



**POLITECNICO
DI TORINO**

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

**Analisi RANS per lo Studio dei
Flussi Secondari in una Schiera di Pale
per Turbine di Bassa Pressione**

Relatori:

Prof. Francesco Larocca
Prof. Andrea Ferrero

Candidato:

Michele Errante

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

Sommario

Al contrario di quanto possa suggerire l'aggettivo "secondario", l'influenza dei flussi secondari sull'intero campo fluidodinamico che si instaura quando la corrente passa attraverso due pale adiacenti all'interno di una turbomacchina, è di primaria importanza nell'ambito dei sistemi propulsivi. Infatti l'insieme di tutte le strutture aerodinamiche, complesse e tridimensionali, generate dall'interazione tra lo strato limite presente sull'endwall e le schiere di pale, interferisce fortemente con lo strato limite delle superfici palari, provocando la nascita di ingenti perdite che contribuiscono fino al 50% di quelle totali. Per tale motivo, molti sono stati gli studi sperimentali e numerici che si sono susseguiti nel corso degli anni, prefiggendosi lo scopo di comprendere sempre più nel dettaglio tale fenomeno, stimandone gli effetti. Si colloca in quest'ottica il seguente lavoro, nel quale si intendono sfruttare i grandissimi vantaggi offerti dalla fluidodinamica computazionale (CFD).

Nel corso della trattazione, insieme ad uno studio approfondito dei risultati presenti in letteratura sul tema dei flussi secondari e sulla loro natura fisica, sono state descritte tutte le fasi principali che compongono le simulazioni CFD condotte, discutendone i requisiti imposti e le scelte adottate. In particolare, grande attenzione è stata dedicata agli stadi di progettazione e costruzione del dominio di calcolo e della mesh, ritenuti di importanza essenziale per l'ottenimento di risultati dotati di un'adeguata risoluzione e accuratezza. Tutte le simulazioni sono state eseguite impiegando l'intero set delle Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) equations, completato dal modello di turbolenza di Spalart-Allmaras, sfruttando uno schema numerico che vede l'adozione dei "Discontinuous Galerkin methods" per la discretizzazione nello spazio e un metodo di tipo implicito per le iterazioni nel tempo.

La pala scelta, per via del grande numero di studi condotti su di essa, è la T106, usata per turbine di bassa pressione e costituita da un profilo ad alta curvatura.

L'evoluzione della vorticità, il comportamento delle linee di corrente, la generazione e la distribuzione delle perdite sono alcuni degli aspetti messi in luce nella fase di post-processing, proponendo, ove possibile, confronti con risultati sperimentali e numerici ottenuti da differenti autori.

Infine, è stata valutata la possibilità di modificare localmente il bordo di attacco della paletta per poter avere un controllo sulla posizione e sull'intensità delle strutture vorticosi che compongono i flussi secondari, con il fine di diminuire le perdite secondarie ed incrementare conseguentemente l'efficienza della turbina.

Indice

| | |
|---|------------|
| Sommario | III |
| 1 Introduzione | 1 |
| 1.1 Il ruolo della CFD nella propulsione aerospaziale | 1 |
| 1.2 La struttura di una simulazione CFD | 2 |
| 1.3 Fluidodinamica computazionale e sperimentale | 5 |
| 2 Modello Fisico | 7 |
| 2.1 Equazioni di Navier-Stokes | 10 |
| 2.2 Equazioni di Eulero | 12 |
| 2.3 Il problema della turbolenza | 13 |
| 2.3.1 Direct Numerical Simulation | 13 |
| 2.3.2 Large Eddy Simulation | 14 |
| 2.4 Reynolds Averaged Navier-Stokes | 15 |
| 2.4.1 Modello di Spalart-Allmaras | 16 |
| 2.5 Condizioni al contorno | 18 |
| 2.5.1 BCs per le equazioni di Eulero | 19 |
| 2.5.2 BCs per le equazioni di Navier-Stokes | 20 |
| 2.5.3 BCs per il modello di Spalart-Allmaras | 20 |
| 3 Schema Numerico | 22 |
| 3.1 Discretizzazione nello spazio | 22 |
| 3.1.1 Formulazione variazionale | 23 |
| 3.2 Discretizzazione nel tempo | 24 |
| 3.2.1 Controllo della CFL | 25 |
| 4 Secondary Flows: flussi di primaria importanza | 28 |
| 4.1 Descrizione fisica | 30 |
| 4.1.1 Dalle teoria classica al vortice a ferro di cavallo | 30 |
| 4.1.2 Modello di Langston | 33 |
| 4.1.3 Modello di Sharma e Butler | 35 |
| 4.1.4 Modello di Goldstein e Spores | 36 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.1.5 | I modelli recenti | 37 |
| 4.2 | Perdite Secondarie | 40 |
| 4.2.1 | Perdite di efficienza legate alla riduzione di portanza sulle pale | 42 |
| 4.2.2 | Coefficiente di perdite di pressione | 43 |
| 4.2.3 | Perdite secondarie e CFD | 45 |
| 5 | Analisi RANS | 48 |
| 5.1 | Geometria | 50 |
| 5.1.1 | Preparazione del dominio | 51 |
| 5.2 | Generazione della mesh | 55 |
| 5.2.1 | Definizione dei campi nella Mesh 2D | 57 |
| 5.2.2 | Controllo della mesh nella terza dimensione | 59 |
| 5.2.3 | Algoritmi di meshing | 61 |
| 5.3 | Calcoli | 64 |
| 5.4 | Post Processing | 67 |
| 5.4.1 | Campo di Mach | 67 |
| 5.4.2 | Vortice a ferro di cavallo | 68 |
| 5.4.3 | Streamwise Vorticity | 68 |
| 5.4.4 | Perdite di pressione totale | 74 |
| 5.4.5 | Linee di corrente | 76 |
| 5.4.6 | Coefficiente di pressione | 78 |
| 5.4.7 | Coefficiente di perdita di pressione totale medio | 81 |
| 5.4.8 | Direzione media del flusso a valle della schiera | 85 |
| 5.4.9 | Valutazione dei risultati ottenuti | 87 |
| 6 | Conclusioni e sviluppi futuri | 89 |
| A | Elenco dei simboli | 91 |
| | Bibliografia | 93 |

Elenco delle figure

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Impatto della CFD sulle performance di un motore aeronautico, immagine di Hirsch [1] elaborata con i dati forniti da Escuret et al. [2]. | 2 |
| 1.2 | Schema tipico della struttura di una simulazione CFD. | 3 |
| 4.1 | Modello di secondary flows proposto da Hawthorne [7]. | 31 |
| 4.2 | Vortice a ferro di cavallo formatosi all'interfaccia tra endwall e un cilindro, sketch di Eckerle e Langston [14]. | 32 |
| 4.3 | Strutture vorticose in prossimità dell'endwall, sketch di Langston [16]. | 33 |
| 4.4 | Evoluzione dell'interazione tra suction side leg e passage vortex attraverso il passaggio di una schiera di profili presentata da Sieverding e Van den Bosche [17]. | 34 |
| 4.5 | Rappresentazione dei Secondary Flows, Sharma e Butler [8]. | 35 |
| 4.6 | Struttura dei flussi secondari proposta da Goldstein e Spores [9]. | 36 |
| 4.7 | Struttura dei flussi secondari proposta da Wang, Olson, Goldstein e Eckert [18]. | 38 |
| 4.8 | Confronto della distribuzione del coefficiente di pressione c_p al variare della distanza dall'endwall, Langston, Nice e Hooper [13]. | 42 |
| 4.9 | Curve di livello di Total pressure loss coefficient e Vorticità a diverse posizioni assiali del passaggio, Hodson e Dominy [26]. | 44 |
| 4.10 | Curve iso-livello per il tasso di generazione di entropia lungo il passaggio per diversi valori di x/c_x , Denton e Pullan [27]. | 46 |
| 5.1 | Schema riepilogativo delle fasi operative. | 49 |
| 5.2 | Profilo di pala 2D della T106. | 50 |
| 5.3 | Modifiche al bordo di attacco della pala T106, Sauer et al. [29]. | 51 |
| 5.4 | Profilo di pala 2D della T106/3. | 52 |
| 5.5 | Dominio 2D. | 53 |
| 5.6 | Rappresentazione della periodicità del dominio. | 53 |
| 5.7 | Dominio 3D per la pala T106. | 55 |
| 5.8 | Esempio di una griglia O-type, Hirsch [1]. | 58 |

| | | |
|------|---|----|
| 5.9 | O-type grid attorno il profilo di pala T106C. | 59 |
| 5.10 | Configurazione mesh sul piano verticale $x - y$ | 60 |
| 5.11 | Legame tra numero di layers in direzione verticale y , numero di volumi e consumo di memoria. | 61 |
| 5.12 | Mesh 2D generata con gli algoritmi Delaunay e Blossom. | 65 |
| 5.13 | Mesh 2D generata con gli algoritmi Frontal-Delaunay e Blossom. | 65 |
| 5.14 | Mesh 2D generata con gli algoritmi Frontal-Delaunay for Quads e Blossom. | 66 |
| 5.15 | Campo di Mach sulla superficie “Midspan” posta a $y = 0$, T106C. | 67 |
| 5.16 | Visualizzazione dell’origine del vortice a ferro di cavallo in prossimità del bordo di attacco della pala T106. | 69 |
| 5.17 | Intensità della streamwise vorticity Ω_s (in valore assoluto) delle strutture vorticose principali dei flussi secondari. | 71 |
| 5.18 | Streamwise vorticity Ω_s - Parte 1 di 4. | 71 |
| 5.18 | Streamwise vorticity Ω_s - Parte 2 di 4. | 72 |
| 5.18 | Streamwise vorticity Ω_s - Parte 3 di 4. | 73 |
| 5.18 | Streamwise vorticity Ω_s - Parte 4 di 4. | 74 |
| 5.19 | Curve iso-livello per il coefficiente di perdita ζ - Parte 1 di 2. | 75 |
| 5.19 | Curve iso-livello per il coefficiente di perdita ζ - Parte 2 di 2. | 76 |
| 5.20 | Linee di corrente interagenti con la pala T106. | 77 |
| 5.21 | Distribuzione del coefficiente di pressione c_p attorno la pala T106 per diverse posizioni radiali. | 78 |
| 5.22 | Distribuzione del coefficiente di pressione c_p attorno la pala T106 per diverse posizioni radiali. Risultati presentati da Pichler et al. [25]. | 79 |
| 5.23 | Distribuzione del coefficiente di pressione c_p attorno la pala per $y = 0.5$ (endwall). Confronto tra i risultati ottenuti per la T106 e la T106/3. | 81 |
| 5.24 | Distribuzione radiale del coefficiente di perdita di pressione totale per quattro posizioni assiali: (a) $x/c_x = 1.03$, (b) $x/c_x = 1.10$, (c) $x/c_x = 1.30$, (d) $x/c_x = 1.50$ | 82 |
| 5.25 | Distribuzione radiale del coefficiente di perdita di pressione totale per quattro posizioni assiali: (a) $x/c_x = 1.03$, (b) $x/c_x = 1.10$, (c) $x/c_x = 1.30$, (d) $x/c_x = 1.50$. Risultati presentati da Pichler et al. [23]. | 83 |
| 5.26 | Distribuzione radiale della direzione media del flusso di corrente per quattro posizioni assiali: (a) $x/c_x = 1.03$, (b) $x/c_x = 1.10$, (c) $x/c_x = 1.30$, (d) $x/c_x = 1.50$ | 86 |

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Il ruolo della CFD nella propulsione aerospaziale

La fluidodinamica computazionale, in inglese Computational Fluid Dynamics, abbreviata con l'acronimo CFD, è generalmente definita come l'insieme di tecniche e strumenti che, mettendo a servizio di un calcolatore opportuni metodi numerici, risolve un dato campo fluidodinamico, simulandone il comportamento.

La meccanica e la termodinamica dei fluidi, infatti, possono essere studiate ed indagate tipicamente tramite tre approcci: analitico, sperimentale e numerico. L'attività sperimentale è stata storicamente antecedente ed essenziale all'esistenza delle altre due, in quanto l'interpretazione dei suoi risultati ha posto le basi per la comprensione della natura fisica dei fenomeni fluidodinamici e, attraverso un processo induttivo, ha permesso la definizione di modelli matematici che potessero prevedere il comportamento dei flussi di corrente.

Tali modelli matematici, però, sono composti da sistemi di equazioni differenziali, le cui soluzioni non sono facilmente ottenibili analiticamente, tranne che per casi molto semplici e particolari. Per tale motivo, negli anni, la fluidodinamica sperimentale è stata l'unico strumento efficace in fase di studio e di progettazione industriale, che permettesse di indagare e studiare problemi di interesse pratico. Tale primato è durato fin tanto che l'incremento della potenza di calcolo e la maturità raggiunta dagli algoritmi ha permesso la risoluzione delle leggi di governo per via numerica. L'enorme impatto che ha avuto l'evoluzione della CFD nell'industria aeronautica è dimostrato chiaramente in Figura 1.1 in cui è indicato il miglioramento in efficienza dei motori aeronautici prodotti dall'azienda francese SNECMA. In particolare si osserva come nel periodo compreso tra il 1970 e il 2000, è stato possibile passare dal solo

impiego delle equazioni del flusso potenziale, alle equazioni di Navier-Stokes in tre dimensioni, ottenendo una crescita in efficienza del 10% circa.

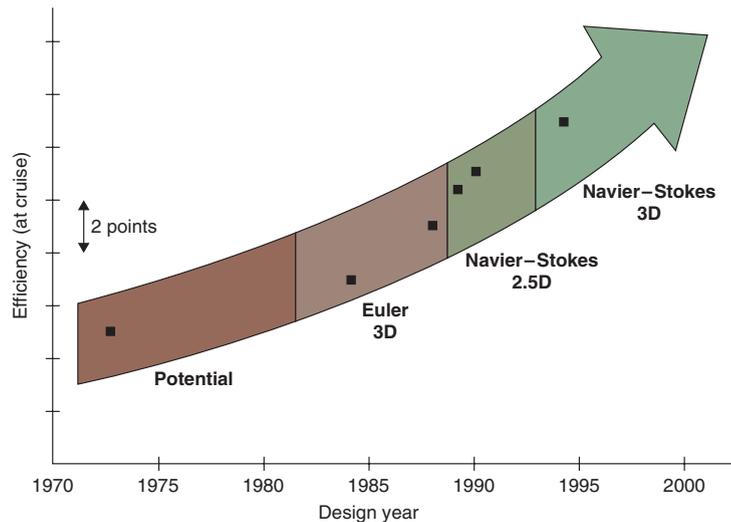


Figura 1.1: Impatto della CFD sulle performance di un motore aeronautico, immagine di Hirsch [1] elaborata con i dati forniti da Escuret et al. [2].

1.2 La struttura di una simulazione CFD

Avendo introdotto la CFD e i risvolti positivi apportati allo studio dei fluidi, risulta necessario definirne i componenti costituenti. Facendo riferimento allo schema sintetico presentato in Figura 1.2 è possibile distinguere 4 fasi che caratterizzano una simulazione CFD e che traghettano l'individuazione del fenomeno reale da studiare verso la sua risoluzione numerica.

- Il primo passo per lo studio di qualsiasi problema fisico inerente al mondo reale consiste nella scelta dei livelli di approssimazione che permettono la definizione di un certo modello matematico, che determina i confini della “realtà” che potrà essere simulata.
- Una volta stabilito il modello matematico da utilizzare, ciò che distingue la CFD dalla fluidodinamica classica analitica è la fase di cosiddetta discretizzazione, che sancisce il confine tra il mondo del continuo e quello del finito. Tale step è costituito da due diverse componenti: la discretizzazione dello spazio, che si manifesta con la generazione della griglia di calcolo e con la discretizzazione delle equazioni, definendo pertanto uno certo schema numerico.
- Scelta la griglia e lo schema numerico che più si adattano al problema specifico, risulta necessario individuare i metodi di integrazione nel tem-

po più idonei in modo da poter finalmente calcolare il campo fluidodinamico esclusivamente in prossimità degli elementi discreti selezionati. Non verrà dunque risolto il sistema di equazioni differenziale originale, bensì un sistema di equazioni algebriche, che dovrà essere trattato tramite un opportuno metodo designato.

- L'ultimo passo tracciato nello schema fa riferimento al post-processing dei risultati che consiste, nel maggior numero dei casi, in una visualizzazione grafica dei dati numerici ottenuti dalle fasi precedenti, per poter comprendere ed interpretare le proprietà fisiche della soluzione ottenuta. Tale stadio è oggi facilitato dall'ingente quantità di software per la visualizzazione grafica dei dati a disposizione.

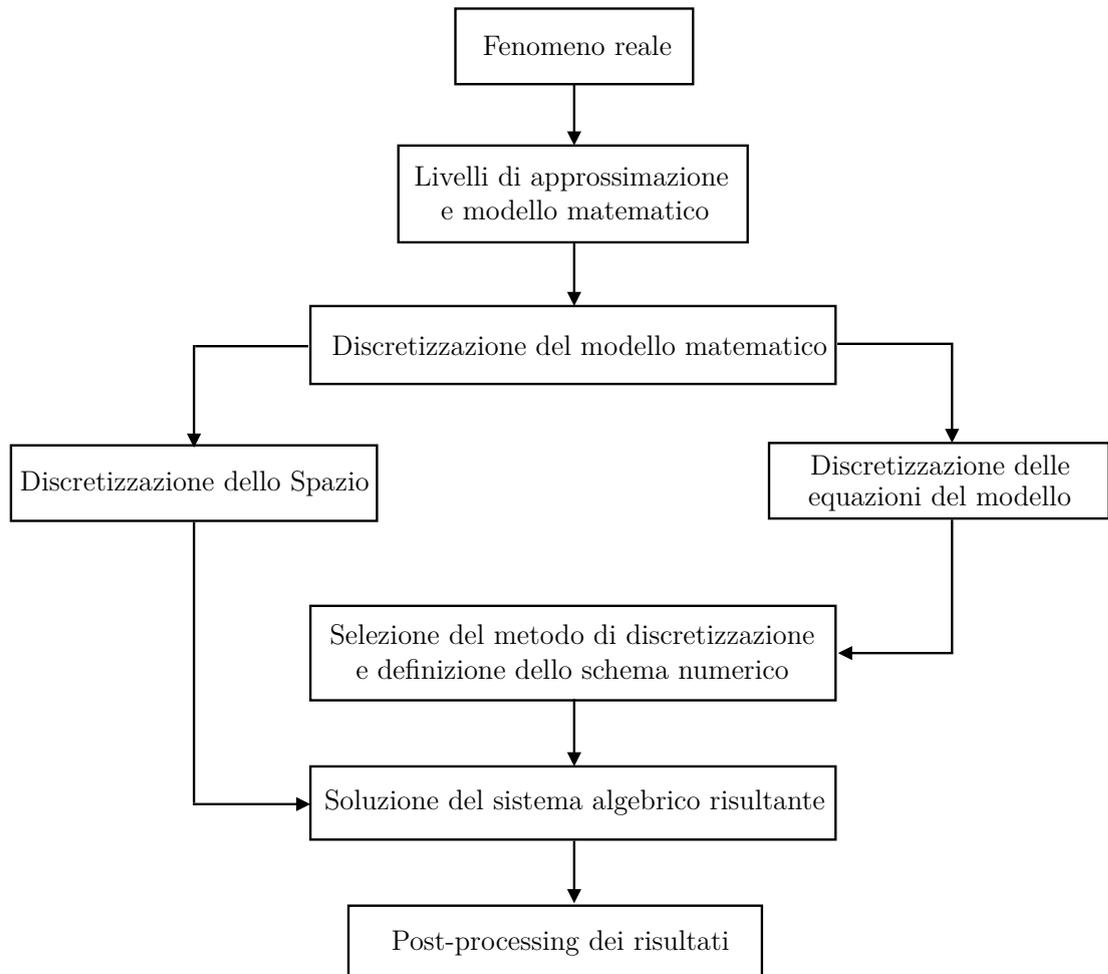


Figura 1.2: Schema tipico della struttura di una simulazione CFD.

È evidente già dal primo passaggio, dal mondo reale al modello matematico, l'introduzione all'interno del sistema CFD del concetto di approssimazione. Il

mondo fisico reale infatti si presenta, agli occhi di un osservatore, estremamente complicato, pertanto risulta indispensabile ridurre in qualche modo il grado di complessità per poter definire delle equazioni gestibili all'interno di certi limiti fissati. Tali limiti costituiscono il livello della cosiddetta “scala di realtà”, che può variare in un range molto ampio, passando ad esempio dalla scala subatomica, atomica, microscopica, macroscopica a quella astronomica. Ad esempio, la fluidodinamica si colloca sulla scala in cui l'interazione tra un numero sufficientemente alto di particelle domina sul moto di ogni singola particella: in termini quantitativi, quando il rapporto tra il libero cammino medio delle particelle (mean free path) l_{mfp} e la lunghezza caratteristica del problema in esame L , espresso dal numero di Knudsen Kn

$$Kn = \frac{l_{mfp}}{L} \quad (1.1)$$

risulta molto piccolo, $Kn \ll 1$. Quella appena definita costituisce la prima grande approssimazione nel passaggio tra realtà e modello fisico, solitamente definita come ipotesi del *continuo*.

Il successivo livello di approssimazione consiste nella scelta del cosiddetto *livello di stazionarietà*, il cui impiego è lampante nella definizione delle variabili medie di un flusso di corrente turbolento all'interno del sistema di equazioni di Navier-Stokes mediate nel tempo. Implementando una media sulle fluttuazioni turbolente, si fissa infatti implicitamente il livello di stazionarietà sulle variazioni del flusso più lente rispetto a quelle dovute alla turbolenza e dunque su quelle caratterizzate da costanti di tempo molto più grandi in confronto alla costante di tempo delle oscillazioni turbolente.

Infine, altri due sono i livelli di approssimazione fondamentali nel passaggio dal fenomeno reale al modello matematico: quello *spaziale* e quello *dinamico*. Il primo definisce il numero di variabili spaziali impiegate nel modello tramite uno studio preliminare del comportamento fisico del sistema, valutando ad esempio se una descrizione unidimensionale o bidimensionale fornisca informazioni sufficientemente accurate sull'evoluzione di un dato flusso di corrente. Tale approssimazione, tuttavia non verrà mai impiegata nel corso della trattazione in quanto tutte le analisi condotte saranno di carattere tridimensionale. Il livello di approssimazione che ha tra tutti il peso maggiore sui risultati e sul quale risulta più semplice e più comune agire è il *livello dinamico*, legato alla stima della relativa influenza che esercitano le varie forze e le relative componenti sul comportamento globale del sistema. Ad esempio, nella modellizzazione matematica dei flussi di corrente tipici delle turbomacchine, vengono tipicamente trascurate le azioni generate dall'attrazione gravitazionale o dalla rotazione terrestre stessa. Tuttavia, nell'ambito dei sistemi propulsivi, l'esempio più centrato ed interessante riguarda il ruolo della viscosità. Infatti, in base al fatto che per certi problemi e per certe particolari condizioni operative si possa ritenere trascurabile l'azione delle forze viscosive, porta il modello ma-

tematico ad una notevole riduzione in termini di difficoltà. Si passa dal dover risolvere il sistema completo delle equazioni di Navier-Stokes all'impiego delle equazioni di Eulero. Infine, un altro esempio in cui un'approssimazione di tipo dinamico viene applicata molto spesso nell'ambito della fluidodinamica computazionale è rappresentato dalla scelta del modello di chiusura per poter sfruttare le Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations.

Bisogna dunque tenere ben in conto che già al primo step dello schema rappresentato in Figura 1.2 viene immesso nel sistema un indefinito ed ineluttabile livello di errore, che non può in alcun modo essere ridotto o eliminato dalle fasi successive. Pertanto, spesso può accadere che differenze tra risultati numerici e sperimentali differiscano non per una simulazione CFD condotta inadeguatamente bensì per una scelta del modello matematico non congrua alla fisica del problema. Facendo un'iperbole, sarebbe come pretendere da una simulazione dei risultati accurati su uno strato limite a parete risolvendo le equazioni di Eulero.

Un altro tipo di errore introdotto all'interno di ogni simulazione numerica sorge durante il processo di discretizzazione. L'errore di discretizzazione è legato infatti alla soluzione numerica del modello matematico e tende a zero con l'infittirsi della griglia di calcolo. L'entità di tale errore, al contrario di quello di modellizzazione, può essere quantificata e opportunamente controllata agendo direttamente sulla griglia e sul tipo di schema numerico impiegato per i calcoli. In realtà anche l'errore introdotto dalla scelta del modello può essere parzialmente mitigato, tramite l'implementazione ad esempio di Direct Numerical Simulations (DNS), in cui rimane l'errore di modellizzazione nel passaggio dal mondo reale alle equazioni di Navier-Stokes, ma nessun altro modello di chiusura viene impiegato e tutte le scale di turbolenza vengono direttamente risolte. Tuttavia, la potenza di calcolo odierna non è ancora sufficientemente alta da rendere tali simulazioni adottabili in tempi ragionevoli, nel caso in cui si vogliano risolvere problemi caratterizzati dai numeri di Reynolds tipici dei flussi nell'ambito dei sistemi propulsivi aeronautici ($Re = 10^5 - 10^7$).

1.3 Fluidodinamica computazionale e sperimentale

In riferimento a quanto detto, sembrerebbe che i limiti di un approccio numerico potrebbero renderlo meno affidabile rispetto ad un'analisi sperimentale. Tuttavia anche se nelle sperimentazioni in laboratorio il problema del numero di Reynolds non è così limitante come nelle simulazioni CFD e in certi casi i tempi di prova sperimentali risultano contenuti rispetto a quelli numerici, l'uso della fluidodinamica computazionale presenta grandissimi vantaggi rispetto alla fluidodinamica sperimentale e offre ampi margini di miglioramento per il

futuro.

Innanzitutto anche i risultati sperimentali sono affetti da errori, per via della strumentazione utilizzata e dell'incertezza legata ai sensori. Inoltre, spesso non è possibile nella pratica misurare direttamente certe quantità di interesse, pertanto nuove ipotesi e dunque nuove fonti di errore devono essere introdotte all'interno del sistema.

Se si pensa poi che i flussi peculiari della propulsione aerospaziale sono caratterizzati da altissime velocità e salti molto forti di pressione e temperatura, i costi, le infrastrutture, i tempi e le tecnologie impiegate per la realizzazione di prove sperimentali adatte, salgono vorticosamente.

Un esempio è rappresentato proprio dall'oggetto di studio del Capitolo 5, ossia del campo di moto fluidodinamico attraverso una schiera di pale di una turbomacchina. Risulta molto difficile, infatti, riprodurre sperimentalmente le condizioni operative dovute dall'interazione relativa tra gli stadi. Talvolta il movimento relativo tra pale rotoriche e statoriche viene ricreato in laboratorio per mezzo di tappeti mossi da motori, ma risulta semplice immaginare la differenza di costi rispetto ad una simulazione numerica.

Per di più, al giorno d'oggi, affidare la fase di progettazione e ottimizzazione industriale solamente alla fluidodinamica sperimentale si rivelerebbe insostenibile poiché se è vero che i tempi prettamente di prova sono tendenzialmente minori rispetto ai tempi di calcolo numerico, il processo di preparazione della prova sperimentale è estremamente lungo. Quanto detto deriva dal fatto che ogni qual volta si voglia modificare anche soltanto un piccolo parametro geometrico, è necessario costruire un nuovo modello, e magari anche la strumentazione ad esso integrato, pertanto al tempo e al costo della prova in senso stretto, si sommano il tempo e il costo di progettazione e costruzione del modello. Considerando dunque, che la fase di ottimizzazione potrebbe veder coinvolta la modifica di moltissimi parametri per un innumerevole quantità di volte, un approccio sperimentale apparirebbe totalmente insostenibile. Per tale motivo le indagini numeriche risultano centrali e di vitale importanza, oggi e soprattutto in futuro, per i processi di sviluppo industriale, a cui comunque è necessario integrare uno studio sperimentale conclusivo per validarne i risultati e quantificarne gli errori.

Capitolo 2

Modello Fisico

Nel capitolo introduttivo si è sottolineato come la selezione del modello fisico da discretizzare sia il primo ed essenziale passo per l'applicazione di qualsiasi simulazione CFD. In particolare, tale scelta è fortemente condizionata dal problema particolare che si intende studiare ed è frutto di un compromesso tra l'aderenza al fenomeno reale e il costo computazionale necessario. Come si vedrà nel corso del Capitolo 5 una simulazione numerica può non cominciare e terminare con lo stesso modello fisico, in quanto per agevolare la stabilità dei calcoli, è possibile risolvere inizialmente un modello più semplice per poi evolvere via via verso un modello più complesso.

Benché le leggi che governano la dinamica dei fluidi siano note ormai da secoli, e siano state espresse matematicamente in diverse forme, la fluidodinamica computazionale ha incentivato l'espressione di queste in una forma specifica, detta *conservativa*. Le equazioni che descrivono la fluidodinamica, vengono infatti interpretate come leggi che descrivono la *conservazione* di opportune grandezze, dette conservative. Tale proprietà delle equazioni è fondamentale in quanto viene trasmessa dal continuo al finito, e dunque dalle equazioni originarie a quelle discretizzate, consentendo che la natura fisica dietro queste ultime non venga persa per via di effetti numerici artificiali spuri. Per esprimere cosa sia una legge di conservazione per una generica quantità U è possibile fare ricorso alla descrizione qualitativa espressa da Hirsch [1]:

“La variazione dell'accumulo totale della grandezza U all'interno di un dato dominio Ω è uguale al bilancio tra l'accumulo di tale quantità in entrata e in uscita dal dominio considerato, a cui si sommano i contributi derivanti dalle eventuali sorgenti che generano tale quantità.”

Chiaramente, non tutte le quantità fisiche legate ai fluidi obbediscono ad una legge di conservazione, ma le leggi che descrivono l'evoluzione dei flussi di cor-

rente, a prescindere del grado di dettaglio e delle approssimazioni fatte rispetto al mondo reale, sono totalmente definite dalla conservazione di tre quantità: massa, quantità di moto ed energia. Ciò dà luogo globalmente a cinque equazioni, in quanto la quantità di moto è un vettore con tre componenti nello spazio.

La forma generale della legge di conservazione per una grandezza scalare per unità di volume U espressa prima qualitativamente è:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega = - \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S \cdot d\vec{S}$$

in cui Ω è un volume arbitrario fisso nello spazio delimitato da una superficie chiusa S attraversata dal flusso di corrente, \vec{F} è il flusso associato ad U , definito come l'accumulo di U che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo ed infine Q_V e \vec{Q}_S rappresentano rispettivamente le sorgenti di volume e di superficie. La precedente equazione è generalmente scritta come:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S \cdot d\vec{S} \quad (2.1)$$

che rappresenta la forma integrale della legge di conservazione.

Assumendo che sia i flussi che le sorgenti di superficie siano funzioni continue nel dominio Ω e che quest'ultimo sia arbitrario, tramite l'applicazione del teorema di Gauss è possibile passare alla forma differenziale della legge di conservazione, espressa come:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = Q_V + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_S \quad (2.2)$$

Se la proprietà conservata è descritta invece da una quantità vettoriale \vec{U} , allora il flusso passa da entità vettoriale ad entità tensoriale $\overline{\vec{F}}$, così come le sorgenti di superficie $\overline{\vec{Q}_S}$, mentre il termine che si riferisce alle sorgenti di volume assume anch'esso una forma vettoriale \vec{Q}_V . La forma integrale della legge di conservazione si presenta allora con la seguente espressione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega + \oint_S \overline{\vec{F}} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \vec{Q}_V d\Omega + \oint_S \overline{\vec{Q}_S} \cdot d\vec{S} \quad (2.3)$$

Con le medesime ipotesi esplicitate prima, che vedono la continuità dei flussi e delle sorgenti di superficie e l'arbitrarietà del dominio, applicando il teorema di Gauss è possibile passare alla forma differenziale della legge di conservazione per una quantità vettoriale:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\overline{\vec{F}} - \overline{\vec{Q}_S}) = \vec{Q}_V \quad (2.4)$$

È importante tenere presente che, in generale, i flussi sono generati da due diversi contributi, uno dovuto al trasporto convettivo del fluido e l'altro originato dall'agitazione molecolare, che può essere presente anche se la velocità media del flusso di corrente è nulla.

La prima componente, sempre presente, è denominata flusso convettivo \vec{F}_C ($\overline{\vec{F}}_C$ per una quantità vettoriale) legata alla quantità U in una corrente di velocità \vec{q} . Esso rappresenta l'accumulo di U trasportato dalla corrente fluida ed è definito dall'Eq. (2.5) per una quantità scalare, e dall'Eq. (2.6) per una quantità vettoriale.

$$\vec{F}_C = U\vec{q} \quad (2.5)$$

$$\overline{\vec{F}}_C = \vec{U} \otimes \vec{q} \quad (2.6)$$

La seconda componente, denominata flusso diffusivo \vec{F}_D , è quella che agisce a prescindere che il fluido sia mediamente fermo o in movimento, a causa dell'effetto macroscopico dell'agitazione termica molecolare. Tale movimento molecolare ha come conseguenza diretta il far tendere il flusso di corrente verso una condizione di equilibrio ed uniformità, in quanto il flusso diffusivo agisce creando un trasferimento, della quantità U nello spazio, tale da ridurre le disomogeneità. Ciò si traduce matematicamente nell'esprimere il flusso diffusivo legato ad una data grandezza U come proporzionale all'opposto del gradiente di U , con un fattore di proporzionalità, denominato come fattore di diffusività, che manifesta appunto l'intensità dell'effetto diffusivo. I flussi diffusivi non esistono sempre, come nel caso della massa e della quantità di moto, ma un esempio molto noto in fluidodinamica è quello dell'energia interna per unità di massa e il cui flusso diffusivo è espresso come:

$$\vec{F}_D = -\gamma\rho\kappa\vec{\nabla}e \quad (2.7)$$

in cui κ rappresenta il coefficiente di diffusività termica da definire empiricamente e γ il rapporto tra i calori specifici a pressione costante e volume costante $\gamma = c_p/c_v$. L'Eq.(2.7) che descrive la diffusione di calore in un mezzo in quiete a causa della conduzione termica molecolare è generalmente espressa in un'altra e più nota forma, ossia quella della legge di Fourier per la conduzione termica:

$$\vec{F}_D = -\lambda\vec{\nabla}T \quad (2.8)$$

dove T è la temperatura assoluta e λ è il coefficiente di conducibilità termica. Ricapitolando, i modelli fisici presentati nel seguito del capitolo derivano direttamente dall'applicazione delle leggi di conservazione di una grandezza scalare (Eq. (2.2)), nel caso della conservazione di massa ed energia, e di una grandezza vettoriale (Eq. (2.4)), nel caso della conservazione della quantità di moto.

2.1 Equazioni di Navier-Stokes

La descrizione più generale e completa del comportamento di un fluido è definita interamente dal sistema delle equazioni di Navier-Stokes, che esprimono la conservazione delle tre quantità fondamentali per un flusso di corrente: massa, quantità di moto ed energia. Le equazioni, in forma conservativa differenziale sono espresse di seguito.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{q}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q} \otimes \vec{q} + p \vec{I} - \vec{\tau}) = \rho \vec{f}_e \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q} H + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_T - \vec{\tau} \cdot \vec{q}) = W_f + q_H \quad (2.11)$$

Nelle equazioni precedenti ρ , \vec{q} , p , $\vec{\tau}$, E , H e \vec{q}_T denotano rispettivamente la densità, il vettore velocità, la pressione, il tensore degli sforzi viscosi, l'energia totale, l'entalpia totale e il flusso termico. Al secondo membro delle equazioni compaiono i termini sorgente, in cui \vec{f}_e esprime la somma delle forze esterne di volume, W_f è il lavoro di tali forze mentre q_H indica l'insieme di tutte le sorgenti che scambiano calore eccetto che per conduzione. Si evidenzia come generalmente nell'ambito della fluidodinamica per i sistemi propulsivi, così come per il resto della trattazione, i termini sorgente sono sempre nulli. Il flusso di calore \vec{q}_T è descritto dalla legge di Fourier

$$\vec{q}_T = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (2.12)$$

in cui il coefficiente di conducibilità termica λ può essere espresso in funzione della viscosità dinamica μ , del numero di Prandtl Pr e del rapporto tra i calori specifici γ posto uguale a 1.4 per tutti i calcoli:

$$\lambda = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{\mu}{Pr} \quad (2.13)$$

Le elaborazioni descritte nel Capitolo 5 sono state condotte assumendo la viscosità dinamica μ costante, tuttavia nel codice di calcolo, di cui si parlerà nel seguito, è possibile impiegare anche la legge di Sutherland a due coefficienti che mette in funzione la viscosità dinamica μ con la temperatura T .

In riferimento al tensore degli sforzi viscosi $\vec{\tau}$, le sue componenti sono state calcolate seguendo l'approccio di Boussinesq, adottano l'ipotesi di Stokes per la viscosità di volume (bulk viscosity). La componente τ_{ij} , utilizzando la notazione di Einstein, è pertanto espressa nel seguente modo:

$$\tau_{ij} = 2\mu \left[S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (2.14)$$

in cui S_{ij} è il tensore della velocità di deformazione:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.15)$$

Il sistema di equazioni principale è chiuso dall'introduzione delle seguenti equazioni di stato per l'entalpia totale H e per l'energia totale E :

$$H = E + \frac{p}{\rho} \quad (2.16)$$

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho |\vec{q}|^2 \quad (2.17)$$

Per la discretizzazione delle equazioni e l'implementazione dello schema numerico risulta conveniente esprimere il sistema di equazioni (2.9), (2.10) e (2.11) nella seguente forma compatta:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = Q \quad (2.18)$$

in cui U , \vec{F} e Q rappresentano i vettori contenenti rispettivamente le variabili conservative, i flussi associati a tali variabili e i termini di sorgente:

$$U = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho \vec{q} \\ \rho E \end{vmatrix} \quad \vec{F} = \begin{vmatrix} \rho \vec{q} \\ \rho \vec{q} \otimes \vec{q} + p \vec{I} - \vec{\tau} \\ \rho \vec{q} H - \vec{\tau} \cdot \vec{q} - \lambda \vec{\nabla} T \end{vmatrix} \quad Q = \begin{vmatrix} 0 \\ \vec{f}_e \\ W_f + q_H \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

Può risultare molto utile, inoltre, esprimere l'Eq. (2.18) in coordinate cartesiane

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = Q \quad (2.20)$$

in cui f , g ed h sono le componenti del vettore dei flussi \vec{F} in direzione x , y e z , così come u , v ed w per il vettore velocità \vec{q} :

$$f = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho u H - (\vec{\tau} \cdot \vec{q})_x - \lambda \partial_x T \end{vmatrix} \quad g = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho v u - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho v w - \tau_{yz} \\ \rho v H - (\vec{\tau} \cdot \vec{q})_y - \lambda \partial_y T \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

$$h = \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho w u - \tau_{zx} \\ \rho w v - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_z \\ \rho w H - (\vec{\tau} \cdot \vec{q})_z - \lambda \partial_z T \end{vmatrix}$$

Le equazioni di Navier-Stokes, nello spazio tridimensionale, formano un sistema di cinque equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) completamente accoppiate, le cui incognite sono costituite dalle tre componenti di velocità u , v , w e da due variabili termodinamiche, come ad esempio pressione e densità o pressione e temperatura.

Ognuna delle equazioni è non lineare, e tale caratteristica non è solo una peculiarità che rimane confinata nella loro natura matematica, ma interpreta un ruolo fondamentale nel comportamento fluidodinamico del sistema. Ad esempio, la non linearità prevalente, insita nel termine convettivo $\rho \vec{q} \otimes \vec{q}$ dell'equazione di conservazione per la quantità di moto, è la causa della comparsa della turbolenza, il cui trattamento nell'ambito della fluidodinamica computazionale sarà l'oggetto di una delle sezioni successive. Inoltre, anche il prodotto tra densità e velocità rappresenta un'altra fonte di non linearità, che porta all'esistenza, ad esempio, di onde d'urto all'interno di flussi supersonici, attraverso le quali si verifica un salto discontinuo di pressione, densità e temperatura.

2.2 Equazioni di Eulero

Il modello fisico che rappresenta un fluido compressibile non viscoso e che non conduce calore è descritto dalle equazioni di Eulero, che derivano direttamente da una semplificazione delle equazioni di Navier-Stokes in cui gli sforzi viscosi e i termini di conduzione di calore vengono trascurati. Tale approssimazione modifica profondamente la natura matematica nelle equazioni, in quanto il sistema di PDE si riduce dal secondo al primo ordine, nel passaggio dalle equazioni di Navier-Stokes a quelle di Eulero, modificando conseguentemente il tipo di condizioni al contorno imponibili al problema e il proprio carattere matematico, da parabolico-iperbolico a puramente iperbolico.

Il sistema di equazioni in forma conservativa e differenziale è espresso come segue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{q}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q} \otimes \vec{q} + p \vec{I}) = \rho \vec{f}_e \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{q} H = W_f \quad (2.24)$$

Così come fatto per le equazioni di Navier-Stokes, anche le equazioni di Eulero possono essere scritte in forma compatta tramite l'Eq. (2.18) in cui le

componenti cartesiane f , g , h , per il vettore dei flussi \vec{F} sono date da

$$f = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{vmatrix} \quad g = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{vmatrix} \quad h = \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

Poiché anche nelle equazioni di Eulero è presente la non linearità provocata dal prodotto tra densità e velocità $\rho\vec{q}$, possono verificarsi situazioni in cui le soluzioni delle equazioni sono discontinue, come nel caso dei vortex sheets, delle discontinuità da contatto o delle onde d'urto in corrispondenza di flussi di corrente supersonici.

2.3 Il problema della turbolenza

Una proprietà fondamentale di tutti i flussi di corrente, che rende il loro studio sì arduo ma molto stimolante, è la presenza della turbolenza. Con tale concetto si indica il manifestarsi di fluttuazioni statistiche delle variabili in gioco, come ad esempio velocità, pressione, densità e temperatura, attorno ad un valor medio. Le oscillazioni turbolente hanno il carattere di un'instabilità intrinseca nel flusso di corrente per via della presenza dei termini convettivi non lineari nelle equazioni. Ciò porta al fatto che qualsiasi tipo di flusso, al di sopra di un certo valore di numero di Reynolds, definito appunto Reynolds critico, transisca naturalmente dalla forma laminare a quella turbolenta.

2.3.1 Direct Numerical Simulation

Tra i vari metodi che permettono uno studio di tale problema, quello più “semplice” in termini logici, ma il più complesso in termini computazionali e realizzativi, è rappresentato dalla Direct Numerical Simulation (DNS) che ha come obiettivo quello di simulare l'intero range di frequenze alle quali oscillano le fluttuazioni turbolente. Se da una parte tale approccio è incredibilmente accurato, dall'altro, come è facilmente intuibile, è anche enormemente dispendioso in termini di potenza e tempi di calcolo. Tali difficoltà crescono all'aumentare del numero di Reynolds, in quanto la dimensione caratteristica delle più piccole strutture turbolente, nota come (micro)scala di Kolmogorov η , alla quale i fenomeni diffusivi riescono a dissipare la turbolenza, è inversamente proporzionale a $Re^{3/4}$. Se ad esempio si scegliesse di risolvere le strutture turbolente di dimensione η con n punti per unità di lunghezza, il numero totale di punti di calcolo, e il numero di relative operazioni aritmetiche sarebbero dell'ordine di $n^3 \cdot Re^{9/4}$. Inoltre, poiché le equazioni di Navier-Stokes devono essere integrate nel tempo, con un passo temporale determinato dal tempo caratteristico delle

scale turbolente più piccole, proporzionali a $Re^{3/4}$, lo sforzo computazionale richiesto per portare avanti una simulazione DNS sarebbe proporzionale a Re^3 . Ciò significa che dato un sistema fluidodinamico da investigare, aumentare il numero di Reynolds di un fattore 10 vorrebbe dire richiedere un incremento nella potenza di calcolo di 1000 volte almeno, e un accrescimento di un fattore $10^{9/4} = 178$ per i requisiti di memoria.

Per tale ragione, come si accennava nel capitolo introduttivo, l'impiego delle simulazioni DNS per applicazioni in ambito aeronautico e propulsivo è fuori dalla portata delle capacità odierne e del prossimo futuro, in quanto l'ordine di grandezza dei numeri di Reynolds oscilla tra 10^5 e 10^7 .

Attualmente due sono le alternative alla DNS per lo studio della turbolenza all'interno di un'analisi CFD: l'implementazione di una Large Eddy Simulation (LES) e la soluzione del modello costituito dalle Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations.

2.3.2 Large Eddy Simulation

Se tramite una DNS vengono calcolate direttamente le fluttuazioni turbolente legate a tutte le scale dei vortici, la LES si propone anch'essa di risolvere nello spazio e nel tempo le fluttuazioni turbolente che però risultano di dimensioni maggiori rispetto ad una certa lunghezza caratteristica, mentre gli effetti presenti al di sotto di tale scala vengono descritti tramite l'impiego di un adeguato modello di chiusura semi-empirico.

Le equazioni che descrivono una Large Eddy Simulation sono derivate direttamente dalle equazioni di Navier-Stokes applicando un filtro che separa lo spettro delle oscillazioni tra le frequenze calcolate direttamente e quelle opportunamente modellizzate. Tipicamente la lunghezza di cut-off del filtro risulta proporzionale alla dimensione degli elementi di griglia, da cui deriva il nome di subgrid scale per la scala di cut-off. Pertanto il campo di moto fluidodinamico filtrato può essere assunto come il campo fluidodinamico vero ristretto alle sole componenti che possono essere risolte dalla griglia selezionata.

Tuttavia, poiché un'ampia gamma dello spettro delle fluttuazioni continua ad essere computato direttamente, gli sforzi computazionali richiesti da una simulazione LES rimangono molto alti. Può essere dimostrato, infatti, che la potenza di calcolo totale richiesta per una Large Eddy Simulation risulta proporzionale a $Re^{9/4}$, che sebbene rispetto a Re^3 per una Direct Numerical Simulation, è ridotta quasi della metà, continua ad essere difficilmente pratica per applicazioni ad altissimi numeri di Reynolds.

2.4 Reynolds Averaged Navier-Stokes

L'approccio al giorno d'oggi più diffuso nella maggior parte delle applicazioni in cui viene impiegata la CFD consiste nell'implementare una media nel tempo sulle equazioni di Navier-Stokes, in modo da ottenere delle leggi di governo che descrivano l'evoluzione delle proprietà medie del flusso. Su tale idea si fonda l'impiego delle Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations. Mediando nel tempo le equazioni, scompare la possibilità di risolvere direttamente le fluttuazioni turbolente, e risulta essenziale trovare un modello di chiusura, di natura empirica o semi-empirica, che possa rappresentare gli effetti delle scale non risolte della turbolenza, utilizzando le informazioni disponibili dal flusso di corrente medio. Tale aspetto è ciò che rende le RANS meno accurate rispetto alle simulazioni LES e DNS, in quanto è necessario fare delle ipotesi molto forti che purtroppo spesso non sono soddisfatte dai problemi reali e che allontanano la soluzione dalla realtà fisica del sistema studiato.

Tuttavia, tale approccio risulta fortemente efficace nella pratica della risoluzione dei problemi di interesse, in quanto spesso le esigenze ingegneristiche si limitano alla ricerca di proprietà medie o integrali del campo di moto, come ad esempio forze aerodinamiche agenti su superfici solide o campi di perdite di pressione totale. Inoltre, poiché la potenza computazionale richiesta per la soluzione delle RANS è di diversi ordini di grandezza inferiore rispetto a quella necessaria per un'analisi DNS, soprattutto al crescere del numero di Reynolds del problema, l'impiego delle Reynolds Averaged Navier-Stokes equations risulta lo strumento più efficiente in fase di progettazione industriale. A tale vantaggio si somma anche il fatto che è possibile utilizzare le RANS per problemi in cui le quantità medie sono costanti lungo una certa direzione, impostando solamente una simulazione bidimensionale. Ciò rende il calcolo del campo di moto molto più economico rispetto alla LES e alla DNS in cui è comunque necessaria una simulazione tridimensionale per una descrizione corretta della dinamica della vorticità.

Entrando nel dettaglio del procedimento con cui le equazioni di Navier-Stokes vengono mediate, data una qualsiasi grandezza turbolenta A , essa è decomposta in:

$$A = \bar{A} + A' \quad (2.26)$$

dove

$$\bar{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{T_c} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} A(\vec{x}, t + \tau_c) d\tau_c \quad (2.27)$$

\bar{A} rappresenta la media nel tempo della quantità turbolenta A , in cui è necessario che T_c venga scelto, quando possibile, sufficientemente grande rispetto al tempo caratteristico della turbolenza ma allo stesso tempo sufficientemente piccolo in confronto al tempo caratteristico di tutti i fenomeni non stazionari. A' , il secondo addendo nell'Eq. (2.26), rappresenta il contributo dovuto alle

fluttuazioni turbolente e che possiede una natura stocastica.

Poiché nel corso di tutta la seguente dissertazione ci si rifarà solamente a flussi compressibili, il modello impiegato per i calcoli si basa su una media di Favre delle equazioni di Navier-Stokes. Tale scelta è dovuta alla volontà di evitare la presenza di termini, prodotti dal processo di media, in cui compaiono i prodotti tra le fluttuazioni di densità e di altre variabili fluidodinamiche. Pertanto, piuttosto che la decomposizione espressa dall'Eq. (2.26) è stata implementata la seguente forma:

$$A = \tilde{A} + A'' \quad (2.28)$$

in cui

$$\tilde{A} = \frac{\rho A}{\bar{\rho}} \quad (2.29)$$

e

$$\overline{\rho A''} = 0 \quad (2.30)$$

Nel seguito verrà presentato il modello di Spalart-Allmaras impiegato come modello di chiusura per le RANS nei calcoli condotti e presentati nel corso del Capitolo 5.

2.4.1 Modello di Spalart-Allmaras

Il modello di Spalart-Allmaras è uno dei modelli di turbolenza più diffusi per completare il sistema di equazioni RANS, per via del suo ottimo comportamento nello studio dei flussi di corrente ad alti numeri di Reynolds all'interno di un canale, in cui il regime turbolento è completamente sviluppato. Esso richiede la risoluzione di una sola equazione di trasporto, per la variabile $\tilde{\nu}$ che rappresenta la viscosità turbolenta modificata, talvolta denominata variabile di Spalart-Allmaras. La versione presentata del modello è quella impiegata nell'implementazione del codice numerico [3] descritto nel capitolo successivo, che si basa a sua volta sulla descrizione fatta da Allmaras, Johnson e Spalart [4]. Il sistema di equazioni completo, è il seguente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j (E + p)) = \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \hat{\tau}_{ij} - q_{T,j}] \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \tilde{\nu}) &= \rho(\hat{P} - \hat{D}) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + \\ \frac{cb_2}{\sigma} \rho \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} & \end{aligned} \quad (2.34)$$

Il flusso di calore include il contributo delle fluttuazioni turbolente modellizzato tramite l'analogia di Reynolds ed espresso tramite l'introduzione del numero di Prandtl turbolento Pr_t , fissato per i calcoli a $Pr_t = 0.9$:

$$q_{T,i} = -\frac{\gamma}{(\gamma-1)} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.35)$$

Se il tensore degli sforzi di Reynolds $\overline{\tau_{ij}}$ è espresso come

$$\overline{\tau_{ij}} = 2\mu_t \left[S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (2.36)$$

il tensore degli sforzi totali, che include sia il contributo laminare che quello turbolento è

$$\hat{\tau}_{ij} = 2\mu \left[S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + \overline{\tau_{ij}} \quad (2.37)$$

La viscosità turbolenta è invece definita come

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1} \quad (2.38)$$

in cui la funzione di smorzamento f_{v1} è data da

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{vi}^3} \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (2.39)$$

I termini di produzione e distruzione \hat{P} e \hat{D} nell'Eq. (2.34) sono espressi come

$$\hat{P} = c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} \quad \hat{D} = c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 \quad (2.40)$$

dove d è la distanza dalla parete più vicina mentre la vorticità modificata \tilde{S} è definita come segue:

$$\tilde{S} = \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (2.41)$$

$$\tilde{S} = \begin{cases} S + \tilde{S} & \text{se } \tilde{S} \geq -c_{v2} S \\ S + \frac{S(c_{v2}^2 S + c_{v3} \tilde{S})}{(c_{v3} - 2c_{v2})S - \tilde{S}} & \text{se } \tilde{S} < -c_{v2} S \end{cases} \quad (2.42)$$

2.5. Condizioni al contorno

Infine la funzione f_w espressa in (2.40) è definita dalle seguenti espressioni:

$$f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6} \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r) \quad r = \min \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}, r_{lim} \right) \quad (2.43)$$

Le costanti utilizzate per il modello sono riportate di seguito.

$$\begin{array}{lll} c_{b1} = 0.1355 & \sigma = 2/3 & c_{b2} = 0.622 \\ \kappa = 0.41 & c_{w1} = c_{b1}/\kappa^2 & c_{w2} = 0.3 \\ c_{w3} = 2 & c_{v1} = 7.1 & c_{t1} = 1 \\ c_{t2} = 2 & c_{t3} = 1.2 & c_{t4} = 0.5 \\ r_{lim} = 10 & c_{v2} = 0.7 & c_{v3} = 0.9 \end{array} \quad (2.44)$$

2.5 Condizioni al contorno

La scelta del modello fisico da implementare non basta da sola per la risoluzione di un dato campo fluidodinamico. Insieme allo specifico sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali è necessario definire, infatti, una serie di condizioni iniziali e condizioni al contorno che rendano il problema ben posto. Ciò vuol dire, nell'accezione espressa da Hadamard, che la soluzione del problema, oltre ad esistere ed essere unica, deve dipendere in maniera continua dalle condizioni al contorno ed iniziali.

Poiché i calcoli condotti hanno l'obiettivo di investigare il comportamento di un flusso di corrente in condizioni stazionarie, è facilmente dimostrabile come la selezione delle condizioni iniziali non influisca sulla soluzione numerica finale. Pertanto, nel risolvere le equazione di Eulero, a $t = 0$ sono state imposte delle condizioni fluidodinamiche costanti ed omogenee in tutti i punti dello spazio, mentre passando alle RANS, si è dato in input al codice di calcolo, come condizione iniziale, l'ultimo passo nel tempo elaborato risolvendo le equazioni di Eulero.

Ben più tortuoso è il sentiero che porta alla decisione sulle condizioni al contorno da adottare. Tale difficoltà deriva principalmente dalla necessità di assecondare la natura matematica delle equazioni, strettamente legata al modo con cui si propagano le informazioni all'interno della corrente fluida. Tipicamente, è possibile distinguere i problemi descritti da sistemi di PDE in iperbolici, parabolici, ellittici o ibridi in base alle caratteristiche degli autovalori di una matrice associata a tali sistemi. Il numero e il tipo di tali autovalori guida la scelta delle condizioni al contorno, con l'obiettivo della delineazione di un problema ben posto e che conseguentemente rispetti la natura fisica dei fenomeni studiati. L'esempio più lampante risiede nelle equazioni di Eulero, in cui gli effetti della propagazione delle onde sono perfettamente descritti dai segnali trasportati lungo le linee caratteristiche.

2.5.1 BCs per le equazioni di Eulero

Il sistema di equazioni di Eulero time-dependent, cioè in cui compaiono anche le derivate nel tempo, rappresenta un problema completamente iperbolico nello spazio-tempo. Ciò significa che la fisica rappresentata da tali equazioni è dominata dalla propagazione di onde all'interno del dominio e che conseguentemente le condizioni imposte al contorno non devono violare tale propagazione. In altri termini, dato lo spazio formato dalla direzione normale localmente ad una parete, e dal tempo (n, t) , se il generico autovalore del sistema λ rappresenta la velocità di propagazione dell'onda, la traiettoria che descrive il percorso di propagazione del segnale trasportato da tale onda è $dn/dt = \lambda$. Quando λ è positivo, l'informazione trasportata lungo la linea caratteristica si propaga dall'esterno verso l'interno del dominio di calcolo, pertanto è necessario imporre una condizione al contorno fisica. Al contrario, se λ è negativo, sarebbe totalmente sbagliato e discorde con la fisica del problema, imporre una condizione al contorno, in quanto la propagazione dell'informazione avviene dall'interno del dominio verso il bordo. Pertanto, il numero di condizioni al contorno che possono essere imposte su un bordo è pari al numero di caratteristiche che entrano all'interno del dominio computazionale.

In un dominio 3D, come quello considerato ai fini dei calcoli condotti, il numero di linee caratteristiche è pari a cinque, e le velocità con cui si propagano i segnali lungo tali linee sono definite dai seguenti autovalori:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \vec{q} \cdot \vec{n} + a = q_n - a \\ \lambda_2 &= \vec{q} \cdot \vec{n} = q_n \\ \lambda_3 &= \vec{q} \cdot \vec{n} = q_n \\ \lambda_4 &= \vec{q} \cdot \vec{n} = q_n \\ \lambda_5 &= \vec{q} \cdot \vec{n} + a = q_n + a\end{aligned}$$

in cui q_n rappresenta la componente di velocità normale alla superficie considerata e a rappresenta la velocità del suono.

Il primo e l'ultimo autovalore raffigurano la velocità di propagazione delle onde acustiche, mentre gli altri sono associati alla propagazione di tre differenti grandezze fisiche attraverso una discontinuità di contatto.

Poiché i problemi affrontati nel proseguo della trattazione sono caratterizzati da un campo di moto subsonico, tutti gli autovalori associati al sistema delle equazioni di Eulero sono positivi, ad eccezione di uno, λ_1 . Per tale motivo in un dominio tridimensionale il numero di condizioni al contorno imposte sulla sezione di inlet è pari a quattro, mentre soltanto una è la condizione fisica che è possibile imporre sulla sezione di outlet. Come spesso accade nel caso di flussi "interni", le grandezze imposte all'inlet sono la pressione totale p° , la temperatura totale T° e la direzione della corrente definita dai due angoli di incidenza α_{in} e di imbardata β_{in} , posto sempre a zero nei calcoli condotti; per

la sezione di outlet, invece, è stata selezionata la pressione statica p . In corrispondenza delle pareti solide del dominio, poiché vige la condizione di non penetrazione della massa e di altri flussi convettivi, la condizione di tangenza è forzata definendo all'esterno del dominio, un campo di velocità fittizio speculare a quello fisico.

2.5.2 BCs per le equazioni di Navier-Stokes

Nell'introduzione della viscosità e dei flussi termici risiede la causa del cambio della natura matematica, da iperbolica a parabolica-iperbolica, passando dal sistema di equazioni di Eulero al sistema di equazioni di Navier-Stokes. Ciò ha un grande impatto sul comportamento fisico descritto dalle equazioni e conseguentemente sulle condizioni al contorno da imporre ai bordi del dominio di calcolo. La difficoltà nel riconsiderare tutte le condizioni da imporre al contorno quando si viene traghettati dal problema iperbolico di Eulero a quello parabolico-iperbolico di Navier-Stokes viene parzialmente mitigata dalla seguente considerazione: nella stragrande maggioranza delle applicazioni aerospaziali i flussi di corrente sono caratterizzati da un numero di Reynolds molto alto, pertanto i termini convettivi saranno dominanti rispetto a quelli diffusivi ovunque ad eccezione delle zone limitrofe alle superfici solide. Quanto appena detto ha una conseguenza diretta di grande utilità pratica poiché è possibile mantenere, risolvendo le equazioni di N-S, le stesse condizioni al contorno imposte sulla sezione di inlet e di outlet descritte nella sezione precedente nel caso di un campo inviscido governato dalle equazioni di Eulero.

A cambiare drasticamente sono invece le condizioni da imporre sulle superfici solide, in prossimità delle quali deve essere soddisfatta la condizione di non scivolamento (no-slip condition), per cui tutte le componenti del vettore velocità \vec{q} devono essere nulle su tutte le superfici solide del dominio. Inoltre, per quanto riguarda l'equazione di conservazione dell'energia (2.11), è necessario aggiungere una nuova condizione, che in funzione delle proprietà della parete può essere di Dirichlet, Neumann o di Robin. In particolare, per le pareti solide presenti nei domini di calcolo impiegati nelle simulazioni condotte e presentate nei successivi capitoli, è stata implementata una condizione al contorno di Neumann: $\partial T / \partial n = 0$.

2.5.3 BCs per il modello di Spalart-Allmaras

Scegliendo di completare il problema delle Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) equations con l'equazione di trasporto di Spalart-Allmaras per la viscosità turbolenta modificata $\tilde{\nu}$, risulta indispensabile imporre un'ulteriore condizione al contorno per tale grandezza. In corrispondenza delle pareti solide le fluttuazioni di velocità devono essere uguali a zero e conseguentemente anche la viscosità turbolenta μ_t deve valere zero, pertanto è possibile imporre per $\tilde{\nu}$

la condizione al contorno di Dirichlet omogenea lungo le superfici solide. Il problema si fa molto più complesso sulla sezione di inlet, in cui deve essere specificata la viscosità turbolenta μ_t . Tuttavia tale grandezza non misurabile direttamente in un esperimento può essere calcolata per mezzo di relazioni empiriche che sfruttano le dimensioni delle scale caratteristiche di turbolenza e l'intensità turbolenta. Ad ogni modo viene tipicamente suggerito di usare nel caso di flussi completamente turbolenti una viscosità turbolenta modificata che stia nel range $3\nu \leq \tilde{\nu} \leq 5\nu$, in cui ν rappresenta la viscosità cinematica della corrente. In tutte le simulazioni numeriche implementate nel corso del lavoro è sempre stata imposto $\tilde{\nu} = 3\nu$.

Capitolo 3

Schema Numerico

Il codice numerico impiegato per l'elaborazione dei risultati mostrati al Capitolo 5 è stato implementato all'interno del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale (DIMEAS) del Politecnico di Torino, e pensato per essere sfruttato in attività di ricerca e sviluppo.

Chiaramente, descriverne ed illustrarne tutti i dettagli esula dai fini che si propone il seguente lavoro di tesi e, d'altra parte, per farlo sarebbe necessaria una trattazione a sé stante molto approfondita.

Risulta comunque essenziale mostrare le idee fondamentali su cui si basa l'algoritmo di calcolo per conferire ai calcoli effettuati un imprescindibile sfondo di analisi numerica.

3.1 Discretizzazione nello spazio

Per discretizzare nello spazio le equazioni costituenti i modelli fisici introdotti nel corso del Capitolo 2 è stato impiegato il metodo agli elementi finiti discontinui di Galerkin (DG). In generale, i DG methods, ossia i metodi Discontinuous Galerkin, vengono largamente impiegati in ambito fluidodinamico in quanto riescono a fondere i principali vantaggi dei metodi ai volumi finiti e dei metodi agli elementi finiti. Con i primi condividono i molti flussi numerici che consentono di implementare il calcolo dei flussi con uno schema upwind, riuscendo ad accordare il carattere numerico con quello matematico delle equazioni, assicurando pertanto una grande stabilità. Tuttavia, una differenza molto marcata tra metodi agli elementi finiti e i metodi DG consiste nel diverso numero di gradi di libertà (Degrees of freedom DOFs) all'interno delle celle computazionali. Per i metodi FV (finite volume) le uniche quantità fluidodinamiche disponibili, ossia i valori medi delle grandezze conservative, risiedono nel centro del volume, pertanto per il calcolo delle variabili sulle interfacce sono necessarie le informazioni provenienti dai volumi adiacenti. Al

contrario, la ricostruzione delle informazioni di ordine superiore per i metodi DG viene di molto semplificata, grazie all'introduzione di diversi gradi di libertà all'interno degli elementi finiti.

3.1.1 Formulazione variazionale

Si consideri l'equazione di conservazione in forma differenziale compatta, espressa dall'Eq. (2.18) per la generica variabile u in un dominio Ω bidimensionale:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = Q \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}_0^+ \quad (3.1)$$

in cui F e G rappresentano le componenti lungo x e y del vettore dei flussi e Q un generico termine di sorgente. Si assuma che il dominio Ω sia suddiviso in una serie di elementi non sovrapposti Ω_e . Considerando una singola porzione di dominio Ω_e si definisce lo spazio funzionale V_h come:

$$V_h = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_{\Omega_e} \in P^p(\Omega_e) \quad \forall \Omega_e \in T_h \right\} \quad (3.2)$$

in cui $P^p(\Omega_e)$ è lo spazio dei polinomi di grado pari ed inferiore a p definito in Ω_e . Il grado polinomiale p può variare da elemento a elemento in quanto nessun requisito di continuità è imposto all'interfaccia tra gli elementi nello spazio V_h .

Se si considera una opportuna base di N_e funzioni Φ_i , è possibile definire un'approssimazione numerica della soluzione u_h all'interno dello spazio V_h tramite una combinazione lineare delle funzioni di base:

$$u_h(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \Phi = \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{u}_i \Phi_i \quad (3.3)$$

Sostituendo u_h nell'Eq. (3.1) si ottiene la seguente equazione per il residuo R_h :

$$R_h = \frac{\partial u_h}{\partial t} + \frac{\partial F_h}{\partial x} + \frac{\partial G_h}{\partial y} - Q \quad (3.4)$$

in cui F_h e G_h rappresentano l'approssimazione numerica delle componenti di flusso F e G .

I metodi che si basano sull'approccio di Galerkin prevedono che la proiezione del residuo sul piano V_h sia imposta uguale a zero:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} R_h v dx dy &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial u_h}{\partial t} v dx dy + \int_{\Omega_e} \frac{\partial F_h}{\partial x} v dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega_e} \frac{\partial G_h}{\partial y} v dx dy - \int_{\Omega_e} Q v dx dy = 0 \quad \forall v \in V_h \end{aligned} \quad (3.5)$$

Per cui, integrando per parti la precedente espressione si ottiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \frac{\partial u_h}{\partial t} v dx dy + \int_{\partial\Omega_e} (\hat{F}_h n_x + \hat{G}_h n_y) v ds - \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial v}{\partial x} F_h + \frac{\partial v}{\partial y} G_h \right) dx dy \\ & - \int_{\Omega_e} Q v dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

che rappresenta la formulazione variazionale, o debole, della discretizzazione discontinua di Galerkin, in cui n_x e n_y sono le componenti del versore normale e uscente dalla superficie Ω_e e s indica la curva che fa da contorno all'elemento. La questione che i flussi \hat{F}_h e \hat{G}_h rappresentino i flussi all'interfaccia tra due celle confinanti viene risolta introducendo un opportuno flusso numerico, distinguendo nel calcolo i flussi convettivi da quelli diffusivi.

Dovendo valere per ogni $v \in V_h$ è possibile considerare l'Eq. (3.6) per tutte le N_e funzioni di base, ad esempio definendo $v = \Phi_i$ con $1 \leq i \leq N_e$, ottenendo così la formulazione variazionale discreta del problema:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} \Phi_i \Phi_j dx dy + \int_{\partial\Omega_e} (\hat{F}_h n_x + \hat{G}_h n_y) \Phi_j ds - \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} F_h + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} G_h \right) dx dy + \\ & - \int_{\Omega_e} Q \Phi_j dx dy = 0 \quad 1 \leq j \leq N_e \end{aligned} \quad (3.7)$$

Introducendo infine la matrice di massa $[\mathbf{M}]$

$$[\mathbf{M}]_{ij} = \int_{\Omega_e} \Phi_i \Phi_j dx dy \quad (3.8)$$

l'Eq. (3.7) può essere riscritta in forma compatta nel seguente modo:

$$[\mathbf{M}] \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = - \int_{\partial\Omega_e} (\hat{F}_h n_x + \hat{G}_h n_y) \Phi ds + \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} F_h + \frac{\partial \Phi}{\partial y} G_h \right) dx dy + \int_{\Omega_e} Q \Phi dx dy \quad (3.9)$$

3.2 Discretizzazione nel tempo

Al termine della sezione precedente è stata scritta l'Eq. (3.1.1) che esprime in forma compatta la formulazione variazionale discreta discontinua di Galerkin per un generico elemento. L'intero sistema di equazioni definito per tutti gli elementi appartenenti al dominio può essere espresso come segue

$$[\mathbf{M}] \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt} = -\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (3.10)$$

in cui \mathbf{M} è la matrice di massa globale diagonale a blocchi, $\tilde{\mathbf{u}}$ è il vettore globale dei gradi di libertà e \mathbf{R} è il vettore globale dei residui ottenuto dagli integrali di volume e di superficie dell'Eq. (3.1.1).

Il codice di calcolo permette l'impiego di molti algoritmi di integrazione nel tempo, tra cui algoritmi multistep o i metodi Runge-Kutta, tuttavia le computazioni eseguite per il seguente lavoro sono state condotte utilizzando un metodo implicito. In particolare, è stato implementato lo schema di Eulero Backward, ottenuto semplicemente dalla linearizzazione dell'Eq. (3.10):

$$\mathbf{M} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n}{\Delta t} = - \left(\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}^n) + [\mathbf{J}] (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n) \right) \quad (3.11)$$

in cui $[\mathbf{J}]$ indica la matrice Jacobiana, sparsa a blocchi, contenente le derivate dei residui rispetto ai gradi di libertà:

$$\mathbb{J}_{ij} = \frac{\partial \mathbb{R}_i}{\partial \tilde{u}_j} \quad (3.12)$$

Riordinando l'Eq. (3.11) è possibile esprimerla come:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{M}] + [\mathbf{J}] \right) (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n) = -\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}^n) \quad (3.13)$$

$$[\mathbf{A}] (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n) = -\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}^n) \quad (3.14)$$

L'Eq. (3.14) esprime il sistema lineare che deve essere risolto, tramite un approccio iterativo, ad ogni passo nel tempo per calcolare e aggiornare ad ogni step il vettore globale dei gradi di libertà $\tilde{\mathbf{u}}$.

3.2.1 Controllo della CFL

Considerata un'equazione lineare in una dimensione del tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

in cui a è una costante e u indica una generica grandezza, procedendo alla sua discretizzazione nello spazio e nel tempo attraverso uno schema implicito si ottiene la seguente espressione:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - CFL(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) \quad CFL = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.16)$$

In questo caso è stata utilizzata un'approssimazione alle differenze in avanti (forward) per la semi-discretizzazione nello spazio, ma il discorso che segue vale identicamente per le differenze all'indietro (backward) e per le differenze centrate (central). Facendo un'analisi di stabilità sull'Eq. (3.16) si deriva che

tale schema implicito, come qualsiasi altro schema implicito, risulti incondizionatamente stabile. Ciò vuol dire che per assicurare la stabilità della soluzione la CFL , e conseguentemente il Δt , non è soggetta ad alcuna restrizione.

Tuttavia, lo stato di stabilità incondizionata di cui godono gli schemi impliciti vale solo ed esclusivamente per delle semplici equazioni lineari. Per equazioni ben più complesse, come ad esempio le RANS, non solo esiste un limite di stabilità ma è anche molto difficile da stimare analiticamente, in quanto fortemente dipendente dal particolare stato della soluzione in un certo punto del dominio ad un certo istante di tempo.

Pertanto il passo temporale Δt non può essere fissato ad un valore troppo alto, soprattutto all'inizio della simulazione quando i gradienti sono molto forti, in quanto si incorrerebbe nel rischio di ottenere una soluzione che abbia poco a che fare con la fisica del problema. Per via di quanto detto serve implementare ciò che solitamente viene indicata come pseudo-transient continuation strategy, ossia una strategia di evoluzione del CFL number. All'interno del codice il metodo adottato è quello proposto da Bassi et al. [5], per cui si prevede il controllo dei residui, che rappresentano di fatto le derivate nel tempo delle grandezze conservative. In particolare, vengono definiti x_{L^2} e x_{L^∞} :

$$x_{L^2} = \max \frac{|R_i|_{L^2}}{|R_{i0}|_{L^2}} \quad x_{L^\infty} = \max \frac{|R_i|_{L^\infty}}{|R_{i0}|_{L^\infty}} \quad 1 \leq i \leq M \quad (3.17)$$

due parametri che controllano l'evoluzione dei residui tramite l'impiego della norma due L^2 e della norma infinito L^∞ , in cui R_{i0} e R_i sono rispettivamente i residui della i -esima equazione all'istante iniziale e all'iterazione corrente, ed M indica il numero di equazioni di governo, che dipende dal modello fisico adottato e dalle dimensioni spaziali nel quale si sviluppa il problema. L'idea di fondo sui cui si basa tale algoritmo consiste nell'aumentare la CFL progressivamente fino ad un valore massimo, nel caso in cui i residui si abbassino nel tempo, al contrario, quando i residui tendono ad incrementare il proprio valore, la CFL deve abbassarsi fino ad un valore minimo. Ciò che è stato detto qualitativamente, in termini pratici è espresso dalle seguenti equazioni:

$$CFL = \begin{cases} \frac{CFL_0}{x^\alpha}, & \text{se } x \leq 1 \\ CFL_{\text{exp}} + (CFL_0 - CFL_{\text{exp}}) e^{\alpha \frac{CFL_0}{CFL_0 - CFL_{\text{exp}}} (1-x)}, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

in cui CFL_0 , CFL_{exp} e α rappresentano rispettivamente il minor CFL ammesso, il maggior CFL applicabile e un parametro che controlla la velocità di crescita. La variabile x nell'Eq. (3.18) è definita come:

$$x = \begin{cases} \min(x_{L^2}, 1) & \text{se } x_{L^\infty} \leq 1 \\ x_{L^\infty} & \text{se } x_{L^\infty} > 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

Sebbene l'algoritmo appena esposto risulti uno strumento molto potente durante le fasi di calcolo, non è affatto facile trovare i migliori valori numerici

3. Schema Numerico

per i coefficienti CFL_0 , CFL_{exp} e α , pertanto uno studio preliminare per la stima di essi dovrebbe essere condotto.

Capitolo 4

Secondary Flows: flussi di primaria importanza

Intorno alla metà del secolo scorso, l'inarrestabile sviluppo dell'industria aeronautica fa da sfondo ad un crescente e sempre più dettagliato studio delle turbomacchine impiegate per la costruzione di esoreattori (airbreathing engines). In particolare, la volontà di migliorarne le prestazioni, riducendo le perdite ed aumentando l'efficienza, si traduce in una necessità di comprendere approfonditamente la fluidodinamica che governa il passaggio del flusso di corrente attraverso gli stadi di compressori e turbine.

Sorge così l'interesse nell'indagare non solo l'evoluzione del moto medio della corrente nel suo percorso all'interno delle turbomacchine, ma soprattutto i cosiddetti secondary flows (flussi secondari), ossia l'insieme di tutte quelle strutture aerodinamiche, complesse e tridimensionali, che si generano quando lo strato limite presente sull'endwall interferisce con i profili delle pale¹.

Risalgono al sorgere degli anni '50 i primi articoli di Squire e Winter [6] e Hawthorne [7] che delineano la teoria classica dei secondary flows, mostrando come si verifichi un cambiamento di direzione della vorticità, presente all'interno dello strato limite entrante in una schiera di pale, passando dall'essere prevalentemente ortogonale alla direzione della corrente al divenire parallela rispetto ad essa, nella sua evoluzione tra la sezione di ingresso e la sezione di uscita. Da allora fino ad oggi, la letteratura in materia si è arricchita profusamente ed incessantemente di articoli e studi, evidenziando da una parte un enorme interesse verso il tema e dell'altra una grande difficoltà nel comprenderne a fondo i meccanismi, le cause e gli effetti sul funzionamento dell'intera turbomacchina.

Il ruolo dei secondary flows, infatti, al contrario di ciò che possa suggerire il nome stesso, è di primaria importanza per le prestazioni di una turbina a

¹ Per tale motivo i secondary flows vengono talvolta indicati come endwall flows.

gas; le perdite aerodinamiche dovute alle strutture generate in corrispondenza dell'endwall, spesso definite come secondary losses (perdite secondarie), contribuiscono sino al 30-50% sulle perdite aerodinamiche totali, come riportato da Sharma e Butler [8]. Inoltre, è necessario sottolineare come per aumentare l'efficienza e la potenza dei moderni motori aeronautici, ci si concentri spesso sul tentativo di aumentare la TIT². Sebbene storicamente tale parametro sia stato profondamente influenzato da limiti di tipo strutturale, e un grande sforzo sia stato fatto principalmente nella ricerca di nuovi e più resistenti materiali, negli ultimi decenni i più importanti miglioramenti nell'aumento delle temperature raggiungibili all'interno di una turbina, si devono all'evoluzione dei sistemi di raffreddamento delle pale, grazie ad una più approfondita conoscenza dello scambio di calore e della distribuzione 3D di temperatura all'interno dei passaggi degli stadi [9]. Appare chiaro, dunque, come per poter ottenere un quadro nitido e preciso delle mappe di temperatura e degli scambi termici in una turbina, sia necessario esaminare dettagliatamente tutti i moti fluidodinamici ed in particolare i secondary flows, che, con le loro strutture complesse, giocano un ruolo importante per la progettazione ed ottimizzazione di sistemi di raffreddamento, in special modo sulle pareti dell'endwall.

Presentati gli aspetti che più rendono stimolante e di grande interesse lo studio dei flussi secondari, è altresì imprescindibile mostrare i tratti che lo hanno reso nel tempo, e continuano a renderlo, estremamente complesso ed intricato. Storicamente, le difficoltà legate alla comprensione e alla descrizione del flusso di corrente che si sviluppa all'interfaccia tra un profilo di pala e la parete dell'endwall derivano principalmente dalla tridimensionalità delle strutture aerodinamiche, dalla loro ridotta dimensione rispetto agli strumenti di misura utilizzati, dalla loro non stazionarietà e dall'alta sensibilità alla geometria e alle condizioni operative. Inoltre, come espresso da Denton nel suo celebre paper sulle perdite nelle turbomacchine [10], un errore spesso commesso in passato è stato quello di studiare separatamente, attraverso una divisione netta: il flusso di corrente praticamente bidimensionale attorno ai profili di pala responsabile delle profile losses, i flussi secondari in prossimità dell'endwall responsabili delle secondary losses e il campo di moto in corrispondenza del tip delle palette statoriche responsabile delle leakage losses, causate principalmente da fluido che "sfugge" dall'intercapedine tra pala e casing e che si sottrae al "dovere" di compiere lavoro sulla macchina. Suddivisione, quella appena enunciata, che oltre ad apparire infondata nella realtà, in quanto i tre campi di moto interagiscono fortemente l'uno con l'altro, ha portato nel tempo all'impiego di modelli empirici o semi-empirici, spesso lontani dalla comprensione della vera essenza fluidodinamica.

Col passare degli anni e con il progredire degli strumenti e dei mezzi a dispo-

² Turbine Inlet Temperature, fondamentale parametro di progetto

sizione, fortunatamente, molti dei problemi citati sopra sono stati arginati. Grande importanza ha avuto infatti lo sviluppo, della laser doppler anemometry ed anemometria a filo caldo prima e delle tecniche numeriche di CFD dopo, per una descrizione dettagliata e puntuale delle strutture fluidodinamiche. Nel seguito si cercherà di fornire un ritratto quanto più preciso e completo di tutte le strutture che compongono i flussi secondari, seguendo le tappe che storicamente hanno portato alla consapevolezza odierna della questione.

4.1 Descrizione fisica

Come già anticipato, molti sono stati gli autori che negli anni hanno ampliato, con i propri studi, la letteratura in materia di secondary flows. La seguente sezione si propone lo scopo di fornire un disegno puntuale della natura fisica insita nei flussi secondari, seguendo la linea cronologica che ha consentito nel tempo, aggiungendo tassello per tassello, alla composizione del mosaico odierno del tema in esame. Fondamentali in quest'ottica sono stati gli illustri articoli di Sieverding [11] e Langston [12], i quali hanno condotto un importantissimo lavoro di rassegna dei più importanti lavori in letteratura sui flussi secondari, rispettivamente dalla fine degli anni '70 al 1985 e dal 1985 ai primi anni del nuovo millennio.

4.1.1 Dalle teoria classica al vortice a ferro di cavallo

Uno dei primi modelli fisici fu proposto da Hawthorne nel 1955 [7], il cui sistema di strutture vorticoso è rappresentato in Figura 4.1. La schematizzazione suggerita prevede la presenza del cosiddetto *passage vortex* che si genera all'interno del passaggio a causa della distorsione dei filamenti vorticosi propri dello strato limite all'inlet, a causa della curvatura delle palette. Viene inoltre presentato un sistema di vortici in corrispondenza del bordo di fuga, suddivisi dall'autore in due gruppi:

- *Trailing Filament Vortices*, provocati dalla diversa velocità, tra dorso e ventre, con cui si propagano i filamenti vorticosi all'interno del passaggio;
- *Trailing Shed Vorticity*, causata dalla variazione di circolazione della corrente in direzione radiale.

Come si osserva in Figura 4.1, il senso di rotazione delle due strutture è contrario a quello del passage vortex, vortice che, come si vedrà nel corso della trattazione, ricopre un ruolo molto importante nel passaggio del flusso di corrente attraverso una schiera di pale di turbina.

Tale raffigurazione dei flussi secondari, derivata teoricamente da modelli aerodinamici classici, sarà il punto di partenza su cui verranno costruiti tutti i

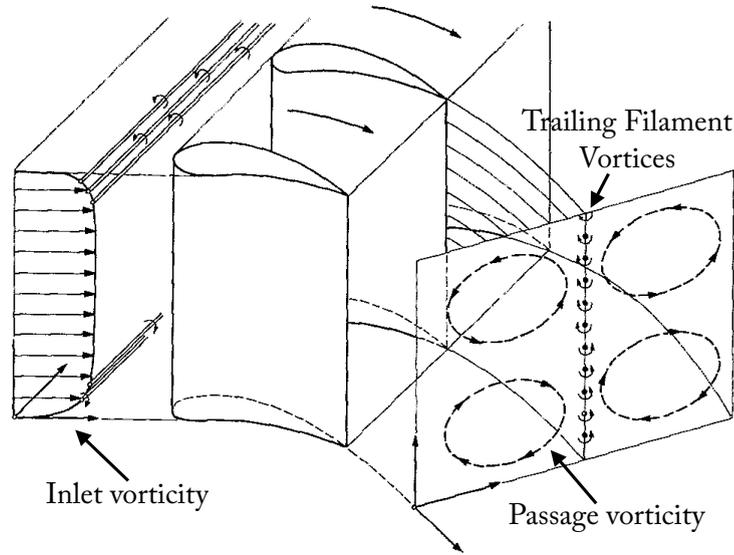


Figura 4.1: Modello di secondary flows proposto da Hawthorne [7].

modelli successivi, arricchendolo di nuovi particolari e considerazioni possibili grazie all'ausilio di prove sperimentali.

Come evidenziato da Sieverding [11], una vera svolta nella ricerca sui secondary flows si verificò grazie ad un cambio di approccio radicale nei confronti del problema; se fino ad un certo momento le analisi venivano condotte utilizzando un volume di controllo, in cui i parametri considerati erano solo le grandezze in prossimità della sezione di entrata e della sezione d'uscita, si intuì come si dovesse passare a delle indagini concentrate sull'interferenza tra endwall e pale lungo tutto lo sviluppo assiale della schiera.

In quest'ottica, Langston, Nice e Hooper [13] posero, nel loro articolo, le basi per la comprensione moderna dei flussi secondari, evidenziando l'importante ruolo che interpreta all'interno di essi, il vortice a ferro di cavallo (horseshoe vortex, in inglese), la cui presenza era già ben nota dagli anni '50, ma che aveva suscitato fino ad allora ben poco interesse da parte degli studiosi delle turbomacchine.

L'horseshoe vortex si manifesta, in generale, ogni qual volta che uno strato limite bidimensionale, sviluppatosi su una superficie piana, incontra la parte anteriore di un corpo tozzo o il bordo di attacco di un profilo, montato ortogonalmente alla superficie. Come mostrato in Figura 4.2, lo strato limite a monte si separa in corrispondenza del punto di separazione indicato sul piano di simmetria, mostrando però una linea di separazione che avvolge simmetricamente tutta la circonferenza del cilindro. In prossimità di tale zona, le linee di corrente fortemente decelerate dalla presenza del corpo, si deflettono verso l'endwall per via del gradiente di pressione verticale, arrotolandosi, creando

una struttura vorticoso denominata per l'appunto vortice a ferro di cavallo, o vortice a staffa. Il nome deriva dalla particolare forma della struttura, che sebbene continua nello spazio, può essere scomposta schematicamente in tre vortici: quello principale, con vorticità allineata prevalentemente con l'asse z , e le due branche, con vorticità di ugual modulo e verso opposto, orientate principalmente lungo la direzione della corrente media x .

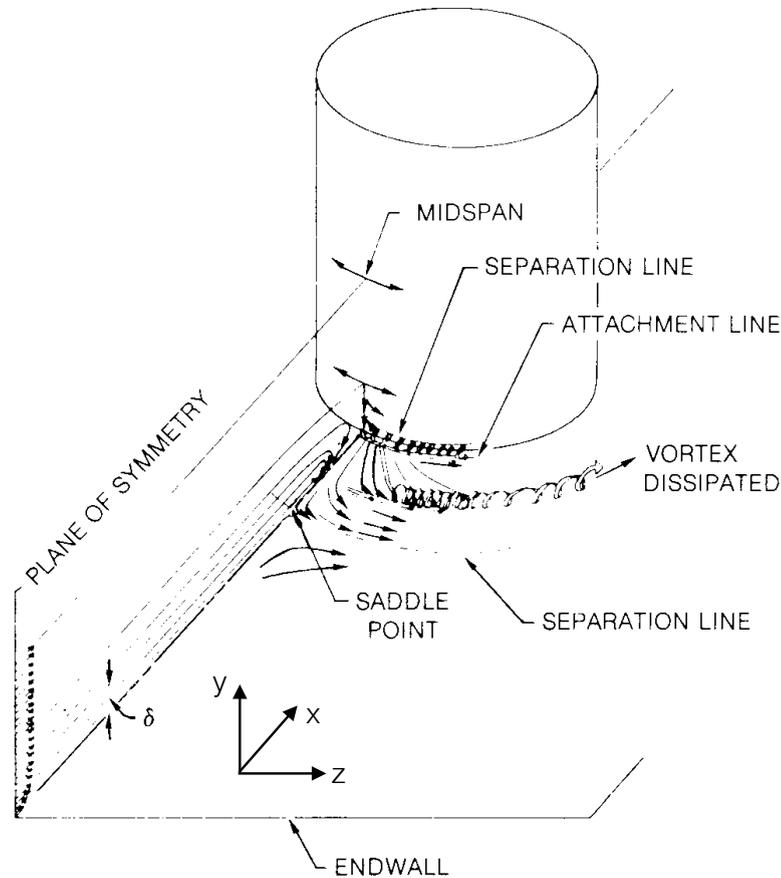


Figura 4.2: Vortice a ferro di cavallo formatosi all'interfaccia tra endwall e un cilindro, sketch di Eckerle e Langston [14].

I meccanismi fisici di base che spiegano un tale sistema sono ben descritti da Agui e Andreopoulos [15]. La vorticità dello strato limite a monte $\omega_z \simeq -\partial u/\partial y$, orientata in direzione dell'asse z , quando appropia l'ostacolo, risulta stirata in direzione radiale y dal gradiente di velocità laterale $\partial w/\partial z$ e allo stesso tempo orientata in direzione assiale x . Inoltre, l'accelerazione o la decelerazione del flusso di corrente in direzione longitudinale stira o comprime ulteriormente le linee vorticoso.

Tuttavia, sebbene il fenomeno della formazione dell'horseshoe vortex in pros-

simità dell'interfaccia endwall-cilindro sia stato da sempre studiato e compreso facilmente, la analoga struttura che si sviluppa all'interfaccia tra endwall e schiera di pale all'interno di una turbina, è considerata una delle più complicate tra le famiglie di flussi.

4.1.2 Modello di Langston

Come si diceva, uno dei primi studi che portano in primo piano il grande peso del vortice a ferro di cavallo all'interno dei flussi secondari fu quello di Langston et al. [13], in cui venne proposto il quadro delle strutture vorticosi in prossimità dell'endwall rappresentato in Figura 4.3, estratta da un articolo successivo di Langston [16].

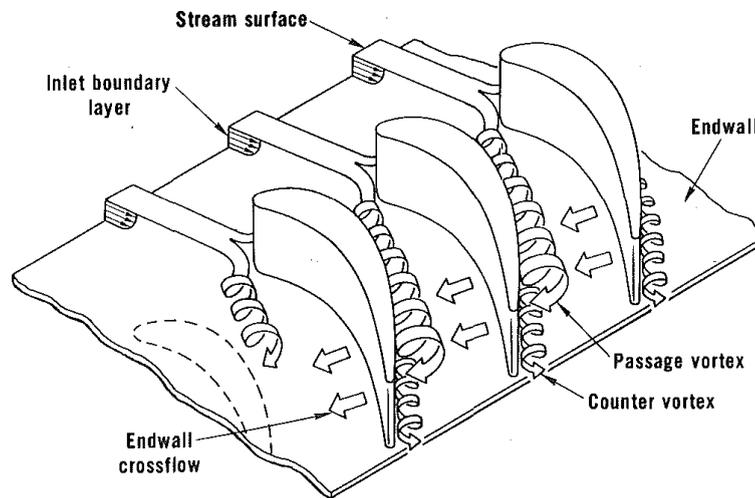


Figura 4.3: Strutture vorticosi in prossimità dell'endwall, sketch di Langston [16].

Lo strato limite sviluppatosi sull'endwall, entrante nei passaggi della schiera di pale che, come visto per un cilindro, separandosi in prossimità del punto di separazione si sviluppa per instaurare un vortice a ferro di cavallo simmetrico attorno ad esso, nel caso delle palette di turbina, dà vita alla formazione di un horseshoe vortex altamente asimmetrico. Le due branche del vortice, che nel proseguo della trattazione saranno spesso indicate con il termine inglese "leg", entrano all'interno di passaggi adiacenti; una a contatto con la superficie dorsale (suction side leg o suction leg), l'altra a contatto con la superficie ventrale (pressure side leg o pressure leg). In Figura 4.3 viene indicato, tramite due grosse frecce per ogni passaggio, l'endwall crossflow, ossia il flusso di corrente in direzione trasversale, causato dal salto di pressione tra la sovrappressione in prossimità della superficie ventrale da una parte e dalla depressione in

prossimità della superficie dorsale dall'altra, che ha come effetto quello di trasportare la pressure side leg del vortice a ferro di cavallo verso la superficie dorsale del profilo adiacente, alimentandone la vorticità e facendola fondere con il passage vortex, con cui condivide lo stesso senso di rotazione.

La suction side leg, che nello sketch viene indicata con il nome di counter vortex per sottolinearne la vorticità in senso opposto rispetto al passage vortex, viene ipotizzata come una linea vorticoso ruotante attorno all'asse del vortice di passaggio; usando la stessa analogia di Langston, come un pianeta in orbita attorno al sole.

Nel 1983 Sieverding e Van den Bosche [17] con l'utilizzo di fumi colorati fornirono una descrizione più dettagliata di quella di Langston [16] in merito all'interazione tra passage e counter vortex.

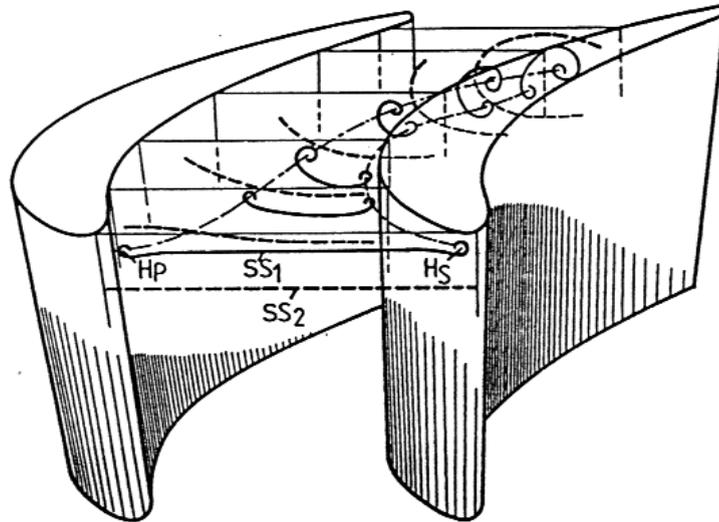


Figura 4.4: Evoluzione dell'interazione tra suction side leg e passage vortex attraverso il passaggio di una schiera di profili presentata da Sieverding e Van den Bosche [17].

In Figura 4.4 due superfici di corrente sono rappresentate dalle rispettive linee generatrici, SS_1 in linea continua e SS_2 in linea tratteggiata. La differenza tra le due superfici di corrente che partono a monte dell'inlet e terminano sulla sezione d'uscita del passaggio, è la loro posizione in direzione radiale: la superficie SS_1 si trova ad una distanza dall'endwall minore dello spessore dello strato limite, mentre SS_2 giace al di fuori dello strato limite sviluppatosi sull'endwall.

È evidente come in prossimità del bordo di attacco la superficie SS_1 si arrotoli alle estremità andando a delineare i due rami del vortice a ferro di cavallo, la pressure side leg H_p e la suction side leg H_s , quando invece nella maggior parte

del passaggio la superficie appare praticamente indisturbata. Subito a valle del bordo di attacco tale superficie comincia lentamente a ruotare, includendo in questo movimento anche i vortici H_S ed H_P che continuano simultaneamente a ruotare attorno ai propri assi. Le conclusioni degli autori sono simili a quelle di Langston et al. [13], sottolineando come la pressure side leg H_P , seguendo una traiettoria lineare durante il passaggio, condivide lo stesso asse e senso di rotazione con il passage vortex, con cui si fonde, mentre la suction side leg H_S si avvolge in una spirale attorno all'altro sistema vorticoso.

4.1.3 Modello di Sharma e Butler

Una rappresentazione dei flussi secondari leggermente rivista rispetto a quelle finora presentate, venne fornita nel 1987 da Sharma e Butler [8], raffigurata in Figura 4.5. Quest'ultima è il frutto, da parte degli autori, di una revisione di articoli precedenti, tra cui [13] e [11], e di misure condotte in galleria del vento.

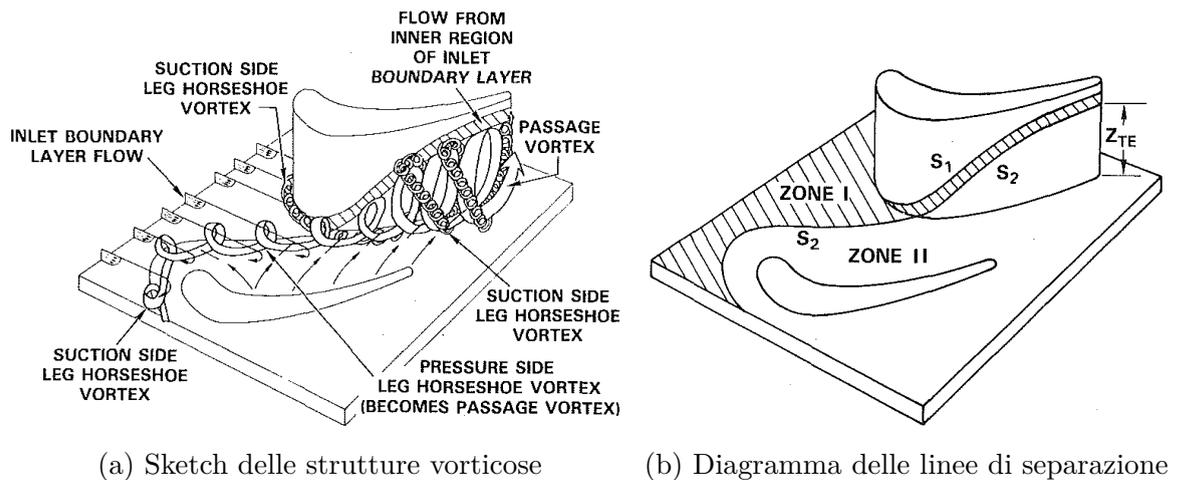


Figura 4.5: Rappresentazione dei Secondary Flows, Sharma e Butler [8].

In Figura 4.5a sono presenti molti degli elementi già mostrati precedentemente ma dettagli inediti, assenti negli articoli antecedenti, sono introdotti.

Tra i fattori di maggiore novità si trova l'osservazione che non tutto il fluido contenuto nello strato limite dell'endwall in ingresso (zona I in Figura 4.5b) rimane imprigionato nel vortice a ferro di cavallo, ma parte di esso, dopo essere incanalato verso la superficie dorsale (tra le linee di separazione S_1 e S_2 in Figura 4.5b), si distacca dall'endwall e supera il bordo di fuga in cima al passage vortex.

Inoltre, viene evidenziata la nascita di un nuovo strato limite sul fondo, a

valle della linea di separazione definita dall'horseshoe vortex. I filetti fluidi di tale strato limite, caratterizzati da un basso contenuto di quantità di moto, a causa del forte gradiente di pressione trasversale in direzione ventre-dorso di due pale adiacenti vengono inglobati tramite un processo di “entrainment” dalla pressure side leg, andando a costituire la struttura vorticoso principale dei flussi secondari: il vortice di passaggio (passage vortex, in inglese). Quello appena citato è un aspetto di forte novità rispetto al passato; non viene più giudicato il passage vortex come un elemento distinto e separato dalla pressure side leg del vortice a ferro di cavallo, bensì come una sua evoluzione.

4.1.4 Modello di Goldstein e Spores

Un ulteriore passo in avanti nella comprensione del campo fluidodinamico in prossimità dell'endwall venne presentato l'anno dopo, nel 1988, da Goldstein e Spores [9], i quali, sulla base degli articoli precedenti e delle loro misure di “mass transfer”, sfruttando la sublimazione del naftalene in galleria del vento, proposero l'interpretazione fisica riportata in Figura 4.6.

In questo caso, l'osservazione di grande novità, assente nelle raffigurazioni presentate fino a questo punto, risulta essere la presenza di una serie di piccoli ma intensi vortici al raccordo tra paletta ed endwall, i cosiddetti corner vortices.

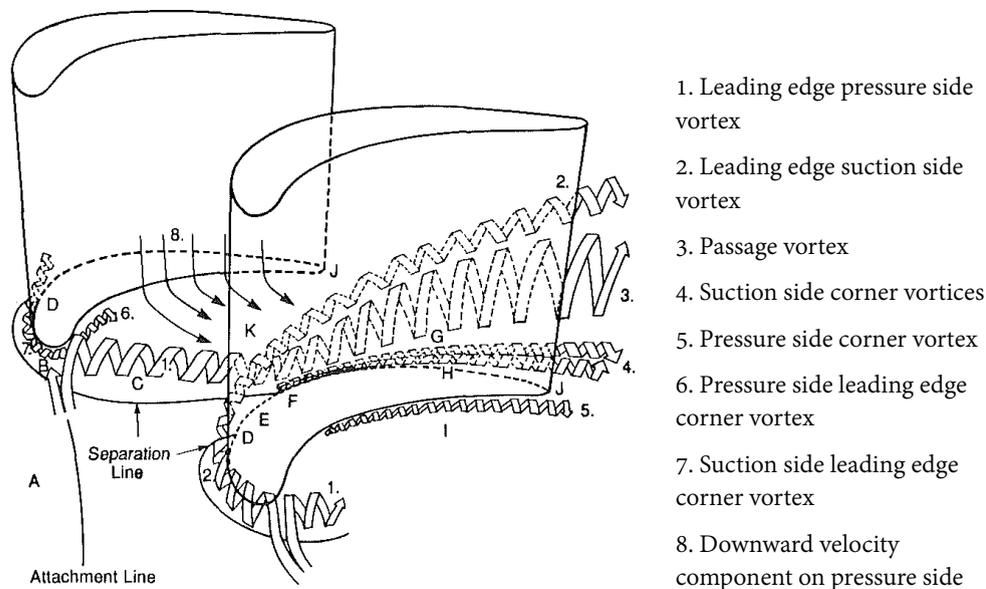


Figura 4.6: Struttura dei flussi secondari proposta da Goldstein e Spores [9].

Viene notato dagli autori come il gradiente di pressione trasversale in direzione ventre-dorso faccia sentire il suo effetto fino ad una distanza non trascurabile

dalla parete di fondo, provocando un effetto “downwash” così intenso da indurre una linea di separazione sull’endwall, accompagnata dalla generazione di un vortice (5.), il pressure side corner vortex. Analogamente, sulla superficie del profilo opposta, il dorso, viene osservata un’altra linea di separazione in corrispondenza della quale si svincolano due piccoli vortici (4.), indicati in Figura 4.6 con il nome di suction side corner vortices. I vortici 4. e 5. si originano nei pressi del punto F, a causa dall’interazione tra la superficie dorsale e il passage vortex, il quale procedendo verso valle si stacca dall’endwall e si sposta a posizioni radiali più elevate, per via delle alte velocità e delle basse pressioni presenti sulla suction side in prossimità della mezzeria della pala. Ai vortici citati si aggiungono anche quelli generati in corrispondenza del bordo di attacco, indotti dall’azione del vortice a ferro di cavallo (vortici 6. e 7.), i quali possiedono un senso di rotazione opposto a quello dell’horseshoe vortex e vengono descritti dagli autori come le strutture vorticosi più intense all’interno del passaggio di una schiera di pale di turbina.

4.1.5 I modelli recenti

L’ultima rappresentazione grafica mostrata all’interno della corrente sezione in Figura 4.7 è quella proposta da Wang, Olson, Goldstein e Eckert nel 1997 [18], elaborata dagli autori a seguito di diverse visualizzazioni effettuate in galleria del vento con l’utilizzo di filamenti di fumo multipli e sorgenti di luci laser.

Poiché la schematizzazione in Figura 4.7 risulta essere tra le più dettagliate in letteratura e la più fedele alla realtà fisica dei secondary flows, verranno riproposti e ricapitolati uno per uno, i componenti principali così come osservati da Wang et al., precisando però che questi risultano essere i tratti generali, in quanto i dettagli dei flussi secondari sono estremamente sensibili e influenzabili dalla geometria della schiera, angoli in entrata ed uscita della corrente, dalle condizioni di funzionamento, etc.

- *Linea di separazione* In corrispondenza del bordo di attacco della pala, a ridosso della linea di separazione si genera, come ampiamente discusso in precedenza una struttura vorticosi a ferro di cavallo. Le visualizzazioni con i filamenti di fumo evidenziano una struttura multi-vortice non stazionaria ma periodica, con più vortici coesistenti, la cui posizione reciproca e distanza dalla superficie della paletta oscilla con una certa frequenza (sezione A-A in Figura (4.7)). Con l’ingresso dell’horseshoe vortex all’interno del passaggio, la struttura si riduce però ad un singolo vortice.
- *Pressure Side Leg, V_{ph} .* Immediatamente a valle della sezione di entrata del passaggio, il ramo del vortice a ferro di cavallo in prossi-

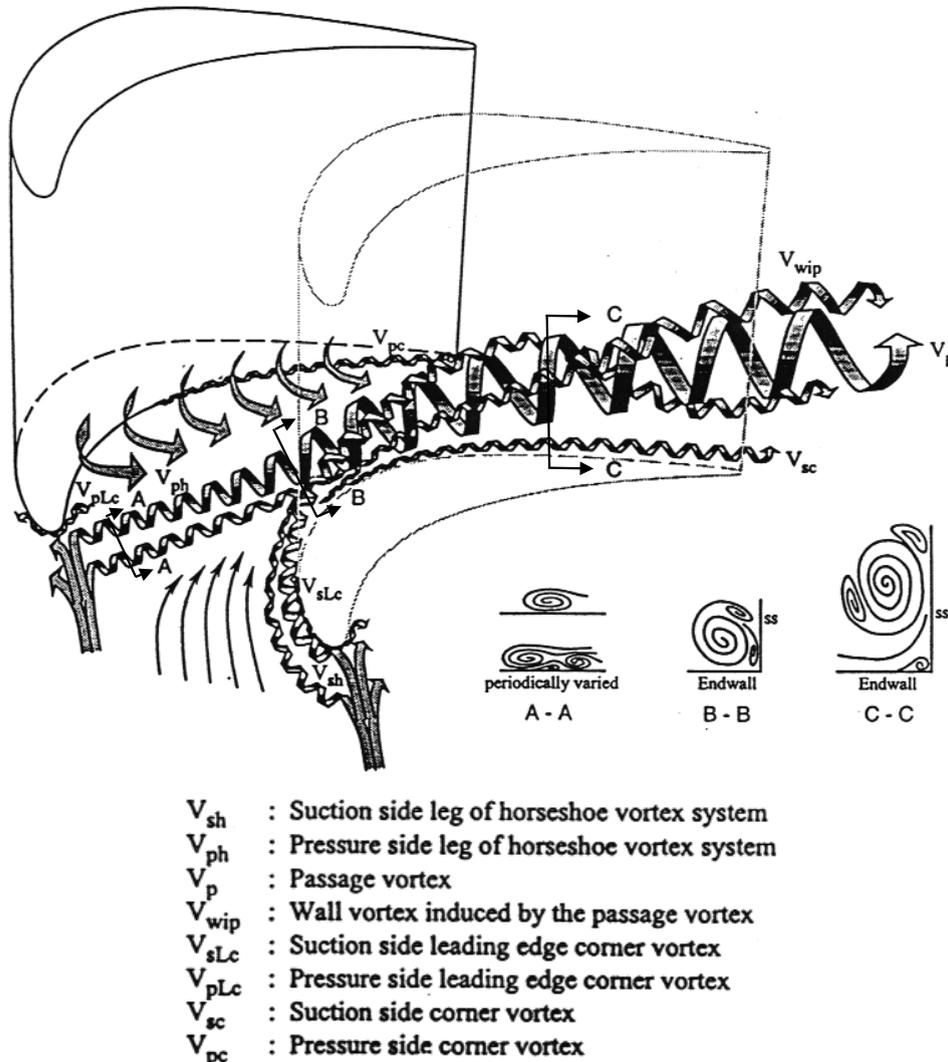


Figura 4.7: Struttura dei flussi secondari proposta da Wang, Olson, Goldstein e Eckert [18].

mità della superficie ventrale, viene immediatamente trasportato verso la superficie dorsale della paletta adiacente per via del forte gradiente di pressione trasversale. La struttura multi-vortice descritta al punto sopra si converte gradualmente in un unico vortice, non appena la pressure side leg si congiunge con la suction side leg del profilo successivo, tipicamente a $1/4$ di corda dal bordo di attacco. In prossimità del punto di incontro delle due branche, l'interazione reciproca tra le due vorticità di segno opposto, le linee di corrente trasversali sull'endwall, lo strato limite in entrata e il campo di moto medio, provoca la nascita della struttura vorticoso dominante dell'intero campo, il passage vortex.

- *Passage Vortex, V_p .* Come appena descritto, tale vortice è il frutto dell'interazione tra tutte le strutture che connotano fortemente il campo di moto all'interfaccia tra endwall e palettatura. Il vortice di passaggio, caratterizzato da una vorticità in direzione prevalentemente assiale e verso opposto a quello di percorrenza della corrente media, rimane pressochè attaccato alla superficie dorsale mentre si allontana dall'endwall procedendo verso il bordo di fuga, accrescendo le proprie dimensioni, inglobando in sé linee di flusso medio e linee di flusso di strato limite a parete.
- *Suction Side Leg, V_{sh} .* Questo vortice è caratterizzato dall' avere una vorticità orientata nel verso del campo di moto medio della corrente; all'interno del passaggio, nel punto di incontro con il vortice V_{ph} contro-rotante e più intenso, esso si distacca sia dalla superficie dell'endwall che dalla superficie dorsale della paletta, andando ad avvilupparsi attorno al passage vortex. Al contrario del modello proposto da Goldstein e Spores [9] rappresentato in Figura (4.6), il vortice V_{sh} non sembra allontanarsi dal passage vortex rimanendogli al di sopra in direzione radiale, bensì come suggerito da Sharma e Butler [8] (Figura 4.5a), rimarrebbe in "orbita" attorno al vortice di passaggio.
- *Wall Vortex, V_{wip} .* All'interfaccia tra endwall e dorso, in corrispondenza del punto di contatto tra i due rami del vortice a ferro di cavallo, viene osservato il vortice V_{wip} , di piccole dimensioni ma molto intenso. Come confermato da altri articoli e da altri autori, la corrente intrappolata in tale struttura vorticoso sembrerebbe provenire dallo strato limite in ingresso separatosi nei pressi della linea di separazione. Anche tale vortice appare distaccarsi dal fondo della superficie per posizionarsi ad una distanza dal suolo maggiore rispetto a quella del vortice di passaggio, che ruota sotto di esso in senso opposto.
- *Corner Vortices, $V_{sLc}, V_{pLc}, V_{sc}, V_{pc}$.* Tali vortici, la loro natura e i meccanismi di generazione sono stati descritti nel paragrafo 4.1.4, in riferimento alla rappresentazione proposta da Goldstein e Spores 4.6, in cui V_{sc}, V_{pc}, V_{pLc} e V_{sLc} corrispondono rispettivamente ai vortici 4., 5., 6., e 7. in Figura 4.6.
- *Trailing Shed Vortex.* Anche se non rappresentato in Figura 4.7 e non citato nel paper di Wang et al. [18], molti autori evidenziano come in corrispondenza del bordo di fuga delle pale si generi una superficie di contatto tra due regioni di fluido. Tale superficie separa le linee di corrente provenienti dal dorso, che possiedono una grande componente di velocità radiale orientata verso la mezzeria della pala e le linee di corrente provenienti dal ventre, caratterizzate da una componente di

velocità radiale quasi nulla o lievemente orientata verso l'endwall. La vorticità, opposta a quella del passage vortex, generata da tali regioni di fluido che entrano in contatto caratterizza quello che viene definito come Trailing Shed Vortex o Counter Vortex, a valle del bordo di fuga.

Hermanson e Thole [19] suggeriscono, all'interno della loro pubblicazione, come le diverse possibilità di interazioni e di generazione di dettagli, che si verificano nei sistemi di vortici sopra discussi, sono frutto principalmente delle diverse condizioni in ingresso alla schiera di pale, mostrando tramite un'analisi RANS, come vari drasticamente il campo di moto in prossimità dell'endwall passando da condizioni di flusso uniforme (puramente teorico) imposti all'inlet, al campo di moto reale in uscita dal combustore.

Grazie ad un notevole incremento della potenza di calcolo, oggi è possibile pensare di eseguire delle simulazioni LES e DNS per turbine di bassa pressione in corrispondenza dell'interfaccia tra endwall e schiere di pale, per studiare i punti cruciali dei campi di moto. A tal proposito, si menzionano i recenti lavori di Koschichow et al. [20] che operando una DNS mettono in risalto il ruolo che gioca la scia all'interno del passaggio, e di Cui et al. [21, 22], i quali tramite una LES studiano l'effetto sui flussi secondari delle diverse condizioni dello strato limite in ingresso al passaggio tra due pale adiacenti.

Come emerso e sottolineato più volte nel corso della trattazione, la natura dei flussi secondari appare molto complessa; comprenderne a fondo i dettagli rimane una sfida ancora aperta, che confida in un'evoluzione ed in una crescita in termini di affidabilità dei risultati forniti dalla CFD.

4.2 Perdite Secondarie

Le perdite di efficienza associate storicamente ai flussi secondari, tipicamente indicate con il nome di secondary losses o endwall losses, risultano particolarmente ostiche da quantificare e soprattutto da prevedere in fase di progetto. In realtà, al contrario di quanto si possa pensare, tali perdite non sono direttamente provocate dal secondary flow, in quanto quest'ultimo è in sé un fenomeno inviscido. Le perdite secondarie si manifestano a seguito di complessi meccanismi che vedono come attori principali l'interazione tra le strutture vorticosi dei flussi secondari, la superficie delle palette e gli strati limite a parete, e la dissipazione, per via della viscosità, della secondary kinetic energy, spesso indicata come s.k.e. Quest'ultima è l'energia cinetica caratteristica della vorticità generata dai flussi secondari e dalla distorsione dello strato limite, proiettata in direzione assiale. In passato inoltre, venivano fatte spesso ricadere nella categoria di endwall losses tutte quelle perdite che non potevano

essere ricondotte specificatamente all'azione del profilo, al flusso medio, alle scie o alla fuga di flusso dal tip delle pale.

Seppur le secondary losses ricoprono tipicamente il 30-50% delle perdite totali [8], come già anticipato all'inizio del capitolo, in off-design tale percentuale cresce drasticamente, specialmente per le turbine di bassa pressione (LPT) oggi continuamente ottimizzate dai progettisti per ridurre peso e costi [23].

Denton nel suo articolo [10] illustra come i meccanismi di generazione delle perdite secondarie siano una combinazione di diversi fattori. Egli osserva come tipicamente i 2/3 delle endwall losses derivino dalla generazione di entropia all'interno degli strati limite che si sviluppano a valle delle varie linee di separazione osservate nel passaggio di una schiera. Un'altra porzione di perdite si deve alle mixing losses dello strato limite in ingresso; per mixing losses l'autore intende tutte le perdite generate dalla creazione di entropia dovuta all'azione degli sforzi di taglio viscosi che intervengono quando linee di corrente caratterizzate da diversa quantità di moto entrano in contatto. Nel caso dell'interfaccia endwall-paletta, le perdite dovute al processo di mescolamento dello strato limite sono amplificate dalla moltitudine di strutture vorticosi tipiche dei secondary flows, facendo in modo che il coefficiente di perdita sia proporzionale al rapporto tra spessore di strato limite in ingresso e lunghezza radiale della pala.

Il terzo e ultimo tassello previsto da Denton è quello legato alle perdite associate alla dissipazione della cosiddetta secondary kinetic energy (s.k.e.), ossia l'energia cinetica caratteristica della vorticità in direzione assiale generata dai flussi secondari e dalla distorsione dello strato limite. Quest'ultima componente è responsabile di circa il 25% delle endwall losses, ma il suo peso può essere fortemente variabile in funzione dello spessore e distorsione dello strato limite, dalla curvatura della paletta e dal carico agente su di essa.

L'autore evidenzia come possano esistere molti altri contributi legati alla generazione delle perdite secondarie, come separazioni localizzate della corrente, o transizioni premature nella natura dello strato limite causate dalle varie strutture secondarie; tuttavia tutti i meccanismi citati risultano essere troppo complessi e troppo dipendenti dai dettagli del campo di moto e dalla geometria della schiera di pale da rendere impossibile la formulazione di un modello analitico o empirico che possa prevedere con precisione la corretta entità e distribuzione delle perdite.

Ad ogni modo nel corso del tempo sono stati molti i lavori sperimentali, e recentemente numerici, che hanno indagato e quantificato le perdite dovute ai flussi secondari; nel corso di questa sezione verranno presentati i principali risultati presenti in letteratura per entrare ancora più nella profondità del tema e per disporre di un metro di paragone per le soluzioni ottenute dalle analisi presentate nel Capitolo 5.

4.2.1 Perdite di efficienza legate alla riduzione di portanza sulle pale

Un'indagine condotta molto spesso al fine di comprendere quanto le prestazioni delle pale di una turbina si allontanino, a causa dei flussi secondari, da quelle ideali e teoriche dovute ad un flusso di corrente bidimensionale, è quella di operare una misura di pressione statica sul dorso e sul ventre del profilo a diverse distanze dall'endwall in direzione radiale. In particolare, osservando come variano le distribuzioni del coefficiente di pressione c_p sul dorso e sul ventre, a diverse posizioni radiali, è possibile mettere in luce le perdite in termini di portata, legate alle perdite di lavoro di turbina L_t , e l'aumento della resistenza aerodinamica di pressione sulla pala, legata alle perdite di efficienza di turbina η_t .

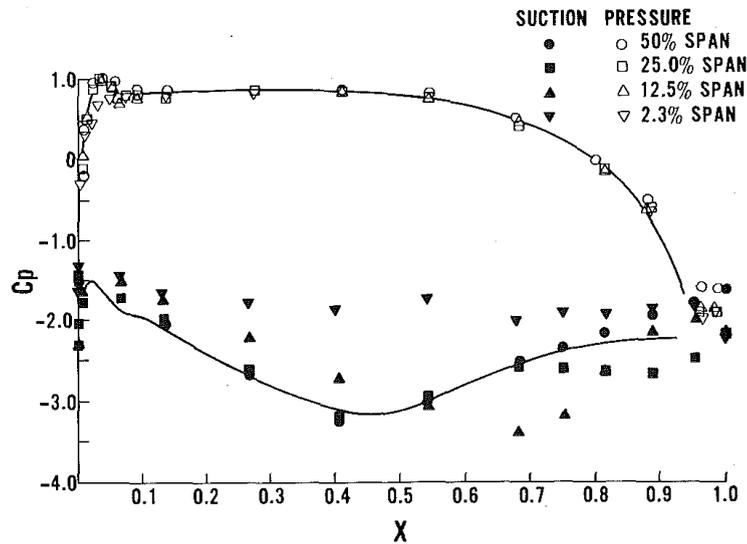


Figura 4.8: Confronto della distribuzione del coefficiente di pressione c_p al variare della distanza dall'endwall, Langston, Nice e Hooper [13].

In Figura 4.8 si è scelto di riportare i risultati ottenuti da Langston [13] per motivi storici, evidenziando come ad analoghe conclusioni sono giunti anche studi sperimentali e computazionali successivi, come ad esempio quelli di Duden e Fottner [24] e Pichler et al. [25].

Le misure pneumatiche sono state operate al 2.3 %, 12.5 %, 25 %, e 50 % dell'altezza radiale della pala e confrontate con i risultati previsti dalla teoria di un flusso potenziale incompressibile. Sulla superficie ventrale è mostrata una concordanza quasi perfetta tra flusso potenziale e dati sperimentali per tutte le posizioni radiali, eccezion fatta per la prima (2.3 %) in corrispondenza del bordo di attacco, evidenziando come il vortice a ferro di cavallo generatosi in corrispondenza del punto di arresto, come descritto nella sezione precedente,

tende ad allontanarsi dal ventre spostandosi verso il dorso della pala adiacente.

In riferimento alla superficie dorsale, invece, si osserva che solamente in mezzzeria l'andamento del coefficiente di pressione sperimentale segue quasi fedelmente quello teorico; via via che si procede verso l'endwall, infatti, si verifica un drastico aumento del c_p (in valore assoluto), fino a quando praticamente in prossimità della parete, la superficie dorsale si mostra a pressione quasi costante lungo la corda, a causa della processo di separazione della corrente dovuto ai secondary flows all'interfaccia endwall-pala.

Appare chiaro, dunque, come la presenza delle strutture vorticose tridimensionali a parete abbia come conseguenza diretta il restringimento dell'area tra la curva di c_p tra dorso e ventre, a fissata posizione radiale. Come dimostra l'Eq. (4.1):

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho q_\infty^2 (c_x \cdot 1)} = \int_0^1 (c_{pv} - c_{pd}) d\left(\frac{x}{c_x}\right) \quad (4.1)$$

in cui i pedici v e p per il c_p stanno rispettivamente per dorso e ventre, la riduzione di tale area è direttamente proporzionale alla riduzione in portata, e conseguentemente alla riduzione del lavoro di turbina.

4.2.2 Coefficiente di perdite di pressione

Molto interessanti sono i risultati mostrati da Hodson e Dominy [26], che tramite prove in galleria del vento, collocando delle prese di pressione in sezioni trasversali al passaggio e poste parallelamente tra loro a diverse distanze dal bordo di attacco, mostrano l'evoluzione delle perdite secondarie col procedere del flusso dalla sezione di ingresso a sezioni a valle del bordo di fuga di una schiera di palette di turbina di bassa pressione.

In Figura 4.9 sono mostrate le distribuzioni del total pressure loss coefficient non dimensionale, la cui espressione è riportata in Eq. (4.2), per diversi piani trasversali all'asse longitudinale. I dati sperimentali sono stati rilevati solamente sulla superficie dorsale, quella di maggior interesse, in quanto sulla superficie ventrale per vincoli fisici non è stato possibile montare la strumentazione necessaria.

$$\zeta = \frac{p_1^\circ - p^\circ}{p_4^\circ - p_4} \quad (4.2)$$

Le prime misurazioni sono state condotte al 58% della corda assiale c_x , in corrispondenza del picco di depressione sulla pala. In Figura 4.9a è facile osservare due cuori di grandi perdite, in corrispondenza del vortice di passaggio e del corner vortex a parete. Non sono distinguibili tuttavia perdite associabili allo strato limite sulla pala e allo strato limite sull'endwall per via del fatto che essi si siano sviluppati, fino a quella sezione, sotto l'azione di un gradiente di pressione favorevole, che non ha fatto crescere di molto il loro spessore.

4.2. Perdite Secondarie

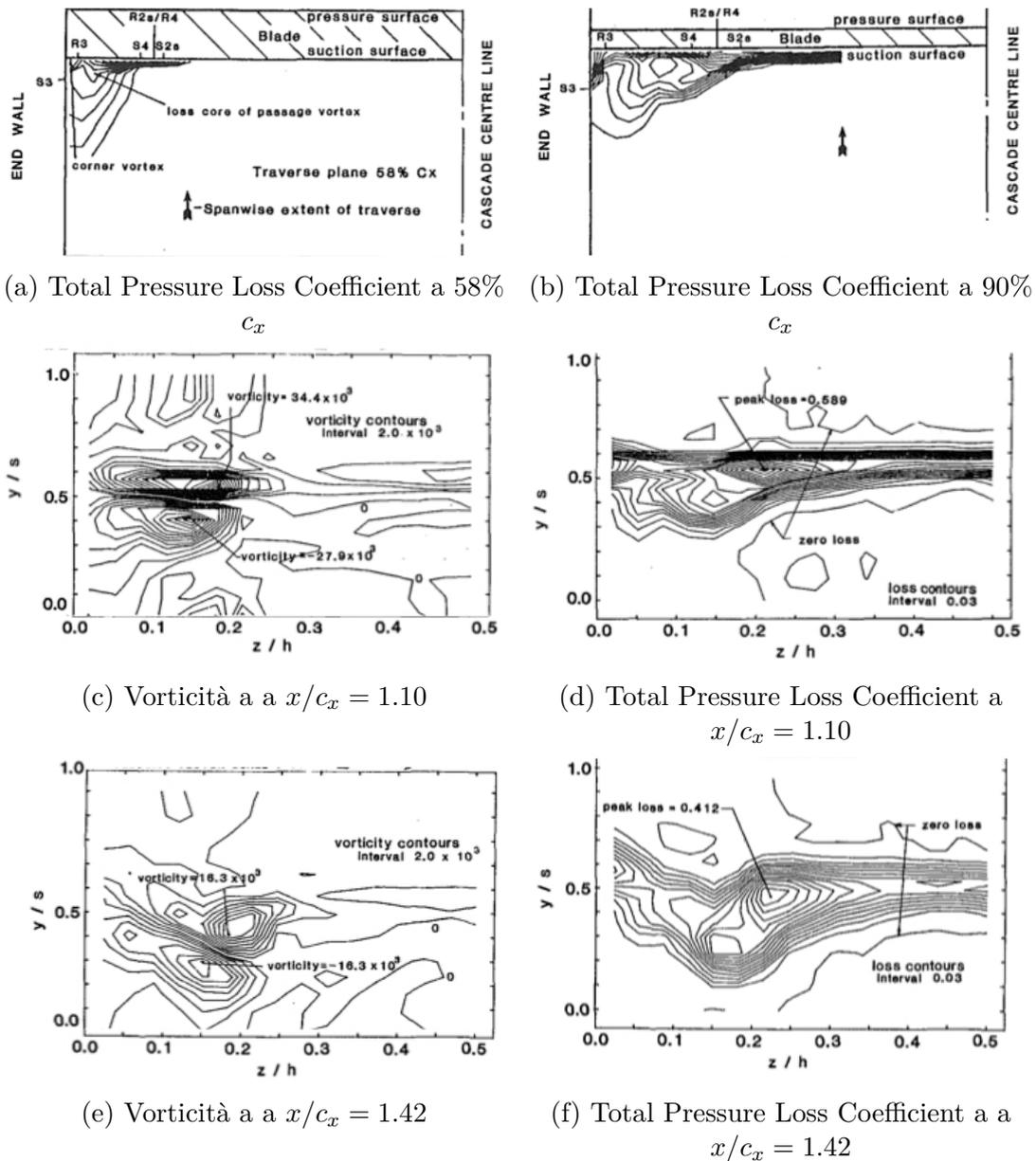


Figura 4.9: Curve di livello di Total pressure loss coefficient e Vorticità a diverse posizioni assiali del passaggio, Hodson e Dominy [26].

Nel passare dal 58% al 90% di c_x (Figura 4.9b), si nota come la regione affetta dalle perdite si estenda in direzione radiale (tale regione occupa quasi il 15% dell'altezza della paletta) per via del distacco del passage vortex dall'endwall e di un aumento delle dimensioni del corner vortex, entrambi distinguibili per i picchi in termini di perdite. Sono evidenziate anche le perdite

legate allo strato limite sulla superficie dorsale della pala, che a queste distanze dal bordo di attacco diventano visibili probabilmente per via della bolla di separazione instauratasi a valle del picco di portanza.

A valle del bordo di fuga, le strutture non sono più confinate dalla superficie fisica della paletta, pertanto la scia appare distorta dalla rotazione delle linee di corrente. Il picco di vorticità mostrato in Figura 4.9c identifica l'asse di rotazione del passage vortex, a cui corrisponde il picco di perdite in Figura 4.9d. In Figura 4.9c è necessario menzionare anche la presenza di una regione caratterizzata da una vorticità di verso opposto a quella del passage vortex, con modulo pari al 124% del vortice di passaggio. Hodson e Dominy osservano come tale area non sia sintomo della presenza della suction side leg del vortice a ferro di cavallo, bensì indichi chiaramente l'interazione tra trailing shed vorticity e lo strato limite altamente distorto proveniente dalla scia del profilo. Come ci si attende, le linee di corrente che fanno da diaframma tra le due strutture vorticoso contro-rotanti, sono caratterizzate da una velocità in direzione radiale molto alta, pari ad un terzo di quella del flusso medio all'uscita dal passaggio.

Infine, confrontando i dati riportati per il piano a $x/c_x = 1.10$ ed il piano a $x/c_x = 1.42$, si osserva come la vorticità della scia si sia notevolmente ridotta per via delle azioni viscoso. I due vortici contro-rotanti in Figura 4.9e sono dello stesso ordine di grandezza sia in termini di dimensione che di intensità, seppur rimanendo praticamente nella stessa posizione. Posizione invariata anche per il picco di perdite in Figura 4.9f, che registrano una riduzione in valore assoluto del 30% rispetto a quelle mostrate per $x/c_x = 1.10$.

4.2.3 Perdite secondarie e CFD

Negli ultimi decenni sono stati pubblicati moltissimi lavori incentrati sullo studio dei flussi secondari che hanno fatto uso delle grandi potenzialità offerte dalla CFD, e dall'aumento della potenza di calcolo. Purtroppo però, grandi difficoltà si incontrano ancora oggi nel rendere le simulazioni numeriche uno strumento primario e fondamentale nella fase di progettazione. Innanzitutto, per vincoli legati principalmente alle alte velocità e conseguentemente agli alti numeri di Reynolds, né le Large Eddy Simulations (LES) e né tantomeno le Direct Numerical Simulations (DNS) sono impiegabili nei processi iterativi di design, pertanto a tali simulazioni vengono preferiti i calcoli condotti con le RANS o URANS. Inoltre, come espresso nell'articolo di Denton e Pullan [27], sebbene la CFD è impiegata ampiamente per lo studio e la previsione del campo di moto in prossimità dell'endwall, individuandone tutte le strutture proprie dei flussi secondari, non è ancora in grado di fornire risultati veritieri e attendibili in termini di perdite. Per tale motivo, quando vengono impiegati dei metodi numerici per l'ottimizzazione di una paletta nei pressi dell'endwall,

essi vengono utilizzati per stimare non tanto le perdite, bensì l'energia cinetica secondaria (s.k.e.) che è prodotta principalmente da effetti non legati alla viscosità. Non è scontato però predire quanta di questa energia sarà effettivamente dissipata sotto forma di perdite; questo rende la CFD applicata alle perdite secondarie ancora un mezzo inaffidabile.

Un esempio di un ottimo e riuscito utilizzo di analisi RANS è contenuto nell'articolo di Denton e Pullan [27], i quali dopo aver validato i propri calcoli tramite un confronto con i risultati ottenuti sperimentalmente da Harrison [28] su una schiera di palette ad alta curvatura, incentrano l'interesse sullo studio dei meccanismi di generazione di entropia all'interno del passaggio tra due pale adiacenti. Si ritiene, ai fini della seguente trattazione, che mostrare e commentare i risultati legati alla generazione di entropia associata ai secondary flows possa rendere ancora più completa e profonda la dissertazione sul tema affrontato fino ad ora. Uno dei parametri esaminato da Denton e Pullan è il tasso di generazione di entropia, che risulta essere massimo nelle regioni a più alta "creazione" di perdite. Il tasso di generazione di entropia per unità di volume \dot{S} è espresso dall'Eq. (4.3), in cui con T ci si riferisce alla temperatura, con τ allo sforzo di taglio, con q alla velocità del flusso, con n alla direzione normale alle linee di corrente e con λ alla conducibilità termica.

$$T \cdot \dot{S} = \tau \frac{dq}{dn} + \lambda \frac{(dT/dn)^2}{T}. \quad (4.3)$$

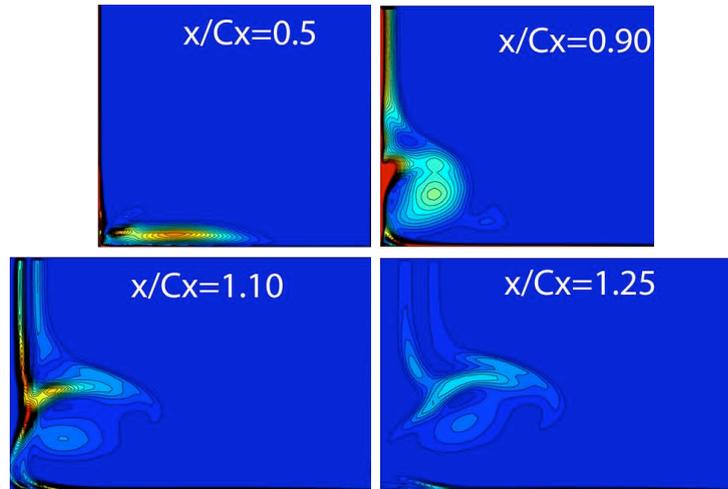


Figura 4.10: Curve iso-livello per il tasso di generazione di entropia lungo il passaggio per diversi valori di x/c_x , Denton e Pullan [27].

Come mostrato in Figura 4.10, tale parametro, praticamente nullo nello strato limite a monte della sezione di ingresso, comincia a crescere in corrispondenza

del vortice a ferro di cavallo, specialmente nella pressure side leg, per diventare molto importante circa a $x/c_x = 0.5$, quando la pressure leg si interfaccia con la superficie dorsale della paletta. Tra $x/c_x = 0.5$ e $x/c_x = 0.75$ il tasso di generazione di entropia risulta molto piccolo all'interno dello strato limite laminare, ma cresce repentinamente subito a valle, sia sulla superficie che in corrispondenza dell'asse di rotazione del passage vortex, raggiungendo il suo valore massimo attorno alla posizione di $x/c_x = 0.9$. Una volta superata la sezione d'uscita, immediatamente a valle del bordo di fuga si manifesta un grande picco causato dal trailing edge vortex, che viene però attenuato, decadendo rapidamente poco dopo. Viene inoltre osservato dagli autori come sebbene il coefficiente in esame associato al passage vortex decada gradualmente, a causa della grande estensione della struttura vorticoso, la generazione totale di entropia rimane comunque molto importante. Si sottolinea come i risultati numerici appena espressi riflettono abbastanza bene, in termini di conformazione generale e posizioni relative, i risultati sperimentali riportati da Hodson e Dominy [26] e rappresentati in Figura 4.9, sebbene i primi indichino la causa (la generazione di entropia) e i secondi l'effetto (le perdite). Per ricapitolare, la frazione maggiore di generazione di entropia dovuta al secondary flow, che a sua volta è la frazione maggiore dell'entropia generata in tutto il passaggio di turbina, si verifica tipicamente quando la struttura vorticoso distaccatasi dal ventre raggiunge il dorso della paletta, cominciando ad allontanarsi dall'endwall per guadagnare una posizione più alta in direzione radiale.

Capitolo 5

Analisi RANS

Nel corso del seguente capitolo verranno mostrati i nodi cruciali che hanno condotto allo sviluppo di un'analisi RANS, per mezzo del codice di calcolo introdotto nel Capitolo 3, al fine di investigare i secondary flows in prossimità dell'interfaccia endwall-paletta in una schiera lineare di pale.

Quest'ultima è stata scelta appartenente ad una turbina di bassa pressione (LPT), in quanto la tendenza degli ultimi decenni, nella costruzione dei moderni motori a getto, è stata proprio quella di ottimizzare al meglio le prestazioni di tali tipi di turbine. Il motivo è legato al tentativo di un aumento progressivo del by-pass ratio, che necessita a sua volta di una progettazione di turbine di bassa pressione che possano permettere la generazione di una mole crescente di potenza meccanica destinata al mantenimento in rotazione dei fan di grandi dimensioni senza d'altra parte sacrificare eccessivamente l'efficienza della macchina. Inoltre, per soddisfare i sempre più stringenti requisiti in termini di diminuzione di peso, si è verificata una grande propensione verso la riduzione del numero di pale di turbina, con una conseguente ed inevitabile crescita del carico aerodinamico agente su ognuna di esse. Pertanto si è reso necessario lo sviluppo e il perfezionamento dei cosiddetti very-high-lift airfoils, ossia di profili ad alta portanza.

La schiera di pale impiegata per l'analisi implementata nel presente lavoro, fa parte della categoria di profili di pale appena descritta; in particolare la scelta è ricaduta sulla T106C high-lift cascade, sia per via della facile reperibilità della geometria esatta, che soprattutto per l'ingente quantità di articoli presenti in letteratura che ne hanno studiato le performance, sperimentalmente e numericamente.

Il campo di moto, l'evoluzione delle linee di corrente, la distribuzione di vorticità e la generazione di perdite nel passaggio saranno alcuni degli aspetti che verranno analizzati nel dettaglio. Inoltre, in analogia con il lavoro di Sauer et al. [29], è stata condotta un'ulteriore indagine nelle stesse condizioni ope-

rative su una schiera di pale T106C ma con il bordo di attacco modificato in prossimità della superficie dell'endwall. Tale modifica consiste nell'aggiunta di un "bulbo" al bordo di attacco, rendendo il profilo in quella regione molto più spesso e curvato. L'obiettivo della manipolazione della pala originale è quello di provocare lo sviluppo di una suction side leg del vortice a ferro di cavallo molto più intensa rispetto alle condizioni nominali, che interagisca con il contro-rotante vortice di passaggio, indebolendolo e allontanandolo dallo strato limite sulla superficie della paletta, con l'effetto di ridurre il più possibile l'entità delle perdite secondarie. Tra le tre diverse configurazioni geometriche proposte e testate da Sauer et al., è stata scelta quella che porterebbe ad una maggiore riduzione di perdite e ad un maggior guadagno in efficienza; nel corso della trattazione, concordemente con la nomenclatura adottata dagli autori, tale configurazione verrà indicata con il nome di T106/3.

In Figura 5.1 sono stati riportati i passi logici e cronologici che hanno scandito, nel corso dei mesi, l'attività svolta e che hanno portato alle conclusioni espone nel corso di questo capitolo. Tale schema, che non va pensato come un flusso unidirezionale, bensì come un ciclo iterativo in cui l'ultimo step è l'input per il primo, verrà mantenuto anche nella descrizione del lavoro effettuato, cercando di mettere in risalto, per ogni passaggio, le proprie peculiarità e complessità.

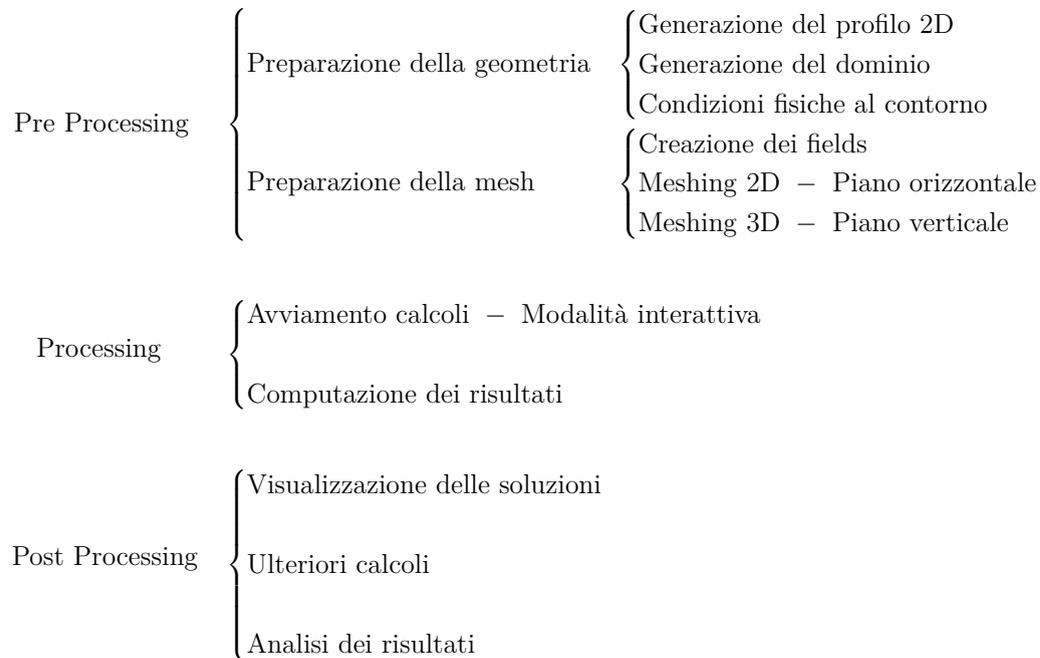


Figura 5.1: Schema riepilogativo delle fasi operative.

5.1 Geometria

Il primo passo della fase di pre-processing, ossia la fase che comprende tutte le operazioni che precedono i calcoli veri e propri, consiste nell'implementazione del profilo bidimensionale di pala; operazione eseguita avvalendosi del software Gmsh [30], così come per la preparazione del dominio e della griglia di calcolo. I punti costituenti il bordo del profilo, facilmente reperibili in letteratura, per una maggior praticità sono stati normalizzati in modo da ottenere una corda assiale c_x unitaria. Inoltre, per disporre di una linea continua, tali punti sono stati interpolati tramite una funzione spline Catmull-Rom, appartenente alla famiglia delle cardinal spline. La geometria risultante è raffigurata in Figura 5.2, mentre i principali parametri geometrici sono stati riassunti in Tabella 5.1.

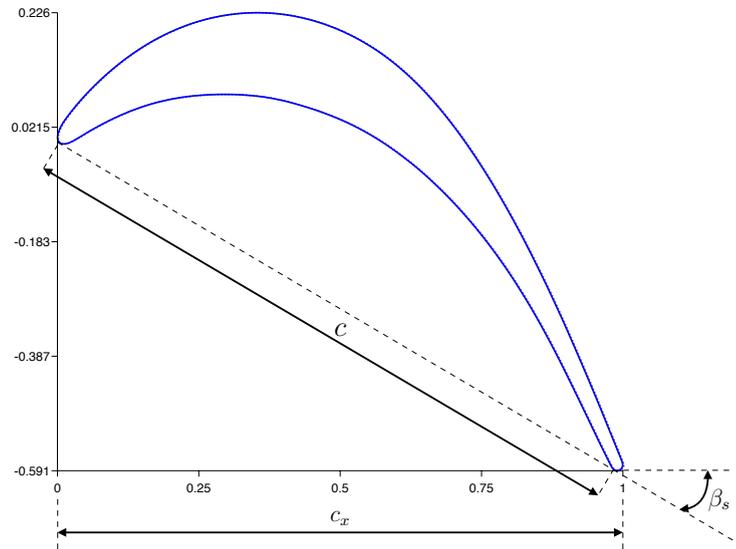


Figura 5.2: Profilo di pala 2D della T106.

| Parametro (u.d.m.) | Simbolo | Valore |
|----------------------|-------------------------|--------|
| Corda dim. (mm) | c_{dim} | 93.01 |
| Corda ass. dim. (mm) | $c_{x,dim}$ | 79.90 |
| Passo dim. (mm) | s_{dim} | 88.36 |
| Corda adim. (-) | $c = c_{dim}/c_{x,dim}$ | 1.164 |
| Corda ass. adim. (-) | c_x | 1.000 |
| Passo adim. (-) | $s = s_{dim}/c_{x,dim}$ | 1.106 |
| Stragger angle (°) | β_s | 30.71 |

Tabella 5.1: Principali parametri geometrici del profilo di pala T106C.

Meno semplici sono state le operazioni che hanno portato allo sviluppo della geometria 2D per la paletta T106/3, ossia quella costruita con l'aggiunta di un'appendice a forma di bulbo al bordo di attacco della T106. Nel proprio articolo infatti, Sauer et al. [29] non riferiscono l'esatta geometria per punti delle alterazioni sulla geometria originale, bensì riportano la rappresentazione grafica mostrata in Figura 5.3, in cui viene specificato che il raccordo tra appendice e bordo di attacco del profilo nominale avviene tramite una funzione cosinusoidale. Pertanto, per riuscire ad ottenere una curva che riuscisse a rappresentare bene il profilo bidimensionale della T106/3 dapprima, tramite uno software di editing grafico, è stata sovrapposta l'immagine in Figura 5.3 sul profilo nominale della T106 in Figura 5.2 ruotandola e ridimensionandola affinché i due bordi d'attacco "standard" combaciassero perfettamente. Successivamente, con l'impiego di un tool per la digitalizzazione di immagini, sono stati acquisiti i punti del bordo di attacco modificato, normalizzati affinché anche la corda assiale c_x della T106/3 fosse unitaria, e sostituiti localmente ai punti originali descriventi il leading edge della geometria nominale. In questo modo, tramite una successiva interpolazione dei punti tramite la spline Catmull-Rom, è stata ottenuto un profilo di pala con il bordo di attacco modificato, ma con il resto della geometria perfettamente uguale a quello della T106, con la medesima corda assiale non dimensionale $c_x = 1$, con gli stessi punti e lo stesso passo, in modo tale da rendere il processo di creazione del dominio e della griglia praticamente identico sia per la T106 che per la T106/3. La geometria del profilo risultante è riportata in Figura 5.4.

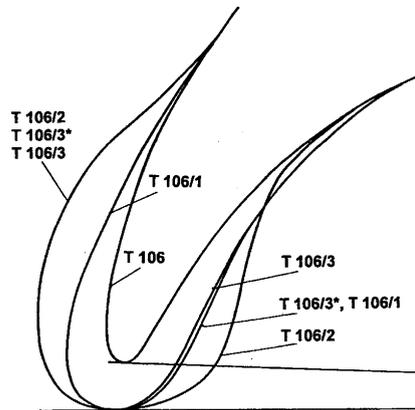


Figura 5.3: Modifiche al bordo di attacco della pala T106, Sauer et al. [29].

5.1.1 Preparazione del dominio

Per l'implementazione del dominio si è scelto di seguire la strada già percorsa dalla quasi totalità degli autori che hanno condotto delle analisi CFD per indagare il campo di moto fluidodinamico in prossimità di una schiera lineare di

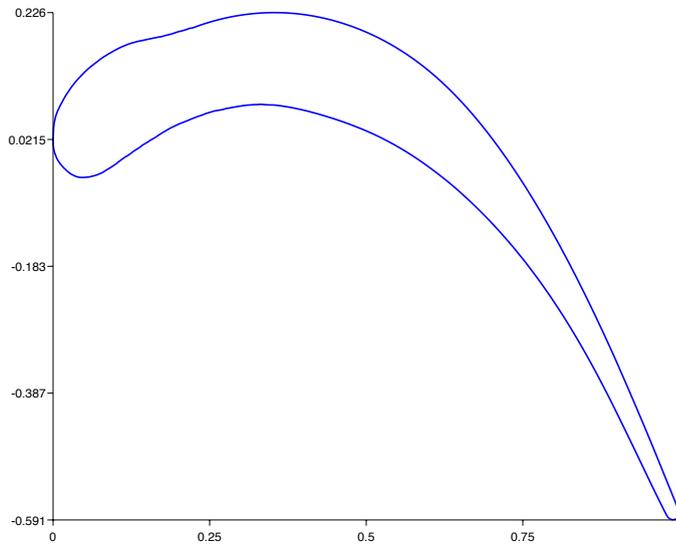


Figura 5.4: Profilo di pala 2D della T106/3.

pale. Al contrario di quanto viene fatto sperimentalmente, come ad esempio all'interno di una galleria del vento, i calcoli non vengono condotti sull'intera schiera di pale, in quanto o si protrarrebbero per un tempo troppo elevato e chiaramente insostenibile a causa delle grandi dimensioni geometriche, oppure decidendo di fissare un numero di volumi di calcolo massimo, si incorrerebbe in risultati affetti da una risoluzione spaziale piuttosto bassa, e quindi inutili per qualsiasi considerazione o valutazione.

Ciò che invece viene solitamente fatto è sfruttare la periodicità di una schiera lineare di profili, insita nella successione pala-passaggio-pala, costruendo un dominio periodico, in modo da concentrare i calcoli in un'area relativamente piccola e nell'immediata prossimità della paletta, beneficiando di un'alta risoluzione spaziale senza pagare il prezzo di tempi di calcolo irragionevoli.

In particolare, sul dominio bidimensionale realizzato per la T106 cascade mostrato in Figura 5.5, la periodicità e la coerenza con la geometria globale della schiera originale sono state assicurate da due accorgimenti. Il primo è stato quello di imporre delle condizioni al contorno periodiche sui due bordi denominati in Figura 5.5 come “Bordo up” e “Bordo down”, in modo tale che il codice implementato per i calcoli traducesse e riportasse i flussi uscenti dal “Bordo up” come entranti nel “Bordo down” e viceversa; il secondo, al fine di garantire l'esatta distanza tra una pala e l'altra della schiera, è stato quello di dimensionare la sezione di ingresso “Inlet” e la sezione di uscita “Outlet” in modo che la lunghezza fosse pari al passo adimensionale s . Così facendo, come rappresentato in Figura 5.6, eseguire un'indagine sul singolo dominio periodico risulta totalmente equivalente ad eseguirla su un dominio molto più

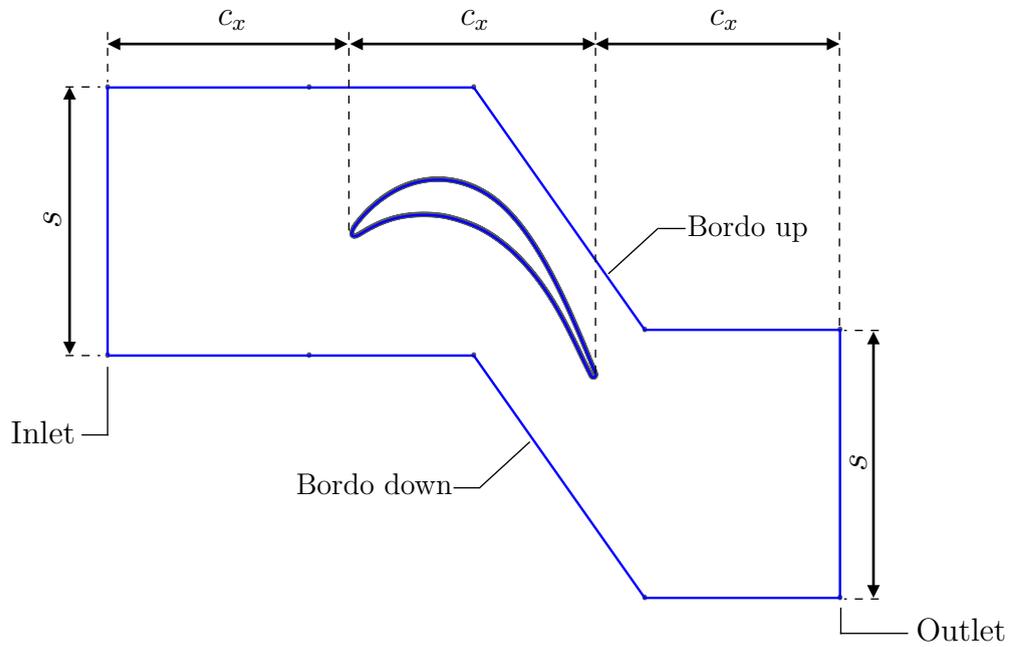
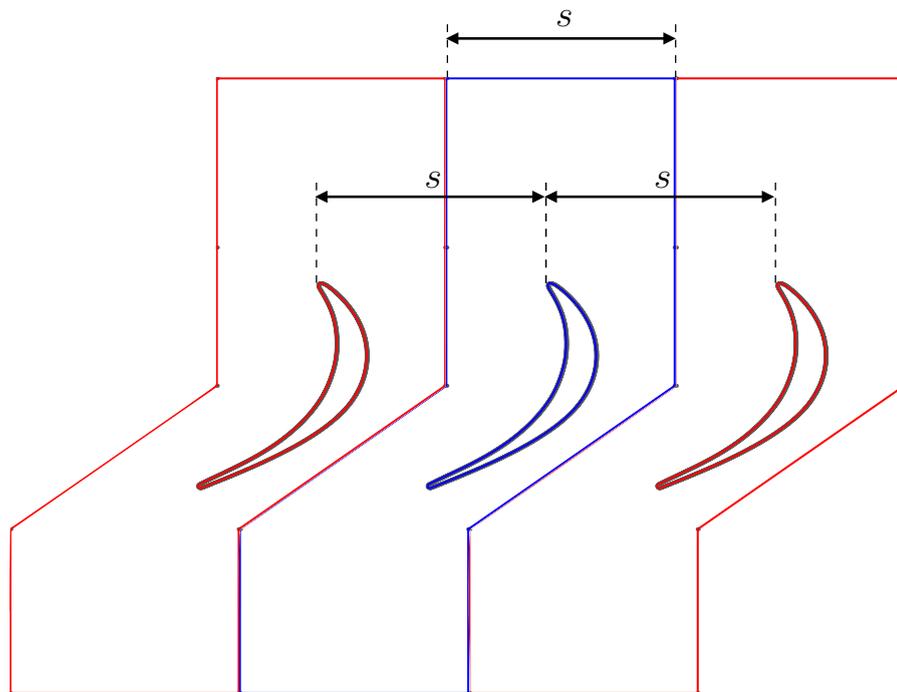


Figura 5.5: Dominio 2D.



Dominio Fittizio Dominio Originale Dominio Fittizio

Figura 5.6: Rappresentazione della periodicit  del dominio.

grande che include la presenza di più profili. Avendo imposto alla sezione di ingresso e alla sezione di uscita la dimensione del passo non dimensionale s , la rappresentazione del campo di moto in corrispondenza del passaggio tra una pala e l'altra viene spartita ed affidata da una parte alla sezione di dominio adiacente alla superficie dorsale, responsabile dell'effetto del profilo fittizio di destra, e dall'altra alla sezione di dominio adiacente alla superficie ventrale, responsabile dell'effetto del profilo fittizio di sinistra.

Inoltre, come si osserva in Figura 5.5, nel disegnare il dominio attorno al profilo di pala si è scelto di adoperare una lunghezza per la dimensione longitudinale pari a tre volte la corda assiale c_x , in modo da operare una suddivisione intrinseca nel dominio in tre regioni uguali e di estensione pari a c_x , la prima "contenente" il fluido a monte della paletta, la seconda il fluido attorno la paletta e l'ultima, comprensiva del fluido a valle della paletta.

Si sottolinea infine come la forma geometrica delle due linee di confine ("Bordo up" e "Bordo down"), in questo caso due linee spezzate costituite da tre segmenti, non ha nessuna influenza sulla natura fluidodinamica del problema per via dell'imposizione delle condizioni periodiche, pertanto qualsiasi altra scelta poteva essere fatta. L'unica conseguenza di una decisione in questo ambito riguarda la diversa mesh risultante, che a seguito di una più o meno accentuata distorsione delle celle computazionali, influirebbe inevitabilmente sui risultati numerici.

L'ultimo passaggio compiuto per il completamento del dominio mostrato in Figura 5.7, sul quale successivamente è stata implementata la griglia impiegata per i calcoli, è stato quello di progredire da una struttura bidimensionale ad un volume tridimensionale. A tal fine è stata operata tramite Gmsh un'estrusione lineare in direzione radiale y sia del dominio 2D che del profilo di pala (Figura 5.5), giacenti sul piano $x - z$. Si sottolinea come nel caso del profilo di pala T106/3, a causa di un'estrusione lineare, la paletta possederà il bordo di attacco modificato per tutta l'estensione radiale del dominio, piuttosto che un'alterazione della geometria solamente in prossimità dell'endwall. Tale circostanza però non è da ritenersi un problema ai fini dei risultati, in quanto l'analisi condotta si concentrerà solamente sulle aree prossime all'interfaccia tra paletta ed endwall.

Poiché ai fini dello studio dei secondary flows si è interessati a studiare il campo di moto proprio in corrispondenza della parete di fondo, la dimensione in direzione radiale y del dominio è stata fissata soltanto a metà della corda assiale c_x , cioè a meno del 20% dell'altezza dell'intera pala. In riferimento alla Figura 5.7, l'origine dell'asse y giace sul piano "Midspan", denominato così in quanto significativo delle condizioni fluidodinamiche quasi totalmente bidimensionali in mezzeria della paletta, mentre il piano correlativo all'endwall si trova in posizione $y = c_x/2 = 0.5$.

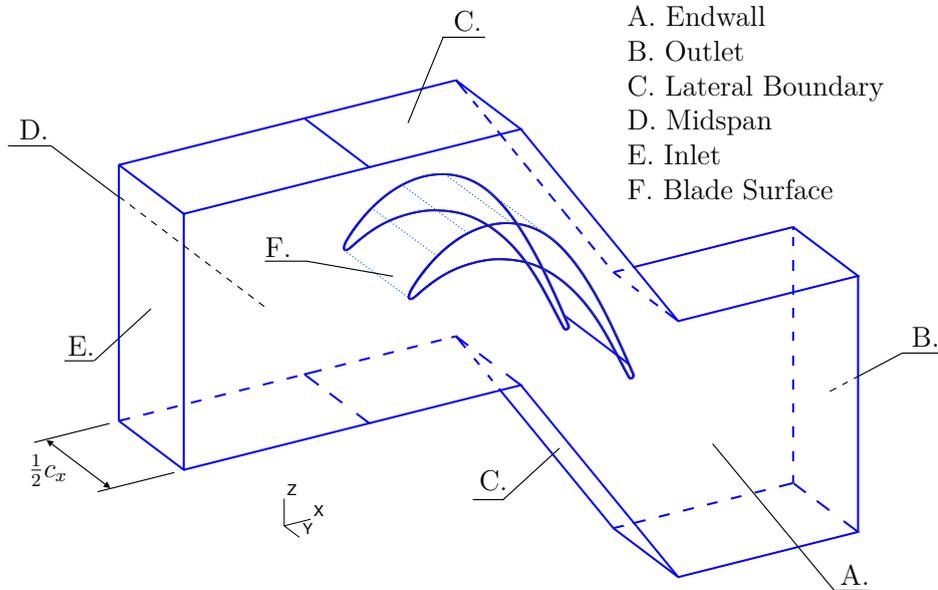


Figura 5.7: Dominio 3D per la pala T106.

Per concludere la dissertazione sul dominio è essenziale sottolineare come oltre alle condizioni di periodicità imposte sulle superfici denominate “Lateral Boundary”, è stato necessario durante questa fase ai fini dei calcoli contrassegnare le superfici “Midspan”, “Inlet” e “Outlet” come superfici fluide mentre le superfici corrispondenti all’endwall e alla pala come superfici solide impermeabili e adiabatiche.

5.2 Generazione della mesh

Discusso il procedimento che ha portato alla creazione della geometria della pala e alla generazione del dominio tridimensionale all’interno del quale studiare il campo di moto fluidodinamico attorno al profilo, risulta necessario al fine del proseguo della trattazione sulla fase di pre-processing descrivere il processo di “meshing”, cioè lo sviluppo della griglia di calcolo attraverso la discretizzazione del dominio.

La generazione della mesh è uno dei componenti chiave di qualsiasi simulazione CFD, infatti la griglia di calcolo oltre ad essere necessaria per l’avvio stesso dei calcoli numerici in quanto la fluidodinamica computazionale si basa sulla ricerca della soluzione di determinate equazioni (Eulero, Navier-Stokes, etc.) esclusivamente in corrispondenza di punti discreti dello spazio, esercita anche un ruolo diretto fondamentale su carattere ed entità dei risultati stessi. Infatti l’impiego di una mesh piuttosto che di un’altra si dimostra di estrema importanza sia per la stabilità che per l’accuratezza dell’analisi, per tale motivo la

costruzione della griglia di calcolo deve essere pensata ed implementata ad hoc per il problema specifico, in funzione della geometria, del tipo di codice (ad esempio se quest'ultimo si basa su un approccio ai volumi finiti o differenze finite) e della fluidodinamica.

Sviluppare un software in grado di gestire il processo di generazione della griglia, fornito in input un dominio tridimensionale, è un'impresa assai ardua, in quanto oltre a delle evolute capacità informatiche è necessaria una profonda conoscenza di teorie di geometria algebrica, trasformazioni di coordinate, proprietà topologiche, etc. Per tale ragione, molti sono i software commerciali disponibili, che forniscono all'utente uno strumento molto potente e veloce per la regolazione della griglia più adatta al caso specifico; in questo caso, come già anticipato nel paragrafo precedente, per la gestione della geometria del dominio e della generazione della mesh è stato impiegato Gmsh [30].

La prima decisione che tipicamente ci si trova ad affrontare nella fase di produzione di una griglia di calcolo è quella di scegliere tra una griglia struttura e una non strutturata. La prima è composta da famiglie di linee intersecanti, una per ogni dimensione nello spazio (due famiglie in 2D e tre in 3D), in cui ogni punto della griglia è posizionato all'intersezione di una e una sola linea di ogni famiglia. Diversamente, le griglie non strutturate si rifanno a distribuzioni arbitrarie di punti di griglia, in cui i punti sono connessi da triangoli, quadrilateri o poligoni in 2D, o da diversi tipi di poliedri in 3D, come ad esempio tetraedri, prismi, piramidi o esaedri.

Come evidenziato da Hirsch [1], una griglia strutturata potrebbe essere considerata come quella più "naturale" per problemi legati ai flussi, in quanto i flussi di corrente sono generalmente allineati con le superfici solide che li contengono. Inoltre da un punto di vista ingegneristico, in confronto alle griglie non strutturate, quelle strutturate si rivelano essere sempre migliori in termini di accuratezza dei risultati, in termini di tempo di calcolo e di requisiti di memoria. Ad esempio, la mesh ideale sarebbe una griglia con una distribuzione cartesiana dei punti, in cui essi sono equidistanti e le celle sono cubi perfetti con $\Delta x = \Delta y = \Delta z$. Per tale griglia verrebbe realizzata la più alta accuratezza possibile e l'utilizzo di un metodo agli elementi finiti condurrebbe alle stesse formule di un metodo alle differenze finite.

Tuttavia, implementare una griglia strutturata per risolvere flussi in corrispondenza di geometrie molto complesse porterebbe ad un impiego di tempo e di risorse così elevato da risultare proibitivo ai fini pratici per due principali ragioni. La prima è legata alla grande mole di calcoli necessaria per passare da un dominio fisico ad un dominio di calcolo tramite opportune trasformazioni di variabili, valide solo e unicamente per una data geometria ben precisa, la seconda deriva dalla grande "rigidezza" delle griglie strutturate, all'interno delle quali per aggiungere localmente maggiori punti di griglia, per aumentare

la risoluzione spaziale ad esempio, è necessario conseguentemente aggiungere linee di ogni famiglia intersecanti in quel punto, influenzando il resto dell'intero dominio.

Per questi e altri motivi la tendenza negli ultimi anni è stata quella di impiegare principalmente griglie non strutturate; propensione incoraggiata dalla totale compatibilità dei metodi ai volumi finiti e agli elementi finiti con tali tipi di mesh (al contrario del metodo alle differenze finite) e alimentata dalla generazione efficiente e veloce di tale griglie eseguita dai numerosi software commerciali che riescono ad adattarsi molto bene ed automaticamente a qualsiasi geometria.

Ai fini del seguente lavoro, poiché il codice impiegato per i calcoli, descritto nel corso del Capitolo 3, si basa su un approccio agli elementi finiti discontinui, è stato possibile impiegare una griglia non strutturata. Tuttavia, la filosofia che ha guidato tutto il processo di generazione della mesh è stata quella di servirsi di tutti i benefici derivanti dall'utilizzo di una griglia non strutturata, cercando però di controllare attivamente la qualità di quest'ultima in termini di dimensione e forma dei volumi, con l'obiettivo da una parte di ben risolvere nello spazio tutte le strutture fluidodinamiche di interesse (ad esempio in prossimità dell'endwall o del profilo) e dall'altra di avvicinarsi, ove possibile e quanto più fedelmente, ad una griglia strutturata, in cui i volumi localmente tendono ad una distribuzione e ad un dimensionamento uniforme.

Nei prossimi paragrafi verrà descritto dettagliatamente in che modo è stata perseguita l'idea appena esposta, discutendo prima della discretizzazione bi-dimensionale eseguita sul piano $x - z$ e successivamente di quella nella terza dimensione y , in riferimento agli assi riportati in Figura 5.7.

5.2.1 Definizione dei campi nella Mesh 2D

Nel corso della seguente sezione, il focus sarà incentrato sugli strumenti utilizzati per discretizzare opportunamente le superfici denominate "Endwall" e "Midspan" in Figura 5.7, ottimizzando la mesh per lo studio specifico dei secondary flows.

Per l'area del dominio in prossimità del profilo è stato scelto di inserire localmente una griglia strutturata O-type, al fine di riuscire a studiare i dettagli dello strato limite. Ossia una mesh in cui le famiglie di linee sono curvilinee e circondano completamente il profilo di pala, con una topologia che ricorda appunto la lettera "O". In questo modo il dominio risulterebbe discretizzato tramite una "multi-block grid", cioè una griglia multi-blocco in cui una griglia strutturata O-type, come quella mostrata in Figura 5.8, ancorata al profilo di pala è contornata all'esterno da una griglia non strutturata.

Per gestire tale operazione con Gmsh si è fatto uso di strumenti integrati al-

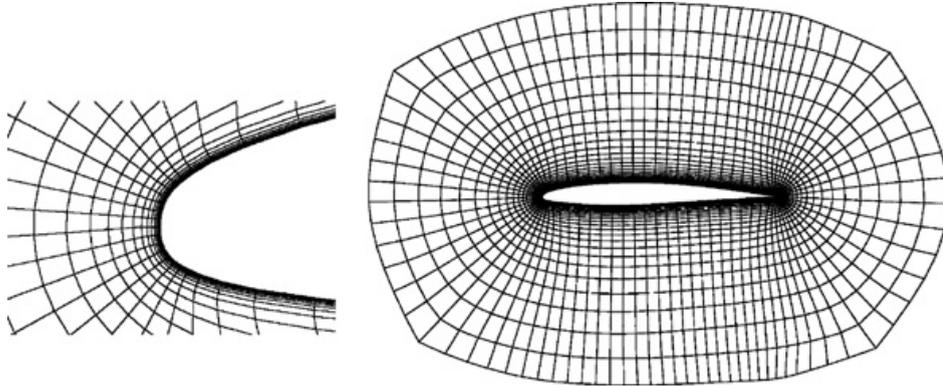


Figura 5.8: Esempio di una griglia O-type, Hirsch [1].

l'interno del software, denominati “fields” e “attractors” (campi e attrattori), i quali permettono di agire direttamente sulla geometria e dimensione dei cosiddetti mesh elements. In particolare, per la costruzione della griglia strutturata O-type, si è impiegato il field *BoundaryLayer*; quest'ultimo richiede in input la curva del profilo attorno al quale costruire la mesh ed una serie di parametri per gestire spessori e leggi di accrescimento delle dimensioni degli elementi. Tra tali parametri si trovano:

- *hwall_n*, il quale definisce la dimensione degli elementi normali alla parete solida;
- *thickness*, che gestisce il massimo spessore del field e dunque della griglia strutturata attorno al profilo;
- *ratio*, che fissa il rateo di crescita, in termini di dimensioni, tra due layer successivi.

La griglia ottenuta in prossimità del profilo della paletta T106C è stata riportato in Figura 5.9; la scelta dei valori numerici da assegnare ad ogni parametro è un processo “trial-and-error”, in cui sono necessari diversi tentativi per riuscire ad includere lo strato limite a parete all'interno della griglia strutturata. In prima istanza sono stati impiegati dei valori utilizzati per la medesima geometria in simulazioni bidimensionali precedenti e dunque non ottimizzati per lo studio dei flussi secondari. Per esigenze di tempo pertanto ci si è limitati a condurre i calcoli su una griglia preliminare, ma si sottolinea come un'analisi di convergenza di griglia, studiando la distanza a parete non dimensionale y^+ , risulta essenziale in una seconda fase, più avanzata, di calcolo.

Le proprietà geometriche della griglia non strutturata rimanente sono state modificate usando come attrattori il profilo stesso, il bordo di attacco, il bordo

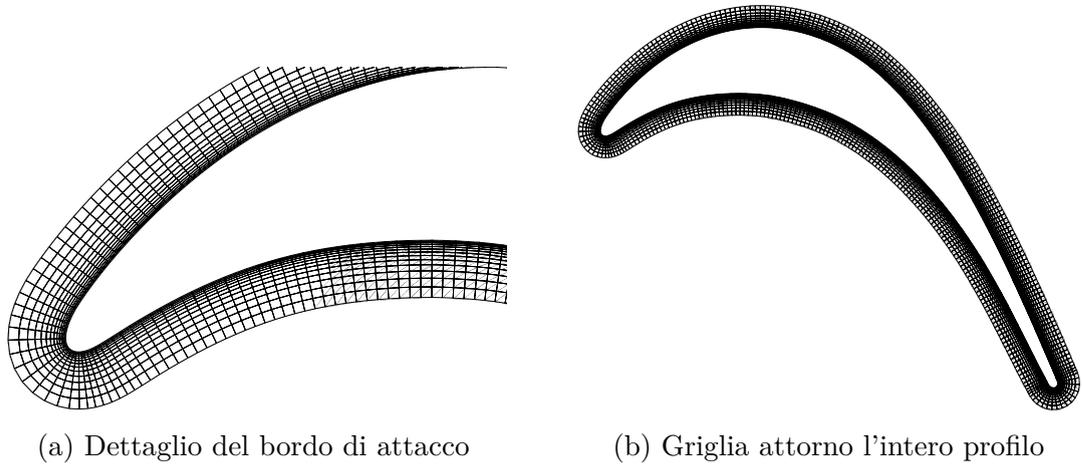


Figura 5.9: O-type grid attorno il profilo di pala T106C.

di fuga e la sezione di outlet. Ciò significa che in prossimità delle zone appena citate, è stato condotto un controllo attivo delle dimensioni degli elementi per mezzo dei seguenti parametri:

- $DistMin$, distanza dall'attrattore fino alla quale la dimensione della cella rimane pari a $LcMin$;
- $DistMax$, distanza dall'attrattore dopo la quale la dimensione della cella sarà pari a $LcMax$;
- $LcMin$, dimensione delle celle all'interno di $DistMin$
- $LcMax$, dimensione delle celle all'esterno di $DistMax$.

Chiaramente le condizioni più stringenti in termini di dimensioni di cella sono state imposte in corrispondenza del bordo di attacco e di fuga del profilo, in cui ci si aspetta una grande deflessione delle linee di corrente per via della presenza dei punti di singolarità in cui il fluido si arresta.

5.2.2 Controllo della mesh nella terza dimensione

Come ripetuto più volte l'oggetto delle analisi condotte sarà lo studio delle strutture fluidodinamiche dei secondary flows, dunque di tutte quelle strutture vorticose descritte nel Capitolo 4 che si originano sull'endwall. Per tale motivo, un'elevata risoluzione spaziale in corrispondenza della parete solida posizionata a $y = 0.5$ risulta essere di fondamentale importanza.

Mantenere la dimensione verticale degli elementi molto piccola per tutto lo spessore del dominio, risulterebbe però impraticabile per l'elevato numero di volumetti risultanti, ed inutile, in quanto lontano dall'endwall gli effetti tridi-

mensionali sono praticamente assenti, provocando un grosso spreco di tempo e di potenza di calcolo. Appare chiaro, dunque, come l'impiego di volumi con altezza crescente via via che aumenta la distanza dall'endwall sia essenziale. Se però sul piano $x - z$ si è agito sulla dimensione delle celle con gli strumenti in-built messi a disposizione da Gmsh, per la discretizzazione del dominio nella terza dimensione y è stato indispensabile codificare uno script MATLAB [31], in modo da gestire la dimensione verticale degli elementi.

Fornendo in input la minima dimensione verticale desiderata a parete, lo spessore del dominio (pari a $1/2c_x = 0.5$) e il numero di strati in cui suddividere lo spessore del dominio, lo script calcola il rateo di crescita dei volumi in direzione y , restituendo la dimensione verticale di ogni strato.

Come verrà descritto nel proseguo della trattazione, i volumi di calcolo saranno creati attraverso una estrusione lineare, in direzione y , dei poligoni costituenti le celle di calcolo sul piano $x - z$. Pertanto la proiezione dei volumetti sul piano $x - y$ risulterà essere di forma rettangolare, con altezza costante per ogni layer, come si evince dalla configurazione della mesh sul piano verticale derivante da quanto detto finora riportata in Figura 5.10. Si sottolinea come l'altezza massima raggiunta dai prismi nello strato più lontano dall'endwall risulti essere dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni 2D delle celle sul piano orizzontale, dunque totalmente in linea per una buona risoluzione del flusso di corrente medio bidimensionale, tipico di quelle posizioni radiali.

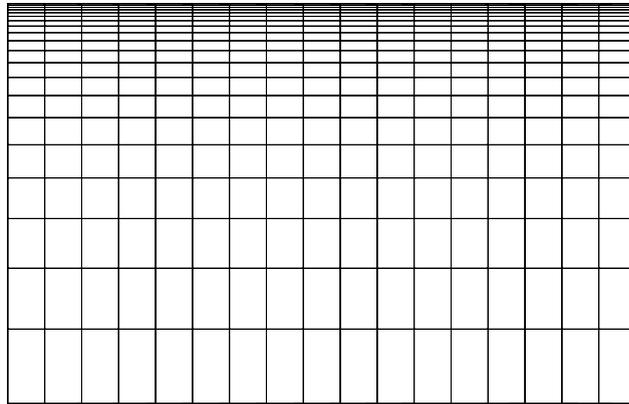


Figura 5.10: Configurazione mesh sul piano verticale $x - y$.

È stato inoltre compiuto uno studio preliminare, i cui risultati sono mostrati in Figura 5.11, per esplorare l'influenza del numero di layers con il quale suddividere il dominio sia sul numero di volumi totali contenuti dalla mesh che sulla memoria utilizzata nei calcoli, a parità di discretizzazione sul piano orizzontale $x - z$. In fase di progettazione della mesh, infatti, un'accortezza molto utile è quella di tenere sotto controllo il numero di elementi totale, in quanto questo si ripercuote sia sul tempo di calcolo totale che sulla memoria necessaria.

Chiaramente, per via del tipo di costruzione degli elementi di griglia, ossia attraverso un'estrusione lineare, a parità di mesh 2D, il numero di strati e il numero di volumetti sono legati da una legge lineare, in quanto è come se i volumi che hanno per base le celle bidimensionale sulle superfici di "Endwall" e "Midspan" e per altezza lo spessore del dominio, venissero frazionati in numero pari al numero di strati selezionato.

Situazione leggermente diversa è quella riguardante la memoria utilizzata, la cui legge in funzione del numero di layers si distacca di poco dall'essere lineare, avvicinandosi ad un'espressione lievemente iperbolica.

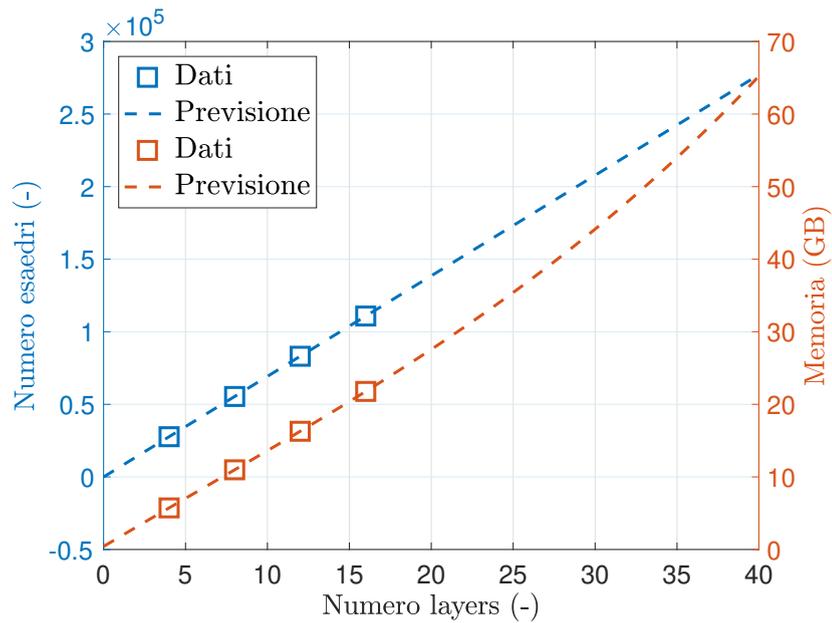


Figura 5.11: Legame tra numero di layers in direzione verticale y , numero di volumi e consumo di memoria.

5.2.3 Algoritmi di meshing

Dopo aver esaminato i tratti peculiari e le criticità della generazione della griglia sui piani orizzontali e lungo la terza direzione y , il passo successivo da compiere consiste nella creazione ed ottimizzazione della mesh globale vera e propria, che metta insieme i requisiti esposti nella sezione 5.2.1 e quelli mostrati nella sezione 5.2.2. Per farlo, Gmsh mette a disposizione una serie di algoritmi di "meshing" per la discretizzazione 2D, 3D e per la ricombinazione degli elementi in 2D.

In realtà, il processo di discretizzazione 3D del dominio nella terza direzione, ossia lungo l'asse y , è stato totalmente esaurito e concluso nella sezione 5.2.2, e nessuna ottimizzazione attraverso l'utilizzo di diversi algoritmi di meshing

è stata impiegata. Per lo spessore verticale del dominio, infatti, la migliore scelta in termini di velocità e accuratezza è stata quella di operare una semplice estrusione lineare degli elementi 2D discretizzati sui piani orizzontali, in quanto il profilo di pala all'interno del dominio non subisce nessuna modifica alla sua geometria, come svergolamenti o rastremazioni, lungo l'asse y .

Pertanto una scrupolosa scelta degli algoritmi di meshing e di ricombinazione degli elementi è stata operata solo per il piano $x - z$.

Prima di illustrare le caratteristiche di ogni algoritmo, evidenziandone i pro e contro, è doveroso ai fini della trattazione chiarire schematicamente le linee guida seguite nella scelta della mesh finale, che possono essere riassunte come segue:

- i. *Solo quadrilateri nella mesh 2D.* Nella discretizzazione dei piani orizzontali del dominio è stato scelto l'impiego solamente di elementi quadrangolari e non triangolari. Non per l'impossibilità di lavorare con mesh ibride, ma poiché la libreria usata dal codice di calcolo può gestire solamente esaedri e tetraedri, e sebbene l'estrusione lineare delle celle quadrangolari generi esaedri, quella delle celle triangolari genera prismi a base triangolare e non tetraedri.
- ii. *Regolarità della griglia.* Benché la mesh prescelta per la geometria del problema e per i metodi numerici sfruttati dal codice sia di tipo non strutturato, per assicurare un'elevata accuratezza nella soluzione e garantire una sufficiente stabilità per tutta la durata dei calcoli, è bene che essa sia il più regolare possibile, e che quindi si avvicini quanto meglio, laddove possibile, ad una griglia strutturata.
- iii. *Minor numero di elementi di griglia possibile.* Infine, un buon compromesso tra risoluzione e numero di elementi di griglia deve essere trovato. In quanto una mesh costituita da un numero troppo elevato di volumetti potrebbe richiedere un tempo di calcolo tanto ingente da rendere l'analisi impraticabile.

Come facilmente immaginabile, la scelta degli algoritmi di meshing e ricombinazione, tale per cui vengano soddisfatti tutti i requisiti appena esposti contemporaneamente, non è un'attività affatto semplice in quanto non esiste un'univoca soluzione migliore delle altre. Tale difficoltà deriva dal fatto che i requisiti fissati sono molto spesso in contrapposizione netta tra loro. Ad esempio, se si richiede all'algoritmo di meshing un'elevata regolarità della griglia, quest'ultimo molto probabilmente non riuscirà ad impiegare elementi quadrangolari per le zone di dominio ad alta distorsione, come il passaggio tra l'area di upstream e downstream, o all'interfaccia tra due regioni di mesh differenti definite da appositi field. Oppure, la richiesta del minor numero di elementi di griglia possibile, nei termini di un fissato livello di risoluzione spa-

ziale, favorisce da una parte la presenza di triangoli nella mesh e ostacola una grande regolarità della griglia dall'altra, in quanto spostandosi da una griglia non strutturata ad una che si avvicina ad una griglia strutturata il numero di volumi cresce vertiginosamente.

Dunque, appare chiaro come la selezione degli algoritmi risulti essere frutto di un lungo processo di best trade-off tra un ventaglio estremamente ampio di possibili scelte. In Tabella 5.2 è stato riportato un esempio dei risultati ottenuti dalle varie combinazioni di algoritmi di meshing e ricombinazione 2D in termini di numero di quadrilateri e triangoli generati. Nelle Figure 5.12, 5.13 e 5.14 sono invece rappresentate le mesh 2D generate rispettivamente dagli algoritmi di meshing Delaunay, Frontal-Delaunay e Frontal-Delaunay for Quads e dall'algoritmo Blossom per la ricombinazione degli elementi.

Il primo dato che emerge leggendo i valori in Tabella 5.2 è l'aumento di elementi che si verifica impiegando progressivamente come algoritmi di ricombinazione Blossom, Blossom Full-Quad e Simple Full-Quad a parità di algoritmo di meshing. Dunque per la geometria considerata l'algoritmo di ricombinazione degli elementi che appare soddisfare meglio il requisito di minimo numero di volumi è Blossom. Pertanto la migliore combinazione sembrerebbe F-D for Quads per l'algoritmo di meshing e Blossom per quello di ricombinazione, in quanto è quella che fornisce il minor numero di elementi e che, come visibile ad occhio nudo in Figura 5.14, rispetto alle altre, garantisce una elevatissima regolarità della griglia, costituendo a grandi linee una griglia strutturata a blocchi posizionati in corrispondenza dell'inlet, dell'outlet e del profilo di pala (sotto forma di O-type grid). L'algoritmo Frontal-Delaunay for Quads è infatti una variante di Frontal-Delaunay pensata proprio per la costruzione di elementi costituiti da angoli retti, in modo da favorire la ricombinazione e agevolare una maggiore regolarità. Tuttavia tale algoritmo, per il caso particolare studiato, provoca la presenza di 8 triangoli, in prossimità dell'angolo che il bordo laterale del dominio forma sulla superficie dorsale del profilo per seguire la forma della paletta, e all'interfaccia tra l'O-type grid e il resto della griglia non strutturata.

Come già detto, in quanto il codice di calcolo non può gestire elementi con forma di prismi a base triangolari, partoriti dall'estrusione delle celle triangolari, l'algoritmo F-D for Quads non può essere impiegato, se dovessero rimanere fissati i parametri impostati nei field usati per la redazione della tabella. È doveroso sottolineare, a tal proposito, un importante aspetto: nel bacino delle variabili in gioco, interpretano un grande ruolo anche i field, gli attrattori e i valori numerici assegnati ai relativi parametri; pertanto, per una stessa geometria, il numero di combinazioni di possibili modi con cui costruire la mesh risulta infinito. Inoltre, se da una parte agendo su tali parametri, aumentano i gradi di libertà nella scelta, dall'altro, cresce anche il numero di vincoli da rispettare, poiché la modifica dei field con l'obiettivo di ottimizzare la griglia

di calcolo provoca di contro una differenza con la quale le strutture fluidodinamiche in prossimità di quei campi vengono risolte. Quella evidenziata è la nascita di un ulteriore compromesso, questa volta tra necessità numeriche ed esigenze fluidodinamiche, entrambe essenziali per il livello di qualità della simulazione, che va affrontato iterativamente in più cicli di prove e aggiustamenti.

| | | 2D Algorithm | | |
|----------------------------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | | F-D | D | F-D For Quads |
| 2D Recombination Algorithm | B | Q : 69004 T : 0 | Q : 72758 T : 0 | Q : 63494 T : 8 |
| | S Full-Quad | Q : 82194 T : 4 | Q : 86934 T : 4 | Q : 73834 T : 4 |
| | B Full-Quad | Q : 81468 T : 4 | Q : 86338 T : 4 | Q : 73332 T : 4 |

* Legenda *

“F-D”: Frontal Delaunay, “D”: Delaunay, “B”: Blossom, “S”: Simple, “Q”: Quadrilateri, “T”: Triangoli.

Tabella 5.2: Tabella riassuntiva delle mesh derivanti dalle combinazioni di algoritmi di meshing.

Alla luce di quanto detto, per i primi calcoli si è scelto di utilizzare una mesh generata con l’algoritmo di meshing 2D Frontal-Delaunay e con l’algoritmo di ricombinazione Blossom, sia per la T106 che per la T106/3, le cui caratteristiche sono state riportate in Tabella 5.3.

| | N. Quadrilateri | N. Esaedri | N. Layers |
|---------|-----------------|------------|-----------|
| T106C | 44904 | 257040 | 20 |
| T106/3C | 68958 | 497980 | 20 |

Tabella 5.3: Mesh utilizzate per i primi calcoli per le palette T106 e T106/3.

5.3 Calcoli

Così come schematizzato nel diagramma ad albero in Figura 5.1, con il completamento della generazione della griglia di calcolo si chiude lo stadio di Pre Processing e si apre quello di Processing.

L’intera fase di computazione numerica è stata condotta sfruttando il cluster “Hactar”, facente parte delle risorse di calcolo fornite da hpc@polito, progetto

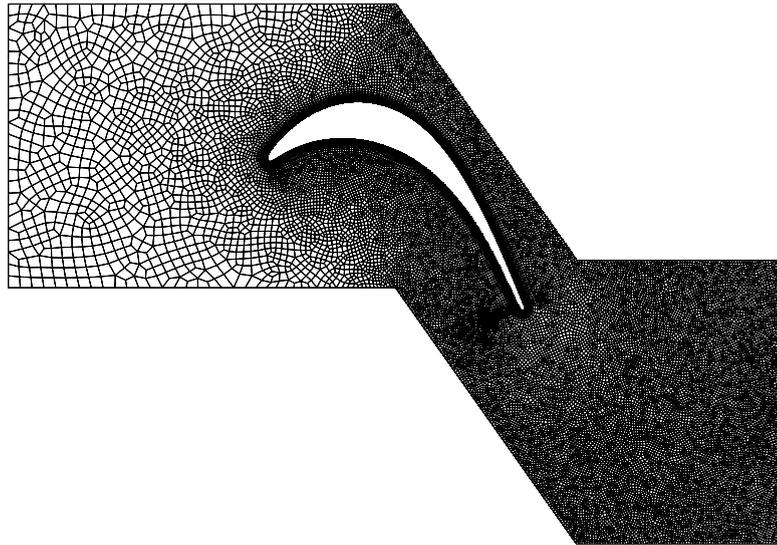


Figura 5.12: Mesh 2D generata con gli algoritmi Delaunay e Blossom.

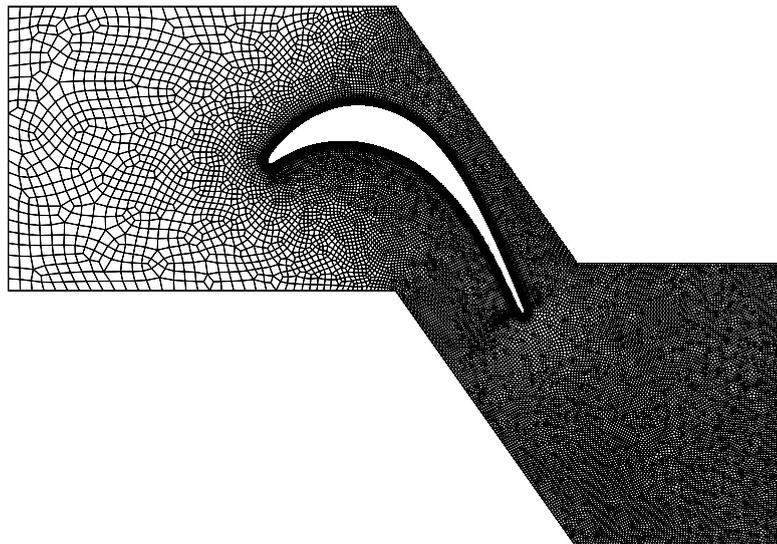


Figura 5.13: Mesh 2D generata con gli algoritmi Frontal-Delaunay e Blossom.

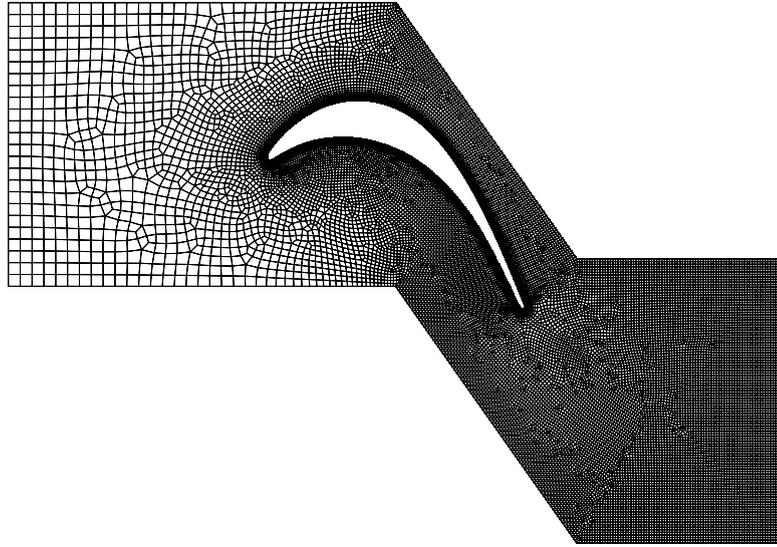


Figura 5.14: Mesh 2D generata con gli algoritmi Frontal-Delaunay for Quads e Blossom.

di Academic Computing del Dipartimento di Automatica e Informatica presso il Politecnico di Torino (<http://www.hpc.polito.it>).

Il processo di calcolo può essere suddiviso in due momenti separati: il primo è costituito da una serie di passi necessari all'avviamento dei calcoli, il secondo invece costituisce il calcolo vero e proprio della soluzione in corrispondenza degli elementi della griglia selezionata.

Per evitare che le elaborazioni vadano in instabilità e che il codice “esplosa”, è necessario avviare i conti tramite un nodo di calcolo interattivo, tramite il quale, osservando in diretta il comportamento della soluzione, si può intervenire per modificare i parametri in gioco. Per tale motivo, in prima istanza le simulazioni sono state lanciate attivando le equazioni di Eulero come modello fisico, con una discretizzazione spaziale del primo ordine e con un CFL molto basso, pari a 10. Monitorando l'avanzamento della soluzione ad ogni iterazione sia in termini numerici, che in termini fluidodinamici osservando il valore assunto dalle grandezze fisiche nel dominio, non appena si è constatato il termine delle prime fasi di transitorio, si è cambiato il modello fisico passando dalle equazioni di Eulero alle RANS, con Spalart–Allmaras come modello di turbolenza, e si è incrementato l'ordine di discretizzazione spaziale dal primo al secondo ordine. Dopo aver verificato la stabilità del calcolo, si sono sfruttati tutti i nodi messi a disposizione dal cluster, con una CFL prima pari a 100 e poi pari a 1000 fino alla convergenza dei risultati.

Le simulazioni effettuate sono state condotte imponendo i seguenti parametri:

$$\alpha_{in} = 32.7^\circ \quad M_{2is} = 0.4 \quad Re_{2is} = 1 \times 10^5 \quad (5.1)$$

5.4 Post Processing

In quest'ultima sezione verranno presentati i risultati più significativi ottenuti dai calcoli elaborati tramite i passaggi esaminati fino a qui. Il software che è stato impiegato nella fase di post processing per l'elaborazione e la visualizzazione grafica dei risultati è VisIt [32].

5.4.1 Campo di Mach

Innanzitutto, per verificare che la simulazione numerica abbia prodotto dei risultati fluidodinamici corretti, coerenti con la natura fisica del problema, è stato confrontato il campo di Mach sul piano orizzontale posto a $y = 0$ denominato "Midspan", in Figura 5.15, con quello trovato dal Professor Ferrero per la medesima geometria ed inlet flow angle ma con $M_{2s} = 0.65$ e $Re_{2s} = 80000$ [3]. I due campi risultano essere totalmente congruenti in termini di distribuzione di numero di Mach per tutto il dominio, sia in prossimità della superficie dorsale e ventrale della paletta, sia nella zona di separazione della corrente, che all'interno della scia. Chiaramente, per via dei diversi valori di Mach isentropico e Reynolds isentropico imposti in uscita nelle due simulazioni, i due campi di Mach differiscono solamente in termini assoluti.

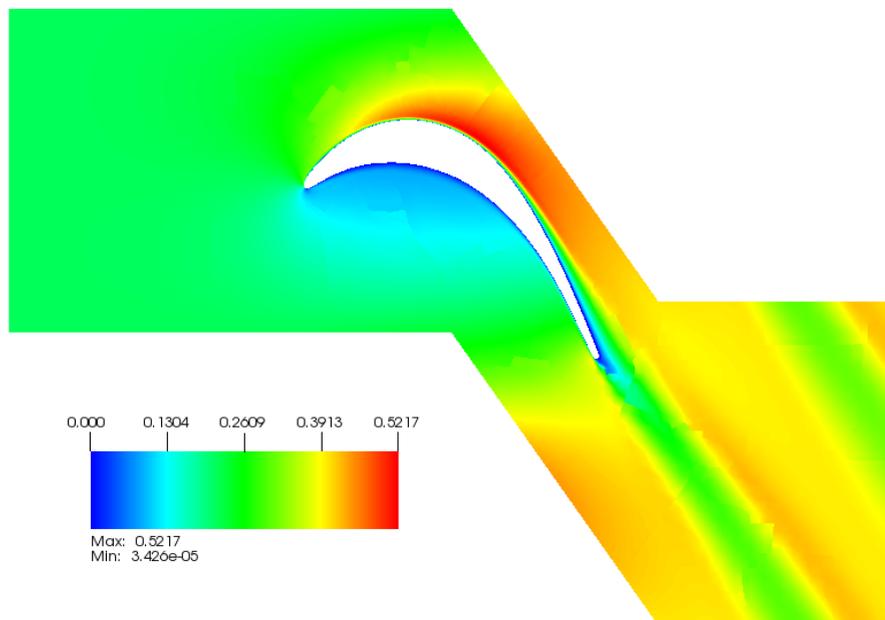


Figura 5.15: Campo di Mach sulla superficie "Midspan" posta a $y = 0$, T106C.

5.4.2 Vortice a ferro di cavallo

Una volta verificato che i risultati restituiti dalla fase di processing siano stati computati in maniera corretta, si è spostata l'attenzione sull'oggetto principale dell'analisi condotta: i flussi secondari. Innanzitutto, si è posto l'obiettivo di evidenziare il vortice a ferro di cavallo generatosi sull'endwall in prossimità del bordo di attacco della pala. Poiché a monte del profilo l'horseshoe vortex possiede una vorticità allineata con l'asse z , perpendicolare dunque alla direzione assiale della schiera di pale, si è operata una sezione sul piano $x - y$ passante per il bordo di attacco per visualizzare il campo di velocità vettoriale e le curve iso-livello di streamwise vorticity, entrambi riportati in Figura 5.16. La streamwise vorticity Ω_s è espressa dalla seguente espressione:

$$\Omega_s = \vec{\omega} \cdot \vec{q} \quad (5.2)$$

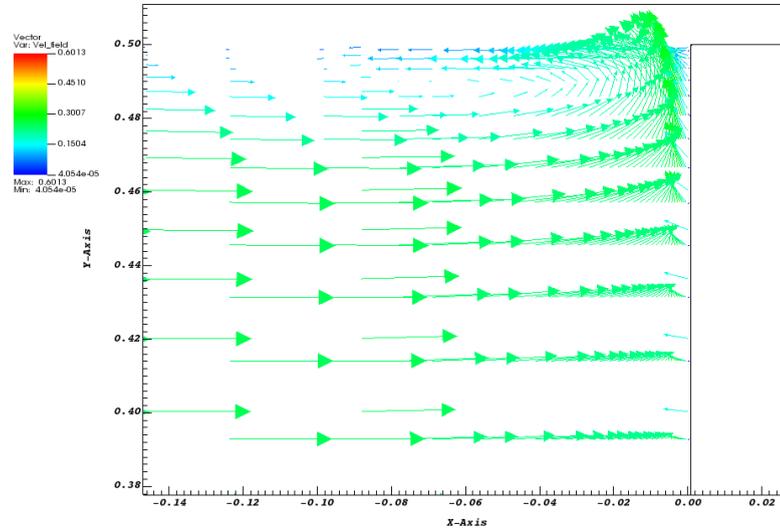
in cui $\vec{\omega} = \nabla \cdot \vec{q}$ è il vettore vorticità e \vec{q} rappresenta il vettore di velocità locale.

In riferimento alla Figura 5.16a, così come atteso, una volta che lo strato limite si separa dall'endwall, il flusso di corrente si “arrotola” su sé stesso originando due piccole strutture vorticoso contro-rotanti, la cui vorticità è evidenziata in Figura 5.16b: una principale, maggiore in intensità e orientata nello stesso verso dell'asse z , che costituisce proprio il corpo centrale del vortice a ferro di cavallo da cui si diramano le due branche che aderiscono alla superficie dorsale e ventrale del profilo, e una seconda, un corner vortex, di dimensioni e intensità molto minori alla prima che spira in senso opposto.

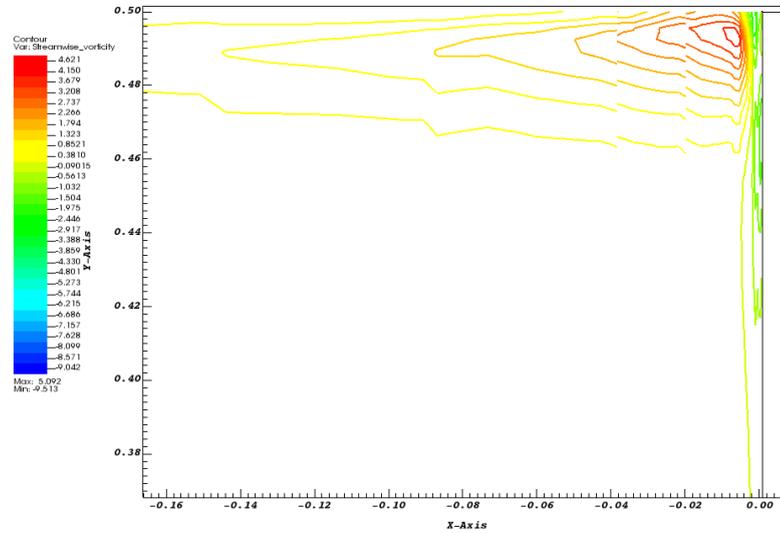
Si noti come nei pressi del bordo di attacco del profilo, il vortice a ferro di cavallo si estenda in direzione radiale per poco più del 5% dell'altezza del dominio.

5.4.3 Streamwise Vorticity

Per indagare l'evoluzione delle strutture vorticoso tipiche dei secondary flows a lungo discusse nel corso del Capitolo 4, analogamente a quanto fatto da Hodson e Dominy [26] e Pichler et al. [25] sono state rappresentate in Figura 5.18 le curve iso-livello della streamwise vorticity Ω_s , per diverse posizioni assiali, espresse in rapporto alla corda assiale c_x , lungo il passaggio tra due palette adiacenti. Si considerino inizialmente soltanto i dati riportati sulla sinistra, cioè quelli che si riferiscono alla palette T016 con la geometria nominale. La prima visualizzazione in Figura 5.18a si riferisce ad un piano posto al 40% della corda assiale c_x , in cui sono ben individuabili tre strutture vorticoso: il corner vortex “C” che “ruota” in senso orario in corrispondenza dell'interfaccia tra endwall e superficie dorsale della palette, la pressure side leg del vortice a ferro di cavallo “HP” e il pressure vortex “P” che “ruotano” in senso antiorario in una posizione di maggior distanza dall'endwall. Procedendo verso valle, al



(a) Campo di velocità vettoriale



(b) Streamwise Vorticity

Figura 5.16: Visualizzazione dell'origine del vortice a ferro di cavallo in prossimità del bordo di attacco della pala T106.

50% della corda assiale c_x , oltre all'intensificarsi dei vortici appena descritti, si riconosce una piccola e schiacciata struttura vorticoso a parete che sovrasta il passage vortex, con vorticità allineata con quella del corner vortex. Tale struttura è la suction side leg dell'horseshoe vortex che, come si evidenzierà in riferimento alla Figura 5.20, si distacca dall'endwall circa a $x/c_x = 0.3$ per avvolgersi e orbitare attorno al vortice di passaggio. Via via che la corrente prosegue il suo percorso dal bordo di attacco al bordo di fuga della paletta,

si osserva come la posizione e la dimensione del corner vortex si mantenga stabile, mentre il passage vortex e la pressure side leg del vortice a ferro di cavallo non solo mutino posizione nel canale, guadagnando sempre più spazio verso la mezzeria della pala, ma accrescano le proprie dimensioni costituendo quasi un'unica struttura vorticoso, dominante in dimensioni rispetto alle altre. In Figura 5.17 è riportato l'andamento dell'intensità della streamwise vorticity Ω_s in valore assoluto per il corner vortex, per il passage vortex e per la suction side leg del vortice a ferro di cavallo, lungo l'asse longitudinale x/c_x . Chiaramente le curve sono puramente qualitative, in quanto è molto difficile separare il contributo di ogni singola struttura vorticoso. Tuttavia il dato di maggior spicco che il grafico fornisce è la superiorità in termini di intensità, oltre che di dimensioni, del passage vortex rispetto agli altri due, con una vorticità che diminuisce gradualmente con il procedere della corrente verso la sezione di outlet contemporaneamente ad un aumento delle sue dimensioni spaziali. Il corner vortex, che possiede una vorticità opposta al vortice di passaggio, risulta essere la seconda struttura vorticoso per intensità all'interno del passaggio, con un aumento progressivo della sua forza fino al 60% della corda assiale c_x che poi crolla repentinamente procedendo verso valle. La suction side leg, infine, risulta avere un andamento piuttosto basso ma comunque costante in termini di intensità, per tutto lo sviluppo assiale della schiera.

Le ultime visualizzazioni riportate nelle Figure 5.18g, 5.18h, 5.18i e 5.18j mostrano la distribuzione di streamwise vorticity immediatamente a valle del bordo di fuga della paletta. Così come discusso nel capitolo precedente, e osservato da Hodson e Dominy [26], tale zona è caratterizzata dalla presenza di due strutture vorticoso, di vorticità opposta, molto ampie nello spazio, frutto della trailing shed vorticity, che però decadono rapidamente nelle successive sezioni a valle, per via dell'azione degli effetti viscosi.

Se si era evidenziato come alla sua origine, nei pressi del bordo di attacco, il vortice a ferro di cavallo occupava solamente il 5% dell'estensione radiale della pala, le strutture vorticoso dei secondary flows, come facilmente individuabile in Figura 5.18, raggiungono presso le sezioni a ridosso del bordo di fuga un'estensione che ricopre circa il 70% di tutta la pala.

In riferimento alla T106/3, ossia alla paletta con profilo identico a quello della T106 ad eccezione del rigonfiamento aggiunto in corrispondenza del bordo di attacco, i risultati sembrano essere molto coerenti con quelli ottenuti da Sauer et al. [29], mostrando anche l'effetto positivo desiderato sulla conformazione dei flussi secondari. In effetti, come si evince dalle immagini riportate a destra in Figura 5.18, per quanto riguarda le posizioni relative dei vortici, e dalla Figura 5.17 per quanto concerne l'intensità di quest'ultimi, si osserva da una parte una riduzione relativa fino al 20% per l'intensità del vortice di passaggio e dall'altra quasi un raddoppio nell'intensità vorticoso della suction side leg

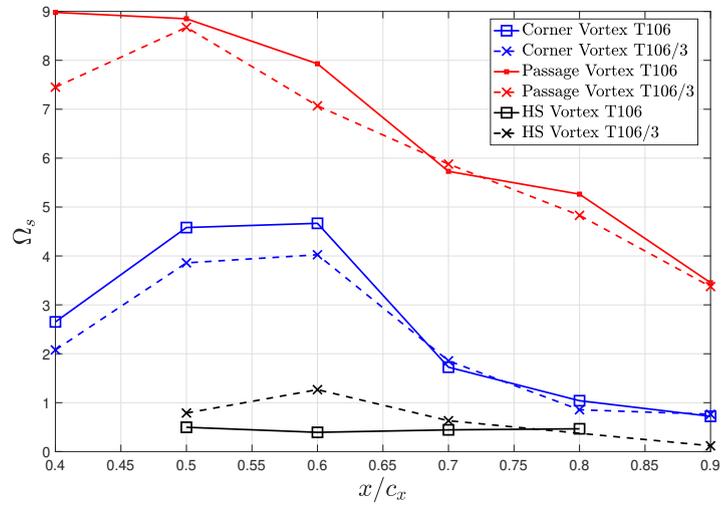
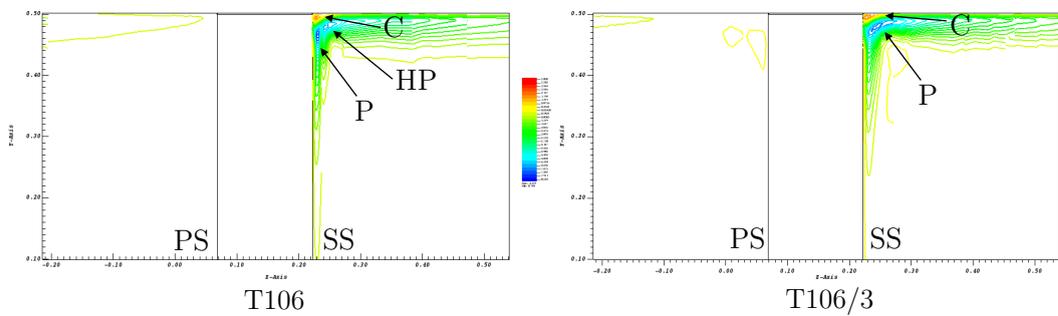


Figura 5.17: Intensità della streamwise vorticity Ω_s (in valore assoluto) delle strutture vorticosi principali dei flussi secondari.

dell'horseshoe vortex, rispetto alla geometria nominale della pala. Pertanto, a causa del calo in termini di forza del vortice di passaggio, e del suo allontanamento dalla pala in direzione tangenziale per via di una maggiore dimensione ed intensità, in prossimità della superficie dorsale, della suction side leg, è molto plausibile che l'interazione tra passage vortex e strato limite prodotto sulla pala sia notevolmente minore rispetto al caso nominale, alleviando pertanto le perdite secondarie.



(a) $x/c_x = 0.40$

Figura 5.18: Streamwise vorticity Ω_s - Parte 1 di 4.

5.4. Post Processing

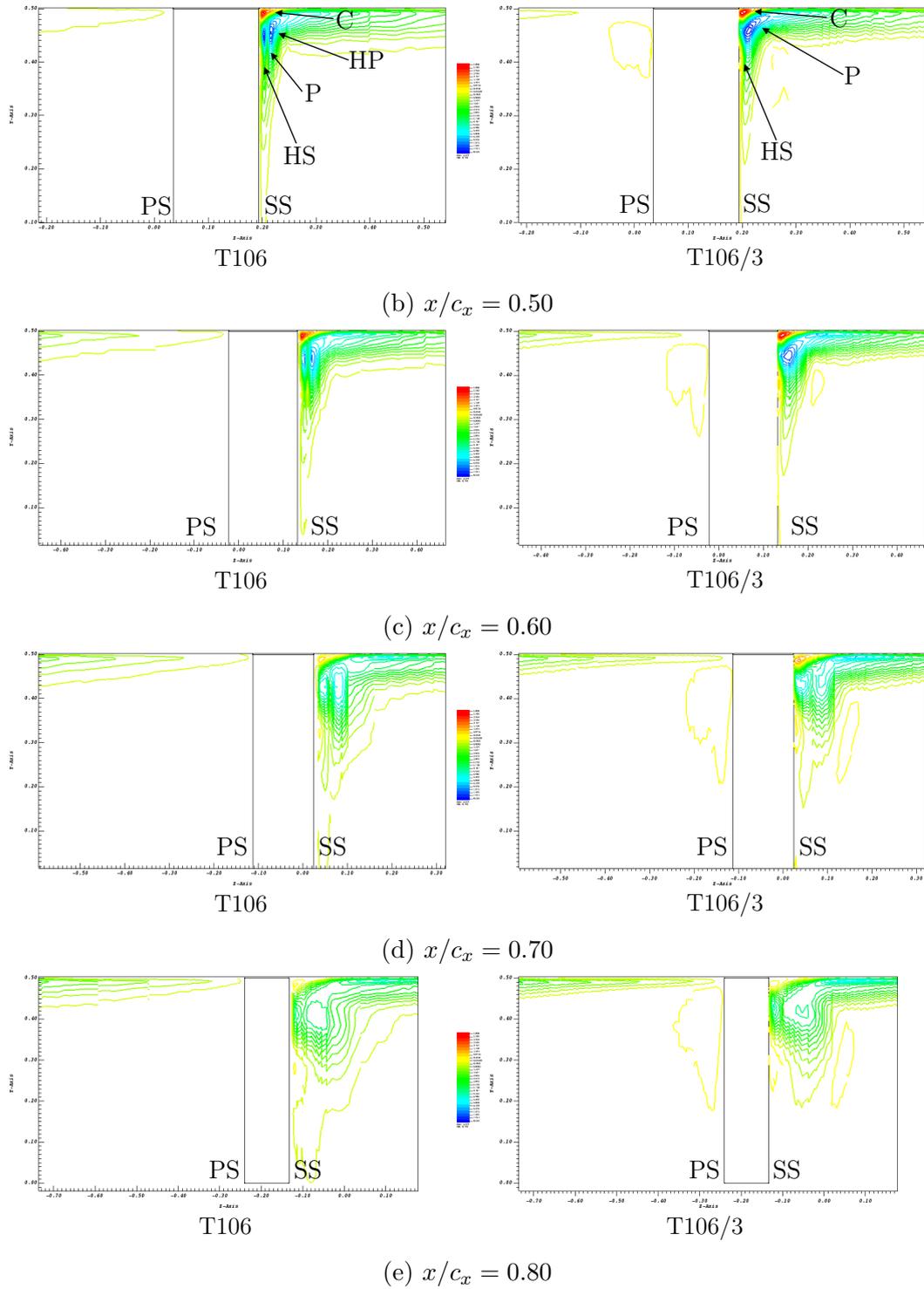


Figura 5.18: Streamwise vorticity Ω_s - Parte 2 di 4.

5. Analisi RANS

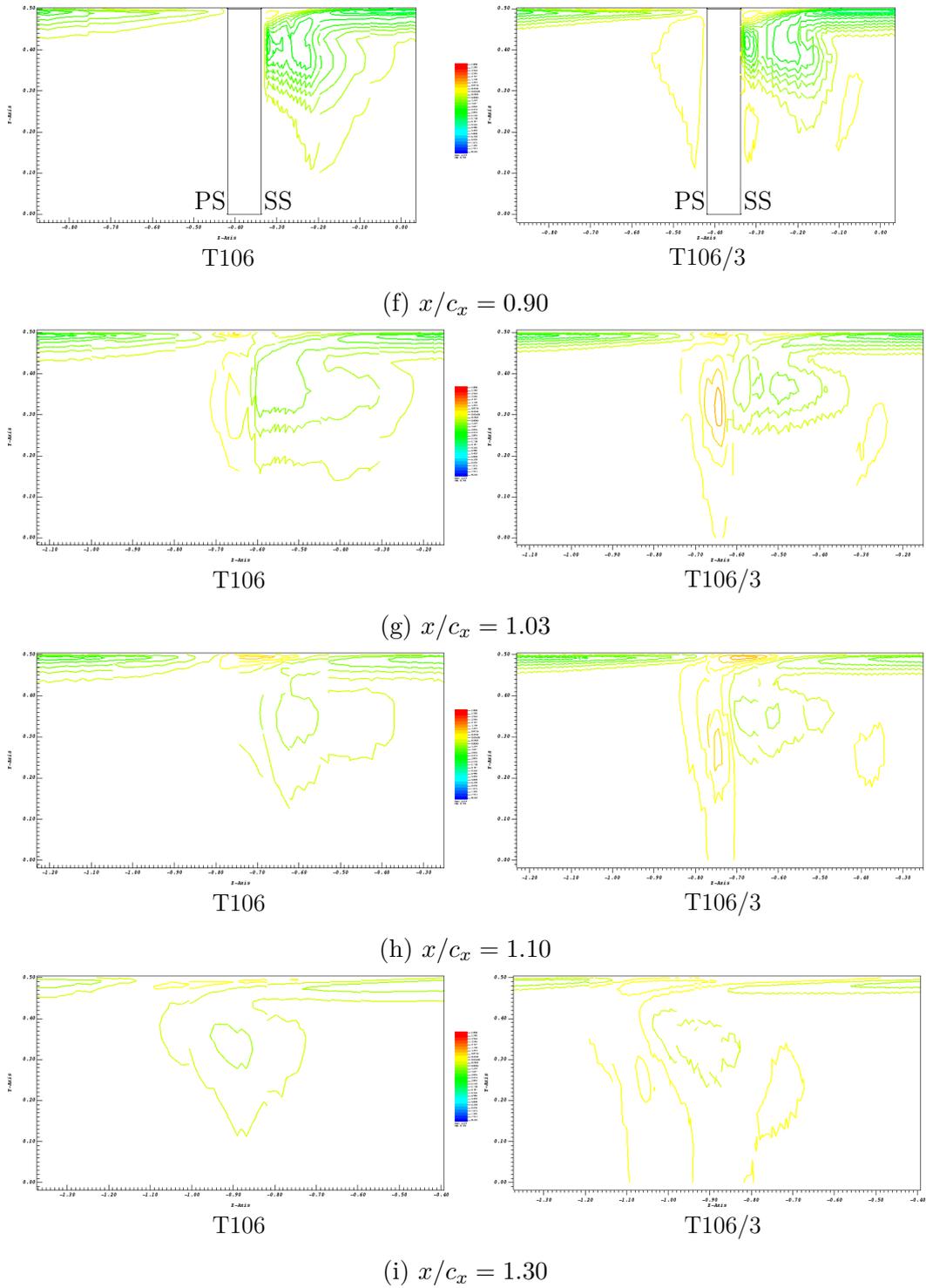
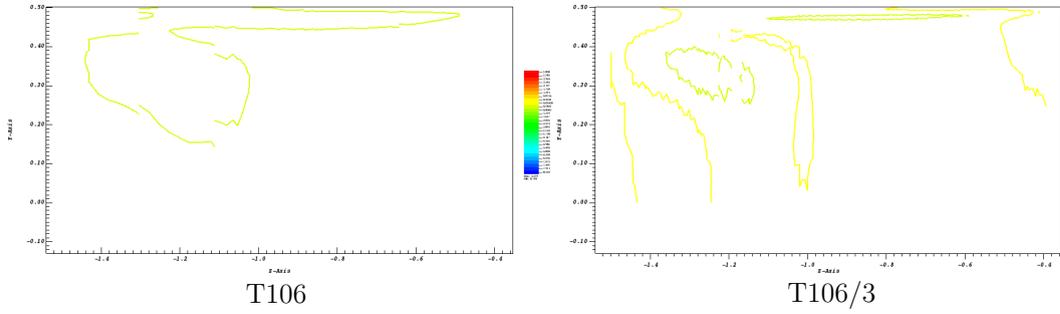


Figura 5.18: Streamwise vorticity Ω_s - Parte 3 di 4.



(j) $x/c_x = 1.50$

Figura 5.18: Streamwise vorticity Ω_s - Parte 4 di 4.

5.4.4 Perdite di pressione totale

Un modo per stimare quantitativamente le perdite è quello di definire un coefficiente di perdita di pressione totale ζ , espresso come

$$\zeta = \frac{p_1^\circ - p^\circ}{p_1^\circ - p} \quad (5.3)$$

in cui p_1° e p_1 indicano rispettivamente la pressione totale e la pressione statica sulla sezione di inlet del dominio.

In Figura 5.19 sono state riportate le mappe delle curve iso-livello del coefficiente di perdita ζ a diverse posizioni assiali lungo il passaggio, sia per la configurazione T106 che per la variante T106/3.

Come ci si attende, la configurazione risultante nella distribuzione di perdite sul piano trasversale $z - y$, ortogonale all'asse della direzione media della corrente x , assume la forma ad “osso di cane” tipica delle schiere di pale di turbina ad alta curvatura.

Considerando la sezione posta al 90% della corda assiale c_x , quando ancora il flusso di corrente è limitato dalla presenza della paletta, si osserva come l'area in cui si apprezza il valore di ζ massimo è quella in corrispondenza dello strato limite sull'endwall e sulla superficie di pala. Tuttavia se tale regione è molto confinata nello spazio, al contrario, le perdite dovute alla presenza dei flussi secondari occupano la maggior parte del canale. In Figura 5.19a sono riconoscibili i contributi nella generazione delle perdite soltanto dei vortici più intensi, ossia il passage vortex, il corner vortex e la pressure side leg dell'horseshoe vortex. Allontanandosi gradualmente dal bordo di attacco verso la superficie di outlet del dominio, le perdite di pressione totale da una parte si fanno sempre meno intense, ma allo stesso tempo si allarga rapidamente la regione “afflitta” dalle perdite secondarie.

Facendo inoltre un confronto tra i diagrammi calcolati per la paletta con il bordo di attacco nominale e quella a cui è stato aggiunto un cosiddetto “bulbo”, si osserva come sebbene la configurazione di perdite di pressione totale, in

5. Analisi RANS

valore assoluto, sia praticamente uguale, per la paletta con il bordo d'attacco modificato T106/3 l'indebolimento ottenuto nell'intensità del vortice di passaggio ha provocato una riduzione, sul piano trasversale, della zona di fluido in cui le perdite non sono nulle ($\zeta > 0$), portando ad un beneficio non trascurabile nell'economia delle perdite all'interno del passaggio di turbina.

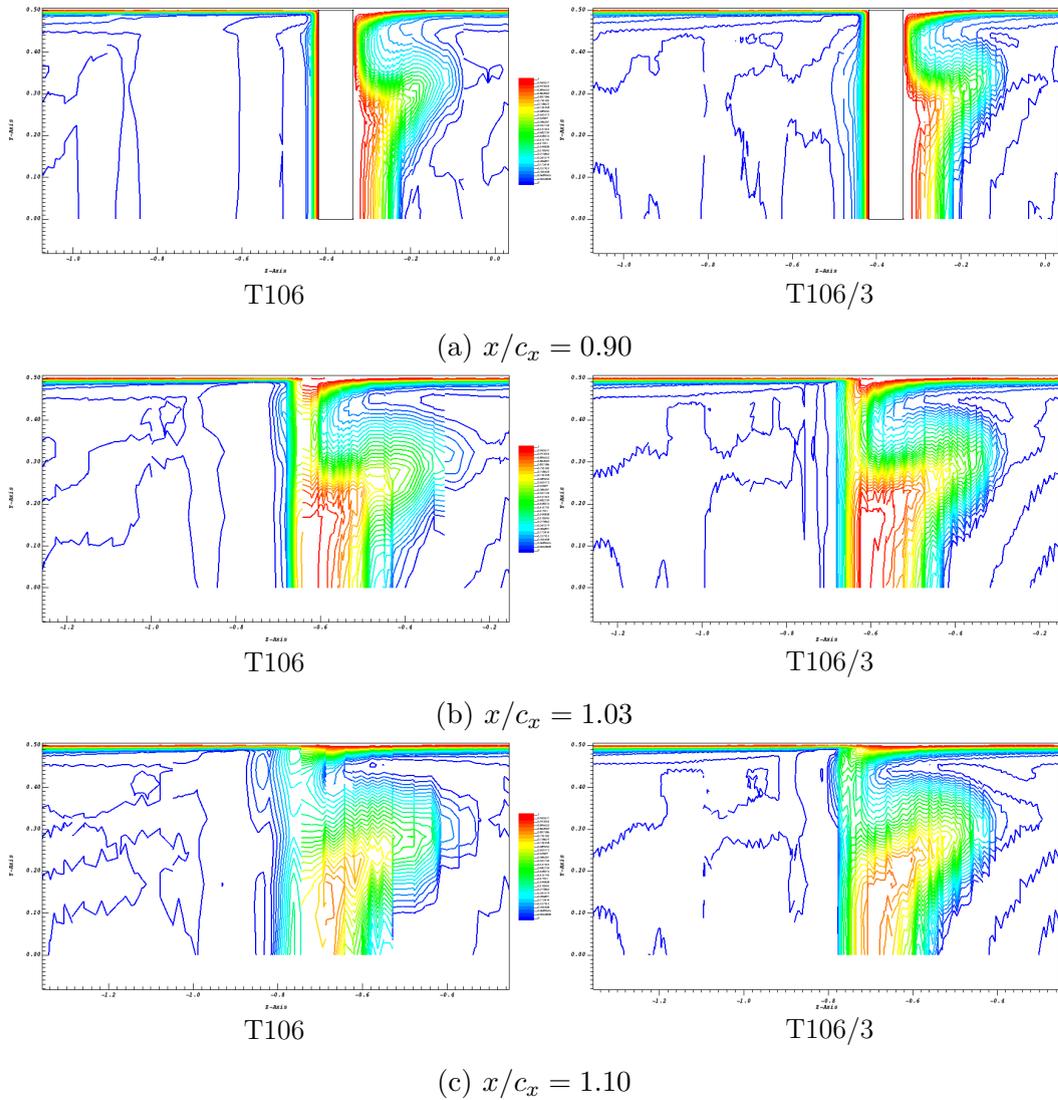


Figura 5.19: Curve iso-livello per il coefficiente di perdita ζ - Parte 1 di 2.

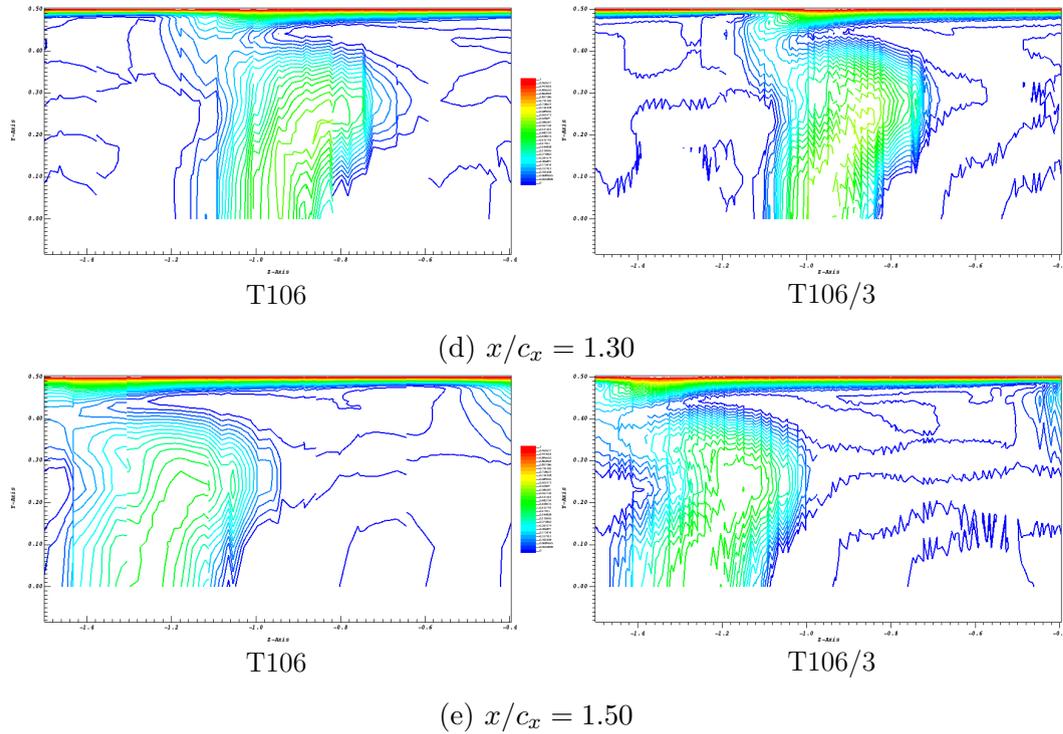


Figura 5.19: Curve iso-livello per il coefficiente di perdita ζ - Parte 2 di 2.

5.4.5 Linee di corrente

Il modo più immediato per visualizzare in maniera diretta le strutture fluidodinamiche che compongono i flussi secondari è quello di osservare l'evoluzione tridimensionale delle linee di corrente entranti all'interno del passaggio formato da due pale adiacenti. Quanto detto è ciò che si è voluto rappresentare in Figura 5.20, in cui sono riportate diverse viste attorno la palette T106. Le streamlines incluse nelle rappresentazioni costituiscono solamente le linee di corrente che sulla sezione di inlet occupano il 10% della dimensione radiale del dominio.

Tali immagini tridimensionali forniscono esattamente l'idea di come le linee di corrente entranti all'interno del passaggio, dopo una certa sezione a valle del bordo di attacco, si separino dall'endwall per formare delle strutture vorticose che si avvolgono per il resto del dominio, principalmente a ridosso della superficie dorsale della pala. In particolare, sono riconoscibili in Figura 5.20b e 5.20c la sottile suction side leg del vortice a ferro di cavallo (HS) che si separa dall'endwall circa a $x/c = 0.3$ e il passage vortex (P) di dimensioni molto più grandi che ruota in verso opposto. Osservando la Figura 5.20a si riesce a cogliere molto bene come le linee di corrente che entrano all'interno del passaggio dalla parte del ventre vengano velocemente allontanate dalla pala per via del forte gradiente di pressione trasversale. Infine, l'immagine riportata in

Figura 5.20d rende visivamente chiaro il fenomeno di alta vorticità legato ai secondary flows e la grandissima difficoltà, nella realtà, di poter separare gli attori interni; d'altra parte sottolinea ancora una volta come l'estensione dei flussi secondari sia in continua crescita lungo l'evoluzione del profilo.

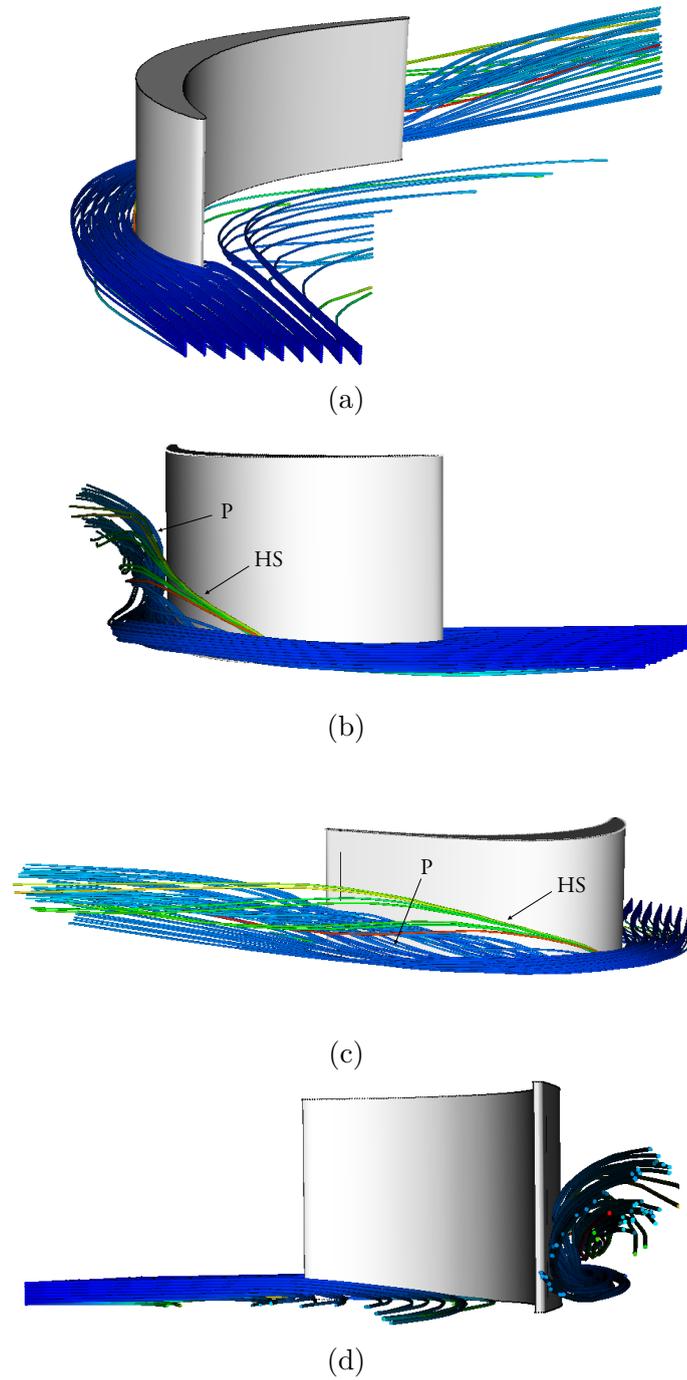


Figura 5.20: Linee di corrente interagenti con la pala T106.

5.4.6 Coefficiente di pressione

All'interno della sezione 4.2.1 si è evidenziato come lo studio della distribuzione del coefficiente di pressione c_p sulla superficie della pala al variare della distanza dall'endwall lungo la direzione radiale fornisca un'immagine istantanea dell'effetto che i flussi secondari esercitano sui carichi aerodinamici agenti sulla paletta stessa. In Figura 5.21 sono state riportate le distribuzioni di c_p per quattro diverse posizioni radiali, in cui il coefficiente di pressione è stato calcolato in analogia con quanto fatto da Pichler et al. [25]:

$$c_p = \frac{p(x) - p_{out}}{p_0^o - p_{out}} \quad (5.4)$$

dove p_0^o rappresenta la pressione totale sulla sezione di inlet e p_{out} la pressione statica media sulla sezione di outlet.

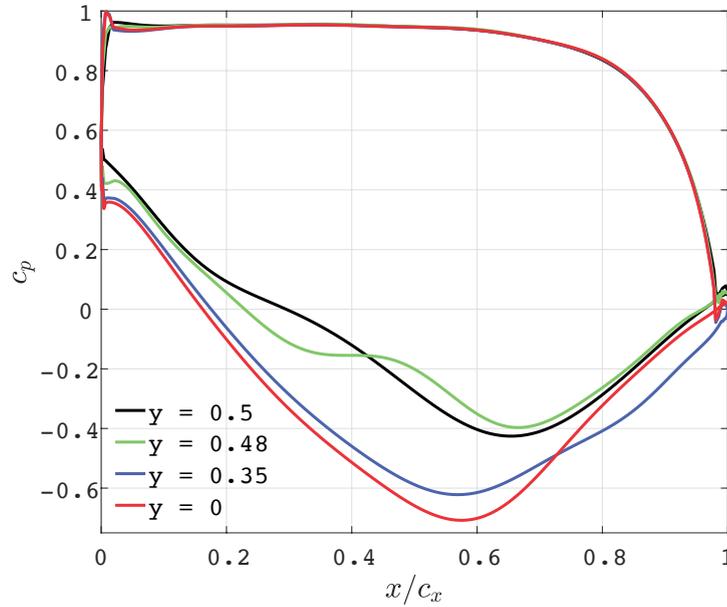


Figura 5.21: Distribuzione del coefficiente di pressione c_p attorno la pala T106 per diverse posizioni radiali.

Ciò che si osserva immediatamente è una grandissima differenza nell'evoluzione del coefficiente di pressione c_p tra dorso e ventre. Se tra la superficie collocata a $y = 0.5$ (in corrispondenza dell'endwall) e la superficie situata a $y = 0$ (in corrispondenza della mezzeria della pala) non si osserva nessuna sostanziale difformità tra le distribuzioni di c_p sul ventre, al contrario, sul dorso è evidente un contrasto netto tra le curve. Tale configurazione sottolinea come le strutture vorticosi tipiche dei flussi secondari, generatesi all'interfaccia

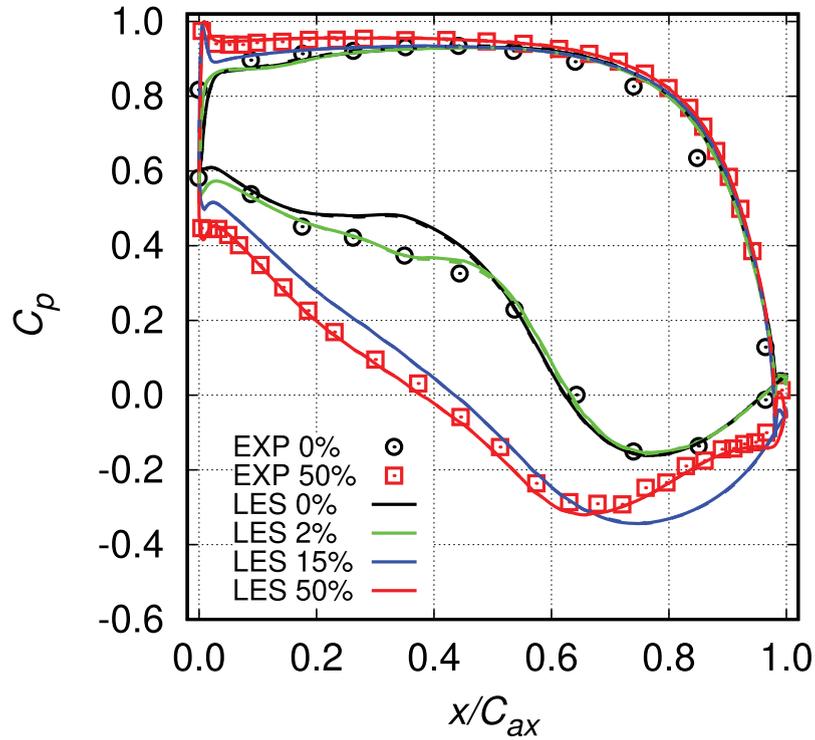


Figura 5.22: Distribuzione del coefficiente di pressione c_p attorno la pala T106 per diverse posizioni radiali. Risultati presentati da Pichler et al. [25].

tra endwall e bordo di attacco, vengano immediatamente trasportate verso la superficie dorsale della paletta per via del gradiente di pressione trasversale. Infatti, le uniche disuguaglianze tangibili sul dorso, tra le varie sezioni radiali, sono collocate in prossimità del bordo di attacco, a causa della presenza del vortice a ferro di cavallo sulla parete di endwall.

L'effetto dei flussi secondari si fa sentire principalmente sul dorso della paletta, provocando un forte impatto negativo sulla riduzione di portanza generata, in quanto proprio sulla superficie dorsale si concentra la grande depressione della corrente che origina la portanza. Quanto detto qualitativamente, trova un riscontro molto stretto se si analizza l'evoluzione radiale del coefficiente di portanza C_L espresso dall'Eq. (4.1):

$$\begin{array}{ll}
 C_L = 0.956 & \text{per } y = 0.50 \\
 C_L = 0.959 & \text{per } y = 0.48 \\
 C_L = 1.137 & \text{per } y = 0.35 \\
 C_L = 1.151 & \text{per } y = 0.00
 \end{array}$$

Se si definisce infatti la variazione percentuale tra la portanza generata ad una fissata y rispetto a quella generata in corrispondenza della mezzeria della pala

come:

$$\varepsilon(y) = \frac{C_L(y) - C_L(y=0)}{C_L(y=0)} \quad (5.5)$$

e la si calcola per ogni sezione:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -1.222\% && \text{per } y = 0.35 \\ \varepsilon &= -16.702\% && \text{per } y = 0.48 \\ \varepsilon &= -16.913\% && \text{per } y = 0.50 \end{aligned}$$

si osserva come tra la superficie di mezzeria e la superficie a parete, si verifichi, a causa della presenza delle strutture vorticosi tipiche dei flussi secondari, una riduzione di portanza complessiva quasi del 20%.

I risultati mostrati in Figura 5.21, sono stati comparati con quelli presentati da Pichler et al. [25] riportati in Figura 5.22. Questi ultimi sono stati ottenuti per la medesima geometria ma in condizioni operative diverse. Chiaramente, in valore assoluto i risultati si distinguono visibilmente, ma l'andamento delle curve tra la Figura 5.21 e la Figura 5.22 è pressoché identico, dimostrando come il codice di calcolo impiegato per la simulazione sia riuscito a cogliere accuratamente i dettagli della fisica del problema in esame.

Studiare come varia il coefficiente di pressione c_p in funzione della distanza radiale dall'endwall per la configurazione geometrica della T106/3, attraverso un diagramma come quello mostrato in Figura 5.21, avrebbe poco senso. Ciò deriva dal fatto che la geometria della pala impiegata per la simulazione numerica è stata ottenuta da una semplice estrusione lineare del profilo bidimensionale riportato in Figura 5.4. Nella realtà, invece, la paletta di turbina dovrebbe avere il bordo di attacco modificato solamente in corrispondenza dell'endwall. Per questa ragione, in Figura 5.23 si è scelto di implementare un confronto tra la distribuzione di c_p per la T106 e la T106/3 solamente per il piano posto a $y = 0.5$. Come atteso, le curve per il coefficiente di pressione, sia per il dorso che per il ventre, si distaccano tra loro solamente per la prima metà della corda della pala. In particolare sul ventre, nel caso della T106/3 si nota una sovrappressione di entità minore rispetto a quella che si verifica per la T106. Inoltre per la superficie ventrale della T106/3, si osserva un picco di depressione subito a valle del bordo di attacco, seguito da una rapida ricompressione della corrente fluida. Valutando, tramite l'Eq. (4.1) il coefficiente di portanza C_L per i due casi:

$$\begin{aligned} \text{T106 } C_L &= 0.956 && \text{per } y = 0.50 \\ \text{T106 } C_L &= 0.959 && \text{per } y = 0.50 \end{aligned}$$

si osserva come modificando la geometria della pala in prossimità del bordo di attacco, passando dalla configurazione T106 a T106/3, si ottengono perdite

minori dal punto di vista dei flussi secondari, pur senza compromettere la portanza che è in grado di generare la paletta. La T106/3 in prossimità dell'endwall, a $y = 0.5$, riesce a generare una portanza del tutto comparabile alla T106, addirittura di poco maggiore, con un incremento percentuale del 1.362%.

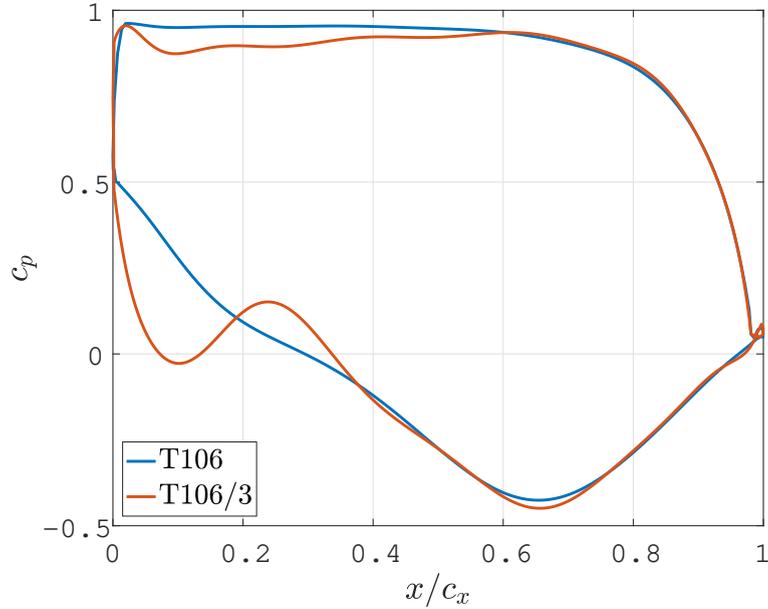


Figura 5.23: Distribuzione del coefficiente di pressione c_p attorno la pala per $y = 0.5$ (endwall). Confronto tra i risultati ottenuti per la T106 e la T106/3.

5.4.7 Coefficiente di perdita di pressione totale medio

Se in Figura 5.19 sono state riportate le curve iso-livello per il coefficiente di perdita ζ per diverse posizioni assiali all'interno del dominio di calcolo, risulta di grande interesse diagrammare per i piani trasversali all'asse longitudinale x l'evoluzione lungo la terza direzione della media tangenziale di ζ . In particolare, è stata implementata una "mass averaging", ossia una media della grandezza ζ rapportata alla portata in massa \dot{m} :

$$\zeta_{mass} = \bar{\zeta} = \frac{1}{\dot{m}} \int_z \zeta \rho \vec{q} \cdot \vec{n} dz \quad (5.6)$$

in cui:

$$\dot{m} = \int_z \rho \vec{q} \cdot \vec{n} dz \quad (5.7)$$

I risultati per le quattro posizioni assiali $x/c_x = 1.03, 1.10, 1.30$ e 1.50 sono mostrati in Figura 5.24, dove sono state riportate le curve per le due diverse

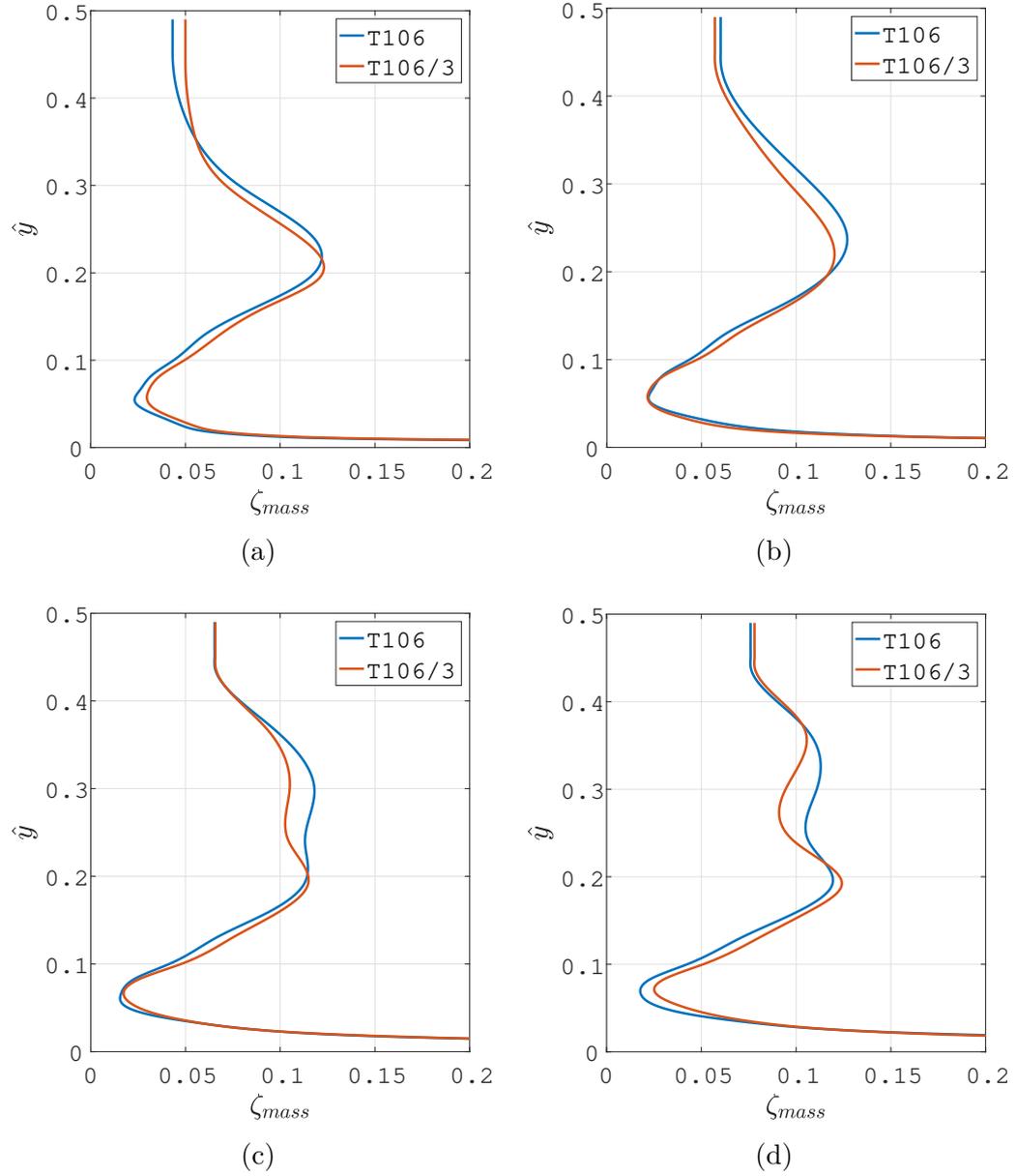


Figura 5.24: Distribuzione radiale del coefficiente di perdita di pressione totale per quattro posizioni assiali: (a) $x/c_x = 1.03$, (b) $x/c_x = 1.10$, (c) $x/c_x = 1.30$, (d) $x/c_x = 1.50$.

configurazioni geometriche dei profili di pala.

Per analogia con i risultati riportati da Pichler et al. [23] presentati in Figura 5.25, l'asse che indica la direzione radiale non è y , bensì \hat{y} , che rappresenta la distanza dalla parete di endwall.

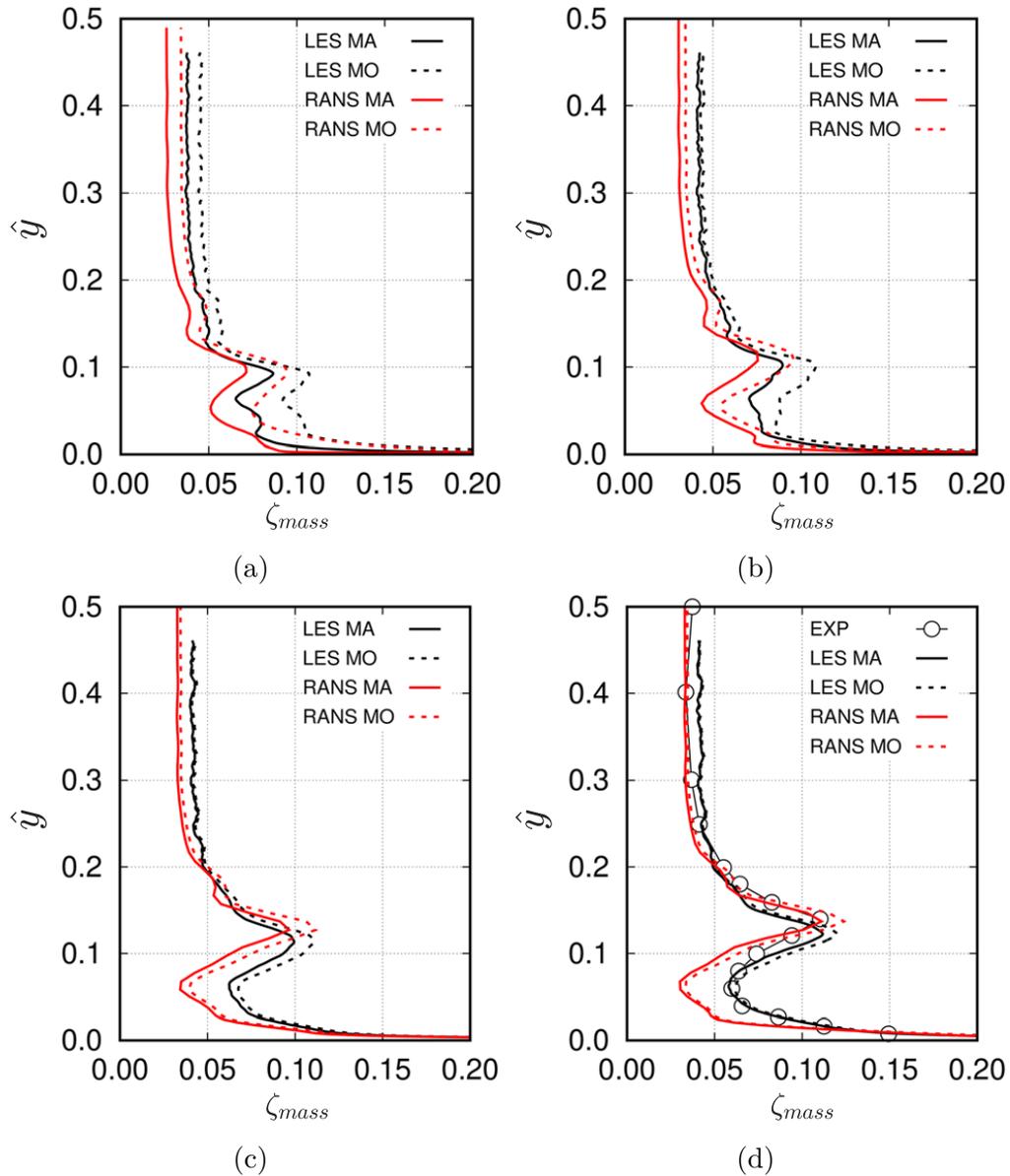


Figura 5.25: Distribuzione radiale del coefficiente di perdita di pressione totale per quattro posizioni assiali: (a) $x/c_x = 1.03$, (b) $x/c_x = 1.10$, (c) $x/c_x = 1.30$, (d) $x/c_x = 1.50$. Risultati presentati da Pichler et al. [23].

Ancora una volta si sottolinea come l'andamento delle curve di Pichler et al., così come i valori del coefficiente di perdita ζ_{mass} , sono molto simili e comparabili, con le dovute eccezioni, con quelli ottenuti dal presente lavoro. Le differenze, soprattutto in valore assoluto, sono sicuramente da attribuire alle diverse condizioni con cui sono state condotte le due simulazioni: incidenza

della corrente all'inlet α_{in} , numero di Reynolds isentropico in uscita Re_{2is} , Mach isentropico in uscita M_{2is} e passo, anche se a priori non è banale distinguere l'effetto di ognuno di tali parametri sulle perdite di pressione totale. Tuttavia il risultato di maggiore interesse ai fini della seguente trattazione risiede nel confronto tra le perdite ottenute per la T106 e quelle ottenute per la T106/3. I risultati, infatti, rispecchiano molto bene quelli presentati da Sauer et al. [29], che per primi hanno proposto la modifica del bordo di attacco della paletta per indurre una riduzione nelle perdite secondarie. Le perdite riportate in Figura 5.24 includono sia il contributo delle perdite di profilo, che quelle causate dai flussi secondari. È tuttavia semplice comprendere come il contributo dovuto allo strato limite attorno al profilo della paletta sia quantificabile nel valore che assume ζ_{mass} molto distante dall'endwall, per $\hat{y} \rightarrow 0.5$, anche se tale valore non può essere esclusivamente imputabile alle perdite di profilo poiché sicuramente affetto dalla presenza dei flussi secondari. L'incremento preponderante che le perdite secondarie forniscono alle perdite globali sono invece collocate ad una distanza dalla parete pari a quella in cui sono posizionate le grandi strutture vorticosi presentate nelle Figure 5.18 e 5.19. È proprio in corrispondenza della distanza dalla parete per cui si ha una più intensa attività vorticosi dovuta ai flussi secondari che le perdite nel caso della pala con il bordo di attacco modificato sono minori rispetto al caso della pala nominale, con un gap che cresce via via che ci si allontana dal bordo di fuga. Quello appena esposto è il risultato cardine per il quale si è pensato di operare un rigonfiamento del bordo di attacco della pala. Le perdite secondarie, infatti, per $x/c_x = 1.5$, nel caso della configurazione T106/3 arrivano ad essere minori fino al 20 % rispetto a quelle provocate dalla configurazione standard. Nella realtà tale percentuale sarebbe sicuramente maggiore, in quanto la paletta T106/3 nella sua estensione radiale, distante dall'endwall, si configurerebbe in maniera totalmente analoga alla T106. Nel caso in esame, invece, come si è già detto, per tutta la dimensione radiale del dominio, la pala è costituita dal bordo di attacco modificato.

Le considerazioni appena esposte si rivelano di notevole interesse, in quanto se i risultati mostrati in Figura 5.24 fossero molto vicini alla realtà fisica vorrebbe dire che non solo la T106/3 provocherebbe un contributo sulle perdite di pressione totale dovuto ai flussi secondari molto minore rispetto a quello generato dalla T106, ma lontano dalla parete solida e dal bordo di fuga della pala, le perdite di profilo sarebbero strettamente comparabili tra le due configurazioni geometriche, nonostante la T106/3 presenti un bordo di attacco nettamente più spesso per tutta l'estensione radiale del dominio. Per confermare, o eventualmente confutare, tale effetto è possibile pensare di condurre una simulazione 2D sul piano di mezzeria delle pale, volta a valutare le perdite di pressione totale esclusivamente attribuibili agli strati limite instauratisi attorno ai profili.

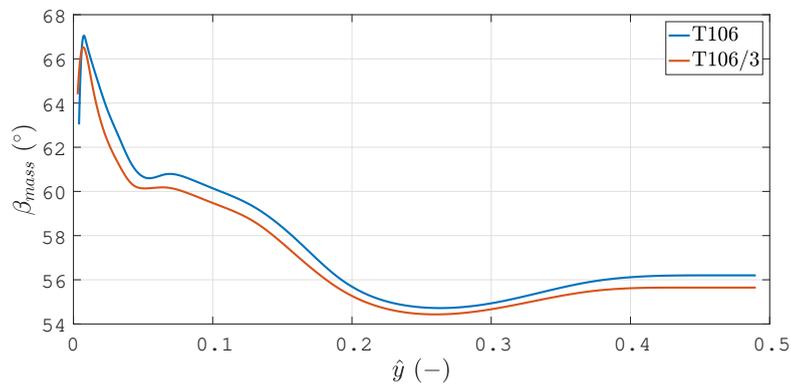
5.4.8 Direzione media del flusso a valle della schiera

Così come lo studio del coefficiente di perdita di pressione totale, anche l'analisi della direzione media del flusso di corrente a valle della schiera di pale viene condotta ogni qual volta si affronta un'indagine rivolta ai flussi secondari. Anche in questo caso, è stata calcolata la deflessione della corrente impiegando una media ponderata con la portata in massa:

$$\beta_{mass} = \bar{\beta} = \frac{1}{\dot{m}} \int_z \beta \rho \vec{q} \cdot \vec{n} dz \quad (5.8)$$

in cui la portata \dot{m} è data dall'Eq. (5.7).

I risultati, sia per la T106 che per la T106/3, a diverse distanze assiali dal bordo di fuga della pala, sono stati riportati in Figura 5.26, in cui si ritrova la coordinata \hat{y} che indica la distanza radiale dall'endwall. Le curve mostrate seguono l'andamento tipico per una schiera di pale di turbina, così come confermano gli studi condotti da Hodson e Dominy [26], Sauer et al. [29], Duden e Fottner [24], Pichler et al. [25] e molti altri. In particolare, allontanandosi progressivamente dalla parete di fondo, il flusso di corrente fa esperienza di una rapida deflessione positiva seguita da un altrettanto repentino re-orientamento negativo, per poi assestare la propria direzione sul valore di β di uscita a distanze molto grandi dall'endwall. Tale comportamento di "overturning" e "underturning" riflette la presenza delle strutture vorticosi secondarie a valle della turbina, come il passage vortex e la trailing shed vorticity. Poiché l'intensità di tali vortici diminuisce al crescere della distanza dal bordo di fuga per via degli effetti viscosi, anche i picchi (massimi e minimi) di β_{mass} si riducono passando progressivamente da $x/c_x = 1.03$ a $x/c_x = 1.5$. Si evidenzia inoltre come la deflessione di direzione che riguarda la corrente fluida attorno alla paletta T106/3 segue esattamente quella propria della T106, pur rimanendo sempre in valore assoluto visibilmente minore, soprattutto in stretta prossimità dell'endwall.



(a)

5.4. Post Processing

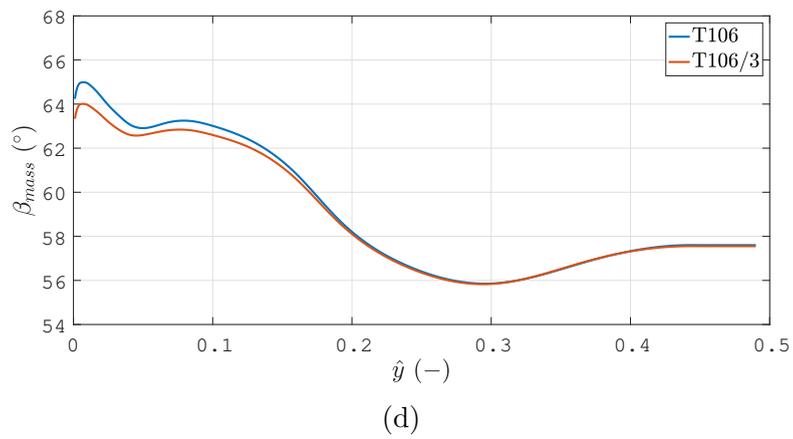
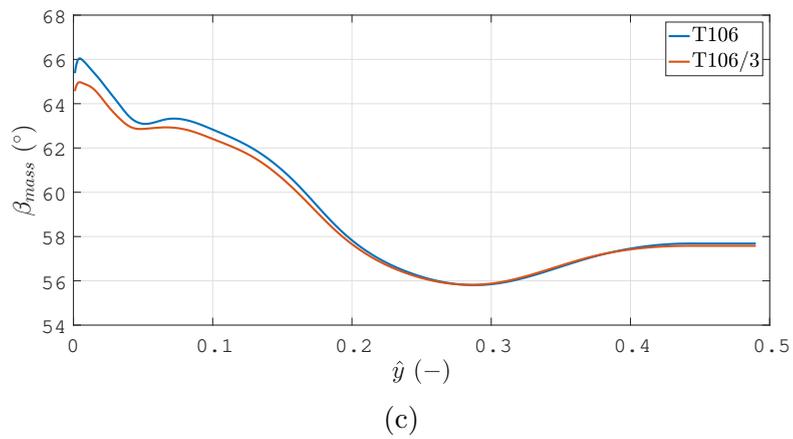
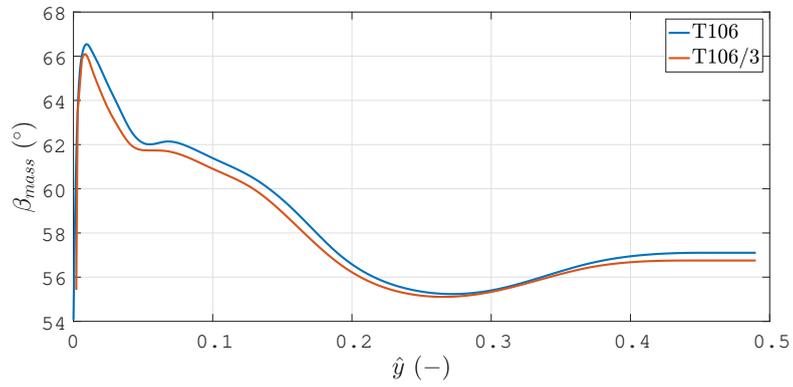


Figura 5.26: Distribuzione radiale della direzione media del flusso di corrente per quattro posizioni assiali: (a) $x/c_x = 1.03$, (b) $x/c_x = 1.10$, (c) $x/c_x = 1.30$, (d) $x/c_x = 1.50$.

5.4.9 Valutazione dei risultati ottenuti

Come evidenziato nel corso delle sezioni precedenti, i risultati appena presentati descrivono molto bene il fenomeno fisico dei flussi secondari attraverso una schiera lineare di pale per una turbina di bassa pressione. È possibile evincere chiaramente dall'analisi delle linee di corrente, della streamwise vorticity, dalle perdite di pressione totale e della variazione dell'angolo di uscita, come le strutture vorticosi che costituiscono i secondary flows occupano circa il 70% della dimensione radiale del dominio di calcolo. Il lavoro numerico di Pichler et al. [25, 23] condotto per la medesima schiera di pale, che trova un ottimo riscontro con le prove sperimentali di Duden e Fottner [24], mostra tuttavia come l'area interessata dalla presenza dei flussi secondari sia di circa il 25% rispetto all'intera estensione radiale del dominio. Se la dimensione radiale del dominio di calcolo utilizzata per l'analisi RANS descritta nel presente capitolo è pari a metà della corda assiale del profilo, l'altezza impiegata da Pichler et al. è sei volte maggiore, ossia pari a tre volte la corda. A priori, però, ci si aspetterebbe che l'altezza in termini assoluti del dominio non influisca sull'estensione percentuale delle strutture fluidodinamiche presenti all'interno di esso, e che pertanto se si restringesse il dominio, la scala dei vortici si ridurrebbe per garantire il medesimo rapporto d'aspetto. I risultati ottenuti tuttavia sembrerebbero smentire tale convinzione, o meglio parrebbe che l'affermazione appena fatta sia vera solo in parte. Probabilmente infatti non è possibile pensare di poter ridurre "ad libitum" le dimensioni del canale entro cui è confinata la corrente ed aspettarsi che i vortici vengano riscaldati percentualmente. Le scale su cui agisce la vorticità, in effetti, fino alla scala di Kolmogorov stessa, sono funzione del numero di Reynolds. Facendo un'ipotesi, se si conducesse una prova per una pala infinitamente piccola, non ci si attenderebbero delle strutture microscopiche ma, al contrario, la pala risulterebbe totalmente immersa all'interno di un campo di moto di strato limite.

Per riuscire ad operare correttamente un confronto con il lavoro di Pichler et al. [25, 23] si è pensato di condurre un'analisi RANS su una mesh che avesse un'altezza pari a $1.5 \cdot c_x$, con esattamente gli stessi parametri che costituiscono il test case della paletta T106A:

$$s = 0.929 \quad \alpha_{in} = 37.7^\circ \quad M_{2is} = 0.59 \quad Re_{2is} = 1.2 \times 10^5 \quad (5.9)$$

dove s è il passo non dimensionale, α_{in} l'incidenza della corrente all'inlet, M_{2is} il numero di Mach isentropico sulla sezione di outlet e Re_{2is} il numero di Reynolds isentropico sulla sezione di outlet.

Per la generazione del dominio e della griglia di calcolo si è operato in modo analogo a quanto discusso nelle sezioni precedenti. Tuttavia rispetto al caso della T106C, oltre a modificare l'altezza del dominio, si è dimezzata la dimensione delle celle adiacenti alla parete del profilo e alla parete di endwall e si è quintuplicato il numero di layers con cui il quale si è suddivisa la dimensione

radiale del dominio. In Tabella 5.4 sono stati riassunti i dettagli della nuova mesh mettendoli a confronto con quelli della griglia su cui si sono ottenuti i risultati mostrati nelle sezioni precedenti.

Si osserva come nel passare dalla mesh per la T106C a quella per la T106A il numero di elementi aumenta di circa nove volte. Ciò significa che a parità di potenza computazionale, il tempo di calcolo sarà incrementato di un fattore nove. Dunque se l'elaborazione dei primi risultati è durata circa 48 ore, per riuscire ad avvicinarsi alla soluzione stazionaria sarebbero necessari circa 20 giorni di calcolo. I risultati ottenuti da tale elaborazione non sono stati inclusi nella presente trattazione poiché al momento della scrittura la soluzione per la T106A non ha ancora raggiunto la convergenza.

| | N. Quadrilateri | N. Esaedri | N. Layers | h_{wall} |
|-------|-----------------|--------------------|-----------|-------------------|
| T106A | 144420 | $2.401 \cdot 10^6$ | 100 | $5 \cdot 10^{-4}$ |
| T106C | 44904 | 257040 | 20 | $1 \cdot 10^{-3}$ |

Tabella 5.4: Confronto tra le mesh per la T106A e T106C.

Capitolo 6

Conclusioni e sviluppi futuri

Il lavoro di tesi svolto si è posto fin da subito l'obiettivo di studiare l'affascinante fenomeno dei secondary flows all'interno di una turbina aeronautica tramite le enormi capacità e potenzialità offerte dalla fluidodinamica computazionale.

Durante la prima parte della presente trattazione si è cercato di cogliere l'essenza fisica dei flussi secondari presentando i principali modelli che sono stati proposti nel tempo, che si sono susseguiti storicamente, e che passo dopo passo, tassello dopo tassello, hanno composto il mosaico odierno del fenomeno. Il "dibattito", avviatosi nella metà del secolo scorso, supportato da prove sperimentali prima e numeriche poi, si è tramandato per i decenni a seguire, arricchendosi di nuovi dettagli apportati da varie voci, spesso lontane tra loro nello spazio e nel tempo, arrivando fino ad oggi.

La seconda parte, invece, ha avuto come oggetto la presentazione del lavoro condotto per l'implementazione di una simulazione RANS volta ad indagare l'effetto dei secondary flows in una schiera lineare di pale di bassa pressione, nello specifico la ben nota T106C. Sono state espone, sottolineandone peculiarità e criticità, le varie fasi di pre-processing, tra cui lo sviluppo del dominio e la generazione della griglia, gli stadi di calcolo e l'elaborazione dei risultati, effettuando ove possibile confronti con lavori sperimentali e numerici precedenti.

Il post-processing dei dati forniti in output dal codice di calcolo ha aperto a diverse strade molto interessanti, che meritano di essere approfondite, come l'abbattimento delle perdite secondarie per mezzo di una modifica locale del bordo di attacco delle palette. Allo stesso tempo, però, il confronto con dati consolidati presenti in letteratura ha rivelato molti limiti delle analisi condotte. Pertanto tanti sono gli aspetti che possono e devono essere migliorati. Innanzitutto per una fase di calcolo avanzata risulta di essenziale importanza condurre uno studio di convergenza di griglia molto accurato, non implemen-

tato nel presente lavoro per esigenze di tempo.

Inoltre, come è stato detto nella parte finale del Capitolo 5, per avere un quadro più completo sui risultati presentati, sono state sviluppate due nuove analisi RANS, non incluse nel presente lavoro in quanto le soluzioni non hanno ancora raggiunto la convergenza. La prima di esse ha l'obiettivo di risolvere il campo di moto per una griglia di calcolo molto più ampia e assai più fitta, utilizzando i parametri di test case espressi in (5.9) per operare un confronto con i lavori di Pichler et al. [25, 23] e di Duden e Fottner [24]. La seconda simulazione RANS, rappresenta un'analisi bidimensionale, che ha l'obiettivo di stimare le sole perdite di profilo per la T106C e la T106/3C.

Per quanto riguarda la progettazione del dominio tridimensionale, potrebbero essere rivisti i bordi periodici laterali: ad una linea spezzata semplice risulterebbe conveniente sostituire una cubica così da ridurre la distorsione della geometria e favorire una discretizzazione più regolare del dominio, aumentando l'accuratezza della soluzione.

Infine, una volta sviluppati gli aggiustamenti appena espressi, sarebbe possibile pensare di condurre le medesime simulazioni RANS con un modello di turbolenza diverso, ad esempio $k - \omega$, oppure passare ad una Large Eddy Simulation o ad una Direct Numerical Simulation.

In ultima analisi, sono molti gli aspetti che possono essere ottimizzati, e molti i sentieri che possono essere intrapresi. Per tale motivo si spera che il presente capitolo non sia solo la fine di un lavoro, ma piuttosto il punto di partenza per nuovi studi.

Appendice A

Elenco dei simboli

Nel seguente elenco sono riportati i principali simboli utilizzati nel corso della trattazione.

- **Modello fisico**

C_L = Coefficiente di portanza

c_p = Coefficiente di pressione statica

e = Energia interna per unità di massa

E = Energia totale

f_e = Forze esterne di volume

H = Entalpia totale

Kn = Numero di Knudsen

l_{mfp} = Libero cammino medio

\dot{m} = Portata in massa

M = Numero di Mach

p = Pressione

p° = Pressione totale

Pr = Numero di Prandtl

Pr_t = Numero di Prandtl turbolento

q_H = Scambio di calore non conduttivo

\vec{q} = *Vettore velocità*

\vec{q}_T = Flusso termico

\vec{q} = *Vettore velocità*

Re = Numero di Reynolds

S_{ij} = Tensore della velocità di deformazione

T = Temperatura
 u, v, w = Componenti cartesiane del vettore velocità
 W_f = Lavoro delle forze
 α_{in} = Angolo del flusso di corrente all'inlet
 β_{mass} = Angolo medio del flusso di corrente a valle delle schiera
 γ = Rapporto tra i calori specifici
 ζ = Coefficiente di perdita di pressione totale
 ζ_{mass} = Coefficiente di perdita di pressione totale medio
 η = Scala di Kolmogorov
 κ = Coefficiente di diffusività termica
 λ = Conducibilità termica
 μ = Viscosità dinamica
 μ_t = Viscosità turbolenta
 $\tilde{\nu}$ = Variabile di Spalart-Allmaras
 ρ = Densità
 $\bar{\tau}_{ij}$ = Tensore degli sforzi di Reynolds
 $\hat{\tau}_{ij}$ = Tensore degli sforzi totali (laminari + turbolenti)
 $\bar{\bar{\tau}}$ = Tensore degli sforzi viscosi
 $\vec{\omega}$ = Vorticità
 Ω_s = Streamwise vorticity (vorticità in direzione assiale)

• **Sistema di riferimento**

t = Tempo
 x, y, z = Coordinate cartesiane
 x = Direzione assiale
 y = Direzione radiale
 \hat{y} = Distanza radiale dall'endwall
 z = Direzione trasversale

• **Equazioni di conservazione**

\vec{F} = Flusso associato ad U
 f, g, h = Componenti cartesiane del vettore dei flussi
 \vec{F}_C = Flusso convettivo
 \vec{F}_D = Flusso diffusivo
 Q_S = Sorgenti di superficie

Q_v = Sorgenti di volume
 S = Superficie chiusa che delimita Ω
 U = Generica grandezza conservativa
 Ω = Dominio tridimensionale

• **Discretizzazione**

CFL = Coefficiente di stabilità per l'integrazione nel tempo
 F, G = Flussi calcolati in funzione di u
 F_h, G_h = Flussi calcolati in funzione di u_h
 \hat{F}_h, \hat{G}_h = Flussi numerici all'interfaccia tra due celle
 $[J]$ = Matrice Jacobiana
 $[M]$ = Matrice di massa per un elemento
 $[M]$ = Matrice di massa globale
 N_e = Numero delle funzioni di base
 n_x, n_y = Componenti cartesiane del vettore normale
 \mathbb{R} = Vettore dei residui globale
 u = Variabile conservativa
 u_h = Approssimazione numerica di u per un elemento
 $\tilde{\mathbf{u}}$ = Vettore dei gradi di libertà
 Φ = Funzione di base

★ **Apici e pedici**

i = Posizione nello spazio
 n = Livello temporale

• **Geometria della pala**

c_x = Corda assiale non dimensionale
 c = Corda non dimensionale
 s = Passo non dimensionale
 β_s = Stragger angle

Bibliografia

- [1] Charles Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. 2007.
- [2] J.F. Escuret, D. Nicoud e Ph. Veysseyre. “Recent advances in compressor aerodynamic design and analysis”. In: *Integrated Multidisciplinary Design of High Pressure Multistage Compressor Systems* (1998).
- [3] A. Ferrero. “Computational fluid dynamics for aerospace propulsion systems: an approach based on discontinuous finite elements”. In: Tesi di Dottorato, Politecnico di Torino (2015).
- [4] Allmaras S.R., Johnson F.T. e Spalart P.R. “Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model”. In: Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7), Big Island, Hawaii, 9-13 July 2012 ().
- [5] F. Bassi et al. “Very High-Order Accurate Discontinuous Galerkin Computation of Transonic Turbulent Flows on Aeronautical Configurations”. In: *ADIGMA - A European Initiative on the Development of Adaptive Higher-Order Variational Methods for Aerospace Applications* (). A cura di Norbert Kroll et al., pp. 25–38.
- [6] H. B. Squire e K. G. Winter. “The Secondary Flow in a Cascade of Airfoils in a Nonuniform Stream”. In: *J. Aerosp. Sci.* 18 (1951), pp. 271–277.
- [7] W. R. Hawthorne. “Rotational Flow Through Cascades Part I. The Components Of Vorticity”. In: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 8.3 (1955), pp. 266–279.
- [8] O. P. Sharma e T. L. Butler. “Predictions of Endwall Losses and Secondary Flows in Axial Flow Turbine Cascades”. In: *Journal of Turbomachinery* 109.2 (1987), pp. 229–236.
- [9] R. J. Goldstein e R. A. Spores. “Turbulent Transport on the Endwall in the Region Between Adjacent Turbine Blades”. In: *Journal of Heat Transfer* 110.4a (1988), pp. 862–869.
- [10] J. D. Denton. “The 1993 IGTI Scholar Lecture: Loss Mechanisms in Turbomachines”. In: *Journal of Turbomachinery* 115.4 (1993), pp. 621–656.

- [11] C. H. Sieverding. “Recent Progress in the Understanding of Basic Aspects of Secondary Flows in Turbine Blade Passages”. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 107.2 (1985), pp. 248–257.
- [12] Lee Langston. “Secondary Flows in Axial Turbines—A Review”. In: *Annals of the New York Academy of Sciences* 934 (giu. 2001), pp. 11–26.
- [13] L. S. Langston, M. L. Nice e R. M. Hooper. “Three-Dimensional Flow Within a Turbine Cascade Passage”. In: *Journal of Engineering for Power* 99.1 (1977), pp. 21–28.
- [14] Wayne Eckerle e Lee Langston. “Horseshoe Vortex Formation Around a Cylinder”. In: *Journal of Turbomachinery* 109 (1986).
- [15] J. H. Agui e J. Andreopoulos. “Experimental Investigation of a Three-Dimensional Boundary Layer Flow in the Vicinity of an Upright Wall Mounted Cylinder (Data Bank Contribution)”. In: *Journal of Fluids Engineering* 114.4 (1992), pp. 566–576.
- [16] L. S. Langston. “Crossflows in a Turbine Cascade Passage”. In: *Journal of Engineering for Power* 102.4 (1980), pp. 866–874.
- [17] C. H. Sieverding e P. Van den Bosche. “The Use of Coloured Smoke to Visualize Secondary Flows in a Turbine-Blade Cascade”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 134 (1983), pp. 85–89.
- [18] H. P. Wang et al. “Flow Visualization in a Linear Turbine Cascade of High Performance Turbine Blades”. In: *Journal of Turbomachinery* 119.1 (1997), pp. 1–8.
- [19] Kristina Hermanson e Karen Thole. “Effect of Inlet Conditions on End-wall Secondary Flows”. In: *Journal of Propulsion and Power - J PROPULSION POWER* 16 (2000), pp. 286–296.
- [20] Denis Koschichow et al. “DNS of the Flow Near the Endwall in a Linear Low Pressure Turbine Cascade With Periodically Passing Wakes”. In: *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air Volume 2D: Turbomachinery* (2014).
- [21] J. Cui, V. Nagabhushana Rao e P. G. Tucker. “Numerical Investigation of Contrasting Flow Physics in Different Zones of a High-Lift Low Pressure Turbine Blade”. In: *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air Volume 2C: Turbomachinery* (2015).
- [22] J. Cui, V. N. Rao e P. G. Tucker. “Numerical Investigation of Secondary Flows in a High-Lift Low Pressure Turbine”. In: *Int. J. Heat Fluid Flow* 63 (2017), pp. 149–157.
- [23] Richard Pichler et al. “Large Eddy Simulation and RANS Analysis of the End-Wall Flow in a Linear Low-Pressure-Turbine Cascade—Part II: Loss Generation”. In: *Journal of Turbomachinery* 141.5 (2019).
- [24] A Duden e L Fottner. “Influence of taper, Reynolds number and Mach number on the secondary flow field of a highly loaded turbine casca-

- de”. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy* 211.4 (1997), pp. 309–320.
- [25] Richard Pichler et al. “Large-Eddy Simulation and RANS Analysis of the End-Wall Flow in a Linear Low-Pressure Turbine Cascade, Part I: Flow and Secondary Vorticity Fields Under Varying Inlet Condition”. In: *Journal of Turbomachinery* 141.12 (2019).
- [26] H. P. Hodson e R. G. Dominy. “Three-Dimensional Flow in a Low-Pressure Turbine Cascade at Its Design Condition”. In: *Journal of Turbomachinery* 109.2 (1987), pp. 177–185.
- [27] John Denton e Graham Pullan. “A Numerical Investigation Into the Sources of Endwall Loss in Axial Flow Turbines”. In: *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air Volume 8: Turbomachinery, Parts A, B, and C* (2012), pp. 1417–1430.
- [28] S. Harrison. “Secondary Loss Generation in a Linear Cascade of High-Turning Turbine Blades”. In: *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air Volume 1: Turbomachinery* (1989).
- [29] H. Sauer, R. Müller e K. Vogeler. “Reduction of Secondary Flow Losses in Turbine Cascades by Leading Edge Modifications at the Endwall ”. In: *Journal of Turbomachinery* 123.2 (2000), pp. 207–213.
- [30] Christophe Geuzaine e Jean-François Remacle. “Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (2009), pp. 1309–1331.
- [31] MATLAB. “version 9.9 (R2020b)”. In: (2020).
- [32] Hank Childs et al. “VisIt: An End-User Tool For Visualizing and Analyzing Very Large Data”. In: (2012), pp. 357–372.