

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Ottimizzazione di traiettorie orbitali
per satelliti in LEO sotto l'influenza
di J_2



Relatore
Prof. Lorenzo Casalino

Candidato
Nicolò Stronati

A.A. 2019/2020

Indice

Elenco delle tabelle	V
Elenco delle figure	VI
1 Introduzione al problema	1
1.1 Dinamica	2
1.1.1 Problema degli n-corpi	2
1.1.2 Problema dei due corpi	5
1.2 Sistema di riferimento e parametri orbitali	7
1.3 Perturbazioni	9
1.3.1 Atmospheric Drag	11
1.3.2 Non sfericità della Terra	12
1.3.3 Precessione nodale dovuta al J_2	15
1.4 Manovre con propulsione elettrica	16
1.4.1 Approssimazione di Edelbaum	18
1.4.2 Equazioni planetarie di <i>Lagrange</i>	19
1.4.3 Soluzione di Edelbaum	20
2 Metodo di ottimizzazione	23
2.1 Teoria del controllo ottimale	24
2.1.1 Problema differenziale ai limiti	29
2.2 Trasferta su una rivoluzione	34
2.3 Trasferta su rivoluzioni multiple	36
2.4 Impostazione del problema	39
3 Risultati	43
3.1 Configurazioni a tempo minimo	44
3.2 Soluzioni a minimo consumo di propellente	47
3.2.1 Strategia alternativa per le orbite che si allontanano	53
3.3 Analisi del risparmio di propellente	55
3.4 Analisi dei controlli ottimi	58

3.4.1	Spinta	58
3.4.2	Angolo di spinta β	59
3.4.3	Parametro ϑ_0	63
	Conclusioni	71
	Bibliografia	73

Elenco delle tabelle

1.1	Grandezze fondamentali	3
1.2	Dati sulla non sfericità della Terra	13
1.3	Alcune armoniche zonali	14
3.1	Dati iniziali	43
3.2	Risultati a tempo minimo	44
3.3	Risultati a RAAN libero	45
3.4	$\Delta a = -100$ km, $\Delta\Omega = +10^\circ$	48
3.5	$\Delta a = +100$ km, $\Delta\Omega = -10^\circ$	48
3.6	$\Delta a = -100$ km, $\Delta\Omega = +20^\circ$	48
3.7	$\Delta a = +100$ km, $\Delta\Omega = -20^\circ$	48
3.8	$\Delta a = +100$ km, $\Delta\Omega = +10^\circ$	48
3.9	$\Delta a = -100$ km, $\Delta\Omega = -10^\circ$	49
3.10	$\Delta a = +100$ km, $\Delta\Omega = +20^\circ$	49
3.11	$\Delta a = -100$ km, $\Delta\Omega = -20^\circ$	49
3.12	Tempi limite: nodi che si avvicinano	51
3.13	Risultati a massa minima: strategia alternativa	54

Elenco delle figure

1.1	Problema degli n-corpi [2]	2
1.2	Problema dei due corpi [2]	6
1.3	Parametri orbitali [2]	8
1.4	Effetti di alcune armoniche	14
1.5	$\Delta\Omega$ giornaliero	16
1.6	Rapporto m_f/m_i al variare della velocità di scarico	17
1.7	Direzioni componenti di spinta	19
1.8	Cambio combinato di semiasse maggiore e inclinazione [9]	21
3.1	Soluzioni a tempo minimo	46
3.2	Casi con linee dei nodi che si avvicinano	50
3.3	Casi con linee dei nodi che si allontanano	52
3.4	Evoluzione temporale del caso a tempo massimo di $\Delta a = -100$ km, $\Delta\Omega = +10^\circ$	53
3.5	Risultati con la strategia alternativa	54
3.6	Evoluzione temporale del caso a tempo minimo di $\Delta a = +100$ km, $\Delta\Omega = -340^\circ$	55
3.7	Consumo di propellente per i casi con linee dei nodi che si avvicinano	56
3.8	Consumo di propellente per i casi con linee dei nodi che si allontanano	57
3.9	<i>Switching Function</i> per le manovre a tempo minimo	58
3.10	<i>Switching Function</i> per manovre a massa minima	59
3.11	<i>Switching Function</i> per manovre a massa minima, $\Delta\Omega < 0$ e alla quota limite	60
3.12	Variazione di quota in funzione del β per casi a $\Delta\Omega > 0$	61
3.13	Variazione di quota in funzione del β per casi a $\Delta\Omega < 0$	62
3.14	Andamento del β a $\Delta\Omega < 0$ corretto	62
3.15	β e ϑ_0 per casi a $\Delta\Omega > 0$	64
3.16	$\cos \vartheta_0 \cdot \sin \beta$ in relazione all'inclinazione per casi a $\Delta\Omega > 0$	65
3.17	RAAN dello <i>spacecraft</i> e dell'orbita target	65
3.18	$(\dot{\Omega})$	66
3.19	β e ϑ_0 per casi a $\Delta\Omega < 0$	68

Breve descrizione

In questa tesi viene utilizzato un metodo numerico per analizzare traiettorie ottime di trasferimento orbitale per satelliti LEO. Si impiega l'approssimazione di Edelbaum per descrivere le trasferte con motori a bassa spinta tra orbite LEO circolari, in termini di variazione di semiasse maggiore, inclinazione, ascensione retta del nodo ascendente, tenendo conto della precessione nodale dovuta all'armonica zonale J_2 . Si sfrutta un metodo di ottimizzazione indiretto, basato sul Principio di Pontryagin, per trovare le soluzioni a tempo minimo e a minimo consumo di propellente per le manovre desiderate, che possono essere rappresentative, per esempio, di missioni come *Earth Orbit Raising* o *Active Debris Removal*. Metodi di ottimizzazione indiretta come questo presentano notevoli vantaggi in quanto offrono una buona precisione, associata a tempi di calcolo molto rapidi. Vengono poi analizzati casi di trasferte con diverse variazioni di semiasse maggiore e RAAN a partire da un'orbita con 400 km di altitudine e 51 gradi di inclinazione iniziali, valori rappresentativi dei parametri orbitali della ISS. Si cercheranno in particolare le soluzioni ottime per quanto riguarda tempo minimo e minimo consumo di propellente.

Capitolo 1

Introduzione al problema

La sempre crescente necessità di svolgere attività in orbita bassa terrestre, che coinvolga un certo numero di satelliti che devono essere, per esempio, dismessi, nonché l'attenzione al risparmio delle risorse in termini di combustibile, pone l'attenzione sull'ottimizzazione di traiettorie di trasferimento con motori in regimi di basse spinte. Gli impieghi di una tecnica e di uno studio del genere possono essere tra i più disparati, abbracciando tipologie di missioni di semplice *orbit raising*, per cui bisogna fare attenzione al *trade-off* tra il risparmio in termini di combustibile consumato e tempi di compimento della manovra che si allungano, o di *multiple debris removal*. Questo aspetto in particolare è da tenere in grande considerazione, in quanto il sovraffollamento della LEO di satelliti ormai inattivi, o veri e propri detriti, dovuti alla distruzione di oggetti in seguito a impatti in quota, hanno riempito questa ristretta regione dello spazio di spazzatura orbitante. Molti sono i progetti portati avanti con l'obiettivo di rimuovere definitivamente questi *debris*, auspicabilmente trasferendoli all'interno dell'atmosfera, dove questa provvederà a bruciarli e a farli sparire definitivamente. Alcuni di questi si basano sulle tecniche di ottimizzazione di cui si sta per discutere, e si pongono l'obiettivo di effettuare il *debris collecting* con traiettorie ottimali, adattando il classico *problema del venditore* a un problema *time-dependent* [1]. La dipendenza temporale viene infatti dall'effetto del J_2 , che provoca una regressione della linea dei nodi, e quindi una variazione durante la manovra del RAAN, di cui bisogna tenere conto, oltre alle modifiche da imporre col motore all'altitudine e inclinazione dell'orbita. L'impiego di motori a bassa spinta permette un risparmio nel consumo di propellente, e deve essere trattato tenendo conto dell'approssimazione di Edelbaum per descrivere le manovre da effettuare e i loro effetti sui parametri orbitali.

1.1 Dinamica

Si vuole studiare il moto di un satellite terrestre di massa m sottoposto alla sola attrazione gravitazionale della Terra, dotata di massa M , tali per cui vale $M \gg m$. A rigore questo rappresenta un caso particolare del problema degli n -corpi, il cui obiettivo è studiare il moto di un corpo soggetto all'attrazione gravitazionale di un numero indefinito n di altri corpi (Figura 1.1).

1.1.1 Problema degli n -corpi

Al fine di descrivere questo caso più generale, si consideri un sistema di riferimento (X, Y, Z) in cui siano note le posizioni delle n masse dal centro di questo sistema, che saranno indicate con $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$.

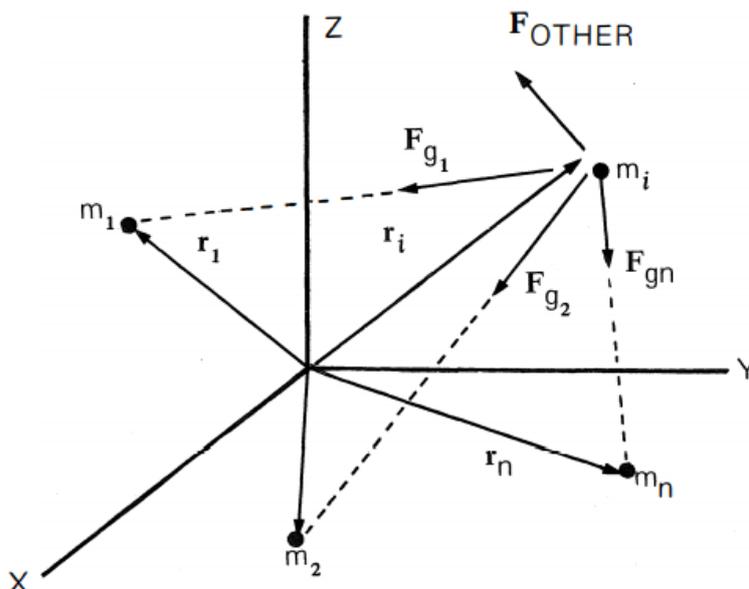


Figura 1.1: Problema degli n -corpi [2]

Ognuno di questi corpi subirà una mutua attrazione descritta dalla *Legge di Gravitazione Universale*, secondo la quale due corpi si attraggono l'uno con l'altro con una forza proporzionale al prodotto delle due masse, e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra di essi [2]. In termini matematici si ha:

$$\mathbf{F}_g = -G \frac{M m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.1)$$

In cui G è la *Costante di Gravitazione Universale*, coefficiente di proporzionalità di tale legge, il cui valore è indicato in Tabella 1.1. Specializzando la (1.1) nel

problema degli n-corpi, si possono ricavare le forze gravitazionali che insistono sull'i-esimo corpo di massa m_i , di cui si vuole studiare il moto. In particolare la forza \mathbf{F}_{g_n} che il corpo n-esimo esercita sul corpo i-esimo vale:

$$\mathbf{F}_{g_n} = -G \frac{m_i m_n}{r_{ni}^3} \mathbf{r}_{ni} \quad (1.2)$$

Dove $\mathbf{r}_{ni} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_n$.

Tabella 1.1: Grandezze fondamentali

Grandezza	Valore
G [N m ² /kg ²]	$6,67 \times 10^{-11}$
R_T [km]	6378
M_T [kg]	$5,972 \times 10^{24}$
μ_T [km ³ /s ²]	398600,44

Ovviamente la (1.2) può essere riscritta per tutti gli $n - 1$ corpi del sistema che circondano il corpo i-esimo, tale per cui il vettore di tutte le forze gravitazionali agenti su tale corpo può essere scritto come:

$$\mathbf{F}_g = -G m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji} \quad (1.3)$$

Ovviamente la condizione $j \neq i$ è necessaria, poiché non ha senso che un corpo eserciti attrazione su se stesso.

La forza totale agente sul corpo i-esimo diviene pertanto la somma tra questa forza gravitazionale dovuta all'influenza degli altri corpi del sistema, e di una serie di altre forze esterne, indicata con \mathbf{F}_{others} :

$$\mathbf{F}_{TOT} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{others} \quad (1.4)$$

Questo vettore delle forze esterne contempla una serie di altre forze, che si potrebbero indicare come *perturbazioni*, come le forze dovute alla spinta, alla pressione di radiazione solare, le forze aerodinamiche per i satelliti in orbita bassa terrestre, perturbazioni dovute alla non sfericità della Terra. Di queste ultime due si tratterà più dettagliatamente, in quanto risultano essere di maggiore importanza per il problema di cui si tratta nel presente lavoro. In generale, tuttavia, queste perturbazioni sono di piccola entità. Infatti, per un satellite terrestre ad un'altitudine di 370 km, l'accelerazione perturbativa dovuta alla non sfericità del pianeta è di $10^{-3}g_s$, di due ordini di grandezza inferiore rispetto a quella dovuta all'attrazione gravitazionale terrestre ($0,89 g_s$) [2]. Si decide pertanto, per il momento, di trascurare tali effetti,

salvo poi reintrodurli opportunamente in seguito, considerando nel dettaglio tutte le conseguenze che questi comportano nel caso di interesse.

Per ricavare l'equazione del moto del corpo i -esimo nel sistema degli n -corpi, è necessario chiamare in causa la *Seconda legge di Newton*, nota anche come *Secondo principio della Dinamica*, applicandolo sul corpo interessato:

$$\frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{F}_{TOT} \quad (1.5)$$

Derivando opportunamente la (1.5), e tenendo conto che $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$, si giunge pertanto a:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{F}_{TOT}}{m_i} - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\dot{m}_i}{m_i} \quad (1.6)$$

Questa è l'equazione vettoriale, differenziale, del secondo ordine, non lineare, del moto del corpo i -esimo nel sistema degli n -corpi, che, in questa forma, risulta essere praticamente impossibile da integrare analiticamente. Oltre ad aver assunto $\mathbf{F}_{others} = 0$ è necessario, in aggiunta, ricorrere ad una ulteriore semplificazione, supponendo che la massa sia costante, e quindi che il termine \dot{m}_i sia nullo. Anche questa assunzione necessiterebbe di ulteriori discussioni, infatti lo *spacecraft* potrebbe compiere una manovra, producendo spinta, e quindi espellere propellente, che si tradurrebbe in una inevitabile variazione di massa.

Con queste ipotesi, dunque, si può scrivere una espressione semplificata dell'equazione del moto del corpo i -esimo:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji} \quad (1.7)$$

Si immagini ora di assumere la seguente notazione:

- $i = 1 \rightarrow$ Terra
- $i = 2 \rightarrow$ *spacecraft*
- $i = 3, 4, \dots, n \rightarrow$ Luna, Sole, altri pianeti, ...

In questo modo si sta, in sostanza, specializzando il caso generale alla descrizione del moto di un satellite attorno al corpo principale Terra. Evitando di esplicitare tutti i passaggi algebrici, infatti, è possibile ricavare l'accelerazione del satellite ($i = 2$) attorno alla Terra ($i = 1$), in presenza delle perturbazioni dovute a corpi che sono, a tutti gli effetti, *esterni* a questo sistema Terra-*spacecraft*:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -G \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} - \sum_{j=3}^n G m_j \left(\frac{\mathbf{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \mathbf{r}_{j1} r_{j1}^3 \right) \quad (1.8)$$

Al primo termine di questa equazione si ha l'effetto sull'accelerazione dello *spacecraft* dovuto alla sola attrazione della Terra sul satellite, mentre al secondo si hanno gli effetti degli altri corpi, cioè gli effetti perturbativi di, ad esempio, Sole, Luna, Giove e quant'altro sul moto del satellite. Questi ultimi sono, tuttavia, effetti di entità risibile, di ordini di grandezza inferiori anche a quelli relativi all'ellitticità della Terra. Anche questi, quindi, possono essere trascurati, e presi in considerazione solo nei casi in cui hanno un'influenza più significativa nel perturbare il moto del satellite. La presenza di un terzo corpo, infatti, dipende dalla distanza tra il satellite e il corpo principale (la Terra), e assume un'importanza considerevole nel caso di satelliti in orbite distanti quanto o più della Geostazionaria, in cui l'influenza, soprattutto della Luna, comporta la variazione dell'inclinazione di circa 1° all'anno, rendendo necessarie manovre di *station keeping* Nord-Sud [3].

1.1.2 Problema dei due corpi

Si può quindi restringere il problema degli n-corpi ai soli due corpi principale e secondario, trascurando, in sostanza, dalla (1.8) tutti gli effetti perturbativi di cui si è discusso. Pertanto, prima di proseguire, è necessario introdurre due ipotesi semplificative, assumendo che:

- la Terra sia perfettamente sferica, così da trascurare gli effetti di ellitticità;
- non ci siano forze esterne provenienti da altri corpi, né forze interne.

Si assuma ora, per ricavare e analizzare l'equazione del moto dei due corpi, di trovare un sistema di riferimento inerziale (X', Y', Z') da cui poter misurare univocamente le distanze tra l'origine di questa terna e i due corpi considerati (\mathbf{r}_m , \mathbf{r}_M), e sia invece (X, Y, Z) un sistema di riferimento non rotante, con origine nel centro del corpo principale e con gli assi paralleli a (X', Y', Z') (Figura 1.2).

Si indichino con m lo *spacecraft*, con M la Terra e con $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$ la distanza relativa tra i due corpi. Applicando sui due corpi la seconda legge di Newton, si ottengono, rispettivamente:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_m = -G\frac{mM}{r^3}\mathbf{r} \quad (1.9a)$$

$$M\ddot{\mathbf{r}}_M = +G\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r} \quad (1.9b)$$

Dopo aver semplificato le masse dalle equazioni, in modo da isolare le accelerazioni, sottraendo la (1.9b) alla (1.9a) si ottiene:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_m - \ddot{\mathbf{r}}_M = -G\frac{M+m}{r^3}\mathbf{r} \quad (1.10)$$

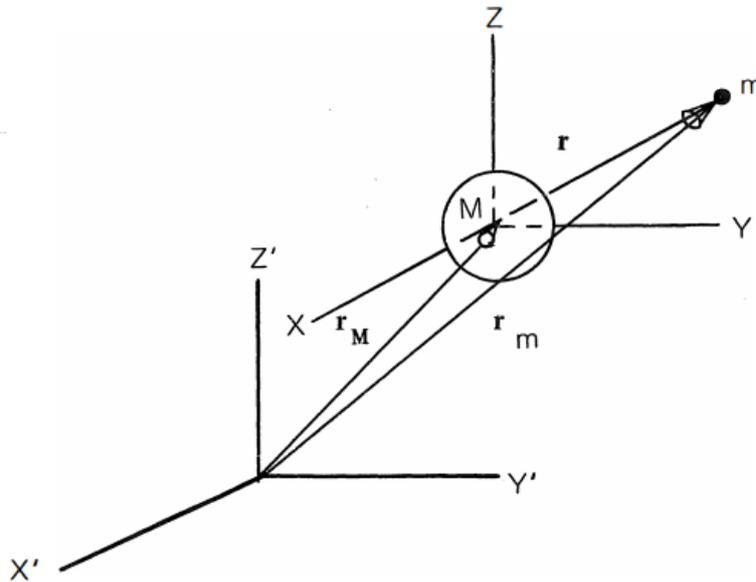


Figura 1.2: Problema dei due corpi [2]

Questa è l'equazione differenziale vettoriale del moto relativo per il problema dei due corpi, ed è analoga alla (1.8) senza il termine legato alle perturbazioni di corpi esterni. Siccome si è interessati a valutare il moto di un satellite attorno alla Terra, è lecito assumere la massa dello *spacecraft* trascurabile rispetto a quella del pianeta, e quindi $m \ll M$. Ciò permette di semplificare ulteriormente l'equazione (1.10), in quanto si può dire che:

$$G(M + m) \approx GM \doteq \mu \quad (1.11)$$

Questa grandezza prende il nome di *Parametro Gravitazionale* o *Costante di gravitazione Planetaria*, e dipende, come si può vedere, dalla sola massa del corpo principale di riferimento, e quindi dal solo solo corpo principale. Il suo valore per la Terra, caso di interesse nella presente trattazione, è indicato in Tabella 1.1.

Sfruttando questa notazione, quindi, l'equazione del moto si riduce a:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \quad (1.12)$$

Si introducono ora alcune *grandezze energetiche* che possono risultare utili nella trattazione.

In primo luogo è importante citare l'*Energia Meccanica specifica*, cioè per unità di massa:

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (1.13)$$

In cui il primo termine rappresenta l'energia cinetica specifica e il secondo l'energia potenziale gravitazionale. Inoltre r è la distanza del satellite dal centro di massa del corpo principale, mentre v è il modulo della velocità del satellite. Si può dimostrare [2] che questa grandezza è costante in ogni punto della traiettoria ed è uguale a:

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (1.14)$$

Dove a è il semiasse maggiore della conica.

Un'altra grandezza di fondamentale importanza è il *Momento della quantità di moto specifico*, che è un vettore, e può essere espresso come:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (1.15)$$

Cioè il prodotto vettoriale tra il vettore posizione del satellite rispetto al centro di massa del corpo principale e il vettore velocità del satellite stesso. Anche questo si dimostra [2] essere costante in direzione, modulo e verso, e quindi porta a concludere che la traiettoria di un satellite si sviluppa sempre sullo stesso piano, detto *piano perifocale*, che rimane fisso nello spazio. Questo risultato, ovviamente, sottostà a tutte le ipotesi semplificative che sono state fatte in precedenza. Si vedrà infatti che le perturbazioni di cui si è accennato cambiano la disposizione spaziale di questo piano orbitale, nonché molti tipi di manovra, il cui obiettivo è proprio quello di modificare la traiettoria del corpo, sia nello stesso piano che fuori.

1.2 Sistema di riferimento e parametri orbitali

Prima di analizzare nel dettaglio le perturbazioni e il loro effetto sulla disposizione spaziale del piano perifocale, è necessario definire il sistema di riferimento preso in considerazione, così da introdurre termini e grandezze che saranno richiamati in seguito.

Il sistema utilizzato è il *sistema di riferimento geocentrico equatoriale*, che ha origine nel centro della Terra, il cui piano fondamentale coincide con il piano equatoriale e il cui asse z , descritto dal versore \hat{K} , punta in direzione nord, verso il polo nord celeste, ovvero la Stella Polare. L'asse x , con il suo versore \hat{I} , è parallelo all'asse vernale del sistema Eliocentrico-Eclittica. L'asse y , e il suo versore \hat{J} completa la terna destrorsa. Va sottolineato che questo sistema di riferimento risulta essere non rotante, a parte la precessione degli equinozi che modifica nel tempo l'orientamento del vettore vernale, nonostante la ovvia rotazione della Terra. Risulta essere quindi

di grande efficacia per la descrizione della disposizione nello spazio di un satellite in orbita, appunto, geocentrica (Figura 1.3).

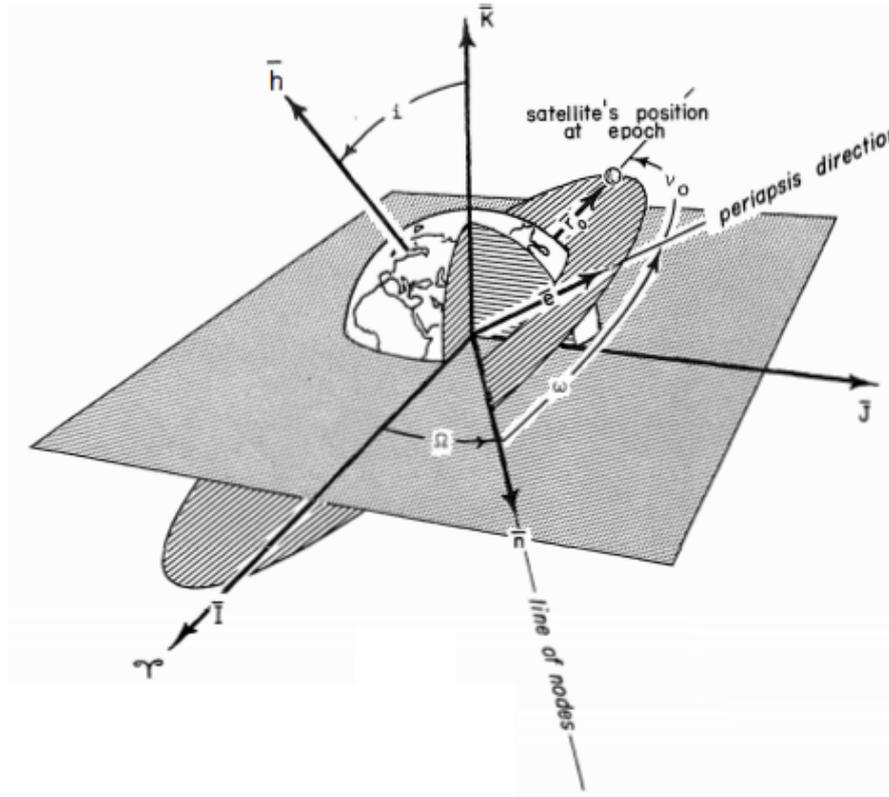


Figura 1.3: Parametri orbitali [2]

Si possono quindi introdurre i *Parametri orbitali classici* o *Kepleriani*, che, dato un opportuno sistema di riferimento, individuano in modo univoco non solo disposizione e forma dell'orbita nello spazio, ma anche la posizione, dipendente dal tempo, del satellite su tale traiettoria. Senza perdita di generalità si vanno a considerare solo orbite di forma ellittica, o, suo caso particolare, circolare. Infatti nei casi che si andranno ad analizzare non saranno mai presi in considerazione archi di traiettoria parabolica o iperbolica, in quanto si vorranno descrivere esclusivamente trasferimenti tra orbite basse terrestri quasi-circolari.

Tali parametri sono:

- a - semiasse maggiore;
- i - inclinazione dell'orbita;
- e - eccentricità della conica;

- Ω o RAAN - ascensione retta del nodo ascendente;
- ω - argomento del periastro;
- ν - anomalia vera.

Alternativamente ad a o e si può anche impiegare il *semilatus rectum* p , in quanto i tre sono legati dalla relazione geometrica dell'ellisse:

$$p = a(1 - e^2)$$

In generale, semiasse maggiore, eccentricità e *semilatus rectum* danno informazioni sulla forma ed energia dell'orbita, l'anomalia vera sulla posizione dello *spacecraft* nella sua traiettoria nel tempo, mentre gli altri descrivono la disposizione spaziale dell'orbita.

L'inclinazione è l'angolo tra il versore nord \hat{K} e il vettore momento della quantità di moto definito nella (1.15).

L'ascensione retta del nodo ascendente è l'angolo formato tra il versore \hat{I} e il nodo ascendente dell'orbita, cioè il punto in cui lo *spacecraft*, nella sua traiettoria, intercetta il piano equatoriale passando da sud a nord. Inoltre è possibile definire la linea dei nodi, che è ottenuta dall'intersezione tra il piano perifocale e il piano equatoriale, da cui deriva il concetto di versore \hat{n} , che ha come direzione la linea dei nodi e punta verso il nodo ascendente. Questo angolo è molto importante, in quanto è quello maggiormente influenzato, nella presente trattazione, dalla perturbazione dovuta all'ellitticità della Terra.

L'argomento del periastro è l'angolo tra la linea dei nodi (il versore \hat{n}) e la direzione del periastro dell'orbita. Nei casi che si andranno a trattare le orbite saranno circolari, quindi tali per cui l'eccentricità dell'ellisse è nulla. In questo caso particolare la direzione del periastro e la linea dei nodi coincidono e si ha $\omega = 0$. Ciò non è tuttavia in generale verificato quando si andranno a descrivere graficamente gli archi delle traiettorie di trasferimento da un punto a un altro.

Talvolta sarà conveniente riferirsi ad un altro parametro, la *longitudine del periastro*, che sarà indicato con ϑ , il quale corrisponde alla somma tra argomento del periastro e anomalia vera, e rappresenta pertanto l'angolo tra il nodo ascendente e la posizione del satellite nella sua orbita.

1.3 Perturbazioni

Come si è già discusso, le ipotesi semplificative per ottenere la (1.12) non sempre, anzi, quasi mai, sono in realtà verificate. Le orbite cosiddette *Kepleriane* che derivano da quella trattazione sono delle coniche, in cui il centro di massa del corpo principale, considerato come sfera perfetta, occupa uno dei fuochi, e il loro piano perifocale non vede modificare la sua posizione nello spazio. Ci sono però altre forze

che influenzano questo moto dello *spacecraft* lungo la sua traiettoria, molto spesso comunque di piccole entità, tali da modificare il più delle volte forma e disposizione spaziale dell'orbita solo su tempi piuttosto lunghi. Gli effetti perturbativi infatti si dividono tipicamente tra quelli di breve periodo e quelli di lungo periodo, che provocano oscillazioni, deviazioni, dalla traiettoria classica Kepleriana, e che devono essere valutati e quantificati in qualche modo. Questa operazione non è in generale semplice. Si prenda ad esempio la (1.8), la cui integrazione analitica è molto complicata, e che potrebbe diventare anche *time-dependent*, in quanto la posizione relativa di eventuali terzi corpi varia nel tempo e va costantemente aggiornata e riquantificata.

Si deve pertanto far ricorso a tecniche di propagazione dell'orbita con le sue perturbazioni, al fine di valutare gli effetti desiderati. In primo luogo è necessario tenere a mente che l'equazione del moto del semplice sistema dei due corpi va modificata opportunamente inserendo il termine delle accelerazioni perturbative \mathbf{a}_P :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_P \quad (1.16)$$

Questo tipo di equazione differenziale vettoriale non può essere risolta in forma chiusa, e si deve procedere o con soluzioni analitiche approssimate, e si parla di *general perturbation methods*, o con metodi numerici, indicati come *special perturbation methods* [4].

Nel primo caso il metodo è analitico, i termini perturbativi sono espansi in serie e ogni termine dell'espansione viene così integrato. Si ottiene una soluzione analitica che descrive la traiettoria in funzione del tempo sotto l'azione degli agenti perturbativi considerati.

Il secondo caso si riferisce a una serie di metodi numerici, che si propongono di integrare numericamente le equazioni del moto. Sono in grado di generare una traiettoria definita, appunto, speciale, date le condizioni iniziali dello *spacecraft*. Molto importanti sono la scelta della tecnica di integrazione e la formulazione adottata per le equazioni da integrare, caratteristiche che differenziano i vari metodi possibili. Tra i più famosi si possono citare il metodo di *Cowell* e quello di *Encke*. Quest'ultimo, in particolare, assume come variabile di propagazione la differenza tra il raggio della traiettoria Kepleriana indisturbata e quella soggetta alla perturbazione $d\mathbf{r}$. Integrando le equazioni del moto si cerca di annullare questo $d\mathbf{r}$, e si ricava così, con un metodo *passo-passo*, l'orbita osculatrice che descrive l'orbita reale.

Gli *special perturbation methods* nonostante siano direttamente applicabili a qualunque tipo di orbita e di perturbazione, definite le condizioni iniziali dello *spacecraft*, sono soggetti, come ci si aspetterebbe, a errori numerici, che li rendono poco efficaci nel lungo termine.

Si vanno ora a descrivere nel dettaglio le principali fonti di perturbazione coinvolte nel caso di interesse. Si trascurano, infatti, le presenze di eventuali terzi corpi,

che hanno relativamente poca importanza per satelliti in orbita bassa, e gli effetti dovuti alla pressione di radiazione solare.

1.3.1 Atmospheric Drag

Satelliti sotto la quota di 1000 km sono soggetti all'azione aerodinamica del pur sottile strato di atmosfera che ancora ivi sussiste, soprattutto legato alla presenza di ossigeno atomico, tale da produrre effetti sia di resistenza aerodinamica che di erosione [5, 6]. L'effetto della *drag* negli strati alti dell'atmosfera è molto complicato da quantificare, in quanto dipende fortemente dall'attività solare al momento della valutazione.

Ciò che si può sicuramente dire al riguardo è che la resistenza ha un'influenza sull'abbassamento dell'orbita, infatti si può valutare l'effetto che questa ha sull'energia totale, e quindi sul semiasse maggiore, di un'orbita.

La forza perturbativa dovuta all'azione aerodinamica è espressa dalla relazione fluidodinamica della resistenza:

$$m\dot{V} = -\frac{1}{2}\rho w^2 S C_D \quad (1.17)$$

In cui ρ indica la densità atmosferica, w la velocità relativa all'atmosfera, S è la superficie di riferimento dello *spacecraft*, C_D è il coefficiente di resistenza aerodinamico. Questo è mediamente più alto dei coefficienti considerati per impieghi aeronautici, in quanto diverse sono le geometrie dei satelliti e diverso è anche il tipo di impatto molecolare a cui si va incontro in orbita [4].

Differenziando la (1.14) si può esprimere come variano energia e semiasse maggiore nel tempo. Si ipotizzi, per semplicità, di considerare un'orbita circolare:

$$\frac{dE_g}{dt} = \frac{\mu}{2a^2}\dot{a} = 2\frac{v}{2}\dot{v} \quad (1.18)$$

Da cui si ricava:

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu}v\dot{v} \quad (1.19)$$

Sostituendo ora a \dot{v} la sua espressione, ricavabile dalla (1.17), si ottiene:

$$\dot{a} = -\sqrt{\mu a} \cdot \frac{S\rho C_D}{m} \quad (1.20)$$

In cui compare anche il *coefficiente balistico*, definito come:

$$B.C. = \frac{m}{S C_D} \quad (1.21)$$

Esso dà una misura della capacità di un corpo di resistere alla *drag*. L'equazione (1.20) mostra il decadimento dell'orbita a causa della resistenza aerodinamica.

Le dipendenze principali sono, come si può vedere, quelle dalla densità atmosferica e superficie dello *spacecraft*, all'aumentare dei quali si ha una maggior decrescita dell'altitudine dell'orbita. Chiaramente, poi, maggiore è la massa, minore sarà l'effetto della forza sul corpo in esame.

Siccome la densità dell'atmosfera decresce con la quota, la resistenza può essere, per tempi di missione non troppo lunghi, trascurata per quote comprese tra i 1000 km e i 200 km, mentre risulta essere la perturbazione preponderante sotto tale quota [4]. Pertanto non sarà contemplato l'effetto dell'atmosfera nei modelli fisici e matematici della presente trattazione, ma sarà imposto il limite inferiore per la quota del satellite pari a 200 km. Si farà in modo, quindi, che durante la missione esso non scenda mai sotto questa quota limite, dove l'effetto della resistenza porterebbe a un decadimento rapido e incontrollato dello *spacecraft*.

Nel caso di *rendez-vous*, invece, la resistenza aerodinamica può giocare un ruolo importante, in quanto, se i due satelliti hanno coefficienti balistici molto diversi, tale perturbazione, se non debitamente considerata, potrebbe portare a un non perfetto avvicinamento dei due oggetti, a causa di diversi effetti sui decadimenti delle due traiettorie [7].

1.3.2 Non sfericità della Terra

Una delle importanti ipotesi semplificative che erano state fatte nel problema dei due corpi prevedeva la perfetta sfericità del corpo principale, della Terra, in modo da poter considerare la massa tutta applicata nel suo centro di massa, in modo che ogni effetto gravitazionale potesse agire con perfetta simmetria sferica in un corpo in orbita attorno ad esso. La realtà è ben diversa. È noto infatti che la Terra ha una forma più schiacciata ai poli, con un rigonfiamento nella fascia equatoriale, dove è quindi concentrata una maggiore quantità di massa. Da questa fascia vengono attratti in maniera preponderante i satelliti in orbita attorno alla Terra, andando a disturbare la traiettoria Kepleriana ideale che ci si aspetterebbe. E questa è la principale causa delle perturbazioni dovute alla non sfericità del pianeta.

La Terra potrebbe in prima approssimazione essere descritta come una sorta di ellissoide con il semiasse maggiore corrispondente al raggio all'equatore e il minore quello ai poli, con i relativi valori e la relativa eccentricità elencati in Tabella 1.2. Tuttavia la forma è molto più complicata, dal momento che anche l'equatore non risulta, ad esempio, essere perfettamente circolare, e presenta una eccentricità elencata sempre in Tabella 1.2, che, seppur piccola, necessita di essere tenuta in conto se si vuole descrivere dettagliatamente la forma della Terra.

La superficie terrestre viene descritta dal modello di geoidi terrestri, il quale rappresenta la superficie equipotenziale che meglio adatta il campo gravitazionale terrestre ai minimi quadrati al livello globale del mare. In sostanza, raffigura la

Tabella 1.2: Dati sulla non sfericità della Terra

Grandezza	Valore
Semiasse maggiore [km]	6378
Semiasse minore [km]	6357
Eccentricità ellissoide	0,00335
Eccentricità equatore	$1,14 \times 10^{-5}$

distribuzione delle masse a livello del mare, e ne fornisce una espressione matematica. Infatti questo potenziale gravitazionale può essere espresso come espansione in serie di armoniche sferiche [8]:

$$V_G = -\frac{\mu_T}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_T}{r} \right)^n \cdot \mathcal{P}_n(\sin LA) + \right. \\ \left. - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} J_{n,m} \left(\frac{R_T}{r} \right)^n \cdot \mathcal{P}_n^m(\sin LA) \cdot \cos[n(LO - LO_{n,m})] \right\} \quad (1.22)$$

Dove r , LO , LA rappresentano rispettivamente la distanza dal centro della Terra, la longitudine, la latitudine: sono le coordinate sferiche del sistema di riferimento. R_T è il raggio medio equatoriale della Terra. $\mathcal{P}_n(\sin LA)$ sono i *polinomi di Legendre* di grado n in $\sin LA$, mentre $\mathcal{P}_n^m(\sin LA)$ sono le *funzioni di Legendre associate* di grado n e ordine m . Le J sono coefficienti armonici che, con il loro valore, più o meno alto, determinano l'importanza del termine dell'espansione di grado associato. Va notato che, se questi fossero tutti identicamente nulli, si avrebbe semplicemente $V_G = -\mu_T/r$ che è il potenziale gravitazionale che si ricava con l'assunzione di Terra sferica.

Ognuna di queste armoniche descrive, in un certo senso, una peculiarità della forma del pianeta, e quanti più termini, quindi quanti più coefficienti armonici, sono contemplati nello sviluppo in serie, tanto più la descrizione sarà accurata. Per una buona comprensione della forma della Terra, comunque, sono sufficienti anche solo i primi termini, già illustrati in [8].

La funzione descrittiva dei coefficienti armonici è diversa se si sta trattando dei J_n o dei $J_{n,m}$. I J_n sono dette *armoniche zonali* e descrivono le differenze nella simmetria o asimmetria del campo gravitazionale terrestre rispetto all'equatore. In particolare le armoniche pari hanno a che fare con le simmetrie, invece le dispari con le asimmetrie. I più importanti sono i primi due, il J_2 e il J_3 . Questi, i cui valori sono riportati in Tabella 1.3, sono rispettivamente responsabili di descrivere lo schiacciamento ai poli e la maggior concentrazione di massa nell'emisfero sud. I

coefficienti di ordine superiore hanno ordini di grandezza inferiori a questi due, e non se ne descrivono gli effetti.

I $J_{n,m}$ sono relativi alle deviazioni dall'assialsimmetria del campo ideale, e si dividono ulteriormente in due sottocategorie: se $n = m$ si definiscono *armoniche settoriali*, mentre se $n \neq m$ *armoniche tesserali*. A titolo di esempio il $J_{2,2}$ descrive la forma ellittica dell'equatore.

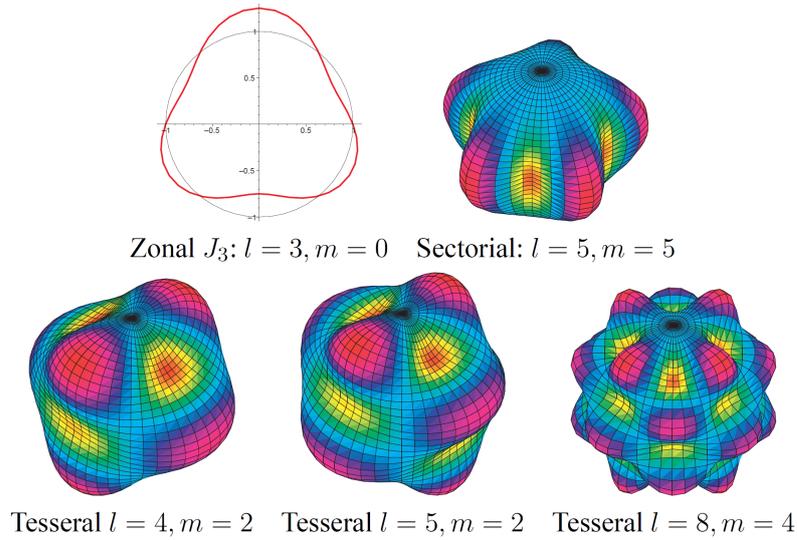


Figura 1.4: Effetti di alcune armoniche

Tabella 1.3: Alcune armoniche zonali

Armonica	Valore
J_2	$1,0826 \times 10^{-3}$
J_3	$-2,5324 \times 10^{-5}$
J_4	$-1,6 \times 10^{-6}$
J_5	$-1,5 \times 10^{-7}$
J_6	$5,7 \times 10^{-7}$

Tendenzialmente l'effetto delle armoniche settoriali e tesserali sono mediate, e quindi si elidono, dal fatto che il satellite compie più rivoluzioni attorno alla Terra in un giorno, e riesce a mitigare gli effetti di tali asimmetrie. Ciò non è più valido nel caso di satelliti geostazionari, che mantengono sempre la stessa posizione rispetto alla superficie terrestre, e pertanto risentono maggiormente anche degli effetti est-ovest.

Risultano essere importanti invece le armoniche zonali, ma di particolare interesse è il rigonfiamento equatoriale descritto dal J_2 , che causa la più importante deviazione dal campo gravitazionale Newtoniano ideale. Questo produce principalmente due effetti. Uno che porta alla rotazione della linea degli apsi sul piano perifocale, ma, trattando, in questo caso, di orbite circolari, non risulta essere di grande interesse, e se ne trascurano gli effetti. Il secondo, e di fondamentale importanza in questa trattazione, provoca la rotazione della linea dei nodi.

1.3.3 Precessione nodale dovuta al J_2

Per le orbite basse terrestri l'effetto della prima armonica zonale J_2 gioca il ruolo preponderante tra i vari tipi di perturbazione, e uno degli effetti di maggior rilievo è quello prodotto sulla linea dei nodi, che può essere valutato mediante la formula relativa all'analisi al primo ordine della (1.22) e assumendo di mitigare le oscillazioni di corto periodo su un giro:

$$\Delta\Omega = -3\pi J_2 \left(\frac{R_T}{p} \right)^2 \cos i \quad (1.23)$$

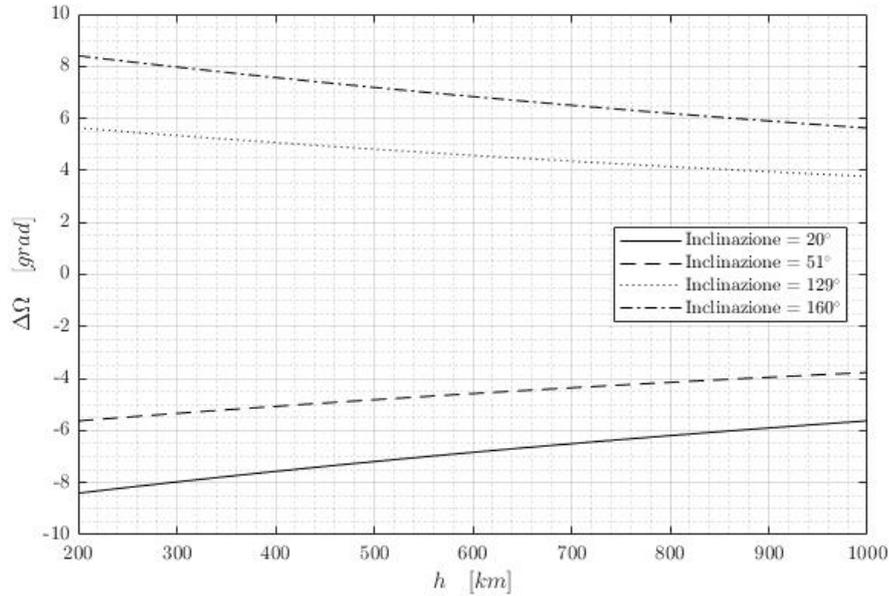
Questa relazione mostra la variazione del RAAN, ovvero la rotazione della linea dei nodi (Figura 1.3), che occorre quando si percorre un'orbita completa. Come si può vedere essa dipende, oltre che dal raggio medio della Terra e dal valore del coefficiente J_2 , dal *semilatus rectum* e dall'inclinazione della traiettoria.

La dipendenza dall'inclinazione nella (1.23), espressa tramite la funzione *coseno*, racconta di una differenza di comportamento tra le orbite dirette e le retrograde. Le orbite dirette sono infatti tali per cui si ha inclinazione compresa tra 0° e 90° , e quindi il loro coseno è positivo. Questo porta ad avere un $\Delta\Omega < 0$, e quindi una regressione della linea dei nodi. Nell'altro caso l'inclinazione è compresa tra 90° e 180° , quindi con coseno negativo, e, pertanto, presentano un aumento del RAAN, una rotazione positiva della linea dei nodi.

In Figura 1.5 si possono confrontare le rotazioni della linea dei nodi di quattro orbite di diverse inclinazioni al variare dell'altitudine, e quindi del *semilatus rectum*, in una giornata.

Si nota immediatamente come orbite più alte risentono meno della perturbazione, così come quelle con inclinazione che si avvicina ai 90° , all'orbita cosiddetta polare. Le dirette hanno, come ci si aspettava, variazioni negative del RAAN, al contrario delle altre. Si osservi poi che le due coppie diretta/retrograda rappresentate presentano angoli supplementari, e i grafici del $\Delta\Omega$ risultano essere perfettamente simmetrici.

Nel caso che sarà analizzato più avanti si avrà a che fare con una traiettoria inclinata di 51° , e con altitudine iniziale di 400 km e variabile, con limite inferiore imposto a 200 km. Anche l'inclinazione può variare durante le manovre considerate. Ebbene si ha, per la curva a 51° , una variazione del RAAN di circa 5° e che

Figura 1.5: $\Delta\Omega$ giornaliero

si avvicina ai 6° per la traiettoria più bassa possibile. Ciò significa che la linea dei nodi impiegherebbe circa 72 giorni per compiere un giro completo e tornare nella configurazione a RAAN iniziale. Come si vede dal grafico, questa velocità di regressione può essere variata modificando inclinazione e *semilatus rectum*. Avvicinandosi a un'orbita equatoriale il $\Delta\Omega$ aumenterebbe in valore assoluto, mentre approssimando la polare esso diminuirebbe, sempre in valore assoluto. Si vedrà nei risultati esposti nel Capitolo 3 che la strategia di manovra prevede, tra le altre cose, anche l'opportuna modifica di inclinazione e semiasse maggiore per sfruttare a proprio vantaggio questo effetto perturbativo del J_2 e compiere il *rendez-vous* di ottimo.

1.4 Manovre con propulsione elettrica

Come già accennato, nella presente trattazione si prenderanno in considerazione manovre effettuate con motori a propulsione elettrica, caratterizzati cioè da basse spinte e impulsi specifici molto elevati. Diversamente dalla propulsione chimica, in cui le manovre si possono considerare come *impulsive*, dove tutta la spinta necessaria ad acquisire il desiderato ΔV viene fornita in un tempo sufficientemente piccolo rispetto alla durata del trasferimento, nella propulsione elettrica l'erogazione della spinta avviene in maniera *continuativa* nel tempo. Questo appunto a causa delle basse spinte, che fanno cadere l'ipotesi di manovra impulsiva, con il ΔV richiesto

che viene fornito in un tempo relativamente lungo, tale per cui non si potrebbero più considerare costanti i parametri orbitali nella finestra di accensione dei motori.

L'impiego della propulsione elettrica porta complessivamente ad un risparmio di propellente rispetto alla chimica. Questo lo si può vedere analizzando la dipendenza che ha l'Equazione di Tsiolkovsky con la c velocità di emissione del propellente:

$$\frac{m_i}{m_f} = e^{\Delta V/c} \quad (1.24)$$

In cui a sinistra dell'uguale si ha il rapporto tra massa iniziale e finale al compimento della manovra. Come detto c è la velocità di scarico del propellente, ed è legata all'impulso specifico secondo la relazione $c = g_0 \cdot I_{sp}$, in cui g_0 è l'accelerazione di gravità a livello del mare.

Il $\Delta m = m_i - m_f$ rappresenta il propellente consumato per la manovra, e risparmiare combustibile significa proprio tenere basso questo valore, e quindi il rapporto m_i/m_f . In Figura 1.6 si possono osservare i rapporti percentuali tra massa finale e massa iniziale al variare del ΔV e dell'impulso specifico.

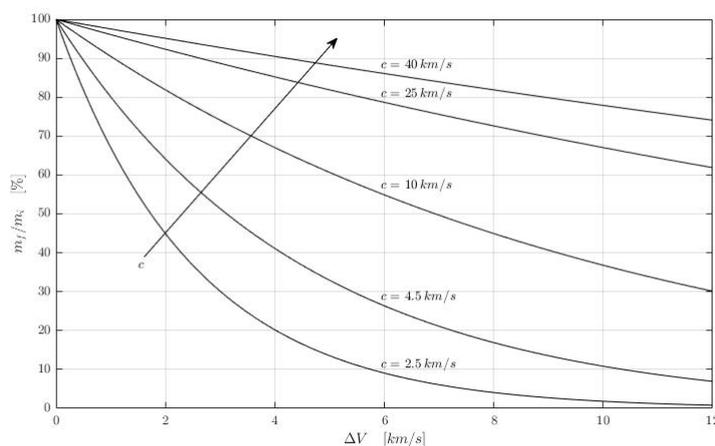


Figura 1.6: Rapporto m_f/m_i al variare della velocità di scarico

Si può vedere facilmente come all'aumentare di c la massa finale aumenta in percentuale. Il consumo invece si alza all'aumentare del ΔV . Ovviamente la scelta dell'impulso specifico ottimo richiede la valutazione di altri parametri, come la durata della missione, la distanza da coprire, il livello tecnologico. Va da sé, comunque, che missioni ad alti $\Delta V/c$ risultano essere proibitive per motori a propellente chimico.

L'impiego di propulsori elettrici, tuttavia, vista la loro bassa spinta, portano ad allungare il tempo necessario per compiere la missione, che, se consideriamo una trasferta tra due orbite LEO, può comportare anche molte rivoluzioni attorno alla Terra. Da qui deriva l'importanza, in questo caso rispetto alla propulsione chimica,

che raramente ha durate superiori alle due rivoluzioni, di tenere in considerazione le perturbazioni, e soprattutto quelle legate al J_2 .

1.4.1 Approssimazione di Edelbaum

L'impiego di propulsori a bassa spinta richiede di contemplare un nuovo approccio per descrivere le equazioni del moto. In primo luogo è opportuno introdurre le approssimazioni introdotte da Edelbaum [9], classica soluzione per un problema di controllo con propulsione elettrica.

- Si ipotizza di trattare orbite come quasi-circolari, tali per cui, cioè, si può approssimare a zero la sua eccentricità ($e \approx 0$). Inoltre questo implica che i parametri orbitali semiasse maggiore e *semilatus rectum* si possono confondere con il raggio della traiettoria in ogni istante ($r \approx p \approx r$). Pertanto la velocità dello *spacecraft* è, in ogni istante, pari a quello della sua velocità circolare ($V^2 \approx \mu/r$).
- Essendo l'orbita quasi-circolare si possono confondere tra loro anomalia vera, anomalia eccentrica e anomalia media ($\nu \approx E \approx M$).
- Si trattano variazioni piccole di inclinazione ($i \approx 0$). Se poi si prende come piano di riferimento il piano dell'orbita iniziale si possono anche approssimare $\cos i \approx 1$ e $\sin i \approx i$.
- Si hanno spinte, e accelerazioni, piccole ($\frac{T}{m} \ll \frac{\mu}{r^2}$).
- Le componenti di spinta e accelerazione vengono divisi in un set di componenti ortogonali (Immagine 1.7):
 - $a_V = a_T \ll \mu/r^2$ rappresenta la componente di accelerazione lungo la direzione della velocità, tangente alla traiettoria;
 - $a_R \ll \mu/r^2$ rappresenta la componente radiale;
 - $a_W \ll \mu/r^2$ è la componente fuori dal piano, nella direzione e verso di \mathbf{h} .

Si ha quindi, viste le piccole accelerazioni, una graduale variazione di velocità e dei parametri orbitali, che si completa in una serie di multiple rivoluzioni attorno alla Terra. L'obiettivo è, chiaramente, trovare le direzioni ottimali della spinta T per variare i parametri orbitali desiderati. Siccome si tratta di traiettorie circolari, che tali devono restare, non si agisce per cambiare l'eccentricità o l'argomento del periastro, per il quale si deve variare l'angolo α di spinta. Quindi l'ottimizzazione che si andrà a studiare riguarderà solo la gestione dell'angolo β , la direzione della spinta fuori dal piano per variare inclinazione e RAAN, e quella parallela al vettore velocità per modificare il semiasse maggiore.

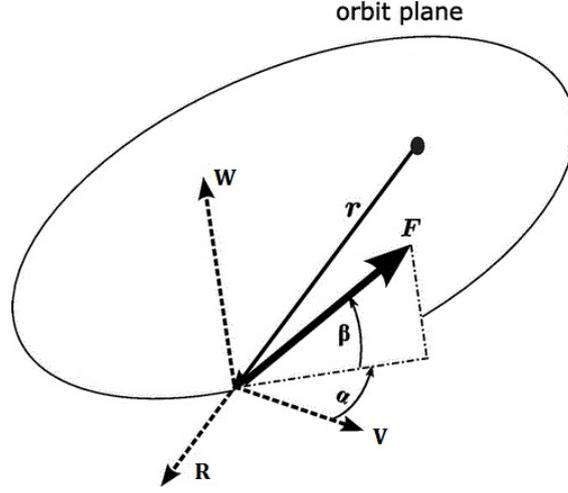


Figura 1.7: Direzioni componenti di spinta

1.4.2 Equazioni planetarie di *Lagrange*

Per descrivere la variazione dei parametri orbitali si usano delle equazioni differenziali funzioni degli elementi ortogonali di una accelerazione perturbativa T/m appena introdotti. Queste equazioni prendono il nome di *equazioni planetarie di Lagrange nella forma di Gauss* [4]:

$$\frac{da}{dt} = 2 \frac{a^2 V}{\mu} \frac{T_V}{m} \quad (1.25a)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \quad (1.25b)$$

$$\sin i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \quad (1.25c)$$

Queste equazioni possono essere riscritte tenendo conto delle semplificazioni già citate, e cioè considerando l'orbita quasi-circolare, tale per cui si hanno $r \approx p$ e la velocità pari alla velocità circolare $V \approx \mu/r^2$. Inoltre si vanno a riscrivere le componenti ortogonali di accelerazione in funzione dell'angolo di controllo β e si introduce la *longitudine del periastro* $\vartheta = \omega + \nu$, che rappresenta l'angolo tra il nodo ascendente e la posizione dello *spacecraft*. È poi necessario tenere conto della perturbazione J_2 nella (1.25c) includendo la derivata temporale $\dot{\Omega}$ introdotta nella (1.23):

$$\frac{da}{dt} = 2 \frac{a}{V} \frac{T}{m} \cos \beta \quad (1.26a)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{V} \frac{T}{m} \cos \vartheta \sin \beta \quad (1.26b)$$

$$\sin \iota \frac{d\Omega}{dt} = \frac{T}{m} \cos \vartheta \sin \beta - J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \frac{V}{a} \cos \iota \sin \iota \quad (1.26c)$$

Queste equazioni possono anche essere riscritte usando come variabile indipendente il ϑ , tenendo conto della relazione tra $d\vartheta$ e dt data da:

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (1.27)$$

E quindi le (1.26) diventano:

$$\frac{da}{d\vartheta} = 2a \frac{T/m}{\mu/a^2} \cos \beta \quad (1.28a)$$

$$\frac{di}{d\vartheta} = \frac{T/m}{\mu/a^2} \cos \vartheta \sin \beta \quad (1.28b)$$

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = \frac{T/m \sin \vartheta}{\mu/a^2 \sin \iota} \sin \beta - J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \cos \iota \quad (1.28c)$$

Nel caso più generale di una manovra compiuta lungo rivoluzioni multiple, il tempo totale della manovra diventa considerevole, e bisogna contemplare anche la variazione temporale della massa, come introdotto in [10]:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (1.29)$$

In questa trattazione la velocità di scarico del combustibile e il livello di spinta sono considerati costanti, quindi, quando il motore sarà mantenuto acceso, si avrà una variazione lineare della massa secondo questa legge.

Se si fosse interessati a casi di una trasferta con una singola rivoluzione, si potrebbe anche pensare di trascurare questo consumo, visto il tempo ridotto di manovra e il basso rapporto spinta/peso tipico dei motori elettrici.

1.4.3 Soluzione di Edelbaum

Nel suo lavoro Edelbaum [9] propone le leggi di controllo in termini degli angoli α e β che minimizzano il ΔV di una manovra effettuata con propulsione elettrica per una singola rivoluzione sotto le ipotesi semplificative descritte in 1.4.1. Queste,

in particolare le piccole variazioni di elementi orbitali per rivoluzione, consente di linearizzare tali cambiamenti e le equazioni del moto e del controllo.

Tralasciando quanto ottenuto per il cambio dell'ellitticità, non interessante per la presente trattazione, si vanno a riassumere le soluzioni per la modifica del semiasse maggiore, dell'inclinazione, o della manovra di cambio combinato di a e i . Queste soluzioni consistono nel ricavare la direzione ottima di spinta per ogni posizione dello *spacecraft* lungo la sua traiettoria.

Per quanto riguarda il solo cambio di *semiasse maggiore*, mantenendo costante l'eccentricità dell'orbita, si ottiene una legge del controllo ottimo tale per cui la spinta deve essere parallela alla direzione della velocità, erogata in maniera continuativa per tutta una rivoluzione, o più rivoluzioni, a seconda del Δa richiesto. In particolare sarà concorde se si vorrà un aumento positivo del semiasse maggiore, o opposta se lo si vuole diminuire.

Per quanto riguarda il cambio combinato di semiasse maggiore e inclinazione, si ricade nello studio di una manovra fuori da piano. Se non si è interessati alla variazione di ellitticità si impone la condizione $\tan \alpha_{opt} = 0$ e si cercherà il controllo in β tale da massimizzare la $\dot{a} + k i$, una combinazione lineare delle variazioni temporali dei due parametri da variare. Il valore della costante k dipende dall'entità delle variazioni da effettuare. Si giunge quindi all'equazione del controllo:

$$\tan \beta_{opt} = k \cos \vartheta \tag{1.30}$$

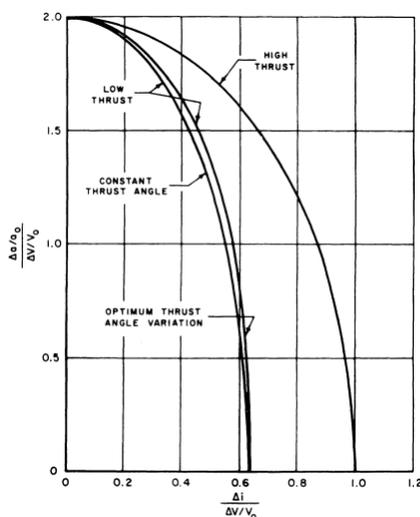


Figura 1.8: Cambio combinato di semiasse maggiore e inclinazione [9]

Si ottiene una legge sinusoidale del β in cui tale angolo è più grande ai nodi e più piccolo agli antinodi. Già Edelbaum propone una semplificazione di questo risultato, con un β intermedio costante in modulo, con segno che cambia ogni

mezzo giro. Come si vede dal grafico in Figura 1.8 l'approssimazione di un angolo di controllo costante a tratti porta a una soluzione *subottima* che si avvicina di molto all'ottimo.

Diverso è invece il caso in cui si richiedono grandi cambiamenti dei parametri orbitali, manovra che si deve espletare percorrendo multiple rivoluzioni, e non più una sola. Per questo Edelbaum propone di considerare le orbite, anche quelle di trasferimento, sempre quasi-circolari, il che permette di sfruttare i risultati ottenuti per una sola rivoluzione, e di avere un angolo di spinta β costante per ogni singola rivoluzione. L'analisi, che viene condotta usando il ΔV come variabile indipendente, porta al seguente risultato:

$$V \sin \beta = V_0 \sin \beta_0 = \text{cost} \quad (1.31)$$

Essendo costante il prodotto tra il seno dell'angolo di spinta e la velocità si avrà che dove la velocità è grande si avranno piccoli β , e viceversa quando la velocità sarà inferiore. Questo è coerente con quanto si ha nel cambio di piano semplice con propulsione chimica, in quanto si preferisce spingere fuori dal piano quando il vettore velocità ha modulo minore, e quindi a distanze maggiori dal corpo principale, per cambiare più efficientemente l'inclinazione.

Capitolo 2

Metodo di ottimizzazione

Un problema di ottimizzazione consiste nel trovare la legge del controllo che ottimizza, massimizzando o minimizzando, a seconda del problema, un determinato indice di prestazione. In particolare, in questa trattazione, si vogliono trovare le direzioni ottime di spinta che permettano di eseguire il trasferimento tra un'orbita iniziale e una finale, o *target*, che minimizzino il tempo per effettuare la manovra, o il consumo di propellente. In quest'ultimo caso la legge di controllo, che determina la direzione della spinta, può anche imporre in alcune fasi di non avere spinta, e di sfruttare la perturbazione J_2 per raggiungere il target con grande risparmio di combustibile. In generale, infatti, il trasferimento, effettuato con motori a propulsione elettrica, sarà spalmata su più rivoluzioni, quindi un tempo sufficientemente lungo da poter e dover tenere conto delle perturbazioni dovute all'ellitticità della Terra.

L'orbita iniziale avrà, a tempo $t = 0$, dati parametri orbitali che la descrivono: semiasse maggiore, inclinazione, RAAN. L'eccentricità, siccome si è interessati a trasferite tra orbite quasi-circolari, è trascurata, così come l'argomento del periastro che è imposto come $\omega = 0$. L'orbita target è anch'essa definita dai suoi parametri target semiasse maggiore, inclinazione e RAAN, ma il tempo t_f in cui questa si raggiunge, in cui si completa il *rendez-vous*, è libero, e da minimizzare, nel caso in cui si vogliano le soluzioni a tempo minimo, o imposto dall'operatore nel caso in cui si vogliano quelle a minor consumo di propellente. In quest'ultimo caso, che vuole massimizzare la massa finale dello *spacecraft*, il tempo finale da imporre deve comunque essere superiore a quello ricavato nel caso a tempo minimo.

In questa esposizione si prenderà in considerazione una tecnica numerica di ottimizzazione indiretta, basata sulla teoria del controllo ottimo, in quanto metodi indiretti permettono di avere, in casi come questo, una buona precisione e un costo computazionale limitato, il che li rende particolarmente adatti per studi preliminari di missioni con propulsione elettrica.

Si prenderà in considerazione una trattazione analoga a quelle in [11, 12], che però non comprendevano la perturbazione J_2 , e quindi la dipendenza del RAAN

dal tempo, che sarà invece introdotta e discussa.

2.1 Teoria del controllo ottimale

Viene brevemente presentata una forma di tale teoria che si adatta bene all'ottimizzazione delle traiettorie spaziali in esame.

Si ha un sistema descritto fondamentalmente da due vettori, uno delle variabili di stato, che viene chiamato \mathbf{x} , e uno dei controlli \mathbf{u} . Nello specifico caso che si sta trattando, si avrà \mathbf{x} composto dai parametri orbitali (a, ι, Ω) e dalla massa m , mentre il vettore dei controlli sarà composto dall'angolo di direzione della spinta β , dall'entità della spinta T e da una variabile ϑ_0 che sarà introdotta più avanti. L'evoluzione del sistema tra gli estremi iniziali e finali è descritta dalle equazioni di stato, equazioni differenziali funzioni delle variabili di stato, dei controlli e del tempo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.1)$$

In generale, nel caso in esame, si può dire che tali equazioni sono rappresentate dalle (1.26) in aggiunta con la (1.29).

La traiettoria viene suddivisa in una serie di n intervalli, archi di traiettoria, all'interno dei quali si ha continuità tra le variabili. Si vuole infatti, in questo modo, tenere conto delle eventuali discontinuità delle variabili nel passaggio da un arco all'altro, cosa che può verificarsi, ad esempio, in caso di manovre impulsive. Ogni j -esimo intervallo che costituisce la traiettoria globale è delimitato tra gli istanti temporali $t_{(j-1)+}$ e t_{j-} , in cui $+$ e $-$ stanno ad indicare se si è prima o dopo il punto di congiunzione tra due sottointervalli. Per ogni arco, inoltre, le variabili assumono, agli estremi, i valori di $\mathbf{x}_{(j-1)+}$ e \mathbf{x}_{j-} .

Le condizioni al contorno imposte, sia agli estremi dei sottointervalli, che della traiettoria globale, coinvolgono sia le variabili di stato che la variabile temporale, sono cioè di tipo misto, e tipicamente non lineare. Le si indicano come:

$$\chi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

Per il momento non si trattano le condizioni sui controlli.

Risolvere il problema del controllo ottimo significa trovare i valori che massimizzano (o minimizzano, a seconda del contesto) un certo *performance index*, che si può generalmente scrivere come:

$$J = \phi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad \text{per } j = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Questo prende anche il nome di *funzionale*, ed è composto da una funzione ϕ dipendente dai valori estremali di ogni arco, e dall'integrale esteso alla traiettoria globale di una funzione vettoriale Φ dipendente dai valori puntuali di tempo, controlli, variabili di stato. Ci si può ricondurre a dei casi particolari servendosi di opportune variabili ausiliarie, in particolare si può ricorrere alla *forma di Lagrange*, in cui $\phi = 0$ o alla *forma di Meyer*, che richiede $\Phi = 0$. Un particolare valore di questo funzionale è quello che descrive Kéichichian [12] per il semplice caso di una trasferta a tempo minimo, dati i parametri iniziali e finali $\iota_0, V_0, \iota_f, V_f$, nella variabile indipendente tempo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt$$

In quanto la grandezza da minimizzare è proprio il t_f .

Nel caso generale torna utile introdurre alcuni fattori, come i moltiplicatori di Lagrange e delle variabili aggiuntive. I primi, indicati con $\boldsymbol{\mu}$, sono associati alle condizioni al contorno, mentre i secondi, denotati con $\boldsymbol{\lambda}$, sono associati alle equazioni di stato. Indicando con J^* il nuovo *performance index* modificato, si ha:

$$J^* = \phi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) dt \quad \text{per } j = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

In cui l'apice T indica il trasposto del vettore indicato, e \mathbf{f} è il vettore delle funzioni di stato già descritto nella (2.1). Questi due funzionali dipendono quindi dalla variabile indipendente t , dal vettore dei controlli \mathbf{u} , dalle variabili di stato \mathbf{x} e dalle loro derivate, nonché dai valori che assumono agli estremi di ogni arco. L'introduzione dei coefficienti moltiplicativi fa sì che, in caso condizioni al contorno ed equazioni di stato siano soddisfatte, i due funzionali coincidano ($J = J^*$), così come, ovviamente, i valori agli estremi dei sottointervalli.

Si procede ora con l'integrazione per parti della (2.4), al fine di eliminare le dipendenze dalle $\dot{\mathbf{x}}$:

$$J^* = \phi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j (\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}^T \mathbf{x}_{(j-1)_+} - \boldsymbol{\lambda}_{j-}^T \mathbf{x}_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}) dt \quad \text{per } j = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

Si introduce poi l'*Hamiltoniano* in una forma generale:

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (2.6)$$

Più avanti sarà esplicitata e discussa per i casi particolare di interesse.

Sfruttando quindi la definizione di H , si può differenziare la (2.5) al fine di ottenere la *variazione prima* del funzionale J^* :

$$\begin{aligned}
 \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)_+}} \right) \delta t_{(j-1)_+} + \\
 & + \left(H_{j_-} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_-}} \right) \delta t_{j_-} + \\
 & + \left(\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}^T + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)_+} + \\
 & + \left(-\boldsymbol{\lambda}_{j_-}^T + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{j_-} + \\
 & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_j} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) dt \quad \text{per } j = 1, \dots, n \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

In cui i termini tra parentesi quadre sono matrici.

La condizione necessaria di ottimo richiede la stazionarietà del funzionale, e quindi che la sua variazione prima si annulli per ogni variazione $\delta(\bullet)$ che compare nella sua espressione, compatibilmente a quanto imposto dalle condizioni al contorno e dalle equazioni di stato. L'opportuna scelta delle costanti e variabili aggiunte $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$ permettono di annullare insieme tutti i coefficienti dei $\delta(\bullet)$ presenti nell'espressione del δJ^* , in modo da verificare la condizione di stazionarietà ($\delta J^* = 0$). Annullare i coefficienti dei $\delta \mathbf{x}$ porta a ricavare le *equazioni differenziali di Eulero-Lagrange* per le variabili aggiunte:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \left(\frac{dH}{d\mathbf{x}} \right)^T \quad (2.8)$$

Annullare i coefficienti dei $\delta \mathbf{u}$ permette di ottenere delle *equazioni algebriche per i controlli*:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right) = 0 \quad (2.9)$$

È importante notare che non si prenderanno in considerazione vincoli che dipendono dal tempo o dalle variabili di stato, ma solo tali da poter essere esplicitamente e univocamente indicati come costanti. Quindi, tenendo conto del vincolo, il valore ottimale del controllo cercato in un certo punto della traiettoria è quello che massimizza (o minimizza) l'Hamiltoniano in quel punto, in accordo col *Principio di Massimo di Pontryagin (PMP)*. Ovviamente il valore del controllo deve rientrare nel suo dominio di ammissibilità: si possono infatti avere controlli che non devono

superare o andare sotto certe soglie, come l'entità della spinta, che può essere compresa tra il valore nullo (motore spento) e il valore massimo T_{max} , impostato dal motore. Da questa ulteriore condizione derivano due possibilità, una in cui il valore del controllo ottimo, ottenuto dalla (2.9), rientri nel campo di ammissibilità, e, non essendo vincolato, assumerà esattamente quel valore, e un'altra in cui la soluzione della (2.9) non rientri nell'intervallo desiderato. In quest'ultimo caso la presenza del dominio di ammissibilità fungerà da vincolo ulteriore, e il controllo assumerà il suo valore massimo o minimo possibile.

Nell'eventualità in cui H sia lineare nei confronti di un dato controllo, come più avanti si vedrà che è con la spinta T , siccome nella (2.9) il controllo \mathbf{u} non comparirebbe esplicitamente, esso non può essere determinato in questo modo. Per farlo si possono percorrere due strade, dipendenti da quanto si ha nell'equazione dell'Hamiltoniano (2.6). Se il coefficiente del controllo non è nullo allora il valore del controllo che massimizza H , in accordo con il PMP, è:

- il massimo ammissibile se tale coefficiente è positivo;
- il minimo ammissibile se tale coefficiente è negativo.

Nel caso, invece, in cui il coefficiente sia nullo in un intervallo finito di tempo, diventa necessario imporre tutte le derivate temporali successive del dato coefficiente uguali a zero, fintanto che in una di queste non appaia esplicitamente il controllo. Annullando quest'ultima derivata si ottiene così l'ottimo del controllo.

Rimane ancora il discorso sulle condizioni al contorno mancanti per gli estremi di ognuno degli n sottointervalli. Si scrivono le equazioni relative al j -esimo contorno, considerandolo o come estremo destro del precedente (del $(j-1)$ -esimo) o come estremo sinistro dello stesso j -esimo arco. Computazionalmente si vanno pertanto ad annullare i coefficienti della (2.7), cosa che assicura la stazionarietà del funzionale:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] = 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

$$\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j+}} \right] = 0 \quad \text{per } j = 0, \dots, n-1 \quad (2.11)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j-}} = 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \phi}{\partial t_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j+}} = 0 \quad \text{per } j = 0, \dots, n-1 \quad (2.13)$$

La necessità di distinguerle tra destra e sinistra rispetto al punto di congiunzione tra gli archi è sempre legata all'eventualità di discontinuità tra un sottointervallo e un altro. Ciò implica che la prima e la terza di queste condizioni perdono di

significato a inizio traiettoria, mentre le altre due nella parte finale. Eliminando poi le costanti $\boldsymbol{\mu}$, che, si ricorda, erano associate alle condizioni al contorno, si perviene a condizioni di ottimo del tipo:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}, \boldsymbol{\lambda}_{j-}, t_{(j-1)+}, t - j_-) = 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

Queste, insieme alle condizioni imposte nella (2.2) e alle equazioni di stato (2.1) e a quelle di Eulero-Lagrange (2.8), costituiscono il sistema differenziale da risolvere.

Queste condizioni al contorno impongono dei valori ben definiti alle rispettive variabili aggiunte λ , associate alle equazioni di stato, di cui si possono discutere alcuni casi particolari. Innanzitutto, se una generica variabile di stato x ha valore assegnato esplicitamente all'istante iniziale ($x_0 = a$), si ha come condizione nel vettore $\boldsymbol{\chi}$ l'equazione $x_0 - a = 0$, e la rispettiva variabile aggiunta λ_{x_0} non ha condizioni, è libera. Ad esempio ciò si ha per tutti i valori che descrivono l'orbita iniziale, o per il tempo finale quando, nel caso a minimo consumo di propellente, esso è assegnato. Può capitare, poi, che non si assegni valore a x_0 nelle condizioni al contorno, né che esso compaia nella funzione ϕ , dipendente dai valori assunti dalle variabili nei bordi. In questo caso la sua λ_{x_0} è nulla al tempo t_0 . Ciò si verifica nei casi, per esempio, in cui si ricercano le soluzioni a Ω libero.

Si devono poi discutere i comportamenti delle variabili di stato nei bordi interni. Se x è continua, ma non assegnata nel punto j , il vettore $\boldsymbol{\chi}$ conterrà la condizione $x_{j-} - x_{j+} = 0$ e anche la corrispondente variabile aggiunta sarà continua tra bordo destro e sinistro. Qualora invece la variabile fosse sempre continua, ma con valore a assegnato esplicitamente, in $\boldsymbol{\chi}$ si avrà la condizione $x_{j-} = x_{j+} = a$, e la $\lambda_{x_{j-}}$ sarà diversa dalla $\lambda_{x_{j+}}$. Sarà quindi discontinua e libera, e i suoi valori, a destra e a sinistra della giunzione, dovranno essere ricavati dalla procedura di ottimizzazione.

Analoghe considerazioni si possono fare sull'Hamiltoniano che, se non dipende esplicitamente dal tempo, può essere dotato di particolari condizioni al contorno in certi casi. Ad esempio, se il tempo iniziale non è espresso né nelle condizioni al contorno né nella funzione ϕ , si ha un $H_0 = 0$ nullo proprio nell'istante iniziale. Se poi a non essere assegnato è l'istante finale (caso a tempo minimo), l' H si annulla al t_f . Inoltre, se il tempo iniziale di un arco intermedio t_j non compare esplicitamente in ϕ , si ha $t_{j-} = t_{j+}$ in $\boldsymbol{\chi}$, e H è nullo in quel punto, sia a destra che a sinistra di j . Qualora invece questo tempo t_j venisse assegnato, e fosse ovviamente continuo, il suo valore comparirebbe in $\boldsymbol{\chi}$, e H avrebbe una discontinuità libera in j .

In questo modo, tuttavia, si hanno ancora valori di bordo di alcune variabili incogniti. Finora si è visto il modello matematico generale che formula un problema di ottimo soggetto a vincoli differenziali e algebrici, ma per poterlo risolvere opportunamente è necessario conoscere i valori delle variabili di stato e delle variabili aggiunte, e per farlo si deve passare a risolvere un *Boundary Value Problem (BVP)*

2.1.1 Problema differenziale ai limiti

Le condizioni al contorno imposte al problema dipendono, in generale, dal tipo di orbite coinvolte nella trasferta, cioè dai parametri orbitali dell'orbita iniziale e della target. Come si è visto, comunque, alcune variabili aggiunte, o anche delle vere e proprie variabili di stato, possono non essere inizialmente definite, sono cioè *libere*. Il problema, quindi, si amplia, e diventa trovare i valori iniziali che soddisfino tutte le condizioni al contorno, sia imposte (2.2) che di ottimo (2.14), che risolvano il sistema differenziale descritto in precedenza. È necessario quindi risolvere un BVP e riformulare il problema di ottimo in modo tale che si adatti ad esso, tenendo conto, e cercando di risolvere, le sue peculiarità, come può essere l'aver un intervallo di integrazione diviso in sottointervalli, in cui le equazioni differenziali possono essere definite diversamente, in cui le variabili, di stato e aggiunte, possono essere discontinue, e le cui durate non sono in generale note. In più bisogna fare i conti con con condizioni al contorno di tipo misto e non-lineari, elementi che rendono difficile la risoluzione di problemi di ottimizzazione indiretti. Si sfrutta infine il metodo di Newton per ottenere la convergenza, dopo che questo BVP è stato ridotto a una serie di problemi ai valori iniziali.

Per l'integrazione, l'indeterminatezza di ciascun sottointervallo, del tempo in cui ognuno inizia e finisce, deve essere risolto in qualche modo, e si ricorre a una sostituzione della variabile tempo t con un'altra che verrà definita, per il j -esimo intervallo, come:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad \text{per } j = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

In cui con τ_j si indica la durata temporale di ciascun sottointervallo. Con l'introduzione di questa $\varepsilon(t)$ i bordi degli archi sono facilmente determinabili dai valori interi che la stessa ε assume, come risulta dalla sua definizione.

Il sistema differenziale è dato dalle equazioni di stato insieme a quelle di Eulero-Lagrange, in cui, per i controlli, sono impiegate le relative equazioni (2.9). Ciò comporta che le variabili di stato \mathbf{x} e le variabili aggiunte $\boldsymbol{\lambda}$, associate alle funzioni di stato, non possono più essere scisse, ma si possono raggruppare in una nuova variabile $\mathbf{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ descritta da un nuovo set di equazioni di stato:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}, t) \quad (2.16)$$

Si introduce poi un nuovo vettore $\mathbf{z}(\mathbf{y}, \mathbf{c})$ per tenere conto di tutte quelle variabili che in realtà sono costanti, come i τ_j o le già citate variabili a cavallo di una discontinuità. In \mathbf{z} infatti sono contemplate le già citate \mathbf{y} e un nuovo vettore delle costanti \mathbf{c} . Il nuovo set di equazioni differenziali che descrivono il problema è quindi dato in funzione di \mathbf{z} e della variabile ausiliaria ε :

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, t) \quad (2.17)$$

Di questa si esplicita il primo membro per le due componenti del vettore \mathbf{z} , e cioè le \mathbf{y} , comprendenti le variabili di stato e le variabili aggiunte, e le costanti \mathbf{c} :

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\varepsilon} = \tau_j \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad (2.18a)$$

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\varepsilon} = 0 \quad (2.18b)$$

In quanto si ha:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\tau_j}$$

E la non dipendenza di \mathbf{c} dalle variabili temporali in quanto, per l'appunto, costanti.

Bisogna poi reintrodurre le condizioni al contorno, che vengono raggruppate tra quelle imposte e quelle di ottimo sotto la forma:

$$\Psi(\mathbf{s}) = 0 \quad (2.19)$$

In cui \mathbf{s} è un vettore che racchiude tutti i valori che tutte le variabili assumono in ogni bordo, rappresentato, come già detto, dai valori interi della variabile ε , e i parametri costanti:

$$\mathbf{s} = (\mathbf{y}_\varepsilon, \mathbf{c}) \quad \text{per } \varepsilon = 0, 1, \dots, n \quad (2.20)$$

In questo vettore non è per ora necessario andare a distinguere tra i valori a destra e a sinistra di una eventuale discontinuità: ciò sarà fatto solo più avanti, attraverso una opportuna relazione che leghi gli uni agli altri in maniera analitica.

Come si è capito, alcune delle variabili sono in genere incognite, non assegnate, e si deve pertanto sfruttare un procedimento iterativo per ottenere i loro valori, tali per cui siano soddisfatte le equazioni delle condizioni al contorno (2.19).

Si descrive ora la procedura iterativa per ricavare i valori iniziali di \mathbf{z} , ipotizzando che nessuno di essi sia noto a priori, iniziando col considerare la r -esima iterazione, che vede al suo principio il considerare come valori iniziali i valori ricavati al passo precedente \mathbf{p}^r , e cioè imponendo:

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{p}^r \quad (2.21)$$

Si integrano poi le equazioni differenziali del sistema nella variabile ausiliaria (2.17) considerando questi valori iniziali e le discontinuità tra gli archi. Si

trovano quindi le variabili di stato e si calcola l'errore sulle condizioni al contorno al presente passo Ψ^r . Si considera poi la variazione al primo ordine che si ha su tale errore dovuto a una variazione dei valori iniziali $\Delta \mathbf{p}$, e cioè:

$$\Delta \Psi = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right] \Delta \mathbf{p} \quad (2.22)$$

L'errore Ψ^r deve, ovviamente, seguendo la (2.19), essere annullato, ed è quindi opportuno imporre computazionalmente $\Delta \Psi = -\Psi^r$ così da ricavare i $\Delta \mathbf{p}$ che verificano tale condizione, in modo da avere le correzioni, per ogni iterazione, dei valori iniziali:

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + \Delta \mathbf{p} \quad (2.23)$$

Con $\Delta \mathbf{p}$ che si ricava invertendo la (2.22) con la condizione sul $\Delta \Psi$ già citata:

$$\Delta \mathbf{p} = - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} \Psi^r \quad (2.24)$$

È necessario, a questo punto, studiare la matrice che compare in queste equazioni, composta da equazioni differenziali delle condizioni al contorno. Questa può essere vista come il prodotto di due altre matrici:

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{s}} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{p}} \right] \quad (2.25)$$

La prima è semplicemente data dalle derivate del vettore delle condizioni al contorno $\Psi(\mathbf{s})$ rispetto al vettore delle variabili ai bordi \mathbf{s} da cui dipende direttamente. La seconda è legata alle derivate di questo vettore ai valori iniziali per ogni iterazione, valori che derivano dalla:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right] = [G(\varepsilon)] \quad (2.26)$$

In cui si deriva il vettore delle funzioni di stato, delle aggiunte e delle costanti rispetto allo stesso \mathbf{p} . Questa, che si ribattezza per semplicità come $[G(\varepsilon)]$, si ottiene dalla (2.17) derivata a sua volta rispetto ai valori iniziali per ogni iterazione \mathbf{p} :

$$[G'] = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} \right) \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \right] \quad (2.27)$$

Dove con $(\bullet)'$ si indica la derivata rispetto alla variabile ausiliaria temporale ε e in cui compaiono direttamente le funzioni di stato \mathbf{f} . La matrice appena ricavata può poi essere riscritta più opportunamente come:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right] [G] = [G'] \quad (2.28)$$

Nella quale ricompare la definizione stessa della matrice $[G]$ data in (2.26).

Derivando ora i valori iniziali imposti a inizio iterazione (2.21) rispetto a \mathbf{p} si ottengono i valori iniziali $[G(0)]$ per il sistema appena ricavato (2.28):

$$[G(0)] = \left[\frac{\partial \mathbf{z}(0)}{\partial \mathbf{p}} \right] = [I] \quad (2.29)$$

E tutto ciò è uguale alla matrice identità.

In questo modo è possibile trattare anche eventuali discontinuità tra sottointervalli. Se si immagina infatti di avere una certa relazione \mathfrak{h} che leghi i valori delle variabili a cavallo delle giunzioni tra gli archi, la si può sfruttare per conoscere in ogni punto j le variabili \mathbf{z} e la matrice $[G]$ a destra e a sinistra della discontinuità in maniera immediata. Si avrebbe infatti, ad esempio:

$$z_{j+} = \mathfrak{h}(z_{j-}) \quad (2.30a)$$

$$[G_{j+}] = \left[\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathbf{z}} \right] [G_{j-}] \quad (2.30b)$$

Si hanno così due sistemi di equazioni differenziali, uno principale, dato dalle equazioni (2.17), da cui si ricavano le variabili di stato, le variabili aggiunte e gli eventuali termini costanti, e che ricalca, in un certo senso, il sistema delle funzioni di stato (2.1), e uno omogeneo in $[G']$ (2.28). Questi saranno risolti, mediante delle opportune routine in FORTRAN, da un metodo passo passo a ordine variabile basato sulle formule di Adams [13, 14, Cap. 11], imponendo una tolleranza sull'errore di Ψ pari a 10^{-7} . Si procede quindi con le iterazioni appena descritte fino a che non si raggiunge l'accuratezza desiderata, correggendo ogni volta il \mathbf{p}^r con il $\Delta \mathbf{p}$ ottenuto dalla (2.24). Questo viene però ricavato con lo sviluppo al primo ordine mostrato in (2.22), una linearizzazione che può introdurre degli errori numerici che possono andare a inficiare la convergenza del metodo. L'errore potrebbe addirittura aumentare, e questo rende necessaria l'introduzione di opportune correzioni al metodo, in particolare sulla (2.23). Si moltiplica, infatti, il $\Delta \mathbf{p}$ correttivo per un fattore $K_1 = 0,1 \div 1$ che limiti questa correzione, evitando così di far esplodere la soluzione:

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1 \cdot \Delta \mathbf{p} \quad (2.31)$$

Si prende poi una ulteriore accortezza, basata sul confronto tra l'errore massimo sulle condizioni al contorno, da calcolare a fine iterazione, con quello relativo all'iterazione precedente, dove tale errore è definito come:

$$E_{max} = \dot{=} \max_i (\Psi_i) \quad (2.32)$$

A questo punto, dal confronto, possono scaturire due situazioni diverse:

- Se l'errore massimo è inferiore ad un certo multiplo, da definirsi, dell'errore al passo precedente ($E_{max}^{r+1} < K_2 \cdot E_{max}^r$) allora il metodo può andare avanti, non sussistono problemi di convergenza, relativamente a questo passo, e si può proseguire con l'iterazione successiva. La costante moltiplicativa di confronto viene comunque imposta pari a $K_2 = 2 \div 3$, ben maggiore dell'unità, per tenere conto di alcune fasi del procedimento, come quella iniziale, in cui, effettivamente, ha senso che l'errore cresca.
- Qualora invece l'errore fosse significativamente maggiore rispetto a quello al passo precedente (in genere, quindi $E_{max}^{r+1} > K_2 \cdot E_{max}^r$), si deve necessariamente diminuire la correzione, rendere il passo più breve. Per farlo si procede con bisezioni multiple della correzione $K_1 \Delta \mathbf{p}$ nella (2.31) fino a che, dal nuovo confronto, l'errore diventi sufficientemente basso da poter continuare il metodo con le iterazioni successive. Viene tuttavia imposto un numero massimo di bisezioni da effettuare pari a cinque. Oltre la quinta il processo si arresta, in quanto l'errore è troppo grande da poter essere gestito in questa maniera, e la convergenza non è garantita.

Va detto, a questo punto, che c'è un altro modo per valutare la matrice $[\partial \Psi / \partial \mathbf{p}]$ che in (2.24) moltiplica il $-\Psi^r$ per ricavare il $\Delta \mathbf{p}$, diverso da quello proposto tra (2.25 - 2.29). Si può infatti pensare di valutare tale matrice per via numerica, andando a variare l' i -esima componente del vettore dei valori iniziali \mathbf{p} di una quantità δp , lasciando invariate le altre righe, e procedendo poi con l'integrazione delle nuove equazioni di stato (2.17). Si possono così valutare le variazioni delle condizioni al contorno $\delta \Psi(\delta p)$, dipendente dal δp imposto. Dalla sua linearizzazione si può quindi ottenere l' i -esima riga della matrice cercata come $\delta \Psi^T / \delta p$. Anche se questa strategia sembra garantire una più rapida e immediata soluzione del problema, la convergenza del metodo non è sempre garantita. La linearizzazione fatta sulla $\delta \Psi(\delta p)$ introduce, infatti, dei nuovi errori numerici, che fanno perdere di accuratezza la determinazione della matrice cercata rispetto al procedimento descritto in precedenza.

Inoltre anche lo Jacobiano di (2.17), che compare nella (2.28), e la $[\partial \Psi / \partial \mathbf{s}]$ potrebbero essere ricavate utilizzando un metodo numerico analogo a quello appena esposto, ma nei codici utilizzati viene solamente sfruttato per verificare la correttezza dei risultati ottenuti con il metodo analitico.

Infine si accenna alla possibilità, in genere verificata, di avere già noti alcuni valori iniziali del vettore $\mathbf{z}(0)$, provenienti dallo stato del problema da risolvere. Ciò, ovviamente, semplifica il problema, riducendolo a determinare le variabili iniziali ancora incognite, non esplicite all'istante iniziale.

2.2 Trasferta su una rivoluzione

Si passa ora a specializzare il metodo appena descritto nel caso reale di interesse di ottimizzazione di una trasferta tra due orbite quasi-circolari soggette alla perturbazione J_2 . Si inizierà discutendo il caso di una *one-transfer revolution* con motore elettrico a bassa spinta, le cui equazioni del moto sono date dalle equazioni planetarie di Lagrange (1.26), dove viene introdotto l'angolo β , che definisce la suddivisione tra spinta nel piano e fuori dal piano. Queste svolgono il ruolo delle (2.1). Si sfruttano, tuttavia, le stesse equazioni scritte però sfruttando la longitudine del periastro ϑ come variabile indipendente (1.28), che vengono qui riportate:

$$\frac{da}{d\vartheta} = 2a \frac{T/m}{\mu/a^2} \cos \beta \quad (2.33a)$$

$$\frac{di}{d\vartheta} = \frac{T/m}{\mu/a^2} \cos \vartheta \sin \beta \quad (2.33b)$$

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = \frac{T/m \sin \vartheta}{\mu/a^2 \sin \iota} \sin \beta - J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \cos \iota \quad (2.33c)$$

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (2.33d)$$

Il fatto di considerare una breve trasferta su una singola rivoluzione, e il basso rapporto spinta/peso, permette di trattare i parametri orbitali e l'accelerazione che compaiono a destra di queste equazioni come costanti.

A queste funzioni di stato, stando alla teoria del controllo ottimo precedentemente descritta, si associano delle variabili aggiunte λ_j , con cui si va a scrivere l'Hamiltoniano, secondo la (2.6). Si introduce, per alleggerire la scrittura, il termine $A = (T/m)/(\mu/a^2)$, che rappresenta l'accelerazione adimensionale. Si ha quindi:

$$H = \lambda_a 2Aa \cos \beta + \lambda_i A \cos \vartheta \sin \beta + \lambda_\Omega \left[A \frac{\sin \vartheta}{\sin \iota} \sin \beta - J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \cos \iota \right] \quad (2.34)$$

Siccome H è costante rispetto alle variabili di stato \mathbf{x} , stando alle equazioni di Eulero-Lagrange (2.8) risulta che anche le variabili aggiunte sono, a tutti gli effetti, delle costanti.

Per quanto riguarda l'angolo di spinta β , uno dei controlli da considerare in questo problema, il suo ottimo può essere ricavato, secondo la (2.9), annullando la relativa derivata parziale dell'Hamiltoniano:

$$\frac{dH}{d\beta} = 0 \quad \implies \quad \tan \beta = \frac{\lambda_i \cos \vartheta + \frac{\lambda_\Omega}{\sin \iota} \sin \vartheta}{\lambda_a 2a} \quad (2.35)$$

Si ha quindi un'espressione algebrica per l'ottimo del controllo, in funzione delle variabili di stato e delle variabili aggiunte λ , che, però, non dipende dall'indice di prestazione da ottimizzare, né dalle condizioni al contorno.

Si introducono, ora, una nuova variabile ϑ_0 , definita come:

$$\tan \vartheta_0 = \doteq \frac{\lambda_\Omega / \sin \iota}{\lambda_i} \quad (2.36)$$

e la quantità Λ :

$$\Lambda \doteq \sqrt{\lambda_i^2 + \left(\frac{\lambda_\Omega}{\sin \iota} \right)^2} \quad (2.37)$$

Ciò permetterà di semplificare la notazione, in quanto è come se si avessero le due quantità λ_i e $\lambda_\Omega / \sin \iota$ su un *piano di Argand-Gauss*, tali per cui possono essere riscritti come:

$$\lambda_i = \Lambda \cos \vartheta_0 \quad (2.38a)$$

$$\frac{\lambda_\Omega}{\sin \iota} = \Lambda \sin \vartheta_0 \quad (2.38b)$$

Sostituendo quindi le (2.38) nella (2.35), e sfruttando le formule trigonometriche per il coseno della differenza di due angoli, si può riscrivere il controllo in β come:

$$\tan \beta = \frac{\Lambda}{2a\lambda_a} \cos(\vartheta - \vartheta_0) \quad (2.39)$$

Si può poi definire con K la costante moltiplicativa $K = \Lambda / (2a\lambda_a)$ e con $\vartheta' = \vartheta - \vartheta_0$. Effettuando un ragionamento analogo a quello fatto per definire le (2.38), immaginando di avere β come angolo sul *piano di Argand-Gauss* e $K' = \sqrt{1 + (K \cos \vartheta')^2}$ come raggio, si ricavano:

$$\sin \beta = \frac{K \cos \vartheta'}{K'} \quad (2.40a)$$

$$\cos \beta = \frac{1}{K'} \quad (2.40b)$$

Con queste si possono anche rielaborare le (2.33) in termini di ϑ' , ϑ_0 e K' :

$$\frac{da}{d\vartheta'} = A \frac{2a}{K'} \quad (2.41a)$$

$$\frac{d\iota}{d\vartheta'} = A \frac{K \cos \vartheta' \cos(\vartheta' + \vartheta_0)}{K'} \quad (2.41b)$$

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta'} = \frac{A}{\sin \iota} \frac{K \cos \vartheta' \sin(\vartheta' - \vartheta_0)}{K'} - J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \cos \iota \quad (2.41c)$$

Per trovare la soluzione su una singola rivoluzione è necessario rifarsi all'integrazione di integrali ellittici, la cui soluzione è stata discussa nel paragrafo 1.4.3 per un caso in cui si ha $\vartheta_0 = 0$ e non si considera il J_2 . Se si indicano queste soluzioni di Edelbaum con $\Delta\iota_0$ e Δa_0 , si ha, invece, nel caso di interesse, che:

$$\Delta\iota = \Delta\iota_0 \cos \vartheta_0 \quad (2.42a)$$

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\iota_0}{\sin \iota} \sin \vartheta_0 - 3\pi J_2 \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \cos \iota \quad (2.42b)$$

Il ruolo dell'angolo ϑ_0 è, in un certo senso, come si può vedere dalla (2.38), quello di scindere l'effetto della spinta fuori dal piano tra quello che ha sul cambio di inclinazione e quello che invece ha sulla rotazione della linea dei nodi.

Un'integrazione analitica è possibile se si sfrutta la già nota approssimazione di Edelbaum di angolo β costante su una rivoluzione, che dà origine a una legge *subottima* non distante dall'ottimo (Figura 1.8). Così facendo, e integrando su due mezzevoluzioni, in quanto l'angolo β si inverte di segno agli antinodi, per esempio tra $[\vartheta_0 - \pi/2, \vartheta_0 + \pi/2]$ e $[\vartheta_0 + \pi/2, \vartheta_0 + 3\pi/2]$, si ottengono le variazioni finite su una singola rivoluzione:

$$\Delta a = 4\pi A a \cos \beta \quad (2.43a)$$

$$\Delta\iota = 4A \sin \beta \sin \vartheta_0 \quad (2.43b)$$

$$\Delta\Omega = 4A \frac{\sin \beta}{\sin \iota} \sin \vartheta_0 - J_2 \frac{3}{\pi} \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \cos \iota \quad (2.43c)$$

$$\Delta t = \mathcal{T} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (2.43d)$$

2.3 Trasferta su rivoluzioni multiple

Si discute ora del caso in cui i cambiamenti desiderati dei parametri orbitali non siano più da raggiungersi nel corso di una sola orbita, ma in più rivoluzioni, rendendo ora necessario considerare i cambiamenti nel tempo dei parametri orbitali, la variazione della massa e l'influenza, stavolta più importante, visto che il tempo si allunga, del J_2 . Ci si baserà sulla trattazione appena esposta per il caso a singola rivoluzione, mantenendo l'approssimazione di Edelbaum di β costante per ogni rivoluzione. Pertanto le equazioni di stato non saranno più le equazioni planetarie di Lagrange, ma si approssimano le derivate delle variabili di stato $d\bullet/dt$ come

il rapporto tra le variazioni finite delle stesse variabili di stato e la variazione del tempo (periodo dell'orbita) delle (2.43). Per la massa si userà la (1.29):

$$\frac{da}{dt} = 2 \frac{T}{m} \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cos \beta \quad (2.44a)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{2 T}{\pi m} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cos \vartheta_0 \sin \beta \quad (2.44b)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2 T}{\pi m} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sin \beta \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \iota} - J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cos \iota \quad (2.44c)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (2.44d)$$

In cui la (2.44a) è identica alla corrispondente equazione planetaria di Lagrange (1.26a), mentre le altre differiscono per un fattore $2/\pi$ e per una funzione trigonometrica di ϑ_0 , che ha, appunto, il ruolo di determinare la frazione di spinta che interviene sulla modifica del RAAN. Infatti tanto più basso sarà, tanto più piccolo sarà il $\Delta\Omega$ dovuto alla manovra, mentre rimane chiaramente invariato quello dovuto al J_2 .

Sulla base di queste equazioni si scrive l'Hamiltoniano del sistema, secondo la (2.6):

$$H = \frac{2 T}{\pi m} \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left(\lambda_a a \pi \cos \beta + \lambda_i \sin \beta \cos \vartheta_0 + \lambda_\Omega \sin \beta \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \iota} \right) + \\ - \lambda_\Omega J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cos \iota - \lambda_m \frac{T}{c} \quad (2.45)$$

In questo caso le variabili di stato non sono più costanti, e così neanche H , il che, stando alla (2.8), porta a dire che neanche le variabili aggiunte lo sono, e quindi si

possono scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_a}{dt} = -\frac{dH}{da} = & -3\lambda_a \frac{T}{m} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cos \beta - \lambda_i \left[\frac{1}{\pi} \frac{T}{m} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sin \beta \cos \vartheta_0 \right] + \\ & - \lambda_\Omega \left[\frac{1}{\pi} \frac{T}{m} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sin \beta (\sin \vartheta_0 / \sin \iota) + J_2 \frac{21}{4} \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cos \iota \right] \end{aligned} \quad (2.46a)$$

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{dH}{d\iota} = \lambda_\Omega \left[\frac{2}{\pi} \frac{T}{m} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sin \beta \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \iota} \cos \iota + J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \sin \iota \right] \quad (2.46b)$$

$$\frac{d\lambda_\Omega}{dt} = -\frac{dH}{d\Omega} = 0 \quad (2.46c)$$

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = -\frac{dH}{dt} = \frac{T}{m} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left[\lambda_a a \cos \beta + \lambda_i \frac{2}{\pi} \sin \beta \cos \vartheta_0 + \lambda_\Omega \frac{2}{\pi} \sin \beta \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \iota} \right] \quad (2.46d)$$

Si nota immediatamente come né le equazioni del moto né l'Hamiltoniano dipendono dall'angolo Ω , il che porta ad avere un λ_Ω corrispondente costante nel tempo. In generale, tale variabile aggiunta va definita all'inizio del processo, in base a quale $\Delta\Omega$ si vuole impostare.

I parametri di controllo sono la spinta T , in quanto il motore può essere acceso o spento, l'angolo di spinta β e la variabile ϑ_0 . Al fine di trovare la legge ottima per questi controlli si procede come la (2.9), andando ad annullare le derivate parziali di H . Per ϑ_0 si ha quindi:

$$\tan \vartheta_0 = \frac{\lambda_\Omega}{\lambda_i \sin \iota} \quad (2.47)$$

Vale la pena notare che questa espressione è analoga alla sua definizione, data nella (2.36).

Per l'angolo β si ha invece:

$$\tan \beta = \frac{\lambda_i \cos \vartheta_0 + \lambda_\Omega \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \iota}}{\pi a \lambda_a} \quad (2.48)$$

Il problema è ora determinare il quadrante in cui si trova il β , dal momento che si ha solo informazione sulla sua tangente, che è comunque sempre definita come la frazione fra seno e coseno. Quindi ha senso dire che il $\sin \beta$ avrà lo stesso segno del numeratore di $\tan \beta$, e quindi di $(\lambda_i \cos \vartheta_0 + \lambda_\Omega (\frac{\sin \vartheta_0}{\sin \iota}))$, e il $\cos \beta$ del denominatore $(\pi a \lambda_a)$. Siccome l'angolo di spinta si inverte ogni mezza rivoluzione agli antinodi, si può supporre di avere solo β inclusi tra 0° e 180° , quindi tali per cui $\sin \beta \geq 0$: si può così trovare anche il quadrante per ϑ_0 .

Si perviene alle espressioni analitiche per ricavare i due valori, in quanto, per ϑ_0 , si possono sfruttare ancora le (2.38), e ottenere così:

$$\begin{aligned}\sin \vartheta_0 &= \frac{\lambda_\Omega}{\Lambda \sin \iota} \\ \cos \vartheta_0 &= \frac{\lambda_i}{\Lambda}\end{aligned}$$

Se queste si vanno a sostituire al numeratore di (2.48), si ha che questo vale esattamente Λ , e quindi, per β :

$$\sin \beta = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + (\pi a \lambda_a)^2}} \quad (2.49a)$$

$$\cos \beta = \frac{\pi a \lambda_a}{\sqrt{\Lambda^2 + (\pi a \lambda_a)^2}} \quad (2.49b)$$

L'altro controllo è la spinta T , secondo la quale l'Hamiltoniano risulta essere lineare. Per quanto detto in precedenza, il suo ottimo non può essere ottenuto semplicemente derivando H rispetto a T , ma bisogna controllare cosa succede al suo coefficiente in (2.45), che viene definito S_F , *switching function*:

$$S_F = \frac{2}{\pi} \frac{1}{m} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sqrt{(\pi a \lambda_a)^2 + \lambda_i^2 + \left(\frac{\lambda_\Omega}{\sin \iota}\right)^2} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (2.50)$$

Tale per cui si ha, alla fine:

$$H = T S_F - \lambda_\Omega J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{R_T}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cos \iota \quad (2.51)$$

È importante definire il dominio di ammissibilità per la spinta, che va da $T = 0$, e quindi motore spento, a $T = T_{max}$, motore acceso. Non sono previste *vie di mezzo*, la spinta è imposta come costante pari al suo valore massimo ammissibile, e, quindi, il fatto che H sia lineare in T , e che il suo ottimo non si possa estrapolare attraverso le (2.9), sono conseguenze naturali di quanto ipotizzato per la spinta. Secondo il PMP risulta, pertanto, che:

- se $S_F > 0$ la spinta assume il suo massimo, e quindi $T = T_{max}$ e il motore è acceso;
- se $S_F < 0$ la spinta è nulla, e il motore è spento.

2.4 Impostazione del problema

Si è visto come si può descrivere, a livello matematico, un problema di ottimo per le traiettorie orbitali. Si andranno ora ad analizzare nel dettaglio i dati necessari

ad impostare l'ottimizzazione specializzata ai casi di interesse, in quanto, come si è già discusso, la dipendenza dalle condizioni al contorno, esplicite o implicite, è molto forte.

Innanzitutto è importante stabilire i parametri orbitali per le orbite iniziale e target. Su semiasse maggiore e inclinazione non c'è molto da dire, mentre, per via del J_2 , diventa particolarmente interessante il discorso sul RAAN. Per l'orbita iniziale si impone, per semplicità, di avere $\Omega_0 = 0$; all'istante iniziale l'orbita target avrà invece un certo Ω_{T_0} definito come $\Omega_{T_0} = \Omega_0 + \Delta\Omega$, cioè a partire dal RAAN dell'orbita iniziale del *chaser*. Siccome si ha, come detto, $\Omega_0 = 0$, è possibile confondere il RAAN del target con il $\Delta\Omega$. Questo però è valido all'istante iniziale $t = 0$, dove si dà lo *statement of the problem*. Infatti all'istante finale t_f per l'orbita target le cose sono diverse. Semiasse maggiore e inclinazione saranno sì uguali a quanto stabilito per l'istante iniziale ($a_f = a_T$ e $i_f = i_T$), mentre la linea dei nodi dovrà tenere conto della perturbazione. Si ha perciò:

$$\Omega_f = \Omega_{T_0} + (\dot{\Omega}_{J_2})_T t_f \quad (2.52)$$

Ovviamente, più aumenta il tempo a disposizione per effettuare la manovra, più il termine perturbativo sarà importante, e, in generale, trattando di manovre su più rivoluzioni, il tempo sarà sempre sufficientemente lungo da dover tenere conto dell'effetto J_2 .

Significativa importanza la ha anche, nella definizione delle condizioni al contorno e di ottimo, la differenza tra il caso a *tempo minimo* e quello a *minimo consumo di propellente*. Nel primo, il tempo finale t_f è libero e da determinarsi attraverso il procedimento di ottimizzazione, cercando il minimo di t_f . Le condizioni al contorno da imporre, all'istante finale, sono $H_f - \lambda_\Omega (\dot{\Omega}_{J_2})_T = 1$ e $\lambda_{m_f} = 0$. La *switching function*, in questo caso, non può mai diventare negativa (2.50) e quindi si ha il motore sempre acceso, per tutta la durata della manovra. Infatti, il caso a tempo minimo è, in generale, anche quello che prevede il maggior consumo di propellente, in cui i parametri orbitali sono variati tramite un importante sforzo propulsivo. Essendo il problema, tuttavia, omogeneo nei confronti delle variabili aggiunte, la condizione su H_f può essere rimpiazzata specificando uno dei valori iniziali, come λ_Ω , che si è già visto essere costante. Questo λ_Ω deve essere definito con il segno giusto, che dovrebbe essere lo stesso della differenza tra i valori dei RAAN perturbati dell'orbita finale e della iniziale, al tempo t_{fE} , dove quest'ultimo è il tempo necessario a compiere la manovra, calcolato trascurando il J_2 secondo la soluzione di Edelbaum. Non assegnare a λ_Ω il segno corretto può portare a soluzioni a tempo negativo.

Nel caso invece di *minima massa di propellente*, il tempo finale della manovra è fissato, con un valore che deve essere maggiore di quello ricavato nel caso a tempo minimo per lo stesso tipo di manovra. La massa finale ora è libera, ed è la grandezza da massimizzare, pertanto si ha come condizione $\lambda_{m_f} = 1$. La S_F in questa configurazione può diventare anche negativa, portando a fasi in cui la spinta può

essere nulla. Questo porta a archi di traiettoria percorsi a motori spenti, in cui non potranno essere variati inclinazione e semiasse maggiore, al contrario del RAAN, che è sempre soggetto al J_2 . Quindi, la strategia consiste nell'attendere in una *waiting orbit*, da determinare, che la perturbazione faccia avvicinare *naturalmente* le linee dei nodi delle orbite del *chaser* e target. Genericamente, si può dire che maggiore sarà il tempo dato a disposizione per effettuare la manovra, maggiore sarà anche il tempo passato a motori spenti, da qui il risparmio di combustibile. La condizione sul tempo finale, invece, può essere data o dalla condizione esplicita $t_f = \mathcal{T}$ o da $H_f - \lambda_\Omega(\dot{\Omega}_{J_2})_T = 0$.

Un altro caso interessante da discutere è quello in cui, per compiere la manovra, si è costretti ad abbassare di molto la quota. La presenza dell'atmosfera impone un limite da non superare, posto a una quota h_{lim} dalla superficie terrestre di 200 km sotto la quale la resistenza sarebbe talmente alta da far decadere l'orbita. In questi, quindi, si devono apportare le necessarie modifiche al codice al fine di avere una traiettoria suddivisa in tre archi in cui, quello centrale, viene effettuato proprio alla quota di 200 km. Viene quindi imposta una nuova condizione al contorno, tra gli istanti intermedi t_1 e t_2 , che impone al semiasse maggiore dello *spacecraft* di restare stabilmente pari a $a = R_T + h_{lim}$. In questo tratto si vola ad altitudine costante, e difficilmente potrà essere garantita la legge ottima sui controlli. Si è infatti costretti ad avere $\beta = 90^\circ$, con la spinta impossibilitata ad intervenire per cambiare il semiasse maggiore, ma deputata a variare solo inclinazione e RAAN. Questo nel caso a tempo minimo. Nel caso a massa minima, che prevede una fase a motori spenti, questa può anche coincidere con quella alla quota limite costante. Per quanto riguarda le altre condizioni al contorno sul tempo, le variabili e le aggiunte si ha la continuità dell'Hamiltoniano e delle λ a t_1 e t_2 , tranne che per il λ_{a_2} che ha una discontinuità libera. Si hanno, poi, $\lambda_{a_{1-}} = \lambda_{a_{2+}} = 0$ e $a_2 = R_T + h_{lim}$. Queste tre condizioni permettono di determinare le incognite t_1 , t_2 , λ_{a_2} .

È possibile anche studiare il caso a Ω libero, cioè in cui non si pongono vincoli particolari sull' Ω_T , ma in cui l'interesse della manovra è tutto nei cambi di inclinazione e semiasse maggiore, come nel caso studiato da Edelbaum. Per implementare la soluzione a tempo minimo il RAAN è libero, e quindi, come era per la massa, si impone $\lambda_{\Omega_f} = 0$.

Capitolo 3

Risultati

In questo capitolo si andranno a studiare, e a confrontare tra loro, i risultati relativi a varie configurazioni di missioni, sia per quanto riguarda i casi a *tempo minimo*, sia per quelli a *minimo consumo di propellente*. Innanzitutto è necessario descrivere l'orbita iniziale, che sarà la stessa per ognuna delle manovre che si andranno a descrivere. I suoi parametri orbitali sono riassunti in Tabella 3.1, in cui sono indicate l'inclinazione dell'orbita e la sua altitudine rispetto alla superficie terrestre, da cui si può ottenere il semiasse maggiore come: $a_0 = R_T + h_0$. Il RAAN di partenza, per semplicità, è imposto pari a zero, così come viene fatto per l'argomento del periastro, dal momento che si stanno trattando orbite circolari.

Tabella 3.1: Dati iniziali

Parametri orbitali	h_0	km	400
	i_0	grad	51
	Ω_0	grad	0
<hr/>			
Dati <i>spacecraft</i>	m_0	Kg	15
<hr/>			
Dati motore	c	km/s	24,52
	I_{sp}	s	2500
	T	μN	10

È interessante notare che i parametri orbitali assunti sono praticamente uguali a quelli della *Stazione Spaziale Internazionale ISS*, a meno dell'eccentricità, che, nel caso reale, è non nulla. Lo studio che segue, quindi, riguarderà l'ottimizzazione di manovre con un motore a propulsione elettrica a bassa spinta, i cui dati sono riassunti sempre in Tabella 3.1, per uno *spacecraft* di 15 kg che si trova in un'orbita di partenza pari a quella della ISS. Questo fatto ha un'importanza strategica per lo

studio di missioni future effettuate con *nanosat* o *microsat*, che, talvolta, possono essere lanciati direttamente dalla ISS, e quindi sull’orbita considerata. Molte missioni di, ad esempio, *Active Debris Removal* possono essere progettate con questa strategia di lancio [15], con vantaggi sia per la vicinanza ai detriti spaziali in orbita LEO, sia per la maggior garanzia di rispettare le normative sul tempo limite di *deorbiting*.

Si studieranno, quindi, delle manovre di *rendez-vous* a partire da questa traiettoria orbitale fino a delle orbite target a $\Delta a = \pm 100$ km, $\Delta \Omega = \pm 10^\circ$ o $\pm 20^\circ$, lasciando invariata, tra istante iniziale e finale, l’inclinazione i . In tutto si avranno quindi otto casi diversi, di cui si analizzeranno le relative missioni a tempo minimo e quelle a massa di propellente consumata minima con durate della missione fissate, maggiori della minima. Sarà poi interessante osservare i minimi globali per quanto riguarda i consumi, nei casi dove questi possono essere raggiunti. Infine si analizzeranno i comportamenti e i significati fisici dei controlli ottimi ottenuti nelle varie soluzioni.

3.1 Configurazioni a tempo minimo

Si vanno in primo luogo a sintetizzare in Tabella 3.2 i risultati relativi al caso *a tempo minimo*, quindi con i motori sempre accesi e massimo consumo di combustibile. Si dispone la tabella in ordine crescente di tempo necessario per portare a compimento la missione.

Tabella 3.2: Risultati a tempo minimo

Δa km	$\Delta \Omega$ grad	Trip Time days	Prop. Cons. Kg
-100	10	10,62	0,374
100	-10	11,17	0,393
100	10	12,93	0,456
-100	20	16,12	0,568
-100	-10	17,09	0,602
100	20	18,72	0,660
100	-20	19,34	0,681
-100	-20	29,31	1,033

Due sembrano essere i motivi per cui si hanno queste diverse durate, e con tale ordine. La prima riguarda il fatto che casi a $\Delta \Omega$ maggiore in valore assoluto sono, in generale, quelli che richiedono più tempo per essere portati a compimento. Ciò

si può osservare prendendo in considerazione ciò che succederebbe lasciando non vincolato il $\Delta\Omega$ nel codice di ottimizzazione.

Nel caso in cui si varino solo semiasse maggiore e inclinazione dell'orbita, ci si aspetterebbe di avere la soluzione a tempo minimo coincidente con quella a minimo consumo. Questa si potrebbe trovare apportando alcune modifiche nel codice, imponendo $\lambda_{\Omega 0} = 0$ e $\lambda_{a0} = 1$, se $\Delta a > 0$, o $\lambda_{a0} = -1$, se $\Delta a < 0$. Ciò permette di ricavare $\Omega_{T0,ottimo}$ come:

$$\Omega_{T0,ottimo} = \Omega_f - (\dot{\Omega}_{J2})_T t_f \quad (3.1)$$

Dove Ω_f e t_f vengono, appunto, dalla soluzione a RAAN libero. In tabella 3.3 sono riportati i risultati in termini di $\Omega_{T0,ottimo}$, durata della manovra e consumo di propellente.

Tabella 3.3: Risultati a RAAN libero

Δa km	Δi grad	Trip Time days	$\Omega_{T0,ott}$ grad	Prop. Cons. Kg
-100	0	0,99	0,1353	0,035
100	0	0,97	-0,0122	0,034

Siccome ci si sta interessando a casi con Δa e Δi piccoli, e poiché la durata della missione a Ω libero è relativamente breve, quindi con t ridotti, si hanno $\Omega_{T0,ottimo}$ molto piccoli, circa nulli, in accordo con l'equazione (3.1).

Allo stesso modo, imporre $\Omega_{T0} = \Omega_{T0,ottimo}$ porterebbe analogamente a trovare una soluzione a *tempo minimo* che coincida con quella a *minimo consumo* di propellente. Infatti il codice dovrebbe preoccuparsi soltanto di variare semiasse maggiore e inclinazione, e il $\Delta\Omega$ derivato da tale manovra sarebbe quello naturalmente risultante dal solo effetto del J_2 : non ci si cura più di cosa succede alla RAAN e nessuna manovra viene effettuata per variarla.

Ovviamente quanto più Ω_{T0} è lontano dal suo ottimo, tanto più la lunghezza della missione a tempo libero tende ad aumentare, e conseguentemente anche il consumo. Se si vuole tendere ora al minimo consumo di propellente, bisogna necessariamente allungare il tempo, ed elaborare una nuova strategia. Per quanto detto finora, quindi, non è strano che i casi a $\Delta\Omega = \pm 20^\circ$ tendono ad essere quelli con durata maggiore.

Un altro fattore importante è quello della mutua rotazione dei nodi dell'orbita di partenza rispetto all'orbita target dovuta all'effetto del J_2 . Tra i primi quattro casi in ordine di velocità di compimento, infatti, tre sono pertinenti a missioni in cui i nodi tendono ad avvicinarsi naturalmente, e anche tra i casi a -20° quello

in cui si verifica questa eventualità è decisamente il più rapido dei due. Questo concetto tornerà più marcatamente quando si andranno a discutere le durate limite a minimo consumo di propellente, ma già da adesso si possono trarre conclusioni sulla sua decisiva influenza.

In Figura 3.1 si possono osservare le traiettorie calcolate per le soluzioni a tempo minimo in termini di cambiamenti di semiasse maggiore e inclinazione. È possibile notare le differenze di strategia, e di durata, tra i casi a $\Delta\Omega > 0$ e quelli a $\Delta\Omega < 0$. Nel primo caso semiasse maggiore e inclinazione sono aumentati, al fine di limitare l'effetto di precessione sullo *spacecraft* dovuto al J_2 , o addirittura invertirlo, rispetto all'orbita target, facendo sì che le linee dei nodi delle due orbite si avvicinino, riportando poi semiasse maggiore e inclinazione a coincidere con a_T e i_T nel minor tempo possibile. Il motore è, in questo caso, sempre acceso per variare continuamente e in maniera opportuna questi due parametri orbitali.

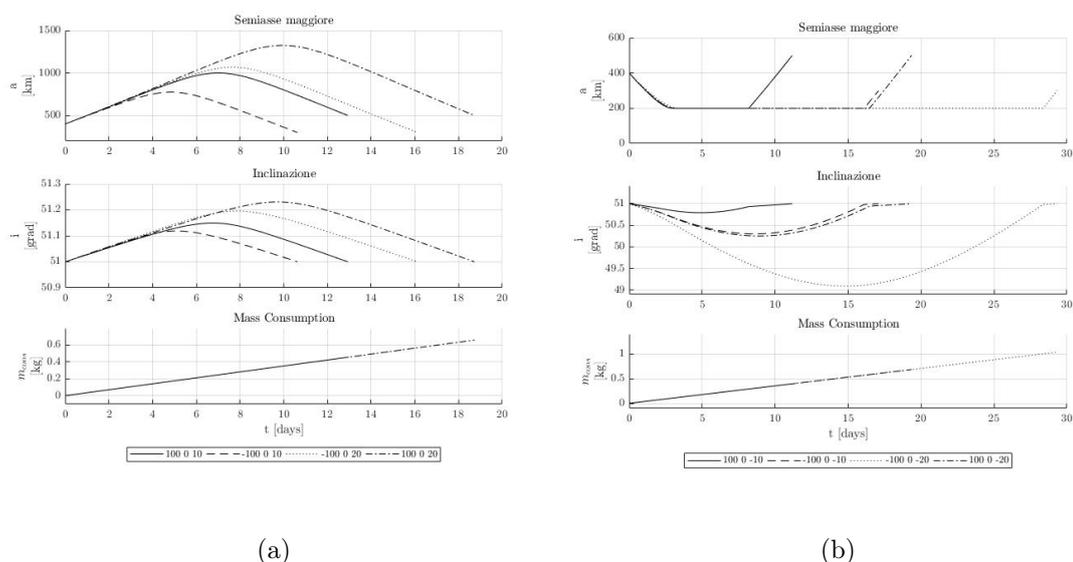


Figura 3.1: Soluzioni a tempo minimo

Nel secondo caso (3.1b) il semiasse maggiore viene ridotto per favorire l'effetto del J_2 e avvicinare così il RAAN dell'orbita target. Viene però posto un limite, quello dell'atmosfera, che impedisce allo *spacecraft* di scendere sotto la quota di 200 km, che viene mantenuta costante per il tempo necessario. In questo frangente il motore non sta spingendo più per cambiare il semiasse maggiore, ma spinge fuori dal piano perifocale per intervenire su RAAN e inclinazione. Quest'ultima, in particolare, tende a presentare una discontinuità nella derivata prima nel momento in cui cessa l'arco ad altezza costante, in quanto la correzione di inclinazione viene portata a termine prima che inizi quella del semiasse maggiore.

Il consumo di propellente risulta essere lineare, con la stessa pendenza condivisa da tutti i casi analizzati, in accordo con quanto imposto, e cioè che:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} = 4,08 \times 10^{-7} \text{ kg/s}$$

3.2 Soluzioni a minimo consumo di propellente

Aumentando il tempo a disposizione per compiere la missione è possibile aumentare la massa finale dello *spacecraft*, e quindi diminuire il consumo di propellente. Questa strategia contempla l'uso di archi in cui lo *spacecraft* attende, a motori spenti, in un'orbita ben precisa, di essere avvicinato all'orbita target per effetto del J_2 . Per ognuno degli otto casi già descritti vengono presentate diverse configurazioni a durata via via crescente, e alcune di queste sono sintetizzate tra le tabelle 3.4 e 3.11.

All'aumentare del tempo a disposizione per la missione, il propellente consumato si riduce, esattamente come ci si aspettava, con lo *spacecraft* che, in ogni caso, tende a descrivere archi a motore spento sempre più lunghi. All'aumentare del tempo si tende a una situazione limite di minimo consumo di propellente, ma il comportamento, e la modalità, con cui questa si raggiunge, dipendono dal moto relativo delle linee dei nodi tra orbita iniziale e target.

Nei casi di linee dei nodi che si avvicinano, esposti nelle Tabelle 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, nonché nei grafici in Figura 3.2 a pagina 50, la strategia, all'aumentare del tempo a disposizione, è quella di attendere nell'orbita iniziale il fasamento con la RAAN dell'orbita target ed effettuare il trasferimento orbitale. Con l'aumentare del tempo non è infatti più necessario cambiare di molto semiasse maggiore e inclinazione per favorire l'effetto del J_2 : piuttosto che agire su $\dot{\Omega}_{J_2}$ si ha ora la possibilità di aumentare il t_f , comportando un decisivo risparmio di combustibile.

In questo tipo di missioni si riesce ad arrivare a un massimo per quanto riguarda il tempo oltre il quale la simulazione ha problemi di convergenza. Il satellite staziona alla quota iniziale per la maggior parte del tempo, con una risibile manovra iniziale di pochi grammi di combustibile consumato, salvo poi effettuare la manovra decisiva di trasferimento all'orbita target interamente nelle ultime ore. Dopodiché, nel codice, a seguito di aumenti anche piccolissimi del tempo a disposizione per svolgere la missione, il λ_{m0} cresce a dismisura, senza soluzione di continuità, rendendo praticamente impossibile la convergenza della simulazione per tempi maggiori. Si raggiunge quindi un ottimo globale per quanto riguarda la massa consumata, in cui si aspetta alla quota iniziale di 400 km che le linee dei nodi delle due orbite si avvicinino. Si attende infatti fino a che esse sono distanti di $\Omega_{T0,ottimo}$, ovvero che $\Omega_{S/C} - \Omega_T = \Omega_{T0,ottimo}$, che è sì vicino allo zero, ma non esattamente nullo. Verificata questa condizione si compie rapidamente la manovra di trasferimento, con un consumo di combustibile che, in tutti questi casi, non supera mai gli 0,036 kg, cioè

Tabella 3.4: $\Delta a = -100$ km, $\Delta\Omega = +10^\circ$

Trip Time	days	10,62	13	18	20	25	30	37
Prop. cons.	Kg	0,374	0,218	0,122	0,104	0,072	0,053	0,036

Tabella 3.5: $\Delta a = +100$ km, $\Delta\Omega = -10^\circ$

Trip Time	days	11,17	14	20	25	30	36	39
Prop cons	Kg	0,393	0,179	0,105	0,075	0,057	0,041	0,036

Tabella 3.6: $\Delta a = -100$ km, $\Delta\Omega = +20^\circ$

Trip Time	days	16,12	20	30	48	64	70	74
Prop. Cons.	Kg	0,568	0,300	0,153	0,075	0,047	0,039	0,035

Tabella 3.7: $\Delta a = +100$ km, $\Delta\Omega = -20^\circ$

Trip Time	days	19,34	24	28	38	57	65	79,2
Prop. Cons.	Kg	0,681	0,278	0,163	0,108	0,060	0,050	0,034

Tabella 3.8: $\Delta a = +100$ km, $\Delta\Omega = +10^\circ$

Trip Time	days	12,93	26	52	78	100	150	200
Prop. Cons.	Kg	0,456	0,156	0,090	0,071	0,062	0,053	0,048

Trip Time	days	300	500	1000	1500	1650	1700	1800
Prop. Cons.	Kg	0,043	0,039	0,037	0,036	0,036	0,036	0,036

Tabella 3.9: $\Delta a = -100$ km, $\Delta\Omega = -10^\circ$

Trip Time	days	17,09	25	38	59	76	85	102
Prop. Cons.	Kg	0,602	0,312	0,103	0,078	0,068	0,065	0,060

Trip Time	days	154	500	700	1300	1700	1900	2240
Prop. Cons.	Kg	0,051	0,040	0,038	0,037	0,036	0,036	0,036

Tabella 3.10: $\Delta a = +100$ km, $\Delta\Omega = +20^\circ$

Trip Time	days	18,72	25	60	80	100	140	180
Prop. Cons.	Kg	0,660	0,331	0,132	0,106	0,091	0,074	0,065

Trip Time	days	300	600	1000	1400	1590	1620	1800
Prop. Cons.	Kg	0,053	0,043	0,040	0,038	0,038	0,037	0,037

Tabella 3.11: $\Delta a = -100$ km, $\Delta\Omega = -20^\circ$

Trip Time	days	29,3	42	59	70	87	100	137
Prop. Cons.	Kg	1,033	0,502	0,179	0,107	0,093	0,085	0,072

Trip Time	days	146	176	300	700	1100	1500	1630
Prop. Cons.	Kg	0,070	0,063	0,052	0,042	0,040	0,038	0,038

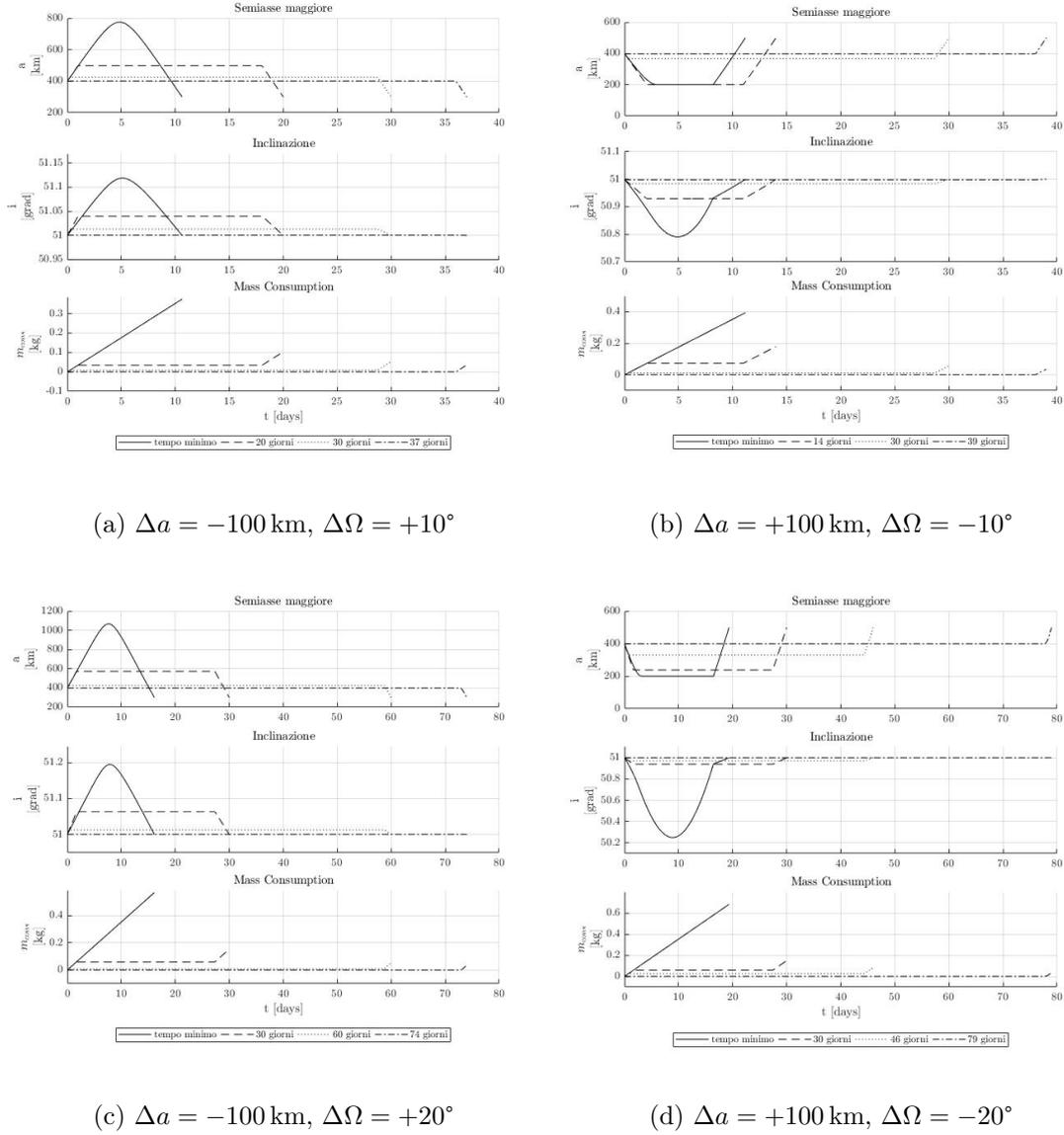


Figura 3.2: Casi con linee dei nodi che si avvicinano

lo 0,24% della massa iniziale dello *spacecraft* (Tabella 3.12). In particolare, si noti che i consumi si avvicinano molto a quelli per l’ottimo a RAAN libero, illustrati in Tabella 3.3.

In Figura 3.4 si può vedere quanto descritto per il caso a $\Delta a = -100 \text{ km}, \Delta \Omega = +10^\circ$. Il satellite aspetta nella sua orbita iniziale che l’effetto del J_2 faccia regredire il RAAN dell’orbita target in maniera naturale. Le due orbite si avvicinano, e soltanto quando la distanza angolare tra le due traiettorie si è praticamente azzerata, si

Tabella 3.12: Tempi limite: nodi che si avvicinano

Δa km	$\Delta\Omega$ grad	Trip Time days	Prop. Cons. Kg
-100	10	37	0,036
100	-10	39	0,036
-100	20	74	0,035
100	-20	79,2	0,034

compie la manovra definitiva che pone il satellite nell'orbita target. Ciò avviene in tutti i casi sopracitati. Dove invece $\Omega_{T0} < 0$, caso opposto a quest'ultimo, al fine di sfruttare il J_2 alla quota iniziale, è l'orbita di partenza a dover regredire più velocemente di quella obiettivo, e perciò può avvenire solo se il Δa è positivo.

C'è poi l'altra casistica, in sostanza quella in cui i segni di Δa e $\Delta\Omega$ sono concordi, in cui la strategia di aspettare nell'orbita iniziale non ha più senso. L'effetto del J_2 provocherebbe, al contrario, l'allontanamento delle due orbite, costringendo a cambiare tipo di manovra per le configurazioni a minimo consumo di propellente. Queste sono descritte nelle Tabelle dalla 3.8 alla 3.11, e nei grafici in Figura 3.3 nella pagina seguente sono rappresentate le storie temporali di tali manovre in termini di semiasse maggiore, inclinazione e consumo di propellente.

Come in precedenza, quando $\Omega_{T0} > \Omega_{T0,ottimo}$, semiasse maggiore e inclinazione sono aumentati per sfruttare l'effetto del J_2 , e tale aumento diviene sempre meno marcato con l'aumentare del tempo a disposizione, per via dell'introduzione di archi di traiettoria a motore spento via via sempre più lunghi, dove si lasciano avvicinare le linee dei nodi per via del J_2 . A differenza dei casi visti in precedenza, però, il Δa risulta ora essere positivo, e quindi, affinché ciò avvenga, lo *spacecraft* deve rimanere sempre al di sopra della quota target: si pone quindi un limite inferiore per a_S , e questo discorso si può ovviamente ribaltare per quanto riguarda l'inclinazione. Nel caso poi di $\Omega_{T0} < \Omega_{T0,ottimo}$, e quindi anche di $\Delta a < 0$, le conclusioni sono analoghe, con a_T che funge da limite superiore per la manovra, e con la quota di 200 km a fare sempre da limite inferiore per via della presenza dell'atmosfera.

Quello che si fa è quindi variare i parametri orbitali al fine di invertire il moto relativo dei nodi, porsi in un'orbita di attesa e poi, sostanzialmente, invertire la variazione fino a giungere all'orbita target. Come si può vedere sia dai grafici che dalle tabelle, non sembra possibile raggiungere una soluzione di ottimo globale per quanto riguarda il minimo consumo di propellente, e, aumentando il tempo, si ottiene sempre, in ogni caso, la convergenza del codice, con un consumo progressivamente sempre inferiore. Questo porta a tempi molto lunghi, superiori anche

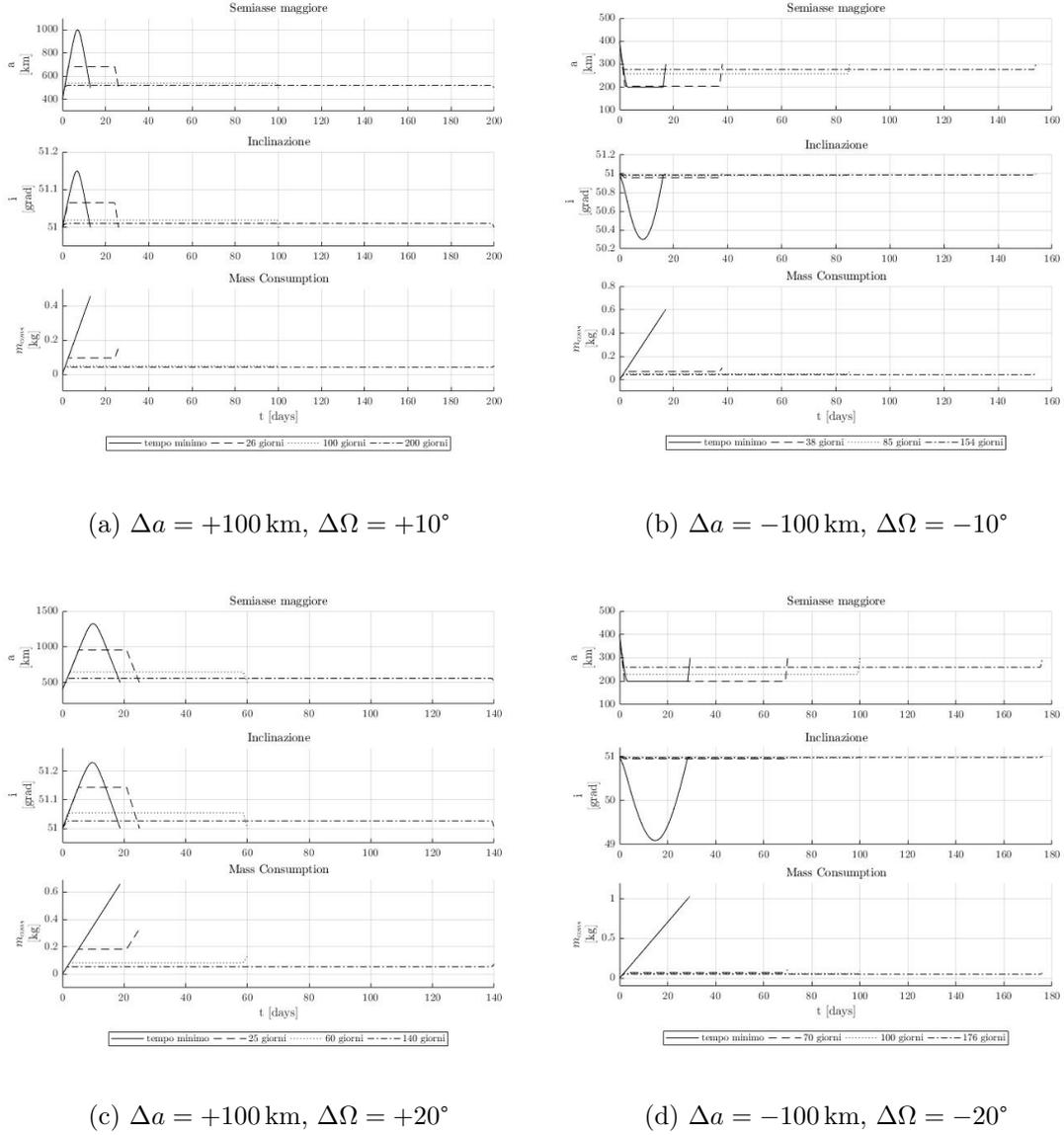


Figura 3.3: Casi con linee dei nodi che si allontanano

ai 4 anni, una durata forse inaccettabile per missioni del genere, in orbita bassa terrestre, con guadagni sui consumi che, alla fine, diventano di soli pochi decimi di grammo.

Infatti, in questi casi, l'ottimo per la massa finale si avrebbe solo per tempi infiniti, allungando indeterminatamente la durata della missione. Si immagina a proposito di effettuare la manovra ottima globale, dovendo cambiare il semiasse maggiore di un infinitesimo per portarsi finalmente su a_T , applicando tra i nodi una

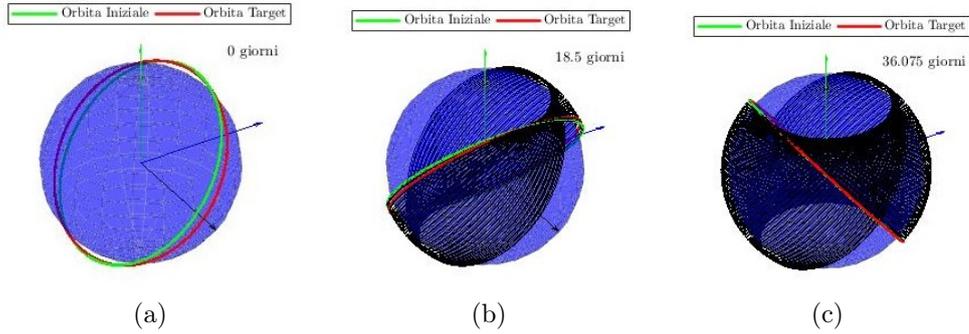


Figura 3.4: Evoluzione temporale del caso a tempo massimo di $\Delta a = -100$ km, $\Delta\Omega = +10^\circ$

velocità relativa di avvicinamento infinitesima, tale da portare il tutto a coincidere solo in tempi infiniti.

Si noti, quindi, che la massa di combustibile consumata, all’aumentare del tempo, tende, anche in questo caso di moto relativo dei nodi opposti, ad assumere il valore di circa 0,037 kg, come nei precedenti, sempre molto vicino ai minimi di Tabella 3.3

3.2.1 Strategia alternativa per le orbite che si allontanano

Nel caso in cui le orbite si allontanino, si può attuare una strategia diversa, che preveda comunque l’attesa nell’orbita iniziale. Si può infatti, anziché manovrare immediatamente per incontrare, in un tempo indefinito, l’orbita target, invertendo così il moto dei nodi, assecondare quest’ultimo e attendere che l’orbita target compia sostanzialmente un giro, fino ad incontrarsi inevitabilmente con l’orbita iniziale. Basterebbe infatti, anziché imporre $\Omega_f = \Omega_{T0} + (\dot{\Omega}_{J2})_T t_f$:

$$\begin{aligned} \Omega_f &= \Omega_{T0} + (\dot{\Omega}_{J2})_T t_f + 2\pi && \text{se } \Omega_{T0} < 0 \\ \Omega_f &= \Omega_{T0} + (\dot{\Omega}_{J2})_T t_f - 2\pi && \text{se } \Omega_{T0} > 0 \end{aligned}$$

In figura 3.5a sono illustrate le soluzioni a tempo minimo per i casi duali rispetto a quelli analizzati in precedenza. Salta subito all’occhio la grande difficoltà nel portare a termine questa manovra che, nel caso degli Ω_{T0} negativi, prevede la necessità di portare lo *spacecraft* ben oltre la quota di 7000 km per poter annullare la differenza, ora enorme, con la RAAN dell’orbita target. Non vanno meglio le cose per i casi a Ω_{T0} positivi: il vincolo dell’atmosfera costringe a variare di molto questa volta l’inclinazione, e ad allungare inevitabilmente i tempi per portare a termine la missione. In Figura 3.6 è rappresentata l’evoluzione della manovra per il caso a

$\Delta a = 100$ km e $\Delta\Omega = -340^\circ$. Si può vedere facilmente come la differenza angolare tra le linee dei nodi diminuisca progressivamente in un tempo molto lungo. Basti pensare che il tratto alla quota limite di 200 km ha durata di circa 142 giorni, cioè il 95% dell'intera missione.

Tutto ciò porta come conseguenza al più alto livello di propellente consumato finora. Gli oltre 6 kg impiegati e il tempo decisamente più lungo rispetto ai casi senza la correzione col $\pm 2\pi$ indicano in maniera inequivocabile che, per quanto riguarda le soluzioni a tempo minimo, questa configurazione non ha alcun senso.

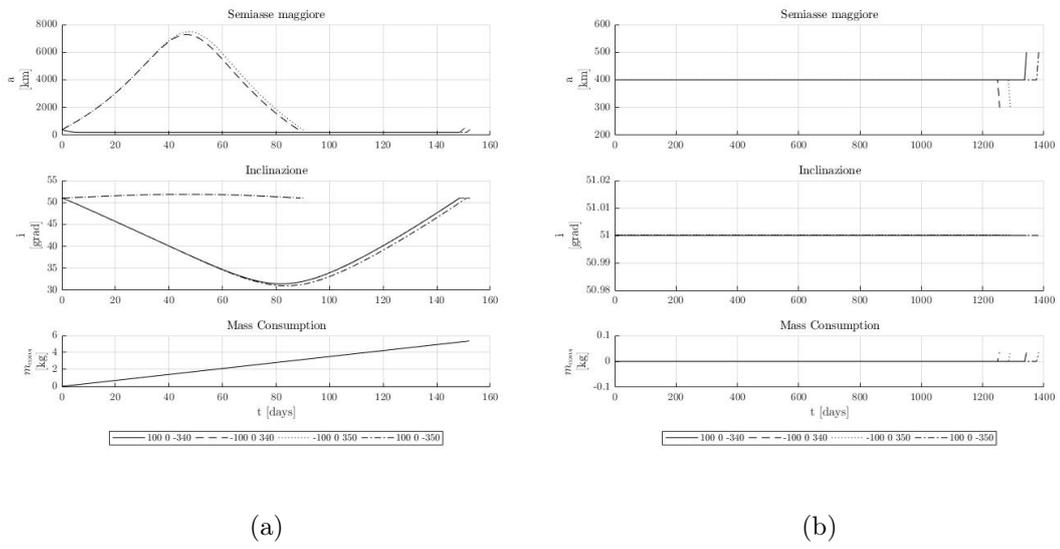


Figura 3.5: Risultati con la strategia alternativa

In figura 3.5b sono invece riportate le soluzioni di ottimo globale per quanto riguarda il consumo della massa, riassunte anche in Tabella 3.13.

Tabella 3.13: Risultati a massa minima: strategia alternativa

Δa km	Ω_{T0} grad	Trip Time days	Prop. Cons. Kg
-100	-20	1255	0,035
-100	-10	1290	0,035
100	20	1343	0,034
100	10	1382	0,034

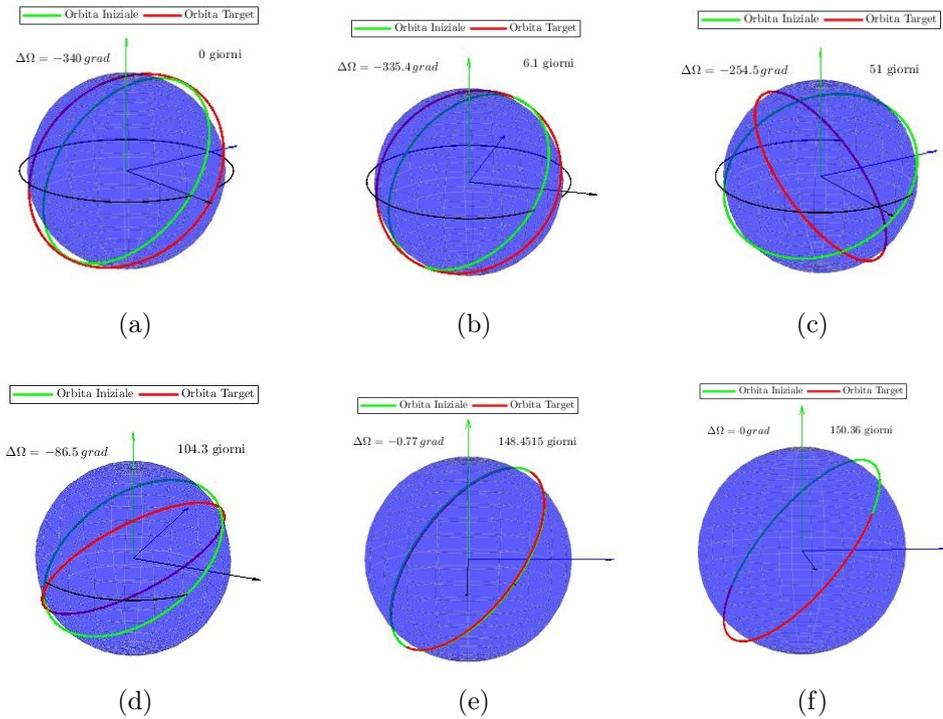


Figura 3.6: Evoluzione temporale del caso a tempo minimo di $\Delta a = +100$ km, $\Delta\Omega = -340^\circ$

La strategia è quella di attendere alla quota iniziale, e di effettuare una manovra di trasferimento rapida alla fine per completare la missione e portarsi sull'orbita target. L'inclinazione viene cambiata di poco, quasi nulla, e il propellente viene consumato solo nella fase finale. Anche in questo caso il minimo consumo di combustibile è intorno agli 0,035 kg, a dimostrare, ancora una volta, che l'ottimo globale, per quanto riguarda la massa, non dipende dal modo in cui viene effettuata la manovra complessiva, ma soltanto dai valori di Δa e Δi .

Tuttavia, questo ottimo viene raggiunto in tempi non più infiniti, ma comunque piuttosto lunghi. Prendendo infatti in considerazione i casi senza questo cambio di strategia, nella maggior parte delle tipologie di missione descritte, è possibile portare a termine la manovra in meno di 1000 giorni, che sono comunque circa tre anni, con un consumo superiore del minimo di soli 5 g.

3.3 Analisi del risparmio di propellente

Può essere utile, a questo punto, andare a riassumere i risultati appena ottenuti nei confronti del risparmio nel consumo di propellente, al fine di discutere i guadagni

in termini di massa e di tempo a cui si perviene.

Per i casi con linee dei nodi tra orbita iniziale e target che si avvicinano, in cui è possibile arrivare al minimo consumo assoluto con la strategia *classica*, si ricapitolano i risultati in Figura 3.7. Si nota immediatamente che le quattro curve si differenziano abbastanza nettamente nel comportamento a due a due a seconda che si abbia $\Delta\Omega = \pm 10^\circ$ o $\pm 20^\circ$. I primi tipi di missione, infatti, come si è comunque già discusso in precedenza, sono portati a termine, e pervengono alla configurazione a massa minima globale, più velocemente. Si nota molto bene, inoltre, come, sia per la missione a tempo minimo che per quella a massa minima, le differenze in termini di massa consumata e tempo sono decisamente piccole, di pochi grammi e di poche ore, e le due curve sono praticamente sovrapponibili. Un discorso analogo si può fare per i casi a $\pm 20^\circ$, che, però, mostrano differenze più ampie in termini di tempi e massa *massima* consumata.

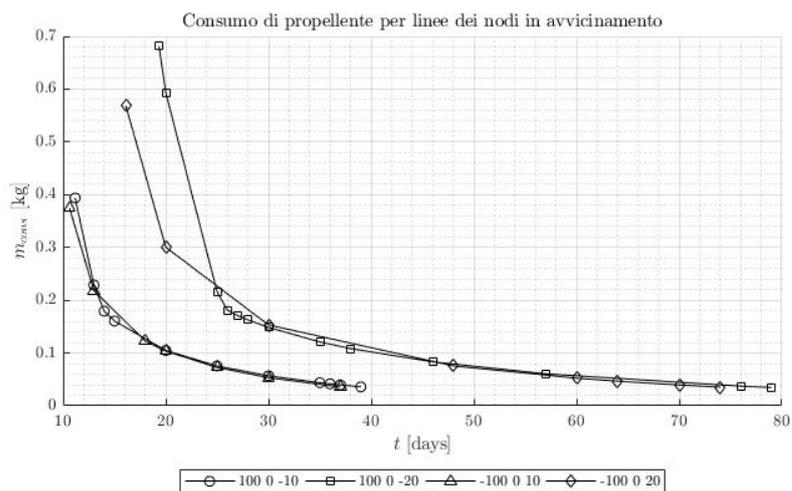


Figura 3.7: Consumo di propellente per i casi con linee dei nodi che si avvicinano

Il minimo consumo di propellente è sostanzialmente lo stesso per ognuno dei quattro casi descritti, come già mostrato nella Tabella 3.12, ma i tempi per raggiungerlo, nei casi a $\pm 20^\circ$, quasi raddoppiano rispetto agli altri, con una durata massima di circa 80 giorni. È tuttavia necessario domandarsi se sia o meno conveniente allungare la missione di così tanto tempo rispetto alla più breve possibile, in quanto, all'aumentare della durata, diminuisce sì la massa di propellente da consumare, con vantaggi sulla spesa per il combustibile o la maggior disponibilità per il *payload*, ma vanno inevitabilmente ad incrementarsi le spese per le operazioni, per il controllo, per il tracciamento a terra e così via. In sostanza il tutto dipende molto dal tipo di missione. Se per l'ADR, in cui si prevede, tipicamente, di raccogliere tra i tre e i quattro detriti spaziali l'anno, una trasferta come quelle descritte, da

effettuarsi in sessanta giorni, può essere accettabile, non si potrebbe dire altrettanto in caso di *orbit raising* di un satellite, che si vuole operativo il prima possibile. Inoltre, nei casi qui considerati, accorciare la missione della metà del tempo massimo ricavato significa tralasciare un risparmio di propellente di meno di 0,1 kg sugli 0,4 ÷ 0,7 kg spesi al massimo, e si ha che il risparmio cala all'aumentare del tempo impiegato, dato l'andamento quasi-iperbolico delle curve ottenute.

Diverse sono invece le considerazioni da fare per i casi con linee dei nodi che si allontanano. Nei grafici in Figura 3.8a sono mostrati i quattro andamenti della massa di propellente consumata in funzione del tempo, ottenuti con la strategia *classica*, e i minimi globali per la massa, ottenuti col metodo *alternativo* descritto in precedenza.

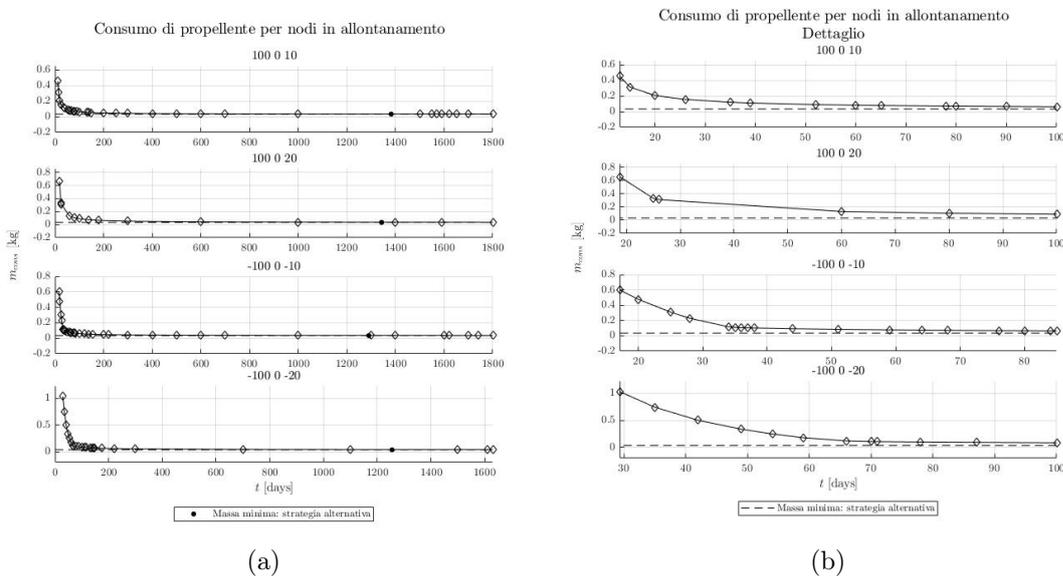


Figura 3.8: Consumo di propellente per i casi con linee dei nodi che si allontanano

Qui i tempi si allungano notevolmente, e potrebbero anche andare, come già detto, all'infinito. Tuttavia, per le missioni con durata oltre i cento giorni, il risparmio tende ad assottigliarsi sempre di più, con consumi praticamente invariati. Inoltre si hanno i minimi globali, ottenuti con la strategia alternativa, a circa 1300 giorni, cioè a tre anni e mezzo di lunghezza della missione, una durata praticamente inconcepibile, ed è interessante notare che si possono progettare missioni che vanno ancora oltre come tempi, ma con consumi ancora di un poco più alti.

Come già fatto in precedenza per gli altri casi, è necessario individuare un tempo di manovra ottimale che permetta di risparmiare sì quanto più carburante possibile, ma che permetta anche una tempestiva messa in funzione del satellite. Ci si può, per questo scopo, rivolgere al dettaglio mostrato in Figura 3.8b, da cui si evince

chiaramente che ai cento giorni non si è ancora al minimo assoluto, ma che il risparmio rispetto ai casi a tempo minimo è già notevole. Risparmio che, tuttavia, non è molto diverso da quello che si avrebbe con manovre molto più brevi, quindi, anche per questi casi, si può sacrificare un po' di propellente in più per avere missioni di durata non superiore ai $40 \div 50$ giorni.

3.4 Analisi dei controlli ottimi

Nel paragrafo 2.3 sono stati descritti i controlli su cui il codice interviene per avere la soluzione ottima, ossia la spinta, l'angolo di spinta fuori dal piano e la variabile ϑ_0 . Questi avranno un loro andamento, conseguente al tipo di missione che si deve compiere, e quindi alle condizioni al contorno. Si andranno di seguito ad analizzare le leggi ottime ricavate per questi controlli in alcuni casi, al fine di osservare, tra l'altro, l'impatto che ciascuno di essi ha sulla modifica dei parametri orbitali.

3.4.1 Spinta

La spinta T ha valore costante pari a $T = 10 \mu\text{N}$ quando il motore è acceso ed è nulla a motore spento. A regolare l'accensione o lo spegnimento del propulsore è la *switching function* (2.50), coefficiente per cui l'Hamiltoniano è lineare nei confronti della spinta. In generale, si è già detto, la spinta viene erogata quando questo parametro è positivo, mentre il motore è spento se è negativo.

Nel caso di missioni a tempo minimo, come visto in precedenza con il consumo della massa, il motore è sempre acceso, ed eroga costantemente la spinta durante il compimento della manovra. Infatti in Figura 3.9, che mostra la S_F in funzione del tempo per gli otto casi, si osserva come questa rimanga sempre positiva.

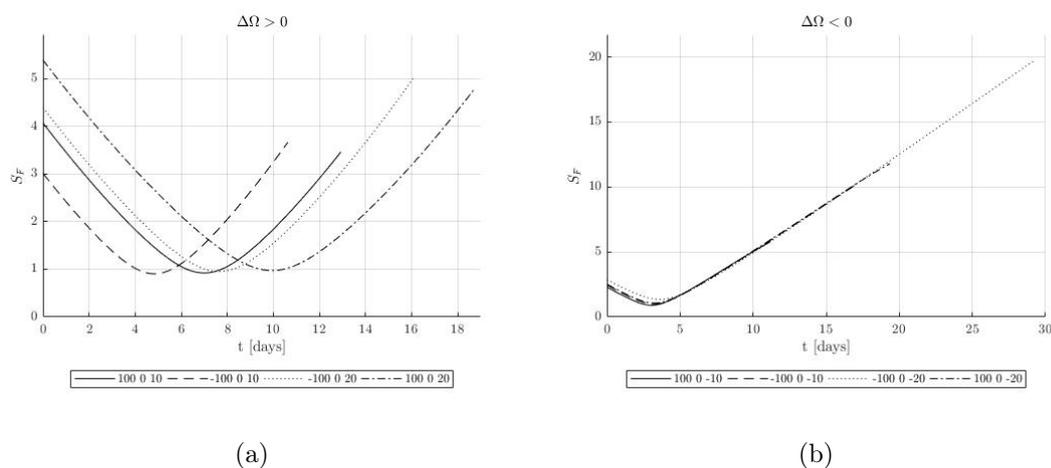


Figura 3.9: *Switching Function* per le manovre a tempo minimo

È interessante notare le differenze che sussistono tra i casi a $\Delta\Omega$ positivi e negativi. Infatti in questi ultimi le curve della S_F sembrano sovrapporsi bene tra le quattro missioni, cosa che non accade nell'altro grafico. Inoltre, i casi a $\Delta\Omega$ negativi raggiungono valori a fine manovra maggiori degli altri.

Questo, comunque, come detto, non altera l'intensità della forza, che rimane costantemente uguale al suo massimo ammissibile.

È poi utile valutare anche quanto avviene con le configurazioni a massa di propellente minima. In Figura 3.10 sono mostrate le S_F per due missioni relative a ciascuno degli otto casi studiati, comparate con la massa espulsa.

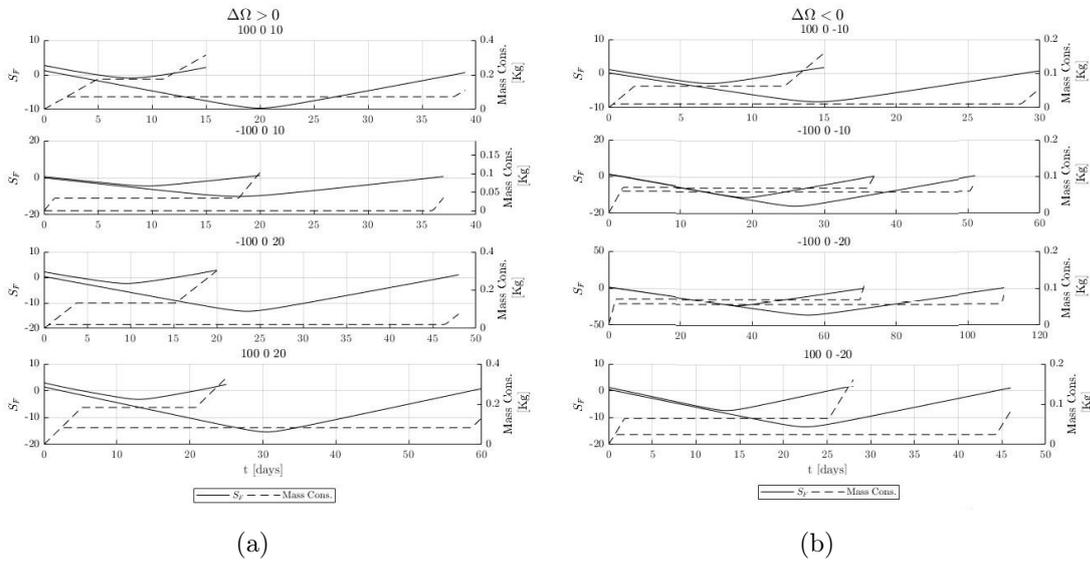


Figura 3.10: *Switching Function* per manovre a massa minima

Come è possibile osservare le S_F ora assumono valori negativi, e quando lo fanno il consumo di propellente si annulla, e la massa dello *spacecraft* è costante, proprio perché nessuna spinta è erogata in quei tratti. Quando, invece, si ha $S_F > 0$ il motore torna ad accendersi e il consumo di propellente torna ad essere lineare secondo la legge (3.1).

Quando la missione è più lunga, poi, la S_F assume valori negativi per la maggior parte della durata. Quasi tutte le curve analizzate sembrano assumere un minimo a circa metà della traiettoria, eventualità che non si verificava nella Figura 3.9b.

3.4.2 Angolo di spinta β

L'angolo β è l'angolo formato tra il vettore della spinta T , il cui modulo è stato appena discusso, e il piano orbitale. In questa trattazione, come già anticipato,

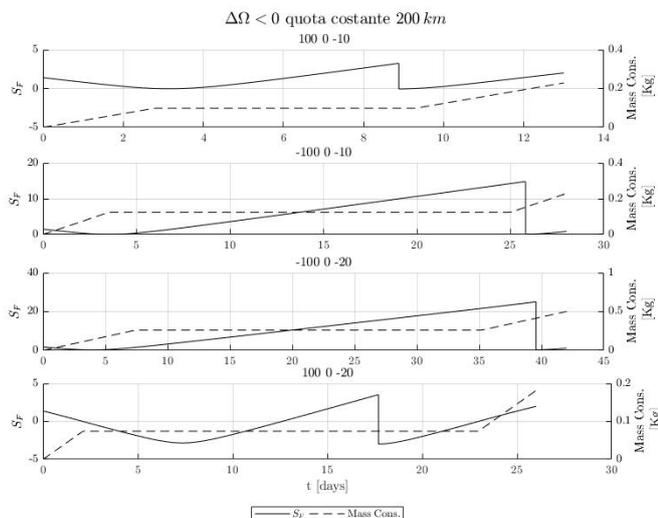


Figura 3.11: *Switching Function* per manovre a massa minima, $\Delta\Omega < 0$ e alla quota limite

l'unico angolo di spinta è questo. Si considerano, infatti, solo casi in cui si agisce parallelamente al vettore velocità, in quanto si vuole mantenere una eccentricità quasi-nulla.

In Figura 3.12 si possono osservare gli andamenti del semiasse maggiore nel tempo, in particolare dell'altitudine dell'orbita, in relazione all'angolo β . È facile constatare come h e $\sin\beta$ abbiano andamenti simili, mentre la pendenza di h è fortemente legata al segno di $\cos\beta$.

Questo era comunque ovvio dall'equazione differenziale di a , che viene qui riportata:

$$\frac{da}{dt} = 2\frac{T}{m}\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\cos\beta \quad (3.2)$$

Infatti, quando si ha $\cos\beta > 0$, l'angolo β si trova nel primo quadrante e assume valori compresi tra 0° e 90° , e quindi la componente di spinta nel piano orbitale è sì parallela al vettore velocità, ma anche concorde, e ciò produce un aumento del semiasse maggiore. Questo fino a che non si ha $\cos\beta = 0$ e $\sin\beta = 1$, cioè fino a che $\beta = 90^\circ$. In questo punto la spinta è completamente perpendicolare al piano perifocale, e il contributo è interamente fuori dal piano. Dopodiché, il seno torna a diminuire e il coseno cambia segno: è come se la spinta si fosse *ribaltata* e ora spinge discordemente alla velocità, producendo un abbassamento dell'altitudine, fino alla quota desiderata.

La condizione imposta sul $\sin\beta > 0$ viene rispettata.

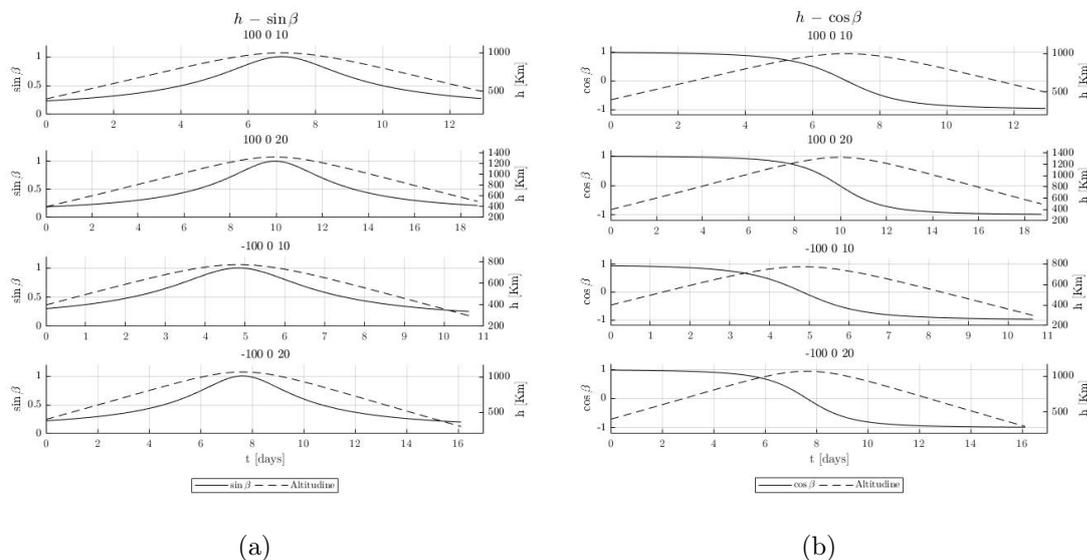


Figura 3.12: Variazione di quota in funzione del β per casi a $\Delta\Omega > 0$

È interessante poi andare ad osservare ciò che succede nei casi a $\Delta\Omega < 0$, dove lo *spacecraft* è forzato a percorrere un arco alla quota costante di 200 km per via della presenza dell’atmosfera. Questa quota limite viene imposta come vincolo, il che porta ad avere, come conseguenza, che in questo tratto la spinta, che viene sempre erogata poiché si tratta di un caso a tempo minimo, non può avere componente nel piano orbitale, ma solo fuori dal piano. Ciò lo si può vedere imponendo proprio la quota costante, e quindi la derivata $(da/dt) = 0$ nella (3.2), da cui risulta $\cos \beta = 0$, e quindi $\beta = 90^\circ$.

Dai grafici in Figura 3.13, tuttavia, risulterebbe che tale condizione non viene rispettata, e sorge una incongruenza tra la quota costante e la presenza di una componente di spinta nel piano.

Questo, però, si verifica perché il codice ottimizza i controlli solamente prima e dopo i tratti a quota 200 km costante, nei quali, invece, le equazioni differenziali non vengono integrate, e quindi si descrivono solo attraverso quello che diventa un vero e proprio vincolo: $\beta = 90^\circ$. Similmente avveniva anche per la S_F , che, nei tratti a quota limite percorsi a motori spenti (missioni a minimo consumo di propellente) mostravano una caratteristica positiva e lineare, incongruente con il fatto che la spinta fosse nulla (Figura 3.11).

Si può a questo punto procedere con una correzione dell’angolo β , imponendolo nei grafici sopra pari al valore a cui è vincolato nel caso reale, e cioè con l’intero contributo di spinta fuori dal piano a variare RAAN e inclinazione. In Figura 3.14 si possono quindi vedere gli andamenti di seno e coseno reali, che mostrano continuità nell’istante t_1 , in cui inizia il tratto a quota costante e a $\beta = 90^\circ$, e una discontinuità

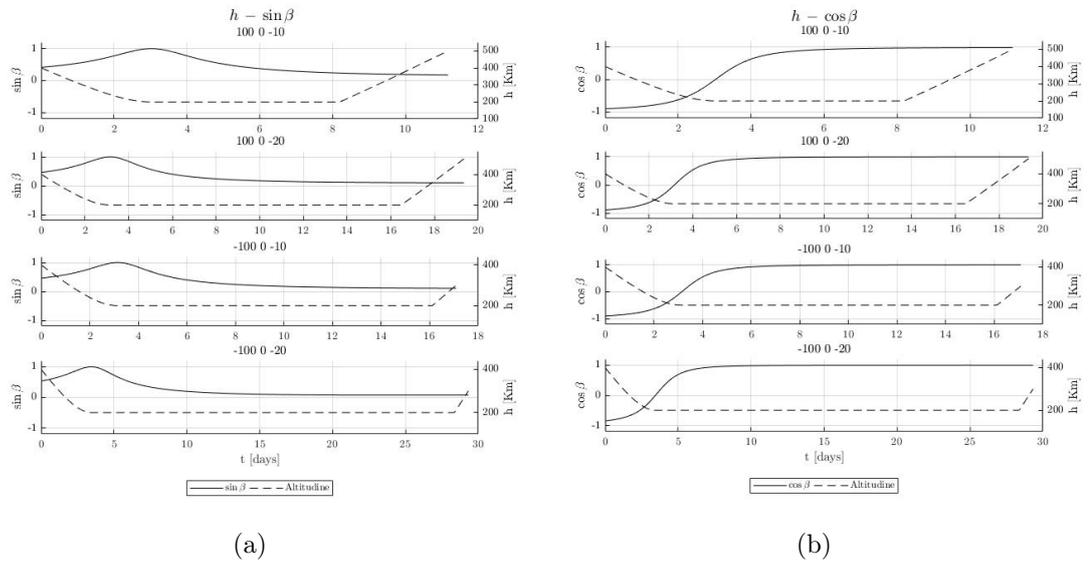


Figura 3.13: Variazione di quota in funzione del β per casi a $\Delta\Omega < 0$

in t_2 , dove questo finisce.

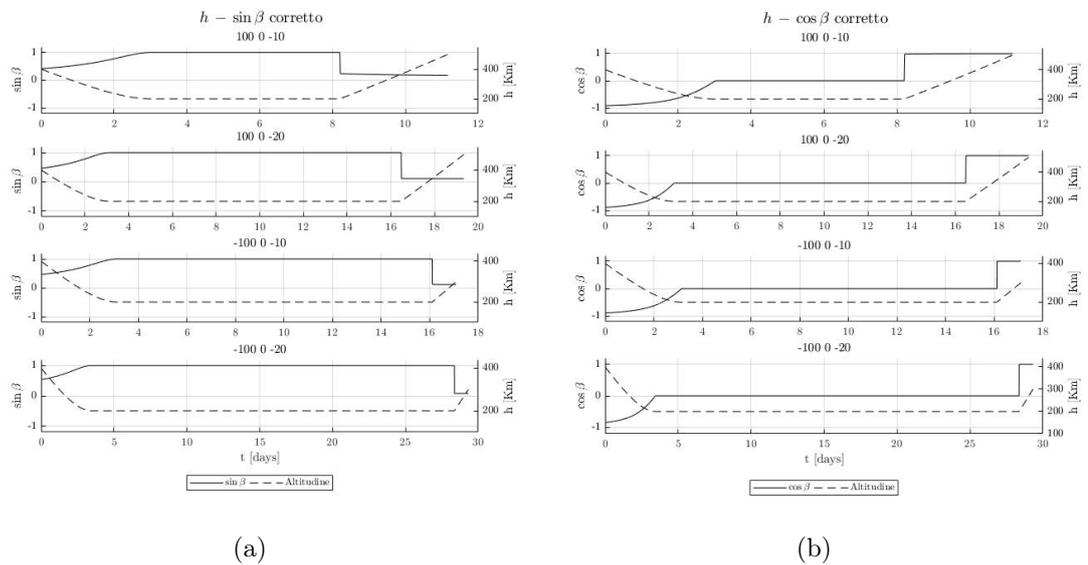


Figura 3.14: Andamento del β a $\Delta\Omega < 0$ corretto

Dopodiché, nel tratto finale, l'angolo di spinta sembra assumere valori molto vicini allo zero, sintomo che la spinta viene ora fornita essenzialmente per variare il

semiasse maggiore e innalzare il satellite fino alla quota desiderata. Ciò trova conferma nel grafico in Figura 3.1b, che mostra un cambio di inclinazione decisamente meno marcato nel tratto finale rispetto al resto della manovra.

3.4.3 Parametro ϑ_0

L'ultimo controllo che va ottimizzato è il parametro ϑ_0 definito in (2.36), e fornisce un'indicazione su come l'effetto della spinta fuori dal piano viene ripartito tra cambio di inclinazione e rotazione della linea dei nodi. Si riprendono, a proposito, le equazioni differenziali relative a questi due parametri orbitali:

$$\frac{d\iota}{dt} = \frac{2}{\pi} \frac{T}{m} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cos \vartheta_0 \sin \beta \quad (3.3a)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2}{\pi} \frac{T}{m} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sin \beta \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \iota} - J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cos \iota \quad (3.3b)$$

Se non si considera il secondo termine della (3.3b), che rappresenta l'effetto della precessione naturale del J_2 , slegata dalla spinta, queste equazioni sono moltiplicate per il termine $\sin \beta$, cioè, effettivamente, per la spinta fuori dal piano orbitale, e per una funzione trigonometrica del ϑ_0 . L'equazione dell'inclinazione è legata al coseno, quella del RAAN al seno, e quindi si ha che l'effetto della spinta su questi parametri orbitali è diverso a seconda del valore che ϑ_0 assume durante la manovra.

In Figura 3.15 si evidenziano gli andamenti di β e ϑ_0 per le missioni a $\Delta\Omega$ positivo a tempo minimo.

Entrambi i parametri hanno andamento simile, con il β che cresce progressivamente provocando un innalzamento di quota, seguito da un abbassamento, come descritto in precedenza, e il ϑ_0 , che assume valori compresi tra circa $60^\circ \div 120^\circ$, passando anche per il valore di 90° , dove ci si aspetta un contributo solo per il cambio di RAAN, visto che si ha sicuramente $\sin \beta > 0$.

I grafici in Figura 3.16 mostrano gli andamenti dell'inclinazione comparata con la funzione $(\cos \vartheta_0 \cdot \sin \beta)$, in quanto, secondo la (3.3a), essa risulta essere legata alla derivata di ι . Infatti si vede come per valori positivi di $(\cos \vartheta_0 \cdot \sin \beta)$ l'inclinazione aumenti, salvo poi tornare a diminuire fino al valore iniziale quando tale funzione combinata dei controlli cambia di segno. Questo sulla derivata dell'inclinazione è dunque un altro importante ruolo svolto dal parametro ϑ_0 . A causa, infatti, della condizione $\sin \beta > 0$, la $d\iota/dt$ non potrebbe mai annullarsi, eventualità che impedirebbe all'inclinazione di diminuire. La presenza del ϑ_0 consente invece questa variazione negativa di ι , e la sua ottimizzazione viene fatta pertanto tenendo conto anche di questa necessità.

Anche qui, come nel caso del semiasse maggiore, non si osserva una perfetta simmetria tra l'arco in cui si ha l'aumento di questi parametri orbitali e quello in cui diminuiscono. Inoltre il massimo di a viene raggiunto a una breve distanza

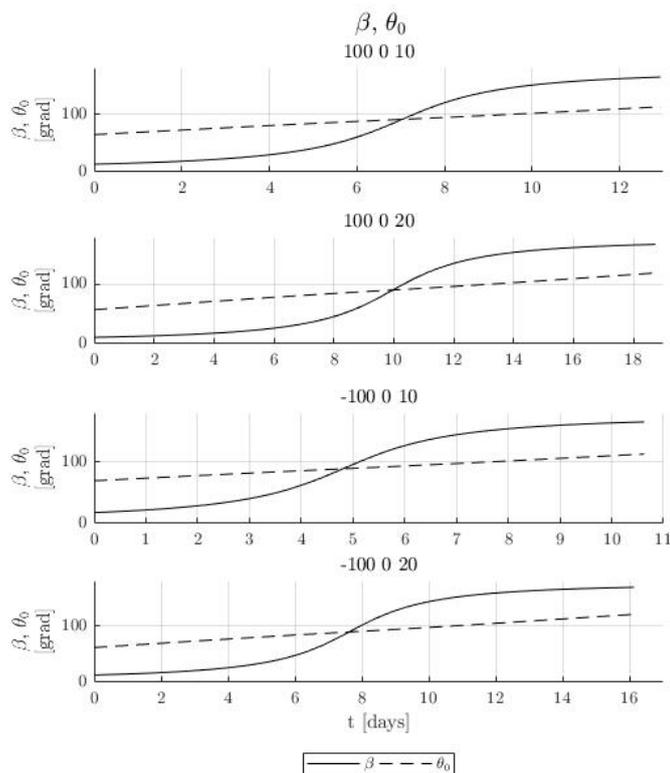


Figura 3.15: β e ϑ_0 per casi a $\Delta\Omega > 0$

temporale rispetto a quello di ν . Infatti il primo si raggiunge quando $\sin\beta$ ha massimo, mentre il secondo quando $\cos\vartheta_0 \cdot \sin\beta = 0$, e quindi nel caso in cui $\vartheta_0 = 90^\circ$. E questo, come si evince anche dal grafico in Figura 3.15, avviene circa quando si ha anche $\beta = 90^\circ$.

Per quanto riguarda, invece, il cambio di RAAN è necessario cercare di separare gli effetti della precessione naturale e dello sforzo propulsivo su tale parametro orbitale, così come mostrato nella (3.3b). Innanzitutto, si mostra nei grafici in Figura 3.17 la storia temporale del RAAN dello *spacecraft* lungo la sua intera traiettoria a partire da $\Omega_0 = 0$, e del RAAN dell'orbita target, calcolata come $\Omega_{Tf} = \Omega_{T0} + (\dot{\Omega}_{J2})_T \cdot t$ per i casi a tempo minimo.

Si vede molto bene come, all'inizio della manovra, le due orbite siano distanti del $\Delta\Omega = \Omega_{T0}$ imposto come dato iniziale, e come, all'istante finale, le due traiettorie vadano a coincidere, sia dal punto di vista del RAAN che, ovviamente, di tutti gli altri parametri orbitali. Negli istanti intermedi, in cui viene effettuata la manovra, le due linee dei nodi si avvicinano, da destra o da sinistra, a seconda del caso considerato, ma sempre con una diminuzione del RAAN a partire dai valori

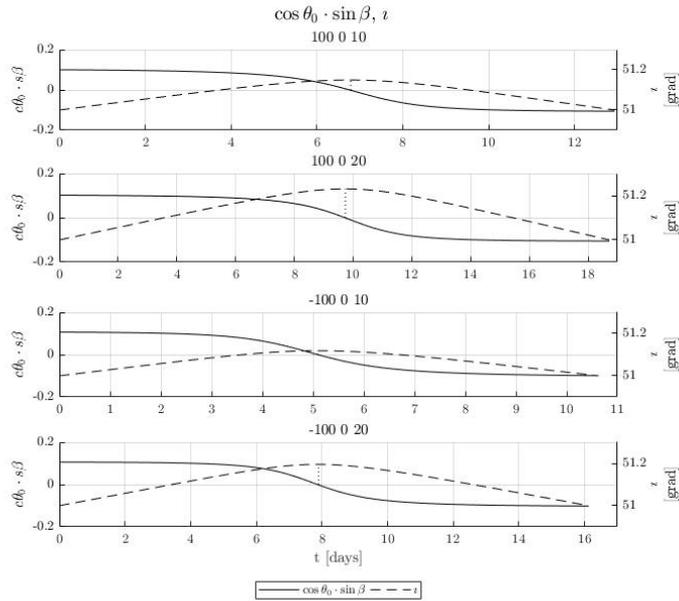


Figura 3.16: $\cos \vartheta_0 \cdot \sin \beta$ in relazione all'inclinazione per casi a $\Delta \Omega > 0$

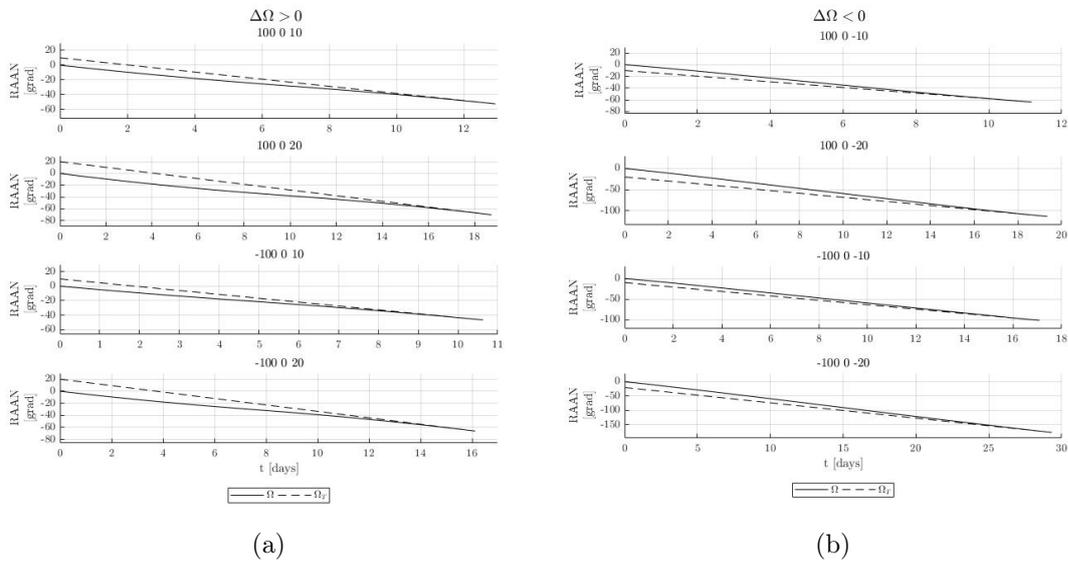


Figura 3.17: RAAN dello *spacecraft* e dell'orbita target

iniziali per via del J_2 . J_2 che è l'unico effetto perturbativo agente sull'orbita target, che vede, per questo, modificare l'orientamento della linea dei nodi linearmente al passare del tempo, ma che, per quanto riguarda lo *spacecraft*, deve essere sommato

algebricamente a quello dovuto allo sforzo propulsivo .

Difatti la caratteristica dell' Ω risulta essere non perfettamente lineare nei casi considerati: questo sia per la presenza della spinta che va a modificare attivamente il RAAN, sia perché il $(\dot{\Omega}_{J_2})$ per lo *spacecraft* non è costante nel tempo, ma varia al variare del semiasse maggiore e dell'inclinazione. Diventa, pertanto, fondamentale analizzare le derivate temporali della (3.3b), in modo da valutare l'effetto della spinta sulla rotazione della linea dei nodi, e confrontarla con quella operata istante per istante dal J_2 e con i parametri di controllo β e ϑ_0 . A questo proposito si visualizzano in Figura 3.18a le derivate $d\Omega/dt$, calcolate dagli Ω di Figura 3.17, gli $(\dot{\Omega}_{J_2})$ e le $(\dot{\Omega}_{prop})$, calcolate come differenza dei due:

$$(\dot{\Omega}_{prop}) = \frac{d\Omega}{dt} - (\dot{\Omega}_{J_2}) = \frac{d\Omega}{dt} + 3\pi J_2 \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \cos i \frac{1}{T} \quad (3.4)$$

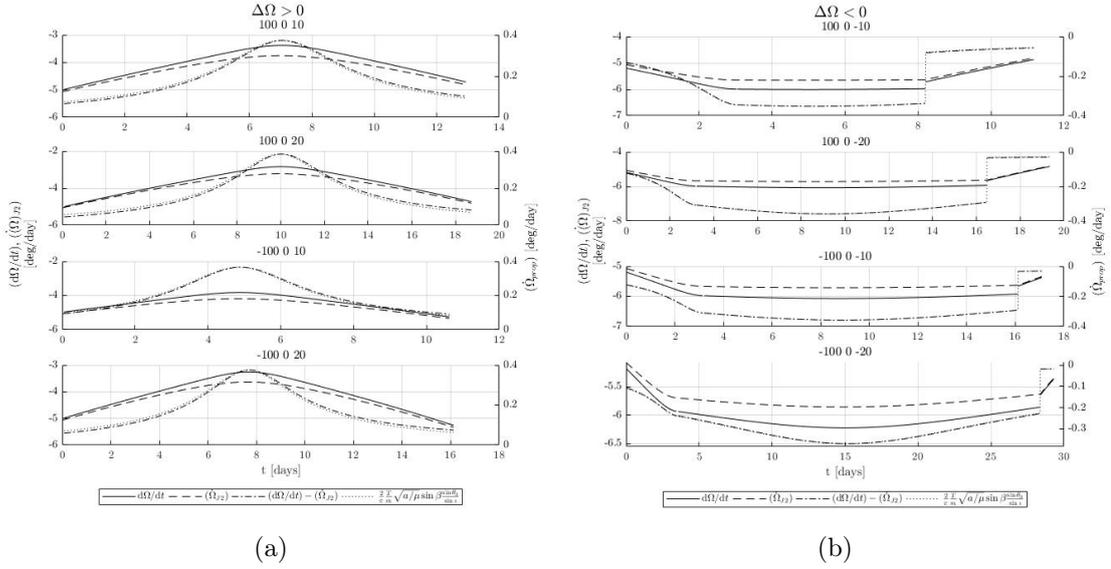


Figura 3.18: $(\dot{\Omega})$

La derivata temporale del RAAN dello spacecraft, espressa qui in deg/day, assume valori non molto distanti da quella relativa alla perturbazione considerata, e, infatti, la differenza tra le due, riportata nell'asse delle y destro nei grafici in Figura 3.18a, è molto piccola, con valori massimi non superiori agli 0,4 deg/day. Inoltre, quest'ultima curva si sovrappone piuttosto bene con quella del $(\dot{\Omega}_{prop})$, con errori relativi massimi $(\Delta\dot{\Omega}/(\dot{\Omega}_{prop}))_{max}$ del 20% circa; tale valore, che può sembrare piuttosto alto a discapito delle curve che, graficamente, sembrano essere piuttosto sovrapponibili, è sicuramente dovuto agli errori numerici effettuati nel valutare la derivata $d\Omega/dt$ e dai valori molto piccoli che $(\dot{\Omega}_{prop})$ assume.

Questi valori prossimi allo 0 per quanto riguarda il *rate of change* del RAAN dovuto allo sforzo propulsivo possono far concludere che, in ogni modo, il maggior contributo alla rotazione della linea dei nodi è dovuta alla perturbazione, e ciò lo si poteva concludere già dalla (3.3b) in quanto, essendo in regimi di bassa spinta, si ha $(\dot{\Omega}_{prop})$ di circa un ordine di grandezza inferiore rispetto a $(\dot{\Omega}_{J_2})$. In particolare, se si considerasse $\iota = 51^\circ$, $h = 400$ km e una ipotetica configurazione tale per cui $\sin \beta \cdot \sin \vartheta_0 = 1$, si avrebbe:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \frac{T}{m} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sin \beta \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \iota} &= 4,08 \times 10^{-6} \text{ deg/s} \\ -3\pi J_2 \left(\frac{R_T}{a}\right)^2 \cos \iota \frac{1}{\mathcal{T}} &= -5,87 \times 10^{-5} \text{ deg/s} \end{aligned}$$

In aggiunta, salta all'occhio anche che il cambio di RAAN dovuto al J_2 è negativo, dal momento che si sta considerando una serie di orbite dirette, mentre quello dovuto allo sforzo propulsivo è dipendente dal segno di $\sin \vartheta_0$, in questo caso positivo. L'effetto globale, comunque, essendo $|(\dot{\Omega}_{J_2})| > |(\dot{\Omega}_{prop})|$, porta a un arretramento della linea dei nodi.

Per quanto riguarda, invece, i casi a $\Delta\Omega < 0$, gli stessi risultati sono mostrati nei grafici in Figura 3.18b. Si nota una struttura decisamente differente da quella appena analizzata, con sempre un $|(\dot{\Omega}_{J_2})| > |(\dot{\Omega}_{prop})|$, ma in questo caso entrambi sono negativi, in quanto, ora, l'obiettivo è diminuire il RAAN ben più di quanto riesca a fare la precessione naturale, non solo assecondando quest'ultima, scendendo di quota il più possibile, ma anche aggiungendo lo sforzo propulsivo. Infatti si osserva come il $(\dot{\Omega}_{J_2})$ rimanga pressappoco costante nell'arco a quota fissa dei vari casi, a parte quello a $\Delta a = -100$ km e $\Delta\Omega = -20^\circ$, dove si ha la maggior variazione di inclinazione in tale tratto (Figura 3.1 a pagina 46). Infatti, a semiasse maggiore costante per via del già noto vincolo atmosferico, l'unico parametro su cui si può intervenire per variare il $(\dot{\Omega}_{J_2})$ è l'inclinazione, che, per l'appunto, subisce una diminuzione. Ciò però, evidentemente, non basta, in quanto $(\dot{\Omega}_{prop})$ sembra essere ben più variabile di quello relativo al J_2 che, lo si ricorda, rimarrebbe costante se lo rimanesse anche l'inclinazione. Ne consegue che la variazione di inclinazione non sembra essere tanto finalizzata all'opportuno sfruttamento della perturbazione J_2 , come si era ipotizzato in precedenza, ma la si può vedere come conseguenza della manovra effettuata dal motore per ruotare attivamente la linea dei nodi durante il tratto a quota costante. Conseguenza, come si può constatare, peraltro benefica, in quanto il $(\dot{\Omega}_{J_2})$ va ulteriormente ad assecondare, diventando sempre più negativo, la diminuzione richiesta del RAAN.

Alla fine del tratto a quota costante è senza dubbio evidente la discontinuità nel $d\Omega/dt$, ma non nel $(\dot{\Omega}_{J_2})$, in quanto questo dipende solo dai parametri orbitali, che sono, per l'appunto, continui, mentre l' $(\dot{\Omega})$ complessivo dipende anche dalla derivata

dello sforzo propulsivo, il quale mostra l'analogia discontinuità. Questo è dovuto, senza dubbio, al salto di cui si è già discusso nel $\sin \beta$, che passa dal valore unitario nell'arco a quota costante ($\beta = 90^\circ$) a un valore diverso, ottimo, quando questo cessa. Il ϑ_0 , invece, contrariamente all'altro parametro di controllo, è continuo, e continua ad essere ottimizzato in tale tratto. Questo può essere spiegato dal fatto che, per quanto riguarda il β , deputato a svincolare gli effetti in e fuori dal piano, seguendo esso il vincolo di quota costante, e non venendo integrata la (3.2), non ha senso che venga ottimizzato, ma si impone ad angolo retto, mentre il ϑ_0 ha ruolo diverso. Siccome deve sostanzialmente scindere l'effetto propulsivo su ι e Ω , *sottoprodotti*, in un certo senso, della stessa componente di spinta fuori dal piano, la sua ottimizzazione può e deve ancora essere presa in carico dal codice numerico.

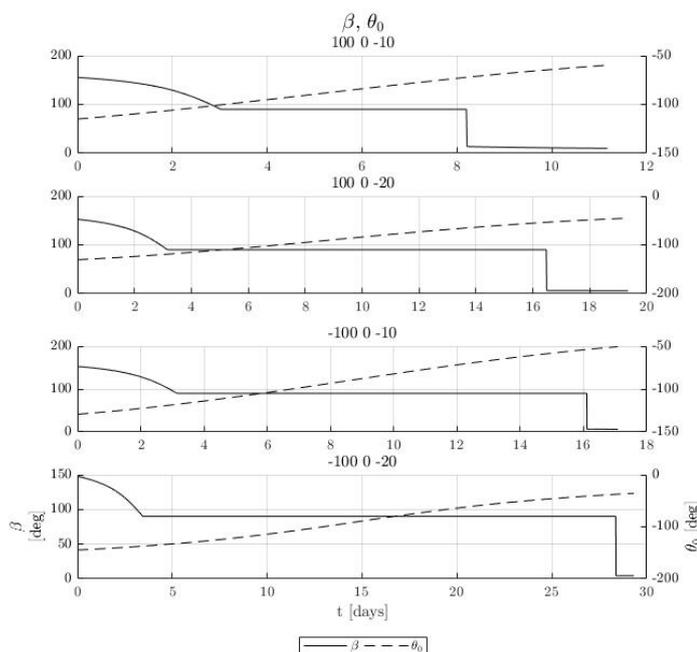


Figura 3.19: β e ϑ_0 per casi a $\Delta\Omega < 0$

Si nota, poi, come solo alla fine della manovra, dopo il tratto a quota costante, l'effetto dello sforzo propulsivo sull' $(\dot{\Omega})$ va quasi ad annullarsi, lasciando il compito di completare il *rendez-vous* al J_2 : infatti qui è il β a diventare praticamente nullo e a provocare le discontinuità nelle derivate di inclinazione e RAAN.

È possibile, infine, visualizzare gli andamenti di β e ϑ_0 anche per questi casi, che impongono la diminuzione del RAAN, in un grafico analogo a quello in Figura 3.15. Ora si evince molto bene, in Figura 3.19, la discontinuità nel β alla fine del tratto a quota costante, e, praticamente, il suo annullamento dopo di esso. Il ϑ_0 , di contro, risulta essere sempre continuo e negativo, in quanto negativo deve essere il suo seno,

come visto in precedenza, e tende ad aumentare durante la manovra, come faceva nei casi a $\Delta\Omega > 0$.

Conclusioni

Si sono analizzati una serie di trasferimenti orbitali, effettuati con motori a propulsione elettrica a bassa spinta. Per fare ciò, si sono dapprima introdotte le perturbazioni principali a cui uno *spacecraft* in orbita bassa terrestre sarà più soggetto durante tali trasferite, con particolare attenzione posta alla rotazione della linea dei nodi, dovuta all'armonica zonale J_2 , effetto dell'effettiva ellitticità del pianeta Terra. Si è poi introdotto il modello di Edelbaum, che permette, attraverso le equazioni planetarie di Lagrange, anch'esse presentate e descritte, di trattare la modifica dei parametri orbitali, sotto i regimi di bassa spinta. Queste sono state poi corrette, al fine di includere l'effetto di J_2 . I trasferimenti che sono stati presi in considerazione sono ottenuti come risultati di un metodo numerico indiretto di ottimizzazione, di cui si è discusso nel capitolo 2. Questo metodo, scelto in quanto garantisce una buona precisione e una elevata velocità di convergenza, permette di ottenere due tipi di soluzioni, data la trasferta tra un'orbita iniziale e una target: una che minimizzi il tempo di volo, e una che minimizzi il carburante consumato, fissato una determinata durata della missione.

I risultati ottenuti, esposti nel capitolo 3, sono relativi a otto configurazioni diverse di missione, a partire da un'orbita iniziale assimilabile a quella della ISS. I risultati sono presentati in termini di minimo tempo di volo, comparati con le configurazioni a RAAN libero, di minimi consumi di propellente, di analisi dei controlli ottimi ottenuti. Le varie durate e i vari consumi sono stati confrontati tra loro, suggerendo tempi di missioni ottimali di non più di 40 – 50 giorni, al fine di garantire un buon risparmio di combustibile, evitando tuttavia di allungare oltremodo le missioni. I consumi minimi assoluti sono stati ricavati per i vari casi: si sono illustrati gli ottimi globali per quanto riguarda la massa, proponendo una strategia alternativa per le configurazioni in cui le linee dei nodi tra le orbite iniziale e target sono in condizioni di reciproco allontanamento. Il metodo è stato presentato, quindi, solo attraverso questi otto casi particolari, esaminati nel dettaglio delle loro diverse soluzioni, ma, ovviamente, applicabile a svariate altre configurazioni di missioni. Possono essere variate le orbite di partenza, i parametri del motore, le strategie di manovra. Può risultare utile, ad esempio, studiare casi con cambi non nulli di inclinazione tra orbita iniziale e target, caso non affrontato nella presente trattazione, e osservare così come anche questo parametro influenzi durate e

consumi.

Il metodo utilizzato fornisce, pertanto, risultati affidabili, che permettono di effettuare quantomeno valutazioni preliminari per l'*orbit transfer* tra due LEO, utilizzabile anche in ambito di attività di *Active Rebris Removal*, effettuato con motori a propulsione elettrica. Tali orbite, tuttavia, sono assunte circolari in tutto il procedimento, rendendo il metodo non valido per l'ottimizzazione di trasferimenti tra e con orbite a ellitticità non nulla.

Si potrebbe infatti pensare, in ottica di sviluppi futuri della teoria, di modificare il modello matematico, al fine di contemplare anche l'eventuale eccentricità delle traiettorie, e quindi anche l'effetto che J_2 ha sulla linea degli apsi, e la resistenza atmosferica. La resistenza, infatti, come già accennato, gioca un ruolo relativamente importante per le LEO, ma il cui effetto reale sul semiasse maggiore è piuttosto arduo da determinare con esattezza, per via di quanto detto nel paragrafo 1.3.1. Un altro fattore che è stato trascurato nel modello matematico, in particolare dal set delle equazioni planetarie di Lagrange, è l'equazione dell'anomalia vera, che andrebbe inclusa nella trattazione nel caso in cui si volessero analizzare dei *rendez-vous* reali tra due *spacecraft*, posti in punti ben precisi delle loro orbite all'istante iniziale. Inoltre, può risultare interessante studiare come si concatenano successivi trasferimenti ottimi, al fine di effettuare, ad esempio, un *rendez-vous* tra più di due *spacecraft*.

Bibliografia

- [1] M. Cerf. «Multiple Space Debris Collecting Mission. Optimal Mission Planning». In: *Journal of Optimization Theory and Applications* (2014).
- [2] R.R. Bate, D.D. Mueller e J.E. White. *Fundamentals of Astrodynamics*. New York: Dover Publications, 1971.
- [3] R.H. Frick e T.B. Garber. *Perturbation of a Synchronous Satellite*. Report. NASA, 1962.
- [4] J.W. Cornelisse, H.F.R. Scoyer e K.F. Wakker. *Rocket Propulsion and Space-flight Dynamics*. Pitman, 1979.
- [5] H.I. Khalil e S.W. Samwel. «Effect of Air Drag Force on Low Earth Orbit Satellites During Maximum and Minimum Solar Activity». In: *Space Research Journal* 9 (2016), pp. 1–9.
- [6] S.W. Samwel. «Low Earth Orbital Atomic Oxygen Erosion Effect on Spacecraft Materials». In: *Space Research Journal* 7 (2014), pp. 1–13.
- [7] J. Kéchichian. «Motion in General Elliptic Orbit with respect to a Dragging and Precessing Coordinate Frame». In: *Journal of Astronautical Sciences* 46 (1998), pp. 25–45.
- [8] C.A. Wagner. *The gravity potential and force field of the Earth through fourth order*. Technical note. NASA, 1966.
- [9] T.N. Edelbaum. «Propulsion Requirements for Controllable Satellites». In: *ARS Journal*. 31 (1961).
- [10] L. Casalino e G. Colasurdo. «Improved Edelbaum’s Approach to Optimize Low Earth/Geostationary Orbits Low-Thrust Transfers». In: *Journal of Guidance Control and Dynamics* 30 (2007), pp. 1504–1510.
- [11] W.E. Wiesel e S. Alfano. «Optimal many-revolution orbit transfer». In: *Journal of Guidance Control and Dynamics* 8 (1984), pp. 155–157.
- [12] J. Kéchichian. «Reformulation of Edelbaum’s Low-Thrust Transfer Problem Using Optimal Control Theory». In: *Journal of Guidance Control and Dynamics* 20 (1997), pp. 988–994.

- [13] L.F. Shampine. «Variable order Adams codes». In: *Computers and Mathematics With Applications* 44 (set. 2002), pp. 749–761.
- [14] L.F. Shampine e M.K. Gordon. *Computer Solution of Ordinary Differential Equations*. San Francisco, CA: W.H. Freeman, 1975.
- [15] J. Forshaw et al. «The active space debris removal mission RemoveDebris. Part 1: From concept to launch». In: *Acta Astronautica* 168 (2020), pp. 293–309.