POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

LE EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE APPLICATE ALLO STUDIO DI ALCUNI MODELLI ECONOMICI

Relatore:

Valeria CHIADÒ PIAT

Candidato:

Alessandra DRAGONETTI

Anno Accademico 2020/2021

A Sofietta.

Indice

Introduzione **4**

1 Equazioni alle differenze **7**
1.1 *Punti di equilibrio e stabilità* 9
1.2 *Caratterizzazione della stabilità* 12
1.2.1 *Caso univariato* 12
1.2.2 *Caso multivariato* 15

2 Applicazioni economiche delle equazioni alle differenze lineari univariate di primo ordine **18**
2.1 *Soluzioni di equazioni alle differenze di primo ordine* 18
2.2 *Il modello Cobweb* 25
2.2.1 *Tipologie del modello Cobweb* 26
2.2.2 *Cobweb senza inventario* 26
2.3 *Il modello di Solow* 30
2.3.1 *Il ruolo del progresso tecnologico nella crescita della produzione* 35
2.3.2 *Il modello di Solow con due paesi* 38
2.4 *Un modello di crescita ottimale* 39
2.4.1 *Lo stato stazionario* 40
2.4.2 *Il sistema linearizzato* 41
2.4.3 *Un caso particolare istruttivo* 44
2.5 *Un modello di prezzi azionari* 46
2.5.1 *L'iperinflazione di Cagan* 48
2.5.2 *Il modello di Cagan applicato ai Bitcoin* 53

3 Applicazioni economiche delle equazioni alle differenze lineari univariate di ordine superiore al primo **56**
3.1 *Soluzioni di equazioni alle differenze di ordine p* 56
3.1.1 *Comportamenti limite delle soluzioni* 59
3.2 *Il modello di Samuelson* 65

3.3 *Il modello Cobweb con inventario* 69
3.4 *Il modello di Taylor* 74

Conclusioni **77**

Glossario **81**

Bibliografia **82**

Introduzione

L'idea di fare calcoli attraverso la ricorsione è antica quanto il calcolare stesso. Come raccontato nel documento [1], intorno al 1600 il calcolo delle differenze finite fu usato da diverse personalità, come Newton, Leibniz, Harriet, Briggs e molti altri, soprattutto per lo studio della teoria dell'interpolazione. La teoria base delle equazioni alle differenze lineari fu sviluppata nel diciottesimo secolo da de Moivre, Eulero, Lagrange, Laplace e altri, generando funzioni, prima usate da de Moivre per risolvere l'equazione di Fibonacci, e poi sfruttate da Laplace come parte del suo studio sulla teoria della probabilità.
La base per uno studio approfondito delle proprietà asintotiche delle soluzioni delle equazioni alle differenze lineari è stata posta nel 1880 da Poincare, che formalizzò il concetto di serie asintotica e mostrò anche che in condizioni favorevoli il rapporto di valori consecutivi di una soluzione deve avvicinarsi ad una radice caratteristica. Nel 1909, Perron diede una significativa estensione di questo risultato, e la teoria asintotica fu portata a un certo livello di completezza da Birkhoff e dai suoi studenti nel 1930.
L'idea di usare le equazioni delle differenze per approssimare le soluzioni delle equazioni differenziali ebbe origine nel 1769 con il metodo poligonale di Eulero, per il quale la prova della convergenza fu data da Cauchy intorno al 1840. L'urgente necessità di approssimazioni numeriche durante la prima guerra mondiale stimolò notevolmente la ricerca in questo settore e il numero di pubblicazioni esplose in seguito con lo sviluppo dei computer. Dahlquist ha avviato la teoria moderna della convergenza dei metodi multistep.
Durante gli anni '50, diversi ecologisti usarono semplici equazioni alle differenze non lineari, inclusa l'equazione logistica, per studiare il cambiamento delle popolazioni da un anno (o stagione) all'altro ponendo l'attenzione sulla stabilità dell'iterazione. Tuttavia, all'inizio degli anni '70 May studiò la varietà di comportamenti complessi esibiti dall'equazione logistica e rifletté sulla possibile relazione di questi con le fluttuazioni osservate nelle popolazioni reali. Ulteriori scoperte sulle equazioni logistiche e correlate furono presto fatte da York, Sarkovskii, Feigenbaum, e le proprietà straordinariamente in-

tricate di queste equazioni le portarono a diventare un punto focale nell'area in via di sviluppo dei sistemi dinamici caotici. L'eccitazione di queste scoperte ha attirato l'attenzione dei ricercatori che hanno cercato di applicare i risultati in campi dall'economia alla medicina.
È proprio l'applicazione in campo economico che abbiamo deciso di trattare in questi capitoli.
Nel primo capitolo è presente un'introduzione generale alle equazioni alle differenze, la loro definizione, la ricerca dei punti di equilibrio e le loro caratteristiche di stabilità sia per il caso univariato che multivariato con l'analisi della funzione logistica presa come esempio.
Il secondo capitolo presenta un'analisi di alcuni modelli economici descritti attraverso le equazioni alle differenze lineari univariate di primo ordine. Vengono prima descritte le metodologie per la ricerca delle soluzioni a queste equazioni, sia omogenee che non omogenee e poi presentati alcuni esempi. Si parte dal modello Cobweb, usato per fare un'analisi dell'equilibrio dinamico che prende in considerazione la fluttuazione dei prezzi, che in questa prima analisi, avvengono su un mercato unico e senza la possibilità di immagazzinare i beni. Il secondo modello descritto è quello di Solow, che ci mostra come il risparmio, la crescita della popolazione ed i miglioramenti tecnologici, sono fattori che influenzano la crescita di un sistema economico, inteso come un ente che produce ricchezza. Nel primo caso, senza progresso tecnologico, la crescita della ricchezza fino a livello stazionario, è causata dall'aumento di capitale. L'unico elemento che potrebbe spostare l'equilibrio e quindi sostenere ancora la crescita per un tempo limitato, è un aumento del tasso di risparmio. Mentre la crescita della popolazione porterebbe ad una diminuzione della ricchezza. Questo modello, dunque, spiega come i paesi con un tasso di crescita della popolazione più elevato hanno livelli di PIL più bassi. Ciò che invece non riesce a spiegare è la crescita prolungata della ricchezza che oggi avviene nei paesi più sviluppati e che può essere ottenuta solo con l'inclusione del progresso tecnologico tra le variabili del modello. L'ultimo modello presente in questo capitolo è quello di iperinflazione di Cagan. Il fenomeno dell'iperinflazione si presenta quando la media dei prezzi delle merci aumenta, mente il potere di acquisto della moneta diminuisce in modo accelerato. I periodi di iperinflazione di breve durata possono essere utilizzati per lo studio del rapporto tra offerta monetaria e livello dei prezzi, perché altri fattori come le variazioni della produzione in questo caso saranno trascurabili o comunque di portata estremamente inferiore. Le due soluzioni ottenute in questo caso, una operando forward e l'altra backward, dipenderanno principalmente dal tipo di aspettative dell'agente, se adattive o razionali.
Nel terzo capitolo, sulla scia del precedente, sono presenti alcuni modelli economici descritti tramite equazioni alle differenze lineari univariate di ordine

superiore al primo, in particolare ci siamo soffermati su quelle di secondo ordine. Anche qui, si parte con la ricerca delle soluzioni a questo tipo di equazioni e lo studio del loro comportamento limite e della loro stabilità, partendo dalle equazioni caratteristiche associate e dalle loro radici, che possono essere reali distinte, uguali o complesse. Successivamente, il primo modello presentato è quello di Samuelson, che affronta la teoria del ciclo economico, in questo caso, generato esclusivamente dal lato della domanda. Per l'equazione del guadagno, calcolato rispetto alle spese pubbliche e private e agli investimenti, vengono analizzati l'equilibrio e la stabilità e viene utilizzato il metodo dei coefficienti indeterminati per trovare una soluzione particolare all'equazione. Vengono inoltre discussi degli esempi numerici per mostrare meglio il comportamento del modello a seconda del valore dei coefficienti e quindi delle radici dell'equazione caratteristica associata alle risposte impulsive, che rappresentano l'effetto sull'output di uno stimolo nelle spese pubbliche. Il secondo modello riprende il modello di Cobweb trattato nel capitolo precedente, con l'aggiunta della possibilità di immagazzinamento dei beni e delle aspettative razionali che equivalgono ad una perfetta previsione. Le esigenze di stock incorporano un elemento speculativo perché i beni saranno immagazzinati se ci si aspetta che i prezzi aumentino al tempo t successivo. L'equazione di compensazione del mercato dimostra che l'offerta rimasta invenduta viene utilizzata per costituire le scorte; allo stesso modo, la domanda non può essere soddisfatta solo da beni di nuova fornitura, ma anche dal magazzino. Anche in questo caso viene utilizzato il metodo dei coefficienti indeterminati per trovare la soluzione all'equazione di secondo ordine e viene presentato un esempio numerico per mostrare come, sia il prezzo che il livello di magazzino, vengono influenzati dai fattori esogeni che agiscono sull'offerta. L'ultimo caso è rappresentato dal modello di Taylor che tratta lo scaglionamento dei contratti salariali tramite tre equazioni, che generano un'equazione alle differenze del secondo ordine. Come per i due esempi precedenti, calcoliamo l'equazione caratteristica associata, le sue radici, applichiamo il principio di sovrapposizione per ottenere la soluzione globale e il metodo dei coefficienti indeterminati per trovare la soluzione particolare.

Capitolo 1

Equazioni alle differenze

Tutto il lavoro di tesi fa riferimento ad alcune parti del libro [2]; per quanto riguarda lo studio delle equazioni alle differenze vengono presi come riferimento i libri [3] e [4].
Un'equazione alle differenze descrive l'evoluzione nel tempo di una variabile di interesse, denotata con x_t, che prende valore nello spazio degli stati $\mathbf{X}$. La maggior parte delle volte identificheremo questo spazio con $\mathbf{R}^d$, $d = 1, 2, \ldots,$ dotato della norma Euclidea, in cui d indica la dimensione del sistema. Chiameremo univariato e multivariato, rispettivamente, i casi in cui $d = 1$ e $d > 1$.
Un'equazione alle differenze è una funzione che ci dice come calcolare il valore di una variabile al tempo $t + 1$, dati i valori passati, presente e il tempo t. Nella forma più generale possiamo scriverla come:

$$F(x_{t+1}, x_t, x_{t-1}, \ldots, x_{t-p+1}, t) = 0 \tag{1.1}$$

La differenza tra il più grande e il più piccolo indice di tempo della variabile dipendente esplicitamente coinvolta, in questo caso p, è chiamato *ordine dell'equazione alle differenze*. Nella formula (1.1) il tempo appare esplicitamente come argomento della funzione F, in questo caso si parla di equazione alle differenze *non autonoma* o *non omogenea*. Nel caso in cui, invece, appare solamente come indice della variabile di stato, l'equazione è detta *autonoma* o *omogenea*. In molte applicazioni, il termine non autonomo è rappresentato da una variabile $b_t \in \mathbf{R}^d$, chiamata *endogena* o *dipendente*.
In molti casi, sarà sufficiente considerare il caso di primo ordine:

$$x_{t+1} = f(x_t, t) \tag{1.2}$$

Il sistema può essere inizializzato ad un dato t_0, che nella maggior parte dei casi coincide con lo 0 e, dato uno stato iniziale, l'equazione (1.2) determina tutti i valori seguenti di x_t, $t = 1, 2, \ldots$ tramite iterazione. Nel caso

autonomo, si ottiene:

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_1 &= f(x_0) = f(x) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x)) = f \circ f(x) = f^2(x) \\ &\dots \\ x_t &= f(x_{t-1}) = f \circ \dots \circ f(x) = f^t(x) \end{aligned}$$

Perciò il valore della variabile di stato nel periodo t è una funzione del valore iniziale x. Esplicitando questa dipendenza, il risultato dell'iterazione genera una sequenza $x_t = \varphi(t, x)$, $t = 0, 1, 2, \dots$ chiamata traiettoria. L'insieme dei valori raggiunti da una particolare traiettoria è chiamato orbita positiva ed è denotato con $\boldsymbol{O}^+(x) = \{\varphi(t, x) \,|\, t = 0, 1, 2, ...\}$. Se f è continua con inversa continua, ovvero se è omeomorfismo, si può iterare il sistema indietro nel tempo, ottenendo $x_{-1} = f^{-1}(x_0) = f^{-1}(x)$, $x_{-2} = f^{-2}(x_0) = f^{-2}(x)$,... Collezionando tutti i valori si ottiene l'orbita completa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{O}(x) &= \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\} \\ &= \{\varphi(t, x) \,|\, t \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

La tripletta $(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \varphi)$ definisce un sistema dinamico discreto che si sviluppa nel tempo $\mathbf{Z}$, nello spazio degli stati $\mathbf{X}$ con una funzione $\varphi : \mathbf{Z} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ che segue le seguenti proprietà:

- $\varphi(0, x) = x$ per tutte le $x \in \mathbf{X}$;
- $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ per tutti i $t, s \in \mathbf{Z}$ e tutte le $x \in \mathbf{X}$.

Vista come funzione di t, $\varphi(., x) = \varphi_x : \mathbf{Z} \to \mathbf{X}$ definisce una soluzione dell'equazione alle differenze. Perciò ogni funzione $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{X}$ tale che $\varphi(t)$ soddisfa l'equazione alle differenze (1.1), ovvero

$$F(\varphi(t+1), \varphi(t), \varphi(t-1), \dots, \varphi(t-p+1), t) = 0 \quad \forall t \in \mathbf{Z} \tag{1.3}$$

è chiamata soluzione dell'equazione alle differenze. Per selezionare un'unica soluzione sono necessarie condizioni al contorno (nella forma di valore iniziale e valore finale), in questo caso il modello è detto determinato, altrimenti sarà indeterminato.

1.1 *Punti di equilibrio e stabilità*

Solitamente, siamo interessati non solo a descrivere l'evoluzione nel tempo della variabile dipendente, ma vogliamo anche conoscere alcune proprietà qualitative delle soluzioni, come il loro comportamento asintotico. Consideriamo un'equazione alle differenze di primo ordine non autonoma $x_{t+1} = f(x_t, t)$. Un punto di equilibrio è definito come segue:

Definizione 1.1.1 (Punto di equilibrio)**.** Un punto $x^* \in \mathbf{X}$ nel dominio di f è chiamato punto di equilibrio o punto fisso se soddisfa l'equazione

$$x^* = f(x^*, t), \forall t \in \mathbf{Z} \tag{1.4}$$

In modo equivalente, una soluzione $\varphi(t, x^*)$ con condizione iniziale $\varphi(0, x^*) = x^*$ soddisfa $\varphi(t, x^*) = x^* \, \forall t \in \mathbf{Z}$. Di conseguenza, l'orbita di x^* consiste solo in $\boldsymbol{O}(x^*) = \{x^*\}$.
Nel caso univariato è conveniente una rappresentazione grafica dei punti di equilibrio. A questo scopo si disegna prima il grafico della funzione $y = f(x)$ nel piano (x_t, x_{t+1}) e poi la funzione identità $y = x$. Un equilibrio è la coordinata x del punto in cui il grafico di f interseca la bisettrice del primo e terzo quadrante.

A regime, una volta raggiunto un punto di equilibrio, dobbiamo chiederci cosa accade al sistema nelle sue vicinanze, per questo facciamo riferimento alla teoria della stabilità.

Definizione 1.1.2 (Stabilità)**.** Un punto di equilibrio x^* è detto:

- *stabile* se $\forall \varepsilon > 0 \, , \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\| \, x_0 - x^* \, \| < \delta_\varepsilon \quad allora \quad \| \, x_t - x^* \, \| < \varepsilon \quad \forall t > 0, \tag{1.5}$$

  o equivalentemente

$$\| \, x - x^* \, \| < \delta_\varepsilon \quad allora \quad \| \, \varphi(t, x) - x^* \, \| < \varepsilon \quad \forall t > 0.$$

  Perciò se il sistema è inizializzato ad una distanza δ_ε dall'equilibrio, tutti i valori seguenti rimarranno ad una distanza ε dal punto di equilibrio (figura 1.1).
  Se x^* non è stabile, esso è chiamato instabile (figura 1.2).

- *attrattivo* se esiste $\eta > 0$ tale che

$$\| \, x_0 - x^* \, \| < \eta \quad allora \quad \lim_{t \to +\infty} x_t = x^*, \tag{1.6}$$

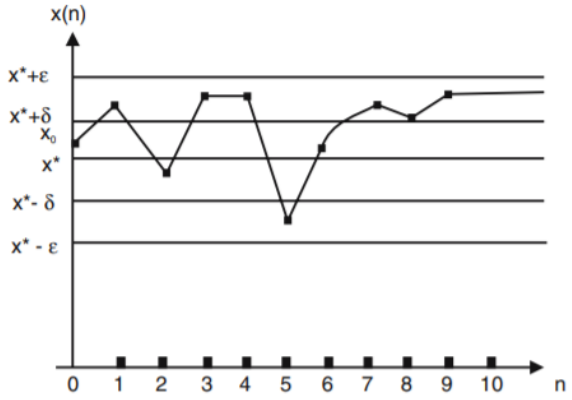


Figura 1.1: x^* punto di equilibrio stabile.

o equivalentemente

$$\| x - x^* \| < \eta \quad allora \quad \lim_{t \to +\infty} \varphi(t, x) = x^*.$$

Se $\eta = \infty$, x^* è chiamato *globalmente attrattivo*. Quindi, se il sistema è inizializzato con una distanza η dall'equilibrio, la sequenza $\{x_t = \varphi(t, x)\}$ converge a questo punto di equilibrio.

- *asintoticamente stabile* o se è stabile e attrattivo (figura 1.3). Se $\eta = \infty$, x^* è chiamato *globalmente asintoticamente stabile* (figura 1.4).

- *esponenzialmente stabile* se $\exists \delta > 0$, $M > 0$, *e* $\eta \in (0, 1)$ tale che per la soluzione $\varphi(t, x_0)$ si ha

  $$\| \varphi(t, x_0) - x^* \| \leq M\eta^t \| \varphi(0, x_0) - x^* \| \quad per\ qualunque \quad \| x_0 - x^* \| < \delta.$$

Definizione 1.1.3. Una soluzione $\varphi(t, x_0)$ è detta *limitata* se esiste una costante positiva $M < \infty$ tale che

$$\| \varphi(t, x_0) \| \leq M, \quad \forall t.$$

Analizziamo due semplici esempi per applicare le definizioni sopra enunciate.

1. L'esempio più semplice è il caso di primo ordine lineare univariato: $x_{t+1} = \phi x_t$ con $x_t \in \mathbf{R}$ e $\phi \in \mathbf{R}\{0\}$. La soluzione di questa equazione è data da $x_t = \phi^t x_0$. Per quanto riguarda i punti di equilibrio, dobbiamo distinguere due casi a seconda dei valori di ϕ: se $\phi \neq 1$ allora $x^* = 0$ è l'unico punto di equilibrio, se invece $\phi = 1$ ogni punto appartenente a $\mathbf{X}$

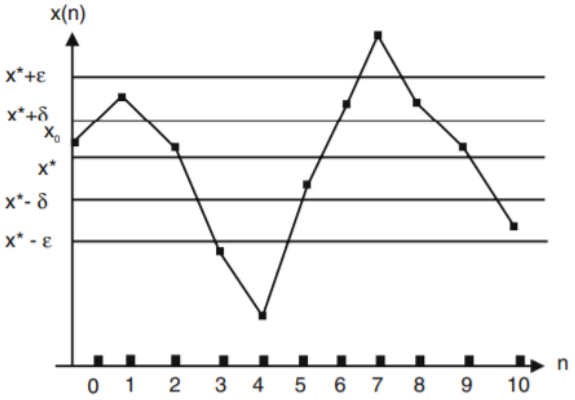


Figura 1.2: x^* punto di equilibrio instabile.

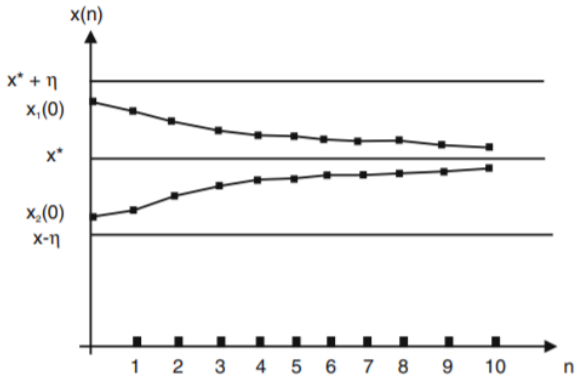


Figura 1.3: x^* punto di equilibrio asintoticamente stabile.

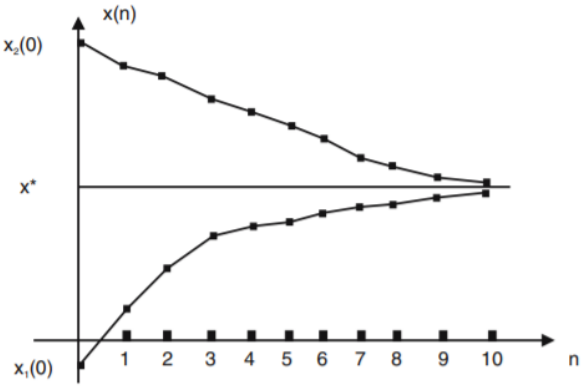


Figura 1.4: x^* punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

è un punto di equilibrio. Facendo riferimento alla forma della soluzione, possiamo dedurre che: per $\mid \phi \mid < 1$, $x^* = 0$ è un punto di equilibrio esponenzialmente stabile; per $\mid \phi \mid > 1$, x_t diverge tranne per $x^* = 0$, che quindi è un equilibrio instabile; rimane tale anche per $\phi = -1$, in cui x_t oscilla tra $-x_0$ e x_0 ed infine per $\phi = 1$, $x_t = x_0 \, \forall t \in \mathbf{Z}$.

2. Una modifica del caso precedente è data da una funzione f affine, per cui abbiamo $x_{t+1} = \phi x_t + b$ dove $b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. In quest'equazione l'unico punto di equilibrio è dato da $x^* = b/(1-\phi)$ per $\phi \neq 1$, mentre per $\phi = 1$ non esiste nessun punto di equilibrio. Tutte le soluzioni dell'equazione possono essere scritte nella seguente forma $x_t = \phi^t(x_0 - x^*) + x^*$, per cui l'analisi della stabilità di x^* è analoga all'esempio precedente, con la differenza che nel caso di $\phi = -1$, x_t oscilla tra x_0 e $-x_0 + b$.

1.2 *Caratterizzazione della stabilità*

Le definizioni appena citate definiscono la stabilità in senso intuitivo. Ora andiamo a definire dei semplici criteri applicabili, focalizzandoci per primi sul caso univariato con $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

1.2.1 *Caso univariato*

Un criterio utile per la definizione della stabilità asintotica di un punto fisso in cui f è continua ma non necessariamente differenziabile, ci viene dato dal seguente teorema.

Teorema 1.2.1 (Criterio di Stabilità Asintotica)**.** *Un punto fisso x^* di una funzione continua f è asintoticamente stabile se e solo se esiste un intervallo aperto (a, b) contenente x^* tale che $f^2(x) > x$ per $a < x < x^*$ e $f^2(x) < x$ per $x^* < x < b$.*

Nel caso di equazioni non lineari, lo studio viene fatto tramite una linearizzazione nel punto fisso. Questo permette un'analisi della stabilità locale.

Teorema 1.2.2 (Condizione sufficiente di stabilità di un'equazione non lineare)**.** *Sia x^* un punto di equilibrio di un'equazione alle differenze autonoma non lineare*

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

dove f è continua e differenziabile in x^*. Allora,

- *se* $\mid f'(x^*) \mid < 1$, *allora* x^* *è un punto di equilibrio asintoticamente stabile;*

- *se* $\mid f'(x^*) \mid > 1$, *allora* x^* *è instabile.*

Possiamo notare che il caso $\mid f'(x^*) \mid = 1$ non è trattato da questo teorema, esso coinvolge un'analisi più dettagliata con derivate di ordine superiore. In letteratura un punto fisso x^* è chiamato *iperbolico* se $\mid f'(x^*) \mid \neq 1$.

Esempio: La funzione logistica. Il modello di Malthus descrive la crescita esponenziale della popolazione in assenza di fattori che ne limitano l'incremento. Sia $y(t)$ la dimensione di una popolazione al tempo t. Se μ è il tasso di crescita della popolazione da una generazione ad un' altra, possiamo considerare il modello matematico nella forma

$$y(t+1) = \mu y(t), \quad \mu > 1.$$

Se la popolazione iniziale è data da $y(0) = y_0$, attraverso una semplice iterazione, troviamo la soluzione dell'equazione

$$y(t) = \mu^t y_0.$$

Se $\mu > 1$, $y(t)$ cresce in modo indefinito e $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \infty$. Se $\mu = 1$, allora $y(t) = y_0 \, \forall t > 0$, ciò significa che la dimensione della popolazione è costante nel tempo. Mentre per $\mu < 1$, abbiamo il $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$, quindi la popolazione si estinguerebbe. Per la maggior parte delle specie, nessuno dei casi analizzati è plausibile, poiché la popolazione cresce fino a raggiungere un certo limite superiore.

Nella realtà quindi, il fenomeno è più complesso e si deve tener conto di altri fattori. Ad esempio:

- gli organismi esauriscono le riserve di cibo o non hanno più accesso alla luce del sole o non hanno spazio sufficiente;

- le temperature scendono troppo oppure cessano le piogge;

- un maggior numero di predatori scopre la popolazione;

- i prodotti di rifiuto degli organismi cominciano a essere tossici per la stessa popolazione che li produce, ecc.

E' realistico assumere che la capacità di riproduzione decresca con l'aumentare della popolazione. Infatti, a causa delle risorse disponibili limitate,

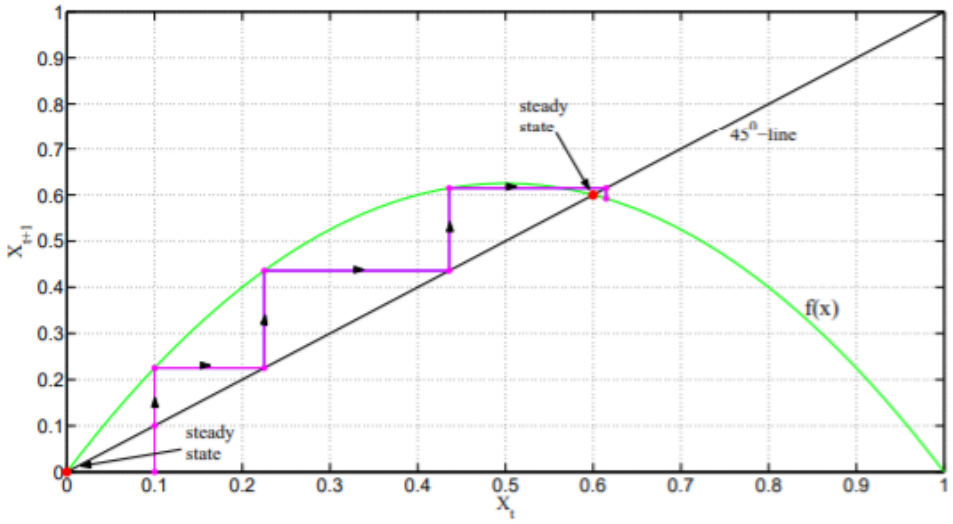


Figura 1.5: Diagramma di stabilità per la funzione logistica: $f(x) = 2.5x(1-x)$ e $x_0 = 0.1$

gli esseri viventi sono coinvolti in una competizione che è proporzionale al numero di conflitti, dato da $y(t)^2$. E' questa l'idea chiave che spinse il biologo belga Pierre F. Verhulst, nel 1838, ad introdurre una variante al modello di crescita malthusiana.

Il modello, include b, una costante di proporzionalità maggiore di 0, che rappresenta la limitatezza delle risorse al crescere della popolazione. La nuova equazione diventa:

$$y(t+1) = \mu y(t) - by^2(t).$$

Sostituendo $x(t) = \dfrac{b}{\mu} y(t)$, si ottiene

$$x(t+1) = \mu x(t)(1 - x(t)) = f(x(t)), \tag{1.7}$$

che è un'equazione alle differenze non lineare. Per cercare i suoi punti di equilibrio andiamo a studiare $f(x^*) = \mu x^*(1 - x^*) = x^*$, da cui si ottiene $x^* = 0$ e $x^* = (\mu - 1)/\mu$. La funzione $f(x)$ raggiunge un valore massimo di $\mu/4$ per $x = 1/2$.
Per quanto riguarda la stabilità, da una prima analisi grafica, mostrata in Figura 1.5 in cui è rappresentato il diagramma nel piano (x_t, x_{t+1}) per l'equazione con valori di $\mu = 2.5$ e $x_0 = 0.1$, si possono osservare due punti di equilibrio $x^* = 0$ e $x^* = 0.6$, di cui il primo instabile ed il secondo stabile. Partendo da $(x_t, 0)$ ci muoviamo verticalmente fino ad itersecare il grafico di f in $(x_t, f(x_t))$, poi ci si sposta orizzontalmente fino a colpire la bisettrice in

$(f(x_t), f(x_t)) = (x_{t+1}, x_{t+1})$ e si prosegue ripetendo questi due passi. Questo metodo ci mostra che la soluzione $\varphi(t, 0.1)$ converge e raggiunge $x^* = 0.6$ in modo circolare.
Formalmente, la stabilità dell'equazione logistica dipende dall'inclinazione di $f'(x^*) = \mu - 2\mu x^* = 2 - \mu$. Perciò, seguendo il Teorema 1.2.2, x^* è asintoticamente stabile per $1 < \mu < 3$, ovvero iniziando da un qualunque valore di $x \in (0, 1)$, $x(t)$ convergerà a x. Per valori di $\mu > 3$ emergono dinamiche più complicate, inclusi comportamenti cosiddetti caotici.

1.2.2 *Caso multivariato*

Iniziamo studiando il caso lineare autonomo

$$x_{t+1} = Ax_t \tag{1.8}$$

con $x_t \in \mathbf{R}^d$ e $A \in \mathbf{GL}(d)$. Queste equazioni alle differenze hanno zero come punto fisso e le loro soluzioni sono date da $x_t = \varphi(t, x) = A^t x$. Per questi sistemi la stabilità è strettamente correlata agli autovalori di A, soprattutto al suo raggio spettrale $\rho(A) = \{max_i(|\lambda_i|)\, i = 1, \ldots, n\}$, ovvero il più grande autovalore in valore assoluto.

Teorema 1.2.3 (Stabilità)**.** *Per il sistema lineare omogeneo in* $\boldsymbol{X} = \mathbf{R}^d$

$$x_{t+1} = Ax_t, \quad A \in \mathbf{GL}(d),$$

le seguenti affermazioni sono vere:

- *Lo zero è una soluzione stabile se e solo se* $\rho(A) \leqslant 1$ *e gli autovalori con* $\rho(A) = 1$ *sono semplici.*
- *Lo zero è una soluzione asintoticamente stabile se e solo se* $\rho(A) < 1$*. In questo caso la soluzione è anche esponenzialmente stabile.*

Definizione 1.2.1 (Matrice iperbolica)**.** Una matrice iperbolica è una matrice con nessun autovalore $\lambda = 1$. Se A è una matrice iperbolica, allora la corrispondente equazione alle differenze lineare omogenea $x_{t+1} = Ax_t$ è anche chiamata iperbolica.

Un'implicazione immediata per le matrici iperboliche è che lo zero come soluzione è l'unico punto fisso dell'equazione alle differenze lineare autonoma.

Definizione 1.2.2 (Punto fisso iperbolico)**.** Sia x^* un punto fisso di una mappa continua e differenziabile $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, allora x^* è chiamato punto fisso iperbolico se e solo se la derivata di f in x^*, ovvero la matrice Jacobiana $D_{x^*} f$, è invertibile e non ha autovalori sul cerchio unitario.

Consideriamo una matrice iperbolica A con spettro $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$, $1 \leqslant s \leqslant d$ e partizioniamolo in autovalori stabili $\sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) :\mid \lambda \mid< 1\}$ e instabili $\sigma_u(A) = \{\lambda \in \sigma(A) :\mid \lambda \mid> 1\}$. Si denoti con $\mathbf{L}^s$ spazio generato dagli autovettori corrispondenti agli autovalori in $\sigma_s(A)$ e con $\mathbf{L}^u$ quello generato dagli autovettori associati agli autovalori in $\sigma_u(A)$. La somma diretta dei due sottospazi ci dà lo spazio degli stati $\mathbf{R}^d = \mathbf{L}^s \oplus \mathbf{L}^u$.

Teorema 1.2.4 (Varietà stabile)**.** *Data un'equazione alle differenze lineare, autonoma, iperbolica*

$$x_{t+1} = Ax_t, \qquad A \in \mathbf{GL}(d)$$

valgono le seguenti proprietà:

- *Se $\varphi(t, x)$ è una soluzione con $x_0 \in \mathbf{L}^s$, allora $\varphi(t, x) \in \mathbf{L}^s \, \forall t$. In più,*

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t, x) = 0.$$

- *Se $\varphi(t, x)$ è una soluzione con $x_0 \in \mathbf{L}^u$, allora $\varphi(t, x) \in \mathbf{L}^u \, \forall t$. In più,*

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi(t, x) = 0.$$

Definizione 1.2.3 (Punto di sella)**.** Lo zero come soluzione dell'equazione alle differenze iperbolica lineare $x_{t+1} = Ax_t$ è chiamato punto di sella se esistono almeno due autovalori di A, λ_s e λ_u, tali che $\mid \lambda_s \mid< 1$ e $\mid \lambda_u \mid> 1$.

Linearizzazione. L'analogia con le equazioni alle differenze in una dimensione ci suggerisce di analizzare le proprietà di stabilità dei sistemi multivariati non lineari attraverso un'approssimazione intorno allo stato di equilibrio. Consideriamo quindi il sistema non lineare omogeneo $x_{t+1} = f(x_t)$ con $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ e punto fisso x^*, l'equazione alle differenze linearizzata è data da

$$X_{t+1} - X^* = A(X_t - X^*)$$

dove A è la derivata di f calcolata in x^*, ovvero la matrice Jacobiana delle derivate parziali $D_{x^*} f$. Diciamo che A è la linearizzazione di f se e solo se f è coniugata con A, cioè se esiste un omeomorfismo h tale che $A \circ h = h \circ f$. In questo caso possiamo dedurre le proprietà di stabilità di f da quelle di A. Quali sistemi hanno una linearizzazione e un sistema è vicino ad un altro lineare ad esso coniugato? A queste domande risponde il teorema di Hartman-Grobman.

Teorema 1.2.5 (Hartman-Grobman)**.** *Se f è una funzione continua differenziabile con un punto fisso iperbolico x^*, allora esistono gli intorni $U_1, U_2 \subset \mathbf{R}^d$ di x^* e $V_1, V_2 \subset \mathbf{R}^d$ di 0 e un omeomorfismo $h : U_1 \cup U_2 \to V_1 \cup V_2$ che coniugano localmente f ad $A = D_{x^*} f$, ovvero per ogni $x \in U_1$ $h(f(x)) = D_{x^*} f(h(x))$ oppure*

$$\begin{array}{ccc} U_1 \subset \mathbf{R}^d & \xrightarrow{f} & U_2 \subset \mathbf{R}^d \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h} \\ V_1 \subset \mathbf{R}^d & \xrightarrow[A=D_{x^*}f]{} & v_2 \subset \mathbf{R}^d \end{array}$$

Pertanto, se un punto fisso x^* è iperbolico, possiamo analizzare la sua stabilità studiando l'equazione alle differenze lineare omogenea associata, in particolare gli autovalori della matrice delle derivate parziali.

Capitolo 2

Applicazioni economiche delle equazioni alle differenze lineari univariate di primo ordine

In questo capitolo tratteremo le equazioni alle differenze in modo più concreto tramite applicazioni in ambito economico. Studieremo in particolare equazioni alle differenze lineari non autonome o autonome, di dimensione uno ($d = 1$) e ordine $p = 1$ con coefficienti costanti:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + z_t, \qquad \phi_1 \neq 0, \tag{2.1}$$

dove ϕ_1 é una costante reale. La variabile $z_t \in \mathbf{R}$ rappresenta la parte non autonoma dell'equazione che influenza l'evoluzione di x_t nel tempo ed è chiamata variabile esogena o forzante.

2.1 *Soluzioni di equazioni alle differenze di primo ordine*

Consideriamo un'equazione di primo ordine ($p = 1$) affine non omogenea:

$$x_t = \phi x_{t-1} + z_t, \qquad \phi \neq 0 \tag{2.2}$$

a cui corrisponde un'equazione lineare omogenea:

$$x_t = \phi x_{t-1}. \tag{2.3}$$

Partendo al tempo t=0 in uno stato iniziale arbitrario $x_0 = x$, tutti i valori seguenti posso essere calcolati ricorsivamente

$$
\begin{aligned}
x_0 &= x \\
x_1 &= \phi x_0 = \phi x \\
x_2 &= \phi x_1 = \phi^2 x \\
&\dots \\
x_t &= \phi x_{t-1} = \phi^t x
\end{aligned}
$$

Questa iterazione ci suggerisce di prendere

$$x_t = \phi^t x \tag{2.4}$$

come soluzione generale dell'equazione alle differenze di primo ordine lineare omogenea. L'equazione (2.4) ci fornisce un'intera famiglia di soluzioni, indicizzate dal parametro $x \in \mathbf{R}$. Ad ogni valore di x corrisponde una traiettoria $\{x_t\} = \{\phi^t x\}$. Si noti che le traiettorie di due soluzioni differenti $\varphi(t, c_1)$ e $\varphi(t, c_2)$, con $c_1 \neq c_2$, non possono incrociarsi. Supponiamo, per esempio, che esista τ tale che $\varphi(\tau, c_1) = \varphi(\tau, c_2)$, allora avremmo $\phi^\tau c_1 = \phi^\tau c_2$. Questo implicherebbe $c_1 = c_2$ poichè $\phi \neq 0$, contraddicendo l'ipotesi. Il parametro x può essere fissato mettendo una singola condizione al contorno, ipotizzando ad esempio che x_t assuma un particolare valore c in un qualche istante t_0, ovvero che $\varphi(t_0, x) = c$. In questo caso si parla di problema al valore iniziale e il valore di x può essere dedotto risolvendo l'equazione $x_{t_0} = \phi^{t_0} x = c$, che ci da $x = \phi^{-t_0} c$. La soluzione dell'equazione (2.3) può essere scritta come

$$x_t = \varphi(t, x) = \phi^{t-t_0} c = \varphi(t - t_0, c).$$

Nella maggior parte dei casi fisseremo $t_0 = 0$ e conseguentemente $x = c$.

Supponiamo di avere due soluzioni dell'equazione omogenea, $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$. La combinazione lineare di queste due soluzioni, $a_1 x_t^{(1)} + a_2 x_t^{(2)}$, $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$, è ancora una soluzione. Questo implica che l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione omogenea forma uno spazio lineare. Per definire tale spazio, è necessario introdurre le seguenti definizioni.

Definizione 2.1.1 (Dipendenza e Indipendenza Lineare)**.** La sequenza $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r)}$ con $r \geq 2$ è definita linearmente dipendente per $t \geq t_0$ se esistono delle costanti $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbf{R}$, non tutte uguali a zero, tale che

$$a_1 x_t^{(1)} + a_2 x_t^{(2)} + \dots + a_r x_t^{(r)} = 0, \quad \forall t \geq t_0$$

Se le soluzioni non sono linearmente dipendenti, sono dette linearmente indipendenti.

Definizione 2.1.2 (Insieme fondamentale di soluzioni)**.** Un insieme di r soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea è chiamato insieme fondamentale di soluzioni

Definizione 2.1.3 (Matrice di Casorati)**.** La matrice di Casorati di $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}$ con $r \geq 1$ è definita come

$$C(t) = \begin{bmatrix} x_t^{(1)} & x_t^{(2)} & \ldots & x_t^{(r)} \\ x_{t+1}^{(1)} & x_{t+1}^{(2)} & \ldots & x_{t+1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{t+r-1}^{(1)} & x_{t+r-1}^{(2)} & \ldots & x_{t+r-1}^{(r)} \end{bmatrix}$$

Queste definizioni ci permettono di affrontare la questione della dimensione dello spazio lineare dato da tutte le soluzioni all'equazione alle differenze lineare di primo ordine omogenea.

Teorema 2.1.1 (Dimensione dell'equazione lineare di primo ordine)**.** *L'insieme delle soluzioni dell'equazione alle differenze lineare di primo ordine omogenea* (2.3) *è uno spazio lineare di dimensione uno.*

Dimostrazione. Supponiamo di avere due soluzioni $x^{(1)}$ ed $x^{(12)}$ linearmente indipendenti. Secondo la definizione 2.1.1, per ogni costante a_1 e a_2, non entrambe uguali a zero,

$$a_1 x_t^{(1)} + a_2 x_t^{(2)} \neq 0$$
$$a_1 x_{t+1}^{(1)} + a_2 x_{t+1}^{(2)} \neq 0$$

Inserendo nella seconda disuguaglianza $\phi x_t^{(1)}$ per $x_{t+1}^{(1)}$ e $\phi x_t^{(2)}$ per $x_{t+1}^{(2)}$, otteniamo

$$a_1 x_t^{(1)} + a_2 x_t^{(2)} \neq 0$$
$$a_1 \phi x_t^{(1)} + a_2 \phi x_t^{(2)} \neq 0$$

o equivalentemente

$$\begin{bmatrix} x_t^{(1)} & x_t^{(2)} \\ \phi x_t^{(1)} & \phi x_t^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

Poichè questo vale per ogni a_1, a_2, non entrambi uguali a zero, il determinante della matrice di Casorati

$$C(t) = \begin{bmatrix} x_t^{(1)} & x_t^{(2)} \\ \phi x_t^{(1)} & \phi x_t^{(2)} \end{bmatrix}$$

deve essere diverso da 0. In questo caso però $\det C(t) = \phi x_t^{(1)} x_t^{(2)} - \phi x_t^{(1)} x_t^{(2)} = 0$. Questo è in contraddizione con l'assunzione iniziale di due soluzioni linearmente indipendenti. Dunque, possiamo concludere che esiste una sola soluzione indipendente. □

L'unica soluzione indipendente è quella data dall'equazione 2.4.

Per arrivare alla soluzione dell'equazione non omogenea, è invece necessario introdurre il seguente teorema.

Teorema 2.1.2 (Principio di sovrapposizione)**.** *Ogni soluzione $\phi(t, x)$ dell'equazione* (2.2) *può essere rappresentata come la somma della soluzione generale dell'equazione omogenea* (2.4)*, $x_t^{(g)}$, e la soluzione particolare dell'equazione non omogenea, $x_t^{(p)}$:*

$$x_t = x_t^{(g)} + x_t^{(p)}. \tag{2.5}$$

Nel caso di equazione di primo ordine $x_t^{(g)} = \phi^t x$, la soluzione è data da $x_t = \phi^t x + x_t^{(p)}$ e dipende ancora da alcune costanti. Per arrivare ad una soluzione unica è necessario avere delle condizioni addizionali, in forma di valori iniziali o di caratteristiche qualitative che la soluzione deve rispettare.

Presentiamo un primo esempio in ambito economico che sfrutta l'uso delle equazioni alle differenze di primo ordine.

Prestito ammortizzato. Prendiamo in esame l'evoluzione di un debito. Si denoti con D_t il debito da saldare all'inizio del tempo t. Il debito al tempo successivo $t + 1$, D_{t+1}, è ottenuto dalla seguente regola contabile:

$$D_{t+1} = D_t + rD_t - Z_t = (1 + r)D_t - Z_t \tag{2.6}$$

dove rD_t è l'interesse accumulato alla fine del periodo t, usando per semplicità un tasso di interesse costante r. Il debito contratto è riparato pagando un importo Z_t alla fine del periodo t, che include una parte di interessi e una parte di prestito iniziale. L'equazione (2.6) rappresenta un equazione alle differenze di primo ordine non omogenea con $\phi = 1 + r$. Dato il debito all'inizio del periodo 0, D_0, l'importo di debito residuo nei periodi successivi può essere calcolato ricorsivamente usando la regola contabile (2.6):

$$
\begin{aligned}
D_1 &= (1+r)D_0 - Z_0 \\
D_2 &= (1+r)D_1 - Z_1 = (1+r)^2 D_0 - (1+r)Z_0 - Z_1 \\
&\dots \\
D_{t+1} &= (1+r)^{t+1} D_0 - Z_t - (1+r)Z_{t-1} - \dots - (1+r)^t Z_0 \\
&= (1+r)^{t+1} D_0 - \sum_{i=0}^{t} (1+r)^i Z_{t-i}
\end{aligned}
$$

Si può notare come D_{t+1} è determinato dalla somma di due parti, di cui la prima $(1+r)^{t+1}D_0$ corrisponde alla soluzione dell'equazione omogenea e la seconda $-\sum_{i=0}^{t}(1+r)^i Z_{t-i}$ ad una particolare soluzione dell'equazione non omogenea, in accordo con quanto affermato dal Teorema 2.1.2. Poiché il valore iniziale del debito è dato, il valore del parametro c è bloccato e uguale a D_0.
Se i rimborsi Z_t sono costanti nel tempo, è possibile portare Z fuori dalla sommatoria ed usare la formula per delle serie geometriche, ottenendo:

$$
D_{t+1} = (1+r)^{t+1} D_0 - ((1+r)^{t+1} - 1)\frac{Z}{r}.
$$

Supponiamo che il debito debba essere completamente sanato all'inizio del periodo $T+1$, quindi la rata di rimborso costante Z può essere calcolata imponendo $D_{T+1} = 0$. Si ottiene:

$$
Z = \frac{r}{1-(1+r)^{-T-1}} D_0
$$

che diminuisce all'aumentare di T, fino ad arrivare a rD_0 per $T \to +\infty$. In questo caso il pagamento è uguale solo agli interessi accumulati in ogni periodo, perciò non c'è nessun rimborso di capitale. Il debito non viene mai ripagato ed è uguale al debito iniziale D_0 in ogni periodo. Se invece il pagamento Z è maggior di rD_0, il debito viene estinto in un tempo finito.

Ora andiamo a discutere un modo più sistematico di trovare una soluzione particolare all'equazione non omogenea (2.2). Iniziamo con l'inserire ricorsivamente l'equazione (2.2) in se stessa:

$$
\begin{aligned}
x_t &= \phi x_{t-1} + z_t \\
x_t &= \phi(\phi x_{t-2} + z_{t-1}) + z_t = \phi^2 x_{t-2} + \phi z_{t-1} + z_t \\
&\dots \\
x_t &= \phi^t x_0 + \phi^{t-1} z_1 + \phi^{t-2} z_2 + \dots + \phi z_{t-1} + z_t \\
&= \phi^t x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j z_{t-j}
\end{aligned}
$$

Prendendo il valore assoluto della differenza tra x_t e il secondo termine a destra dell'uguale, si ottiene:

$$\left| x_t - \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j z_{t-j} \right| = \mid \phi^t x_0 \mid = \mid \phi^t \mid\mid x_0 \mid$$

Quando c'è un tempo iniziale, come nell'esempio del prestito ammortizzato, fermiamo l'iterazione backward a questo istante e prendiamo $x_t^{(p)} = \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j z_{t-j}$ come soluzione particolare. Posto che in molti casi non c'è un tempo iniziale, ha senso continuare l'iterazione backward verso infinito. Poichè $\mid \phi^t \mid \to 0$ per $t \to \infty$ se $\mid \phi \mid < 1$, possiamo considerare

$$x_t^{(b)} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j z_{t-j} \qquad \mid \phi \mid < 1 \tag{2.7}$$

come soluzione particolare dell'equazione (2.2), purché la sommatoria sia ben definita. Questo accade sicuramente se $\{z_t\}$ è una sequenza limitata, in particolare se z_t è costante e uguale a z. La soluzione in questo caso diventa:

$$x_t^{(b)} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j z = \frac{z}{1-\phi}, \qquad \mid \phi \mid < 1.$$

Il requisito che z_t rimanga limitato può essere rilassato se, per esempio, z_t stesso soddisfa l'equazione alle differenze omogenea $z_t = \psi z_{t-1}$, che implica $z_t = \psi^t c$ per qualche $c \neq 0$. Inserendo questa nell'equazione (2.7), si ottiene:

$$x_t^{(b)} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \psi^{t-j} c = \psi^t \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\phi}{\psi}\right)^j c$$

che converge se e solo se $\mid \frac{\phi}{\psi} \mid < 1$. Questo ci mostra che sono richieste condizioni addizionali a seconda della variabile esogena, per far si che la soluzione $x_t^{(b)}$ sia ben definita.
Se consideriamo il caso $\mid \phi \mid > 1$, l'iterazione precedente non è più applicabile perché la soluzione nell'equazione (2.7) non è più ben definita, nemmeno per valori di z costanti. Un modo per risolvere questo problema è usare l'iterazione forward, da cui abbiamo:

$$\begin{aligned} x_t &= \phi^{-1} x_{t+1} - \phi^{-1} z_{t+1} \\ &= \phi^{-1}(\phi^{-1} x_{t+2} - \phi^{-1} z_{t+2}) - \phi^{-1} z_{t+1} = \phi^{-2} x_{t+2} - \phi^{-2} z_{t+2} - \phi^{-1} z_{t+1} \\ &\dots \\ &= \phi^{-h} x_{t+h} - \phi^{-1} \sum_{j=1}^{h} \phi^{-j+1} z_{t+j} \quad \textit{per } h \geq 1. \end{aligned}$$

Prendendo il valore assoluto della differenza tra x_t e il secondo termine a destra dell'uguale, si ottiene:

$$\left| x_t + \phi^{-1} \sum_{j=1}^{h} \phi^{-j+1} z_{t+j} \right| = |\phi^{-h} x_{t+h}| = |\phi^{-h}||x_{t+h}|.$$

Se non c'è un istante di tempo finale, ovvero per $h \to \infty$, poiché $|\phi| > 1$, la parte destra dell'equazione converge a zero, posto che x_{t+h} rimanga limitato. Questo ci suggerisce la soluzione particolare:

$$x_t^{(f)} = -\phi^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j+1} z_{t+j}, \qquad |\phi| > 1. \tag{2.8}$$

Anche in questo caso è necessario che la sommatoria sia ben definita e ciò è garantito se, per esempio, la sequenza $\{z_t\}$ è limitata.
Infine, facciamo alcune considerazioni per $|\phi| = 1$, per cui né l'iterazione backward, né la forward portano ad una soluzione particolare ben definita. In questo caso o non esistono punti di equilibrio, come per $\phi = 1$, oppure il punto di equilibrio esiste ma è instabile, per $\phi = -1$, con la soluzione x_t che oscilla tra x_0 e $-x_0 + z$.

Per riassumere, assumendo la serie $\{z_t\}$ limitata, consideriamo due rappresentazioni delle soluzioni generali, la prima ottenuta tramite un'iterazione backward e la seconda con una forward:

$$x_t = \phi^t x + x_t^{(b)}, \qquad dove \quad x_t^{(b)} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j z_{t-j}$$

$$x_t = \phi^t x + x_t^{(f)}, \qquad dove \quad x_t^{(f)} = -\phi^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j+1} z_{t+j}$$

A seconda del valore di ϕ possiamo distinguere tre casi:

$|\phi| < 1$: la soluzione backward è asintoticamente stabile. Qualsiasi deviazione di x_t da $x_t^{(b)}$ svanisce nel tempo, indipendentemente dal valore di x scelto, infatti $\lim_{t\to+\infty} |x_t - x_t^{(b)}| = \lim_{t\to+\infty} |\phi^t x| = |x| \lim_{t\to+\infty} |\phi^t| = 0$. La soluzione forward, spesso, non ha significato, perché $x_t^{(f)}$ non è ben definita.

$|\phi| > 1$: entrambe le soluzioni hanno un comportamento esplosivo a causa del termine ϕ^t. L'unica soluzione che rimane limitata è data $x = 0$, che implica $x_t = x_t^{(f)}$.

$|\phi| = 1$: nessuna delle due soluzioni converge per $z_t \neq 0$.

La soluzione più appropriata dipende dal problema economico preso in considerazione, in particolare, le condizioni al contorno richiedono informazioni più precise e non possono essere determinate in modo generale.

2.2 *Il modello Cobweb*

La fluttuazione dei prezzi degli ortaggi è normale nel mercato economico. Come descritto anche nei documenti [5] e [6], il livello del prezzo e le sue variazioni non solo hanno un'influenza significativa sugli agricoltori e i consumatori, ma un prezzo ragionevole e stabile ha anche un effetto insostituibile sul funzionamento sicuro del mercato agricolo. Negli anni 30, il modello Cobweb è stato sviluppato osservando i cicli di produzione ricorrenti e i prezzi di particolari materie prime facendo riferimento ad un mercato agricolo unico. Questo modello ha difficoltà a spiegare le fluttuazioni irregolari osservate nei dati reali, che richiedono l'analisi di fattori incerti o stocastici come buone o cattive condizioni atmosferiche o fattori complicati come ritardi di produzione multiperiod. La letteratura recente, che tiene conto degli sviluppi nelle dinamiche economiche non lineari, dimostra che il modello Cobweb può generare fluttuazioni irregolari del prezzo o della produzione se la curva della domanda e/o la curva dell'offerta hanno forti non linearità (Homes, 1994). Questi risultati dunque, indicano che fluttuazioni irregolari possono derivare, oltre che da fattori esogeni come cambiamenti climatici o disordini potici, anche dal funzionamento intrinseco di fattori economici puri nel modello deterministico Cobweb, in cui le aspettative dei produttori in merito ai prezzi futuri su cui basare la loro offerta, si fondano sulle osservazioni dei prezzi precedenti, che possono anche essere affette da un errore dovuto all'osservazione solo dei dati del recente passato.
La teoria di Cobweb è quindi un tipo di analisi dell'equilibrio dinamico che prende in esame la variazione del prezzo di mercato e del rendimento e si propone di spiegare l'impatto dell'uno sull'altro quando la domanda e l'offerta di alcune merci diventano squilibrate. I principali prodotti studiati nella teoria di Cobweb hanno bisogno di un lungo ciclo di produzione che non può essere modificato a metà strada fino al termine del processo. Di conseguenza la variazione del prezzo di mercato può solo influenzare la produzione nel ciclo successivo.

2.2.1 *Tipologie del modello Cobweb*

1. **Cobweb convergente**
   Quando l'elasticità dell'offerta è inferiore a quella della domanda ($E_s < E_d$), l'entità dell'effetto della variazione del prezzo di mercato sui volumi dell'offerta sarà inferiore a quella della domanda. In questo caso, l'effetto della fluttuazione dei prezzi sulla produzione sarà sempre più debole e il range di oscillazione del prezzo e del rendimento sarà più piccolo andando spontaneamente verso l'equilibrio, come mostrato nel grafico di Figura 2.1.

2. **Cobweb divergente**
   Quando l'elasticità dell'offerta è superiore a quella della domanda ($E_s > E_d$), la variazione del prezzo di mercato avrà un'influenza maggiore sui volumi dell'offerta rispetto alla domanda. In questo caso, l'effetto della fluttuazione dei prezzi sulla produzione sarà sempre più forte e il range di fluttuazione del prezzo e del rendimento sarà sempre più grande allontanandosi dal punto di equilibrio, come illustrato in Figura 2.2.

3. **Cobweb chiuso**
   Quando l'elasticità dell'offerta uguale all'elasticità della domanda ($E_s = E_d$), l'influenza dell'evoluzione dei prezzi di mercato sulla quantità offerta è uguale a quella della quantità richiesta. In questa occasione, il prezzo e il volume della produzione subiscono la stessa fluttuazione intorno al punto di equilibrio in loop infinito, come mostrato in Figura 2.3.

2.2.2 *Cobweb senza inventario*

Il modello, nella sua forma più semplice, analizza le fluttuazioni dei prezzi a breve termine in un mercato unico e senza la possibilità di immagazzinare i beni. Le ipotesi alla base sono le seguenti:

- l'offerta nell'istante t, S_t, è una funzione lineare del prezzo nel periodo precedente P_{t-1}, che aumenta all'aumentare del prezzo;

- la domanda nell'istante t, D_t, è una funzione lineare del prezzo nello stesso periodo P_t, che diminuisce all'aumentare del prezzo;

- in ogni istante, il prezzo di mercato è determinato equiparando domanda e offerta.

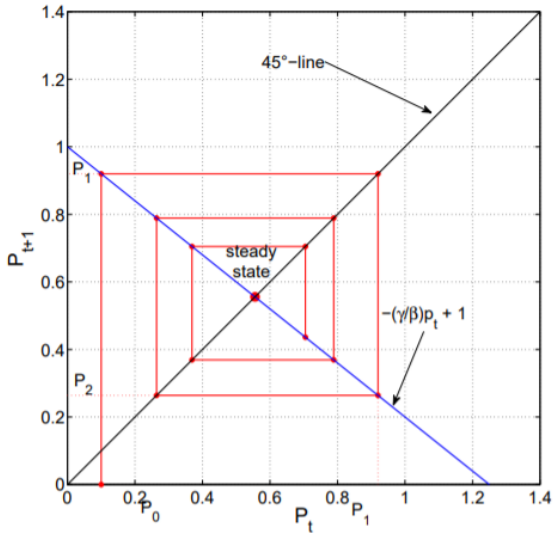


Figura 2.1: Modello di Cobweb convergente

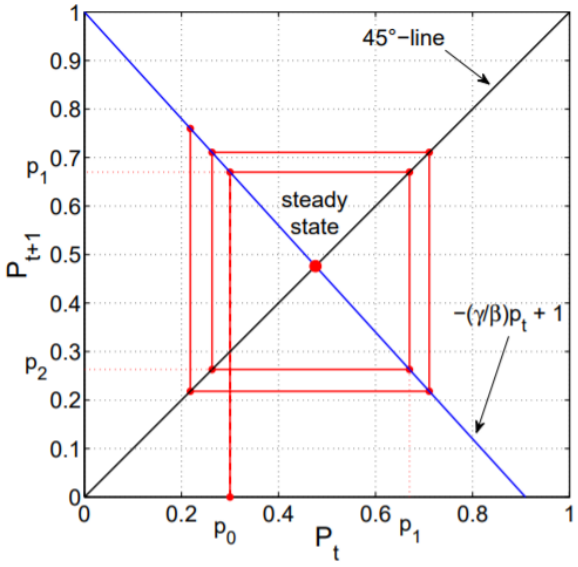


Figura 2.2: Modello di Cobweb divergente

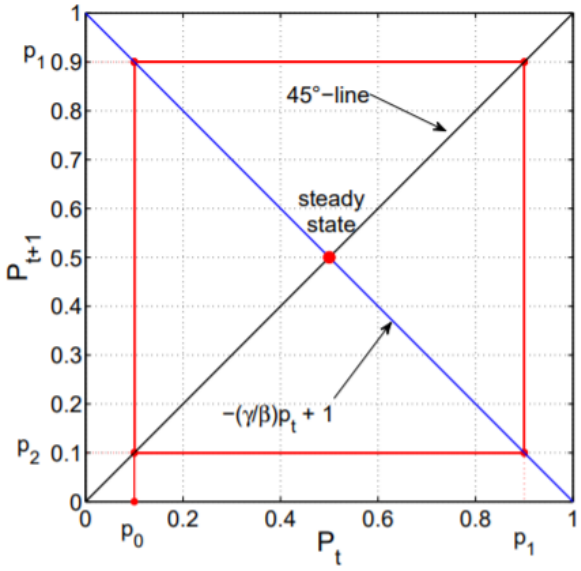


Figura 2.3: Modello di Cobweb chiuso

Secondo le ipotesi di cui sopra, un modello Cobweb può essere presentato con le tre seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} D_t &= a - \beta P_t \\ S_t &= u + \gamma P_{t-1} \\ D_t &= S_t \end{aligned}$$

in cui a, β, u, γ sono costanti positive. In particolare, la costante β rappresenta la sensibilità dei consumatori ai prezzi, mentre γ rappresenta la sensibilità dell'offerta ai prezzi. L'inclinazione della curva di domanda è negativa perché un aumento di una unità di prezzo, produce una diminuzione di β unità nella domanda. Analogamente, un aumento di una unità di prezzo provoca un aumento di γ unità nell'offerta, producendo un'inclinazione positiva per questa curva. Dalle tre equazioni di partenza, possiamo ricavare un'unica espressione per descrivere il modello di Cobweb:

$$a - \beta P_t = u + \gamma P_{t-1} \tag{2.9}$$

da cui:

$$P_t = \Big(- \frac{\gamma}{\beta} \Big) P_{t-1} + \frac{a - u}{\beta} \tag{2.10}$$

Per trovare la traiettoria dei prezzi, iniziando da $P = P_0$, dobbiamo trovare una soluzione per l'equazione alle differenze di primo ordine (2.10).

Possiamo procedere iterando:

$$\begin{aligned}
P_t &= \Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)P_{t-1} + \frac{a-u}{\beta} \\
&= \Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)\Big[\Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)P_{t-2} + \frac{a-u}{\beta}\Big] + \frac{a-u}{\beta} = \Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)^2 P_{t-2} + \frac{a-u}{\beta}\Big(1-\frac{\gamma}{\beta}\Big) \\
&= \dots \\
&= \Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)^t P_0 + \frac{a-u}{\beta}\Big[1 + \Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big) + \Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)^2 + \cdots + \Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)^{t-1}\Big] \\
&= \Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)^t P_0 + \frac{a-u}{\beta} \cdot \frac{\Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)^t - 1}{\Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big) - 1} \\
&= \Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)^t P_0 + \frac{a-u}{\beta+\gamma}\Big[1 - \Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)^t\Big] \\
&= \Big(P_0 - \frac{a-u}{\beta+\gamma}\Big)\Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)^t + \frac{a-u}{\beta+\gamma}.
\end{aligned}$$

L'equazione (2.9) è utile anche per calcolare il prezzo all'equilibrio $P_e = P_t = P_{t-1}$ che si ottiene dall'intersezione delle curve di domanda e offerta e rappresenta l'unico punto fisso di (2.10)

$$P_e = \frac{a-u}{\beta+\gamma}$$

che sostituito nella soluzione appena trovata ci da:

$$P_t = (P_0 - P_e)\Big(-\frac{\gamma}{\beta}\Big)^t + P_e \tag{2.11}$$

Dall'analisi di questa soluzione emergono tre casi:

- se $\gamma < \beta$, il prezzo si muoverà intorno al prezzo di equilibrio, la fluttuazione diventerà sempre più piccola e infine convergerà verso il punto di equilibrio. Perciò per $t \to \infty$, $P_t \to P_e$, abbiamo quindi un punto di equilibrio stabile.

- se $\gamma > \beta$, il prezzo si muoverà intorno al prezzo di equilibrio, la fluttuazione diventerà sempre più grande e non convergerà mai al punto di equilibrio. Perciò per $t \to \infty$, $P_t \to \infty$, con un equilibrio instabile.

- se $\gamma = \beta$, al crescere del tempo il prezzo si muoverà intorno al prezzo di equilibrio, mantenendo sempre la stessa distanza da esso. Si ha che per $t \to \infty$, indipendentemente dal valore iniziale, P_t oscillerà sempre tra P_0 e $P_1 = -P_0 + \frac{a-u}{\beta}$.

La teoria di Cobweb impone quindi al produttore di tenere d'occhio i prezzi reali nel periodo precedente su cui basare la produzione successiva della quantità di prodotto, di evitare la crescita cieca della produzione successiva esclusivamente perché il prezzo del prodotto è superiore al prezzo di equilibrio e infine di studiare attentamente le relazioni tra le variazioni dei prezzi e quantità prodotta, analizzare correttamente l'andamento dei prezzi sul mercato, e poi razionalmente prendere decisioni sulla scala di produzione.

2.3 *Il modello di Solow*

Anche se questo capitolo si occupa delle equazioni alle differenze lineari o affini, il comportamento locale delle equazioni alle differenze non lineari può essere studiato linearizzando l'equazione nel punto fisso ed applicando il Teorema 1.2.2.
A questo proposito un esempio è rappresentato dal modello di Solow, descritto anche nei documenti [7], [8], [10]. Conosciuto anche come modello di Solow-Swan, prende il nome dai due economisti Robert Solow e Trevor Swan che diedero vita a questo famosissimo modello, vincitore del premio Nobel nel 1956. Il modello di Solow-Swan dimostra come il risparmio, che determina l'accumulazione di capitale, la crescita della popolazione, che incide sulla forza lavoro, ed i miglioramenti tecnologici, sono i fattori che influenzano la crescita di un sistema economico. Per sistema economico, dunque, si intende un ente che produce ricchezza Y_t sulla base di alcuni input, che possono essere, ad esempio, il capitale K_t e il lavoro L_t. Il capitale K_t rappresenta la somma in valore di tutti i macchinari, gli impianti, gli uffici, ecc...; in questo contesto ciascun "bene capitale", cioè strumentale alla produzione, ha il medesimo ruolo nel processo produttivo. Il lavoro L_t è inteso come numero totale di occupati, senza distinzione in base all'esperienza professionale, alle conoscenze tecniche o al tipo di impiego. Una versione semplice di questo modello descrive un'economia chiusa senza progresso tecnologico, in cui viene utilizzata una funzione di produzione neoclassica $Y_t = F(K_t, L_t)$. Questa funzione di produzione è definita nell'ortante non negativo di $\mathbf{R}^2$ ed è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

- è due volte differenziabile;
- ha derivate marginali strettamente positive: $\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0$ e $\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0$;

- ha derivate seconde marginali strettamente negative: $\dfrac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0$ e $\dfrac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0$;
- ha rendimenti di scala costanti, ovvero se aumentiamo di una certa quantità sia il lavoro che il capitale, avremo un uguale aumento della produzione: $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L)\ \forall \lambda > 0$;
- soddisfa le condizioni di Inada:

$$\lim_{K\to+\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0, \quad \lim_{L\to+\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0$$
$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = +\infty, \quad \lim_{L\to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = +\infty.$$

Le condizioni di Inada di solito non sono elencate tra le proprietà di una funzione di produzione neoclassica, tuttavia, risultano necessarie per garantire uno stato stazionario strettamente positivo. L'esempio classico per una funzione di produzione con queste proprietà è quello di Cobb-Douglas, per cui $F(K,L) = AK^{1-\alpha}L^{\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$ esponente che rappresenta le quote di produzione imputabili a ciascun fatto e $A > 0$ che indica lo stato della tecnologia. Le proprietà di cui sopra hanno due importanti implicazioni riassunte dai seguenti lemmi.

Lemma 2.3.1. Sia F una funzione di produzione neoclassica descritta dalle proprietà sopra elencate, allora entrambi gli input sono essenziali, ovvero $F(K,0) = 0$ e $F(0,L) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che $Y \to \infty$ per $K \to \infty$, allora per il Teorema di De l'Hopital e le condizioni di Inada, abbiamo:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{Y}{K} = \lim_{K\to\infty} \frac{\partial Y/\partial K}{1} = \lim_{K\to\infty} \frac{\partial Y}{\partial K} = 0.$$

Se invece, Y rimane finito quando $K \to \infty$, otteniamo immediatamente:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{Y}{K} = 0.$$

Il rendimento di scala costante implica che, per $L > 0$ fissato,

$$\lim_{K\to\infty} \frac{Y}{K} = \lim_{K\to\infty} F(1, L/K) = F(1,0) = 0.$$

E quindi,

$$F(K,0) = KF(1,0) = 0$$

Gli stessi passaggi vengono seguiti per dimostrare $F(0,L) = 0$. □

Lemma 2.3.2. Sia F una finzione di produzione neoclassica descritta dalle proprietà sopra elencate, allora, prendendo $K > 0$ fissato, $\lim_{L\to\infty} F(K, L) = +\infty$, così come, prendendo $L > 0$ fissato, $\lim_{K\to\infty} F(K, L) = +\infty$.

Dimostrazione. Omettendo il pedice t, definiamo $k = K/L$ come l'intensità di capitale. L'assunzione di rendimenti di scala costanti implica che

$$F(K, L) = LF(K/L, 1) = Lf(k) = Kf(k)/k$$

dove $f(k) = F(k, 1)$. Prendendo $K > 0$ fissato,

$$\lim_{L\to\infty} F(K, L) = K \lim_{k\to 0} \frac{f(k)}{k} = K \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$$

dove abbiamo usato una delle condizioni di Inada per l'ultima uguaglianza e il risultato trovato nel Lemma precedente che ci dice che il capitale è essenziale, ovvero che $f(0) = 0$.
La dimostrazione del $\lim_{K\to\infty} F(K, L) = \infty$, $L > 0$ fissato, è analoga. □

Il nostro output, ovvero la ricchezza prodotta, può essere utilizzata in due modi, spesa in consumi, C_t, oppure investita, I_t:

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{2.12}$$

Il risparmio è rappresentato da una frazione costante $s \in (0, 1)$ dell'output. Poiché in un'economia chiusa il risparmio equivale all'investimento, abbiamo:

$$I_t = sY_t \tag{2.13}$$

Quest'ultimo, che è un flusso, si aggiunge al capitale esistente, che essendo uno stock, si deprezza secondo un tasso costante $\delta \in (0, 1)$, che rappresenta la percentuale di beni produttivi che si usurano nel tempo:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t = (1 - \delta)K_t + sY_t = (1 - \delta)K_t + sF(K_t, L_t). \tag{2.14}$$

Se l'investimento eccede il deprezzamento, il capitale aumenta e di conseguenza anche la produzione di ricchezza, viceversa entrambi diminuiscono.
Si presuma invece che il lavoro cresca ad un tasso costante $\mu > 0$:

$$L_{t+1} = (1 + \mu)L_t, \qquad L_0 > 0 \quad \textit{dato}. \tag{2.15}$$

A partire dal tempo 0 con un capitale positivo $K_0 > 0$, il sistema costituito dalle due equazioni alle differenze (2.14) e (2.15) descrive completamente l'evoluzione dell'economia nel tempo. Se siamo interessati ad un analisi di stabilità, è più utile guardare il rapporto delle due variabili, nel nostro caso

K/L. Questo ci porta alcuni vantaggi, come la riduzione della dimensione del sistema ad uno e la migliore interpretazione economica dei risultati. Dividiamo quindi l'equazione (2.14) per L_{t+1} e, usando i rendimenti di scala costanti, otteniamo:

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{1-\delta}{1+\mu}k_t + \frac{s}{1+\mu}f(k_t) = g(k_t) \tag{2.16}$$

dove $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ è conosciuto come intensità di capitale e $f(k_t) = F\Big(\frac{K_t}{L_t}, 1\Big)$.
La funzione di produzione in termini di intensità di capitale, eredita le proprietà della funzione di produzione originale: $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$ e $\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$. Queste proprietà riguardano anche g, con l'eccezione data dal $\lim_{k\to\infty} g'(k) = \frac{(1-\delta)}{(1+\mu)} < 1$.
Consideriamo uno sviluppo economico che inizia al tempo zero con un'intensità di capitale $k_0 > 0$. L'equazione alle differenze non lineare di primo ordine (2.16) inseme alla condizione iniziale, determina in modo univoco l'evoluzione dell'intensità di capitale nel tempo e conseguentemente tutte le altre variabili del modello. Dunque, risolvendo l'equazione (2.16) per k_t, tutte le altre variabili del modello sono determinate.

Proposizione 2.3.1. Date le assunzioni del modello di Solow, l'equazione fondamentale di Solow (2.16) ha due stati stazionari $k^* = 0$ e $k^* > 0$.

Dimostrazione. Gli stati stazionari devono soddisfare l'equazione non lineare:

$$k^* = g(k^*).$$

Questo implica

$$k^* = \frac{s}{\mu+\delta}f(k^*). \tag{2.17}$$

Dato che $f(0) = 0$, $k^* = 0$ è uno stato stazionario. Inoltre, le condizioni di Inada garantiscono l'esistenza di un unico stato stazionario strettamente positivo $k^* > 0$. In particolare, le proprietà $g(0) = 0$, $\lim_{k\to 0} g'(k) = \infty$, $\lim_{k\to\infty} g'(k) = \frac{1-\delta}{1+\mu} < 1$ e $g'(k) > 0$, assicurano che la funzione g sia sufficientemente ripida all'origine e diventi abbastanza piatta alla fine, da attraversare una volta dall'alto la bisettrice del primo quadrante. □

Lo stato di equilibrio $k^* = 0$ non ha nessun significato economico. La stabilità asintotica di $k^* > 0$ è facilmente dedotta osservando che k_t cresce in modo monotono per $k_0 \in (0, k^*)$ e decresce in modo monotono per $k_0 > k^*$. Quindi, k_t converge in modo monotono a k^* indipendentemente dal valore iniziale $k_0 > 0$. Questo mostra che $k^* > 0$ è attrattivo. La monotonia implica anche stabilità, perché $\forall\varepsilon > 0$, prendendo $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, $|k_0 - k^*| < \delta_\varepsilon$ implica

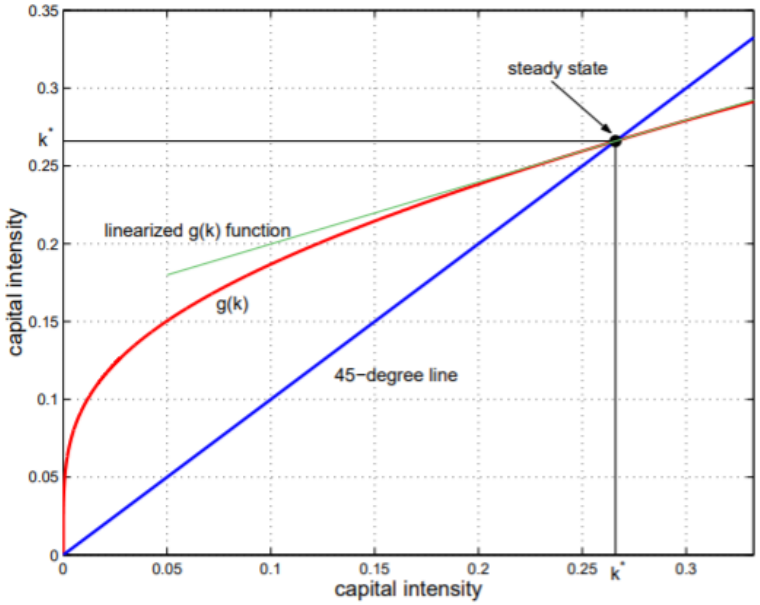


Figura 2.4: Intensità di capitale nel modello di Solow

$|k_t - k^*| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$. Dunque $k^* > 0$ è stabile e anche asintoticamente stabile.
Un altro modo per arrivare alla medesima conclusione è quello di sfruttare il Teorema 1.2.2. Per fare ciò, dobbiamo linearizzare l'equazione (2.16) intorno allo stato di equilibrio $k^* > 0$. Questo equivale a prendere l'approssimazione di Taylor al primo ordine:

$$k_{t+1} \approx k^* + \frac{\partial g(k)}{\partial k}\Big|_{k=k^*} (k_t - k^*) \tag{2.18}$$

e studiarne le caratteristiche.

Proposizione 2.3.2. $0 < \phi = \dfrac{\partial g(k)}{\partial k}\Big|_{k=k^*} < 1.$

Dimostrazione. Ricordiamo che $g(k_t)$ soddisfa l'equazione (2.16), perciò $g(k_t) = k_{t+1}$. Per le caratteristiche della funzione di produzione $g'(k)$ esiste ed è sempre strettamente positiva per ogni $k > 0$. Dall'equazione (2.17), abbiamo che l'intensità stazionaria di capitale soddisfa $s\frac{f(k^*)}{k^*} = \delta + \mu$.
Poiché f è una funzione strettamente concava e differenziabile ed $f(0) = 0$, si ha che $f(k) > f(0) + kf'(k) = kf'(k)$. Quest'ultima equazione implica

$$s\frac{f(k^*)}{k^*} = \delta + \mu > sf'(k^*). \tag{2.19}$$

Sapendo che $g'(k^*) = \frac{s}{1+\mu} f'(k^*) + \frac{1-\delta}{1+\mu}$ e applicando la disequazione (2.19) si ottiene che $g'(k^*) < 1$.

□

Iniziando al tempo $t = 0$ con un'intensità di capitale $k_0 > 0$, la soluzione a questo problema al valore iniziale è:

$$k_t = k^* + \phi^t(k_0 - k^*)$$

Poiché $0 < \phi < 1$, lo stato stazionario k^* è asintoticamente stabile.
In conclusione, nel modello di Solow, un paese che ha un capitale pro capite iniziale k inferiore a k^* tenderà ad accrescerlo fino a raggiungere l'equilibrio di stato stazionario, in cui l'investimento deve essere pari alla riduzione del capitale pro capite. La crescita di y, fino al livello di produzione stazionaria y^*, è causata dall'aumento del capitale. In questo modello l'unico elemento che potrebbe sostenere ancora la crescita è un aumento del tasso di risparmio s, come mostrato in figura 2.5 in cui $s_2 > s_1$, ma una volta raggiunto il nuovo livello di stato stazionario k^*, la crescita rimarrà costante; dunque un aumento di s non implica un aumento perpetuo della crescita. Se invece la popolazione cresce, come mostrato in figura 2.6 con $\mu_2 > \mu_1$, il livello di investimento necessario per mantenere k invariato cresce e la produzione pro capite all' equilibrio è inferiore. Il modello di Solow prevede dunque che i paesi con un tasso di crescita della popolazione più elevato hanno livelli di PIL pro capite più bassi.
Il risparmio e la crescita della popolazione determinano lo stock di capitale di stato stazionario dell'economia, e quindi il livello di reddito pro capite di stato stazionario. Ciò che il modello non riesce a spiegare è la crescita prolungata che osserviamo in molti paesi. Nel modello fin'ora studiato, una volta che l'economia raggiunge lo stato stazionario, la produzione per lavoratore cessa di crescere. Per spiegare il perdurare della crescita occorre introdurre nel modello il progresso tecnologico.

2.3.1 *Il ruolo del progresso tecnologico nella crescita della produzione*

Il prodotto complessivo di un paese non dipende però solo dalla quantità fisica dei fattori utilizzati ma dal modo in cui essi si combinano tra di loro e cioè dallo "stato della tecnologia", come illustrato nel documento [11]; anche disponendo delle medesime quantità di capitale e lavoro, paesi con tecnologie più avanzate produrranno di più rispetto a paesi con tecnologie più arretrate. Quindi oltre che dalla quantità dei fattori K ed L, la produzione

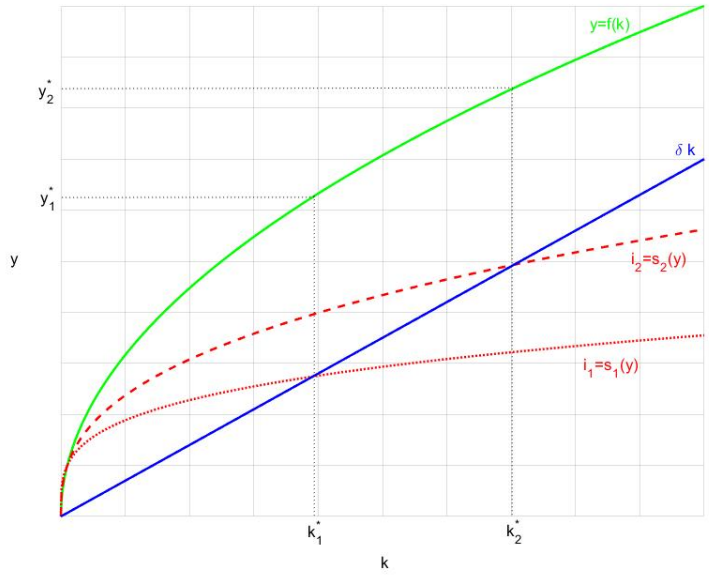


Figura 2.5: Effetti di un aumento del risparmio sull'equilibrio

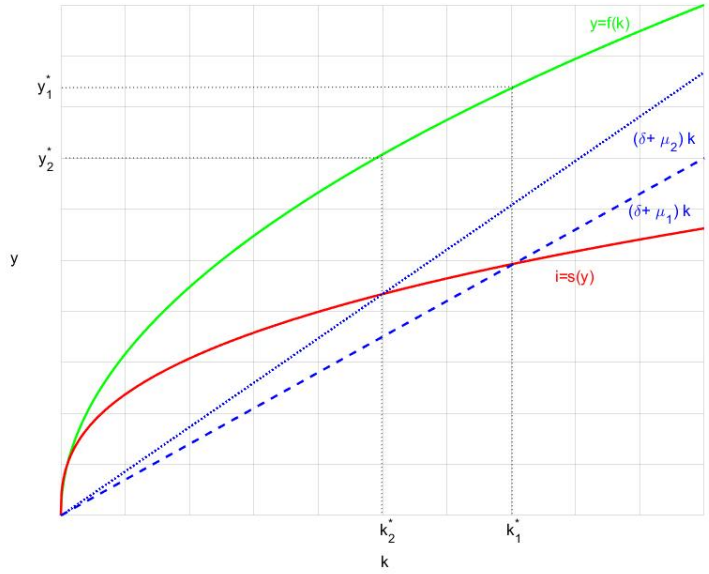


Figura 2.6: Effetti della crescita della popolazione sull'equilibrio

è influenzata anche da una variabile che sintetizza la capacità di un paese di combinare capitale e lavoro. Questa capacità può essere interpretata sia in senso stretto come utilizzo di specifiche tecniche produttive, sia in senso più ampio come buon funzionamento dei mercati, delle imprese, della pubblica amministrazione, in una parola del sistema economico. Di conseguenza la funzione di produzione non avrà più rendimenti di scala costanti, ma occorre introdurre un elemento esterno (esogeno), che rappresentanti l'effetto "residuo" dopo avere conteggiato quello dell'aumento dei fattori. Da un punto di vista formale, il progresso tecnologico può entrare nella funzione di produzione in diversi modi, in relazione alle ipotesi che facciamo su di esso.
Il caso che consideriamo è quello di un progresso tecnologico che mira a migliorare l'efficienza del lavoro (labour – augmenting). Possiamo quindi riscrivere la funzione di produzione come $F(K, L, A) = K^{1-\alpha}(LA)^{\alpha}$, chiamata funzione di produzione di Harrod. A partire da quest'ultima, seguendo il procedimento precedente, arriviamo ad un nuovo equilibrio, per il quale il capitale per unità di efficienza è costante: $k^* = \frac{s}{\mu+\delta+g} f(k^*)$, dove $f(k_t) = F\left(\frac{K_t}{A_t L_t}, 1\right)$ ed g rappresenta il tasso di progresso tecnologico, che incide sulla produzione migliorando l'efficienza dei lavoratori. Otteniamo quindi che il progresso tecnologico, porterebbe ad un reddito di stato stazionario $y^* = [s/(\delta + n + g)]^{(1-\alpha)/\alpha}$ inferiore a quello raggiunto in sua assenza. Tuttavia ciò che viene considerato qui è il reddito per unità di efficienza e non per occupato. Il capitale per unità di efficienza è definito come: $k_e = K/AL$. Ricordando che K/L non è altro che la definizione di capitale per occupato, k_o, si ha che: $k_e = k_o/A$. Dunque, la dotazione di capitale e il reddito per occupato di stato stazionario e in presenza di progresso tecnologico possono essere espresse come segue: $k_o^* = k_e^* A$ e $y_o^* = y_e^* A$. Queste ultime due relazioni portano ad una conclusione importante: in presenza di progresso tecnologico, anche in stato stazionario (che è, infatti, stazionario in relazione alle sole unità di efficienza) si verifica una crescita della dotazione di capitale per occupato e quindi del reddito per occupato. Infatti, il tasso di crescita di quest'ultimo sarà:

$$g_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta(yA)}{yA} \Rightarrow g_{y^*} = \frac{y^*(\Delta A)}{y^* A} = \frac{\Delta A}{A} = g,$$

così come anche la dotazione di capitale crescerà allo stesso tasso g. Dunque, i singoli lavoratori stanno beneficiando di un quantitativo di capitale che cresce costantemente al tasso del progresso tecnologico, generando più produzione ovvero più reddito.

Spostando il punto di vista dell'analisi sulle grandezze aggregate va evidenziato che il progresso tecnologico ha effetti persino maggiori su di esse. Se ogni singolo lavoratore sperimenta un incremento della dotazione di capitale e di reddito e il numero di lavoratori aumenta, ovviamente anche il sistema economico nel suo intero farà altrettanto. In sostanza, il sistema economico che è stato delineato in presenza di incremento demografico e progresso tecnologico, consente non solo di garantire una crescita di reddito costante ad ogni lavoratore ma riesce a farlo per un numero sempre crescente di lavoratori. Ricordando che $y = Y/L$ e che in stato stazionario y cresce al tasso g, il tasso di crescita del prodotto aggregato sarà:

$$G_Y = \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta(yL)}{yL} = \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta y}{y}\frac{\Delta L}{L} = g_y + \mu + g_y\mu.$$

Il fattore $g_y\mu$ è considerato trascurabile per la sua dimensione relativamente piccola.
Concludendo, l'inserimento del progresso tecnologico (nella fattispecie del tipo labour – augmenting) nel modello di Solow consente di spiegare una crescita del prodotto (e quindi del reddito) per occupato persistente, coerentemente con quanto avviene in quelli che oggi sono i paesi più sviluppati.

2.3.2 *Il modello di Solow con due paesi*

Un'ulteriore aggiunta al modello precedente è quella di considerare due paesi A e B, che condividono le stesse tecnologie, hanno cioè la stessa funzione di produzione $f(k)$ dove k è l'intensità di capitale. Il tasso di risparmio s, $0 < s < 1$, il tasso di deprezzamento δ, $0 < \delta \leq 1$, e il tasso di crescita della popolazione $\mu > 0$ ipotizziamo che siano anche uguali in entrambi i paesi. Dunque, in un contesto di economia chiusa, l'intensità di capitale in entrambi i paesi segue l'equazione alle differenze di Solow (2.16):

$$k_{t+1} = \frac{1-\delta}{1+\mu}k_t + \frac{s}{1+\mu}f(k_t) = g(k_t)$$

dove f ha le stesse proprietà della Sezione 2.3. L'unica differenza tra i due paesi è che l'intensità di capitale al tempo 0 è più elevata nel paese A rispetto al paese B. In particolare, assumiamo che

$$k_0^B < k_0^A < k^*$$

dove k^* denota lo stato stazionario dell'equazione alle differenze. Al tempo 0 entrambi i paesi accettano di aprire le loro frontiere e di commerciare beni di investimento nuovi. Si presume che il capitale e il lavoro già presenti

rimangano immobili. I risparmi, e quindi gli investimenti, vanno verso il paese con rendimento più alto. Il rendimento del capitale è restituito al proprietario sotto forma di beni di consumo. Poichè $k_0^B < k_0^A$, allora $f'(k_0^B) > f'(k_0^A)$, tutti i risparmi maturati dal paese A confluiranno come investimenti nel paese B. Dunque, finchè $k_0^B < k_0^A$, l'evoluzione dell'intensità di capitale in entrambi i paesi è data dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} k_{t+1}^A &= \frac{1-\delta}{1+\mu} k_t^A \\ k_{t+1}^B &= \frac{1-\delta}{1+\mu} k_t^B + \frac{s}{1+\mu}[f(k_t^A) + f(k_t^B)]. \end{aligned}$$

Da queste due equazioni è chiaro che l'intensità di capitale nel paese A diminuisce monotonicamente, mentre l'intensità di capitale nel paese B cresce monotonicamente. Poichè k_{t+1}^B tenderà a k^* e $k_{t+1}^A < k_0^A < k^*$, esiste un tempo t^* in cui le intensità di capitale si eguagliano. Da questo istante in poi, entrambe le intensità si muoveranno in parallelo e arriveranno all'equilibrio comune k^*. Questa forte implicazione di convergenza può essere osservata solo parzialmente nella realtà, come discusso anche in altri modelli come quello di Lucas (1990).

2.4 *Un modello di crescita ottimale*

A differenza del modello Solow precedentemente discusso, il modello di crescita ottimale cerca di determinare la decisione di risparmio-consumo in modo ottimale. Se C_t ed L_t indicano il consumo aggregato e il lavoro aggregato nel periodo t, il consumo pro capite è dato da $c_t = C_t/L_t$. Come nel modello precedente, il lavoro cresce ad un tasso $\mu > 0$, ovvero $L_{t+1} = (1+\mu)L_t$. L'obiettivo è quello di massimizzare la seguente funzione obiettivo di Bentham:

$$\begin{aligned} V(c_0, c_1, \dots) &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L_t U(c_t) \\ &= L_0 \sum_{t=0}^{\infty} (\beta(1+\mu))^t U(c_t), \quad 0 < \beta(1+\mu) < 1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

La costante β è il tasso di sconto. L'utility function $U : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ è continuamente differenziabile, crescente, strettamente concava e soddisfa $\lim_{c\to 0} U'(c) = \infty$. Le altre specifiche del modello sono esattamente quelle del modello di Solow, in cui il guadagno segue una funzione di produzione neoclassica che

soddisfa le condizioni di Inada. Riprendendo la precedente relazione per gli investimenti al tempo t,

$$I_t = K_{t+1} - (1-\gamma)K_t$$

la ricchezza prodotta, per un'economia chiusa, soddisfa la seguente equazione:

$$C_t + I_t = C_t + K_{t+1} - (1-\gamma)K_t = F(K_t, L_t)$$

o in termini di ricchezza pro-capite

$$\begin{aligned} c_t + (1+\mu)k_{t+1} - (1-\gamma)k_t &= f(k_t) \\ c_t + (1+\mu)k_{t+1} &= f(k_t) + (1-\gamma)k_t = h(k_t) \end{aligned} \tag{2.21}$$

La condizione di primo ordine per l'ottimo è data dall'equazione di Eulero, chiamata anche regola di Keynes-Ramsey:

$$U'(c_t) = \beta h'(k_{t+1})U'(c_{t+1}) \tag{2.22}$$

Il sistema di equazioni costituito dall'equazione di transizione (2.21) e dall'equazione di Eulero (2.22) costituisce un sistema di equazione alle differenze non lineare. Per l'analisi di questo sistema, in primo luogo, calcoliamo lo stato stazionario. Poi linearizziamo il sistema intorno allo stato stazionario. Questo dà un'equazione alle differenze lineare omogenea in termini di deviazioni dallo stato stazionario. Troviamo la soluzione di questa equazione usando il principio di sovrapposizione. Infine, scegliamo, se possibile, una soluzione usando le condizioni iniziali e gli argomenti di limitazione.

2.4.1 *Lo stato stazionario*

Lo stato stazionario (k^*, c^*) si trova ponendo $c^* = c_t = c_{t+1}$ e $k^* = k_t = k_{t+1}$ nelle equazioni (2.21) e (2.22). Nel sistema di equazioni non lineari si ottiene:

$$\Delta k = 0 : \qquad c^* = f(k^*) - (\delta + \mu)k^* \tag{2.23}$$

$$\Delta c = 0 : \qquad \beta h'(k^*) = \beta(f(k^*) + 1 - \delta) = 1 \tag{2.24}$$

L'equazione $\Delta c = 0$ è indipendente da c e dalla forma dell'utility function U e da questa, quindi, viene determinato il valore di k^*. La prima equazione vista come funzione di k, ha una forma ad u invertita nel piano (k, c), come può essere dedotto dal ragionamento seguente:

- $k = 0$ implica $c = 0$. La derivata $\frac{dc}{dk} = f'(k) - (\delta + \mu) = 0$ è strettamente positiva per le condizioni di Inada.

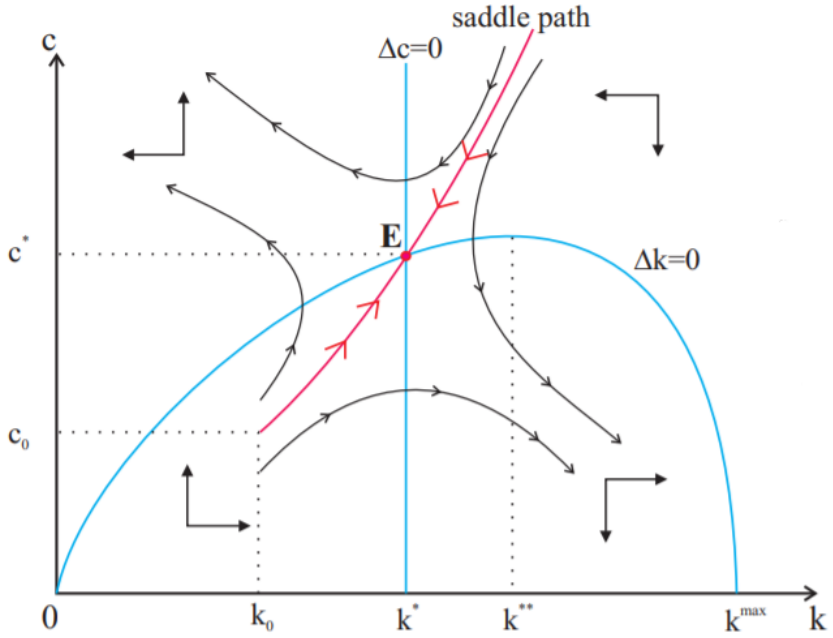


Figura 2.7: Diagramma del modello di crescita ottimale

- La funzione raggiunge un massimo a k^{**} determinato da $\frac{dc}{dk} = f'(k^{**}) - (\delta + \mu) = 0$. Poichè $\beta(1+\mu) < 1$ per ipotesi, $k^* < k^{**}$. k^{**} è maggiore del capitale azionario ottimale a causa del tasso d sconto.

- Per $k > k^{**}$, la sequenza $\Delta k = 0$ diminuisce in modo monotonico e attraversa l'asse $c = 0$ in k^{max}, che corrisponde al valore massimo del capitale sostenibile nel lungo periodo e si ottiene quando il consumo si riduce a zero. k^{max} è determinato dall'equazione $f(k^{max}) = (\gamma+\mu)k^{max}$.

Entrambe le equazioni sono rappresentate in blu in figura 2.7. Esse si intersecano nel punto E, che corrisponde all'unico stato stazionario del sistema diverso da zero.

2.4.2 *Il sistema linearizzato*

Le equazioni (2.21) e (2.22) formano un sistema bidimensionale di equazioni alle differenze non lineari di ordine uno o, dopo aver inserito $h(k_t) - (1+\mu)k_{t+1}$ per c_t e $h(k_t) - (1+\mu)k_{t+2}$ per c_{t+1}, una singola equazione alle differenze non lineare di ordine due. Sono necessarie, quindi, due condizioni al contorno per determinare una soluzione unica. Una condizione è data dal

valore iniziale dello stock di capitale pro-capite $k_0 > 0$.

Per studiare le dinamiche del sistema nel dettaglio, riscriviamo l'equazione di Eulero (2.22) come

$$U'(c_{t+1}) - U'(c_t) = [1 - \beta h'(k_{t+1})]U'(c_{t+1}). \tag{2.25}$$

Da questa equazione possiamo dedurre che $c_{t+1} \geq c_t$ per $k_{t+1} < k^*$ e viceversa. Dunque, dalla sinistra di $\Delta c = 0$ i consumi salgono, mentre dalla parte destra scendono. In modo simile, l'equazione (2.21) implica che $k_{t+1} \geq k_t$ quando $c_t < c^*$. Così, le due equazioni $\Delta c = 0$ e $\Delta k = 0$ dividono l'ortante non negativo del piano (k, c) in quattro regioni. Come mostrato in figura 2.7, nella regione di nord-ovest il consumo aumenta, mentre, l'intensità di capitale diminuisce. Queste dinamiche procedono fin quando non si interseca l'asse c. Quando accade questo, l'economia ha terminato il suo capitale, dunque non produce nulla, ma ha un consumo positivo, il che rappresenta una situazione impossibile e ci porta ad escludere cammini con queste caratteristiche. Partendo da k_0, c'è, tuttavia, un percorso, rappresentato in rosso, che porta l'economia allo stato stazionario. L'analisi algebrica richiede la linearizzazione del sistema non lineare delle equazioni (2.21) e (2.22).

$$\begin{pmatrix} 1+\mu & 0 \\ \beta U'(c^*)h''(k^*) & U''(c^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{t+1} - k^* \\ c_{t+1} - c^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{-1} & -1 \\ 0 & U''(c^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_t - k^* \\ c_t - c^* \end{pmatrix}$$

dove sfruttiamo $\beta h'(k^*) = 1$. Dato che $\mu > 0$ e $U''(c^*) < 0$, la matrice a sinistra è invertibile. Questo porta quindi al seguente sistema omogeneo di primo ordine lineare:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} k_{t+1} - k^* \\ c_{t+1} - c^* \end{pmatrix} &= \frac{1}{1+\mu} \begin{pmatrix} \beta^{-1} & -1 \\ R_A^{-1}(c^*)h''(k^*) & -\beta R_A^{-1}(c^*)h''(k^*) + (1+\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_t - k^* \\ c_t - c^* \end{pmatrix} \\ &= \Phi \begin{pmatrix} k_t - k^* \\ c_t - c^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove $R_A(c^*)$ uguale a $-U''(c^*)/U'(c^*) > 0$, è il coefficiente di avversione al rischio assoluto valutato allo stato stazionario. La dinamica di questo sistema è determinata dagli autovalori di Φ. Denotiamo il polinomio caratteristico di Φ con $P(\lambda)$ e i corrispondenti autovalori con λ_1 e λ_2, dunque abbiamo:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - tr(\Phi)\lambda + det\Phi$$

con

$$tr\Phi = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + [\beta(1+\mu)]^{-1} - [\beta R_A^{-1}(c^*)h''(k^*)]/(1+\mu) > 2$$

$$det\Phi = \lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{\beta(1+\mu)} > 1$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (tr\Phi)^2 - 4det\Phi \\ &= [1-(\beta(1+\mu))^{-1}]^2 + \frac{\beta R_A^{-1}(c^*)h''(k^*)}{1+\mu}\left[\frac{\beta R_A^{-1}(c^*)h''(k^*)}{1+\mu} - 2 - \frac{2}{\beta(1+\mu)}\right] > 0\end{aligned}$$

$$P(1) = 1 - tr\Phi + det\Phi = \frac{\beta R_A^{-1}(c^*)h''(k^*)}{1+\mu} < 0$$

dove Δ denota il discriminante dell'equazione quadratica in cui sfruttiamo $h'' < 0$. Le disuguaglianze appena rappresentate hanno le seguenti implicazioni per i due autovalori:

- $\Delta > 0$ implica che gli autovalori sono reali e distinti;
- $tr\Phi > 2$ implica che almeno un autovalore è > 1;
- $P(1) < 0$ implica che si trovano dalla parte opposta rispetto ad 1.
- $P(0) = det\Phi > 1$ implica che un autovalore, diciamo λ_1, è maggiore di 1, mentre il secondo autovalore, λ_2, si trova tra 0 e 1.

Poichè gli autovalori sono distinti, possiamo diagonalizzare Φ come $\Phi = Q\Lambda Q^{-1}$ dove Λ è una matrice diagonale con λ_1 e λ_2 sulla sua diagonale. Prendiamo $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$. Le colonne della matrice $Q = (q_{ij})$ sono formate dagli autovettori di Φ. Quindi, la soluzione può essere scritta come

$$k_t - k^* = c_1 q_{11}\lambda_1^t + c_2 q_{12}\lambda_2^t \tag{2.26}$$

$$c_t - c^* = c_1 q_{21}\lambda_1^t + c_2 q_{22}\lambda_2^t \tag{2.27}$$

Poichè $\lambda_1 > 1$, questo rappresenta un sistema instabile. Con l'evolvere del tempo l'autovalore instabile alla fine dominerà. Per evitare questo comportamento esplosivo, poniamo $c_1 = 0$. Per quanto riguarda la seconda costante c_2, supponiamo che il sistema inizi al periodo 0 con un valore k_0 dell'intensità di capitale. Secondo l'equazione (2.26), $c_2 = \frac{(k_0 - k^*)}{q_{12}}$, con $q_{12} \neq 0$. Combinando tutti questi elementi con le equazioni (2.26) e (2.27), si ottiene l'equazione della sella:

$$c_t = c^* + \frac{q_{22}}{q_{12}}(k_t - k^*) \tag{2.28}$$

Ora, mostriamo che la sella ha un inclinazione positiva, ovvero $\frac{q_{22}}{q_{12}} > 0$. Questo può essere dimostrato manipolando le equazioni definite per l'autovettore corrispondente al secondo autovalore λ_2. Essi si ottengono da

$(\phi_{11} - \lambda_2)q_{12} + \phi_{12}q_{22} = 0$ e $\phi_{21}q_{12} + (\phi_{22} - \lambda_2)q_{22} = 0$ Poichè $(\phi_{11} - \lambda_2) > 0$ e $\phi_{12} < 0$, q_{12} e q_{22} hanno lo stesso segno. Alla stessa conclusione si giunge usando la seconda equazione. Questo ragionamento mostra anche che $q_{12} \neq 0$. Supponiamo infatti per assurdo che $q_{12} = 0$, allora anche $q_{22} = 0$ perchè $\phi_{12} = \frac{-1}{1+\mu} < 0$. Questo contraddice l'assunzione che $(q_{12}, q_{22})'$ è un autovettore. Si noti che anche se l'autovettore non è determinato in modo univoco, la sua direzione e quindi la pendenza della sella lo è.

2.4.3 *Un caso particolare istruttivo*

Il sistema non lineare di equazioni (2.21) e (2.22) non ha in generale una soluzione analitica, si deve quindi ricorrere alla versione linearizzata per studiare il suo comportamento locale intorno allo stato stazionario. Ci sono, tuttavia, delle specifiche particolari che consente una soluzione analitica. Poniamo $\mu = 0$ e consentiamo l'ammortamento completo entro un periodo, cioè $\delta = 1$, inoltre assumiamo l'utility function logaritmica, $U(c) = \ln c$ e la funzione di produzione di Cobb-Douglas, ovvero $f(k) = Ak^\alpha$. Con queste semplificazioni, le equazioni (2.21) e (2.22) diventano:

$$\begin{aligned} c_t + k_{t+1} &= Ak_t^\alpha \\ \frac{1}{c_t} &= \alpha\beta A k_{t+1}^{\alpha-1} \frac{1}{c_{t+1}} \end{aligned}$$

Questo sistema può essere riscritto come una singola equazione alle differenze non lineare per l'intensità di capitale, eliminando c_t e c_{t+1}:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Ak_t^\alpha - k_{t+1}} &= \frac{\alpha\beta A k_{t+1}^{\alpha-1}}{Ak_{t+1}^\alpha - k_{t+2}} \\ \frac{1}{(Ak_t^\alpha/k_{t+1}) - 1} &= \frac{\alpha\beta}{1 - (k_{t+2}/Ak_{t+1}^\alpha)}. \end{aligned}$$

Questa equazione di secondo ordine può essere ridotta ad un'equazione di primo ordine riconoscendo che $s_{t+1} = \frac{k_{t+2}}{Ak_{t+1}^\alpha}$ e $s_t = \frac{k_{t+1}}{Ak_t^\alpha}$ sono i tassi di risparmio dell'economia al tempo $t+1$ e t:

$$s_{t+1} = g(s_t) = (1 + \alpha\beta) - \frac{\alpha\beta}{s_t} \tag{2.29}$$

Analizzando il grafico della funzione g in figura 2.8 per $s_t > 0$, osserviamo che ci sono due stati stazionari $s^* = \alpha\beta$ e $s^* = 1$. La stabilità di questi due punti fissi può essere studiata applicando il teorema 1.2.2. Infatti, la derivata

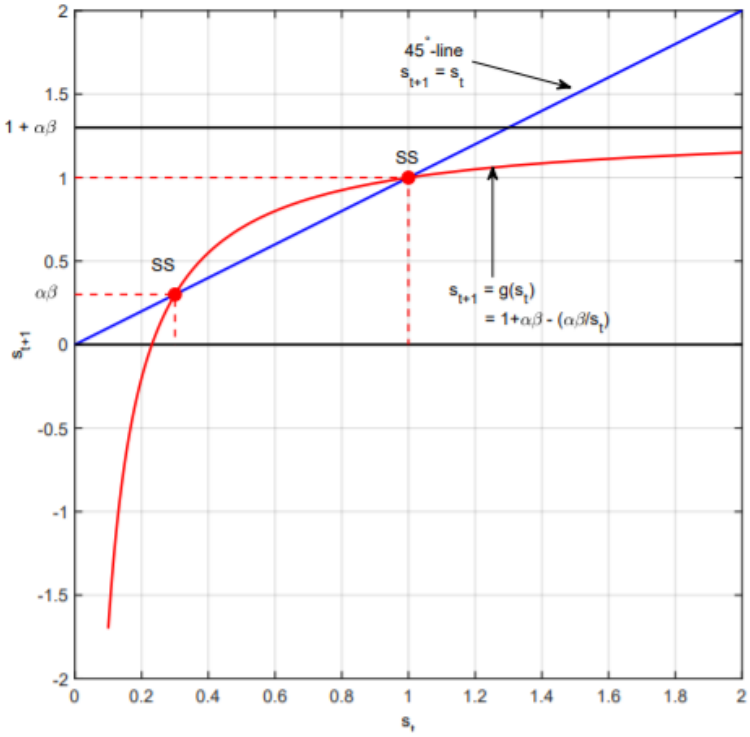


Figura 2.8: Equazione differenziale per il tasso di risparmio con $\alpha\beta = 0.3$

di g calcolata nei due punti fissi è:

$$g'(s) = \frac{\alpha\beta}{(s^*)^2} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha\beta} > 1, & s^* = \alpha\beta; \\ \alpha\beta < 1, & s^* = 1. \end{cases}$$

Dunque, possiamo concludere che $s^* = \alpha\beta$ è un punto fisso instabile, mentre $s^* = 1$ è un punto fisso esponenzialmente stabile. Dalla forma particolare della funzione possiamo derivare ulteriori proprietà. Se $s_0 > \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}$, l'intera orbita produrrà tassi di risparmio positivi. Oltretutto, se $s_0 \neq \alpha\beta$, i tassi di risparmio convergeranno monotonicamente ad uno, $\lim_{t\to\infty} s_t = \lim_{t\to\infty} \varphi(s_0, t) = 1$. Se ammettiamo che il sistema economico preveda dei prestiti senza nessun tasso di interesse, tale che s_t possa diventare negativo, il punto fisso $s^* = 1$ è globalmente stabile, purchè $s_0 \neq \alpha\beta$.
Confrontando i due punti fissi da un punto di vista economico, $s^* = 1$ significa che gli agenti non spenderanno nulla e conserveranno l'intera ricchezza. Una situazione del genere ovviamente non può essere quella ottimale. Dunque, l'unico punto di equilibrio economicamente ammissibile, è $s^* = \alpha\beta$.
In base a queste considerazioni, il logaritmo di k seguirà un'equazione alle

differenze di primo ordine:

$$\ln k_{t+1} = \ln(\alpha\beta A) + \alpha \ln(k_t).$$

Lo stato stazionario per questa equazione in forma logaritmica è rappresentato da:

$$\ln(k^*) = \frac{\ln(\alpha\beta A)}{1-\alpha}.$$

Abbiamo quindi, $\ln k_{t+1} - \ln(k^*) = \alpha(\ln k_t - \ln(k^*))$ e la soluzione è

$$\ln k_t - \ln(k^*) = \alpha^t(\ln k_0 - \ln(k^*)), \quad \forall k_0 > 0.$$

2.5 *Un modello di prezzi azionari*

Si consideri un'economia in cui gli investitori hanno due assets a loro disposizione. Il primo è un titolo di Stato senza rischio che paga un tasso d'interesse costante $r > 0$ in ogni istante t. Il secondo è un'azione comune che dà al proprietario il diritto a un flusso di dividendi noto per azione. Il problema è quello di determinare il prezzo delle azioni p_t in funzione del flusso di dividendi futuro $(d_{t+h})_{h=0,1,\ldots}$ e il tasso di interesse r. Eliminando l'incertezza in questo esempio, l'arbitraggio assicura che il rendimento di entrambi gli investimenti deve essere uguale. Dato che il rendimento dell'investimento nell'azione consiste nel pagamento del dividendo d_t più la variazione attesa di prezzo $p^e_{t+1} - p_t$, questa condizione di arbitraggio porta a:

$$r = \frac{d_t + p^e_{t+1} - p_t}{p_t} \quad \Leftrightarrow \quad p^e_{t+1} = (1+r)p_t - d_t \tag{2.30}$$

dove p^e_{t+1} indica il prezzo atteso nel prossimo istante di tempo. Supponendo che le aspettative degli investitori siano razionali, il che equivale ad assumere una perfetta lungimiranza in un contesto di assenza di incertezza, l'equazione (2.30) si trasforma in una semplice equazione alle differenze di primo ordine:

$$p_{t+1} = (1+r)p_t - d_t \tag{2.31}$$

con $\phi = 1 + r$ e $z_t = -d_{t-1}$.
L'obiettivo è trovare un prezzo iniziale. Considerando che la soluzione generale dell'equazione omogenea si trova facilmente, essendo $x^{(g)}_t = \phi^t c_f$, per qualche $c_f \in \mathbf{R}$, la ricerca di una soluzione particolare richiede altre considerazioni. Poiché $\phi = 1 + r > 1$, non possiamo considerare la soluzione backward dato che la somma infinita non convergerà per un flusso di dividenti constante. Pertanto, utilizziamo la soluzione forward $x^{(f)}_t = -\phi^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j+1} z_{t+j}$,

come indicato nell'equazione (2.8). La soluzione dell'equazione alle differenze (2.31) diventa:

$$p_t = (1+r)^t c_f + x_t^{(f)} = (p_0 - x_0^{(f)})(1+r)^t + (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (1+r)^{-j} d_{t+j}. \quad (2.32)$$

La soluzione forward è ben definita solo se la sommatoria converge. Una condizione sufficiente per far si che questo accada è l'esistenza di un indice j_0 tale che $|d_{t+j}/(1+r)^j| < M^j$, per $j > j_0$ ed $M < 1$. Questo è garantito, in particolare, da un flusso di dividenti costante $d_{t+j} = d$ per ogni $j = 0, 1, 2, \ldots$ Il termine $(1+r)^t c_f$ è solitamente chiamato "bubble" perché il suo comportamento non è correlato al flusso di dividendi, al contrario del termine $x_t^{(f)}$ che riflette il valore intrinseco dell'azione.

Supponiamo di trovarci nell'istante $t = 0$ ed avere $c_f = p_0 - x_0^{(f)} > 0$. Ciò significa che il prezzo dell'azione corrente è superiore a quello che può essere giustificato dal flusso di dividendi futuri. Secondo l'equazione (2.30) questo può accadere solo con un'adeguata plusvalenza, vale a dire un adeguato aumento di prezzo previsto nel successivo istante temporale. In questo modo il nuovo prezzo sarà maggiormente diverso dal flusso dei dividendi, che devono essere giustificati da una plusvalenza ancora maggiore nel periodo successivo, e così via. Alla fine, il termine "bubble" prende il sopravvento e il prezzo delle azioni diventa quasi indipendente dal flusso di dividendi. Questa situazione, tuttavia, non è sostenibile nel lungo periodo. Di conseguenza, l'unico prezzo ragionevole dell'azione corrente p_0 è proprio $x_0^{(f)}$, il che implica $c_f = 0$. Questo elimina efficacemente il termine "bubble" ed è in realtà l'unica soluzione non esplosiva. Quindi, abbiamo un'unica soluzione di equilibrio razionale, data da:

$$p_t = x_t^{(f)} = (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (1+r)^{-j} d_{t+j}. \quad (2.33)$$

Pertanto, il prezzo di un'azione è sempre uguale all'attuale valore scontato del corrispondente flusso di dividendi. Tale soluzione è ragionevole in una situazione senza incertezza e con tutte le informazioni a disposizione.
Questa soluzione implica che il prezzo risponde immediatamente a qualsiasi cambiamento nel flusso atteso di dividendi. L'effetto di un cambiamento in $d_{t+h}, h = 0, 1, 2, \ldots$ su p_t è è dato da

$$\frac{\partial p_t}{\partial d_{t+h}} = (1+r)^{-h-1} \quad h = 0, 1, 2, \ldots$$

Perciò l'effetto è minore quanto più il cambiamento è lontano nel tempo.
In alternativa, si consideri una variazione permanente dei dividendi, ad esempio un cambiamento in cui tutti i dividendi aumentano di un certo importo costante Δd. La variazione Δp_t di prezzo corrispondente equivale a

$$\Delta p_t = (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (1+r)^{-j} \Delta d = \frac{\Delta d}{r}.$$

Analogamente, un aumento proporzionale di tutti i dividendi porterebbe allo stesso aumento proporzionale del prezzo delle azioni. Questi esempi dimostrano che la soluzione razionale che elimina il termine "bubble" ha senso.

2.5.1 *L'iperinflazione di Cagan*

Tutte le economie presentano un certo grado di inflazione, la quale si presenta quando la media dei prezzi delle merci aumenta, mentre il potere d'acquisto della moneta diminuisce. In genere, governi e istituzioni finanziarie collaborano per garantire che l'inflazione si verifichi gradualmente e senza scosse. Tuttavia, la storia presenta molti casi in cui il tasso d'inflazione è accelerato a un livello senza precedenti, causando la notevole diminuzione della valuta nazionale in proporzioni allarmanti. Questo tasso d'inflazione accelerato è ciò che chiamiamo iperinflazione.
Nel suo libro del 1956, "The Monetary Dynamics of Hyperinflation", l'economista Philip Cagan afferma che i periodi di iperinflazione hanno inizio quando il prezzo di beni e servizi registra un aumento maggiore del 50 per cento nell'arco di un mese. Per esempio, se il prezzo di un sacco di riso passa da 10 a 15 dollari in meno di 30 giorni, e da 15 a 22.50 entro la fine del mese successivo, avremmo iperinflazione. Se questo trend continua, il prezzo per lo stesso sacco di riso potrebbe raggiungere 114 in sei mesi, e oltre 1000 in un anno.
È raro che il tasso di iperinflazione rimanga fermo al 50 per cento. Nella maggior parte dei casi, questi tassi accelerano in modo talmente rapido che il prezzo di vari beni e servizi può aumentare drasticamente nell'arco di un solo giorno o persino di poche ore. A causa dell'aumento dei prezzi, la fiducia del consumatore diminuisce e il valore della valuta del paese crolla. Episodi rinomati di iperinflazione si sono verificati in Germania dopo la prima guerra mondiale, Venezuela e Zimbabwe, ma diversi altri paesi hanno vissuto una simile crisi, tra cui Ungheria, Jugoslavia, Grecia e tanti altri.
L'esempio del Venezuela è quello di una grave crisi economica tutt'ora in atto. Grazie alle sue grandi riserve petrolifere, questo Stato ha mantenuto un'economia regolare durante il XX secolo, ma la sovrabbondanza di petrolio negli

anni 80, seguita da una cattiva gestione economica e corruzione all'inizio del XXI secolo, hanno portato a una forte crisi socioeconomica e politica. La crisi è iniziata nel 2010 ed è attualmente considerata una delle peggiori nella storia. La banca centrale non ha rilasciato alcuna stima o analisi dei tassi di inflazione del paese per anni. Nel 2018 la banca di Caracas è stata costretta ad affermare che l'aumento dei prezzi è stato pari a 130.060 per cento. Il prodotto interno lordo (Pil) del paese si è dimezzato dal 2013 al 2018. Il 20 agosto dello stesso anno il presidente Nicolás Maduro ha annunciato l'emissione di una nuova valuta (bolivar sovrano) per combattere l'iperinflazione, sostituendo il bolivar esistente a un tasso di 1/100.000. Tuttavia, l'efficacia di un tale approccio è altamente discutibile, infatti nel 2019, è stato dichiarato un tasso di inflazione del 9.585 per cento ma il Fondo monetario internazionale (FMI) ha stimato che il livello dei prezzi nel 2019 abbia raggiunto un incremento pari a 200.000 per cento.

Considerando periodi di iperinflazione di breve durata, questi possono essere usati per lo studio del rapporto tra offerta monetaria e livello dei prezzi, perché altri fattori come le variazioni della produzione reale possono essere ignorati. Denotiamo con m_t il logaritmo dello stock di moneta al tempo t e con p_t il logaritmo del livello di prezzo. Il primo modello proposto da Cagan nel 1956 consiste nelle seguenti tre equazioni.

$$\begin{aligned} m_t^d - p_t &= \alpha(p_{t+1}^e - p_t), \quad \alpha < 0 \\ m_t^s &= m_t^d = m_t \\ p_{t+1}^e - p_t &= \gamma(p_t - p_{t-1}), \quad \gamma > 0 \end{aligned}$$

La prima equazione rappresenta la domanda di moneta in forma logaritmica. Si riferisce alla domanda registrata per la massa monetaria reale, $m_t^d - p_t$, dove d sta per domanda, rispetto al tasso di inflazione atteso al tempo $t+1$, $p_{t+1}^e - p_t$. Questo rapporto è negativo perché le famiglie e le imprese riducono le loro scorte di denaro se si aspettano che il valore reale di quest'ultimo scenda nel periodo successivo a causa degli alti tassi di inflazione, per questo motivo $\alpha < 0$. In questo modello, la banca centrale controlla perfettamente lo stock di moneta e lo fissa indipendentemente dall'andamento del livello dei prezzi. Questo denaro iniettato nell'economia è completamente assorbito da questa, in modo che in ogni momento l'offerta di denaro, m_t^s, sia uguale alla domanda. Il comportamento del modello dipende soprattutto dal modo in cui si formano le aspettative. Seguendo il contributo originale di Cagan, abbiamo postulato che le aspettative sono formate in modo adattivo, ovvero che gli agenti basano le loro aspettative sull'inflazione passata. A questo proposito, la terza equazione rappresenta uno schema

di aspettativa adattiva: l'inflazione attesa nel prossimo istante di tempo è proporzionale all'inflazione corrente. In tal modo, il fattore proporzionale γ è assunto positivo, significando che l'inflazione attesa cresce all'aumentare di quella attuale. Combinando le tre equazioni del modello e risolvendo rispetto a p_t, si arriva alla seguente equazione alle differenze di primo ordine non omogenea:

$$p_t = \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} p_{t-1} + \frac{1}{1+\alpha\gamma} m_t = \phi p_{t-1} + z_t \tag{2.34}$$

dove $\phi = \dfrac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma}$ e $z_t = \dfrac{1}{1+\alpha\gamma} m_t$.

Sappiamo che la soluzione generale di questa equazione è data dalla somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare, $p_t^{(p)}$, dell'equazione non omogenea:

$$p_t = \phi^t c + p_t^{(p)}$$

Una soluzione particolare può essere trovata ricorsivamente

$$\begin{aligned}
p_1 &= \phi p_0 + z_1 \\
p_2 &= \phi p_1 + z_2 = \phi^2 p_0 + \phi z_1 + z_2 \\
&\dots \\
p_t &= \phi^t p_0 + \phi^{t-1} z_1 + \phi^{t-2} z_2 + \cdots + \phi z_{t-1} + z_t \\
&= \phi^t p_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i z_{t-i}
\end{aligned}$$

La prima componente della sommatoria è una funzione di p_0, mentre la seconda è una somma pesata degli stock di denaro passati. In economia non c'è un tempo di inizio naturale, perciò si potrebbe iterare l'equazione di cui sopra, all'infinito nel passato:

$$p_t = \lim_{i\to\infty} \phi^i p_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i z_{t-i}$$

Da un punto di vista matematico questa espressione ha senso solo se il limite della somma infinita esiste, quindi sono necessarie ulteriori assunzioni. Supponiamo che la massa monetaria rimanga costante, ovvero $m_t = m < \infty \ \forall t$, allora la logica del modello ci suggerisce che il livello di prezzo registrato dovrebbe rimanere anch'esso finito. In termini matematici questo significa che $\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i$ dovrebbe convergere. Si tratta, tuttavia, di una somma geometrica, quindi la convergenza è raggiunta se e solo se

$$|\phi| = \left| \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right| < 1 \tag{2.35}$$

Supponendo che questa condizione di stabilità sia valida, la soluzione generale dell'equazione alle differenze (2.34) è:

$$p_t = \phi^t c + \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i z_{t-i}$$

dove la costante c può essere calcolata a partire da una condizione iniziale. Tale condizione viene fuori naturalmente perché la formazione di aspettative adattive richiede la conoscenza del prezzo precedente che può quindi servire come condizione iniziale.
La condizione di stabilità di ϕ implica che, indipendentemente dal valore di c, il primo termine della soluzione, $\phi^t c$, diventa sempre meno importante. Quindi, per un valore di t abbastanza elevato, il livello del prezzo sarà dominato dalla soluzione particolare $\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i z_{t-i}$. In questa sommatoria infinita, i valori più recenti dello stock di denaro sono più importanti per la determinazione del livello di prezzo. Supponendo che lo stock di denaro aumenti di un valore costante Δm in ogni istante t, l'effetto sul livello di prezzo è dato da

$$\Delta p_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \Big(\frac{1}{1+\alpha\gamma} \Delta m \Big) = \frac{1}{1-\phi} \frac{1}{1+\alpha\gamma} \Delta m = \Delta m.$$

Perciò prezzo e valore di stock variano della stessa quantità. Invece, l'effetto di un cambiamento transitorio di m_t, Δm in un istante t, sul livello di prezzo in un istante $t+h$ per qualche $h \geq 0$ è dato da

$$\Delta p_{t+h} = \phi^h \frac{1}{1+\alpha\gamma} \Delta m = \Big(\frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \Big)^h \frac{1}{1+\alpha\gamma} \Delta m.$$

I valori $\frac{\Delta p_{t+h}}{\Delta m}$ visti come funzione di $h \geq 0$ sono chiamati risposta impulsiva. E' ben chiaro dalla formula, come la condizione di stabilità (2.35), implica che l'effetto sul livello di prezzo diminuisce esponenzialmente nel tempo.
Le caratteristiche del modello cambiano drasticamente se assumiamo delle aspettative razionali. Nel contesto di un modello deterministico ciò equivale ad assumere una perfetta lungimiranza, quindi la terza equazione del modello è sostituita da

$$p^e_{t+1} = p_{t+1}.$$

Con questo cambiamento la nuova equazione alle differenze diventa:

$$p_{t+1} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} p_t + \frac{m_t}{\alpha} = \phi p_t + z_t \tag{2.36}$$

con $z_t = m_t/\alpha$. Poiché $\phi = \frac{\alpha-1}{\alpha} > 1$, la condizione di stabilità è violata. Si può, tuttavia, trovare una soluzione particolare significativa iterando forward:

$$\begin{aligned} p_t &= \phi^{-1} p_{t+1} - \phi^{-1} z_t \\ &= \phi^{-1}(\phi^{-1} p_{t+2} - \phi^{-1} z_{t+1}) - \phi^{-1} z_t = \phi^{-2} p_{t+2} - \phi^{-2} z_{t+1} - \phi^{-1} z_t \\ &\dots \\ &= \phi^{-h} p_{t+h} - \phi^{-1} \sum_{i=0}^{h-1} \phi^{-i} z_{t+i} \qquad \textit{per } h > 0 \end{aligned}$$

Il livello di prezzo registrato nel periodo t, p_t, dipende dal prezzo atteso in futuro, p_{t+h}, e dallo stock di denaro futuro. Poiché non c'è un limite futuro nell'andamento dell'economia consideriamo

$$p_t = \lim_{h\to\infty} \phi^{-h} p_{t+h} - \phi^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{-i} z_{t+i}$$

Posto che lo stock di denaro rimanga limitato e dato che $0 < \phi^{-1} < 1$, il limite e la somma infinita sono ben definiti. Di conseguenza anche il livello di prezzo dovrebbe assumere un valore limitato. Questo ci suggerisce la seguente soluzione particolare:

$$p_t^{(p)} = -\phi^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{-i} z_{t+i}$$

per il principio di sovrapposizione, la soluzione generale dell'equazione non omogenea (2.36) sarà:

$$p_t = \phi^t c + p_t^{(p)} = \phi^t c - \phi^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{-i} z_{t+i}$$

A causa del termine $\phi^t c$, pur prevedendo una massa monetaria limitata, il livello dei prezzi registrati cresce esponenzialmente, a meno che $c = 0$. Questa condizione ci garantisce una soluzione non esplosiva.
Riassumendo, il modello di Cagan ci propone due soluzioni:

$$\begin{aligned} p_t &= \phi^t c_b + p_t^{(b)}, \qquad p_t^{(b)} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i z_{t-i} \\ p_t &= \phi^t c_f + p_t^{(f)}, \qquad p_t^{(f)} = -\phi^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{-i} z_{t+i} \end{aligned}$$

Quale delle soluzioni è appropriata dipende dal valore di ϕ.

- Se $|\phi| < 1$ (aspettative adattive): solo per la prima soluzione vale la non esplosività di p_t per valori limitati di z_t. In ogni caso, in questo modo abbiamo un'intera famiglia di soluzioni parametrizzate dalla costante c_b e solo quando le verrà assegnato un particolare valore, l'andamento del prezzo p_t sarà unicamente determinato.

- Se $|\phi| > 1$ (aspettative razionali): solo la seconda soluzione è significativa per valori limitati di z_t. La soluzione generale dell'equazione omogenea, però, implica un livello di prezzo esplosivo per tutti i valori di $c_f \neq 0$, quindi, in questo caso, c'è solo una soluzione non esplosiva: $p_t = p_t^{(f)}$. Il livello dei prezzi è uguale in ogni istante al livello stazionario. L'assunzione di aspettative razionali, di una variabile forzante limitata e di $c_f = 0$, portano alla definizione di un livello di prezzo unicamente determinato.

Dunque, sulla base delle stime ottenute dei coefficienti della domanda di moneta, Cagan osservò che in alcuni degli episodi studiati di iperinflazione la condizione di convergenza non era soddisfatta. Se la condizione di stabilità non è rispettata il fenomeno della elevata e crescente inflazione è in qualche misura endogeno al sistema economico in esame, a prescindere dal comportamento più o meno accomodante delle autorità. In generale, a prescindere da questi fenomeni di instabilità endogena, il modello spiega le variazioni dei prezzi come determinate essenzialmente dalle variazioni dello stock nominale di moneta. Tuttavia, se le attese sull'inflazione futura sono adattive, esse dipendono solo dai valori passati delle variazioni dei prezzi. In altre parole, gli agenti commettono errori sistematici di previsione: non imparano mai dalla storia che i prezzi aumentano sempre di più, ed ogni volta sottostimano l'inflazione effettiva. Con le aspettative razionali, elaborate per la prima volta da Muth nel 1961, arriviamo a una teoria delle aspettative che esclude qualsiasi errore sistematico di previsione, coerentemente con il postulato di razionalità assunto alla base dei comportamenti dei singoli operatori. Gli agenti del sistema economico formulano quindi le proprie aspettative sulle variabili in esame come se conoscessero il modello vero dell'economia reale.

2.5.2 *Il modello di Cagan applicato ai Bitcoin*

Partiamo dal modello di Cagan con aspettative razionali, focalizzandoci sull'incertezza nell'adozione dei Bitcoin e nella tecnologia dei pagamenti, come illustrato nel documento [13]. L'analisi dell'iperinflazione si concentra, come abbiamo già visto, sulle fluttuazioni dell'offerta di moneta. L'offerta di denaro di Bitcoin cresce ad un ritmo costante, essenzialmente deterministico.

Tuttavia, la sua adozione è aumentata nel tempo e a tassi variabili. Nel modello, sono le transazioni che guidano la domanda di Bitcoin e il suo prezzo. Con la crescita dell'utilizzo di Bitcoin, le difficoltà nel gestire l'aumento dei volumi di transazione hanno portato a cambiamenti nella sua tecnologia di pagamento, che hanno influenzato la velocità di transazione e il prezzo dei Bitcoin.
Consideriamo tutte le variabili in termini del logaritmo naturale, l'equazione di Cagan si presenta nel modo seguente:

$$m_t - p_t = \tau_t - v_t \tag{2.37}$$

in cui viene uguagliata l'offerta di moneta, $m_t - p_t$, alla domanda, $\tau_t - v_t$, che dipende dal volume delle transazioni e τ_t e dalla loro velocità v_t. Durante i periodi di iperinflazione la velocità implicita aumenta e, in modo equivalente, gli individui riducono le loro disponibilità liquide reali. Inoltre, la velocità fluttua drasticamente di mese in mese. Sulla base di ciò, si propone una teoria per la velocità del denaro nel periodo di iperinflazione. Assumiamo una velocità che aumenta con l'inflazione, perché questa misura la perdita di valore attesa per il possesso della valuta in deprezzamento:

$$v_t = \alpha(p^e_{t+1} - p_t) + \gamma \tag{2.38}$$

con γ costante e $\alpha > 0$ che rappresenta l'elasticità della velocità o, equivalentemente, la domanda di moneta negativa, rispetto al tasso di inflazione. Per adattare il modello di Cagan all'andamento dei Bitcoin, assumiamo una parità di potere d'acquisto tra Bitcoin e dollaro, avendo

$$s_t = p^{USD}_t - p_t.$$

In cui s_t è il logaritmo del valore di una unità di Bitcoin in dollari. Normalizziamo il prezzo in dollari ad 1, quindi $p^{USD}_t = 0$ e il prezzo di Bitcoin in dollari, ovvero il tasso di cambio, è il logaritmo negativo del livello di prezzo in Bitcoin

$$s_t = -p_t.$$

Come deviazione dal modello di Cagan, presumiamo che il termine residuo nella domanda di moneta non sia una costante ma una variabile stocastica dipendente dal tempo, γ_t. Si presume che γ_t sia un processo esogeno che rappresenta gli shock di velocità. Questo cattura l'idea che la tecnologia di pagamento in Bitcoin è in fase di cambiamento tecnologico. Nel modello, un aumento di γ_t, migliora la capacità di gestire le transazioni e aumenta la velocità, riducendo la domanda di Bitcoin. Sotto queste assunzioni, il nostro modello diventa

$$m_t + s_t - \tau_t = -v_t = \alpha(s^e_{t+1} - s_t) - \gamma_t \tag{2.39}$$

L'offerta di Bitcoin in termini reali per unità di transazione, $m_t + s_t - \tau_t$, è pari alla domanda per unità di transazione, che è una funzione positiva dell'apprezzamento atteso di Bitcoin (equivalentemente, il negativo del log della velocità). Se ci si aspetta che i Bitcoin apprezzino, le persone sono disposte a tenere più Bitcoin semplicemente come un investimento senza necessariamente richiedere che sia utile per le transazioni. Per accogliere un aumento della domanda, l'offerta di Bitcoin può aumentare in termini reali attraverso un aumento del prezzo corrente di bitcoin, cioè s_t. Per risolvere il modello per il prezzo corrente di Bitcoin s_t, partiamo dall'equazione (2.39), ottenendo

$$s_t = \tau_t - m_t + \alpha(s^e_{t+1} - s_t) - \gamma_t \tag{2.40}$$

Analizzando il modello con aspettative razionali, possiamo sostituire il valore atteso in modo coerente,

$$s_t = \frac{1}{1+\alpha}\{\tau_t - m_t - \gamma_t\} + \frac{\alpha}{1+\alpha}E_t\left[\frac{1}{1+\alpha}\{\tau_{t+1} - m_{t+1} - \gamma_{t+1}\} + \frac{\alpha}{1+\alpha}E_{t+1}s_{t+2}\right],$$

assumendo che l'effetto dell'ultimo termine alla fine si estingue. La soluzione implicita per il prezzo dei Bitcoin è data da

$$s_t = \frac{1}{1+\alpha}E_t\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^j\{\tau_{t+j} - m_{t+j} - \gamma_{t+j}\}. \tag{2.41}$$

I volumi delle transazioni correnti, l'offerta di denaro e gli shock di velocità, così come le loro aspettative future, determinano il prezzo corrente dei bitcoin. Il valore di m_t non è particolarmente volatile nel tempo, è quindi improbabile che giochi un ruolo significativo per spiegare le fluttuazioni dei prezzi, che sono principalmente guidate dai volumi di transazioni attuali e futuri e dagli shock di velocità che rappresentano i cambiamenti della tecnologia dei pagamenti. Nell'analisi di questo modello, viene escluso il fattore di rischio, solitamente presente in molti modelli tipici per la determinazione del prezzo di stocks nei mercati azionari, che non sarebbe compatibile con il modello di Cagan. Poiché, finora, le fluttuazioni del prezzo dei Bitcoin sono state essenzialmente non correlate con i mercati azionari, ignorare i premi di rischio può anche essere giustificato da una prospettiva empirica.

Capitolo 3

Applicazioni economiche delle equazioni alle differenze lineari univariate di ordine superiore al primo

In questo capitolo ci occuperemo ancora di applicazioni economiche delle equazioni alle differenze, in questo caso di ordine $p \geq 1$:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + z_t, \qquad \phi_p \neq 0, \tag{3.1}$$

dove $\phi_1, \ldots, \phi_p$ sono costanti reali e la variabile esogena $z_t \in \mathbf{R}$ rappresenta la parte non autonoma.

3.1 *Soluzioni di equazioni alle differenze di ordine p*

Per trovare una soluzione generale dell'equazione omogenea, supponiamo che questa sia nella stessa forma della soluzione all'equazione di primo ordine, ovvero del tipo $\lambda^t c$, $c \neq 0$. Inseriamo la soluzione nell'equazione (3.2), ottenendo:

$$\lambda^t c = \phi_1 \lambda^{t-1} c + \phi_2 \lambda^{t-2} c + \cdots + \phi_p \lambda^{t-p} c$$

dopo aver eliminato c, dividendo per λ^t e sostituendo z con $1/\lambda$, abbiamo:

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0.$$

Quest'ultima è chiamata equazione caratteristica. Per far si che $\lambda^t x$ sia una soluzione dell'equazione omogenea, $z = 1/\lambda$ deve essere una radice dell'equazione caratteristica. Queste radici sono chiamate radici caratteristiche e

l'assunzione di $\phi \neq 0$, implica che nessuna di queste radici sia uguale a zero. Dal Teorema Fondamentale dell'Algebra sappiamo che ci sono p radici possibilmente complesse dell'equazione caratteristica. Denotiamo queste radici con $z_1, \ldots, z_p$ e le corrispondenti $\lambda^t c$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Consideriamo il caso di p radici distinte.

Teorema 3.1.1 (Insieme fondamentale per l'equazione di ordine p)**.** *Se tutte le radici dell'equazione caratteristica sono distinte, l'insieme* $\{\lambda_1^t, \ldots, \lambda_p^t\}$ *forma un insieme fondamentale di soluzioni.*

Dimostrazione. E' sufficiente mostrare che il $detC(t) \neq 0$, dove $C(t)$ è la matrice di Casorati rispetto a $\{\lambda_1^t, \ldots, \lambda_p^t\}$.

$$
\begin{aligned}
detC(t) &= det \begin{bmatrix} \lambda_1^t & \lambda_2^t & \ldots & \lambda_p^t \\ \lambda_1^{t+1} & \lambda_2^{t+1} & \ldots & \lambda_p^{t+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{t+p-1} & \lambda_2^{t+p-1} & \ldots & \lambda_p^{t+p-1} \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1^t \lambda_2^t \ldots \lambda_p^t det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \ldots & \lambda_p^{p-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Questa seconda matrice è chiamata matrice di Vandermonde, il cui determinante è dato da $\prod_{1 \leq i < j \leq p}(\lambda_j - \lambda_i)$, che è diverso da zero poiché le radici sono distinte. Dunque, anche $detC(t) \neq 0$. □

Il teorema appena dimostrato implica che la soluzione generale dell'equazione omogenea $x_t^{(g)}$ è data da

$$x_t^{(g)} = \lambda_1^t c_1 + \lambda_2^t c_2 + \cdots + \lambda_p^t c_p \tag{3.2}$$

dove $c_1, \ldots, c_p$ sono costanti determinate dalle condizioni al contorno. Con la stessa tecnica usata nel teorema 2.1.1, si può dimostrare che la soluzione forma uno spazio lineare di dimensione p.

Consideriamo ora il caso di radici multiple.
Denotiamo le r radici distinte con $z_1, \ldots, z_r$, $r < p$, e le loro rispettive molteplicità con $m_1, \ldots, m_r$. Riscrivendo l'equazione alle differenze omogenea tramite l'operatore di shift [1], si ottiene:

$$(1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p) x_t = (1 - \lambda_1 L)^{m_1} \ldots (1 - \lambda_r L)^{m_r} x_t = 0 \tag{3.3}$$

[1] L'operatore di shift trasforma una sequenza $\{x_t\}$ in $\{x_{t-1}\}$, ovvero $Lx_t = x_{t-1}$

dove L indica l'operatore di shift e $\lambda_i = 1/z_i$, $1 \leq i \leq r$. Prima di trovare una soluzione generale, notiamo come prima cosa che se ψ_t è una soluzione dell'equazione

$$(1 - \lambda_i L)^{m_i} \psi_t = 0, \tag{3.4}$$

sarà anche soluzione dell'equazione (3.3).

Lemma 3.1.1. Per ogni $k \geq 1 \quad (1 - L)^k t^s = 0$, $0 \leq s < k$

Dimostrazione. L'operatore $L - 1$ applicato a t^s restituisce un polinomio di grado $s-1$, poiché t^s viene eliminato nell'espressione $(1-L)t^s = t^s - (t-1)$ e rimangono solo i termini di grado minore di s. Applicando $1-L$ nuovamente, viene ridotto il grado del polinomio di uno. Infine, $(1 - L)^s t^s$ ci fa ottenere una costante. Dunque, $(1 - L)^{s+1} t^s = 0$. Questo dimostra il lemma, dato che ulteriori applicazioni dell'operatore $1 - L$ darebbero ancora zero. □

Lemma 3.1.2. L'insieme $G_i = \{\lambda_i^t, t\lambda_i^t, t^2\lambda_i^t, \ldots, t^{m_i-1}\lambda_i^t\}$ rappresenta un set fondamentale di soluzioni dell'equazione (3.4).

Dimostrazione. Prendiamo s, $1 \leq s \leq m_i - 1$, allora

$$(1 - \lambda_i L)^{m_i}(t^s \lambda_i^t) = \lambda_i^t (1 - L)^{m_i}(t^s) = 0$$

poiché per il Lemma 3.1.1, $(1-L)^{m_i} t^s = 0$ [2]. Quindi $t^s \lambda_i^t$ è una soluzione dell'equazione (3.4). L'insieme G_i è linearmente indipendente perchè l'insieme $\{1, t, t^2, \ldots, t^{m_i-1}\}$ è linearmente indipendente. □

Di conseguenza, anche $G = \bigcup_{i=1}^r G_i$ è un insieme fondamentale di soluzioni dell'equazione (3.3). Dunque, la soluzione generale può essere scritta come

$$x_t = \sum_{i=1}^{r} (c_{i,0} + c_{i,1} t + c_{i,2} t^2 + \cdots + c_{i,m_i-1} t^{m_i-1}) \lambda_i^t \tag{3.5}$$

dove $c_{i,0}, \ldots, c_{i,m_i-1}$, $i = 1, \ldots, r$, sono costanti determinate dalle condizioni al contorno. Come per il caso di radici distinte, l'insieme di soluzioni forma uno spazio lineare di ordine p poichè $\sum_{i=1}^r m_i = p$.

La soluzione generale all'equazione non omogenea può essere definita sempre tramite il principio di sovrapposizione, secondo cui

$$x_t = x_t^{(g)} + x_t^{(p)}$$

dove $x_t^{(g)}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea data dalla (3.5) e $x_t^{(p)}$ è una soluzione particolare della non omogenea. Per la ricerca della

[2] Qui viene usata la relazione $P(L)(\lambda^t g(t)) = \lambda^t P((\lambda^{-1}L))g(t)$

soluzione particolare, può essere utilizzata la stessa idea mostrata per le equazioni di primo ordine. Se la parte non omogenea è costante, ovvero $z_t = z$, lo stato stazionario, se esiste, rappresenta una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Se, invece, la parte non omogenea è dipendente dal tempo, una soluzione particolare può essere trovata iterando l'equazione backwards e/o forwards a seconda della posizione delle radici.

3.1.1 *Comportamenti limite delle soluzioni*

Prima di passare nuovamente ad esempi in campo economico, classifichiamo il comportamento qualitativo delle soluzioni. In particolare andiamo ad analizzare le proprietà di stabilità degli stati stazionari e il comportamento limite delle soluzioni, quando il tempo va ad infinito. Prendiamo in esame, per semplicità, il caso delle equazioni omogenee di secondo ordine:

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} = 0, \quad \phi_2 \neq 0. \tag{3.6}$$

Assumendo $1 - \phi_1 - \phi_2 \neq 0$, l'unico punto fisso dell'equazione omogenea è 0. L'equazione caratteristica corrispondente è data da:

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$$

e la soluzione di quest'equazione è data dalla formula:

$$z_{1,2} = -\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$$

che in termini di $\lambda = 1/z$, diventa:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \tag{3.7}$$

Per capire il comportamento qualitativo di x_t, distinguiamo 3 casi:

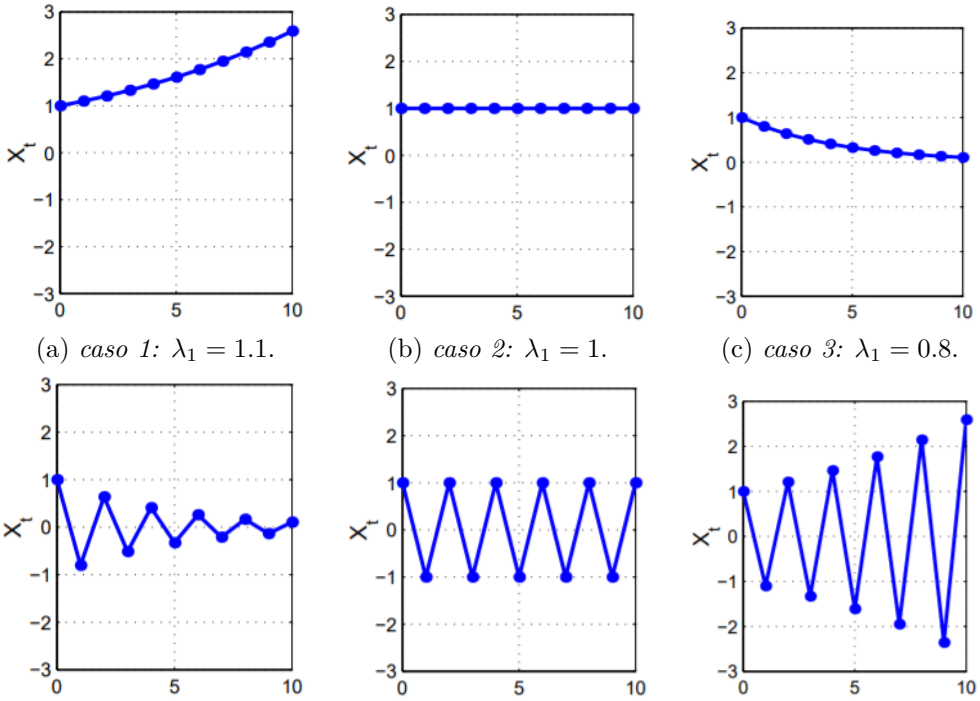
- λ_1 **e** λ_2 **sono radici reali distinte**: la soluzione generale è data da

  $$x_t = \lambda_1^t c_1 + \lambda_2^t c_2 = \lambda_1^t \left[c_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t c_2 \right]$$

  Supponiamo, senza perdita di generalità che $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, quindi $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t \to 0$ per $t \to \infty$. Questo implica che il comportamento di x_t è guidato dalla radice più grande, λ_1:

  $$\lim_{t \to +\infty} x_t = \lim_{t \to +\infty} \lambda_1^t c_1.$$

  A seconda del valore di λ_1 abbiamo sei casi differenti mostrati anche in figura 3.1:



(a) *caso 1:* $\lambda_1 = 1.1$. (b) *caso 2:* $\lambda_1 = 1$. (c) *caso 3:* $\lambda_1 = 0.8$.

(d) *caso 4:* $\lambda_1 = -0.8$. (e) *caso 5:* $\lambda_1 = -1$. (f) *caso 6:* $\lambda_1 = -1.1$.

Figura 3.1: Comportamento di $x_t = \lambda_1^t$ a seconda del valore di $\lambda \in \mathbf{R}$.

1. $\lambda_1 > 1$: $\lambda_1^t c_1 \to \infty$ per $t \to \infty$.
2. $\lambda_1 = 1$: $\lambda_1^t c_1$ rimane costante e x_t tende asintoticamente a c_1. Avendo come condizioni iniziali $x_1 = x_0 = x$, che equivale a $c_1 = x$ e $c_2 = 0$, x_t rimarrà costante sul valore di x.
3. $0 < \lambda_1 < 1$: $\lambda_1^t c_1$ decresce monotonicamente a zero. Zero è un punto fisso asintoticamente stabile.
4. $-1 < \lambda_1 < 0$: $\lambda_1^t c_1$ oscilla con segno alternato intorno allo zero e convergendo ad esso. Zero è ancora un punto fisso asintoticamente stabile.
5. $\lambda = -1$: $\lambda_1^t c_1$ oscilla tra i valori c_1 e $-c_1$. La sequenza (x_t) avrà due punti di accumulazione c_1 e $-c_1$.
6. $\lambda < -1$: $\lambda_1^t c_1$ oscilla con segno alternato, divergendo a $+\infty$. Il punto fisso, zero, è instabile.

- $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ **sono radici uguali**: secondo la (3.5), la soluzione è data da: $x_t = (c_1 + c_2 t)\lambda^t$. Se $\lambda \geq 1$, x_t diverge monotonicamente; per

$\lambda \leq -1$, x_t diverge con segno alternato e infine con $|\lambda| < 1$, la soluzione converge a zero poiché $\lim_{t\to+\infty} t\lambda^t = 0$.

- **radici complesse:** le due radici complesse coniugate possono essere scritte come $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta \neq 0$. In termini di coordinate polari, diventano $\lambda_1 = re^{i\theta}$ e $\lambda_2 = re^{-i\theta}$ dove $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ e $\theta = tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. La soluzione è data da

$$\begin{aligned} x_t &= \lambda_1^t c_1 + \lambda_2^t c_2 = (\alpha + i\beta)^t c_1 + (\alpha - i\beta)^t c_2 \\ &= r^t e^{i\theta t} c_1 + r^t e^{-i\theta t} c_2 \\ &= r^t [c_1(cos(\theta t) + isin(\theta t)) + c_2(cos(\theta t) - isin(\theta t))] \\ &= r^t [(c_1 + c_2)cos(\theta t) + i(c_1 - c_2)sin(\theta t)] \end{aligned}$$

  Poichè x_t deve essere un numero reale, $c_1 + c_2$ deve essere anch'esso reale, mentre $c_1 - c_2$ sarà puramente immaginario. Questo implica che anche c_1 e c_2 devono essere complessi coniugati. Ovvero, in coordinate polari $c_1 = \rho e^{i\omega}$ e $c_2 = \rho e^{-i\omega}$ per qualche p e ω. Inserendoli nella soluzione appena trovata, si ha:

$$\begin{aligned} x_t &= \rho r^t [e^{i(\theta t+\omega)} + e^{-i(\theta t+\omega)}] \\ &= 2\rho r^t cos(\theta t + \omega) \end{aligned}$$

  Chiaramente la soluzione oscilla a causa della presenza della funzione coseno. A seconda del posizionamento delle radici, possiamo distinguere tre casi:

  1. $r > 1$: entrambe le radici sono fuori dal cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio= 1. x_t oscilla con ampiezza sempre maggiore, perciò il punto fisso zero è instabile.
  2. $r = 1$: entrambe le radici si trovano sul cerchio unitario. x_t oscilla, con un'ampiezza costante.
  3. $r < 1$: entrambe le radici sono all'interno del cerchio unitario. La soluzione oscilla, ma con ampiezza decrescente e converge a 0 per $t \to \infty$. Quindi il punto fisso zero è asintoticamente stabile.

Possiamo sintetizzare i comportamenti limite delle soluzioni con il seguente teorema.

Teorema 3.1.2. *Le seguenti affermazioni valgono nel caso di equazioni alle differenze lineari omogenee di secondo ordine:*

- *Tutte le soluzioni oscillano intorno allo zero se e solo se l'equazione non ha radici caratteristiche reali positive.*

- *Tutte le soluzioni convergono a zero se e solo se* $max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Anche se il comportamento limite di x_t è più semplice da capire in termini di radici dell'equazione caratteristica, possiamo analizzare anche le proprietà dell'equazione alle differenze con i parametri originali ϕ_1 e ϕ_2. Consideriamo quindi un'equazione non omogenea di secondo ordine del tipo:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + z, \quad z \neq 0, costante. \tag{3.8}$$

Lo zero non è più un equilibrio. Il nuovo punto di equilibrio, x^* può essere trovato risolvendo l'equazione:

$$x^* = \phi_1 x^* + \phi_2 x^* + z \Rightarrow x^* = \frac{z}{1 - \phi_1 - \phi_2}.$$

Si può notare che un equilibrio esiste solo se $1-\phi_1-\phi_2 \neq 0$. Poichè lo stato di equilibrio è candidato ad essere la soluzione particolare dell'equazione (3.8), la soluzione generale diventa

$$x_t = x^* + x_t^{(g)}$$

Perciò, x_t converge al suo equilibrio se e solo se $x_t^{(g)}$ converge a zero per $t \to \infty$. Secondo quanto appena affermato e in base al teorema 3.1.2, valgono i seguenti due teoremi.

Teorema 3.1.3 (Comportamento limite delle equazioni di secondo ordine)**.** *Assumendo* $1 - \phi_1 - \phi_2 \neq 0$*, valgono le seguenti affermazioni:*

- *Tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea* (3.8) *oscillano intorno al punto di equilibrio* x^* *se e solo se l'equazione caratteristica non ha radici caratteristiche positive.*

- *Tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea* (3.8) *convergono ad* x^* *se e solo se* $max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$*, dove* λ_1 *e* λ_2 *sono radici caratteristiche dell'equazione omogenea.*

I teoremi 3.1.2 e 3.1.3, ci danno condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità asintotica di una soluzioni di un'equazione alle differenze di secondo ordine. In molte applicazioni, però, abbiamo bisogno di criteri più espliciti per la stabilità, basati sui valori dei coefficienti ϕ_1 e ϕ_2 delle equazioni (3.6) e (3.8). A questo proposito enunciamo il seguente teorema:

Teorema 3.1.4 (Condizioni di stabilità delle equazioni di secondo ordine)**.** *Il punto di equilibrio* x^* *è asintoticamente stabile, ovvero tutte le soluzioni convergono ad* x^**, se e solo se le seguenti tre condizioni sono soddisfatte:*

1. $1 - \phi_1 - \phi_2 > 0$

2. $1 + \phi_1 - \phi_2 > 0$

3. $1 + \phi_2 > 0$

Dimostrazione. Assumiamo che x^* sia un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
Per il teorema 3.1.2, questo significa che entrambe, λ_1 e λ_2 devono essere più piccole di uno in valore assoluto. Per l'equazione (3.7), questo implica che:

$$|\lambda_1| = \left|\frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}\right| < 1 \quad e \quad |\lambda_2| = \left|\frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}\right| < 1$$

Distinguiamo 2 casi:

- radici reali ($\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$): questo implica le seguenti disuguaglianze:

$$-2 < \phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2$$
$$-2 < \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2$$

  o , in modo equivalente,

$$-2 - \phi_1 < \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 - \phi_1$$
$$-2 - \phi_1 < -\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 - \phi_1.$$

  Elevando al quadrato la seconda disuguaglianza della prima riga, si ottiene: $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 4 - 4\phi_1 + \phi_1^2$, che verifica la prima condizione del teorema. Allo stesso modo, elevando al quadrato la prima disuguaglianza della seconda riga, si ha: $4+4\phi_1+\phi_1^2 > \phi_1^2+4\phi_2$, che corrisponde alla seconda condizione del teorema. L'assunzione che $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$ implica $\lambda_1\lambda_2| = |-\phi_2| < 1$ che dimostra la terza condizione.

- radici complesse ($\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$): questo implica che $0 < \phi_1^2 < -4\phi_2$. Pertanto

$$4(1 - \phi_1 - \phi_2) > 4 - 4\phi_1 + \phi_1^2 = (2 - \phi_1)^2 > 0$$

  che equivale alla prima condizione. Procedendo allo stesso modo si ha,

$$4(1 + \phi_1 - \phi_2) > 4 + 4\phi_1 + \phi_1^2 = (2 + \phi_1)^2 > 0$$

che equivale alla seconda condizione. Per ottenere l'ultima condizione, prendiamo le due radici complesse coniugate, che saranno nella forma

$$\lambda_1 = \frac{\phi_1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{\phi_1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}.$$

Poichè per ipotesi, $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$, abbiamo $|\lambda_1\lambda_2| = |-\phi_2| < 1$, che rappresenta la terza condizione.

Assumiamo ora che le tre condizioni siano soddisfatte.
Questo implica immediatamente che $-2 < \phi_1 < 2$ e $-1 < \phi_2 < 1$. Se le radici sono real, allora

$$\begin{aligned} -1 < \frac{-2 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} < \lambda_1 &= \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \\ &< \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4 - 4\phi_1}}{2} \\ &= \frac{\phi_1 + \sqrt{(2-\phi_1)^2}}{2} \\ &= \frac{\phi_1 - \phi_1 + 2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Allo stesso modo,

$$\begin{aligned} 1 > \frac{2 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} > \lambda_2 &= \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \\ &> \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4 + 4\phi_1}}{2} \\ &= \frac{\phi_1 - \sqrt{(2+\phi_1)^2}}{2} \\ &= \frac{\phi_1 - \phi_1 - 2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Se le radici sono complesse, λ_1 e λ_2 sono numeri complessi coniugati. I loro moduli al quadrato sono uguali a $\lambda_1\lambda_2 = \frac{\phi_1^2 - (\phi_1^2 + 4\phi_2)}{4} = -\phi_2$. Poiché dalle ipotesi $-\phi_2 < 1$, il modulo di λ_1 e λ_2 è per entrambe minore di uno.

□

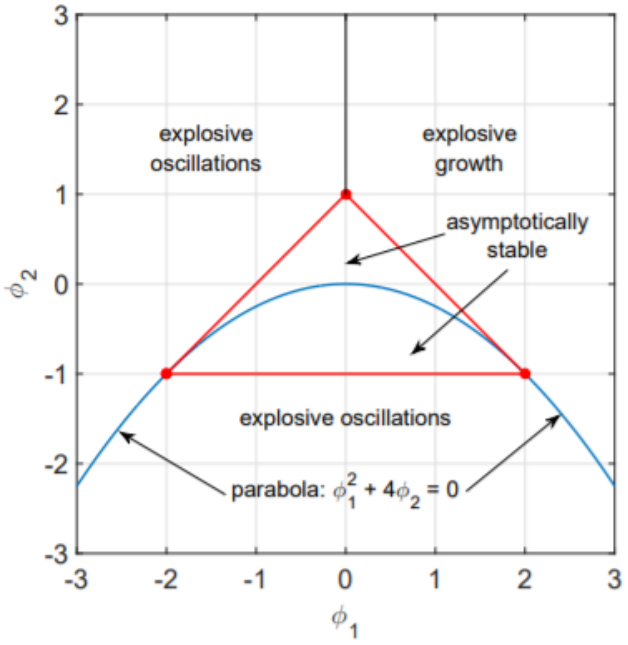


Figura 3.2: Proprietà di stabilità dell'equazione: $x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} = 0$

Le tre condizioni elencate nel teorema, determinano un triangolo nel piano (ϕ_1, ϕ_2), con vertici $(-2, -1)$, $(0, 1)$, *e* $(2, -1)$. I punti all'interno del triangolo implicano un comportamento asintoticamente stabile, mentre i punti all'esterno portano ad un comportamento instabile. La parabola $\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$ determina la regione delle radici complesse. I valori di ϕ_1 e ϕ_2 sopra la parabola, ci restituiscono radici reali, mentre quelli al di sotto, radici complesse.

3.2 *Il modello di Samuelson*

La teoria del ciclo economico è stata una delle aree di ricerca più vitali in economia per più di un secolo e le spiegazioni offerte sono state molto diverse. In vari periodi sono state realizzate indagini generali, come quelle di von Haberler (1937) e quella più recente di Glasner (1997) descritte nel documento [14]. Le più sofisticate teorie del ciclo economico utilizzano diversi meccanismi per spiegare la ripresa e la recessione, che coinvolgono sia il lato della domanda che quello dell'offerta, le questioni monetarie, la fiducia e le aspettative delle imprese. Quello che noi prendiamo in considerazione è il modello Samuelson, riportato nel documento [15] e detto anche modello

moltiplicatore-acceleratore, in cui i cicli sono generati esclusivamente dal lato della domanda. Il modello si distingue lasciando che un unico meccanismo sia responsabile sia della ripresa che della flessione, per questa ragione può essere visto come poco sofisticato e meccanicistico, ma ciò gli conferisce una certa solidità. È anche molto ricco di risultati potenziali che sono stati ripresi soprattutto tra il 1939 e 1950.

Il modello moltiplicatore-acceleratore può essere definito per un'economia chiusa come segue:

$$\begin{aligned} C_t &= \beta Y_{t-1} & 0 < \beta < 1 \quad & \text{(consumo)} \\ I_t &= \alpha + k(C_t - C_{t-1}) & k > 0 \quad & \\ &= \alpha + \gamma(Y_{t-1} - Y_{t-2}) & \gamma > 0 \quad & \text{(investimento)} \\ Y_t &= C_t + I_t + G_t & & \text{(market clearing)} \end{aligned}$$

in cui C_t, I_t, Y_t e G_t rappresentano rispettivamente le spese per consumi privati, gli investimenti, il guadagno e la spesa pubblica. Nella prima equazione vediamo come il consumo al tempo t dipenda dal guadagno nazionale al tempo precedente, in cui il parametro β indica la propensione marginale al consumo ed è assunto essere tra zero e uno. La seconda equazione ci mostra come gli investimenti sono in parte autonomi e indipendenti dal ciclo di business, denotati con α, e in parte proporzionali alle variazioni dei consumi, con coefficiente di accelerazione $\gamma = \beta k$. L'ultima equazione rappresenta la condizione di equilibrio per un economia chiusa, in cui il guadagno nazionale è dato dal totale del consumo delle famiglie, degli investimenti delle imprese e della spesa pubblica. L'inserimento dell'equazione dei consumi e degli investimenti nell'identità del guadagno porta alla seguente equazione alle differenze non omogenea di secondo ordine:

$$Y_t = (\beta + \gamma)Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2} + (\alpha + G_t) \tag{3.9}$$

Se la spesa pubblica rimane costante nel tempo e uguale a G, il punto di equilibrio Y^* per l'equazione (3.9) può essere calcolato nel modo seguente:

$$Y^* = (\beta + \gamma)Y^* - \gamma Y^* + \alpha + G \Rightarrow Y^* = \frac{\alpha + G}{1 - \beta}$$

La stabilità di questo equilibrio può essere dedotta verificando le tre condizioni del teorema 3.1.4:

1. $1 - (\beta + \gamma) + \gamma = 1 - \beta > 0$
2. $1 + (\beta + \gamma) + \gamma = 1 + \beta + 2\gamma > 0$

3. $1 - \gamma > 0$

Date le assunzioni del modello, le prime due condizioni sono automaticamente soddisfatte. La terza condizione è valida solo se il coefficiente di accelerazione non è troppo grande, ovvero se $\gamma < 1$. In questo caso, lo stato stazionario Y^* è asintoticamente stabile se si impone una condizione aggiuntiva. Inoltre, tutte le soluzioni Y_t oscillano intorno allo stato di equilibrio se, secondo il teorema 3.1.4, non c'è nessuna radice reale positiva dell'equazione caratteristica. Calcoliamo

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta + \gamma \pm \sqrt{(\beta + \gamma)^2 - 4\gamma}}{2}$$

Se le radici sono reali, esse sono entrambe strettamente positive e strettamente minori di 1. Quindi, Y_t può oscillare intorno al suo stato stazionario se e solo se le radici sono complesse, cioè se $(\beta + \gamma)^2 - 4\gamma < 0$. Se sono complesse, i loro moduli sono strettamente minori di uno.
Nel caso generale in cui le spese pubbliche non sono costanti, ma variano nel tempo, applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati per trovare una soluzione particolare, $Y_t^{(p)}$, all'equazione (3.9). Questo metodo ipotizza un certo tipo di soluzione da inserire nell'equazione alle differenze. In questo caso particolare, pensiamo ad una soluzione nella forma:

$$Y_t^{(p)} = c + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i G_{t-i}$$

dove i coefficienti ψ_j sono chiamati risposte impulsive o moltiplicatori dinamici. Essi rappresentano l'effetto sull'output di un impulso (stimolo) nelle spese pubbliche nel corso del tempo. Pertanto un impulso unitario è specificato come $\Delta G_t = 1$ e $\Delta G_{t-i} = 0$ per $i \neq 0$. L'effetto sull'output viene rappresentato da

$$\Delta Y_{t+h}^{(p)} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \Delta G_{t+h-i} = \psi_h \Delta G_t = \psi_h, \quad h = 0, 1, 2, \ldots$$

Inserendo questa idea di soluzione nell'equazione alle differenze, si ottiene

$$c + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i G_{t-i} = \\ c(\beta + \gamma) + (\beta + \gamma) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i G_{t-1-i} - c\gamma - \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i G_{t-2-i} + \alpha + G_t$$

Uguagliano i termini costanti, si ottiene un'equazione in c:

$$c(1 - (\beta + \gamma) + \gamma) = \alpha \Rightarrow c = \frac{\alpha}{1 - \beta} > \alpha > 0$$

Uguagliano i termini per G_{t-i}, $i = 0, 1, \ldots$ si ha:

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = 1 \\
&\psi_1 = (\beta + \gamma)\psi_0 = \beta + \gamma \\
&\psi_2 = (\beta + \gamma)\psi_1 - \gamma\psi_0 \\
&\quad \ldots \\
&\psi_j = (\beta + \gamma)\psi_{j-1} - \gamma\psi_{j-2}, \quad j \geq 2
\end{aligned}$$

Dunque, i coefficienti ψ_j, $j \geq 2$, seguono la forma della soluzione di un'equazione omogenea di secondo ordine, con valori iniziali $\psi_0 = 1$ e $\psi_1 = \beta + \gamma$,

$$\psi_j = d_1\lambda_1^j + d_2\lambda_2^j$$

dove i coefficienti d_1 e d_2 possono essere determinati dalle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 1 = d_1 + d_2 \\
\psi_1 &= \beta + \gamma = d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2
\end{aligned}$$

Per mostrare meglio il comportamento del modello di Samuelson, discutiamo degli esempi numerici.

- $\beta = \frac{4}{5}$ e $\gamma = \frac{1}{5}$: in questo caso entrambe le radici sono reali e uguali a

  $$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} = 0.7236 \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} = 0.2764$$

  Dunque i coefficienti delle risposte impulsive ψ_j per $j \geq 0$ sono dati da $\psi_j = d_1\lambda_1^j + d_2\lambda_2^j$. Le costanti d_1 e d_2 possono essere ricavate dalle condizioni iniziali: $\psi_0 = 1 = d_1 + d_2$ e $\psi_1 = 1 = d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2$. Risolvendo queste due equazioni rispetto a d_1 e d_2 si ottiene:

  $$\begin{aligned}
  d_1 &= \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1.6180 \\
  d_2 &= \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} = -0.6180
  \end{aligned}$$

  L'impulso corrispondente è riportato in blu in figura 3.3. L'aumento iniziale della spesa pubblica di un'unità aumenta la produzione nel periodo corrente e nel periodo successivo di una unità. Quindi l'effetto dell'impulso si spegne monotonicamente. Dopo dieci periodi l'effetto quasi scomparso.

- $\beta = \frac{3}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{4}$: in questo caso abbiamo una radice multipla $\lambda = 0.5$. Per l'equazione (3.5) i coefficienti della risposta impulsiva sono uguali a $\psi_j = (d_0 + d_1 t)\lambda^t$. Le costanti d_0 e d_1 possono essere nuovamente trovate risolvendo il sistema di equazioni: $\psi_0 = 1 = d_0$ e $\psi_1 = 1 = (d_0 + d_1)\lambda$. Si ottengono $d_0 = 1$ e $d_1 = 1$. L'andamento dei coefficienti di risposta impulsiva corrispondenti è mostrato in rosso in figura 3.3 ed è molto simile al caso precedente. Essi sono persino smorzati più rapidamente.

- $\beta = \frac{2}{3}$ e $\gamma = \frac{2}{3}$: in questo caso il discriminante è negativo, perciò abbiamo due radici complesse coniugate:

  $$\lambda_{1,2} = \frac{1}{3}(2 \pm i\sqrt{2}).$$

  Le costanti possono essere trovate nuovamente risolvendo il sistema di equazioni: $\psi_0 = 1 = d_1 + d_2$ e $\psi_1 = \frac{3}{4} = d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2$. La soluzione è data da

  $$d_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
  $$d_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

  L'impulso corrispondente è illustrato in verde in figura 3.3. Esso mostra chiaramente un comportamento oscillatorio. A causa dell'acceleratore, infatti, l'impulso iniziale viene amplificato nel primo periodo. L'effetto è di circa 1,3. Dopo il primo periodo l'effetto diminuisce rapidamente e diventa anche negativo nel quarto. Tuttavia, nel periodo sette l'effetto comincia ad aumentare e diventa di nuovo positivo nel periodo dieci. Come risulta anche dalla figura, questi movimenti oscillatori si estinguono.

Una delle principali critiche alla teoria del ciclo economico lineare è che i cambiamenti nell'attività economica, nei casi generali, si estinguono o esplodono, ma non sono persistenti. In reazione a questa carenza si è sviluppata la teoria non lineare del ciclo economico. In particolare, nel lavoro seminale di Hicks (1950) l'evoluzione di una crescita altrimenti esplosiva è stata limitata proponendo limiti superiori e inferiori per gli investimenti. Questi semplici quadri di Samuelson e Hicks sono ancora utilizzati come base per studiare nuovi elementi aggiuntivi che possono stimolare i cicli di business.

3.3 *Il modello Cobweb con inventario*

In questo esempio estendiamo il semplice modello Cobweb, analizzato nella sottosezione 2.2.2, con la possibilità di immagazzinare dei beni. Ipo-

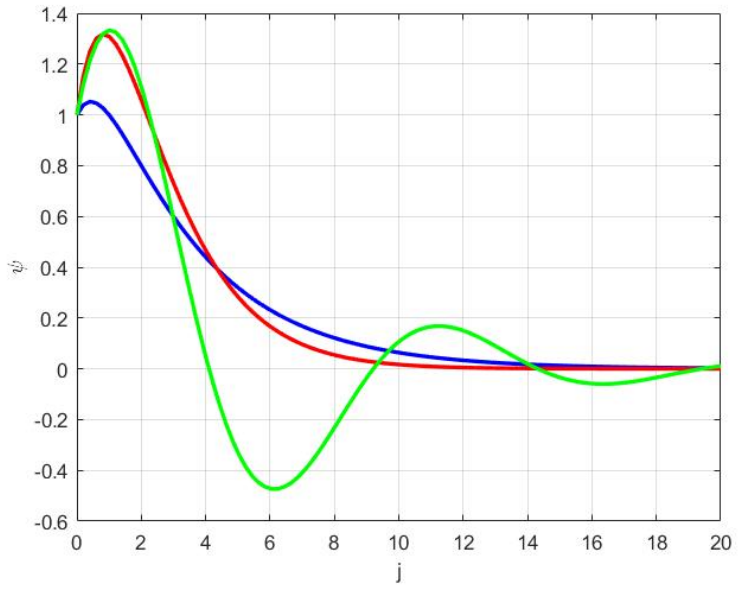


Figura 3.3: Coefficienti di risposta impulsiva del modello di Samuelson

tizziamo che le aspettative siano razionali, che nel contesto di un modello deterministico è equivalente a una perfetta previsione. Queste estensioni porteranno a ulteriori approfondimenti sul metodo dei coefficienti indeterminati introdotto nell'esempio precedente. Le nuove equazioni che descrivono il modello sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
D_t &= -\beta p_t, & \beta > 0 \quad & (domanda)\\
S_t &= \gamma p_t^e + u_t, & \gamma > 0 \quad & (offerta)\\
I_t &= \alpha(p_{t+1}^e - p_t), & \alpha > 0 \quad & (esigenze\,di\,stock)\\
S_t &= D_t + (I_t - I_{t-1}), & & (mercato)\\
p_t^e &= p_t, & & (previsione\,perfetta)
\end{aligned}$$

dove u_t rappresenta i fattori esogeni. Le esigenze di stock incorporano un elemento speculativo perché i beni saranno immagazzinati se ci si aspetta che i prezzi aumentino al tempo t successivo. L'equazione di compensazione del mercato dimostra che l'offerta rimasta invenduta viene utilizzata per costituire le scorte; allo stesso modo, la domanda non può essere soddisfatta solo da beni di nuova fornitura, ma anche dal magazzino.
Combinando queste equazioni si ottiene la seguente equazione alle differenze lineare di ordine due:

$$p_{t+1} = \frac{\gamma + 2\alpha + \beta}{\alpha} p_t - p_{t-1} + \frac{u_t}{\alpha}. \tag{3.10}$$

Ponendo $\phi = \dfrac{\gamma + 2\alpha + \beta}{\alpha}$, l'equazione caratteristica diventa:

$$1 - \phi z + z^2 = 0$$

Calcoliamo da qui le radici caratteristiche z_1 e z_2

$$z_{1,2} = \frac{\phi \pm \sqrt{\phi^2 - 4}}{2}$$

Come prima cosa, possiamo osservare che, poiché $\phi > 2$, le radici sono reali, distinte e positive. Esse sono anche in rapporto reciproco, ovvero $z_1 z_2 = 1$, dunque una radice sarà minore di uno, mentre un'altra necessariamente maggiore di uno. Abbiamo quindi una radice stabile ed una esplosiva. La soluzione dell'equazione omogenea, può essere scritta anche come

$$p_t = c_1 \lambda^t + c_2 \lambda^{-t}$$

in cui, senza perdita di generalità, $z_1 = \lambda < 1$ e $z_2 = \frac{1}{\lambda}$. $c1$ e $c2$ sono costanti ancora da determinare.
Poiché gli agenti in questo modello hanno aspettative razionali, il che implica che sono lungimiranti, includeranno i fattori esogeni attesi nella loro decisione. Tuttavia, le decisioni prese in passato si riflettono nelle scorte dell'ultimo periodo. Quindi, ipotizziamo che la soluzione abbia sia una componente forward che una backward.

$$p_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j u_{t-j}$$

Seguendo il metodo dei coefficienti indeterminati, sostituiamo questa ipotesi di soluzione nell'equazione alle differenze e otteniamo:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j u_{t+1-j} = \phi \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j u_{t-j} - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j u_{t-1-j} + \frac{u_t}{\alpha}$$

Rappresentiamo questa equazione in forma estesa:

$$\begin{aligned}
&\cdots + \psi_{-1} u_{t+2} + \psi_0 u_{t+1} + \psi_1 u_t + \psi_2 u_{t-1} + \psi_3 u_{t-2} + \dots \\
&\quad = \cdots + \phi\psi_{-2} u_{t+2} + \phi\psi_{-1} u_{t+1} + \phi\psi_0 u_t + \phi\psi_1 u_{t-1} + \phi\psi_2 u_{t-2} + \dots \\
&\qquad - \cdots - \psi_{-3} u_{t+2} - \psi_{-2} u_{t+1} - \psi_{-1} u_t - \psi_0 u_{t-1} - \psi_1 u_{t-2} - \cdots + \frac{u_t}{\alpha}
\end{aligned}$$

Uguagliando i termini per u_{t-j} $j = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ si ha:

$$\begin{aligned}
&\ldots \\
u_{t+2}: &\qquad \psi_{-1} = \phi\psi_{-2} - \psi_{-3} \\
u_{t+1}: &\qquad \psi_0 = \phi\psi_{-1} - \psi_{-2} \\
u_t: &\qquad \psi_1 = \phi\psi_0 - \psi_{-1} + \frac{1}{\alpha} \\
u_{t-1}: &\qquad \psi_2 = \phi\psi_1 - \psi_0 \\
u_{t-2}: &\qquad \psi_3 = \phi\psi_2 - \psi_1 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Questo mostra che le ψ_j seguono due equazioni alle differenze di secondo ordine:

$$\begin{aligned}
\psi_j &= \phi\psi_{j-1} - \psi_{j-2} \quad j \geq 1 \\
\psi_{-j} &= \phi\psi_{-j-1} - \psi_{-j-2} \quad j \geq 1
\end{aligned}$$

Le soluzioni di queste equazioni sono:

$$\begin{aligned}
\psi_j &= d_1\lambda^j + d_2\lambda^{-j} \\
\psi_{-j} &= e_1\lambda^j + e_2\lambda^{-j}
\end{aligned}$$

dove d_1, d_2, e_1, e_2 sono costanti da determinare. Una soluzione economica ragionevole richiede che, se i fattori esogeni che hanno influito sull'offerta sono stati costanti in passato e ci si aspetta che rimangano costanti in futuro, anche il prezzo deve essere costante. Perciò, potremmo eliminare le parti esplosive delle soluzioni, imponendo $d_2 = 0$ e $e_2 = 0$. Osserviamo anche che le due soluzioni dovranno coincidere per $j = 0$, il che implica che $d_1 = e_1 = d$. d può essere ottenuto osservando che le soluzioni devono soddisfare la condizione iniziale: $\psi_1 = \phi\psi_0 - \psi_{-1} + \frac{1}{\alpha}$. Inserendo le soluzioni per $\psi_1, \psi_0, \psi_{-1}$ e riconoscendo che $\phi = \lambda + \lambda^{-1}$, si ha:

$$d\lambda = \phi d - d\lambda + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow d = \frac{\alpha^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}.$$

La soluzione generale al modello Cobweb con inventario rappresentato dall'equazione (3.10) è data da:

$$p_t = c_1\lambda^t + c_2\lambda^t + \frac{\alpha^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|j|} u_{t-j} \tag{3.11}$$

Se supponiamo nuovamente che il prezzo sia finito se i fattori esogeni sono costanti e ci aspettiamo che rimangano costanti anche in futuro, dobbiamo

imporre $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ per ottenere la soluzione:

$$p_t = \frac{\alpha^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|j|} u_{t-j} \tag{3.12}$$

Questo implica che $\{p_t\}$ è una sequenza limitata dipendente solo da tutti i fattori esogeni passati e da quelli che ci aspettiamo in futuro.
Un altro modo per rappresentare questa soluzione è quello di esprimere p_t come

$$p_t = \lambda p_{t-1} - \alpha^{-1}\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j u_{t+j}.$$

In questa espressione, la doppia sommatoria infinita è sostituita da una singola sommatoria a cui si aggiunge l'evoluzione passata dell'offerta, sintetizzata dal termine p_{t-1}, che supponiamo essere noto al tempo t. Per capire meglio le dinamiche di questo modello, analizziamo un esempio numerico. Prendiamo $\alpha = \frac{20}{9}$ e i parametri β e γ sono tali che $\phi = 2.05$. Questo implica che $\beta + \gamma = \frac{1}{9}$. Le radici sono date da $\lambda = 0.8$ e $\lambda^{-1} = 1.25$. La soluzione limitata è la seguente

$$p_t = -\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 0.8^{|j|} u_{t-j}$$

Supponendo che i fattori esogeni siano sempre costanti, il prezzo p_t sarà pari a $-9u$ e $I_t = 0$. Se si verificasse un shock dell'offerta inaspettato e transitorio di valore 1, dovuto a fattori esogeni, al tempo $t = 0$, il prezzo scenderebbe immediatamente di 1, come mostrato nel primo grafico in figura 3.4. Contemporaneamente, il livello di inventario salirebbe perchè ci si aspetta un aumento dei prezzi nell'immediato futuro, a causa della natura transitoria del fenomeno. Qui abbiamo un tipico movimento dei prezzi: il prezzo scende, ma si prevede che aumenti. Dopo lo shock, il mercato si adegua gradualmente riportando man mano i prezzi al loro vecchio livello e riducendo le scorte.
Consideriamo ora il secondo grafico in figura 3.4. In questo caso abbiamo uno shock dell'offerta che ci aspettiamo colpisca il mercato al tempo $t = 5$. Al tempo $t = 0$, quando lo shock positivo è già previsto per $t = 5$, gli operatori di mercato si aspettano che il prezzo scenda in futuro, per questa ragione vogliono ridurre le loro scorte cercando di vendere da subito. Di conseguenza, il prezzo e le scorte iniziano a diminuire già prima che lo shock dell'offerta abbia effettivamente luogo. Al tempo $t = 5$, quando lo shock dell'offerta colpisce finalmente il mercato e il prezzo ha raggiunto il suo minimo, gli operatori di mercato si aspettano che il prezzo aumenti nuovamente in futuro, il che porta all'accumulo di scorte. Da qui in poi, il mercato si adegua come

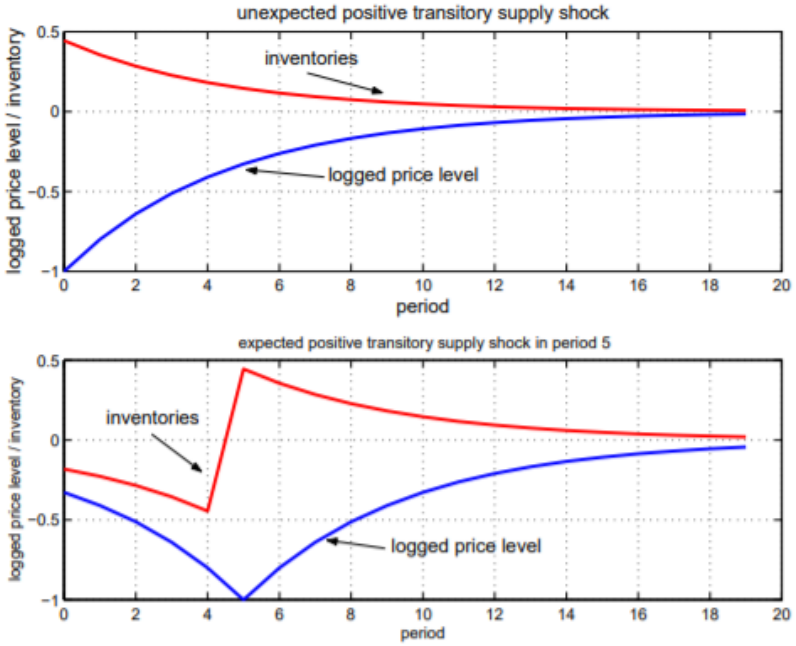


Figura 3.4: Risposta impulsiva dopo uno shock dell'offerta

nel caso precedente perché si assume che lo shock dell'offerta sia di nuovo di natura transitoria.

3.4 *Il modello di Taylor*

Il contratto di Taylor fu formulato nel 1979 in "Staggered wage setting in a macro model" e nel 1980 in "Aggregate Dynamics and Staggered Contracts". Come riportato nel documento [16], egli sosteneva che una delle proprietà dei contratti salariali, importante dal punto di vista macroeconomico, fosse quella che le decisioni contrattuali fossero scaglionate, ovvero che tutte le decisioni contrattuali nell'economia non fossero prese nello stesso momento. Per semplificare il modello, supponiamo che i contratti salariali durino un anno e che le date di decisione siano uniformemente scaglionate: una metà dei contratti sono fissati a gennaio e un'altra metà in luglio. Se lasciamo che gli intervalli di sei mesi (semestrali) siano il periodo di misurazione, e w, sia il registro del salario contrattuale per i periodi t e $t+1$, fissato all'inizio del periodo t, allora un semplice modello di determinazione del salario contrattuale è dato da:

$$w_t = 0.5w_{t-1} + 0.5w_{t+1} + h(y_t + y_{t+1}), \qquad h > 0 \tag{3.13}$$

Pertanto, i salari che fissiamo al tempo t, tengono in conto dei contratti ancora in vigore, w_{t-1}, e dei contratti che si stipuleranno nel periodo successivo, w_{t+1}. Poiché i due gruppi sono di uguale dimensione e importanza, li pesiamo ugualmente, moltiplicandoli per 0.5. Inoltre i salari dipendono dallo stato dell'economia per tutta la durata del contratto, qui rappresentato dalla domanda aggregata media nel periodo corrente e successivo.
Al fine di derivare una rappresentazione dinamica per il comportamento del salario contrattuale, è necessario specificare un salario complessivo nel periodo t, W_t, che è semplicemente la media sui salari esistenti in vigore nel periodo t:

$$W_t = \frac{1}{2}(w_t + w_{t-1}) \tag{3.14}$$

In secondo luogo è necessario definire una policy, partendo dalle due equazioni seguenti:

$$m_t = y_t + W_t - v_t \qquad m_t = gW_t$$

dove m_t è la domanda di moneta, y_t è la domanda aggregata e v_t rappresenta uno shock derivante da un fattore esogeno alla domanda. Tutte queste misure sono dei log e rappresentano deviazioni dal trend. La seconda equazione ci mostra una politica per la domanda di moneta di tipo log-lineare. Da qui è possibile ottenere la relazione di domanda aggregata:

$$y_t = -\gamma W_t + v_t \tag{3.15}$$

dove $\gamma = 1 - g < 0$ è un parametro che indica il grado di adattamento di quest'ultima alle variazioni salariali.
Mettendo insieme le equazioni (3.13), (3.14) e (3.15), arriviamo ad un'equazione alle differenze lineare di ordine 2:

$$(1 + h\gamma)w_{t+1} - 2(1 - h\gamma)w_t + (1 + h\gamma)w_{t-1} = -2h(v_t + v_{t+1})$$

o equivalentemente

$$w_{t+1} - \phi w_t + w_{t-1} = Z_t \tag{3.16}$$

con $\phi = 2\frac{(1-h\gamma)}{(1+h\gamma)}$ e $Z_t = -\frac{2h}{(1+h\gamma)}(v_t + v_{t+1})$. L'equazione caratteristica per questa equazione alle differenze è:

$$1 - \phi z + z^2 = 0.$$

La natura simmetrica dei coefficienti polinomiali implica che le radici appaiono in coppie, tali che una radice è l'inversa dell'altra. Ciò significa che, ad esempio, λ_1, è più piccola di uno, mentre $\lambda_2 = 1/\lambda_1 > 1$. Per notare questo, osserviamo come prima cosa il discriminante $\Delta = -h\gamma > 0$. Di conseguenza

le radici sono reali e $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Se denotiamo con λ, λ_1, allora $\lambda_2 = 1/\lambda$ e abbiamo $\phi = \lambda + \lambda^{-1}$. Applicando il principio di sovrapposizione, la soluzione diventa:

$$w_t = c_1\lambda^t + c_2\lambda^{-t} + w_t^{(p)} \tag{3.17}$$

dove i coefficienti c_1 e c_2 e la soluzione particolare $w_t^{(p)}$ devono ancora essere determinati. Iniziamo eliminando le soluzioni esplosive, ponendo $c_2 = 0$. Per trovare la soluzione particolare, ipotizziamo sempre che $w_t^{(p)}$ sia nella forma:

$$w_t^{(p)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

la inseriamo nell'equazione (3.17) e facciamo un confronto dei coefficienti, come nell'esempio precedente. Questo procedimento porta alla definizione di due equazioni alle differenze omogenee per i coefficienti (ψ_j) e (ψ_{-j}), $j \geq 1$, con soluzioni:

$$\psi_j = d_1\lambda^j + d_2\lambda^{-j}$$
$$\psi_{-j} = e_1\lambda^j + e_2\lambda^{-j}$$

dove i coefficienti d_1, d_2, e_1, e_2 devono essere ancora determinati. L'eliminazione delle sequenze dei coefficienti esplosivi porta a definire $d_2 = e_2 = 0$. Inoltre entrambe le soluzioni devono portare allo stesso ψ_0, perciò $d_1 = e_1 = d$. Uguagliando i coefficienti per Z_t e osservando che $\phi = \lambda + \lambda^{-1}$, si riesce a ricavare il valore di d come segue:

$$\begin{aligned} \psi_1 = \phi\psi_0 - \psi_{-1} + 1 \quad &\Rightarrow \quad d\lambda = \phi d - d\lambda + 1 \\ &\Rightarrow \quad d = \frac{1}{\lambda - \lambda^{-1}} < 0. \end{aligned}$$

Conclusioni

Il presente lavoro di tesi ha inizialmente affrontato la teoria generale delle equazioni alle differenze, con particolare attenzione ai punti di equilibrio e alle sue caratteristiche di stabilità, mostrando alcuni semplici esempi di equazioni alle differenze di primo ordine lineari univariate e dell'equazione logistica. Si sono poi approfonditi i teoremi relativi al caso univariato e multivariato con un accenno al caso non lineare, trattato mediante un'approssimazione intorno allo stato di equilibrio.
L'obiettivo principale dell'elaborato è stato quello di analizzare alcuni modelli economici tramite queste equazioni alle differenze. Proprio per questa ragione, sono stati presi in considerazione per primi i modelli descritti da equazioni alle differenze lineari di primo ordine. Sono state analizzate i metodi per la ricerca delle soluzioni di queste equazioni, sia omogenee che non omogenee, mediante l'iterazione sia backward che forward.
Il primo modello preso in considerazione è stato quello Cobweb, che descrive le fluttuazioni dei prezzi di mercato, dipendenti oltre che da fattori esogeni, anche dal modello puramente economico, in cui i produttori basano la loro offerta sulle osservazioni dei prezzi nei periodi precedenti. Nella sua formulazione più semplice, viene trattato un unico mercato che non prevede l'immagazzinamento dei beni. La traiettoria dei prezzi è descritta da un'equazione di primo ordine non omogenea, di cui viene trovata la soluzione e la cui stabilità dipenderà dai parametri che rappresentano la sensibilità di domanda e offerta ai prezzi. A seconda di questi valori, avremo tre casi, uno di equilibrio stabile e due di equilibrio instabile.
Il modello successivo che si prende in considerazione è quello di Solow, descritto tramite un equazione alle differenze non lineare, linearizzata nel suo punto fisso. Questo modello vuole descrivere l'andamento di crescita di un sistema economico, quindi della sua ricchezza, in base ad alcuni input, come il capitale e la forza lavoro. Viene analizzata una funzione di produzione neoclassica che soddisfa alcune condizioni, tra le quali quelle di Inada, e trovata l'equazione di primo ordine per il capitale. Da qui si calcola l'equilibrio asintoticamente stabile k^* e la soluzione generale k_t. La crescita della ricchezza

seguirà quella del capitale, fino a raggiungere l'equilibrio, dopo di che l'unico elemento che potrà aumentarla ulteriormente per un periodo limitato, è un aumento del tasso di risparmio. Mentre un aumento della forza lavoro, porterebbe ad una diminuzione del capitale e quindi anche della ricchezza. Ciò spiega perchè i paesi con un tasso di crescita della popolazione più elevato, hanno livelli di PIL più bassi. Per spiegare invece la crescita prolungata di alcuni paesi sviluppati, come la Cina, è necessario introdurre nel modello anche un fattore di sviluppo tecnologico nella funzione di produzione. Allo stesso modo si arriva ad un nuovo equilibrio e si osserva che, in questo caso, anche nello stato stazionario si osserva una crescita del PIL pari al tasso di progresso tecnologico. Alla fine dell'analisi, viene anche presentato quello che accadrebbe considerando due paesi che hanno la stessa funzione di produzione con l'unica differenza dell'intensità di capitale iniziale, maggiore in un paese rispetto all'altro. Ciò che si osserva è che i risparmi vanno verso il paese con rendimento maggiore, fino ad arrivare ad un tempo t in cui le intensità di capitale di eguagliano fino all'equilibrio comune.
Come esempio di un sistema di equazione, viene analizzato un modello di crescita ottimale, che ha le stesse specifiche del modello di Slow, ma il cui l'obiettivo è quello di massimizzare la funzione obiettivo di Bentham, dipendente dal consumo pro-capite. Quello che si ottiene, è un sistema di equazioni alle differenze non lineare, studiato cercando prima l'equilibrio e poi tramite una linearizzazione intorno ad esso. La dinamica del sistema lineare è determinata dai suoi due autovalori distinti, di cui uno instabile. Ponendo alcune condizioni, si arriva infine all'equazione della sella nel piano (k, c). Analizzando un caso particolare di questo modello, viene anche determinata una soluzione analitica del sistema non lineare.
L'ultimo caso preso in considerazione come esempio di equazione alle differenze di primo ordine è quello del modello di iperinflazione di Cagan. Egli affermava che i periodi di iperinflazione avevano inizio quando il prezzo dei beni e servizi, registrava un aumento maggiore del 50 per cento nell'arco di un mese. Ciò è quello che è accaduto in molti paesi, come in Germania dopo la prima guerra mondiale e in Venezuela e Grecia ai giorni nostri. Questi periodi di iperinflazione possono essere usati per lo studio del rapporto tra offerta monetaria e livello dei prezzi. Considerando un modello con aspettative adattive, ovvero che si basa sull'inflazione del periodo precedente per il calcolo di quella attuale, si ottiene un'equazione alle differenze di primo ordine non omogenea che descrive l'andamento dei prezzi. Da qui si procede con il calcolo della soluzione particolare tramite ricorsione. Si osserva che il livello del prezzo sarà dominato dalla soluzione particolare e di questa saranno maggiormente determinanti i valori più recenti dell'offerta monetaria. Nel caso invece di aspettative razionali, ovvero con perfetta lungimiranza, l'e-

quazione di primo ordine si modifica e la soluzione particolare viene trovata iterando forward. L'unico risultato non esplosivo per $p_t = \phi^t c_f + p_t^{(f)}$, a causa della soluzione generale dell'equazione omogenea, è quello in cui $c_f = 0$.
Si passa successivamente all'analisi delle soluzioni che fanno riferimento ad equazioni alle differenze univariate di ordine superiore al primo. Viene studiato principalmente il comportamento limite delle soluzioni alle equazioni di secondo ordine, tramite le radici caratteristiche.
Il primo modello a cui si fa riferimento in questo ambito è quello di Samuelson, detto anche modello moltiplicatore-acceleratore. Viene descritto un ciclo economico generato dal lato della domanda, in cui al guadagno complessivo contribuiscono le spese per i consumi privati, gli investimenti e la spesa pubblica. Questo guadagno può essere descritto tramite un'equazione alle differenze di secondo ordine, di cui viene calcolato l'equilibrio e studiata la sua stabilità asintotica. Applicando il metodo dei coefficienti indeterminati, si trova una soluzione particolare, i cui i coefficienti rappresentano i moltiplicatori dinamici, ovvero l'effetto sull'output di un impulso nelle spese pubbliche e seguono a loro volta la forma della soluzione di un'equazione omogenea di secondo ordine. Infine, vengono riportati alcuni esempi dell'andamento dei coefficienti impulsivi in base ai valori di propensione marginale al consumo e del coefficiente di accelerazione. Nel caso in cui questi parametri producono radici reali distinte dell'equazione caratteristica associata, abbiamo che l'aumento iniziale della spesa pubblica porta ad un aumento dell'output di una unità nel periodo corrente e successivo, per poi affievolirsi e scomparire. Quando si ha una radice multipla l'effetto è analogo al precedente con un aumento iniziale maggiore dell'output, ma allo stesso tempo un crollo più rapido. Nel caso di due radici complesse coniugate, l'impulso, prima di estinguersi, mostra invece un comportamento oscillatorio, diventando anche negativo.
Si passa dunque nuovamente al modello Cobweb, a cui viene aggiunta la possibilità di immagazzinamento dei beni. Analizzando il modello con aspettativa razionali, si ha che la traiettoria dei prezzi viene descritta da un'equazione alle differenze di secondo ordine lineare, studiata allo stesso modo del modello di Samuelson. In questo caso, l'esempio analizzato ci porta ad osservare che, nel caso in cui si verificasse uno shock dell'offerta inaspettato e transitorio di valore 1, al tempo $t = 0$, il prezzo scenderebbe immediatamente di 1 e contemporaneamente il livello di inventario salirebbe, perchè ci si aspetta un aumento dei prezzi nell'immediato futuro. Se invece ci si aspetta uno shock dell'offerta che colpirà il mercato al tempo $t = 5$, già nell'istante di tempo iniziale gli agenti iniziano a ridurre le loro scorte e di conseguenza il prezzo inizia a calare. Al momento dello shock, il prezzo raggiunge il suo minimo e gli agenti portano al massimo il livello di inventario perchè come nel caso

precedenti, ci si aspetta un aumento dei prezzi nei periodi successivi.
Si conclude con una semplice presentazione del modello di Taylor che tratta lo scaglionamento dei contratti salariali, la cui registrazione nel periodo corrente, descritta da un'equazione alle differenze di secondo ordine, dipende dai contratti ancora in vigore, da quelli che si stipuleranno nel periodo successivo e dalla domanda aggregata media che descrive lo stato dell'economia. Anche per questo modello si arriva ad una soluzione particolare con lo stesso metodo descritto precedentemente.
Per tutti i modelli trattati sono state fatte delle semplificazioni e si sono applicate delle condizioni sui parametri che portassero a delle soluzioni più semplici e ragionevoli sia dal punto di vista matematico che economico. Molti rappresentano la base su cui si sono poi sviluppate teorie non lineari sempre più complesse e che meglio descrivono l'evoluzione dei cicli di business e le fluttuazioni dei prezzi di mercato.

Glossario

- Azione: è l'unità minima di partecipazione di un socio al capitale sociale di una "società per azioni". Le azioni devono avere tutte lo stesso valore nominale, cioè devono essere quote di uguale valore. Il titolare di un'azione diventa socio o azionista, vuol dire che possiede un pezzetto della società, con tutti i diritti (partecipa agli utili) e gli oneri (sopporta le perdite).

- Asset: nel mondo finanziario, il termine asset si riferisce a tutto quello che viene scambiato sul mercato finanziario, come azioni, bond, valute o materie prime al fine di ottenere un profitto o un vantaggio nel futuro.

- Dividendo: è una quota degli utili di una società, distribuita agli azionisti in contanti o in azioni che possono essere a loro volta reinvestiti.

- Arbitraggio: Operazione finanziaria che consente di ottenere un profitto (profitto di arbitraggio) in assenza di rischio, sfruttando disallineamenti di prezzo esistenti sul mercato.

- Ammortamento: è un procedimento amministrativo-contabile con cui il costo di un bene è ripartito su più anni in ragione della sua durata economica; rappresenta dunque l'estinzione graduale di un debito.

- Market clearing: in economia, il market clearing è il processo attraverso il quale, in un mercato economico, l'offerta di ciò che viene scambiato è equiparata alla domanda in modo che non ci sia più offerta o domanda. La nuova economia classica presuppone che in un dato mercato, supponendo che tutti gli acquirenti e i venditori abbiano accesso alle informazioni e che non vi sia "attrito" che impedisca le variazioni di prezzo, i prezzi si adattino sempre verso l'alto o verso il basso per garantire la compensazione del mercato.

Bibliografia

[1] V. Lakshmikantham, Donato Trigiante, Marcel Dekker - Bulletin of the American Mathematical Society, New York, 2002. *Theory of difference equations - numerical methods and applications.*

[2] Klaus Neusser - April 15, 2019. *Difference Equations for Economists.*

[3] S. Axler F.W. Gehring K.A. Ribet - Saber Elaydi Department of Mathematics Trinity University, 2005. *An Introduction to Difference Equations.*

[4] David G. Luenberger - Stanford University, 1979. *Introduction to Dynamic Systems Theory, Models, and Applications.*

[5] Binata Rani Sen, Md. Maznur Rahman, Mohammad Iqbal Hossain - Noakhali Science and Technology University, 2018. *Cobweb Model for the Stabilization of Vegetable Prices in Some Selected Villages of Noakhali District.*

[6] Shuguang Wang - College of Economics and Management, Sichuan Agricultural University, China, 2012. *The Analysis of the Vegetables' Price Fluctuation with Cobweb Model.*

[7] Daron Acemoglu - MIT, 2011. *Economic Growth: Lectures 2 and 3: The Solow Growth Model.*

[8] Wilson Mixon - Article in The Journal of Economic Education, February 2007. *The Solow Growth Mode.*

[9] George-Marios Angeletos. *The Solow Growth Model.*

[10] Juan Sebastián Pereyra - Economics bulletin, 2008. *The Solow model in discrete time and decreasing population growth rate.*

[11] Prof. Roberto Pasca di Magliano - Università di Roma "La Sapienza", (a.a. 2001/2002). *Teorie della crescita a confronto : dal modello di Solow alla crescita endogena.*

[12] Giorgio Di Giorgio - 2014. *Economia e politica monetaria.*

[13] Urban J. Jermann - Wharton School of the University of Pennsylvania and NBER, July 21, 2020. *Bitcoin and Caganís Model of Hyperináation.*

[14] Tonu Puu, Laura Gardini, Irina Sushko - Journal of Economic Behavior and Organization, 2004. *A Hicksian multiplier-accelerator model with floor determined by capital stock.*

[15] Marji Lines, Frank Westerhof - 2006. *Expectations and the Multiplier-Accelerator Model.*

[16] Taylor - American Economic Association, 1979. *Staggered Wage Setting in a Macro Model.*

Desidero ringraziare la mia professoressa Valeria Chiadò Piat, relatrice della mia tesi, che mi ha guidato al traguardo supportando il mio lavoro con incoraggiamento, suggerimenti e osservazioni sempre puntuali. Le sono particolarmente grata per avermi dato la possibilità di approfondire lo studio di alcuni modelli economici attraverso strumenti matematici poco trattati durante il mio percorso di studi e che ho avuto il piacere di approfondire.

Un grandissimo grazie va a tutta la mia famiglia, i miei genitori, mia nonna e Sofi. Questo percorso, a causa della pandemia, l'abbiamo condiviso molto di più e, pur essendo una persona molto indipendente, la loro presenza per me ha contato molto. Sofia credo abbia raggiunto un livello di cultura considerevole, tra videolezioni e ragionamenti a voce alta in cui mi ha sempre appoggiata. Molte volte ha dovuto sopportare più di 7/8 ore di studio al giorno, sempre pronta a darmi la giusta carica con i suoi morsi delicati e slinguazzate ruvide tra una dormita e l'altra (proprio come in questo momento). Fin da subito ha mostrato segni di ribellione a questo studio forzato, ma mi è stata accatto notte e giorno. Ti ringrazio per la pazienza Sofi.
Un ringraziamento particolare va ad Angelina, sempre presente. Colei che mi conosce più di tutti, che riesce a tirare fuori il lato più bello di me e a cui do le colpe di tutte le mie decisioni sbagliate per sentirmi un po' più sollevata.

Ringrazio i miei amici di università, sono stati sei anni fantastici solo grazie a loro. Spero ci saranno ancora tante vacanze siciliane nella famosissima Rosangeles, che Giorgia sopporterà ancora i miei innamoramenti e disinnamoramenti flash e che Antonio sia sempre l'amico sfuggente (un po' come me) ma su cui poter sempre contare. Con voi sono riuscita sempre ad essere me stessa e oggi, che non vi vedo ormai da un po' di mesi, mi mancano anche le vostre prese in giro. Vi voglio davvero un sacco di bene. Ringrazio anche Vale, senza di lei non penso che sarei arrivata alla fine. Abbiamo condiviso tutto dal nostro primo incontro in aula ad oggi. Anche se saremo un po' più distanti, le auguro tutto il bene possibile.
Un grazie va anche agli amici del paesello che mi conoscono ormai da anni e quest'anno ho potuto godermi di più causa Covid.

Alla fine un grazie voglio dirlo anche a me stessa, per essere stata determinata nel portare a termine questo percorso e nell'averne intrapreso uno nuovo. L'unico augurio che mi faccio è quello di viaggiare il più possibile ed essere sempre circondata da esseri amorevoli e pelosi.