

POLITECNICO DI TORINO

Collegio di Ingegneria Meccanica, Aerospaziale, dell'Autoveicolo e della Produzione

**Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aerospaziale**

Tesi di Laurea Magistrale

Analisi Approssimata di Traiettorie per Rendez-Vous con Near Earth Asteroids



Relatore
Lorenzo Casalino

Candidato
Andrea Musi

Anno Accademico 2020/2021

Indice

1. Introduzione	1
2. Near Earth Asteroids (NEAs)	4
3. Metodo Esatto: Ottimizzazione Indiretta	6
3.1 Problema Differenziale ai Limiti	12
4. Metodo Approssimato	16
4.1 Legge di Controllo Ottimale di Edelbaum	18
4.2 Legge di Controllo Sub-Ottimale Approssimata	21
4.2.1 Trasferte Complanari	23
4.2.2 Trasferte non Complanari	26
5. Risultati	28
5.1 Confronto fra gli Asteroidi	33
5.1.1 Confronto Asteroidi 15/77	33
5.1.2 Confronto Asteroidi 50/78	36
5.1.3 Confronto Asteroidi 70/79	39
5.1.4 Commento al Confronto tra Asteroidi	42
5.2 Variazione di i e modifica dello script Soluzione Approssimata ..	42
5.3 Valutazione Grafica dei Miglioramenti	46
5.3.1 Asteroide 45	47
5.3.2 Asteroide 50	50
5.3.3 Asteroide 70	54
5.3.4 Asteroide 70 (caso 32 mesi)	57
6. Conclusioni	61
7. Lista dei Simboli	63
8. Sitografia e Bibliografia	65

1. Introduzione

L'esplorazione dello spazio, ed in particolare di pianeti ed asteroidi, è un qualcosa di estremamente importante, che ci permette, tra le altre cose, di acquisire informazioni su come l'universo si sia formato e sviluppato. Gli asteroidi, in particolare, sono una tipologia di target incredibilmente significativa, sia perché ci permettono di osservare caratteristiche non presenti ed accessibili dalla sola esplorazione dei pianeti, sia perché, in futuro, potrebbero essere sfruttati per l'utilizzo di materiali presenti al loro interno.

Gli asteroidi più facilmente accessibili dalla Terra sono i cosiddetti NEAs, i Near-Earth Asteroids; questi sono ottimi target in quanto la loro vicinanza con il nostro pianeta consente di avere delle trasferte relativamente economiche in termini di ΔV e di consumo di propellente.

Lo scopo di questa tesi è quello di avere un'ottimizzazione preliminare delle traiettorie per le trasferte Terra-NEAs in modo tale da avere, dato un limite massimo di tempo della trasferta, il minimo consumo di propellente.

A questo scopo, due metodi differenti sono stati utilizzati: un metodo considerato esatto, basato su una ottimizzazione indiretta, ed un altro metodo, considerato approssimato, basato invece su una ottimizzazione diretta. L'attenzione, però, è concentrata maggiormente sulla soluzione approssimata, il metodo indiretto serve solo come "controllo".

Entrambi i metodi saranno spiegati nei successivi capitoli.

L'idea di fondo è duplice: ottimizzare le traiettorie e testare la bontà del metodo approssimato; si vuole infatti avere che i risultati ottenuti da entrambi i metodi presentino il minor consumo di propellente possibile e, allo stesso tempo, che l'errore tra i risultati dei due metodi sia il più piccolo

possibile, in modo tale da poter considerare attendibile anche il metodo approssimato.

Lo sviluppo di un nuovo metodo è dovuto al voler trovare un modo più veloce, ma al contempo altrettanto attendibile, per l'ottimizzazione di traiettorie spaziali: il metodo approssimato, infatti, è basato sull'approssimazione di Edelbaum (eccentricità ed inclinazione piccoli, bassa spinta) e produce una serie di equazioni algebriche che sono risolte numericamente, senza bisogno di alcuna integrazione. Tale metodo suddivide la spinta propulsiva in tanti piccoli contributi, ognuno dei quali ha un compito specifico (cambio di inclinazione, cambio di perielio/afelio, etc.). Gli effetti ed i costi di ogni contributo sono valutati per orbite quasi circolari e con piccole variazioni di inclinazione. Poiché non si ha l'integrazione delle equazioni del moto, il metodo risulterà essere molto più veloce rispetto ad un'ottimizzazione indiretta.

I calcoli di ottimizzazione fatti, che saranno illustrati successivamente, considerano un satellite dal peso di 20 kg che utilizza la propulsione elettrica (3100 s di impulso specifico ed una spinta pari a 1.74 mN ad 1 AU) che deve raggiungere determinati asteroidi target nel tempo massimo di 3 anni.

Lo spacecraft lascia la sfera di influenza terrestre al tempo iniziale (ipotizziamo di essere già in fase eliocentrica) con una posizione ed una velocità pari a quella del pianeta; il punto di partenza sarà o l'apogeo o il perigeo della sua traiettoria iniziale, a seconda di quale delle due posizioni consente un vantaggio maggiore in termini di consumi di propellente; la sua traiettoria verso l'asteroide target sarà caratterizzata da una successione di archi, che potranno essere di crociera o di spinta, ognuno di una lunghezza determinata attraverso i metodi risolutivi. Mediante tali metodi sarà anche calcolata la direzione ottimale di spinta.

Nel prossimo capitolo sarà presentata una breve introduzione riguardante i NEAs; nei capitoli 3 e 4 saranno presentati i due metodi – metodo esatto ed approssimato, mentre nel capitolo 5 sarà spiegato il procedimento ed i risultati ottenuti.

2. Near Earth Asteroids (NEAs)

I NEAs sono asteroidi o comete, di dimensioni che variano da pochi metri di diametro fino a decine di chilometri, che hanno orbite intorno al sole che intersecano o che passano vicine a quella della Terra. Essi si trovano a distanze inferiori alle 1.3 AU quando si trovano al perielio della loro orbita e sono decine di migliaia quelli al momento conosciuti nel nostro Sistema Solare.

È significativo studiarli poiché i NEAs si sono creati mediante collisioni e hanno avuto un ruolo nella formazione e nella modellazione della Terra stessa: studiarli può quindi aiutare a capire il processo di formazione dei pianeti; oltre a ciò, poiché le loro orbite spesso intersecano quella della Terra, potrebbero rappresentare un problema per noi, e il loro studio può essere quindi utile per l'implementazione di strategie difensive. La maggior parte degli asteroidi presente nel Sistema Solare è situata nella cosiddetta Main Asteroid Belt, che si trova tra Marte e Giove; alcuni di essi vedono la loro orbita perturbata dall'interazione gravitazionale con Giove che li porta ad essere espulsi dal nostro Sistema Solare, mentre altri, invece, modificano la loro orbita iniziale con una che interseca o passa vicino a quella della Terra. I NEAs si dividono in 3 categorie:

- Aten, che hanno un raggio orbitale medio minore di 1 AU e che quindi si muovono all'interno rispetto all'orbita terrestre;
- Apollo, che hanno un raggio orbitale medio maggiore di 1 AU;
- Amor, che hanno un raggio orbitale medio compreso tra le orbite della Terra e di Marte e presentano un perielio esterno all'orbita della Terra.

Diverse missioni, in passato, hanno avuto come obiettivo quello di studiare quanto più vicino possibile i NEAs. In tal senso, la missione NEAR – Near

Earth Asteroids Rendezvous – è stata la prima in grado di orbitare intorno ad un asteroide e successivamente di atterrarvi sopra. L'obiettivo era quello di studiare in modo prolungato un asteroide di grosse dimensioni (433 Eros) determinando le sue dimensioni, la sua densità, la sua composizione e la variazione del suo moto di rotazione in modo da cercare di capire di più sul processo che portò alla formazione dei pianeti.

Un'altra importante missione di interesse in tale campo è M-ARGO – Miniaturized Asteroid Remote Geophysical Observer – che è la missione da cui sono stati presi i dati in questa tesi.

M-ARGO sfrutta la propulsione elettrica per un rendez-vous con un NEA ed è progettato per sopravvivere 3 anni nello spazio; di questi 3 anni, 6 mesi li passerà intorno all'obiettivo target in maniera tale da studiarlo con precisione. Per una missione del genere si è reso necessario, durante lo studio preliminare, classificare ed enumerare tutti gli asteroidi che possono essere raggiunti; a partire da tale lista, successivamente, si è fatta una ulteriore scrematura in base ad altri requisiti della missione.

M-ARGO dovrebbe partire nel 2023 ed è una missione unica se comparata con le precedenti: per la prima volta, infatti, il target non sarà un asteroide delle dimensioni dell'ordine dei km, ma sarà un asteroide con una larghezza minore di 100 metri;

è quindi un target che ci si aspetta essere molto compatto e con un moto di rotazione molto veloce.

3. Metodo Esatto: Ottimizzazione Indiretta

La traiettoria è descritta da un sistema di equazioni differenziali in cui si deve determinare la legge di spinta.

Un problema di ottimizzazione consiste sostanzialmente nel ricercare la legge di controllo che rende massimo o minimo un determinato indice di prestazione.

Nel campo delle trasferte orbitali, i consumi di propellente hanno un enorme impatto sui costi della missione; ecco che quindi questo sarà il parametro da rendere minimo. Sarà infatti essenziale minimizzare la quantità di propellente necessaria alla manovra; cercare di avere la minima quantità di propellente utilizzata si traduce nell'equivalente ricerca di massimizzare la massa utile dello spacecraft al termine della missione.

Problemi di questo tipo possono essere risolti per via analitica solo in pochi e semplici casi, che proprio per questo sono casi di scarso interesse, visto l'elevato numero di semplificazioni da adottare. Per ottenere soluzioni di una certa rilevanza occorre procedere all'ottimizzazione attraverso soluzioni approssimate o con metodi numerici. A tale scopo si utilizza quindi la Teoria del controllo ottimale.

Tale teoria è basata sul calcolo variazionale; il sistema (generico) cui si applica è descritto da un vettore di variabili di stato x . Le equazioni che descrivono l'evoluzione del sistema tra l'istante iniziale e quello finale hanno la generica forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (1)$$

Tali equazioni sono funzione di x , del vettore dei controlli u e della variabile indipendente tempo t .

Il primo passo è quello di suddividere la traiettoria in sotto intervalli (archi), all'interno dei quali le variabili sono continue. Il j -esimo intervallo comincia al tempo $t_{(j-1)+}$ e finisce al tempo t_{j-} ed i valori assunti dalle variabili ai suoi estremi sono $x_{(j-1)+}$ e x_{j-} (i segni $-$ e $+$ indicano i valori assunti appena prima e appena dopo il punto considerato – questo perché in questo modo si tiene conto delle possibili discontinuità che ci possono essere. Un esempio di ciò è la massa o la velocità a seguito di una manovra impulsiva).

Una volta definito il sistema, vengono definite anche delle condizioni al contorno non lineari e generalmente di tipo misto (ciò significa che riguardano i valori delle variabili di stato e della variabile tempo sia ai contorni esterni degli intervalli, sia a quelli interni). Queste condizioni sono date da:

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

Dove n è il numero di sotto intervalli in cui è stata suddivisa la traiettoria.

Si è quindi definito il sistema iniziale e si hanno definito altresì le condizioni al contorno; per risolvere il problema di ottimo non bisogna far altro che ricercare i valori estremali (massimi e/o minimi relativi) di un funzionale J del tipo:

$$J = \varphi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, x_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(x(t), u(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

J è dato dalla somma di due termini; il primo è la funzione φ che dipende dai valori che le variabili assumono ai contorni (interni ed esterni) e dal

tempo. Il secondo è l'integrale Φ esteso a tutta la traiettoria, che dipende dal tempo e dai valori assunti da variabili e controlli in ogni punto.

Per poter tenere in conto delle condizioni al contorno, è utile introdurre i moltiplicatori di Lagrange, che consistono in costanti aggiunte μ e variabili aggiunte λ .

Si ottiene così il funzionale implementato:

$$J^* = \varphi + \mu^T \chi + \sum_j (\Phi + \lambda^T (f - \dot{x})) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

I funzionali J e J^* dipendono dal tempo t , dalle variabili di stato x , dalle loro derivate e dai controlli u .

Se le condizioni al contorno e le equazioni differenziali sono soddisfatte, si ha che $J = J^*$ per qualunque scelta dei moltiplicatori di Lagrange (i due funzionali coincidono e di conseguenza anche i loro valori estremali).

Introducendo ora delle variazioni arbitrarie $\delta x, \delta u, \delta x_{(j-1)+}, \delta x_{j-}, \delta t_{(j-1)+}, \delta t_{j-}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{(j-1)+}} \right) \delta t_{(j-1)+} \\ & + \left(H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \frac{\mu^T \partial \chi}{\partial t_{j-}} \right) \delta t_{j-} + \\ & + \left(\lambda_{(j-1)+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{(j-1)+}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{(j-1)+}} \right] \right) \delta x_{(j-1)+} \\ & + \left(-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] \right) \delta x_{j-} + \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right] dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

Dove $H = \Phi + \lambda^T f$ è l'Hamiltoniano.

Affinché vi sia la condizione di ottimo, il funzionale deve essere stazionario, cioè la sua variazione prima δJ^* deve annullarsi per qualunque scelta di $\delta x, \delta u, \delta x_{(j-1)+}, \delta x_{j-}, \delta t_{(j-1)+}, \delta t_{j-}$, compatibile con le equazioni differenziali e le condizioni al contorno. Nel procedimento si è detto come si sia deciso esprimere il funzionale in funzione di costanti e variabili aggiunte; questo è dovuto al fatto che mediante una loro opportuna scelta, si può annullare contemporaneamente il coefficiente di ciascuna delle variazioni dell'equazione (5), garantendo quindi la stazionarietà del funzionale.

Annullando δx e δu all'interno dell'integrale, si ottengono le cosiddette equazioni di Eulero – Lagrange per le variabili aggiunte:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (6)$$

e le equazioni algebriche per i controlli:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (7)$$

I vincoli imposti finora non sono, però, sufficienti. Anche i controlli, infatti, possono essere soggetti a vincoli e se lo sono, bisogna prestare attenzione; un tipo di vincolo sui controlli può essere ad esempio la spinta, il cui valore deve essere compreso tra 0 e T_{MAX} . Se sono presenti vincoli sui controlli, il valore ottimale del controllo in ogni punto della traiettoria è quello che rende massimo o minimo l'Hamiltoniano in quel punto, appartenendo comunque sempre al dominio di ammissibilità.

Si possono, perciò, avere controlli localmente non vincolati o vincolati a seconda che il valore ottimale del controllo rientri nel dominio di ammissibilità o meno – nel caso rientri, il valore ottimale è quello fornito dall'equazione (7).

In accordo con il Principio di Pontryagin, il valore ottimale è:

- Il valore massimo se il coefficiente del controllo in H è positivo;
- Il valore minimo se il coefficiente del controllo in H è negativo;
- Un valore intermedio da determinare, nel caso in cui il coefficiente sia nullo in un certo intervallo di tempo, che prende il nome di arco singolare.

In questo caso, il valore ottimale viene calcolato annullando tutte le derivate successive rispetto al tempo del coefficiente, finché in una di esse non appare esplicitamente il controllo.

Ulteriori condizioni al contorno da imporre sono quelle di ottimo, che si ottengono facendo riferimento al j-esimo contorno, andando ad annullare i coefficienti $\delta x_{j-}, \delta x_{j+}, \delta t_{j-}, \delta t_{j+}$:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j-}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j-}} \right] = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (8)$$

$$\lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j+}} + \mu^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_{j+}} \right] = 0 \quad j = 0, \dots, n - 1 \quad (9)$$

$$H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

$$-H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} = 0 \quad j = 0, \dots, n - 1 \quad (11)$$

Dalle condizioni sopra riportate si vede come:

- Se una variabile è assegnata a t_0 o t_f , la corrispondente variabile aggiunta è in quel punto libera (non ci sono quindi condizioni su di essa);
- Se una variabile a t_0 o t_f non compare nelle condizioni, la corrispondente variabile aggiunta è nulla all'istante iniziale/finale;
- Se una variabile è continua e libera in un punto interno, la corrispondente variabile aggiunta è continua anch'essa ($\lambda_{x_{j+}} = \lambda_{x_{j-}}$);
- Se una variabile è continua ed assegnata in un punto interno, la corrispondente variabile aggiunta ha una discontinuità libera in quel dato punto (ovvero il valore di $\lambda_{x_{j+}}$ è indipendente da $\lambda_{x_{j-}}$ e deve essere calcolato mediante l'ottimizzazione).

Allo stesso modo è possibile fare considerazione riguardanti l'Hamiltoniano:

- Se il tempo iniziale/finale è libero, l'Hamiltoniano è nullo;
- Se il tempo iniziale/finale è assegnato, l'Hamiltoniano è libero;
- Se un tempo intermedio è libero e continuo, l'Hamiltoniano è continuo in quel punto; se invece il tempo intermedio è assegnato, l'Hamiltoniano avrà una discontinuità libera in quel dato punto.

3.1 Problema Differenziale ai Limiti

Nella teoria del controllo ottimale si ha, come visto, un problema matematico soggetto a vincoli differenziali ed algebrici. Il problema è che alcuni valori iniziali delle variabili di stato ed aggiunte sono incogniti; risolvere il problema di ottimo significa quindi risolvere un problema differenziale ai limiti (BVP) in cui abbiamo le equazioni differenziali (1) e (6), in cui i controlli sono ottenuti dalle equazioni algebriche (7) insieme alle condizioni al contorno imposte (2) e di ottimo.

Quindi, sostanzialmente, la soluzione del problema consiste nel trovare quali valori iniziali consentono di soddisfare tutte le condizioni al contorno, integrando numericamente il sistema differenziale iniziale. Le peculiarità del problema sono:

- L'intervallo di integrazione è, come detto in precedenza, suddiviso in sotto intervalli;
- La durata di ciascun sotto intervallo è generalmente incognita;
- Le condizioni al contorno possono essere non lineari;
- Le variabili possono essere discontinue ai contorni interni ed il loro valore dopo la discontinuità può essere incognito.

Per ottenere quindi la soluzione del BVP occorre ridurre il problema ad una successione di sotto problemi ai valori iniziali che si portano a convergenza utilizzando il metodo di Newton.

Assodato ciò, occorre comunque innanzitutto trovare il modo di risolvere il problema relativo al fatto di non conoscere la durata di ciascun sotto intervallo; a tale scopo, si sostituisce la variabile indipendente tempo t con una nuova variabile ϵ definita nel j -esimo sotto intervallo dalla relazione:

$$\epsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (12)$$

Dove τ_j è la durata incognita del sotto intervallo. Grazie a questa relazione i contorni interni ed esterni sono fissati e corrispondono a valori interni consecutivi della nuova variabile ϵ .

Si ha perciò un problema differenziale nelle variabili di stato ed aggiunte (ora non più distinte), $y = (x, \lambda)$; poiché compaiono anche delle quantità costanti all'interno, come ad esempio la durata dei sotto intervalli τ , è conveniente utilizzare un cambio di variabili in modo da riportare il problema ad una scrittura più immediata, in cui compaiano le variabili di stato ed aggiunte ed un vettore c dei parametri costanti: $z = (y, c)$, ed il sistema di equazioni differenziali diventa perciò:

$$\frac{dz}{dt} = f(z, \epsilon) \quad (13)$$

Le condizioni al contorno sono espresse senza distinguere tra condizioni imposte e di ottimo ed assumono la forma:

$$\psi(s) = 0 \quad (14)$$

Dove s è un vettore che contiene i valori che le variabili assumono a ogni contorno ($s = (y_0, y_1, \dots, y_n, c)$).

Come detto, alcuni (o tutti) dei valori iniziali delle variabili sono incogniti; il problema si riconduce quindi nel ricercare quali valori tali variabili debbano assumere inizialmente per poter soddisfare l'equazione (14).

Per fare ciò, si fissa $z(0) = p^r$, ovvero la r -esima iterazione inizia assumendo che i valori iniziali siano uguali al valore ottenuto dall'iterazione precedente (il primo passo in assoluto è quello di avere dei valori iniziali di tentativo, da cui poi si sviluppano le iterazioni successive); si integrano poi

le equazioni lungo tutta la traiettoria tenendo in conto eventuali discontinuità.

Al termine dell'integrazione si calcola l'errore sulle condizioni al contorno ψ^r dell' r -esima iterazione. Ad ogni iterazione i valori iniziali vengono modificati di una certa quantità, pari a:

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial p} \right]^{-1} \psi^r \quad (15)$$

Queste correzioni (e le conseguenti iterazioni) vengono portate avanti finché le condizioni al contorno non sono verificate con la precisione desiderata.

Nell'equazione (15) si ha una matrice, che viene ottenuta nel modo seguente:

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial \psi}{\partial s} \right] \left[\frac{\partial s}{\partial p} \right] \quad (16)$$

La prima matrice si ottiene derivando le condizioni al contorno rispetto alle grandezze che vi compaiono; la seconda matrice, invece, contiene le derivate rispetto ai valori iniziali dei valori delle variabili ai contorni, e si ottiene integrando il sistema di equazioni differenziali calcolato derivando il sistema principale – equazione (13) – rispetto ad ognuno dei valori iniziali:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial p} \right] = [g(\epsilon)] \quad (17)$$

$$[\dot{g}] = \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{\partial z}{\partial p} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{dz}{d\epsilon} \right) \right] = \left[\frac{df}{dp} \right] \quad (18)$$

Se uno o più dei valori iniziali delle variabili sono noti, il problema risulta chiaramente semplificato, in quanto si riduce di conseguenza la grandezza del vettore p e del vettore delle condizioni al contorno ψ .

L'integrazione delle equazioni differenziali viene fatta con un metodo a passo ed ordine variabile, basato sulle formule di Adams.

Si è visto come ad ogni iterazione si applichi una correzione di Δp ai valori iniziali; questo, però, può provocare degli errori che possono comportare una conseguente impossibilità di raggiungere la convergenza, facendo aumentare l'errore sulle condizioni al contorno (anziché diminuirle). Per evitare che ciò accada si sono adottati degli accorgimenti:

- La correzione da apportare ad ogni iterazione è solo una frazione di quella determinata, ovvero:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \Delta p \quad (19)$$

Dove $K_1 = 0.1 \div 1$

- Ad ogni iterazione, si confronta l'errore sulle condizioni al contorno E^{r+1} con quello ottenuto all'iterazione precedente E^r : se $E^{r+1} < K_2 E^r$ si procede con la successiva iterazione ($K_2 = 2 \div 3$ per avere buoni risultati).

Se, invece, l'errore dell'iterazione è troppo grande rispetto a quello dell'iterazione precedente, si procede al dimezzamento della correzione apportata, ovvero:

$$p^{r+1} = p^r + K_1 \frac{\Delta p}{2} \quad (20)$$

Si ripete quindi il confronto tra gli errori e, nel caso sia necessario, si dimezza ancora la correzione.

Si può procedere fino ad un massimo di 5 bisezioni (ovvero 5 dimezzamenti del Δp), oltre le quali si assume che la soluzione di tentativo scelta inizialmente non porti a convergenza, ed il procedimento si arresta.

4. Metodo Approssimato

Nel seguito viene illustrata una procedura di ottimizzazione approssimata basata sul modello di Edelbaum, che può essere utilizzata nel caso di trasferte verso asteroidi caratterizzati da orbite quasi circolari e con piccole variazioni di inclinazione.

Il primo passo nell'applicazione di questo metodo è la suddivisione della traiettoria in diversi sotto intervalli, in modo da dividere le variazioni di parametri orbitali in più step. Si ipotizza quindi di essere già in rotazione attorno alla Terra con un'orbita circolare ($a_E = 1, e_E = 0$) e si vuole raggiungere l'asteroide target, che si suppone abbia un certo semiasse maggiore a_T ed una certa eccentricità e_T ; sarà quindi necessario variare il perielio dell'orbita fino ad avere $r_P = a_T(1 - e_T)$ e bisognerà altresì variare l'afelio fino a $r_A = a_T(1 + e_T)$.

Per poter fare ciò, sono sufficienti due impulsi, spazati di 180 gradi uno dall'altro, in corrispondenza della linea degli apsidi. Si avrà, quindi, una spinta al perielio per variare l'afelio, che produrrà le seguenti variazioni di parametri orbitali:

$$\Delta a_{PA} = [(a_T - 1) + e_T]/2 \quad (21)$$

$$\Delta e_{PA} = [(a_T - 1) + e_T]/2 \quad (22)$$

E, spaziata di 180 gradi, si avrà una spinta all'afelio per variare il perielio, che avrà una variazione di parametri orbitali pari a:

$$\Delta a_{AP} = [(a_T - 1) - e_T]/2 \quad (23)$$

$$\Delta e_{AP} = -[(a_T - 1) - e_T]/2 \quad (24)$$

Si trascurano qua gli effetti che queste manovre hanno fra di loro quando eseguite in successione.

Con propulsione elettrica, però, non è possibile avere manovre impulsive, ma la spinta è ottenuta in un tempo finito; le variazioni richieste, quindi, vengono suddivise in diversi step, ogni volta che si ha un arco di spinta.

In una missione di n anni, ci sono tendenzialmente n passaggi ad ogni apside e quindi qui vengono considerati n archi di spinta ed ognuno di questi contribuisce per $1/n$ alle variazioni totali richieste.

Il vettore eccentricità viene suddiviso in una componente lungo la direzione x ed in una componente lungo la direzione y – direzioni lungo le quali il vettore eccentricità varia:

$$\Delta e_x = e_T \cos(\Omega_T + \omega_T) - e_E \cos(\Omega_E + \omega_E) \quad (25)$$

$$\Delta e_y = e_T \sin(\Omega_T + \omega_T) - e_E \sin(\Omega_E + \omega_E) \quad (26)$$

Si introducono poi altri due parametri, ovvero la variazione di semiasse maggiore Δa e la variazione del vettore eccentricità Δe :

$$\Delta a = a_T - a_E, \quad \Delta e = \sqrt{\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2} \quad (27)$$

Ad ogni passaggio al perielio, quindi, si avranno le seguenti variazioni:

$$\Delta a_{PA} = (\Delta a + |\Delta e|)/2n \quad (28)$$

$$\Delta e_{PA_x} = (\Delta e_x/\Delta e)(\Delta a + |\Delta e|)/2n \quad (29)$$

$$\Delta e_{PA_y} = (\Delta e_y/\Delta e)(\Delta a + |\Delta e|)/2n \quad (30)$$

Mentre ad ogni passaggio all'afelio si avrà:

$$\Delta a_{AP} = (\Delta a - |\Delta e|)/2n \quad (31)$$

$$\Delta e_{AP_x} = -(\Delta e_x/\Delta e)(\Delta a - |\Delta e|)/2n \quad (32)$$

$$\Delta e_{AP_y} = -(\Delta e_y/\Delta e)(\Delta a - |\Delta e|)/2n \quad (33)$$

Allo stesso modo, si avrà una variazione di inclinazione pari a:

$$\Delta i_{PA} = [\Delta PA/(\Delta PA + \Delta AP)](\Delta i/n) \quad (34)$$

$$\Delta i_{PA} = [\Delta AP/(\Delta PA + \Delta AP)](\Delta i/n) \quad (35)$$

Avendo assunto $\Delta PA = |\Delta a_{PA}| + |\Delta e_{PA}|$ e $\Delta AP = |\Delta a_{AP}| + |\Delta e_{AP}|$.

Poiché, come precedentemente detto, siamo in un caso di spinta finita e non impulsiva, risulta necessario avere una legge di controllo per la direzione della spinta, in modo tale da poter avere le variazioni di parametri orbitali richiesti. A tale scopo, si utilizza un metodo che approssima la legge di controllo ottima di Edelbaum.

4.1 Legge di Controllo Ottimale di Edelbaum

Il metodo è basato sull'approssimazione di Edelbaum.

Edelbaum analizza in una sua opera¹ il volo di uno spacecraft caratterizzato da una spinta piccola e che si muove su un'orbita con piccola eccentricità; sotto queste ipotesi, l'orbita rimane sostanzialmente circolare e si può facilmente ricavare la legge di controllo ottimale che rende massimo il cambio di semiasse maggiore, di eccentricità e di inclinazione.

Il lavoro di Edelbaum si basa su trasferte lunghe, che magari fanno più giri di rivoluzione intorno ad un corpo e quindi tale metodo, utilizzato per trasferte più corte, può dare luogo a risultati poco accurati e precisi.

Si considerano qui orbite con bassa eccentricità, piccoli cambi di inclinazione (scegliendo in maniera adeguata il piano di riferimento) e con piccole variazioni dei parametri orbitali; così facendo, si ottengono comunque buoni risultati utilizzando l'analisi fatta da Edelbaum.

¹ Edelbaum, T.N., "Propulsion Requirements for Controllable Satellites," ARS Journal, Vol. 31, No. 8, 1961, pp. 1079-1089.

Le tipiche equazioni differenziali che descrivono i cambi di parametri orbitali a seguito di una manovra impulsiva, sotto l'ipotesi di eccentricità ed inclinazione piccole, sono date da:

$$V \frac{da}{dt} = 2rA_T \quad (36)$$

$$V \frac{de}{dt} = 2 \cos(\nu) A_T + \sin(\nu) A_R \quad (37)$$

$$V \frac{di}{dt} = \cos(\omega + \nu) A_W \quad (38)$$

$$iV \frac{d\Omega}{dt} = \sin(\omega + \nu) A_W \quad (39)$$

$$V \frac{d\omega}{dt} = -V \frac{d\Omega}{dt} + \frac{2 \sin(\nu) A_T - \cos(\nu) A_R}{e} \quad (40)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{r} = \sqrt{\mu/a^3} \quad (41)$$

Dove si sono introdotte la componente radiale dell'accelerazione A_R , quella tangenziale A_T (concorde con il moto dello spacecraft) e quella fuori dal piano A_W (concorde con il momento angolare).

Il problema, però, è che tali equazioni sono mal definite per piccoli valori di e ed i (quelli che si stanno considerando); per evitare quindi l'insorgere di ulteriori problemi, si introducono delle nuove variabili:

$$e_x = e \cos(\Omega + \omega), \quad e_y = e \sin(\Omega + \omega), \quad i_x = i \cos\Omega, \quad i_y = i \sin\Omega$$

e_x ed e_y sono relativi al cambio di eccentricità ed alla rotazione della linea degli apsidi, i_x ed i_y sono invece relativi al cambio di inclinazione ed alla rotazione della linea dei nodi; inoltre, la longitudine θ è usata come variabile indipendente al posto del tempo t .

Si introducono infine altri due parametri: α , ovvero l'angolo tra la proiezione della spinta sul piano orbitale e la direzione tangenziale, e β , ovvero l'angolo

tra la spinta ed il piano dell'orbita; le componenti dell'accelerazione introdotte poc' anzi possono essere riscritte come:

$$A_R = (T/m)\sin\alpha\cos\beta, \quad A_T = (T/m)\cos\alpha\cos\beta, \quad A_W = (T/m)\sin\beta$$

Le equazioni (36) – (41) potranno essere quindi scritte come:

$$\frac{da}{d\theta} = 2r \frac{T/m}{\mu/r^2} \cos\alpha\cos\beta \quad (42)$$

$$\frac{de_x}{d\theta} = (2\cos\theta\cos\alpha\cos\beta + \sin\theta\sin\alpha\sin\beta) \frac{T/m}{\mu/r^2} \quad (43)$$

$$\frac{de_y}{d\theta} = (2\sin\theta\cos\alpha\cos\beta - \cos\theta\sin\alpha\sin\beta) \frac{T/m}{\mu/r^2} \quad (44)$$

$$\frac{di_x}{d\theta} = \cos\theta\sin\beta \frac{T/m}{\mu/r^2} \quad (45)$$

$$\frac{di_y}{d\theta} = \sin\theta\sin\beta \frac{T/m}{\mu/r^2} \quad (46)$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{r^3/\mu} \quad (47)$$

Il raggio e l'accelerazione sono assunti costanti, mentre gli angoli α e β sono le variabili di controllo del problema.

Quindi, ricapitolando, si vuole ottenere la trasferta ottimale tra orbite date, e per farlo si devono ottenere le variazioni dei parametri orbitali che ci consentono di realizzare tale trasferta.

A tale scopo, è necessario andare a definire l'Hamiltoniano H , che si ottiene associando ad ogni equazione differenziale vista una variabile aggiunta λ :

$$H = A[\lambda_a 2r\cos\alpha\cos\beta + \lambda_{e_x}(2\cos\theta\cos\alpha\cos\beta + \sin\theta\sin\alpha\sin\beta) + \lambda_{e_y}(2\sin\theta\cos\alpha\cos\beta - \cos\theta\sin\alpha\sin\beta) + \lambda_{i_x}\cos\theta\sin\beta + \lambda_{i_y}\sin\theta\sin\beta] \quad (48)$$

Dove $A = \frac{T/m}{\mu/r^2}$.

I controlli ottimali sono infine ottenuti andando ad annullare le derivate parziali di H rispetto ad α e β .

4.2 Legge di Controllo Sub-Ottimale Approssimata

Si ipotizzi ora di voler realizzare una trasferta tra l'orbita 1 e l'orbita 2, iniziando da una certa posizione iniziale data θ_0 e considerando piccole variazioni di semiasse maggiore, di eccentricità e di inclinazione.

Si definiscono le seguenti quantità:

$$\Delta a = a_2 - a_1 \quad (49)$$

$$\Delta e = \sqrt{\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2} = \sqrt{(e_{x2} - e_{x1})^2 + (e_{y2} - e_{y1})^2} \quad (50)$$

$$\Delta i = \sqrt{\Delta i_x^2 + \Delta i_y^2} = \sqrt{(i_{x2} - i_{x1})^2 + (i_{y2} - i_{y1})^2} \quad (51)$$

Δe e Δi comportano non solo una variazione di eccentricità ed inclinazione, ma anche una variazione di ω e Ω .

Si considera, inoltre, che a ed e varino indipendentemente uno dall'altro (così come per a ed i) e non insieme simultaneamente. Si può pertanto valutare il costo della trasferta, ed in particolare il ΔV della missione può essere valutato come somma dei ΔV necessari ad ottenere le variazioni $\Delta a, \Delta e$ e Δi .

Esistono infatti delle relazioni, che nel problema di Edelbaum, legano queste tre variazioni con il ΔV :

$$\Delta V/V = 0.5\Delta a/r, \quad \Delta V/V \approx 0.649\Delta e, \quad \Delta V/V = (\pi/2)\Delta i$$

È possibile una prima stima del costo della manovra combinata assumendo:

$$\Delta V = \sqrt{(k_a\Delta a)^2 + (k_e\Delta e)^2 + (k_i\Delta i)^2} \quad (52)$$

Dove si sono introdotti i coefficienti di costo:

$$k_a = \frac{V_0}{2a_0}, \quad k_e = 0.649V_0, \quad k_i = \frac{\pi}{2}V_0$$

Tali coefficienti sono calcolati come media tra i valori dell'orbita iniziale e di quella finale, si ha infatti che: $a_0 = (a_1 + a_2)/2$, $V_0 = \sqrt{\mu/a_0}$.

Per trasferite brevi, però, l'accuratezza di questa stima è viziata dalla reciproca influenza che si ha tra a ed e , oltre che dagli effetti della non linearità dei cambi di variabile in funzione di θ . Per questo motivo si ha la necessità di affrontare il problema mediante un altro approccio, in modo da evitare l'insorgere di queste inaccuratezze; per farlo, si distinguerà tra un caso di trasferite complanari ed uno in cui si analizzano invece trasferite non complanari.

4.2.1 Trasferte Complanari

Nel caso di trasferte complanari, $\Delta i_x = \Delta i_y = 0$ e di conseguenza $\lambda_{ix} = \lambda_{iy} = 0$ e quindi anche $\beta = 0$ ed è il caso più semplice.

La legge ottimale per l'angolo nel piano α può essere ben approssimata da una retta, come si vede dalla Figura 1.

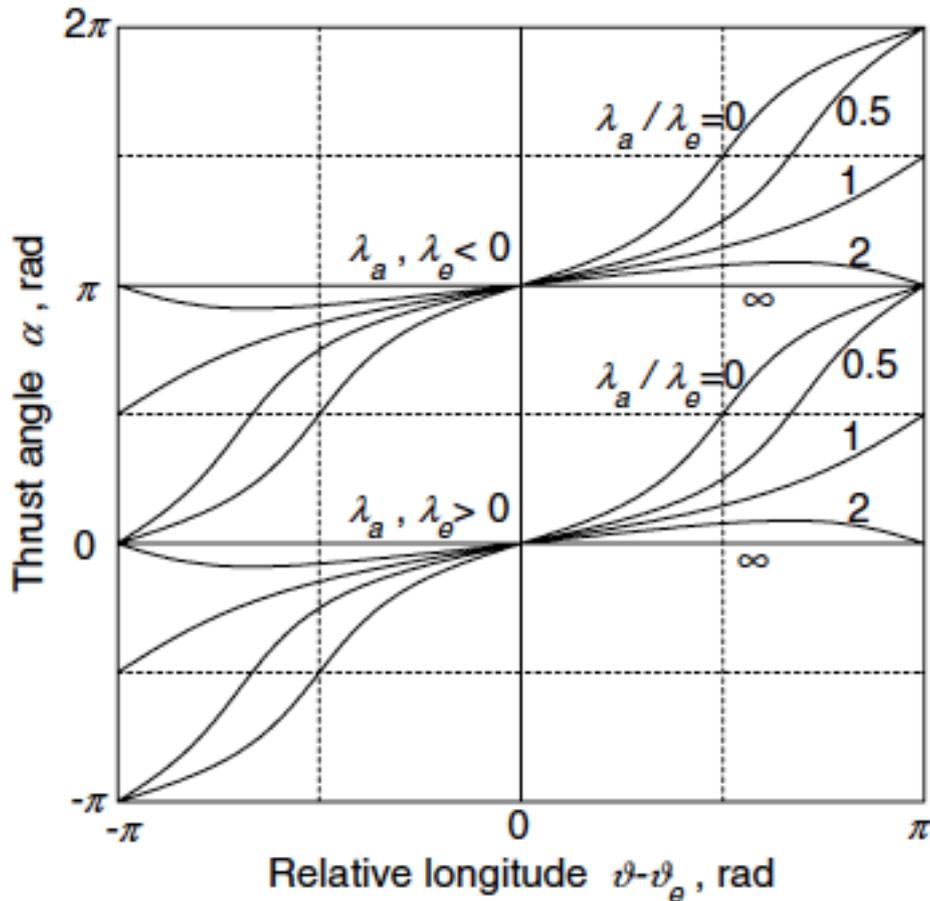


Figura 1 – angolo di spinta ottimale

Risulta necessario fare ricorso ad un'approssimazione della legge ottimale in modo tale da rendere il sistema differenziale integrabile analiticamente; una buona approssimazione si ha nel caso in cui $-\pi \leq \theta - \theta_e \leq \pi$, assumendo che:

$$\alpha = \begin{cases} \Lambda(\theta - \theta_e) & \text{per } \lambda_a, \lambda_e > 0 \\ \Lambda(\theta - \theta_e) + \pi & \text{per } \lambda_a, \lambda_e < 0 \end{cases} \quad (53)$$

Dove $0 \leq \Lambda \leq 1$ è un coefficiente della legge di controllo ($\Lambda = 0$ corrisponde ad una spinta tangenziale, $\Lambda = 1$ corrisponde ad una spinta costante in direzione), i λ_a, λ_e sono le variabili aggiunte viste prima e $\theta_e = \tan^{-1}(\lambda_{ey}/\lambda_{ex})$.

Utilizzando quindi la legge di controllo vista, si avrà:

$$\frac{da}{d\theta} = 2A_r \cos[\Lambda(\theta - \theta_e)] \quad (54)$$

$$\frac{de_x}{d\theta} = A\{2\cos\theta \cos[\Lambda(\theta - \theta_e)] + \sin\theta \sin[\Lambda(\theta - \theta_e)]\} \quad (55)$$

$$\frac{de_y}{d\theta} = A\{2\sin\theta \cos[\Lambda(\theta - \theta_e)] - \cos\theta \sin[\Lambda(\theta - \theta_e)]\} \quad (56)$$

Tali equazioni, modificate con l'utilizzo di equivalenze trigonometriche e successivamente integrate tra θ_0 e θ_f possono essere riscritte come:

$$\Delta a = \frac{2A_r}{\Lambda} \{\sin[\Lambda(\theta_f - \theta_e)] - \sin[\Lambda(\theta_0 - \theta_e)]\} \quad (57)$$

$$\Delta e_x = \frac{3A}{2(1-\Lambda)} \{\sin[(1-\Lambda)\theta_f + \Lambda\theta_e] - \sin[(1-\Lambda)\theta_0 + \Lambda\theta_e]\} + \frac{A}{2(1+\Lambda)} \{\sin[(1+\Lambda)\theta_f - \Lambda\theta_e] - \sin[(1+\Lambda)\theta_0 - \Lambda\theta_e]\} \quad (58)$$

$$\Delta e_y = \frac{3A}{2(1-\Lambda)} \{-\cos[(1-\Lambda)\theta_f + \Lambda\theta_e] + \cos[(1-\Lambda)\theta_0 + \Lambda\theta_e]\} + \frac{A}{2(1+\Lambda)} \{-\cos[(1+\Lambda)\theta_f - \Lambda\theta_e] + \cos[(1+\Lambda)\theta_0 - \Lambda\theta_e]\} \quad (59)$$

In particolare, se $\Lambda = 0$ si ha che:

$$\Delta a = 2A_r(\theta_f - \theta_0) \quad (60)$$

E se anche $\Lambda = 1$ si avrà:

$$\Delta e_x = \left(\frac{3A}{2}\right) (\theta_f - \theta_0) \cos\theta_e + \left(\frac{A}{2}\right) [\sin(2\theta_f - \theta_e) - \sin(2\theta_0 - \theta_e)] \quad (61)$$

$$\Delta e_y = \left(\frac{3A}{2}\right)(\theta_f - \theta_0)\sin\theta_e - \left(\frac{A}{2}\right)[\cos(2\theta_f - \theta_e) - \cos(2\theta_0 - \theta_e)] \quad (62)$$

È bene ricordare che tali equazioni valgono solo e solamente finché si ha che $-\pi \leq \theta - \theta_e \leq \pi$. Se tale condizione non è rispettata, l'integrazione dovrà essere suddivisa in maniera appropriata in modo tale da rimanere all'interno delle condizioni volute.

Ricapitolando, data l'orbita iniziale e finale, bisogna calcolare 3 parametri: Λ , θ_e e θ_f in modo da potersi poi ricavare le variazioni desiderate di Δa , Δe_x e Δe_y .

Per poter far ciò, si utilizza una procedura iterativa basata sul metodo di Newton: si prendono inizialmente dei valori di tentativo e si calcola l'errore relativo; all'iterazione successiva si sostituiscono i valori trovati al posto dei valori di tentativo iniziale e si rifà la procedura fino a quando non si raggiunge un risultato accettabile.

4.2.2 Trasferte non Complanari

Nel caso in cui si abbiano, invece, trasferte non complanari (con una conseguente variazione dell'inclinazione della linea dei nodi), la simmetria della soluzione è persa, la situazione diventa quindi più complessa e si ha una conseguente, inevitabile sovrastima del costo della missione.

In un dato punto della traiettoria, ci sono due direzioni preferenziali verso cui spingere, a seconda che si voglia variare a oppure e ; quando queste due direzioni coincidono, è ovviamente conveniente spingere in quella direzione e limitare la componente dell'accelerazione fuori dal piano.

Con trasferte non complanari, però, può accadere che le variazioni di Δa e Δe cercate richiedano di spingere in due direzioni opposte; in questi casi, in cui per un motivo è richiesta un'accelerazione e per un altro motivo è richiesta una frenata, conviene non fare né una né l'altra cosa, ma spingere fuori dal piano.

A questo si aggiunge un'altra importante cosa, ovvero che l'accelerazione fuori dal piano, che ci consente anche di variare i , è bene averla nei punti più vicini possibile ai nodi (se non proprio nei nodi stessi); un'approssimazione che si adatti bene a queste condizioni ancora non è stata trovata. In questa tesi si introdurranno dei coefficienti correttivi per tenere conto di questi effetti.

Quello che però si può fare, è una semplice sovrastima dei costi di missione, cercando di trovare una soluzione basata sui risultati ottenuti nel caso complanare. Si assume un angolo β di spinta costante e si ricerca la variazione dei parametri in mezzo giro (π) andando ad integrare le equazioni (46) – (47) tra $\theta_i - \pi/2$ e $\theta_i + \pi/2$, ottenendo:

$$(\Delta i_x)_\pi = 2A \sin \beta \cos \theta_i \quad (63)$$

$$(\Delta i_y)_\pi = 2A \sin \beta \sin \theta_i \quad (64)$$

Dove $\theta_i = \tan^{-1}(\Delta i_y / \Delta i_x)$.

E di conseguenza:

$$\Delta i_x = (\Delta i_x)_\pi (\theta_f - \theta_0) / \pi \quad (65)$$

$$\Delta i_y = (\Delta i_y)_\pi (\theta_f - \theta_0) / \pi \quad (66)$$

Ad ogni iterazione, le equazioni (65) – (66) sono risolte (utilizzando il valore di θ_f calcolato nel caso complanare) per determinare β e θ_i , dato il desiderato cambio di Δi_x e Δi_y .

Una volta che il problema è stato risolto, e dopo aver ricavato la lunghezza angolare della trasferta $\Delta \theta = \theta_f - \theta_0$, si possono facilmente calcolare la durata della missione, la massa finale ed il ΔV come:

$$\Delta t = \frac{\Delta \theta}{V/r}, \quad m_f = m_0 - (T/c)\Delta t, \quad \Delta V = \Delta t(T/m) = c \ln \left[\frac{m_0}{m_0 - m_p} \right]$$

Dove $m_p = \Delta t T/c$ è la massa di propellente utilizzata, m_0 la massa iniziale e m_f la massa finale.

5. Risultati

I target da analizzare sono presi da un recente paper che valuta la propulsione elettrica per trasferire sui NEAs (near-Earth asteroids), nel contesto della missione M-ARGO.

La lista iniziale presente nel paper comprende 75 NEAs, ma 13 di questi sono stati esclusi in quanto avevano o grosse inclinazioni (maggiori di 5°) o grossi cambi di semiasse maggiore (maggiori di 0.2 AU) o ancora una grande eccentricità (maggiore di 0.25); questi valori così elevati portano a risultati errati in quanto si va fuori dai limiti di applicabilità dell'approssimazione di Edelbaum.

Si ha quindi una lista di 62 asteroidi, per i quali si aveva già calcolato m_p con i due tipi di soluzione ed il rispettivo Δm_p .

I risultati sono illustrati in *Tabella 1*.

N°	Target	a	e	i	ω	r_p	r_a	$m_{p,ref}$	m_p	Δm_p
2	2016 TB57	1,10	0,12	0,30	147,80	0,97	1,24	1,0562	1,0871	0,0309
3	2013 WA44	1,10	0,06	2,30	176,73	1,03	1,17	1,1974	1,2237	0,0263
4	2013 BS45	0,99	0,08	0,77	150,69	0,91	1,07	1,0066	1,0831	0,0765
5	2016 CF137	1,06	0,10	2,44	301,50	0,65	1,20	1,4336	1,3449	-0,0887
6	2014 YD	1,07	0,09	1,74	34,12	0,98	1,16	1,1071	0,9762	-0,1309
7	2015 BM510	0,95	0,12	1,59	357,34	0,83	1,06	1,4517	1,6292	0,1776
8	2014 SD304	1,17	0,11	2,29	19,30	1,04	1,29	1,5896	1,8647	0,2751
9	2012 EC	1,15	0,14	0,91	333,91	0,99	1,31	1,5679	1,6264	0,0585
10	2009 CV	1,12	0,15	0,94	181,36	0,95	1,28	1,5367	1,6412	0,1045
11	2009 OS5	1,14	0,10	1,70	120,85	1,03	1,26	1,4670	1,6052	0,1382
12	2004 JN1	1,09	0,18	1,50	2,120	0,89	1,28	1,6507	1,7836	0,1329
13	2003 SM84	1,13	0,08	2,80	87,37	1,03	1,22	1,6750	1,6831	0,0082
14	2012 UV136	1,01	0,14	2,21	288,61	0,87	1,15	1,7370	1,6977	-0,0393
15	1996 XB27	1,19	0,06	2,46	58,18	1,12	1,26	1,7672	2,0329	0,2657

16	2017 BF29	1,18	0,13	2,61	203,77	1,02	1,34	1,7644	2,0679	0,3035
17	2001 QJ142	1,06	0,09	3,10	63,97	0,97	1,15	1,7383	1,5901	-0,1481
18	2013 EM89	1,18	0,12	2,41	189,95	1,04	1,32	1,6838	1,9652	0,2815
19	2012 HK31	1,07	0,12	2,21	96,69	0,94	1,20	1,8182	1,7027	-0,1155
20	2019 PA7	1,15	0,09	3,47	93,28	1,05	1,26	1,8033	2,0481	0,2449
21	2015 PL57	1,12	0,14	1,63	115,26	0,96	1,28	1,7882	1,7640	-0,0241
22	2016 TB 18	1,08	0,08	1,53	305,61	0,99	1,17	1,0234	0,9874	-0,0359
23	2012 UW68	1,14	0,16	2,47	102,39	0,96	1,31	1,9101	1,8925	-0,0176
24	2017 HK1	0,91	0,15	1,51	258,73	0,78	1,04	1,7560	1,8199	0,0639
25	2004 VJ1	0,94	0,16	1,29	332,27	0,79	1,10	1,7722	1,9713	0,1991
26	2015 TZ24	1,19	0,10	3,35	3,17	1,07	0,31	1,9495	2,1788	0,2294
27	1999 AO10	0,91	0,11	2,62	7,98	0,81	1,01	1,5367	1,6703	0,1336
28	2014 YN	0,89	0,13	1,21	15,83	0,77	1,01	1,6030	1,8016	0,1986
29	2007 TF 15	1,11	0,04	4,25	28,86	1,06	1,16	1,7674	1,6764	-0,0909
30	2001 CQ36	0,94	0,18	1,26	344,38	0,77	1,10	1,8559	2,0712	0,2153
31	2014 EK24	1,01	0,07	4,80	63,75	0,94	1,08	1,8574	1,8692	0,0119
32	2010 HA	0,96	0,20	2,18	185,72	0,77	1,15	1,9307	2,1518	0,2211
33	2005 TG50	0,92	0,13	2,40	200,93	0,80	1,05	1,6832	1,7474	0,0642
35	2008 TX3	1,18	0,19	2,38	249,85	0,96	1,40	2,1363	2,2938	0,1575
36	2006 FH36	0,95	0,20	1,59	154,74	0,77	1,14	1,9701	2,1627	0,1927
37	2007 UY1	0,95	0,18	1,02	273,57	0,78	1,12	2,0429	2,1775	0,1346
38	2013 XY20	1,13	0,11	2,86	18,19	1,01	1,25	1,5071	1,6137	0,1066
39	2015 VV	1,14	0,10	4,01	177,19	1,02	1,26	1,8700	1,8515	-0,0185
40	2006 QV89	1,19	0,22	1,07	236,72	0,92	1,46	2,234	2,4793	0,2454
43	2000 AE205	1,16	0,14	4,46	150,32	1	1,32	2,2365	2,2966	0,0601
44	2007 DD	0,99	0,12	2,62	77,57	0,87	1,10	1,7034	1,6435	-0,0599
45	2014 MF18	0,89	0,16	2,61	350,35	0,74	1,03	1,7620	1,9394	0,1774
46	2009 RT1	1,16	0,11	4,15	136,50	1,03	1,28	2,1505	2,1685	0,0181
49	2016 FY2	0,87	0,18	1,87	204,97	0,72	1,02	2,1412	2,2921	0,1510
50	2003 LN6	0,86	0,21	0,66	211,57	0,68	1,04	2,1012	2,4123	0,3111
51	2013 HP11	1,18	0,13	4,16	9,49	1,04	1,33	2,2058	2,2899	0,0842
52	2014 UY	1,17	0,17	3,56	245,64	0,97	1,38	2,2895	2,4842	0,1947
53	2017 EB3	1,04	0,15	2,84	247,51	0,88	1,20	2,2421	2,1637	-0,0784

55	2009 HC	1,04	0,13	3,78	269,90	0,91	1,17	2,0270	2,0366	0,0097
58	2014 QH33	1,09	0,18	2,83	264,45	0,88	1,29	2,4971	2,5135	0,0164
60	2011 AA37	1,1	0,02	3,82	131,51	1,08	1,11	1,5304	1,4820	-0,0483
61	2017 HZ24	0,91	0,22	1,81	312,19	0,71	1,10	2,4285	2,5998	0,1713
63	2001 BB16	0,85	0,17	2,03	195,56	0,71	1	2,1020	2,3412	0,2393
64	2012 UY68	1,18	0,23	2,90	35,76	0,91	1,44	2,4655	2,6218	0,1563
66	2012 WH	0,91	0,15	4,09	8,69	0,78	1,04	2,2216	2,2226	0,0010
67	2016 UE	1,06	0,15	1,09	296,50	0,90	1,22	1,5172	1,5078	-0,0093
69	2015 FG36	1,1	0,17	3,51	300,57	0,91	1,29	2,4807	2,4728	-0,0079
70	2006 XP4	0,87	0,22	0,51	346,04	0,69	1,06	2,4110	2,7519	0,3409
71	2013 RV9	1,17	0,20	3,51	108,76	0,93	1,40	2,5338	2,6848	0,1511
73	2010 WR7	1,05	0,24	1,56	159,14	0,80	1,29	2,3343	2,5294	0,1951
74	2017 BF30	1,04	0,13	3,62	256,14	0,91	1,18	2,1166	2,0852	-0,0313
75	2011 CG2	1,18	0,16	2,76	283,85	0,99	1,36	2,1843	2,3321	0,1479
76	2016 TP11	1,04	0,18	1,54	108,17	0,58	1,22	2,1669	2,1683	0,0014

Tabella 1 - Parametri orbitali degli asteroidi con stima m_p e relativi errori

I valori che possono essere soddisfacenti sono quelli che hanno una Δm_p al di sotto di 0.3 kg. Buona parte degli asteroidi ricadono all'interno di questo range, sintomo della bontà del metodo utilizzato e della sua accuratezza.

Ci sono però alcuni asteroidi che sono fuori da questo range: nel momento in cui si sale sopra gli 0.3 kg la stima non è più soddisfacente e bisogna andare ad indagare il perché non si sia giunti ad un valore più accurato, cercando quindi giungere ad una stima corretta e precisa.

A tal fine, ovvero andare ad indagare più in profondità il perché di questi valori sballati, a questa lista di asteroidi se ne sono aggiunti altri tre, che sono stati indicati con i numeri 77, 78, 79 e che sono i gemelli di altri tre asteroidi già presenti in lista, ma con una variazione del semiasse maggiore della loro orbita. Tali asteroidi sono il 1996 XB27 con un semiasse maggiore a più piccolo rispetto al suo gemello, il 2003 LN6 ed il 2006 XP4 che

presentano invece un semiasse maggiore a più grande rispetto ai loro gemelli.

La stima della bontà di un'orbita caratterizzata da determinati parametri orbitali è stata valutata in base al consumo di massa di propellente m_P , dato dalla differenza tra il propellente iniziale ed il propellente alla fine delle manovre. In particolare, dall'errore che si ottiene dal calcolo della massa di propellente mediante due metodi differenti: uno esatto ed uno approssimato; più la differenza tra i due metodi è piccola, maggiore sarà la precisione del metodo.

La prima cosa che è stata fatta è stata quella di andare a calcolare, mediante la soluzione esatta ed approssimata, m_P per questi tre nuovi asteroidi, andando poi a confrontare gli errori ottenuti con quelli dei loro gemelli (gli asteroidi 15, 50 e 70), in modo da capire come la variazione di semiasse maggiore dell'orbita utilizzata potesse andare ad inficiare sulla stima. I risultati sono rappresentati nella seguente tabella (*Tabella 2*):

N°	Target	a	e	i	ω	r_P	r_a	$m_{P,ref}$	m_P	Δm_P
15	1996 XB27	1,19	0,06	2,46	58,18	1,12	1,26	1,7672	2,0329	0,2657
77	1996 XB27	0,81	0,06	2,46	58,18	0,76	0,86	2,2361	2,3034	0,0673
50	2003 LN6	0,86	0,21	0,66	211,57	0,68	1,04	2,1012	2,4123	0,3111
78	2003 LN6	1,14	0,21	0,66	211,57	0,90	1,38	1,9479	2,1313	0,1834
70	2006 XP4	0,87	0,22	0,51	346,04	0,69	1,06	2,4110	2,7519	0,3409
79	2006 XP4	1,13	0,22	0,51	346,04	0,88	1,38	2,2861	2,5104	0,2243

Tabella 2 - Parametri orbitali degli asteroidi con stima m_P e relativi errori

È immediato vedere come gli asteroidi 78 e 79 presentano un errore Δm_P minore rispetto ai rispettivi gemelli, e ciò potrebbe essere dovuto al fatto che un perielio basso comporti un errore grande. Il problema sopraggiunge se si vanno a vedere anche i risultati relativi all'asteroide 77:

in questo caso, infatti, il perielio è stato abbassato, quindi basandoci su quanto si è visto poc'anzi, ci si aspetterebbe un errore maggiore. Ciò però non è verificato, e si ottiene invece un errore più piccolo rispetto a quello del suo gemello con semiasse a maggiore.

Per capire meglio cosa succeda, occorre esaminare altri parametri, riportati nella tabella successiva (*Tabella 3*); tali parametri, ottenibili mediante la soluzione approssimata, sono:

i primi 4 valori sono i $\Delta\theta$ degli archi (che corrispondono all'ampiezza degli archi di spinta) – i primi due relativi ad archi di perielio, i secondi due relativi ad archi di afelio. Il quinto parametro è la ripartizione teorica dello sforzo propulsivo (RIP), ovvero è il rapporto tra la spinta al perielio e la spinta totale (perielio + afelio).

N°	Target	$\Delta\theta_{p1}$	$\Delta\theta_{p2}$	$\Delta\theta_{a1}$	$\Delta\theta_{a2}$	RIP
15	1996 XB27	0	1,7955	0	0,9104	0,6869
77	1996 XB27	0	0,9829	1,7004	0	0,3121
50	2003 LN6	0	0,7097	2,1913	0	0,1349
78	2003 LN6	2,1281	0	0	0,4228	0,8657
70	2006 XP4	0	1,0009	2,3347	0	0,2259
79	2006 XP4	2,2566	0	0	0,7991	0,7741

Tabella 3 - deltatheta degli archi + RIP

Oltre a tali parametri che danno un'indicazione di dove e come avvengano gli archi di spinta, si possono comparare graficamente gli andamenti di r_a , r_p , e i per ciascuna coppia di asteroidi.

5.1 Confronto fra gli Asteroidi

Come detto, è utile ora andare a comparare graficamente gli andamenti di r_a , r_p , e e per ciascuna coppia di asteroidi, in modo tale da verificare immediatamente se ci siano differenze macroscopiche che possono aiutarci a capire meglio la situazione.

5.1.1 Confronto Asteroidi 15/77

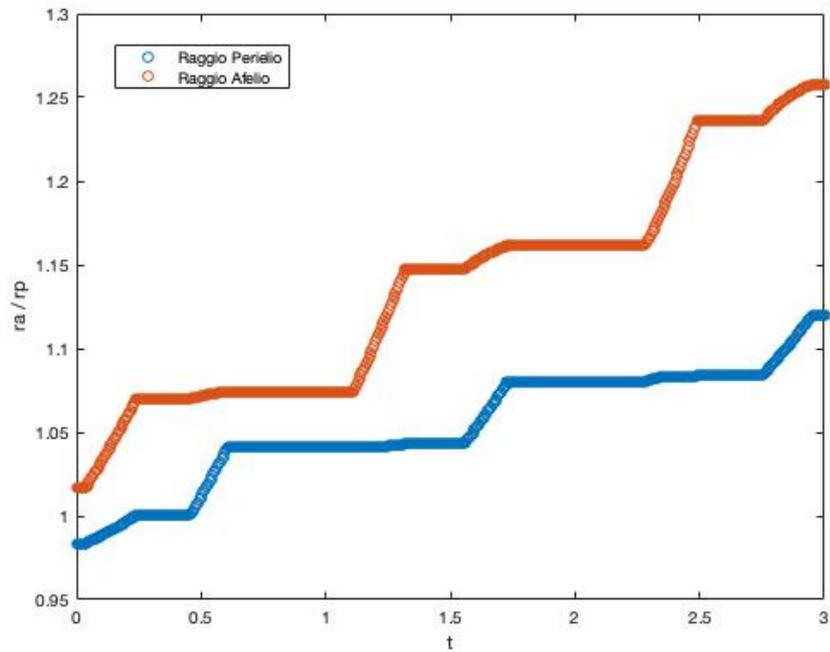


Figura 2 – Raggio Afelio e Raggio Perielio Ast15

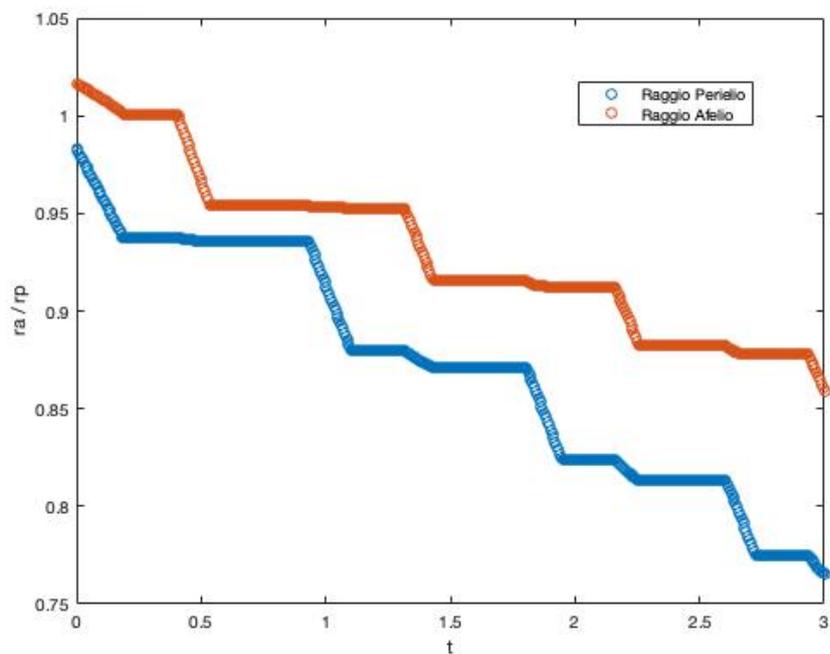


Figura 3 – Raggio Afelio e Raggio Perielio Ast77

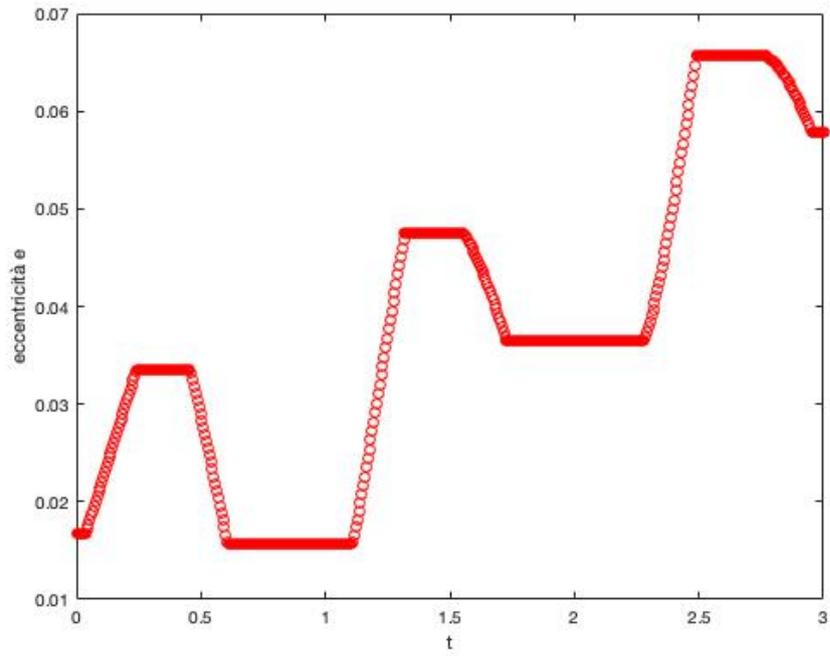


Figura 4 – Eccentricità e Ast15

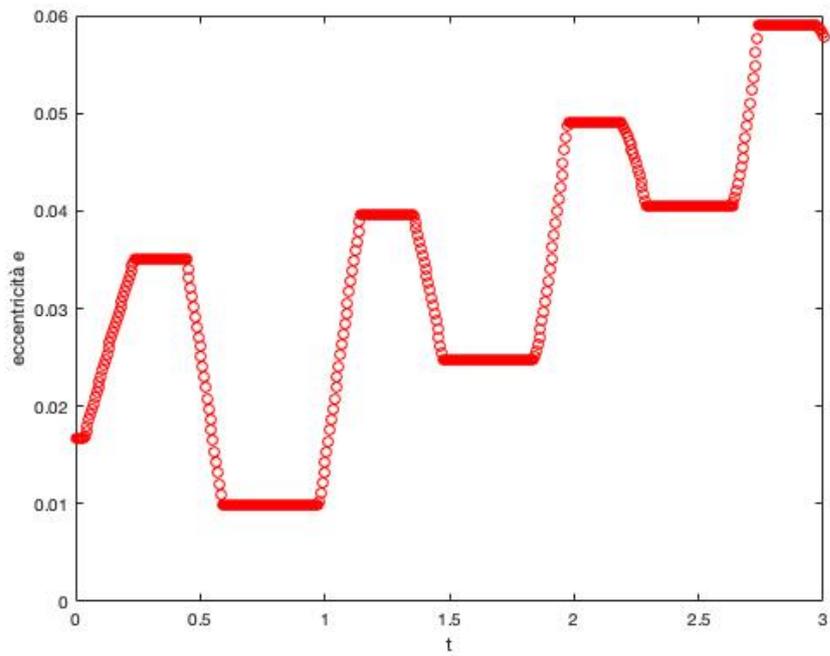


Figura 5 – Eccentricità e Ast77

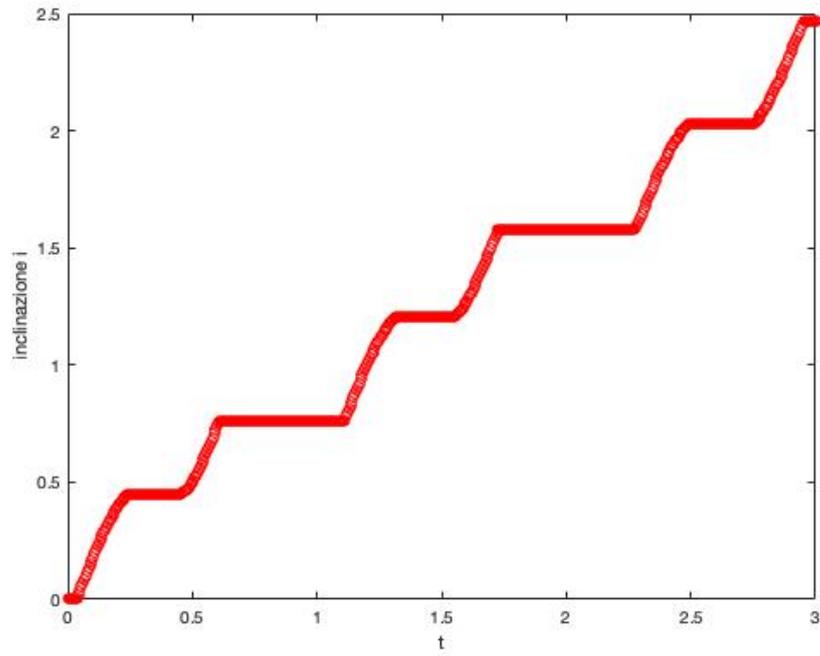


Figura 6 – Inclinazione i Ast15

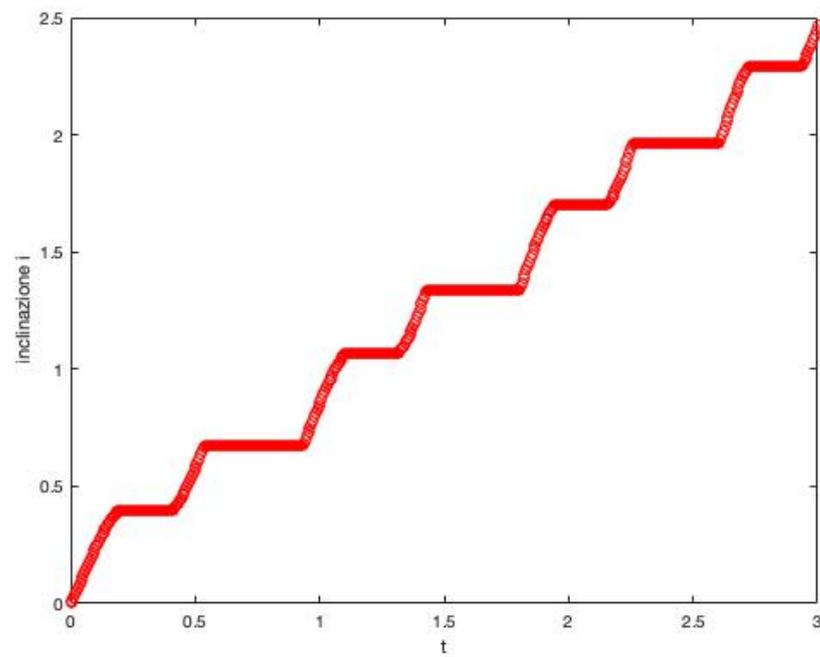


Figura 7 – Inclinazione i Ast77

5.1.2 Confronto Asteroidi 50/78

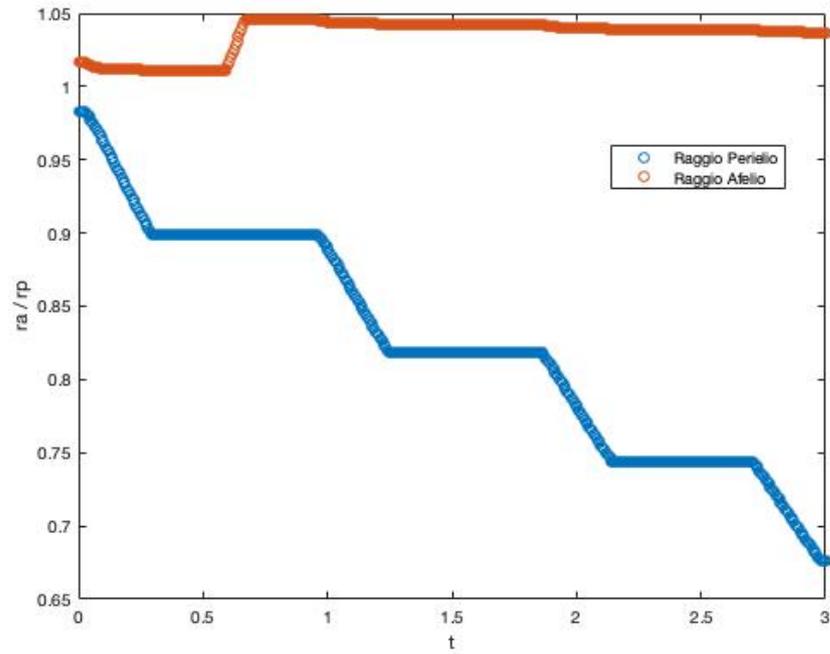


Figura 8 – Raggio Afelio e Raggio Perielio Ast50

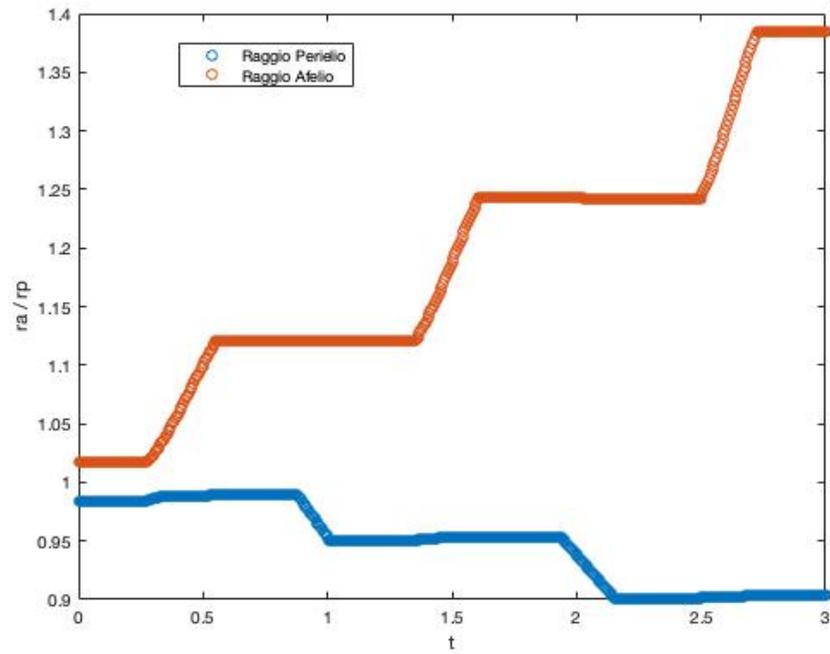


Figura 9 – Raggio Afelio e Raggio Perielio Ast78

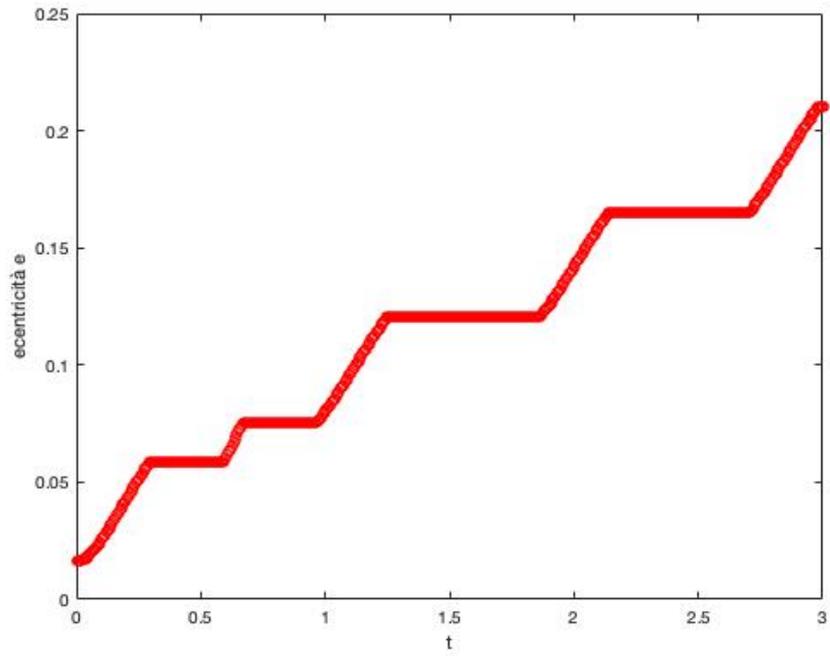


Figura 10 – Eccentricità e Ast50

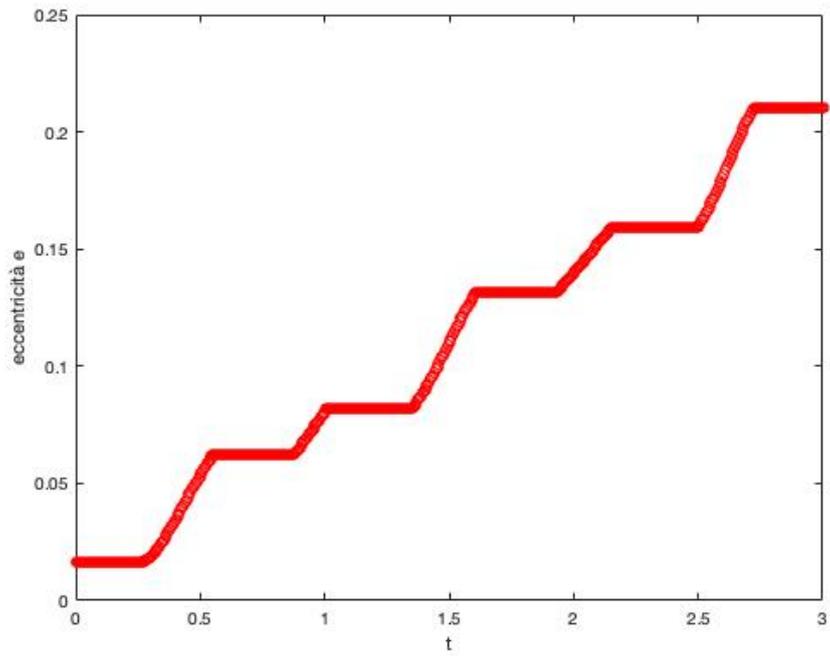


Figura 11 – Eccentricità e Ast78

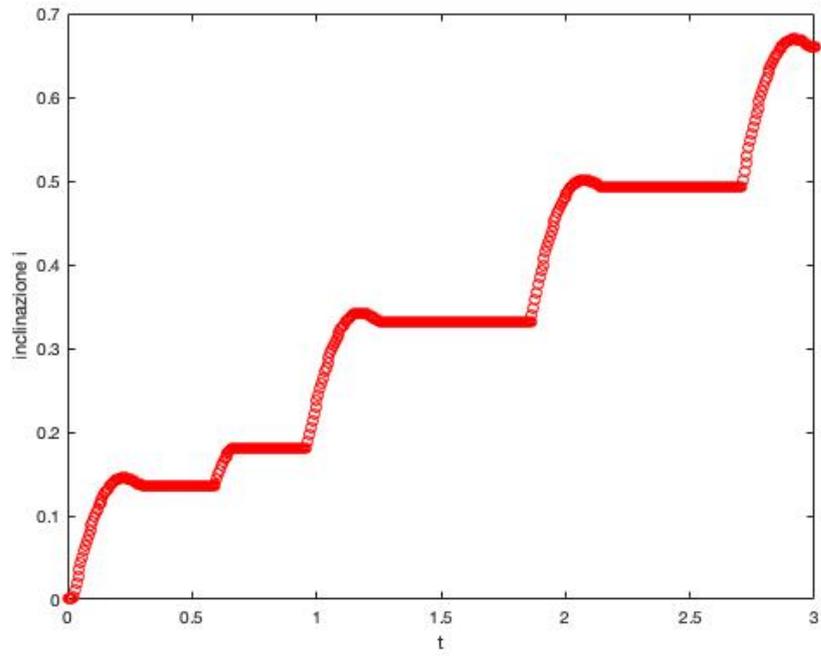


Figura 12 – Inclinazione i Ast50

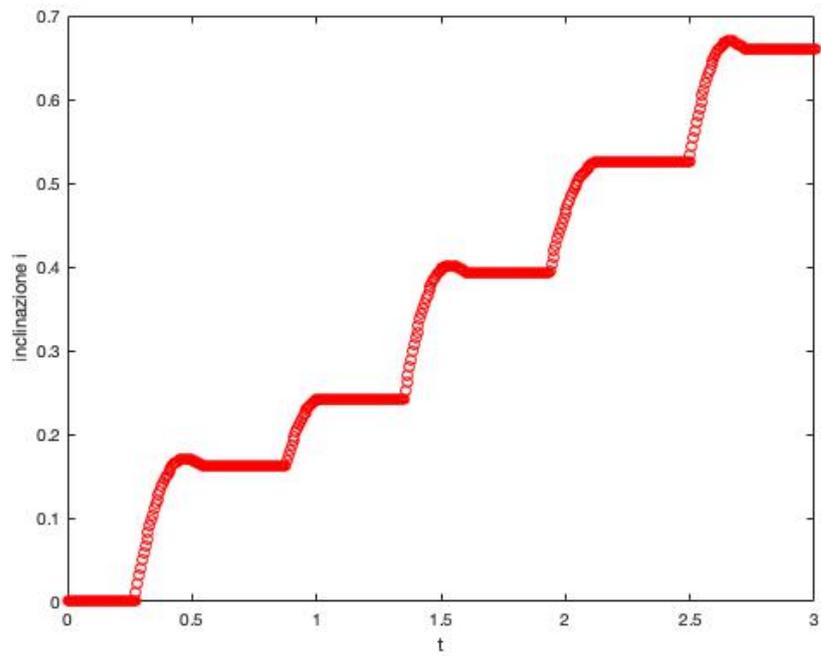


Figura 13 – Inclinazione i Ast78

5.1.3 Confronto Asteroidi 70/79

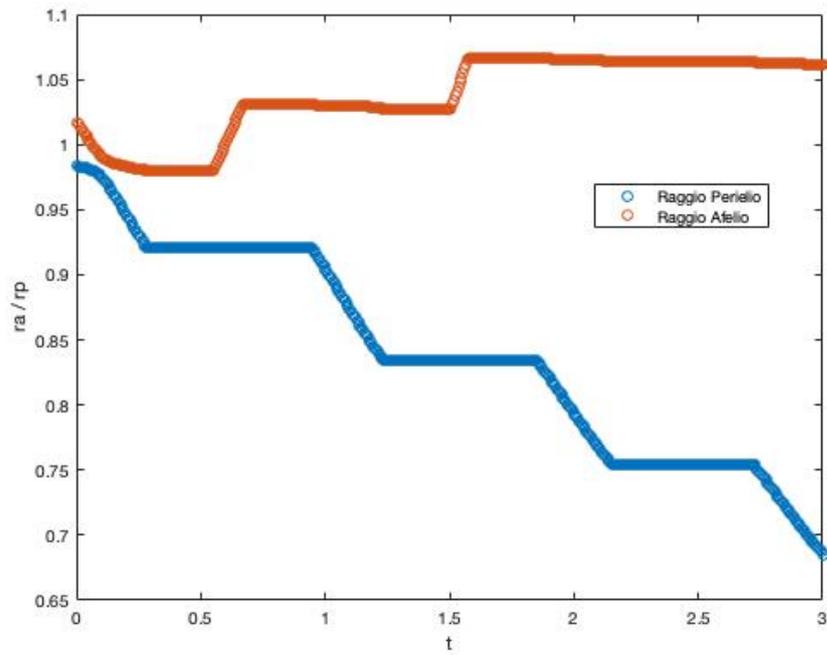


Figura 14 – Raggio Afelio e Raggio Perielio Ast70

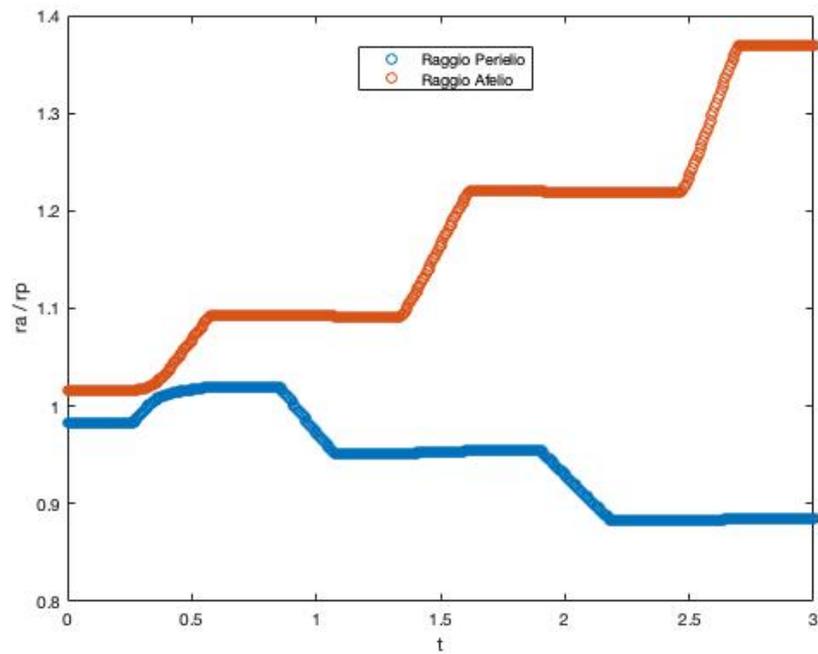


Figura 15 – Raggio Afelio e Raggio Perielio Ast79

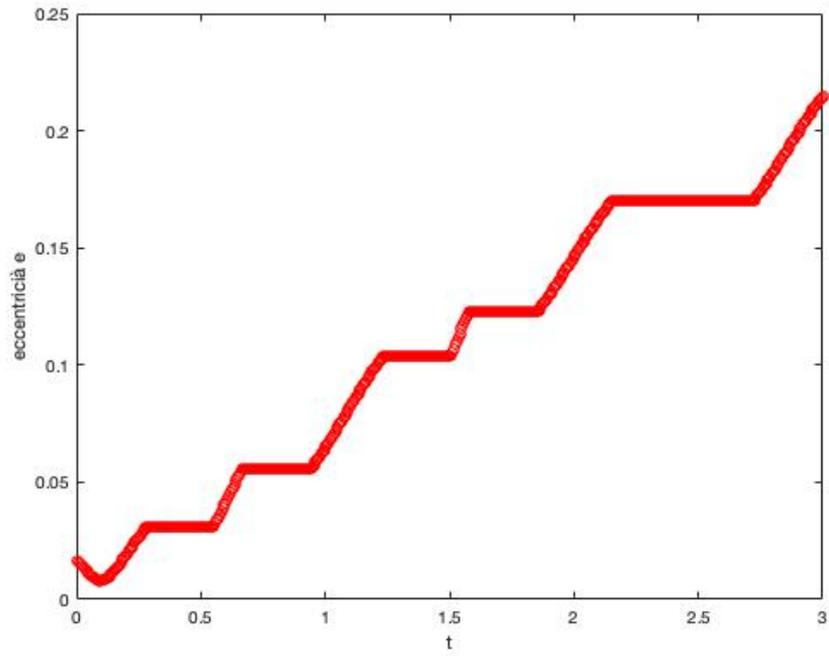


Figura 16 – Eccentricità e Ast70

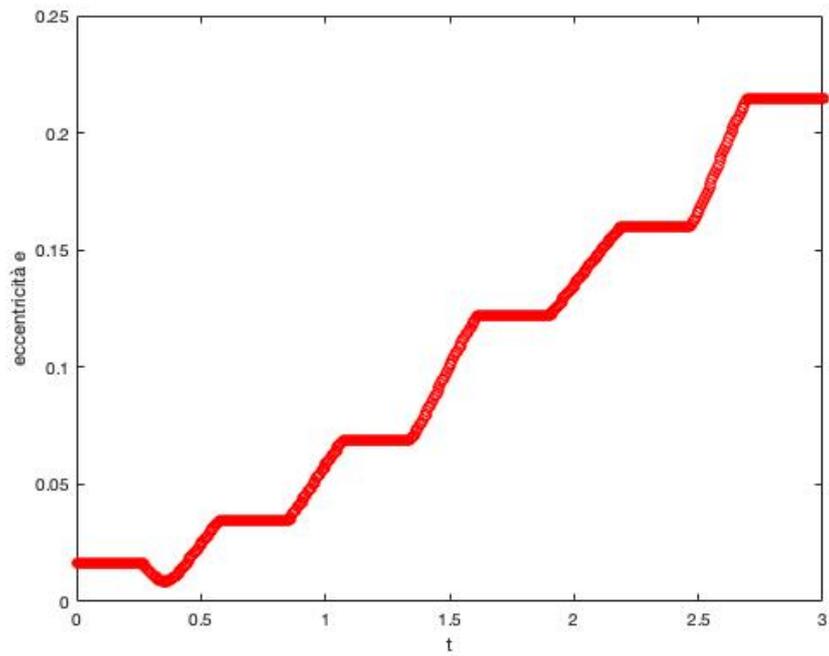


Figura 17 – Eccentricità e Ast79

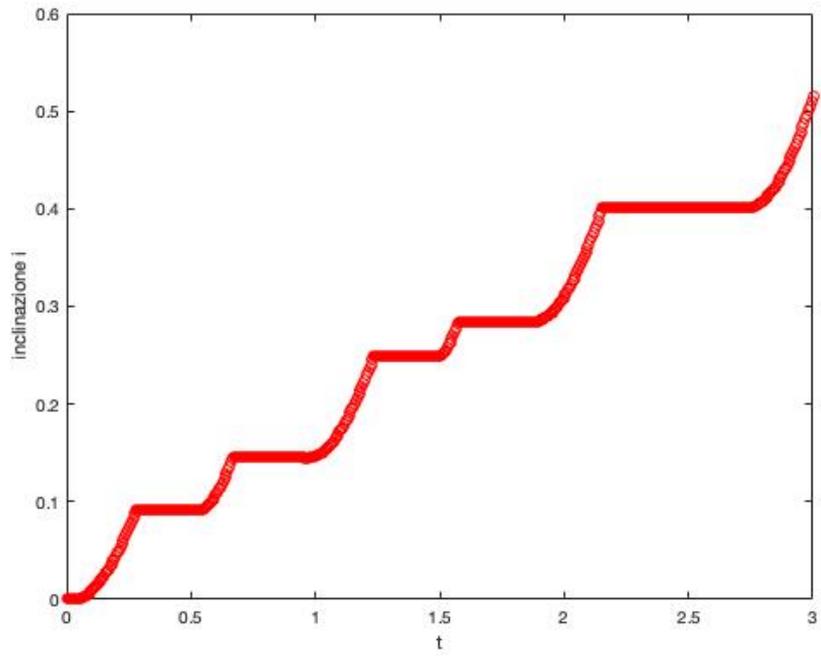


Figura 18 – Inclinazione i Ast70

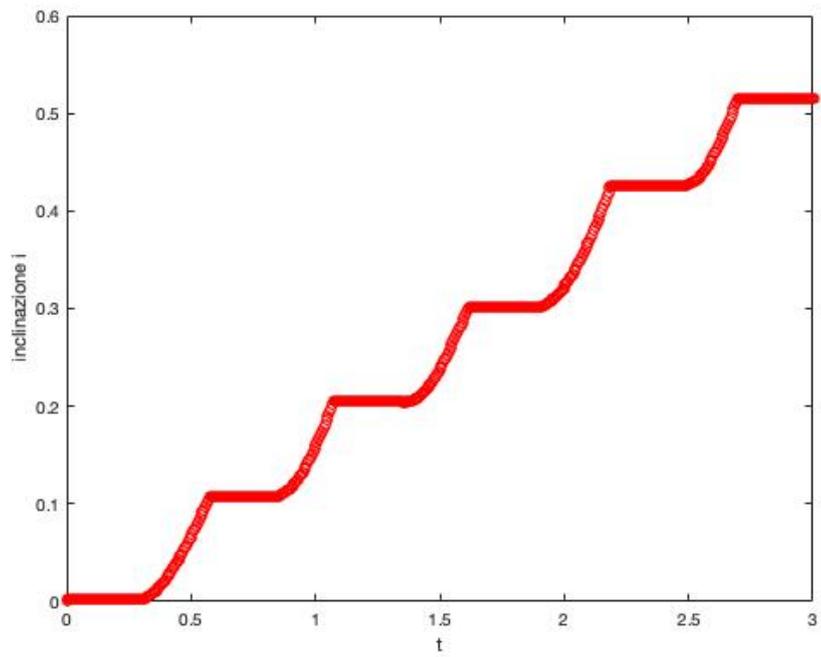


Figura 19 – Inclinazione i Ast79

5.1.4 Commento al Confronto tra Asteroidi

Per la coppia 15 –77, si vede come i due siano perfettamente invertiti come ripartizione; la differenza fra i due è più nella soluzione vera che non nella stima. Sembrerebbe quindi che spingere a raggi alti nella realtà convenga, questo forse dovuto all'inclinazione.

Per quanto riguarda, invece, le altre due coppie, è la stima ad essere molto diversa, mentre le missioni di riferimento sono simili.

5.2 Variazione di i e modifica dello script Soluzione Approssimata

Si è provato quindi a modificare l'inclinazione, per vedere come variassero tali valori, ma non ha portato a risultati soddisfacenti: l'errore non dipende dall'inclinazione, come invece si poteva pensare; è vero che all'aumentare dell'inclinazione il Δm_p diminuisce, ma l'idea era che l'errore calasse all'aumentare dell'inclinazione (m_p relativa alla soluzione “vera” cresce più di quanto faccia quella del metodo approssimato, al contrario di quanto si pensasse, e quindi l'errore aumenta).

La discrepanza che si ha proviene dal numero di archi: a raggi bassi si gira più velocemente, perciò la soluzione indiretta riesce a far stare 3.5 giri in 2 anni con 4 passaggi all'afelio (dove avviene praticamente tutta la manovra). Ciò si intuisce facilmente dal fatto che i $\Delta\theta$ sono molto piccoli al perielio e decisamente più grandi all'afelio.

Occorre quindi modificare lo script della soluzione approssimata (main4.exe) in modo da impostare il numero di giri a 4 (anziché 3) e successivamente ricalcolare m_p per tutti e sei gli asteroidi.

Oltre a ciò, si sono riportati nella tabella sottostante (*Tabella 5*) tutti gli asteroidi della lista che hanno $a < 0.9$ – questi sono gli asteroidi che riescono a far stare 4 giri in 3 anni, mentre quelli con $a > 0.9$ fanno 4 giri in 4 anni (e ciò andrebbe a modificare anche la $m_{p,ref}$ – in quanto in questo modo si va a modificare anche il tempo totale della missione, fissato inizialmente a 3 anni).

N°	Target	a	$m_{p,ref}$	m_{p_3archi}	Δm_{p_3archi}	m_{p_4archi}	Δm_{p_4archi}	n° archi eff.
28	2014 YN	0,89	1,5963	1,8016	0,2054	1,8154	0,2191	9
45	2014 MF18	0,89	1,7620	1,9394	0,1774	1,9491	0,1871	7
49	2016 FY2	0,87	2,0486	2,2921	0,2436	2,2930	0,2444	9
50	2003 LN6	0,86	2,1013	2,4123	0,3111	2,4074	0,3061	7
63	2001 BB16	0,85	2,1020	2,3413	0,2393	2,3150	0,2130	8
70	2006 XP4	0,87	2,4101	2,7519	0,3418	2,7668	0,3567	7
77	1996 XB27	0,81	2,2361	2,3034	0,0673	2,3697	0,1336	15

Tabella 5 - lista asteroidi con $a < 0.9$ con stima m_p fatta con soluzione esatta e numero di archi effettivi

È strano che in alcuni casi si abbia un aumento di m_p associato all'aumento di giri; ciò che dovrebbe succedere è l'opposto: avere più archi, infatti, vuol dire avere conseguentemente archi più brevi e quindi una conseguente spinta nei punti più favorevoli (e quindi un consumo minore di propellente). Meno archi, invece, significa averli più lunghi e quindi dover spingere anche in punti meno favorevoli (con un conseguente maggior consumo di propellente).

Poiché, per l'appunto, i risultati appena ottenuti non sono soddisfacenti, occorre andare più in profondità, e a tal proposito si è calcolato anche i 4 valori di $\Delta\theta$, il RIP e i valori di da e de relativi ai due tipi di manovre, in modo tale da avere una visione d'insieme maggiore. I risultati sono riportati in *Tabella 6*.

N°	$\Delta\theta_{p1}$	$\Delta\theta_{p2}$	$\Delta\theta_{a1}$	$\Delta\theta_{a2}$	RIP	da1	da2	de1	de2
28	0	0,5279	1,6161	0	0,1391	0,0069	0,0069	-0,0428	0,0428
45	0	0,4941	1,8285	0	0,1097	0,0053	0,0053	-0,0433	0,0433
49	0	0,6682	2,0834	0	0,1436	0,0088	0,0088	-0,0523	0,0523
50	0	0,7097	2,1913	0	0,1349	0,0089	0,0089	-0,0568	0,0568
63	0	0,5935	2,2134	0	0,1100	0,0068	0,0068	-0,0553	0,0553
70	0	1	2,3347	0	0,2259	0,0175	0,0175	-0,0598	0,0598
77	0	0,9829	1,7004	0	0,3121	-0,0196	0,0196	-0,0431	0,0430

Tabella 6 - deltatheta archi, RIP, da e de per gli asteroidi con $a < 0.9$

Nuovamente, i risultati ottenuti non aiutano a capire in maniera adeguata cosa succeda; risulta perciò necessario provare ad affrontare il problema partendo da un altro punto di vista.

Si è quindi variato il programma relativo alla soluzione esatta, andando a modificare le condizioni iniziali: in particolare, anziché impostare una missione della durata di 36 mesi (3 anni), si è impostata una durata massima di 32 mesi – poco meno di 3 anni. Ponendo questa nuova condizione iniziale si è andati a ricalcolare la mp_{ref} (quella relativa alla soluzione esatta, come detto) per gli asteroidi 28, 45, 49, 50, 63 e 70. I risultati sono riportati nelle tabelle sottostanti (*Tabella 7, 8, 9*).

N°	36 m		32 m		36 m		32 m	
	$m_{p,ref}$	$m_{p,ref}$	m_{p_3archi}	Δm_{p_3archi}	Δm_{p_3archi}	n° archi	n° archi	
28	1,5963	1,6307	1,8016	0,2054	0,1709	9	9	
45	1,7620	1,8417	1,9394	0,1774	0,0977	7	7	
49	2,0486	2,1412	2,2922	0,2436	0,1509	9	9	
50	2,1013	2,2359	2,4123	0,3111	0,1764	7	9	
63	2,1020	2,2519	2,3413	0,2393	0,0894	8	9	
70	2,4101	2,5850	2,7519	0,3418	0,1669	7	9	

Tabella 7 - stima m_p 32 mesi confrontata con stima 36 mesi con relativi errori e n° di archi effettivi per il caso 3 archi

N°	36 m		32 m		36 m		32 m	
	$m_{p,ref}$	$m_{p,ref}$	m_{p_4archi}	Δm_{p_4archi}	Δm_{p_4archi}	n° archi	n° archi	
28	1,5963	1,6307	1,8154	0,2191	0,1847	9	9	
45	1,7620	1,8417	1,9491	0,1871	0,1074	7	7	
49	2,0486	2,1412	2,2929	0,2444	0,1518	9	9	
50	2,1013	2,2359	2,4074	0,3061	0,1715	7	9	
63	2,1020	2,2519	2,3149	0,2130	0,0631	8	9	
70	2,4101	2,5850	2,7668	0,3567	0,1818	7	9	

Tabella 8 - stima m_p 32 mesi confrontata con stima 36 mesi con relativi errori e n° archi effettivi per il caso 4 archi

N°	$m_{p,ref}$	Δm_{p_3archi}	Δm_{p_4archi}	$\Delta m_{p_iniziale}$	n° archi
28	1,6307	0,1709	0,1847	0,2342	9
45	1,8417	0,0977	0,1074	0,4806	7
49	2,1412	0,1509	0,1518	0,2766	9
50	2,2359	0,1764	0,1715	0,3546	9
63	2,2519	0,0894	0,0631	0,4502	9
70	2,5850	0,1669	0,1818	0,3092	9

Tabella 9 - Δm_p casi 3 e 4 archi, confrontati con il Δm_p che si aveva inizialmente

Dalle tabelle è chiaro come ci sia un netto miglioramento nelle stime: si ha, infatti, che passando da 36 a 32 mesi il Δm_p in quasi tutti i casi si dimezza (o quasi), sia per il caso 3 archi che per il 4 archi, il tutto tenendo conto che si ha pressoché lo stesso numero di archi che in precedenza.

Questo è prettamente dovuto al fatto che passando da 36 a 32 mesi, gli asteroidi che avevano 4 archi, ora ne avranno 3; come detto in precedenza, avere una diminuzione del numero di archi è tutt'altro che positivo: un numero minore porta ad archi più lunghi, e di conseguenza allo spingere anche in punti meno favorevoli (e quindi un consumo maggiore di propellente).

Il numero totale di archi effettivi rimane comunque invariato tra i due casi (36 e 32 mesi): ciò può essere dovuto alla presenza di fasi propulsive piccolissime che portano il valore totale circa a coincidere, ma il numero di archi sostanziali rimane comunque diverso nei due casi.

Un netto miglioramento lo si ha anche rispetto al punto di partenza: il Δm_p si riduce notevolmente in tutti i casi, sintomo di una soluzione approssimata che tende ad avvicinarsi sempre di più alla soluzione esatta.

5.3 Valutazione Grafica dei Miglioramenti

Ottenuto, quindi, un netto miglioramento riguardante il Δm_p tra soluzione esatta ed approssimata, è utile andare a vedere l'andamento delle caratteristiche delle trasferte in modo da spiegare gli effetti relativi alla correzione introdotta.

A tal scopo si è deciso di vedere l'andamento grafico di tre asteroidi: l'asteroide 45, che presenta il Δm_p minore, e gli asteroidi 50 e 70 che invece presentano i Δm_p più grandi.

Ciò che ci si aspetta di vedere sono i miglioramenti visti numericamente sugli errori rispetto alla stima iniziale e degli aspetti che spieghino il perché vi siano errori più o meno grandi.

Nel seguito saranno, quindi, riportati i grafici di r_a , r_p , e , i e degli angoli di spinta alfa e beta.

5.3.1 Asteroide 45

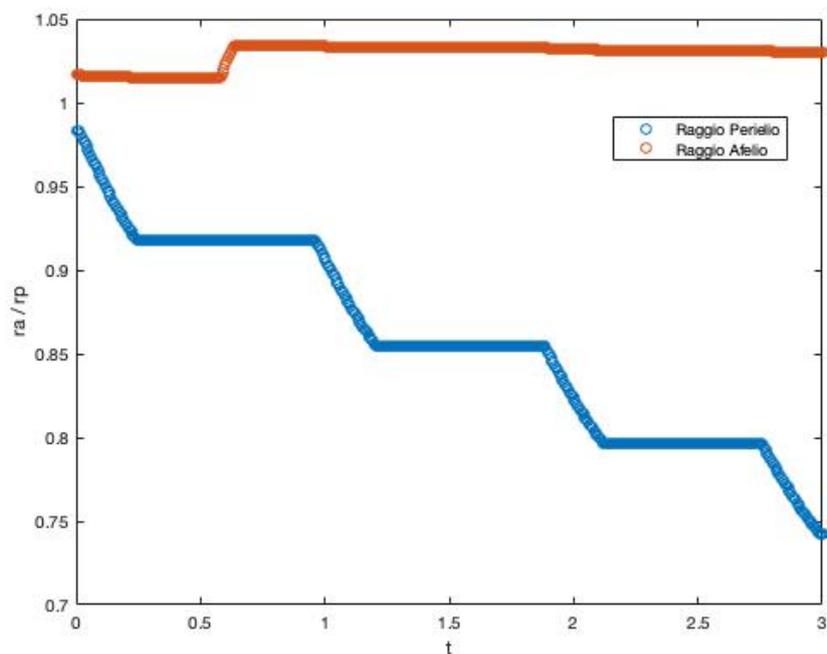


Figura 20 – Raggio Afelio e Raggio Perielio Ast45

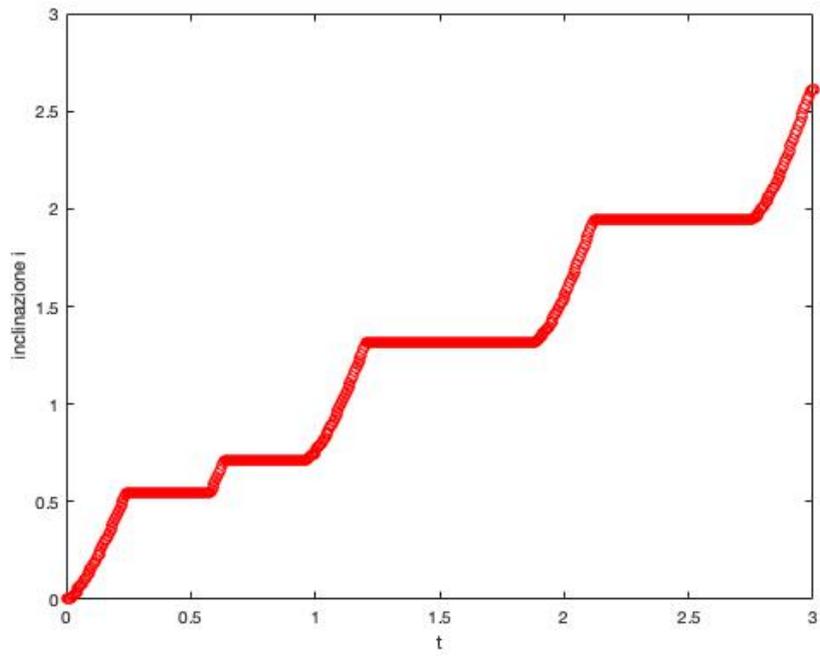


Figura 21 – Inclinazione i Ast45

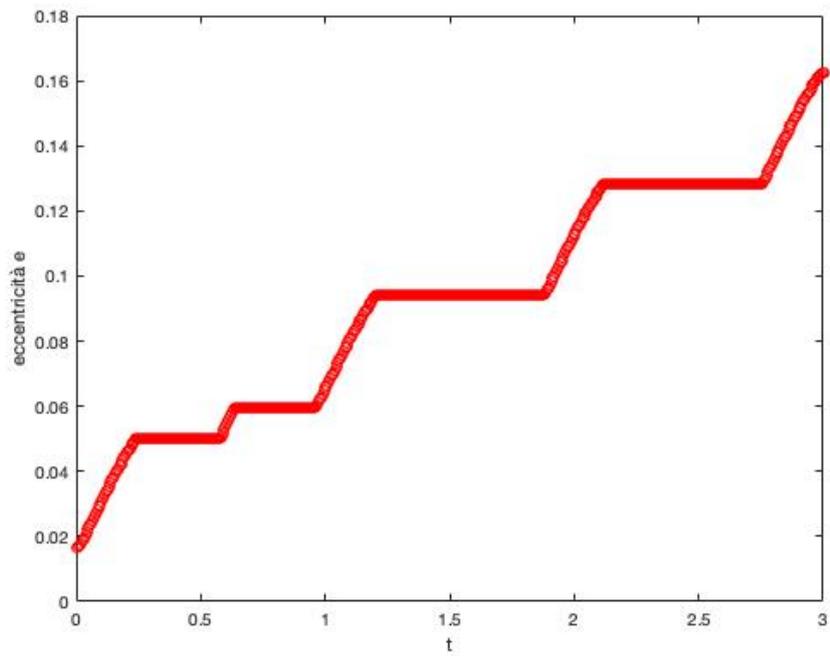


Figura 22 – Eccentricità e Ast45

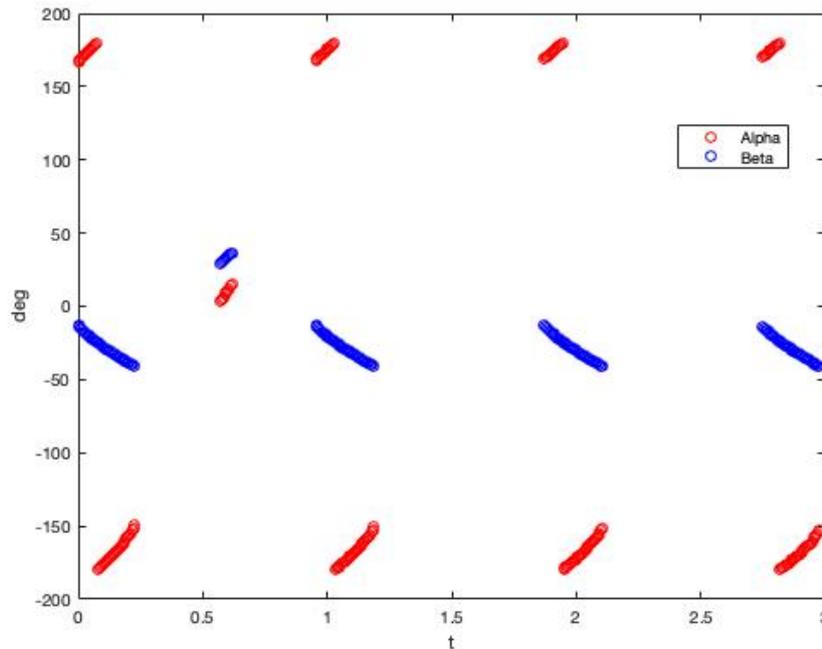


Figura 23 – Angoli di spinta alfa e beta Ast45

L'asteroide 45 presenta un $\Delta m_p = 0,1871$ che, come detto, è il valore minore fra gli asteroidi analizzati con $a < 0,9$.

Nel caso dell'asteroide preso in esame abbiamo un errore piccolo; ci si aspetta quindi di evidenziare dai grafici alcune caratteristiche, quali: un andamento a crescere/decrescere di r_a ed r_p , eccentricità all'interno dell'intervallo di applicabilità di Edelbaum, nodi allineati con gli apsi ed angolo di spinta fuori dal piano β costante.

Dalla Figura 19 si nota come r_a ed r_p presentino sempre un andamento a diminuire, esclusa la parte iniziale che risente dell'eccentricità della Terra (trascurata nella soluzione approssimata). Per quanto riguarda, invece, l'eccentricità e l'angolo β , la prima è sempre abbondantemente sotto ai limiti di 0.2/0.25 dell'applicabilità di Edelbaum mentre anche se il secondo non rimane costante, la sua variazione è comunque abbastanza limitata. Va

ricordato che la penalità di adottare un β costante anziché ottimale è comunque piccola, in accordo con la teoria di Edelbaum.

Per quanto riguarda invece i nodi, la loro collocazione non è evidenziata esplicitamente nei grafici, ma per individuarne la posizione è sufficiente andare a vedere dove l'inclinazione varia. In questo caso i nodi e gli apsi sono allineati, il che ci permette di spingere in maniera più conveniente, diminuendo i costi in termini di ΔV (perdite minori) e ottenendo quindi errori minori grazie alla correzione introdotta che tiene conto di questo effetto.

5.3.2 Asteroide 50

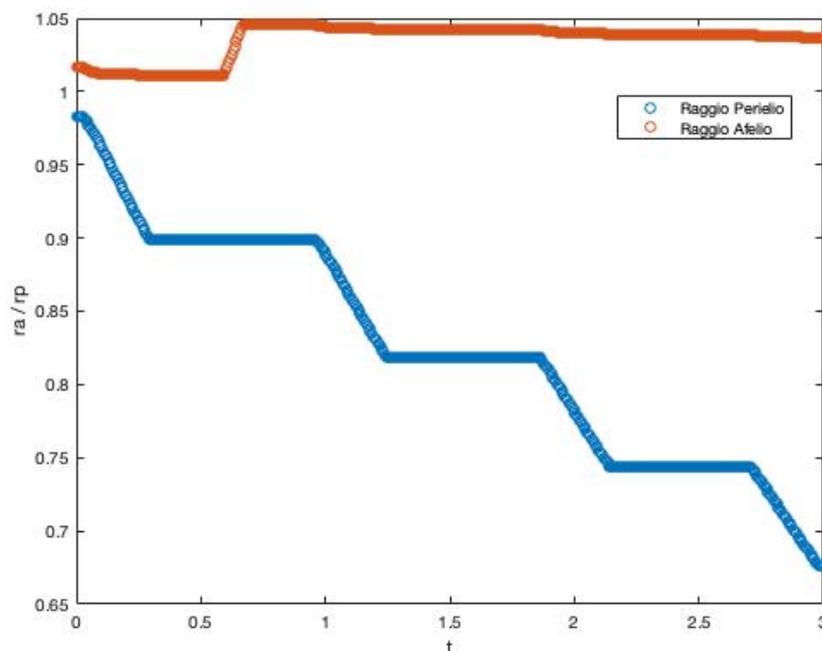


Figura 24 – Raggio Afelio e Raggio Perielio Ast50

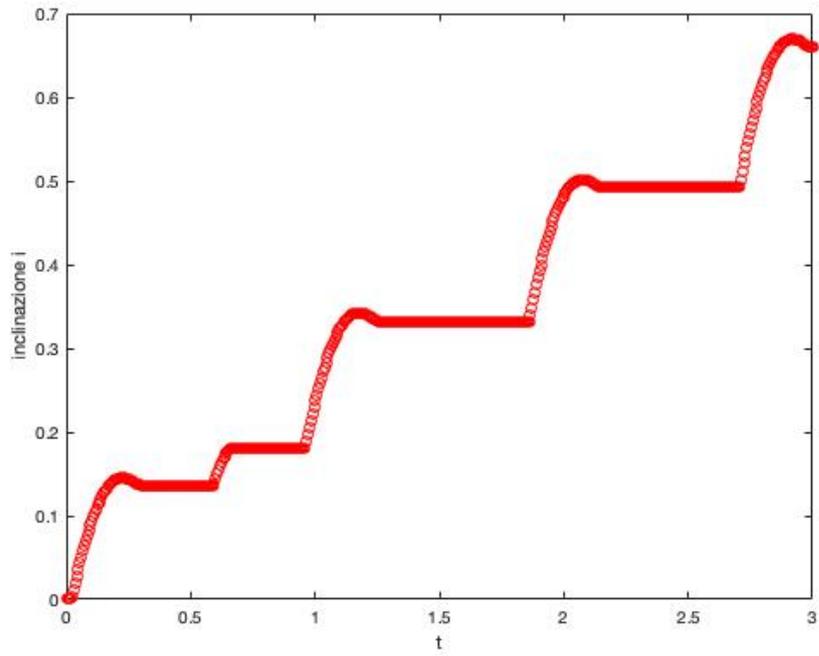


Figura 25 – Inclinazione i Ast50

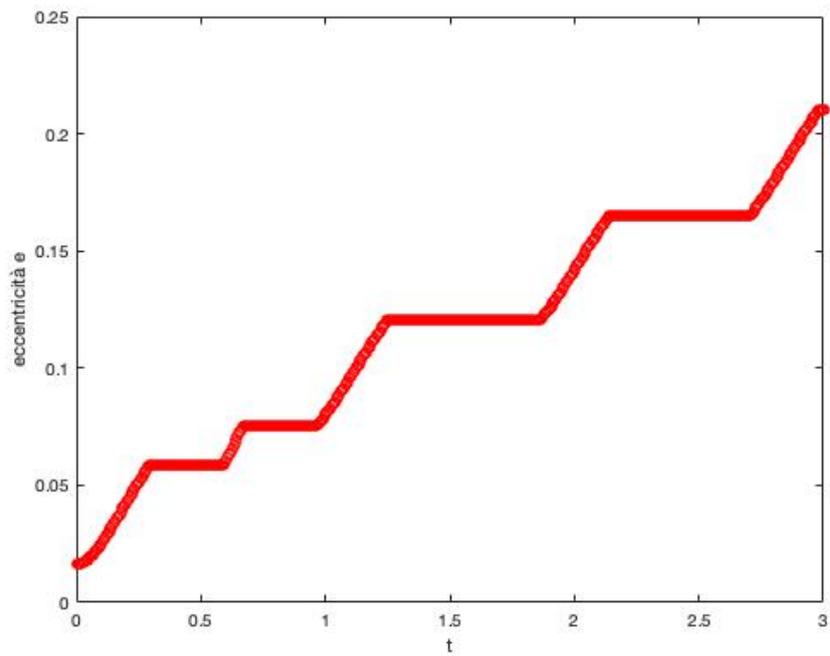


Figura 26 – Eccentricità e Ast50

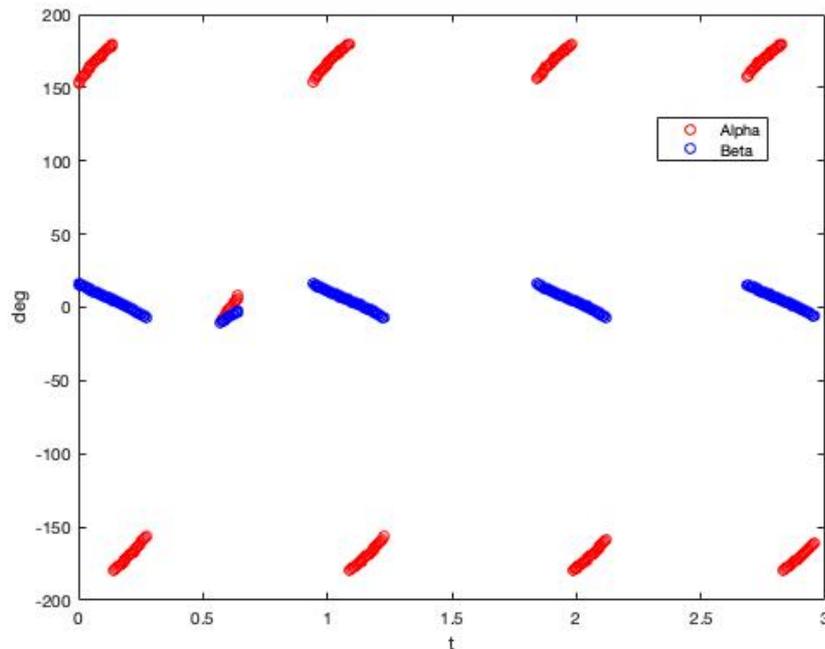


Figura 27 – Angoli di Spinta alfa e beta Ast50

L'asteroide 50 presenta un $\Delta m_p = 0,3061$, che è uno dei valori più alti fra gli asteroidi analizzati, insieme all'asteroide 70. In questo caso, a differenza di quanto detto per l'asteroide 45, ci si aspetta di non trovare una o più caratteristiche fra quelle viste nella sezione precedente, in modo tale da poter giustificare l'insorgere di tale errore.

Come per l'asteroide 45, anche in questo si ha un andamento di r_a ed r_p a diminuire, fatta eccezione per la prima parte che risente dell'eccentricità della Terra.

Allo stesso modo, anche in questo caso si ha un allineamento degli apsi con i nodi, il che, come detto, ci permette di avere minori costi. Un aspetto che potrebbe, in piccola parte, spiegare l'errore è dovuto all'angolo di spinta fuori dal piano β : avendo considerato noi tale angolo costante, la sua effettiva variazione può portare all'insorgere di errori, tanto più quanto tali variazioni sono elevate (come in questo caso).

Analizzando il grafico dell'inclinazione (Figura 24) si nota qualcosa di interessante:

alla fine di ogni variazione di inclinazione si ha una piccola gobbetta che negli altri asteroidi non compare; questa potrebbe essere dovuta al fatto che sembra che gli convenga aumentare l'inclinazione nel primo tratto di ogni burn e poi ruotare il piano nel secondo tratto (con una conseguente diminuzione di i), piuttosto che ottenere i e la posizione del nodo corretta direttamente. Tecnicamente, però, questo non è un effetto che può spiegare un errore grande in quanto essendo i molto piccola, il costo di tali manovre è molto contenuto. Il fatto, quindi, di avere un errore così grande può essere dovuto al fatto che l'eccentricità e arriva vicino a 0,2, che è un valore ai limiti dell'applicabilità di Edelbaum – e quindi essendo vicini a tali limiti, la soluzione potrebbe portarsi dietro degli errori dovuti ad un'approssimazione non perfetta.

5.3.3 Asteroide 70

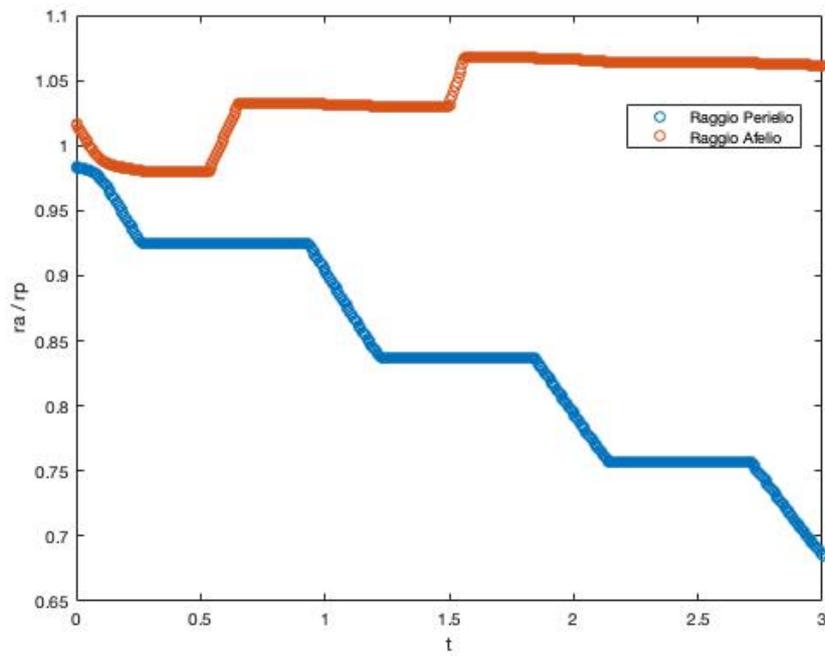


Figura 28 – Raggio Afelio e Raggio Perielio Ast70

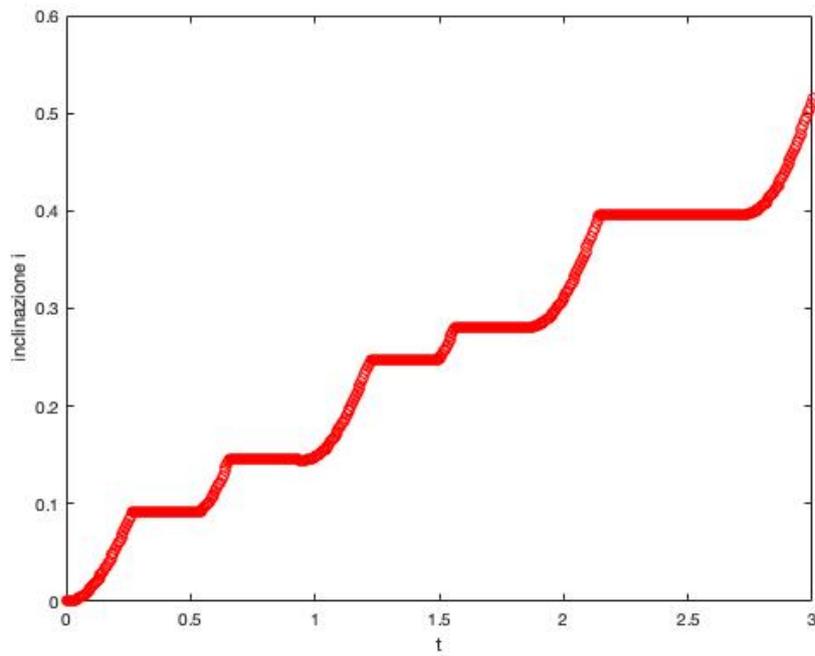


Figura 29 – Inclinazione i Ast70

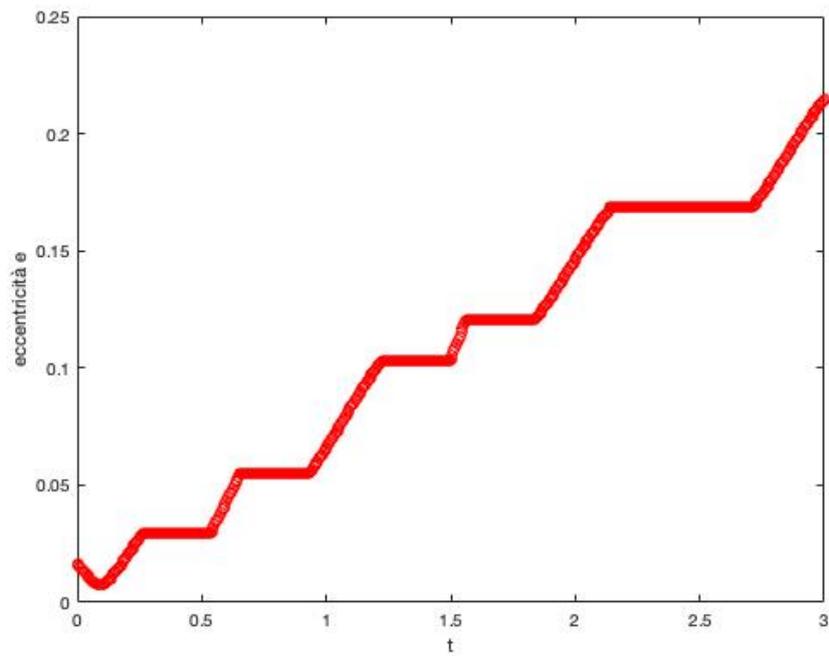


Figura 30 – Eccentricità e Ast70

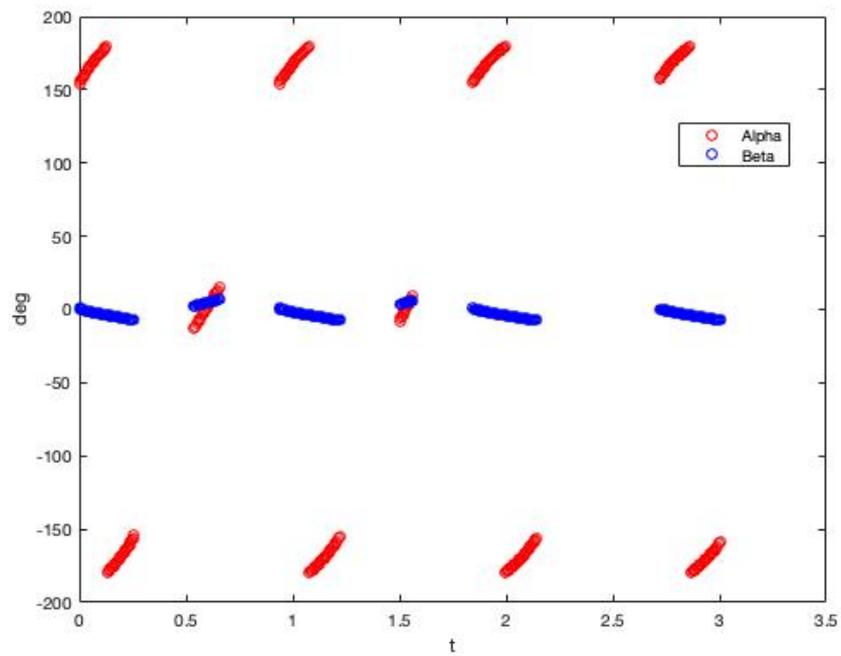


Figura 31 – Angoli di Spinta alfa e beta Ast70

L'asteroide 70 presenta un $\Delta m_p = 0,3567$, che è il valore più alto fra gli asteroidi analizzati.

Un primo motivo che può spiegare questo errore lo si vede nel grafico di r_a ed r_p (Figura 27): l'andamento dei due raggi non è sempre ad aumentare o diminuire ma presenta un andamento altalenante (soprattutto per quanto riguarda r_a); questo aspetto è stato già spiegato in precedenza: è dovuto alla piccola eccentricità dell'orbita della Terra che noi nella soluzione approssimata consideriamo circolare.

Un altro effetto che spiega l'errore così grande è quello visto prima riguardante l'angolo di spinta fuori dal piano β : noi lo consideriamo costante, quindi tanto più varia, maggiore sarà l'errore che ne consegue.

Anche qui, come per l'asteroide 50, si ha un valore di eccentricità che arriva anche a valori superiori a 0,2: ecco che quindi, avvicinandoci ai limiti di applicabilità di Edelbaum, sopraggiungono errori più grandi nella soluzione. Infine, un altro motivo per cui probabilmente ci sono grossi errori, si può evidenziare dal grafico degli angoli di spinta α e β (Figura 30):

a differenza dei casi precedenti, in questo caso capita molto spesso che non si spinga in corrispondenza dei nodi; non si hanno, quindi, gli apsi coincidenti con i nodi e questo porta a spingere in punti meno favorevoli con conseguente consumo di propellente maggiore. La correzione dovrebbe considerare dove spingiamo rispetto ai nodi, ma evidentemente non è perfettamente corretta.

Si era visto in precedenza che per le missioni con 4 archi, riducendo il numero di archi della soluzione vera (e quindi variando il tempo della missione da 36 a 32 mesi) l'errore diminuiva. Si è quindi deciso di realizzare,

per quest'ultimo asteroide che presenta 4 archi, anche i grafici relativi alla soluzione 32 mesi, in modo tale da capire quali differenze potessero esserci per spiegare tale miglioramento nell'errore.

5.3.4 Asteroide 70 (caso 32 mesi)

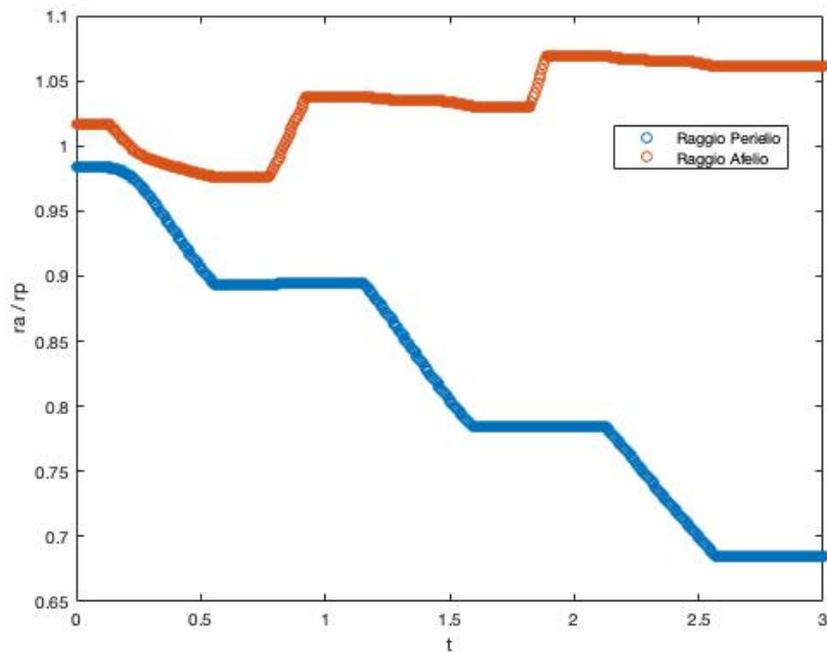


Figura 32 – Raggio Afelio e Raggio Perielio Ast70 (32 Mesi)

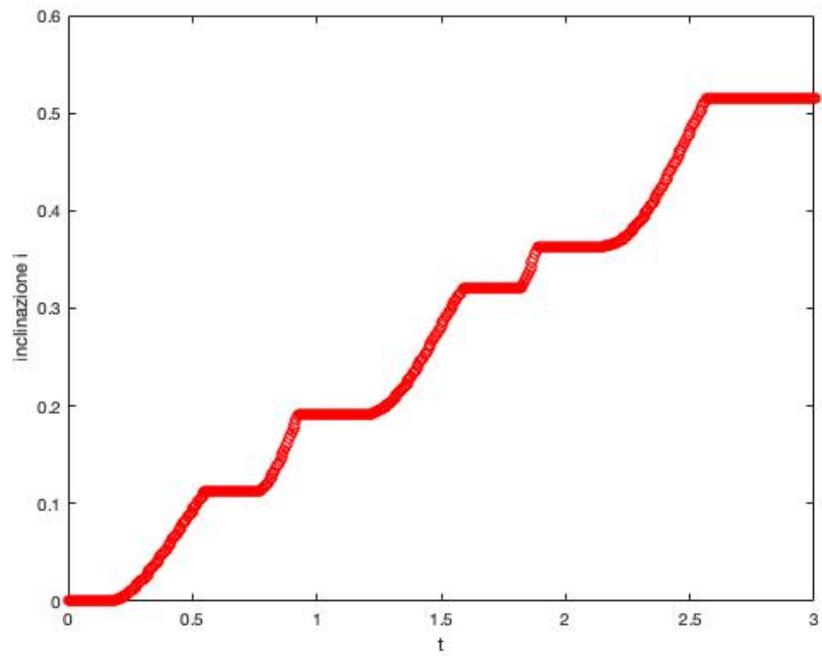


Figura 33 – Inclinazione i Ast70 (32 Mesi)

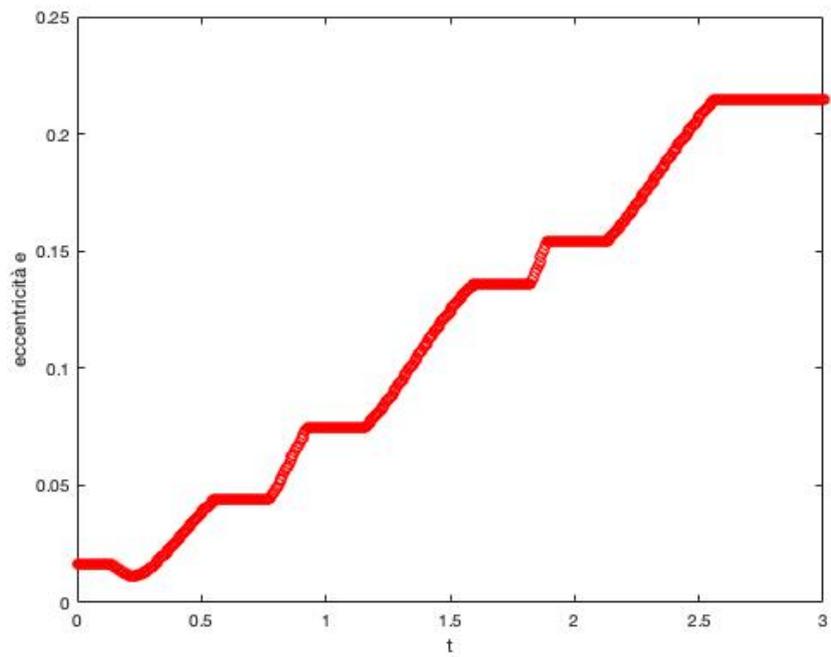


Figura 34 – Eccentricità e Ast70 (32 Mesi)

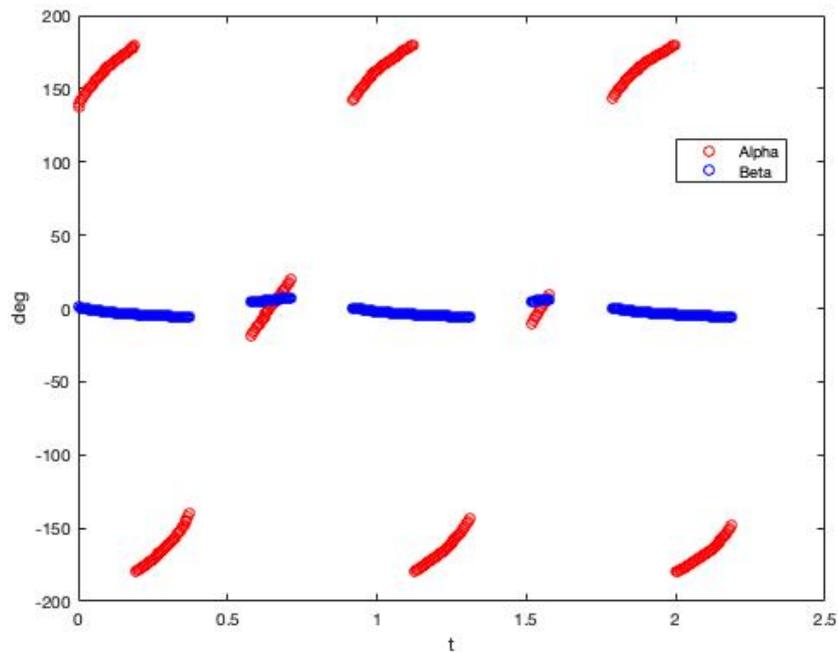


Figura 35 – Angoli di Spinta alfa e beta Ast70 (32 Mesi)

Nel caso 32 mesi, l'asteroide 70 presenta un $\Delta m_p = 0,1818$, quasi dimezzato se confrontato con il caso 36 mesi. Ciò è dovuto al fatto che mentre la massa di propellente ottenuta dal metodo approssimato rimane costante, quella relativa al metodo esatto varia, ed in particolare aumenta ($m_{p,ref}$ passa da 2,4101 a 2,5850) avvicinandosi così al valore $m_p = 2,7668$ e riducendo di conseguenza l'errore Δm_p .

Rispetto al caso 36 mesi ci si aspetta di vedere delle variazioni nell'andamento delle caratteristiche della trasferta che possano spiegare la diminuzione dell'errore.

In primis ciò si può evidenziare dal grafico di r_a ed r_p (Figura 31): l'andamento altalenante è ancora più accentuato rispetto al caso precedente (Figura 27); inoltre, un'altra possibile fonte di errore si può vedere nel grafico dell'eccentricità (Figura 33): e arriva a valori ben superiori a 0,2, vicino (se non oltre) ai limiti di applicabilità di Edelbaum e questo, come già

visto, comporta errori nella stima ed una inevitabile maggiorazione dell'errore.

L'aspetto forse più significativo, che spiega maggiormente la diminuzione dell'errore si può evidenziare dal grafico degli angoli di spinta (Figura 34); se confrontato con la Figura 30 si nota come ci sia una diminuzione degli archi ed un aumento del periodo in cui si spinge: se prima si aveva una riduzione di r_p con 4 archi, ora ne avremo solo più 3, ma più lunghi. Il fatto di avere meno archi di spinta non è un vantaggio: gli archi saranno più lunghi e ciò ci porterà a spingere non solo nei punti più favorevoli, ma anche dove è meno conveniente; ecco che quindi i consumi aumentano, la massa di propellente utilizzata si avvicinerà maggiormente a quella relativa al metodo esatto e l'errore Δm_p , di conseguenza, diminuirà.

6. Conclusioni

È stato qui presentato un metodo approssimato per la valutazione di trasferite orbitali tra orbite con piccola eccentricità e piccola inclinazione ed un relativo confronto dei risultati con il metodo esatto.

Il procedimento approssimato è basato sull'analisi di Edelbaum, non richiede l'integrazione numerica delle equazioni del moto e consente perciò l'analisi di centinaia di potenziali target in pochi minuti; il metodo consente inoltre di ottenere risultati attendibili in un tempo molto minore rispetto al procedimento classico di ottimizzazione.

L'obiettivo iniziale di indagare il perché determinati NEAs presentassero degli errori Δm_p maggiori di 0.3 kg non ha portato a risultati soddisfacenti. I calcoli, infatti, conducono a risultati spesso contrastanti che non aiutano a capire da cosa effettivamente questi errori più grandi possano dipendere. Nonostante ciò, si è comunque arrivati a delle conclusioni interessanti: attraverso una riduzione del tempo totale della missione da 36 a 32 mesi, gli errori iniziali si sono più che dimezzati, mantenendo comunque pressoché costante il numero di archi totale.

In definitiva, quindi, si può affermare come il metodo approssimato utilizzato fornisca senza dubbio risultati attendibili per l'ottimizzazione di traiettorie di rendez-vous, seppur vi sia una comparsa in qualche caso di errori più o meno grandi.

Ulteriori futuri sviluppi riguardanti tale metodo possono essere molteplici:

- Indagare ulteriormente sugli asteroidi che presentano delle anomalie sui risultati apportando le dovute modifiche, rendendo di conseguenza il metodo approssimato quanto più preciso e vicino al metodo esatto;

- Modificare altri parametri orbitali per cercare di comprendere maggiormente come l'errore sia influenzato dai parametri stessi;
- Ragionare sulla missione di rendez-vous; nella presente tesi ci si è concentrati sulla missione ottimale. Una volta fatto ciò, si può proseguire andando ad individuare la posizione dell'asteroide target, verificare di conseguenza il ritardo/anticipo dello spacecraft rispetto ad esso e calcolare infine la quantità di propellente necessaria al rendez-vous.

7. Lista dei Simboli

a = semiasse maggiore, AU

e = eccentricità

e_x, e_y = componenti vettore eccentricità

H = hamiltoniano

i = inclinazione, deg

i_x, i_y = componenti vettore inclinazione

J = funzionale

J^* = funzionale implementato

k_a, k_e, k_i = coefficienti di costo

m = massa, kg

m_p = massa propellente, kg

$m_{p,REF}$ = massa propellente metodo esatto, kg

n = numero di rivoluzioni

r_a = raggio afelio, AU

r_p = raggio perielio, AU

RIP = rapporto tra spinta al perielio e spinta totale (afelio + perielio)

T = spinta, N

x = vettore variabili di stato

u = vettore dei controlli

α = angolo di spinta nel piano, deg

β = angolo di spinta fuori dal piano, deg

Λ = coefficiente della legge di controllo

θ = ascensione retta, deg

θ_e = ascensione retta di riferimento, deg

θ_0 = ascensione retta iniziale, deg

θ_f = ascensione retta finale, deg

$\dot{\theta}$ = velocità angolare, deg/s

Ω = ascensione retta del nodo ascendente, deg

ω = argomento del periastro, deg

μ = costanti aggiunte

λ = variabili aggiunte

$\Delta i_{2\pi}$ = variazione di inclinazione in un giro, deg

Δ_{PA} = sforzo propulsivo totale al perielio

Δ_{AP} = sforzo propulsivo totale all'afelio

ΔV = variazione di velocità, m/s

$\Delta\theta$ = lunghezza angolare arco di spinta, deg

Δm_p = variazione massa propellente metodo approssimato/esatto

Δa_{PA} = variazione di a all'afelio dovuta ad una spinta al perielio

Δa_{AP} = variazione di a al perielio dovuta ad una spinta all'afelio

Δe_{PA} = variazione di e all'afelio dovuta ad una spinta al perielio

Δe_{AP} = variazione di e al perielio dovuta ad una spinta all'afelio

Δi_{PA} = variazione di i all'afelio dovuta ad una spinta al perielio

Δi_{AP} = variazione di i al perielio dovuta ad una spinta all'afelio

A_R = componente radiale accelerazione

A_T = componente tangenziale accelerazione

A_W = componente fuori dal piano accelerazione

8. Sitografia e Bibliografia

- Lorenzo Casalino, Luigi Mascolo, Alessandro Bosa, “Fast Estimation Method for Trajectories to Near-Earth Asteroids”.
- Lorenzo Casalino, “Approximate Optimization of Low-Thrust: Transfers Between Low-Eccentricity Close Orbits”.
- T. N. Edelbaum, “Propulsion Requirements for Controllable Satellites,” ARS Journal, Vol. 31, No. 8, 1961, pp. 1079–1089, 10.2514/8.5723.
- Lorenzo Casalino, “Ottimizzazione Indiretta di Traiettorie Spaziali”.
- http://ww.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2017/06/M_Argo.
- <https://www.thespaceresource.com/news/2020/1/studying-a-nea-with-the-m-argo-cubesat>.
- <https://nineplanets.org/near-earth-asteroids/>
- <https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/N/Near+Earth+Asteroids>
- <https://solarsystem.nasa.gov/missions/near-shoemaker/in-depth/>
- <http://www.astronautix.com/n/near.html>