

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in

Ingegneria Civile

Tesi di Laurea Magistrale

## METODI PER IL CALCOLO DELL'APERTURA DELLA FESSURA IN ELEMENTI IN CALCESTRUZZO ARMATO



RELATORE  
Prof. Maurizio Taliano

CANDIDATO  
Cristian Maldarella

Anno Accademico 2020/2021



## INDICE

INTRODUZIONE.....	2
1. LA FESSURAZIONE NEL CALCESTRUZZO ARMATO.....	5
1.1 Introduzione .....	5
1.2 Classificazione .....	5
1.3 Motivi per il controllo della fessurazione.....	11
1.4 I principi dello stato limite di esercizio.....	13
2. REVISIONE DELLA LETTERATURA SPERIMENTALE IN MERITO ALLA DISTRIBUZIONE DI TENSIONE DI ADERENZA-SCORRIMENTO .....	16
2.1 Introduzione .....	16
2.2 Ricerche sperimentali sulla tensione di aderenza tra Calcestruzzo e Acciaio.....	18
2.3 Definizione di fessura.....	34
2.4 Le fasi della fessurazione .....	36
Fase della formazione della fessura .....	38
Fase della fessurazione stabilizzata.....	39
3. MODELLI ANALITICI PER IL CALCOLO DELL'APERTURA DELLA FESSURA... 40	
3.1 <i>fib</i> Model Code (2010).....	40
Fase di formazione della fessura .....	41
3.2 König G. e Tue N. (1991) .....	43
Fase di formazione della fessura .....	44
Fessurazione stabilizzata.....	57
Formula per il calcolo del fattore $\alpha_v$ .....	65
3.3 Schlicke. D. (2020).....	67
3.4 Il Metodo Generale.....	71
Fase formazione della fessure .....	71
Fase di fessurazione stabilizzata.....	73

3.5	Taliano M. (2017) .....	75
4.	CONFRONTO DEI METODI SU DATI SPERIMENTALI.....	78
5.	CONCLUSIONI.....	84
6.	BIBLIOGRAFIA.....	85

## INTRODUZIONE

Nell'età antica, i Romani furono in grado di padroneggiare l'impiego del calcestruzzo non solo da un punto di vista della resistenza del materiale, ma anche della durabilità. Plinio il vecchio, riferendosi alle strutture portuali, nella sua *Naturalis Historia* del 77 d.C, nota che le strutture in calcestruzzo nei porti antichi *diventano una singola massa di pietra impenetrabili alle onde e ogni giorno più forti*. Grazie ad un adeguato mix design della miscela cementizia, che va dall'uso di adeguato rapporto acqua-cemento fino alla scelta degli inerti più ottimali, essi osservarono un guadagno in duttilità e resistenza alla frattura (Jackson et al. 2014).

Nell'epoca moderna, la realizzazione di una struttura progettata secondo i canoni dell'Antica Roma non risulterebbe ottimale dal un punto di vista dell'uso delle risorse pubbliche, ma anche per la reperibilità delle materie prime. Ad oggi, i Codici Europei in materia di progettazione strutturale, definiscono un metodo probabilistico per garantire la sicurezza nei confronti di determinati stati limite. Per stato limite si intende una condizione, superata la quale, non sono garantite le esigenze fondamentali di salvaguardia delle vite umane, dei beni contenuti nella struttura e di durabilità dell'opera. Nella progettazione, tra gli stati limite considerati, vi è quello di esercizio: esso riguarda la performance degli elementi strutturali e della struttura sotto carichi, appunto, di esercizio. Ad eccezioni di strutture particolari, generalmente gli stati limite di esercizio che risultano essere più critici per le strutture in calcestruzzo armato sono: stato limite di deflessione e stato limite di fessurazione.

Quest'ultima rappresenta un argomento sempre più discusso negli'ultimi tempi quando le ottimizzazioni dei metodi analitici consentiti dall'uso dei calcolatori e le crescenti strette economiche, hanno causato un notevole risparmio nell'uso dei materiali strutturali. Inoltre, l'utilizzo di materiali ad alte prestazione meccaniche, ma con gravi vulnerabilità agli agenti chimici e fisici, introduce nel sistema strutturale un concetto simile a quello di fragilità, come nel caso dell'acciaio di elementi precompressi.

Le fessure influiscono negativamente sulla durabilità e sull'impermeabilità all'acqua, e per progettisti, costruttori e committenti, esse sono motivo di contestazioni; per tali ragioni viene individuato uno stato limite nel quale la fessurazione in condizione di esercizio, venga limitata. Anche se si tratta di uno stato funzionale, nella prospettiva di

un ottimale sfruttamento del materiale, bisogna abbandonare la concezione che la sezione di calcestruzzo rimanga interamente reagente, e quindi non fessurata fino alla condizione ultima. E' necessario, invece, prevedere un controllo dell'ampiezza della fessura in fase di design, prendendo in considerazione l'aggressività dell'ambiente in cui l'opera viene a realizzarsi, come indicato dai codici competenti in materia.

Come si può leggere dal *Journal of the fib Structural Concrete 14 (2013), No.1* le differenze nelle prestazioni effettive delle disposizioni sono molto varie all'interno di Paesi con conoscenza tecnica dello stesso livello; la spiegazione deve essere che la diversa standardizzazione nazionale abbia reinterpretato, nella realtà progettuale, cosa rappresenti la fine della vita di servizio così come il livello di affidabilità previsto. Dato che il fenomeno della fessurazione è governato da numerosi fattori che difficilmente possono essere stimati con precisione, i codici in materia adottano metodi semplificati e di facile interpretazione. L'intento, quindi, non è quello di raggiungere in maniera pedissequa l'esattezza dei risultati sperimentali, ma delle stime conservative e di facile utilizzo da parte del progettista.

Dopo aver brevemente descritto il fenomeno della fessurazione e la necessità del suo controllo in fase di progettazione, in questa tesi si discute della validità di alcuni metodi per la verifica dello stato limite di fessurazione, da svolgere in fase di design. In particolar modo sono analizzati i metodi più recenti:

- il metodo contenuto nel Model Code (2010)
- il *Metodo Generale* proposto da Debernardi e Taliano (2016)
- il metodo proposto da König e Tue (1991)

Inoltre, sono discussi e confrontati ulteriori due metodi di natura più pratico-applicativa derivati dai precedenti:

- il *Metodo Migliorato* proposto da Taliano (2017)
- il metodo proposto da Schlicke (2020)

Dove quest'ultimo è stato proposto recentemente per la nuova edizione del *fib Model Code 2020*.

La validità dei metodi, e quindi dei modelli matematici, è trattata discutendo sulle diverse relazioni della distribuzione delle tensioni di aderenza – scorrimenti (*slip*) adottate dai metodi sopracitati. Inoltre, lo studio è focalizzato sulle equazioni di

congruenza, equilibrio e leggi costitutive adottate dagli stessi. Dopo le eventuali conclusioni svolte per ciascun modello, i modelli sono confrontati sulla base di dati sperimentali ottenuti su tiranti in calcestruzzo armato.

# 1. LA FESSURAZIONE NEL CALCESTRUZZO ARMATO

## 1.1 Introduzione

Questo capitolo è scritto con l'intento di descrivere brevemente le varie cause di fessurazione nelle strutture in calcestruzzo armato e delinearne alcune caratteristiche. Nel calcestruzzo armato, con il termine fessura si intende il distacco nella matrice del calcestruzzo, che crea due fronti opposti. La propensione del calcestruzzo a tale fenomeno è dovuto, in particolar modo, alla sua quasi nulla resistenza a trazione. L'armatura di rinforzo consiste in barre ad aderenza migliorata annegate nel calcestruzzo: le nervature sulla superficie della barra migliora l'aderenza con il calcestruzzo, impedendo lo scivolamento o *collassi fragili*.

## 1.2 Classificazione

La *United States Nuclear Regulatory Commission* suddivide le fessure in due macrocategorie, a seconda dei tempi in cui viene a verificarsi il fenomeno:

- prima dell'indurimento del calcestruzzo;
- dopo l'indurimento del calcestruzzo.

Le cause dei fenomeni fessurativi che si sviluppano prima dell'indurimento sono le seguenti:

### *Danneggiamento precoce dal gelo*

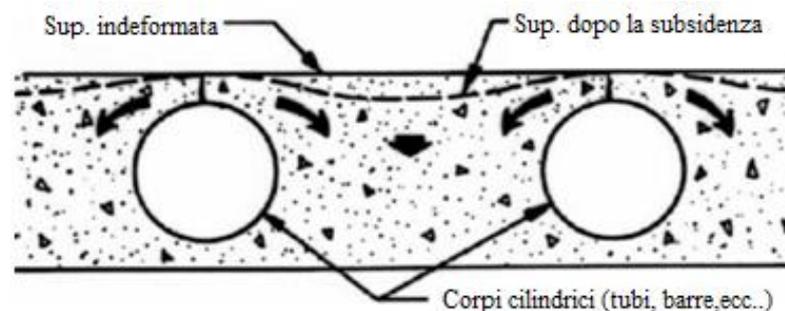
Con delle temperature vicino allo zero, l'espansione di volume d'acqua nel sistema di pori del calcestruzzo viene confinato dal calcestruzzo circostante, innescando stati di tensioni di trazione che porta alla comparsa di micro- e macro- crepe. Va ricordato che, mentre il calcestruzzo maturo potrebbe essere in grado di resistere a ripetuti cicli di congelamento e scongelamento senza danno, il calcestruzzo fresco, in uno stato

immaturo, può essere danneggiato da un congelamento singolo, a causa del mancato raggiungimento di un'adeguata resistenza del conglomerato (ACI 201.2R-08).

#### *Ritiro Plastico e Assestamento plastico*

Le fessure da ritiro plastico sono crepe piuttosto superficiali. Sono spesso associati alla maturazione di calcestruzzo in climi caldi/aridi, ma può svilupparsi in altre condizioni climatiche quando la superficie di calcestruzzo appena gettato si asciuga e successivamente si ritira. L'asciugatura della superficie avviene ogni volta che la velocità di evaporazione è maggiore della velocità con cui l'acqua sale alla superficie, fenomeno di risalita principalmente riconosciuto con il nome di *bleeding* (ACI 305R-99).

Da distinguere le fessure causate dall'assestamento del calcestruzzo intorno alle barre di armatura: il fenomeno di *subsidenza della superficie del calcestruzzo*, cioè la diminuzione di volume provocata dall'evaporazione dell'acqua, viene ostacolato dalle barre più superficiali. Il risultato è la crisi del copri ferro per la nascita di stati di trazione in esso.



**Figura 1.1 Fessurazione per subsidenza.**

#### *Movimentazione del conglomerato*

I movimenti e le deformazioni delle casseforme, strati di supporto relativamente molto deformabili, possono innescare ampie fessurazioni se il calcestruzzo non ha raggiunto un'adatta resistenza.

Invece, nell'insieme di cause che porta le fessurazioni post-indurimento, si individuano i seguenti gruppi:

### *Fisici*

In maniera fondamentale incide il *ritiro igrometrico*, ovvero il ritiro dovuto all'evaporazione dell'acqua che non può essere eliminato, ma può essere controllato ad esempio dosando il rapporto acqua/cemento in fase di mix-design. Il fenomeno del *Crazing* è un esempio di ritiro igrometrico superficiale, che raramente incide sulla durabilità della struttura. Inoltre, in base alla forma e alla capacità di assorbimento dell'acqua, l'aggregato può subire delle contrazioni e, quindi, indurre stati di tensioni nella matrice del calcestruzzo (*Concrete Slab Surface Defects: Causes, Prevention, Repair*, Portland, Cement Association)

### *Chimici*

Generalmente l'alto valore del PH del calcestruzzo (maggiore di 12.5) fornisce un ambiente di protezione dalla *corrosione dell'armatura*. Quando per una qualsiasi causa si perde lo strato passivante della barra attorno all'armatura, può avvenire il processo di ossidazione con il conseguente danneggiamento del materiale. I principali fenomeni che provocano l'eliminazione del film sono: la carbonatazione del cemento, l'attacco da cloruri contenuti negli aggregati e nell'ambiente, l'insufficiente flusso di ossigeno sulla barra necessario ad sostenere la passivazione. Tra i prodotti di corrosione si ha l'ossido di ferro che, avendo un volume maggiore del metallo originario ed essendo di natura non coesiva, riduce l'area di acciaio resistente e crea delle pressioni sul fronte di contatto con il calcestruzzo, fessurando la matrice di calcestruzzo come in Figura 1.2. La corrosione è uno dei principali fattori che incide sulla fessurazione del calcestruzzo; se non viene interrotta tramite un intervento di manutenzione specifico, crea ampie fessure che indeboliscono e diffondono l'agente depassivante nelle barre vicine. Nel caso estremo delle barre di armatura perimetrali può portare all'espulsione del copri ferro, quindi al decremento della sezione resistente di conglomerato cementizio.

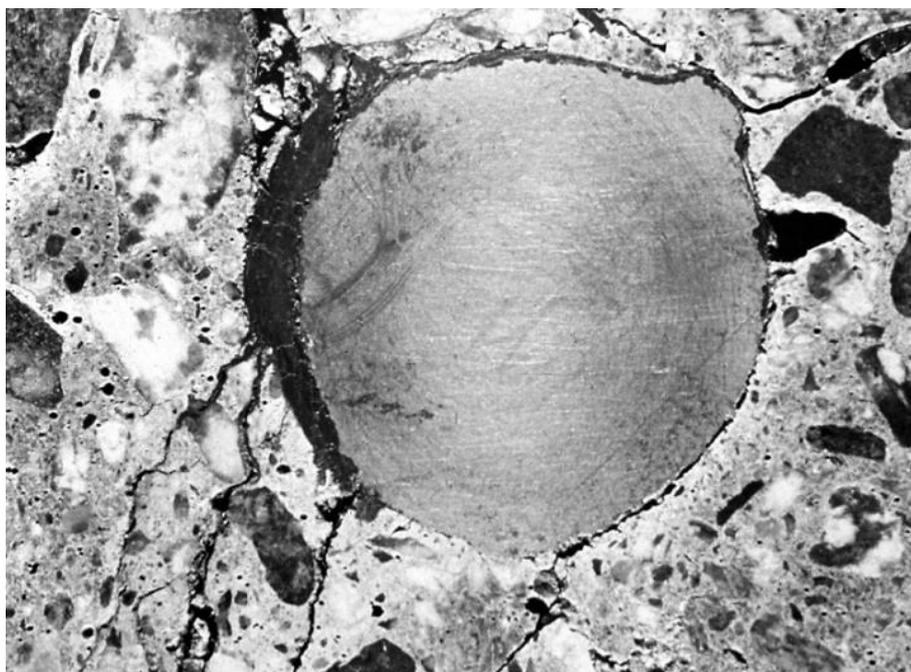


Figura 1.2 Sezione barra di armatura di elemento in C.A. con fronte ossidato

Altri fenomeni di fessurazione di natura chimica, sono originati dalle possibili *reazioni alcalo-aggregato* che possono avvenire tra cemento e alcuni aggregati usati nel conglomerato. La alcalo-silice reazione, comunemente chiamata ASR, si ottiene se gli inerti contengono silice amorfa o blandamente cristallina, la quale, reagendo con gli idrossili nati dalla idratazione del cemento, portano alla nascita di composti igroscopici. Nell'assorbire l'acqua possono indurre una pressione espansiva sufficiente a fessurare l'aggregato e la matrice cementizia, se si supera la tensione di trazione del calcestruzzo. La reazione alcalo-carbonato, chiamata anche ACR, avviene quando gli inerti possiedono cristalli di dolomite sospesi in una matrice di argilla. Anche se porta alla fessurazione in simil modo, è più rara rispetto la precedente, ma piuttosto dannosa. Dai prodotti della reazione alcalo-carbonato si origina brucite, che esercita pressioni durante la sua cristallizzazione (Alkali-Aggregate Reaction: Portland Cement Association, 2001).

#### *Termici*

Tra i fenomeni termici che provocano fessure negli elementi in C.A., ci sono i *cicli gelo/disgelo* che si verificano nell'arco giornaliero. Essi accadono quando l'acqua

contenuta nei pori del calcestruzzo si congela, e quindi si espande producendo delle pressioni nelle cavità. Se queste pressioni inducono uno stato tensionale che supera la resistenza a trazione del calcestruzzo, si ha la formazione di fessure e il conseguente sgretolamento della pasta cementizia e degli aggregati. Il fenomeno si protrae e aumenta di velocità se l'infiltrazione di acqua non viene eliminata.

Un altro fenomeno che riguarda strutture di particolare forma e schema statico sono le *variazioni di temperatura che hanno cadenza stagionale*. Inverni rigidi o estati torride possono indurre rispettivamente pericolose contrazioni o eccessive espansioni del materiale che, per delle particolari strutture o parti di esse, possono generare delle tensioni di trazioni e quindi una fessurazione. Un esempio di strutture sensibili sono le dighe di cemento sottili ad arco: rispetto a quelle a gravità sono più sensibili alle variazioni di temperatura stagionale. La temperatura di chiusura (stuccatura) è una dei parametri di costruzione più importanti delle dighe ad arco perché una volta stuccate le fughe dei monoliti, si presume che la struttura diventi monolitica originando le azioni tipiche in strutture ad arco (U.S.A.C.E., 1994).

In aggiunta, sono presenti casi con *gradienti termici interni* come nel caso di getti massicci di calcestruzzo che si hanno nelle costruzioni delle dighe: il calore sprigionato dalla reazione di idratazione crea un quorum molto più caldo rispetto alle zone esterne; questo genera stati di trazione e, nel caso peggiore, crepe che compromettono la tenuta all'acqua. Dopo la determinazione della temperatura di chiusura, i singoli blocchi dovrebbero essere dimensionati per evitare fessurazioni durante la costruzione (U.S.A.C.E., 1994).

### *Strutturali*

Le fessurazioni dovute ai *sovraccarichi accidentali* creano stati tensionali eccessivi per i quali, per la robustezza delle strutture, sono consentiti danneggiamenti proporzionati alla causa che li ha creati.

Nei casi in cui la fessurazione è *indotta dai carichi di progetto*, le fessure possono estendersi in direzioni differenti rispetto all'armatura principale, come di seguito raffigurato, tratto dal *CEB Design Manual on cracking and deformations (1985)*. In questa tesi verranno prese in esame le fessure trasversali all'armatura di rinforzo, mentre non sarà considerato il fenomeno di distacco del copri ferro ovvero delle crepe

parallele. Queste crepe conosciute con il nome di *splitting crack*, non sono causate dalla componente tangenziale, ma dalla componente normale della forza di adesione tra barra e calcestruzzo. Tuttavia, va notato che, a causa degli effetti di *creep* e della perdita del contributo di *tension stiffening*, i carichi permanenti avranno una maggiore influenza sulle larghezze finali delle fessure rispetto ai carichi di breve termine.

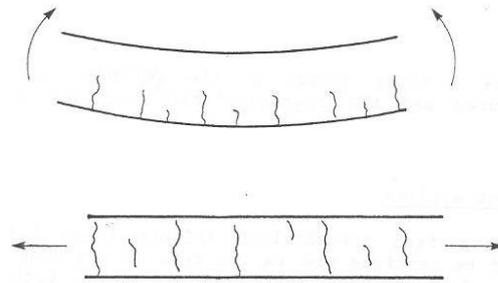


Figura 1.3 Tipiche sollecitazioni di pura flessione e pura tensione con rispettive fessure.

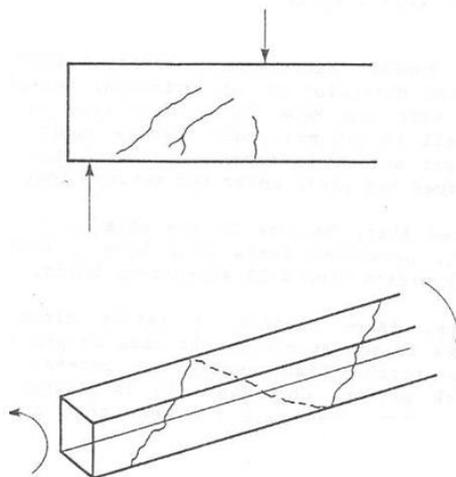


Figura 1.4 Tipiche sollecitazioni di puro taglio e pura torsione con rispettive fessure.



Figura 1.5 Tipiche sollecitazioni con relative fessure.

Le fessure citate sono limitate alla casistica di larghezza di fessurazione relativamente piccola, sotto carichi di servizio. Fessure più grandi, sono segnali d'incipiente collasso che stanno a indicare che lo stato limite ultimo è stato raggiunto.

Un'altra tipologia di fessure di sviluppo trasversale, potenzialmente causabile dall'applicazione dei carichi, sono le fessure secondarie conosciute con il nome di *fessure di Goto*, colui che le descrive per la prima volta in maniera esaustiva attraverso prove di laboratorio. Queste fessure, a differenza delle altre sopra raffigurate, sono caratterizzate da uno sviluppo interno all'elemento sollecitato e come Goto (1971) osserva nei suoi test di laboratorio, esse dipendono dalle caratteristiche geometriche e meccaniche dell'elemento in calcestruzzo armato studiato. Un approfondimento a riguardo, viene affrontato nel capitolo successivo.

### 1.3 Motivi per il controllo della fessurazione

#### *Protezione dalla corrosione*

La durabilità rappresenta una delle caratteristiche fondamentali del calcestruzzo che ha fatto sì che sia il materiale da costruzione più utilizzato al mondo. Se correttamente progettato, proporzionato, gettato e con le opportune finiture in opera a seguito di ispezioni in cantiere è in grado di fornire decenni di servizio, in linea generale, con poca manutenzione. Nel calcestruzzo armato indurito le condizioni e i meccanismi che causano la corrosione delle armature lente e da precompressione è di fondamentale importanza per dare la giusta prevenzione e protezione al fenomeno di attacco. L'adeguatezza della misura di difesa dipende dalla quantità di calcestruzzo che ricopre l'armatura, dalla qualità, dai dettagli della costruzione, dal grado di esposizione ai cloruri e dall'ambiente in cui si trova la struttura in C.A.. La principale protezione è affidata allo stato passivante delle armature, che a sua volta è protetto dal copri ferro dell'elemento in conglomerato cementizio. Tuttavia, come riporta il *fib bulletin n.52* (2010) non c'è una relazione diretta tra corrosione e larghezze delle fessure: larghezze delle fessure fino a 0,4 mm non influenzano significativamente la corrosione dell'armatura nel calcestruzzo ordinario, se è dotato di un adeguato copri ferro e se situato in ambienti privi di cloruri. Se presenti, infatti, le crepe ne consentono

l'infiltrazione nel calcestruzzo ad un velocità molto più rapida rispetto ai processi di diffusione nella matrice intatta e portano locali concentrazioni di cloruro che possono accelerarne il processo, scaturendo un tipo di corrosione conosciuta con il nome di *pitting corrosion*. La pericolosità dell'attacco corrosivo è dovuta al fatto che, nonostante la perdita di materiale metallico possa rappresentare una percentuale trascurabile del peso totale della barra, la profondità del *pit* può interessare in breve tempo spessori considerevoli dell'armatura. Da notare che la compromissione della resistenza meccanica della barra di acciaio non è legata solo ad una perdita di sezione della stessa ma, secondo la meccanica della frattura, anche dall'amplificazione dei micro difetti superficiali che possono causare rotture fragili delle barre. La Tabella 1.1 tratta dal *fib bulletin n.52* (2010), mostra una sintesi dei principali fattori di influenza sugli elementi in calcestruzzo armato.

<b>DURABILITA'</b> delle barre di rinforzo negli elementi di calcestruzzo armato - fattori di influenza -	
<b>A. CALCESTRUZZO NON FESSURATO</b> -spessore copri ferro -porosità del copri ferro (coefficiente di diffusione per gas e acqua) -cemento (tipologia e contenuto) -rapporto acqua/cemento -CO <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , H <sub>2</sub> O, Cl <sup>-</sup>	<b>B. CALCESTRUZZO FESSURATO</b> come in A ed in aggiunta: -ampiezza fessura (w trasversali e w longitudinali) -distribuzione della fessura

**Tabella 1.1 Principali fattori che agiscono sulla durabilità degli elementi in C.A.**

Nel caso di elementi in calcestruzzo precompresso, il rischio di corrosione è maggiore a causa della presenza di acciaio ad alto limite elastico. Dati la maggiore suscettibilità alla corrosione e l'utilizzo di diametri relativamente piccoli, la conseguente riduzione di sezione resistente sarebbe eccessiva.

### *Apparenza*

Le crepe non strutturalmente importanti possono essere antiestetiche e possono generare senso di non sicurezza della struttura. I sondaggi tenuti da Padilla e Roles e da Haldane

rivelano che crepe più larghe di circa 0.25 -0.3 mm possono suscitare preoccupazione nel pubblico (CEB, *Design manual on cracking and deformations*, 1985).

#### *Tenuta all'acqua e ai gas*

In strutture adibite al contenimento di liquidi o gas, deve essere presa in considerazione la possibilità di fuoriuscita del fluido attraverso le fessure. I limiti d'ampiezza della fessura sono considerati in funzione non solo dal tipo di fluido, ma anche dalla pressione, dallo spessore del calcestruzzo, dalla possibilità di riparazione.

### **1.4 I principi dello stato limite di esercizio**

Il controllo della fessurazione significa mantenere le larghezze delle fessure al di sotto dei limiti accettabili. La sua importanza nella progettazione è funzione della performance della struttura o del singolo elemento strutturale ed è richiesto solo dall'ultimo secolo ad oggi, conseguenza dell'aumento della conoscenza non solo del materiale e della sua capacità portante, ma anche del modello usato per rappresentare i fenomeni fisici. Infatti, in via generale, mentre gli Stati limite ultimo sono principalmente rappresentati dalla resistenza del materiale, in uno stato limite di esercizio, i punti critici sono le deformazioni dei membri o spostamenti e, quindi, in generale dalla rigidità del sistema o del singolo elemento. Anche la larghezza delle fessure sono correlate alle deformazioni che sviluppa un elemento, e quindi dalla sua rigidità. La Figura 1.6, tratta da *fib bulletin n.52* (2010), mostra l'andamento delle sollecitazioni consentite sotto i carichi di servizio nelle armature al variare degli anni di riferimento. Sebbene la figura rappresenti le limitazioni secondo i Codici del Regno Unito, può essere considerata rappresentativa per i paesi europei.

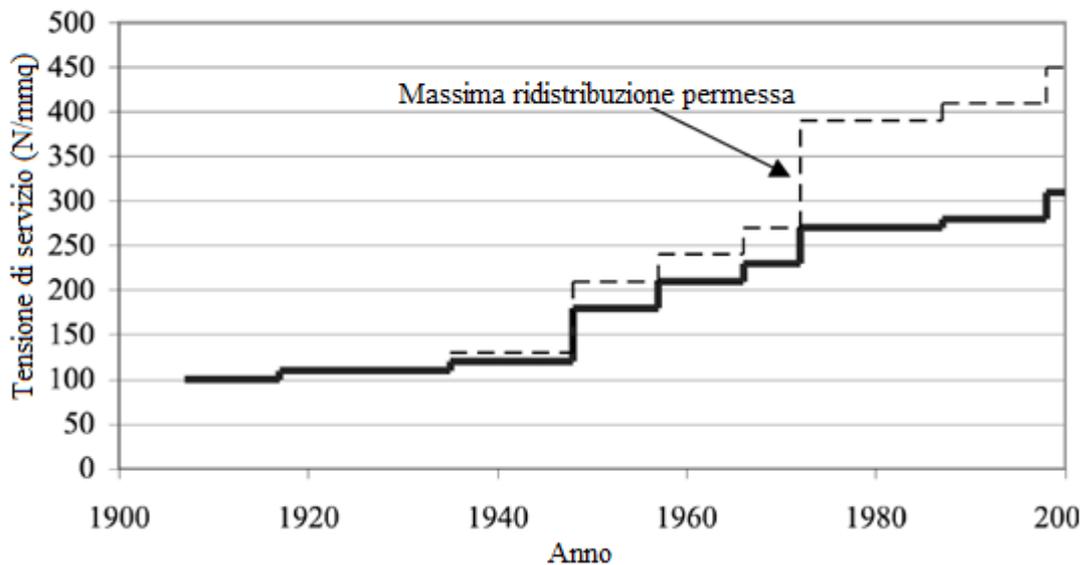


Figura 1.6 Incremento delle tensioni nell'armatura sotto carichi di esercizio (dati UK)

Il rialzo menzionato in figura è una conseguenza dei seguenti fattori:

- aumento della resistenza dell'acciaio delle armature;
- l'abbassamento dei coefficienti di sicurezza;
- l'introduzione della redistribuzione e della sua entità permessa;
- sviluppo del calcolo in comportamento elasto-plastico delle sezioni.

E' evidente che la crescente preoccupazione delle prestazioni degli elementi in calcestruzzo in fase di progetto è dovuta principalmente al fatto che il modulo di elasticità delle armature non cresce in maniera proporzionale all'aumento di resistenza, e quindi l'aumento dei carichi di progetto hanno portato un maggiore sfruttamento del materiale, con un aumento quasi proporzionale delle deformazioni e dell'ampiezza della fessura. Un andamento temporale molto simile si ha in Figura 1.7 con la resistenza a compressione del calcestruzzo, il quale contribuisce all'abbattimento della rigidità dei singoli elementi strutturali, in favore di maggiore economicità.

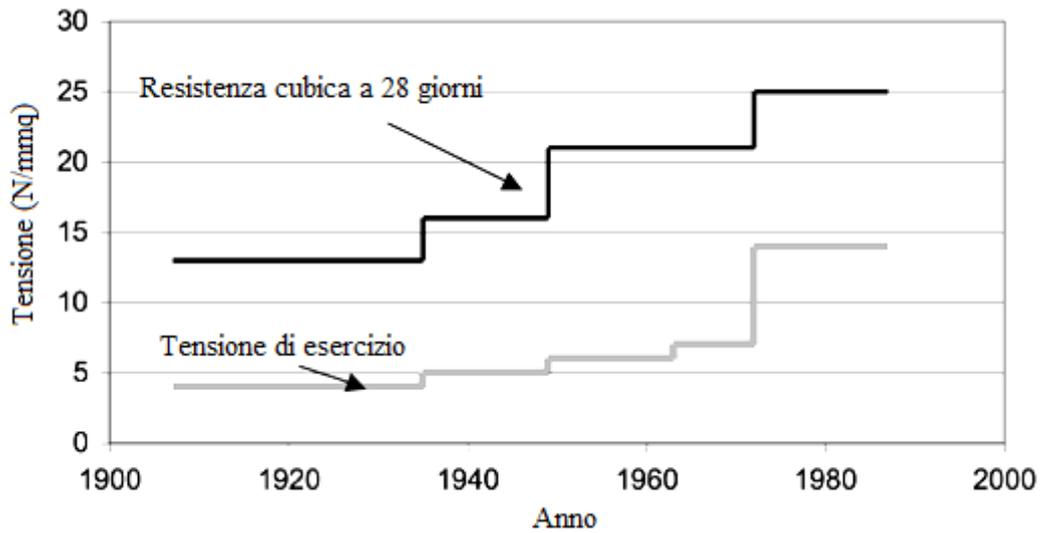


Figura 1.7 Incremento delle resistenze e delle sollecitazioni sotto carichi di esercizio

Vien da sé che se sino alla prima metà del XX secolo non vi era necessità di studiare le deformazioni della struttura in situazioni ordinarie, oggi è necessario al fine di garantire adeguate prestazioni richieste dalla struttura e una durabilità adatta alla tipologia di edificio. Oggi le disposizioni per garantire una durata sufficiente sono normalmente incorporate nei codici in materia e nei relativi testi scientifici. Entro i limiti normalmente riscontrati nella legislazione nazionale, il livello di affidabilità utilizzato nella progettazione va concordato con il proprietario della struttura.

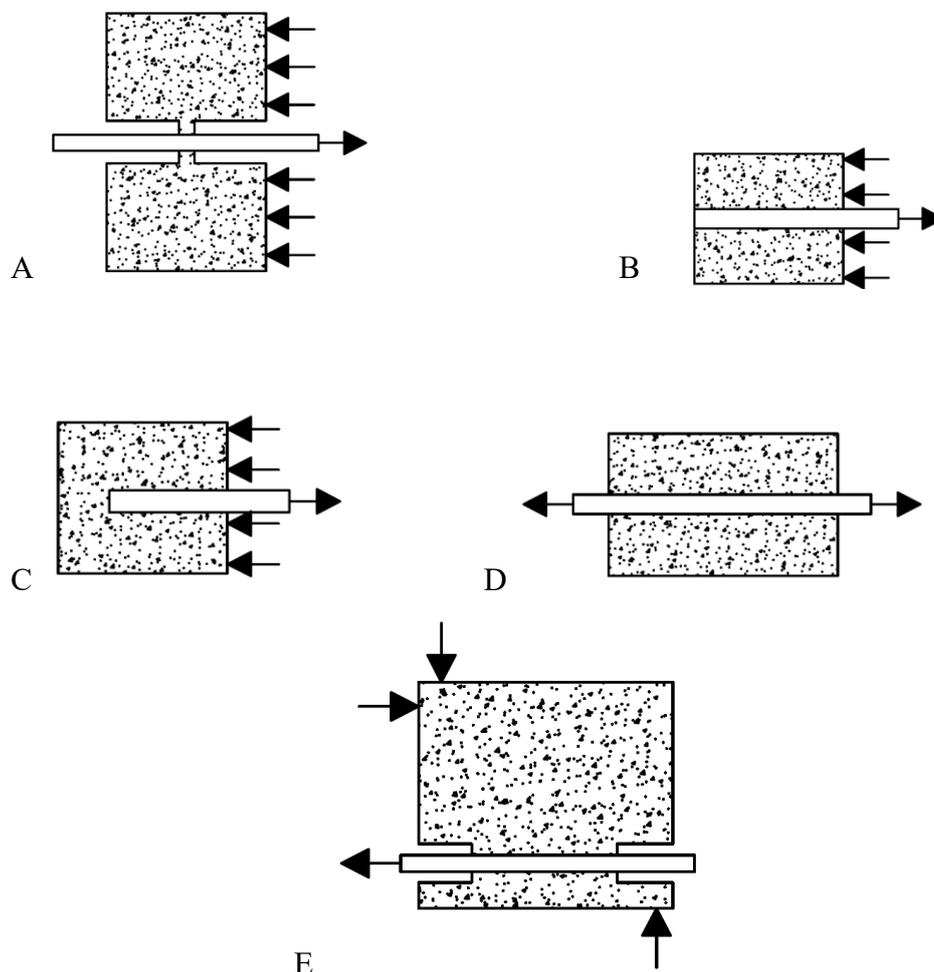
## **2. REVISIONE DELLA LETTERATURA SPERIMENTALE IN MERITO ALLA DISTRIBUZIONE DI TENSIONE DI ADERENZA- SCORRIMENTO**

### **2.1 Introduzione**

Nel corso degli anni, per studiare l'interazione meccanica tra le barre di acciaio e il calcestruzzo sono state affrontate molte difficoltà intrinseche alla natura del fenomeno, come la coesistenza di diversi meccanismi e la difficoltà nel misurare direttamente la risposta combinata degli stessi. Assumendo una distribuzione tensione di aderenza uniforme sulla lunghezza di contatto tra il calcestruzzo e la barra, i primi ricercatori hanno progettato piccoli campioni o piccole lunghezze di aderenza, facendo variare parametri geometrici e meccanici nei provini testati. Presumendo che i valori locali possano essere ottenuti dalle misurazioni indirette, in molti si sono basati sullo scorrimento misurato all'estremità finale della barra e dalla forza agente su di essa. In un secondo momento, altri ricercatori si sono focalizzati sulle misurazioni locali dei provini, adottando tecniche e tecnologie più sofisticate a causa della maggiore difficoltà ad ottenere un'adeguata precisione nelle misurazioni. A parità di configurazione geometrica dei vincoli e della lunghezza del provino, ulteriori fattori partecipano alla dispersione dei risultati delle campagna prove, e cioè principalmente per differenze di proprietà nel calcestruzzo, disposizione e tipologia di finitura superficiale delle barre usate, configurazione geometrica dei campioni, verso del getto rispetto alla direzione delle barre, confinamento del provino, presenza di armature trasversali, porosità calcestruzzo e spessore copriferro.

Data la complessità del problema, nel tentativo di rappresentare il meccanismo di fessurazione reale delle travi inflesse, generalmente la teoria viene sviluppata su una tipologia di prova di laboratorio relativamente semplice, ovvero su tiranti in calcestruzzo soggetto a trazione pura. Per questo motivo sono usate varianti di prove di *pull out*, che possono essere classificate:

- in base alla lunghezza di contatto tra barra e calcestruzzo si ha provini a corta lunghezza di aderenza (provini tipo A) e provini a grande lunghezza di aderenza (provini di tipo B - E);
- in base alla sollecitazione assiale nel calcestruzzo si hanno provini in compressione (provini di tipo A, B ed E) o in trazione (provini di tipo C e D);
- in base al punto di applicazione della forza si ha provini caricati centricamente (A - D) o caricati eccentricamente (provini tipo E);
- in base ai lati della barra ai quali viene applicata la forza si ha da un solo lato (provino di tipo A - C ed E) o da entrambi (provini tipo D).



**Figura 2.1** Principali configurazione di carico studiate

Di seguito viene approfondita al ricerca sperimentale sul fenomeno di fessurazione da carico, soggetta a sforzi monotoni, con l'obiettivo di mostrare i diversi aspetti osservati nelle diverse prove di *pull-out* e come queste variano a seconda dell'impostazione della prova stessa.

## 2.2 Ricerche sperimentali sulla tensione di aderenza tra Calcestruzzo e Acciaio

Lo studio dei meccanismi di adesione sulle barre nervate risalgono al 1913, quando Abrams iniziò le ricerche tramite prove di estrazione (*pull out test*) e prove flessionali su travi. Nelle sue prove quasi tutti i provini di tirante in C.A. erano muniti di armatura a spirale per evitare fenomeni accidentali come l'espulsione di matrice di calcestruzzo. Da notare che i provini testati da Abrams siano dei cilindri di dimensione 20cm di altezza e 20 cm di diametro.

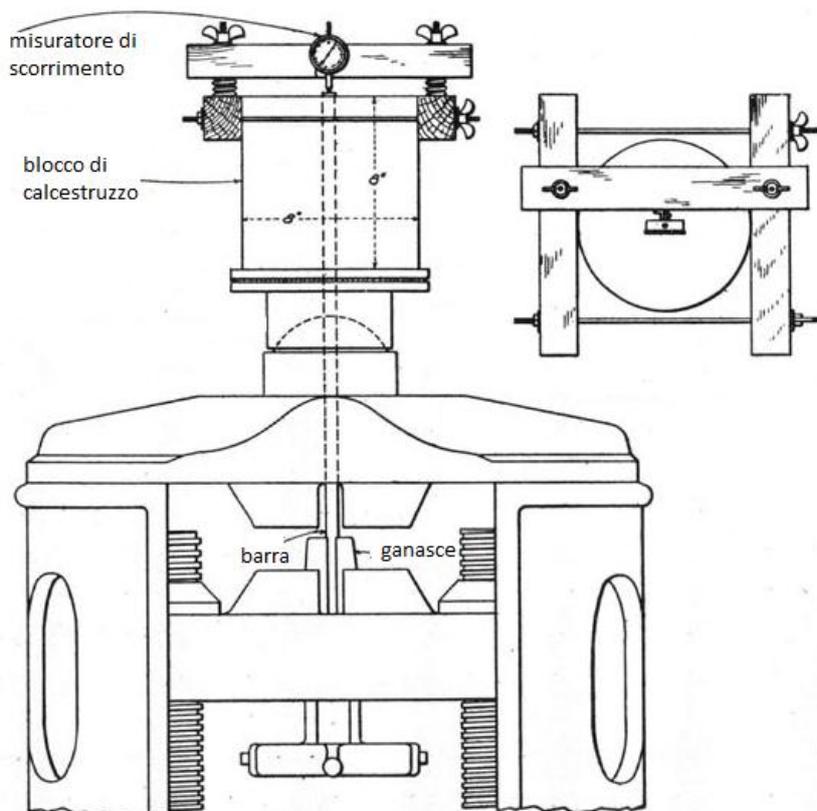


Figura 2.2 Antica macchina per prove di pull-out [Abrams (1913)]

Di seguito sono riportate le principali conclusioni tratte da Abrams (1913):

- La tensione di scorrimento non è distribuita uniformemente lungo l'armatura ad una qualsiasi lunghezza di ancoraggio e generalmente lo scorrimento, misurato all'estremità libera, inizia a crescere solo dopo aver raggiunto un carico tra il 60-80% del carico massimo;
- Solo dopo che lo scorrimento diventa generalizzato si verifica una tensione di aderenza uniforme nella lunghezza di ancoraggio;
- Per un dato scorrimento, la tensione dipende dal livello di sollecitazione;
- I test indicano l'esistenza di una relazione definita tra la quantità di scorrimento e la tensione di aderenza sviluppata;
- La resistenza di adesione è notevolmente aumentata da pressioni laterali al provino.

Successivamente, anche Watstein (1947) osserva che le tensioni di legame aumentano più rapidamente all'estremità caricata della barra rispetto all'estremità libera. Inoltre, studiando provini relativamente più lunghi, nota che la divergenza della tensione di aderenza, alle due estremità della barra, è più pronunciata per lunghezze di contatto più lunghe. Il comportamento osservato fin'ora, quindi indica la necessità di adottare provini con lunghezze molto più corte ( $l/d_s \leq 5$ ) per poter assumere lo sviluppo di tensione media uniforme più veritiera con i dati sperimentali (Abrams 1913). Rehm (1961), con una configurazione mostrata in Figura 2.3, supponendo che le tensioni tangenziali siano uniformemente distribuite sul tratto  $l$  della barra, ottiene la tensione di adesione media utilizzando la seguente relazione:

$$\tau_{bm} = \frac{F}{l \pi d_s} \quad (2.2.1)$$

dove:

$F$  è la forza di trazione applicata alla barra;

$l$  lunghezza di barra a contatto con il calcestruzzo;

$d_s$  diametro barra.

Inoltre, Rehm propone una distribuzione analitica degli slittamenti su una lunghezza di ancoraggio mediante integrazione discreta:

$$\tau(s) = f_{c,cube} (\varphi s^\alpha \mp s \psi) \quad (2.2.2)$$

dove:

$f_{c,cube}$  è la resistenza cubica del calcestruzzo;

$\alpha$ ,  $\varphi$  e  $\psi$  sono parametri sperimentali o teorici.

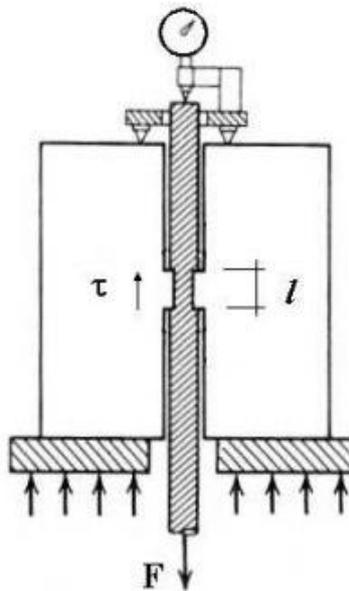


Figura 2.3 Caratteristiche del tipico campione proposte da [Rehm(1961)]

Poiché l'assetto proposto da Rehm sviluppa un effetto arco e un attrito con la piastra di base, nuove tipologie di provini, come il RILEM / CEB / FIP (1970), furono progettati per annullare l'attrito che si sviluppa alla base di contrasto del provino tramite particolari film di polimeri.

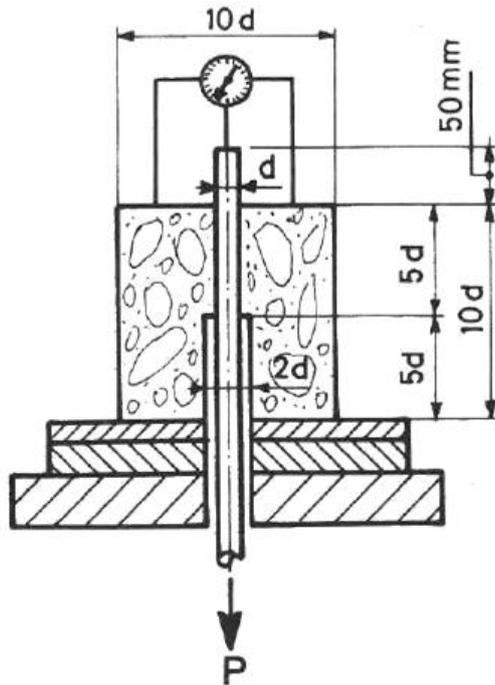


Figura 2.4 Campione di prova con lunghezza di ancoraggio corta [RILEM / CEB / FIP (1970)]

Successivamente, altri studiosi come Ferguson e Thompson studiano la tensione di aderenza con prove a pull-out su campioni eccentrici affermando che essa si sviluppi in correlazione allo spessore del copriferro, il quale se espulso (*splitting*), limita in maniera importante la forza di adesione. Quindi, dimostrano che la presenza di staffe limitano il danneggiamento, aumentando il livello di tensione di aderenza sviluppabile.

Broms (1965) descrive un nuovo metodo sperimentale in base al quale studia il provino nell'interno. Il metodo consiste nell'iniettare una resina in elementi in cemento armato caricati a tensione o flessione. Il carico applicato viene mantenuto da 6 a 8 ore mentre la resina è lasciata solidificare. I membri vengono quindi aperti da una sega diamantata e le crepe interne (mantenute nelle loro posizioni originali) vengono studiate al microscopio.

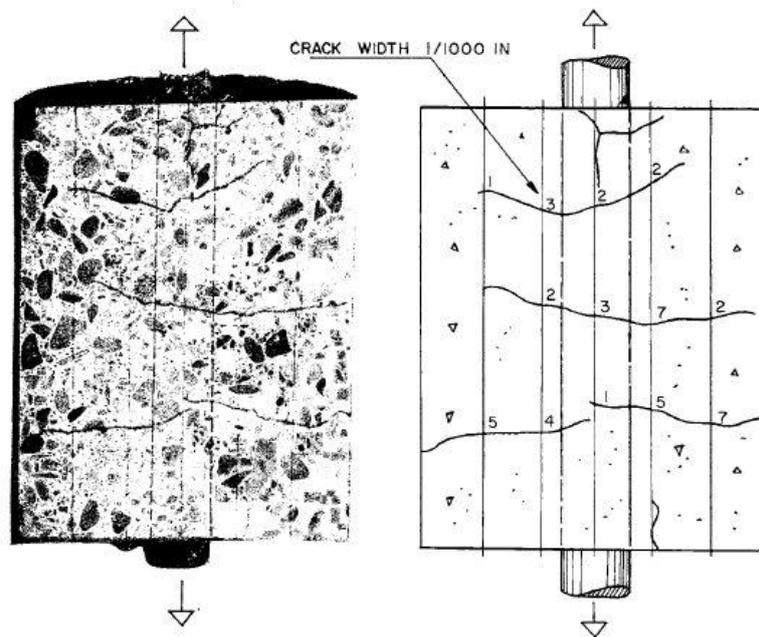


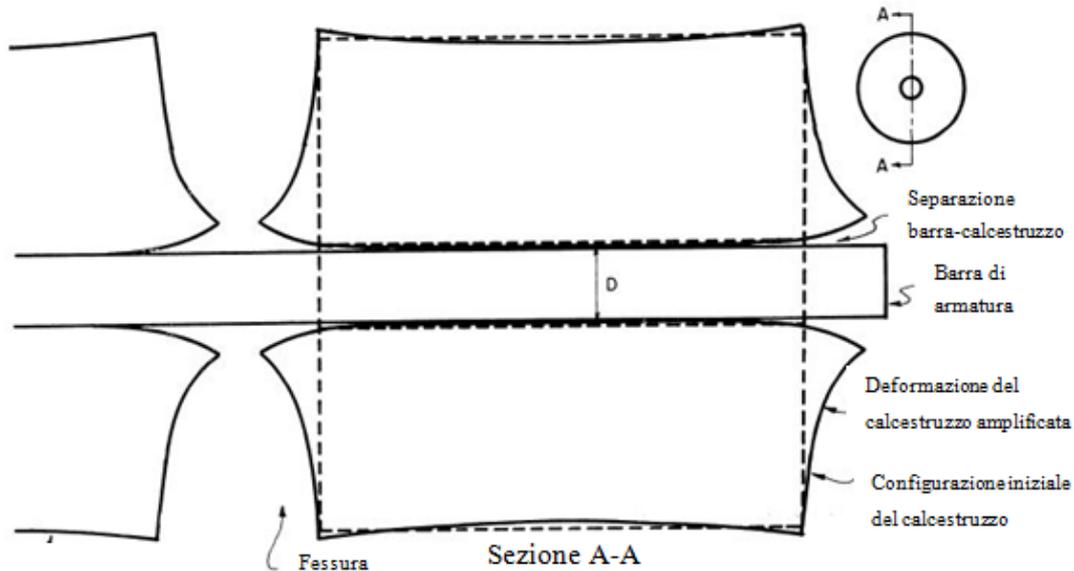
Figura 2.5 Fessurazione interna osservata sul piano di taglio [Broms (1965)]

Broms (1965) nota che all'interno del provino esistono fessure confinate in un volume di calcestruzzo vicino alla barra, non visibili in superficie, nominate *fessure secondarie*. Inoltre, misura la larghezza massima di queste fessure in prossimità dell'armatura.

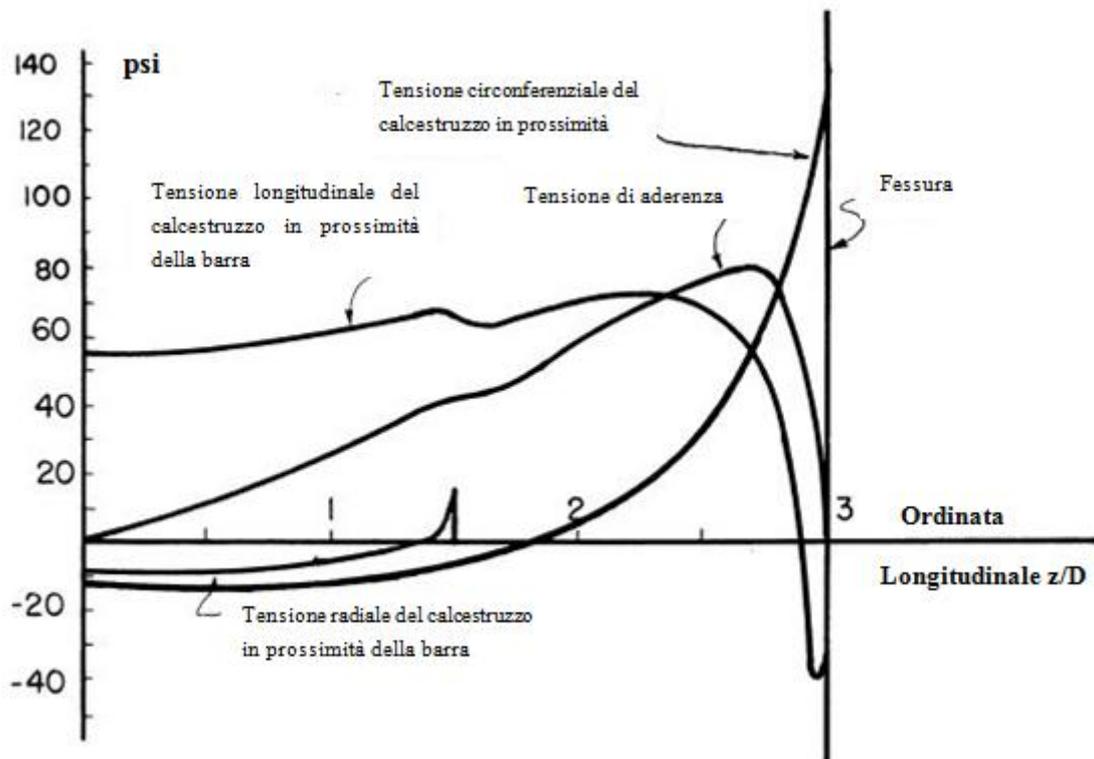
Qualche anno dopo, Lutz e Gergely (1967) studiano la meccanica dello scorrimento di barre nervate nel calcestruzzo utilizzando sia dati sperimentali che un proprio modello analitico. Essi affermano che lo scivolamento di una barra nervata può avvenire in due modi: nel primo le nervature possono spingere il calcestruzzo lontano dalla barra (azione di incuneamento), mentre nel secondo le nervature possono schiacciare il calcestruzzo frantumandolo. Per il caso usuale di buone proprietà di attrito e un angolo della faccia della nervatura maggiore di 40 gradi, Rehm afferma che lo scorrimento avviene per schiacciamento progressivo della struttura in pasta di cemento davanti alla nervatura. Ciò non sembra produrre un'azione di incuneamento significativa fino a quando non si è verificato un notevole schiacciamento, momento in cui un cuneo di calcestruzzo frantumato (polvere compatta) si deposita davanti alle scanalature. Questo riproduce una nervatura con un'inclinazione della faccia diminuita (30-40 gradi), la quale incrementa la forza di incuneamento sul calcestruzzo.

Lutz e Gergely (1967) attraverso un'analisi agli elementi finiti elastici di un cilindro di

calcestruzzo con una barra d'armatura incassata concentricamente, assumendo la perfetta aderenza, concludono che le sollecitazioni di trazione circonferenziali nel calcestruzzo attorno alla barra sono molto piccole prima della fessurazione flessionale. Inoltre, trovano delle grandi sollecitazioni di trazione longitudinali nel calcestruzzo, le quali sono potenziali cause di fessure trasversali interne, dimostrate da Broms (1965). La formazione di fessure trasversali interne aumenta l'allungamento totale lungo il provino. Tuttavia, calcoli e misurazioni mostrano che la deformazione longitudinale sulla superficie del calcestruzzo è quasi nulla. Inoltre, le tensioni di trazione radiali, che agiscono normalmente all'interfaccia cemento-acciaio, distruggono il contatto vicino alla fessura e consentono la separazione e lo scorrimento della barra. Queste tensioni di trazione radiali di grandi dimensioni vicino alla fessura sono state confermate da un'analisi agli elementi finiti nella quale nelle regioni in cui si presume la separazione, solo le tensioni di aderenza trasmesse dalle nervature possono agire. Quindi, non sono ammesse sollecitazioni normali per rappresentare la separazione delle superfici cilindriche della barra e del calcestruzzo circostante.

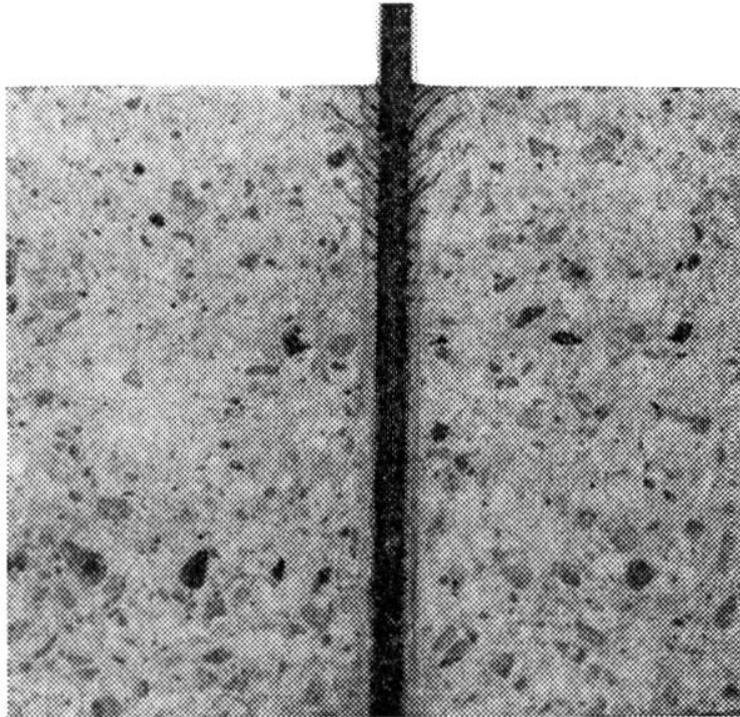


**Figura 2.6** Deformazione amplificata di un cilindro  $6D \times 6D$  con una separazione di oltre una distanza di  $1.5D$  da ciascuna fessura: da analisi agli elementi finiti [Lutz e Gergely (1967)]



**Figura 2.7 Andamento delle differenti tensioni con la distanza dalla fessura: da analisi agli elementi finiti [Lutz e Gergely (1967)]**

Goto (1980) approfondisce esaustivamente la fessurazione secondaria tramite una campagna sperimentale fatta di diverse prove: prova di estrazione di barra, prova di trazione di un tirante in C.A. da entrambi i lati, prova di fallimento di sovrapposizione di armatura, prova a flessione ed infine prova a taglio. Come si può notare dalla Figura 2.8, in una prova di pull-out, Goto mette in luce la peculiarità di avere fessure secondarie vicino all'estremità della barra caricata e non sull'estremità libera. L'estensione di tali fessure aumentano lungo la barra, avvicinandosi all'estremità caricata.



**Figura 2.8 Fessure secondarie all'estremità di applicazione del tiro [Goto (1980)].**

Inoltre, grazie ad un taglio lungo la barra del provino, Goto mette in risalto la distribuzione delle fessure e la loro inclinazione in prove di trazione di tiranti con lunghezze di ancoraggio decisamente più grandi delle classiche prove a *pull-out*, mantenendo una sezione di 180x180 mm. Esso afferma che generalmente la presenza di fessure secondarie in un elemento in C.A. elimina l'aderenza in quella porzione di elemento, in particolar modo per tratti di ancoraggio e per i tratti di sovrapposizione dell'armatura.

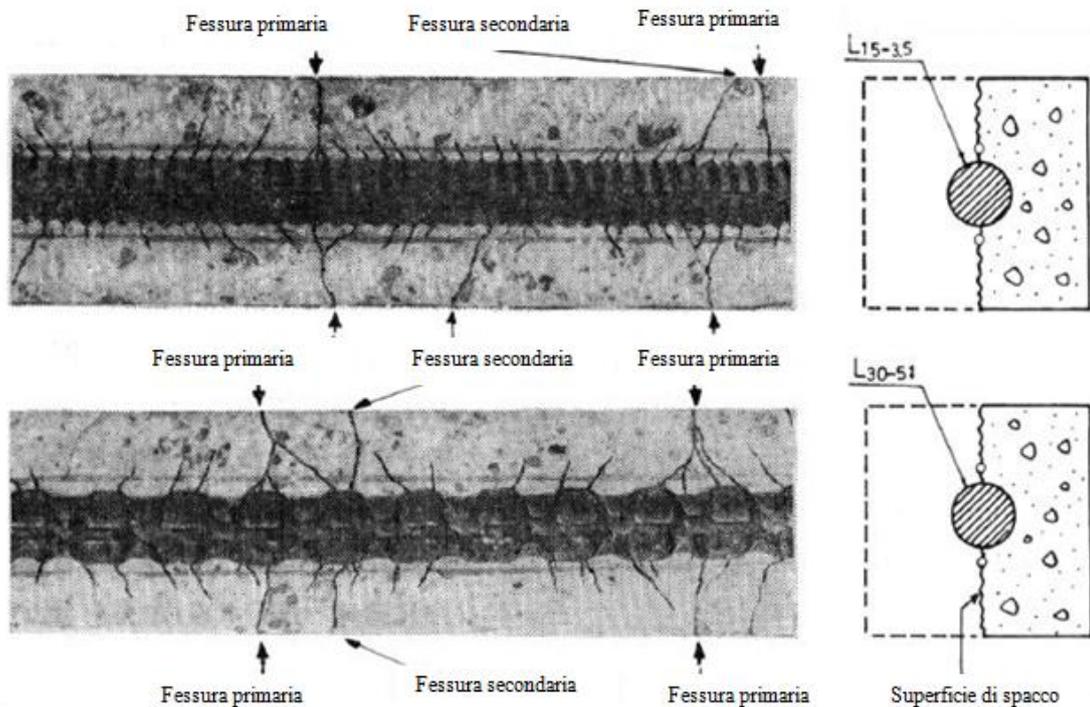


Figura 2.9 Fessure secondarie e l'influenza della nervatura [Goto (1980)].

Basandosi sugli studi di Goto, Nilson continua a studiare provini lunghi con barre nervate gettate in conci di calcestruzzo prismatici di dimensioni 150 x 150 x 450 mm sottoposti a uno stato di trazione uni assiale. L'innovativa tipologia di estensimetri usati da Nilson, permisero una misurazione della deformazione dell'acciaio in maniera diretta e continua su tutta la barra. Infatti, tagliando longitudinalmente la barra in due e posizionando il sensore (*strain gauge*) nell'anima della barra non si disturba l'interfaccia tra calcestruzzo e armatura. La saldatura delle due parti ripristina il comportamento meccanico iniziale della barra.

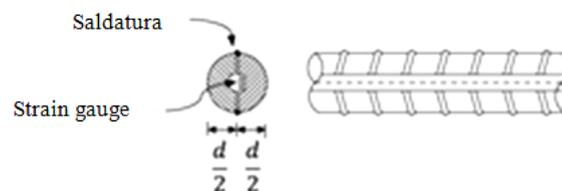
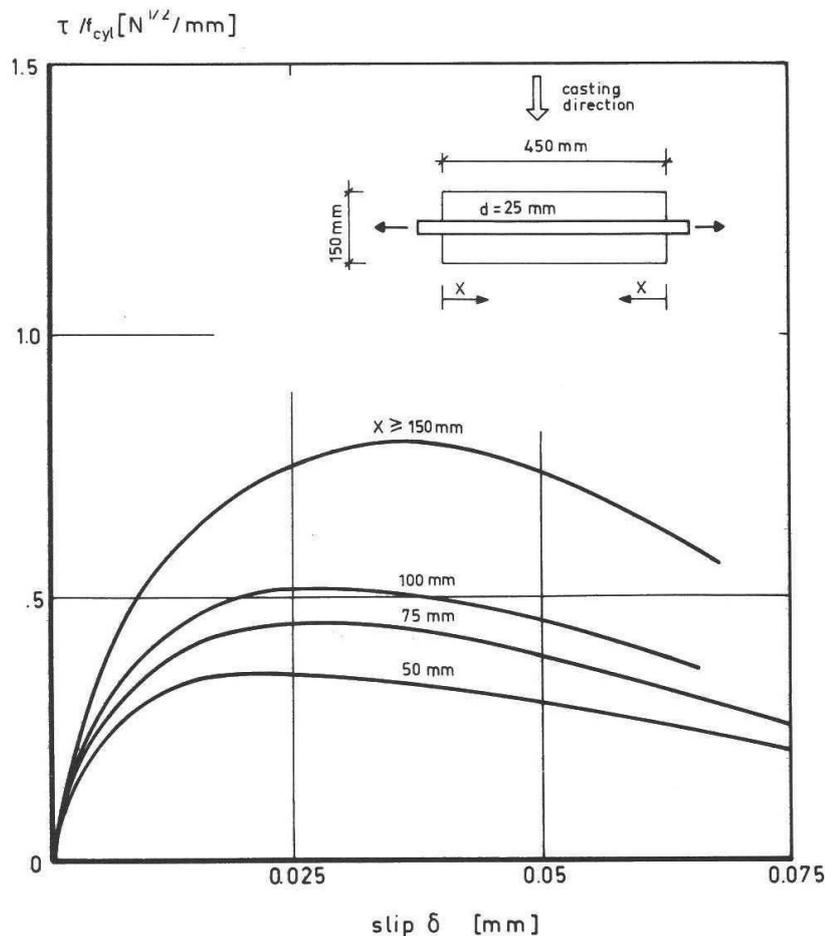


Figura 2.10 Istanza estensimetro (Journal of Structural Engineering/Volume 145, 2019)

Contrariamente a quanto affermato da Rhem e in accordo con l'esperienza sperimentale di Goto, Nilson trova una distribuzione di aderenza-scorrimento locale, cioè una funzione di aderenza che non solo dipende dallo scorrimento, ma anche dalla distanza che si presenta tra estremità del campione e punto considerato. Dalle prove sperimentali, propone un fattore riduttivo valido per punti distanti al più 6 volte il diametro della barra:

$$\lambda = 0.143 n_x + 0.15 \quad (2.2.3)$$

Con  $n_x$  rappresenta la distanza del punto considerato dall'estremità del campione adimensionalizzata con il diametro della barra.



**Figura 2.11** Influenza della distanza dalla faccia di estremità del provino sulla relazione locale tensione di aderenza-scorrimento, secondo Nilson 1972 [E.Vos 1983]

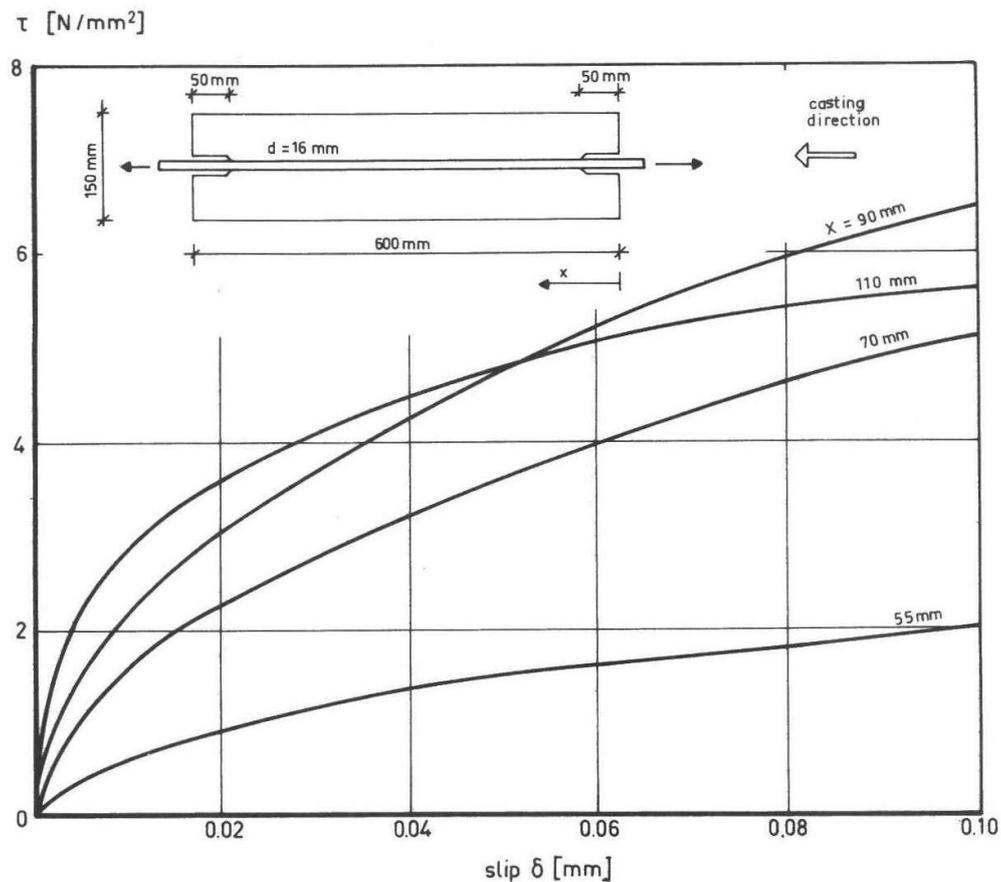


Figura 2.12 Influenza della distanza dalla faccia di estremità del provino sulla relazione locale tensione di aderenza-scorrimento, secondo Dörr 1980 [E.Vos 1983].

La riduzione dell'aderenza sopra descritta viene interpretata da Vos (1983) come una diminuzione della pressione radiale sulla superficie della barra di acciaio, come dimostrato da Lutz e Gergerly (1967). Inoltre, Vos continua affermando che un ulteriore possibile contributo viene associato ad una bassa resistenza allo scorrimento nelle regioni prospicienti la fessura che, a causa della fessurazione di Goto, renderebbe possibile l'espulsione di una parte di calcestruzzo.

Leonhardt (1977) propone una nuova suddivisione della lunghezza di aderenza in due tratti, in base alla qualità dell'adesione. Infatti, secondo Leonhardt la comparsa delle fessure secondarie porta alla creazione di un sistema a pettine in cui ogni dente di cemento offre una qualità di aderenza correlata, non solo alle forze di *interlock*, ma anche dalla rigidità del dente stesso. Quindi, la resistenza diminuisce con l'aumentare

della lunghezza delle fessure secondarie. Leonhardt assume che, per entrambe le facce della fessura, i primi due denti non abbiano alcun contributo sull'aderenza a causa dell'elevata estensione di fessure di Goto, presenti nelle prossimità di una fessura. Ciò viene rappresentato nell'Eq. (2.2.4) dal secondo tratto di aderenza, definito come lunghezza di barra ad aderenza nulla  $l_0$ , valido per armature nervate standard.

$$l_0 = \frac{\sigma_{s,cr} \left[ \frac{N}{mm^2} \right]}{45} \varphi_s \quad (2.2.4)$$

dove  $\sigma_{s,r}$  è la tensione della barra di acciaio alla fessura.

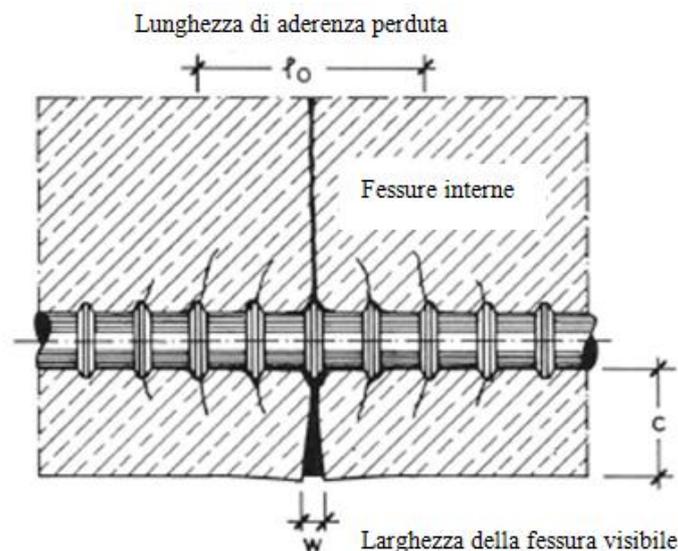


Figura 2.13 Diminuzione di aderenza in prossimità della fessura principale [Leonhardt (1977)].

Per prendere in considerazione la variabilità spaziale che presenta una distribuzione sforzo-scorrimenti, Viwathanatepa (1979) si basa sulle interpretazioni di una campagna di prove svolte su colonne armate (Figura 2.14) ed esegue un'analisi FEM, dove la colonna viene modellata suddividendola in tre zone nella direzione della barra, ciascuna caratterizzata da una specifica distribuzione di aderenza-scorrimenti.

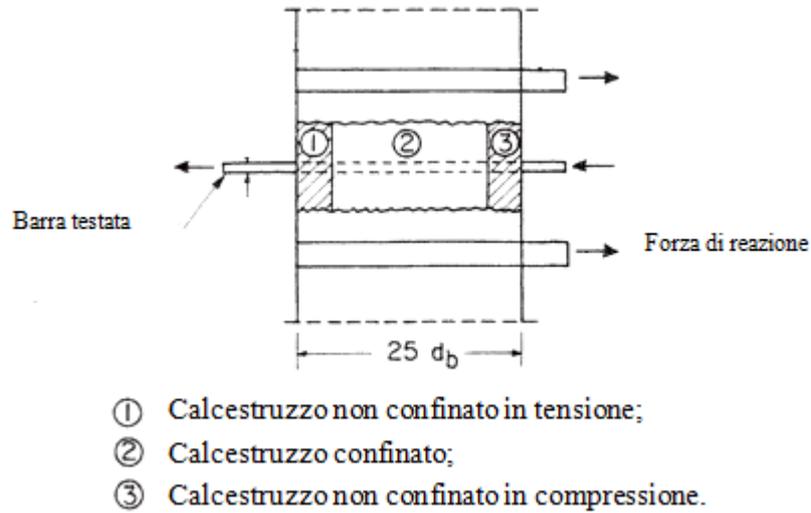


Figura 2.14 Configurazione schematica della prova [Viwathanatepa(1979)]

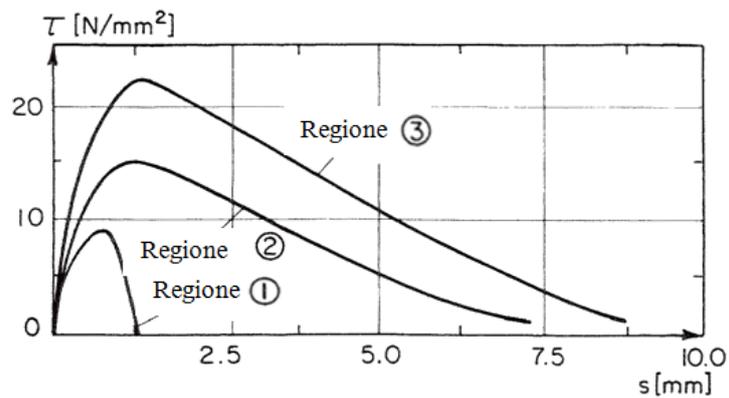


Figura 2.15 Relazione locale di tensione–aderenza [Viwathanatepa(1979)]

Questa differenziazione non viene direttamente affrontata da Eligehausen, Bertero e Popov (1983), i quali osservano globalmente il potere di confinamento delle barre longitudinali e trasversali tra provini con diverse percentuali di armatura.

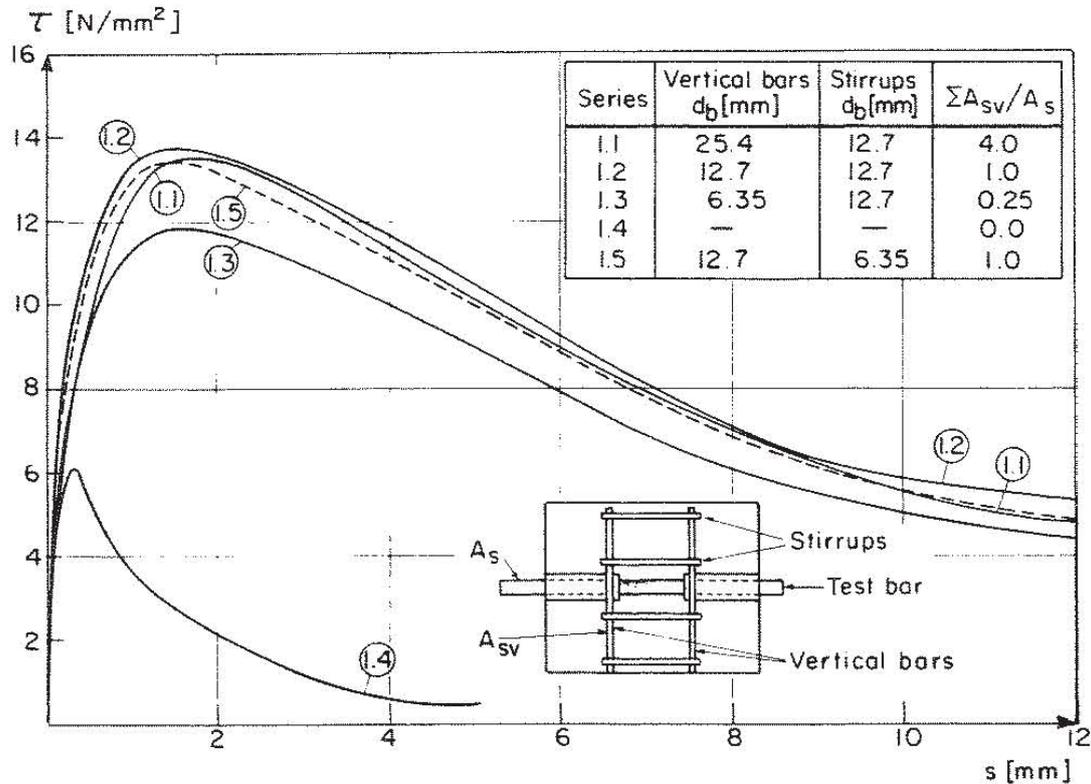


Figura 2.16 Influenza del rinforzo trasversale sulla distribuzione di tensione-scorrimento [Eligehausen, Bertero e Popov (1983)].

La distribuzione aderenza-scorrimento proposta nel Model Code (2010) si basa sulla relazione di Eligehausen dove la tensione di aderenza è una funzione dello scorrimento  $s$ , di un coefficiente  $\alpha$  e dei valori di scorrimento di riferimento  $s_1, s_2, s_3$ , utilizzando le seguenti funzioni:

$$\tau = \tau_{max} \left( \frac{s}{s_1} \right)^\alpha \quad \text{per } 0 \leq s \leq s_1 \quad (2.2.5)$$

$$\tau = \tau_{max} \quad \text{per } s_1 \leq s \leq s_2 \quad (2.2.6)$$

$$\tau = \tau_{max} - (\tau_{max} - \tau_f) \left( \frac{s - s_2}{s_3 - s_2} \right) \quad \text{per } s_2 \leq s \leq s_3 \quad (2.2.7)$$

$$\tau = \tau_f \quad \text{per } s_3 \leq s \quad (2.2.8)$$

	1	2	3	4	5	6
	Pull- Out (PO)		Splitting (SP)			
	$\varepsilon_S < \varepsilon_{S,y}$		$\varepsilon_S < \varepsilon_{S,y}$			
	Good bond cond	All other bond cond	Good bond cond		All other bond cond	
			unconfined	stirrups	unconfined	stirrups
$\tau_{max}$	$2.5\sqrt{f_{ck}}$	$1.25\sqrt{f_{ck}}$	$7.0 \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$	$8.0 \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$	$5.0 \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$	$5.5 \left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$
$s_1$	1.0mm	1.8mm	$s(\tau_{max})$	$s(\tau_{max})$	$s(\tau_{max})$	$s(\tau_{max})$
$s_2$	2.0mm	3.6mm	$s_1$	$s_1$	$s_1$	$s_1$
$s_3$	$c_{clear}^{1)}$	$c_{clear}^{1)}$	$1.2 s_1$	$0.5c_{clear}^{1)}$	$1.2 s_1$	$0.5c_{clear}^{1)}$
$\alpha$	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
$\tau_f$	$0.40 \tau_{max}$	$0.40 \tau_{max}$	0	$0.40 \tau_{max}$	0	$0.40 \tau_{max}$

**Tabella 2.1 Parametri della relazione tensione-scorrimento [ Model Code (2010)]**

dove:

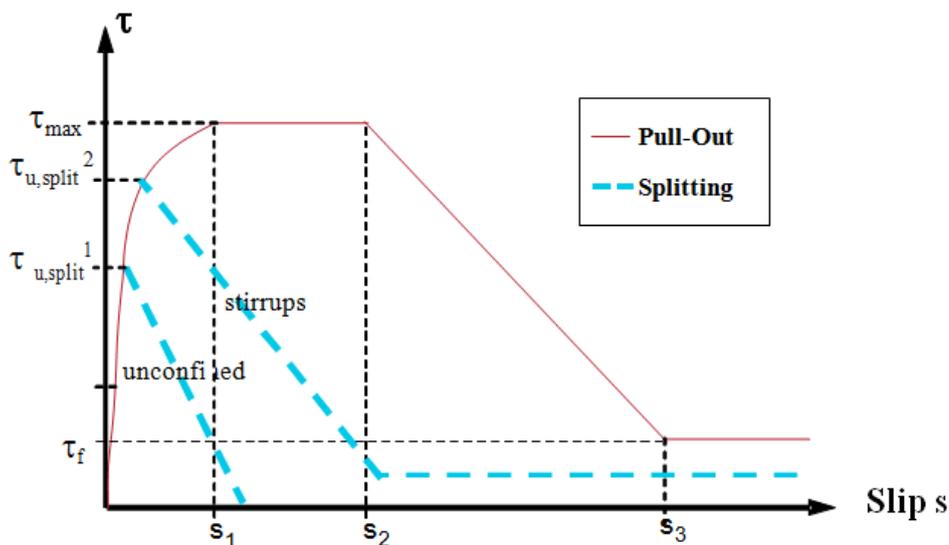
$c_{clear}^{1)}$  rappresenta la distanza netta tra le nervature della barra;

$f_{ck}$  = resistenza cilindrica caratteristica del calcestruzzo (N/mm<sup>2</sup>);

$\varnothing$  = diametro barra (mm);

$c_{min} = \min\{c_x, c_y, c_{si}\}$ ;

$c_{max} = \max\{c_x, c_{si}\}$ .



**Figura 2.17 Relazione analitica della distribuzione di tensione-scorrimento (carico monotono) [ Model Code (2010)]**

I valori nella colonne 1 e 2 (rottura per estrazione) della Tabella 2.1 sono validi per calcestruzzo ben confinato (copriferro  $\geq 5 \varnothing$ , distanza netta tra le barre  $\geq 10\varnothing$ ). I valori nelle colonne da 3 a 6 (rottura per scissione) sono validi per  $\varnothing \leq 20\text{mm}$ ,  $c_{\text{max}} / c_{\text{min}} = 2.0$ ,  $c_{\text{min}} = \varnothing$  e  $K_{\text{tr}} = 2\%$  in caso di staffe.

$$K_{\text{tr}} = \frac{n_1 A_{sv}}{n_b \varnothing s_v} \quad (2.2.9)$$

dove :

$n_1$  è il numero di bracci dell'armatura di confinamento in una sezione;

$A_{sv}$  è l'area della sezione di un braccio di armatura di confinamento [ $\text{mm}^2$ ];

$s_v$  spaziatura longitudinale dell'armatura di confinamento [ $\text{mm}$ ];

$n_b$  è il numero delle barre ancorate o il numero di coppie di barre sovrapposte;

$\varnothing$  è il diametro delle barre ancorate o della barra accoppiata di minor diametro [ $\text{mm}$ ].

Per punti a distanza  $x \leq 2 \varnothing$  da una fessura trasversale, la tensione di aderenza  $\tau$  e lo scorrimento  $s$  devono essere ridotti tramite il fattore  $\lambda$ .

$$\lambda = 0.5 \frac{x}{\varnothing} \leq 1 \quad (2.2.10)$$

Quest'ultima relazione nella precedente versione del *FIP-CEB Model Code* (1990) veniva proposta con un fattore premoltiplicativo pari a 0.2, invece che 0.5, valido fino a distanze  $x < 5\varnothing$ .

In conclusione, dato che le prove di *pull-out* svolte da Eligehausen (1983) condotte su lunghezze di aderenza relativamente corte (5 volte il diametro della barra) mettono in gioco tutta il tratto di aderenza predefinito, si ottiene un valore medio attendibile, come già raccomandato da Abrams (1913). Tuttavia, nelle stesse prove non è possibile determinare l'influenza locale della fessura sulla distribuzione di aderenza, dato che queste si verificano per lunghezze di aderenze simili a quelle predefinite da Eligehausen. Queste ultime, essendo basate su una tensione media di aderenza sviluppata su tratti relativamente piccoli, non considerano la variabilità della proprietà di aderenza lungo il provino.

## 2.3 Definizione di fessura

Il controllo delle fessure negli elementi in calcestruzzo può essere raggiunto applicando i metodi di calcoli semi-analitici o rispettando delle regole pratiche appropriate. Le procedure di calcolo sono sempre richieste se gli stati limite di esercizio rappresentano una condizione di progettazione determinante per la struttura. I metodi per individuare l'ampiezza di fessura caratteristica  $w_k$  si basano sul modello analitico del trasferimento della forza di aderenza tra la barra, e il calcestruzzo e applicano relazioni di tensioni di aderenza-scorrimento ( $\tau_b - s$ ) misurate o stimate.

Secondo il Model Code (2010), nel caso di elementi in calcestruzzo armato, lo stato limite di fessurazione viene soddisfatto se utilizzando un modello analitico per la previsione della larghezza caratteristica della fessura  $w_k$ , e confrontandola con il valore limite fornito dai codici  $w_{lim}$  è rispettata la seguente disuguaglianza:

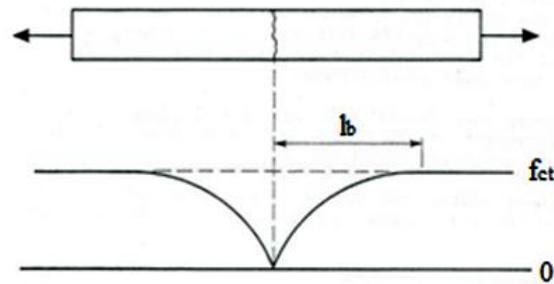
$$w_k \leq w_{lim} \quad (2.3.1)$$

L'apertura limite  $w_{lim}$  della fessura viene definita in base alla classe di esposizione ambientale in cui l'elemento in C.A. si trova, sotto la combinazione di carichi quasi-permanenti. A titolo di esempio, se la struttura rientra nell'intervallo di classe 2-4 e se non è necessario assicurare la tenuta all'acqua, può essere assunto un  $w_{lim} = 0.3 \text{ mm}$ . Per le classi di esposizione di classe 1 il limite imposto può essere ridotto.

L'apertura di progetto  $w_k$  della fessura caratteristica viene definita in base al modello analitico scelto tra i vari proposti in letteratura. Tuttavia, molti di questi condividono le assunzioni di base dei modelli di seguito descritte. Si assume che a seguito del raggiungimento della deformazione ultima di trazione del calcestruzzo, in una sezione specifica, viene a mancare la compatibilità locale della deformazione tra acciaio e calcestruzzo e di conseguenza la matrice non è in grado di esibire ulteriori deformazioni nella sezione stessa.

Di conseguenza, la sezione ha due possibili stati: il primo è lo stato di collasso, dove contemporaneamente alla fessurazione si ha lo snervamento dell'acciaio; il secondo è la comparsa di una fessura che, se si è rispettata la quantità minima di armatura tale da

permettere la redistribuzione delle sollecitazioni, evita il collasso. In quest'ultimo caso l'acciaio non supera la tensione di snervamento e può ancora esibire deformazioni per carichi maggiori. Tuttavia la comparsa della fessura comporta delle variazioni del comportamento meccanico dell'elemento, come visibile nella Figura 2.19.



**Figura 2.18 Distribuzione teorica della tensione normale nel calcestruzzo alla fessura**

Nella Figura 2.18 viene rappresentato un tirante in C.A. soggetto a trazione pura. Alla comparsa della prima fessura, ipotizzata completa, per ogni faccia della fessura viene rappresentato un tratto  $l_b$  detto *lunghezza di aderenza* oppure *lunghezza di trasmissione delle forze di aderenza*. Quest'ultima viene definita come la distanza in cui si sviluppano delle tensioni tangenziali responsabili della redistribuzione delle forze tra calcestruzzo e barra di acciaio e viceversa. Il tratto così definito è caratterizzato dall'assenza dell'ipotesi di perfetta aderenza e dalla distribuzione di scorrimenti tra i due materiali. In molti modelli, esso viene a coincidere con la distanza tra una fessura e il punto più vicino nel quale può nascere una nuova fessura. La somma delle infinitesime differenze di deformazioni che si sviluppano tra il calcestruzzo e l'armatura di rinforzo nella lunghezza di aderenza definisce lo scorrimento  $s$  della faccia di calcestruzzo rispetto alla barra di armatura. Quindi, per ogni fessura, si avranno due scorrimenti che sommati definiranno l'ampiezza totale della fessura  $w$ .

$$s_1 = \int_0^{l_b} (\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)) dx \quad (2.3.2)$$

$$s_2 = \int_0^{l_b} (\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)) dx \quad (2.3.3)$$

dove:

$l_b$  è l'estensione della lunghezza in cui si sviluppano gli scorrimenti;

$\varepsilon_c(x)$  è la deformazione del calcestruzzo in  $x$ ;

$\varepsilon_s(x)$  è la deformazione della barra di acciaio  $x$ ;

$s_1$  e  $s_2$  sono gli scorrimenti sviluppati per ciascuna faccia della fessura.

Assumendo una fessura simmetrica, ovvero una fessura caratterizzata da una lunghezza di aderenza uguale per entrambe le facce della fessura, si considererà:

$$w = 2 \int_0^{l_b} (\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)) dx \quad (2.3.4)$$

La soluzione dell'integrale (2.3.4) è data da una procedura troppo complessa e poco adatta per le applicazioni progettuali. Si noti che considerare la distanza massima tra le fessure equivale a considerare il caso più critico, cioè quello con l'ampiezza di fessura più grande. Quindi, indicando con  $\varepsilon_{sm}$  ed  $\varepsilon_{cm}$  rispettivamente la deformazione media dell'armatura e la deformazione media del calcestruzzo, entrambe riferite alla lunghezza di aderenza relativa, generalmente si assume l'ampiezza della fessura caratteristica come:

$$w = 2 l_b (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad (2.3.5)$$

## 2.4 Le fasi della fessurazione

I modelli matematici presi in considerazione nell'introduzione della presente tesi presentano le seguenti ulteriori ipotesi di modello riguardo le fasi dello sviluppo della

fessurazione: in tutti viene considerata la non linearità meccanica dell'elemento, individuando così quattro principali fasi con proprietà meccaniche differenti. Come mostra la Figura 2.19 considerando l'esempio di un tirante in calcestruzzo armato, si può osservare come nella prima fase detta *fase non fessurata*, prima della comparsa della prima fessura, ogni sezione dell'elemento sia interamente reagente (Stato I), conferendo una legge carico-deformazione di tipo lineare. Aumentando la forza di trazione, alla nascita della prima fessura, si ha la prima variazione dal comportamento meccanico precedente e il tirante entra in una nuova fase chiamata *formazione delle fessure*. Quest'ultimo processo si protrae in maniera considerata casuale su tutto l'elemento fino al raggiungimento della configurazione di *fessurazione stabilizzata*. In questa fase, nel modello analitico fessurato, si ipotizza che non siano possibili altre fessurazioni del tirante, mentre il comportamento meccanico osservato segue una legge lineare, parallela al percorso di carico che avrebbe una barra nuda (Stato II,0). In Figura 2.19 la distanza orizzontale che compare tra il comportamento esplicito dall'elemento in fase di fessurazione stabilizzata e quello della barra nuda è il solo contributo che può esibire un calcestruzzo così fessurato in termini di deformazione o, in altre parole, un irrigidimento. Questo fenomeno viene definito con il termine *tension stiffening* e la sua determinazione viene approfondita in stati limite riguardanti spostamenti o deformazioni limite.

Continuando ad incrementare la forza di trazione si raggiunge la quarta fase dove si arriva alla tensione di snervamento dell'acciaio. Dato che le limitazioni sulla fessura riguardano stati di esercizio, quest'ultima fase non viene approfondita nella presente tesi.

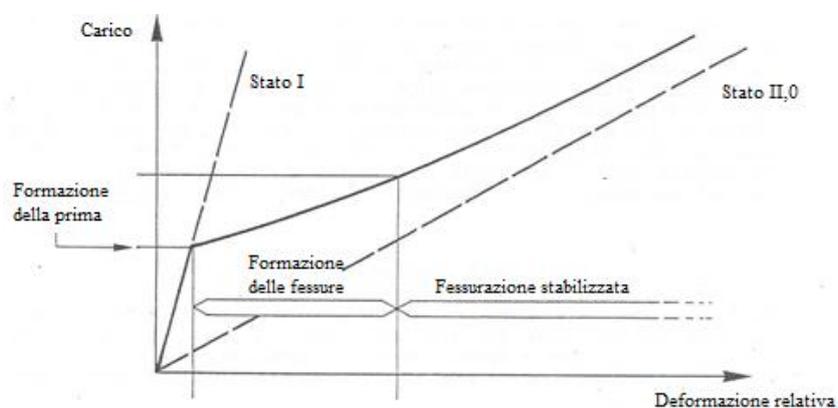


Figura 2.19 Comportamento ideale di un tirante C.A.

### Fase della formazione della fessura

In questa fase, il modello prevede che l'elemento tirante conservi parti in cui la deformazione dell'acciaio risulta uguale a quella del calcestruzzo. L'estensione di tali zone diminuisce all'aumentare del carico a causa della comparsa di nuove cricche.

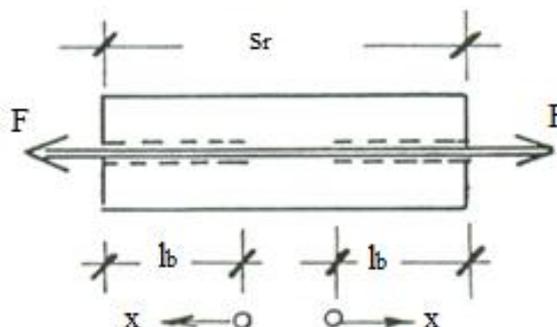


Figura 2.20 Modello di concio di trave tra due fessure distanti  $s_r$ .

Idealmente, per ogni fessura, si può fissare un sistema di riferimento nella sezione dove sono ripristinate le tensioni di aderenza acciaio-calcestruzzo, e quindi, dove gli scorrimenti sono nulli. Pertanto, nella stessa sezione, è nulla anche la derivata dello scorrimento:

$$s_0 = 0 \quad (2.4.1)$$

$$s'_0 = \varepsilon_{s0} - \varepsilon_{c0} = 0 \quad (2.4.2)$$

Oltre alla lunghezza di aderenza, il comportamento di una sezione è interamente reagente e non vi sono scorrimenti o sviluppi di tensioni di aderenza tra acciaio e calcestruzzo.

$$\varepsilon_s(x) = \varepsilon_c(x) \quad x \geq l_b \quad (2.4.3)$$

In questa fase la spaziatura tra le fessure  $s_r$  è più grande del doppio della lunghezza di aderenza  $l_b$ . Le fessure incidono sulle tensioni solo ad una distanza  $l_b$  dalla fessura, riducendo l'entità del livello tensionale sotto alla tensione massima del calcestruzzo. Di conseguenza, viene assunto che la minima distanza con cui può comparire una nuova fessura è la lunghezza  $l_b$ . Se due fessure si formano con una distanza maggiore di  $2 l_b$ , un'altra fessura può formarsi nello spazio intermedio, concludendo localmente la

fessurazione singola.

$$s_r \geq 2 l_b \quad (2.4.4)$$

### **Fase della fessurazione stabilizzata**

Il processo di fessurazione è considerato completato e il numero delle fessure presenti viene assunto costante per tutta la fase. Non essendoci tratti in cui si presenta la perfetta aderenza all'interfaccia acciaio-calcestruzzo, gli scorrimenti si estendono per tutta la lunghezza dell'elemento e presentano valore nullo esclusivamente nel punto di minima tensione nell'armatura, dovuta alla loro inversione di segno. Come comune assunto dalla comunità scientifica, il punto è considerato situato all'incirca nel mezzo tra due fessure. A conseguenza di ciò soprascritto, la derivata prima dello scorrimento, che coincide per definizione alla differenza tra deformazione acciaio e calcestruzzo, non si annulla in alcuna sezione:

$$s_0 = 0 \quad (2.4.5)$$

$$s'_0 = \varepsilon_{s0} - \varepsilon_{c0} \geq 0 \quad (2.4.6)$$

L'interdistanza delle fessure  $s_r$ , per tutte quelle presenti nella presenta fase, varia nel seguente intervallo:

$$l_b < s_r < 2l_b$$

### 3. MODELLI ANALITICI PER IL CALCOLO DELL'APERTURA DELLA FESSURA

#### 3.1 *fib* Model Code (2010)

I calcoli della larghezza della fessura per Model Code (2010) sono basati sul caso base di un calcestruzzo prismatico armato con una barra di acciaio sottoposto a tensione assiale.

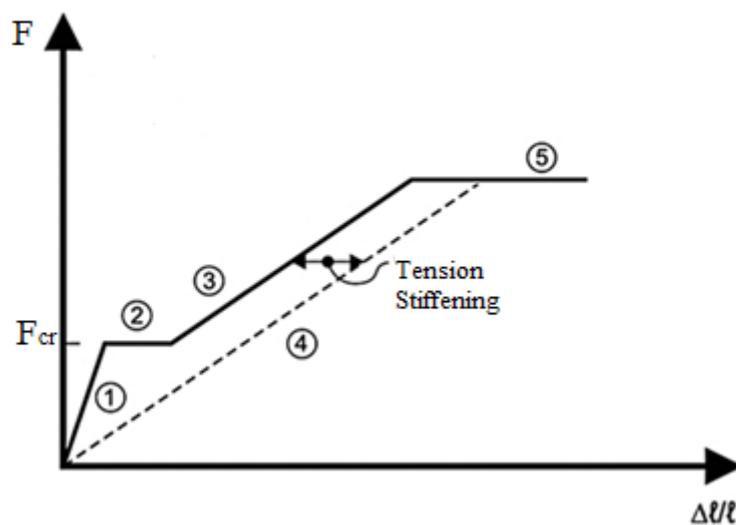


Figura 3.1 Comportamento teorico del tirante secondo modello fib Model Code (2010)

Il Model Code (2010) considera un approccio semplificato: dopo la fase non fessurata del tirante (campo 1 della figura soprastante) una volta raggiunta la *forza di prima fessurazione*, ovvero la forza che innesca la prima fessura, la fase della formazione delle fessure si sviluppa istantaneamente. Questa approssimazione causa un andamento costante del comportamento meccanico del tirante come raffigurato nel campo 2 della figura soprastante. Tale assunzione è data considerando la resistenza a trazione del calcestruzzo costante su tutto l'elemento, senza computare la variabilità stocastica della resistenza.

### Fase di formazione della fessura

Considerando un valore di resistenza a trazione del calcestruzzo medio  $f_{ctm}$ , la forza  $F_{cr}$  che causa la comparsa istantanea delle fessure vale:

$$F_{cr} = A_{c,ef} f_{ctm} (1 + \alpha_e \rho_{s,ef}) \quad (3.1.1)$$

La formula adottata per il calcolo dell'ampiezza della fessura, valida nella fase di fessurazione stabilizzata, si basa sull'Eq. (2.3.5) assumendo la massima distanza tra le fessure pari a due volte la lunghezza di trasmissione e considerando l'effetto di deformazione del calcestruzzo dovuto al ritiro:

$$w_{max} = 2 \cdot l_{b,max} \cdot (\varepsilon_{s,m} - \varepsilon_{c,m} - \varepsilon_{c,s}) \quad (3.1.2)$$

dove:

$$l_{b,max} = k c + \frac{1}{4} \left( \frac{f_{ctm}}{\tau_{bm}} \cdot \frac{\varphi_s}{\rho_{s,ef}} \right) \quad (3.1.3)$$

$$\varepsilon_{s,m} - \varepsilon_{c,m} - \varepsilon_{c,s} = \frac{\sigma_{s,cr} - \beta \sigma_{s,l}}{E_s} - \eta_r \varepsilon_{sh} \quad (3.1.4)$$

dove:

$l_{b,max}$  è la massima lunghezza di trasmissione che teoricamente si può avere nel tirante;

$\varepsilon_{c,s}$  è la deformazione del calcestruzzo dovuto al (libero) ritiro;

$f_{ctm}$  è il valore medio di resistenza a trazione del calcestruzzo;

$\tau_{bm}$  è il valore medio di tensione di aderenza assunto dalla Tabella 3.1;

$\varphi_s$  è il diametro dell'armatura principale;

$\rho_{s,ef}$  è il rapporto tra  $A_s$  e  $A_{c,ef}$  e quest'ultimo è l'area efficace di calcestruzzo in tensione, dalla definizione del Model Code (1990);

$\sigma_{s,cr}$  è la tensione dell'acciaio in corrispondenza della sezione fessurata;

$\eta_r$  è il coefficiente del contributo del ritiro assunto dalla Tabella 3.1;

$\beta$  è un coefficiente empirico che è funzione del tipo di carico assunto dalla Tabella 3.1;

$\sigma_{s,l}$  è il massimo valore di tensione dell'acciaio nella fase di formazione delle fessure ottenuto per pura tensione.

Il valore di  $\sigma_{s,l}$  è ottenuto tramite l'imposizione di raggiungimento dell'equilibrio locale allo stato di incipiente fessurazione, nella quale si verifica la redistribuzione della tensione dall'acciaio al calcestruzzo:

$$\sigma_{s,l} = \frac{f_{ctm} A_{c,ef}}{A_s (\alpha_e \rho_{ef} + 1)} \quad (3.1.5)$$

Infine, sostituendo nell'Eq. (3.1.2), si ottiene:

$$w_{max} = \left( 2 k c + \frac{1 f_{ctm} \varphi_s}{2 \tau_{bm} \rho_{s,ef}} \right) \left( \frac{\sigma_{s,cr}}{E_s} - \frac{\beta f_{ctm} (\alpha_e \rho_{ef} + 1)}{E_s \rho_{ef}} - \eta_r \varepsilon_{sh} \right) \quad (3.1.6)$$

Nel caso vengano utilizzati differenti diametri per l'armatura ordinaria, il valore  $\varphi_s$  viene sostituito con un diametro equivalente  $\varphi_{eq}$  determinato dalla seguente espressione:

$$\varphi_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^N n_{s,i} \varphi_{s,i}^2}{\sum_{i=1}^N n_{s,i} \varphi_{s,i}} \quad (3.1.7)$$

Da notare come nel calcolo della lunghezza di trasmissione ci sia una correlazione con lo spessore del copriferro  $e$ , in modo indiretto, anche sulla tipologia di carico applicato.

	Formazione della fessura	Fessurazione stabilizzata
Breve termine	$\tau_{bm} = 1.8 f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.6$ $\eta_r = 0$	$\tau_{bm} = 1.8 f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.6$ $\eta_r = 0$
Lungo termine	$\tau_{bm} = 1.35 f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.6$ $\eta_r = 0$	$\tau_{bm} = 1.8 f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.4$ $\eta_r = 1$

**Tabella 3.1**

Assumere un valore di tensione di aderenza media costante per entrambe le fasi di

fessurazione è in linea anche con le condizioni di equilibrio locale formulate per la fase di fessurazione stabilizzata. La seguente espressione, rappresenta l'equilibrio del concio di tirante che si sviluppa tra una sezione fessurata e una sezione a scorrimento nullo.

$$\sigma_{s,cr} A_s = \sigma_{s,II} A_s + f_{ctm} A_{c,ef} \quad (3.1.8)$$

Da cui si ricava il salto tensionale nella barra:

$$(\sigma_{s,cr} - \sigma_{s,II}) A_s = f_{ctm} A_{c,ef} \quad (3.1.9)$$

Sostituendo nell'Eq. (3.1.3) si ottiene una lunghezza di aderenza costante all'aumentare del tiro nel tirante. A titolo di esempio, si riporta l'equazione semplificata nel caso di fessurazione stabilizzata per carichi a breve termine:

$$l_{b,max} = k c + \frac{1}{7.2} \frac{\varphi_s}{\rho_{s,ef}} \quad (3.1.10)$$

Nel metodo descritto, i valori collezionati in tabella si riferiscono ad un'ampiezza di fessura più gravosa dettata dalla massima lunghezza di aderenza possibile nel modello di tirante e da una tensione di resistenza a trazione nel calcestruzzo costante pari al valore medio di resistenza. Non considerando la variabilità dell'ampiezza delle fessure lungo il tirante, il valore di ampiezza proposta dal modello risulta essere quello massimo:

$$w_k = w_{max} \quad (3.1.11)$$

Di conseguenza, non si assume alcuna correlazione tra lo sviluppo delle tensioni medie di aderenza e il livello di forza assiale applicato al tirante. Questo aspetto è stato messo in discussione in passato e ancora oggi si ricerca una modellazione più fine che ne tenga conto. Nei successivi sottocapitoli, sono riportate le proposte di alcuni ricercatori, con la descrizione degli approcci usati.

## 3.2 König G. e Tue N. (1991)

La teoria di König e Tue (1991) propongono un modello analitico a fessurazione

continua per lo studio dell'apertura della fessura in un tirante di calcestruzzo armato con una barra longitudinale. Secondo l'articolo redatto da Eligehausen e Kreller (1988), la teoria sopra intitolata riprende il modello presentato da Krips nel 1984 che, basandosi sulla relazione di aderenza scorrimento sperimentale di Noakowski nel 1978, rappresentata dall'Eq.(3.2.1). Nello specifico propongono un modello analitico che tenga in considerazione la dipendenza della tensione di aderenza con lo scorrimento osservata sperimentalmente. La relazione di Noakowski consiste nell'esplicitare il valore di tensione di aderenza puntuale in funzione dello scorrimento:

$$\tau_b(x) = C s(x)^{n_s} \quad (3.2.1)$$

dove:

$C$  è un fattore che è in funzione della resistenza a compressione del calcestruzzo;

$s(x)$  è lo scorrimento tra l'interfaccia acciaio - calcestruzzo nella sezione con ascissa  $x$ ;

$n_s$  è un fattore che varia tra  $0 < n_s < 1$  a seconda della resistenza del calcestruzzo.

### **Fase di formazione della fessura**

Incrementando la forza  $F$  di tiro nell'elemento, non appena la sollecitazione del calcestruzzo  $\sigma_{c,l}$  raggiunge la resistenza alla trazione locale  $f_{ct,1}$ , si ha la formazione della fessura. Avendo assunto un modello con fessurazione continua, la posizione della prima fessura è casuale e si assume di conseguenza che la resistenza del materiale vari nella lunghezza del tirante. La forza di tiro  $F_{cr,1}$ , che causa la comparsa della prima fessura, presenta un valore relativamente basso e rappresenta il limite inferiore della distribuzione statistica di resistenza del materiale.

$$F_{cr,1} = f_{ct,1} A_i \quad (3.2.2)$$

dove:

$f_{ct,1}$  è il limite inferiore della distribuzione statistica di resistenza del calcestruzzo;

$A_i$  è la sezione del tirante omogeneizzata.

A seguire, l'analisi del modello viene descritta in termini generici, assumendo la fine della fase di formazione delle fessure il raggiungimento del tiro  $F_{cr,N}$ , e cioè il

raggiungimento del valore di resistenza a trazione del calcestruzzo generico  $f_{ct,N}$ . In generale:

$$F_{cr} = f_{ct} A_i \quad (3.2.3)$$

dove:

$f_{ct}$  è una resistenza a trazione del calcestruzzo variabile, ma limitata nel seguente intervallo:

$$f_{ct,1} \leq f_{ct} \leq f_{ct,N}$$

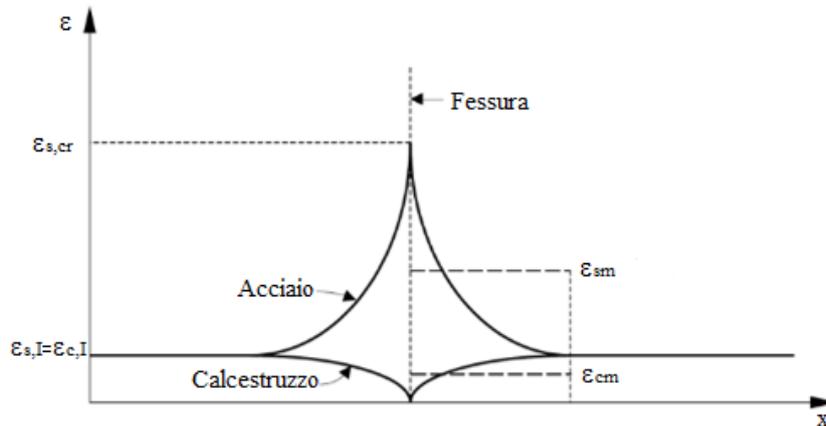


Figura 3.2 Distribuzione di deformazione nel calcestruzzo e nell'acciaio

La caratteristica importante della fase di fessurazione singola è che tra due fessure esista una porzione di calcestruzzo con sezione interamente reagente.

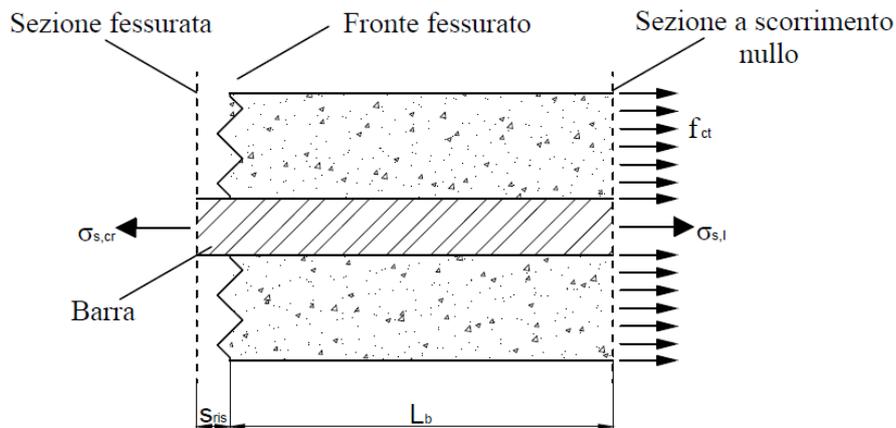


Figura 3.3 Concio di tirante tra sezione fessurata e sezione a scorrimento nullo soggetto alle relative forze

Come si osserva dalla Figura 3.3, ad un livello di tiro agente pari alla forza  $F_{cr}$ , ciascun concio di tirante suddiviso dalla comparsa della singola fessura necessita il rispetto della condizione di equilibrio attraverso la seguente equazione:

$$\sigma_{s,cr} A_s = \sigma_{s,l} A_s + f_{ct} A_c \quad (3.2.4)$$

dove:

$\sigma_{s,cr}$  è la tensione della barra nella sezione fessurata del tirante con una forza  $F_{cr}$  agente;

$\sigma_{s,l}$  è la tensione della barra nella sezione di scorrimento nullo.

Introducendo nell'Eq. (3.2.4) il coefficiente di omogeneizzazione  $\alpha_e = \frac{\sigma_{s,l}}{\sigma_{c,l}}$  e la percentuale di armatura geometrica  $\rho = \frac{A_s}{A_c}$ , segue:

$$\sigma_{s,cr} A_s = A_c \cdot f_{ct} (1 + \alpha_e \cdot \rho) \quad (3.2.5)$$

Quindi, la relazione che lega la tensione del calcestruzzo nella sezione a scorrimento nullo e la tensione della barra nella sezione fessurata consiste nella seguente relazione:

$$A_c \cdot f_{ct} = \frac{\sigma_{s,cr} A_s}{(1 + \alpha_e \cdot \rho)} \quad (3.2.6)$$

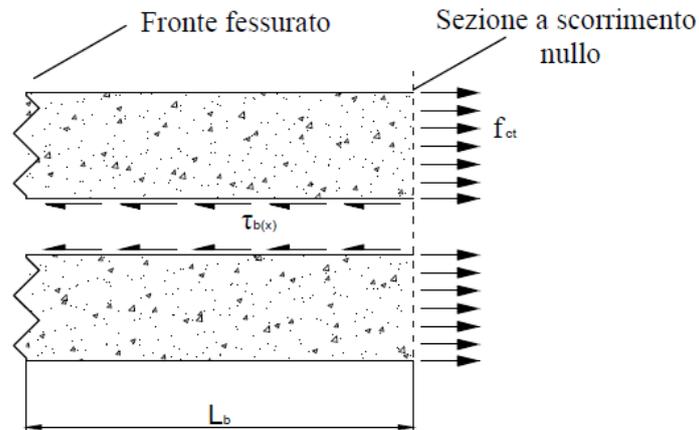
Per trovare la lunghezza di trasmissione  $l_b$ , si considera l'equilibrio del concio di matrice di calcestruzzo con le forze tangenziali di aderenza, come in Figura 3.4:

$$A_c \cdot f_{ct} = l_b \cdot U_s \cdot \tau_{bm} \quad (3.2.7)$$

dove:

$U_s$  è la circonferenza della barra di acciaio;

$\tau_{bm}$  è la tensione tangenziale media all'interfaccia tra acciaio e calcestruzzo.



**Figura 3.4** Concio di calcestruzzo tra sezione fessurata e sezione a scorrimento nullo soggetto alle relative forze.

Sostituendo con le Eq. (3.2.5) e (3.2.7) si ottiene la lunghezza di aderenza  $l_b$ :

$$l_b = \frac{\sigma_{s,cr} \varphi_s}{(1 + \alpha_e \cdot \rho) \cdot 4 \cdot \tau_{bm}} = \frac{f_{ct} \varphi_s}{4 \cdot \tau_{bm} \rho} \quad (3.2.8)$$

In questa fase di formazione la distanza minima della fessura risulta dalla considerazione che lo stato di sezione interamente reagente viene nuovamente raggiunto al di fuori della lunghezza di aderenza.

$$s_r \geq 2 \cdot l_b$$

Considerando la perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo nella sezione di scorrimento nullo (sezioni in fase interamente reagente), si può scrivere:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s,cr} - (1 - \alpha_v) (\varepsilon_{s,cr} - \varepsilon_{s,l}) \quad (3.2.9)$$

$$\varepsilon_{cm} = (1 - \alpha_v) \varepsilon_{c,l} = (1 - \alpha_v) \varepsilon_{s,l} \quad (3.2.10)$$

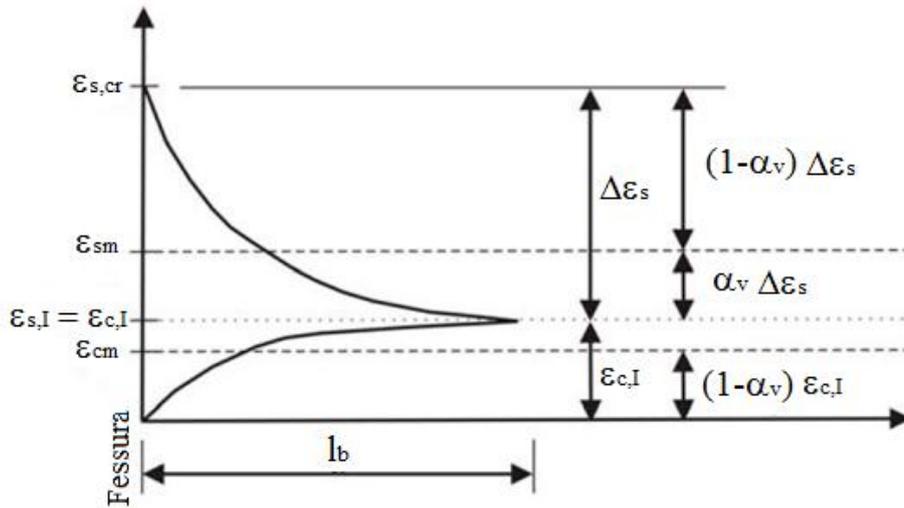


Figura 3.5 Livelli di deformazione media dell'acciaio e del calcestruzzo.

dove:

$\alpha_v$  è un coefficiente usato per determinare il valore medio del moltiplicatore (vedi paragrafo *Formula per il calcolo del fattore  $\alpha_v$* );

$\epsilon_{c,l}$  è la deformazione massima del calcestruzzo assumendo la sezione interamente reagente;

$\epsilon_{s,l}$  è la deformazione massima dell'acciaio assumendo la sezione interamente reagente.

Generalmente, nelle sezioni interessate dallo scorrimento della barra si assume una legge elastica lineare approssimando le deformazioni medie alle seguenti relazioni:

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sm}}{E_s} = \frac{1}{E_s} \left( \sigma_{s,cr} - \frac{(1 - \alpha_v) \sigma_{s,cr}}{(1 + \alpha_e \cdot \rho)} \right) \quad (3.2.11)$$

$$\epsilon_{cm} = \frac{\sigma_{cm}}{E_c} = \frac{1}{E_s} \frac{\alpha_e \rho (1 - \alpha_v) \sigma_{s,cr}}{(1 + \alpha_e \cdot \rho)} \quad (3.2.12)$$

Sostituendo nell'Eq. (2.3.5) si ottiene l'ampiezza caratteristica  $w_k$  della fessura nella fase di sviluppo della fessurazione nel tirante.

$$w_k = \frac{\alpha_v \varphi_s \sigma_{s,cr}^2}{2 \tau_{bm} E_s (1 + \alpha_e \cdot \rho)} \quad (3.2.13)$$

L'unico termine non noto è la tensione media di aderenza  $\tau_{bm}$ , ottenibile dall'integrale:

$$\tau_{bm} = \frac{1}{l_b} \int_0^{l_b} \tau_b(x) dx \quad (3.2.14)$$

Introducendo la relazione di Noakowski nel precedente integrale si ottiene l'equazione nella nuova incognita  $s(x)$ :

$$\tau_{bm} = \frac{C}{l_b} \int_0^{l_b} s(x)^{n_s} dx \quad (3.2.15)$$

Per trovare la distribuzione degli scorrimenti, è utile partire dallo studio delle variazioni di sollecitazione all'equilibrio della barra e della matrice di calcestruzzo considerati distaccati l'uno dall'altro.

$$d\sigma_c(x) \cdot A_c = -\tau_b(x) \cdot U_s \cdot dx \quad (3.2.16)$$

$$d\sigma_s(x) \cdot A_s = \tau_b(x) \cdot U_s \cdot dx \quad (3.2.17)$$

Sapendo che lo scorrimento è definito come la differenza di allungamento tra l'armatura e il calcestruzzo e considerando un comportamento lineare elastico dei materiali si può scrivere:

$$ds(x) = (\varepsilon_{s,l}(x) - \varepsilon_{c,l}(x)) \cdot dx \quad (3.2.18)$$

$$\frac{ds(x)}{dx} = \frac{1}{E_s} (\sigma_{s,l}(x) - \alpha_e \sigma_{c,l}(x)) \quad (3.2.19)$$

Derivando ulteriormente e sostituendo con l'Eq. (3.2.16) e l'Eq. (3.2.17), si ottiene la seguente:

$$\frac{d^2s(x)}{dx^2} = \frac{4 \cdot \tau_b(x)}{\varphi_s E_s} (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) \quad (3.2.20)$$

König e Tue (1991) affermano che la soprascritta equazione differenziale è risolvibile in forma chiusa solo per la fase di formazione delle fessure. Di conseguenza gli autori propongono la seguente equazione, che rappresenta una soluzione approssimata, ma generalmente risolvibile:

$$s(x) = s_{ris} \left( \frac{x}{l_b} \right)^{b_s} \quad (3.2.21)$$

dove  $b_s$  è un coefficiente incognito e  $s_{ris} = \frac{w}{2}$ .

Tramite l'Eq. (3.2.20) si può trovare la tensione di aderenza media  $\tau_{bm}$ .

$$\tau_{bm} = \frac{C s_{ris}^{n_s}}{n_s b_s + 1} = \frac{C}{n_s b_s + 1} \left( \frac{w}{2} \right)^{n_s} \quad (3.2.22)$$

Inoltre, sostituendo l'Eq. (3.2.1) e l'Eq. (3.2.21) nell'Eq.(3.2.20) si ottiene la seguente eguaglianza:

$$\frac{s_{ris}}{l_b^2} (b_s - 1) b_s \left( \frac{x}{l_b} \right)^{b_s - 2} = \frac{(1 + \alpha_e \cdot \rho) 4}{\varphi_s E_s} C s_{ris}^{n_s} \left( \frac{x}{l_b} \right)^{b_s n_s} \quad (3.2.23)$$

A titolo schematico, si raccolgono le funzioni indipendenti dall'ascissa x nel fattore A e A' rispettivamente per il primo e il secondo termine. Analogamente, raccogliendo anche i termini dipendenti da x, nei fattori B e B' rispettivamente nel primo e secondo termine, le funzioni si possono riscrivere nella seguente forma:

$$a \cdot b(x) = a' \cdot b'(x) \quad (3.2.24)$$

Affinché l'Eq. (3.2.24) sia valida, è necessario che:

$$\begin{cases} a = a' \\ b(x) = b'(x) \end{cases} \quad (3.2.25)$$

Dalla prima equazione del sistema, si ottiene:

$$(b_s - 1)b_s = 4 \frac{(1 + \alpha_e \cdot \rho)}{\varphi_s E_s} C S_{ris}^{n_s-1} l_b^2 \quad (3.2.26)$$

Sostituendo l'Eq. (3.2.8) si ottiene:

$$(b_s - 1)b_s = \frac{C}{\alpha_v \tau_{bm}} \left(\frac{w}{2}\right)^{n_s} \quad (3.2.27)$$

Sostituendo con l'Eq. (3.2.13) e l'Eq. (3.2.22) si ha la seguente equazione di secondo grado:

$$(1 - n_s^2)b_s^2 - (1 - 3n_s)b_s - 2 = 0 \quad (3.2.28)$$

Quindi, le possibili soluzioni della prima uguaglianza del sistema dell'Eq.(3.2.25) sono:

$$\begin{cases} b_{s,1} = \frac{(n_s - 1)}{1 - n_s^2} \\ b_{s,2} = \frac{2}{1 - n_s} \end{cases} \quad (3.2.29)$$

Invece, dalla seconda uguaglianza si ha:

$$\left(\frac{x}{l_b}\right)^{b_s-2} = \left(\frac{x}{l_b}\right)^{b_s n_s} \quad (3.2.30)$$

Quindi, si ottiene un unico valore finale:

$$b_s = \frac{2}{1 - n_s} \quad (3.2.31)$$

Sostituendo il fattore  $b_s$  nella funzione di tensione di aderenza media, cioè nell'Eq. (3.2.22) si ottiene una funzione valida per un tirante in calcestruzzo armato sottoposto ad una forza di tiro F:

$$\tau_{bm} = C \frac{1 - n_s}{1 + n_s} \left(\frac{w_k}{2}\right)^{n_s} \quad (3.2.32)$$

Infine, sostituendo nell'Eq. (3.2.13) si ottiene la relazione della larghezza della fessura

in fase di fessurazione singola:

$$w_k = \left( \frac{\alpha_v \varphi_s \sigma_{s,cr}^2}{C E_s (1 + \alpha_e \cdot \rho)} \frac{1 + n_s}{1 - n_s} 2^{n_s - 1} \right)^{\frac{1}{n_s + 1}} \quad (3.2.33)$$

Quindi:

$$\tau_{bm} = \left( \frac{C}{1 + b_s n_s} \left( \frac{\alpha_v \sigma_{s,cr}^2 \varphi_s}{4 E_s (1 + \alpha_e \rho)} \right)^{n_s} \right)^{\frac{1}{1 + n_s}} \quad (3.2.34)$$

Alternativamente all'assunzione di relazioni sperimentali per la determinazione del fattore  $C$ , di seguito viene proposto un valore  $C$  correlato alle condizioni al bordo. Ciò si ottiene sostituendo la tensione di aderenza media nell'equazione di equilibrio indefinito del concio di calcestruzzo, rappresentata dall'Eq. (3.2.16):

$$\frac{\tau(x) U_s}{A_c} dx = -d\sigma_c(x) \quad (3.2.35)$$

Sostituendo la tensione tangenziale:

$$\frac{C U_s}{A_c} s_{ris}^{n_s} \left( \frac{x}{l_b} \right)^{n_s b_s} dx = -d\sigma_c(x) \quad (3.2.36)$$

Svolgendo l'integrale indefinito di entrambi i termini si ottiene:

$$\sigma_c(x) = -\frac{C s_{ris}^{n_s}}{A_c l_b^{n_s b_s}} \frac{x^{n_s b_s + 1}}{n_s b_s + 1} - c \quad (3.2.37)$$

Richiamando le seguenti condizioni al bordo si possono determinare i due termini incogniti:

$$\sigma_c(x = 0) = f_{ct} \quad (3.2.38)$$

$$\sigma_c(x = l_b) = 0 \quad (3.2.39)$$

dalle quali si ottengono rispettivamente:

$$c = -f_{ct} \quad (3.2.40)$$

$$C = \frac{A_c f_{ct}}{l_b U_S} \frac{1 + n_s}{1 - n_s} \left( \frac{w_k}{2} \right)^{-n_s} \quad (3.2.41)$$

Inserendo l'Eq. (3.2.41) nell'Eq. (3.2.32) si ha la sparizione della dipendenza della tensione di aderenza dallo scorrimento, riottenendo l'Eq. (3.2.8) qui riportata per comodità:

$$l_b = \frac{f_{ct} \varphi_s}{4 \cdot \tau_{bm} \rho} \quad (3.2.8)$$

Tuttavia, nella fase di fessurazione singola, la tensione di aderenza media risulterebbe un'incognita non determinata da alcuna equazione, e quindi, l'ampiezza della fessura caratteristica, obiettivo del modello, non sarebbe determinata. Per tale motivo è utile assumere il coefficiente sperimentale  $C$  proposto da Noakowski.

L'assenza della dipendenza tra tensione tangenziale e scorrimento, conferma la prospettiva del modello analitico del Model Code, nel quale è assunto un valore di tensione media tangenziale costante. Infatti, come descritto al paragrafo precedente, nel Model Code la tensione media di aderenza è assunta da una correlazione sperimentale diretta tra essa e la resistenza media del calcestruzzo, sopperendo la necessità di un'ulteriore equazione.

Un'ulteriore considerazione si ha sostituendo il fattore  $C$ , determinato dalle condizioni al bordo, nella relazione di Noakowski e calcolando il valore delle tensione tangenziale per  $x = l_b$  si ottiene la tensione tangenziale massima di aderenza :

$$\tau_{bmax} = \frac{A_c f_{ct}}{l_b U_S} \frac{1 + n_s}{1 - n_s} \quad (3.2.42)$$

Assumendo il coefficiente costante  $C$  come proposto dagli autori, ovvero dedotto per via sperimentale, si possono fare ulteriori considerazioni. Riscrivendo la relazione della lunghezza di aderenza e la relazione della ampiezza della fessura, utilizzando la correlazione delle tensioni tra acciaio e calcestruzzo, si possono ritrovare delle

formulazioni in funzione della tensione nel calcestruzzo. Quindi:

$$l_b = \frac{f_{ct} \varphi_s}{4 \cdot \tau_{bm} \rho} \quad (3.2.43)$$

$$w_k = \frac{\alpha_v \varphi_s f_{ct}^2}{2 \tau_{bm} E_s \rho^2} (1 + \alpha_e \cdot \rho) \quad (3.2.44)$$

Come mostrano le due precedenti equazioni, una variazione delle tensioni normali non implica necessariamente un valore costante di tensione tangenziale media o, viceversa, un valore costante di lunghezza di aderenza. Esplicitando la funzione di tensione di aderenza nell'Eq. (3.2.44) si ottiene:

$$l_b = \frac{\sigma_{s,cr} \varphi_s}{4 (1 + \alpha_e \cdot \rho) C \frac{1 - n_s}{1 + n_s} \left(\frac{w_k}{2}\right)^{n_s}} \quad (3.2.45)$$

Fissate le caratteristiche geometriche e meccaniche di un generico provino, esprimendo la relazione dell'ampiezza della fessura caratteristica con l'Eq. (3.2.33) si ottiene la relazione di dipendenza della lunghezza di aderenza dalla tensione dell'acciaio:

$$l_b \propto \sigma_{s,cr}^{\left(\frac{1-n_s}{1+n_s}\right)} \quad (3.2.46)$$

dove l'esponente della tensione  $\sigma_{s,cr}$  in generale è maggiore di zero, ma comunque minore dell'unità. In maniera analoga si può dedurre la diretta dipendenza che il modello presenta tra tensione di aderenza e tensione nell'acciaio alla fessura. Di conseguenza si può scrivere:

$$\tau_{bm} \propto \sigma_{s,cr}^{\frac{2n_s}{n_s+1}} \quad (3.2.47)$$

Come viene prescritto nel Model Code (1990), in casi generali la tensione dell'acciaio all'ultima fessura può essere assunta come:

$$\sigma_{s,cr n} = 1.3 \sigma_{s,cr 1} \quad (3.2.48)$$

e quindi:

$$f_{ct,n} = 1.3 f_{ct,1} \quad (3.2.49)$$

dove:

$f_{ct,1}$  è il minimo valore di resistenza del calcestruzzo superato alla comparsa della prima fessura;

$f_{ct,n}$  è il valore massimo di resistenza del calcestruzzo superato alla comparsa dell'ultima fessura.

Nella stessa fonte possiamo trovare l'indicazione di quale resistenza del calcestruzzo usare ai fini del calcolo dell'ampiezza di fessura caratteristica.

$$f_{ct,n} = f_{ctm} \quad (3.2.50)$$

La fase di formazione delle fessure può essere assunta compresa negli stessi limiti, dove la fine della prima fase di fessurazione trova un incremento della tensione nella barra di acciaio del 30% rispetto alla tensione della stessa alla comparsa della prima fessura.

$$\sigma_{s,cr n} = 1.3 \sigma_{s,cr 1} \quad (3.2.51)$$

Quindi, secondo la proporzionalità espressa precedentemente, la tensione media di aderenza all'ultima fessura può raggiungere un valore massimo:

$$\tau_{bm,n} = 1.3 \frac{2n_s}{n_s+1} \tau_{bm,1} \quad (3.2.52)$$

dove:

$\tau_{bm,1}$  corrisponde alla tensione media che ripristina la tensione nel calcestruzzo al valore  $f_{ct,1}$ ;

$\tau_{bm,n}$  corrisponde alla tensione media che ripristina la tensione nel calcestruzzo al valore  $f_{ct,n}$ .

Considerando un valore del coefficiente pari a  $n_s = 0.3$  come riportato da König e Tue (1991) si ottiene un aumento in tensione di aderenza del solo 13% in più:

$$\tau_{bm,n} = 1.13 \tau_{bm,1} \quad (3.2.53)$$

König e Tue (1991), invece, considerano una resistenza limite pari al percentile 5% e 95% della distribuzione statistica della resistenza a trazione del calcestruzzo, e cioè:

$$f_{ct,1} = f_{ct,5\%} = 0.7 f_{ctm} \quad (3.2.54)$$

$$f_{ct,n} = f_{ct,95\%} = 1.3 f_{ctm} \quad (3.2.55)$$

Riformulando i precedenti passaggi svolti per le prescrizioni del Model Code si ritrova un nuovo valore massimo teoricamente raggiungibile:

$$\tau_{bm,n} = 1.33 \tau_{bm,1} \quad (3.2.56)$$

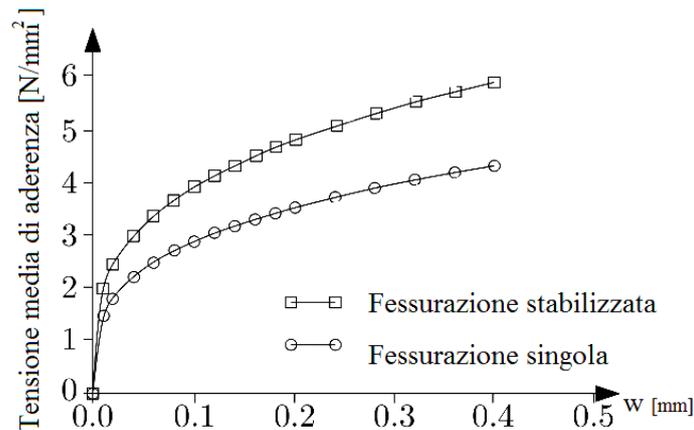


Figura 3.6 Variazione delle tensione media secondo König e Tue [tratta da Schlicke 2020]

Alla prima fessura, cioè quella formatasi alla tensione nel calcestruzzo pari ad  $f_{ct,1}$ , la tensione media partendo da un valore  $\tau_{bm,1}$  aumenta con l'aumentare della tensione del calcestruzzo. Tuttavia, l'incremento fino al valore limite  $\tau_{bm,n}$  può essere arrestato dalla comparsa di una nuova fessura a distanze minori del doppio della lunghezza di

aderenza, la quale inficerebbe l'aumento locale della tensione nel calcestruzzo a causa della scomparsa del tratto con perfetta aderenza. Di conseguenza, la massima variazione di tensione media tangenziale si avrà solo nel caso particolare in cui la prima fessura rimanga indisturbata dalle fessure limitrofe, fino alla fase di fessura stabilizzata.

### Fessurazione stabilizzata

Nello stato di completa formazione delle fessure, le deformazioni dell'armatura e del calcestruzzo discostano considerevolmente l'una dall'altra su tutta la lunghezza, per cui si assume che lo stato di sezione interamente reagente non sia più presente in nessun concio. Questa condizione è anche nota come *cracking completo*.

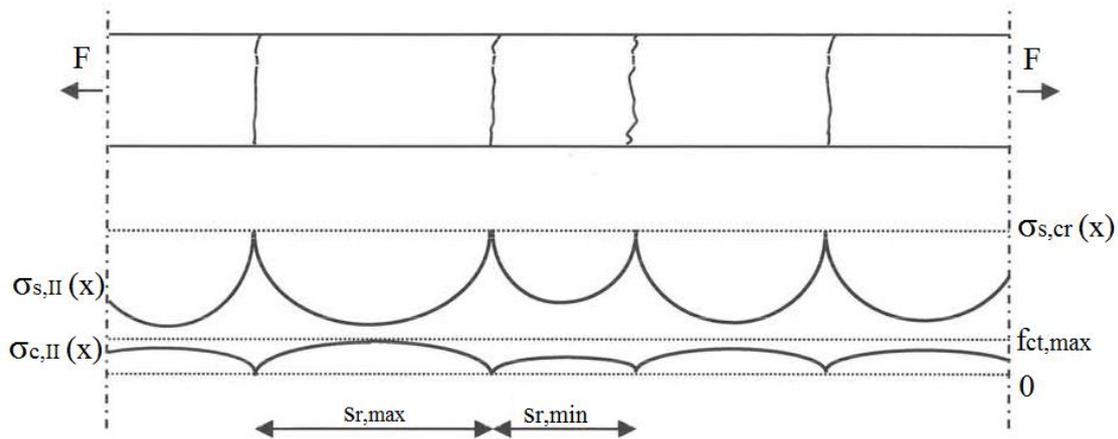


Figura 3.7 Configurazione *cracking completo*

Tuttavia, nel mezzo di due fessure consecutive, lo scorrimento è assunto nullo poiché in questo punto non c'è spostamento relativo tra armatura e calcestruzzo a causa della simmetria dell'applicazione del carico. Quindi, per le considerazioni sopra elencate, generalmente si può affermare che la spaziatura delle fessure  $s_r$  varia nel seguente intervallo:

$$l_b \leq s_r \leq 2l_b \quad (3.2.57)$$

La seguente equazione rappresenta l'equilibrio del concio di elemento C.A. tra l'interfaccia della fessura e la sezione a scorrimento nullo.

$$\sigma_{s,cr} A_s = \sigma_{s,II} A_s + \sigma_{c,II} A_{c,ef} \quad (3.2.58)$$

dove:

$A_{c,ef}$  è l'area di calcestruzzo effettiva a trazione;

$\sigma_{s,II}$  è la tensione nella barra di acciaio nella sezione a scorrimento nullo nella fase di fessurazione stabilizzata;

$\sigma_{c,II}$  è la tensione nella sezione di calcestruzzo a scorrimento nullo nella fase di fessurazione stabilizzata.

Generalmente quest'ultimo è compreso nel seguente intervallo:

$$f_{ct,1} \leq \sigma_{c,II} \leq f_{ct,n} \quad (3.2.59)$$

Quindi, la relazione che lega le tensioni del calcestruzzo a quelle dell'acciaio risulta:

$$\sigma_{c,II} = \rho_{ef} (\sigma_{s,cr} - \sigma_{s,II}) = \rho_{ef} \Delta\sigma_s \quad (3.2.60)$$

dove la percentuale geometrica di armatura assume la seguente relazione:

$$\rho_{ef} = \frac{A_s}{A_{c,ef}} \quad (3.2.61)$$

Per poter applicare la definizione di ampiezza di fessura è necessario determinare i valori medi di tensione nei due materiali:

$$\sigma_{sm} = \sigma_{s,cr} - (1 - \alpha_v) \Delta\sigma_s \quad (3.2.62)$$

$$\sigma_{cm} = (1 - \alpha_v) \Delta\sigma_c = (1 - \alpha_v) \sigma_{c,II} \quad (3.2.63)$$

Attraverso le leggi costitutive elastiche si può scrivere:

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = \frac{1}{E_s} (\sigma_{s,cr} - (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) (1 - \alpha_v) \Delta\sigma_s) \quad (3.2.64)$$

Per lo stato limite di fessurazione, generalmente, la condizione più critica viene rappresentata assumendo nel modello analitico la massima distanza possibile tra le

fessure  $s_{ris} = l_b$ , e cioè  $s_r = 2 l_b$ .

$$s_{ris} = \frac{l_b}{E_s} (\sigma_{s,cr} - (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) (1 - \alpha_v) \Delta\sigma_s) \quad (3.2.65)$$

Sapendo che  $s_{ris} = w/2$  e sostituendo il fattore  $\alpha_v$  definito dall'Eq.(3.2.92) si ottiene:

$$w_k = \frac{2l_b}{E_s} \left( \sigma_{s,cr} - (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) \frac{b_s n_s + 1}{b_s n_s + 2} \Delta\sigma_s \right) \quad (3.2.66)$$

La definizione di lunghezza di aderenza  $l_b$  nel caso di fessurazione stabilizzata si ritrova dall'equazione di equilibrio della sola matrice del semiconcio di calcestruzzo e l'equazione di equilibrio della barra di acciaio. Esse sono rispettivamente:

$$A_{c,ef} \cdot \sigma_{c,II} = \tau_{bm} \cdot l_b \cdot U_s \quad (3.2.67)$$

$$\Delta\sigma_s A_s = \tau_{bm} \cdot l_b \cdot U_s \quad (3.2.68)$$

Dalle due precedenti equazioni si ottiene:

$$l_b = \frac{\varphi_s \Delta\sigma_s}{4 \tau_{bm}} \quad (3.2.69)$$

oppure:

$$l_b = \frac{\varphi_s \sigma_{c,II}}{4 \tau_{bm} \rho_{s,ef}} \quad (3.2.70)$$

Nella presente fase, nella funzione della tensione tangenziale media  $\tau_{bm}$  rappresentata dall'Eq. (3.2.22) risulta una nuova incognita  $b_s$ , la quale assume valore diverso dalla precedente fase. Tuttavia, la soluzione di seguito ritrovata non è generalmente valida, ma rappresenta solo una soluzione all'equazione differenziale (3.2.20) alla fessura, cioè per  $x = l_b$ . In maniera analoga alla fase precedente si ottiene la seguente equazione:

$$b_s(b_s - 1) \frac{S_{ris}}{l_b^2} - (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) \frac{\tau_{max} \Delta\sigma_s}{\tau_{bm} l_b} = 0 \quad (3.2.71)$$

dove:

$$\tau_{max} = \tau(x = l_b) = C S_{ris}^{n_s} \quad (3.2.72)$$

Sostituendo con l'Eq.(3.2.69) e l'Eq. (3.2.65) si ottiene:

$$(b_s^2 - b_s) \left( \frac{\sigma_{s,cr}(2+b_s n_s) - (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef})(1+b_s n_s) \Delta\sigma_s}{b_s n_s + 2} \right) - (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) \frac{\tau_{max} \Delta\sigma_s}{\tau_{bm}} = 0 \quad (3.2.73)$$

Sostituendo le seguenti relazioni note nella precedente espressione:

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_{bm}} = (1 + b_s n_s) \quad (3.2.74)$$

$$\sigma_{sr} = (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) \frac{f_{ct}}{\rho_{s,ef}} \quad (3.2.75)$$

$$\Delta\sigma_s = \frac{\sigma_{c,II}}{\rho_{s,ef}} \quad (3.2.76)$$

dove:

$\sigma_{sr}$  è la tensione dell'acciaio nella sezione fessurata alla formazione della fessurazione;  
 $f_{ct}$  è la tensione nel calcestruzzo nella sezione a scorrimento nullo alla fase di formazione delle fessure relativa al livello di tensione  $\sigma_{sr}$  ;

si ottiene:

$$(b_s^2 - b_s) \left( \frac{\sigma_{s,cr} f_{ct}}{\sigma_{sr} \sigma_{c,II}} (2 + b_s n_s) - (1 + b_s n_s) \right) - (b_s n_s + 2)(b_s n_s + 1) = 0 \quad (3.2.77)$$

Mantenendo l'impostazione originale degli autori del metodo, si procede alla definizione della variabile  $k$ :

$$k = \frac{\sigma_{s,cr} \cdot f_{ct}}{\sigma_{sr} \cdot \sigma_{c,II}} = \frac{\sigma_{s,cr}}{\sigma_{sr}} \frac{1}{\delta} \quad (3.2.78)$$

dove  $\delta$  è il rapporto tra la tensione nel calcestruzzo nelle relative fasi di fessurazione.

Sviluppando i prodotti, con la nominazione sopra indicata, si ha la seguente equazione di terzo grado:

$$b_s^3(kn_s - n_s) + b_s^2(2k - kn_s + n_s - n_s^2 - 1) + b_s(-2k + 1 - 3n_s) - 2 = 0 \quad (3.2.79)$$

Poiché la resistenza alla trazione del calcestruzzo e le proprietà di adesione dell'armatura rappresentano valori caratteristici, anche la distanza della fessura e il valore della larghezza della fessura possiedono tale valore. Secondo König e Tue (1991) la larghezza media della fessura  $w_m$  può essere ricavata sulla base della larghezza massima della fessura. Il fattore  $\delta$  può essere calcolato con la formula qui riportata:

$$\delta = \left( r k_1 - 1/3 \frac{3r - r^2}{k_1 - 2/3} \right)^{n_s} r \quad (3.2.80)$$

dove:

$r$  è il rapporto tra una spaziatura di fessure osservata e quella massima;

$k_1$  è il rapporto tra la tensione nell'acciaio nella fessura per il carico osservato e la tensione nell'acciaio alla fessura nel fase di formazione delle fessure.

Si assume, quindi, che il rapporto tra la larghezza media della fessura  $w_m$  e la larghezza massima  $w_{max}$  sia direttamente correlato al rapporto tra la distanza media e massima della fessura attraverso la seguente relazione:

$$\frac{w_m}{w_{max}} = r \frac{k_1 - (1/3)(3r - r^2)}{k_1 - \frac{2}{3}} \quad (3.2.81)$$

Definita l'incognita  $b_s$  si determina la tensione media di aderenza  $\tau_{bm}$  attraverso l'eq. (3.2.22). Sostituendo la definizione di lunghezza di aderenza relativa alla fase di fessurazione stabilizzata nell'Eq. (3.2.66), si ottiene:

$$w_k = \frac{2A_s \Delta \sigma_s}{\tau_{bm} \pi \varphi_S E_s} \left( \sigma_{s,cr} - (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) \frac{b_s n_s + 1}{b_s n_s + 2} \Delta \sigma_s \right) \quad (3.2.82)$$

Sostituendo l'Eq.(3.2.82) nell'Eq. (3.2.22) si ottiene: (3.2.83)

$$\tau_{bm} = \left( \frac{C}{1 + b_s n_s} \left( \frac{\varphi_S \sigma_{c,II}}{4 \rho_{s,ef} E_s} \left( \sigma_{s,cr} - \frac{(1 + \alpha_e \rho_{s,ef}) \alpha_b \sigma_{c,II}}{\rho_{s,ef}} \right) \right) \right)^{n_s} \frac{1}{1+n_s}$$

Il modello sopradescritto non si sofferma al calcolo della larghezza della fessura come la larghezza massima ottenibile, ma propone una relazione per affinarne il calcolo attraverso l'interpretazione sperimentale dei dati ottenuti nelle campagne di prove. La maggiore importanza delle larghezze massime delle fessure, per quanto riguarda la durabilità e la funzionalità delle strutture in calcestruzzo nello stato di esercizio, può essere considerata impostando una tensione  $\sigma_{b,II}$  pari al valore medio di resistenza del calcestruzzo  $f_{ctm}$ , come proposto da Schlicke (2020) e dal Model Code (1990).

Un'ulteriore considerazione viene fatta di seguito a proposito della variabile  $\tau_{bm}$ . Premesso che la variazione di lunghezza di aderenza  $l_b$  nella presente fase non è ammessa e avendo assunto nella fase fessurata stabilizzata l'ipotesi di assenza di conci con perfetta aderenza, non vi sono aree ulteriori sfruttabili dall'aderenza. Premesso che l'area di calcestruzzo effettiva  $A_{c,ef}$  e la tensione del calcestruzzo nella sezione di scorrimento nullo siano costanti all'aumentare della sollecitazione nella barra di armatura, e considerando la condizione di equilibrio descritta dall'Eq. (3.2.67), si arriva alla conclusione che la tensione media  $\tau_{bm}$  è un'ulteriore grandezza costante nella presente fase.

Un'ulteriore osservazione può essere fatta, in maniera del tutto analoga alla fase di fessurazione singola: deducendo il fattore C dalla condizione al bordo tramite l'equazione di equilibrio indefinito del concio di calcestruzzo, si ottiene una relazione che lega il valore del parametro C all'ampiezza della fessura:

$$C = \frac{A_c \sigma_{c,II}}{l_b U_s} (1 + b_s n_s) \left( \frac{w_k}{2} \right)^{-n_s} \quad (3.2.84)$$

Sostituendo nell'Eq. (3.2.22) si ottiene nuovamente l'Eq.(3.2.70) di seguito richiamata:

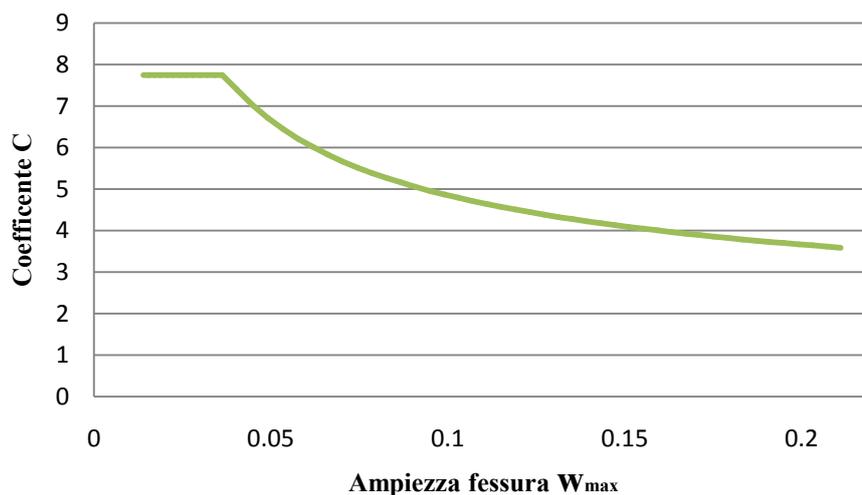
$$l_b = \frac{\varphi_s}{4} \frac{\sigma_{c,II}}{\tau_{bm} \rho_{eff}} \quad (3.2.70)$$

Di seguito viene approfondita l'Eq. (3.2.84) con le ipotesi assunte nel modello matematico. Sostituendo dei valori numerici nell'equazione analizzata si possono notare le seguenti caratteristiche:

- C è costante se  $l_b$  non è un valore costante nel rispetto dell'Eq. (3.2.70), e quindi, se  $\tau_{bm}$  non è un valore costante;
- C non è costante se  $l_b$  è valore costante nel rispetto dell'Eq. (3.2.70), e quindi, se  $\tau_{bm}$  è un valore costante.

Per le considerazioni sopra enunciate riguardo alla fase di fessurazione stabilizzata la tensione di aderenza media è costante e, quindi, C è un fattore che deve necessariamente variare per il rispetto delle condizioni di bordo.

Tuttavia, con la scelta di un coefficiente C variabile, la tensione tangenziale media non è determinata. Per sopperire la mancanza di una equazione adatta alla sua determinazione, si consideri una lunghezza di aderenza uguale alla lunghezza di aderenza nella configurazione di incipiente fessurazione stabilizzata del tirante. Si noti che ciò equivale ad assumere una tensione di aderenza media costante, in linea con le ipotesi del modello e le considerazioni fatte.



**Figura 3.8 Esempio numerico di variazione del coefficiente C con l'ampiezza della fessura massima**

La figura soprastante mostra l'andamento del coefficiente all'aumentare dell'ampiezza

della fessura massima. Si noti un plateau che rappresenta il valore costante di C solo nella fase di fessurazione singola nel rispetto dell'Eq. (3.2.41).

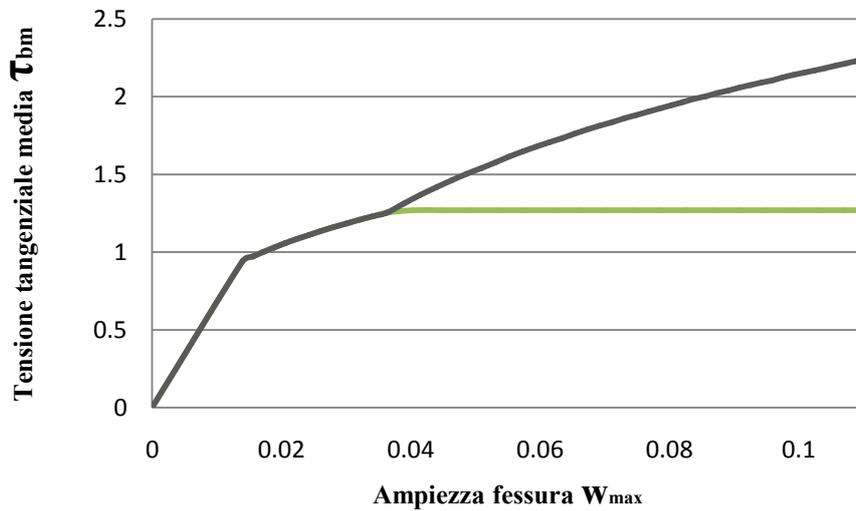


Figura 3.9 Andamento della tensione media di aderenza al crescere dell'ampiezza della fessura ottenuta con coefficiente C costante (in grigio) e C variabile (in verde).

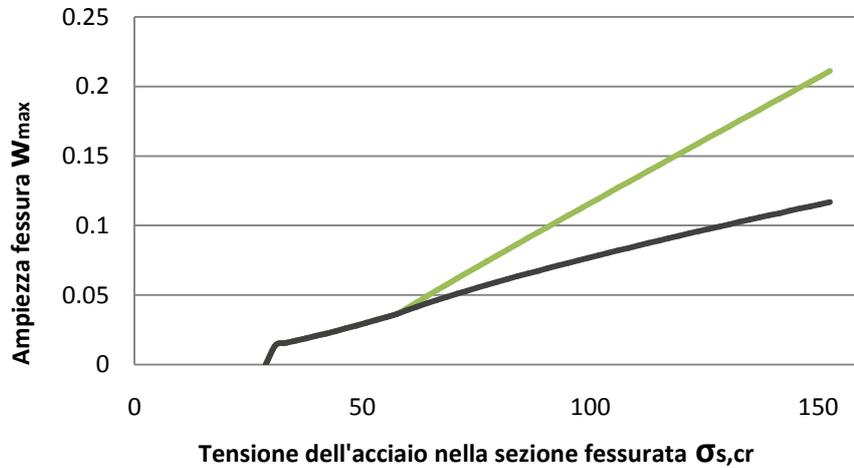


Figura 3.10 Andamento dell'ampiezza di fessura massima al crescere della forza di tiro nel tirante ottenuta con coefficiente C costante (in grigio) e variabile (in verde).

Dalla Figura 3.10 si può notare la sottostima dell'ampiezza della fessura massima calcolata con il coefficiente C pari ad una costante sperimentale. Come si può notare dalla Figura 3.9, ciò è riconducibile all'uso di una tensione di aderenza media più alta.

In modo analogo alla fase di formazione delle fessure si ottiene la tensione massima di aderenza, cioè quella alla fessura:

$$\tau_{b,max} = \frac{A_{c,ef} \sigma_{c,II}}{l_b U_s} (1 + b_s n_s) = \tau_{bm} (1 + b_s n_s) \quad (3.2.85)$$

Sostituendo, invece, l'Eq.(3.2.84) e l'Eq.(3.2.21) nell'Eq. (3.2.1) si ottiene:

$$\tau_{(x)} = \tau_{bm} (1 + b_s n_s) \left(\frac{x}{l_b}\right)^{n_s b_s} \quad (3.2.86)$$

Di seguito è mostrata la tensione di aderenza al variare della forza nel tirante, ovvero al diminuire del fattore  $b_s$ , in un esempio numerico.

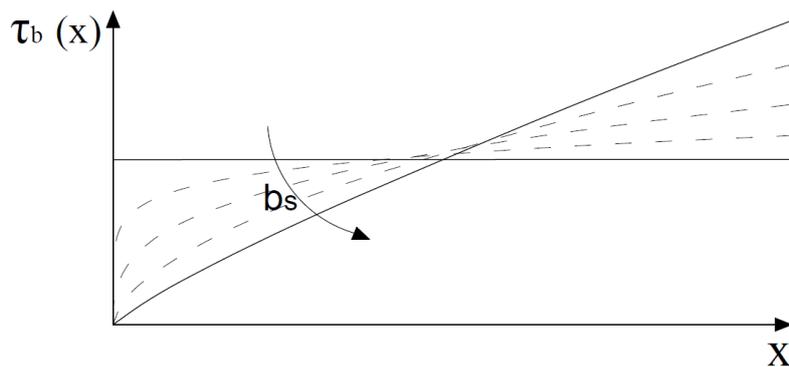


Figura 3.11 Evoluzione andamento delle tensioni di aderenza all'aumentare della forza nel tirante

### Formula per il calcolo del fattore $\alpha_v$

Scrivendo l'equilibrio di una porzione infinitesima di barra si ottiene:

$$\sigma_s A_s + d\sigma_s A_s = \tau_b(x) U_s dx + \sigma_s A_s \quad (3.2.87)$$

Sostituendo  $\tau_b(x)$  con l'Eq. (3.2.1) si ottiene:

$$d\sigma_s = \frac{4}{\varphi_s} C s_{ris}^{n_s} \left(\frac{x}{l_b}\right)^{b_s n_s} dx \quad (3.2.88)$$

Integrando l'equazione si ottiene la funzione incremento di tensione dell'armatura:

$$\Delta\sigma_s(x) = \frac{4}{\varphi_s} C_{s_{ris}}^{n_s} \frac{(x^{b_s n_s + 1})}{l_b^{b_s n_s} (b_s n_s + 1)} \quad (3.2.89)$$

Integrando la precedente equazione sulla lunghezza di trasmissione e dividendola per la stessa si ottiene l'incremento medio di tensione dell'armatura:

$$\Delta\sigma_{sm} = \frac{4}{\varphi_s} C_{s_{ris}}^{n_s} \frac{l_b}{(b_s n_s + 1)(b_s n_s + 2)} \quad (3.2.90)$$

Il valore del fattore  $\alpha_v$  viene definito come il rapporto tra le seguenti aree sottese mostrate in figura, ovvero:

$$\alpha_v = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta\sigma_{sm}}{\Delta\sigma_s(l_b)} \quad (3.2.91)$$

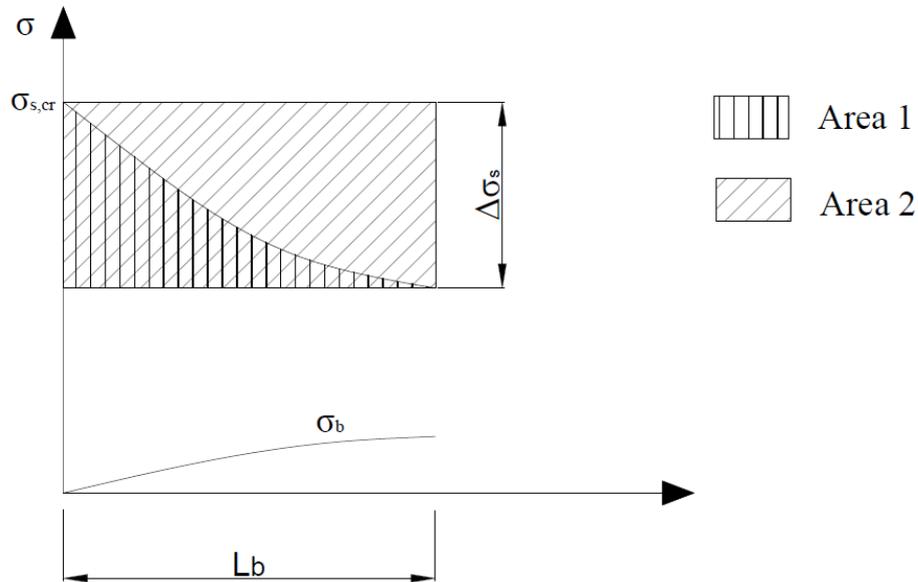


Figura 3.12 Definizione del fattore  $\alpha_v$  [König e Tue (1991)]

Sostituendo con l'Eq. (3.2.90) e l'Eq. (3.2.89) si ottiene:

$$\alpha_v = \frac{1}{b_s n_s + 2} \quad (3.2.92)$$

Il complementare di  $\alpha_v$  viene definito:

$$\alpha_b = 1 - \alpha_v = \frac{b_s n_s + 1}{b_s n_s + 2} \quad (3.2.93)$$

Si noti che il termine  $\alpha_b$  ha lo stesso significato del termine  $\beta$  del Model code.

### 3.3 Schlicke. D. (2020)

Schlicke (2020) riprende lo studio di König e Tue (1991) per creare un modello analitico di pratico utilizzo. La prima fessura viene attesa con un valore di resistenza di calcestruzzo  $f_{ct,1}$  relativamente basso, mentre le successive con resistenze superiori, ma comunque minori di  $f_{ctm}$ . Si assume che la tensione del calcestruzzo tra due fessure non sia più grande della resistenza a trazione media dello stesso:

$$\varepsilon_c(x) \leq \frac{f_{ctm}}{E_c} \quad (3.3.1)$$

La tensione introdotta nel concio di calcestruzzo tra due fessure attraverso la tensione di aderenza viene assunta di conseguenza:

$$\sigma_{c,II} \leq f_{ctm} \quad (3.3.2)$$

In base alle assunzioni fatte, considerando la larghezza di fessura maggiore possibile e, quindi, quella caratterizzata da  $\sigma_{b,II} = f_{ctm}$ , si prosegue con il riscrivere l'Eq. (3.2.70) in funzione della tensione sul calcestruzzo:

$$l_b = \frac{\varphi_s f_{ctm}}{4 \tau_{bm} \rho_{s,ef}} \quad (3.3.3)$$

Riscrivendo l'Eq. (2.3.5) e l'Eq. (3.2.22) rispettivamente nella maniera seguente:

$$\frac{w}{2} = l_b (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad (3.3.4)$$

$$C \left( \frac{W}{2} \right)^{n_s} = \tau_{bm} (1 + b_s n_s) \quad (3.3.5)$$

e sostituendole nell'Eq. (3.2.23), si ottiene:

$$\frac{1}{l_b} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) b_s (b_s - 1) \left( \frac{x}{l_b} \right)^{b_s - 2} = (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) \frac{4 \cdot \tau_{bm}}{\varphi_s E_s} (1 + b_s n_s) \left( \frac{x}{l_b} \right)^{b_s n_s} \quad (3.3.6)$$

Riscrivendo l'Eq. (3.2.64) nella maniera seguente:

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = \frac{\sigma_{s,cr} - (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) (1 - \alpha_v) \frac{f_{ctm}}{\rho_{s,ef}}}{E_s} \quad (3.3.7)$$

e sostituendo l'Eq. (3.3.7) si ha:

$$\left( \frac{A_s \sigma_{s,cr}}{A_{c,eff} f_{ctm} (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef})} (1 - \alpha_v) \right) b_s (b_s - 1) \left( \frac{x}{l_b} \right)^{b_s - 2} = (1 + b_s n_s) \left( \frac{x}{l_b} \right)^{b_s n_s} \quad (3.3.8)$$

Sostituendo la funzione  $\alpha_v$  con l'Eq. (3.2.92) si ha:

$$\left( \frac{F_s}{F_{cr}} - \frac{1 + b_s n_s}{2 + b_s n_s} \right) b_s (b_s - 1) = (1 + b_s n_s) \left( \frac{x}{l_b} \right)^{(b_s n_s - b_s + 2)} \quad (3.3.9)$$

dove:

$$F_s = A_s \sigma_{s,cr} \quad (3.3.10)$$

$$F_{cr} = A_{c,eff} f_{ctm} (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) \quad (3.3.11)$$

$F_{cr}$  Massima forza di tiro nell'armatura alla quale si può formare l'n-esima fessura;

$F_s$  Forza di tiro osservata nell'armatura.

La soluzione approssimativa per l'esponente  $b_s$  per il modello in fase di fessurazione stabilizzata è data con le seguenti condizioni al contorno:

- Al limite di formazione dell'ultima cricca ( $\frac{F_{cr}}{F_s} \rightarrow 1$ ),  $b_s$  dovrebbe assumere il valore per lo stato di formazione della cricca finale  $b_s = 2/(1 - n_s)$ ;

- Viene scelto un approccio di potenza per mappare l'andamento curvilineo della soluzione numerica dell'Eq. (3.3.9).

Premesso ciò, Schlicke (2020) propone la seguente soluzione:

$$b_s = 1 + \frac{1 + n_s}{1 - n_s} \left( \frac{F_{cr}}{F_s} \right)^{\delta(n_s)} \quad (3.3.12)$$

e i seguenti coefficienti:

$$\delta(n_s) = 1.5;$$

$$C = 0.31 R_{ck};$$

$$n_s = 0.3.$$

Quindi, l'incognita  $b_s$  può essere definita nel modo seguente:

$$b_s = 1 + 1.85 \left( \frac{F_{cr}}{F_s} \right)^{1.5} \quad (3.3.13)$$

Sostituendo il valore  $b_s$  nell'Eq. (3.2.82) si ottiene la larghezza della fessura.

Schlicke verifica la soluzione analitica su una serie di dati sperimentali di provini in calcestruzzo armato in pura tensione e pura flessione rispettivamente raccolti da Farra, B. , Jaccoud, J-P.(1993) e Rusch, H., Rehm, G (1963). La prima raccolta, verrà usata nel successivo capitolo come base di confronto tra i modelli.

Si noti che il modello di Schlicke (2020) essendo fortemente basato sul modello di König e Tue (1991), fa riferimento alle medesime considerazioni finali scritte per quest'ultimo, nel relativo paragrafo.

A seguire, viene approfondita la soluzione numerica proposta da Schlicke, confrontandola con la soluzioni dell'Eq. (3.2.79), contenuta nel modello di König e Tue. Un modo alternativo per la definizione del fattore  $k$  può essere trovato svolgendo i seguenti passaggi. Dall'Eq. (3.2.6) si può trovare la seguente espressione:

$$\frac{\sigma_{sr}}{f_{ct}} = \frac{(1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef})}{\rho_{s,ef}} \quad (3.3.14)$$

Sostituendo l'equazione trovata nell' Eq. (3.2.78) si ottiene:

$$k = \frac{\sigma_{s,cr}}{\sigma_{c,II}} \frac{\rho_{s,ef}}{(1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef})} \quad (3.3.15)$$

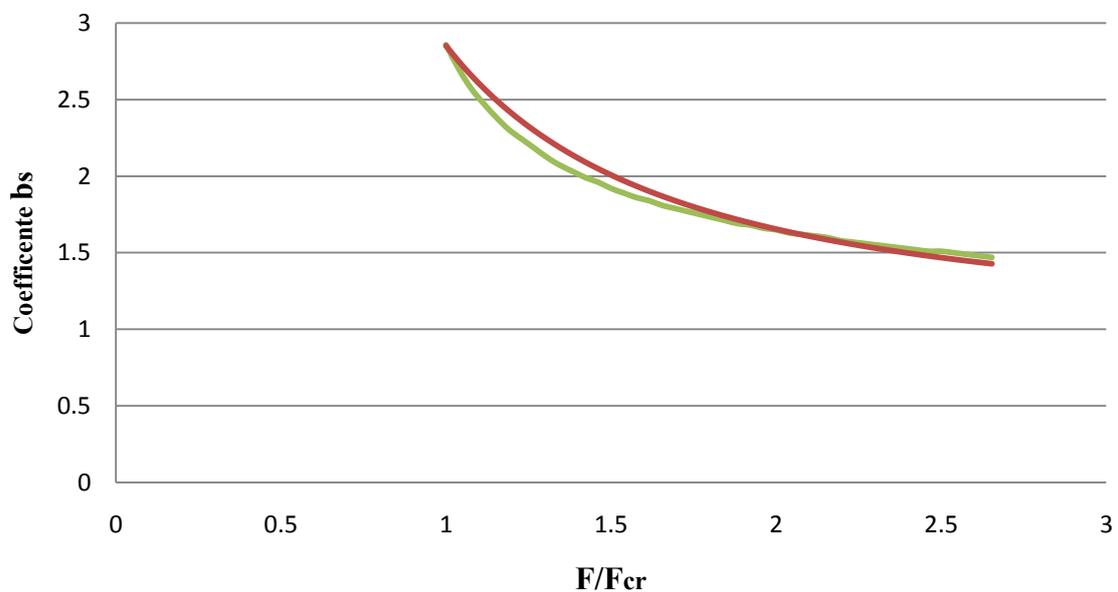
Sostituendo con le definizioni di tensione della barra alla fessura  $\sigma_{s,cr}$  e la percentuale di armatura geometrica effettiva  $\rho_{s,ef}$  si ha che:

$$k = \frac{F}{A_s \sigma_{c,II}} \frac{A_s}{A_{c,ef} (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef})} \quad (3.3.16)$$

Avendo definito  $\sigma_{c,II} = f_{ctm}$ , scambiando il termine che definisce  $F_{cr}$  tramite l'Eq. (3.3.11) si ottiene:

$$k = \frac{F}{F_{cr}} \quad (3.3.17)$$

Sostituita nell'Eq. (3.2.79) si definisce il valore del fattore  $b_s$ . Il fattore  $k$  così definito restituisce un fattore  $b_s$  compatibile con la condizione al bordo descritta. Di seguito è raffigurato un confronto numerico tra la soluzione numerica proposta da Schlicke e la soluzione di König e Tue ottenuta inserendo l'Eq. (3.3.17) :



**Figura 3.13** Coefficiente  $b_s$  ottenuto da König e Tue (1991) (in verde) e Schlicke (2020) (in rosso)

### 3.4 Il Metodo Generale

Un nuovo modello analitico per la previsione della larghezza della fessura è stato proposto dal P.G. Debernardi e Taliano M., per semplicità denominato *modello generale*. La principale caratteristica del modello consiste nel considerare l'effetto delle *fessure di Goto* descritte nel capitolo n.2 che influenzano la distribuzione di aderenza-scorrimento. Il danneggiamento delle fessure secondarie viene preso in conto attraverso l'introduzione di una distribuzione lineare decrescente attorno alla fessura principale stessa. Questo modello è stato sviluppato da Balázs (1993) sulla base della funzione di distribuzione dell'aderenza proposta nel Model Code (1990) per l'analisi del comportamento del tirante soggetto a carico monotono, sia nella fase di formazione della fessura e sia per quanto riguarda la fase di fessurazione stabilizzata. Tuttavia, sebbene lo studio di Balázs corrisponde al punto di partenza del nuovo modello generale, è stato proposto un modello alternativo nella fase della fessurazione stabilizzata.

#### Fase formazione della fessure

Balázs sviluppa il calcolo dell'ampiezza di fessura adottando la funzione di tensione di aderenza proposta nel Model code (1990) trattata nel capitolo n. 2. Di seguito, al fine del calcolo dell'ampiezza della fessura in condizioni di carichi di servizio, la tensione di aderenza è rappresentata dall'Eq. (2.2.5). Questa, inserita nell'Eq. (3.2.20), si ritrova l'equazione differenziale da risolvere nel metodo di Balázs:

$$\frac{d^2s(x)}{dx^2} = (1 + \alpha_e \rho_{s,ef}) 4 \frac{\tau_{max}}{\varphi_s E_s} \frac{s(x)^\alpha}{s_1^\alpha} \quad (3.4.1)$$

dove:

$\alpha$  è un coefficiente assunto pari a 0.25;

$\tau_{max}$  è un valore costante prescritto dalla Tabella 3.1

$s_1$  è lo scorrimento relativo al raggiungimento della resistenza di aderenza massima, valore prescritto dalla Tabella 2.1.

Per il caso di barre nervate in calcestruzzo confinato i valori mostrati nelle tabelle

sopramenzionate non variano rispetto alla versione del Model Code (1990).

Considerando le condizioni al contorno relative alla fase di formazione delle fessure, definite dall'Eq. (2.4.1) e dall'Eq. (2.4.2), Balázs (1993) risolve analiticamente l'equazione differenziale, ritrovando la seguente relazione di distribuzione degli scorrimenti  $s(x)$ :

$$s(x) = \left[ 2 (1 - \alpha)^2 \frac{\tau_{max}}{(\alpha + 1)E_s \varphi_s s_1^\alpha} (1 + \alpha_e \rho_s) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot x^{\frac{2}{1-\alpha}} \quad (3.4.2)$$

Sostituendola nell'Eq. (2.2.5) si ottiene la distribuzione delle tensioni di aderenza  $\tau_b(x)$ :

$$\tau_b(x) = \left[ 2 (1 - \alpha)^2 \frac{\tau_{max}^{1/\alpha}}{(\alpha + 1)E_s \varphi_s s_1} (1 + \alpha_e \rho_s) \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot x^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} \quad (3.4.3)$$

Dalla quale si ottengono le seguenti relazioni:

$$l_b = \left[ (\varphi_s s_1^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\sigma_{s,cr}}{(1 + \alpha_e \rho_s)K} \right]^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \quad (3.4.4)$$

$$\tau_{bm} = \frac{A_c f_{ctm}}{n_s \pi \varphi_s l_b} = \frac{\left( f_{ctm}^2 \frac{\varphi_s}{\rho_s^2} \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\left( \frac{4s_1^\alpha}{K^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}} \quad (3.4.5)$$

$$w = 2 \left[ \frac{(1 + \alpha) \varphi_s s_1^\alpha \sigma_{s,cr}^2}{8 \tau_{max} E_s (1 + \alpha_e \rho_s)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (3.4.6)$$

dove con  $K$ , espresso in MPa, si intende:

$$K = \tau_{max} 4 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \left[ \frac{2(1 - \alpha)^2 (1 - \alpha_e \rho_s) \tau_{max}}{(1 + \alpha)E_s} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (3.4.7)$$

### Fase di fessurazione stabilizzata

Raggiunta la fase di fessurazione stabilizzata si riportano le principali assunzioni considerate da Debenardi e Taliano (2016):

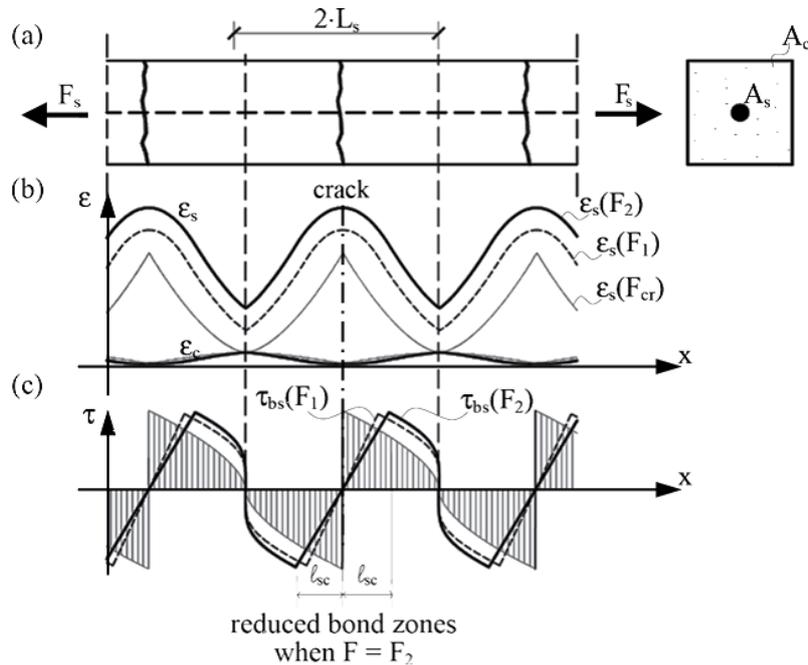
- la massima ampiezza di fessura si ha sulla fessura che dista, su entrambi i lati, di una lunghezza pari al doppio della lunghezza di trasmissione;
- la lunghezza di trasmissione è calcolata nella situazione di incipiente formazione della fessura ( $F_s = F_{cr}$ ).

Il modello proposto è centrato in particolar modo sul rispetto delle equazioni di equilibrio del concio di tirante tra una sezione di scorrimento nullo e una sezione fessurata.

$$A_{c,ef} f_{ctm} = \pi \varphi_s \int_0^{l_b} \tau(x) dx = \pi \varphi_s l_b \tau_{bm} \quad (3.4.8)$$

Quindi, compatibilmente alle assunzioni fatte, non sono ammesse variazioni dell'integrale relativo alla funzione soprascritta. Tuttavia, secondo la relazione di aderenza-scorrimento adottata dal Model Code (2010) si osserva che ad un incremento degli scorrimenti consegue un aumento di capacità di aderenza. La contraddizione che si trova nel Model Code (2010) viene affrontata da Debenardi e Taliano (2016), i quali propongono di caratterizzare la distribuzione spaziale delle tensioni di aderenza in maniera tale che non risulti monotona. Ciò consente il rispetto della relazione aderenza-scorrimento, ma allo stesso tempo dà la possibilità all'integrale soprascritto di rimanere costante all'aumentare della forza di tiro nel tirante.

Da un punto di vista sperimentale il modello rappresenta l'influenza delle fessure secondarie, o *fessure di Goto*, che secondo l'autore si presentano solo successivamente alla creazione delle fessure primarie, e quindi, intervengono nel fenomeno solo nella fase di fessurazione stabilizzata e per una porzione dell'intera lunghezza di aderenza. L'influenza di queste fessure secondarie sono state trattate anche da un punto di vista analitico da vari autori, come delineato nel precedente capitolo. Nello specifico, la funzione di distribuzione proposta da Debenardi e Taliano viene rappresentata nella figura sottostante:



**Figura 3.14** Distribuzioni di tensione di aderenza lungo l'ascissa  $x$  [Debernardi e Taliano (2016)]

In seguito si descrive la funzione di aderenza adottata dal presente modello. Iniziando a descrivere la funzione in corrispondenza della generica sezione a scorrimento nullo, si noti come la prima parte di essa sia ascendente, in linea alla legge di aderenza proposta nel Model Code (2010). Avvicinandosi alla fessura, si può individuare un punto in cui la distribuzione si trasforma in un andamento lineare decrescente con la distanza dalla sezione a scorrimento nulla. Con il termine  $l_{sc}$  si rappresenta il luogo dove la presenza delle fessure di Goto incide sulla distribuzione di aderenza. Essa viene definita affinché l'Eq. (3.4.8) sia verificata, e di conseguenza affinché l'area sottesa alla curva di distribuzione sia costante all'aumentare degli scorrimenti. La caratteristica di linearità di questo tratto non è una peculiarità importante dal punto di vista della modellazione. Per determinare la distribuzione degli scorrimenti, è necessario l'utilizzo di un metodo iterativo, risolvendo l'Eq. (3.4.1): nel primo tratto può essere usata una soluzione numerica mentre per il secondo tratto, quello interessato dalle fessure di Goto, si può usare una soluzione in forma chiusa riportata da Debernardi e Taliano:

$$s(x) = s_{\tau_{bs,max}} + \dot{s}_{\tau_{bs,max}} (x + l_{sc} - l_b) - \frac{2}{3} \frac{(1 + \alpha_e \rho_s) \tau_{bs,max}}{E_s \varphi_s} \frac{\tau_{bs,max}}{l_{sc}} [x^3 - (3l_b)x^2 + 3l_b^2 - l_{sc}2x - lb3 - 3lb l_{sc}2 + 2l_{sc}3] \quad (3.4.9)$$

$$\forall x \in [l_b - l_{sc}; l_b]$$

dove  $s_{\tau_{bs,max}}$  e  $\dot{s}_{\tau_{bs,max}}$  sono già note dalla soluzione cercata nella zona precedente.

La convergenza è ritenuta raggiunta quando il valore tentativo di lunghezza ad aderenza ridotta  $l_{sc}$  conduce ad un valore nullo di tensione sul calcestruzzo in prossimità della sezione fessurata. A convergenza ottenuta, l'ampiezza massima di fessurazione, che si ricorda essere il doppio del massimo scorrimento, si ottiene dall'Eq. (3.4.9) calcolata in  $x = l_b$ :

$$w = 2 \left[ s_{\tau_{b,max}} + \dot{s}_{\tau_{b,max}} l_{sc} + \frac{4(1 + \alpha_e \rho_s)}{3E_s \varphi_s} (x + l_{sc} - l_b) \tau_{b,max} l_{sc}^2 \right] \quad (3.4.10)$$

Debenardi e Taliano concludono, quindi, che il rapporto tra la tensione media e la resistenza a trazione del calcestruzzo non può essere assunto costante, come proposto nel Model Code (2010), ma varia in funzione della percentuale di armatura geometrica  $\rho_s$  dal diametro della barra e dalla resistenza a compressione del calcestruzzo.

### 3.5 Taliano M. (2017)

Considerando la relazione di distribuzione di aderenza presentata nel *metodo generale* descritto precedentemente, Taliano (2017) propone delle migliorie al metodo del Model Code (2010), definendo un nuovo metodo nominato *metodo migliorato*. Di seguito viene riportata la formula della lunghezza di trasmissione  $l_{b,max}$  proposta dal Model Code, e cioè l'Eq. (3.1.3) non munita del termine correttivo associata al copri ferro:

$$l_{b,max} = \frac{1}{4} \left( \frac{f_{ctm}}{\tau_{bm}} \frac{\varphi_s}{\rho_{s,ef}} \right) \quad (3.5.1)$$

La principale modifica proposta da Taliano, consiste nel considerare una tensione media di aderenza  $\tau_{bm}$  uguale a quella proposta nel *metodo generale*: inserendo quindi l'Eq. (3.4.5) nell'equazione sopra riportata si ottiene un nuovo metodo matematico per il

calcolo dell'ampiezza della fessura, che considerano la dipendenza tra scorrimenti sviluppati e tensione di aderenza come i precedenti modelli.

La figura tratta da Debenardi e Taliano (2016) mostra come il *modello generale* presenti livelli di deformazione media relativa più alti rispetto ai Model Code 2010 e Eurocode 2. Ciò si traduce in una diminuzione generale dell'effetto di *tension stiffening*, come si può notare dalla figura seguente.

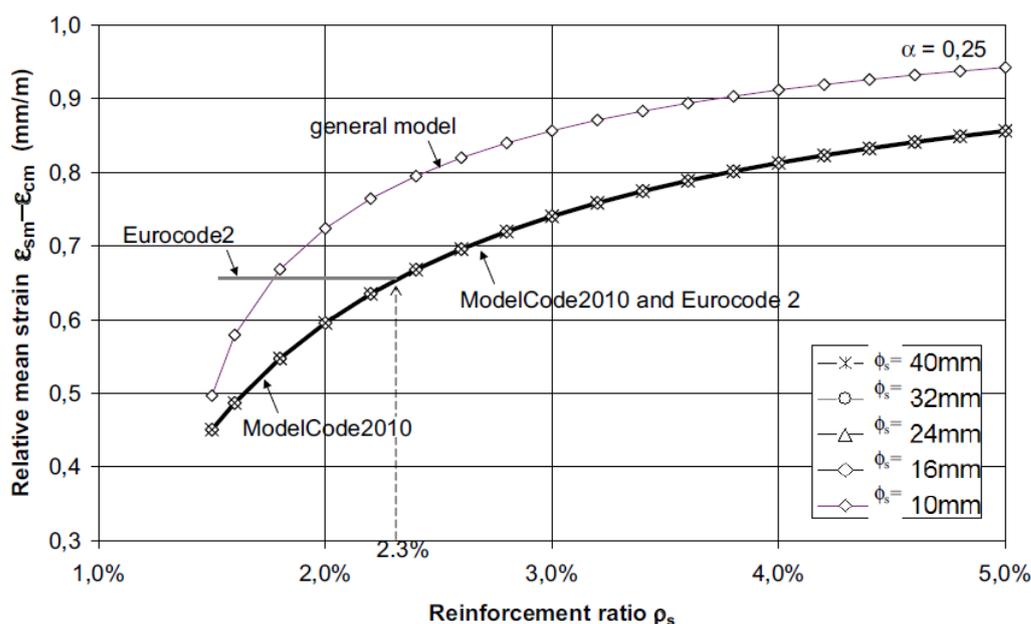


Figura 3.15. Confronto sulla deformazione media relativa al variare della percentuale geometrica di armatura [Debernardi e Taliano (2016)]

Dalla Figura 3.15 si può notare che la diretta conseguenza di un contributo minore dell'effetto di *tension stiffening*, si traduce in un aumento della deformazione media dell'acciaio, e quindi in un aumento delle ampiezze delle fessure.

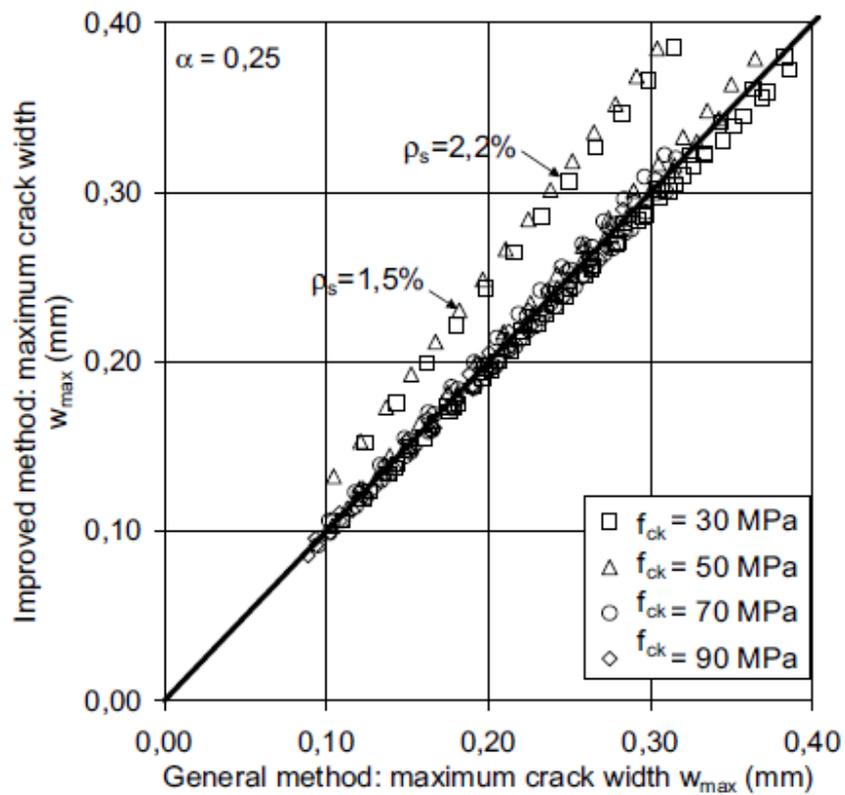
Nei modelli matematici europei, il parametro che quantifica l'effetto del *tension stiffening* è la variabile  $k_t$  che, per carichi di breve durata, nel Model Code (2010) viene proposta come  $k_t = 0.6$ . Risultando un effetto sovrastimato, Taliano adotta una seconda modifica al Model Code ponendo  $k_t = 0.45$  nell'Eq. (3.1.4) per raggiungere risultati simili al *metodo generale*.

Sostituendo il valore nell'Eq. (3.1.4), senza considerare l'effetto dovuto al ritiro, si ottiene:

$$\varepsilon_{s,m} - \varepsilon_{c,m} = \frac{\sigma_{s,cr}}{E_s} - \frac{0.45 f_{ctm} (\alpha_e \rho_{s,ef} + 1)}{E_s \rho_{s,ef}} \quad (3.5.2)$$

Il valore dell'ampiezza massima di fessurazione, risulta quindi:

$$w_{max} = \frac{1}{2} \frac{f_{ctm}}{\tau_{bm}} \cdot \frac{\varphi_s}{\rho_{s,ef}} \left( \frac{\sigma_{s,cr}}{E_s} - \frac{0.45 f_{ctm} (\alpha_e \rho_{s,ef} + 1)}{E_s \rho_{s,ef}} \right) \quad (3.5.3)$$



**Figura 3.16** Massime ampiezze di fessura sotto una forza assiale di  $F_s = 0.5 F_{yd}$  per differenti valori di percentuali geometriche di armatura e resistenza del calcestruzzo, ottenute con il *metodo generale* e il *metodo migliorato* [Debernardi e Taliano (2016)]

Con la Figura 3.16 Taliano (2016) mostra il grado di verosimiglianza raggiunto dal Model Code (2010) migliorato rispetto al *metodo generale*. Da notare che l'eventuale differenza tra i due metodi sia dettata dall'assunzione base di un effetto stiffening  $k_t$  costante nel *metodo migliorato*.

## 4. CONFRONTO DEI METODI SU DATI SPERIMENTALI

La campagna sperimentale svolta da Farra (1995) ha consegnato dei dati molto usati dalla comunità scientifica. Essa mostra i risultati di prove di carico a trazione di tiranti in C.A. prismatici di sezione 1150 x 100 x 100 mm armati con una barra ad alta resistenza S500 centrata e aderente al calcestruzzo per tutta la sua lunghezza. La barra, inoltre, fuoriesce dal tirante per 230 mm su ogni lato al fine di consentire l'introduzione di forze di trazione mediante il serraggio delle barra nelle ganasce delle macchine di prova. Per quanto riguarda i test a breve termine sono stati testati un totale di 135 provini, ovvero 14 provini per ciascun diametro considerato (10, 14, e 20 mm o  $\rho = 0.79, 1.54, 3.14\%$  rispettivamente), con calcestruzzo di resistenza variabile in un intervallo tra i 29,9 fino ai 87.1 MPa. Per ogni provino con determinati calcestruzzo e armatura sono stati testati 3 tiranti, per ottenere un'idea della dispersione statistica dei risultati. La prova viene eseguita a controllo di deformazione e i valori sperimentali dell'apertura della fessura e della distanza tra le stesse sono considerati con il loro valore medio e relativi allo stato di fessurazione stabilizzata del tirante.

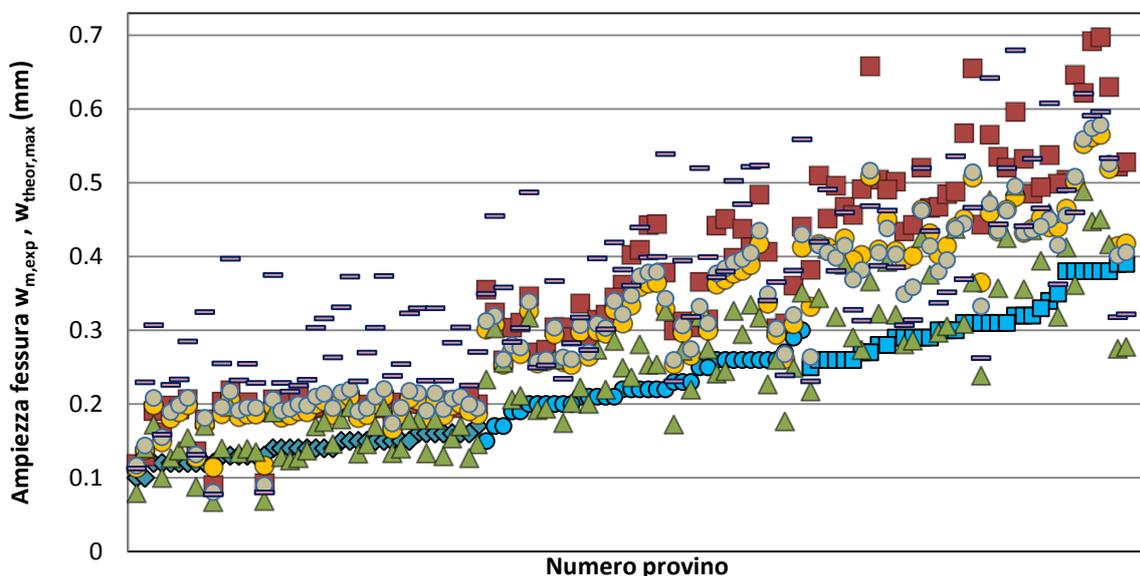
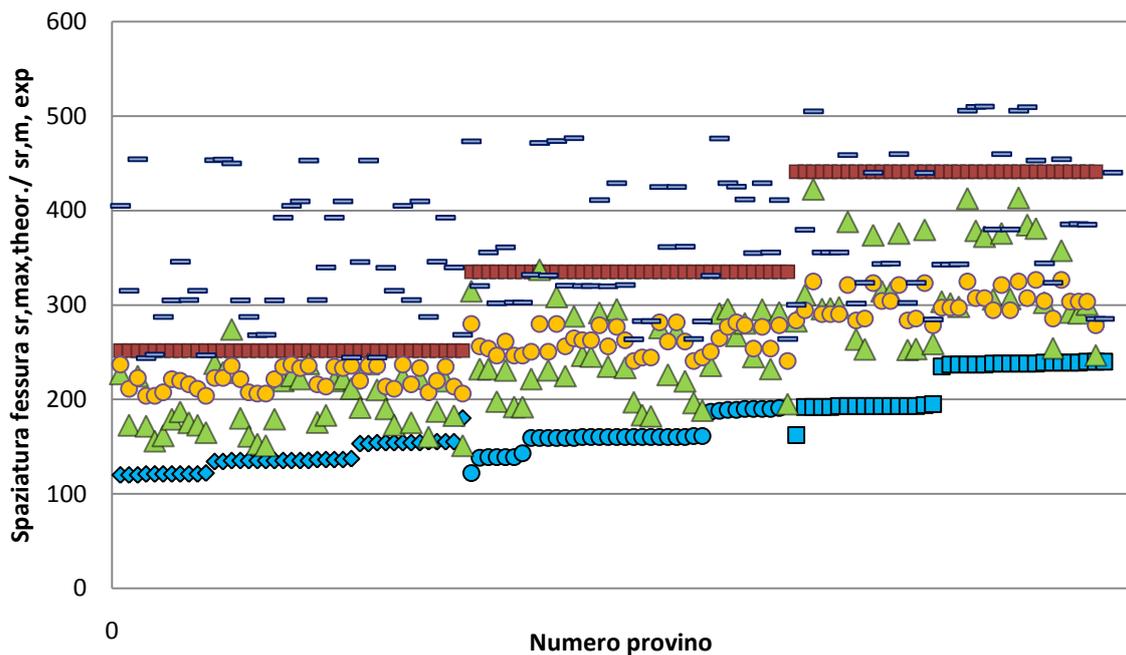


Figura 4.1. Massime ampiezze di fessure ottenute attraverso il metodo Model Code (2010) (quadrati in rosso), Schlicke (2020) (triangoli in verde), il metodo generale (cerchi in grigio), metodo migliorato (cerchi in giallo), il metodo di König e Tue con C variabile (rettangoli in viola) e per via sperimentale (in blu).

I dati riportati in figura sono ordinati con l'ampiezza di fessura sperimentale media crescente. Si possono notare i valori teorici di massima ampiezza di fessurazione che, essendo inferiori al valore medio sperimentale, sottostimano l'incognita del problema. Il modello di Schlicke (2020) ottiene valori di ampiezza di fessura massimi particolarmente vicini al valore medio di apertura sperimentale.

Un'altra osservazione si deduce dal confronto del metodo König e Tue con coefficiente C variabile e il metodo di Schlicke, che si ricorda essere basato sul metodo König e Tue con C assunto come costante sperimentale. La differenza sostanziale è che usando C variabile si trovano ampiezze di fessure quasi tutte superiori al valore medio. Viceversa si ottengono stime di ampiezze di fessure visibilmente prossime al valore medio e numerose anche al di sotto.

La spaziatura tra le fessure rappresentate in Figura 4.2 sono valori ordinati in maniera crescente con le spaziature sperimentali. Si può osservare il confronto con le interdistanze massime teoriche tra le fessure.



**Figura 4.2.** Confronto sulla spaziatura delle fessure ottenute attraverso il metodo Model Code (2010) (quadrati in rosso), Schlicke (2020) (triangoli in verde), il metodo di König e Tue con C variabile (rettangoli in viola), il metodo generale (cerchi in grigio), metodo migliorato (cerchi in arancione) e per via sperimentale (in blu).

Secondo il *CEB bulletin n.235*, i coefficienti adottati nella distribuzione locale di tensione di aderenza da Schlicke sono valori caratteristici, in particolare valori minimi. Inoltre, il bollettino afferma che König et al nel 1994 assumono i seguenti coefficienti della distribuzione di aderenza locale  $\tau_b(x)$  per calcestruzzi ad alta resistenza:

$$C = 0.16 R_{ck}$$

$$n_s = 0.2$$

Questi fattori, inseriti nell'Eq. (3.2.1), inducono a tensioni di aderenza minori rispetto al caso di calcestruzzo standard. Di seguito viene raffigurato l'effetto della proposta di modifica sulle relative ampiezze di fessurazione applicata solo al metodo di König e Tue, con C variabile.

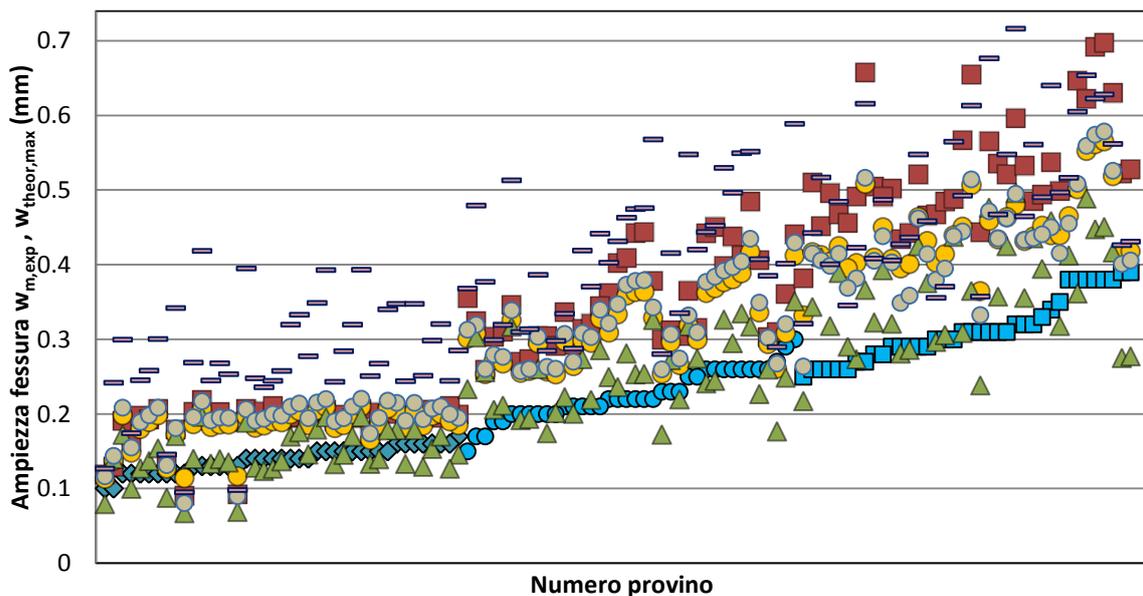


Figura 4.3 Confronto sulla spaziatura delle fessure ottenute attraverso il metodo Model Code (2010) (quadrati in rosso), Schlicke (2020) (triangoli in verde), il metodo di König e Tue con C variabile (rettangoli in viola), il metodo generale (cerchi in grigio), metodo migliorato (cerchi in arancione) e per via sperimentale (in blu).

Si noti come i punti che erano prossimi o perfino inferiori al valore sperimentale in Figura 4.1, in Figura 4.3 risultano maggiori al valore sperimentale.

Secondo il *CEB bulletin n.235*, per ottenere valori conservativi dalla distribuzione di

aderenza locale  $\tau_b(x)$ , descritta nell'Eq. (3.2.1), si possono utilizzare i seguenti coefficienti:

$$C = 0.22 f_{cm}$$

$$n_s = 0.21$$

Come si può notare dalla Figura 4.4, i valori dei coefficienti sopra indicati inducono ad un andamento più simile a quello descritto dalla prova sperimentale. Tuttavia, i coefficienti sembrano non riuscire a gestire le tensioni sviluppate nei provini con calcestruzzo ad alta resistenza, i quali risultano sviluppare tensioni di aderenza sovrastimate, e quindi ampiezze di fessure sottostimate. Di seguito viene raffigurato l'effetto della proposta di modifica sulle relative ampiezze di fessurazione, applicato solo al metodo di König e Tue con C variabile.

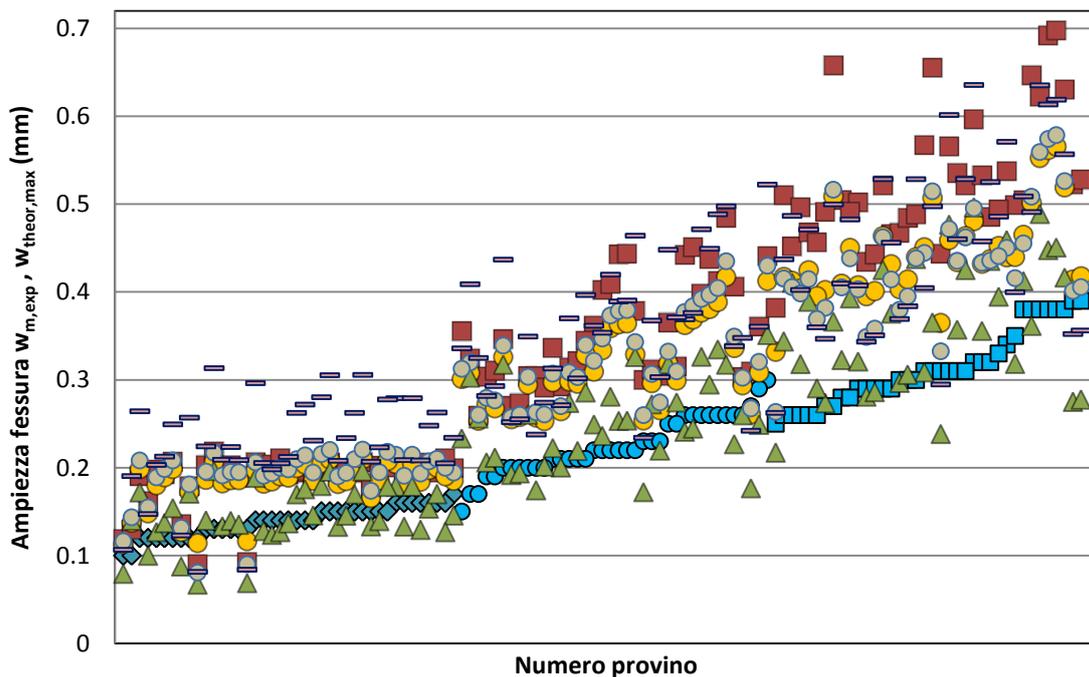


Figura 4.4 Confronto sulla spaziatura delle fessure ottenute attraverso il metodo Model Code (2010) (quadrati in rosso), Schlicke (2020) (triangoli in verde), il metodo di König e Tue con C variabile (rettangoli in viola), il metodo generale (cerchi in grigio), metodo migliorato (cerchi in arancione) e per via sperimentale (in blu).

Quindi, un ulteriore affinamento del metodo di König e Tue con C variabile si ottiene

definendo l'Eq. (3.2.1) in funzione della categoria di resistenza del calcestruzzo, come sopra mostrato e utilizzando valori di tensione di aderenza non minimi, come ritenuto da König e Tue, ma conservativi. Utilizzando i due set di coefficienti sopra dichiarati si ottiene:

$$\tau_b(x) = 0.22 f_{cm} s(x)^{0.21} \quad \text{per calcestruzzo standard} \quad (3.5.1)$$

$$\tau_b(x) = 0.16 f_{cm} s(x)^{0.20} \quad \text{per calcestruzzo ad alta resistenza} \quad (3.5.2)$$

Di seguito viene riportato il confronto sperimentale con l'affinamento del metodo appena proposto applicato al metodo König e Tue con C variabile.

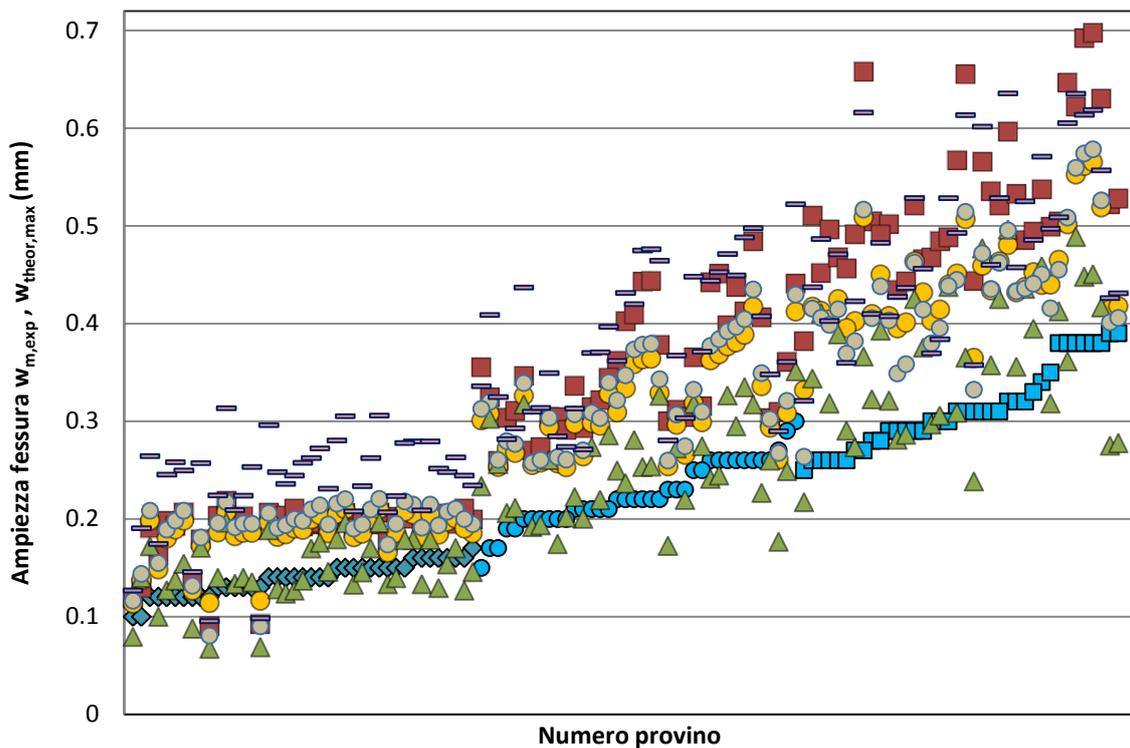


Figura 4.5 Confronto sulla spazatura delle fessure fessure ottenute attraverso il metodo Model Code (2010) (quadrati in rosso), Schlicke (2020) (triangoli in verde), il metodo di König e Tue con C variabile (rettangoli in viola), il metodo generale (cerchi in grigio), metodo migliorato (cerchi in arancione) e per via sperimentale (in blu).

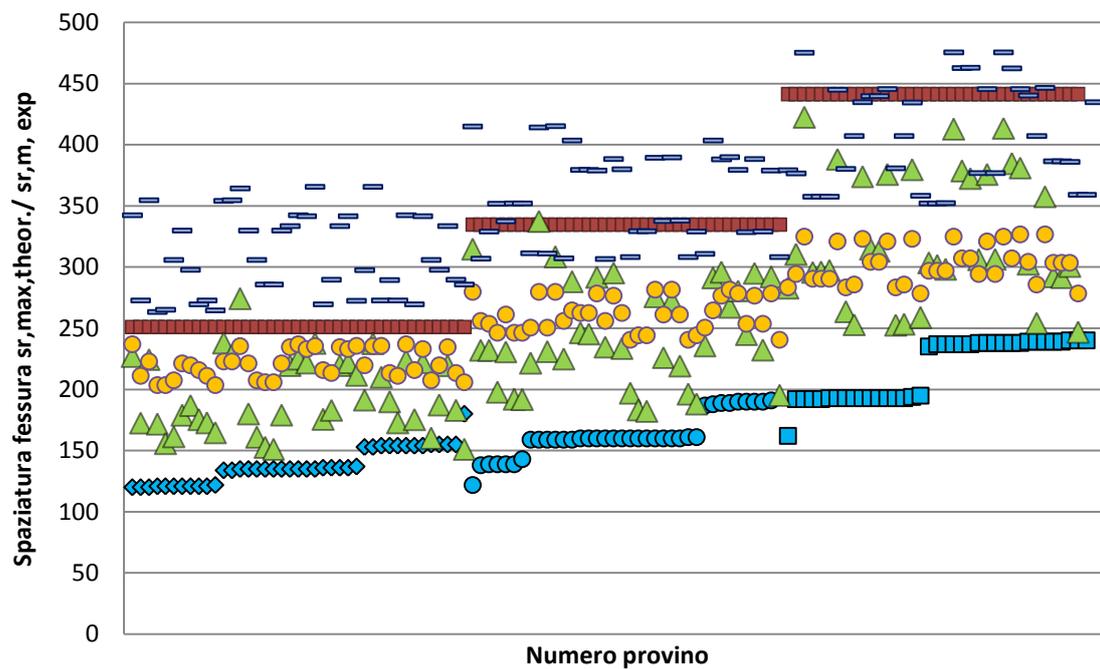


Figura 4.6 Confronto sulla spaziatura delle fessure fessure ottenute attraverso il metodo Model Code (2010) (quadrati in rosso), Schlicke (2020) (triangoli in verde), il metodo di König e Tue con C variabile (rettangoli in viola), il metodo generale (cerchi in grigio), metodo migliorato (cerchi in arancione) e per via sperimentale (in blu).

## 5. CONCLUSIONI

Nella presente tesi si è introdotto il fenomeno fisico della fessurazione descrivendone i diversi modi e le cause che innescano tale evento. La vastità di elementi che partecipano alla comparizione delle cricche e la crescente importanza che il problema pone, inducono una necessaria e drastica semplificazione nei modelli analitici usati nella pratica progettuale. In generale, un modello analitico che scompone e studia un insieme nelle sue parti procedendo dal particolare al generale, ha come caratteristiche essenziali la funzionalità, la correttezza delle ipotesi assunte, l'affidabilità rispetto ai dati sperimentali e il costo. Tuttavia, il costo della semplificazione non deve elidere alcuna peculiarità fondamentale, pena la perdita dell'obiettivo generale della modellazione.

La contraddizione evidenziata con l'adozione della distribuzione di tensione aderenza-scorrimenti, raccomandata dal Model Code (2010), è stata eliminata da Taliano (2017) con due sostanziali modifiche: la prima consiste nel considerare un fattore  $\alpha$  ridotto, passando dal valore 0.4 al 0.25; mentre la seconda ridefinisce la definizione di lunghezza di aderenza per ottenere una tensione media di aderenza costante. Così come il modello di Taliano (2017) costituisce un aumento della praticità del modello di base a cui si riferisce, il metodo proposto da Schlicke (2020) presenta una soluzione pratica del modello di König and Tue (1991), attraverso la definizione di una relazione approssimata per la definizione del  $b_s$ , nella fase di fessurazione stabilizzata.

Tuttavia, la relazione di tensione-scorrimento tratta da Noakowski introduce delle inconsistenze di modello nella fase di fessurazione stabilizzata, come descritto nel relativo capitolo. Ciò nonostante, si è proposta una soluzione per ripristinare la correttezza del modello attraverso l'uso delle condizioni al bordo, eliminando la variabilità della lunghezza di aderenza e quindi della tensione di aderenza media.

Nel confronto sui dati sperimentali dei vari modelli descritti, il modello di König e Tue nella versione di coefficiente  $C$  variabile risulta essere più conservativo degli altri modelli. Tuttavia, quest'ultimo presenta una dispersione relativamente grande se si utilizzano i valori di  $C$  ed  $n_s$  proposti da Schlicke (2020).

Ciò nonostante, adottando i coefficienti proposti dal *CEB bulletin n.235* si ottengono stime di ampiezze delle fessure conservative generalmente maggiori rispetto alle stime ottenute con gli altri metodi descritti.

## 6. BIBLIOGRAFIA

ACI 201.2R-08, "Guide to Durable Concrete", Reported by ACI Committee 201, 2008

ACI 305R-99 "Hot Weather Concreting", Reported by ACI Committee 305, 1999

Abrams D.A., "Test on bond between concrete and steel", University of Illinois bulletin, No. 15, (1913)

ASCE, "Journal of Structural Engineering/Volume 145 Issue 4", 2019

Balázs, G. L., "Cracking Analysis Based on Slip and Bond Stresses," ACI Materials Journal, V. 90, No. 4, July-Aug. 1993

Broms P., "Technique for Investigation of Internal Cracks in Reinforced Concrete Members" Journal of the American Concrete Institute, 1965

CEB, "Design manual on cracking and deformations". Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1985.

CEB-FIP, "Model Code 1990", Thomas Telford, London, 1993

CEB bulletin No. 235 "Serviceability models - Behaviour and Modelling in Serviceability Limit States including repeated and sustained loads", Progress Report, 1997

Debernardi, Pier Giorgio, and Maurizio Taliano. "An improvement to Eurocode 2 and Model Code 2010 methods for calculating crack width in RC structures." Structural Concrete 17.3, 2016

Eligehausen, R.; Popov, E. P.; and Bertero, V. V., "Local Bond Stress-Slip Relationships of Deformed Bars under Generalized Excitations," Report No.

UCB/EERC 83/23, Earthquake Engineering Research Centre, University of California, Berkeley, Berkeley, CA, Oct. 1983

Eligehausen R., Kreller H., "Querschnittsbericht zur Rißbildung in Stahl- und Spannbetonkonstruktionen", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton 393. Berlin : Beuth, 1988

Farra, B., "Influence de la résistance du béton et de son adhérence avec l'armature sur la fissuration," PhD thesis, No. 1359, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland, 1995, (in French)

fib, "Structural Concrete—Textbook on Behavior, Design and Performance, Volume 2: Basis of Design," second edition, fib Bulletin No. 52, Lausanne, Switzerland, 2010

fib bulletin N. 56, "Model Code 2010- Final Draft", , 2012

fib, "Journal of the fib Structural Concrete 14" ,No.1, 2013

Goto Y. and Otsuka K., "Experimental studies on cracks formed in concrete around deformed tension bars", Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, 1980

Hermann, Leonard R., and James V. Cox. Development of a Plasticity Bond Model for Reinforced Concrete—Preliminary Calibration and Cyclic Applications. NAVAL FACILITIES ENGINEERING SERVICE CENTER PORT HUENEME CA, 1994.

Jackson, Marie D., et al., "Mechanical resilience and cementitious processes in Imperial Roman architectural mortar." Proceedings of the National Academy of Sciences, 2014

König, G. & Tue, N., "Calculating the mean bond and steel stress in reinforced and prestressed concrete members. Darmstadt Concrete, 6", 1991

Leonhardt, Fritz. "Crack control in concrete structures." International Association for

Bridge and Structural Engineering, 1977.

Lutz L.A. e Gergely P., “Mechanism of bond and slip of deformed bars in concrete Leroy” ACI Journal, 1967

Maurizio Taliano, “An improvement to Eurocode 2 and fib Model Code 2010 methods for calculating crack width in RC structures: mathematical model and simplified method”, Nordic mini-seminar: Crack width calculation methods for large concrete structures Oslo, Norway, 2017

Portland Cement Association. “Concrete slab surface defects: Causes, prevention, repair. No. 2155” Portland Cement Association, 2001.

Portland Cement Association : <https://www.cement.org/learn/concrete-technology/durability/alkali-aggregate-reaction#>

Schlicke.D, “Crack width calculation for service life design of reinforced concrete”, fib workgroup meeting on serviceability models, Graz University of Technology, 2020

United States Nuclear Regulatory Commission 1500 - E117 - Concrete Technology and Codes - 29 , [www.nrc.govhttps://www.nrc.gov/docs/ML1215/ML12153A412](https://www.nrc.gov/docs/ML1215/ML12153A412)

U.S.A.C.E. (Department of the Army U.S. Army Corps of Engineers Washington),” Engineering and Design ARCH DAM DESIGN”, 1994

Viwathanatepa, S.; Popov, E.; and Bertero, V., “Effects of Generalized Loadings on Bond of Reinforcing Bars Embedded in Confined Concrete Blocks,” Report No. UCB/EERC-79/22, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, Berkeley, CA, 1979

Vos E., “Influence of loading rate and radial pressure on bond in reinforced concrete”, Delft University, 1983

Watstein D. and Parsons D.E., “ Width and spacing of tensile cracks in axially reinforced concrete cylinders” , Part of Journal of Research of the National Bureau of Standards, Volume 31, 1943