono coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali attestati su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.15 Prysmian S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat. t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00037	0.00040	0.90766	0.36414	(-0.00043;0.00116)
	r_{t-1}	-0.06036	0.01907	-3.16575	0.00156	(-0.09775;-0.02297)
Lag = 2	Intercetta	0.00036	0.00040	0.88480	0.37634	(-0.00044;0.00115)
	r_{t-1}	-0.06080	0.01912	-3.17988	0.00149	(-0.09830;-0.02331)
	r_{t-2}	-0.00421	0.01911	-0.22015	0.82577	(-0.04169;0.03327)
Lag = 3	Intercetta	0.00034	0.00041	0.84096	0.40044	(-0.00045;0.00114)
	r_{t-1}	-0.06119	0.01912	-3.20003	0.00139	(-0.09868;-0.0237)
	r_{t-2}	-0.00490	0.01916	-0.25576	0.79816	(-0.04246;0.03266)
	r_{t-3}	-0.00972	0.01913	-0.50825	0.61132	(-0.04722;0.02778)
Lag = 4	Intercetta	0.00036	0.00041	0.89353	0.37165	(-0.00043;0.00116)
	r_{t-1}	-0.06202	0.01912	-3.24323	0.00120	(-0.09952;-0.02452)
	r_{t-2}	-0.00504	0.01914	-0.26303	0.79255	(-0.04258;0.0325)
	r_{t-3}	-0.01239	0.01915	-0.64701	0.51768	(-0.04995;0.02517)
	r_{t-4}	-0.05002	0.01912	-2.61604	0.00894	(-0.08751;-0.01253)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.00365	0.00368	0.00383	0.00635
R^2 corretto	0.00328	0.00296	0.00273	0.00489

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Ad un livello di significatività del 5%, si ottengono livelli del p-value accettabili ad eccezione del valore di significatività in corrispondenza dei coefficienti di r_{t-1} per qualsiasi lag temporale e del coefficiente di r_{t-4} in presenza di quattro lag temporali.

I valori dei coefficienti dei regressori si assestano sempre su un intorno dello zero e si osservano valori dei coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesce a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che sebbene il valore di R^2 cresca, resta comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-

rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice PRY.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.06125	1	-	-	-
r_{t-2}	-0.00049	-0.06093	1	-	-
r_{t-3}	-0.00904	-0.00052	-0.06073	1	-
r_{t-4}	-0.04871	-0.00917	-0.00026	-0.06035	1

Dall'osservazione della matrice in analisi, si evincono coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali circa nulli, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.16 Telecom Italia S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat. t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	-0.00034	0.00043	-0.79212	0.42836	(-0.00120;0.00051)
	r_{t-1}	-0.01050	0.01909	-0.55007	0.58232	(-0.04794;0.02694)
Lag = 2	Intercetta	-0.00035	0.00044	-0.79721	0.42540	(-0.00120;0.00051)
	r_{t-1}	-0.01039	0.01913	-0.54303	0.58715	(-0.04789;0.02712)
	r_{t-2}	-0.00828	0.01912	-0.43296	0.66508	(-0.04578;0.02922)
Lag = 3	Intercetta	-0.00035	0.00044	-0.80204	0.42260	(-0.00120;0.00051)
	r_{t-1}	-0.01059	0.01914	-0.55340	0.58003	(-0.04812;0.02694)
	r_{t-2}	-0.00836	0.01916	-0.43657	0.66246	(-0.04592;0.0292)
	r_{t-3}	-0.01966	0.01914	-1.02721	0.30441	(-0.05719;0.01787)

Lag = 4	Intercetta	-0.00035	0.00044	-0.81308	0.41625	(-0.00121;0.0005)
	r_{t-1}	-0.01132	0.01915	-0.59130	0.55437	(-0.04886;0.02622)
	r_{t-2}	-0.00869	0.01916	-0.45355	0.65019	(-0.04626;0.02888)
	r_{t-3}	-0.01999	0.01917	-1.04297	0.29706	(-0.05757;0.01759)
	r_{t-4}	-0.03103	0.01915	-1.62007	0.10533	(-0.06859;0.00653)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.000110	0.000174	0.000559	0.00152
R^2 corretto	-0.000255	-0.000557	-0.000539	0.00006

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo e valori del p-value (ad un livello di significatività del 5%) accettabili per qualsiasi lag temporale.

I coefficienti dei regressori si assestano correttamente su un intorno dello zero e si evidenziano coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli a conferma del fatto che il modello utilizzato non riesca a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che sebbene il valore di R^2 cresca, resta comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice TIT.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.0104	1	-	-	-
r_{t-2}	-0.0080	-0.0107	1	-	-
r_{t-3}	-0.0194	-0.0081	-0.0114	1	-
r_{t-4}	-0.0305	-0.0200	-0.0092	-0.0119	1

Dall'osservazione della matrice in analisi, si evincono coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali circa nulli, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.17 Tenaris S.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat. t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	-0.00031	0.00041	-0.76038	0.44709	(-0.00112;0.00049)
	r_{t-1}	-0.00636	0.01903	-0.33435	0.73814	(-0.04369;0.03096)
Lag = 2	Intercetta	-0.00030	0.00041	-0.72238	0.47012	(-0.00110;0.00051)
	r_{t-1}	-0.00672	0.01912	-0.35171	0.72508	(-0.044210;0.03076)
	r_{t-2}	0.01527	0.01906	0.80130	0.42303	(-0.02209;0.05263)
Lag = 3	Intercetta	-0.00029	0.00041	-0.71372	0.47546	(-0.00110;0.00051)
	r_{t-1}	-0.00701	0.01913	-0.36650	0.71402	(-0.04453;0.03051)
	r_{t-2}	0.01500	0.01914	0.78349	0.43341	(-0.02254;0.05253)
	r_{t-3}	-0.00734	0.01908	-0.38478	0.70043	(-0.04475;0.03007)
Lag = 4	Intercetta	-0.00028	0.00041	-0.68129	0.49575	(-0.00109;0.00053)
	r_{t-1}	-0.00714	0.01915	-0.37285	0.70929	(-0.04468;0.0304)
	r_{t-2}	0.01445	0.01916	0.75407	0.45087	(-0.02312;0.05201)
	r_{t-3}	-0.00874	0.01916	-0.45615	0.64832	(-0.04631;0.02883)
	r_{t-4}	0.01398	0.01909	0.73237	0.46401	(-0.02345;0.05141)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R²	0.000041	0.00028	0.00033	0.00055
R² corretto	-0.000324	-0.00045	-0.00077	-0.00092

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo e valori del p-value (ad un livello di significatività del 5%) accettabili per qualsiasi lag temporale.

I coefficienti dei regressori si assestano correttamente su un intorno dello zero e si evidenziano coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) sostanzialmente nulli a conferma del fatto che il modello utilizzato non riesca a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che sebbene il valore di R^2 cresca, è comunque sostanzialmente nullo.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice TEN.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.0075	1	-	-	-
r_{t-2}	0.0148	-0.0072	1	-	-
r_{t-3}	-0.0090	0.0154	-0.0073	1	-
r_{t-4}	0.0144	-0.0077	0.0158	-0.0065	1

Dall'osservazione della matrice in analisi, si evincono coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali attestati su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.18 Hera S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat. t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00044	0.00029	1.49145	0.13596	(-0.00014;0.00101)
	r_{t-1}	-0.07635	0.01904	-4.00965	0.00006	(-0.11369;-0.0390)1
Lag = 2	Intercetta	0.00043	0.00029	1.46525	0.14297	(-0.00014;0.001)
	r_{t-1}	-0.07594	0.01912	-3.97098	0.00007	(-0.11343;-0.03844)
	r_{t-2}	0.00659	0.01912	0.34466	0.73037	(-0.03089;0.04407)
Lag = 3	Intercetta	0.00044	0.00029	1.49705	0.13449	(-0.00014;0.00101)
	r_{t-1}	-0.07562	0.01913	-3.95205	0.00008	(-0.11313;-0.0381)
	r_{t-2}	0.00642	0.01919	0.33469	0.73788	(-0.03121;0.04406)
	r_{t-3}	-0.00518	0.01914	-0.27081	0.78656	(-0.04271;0.03234)
Lag = 4	Intercetta	0.00045	0.00029	1.55226	0.12072	(-0.00012;0.00103)
	r_{t-1}	-0.07605	0.01914	-3.97364	0.00007	(-0.11358;-0.03852)
	r_{t-2}	0.00687	0.01919	0.35780	0.72052	(-0.03077;0.04451)
	r_{t-3}	-0.00679	0.01921	-0.35354	0.72371	(-0.04445;0.03087)
	r_{t-4}	-0.01661	0.01915	-0.86767	0.38565	(-0.05415;0.02093)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.00584	0.00589	0.00588	0.00622
R^2 corretto	0.00547	0.00516	0.00478	0.00476

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Ad un livello di significatività del 5%, si ottengono livelli del p-value accettabili ad eccezione del valore di significatività in corrispondenza dei coefficienti di r_{t-1} per qualsiasi lag temporale.

I coefficienti dei regressori si assestano correttamente su un intorno dello zero e si evidenziano coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) sostanzialmente nulli a conferma del fatto che il modello utilizzato non riesca a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che sebbene il valore di R^2 cresca, resta comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice HER.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.0766	1	-	-	-
r_{t-2}	0.0130	-0.0766	1	-	-
r_{t-3}	-0.0070	0.0125	-0.0775	1	-
r_{t-4}	-0.0155	-0.0063	0.0130	-0.0764	1

Dall'osservazione della matrice in analisi, si evince che i coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali si attestano su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.19 Interpump Group S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat. t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00089	0.00037	2.43033	0.01515	(0.00017;0.00161)
	r_{t-1}	-0.03050	0.01909	-1.59793	0.11017	(-0.06792;0.00693)
Lag = 2	Intercetta	0.00088	0.00037	2.40614	0.01619	(0.00016;0.0016)
	r_{t-1}	-0.03055	0.01910	-1.59922	0.10989	(-0.06800;0.00691)
	r_{t-2}	-0.01808	0.01909	-0.94710	0.34367	(-0.05550;0.01935)
Lag = 3	Intercetta	0.00087	0.00037	2.36018	0.01834	(0.00015;0.00159)
	r_{t-1}	-0.03062	0.01914	-1.60000	0.10971	(-0.06815;0.00691)
	r_{t-2}	-0.01727	0.01913	-0.90282	0.36670	(-0.05477;0.02024)
	r_{t-3}	0.00957	0.01911	0.50095	0.61644	(-0.02790;0.04705)
Lag = 4	Intercetta	0.00091	0.00037	2.47436	0.01341	(0.00019;0.00163)
	r_{t-1}	-0.03006	0.01913	-1.57133	0.11622	(-0.06757;0.00745)

r_{t-2}	-0.01864	0.01914	-0.97411	0.33009	(-0.05618;0.01889)
r_{t-3}	0.00833	0.01913	0.43569	0.66309	(-0.02917;0.04584)
r_{t-4}	-0.04127	0.01911	-2.15966	0.03089	(-0.07874;-0.0038)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.00093	0.00123	0.00132	0.00303
R^2 corretto	0.00057	0.00050	0.00022	0.00157

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Ad un livello di significatività del 5%, si ottengono livelli del p-value accettabili ad eccezione del valore di significatività relativo al coefficiente di r_{t-4} in presenza di quattro lag temporali.

I valori dei coefficienti dei regressori si assestano sempre su un intorno dello zero e si osservano valori dei coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesce a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che sebbene il valore di R^2 cresca, resta comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice IP.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.0301	1	-	-	-
r_{t-2}	-0.0173	-0.0299	1	-	-
r_{t-3}	0.0106	-0.0169	-0.0299	1	-
r_{t-4}	-0.0416	0.0112	-0.0178	0.03	1

Dall'osservazione della matrice in analisi, si evince che i coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali si attestano su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

6.2.20 Buzzi Unicem S.p.A.

Si riportano di seguito i risultati delle regressioni effettuate sulle differenze tra i log-prezzi dell'indice in analisi in presenza di uno, due, tre e quattro lag temporali:

		Coeff.	Err. Stand.	Stat. t	p-value	Int. di confidenza al 95%
Lag = 1	Intercetta	0.00027	0.00043	0.63861	0.52313	(-0.00057;0.00111)
	r_{t-1}	-0.00794	0.01907	-0.41617	0.67732	(-0.04534;0.02946)
Lag = 2	Intercetta	0.00027	0.00043	0.63562	0.52508	(-0.00057;0.00111)
	r_{t-1}	-0.00790	0.01910	-0.41348	0.67929	(-0.04534;0.02955)
	r_{t-2}	-0.04283	0.01907	-2.24668	0.02474	(-0.08022;-0.00545)
Lag = 3	Intercetta	0.00028	0.00043	0.64812	0.51696	(-0.00056;0.00112)
	r_{t-1}	-0.00698	0.01912	-0.36483	0.71527	(-0.04447;0.03052)
	r_{t-2}	-0.04412	0.01910	-2.30974	0.02098	(-0.08157;-0.00666)
	r_{t-3}	0.00922	0.01910	0.48272	0.62933	(-0.02824;0.04668)
Lag = 4	Intercetta	0.00029	0.00043	0.68126	0.49576	(-0.00055;0.00113)
	r_{t-1}	-0.00732	0.01911	-0.38269	0.70198	(-0.04480;0.03017)
	r_{t-2}	-0.04557	0.01911	-2.38549	0.01712	(-0.08304;-0.00811)
	r_{t-3}	0.00854	0.01912	0.44689	0.65499	(-0.02895;0.04603)
	r_{t-4}	-0.05129	0.01909	-2.68704	0.00725	(-0.08871;-0.01386)

	Lag = 1	Lag = 2	Lag = 3	Lag = 4
R^2	0.000063	0.00190	0.00209	0.00467
R^2 corretto	-0.000302	0.00117	0.00100	0.00321

Dall'analisi dei risultati ottenuti, coerentemente con la (6.2), si osserva sempre un valore dell'intercetta circa nullo. Ad un livello di significatività del 5%, si ottengono livelli del p-value accettabili ad eccezione del valore di significatività relativo ai coefficienti di r_{t-2} in presenza di due, tre e quattro lag temporali e di r_{t-4} con quattro lag temporali.

I valori dei coefficienti dei regressori si assestano sempre su un intorno dello zero e si osservano valori dei coefficienti di determinazione R^2 ed R^2 corretto (indicatore più adeguato per le analisi di regressione lineare multipla) circa nulli ad evidenza del fatto che il modello utilizzato non riesce a "spiegare" adeguatamente la variabilità delle osservazioni. Aggiungendo regressori al modello e dunque considerando più lag temporali, si osserva che sebbene il valore di R^2 cresca, resta comunque in un intorno dello zero.

Dal momento che i regressori non consentono di approssimare adeguatamente i dati osservati, si può concludere che non è possibile rifiutare l'ipotesi nulla di efficienza debole dei log-rendimenti dell'indice in analisi, in quanto il mercato non ha memoria dei rendimenti con uno, due, tre e quattro lag temporali di distanza.

Ad ulteriore conferma del fatto che l'indice BZU.MI sia coerente con la teoria della random walk per cui non è possibile basarsi sulle informazioni passate per prevedere il futuro, si riporta di seguito la matrice di correlazione seriale in presenza di quattro lag temporali:

	r_t	r_{t-1}	r_{t-2}	r_{t-3}	r_{t-4}
r_t	1	-	-	-	-
r_{t-1}	-0.0079	1	-	-	-
r_{t-2}	-0.0434	-0.0070	1	-	-
r_{t-3}	0.0097	-0.0440	-0.0079	1	-
r_{t-4}	-0.0496	0.0100	-0.0427	-0.0088	1

Dall'osservazione della matrice in analisi, si evince che i coefficienti di correlazione seriali tra i log-rendimenti temporali si attestano su un intorno dello zero, per cui non è possibile prevedere il prezzo futuro del titolo facendo riferimento alle quotazioni passate. Tale risultato conferma, dunque, che i log-rendimenti seguono una random walk e che l'ipotesi di efficienza debole è rispettata.

7 Applicazione del modello di Markowitz

La teoria di selezione del portafoglio di Markowitz consta di due principali fasi: la prima fase è oggettiva e consiste nella costruzione della frontiera efficiente formata da quei portafogli per cui dato un certo livello di rischio, si ha il massimo rendimento ottenibile possibile e, analogamente, dato un certo livello di rendimento si ottiene il minor livello di rischio possibile. Una volta determinato l'insieme dei portafogli efficienti, si procede con la seconda fase in cui si seleziona il portafoglio ottimo per l'investitore rappresentato dal punto di tangenza tra la frontiera efficiente e la curva di utilità dell'investitore stesso.

La seconda fase prevista dal modello è, dunque, soggettiva in quanto la selezione del portafoglio ottimo tra tutti i portafogli efficienti individuati dipende dalla funzione di utilità dell'investitore e dunque dalla sua propensione al rischio. Per tale motivo, il portafoglio così individuato non potrà essere confrontato con quello selezionato da un individuo avente una diversa curva di utilità e dunque una diversa propensione al rischio.

Come già anticipato, gli input principali del modello sono costituiti dal vettore dei rendimenti attesi (i quali, come verificato, sono distribuiti normalmente), dalla matrice di correlazione tra i titoli che compongono il portafoglio nonché dalla matrice di varianza-covarianza. Per tale motivo, un elemento importante dell'analisi è costituito dalla valutazione della correlazione tra i singoli titoli considerati: se i livelli di correlazione sono bassi, si ottiene un portafoglio ben diversificato e perciò caratterizzato da un livello di rischio inferiore rispetto alla media ponderata degli scarti quadratici medi dei singoli titoli.

In Tabella 7.1 ed in Tabella 7.2 si riportano le matrici di correlazione e di varianza-covarianza tra i titoli selezionati, definite nel modo seguente:

Matrice di correlazione

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice di Covarianza (di ordine n)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Con: } \rho_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}, \sigma_{kj} = \text{cov}(R_k, R_j) \text{ e } \sigma_{kk} = \text{var}(R_k) = \sigma_k^2$$

	ENEL	ISP	ENI	STM	G	FCA	UCG	SRG	EXO	ATL	CPR	DIA	REC	AMP	PRY	TIT	TEN	HER	IP	BZU
ENEL	1																			
ISP	0.6733	1																		
ENI	0.6783	0.6480	1																	
STM	0.4625	0.4748	0.4927	1																
G	0.6963	0.7701	0.6899	0.4851	1															
FCA	0.5181	0.5840	0.5579	0.5115	0.5704	1														
UCG	0.6161	0.8451	0.5991	0.4356	0.7320	0.5468	1													
SRG	0.6887	0.4856	0.5486	0.3517	0.5026	0.3653	0.4320	1												
EXO	0.6049	0.6304	0.6350	0.5643	0.6629	0.7624	0.6066	0.4680	1											
ATL	0.5570	0.5049	0.5223	0.4051	0.5314	0.4496	0.4662	0.4580	0.5116	1										
CPR	0.5068	0.3999	0.4553	0.3529	0.4384	0.3581	0.3485	0.4811	0.4427	0.3714	1									
DIA	0.3090	0.2562	0.2400	0.2753	0.2715	0.2410	0.2208	0.2912	0.2777	0.2305	0.2853	1								
REC	0.4333	0.3480	0.3650	0.3200	0.3648	0.3348	0.2952	0.4159	0.3889	0.3300	0.3763	0.3275	1							
AMP	0.3749	0.3592	0.3384	0.3138	0.3520	0.3408	0.3360	0.3479	0.3838	0.3162	0.3515	0.2887	0.3720	1						
PRY	0.5650	0.5738	0.5567	0.5190	0.5754	0.5170	0.5267	0.4538	0.6079	0.4492	0.4252	0.3076	0.3838	0.3440	1					
TIT	0.5693	0.5749	0.5372	0.3412	0.5704	0.4232	0.5391	0.4535	0.4743	0.4195	0.3749	0.2156	0.3468	0.2918	0.4500	1				
TEN	0.4648	0.4785	0.6866	0.4440	0.5011	0.4812	0.4516	0.3790	0.5350	0.4150	0.3613	0.2067	0.2902	0.2957	0.4964	0.3985	1			
HER	0.5697	0.4259	0.4547	0.3212	0.4189	0.3644	0.3943	0.5402	0.4135	0.4321	0.3693	0.2292	0.3815	0.3324	0.3698	0.3876	0.3156	1		
IP	0.3945	0.4081	0.4188	0.3796	0.4147	0.4174	0.3652	0.3415	0.4811	0.3825	0.3465	0.2966	0.3434	0.3492	0.4358	0.3136	0.3872	0.3184	1	
BZU	0.5509	0.6089	0.5832	0.5034	0.6111	0.5579	0.5738	0.4047	0.6195	0.4653	0.4002	0.2626	0.3607	0.3474	0.5813	0.4434	0.5040	0.3862	0.4373	1

Tabella 7.1: Matrice storica di correlazione tra i titoli selezionati

	ENEL	ISP	ENI	STM	G	FCA	UCG	SRG	EXO	ATL	CPR	DIA	REC	AMP	PRY	TIT	TEN	HER	IP	BZU
ENEL	0.00029																			
ISP	0.00030	0.00068																		
ENI	0.00020	0.00029	0.00030																	
STM	0.00020	0.00031	0.00021	0.00064																
G	0.00021	0.00036	0.00021	0.00022	0.00032															
FCA	0.00024	0.00041	0.00026	0.00035	0.00027	0.00072														
UCG	0.00031	0.00066	0.00031	0.00033	0.00039	0.00044	0.00089													
SRG	0.00017	0.00019	0.00014	0.00013	0.00013	0.00015	0.00019	0.00022												
EXO	0.00022	0.00036	0.00024	0.00031	0.00026	0.00044	0.00039	0.00015	0.00047											
ATL	0.00019	0.00027	0.00019	0.00021	0.00019	0.00025	0.00029	0.00014	0.00023	0.00042										
CPR	0.00013	0.00016	0.00012	0.00014	0.00012	0.00015	0.00016	0.00011	0.00015	0.00012	0.00024									
DIA	0.00010	0.00012	0.00008	0.00013	0.00009	0.00012	0.00012	0.00008	0.00011	0.00009	0.00008	0.00034								
REC	0.00012	0.00015	0.00010	0.00013	0.00011	0.00015	0.00014	0.00010	0.00014	0.00011	0.00009	0.00010	0.00027							
AMP	0.00012	0.00018	0.00011	0.00015	0.00012	0.00017	0.00019	0.00010	0.00016	0.00012	0.00010	0.00010	0.00012	0.00036						
PRY	0.00020	0.00032	0.00020	0.00028	0.00022	0.00029	0.00033	0.00014	0.00028	0.00020	0.00014	0.00012	0.00013	0.00014	0.00045					
TIT	0.00022	0.00034	0.00021	0.00020	0.00023	0.00026	0.00037	0.00015	0.00023	0.00020	0.00013	0.00009	0.00013	0.00013	0.00022	0.00052				
TEN	0.00017	0.00027	0.00025	0.00024	0.00019	0.00028	0.00029	0.00012	0.00025	0.00018	0.00012	0.00008	0.00010	0.00012	0.00023	0.00020	0.00046			
HER	0.00015	0.00017	0.00012	0.00012	0.00011	0.00015	0.00018	0.00012	0.00014	0.00014	0.00009	0.00006	0.00010	0.00010	0.00012	0.00014	0.00010	0.00023		
IP	0.00013	0.00020	0.00014	0.00018	0.00014	0.00021	0.00021	0.00010	0.00020	0.00015	0.00010	0.00010	0.00011	0.00013	0.00018	0.00014	0.00016	0.00009	0.00037	
BZU	0.00021	0.00035	0.00023	0.00029	0.00024	0.00034	0.00038	0.00013	0.00030	0.00021	0.00014	0.00011	0.00013	0.00015	0.00028	0.00023	0.00024	0.00013	0.00019	0.00050

Tabella 7.2: Matrice storica delle covarianze tra i titoli selezionati

Si osserva che sebbene le correlazioni siano tutte positive e non si verifichi una vera e propria eliminazione del rischio di portafoglio, si ottengono coefficienti di correlazione caratterizzati da livelli sostanzialmente bassi indicativi di un buon effetto diversificazione.

Il processo di costruzione della frontiera efficiente richiede la risoluzione di uno dei due problemi di ottimizzazione descritti nel paragrafo 2.2.1. In particolare, si è deciso di effettuare l'analisi risolvendo il secondo problema di ottimizzazione sia in presenza che in assenza del vincolo di non negatività delle quote:

Presenza di vendite allo scoperto

$$\begin{cases} \min_{\omega_1, \dots, \omega_n} \sigma_{\Pi}^2 \\ E(R_{\Pi}) = \tilde{R} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{cases}$$

Assenza di vendite allo scoperto

$$\begin{cases} \min_{\omega_1, \dots, \omega_n} \sigma_{\Pi}^2 \\ E(R_{\Pi}) = \tilde{R} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \\ \omega_i \geq 0 \end{cases}$$

La frontiera efficiente è stata costruita mediante il Risolutore di Excel e la creazione di una Macro immettendo in input il vettore dei log-rendimenti attesi in Tabella 7.3 e la matrice di covarianza in Tabella 7.2.

<i>Indice</i>	<i>Log-rendimenti attesi</i>
ENEL	0.000424
ISP	0.000005
ENI	-0.000135
STM	0.000712
G	0.000004
FCA	0.000611
UCG	-0.000812
SRG	0.000319
EXO	0.000504
ATL	0.000068

<i>Indice</i>	<i>Log-rendimenti attesi</i>
CPR	0.000671
DIA	0.000796
REC	0.000941
AMP	0.000896
PRY	0.000353
TIT	-0.000361
TEN	-0.000330
HER	0.000396
IP	0.000855
BZU	0.000240

Tabella 7.3: Vettore dei log-rendimenti attesi dei titoli selezionati

Dopo aver fissato in modo arbitrario i diversi livelli di rendimento atteso (vincolo del problema di ottimizzazione), si è valutato in corrispondenza di ciascun rendimento target, il vettore ottimo

delle quote di composizione degli indici in analisi costituenti i portafogli efficienti ed il corrispondente livello minimo di deviazione standard dato dalla funzione obiettivo del problema di ottimizzazione.

L'insieme dei portafogli così ottenuti costituisce la frontiera efficiente per cui dato un certo livello di rendimento atteso, si individua il portafoglio in corrispondenza del quale si ha il minimo rischio.

Nelle pagine seguenti, si riportano in Tabella 7.4 i risultati ottenuti in corrispondenza di trentuno livelli di rendimento target in presenza di vendite allo scoperto ed in Tabella 7.5 i risultati ottenuti in assenza di vendite allo scoperto (le tabelle sono state suddivise in due parti per motivi di impaginazione).

Dall'osservazione dei dati, si evince che al crescere del rendimento atteso, si registra un aumento del rischio. In particolare, in presenza di vendite allo scoperto, tale andamento caratterizza i portafogli a partire dal livello di rendimento $E(R_{\pi}) = 0.000568$ fino a $E(R_{\pi}) = 0.003$. Tali portafogli, infatti, appartengono al ramo efficiente della frontiera costruita e dunque sono caratterizzati dalle migliori combinazioni di rischio-rendimento ottenibili. I primi tre portafogli calcolati, invece, fanno parte del ramo inefficiente della curva per cui a parità di deviazione standard, offrono un rendimento inferiore rispetto ai portafogli sul ramo efficiente dai quali sono dominati.

Il vertice della curva della frontiera in corrispondenza di $E(R_{\pi}) = 0.000568$, rappresenta il portafoglio a minima varianza con il valore minimo di deviazione standard pari a $\sigma_{\pi} = 0.010474$.

In assenza di vendite allo scoperto, i portafogli appartenenti alla frontiera efficiente si hanno in corrispondenza dei livelli di rendimento da $E(R_{\pi}) = 0.000594$ a $E(R_{\pi}) = 0.000941$. I portafogli ottenuti per livelli inferiori di rendimento, appartengono invece al ramo inefficiente della curva ed in quanto tali, per un certo livello di rischio, sono dominati dai portafogli sul ramo efficiente.

Il vertice della frontiera si ha in corrispondenza di $E(R_{\pi}) = 0.000594$, per cui si ha il portafoglio a minima varianza con $\sigma_{\pi} = 0.011032$.

$E(R_{\pi})$	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0013	0.0013	0.0014	0.0015	0.0016
σ_{π}	0.0106	0.0105	0.0105	0.0105	0.0106	0.0108	0.0110	0.0113	0.0117	0.0121	0.0125	0.0130	0.0135	0.0140	0.0146
ENEL	-0.13	-0.11	-0.08	-0.06	-0.04	-0.01	0.01	0.03	0.06	0.08	0.11	0.13	0.15	0.18	0.20
ISP	-0.15	-0.13	-0.11	-0.09	-0.07	-0.05	-0.03	-0.01	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12
ENI	0.13	0.10	0.08	0.07	0.05	0.03	0.01	-0.01	-0.03	-0.04	-0.06	-0.08	-0.10	-0.12	-0.14
STM	-0.02	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.05	0.05	0.06	0.07
G	0.24	0.23	0.22	0.21	0.20	0.18	0.17	0.16	0.15	0.14	0.13	0.12	0.11	0.10	0.09
FCA	-0.03	-0.02	-0.02	-0.01	-0.01	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.03	0.04	0.04	0.05	0.06
UCG	0.00	-0.03	-0.05	-0.08	-0.10	-0.12	-0.15	-0.17	-0.20	-0.22	-0.24	-0.27	-0.29	-0.32	-0.34
SRG	0.19	0.18	0.17	0.16	0.14	0.13	0.12	0.11	0.10	0.08	0.07	0.06	0.05	0.03	0.02
EXO	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.02	-0.01	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
ATL	0.03	0.02	0.02	0.01	0.00	-0.01	-0.02	-0.03	-0.04	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.08	-0.09
CPR	0.16	0.17	0.18	0.19	0.19	0.20	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.25	0.26	0.27	0.28
DIA	0.14	0.14	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16
REC	0.10	0.12	0.13	0.14	0.16	0.17	0.19	0.20	0.22	0.23	0.25	0.26	0.28	0.29	0.31
AMP	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19
PRY	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02
TIT	0.03	0.02	0.00	-0.01	-0.03	-0.04	-0.05	-0.07	-0.08	-0.10	-0.11	-0.12	-0.14	-0.15	-0.17
TEN	0.06	0.05	0.03	0.02	0.00	-0.01	-0.03	-0.04	-0.06	-0.07	-0.09	-0.10	-0.12	-0.13	-0.15
HER	0.22	0.22	0.21	0.21	0.20	0.20	0.20	0.19	0.19	0.18	0.18	0.17	0.17	0.16	0.16
IP	0.06	0.07	0.08	0.09	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.21	0.22
BZU	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02

Tabella 7.4: Portafogli ottenuti in presenza di vendite allo scoperto, dato un rendimento target (parte I)

$E(R_{\pi})$	0.0017	0.0018	0.0019	0.0020	0.0020	0.0021	0.0022	0.0023	0.0024	0.0025	0.0026	0.0027	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030
σ_{π}	0.0152	0.0158	0.0165	0.0171	0.0178	0.0185	0.0192	0.0199	0.0206	0.0213	0.0221	0.0228	0.0236	0.0243	0.0251	0.0258
ENEL	0.22	0.25	0.27	0.30	0.32	0.34	0.37	0.39	0.41	0.44	0.46	0.49	0.51	0.53	0.56	0.58
ISP	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.27	0.29	0.31	0.33	0.35	0.37	0.39	0.41	0.43
ENI	-0.16	-0.17	-0.19	-0.21	-0.23	-0.25	-0.27	-0.28	-0.30	-0.32	-0.34	-0.36	-0.38	-0.39	-0.41	-0.43
STM	0.07	0.08	0.08	0.09	0.10	0.10	0.11	0.12	0.12	0.13	0.13	0.14	0.15	0.15	0.16	0.17
G	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00	-0.01	-0.02	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.08	-0.09
FCA	0.06	0.07	0.08	0.08	0.09	0.09	0.10	0.11	0.11	0.12	0.13	0.13	0.14	0.15	0.15	0.16
UCG	-0.37	-0.39	-0.41	-0.44	-0.46	-0.49	-0.51	-0.53	-0.56	-0.58	-0.61	-0.63	-0.65	-0.68	-0.70	-0.73
SRG	0.01	0.00	-0.01	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.09	-0.10	-0.11	-0.12	-0.13	-0.15	-0.16	-0.17
EXO	0.06	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19
ATL	-0.10	-0.11	-0.11	-0.12	-0.13	-0.14	-0.15	-0.16	-0.17	-0.17	-0.18	-0.19	-0.20	-0.21	-0.22	-0.23
CPR	0.29	0.30	0.31	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42
DIA	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.19	0.19	0.19	0.19
REC	0.32	0.34	0.35	0.37	0.38	0.40	0.41	0.43	0.44	0.45	0.47	0.48	0.50	0.51	0.53	0.54
AMP	0.20	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34
PRY	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.04
TIT	-0.18	-0.19	-0.21	-0.22	-0.24	-0.25	-0.26	-0.28	-0.29	-0.31	-0.32	-0.33	-0.35	-0.36	-0.38	-0.39
TEN	-0.16	-0.18	-0.19	-0.21	-0.22	-0.24	-0.25	-0.27	-0.28	-0.29	-0.31	-0.32	-0.34	-0.35	-0.37	-0.38
HER	0.15	0.15	0.15	0.14	0.14	0.13	0.13	0.12	0.12	0.11	0.11	0.10	0.10	0.10	0.09	0.09
IP	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39
BZU	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.04	-0.04

Tabella 7.4: Portafogli ottenuti in presenza di vendite allo scoperto, dato un rendimento target (parte II)

$E(R_{\pi})$	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
σ_{π}	0.0116	0.0115	0.0114	0.0114	0.0113	0.0113	0.0112	0.0112	0.0111	0.0111	0.0111	0.0110	0.0110	0.0110	0.0110
ENEL	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ISP	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ENI	0.08	0.08	0.07	0.07	0.07	0.06	0.06	0.05	0.05	0.04	0.04	0.03	0.02	0.02	0.00
STM	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
G	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.05	0.05	0.05	0.05	0.04	0.04	0.03	0.02	0.02	0.02
FCA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
UCG	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
SRG	0.18	0.18	0.18	0.18	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.16	0.16	0.15	0.15	0.15	0.15
EXO	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATL	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CPR	0.12	0.13	0.13	0.14	0.14	0.14	0.15	0.15	0.16	0.16	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18
DIA	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.16
REC	0.04	0.05	0.06	0.06	0.07	0.07	0.08	0.09	0.10	0.10	0.11	0.12	0.12	0.13	0.13
AMP	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06	0.07
PRY	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TIT	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TEN	0.10	0.09	0.09	0.08	0.08	0.07	0.07	0.06	0.05	0.05	0.04	0.04	0.03	0.02	0.02
HER	0.22	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
IP	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06
BZU	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabella 7.5: Portafogli ottenuti in assenza di vendite allo scoperto, dato un rendimento target (parte I)

$E(R_{\pi})$	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009
σ_{π}	0.0110	0.0110	0.0111	0.0111	0.0112	0.0113	0.0114	0.0115	0.0116	0.0118	0.0120	0.0122	0.0126	0.0131	0.0141	0.0163
ENEL	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ISP	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ENI	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
STM	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
G	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
FCA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
UCG	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
SRG	0.14	0.14	0.12	0.10	0.07	0.04	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
EXO	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATL	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CPR	0.19	0.19	0.20	0.20	0.21	0.21	0.21	0.22	0.21	0.21	0.20	0.13	0.06	0.00	0.00	0.00
DIA	0.16	0.16	0.16	0.16	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.18	0.18	0.17	0.16	0.12	0.00	0.00
REC	0.14	0.15	0.16	0.18	0.20	0.22	0.23	0.25	0.28	0.30	0.32	0.37	0.43	0.50	0.66	1.00
AMP	0.07	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.17	0.20	0.22	0.23	0.00
PRY	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TIT	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TEN	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
HER	0.20	0.20	0.19	0.17	0.16	0.15	0.14	0.12	0.08	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
IP	0.07	0.07	0.09	0.09	0.10	0.10	0.11	0.12	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.16	0.10	0.00
BZU	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabella 7.5: Portafogli ottenuti in assenza di vendite allo scoperto, dato un rendimento target (parte II)

In Figura 7.1 ed in Figura 7.2 è possibile osservare la relazione che intercorre tra il rendimento atteso ed il rischio di portafoglio e le coordinate del portafoglio di tangenza e del portafoglio di minima varianza:

Portafoglio di tangenza in presenza di vendite allo scoperto: $(\mu_M, \sigma_M) = (0.0027, 0.0229)$

Portafoglio di tangenza in assenza di vendite allo scoperto: $(\mu_M, \sigma_M) = (0.0009, 0.0122)$

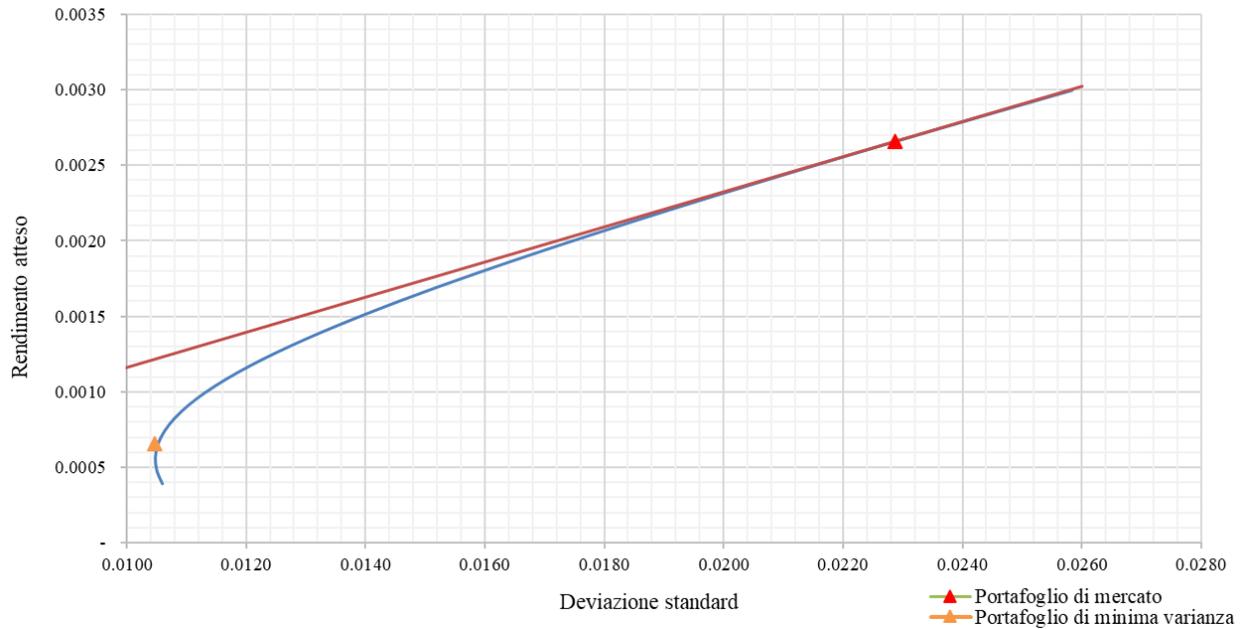


Figura 7.1: Frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto

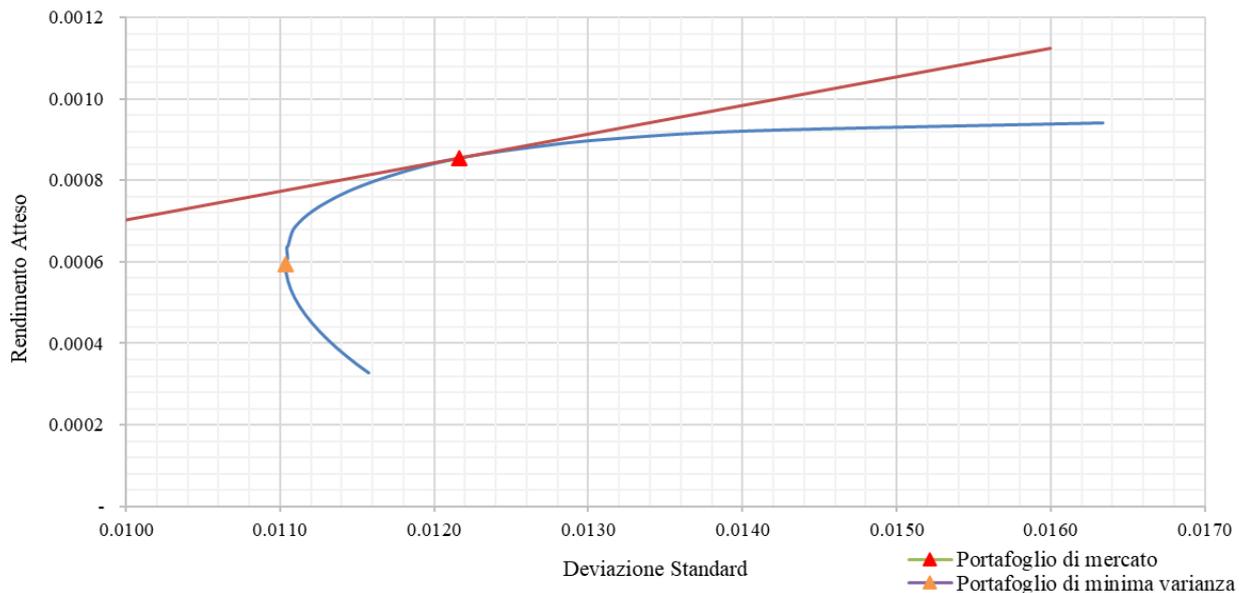


Figura 7.2: Frontiera efficiente in assenza di vendite allo scoperto

Dal momento che i dati selezionati sono costituiti solo da titoli rischiosi e, come anticipato, il titolo risk free è nullo, la retta tangente alla frontiera efficiente che individua il portafoglio di tangenza è rappresentata da una semiretta uscente dall'origine degli assi la cui inclinazione, rappresentata dall'indice di Sharpe, caratterizza il portafoglio a cui si riferisce: in questo caso, infatti, la CML (frontiera efficiente linearizzata) che individua il portafoglio di mercato, è quella retta avente un coefficiente angolare pari al massimo indice di Sharpe individuabile. L'espressione analitica della retta in analisi è rappresentata dalla (2.9).

Immettendo in input al problema di ottimizzazione il rendimento del portafoglio di mercato e avviando il Risolitore di Excel, si determina il vettore delle quote di composizione del portafoglio di mercato sia in presenza che in assenza di vendite allo scoperto:

ENEL	ISP	ENI	STM	G	FCA	UCG	SRG	EXO	ATL
0.49	0.35	-0.36	0.14	-0.05	0.13	-0.63	0.00	0.16	0.00
CPR	DIA	REC	AMP	PRY	TIT	TEN	HER	IP	BZU
0.38	0.18	0.49	0.30	-0.03	-0.33	-0.33	0.10	0.35	-0.03

Tabella 7.6: Vettore delle quote di composizione del portafoglio di mercato in presenza di vendite allo scoperto

ENEL	ISP	ENI	STM	G	FCA	UCG	SRG	EXO	ATL
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CPR	DIA	REC	AMP	PRY	TIT	TEN	HER	IP	BZU
0.15	0.17	0.36	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.15	0.00

Tabella 7.7: Vettore delle quote di composizione del portafoglio di mercato in assenza di vendite allo scoperto

In conclusione, il portafoglio di mercato così individuato è il “miglior” portafoglio di attività rischiose che si possa detenere caratterizzato dalla miglior combinazione rischio-rendimento; esso è detenuto da tutti gli investitori esistenti qualora essi abbiano aspettative omogenee e, dunque, stessa frontiera efficiente.

Il modello di Markowitz, invece, è caratterizzato da una forte componente soggettiva per cui il portafoglio ottimo per un certo investitore dipende dalla sua propensione al rischio ed in quanto tale non è dunque confrontabile con quello di un altro individuo. In tal caso, infatti, il portafoglio ottimo è dato dal punto di tangenza tra la specifica curva di utilità dell'investitore considerato e la frontiera efficiente costruita.

Il portafoglio così valutato è quello che massimizza l'utilità attesa dell'investitore caratterizzato da una determinata propensione al rischio. Dal punto di vista analitico, le coordinate del portafoglio ottimo "soggettivo" sono date da:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = \frac{\pi_M}{1 + \pi_M^2} (\beta - r_f) \\ \tilde{\mu} = \frac{r_f + \pi_M^2 \beta}{1 + \pi_M^2} \end{cases}$$

Se per esempio si considerano le curve di indifferenza di un investitore con $\beta = 1$, il portafoglio ottimo individuato dal punto di tangenza tra la frontiera efficiente e la curva di indifferenza "più alta" a cui compete il massimo valore di utilità attesa per quell'investitore, è costituito dalle seguenti quote di composizione:

ENEL	ISP	ENI	STM	G	FCA	UCG	SRG	EXO	ATL
3.41	2.72	-2.63	0.91	-1.40	0.91	-3.60	-1.60	1.25	-1.25
CPR	DIA	REC	AMP	PRY	TIT	TEN	HER	IP	BZU
1.43	0.38	2.30	1.44	-0.14	-2.06	-2.17	-0.46	1.71	-0.15

Tabella 7.8: Vettore delle quote di composizione del portafoglio ottimo di Markowitz con vendite allo scoperto ($\beta = 1$)

In Figura 7.3 ed in Figura 7.4, è inoltre possibile visualizzare la variazione di composizione delle quote di portafoglio al variare del livello di rendimento target e dunque all'aumentare del rischio: in assenza di vendite allo scoperto, per alti valori di rendimento si evince che il portafoglio ottenuto dal problema di ottimizzazione è composto in misura preponderante dai titoli caratterizzati da una performance di Sharpe maggiore (indicante il rendimento del portafoglio per unità di rischio complessivo). Questo risultato conferma l'osservazione già effettuata in precedenza circa la tendenza del processo di ottimizzazione a concentrare la soluzione sui titoli con rendimenti alti. Come già osservato in Figura 5.1, gli indici con le performance migliori nell'insieme dei titoli in analisi sono Recordati S.p.A., Interpump Group S.p.A. e Amplifon S.p.A.

Sebbene questo risultato sembri essere contrario al principio di diversificazione, si osserva che i titoli selezionati sono comunque caratterizzati da livelli di correlazione sostanzialmente bassi per cui, coerentemente con quanto introdotto dalla teoria di Markowitz, in tali condizioni si può ritenere che ci sia un certo "effetto diversificazione" risultante in una riduzione del rischio di portafoglio.

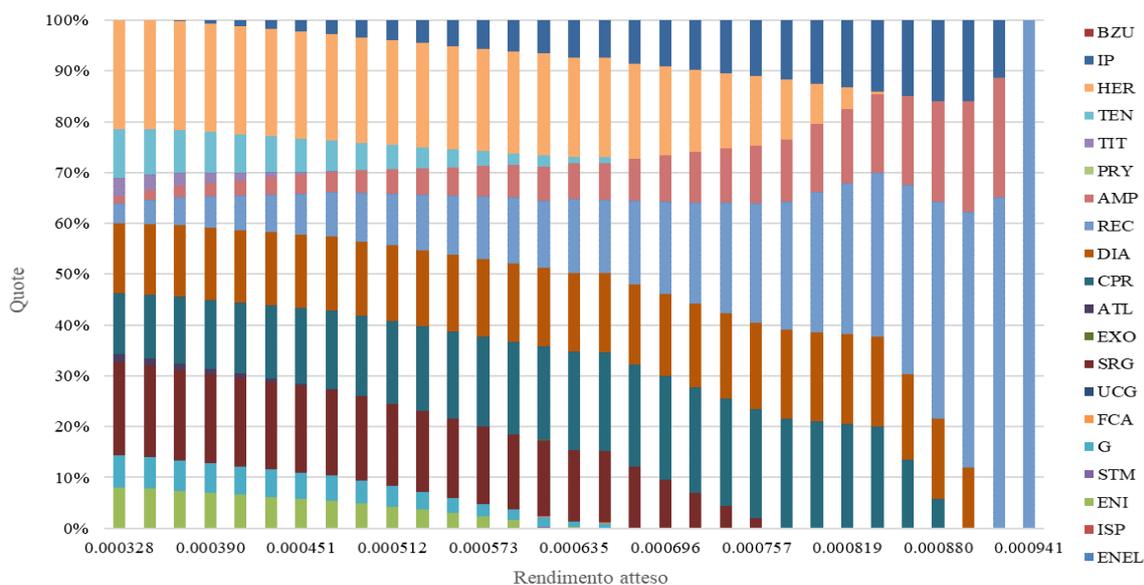


Figura 7.3:Variazione di composizione dei portafogli al variare del rendimento target in assenza di vendite allo scoperto

In presenza di vendite allo scoperto, invece, tale risultato è meno evidente in quanto, assumendo una posizione corta (quote negative) sui titoli aventi performance inferiori, si ottengono portafogli più diversificati e formati da un maggior numero di titoli.

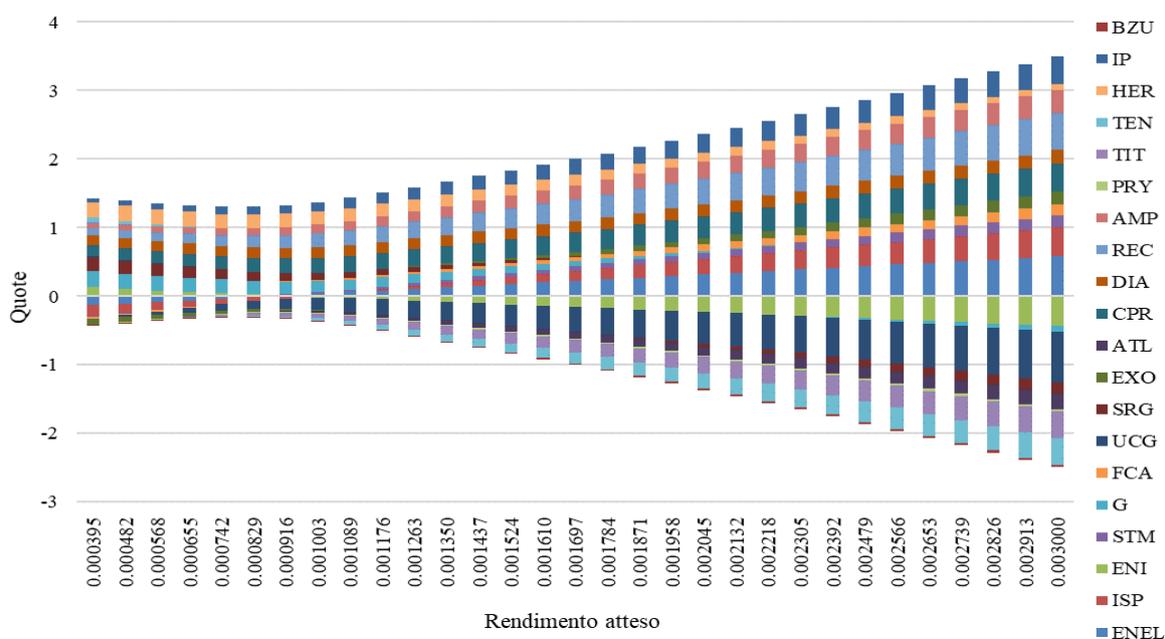


Figura 7.4:Variazione di composizione dei portafogli al variare del rendimento target in presenza di vendite allo scoperto

Al fine di avere maggior evidenza della variazione delle quote di ciascun titolo all'interno dei portafogli ottenuti, si riportano le composizioni ottenute anche nei grafici in Figura 7.5 ed in Figura 7.6 da cui è evidente la crescita delle quote dei titoli aventi performance superiori.

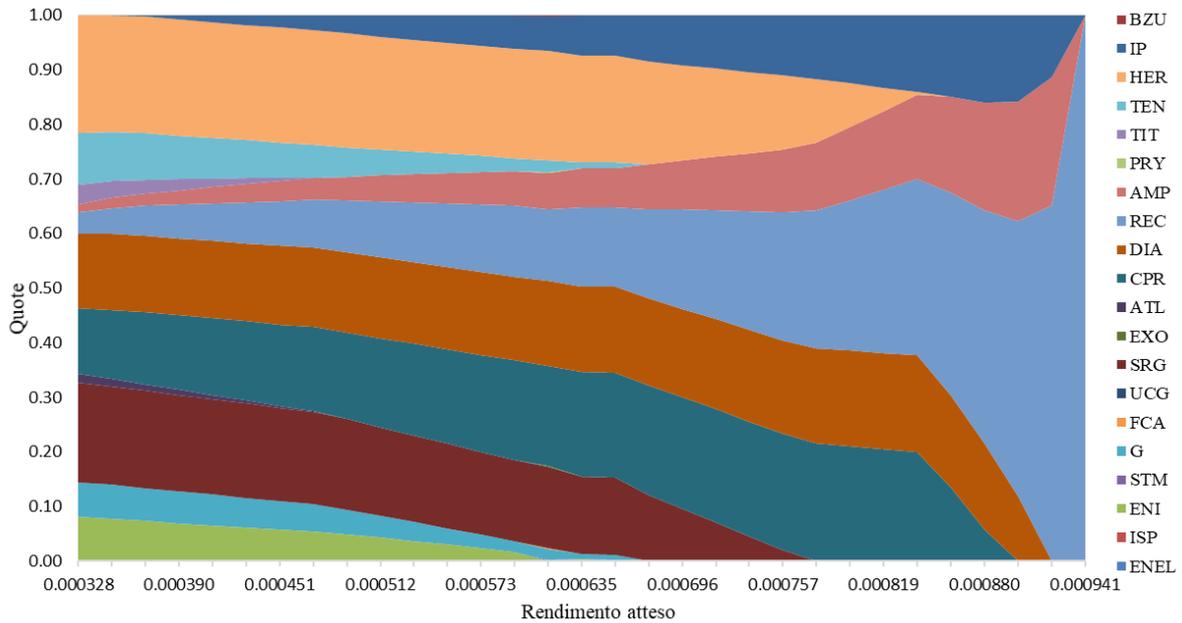


Figura 7.5: Variazione di composizione dei portafogli al variare del rendimento target in assenza di vendite allo scoperto

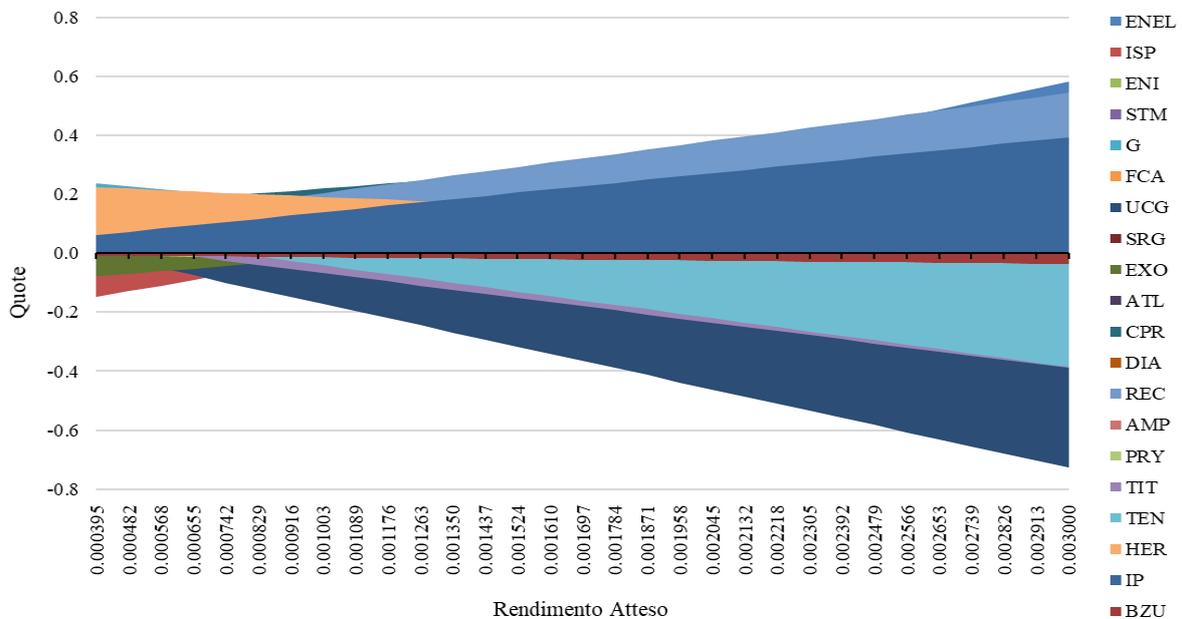


Figura 7.6: Variazione di composizione dei portafogli al variare del rendimento target in presenza di vendite allo scoperto

8 Applicazione del modello di Black e Litterman

Il modello di Black e Litterman si propone di superare e sviluppare i limiti ed i principali punti critici che caratterizzano il modello di Markowitz consentendo di costruire così portafogli più stabili.

Le fasi principali che caratterizzano il modello sono:

- Approccio di equilibrio
- Formulazione delle aspettative soggettive degli operatori
- Approccio bayesiano

8.1 *Approccio di equilibrio*

Dal momento che l'ottimizzazione proposta da Markowitz risulta essere eccessivamente sensibile agli input stimati ed alle aspettative di rendimento formulate dagli investitori, il modello di Black e Litterman propone di "ancorare" i portafogli costruiti intorno ad un punto di riferimento neutrale, rappresentato dal benchmark di mercato.

Il portafoglio di equilibrio è quell'asset posseduto dagli operatori in condizioni ideali di mercato in cui tutti gli investitori hanno le medesime aspettative e la cui composizione è proporzionale alle capitalizzazioni di mercato.

Gli input al processo di ottimizzazione, dunque, non sono costituiti dai rendimenti storici ma dai cosiddetti rendimenti impliciti, i quali sono in grado di spiegare la composizione di mercato e da cui si ottiene il portafoglio di riferimento stesso:

$$\theta = \lambda \cdot \Sigma \cdot \Omega_B \quad (8.1)$$

Con:

λ : coefficiente di avversione al rischio

Σ : matrice di varianza-covarianza storica (Tabella 7.2)

Ω_B : vettore dei pesi dei singoli indici in analisi secondo la capitalizzazione di mercato (Tabella 8.1)

<i>Indice</i>	<i>Capitalizzazione al 30/09/20 [€]</i>	<i>Peso Ω_B</i>	<i>Indice</i>	<i>Capitalizzazione al 30/09/20 [€]</i>	<i>Peso Ω_B</i>
ENEL	75721.3	0.2459	CPR	10814.4	0.0351
ISP	31209.5	0.1013	DIA	9624.7	0.0313
ENI	24364.8	0.0791	REC	9193.7	0.0299
STM	23727.5	0.0770	AMP	6956.9	0.0226
G	18943.3	0.0615	PRY	6661.6	0.0216
FCA	16128.8	0.0524	TIT	5202.5	0.0169
UCG	15803.6	0.0513	TEN	5014.1	0.0163
SRG	14836.1	0.0482	HER	4715.2	0.0153
EXO	11249	0.0365	IP	3451.5	0.0112
ATL	11089.4	0.0360	BZU	3277.9	0.0106

Tabella 8.1: Vettore Ω_B delle quote del portafoglio di mercato

Il coefficiente di avversione al rischio λ rappresenta la propensione al rischio dell'investitore, per cui un alto valore del coefficiente indica un soggetto con una spiccata avversione al rischio. Come mostra l'equazione (8.2), per ogni livello di rischio assunto rispetto al benchmark, esso è una misura dell'extra-rendimento che compete all'operatore rispetto al titolo risk free di riferimento:

$$\lambda = \frac{E(R_{\pi}) - r_f}{\sigma^2} \quad (8.2)$$

Nell'analisi effettuata, il benchmark di mercato è rappresentato dal FTSE MIB ed il titolo risk free è dato dal BOT annuale di ottobre 2020 il cui tasso di rendimento è attestato su un valore negativo:

Benchmark			
<i>Rendimento atteso</i>	<i>Varianza</i>	<i>r_f</i>	<i>λ</i>
-0.0000727	0.0002587	-0.00436	16.572

Come già anticipato, qualora gli investitori non abbiano alcuna view sugli asset in analisi, deterranno un portafoglio composto secondo le quote della capitalizzazione di mercato: a tale asset è legato il vettore θ dei rendimenti impliciti riportato in Tabella 8.2 secondo l'equazione

(8.1) (esso costituisce il punto di partenza per la formulazione ed implementazione di eventuali aspettative).

<i>Indice</i>	<i>Rendimenti impliciti</i>	<i>Indice</i>	<i>Rendimenti impliciti</i>
ENEL	0.003771	CPR	0.002225
ISP	0.005647	DIA	0.001790
ENI	0.003526	REC	0.002090
STM	0.004257	AMP	0.002312
G	0.003784	PRY	0.003797
FCA	0.004917	TIT	0.003759
UCG	0.006055	TEN	0.003392
SRG	0.002530	HER	0.002243
EXO	0.004363	IP	0.002562
ATL	0.003407	BZU	0.004036

Tabella 8.2: Vettore θ dei rendimenti impliciti

Ai fini del calcolo della frontiera efficiente di Black e Litterman in presenza ed in assenza di vendite allo scoperto nell'ipotesi in cui gli investitori non abbiano view circa l'andamento futuro degli asset, si pongono in input al processo di ottimizzazione il vettore dei rendimenti θ e la matrice di varianza-covarianza teorica riportata in Tabella 8.3. Tale matrice è proporzionale alla matrice storica Σ utilizzata nel modello di Markowitz, secondo un parametro arbitrario τ tendente a zero posto in tale analisi pari a 0.05.

Data l'idea di Black e Litterman per cui nel lungo periodo eventuali oscillazioni dei valori dei rendimenti sono eliminate in modo "naturale" con conseguente convergenza ai valori di equilibrio, è preferibile utilizzare un valore del coefficiente τ prossimo allo zero così da preferire i rendimenti impliciti a quelli che inglobano le aspettative che, in quanto tali, deviano dall'equilibrio neutrale.

Dalla matrice teorica delle covarianze, è inoltre possibile osservare valori di volatilità dei singoli indici inferiori rispetto a quelli ottenuti utilizzando la matrice storica Σ in assenza della correzione per il parametro τ .

	ENEL	ISP	ENI	STM	G	FCA	UCG	SRG	EXO	ATL	CPR	DIA	REC	AMP	PRY	TIT	TEN	HER	IP	BZU
ENEL	0.00001																			
ISP	0.00001	0.00003																		
ENI	0.00001	0.00001	0.00001																	
STM	0.00001	0.00002	0.00001	0.00003																
G	0.00001	0.00002	0.00001	0.00001	0.00002															
FCA	0.00001	0.00002	0.00001	0.00002	0.00001	0.00004														
UCG	0.00002	0.00003	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00004													
SRG	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001												
EXO	0.00001	0.00002	0.00001	0.00002	0.00001	0.00002	0.00002	0.00001	0.00002											
ATL	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002										
CPR	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001									
DIA	0.00000	0.00001	0.00000	0.00001	0.00000	0.00001	0.00001	0.00000	0.00001	0.00000	0.00000	0.00002								
REC	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00000	0.00000	0.00001							
AMP	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002						
PRY	0.00001	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002					
TIT	0.00001	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	0.00003				
TEN	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002			
HER	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	
IP	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00000	0.00002	
BZU	0.00001	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002	0.00002	0.00001	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00003

Tabella 8.3: Matrice teorica delle covarianze tra i titoli selezionati

Come per il modello di Markowitz, anche per il modello di Black e Litterman è stato effettuato il calcolo della frontiera efficiente mediante la creazione di una Macro e l'utilizzo del Risolutore di Excel, immettendo in input il vettore dei rendimenti impliciti θ in Tabella 8.2 e la matrice di varianza – covarianza teorica in Tabella 8.3.

Nelle pagine seguenti, in Tabella 8.4 ed in Tabella 8.5 si riportano, per ogni livello di rendimento target, le composizioni ottime dei portafogli appartenenti alla frontiera efficiente ed il relativo valore di volatilità minima in presenza ed in assenza di vendite allo scoperto (le tabelle sono state suddivise in due parti per motivi di impaginazione).

Osservando i dati così ottenuti ed i grafici in Figura 8.1 ed in Figura 8.2, si evince che per i portafogli appartenenti al ramo efficiente della frontiera si registra un aumento del rischio al crescere del rendimento atteso.

In particolare, in presenza di vendite allo scoperto, tale andamento caratterizza i portafogli a partire dal livello di rendimento $E(R_{\pi}) = 0.001872$ fino a $E(R_{\pi}) = 0.01$.

I portafogli ottenuti in corrispondenza dei primi due livelli di rendimento, appartengono invece al ramo inefficiente della curva per cui a parità di deviazione standard, offrono un rendimento inferiore rispetto ai portafogli sul ramo efficiente dai quali sono dominati.

Il portafoglio di minima varianza si ha in corrispondenza di $E(R_{\pi}) = 0.001872$, a cui corrisponde un valore di deviazione standard pari a $\sigma_{\pi} = 0.002343$.

Massimizzando l'indice di Sharpe ed avviando il Risolutore, si ottiene il portafoglio ottimo di tangenza in presenza di vendite allo scoperto le cui coordinate, rappresentate in Figura 8.1, sono pari a $(\mu_M, \sigma_M) = (0.00387, 0.00342)$.

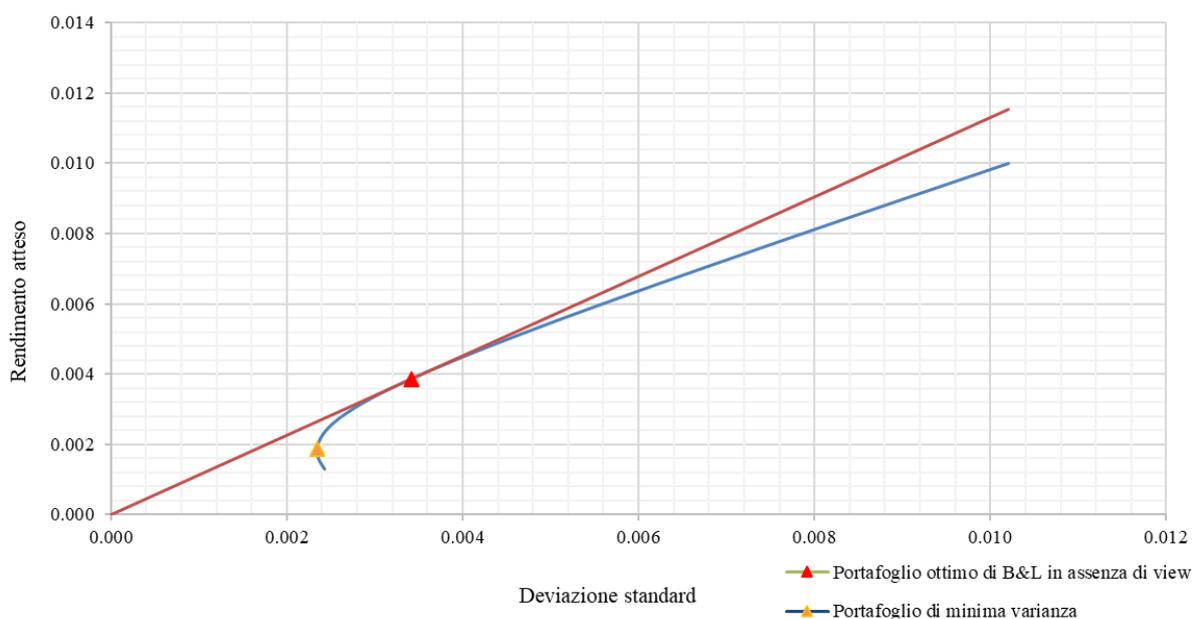


Figura 8.1: Frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto ed in assenza di view

In assenza di vendite allo scoperto, i portafogli appartenenti al ramo efficiente della frontiera sono caratterizzati da livelli di rendimento a partire da $E(R_{\pi}) = 0.002262$ fino a $E(R_{\pi}) = 0.006055$.

Il portafoglio di minima varianza si ha in corrispondenza di $E(R_{\pi}) = 0.002262$, a cui corrisponde un valore di deviazione standard pari a $\sigma_{\pi} = 0.002467$.

Massimizzando l'indice di Sharpe ed avviando il Risolutore, si ottiene il portafoglio ottimo di tangenza in assenza di vendite allo scoperto le cui coordinate, rappresentate in Figura 8.2, sono pari a $(\mu_M, \sigma_M) = (0.00387, 0.00341)$.

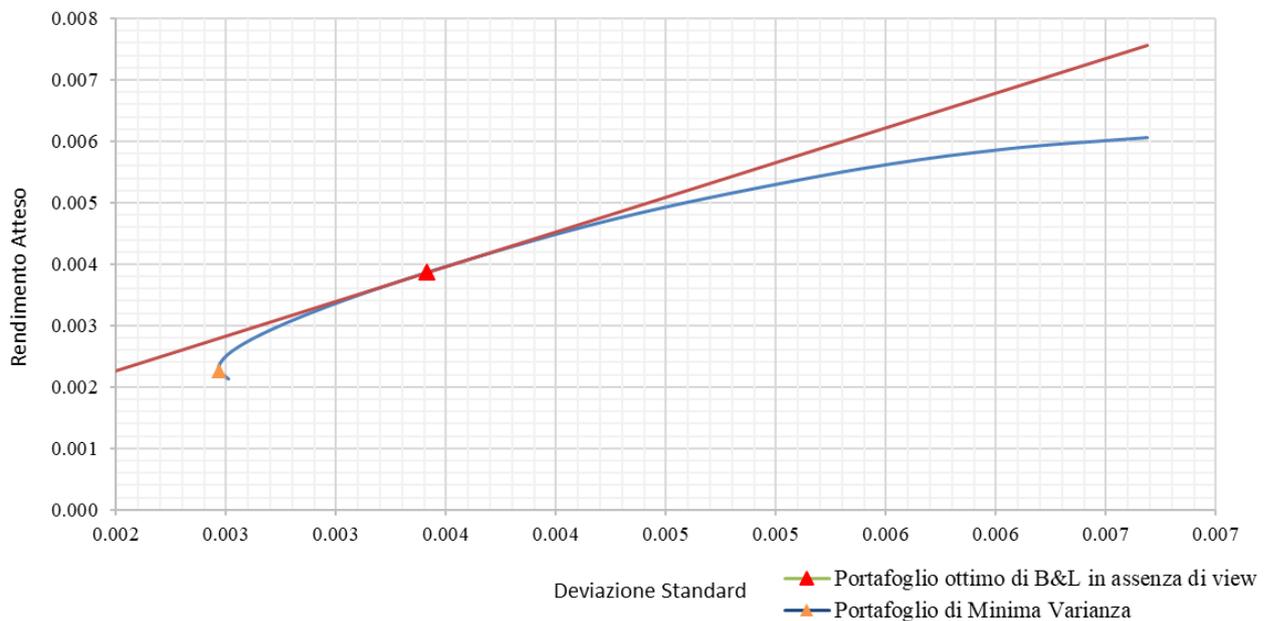


Figura 8.2: Frontiera efficiente in assenza di vendite allo scoperto ed in assenza di view

$E(R_{\Pi})$	0.0013	0.0016	0.0019	0.0022	0.0025	0.0027	0.0030	0.0033	0.0036	0.0039	0.0042	0.0045	0.0048	0.0051	0.0054
σ_{Π}	0.0024	0.0024	0.0023	0.0024	0.0025	0.0026	0.0028	0.0030	0.0032	0.0034	0.0037	0.0040	0.0043	0.0046	0.0049
ENEL	-0.17	-0.13	-0.08	-0.03	0.02	0.06	0.11	0.16	0.21	0.25	0.30	0.35	0.39	0.44	0.49
ISP	-0.17	-0.14	-0.11	-0.08	-0.05	-0.02	0.01	0.04	0.07	0.10	0.14	0.17	0.20	0.23	0.26
ENI	0.09	0.09	0.09	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.07	0.07	0.07
STM	-0.03	-0.02	-0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.07	0.08	0.09	0.10	0.12	0.13	0.14
G	0.26	0.24	0.21	0.19	0.17	0.15	0.13	0.10	0.08	0.06	0.04	0.01	-0.01	-0.03	-0.05
FCA	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
UCG	-0.07	-0.06	-0.05	-0.03	-0.02	0.00	0.01	0.03	0.04	0.05	0.07	0.08	0.10	0.11	0.12
SRG	0.20	0.18	0.17	0.15	0.13	0.11	0.10	0.08	0.06	0.05	0.03	0.01	-0.01	-0.02	-0.04
EXO	-0.09	-0.07	-0.06	-0.05	-0.03	-0.02	0.00	0.01	0.02	0.04	0.05	0.07	0.08	0.09	0.11
ATL	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05
CPR	0.21	0.19	0.17	0.15	0.13	0.11	0.09	0.07	0.05	0.03	0.01	-0.01	-0.03	-0.05	-0.07
DIA	0.18	0.16	0.14	0.13	0.11	0.09	0.08	0.06	0.05	0.03	0.01	0.00	-0.02	-0.04	-0.05
REC	0.16	0.14	0.13	0.11	0.10	0.08	0.07	0.06	0.04	0.03	0.01	0.00	-0.01	-0.03	-0.04
AMP	0.09	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	-0.01	-0.02
PRY	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04
TIT	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03
TEN	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00
HER	0.27	0.24	0.21	0.18	0.15	0.12	0.10	0.07	0.04	0.01	-0.02	-0.05	-0.07	-0.10	-0.13
IP	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00	-0.01	-0.02	-0.03	-0.04
BZU	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02

Tabella 8.4: Portafogli ottenuti in presenza di vendite allo scoperto (parte I)

$E(R_{\pi})$	0.0056	0.0059	0.0062	0.0065	0.0068	0.0071	0.0074	0.0077	0.0080	0.0083	0.0085	0.0088	0.0091	0.0094	0.0097	0.0100
σ_{π}	0.0052	0.0055	0.0058	0.0062	0.0065	0.0068	0.0072	0.0075	0.0078	0.0082	0.0085	0.0088	0.0092	0.0095	0.0099	0.0102
ENEL	0.54	0.58	0.63	0.68	0.72	0.77	0.82	0.87	0.91	0.96	1.01	1.05	1.10	1.15	1.20	1.24
ISP	0.29	0.32	0.35	0.38	0.41	0.44	0.47	0.50	0.53	0.56	0.59	0.62	0.65	0.68	0.71	0.74
ENI	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
STM	0.15	0.16	0.18	0.19	0.20	0.21	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.29	0.30	0.31	0.32	0.34
G	-0.07	-0.10	-0.12	-0.14	-0.16	-0.19	-0.21	-0.23	-0.25	-0.28	-0.30	-0.32	-0.34	-0.36	-0.39	-0.41
FCA	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20	0.21	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27
UCG	0.14	0.15	0.17	0.18	0.19	0.21	0.22	0.24	0.25	0.26	0.28	0.29	0.31	0.32	0.34	0.35
SRG	-0.06	-0.07	-0.09	-0.11	-0.12	-0.14	-0.16	-0.18	-0.19	-0.21	-0.23	-0.24	-0.26	-0.28	-0.30	-0.31
EXO	0.12	0.14	0.15	0.16	0.18	0.19	0.21	0.22	0.23	0.25	0.26	0.27	0.29	0.30	0.32	0.33
ATL	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07	0.07	0.07	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09	0.10
CPR	-0.09	-0.11	-0.13	-0.15	-0.17	-0.19	-0.21	-0.23	-0.25	-0.27	-0.29	-0.31	-0.33	-0.35	-0.37	-0.39
DIA	-0.07	-0.08	-0.10	-0.12	-0.13	-0.15	-0.16	-0.18	-0.20	-0.21	-0.23	-0.25	-0.26	-0.28	-0.29	-0.31
REC	-0.06	-0.07	-0.08	-0.10	-0.11	-0.12	-0.14	-0.15	-0.17	-0.18	-0.19	-0.21	-0.22	-0.24	-0.25	-0.26
AMP	-0.03	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.07	-0.08	-0.09	-0.10	-0.11	-0.11	-0.12	-0.13	-0.14	-0.15
PRY	0.05	0.05	0.06	0.06	0.07	0.07	0.08	0.08	0.09	0.09	0.10	0.10	0.10	0.11	0.11	0.12
TIT	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
TEN	0.00	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.02	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.04	-0.04	-0.04
HER	-0.16	-0.19	-0.21	-0.24	-0.27	-0.30	-0.33	-0.36	-0.38	-0.41	-0.44	-0.47	-0.50	-0.53	-0.55	-0.58
IP	-0.05	-0.06	-0.07	-0.08	-0.09	-0.10	-0.11	-0.12	-0.13	-0.14	-0.15	-0.16	-0.17	-0.18	-0.19	-0.20
BZU	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07	0.07

Tabella 8.5: Portafogli ottenuti in presenza di vendite allo scoperto (parte II)

$E(R_{\Pi})$	0.0021	0.0023	0.0024	0.0025	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0032	0.0033	0.0034	0.0036	0.0037	0.0038	0.0040
σ_{Π}	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0026	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0033	0.0034	0.0035
ENEL	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.06	0.09	0.11	0.13	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26
ISP	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.03	0.04	0.06	0.07	0.08	0.10	0.11
ENI	0.00	0.01	0.04	0.07	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
STM	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.03	0.04	0.04	0.05	0.05	0.06	0.06	0.07	0.08	0.08
G	0.00	0.01	0.06	0.10	0.12	0.13	0.13	0.12	0.12	0.11	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06
FCA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.04	0.05	0.05	0.06
UCG	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.04	0.05	0.06
SRG	0.05	0.15	0.14	0.14	0.13	0.11	0.10	0.10	0.09	0.08	0.07	0.07	0.06	0.05	0.04
EXO	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04
ATL	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04
CPR	0.22	0.19	0.17	0.15	0.13	0.11	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.05	0.04	0.03
DIA	0.23	0.16	0.14	0.12	0.11	0.09	0.08	0.08	0.07	0.06	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03
REC	0.18	0.14	0.12	0.11	0.10	0.08	0.08	0.07	0.06	0.06	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03
AMP	0.06	0.07	0.06	0.06	0.06	0.05	0.05	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02
PRY	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
TIT	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02
TEN	0.00	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
HER	0.24	0.20	0.18	0.16	0.14	0.12	0.11	0.10	0.08	0.07	0.06	0.04	0.03	0.02	0.01
IP	0.02	0.06	0.06	0.06	0.05	0.05	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01
BZU	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01

Tabella 8.5: Portafogli ottenuti in assenza di vendite allo scoperto (parte I)

$E(R_{\pi})$	0.0041	0.0042	0.0044	0.0045	0.0046	0.0047	0.0049	0.0050	0.0051	0.0053	0.0054	0.0055	0.0057	0.0058	0.0059	0.0061
σ_{π}	0.0036	0.0037	0.0039	0.0040	0.0041	0.0043	0.0044	0.0046	0.0048	0.0050	0.0052	0.0054	0.0056	0.0059	0.0062	0.0067
ENEL	0.28	0.30	0.32	0.33	0.32	0.31	0.27	0.21	0.15	0.10	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ISP	0.13	0.14	0.15	0.18	0.21	0.25	0.28	0.31	0.35	0.38	0.41	0.44	0.45	0.43	0.32	0.00
ENI	0.08	0.07	0.07	0.06	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
STM	0.09	0.09	0.10	0.10	0.11	0.12	0.12	0.11	0.11	0.11	0.11	0.08	0.02	0.00	0.00	0.00
G	0.05	0.04	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
FCA	0.06	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.13	0.14	0.16	0.17	0.17	0.16	0.08	0.00	0.00
UCG	0.06	0.07	0.08	0.09	0.11	0.13	0.16	0.18	0.21	0.24	0.26	0.31	0.38	0.49	0.68	1.00
SRG	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
EXO	0.05	0.05	0.06	0.07	0.07	0.07	0.07	0.05	0.04	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATL	0.04	0.04	0.04	0.03	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CPR	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DIA	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
REC	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AMP	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
PRY	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TIT	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TEN	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
HER	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
IP	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
BZU	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabella 8.5: Portafogli ottenuti in assenza di vendite allo scoperto (parte II)

Dai risultati ottenuti è possibile osservare che sia in assenza che in presenza di vendite allo scoperto, il portafoglio ottimo risultante nell'ipotesi in cui gli investitori non abbiano alcuna aspettativa sull'andamento futuro degli indici in esame, è il medesimo e coincide con il portafoglio di mercato di equilibrio le cui quote di composizione sono pesate secondo la capitalizzazione di mercato:

ENEL	ISP	ENI	STM	G	FCA	UCG	SRG	EXO	ATL
0.246	0.101	0.079	0.077	0.062	0.052	0.051	0.048	0.037	0.036
CPR	DIA	REC	AMP	PRY	TIT	TEN	HER	IP	BZU
0.035	0.031	0.03	0.023	0.022	0.017	0.016	0.015	0.011	0.011

Tabella 8.6: Vettore delle quote di composizione del portafoglio ottimo di B-L in presenza ed in assenza di vendite allo scoperto, nell'ipotesi di assenza di view

Si è dunque verificato che, per costruzione, immettendo in input al modello di ottimizzazione il vettore dei rendimenti impliciti ottenuto mediante la *reverse optimization*, si ottiene esattamente il portafoglio di equilibrio definito *ex ante*.

In Figura 8.3 ed in Figura 8.4, è inoltre possibile visualizzare la variazione di composizione dei portafogli appartenenti alla frontiera al crescere del rendimento atteso in presenza ed in assenza di vendite allo scoperto:

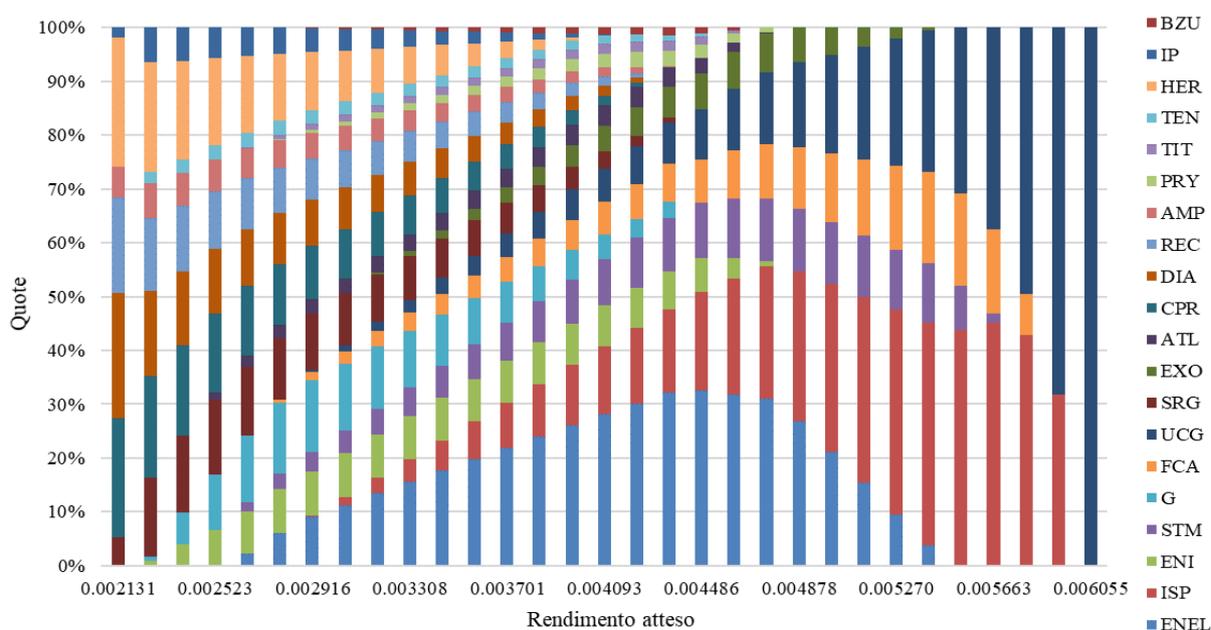


Figura 8.3: Variazione di composizione dei portafogli al variare del rendimento target in assenza di vendite allo scoperto

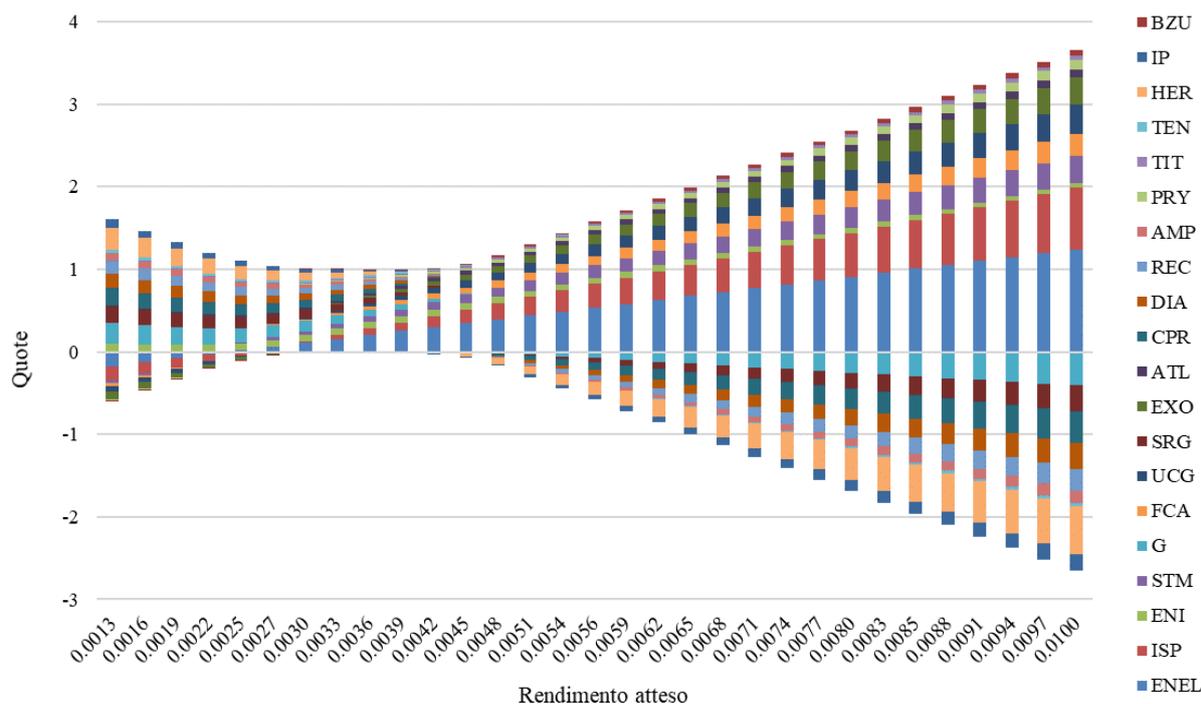


Figura 8.4: Variazione di composizione dei portafogli al variare del rendimento target in presenza di vendite allo scoperto

Dall'osservazione dei risultati ottenuti è possibile evincere che in assenza di vendite allo scoperto, al crescere del livello di rendimento target, i portafogli sono composti dai titoli caratterizzati dal più alto livello di rendimento; in tal caso il titolo con rendimento massimo risulta essere UCG.MI per cui in corrispondenza di tale valore il portafoglio ottimo è composto unicamente dal titolo Unicredit.

In presenza di vendite allo scoperto, tale risultato è meno evidente in quanto, assumendo quote negative sui titoli caratterizzati da rendimenti inferiori, si ottengono portafogli più bilanciati e formati da un maggior numero di titoli.

In generale, si evince che il peso dei titoli nei portafogli ottenuti risulta più bilanciato di quanto si è ottenuto implementando in input il vettore dei rendimenti storici nel modello di Markowitz.

Al fine di avere maggior evidenza della variazione delle quote di ciascun titolo all'interno dei portafogli ottenuti, si riportano di seguito i grafici in Figura 8.5 ed in Figura 8.6 da cui si evince la crescita delle quote dei titoli aventi rendimenti superiori:

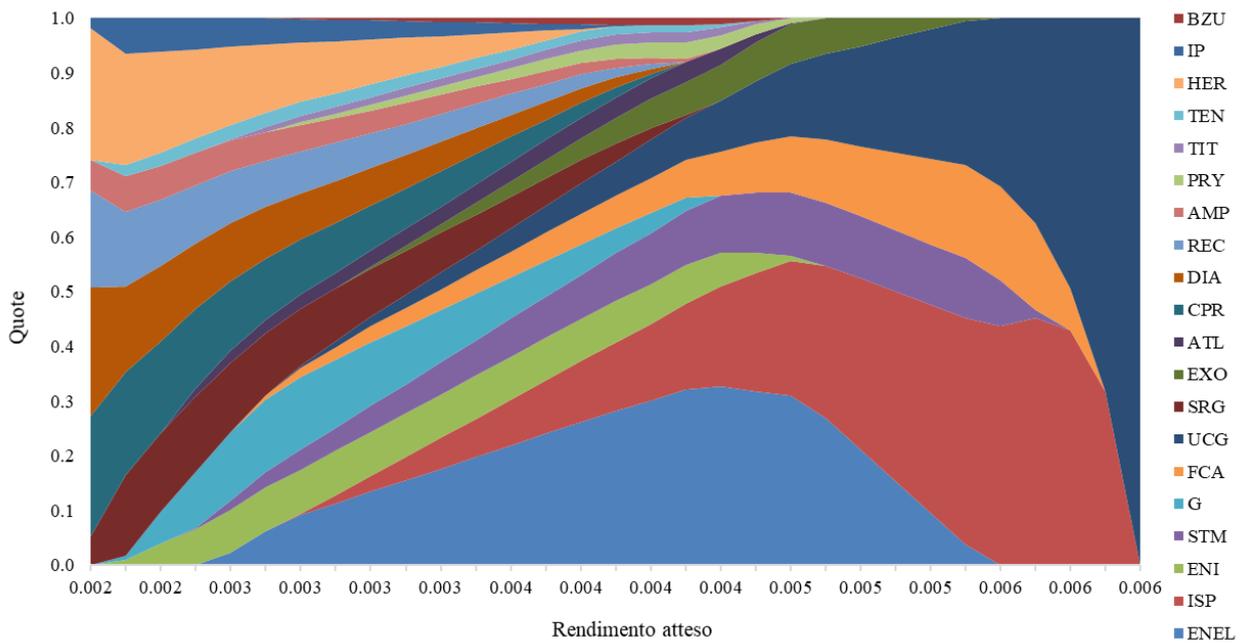


Figura 8.5: Variazione di composizione dei portafogli al variare del livello di rendimento in assenza di vendite allo scoperto

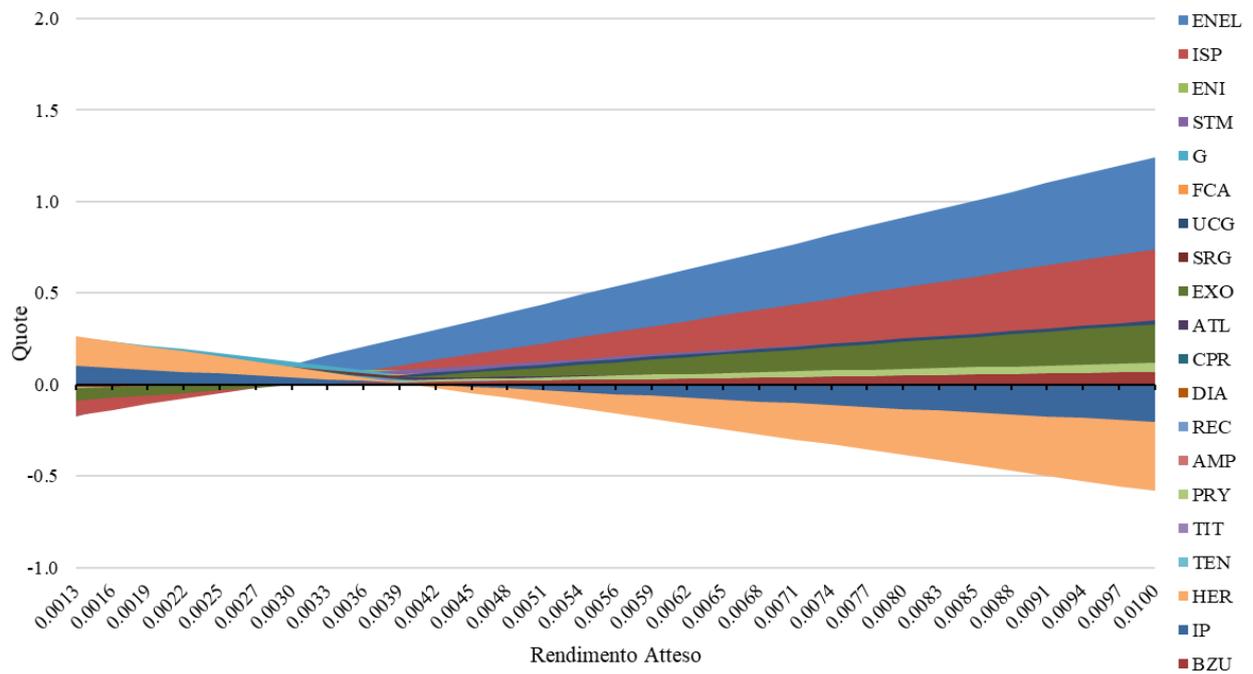


Figura 8.6: Variazione di composizione dei portafogli al variare del livello di rendimento in presenza di vendite allo scoperto

8.2 Formulazione delle view

Come già anticipato, elemento caratterizzante del modello di Black e Litterman è costituito dalla possibilità data all'investitore di esprimere le proprie aspettative (assolute o relative) in merito ai singoli asset in termini di sopra/sotto performance.

L'asset manager può, inoltre, associare ad ogni aspettativa un certo peso rappresentante il livello di confidenza corrispondente, per cui quanto più è alto il grado di fiducia riposto dall'investitore in una specifica view formulata, tanto più alto sarà lo scostamento dal portafoglio di equilibrio e dunque l'influenza della specifica aspettativa sulle quote di portafoglio.

Osservando l'andamento del mercato e dei settori di appartenenza degli indici in esame, è evidente come la tematica principale che ha impattato in modo preponderante sull'evoluzione dei mercati finanziari nell'ultimo anno è stata la diffusione della pandemia da Covid-19.

Come già osservato in precedenza, la forte incertezza globale sulle prospettive economiche ha causato a sua volta turbolenze nei mercati, i quali hanno mostrato ampi cali delle quotazioni e ingenti incrementi di volatilità.

L'entità dell'impatto è stata differente a seconda dei settori e delle aree geografiche considerate: il FTSE MIB ha registrato nel mese di marzo un calo pari a circa il 37% rispetto all'inizio dell'anno, seguito da un lento recupero nei mesi successivi.

In tale scenario, i settori dell'energia, del farmaceutico e della diagnostica hanno registrato perdite limitate rispetto all'industria petrolifera, manifatturiera ed automobilistica che hanno invece subito perdite di notevole entità. Anche il settore assicurativo e dei servizi bancari non sono stati immuni dagli effetti del Covid-19: sebbene per tali settori le conseguenze della crisi siano state relativamente contenute, si sono registrati trend negativi rispetto al passato, dovuti al rallentamento generale dell'attività economica.

L'analisi della forza relativa tra gli indici in esame ed il FTSE MIB effettuata nel paragrafo 5.1, conferma tale scenario: in particolare, si evince che nel corso del 2020 gli indici ENEL.MI, HER.MI e SRG.MI hanno presentato un andamento stabile rispetto all'indice di mercato, sovraperformandolo in determinati periodi.

In particolare, il gruppo Hera ha comunicato la vendita da parte del Comune di Bologna di due milioni di azioni per un valore superiore a sei milioni di euro; in seguito a tale operazione ci si attende un certo impatto sull'andamento del titolo e sui dati di bilancio che saranno in seguito condivisi. Inoltre, è opportuno considerare l'entrata del gruppo nell'Alleanza per l'Economia Circolare (associazione impegnata sul fronte della sostenibilità) al fine di rafforzare le partnership esistenti e crearne di nuove [1].

La riduzione del consumo di energia causata dalla pandemia con conseguente calo dei prezzi del gas unita alla spinta sulle politiche di riduzione delle emissioni di carbonio per la salvaguardia del clima, comporteranno un ingente passaggio dalle fonti energetiche inquinanti

al gas, con conseguenze positive per l'indice SRG.MI. Il gruppo ha inoltre rilevato il 70% di due società attive nel settore degli investimenti sostenibili: tale operazione consentirà di raggiungere un miglior posizionamento competitivo ed una posizione di spicco nel settore dell'efficienza energetica pubblica e residenziale [2].

Per quanto concerne invece il titolo ENEL.MI, si hanno alte aspettative da parte del mercato in quanto non solo ci si attende un'uscita accelerata dal carbone ma è previsto anche il lancio di nuove linee strategiche del gruppo a cui è legato un piano rinnovabili tra i più ambiziosi fra tutti i competitor (tale piano porterebbe ad un livello attraente di ebitda nel 2022). Molti investimenti al 2022 sono stati ad oggi indirizzati, presupponendo dunque importanti obiettivi di sviluppo sostenibile [3].

L'indice ENI.MI, in linea con il settore di appartenenza, ha mostrato un continuo indebolimento rispetto al FTSE MIB. Le quotazioni del titolo sono inevitabilmente influenzate dal prezzo del greggio: il blocco delle attività economiche causato dalla pandemia ha portato il prezzo del petrolio americano a livelli negativi mai raggiunti prima e dal momento che il titolo è a un passo dai livelli minimi degli ultimi 24 anni, si può affermare che ci sono buone potenzialità rialziste [4].

La crisi innescata dalla diffusione dell'epidemia ha esposto il settore bancario a numerosi rischi derivanti dal rallentamento dell'attività economica, generando così una generale sottoperformance delle quotazioni degli indici rispetto al FTSE MIB.

In particolare, l'indice G.MI ha mostrato negli ultimi mesi un andamento stabilmente decrescente rispetto all'indice di mercato. In seguito all'approvazione della partnership strategica tra Cattolica Assicurazioni e Assicurazioni Generali avvenuta lo scorso giugno, Generali ha sottoscritto un aumento di capitale riservato di Cattolica, divenendone così il primo azionista. Tale operazione non solo rappresenta uno dei presupposti per l'avvio concreto di una partnership che prevede specifiche iniziative industriali, ma potrebbe costituire anche la base per un lento recupero delle quotazioni dell'indice dopo il trend ribassista registrato negli ultimi mesi [5].

Il titolo UCG.MI ha costantemente sottoperformato il FTSE MIB nel corso dell'anno. Le tensioni sulla questione M&A tra Unicredit e MPS non hanno agevolato l'andamento delle quotazioni: lo scetticismo degli analisti in merito a tale operazione è elevato e la visione strategica del CEO risulta essere contraria ad una simile operazione. A conferma di ciò, si è avuta infatti l'inaspettata nomina di Pier Carlo Padoan, identificato come miglior candidato per la posizione di presidente di UniCredit: egli infatti ha avuto un ruolo fondamentale nella "ricapitalizzazione precauzionale" atta a salvare MPS e la sua nomina può rappresentare un vero e proprio punto di svolta nell'operazione di M&A [6].

L'indice ISP.MI, sebbene abbia subito un repentino calo nel mese di marzo, ha poi presentato perdite contenute: l'offerta obbligatoria di Intesa Sanpaolo sulle azioni di Ubi Banca ha comportato il *delisting* del titolo UBI dalla Borsa in quanto è stata superata la soglia del 95% di detenzione del capitale da parte di Intesa Sanpaolo che diverrà così titolare del 100% di UBI

[7]. Tale operazione, unitamente al miglioramento delle condizioni dell'Ops fissate a febbraio, hanno impattato sull'andamento delle quotazioni [8].

Per quanto concerne invece l'indice FCA.MI, nel corso dell'anno si evincono perdite contenute rispetto al settore di appartenenza. L'annuncio della fusione tra FCA e PSA che porterà alla nascita della terza società automobilistica al mondo per fatturato e della quarta per volume, con la successiva conferma dei tempi di chiusura dell'operazione prevista entro il primo trimestre del 2021, ha avuto un certo impatto sui risultati del Gruppo: nonostante FCA abbia registrato nel secondo trimestre una riduzione dei ricavi del 56%, il titolo ha mostrato una lieve accelerazione rispetto al FTSE MIB dimostrando come la crisi da Covid-19 abbia sottolineato ulteriormente la "logica stringente" della fusione tra PSA e FCA [9].

Dall'osservazione del mercato nei mesi passati e considerando gli ultimi eventi significativi che hanno visto protagoniste le imprese in analisi, è possibile formulare le seguenti aspettative circa l'andamento atteso degli indici in esame:

View 1 (assoluta): il titolo FCA.MI registrerà nei prossimi mesi un andamento negativo dei log-rendimenti, con un ribasso atteso pari a -0.076%.

View 2 (relativa): il titolo ENEL.MI registrerà nei prossimi mesi un trend negativo dei log-rendimenti rispetto al titolo HER.MI, con un ribasso atteso pari a -0.322%.

View 3 (relativa): il titolo SRG.MI registrerà nei prossimi mesi un trend positivo dei log-rendimenti rispetto al titolo HER.MI, con un rialzo atteso pari a 0.077%.

View 4 (relativa): il titolo ISP.MI registrerà nei prossimi mesi un rialzo dei log-rendimenti rispetto al titolo UCG.MI pari a 0.277%.

View 5 (assoluta): il titolo G.MI registrerà nei prossimi mesi un andamento positivo dei log-rendimenti, con un rialzo atteso pari al 2.814%.

View 6 (assoluta): il titolo ENI.MI registrerà nei prossimi mesi un trend positivo dei log-rendimenti, con un rialzo atteso pari al 5.781%.

È possibile formalizzare le aspettative così espresse in una matrice P (Tabella 8.7) avente un numero di righe pari al numero di view espresse e tante colonne quanti sono gli asset in analisi: in caso di view assolute, si ha un peso pari ad 1 in corrispondenza dell'asset interessato dall'aspettativa espressa ed un peso pari a 0 in corrispondenza di tutti gli altri asset; invece, in caso di aspettative relative, le attività interessate avranno peso pari ad 1 se ci si attende da queste una sovra-performance o avranno peso pari a -1 se ci si attende una sotto-performance.

A completamento della modellizzazione, si riportano i valori delle view espresse in un vettore q avente tante righe quante sono le aspettative dell'investitore (Tabella 8.8).

	ENEL	ISP	ENI	STM	G	FCA	UCG	SRG	EXO	ATL
View 1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
View 2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
View 4	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0
View 5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
View 6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

	CPR	DIA	REC	AMP	PRY	TIT	TEN	HER	IP	BZU
View 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
View 3	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
View 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
View 6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabella 8.7: Matrice P

	q
View 1	-0.00076
View 2	-0.00322
View 3	0.00077
View 4	0.00277
View 5	0.02814
View 6	0.05781

Tabella 8.8: Vettore q

È possibile indicare il grado di incertezza delle aspettative espresse nella cosiddetta matrice di confidenza diagonale $\Psi = \text{diag}(P \cdot \tau \Sigma \cdot P^T)$ rappresentante la varianza dei singoli termini d'errore. Da tale matrice è dunque possibile dedurre il grado di fiducia con cui l'asset manager ha espresso le proprie view: man mano che gli elementi sulla diagonale della matrice si avvicinano a zero, le aspettative sono formulate con maggior certezza (un valore nullo indica l'assoluta certezza della previsione).

	View 1	View 2	View 3	View 4	View 5	View 6
View 1	0.0000361	0	0	0	0	0
View 2	0	0.0000113	0	0	0	0
View 3	0	0	0.0000104	0	0	0
View 4	0	0	0	0.0000128	0	0
View 5	0	0	0	0	0.0000158	0
View 6	0	0	0	0	0	0.0000148

Tabella 8.9: Matrice di confidenza delle view

Dai risultati ottenuti, si osservano valori molto prossimi allo zero per cui si può affermare che le aspettative siano state formulate con un elevato grado di certezza data la bassa varianza dei termini d'errore.

La costruzione del portafoglio ottimo di Black e Litterman terrà dunque conto del livello di confidenza con cui sono state formulate le view: il modello darà maggior peso alle view formulate con un maggior livello di confidenza.

Osservando la matrice di confidenza in Tabella 8.9, si evince che le aspettative formulate con un basso grado di incertezza sono la view 2 e la view 3, invece, quelle su cui l'investitore si dimostra essere meno certo sono la view 1 e la view 5. A tal proposito, al fine di individuare agevolmente le aspettative su cui l'investitore mostra essere più certo e meno incerto, nella matrice sono stati evidenziati, mediante una visualizzazione cromatica, i diversi livelli di confidenza (il valore più scuro indica la view espressa con il grado di confidenza più alto, quello più chiaro la view espressa con maggior incertezza).

8.3 Approccio Bayesiano

Dopo aver individuato il vettore dei rendimenti impliciti e le view soggettive dell'investitore è possibile combinare le due informazioni mediante il teorema di Bayes al fine di ottenere il vettore dei rendimenti attesi di Black e Litterman e le rispettive deviazioni standard (Tabella 8.10). Tale risultato costituisce l'input da implementare nel processo di ottimizzazione mediante il quale si ottiene il portafoglio ottimo di Black e Litterman.

Indice	Rendimenti di B-L	Varianza B-L	Indice	Rendimenti di B-L	Varianza B-L
ENEL	0.0194	0.000008	CPR	0.0121	0.000010
ISP	0.0293	0.000019	DIA	0.0076	0.000016
ENI	0.0290	0.000006	REC	0.0103	0.000012

STM	0.0198	0.000025	AMP	0.0107	0.000016
G	0.0222	0.000006	PRY	0.0194	0.000003
FCA	0.0165	0.000016	TIT	0.0211	0.000004
UCG	0.0290	0.000023	TEN	0.0240	0.000016
SRG	0.0144	0.000008	HER	0.0135	0.000007
EXO	0.0202	0.000013	IP	0.0130	0.000015
ATL	0.0182	0.000016	BZU	0.0212	0.000017

Tabella 8.10

Confrontando il vettore dei rendimenti impliciti in Tabella 8.2 ed i rendimenti di B-L riportati in Tabella 8.10, si osserva che i livelli di rendimento ottenuti considerando anche le aspettative soggettive degli investitori sono decisamente più elevati rispetto ai livelli di rendimento ottenuti considerando la propensione al rischio dell'investitore. Si evince, inoltre, che non variano solo i rendimenti degli asset per cui è stata formulata una view ma variano anche i rendimenti degli altri titoli per cui non è stata formulata alcuna aspettativa: ciò è dovuto all'esistenza di un certo grado di correlazione tra i titoli considerati, come mostrato in Tabella 7.1.

In particolare, dal grafico in Figura 8.7 è possibile osservare che i titoli i cui rendimenti sono sottoposti ad una maggior variazione sono ENI.MI, ISP.MI ed UCG.MI: essi sono direttamente interessati dalla formulazione di aspettative assolute e relative espresse con un livello di confidenza non trascurabile ed infatti presentano i più alti livelli di rendimento. Tali titoli, dunque, non sono solo interessati da una maggior variazione di rendimento rispetto al caso in cui ci sia assenza di view, ma presentano livelli di rendimento di B&L elevati in valore assoluto. Si osserva che gli asset per cui non sono state espresse view, presentano i valori più bassi di rendimento sebbene risultino comunque influenzati dalle correlazioni con gli altri indici: è il caso di DIA.MI, REC.MI e AMP.MI. A conferma di quanto già anticipato, si osserva che gli asset per cui non è stata formulata alcuna aspettativa, subiscono variazioni di rendimento importanti: è il caso di TEN.MI, TIT.MI e BZU.MI i cui risultati derivano dall'impatto della correlazione esistente tra gli asset in analisi.

In conclusione, è possibile affermare che i livelli di rendimento ottenuti sono influenzati da più fattori: la formulazione delle view, il grado di confidenza con cui sono espresse e la correlazione tra gli asset. Per rendere visibile l'analisi fin qui effettuata, in Tabella 8.10 si è evidenziato il vettore dei rendimenti secondo un ordine cromatico dal verde (valore più alto) al rosso (valore più basso).

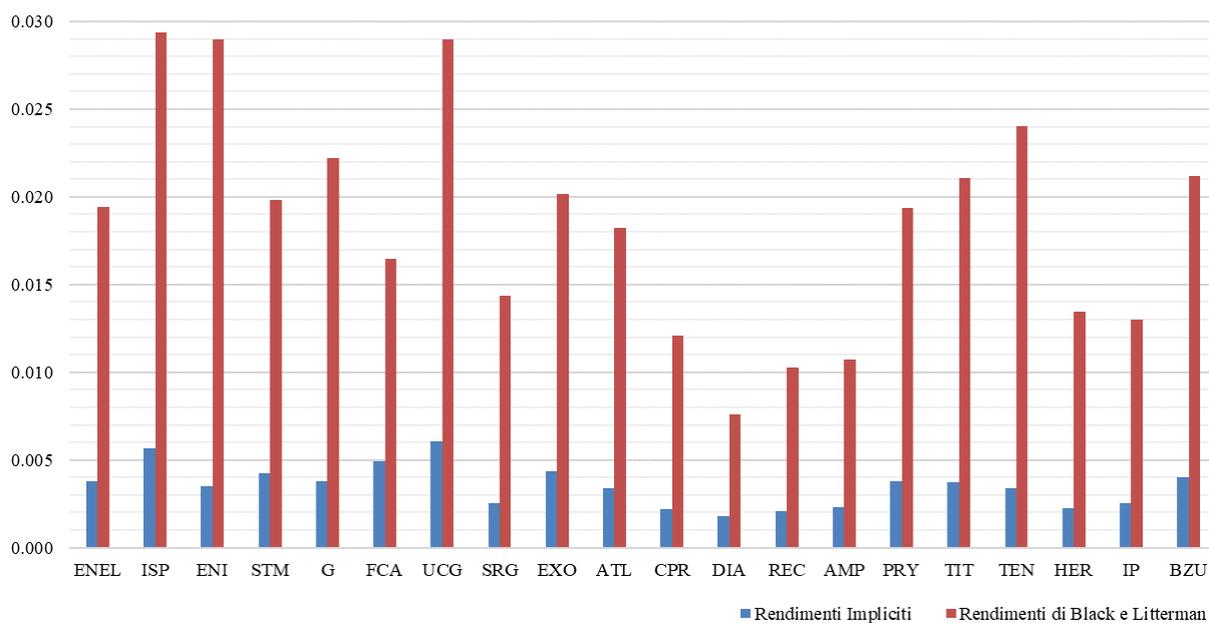


Figura 8.7: Confronto tra rendimenti impliciti e rendimenti di B-L

Dal momento che le varianze di B-L non si riferiscono al valore atteso dei rendimenti ma ad una sua stima, in input al modello non si immette la matrice di varianza-covarianza di Black e Litterman ma si utilizza la matrice V^* ottenuta nel modo seguente:

$$V^* = V_{BL} + \Sigma$$

I risultati così ottenuti sono riportati in Tabella 8.11.

Immettendo in input al processo di ottimizzazione i rendimenti di equilibrio di Black e Litterman e la matrice V^* , è possibile calcolare la frontiera efficiente ed il portafoglio ottimo di Black e Litterman in presenza ed in assenza di vendite allo scoperto, secondo il consueto procedimento fin qui adottato.

I risultati ottenuti sono riportati in Tabella 8.12 ed in Tabella 8.123 dove, per ogni livello di rendimento target, si osservano i vettori delle quote di composizione dei portafogli appartenenti alle frontiere efficienti ed il relativo valore di volatilità minima (rispettivamente in presenza ed in assenza di vendite allo scoperto).

	ENEL	ISP	ENI	STM	G	FCA	UCG	SRG	EXO	ATL	CPR	DIA	REC	AMP	PRY	TIT	TEN	HER	IP	BZU
ENEL	0.00030	0.00030	0.00020	0.00020	0.00021	0.00024	0.00032	0.00018	0.00023	0.00020	0.00014	0.00010	0.00012	0.00012	0.00021	0.00022	0.00017	0.00015	0.00013	0.00021
ISP	0.00030	0.00069	0.00029	0.00032	0.00036	0.00041	0.00067	0.00019	0.00036	0.00028	0.00016	0.00012	0.00015	0.00018	0.00032	0.00035	0.00027	0.00017	0.00021	0.00036
ENI	0.00020	0.00029	0.00030	0.00022	0.00021	0.00026	0.00031	0.00014	0.00024	0.00019	0.00012	0.00008	0.00010	0.00011	0.00021	0.00021	0.00026	0.00012	0.00014	0.00023
STM	0.00020	0.00032	0.00022	0.00066	0.00022	0.00035	0.00033	0.00013	0.00032	0.00022	0.00014	0.00013	0.00014	0.00015	0.00029	0.00020	0.00025	0.00013	0.00019	0.00029
G	0.00021	0.00036	0.00021	0.00022	0.00032	0.00028	0.00040	0.00013	0.00026	0.00020	0.00012	0.00009	0.00011	0.00012	0.00022	0.00023	0.00019	0.00012	0.00014	0.00025
FCA	0.00024	0.00041	0.00026	0.00035	0.00028	0.00074	0.00045	0.00015	0.00045	0.00025	0.00015	0.00012	0.00015	0.00018	0.00030	0.00026	0.00028	0.00015	0.00022	0.00034
UCG	0.00032	0.00067	0.00031	0.00033	0.00040	0.00045	0.00092	0.00019	0.00040	0.00029	0.00016	0.00012	0.00015	0.00020	0.00034	0.00037	0.00029	0.00018	0.00021	0.00039
SRG	0.00018	0.00019	0.00014	0.00013	0.00013	0.00015	0.00019	0.00023	0.00015	0.00014	0.00011	0.00008	0.00010	0.00010	0.00015	0.00016	0.00012	0.00013	0.00010	0.00014
EXO	0.00023	0.00036	0.00024	0.00032	0.00026	0.00045	0.00040	0.00015	0.00048	0.00023	0.00015	0.00011	0.00014	0.00016	0.00029	0.00024	0.00025	0.00014	0.00020	0.00031
ATL	0.00020	0.00028	0.00019	0.00022	0.00020	0.00025	0.00029	0.00014	0.00023	0.00044	0.00012	0.00009	0.00011	0.00013	0.00020	0.00020	0.00019	0.00014	0.00015	0.00022
CPR	0.00014	0.00016	0.00012	0.00014	0.00012	0.00015	0.00016	0.00011	0.00015	0.00012	0.00025	0.00008	0.00010	0.00011	0.00014	0.00013	0.00012	0.00009	0.00010	0.00014
DIA	0.00010	0.00012	0.00008	0.00013	0.00009	0.00012	0.00012	0.00008	0.00011	0.00009	0.00008	0.00035	0.00010	0.00010	0.00012	0.00009	0.00008	0.00007	0.00011	0.00011
REC	0.00012	0.00015	0.00010	0.00014	0.00011	0.00015	0.00015	0.00010	0.00014	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00028	0.00012	0.00014	0.00013	0.00010	0.00010	0.00014
AMP	0.00012	0.00018	0.00011	0.00015	0.00012	0.00018	0.00020	0.00010	0.00016	0.00013	0.00011	0.00010	0.00012	0.00038	0.00014	0.00013	0.00012	0.00010	0.00013	0.00015
PRY	0.00021	0.00032	0.00021	0.00029	0.00022	0.00030	0.00034	0.00015	0.00029	0.00020	0.00014	0.00012	0.00014	0.00014	0.00047	0.00022	0.00023	0.00012	0.00018	0.00028
TIT	0.00022	0.00035	0.00021	0.00020	0.00023	0.00026	0.00037	0.00016	0.00024	0.00020	0.00013	0.00009	0.00013	0.00013	0.00022	0.00054	0.00020	0.00014	0.00014	0.00023
TEN	0.00017	0.00027	0.00026	0.00025	0.00019	0.00028	0.00029	0.00012	0.00025	0.00019	0.00012	0.00008	0.00010	0.00012	0.00023	0.00020	0.00048	0.00011	0.00016	0.00025
HER	0.00015	0.00017	0.00012	0.00013	0.00012	0.00015	0.00018	0.00013	0.00014	0.00014	0.00009	0.00007	0.00010	0.00010	0.00012	0.00014	0.00011	0.00024	0.00010	0.00014
IP	0.00013	0.00021	0.00014	0.00019	0.00014	0.00022	0.00021	0.00010	0.00020	0.00015	0.00010	0.00011	0.00011	0.00013	0.00018	0.00014	0.00016	0.00010	0.00038	0.00019
BZU	0.00021	0.00036	0.00023	0.00029	0.00025	0.00034	0.00039	0.00014	0.00031	0.00022	0.00014	0.00011	0.00014	0.00015	0.00028	0.00023	0.00025	0.00014	0.00019	0.00052

Tabella 8.11: Matrice di varianza-covarianza V*

$E(R_{\Pi})$	0.0042	0.0074	0.0106	0.0138	0.0170	0.0202	0.0234	0.0265	0.0297	0.0329	0.0361	0.0393	0.0425	0.0457	0.0489
σ_{Π}	0.0122	0.0112	0.0107	0.0107	0.0113	0.0123	0.0137	0.0153	0.0171	0.0190	0.0211	0.0232	0.0254	0.0276	0.0298
ENEL	-0.10	-0.09	-0.09	-0.09	-0.08	-0.08	-0.08	-0.07	-0.07	-0.07	-0.06	-0.06	-0.06	-0.05	-0.05
ISP	-0.21	-0.17	-0.13	-0.09	-0.05	-0.01	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32	0.36
ENI	-0.29	-0.14	0.02	0.18	0.33	0.49	0.65	0.80	0.96	1.11	1.27	1.43	1.58	1.74	1.90
STM	-0.02	-0.02	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04
G	0.24	0.23	0.23	0.22	0.21	0.20	0.20	0.19	0.18	0.18	0.17	0.16	0.16	0.15	0.14
FCA	0.07	0.04	0.00	-0.04	-0.07	-0.11	-0.15	-0.18	-0.22	-0.26	-0.29	-0.33	-0.37	-0.40	-0.44
UCG	-0.03	-0.04	-0.05	-0.05	-0.06	-0.06	-0.07	-0.07	-0.08	-0.09	-0.09	-0.10	-0.10	-0.11	-0.11
SRG	0.25	0.21	0.18	0.15	0.12	0.09	0.05	0.02	-0.01	-0.04	-0.08	-0.11	-0.14	-0.17	-0.20
EXO	-0.09	-0.08	-0.07	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	0.00	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.07	0.09
ATL	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.01
CPR	0.25	0.22	0.19	0.16	0.12	0.09	0.06	0.03	-0.01	-0.04	-0.07	-0.10	-0.14	-0.17	-0.20
DIA	0.21	0.18	0.16	0.13	0.10	0.08	0.05	0.02	-0.01	-0.03	-0.06	-0.09	-0.11	-0.14	-0.17
REC	0.18	0.16	0.14	0.11	0.09	0.07	0.04	0.02	0.00	-0.03	-0.05	-0.08	-0.10	-0.12	-0.15
AMP	0.11	0.10	0.08	0.07	0.06	0.04	0.03	0.01	0.00	-0.02	-0.03	-0.05	-0.06	-0.07	-0.09
PRY	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02
TIT	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TEN	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	-0.01	-0.01	-0.02	-0.03	-0.03	-0.04
HER	0.26	0.24	0.22	0.20	0.19	0.17	0.15	0.13	0.11	0.09	0.07	0.05	0.04	0.02	0.00
IP	0.12	0.10	0.09	0.07	0.06	0.04	0.03	0.01	0.00	-0.02	-0.03	-0.05	-0.07	-0.08	-0.10
BZU	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01

Tabella 8.12: Portafogli ottenuti in presenza di vendite allo scoperto (parte I)

$E(R_{\pi})$	0.0521	0.0553	0.0585	0.0617	0.0649	0.0681	0.0713	0.0745	0.0776	0.0808	0.0840	0.0872	0.0904	0.0936	0.0968	0.1000
σ_{π}	0.0321	0.0344	0.0367	0.0390	0.0413	0.0436	0.0460	0.0483	0.0507	0.0530	0.0554	0.0578	0.0602	0.0625	0.0649	0.0673
ENEL	-0.05	-0.04	-0.04	-0.04	-0.03	-0.03	-0.03	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.00
ISP	0.40	0.44	0.48	0.52	0.56	0.60	0.65	0.69	0.73	0.77	0.81	0.85	0.89	0.93	0.97	1.01
ENI	2.05	2.21	2.37	2.52	2.68	2.84	2.99	3.15	3.31	3.46	3.62	3.77	3.93	4.09	4.24	4.40
STM	0.04	0.04	0.05	0.05	0.06	0.06	0.07	0.07	0.07	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09	0.10	0.10
G	0.14	0.13	0.12	0.12	0.11	0.10	0.10	0.09	0.08	0.07	0.07	0.06	0.05	0.05	0.04	0.03
FCA	-0.48	-0.51	-0.55	-0.59	-0.62	-0.66	-0.70	-0.73	-0.77	-0.81	-0.84	-0.88	-0.92	-0.95	-0.99	-1.03
UCG	-0.12	-0.13	-0.13	-0.14	-0.14	-0.15	-0.15	-0.16	-0.17	-0.17	-0.18	-0.18	-0.19	-0.19	-0.20	-0.21
SRG	-0.24	-0.27	-0.30	-0.33	-0.37	-0.40	-0.43	-0.46	-0.49	-0.53	-0.56	-0.59	-0.62	-0.65	-0.69	-0.72
EXO	0.10	0.11	0.13	0.14	0.15	0.16	0.18	0.19	0.20	0.22	0.23	0.24	0.25	0.27	0.28	0.29
ATL	-0.01	-0.01	-0.01	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04
CPR	-0.24	-0.27	-0.30	-0.33	-0.37	-0.40	-0.43	-0.46	-0.50	-0.53	-0.56	-0.59	-0.63	-0.66	-0.69	-0.72
DIA	-0.19	-0.22	-0.25	-0.27	-0.30	-0.33	-0.35	-0.38	-0.41	-0.43	-0.46	-0.49	-0.52	-0.54	-0.57	-0.60
REC	-0.17	-0.19	-0.22	-0.24	-0.26	-0.29	-0.31	-0.33	-0.36	-0.38	-0.41	-0.43	-0.45	-0.48	-0.50	-0.52
AMP	-0.10	-0.12	-0.13	-0.15	-0.16	-0.18	-0.19	-0.20	-0.22	-0.23	-0.25	-0.26	-0.28	-0.29	-0.30	-0.32
PRY	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06
TIT	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01
TEN	-0.04	-0.05	-0.06	-0.06	-0.07	-0.08	-0.08	-0.09	-0.10	-0.10	-0.11	-0.12	-0.12	-0.13	-0.14	-0.14
HER	-0.02	-0.04	-0.06	-0.08	-0.10	-0.11	-0.13	-0.15	-0.17	-0.19	-0.21	-0.23	-0.25	-0.26	-0.28	-0.30
IP	-0.11	-0.13	-0.14	-0.16	-0.17	-0.19	-0.20	-0.22	-0.24	-0.25	-0.27	-0.28	-0.30	-0.31	-0.33	-0.34
BZU	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.05

Tabella 8.12: Portafogli ottenuti in presenza di vendite allo scoperto (parte II)

$E(R_{\pi})$	0.012	0.012	0.013	0.013	0.014	0.015	0.015	0.016	0.016	0.017	0.018	0.018	0.019	0.019	0.020
σ_{π}	0.011	0.011	0.011	0.011	0.011	0.011	0.011	0.011	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012	0.013
ENEL	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ISP	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ENI	0.00	0.00	0.03	0.07	0.10	0.13	0.17	0.20	0.23	0.27	0.30	0.33	0.37	0.40	0.43
STM	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
G	0.00	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06
FCA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
UCG	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
SRG	0.14	0.15	0.14	0.14	0.13	0.13	0.12	0.12	0.11	0.10	0.10	0.09	0.09	0.08	0.08
EXO	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATL	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CPR	0.20	0.19	0.18	0.17	0.17	0.16	0.15	0.14	0.14	0.13	0.12	0.12	0.11	0.10	0.09
DIA	0.17	0.16	0.15	0.14	0.14	0.13	0.13	0.12	0.12	0.11	0.10	0.10	0.09	0.09	0.08
REC	0.15	0.13	0.13	0.12	0.12	0.11	0.11	0.10	0.10	0.09	0.09	0.08	0.08	0.07	0.06
AMP	0.07	0.07	0.06	0.06	0.06	0.05	0.05	0.05	0.05	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03
PRY	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TIT	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TEN	0.00	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
HER	0.20	0.20	0.20	0.19	0.19	0.18	0.18	0.18	0.17	0.17	0.16	0.16	0.15	0.15	0.15
IP	0.07	0.07	0.06	0.06	0.06	0.05	0.05	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02
BZU	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabella 8.13: Portafogli ottenuti in assenza di vendite allo scoperto (parte I)

$E(R_{\pi})$	0.020	0.021	0.022	0.022	0.023	0.023	0.024	0.025	0.025	0.026	0.026	0.027	0.028	0.028	0.029	0.029
σ_{π}	0.013	0.013	0.013	0.014	0.014	0.014	0.014	0.015	0.015	0.015	0.016	0.016	0.016	0.017	0.017	0.026
ENEL	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ISP	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	1.00
ENI	0.46	0.50	0.53	0.56	0.59	0.62	0.66	0.69	0.72	0.75	0.79	0.82	0.86	0.91	0.95	0.00
STM	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
G	0.06	0.07	0.07	0.07	0.07	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09	0.08	0.07	0.04	0.00
FCA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
UCG	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
SRG	0.07	0.07	0.06	0.06	0.05	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
EXO	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ATL	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CPR	0.09	0.08	0.07	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DIA	0.07	0.07	0.06	0.06	0.05	0.04	0.04	0.03	0.02	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
REC	0.06	0.05	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AMP	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
PRY	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TIT	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TEN	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
HER	0.14	0.14	0.13	0.13	0.13	0.12	0.12	0.11	0.11	0.10	0.09	0.09	0.06	0.02	0.00	0.00
IP	0.02	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
BZU	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabella 8.13: Portafogli ottenuti in assenza di vendite allo scoperto (parte II)

Osservando i grafici in Figura 8.8 ed in Figura 8.9, è possibile confermare quanto affermato dalla teoria per cui, in corrispondenza del ramo efficiente della frontiera, al crescere del rendimento atteso si registra un aumento del rischio.

In particolare, in presenza di vendite allo scoperto, tale andamento caratterizza i portafogli in corrispondenza di livelli di rendimento da $E(R_{\pi}) = 0.010581$ a $E(R_{\pi}) = 0.1$. I portafogli ottenuti con i primi due livelli di rendimento target, appartengono invece al ramo inefficiente della curva per cui a parità di deviazione standard, offrono un rendimento inferiore rispetto ai portafogli sul ramo efficiente dai quali sono dominati.

Il portafoglio di minima varianza si ha in corrispondenza di $E(R_{\pi}) = 0.010581$ a cui corrisponde un valore di deviazione standard pari a $\sigma_{\pi} = 0.010715$, invece, il portafoglio ottimo di tangenza di B&L ha coordinate $(\mu_M, \sigma_M) = (0.02856, 0.0164)$.

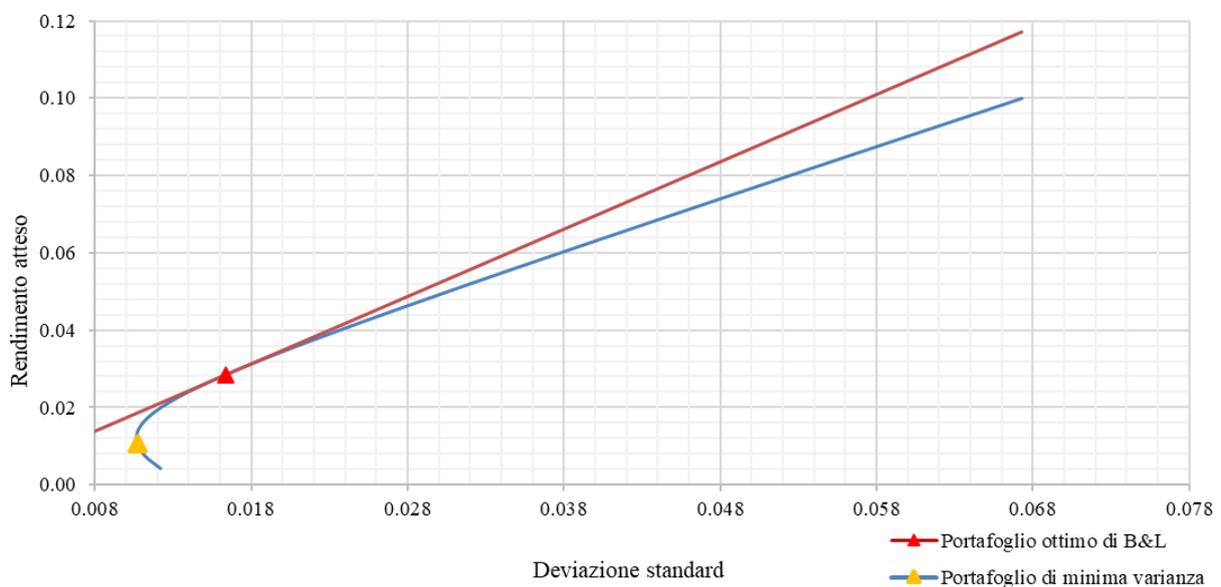


Figura 8.8: Frontiera efficiente in presenza di vendite allo scoperto ed in presenza di view

In assenza di vendite allo scoperto, i portafogli appartenenti al ramo efficiente della frontiera hanno livelli di rendimento che variano da $E(R_{\pi}) = 0.012775$ a $E(R_{\pi}) = 0.029347$; anche in tal caso, i portafogli ottenuti in corrispondenza dei primi due livelli di rendimento, appartengono invece al ramo inefficiente della curva.

Il portafoglio di minima varianza si ha in corrispondenza di $E(R_{\pi}) = 0.012775$ a cui corrisponde un valore di deviazione standard pari a $\sigma_{\pi} = 0.011213$, invece, il portafoglio ottimo di tangenza di B&L ha coordinate $(\mu_M, \sigma_M) = (0.02724, 0.0163)$.

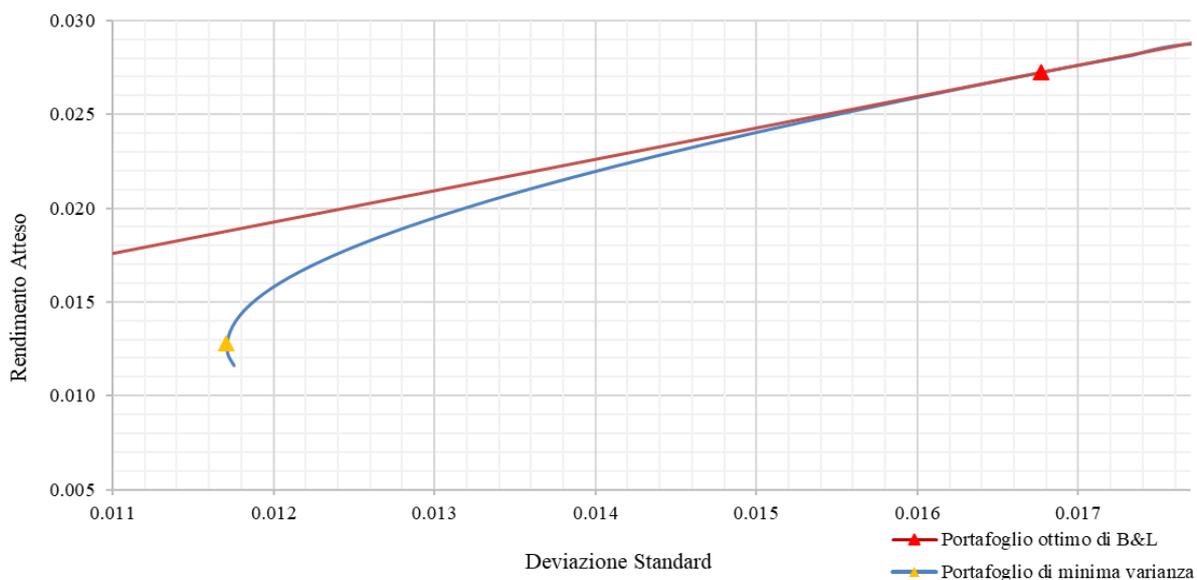


Figura 8.9: Frontiera efficiente in assenza di vendite allo scoperto ed in presenza di view

Immettendo in input al problema di ottimizzazione il rendimento del portafoglio ottimo di B&L e avviando il Risolitore di Excel, si determina il vettore delle quote di composizione del portafoglio sia in presenza che in assenza di vendite allo scoperto.

Il portafoglio ottimo di Black e Litterman risultante dalla combinazione dei rendimenti impliciti e delle aspettative degli investitori circa l'andamento futuro degli indici in esame, è di seguito riportato:

ENEL	ISP	ENI	STM	G	FCA	UCG	SRG	EXO	ATL
-0.0717	0.1004	0.9004	0.0115	0.1862	-0.2065	-0.0777	0.0004	0.0054	0.0054
CPR	DIA	REC	AMP	PRY	TIT	TEN	HER	IP	BZU
0.0052	0.0046	0.0044	0.0034	0.0032	0.0025	0.0024	0.1173	0.0017	0.0016

Tabella 8.13: Vettore delle quote di composizione del portafoglio ottimo di B-L in presenza di vendite allo scoperto

ENEL	ISP	ENI	STM	G	FCA	UCG	SRG	EXO	ATL
0.00	0.00	0.84	0.00	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CPR	DIA	REC	AMP	PRY	TIT	TEN	HER	IP	BZU
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.00	0.00

Tabella 8.14: Vettore delle quote di composizione del portafoglio ottimo di B-L in assenza di vendite allo scoperto

Come ci si attendeva e coerentemente con quanto ottenuto nelle casistiche affrontate precedentemente (Markowitz e B&L senza view), è possibile osservare che il portafoglio più performante secondo l'indice di Sharpe è quello ottenuto in presenza di vendite allo scoperto con un indice pari a 1.74 contro il risultato ottenuto in assenza di vendite allo scoperto pari a 1.67.

In Figura 8.10 ed in Figura 8.11 è inoltre possibile visualizzare la variazione di composizione dei portafogli appartenenti alla frontiera al crescere del rendimento atteso, in presenza ed in assenza di vendite allo scoperto:

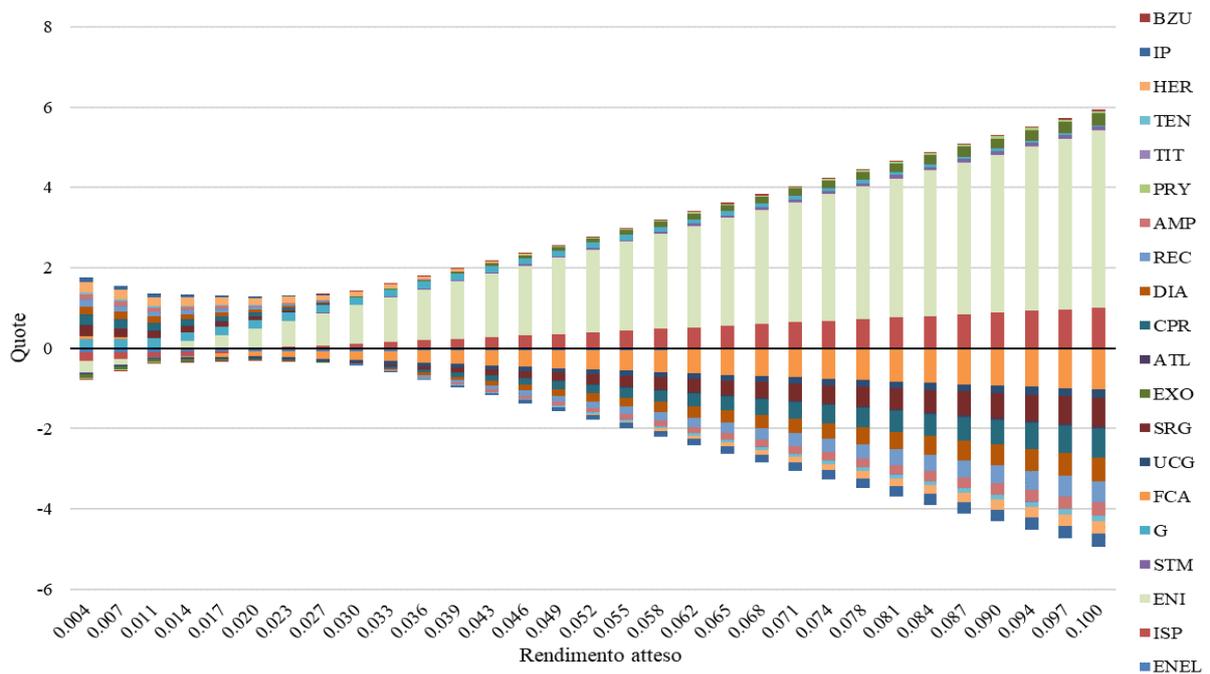


Figura 8.10: Variazione di composizione dei portafogli al variare del rendimento target in presenza di vendite allo scoperto

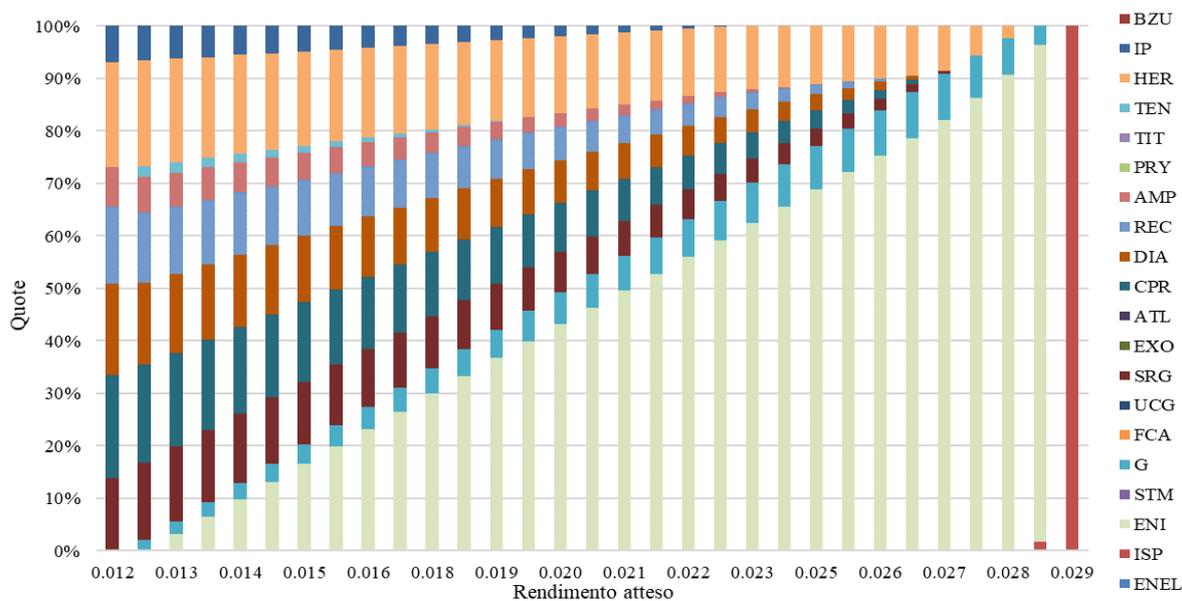


Figura 8.11: Variazione di composizione dei portafogli al variare del rendimento target in assenza di vendite allo scoperto

Al fine di avere maggior evidenza della variazione delle quote di ciascun titolo all'interno dei portafogli ottenuti, si riportano di seguito i grafici in da cui si evince la crescita delle quote dei titoli aventi rendimenti superiori. Si precisa che il modello così costruito seleziona dapprima i titoli con deviazione standard minima (così come richiesto dal problema di ottimizzazione) ed in corrispondenza del livello di rendimento massimo disponibile, seleziona il titolo corrispondente; tale andamento è evidente nel caso di assenza di vendite allo scoperto.

Anche in tal caso, come nell'approccio di equilibrio, si osserva che il peso dei titoli nei portafogli ottenuti è più equilibrato rispetto a quanto osservato nel modello di Markowitz.

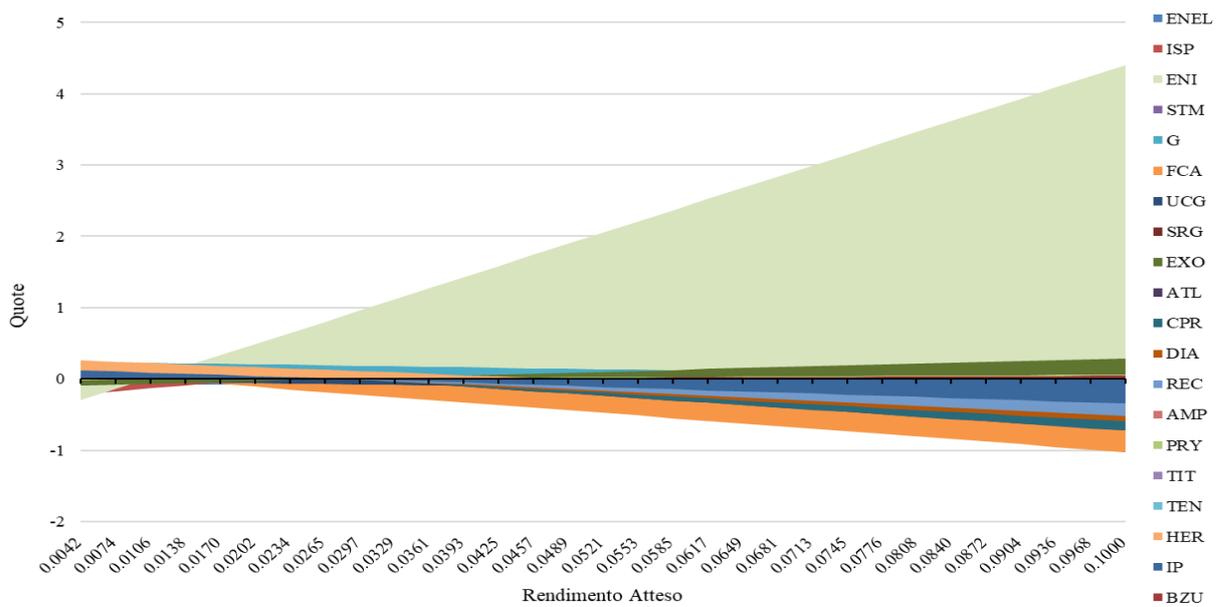


Figura 8.12: Variazione di composizione dei portafogli al variare del rendimento target in presenza di vendite allo scoperto

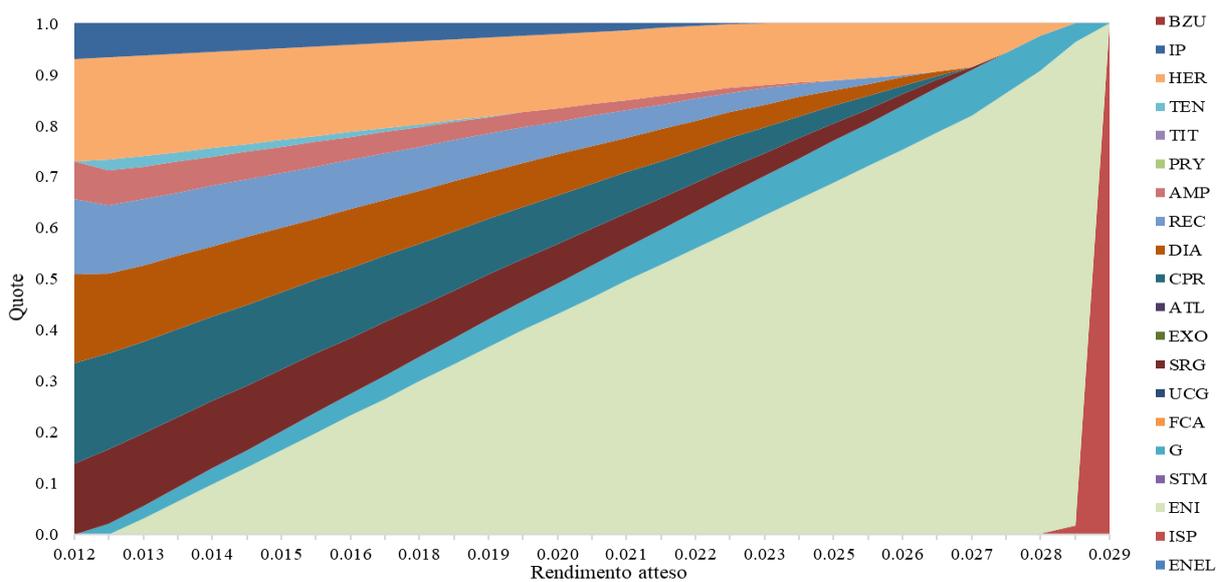


Figura 8.13: Variazione di composizione dei portafogli al variare del rendimento target in assenza di vendite allo scoperto

8.4 L'impatto delle view

Osservando le quote di composizione del portafoglio ottimo di Black & Litterman prima e dopo l'implementazione delle aspettative soggettive è possibile affermare che, coerentemente con quanto analizzato per i rendimenti, anche per il vettore ottimo di portafoglio non variano solo

le quote dei titoli direttamente interessati dalle view espresse, ma anche quelle degli asset per cui non è stata espressa alcuna aspettativa in misura più o meno preponderante in base al grado di correlazione esistente tra gli asset ed al livello di confidenza con cui sono state espresse le view. Tale risultato è possibile osservarlo nella tabella seguente, dove sono riportati a confronto i portafogli ottimi di Black & Litterman e le loro variazioni di composizione rispetto alla casistica in cui non è espressa alcuna view (l'entità delle variazioni è evidenziata secondo un ordine cromatico per cui le variazioni più significative sono in verde ed in rosso):

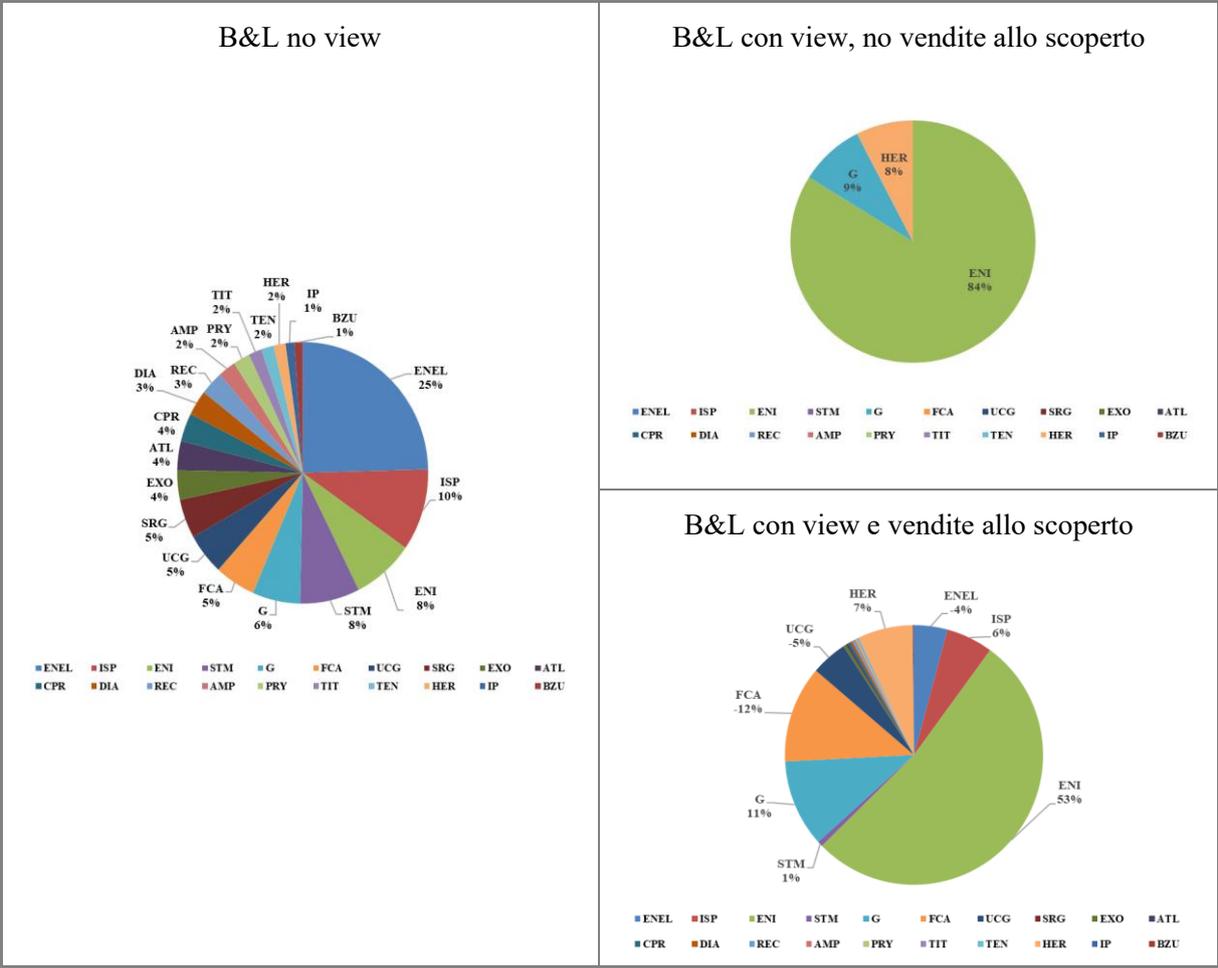
	<i>B&L no view</i>	<i>B&L con view</i>	<i>B&L con view</i>	Δ	Δ
	-	Vendite allo scoperto	No vendite allo scoperto	Vendite allo scoperto	No vendite allo scoperto
ENEL	24.58%	-7.17%	0.00%	-31.8%	-24.6%
ISP	10.14%	10.04%	0.00%	-0.1%	-10.1%
ENI	7.91%	90.04%	83.91%	82.1%	76.0%
STM	7.70%	1.15%	0.00%	-6.6%	-7.7%
G	6.15%	18.62%	8.54%	12.5%	2.4%
FCA	5.24%	-20.65%	0.00%	-25.9%	-5.2%
UCG	5.13%	-7.77%	0.00%	-12.9%	-5.1%
SRG	4.81%	0.04%	0.00%	-4.8%	-4.8%
EXO	3.65%	0.54%	0.00%	-3.1%	-3.7%
ATL	3.60%	0.54%	0.00%	-3.1%	-3.6%
CPR	3.51%	0.52%	0.00%	-3.0%	-3.5%
DIA	3.13%	0.46%	0.00%	-2.7%	-3.1%
REC	2.98%	0.44%	0.00%	-2.5%	-3.0%
AMP	2.26%	0.34%	0.00%	-1.9%	-2.3%
PRY	2.16%	0.32%	0.00%	-1.8%	-2.2%
TIT	1.69%	0.25%	0.00%	-1.4%	-1.7%
TEN	1.63%	0.24%	0.00%	-1.4%	-1.6%
HER	1.53%	11.73%	7.54%	10.2%	6.0%
IP	1.12%	0.17%	0.00%	-1.0%	-1.1%
BZU	1.06%	0.16%	0.00%	-0.9%	-1.1%

Come anticipato, si osserva che i titoli che presentano le variazioni di peso più significative sono quelli interessati direttamente dalla formulazione delle view con un grado di certezza non trascurabile (ENI, ENEL, FCA). Si evince inoltre che, seppur in misura più limitata, anche i titoli su cui non sono state espresse opinioni sono soggetti a variazioni di peso dato il grado di correlazione tra gli asset non nullo.

Osservando le quote di composizione a confronto, inoltre, si evince che le quote preponderanti appartengono proprio agli asset su cui sono state espresse le view, invece, i pesi più piccoli sono degli indici per cui non è stata espressa alcuna aspettativa: questo accade poiché le quote

di portafoglio incorporano pienamente la visione personale dell'asset manager, infatti, i titoli per i quali sono state espresse aspettative rialziste presentano quote positive (ENI, G, HER) per cui si suggerisce di investire, invece, gli asset oggetto di trend ribassisti presentano quote negative laddove consentite o quote nulle in presenza di vincoli di non negatività (ENEL, FCA, UCG).

Ulteriori dettagli emergono dai grafici seguenti: dal momento che l'obiettivo dell'asset manager è quello di ottenere profitto minimizzando la volatilità di portafoglio e diversificando quanto più possibile, si può affermare che in base agli ultimi eventi considerati, egli preferisca investire maggiormente in titoli come ENI, GENERALI ed HERA su cui ha espresso view rialziste con un certo grado di fiducia. Inoltre, coerentemente con quanto previsto, le quote minoritarie appartengono ai titoli su cui sono state espresse view ribassiste o su cui non è stata espressa alcuna aspettativa.



8.4.1 Analisi di sensitività per singola view

Al fine di valutare l'effetto netto delle singole view sul vettore di portafoglio, è stata condotta un'analisi di sensitività delle view applicata sia al vettore delle quote di composizione del portafoglio ottimo di Black & Litterman sia al vettore dei rendimenti di B&L.

Si precisa che, per semplicità di trattazione, l'analisi è stata condotta nel caso in cui siano ammesse vendite allo scoperto, indicando con Δ_i la variazione di peso dovuta alla view i -esima (l'entità delle variazioni è evidenziata secondo un ordine cromatico per cui le variazioni più significative sono in verde ed in rosso):

	<i>No view</i>	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6
ENEL	24.58%	7.47%	24.10%	12.37%	0.01%	-17.34%	-20.90%
ISP	10.14%	3.08%	0.00%	5.09%	38.17%	-7.15%	-8.61%
ENI	7.91%	2.41%	0.02%	3.98%	0.02%	-5.59%	78.28%
STM	7.70%	2.35%	0.00%	3.88%	-0.01%	-5.44%	-6.55%
G	6.15%	1.85%	-0.03%	3.10%	-0.04%	66.21%	-5.23%
FCA	5.24%	-28.80%	0.00%	2.63%	0.00%	-3.70%	-4.45%
UCG	5.13%	1.57%	0.01%	2.59%	-38.15%	-3.61%	-4.36%
SRG	4.81%	1.49%	0.00%	-22.74%	0.00%	-3.41%	-4.09%
EXO	3.65%	1.08%	0.00%	1.84%	0.02%	-2.58%	-3.10%
ATL	3.60%	1.11%	0.00%	1.81%	0.00%	-2.54%	-3.06%
CPR	3.51%	1.06%	-0.01%	1.76%	0.01%	-2.46%	-2.99%
DIA	3.13%	0.94%	0.01%	1.57%	-0.01%	-2.21%	-2.66%
REC	2.98%	0.92%	-0.01%	1.51%	0.02%	-2.10%	-2.54%
AMP	2.26%	0.68%	0.00%	1.14%	-0.01%	-1.59%	-1.92%
PRY	2.16%	0.66%	0.00%	1.09%	-0.01%	-1.53%	-1.84%
TIT	1.69%	0.52%	0.00%	0.85%	0.00%	-1.19%	-1.43%
TEN	1.63%	0.51%	-0.01%	0.82%	0.01%	-1.14%	-1.39%
HER	1.53%	0.45%	-24.10%	-24.39%	-0.02%	-1.08%	-1.30%
IP	1.12%	0.34%	0.00%	0.56%	-0.01%	-0.79%	-0.95%
BZU	1.06%	0.32%	0.00%	0.54%	0.00%	-0.75%	-0.90%

Tabella 8.15: Effetto netto delle singole view sul portafoglio ottimo di B&L

Osservando i risultati ottenuti, si evince che la prima view impatta in modo negativo sul peso del titolo FCA in portafoglio, la view 2 comporta una riduzione della quota del titolo HER ed un impatto positivo sul titolo ENEL, la terza view comporta invece una variazione negativa delle quote relative ai titoli SRG ed HER ed una variazione positiva del peso di ENEL. La quarta e quinta aspettativa, infine, impattano in modo negativo sul titolo ENEL ed in modo positivo su Generali ed Eni rispettivamente. È dunque evidente che, sebbene tutti i pesi subiscano un certo grado di variazione, ciascuna view impatta in modo preponderante in senso

positivo o negativo sui titoli ai quali fa riferimento in modo diretto a seconda che sia una aspettativa di tipo rialzista o ribassista ed in base al grado di confidenza con cui è espressa. Per esempio, l'aspettativa ribassista formulata su FCA comporta una sua importante riduzione di peso nel portafoglio, la seconda aspettativa relativa espressa sui titoli ENEL ed HER comporta un rialzo della quota del primo titolo ed un ribasso per il secondo, e così via. È inoltre possibile osservare che, qualora sia presente un elevato grado di correlazione tra due titoli di cui uno è direttamente impattato dalla view e l'altro no, anche quello per cui non è espressa una aspettativa presenta una rilevante variazione di peso: è il caso di ENEL nelle view 3,5 e 6.

Lo stesso tipo di analisi è stato condotto per il vettore dei rendimenti di Black & Litterman, i cui risultati sono riportati nella tabella seguente:

	<i>No view</i>	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6
ENEL	0.0038	-0.0009	0.0005	-0.0009	-0.0001	0.0081	0.0181
ISP	0.0056	-0.0016	0.0005	-0.0010	0.0001	0.0137	0.0265
ENI	0.0035	-0.0010	0.0003	-0.0007	-0.0001	0.0081	0.0271
STM	0.0043	-0.0014	0.0003	-0.0007	-0.0001	0.0084	0.0196
G	0.0038	-0.0011	0.0004	-0.0007	-0.0002	0.0122	0.0193
FCA	0.0049	-0.0028	0.0003	-0.0008	-0.0002	0.0105	0.0236
UCG	0.0061	-0.0017	0.0005	-0.0011	-0.0015	0.0150	0.0282
SRG	0.0025	-0.0006	0.0002	-0.0010	0.0000	0.0051	0.0128
EXO	0.0044	-0.0017	0.0003	-0.0008	-0.0002	0.0098	0.0217
ATL	0.0034	-0.0010	0.0002	-0.0008	-0.0001	0.0075	0.0169
CPR	0.0022	-0.0006	0.0002	-0.0006	0.0000	0.0046	0.0110
DIA	0.0018	-0.0005	0.0001	-0.0004	0.0000	0.0034	0.0069
REC	0.0021	-0.0006	0.0001	-0.0006	0.0000	0.0041	0.0094
AMP	0.0023	-0.0007	0.0001	-0.0006	-0.0001	0.0046	0.0102
PRY	0.0038	-0.0012	0.0003	-0.0008	-0.0001	0.0083	0.0186
TIT	0.0038	-0.0010	0.0003	-0.0008	-0.0002	0.0089	0.0193
TEN	0.0034	-0.0011	0.0002	-0.0006	-0.0001	0.0074	0.0233
HER	0.0022	-0.0006	-0.0003	-0.0010	-0.0001	0.0044	0.0110
IP	0.0026	-0.0008	0.0001	-0.0005	0.0000	0.0054	0.0126
BZU	0.0040	-0.0013	0.0003	-0.0008	-0.0002	0.0094	0.0206

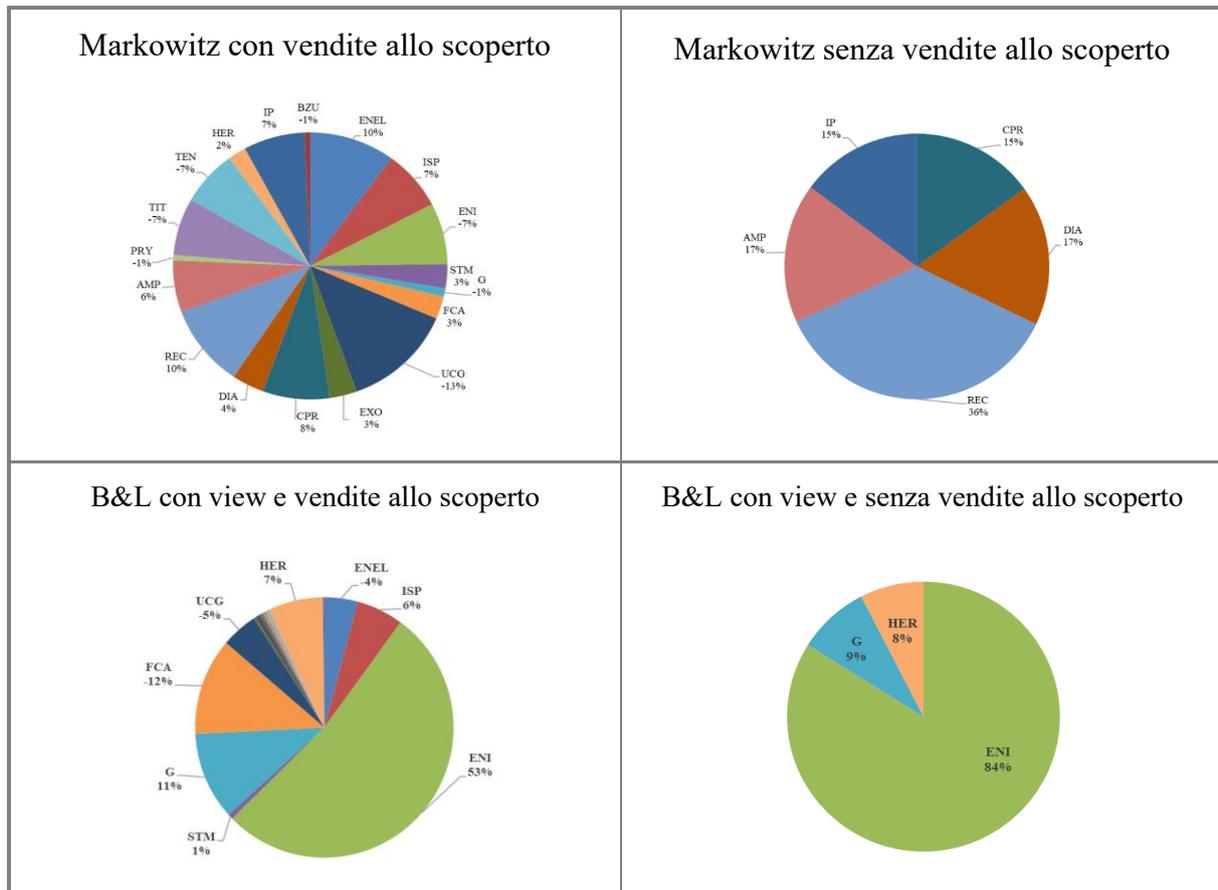
Tabella 8.16: Effetto netto delle singole view sul vettore dei rendimenti di B&L

Coerentemente con quanto appena visto, anche l'effetto netto delle singole view sul vettore dei rendimenti di Black & Litterman dipende dal tipo di aspettativa espressa (rialzista o ribassista): per esempio, la prima view comporta una variazione negativa del rendimento del titolo FCA, invece, la view 4 comporta una variazione positiva del rendimento del titolo ISP ed una variazione negativa del rendimento del titolo UCG.

In generale, si osserva che anche i titoli per i quali non è stata espressa alcuna view subiscono una certa variazione ma gli effetti più rilevanti si osservano in corrispondenza dei titoli che ne sono interessati in modo diretto.

9 Confronti finali e conclusioni

Al fine di confrontare i risultati fin qui ottenuti, si riportano di seguito i grafici rappresentanti le quote di composizione dei portafogli ottimi di Markowitz, di Black & Litterman in assenza di view e di Black & Litterman con l'implementazione delle aspettative soggettive:



Come già anticipato, si osserva che il modello di Black e Litterman applicato implementando in input i rendimenti impliciti oppure i rendimenti di B&L, consente di ottenere portafogli più bilanciati dal punto di vista delle quote di composizione rispetto a quanto si ottiene con il modello di Markowitz la cui soluzione ottima, invece, tende a concentrarsi sui titoli con i rendimenti più elevati. Ciò è evidente soprattutto nel caso di assenza di vendite allo scoperto dove il portafoglio ottimo di Markowitz è composto in misura preponderante dai titoli REC, AMP, DIA a cui competono i valori più alti di rendimento atteso, invece il portafoglio di Black & Litterman in assenza di vendite allo scoperto è composto sia da titoli a cui compete un elevato valore di rendimento (ENI) sia da titoli dal rendimento più basso (G, HER). Lo stesso risultato si ottiene anche nei casi di presenza di vendite allo scoperto e di assenza di view con portafogli equilibrati dal punto di vista del livello di rendimento.

Dal momento che il modello di Markowitz richiede in input una stima dei rendimenti attesi e l'investitore non ha a disposizione né previsioni dettagliate circa l'andamento futuro dei rendimenti, né modelli sofisticati che possano aiutarlo ad ottenerle, egli può solo utilizzare i rendimenti storici i quali, però, presentano il limite di essere inadatti ad ottenere una previsione efficiente dei rendimenti futuri. Le imprecisioni di stima degli input conducono alla massimizzazione dell'errore di stima del portafoglio portando a soluzioni concentrate su titoli che presentano alti rendimenti attesi, bassa volatilità e dunque alta performance di Sharpe: al crescere del livello di rendimento atteso in input, la soluzione tende a concentrarsi su pochi asset ad alto rendimento. La composizione del portafoglio risultante è dunque instabile poiché estremamente sensibile al valore dei rendimenti in input: piccole variazioni dei valori in input possono comportare grandi variazioni nella composizione del portafoglio ottimo.

Il modello di Black & Litterman consente, invece, di ottenere portafogli più robusti e stabili data la possibilità di combinare le informazioni derivanti dal mercato con le aspettative personali dell'investitore. Nonostante le difficoltà e la soggettività che caratterizza il calcolo del parametro τ e della matrice Ψ , il modello di Black & Litterman non solo consente di ottenere portafogli più equilibrati dal punto di vista dei pesi dei titoli da cui sono composti ma fornisce anche più stabilità e minor sensibilità alle oscillazioni dei rendimenti in input.

A supporto dell'analisi, per ogni casistica di interesse è stata valutata la performance di Sharpe (con $i = 0$) rappresentante l'extra-rendimento aggiuntivo per ogni unità di rischio assunto:

	Rendimento	Volatilità	Indice di Sharpe
Markowitz in assenza di vendite allo scoperto	0.09 %	0.0122	0.071
Markowitz con vendite allo scoperto	0.27 %	0.0229	0.116
B&L in assenza di view	0.39 %	0.0034	1.13
B&L con view ed in assenza di vendite allo scoperto	2.7 %	0.0163	1.67
B&L con view e vendite allo scoperto	2.9 %	0.0164	1.74

I risultati ottenuti confermano le aspettative: il modello di Black e Litterman consente di ottenere portafogli dalle performance nettamente superiori rispetto a quanto si ottiene utilizzando Markowitz. Si osserva che i risultati migliori si ottengono implementando le view dell'investitore, dunque si può concludere che la formulazione delle aspettative circa il trend degli asset in analisi è più redditizia (per ogni unità di rischio in più assunta) rispetto a quanto è possibile ottenere dalla semplice osservazione della composizione di mercato degli indici.

Inoltre, i valori di volatilità ottenuti confermano la maggior stabilità e robustezza del portafoglio di Black e Litterman che, in seguito ad eventuali oscillazioni dei valori in input, non mostrerà dunque forti variazioni in termini di rendimento e composizione.

Bibliografia e Sitografia

- [1] [Online]. Available: <https://www.milanofinanza.it/news/hera-il-comune-di-bologna-vende-2-milioni-di-azioni-202010161227268059>.
- [2] [Online]. Available: <https://www.ilsole24ore.com/art/snam-domanda-gas-ripresa-2021-la-frenata-provocata-pandemia-ADhyKBi>.
- [3] [Online]. Available: <https://energiaoltre.it/enel-a-novembre-le-nuove-linee-strategiche-del-gruppo/>.
- [4] [Online]. Available: <https://www.proiezionidiborsa.it/questo-titolo-e-a-un-passo-dai-minimi-degli-ultimi-24-anni-ma-proprio-per-questo-ha-forti-potenzialita-rialziste/>.
- [5] [Online]. Available: <https://www.money.it/assicurazioni-general-cattolica-analisi-tecnica>.
- [6] [Online]. Available: <https://forbes.it/2020/10/14/unicredit-sceglie-carlo-padoan-come-presidente-e-mps-corre-in-borsa-per-la-fusione/>.
- [7] [Online]. Available: <https://www.ilsole24ore.com/art/ubi-intesa-sanpaolo-alza-prezzo-dell-offerta-AD78zze>.
- [8] [Online]. Available: <https://www.giornaledibrescia.it/economia/ubi-banca-uscir%C3%A0-da-piazza-affari-il-18-settembre-1.3498192> .
- [9] «Il Sole 24 Ore,» [Online]. Available: <https://www.ilsole24ore.com/art/fca-rosso-un-miliardo-trimestre-confermati-tempi-fusione-psa-ADgODLh>.
- [10] «Borsa Italiana,» [Online]. Available: <https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/arbitraggio.htm>.
- [11] «Borsa Italiana,» [Online]. Available: <https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/short-selling.htm>.
- [12] F. Varetto, "Economia degli Intermediari Finanziari", Torino.

- [13] Marco Micocci, Giovanni Batista Masala, "Manuale di Matematica finanziaria - Metodi e strumenti quantitativi per il Risk Management", Carocci editore, 2012.
- [14] David Hillier, Stephen Ross, Randolph westerfield, Jeffrey Jaffe, Bradford Jordan, Corporate FInance, McGraw-Hill Education.
- [15] «Borsa Italiana,» [Online]. Available: <https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/capm.htm>.
- [16] «Starting Finance,» [Online]. Available: performance trading e <https://www.startingfinance.com/guide/mercati-finanziari-intermedio/efficienza-dei-mercati-finanziari/>.
- [17] «Starting Finance,» [Online]. Available: <https://www.startingfinance.com/approfondimenti/possibile-prevedere-mercato-random-walk/>.
- [18] «Borsa Italiana,» [Online]. Available: <https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/mercato-secondario.html>.