POLITECNICO DI TORINO

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA E AEROSPAZIALE

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Tesi di Laurea Magistrale

Modellazione di un riduttore epicicloidale e relativa difettosità in un sistema di servocomando elettromeccanico EMA

Relatori

Prof. Massimo Sorli

Dott. Andrea De Martin

Candidato

Riccardo Calamante

A.A 2019-2020

Sommario

I riduttori epicicloidali sono largamente impiegati nelle trasmissioni meccaniche con grandi vantaggi, quali elevata coppia trasmissibile, peso ridotto, alta affidabilità ed efficienza. Il riduttore oggetto del presente progetto è inserito all'interno di un sistema di *servocomando elettromeccanico EMA*.

La parte iniziale del lavoro contiene una descrizione qualitativa delle principali modalità di degradazione che possono presentarsi nelle trasmissioni ad ingranaggi e una panoramica sul sistema prognostico e di gestione della salute del sistema (PHM).

L'analisi dinamica del riduttore è essenziale per ridurre le problematiche di rumore e vibrazioni e per la costruzione di un solido sistema di prognostica. La seguente tesi descrive quindi la complessa dinamica di un riduttore epicicloidale presentando un modello in grado di simulare il comportamento dinamico del riduttore a singolo stadio in presenza di gioco, di rigidezza di ingranamento tempo-variante e di difetti nella dentatura.

Il modello adottato è a parametri concentrati: le ruote vengono rappresentate come inerzie concentrate, gli ingranamenti mediante smorzatori viscosi lineari posti in parallelo a molle non lineari che tengono conto della variazione periodica della rigidezza d'ingranamento dovuta al cambiamento del numero di coppie di denti in presa.

Particolare attenzione è stata posta alla modellazione delle dissipazioni energetiche che interessano il riduttore, analizzando le componenti di perdita dipendenti e indipendenti dal carico. Nello specifico è stato approfondito l'effetto dell'attrito durante la trasmissione del moto e la relazione fra le perdite di ingranamento e il regime di lubrificazione dipendente dalle condizioni operative.

La successiva parte della tesi ha interessato il modello di degradazione poiché l'identificazione della legge di evoluzione del guasto è essenziale nel processo di simulazione. La modellazione della degradazione-cricca in prossimità del raggio di raccordo del dente della ruota solare, inserita all'interno dell'ambiente Simulink, ha permesso quindi la simulazione del sistema e del processo dinamico di deterioramento dalle condizioni nominali fino alla completa rottura del componente. Allo scopo di definire in modo rigoroso l'effetto legato alla presenza di tale difetto, si è inizialmente studiato il legame fra la dimensione dello stesso e il valore della rigidezza e successivamente la propagazione durante la trasmissione del moto.

Nell'ultimo capitolo si è cercata una correlazione fra l'effetto della degradazione del riduttore, interposto fra il motore elettrico e la vite a ricircolo di sfere, e i dati resi disponibili dal sistema *EMA*. Viene infine presentata un'analisi critica del lavoro svolto corredata da alcune indicazioni e suggerimenti sugli sviluppi futuri.

La presente ricerca pone quindi le basi per una successiva implementazione di un efficace sistema *CBM/PHM*.

Indice

Elenco delle Figure

Elenco delle Tabelle

Capitolo 1

1 Introduzione

1.1 Controlli di volo

Al fine di comprendere meglio il contesto in cui il sistema si troverà a lavorare, vengono presentati dei richiami sulla dinamica del volo [1].
Il comportamento in volo degli aeromobili viene controllato dal pilota o automaticamente per mezzo di opportune superfici mobili, le quali influiscono sull'aerodinamica del velivolo in funzione della posizione assunta. L'introduzione dei servomeccanismi nei comandi di volo ha dato la possibilità di usare: le tecnologie di controllo attivo per la riduzione dei carichi di volo, la guida automatica, la stabilizzazione e la protezione da manovre fuori dall'inviluppo di volo.

Tecnologie più recenti si basano sulla trasmissione del segnale elettrico dalla cabina, che viene opportunamente elaborato da un sistema di calcolatori e tradotto in comando di una superficie aereodinamica (*fly-by-wire*).

I comandi possono essere classificati in due macrocategorie:

- comandi di volo primari
- comandi di volo secondari

I comandi di volo primari sono utilizzati per gestire il comportamento dell'aeromobile attorno ai tre assi di rollio, beccheggio e imbardata. Facendo riferimento alla *Figura 1.1*, gli alettoni si occupano di gestire l'angolo di rollio, l'equilibratore l'angolo di beccheggio e il timone l'angolo di imbardata, con un controllo continuo sul movimento di tali superfici. Dal momento che la stabilità del velivolo dipende strettamente dalle prestazioni dei controlli primari, il sistema di attuazione è progettato in maniera tale da assicurare il corretto funzionamento del sistema anche in presenza di guasti seguendo la filosofia *fail-op* [2].

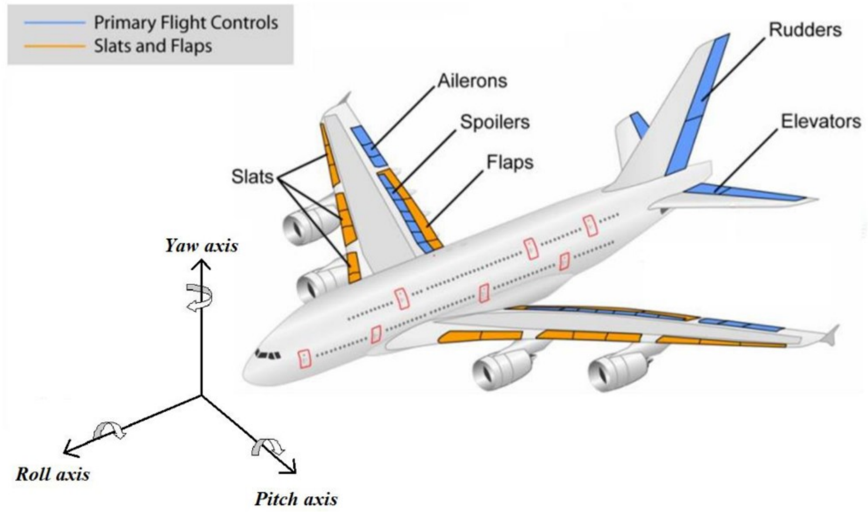


FIGURA 1.1 - SUPERFICI DI COMANDO DI VOLO PRIMARIE E SECONDARIE [3]

I comandi di volo secondari invece non vengono utilizzati per modificare l'orientamento del velivolo nello spazio, bensì per variare le caratteristiche aerodinamiche del mezzo così da cambiarne le prestazioni in situazioni particolari. Inoltre, contrariamente ai comandi primari, il loro movimento è limitato al raggiungimento di alcune posizioni predeterminate. Facendo riferimento alla *Figura 1.1* si evidenziano i freni alari, utilizzati per decelerare l'aeromobile sulla pista durante l'atterraggio, nonché gli ipersostentatori sul bordo d'attacco, gli *slats* e quelli sul bordo d'uscita *flaps*. I primi sono controllati in continuo ed hanno il compito di variare l'angolo di incidenza dell'ala in risposta a manovre particolarmente complesse. Gli ipersostentatori sul bordo d'uscita invece vengono tradizionalmente azionati durante i tratti di percorso a bassa velocità, quali atterraggio e decollo, ma anche per il rifornimento in volo nel caso di aerei cisterna. Il guasto o l'impuntamento di una superficie di controllo di volo secondaria non è di per sé critica per il funzionamento del velivolo [2], comporta però alcune restrizioni alle prestazioni. Ad esempio, un guasto agli ipersostentatori può costringere ad un atterraggio *flapless*. Tuttavia, la natura stessa del guasto può talvolta portare a situazioni rischiose: un aerofreno bloccato può causare forti limitazioni alla velocità del velivolo, un ipersostentatore guasto può interagire in maniera imprevista con l'aerodinamica del velivolo. Ne consegue che per tali superfici di controllo la progettazione dell'azionamento debba seguire una filosofia *fail-safe*: il controllo cioè deve essere in grado di riconoscere la presenza di un guasto e di rispondervi bloccando e mantenendo in posizione il sistema.

1.2 Tecniche di attuazione in ambito aeronautico

I sistemi di attuazione sono dispositivi che si occupano di movimentare le superfici aerodinamiche di controllo sulla base dei comandi impartiti dal pilota. Sono funzionalmente costituiti da quattro elementi principali (*Figura 1.2*):

- regolatore
- interfaccia
- attuatore
- trasduttori

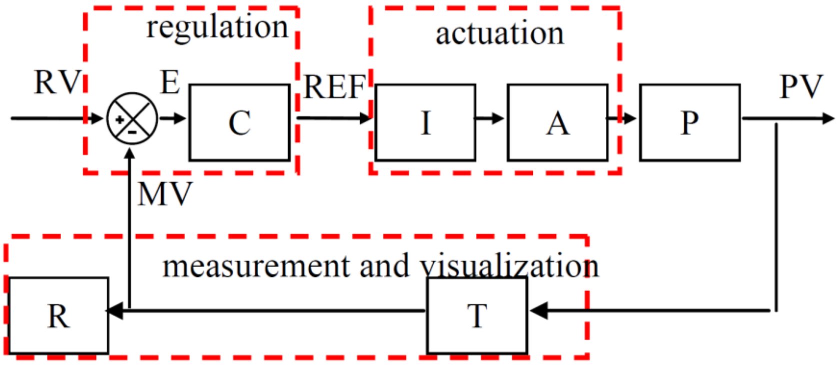


FIGURA 1.2 - LAYOUT DI UN SERVOSISTEMA [4]

Il *regolatore* attua la legge di controllo definita in fase di progettazione: riceve i segnali di feedback provenienti dai trasduttori, calcola l'errore rispetto al riferimento imposto dall'utente e definisce la risposta del sistema. Può lavorare in analogico o più frequentemente in digitale per mezzo di un microprocessore dedicato.

L'*interfaccia* modula la potenza proveniente da una sorgente esterna, come una batteria o una centralina idraulica, sulla base del segnale di controllo proveniente dal regolatore: si tratta quindi del collegamento fra servosistema e alimentazione esterna, nonché dell'elemento che trasforma il segnale di comando in segnale di potenza diretto all'attuatore.

L'*attuatore* a sua volta riceve potenza dall'interfaccia andando ad agire sulla variabile di processo.

I *trasduttori* infine misurano la variabile di processo inviando i segnali ad essa relativi al regolatore.

Si presenta ora la tecnologia applicata ai sistemi di attuazione degli ipersostentatori sul bordo di uscita.

1.2.1 Servosistemi elettromeccanici

I servosistemi elettromeccanici (EMA) sono degli attuatori che applicano la forza (o coppia) richiesta alla superficie aerodinamica per mezzo di un motore elettrico e di un sistema di trasmissione meccanico. Il motore elettrico è di tipo *brushless*, la trasmissione meccanica è costituita da un riduttore e, ove sia necessario, da un attuatore lineare, quale ad esempio una vite a ricircolo di sfere o rulli. L'interfaccia è costituita da dispositivi elettronici digitali di potenza che prelevano l'energia necessaria dall'impianto elettrico di bordo.
Una delle tendenze di ricerca più significative negli ultimi decenni dell'industria aeronautica è lo sforzo di avanzare verso la progettazione e la produzione di velivoli "più elettrici". In questo quadro, l'applicazione della tecnologia elettrica ai sistemi di controllo di volo ha visto un progressivo seppur lento aumento, a partire dall'introduzione del *fly-by-wire* e proseguendo con la parziale sostituzione dei tradizionali attuatori idraulici/elettroidraulici con quelli puramente elettromeccanici. Questa evoluzione ha permesso di ottenere soluzioni più flessibili, di ridurre problemi di installazione, potenziare le capacità di controllo dell'aeromobile ed ottenere una dinamica superiore, specialmente quando si utilizza il principio piezoelettrico, il quale apre nuovi campi di applicazione nel controllo del rumore e delle vibrazioni [5]. Inoltre, gli attuatori elettromeccanici consentono l'eliminazione dei problemi di trafilamento del fluido idraulico, semplificano sia l'installazione che la manutenzione e forniscono soluzioni competitive in termini di peso, risultando quindi interessanti sia per i fornitori che per gli operatori di volo [6].

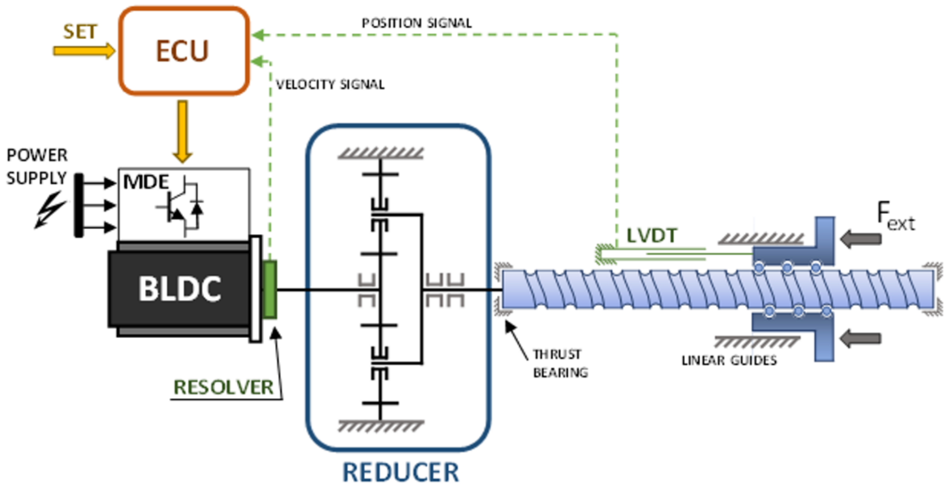


FIGURA 1.3 - ATTUATORE ELETTROMECCANICO EMA [4]

Gli attuatori elettromeccanici (EMA) sono però ancora lontani dall'essere una tecnologia matura e soffrono ancora di numerosi problemi di sicurezza, che possono essere parzialmente limitati aumentando la complessità del loro design a scapito di un aumento dei costi di produzione.

In considerazione dei sopracitati problemi di sicurezza il loro uso come attuatori primari per il controllo del volo è ancora limitato ad aeromobili sperimentali. Al fine di superare i suddetti problemi, una delle possibili soluzioni è quella di costruire un robusto sistema di prognostica e gestione della salute (PHM) in grado di rilevare rapidamente l'insorgenza di uno o più guasti e di fornire una stima sufficientemente accurata della rimanente vita utile (RUL) dei componenti degradati.

L'introduzione di un sistema PHM per i componenti di controllo di volo comporta diverse sfide che sono enfatizzate dall'adozione della tecnologia elettromeccanica. Il primo è la mancanza di dati sperimentali disponibili in quanto gli EMA sono ancora raramente impiegati nei sistemi di controllo di volo, quindi non sono disponibili dati storici affidabili. Altre problematiche sono legate ai limiti della potenza computazionale imbarcata sul velivolo, che impongono la scelta di funzioni semplici, computazionalmente economiche e algoritmi di rilevazione guasti per determinare lo stato di salute di ciascun sottosistema monitorato all'interno dell'aeromobile. Inoltre, la natura imprevedibile del comando imposto agli attuatori e la presenza di carichi casuali dovuti a raffiche e turbolenze rendono difficile l'estrazione di dati significativi durante il volo; il numero di sensori deve essere quindi ridotto al minimo per evitare aumenti di costo e problemi di affidabilità. Infine, poiché sia il sistema monitorato che la modalità di degrado allo studio sono fortemente non lineari e influenzati dal rumore non Gaussiano, l'algoritmo prognostico deve essere in grado di rispecchiare questo comportamento per limitare l'incertezza della previsione e massimizzarne l'accuratezza.

1.2.2 Riduttore epicicloidale

Grazie alla affidabilità e alle grandi potenze trasmissibili, sin dagli albori dell'aviazione le ruote dentate hanno rappresentato il principale mezzo di trasmissione di potenza meccanica. Attualmente la maggior parte degli ingranaggi aeronautici sono utilizzati per due compiti: la trasmissione della potenza dall'albero principale del motore ai vari sistemi del velivolo e la riduzione del rapporto di trasmissione nel controllo delle superfici di volo. Per il primo compito solitamente si impiegano trasmissioni che prelevano potenza dall'albero principale del motore per mezzo di ruote coniche (oppure raramente, quando spazio lo consente, per mezzo di ruote cilindriche) e poi, con una serie di ruote cilindriche si distribuisce la potenza ai vari utilizzatori. Per il secondo, a causa dei ridotti spazi disponibili, è molto comune l'utilizzo di riduttori epicicloidali.
L'interposizione di un sistema di riduzione fra motore e vite a rulli comporta alcuni vantaggi rispetto alla soluzione di azionamento diretto (Direct Drive).
L'utilizzo di un riduttore consente un minor peso e garantisce di mantenere il bilanciamento radiale del sistema, riducendo di conseguenza i carichi sui supporti. Inoltre, dal momento che la coppia erogata dal motore viene moltiplicata e la velocità in ingresso alla vite ridotta secondo il rapporto di trasmissione $\tau = \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} = \frac{C_{out}}{C_{in}}$, l'uso del riduttore migliora le prestazioni ed evita il sovradimensionamento del motore elettrico, dato che quest'ultimo tende a lavorare meglio con velocità elevate e coppie ridotte [7].
Allo stesso tempo però, l'inserimento di un meccanismo aggiuntivo che può presentare un numero elevato di corpi a contatto (ad esempio riduttore epicicloidale), causa l'incremento delle dissipazioni dovute all'attrito ed una diminuzione dell'affidabilità del sistema. Tali svantaggi possono essere limitati realizzando una modellazione dettagliata del riduttore e dei relativi guasti/degradazioni.

Tipologie di riduttori

I riduttori utilizzati per trasmettere il moto fra due assi paralleli possono essere catalogati in tre categorie fondamentali:

- riduttori ordinari
- riduttori epicicloidali
- riduttori armonici

I *riduttori ordinari* rappresentano dei rotismi ordinari con rapporto di trasmissione inferiore all'unità. Si definisce rotismo un sistema costituito da più ruote ingrananti tra loro in modo tale che la rotazione di una ruota determini di conseguenza la rotazione di tutte le altre. Un rotismo viene detto *ordinario* se gli assi di tutte le ruote dentate che lo costituiscono sono fissi [8].

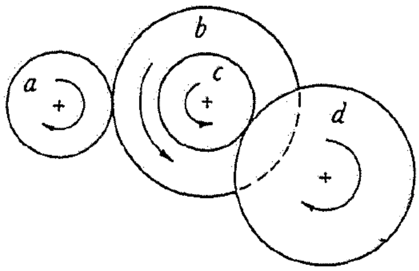


FIGURA 1.4 - ESEMPIO DI ROTISMO ORDINARIO

In un *rotismo ordinario* le velocità angolari di tutte le ruote sono note in valore ed in verso una volta nota la velocità di una di esse, ed il rapporto di trasmissione τ del rotismo stesso viene di conseguenza definito a partire dai rapporti di trasmissione delle due ruote che accoppiano (*Figura 1.4*):

$$\begin{cases} \tau_{ab} = \frac{\omega_b}{\omega_a} = -\frac{z_a}{z_b} \\ \tau_{cd} = \frac{\omega_d}{\omega_c} = \frac{\omega_d}{\omega_b} = -\frac{z_c}{z_d} \end{cases} \tag{1.1}$$

I segni negativi dipendono dal fatto che le ruote ruotano in versi opposti; il rapporto di trasmissione totale sarà:

$$\tau = \frac{\omega_d}{\omega_a} = \frac{\omega_d}{\omega_b} * \frac{\omega_b}{\omega_a} = \tau_{ab} * \tau_{cd} = \left(-\frac{z_a}{z_b}\right) * \left(-\frac{z_c}{z_d}\right) = \frac{z_a * z_c}{z_b * z_d} \tag{1.2}$$

Si nota che per ottenere rapporti di trasmissione elevati è necessario applicare un elevato numero di ruote dentate di dimensioni crescenti, con conseguenti incrementi via via più importanti in termini di ingombro e masse. Tale tipologia di riduttore non risulta quindi adatta per l'applicazione descritta nella presente tesi: nell'ambito dei servosistemi aerospaziali, i rapporti di trasmissione devono essere elevati garantendo allo stesso tempo peso e ingombri minimizzati.

I *riduttori epicicloidali,* costituiti anch'essi da più catene cinematiche di ruote dentate, si differenziano da quelli ordinari in quanto in essi gli alberi di alcune ruote (satelliti) non sono fissi, bensì mobili (*Figura 1.5*)
Una delle principali applicazioni dei rotismi epicicloidali la si riscontra nei riduttori a forte rapporto di riduzione, infatti consentono soluzioni costruttive dotate di ingombri notevolmente minori di quelli ottenibili, a parità di rapporto di riduzione, adottando dei rotismi ordinari [8].

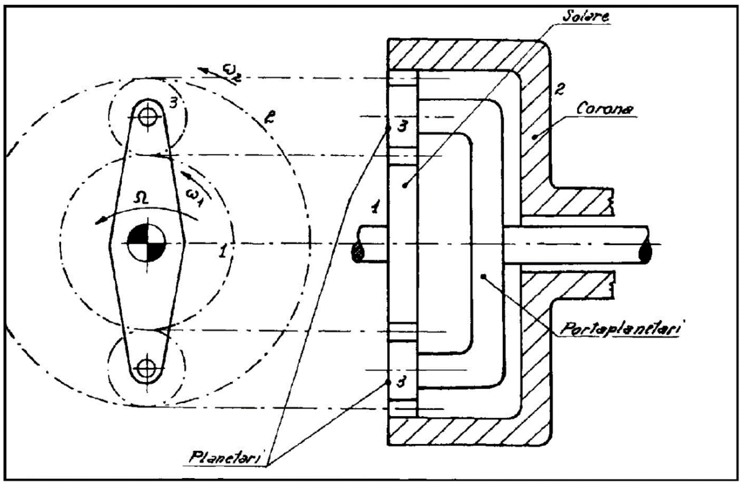


FIGURA 1.5 - RIDUTTORE EPICICLOIDALE

I *riduttori armonici* infine sono costituiti dai tre elementi rappresentati in *Figura 1.6*:

- il *whave generator* è una struttura ellittica dotata di cuscinetti volventi;
- la *flex spline* è un elemento cilindrico dentato e deformabile;
- la *circular spline* è una corona con dentatura ad s.

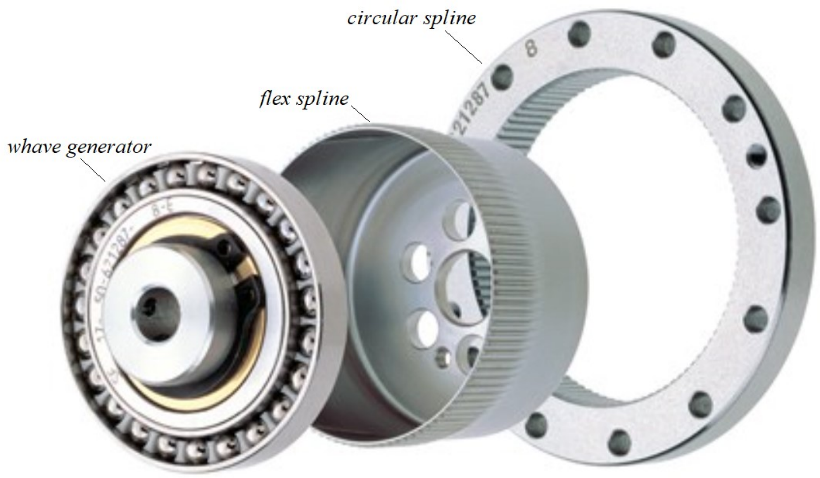


FIGURA 1.6 - ELEMENTI COSTITUENTI IL RIDUTTORE ARMONICO

Utilizzano un principio di funzionamento unico basato sulla deformazione dell'elemento flessibile connesso all'albero di uscita. Le elevate prestazioni di questa tecnologia di trasmissione, tra cui gioco zero, coppia elevata, dimensioni compatte, eccellente precisione di posizionamento e ripetibilità, sono tutte il risultato diretto del principio di funzionamento unico.

Confronto riduttori epicicloidali e riduttori ordinari

A parità di numero di denti il riduttore epicicloidale garantisce un rapporto di riduzione più elevato rispetto ad un riduttore ordinario. Questa caratteristica si traduce in termini pratici nell'ottenere, a parità di rapporto di trasmissione, un miglior proporzionamento degli ingranaggi, prestazioni più elevate, riduzioni di dimensioni e costi. Inoltre, a parità di coppia da trasmettere, le forze che si sviluppano tra i denti dell'epicicloidale sono inferiori rispetto a quelle del riduttore ordinario, ciò permette l'utilizzo di ruote con dimensioni molto più contenute.

Un ulteriore beneficio è costituito dalla possibilità di sopportare elevati carichi radiali sull'albero, poiché le forze trasmesse fra gli ingranaggi sono fra loro equilibrate: la loro risultante è nulla; esiste solo la coppia che si trasmette attraverso il porta-satelliti all'albero d'uscita. In una coppia di ingranaggi tradizionali invece le forze devono essere equilibrate dai cuscinetti che supportano gli ingranaggi. Ne deriva che in un riduttore epicicloidale i cuscinetti montati sugli alberi di entrata e uscita sono a disposizione interamente per supportare i carichi esterni, dato che i carichi interni sono fra loro equilibrati.

Per concludere, si sottolinea il vantaggio non secondario costituito dall'allineamento fra l'albero di ingresso e di uscita, con evidenti benefici di installazione.

Confronto riduttori epicicloidali e riduttori armonici

Rispetto ai riduttori ordinari, sia i riduttori armonici che gli epicicloidali costituiscono un'opzione efficace grazie a rapporti di trasmissione elevati con strutture compatte, alla possibilità di ottenere un ridotto backlash ed a un'elevata efficienza.

I riduttori armonici sono in grado di trasferire valori più elevati di coppie rispetto agli epicicloidali grazie al gran numero di denti in presa, mentre un vantaggio di quest'ultimi rispetto agli armonici può essere individuato nell'inerzia inferiore, rendendoli quindi particolarmente adatti per applicazioni che richiedono elevate dinamiche, come nel caso dei servo-attuatori. [9].

Si riporta di seguito una breve *Tabella* di confronto fra le due tipologie di riduttori tratta da [10].

Caratteristica	Epicicloidale	Armonico	Considerazioni
Compattezza	-	+	Il riduttore armonico risulta più compatto rispetto all'epicicloidale.
Gioco	-	+	Possibilità di ottenere giochi inferiori con l'armonico.
Riduzione al primo stadio	-	+	Rapporti del singolo stadio più elevati con il riduttore armonico.
Efficienza	+	-	Migliore nell'epicicloidale.
Inerzia	+	-	Il riduttore armonico ha un'inerzia propria maggiore.
Comportamento dinamico	+	-	Il riduttore epicicloidale presenta un migliore comportamento dinamico, mentre l'armonico genera vibrazioni maggiori a basse velocità con conseguente rischio di risonanze.
Rigidezza	+	-	L'epicicloidale ha una rigidezza torsionale maggiore.

TABELLA 1.1 - CONFRONTO FRA RIDUTTORI EPICICLOIDALI E ARMONICI

In considerazione del campo di applicazione, il riduttore epicicloidale costituisce un compromesso ottimale rispetto al rispetto alle altre due tipologie di riduttori. Esso permette cioè di ottenere rapporti di riduzione maggiori e ingombri minori rispetto al riduttore ordinario e allo stesso tempo una robustezza maggiore e un miglior comportamento dinamico rispetto al riduttore armonico.
L'oggetto di studio di questo progetto di tesi è quindi il riduttore epicicloidale a singolo stadio, con un solare e tre satelliti (configurazione *standard* per questi sistemi), interposto fra il motore elettrico e la vite a ricircolo di sfere (EMA Geared).
L'obiettivo è quello di realizzare una modellazione di dettaglio del riduttore e dei relativi guasti/degradazioni in modo da porre le basi per una successiva implementazione del sistema *CBM/PHM,* che eviti l'introduzione di ulteriori sensori, adoperando i dati resi disponibili dal sistema.

1.2.3 Modalità di guasto degli ingranaggi

Gli ingranaggi vengono considerati "sani" quando operano entro livelli accettabili di rumore, vibrazioni e temperatura [11]. Durante il funzionamento, gli ingranaggi sono soggetti a carichi e sovraccarichi variabili e imprevedibili, sono quindi possibili diverse modalità di guasto. Il loro studio risulta spesso difficoltoso poiché la presenza di un particolare difetto può interagire con gli altri processi di degrado, inoltre le misure dirette dello stato di salute, ad esempio la lunghezza di una fessura da fatica, sono generalmente impossibili da effettuare.

Di seguito vengono riportati solo i guasti relativi alle condizioni operative, quindi non vengono introdotti quelli che si verificano durante processi di produzione o trattamento termico errati. Le modalità di guasto degli ingranaggi, relative all'operazione, sono classificate dall'ASME (American Society of Mechanical Engineers) in quattro categorie:

- Fatica superficiale
- Usura
- Plasticizzazione
- Rottura

Ogni categoria include diverse modalità di guasto. Di seguito viene proposta una breve revisione di ciascuna degradazione.

1.2.3.1 Fatica superficiale

<u>Pitting</u>

Il pitting consiste in una progressiva perdita di materiale a causa della fatica superficiale che si verifica sui fianchi dei denti degli ingranaggi. Come è noto, la massima sollecitazione dovuta al contatto tra due corpi rigidi si verifica sotto la superficie di contatto e se la ripetizione di tali sollecitazioni supera la resistenza del materiale, la superficie si degrada. Il trattamento di indurimento ha un'influenza importante sull'inizio e lo sviluppo della vaiolatura, accelerandolo in alcuni casi e quasi annullandolo in altri.

I fenomeni di pitting possono essere classificati in base alla sua intensità in: pitting iniziale, normale e distruttivo (*Figura 1.7*) [11].

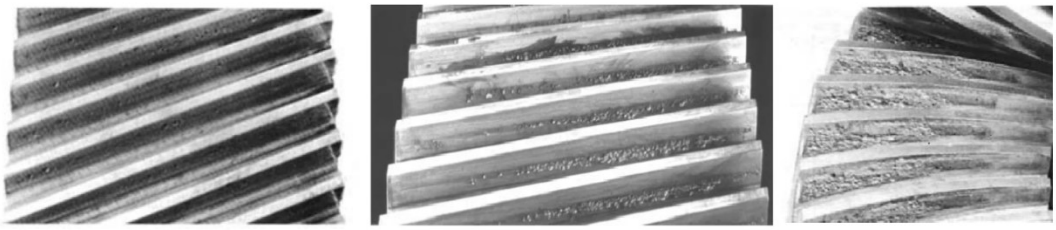


FIGURA 1.7 – TIPOLOGIE DI PITTING [12]

Il pitting iniziale è causato dalla formazione di aree locali ad alto stress meccanico dovute a superfici irregolari sul dente dell'ingranaggio. Si verifica solitamente in una banda stretta in corrispondenza della linea del passo o leggermente al di sotto di essa; le cavità hanno forme a punta di freccia, mentre il loro numero e dimensioni sono limitate. Il pitting iniziale è generalmente considerato non pericoloso, pertanto non vengono adottate azioni di riduzione, per prevenirlo o ridurlo sono necessari denti placcati in rame o argento: la cui difficoltà produttiva e gli elevati costi limitano questa soluzione a poche applicazioni critiche.

La vaiolatura normale si presenta sotto forma di fosse di dimensioni ridotte o modeste che coprono l'intera porzione del dedendum dei fianchi dei denti e solitamente si verifica quando i carichi locali sono vicini al massimo consentito dalla superficie. La presenza di lubrificante tende a favorire questo processo di degrado, poiché parte dell'olio può rimanere intrappolata all'interno delle micro-cricche delle superfici, così che, finché procede il contatto tra i denti, la pressione dell'olio intrappolato aumenta fino all'asportazione di parte di materiale dal dente [13].

L'ultima tipologia di pitting è quella distruttiva, la quale usualmente inizia dal dedendum del dente (spesso già soggetto alla vaiolatura normale). Tale degradazione è accompagnata da un aumento nelle dimensioni e nel numero dei *pits* durante l'ingranamento, fino a quando l'intera superficie del dente viene distrutta. In queste condizioni il corretto funzionamento dell'ingranaggio non è più garantito e devono essere eseguite operazioni di manutenzione.

L'intensità degli effetti della fatica superficiale dipende dallo spessore dello strato di lubrificante: se si ottiene una lubrificazione adeguata, le sollecitazioni di contatto vengono distribuite su aree più grandi e i picchi della loro distribuzione vengono appiattiti, in modo da evitare i sovraccarichi locali [13].

Spalling

Il termine "*spalling*" è usato per descrivere un particolare effetto della fatica superficiale che provoca il distacco di “pezzi” di materiale dal dente. Si manifesta come un ammasso di *pits* sovrapposti o interconnessi concentrati in una piccola area.

Le cause principali di questo fenomeno sono i sovraccarichi pesanti o l'uso di un trattamento termico di indurimento superficiale improprio che introduce pericolose sollecitazioni residue nel materiale.

Nella *Figura 1.8* sono riportati gli effetti dello *spalling*, rispettivamente su un ingranaggio soggetto a tempra superficiale (immagine di sinistra) e su un ingranaggio trattato mediante tempra profonda (immagine di destra).

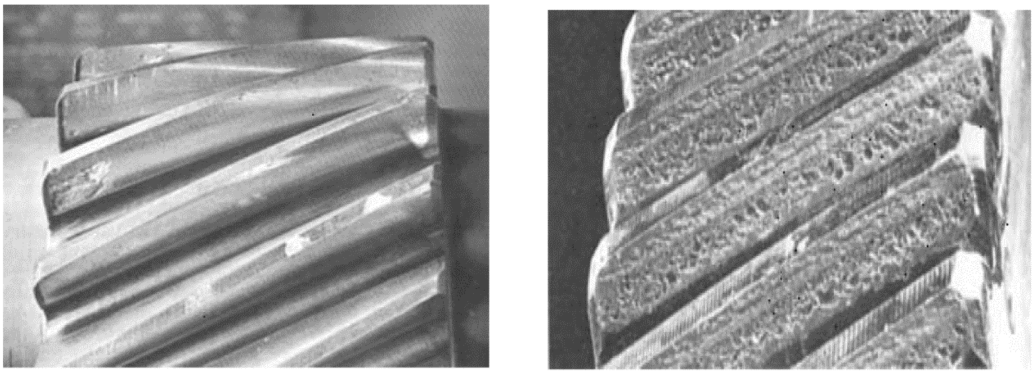


FIGURA 1.8 - SPALLING INGRANAGGIO CON TEMPRA SUPERFICIALE (SINISTRA) E TEMPRA PROFONDA (DESTRA)

Un caso particolare di *spalling* è rappresentato dal cosiddetto "*case crushing*", associato agli ingranaggi cementati soggetti a carichi elevati. È caratterizzato dall'apparizione di lunghe fessure longitudinali sulla superficie del dente che si estendono sotto la parte indurita del materiale (*Figura 1.9*). Diversamente dalle altre modalità di degrado per fatica superficiale, questa provoca rotture improvvise e imprevedibili, che si verificano generalmente su uno o pochi denti del pignone. Per gli ingranaggi progettati e prodotti correttamente, la causa principale del *case crushing* è rappresentata da sovraccarichi, mentre per gli ingranaggi che presentano errori costruttivi, come durezza del nucleo insufficiente o presenza di sollecitazioni residue post trattamento termico, può presentarsi anche in presenza di carico nominale.

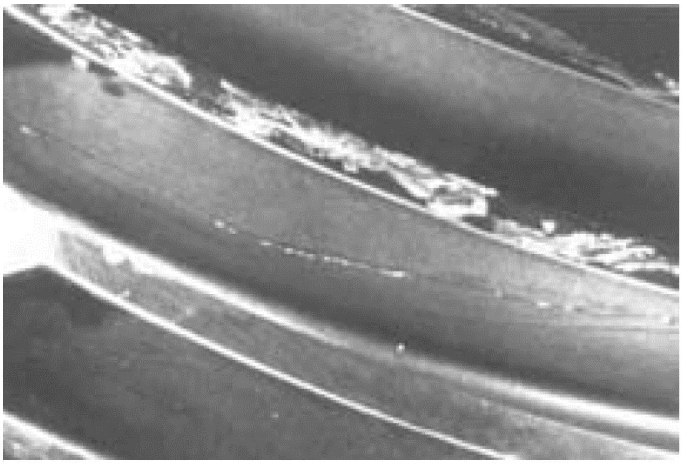


FIGURA 1.9 – CASE CRUSHING

1.2.3.2 Usura

L'usura è un termine usato per descrivere la perdita di materiale nell'area di contatto dei denti degli ingranaggi a causa di molteplici fenomeni. Può essere classificata in base al suo grado di intensità, misurato come numero di detriti prodotti in una determinata area del materiale, in usura di *lucidatura*, *normale* o *distruttiva* ed in base alle sue cause fisiche, in usura *abrasiva*, *adesiva*, *corrosiva* e di *scoring*.

Il processo di degradazione per usura è fortemente influenzato dalle condizioni del lubrificante, ancor più rispetto alle modalità di degradazione per fatica superficiale, in particolare dallo spessore dello strato di lubrificante, dalle sue proprietà chimiche e dal suo stato di salute.

Ricapitolando, i principali fattori che influenzano il tasso di progressione dell'usura sono tre: intensità del carico, condizioni di lubrificazione e stato di salute del lubrificante.

Lucidatura (*polishing*)

Rappresenta la tipologia meno pericolosa: è caratterizzata da un processo di usura molto lento con un'influenza quasi trascurabile sulle prestazioni degli ingranaggi. È paragonabile al pitting iniziale, poiché è concentrata durante il primo periodo di vita della macchina, fino a rendere le due superfici di contatto molto fini, lisce e conformi, come mostrato nella *Figura 1.10* [14].

È causata da fenomeni di abrasione e aderenza ed è particolarmente evidente negli ingranaggi che lavorano con carichi elevati e con basse velocità.

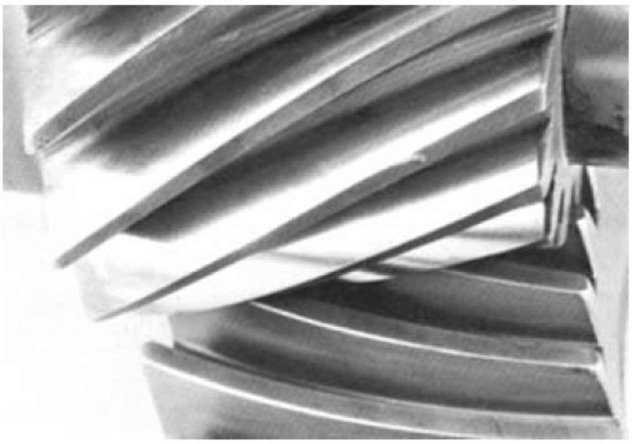


FIGURA 1.10 - USURA PER LUCIDATURA (POLISHING WEAR) [12]

Usura normale

La sua presenza influisce poco sulle prestazioni degli ingranaggi; l'area più interessata è la porzione del dedendum e, così come per il pitting, gli ingranaggi trattati con tempra superficiale, rispetto a quelli sottoposti a tempra profonda, sono meno soggetti a tale degradazione.

Progredisce a seconda della natura e dell'intensità del carico, delle proprietà superficiali del materiale e dello stato di salute del lubrificante, poiché l'ossidazione di quest'ultimo è accompagnata dalla formazione di composti corrosivi.

Usura distruttiva

Quando l'usura normale è progredita fino a danneggiare la superficie e a cambiarne la forma, degenera in usura distruttiva (*Figura 1.11*). Quest'ultimo grado di degradazione determina una perdita sensibile delle prestazioni, poiché aumenta i contraccolpi, il rumore e le vibrazioni; può anche causare la rottura se progredisce a tal punto da ridurre significativamente la sezione resistente dei denti.

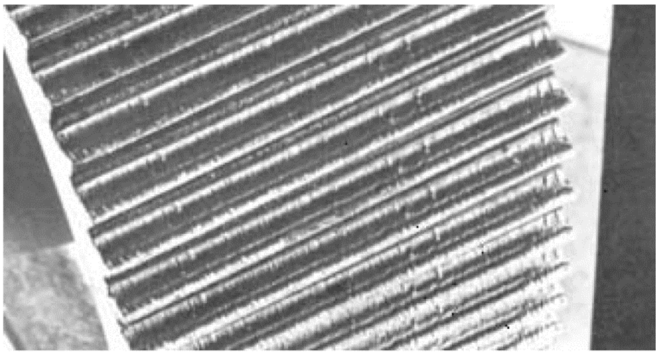


FIGURA 1.11 - USURA DISTRUTTIVA

Usura abrasiva

L'usura abrasiva è generata dalle interazioni tra la superficie del dente e le particelle con durezza uguale o superiore al materiale dell'ingranaggio. Queste interazioni sono la causa di diversi meccanismi di usura, come taglio, frattura, affaticamento e trazione del grano: il loro verificarsi è rappresentato nella *Figura 1.12.*

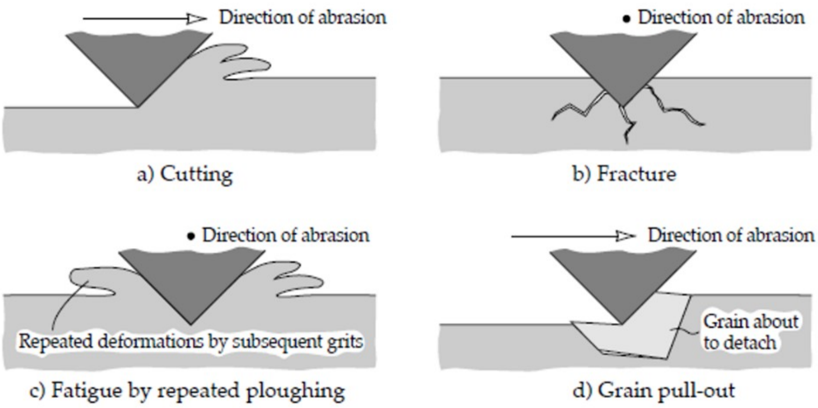


FIGURA 1.12 - MECCANISMI DI USURA ABRASIVA [12]

La modalità di usura di taglio (*cutting*) comporta la rimozione di porzioni di materiale superficiale, con un processo simile alla lavorazione meccanica di asportazione di truciolo. Al di sotto della superficie del materiale abraso si verifica una notevole deformazione plastica, che provoca un indurimento del materiale, riducendo così il tasso di usura abrasiva. Diversamente dalle altre tipologie di usura, la presenza di lubrificante favorisce questo processo di usura, poiché responsabile del trasporto e dello scorrimento delle particelle.

Il meccanismo di frattura (*fracture*) è causato da carichi elevati che premono le particelle contro la superficie del dente: è tipico dei materiali a bassa durezza e la sua comparsa è rara in presenza di una corretta lubrificazione.

La modalità di usura abrasiva di tipo c (*Figura 1.12*) è un processo delicato e generalmente molto lento, dovuto alla sollecitazione ciclica ripetuta causata dalla deformazione plastica che deriva a sua volta dallo scivolamento della sabbia o dalla pressione sulla superficie del dente.

L'ultimo meccanismo di usura abrasiva (tipo d *Figura 1.12*) può essere estremamente rapido, ma influisce solo sui materiali caratterizzati da un legame fra i grani molto debole, come i materiali ceramici o gli ingranaggi metallici sinterizzati.

Usura adesiva

Consiste in un rapido processo di degrado che può causare grandi variazioni nel coefficiente di attrito globale, può quindi essere considerata una grave minaccia per la corretta funzionalità delle trasmissioni meccaniche. Il processo di usura adesiva può essere suddiviso in tre fasi successive riportate nella *Figura 1.13*.

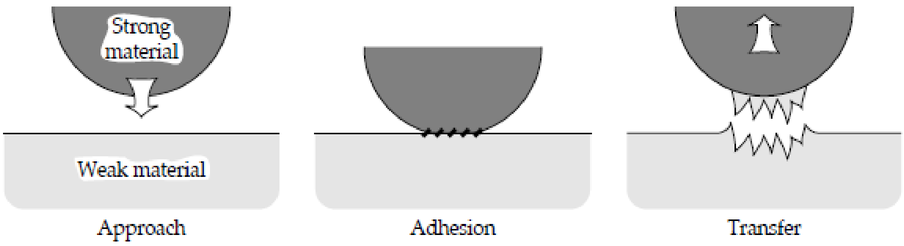


FIGURA 1.13 - FASI DELL'USURA ADESIVA [12]

Durante la fase di avvicinamento (*approach*) le due superfici di accoppiamento entrano in contatto attraverso le loro asperità; un forte legame viene quindi creato tra le particelle dei due corpi man mano che l'area di giunzione cresce, fino a quando una parte del materiale più 'morbido' viene trasferita a quella del materiale più duro. Se la porzione di materiale trasferito supera una dimensione critica, si stacca formando detriti.

I metalli sono particolarmente soggetti all'usura adesiva a causa del loro singolare tipo di legame interatomico, pertanto è necessario evitare il contatto metallo su metallo. Quando non viene fornita alcuna lubrificazione, il contatto diretto è generalmente impedito dallo strato ossidato esterno della superficie del materiale: i lubrificanti agiscono per preservare

e migliorare questa protezione mediante la deposizione e la reazione di acidi grassi, nonché di zolfo e cloro composti.
Poiché il rivestimento ossidato è molto sottile, sotto carico pesante o moderato, il cedimento dello strato di lubrificante si traduce in usura adesiva.

Usura corrosiva

L'usura corrosiva si verifica quando ambienti aggressivi o lubrificanti altamente contaminanti attaccano il materiale dei denti, causando rapidi guasti superficiali. Tale corrosione è normalmente ridotta o prevenuta dal rivestimento di ossido del materiale metallico, quindi non rappresenta di per sé una grave minaccia. Essa però, rappresenta la causa più importante di degrado se è accompagnata dall'usura adesiva, la quale può strappare gli strati protettivi, esponendo il materiale interno ai composti corrosivi (*Figura 1.14*).

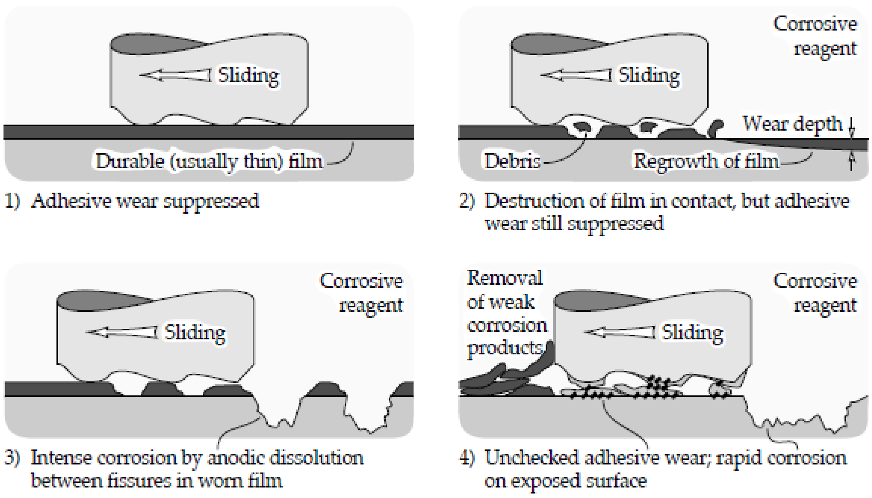


FIGURA 1.14 – INTERAZIONE FRA USURA CORROSIVA E ADESIVA [12]

Scoring

Lo *scoring* è l'ultimo importante tipo di usura e, a differenza delle altre modalità descritte, è un processo improvviso ed estremamente rapido di rimozione di materiale. Deriva dallo strappo di piccole particelle, le quali vengono saldate insieme durante l'ingranamento a causa del contatto metallo su metallo a temperatura elevata. Il "fallimento" dello strato di lubrificante e l'elevata pressione di contatto sono quindi le principali cause dello *scoring*.
Il suo verificarsi non sempre causa il guasto del componente, tuttavia, poiché il passaggio

da una degradazione lieve ad una eccessiva è estremamente rapido, deve essere prevenuto durante la fase di progettazione adottando un modello analitico in grado di descrivere l'aumento della temperatura locale.

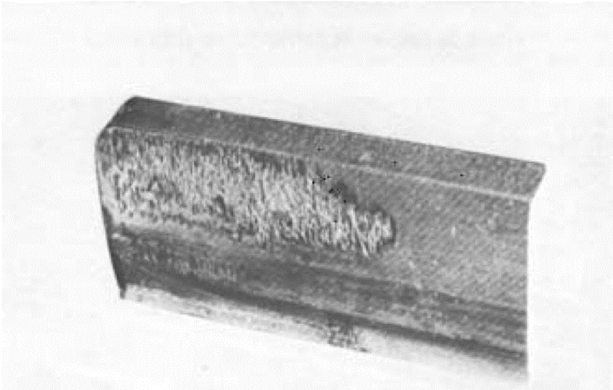


FIGURA 1.15 – SCORING SUL FIANCO DEL DENTE

1.2.3.3 Plasticizzazione

La plasticizzazione è una modalità di rottura degli ingranaggi caratterizzata da una deformazione della superficie del dente risultante dal cedimento del materiale del sub-superficiale; di solito si verifica in ingranaggi costruiti con materiali con bassa durezza, anche se può presentarsi anche in ingranaggi ad elevata durezza soggetti a elevati carichi [11].

Cold flow

Il primo tipo di plasticizzazione è denominato flusso "freddo". L'ingranaggio viene a volte deformato sulla parte superiore del dente, in altri casi le punte dei denti diventano fortemente arrotondate e una depressione appare sulla superficie di ingranamento.

I sovraccarichi pesanti e gli urti generano importanti azioni di scorrimento e se le sollecitazioni associate sono sufficientemente elevate, tali azioni spingono o tirano il materiale nella direzione di scorrimento, causando la deformazione dei denti, come mostrato nella *Figura 1.16.*

FIGURA 1.16 - COLD FLOW [12]

La causa primaria del *Cold flow* è rappresentata dal carico da impatto, che può avere origine da lievi deformazioni di montaggio ed è strettamente connesso al processo di usura: in questo caso il meccanismo del flusso freddo prende il nome di "peening". La propagazione dell'usura provoca il progressivo aumento del gioco, che a sua volta favorisce il verificarsi delle condizioni di carico da urto (*Figura 1.17*).

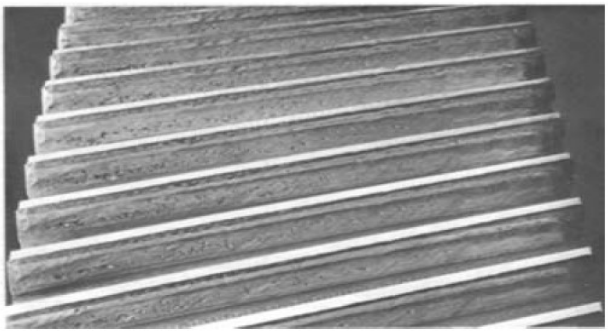


FIGURA 1.17 - DENTATURA SOGGETTA A PEENING [12]

Rippling

Il *rippling* (increspatura) consiste nella formazione di increspature di forma ondulata orientate di un angolo di circa 90° rispetto alla direzione dello scorrimento (*Figura 1.18*) e causate da sollecitazioni cicliche ad alto contatto. Questa modalità di guasto è solitamente associata ad ingranaggi a bassa velocità con lubrificazione assente o non corretta: uno spessore dello strato di lubrificante insufficiente, infatti non è in grado di dividere correttamente le sollecitazioni di contatto, causando un sovraccarico locale che deforma a freddo i denti degli ingranaggi. Fenomeno significativo negli ingranaggi trattati con tempra superficiale.

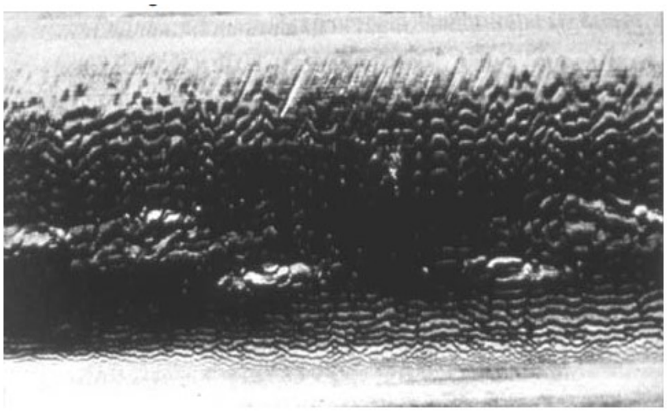


FIGURA 1.18 – DENTATURA AFFETTA DA RIPPLING [12]

Ridging

Il *ridging* (cresta) consiste nella formazione di profonde creste sul lato del dente (*Figura 1.19*) causate dall'usura o dalla plasticizzazione, derivanti a loro volta dalle elevate sollecitazioni di compressione a basse velocità di scorrimento. La presenza di detriti tende a enfatizzare le creste a causa dell'accoppiamento tra plasticizzazione e usura abrasiva.

Così come per il rippling, il fenomeno può essere fortemente limitato adottando un lubrificante adeguato, preferibilmente ad alta viscosità.

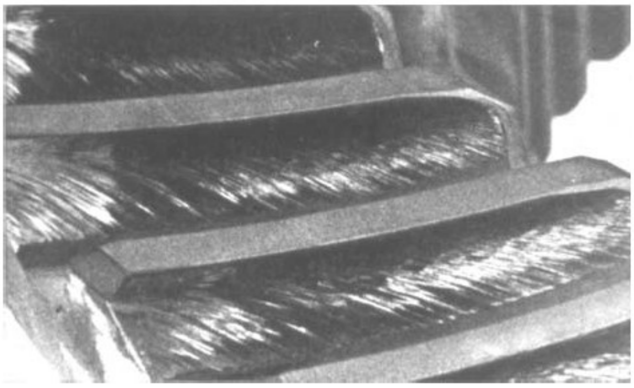


FIGURA 1.19 - DENTATURA AFFETTA DA RIDGING [12]

1.2.3.4 Rottura

La rottura è causata dai carichi flettenti sui denti degli ingranaggi: le sollecitazioni più elevate di solito si concentrano sulle radici e sul raccordo fra il profilo del dente con la radice. In questi punti ad alto stress meccanico, la cricca da fatica si genera e progredisce.

Fatica ad alto numero di cicli

La modalità di rottura più comune consiste nella frattura da fatica ad alto numero di cicli nel raccordo fra radice e profilo del dente: la cricca che si genera internamente, sottoposta a sollecitazione di trazione, cresce con il passare del tempo a causa del carico ciclico. Man mano che la fessura si propaga, la sezione resistente del dente diminuisce, fino ad arrivare a rottura fragile improvvisa. Come mostrato nella *Figura 1.20*, la faccia della cricca solitamente presenta una serie di linee di contorno chiamate "segni di spiaggia" causati dalla progressione del fronte della fessura.

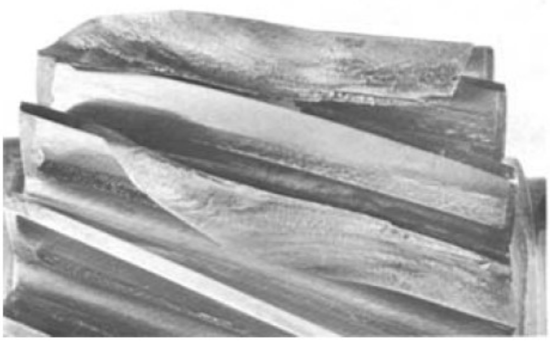


FIGURA 1.20 – DENTATURA SOGGETTA A ROTTURA PER FATICA AD ALTO NUMERO DI CICLI [12]

Una corretta progettazione degli ingranaggi può prolungare la durata della fatica della dentatura.

Fatica a basso numero di cicli

Rappresenta una modalità di rottura meno comune rispetto alla precedente e si verifica quando il dente è soggetto a un numero limitato di carichi ciclici. Un singolo sovraccarico pesante può causare la frattura del dente, ma di solito il meccanismo di rottura è più complesso: il carico d'urto può causare il cedimento plastico di uno o più denti, cambiandone il passo rispetto a quelli non interessati dal sovraccarico. In tale situazione i denti deformati sono sottoposti a carichi dinamici anomali durante le operazioni successive, facendo sì che le crepe da fatica si originino e si sviluppino rapidamente (*Figura 1.21*).

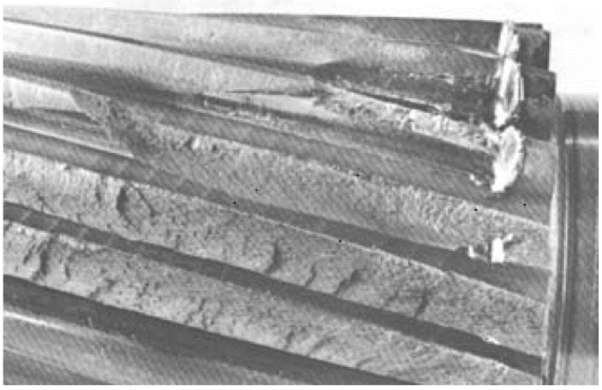


FIGURA 1.21– DENTATURA SOGGETTA A ROTTURA PER FATICA A BASSO DI CICLI

Chipping

Il *chipping* (scheggiatura) consiste nel fallimento della parte superiore del dente, che si rompe e si strappa (*Figura 1.22*). Le principali cause sono: una scorretta progettazione degli ingranaggi o un trattamento termico errato che può introdurre elevate sollecitazioni residue in grado di far propagare rapidamente le cricche da fatica anche in un punto, come la punta del dente, che solitamente non è soggetto alla rottura per fatica.

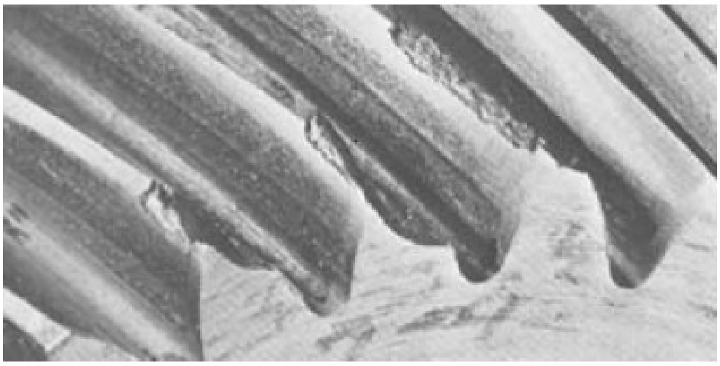


FIGURA 1.22 – DENTATURA SOGGETTA A CHIPPING [12]

Rottura statica del dente

Questa condizione è estremamente rara negli ingranaggi che operano all'interno di una sana trasmissione meccanica, poiché la resistenza statica del dente è generalmente assicurata dall'uso di adeguati coefficienti di sicurezza durante il processo di progettazione. Tuttavia, guasti di altri componenti nella trasmissione meccanica, come la flessione dell'albero o il guasto dei cuscinetti, possono introdurre una cattiva distribuzione del carico sui denti degli ingranaggi che può generare improvvise rotture statiche [15].

1.3 Prognostica

La parola **prognostica** deriva dall'unione di diagnosi e prognosi.
Diagnosi deriva dal greco *diágnōsis* ovvero *capire attraverso* [16].
Consiste nell'esame tecnico finalizzato a comprendere un evento presente.
Prognosi deriva dal greco *prognōsis* ovvero *conoscere prima* [16].
Consiste nell'attività finalizzata a prevedere un determinato evento futuro.

La prognostica rappresenta quindi la previsione della progressione di un evento in base a presenti e future condizioni operative e ambientali, al fine di stimare la **RUL**: tempo oltre il quale un sistema non è più in grado di svolgere la sua funzione nel rispetto delle specifiche desiderate [13].
La prognostica di un sistema ingegneristico si suddivide in due differenti fasi:

1. **FDI** (*Fault Detection and Identification*): riguarda la fase di elaborazione dei dati che si ottengono dal sistema al fine di indagare lo stato di salute dello stesso.
2. **PHM** (*Prognostics and Health Management*): riguarda la fase di previsione del comportamento futuro del sistema, in funzione dello stato attuale dello stesso, al fine di identificare la **RUL** (*Remaining Useful Life*).

L'insieme dei due passi consente di introdurre una manutenzione predittiva o **CBM** (*Condition Based Maintenance*), si parlerà quindi di sistema *CBM/PHM*.

1.3.1 Architettura CBM/PHM

L'architettura di un sistema *CBM/PHM* completo è rappresentata in (*Figura 1.23*) è costituita da due fasi differenti: una *offline* ed una *online* [13].
La fase *offline* è la fase preliminare e comprende i processi di:

- *Feature selection*: ovvero il processo di individuazione delle *feature* più importanti e della loro connessione con i guasti. Con la parola *feature* si indicano i parametri caratteristici dello stato di salute del sistema, opportunamente estratti dai dati provenienti dai sensori.

- ***FMECA** (Failure Modes and Effects Criticality Analysis)*: costituisce la base di un buon sistema CBM/PHM, uno studio FMECA decide sulla gravità del guasto, sulla sua frequenza di occorrenza e sulla sua testabilità [13].

- *Modello di degradazione:* consiste nella legge di evoluzione del guasto, la cui conoscenza è fondamentale nel processo di simulazione, poiché il modello del sistema deve riprodurre il funzionamento dello stesso sia in condizioni sane che in presenza di un guasto.

Durante la fase online, che include tutti i blocchi all'interno del ciclo, vengono pre-elaborati i dati ottenuti dal sistema al fine di estrarre le feature, essenziali per il rilevamento e la classificazione del guasto, nonché per la successiva fase di predizione dell'evoluzione della degradazione e quindi per la programmazione della manutenzione richiesta.

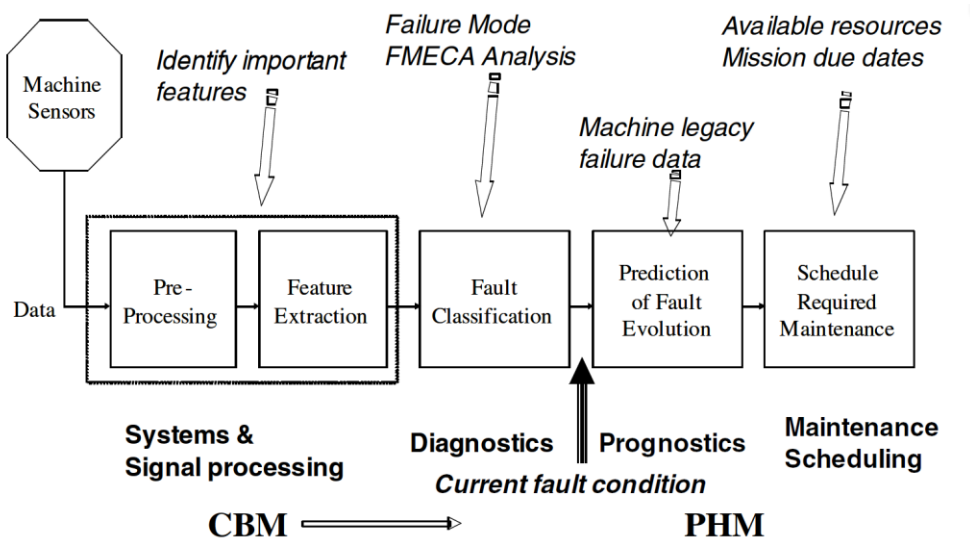


FIGURA 1.23 - ARCHITETTURA SISTEMA CBM/PHM

1.3.2 Benefici CBM/PHM

L'introduzione di una manutenzione predittiva apporta notevoli benefici, quali:

- *Aumento della sicurezza*: offre la possibilità di anticipare i guasti iniziali dei componenti prima che si giunga alla rottura del sistema [17]. Per tale motivo la maggior parte delle applicazioni di prognostica nell'intera industria aerospaziale concerne i sistemi di maggiore criticità, quei sistemi la cui rottura in volo comprometterebbe la manovrabilità del velivolo [18].

- *Ottimizzazione della gestione dei costi di manutenzione* [19].

- *Pianificazione della manutenzione*: con conseguente minimizzazione del tempo a terra del velivolo (dunque maggiore produttività) [20].

In *Figura 1.24* sono riassunti alcuni dei principali benefici relativi la prognostica.

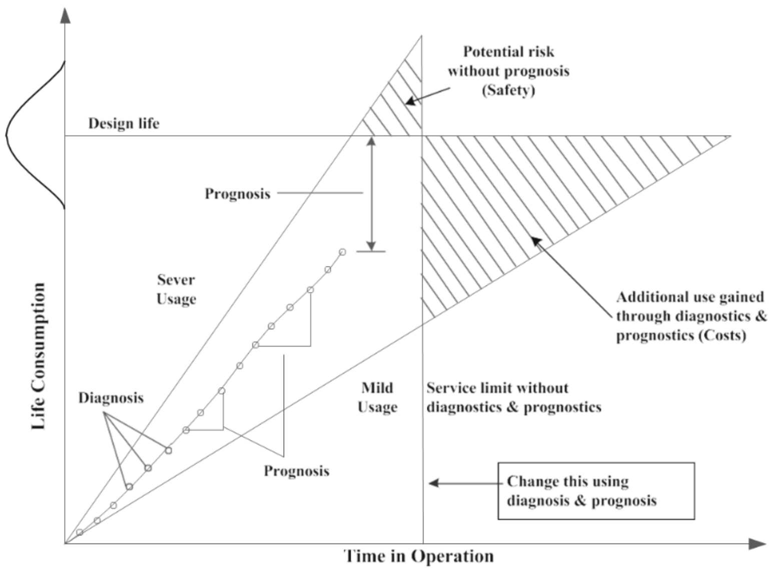


FIGURA 1.24 - BENEFICI DIAGNOSI E PROGNOSI [21]

1.4 CBM/PHM Riduttore – Motivazioni e obiettivi

1.4.1 Motivazioni

I riduttori epicicloidali sono ampiamente utilizzati nella trasmissione di elicotteri e turbine eoliche. Il 19,1% dei guasti nella trasmissione dell'elicottero derivavano dagli ingranaggi [22], quindi il rotismo rappresenta uno dei componenti più critici in un sistema di trasmissione per elicotteri. La diagnosi dei guasti è un argomento importante in prognostica e gestione della salute (PHM), tuttavia il rilevamento di tali guasti è molto complicato a causa della complessa struttura dinamica del rotismo epicicloidale, la quale non consente il collegamento diretto dei sensori all'interno degli elementi rotanti.

L'intento di questa tesi è la progettazione di un sistema *CBM/PHM* per la gestione dei guasti del riduttore epicicloidale.
I guasti presi in esame sono:

- Cricca alla base del dente della ruota solare;
- Usura delle superfici di contatto dei denti delle ruote dentate.

1.4.2 Obiettivi

Il sistema di prognostica deve essere in grado di:

- individuare la presenza di un guasto e discernere il componente interessato;
- calcolare la *RUL* in funzione del tipo di guasto e della severità al momento del rilevamento;
- combinare la *RUL* calcolata con la probabilità di accadimento ed il grado di confidenza ad essa connesso.

L'obiettivo principale è quello di garantire di operare in sicurezza fino alla **EoL** (*End of Life*) del componente. Per il perseguimento di tale scopo, in questo elaborato, si predilige l'approccio *model based*, in antitesi con quanto si effettua attraverso i metodi *data driven* i quali si basano esclusivamente sui risultati empirici. Così come illustrato in *Figura 1.25*, in cui sono riassunti i differenti approcci alla prognostica, tale scelta richiede un maggiore sforzo per la modellazione fisica dei guasti, ma permette di ottenere un sistema di prognostica solido [13].

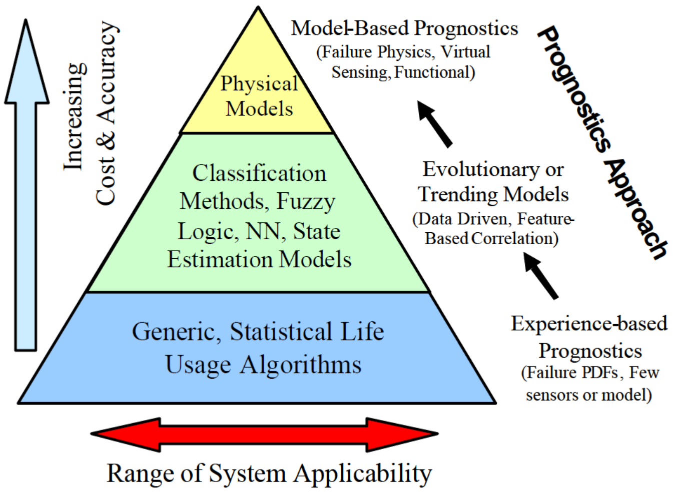


FIGURA 1.25 - APPROCCI ALLA PROGNOSTICA [19]

1.5 Organizzazione della tesi

In questo lavoro di tesi viene affrontato lo studio di un riduttore epicicloidale costituito da un solare (input), tre satelliti, un portasatelliti (output) ed una corona fissa. Il sistema è utilizzato per realizzare l'ultima riduzione di velocità e l'aumento di coppia prima di giungere alla vite a ricircolo di sfere che controlla la superficie aerodinamica. Una delle caratteristiche principali della presente ricerca è l'implementazione del sistema *CBM/PHM* senza l'introduzione di ulteriori sensori, ma adoperando solamente i dati resi disponibili dal sistema.

Il progetto è stato strutturato mediante la seguente divisione per capitoli.

- Nel primo capitolo si è fornita un'introduzione ai comandi di volo e ai riduttori utilizzati in campo aeronautico, con un relativo confronto prestazionale. E' stata inclusa anche una descrizione qualitativa delle principali modalità di degradazione che possono presentarsi nelle trasmissioni ad ingranaggi. Viene infine presentata una panoramica sul sistema prognostico e di gestione della salute del sistema (PHM).
- Il secondo capitolo contiene la modellazione di dettaglio del riduttore, allo scopo di prevederne il comportamento dinamico alle diverse condizioni operative. Nello specifico è stata condotta un'analisi dei fenomeni fisici legati all'ingranamento fra i componenti del rotismo, con particolare attenzione al backlash e alla rigidezza di ingranamento lungo la linea di azione. Successivamente sono state

implementate le equazioni mediante l'utilizzo del software Simulink, inserito nel linguaggio di programmazione MATLAB®.

- Nel terzo capitolo è stato affrontato lo studio delle dissipazioni di potenza all'interno del riduttore, analizzando le componenti di perdita dipendenti e indipendenti dal carico: perdite meccaniche costanti, perdite per ventilazione, attrito radente lungo linea di ingranamento, perdite e regime di lubrificazione.
  Nello specifico è stato approfondito l'effetto dell'attrito durante la trasmissione del moto e la relazione fra le perdite di ingranamento e il regime di lubrificazione dipendente dalle condizioni operative.
- Nel quarto capitolo si è affrontata la modellazione dei processi di degradazione che interessano il riduttore in esame. Il difetto considerato è una cricca presente su uno o più denti della ruota solare. Tale cricca causa una variazione nel valore della rigidezza di ingranamento, inoltre essa si propaga sotto l'effetto di carichi ciclici. Allo scopo di definire in modo rigoroso l'effetto legato alla presenza di tale difetto si è inizialmente studiato il legame fra la dimensione del difetto e il valore della rigidezza mediante il metodo dell'energia potenziale e successivamente la propagazione dello stesso durante la trasmissione del moto.
- Nel quinto capitolo si è cercata una correlazione fra l'effetto della degradazione del riduttore, interposto fra il motore elettrico e la vite a ricircolo di sfere, e i dati resi disponibili dal sistema *EMA*. In particolare, sono stati analizzati gli effetti della propagazione del difetto sugli andamenti dei profili di corrente del motore elettrico trifase.
- Viene infine presentata un'analisi critica del lavoro svolto e le relative conclusioni corredata da alcune indicazioni e suggerimenti sugli sviluppi futuri. La presente ricerca pone quindi le basi per possibile una successiva implementazione di un efficace sistema *CBM/PHM*.

Capitolo 2

2 Modello del Riduttore

2.1 Descrizione del sistema

I riduttori epicicloidali sono dei particolari tipi di riduttori meccanici che comprendono una vasta gamma di rotismi caratterizzati dal fatto che gli assi di rotazione delle ruote dentate che li compongono non sono fissi. Gli elementi costitutivi di un riduttore epicicloidale sono:

- il solare
- la corona
- i satelliti (o pianeti)
- il portatreno (o portasatelliti)

Il solare è una ruota a dentatura esterna e la corona a dentatura interna, entrambi coassiali all'asse principale del rotismo; i satelliti sono ruote a dentatura esterna che ingranano contemporaneamente con il solare e con la corona ed infine il portasatelliti è la struttura cinematica che vincola gli assi dei satelliti a ruotare attorno all'asse principale del rotismo. I satelliti sono almeno tre, così da garantire il bilanciamento delle azioni di inerzia generate dalla loro rotazione attorno all'asse del portatreno, essi effettuano un moto di rotazione attorno al proprio asse e un moto di rivoluzione attorno all'asse del solare.

In *Figura 2.1* vi è uno schema di un riduttore epicicloidale ad uno stadio con indicazione dei quattro elementi che lo compongono.

Vi sono differenti tipologie di riduttori epicicloidali, a seconda del numero degli stadi di riduzione, del numero di satelliti utilizzati e dell'elemento che viene mantenuto fisso. Si può scegliere quale dei tre elementi, aventi asse coassiale all'asse principale del rotismo, mantenere fisso, utilizzando gli altri due elementi rispettivamente per l'albero di ingresso e di uscita della trasmissione di potenza.

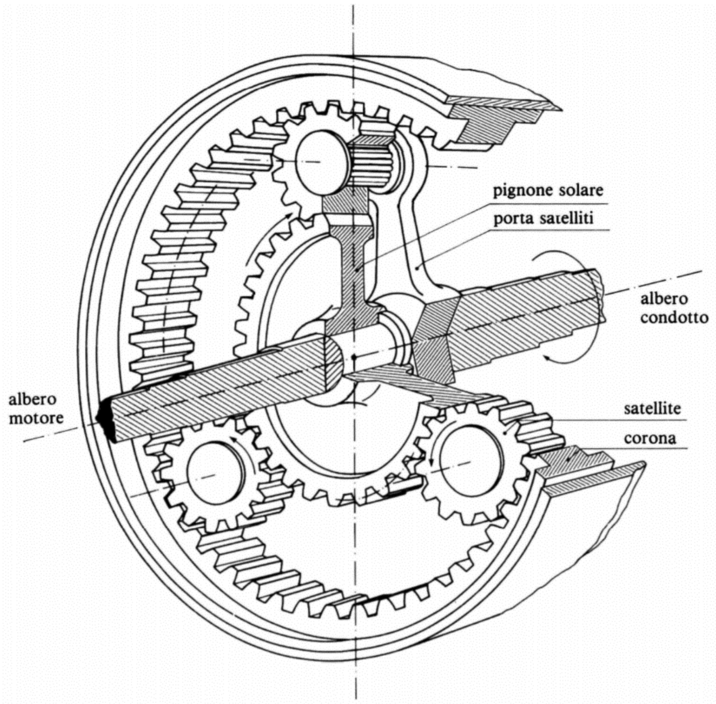


FIGURA 2.1 - RIDUTTORE EPICICLOIDALE A SINGOLO STADIO

In questo lavoro di ricerca è stato analizzato un riduttore epicicloidale ad uno stadio di riduzione con corona fissa e portasatelliti avente la stessa direzione di rotazione del solare (*Figura 2.2*). La ruota solare è calettata sull'albero di ingresso al riduttore e il portatreno sull'albero di uscita.

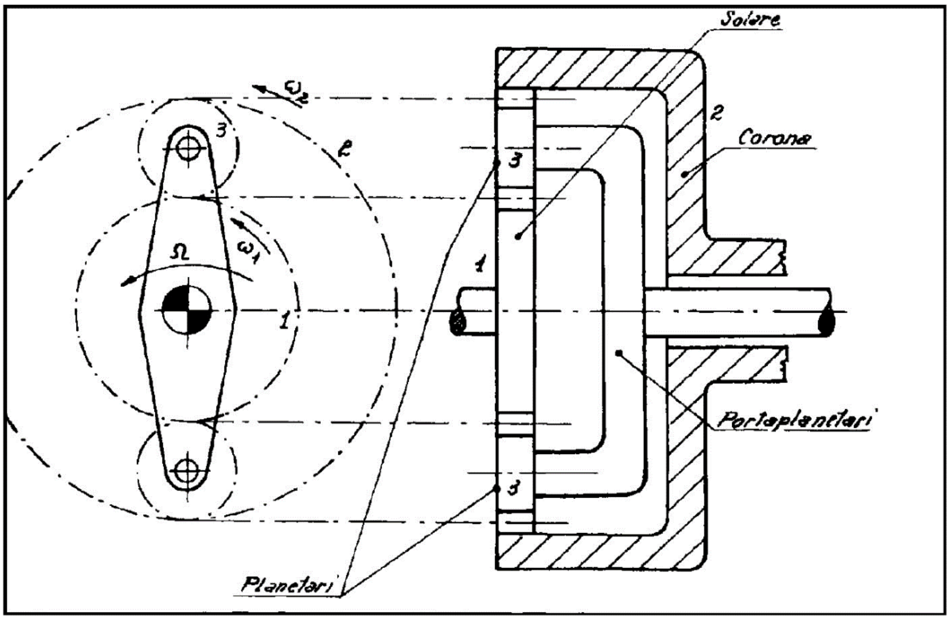


FIGURA 2.2 – SEZIONE DI UN RIDUTTORE EPICICLOIDALE

La principale caratteristica di questa tipologia di riduttori è quella di permettere elevati rapporti di trasmissione e quindi grandi riduzioni di velocità mantenendo peso, dimensioni e ingombri contenuti; motivi per cui trovano larga applicazione in campo aerospaziale.

2.2 Analisi cinematica

Il primo aspetto da considerare è quello riguardante le velocità di ogni singolo componente ed il calcolo dei corretti rapporti di trasmissione. Nei riduttori epicicloidali si hanno delle ruote (i satelliti) che, oltre a compiere un moto di rotazione attorno al proprio asse, compiono un moto di rivoluzione attorno all'asse del solare (cioè attorno all'asse principale del riduttore). Questo comporta il fatto di avere a che fare con moti relativi, di conseguenza ogni corpo avrà una velocità relativa ed una assoluta. Se si osserva il moto dei corpi, ponendo un osservatore solidale al portasatelliti, sarà possibile esprimere le velocità relative del solare e della corona rispetto al portatreno (indicate con l'apice) come:

$$\omega'_{sol} = \omega_{sol} - \omega_{car} \tag{2.1}$$

$$\omega'_{ring} = \omega_{ring} - \omega_{car} \tag{2.2}$$

Utilizzando le velocità relative si ricava il rapporto di trasmissione caratteristico del rotismo epicicloidale reso ordinario mediante la formula nota come *Formula di Willis:*

$$\tau_0 = \frac{\omega'_{ring}}{\omega'_{sol}} = \frac{\omega_{ring} - \omega_{car}}{\omega_{sol} - \omega_{car}} = -\frac{z_{sol}}{z_{ring}} \tag{2.3}$$

Il segno negativo è giustificato dal fatto che il verso di rotazione è opposto.

Nel caso in cui la corona risulti fissa, il solare calettato sull'albero in ingresso e il portatreno sull'albero di uscita, il rapporto di trasmissione totale del rotismo viene determinato imponendo $\omega_{ring} = 0$, ricavando quindi:

$$\tau_0 = \frac{\omega'_{ring}}{\omega'_{sol}} = \frac{0 - \omega_{car}}{\omega_{sol} - \omega_{car}} \tag{2.4}$$

Dalla quale si ottiene:

$$i = \frac{\omega_{sol}}{\omega_{car}} = 1 + \frac{z_{ring}}{z_{sol}}\,(>1) \quad \text{oppure} \quad \tau = \frac{\omega_{car}}{\omega_{sol}} = \frac{z_{sol}}{z_{sol}+z_{ring}}\,(<1) \qquad (2.5)$$

Dove:

- z_{sol} è il numero di denti del solare;
- z_{ring} è il numero di denti della corona;
- ω_{ring} è la velocità di rotazione corona (e ω'_{ring} la velocità relativa) [rad/s];
- ω_{sol} è la velocità di rotazione del solare (e ω'_{sol} la velocità relativa) [rad/s];
- ω_{car} è la velocità di rotazione del portatreno [rad/s].

2.3 Analisi statica

Prima di analizzare le prestazioni dinamiche del sistema si rende necessario verificarne le caratteristiche in campo statico.

2.3.1 Coppie e forze statiche

Al fine di determinare le forze scambiate dagli elementi del riduttore, il primo passo è imporre l'equilibrio di rotazione dell'intera trasmissione e la conservazione della potenza fra albero di ingresso e di uscita del riduttore (*Figura 2.3*).

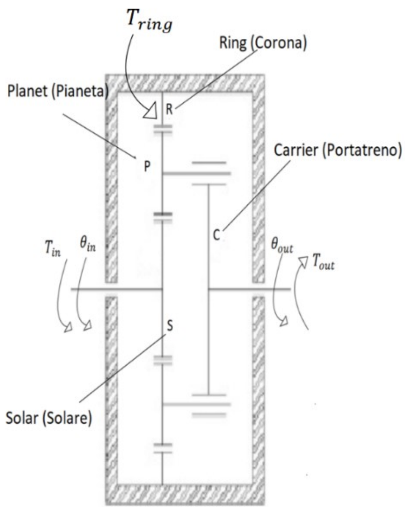


FIGURA 2.3 – COPPIE STATICHE AGENTI SUL RIDUTTORE EPICICLOIDALE

$$\begin{cases} T_{in} + T_{ring} - T_{out} = 0 \\ T_{in}\dot{\vartheta}_{in} - \eta_{\,dir} T_{out}\dot{\vartheta}_{out} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_{ring} = T_{in}(i * \eta_{\,dir} - 1) \\ T_{in} = \frac{T_{out}}{\eta_{\,dir} * i} \end{cases} \tag{2.6}$$

Dove:

- T_{in} è la coppia in ingresso all'albero solare [N*m];
- T_{out} è la coppia applicata all'albero di uscita [N*m];
- T_{ring} è la coppia di reazione strutturale sulla corona derivante dall'equazione di equilibrio statico [N*m];
- $\dot{\vartheta}_{in}$ è la velocità angolare dell'albero in ingresso [rad/s];
- $\dot{\vartheta}_{out}$ è la velocità angolare dell'albero in uscita [rad/s];
- η_{dir} rappresenta l'efficienza del flusso diretto legata alle perdite meccaniche durante la trasmissione della coppia.

Per calcolare la coppia statica scambiata fra solare-satelliti e corona-satelliti, con $n_s = 3$ il numero di satelliti:

$$\begin{cases} T_{ring-sat} = \dfrac{T_{in}(i * \eta_{\,dir} - 1)}{n_s} * \dfrac{z_{sat}}{z_{ring}} = \dfrac{T_{in}(i * \eta_{\,dir} - 1)}{3} * \dfrac{z_{sat}}{z_{ring}} \\ T_{sol-sat} = \dfrac{T_{in} * \eta_{\,dir}}{n_s} * \dfrac{z_{sat}}{z_{sol}} = \dfrac{T_{in}(i * \eta_{\,dir} - 1)}{3} * \dfrac{z_{sat}}{z_{sol}} \end{cases} \tag{2.7}$$

Da cui si ricavano le forze statiche di ingranamento solare-satellite e corona-satellite:

$$\begin{cases} F_{ring-sat} = \dfrac{T_{ring-sat}}{r_{sat} * \cos(\alpha\_r)} \\ F_{sol-sat} = \dfrac{T_{sol-sat}}{r_{sol} * \cos(\alpha\_s)} \end{cases} \tag{2.8}$$

Scomposte nelle azioni tangenziali e radiali:

$$F_{sol-sat}^{tan} = F_{sol-sat} * \cos(\alpha_s) \quad \text{e} \quad F_{sol-sat}^{rad} = F_{sol-sat}^{tang} * \text{tang}(\alpha_s) \qquad (2.9)$$

$$F_{ring-sat}^{tang} = F_{ring-sat} * \cos(\alpha_r) \text{ e } F_{ring-sat}^{rad} = F_{ring-sat}^{tang} * \text{tang}(\alpha_r) \qquad (2.10)$$

Dato che $i = 4$, $\alpha_s = \alpha_r$, $\frac{z_{sat}}{z_{sol}} = 1$, $\frac{z_{sat}}{z_{ring}} = \frac{1}{3}$ e m_n uguale per tutte le ruote, le azioni $F_{sol-sat}^{tang}$ e $F_{sol-sat}^{rad}$ così come $F_{ring-sat}^{tang}$ e $F_{ring-sat}^{rad}$ hanno risultante nulla, mentre la somma delle forze $F_{ring-sat}^{tang}$ e $F_{sol-sat}^{tang}$ agiscono sui perni dei satelliti esercitando la coppia statica sul portatreno:

$$T_{out} = (3 * (F_{sol-sat}^{tang} + F_{ring-sat}^{tang}))^* r_{car} \qquad (2.11)$$

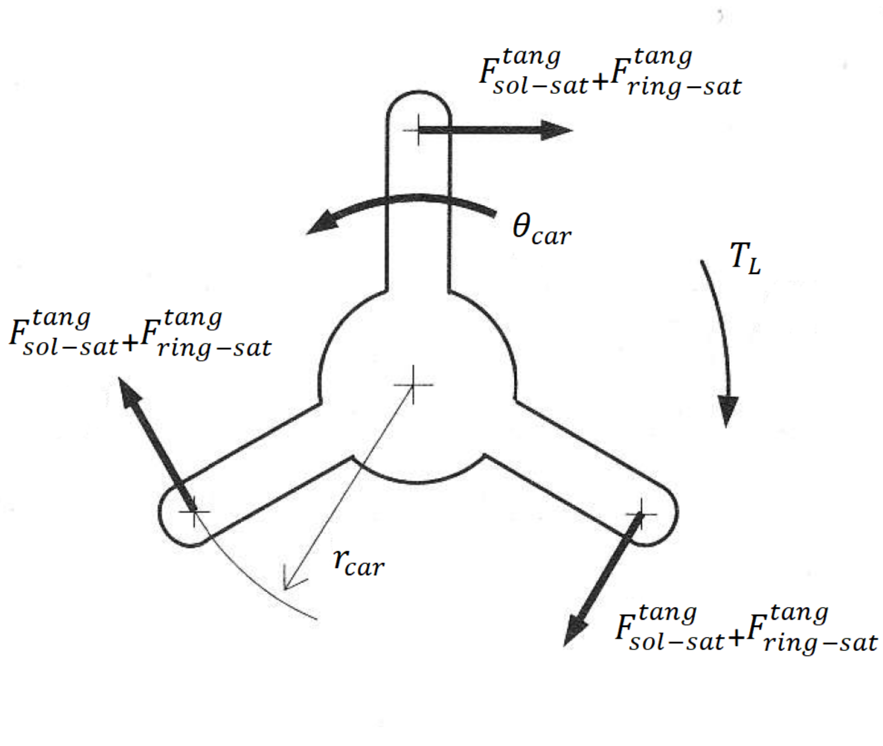


FIGURA 2.4 – DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DEL PORTATRENO

2.4 Analisi dinamica

La modellazione del riduttore, così come la modellazione di ogni sistema meccanico, segue diversi step, illustrati in *Figura 2.5.*

Nella prima parte del modello vengono inseriti i dati geometrici delle ruote dentate e sulla base di questi vengono calcolate le inerzie, le rigidezze, lo smorzamento e le funzioni di backlash. Nella seconda parte si ricavano le equazioni del moto.

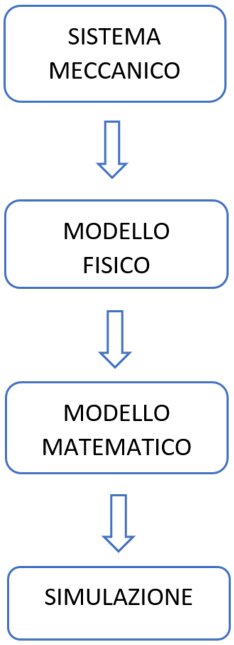


FIGURA 2.5 - DIAGRAMMA DI FLUSSO DEL PROCESSO DI MODELLAZIONE

2.4.1 Modello fisico

Il modello fisico rappresenta un sistema equivalente al sistema meccanico, che si basa su alcune ipotesi scelte in modo da semplificare il modello.

In questo caso dato che si è optato per un'analisi elasto-dinamica, il modello prende in considerazione grandezze quali:

- l'inerzia dei corpi;
- la rigidezza e lo smorzamento dei corpi;
- il gioco (backlash) tra i corpi;

Il modello del riduttore sviluppato in questo lavoro di tesi ha come parametro variabile la rigidezza d'ingranamento. Tale rigidezza varia a seconda del numero di denti che vengono in contatto, a seconda del punto di contatto sui profili dei denti e dell'entità delle coppie in gioco. Con un modello a parametri concentrati, diversamente dai modelli a parametri distribuiti in cui ogni sezione di albero può essere con un livello di rotazione diversa, ogni albero è quindi un elemento rigido.

La metodologia di modellazione scelta è quella a parametri concentrati, che considera gli elementi elastici privi di massa e gli elementi di massa privi di elasticità. La corretta scelta dei parametri (quali masse, cedevolezze, smorzamenti, ecc.) consente di ottenere un modello affidabile per lo studio complessivo della dinamica del sistema.

<u>Inerzie</u>

Per calcolare l'inerzia rotazionale del riduttore occorre calcolare i diversi contributi dei componenti nel loro movimento. Il primo passo è determinare l'inerzia rotazionale del pignone di ingresso solare, considerando il componente come un cilindro con un diametro uguale a quello primitivo e una densità uniformemente distribuita.

L'inerzia della ruota del sole è derivata con la seguente equazione:

$$m_{sol} = \frac{\rho\pi}{4} b_{sol} d_{sol}^2 \tag{2.12}$$

$$I_{sol} = \frac{1}{8} m_{sol} d_{sol}^2 \tag{2.13}$$

Dove:

- m_{sol} è la massa del solare [kg];
- ρ è la densità del materiale [kg/m^3];
- b_{sol} è la larghezza di fascia del solare [m];
- d_{sol} è il diametro primitivo del solare [m];
- I_{sol} è il momento di inerzia baricentrico del solare [kg*m^2].

Analogamente per i satelliti:

$$m_{sat1} = m_{sat2} = m_{sat3} = \frac{\rho\pi}{4} b_{sat} d_{sat}^2 \tag{2.14}$$

$$I_{sat1} = I_{sat2} = I_{sat2} = \frac{1}{8} m_{sat} d_{sat}^2 \tag{2.15}$$

Con:

- m_{sat} è la massa dei pianeti, la stessa per tutti e tre,
- b_{sat} è la larghezza di fascia dei satelliti;
- d_{sat} è il diametro primitivo del solare.

Per calcolare l'inerzia del portatreno si suppone che la sua geometria, ottimizzata per ridurre il peso pur mantenendo un'elevata rigidità, sia per lo più radiale [23]. Questa ipotesi implica che la maggior parte della massa del portasatelliti è vicina al centro di rotazione, quindi è valido supporre che l'inerzia del componente sia funzione del numero di pianeti e della distanza degli stessi dal centro.
La relazione che descrive l'inerzia del portatreno del pianeta è la seguente:

$$I_{PC} = \frac{2 * \pi * k}{256 * i^2} * n_s * \rho * b * d_{sol}^2 * (d_{sol} + d_{sat})^2 \tag{2.16}$$

Dove:

- k è una costante uguale a 2,5;
- n_s è il numero di pianeti (pari a tre);
- $i = \frac{\omega_{sol}}{\omega_{car}}$ è il rapporto di trasmissione (>1).

<u>Rigidezza e smorzamento alberi</u>

Altre grandezze utili al modello sono la rigidezza e lo smorzamento dell’albero di ingresso e di uscita, legati alla geometria degli stessi.

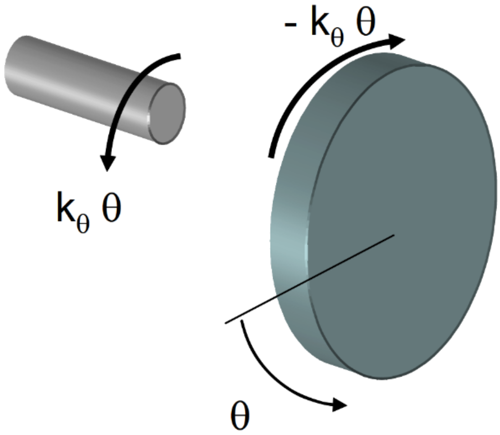


FIGURA 2.6 – RIGIDEZZA TORSIONALE ALBERO

La rigidezza e lo smorzamento dell'albero sono calcolati come:

Albero di ingresso

$$K_{\theta\_in} = \frac{I_{p\_in} * G_{shaft\_in}}{L_{shaft\_in}} = \frac{\pi * {r_{shaft\_in}}^4 * G_{shaft\_in}}{2 * L_{shaft\_in}} \quad (2.17)$$

$$c_{shaft\_in} = 2 * eps * \sqrt{K_{\theta\_in} * m_{shaft\_in}} \quad (2.18)$$

Albero di uscita

$$K_{\theta\_out} = \frac{I_{p\_out} * G_{shaft\_out}}{L_{shaft\_out}} = \frac{\pi * {r_{shaft\_out}}^4 * G_{shaft\_out}}{2 * L_{shaft\_out}} \quad (2.19)$$

$$c_{shaft\_out} = 2 * eps * \sqrt{K_{\theta\_out} * m_{shaft\_out}} \quad (2.20)$$

Dove:

- G_{shaft} è il modulo di elasticità tangenziale [Gpa];
- m_{shaft} è la massa dell'albero [kg];
- r_{shaft} è il raggio del tratto di albero [mm];
- L_{shaft} è la lunghezza del tratto di albero [mm];
- $I_p = \frac{\pi * {r_{shaft}}^4}{2}$ è il momento di inerzia polare della sezione [mm^4].

2.4.2 Rigidezza di ingranamento

Per rigidezza di ingranamento si intende il rapporto tra la forza tangenziale lungo la retta d'azione e la flessione del dente in quella direzione. La rigidezza è definita come la forza che è necessario applicare per deformare di 1 m, sulla retta d'azione, un dente di 1 m di larghezza assiale ([N/m/m]). Poiché la forza applicata su un dente è variabile come intensità, come direzione e come punto di applicazione, la flessione del dente è continuamente variabile. Il caso più eclatante si verifica negli ingranaggi a denti dritti, con rapporto di condotta inferiore a 2, in cui si alternano due coppie di denti in presa con una sola coppia, con conseguente forte variazione di carico e di flessione su ogni singolo dente. Quindi, la variabilità della rigidezza di ingranamento dipende sia dalla variabilità della forza tangenziale (intensità, direzione e verso), sia dal fatto che il numero di denti in presa (grado di ricoprimento) varia durante l'ingranamento.

In *Figura 2.7* sono illustrate le procedure per valutare la rigidezza di ingranamento per un riduttore epicicloidale. Essendoci più coppie di ingranaggi pianeta-solare e pianeta-corona, la rigidezza delle singole coppie viene valutata separatamente. Quindi, considerando le relazioni di sfasamento nell'accoppiamento solare-pianeti e corona-pianeti è possibile ottenere la rigidezza complessiva del planetario.

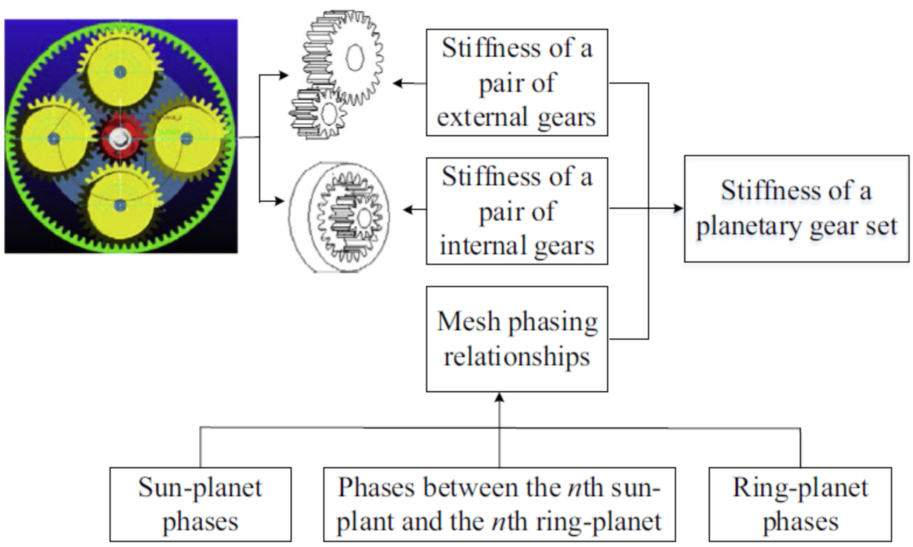


FIGURA 2.7 – PROCEDURA VALUTAZIONE DELLA RIGIDEZZA DI INGRANAMENTO DEL RIDUTTORE [24]

Modello di Kuang & Yang

In questo primo modello semplificato è stata adottata la metodologia analitica per il calcolo della rigidezza di ingranamento proposta da Kuang & Yang [25] dove, a seguito di analisi eseguite con un modello ad elementi finiti, è stata ricavata la curva interpolante i risultati ottenuti, arrivando a determinare la rigidezza per ingranaggi a denti dritti con la seguente espressione:

$$K_i(r_i) = 10^9 * (A_0 + A_1 * X_i) + (A_2 + A_3 * X_i) * \frac{r_i - R_i}{(1 - x_i) * m} \qquad (2.21)$$

$K_i(r_i)$ è la rigidezza del dente dell'i-esima ruota quando il contatto avviene nel punto definito dal raggio. Le grandezze r_i. *ri, Xi, Ri* ed *m* rappresentano rispettivamente il raggio relativo alla posizione di carico, il coefficiente di spostamento del profilo, il raggio primitivo della ruota e il modulo della ruota; mentre i coefficienti *A0, A1, A2* e *A3*, dipendenti dal numero di denti della ruota (z_i) vengono determinati nel modo seguente:

- A_0=3.867 + 1.612*z_i - 0.02916*(z_i^2) + 0.0001553*(z_i^3);
- A_1=17.060 + 0.7289*z_i - 0.01728*(z_i^2) + 0.00009993*(z_i^3);
- A_2=2.637 - 1.222*z_i + 0.02217*(z_i^2) - 0.0001179*(z_i^3);
- A_3=-6.330 - 1.033*z_i + 0.02068*(z_i^2) - 0.0001179*(z_i^3);

Tale formulazione, come già precisato, non tiene però conto delle deformazioni che vengono indotte nei denti adiacenti a quello in cui vi è il contatto.

Una volta definita la K_i del generico dente, si procede al calcolo della rigidezza della singola coppia, indicata con K_c. Poiché la costante K_i rappresenta la rigidezza flessionale del dente, in un modello dinamico a parametri concentrati, può essere rappresentata mediante una molla. L'ingranamento fra due denti è stato quindi rappresentato con due molle in serie di rigidezza costante, K_1 e K_2, di conseguenza è stata ricavata la rigidezza della singola coppia di denti in presa come la rigidezza K_c, equivalente alle rigidezze/molle K_1 e K_2 disposte in serie.

$$K_c = \frac{K_1 * K_2}{K_1 + K_2} \tag{2.22}$$

Nel caso di due coppie di denti in presa, dopo aver calcolato le rigidezze equivalenti come:

$$K_{c1} = \frac{K_1 * K_2}{K_1 + K_2} \text{ con 1,2 la prima coppia di denti in presa} \tag{2.23}$$

$$K_{c2} = \frac{K_3 * K_4}{K_3 + K_4} \text{ con 3,4 la seconda coppia di denti in presa} \tag{2.24}$$

Si determina la rigidezza totale equivalente delle due coppie di denti considerandole come due molle poste in parallelo, con l'espressione:

$$K_{eq}^{tot} = K_{c1} + K_{c2} \tag{2.25}$$

Come primo tentativo è stata utilizzato un valore di rigidezza costante, non considerando né la variazione della stessa in funzione del carico applicato sul dente, né il cambiamento nel numero di denti in presa durante l'ingranamento.

$$K_{sp} = (0.75 * \mathcal{E} + 0.25) * k_c * b_{sol} \tag{2.26}$$

$$K_{rp} = (0.75 * \mathcal{E} + 0.25) * k_c * b_{ring} \tag{2.27}$$

Con:

- k_c la rigidezza di una coppia di denti in presa;
- $\mathcal{E}$ il grado di ricoprimento;
- b_{sol} la larghezza di fascia della ruota solare;
- b_{ring} la larghezza di fascia della corona.

Differenze di fase ingranamento pianeti

In questo caso per rappresentare $K(t)$ viene utilizzata una serie di Fourier con frequenza di ingranamento del dente. Rispetto al modello precedente, la rigidezza è stata espressa in funzione del tempo poiché, nonostante la formulazione in funzione della posizione angolare risulti più accurata, è più comodo esprimerla rispetto al tempo lungo il quale si evolve la dinamica del riduttore epicicloidale.

Gli ingranamenti multipli dei denti negli epicicloidali hanno numero variabile di denti a contatto e che lavorano alla stessa frequenza di ingranamento f_{mesh}. Tutti gli ingranamenti solare-pianeta hanno la stessa forma e periodicità nella variazione del numero di denti a contatto, ma queste variazioni non sono, in generale, in fase tra loro: si verifica cioè uno sfasamento fra il numero di denti in contatto dei diversi ingranamenti. Lo stesso fenomeno si verifica negli ingranamenti corona-pianeta. Inoltre, occorre anche considerare una differenza di fase tra gli ingranamenti solare-pianeta e gli ingranamenti corona-pianeta [26].

Gli sfasamenti fra i diversi pianeti sono:

- γ_{sn} è lo sfasamento relativo fra l'ingranamento della coppia solare-pianeta n-esima e quello fra la prima coppia solare-pianeta;
- γ_{rn} è lo sfasamento relativo fra l'ingranamento della coppia corona-pianeta n-esima e quello fra la prima coppia corona-pianeta;
- γ_{rs} è lo sfasamento relativo fra l'ingranamento della n-esima coppia solare-pianeta e corona-pianeta.

Per determinare γ_{sn}, si immagina di fissare la ruota solare. A seguito di una completa rotazione del portatreno, il primo pianeta avrà compiuto una rotazione pari a 2π attorno all'asse del solare e sarà quindi entrato in contatto con tutti i denti dello stesso. Di conseguenza con una rotazione del portatreno Ψ_n lo stesso pianeta entrerà in presa con un numero di denti del solare pari a $\frac{z_{sol}*\Psi_n}{2*\pi}$. Ragionamento analogo vale per la determinazione di γ_{rn}.

Gli sfasamenti fra i pianeti sono quindi stati ricavati mediante le seguenti relazioni:

$$\gamma_{sn} = \frac{z_{sol}*\Psi_n}{2*\pi} \; e \; \gamma_{rn} = -\frac{z_{ring}*\Psi_n}{2*\pi} \text{ con rotazione oraria dei pianeti} \qquad (2.28)$$

$$\gamma_{sn} = -\frac{z_{sol}*\Psi_n}{2*\pi} \; e \; \gamma_{rn} = \frac{z_{ring}*\Psi_n}{2*\pi} \text{ con rotazione antioraria dei pianeti} \qquad (2.29)$$

Con:

- z_{sol} e z_{ring} il numero di denti del solare e della corona;

- Ψ_n è l'angolo di rotazione del portatreno tale da portare il primo pianeta nella posizione iniziale del pianeta n-esimo.

L'angolo Ψ_n è definito come:

$$\Psi_n = p_n \frac{2 * \pi}{z_{ring} z_{sol}} \tag{2.30}$$

Per la determinazione dello sfasamento γ_{rs} si è eseguito il procedimento riportato in [26], con la relazione:

$$\gamma_{rs} = \frac{\overline{P_{mesh-ring} C_{ring-planet}}}{p_{base}} \tag{2.31}$$

Dove:

- $P_{mesh-ring}$ è il punto sul segmento di contatto dell'ingranamento corona-satellite, corrispondente all'istante in cui il punto di contatto per l'ingranamento solare-satellite coincide con il centro di istantanea rotazione;
- $C_{ring-planet}$ è il centro di istantanea rotazione per il contatto corona-satellite.

Inserendo le espressioni delle rigidezze di ingranamento tempo varianti $k_{sp}(t)\ e\ k_{rp}(t)$ scritte mediante serie di Fourier [27] e in considerazione degli sfasamenti relativi fra i tre pianeti sono:

$$\begin{aligned} k_{sp1}(t) = k_{sp} &+ \frac{2 * \left(\frac{k_{sp}}{2}\right)}{\pi} * \sin(\omega_m * (t - \gamma_{s1} * T_m)) + \frac{2 * \left(\frac{k_{sp}}{2}\right)}{3 * \pi} \\ &* \sin(3 * \omega_m * (t - \gamma_{s1} * T_m) + \frac{2 * (\frac{k_{sp}}{2})}{5 * \pi} * \sin(5 * \omega_m * (t - \gamma_{s1} * T_m)) \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} k_{sp2}(t) = k_{sp} &+ \frac{2 * \left(\frac{k_{sp}}{2}\right)}{\pi} * \sin(\omega_m * (t - \gamma_{s2} * T_m)) + \frac{2 * \left(\frac{k_{sp}}{2}\right)}{3 * \pi} \\ &* \sin(3 * \omega_m * (t - \gamma_{s2} * T_m)) + \frac{2 * (\frac{k_{sp}}{2})}{5 * \pi} * \sin(5 * \omega_m * (t - \gamma_{s2} * T_m)) \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$k_{sp3}(t) = k_{sp} + \frac{2 * \left(\frac{k_{sp}}{2}\right)}{\pi} * \sin(\omega_m * (t - \gamma_{s3} * T_m)) + \frac{2 * \left(\frac{k_{sp}}{2}\right)}{3 * \pi} * \sin(3 * \omega_m * (t - \gamma_{s3} * T_m)) + \frac{2 * (\frac{k_{sp}}{2})}{5 * \pi} * \sin(5 * \omega_m * (t - \gamma_{s3} * T_m)) \quad (2.34)$$

$$k_{rp1}(t) = k_{rp} + \frac{2 * \left(\frac{k_{rp}}{2}\right)}{\pi} * \sin(\omega_m * (t - (\gamma_{r1}+\gamma_{rs}) * T_m)) + \frac{2 * \left(\frac{k_{sp}}{2}\right)}{3 * \pi} * \sin(3 * \omega_m * (t - (\gamma_{r1}+\gamma_{rs}) * T_m) + \frac{2 * (\frac{k_{sp}}{2})}{5 * \pi} * \sin(5 * \omega_m * (t - (\gamma_{r1}+\gamma_{rs}) * T_m)) \quad (2.35)$$

$$k_{rp2}(t) = k_{rp} + \frac{2 * \left(\frac{k_{rp}}{2}\right)}{\pi} * \sin(\omega_m * (t - (\gamma_{r2}+\gamma_{rs}) * T_m)) + \frac{2 * \left(\frac{k_{rp}}{2}\right)}{3 * \pi} * \sin(3 * \omega_m * (t - (\gamma_{r2}+\gamma_{rs}) * T_m)) + \frac{2 * (\frac{k_{rp}}{2})}{5 * \pi} * \sin(5 * \omega_m * (t - (\gamma_{r2}+\gamma_{rs}) * T_m)) \quad (2.36)$$

$$k_{rp3}(t) = k_{rp} + \frac{2 * \left(\frac{k_{rp}}{2}\right)}{\pi} * \sin(\omega_m * (t - (\gamma_{r3}+\gamma_{rs}) * T_m)) + \frac{2 * \left(\frac{k_{rp}}{2}\right)}{3 * \pi} * \sin(3 * \omega_m * (t - (\gamma_{r3}+\gamma_{rs}) * T_m)) + \frac{2 * (\frac{k_{rp}}{2})}{5 * \pi} * \sin(5 * \omega_m * (t - (\gamma_{r3}+\gamma_{rs}) * T_m)) \quad (2.37)$$

Dove:

- ω_m è la velocità di rotazione di ingranamento ($\omega_m = 2 * \pi * f_m$);
- f_m è la frequenza di ingranamento pari a $f_{mesh} = f_{sol} * \frac{z_{sol} * z_{ring}}{z_{sol} + z_{ring}}$;
- T_m è il periodo di ingranamento ($T_m = \frac{1}{f_m}$).

Di seguito si riportano un esempio di andamento delle rigidezze con i relativi sfasamenti γ_{s1}, γ_{s2}, γ_{s3}, γ_{r1}, γ_{r2}, γ_{r3} e γ_{rs}.

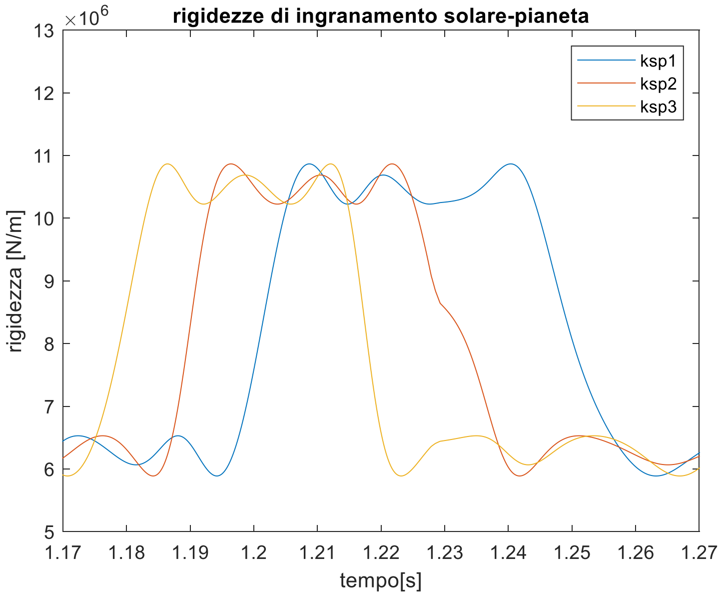


FIGURA 2.8 – RIGIDEZZE DI INGRANAMENTO SOLARE-SATELLITI IN FUNZIONE DEL TEMPO

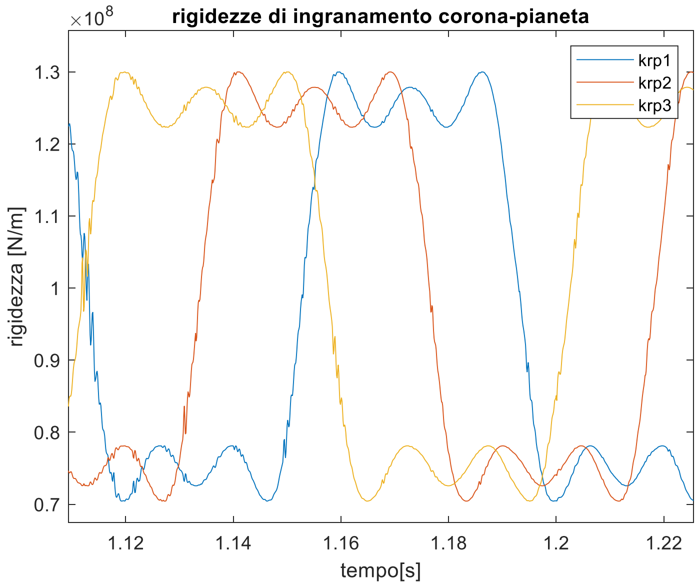


FIGURA 2.9 – RIGIDEZZE DI INGRANAMENTO CORONA-SATELLITI IN FUNZIONE DEL TEMPO

I valori più elevati di rigidezza rappresentano l'ingranamento fra due coppie di denti, mentre i valori più bassi l'ingranamento fra una singola coppia. Si osserva inoltre lo sfasamento fra i tre pianeti sia nell'ingranamento con il solare che con la corona; le rigidezze k_{sp} e k_{rp} presentano quindi gli stessi andamenti ma shiftati di un certo Δt.

Coefficiente di smorzamento

Per l'ingranamento solare-satelliti:

$$c_{sp} = 2 * eps * \sqrt{\frac{k_{sp} * m_{sol} * m_{sat}}{m_{sol} + m_{sat}}} \tag{2.38}$$

Per l'ingranamento corona-satelliti:

$$c_{rp} = 2 * eps * \sqrt{k_{rp} * m_{sat}} \tag{2.39}$$

Con $eps = \frac{0.03+0.17}{2}$ il rapporto di smorzamento del contatto fra i denti.

2.4.3 Backlash

Il backlash rappresenta il gioco esistente tra due parti mobili adiacenti. Tale fenomeno è messo in evidenza in particolar modo in sistemi meccanici dotati di un membro movente e un membro guidato, non direttamente interconnessi tra loro: in cui cioè l'asse motore e l'asse del carico vengono collegati tra loro attraverso dei rotismi.

La funzione che rappresenta il fenomeno di backlash è rappresentata in *Figura 2.10* ed è esprimibile come:

$$f(\delta, B) = \begin{cases} \delta - B & if \quad \delta > B \\ 0 & elseif \quad -B < \delta < B \\ \delta + B & else \quad \delta < -B \end{cases} \tag{2.40}$$

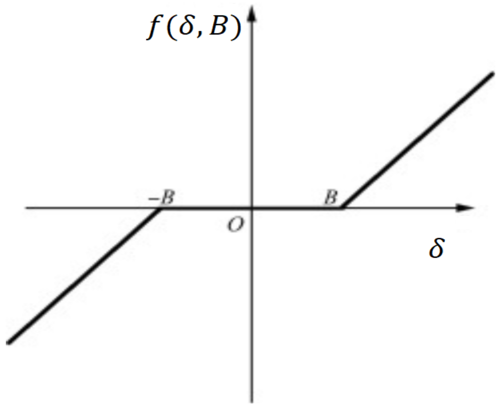


FIGURA 2.10 – FUNZIONE DI BACKLASH

In *Figura 2.11* è rappresentata l'implementazione della funzione di backlash, modellata mediante una costruzione *if-elseif-else* all'interno dell'ambiente Simulink. Ogni *funzione-blocco backlash* è di conseguenza applicata, come mostrato in *Figura 2.12,* agli spostamenti relativi solare-pianeta e corona-pianeta lungo la linea di ingranamento.

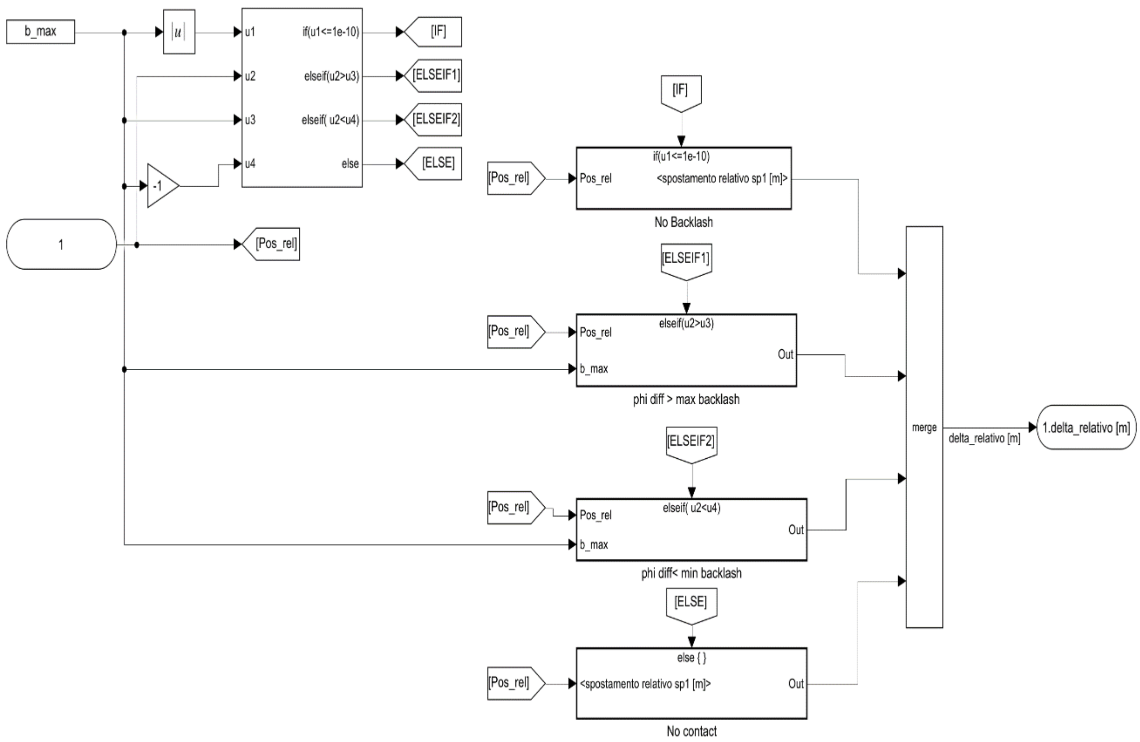


FIGURA 2.11 – FUNZIONE DI BACKLASH IN AMBIENTE SIMULINK

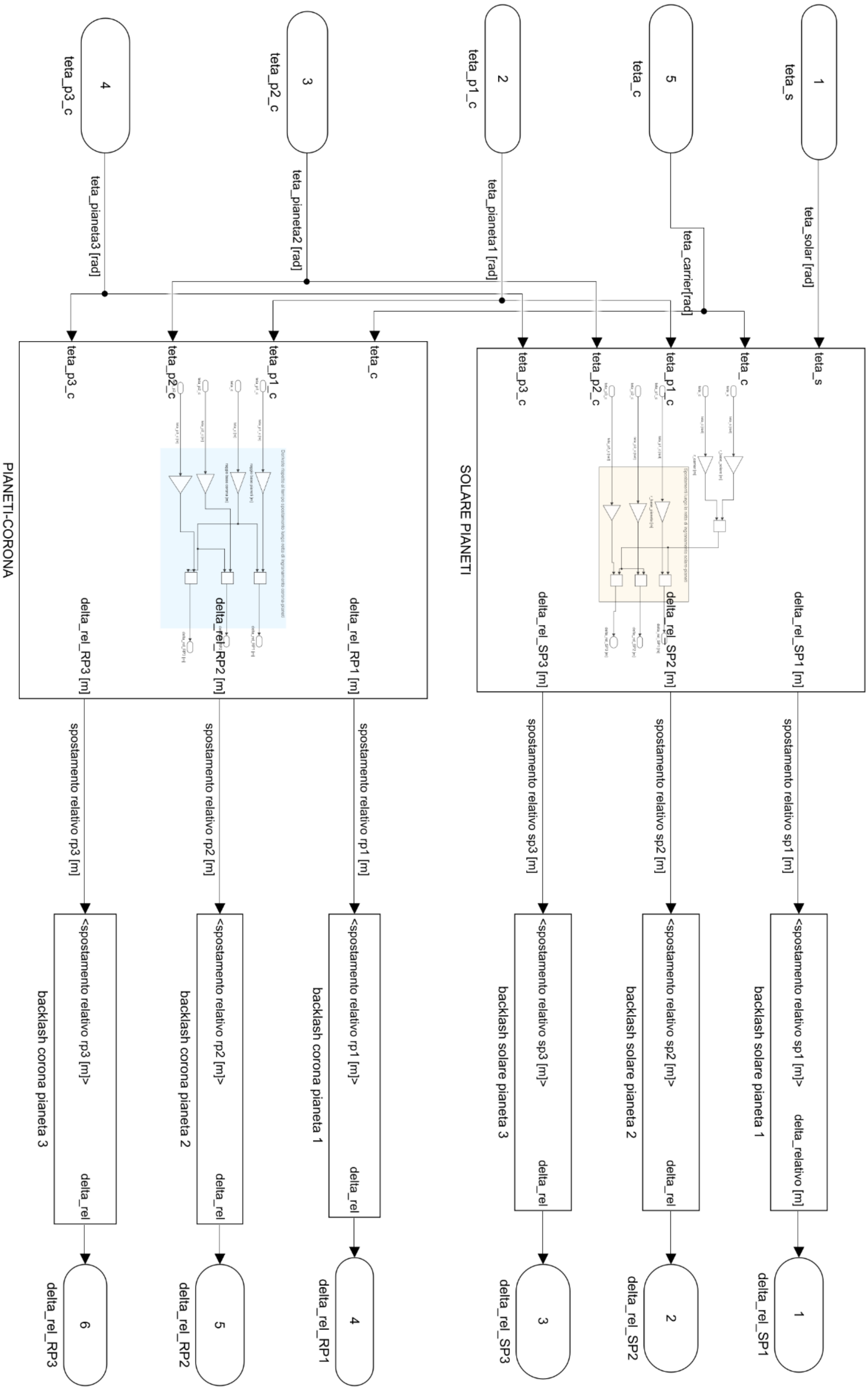


FIGURA 2.12 – BACKLASH PER GLI INGRANAMENTI DEL RIDUTTORE IN AMBIENTE SIMULINK

2.4.4 Modello matematico – equazioni del moto

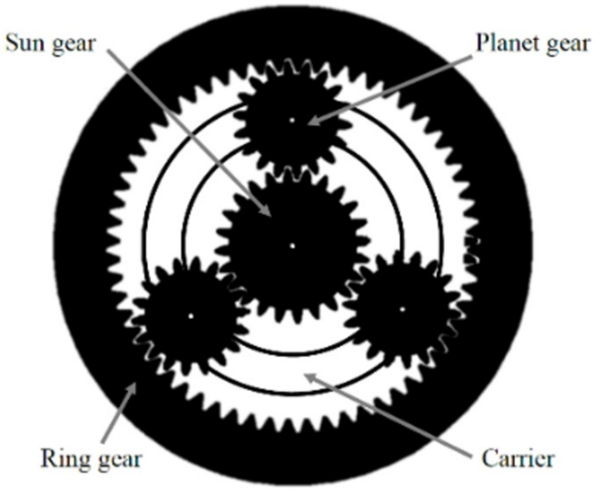


FIGURA 2.13 – ELEMENTI PRINCIPALI DEL RIDUTTORE EPICICLOIDALE

Il comportamento dinamico del riduttore epicicloidale è stato studiato mediante l'utilizzo di un modello matematico a parametri concentrati puramente rotazionale [27], che permette di ridurre notevolmente i gradi di libertà e quindi anche il costo computazionale di risoluzione delle equazioni del moto. Per contro, tutti gli effetti traslazionali (e quindi le reazioni dei cuscinetti) non vengono presi in considerazione.

Il modello è stato sviluppato per un determinato riduttore, ma al tempo stesso è stato parametrizzato in modo da poter essere applicato a qualsiasi riduttore epicicloidale avente uno stadio di riduzione costituito da tre satelliti.

Si riportano le equazioni del moto, considerando i 5 gradi di libertà del riduttore: rotazione del solare, rotazioni dei 3 satelliti e rotazione del portatreno, mentre la corona è stata considerata fissa.

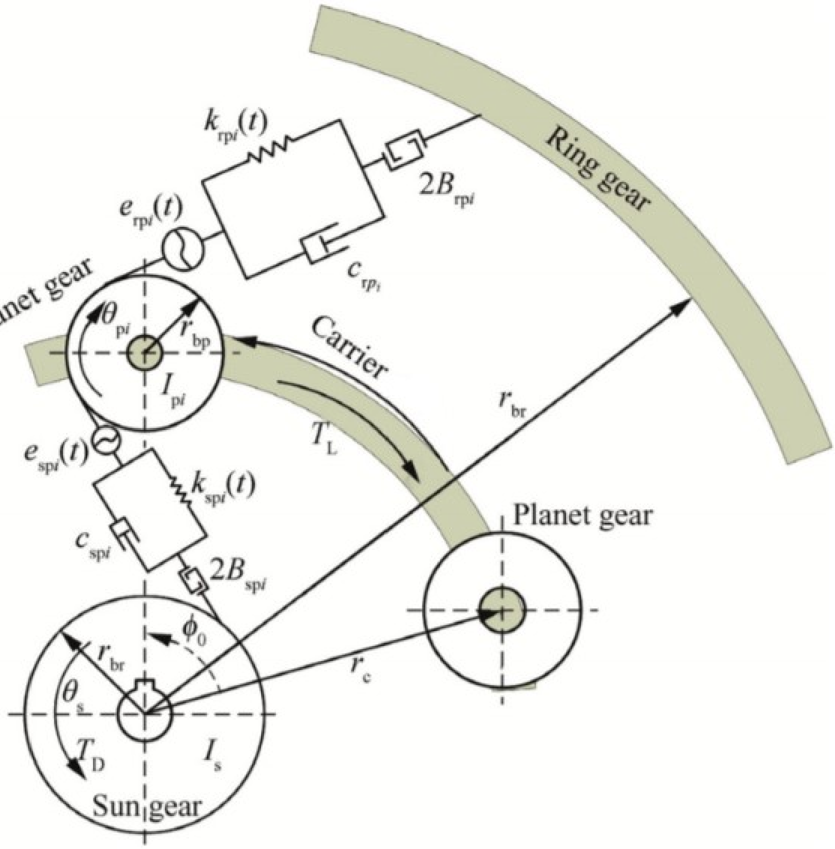


FIGURA 2.14 – MODELLO DINAMICO A PARAMETRI CONCENTRATI DEL RIDUTTORE [27]

Le rigidezze di ingranamento sono schematizzate come molle a cui in parallelo è posto uno smorzamento per simulare gli effetti viscosi.

<u>Modello semplificato</u>

Il primo modello realizzato presenta le seguenti ipotesi semplificative:

- rigidezze di ingranamento solare-satelliti uguali e costanti k_{sp1}=k_{sp2}=k_{sp2}=k_{sp};
- coefficienti di smorzamento viscoso solare-satelliti uguali e costanti c_{sp1}=c_{sp2}=c_{sp2}=c_{sp};
- rigidezze di ingranamento corona-satelliti uguali e costanti k_{rp1}=k_{rp2}=k_{rp2}=k_{rp};
- coefficienti di smorzamento viscoso corona-satelliti uguali e costanti c_{rp1}=c_{rp2}=c_{rp2}=c_{rp};
- errore di trasmissione trascurabile $e_{sp} \simeq 0$ $e_{rp} \simeq 0$;

- angolo di pressione solare-satelliti α_{sp} e corona-satelliti α_{rp} costanti durante l'ingranamento.

Di seguito vengono presentate le equazioni del moto sviluppate per ogni elemento rotante del riduttore.

Equilibrio rotazione solare:

Al fine di ricavare l'equazione del moto si è realizzato il diagramma di corpo libero della ruota solare con r_{bs}= raggio di base solare, presentato di seguito.

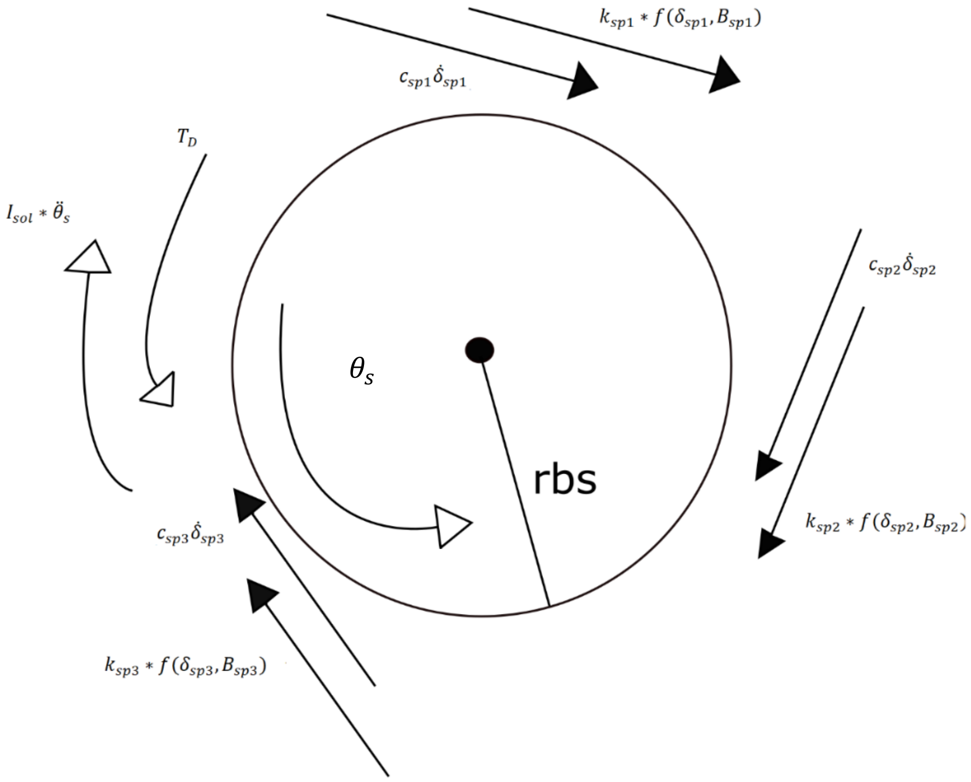


FIGURA 2.15 – DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DELLA RUOTA DEL SOLARE

Da cui deriva la seguente equazione del moto.

$$T_D \quad - \quad r_{bs} * \left(c_{sp1}\dot{\delta}_{sp1} + \ c_{sp2}\dot{\delta}_{sp2} + \ c_{sp3}\dot{\delta}_{sp3}\right) - \ r_{bs} * \left(k_{sp1} * f(\delta_{sp1}, B_{sp1}) + \ k_{sp2} * f(\delta_{sp2}, B_{sp2} + \ k_{sp3} * f(\delta_{sp3}, B_{sp}\right) \ = \ I_{sol} * \ddot{\theta}_s \tag{2.41}$$

Equilibrio rotazione relativa dei tre satelliti rispetto al portatreno.

Come già anticipato precedentemente, essendo il modello puramente rotazionale non vengono considerati gli effetti giroscopici derivanti dalla rotazione dei tre satelliti intorno all'asse del porta-treno.

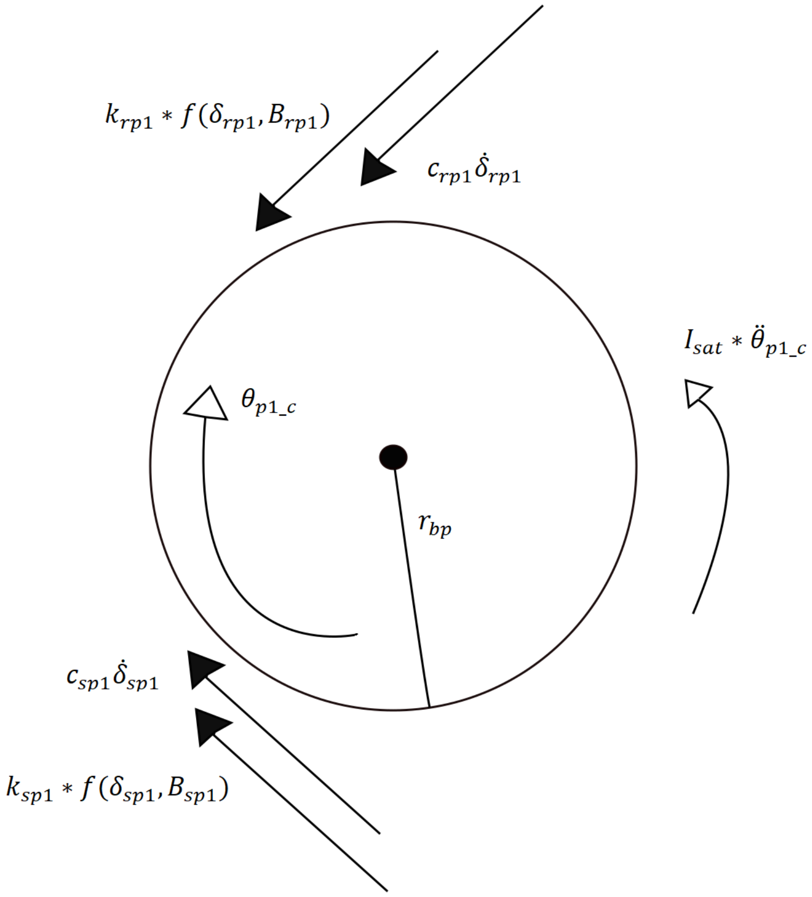


FIGURA 2.16 – DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DEL SATELLITE 1

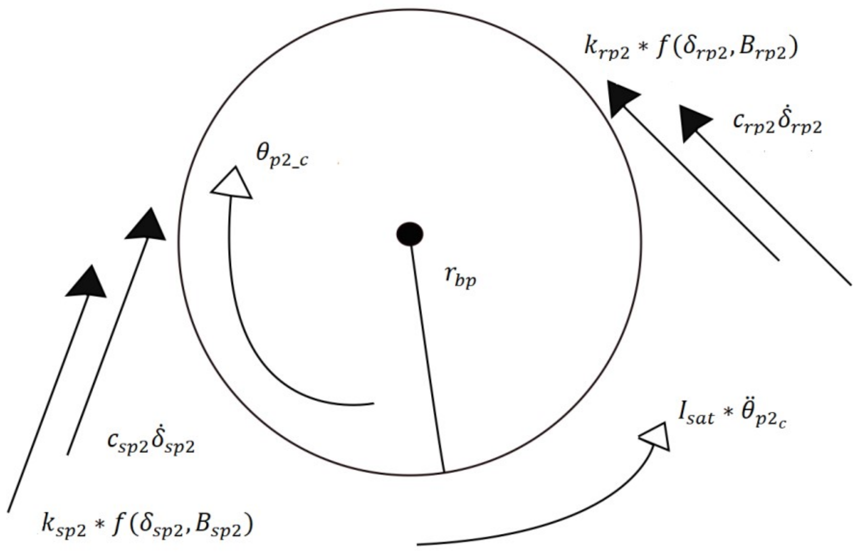


FIGURA 2.17 – DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DEL SATELLITE 2

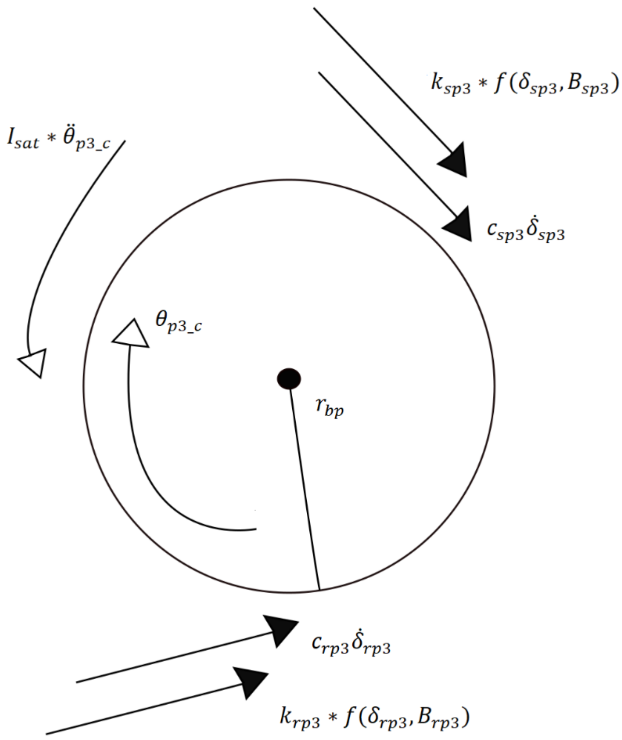


FIGURA 2.18 – DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DEL SATELLITE 3

Da cui derivano le seguenti equazioni del moto:

$$(k_{sp1} * f(\delta_{sp1}, B_{sp1}) - k_{rp1} * f(\delta_{rp1}, B_{rp1})) * r_{bp} + (c_{sp1}\dot{\delta}_{sp1} - c_{rp1}\dot{\delta}_{rp1}) * r_{bp} = I_{sat} * \ddot{\theta}_{p1\_c} \qquad (2.42)$$

$$(k_{sp2} * f(\delta_{sp2}, B_{sp2}) - k_{rp2} * f(\delta_{rp2}, B_{rp2})) * r_{bp} + (c_{sp2}\dot{\delta}_{sp2} - c_{rp2}\dot{\delta}_{rp2}) * r_{bp} = I_{sat} * \ddot{\theta}_{p2_c} \qquad (2.43)$$

$$(k_{sp3} * f(\delta_{sp3}, B_{sp3}) - k_{rp3} * f(\delta_{rp3}, B_{rp3})) * r_{bp} + (c_{sp3}\dot{\delta}_{sp3} - c_{rp3}\dot{\delta}_{rp3}) * r_{bp} = I_{sat} * \ddot{\theta}_{p3\_c} \qquad (2.44)$$

Equilibrio rotazione portatreno (o porta-satelliti)

Le forze tangenziali di ingranamento solare-satelliti e corona-satelliti si scaricano sull'asse del satellite, esercitando quindi un momento torcente sull'albero del portatreno, che si oppone alla coppia resistente T_L .

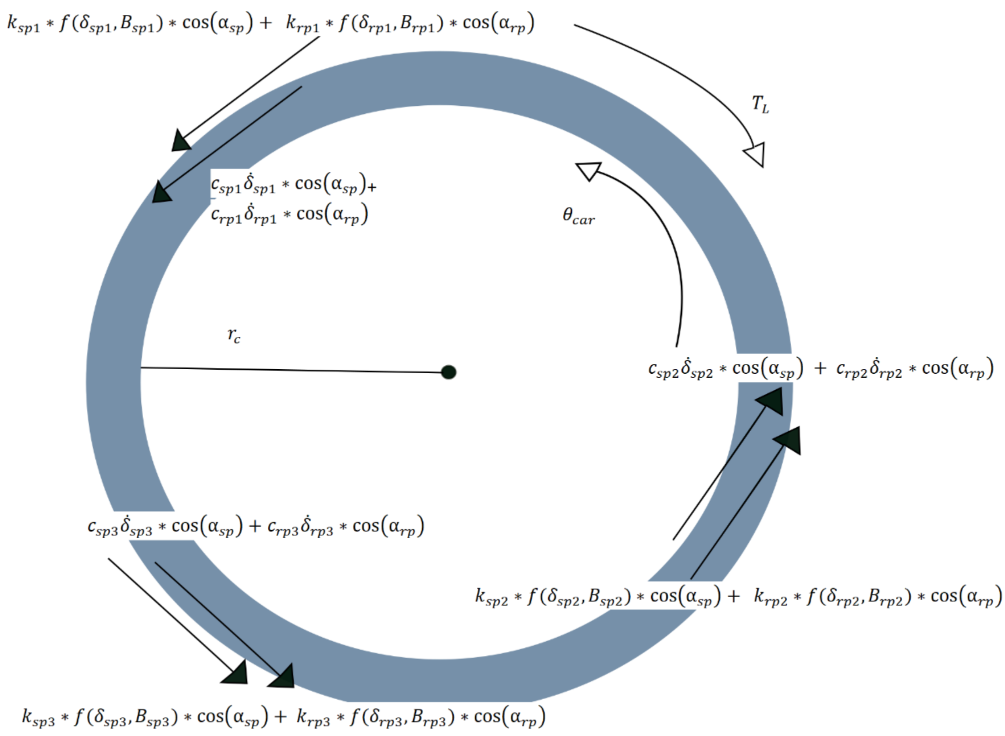


FIGURA 2.19 – DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DEL PORTATRENO

Da cui la seguente equazione:

$$
\begin{aligned}
&(c_{sp1}\dot{\delta}_{sp1} * r_c * \cos(\alpha_{sp}) + c_{rp1}\dot{\delta}_{rp1} * r_c * \cos(\alpha_{rp}) + \\
&c_{sp2}\dot{\delta}_{sp2} * r_c * \cos(\alpha_{sp}) + c_{rp2}\dot{\delta}_{rp2} * r_c * \cos(\alpha_{rp}) + c_{sp3}\dot{\delta}_{sp3} * \\
&r_c * \cos(\alpha_{sp}) + c_{rp3}\dot{\delta}_{rp3} * r_c * \cos(\alpha_{rp})) + (k_{sp1} * f(\delta_{sp1}, B_{sp1}) * \\
&r_c * \cos(\alpha_{sp}) + (k_{rp1} * f(\delta_{rp1}, B_{rp1}) * r_c * \cos(\alpha_{rp}) + (k_{sp2} * \\
&f(\delta_{sp2}, B_{sp2}) * r_c * \cos(\alpha_{sp}) + (k_{rp2} * f(\delta_{rp2}, B_{rp2}) * r_c * \\
&\cos(\alpha_{rp}) + (k_{sp3} * f(\delta_{sp3}, B_{sp3}) * r_c * \cos(\alpha_{sp}) + (k_{rp3} * \\
&f(\delta_{rp3}, B_{rp3}) * r_c * \cos(\alpha_{rp})) - T_L = I_{car} * \ddot{\theta}_{car}
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Con r_c il raggio del portasatelliti.

Forze elastiche di ingranamento

Le forze dinamiche di ingranamento dipendono prevalentemente dalle variazioni della rigidezza di ingranamento e dagli errori di trasmissione. Queste forze, variabili nel corso della rotazione, si trasferiscono attraverso i supporti fino alla carcassa del riduttore.
Sul solare:

$$\begin{aligned} F_{elast}^{sol} = \big(k_{sp1} * f(\delta_{sp1}, B_{sp1}) + \ k_{sp2} * f(\delta_{sp2}, B_{sp2} \\ + \ k_{sp3} * f(\delta_{sp3}, B_{sp}\big) \end{aligned} \tag{2.46}$$

Sui satelliti:

$$F_{elast}^{sat-1} = (k_{sp1} * f(\delta_{sp1}, B_{sp1}) \ - \ k_{rp1} * f(\delta_{rp1}, B_{rp1})) \tag{2.47}$$

$$F_{elast}^{sat-2} = (k_{sp2} * f(\delta_{sp2}, B_{sp2}) \ - \ k_{rp2} * f(\delta_{rp2}, B_{rp2})) \tag{2.48}$$

$$F_{elast}^{sat-3} = (k_{sp3} * f(\delta_{sp3}, B_{sp3}) \ - \ k_{rp3} * f(\delta_{rp3}, B_{rp3})) \tag{2.49}$$

Forze viscose di ingranamento

Sul solare:

$$F_{visc}^{sol} = \big(c_{sp1}\dot{\delta}_{sp1} + \ c_{sp2}\dot{\delta}_{sp2} + \ c_{sp3}\dot{\delta}_{sp3}\big) \tag{2.50}$$

Sui satelliti:

$$F_{visc}^{sat-1} = \big(c_{sp1}\dot{\delta}_{sp1} - \ c_{rp1}\dot{\delta}_{rp1}\big) \tag{2.51}$$

$$F_{visc}^{sat-2} = \big(c_{sp2}\dot{\delta}_{sp2} - \ c_{rp2}\dot{\delta}_{rp2}\big) \tag{2.52}$$

$$F_{visc}^{sat-3} = \big(c_{sp3}\dot{\delta}_{sp3} - \ c_{rp3}\dot{\delta}_{rp3}\big) \tag{2.53}$$

Dove, gli spostamenti relativi e la loro derivata lungo la linea di azione solare-satellite e corona-satellite sono stati calcolati come segue:

$$\delta_{sp1} = r_{bs} * (\theta_s - \theta_{car}) - r_{bp} * \theta_{p1\_c} \quad (2.54a)$$

$$\dot{\delta}_{sp1} = r_{bs} * (\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_{car}) - r_{bp} * \dot{\theta}_{p1\_c} \quad (2.54b)$$

$$\delta_{sp2} = r_{bs} * (\theta_s - \theta_{car}) - r_{bp} * \theta_{p2\_c} \quad (2.55a)$$

$$\dot{\delta}_{sp2} = r_{bs} * (\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_{car}) - r_{bp} * \dot{\theta}_{p2\_c} \quad (2.55b)$$

$$\delta_{sp3} = r_{bs} * (\theta_s - \theta_{car}) - r_{bp} * \theta_{p3\_c} \quad (2.56a)$$

$$\dot{\delta}_{sp3} = r_{bs} * (\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_{car}) - r_{bp} * \dot{\theta}_{p3\_c} \quad (2.56b)$$

$$\delta_{rp1} = r_{bp} * \theta_{p1\_c} - r_{br} * \theta_{car} \quad (2.57a)$$

$$\dot{\delta}_{rp1} = r_{bp} * \dot{\theta}_{p1\_c} - r_{br} * \dot{\theta}_{car} \quad (2.57b)$$

$$\delta_{rp2} = r_{bp} * \theta_{p2\_c} - r_{br} * \theta_{car} \quad (2.58a)$$

$$\dot{\delta}_{rp2} = r_{bp} * \dot{\theta}_{p2\_c} - r_{br} * \dot{\theta}_{car} \quad (2.58b)$$

$$\delta_{rp3} = r_{bp} * \theta_{p3\_c} - r_{br} * \theta_{car} \quad (2.59a)$$

$$\dot{\delta}_{rp3} = r_{bp} * \dot{\theta}_{p3\_c} - r_{br} * \dot{\theta}_{car} \quad (2.59b)$$

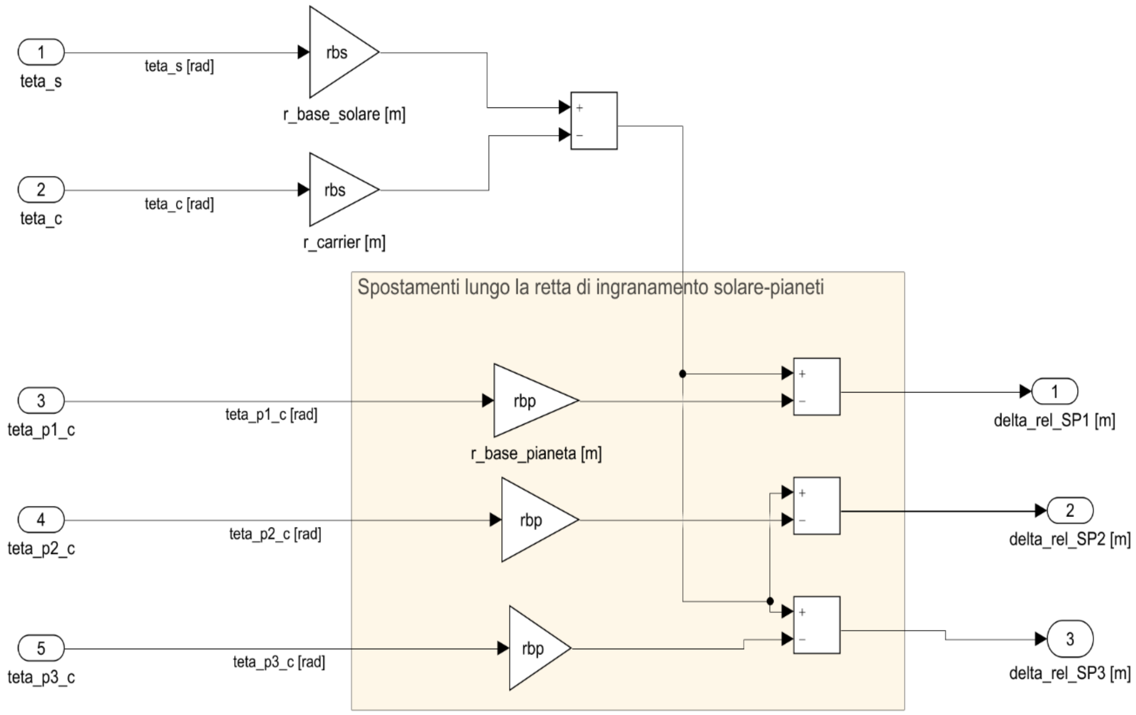


FIGURA 2.20 - SIMULINK-CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI RELATIVI SOLARE-PIANETA δ _SP1 δ_SP2 δ _SP3

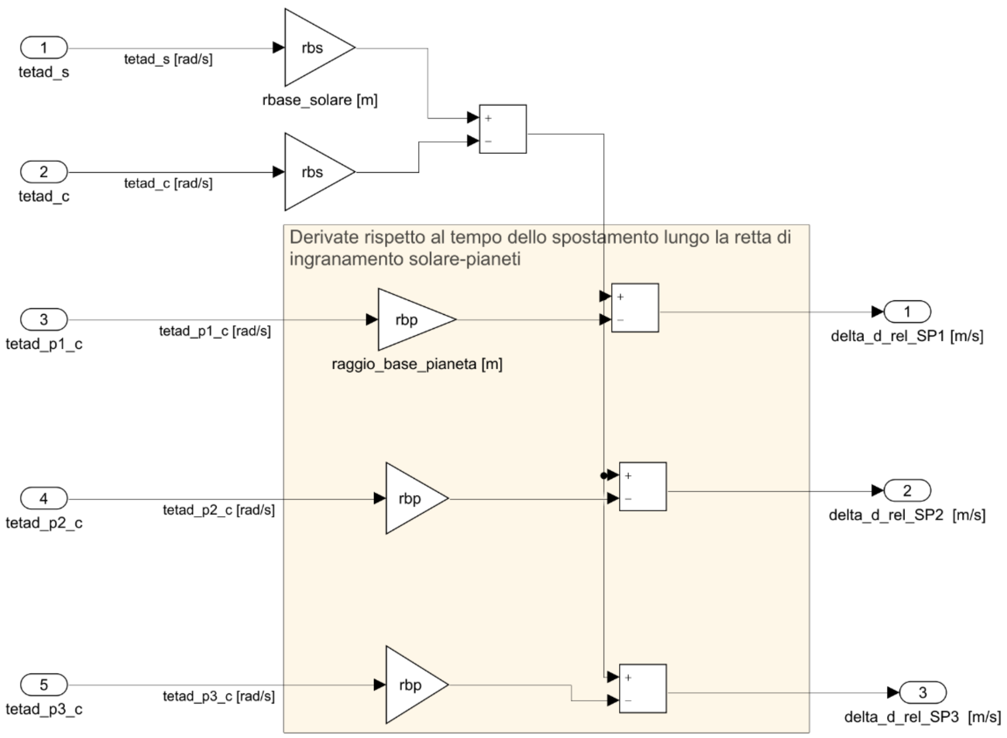


FIGURA 2.21 - SIMULINK-CALCOLO DELLE DERIVATE SOLARE-PIANETA $\dot{\delta}_{sp1}$ $\dot{\delta}_{sp2}$ $\dot{\delta}_{sp3}$

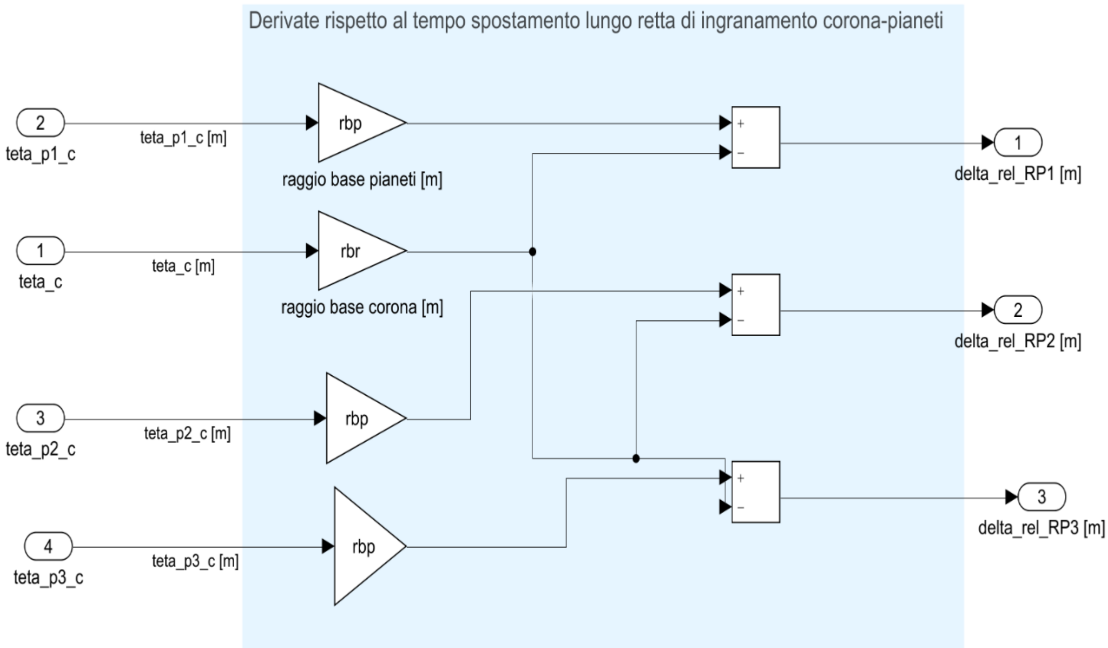


FIGURA 2.22 - SIMULINK-CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI RELATIVI CORONA-PIANETA δ_{rp1} δ_{rp2} δ_{rp3}

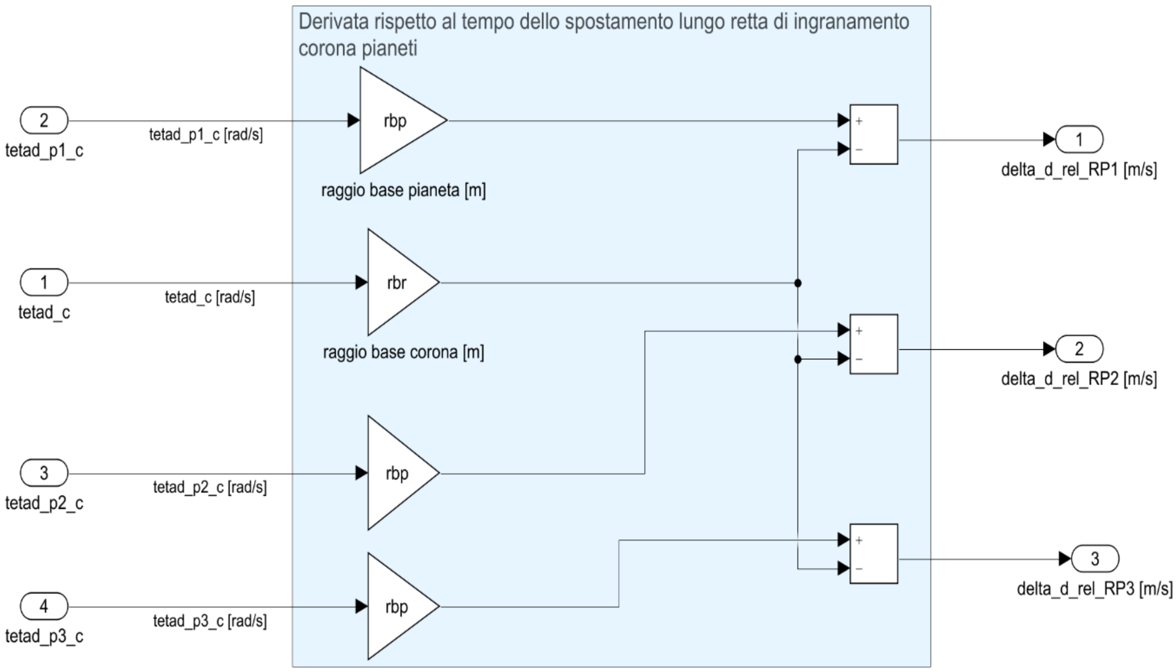


FIGURA 2.23 - SIMULINK-CALCOLO DELLE DERIVATE CORONA-PIANETA $\dot{\delta}_{rp1}$ $\dot{\delta}_{rp2}$ $\dot{\delta}_{rp3}$

Le altre grandezze che compaiono nelle equazioni del moto sono:

- T_D Coppia in ingresso al solare [N*m];
- T_L Coppia resistente al porta-satelliti [N*m];
- r_{bp} raggio di base pianeti [m];
- r_{br} raggio di base corona [m];
- r_{bs} raggio di base solare [m];
- r_c raggio porta-satelliti [m];
- k_{sp} rigidezza di ingranamento solare-satelliti [N/m];
- k_{rp} rigidezza di ingranamento corona-satelliti [N/m];
- c_{sp} coefficiente di smorzamento viscoso solare-satelliti [kg/s];
- c_{rp} coefficiente di smorzamento viscoso corona -satelliti [kg/s];
- $f(\delta_{sp}, B_{sp})$ funzione di backlash solare-satelliti;
- $f(\delta_{rp}, B_{rp})$ funzione di backlash corona-satelliti.

2.4.5 Simulazione

Le equazioni ricavate sono state utilizzate allo scopo di simulare il comportamento dinamico del sistema. Nello specifico, sono state integrate le equazioni del moto utilizzando il software Simulink, inserito nel linguaggio di programmazione MATLAB®, molto utilizzato in quanto oltre a risolvere il sistema il modello matematico permette la visualizzazione delle variabili interne al modello.

Grazie a tale strumento è stato possibile:

- analizzare i segnali risultanti dal modello che esprimono il comportamento dinamico dell'oggetto studiato;
- monitorare l'andamento delle forze istante per istante, al fine di individuare quelle che incidono maggiormente nella determinazione dei segnali finali;
- modificare i parametri del modello al fine di capire come questi incidono sul comportamento dinamico: particolarmente utile sia in fase di progettazione che in fase di miglioramento del modello.

I principali blocchi Simulink del sistema riduttore sono riportati in appendice.

Capitolo 3

3 Modellazione delle dissipazioni energetiche

La potenza meccanica è idealmente trasmessa dagli ingranaggi del componente dall'ingresso all'albero di uscita, senza alcuna perdita interna. Per questa condizione ideale, il rapporto tra coppia in uscita e in entrata è direttamente proporzionale al rapporto di velocità i definito da:

$$\frac{T_{out}}{T_{in}} = \frac{\omega_{in}}{\omega_{out}} = i = 1 + \frac{z_{ring}}{z_{sol}} \tag{3.1}$$

Un modello accurato, tuttavia, deve tenere conto delle perdite nella trasmissione meccanica, che verranno quindi introdotte nei successivi paragrafi.

Di seguito, viene descritto il modello adottato per calcolare le componenti di perdita all'interno del riduttore, sottolineando la loro variazione in funzione della temperatura.

Le perdite di potenza legate alle ruote dentate in un ingranaggio sono suddivisibili in due gruppi principali:

- perdite dipendenti dal carico
- perdite indipendenti dal carico

3.1 Perdite di potenza dipendenti dal carico

Fra le perdite dipendenti dal carico si elencano:

- le perdite causate dallo strisciamento fra i denti in contatto;
- le perdite da attrito generato da taglio viscoso dello strato di lubrificante e da interazione diretta fra le asperità delle superfici in contatto (regime di lubrificazione misto).

Nel modello di attrito di seguito riportato vengono presentate le modellazioni di dettaglio di entrambe le tipologie di perdita.

3.1.1 Perdite per strisciamento dei denti in contatto

Per quanto riguarda le perdite causate dallo strisciamento dei denti a contatto, occorre considerare che la forza scambiata fra i denti possiede due componenti: una normale alla superficie del dente e una ad essa tangenziale avente la direzione della velocità relativa tra i due denti [8].

Durante l'ingranamento, si ha moto di puro rotolamento solo in corrispondenza del punto di contatto fra le circonferenze primitive delle due ruote. Nella zona superiore e inferiore si ha strisciamento in direzione dell'altezza del dente, tale fenomeno genera quindi una componente di forza di attrito radente fra i denti che ingranano $F_{att}(t)$, che esercita una coppia con braccio variabile in funzione della posizione del punto di contatto lungo la linea di ingranamento.

$$F_{att}(t) = \mu * F_n(t) \tag{3.2}$$

Con:

- μ il coefficiente di attrito [-];
- $F_n(t)$ la forza scambiata dai denti durante l'ingranamento e diretta lungo la linea di azione [N];
- $F_{att}(t)$ la forza di attrito radente ortogonale alla linea di azione [N].

Si considera il coefficiente μ costante durante l'ingranamento, tuttavia è necessario tenere conto del cambio di segno con la direzione della velocità di strisciamento relativa V_S:

$$\mu = \mu_0 * sign(V_S) \begin{cases} \mu_0 \; se \; V_S > 0 \\ -\mu_0 \; se \; V_S < 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Il cambio di verso della forza di attrito può innescare una vibrazione. Questo fenomeno è particolarmente influente negli ingranaggi con denti dritti, mentre è trascurabile nel caso di ingranaggi con denti elicoidali.

Al fine di simulare la presenza di attrito radente durante l'ingranamento sono stati seguiti i seguenti passaggi:

- stima del coefficiente di attrito μ_0;

- calcolo della geometria del contatto, ricavando quindi le espressioni dei raggi di curvatura delle ruote;
- determinazione dell'espressione della velocità di strisciamento dei due profili lungo il segmento dei contatti;
- calcolo della coppia di attrito esercitata da $F_{att}(t)$.

3.1.1.1 Stima del coefficiente di attrito

La valutazione del coefficiente di attrito è particolarmente critica; è possibile stimarlo mediante prove sperimentali oppure utilizzando le relazioni proposte in letteratura.
Occorre inoltre sottolineare come il valore del coefficiente non rimanga costante durante l'ingranamento, ma vari sia con lo spostamento del punto di contatto lungo la linea di azione, sia in funzione delle condizioni operative quali viscosità dinamica del lubrificante, forza di contatto etc. Allo scopo di semplificare la modellazione del sistema si considera un coefficiente di attrito costante ricavato dalla media dei valori assunti lungo il segmento di ingranamento.
Si presentano di seguito alcune relazioni utilizzate in questo progetto di tesi per la stima del coefficiente di attrito coulombiano.

<u>Coefficiente di attrito con ISO/TR 14179-2</u>
La prima relazione adottata deriva dalla normativa ISO/TR 14179-2 [28], applicata sia al contatto solare-satellite che corona-satellite.
Si riportano di seguito le formule utilizzate.

$$\mu_{sol-sat} = 0.048 * (\frac{(F_{sol-sat}/b)}{V_{tot,c} * \rho_{sol-sat}})^{0.2} * \eta^{-0.05} R_{am}^{0.25} * X_L \tag{3.4}$$

Dove:

- $(F_{sol-sat}/b)$ è la forza di contatto solare-satellite per unità di lunghezza[N/mm];
- η è la viscosità dinamica dell'olio alla temperatura di funzionamento [mPa*s];
- R_{am} è la media aritmetica delle rugosità superficiali, pari a $\frac{1}{2} * (R_{a1} + R_{a2})$ [μm];
- ρ è il raggio di curvatura del punto primitivo [mm];
- X_L è un fattore legato al tipo di lubrificante [-] posto pari a 1;

- $V_{tot,c}$ è la somma delle velocità nel punto primitivo [m/s];
- b è la larghezza di fascia della dentatura [mm].

Per il contatto corona-satellite:

$$\mu_{ring-sat} = 0.048 * (\frac{(F_{cor-sat}/b)}{V_{tot,c} * \rho_{cor-sat}})^{0.2} * \eta^{-0.05} R_{am}^{0.25} * X_L \tag{3.5}$$

Dove:

- $(F_{cor-sat}/b)$ è la forza di contatto corona-satellite per unità di lunghezza [N/mm];
- $\rho_{cor-sat}$ è il raggio di curvatura del punto primitivo [mm];
- X_L è un fattore legato al tipo di lubrificante [-] posto pari a 1;
- $V_{tot,c}$ è la somma delle velocità nel punto primitivo [m/s];
- b è la larghezza di fascia della dentatura [mm].

Coefficiente di attrito con ISO/TS 6336-4

Un'altra relazione adottata deriva dalla normativa ISO/TS 6336-4 [29].
Per il contatto solare-satellite:

$$\mu_{sol-sat} = 0.143 * (\frac{\sigma * (F_{sp}/b)}{V_{tot,c} * \rho_{sol-sat} * \eta\_din})^{0.25} \tag{3.6}$$

Per il contatto corona-satellite:

$$\mu_{ring-sat} = 0.143 * (\frac{\sigma * (F_{rp}/b)}{V_{tot,c} * \rho_{ring-sat} * \eta\_din})^{0.25} \tag{3.7}$$

Con η_din la viscosità dinamica e σ la rugosità media delle superfici in contatto.

3.1.1.2 Geometria dell'ingranamento

Caratteristiche ingranamento solare-satellite

Il contatto fra i denti avviene lungo la retta tangente alle due circonferenze di base, detta linea di contatto; il segmento di contatto appartiene a tale retta ed è delimitato dall'intersezione delle circonferenze di testa delle due ruote con la retta stessa.

Il segmento dei contatti s_{cont} = segmento AB è la porzione della linea di azione sulla quale c'è effettivamente ingranamento tra i denti, infatti durante il moto il punto di contatto tra i due profili coniugati si muove sulla retta d'azione, entro gli estremi A e B (*Figura 3.1*).

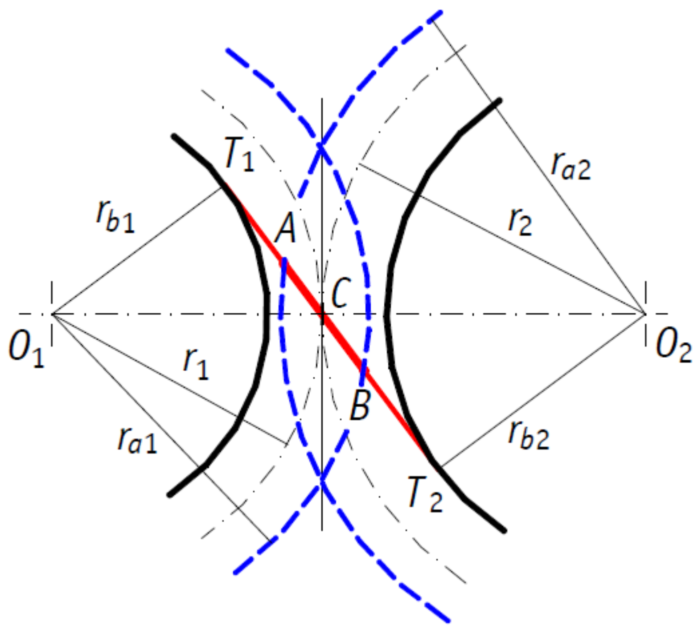


FIGURA 3.1 – IL SEGMENTO DEI CONTATTI [30]

Il segmento dei contatti si divide in una prima parte detta segmento di accesso s_{acc}, compresa tra il punto A e il punto primitivo C e in una seconda parte denominata segmento di recesso s_{rec}, compresa tra i punti C ed B. Il segmento che va da T_1 a T_2 prende il nome di segmento di base s_{base} = segmento T_1T_2.

$$s_{base} = \frac{d_{b1}+d_{b2}}{2} * \tan(\alpha_f) \tag{3.8}$$

$$s_{acc} = \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b2}}{2}\right)^2} - \frac{d_{p2}}{2} * \sin(\alpha_f) \tag{3.9}$$

$$s_{rec} = \sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} - \frac{d_{p1}}{2} * \sin(\alpha_f) \tag{3.10}$$

Da cui:

$$s_{cont} = s_{acc} + s_{rec} \tag{3.11}$$

Dove:

- d_{b1} e d_{b2} sono i diametri di base della ruota motrice (solare) e condotta (pianeta) [m];
- d_{p1} e d_{p2} sono i diametri primitivi della ruota motrice (solare) e condotta (pianeta) [m];
- d_{a1} e d_{a2} sono i diametri di testa della ruota motrice (solare) e condotta (pianeta) [m];
- α_f è l'angolo di pressione di funzionamento [rad].

La generica posizione del punto di contatto sul segmento dei contatti è identificata dall'angolo θ_{pos}, cioè l'angolo compreso fra la posizione di inizio (θ_{pos-A}) e fine (θ_{pos-B}) ingranamento fra una coppia di denti in presa.

$$\theta_{pos-A} = \arctan\left(\frac{\frac{d_{b1}}{2} * \tan(\alpha_f) - s_{acc}}{\frac{d_{b1}}{2}}\right) \tag{3.12}$$

$$\theta_{pos-B} = \arctan\left(\frac{\frac{d_{b1}}{2} * \tan(\alpha_f) + s_{rec}}{\frac{d_{b1}}{2}}\right) \tag{3.13}$$

Una volta definito l'angolo θ_{pos} si ricavano di conseguenza le espressioni dei raggi di curvatura dei denti rispettivamente del solare e del pianeta, con riferimento all' ingranamento fra ruote dentate esterne.

$$\rho_{1-sol} = \overline{T_1 P} = \frac{d_{b1}}{2} * \tan(\theta_{pos}) \quad (3.14)$$

$$\rho_{2-sat} = \overline{T_2 P} = s_{base} - \rho_{1-sol} \quad (3.15)$$

Con:

- ρ_{1-sol} il raggio di curvatura della ruota motrice [m];
- ρ_{2-sat} il raggio di curvatura della ruota condotta [m].

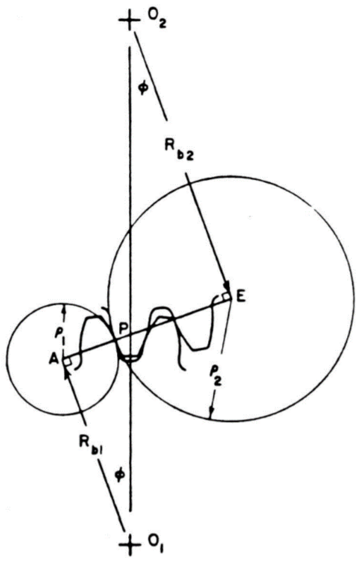


FIGURA 3.2 - RAGGI DI CURVATURA RUOTE ESTERNE [31]

I valori dei raggi di curvatura variano, in modo inversamente proporzionale, durante l'ingranamento della coppia di denti in presa, cioè durante lo spostamento del punto di contatto dei fianchi dei denti (*Figura 3.3*).

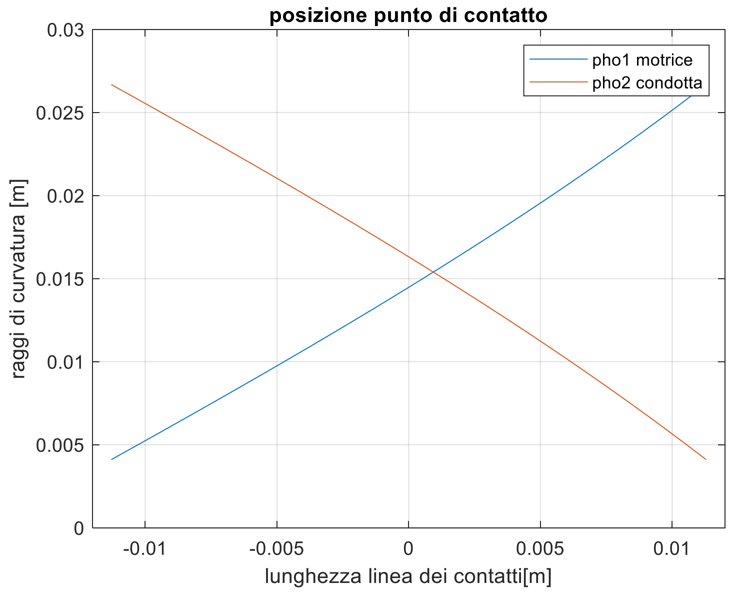


FIGURA 3.3 – ANDAMENTO RAGGI DI CURVATURA LUNGO LA LINEA DEI CONTATTI SOLARE-SATELLITE

Caratteristiche ingranamento corona-satellite

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, si esegue lo studio della geometria dell'ingranamento per l'ingranamento corona-pianeta: il satellite costituito dalla ruota a dentatura esterna e la corona a dentatura interna.

Anche in questo caso il contatto fra i denti avviene lungo la retta tangente alle due circonferenze di base e il segmento di contatto appartiene a tale retta, delimitato dall'intersezione delle circonferenze di testa delle due ruote con la retta stessa.

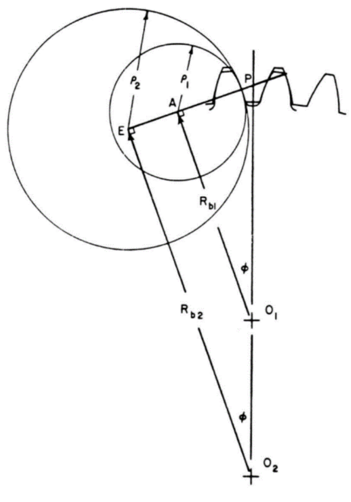


FIGURA 3.4 – RAGGI DI CURVATURA RUOTE INTERNE [31]

Si riporta di seguito l'andamento dei raggi di curvatura lungo il segmento di azione per l'ingranamento corona-pianeta (*Figura 3.5*).

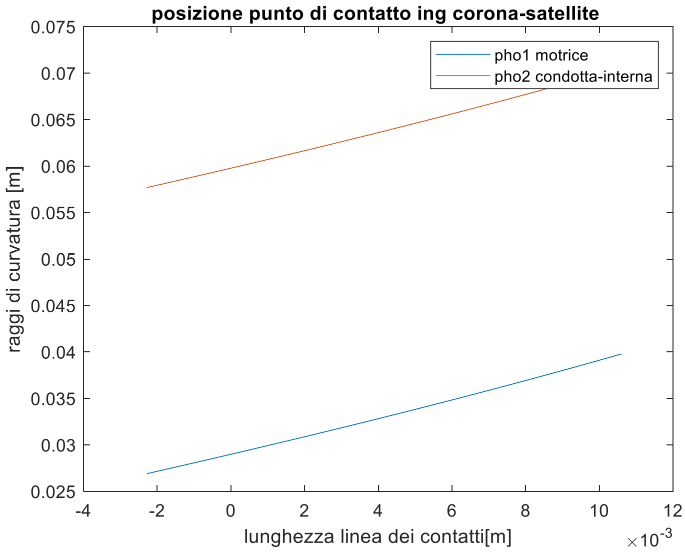


FIGURA 3.5 - ANDAMENTO RAGGI DI CURVATURA LUNGO IL SEGMENTO DEI CONTATTI CORONA-SATELLITE

3.1.1.3 Velocità di strisciamento

La velocità di strisciamento è la velocità relativa del punto di contatto comune tra i denti in un piano trasversale. Consiste quindi nella differenza vettoriale tra le componenti tangenziali delle velocità dei fianchi dei denti nel punto di contatto.

In *Figura 3.6* è rappresentata in modo schematico la geometria del contatto tra le ruote costituenti il rotismo e la definizione dei cilindri equivalenti rappresentanti la posizione del punto di contatto *K*.

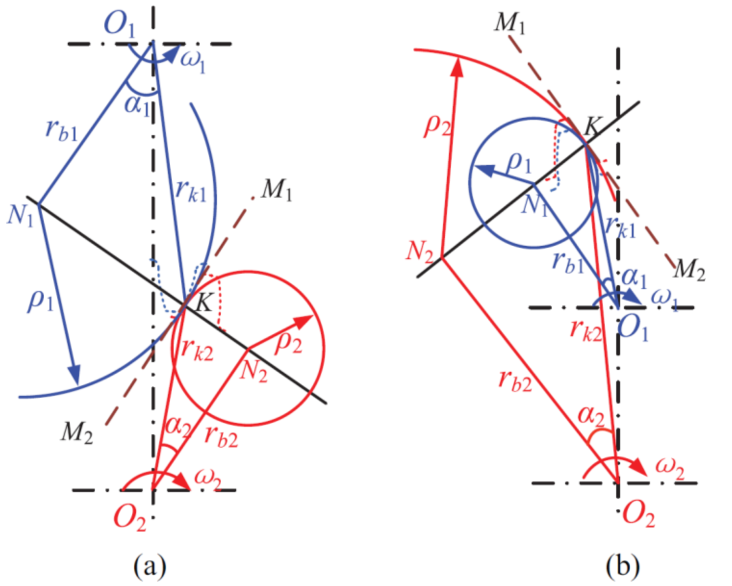


FIGURA 3.6 - LA RELAZIONE DI INGRANAMENTO RUOTE ESTERNE (A) E RUOTE INTERNE (B) [32]

Gli ingranamenti solare-satellite e corona-satellite avvengono contemporaneamente nel rotismo epicicloidale e poiché i pianeti ruotano sia attorno ai propri centri che intorno all'asse del solare solidalmente al portatreno, le velocità di strisciamento solare-satellite v_{sp} e corona-satellite v_{pr} possono essere espresse come:

$$v_{sp} = (\omega_{sol} - \omega_{car}) * \rho_{1-sol} - (\omega_{sat} - \omega_{car}) * \rho_{2-sat} \tag{3.16}$$

$$v_{pr} = (\omega_{sat} - \omega_{car}) * \rho_{1-sat} \tag{3.17}$$

Dove:

- ρ_{1-sol} e ρ_{2-sat} sono i raggi di curvatura rispettivamente del solare e del satellite per l'ingranamento solare-satellite [m];
- ρ_{1-sat} e ρ_{2-ring} sono i raggi di curvatura rispettivamente del satellite e della corona per l'ingranamento corona-satellite [m];
- ω_{car} è la velocità di rotazione del portatreno [rad/s];
- ω_{sol} è la velocità di rotazione del solare [rad/s];
- ω_{sat} è la velocità di rotazione del pianeta i-esimo [rad/s].

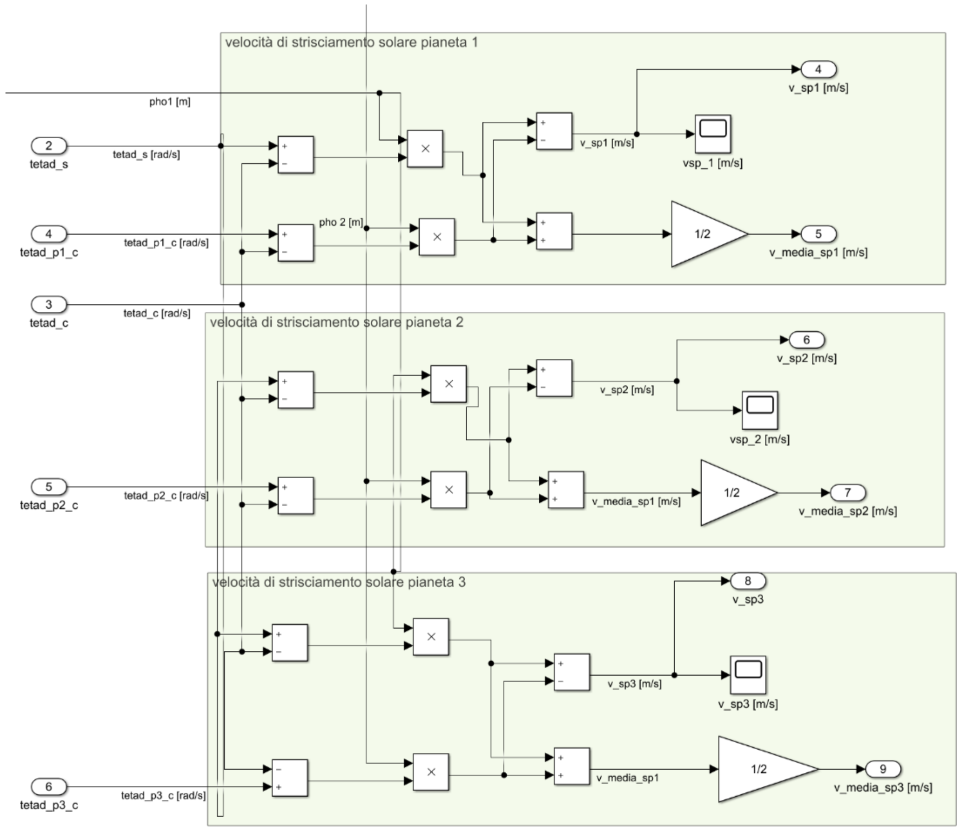


FIGURA 3.7 - VELOCITÀ DI STRISCIAMENTO SOLARE-SATELLITE v_{sp1} v_{sp2} v_{sp3}

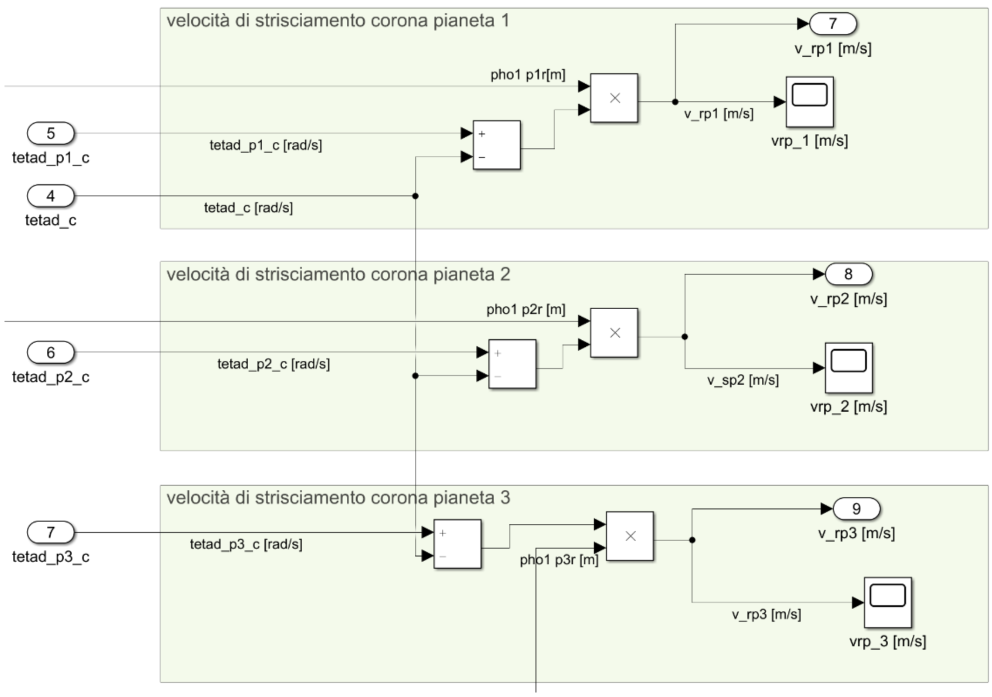


FIGURA 3.8 - VELOCITÀ DI STRISCIAMENTO CORONA-SATELLITE v_{rp1} v_{rp2} v_{rp3}

3.1.1.4 Coppie di attrito

Le forze di attrito agiscono in direzione perpendicolare alla forza di contatto normale alle superfici, esercitando momenti resistenti dipendenti dalla geometria dei denti degli ingranaggi (*Figura 3.9*). Tali coppie di attrito variano durante l'ingranamento poiché con lo spostamento del punto di contatto lungo il segmento di azione cambia il braccio della forza di attrito $F_{att}(t)$. Per l'ingranamento fra i pianeti e il solare il braccio di attrito dipende dal valore dei raggi di curvatura ρ_{1-sol} e ρ_{2-sat}, mentre per l'ingranamento fra i pianeti e la corona dai raggi ρ_{1-sat} e ρ_{2-ring}.

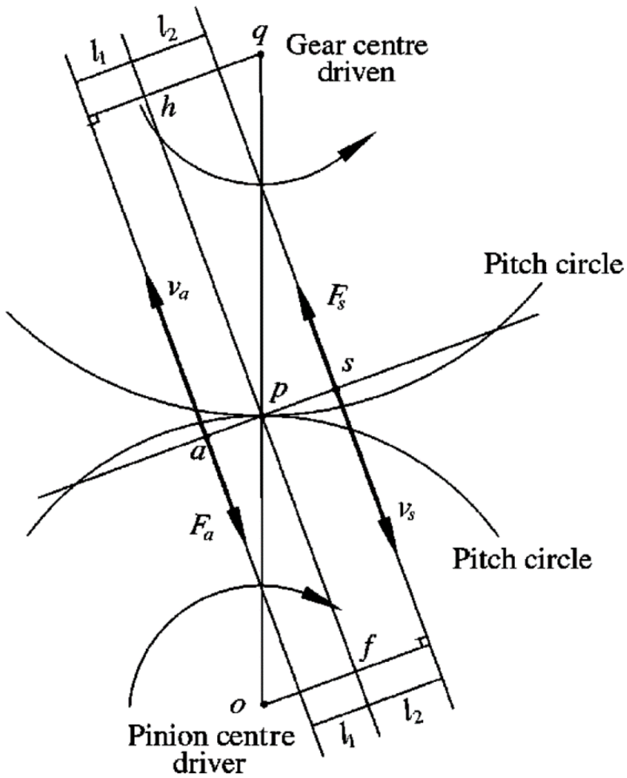


FIGURA 3.9 - BRACCIO DELLA FORZA DI ATTRITO [33]

La direzione della forza di attrito dipende dal segno della velocità relativa dei denti lungo la linea di contatto.

La presenza delle coppie di attrito influenza le equazioni di equilibrio alla rotazione (*equazioni* $2.39 - 2.42$) del solare e dei satelliti, che vengono di conseguenza integrate come:

$$T_D + T_{att\_s\_p1} + T_{att\_s\_p2} + T_{att\_s\_p3} - r_{bs} * \left(c_{sp1}\dot{\delta}_{sp1} + c_{sp2}\dot{\delta}_{sp2} + c_{sp3}\dot{\delta}_{sp3}\right) - r_{bs} * \left(k_{sp1} * f(\delta_{sp1}, B_{sp1}) + k_{sp2} * f(\delta_{sp2}, B_{sp2} + k_{sp3} * f(\delta_{sp3}, B_{sp}\right) = I_{sol} * \ddot{\theta}_s \tag{3.18}$$

$$(k_{sp1} * f(\delta_{sp1}, B_{sp1}) - k_{rp1} * f(\delta_{rp1}, B_{rp1})) * r_{bp} + (c_{sp1}\dot{\delta}_{sp1} - c_{rp1}\dot{\delta}_{rp1}) * r_{bp} - T_{att\_p1\_s} - T_{att\_p1\_r} = I_{sat} * \ddot{\theta}_{p1\_c} \tag{3.19}$$

$$(k_{sp2} * f(\delta_{sp2}, B_{sp2}) - k_{rp2} * f(\delta_{rp2}, B_{rp2})) * r_{bp} + (c_{sp2}\dot{\delta}_{sp2} - c_{rp2}\dot{\delta}_{rp2}) * r_{bp} - T_{att\_p2\_s} - T_{att\_p2\_r} = I_{sat} * \ddot{\theta}_{p2_c} \tag{3.20}$$

$$(k_{sp3} * f(\delta_{sp3}, B_{sp3}) - k_{rp3} * f(\delta_{rp3}, B_{rp3})) * r_{bp} + (c_{sp3}\dot{\delta}_{sp3} - c_{rp3}\dot{\delta}_{rp3}) * r_{bp} - T_{att\_p3\_s} - T_{att\_p3\_r} = I_{sat} * \ddot{\theta}_{p3\_c} \tag{3.21}$$

Dove:

- $T_{att\_s\_p} = (\mu_{sol-sat} * F_{sp} * sign(V_{sp}) * \rho_{1-sol}$ (3.22a)
- $T_{att\_p\_s} = (\mu_{sol-sat} * F_{sp} * sign(V_{sp}) * \rho_{2-sat}$ (3.22b)
- $T_{att\_p\_r} = (\mu_{ring-sat} * F_{rp} * sign(V_{rp}) * \rho_{1-sat}$ (3.23)

Durante l'ingranamento i bracci delle forze di attrito ρ_1, ρ_2 variano con continuità con lo spostamento del punto di contatto lungo la retta di azione. Di conseguenza il loro andamento si ripeterà per ogni coppia di denti interessata all'ingranamento, durante il funzionamento del riduttore.

Si riportano di seguito i modelli Simulink per la stima di ρ_{1-sol}, ρ_{2-sat} e ρ_{1-sat}, ρ_{2-ring} per ogni istante di simulazione.

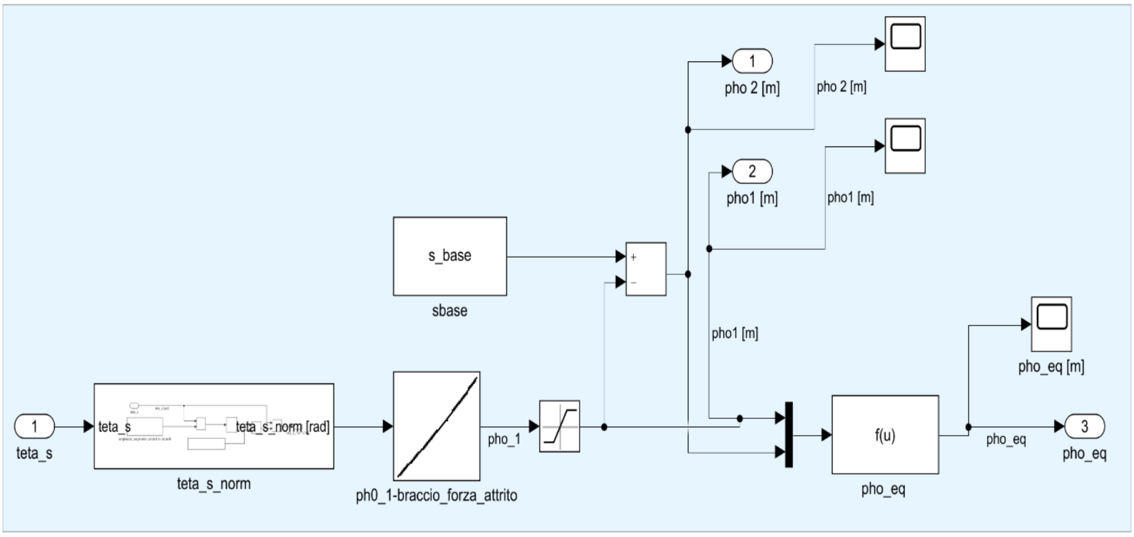


FIGURA 3.10 – SIMULINK PER IL CALCOLO DI ρ_{1-sol} E DEL ρ_{2-sat}

Mediante il blocco *Lookup Table,* in funzione della rotazione della ruota solare, si ricavano in ogni istante i valori dei bracci della forza di attrito rispetto al solare e ai pianeti ρ_{1-sol} e del ρ_{2-sat}.

In *Figura 3.11* è mostrato il blocco *teta_s_norm*, necessario in quanto l'andamento dei bracci delle forze lungo il segmento dei contatti si ripete per ogni coppia di denti interessata all'ingranamento. Il valore *ldc_length_deg* rappresenta la rotazione del solare corrispondente alla lunghezza totale del segmento dei contatti percorso dal punto di contatto durante l'ingranamento.

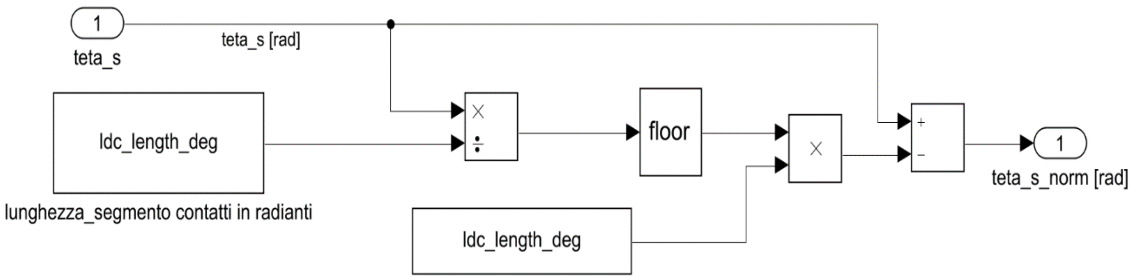


FIGURA 3.11 – BLOCCO SIMULINK TETA_S_NORM

Analoga costruzione per la stima dei bracci delle forze di attrito ρ_{1-sat} e ρ_{2-ring}, per l'ingranamento corona-pianeti.

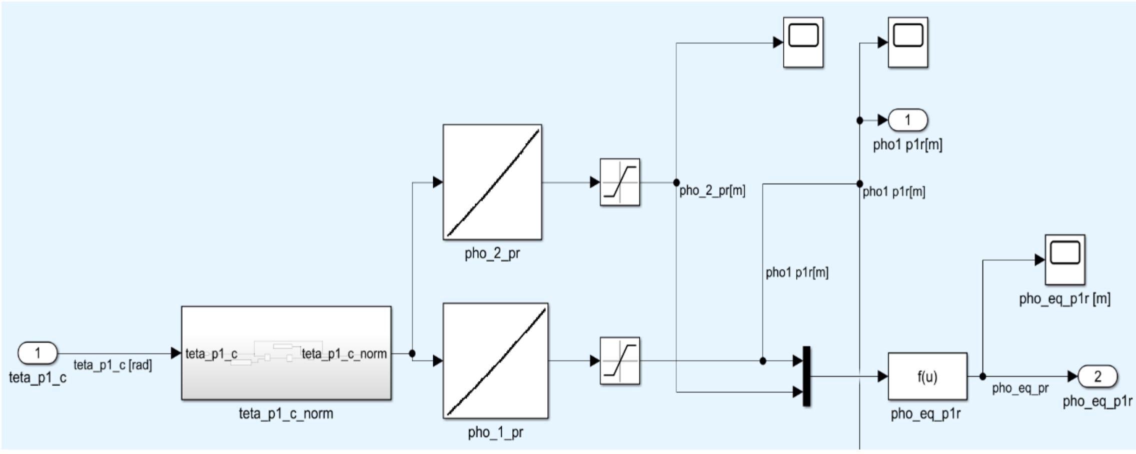


FIGURA 3.12 - SIMULINK PER IL CALCOLO DI ρ_{1-sat} E ρ_{2-ring}

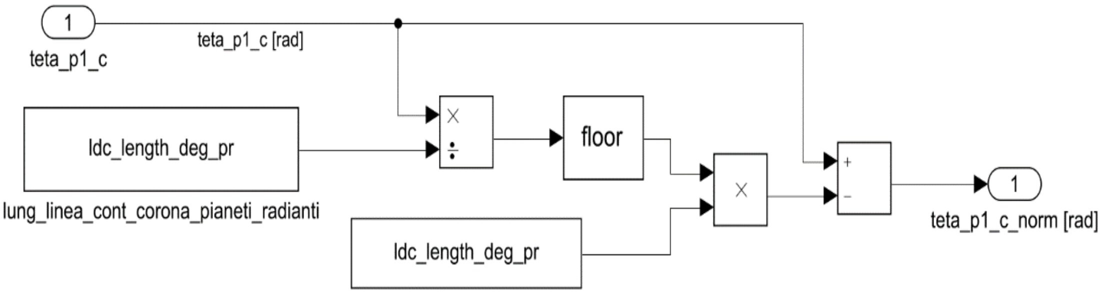


FIGURA 3.13 - BLOCCO SIMULINK TETA_P1C_NORM

3.1.2 Perdite e regime di lubrificazione

3.1.2.1 Introduzione alla lubrificazione negli ingranaggi

La lubrificazione è uno dei tre fenomeni fondamentali della Tribologia. Dal greco *τρίβειν* ("*Sfregamento*"). La tribologia è la scienza che raggruppa i fenomeni di lubrificazione, attrito e usura e mira a dare una visione congiunta di questi fenomeni, che si verificano quando due superfici in contatto si muovono l'una contro l'altra.

L'insieme delle conoscenze legate al miglioramento o alla diagnostica dell'efficacia dei film di lubrificanti nella prevenzione di danni nei contatti fra solidi è comunemente noto come "*lubrificazione*" [34].

La funzione principale che i lubrificanti svolgono nei contatti meccanici è quella di introdurre una pellicola di materiale tra due superfici in movimento relativo e caricate con una certa forza; in questo modo viene evitato il contatto diretto tra i due corpi. Questa separazione viene denominata spessore del film h, e permette di ridurre il fenomeno d'attrito evitando la prematura manifestazione di guasti meccanici a seguito di degradazioni dei materiali. Ne consegue che, in una trasmissione ad ingranaggi, la lubrificazione è importante sia per gli ingranaggi stessi che per i cuscinetti di supporto dei vari alberi; i regimi di lubrificazione ai quali possono lavorare questi elementi sono classificati in diverse categorie: lubrificazione *idrodinamica*, *elastoidrodinamica*, *limite* e *mista.*

Le condizioni di lubrificazione dipendono principalmente dai valori del carico, della velocità e della viscosità del lubrificante.

La lubrificazione elastoidrodinamica si verifica quando l'altezza minima del meato è maggiore della rugosità delle superfici delimitanti il meato, mentre la lubrificazione limite quando l'elemento separatore è costituito da uno strato di lubrificante di dimensione dell'ordine di grandezza molecolare. Il passaggio da un regime all'altro avviene, al variare dei fattori carico, velocità e viscosità del lubrificante, in maniera graduale con un cambiamento delle percentuali di carico supportate rispettivamente dal film fluido e dalle asperità superficiali.

Come osservabile dalla *Figura 3.14*, partendo da condizioni di lubrificazione elastoidrodinamica, al diminuire della viscosità e/o della velocità, o all'aumentare del carico, le asperità più elevate delle due superfici entrano in contatto: una parte del carico viene quindi sostenuta dal contatto diretto e la parte rimanente dal fluido lubrificante (condizione di lubrificazione mista). Al diminuire dello spessore del meato, una parte più rilevante del carico viene sostenuta dalla pressione di contatto fra le asperità fino a che il film lubrificante è minimo e si verificano contatti tra le superfici con conseguente microsaldatura perché l'intero carico è sostenuto dalle sole parti a contatto (condizione di lubrificazione limite).

Il grafico sotto riportato, conosciuto come la curva Stribeck, rappresenta la variazione del coefficiente di attrito e dei regimi di lubrificazione in funzione del parametro che prende il nome di numero di Sommerfeld *S*. In ciascuna delle zone il valore del coefficiente di attrito ha un comportamento differente. Il numero Sommerfeld dipende dal carico applicato *W*, dalla velocità di scorrimento *u* e dalla viscosità del lubrificante η.

$$S=\frac{\eta * u}{W} \tag{3.24}$$

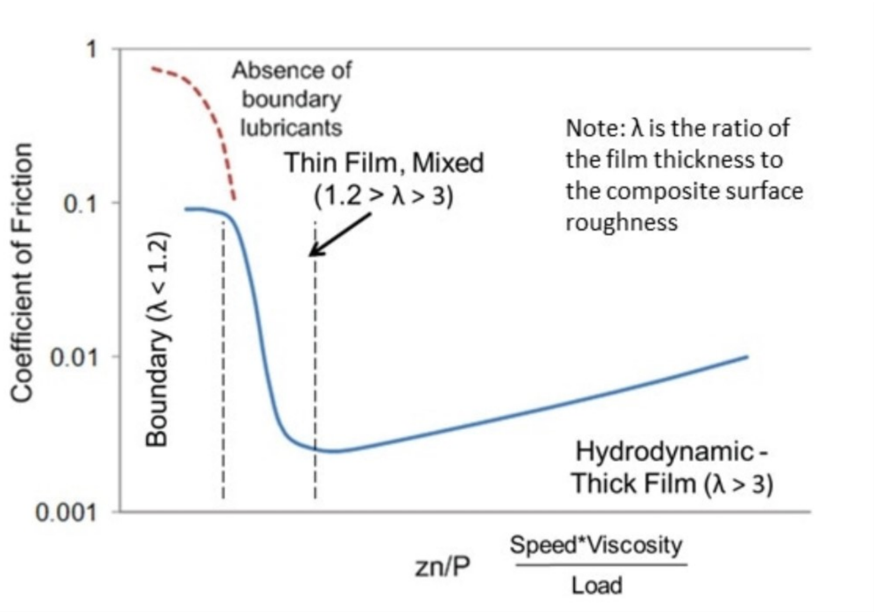


FIGURA 3.14 – CURVA DI STRIBECK

3.1.2.2 *Regimi di lubrificazione*

Vengono di seguito presentati i principali regimi di lubrificazione che possono manifestarsi nelle applicazioni con ingranaggi, evidenziando le condizioni operative legate alla presenza dei diversi regimi.

Lubrificazione idrodinamica

Si parla di regime di lubrificazione idrodinamica quando esiste una pellicola di gas o di liquido che separa completamente le superfici in movimento relativo, impedendo il contatto diretto tra i due elementi. Questo è il regime di lubrificazione più desiderabile, poiché l'attrito è basso e l'usura estremamente ridotta o, al limite, nulla. Negli ingranaggi, tale condizione si può verificare quando lo strisciamento dei denti in presa e la forma del meato permettono la formazione di uno strato di olio che separi completamente i denti. In condizioni di lubrificazione idrodinamica, la proprietà più importante dell'olio è la sua viscosità, che influenza direttamente lo spessore della pellicola di lubrificante.

Esistono due condizioni necessarie al verificarsi della lubrificazione idrodinamica [34]

- ogni superficie in contatto deve spostarsi, l'una rispetto all'altra, con una velocità sufficiente per un certo carico da generare;
- ogni superficie deve essere inclinata di un angolo rispetto all'altra, poiché se fossero parallele non si formerebbe il campo di pressione nel film lubrificante necessario a supportare il carico richiesto.

Viste le due condizioni sopra esposte, nelle ruote cilindriche a denti diritti teoricamente non è mai possibile ottenere un regime di lubrificazione idrodinamica puro perché, lungo il segmento di contatto, esiste un punto corrispondente al contatto fra le circonferenze primitive, nel quale la velocità relativa di strisciamento tra i denti è nulla ed inoltre, la direzione di tale velocità si inverte proprio in corrispondenza di tale punto.

Lubrificazione elastoidrodinamica

La lubrificazione elastoidrodinamica può essere definita come una forma di lubrificazione idrodinamica nella quale la deformazione elastica dei corpi a contatto ed i cambiamenti di viscosità con la pressione svolgono un ruolo fondamentale [34]. In tale condizione cessano di esistere i contatti tra i solidi e una pellicola uniforme di lubrificante si forma tra le superfici, riducendo l'usura a livelli quasi trascurabili [35].

In *Figura 3.15* è rappresentato un andamento tipico della pressione e dello spessore di lubrificante in condizioni di lubrificazione elastoidrodinamica. Rispetto al caso di contatto statico, dove la distribuzione della pressione ha un profilo emisferico o ellissoidale secondo la teoria classica di Hertz, il campo di pressione cambia dato che le superfici si muovono l'una rispetto all'altra. Il movimento relativo tra le due superfici

provoca un film lubrificante idrodinamico che modifica la distribuzione della pressione: le modifiche al profilo di pressione si verificano nelle regioni di entrata e di uscita del contatto. Nella regione di entrata, la pressione idrodinamica è inferiore al valore di contatto Hertziano a secco, le superfici all'interno del contatto sono quasi parallele e lo spessore del film in questa regione è pari ad "h_c". Il lubrificante presenta un considerevole aumento della viscosità quando entra nel contatto, seguito da un successivo declino ai livelli di viscosità ambientale all'uscita dello stesso. Per mantenere la continuità del flusso e compensare la perdita di viscosità del lubrificante all'uscita del contatto, si forma un restringimento in cui il film assume lo spessore minimo "h_0". Tale spessore minimo è un parametro importante poiché, confrontandolo con la rugosità superficiale, permette di controllare la probabilità di interazione di asperità tra le due superfici.
Sempre in riferimento alla *Figura 3.15*, si nota che un grande picco di pressione viene generato sul lato a monte del restringimento per poi diminuire rapidamente a valle della stessa fino a valori inferiori a quelli della distribuzione Hertziana.

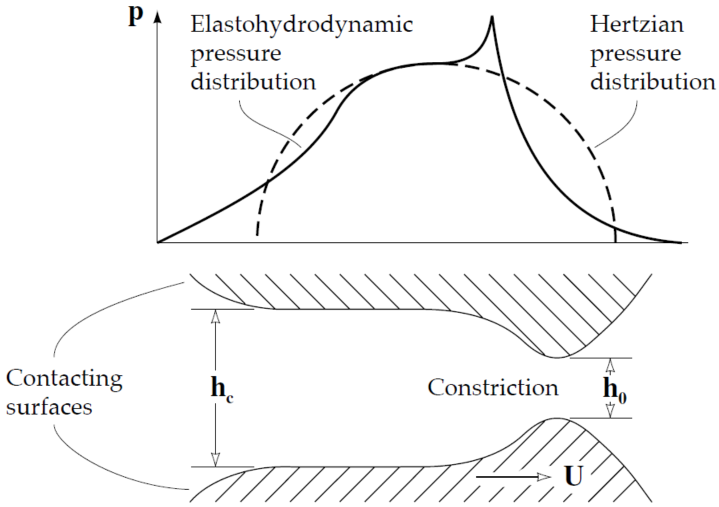


FIGURA 3.15 – DISTRIBUZIONE IDRODINAMICA DELLA PRESSIONE IN UN CONTATTO ELASTOIDRODINAMICO [34]

Lubrificazione limite

Si parla di lubrificazione limite quando non si instaura né un regime di lubrificazione idrodinamica né elastoidrodinamica. In generale, si è in condizioni di lubrificazione limite quando la combinazione tra velocità di strisciamento, forma del meato e carico non permette il formarsi di una pellicola di lubrificante di spessore sufficiente; si presenta quindi con ingranaggi che ruotano con basso numero di giri e che trasmettono coppie elevate (zona di sinistra nella curva di Stribeck). Tale regime è caratterizzato dalla presenza di una pellicola di lubrificante così sottile da non impedire del tutto il contatto tra le asperità delle due superfici, ma comunque ben aderente alle stesse e quindi, in grado di ostacolare la formazione di micro-giunzioni, riducendo l'ampiezza delle zone di contatto diretto.

Lubrificazione mista

La transizione fra il regime di lubrificazione limite e quello di lubrificazione elastoidrodinamica prende il nome di lubrificazione mista e occupa una vasta area della curva di Stribeck, combinando le caratteristiche di entrambi i regimi (*Figura 3.14*).
Ingranaggi e cuscinetti lavorano in uno di questi regimi o in una loro combinazione, a seconda della condizione.

3.1.2.3 Proprietà lubrificante e Temperatura

Come lubrificante di riferimento si è preso in considerazione l'olio Mobilgear SHC XMP 220, di marca Mobil. Le caratteristiche di tale olio sono disponibili sul sito del produttore [36]; le principali sono di seguito riportate.

Proprietà	**Valore**	**Unità di misura**
Viscosità, ASTM D 445 40 °C υ_{40}	220	[cSt]
Viscosità, ASTM D 445 100 °C υ_{100}	27.8	[cSt]
Densità @15°C ASTM D 1298	859	[kg/m^3]
Coefficiente di viscosità a compressione α	1.67E-08	[m^2/N]

TABELLA 3.1 – PROPRIETÀ OLIO LUBRIFICANTE

La relazione numerica tra temperatura dell'olio e viscosità, proposta in via numerica in questo lavoro si basa su quella proposta in [37]. Tale relazione è espressa dall' *equazione 3.25*, che consente di valutare la viscosità cinematica (in cSt o mm^2/s) in funzione della temperatura espressa in °C.

$$\upsilon(T) = 10^{10^{c_1 * \log(T+373)+c_2}} \tag{3.25}$$

Il valore delle costanti c1 e c2 si calcola risolvendo il seguente sistema in funzione dei valori di viscosità dell'olio a 40 °C (υ_{40}) e 100 °C (υ_{100}):

$$\begin{cases} \dfrac{\log\left(\log(\upsilon_{40})\right)}{c_1 * \log(40+273) + c_2} = 1 \\ \dfrac{\log\left(\log(\upsilon_{100})\right)}{c_1 * \log(100+273) + c_2} = 1 \end{cases} \tag{3.26}$$

Da cui si ricava, con riferimento al tipo di lubrificante scelto valori di c_1 =-1.890758 e c_2 =10.5253.

Considerando il regime termico di lavoro compreso fra -54°C a 40 °C, si riporta di seguito l'andamento della viscosità cinematica in funzione della temperatura.

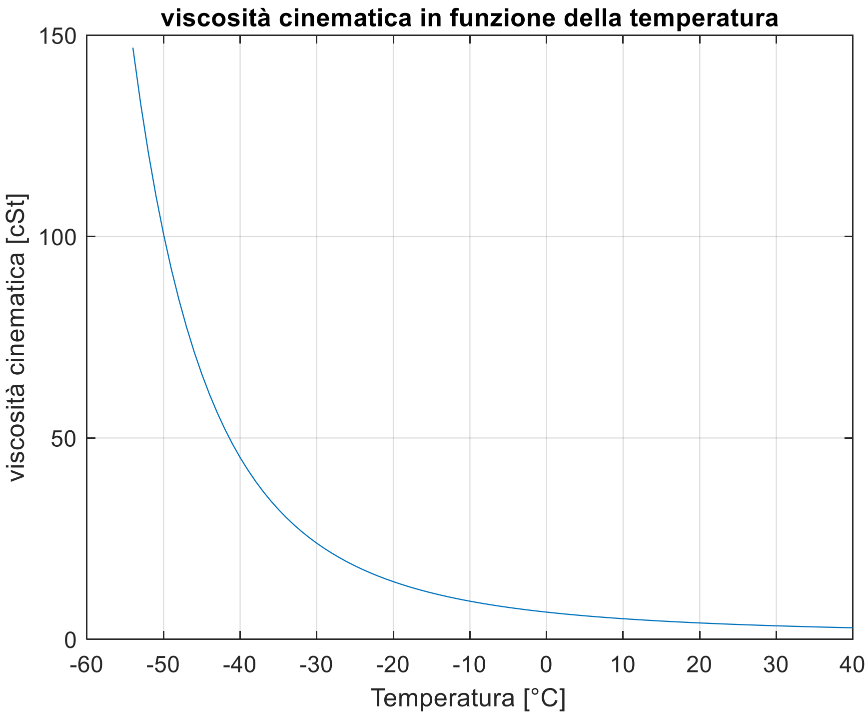


FIGURA 3.16 – ANDAMENTO DELLA VISCOSITÀ CINEMATICA IN FUNZIONE DELLA TEMPERATURA

Anche la densità del lubrificante cambia al variare della temperatura di funzionamento; tale variazione è stata stimata mediante l'utilizzo della seguente legge esponenziale [34]:

$$\rho(T) = \rho_0 * e^{\zeta*(T-T_0)} \tag{3.27}$$

Dove:

- ρ_0 è la densità del lubrificante alla temperatura di riferimento T_0 [kg/m^3];
- T_0 è la temperatura di riferimento [K];
- ζ è un coefficiente di densità-temperatura [K^{-1}].

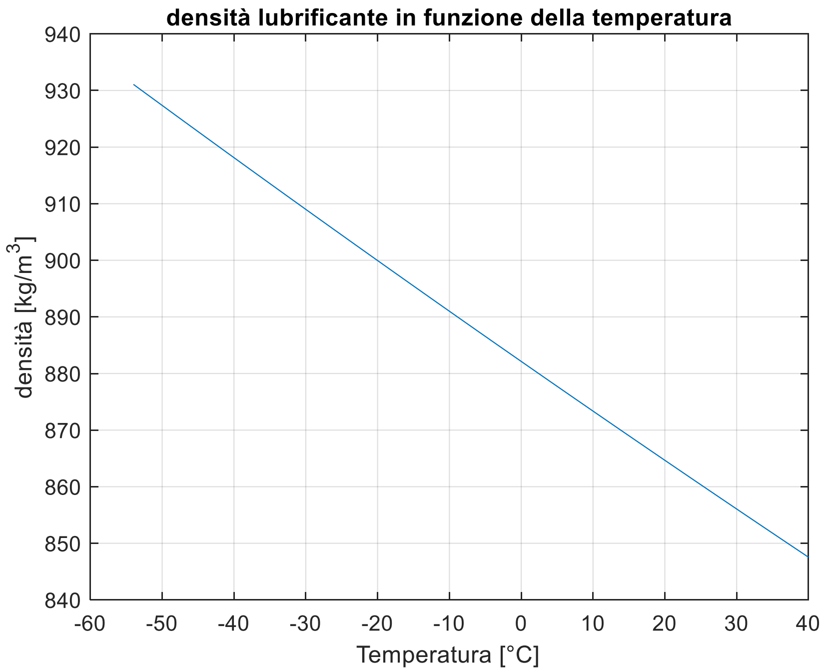


FIGURA 3.17 – ANDAMENTO DELLA DENSITÀ IN FUNZIONE DELLA TEMPERATURA

Note densità e viscosità cinematica, la viscosità dinamica si ricava come:

$$\eta(T)= \rho(T)* \upsilon(T) \tag{3.28}$$

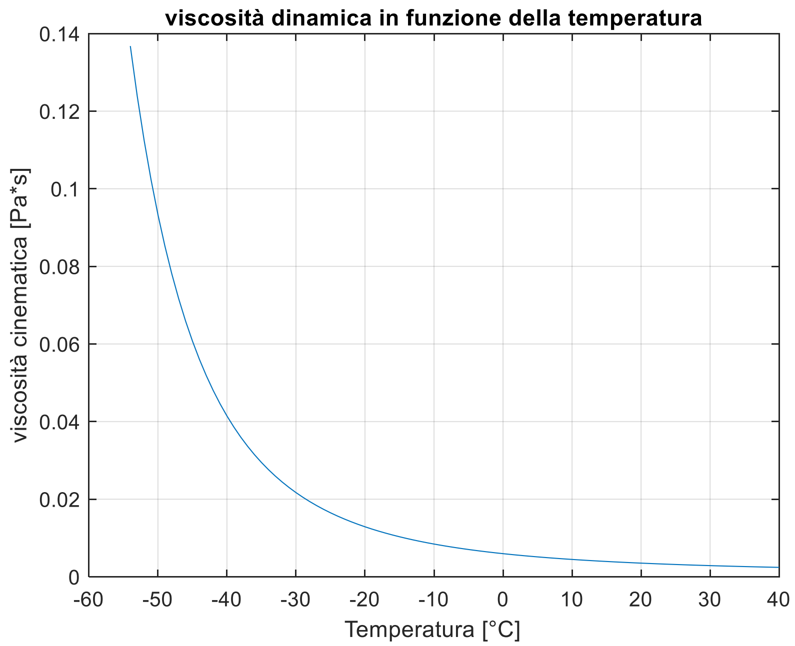


FIGURA 3.18 – ANDAMENTO DELLA VISCOSITÀ DINAMICA IN FUNZIONE DELLA TEMPERATURA

3.1.2.4 Spessore del film di lubrificante

Dalle considerazioni esposte nel paragrafo 3.1.2.2 risulta l'importanza del parametro l'altezza minima del meato $h_0 = h_{min}$ perché, confrontandolo con la rugosità superficiale, è possibile verificare se in una data coppia si stabilisce lubrificazione elastoidrodinamica, contatto diretto fra le superfici o un regime misto. Definendo la rugosità media dell'ingranamento come la media della rugosità delle ruote ingrananti, pari a $R_{am} = \frac{1}{2} * (R_{a1} + R_{a2})$, si possono avere i seguenti casi:

- se $h_0 < 0.7 * R_{am}$, allora le superfici entrano in contatto di diretto con conseguente rischio di danni superficiali;
- se $h_0 \simeq R_{am}$, si instaura un regime di lubrificazione elastoidrodinamica parziale;
- se $h_0 > 2 * R_{am}$, si ha lubrificazione elastoidrodinamica senza contatto diretto fra le superfici.

Le relazioni per determinare lo spessore minimo fanno riferimento a [38], in cui il contatto durante l'ingranamento viene modellato considerando due superfici cilindriche che, come gli altri parametri, variano durante l'ingranamento.

$$h_{min} = R' * 1.714 * \left(W'^{-0.128} * U^{0.694} * G^{0.568}\right) \tag{3.29}$$

Con:

- $W' = \frac{W}{b*R'*E_{eq}}$ il termine carico adimensionale;
- $U = \frac{u*\eta_0}{R'*E_{eq}}$ il parametro velocità adimensionale;
- G =α*E_{eq} il termine adimensionale legato alle proprietà del materiale.

Dove:

- W è il carico normale alle superfici nel punto di contatto [N];
- R'=$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ è il raggio di curvatura nel punto di contatto [m];
- η_0 è la viscosità dinamica del lubrificante a temperatura ambiente [Pa*s];
- E_{eq}=$\frac{E}{1-\upsilon^2}$ è il modulo di elasticità equivalente [Pa];
- u è la velocità media nel punto di contatto [m/s];
- α è il coefficiente di viscosità a compressione [m^2/N].

Si riportano di seguito gli andamenti dello spessore minimo del film di lubrificante nelle varie condizioni di funzionamento, in funzione della temperatura, della coppia trasmessa e della velocità di rotazione.

Film di lubrificante e temperatura

Considerando una velocità di rotazione dell'albero di ingresso pari a 100 rpm e una coppia applicata allo stesso di 20 Nm, nella *Figura 3.19* è mostrata la dipendenza di h_{min} dalla temperatura di funzionamento, poiché all'aumentare di quest'ultima diminuisce la viscosità del lubrificante. Con l'aumento della temperatura si passa quindi da un regime di lubrificazione mista ad uno limite, poiché il numero di *Sommerfeld S* diminuisce (*Figura 3.14*).

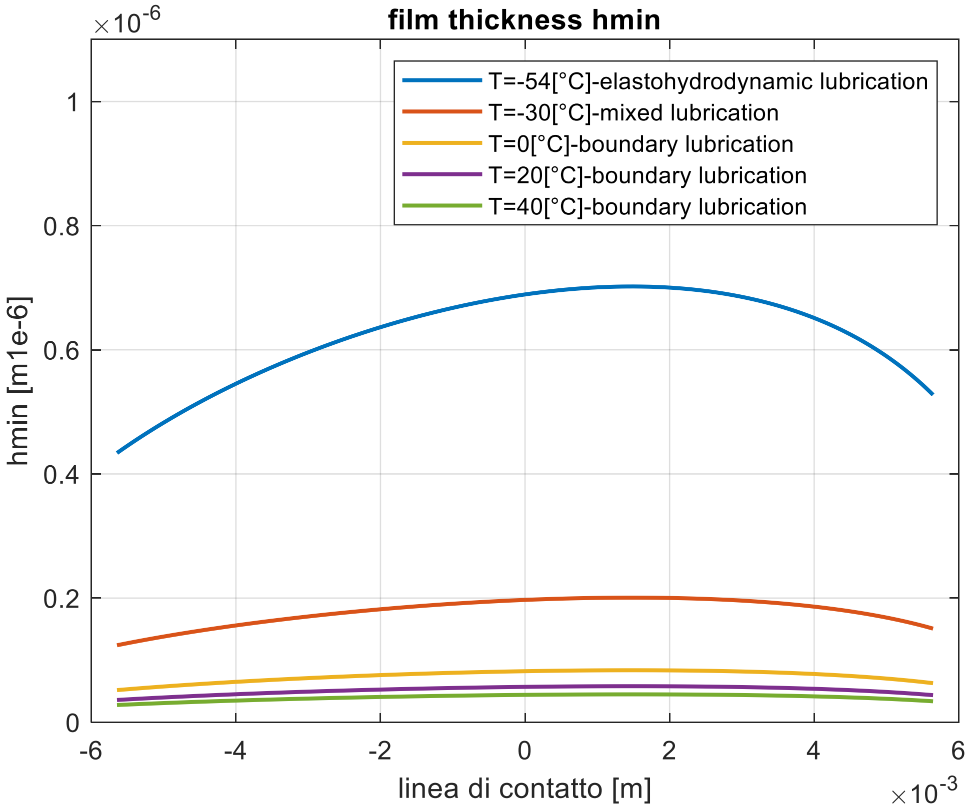


FIGURA 3.19 – SPESSORE MINIMO FILM DI LUBRIFICANTE E TEMPERATURA

<u>Film di lubrificante e coppia trasmessa</u>

Considerando una velocità di rotazione dell'albero di ingresso pari a 100 rpm e un valore di viscosità a temperatura ambiente, dalla *Figura 3.20* si osserva la variazione di h_{min} in funzione della coppia trasmessa. Con l'aumento della coppia cresce il valore del carico W normale alle superfici nel punto di contatto, diminuendo di conseguenza il numero di Sommerfeld S. Ci si sposta quindi nella zona a sinistra della curva di Stribeck, passando da una condizione di lubrificazione elastoidrodinamica ad una condizione limite.

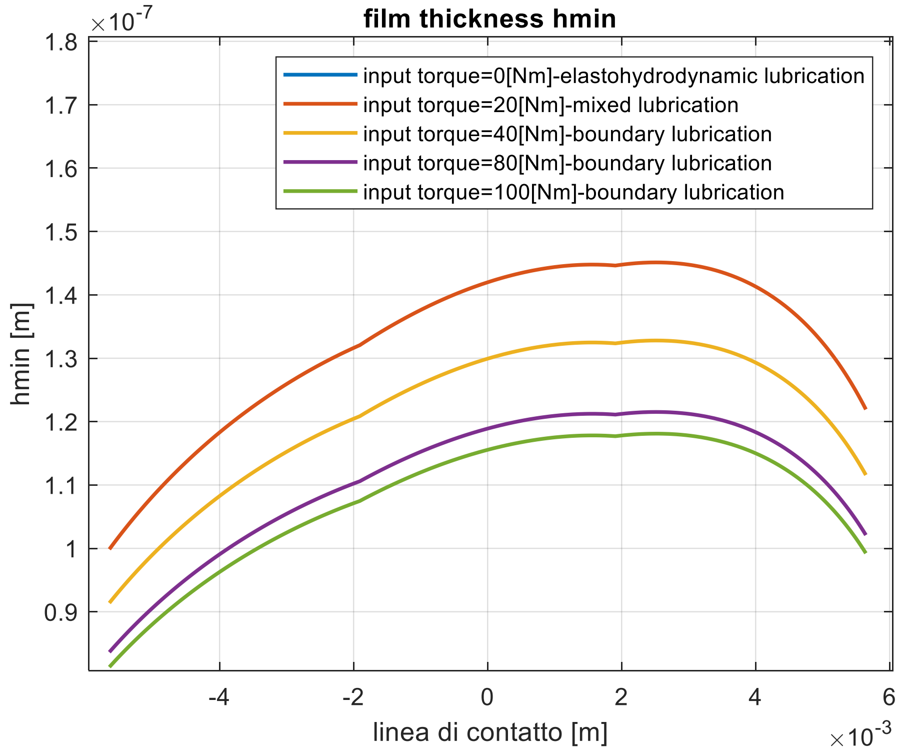


FIGURA 3.20 – SPESSORE MINIMO FILM DI LUBRIFICANTE E COPPIA

Film di lubrificante e velocità di rotazione

Considerando una coppia sull'albero di ingresso pari a 20 Nm e un valore di viscosità a temperatura ambiente, dalla *Figura 3.21* si osserva la variazione di h_{min} in funzione della velocità di rotazione. Incrementando il numero di giri al minuto aumenta la velocità media di scorrimento fra le superfici e di conseguenza anche il numero di Sommerfeld S.

Con elevate velocità di rotazione è favorito un regime di lubrificazione elastoidrodinamica.

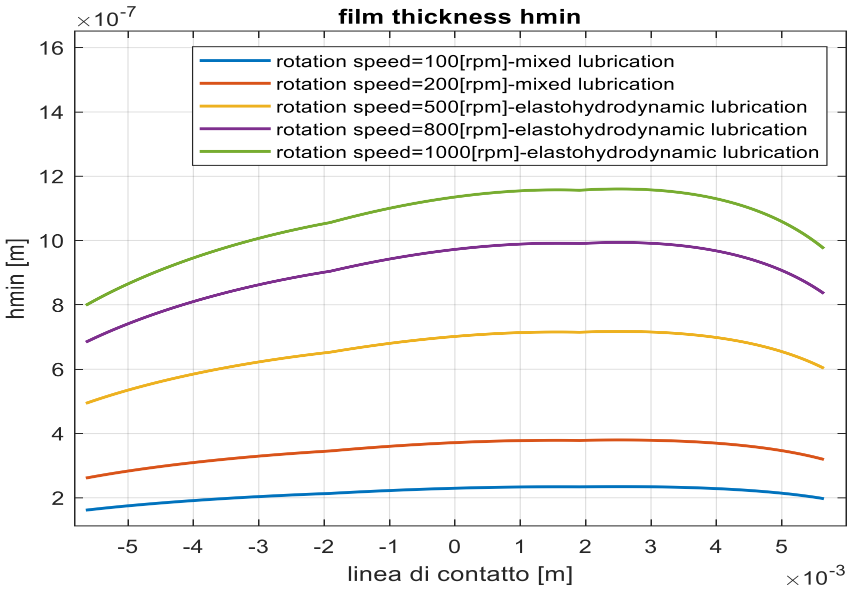


FIGURA 3.21 – SPESSORE MINIMO FILM DI LUBRIFICANTE E VELOCITÀ

Dall'analisi degli andamenti di h_{min} si deduce come il regime di lubrificazione sia strettamente legato alle condizioni operative, in particolare carico, temperatura e velocità. Gli ingranaggi operano generalmente in regime misto di lubrificazione: elastoidrodinamica e interazioni di asperità.

3.1.2.5 Azioni dissipative di attrito in regime di lubrificazione mista

I meccanismi sottostanti l'attrito legati alla presenza del lubrificante, sono dovuti sia all'effetto viscoso del film e sia alle eventuali interazioni dirette fra le asperità delle superfici dei fianchi dei denti [39]. La forza di attrito totale è espressa quindi come somma delle due componenti:

$$F_{friction} = F_{boundary} + F_{viscous} \tag{3.30}$$

Dove:

- $F_{boundary}$ è la forza attrito da interazione asperità [N];
- $F_{viscous}$ è la forza attrito per effetto viscoso lubrificante [N].

Viene utilizzato il metodo Greenwood e Tripp per determinare il contributo dovuto all'interazione fra le asperità delle superfici, supponendo una distribuzione Gaussiana delle altezze delle asperità. Una piccola frazione del carico viene supportato dalle superfici in contatto [39].

Si definiscono il carico supportato dalle asperità in contatto W_a e l'area di contatto fra le superfici A_a come:

$$W_a = \frac{16 * \sqrt{2}}{15} * \pi * (\zeta * \beta * \sigma)^2 * \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}} * E' * A_{app} * F_{\frac{5}{2}}(\lambda) \tag{3.31}$$

$$A_a = \pi^2 * (\zeta * \beta * \sigma)^2 * A_{app} * F_2(\lambda) \tag{3.32}$$

Dove:

- $(\zeta * \beta * \sigma)$ è il parametro di rugosità pari a 0.03;
- $\frac{\sigma}{\beta}$ è la media della pendenza delle asperità pari a 10^{-4};
- E' è il modulo di elasticità effettivo [Pa];
- A_{app} è l'area di contatto apparente [m^2].

La funzioni polinomiali $F_{\frac{5}{2}}(\lambda)$ e $F_2(\lambda)$ rappresentano la distribuzione Gaussiana delle altezze delle asperità e sono rappresentate dalle seguenti espressioni:

$$F_{\frac{5}{2}}(\lambda) = \begin{cases} -0.004 * \lambda^5 + 0.057 * \lambda^4 - 0.296 * \lambda^3 + 0.784 * \lambda^2 - 1.078 * \lambda + 0.617, & \lambda \leq 3 \\ 0, & \lambda > 3 \end{cases} \tag{3.33}$$

$$F_2(\lambda) = \begin{cases} -0.002 * \lambda^5 + 0.028 * \lambda^4 - 0.173 * \lambda^3 + 0.526 * \lambda^2 - 0.804 * \lambda + 0.500, & \lambda \leq 3 \\ 0, & \lambda > 3 \end{cases} \tag{3.34}$$

Con λ il parametro di Stribeck definito come il rapporto fra lo spessore del film di lubrificante *h* e la rugosità superficiale equivalente delle superfici *σ*.

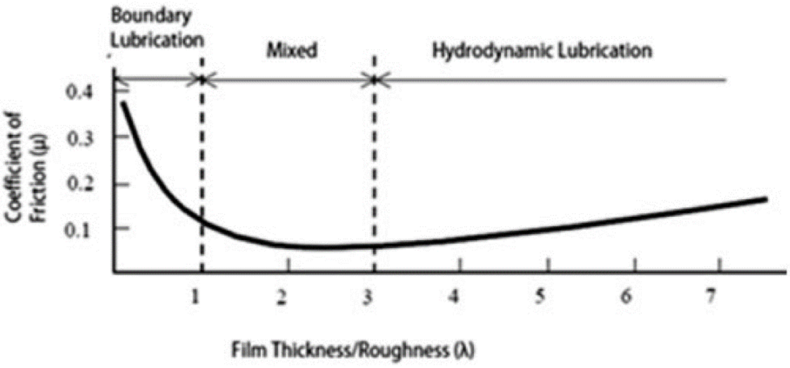


FIGURA 3.22 – CURVA DI STRIBECK IN FUNZIONE DEL FILM THICKNESS/ROUGHNESS

Lo sforzo di taglio limite del lubrificante τ_L è definito come:

$$\tau_L = \tau_{0L} + \mathcal{E} * P_m \tag{3.35}$$

Con:

- τ_{0L} Eyring-shear stress [Mpa];
- $\mathcal{E}$ coefficiente di taglio indotto dalla pressione di contatto pari a 0.047;
- $P_m = \frac{W_a}{A_a}$ la pressione media alla sommità delle asperità [Mpa].

Si ricava infine la forza $F_{boundary}$ come:

$$F_{boundary} = \tau_L * A_a \tag{3.36}$$

A questo punto l'azione viscosa $F_{viscous}$, viene stimata con la seguente formula (Evans and Johnson) [39]:

$$F_{viscous} = F_{flank} * \left\{ 0.87 * \alpha * \tau_0 + 1.74 * \frac{\tau_0}{\bar{p}} * \ln\left(\frac{1.2}{\tau_0 * h_{c0}} * \left(\frac{2 * \dot{K} * \eta_0}{1 + 9.6 * \zeta} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\} \tag{3.37}$$

$$\zeta = \frac{4}{\pi} * \frac{\dot{K}}{\frac{h_{c0}}{R}} * \left(\frac{\bar{p}}{E' * R * K' * \rho' * c' * V}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.38}$$

Dove:

- $\dot{K}$ è la conduttività del lubrificante [W/mK];
- K' è la conduttività delle superfici solide [W/mK];
- ρ' è la densità delle superfici solide [kg/m^3];
- c' è la capacità termica delle superfici solide [kJ/kg];
- h_{c0} è lo spessore del film di lubrificante [мm];
- R è il raggio di curvatura delle superfici [m];
- $\bar{p}$ è la media delle pressioni di contatto [Pa];
- F_{flank} è la forza normale alle superfici nel punto di contatto [N].

Le equazioni sopra esposte mostrano che le azioni di attrito variano lungo il segmento di contatto a causa della variazione della velocità di strisciamento, della geometria del contatto e dello spessore del lubrificante. La forza di contatto scambiata dalle superfici dei denti viene ricavata ad ogni passo della simulazione.

In *Figura 3.23* è rappresentato il modello Simulink per la stima di $F_{boundary}$ e $F_{viscous}$ per l'ingranamento solare-pianeti (Il modello Simulink relativo all'ingranamento corona-pianeti è riportato in appendice).

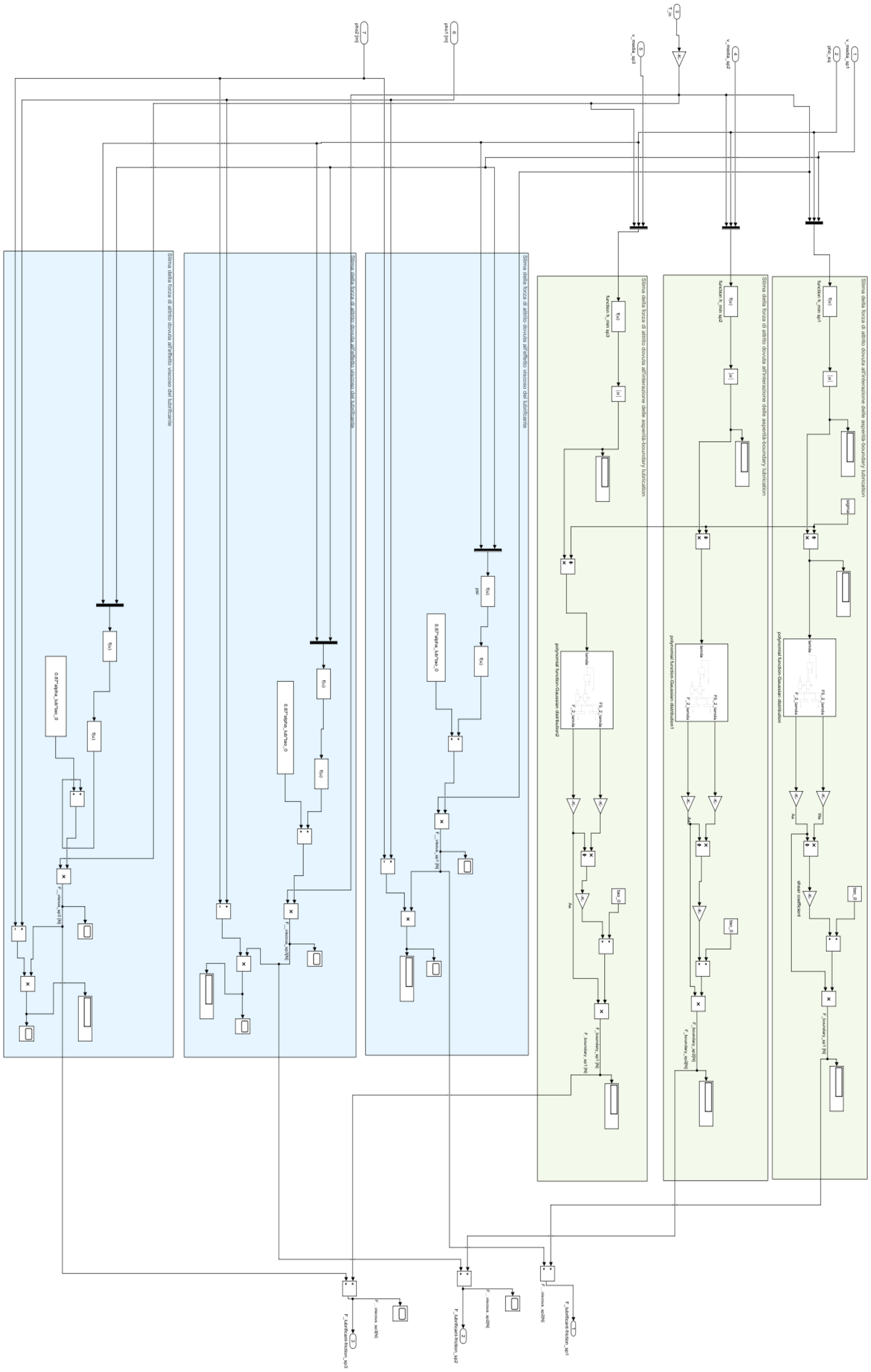


FIGURA 3.23 – SIMULINK CALCOLO DI $F_{boundary}$ E $F_{viscous}$ PER L'INGRANAMENTO SOLARE-PIANETI

3.2 Perdite di potenza indipendenti dal carico

Le perdite di potenza indipendenti dal carico possono essere classificate in:

- le perdite per effetto ventilante;
- le perdite meccaniche costanti;
- perdite nei supporti;
- perdite causate dai piccoli urti che si sviluppano fra due denti che vengono a contatto in presenza di giochi o di errori di intaglio dei denti.

Nel seguito verranno approfondite le prime due tipologie di perdita.

3.2.1 Perdite per effetto ventilante

Le perdite dipendenti dalla velocità sono dovute a due fenomeni:

- perdite per ventilazione legate alle dissipazioni viscose del fluido all' interno del quale si muovono le ruote;
- perdite per effetto di micro-urti durante le fasi iniziali dell'ingranamento.

Tali fenomeni generano una coppia che si oppone al moto e che può essere quantificata in prima approssimazione mediante la relazione quadratica rispetto ad un coefficiente sperimentale c_s.

$$T_{vent} = c_s * \dot{\theta}^2 \tag{3.39}$$

Con:

$$c_s = k_s * d_{sol}^2 + (\frac{z_{sol}}{z_{sat}})^3 * k_s * \ d_{sat}^2 \tag{3.40}$$

Dove k_s è il parametro di perdita per velocità dipendente dalla temperatura il quale assume a T=20 [°C] valori compresi fra $2*10^{-10}$ e $5 * 10^{-10}$ Nms^2/mm^2rad^2.

3.2.2 Perdite meccaniche costanti

La trattazione riguardante la stima delle perdite meccaniche costanti segue quanto riportato in [23].

Le perdite meccaniche costanti non dipendono né dal carico né dalla velocità degli ingranaggi e sono anche dette perdite di tara: sono presenti in ogni organo meccanico e dipendono essenzialmente dalle sue dimensioni. Si manifestano tramite una coppia resistente T_{TL} descritta per uno stadio di un rotismo epicicloidale attraverso la relazione:

$$T_{TL} = k_{TL} * m_{n\_sol} * z_{sol} + [(\frac{z_{sol}}{z_{sat}})^3 * k_{TL} * m_{n\_sat} * z_{sat}] \tag{3.41}$$

Il parametro di perdita di tara k_{TL} è dipendente dalla temperatura e assume a T=20 [°C] valori compresi fra $5*10^{-4}$ e $2 * 10^{-3}$ Nm/mm.
In condizioni di arresto del sistema si moltiplica l'espressione di T_{TL} per il parametro k_{TL}TLPIF (Tare loss parameter increase factor) assunto pari a 2,15 per una temperatura di 20 [°C]. Anche questo ultimo fattore è funzione della temperatura.

3.2.3 Influenza della Temperatura

La temperatura gioca un ruolo importante nelle prestazioni degli ingranaggi. Quando questa aumenta al di sopra del valore ambientale standard di 20 ° C, la variazione dei coefficienti di perdita meccanica è generalmente bassa e normalmente può essere trascurata. Al contrario, le basse temperature influenzano maggiormente le prestazioni della trasmissione ad ingranaggi perché producono un grande aumento dei parametri di perdita k_s (*Tabella 3.2*) e k_{TL} (*Tabella 3.3*) definiti nei paragrafi precedenti. La variazione di questi coefficienti con la temperatura dipende da diversi fattori associati alla progettazione dettagliata dell'attuatore e al tipo di lubrificante; le seguenti tabelle e diagrammi forniscono un'indicazione della gamma di variazione dei parametri di perdita di potenza che è tipicamente sperimentata negli ingranaggi dei sistemi di attuazione dell'aeromobile [40].

<u>Parametro K_S</u>

Temperatura [°C]	Fattore di crescita del parametro ks riferito a T=20 [°C]	
	Minimo	Massimo
20	1.00	1.00
0	1.05	1.10
-20	1.13	1.20

-30	1.23	1.37
-40	1.50	1.85
-54	2.25	3.50
-62	2.85	5.00

TABELLA 3.2 – VARIAZIONE DEL PARAMETRO DI PERDITA k_S CON LA TEMPERATURA

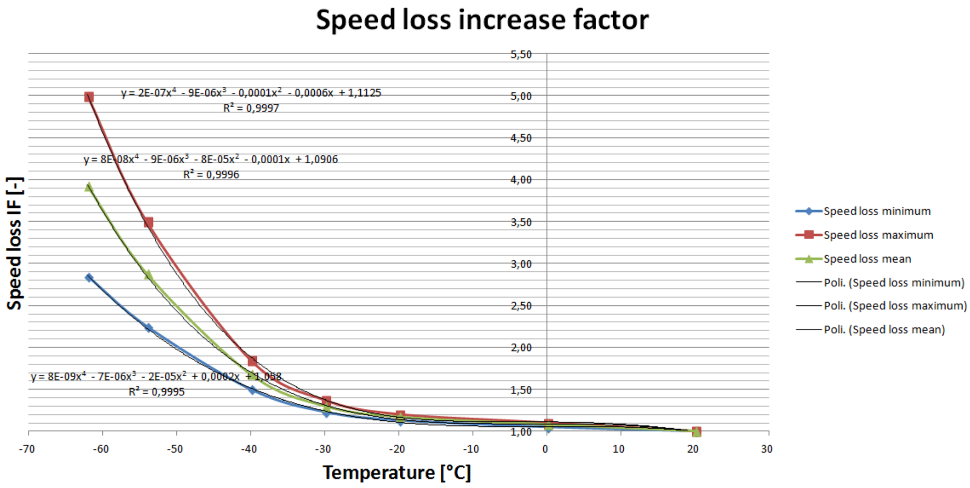


FIGURA 3.24 – GRAFICO DI VARIAZIONE DEL PARAMETRO DI PERDITA k_S CON LA TEMPERATURA

Parametro K_{TL}

Temperatura [°C]	Fattore di crescita del parametro k_{TL} riferito a T=20 [°C]	
	Minimo	Massimo
20	1.00	1.00
0	1.08	1.12
-20	1.20	1.30
-30	1.30	2.00
-40	1.50	3.50
-54	3.00	8.00
-62	3.90	16.00

TABELLA 3.3 – VARIAZIONE DEL PARAMETRO DI PERDITA k_{TL} CON LA TEMPERATURA

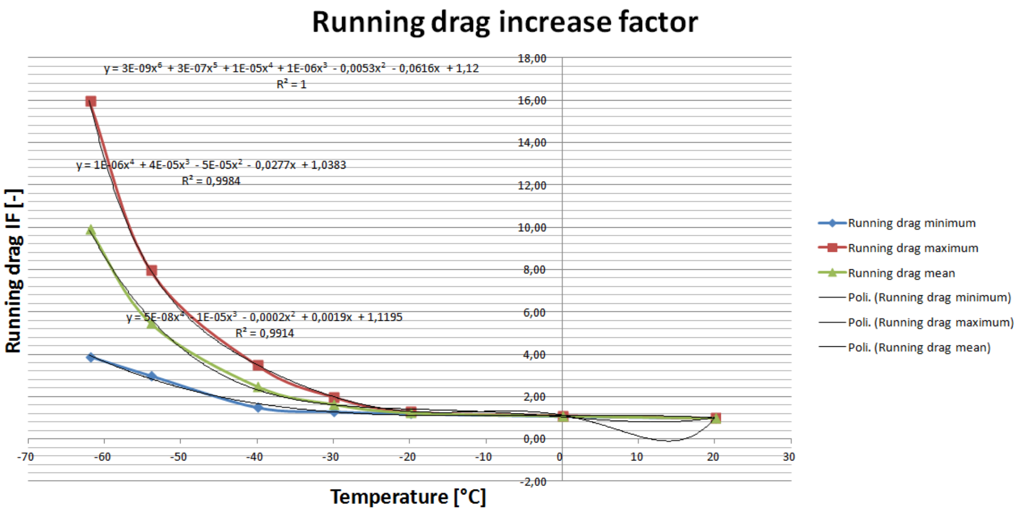


FIGURA 3.25 – GRAFICO DI VARIAZIONE DEL PARAMETRO DI PERDITA k_{TL} CON LA TEMPERATURA

L'aumento delle perdite di tara a bassa temperatura in condizione di 'breakout' è normalmente maggiore dell'aumento corrispondente per le condizioni di funzionamento. La *Tabella 3.4* e il diagramma mostrano il fattore di aumento per il prodotto $k_{TL-TLPIF}$ per il calcolo della coppia di trascinamento alla rottura.

Temperatura [°C]	Fattore di crescita del parametro k_{TL}TLPIF riferito a T=20 [°C]	
	Minimo	Massimo
20	1.00	1.00
0	1.15	1.25
-20	1.50	1.60
-30	1.70	2.50
-40	2.20	4.50
-54	6.00	10.00
-62	8.00	19.00

TABELLA 3.4 – VARIAZIONE DEL PARAMETRO DI PERDITA k_{TL} CON LA TEMPERATURA

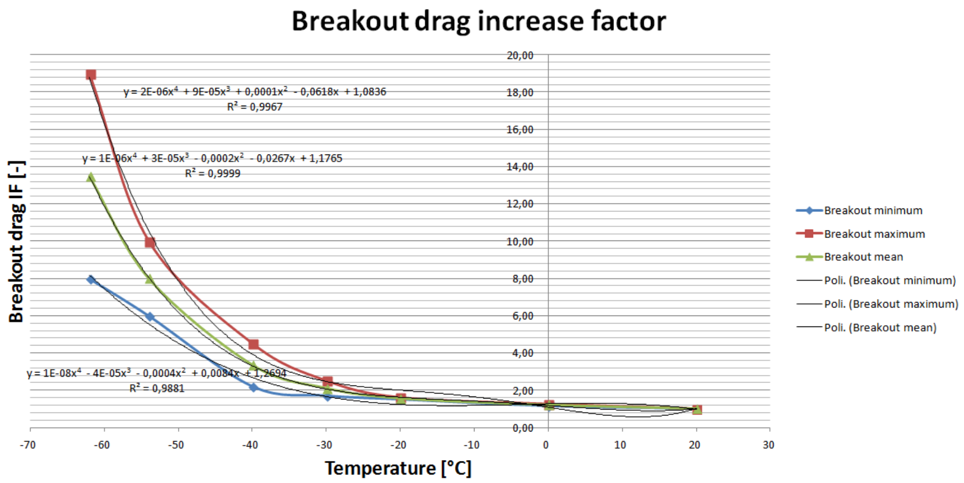


FIGURA 3.26 – GRAFICO DI VARIAZIONE DEL PARAMETRO DI PERDITA $k_{TL-TLPIF}$ CON LA TEMPERATURA

Si riporta di seguito il modello Simulink di stima dei fattori correttivi in funzione della temperatura.

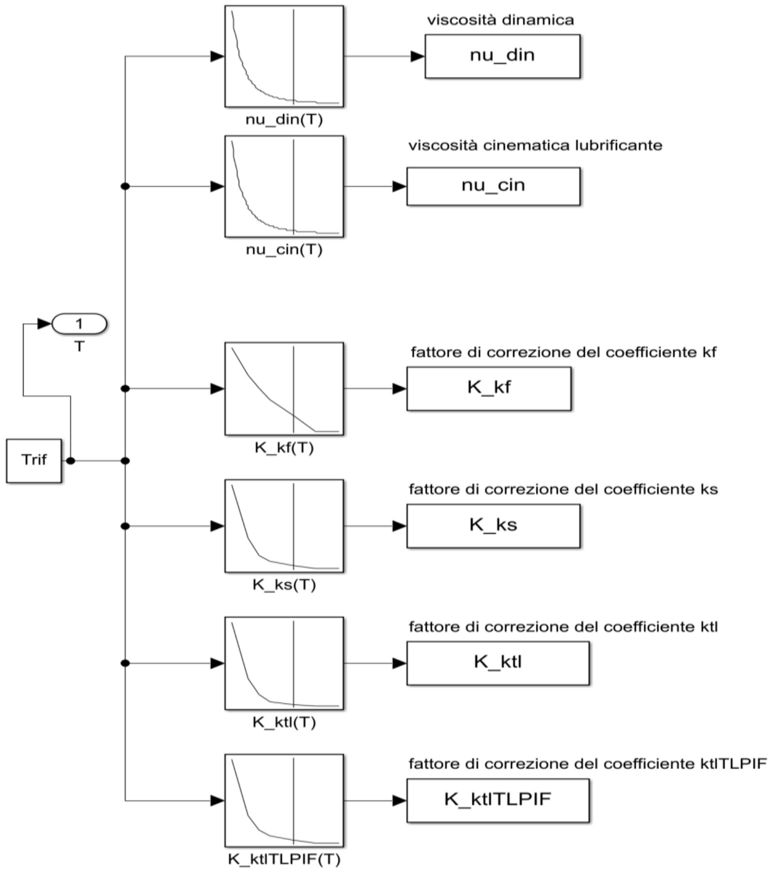


FIGURA 3.27 – BLOCCO SIMULINK TEMPERATURE-INFLUENCE

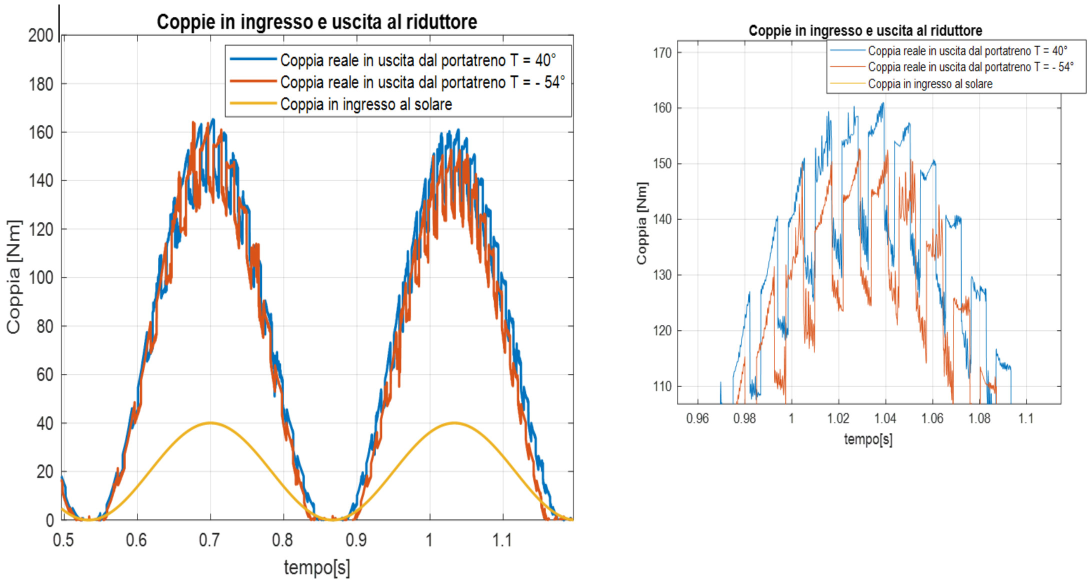


FIGURA 3.28 – COPPIA IN USCITA DAL PORTATRENO E TEMPERATURA

Temperatura [° C]	***Rendimento*** $\eta = \frac{T_{IN} * \omega_{sol}}{T_{OUT}\omega_{car}}$
40	0.8395
0	0.8336
- 54	0.7071

TABELLA 3.5 – TEMPERATURA E RENDIMENTO DEL RIDUTTORE

Si osserva come la coppia in uscita dal portatreno e il rendimento del riduttore subiscano una diminuzione più marcata in corrispondenza delle basse temperature di funzionamento a causa della maggiore influenza delle perdite per ventilazione.

Sono infine riportati, in *Figura 3.29* e *Figura 3.30* i modelli Simulink per il calcolo delle perdite di potenza indipendenti dal carico e delle perdite legate alle coppie di attrito discusse nel paragrafo *3.1.1.4.*

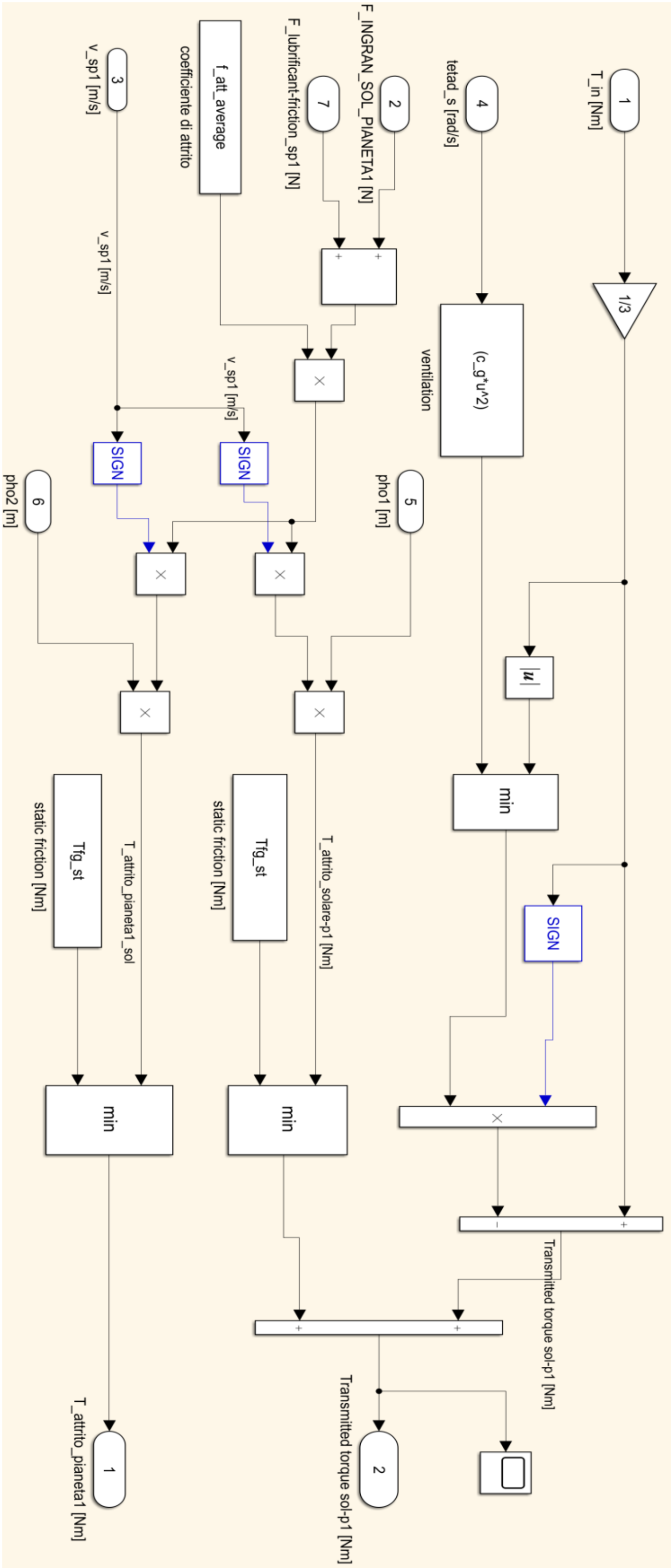


FIGURA 3.29 – BLOCCO SIMULINK CALCOLO PERDITE INGRANAMENTO SOLARE-PIANETA

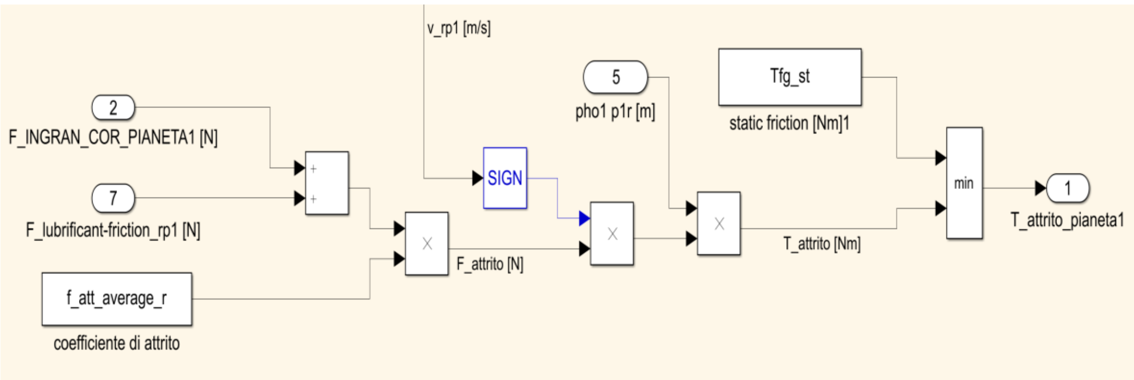


FIGURA 3.30 – BLOCCO SIMULINK CALCOLO PERDITE INGRANAMENTO CORONA-PIANETA

Capitolo 4

4 Modelli di degradazione

4.1 Modelli di degradazione ingranaggi

Negli ingranaggi, la presenza di danni ai denti può indurre comportamenti dinamici indesiderati con conseguente rumore, emissioni acustiche e prestazioni inaccettabili, nonché considerevoli riduzioni della vita utile del riduttore. Il danneggiamento dei denti può essere causato da una varietà di fattori quali: una lubrificazione inadeguata, condizioni operative "inappropriate", specifiche scadenti, difetti nei materiali e problematiche relative alla fabbricazione o all'installazione.

In generale, la presenza di difetti nei denti dell'ingranaggio provoca una riduzione nella rigidezza di ingranamento, di conseguenza la gravità di tali guasti può essere valutata determinando l'entità di tale riduzione [41].

Le rigidezze di ingranamento fra solare-pianeta $K_{sp}(t)$ e corona-pianeta $K_{rp}(t)$ variano con il tempo e, come già discusso nei capitoli precedenti, in assenza di difetti, il processo di ingranamento costituisce la fonte principale di eccitamento del sistema [41].

La risposta vibrazionale si basa sulla frequenza di ingranamento:

$$f_{mesh} = f_{sol} * \frac{z_{sol} * z_{ring}}{z_{sol} + z_{ring}} \tag{4.1}$$

Al fine quindi di considerare la presenza del difetto, la rigidezza può essere divisa in un termine "principale" $K_{main}(t)$ e in un termine fluttuante $K_d(t)$ ($K(t) = K_{main}(t) + K_d(t)$) dipendente dalla tipologia e dall'entità del difetto.

I fenomeni dinamici impulsivi derivanti dalla presenza del difetto si ripetono ad ogni giro, tante volte quanti sono i denti difettosi della ruota: si generano dunque linee spettrali con frequenza pari a f_d:

$$f_d = f_{gear} * z_d \tag{4.2}$$

Con:

- f_{gear} la frequenza di rotazione della ruota su cui è presente il difetto;
- z_d il numero di denti difettosi.

Nel caso specifico dei riduttori epicicloidali la ruota solare ingrana contemporaneamente con i tre satelliti trasmettendo ad essi la coppia; risulta quindi il componente più importante del rotismo, nonché quello maggiormente sollecitato. Un dente del solare entra in contatto con il dente del pianeta con una frequenza pari a f_{sp}, definita come:

$$f_{sp} = (f_{sol} - f_{car}) * N_{sat} \tag{4.3}$$

Dove:

- f_{sol} è la frequenza di rotazione del solare;
- f_{car} è la frequenza di rotazione del portatreno;
- N_{sat} è il numero di satelliti.

Assumendo ad esempio la presenza di una cricca solo in un dente del solare si avrà:

$$f_d = f_{sp} \tag{4.4}$$

Nel seguito è stato analizzato in che modo la degradazione modifichi la rigidezza e come propaghi sotto l'azione di carichi ciclici fino a rottura.

4.1.1 Cricca sulla dentatura

La cricca da fatica rappresenta uno dei danni più comuni nei riduttori epicicloidali ed è determinata dalla sollecitazione ciclica del dente dell'ingranaggio oltre il suo limite di fatica. Generalmente, la frattura da fatica da flessione inizia nella sezione della radice e progredisce fino a quando il dente o parte di esso si rompe e si verifica nella sezione del raccordo nella radice del dente [42].

4.1.1.1 Origine del difetto

Le rotture per fatica nelle ruote dentate derivano dal verificarsi delle cricche "lunghe", cioè difetti meccanici la cui dimensione longitudinale è di almeno 1 mm [43]. Generalmente hanno origine nella zona di raccordo del dente, in quanto risulta la regione sottoposta alle sollecitazioni di trazione più intense, possiamo quindi considerare le cricche lunghe come il prodotto della crescita delle cricche “corte”.

A livello microstrutturale le cricche corte sono generate dalle deformazioni plastiche sulla superficie dei corpi soggetti a carichi ciclici, nelle regioni in cui le sollecitazioni locali sono amplificate dall’irregolarità della superficie, dalla modalità di carico e dalla geometria dei componenti. La crescita di queste cricche è fortemente discontinua, poiché dipende fortemente dalla struttura e dalle proprietà del materiale: ad esempio la cricca può presentare una rapida crescita e subire un improvviso arresto a causa dell’incontro con un bordo di grano o con una particella di seconda fase [44]. Questa prima fase non è rilevabile macroscopicamente in quanto non ha alcun effetto sulle prestazioni degli ingranaggi.

Successivamente, quando il difetto cresce al di sopra delle dimensioni del grano del materiale, si ottiene una nuova condizione solitamente chiamata cricca “corta”. In questa fase la fessura ha dimensioni comprese tra 100 μm e 1mm, per cui il materiale può essere considerato continuo ed isotropo. Il meccanismo di crescita è governato dal fenomeno di chiusura e dalla dimensione della zona plastica, risulta quindi molto diverso dalla crescita progressiva delle cricche “lunghe” [44]: la propagazione del difetto può influenzare le prestazioni degli ingranaggi se il loro modulo è sufficientemente basso.

4.1.1.2 Rigidezza e dimensioni del difetto

Allo scopo di introdurre l’influenza della dimensione della cricca sulla rigidezza di ingranamento si riprende l’analisi della stessa mediante il metodo dell’energia potenziale; si considera cioè l’energia immagazzinata nel dente a seguito delle sollecitazioni a cui è sottoposto. Tale metodo garantisce un approccio rigoroso allo studio della relazione fra cricca e rigidezza.

4.1.1.2.1 Percorso di propagazione del difetto

Sulla base di studi di modellazione agli elementi finiti [45] risulta che il percorso di propagazione delle cricche negli ingranaggi è influenzato da diversi fattori, come lo spessore dell’ingranaggio, la posizione iniziale della fessura e il rapporto di backup (spessore diviso per l'altezza del dente).

La *Figura 4.1* fornisce un esempio dell'effetto della posizione iniziale della cricca sul suo percorso di propagazione. Maggiori dettagli sull'incidenza di altri fattori sul percorso di propagazione sono disponibili in Ref. [45].

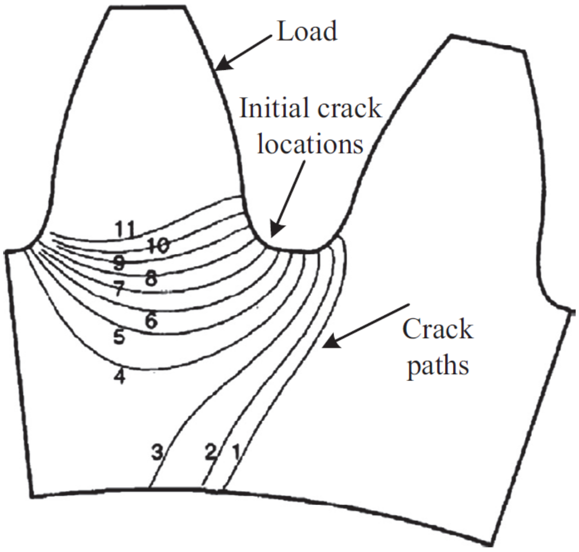


FIGURA 4.1 – CRACK PATHS DELLE CRICCHE NEGLI INGRANAGGI

Belsak e Flasker [46] hanno concluso che la propagazione delle crepe sugli ingranaggi segue percorsi “morbidi”, continui e, nella maggior parte dei casi, piuttosto diritti con solo una leggera curvatura. Inoltre, gli studi condotti da Kramberger et al. [47] hanno indicato che la cricca inizia più frequentemente nel punto di massima sollecitazione a trazione di un dente di ingranaggio.

In considerazione delle premesse fatte, la modellazione della cricca proposta in questo lavoro di tesi considera una forma retta e inclinata di un certo angolo in prossimità della radice del dente. La propagazione della cricca induce una progressiva riduzione dello spessore effettivo del dente come mostrato in *Figura 4.2* (t1, t2, t3, t4, ecc. definiscono il nuovo spessore del dente nella zona della fessura), determinando quindi una diminuzione della rigidezza del dente e di conseguenza della rigidezza di ingranamento.

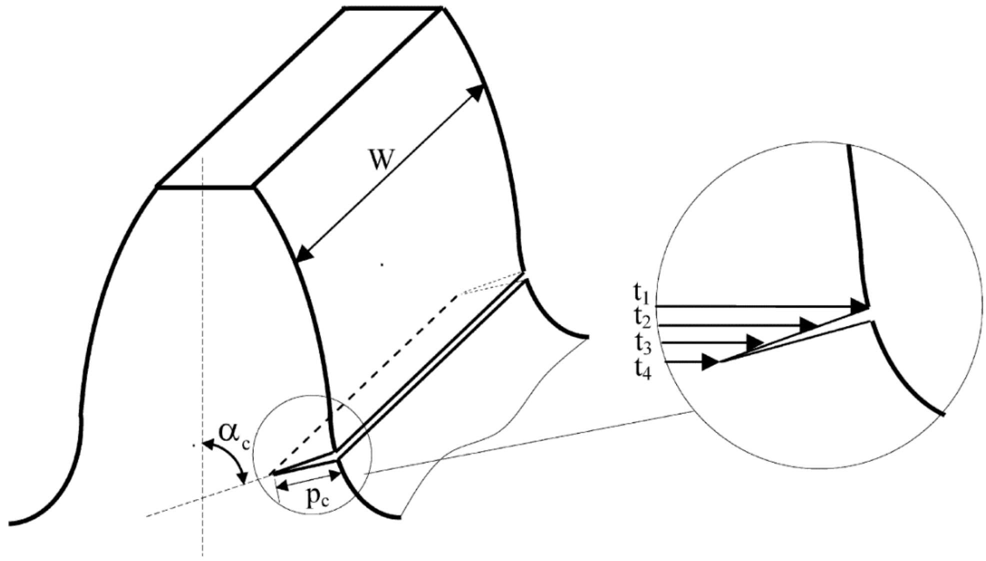


FIGURA 4.2 – SCHEMA PERCORSO DELLA CRICCA [48]

Un ulteriore aspetto da considerare riguarda la propagazione della cricca lungo la larghezza W del dente. Infatti, generalmente i tipi di cricche nella radice sono di due categorie [49]:

1. *Cricca con profondità costante:* è una cricca che si è nucleata in superficie e si sta espandendo in profondità nel materiale, tuttavia non ha ancora influenzato tutta la larghezza della dentatura;
2. *Cricca con profondità variabile:* è una cricca che ha raggiunto la larghezza del materiale e sta iniziando a propagarsi in direzione dello spessore del campione. La sezione residua diminuisce all'avanzare del fronte di cricca fino al raggiungimento della rottura fragile.

4.1.1.2.2 Metodo dell'energia potenziale e rigidezza

La flessione di un dente di un ingranaggio cilindrico può essere determinata considerando lo stesso come una trave a sbalzo non uniforme (*Figura 4.3*), con la fessura che attraversa l'intera larghezza W del dente, con una profondità costante q_0 e un angolo di inclinazione pari a α_c [50].

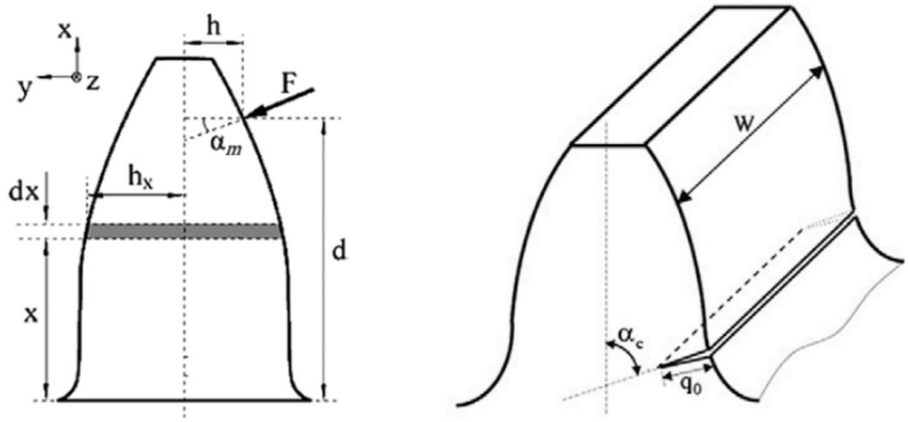


FIGURA 4.3 – TRAVE A SBALZO NON UNIFORME CON CRICCA ALLA RADICE DEL DENTE

L'energia flessionale, di taglio e assiale di compressione, immagazzinate nel dente a seguito delle deformazioni indotte, possono essere rappresentate come:

$$U_b = \frac{F^2}{2 * K_b} = \int_0^d \frac{M^2}{2EI_X} dx \tag{4.5}$$

$$U_s = \frac{F^2}{2 * K_s} = \int_0^d \frac{1.2F_b^2}{2GA_X} dx \tag{4.6}$$

$$U_a = \frac{F^2}{2 * K_a} = \int_0^d \frac{F_a^2}{2EA_X} dx \tag{4.7}$$

Da cui si ricavano le rigidezze a flessione (K_b), a taglio (K_s) e assiale di compressione (K_a) [49]:

$$\frac{1}{K_b} = \int_0^d \frac{((d-x) * \cos(\alpha_m) - h * sin(\alpha_m))^2}{EI_X} dx \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{K_s} = \int_0^d \frac{1.2 * \cos(\alpha_m)^2}{GA_X} dx \tag{4.9}$$

$$\frac{1}{K_a} = \int_0^d \frac{\sin(\alpha_m)^2}{EA_X} dx \qquad (4.10)$$

Dove:

- h, x, dx, α_m e d sono mostrate in *Figura 4.3;*
- $G = \frac{E}{2*(1+\upsilon)}$ è il modulo di elasticità tangenziale.

I_x e A_x rappresentano rispettivamente il momento di inerzia e l'area della sezione che si trova ad una distanza pari a $d - x$ dal punto di applicazione della forza scambiate fra i denti. Sono i due parametri influenzati direttamente dalla crescita della cricca e sono esprimibili come:

$$I_x = \begin{cases} \frac{1}{12}(h_x + h_x)^3 * W, & h_x \leq h_q \\ \frac{1}{12}\left(h_x + h_q\right)^3 * W, & h_x > h_q \end{cases} \qquad (4.11)$$

$$A_x = \begin{cases} (h_x + h_x) * W, & h_x \leq h_q \\ \left(h_x + h_q\right) * W, & h_x > h_q \end{cases} \qquad (4.12)$$

Con h_q=$h_c - q_0$ lo spessore del dente con presenza cricca.

Oltre alle componenti di rigidezza sopra riportate, occorre considerare anche la rigidezza a contatto Hertziano K_h e la rigidezza da flessione del raccordo del dente K_f.

Dai risultati ottenuti in [51] risulta che la rigidezza a contatto Hertziano fra una coppia di denti in contatto è costante lungo l'intera linea di azione ed è data da:

$$\frac{1}{K_h} = \frac{4 * (1 - \upsilon^2)}{\pi EW} \qquad (4.13)$$

La rigidezza K_f è legata alla deflessione del raccordo del dente δ_f, calcolata come:

$$\delta_f = \frac{F * \cos(\alpha_m)^2}{EW} * \left\{L^* * (\frac{u_f}{S_f})^2 + M^* * \left(\frac{u_f}{S_f}\right) + P^* * (1 + Q^* * tan^2(\alpha_m))\right\} \qquad (4.14)$$

Con:

- W la larghezza del dente;

- u_f e S_f da *Figura 4.4.*

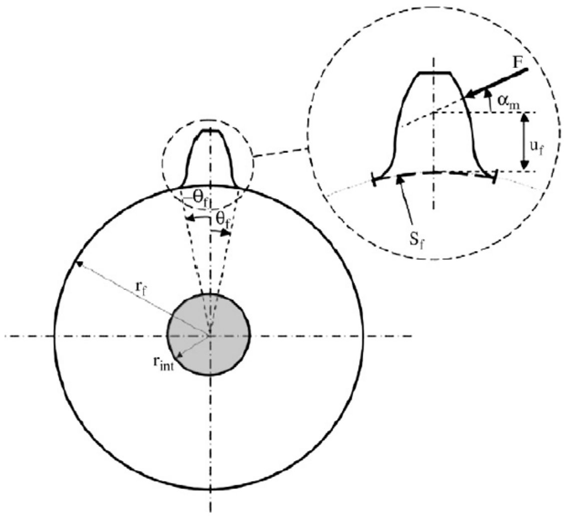


FIGURA 4.4 – PARAMETRI GEOMETRICI DEFLESSIONE RACCORDO DEL DENTE [52]

I coefficienti L^*, M^*, P^* e Q^* vengono ricavati mediante una funzione polinomiale $X_i{}^*$ [53]:

$$X_i{}^*(h_{fi}, \theta_f) = \left(\frac{A_i}{\theta_f{}^2}\right) + B_i * h_{fi}{}^2 + C_i \frac{h_{fi}}{\theta_f} + \frac{D_i}{\theta_f} + E_i * h_{fi} + F_i \tag{4.15}$$

Con:

- $h_{fi} = \frac{r_f}{r_{int}}$;
- r_{int} e r_f in *Figura 4.4.*

I valori dei coefficienti A_i, B_i, C_i, D_i, E_i ed F_i, ricavai in [54] sono riportati in *Tabella 4.1*:

	A_i	B_i	C_i	D_i	E_i	F_i
$L^*(h_{fi}, \theta_f)$	-5.574×10^{-5}	-1.9986×10^{-3}	-2.3015×10^{-4}	4.7702×10^{-3}	0.0271	6.8045
$M^*(h_{fi}, \theta_f)$	60.111×10^{-5}	28.100×10^{-3}	-83.431×10^{-4}	-9.9256×10^{-3}	0.1624	0.9086
$P^*(h_{fi}, \theta_f)$	-50.952×10^{-5}	185.50×10^{-3}	0.0538×10^{-4}	53.3×10^{-3}	0.2895	0.9236
$Q^*(h_{fi}, \theta_f)$	-6.2042×10^{-5}	9.0889×10^{-3}	-4.0964×10^{-4}	7.8297×10^{-3}	−0.1472	0.6904

TABELLA 4.1 – COEFFICIENTI A_I, B_I,C_I, D_I, E_I ED F_I

Si ricava infine l'espressione di $\frac{1}{K_f}$ come:

$$\frac{1}{K_f} = \frac{\delta_f}{F} = \frac{\cos(\alpha_m)^2}{EW} * \left\{L^* * (\frac{u_f}{S_f})^2 + M^* * \left(\frac{u_f}{S_f}\right) + P^* * (1 + Q^* * tan^2(\alpha_m))\right\} \tag{4.16}$$

Calcolate tutte le componenti di rigidezza è possibile calcolare la rigidezza di ingranamento della coppia di denti in presa K_e , adattata sia all'ingranamento ruota esterna-esterna (solare e pianeta K_{sp}) sia a quello ruota esterna-interna (corona-pianeta K_{rp}).

$$K_e = \frac{1}{\frac{1}{K_{ap}} + \frac{1}{K_{bp}} + \frac{1}{K_{sp}} + \frac{1}{K_{fp}} + \frac{2}{K_h} + \frac{1}{K_{ag}} + \frac{1}{K_{bg}} + \frac{1}{K_{sg}} + \frac{1}{K_{fg}}} \tag{4.17}$$

Si riportano di seguito gli andamenti della rigidezza della coppia di denti in presa rispetto alle dimensioni della cricca, sia per l'ingranamento solare pianeta che corona-pianeta, ottenuti mediante l'implementazione del metodo dell'energia potenziale.

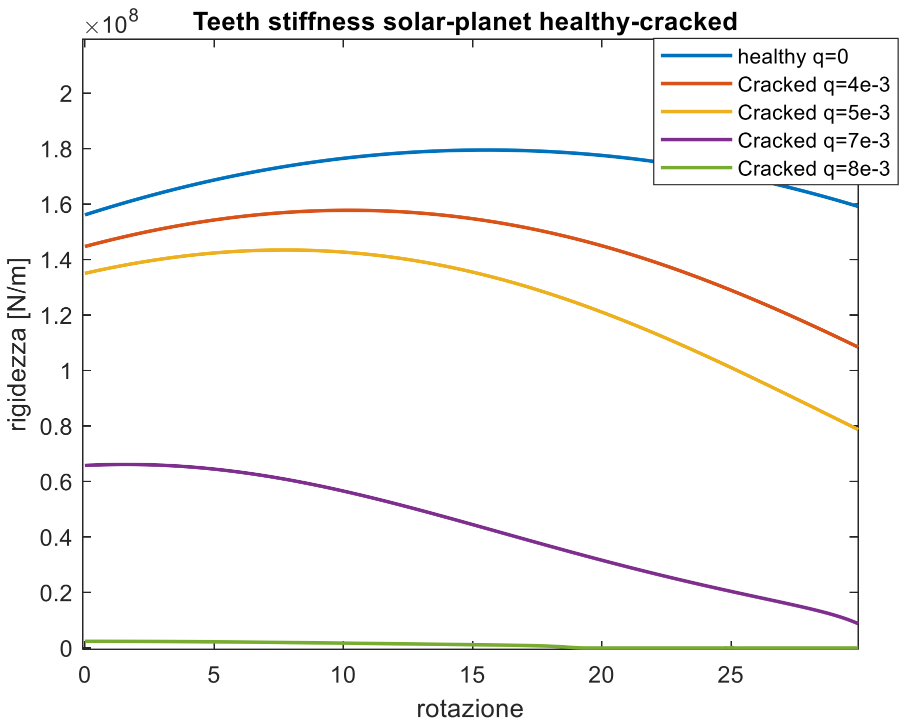


FIGURA 4.5 – RIGIDEZZA DELLA COPPIA DI DENTI PER L'INGRANAMENTO SOLARE-PIANETA ALLE DIVERSE q

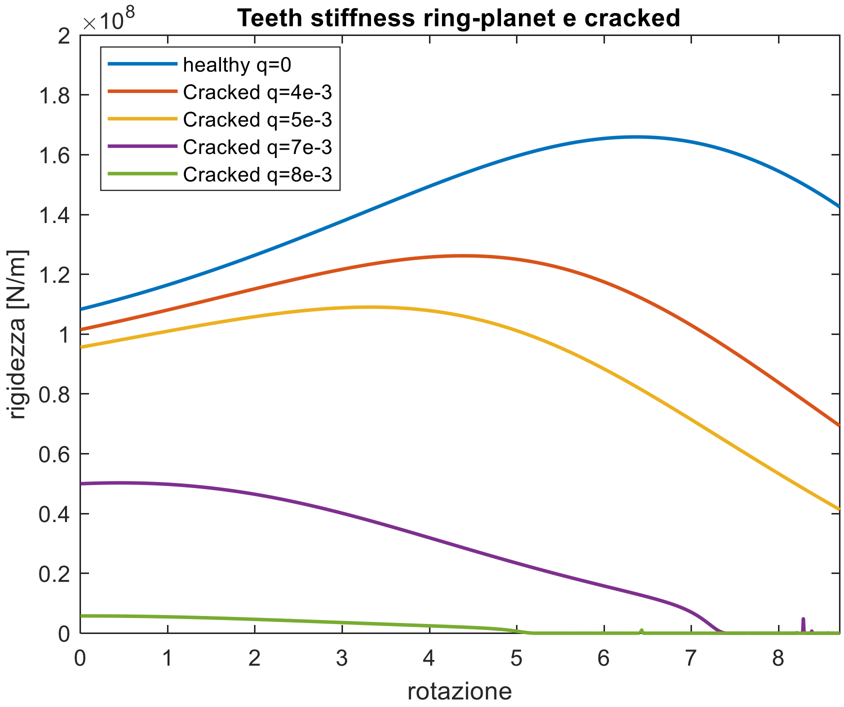


FIGURA 4.6 - RIGIDEZZA DELLA COPPIA DI DENTI PER L'INGRANAMENTO CORONA-PIANETA ALLE DIVERSE q

Come previsto le rigidezze decrescono all'aumentare della dimensione della cricca, fino al caso limite in cui, a causa dell'eccessiva crescita del difetto, il valore della rigidezza raggiunge valori nulli (curva verde in *Figura 4.6*). Di seguito si riportano gli andamenti delle rigidezze rappresentati le relazioni fra la dimensione della cricca e la rigidezza della coppia di denti in presa.

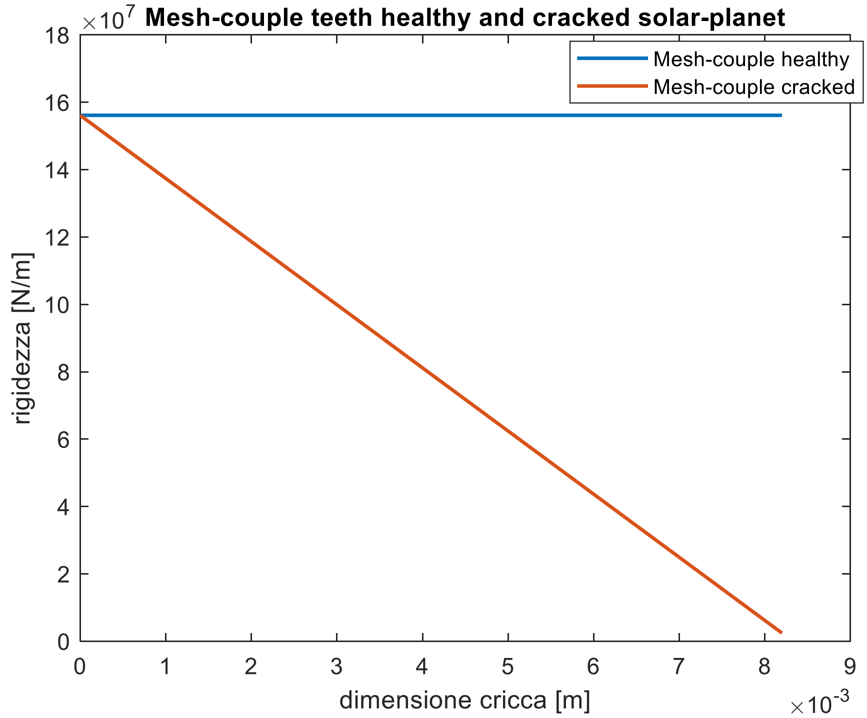


FIGURA 4.7 – RIGIDEZZA COPPIA DI DENTI IN PRESA SOLARE-PIANETA AL VARIARE DELLA LUNGHEZZA DEL DIFETTO

<u>Geometria del riduttore epicicloidale</u>

Nei rotismi epicicloidali, l'ingranamento della coppia di ingranaggi solare-pianeta è un esempio di accoppiamento di tipo esterno-esterno (*Figura 4.8* sinistra). Mentre l'accoppiamento corona-pianeta costituisce un esempio di ingranamento di tipo esterno-interno (*Figura 4.8* destra).

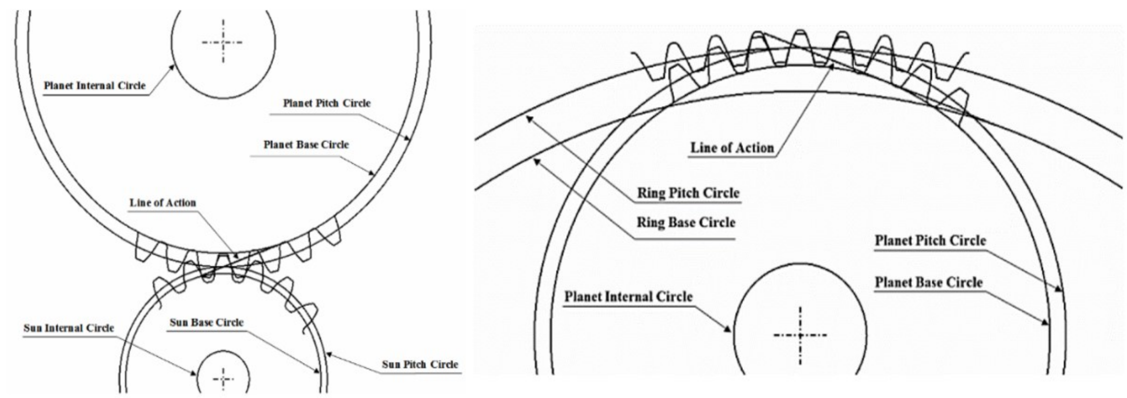


FIGURA 4.8 – INGRANAMENTO SOLARE-PIANETA (SINISTRA) E PIANETA-CORONA (DESTRA)

Per *l'ingranamento solare-pianeta* i parametri geometrici r_d, r_f e r_a sono calcolati come:

$$r_d = r - (h_a^* + c^*) * m \tag{4.18a}$$

$$r_d = r - h_a^* * m \tag{4.18b}$$

$$r_a = r + h_a^* * m \tag{4.18c}$$

Con r, h_a^* e c^* sono il raggio primitivo, il coefficiente di addendum e il coefficiente di gioco in punta. Le coordinate di ogni punto nella regione dell'evolvente sono date da [55]:

$$x(\alpha_m) = r_b * [(\alpha_m + \theta_b) * \sin(\alpha_m) + \cos(\alpha_m)] \tag{4.19}$$

$$h(\alpha_m) = r_b * [(\alpha_m + \theta_b) * \cos(\alpha_m) - \sin(\alpha_m)] \tag{4.20}$$

Con:

- r_b il raggio di base;
- α_m l'angolo variabile della forza di contatto in ogni punto;
- $\theta_b = \frac{\pi}{2N} + inv(\alpha)$ con $inv(\alpha) = tan(\alpha)$- α.

Per modellare i denti del sole e del pianeta, è importante trovare gli angoli che mostrano il punto iniziale e il punto finale del profilo dell'evolvente del dente. La curva evolvente inizia dal cerchio di base dell'ingranaggio e termina con il cerchio di addendum, ma quando il raggio della base è inferiore a quello di radice, la curva evolvente inizia da quest'ultimo e il corrisponde angolo α_0 soddisfa l'equazione:

$$r_b * [(\alpha_0 + \theta_b) * \sin(\alpha_0) + \cos(\alpha_0)] - r_d = 0 \tag{4.21}$$

L'angolo α_1 di inizio di ingranamento per la coppia di denti soddisfa l'equazione:

$$r_b * [(\alpha_1 + \theta_b) * \sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1)] - r_f = 0 \tag{4.22}$$

Mentre l'angolo α_2 di fine ingranamento soddisfa:

$$r_b * [(\alpha_2 + \theta_b) * \sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_2)] - r_a = 0 \tag{4.23}$$

Mediante il metodo di Bisezione sono stati ricavati i valori di α_0, α_1 e α_2.

Per *l'ingranamento pianeta-corona* i parametri geometrici r_d, r_f e r_a, riferiti alla ruota interna corona sono calcolati come:

$$r_d = r + (h_a^* + c^*) * m \tag{4.24a}$$

$$r_d = r + h_a^* * m \tag{4.24b}$$

$$r_a = r - h_a^* * m \tag{4.24c}$$

Le coordinate di ogni punto nella regione dell'evolvente sono date da:

$$x(\alpha_m) = r_b * [(\alpha_m + \theta_b) * \sin(\alpha_m) + \cos(\alpha_m)] \tag{4.25}$$

$$h(\alpha_m) = \{r_b * [(\alpha_m + \theta_b\ ) * cos\ (\alpha_m\ ) - sin\ (\alpha_m\ )]\} - 2 * h_p \tag{4.26}$$

$$h_p = r_b * [\left(\alpha_p + \theta_b\right) * \cos\left(\alpha_p\right) - sin\ (\alpha_p\ )] \tag{4.27}$$

L'angolo α_p soddisfa l'equazione:

$$r_b * \left[\left(\alpha_p + \theta_b\right) * \sin\left(\alpha_p\right) + \cos\left(\alpha_p\right)\right] - r = 0 \tag{4.28}$$

Come per il caso di ingranamento solare-pianeta occorre definire gli angoli α_0, $\alpha_1\ e\ \alpha_2$, i quali soddisfano le equazioni:

$$r_b * [(\alpha_0 + \theta_b) * \sin(\alpha_0) + \cos(\alpha_0)] - r_d = 0 \tag{4.29}$$

$$r_b * [(\alpha_1 + \theta_b) * \sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1)] - r_f = 0 \tag{4.30}$$

$$r_b * [(\alpha_2 + \theta_b) * \sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_2)] - r_a = 0 \tag{4.31}$$

Mediante il metodo di Bisezione sono stati ricavati i valori di α_0, α_1 e α_2.

4.1.1.2.3 Rigidezze di ingranamento e dimensione della cricca

Le rigidezze di ingranamento K_{sp}, K_{rp}, i cui andamenti sono riportati in *Figura 4.9*, dipendono dalla posizione angolare delle coppie di ingranaggi pianeta-solare e pianeta-corona e non sono costanti lungo la linea dei contatti.

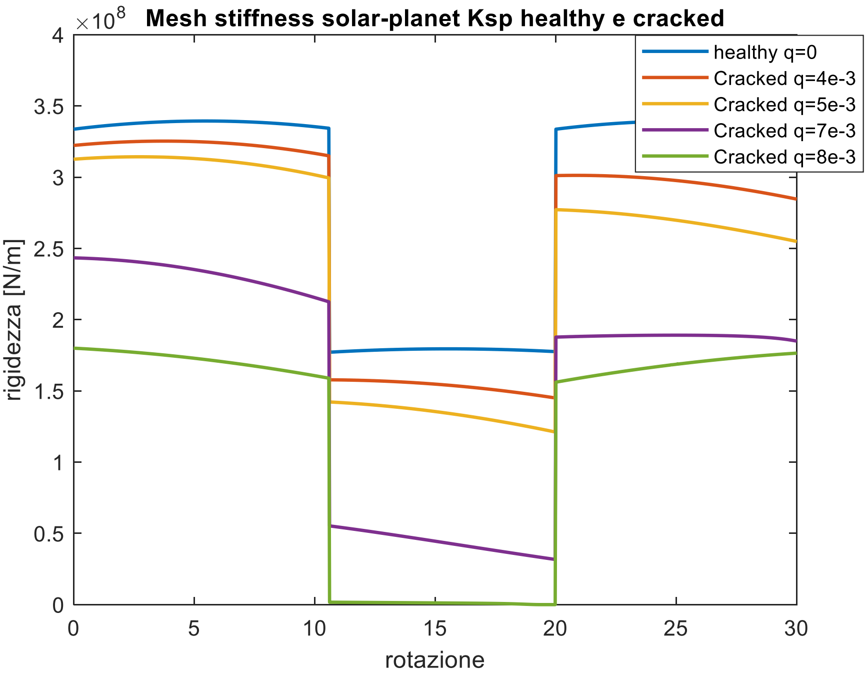


FIGURA 4.9 – RIGIDEZZA DI INGRANAMENTO SOLARE-PIANETA ALLE DIVERSE q

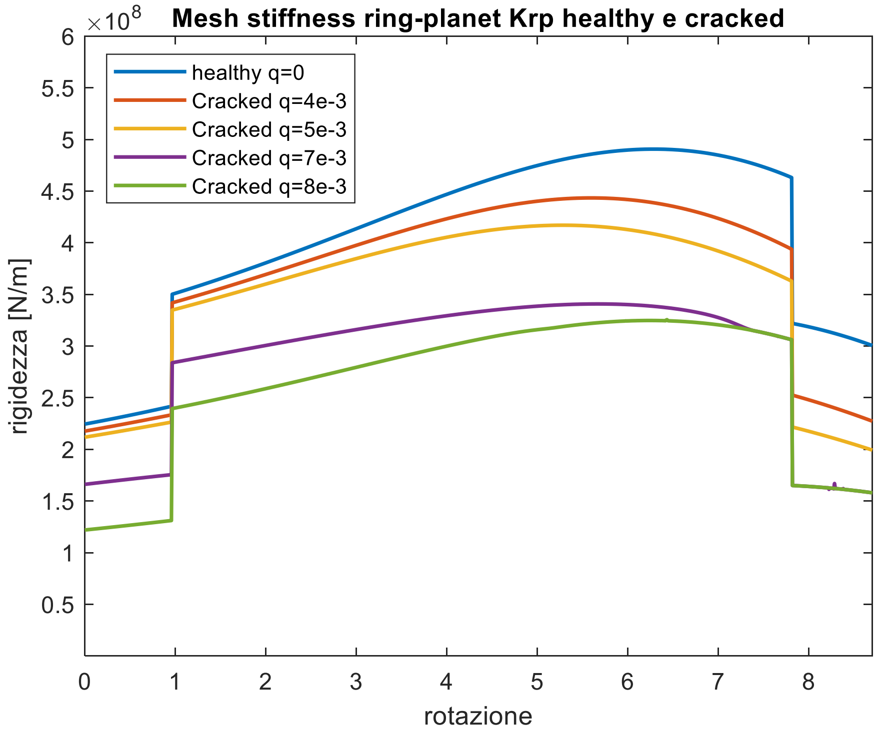


FIGURA 4.10 – RIGIDEZZA DI INGRANAMENTO CORONA-PIANETA ALLE DIVERSE q

Introducendo le differenze di fase nell'ingranamento dei pianeti γ_{spn} e γ_{rpn}, già discusse nel *Paragrafo 2.3.2 del Capitolo 2*, si ha:

$$K_{spn} = K_{sp} * (\theta + \gamma_{spn}) \text{ con } \theta = (\theta_{sol} - \theta_{car}) * \frac{z_{sol}}{2\pi} \tag{4.32}$$

$$K_{rpn} = K_{sp} * (\theta + \gamma_{pn}) \text{ con } \theta = (\theta_{car} - \theta_{pn}) * \frac{z_{sat}}{2\pi} \tag{4.33}$$

Si riportano di seguito gli andamenti di $K_{sp1,}$ K_{sp2}, K_{sp3} e $K_{rp1}, K_{rp2}, K_{rp3}$ per una rotazione completa e per una dimensione del difetto fissa e pari a $q = 7e - 3$ m.

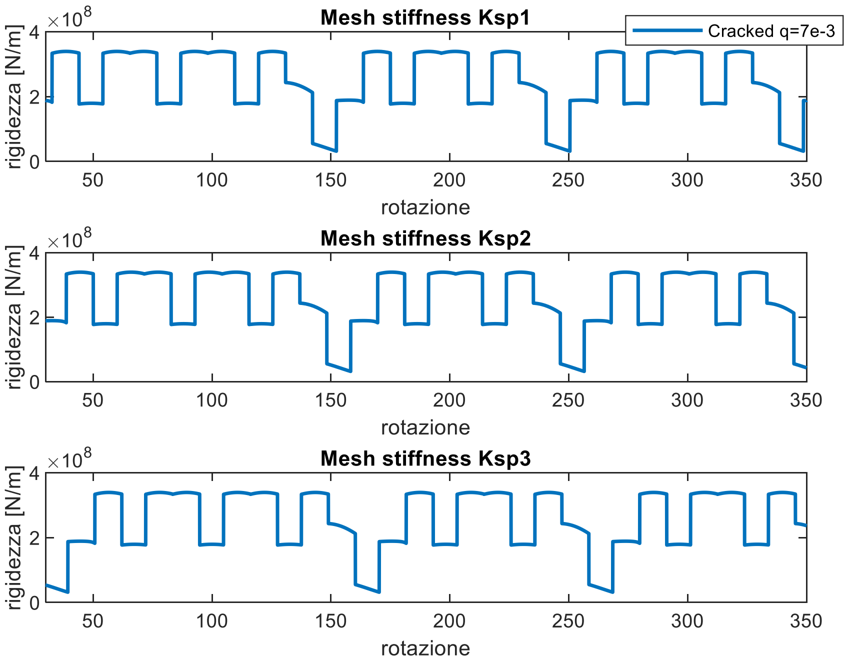


FIGURA 4.11 – RIGIDEZZE DI INGRANAMENTO SOLARE-PIANETA $K_{sp1}, K_{sp2}, K_{sp3}$ PER $q = 7e - 3\ m$

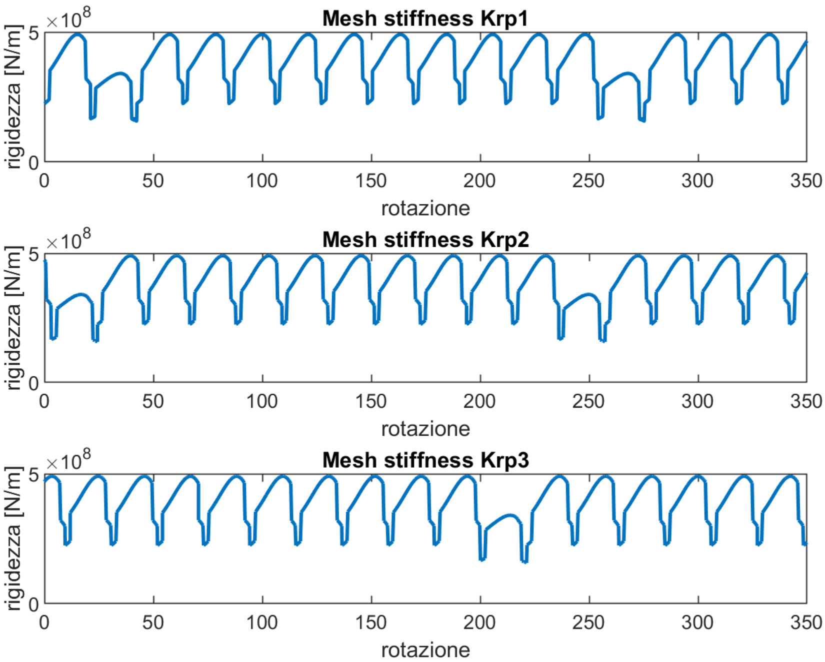


FIGURA 4.12 – RIGIDEZZE DI INGRANAMENTO CORONA-PIANETA $K_{rp1}, K_{rp2}, K_{rp3}$ PER $q = 7e - 3\ m$

Si possono osservare le brusca variazioni nella rigidezza nel momento in cui l'ingranamento interessa il dente criccato (del solare per l'ingranamento solare-pianeta e del pianeta per l'ingranamento corona-pianeta). Il caso limite si registra quando la dimensione del difetto raggiunge il valore tale per cui il dente si rompe completamente (rottura fragile) determinando di conseguenza una rigidezza di ingranamento nulla (*Figura 4.13*).

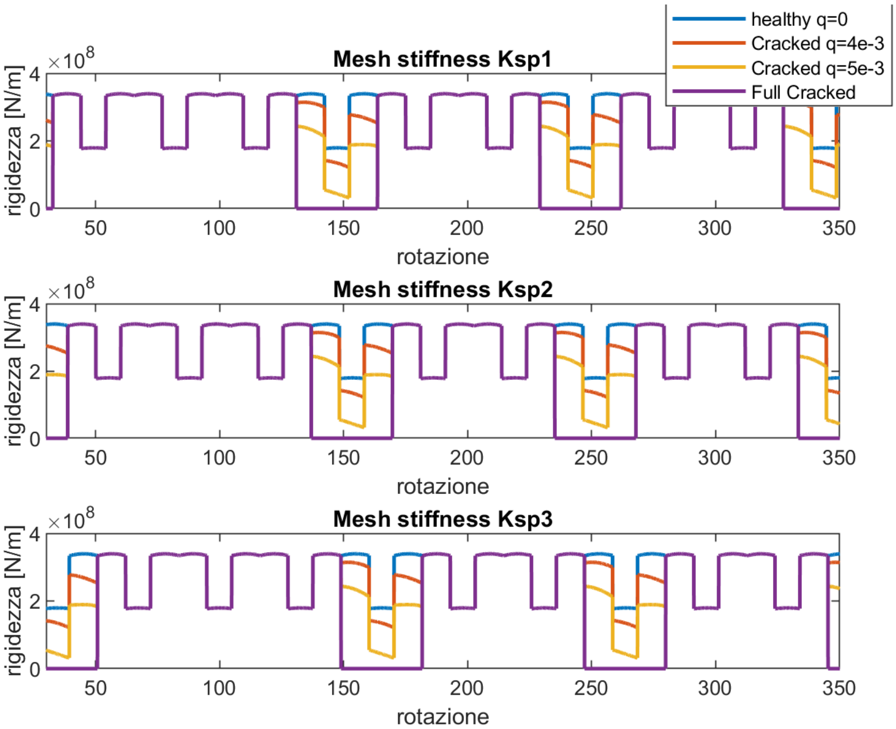


FIGURA 4.13 – RIGIDEZZE DI INGRANAMENTO SOLARE-PIANETA FINO A COMPLETA ROTTURA DEL DENTE (CURVA VIOLA)

4.1.1.2.4 Rigidezza e coefficiente di attrito

Nel *Capitolo 3* è stata trattata nel dettaglio l'influenza delle diverse forme di dissipazione, in particolare dell'attrito di strisciamento lungo la linea di azione, sulla dinamica del riduttore epicicloidale.

Risulta però interessante approfondire l'effetto che il coefficiente di attrito μ ha sulla rigidezza di ingranamento, modificando le espressioni delle rigidezze a flessione (K_b), a taglio (K_s) e assiale di compressione (K_a) [56].

Per l'ingranamento solare-pianeti, valgono le seguenti espressioni:

$$\frac{1}{K_b} = \int_0^d \frac{((d-x)*(\cos(\alpha_m)+\mu*H_e sin(\alpha_m)) - h*(sin(\alpha_m)-\mu*H_e sin(\alpha_m))^2}{EI_X} 4a \tag{4.34}$$

$$\frac{1}{K_s} = \int_0^d \frac{1.2*(\cos(\alpha_m)+\mu*H_e sin(\alpha_m))^2}{GA_X} dx \tag{4.35}$$

$$\frac{1}{K_a} = \int_0^d \frac{(\sin(\alpha_m)-\mu*H_e sin(\alpha_m))^2}{EA_X} dx \tag{4.36}$$

Con H_e uguale ad +1 per il tratto di accesso e pari a -1 per il tratto di recesso.

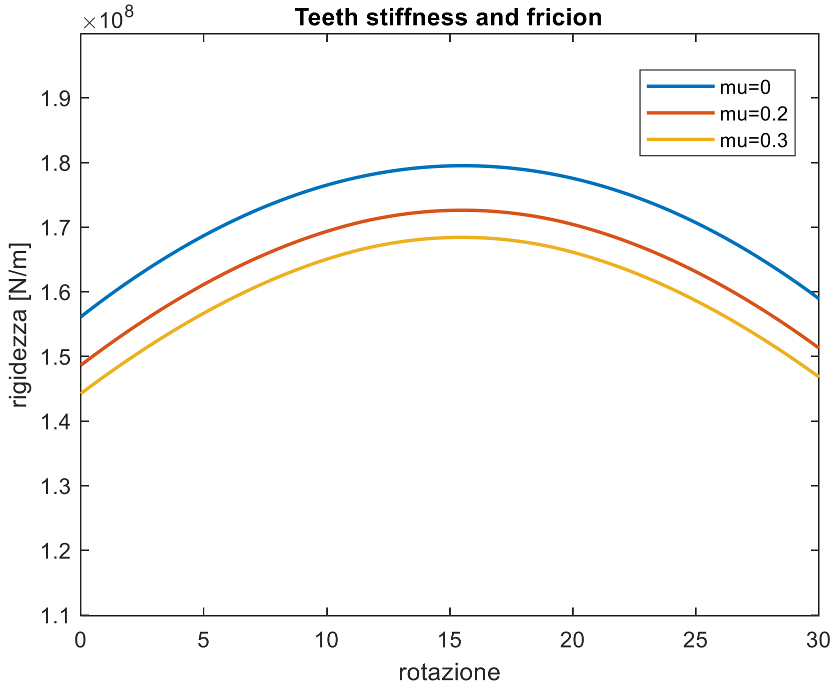


FIGURA 4.14 – RIGIDEZZA DELLA COPPIA DI DENTI ESTERNO-ESTERNO AL VARIARE DI μ

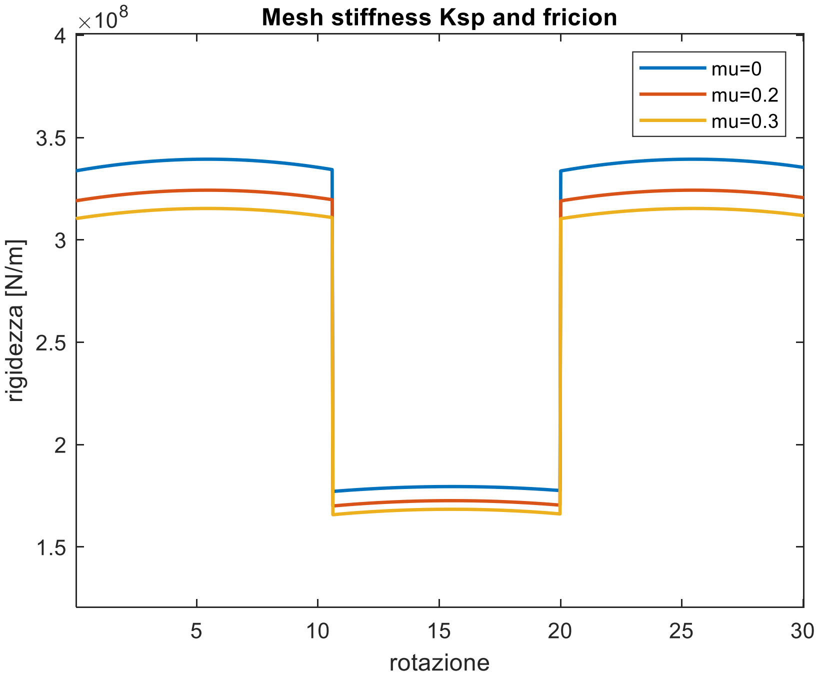


Figura 4.15 – Rigidezza di ingranamento solare-pianeta al variare di μ

Per l'ingranamento corona-pianeti:

$$\frac{1}{K_b} = \int_0^d \frac{((d-x)*(\cos(\alpha_m)-\mu*H_e sin(\alpha_m))-h*(sin(\alpha_m)+\mu*H_e sin(\alpha_m))^2}{EI_X}dx \quad (4.37)$$

$$\frac{1}{K_s} = \int_0^d \frac{1.2*(\cos(\alpha_m)-\mu*H_e sin(\alpha_m))^2}{GA_X}dx \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{K_a} = \int_0^d \frac{(\sin(\alpha_m)+\mu*H_e sin(\alpha_m))^2}{EA_X}dx \quad (4.39)$$

Con H_e uguale ad +1 per il tratto di accesso e pari a -1 per il tratto di recesso.

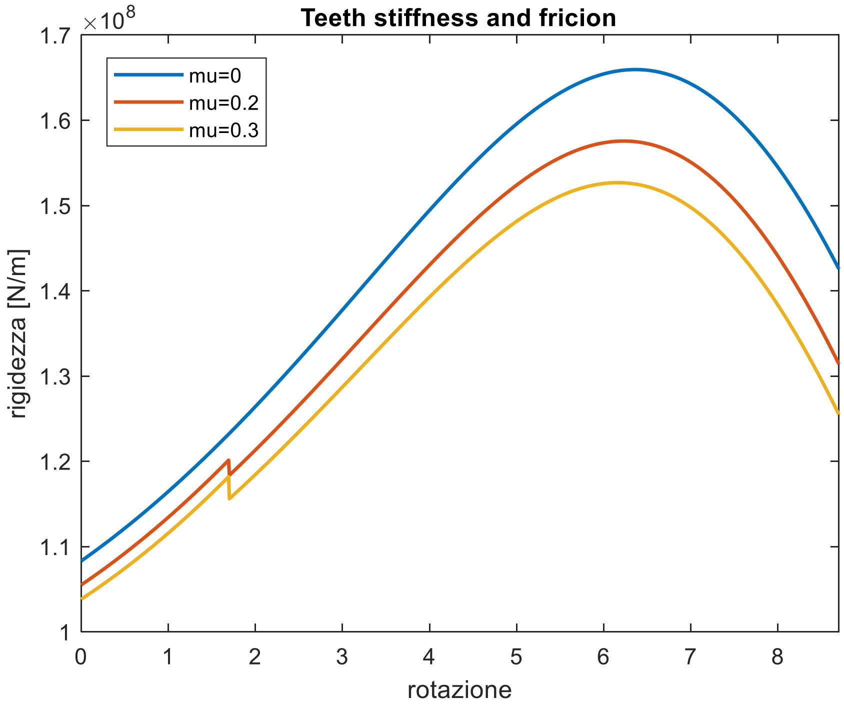


FIGURA 4.16 – RIGIDEZZA DELLA COPPIA DI DENTI ESTERNO-INTERNO AL VARIARE DI μ

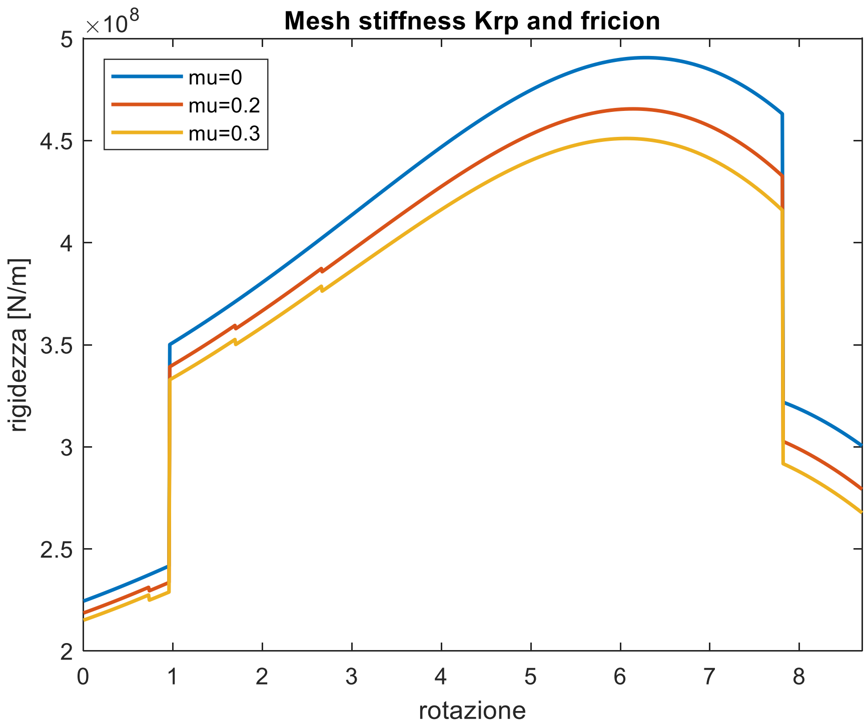


FIGURA 4.17 - RIGIDEZZA DI INGRANAMENTO CORONA-PIANETA AL VARIARE DI μ

Dall'analisi degli andamenti sopra riportati si nota come, all'aumentare del coefficiente di attrito, si ha una riduzione della rigidezza. Di conseguenza, l'attrito radente influenza la dinamica del riduttore epicicloidale sia generando coppie resistenti che riducendo la rigidezza di ingranamento.

4.1.1.3 Propagazione della cricca

La propagazione della fessura può essere efficacemente descritta dal diagramma riportato in *Figura 4.18* [44], dove N è il numero del ciclo di carico, a è la lunghezza della fessura e ΔK è la differenza tra il fattore di intensità della sollecitazione massimo e minimo durante il carico di fatica.

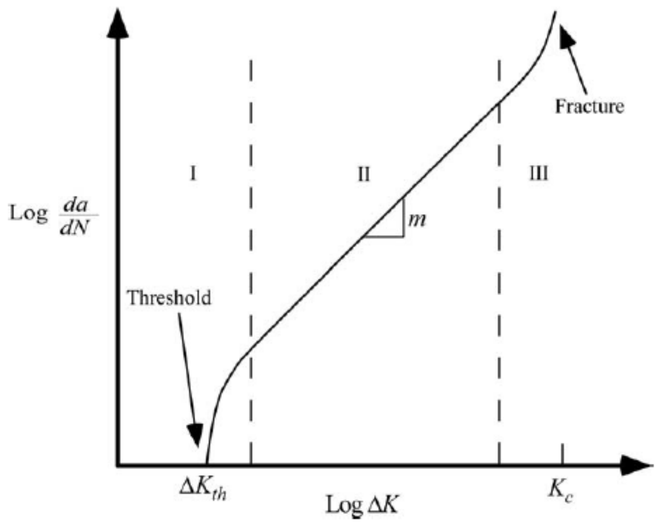


FIGURA 4.18 – DIAGRAMMA PROPAGAZIONE CRICCA

La prima parte del diagramma (regione 1) rappresenta il processo di crescita della micro-cricca descritto in precedenza; in questa fase la propagazione della cricca è pressoché nulla fino al superamento di una soglia del fattore di intensificazione delle tensioni ΔK_{th}, oltre la quale la velocità di propagazione aumenta sensibilmente.

Quando la lunghezza del difetto diventa convenzionalmente superiore a circa 1 mm assume il nome di "fessura lunga" ed inizia una nuova fase del suo processo di crescita. In questa seconda fase (regione 2) la velocità di propagazione è descritta dalla *Legge di Paris*.

Al proseguire della propagazione (regione 3), dal momento che la dimensione della cricca raggiunge il valore critico a_{cr} si entra nella fase finale, in cui la velocità di crescita aumenta sensibilmente e la frattura fragile sopraggiunge pochissimo tempo dopo che il fattore di intensificazione delle tensioni arriva al valore K_c.
La legge di Paris consente di ottenere risultati affidabili durante la seconda fase di propagazione, ma non è in grado di descrivere gli altri regimi di crescita, di modellare la dipendenza fra il rapporto di propagazione e il rapporto di sollecitazione R e non considera l'influenza del fenomeno della chiusura plastica. Al fine di superare i limiti elencati, la relazione di calcolo della velocità di propagazione del difetto più utilizzata prende il nome di equazione di NASGRO [57], in quanto descrive perfettamente tutte le fasi della vita a fatica.

$$\frac{da}{dN} = C\left[\left(\frac{1-f}{1-R}\right)\Delta K\right]^n \frac{\left(1-\frac{\Delta K_{th}}{\Delta K}\right)^p}{\left(1-\frac{\Delta K}{(1-R)\Delta K_{crit}}\right)^q} \tag{4.40}$$

Dove:

- C, m, p e q sono tutti empiricamente determinati e caratteristici di ciascun materiale;
- R rappresenta il rapporto tra il minimo e il massimo del carico ciclico applicato e prende il nome di *stress ratio*.

La funzione f descrive gli effetti della chiusura della cricca ed è definita come [58]:

$$f = \begin{cases} \max(R, A_0 + A_1 * R + \ A_2 * R^2 + A_3 & R \geq 0 \\ A_0 + A_1 * R & -2 \leq R < 0 \\ A_0 - \ 2 * A_1 & R < -2 \end{cases} \tag{4.41}$$

Con i coefficienti:

$$A_0 = (0.825 - 0.34 * \alpha + 0.05 * \alpha^2) * (\cos(\frac{\pi}{2\frac{S_{max}}{\sigma_0}}))^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$A_1 = (0.415 - 0.071 * \alpha) * \frac{S_{max}}{\sigma_0} \tag{4.42}$$

$$A_2 = 1 - A_0 - A_1 - A_3$$
$$A_3 = 2 * A_0 + A_1 - 1$$

Il valore ΔK_{th} per il quale non si ha propagazione significativa della cricca è dato da:

$$\Delta K_{th} = \Delta K_0 * \frac{\sqrt{\frac{a}{a + a_0}}}{\left(\frac{1 - f}{(1 - A_0) * (1 - R)}\right)^{1 + C_{th} * R}} \tag{4.43}$$

Dove:

- α è il *plane stress constraint factor*;
- R è lo *stress ratio*: il rapporto tra il minimo e il massimo del carico ciclico;
- ΔK_0 è il valore soglia per R=0;
- C_{th} è un coefficiente di soglia;
- $\frac{S_{max}}{\sigma_0}$ rappresenta il rapporto fra la tensione massima e la tensione di snervamento.

Nei grafici riportati di seguito (*Figura 4.19* e *4.20*) è possibile osservare le differenze fra il modello di propagazione di Paris e quello di NASGRO. Per entrambi i modelli è stato in prima approssimazione considerato un carico ad ampiezza costante, in realtà il componente aeronautico è soggetto a determinati cicli di lavoro che saranno diversi a seconda delle condizioni.

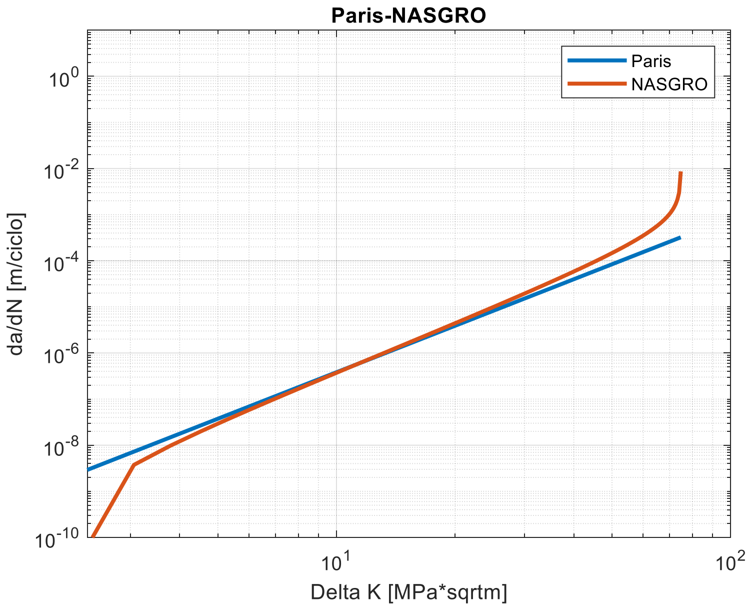


FIGURA 4.19 – DIAGRAMMA PROPAGAZIONE DELLA CRICCA CON PARIS E NASGRO

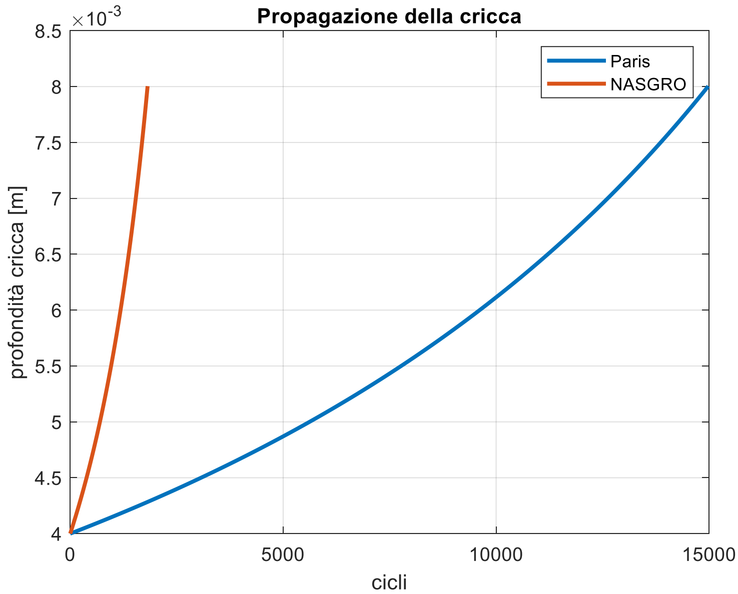


FIGURA 4.20 – PROFONDITÀ DELLA CRICCA E NUMERO DI CICLI CON PARIS E NASGRO

4.1.1.3.1 Carico sul dente

Il carico che grava sul dente criccato è di pura tensione, si ripete ogni volta che il dente è interessato all'ingranamento ed ha ampiezza massima e minima dipendente della posizione del punto di applicazione della forza scambiata fra la dentatura (risultante ad ogni istante di simulazione) lungo il segmento dei contatti.

Mediante i modelli Simulink di seguito riportati, è stato stimato il carico agente sul dente e lo stato tensionale dello stesso in funzione della dimensione raggiunta dalla cricca.

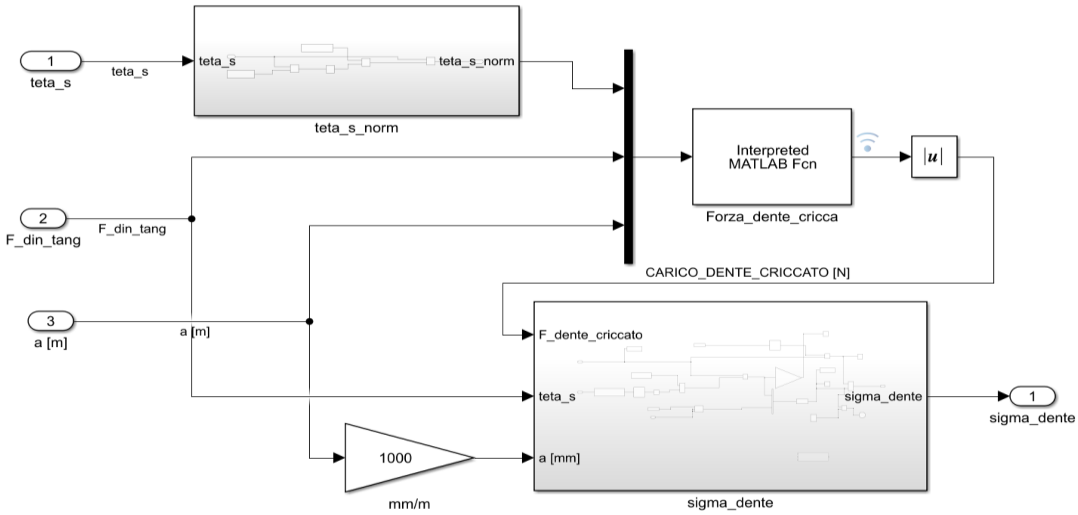


FIGURA 4.21 – MODELLO DI CALCOLO CARICO AGENTE SUL DENTE CON CRICCA

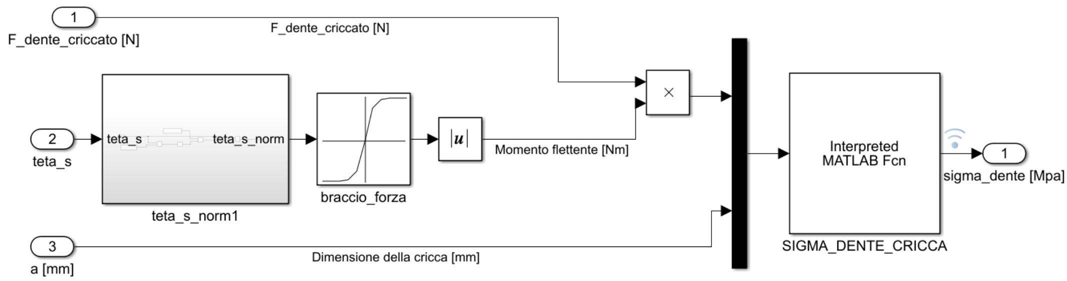


FIGURA 4.22 - MODELLO DI CALCOLO DELLE TENSIONI AGENTI SUL DENTE CON CRICCA

In funzione dello stato tensionale della sezione del dente, il modello di propagazione della cricca di Paris e NASGRO è stato implementato all'interno dell'ambiente Simulink (*Figura 4.23*), in modo da calcolare in ogni istante di simulazione la dimensione raggiunta dal difetto.

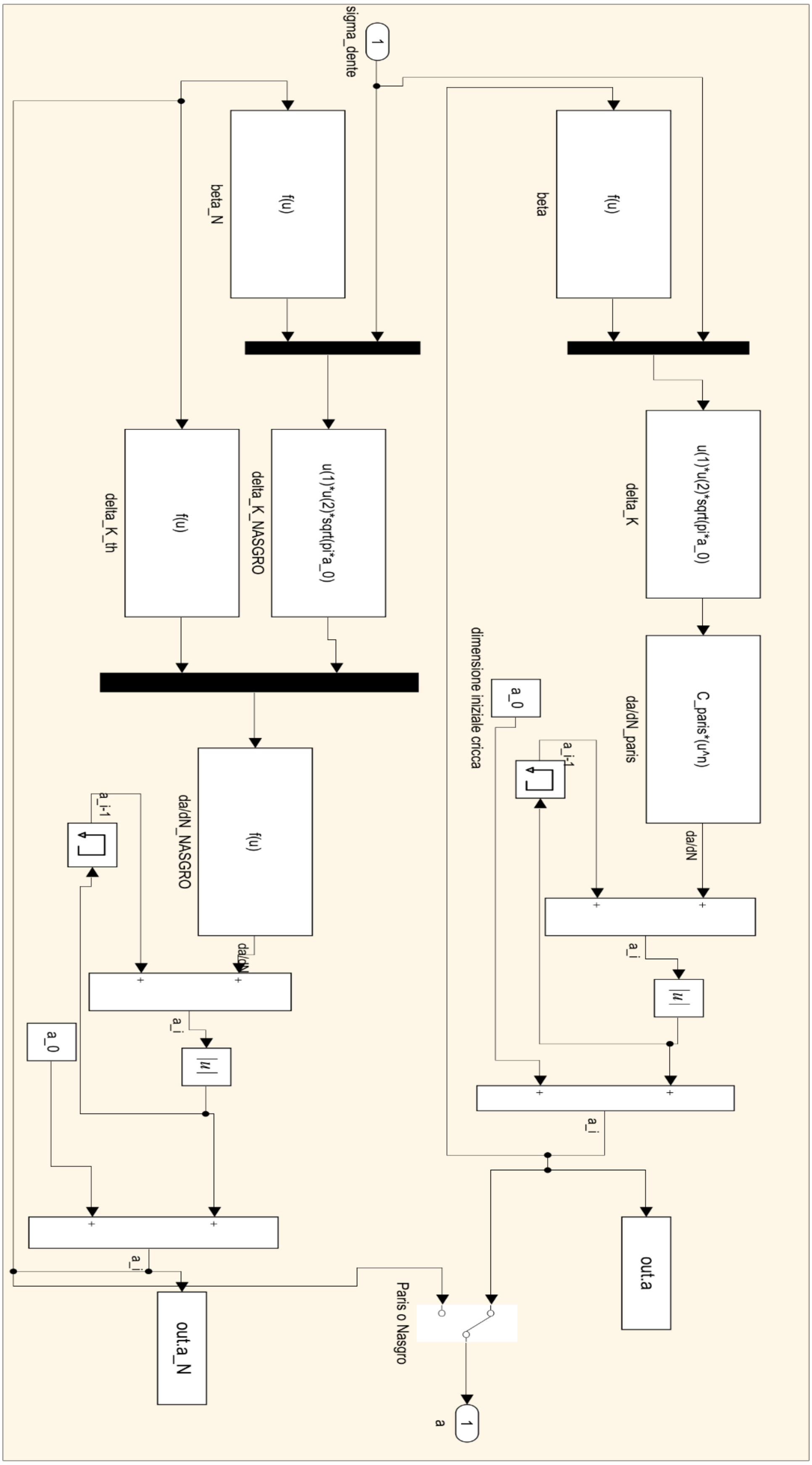


FIGURA 4.23 – MODELLI DI PROPAGAZIONE DI PARIS E NASGRO

4.1.1.4 Condizioni non nominali

La fatica per flessione dei denti è influenzata da tre principali condizioni non nominali quali sovraccarichi, sovraccarichi di segno negativo (o di compressione) (o sottocarichi) e corrosione.

Gli effetti del sovraccarico sulla propagazione delle cricche da fatica sono abbastanza controintuitivi, infatti quando viene applicato un sovraccarico elevato il primo effetto atteso è un aumento improvviso del rapporto di crescita. Tuttavia, dopo un breve transitorio, il rapporto di propagazione diminuisce e si verifica il fenomeno del ritardo, come mostrato nella *Figura 4.24.*

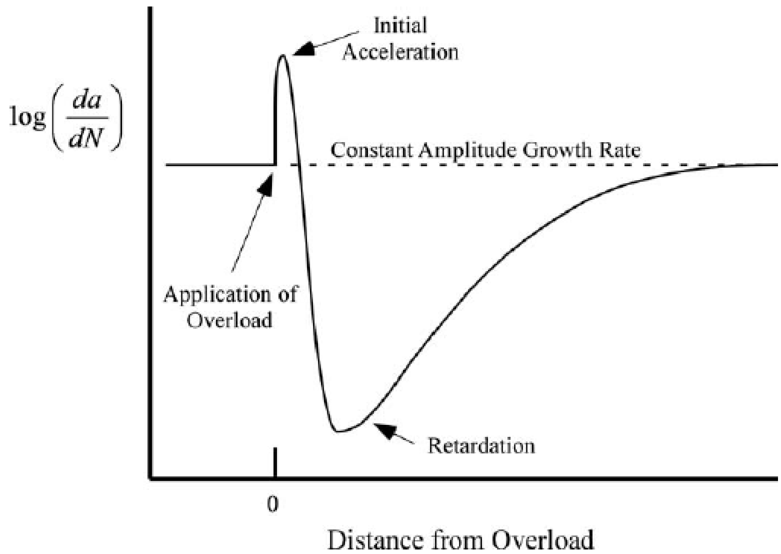


FIGURA 4.24 – FENOMENO DEL RITARDO DOPO SOVRACCARICO

Il fenomeno del ritardo dipende dal verificarsi della chiusura della cricca a causa di tensioni di compressione residue in punta (*Figura 4.25*). Si deve considerare che la chiusura delle cricche negli ingranaggi non avviene solo dopo l'applicazione di sovraccarichi, ma anche durante il funzionamento a carico nominale, infatti quando il dente difettoso riceve il carico, la cricca si apre gradualmente fino a raggiungere il punto di massimo carico; quindi, quando il carico viene trasferito ai denti in presa vicini, la fessura tende a chiudersi a causa delle tensioni di compressione residue indotte [59].

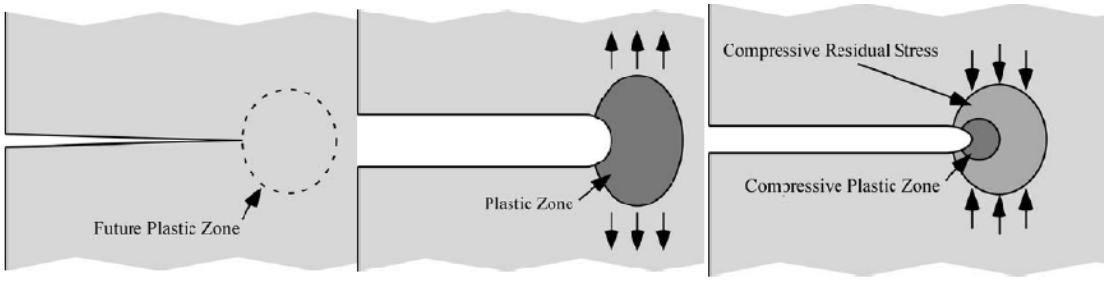


FIGURA 4.25 – STATO DI COMPRESSIONE RESIDUA SULLA PUNTA DELLA CRICCA CON SOVRACCARICO

Negli ingranaggi che hanno a che fare con velocità variabile e direzione del carico variabile, come nel caso di impiego negli attuatori aeronautici elettromeccanici *sottocarichi*, definiti come carichi improvvisi di grande entità e segno convenzionalmente negativo, possono essere considerati come l'equivalente in compressione del sovraccarico (di trazione).

Si consideri ad esempio un ingranaggio funzionante con un dente affetto da una crescente cricca da fatica e si supponga di applicare un'improvvisa inversione del verso di rotazione imposta dal propulsore o una imprevista trasformazione del carico da resistente a superamento. Il lato del dente precedentemente sottoposto a tensioni di trazione diventa improvvisamente oggetto di compressione.

L'effetto sulla crescita della fessura è esattamente opposto a quello legato ai sovraccarichi, infatti il primo risultato è una diminuzione della velocità di propagazione della cricca a causa delle elevate sollecitazioni di compressione che tendono a chiuderla. Tuttavia, la tensione residua di trazione agisce per aprire la cricca, accelerandone di conseguenza la propagazione quando viene nuovamente applicato un carico di trazione (*Figura 4.26*).

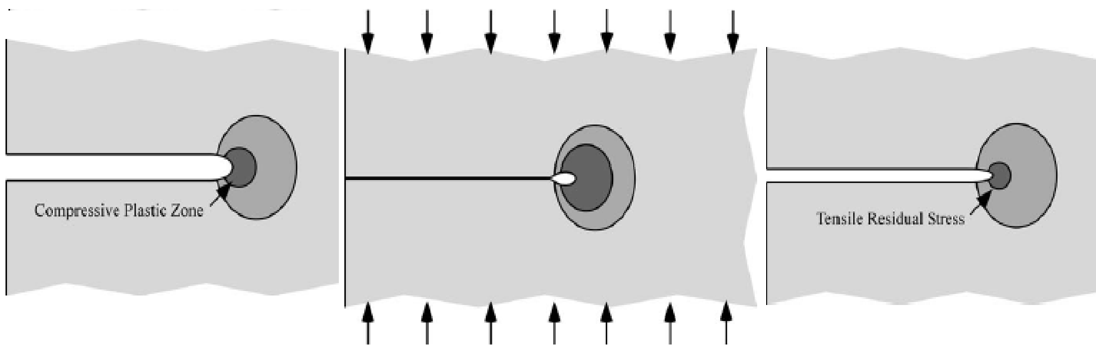


FIGURA 4.26 – STATO DI TENSIONE RESIDUA SULLA PUNTA DELLA CRICCA CON SOTTOCARICO

La corrosione è l'ultima condizione che influenza il comportamento di propagazione delle cricche. Costituisce uno dei tipi più pericolosi di usura superficiale degli ingranaggi, ma l'effetto sulla crescita della cricca può essere ancora più minaccioso [44]. La zona della cricca è infatti un'area occlusa in cui tende a formarsi una maggiore concentrazione di agenti corrosivi con il procedere della reazione chimica con l'ossigeno e il materiale metallico degli ingranaggi. Il meccanismo che regola la fatica corrosiva non è ancora ben compreso, nonostante sono state proposte varie teorie [44], che concordano che il principale effetto della corrosione nelle cricche da fatica è una sensibile accelerazione del suo grado di propagazione.

Generalmente nella modellazione della fatica da corrosione vengono considerati due componenti, una dipendente dal numero di cicli mentre l'altra dal tempo. La componente dipendente dal ciclo è associata ad una semplice accelerazione del rapporto di propagazione della cricca, normalmente descritta mediante un coefficiente correttivo Φ. La componente dipendente dal tempo è correlata alla frequenza di carico f e ad un termine legato al rapporto di propagazione medio per un ciclo di carico $(\frac{d\bar{a}}{dN})_{EAC}$.

L'espressione della velocità di propagazione del difetto legata alla corrosione, che include la dipendenza dal numero di cicli e la dipendenza dal tempo, viene di seguito riportata.

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{corrosive} = \Phi * \left(\frac{da}{dN}\right)_{inert} + \frac{1}{f} * \left(\frac{d\bar{a}}{dN}\right)_{EAC} \tag{4.44}$$

4.1.1.5 Interazioni con i guasti di altri componenti

Il cedimento per fatica dovuto alla flessione dei denti è influenzato dallo stato di salute del lubrificante, poiché un olio o grasso fortemente degradato tende ad accelerare la velocità di propagazione della cricca per mezzo della corrosione. La rottura meccanica di altri componenti o l'improvviso inceppamento delle trasmissioni meccaniche può provocare la generazione di minacciosi sovraccarichi: se la cricca è già sufficientemente avanzata è possibile che l'accelerazione della sua crescita causata dai sovraccarichi possa portare alla rottura fragile finale del dente.

Capitolo 5

5 Simulazione

5.1 Introduzione

Nel *Capitolo 4* è stata presentata la modellazione della degradazione e la relativa influenza sui parametri fisici del sistema. In particolare, è stata individuata una relazione tra la nucleazione e crescita di una cricca alla radice del dente e la variazione di rigidezza dello stesso, con conseguente diminuzione della rigidezza di ingranamento.
Il quesito fondamentale a cui è necessario rispondere deriva dalla necessità di risalire all'entità dei guasti non potendo misurare direttamente né il guasto (dimensione raggiunta dalla cricca) né la sua diretta conseguenza (progressiva riduzione della rigidezza di ingranamento).

5.2 Degradazione nel riduttore epicicloidale

In *Figura 5.1* e *5.2* sono mostrati i modelli Simulink di stima delle rigidezze di ingranamento in presenza di degradazione, le quali sono ricavate, in ogni istante di simulazione, a partire dalla conoscenza della dimensione raggiunta dalla cricca e della rotazione della ruota solare.

Le rigidezze così ricavate moltiplicano gli spostamenti lungo la linea di ingranamento determinando le forze elastiche scambiate fra i denti del riduttore.

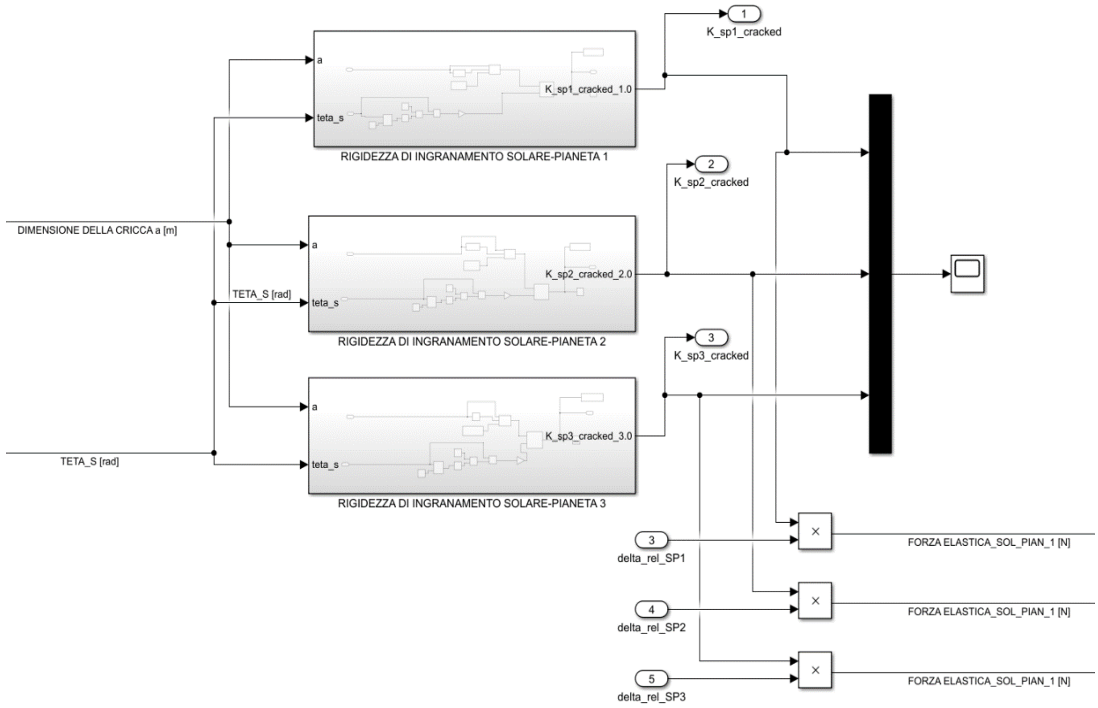


FIGURA 5.1 – RIGIDEZZE DI INGRANAMENTO IN PRESENZA DI CRICCA SUL DENTE DEL SOLARE

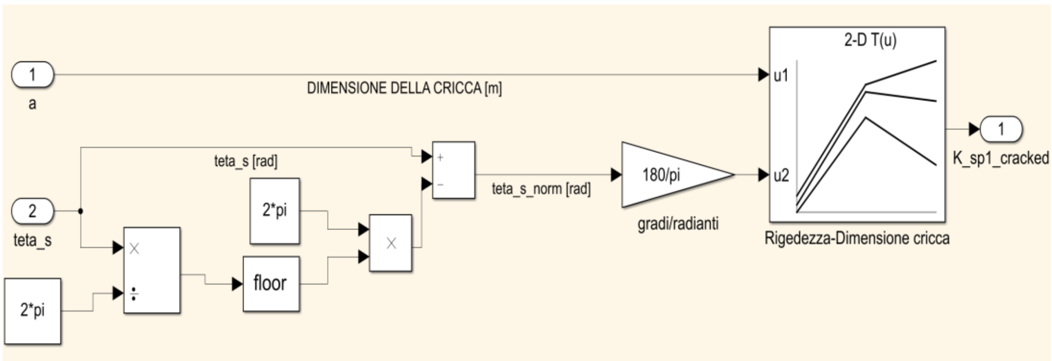


FIGURA 5.2 – RIGIDEZZA DI INGRANAMENTO $K_{s\_p1\_cracked}$

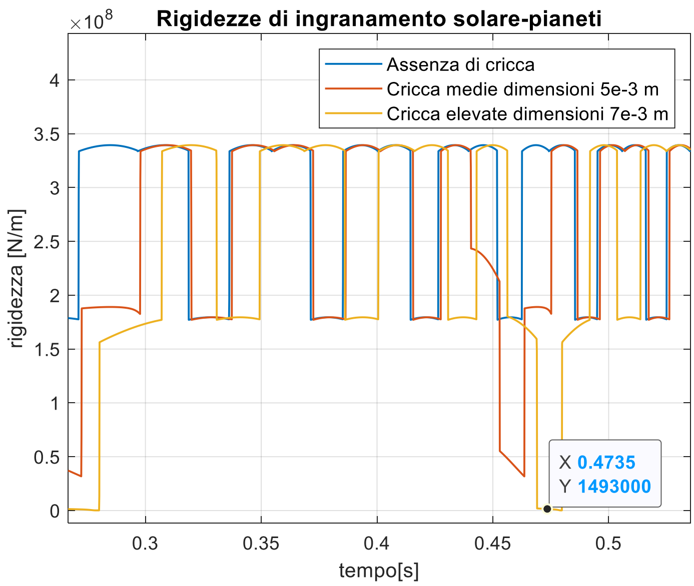


FIGURA 5.3 - RIGIDEZZA DI INGRANAMENTO $K_{s\_p1\_cracked}$ E DIMENSIONI CRICCA

5.2.1 Modello del riduttore nel servocomando elettromeccanico EMA

Il modello del riduttore è stato inserito all'interno del blocco trasmissione meccanica (*Figura 5.4*) del modello completo di un attuatore elettromeccanico EMA (*Figura 5.5*) del sistema avionico.

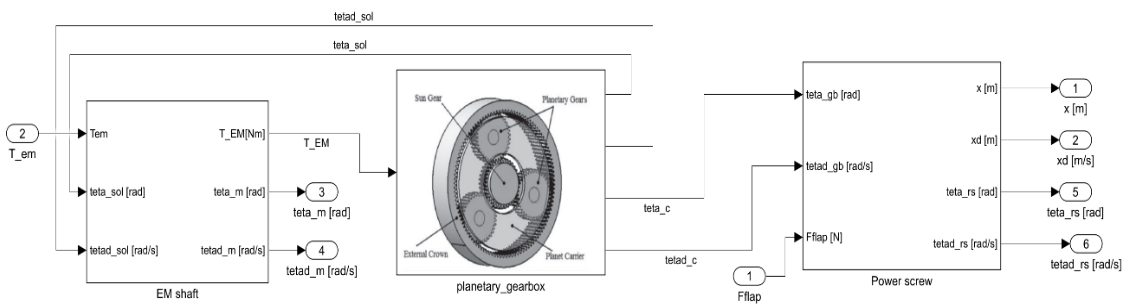


FIGURA 5.4 – TRASMISSIONE MECCANICA ALL'INTERNO DEL MODELLO EMA

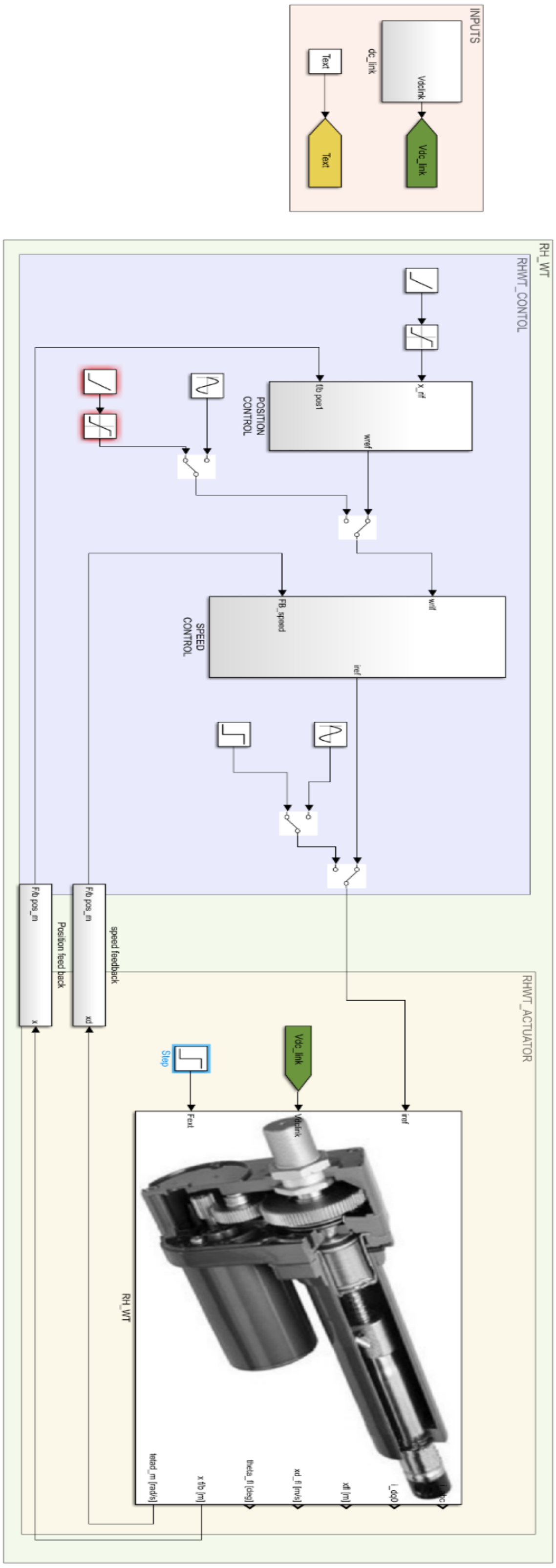


FIGURA 5.5 - MODELLO COMPLETO EMA

I dati acquisiti dal sistema avionico sono:

- profili di corrente del motore elettrico *brushless* trifase;
- coppia erogata dal motore elettrico e dal portatreno;
- profili di velocità e accelerazione del portatreno e dei pianeti;
- velocità e spostamento lineare della vite a ricircolo.

5.3 Simulazione effetto degradazioni

Il primo passo consiste nell'effettuare le diverse simulazioni in condizioni "sane" (assenza di guasto) e in condizioni "degradate" (presenza di cricca sul dente). Uno sguardo ai risultati ottenuti può essere vantaggioso per identificare in che modo i segnali acquisiti vengano modificati dalle degradazioni introdotte nel modello. A tale scopo, sono confrontati tra loro i risultati delle simulazioni in assenza di difetto e per diversi livelli di severità del guasto.

5.3.1 Simulazione del riduttore epicicloidale

Mediante la simulazione del riduttore, sia in assenza che in presenza di degradazione, si è ricercata l'influenza del difetto:

- sulla coppia in uscita dal portatreno;
- sugli andamenti di velocità e accelerazione dell'albero di ingresso e di uscita;
- sui profili di accelerazione dei pianeti.

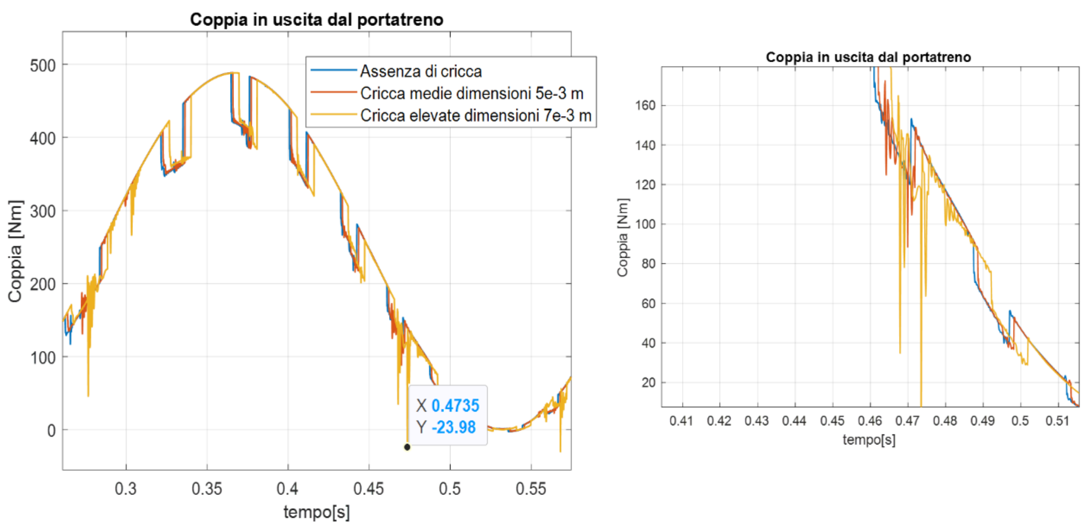


FIGURA 5.6 – COPPIA IN USCITA DAL PORTATRENO E DIMENSIONI DELLA CRICCA

All’aumentare dello stato di avanzamento della cricca la coppia in uscita dal portatreno presenta delle oscillazioni sempre più marcate, le quali si presentano nel momento in cui il dente criccato della ruota solare partecipa all’ingranamento.

5.3.1.1 Profili di accelerazione e degradazione

Vengono di seguito riportate le rigidezze di ingranamento solare-satelliti e gli andamenti delle accelerazioni del solare, del portatreno e dei tre pianeti per tre stadi di avanzamento del difetto.

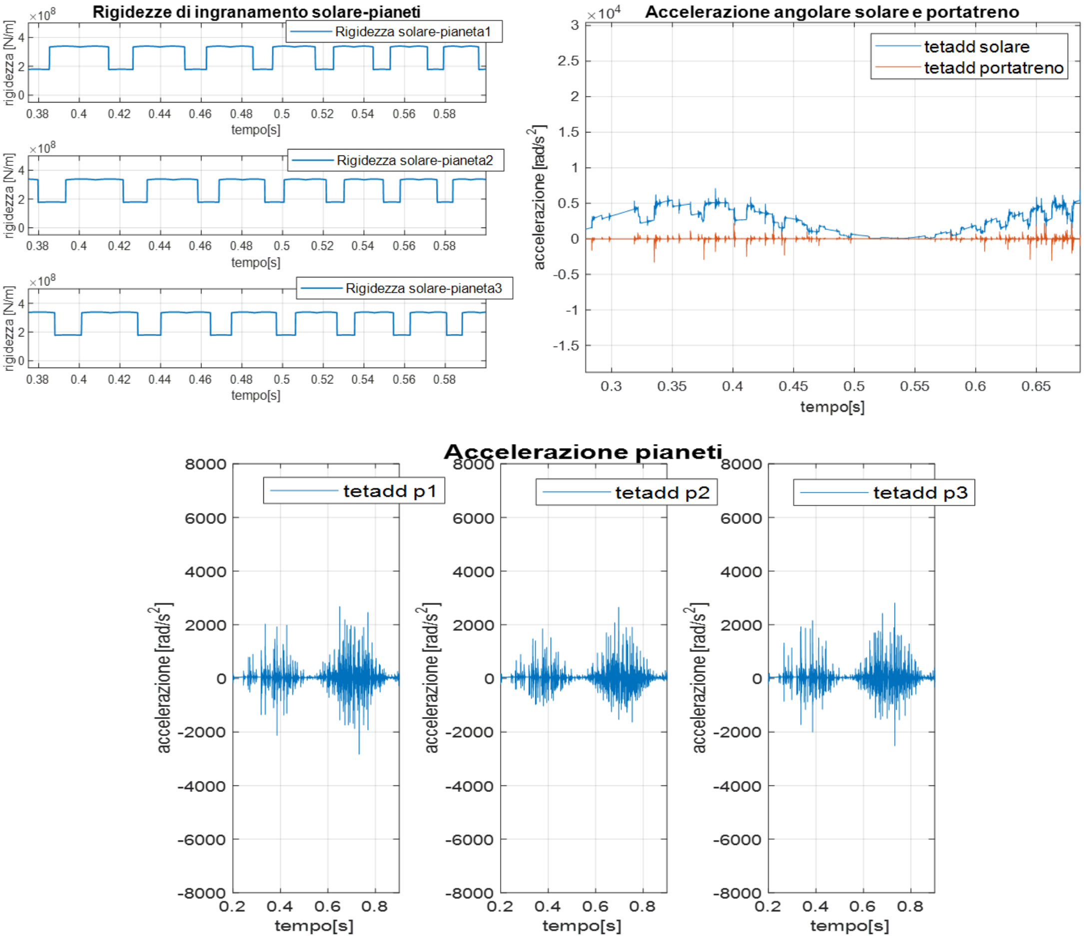
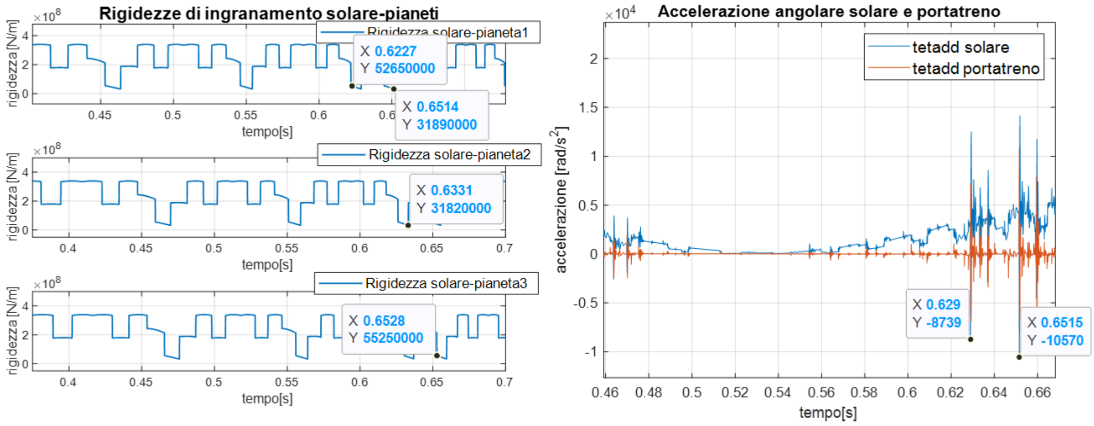


FIGURA 5.7 RIGIDEZZE DI INGRANAMENTO E PROFILI DI ACCELERAZIONE IN ASSENZA DI DIFETTO



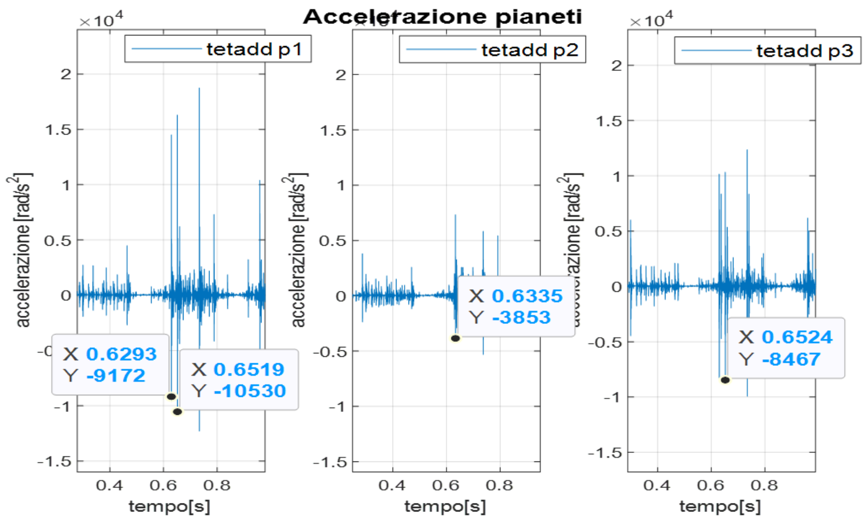


FIGURA 5.8 - RIGIDEZZE DI INGRANAMENTO E PROFILI DI ACCELERAZIONE CON CRICCA DI MEDIE DIMENSIONI 5E-3 M

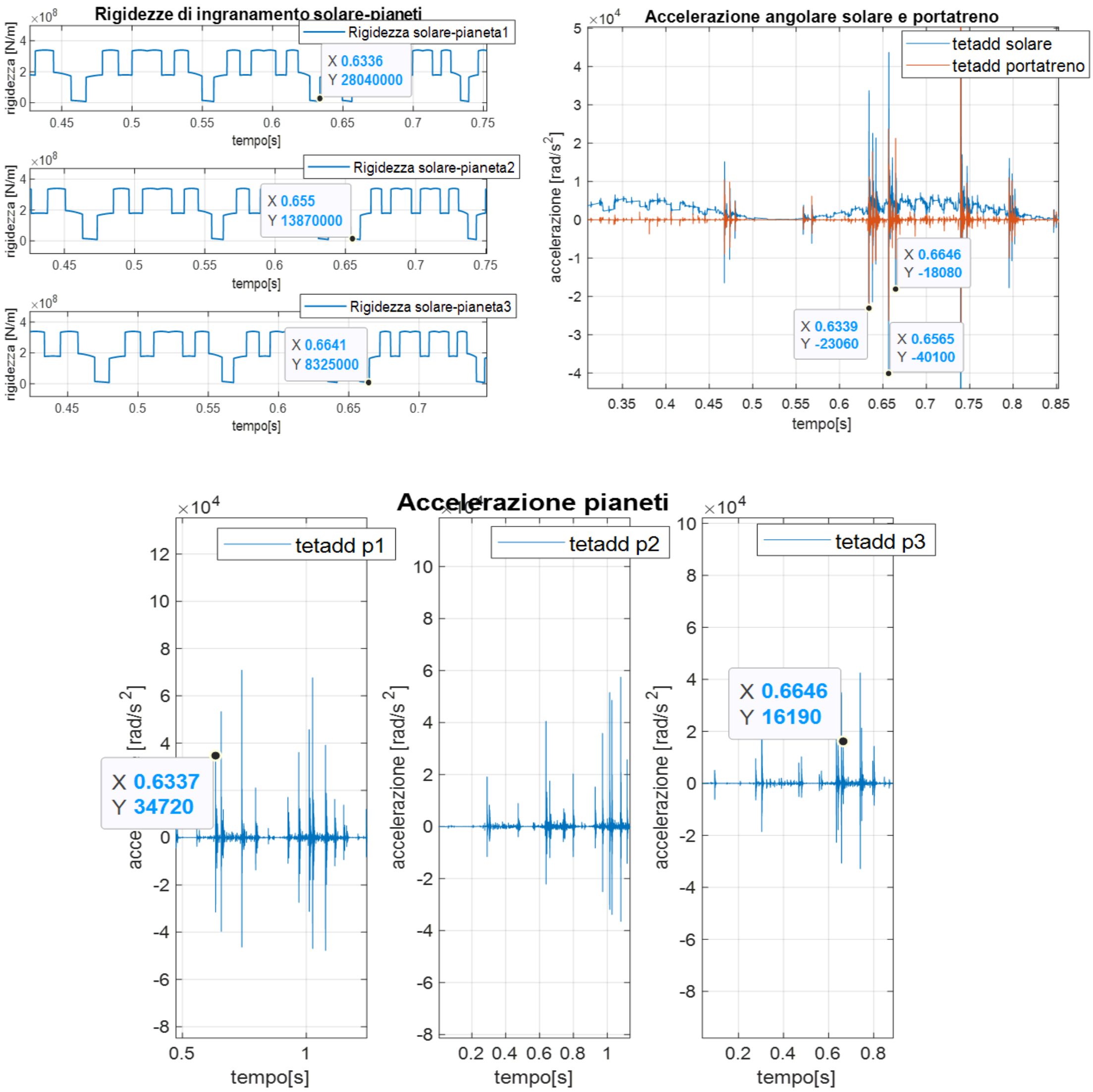


FIGURA 5.9 - RIGIDEZZE DI INGRANAMENTO E PROFILI DI ACCELERAZIONE CON CRICCA DI ELEVATE DIMENSIONI 7E-3 M

In prossimità delle cadute di rigidezza, che si presentano quando il dente criccato della ruota solare partecipa all'ingranamento, si rilevano, proporzionalmente alla dimensione del difetto, significativi incrementi delle accelerazioni del portatreno e della ruota solare: i picchi di accelerazione quadruplicano con il passaggio da dente "sano" a dente con cricca di medie dimensioni. Anche le accelerazioni dei pianeti subiscono delle evidenti oscillazioni, shiftate di un certo Δt a causa delle relazioni di fase negli ingranamenti, che si manifestano nel momento in cui gli stessi ingranano con il dente criccato del solare: si passa da picchi di 3000 rad/s^2 in assenza di cricca fino a 7e4 rad/s^2 con difetto di elevate dimensioni.

Le repentine oscillazioni dei profili di accelerazione, oltre che dipendere dalla diminuzione della rigidezza, sono dovute anche alle forti discontinuità del diagramma di rigidezza di ingranamento causate a loro volta dall'alternanza di accoppiamento fra denti senza difetto e denti con presenza di degradazione.

5.3.2 Simulazioni del riduttore epicicloidale nel sistema EMA

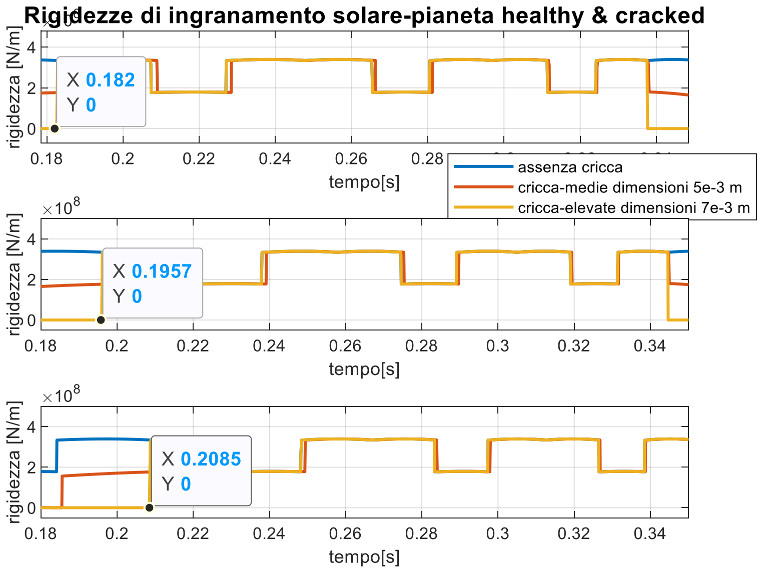


FIGURA 5.10 – RIGIDEZZE DI INGRANAMENTO $K_{s\_p1\_cracked}$, $K_{s\_p2\_cracked}$, $K_{s\_p3\_cracked}$

Nella *Figura 5.11* è mostrato l'andamento della coppia in uscita dal portatreno per i diversi livelli di severità del guasto. La variazione più evidente della coppia si ha per dimensioni elevate della cricca, per la quale si verifica un evidente oscillazione rispetto alle condizioni "sane".

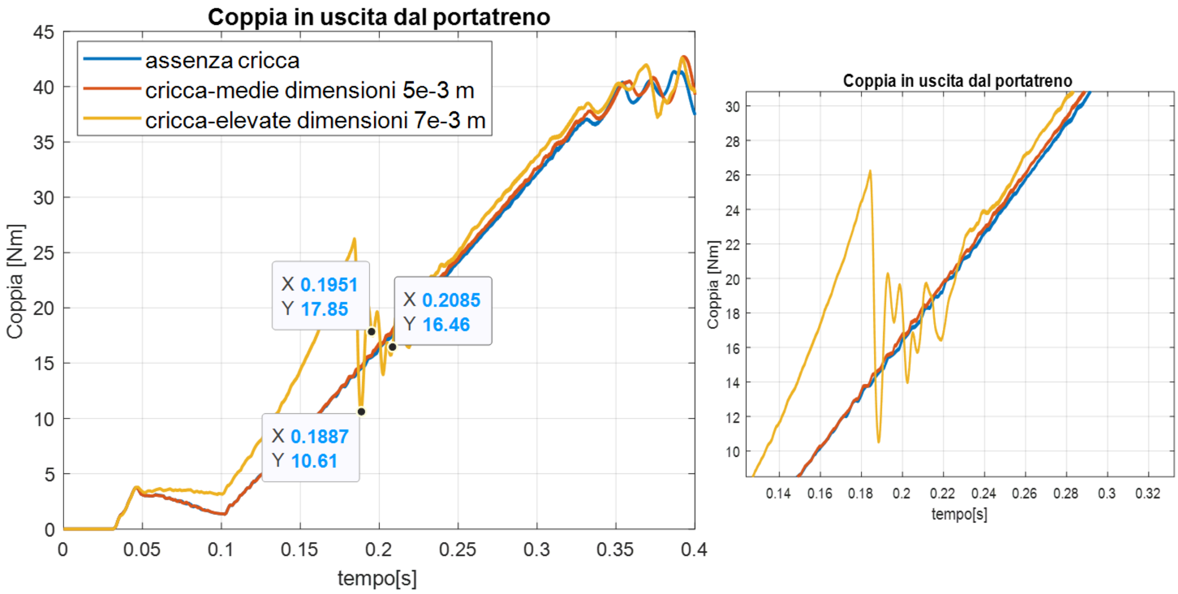


FIGURA 5.11 – COPPIA IN USCITA DAL PORTATRENO E DIMENSIONI DELLA CRICCA

5.3.2.1 *Profili di accelerazione*

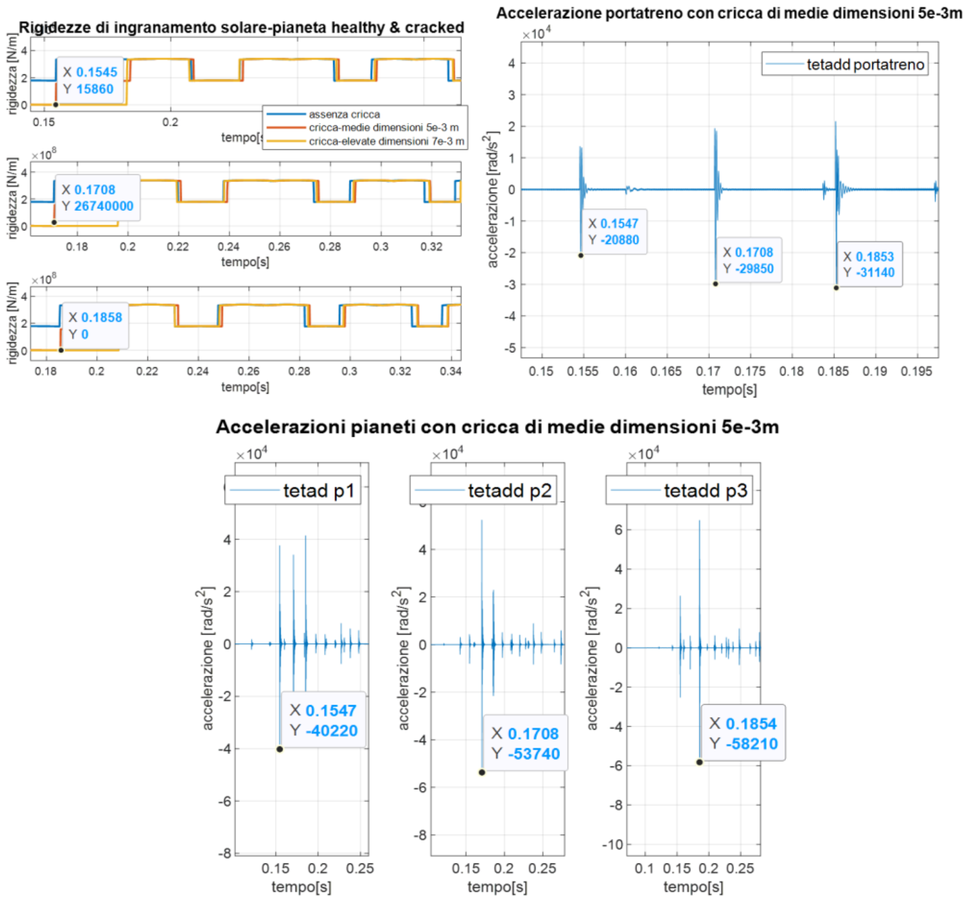


FIGURA 5.12 – PROFILI DI ACCELERAZIONE CON CRICCA DI MEDIE DIMENSIONI 5E-3 M

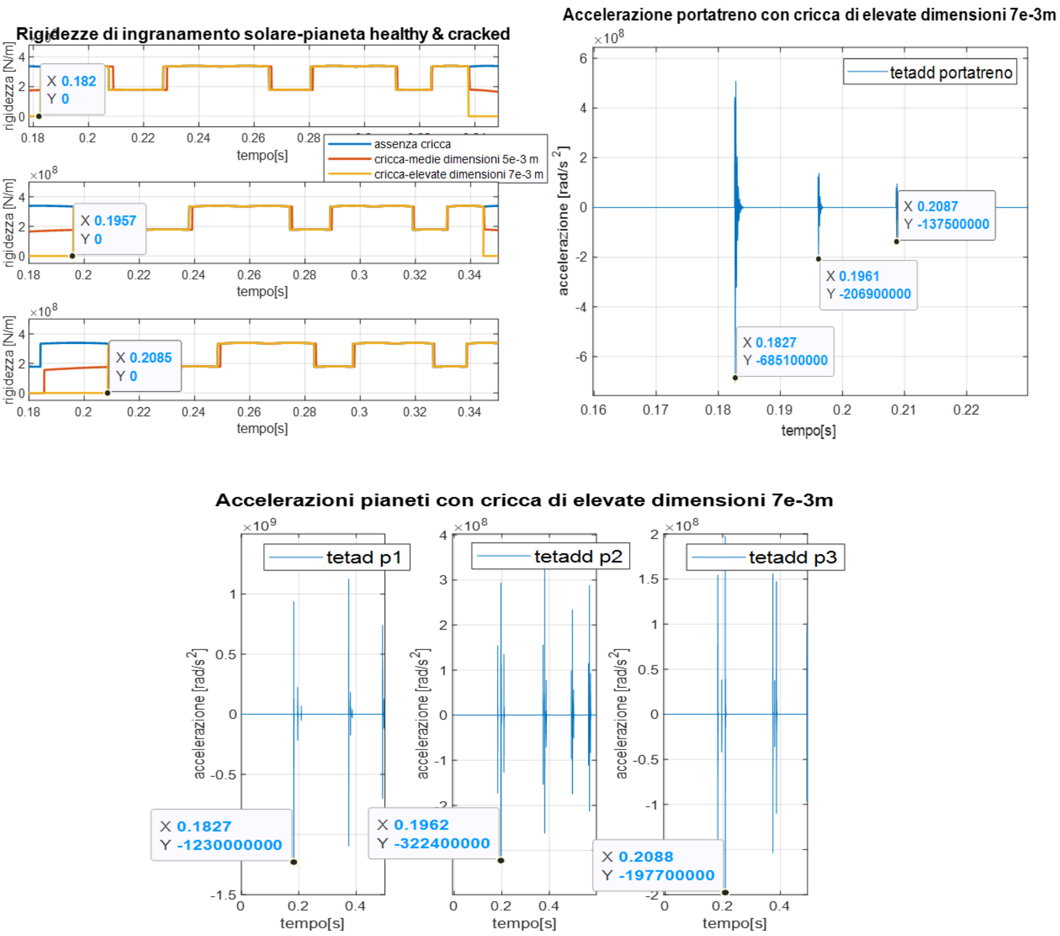


FIGURA 5.13 – PROFILI DI ACCELERAZIONE CON CRICCA DI ELEVATE DIMENSIONI 7E-3 M

Analogamente alle prove effettuate sul modello del riduttore, quando il dente criccato della ruota solare partecipa all'ingranamento, si rilevano, proporzionalmente alla dimensione del difetto, elevate variazioni localizzate delle accelerazioni del portatreno e dei pianeti.

5.3.2.2 Profili di velocità

Si riportano di seguito gli andamenti delle velocità del portatreno e della vite a ricircolo di sfere.

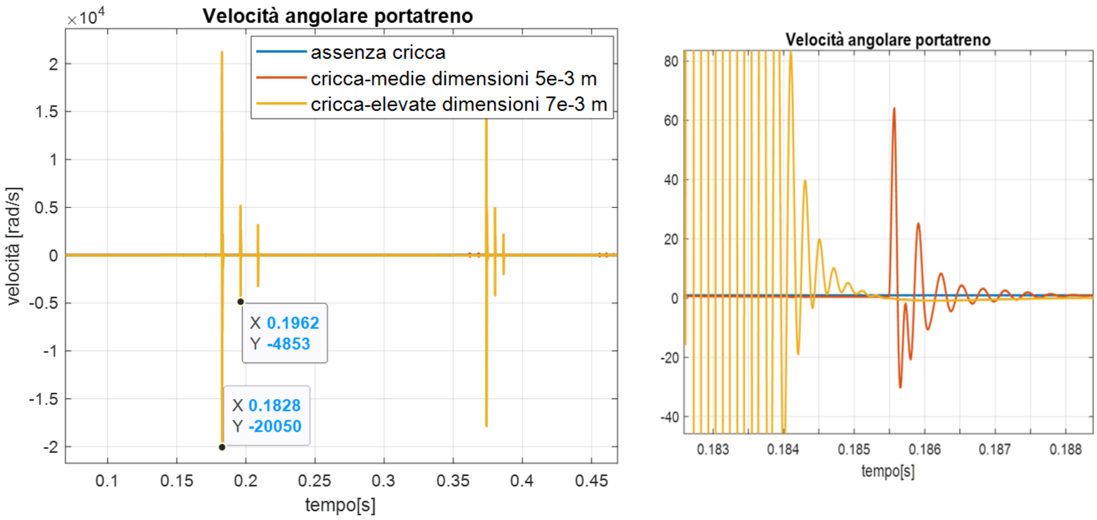


FIGURA 5.14 – VELOCITÀ DEL PORTATRENO E DIMENSIONI DELLA CRICCA

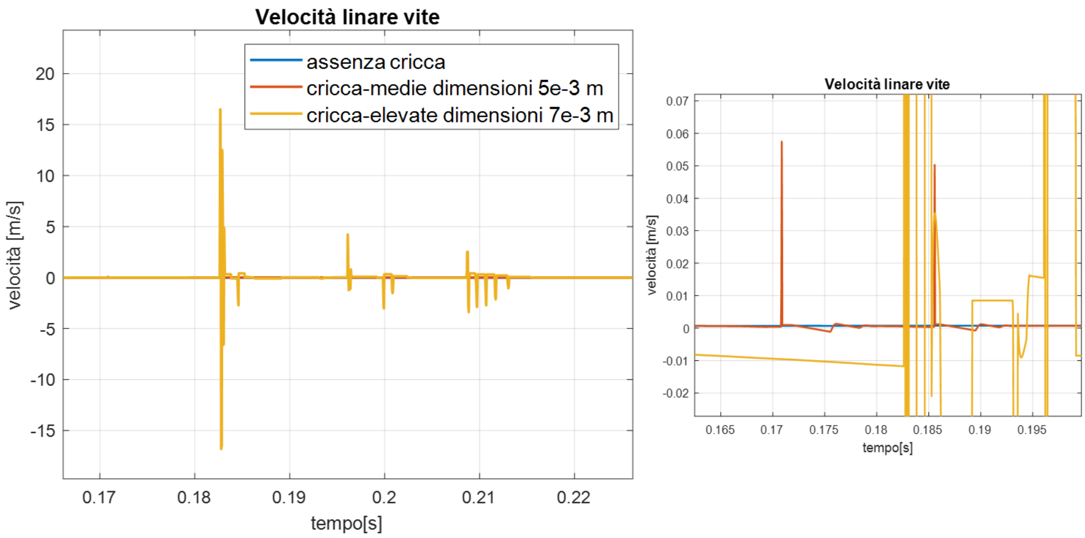


FIGURA 5.15 - VELOCITÀ LINEARE DELLA VITE E DIMENSIONI DELLA CRICCA

Le repentine variazioni nei profili di velocità si ripercuotono sullo spostamento lineare della vite a ricircolo, il quale mantiene il medesimo andamento crescente, ma con evidenti oscillazioni in corrispondenza dell'ingranamento con il dente criccato.

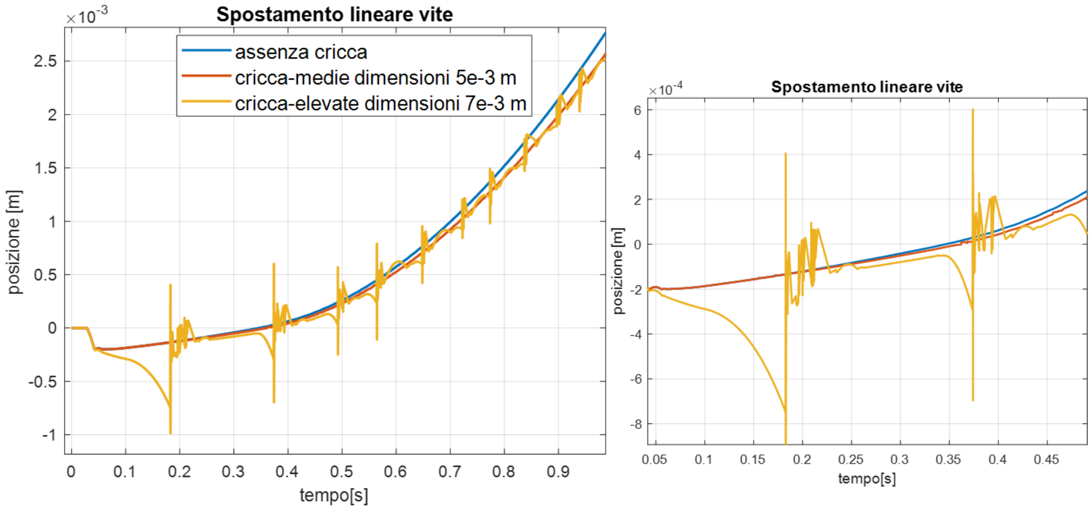


FIGURA 5.16 – SPOSTAMENTO LINEARE DELLA VITE

5.3.2.3 Profili di corrente

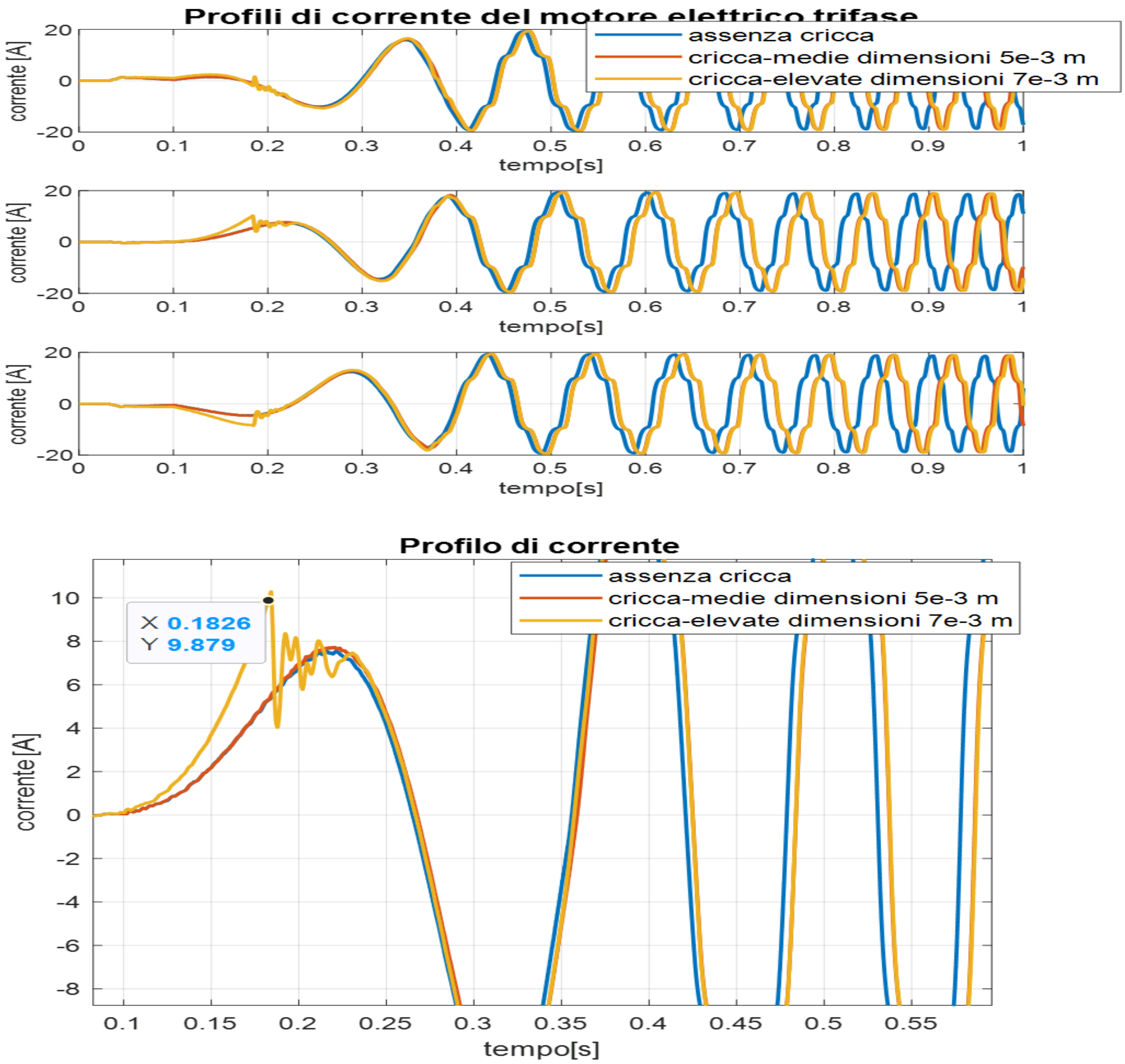


FIGURA 5.17 – PROFILI DI CORRENTE DEL MOTORE ELETTRICO E DIMENSIONE DELLA CRICCA.

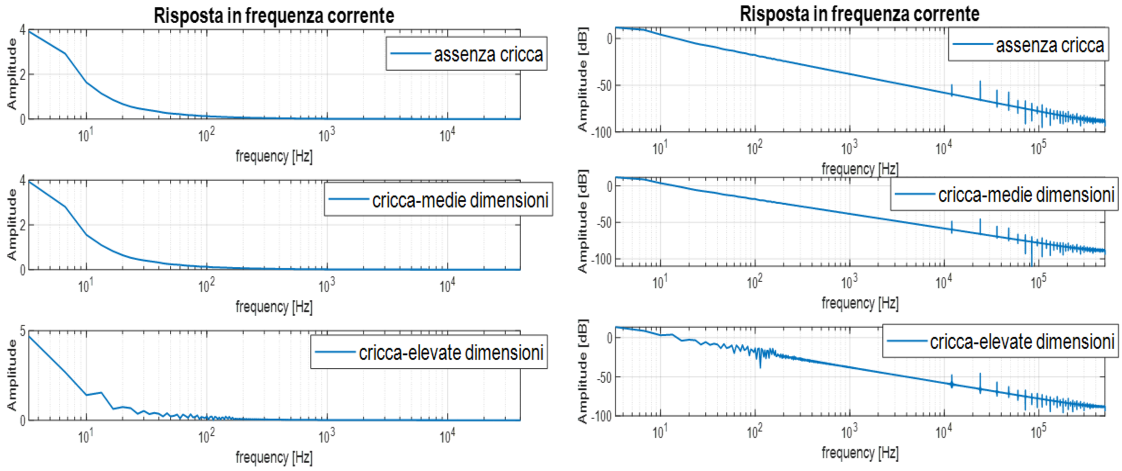


FIGURA 5.18 – RISPOSTA IN FREQUENZA PROFILO DI CORRENTE

La crescita della cricca oltre una certa soglia, come mostrato in *Figura 5.17*, influenza gli andamenti dei profili di corrente del motore elettrico trifase, come diretta conseguenza alle variazioni sui profili di velocità dell'albero del motore elettrico.

Le oscillazioni dei profili di corrente, rispetto agli andamenti senza degradazione, risultano ben visibili per dimensioni elevate della cricca/incipiente rottura dente del solare; mentre per cricche di medie dimensioni si registrano lievi differenze rispetto alle condizioni "sane". Gli andamenti in presenza di difettosità risultano inoltre sfasati di un certo Δt; tale comportamento è probabilmente dovuto al fatto che la diminuzione di rigidezza di ingranamento rende la dinamica del sistema riduttore meno reattiva con conseguente maggiore lentezza del sistema totale.

Capitolo 6

6 Conclusioni e sviluppi futuri

Nei primi capitoli, la parte principale della modellazione del riduttore ha riguardato la rigidezza di ingranamento, proprietà fondamentale del modello sia in assenza che in presenza di degradazione. La rigidezza del dente è stata analizzata mediante il metodo dell'energia potenziale: si considera cioè l'energia immagazzinata nel dente a seguito delle sollecitazioni a cui è sottoposto. Tale metodo garantisce un approccio rigoroso allo studio della relazione fra cricca e rigidezza.

Nella seconda parte del progetto sono state introdotte e modellate le principali componenti di dissipazione, le quali influenzano il comportamento del riduttore intervenendo sulla coppia in uscita dal portatreno e sulle prestazioni dello stesso. Le perdite presentano una forte dipendenza dalla temperatura di funzionamento del riduttore, in particolare per basse temperature di funzionamento si ha una rilevante diminuzione di efficienza.

Le simulazioni del riduttore sia come sistema isolato sia all'interno del modello del servoattuatore elettromeccanico, in assenza e in presenza di degradazione, hanno mostrato un evidente legame fra le diminuzioni di rigidezza dovute alla crescita della cricca sul dente della ruota solare e le improvvise oscillazioni nei profili di accelerazione del portatreno, della ruota solare e dei pianeti. L'utilizzo di sensori aggiuntivi, come ad esempio degli accelerometri, può quindi risultare utile al fine di identificare la presenza del guasto; allo stesso tempo però, è necessario tenere conto che un maggior numero di componenti implica un maggior costo, una minore affidabilità ed in ultimo occorre considerare che è opportuno evitare l'applicazione di sensori sulla catena di potenza.
La presenza della cricca influenza anche gli andamenti della coppia in uscita dal portatreno, un'alternativa agli accelerometri può quindi essere costituita dall'introduzione di un sensore magnetostrittivo senza contatto in prossimità dell'albero del portatreno, il quale potrebbe apportare benefici nel processo di prognosi. I sensori magnetostrittivi permettono infatti di rilevare le oscillazioni di coppia sull'albero di uscita del riduttore ed essendo componenti passivi non partecipano attivamente nella trasmissione di potenza.

Infine, a seguito delle simulazioni del sistema riduttore all'interno dell'EMA, viene confermata l'influenza del difetto sugli andamenti di accelerazioni, velocità e coppie. La crescita della cricca determina inoltre oscillazioni negli andamenti dei profili di corrente del motore elettrico, che risultano però poco rilevanti per dimensioni del difetto contenute.

In presenza di difetto di medie dimensioni le cadute di rigidezza non influenzano in maniera significativa il funzionamento e quindi i segnali acquisiti dal servoattuatore elettromeccanico (EMA). Mentre dal momento che la cricca raggiunge elevate dimensioni/incipiente rottura dente si registrano visibili oscillazioni dei profili di corrente del motore trifase, della coppia in uscita dal portatreno e degli andamenti delle velocità.

Gli effetti della degradazione sui segnali acquisiti dal sistema Ema non rappresentano delle informazioni utili all'attività di prognosi per la previsione del guasto, poiché per difetti di piccole dimensioni non si hanno cambiamenti significativi nei segnali acquisiti. Essi costituiscono comunque dei risultati interessanti per il processo di *Fault Identification,* in quanto utili per una fase successiva di comprensione dell'origine del guasto, che risulta necessaria al fine di evitare che la variazione del segnale venga attribuita ad una fonte sbagliata.

6.1 Sviluppi futuri

Dal punto di vista della modellazione e dell'analisi dei dati, sono possibili i seguenti sviluppi:

- l'introduzione di ulteriori degradazioni della dentatura, di cui una panoramica è stata presentata nel primo capitolo della seguente tesi. Poiché la progettazione di un sistema *CBM/PHM* è un procedimento iterativo, le nuove degradazioni potrebbero sovrapporsi (in termini di correlazione) a quella analizzata, complicando il futuro processo di *feature selection*;
- l'esecuzione di prove in laboratorio in appositi banchi prova per la determinazione dei risultati sperimentali sia in presenza che in assenza di degradazione. Successivo confronto con i risultati delle simulazioni.

Il presente progetto pone le basi per una successiva implementazione di un efficace sistema *CBM/PHM*, di conseguenza i passi necessari alla realizzazione del sistema di prognostica sono di seguito riportati:

- *Primo step*: l'estrazione delle feature, necessarie all'identificazione di una correlazione tra i dati ottenibili dalla sensoristica e la variazione dei parametri fisici del servosistema, non direttamente misurabili, al fine di pervenire allo stato di salute del servosistema. La fase di selezione delle *feature* costituisce il pilastro di una diagnosi accurata e affidabile; in tale ottica risulta rilevante il modello **DIKW** (*Data-Information-Knowledge-Wisdom*) [60].
- *Secondo step:* il processo di **FDI** (*Fault Detection and Identification*), che include la fase di *fault isolation* in relazione al numero di degradazioni modellate.
- *Terzo step:* fase di prognosi, disciplina che connette lo studio dei meccanismi di degradazione al processo di manutenzione [61].

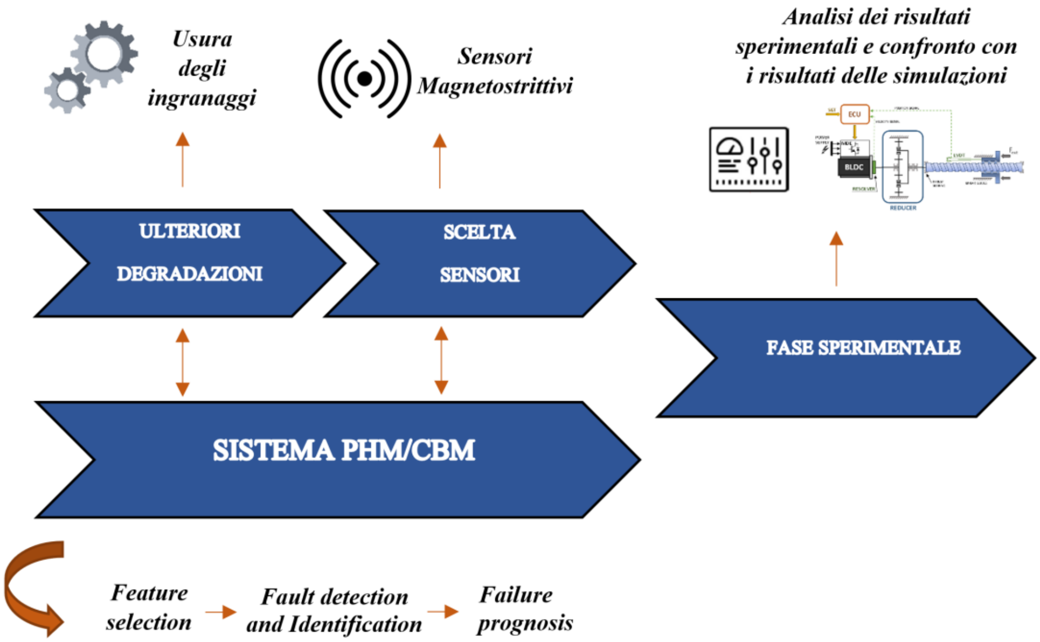


FIGURA 6.1 – SVILUPPI FUTURI

Script Matlab

Il modello adottato fa ricorso ad alcuni script in ambiente Matlab che vengono richiamati automaticamente una sola volta prima dell'inizio della simulazione.

Sono stati generati tre *script*:

- *Planetary_Main*: è lo script principale del modello riduttore. Preleva i dati dalle maschere del modello Simulink e calcola i parametri necessari per la simulazione di ogni componente.
- *Mesh_Stiffness_SOL_SAT_Cracked* e *Mesh_Stiffness_RING_SAT_Cracked:* script di stima delle rigidezze di ingranamento in funzione della propagazione del difetto secondo il metodo dell'energia potenziale.
- *Crack_propagation:* tratta l'implementazione delle leggi di propagazione del difetto.

Sono stati create le seguenti *function* richiamate nei tre script principali:

- *load dependent losses epicycle gears*: richiamata all'interno dello script *Planetary_Main*. Combina i precedenti script per calcolare il rapporto di trasmissione e i rendimenti del modello di attrito per uno stadio di un riduttore epicicloidale dal layout uguale a quello in uso.
- *mesh_stiffness:* richiamata all'interno dello script *Planetary_Main.* Utilizzata per il calcolo della rigidezza del dente secondo il modello di Kuang & Yang.
- *toothmesh1_sol_sat* e *toothmesh2_sol_sat*: richiamate all'interno dello script *Mesh_Stiffness_SOL_SAT_Cracked.* Necessarie per la valutazione delle rigidezze delle coppie di denti per l'ingranamento solare-pianeta.
- *toothmesh1_ring_sat* e *toothmesh2_ring_sat*: richiamate all'interno dello script *Mesh_Stiffness_RING_SAT_Cracked.* Necessarie per la valutazione delle rigidezze delle coppie di denti per l'ingranamento corona-pianeta.

Script *Planetary_Main*

```
%% RIDUTTORE EPICICLOIDALE
% clear all; close all; clc
%% Proprietà del lubrificante
pho_lub=0.869;      % densità del lubrificante alla temperatura di riferimento[kg/dm3]
alpha_lub=1.67*1e-8; % coefficiente di viscosità a compressione [m^2/N]
nu_din_rif=0.144; % viscosità dinamica del lubrificante alla temperatura di riferimento[Pa*s]
eps=0.047;      % pressure-induced shear coefficient
tao_0=0.2*10^6; % eyring shear stress [Pa]
K_lub=2000;     % conduttività lubrificante [W/mK]
K_steel=50;     % conduttività  [W/mK]
c_steel=0.012;  % calore specifico
c1=-1.890758;   % -1.890758 -2.999
c2=10.5253;     % 10.5253 7.852
psi=-0.001;     % density-temperature coefficient
T=-54:40;       % temperature range
nu_cin=10.^(10.^(c1.*log(T+273)+c2));        % viscosità cinematica f(T)
nu_cin2=0.00082.*(exp((1051.82./(T+87.12)))); % VOIGEL viscosità cinematica f(T)
pho_T=pho_lub-((T-15)*6.444*(10^-4));
pho2_T=pho_lub.*(exp(psi.*(T-15)));
nu_din=(nu_cin./10^6).*(pho2_T*1000);

%% Calcolo parametri dipendenti dalla Temperatura
Trif = input('Reference temperature [°C] = ');
if Trif < -54
   disp('Minimum temperature: -54°C');
   Trif = -54;
else if Trif > 40
       disp('Maximum temperature: 40°C');
       Trif = 40;
   end
end
sim T_influence % calcolo dei coefficienti correttivi di influenza temperatura attrito
nu_cin = nu_cin(end);
nu_din = nu_din(end);
K_drag = K_drag(end);
K_kf = K_kf(end);
K_ks = K_ks(end);
K_ktl = K_ktl(end);
K_ktlTLPIF = K_ktlTLPIF(end);
K_c = K_c(end);
%% dati geometrici delle ruote dentate
pho=7850;                   % densità [kg/m3]
ns=3;                       % numero di pianeti
eps_1st=1.2;                % rapporto di condotta
x_i=0;                      % fattore di correzione dentatura
alpha=20*(pi/180);          % angolo di pressionem [rad]
phi_0=(2*pi)/ns;            % angolo di distanziamento satelliti [rad]
z_1st = [18 18 54]';        % Solar-satellite-internal gear - 1st stage
sim LEWIS
Y_LW=Y_LW(end);
m = 5/1000;                 % modulo normale [m]
s_dente=pi*m/2;             % spessore dente nella circonferenza primitiva [m]
s_dente_sat=pi*m/2;
p_base=m*pi*cos(alpha);
b_1st=25;                   % [mm] larghezza di fascia
d_1st=m.*z_1st;             % diametri  1st [m]-vettore di tre componenti
m_sol_1st=10; %100*pho*pi*(((d_1st(1))^2)/4)*(b_1st*1e-3);       % solar mass [kg]
m_cor_1st=10; %100*pho*pi*(((d_1st(3))^2)/4)*(b_1st*1e-3);       % ring mass [kg]
m_sat_1st=10; %100*pho*pi*(((d_1st(2))^2)/4)*(b_1st*1e-3);       % planet mass [kg]
% interasse e raggi di base e testa
Int=((d_1st(1) + d_1st(2))/2); % Interasse [m]
rbs=(d_1st(1)/2)*cos(alpha);   %(d_1st(1)/2)-1.25*mn_1st;    % Raggio base solare [m]
rbp=(d_1st(2)/2)*cos(alpha);   %(d_1st(2)/2)-1.25*mn_1st ;   % Raggio base satellite [m]
rbr=(d_1st(3)/2)-1.25*m;       %(d_1st(3)/2)*cos(alpha)%(d_1st(3)/2)-1.25*mn_1st;   % Raggio base corona [m]
rbc=rbs+rbp;                   % "Raggio base" porta satellite [m]
rts=(d_1st(1)/2)+m;            % Raggio testa solare [m]
rtp=(d_1st(2)/2)+m;            % Raggio testa satellite [m]
rtr=(d_1st(3)/2)+0.25*m;       % Raggio testa corona [m]

% alberi
```

```
d_shaft_in=6.35;              % diametro albero ingresso [mm]
m_shaft_in=0.010;             % massa albero ingresso [kg]
l_shaft_in=70;                % lunghezza albero ingresso [mm]
E_shaft_in=210;               % modulo di elasticità [Gpa]
v=0.3;                        % coefficiente di poisson
G_shaft_in=E_shaft_in/(2*(1+v));  % modulo elasticità tangenziale [Gpa]

%% cinematica
% rapporti di trasmissione
tau_rp = z_1st(2)/z_1st(3);
tau_sp = -(z_1st(1)/z_1st(2));
tau = 1 + (z_1st(3)/z_1st(1));
% distribuzione coppie-analisi statica
T_s= 20;                      % [Nm]
T_load_id=T_s*tau;
T_sp=(T_s/3)*(z_1st(2)/z_1st(1));
F_sp=T_s./(3*d_1st(1)*cos(alpha));
F_rp=F_sp;
F_car=F_sp*cos(alpha) + F_rp*cos(alpha);
T_car=F_car*3*((d_1st(1)/2)+(d_1st(2)/2));
% velocità
n_in=100;                          %[rpm]
omega_in=(2*pi*n_in)/60;        % Velocità dell'albero del solare [rad/s]
omega_c=omega_in/tau;           % Velocità portasatellite [rad/s]
omega_s=omega_in;               % Velocità solare [rad/s]
omega_p=(omega_s-omega_c)*(z_1st(1)/z_1st(2));   % Velocità relativa satellite [rad/s]
omega_p_ax=omega_p-omega_c;                      % Velocità assoluta satellite [rad/s]

%% efficienze
%%% Efficiencies data
kf0 = 0.250;              % fattore di perdita a  40°C
kf = kf0*K_kf;            % loss factor depending on temperature moltiplicato per il termine correttivo T_influnce
GELP = 1.125;             % Gear Efficiency Loss Parameter

% meshing efficiencies function per il calcolo di tau e delle efficienze di ingranamento
[etadir_1stm1,etainv_1stm1,etabrk_1stm1] = load_dependent_losses_epgear(z_1st,kf,GELP,tau);
% direct efficiencies
eta_dir = etadir_1stm1;
% inverse efficiencies
eta_inv = etainv_1stm1;
% breakout evvificencies
eta_brk= etabrk_1stm1;
etagb_dir1 = eta_dir;
etagb_inv1 = eta_inv;

%% dinamica
% Momenti d'inerzia
I_sol=((d_1st(1)^2)/8)*m_sol_1st; % momento inerzia solare % [kg*m2]
I_sat=((d_1st(2)^2)/8)*m_sat_1st; % inerzia satelliti % [kg*m2]
I_car=((2*pi*ns)/(256*(tau^2)))*pho*b_1st*1e-3*((d_1st(1))^2)*(((d_1st(1))+ (d_1st(2)))^2) % inerzia portatreno % [kg*m2]%
Igear1 = 9.52E-7;              % [kgm2] inertia  driving shaft (somma dell'inerzia riportata all'albero motore)
Jgb = Igear1*tau;              % [kgm2] inertia  power screw shaft (in quanto Igear1 rappresenta il momento di inerzia ridotto
all'albero motore)
Jm = 2.853E-5;                 % [kgm2] inertia rotor
%% rigidezza di ingranamento
% solare-pianeta
R_sol_inf=sqrt(((Int*sin(alpha)) - sqrt((m + d_1st(2)/2)^2 -(((d_1st(2)/2)*cos(alpha))^2)))^2 + ((d_1st(1)/2)*cos(alpha))^2);
A=0;                      % inizio segmento dei contatti
B=(eps_1st-1)*2*pi/z_1st(1);
C=2*pi/z_1st(1);
D=eps_1st*2*pi/z_1st(1);
% primo tratto (due coppie di denti in presa)
tetaAB=linspace(A,B)          % vettore avanzamento angolo di ingranamento da A a B
rAB_1=sqrt((((d_1st(1)/2)*cos(alpha)).^2) + (sqrt((R_sol_inf.^2)-(((d_1st(1)/2)*cos(alpha)).^2)) +
(d_1st(1)/2)*cos(alpha).*tetaAB).^2);
rAB_2=sqrt((((d_1st(2)/2)*cos(alpha)).^2) + ((Int*sin(alpha) - sqrt(rAB_1.^2 - ((d_1st(1)/2)*cos(alpha)).^2))).^2)
[KAB_sol]=mesh_stiffness(m,z_1st(1),d_1st(1),rAB_1,x_i);
[KAB_sat]=mesh_stiffness(m,z_1st(2),d_1st(2),rAB_2,x_i);
% secondo tratto (una coppia di denti in presa)
tetaBC=linspace(B,C)          % vettore avanzamento angolo di ingranamento da A a B
rBC_1=sqrt((((d_1st(1)/2)*cos(alpha)).^2) + (sqrt((R_sol_inf.^2)-(((d_1st(1)/2)*cos(alpha)).^2)) +
(d_1st(1)/2)*cos(alpha).*tetaBC).^2);
rBC_2=sqrt((((d_1st(2)/2)*cos(alpha)).^2) + ((Int*sin(alpha) - sqrt(rBC_1.^2 - ((d_1st(1)/2)*cos(alpha)).^2))).^2)
```

```
[KBC_sol]=mesh_stiffness(m,z_1st(1),d_1st(1),rBC_1,x_i);
[KBC_sat]=mesh_stiffness(m,z_1st(2),d_1st(2),rBC_2,x_i);
% terzo tratto (due coppie di denti in presa)
tetaCD=linspace(C,D)            % vettore avanzamento angolo di ingranamento da C a D
rCD_1=sqrt((((d_1st(1)/2)*cos(alpha)).^2) + (sqrt((R_sol_inf.^2)-(((d_1st(1)/2)*cos(alpha)).^2)) +
(d_1st(1)/2)*cos(alpha).*tetaCD).^2);
rCD_2=sqrt((((d_1st(2)/2)*cos(alpha)).^2) + ((Int*sin(alpha) - sqrt(rCD_1.^2 - ((d_1st(1)/2)*cos(alpha)).^2))).^2);
[KCD_sol]=mesh_stiffness(m,z_1st(1),d_1st(1),rCD_1,x_i);
[KCD_sat]=mesh_stiffness(m,z_1st(2),d_1st(2),rCD_2,x_i);
% rigidezza con due coppie di denti in presa (AB e CD)
KAB_eq= (KAB_sol.*KAB_sat)./(KAB_sol + KAB_sat); % rigidezza equivalente due molle in serie (1 coppia di denti in presa)
KCD_eq= (KCD_sol.*KCD_sat)./(KCD_sol + KCD_sat); % rigidezza equivalente due molle in serie (1 coppia di denti in presa)
Keq_2cop = (b_1st/1000).*(KAB_eq + KCD_eq);      % rigidezza equivalente due molle in parallelo (due coppie di denti in presa)
% rigidezza con 1 coppiA di denti in presa (BC)
Keq_1cop= (b_1st/1000).*((KBC_sol.*KBC_sat)./(KBC_sol + KBC_sat));

% creazione vettori da plottare
tetaAD=[tetaAB tetaBC tetaCD];
Rig_sol_sat=[Keq_2cop Keq_1cop Keq_2cop];
r_punto_pignonesol=[rAB_1,rBC_1,rCD_1];
r_punto_ruotasat=[rAB_2,rBC_1,rCD_2];
% pianeta-corona
R_sat_inf=sqrt(((Int*sin(alpha)) - sqrt((-m + (d_1st(3)/2))^2 -(((d_1st(3)/2)+ (1.25*m))^2))^2 + ((d_1st(2)/2)*cos(alpha))^2));
Apr=0;                          % inizio segmento dei contatti
Bpr=(eps_1st-1)*2*pi/z_1st(2);
Cpr=2*pi/z_1st(2);
Dpr=eps_1st*2*pi/z_1st(2);
% primo tratto (due coppie di denti in presa)
tetaABpr=linspace(Apr,Bpr)          % vettore avanzamento angolo di ingranamento da A a B
rAB_1_pr=sqrt((((d_1st(2)/2)*cos(alpha)).^2) + (sqrt((R_sat_inf.^2)-(((d_1st(2)/2)*cos(alpha)).^2)) +
(d_1st(2)/2)*cos(alpha).*tetaABpr).^2);
rAB_2_pr=sqrt((((d_1st(3)/2)+ (1.25*m)).^2) + ((Int*sin(alpha) - sqrt(rAB_1_pr.^2 - ((d_1st(2)/2)*cos(alpha)).^2))).^2);
[KAB_sat_pr]=mesh_stiffness(m,z_1st(2),d_1st(2),rAB_1_pr,x_i);
[KAB_ring_pr]=mesh_stiffness(m,z_1st(3),d_1st(3),rAB_2_pr,x_i);
% secondo tratto (una coppia di denti in presa)
tetaBCpr=linspace(Bpr,Cpr)          % vettore avanzamento angolo di ingranamento da A a B
rBC_1_pr=sqrt((((d_1st(2)/2)*cos(alpha)).^2) + (sqrt((R_sat_inf.^2)-(((d_1st(2)/2)*cos(alpha)).^2)) +
(d_1st(2)/2)*cos(alpha).*tetaBCpr).^2);
rBC_2_pr=sqrt((((d_1st(3)/2)+ (1.25*m)).^2) + ((Int*sin(alpha) - sqrt(rBC_1_pr.^2 - ((d_1st(2)/2)*cos(alpha)).^2))).^2);
[KBC_sat_pr]=mesh_stiffness(m,z_1st(2),d_1st(2),rBC_1_pr,x_i);
[KBC_ring_pr]=mesh_stiffness(m,z_1st(3),d_1st(3),rBC_2_pr,x_i);
% terzo tratto (due coppie di denti in presa)
tetaCDpr=linspace(Cpr,Dpr)          % vettore avanzamento angolo di ingranamento da A a B
rCD_1_pr=sqrt((((d_1st(2)/2)*cos(alpha)).^2) + (sqrt((R_sat_inf.^2)-(((d_1st(2)/2)*cos(alpha)).^2)) +
(d_1st(2)/2)*cos(alpha).*tetaCDpr).^2);
rCD_2_pr=sqrt((((d_1st(3)/2)+ (1.25*m)).^2) + ((Int*sin(alpha) - sqrt(rBC_1_pr.^2 - ((d_1st(2)/2)*cos(alpha)).^2))).^2);
[KCD_sat_pr]=mesh_stiffness(m,z_1st(2),d_1st(2),rCD_1_pr,x_i);
[KCD_ring_pr]=mesh_stiffness(m,z_1st(3),d_1st(3),rCD_2_pr,x_i);
% rigidezza con due coppie di denti in presa (AB e CD)
KAB_eq_pr= (KAB_sat_pr.*KAB_ring_pr)./(KAB_sat_pr + KAB_ring_pr); % rigidezza equivalente due molle in serie (1 coppia di
denti in presa)
KCD_eq_pr= (KCD_sat_pr.*KCD_ring_pr)./(KCD_sat_pr + KCD_ring_pr); % rigidezza equivalente due molle in serie (1 coppia di
denti in presa)
Keq_2cop_pr = (b_1st/1000).*(KAB_eq_pr + KCD_eq_pr);% rigidezza equivalente due molle in parallelo (due coppie di denti in
presa)
% rigidezza con 1 coppiA di denti in presa (BC)
Keq_1cop_pr= (b_1st/1000).*((KBC_sat_pr.*KBC_ring_pr)./(KBC_sat_pr + KBC_ring_pr));
% creazione vettori da plottare
tetaADpr=[tetaABpr tetaBCpr tetaCDpr];
Rig_sat_ring=-[Keq_2cop_pr Keq_1cop_pr Keq_2cop_pr];
Rig_sat_ring_TOT=repmat(Rig_sat_ring,1,14);
r_punto_pignonesat=[rAB_1_pr,rBC_1_pr,rCD_1_pr];
r_punto_ruotacor=[rAB_2_pr,rBC_1_pr,rCD_2_pr];
lcont_1=rbs.*tan(tetaAD);
tetaADpr_TOT=linspace(0,2*pi,length(Rig_sat_ring_TOT));


%% rigidezza con Fourier e smorzamento riduttore
% rigidezze e smorzamenti costanti
Keq_1cop_const=mean(Keq_1cop) % in prima approssimazione considero ksp=krp=costante
Keq_1cop_const_pr=-max(Keq_1cop_pr)
ksp=(0.75*eps_1st + 0.25)*Keq_1cop_const*(b_1st/1000);
krp=(0.75*eps_1st + 0.25)*Keq_1cop_const_pr*(b_1st/1000);
```

```
damp_ratio=(0.03+0.17)/2;
csp=damp_ratio*sqrt((ksp*m_sol_1st*m_sat_1st)/(m_sol_1st+m_sat_1st));
crp=damp_ratio*sqrt((krp*m_sat_1st));
% rigidezza variabile
wm=z_1st(3)*omega_s/tau;      % mesh angular velocity with fixed ring gear
wdef_sol=3/(2*pi)*(omega_s-omega_c);
Tm=1/wm;                      % mesh period with fixed ring gear
gammasol_sat2=-(z_1st(1)/(2*pi))*(2*pi/3);
gammasol_sat3=-(z_1st(1)/(2*pi))*(4*pi/3);
gammaring_sat2=+(z_1st(3)/(2*pi))*(2*pi/3);
gammaring_sat3=+(z_1st(3)/(2*pi))*(4*pi/3);

%% perdite per ventilazione e perdite di tara
xf = 10;                      % scaling factor for stick-slip function
% speed loss coefficients
ks0 = 3.5E-9;                 % [Nms2/mm2rad2] speed loss parameter @40°C -10
ks = ks0*K_ks;                % [Nms2/mm2rad2]speed loss parameter
% cs coefficients computation
cs= ks*(((d_1st(1)*1000))^2+3*(z_1st(1)/z_1st(2))^3*((d_1st(2)*1000))^2);
% tare losses
ktl0 = 0.001; %0.001          % [Nm/mm] tare losses coefficient @40°C
ktl = ktl0*K_ktl;             % [Nm/mm] tare losses
TLPIF = 2.15; %2.15           % tare losses increase factor (breakout)
ktl_TLPIF = ktl0*TLPIF*K_ktlTLPIF; % tare losses coefficient breakout
% Tl computation
Ttl = ktl*((d_1st(1)*1000)+3*(z_1st(1)/z_1st(2))*((d_1st(2)*1000)));
% breakout tare losses
TtlBO = ktl_TLPIF*(((d_1st(1)*1000))+3*(z_1st(1)/z_1st(2))*((d_1st(2)*1000)))

Tfg_st = TtlBO;
Tfg_sl = Ttl;
c_g = cs;

 %% dati backlash
b_max = 0;
ang_blrs=0; %(0.03*pi)/180;
ang_blrs_1=0;

%%  rigidezza alberi
k_shaft_in=0*(G_shaft_in)*pi*(d_shaft_in/2)^4/(6*l_shaft_in) % [Nm] rigidezza torsionale albero solare
c_shaft_in=0*0.003;
K_shaft = (pi*8^4/32)*(210*1E3*0.33)/40/1000;
C_shaft = 2*0.1*sqrt((Jgb/tau^2*Jm)/(Jgb/tau^2+Jm)*K_shaft);

%% segmento di contatto SOLARE-PIANETA
% lunghezza segmenti di contatto solare-satellite
s_acc=sqrt((rtp^2)-(rbp^2)) - (d_1st(2)/2)*sin(alpha);
s_rec=sqrt((rts^2)-(rbs^2)) - (d_1st(1)/2)*sin(alpha);
s_cont=s_acc+s_rec;
s_base=(rbs+rbp)*tan(alpha);
d1=sqrt((r_punto_pignonesol.^2)-(R_sol_inf^2));
d2=s_cont-d1;
lcont=rbs.*tan(tetaAD);

% t_medio=sbase/(1.15*(d_1st(1)/2)*cos(alpha));
T1A=((d_1st(1)/2) + (d_1st(2)/2))*sin(alpha) - sqrt((rtp^2)-(rtp^2));
BT2=((d_1st(1)/2) + (d_1st(2)/2))*sin(alpha) - sqrt((rts^2)-(rts^2));
tperc=lcont./(omega_s*rbs*cos(alpha));
teta_rif_A=atan((rbs*tan(alpha) - s_acc)/rbs); % maldotti
teta_rif_B=atan((rbs*tan(alpha) + s_rec)/rbs); % maldotti
teta_rif=linspace(teta_rif_A,teta_rif_B,300);  % maldotti
ldc_length_deg=teta_rif(end)-teta_rif(1);      % delta di rotazione solare contatto segmento di ingranamento
h_dente_vec=1000*linspace(0,2.25*m,length(teta_rif)); % altezza dente solare [mm]
delta=linspace(-d_1st(1)*sin(alpha),d_1st(2)*sin(alpha),length(teta_rif));
T1P=d_1st(1)*sin(alpha) + delta; % raggi dei cerchi equivalenti con delta
T2P=d_1st(2)*sin(alpha) - delta; % raggi dei cerchi equivalenti con delta
pho1=rbs.*tan(teta_rif);        % raggi dei cerchi equivalenti
lcont_2=linspace(-s_acc,s_rec,length(teta_rif));
pho2=s_base-pho1;
v_str=omega_in.*T1P - omega_p.*T2P;
v_med=(omega_in.*T1P + omega_p.*T2P)./2;
v_str_ep=(omega_in-omega_c).*T1P - (omega_p-omega_c).*T2P;
SR_coef=(v_str./v_med)*100;     % sliding to roll ratio
```

```
pho_eq=(pho1.*pho2)./(pho1+pho2);
E=E_shaft_in;
E_eq=E/(1-(v^2));
% carico che si divide lungo la linea di contatto
F_spAB=linspace(F_sp/3,(2/3)*F_sp,length(tetaAB));
F_spBC=(2/3)*F_sp*ones(1,length(tetaBC));
F_spCD=linspace((2/3)*F_sp,F_sp/3,length(tetaCD));
F_sp_lin=[F_spAB F_spBC F_spCD];
W=F_sp_lin./(b_1st*1e-3);
p_hertz=sqrt((E_eq.*W)./(2*pi*pho_eq));

% durante l'ingranamento solare_satelliti
% pho1_tot=[pho1 pho1 pho1 pho1 pho1 pho1 pho1 pho1 pho1 pho1 pho1 pho1 pho1 pho1 pho1 pho1];
pho1_tot = repmat(pho1,1,290); %1776 per m=10kg % legge di alzata ripetuta ogni rotazione della ruota motrice che corrisponde ad
un ingranamento
teta_rif_tot=linspace(0,154,length(pho1_tot)); %940 per m=10kg
% v_str_tot=[v_str v_str v_str v_str v_str v_str v_str v_str];

%% segmento di contatto CORONA-PIANETA
% lunghezza segmenti di contatto solare-satellite
s_cont_pr=Int*sin(alpha)+ sqrt((rtp^2)-(rbp^2)) - sqrt((rtr^2)-(rbr^2));
s_acc_pr=rbr*tan(alpha) - sqrt((rtr^2)-(rbr^2));
s_rec_pr=s_cont_pr - s_acc_pr;
teta_rif_A_pr=atan((rbp*tan(alpha) - s_acc_pr)/rbp);
teta_rif_B_pr=atan((rbp*tan(alpha) + s_rec_pr)/rbp);
teta_rif_pr=linspace(teta_rif_A_pr,teta_rif_B_pr,300);
ldc_length_deg_pr=teta_rif_pr(end)-teta_rif_pr(1);
N2B2=sqrt((rtr^2)-(rbr^2))-Int*sin(alpha);
Q2B2=(rbp*tan(alpha) + rbp*(pi-(2*alpha)) + rbp*tan(alpha)) -s_acc_pr -s_dente_sat;
B2Q3= p_base - p_base.*((Q2B2/p_base)-round(Q2B2/p_base));
P2Q3=abs(B2Q3-s_acc_pr);
gamma_rs=P2Q3./p_base;
pho1_pr=N2B2+rbp.*tan(teta_rif_pr);
pho2_pr=Int*sin(alpha)+pho1_pr; % da correggere
lcont_2_pr=linspace(-s_acc_pr,s_rec_pr,length(teta_rif_pr));
v_str_pr=(omega_p-omega_c).*pho1_pr;
% pho1_tot_pr=[pho1_pr pho1_pr pho1_pr pho1_pr pho1_pr pho1_pr pho1_pr];
% pho2_tot_pr=[pho2_pr pho2_pr pho2_pr pho2_pr pho2_pr pho2_pr pho2_pr];
pho1_tot_pr = repmat(pho1_pr,1,168);%1032 per m=10kg
pho2_tot_pr = repmat(pho2_pr,1,168);
pho_eq_pr=(pho1_pr.*pho2_pr)./(pho2_pr-pho1_pr);
teta_rif_tot_pr=linspace(0,116,length(pho1_tot_pr));%710 per m=10kg

%% stima coefficiente di attrito ISO/TR 14179-2
% SOLARE-PIANETA
sigma=(0.1+0.1)/(2*(10^6));              % sqrt((0.1/(10^6))^2 + (0.1/(10^6))^2) (0.1+0.1)/(2*(10^6))
r_curv=1/((d_1st(1))/2) + 1/((d_1st(2))/2);
v_per=omega_s*(d_1st(1)/2);
v_sw=2*v_per*sin(alpha);
K=(1000*T_s*(z_1st(1)+z_1st(2)))/(2*(b_1st/1000)*(((d_1st(1))/2)^2)*z_1st(2));
f_att=((nu_cin.^(-0.223))*(K.^(-0.40)))./(3.239*v_per.^(0.7));
f_att2=0.048.*(((F_sp_lin./(b_1st./1000))./(v_sw.*r_curv)).^0.2).*((nu_din).^(-0.05))*(sigma.^0.25)
const=0.048*((nu_din)^(-0.05))*(sigma^0.25);
f_att_average=mean(f_att2);
% PIANETA-CORONA
sigma_r=(0.1+0.1)/(2*(10^6));            % sqrt((0.1/(10^6))^2 + (0.1/(10^6))^2) (0.1+0.1)/(2*(10^6))
r_curv_r=1/((d_1st(2))/2) - 1/((d_1st(3))/2);
v_per_r=omega_p*(d_1st(2)/2);
v_sw_r=2*v_per_r*sin(alpha);
K_r=(1000*(T_s/3)*(z_1st(2)+z_1st(3)))/(2*(b_1st/1000)*(((d_1st(2))/2)^2)*z_1st(3));
f_att_r=((nu_cin.^(-0.223))*(K_r.^(-0.40)))./(3.239*v_per_r.^(0.7));
f_att2_r=0.048.*(((F_rp./(b_1st./1000))./(v_sw_r.*r_curv_r)).^0.2).*((nu_din).^(-0.05))*(sigma.^0.25)
const_r=0.048*((nu_din*1000)^(-0.05))*(sigma_r^0.25);
f_att_average_r=mean(f_att2_r);
%% stima coefficiente di attrito ISO/TS 6336-4
f_att_6336=0.143.*(((sigma.*(F_sp_lin./(b_1st/1000)))./(v_per.*r_curv.*nu_din)).^0.25);
f_att_average_6336=mean(f_att_6336);
f_att_6336_r=0.143.*(((sigma_r.*(F_rp./(b_1st/1000)))./(v_per_r.*r_curv_r.*nu_din)).^0.25);
f_att_average_6336_r=mean(f_att_6336_r);
```

Script *Mesh_Stiffness_SOL_SAT_Cracked* e *Mesh_Stiffness_RING_SAT_Cracked*

Si riporta di seguito esclusivamente lo script *Mesh_Stiffness_SOL_SAT_Cracked.*

```
%% Dati ruote dentate
N1=z_1st(1);    % numero di denti ruota 1 25
N2=z_1st(1);    % numero di denti ruota 2 30
alfa=20*pi/180; % angolo di pressione
h_a_star=1;      % addendum
c_star=0.25;
E=206e9;
Nu=0.3;
mu=[0.2 0.3];
b=25e-3;      % larghezza di fascia
r_int1=6.5e-3;
r_int2=7.6e-3;

%% Cricca dimensioni
q_0=[4e-3 5e-3 7e-3 8.2e-3];
alfa_c=90*pi/180; % angolo apertura della cricca (90° condizione peggiore)

%% Calcolo dati iniziali
G=E/(2*(1+Nu));  % modulo elasticità tangenziale
r1=m*N1/2;         % raggio circonferenza primitiva ruota motrice
r_a1=r1+h_a_star*m;
r_f1=r1-h_a_star*m;
r_d1=r1-(c_star+h_a_star)*m;
r_b1=r1*cos(alfa);                %  raggio di base ruota motrice
r2=m*N2/2;                        %  raggio circonferenza primitiva ruota condotta
r_a2=r2+h_a_star*m;
r_f2=r2-h_a_star*m;
r_d2=r2-(c_star+h_a_star)*m; % root circle < base circle quando N<=41
r_b2=r2*cos(alfa);          % raggio di base ruota condotta
eps_alfa=((sqrt(r_a2^2-r_b2^2)+sqrt(r_a1^2-r_b1^2)-(r1+r2)*sin(alfa))/(pi*m*cos(alfa)));
inv_alfa=tan(alfa)-alfa;
teta_b1=pi/(2*N1)+inv_alfa;  % metà angolo del dente misurato a partire da cerchio di base
teta_b2=pi/(2*N2)+inv_alfa;
h_f1=r_d1/r_int1;
h_f2=r_d2/r_int2;

%% Angoli di ingranamento
syms x % definizione della variabile simbolica x
if r_b1<r_f1 % se il raggio di base è inferiore rispetto al raggoi di piede
   alfa_01=bsm2(r_b1*((x+teta_b1)*sin(x)+cos(x))-r_f1,0,pi/2,1e-4); % metodo di bisezione che da come risultato alfa_01:
   alfa_12=bsm2(r_b2*((x+teta_b2)*sin(x)+cos(x))-r_a2,0,pi/2,1e-4);
   alfa_p1=bsm2(r_b1*((x+teta_b1)*sin(x)+cos(x))-r1,0,pi/2,1e-4);
else % se il raggio di base è maggiore rispetto al raggoi di piede
   alfa_01=0;
   alfa_12=bsm2(r_b2*((x+teta_b2)*sin(x)+cos(x))-(r_a2-(r_b1-r_f1)),0,pi/2,1e-4); %-(r_b1-r_f1)
   alfa_p1=bsm2(r_b1*((x+teta_b1)*sin(x)+cos(x))-r1,0,pi/2,1e-4);
end
if r_b2<r_f2
   alfa_02=bsm2(r_b2*((x+teta_b2)*sin(x)+cos(x))-r_f2,0,pi/2,1e-4);
   alfa_11=bsm2(r_b1*((x+teta_b1)*sin(x)+cos(x))-r_a1,0,pi/2,1e-4);
   alfa_p2=bsm2(r_b2*((x+teta_b2)*sin(x)+cos(x))-r2,0,pi/2,1e-4);
else
   alfa_02=0;
   alfa_11=bsm2(r_b1*((x+teta_b1)*sin(x)+cos(x))-(r_a1-(r_b2-r_f2)),0,pi/2,1e-4);
   alfa_p2=bsm2(r_b2*((x+teta_b2)*sin(x)+cos(x))-r2,0,pi/2,1e-4);
end

%% Archi e angoli
syms x
if r_b1<r_d1
   beta_01=bsm2(r_b1*((x+teta_b1)*sin(x)+cos(x))-r_f1,0,pi/2,1e-4);
   L_d1=r_b1*((beta_01+teta_b1)*cos(beta_01)-sin(beta_01));
else
   beta_01=0;
   L_d1=r_b1*teta_b1;
end
if r_b2<r_d2
   beta_02=bsm2(r_b2*((x+teta_b2)*sin(x)+cos(x))-r_f2,0,pi/2,1e-4);
```

```
    L_d2=r_b2*((beta_02+teta_b2)*cos(beta_02)-sin(beta_02));
else
    beta_02=0;
    L_d2=r_b2*teta_b2;
end
teta_f1=atan(L_d1/r_d1);
teta_f2=atan(L_d2/r_d2);
S_f1=2*teta_f1*r_d1;
S_f2=2*teta_f2*r_d2;

%% Gear 1 Stiffnesses (Cracked)- Cricca sulla ruota solare-calcolo della rigidezza a dentatura con cricca
% per la prima componente di q_0
if r_d1<=r_b1
    [K_a1c_1 K_b1c_1 K_s1c_1
K_f1c_1]=toothmesh1_sol_sat(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,q_0(1),alfa_c);
else
    [K_a1c_1 K_b1c_1 K_s1c_1
K_f1c_1]=toothmesh2_sol_sat(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,q_0(1),alfa_c);
end
% per la seconda componente di q_0
if r_d1<=r_b1
    [K_a1c_2 K_b1c_2 K_s1c_2
K_f1c_2]=toothmesh1_sol_sat(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,q_0(2),alfa_c);
else
    [K_a1c_2 K_b1c_2 K_s1c_2
K_f1c_2]=toothmesh2_sol_sat(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,q_0(2),alfa_c);
end
% per la terza componente di q_0
if r_d1<=r_b1
    [K_a1c_3 K_b1c_3 K_s1c_3
K_f1c_3]=toothmesh1_sol_sat(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,q_0(3),alfa_c);
else
    [K_a1c_3 K_b1c_3 K_s1c_3
K_f1c_3]=toothmesh2_sol_sat(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,q_0(3),alfa_c);
end
% per la quarta componente di q_0
if r_d1<=r_b1
    [K_a1c_4 K_b1c_4 K_s1c_4
K_f1c_4]=toothmesh1_sol_sat(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,q_0(4),alfa_c);
else
    [K_a1c_4 K_b1c_4 K_s1c_4
K_f1c_4]=toothmesh2_sol_sat(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,q_0(4),alfa_c);
end
K_a1c_tot=[K_a1c_1; K_a1c_2; K_a1c_3; K_a1c_4];
K_b1c_tot=[K_b1c_1; K_b1c_2; K_b1c_3; K_b1c_4];
K_s1c_tot=[K_s1c_1; K_s1c_2; K_s1c_3; K_s1c_4];
K_f1c_tot=[K_f1c_1; K_f1c_2; K_f1c_3; K_f1c_4];

%% Gear 1 Stiffnesses (Healthy)
% no friction

if r_d1<=r_b1
    [K_a1 K_b1 K_s1 K_f1]=toothmesh1_sol_sat(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,0,0);
else
    [K_a1 K_b1 K_s1 K_f1]=toothmesh2_sol_sat(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,0,0);
end

K_a1_tot=[K_a1; K_a1; K_a1; K_a1];
K_b1_tot=[K_b1; K_b1; K_b1; K_b1];
K_s1_tot=[K_s1; K_s1; K_s1; K_s1];
K_f1_tot=[K_f1; K_f1; K_f1; K_f1];

% with friction
if r_d1<=r_b1
    [K_a1_fr1 K_b1_fr1 K_s1_fr1
K_f1_fr1]=toothmesh1_sol_sat_friction(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,0,0,mu(1));
else
    [K_a1_fr1 K_b1_fr1 K_s1_fr1
K_f1_fr1]=toothmesh2_sol_sat_friction(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,0,0,mu(1));
end

if r_d1<=r_b1
```

```
    [K_a1_fr2 K_b1_fr2 K_s1_fr2
K_f1_fr2]=toothmesh1_sol_sat_friction(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,0,0,mu(2));
else
    [K_a1_fr2 K_b1_fr2 K_s1_fr2
K_f1_fr2]=toothmesh2_sol_sat_friction(E,b,G,r1,r_b1,r_d1,teta_f1,S_f1,h_f1,teta_b1,alfa_01,alfa_11,beta_01,0,0,mu(2));
end
K_a1_fr_tot=[K_a1_fr1; K_a1_fr2];
K_b1_fr_tot=[K_b1_fr1; K_b1_fr2];
K_s1_fr_tot=[K_s1_fr1; K_s1_fr2];
K_f1_fr_tot=[K_f1_fr1; K_f1_fr2];

%% Gear 2 Stiffnesses
% no friction
if r_d2<=r_b2
    [K_a2 K_b2 K_s2 K_f2]=toothmesh1_sol_sat(E,b,G,r2,r_b2,r_d2,teta_f2,S_f2,h_f2,teta_b2,alfa_02,alfa_12,beta_02,0,0);
else
    [K_a2 K_b2 K_s2 K_f2]=toothmesh2_sol_sat(E,b,G,r2,r_b2,r_d2,teta_f2,S_f2,h_f2,teta_b2,alfa_02,alfa_12,beta_02,0,0);
end

K_a2=fliplr(K_a2);
K_b2=fliplr(K_b2);
K_s2=fliplr(K_s2);
K_f2=fliplr(K_f2);

K_a2_tot=[K_a2; K_a2; K_a2; K_a2];
K_b2_tot=[K_b2; K_b2; K_b2; K_b2];
K_s2_tot=[K_s2; K_s2; K_s2; K_s2];
K_f2_tot=[K_f2; K_f2; K_f2; K_f2];

% with friction
if r_d2<=r_b2
    [K_a2_fr1 K_b2_fr1 K_s2_fr1
K_f2_fr1]=toothmesh1_sol_sat_friction(E,b,G,r2,r_b2,r_d2,teta_f2,S_f2,h_f2,teta_b2,alfa_02,alfa_12,beta_02,0,0,mu(1));
else
    [K_a2_fr1 K_b2_fr1 K_s2_fr1
K_f2_fr1]=toothmesh2_sol_sat_friction(E,b,G,r2,r_b2,r_d2,teta_f2,S_f2,h_f2,teta_b2,alfa_02,alfa_12,beta_02,0,0,mu(1));
end
if r_d2<=r_b2
    [K_a2_fr2 K_b2_fr2 K_s2_fr2
K_f2_fr2]=toothmesh1_sol_sat_friction(E,b,G,r2,r_b2,r_d2,teta_f2,S_f2,h_f2,teta_b2,alfa_02,alfa_12,beta_02,0,0,mu(2));
else
    [K_a2_fr2 K_b2_fr2 K_s2_fr2
K_f2_fr2]=toothmesh2_sol_sat_friction(E,b,G,r2,r_b2,r_d2,teta_f2,S_f2,h_f2,teta_b2,alfa_02,alfa_12,beta_02,0,0,mu(2));
end


K_a2_fr1=fliplr(K_a2_fr1);
K_b2_fr1=fliplr(K_b2_fr1);
K_s2_fr1=fliplr(K_s2_fr1);
K_f2_fr1=fliplr(K_f2_fr1);
K_a2_fr2=fliplr(K_a2_fr2);
K_b2_fr2=fliplr(K_b2_fr2);
K_s2_fr2=fliplr(K_s2_fr2);
K_f2_fr2=fliplr(K_f2_fr2);

K_a2_fr_tot=[K_a2_fr1; K_a2_fr2];
K_b2_fr_tot=[K_b2_fr1; K_b2_fr2];
K_s2_fr_tot=[K_s2_fr1; K_s2_fr2];
K_f2_fr_tot=[K_f2_fr1; K_f2_fr2];

%% Mesh Stiffness
% Mesh-couple teeth healthy no-friction
K_A=1./(1./K_a1_tot+1./K_a2_tot);
K_B=1./(1./K_b1_tot+1./K_b2_tot);
K_F=1./(1./K_f1_tot+1./K_f2_tot);
K_S=1./(1./K_s1_tot+1./K_s2_tot);
K_h=(pi*E*b)/(4*(1-Nu^2));
K_h=ones(1,length(K_a1)).*K_h;
K_H=[K_h; K_h; K_h; K_h]
K=1./(1./K_H + 1./K_A + 1./K_B + 1./K_S + 1./K_F);

% Mesh-couple teeth healthy with-friction
K_A_fr=1./(1./K_a1_fr_tot+1./K_a2_fr_tot);
```

```
K_B_fr=1./(1./K_b1_fr_tot+1./K_b2_fr_tot);
K_F_fr=1./(1./K_f1_fr_tot+1./K_f2_fr_tot);
K_S_fr=1./(1./K_s1_fr_tot+1./K_s2_fr_tot);
K_h_fr=(pi*E*b)/(4*(1-Nu^2));
K_h_fr=ones(1,length(K_a1_fr_tot)).*K_h;
K_fr=1./(1./K_h_fr + 1./K_A_fr + 1./K_B_fr + 1./K_S_fr + 1./K_F_fr);

% Mesh-couple teeth Cracked no-friction
K_Ac=1./(1./K_a1c_tot+1./K_a2_tot);
K_Bc=1./(1./K_b1c_tot+1./K_b2_tot);
K_Fc=1./(1./K_f1c_tot+1./K_f2_tot);
K_Sc=1./(1./K_s1c_tot+1./K_s2_tot);
Kc=1./(1./K_H + 1./K_Ac + 1./K_Bc + 1./K_Sc + 1./K_Fc);

PTH=length(K);
K2=[zeros(4,PTH) K zeros(4,PTH)];
K2_fr=[zeros(2,PTH) K_fr zeros(2,PTH)];
K2c=[zeros(4,PTH) Kc zeros(4,PTH)];
Pb=floor(PTH/eps_alfa);
dbeta=360*eps_alfa/(N1*(PTH-1));
for k=1:2
for j=1:4
for i=1:PTH
   K_M_h(j,i)=K2(j,i+PTH)+ K2(j,i+PTH+Pb)+K2(j,i+PTH-Pb);
   K_M_h_fr(k,i)=K2_fr(k,i+PTH)+ K2_fr(k,i+PTH+Pb)+K2_fr(k,i+PTH-Pb);
   K_M(j,i)=K2c(j,i+PTH)+K2(j,i+PTH+Pb)+K2(j,i+PTH-Pb);
   betai(i)=dbeta*(i-1);
end
end
end
%% Mesh Stiffness giro completo
K_M_giro_1=[K_M_h(1,:) K_M_h(3,:) repmat(K_M_h(1,:),1,4) K_M_h(3,:) repmat(K_M_h(1,:),1,4)];
K_M_giro_c1=[K_M(2,:) repmat(K_M_h(1,:),1,3) K_M(2,:) repmat(K_M_h(1,:),1,2) K_M(2,:) repmat(K_M_h(1,:),1,2) K_M(2,:)];
K_M_giro_c2=[K_M(3,:) repmat(K_M_h(1,:),1,3) K_M(3,:) repmat(K_M_h(1,:),1,2) K_M(3,:) repmat(K_M_h(1,:),1,2) K_M(3,:)];
K_M_giro_c3=[K_M(4,:) repmat(K_M_h(1,:),1,3) K_M(4,:) repmat(K_M_h(1,:),1,2) K_M(4,:) repmat(K_M_h(1,:),1,2) K_M(4,:)];
K_M_giro_c4=[zeros(1,length(K_M(4,:))) repmat(K_M_h(1,:),1,3) zeros(1,length(K_M(4,:))) repmat(K_M_h(1,:),1,2)
zeros(1,length(K_M(4,:))) repmat(K_M_h(1,:),1,2) zeros(1,length(K_M(4,:)))];
K_M_giro_1_TOT=repmat(K_M_giro_1,1,2);
K_M_giro_2=[K_M_h(1,:) K_M_h(3,:) repmat(K_M_h(1,:),1,4) K_M_h(3,:) repmat(K_M_h(1,:),1,4)];
K_M_giro_2_TOT=repmat(K_M_giro_2,1,2);
K_M_giro_3=[K_M_h(1,:) K_M_h(3,:) repmat(K_M_h(1,:),1,4) K_M_h(3,:) repmat(K_M_h(1,:),1,4)];
K_M_giro_3_TOT=repmat(K_M_giro_3,1,12);
teta_m = 2*pi*(z_1st(3)/z_1st(2))/(z_1st(1)+z_1st(3))*(180/pi);
wm=z_1st(3)*omega_s/tau;      % mesh angular velocity with fixed ring gear
wdef_sol=3/(2*pi)*(omega_s-omega_c);
Tm=1/wm;
teta_giro_1=linspace(0,360,length(K_M_giro_1));
teta_giro_1_TOT=linspace(0,720,length(K_M_giro_1_TOT));
gammasol_sat2=-(z_1st(1)/(2*pi))*(2*pi/3);
gammasol_sat3=-(z_1st(1)/(2*pi))*(4*pi/3);
gammaring_sat2=+(z_1st(3)/(2*pi))*(2*pi/3);
gammaring_sat3=+(z_1st(3)/(2*pi))*(4*pi/3);
teta_giro_2=teta_giro_1-gammasol_sat2
teta_giro_2_TOT=linspace(0,720,length(K_M_giro_2_TOT));
teta_giro_3=teta_giro_2-gammasol_sat3
teta_giro_3_TOT=linspace(0,720,length(K_M_giro_3_TOT));
```

Script *Crack_propagation*

```
%% CRACK PROPAGATION
clear all, clc, close all

n=3.35;
m=n;
p=0.5;
q=1;
delta_K_0=2.86;
alpha=1.5;
K_crit=74.72 %74.72;
C_th=1.5;
C_paris=1.7010e-10;
```

```
C_Nasgro=C_paris;
S_max_sigma_0=0.9;
R=0.1;
a_0=1e-3;
a=1e-3; %a=0.0015;
w=0.250; % larghezza provino (larghezza fascia dente)
delta_S=63;


% N=0;
i=0;
t=0.008; % spessore qui ha senso mettere il valore di acritica calcolata considerando la dimensione di a/K=Kcr
delta_K_0=2.86;
alpha=1.5;

%% carico
S=[70 10];
K_max_vec=linspace(7,K_crit-0.1);
A_k=1;
B_k=1;
A_0=(0.825-0.34*alpha+0.05*alpha^2)*(cos(pi/2*S_max_sigma_0))^1/alpha;
A_1=(0.415-0.071*alpha)*S_max_sigma_0;
A_3=2*A_0+A_1-1;
A_2=1-A_0-A_1-A_3;
lambda=0.5;
if R>=0
f=max(R, A_0+A_1*R+A_2*R^2+A_3*R^3);
elseif -2<=R<0
f=A_0+A_1*R;
else
f=A_0-2*A_1;
end
delta_K_th=delta_K_0*sqrt(a/(a+a_0))/(1-f/((1-A_0)*(1-R)))^(1+C_th*R);
delta_K=linspace(delta_K_th+0.001,K_crit-0.001);
da_dN_nasgro=C_paris*(((1-f)/(1-R))*delta_K).^n.*(1-delta_K_th./delta_K).^p./(1-K_max_vec/K_crit).^q;
da_dN=C_paris*(delta_K.^n);

a=1e-3;
a_N=a;
delta_S=S(1)-S(2);
N=0;
N_N=0;
i=0;
K_max= 74;

while a<=t
i=i+1;
% beta(i)=sqrt(sec(pi*a(i)/w));
beta(i)=1.12-0.23*(a(i)/w)+10.56*((a(i)/w)^2)-21.74*((a(i)/w)^3);
delta_a=0.001*a(i); %passo di integrazione variabile con fattore moltiplicativo pari a 0.01
delta_a_N=0.001*a_N(i);
delta_K(i)=beta(i)*delta_S*sqrt(pi*a(i)); % mettere la formula adatta al mio caso pubblicazioni
delta_K_th(i)=delta_K_0*sqrt(a(i)/(a(i)+a_0))/(1-f/((1-A_0)*(1-R)))^(1+C_th*R);
% delta_K=linspace(delta_K_th+0.001,K_crit-0.001);
da_dN_nasgro(i)=C_paris*(((1-f)/(1-R))*delta_K(i)).^n.*(1-delta_K_th(i)./delta_K(i)).^p./(1-K_max/K_crit).^q;
da_dN(i)=C_paris*delta_K(i)^n;
delta_N=delta_a/da_dN(i);
delta_N_N=delta_a/da_dN_nasgro(i);
N(i+1)=N(i)+delta_N;
N_N(i+1)=N_N(i)+delta_N_N;
a(i+1)=a(i)+delta_a;
a_N(i+1)=a_N(i)+delta_a_N;
end
```

Function *load dependent losses epicycle gears*

```
function [eta_dir,eta_inv,eta_breakout] = load_dependent_losses_epgear(Z,kf,GELP,tau)

% La funzione calcola le perdite meccaniche dipendenti dal carico in
% Input:
%       - Z: vettore 3x1 contenente il numero di denti delle ruote dei due
%       stadi numerate secondo il verso positivo del flusso di potenza
%       - kf: fattore di perdita dipendente dalla temperatura
%       - GELP: fattore moltiplicativo da applicarsi in condizioni di
%       arresto
%       - tau: rapporto di trasmissione del rotismo [omega_in/omega_portatreno]

%%% calcolo dei rendimenti sui singoli ingranamenti
[eta_dir12, eta_inv12, eta_breakout12] = load_dependent_losses_extgear(Z(1),Z(2),kf,GELP);
[eta_dir23, eta_inv23, eta_breakout23] = load_dependent_losses_intgear(Z(2),Z(3),kf,GELP);
eta_dir1p = eta_dir12*eta_dir23;
eta_inv1p = eta_inv12*eta_inv23;
eta_breakout1p = eta_breakout12*eta_breakout23;
%%% calcolo delle grandezze di output
eta_dir = (eta_dir1p*(tau-1)+1)/tau;
eta_inv = tau/(((tau-1)/eta_inv1p)+1);
eta_breakout = (eta_breakout1p*(tau-1)+1)/tau;
end
```

Function mesh_stiffness

```
function [K] =mesh_stiffness(mn,Z,d,r,x_i)

% % La funzione calcola le rigidezze del dente e la rigidezza di ingranamento
% Input:
%       - Z: vettore 3x1 contenente il numero di denti delle ruote dei due
%       stadi numerate secondo il verso positivo del flusso di potenza
%       - mn=modulo
%       - x_i= fattore di correzione
%       - d=diametro primitivo
%       - r=posizione punto di contatto dentatura lungo la linea di
%       contatto

A_0 = 3.867 + 1.612*Z - 0.02916*(Z^2) + 0.0001553*(Z^3);
A_1 = 17.060 + 0.7289*Z - 0.01728*(Z^2) + 0.00009993*(Z^3);
A_2 = 2.637 - 1.222*Z + 0.02217*(Z^2) - 0.0001179*(Z^3);
A_3 = -6.330 - 1.033*Z + 0.02068*(Z^2) - 0.0001130*(Z^3);
K=10^9*((A_0 + A_1*x_i) + (A_2 + A_3*x_i)*(((r)-(d/2))/((1+x_i)*mn)));
end
```

Function toothmesh1_sol_sat e *toothmesh2_sol_sat Function toothmesh1_ring_sat* e *toothmesh2_ring_sat*

Si riportano di seguito solo le function: *toothmesh1_sol_sat* e *toothmesh2_sol_sat.*

```
function [K_a K_b K_s
K_f]=toothmesh1_sol_sat_friction(E,L,G,r,r_b,r_d,teta_f,S_f,h_f,teta_b,alfa_0,alfa_1,beta_0,q_0,alfa_c,mu)
C_pcf = [ -5.574e-5 -1.9986e-3 -2.3015e-4  4.7702e-3  0.0271  6.8045;  60.111e-5  28.100e-3 -83.431e-4 -9.9256e-3  0.1624
0.9086;  -50.952e-5  185.50e-3  0.0538e-4  53.300e-3  0.2895  0.9236; -6.2042e-5  9.0889e-3 -4.0964e-4  7.8297e-3 -0.1472
0.6904]; % matrice dei coefficienti necessari al calcolo di Xi
Ai=C_pcf(:,1);    Bi=C_pcf(:,2);    Ci=C_pcf(:,3);
Di=C_pcf(:,4);    Ei=C_pcf(:,5);    Fi=C_pcf(:,6);
for i=1:4
    Xi(i)=Ai(i)/teta_f^2 + Bi(i)*h_f^2 + Ci(i)*h_f/teta_f + Di(i)/teta_f + Ei(i)*h_f + Fi(i);
end
L_star=Xi(1);    M_star=Xi(2);    P_star=Xi(3);    Q_star=Xi(4);
h0=r_b*teta_b;  % larghezza base del dente senza cricca
h_q=h0-q_0*sin(alfa_c); % larghezza base del dente con cricca inclinata di un angolo alfa_c
dbeta=(alfa_1-alfa_0)/1000; % passo angolare
alpa_p1=0.27;
for i=1:1001
```

```
    beta=(i-1)*dbeta+alfa_0; % vettore angolo che va dall'angolo di inizio dell'ingranamento (a partire da alfa_0) alla fine
dell'ingranamento
    h=r_b*((beta+teta_b)*cos(beta)-sin(beta)); % (5) in pub Calculation...
    d=r_b*((beta+teta_b)*sin(beta)+cos(beta))-r;
    u_f=d+r-r_d-h*tan(beta);
    invK_f=(cos(beta)^2/(E*L))*(L_star*(u_f/S_f)^2 + M_star*(u_f/S_f) + P_star*(1+Q_star*(tan(beta))^2)); % il reciproco della
rigidezza
    invK_a=0;
    invK_b=0;
    invK_s=0;
    dbetaj=(beta-beta_0)/1000;
    for j=1:1000
        beta1=(j-1)*dbetaj+beta_0;
        h1=r_b*((beta1+teta_b)*cos(beta1)-sin(beta1));
        x1=r_b*((beta1+teta_b)*sin(beta1)+cos(beta1))-r;
        beta2=(j)*dbetaj+beta_0;
        h2=r_b*((beta2+teta_b)*cos(beta2)-sin(beta2));
        x2=r_b*((beta2+teta_b)*sin(beta2)+cos(beta2))-r;
        dx=x2-x1;
        if h2>h_q
            h2=h_q;
        end
        A_x=(h1+h2)*L;
        I_x=1/12.*(h1+h2).^3*L;
        if r_b*beta1<=r_b*alpa_p1
            He=1;
        else
            He=-1;
        end
        invK_a=invK_a + ((((sin(beta)-mu*He*cos(beta))^2)./(E*A_x)))*dx;
        invK_b=invK_b + (((d-x1)*(cos(beta)+mu*He*sin(beta))-h*(sin(beta)-mu*He*cos(beta)))^2./(E*I_x))*dx;
        invK_s=invK_s + (1.2*(cos(beta)+mu*He*sin(beta))^2./(G*A_x))*dx;

    end
    dx=(r_b-r_d)/1000;
    for j=1:1000
        x1=r_d+(j-1)*dx-r;
        h1=h0;
        x2=r_d+(j)*dx-r;
        h2=h0;
        dx=x2-x1;
        if h2>h_q
            h2=h_q;
        end
        A_x=(h1+h2)*L;
        I_x=1/12.*(h1+h2).^3*L;
        invK_a=invK_a + ((((sin(beta)-mu*cos(beta))^2)./(E*A_x)))*dx;
        invK_b=invK_b + (((d-x1)*(cos(beta)+mu*sin(beta))-h*(sin(beta)-mu*cos(beta)))^2./(E*I_x))*dx;
        invK_s=invK_s + (1.2*(cos(beta)+mu*sin(beta))^2./(G*A_x))*dx;
    end
    K_a(i)=1./invK_a;
    K_b(i)=1./invK_b;
    K_s(i)=1./invK_s;
    K_f(i)=1./invK_f;
end
end


function [K_a K_b K_s
K_f]=toothmesh2_sol_sat_friction(E,L,G,r,r_b,r_d,teta_f,S_f,h_f,teta_b,alfa_0,alfa_1,beta_0,q_0,alfa_c,mu)
C_pcf = [ -5.574e-5 -1.9986e-3 -2.3015e-4  4.7702e-3  0.0271  6.8045;
         60.111e-5  28.100e-3 -83.431e-4 -9.9256e-3  0.1624  0.9086;
        -50.952e-5  185.50e-3  0.0538e-4  53.300e-3  0.2895  0.9236;
        -6.2042e-5  9.0889e-3 -4.0964e-4  7.8297e-3 -0.1472  0.6904];
Ai=C_pcf(:,1);    Bi=C_pcf(:,2);    Ci=C_pcf(:,3);
Di=C_pcf(:,4);    Ei=C_pcf(:,5);    Fi=C_pcf(:,6);
for i=1:4
    Xi(i)=Ai(i)/teta_f^2 + Bi(i)*h_f^2 + Ci(i)*h_f/teta_f + Di(i)/teta_f + Ei(i)*h_f + Fi(i);
end
L_star=Xi(1);    M_star=Xi(2);    P_star=Xi(3);    Q_star=Xi(4);
h0=r_b*((alfa_0+teta_b)*cos(alfa_0)-sin(alfa_0));
h_q=h0-q_0*sin(alfa_c);
dbeta=(alfa_1-alfa_0)/1000;
```

```
for i=1:1001
    beta=(i-1)*dbeta+alfa_0;
    h=r_b*((beta+teta_b)*cos(beta)-sin(beta));
    d=r_b*((beta+teta_b)*sin(beta)+cos(beta))-r;
    u_f=d+r-r_d-h*tan(beta);
    invK_f=(cos(beta)^2/(E*L))*(L_star*(u_f/S_f)^2 + M_star*(u_f/S_f) + P_star*(1+Q_star*(tan(beta))^2));
    invK_a=0;
    invK_b=0;
    invK_s=0;
    dbetaj=(beta-beta_0)/1000;
    for j=1:1000
        beta1=(j-1)*dbetaj+beta_0;
        h1=r_b*((beta1+teta_b)*cos(beta1)-sin(beta1));
        x1=r_b*((beta1+teta_b)*sin(beta1)+cos(beta1))-r;
        beta2=(j)*dbetaj+beta_0;
        h2=r_b*((beta2+teta_b)*cos(beta2)-sin(beta2));
        x2=r_b*((beta2+teta_b)*sin(beta2)+cos(beta2))-r;
        dx=x2-x1;
        if h2>h_q
            h2=h_q;
        end
        A_x=(h1+h2)*L;
        I_x=1/12*(h1+h2)^3*L;
        if r_b*beta1<=r_b*alpa_p1
            He=1;
        else
            He=-1;
        end
        invK_a=invK_a + ((((sin(beta)-mu*He*cos(beta))^2)./(E*A_x)))*dx;
        invK_b=invK_b + (((d-x1)*(cos(beta)+mu*He*sin(beta))-h*(sin(beta)-mu*He*cos(beta)))^2./(E*I_x))*dx;
        invK_s=invK_s + (1.2*(cos(beta)+mu*He*sin(beta))^2./(G*A_x))*dx;
    K_a(i)=1./invK_a;
    K_b(i)=1./invK_b;
    K_s(i)=1./invK_s;
    K_f(i)=1./invK_f;
end
end
```

Modelli in ambiente Simulink

Nella seguente appendice vengono riportati i principali modelli realizzati in ambiente Simulink.

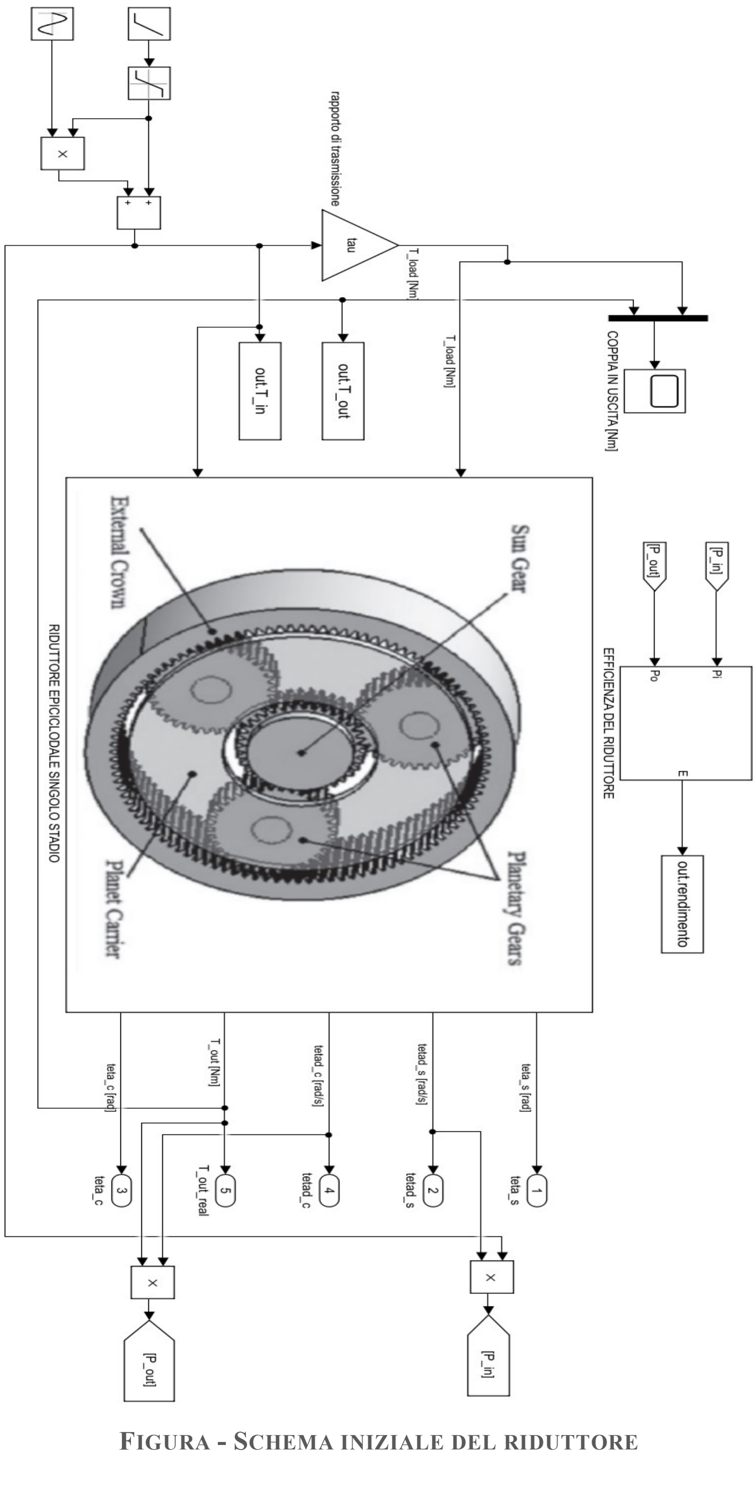


FIGURA - SCHEMA INIZIALE DEL RIDUTTORE

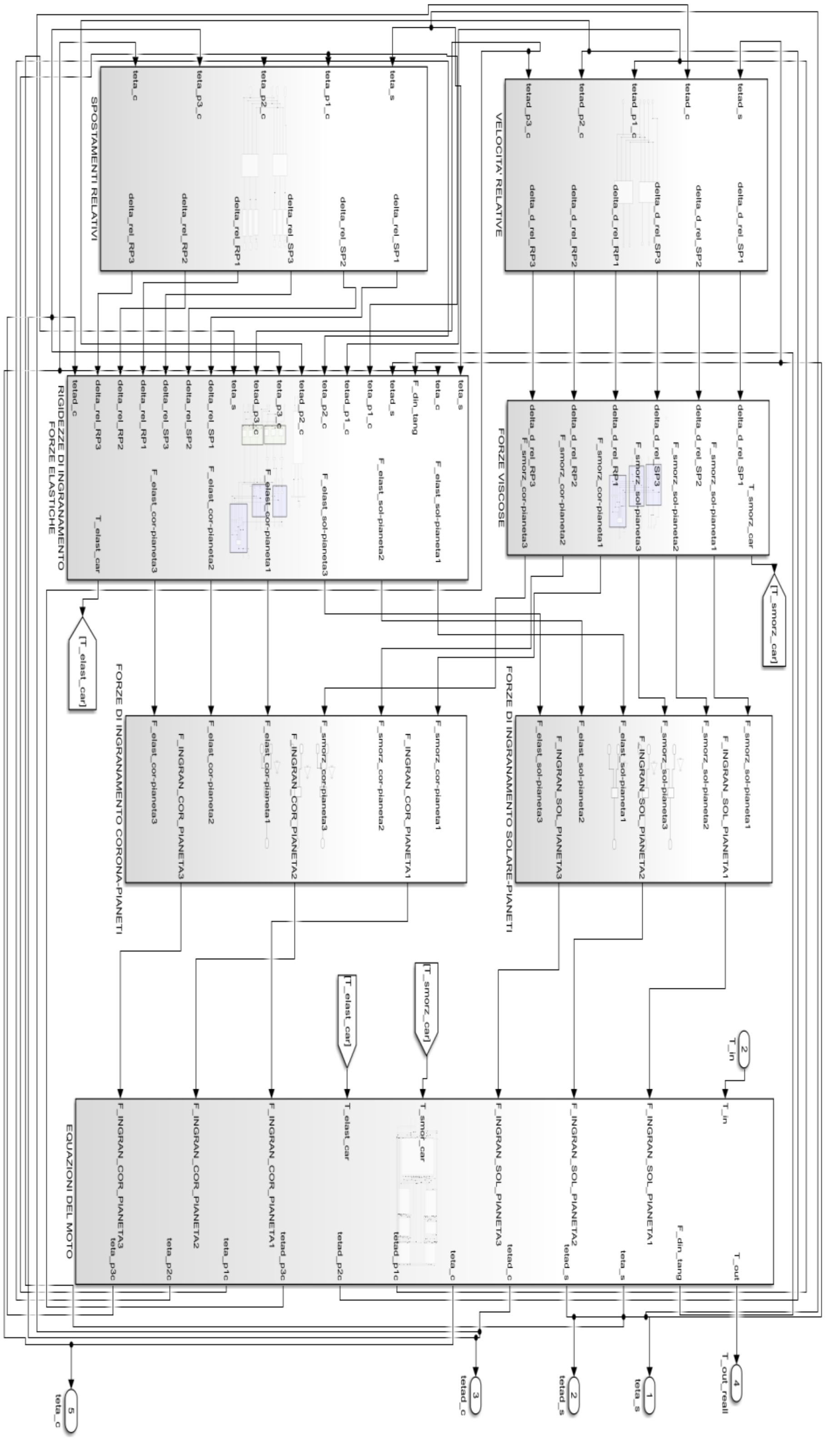


FIGURA – MODELLO EQUAZIONI DEL MOTO

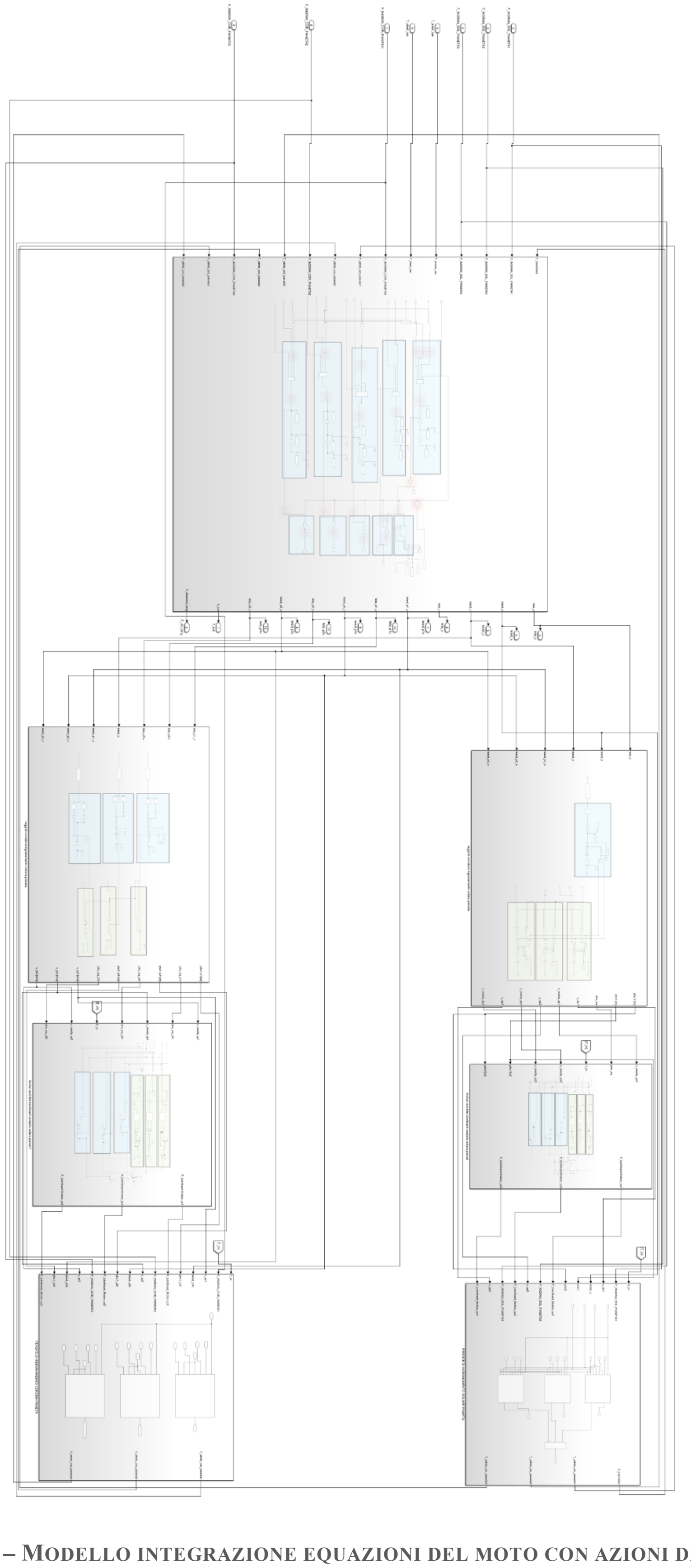


FIGURA – MODELLO INTEGRAZIONE EQUAZIONI DEL MOTO CON AZIONI DISSIPATIVE

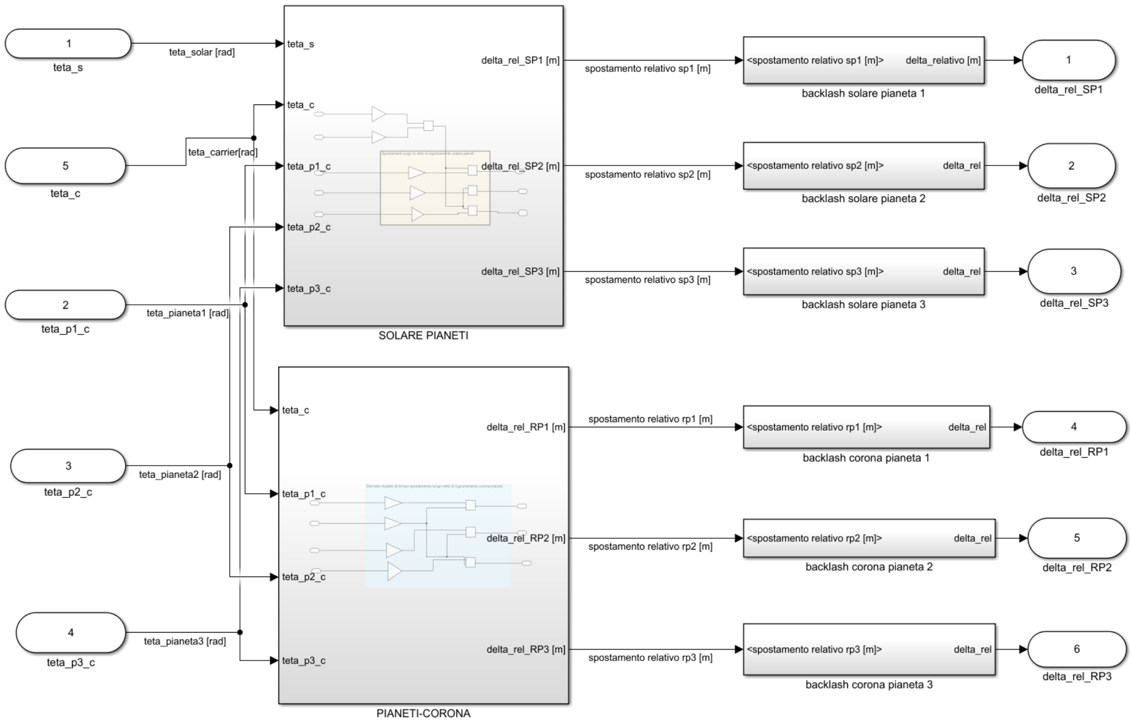


FIGURA – SPOSTAMENTI LUNGO LA LINEA DI INGRANAMENTO

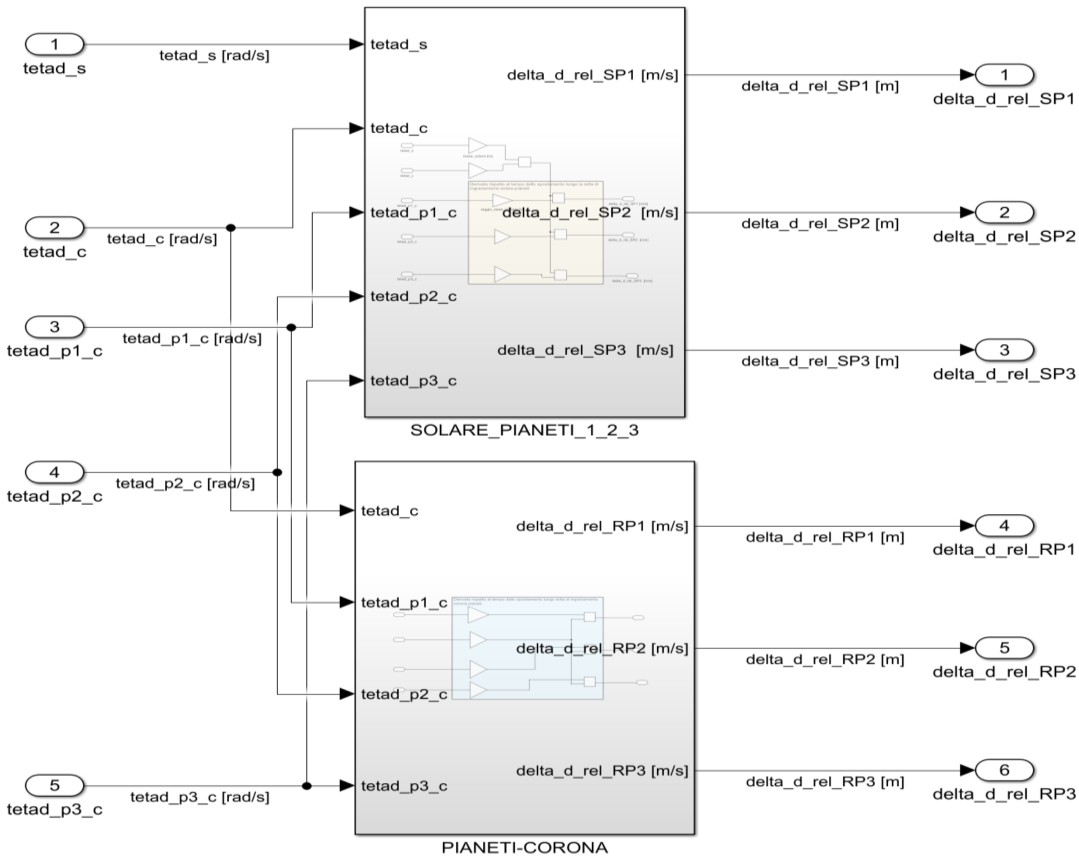


FIGURA – DERIVATE DEGLI SPOSTAMENTI LUNGO LA LINEA DI INGRANAMENTO

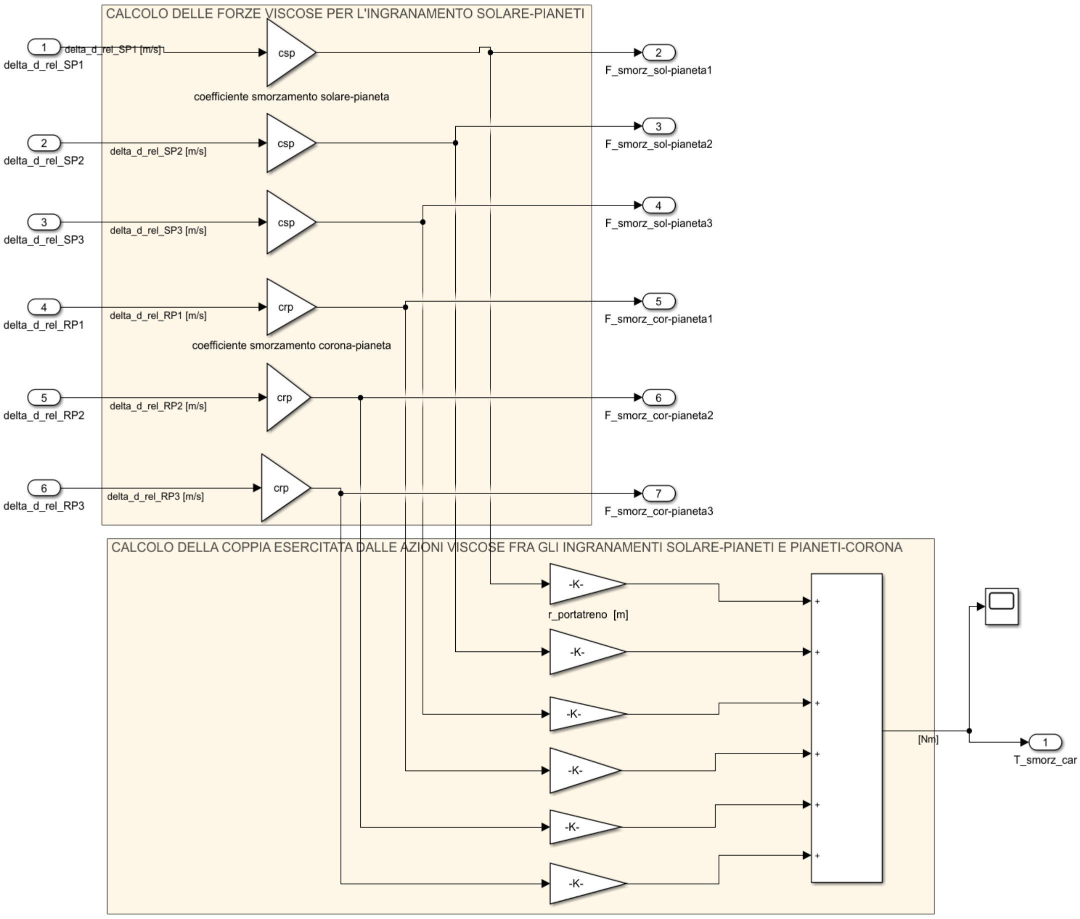


FIGURA – FORZE E COPPIE DOVUTE ALLO SMORZAMENTO NELL'INGRANAMENTO

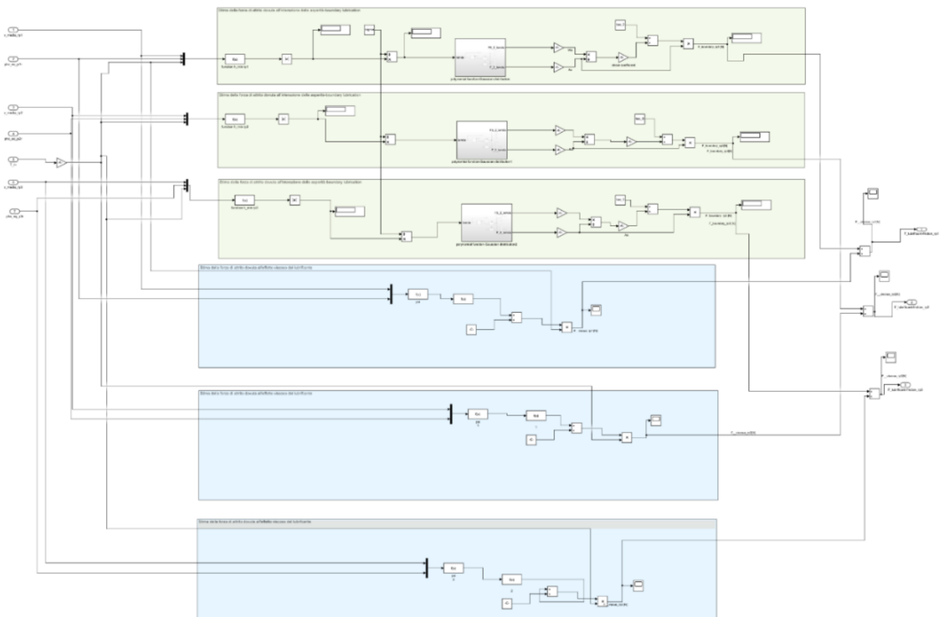


FIGURA – SIMULINK CALCOLO DI $F_{boundary}$ E $F_{viscous}$ PER L'INGRANAMENTO CORONA-PIANETI

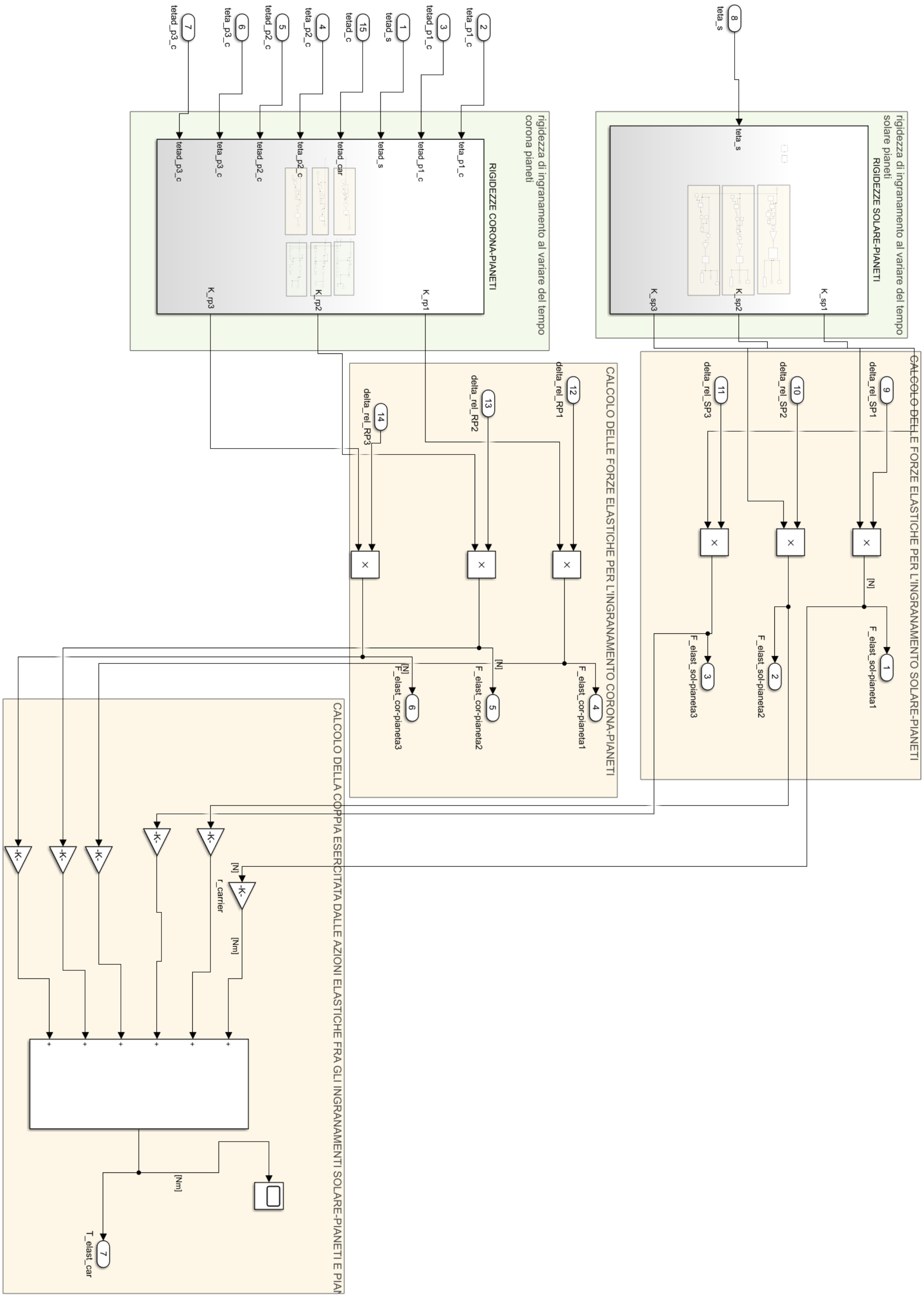


FIGURA – FORZE E COPPIE DOVUTE ALLA RIGIDEZZA DI INGRANAMENTO

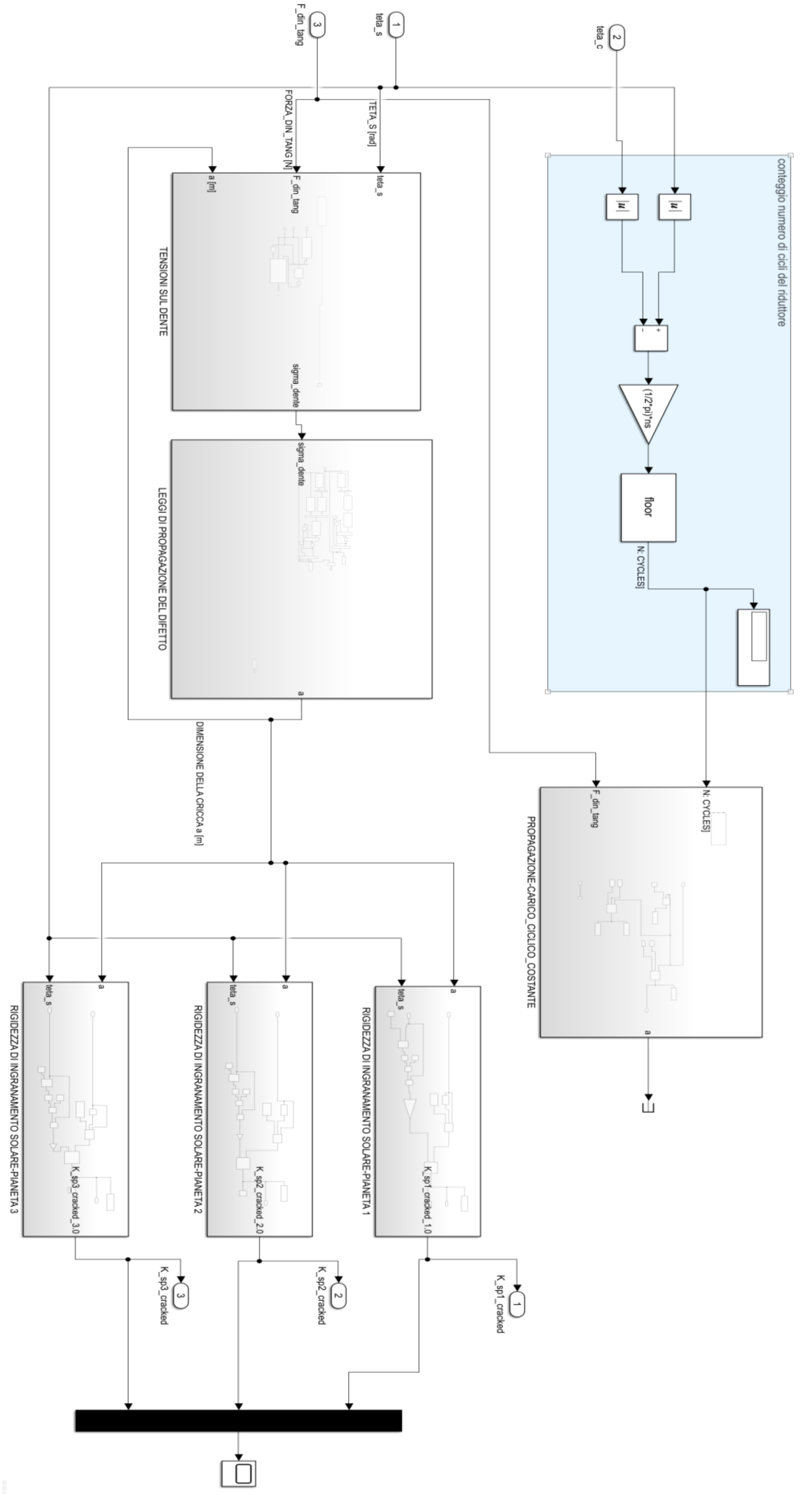


FIGURA – MODELLO DELLA DEGRADAZIONE

Bibliografia

[1] A. D. Martin, Studio di un sistema di comando ad architettura distribuita per gli ipersostentatori di un nuovo aereo da trasporto regionale., Tesi di Laurea magistrale Politecnico di Torino, 2013.

[2] Pratt R.W., Flight control systems: practical issues in desing and implementation, IET, 2000.

[3] Rampado M., «More Electric Aircraft: State of the Art and Case Study,» Università di Padova, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Padova, 2013-2014.

[4] Sorli Massimo, Meccatronica, Dispense del corso, 2019.

[5] Claeyssen F. Grohamann B. Janker P, et al. «New actuators for aircraft and space applications.», International conference of new actuators, Bremen, Germany, June 2008.

[6] Jacazio Giovanni, Vachtsevanos George, De Martin Andrea, «Windings Fault Detection and Prognosis in Electro-Mechanical Flight Control Actuators Operating in Active-Active Configuration,» *International Journal of Prognostics and Health Management, PHM society,* 2017.

[7] Mohan N., First Course on Power Electronics and Drive, MNPERE, 2003.

[8] Jacazio G. Piombo B., Meccanica applicata alle macchine 2 – La trasmissione del moto, Levrotto e Bella, 1992.

[9] Dalla Vedova M.D.L., Maggiore P., Riva G., Berri P. C., «Design and Development of a Planetary Gearbox for Electromechanical Actuator Test Bench through Additive Manufacturing,» *Actuators,* May 2020.

[10] Ing. Radice E., «I riduttori di precisione: principi di funzionamento e criteri di scelta,» Università di Udine.

[11] M. Nyberg, «A General Framework for Fault Diagnosis Based on Statistical Hypotesis Testing,» 2011.

[12] De Martin A., «Mechanical components physics and fault detection methods,» 2015.

[13] F.L. Lewis, M. Roemer, A. Hess B. Wu G.Vachtsevanos, Intelligent Fault Diagnosis and Prognosis for Engineering Systems, John Wiley & Sons, 2006.

[14] J.Keller, D.Carr, F.Love, P.Grabill, H.Ngo, P.Shanthakumaran, «AH-64 main transmission accessory drive spur gear installation fault detection,» *Journal of Intelligent Manufacturing,* 2012.

[15] G.J. Kacprzynski, A.Sarlashkar, M.J.Roemer, A.Hess, W.Hardman, «Predicting Remaining Life by Fusing the Physics of Failure Modeling with Diagnostics,» *Journal of Mechanics,* 2004.

[16] Vocabolario Treccani on line, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, Italia: Treccani.

[17] Sun B., Zeng S., Kang R., Pecht M., «Benefits analysis of prognostics in systems,» in *Prognostics and system health management conference IEEE*, 2010.

[18] Elattar Hatem M., Elminir Hamdy K., Riad A. M., «Prognostics: a literature review,» in *Complex & Intelligent Systems*, Vol. %1 di %2Vol. 2, Issue 2, Heidelberg, Germany, June 2016, p. pp. 125–154.

[19] Byington C., Roemer M., Galie T., «Prognostic enhancements to diagnostic systems for improved condition-based maintenance,» in *IEEE aerospace conference proceedings*, Big Sky, M.T., U.S.A, March 9–16.

[20] *Yan J., Koc M., Lee J.,* «A prognostic algorithm for machine performance assessment and its application,» *Production Planning & Control,* vol. Vol. 15, pp. pp. 796-801, 2004.

[21] Bond L., «Diagnostics and prognostics: state of the art and programs,» in *International Atomic Energy Agency (IAEA)*, Buenos Aires, Argentina, 2008.

[22] Yoon, J., He D., Van Hecke B., Nostrand T.J., Zhu J., Bechhoefer E., «Planetary gearbox fault diagnosis using a single piezoelectric strain sensor,» in *Proceedings of the 2014 Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society*, United States, 2014.

[23] Bertucci A., Jacazio G., Sorli M., «Mathematical Model of a Epicyclic Reducer Type I».

[24] Liang, M.J. Zuo, L. Liu, «A windowing and mapping strategy for gear tooth fault detection of a planetary gearbox,» in *Mech. Syst. Signal Process*, vol. Vol. 80, 2016, p. 445–459.

[25] Kuang J.H., Yang Y.T., «An estimate of mesh stiffness and load sharing ratio of a spur gear pair,» in *International Power Transmission and Gearing Conference*, 1992.

[26] R.G. Parker, J. Lin, «Mesh phasing relationships in planetary and epicyclic gears,» *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME,* vol. Vol. 126, pp. pp. 365-370, 2004.

[27] Fan L., Wang S., Wang X., Han F., Lyu H., «Nonlinear dynamic modeling of a helicopter planetary gear train for carrier plate crack fault diagnosis,» *Chinese Journal of Aeronautics,* vol. Vol 29(3) , pp. 675-687.

[28] *ISO/TR 14179-2:2001, Gears – Thermal capacity - Part 2: Thermal loadcarrying capacity.*

[29] N. Ludivion, *ISO/TS 6336-4. Calcul de la capacité de charge au grippage des engrenages cylindriques, coniques et hypoïdes,* 2016.

[30] G. A. Belingardi G., «Costruzioni di macchine,» Dispense del corso, 2019.

[31] Savage M., Coy J.J., Townsend D.P., «The Optimal Design of Standard Gearsets,» The University of Akron. Propulsion Laboratory, U.S. Army Research and Technology Laboratories, NASA Lewis Research Center.

[32] Xinlei W., Changle X., Chunming L., Shenlong L., Yimin S., Liming W., «Effect of roughness on meshing power loss of planetary gear set considering elasto-hydrodynamic lubrication,» in *Advances in Mechanical Engineers*, vol. Vol. 12(2), 2020, pp. pp. 1-12.

[33] Ian H., Shengxiang J., Jiande W., «The dynamic modelling of a spur gear in mesh including friction and crack,» in *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 15(5), 2001, pp. pp. 831-853.

[34] Batchelor Andrew, Stachowiak Gwidon, Engineering Tribology Fourth Edition, Oxford, U.K.: Elsevier, 2013.

[35] K. L. Johnson, «Shear behavior of elastohydrodynamic oil film,» *Proc. R. Soc. Lond.,* pp. 215-236, 1977.

[36] «www.mobil.com».

[37] L. Menegolo, «Lubrificazione del cambio di una vettura di F.1,» Tesi di Laurea Università di Bologna, 1998.

[38] K.A. Kaye and W.O. Winer, «An Experimental Evaluation of the Hamrock and Dowson Minimum Film Thickness Equation for Fully Flooded EHD Point Contact,» *Journal of Lubrication Technology,* vol. Vol. 103, p. pp. 284–294, 1981.

[39] Fatourehchi E., Mohammadpour M., King P. D., Rahneja, H., Trimmer G., Williams A., & Womersley R., «Effect of mesh phasing on the transmission efficiency and dynamic performance of wheel hub planetary gear sets,» *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science,* vol. 232(19), pp. 3469-3481, 2018.

[40] Bertucci A., Jacazio G., Sorli M., «Mathematical Model of a Parallel Axes Gear Reducer».

[41] F. Chaari, T.Fakhfakh, M. Haddar, «Dynamic analysis of a planetary gear failure caused by tooth pitting and cracking,» *Journal of Failure Analysis and Prevention 6.2,* Vol. %1 di %273-78, 2006.

[42] Cheng Z., «A hybrid prognostics approach to estimate the residual useful life of a planetary gearbox with a local defect,» *Journal of Vibroengineering,* Vol. %1 di %2Vol. 17, Issue 2, pp. p. 682-694, 2015.

[43] T.L. Anderson, Fracture Mechanics: fundamentals and applications, Taylor & Francis, 2005.

[44] P.J.L. Fernandes, «Tooth bending fatigue failures in gears,» in *Engineering Failure Analysis*, 1996.

[45] D.G. Lewicki, «Gear crack propagation path studies-guidelines for ultra-safe design,» *Journal of the American Helicopter Society,* vol. Vol. 47, 2002.

[46] Belsak A., Flasker J., «Detecting cracks in the tooth root of gears,» in *Engineering Failure Analysis*, vol. Vol. 14, 2007, p. pp. 1466–1475.

[47] J. Kramberger, M. Šraml, S. Glodezˇ, J. Flašker, I. Potrcˇ, «Computational model for the analysis of bending fatigue in gears,» in *Comput. Struct*, vol. Vol. 82, 2004, p. pp. 2261–2269.

[48] Chaari F., Fakhfakh T., Haddar M., «Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gear mesh stiffness,» *European Journal of Mechanics A/Solids,* vol. Vol. 28, p. pp. 461–468, 2009.

[49] Ehsan R., Mehrdad P., Mohsen R., Alireza A., «A New Analytical Approach for Crack Modeling in Spur Gears,» *Jordan Journal of Mechanical and Industrial Engineering,* vol. Vol. 13(2), pp. pp. 69-74, July 2019.

[50] Zaigang C., Yimin S., «Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth,» in *Engineering Failure Analysis*, vol. Vol. 18(8), 2011, pp. pp. 2149-2164.

[51] Yang DCH, Su ZS., «A rotary model for spur gear dynamics,» *Journal of Mechanical Design ASME,* vol. Vol. 107(4), p. pp. 529–535, December 1985.

[52] Chaari F, Baccar W, Abbes MS, et al., «Effect of spalling or tooth breakage on gearmesh stiffness and dynamic response of a one-stage spur gear transmission.,» *European Journal of Mechanics A/Solids,* vol. Vol. 27, p. pp. 691–705, 2008.

[53] Sainsot P., Velex P., Duverger O., «Contribution of gear body to tooth deflections – a new bidimensional analytical formula,» *ASME J Mech,* vol. Vol. 126, p. pp.748–752, 2004.

[54] Li CJ, Lee H., «Gear fatigue crack prognosis using embedded–dynamic–fracture model, gear dynamic model and fracture mechanics,» *Mechanical System Signal Process,* vol. Vol. 19, p. pp. 836–46, 2005.

[55] Rezaei M., Poursina M., Jazi S. H., Aboutalebi F. H., «Calculation of time dependent mesh stiffness of helical planetary gear system using analytical approach,» *Journal of Mechanical Science and Technology,* vol. Vol. 32 (8), pp. pp. 3537-3545, 2018.

[56] Luo W., Qiao B., Shen Z., Yang Z., Cao H., Chen X., «Influence of Sliding Friction on the Dynamic Characteristics of a Planetary Gear Set With the Improved Time-Varying Mesh Stiffness,» *Journal of Mechanical Design ASME,* vol. Vol. 142, July 2020.

[57] M.G. Vismara, «An integrated approach to a Condition Based Maintenance policy and applications,» master degree thesis, Politecnico di Milano, 2011.

[58] Maierhofer J., Reinhard P., Hans-Peter G., «Modified NASGRO equation for physically short cracks,» *International Journal of Fatigue,* February 2014.

[59] S.J. Loutridis, «Damage detection in gear system using empirical mode decomposition» in *Engineering structures*, 2004.

[60] Russell L. Achoff, «From Data to Wisdom», *Journal of Applied Systems Analysis*, Vol. 16, pp. 3-9, Lancaster, U.K, 1989.

[61] Uckun S., Goebel K., Lucas P., «Standardizing research methods for prognostics», *International conference on prognostics and health management*, IEEE, pp. 1-10, Marriott Tech Center Denver, C.O., U.S.A..

Ringraziamenti

Vorrei dedicare questo spazio alle persone che hanno contribuito alla realizzazione di questo elaborato.
Un ringraziamento particolare va al mio correlatore Andrea De Martin che mi ha seguito in ogni step di realizzazione del progetto, dispensando sempre ottimi consigli e suggerendo puntualmente le giuste modifiche da apportare alla mia tesi. Ringrazio inoltre il mio relatore Massimo Sorli per la disponibilità dimostrata durante il percorso.
Ringrazio infinitamente mia madre e mio padre, senza i loro insegnamenti e senza il loro supporto, questo lavoro di tesi non esisterebbe nemmeno.
Un ultimo ringraziamento va ai miei zii ed ai miei nonni, per avermi sempre incoraggiato fin dall'inizio del percorso universitario.