



POLITECNICO DI TORINO

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA E AEROSPAZIALE (DIMEAS)
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

TESI MAGISTRALE

**INSTABILITÀ DI PANNELLI IRRIGIDITI
IN MATERIALE COMPOSITO:
CORRELAZIONE TRA PANDA2 E FEM**

Candidato
Michele d'Arienzo

Relatore
Prof. Marco Gerlone

Correlatore
Ing. Giuseppe Cigna

Sommario

Nella fase di progetto delle strutture aeronautiche si deve fare particolare attenzione a due requisiti molto importanti: la struttura deve essere leggera, ma al contempo deve presentare adeguate proprietà di rigidità e robustezza.

Come è facile intuire, questi due aspetti sono contrapposti ed è necessario trovare un compromesso dettato dalle esigenze del progetto. In questa ricerca uno dei fenomeni più delicati da trattare è quello dell'instabilità strutturale: in determinate condizioni (carico, geometria, vincoli, etc.) la struttura può giungere al collasso molto prima di raggiungere i limiti imposti dal materiale.

Partendo dagli studi di Eulero, passando per la teoria della stabilità elastica di Koiter (considerato il fondatore della moderna teoria della stabilità delle strutture), fino ai giorni nostri, sono stati condotti innumerevoli studi e ricerche sul fenomeno dell'instabilità. Il presente lavoro di tesi vuole porre l'attenzione su uno di questi lavori: PANDA2 (PANnel Design Analysis).

PANDA2 è un programma di analisi preliminare, sviluppato da David Bushnell. Questo permette di ottimizzare il peso di pannelli irrigiditi, piatti o cilindrici, in materiale composito, in presenza di imperfezioni e sottoposti a diversi set di carico combinato, per l'impiego in stato di post-buckling.

La tesi si concentra sull'analisi di parte delle teorie utilizzate in questo programma. Il fine è quello di valutare, tramite l'utilizzo del FEM e in particolar modo di NASTRAN, i campi di validità di queste.

Il lavoro è svolto in collaborazione con Leonardo S.p.A. divisione Airframe, dove PANDA2 viene sfruttato come software per definire, in modo preliminare, il progetto di pannelli irrigiditi.

Contents

1	Introduzione	1
1.1	PANDA2	1
1.2	Teoria classica dei laminati	6
1.2.1	Laminati a strati identici e parametri di laminazione	9
1.3	Materiale e laminazione	11
2	Distribuzione del carico	15
2.1	Modello PANDA	16
2.2	Modello PATRAN-NASTRAN	17
2.3	Risultati	19
3	Instabilità locale, generale e semi-generale	23
3.1	Modello PANDA-type	24
3.1.1	Campo di spostamenti, deformazioni e rotazioni	24
3.1.2	Energia potenziale totale	27
3.2	Modello PANDA-alternate	29
3.2.1	Campo di spostamenti, deformazioni e rotazioni	29
3.2.2	Energia potenziale totale	32
3.3	Modello PATRAN-NASTRAN	34
3.3.1	Geometria, materiale-laminazione ed elementi	34
3.3.2	Vincoli, carichi e tipo di analisi	35
3.4	Risultati	36
4	Instabilità locale degli irrigidimenti (crippling)	45
4.1	Modello PANDA-type	45
4.1.1	Campo di spostamenti e deformazioni	46
4.1.2	Energia potenziale totale	48
4.2	Modello PATRAN-NASTRAN	50
4.2.1	Geometria, materiale-laminazione ed elementi	50
4.2.2	Vincoli, carichi e tipo di analisi	52
4.3	Risultati	55

5	Instabilità torsionale con partecipazione dello skin	61
5.1	Modello PANDA-type	62
5.1.1	Campo di spostamenti, deformazioni e rotazioni	62
5.1.2	Energia potenziale totale	64
5.2	Modello PANDA-alternate	66
5.2.1	Campo di spostamenti, deformazioni e rotazioni	66
5.2.2	Parametri trave	68
5.2.3	Energia potenziale totale	69
5.3	Modello PATRAN-NASTRAN	71
5.3.1	Geometria, materiale-laminazione ed elementi	71
5.3.2	Vincoli, carichi e tipo di analisi	72
5.4	Risultati	74
6	Instabilità torsionale dei soli irrigidimenti	83
6.1	Modello PANDA-type	83
6.1.1	Campo di spostamenti e deformazioni	84
6.1.2	Energia potenziale totale	87
6.1.3	Determinazione dell'autovalore	88
6.2	Modello PATRAN-NASTRAN	89
6.2.1	Geometria, materiale-laminazione ed elementi	89
6.2.2	Vincoli, carichi e tipo di analisi	90
6.3	Risultati	92
6.3.1	Variazione del parametro d mantenendo inalterato b_f e ϵ	92
6.3.2	Variazione del parametro b_f mantenendo inalterato d e ϵ	94
6.3.3	Variazione del parametro ϵ mantenendo inalterato d e b_f	97
7	Analisi non lineare	103
7.1	Modello PANDA2	104
7.1.1	Campo di spostamenti e deformazioni	104
7.1.2	Risultanti di sollecitazione	106
7.1.3	Energia potenziale totale	108
7.2	Modello PATRAN-NASTRAN	110
7.2.1	Geometria, materiale-laminazione ed elementi	110
7.2.2	Vincoli, carichi e tipo di analisi	112
7.3	Risultati	113
7.3.1	Aspetti preliminari	114
7.3.2	Tensioni massime e carico di popoff	114
8	Conclusioni	125
	Bibliography	129

1 | Introduzione

1.1 PANDA2

PANDA2 è un programma che permette di definire il progetto di peso minimo di un pannello liscio o irrigidito, in una o due direzioni, sia per configurazioni piane che cilindriche.

Gli irrigidimenti presi in considerazione sono quelli classici I, J, T e omega (blade, angle, tee e hat), tuttavia sono analizzati anche casi particolari quali i Truss-core sandwich e i pannelli isogrid. Nel seguito si farà riferimento solo ai primi.

I pannelli possono essere soggetti a diverse combinazioni di carico nel piano, momenti applicati sui bordi, pressione normale e carichi termici. Tutti i carichi sono uniformi ad eccezione del carico assiale in buckling, che può variare linearmente lungo la larghezza del pannello. A tal proposito si faccia riferimento alla tabella 1.1.

Possono essere incluse nelle analisi anche le imperfezioni di forma locali.

I carichi sono suddivisi in due tipologie A e B. Nella prima rientrano tutti quei termini che in seguito verranno indicati con il pedice "e" e che rappresentano i carichi di buckling, ovvero tutti quei contributi che vengono moltiplicati per il fattore di carico critico.

Nella seconda tipologia, invece, rientrano tutti quei termini che in seguito sono indicati con il pedice "pre", che rappresentano il carico di pre-buckling e, al contrario dei precedenti, non sono moltiplicati per il fattore di carico critico.

Carico	Tipo	Definizione	Unità	Proprietà
N_x	A	carico assiale	F/L	uniforme o lineare
N_y	A	carico circonferenziale	F/L	uniforme
N_{xy}	A	carico a taglio	F/L	uniforme
M_x	A	momento assiale	$L \cdot F/L$	uniforme
M_y	A	momento circonferenziale	$L \cdot F/L$	uniforme
N_{x_0}	B	carico assiale	F/L	uniforme
N_{y_0}	B	carico circonferenziale	F/L	uniforme
p	A o B	pressione normale	F/L^2	uniforme
<i>thermal</i>	B	carico indotto dalla polimerizzazione		uniforme

Table 1.1: Carichi relativi al pannello ammessi in PANDA2

Il programma può essere sfruttato in 5 **modalità** differenti:

1. *Optimization* - l'utente sceglie alcuni parametri (dimensioni geometriche, angoli di laminazione, etc.) come variabili decisionali. Viene poi eseguita una serie di passi di iterazione, in ognuno dei quali vengono fatte variare queste variabili al fine di diminuire il peso della struttura. Il tutto mantenendo i margini positivi (un margine di buckling positivo indica che carico critico relativo alla struttura è maggiore del carico applicato);
2. *Fixed design* - PANDA2 esegue un'analisi a buckling/stress di una geometria fissa, soggetta fino a 5 set di carico. Restituisce i margini di buckling, ma anche gli stress massimi negli strati del laminato e il margine relativo al carico di popoff;
3. *Test simulation* - PANDA2 simula un test di un pannello fixed design (con geometria, laminazione e materiale fissato) dove viene fatto aumentare il carico applicato;
4. *Design sensitivity* - vengono calcolati i margini mantenendo fisse tutte le variabili di progetto, tranne una selezionata dall'utente. Questa viene fatta variare in modo crescente in un intervallo definito a priori;
5. *Load-interaction* - i margini e le curve di interazione sono calcolate per una combinazione di due carichi nel piano, N_1 e N_2 , definiti dall'utente:

$$(N_1, N_2) = (N_x, N_y) \quad \text{o} \quad (N_x, N_{xy}) \quad \text{o} \quad (N_y, N_{xy})$$

PANDA2 svolge ognuna di queste modalità eseguendo tre **macro categorie** di analisi:

1. Legge costitutiva

- (a) Ottiene la matrice costitutiva $[C]_{6 \times 6}$ relativa ad ogni segmento del modulo pannello;
- (b) Ottiene le risultanti termiche e le deformazioni indotte, dal ciclo di polimerizzazione, in ogni segmento;
- (c) Ottiene la matrice costitutiva in cui o gli stringer o i ring o entrambi sono spalmati sull'intero pannello $[C_s]_{6 \times 6}$;
- (d) Ottiene i momenti e le deformazioni residue dovute al processo di polimerizzazione di skin e irrigidimenti (stringer e ring);
- (e) Ottiene la matrice di rigidezza tangente C_{TAN} nello stato di deformazione locale. Quella relativa allo skin e web dell'irrigidimento;
- (f) Ottiene la matrice di rigidezza tangente C_{STAN} , quella relativa allo skin con gli irrigidimenti spalmati.

2. Equilibrio

- (a) Ottiene l'inarcamento del pannello legato al ciclo di polimerizzazione;
- (b) Ottiene la risposta statica del pannello soggetto al carico p , il tutto usando una teoria non lineare, in due casi:
 - i. Intero pannello con irrigidimenti spalmati;

- ii. Singolo modulo di pannello con sezione trasversale discretizzata;
 - (c) Ottiene la deformazione media e la distribuzione risultante in ogni parte del pannello;
 - (d) Ottiene le tensioni in ogni strato, nel relativo sistema di riferimento, per la configurazione di pannello perfetta o deformata localmente. Nell'ultimo caso la deformazione ha forma pari all'imperfezione utilizzata nel modo di instabilità biforcata locale, con ampiezza definita dall'utente;
 - (e) Determina le forze di trazione nei web degli irrigidimenti, quelle che tendono a separarlo dallo skin. Le stesse che poi vengono confrontate con il valore massimo di "peel force" definito dall'utente;
3. *Instabilità* (in figura 1.1 sono mostrati, seppur in modo schematico, alcuni dei principali tipi di instabilità analizzati in PANDA2)
- (a) Ottiene i fattori di carico critico definiti nel programma originale PANDA-type. Questi sono determinati utilizzando formulazioni analitiche in forma chiusa; I fattori sono quelli relativi all'instabilità generale e locale del pannello (solo skin, skin e stringer spalmati o skin e ring spalmati), crippling e rolling degli irrigidimenti;
 - (b) Ottiene i fattori di carico critico legati al modello BOSOR-type, dove la sezione trasversale di un singolo modulo di pannello è discretizzata; I fattori sono quelli relativi all'instabilità locale dello skin e all'instabilità wide column;
 - (c) PANDA2 esegue anche un'analisi di post-buckling locale relativa a un singolo modulo di pannello; Da questa, oltre a determinare il fattore di carico critico locale (denominato "Local buckling from Koiter theory"), è possibile determinare tutte quelle grandezze utili a ricavare le tensioni in ogni strato e il carico di popoff nel web degli irrigidimenti;

La **filosofia** alla base di PANDA2 è quella di utilizzare diversi modelli relativamente semplici, ognuno relativo ad un dato fenomeno, piuttosto che utilizzare un singolo modello di elementi finiti con un gran numero di gradi di libertà. L'obiettivo è quello di avere un programma che sia in grado, in via preliminare, di generare il progetto di ottimo, dal punto di vista del peso, di un pannello piuttosto complesso. Il tutto considerando comportamenti complessi, includendo anche effetti non lineari, senza gli inconvenienti legati all'uso di programmi di analisi più sofisticati e generici: tempi di calcolo elevati, grande quantità di memoria occupata, etc.

In PANDA2 è possibile distinguere 3 **tipologie di modelli**:

1. modello PANDA-type
2. modello discretizzato di un singolo modulo
3. modello discretizzato dell'intero pannello con gli irrigidimenti spalmati

Nel primo, **PANDA-type**, rientrano una serie di modelli analitici grazie al quale verrà analizzata l'instabilità generale, semi-generale e locale del pannello, il crippling dei segmenti

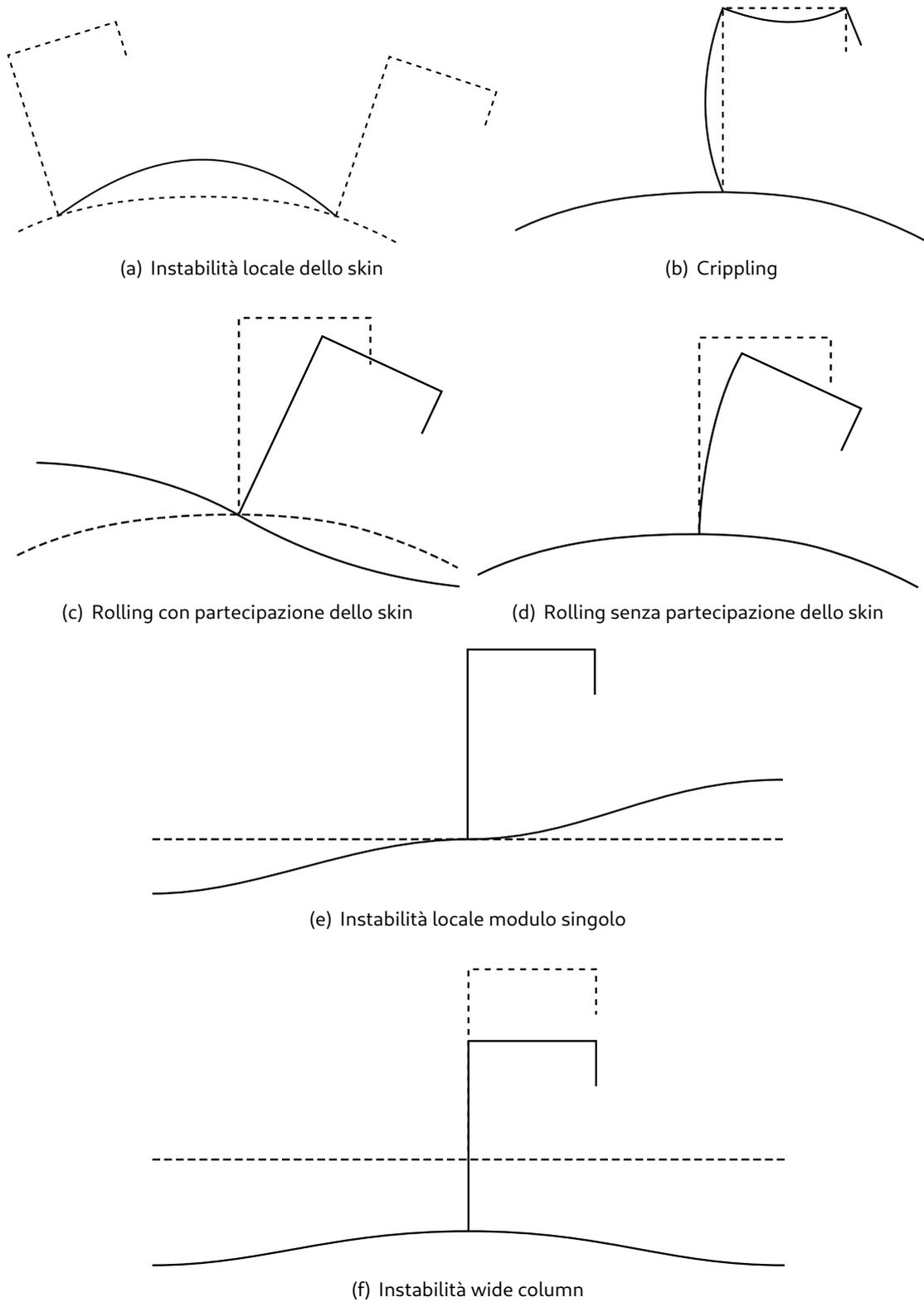


Figure 1.1: Principali tipi di instabilità analizzati in PANDA2.

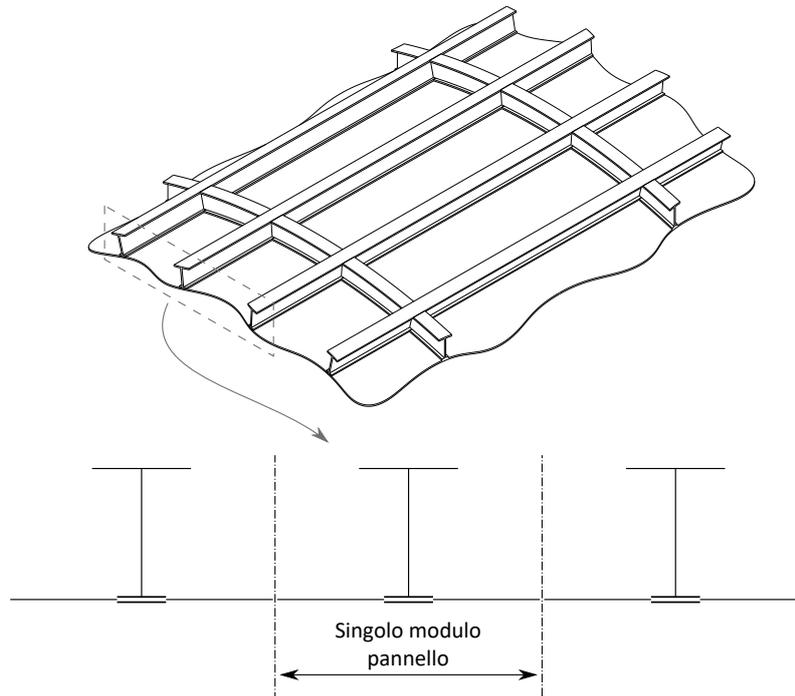


Figure 1.2: Singolo modulo di pannello per la sezione T -type.

degli irrigidimenti e il rolling degli stiffener (stringer, ovvero gli irrigidimenti longitudinali, o ring, ovvero quelli circolari) con o senza la partecipazione dello skin.

Tramite il secondo è possibile calcolare i fattori di buckling locale e post-buckling locale relativi al **modello discreto del singolo modulo di pannello** (un irrigidimento più lo skin con larghezza pari alla distanza tra due stiffener adiacenti - vedi figura 1.2).

Il modulo singolo è suddiviso in segmenti, ognuno è discretizzato e analizzato tramite il metodo delle differenze finite. Il tutto assumendo un campo di spostamenti armonico. Questo è un modello molto simile a quello analizzato in un altro programma sviluppato da Bushnell, BOSOR che permette di analizzare shell di rivoluzione.

Tramite questo è possibile analizzare sia l'instabilità locale che quella wide-column rappresentate in 1.1, applicando opportune condizioni al contorno sui bordi destro e sinistro.

Per altri dettagli relativi al programma rimando all'articolo [1]. In questo, oltre ad altri aspetti che verranno in parte discussi nei prossimi capitoli, è presente un tutorial che mostra come l'utente può interagire con l'interfaccia di PANDA2, in modo da definire la geometria, il materiale, i vincoli, i carichi e la modalità di calcolo desiderata.

Nel seguito l'attenzione verrà focalizzata sulle analisi di stabilità PANDA-type e su quella relativa al post-buckling locale. Nel primo caso si entrerà nel dettaglio di quanto discusso nell'articolo [2] e [3], mentre, nel secondo si riprenderanno i concetti esposti in [4].

Oss: Come appena detto, PANDA2 dispone di un'interfaccia con cui interagire, ma in tutti i capitoli, tranne l'ultimo, le formule verranno implementate ed eseguite in MATLAB, utilizzando per lo più il simbolico. Si fa questo al fine di avere un controllo maggiore sulla parte di codice-teoria che si sta analizzando.

1.2 Teoria classica dei laminati

Nel presente lavoro di tesi è fatto largo uso della teoria classica dei laminati, quindi è opportuno richiamarne qualche dettaglio.

Per maggiori informazioni inerenti alle ipotesi di partenza complete e ai vari passaggi analitici rimando a testi specifici. Nel seguito sono schematizzate solo le informazioni rilevanti.

Le **ipotesi** fondamentali sono:

- Qualsiasi segmento trasversale durante la deformazione:
 - Rimane piano;
 - Rimane perpendicolare al piano medio: $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$;
 - Mantiene invariata la sua altezza: $\varepsilon_z = 0$.
- Stato piano di tensione: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ [Pa]

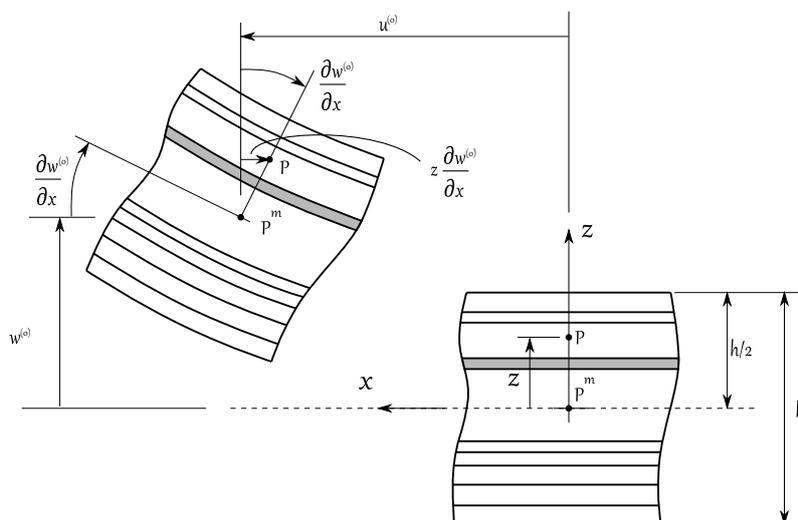


Figure 1.3: Cinematica del punto P nel piano $x-z$

Sotto queste ipotesi è possibile definire i vari campi in gioco: spostamenti, deformazioni e tensioni.

Il **campo di spostamenti**, mostrato in figura 1.3, risulta:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^{(0)}(x, y) - zw_{,x}^{(0)}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v^{(0)}(x, y) - zw_{,y}^{(0)}(x, y) \\ w(x, y, z) &= w^{(0)}(x, y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Il **campo di deformazioni**, ottenuto tramite le relazioni cinematiche lineari, è il seguente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x}^{(0)} - zw_{,xx}^{(0)} \\ \varepsilon_y &= v_{,y}^{(0)} - zw_{,yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y}^{(0)} + v_{,x}^{(0)} - 2zw_{,xy}^{(0)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

che può essere espresso in forma matriciale compatta

$$\{\varepsilon_\gamma\} = \{\varepsilon_\gamma^{(0)}\} + z \{\kappa\} \quad (1.3)$$

dove

$$\{\varepsilon_\gamma^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^{(0)} \\ v_{,y}^{(0)} \\ u_{,y}^{(0)} + v_{,x}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad e \quad \{\kappa\} = - \begin{Bmatrix} w_{,xx}^{(0)} \\ w_{,yy}^{(0)} \\ 2w_{,xy}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

Il **campo delle tensioni** è ottenuto tramite le relazioni costitutive del singolo strato:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{21} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \implies \{\sigma\}_k = [Q]_k \{\varepsilon_\gamma\} \quad (1.5)$$

dove $[Q]$ è la matrice delle rigidzze ridotte. Questa si ricava dalla stessa nel sistema di riferimento principale $[\bar{Q}]$, moltiplicata opportunamente per la matrice rotazione $[\Gamma]_k$:

$$[Q]_k = [\Gamma]_k^{-1} [\bar{Q}] [\Gamma]_k^{-T} \quad (1.6)$$

dove le due matrici sono così definite:

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

con le grandezze E_L , E_T , ν_{LT} e G_{LT} note una volta definito il composito utilizzato per ogni strato (può essere diverso per ogni strato), e

$$[\Gamma]_k = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}_k \quad con : \quad \begin{aligned} s &= \sin(\vartheta_k) \\ c &= \cos(\vartheta_k) \end{aligned} \quad (1.8)$$

In figura 1.4 è raffigurato il sistema di riferimento utilizzato e sono mostrate le grandezze relative alla stratificazione.

Dal campo di tensioni, integrando sullo spessore, è possibile ricavare le **risultanti di sollecitazione** (in figura 1.5 è indicata la notazione utilizzata) e quella che comunemente è detta **legge costitutiva del monostrato equivalente**:

$$\begin{aligned} \{N\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\}_k dz \\ \{N\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \{\sigma\}_k dz \end{aligned} \implies \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_\gamma^{(0)}\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

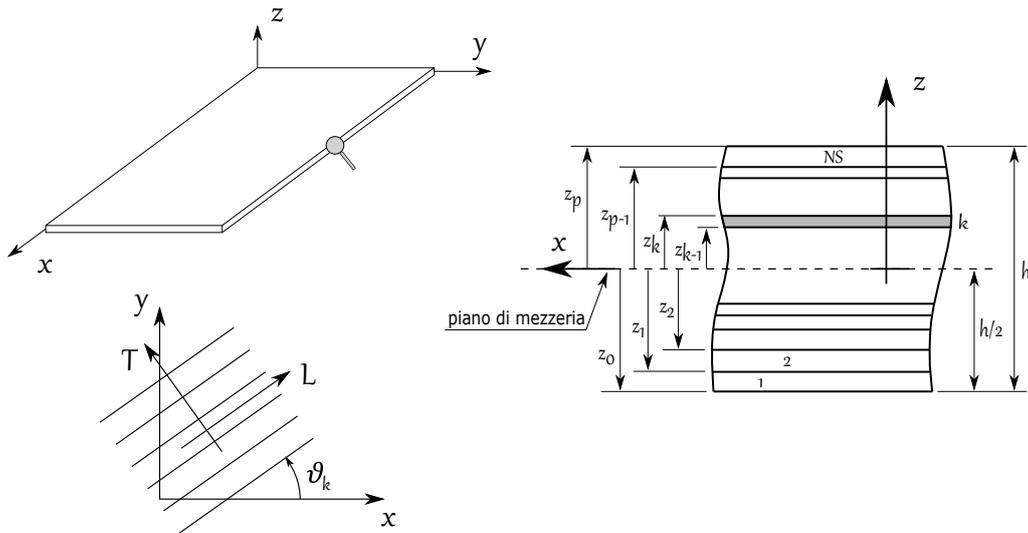


Figure 1.4: Sistema di riferimento per il laminato

Dove $[A]$, $[B]$ e $[D]$ sono rispettivamente le matrici di rigidità membranale, di accoppiamento e flessione-torsionale:

$$\begin{aligned}
 [A] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [Q]_k dz \\
 [B] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z [Q]_k dz \\
 [D] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 [Q]_k dz
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

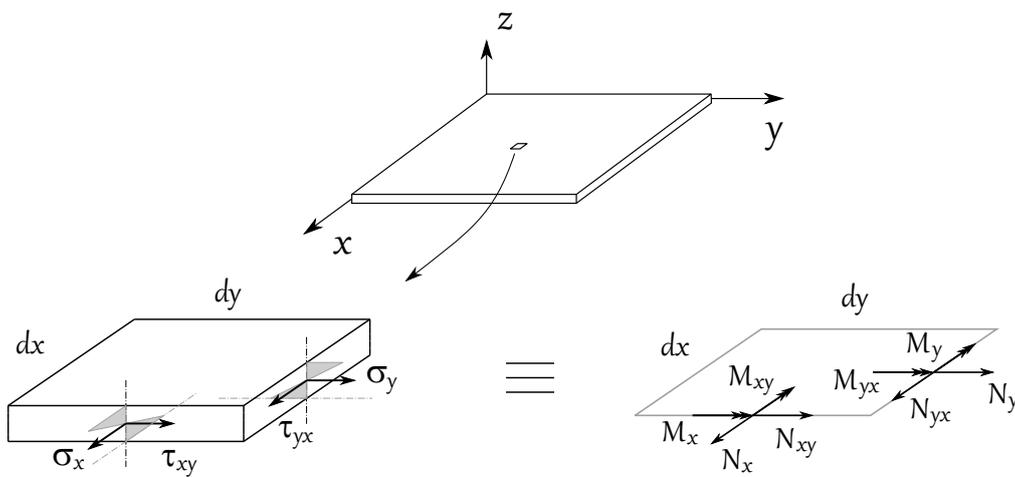


Figure 1.5: Notazione risultanti di sollecitazione

1.2.1 Laminati a strati identici e parametri di laminazione

Nel seguito si è fatto largo uso di una sottoclasse delle piastre multistrato, ovvero i laminati a **strati identici**. Con questa nomenclatura si vuole indicare un laminato che presenta layer di uguale spessore, aventi tutti lo stesso materiale ($[\bar{Q}]$ è uguale in ogni strato).

Sotto queste assunzioni è possibile riscrivere le matrici di rigidezza $[\mathcal{A}]$, $[\mathcal{B}]$ e $[\mathcal{D}]$ come segue (per semplicità di notazione $n = NS$):

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}] &= \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n [Q]_k \\ [\mathcal{B}] &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k [Q]_k \\ [\mathcal{D}] &= \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k [Q]_k \end{aligned} \quad (1.11)$$

dove

$$\begin{aligned} b_k &= 2k - n - 1 \\ d_k &= 12k(k - n - 1) + 4 + 3n(n + 2) \end{aligned} \quad \text{se } k = 1, \dots, n \quad (1.12)$$

Per le formule successive, tuttavia, risulta utile adottare una notazione equivalente:

$$\begin{aligned} b_k &= \begin{cases} 2k & \text{se } n = 2p + 1 \\ 2k - \frac{k}{|k|}, b_0 = 0 & \text{se } n = 2p \end{cases} \\ d_k &= \begin{cases} 12k^2 + 1 & \text{se } n = 2p + 1 \\ 12k^2 - 12|k| + 4, d_0 = 0 & \text{se } n = 2p \end{cases} \end{aligned} \quad (1.13)$$

se $k = -p, \dots, p$

dove

$$p = \begin{cases} \frac{1}{2}(n - 1) & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{2}n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases} \quad (1.14)$$

Se gli strati sono identici, le matrici di rigidezza dipendono, da un lato dalle caratteristiche elastiche dello strato di base, e dall'altro da una combinazione di funzioni circolari delle orientazioni delle fibre. Questi fattori, *parte elastica* e *parte geometrica*, si possono separare in vari modi, uno è quello mostrato in seguito, valido per materiali ortotropi:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} \\ \mathcal{S}_{22} \\ \mathcal{S}_{12} \\ \mathcal{S}_{66} \\ \mathcal{S}_{16} \\ \mathcal{S}_{26} \end{pmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & \xi_{\mathcal{S}_1} & \xi_{\mathcal{S}_2} & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_{\mathcal{S}_1} & \xi_{\mathcal{S}_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{\mathcal{S}_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{\mathcal{S}_2} & 0 & 1 \\ 0 & \xi_{\mathcal{S}_3/2} & \xi_{\mathcal{S}_4} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{\mathcal{S}_3/2} & -\xi_{\mathcal{S}_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

dove S è un termine generico per indicare, in modo compatto, le matrici di rigidità membranale, di accoppiamento e flesso-torsionale

$$S = \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ o } \mathcal{D} \quad (1.16)$$

il parametro a è una costante

$$a = \begin{cases} h & \text{se } S = \mathcal{A} \\ \frac{h^2}{2} & \text{se } S = \mathcal{B} \\ \frac{h^3}{12} & \text{se } S = \mathcal{D} \end{cases} \quad (1.17)$$

gli U_i sono i **parametri di Tsai e Pagano** legati solamente al materiale

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{8}(3\bar{Q}_{11} + 2\bar{Q}_{12} + 3\bar{Q}_{22} + 4\bar{Q}_{66}) \\ U_2 &= \frac{1}{2}(\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{22}) \\ U_3 &= \frac{1}{8}(\bar{Q}_{11} - 2\bar{Q}_{12} + \bar{Q}_{22} - 4\bar{Q}_{66}) \\ U_4 &= \frac{1}{8}(\bar{Q}_{11} + 6\bar{Q}_{12} + \bar{Q}_{22} - 4\bar{Q}_{66}) \\ U_5 &= \frac{1}{8}(\bar{Q}_{11} - 2\bar{Q}_{12} + \bar{Q}_{22} + 4\bar{Q}_{66}) \end{aligned} \quad (1.18)$$

e le ξ_i sono i **parametri di laminazione** funzione solo della geometria

$$\{\xi_{\mathcal{A}}\} = \begin{Bmatrix} \xi_{\mathcal{A}_1} \\ \xi_{\mathcal{A}_2} \\ \xi_{\mathcal{A}_3} \\ \xi_{\mathcal{A}_4} \end{Bmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \begin{Bmatrix} \cos(2\vartheta_k) \\ \cos(4\vartheta_k) \\ \sin(2\vartheta_k) \\ \sin(4\vartheta_k) \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

$$\{\xi_{\mathcal{B}}\} = \begin{Bmatrix} \xi_{\mathcal{B}_1} \\ \xi_{\mathcal{B}_2} \\ \xi_{\mathcal{B}_3} \\ \xi_{\mathcal{B}_4} \end{Bmatrix} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \begin{Bmatrix} \cos(2\vartheta_k) \\ \cos(4\vartheta_k) \\ \sin(2\vartheta_k) \\ \sin(4\vartheta_k) \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

$$\{\xi_{\mathcal{D}}\} = \begin{Bmatrix} \xi_{\mathcal{D}_1} \\ \xi_{\mathcal{D}_2} \\ \xi_{\mathcal{D}_3} \\ \xi_{\mathcal{D}_4} \end{Bmatrix} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \begin{Bmatrix} \cos(2\vartheta_k) \\ \cos(4\vartheta_k) \\ \sin(2\vartheta_k) \\ \sin(4\vartheta_k) \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

Per maggiori informazioni e per un livello di dettaglio superiore all'argomento si faccia riferimento a [9], in questo vengono approfonditi molti aspetti inerenti ai materiali compositi, tra cui quello presentato qui.

1.3 Materiale e laminazione

Nei successivi capitoli si avrà bisogno di laminati in cui è necessario variare uno o più coefficienti della matrice di rigidezza del monostrato equivalente.

Essenzialmente si avrà bisogno di due tipologie di laminati simmetrici $[B] = 0$:

- Laminato tipo 1 – Il monostrato equivalente deve presentare le seguenti proprietà:

$$\mathcal{A}_{16} = \mathcal{A}_{26} = 0; \quad \mathcal{D}_{16} = \mathcal{D}_{26} = f(\epsilon);$$

$$\mathcal{A}_{ij}, \mathcal{D}_{ij} \neq f(\epsilon) \quad \text{per} \quad (i, j) \neq (1, 6) \quad \text{o} \quad (2, 6)$$

ovvero deve essere ortotropo in membrana ma non necessariamente in flessione, inoltre tutti i termini ortotropi devono rimanere costanti al variare di un parametro meccanico ϵ , mentre quelli non ortotropi devono essere funzione di esso;

- Laminato tipo 2 – Il monostrato equivalente deve presentare le seguenti proprietà:

$$\mathcal{A}_{16} = \mathcal{A}_{26} = f(\epsilon) \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_{ij} \neq f(\epsilon) \quad \text{per} \quad (i, j) \neq (1, 6) \quad \text{o} \quad (2, 6)$$

ovvero deve presentare tutti i termini ortotropi della matrice di rigidezza indipendenti dal parametro ϵ , mentre quelli non ortotropi dipendenti da esso.

Per semplificare la ricerca si adotterà un laminato a strati identici dove ogni strato è costituito da un materiale ortotropo con le seguenti caratteristiche meccaniche:

$$E_1 = 48000(1 + \epsilon) [MPa]; \quad E_2 = 48000(1 - \epsilon) [MPa];$$

$$\nu_{12} = 0 \quad \text{e} \quad G_{12} = 20330 [MPa]$$

Dopo varie ricerche e tentativi si sono adottate le seguenti laminazioni ($t = 0.2 \text{ mm}$):

- Per il laminato tipo 1

$$[45, -45, -45, 45]$$

- Per il laminato tipo 2

$$[45, 45, 90, 0, 0, 90, 45, 45]$$

Sfruttando la parametrizzazione di Tsai e Pagano, è possibile dimostrare che queste laminazioni rispettano i requisiti prima indicati.

Per quanto riguarda il **primo tipo di laminazione**, sfruttando le relazioni 1.19 e 1.21 si hanno i seguenti parametri di laminazione:

$$\{\xi_{\mathcal{A}}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\xi_{\mathcal{D}}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0.75 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.22)$$

mentre, attraverso le formule 1.18 e il materiale scelto, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{8}(3E_1 + 3E_2 + 4G_{12}) = \text{cost} \\
 U_2 &= \frac{1}{2}(E_1 - E_2) = 48000 \text{ €} = E_0 \text{ €} \\
 U_3 &= U_4 = \frac{1}{8}(E_1 + E_2 - 4G_{12}) = \text{cost} \\
 U_5 &= \frac{1}{8}(E_1 + E_2 + 4G_{12}) = \text{cost}
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

e mediante la formula 1.15 è facile verificare che tutti i coefficienti di $[\mathcal{A}]$ sono costanti al variare di ϵ , come anche tutti i coefficienti di $[\mathcal{D}]$ tranne i termini non ortotropi:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{11} &= \mathcal{D}_{22} = \frac{t^3}{12}(U_1 - U_3) = \text{cost} \\
 \mathcal{D}_{12} &= \frac{t^3}{12}(U_3 + U_4) = \text{cost} \\
 \mathcal{D}_{66} &= \frac{t^3}{12}(U_3 + U_5) = \text{cost} \\
 \mathcal{D}_{16} &= \mathcal{D}_{26} = \frac{t^3}{12} \frac{\xi_{\mathcal{D}_3}}{2} U_2 = \frac{t^3}{12} \frac{\xi_{\mathcal{D}_3} E_0}{2} \epsilon = \text{cost} \cdot \epsilon
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

questi risultati sono riassunti nella prima delle due tabelle 1.2.

Per quanto riguarda il **secondo tipo di laminazione**, sfruttando le relazioni 1.19 e 1.21 si hanno i seguenti parametri di laminazione:

$$\{\xi_{\mathcal{A}}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\xi_{\mathcal{D}}\} = \begin{Bmatrix} -0.094 \\ -0.75 \\ 0.875 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.25}$$

Attraverso le formule 1.18 e il materiale scelto, si ottengono le stesse relazioni 1.23. Attraverso queste e le precedenti, combinate con la formula 1.15, è facile verificare che al variare di ϵ tutti i coefficienti di $[\mathcal{A}]$, tranne i termini non ortotropi, sono costanti:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{11} &= \mathcal{A}_{22} = tU_1 = \text{cost} \\
 \mathcal{A}_{12} &= tU_4 = \text{cost} \\
 \mathcal{A}_{66} &= tU_5 = \text{cost} \\
 \mathcal{A}_{16} &= \mathcal{A}_{26} = t \frac{\xi_{\mathcal{A}_3}}{2} U_2 = t \frac{\xi_{\mathcal{A}_3} E_0}{2} \epsilon = \text{cost} \cdot \epsilon
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

questi risultati sono riassunti nella seconda delle due tabelle 1.2.

(a) Laminato 1

ϵ	Materiale				$\frac{A_{22}}{A_{11}}$	$\frac{A_{12} + 2A_{66}}{A_{11}}$	$\frac{A_{16}}{A_{11}} = \frac{A_{26}}{A_{11}}$	$\frac{D_{22}}{D_{11}}$	$\frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{11}}$	$\frac{D_{16}}{D_{11}} = \frac{D_{26}}{D_{11}}$
	E_1	E_2	ν	G_{12}						
0	48000	48000	0	20330	1	1.1656	0	1	1.1656	0.0000
0.2	57600	38400	0	20330	1	1.1656	0	1	1.1656	0.0812
0.4	67200	28800	0	20330	1	1.1656	0	1	1.1656	0.1624
0.6	76800	19200	0	20330	1	1.1656	0	1	1.1656	0.2436
0.8	86400	9600	0	20330	1	1.1656	0	1	1.1656	0.3248
1	96000	0	0	20330	1	1.1656	0	1	1.1656	0.4060

(b) Laminato 2

ϵ	Materiale				$\frac{A_{22}}{A_{11}}$	$\frac{A_{12} + 2A_{66}}{A_{11}}$	$\frac{A_{16}}{A_{11}} = \frac{A_{26}}{A_{11}}$	$\frac{D_{22}}{D_{11}}$	$\frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{11}}$	$\frac{D_{16}}{D_{11}} = \frac{D_{26}}{D_{11}}$
	E_1	E_2	ν	G_{12}						
0	48000	48000	0	20330	1	1	0.0000	1.0000	1.1229	0.0000
0.2	57600	38400	0	20330	1	1	0.0520	1.0410	1.1459	0.0957
0.4	67200	28800	0	20330	1	1	0.1040	1.0837	1.1699	0.1954
0.6	76800	19200	0	20330	1	1	0.1560	1.1283	1.1949	0.2994
0.8	86400	9600	0	20330	1	1	0.2079	1.1748	1.2211	0.4079
1	96000	0	0	20330	1	1	0.2599	1.2234	1.2483	0.5212

Table 1.2: Coefficienti della matrice di rigidezza del monostrato equivalente per i due laminati presi in considerazione.

2 | Distribuzione del carico

Nel seguito verrà discusso e approfondito il concetto della distribuzione del carico tra skin e irrigidimenti. Questo è un aspetto che viene richiamato in molti dei capitoli successivi per cui risulta più logico descriverlo in anticipo.

Come anticipato nell'introduzione e come sarà più chiaro nei capitoli successivi, PANDA2 calcola, attraverso vari modelli matematici, diversi coefficienti di carico critico. Questi possono essere inerenti al solo skin del pannello, ad un singolo irrigidimento o ad una porzione di pannello (come ad esempio un modulo).

Nel momento in cui si devono fornire nel programma i dati inerenti ai carichi, deve essere indicato un valore di N_x , N_y e N_{xy} (positivi come indicati in figura 2.1). Tuttavia, questi valori si riferiscono a tutto il pannello, quindi è necessario in qualche modo distribuire questo carico sulle varie parti del pannello.

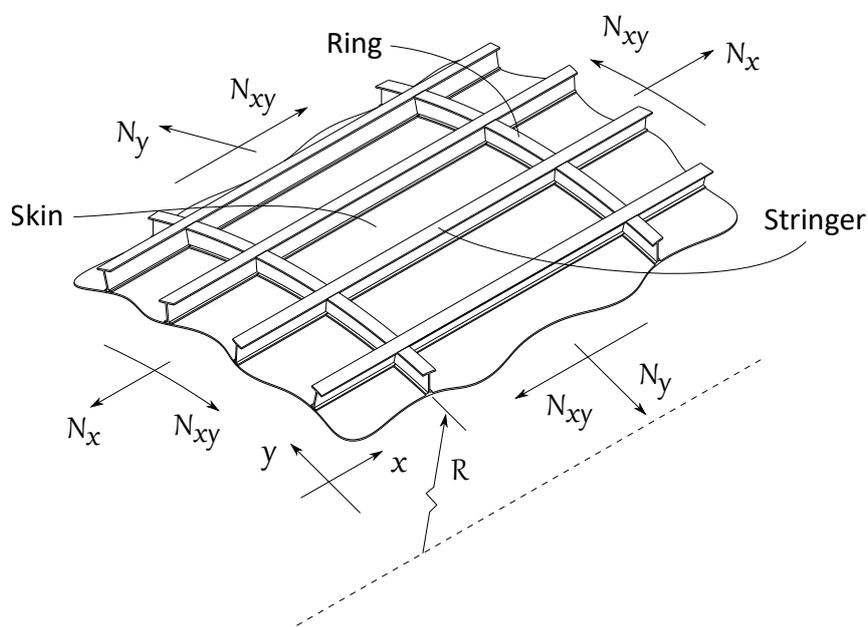


Figure 2.1: Carichi applicati al pannello.

Questo è un problema molto importante, se non cruciale, in quanto se si distribuisce il carico in modo errato, anche i fattori di carico critico ottenuti a valle risentiranno di questo errore, oltre a quelli insiti nel modello matematico utilizzato.

Nel programma, per quanto concerne la distribuzione del carico, esiste una porzione di codice che fa riferimento al caso non lineare, ovvero, si ha redistribuzione di carico anche in presenza di post-buckling locale dello skin. Quest'ultimo aspetto verrà presentato nell'ultimo capitolo, ma non verrà trattato nello specifico. Nel seguito si farà riferimento solo al caso lineare.

Nel capitolo seguente, in un primo momento verrà presentato come PANDA2 suddivide il carico alle varie parti del pannello. Successivamente verrà affrontato lo stesso problema anche per il FEM. Infine verranno confrontati alcuni risultati ottenuti da modelli numerici che sono presentati nello specifico nei capitoli successivi.

2.1 Modello PANDA

Come anticipato l'utente fornisce come input i carichi N_x , N_y e N_{xy} . L'ultimo, per ipotesi, viene assorbito dal solo skin, mentre gli altri due devono essere ripartiti tra skin e stinger, per N_x , e tra skin e ring, per N_y .

Il problema nella direzione assiale x e quella circonferenziale y è affrontato alla stessa maniera, per cui per semplicità si adotta la direzione x per descrivere i vari passaggi.

Le ipotesi alla base di tutto il processo di ripartizione sono

- Il carico per unità di lunghezza N_x , costante lungo la larghezza del pannello, è suddiviso in tanti N_{x_i} quanti sono i segmenti che costituiscono il pannello, e questi sono costanti lungo la larghezza del segmento i -esimo;
- Gli irrigidimenti, come verrà precisato più volte in seguito, sono essenzialmente costituiti da un monostrato equivalente, simmetrico ed ortotropo;

Si parte dalla teoria classica dei laminati e dalle relazioni membranali tra risultanti di sollecitazione e deformazioni del piano medio del singolo segmento (i coefficienti non ortotropi dello skin vengono trascurati in questa fase):

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & 0 \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix}_i \quad (2.1)$$

si pongono a zero le deformazioni $\varepsilon_y^{(0)}$ e $\gamma_{xy}^{(0)}$ e invertendo la formula precedente si calcola la rigidezza assiale del segmento i -esimo:

$$\bar{\mathcal{A}}_{11_i} = \left(\mathcal{A}_{11} - \frac{\mathcal{A}_{21} \mathcal{A}_{12}}{\mathcal{A}_{22}} \right)_i \quad (2.2)$$

da cui è possibile calcolare la rigidezza assiale membranale media di tutto il pannello

$$\mathcal{A}_{11}^* = \frac{1}{b_s} \sum_i^{N_S} \bar{\mathcal{A}}_{11_i} b_i \quad (2.3)$$

dove b_s è la larghezza dello skin e N_S è il numero totale di segmenti che costituiscono il pannello.

Fatto questo è possibile calcolare la deformazione assiale di tutto il pannello

$$N_x = A_{11}^* \varepsilon_x^{(0)} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_x^{(0)} = \frac{N_x}{A_{11}^*} \quad (2.4)$$

A questo punto PANDA ipotizza che, sotto l'azione del carico N_{x_i} , ogni segmento del pannello si deforma assialmente di una stessa quantità ($\varepsilon_{x_i}^{(0)} = \text{cost}$), ovvero, per ogni segmento è verificata l'uguaglianza

$$N_{x_i} = \bar{A}_{11_i} \varepsilon_x^{(0)} \quad (2.5)$$

sfruttando quest'ipotesi e la precedente relazione è possibile calcolare il carico per unità di lunghezza che agisce sul segmento i -esimo:

$$N_{x_i} = N_x \frac{\bar{A}_{11_i}}{A_{11}^*} \varepsilon_x^{(0)} \quad (2.6)$$

Nei capitoli successivi, dove verranno illustrati uno per uno i modelli analitici utilizzati, si avrà spesso a che fare con i soli irrigidimenti. In questo caso il ragionamento è analogo, ma dalla formulazione spariscono i termini inerenti allo skin. Per cui si avrà a che fare con una rigidezza assiale del singolo segmento

$$\bar{EA}_i = \bar{A}_{11_i} b_i \quad (2.7)$$

ed una rigidezza assiale dell'intero irrigidimento

$$(EA) = \sum_i^{N_S} \bar{EA}_i \quad (2.8)$$

dove qui N_S è l'insieme degli indici dei segmenti dell'irrigidimento considerato.

Considerando un carico \mathcal{N} applicato a tutto l'irrigidimento (non una forza/lunghezza ma semplicemente una forza) il carico per unità di lunghezza agente sul segmento i -esimo risulta essere

$$\mathcal{N} = (EA) \varepsilon_x^{(0)} \quad \Rightarrow \quad N_{x_i} = \frac{\bar{EA}_i}{b_i} \varepsilon_x^{(0)} = \mathcal{N} \frac{\bar{EA}_i}{(EA)} \frac{1}{b_i} \quad (2.9)$$

2.2 Modello PATRAN-NASTRAN

L'obiettivo del confronto PANDA-NASTRAN è quello di verificare il campo di validità delle formule appena presentate, fornendo delle indicazioni qualitative su come comportarsi con il programma in questione.

Per quanto riguarda la **geometria**, per semplicità, si focalizzerà l'attenzione solamente su un singolo irrigidimento. A tal proposito si faccia riferimento ai capitoli 4 e 6 dove sono illustrati nello specifico tutti i casi geometrici analizzati.

Per quanto riguarda il **materiale** e la **laminazione**, lo scopo è quello di eseguire un confronto in presenza di una laminazione dei segmenti non ortotropa in membrana. Questo perché, come verrà mostrato nei risultati, la presenza dei coefficienti \mathcal{N}_{16} e \mathcal{N}_{26} va ad influire sulla distribuzione di carico N_{x_i} che risulta variabile lungo la larghezza del segmento e non costante come previsto da PANDA.

A tal proposito si è adottato un laminato a strati identici simmetrico con laminazione:

$$[45, -45, -45, 45]$$

dove il materiale del singolo strato presenta le caratteristiche meccaniche seguenti:

$$\begin{aligned} E_1 &= 48000(1 + \epsilon) [MPa]; & E_2 &= 48000(1 - \epsilon) [MPa]; \\ \nu_{12} &= 0 & e & G_{12} = 20330 [MPa] \end{aligned} \quad (2.10)$$

e dove ϵ è il parametro con cui è possibile dar variare i coefficienti \mathcal{A}_{16} e \mathcal{A}_{26} , come dimostrato nel capitolo precedente.

Per quanto riguarda la suddivisione in elementi, i vincoli e il tipo di analisi si faccia riferimento ai capitoli 4 e 6, dove questi aspetti sono spiegati nel dettaglio e che in questo capitolo risultano forvianti.

L'unico aspetto che bisogna approfondire in questa sezione è quello inerente ai **carichi**. In PANDA gli irrigidimenti sono caricati da sola componente assiale che genera sola deformazione assiale. Per includere nel modello NASTRAN ciò si potrebbe agire in vari modi:

1. Definire per ogni segmento lo stesso carico per unità di lunghezza calcolato dalla teoria classica dei laminati.
2. Conoscendo a priori la posizione del centro di taglio, si applica una forza in tale punto e, tramite MPC, la si trasferisce alla sezione trasversale in questione.

Tuttavia, la prima soluzione non permette di mettere alla luce le differenze della distribuzione del carico sui segmenti rispetto al caso ortotropo. La seconda risulta poco pratica, in quanto bisogna di volta in volta andare a determinare la posizione del centro di taglio prima di poter eseguire l'analisi di instabilità vera e propria.

Esiste una terza soluzione, quella che verrà adottata, che può essere suddivisa in due step:

1. Caricare l'irrigidimento in modo indiretto, ovvero, si applica a tutti i nodi che appartengono alla sezione trasversale di estremità uno spostamento definito di compressione;
2. Eseguire un'analisi lineare elastica (Sol 101) e da questa risalire al carico applicato corrispondente alla deformazione assiale imposta (si osservi l'esempio della sezione successiva).

Quanto detto fino a questo punto, inerente ai carichi, risulta vero a patto di considerare solamente lo sforzo assiale. Nel momento in cui esiste anche una componente di taglio è necessario eseguire un passo in più. Bisogna prima di tutto eseguire un'analisi lineare con la sola componente N_x e successivamente, in una seconda analisi, rimuovere la deformazione costante imposta e applicare la distribuzione di carichi nodali prima ottenuta attraverso quello che è definito in PATRAN *nodal discrete vector spatial field* selezionando il metodo *FEM*. Questo sarà utile nell'ultimo capitolo.

2.3 Risultati

Nel seguito viene illustrata la procedura utilizzata per ottenere il carico critico per ogni irrigidimento considerato (tutti valori presentati nelle sezioni *Risultati* dei capitoli 4 e 6) e la distribuzione del carico lungo la lunghezza del singolo segmento dell'irrigidimento.

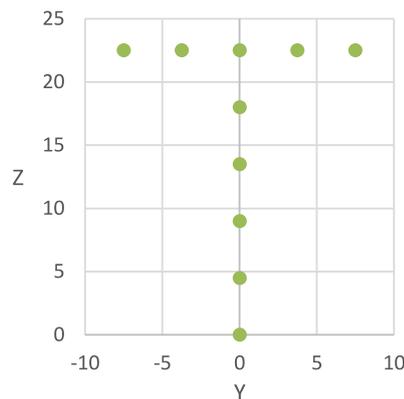
Nel seguito, a titolo di esempio è mostrata la procedura per la sola sezione *T*-type di un caso specifico, ma in modo analogo quanto segue è applicato a tutti i casi analizzati.

Per trovare il **carico critico** dell'irrigidimento si eseguono i seguenti passi (si faccia riferimento all'esempio mostrato nella figura 2.2):

- si ricavano le "constraint forces" nodali \mathcal{N}_i ;
- si sommano tutti i contributi nodali ottenendo \mathcal{N} ;
- si moltiplica il fattore di instabilità ricavato ($\lambda = 96.109$) per la precedente quantità, ottenendo il carico critico

$$\mathcal{N}_{cr} = \mathcal{N}\lambda = 53158.4 [N]$$

y	z	$\mathcal{N}_i [N]$
0	0	33.19
0	4.5	66.37
0	9	66.37
0	13.5	66.37
0	18	66.37
0	22.5	88.50
-7.5	22.5	27.66
-3.75	22.5	55.31
3.75	22.5	55.31
7.5	22.5	27.66
$\mathcal{N} =$		553.10

(a) risultati per $\epsilon = 0$ 

(b) Geometria

Figure 2.2: Constraint forces nodali ottenute da NASTRAN, per l'irrigidimento *T*-type.

I valori presentati nella tabella della figura 2.2 sono quelli ottenuti da un'analisi con ϵ nullo, invece, nella parte superiore della tabella 2.1 sono riassunti tutti gli altri valori.

Nella parte inferiore della stessa sono invece riassunti tutti i dati inerenti alla **distribuzione di carico** lungo ogni segmento e al variare di ϵ . Per ricavare questi valori, in primo luogo è necessario valutare su quale lunghezza l_i deve essere distribuito il carico nodale:

- Nodi di estremità – il carico è distribuito solo su metà distanza dal nodo adiacente;
- Nodi di confluenza – il carico è distribuito sulla somma della metà distanza dei tre nodi adiacenti;
- Nodi centrali – il carico è distribuito sulla somma della metà distanza dei due nodi adiacenti.

In seguito, note queste lunghezze l_i , è possibile andare a valutare la distribuzione normalizzata sul segmento i -esimo attraverso

$$\frac{N_{x_i}}{N_{x_{tot}}} = \frac{N_i l_{tot}}{l_i N_i} \quad \text{con} \quad l_{tot} = \sum_i^{N_S} b_i \quad (2.11)$$

dove N_S è il numero di segmenti che compone la sezione trasversale dell'irrigidimento.

λ	\mathcal{N} [N]	\mathcal{N}_i [N]										ϵ
96.109	553.10	33.19	66.37	66.37	66.37	66.37	88.50	27.66	55.31	55.31	27.66	0
94.985	550.25	29.74	62.92	64.67	65.76	66.74	90.78	28.45	56.88	56.27	28.03	0.2
91.790	541.47	26.43	58.76	62.13	64.30	66.29	92.15	28.92	57.81	56.58	28.09	0.4
86.891	526.15	23.21	53.87	58.68	61.93	64.96	92.50	29.02	58.02	56.17	27.81	0.6
79.748	503.12	20.02	48.18	54.22	58.50	62.60	91.63	28.64	57.33	54.90	27.11	0.8
69.219	470.39	16.82	41.60	48.55	53.79	58.96	89.15	27.64	55.46	52.53	25.91	1
[mm]	y	0	0	0	0	0	0	-7.5	-3.75	3.75	7.5	
	z	0	4.5	9	13.5	18	22.5	22.5	22.5	22.5	22.5	
	l_i	2.25	4.5	4.5	4.5	4.5	6	1.875	3.75	3.75	1.875	
		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0
		0.901	0.953	0.979	0.996	1.011	1.031	1.034	1.034	1.023	1.019	0.2
		0.814	0.904	0.956	0.990	1.020	1.064	1.068	1.068	1.045	1.037	0.4
		0.735	0.853	0.929	0.981	1.029	1.099	1.103	1.103	1.068	1.057	0.6
		0.663	0.798	0.898	0.969	1.037	1.138	1.139	1.139	1.091	1.078	0.8
		0.596	0.737	0.860	0.953	1.044	1.184	1.175	1.179	1.117	1.101	1
		$N_{x_i}/N_{x_{tot}}$										ϵ

Table 2.1: Influenza del parametro ϵ sulle nodal forces e sulla distribuzione del carico lungo i segmenti.

Nella figura 2.3 è mostrato il risultato di tale operazione per un caso di sezione T -type. A titolo comparativo è mostrato in figura 2.4 anche un caso di sezione Hat-type.

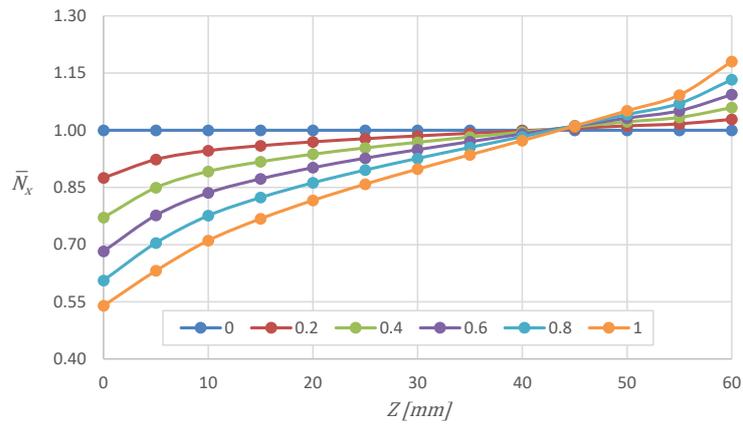
Nella teoria PANDA su ogni segmento agisce un carico per unità di lunghezza costante. Per gli spessori e la laminazione assegnata su ogni segmento si ha:

$$(N_{x_i}/N_{x_{tot}})_{PANDA} = 1 \quad (2.12)$$

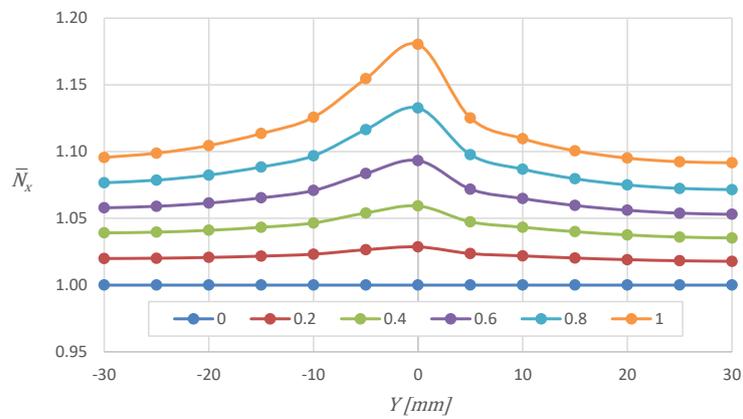
Facendo riferimento alla sezione T -type, solamente per valori di ϵ vicini al valore nullo si ha una corrispondenza accettabile tra NASTRAN e PANDA. In tutti gli altri casi la distribuzione è fortemente non costante, in particolare modo nel web dove si ha uno scostamento rispetto a PANDA che arriva anche al 40%.

Un risultato analogo è ottenuto per la sezione Hat-type, dove però in una delle flange si ha uno scostamento che arriva anche al 150% per ϵ unitario.

In **sintesi** si può concludere che il modo in cui PANDA ripartisce il carico è compatibile al FEM solo per valori di ϵ piccoli tali da non generare \mathcal{A}_{16} e \mathcal{A}_{26} rilevanti rispetto a \mathcal{A}_{11} .



(a) Web



(b) Flangia

Figure 2.3: Distribuzione di carico lungo i segmenti della sezione *T*-type. In legenda sono indicati i valori di ϵ .

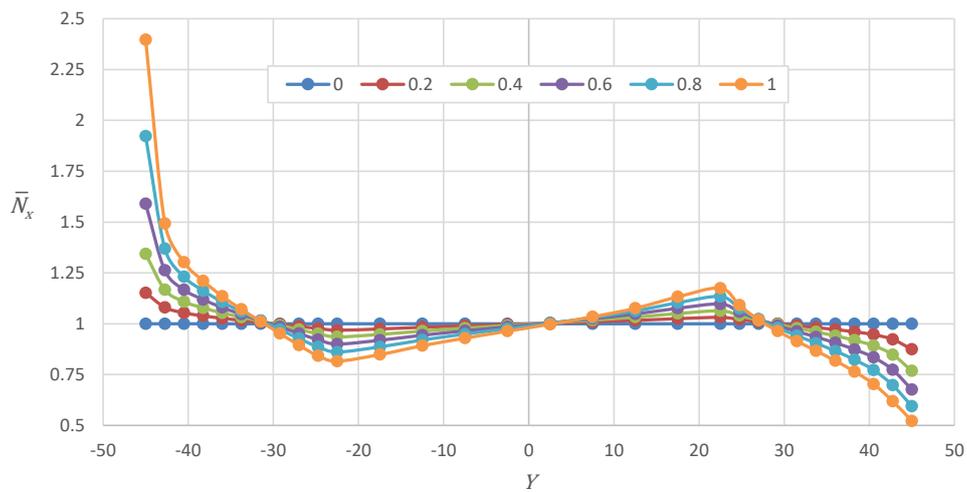


Figure 2.4: Distribuzione di carico lungo le due flange e il web della sezione Hat-type. Per semplicità è indicata solo la coordinata Y . In legenda sono indicati i valori di ϵ .

3 | Instabilità locale, generale e semi-generale

Nel seguito si entrerà nel dettaglio di quanto discusso nella prima parte dell'articolo [2], che descrive in generale tutti i tipi di instabilità trattati nel codice originale PANDA. Verrà approfondito il discorso inerente ai seguenti tipi di instabilità trattati da PANDA2:

- **General instability** - gli irrigidimenti (stringer e ring) sono spalmati sull'intera area del pannello;
- **Local instability** – l'attenzione è focalizzata sulla porzione di pannello compresa tra stringer e ring adiacenti;
- **Panel instability** – si considera la porzione di pannello compresa tra stringer adiacenti (panel instability between stringers) o tra ring adiacenti (panel instability between rings).

Il modello matematico utilizzato in tutti i casi è essenzialmente quello relativo ad un pannello multistrato semplicemente supportato su quattro lati. Nel caso si abbia un vincolo di incastro, due lati opposti incastrati o tutti e quattro i lati incastrati, l'analisi è la stessa del caso semplicemente supportato, ma si considera una lunghezza e/o larghezza (genericamente l) ridotta di un opportuno fattore fattore:

$$l_{\text{incastrato}} = \frac{l_{\text{appoggio}}}{\sqrt{3.85}}$$

In PANDA2 sono proposti due metodi analitici inerenti a questi tipi di instabilità:

- PANDA-type - metodo che rientra nel codice originale di PANDA in cui, per descrivere il problema in gioco, viene utilizzato un campo di spostamenti relativamente semplice: una sola componente di seni e coseni;
- PANDA-alternate - metodo più oneroso dal punto di vista computazionale, perché include un campo di spostamenti più completo: sommatoria di più componenti di seni e coseni.

L'utente, in fase di compilazione del file di input, in funzione delle proprie esigenze, farà una scelta su quale metodo utilizzare.

Alla fine del capitolo, i risultati ottenuti tramite questi sono confrontati con quelli ottenuti da analisi agli elementi finiti NASTRAN-PATRAN di un modello numerico equivalente, valutandone lo scostamento percentuale.

Nel lavoro seguente si fa la seguente assunzione: si ha simmetria geometrica e di materiale. Questo vuol dire che tutti i risultati che sono presentati sono validi per un pannello irrigidito che presenta una laminazione simmetrica, con irrigidimenti uguali sia interni che esterni.

3.1 Modello PANDA-type

3.1.1 Campo di spostamenti, deformazioni e rotazioni

Il **campo di spostamenti** preso in considerazione per il pannello costituito da skin con o senza irrigidimenti spalmati (stringer e/o ring) risulta:

$$\begin{aligned} u &= U [n_2^2 m_1 \sin(n_1 y - m_1 x) + n_1^2 m_2 \sin(n_2 y - m_2 x)] \\ v &= V [n_2 \sin(n_1 y - m_1 x) - n_1 \sin(n_2 y - m_2 x)] \\ w &= W [\cos(n_1 y - m_1 x) - \cos(n_2 y - m_2 x)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove:

- \bar{m} e \bar{n} sono rispettivamente le semi-onde assiali e trasversali nel modo di buckling considerato

$$\begin{aligned} n_1 &= n + m c & m_1 &= m + n d & \text{e} & n &= \frac{\bar{n}\pi}{y_{max}} & m &= \frac{\bar{m}\pi}{x_{max}} \\ n_2 &= n - m c & m_2 &= m - n d & & & & & \end{aligned} \quad (3.2)$$

- x_{max} e y_{max} sono rispettivamente la lunghezza e la larghezza del pannello (si faccia riferimento alla tabella 3.1.1 e alla figura 3.1);
- x è la coordinata assiale e y quella circonferenziale;
- c e d rappresentano la pendenza delle linee nodali (vedi figura 3.2);
- U , V e W sono le costanti da determinare minimizzando il potenziale totale.

Tipi di instabilità	x_{max}	y_{max}
Generale	a	b
Semi-generale con stringer spalmati	a_0	b
Semi-generale con stringer spalmati	a	b_0
Locale	a_0	b_0

Table 3.1: Carichi relativi al pannello ammessi in PANDA2

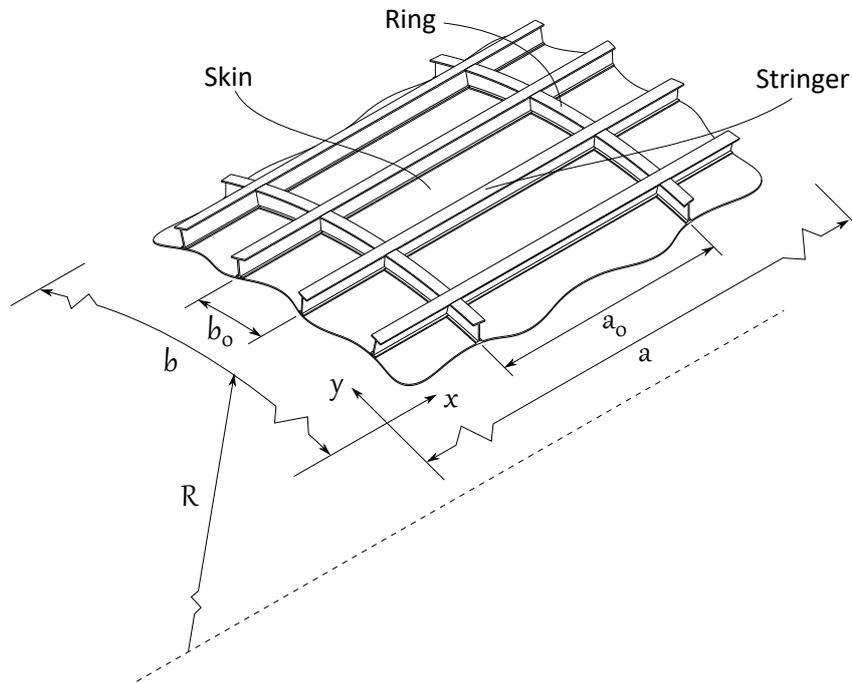


Figure 3.1: Geometria pannello cilindrico irrigidito.

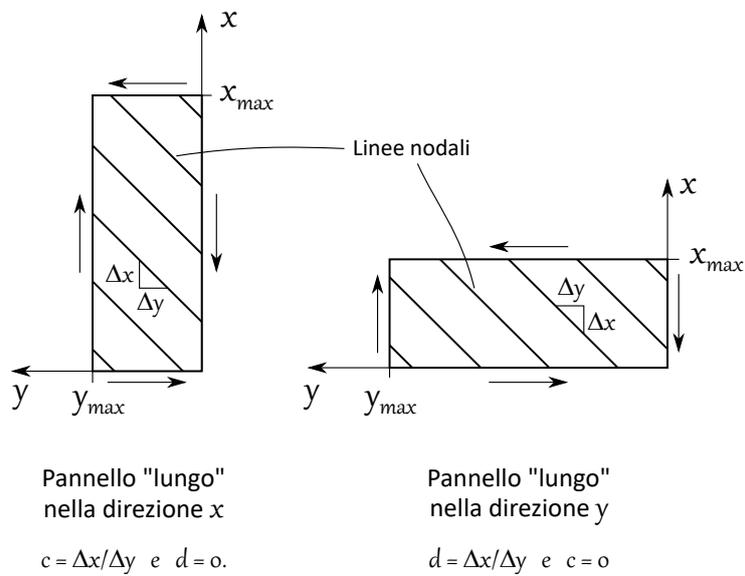


Figure 3.2: Pendenza linee nodali in presenza di taglio e/o laminazione non bilanciata.

Per comodità, dal punto di vista computazionale e di sintesi, si adotta una notazione matriciale, quindi:

$$\{d\} = [u \quad v \quad w]^T = [\phi]\{D\} \quad (3.3)$$

dove sono state separate le costanti di combinazione lineare incognite

$$\{D\} = [U \quad V \quad W]^T \quad (3.4)$$

dalle funzioni in termini delle incognite x e y

$$[\phi] = \begin{bmatrix} n_2^2 m_1 \sin(n_1 y - m_1 x) + & 0 & 0 \\ + n_1^2 m_2 \sin(n_2 y - m_2 x) & & \\ 0 & n_2 \sin(n_1 y - m_1 x) + & 0 \\ & -n_1 \sin(n_2 y - m_2 x) & \\ 0 & 0 & \cos(n_1 y - m_1 x) + \\ & & -\cos(n_2 y - m_2 x) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Il **campo di deformazione**, che sarà utile per determinare l'energia potenziale elastica, invece risulta essere:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = [\partial]\{d\} = [\partial][\phi]\{D\} = [\partial\phi]\{D\} \quad (3.6)$$

dove $[\partial]$ è un operatore matriciale così definito (viene trascurata la curvatura nei ring):

$$[\partial] = \begin{bmatrix} (\cdot)_{,x} & 0 & (\cdot)_{,y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\cdot)_{,y} & (\cdot)_{,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\cdot)_{,xx} & -(\cdot)_{,yy} & -2(\cdot)_{,xy} \end{bmatrix}^T \quad (3.7)$$

Infine, il **campo delle rotazioni**, che è utili per definire il lavoro dei carichi applicati, risulta:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} = [\partial_r]\{d\} = [\partial_r][\phi]\{D\} = [\partial_r\phi]\{D\} \quad (3.8)$$

dove $[\partial_r]$ è un operatore matriciale così definito:

$$[\partial_r] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\cdot)_{,x} \\ 0 & 0 & (\cdot)_{,y} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

In questo modello viene trascurata la componente di rotazione r_{xy} e la curvatura del pannello nella componente di rotazione r_y . Nel modello PANDA-alternate, come verrà discusso in seguito, si ha un campo relativo alle rotazioni più completo, dove non sono trascurate queste componenti.

3.1.2 Energia potenziale totale

Noto il campo di spostamenti, di deformazioni e rotazioni, come anche il carico applicato e la matrice di rigidezza del monostrato equivalente è possibile valutare l'**energia di deformazione elastica**:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{y_{max}} \int_0^{x_{max}} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dx dy = \{D\}^T [A] \{D\} \quad (3.10)$$

dove $[C]$ è la matrice di rigidezza del laminato equivalente

$$[C] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

e $[A]$ è una matrice 3×3 così definita

$$[A] = \frac{1}{2} \int_0^{y_{max}} \int_0^{x_{max}} [\partial\phi]^T [C] [\partial\phi] dx dy \quad (3.12)$$

Come anche è possibile calcolare il **lavoro dei carichi applicati**:

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^{y_{max}} \int_0^{x_{max}} \{r\}^T [N] \{r\} dx dy = \{D\}^T [B] \{D\} \quad (3.13)$$

dove $[N]$ è la matrice contenente le componenti delle risultanti di sollecitazione

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_x] & [N_{xy}] \\ [N_{xy}] & [N_y] \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

e $[B]$ è una matrice 3×3 così definita ($B_{jk} = 0$ per $j, k \neq 3$)

$$[B] = -\frac{1}{2} \int_0^{y_{max}} \int_0^{x_{max}} [\partial_r\phi]^T [N] [\partial_r\phi] dx dy \quad (3.15)$$

Sapendo che il carico applicato è composto dalla componente di pre-buckling ("pre") e da quella di buckling ("e") si ha:

$$\{N\} = [N_x \quad N_y \quad N_{xy}]^T = \{N_{pre}\} + \lambda \{N_e\} \Rightarrow [B] = [B_{pre}] + \lambda [B_e] \quad (3.16)$$

A questo punto è possibile esprimere il **potenziale totale** relativo al pannello:

$$\Pi = U - W = \{D\}^T ([A] - [B_{pre}] - \lambda [B_e]) \{D\} \quad (3.17)$$

Determinazione dell'autovalore

Per la determinazione dell'autovalore, in gioco ci sono 4 variabili: i due valori di semi-onde assiali e circolari \bar{m} e \bar{n} ; i due valori della pendenza delle linee nodali c e d .

Le ultime due entrano in gioco solo se si ha una componente di taglio N_{xy} e/o se si è in presenza di una laminazione non ortotropa in membrana, in flessione torsione e/o in accoppiamento (A_{i6} , B_{i6} e/o $D_{i6} \neq 0$ per $i \neq 0$).

Inoltre, una delle due viene considerata nulla, la discriminante è la lunghezza preferenziale del pannello. In sostanza PANDA calcola la seguente quantità:

$$\bar{L} = \frac{x_{max}}{y_{max}} \sqrt{\frac{C_{55N}}{C_{44N}}} \quad (3.18)$$

Dove con il pedice "N" si indica che la quantità è riferita all'asse neutro. Dopo aver spalmato le proprietà degli irrigidimenti è necessario calcolare anche l'asse neutro del pannello e definire le proprietà del monostrato rispetto a questo (si faccia riferimento a [1] per maggiori dettagli).

In funzione del valore assunto da \bar{L} si possono avere due situazioni:

1. Pannello "lungo" nella direzione x

$$R/y_{max} \geq e \quad \bar{L} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad d = 0 \quad (3.19)$$

2. Pannello "lungo" nella direzione y

$$R/y_{max} < 1 \quad \text{o} \quad \bar{L} < 1 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad (3.20)$$

Per una maggior chiarezza di quanto appena detto si faccia riferimento alla figura 3.2.

Oss: La presenza o meno di uno di questi due coefficienti, come sarà più chiaro alla fine del capitolo dove verranno presentati i risultati, implica la non congruenza degli spostamenti con le condizioni al contorno geometriche.

Fatta questa precisazione si può procedere al calcolo dell'autovalore, per farlo si uguaglia a zero la variazione prima del potenziale totale rispetto alle costanti di proporzionalità

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D} = 0 \quad \Rightarrow \quad ([A] - [B_{pre}] - \lambda [B_e]) \{D\} = 0 \quad (3.21)$$

e si ottiene il classico problema agli autovalori

$$\det ([A] - [B_{pre}] - \lambda [B_e]) = 0 \quad (3.22)$$

Questa non è altro che un'unica equazione in cui compaiono le incognite λ , \bar{m} , \bar{n} , c o d . Portando a sinistra i termini moltiplicati per λ e a destra tutti gli altri, svolgendo tutti i conti, si perviene alla soluzione indicata nell'articolo [2] (equazione 57) e tale rimando per quanto riguarda i coefficienti a_{ij} indicati nella formula seguente:

$$\lambda = \frac{a_{33} + \frac{a_{23}(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}) + a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{-N_{x_e}(m_1^2 + m_2^2) - N_{y_e}(n_1^2 + n_2^2) - 2N_{x_y_e}(m_2n_2 - m_1n_1)} \quad (3.23)$$

Successivamente, in modo iterativo, si determina il minimo autovalore λ in funzione di \bar{m} , \bar{n} , c o d :

- Si fissa \bar{m}_{k+1} e \bar{n}_{k+1} ;

- Si determina il minimo di λ_{k+1} facendo variare c o d di un incremento pari a 0.01 se il valore è inferiore a 0.1 e 1.2 se il valore è superiore a 0.1
- Se λ_{k+1} è maggiore del precedente l'iterazione finisce, altrimenti si riprende il ciclo dall'inizio.

Oss: Il discorso sul minimo autovalore termina qui solo per quanto riguarda i pannelli piatti, per quelli che presentano una curvatura si hanno dei casi particolari in cui si possono avere minimi non unici. In questa trattazione, parlando esclusivamente di pannelli piatti, si trascurava questo aspetto e rimando all'articolo [2] per approfondimenti vari.

3.2 Modello PANDA-alternate

Ci sono delle situazioni in cui la teoria PANDA-type porta a dei risultati che sono completamente incongruenti con la realtà. Alcuni casi sono indicati nell'articolo [3], un altro verrà mostrato nei risultati alla fine del capitolo. In linea di principio PANDA-type presenta problemi per pannelli con x_{max}/y_{max} vicino al valore unitario, o nelle situazioni in cui il monostrato equivalente presenta termini non ortotropi (\mathcal{A}_{i6} , \mathcal{B}_{i6} e/o $\mathcal{D}_{i6} \neq 0$ per $i \neq 0$) rilevanti.

Sulla base di queste riflessioni è stata proposta una soluzione alternativa in cui viene adottato un campo di spostamento più complesso. Come espresso nell'articolo, quanto verrà discusso si basa su una trattazione indicata nel libro di Timoshenko [5], Whitney, Jones [6] e altri.

3.2.1 Campo di spostamenti, deformazioni e rotazioni

Il **campo di spostamenti** preso in considerazione per il pannello costituito da skin con o senza irrigidimenti spalmati (stringer e/o ring) si presenta così composto:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{m}_{max}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{n}_{max}} [U_1(\bar{m}, \bar{n}) \cos(m_i x) \sin(n_i y) + U_2(\bar{m}, \bar{n}) \sin(m_i x) \sin(n_i y)] \\
 v &= \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{m}_{max}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{n}_{max}} [V_1(\bar{m}, \bar{n}) \sin(m_i x) \cos(n_i y) + V_2(\bar{m}, \bar{n}) \sin(m_i x) \sin(n_i y)] \\
 w &= \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{m}_{max}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{n}_{max}} W(\bar{m}, \bar{n}) \sin(m_i x) \sin(n_i y)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

dove:

- \bar{m} e \bar{n} sono rispettivamente le semi-onde assiali e trasversali nel modo di buckling considerato

$$n = \frac{\bar{n}\pi}{y_{max}} \quad \text{e} \quad m = \frac{\bar{m}\pi}{x_{max}} \tag{3.25}$$

- x_{max} e y_{max} sono rispettivamente la lunghezza e la larghezza del pannello (si faccia riferimento alla tabella 3.1.1 e alla figura INSERIRE LA FIGURA GEOMETRIA);

- x è la coordinata assiale e y quella circonferenziale;
- U_1, U_2, V_1, V_2 e W sono le costanti di combinazione lineare da determinare minimizzando il potenziale totale.

Oss: Qui sono scomparsi i coefficienti c e d ed è chiaro che, viste le funzioni trial scelte, il campo di spostamenti rispetta in qualsiasi situazione le condizioni al contorno geometriche in gioco.

Per comodità, come fatto in precedenza, si adotta una notazione matriciale, quindi:

$$\{d\} = [u \quad v \quad w]^T = [\phi]\{D\} \quad (3.26)$$

dove sono state separate le costanti incognite

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} \{D_1\} \\ \vdots \\ \{D_{NC}\} \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} \{D_i\} = [U_1 \quad U_2 \quad V_1 \quad V_2 \quad W]^T \\ NT = 5 \bar{m}_{max} \bar{n}_{max} = 5 NC \end{matrix} \quad (3.27)$$

dalle funzioni di x e y

$$[\phi] = [[\phi_1] \quad \cdots \quad [\phi_{NC}]] \quad \text{con} \quad [\phi_i] = \begin{bmatrix} \phi_{u_1} & \phi_{u_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{v_1} & \phi_{v_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_w \end{bmatrix}_i \quad (3.28)$$

Le varie funzioni trial, ϕ_k , sono le stesse mostrate in precedenza

$$\begin{aligned} \phi_{u_1}^{(i)} &= \cos(m_i x) \sin(n_i y) \\ \phi_{u_2}^{(i)} &= \sin(m_i x) \sin(n_i y) \\ \phi_{v_1}^{(i)} &= \sin(m_i x) \cos(n_i y) \\ \phi_{v_2}^{(i)} &= \sin(m_i x) \sin(n_i y) \\ \phi_w^{(i)} &= \sin(m_i x) \sin(n_i y) \end{aligned} \quad (3.29)$$

e con l'indice " i " si indica, in generale, una coppia ordinata di m e n

$$\begin{aligned} (\bar{m}, \bar{n})_{i=1} &= (1, 1) \\ (\bar{m}, \bar{n})_{i=2} &= (1, 2) \\ &\vdots \\ (\bar{m}, \bar{n})_{i=\bar{n}_{max}+1} &= (2, 1) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.30)$$

Il **campo di deformazione**, che sarà utile per determinare l'energia potenziale elastica, invece risulta essere:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} + w/r \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} \\ k_x &= -w_{,xx} \\ k_y &= -w_{,yy} + v_{,y}/r \\ k_{xy} &= 2(-w_{,xy} + v_{,x}/r) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Si osservi che, a differenza del caso precedente, qui è inclusa la curvatura del pannello.

Per completezza, si può riscrivere il tutto in forma matriciale come segue:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = [\partial]\{d\} = [\partial][\phi]\{D\} = [\partial\phi]\{D\} \quad (3.32)$$

dove $[\partial]$ è un operatore matriciale così definito

$$[\partial] = [[\partial_1] \quad \dots \quad [\partial_{NC}]] \quad (3.33)$$

e tutti i termini $[\partial_i]$ sono identici

$$[\partial_i] = \begin{bmatrix} (\cdot)_{,x} & (\cdot)_{,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\cdot)_{,y} & (\cdot)_{,y} & 1/R \\ (\cdot)_{,y} & (\cdot)_{,y} & (\cdot)_{,x} & (\cdot)_{,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\cdot)_{,xx} \\ 0 & 0 & (\cdot)_{,y}/R & (\cdot)_{,y}/R & -(\cdot)_{,yy} \\ 0 & 0 & 2(\cdot)_{,y}/R & 2(\cdot)_{,y}/R & -2(\cdot)_{,xy} \end{bmatrix} \quad \forall i \quad (3.34)$$

Le rotazioni, che saranno utili per definire il lavoro dei carichi applicati, risultano, sfruttando la teoria di Donnel e Sanders:

$$\begin{aligned} r_x &= w_{,x} \\ r_y &= w_{,y} - v/r \\ r_{xy} &= \frac{1}{2}(u_{,y} - v_{,x}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

e anche qui, a differenza del caso precedente, è inclusa la curvatura del pannello.

Per completezza, anche qui, si può riscrivere il tutto in forma matriciale come segue:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_{xy} \end{Bmatrix} = [\partial_r]\{d\} = [\partial_r][\phi]\{D\} = [\partial_r\phi]\{D\} \quad (3.36)$$

dove $[\partial_r]$ è un operatore matriciale così definito:

$$[\partial_r] = [[\partial_{r1}] \quad \dots \quad [\partial_{r_{NC}}]] \quad (3.37)$$

e tutti i termini $[\partial_{r_i}]$ sono identici

$$[\partial_{r_i}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (\cdot)_{,x} \\ 0 & 0 & -1/R & -1/R & (\cdot)_{,y} \\ (\cdot)_{,y}/2 & (\cdot)_{,y}/2 & -(\cdot)_{,x}/2 & -(\cdot)_{,x}/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall i \quad (3.38)$$

3.2.2 Energia potenziale totale

Noto il campo di spostamenti, di deformazioni e rotazioni, come anche il carico applicato e la matrice di rigidezza del monostrato equivalente è possibile valutare l'**energia di deformazione elastica**:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{y_{max}} \int_0^{x_{max}} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dx dy = \{D\}^T [A] \{D\} \quad (3.39)$$

dove $[C]$ è una matrice $NT \times NT$ costituita da sotto-matrici identiche, tutte uguali a quella di rigidezza del laminato equivalente

$$[C] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & [C_{ij}] & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad [C_{ij}] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

e $[A]$ è una matrice $NT \times NT$ così definita

$$[A] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & [A_{ij}] & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

costituita da sotto-matrici 5×5

$$[A_{ij}] = \frac{1}{2} \int_0^{y_{max}} \int_0^{x_{max}} [\partial\phi_j]^T [C_{ij}] [\partial\phi_i] dx dy \quad (3.42)$$

Il **lavoro dei carichi applicati** risulta

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^{y_{max}} \int_0^{x_{max}} \{r\}^T [N] \{r\} dx dy = \{D\}^T [B] \{D\} \quad (3.43)$$

dove la matrice relativa ai carichi applicati $[N]$ ($NT \times NT$) è costituita da sotto-matrici $[N_{ij}]$ identiche

$$[N] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & [N_{ij}] & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad [N_{ij}] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} & 0 \\ N_{xy} & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

e $[B]$ è una matrice $NT \times NT$ così definita costituita da sotto-matrici 5×5

$$[B_{ij}] = -\frac{1}{2} \int_0^{y_{max}} \int_0^{x_{max}} [\partial_r\phi_j]^T [N_{ij}] [\partial_r\phi_j] dx dy \quad (3.45)$$

Sapendo che il carico applicato è composto dalla componente di pre-buckling ("pre") e da quella di buckling ("e") si ha:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \{N_{pre}\} + \lambda \{N_e\} \quad \Rightarrow \quad [B] = [B_{pre}] + \lambda [B_e] \quad (3.46)$$

A questo punto è tutto noto per esprimere il **potenziale totale** relativo al pannello:

$$\Pi = \mathcal{U} - \mathcal{W} = \{D\}^T ([A] - [B_{pre}] - \lambda [B_e]) \{D\} \quad (3.47)$$

Oss: Si è deciso di organizzare le matrici come prima indicato, perché, dal punto di vista computazionale, risulta molto oneroso valutare nella totalità tutti gli $NT \times NT$ termini. Per svolgere i vari conti si è fatto uso del software Matlab. In questo viene utilizzato il simbolico e risulta molto comodo e più veloce andare a valutare $[A_{ij}]$ e $[B_{ij}]$ generici e poi in un secondo momento comporre la matrice $[A]$ e $[B]$ totale. In sostanza si integra una sola volta su una matrice 5×5 e poi si trasferiscono i risultati sulla matrice globale anziché integrare direttamente la matrice globale che è $NT \times NT$.

Determinazione dell'autovalore

l'insieme degli autovalori in gioco si calcola uguagliando a zero la variazione prima del potenziale totale rispetto alle incognite:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{D\}} = \{0\} \Rightarrow ([A] - [B_{pre}] - \lambda [B_e]) \{D\} = \{0\} \quad (3.48)$$

da cui si ricava il classico problema agli autovalori

$$\det ([A] - [B_{pre}] - \lambda [B_e]) = 0 \quad (3.49)$$

Da questa si ricavano NT autovalori, si individua quello minimo (in modulo) e si calcola il relativo autovettore.

Riguardo la determinazione dell'autovalore bisogna precisare che PANDA utilizza un numero di componenti diverse per i vari spostamenti:

- Per lo spostamento fuori dal piano w

$$m_{max} = n_{max} = 11$$

- Per lo spostamento nel piano u e v

$$m_{max} = n_{max} = \begin{cases} 5 & \text{initial search} \\ 7 & \text{final evaluations} \end{cases}$$

Questo si ripercuote sulle matrici precedenti andando ad eliminare righe e colonne opportune.

In questo capitolo, per questioni computazionali, i vari risultati verranno ottenuti facendo variare m_{max} e n_{max} in maniera indipendente e avendo lo stesso numero di termini per ogni componente di spostamento (in ogni caso si è sempre al di sotto dei limiti utilizzati da PANDA). Nei capitoli successivi verranno utilizzate le componenti indicate.

Oss: Per risolvere questo problema, nell'articolo [3], si fa cenno a tecniche di disaccoppiamento delle matrici. Questo è possibile farlo in casi particolari, il fine è avere un risultato nel minor tempo possibile. Tuttavia non viene precisato nulla sull'argomento e con questo lavoro di tesi non si vuole entrare nel merito della questione, quindi, per risolvere il problema agli autovalori in questione sono utilizzati gli algoritmi interni di Matlab.

3.3 Modello PATRAN-NASTRAN

Nel seguito vengono illustrati tutti i passi utili per definire i modelli numerici NASTRAN, che verranno poi utilizzati per ottenere i risultati da confrontare con quelli analitici del modello PANDA-type e PANDA-alternate.

Nel seguito verrà definita la geometria, il materiale e la laminazione utilizzate, dati utili per tutti e due i modelli: quello numerico e quelli analitici prima presentati.

Le formule analitiche indicate nella sezione precedente sono state implementate in MATLAB e dai programmi risultanti sono ricavati i risultati che verranno poi confrontati con quelli NASTRAN e presentati in seguito.

3.3.1 Geometria, materiale-laminazione ed elementi

Il primo passo per creare il modello FEM è quello di definire la **geometria** in gioco.

L'obiettivo è quello di valutare l'influenza del rapporto tra i lati della piastra, quindi si sono state prese in considerazione due situazioni ($a = y_{max}/x_{max}$):

1. Pannello quadrato con $x_{max} = y_{max} = 1000 \text{ mm}$ (ovvero $a = 1$);
2. Pannello rettangolare con $x_{max} = 1000$ e $y_{max} = 300 \text{ mm}$ (ovvero $a = 3$);

Queste geometrie sono state scelte al fine di porre l'attenzione su uno dei principali difetti insiti nella soluzione PANDA-type, come indicato in precedenza, ovvero che si ha una valutazione dell'autovalore non accurata in situazioni in cui $a \approx 1$.

Una volta definita la geometria è necessario specificare il **materiale** e la **laminazione**.

Altro difetto della teoria PANDA-type è quello di fornire risultati non accurati in situazioni in cui i termini non ortotropi della matrice di rigidezza del laminato equivalente risultano rilevanti.

Avendo ipotizzato una laminazione simmetrica e aggiungendo ulteriormente il vincolo di laminazione bilanciata, gli unici coefficienti non ortotropi ad essere diversi da zero sono D_{16} e D_{26} .

Per enfatizzare questo aspetto si vuole adottare una laminazione ed un materiale tale da mantenere invariati tutti i coefficienti della matrice di rigidezza tranne questi ultimi due. Si è adottato un laminato a strati identici ($t = 0.2 \text{ mm}$) simmetrico con la seguente laminazione:

$$[45, -45, -45, 45]$$

dove il materiale del singolo strato presenta le seguenti caratteristiche meccaniche:

$$\begin{aligned} E_1 = 48000(1 + \epsilon) [MPa]; & \quad E_2 = 48000(1 - \epsilon) [MPa]; \\ \nu_{12} = 0 & \quad \text{e} \quad G_{12} = 20330 [MPa] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Questa combinazione di materiale-laminazione, come dimostrato nel primo capitolo, è tale da generare una serie di laminati, al variare di ϵ , che presentano sempre gli stessi valori dei coefficienti D_{11} , D_{22} , D_{12} e D_{66} con D_{16} e D_{26} variabili.

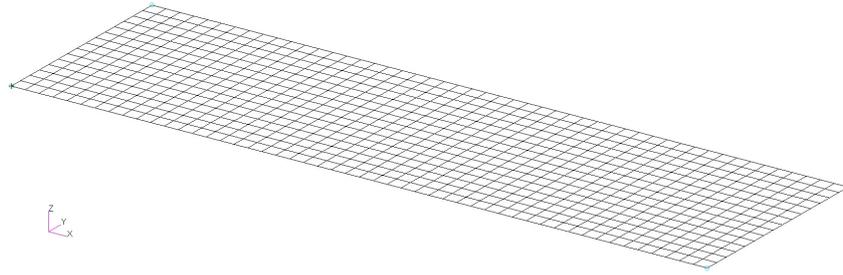


Figure 3.3: Suddivisione in elementi del modello.

Il passo successivo è suddividere la geometria in **elementi** CQUAD4 di opportune dimensioni, il risultato è mostrato a titolo di esempio in figura 3.3 (per semplicità si fa riferimento al pannello rettangolare).

Ad ogni elemento è poi stata assegnata una proprietà *shell* con l'opzione *thin* in cui è indicata la laminazione opportuna.

3.3.2 Vincoli, carichi e tipo di analisi

Una volta definita la geometria degli elementi e le loro proprietà, il passo successivo è specificare i **vincoli** in gioco. Facendo riferimento alla figura 3.4 si ha:

- Semplice appoggio – Il pannello risulta semplicemente supportato sui lati, per cui è necessario bloccare la traslazione verticale, d_z , sui nodi che ricadono sui quei lati;
- Spostamento nel piano $x-y$ e rotazione attorno a z – Per bloccare i restanti gradi di libertà non vincolati, si è scelto, per questioni di simmetria, di bloccare la rotazione ϕ_z e lo spostamento d_x e d_y nel nodo che ricade sulla metà lunghezza e larghezza del pannello.

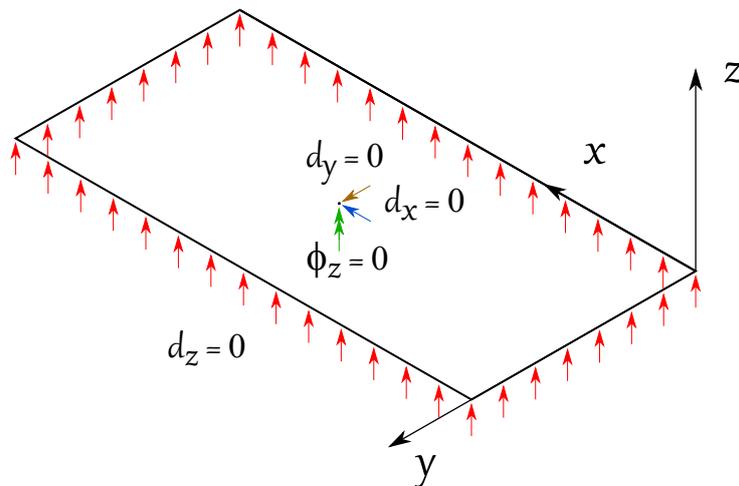


Figure 3.4: Vincoli applicati al modello – traslazioni e rotazioni bloccate.

Il passo finale per definire il modello è specificare i **carichi** in gioco. Nel seguito vengono eseguite due analisi distinte:

1. Semplice sforzo normale, imponendo N_x lungo i due lati paralleli all'asse y ;
2. Semplice taglio nel piano, imponendo un carico N_{xy} lungo tutti e quattro i lati secondo la giusta direzione.

Per applicare questi carichi ($N_x = 1$ e $N_{xy} = 1 N/mm$) al modello è sufficiente definire per ognuno un *Total load* di tipo *2D Element uniform* ed applicarlo solamente ai nodi dello skin che ricadono sui lati opportuni del pannello.

A questo punto tutto è pronto per impostare ed eseguire l'**analisi** (Sol 105) ed ottenere i risultati utili per il confronto PANDA-NASTRAN.

3.4 Risultati

In figura 3.2 sono mostrati i grafici relativi all'**errore** tra PANDA e NASTRAN al variare del coefficiente $\mathcal{D}_{16}/\mathcal{D}_{22}$.

In sintesi si ha un errore contenuto, inferiore al 5% in tutte le situazioni analizzate tranne nel caso di $x_{max} = y_{max}$, dove nel caso di taglio puro si riscontra un errore che si aggira intorno al 40% rispetto a quanto previsto da NASTRAN.

In figura 3.6 sono mostrati grafici relativi alla **diminuzione del fattore di carico critico** al variare di $\mathcal{D}_{16}/\mathcal{D}_{22}$.

Quello che si evince è che all'aumentare di questo rapporto il carico critico diminuisce, sia in presenza di taglio puro che di sforzo normale. Questa diminuzione è più accentuata per il pannello con $y_{max} = 300 mm$ e in presenza di taglio puro, dove il fattore di carico critico diminuisce di circa il 60% rispetto al caso ortotropo.

Quanto appena detto, in termini pratici, vuol dire che a parità di peso lo stesso pannello, con \mathcal{D}_{16} e \mathcal{D}_{26} diversi da zero, presenta un carico critico inferiore al caso ortotropo.

Nelle figure 3.9 e 3.10 sono mostrate le **forme modali** ottenute in nei casi estremi indicati e per tutte le teorie analizzate.

Si nota chiaramente che in presenza di taglio o dei coefficienti \mathcal{D}_{16} e \mathcal{D}_{26} PANDA-type prevede un campo di spostamenti che non soddisfa le condizioni al contorno su due lati.

Nelle tabelle 3.2 sono mostrati i valori dei vari parametri, imposti ed ottenuti, nelle analisi eseguite.

In **conclusione** si può affermare che il modello PANDA-type, nonostante nel suo campo di spostamenti compaia solo una componente trigonometrica, fornisce previsioni sul carico critico particolarmente accurate, purché il rapporto tra i lati rimanga distante dal valore unitario.

Il modello PANDA-alternate risulta più accurato del precedente, soprattutto per piastre rettangolari, ma dal punto di vista computazionale risulta molto oneroso. Quindi è opportuno utilizzare questa teoria soltanto nelle situazioni in cui la precedente va in crisi.

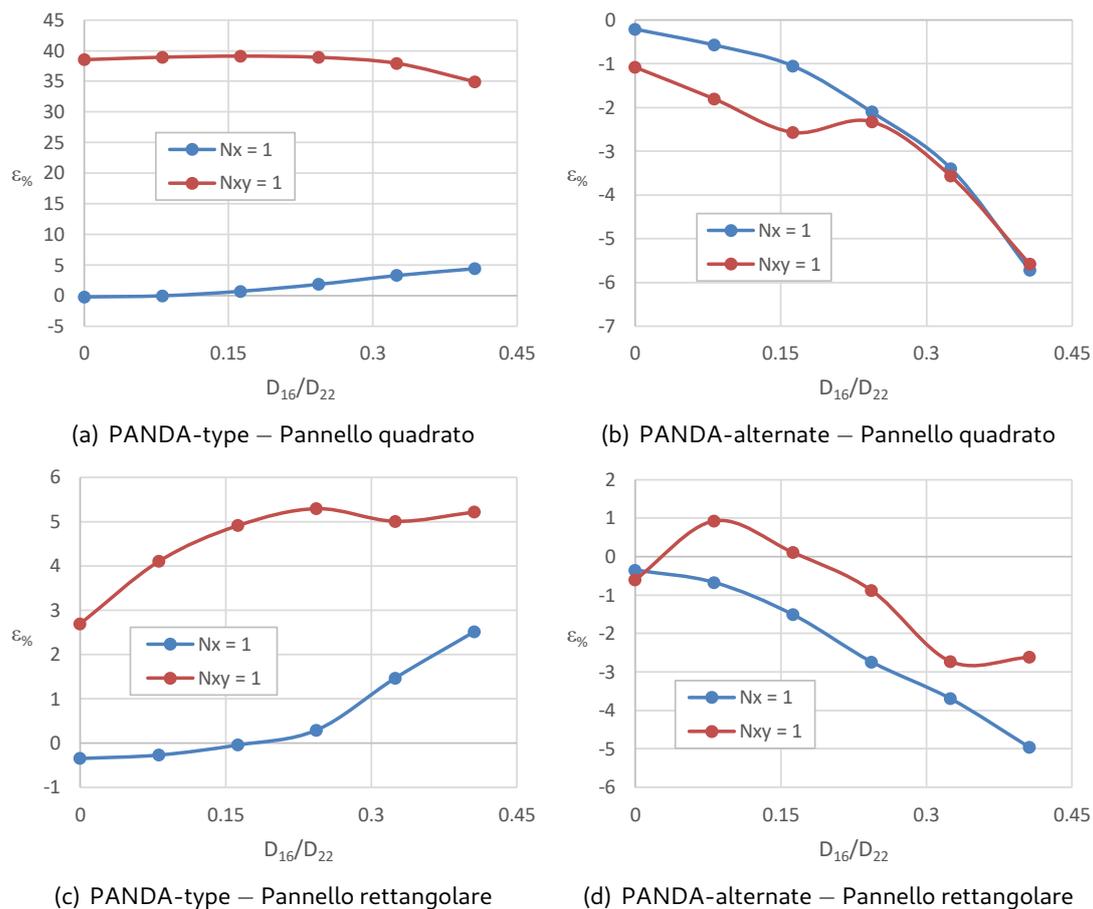


Figure 3.5: Errore percentuale, rispetto a NASTRAN, relativo al fattore di carico critico, ottenuto dalle teoria PANDA-type e PANDA-alternate, al variare di D_{16}/D_{22} . Le proporzioni geometriche del pannello sono definite dal parametro $a = y_{max}/x_{max}$. Pannello quadrato $a = 1$ e pannello rettangolare $a = 3$. Carico assiale $N_x = 1 N/mm$ e carico a taglio $N_{xy} = 1 N/mm$.

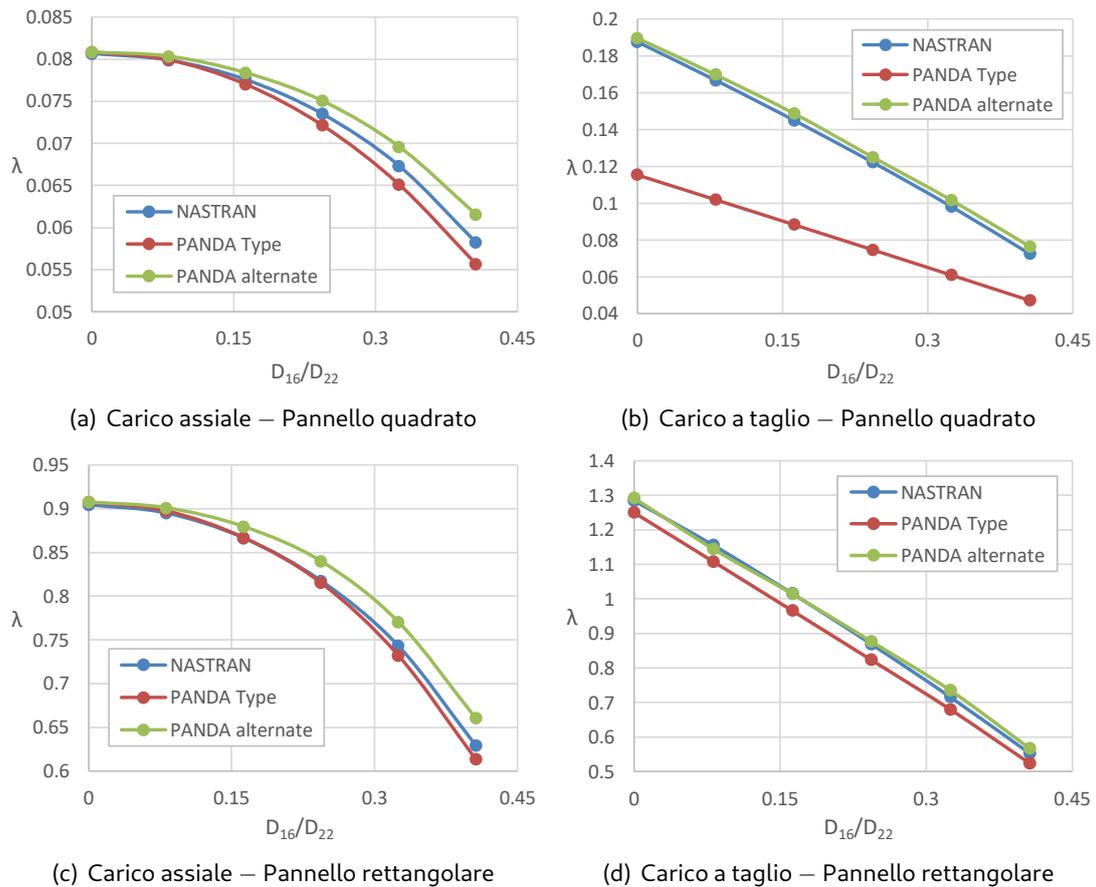


Figure 3.6: Diminuzione del fattore di carico critico al variare di D_{16}/D_{22} . Le proporzioni geometriche del pannello sono definite dal parametro $a = y_{max}/x_{max}$. Pannello quadrato $a = 1$ e pannello rettangolare $a = 3$. Carico assiale $N_x = 1 N/mm$ e carico a taglio $N_{xy} = 1 N/mm$.

(a) Modello PANDA-type

$\frac{D_{16}}{D_{11}}$	$x_{max} = 1000 ; y_{max} = 1000 [mm]$				$x_{max} = 1000 ; y_{max} = 300 [mm]$				
	buckling nodal lines		halfwaves		buckling nodal lines		halfwaves		
	c	d	m	n	c	d	m	n	
0.000	0	0	1	1	0	0	3	1	$N_x = 1$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 0$ N/mm
0.081	0.08	0	1	1	0.08	0	3	1	
0.162	0.16	0	1	1	0.16	0	3	1	
0.244	0.24	0	1	1	0.24	0	3	1	
0.325	0.328	0	1	1	0.328	0	4	1	
0.406	0.424	0	1	1	0.432	0	4	1	
	-0.672	0	1	1	-0.696	0	3	1	$N_x = 0$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 1$ N/mm
	0.68	0	1	1	0.704	0	3	1	
	0.696	0	1	1	0.72	0	3	1	
	0.712	0	1	1	0.736	0	3	1	
	0.736	0	1	1	0.752	0	3	1	
	0.752	0	1	1	0.736	0	4	1	

(b) Modello PANDA-alternate

$\frac{D_{16}}{D_{11}}$	$x_{max} = 1000 ; y_{max} = 1000 [mm]$				$x_{max} = 1000 ; y_{max} = 300 [mm]$				
	therms		halfwaves		therms		halfwaves		
	m_{max}	n_{max}	m	n	m_{max}	n_{max}	m	n	
0.000	1	1	1	1	3	1	3	1	$N_x = 1$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 0$ N/mm
0.081	2	2	1	1	4	2	3	1	
0.162	4	4	1	1	5	3	3	1	
0.244	5	5	1	1	5	3	3	1	
0.325	6	6	1	1	6	4	3	1	
0.406	7	7	1	1	7	5	4	1	
	3	3	1	1	4	3	2	1	$N_x = 0$ $N_y = 0$ $N_{xy} = 1$ N/mm
	3	3	1	1	5	4	2	1	
	4	4	1	1	5	4	2	1	
	5	5	1	1	5	4	3	1	
	6	6	1	1	5	4	3	1	
	7	7	1	1	6	4	3	1	

Table 3.2: Valori, imposti e ottenuti, dei parametri in gioco nei due modelli analitici.

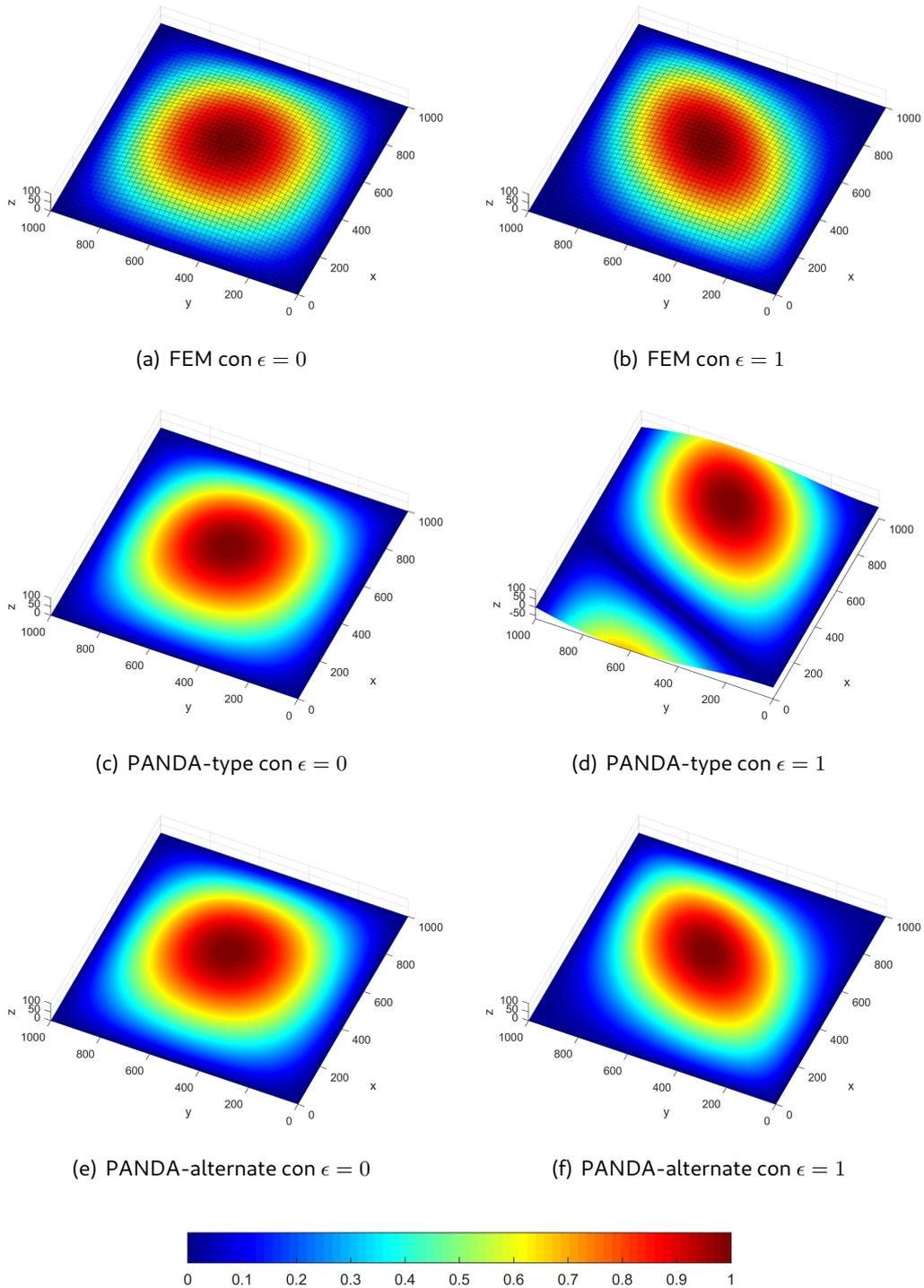


Figure 3.7: Confronto forme modali pannello quadrato soggetto a solo sforzo assiale $N_x = 1 \text{ N/mm}$.

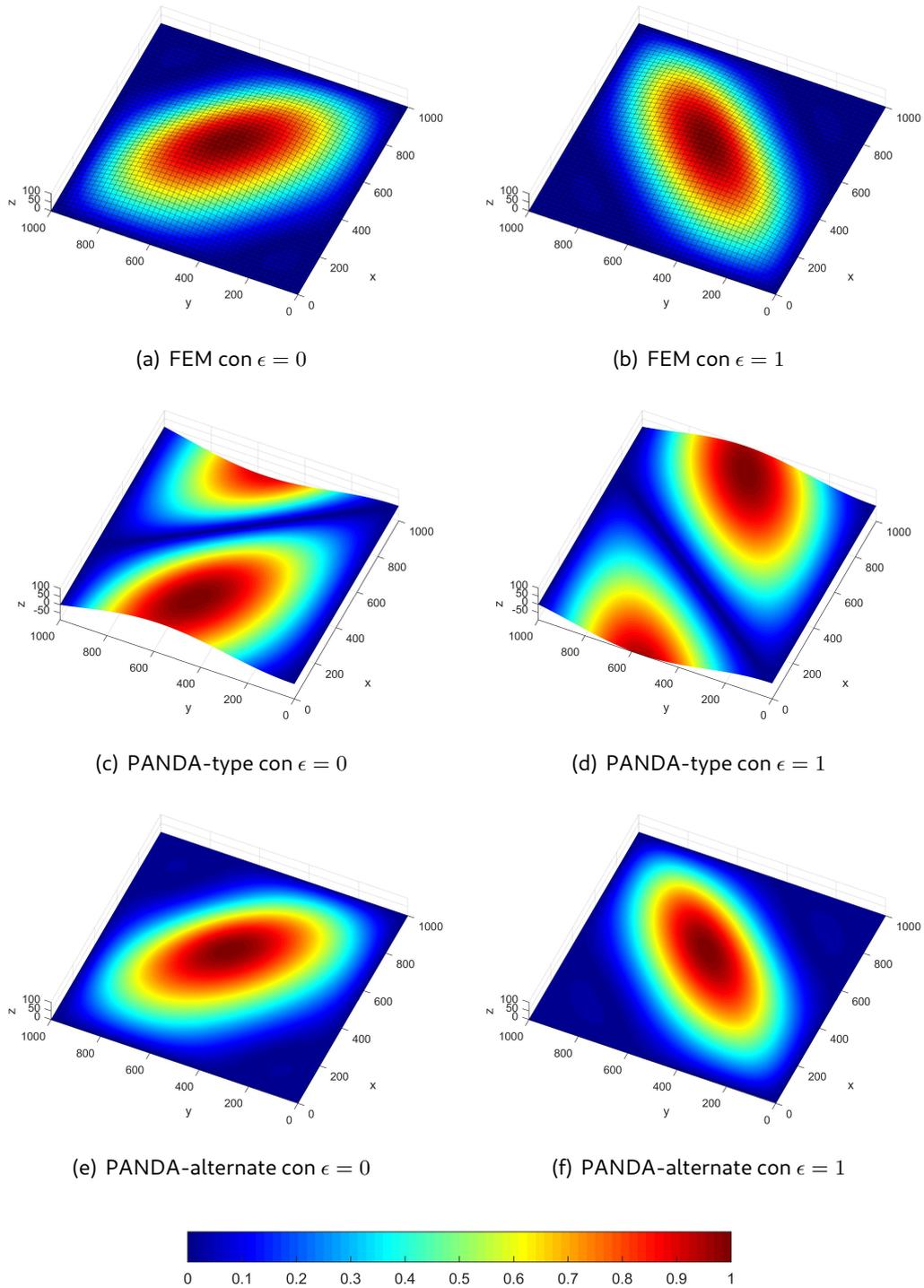


Figure 3.8: Confronto forme modali pannello quadrato soggetto a solo sforzo di taglio $N_{xy} = 1 \text{ N/mm}$.

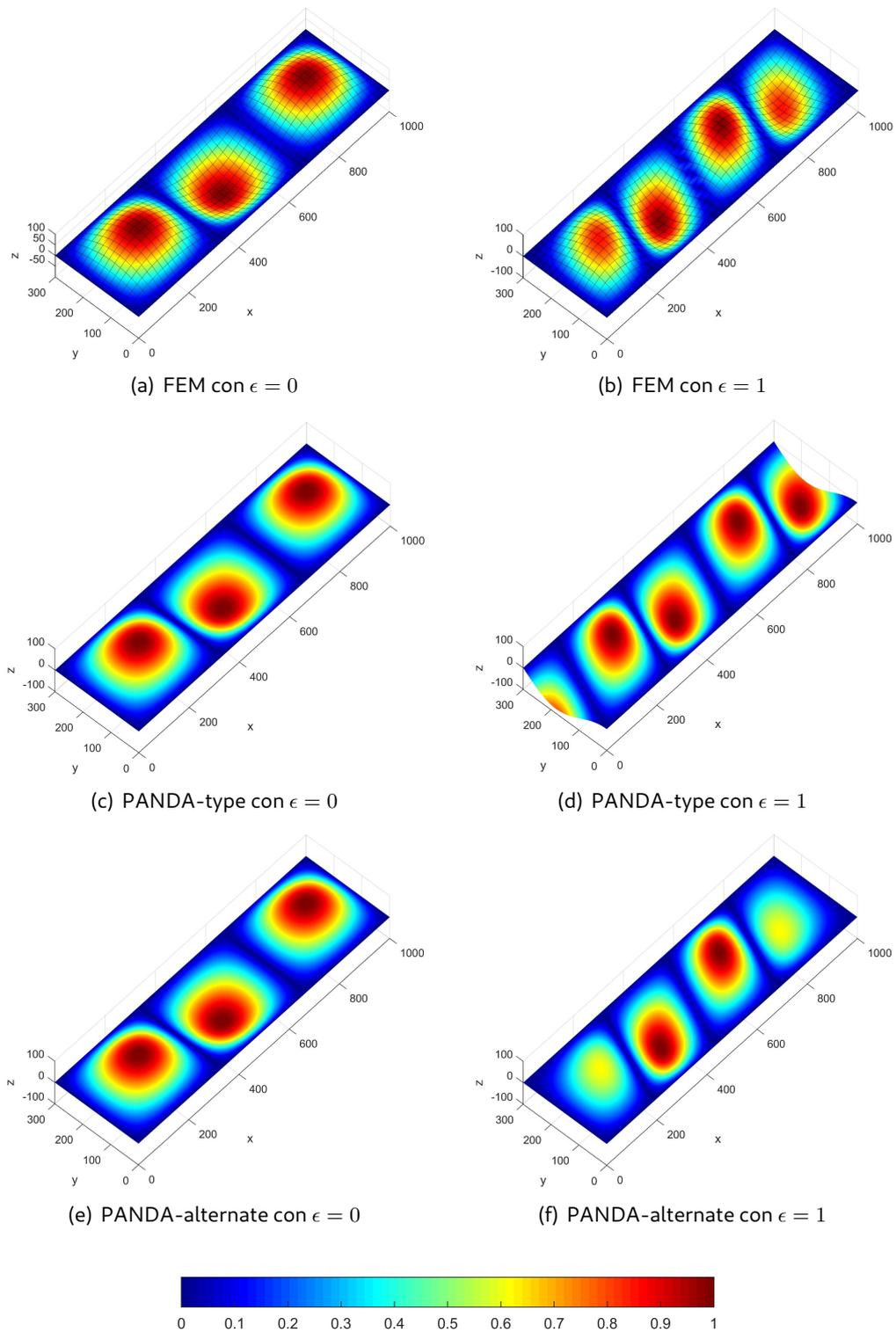


Figure 3.9: Confronto forme modali pannello quadrato soggetto a solo sforzo assiale $N_x = 1 \text{ N/mm}$.

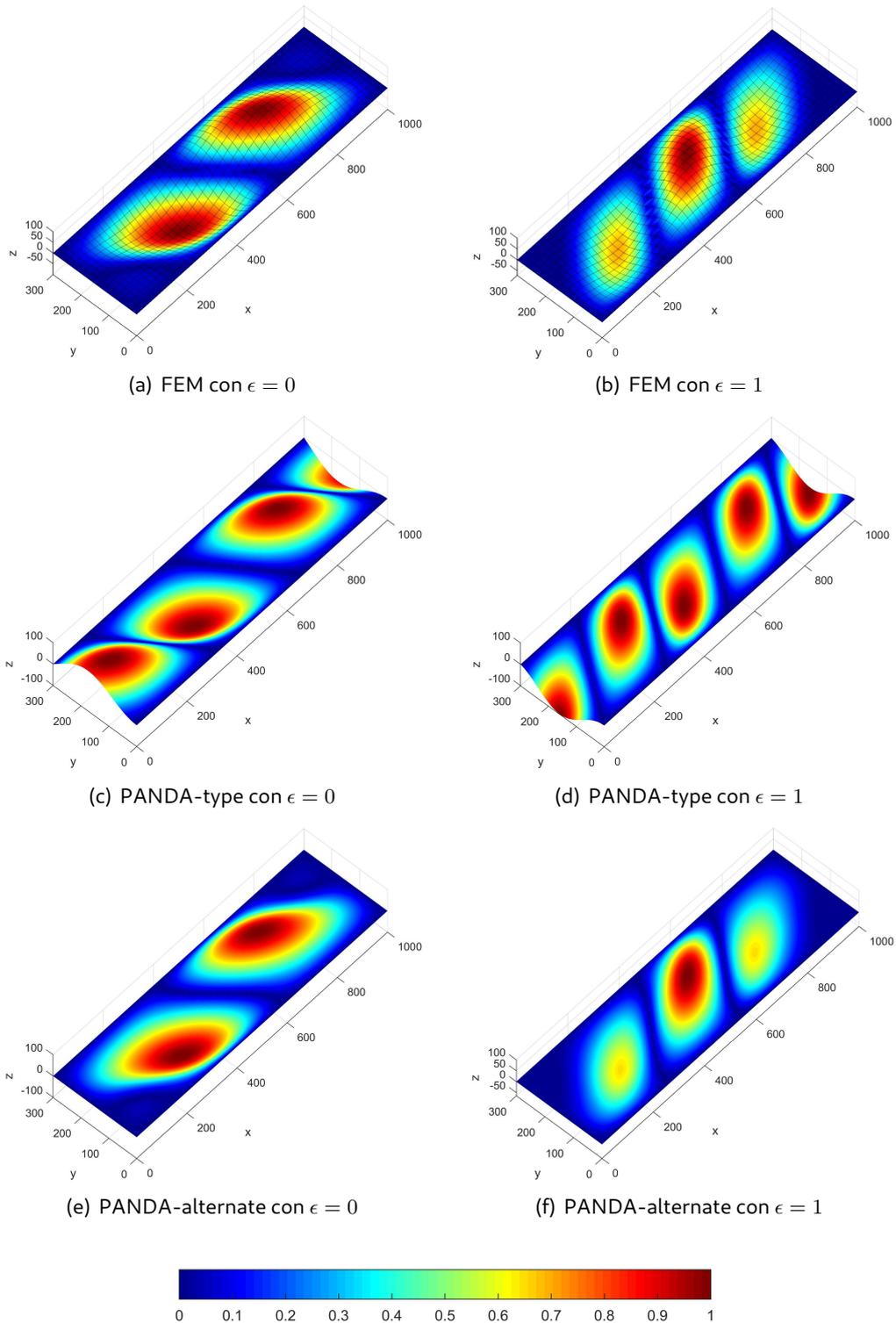


Figure 3.10: Confronto forme modali pannello quadrato soggetto a solo sforzo di taglio $N_{xy} = 1 \text{ N/mm}$.

4 | Instabilità locale degli irrigidimenti (crippling)

Nel seguito si andrà a valutare l'instabilità degli irrigidimenti e più nello specifico quella locale, nota anche come crippling.

In un primo momento verrà presentato il modello analitico assunto in PANDA2. Questo è lo stesso utilizzato nel codice originale PANDA. Successivamente verrà presentato il modello PATRAN-NASTRAN utilizzato, focalizzando l'attenzione sui vincoli utilizzati e il metodo di caricamento della struttura.

Infine verranno messi a confronto i risultati ottenuti dai due casi precedenti, in modo da quantificarne lo scostamento percentuale, il tutto sfruttando due tipologie di irrigidimenti: T-type e Hat-type.

4.1 Modello PANDA-type

In PANDA ogni irrigidimento (stringer e ring) è costituito da segmenti (si faccia riferimento alla figura 4.1). Esistono due **tipologie di segmento**:

1. **Internal** - entrambi i lati assiali sono collegati ad un altro segmento (uno o più) e/o allo skin;
2. **End** - solo un lato assiale è collegato ad una parte della struttura (segmento/i o skin) e l'altro è libero.

Per quanto riguarda questo tipo di instabilità PANDA adotta un'**assunzione** molto forte, ovvero che tutti i segmenti sono visti come pannelli multistrato piani con laminazione simmetrica ed ortotropa (\mathcal{A}_{i6} , \mathcal{D}_{i6} con $i \neq 6$ e $[\mathcal{B}] = [0]$).

PANDA, in fase di input, permette di inserire una qualsiasi laminazione per i segmenti, ma nei vari modelli ignora completamente alcuni termini della matrice $[\mathcal{ABD}]$ del monostato equivalente. Sfruttando la teoria classica dei laminati, assegnato il materiale della singola lamina e la laminazione, è possibile ottenere la matrice di rigidezza del monostato equivalente del segmento i -esimo:

$$[\mathcal{C}]_i = [\mathcal{ABD}]_i = \begin{bmatrix} [\mathcal{A}] & [\mathcal{B}] \\ [\mathcal{B}] & [\mathcal{D}] \end{bmatrix}_i \quad (4.1)$$

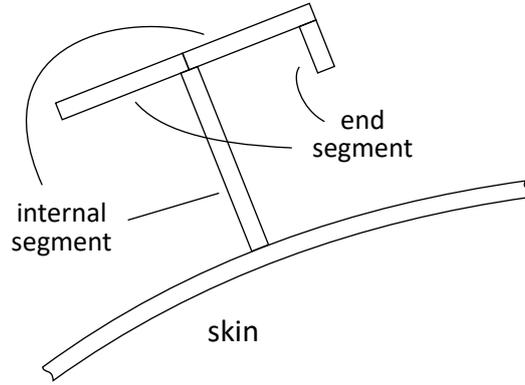


Figure 4.1: Tipi di segmento

Nota questa, prendendo in considerazione solo alcuni termini della matrice di rigidezza membranale, vengono calcolati i moduli elastici e il poisson effettivi:

$$\begin{aligned}
 E_{11}^{i(\text{eff})} &= A_{11}^i / t^i \\
 \nu_{12}^{i(\text{eff})} &= A_{12}^i / A_{22}^i \\
 E_{22}^{i(\text{eff})} &= A_{22}^i / t^i \\
 G^{i(\text{eff})} &= A_{66}^i / t^i
 \end{aligned}
 \quad \text{con} \quad t^i = \sum_{k=1}^N t_k^i \quad (4.2)$$

Noti questi coefficienti sono note le matrici di rigidezza membranale e flesso-torsionale effettive del monostrato equivalente del segmento i -esimo

$$[\mathcal{A}]_i^{(\text{eff})} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & 0 \\ \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_{66} \end{bmatrix}_i \quad \text{e} \quad [\mathcal{D}]_i^{(\text{eff})} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} & 0 \\ \mathcal{D}_{12} & \mathcal{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_{66} \end{bmatrix}_i \quad (4.3)$$

dove i termini della matrice di rigidezza flesso-torsionale effettiva sono

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{11}^i &= E_{11}^{i(\text{eff})} t^{i3} / 12 \\
 \mathcal{D}_{12}^i &= \nu_{12}^{i(\text{eff})} E_{11}^{i(\text{eff})} t^{i3} / 12 \\
 \mathcal{D}_{22}^i &= E_{22}^{i(\text{eff})} t^{i3} / 12 \\
 \mathcal{D}_{66}^i &= G^{i(\text{eff})} t^{i3} / 12
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.1.1 Campo di spostamenti e deformazioni

Il campo di spostamenti dei segmenti interni utilizzato è lo stesso del pannello multistrato semplicemente supportato del capitolo precedente, dove $c = d = 0$

$$\begin{aligned}
 u_i &= 2U m_i n_i^2 \cos(m_i \bar{x}) \sin(n_i \bar{y}) \\
 v_i &= -2V n_i \sin(m_i \bar{x}) \cos(n_i \bar{y}) \\
 w_i &= 2W \sin(m_i \bar{x}) \sin(n_i \bar{y})
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Invece, riguardo il **campo di spostamenti dei segmenti terminali**, si assume che la sezione trasversale non si deforma nel modo di buckling, quindi

$$\begin{aligned} u_i &= 0 \\ v_i &= 0 \\ w_i &= W \bar{y} \sin(m_i \bar{x}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

dove

- \bar{m}_i e \bar{n}_i sono rispettivamente le semi-onde assiali e trasversali, del segmento i -esimo, nel modo di buckling considerato

$$m_i = \frac{\bar{m}_i \pi}{l} \quad \text{e} \quad n_i = \frac{\bar{n}_i \pi}{b_i} \quad (4.7)$$

- l e b_i sono rispettivamente la lunghezza e la larghezza del segmento i -esimo;
- \bar{x} è la coordinata longitudinale e \bar{y} quella lungo la larghezza del segmento. Si adotta questo sistema di riferimento così da poter includere tutti e due i tipi di irrigidimento trattati da PANDA, ovvero stringer e ring;
- U , V e W sono le costanti di combinazione lineare da determinare minimizzando il potenziale totale.

Come fatto in precedenza, per comodità, verrà adottata una notazione matriciale, quindi:

$$\{d_i\} = [u \quad v \quad w]_i^T = [\phi_i] \{D\} \quad (4.8)$$

dove sono state separate le costanti incognite

$$\{D_i\} = [U \quad V \quad W]^T \quad (4.9)$$

dalle funzioni trial dipendenti da \bar{x} e \bar{y}

$$\begin{aligned} [\phi_i]_{\text{internal}} &= 2 \begin{bmatrix} m_i n_i^2 \cos(m_i \bar{x}) \sin(n_i \bar{y}) & 0 & 0 \\ 0 & -n_i \sin(m_i \bar{x}) \cos(n_i \bar{y}) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(m_i \bar{x}) \sin(n_i \bar{y}) \end{bmatrix} \\ [\phi_i]_{\text{end}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{y} \sin(m_i \bar{x}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Il **campo di deformazione**, invece, risulta essere:

$$\{\varepsilon_i\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}_i = [\partial] \{d_i\} = [\partial] [\phi_i] \{D\} = [\partial \phi_i] \{D\} \quad (4.11)$$

dove $[\partial]$ è un operatore matriciale così definito (viene trascurata la curvatura nei ring):

$$[\partial] = \begin{bmatrix} (\cdot)_{,\bar{x}} & 0 & (\cdot)_{,\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\cdot)_{,\bar{y}} & (\cdot)_{,\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\cdot)_{,\bar{x}\bar{x}} & -(\cdot)_{,\bar{y}\bar{y}} & -(\cdot)_{,\bar{x}\bar{y}} \end{bmatrix}^T \quad (4.12)$$

4.1.2 Energia potenziale totale

Noto il campo di spostamenti, la matrice di rigidezza del monostrato equivalente, il carico applicato (in questo caso si ha solamente il carico $N_{\bar{x}_i}$) e indicando con pedice i tutti i contributi del segmento i -esimo, relativi all'irrigidimento considerato, è possibile andare a valutare l'**energia di deformazione elastica**:

$$\mathcal{U}_i = \frac{1}{2} \int_0^{b_i} \int_0^l \{\varepsilon_i\}^T [C_i^{(\text{eff})}] \{\varepsilon_i\} d\bar{x} d\bar{y} = \{D\}^T [A_i] \{D\} \quad (4.13)$$

dove $[C_i^{(\text{eff})}]$ è la matrice di rigidezza effettiva del laminato equivalente del segmento i -esimo

$$[C_i^{(\text{eff})}] = \begin{bmatrix} [A^{(\text{eff})}] & [0] \\ [0] & [D^{(\text{eff})}] \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

e $[A_i]$ è una matrice 3×3 così definita

$$[A_i] = \frac{1}{2} \int_0^{b_i} \int_0^l [\partial\phi_i]^T [C_i^{(\text{eff})}] [\partial\phi_i] d\bar{x} d\bar{y} \quad (4.15)$$

e il **lavoro dei carichi applicati**:

$$\mathcal{W}_i = -\frac{1}{2} \int_0^{b_i} \int_0^l N_{\bar{x}_i} w_{i,\bar{x}}^2 d\bar{x} d\bar{y} = \{D\}^T [B_i] \{D\} \quad (4.16)$$

dove

$$B_{33_i} = -\frac{1}{2} \int_0^{b_i} \int_0^l N_{\bar{x}_i} \phi_{33_{i,\bar{x}}}^2 d\bar{x} d\bar{y} \quad \text{e} \quad B_{jk_i} = 0 \quad \text{per} \quad j, k \neq 3 \quad (4.17)$$

Per la determinazione di $N_{\bar{x}_i}$ per ogni segmento si faccia riferimento al capitolo 2.

Sapendo che il carico applicato è composto dalla componente di pre-buckling ("pre") e da quella di buckling ("e") si ha:

$$N_{\bar{x}_i} = N_{\bar{x}_i \text{pre}} + \lambda N_{\bar{x}_i e} \quad \Rightarrow \quad [B]_i = [B_{\text{pre}}]_i + \lambda [B_e]_i \quad (4.18)$$

A questo punto è possibile esprimere il **potenziale totale** relativo al al segmento i -esimo:

$$\Pi_i = \mathcal{U}_i - \mathcal{W}_i = \{D\}^T ([A] - [B_{\text{pre}}] - \lambda [B_e])_i \{D\} \quad (4.19)$$

Determinazione dell'autovalore

Per i **segmenti interni** si assume che ognuno vada in buckling con un proprio \bar{m}_i e \bar{n}_i . Questo vuol dire che può esistere un'incongruenza degli spostamenti tra due segmenti adiacenti (se $\bar{m}_i \neq \bar{m}_j$).

Sotto questa assunzione, si determina l'autovalore uguagliando a zero la variazione prima del potenziale totale rispetto ai coefficienti $\{D\}$ del singolo segmento

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \{D\}} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad ([A] - [B_{\text{pre}}] - \lambda [B_e])_i \{D\} = \{0\} \quad (4.20)$$

ottenendo il classico problema agli autovalori

$$\det ([A] - [B_{pre}] - \lambda [B_e])_i = 0 \quad (4.21)$$

Questa altro non è che un'equazione lineare nell'incognita λ , dipendente dai parametri \bar{m}_i e \bar{n}_i . L'autovalore minimo si ottiene minimizzando λ rispetto a questi due.

Per i **segmenti di estremità** si assume che vadano in instabilità con un \bar{m}_i che dipende dal valore \bar{m}_j della parte di struttura a cui sono collegati (non esiste un valore di \bar{n}_i):

- Per un irrigidimento blade-type

$$\bar{m}_i = \bar{m}_{skin} \quad (4.22)$$

si sostituisce poi questo valore all'interno del problema agli autovalori precedente.

- Per un irrigidimento con K_s segmenti di estremità collegati con un solo segmento j -esimo (o lo skin), si assume che questi vadano in instabilità a \bar{m}_j . Si determina il potenziale totale

$$\Pi = \sum_k^{K_s} \Pi_k \quad \text{con} \quad \bar{m}_k = \bar{m}_j \quad (4.23)$$

si ricava la derivata prima rispetto $\{D\}$ e si uguaglia il tutto a zero

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{D\}} = \{0\} \quad (4.24)$$

infine, si determina l'autovalore di questi K_s end-segment confinanti

$$\det \sum_k^{K_s} ([A] - [B_{pre}] - \lambda [B_e])_i = 0 \quad (4.25)$$

Per i segmenti di estremità l'autovalore trovato è assunto come autovalore minimo, in quanto \bar{m} non è un parametro fissato.

4.2 Modello PATRAN-NASTRAN

Nel seguito vengono illustrati tutti i passi utili per definire i modelli numerici NASTRAN, che verranno poi utilizzati per ottenere i risultati da confrontare con quelli analitici del modello PANDA2.

Nel seguito verrà definita la geometria, il materiale e la laminazione utilizzate, dati utili per tutti e due i modelli: quello numerico e quello analitico prima presentato.

Le formule analitiche indicate nella sezione precedente, come fatto in precedenza, sono state implementate in MATLAB e dal programma risultante sono ricavati i risultati che verranno illustrati in seguito.

4.2.1 Geometria, materiale-laminazione ed elementi

Il primo passo per creare il modello FEM è quello di definire la **geometria** in gioco.

Per semplicità, si è scelto di utilizzare le sezioni *T*-type e Hat-type, con dimensioni simmetriche rispetto all'asse *Z* e con lunghezza pari a 1000 *mm*.

Sono stati presi in esame quattro casi differenti per ogni tipologia di irrigidimento: due variando la larghezza relativa dei vari segmenti e due scalando tutti i valori b_i di una stessa quantità (per maggior chiarezza si faccia riferimento alle figure 4.2).

Come discusso nella sezione precedente, la teoria analitica permette di individuare dei coefficienti di instabilità per i singoli segmenti o gruppi di segmenti, sfruttando ipotesi diverse. Nei diversi casi geometrici analizzati si vuole andare a focalizzare l'attenzione su ognuno di questi in modo da avere un confronto indipendente: aumentando o diminuendo la larghezza di un segmento si diminuisce o si aumenta il coefficiente di carico critico di quel segmento.

Una volta definita la geometria è necessario specificare il **materiale** e la **laminazione**.

La scelta è stata fatta focalizzando l'attenzione sull'ipotesi considerata da PANDA, quella inerente alla stratificazione, ovvero, qualsiasi sia la laminazione assegnata dall'utente, PANDA considera ogni segmento con laminazione simmetrica ed ortotropa (\mathcal{A}_{i6} , \mathcal{D}_{i6} con $i \neq 6$ e $[\mathcal{B}] = [0]$).

L'obiettivo è eseguire un confronto PANDA-NASTRAN in cui ci si discosta poco da questa ipotesi. Quindi, si è scelto di adottare una laminazione-materiale tale da generare un monostrato equivalente simmetrico ma non ortotropo in membrana.

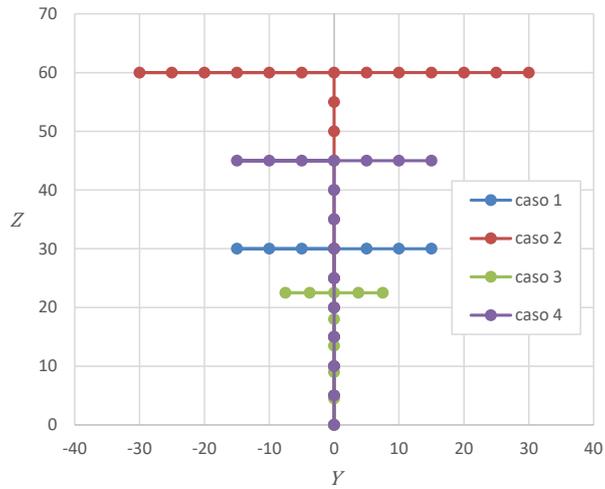
Ogni segmento è una piastra multistrato a strati identici con laminazione simmetrica

$$[45, 45, 90, 0, 0, 90, 45, 45]$$

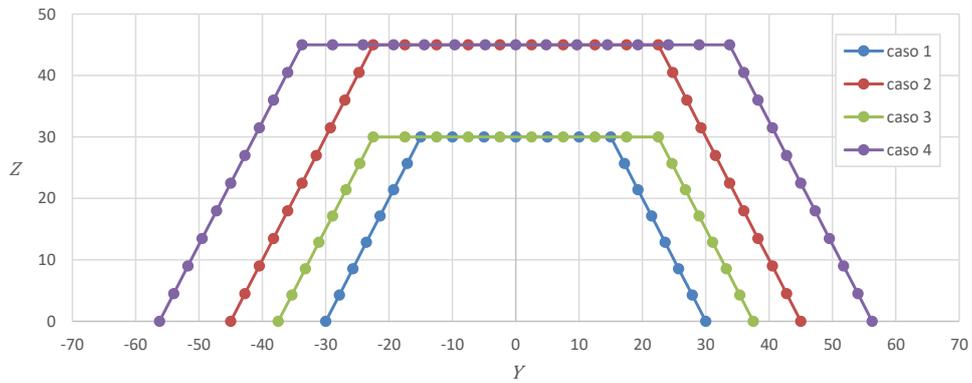
dove il materiale del singolo strato presenta le seguenti caratteristiche meccaniche:

$$\begin{aligned} E_1 &= 48000(1 + \epsilon) [MPa]; & E_2 &= 48000(1 - \epsilon) [MPa]; \\ \nu_{12} &= 0 & \text{e} & G_{12} = 20330 [MPa] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Questa combinazione di materiale-laminazione, come dimostrato nel primo capitolo, è tale da generare una serie di laminati, al variare di ϵ , che presentano sempre gli stessi valori dei coefficienti \mathcal{A}_{11} , \mathcal{A}_{22} , \mathcal{A}_{12} e \mathcal{A}_{66} con \mathcal{A}_{16} e \mathcal{A}_{26} variabili.

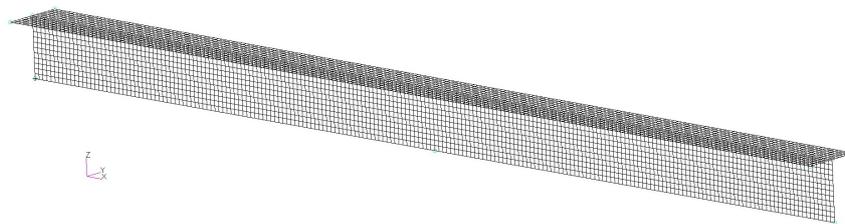


(a) Irrigidimenti T-type

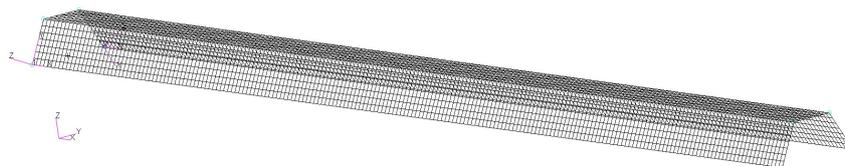


(b) Irrigidimenti Hat-type

Figure 4.2: Geometria irrigidimenti



(a) Irrigidimenti T-type



(b) Irrigidimenti Hat-type

Figure 4.3: Suddivisione in elementi del modello.

Il passo successivo è suddividere la geometria in **elementi** CQUAD4 di opportune dimensioni, il risultato è mostrato a titolo di esempio in figura 4.3 (per semplicità si fa riferimento al caso con irrigidimenti *T*-type e Hat-type in uno dei quattro casi analizzati).

Ad ogni elemento è poi stata assegnata una proprietà *shell* con l'opzione *thin* in cui è indicata la laminazione opportuna, che in questo caso risulta identica per tutti i segmenti.

4.2.2 Vincoli, carichi e tipo di analisi

Una volta definita la geometria degli elementi e le loro proprietà, il passo successivo è specificare i **vincoli** in gioco. Facendo riferimento alla figura 4.4 si ha:

- Disaccoppiare il comportamento dello stringer da quello dello skin (come fatto anche nel modello analitico) – In linea di principio si potrebbe bloccare la traslazione lungo z e y rotazione lungo x , applicando questo vincolo lungo la linea o le linee di collegamento del/i segmento/i con lo skin.
Tuttavia questo tipo di vincolo risulta troppo rigido in quanto lo skin ha una propria cedevolezza e modellizzare il collegamento come un incastro porta a dei carichi critici più alti di quelli effettivi. Per ovviare a questo problema si è scelto di bloccare solamente la traslazione nel piano y - z (ovvero $d_y = d_z = 0$) in modo da essere conservativi riguardo il carico critico;
- Continuità di rotazione all'interfaccia del web dell'irrigidimento – In PANDA2 la porzione di irrigidimento presa sotto esame presenta una lunghezza pari alla distanza tra due ring. In genere ogni ring è l'interfaccia tra due porzioni di irrigidimenti adiacenti. Quindi, è necessario garantire la continuità di spostamenti e rotazioni in tutti i segmenti. Per fare ciò, nei nodi che ricadono in questa zona, sono state bloccate le rotazioni:
 - Per la sezione *T*-type – rotazione attorno all'asse z per il web e attorno all'asse y per la flangia ovvero $\phi_y = \phi_z = 0$);
 - Per la sezione Hat-type – rotazioni attorno all'asse y_1 e y_2 per i web e attorno all'asse y per la flangia (ovvero $\phi_y = \phi_{y_1} = \phi_{y_2} = 0$);
- Spostamento e rotazione lungo e attorno l'asse x – Per bloccare la traslazione rigida del modello lungo l'asse x è sufficiente, per questioni di simmetria,
 - Per la sezione *T*-type – annullare lo spostamento d_x del nodo sulla mezzeria della linea di collegamento skin-web;
 - Per la sezione Hat-type – imporre a zero lo spostamento d_x dei due nodi che ricadono sulla mezzeria della due linee di collegamento skin-web;

A questo punto l'irrigidimento *T*-type presenta ancora un grado di libertà, quello di rotazione attorno all'asse x . Per ovviare a questo problema si può agire in due modi analoghi

- Bloccare la rotazione attorno x dello stesso nodo precedente;
- Bloccare la traslazione lungo y del nodo sempre sulla mezzeria della lunghezza ma all'estremità opposta del web rispetto al nodo precedente;

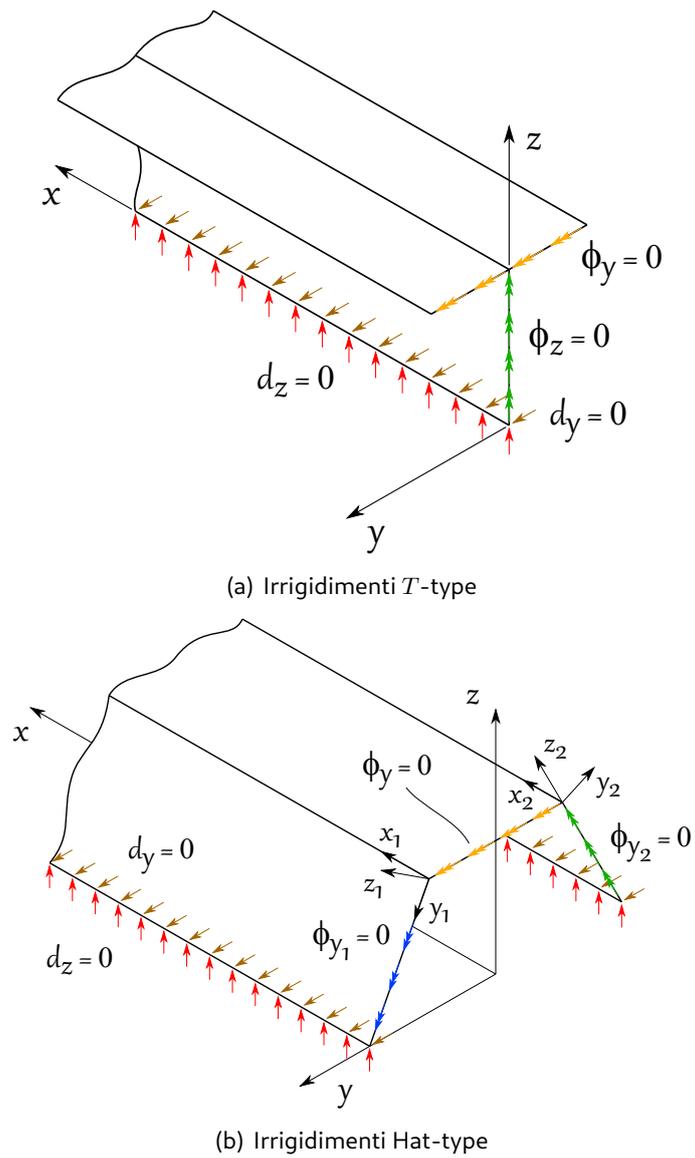


Figure 4.4: Vincoli applicati al modello – traslazioni e rotazioni bloccate.

Il passo finale per definire il modello è specificare i **carichi** in gioco.

In PANDA gli irrigidimenti sono caricati da sola componente assiale, N_x , che genera sola deformazione assiale. Per fare ciò l'irrigidimento è caricato in modo indiretto, ovvero si applica a tutti i nodi della sezione trasversale di estremità uno spostamento definito di compressione. Per risalire al carico applicato si agisce come illustrato nel capitolo 2.

A questo punto tutto è pronto per impostare ed eseguire l'**analisi** (Sol 105).

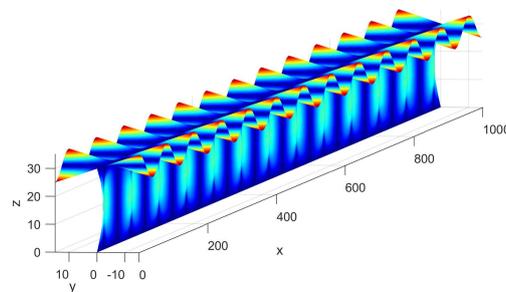
A tal proposito bisogna fare una premessa. L'obiettivo del modello FEM in questione è quello di andare ad indagare l'instabilità locale dell'irrigidimento, ovvero il crippling, non altri tipi di instabilità quali ad esempio quella torsionale (si faccia riferimento alla figura 4.5 dove vengono mostrati due esempi di forme modali).

A differenza dei modelli analitici, dove esiste una separazione netta tra i vari tipi di instabilità analizzati, dovuta proprio all'approccio utilizzato per svolgere un determinato calcolo, nel FEM questa differenza netta non sempre esiste.

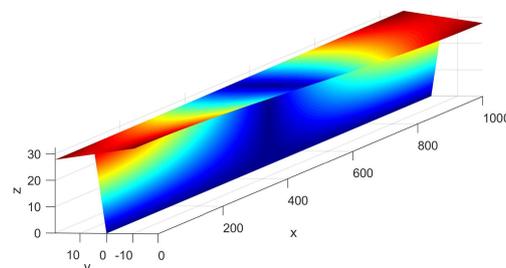
Ad esempio, con le ipotesi e i vincoli utilizzati nel FEM, per la sezione *T*-type non è possibile rendere indipendente il comportamento locale da quello globale a torsione.

Questo a meno di non andare ad aggiungere ulteriori vincoli, che in linea di principio vanno ad irrigidire in maniera fittizia la struttura, portando ad autovalori più alti rispetto a quelli che la struttura realmente potrebbe presentare.

A tale scopo si è preferito vincolare il meno possibile la struttura in modo da non incorrere in questa problematica e successivamente ignorare quelle forme modali che implicano la sola instabilità torsionale.



(a) Instabilità torsionale



(b) Instabilità locale dell'irrigidimento (crippling)

Figure 4.5: Tipi di instabilità che è possibile osservare con il modello FEM presentato.

4.3 Risultati

In tabella 4.1 sono riassunti i risultati inerenti al caso di studio. Lungo le righe è mostrata l'influenza del parametro ϵ e lungo le colonne l'influenza della geometria sul carico critico.

Riguardo il parametro ϵ , come noto dalla teoria di PANDA, qualsiasi sia la laminazione dei segmenti, questi sono costituiti sempre da materiale equivalente simmetrico ortotropo in membrana e in flessione. Quindi esiste un solo valore di carico critico, mentre in NAS-TRAN si ha un carico critico per ogni valore di ϵ .

Riguardo la geometria i casi sono così organizzati:

- Nel caso 1 e 2 la geometria è tale da avere un fattore di carico critico più basso nella flangia, per la sezione *T*-type, e nei due web, per la sezione Hat-type;
- Nel caso 3 e 4 la geometria è tale da avere un fattore di carico critico più basso nel web, per la sezione *T*-type, e nella flangia, per la sezione Hat-type.

Quanto appena detto è mostrato nelle figure 4.8 e 4.9. La differenza tra caso 1-2 e 3-4 è che 2 e 4 presentano una geometria che è doppia rispetto a quella dei casi 1 e 3.

Si è adottata questa scelta geometrica in primo luogo, come già anticipato in precedenza, al fine di poter valutare singolarmente i fattori di carico critico che si verificano in ogni segmento e in secondo luogo per valutare come questi fattori variano al variare della scala della sezione trasversale.

In figura 4.6 è messa in evidenza l'**influenza del coefficiente** ϵ (nello specifico $\mathcal{A}_{16}/\mathcal{A}_{11}$) nei vari casi analizzati.

Per quanto riguarda l'irrigidimento ***T*-type**, per ϵ nullo la teoria PANDA per l'instabilità della flangia rispecchia molto bene quelli che sono i risultati ottenuti attraverso il FEM, stessa cosa non vale per il fattore di instabilità relativo al web, che risulta abbastanza conservativo.

Dai risultati è possibile evincere anche che la teoria PANDA permette di dare dei risultati soddisfacenti per valori di $\mathcal{A}_{16}/\mathcal{A}_{11} < 0.1$, per quanto concerne la flangia, e valori inferiori 0.15, per quanto riguarda il web, quest'ultimo avvantaggiato dal fatto che i risultati previsti dalla teoria sono abbastanza conservativi.

In sintesi PANDA è in grado di trattare monostrati equivalenti con laminazione non ortotropa purché il rapporto $\mathcal{A}_{16}/\mathcal{A}_{11}$ rimanga piccolo, in modulo inferiore a circa 0.1, superato questo valore, già intorno a 0.2, l'errore relativo riscontrato rispetto a NASTRAN risulta inaccettabile, raggiungendo valori di oltre il 30%.

Per quanto riguarda l'irrigidimento **Hat-type**, si ha un risultato analogo al caso precedente. I fattori di carico critico per lo stesso segmento (di casi diversi) hanno un comportamento che è praticamente invariante rispetto alla scala in gioco, l'influenza di questa inizia a farsi sentire per valori di $\mathcal{A}_{16}/\mathcal{A}_{11} > 0.25$.

Per ϵ nullo la teoria PANDA, in tutti i casi, fornisce un risultato conservativo. Questo aspetto è più marcato nel fattore di carico critico relativo alla flangia dove si ha uno scostamento percentuale rispetto al FEM pari al 20%. Quest'ultimo penso sia dovuto al fatto che le ipotesi di semplice appoggio previste da PANDA non rispecchiano effettivamente la realtà dei fatti: i segmenti sono collegati l'un l'altro e tramite questo collegamento

(a) Irrigidimenti *T*-type

	ϵ	caso 1		caso 2		caso 3		caso 4		$\frac{\mathcal{A}_{16}}{\mathcal{A}_{11}}$	$\frac{\mathcal{D}_{16}}{\mathcal{D}_{11}}$
		\mathcal{N}_{cr} 10^4 [N]	$\epsilon\%$								
NASTRAN	0	3.532	2.671	1.770	1.111	5.316	13.31	2.640	12.71	0.000	0.000
	0.2	3.479	1.205	1.742	-0.436	5.227	11.82	2.590	11.05	0.052	0.096
	0.4	3.326	-3.350	1.662	-5.274	4.970	7.277	2.482	7.177	0.104	0.195
	0.6	3.069	-11.99	1.529	-14.46	4.572	-0.803	2.278	-1.170	0.156	0.299
	0.8	2.699	-27.36	1.334	-31.11	4.012	-14.86	1.944	-18.51	0.208	0.408
	1	2.180	-57.70	1.058	-65.41	3.256	-41.54	1.527	-50.90	0.260	0.521
PANDA	\mathcal{N}_{cr} [N]	3.437E + 04		1.750E + 04		4.609E + 04		2.304E + 04			

(b) Irrigidimenti Hat-type

	ϵ	caso 1		caso 2		caso 3		caso 4		$\frac{\mathcal{A}_{16}}{\mathcal{A}_{11}}$	$\frac{\mathcal{D}_{16}}{\mathcal{D}_{11}}$
		\mathcal{N}_{cr} 10^4 [N]	$\epsilon\%$								
NASTRAN	0	5.847	8.041	3.882	7.797	4.384	21.45	2.929	21.17	0.000	0.000
	0.2	5.756	6.598	3.819	6.281	4.322	20.33	2.888	20.04	0.052	0.096
	0.4	5.482	1.925	3.633	1.491	4.132	16.66	2.756	16.23	0.104	0.195
	0.6	5.012	-7.269	3.316	-7.944	3.802	9.422	2.532	8.794	0.156	0.299
	0.8	4.326	-24.27	2.846	-25.74	3.304	-4.215	2.190	-5.462	0.208	0.408
	1	3.353	-60.35	2.169	-65.01	2.565	-34.24	1.676	-37.77	0.260	0.521
PANDA	\mathcal{N}_{cr} [N]	5.376E + 04		3.579E + 04		3.444E + 04		2.309E + 04			

Table 4.1: Influenza del parametro ϵ sul carico critico nei vari casi di studio analizzati.

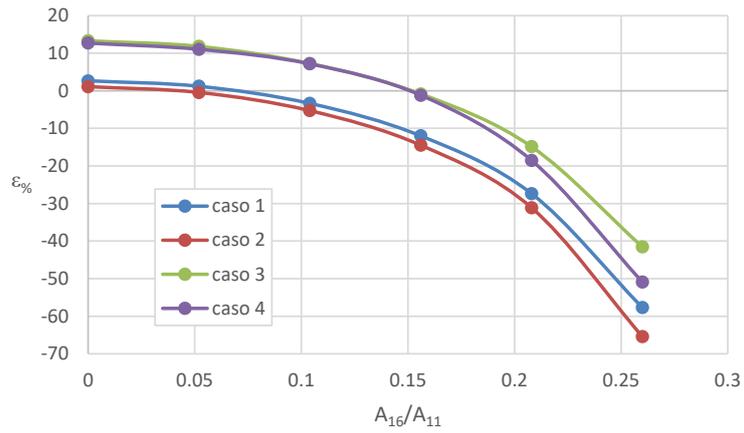
viene trasferita, al segmento considerato, la rigidità di quello adiacente. Questa però in PANDA viene completamente trascurata in quanto considera ogni segmento interno indipendente dagli altri.

Dai risultati è possibile evincere anche che la teoria PANDA permette di dare dei risultati conservativi, seppur non pienamente soddisfacenti per valori di $\mathcal{A}_{16}/\mathcal{A}_{11} < 0.15$, per quanto concerne i due web, e valori inferiori al 0.20, per quanto riguarda la flangia (avvantaggiato dal fatto che i risultati previsti dalla teoria sono più conservativi).

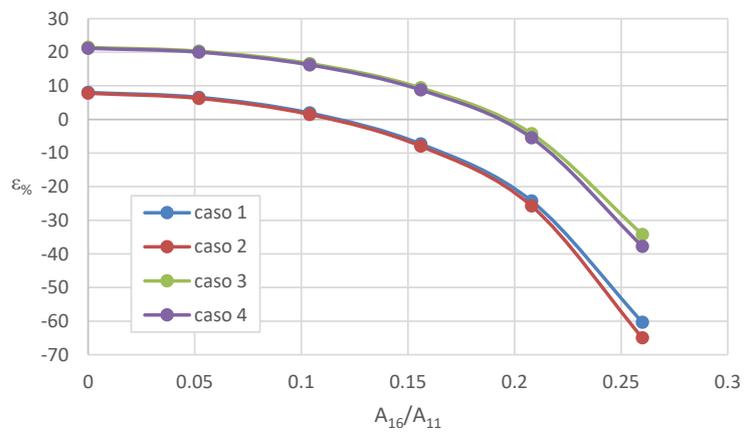
Ultimo aspetto che si vuole mettere in risalto è la **diminuzione del carico critico** al variare dei coefficienti \mathcal{D}_{16} e \mathcal{D}_{26} (che nel presente caso di studio risultano uguali). Questo aspetto è già stato riscontrato nel caso dell'instabilità del solo skin soggetto a sforzo normale e taglio.

Come si vede dalle figure 4.7, più il rapporto $\mathcal{D}_{16}/\mathcal{D}_{16}$ diventa grande e più il carico critico risulta più piccolo di quello che la struttura potrebbe effettivamente sopportare, se questa presentasse laminazione completamente ortotropa in flessione.

Altra conclusione rilevante, che si evince dai risultati ottenuti, è che questa diminuzione è sostanzialmente indipendente da geometria e forma dell'irrigidimento: in tutti e quattro i casi analizzati per tutti e due gli irrigidimenti considerati le curve mostrano differenze molto piccole.

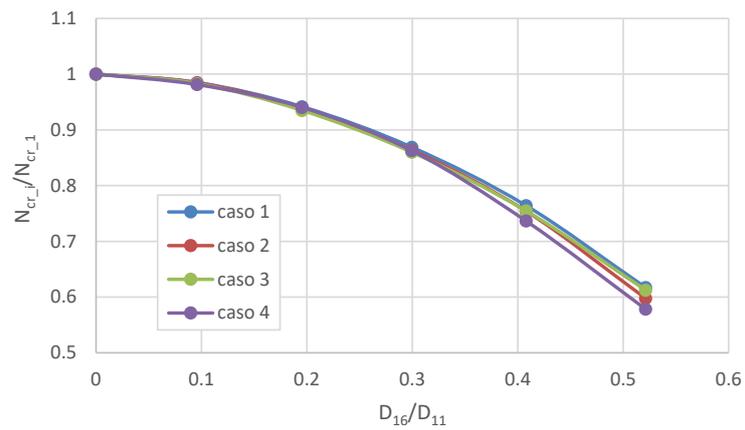
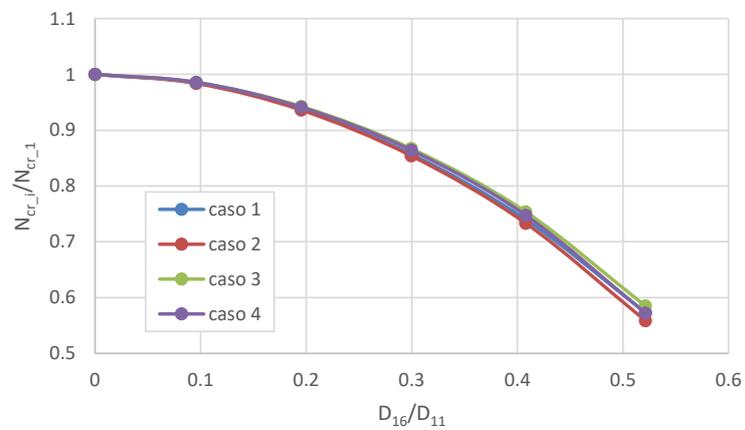


(a) Irrigidimenti T-type



(b) Irrigidimenti Hat-type

Figure 4.6: Errore relativo percentuale inerente al confronto PANDA-NASTRAN sulla previsione di carico critico in presenza di una laminazione non ortotropa in membrana.

(a) Irrigidimenti *T*-type

(b) Irrigidimenti Hat-type

Figure 4.7: Diminuzione di carico critico al variare di D_{16}/D_{11} (con $D_{16} = D_{26}$).

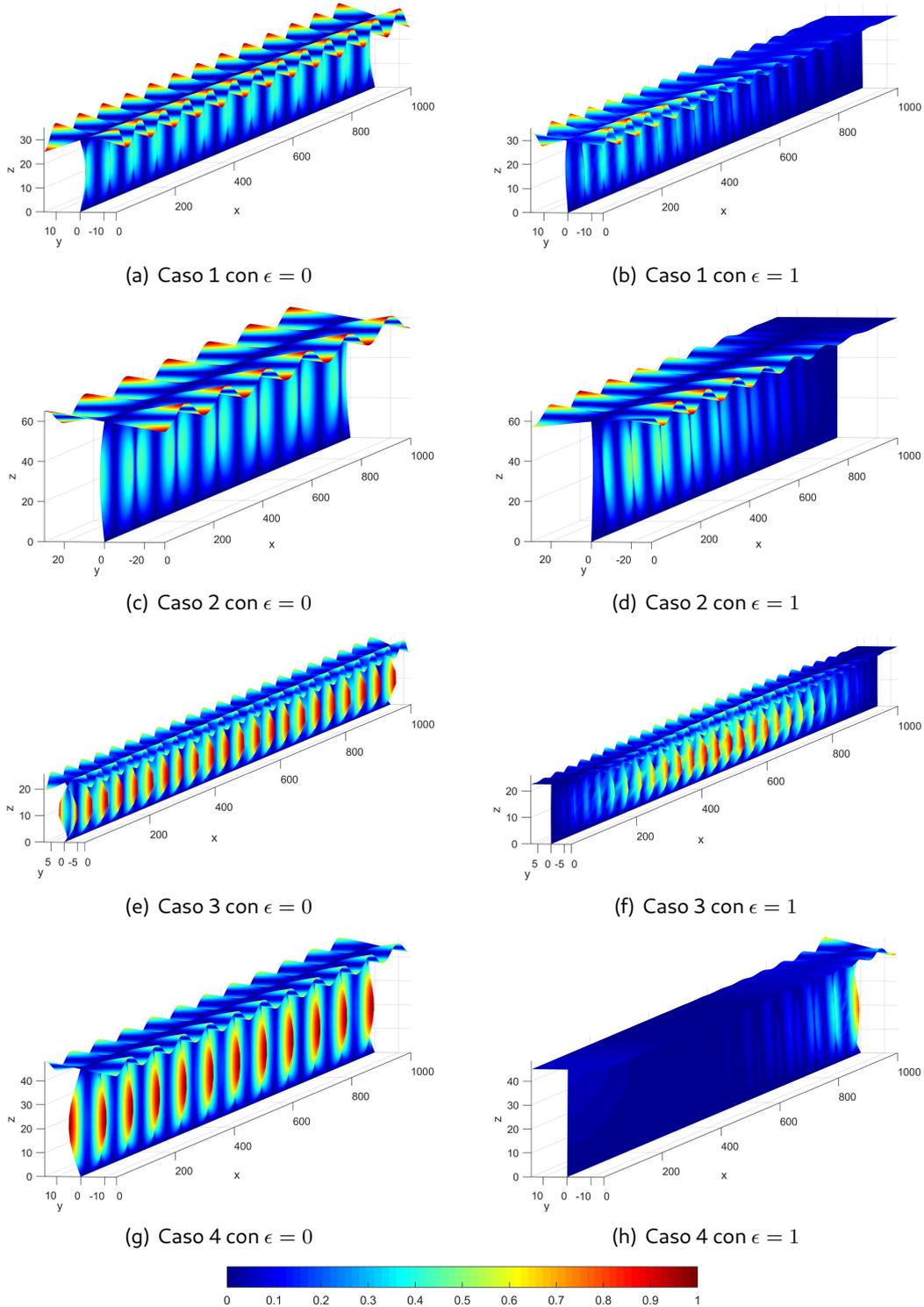


Figure 4.8: Forme modali irrigidimento T -type nei vari casi analizzati. Viene messo in risalto quale segmento va in instabilità, ovvero quello in cui sono presenti i picchi di maglie traslational modal displacement.

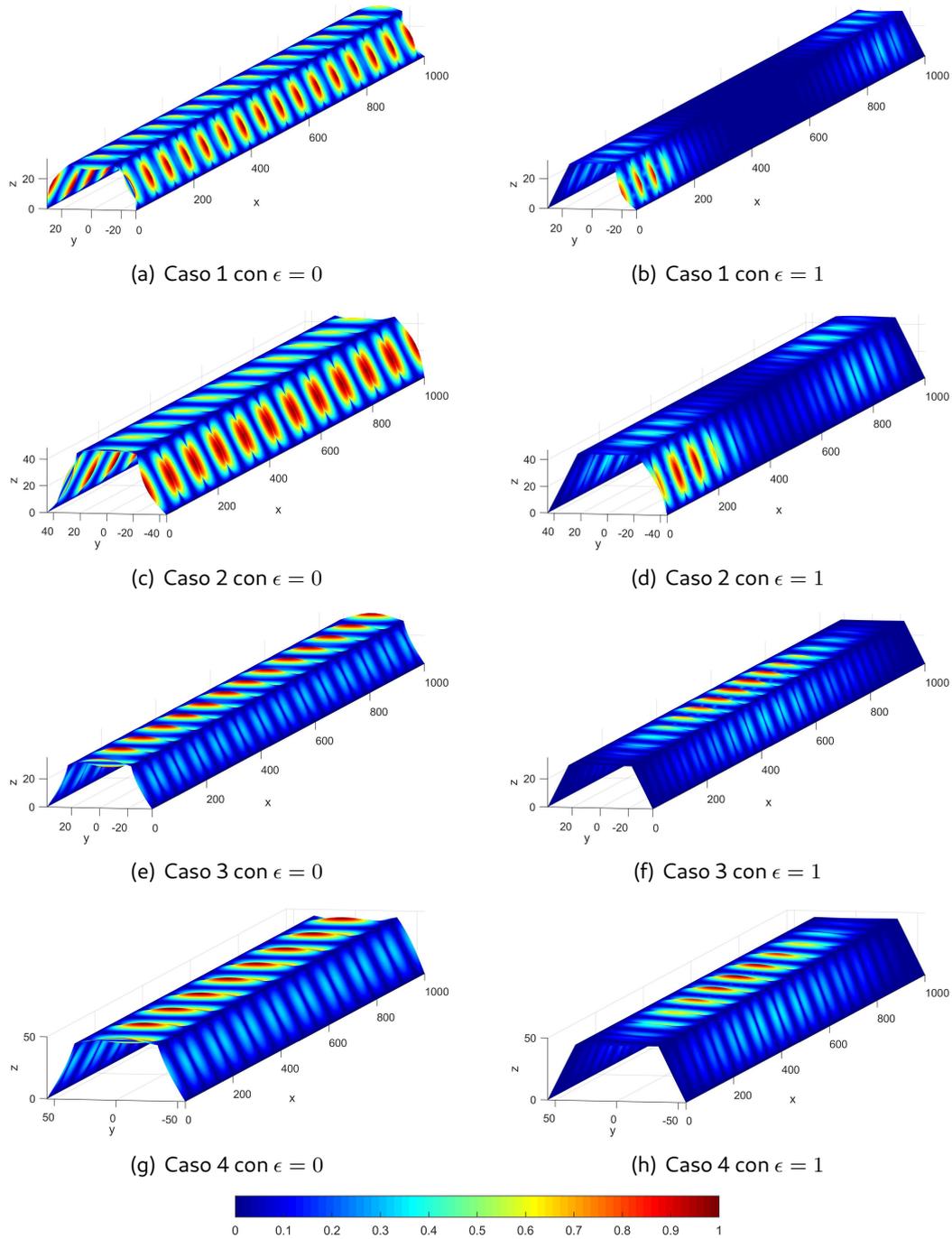


Figure 4.9: Forme modali irrigidimento Hat-type nei vari casi analizzati. Viene messo in risalto quale segmento va in instabilità, ovvero quello in cui sono presenti i picchi di maglie traslational modal displacement.

5 | Instabilità torsionale con partecipazione dello skin

Nel seguito si andrà a valutare l'instabilità torsionale degli irrigidimenti con la partecipazione dello skin. Facendo riferimento all'articolo [2], in sostanza, si entrerà nel dettaglio dei punti 5 e 6 della tabella 1. In questo caso PANDA fa due distinzioni:

1. **Local Rolling con partecipazione dello skin** compreso tra gli irrigidimenti (stringer e ring) – in sostanza è la stessa formulazione vista nel capitolo 3 inerente alla "local instability", ma nel potenziale totale compaiono anche i contributi energetici legati agli irrigidimenti, quindi non solo quelli dello skin.
2. **Rolling instability** – il concetto è analogo al panel instability del capitolo 3, ma anche qui si sommano i contributi energetici legati ad uno dei due tipi di irrigidimento:
 - Rolling instability with smeared stringers, si somma al potenziale totale relativo a skin e stringer spalmati i contributi energetici legati ai ring;
 - Rolling instability with smeared rings, si somma al potenziale totale relativo a skin e ring spalmati i contributi energetici legati agli stringer;

Come è facile intuire, a parte il processo che permette di spalmare un tipo di irrigidimento sullo skin, il modello matematico utilizzato in questi casi è lo stesso.

A tal proposito, nelle analisi seguenti l'attenzione è focalizzata sul primo caso, inoltre, si considera la presenza dei soli irrigidimenti assiali (gli stringer). In sostanza il modello è quello di un pannello semplicemente supportato sui lati in cui sono presenti anche i due stringer sui bordi assiali.

Nel codice PANDA2 sono presenti due modelli analitici in grado di osservare ciò:

- PANDA-type – modello analitico che rientra nel codice originale di PANDA (articolo [2]). In questo il campo di spostamento è trigonometrico, costituito da una sola componente (lo stesso del capitolo 3), in cui i segmenti degli irrigidimenti sono visti come piastre multistrato;
- PANDA-alternate – modello analitico che rientra nella soluzione alternativa descritta in [3]. Il campo di spostamenti è costituito da una serie trigonometrica e gli irrigidimenti sono visti come elementi trave discreti.

Questi risultati sono poi messi a confronto con quelli ottenuti da un'analisi agli elementi finiti NASTRAN-PATRAN, valutandone lo scostamento percentuale.

5.1 Modello PANDA-type

5.1.1 Campo di spostamenti, deformazioni e rotazioni

Riguardo lo **skin**, il campo di spostamenti e tutto ciò che ne consegue è il medesimo di quanto discusso nel capitolo 3 e rimando a quello.

L'analisi che segue è valida per irrigidimenti che presentano solo segmenti perpendicolari e paralleli allo skin. Per quanto riguarda il singolo **irrigidimento** si assume che, nella configurazione deformata del modo di buckling, la sezione trasversale rimanga piana e i segmenti, verticali ed orizzontali, rimangano dritti e perpendicolari tra di loro.

Il **campo di spostamenti per gli stringer** è il seguente:

$$\begin{aligned} u^* &= -m\gamma\bar{y}\bar{z}\cos(m\bar{x}) \\ v^* &= \gamma\bar{z}\sin(m\bar{x}) \\ w^* &= -\gamma\bar{y}\sin(m\bar{x}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

mentre quello relativo ai **ring** risulta

$$\begin{aligned} u^* &= -n\gamma\bar{y}\bar{z}\cos(n\bar{x}) \\ v^* &= \gamma\bar{z}\sin(n\bar{x}) \\ w^* &= -\gamma\bar{y}\sin(n\bar{x}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

dove:

- \bar{m} e \bar{n} sono le semi-onde assiali e trasversali nel modo di buckling considerato

$$m = \frac{\bar{m}\pi}{x_{max}} \quad \text{e} \quad n = \frac{\bar{n}\pi}{y_{max}} \quad (5.3)$$

- \bar{x} è la coordinata longitudinale e \bar{y} quella lungo la larghezza del segmento considerato. Si adotta questo sistema di riferimento così da poter includere nei vari conti tutti e due i tipi di irrigidimento trattati da PANDA, ovvero stringer e ring

$$\begin{aligned} \bar{y} = \text{cost} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \pm\bar{y} & \quad \text{per segmenti perpendicolari} \\ \bar{z} = \text{cost} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \pm\bar{z} & \quad \text{per segmenti paralleli} \end{aligned} \quad (5.4)$$

il segno dipende dalla posizione relativa rispetto all'asse \bar{z} o \bar{y} del segmento preso in considerazione (maggiori dettagli sono forniti nell'articolo [2], formula 91)

- x_{max} e y_{max} sono rispettivamente la lunghezza e la larghezza del pannello (si faccia riferimento alla tabella 3.1.1 e alla figura INSERIRE LA FIGURA GEOMETRIA). In generale queste due grandezze saranno chiamate in modo univoco con l , poi il valore assunto da l dipenderà da cosa si è preso in considerazione (stringer o ring);
- Nel parametro γ compare solamente la costante di combinazione lineare W , che sarà determinata insieme alle altre minimizzando il potenziale totale:

$$\gamma = \begin{cases} -2Cn & \text{per gli stringer} \\ 2Cm & \text{per i ring} \end{cases} \quad (5.5)$$

Si osservi che le costanti sono le stesse per skin e irrigidimenti, ovvero U , V e W .

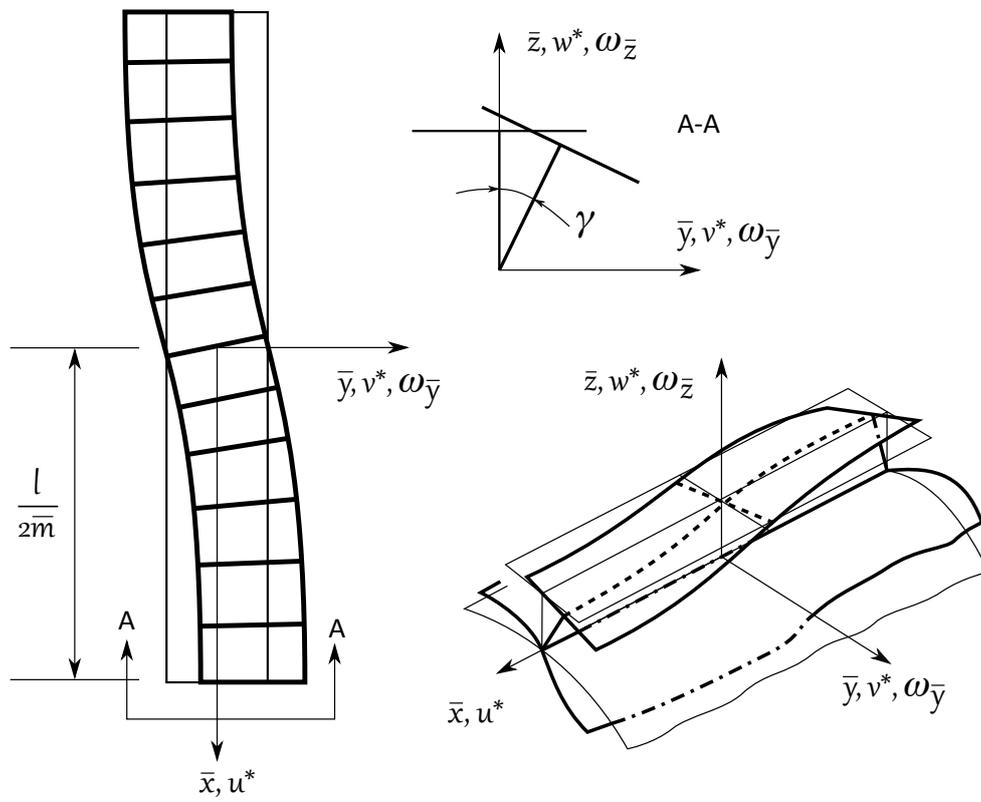


Figure 5.1: Rolling dell'irrigidimento con partecipazione dello skin

Per quanto riguarda il **campo di deformazioni**, in seguito, si prenderà in considerazione solo la componente di deformazione assiale ad ogni segmento parallelo allo skin

$$\varepsilon_x^* = u_{,\bar{x}}^* \quad (5.6)$$

e le curvature per i soli segmenti verticali

$$\begin{aligned} k_{\bar{x}} &= -v_{,\bar{x}\bar{x}}^* \\ k_{\bar{z}} &= -v_{,\bar{z}\bar{z}}^* \\ k_{\bar{x}\bar{z}} &= -v_{,\bar{x}\bar{z}}^* \end{aligned} \quad (5.7)$$

Infine riguardo il **campo di rotazioni**, nel seguito, si farà riferimento solamente alla componente attorno all'asse \bar{z} e a quella attorno l'asse \bar{y} :

$$\begin{aligned} \omega_{\bar{z}} &= \frac{1}{2} (v_{,\bar{x}}^* - v_{,\bar{y}}^*) \\ \omega_{\bar{y}} &= \frac{1}{2} (u_{,\bar{z}}^* - w_{,\bar{x}}^*) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Oss: In questo caso risulta più conveniente non adottare la notazione matriciale. In un primo luogo perché nelle formule compare solamente la costante di combinazione lineare W , quindi, tutti i contributi energetici che verranno calcolati, andranno a riempire solo i termini di indice $i = j = 3$ delle matrici che compaiono nel potenziale totale. In secondo luogo risulta molto più chiaro esprimere il tutto in forma estesa.

5.1.2 Energia potenziale totale

Energia di deformazione elastica

Per quanto riguarda i **segmenti paralleli** allo skin viene trascurata la componente di energia di deformazione flesso-torsionale, mentre, di quella membranale si considera solo il contributo legato a ε_x^* :

$$\mathcal{U}_m^i = \frac{1}{2} \int_{\bar{y}_i=0}^{b_i} \int_{\bar{x}=0}^l \varepsilon_x^{*2} \mathcal{A}_{11}^i d\bar{x} d\bar{y}_i \quad \text{per } i \neq \text{web} \quad (5.9)$$

Mentre, per quanto riguarda i **segmenti perpendicolari** allo skin si considera nulla la componente di energia di deformazione membranale, mentre quella flesso-torsionale è

$$\mathcal{U}_m^i = \frac{1}{2} \int_{\bar{y}_i=0}^{b_i} \int_{\bar{x}=0}^l [k_{\bar{x}} \quad k_{\bar{z}} \quad k_{\bar{x}\bar{z}}] [\mathcal{D}^i] \begin{Bmatrix} k_{\bar{x}} \\ k_{\bar{z}} \\ k_{\bar{x}\bar{z}} \end{Bmatrix} d\bar{x} d\bar{y}_i \quad (5.10)$$

per $i = \text{web}$ o altri segmenti attaccati lungo $\bar{y} = \bar{z} = 0$

dove per la determinazione di \mathcal{A}_{11}^i e della matrice di rigidezza flesso-torsionale effettiva del segmento i -esimo ($[\mathcal{D}^i]$) si faccia riferimento alle equazioni 4.2, 4.3 e 4.4.

Lavoro dei carichi applicati

Sui segmenti agisce solamente il carico normale $N_{\bar{x}_i}$ e per la sua determinazione si faccia riferimento al capitolo 2.

Per quanto riguarda i **segmenti paralleli**, la componente membranale del lavoro dei carichi applicati è espressa come segue:

$$\mathcal{W}_m^i = -\frac{1}{2} \int_{\bar{y}_i=0}^{b_i} \int_{\bar{x}=0}^l N_{\bar{x}_i} (\omega_{\bar{z}}^2 + \omega_{\bar{y}}^2) d\bar{x} d\bar{y}_i \quad (5.11)$$

per $i \neq \text{web}$ o altri segmenti attaccati lungo $\bar{y} = \bar{z} = 0$

Invece, riguardo i **segmenti perpendicolari**, la componente flesso-torsionale del lavoro dei carichi applicati è definita da:

$$\mathcal{W}_m^i = -\frac{1}{2} \int_{\bar{y}_i=0}^{b_i} \int_{\bar{x}=0}^l N_{\bar{x}_i} v_{,\bar{x}}^{*2} d\bar{x} d\bar{y}_i \quad (5.12)$$

per $i = \text{web}$ o altri segmenti attaccati lungo $\bar{y} = \bar{z} = 0$

Determinazione dell'autovalore

Noti tutti i contributi di skin e irrigidimenti, è possibile determinare l'**energia potenziale totale** che rappresenta il problema in questione:

$$\Pi = \mathcal{U} - \mathcal{W} = \mathcal{U}_{skin} + \sum_i \mathcal{U}_m^i + \sum_j \mathcal{U}_b^j - \mathcal{W}_{skin} + \sum_i \mathcal{W}_m^i + \sum_j \mathcal{W}_b^j \quad (5.13)$$

dove con i e j si intende che devono essere considerati tutti i contributi di eventuali irrigidimenti multipli. Ad esempio nel seguito è stato preso in esame un modello in cui sono presenti due stringer, quindi, nel potenziale totale devono essere inclusi lo skin e i due irrigidimenti assiali.

A proposito di ciò, è opportuno fare una precisazione inerente alle integrazioni riferite agli irrigidimenti, ovvero, se questi sono collocati lungo $y = z = 0$ o $x = z = 0$ allora gli integrali rimangono invariati, altrimenti l'intervallo di integrazione va traslato in modo opportuno secondo i parametri c e d :

$$\bar{x} \in [\varphi; l + \varphi] \quad \text{con} \quad \varphi = \begin{cases} \frac{x_{max}}{\bar{m}} - c y_{max} & \text{per stringer} \\ \frac{y_{max}}{\bar{n}} - d x_{max} & \text{per ring} \end{cases} \quad (5.14)$$

Tornando al discorso del potenziale totale, sapendo che il carico applicato è composto dalla componente di pre-buckling ("pre") e da quella di buckling ("e") si ha:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \{N_{pre}\} + \lambda \{N_e\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}_{pre} + \lambda \mathcal{W}_e \quad (5.15)$$

e indicando con $\{D\}$ le tre costanti di combinazione lineare (U , V e W) si può riscrivere il tutto come segue:

$$\Pi = \{D\}^T ([A_{\text{skin}}] + [A_{\text{stiffener}}] - [B_{\text{pre_skin}}] - [B_{\text{pre_stiffener}}] + \lambda ([B_{\text{e_skin}}] + [B_{\text{e_stiffener}}])) \{D\} \quad (5.16)$$

l'unico autovalore in gioco (le matrici $[B]$ presentano un valore diverso da 0 solo per $i = j = 3$) si calcola uguagliando a zero la variazione prima del potenziale totale rispetto alle incognite:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{D\}} = \{0\} \Rightarrow ([A] - [B_{\text{pre}}] - \lambda [B_e]) \{D\} = \{0\} \quad (5.17)$$

da cui si ricava il classico problema agli autovalori

$$\det ([A_{\text{skin}}] + [A_{\text{stiffener}}] - [B_{\text{pre_skin}}] - [B_{\text{pre_stiffener}}] - \lambda ([B_{\text{e_skin}}] + [B_{\text{e_stiffener}}])) = 0 \quad (5.18)$$

Questa altro non è che un'equazione lineare in λ , che dipende dai parametri \bar{m} , \bar{n} e c o d . Il minimo autovalore si determina come già discusso nel capitolo 3.

5.2 Modello PANDA–alternate

5.2.1 Campo di spostamenti, deformazioni e rotazioni

Nel modello alternativo proposto in PANDA2, come già anticipato all'inizio del capitolo, gli irrigidimenti sono visti come elementi monodirezionali discreti. Quindi l'intero irrigidimento (stringer o ring) è descritto dal **campo di spostamenti** riferito al suo asse baricentrico. Questo, nel modo di buckling considerato, è trascinato dallo skin in maniera analoga a come accade nel modello PANDA-type (si faccia riferimento alla figura 5.1).

Per quanto riguarda il **campo di deformazione**, si fa ricorso alla shallow shell theory. Per gli stringer si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_{,x} - w_{,xx} e_{\text{str}} \\ k_1 &= -w_{,xx} \\ k_2 &= v_{,xx} - w_{,yxx} e_{\text{str}} \\ k_{12} &= w_{,xy} \end{aligned} \quad (5.19)$$

e per i ring

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= v_{,y} + w/R - w_{,yy} e_{\text{ring}} \\ k_1 &= -w_{,yy} \\ k_2 &= u_{,yy} - w_{,xyy} e_{\text{ring}} \\ k_{12} &= w_{,xy} \end{aligned} \quad (5.20)$$

dove e_{str} e e_{ring} sono le distanze tra il piano medio dello skin e il centro di taglio di stringer e ring, rispettivamente.

Per entrambi i casi si può esprimere il tutto in forma matriciale

$$\{\varepsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_{12} \end{Bmatrix} = [\partial^*]\{d\} = [\partial^*][\phi]\{D\} = [\partial^*\phi]\{D\} \quad (5.21)$$

dove $\{d\}$ è lo stesso campo di spostamenti illustrato nel capitolo 3 (rimando a questo per eventuali notazioni, pedici e apici che in questo capitolo non sono richiamate) e $[\partial^*]$ è un operatore matriciale così definito

$$[\partial] = [[\partial_1] \quad \cdots \quad [\partial_{NC}]] \quad (5.22)$$

e tutti i termini $[\partial_i^*]$ sono identici

$$[\partial_i^*]_{\text{str}} = \begin{bmatrix} (\cdot)_{,x} & (\cdot)_{,x} & 0 & 0 & -(\cdot)_{,xx} e_{\text{str}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\cdot)_{,xx} \\ 0 & 0 & (\cdot)_{,xx} & (\cdot)_{,xx} & -(\cdot)_{,yxx} e_{\text{str}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\cdot)_{,xy} \end{bmatrix} \quad \forall i \quad (5.23)$$

$$[\partial_i^*]_{\text{ring}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\cdot)_{,y} & (\cdot)_{,y} & 1/R - (\cdot)_{,yy} e_{\text{ring}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\cdot)_{,yy} \\ (\cdot)_{,yy} & (\cdot)_{,yy} & 0 & 0 & -(\cdot)_{,yxx} e_{\text{ring}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\cdot)_{,xy} \end{bmatrix} \quad \forall i \quad (5.24)$$

Oss: Come descritto nell'articolo [3], è utile applicare la teoria delle travi discrete solo se la lunghezza delle semi-onde del modo di buckling è dello stesso ordine della distanza tra gli irrigidimenti, altrimenti è sufficiente spalmarli sullo skin. Infatti si presume che la spaziatura degli irrigidimenti sia sufficientemente piccola in modo che la sezione del pannello delimitata da due irrigidimenti adiacenti sia un "guscio poco profondo" (shallow shell).

Infine il **campo di rotazioni** risulta, per gli stringer

$$\begin{aligned} r_1 &= w_{,x} \\ r_2 &= v_{,x} - w_{,yx} z_p \end{aligned} \quad (5.25)$$

e per i ring

$$\begin{aligned} r_1 &= w_{,y} \\ r_2 &= u_{,y} - w_{,xy} z_p \end{aligned} \quad (5.26)$$

dove z_p è la distanza dell'asse baricentrico, del segmento p -esimo dell'irrigidimento k -esimo, rispetto al piano medio dello skin.

Anche qui si può adottare la formulazione matriciale

$$\{r^*\} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = [\partial_r^*]\{d\} = [\partial_r^*][\phi]\{D\} = [\partial_r^*\phi]\{D\} \quad (5.27)$$

dove $[\partial_r^*]$ è un operatore matriciale così definito:

$$[\partial_r^*] = [[\partial_{r1}] \quad \cdots \quad [\partial_{r_{NC}}]] \quad (5.28)$$

e tutti i termini $[\partial_{r_i}^*]$ sono identici

$$[\partial_{r_i}^*]_{\text{str}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (\cdot)_{,x} \\ 0 & 0 & (\cdot)_{,x} & (\cdot)_{,x} & -(\cdot)_{,yx} z_j \end{bmatrix} \quad \forall i \quad (5.29)$$

$$[\partial_{r_i}^*]_{\text{ring}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (\cdot)_{,y} \\ (\cdot)_{,y} & (\cdot)_{,y} & 0 & 0 & -(\cdot)_{,xy} z_j \end{bmatrix} \quad \forall i \quad (5.30)$$

5.2.2 Parametri trave

Avendo assunto che l'irrigidimento è un elemento trave discreto, le informazioni inerenti a geometria e materiale sono riassunte dai classici parametri trave (E , G , A , I_x e I_y).

Come verrà descritto in seguito verranno presi in considerazione irrigidimenti con materiale e stratificazione simmetrica, identica in tutti i segmenti. Sotto queste ipotesi è facile identificare i parametri trave prima indicati.

Per ricavare il **modulo elastico** longitudinale, E , e trasversale, G , si parte dalle relazioni costitutive della piastra multistrato descritta dall'equazione 1.9. Si ipotizza di avere in un caso solo il carico N_x e nell'altro solo N_{xy} , si inverte la parte membranale della relazione 1.9 e si ottiene

$$N_x = \left(\mathcal{A}_{11} - \frac{\mathcal{A}_{21}}{\mathcal{A}_{22}} \mathcal{A}_{12} \right) \varepsilon_x^{(0)} \quad \text{e} \quad N_{xy} = \mathcal{A}_{66} \gamma_{xy}^{(0)} \quad \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

successivamente, facendo ricorso alle classiche relazioni sforzo-deformazione

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{e} \quad \tau = G\gamma \quad [Pa]$$

per analogia si ottiene

$$E = \frac{1}{t} \left(\mathcal{A}_{11} - \frac{\mathcal{A}_{21}}{\mathcal{A}_{22}} \mathcal{A}_{12} \right) \quad \text{e} \quad G = \frac{1}{t} \mathcal{A}_{66} \quad [Pa] \quad (5.32)$$

Per ricavare l'**area** e i **moduli d'inerzia** in gioco si fa ricorso alla geometria delle aree. Indicando con X l'asse orizzontale e con Y quello verticale della sezione dell'irrigidimento (sono diversi dagli assi x e y del sistema di riferimento pannello) si ha:

$$A = \iint_{\text{sez}} dX dY; \quad I_X = \iint_{\text{sez}} Y^2 dX dY \quad \text{e} \quad I_Y = \iint_{\text{sez}} X^2 dX dY; \quad (5.33)$$

Riguardo alla **rigidezza torsionale** si fa ricorso alla teoria di De Saint Venant per sezioni aperte in parete sottile:

$$J = J_{t-DSV} = \frac{1}{3} \sum_k b_k s_k^3 \quad (5.34)$$

dove b_k e s_k sono la larghezza e lo spessore del segmento k -esimo.

5.2.3 Energia potenziale totale

A questo punto è possibile determinare l'**energia di deformazione** elastica legata ad singolo irrigidimento (stringer o ring) k -esimo

$$U_k = \frac{1}{2} \int_0^{y_{max}} \int_0^{x_{max}} \{\varepsilon_k^*\}^T [\mathcal{G}_k] \{\varepsilon_k^*\} dx dy = \{D\}^T [A_k] \{D\} \quad (5.35)$$

dove $[\mathcal{G}_k]$ è una matrice $NT \times NT$ costituita da sotto-matrici identiche (I_{xy} è trascurato)

$$[\mathcal{G}_k] = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & [\mathcal{G}_{kij}] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad [\mathcal{G}_{kij}] = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ \end{bmatrix}_k \quad (5.36)$$

e $[A_k]$ è anch'essa una matrice $NT \times NT$ così definita

$$[A_k] = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & [A_{kij}] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

costituita da sotto-matrici 5×5

$$[A_{kij}] = \frac{1}{2} \int_0^{y_{max}} \int_0^{x_{max}} [\partial^* \phi_j]^T [\mathcal{G}_{kij}] [\partial^* \phi_i] dx dy \quad (5.38)$$

Il **lavoro dei carichi applicati** agenti sull'irrigidimento k -esimo risulta

$$W_k = -\frac{1}{2} \sum_p \int_l \{r^*\}^T N_p \{r^*\} dl = \{D\}^T [B_k] \{D\} \quad (5.39)$$

dove N_p è la forza agente sul segmento p -esimo dell'irrigidimento k -esimo e l è la generica lunghezza dell'irrigidimento considerato (x_{max} o y_{max}).

La matrice $[B_k]$ ha dimensione $NT \times NT$

$$[B_k] = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & [B_{kij}] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

ed è costituita da sotto-matrici identiche di dimensione 5×5

$$[B_{kij}] = -\frac{1}{2} \sum_p \int_l [\partial_r^* \phi_j]^T [\partial_r^* \phi_i] dl \quad (5.41)$$

Oss: Per risolvere gli integrali 5.35 e 5.39 è necessario porre $x = cost$ o $y = cost$ in funzione di cosa si sta considerando, se un ring o uno stringer (dove per $cost$ si ha 0 o l).

A questo punto sono noti tutti i contributi energetici di skin e irrigidimenti, quindi, è possibile determinare l'**energia potenziale totale** che rappresenta il problema in questione:

$$\Pi = U - W = U_{skin} + \sum_k U_{stiff}^k - W_{skin} + \sum_k W_{stiff}^k \quad (5.42)$$

Sapendo che il carico applicato è composto dalla componente di pre-buckling ("pre") e da quella di buckling ("e")

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \{N_{pre}\} + \lambda \{N_e\} \Rightarrow \mathcal{W} = \mathcal{W}_{pre} + \lambda \mathcal{W}_e \quad (5.43)$$

si può riscrivere il tutto come segue:

$$\Pi = \{D\}^T ([A_{skin}] + [A_{stiff}] - [B_{pre_{skin}}] - [B_{pre_{stiff}}] + \lambda ([B_{e_{skin}}] + [B_{e_{stiff}}])) \{D\} \quad (5.44)$$

l'insieme degli autovalori in gioco si calcola uguagliando a zero la variazione prima del potenziale totale rispetto alle incognite:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{D\}} = \{0\} \Rightarrow ([A] - [B_{pre}] - \lambda [B_e]) \{D\} = \{0\} \quad (5.45)$$

da cui si ricava il classico problema agli autovalori

$$\det ([A_{skin}] + [A_{stiff}] - [B_{pre_{skin}}] - [B_{pre_{stiff}}] - \lambda ([B_{e_{skin}}] + [B_{e_{stiff}}])) = 0 \quad (5.46)$$

Da questa si ricavano NT autovalori, si individua quello minimo (in modulo) e si calcola il relativo autovettore. Anche qui restano valide le stesse osservazioni fatte nel capitolo 3, quelle relative alla soluzione alternativa e al numero di componenti usate, e ad esso rimando per chiarimenti.

5.3 Modello PATRAN-NASTRAN

Nel seguito vengono illustrati tutti i passi utili per definire i modelli numerici NASTRAN, che verranno poi utilizzati per ottenere i risultati da confrontare con quelli analitici del modello PANDA2.

Nel seguito verrà definita la geometria, il materiale e la laminazione utilizzate, dati utili per tutti e due i modelli: quello numerico e quello analitico prima presentato.

Le formule analitiche indicate nella sezione precedente, come fatto nei capitoli precedenti, sono state implementate in MATLAB e dal programma risultante sono ricavati i risultati che verranno illustrati in seguito.

5.3.1 Geometria, materiale-laminazione ed elementi

Il primo passo per creare il modello FEM è quello di definire la **geometria** in gioco.

Riguardo l'analisi a rolling con partecipazione dello skin, il modello PANDA-type prende in considerazione solo irrigidimenti con segmenti verticali e orizzontali, mentre PANDA-alternate permette di analizzare solo le sezioni a I , J , T e Z .

Escludendo la sezione a Z , che PANDA-type tratterebbe come sezione J , nel seguito verranno prese in considerazione solo la sezione I , J e T -type. Le dimensioni base sono indicate nella figura 5.2.

Il fine è quello di eseguire più analisi, facendo variare il parametro geometrico d , in modo da valutare l'influenza della geometria sui risultati.

Il modello preso in considerazione è costituito dalla porzione di pannello tra due stringer, semplicemente supportata sui quattro lati, e da due stringer posizionati sui due lati lungo l'asse x (come esempio si osservi la figura 5.3 che mostra il caso con irrigidimenti T -type).

La lunghezza e la larghezza del pannello sono fisse e pari a 1000 mm e 300 mm , rispettivamente.

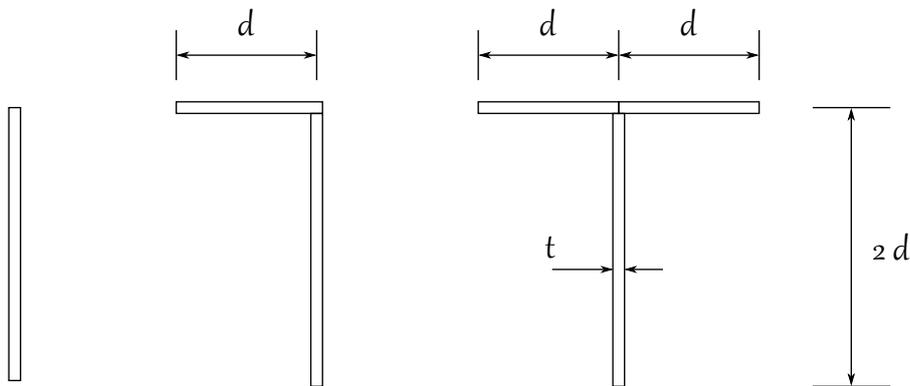


Figure 5.2: Parametri geometrici degli irrigidimenti T , J e I -type.

Una volta definita la geometria è necessario specificare il **materiale** e la **laminazione** per lo skin e per ogni segmento dell'irrigidimento.

A differenza del capitolo precedente e del successivo, l'obiettivo delle analisi fatte non è quello di indagare nello specifico cosa succede al variare di alcuni dei coefficienti della matrice di rigidità del monostrato equivalente, ma quello di eseguire un confronto su due modelli che abbiano le stesse ipotesi di partenza.

Quindi, come materiale è stato usato lo stesso delle analisi relative al solo skin (quelle del capitolo 3), scelta indirizzata anche dal fatto di voler mettere a confronto l'influenza dell'irrigidimento sul carico critico:

$$E_1 = E_2 = 48000 [MPa]; \quad G_{12} = 20330 [MPa] \quad e \quad \nu = 0 \quad (5.47)$$

Stessa cosa per la stratificazione, infatti, si è fatto ricorso a un laminato a strati identici simmetrico uguale per ogni parte del modello (skin e segmenti dell'irrigidimento):

$$[45 \quad -45 \quad -45 \quad 45] \quad (5.48)$$

Come dimostrato nel primo capitolo questa combinazione di materiale e laminazione permette di ottenere una monostrato equivalente simmetrico ed ortotropo sia in membrana che in flessione-torsione (A_{i6} , D_{i6} con $i \neq 6$ e $[B] = [0]$).

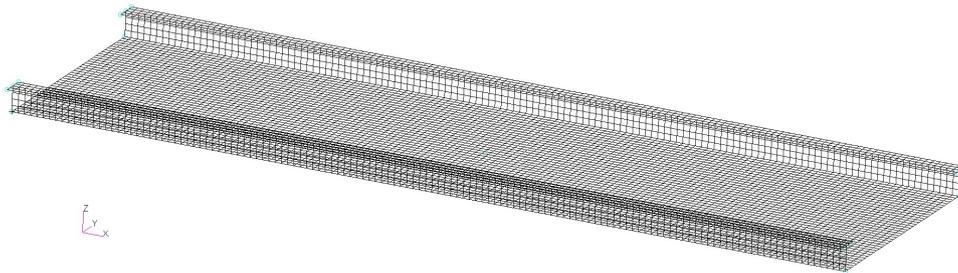


Figure 5.3: Suddivisione in elementi del modello con irrigidimenti *T*-type.

Il passo successivo è suddividere la geometria in **elementi** CQUAD4 di opportune dimensioni, il risultato è mostrato a titolo di esempio in figura 5.3 (per semplicità si fa riferimento al caso con irrigidimenti *T*-type, che è quella che in qualche modo ingloba tutte e tre).

Ad ogni elemento è poi stata assegnata una proprietà *shell* con l'opzione *thin* in cui è indicata la laminazione opportuna, che in questo caso risulta identica per skin e segmenti degli irrigidimenti.

5.3.2 Vincoli, carichi e tipo di analisi

Una volta definita la geometria degli elementi e le loro proprietà, il passo successivo è specificare i **vincoli** in gioco. Facendo riferimento alla figura 5.4 si ha:

- Semplice appoggio – Il pannello risulta semplicemente supportato sui lati, per cui è necessario bloccare la traslazione verticale, d_z , sui nodi che ricadono sui quei lati;
- Continuità di rotazione all'interfaccia del web e della flangia dell'irrigidimento – In PANDA2 la porzione di pannello presa sotto esame presenta una lunghezza pari

alla distanza tra due ring. In genere ognuno di questi è l'interfaccia tra due porzioni di pannello adiacenti. Quindi, è necessario garantire la continuità di spostamenti e rotazioni nel web e nella flangia in questo punto. Per fare ciò, nei nodi che ricadono in questa zona, sono state bloccate, per il web, le rotazioni lungo l'asse z (ovvero $\phi_z = 0$) e, per la flangia, quelle attorno l'asse y (ovvero $\phi_y = 0$);

- Spostamento nel piano $x-y$ – Per bloccare i restanti gradi di libertà non vincolati, la traslazione nel piano $x-y$, si è scelto, per questioni di simmetria, di bloccare questo spostamento nel nodo che ricade sulla metà lunghezza e larghezza dello skin.

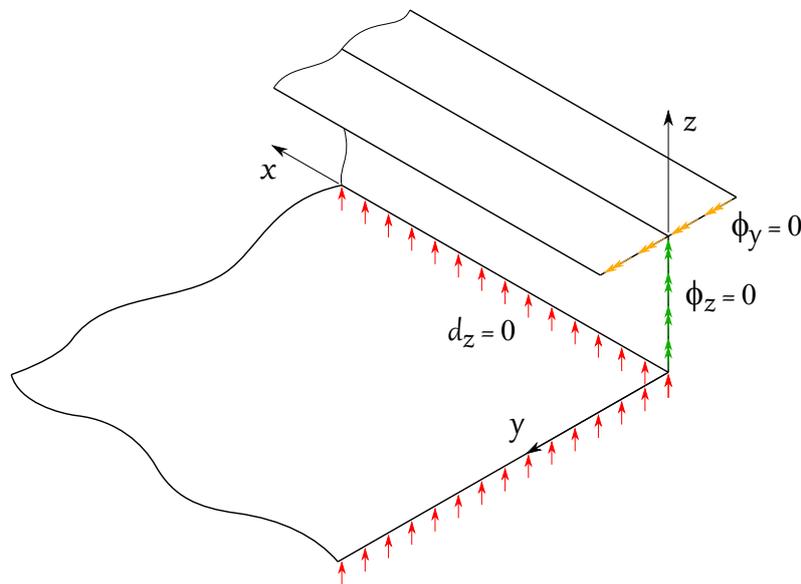


Figure 5.4: Vincoli applicati al modello – traslazioni e rotazioni bloccate.

Il passo finale per definire il modello è specificare i **carichi** in gioco. Nel seguito vengono eseguite due analisi distinte:

1. Semplice sforzo normale, applicato in maniera indiretta imponendo uno spostamento di compressione costante a tutte e due le sezioni trasversali di estremità del pannello. Per risalire al carico applicato si agisce come illustrato nel capitolo 2.
2. Semplice taglio nel piano, andando ad applicare un carico uniforme al solo skin. Per applicare N_{xy} è sufficiente definire un *Total load* di tipo *2D Element uniform* ed applicarlo solamente ai nodi dello skin che ricadono sui lati del pannello.

A questo punto tutto è pronto per impostare ed eseguire l'**analisi** (Sol 105) ed ottenere i risultati utili per il confronto PANDA-NASTRAN.

5.4 Risultati

I risultati ottenuti al variare del parametro geometrico d sono riassunti nelle tabelle 5.1 (caso con solo sforzo normale la 5.0(a) e con solo taglio nel piano la 5.0(b)).

(a) Caso con solo sforzo normale $N_x = 1 \text{ N/mm}$

	d [mm]	λ			$\varepsilon_{\%}$		$(\lambda/\lambda_{flat} - 1) \%$		
		FEM	PANDA type	PANDA alternate	PANDA type	PANDA alternate	FEM	PANDA type	PANDA alternate
flat	0	0.90445	0.9076	0.9076	-0.348	-0.348	0.0	0.0	0.0
I -type	7.5	1.0804	1.0957	1.0917	-1.417	-1.047	19.5	20.7	20.3
	15	1.2392	1.2904	1.283	-4.133	-3.536	37.0	42.2	41.4
	22.5	1.3784	1.4744	1.4813	-6.963	-7.464	52.4	62.5	63.2
J -type	7.5	1.2824	1.3096	1.2208	-2.118	4.806	41.8	44.3	34.5
	10	1.4603	1.8151	1.4162	-24.299	3.018	61.5	100.0	56.0
	15	1.6387	4.2638	2.0322	-160.19	-24.019	81.2	369.8	123.9
T -type	7.5	1.4279	1.5369	1.5169	-7.637	-6.237	57.9	69.3	67.1
	10	1.5932	2.2454	1.9748	-40.938	-23.953	76.1	147.4	117.6
	15	1.8063	5.3507	1.9141	-196.23	-5.969	99.7	489.5	110.9

(b) Caso con solo taglio nel piano $N_{xy} = 1 \text{ N/mm}$

	d [mm]	λ			$\varepsilon_{\%}$		$(\lambda/\lambda_{flat} - 1) \%$		
		FEM	PANDA type	PANDA alternate	PANDA type	PANDA alternate	FEM	PANDA type	PANDA alternate
flat	0	1.2843	1.2497	1.2920	2.692	-0.601	0.0	0.0	0.0
I -type	7.5	1.3295	1.3132	1.331	1.224	-0.115	3.5	5.1	3.0
	15	1.3788	1.3753	1.3887	0.251	-0.720	7.4	10.1	7.5
	22.5	1.4174	1.4373	1.4416	-1.407	-1.710	10.4	15.0	11.6
J -type	7.5	1.4142	1.3817	1.3811	2.296	2.338	10.1	10.6	6.9
	10	1.5321	1.5094	1.4623	1.483	4.557	19.3	20.8	13.2
	15	1.7375	2.1634	1.746	-24.516	-0.492	35.3	73.1	35.1
T -type	7.5	1.4798	1.4174	1.5162	4.218	-2.458	15.2	13.4	17.4
	10	1.6308	1.6452	1.7461	-0.886	-7.073	27.0	31.6	35.1
	15	1.8010	2.3235	2.0759	-29.014	-15.266	40.2	85.9	60.7

Table 5.1: Influenza del parametro geometrico d sui risultati forniti.

Da queste tabelle è possibile fare diverse osservazioni:

- Fintanto che la geometria-materiale-laminazione dell'irrigidimento rimane entro certi limiti, tali da non violare le ipotesi utilizzate per includere tale irrigidimento all'interno della formulazione, esiste una certa congruenza tra NASTRAN e metodi analitici.
Ovvero, nel momento in cui gli effetti tridimensionali legati alla deformazione degli

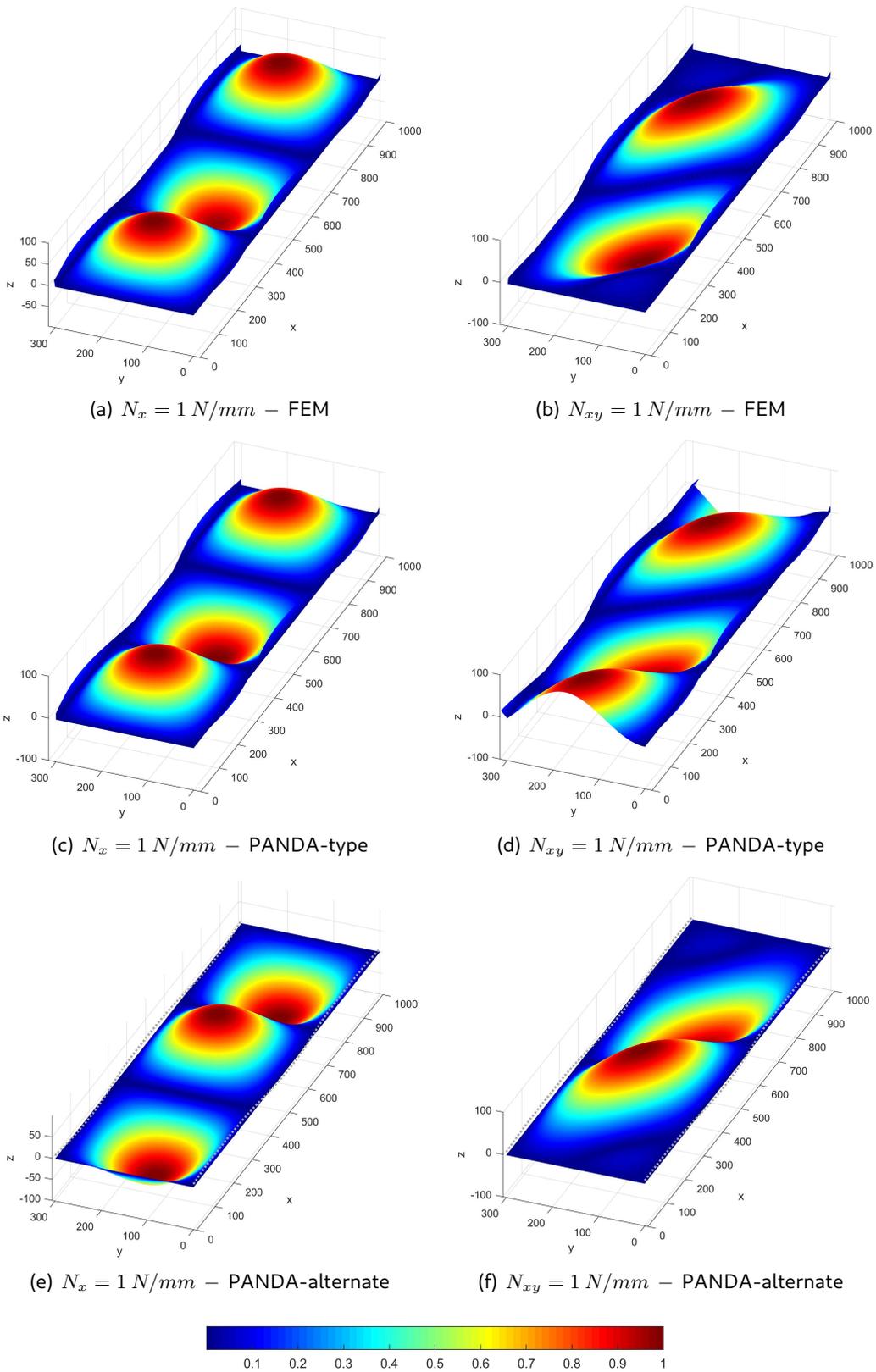
irrigidimenti diventano rilevanti, il fatto di trascurare la deformazione della sezione trasversale porta a dei risultati incongruenti con la realtà dei fatti.

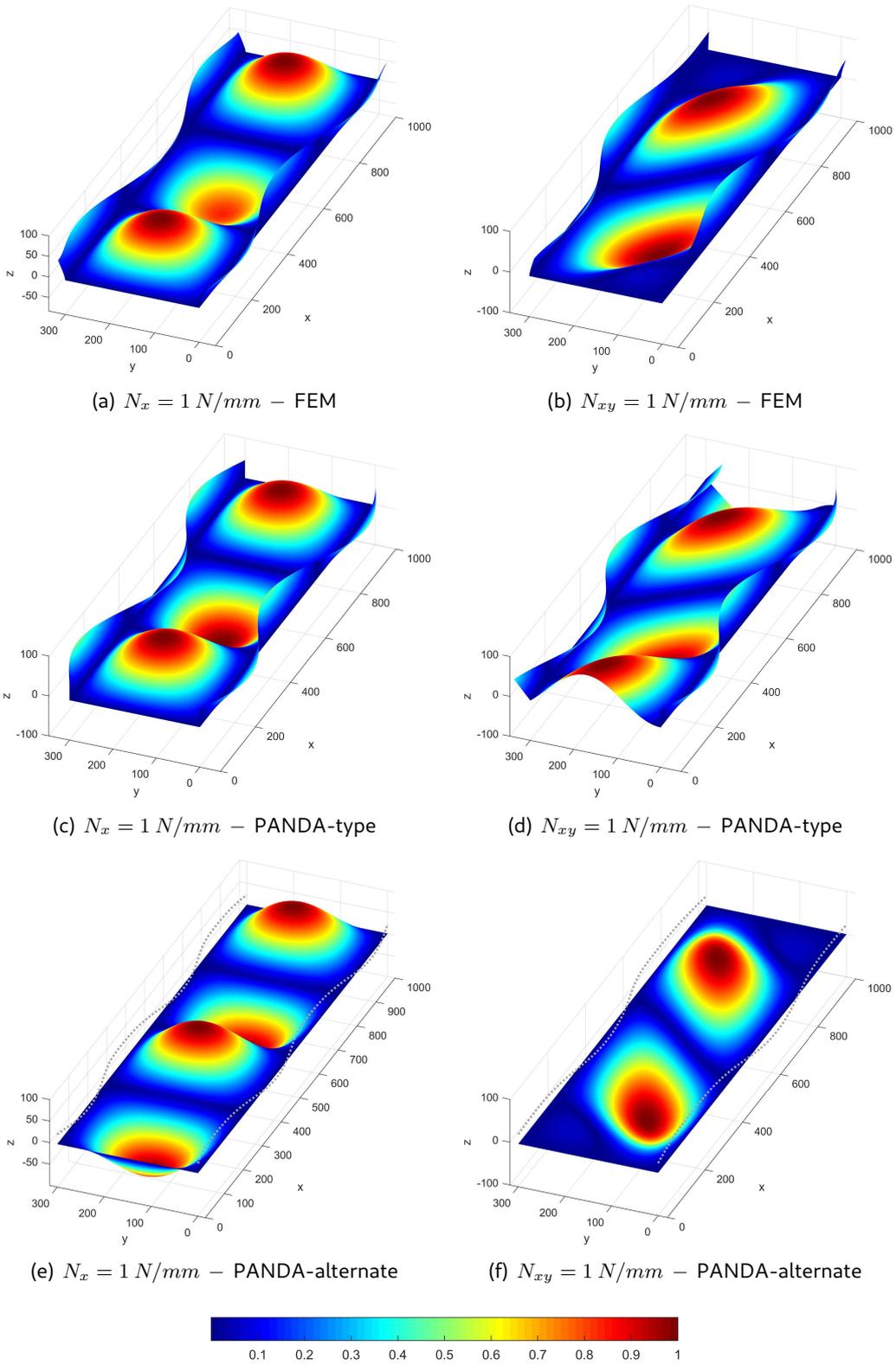
In questo contesto, la soluzione PANDA-alternate riesce ad avere un range di validità più ampio, lo svantaggio è che questo tipo di soluzione risulta molto onerosa dal punto di vista computazionale. Per questa ragione, nella guida di PANDA è indicato di usare questo modello solo per finalizzare i passi di iterazione.

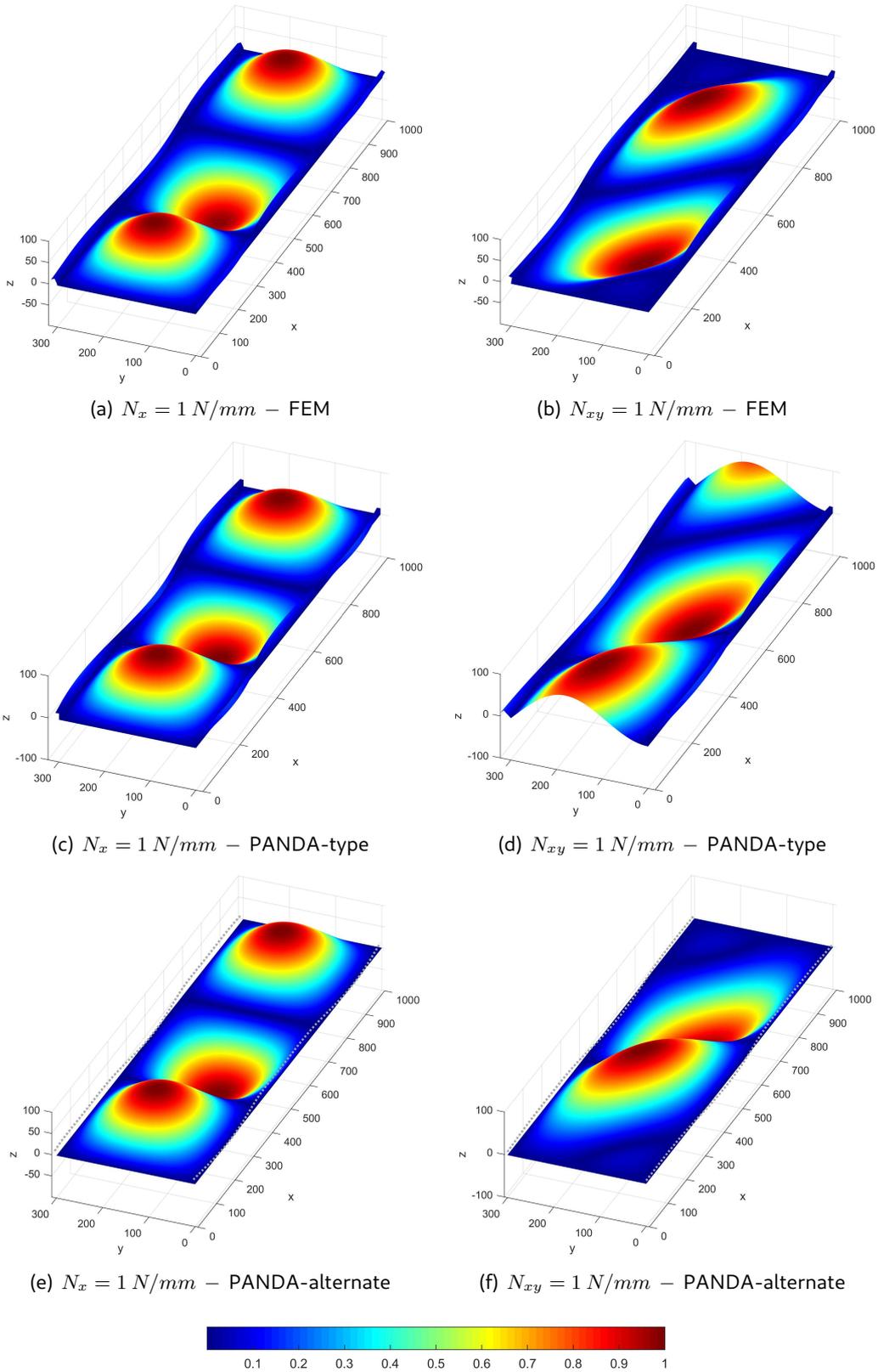
- Si hanno valori di errore rispetto al FEM molto più alti in presenza di solo sforzo normale, nel caso di taglio puro questi sono molto più contenuti.
- La presenza dell'irrigidimento induce un incremento di carico critico tanto più marcato quanto più la dimensione d aumenta. Questo effetto è più marcato nel caso di semplice sforzo normale, in quanto gli stringer subiscono parte di questo carico, e per la sezione T -type, in quanto presenta una componente strutturale di maggior rilievo rispetto alla sezione J -type e quella I -type.

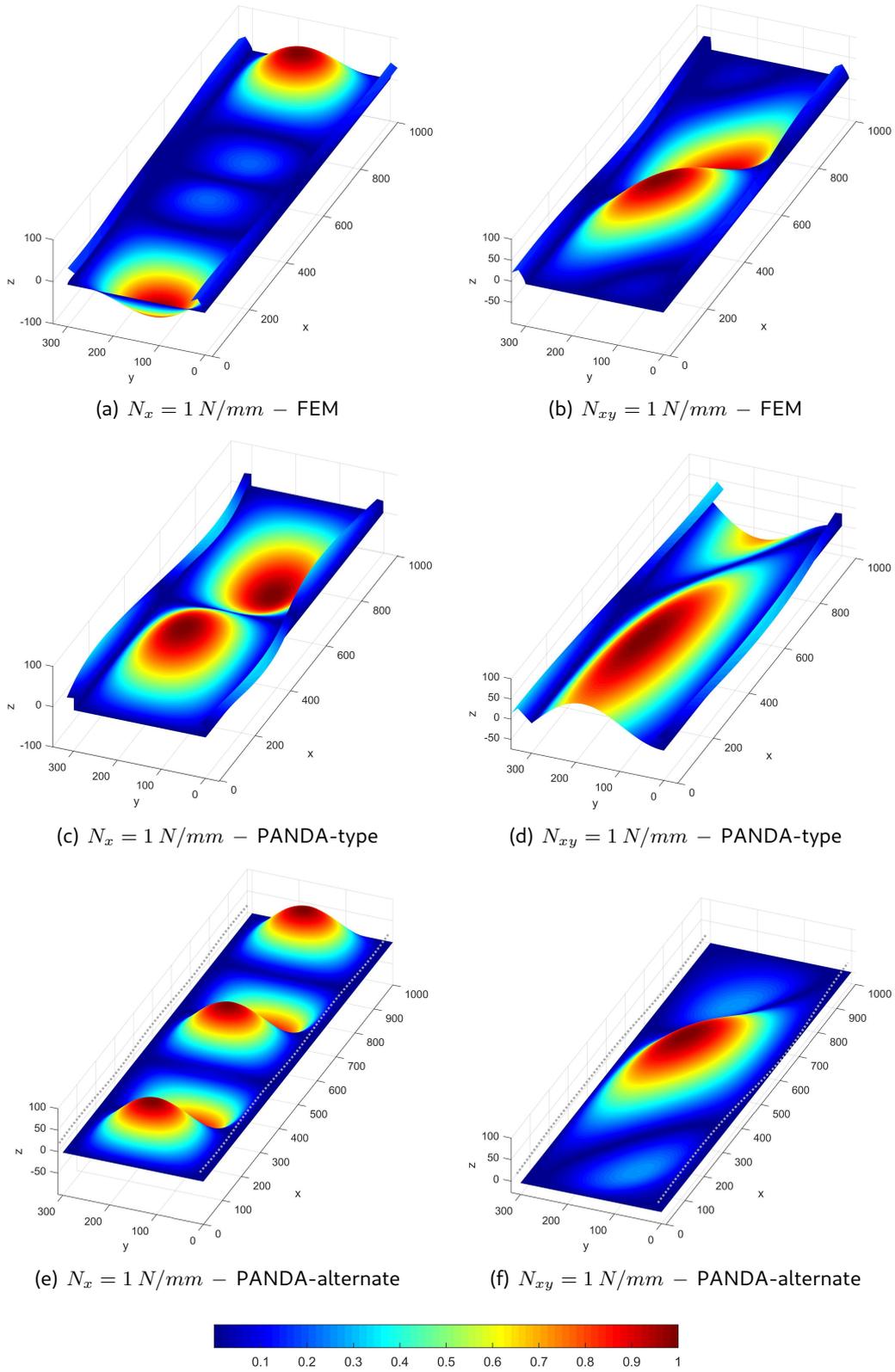
Per concludere, nelle figure inerenti alle forme modali dell'irrigidimento I -type (figura 5.5 e 5.6), J -type (figura 5.7 e 5.8) e T -type (figura 5.9 e 5.10) sono messe in risalto tutte le differenze che si hanno tra i vari modelli:

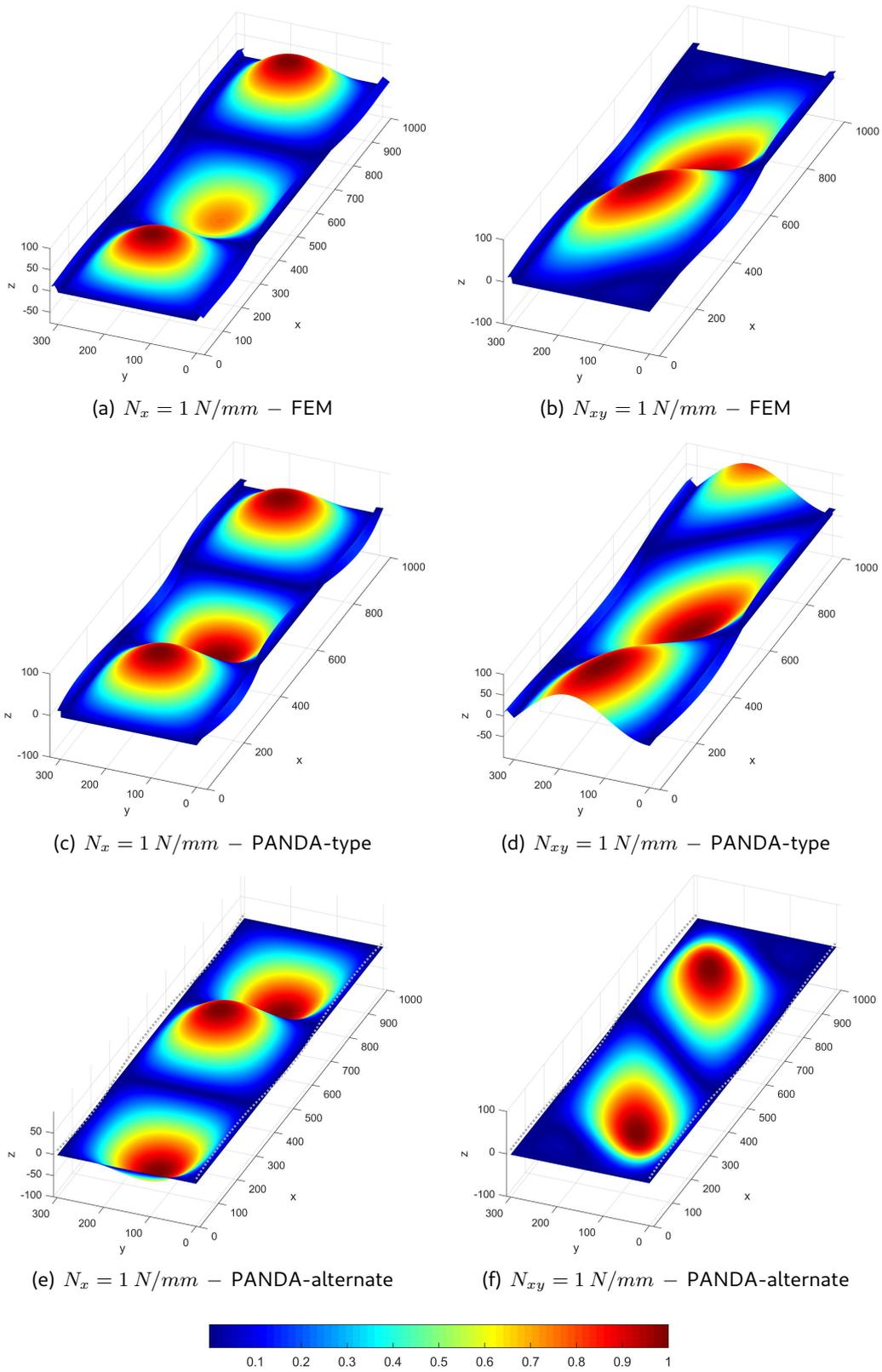
- Il modello FEM include effetti tridimensionali che negli altri due sono trascurati. Questo aspetto è particolarmente visibile per le sezioni J -type e T -type quando il parametro geometrico d diventa rilevante ($d = 15\text{ mm}$)
- Il modello PANDA-type riesce a modellizzare gli irrigidimenti come piastre, ma non sempre è in grado di rispettare le condizioni al contorno geometriche su due lati opposti (in questo caso quelli paralleli all'asse y). Quest'ultimo effetto è visibile nel caso di carico con solo taglio nel piano N_{xy} .
- Il modello PANDA-alternate rispetta sempre le condizioni al contorno geometriche, ma l'irrigidimento è modellizzato come un elemento monodimensionale.

Figure 5.5: Irrigidimento T -type con $d = 7.5 \text{ mm}$

Figure 5.6: Irrigidimento T -type con $d = 22.5 \text{ mm}$

Figure 5.7: Irrigidimento J -type con $d = 7.5 \text{ mm}$

Figure 5.8: Irrigidimento J -type con $d = 15 \text{ mm}$

Figure 5.9: Irrigidimento T -type con $d = 7.5 \text{ mm}$

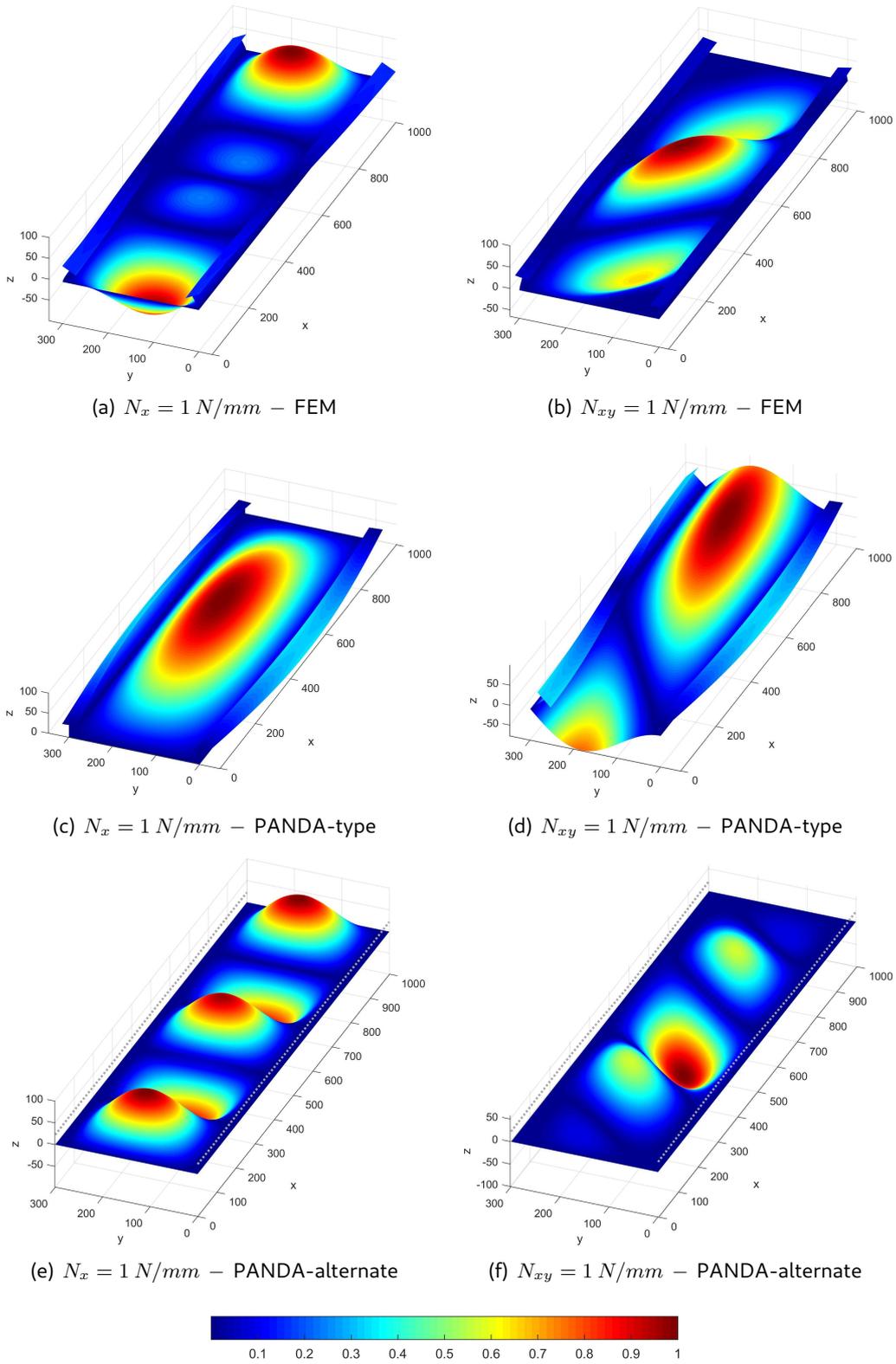


Figure 5.10: Irrigidimento T -type con $d = 15 \text{ mm}$

6 | Instabilità torsionale dei soli irrigidimenti

Nel seguito si andrà a valutare l'instabilità torsionale degli irrigidimenti senza la partecipazione dello skin. Facendo riferimento all'articolo [2] si entrerà nel dettaglio dei punti 7, 8 e 9 della tabella 1. In questo caso PANDA fa due distinzioni:

1. **Rolling of stiffeners** – questo modo di buckling prevede che la sezione trasversale dell'irrigidimento (stringer o ring) vada in instabilità con una o più semi-onde lungo la propria lunghezza, mentre lo skin non si deforma. Questo tipo di instabilità relativa ai ring in genere, nel settore dei sottomarini, è detta anche "frame tripping";
2. **Axisymmetric rolling of rings** – questo tipo di instabilità è simile al precedente ad eccezione del fatto che il ring non presenta semi-onde lungo la direzione circonferenziale.

Nel seguito, in un primo momento, verrà posta l'attenzione sul modello presente nel codice PANDA2, che in questo caso è solamente quello che rientra nel codice originale PANDA, mostrando le formule analitiche utilizzate. Queste sono poi implementate in MATLAB per ottenere i risultati sul modello analitico.

Successivamente verrà presentato il modello PATRAN-NASTRAN, ponendo l'attenzione sui vincoli applicati e il metodo di caricamento della struttura.

Infine verranno messi a confronto i risultati ottenuti, da modello analitico e numerico, in modo da quantificarne lo scostamento percentuale, il tutto sfruttando tre tipologie di irrigidimento: *T*-type, *J*-type e *I*-type.

6.1 Modello PANDA-type

Questo tipo di analisi è limitato alle sole geometrie di irrigidimento *T*-type e *J*-type, mentre quella *I*-type è un caso particolare di queste ultime due. Il modello prevede che il web sia trattato come un anello flessibile (un particolare tipo di shell) e la flangia come uno shell cilindrico molto corto.

Nella figura 6.1 è mostrato il sistema di coordinate utilizzato e le varie grandezze geometriche in gioco. La curvatura R è presente solo nel caso di ring.

Si faccia particolare attenzione al sistema di riferimento, in cui, a differenza dai capitoli precedenti, si è assunta y come coordinata longitudinale, mentre si ha x come coordinata trasversale sul web e s quella sulla possibile flangia.

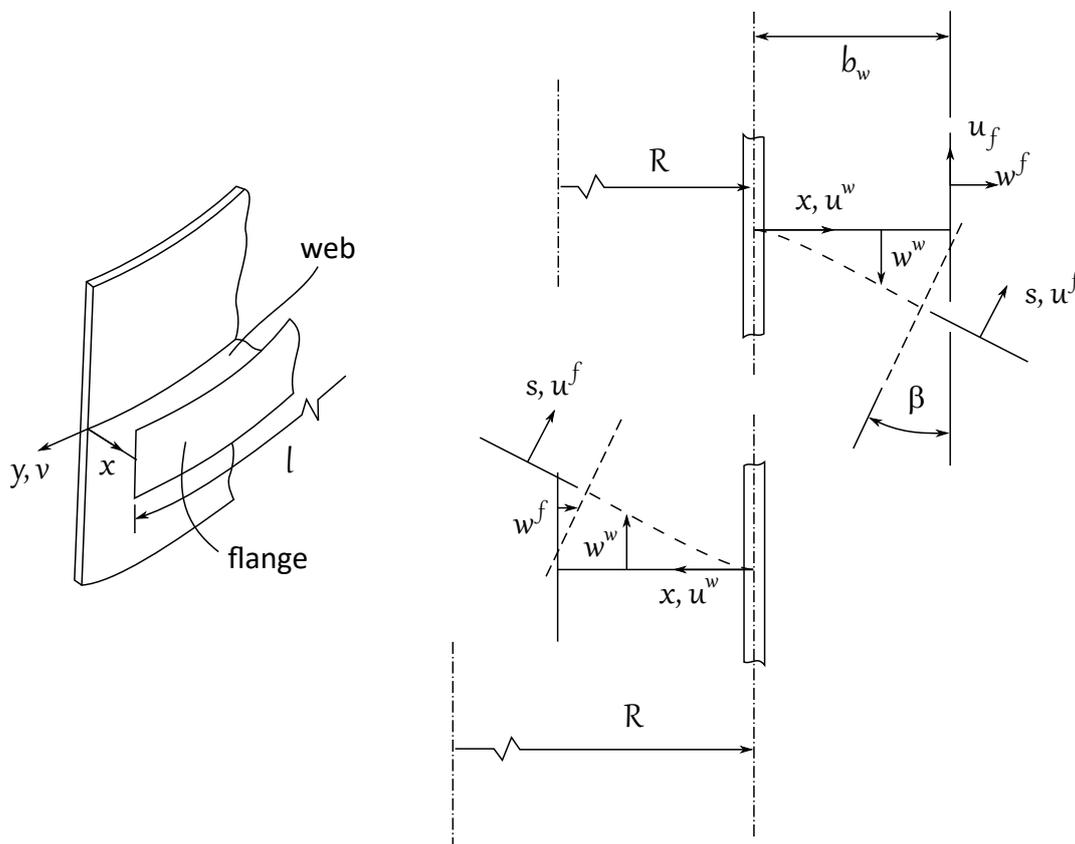


Figure 6.1: sistema di riferimento e campo di spostamenti per l'instabilità torsionale dell'irrigidimento senza partecipazione dello skin

6.1.1 Campo di spostamenti e deformazioni

In questo contesto si segue una logica un po' diversa dagli altri casi analizzati fino a questo punto, si fa ora una distinzione tra spostamenti e deformazioni in pre-buckling "0" e in buckling "e".

Per ricavare i campi prima citati vengono fatte le seguenti **ipotesi**:

- **Prebuckling** – si assume una deformazione uniforme su web e flangia in ogni segmento i -esimo:

$$\varepsilon_y^0 = \varepsilon_{y_i}^0 = N_i^0 / A_{22_i} \quad (6.1)$$

- **Buckling** – sia per il web che per la flangia si assume che le deformazioni lungo la direzione trasversale al carico e quella nel piano, in condizioni di instabilità, siano nulle. Inoltre ci si aspetta un comportamento sinusoidale lungo la direzione longitudinale e senza semi-onde lungo quella trasversale.

Quanto detto può essere riassunto come segue, per il web

$$\begin{aligned} w_b^W(x, y) &= \left[Cx^2 + Dx^2 \left(1 - \frac{x}{b_w} \right) \right] \sin \left(\frac{\bar{n}\pi y}{l} \right) \\ \varepsilon_x^b &= 0 \\ \varepsilon_{xy}^b &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

e per la flangia

$$\begin{aligned} w_b^f(s, y) &= u_b^w(x = b_w, y) + s\beta \sin \left(\frac{\bar{n}\pi y}{l} \right) \\ u_b^f(s, y) &= \mp w_b^w(x = b_w, y) = u_b^f(y) \\ \varepsilon_x^b &= 0 \\ \varepsilon_{xy}^b &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

dove con \pm o \mp si vuole differenziare il comportamento di un irrigidimento esterno rispetto ad uno interno. Il primo con il segno in alto e il secondo con quello in basso.

Il **campo di deformazione** in regime di buckling, che è utile per ricavare quello relativo agli spostamenti, è definito dalle relazioni spostamenti-deformazioni di Novoshilov-Sanders (per semplicità si trascura l'apice "b"). Per il web si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u' + \frac{w'^2 + \gamma^2}{2} = 0 \\ \varepsilon_y &= \dot{v} \pm \frac{u}{r} + \frac{\psi^2 + \gamma^2}{2} \\ \varepsilon_{xy} &= \dot{u} + r \left(\frac{v}{r} \right)' + w' \dot{w} = 0 \\ k_x &= w'' \\ k_y &= \ddot{w} \pm \frac{w'}{r} \\ 2k_{xy} &= 2 \left(-w' \dot{v} \pm \frac{\dot{w}}{r} \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

dove

$$\begin{aligned} \psi &= \dot{w} \\ \gamma &= \dot{u} - v' \mp \frac{v}{r} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} (') &= \frac{\partial(\)}{\partial x} \\ (\dot{\) } &= \frac{\partial(\)}{\partial y} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Invece, per la *flangia*

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_s &= 0 \\
 \varepsilon_y &= \dot{v} + \frac{w}{R_f} + \frac{\psi^2 + \gamma^2}{2} \\
 \varepsilon_{sy} &= \dot{u} + r \left(\frac{v}{r} \right)' + w' \left(\dot{w} - \frac{v}{R_f} \right) = 0 \\
 k_s &= w'' \\
 k_y &= \ddot{w} - \frac{\dot{v}}{R_f} \\
 2k_{sy} &= 2 \left(-w' + \frac{v'}{R_f} \right)
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

dove

$$\begin{aligned}
 \psi &= \dot{w} & (\cdot)' &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} \\
 \gamma &= \frac{\dot{u} - v'}{2} & (\cdot) &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial y}
 \end{aligned} \quad \text{e} \quad R_f = R \pm b_w \tag{6.7}$$

A questo punto è possibile determinare il **campo di spostamenti**. Per farlo si parte dal campo delle deformazioni prima indicato e dalle ipotesi in gioco. Da ciò si ottiene un sistema di equazioni differenziali non lineare, che opportunamente risolto permette di ricavare le componenti di spostamento mancanti.

Per quanto riguarda il *web* si ha:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 0 \\ \varepsilon_{xy} = 0 \\ w^w \text{ dato} \end{cases} \tag{6.8}$$

da cui, dopo opportune manipolazioni, si ottiene

$$\begin{aligned}
 u^w &= \left[-2(C+D)^2 \frac{x^3}{3} + 3(C+D)D \frac{x^4}{2b_w} - 9D^2 \frac{x^5}{10b_w^2} \right] \sin^2 \left(\frac{\bar{n}\pi y}{l} \right) \\
 v^w &= -\frac{\bar{n}\pi}{l} \left[(C+D)^2 \frac{x^4}{6} - 2(C+D)D \frac{x^5}{5b_w} + D^2 \frac{x^6}{5b_w^2} \right] \sin \left(\frac{\bar{n}\pi y}{l} \right) \cos \left(\frac{\bar{n}\pi y}{l} \right)
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

In maniera analoga, per la *flangia* si ha:

$$\begin{cases} \varepsilon_{sy} = 0 \\ u^f \text{ dato} \\ w^f \text{ dato} \end{cases} \tag{6.10}$$

e risolvendo si ottiene

$$v^f = \pm \frac{\bar{n}\pi}{l} C b_w^2 s \cos \left(\frac{\bar{n}\pi y}{l} \right) + v^w(x = b_w) \tag{6.11}$$

Oss: In queste espressioni compaiono le costanti di combinazione C e D , inoltre si deve fare particolare attenzione che, a differenza dei capitoli precedenti, questa combinazione presenta un ordine superiore al primo.

6.1.2 Energia potenziale totale

Nell'ottica assunta in questo capitolo il **potenziale totale** risulta uguale alla sola **energia di deformazione elastica** e quest'ultima si presenta nella forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_{y=0}^l \left(\sum_{i=1}^N \int_{\bar{y}_i=0}^{b_i} (\{\varepsilon_{pre}\} + \{\varepsilon^b\})^T [C^i] (\{\varepsilon_{pre}\} + \{\varepsilon^b\}) d\bar{y}_i \right) dy \quad (6.12)$$

dove la coordinata trasversale al segmento i -esimo risulta essere

$$\bar{y}_i = \begin{cases} x, & \text{per il web} \\ s, & \text{per la flangia} \end{cases} \quad (6.13)$$

e i campi di deformazione in pre-buckling e buckling

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{pre}\} &= [0 \quad \varepsilon_y^0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \{\varepsilon^b\} &= [0 \quad \varepsilon_y^0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (6.14)$$

Svolgendo l'integrazione, trascurando i termini di ordine superiore, si ottengono i contributi di energia di deformazione elastica per il *web*:

$$U^{web} = \{u\}^T [U^{web}] \{u\} \quad \text{con} \quad [U^{web}] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}^{web} \quad \text{e} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

dove

$$\begin{aligned} U_{11}^{web} &= \frac{l}{4} (p_1 + p_2 + 4C_{44}b_w + q_1 + q_2 + 4q_3 - s_1 + s_2) \\ U_{12}^{web} &= U_{21}^{web} = \frac{l}{8} \left(\frac{p_1}{5} + \frac{p_2}{3} - 4C_{44}b_w + \frac{q_1}{3} - q_3 + s_1 - s_2 \right) \\ U_{22}^{web} &= \frac{l}{4} \left(\frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{21} + 4C_{44}b_w + \frac{q_1}{21} + 2\frac{q_3}{5} + \frac{s_1}{5} + \frac{s_2}{4} \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

con

$$\begin{aligned} r_{avg} &= \frac{R + R_f}{2} & q_1 &= b_w^5 \frac{1}{5} \left(C_{55}n^4 + 4C_{66} \frac{n^2}{r_{avg}^2} \right) \\ n &= \frac{\bar{n}\pi}{l} & q_2 &= \mp b_w^4 n^2 (C_{55} + 4C_{66}) \frac{1}{r_{avg}} \\ p_1 &= \mp N_i^0 \frac{b_w^4}{(3r_{avg})} & q_3 &= b_w^3 \frac{1}{2} \left(\frac{C_{55}}{r_{avg}^2} + 4C_{66}n^2 \right) \\ p_2 &= n^2 N_i^0 \frac{b_w^5}{5} & s_1 &= 4C_{45}n^2 \frac{b_w^3}{3} \\ & & s_2 &= \pm 4C_{45} \frac{b_w^2}{r_{avg}} \end{aligned} \quad (6.17)$$

e l'energia di deformazione elastica per la *flangia*

$$U^f = \{u\}^T [U^f] \{u\} \quad \text{con} \quad [U^f] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}^f \quad \text{e} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

dove

$$\begin{aligned}
 U_{11}^f &= \frac{l}{4}[f_1 c_2 + f_2 c_3 + f_3 c_4^2 + c_5(2+e)^2] \\
 U_{12}^f &= U_{21}^f = \frac{l}{8}[-f_1 c_6 - f_3 2e c_4 - 2(2+e)c_5 + c_7] \\
 U_{22}^f &= \frac{l}{8}(f_1 c_1 + f_3 e^2 + c_5 - 4c_7)
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

con

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \sum_{i=1}^N N_i^0 \frac{b_i^3}{3} & c_1 &= n^2 b_w^2 \\
 f_2 &= \sum_{i=1}^N N_i^0 b_i & c_2 &= c_1(2+e)^2 \\
 f_3 &= \sum_{i=1}^N C_{22} \frac{b_i^3}{3} & c_3 &= c_1 b_w^2 \mp 4 \frac{b_w^3}{3R_f} \\
 f_4 &= \sum_{i=1}^N C_{55} \frac{b_i^3}{3} & c_4 &= c_1 + 2e \\
 f_5 &= \sum_{i=1}^N C_{66} b_i & c_5 &= c_1(n^2 f_4 + 4f_5) \\
 i &\neq \text{web} & c_6 &= c_1 2(2+e) \\
 e &= \mp \frac{b_w}{R_f} & c_7 &= \pm f_2 \frac{b_w^3}{3R_f}
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Al fine di ricadere nella solita notazione utilizzata nei capitoli precedenti, è inoltre possibile suddividere il contributo energetico in due parti, quello relativo ai carichi in gioco, $[B]$, e quello indipendente da questi, $[A]$:

$$\Pi = \mathcal{U}^{web} + \mathcal{U}^f = \{u\}^T [U] \{u\} = \{u\}^T ([A] - [B_{pre}] - \lambda [B_e]) \{u\} \tag{6.21}$$

dove, come visto in precedenza, il carico in gioco risulta composto da una parte relativa al pre-buckling e l'altra in buckling dipendente linearmente dal fattore di carico critico λ :

$$N_i^0 = N_{i_{pre}}^0 + \lambda N_{i_e}^0 \quad \Rightarrow \quad [B] = [B_{pre}] - \lambda [B_e] \tag{6.22}$$

Oss: nonostante la terminologia usata possa indurre confusione, N_i^0 , quindi la componente "pre" ed "e", rientra sia nella componente di deformazione di pre-buckling che quella di buckling.

6.1.3 Determinazione dell'autovalore

La soluzione al problema di stabilità in questione è possibile ottenerla uguagliando a zero la variazione prima del potenziale totale rispetto a $\{u\}$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{u\}} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad ([A] - [B_{pre}] - \lambda [B_e]) \{u\} = \{0\} \tag{6.23}$$

da cui si ottiene il classico problema agli autovalori:

$$\det([A] - [B_{pre}] - \lambda [B_e]) = 0 \tag{6.24}$$

Questa non è altro che un'equazione algebrica del secondo ordine in λ da cui è possibile determinare i due autovalori che dipendono dal parametro \bar{n}

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(\bar{n}) \quad (6.25)$$

Il fattore di carico critico di interesse si ricava trovando il minimo rispetto a questa incognita e dei due se ne prende il più piccolo

$$\lambda_{min} = \min(\min(\lambda_1(\bar{n})); \min(\lambda_2(\bar{n}))) \implies \bar{n}_{\lambda_{min}} \quad (6.26)$$

Noti λ_{min} , $\bar{n}_{\lambda_{min}}$ e gli autovettori, facilmente calcolabili, sono note tutte le quantità per rappresentare le forme modali.

6.2 Modello PATRAN-NASTRAN

Nel seguito vengono illustrati tutti i passi utili per definire i modelli numerici NASTRAN, che verranno poi utilizzati per ottenere i risultati da confrontare con quelli analitici del modello PANDA2.

Nel seguito verrà definita la geometria, il materiale e la laminazione utilizzate, dati utili per tutti e due i modelli: quello numerico e quello analitico prima presentato.

Riguardo il modello analitico, come fatto nei capitoli precedenti, si è fatto ricorso a MATLAB per implementare le formule presentate.

6.2.1 Geometria, materiale-laminazione ed elementi

Il primo passo per creare il modello FEM è quello di definire la **geometria** in gioco. Riguardo l'analisi di rolling, PANDA2 permette di analizzare solo irrigidimenti con sezioni *T*, *J* e *I*-type. Al fine di eseguire un'analisi più strutturata e differenziata, nel seguito si adottano irrigidimenti con dimensioni come quelle mostrate nella figura 6.2. Il fine è quello di eseguire più analisi, facendo variare i parametri geometrici d e b_f , in modo da valutare l'influenza della geometria sui risultati.

La lunghezza degli irrigidimenti è fissa e pari a 1000 mm.

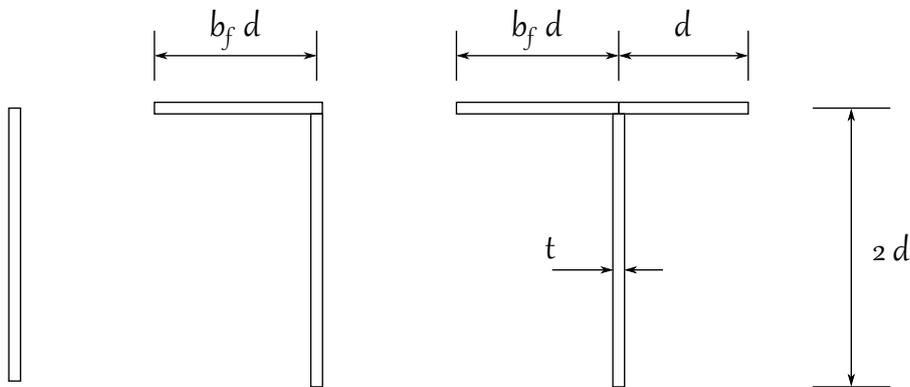


Figure 6.2: Parametri geometrici degli irrigidimenti *T*, *J* e *I*-type.

Una volta definita la geometria è necessario specificare il **materiale** e la **laminazione** per ogni segmento dell'irrigidimento.

Come sarà chiaro dai risultati, uno tra gli obiettivi di questa sezione è quello di dover indagare nello specifico cosa succede al variare dei coefficienti \mathcal{A}_{16} e \mathcal{A}_{16} della matrice di rigidezza del monostrato equivalente (stessa cosa fatta nel capitolo relativo al crippling). Quindi, come materiale, si è fatto ricorso allo stesso utilizzato nei capitoli precedenti, le cui caratteristiche meccaniche possono essere richiamate come segue:

$$\begin{aligned} E_1 &= 48000(1 + \epsilon) [MPa]; & E_2 &= 48000(1 - \epsilon) [MPa]; \\ G_{12} &= 20330 & \nu &= 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

dove ϵ è il solito parametro utilizzato per modificare le proprietà meccaniche del laminato. Per la laminazione, invece, si è fatto ricorso a un laminato a strati identici simmetrico uguale per ogni parte del pannello (skin, piede e web)

$$[45 \quad -45 \quad 90 \quad 0 \quad 0 \quad 90 \quad -45 \quad 45] \quad (6.28)$$

Come dimostrato nel primo capitolo questa combinazione di materiale e laminazione permette di ottenere una serie di monostrati equivalenti con $\mathcal{A}_{16} = \mathcal{A}_{16}$ variabili con ϵ .

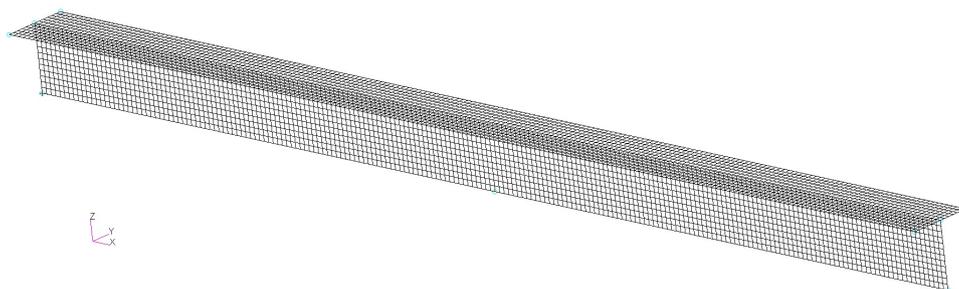


Figure 6.3: Suddivisione in elementi dell'irrigidimento *T*-type.

Il passo successivo è suddividere la geometria in **elementi** CQUAD4 di opportune dimensioni, il risultato è mostrato a titolo di esempio in figura 6.3 (per semplicità si fa riferimento alla sezione *T*-type che è quella che in qualche modo ingloba tutte e tre).

Ad ogni elemento è poi stata assegnata una proprietà *shell* con l'opzione *thin* in cui è indicata la laminazione opportuna, che in questo caso risulta identica per tutti i segmenti.

6.2.2 Vincoli, carichi e tipo di analisi

Una volta definita la geometria degli elementi e le loro proprietà, il passo successivo è specificare i **vincoli** in gioco. Facendo riferimento alla figura 6.4 si ha:

- Il tipo di instabilità in questione è quella torsionale dell'irrigidimento, **senza la partecipazione dello skin**. Questo vuol dire che in buckling l'unica parte che si deforma è l'irrigidimento. Per simulare questa condizione è necessario andare a vincolare la linea di collegamento con lo skin bloccando la traslazione lungo le direzioni z e y e la rotazione lungo l'asse x ;

- Continuità di rotazione all'interfaccia del web e della dell'irrigidimento.
In PANDA2 la porzione di pannello presa sotto esame presenta una lunghezza pari alla distanza tra due ring. In genere ognuno di questi è l'interfaccia tra due porzioni di pannello adiacenti. Quindi, è necessario garantire la continuità di spostamenti e rotazioni nel web e nella flangia in questo punto. Per fare ciò, nei nodi che ricadono in questa zona, sono state bloccate, per il web, le rotazioni attorno l'asse z (ovvero $\phi_x = 0$) e, per la flangia, quelle attorno l'asse y (ovvero $\phi_y = 0$);
- Spostamento lungo x – Per bloccare i restanti gradi di libertà del modello non vincolati, la traslazione lungo x , si è scelto, per questioni di simmetria, di bloccare questo spostamento nel nodo che ricade sulla metà lunghezza del pannello e sulla linea di giunzione tra skin e web.

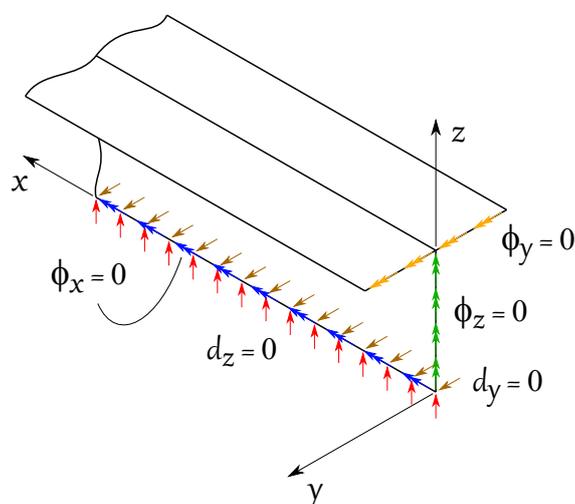


Figure 6.4: Vincoli applicati al modello – traslazioni e rotazioni bloccate.

Il passo finale per definire il modello è specificare i **carichi** in gioco. In PANDA gli irrigidimenti sono carichi da sola componente assiale N_x che genera sola deformazione assiale ($N_x > 0$ corrisponde ad una situazione di trazione).

Come fatto per il caso del crippling, per simulare quanto appena detto, l'irrigidimento è caricato in modo indiretto, ovvero si applica a tutti i nodi della sezione trasversale di estremità uno spostamento di compressione definito. Per risalire al carico applicato si agisce come illustrato nel capitolo 2.

A questo punto tutto è pronto per impostare ed eseguire l'**analisi** (Sol 105).

A tal proposito bisogna fare un'osservazione. Come già affermato in precedenza, nei metodi analitici esiste una divisione netta tra le varie tipologie di buckling, e questo è possibile proprio per via dell'approccio utilizzato per svolgere un determinato calcolo (si fanno determinate ipotesi sul campo di spostamenti e di deformazioni).

Nel FEM questa distinzione non è possibile farla sempre, nella fattispecie, con il modello analizzato non è possibile scindere il rolling dal crippling dell'irrigidimento (vedi figura 6.5). Ovvero tra i risultati dell'analisi si avranno diversi valori di carico critico ed ognuno potrà appartenere ad uno dei due tipi di instabilità prima indicati.

Nella presente sezione, l'obiettivo del modello FEM è quello di indagare l'instabilità globale torsionale dell'irrigidimento, ovvero il rolling senza la partecipazione dello skin, quindi vengono scartati tutti quei valori di carico critico che non appartengono a questo tipo di instabilità.

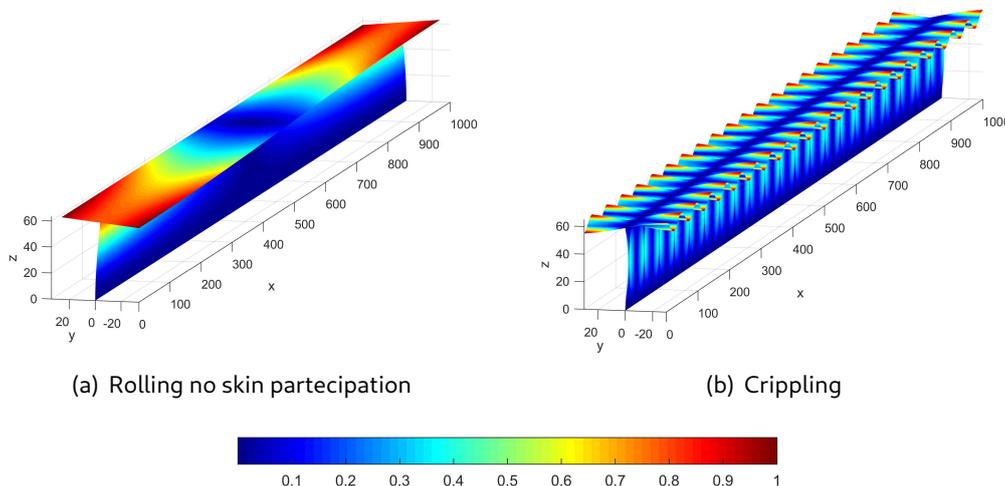


Figure 6.5: Possibili tipi di buckling che si possono osservare con il modello NASTRAN.

6.3 Risultati

6.3.1 Variazione del parametro d mantenendo inalterato b_f e ϵ

Nella tabella 6.1 sono riassunti i carichi critici, ottenuti per le tre geometrie, al variare del parametro d e mantenendo inalterato b_f e ϵ (il primo pari a 1 e il secondo 0).

	d [mm]	NASTRAN		PANDA				$\epsilon\%$
		$N_{x_{cr}}$ [N]	\bar{n}	$N_{x_{cr}}$ [N]	\bar{n}	C	D	
T -type	6	58752.0	13	60223.7	13	-1	-0.56389	-2.50
	15	52247.0	3	53313.5	3	-1	-0.47133	-2.04
	30	50883.6	1	51936.2	1	-1	-0.44745	-2.07
J -type	6	45903.2	17	54263.5	15	-1	-0.57585	-18.21
	15	42676.0	5	48043.1	4	-1	-0.50442	-12.58
	30	47205.2	1	54067.1	1	-1	-0.48363	-14.54
I -type	6	19489.1	52	20393.7	52	-0.99387	-1	-4.64
	15	7795.4	21	8158.72	21	-0.98811	-1	-4.66
	30	3933.9	11	4083.04	10	-1	-0.98282	-3.79

Table 6.1: Influenza del parametro d sul carico critico.

Da questi si evince chiaramente che PANDA ha una corrispondenza ottima con alcuni risultati forniti dal FEM, infatti per gli irrigidimenti T -type l'errore si aggira intorno al 2%,

mentre per quanto riguarda *I*-type intorno al 4.5%. Valori che rientrano ampiamente nei limiti di errore previsti nelle fasi preliminari di un progetto. Stessa cosa non si può dire per l'irrigidimento *J*-type dove si riscontra un errore spropositato, che si aggira intorno al 15%.

Sulla base di questi risultati si può affermare che se dal punto di vista geometrico (presumibilmente in combinazione con la laminazione-materiale) la geometria risulta simmetrica, la teoria PANDA fornisce dei risultati soddisfacenti.

Quanto detto è valido a patto di rimanere entro determinati limiti. Infatti se si ipotizzando di avere una sezione *T*-type con la flangia simmetrica di lunghezza $d_f \cdot d$ (dove $d = 6mm$) si verifica ciò che è riassunto in tabella 6.2.

d_f	NASTRAN		PANDA				$\varepsilon_{\%}$
	N_{cr} [N]	\bar{n}	N_{cr} [N]	\bar{n}	C	D	
0	19489.1	52	20393.7	52	-0.99387	-1	-4.641
1	58752.0	13	60223.7	13	-1	-0.56389	-2.505
1.5	74896.9	10	77763.9	9	-1	-0.35292	-3.828
3	25790.2	28	27973.3	31	-0.00215	1	-8.465

Table 6.2: Influenza della larghezza della flangia rispetto al web.

L'errore è contenuto fintanto che i coefficienti C e D risultano comparabili (nel quarto caso l'errore aumenta di tre volte rispetto al secondo). Con l'autovalore C praticamente nullo i "confini" tra l'instabilità torsionale e quella locale diventano molto sottili e la validità del campo di spostamento utilizzato non sempre è verificata. A titolo illustrativo, nella figura 6.6 sono mostrate le forme modali del primo e dell'ultimo.

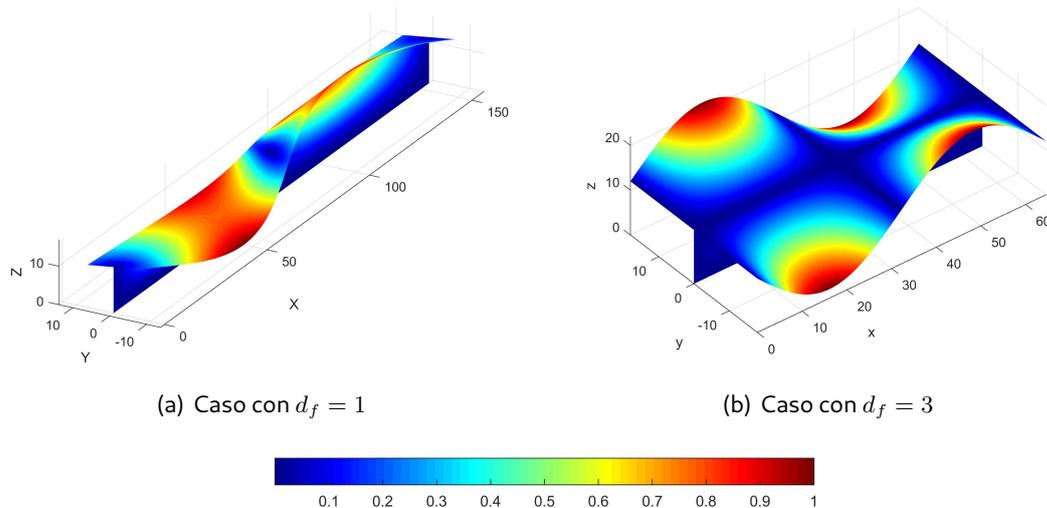


Figure 6.6: Influenza della larghezza della flangia rispetto al web – Magnitude translational displacements plot.

6.3.2 Variazione del parametro b_f mantenendo inalterato d e ϵ

Nel seguito si vuole approfondire l'aspetto legato alla simmetria, per cui si prenderanno in considerazione le sezioni T -type e J -type e si farà variare il parametro geometrico b_f mantenendo inalterati i parametri d e ϵ (il primo pari a $6mm$ e il secondo pari a 0).

I risultati del confronto, per i due casi citati, sono riassunti nella tabella 6.3 e mostrati in maniera grafica nella figura 6.7.

	b_f	NASTRAN		PANDA				$\epsilon_{\%}$
		$N_{x_{cr}}$ [N]	\bar{n}	$N_{x_{cr}}$ [N]	\bar{n}	C	D	
T -type	0	45903.2	17	54263.5	15	-1	-0.57585	-18.21
	0.5	48683.9	16	52509.4	15	-1	-0.62321	-7.86
	1	58752.0	13	60223.7	13	-1	-0.56389	-2.50
	1.5	68460.4	10	72033.8	11	-1	-0.40903	-5.22
	2	79373.0	6	78703.8	9	-1	-0.22038	0.84
	2.5	54826.7	11	78577.9	8	-1	0.009103	-43.32
	3	21839.6	30	28263.4	36	-0.00224	1	-29.41
J -type	0	19489.1	52	20393.7	52	-0.99387	-1	-4.64
	0.5	28440.3	29	31851.3	26	-1	-0.81022	-11.99
	1	45903.2	17	54263.5	15	-1	-0.57585	-18.21
	1.5	55034.9	13	68819.7	11	-1	-0.36214	-25.05
	2	62121.0	8	73024.3	9	-1	-0.14471	-17.55
	2.5	42056.0	11	69512.8	9	-1	0.32968	-65.29
	3	17670.3	30	21416.0	36	-0.00234	1	-21.20

Table 6.3: Influenza del parametro b_f sul carico critico

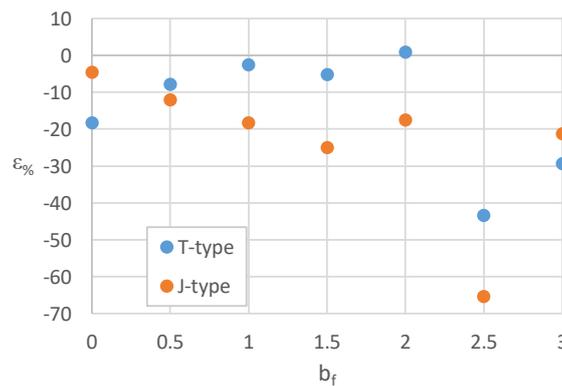


Figure 6.7: Influenza del parametro b_f sul carico critico. Instabilità nei risultati.

Per quanto riguarda le due sezioni, PANDA fornisce risultati sempre meno corrispondenti al FEM man mano che l'asimmetria diventa più marcata, ovvero:

- Per la geometria T -type b_f aumenta o diminuisce rispetto a 1;
- Per la geometria J -type b_f aumenta rispetto a 0.

Altro aspetto che emerge da questi dati è lo stesso già evidenziato in precedenza, ovvero, in prossimità delle situazioni in cui l'autovalore C diventa molto piccolo rispetto a D , si riscontra un'anomalia negli andamenti dei risultati.

L'errore così marcato, riscontrato per la sezione J -type e in generale per le situazioni asimmetriche, è dovuto al fatto che il campo di spostamenti, supposto nella formulazione analitica PANDA, non include qualche effetto tridimensionale che il FEM considera.

Questi effetti non sono particolarmente visibili né nel campo di spostamenti della sezione trasversale (si faccia riferimento alla figura 6.8), né nella componente $w_w(b_w, y)$ (figura 6.9(c)). Al contrario, se si va ad osservare la componente $u_w(b_w, y)$ e $v_w(b_w, y)$ (figure figura 6.9(a) e figura 6.9(b)), la situazione cambia (i grafici sono realizzati considerando l'effettivo valore di \bar{n} del caso PANDA e NASTRAN):

- Riguardo $u_w(b_w, y)$ – PANDA prevede un andamento $\sin^2(\bar{n}y)$, mentre in NASTRAN questo presenta un andamento sinusoidale (si precisa che tra i due modelli, PANDA e NASTRAN, esiste uno sfasamento di $\pi/2$ legato proprio alla definizione dei vincoli del modello);
- Riguardo $v_w(b_w, y)$ – PANDA prevede un andamento $\sin(\bar{n}y) \cos(\bar{n}y)$ (o in modo equivalente $\sin(2\bar{n}y)$) mentre in NASTRAN questo risulta sinusoidale.

In conclusione, presumo che la forma di u_w lungo y , assunta in PANDA, imponga un "vincolo fittizio" che irrigidisce la struttura e questo porta ad avere dei carichi critici più alti rispetto ai risultati forniti da NASTRAN.

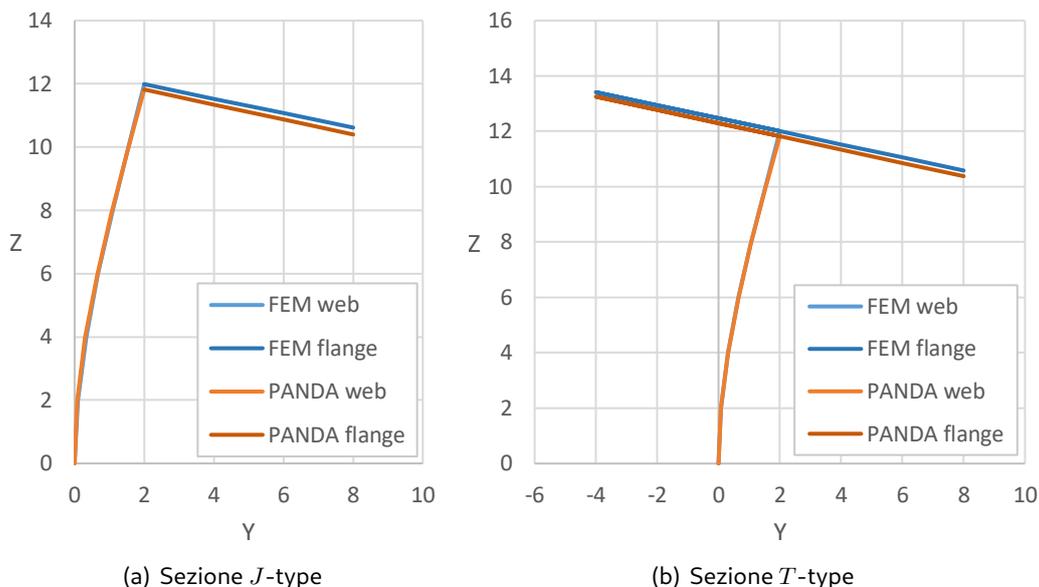
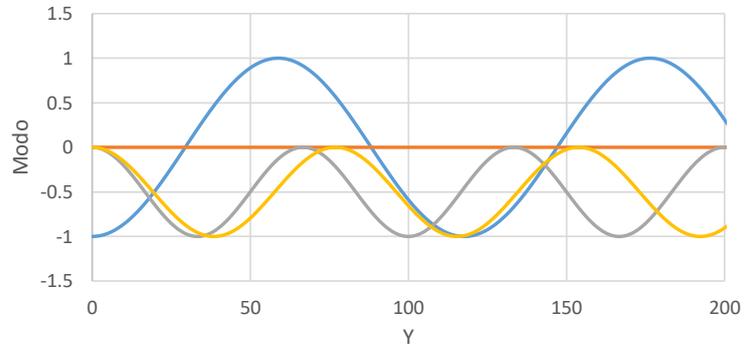
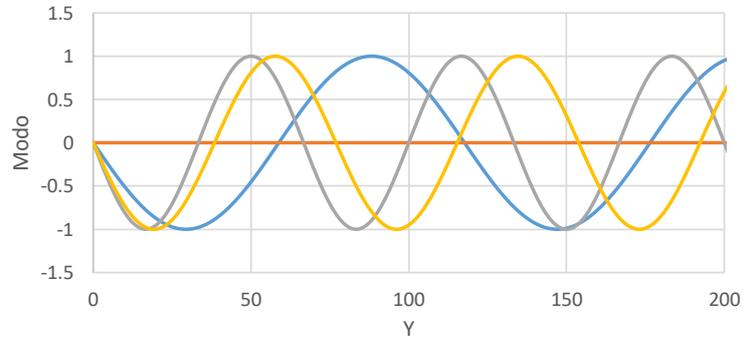


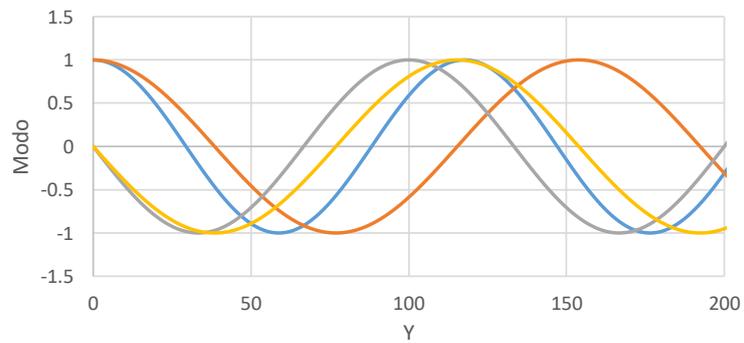
Figure 6.8: Differenza tra FEM e NASTRAN inerente al campo di spostamenti della sezione trasversale.



(a) Analisi PANDA-type – Sezione *T*-type



(b) Analisi NASTRAN – Sezione *T*-type



(c) Analisi PANDA-type – Sezione *J*-type



Figure 6.9: Confronto spostamenti

6.3.3 Variazione del parametro ϵ mantenendo inalterato d e b_f

Nel seguito, come fatto anche per il crippling, si va a valutare come varia il carico critico al variare del rapporto $\mathcal{A}_{16}/\mathcal{A}_{11}$ e che errore PANDA commette nel valutarlo considerando il materiale ortotropo in membrana e in flessione.

Prima di proseguire è necessario fare una premessa, ovvero se si è in una condizione geometrica in cui il carico critico relativo al rolling è molto vicino a quello inerente al crippling, la presenza di una laminazione non ortotropa ($\epsilon \neq 0$) porta, nel FEM, a delle forme modali in cui si riscontra una combinazione dei due modi. A tal proposito si faccia riferimento alla figura 6.10.

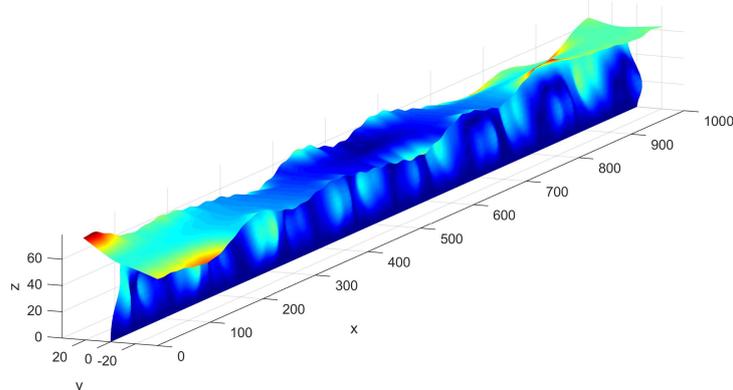


Figure 6.10: Sovrapposizione di rolling e crippling.

In questa situazione risulta molto complicato individuare il carico critico di rolling, soprattutto quando il numero delle semi-onde cresce. Quindi, per focalizzare l'attenzione solo sul rolling, si è deciso di eseguire le analisi per la sola dimensione $d = 6 \text{ mm}$.

I risultati delle analisi sono riassunti nella tabella 6.4.

ϵ	$\frac{\mathcal{A}_{16}}{\mathcal{A}_{11}}$	<i>T</i> -type			<i>J</i> -type			<i>I</i> -type			
		N_{cr}	$\epsilon\%$	$\frac{N_{cr}}{N_{cr1}}$	N_{cr}	$\epsilon\%$	$\frac{N_{cr}}{N_{cr1}}$	N_{cr}	$\epsilon\%$	$\frac{N_{cr}}{N_{cr1}}$	
0	0	58752.0	-2.50	1.0000	45903.2	-18.21	1.0000	19489.1	-4.64	1.0000	NASTRAN
0.2	0.0520	58851.9	-2.33	1.0017	45917.7	-18.18	1.0003	19257.3	-5.90	0.9881	
0.4	0.1040	58293.5	-3.31	0.9922	45412.1	-19.49	0.9893	18554.4	-9.91	0.9520	
0.6	0.1560	57032.1	-5.60	0.9707	44319.9	-22.44	0.9655	17326.1	-17.7	0.8890	
0.8	0.2080	54992.5	-9.51	0.9360	42608.0	-27.36	0.9282	15437.5	-32.1	0.7921	
1	0.2599	52051.8	-15.7	0.8860	40175.7	-35.07	0.8752	12490.8	-63.3	0.6409	
	N_{cr}	60223.67			54263.52			20393.69			PANDA

Table 6.4: Influenza del parametro ϵ sulla previsione del carico critico.

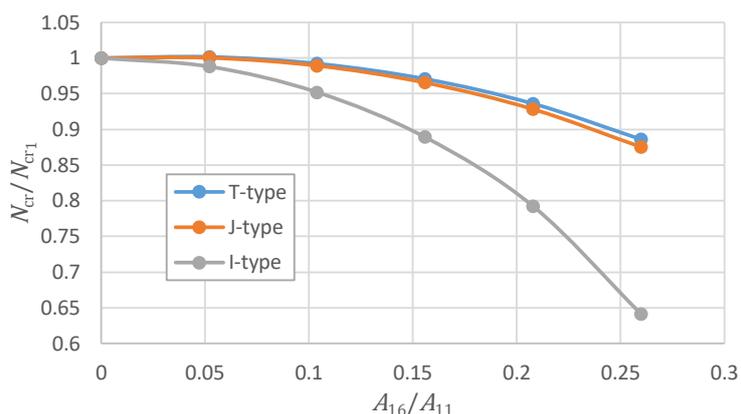
Da questi, come mostrato anche nelle figure 6.11, si nota che le sezioni *T*-type e *J*-type presentano una riduzione di carico critico con lo stesso andamento al variare di ϵ . Invece,

per la sezione I -type la situazione è nettamente diversa, infatti, si riscontra una riduzione di carico critico molto più marcata rispetto agli altri due casi.

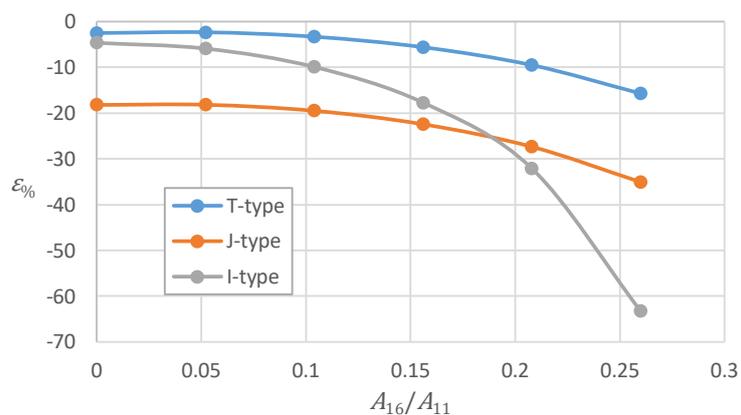
Sfruttando queste considerazioni si può dedurre che la presenza della flangia influisce in modo positivo sulla riduzione di carico critico, infatti, se ci si allontana dalla condizione di laminato equivalente ortotropo in membrana e in flessione, questa diminuzione è meno marcata.

Per quanto riguarda l'errore relativo rispetto a NASTRAN:

- La sezione T -type presenta un errore ridotto, inferiore al 10%, per un ampio intervallo di variazione di A_{16}/A_{11} . Questo dovuto all'influenza della flangia che determina una riduzione poco marcata del carico critico al variare di ϵ ;
- La sezione J -type presenta un andamento dell'errore analogo al caso precedente, ma per le questioni prima illustrate, risulta in modulo molto più alto del precedente;
- La sezione I -type mostra un errore contenuto nel caso ortotropo, ma il campo in cui questo rimane tale è più piccolo rispetto alla sezione T -type (per $|A_{16}/A_{11}| < 0.1$)



(a) Diminuzione del carico critico



(b) Errore commesso da PANDA2 rispetto a NASTRAN

Figure 6.11: Influenza di ϵ sul carico critico.

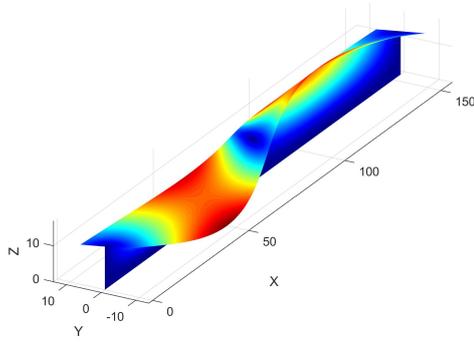
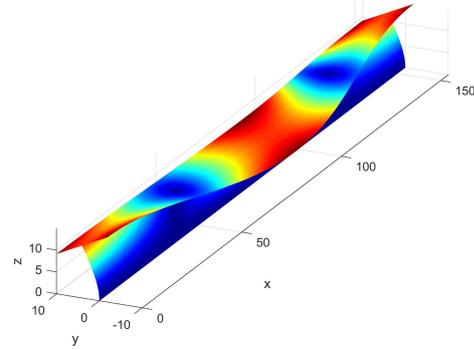
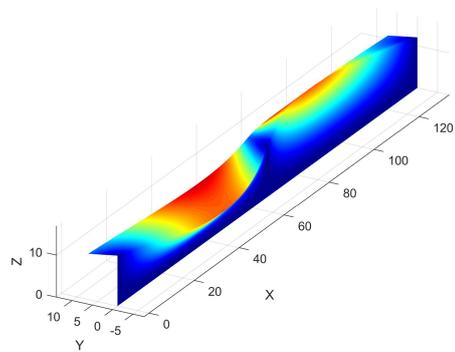
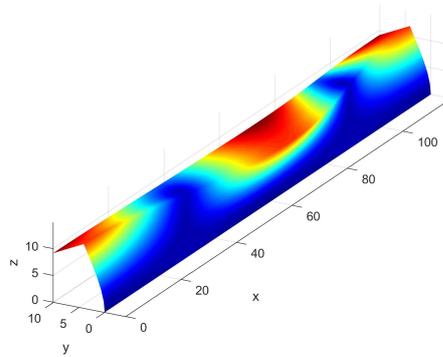
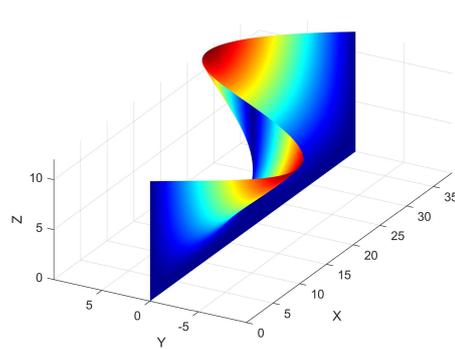
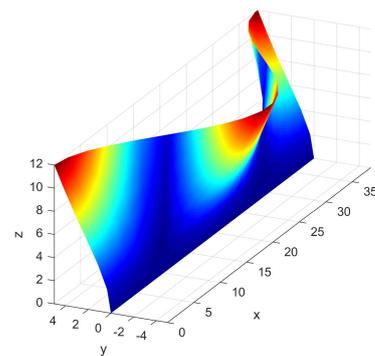
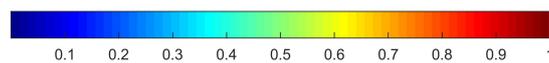
(a) Analisi PANDA-type – Sezione *T*-type(b) Analisi NASTRAN – Sezione *T*-type(c) Analisi PANDA-type – Sezione *J*-type(d) Analisi NASTRAN – Sezione *J*-type(e) Analisi PANDA-type – Sezione *I*-type(f) Analisi NASTRAN – Sezione *I*-type

Figure 6.12: Forme modali per gli irrigidimenti considerati con $d = 6 \text{ mm}$. Per i risultati NASTRAN si ha $\epsilon = 0$.

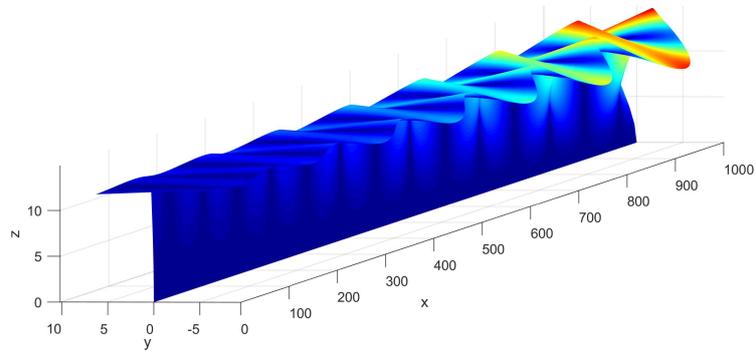
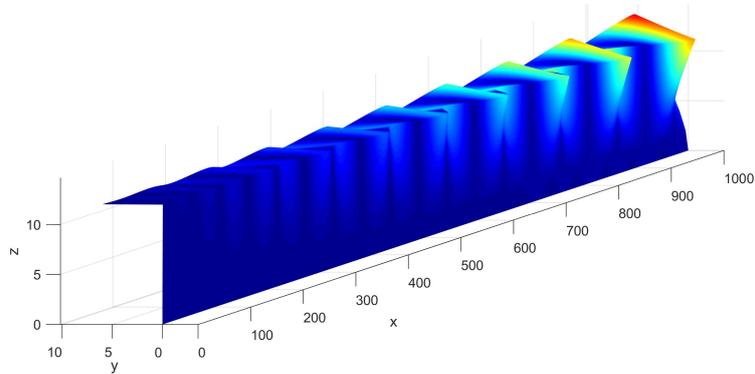
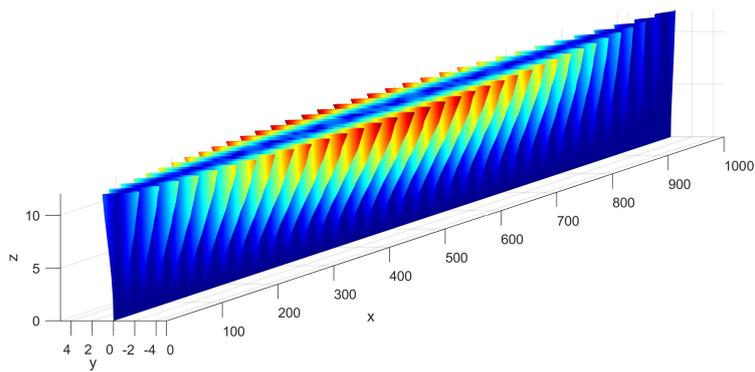
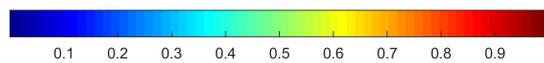
(a) Sezione *T*-type(b) Sezione *J*-type(c) Sezione *I*-type

Figure 6.13: Forme modali ottenute dal FEM per gli irrigidimenti considerati con $d = 6 \text{ mm}$ e $\epsilon = 1$.

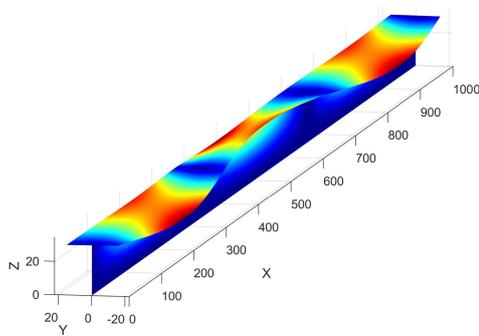
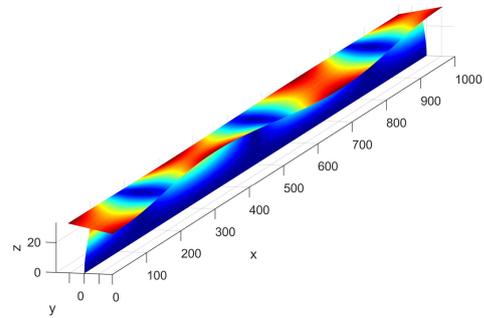
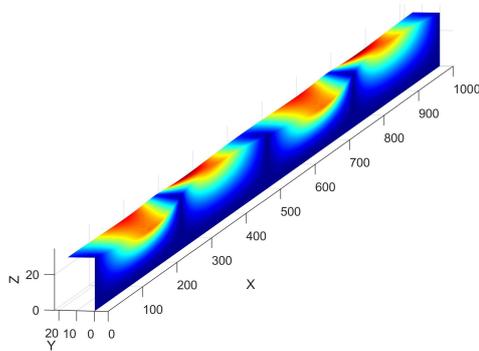
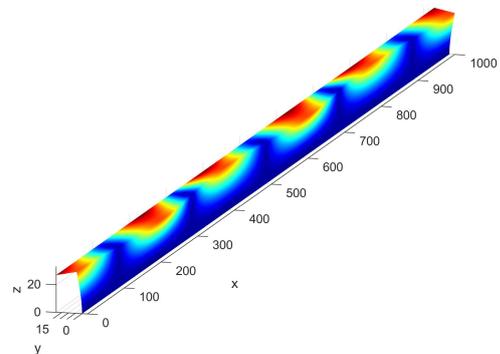
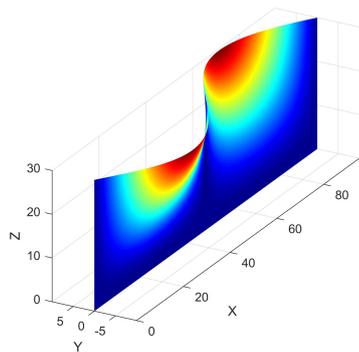
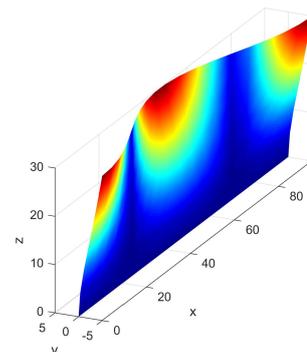
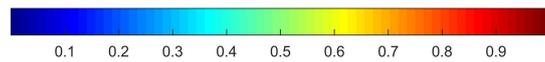
(a) Analisi PANDA-type – Sezione *T*-type(b) Analisi NASTRAN – Sezione *T*-type(c) Analisi PANDA-type – Sezione *J*-type(d) Analisi NASTRAN – Sezione *J*-type(e) Analisi PANDA-type – Sezione *I*-type(f) Analisi NASTRAN – Sezione *I*-type

Figure 6.14: Forme modali per gli irrigidimenti considerati con $d = 15 \text{ mm}$. Per i risultati NASTRAN si ha $\epsilon = 0$.

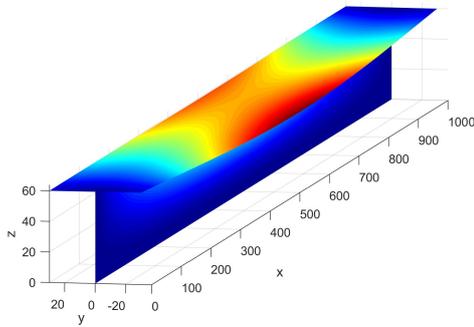
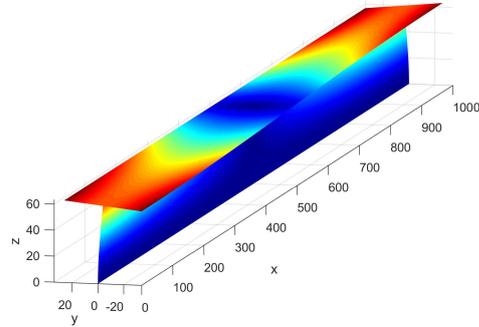
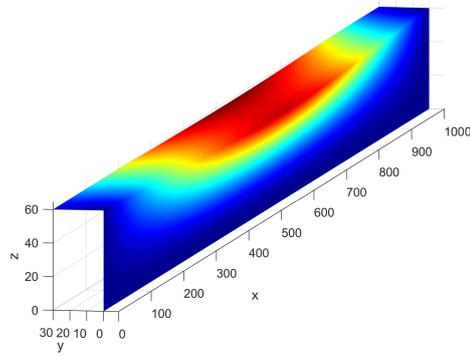
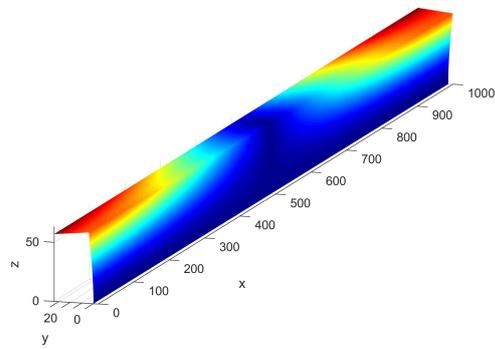
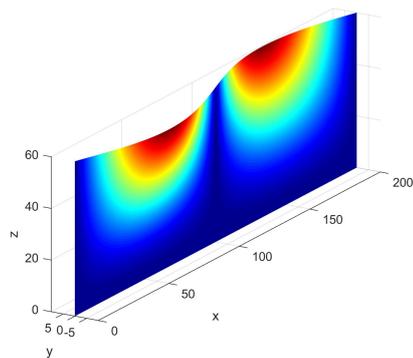
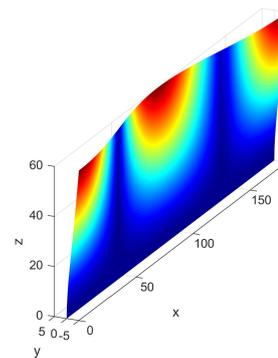
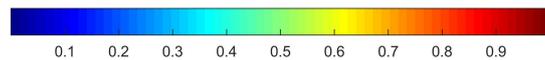
(a) Analisi PANDA-type – Sezione *T*-type(b) Analisi NASTRAN – Sezione *T*-type(c) Analisi PANDA-type – Sezione *J*-type(d) Analisi NASTRAN – Sezione *J*-type(e) Analisi PANDA-type – Sezione *I*-type(f) Analisi NASTRAN – Sezione *I*-type

Figure 6.15: Forme modali per gli irrigidimenti considerati con $d = 30 \text{ mm}$. Per i risultati NASTRAN si ha $\epsilon = 0$.

7 | Analisi non lineare

Tutto ciò che verrà presentato nel seguito è una normale estensione di quanto discusso da Koiter nella sua tesi di dottorato, *On the Stability of Elastic Equilibrium*. Per maggiori approfondimenti si faccia riferimento al capitolo 13 di [1] e all'articolo [4].

Secondo Koiter, il modo di instabilità locale dello skin cambia forma quando il pannello è nella fase di caricamento post-buckling locale: per carichi applicati leggermente al di sopra del carico di instabilità biforcuto corrispondente all'instabilità locale, la forma di post-buckling locale ricorda molto quella biforcuto locale. Tuttavia, vi è una piccola differenza di curvatura, nella direzione trasversale, y , nella porzione di pannello a metà strada tra due stringer adiacenti. In pratica, lo skin presenta una semi-onda tra i due stringer, ma questa risulta quasi piatta. Questa regione si sviluppa solo dopo che il carico applicato è leggermente al di sopra del carico di buckling biforcuto.

Koiter ipotizza che questa regione sia praticamente piatta e introduce un parametro per identificarne l'estensione. Nel modello PANDA2, come sarà discusso in seguito, si assume una forma diversa che varia lungo la larghezza dello skin.

PANDA2 attraverso il proprio modello non lineare permette di analizzare diversi aspetti

- Determinare le **tensioni massime** di trazione e compressione (apice "t" e "c"), sia quelle longitudinale che trasversali alle fibre (pedice "L" e "T"), e le tensioni massime a taglio che si presentano nel pannello

$$\sigma_L^t; \quad \sigma_L^c; \quad \sigma_T^t; \quad \sigma_T^c \quad \text{e} \quad \sigma_{TL} \quad (7.1)$$

- Determinare il **carico di popoff**.

Una volta risolto il problema non lineare, presentato in seguito, è possibile risalire alle risultanti di sollecitazione interna in ogni segmento. Quella utile per determinare il carico di popoff è la risultante trasversale, N_s , agente sul web (uno o due, in base al tipo di irrigidimento) che tende a separare l'irrigidimento dallo skin.

Il valore massimo ottenuto è poi confrontato con un carico limite (forza/lunghezza) impostato dall'utente. Questo è ottenuto per via sperimentale tramite peel test su opportuni provini come quelli mostrati in figura 7 dell'articolo [1].

- **Redistribuzione del carico** in campo post-buckling locale.

PANDA2, prima di calcolare i vari fattori di carico critico, distribuisce il carico esterno tra skin e irrigidimenti come visto nel capitolo 2. Se l'utente sceglie di trovare il progetto di peso minimo del pannello in campo post-buckling locale la distribuzione del

carico non è più quella precedente. Questo perché lo skin è in grado di sopportarne una porzione inferiore rispetto allo stesso skin che non è andato in instabilità.

Nel seguito, in un primo momento verrà illustrato il modello PANDA2, mentre in un secondo, attraverso il modello PTRAN-NASTRAN, verrà eseguito un confronto sui primi due aspetti analizzati in precedenza.

7.1 Modello PANDA2

Nel seguito non si entrerà troppo nel dettaglio, ma quanto basta per avere un'idea generale di com'è impostato il modello.

In PANDA2 la teoria di Buckling locale e postbuckling si basa sull'ipotesi che il comportamento dell'intero pannello è rappresentato da quello che succede in un singolo modulo (rappresentato nella figura 7.1 per una sezione *T*-type). Inoltre si assume che il pannello sia piatto. Quindi quanto verrà discusso in seguito risulta tanto più valido quanto più lo spazio tra stringer è piccolo e tanto più il numero degli stringer è elevato.

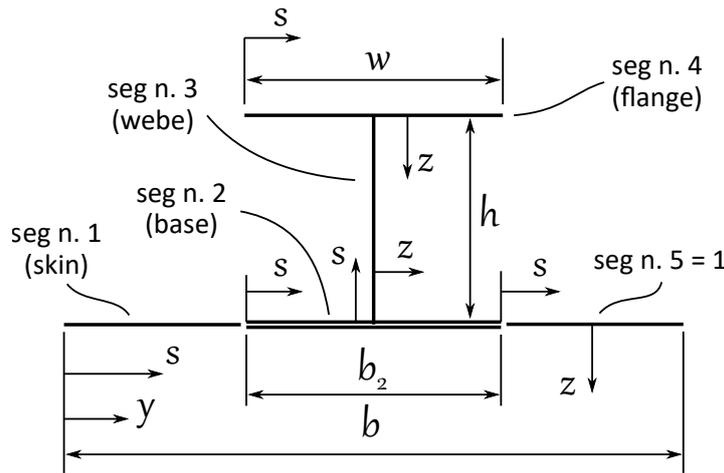


Figure 7.1: Sistema di riferimento locale nel modulo pannello con irrigidimento *T*-type

7.1.1 Campo di spostamenti e deformazioni

Per quanto riguarda il **campo di spostamenti dello skin** (e della base dell'irrigidimento) si considera solo la componente normale, w . Nella situazione di post-buckling locale questo è assunto come segue:

$$w(x, y) = f(\phi + a\phi^n) \sin \left[\frac{\pi}{l}(x - my) \right] = W(y) \sin \left[\frac{\pi}{l}(x - my) \right] \quad (7.2)$$

dove

- $\phi(y)$ è la forma, normalizzata, del modo di buckling biforcuto. Questa forma è determinata da un'analisi (simile a quella eseguita nel programma BOSOR4) su un modulo di pannello in cui la sezione trasversale è discretizzata;

- a è il parametro di modifica della forma modale, detto anche parametro di flattening;
- f è l'ampiezza della forma modale in post buckling;
- l è metà lunghezza d'onda assiale del modo di buckling biforcuto. In modo alternativo è possibile usare il parametro di lunghezza d'onda assiale N

$$N = \frac{\pi^2}{4l^2} \quad (7.3)$$

- m è la pendenza delle linee nodali della deformata che descrive l'instabilità locale in campo post-buckling.
- n è un parametro per indicare se la forma modale è simmetrica o meno rispetto alla mezzera dello skin del modulo. Ciò dipende dal tipo di irrigidimento utilizzato

$$n = \begin{cases} 2 & \text{se lo stringer non è omega-type} \\ 3 & \text{se lo stringer è omega-type} \end{cases} \quad (7.4)$$

- x è la coordinata assiale, mentre y quella trasversale. Quest'ultima è misurata dal punto medio tra due stringer (per chiarezza si faccia riferimento alla figura 7.1).

In modo analogo è introdotta l'imperfezione geometrica iniziale

$$w_0(x, y) = f_0(\phi + a_0\phi^n) \sin \left[\frac{\pi}{l}(x - my) \right] = W_0(y) \sin \left[\frac{\pi}{l}(x - my) \right] \quad (7.5)$$

dove in questo caso l'ampiezza f_0 è nota (l'utente fornisce questo dato) e $a_0 = 0$.

Per quanto riguarda il **campo di spostamenti relativo allo stringer**, si assume che sia

$$\begin{aligned} u(x, s) &= U(s) \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) \\ v(x, s) &= V(s) \cos \left(\frac{\pi x}{l} \right) \\ w(x, s) &= W(s) \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

con

$$U(s) = V(s) = W(s) = f \phi(s) \quad (7.7)$$

Come per lo skin, si introduce l'imperfezione iniziale che si presenta nella forma analoga al campo di spostamenti precedente

$$\begin{aligned} u_0(x, s) &= U_0(s) \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) \\ v_0(x, s) &= V_0(s) \cos \left(\frac{\pi x}{l} \right) \\ w_0(x, s) &= W_0(s) \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) \end{aligned} \quad (7.8)$$

con

$$U_0(s) = V_0(s) = W_0(s) = f_0 \phi(s) \quad (7.9)$$

Non viene introdotto il campo di spostamenti relativo ai ring, perché i contributi energetici ad esso legati o sono trascurati o scompaiono nelle varie operazioni di costruzione e derivazione del potenziale totale.

Oss: Nel modello sono incluse le imperfezioni di forma perché, oltre a rappresentare meglio il comportamento reale di un pannello, permette di rendere più stabile l'algoritmo di risoluzione delle equazioni non lineari;

Infine, per quanto riguarda il **campo di deformazioni**, nel modello PNADA2 si distinguono:

- Le deformazioni membranali medie del pannello nella sua globalità

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}]^T \quad (7.10)$$

- Le deformazioni (non medie) del segmento i -esimo generico

$$\{\varepsilon_i\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}]_i^T \quad (7.11)$$

dove si sostituisce la y con s per i che individua il web o la flangia.

la relazione che esiste tra il primo e il secondo campo è espressa come segue:

$$\{\varepsilon_i\} = \{\varepsilon\} + \{\Delta\varepsilon_i\} \quad \text{con} \quad \{\Delta\varepsilon_i\} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}_i \quad (7.12)$$

Nell'articolo [4] si fa una distinzione tra i contributi legati allo skin, con l'aggiunta della base dell'irrigidimento ($i = s + b$), da quelli legati al web e alla flangia esterna ($i = w$ o f). I primi sono ricavati come fatto da Koiter nel suo lavoro di dottorato e i secondi sfruttando le relazioni di deformazione non lineari.

Non entro oltre nel merito della determinazione di tutti questi contributi, perché esula dagli obiettivi di questo lavoro di tesi, per cui rimando all'articolo [4] per eventuali chiarimenti e approfondimenti.

7.1.2 Risultanti di sollecitazione

Nel modello PANDA2, si assume una **laminazione bilanciata**, ovvero, il monostrato equivalente della i -esima parte del pannello presenta una matrice di rigidezza (i può indicare lo skin, il web, la flangia o la base dell'irrigidimento):

$$[C]^i = \begin{bmatrix} [\mathcal{A}] & [0] \\ [0] & [\mathcal{D}] \end{bmatrix}_i \quad \text{con} \quad \mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{16} = \mathcal{A}_{26} = 0 \quad (7.13)$$

Sfruttando questo e indicando con $\{N^i\}$ e $\{M^i\}$ le generiche risultanti di sollecitazione interna nella i -esima parte del pannello si ha

$$\begin{aligned} \{N^i\} &= [\mathcal{A}^i]\{\varepsilon^i\} + \{N_0^i\} \\ \{M^i\} &= [\mathcal{D}^i]\{\kappa^i\} \end{aligned} \quad (7.14)$$

dove $\{N_0^i\}$ sono le risultanti di sollecitazione termiche indotte dal processo di polimerizzazione del pannello. Queste nell'articolo [4] sono prese in considerazione, ma nel seguito sono trascurate per semplicità.

Riguardo le risultanti di sollecitazione membranale si distinguono:

- Le risultanti medie membranali nel pannello nella sua globalità, ovvero i carichi esterni applicati uniformi lungo i lati

$$\{N\} = [N_x \quad N_y \quad N_{xy}]^T \quad (7.15)$$

- Le risultanti interne membranali medie nello skin e nella base dell'irrigidimento

$$\{\tilde{N}\} = [N_1 \quad N_2 \quad N_{12}]^T \quad (7.16)$$

- Le risultanti interne membranali (non medie) nel segmento i -esimo generico

$$\{N_i\} = [N_x \quad N_y \quad N_{xy}]_i^T \quad (7.17)$$

dove si sostituisce la y con s per i che individua il web o la flangia.

La relazione tra la prima e la seconda è definita da

$$\begin{aligned} N_x &= N_1 + N_{\text{stringer}} \\ N_y &= N_2 + N_{\text{ring}} \\ N_{xy} &= N_{12} \end{aligned} \quad (7.18)$$

e assumendo che le generiche risultanti interne N_x^i e N_y^i siano, rispettivamente, costanti lungo y e x , le relazioni precedenti possono essere riscritte come

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{1}{b} \left(\int_0^b N_x^{s+b} dy + \sum_i^{N_{wf}} \int_0^{S_i} N_x^i ds \right) \\ N_y &= \frac{1}{2l} \int_0^{2l} N_y^{s+b} dx + \frac{1}{b_r} \sum_i^{N_{wf}} \int_0^{S_i} N_x^i ds \\ N_{xy} &= N_{12} \end{aligned} \quad (7.19)$$

dove N_{wf} è l'insieme degli indici del web (può essere più di uno, come succede nella sezione ad omega) e della flangia esterna e b_r è la spaziatura tra due ring adiacenti. Si noti che con N_x^i si indica la risultante di sollecitazione interna assiale all'irrigidimento (stringer o ring) agente sul segmento i -esimo.

Oss: Questo tipo di distinzione tra le risultanti, con l'aggiunta di quest'ultima relazione, risulta utile per semplificare alcuni contributi nell'energia di deformazione elastica (si faccia riferimento all'articolo [4] per ulteriori approfondimenti).

7.1.3 Energia potenziale totale

Noto il campo di spostamenti e di deformazioni, note le relazioni tra le risultanti di sollecitazione interne ed esterne è possibile esprimere tutti i contributi energetici.

Si ricorda che si è assunta l'ipotesi di laminazione bilanciata, quindi nell'energia di deformazione elastica appaiono solo la componente membranale "m" e flesso-torsionale "f". Inoltre, per quanto riguarda la componente membranale le espressioni sono riscritte in modo da far comparire le risultanti di sollecitazione interna così da poter mettere in risalto l'utilità della formula 7.19.

L'**energia di deformazione elastica** relativa allo **skin** e alla **base** dell'irrigidimento risulta:

$$U_{\text{skin}} = U_{\text{skin}}^m + U_{\text{skin}}^f \quad (7.20)$$

dove

$$U_{\text{skin}}^m = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \int_0^b \{\varepsilon_{s+b}\}^T [C_{s+b}] \{\varepsilon_{s+b}\} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \int_0^b \{N_{s+b}\}^T \{\varepsilon_{s+b}\} dy dx \quad (7.21)$$

$$U_{\text{skin}}^f = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \int_0^b \{k_{s+b}\}^T [D_{s+b}] \{k_{s+b}\} dy dx$$

L'**energia di deformazione elastica** dello **stringer**, quindi il contributo del web (può essere più di uno) e della flangia esterna, risulta:

$$U_{\text{stringer}} = U_{\text{stringer}}^m + U_{\text{stringer}}^f \quad (7.22)$$

dove

$$U_{\text{stringer}}^m = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \sum_i^{N_{wf}} \int_0^{S_i} \{\varepsilon_i\}^T [C_i] \{\varepsilon_i\} ds dx = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \sum_i^{N_{wf}} \int_0^{S_i} \{N_i\}^T \{\varepsilon_i\} ds dx \quad (7.23)$$

$$U_{\text{stringer}}^f = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \sum_i^{N_{wf}} \int_0^{S_i} \{k_i\}^T [D_i] \{k_i\} ds dy$$

L'**energia di deformazione elastica** del **ring**, quindi il contributo del web (può essere più di uno) e della flangia esterna, risulta:

$$U_{\text{ring}} = U_{\text{ring}}^m + U_{\text{ring}}^f \quad (7.24)$$

dove

$$U_{\text{ring}}^m = \frac{1}{2} \int_0^b \sum_i^{N_{wf}} \int_0^{S_i} \{\varepsilon_i\}^T [C_i] \{\varepsilon_i\} ds dx = \frac{1}{2} \int_0^b \sum_i^{N_{wf}} \int_0^{S_i} \{N_i\}^T \{\varepsilon_i\} ds dx \quad (7.25)$$

$$U_{\text{ring}}^f = \approx 0$$

Infine, il **lavoro dei carichi applicati** risulta

$$\mathcal{W} = -2lb\{N\}^T \{\varepsilon\} \quad (7.26)$$

Note tutte le componenti energetiche di deformazione e il lavoro dei carichi applicati è possibile esprimere il **potenziale totale**:

$$\Pi = \mathcal{U}^m + \mathcal{U}^f - \mathcal{W} = \Pi(f, a, m, N) \quad (7.27)$$

questa è una funzione non lineare, di ordine superiore al secondo, nelle quattro incognite f , a , m e N già definite in precedenza.

La variazione prima generica del potenziale totale è indicata nell'equazione 48 di [4].

Oss: Per giustificare la mancanza del campo di spostamenti relativo al ring, la generica variazione prima dell'energia di deformazione elastica membranale totale meno il lavoro dei carichi applicati, sfruttando le relazioni 7.19, risulta

$$(\mathcal{U}^m - \mathcal{W})' = \int_0^{2l} \left(\int_0^b \{N\}^T \{\Delta\varepsilon\}' dy + \sum_i^{N_{wf}} \int_0^{S_i} \{N_i\}^T \{\Delta\varepsilon_i\}' ds \right) dx \quad (7.28)$$

dove N_{wf} è l'insieme degli indici di web e flangia esterna.

Inoltre, per successivi passaggi algebrici indicati in [4], la stessa relazione 7.19 viene rimaneggiata in modo opportuno facendo scomparire i termini di deformazione del ring.

Instabilità biforcata locale

Sfruttando questa teoria è possibile calcolare il carico critico relativo all'instabilità biforcata locale, quello che nel programma è chiamato "local buckling load factor from Koiter theory". Per fare questo si parte dalla variazione prima del potenziale totale e:

- Si azzerava l'ampiezza dell'imperfezione iniziale, $f_0 = 0$;
- Si azzerava il parametro di modifica della forma modale, $a = 0$;
- Si trascurano tutti i termini di f di ordine 3 e 4;
- Il parametro di lunghezza d'onda assiale, N , è considerato come una costante;
- Si moltiplicano tutti i termini legati al set di carico "A" (vedi introduzione) per il fattore di carico critico.

Fatto questo, il potenziale totale risulta essere funzione delle sole incognite f , m e λ :

1. Tramite la variazione prima del potenziale totale rispetto a f si ottiene l'espressione di λ in funzione di m

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda(m) \quad (7.29)$$

2. Inserendo quest'ultima nella variazione prima del potenziale totale rispetto a m si ottiene un'equazione non lineare nella sola incognita m

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial m} = \Pi_{,m}(\lambda, m) = 0 \\ \lambda = \lambda(m) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Pi_{,m}(m) = 0 \quad (7.30)$$

3. Risolvendo la precedente tramite il metodo di Newton si ottiene il valore di m , che sostituito nel primo punto, permette di trovare il valore di carico critico, λ , desiderato. L'incognita f è invece funzione delle altre due e risulta indeterminata.

Problema di equilibrio non lineare

Il problema di equilibrio non lineare in campo post-buckling risulta quindi definito minimizzando il potenziale totale rispetto alle incognite in gioco

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{d\}} = \{0\} \quad \text{con} \quad \{d\} = [f \ a \ m \ N]^T \quad (7.31)$$

Questo non è altro che un sistema di 4 equazioni non lineari nelle 4 incognite $\{d\}$. Per risolverlo PANDA2 divide il problema in due step:

1. In un primo momento vengono risolte simultaneamente tre equazioni algebriche non lineari, quelle ottenute dalla derivazione rispetto a f , a e m ;
2. In un secondo momento sono risolte le due equazioni non lineari rimanenti, quella ottenuta derivando il potenziale totale rispetto alla variabile N e quella risultante dal primo punto.

7.2 Modello PATRAN-NASTRAN

Nel seguito vengono illustrati tutti i passi utili per definire il modello numerico NASTRAN, che verrà poi utilizzato per ottenere i risultati da confrontare con quelli analitici del modello PANDA2.

Prima di proseguire è doveroso fare una **premessa**. Data la natura pratica di quello che verrà discusso in questa sezione (la precedente è stata di carattere puramente descrittivo), nel seguito verrà definita la geometria, il materiale e la laminazione utilizzate in tutti e due i modelli: quello numerico e quello analitico.

Per definire il modello analitico, a differenza dei capitoli precedenti in cui sono state implementate le formule in MATLAB, si è fatto ricorso direttamente all'interfaccia grafica del programma PANDA2.

7.2.1 Geometria, materiale-laminazione ed elementi

Il primo passo per creare il modello FEM è quello di definire la **geometria** in gioco. Per eseguire il confronto si è scelto di adottare per semplicità l'irrigidimento *I*-Type (come si vedrà in seguito, nonostante la semplicità adottata nel modello le differenze tra NASTRAN e PANDA2 possono essere marcate).

Facendo riferimento alla figura 7.4, che mostra un modulo di pannello della geometria di interesse, i parametri geometrici sono:

- Lunghezza del pannello, $l = 1000 \text{ mm}$;
- Larghezza del modulo di pannello, o la distanza tra due irrigidimenti, $b = 300 \text{ mm}$;
- Lunghezza del piede dell'irrigidimento, $b_2 = 90 \text{ mm}$;
- Larghezza del web dell'irrigidimento, $h = 50 \text{ mm}$;

Una volta definita la geometria è necessario specificare il **materiale** e la **laminazione** per ogni segmento del modulo del pannello.

Come sarà chiaro dai risultati, l'obiettivo di questa sezione non è quello di dover indagare nello specifico cosa succede al variare di un dato coefficiente della matrice di rigidezza del monostrato equivalente, ma quello di eseguire un semplice confronto qualitativo tra NASTRAN e PANDA.

Quindi, come materiale, si è fatto ricorso allo stesso utilizzato nei capitoli precedenti (con $\epsilon = 0$), le cui caratteristiche meccaniche possono essere richiamate come segue:

$$E_1 = E_2 = 48000 [MPa]; \quad G_{12} = 20330 [MPa] \quad e \quad \nu = 0 \quad (7.32)$$

Per la laminazione, invece, si è fatto ricorso a un laminato a strati identici simmetrico uguale per ogni parte del pannello (skin, piede e web)

$$[90 \ 0 \ 45 \ -45 \ -45 \ 45 \ 0 \ 90] \quad (7.33)$$

Il tutto permette di ricadere nel caso preso come ipotesi dal modello PANDA2, in cui i coefficienti di rigidezza membranale \mathcal{A}_{16} e \mathcal{A}_{26} sono nulli, come anche la matrice di accoppiamento $[\mathcal{B}]$.

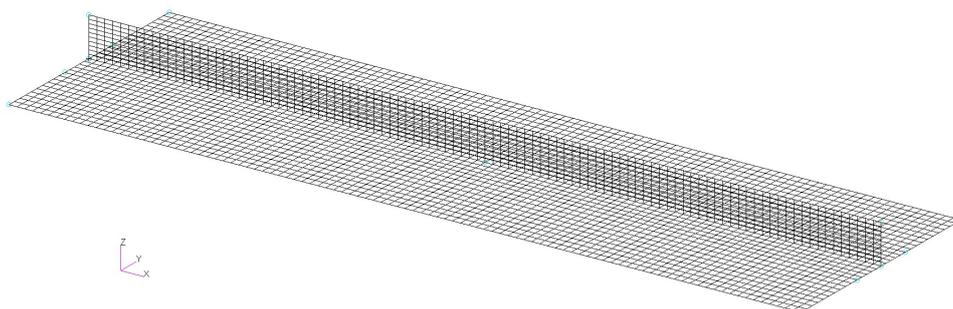


Figure 7.2: Suddivisione in elementi della geometria in gioco.

Il passo successivo è suddividere la geometria in **elementi** CQUAD4 di opportune dimensioni. A tal proposito si è scelto di adottare una discretizzazione della sezione trasversale simile a quella adottata in PANDA2, ovvero ogni segmento è stato suddiviso in 10 elementi (vedi figura 7.4 per maggior chiarezza). Per la direzione longitudinale si è scelta una dimensione dell'elemento compatibile alle precedenti, l'obiettivo è avere elementi il più possibile rettangoli equilateri. Il risultato è mostrato in figura 7.2.

Ad ogni elemento è poi stata assegnata una proprietà *shell* con l'opzione *thin* in cui è indicata la laminazione opportuna.

A tal proposito si faccia attenzione al fatto che in tutti gli elementi che ricadono nella posizione tra piede e skin è necessario tenere conto di entrambi. Quindi in questi si ha una laminazione simmetrica pari a due volte quella indicata.

In linea di principio, in questi elementi, bisognerebbe definire anche un offset positivo in modo da tenere conto della geometria reale. Nella pratica si è assegnato un offset nullo perché nel modello PANDA non si tiene conto di questo effetto.

7.2.2 Vincoli, carichi e tipo di analisi

Una volta definita la geometria degli elementi e le loro proprietà, il passo successivo è specificare i **vincoli** in gioco. Facendo riferimento alla figura 7.3 si ha:

- **Semplice appoggio** – Il pannello risulta semplicemente supportato sui lati, per cui è necessario andare a bloccare la traslazione verticale, d_z , sui nodi che ricadono sui quei lati. Tuttavia, per essere coerente con il modello PANDA2 è necessario includere in questo vincolo anche i nodi che ricadono sulla linea di giunzione tra skin-base e web;
- **Continuità di rotazione tra un modulo e l'altro** – Il pannello è stato suddiviso in moduli e solo uno di questi ne è stato creato il modello numerico. Quindi è necessario garantire che nelle linee di giunzione tra un modulo e l'altro ci sia una continuità di rotazione. Date le simmetrie in gioco, per fare ciò sono state bloccate le rotazioni lungo l'asse x , ϕ_x ;
- **Continuità di rotazione all'interfaccia del web dell'irrigidimento** – In PANDA2 la porzione di pannello presa sotto esame presenta una lunghezza pari alla distanza tra due ring. In genere ognuno di questi è l'interfaccia tra due porzioni di pannello adiacenti. Quindi, è necessario garantire la continuità di spostamenti e rotazioni nel web in questo punto. Per fare ciò, nei nodi che ricadono in questa zona, sono state bloccate le rotazioni lungo l'asse z , ϕ_z ;
- **Spostamento nel piano $x-y$** – Per bloccare i restanti gradi di libertà del modello non vincolati, la traslazione nel piano $x-y$, si è scelto, per questioni di simmetria, di bloccare questo spostamento nel nodo che ricade sulla metà lunghezza del pannello e sulla linea di giunzione tra skin-base e web.

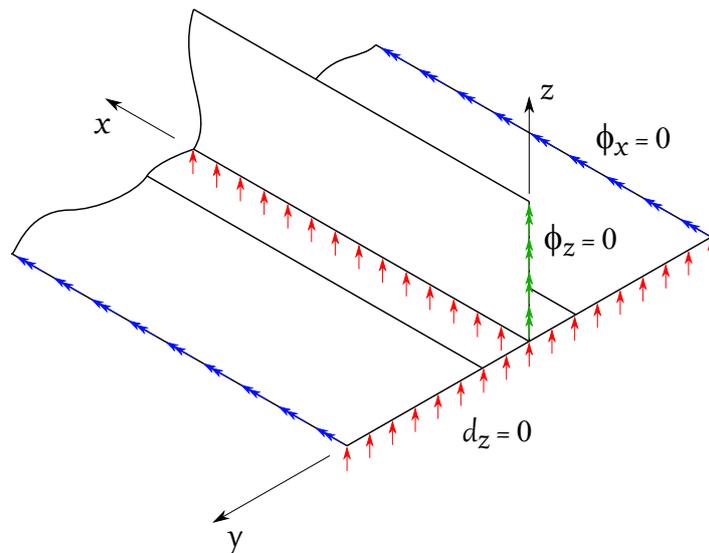


Figure 7.3: Vincoli applicati al modello – traslazioni e rotazioni bloccate.

Il passo finale per definire il modello è specificare i **carichi** in gioco. Nonostante PANDA2 sia in grado di tenere conto dei carichi di pre-buckling e dei carichi termici, si è scelto, per semplicità, di applicare al modello solamente N_x , N_y e N_{xy} di tipologia *A* (vedi tabella 1.1). Questi sono considerati positivi se sul lato positivo del pannello sono concordi con il sistema di coordinate in gioco (ad esempio $N_x > 0$ corrisponde ad una situazione di trazione all'interno del pannello).

Per applicare N_y e N_{xy} è sufficiente definire un *Total load* di tipo *2D Element uniform*. Riguardo N_x si deve adottare la metodologia indicata nel capitolo 2, questo perché non si conosce a priori la distribuzione di carico in ogni segmento.

Nel seguito verranno prese in considerazione due casistiche:

- Semplice sforzo longitudinale di compressione

$$N_x = -1 [N/mm]$$

- Caso completo con sforzo normale, trasversale e taglio

$$N_x = -3; \quad N_y = -1 \quad \text{e} \quad N_{xy} = 2 [N/mm]$$

A questo punto tutto è pronto per impostare ed eseguire l'**analisi** non lineare. Questo passaggio è suddiviso in step:

1. Per prima cosa è necessario eseguire un'analisi di buckling lineare (Sol 105) in modo da ottenere la forma modale relativa al primo modo di instabilità;
2. In seguito bisogna simulare un'imperfezione iniziale, modificando la posizione dei nodi secondo la prima forma modale, quella ottenuta al punto precedente;
3. Ed infine si può eseguire l'analisi non lineare (Sol 400). Si è scelto di adottare come parametri di convergenza quelli preimpostati, in cui si hanno 50 passi di iterazione equi-spaziati.

Il carico imposto è lo stesso di quello del primo punto, moltiplicato per il parametro a opportuno. L'obiettivo è avere a circa il 75% del carico applicato, nei vari cicli di iterazione, quello critico biforcuto (si osservi per chiarezza la figura 7.8).

7.3 Risultati

Come anticipato nell'introduzione del capitolo lo scopo è quello di valutare, in modo qualitativo, la veridicità dei risultati forniti da PANDA2. L'oggetto di questa sezione è incentrato sulle **tensioni massime** che sono riscontrate all'interno del laminato in uno o più punti della struttura e il carico di **popoff**. Prima di fare questo, però è doveroso mettere in risalto alcuni aspetti importanti.

7.3.1 Aspetti preliminari

Un primo aspetto è quello legato al **carico critico** biforcuto. Facendo riferimento alla tabella 7.1 si nota che l'errore ottenuto sulla previsione del fattore λ è praticamente nullo. Questo aspetto è in contrasto con quello che verrà presentato in seguito inerente agli altri risultati, specialmente per la seconda situazione di carico.

In generale si può concludere che, nonostante la semplicità del campo di spostamenti adottato in PANDA2, il programma è in grado di fornire valori di λ compatibili con il FEM.

	λ		$\varepsilon\%$
	PANDA	NASTRAN	
Caso 1	23.21	23.44	0.98
Caso 2	2.673	2.655	-0.69

Table 7.1: Confronto carico critico biforcuto ottenuto da PANDA e NASTRAN nelle due situazioni di carico analizzate.

Un secondo aspetto su cui riflettere riguarda il **campo di spostamenti** non lineare ottenuto dalle analisi PANDA e NASTRAN (si faccia riferimento alle figure 7.6 e 7.7). Nella prima figura si vede chiaramente che il campo di spostamenti non è proprio lo stesso: PANDA presenta un carattere sinusoidale, mentre il FEM no.

Nella seconda figura questa differenza è meno marcata ma comunque visibile soprattutto se si osserva la vista in pianta (le iso-spostamenti nel modello PANDA risultano più tondeggianti). Tuttavia dovrebbe risaltare di più un altro aspetto, quello relativo al campo di spostamenti previsto in PANDA2 che non rispetta le condizioni al contorno geometriche sui lati paralleli all'asse y (vedi figura 7.7(b)).

Ultimo aspetto su cui bisogna porre l'attenzione è il **valore dello spostamento**. In figura 7.8 è rappresentato lo spostamento trasversale del nodo in cui si registra il valore di picco (punto più rosso) in funzione della percentuale di carico applicato. Da questo si vede chiaramente che PANDA2 fornisce una sottostima di questo valore rispetto a NASTRAN. Questa differenza è molto marcata soprattutto nel secondo caso di carico analizzato dove il valore cambia di un ordine di grandezza.

Oss: Per quanto riguarda gli spostamenti non lineari previsti in PANDA2, non avendo la possibilità di ottenere la funzione ϕ indicata nella sezione precedente si è fatto ricorso ad una analoga ottenuta dal FEM. Si è fatto questo per uno scopo puramente illustrativo, in modo da mettere in risalto le differenze sul campo di spostamenti.

7.3.2 Tensioni massime e carico di popoff

Si può passare ora a discutere delle **tensioni massime** ottenute all'interno del pannello.

Come indicato nel capitolo 14 dell'articolo [1], PANDA2 calcola le tensioni in ogni strato del laminato ma non in tutti i nodi, solamente in quelli di estremità e in quello centrale di ogni segmento (si ipotizza che questi punti siano quelli più critici). Queste tensioni hanno una componente seno ed una coseno lungo la direzione assiale. Il programma determina il valore massimo di queste componenti e lo utilizza per ricavare i margini.

Nelle figure 7.9 e 7.10 questi valori di tensione sono indicati come costanti, ma nel modello variano secondo il seno o il coseno della coordinata x .

Nelle tabelle 7.2 e 7.3 sono indicati i punti (nodo e layer) dove PANDA2 individua i valori massimi di tensione. Avendo scelto una divisione in elementi compatibile con il modello PANDA2 è facile ricavare dal FEM i valori di tensione in quei punti. Queste sono rappresentate al variare di x nelle figure 7.9 e 7.10:

- Caso di carico 1 – PANDA2 riesce a fornire dei valori di tensione massima a trazione lungo le fibre e trasversalmente ad esse molto simile a quelle fornite del FEM. Per le altre tensioni PANDA2 fornisce un valore sottostimato, che comunque può essere compensato adottando un ragionevole fattore di sicurezza;
- Caso di carico 2 – I risultati forniti da PANDA2 sono completamente incoerenti con quelli forniti da NASTRAN. Tra questi emerge una differenza di circa un ordine di grandezza (stessa cosa si è osservata per gli spostamenti).

Per quanto riguarda il **carico di popoff**, la situazione è analoga al caso delle tensioni: per la prima situazione di carico la previsione è accettabile, ma nel secondo caso si ha una differenza di circa un ordine di grandezza tra i valori di NASTRAN e PANDA2.

Si consideri ora la configurazione di carico 2 però fissata al 76% del carico massimo applicato. Ovvero si è in una configurazione di carico in prossimità del carico critico calcolato dall'analisi lineare.

In questa situazione le previsioni fornite dal modello PANDA2 tornano ad essere coerenti con quelle fornite dal FEM. A tal proposito si faccia riferimento alla figura 7.11 e alla tabella 7.4.

Quindi in sintesi si può **concludere** che l'analisi non lineare fornita dal modello PANDA2 risulta accettabile per uno studio preliminare purché il carico applicato non superi di molto il carico critico biforcuto locale.

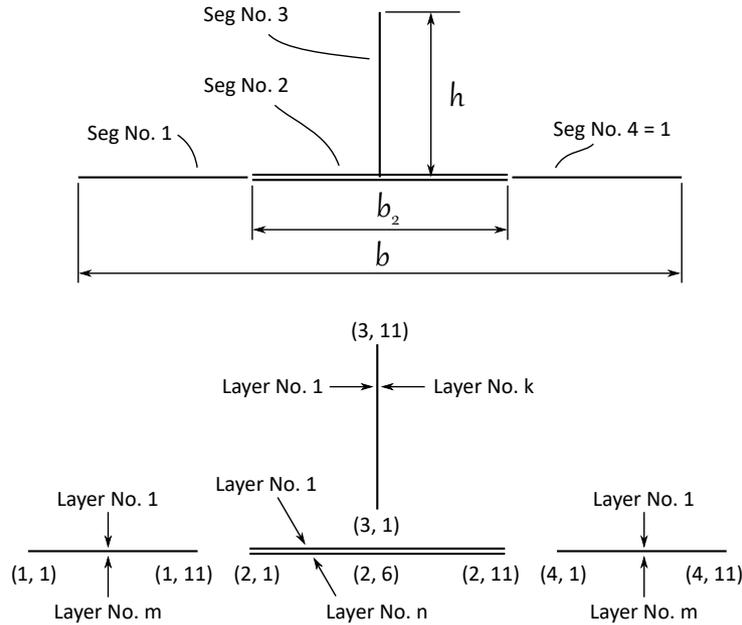


Figure 7.4: Modulo di pannello con irrigidimento *I*-type. Dimensioni, disposizione nodi dei segmenti e indici stratificazione. Asse x uscente dal foglio.

(a) PANDA2

	Segmento	Nodo	Layer	z	σ [MPa]
σ_L^t	4	1	1	-0.8	15.75
σ_L^c	2	11	15	1.4	19.27
σ_T^t	4	1	2	-0.6	12.05
σ_T^c	2	11	16	1.6	19.96
σ_{LT}	1	1	6	0.4	10.22

(b) NASTRAN

	Node location			Layer	Parallelo PANDA		σ [MPa]
	x	y	z		Segmento	Nodo	
σ_L^t	910	150	0	8	4	11	34.15
σ_L^c	930	150	0	2	4	11	43.84
σ_T^t	1000	-36	0	3	2	2	26.32
σ_T^c	930	150	0	1	4	11	53.92
σ_{LT}	100	-45	0	1	1	11	33.67

Table 7.2: Tensioni massime ottenute all'interno del pannello *I*-type. Caso con semplice sforzo assiale ($N_x = -30 \text{ N/mm}$). L'indice della stratificazione per i risultati NASTRAN è concorde al sistema di riferimento x - y - z utilizzato nel FEM.

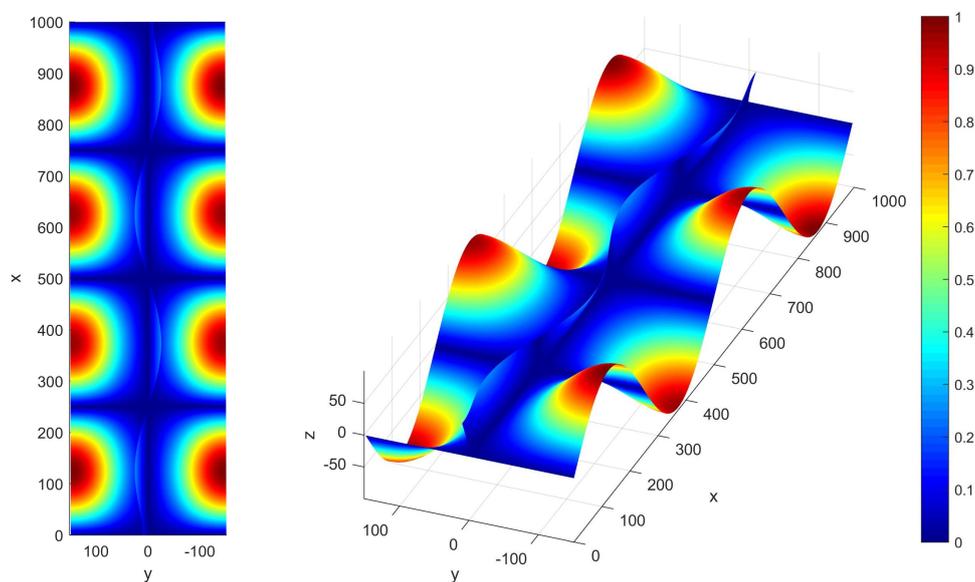
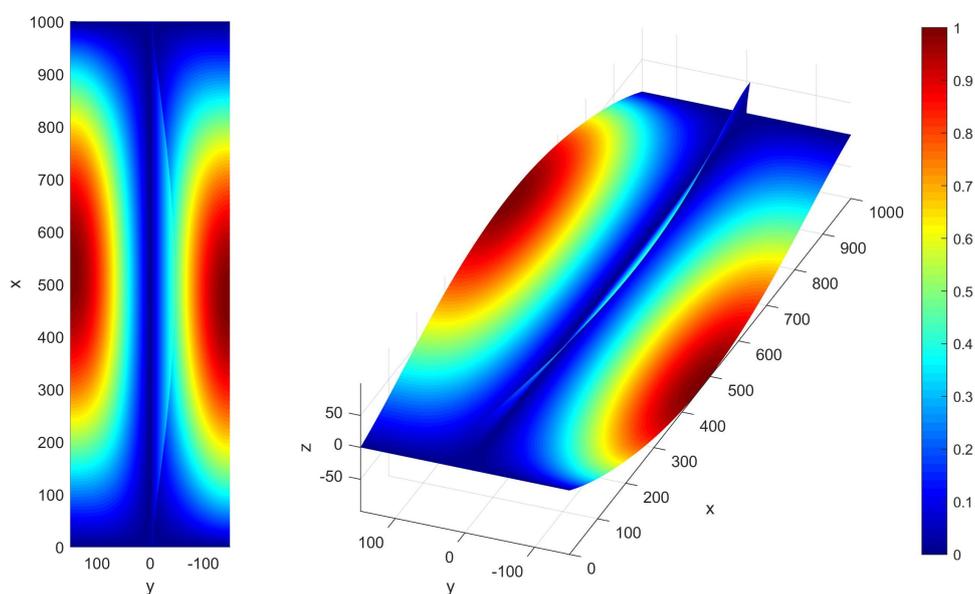
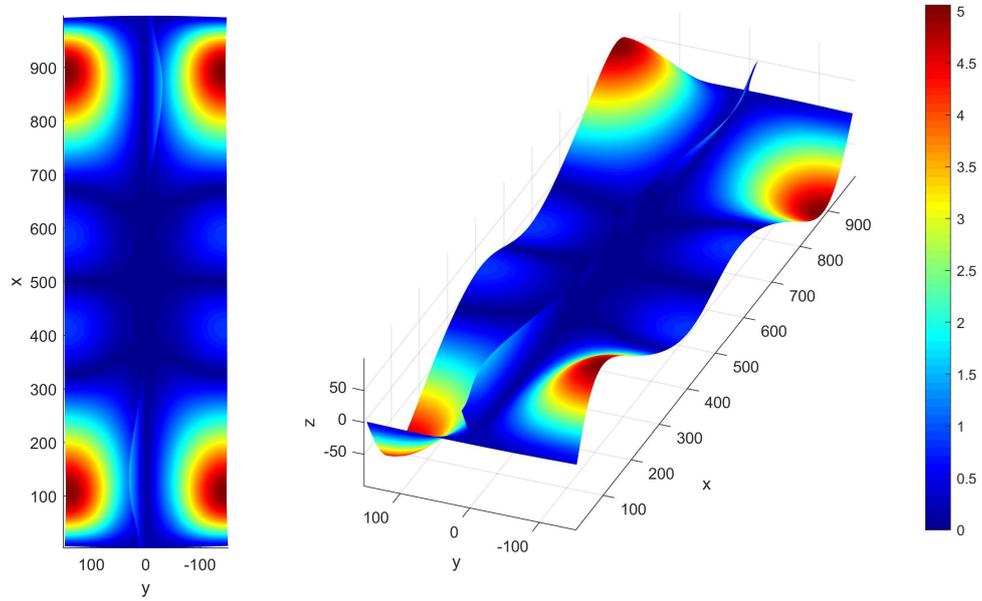
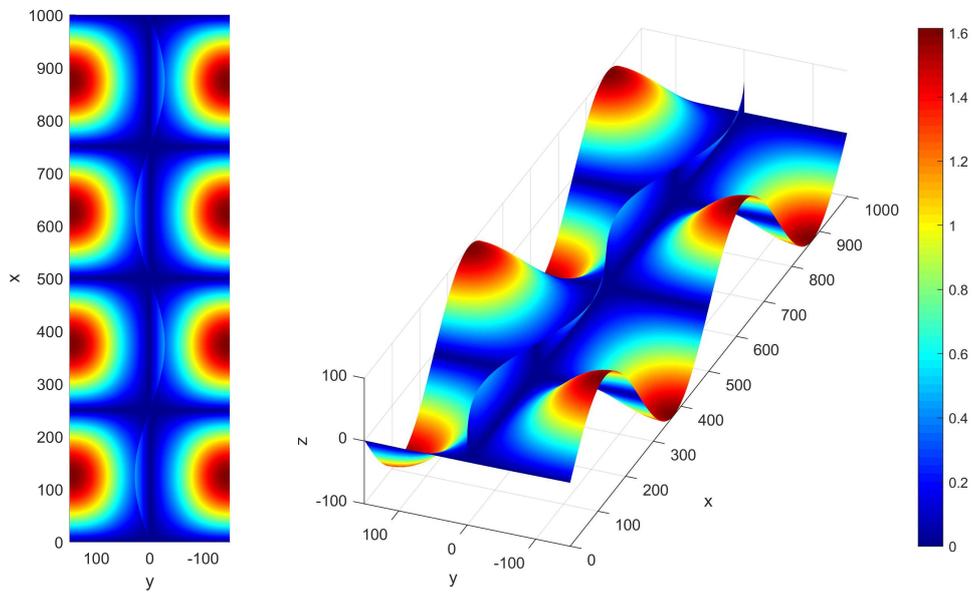
(a) Caso con solo sforzo normale ($N_x = -1 \text{ N/mm}$)(b) Caso completo ($N_x = -3$; $N_y = -1$; $N_{xy} = 2 \text{ N/mm}$)

Figure 7.5: Forme modali di un pannello con irrigidimento *I*-type – Sol 105 – Magnitude translational modal displacements plot. Dimensioni assi in millimetri.

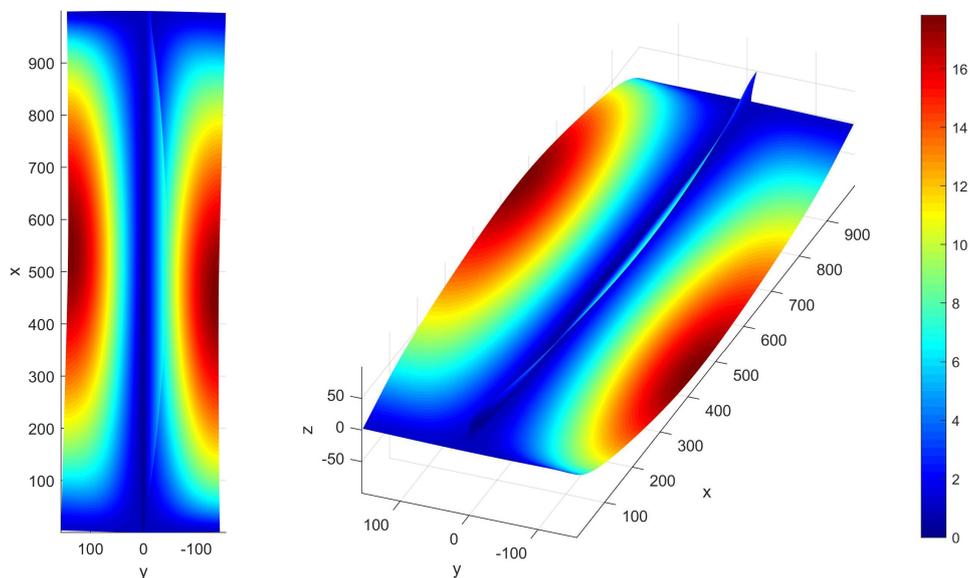


(a) Analisi NASTRAN – Sol 400

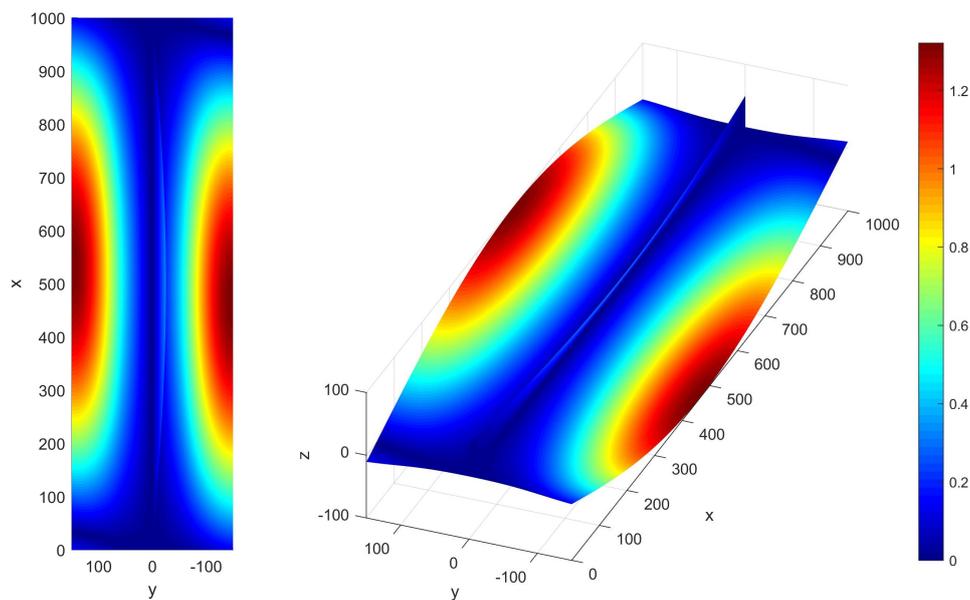


(b) Analisi PANDA2

Figure 7.6: Pannello con irrigidimento *I*-type sottoposto a solo sforzo normale ($N_x = -30 \text{ N/mm}$). Campo di spostamenti ottenuto da un'analisi non lineare (magnitudine translational displacements plot). Dimensioni assi e scala graduata in millimetri.



(a) Analisi NASTRAN – Sol 400



(b) Analisi PANDA2

Figure 7.7: Pannello con irrigidimento *I*-type sottoposto a sforzo normale, trasversale e taglio ($N_x = -10.5$; $N_y = -3.5$; $N_{xy} = 7 \text{ N/mm}$). Campo di spostamenti ottenuto da un'analisi non lineare (magnitude translational displacements plot). Dimensioni assi e scala graduata in millimetri.

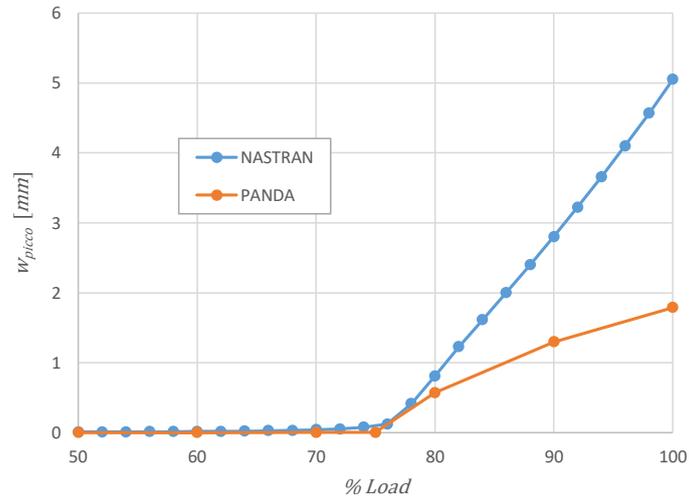
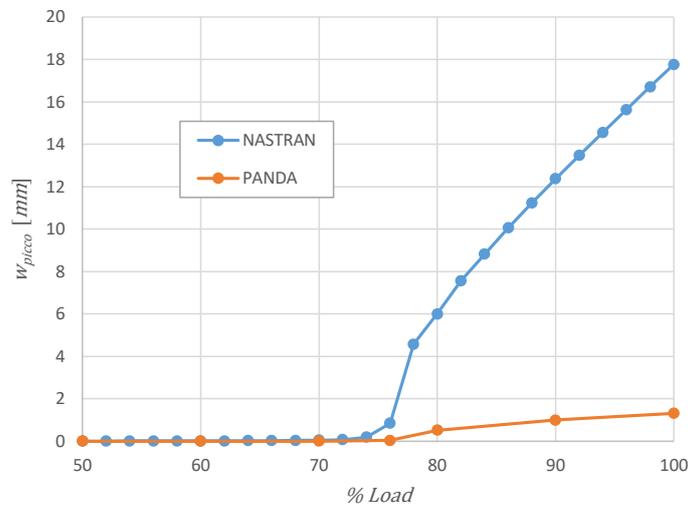
(a) Caso solo sforzo normale ($N_x = -30 \text{ N/mm}$)(b) Caso completo ($N_x = -10.5; N_y = -3.5; N_{xy} = 7 \text{ N/mm}$)

Figure 7.8: Pannello con irrigidimento I -type. Spostamento trasversale, w_{picco} , del nodo in cui si osserva il picco.

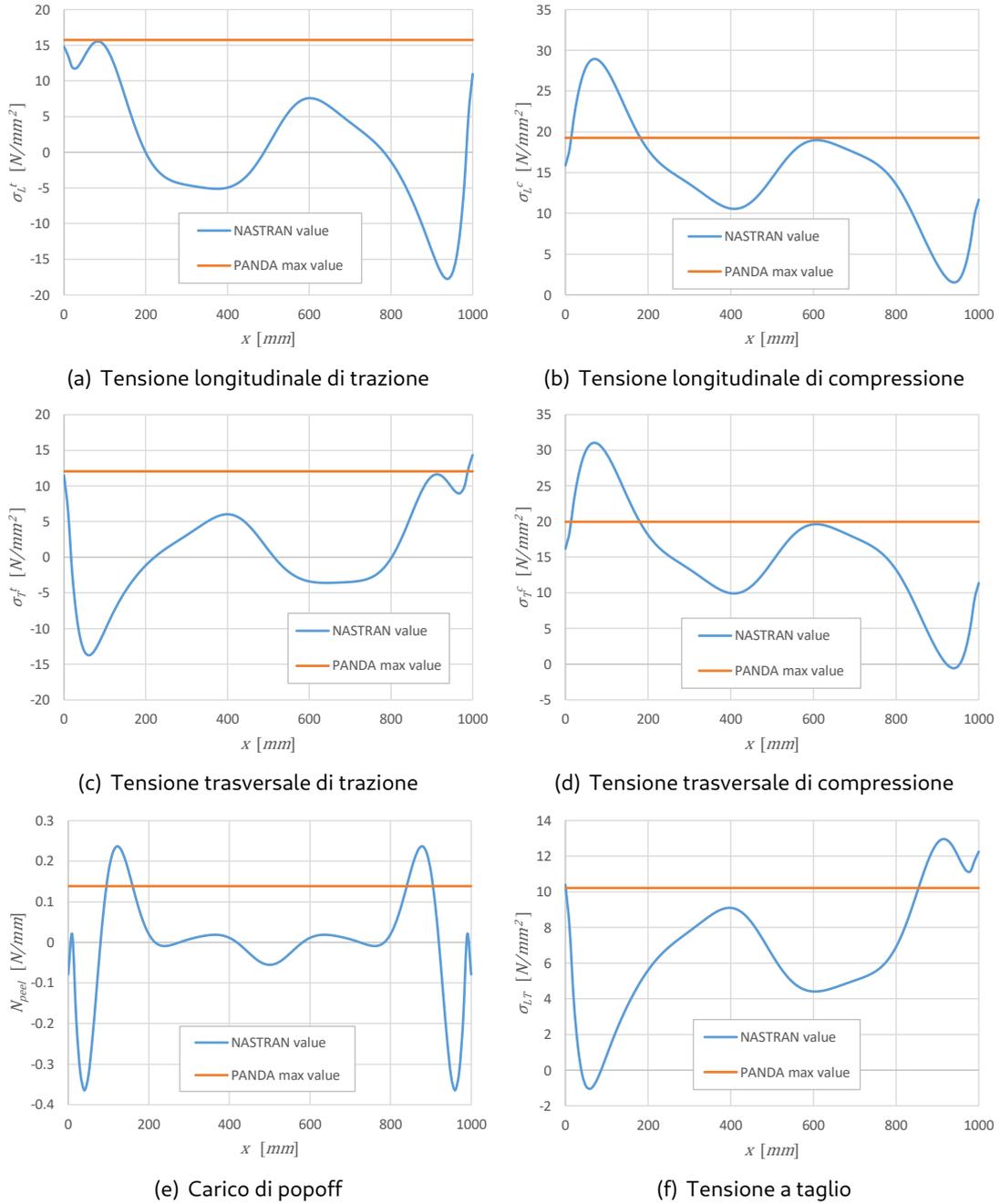


Figure 7.9: Pannello con irrigidimento I-type. Analisi non lineare caso con solo sforzo normale ($N_x = -30 \text{ N/mm}$). Confronto tensioni ricavate da NASTRAN con quelle massime fornite da PANDA2. Le tensioni in NASTRAN sono ricavate nei nodi indicati da PANDA2.

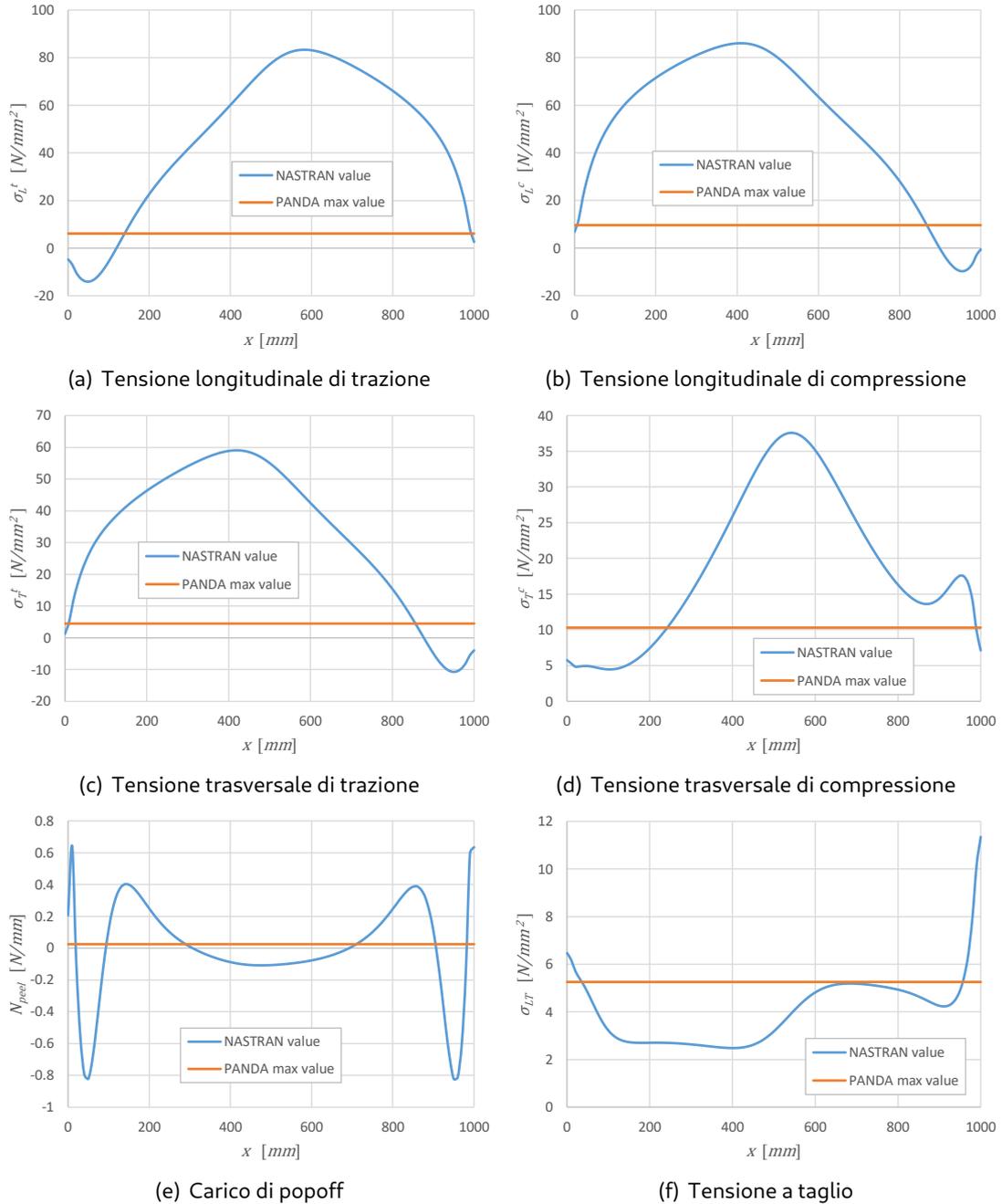


Figure 7.10: Pannello con irrigidimento *I*-type. Analisi non lineare caso completo ($N_x = -10.5$; $N_y = -3.5$; $N_{xy} = 7$ N/mm). Confronto tensioni ricavate da NASTRAN con quelle massime fornite da PANDA2. Le tensioni in NASTRAN sono ricavate nei nodi indicati da PANDA2.

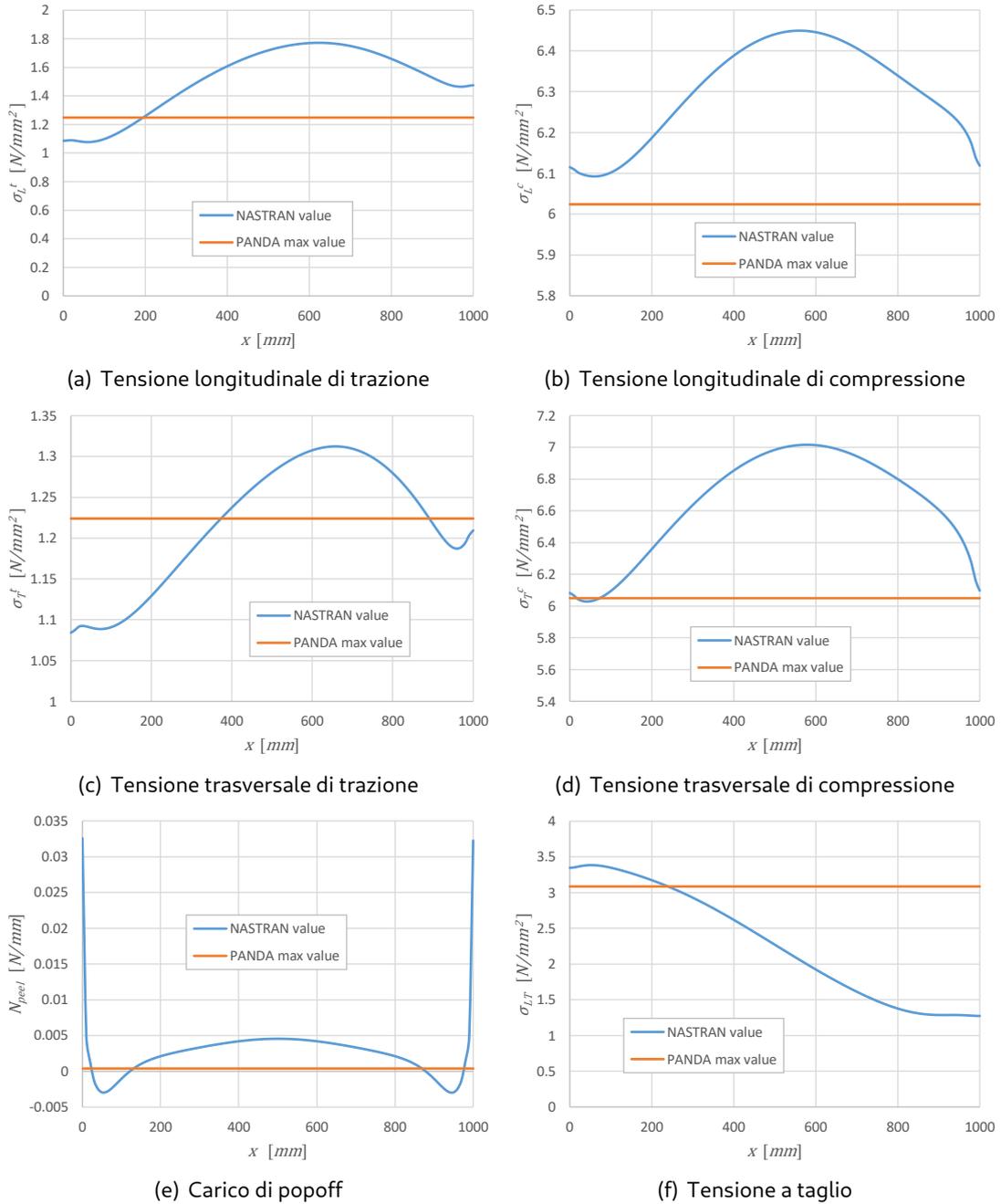


Figure 7.11: Pannello con irrigidimento I-type. Analisi non lineare caso completo ($N_x = -7.98$; $N_y = -2.66$; $N_{xy} = 5.32 N/mm$). Confronto tensioni ricavate da NASTRAN con quelle massime fornite da PANDA2. Le tensioni in NASTRAN sono ricavate nei nodi indicati da PANDA2.

(a) PANDA2						
	Segmento	Nodo	Layer	z	σ [MPa]	
σ_L^t	4	11	1	-0.8	6.13	
σ_L^c	1	1	8	0.8	9.61	
σ_T^t	4	11	2	-0.6	4.50	
σ_T^c	1	1	6	0.4	10.31	
σ_{LT}	4	1	8	0.8	5.25	

(b) NASTRAN							
	Node location			Layer	Parallelo PANDA		σ
	x	y	z		Segmento	Nodo	[MPa]
σ_L^t	580	150	0	8	4	11	83.33
σ_L^c	590	150	0	1	4	11	86.12
σ_T^t	1000	-9	0	3	2	5	60.85
σ_T^c	590	150	0	2	4	11	61.92
σ_{LT}	980	45	0	16	2	11	60.53

Table 7.3: Tensioni massime ottenute all'interno del pannello I -type. Caso completo ($N_x = -3$; $N_y = -1$; $N_{xy} = 2 N/mm$). L'indice della stratificazione per i risultati NASTRAN è concorde al sistema di riferimento x - y - z utilizzato nel FEM.

(a) PANDA2						
	Segmento	Nodo	Layer	z	σ [MPa]	
σ_L^t	1	5	6	0.4	1.25	
σ_L^c	1	1	5	0.2	6.02	
σ_T^t	1	5	5	0.2	1.22	
σ_T^c	1	1	6	0.4	6.05	
σ_{LT}	4	1	8	0.8	3.09	

(b) NASTRAN							
	Node location			Layer	Parallelo PANDA		σ
	x	y	z		Segmento	Nodo	[MPa]
σ_L^t	610	150	0	8	4	11	2.11
σ_L^c	560	150	0	4	4	11	6.45
σ_T^t	1000	0	5	7	3	2	1.46
σ_T^c	580	150	0	3	4	11	7.02
σ_{LT}	0	87	0	1	3	5	3.85

Table 7.4: Tensioni massime ottenute all'interno del pannello I -type. Caso completo ($N_x = -7.98$; $N_y = -2.66$; $N_{xy} = 5.32 N/mm$). L'indice della stratificazione per i risultati NASTRAN è concorde al sistema di riferimento x - y - z utilizzato nel FEM.

8 | Conclusioni

PANDA2 è un programma di analisi preliminare che permette di ottimizzare il peso di pannelli irrigiditi, piatti o cilindrici, in materiale composito, in presenza di imperfezioni e sotto l'azione di diversi set di carico combinato, per l'impiego in stato di post-buckling.

In sostanza il programma, per trovare il progetto di ottimo, esegue vari cicli di iterazione e ad ogni ciclo modifica il valore di alcune variabili (geometria, numero di strati, angoli di lay-up, et.) selezionate dall'utente.

Per ogni ciclo di iterazione vengono calcolati diversi margini, ognuno dei quali è ottenuto da diversi modelli analitici o semi-analitici. Sfruttando il valore di questi margini, o meglio l'incremento relativo di questi tra un ciclo e l'altro, al variare delle variabili in gioco (ognuna presa singolarmente), il programma decide quali variabili devono cambiare e in che quantità.

Il presente lavoro di tesi ha principalmente due obiettivi: il primo è quello di entrare nel dettaglio in questi modelli in modo da mostrare qual è la teoria e le ipotesi utilizzate; il secondo è valutarne la validità attraverso il FEM in situazioni che si discostano dalle ipotesi di partenza e che sono più attinenti alla realtà.

Nel secondo capitolo si è discusso del problema inerente alla **distribuzione del carico**. In PANDA il problema è affrontato ipotizzando uno stato membranale di deformazione, una laminazione ortotropa degli irrigidimenti e risultanti di sollecitazione costanti lungo ogni segmento.

Quello che si è ottenuto è che nella realtà, discostandoci dalla condizione di laminazione ortotropa in membrana, viene meno l'ipotesi di considerare costanti le risultanti di sollecitazione lungo ogni segmento e questo porta ad una riduzione di carico critico che effettivamente ogni irrigidimento può sopportare.

Nel terzo capitolo, si è posta l'attenzione sull'**instabilità locale, generale e semi generale**. Il modello matematico rappresenta una piastra multistrato, semplicemente supportata sui lati, in cui si considera nella sua laminazione, solo lo skin o skin e irrigidimenti spalmati (o uno o entrambi tra stringer e ring).

Nel programma sono presenti due tipologie di modelli, PANDA-type e PANDA-alternate, che si differenziano principalmente per la complessità del campo di spostamenti.

Ciò che si è ottenuto dai vari confronti è che il primo modello, anche se molto economico dal punto di vista computazionale, fornisce previsioni sul carico critico particolarmente accurate. Questo a patto di avere un rapporto tra i lati, della piastra considerata, distante dal valore unitario. Se così non fosse, è necessario utilizzare il secondo modello che fornisce risultati sì accurati, ma con un costo computazionale molto più elevato.

Nel quarto capitolo si è approfondito il concetto dell'**instabilità locale degli irrigidimenti**, ovvero il crippling. In sostanza il modello analitico si basa sulla formulazione del modello PANDA-type precedente, in cui sono considerati nulli alcuni parametri del campo di spostamenti. Il fattore di carico critico di ogni segmento interno o gruppi di segmenti terminali sono, quindi, calcolati come nel capitolo precedente.

Ai fini del confronto, sono stati presi sotto esame due tipologie di irrigidimento, *T*-type e Hat-type, considerando diverse situazioni geometriche e diversi tipi di laminazione-materiale. Dai risultati si è riscontrato che: PANDA riesce a prevedere in maniera corretta in quale segmento dell'irrigidimento si verifica l'instabilità; NASTRAN fornisce un carico critico, tanto più piccolo rispetto a quello indicato da PANDA, quanto più i termini non ortotropi della matrice di rigidezza del monostrato equivalente diventano rilevanti. Quello che ne deriva è che esiste un ristretto range di validità dove i risultati numerici e analitici concordano.

Nel quinto capitolo si è discusso dell'**instabilità torsionale con la partecipazione dello skin**. Il modo considerato prevede una torsione dell'irrigidimento a seguito dell'instabilità locale dello skin ad esso adiacente. In sostanza il modello matematico è analogo a quello del terzo capitolo, ma nell'energia potenziale totale rientrano anche i contributi energetici inerenti agli irrigidimenti. Anche per questo tipo di instabilità sono presenti nel programma due modelli, PANDA-type e PANDA-alternate, nel primo gli irrigidimenti sono considerati come composti da un'insieme di piastre molto lunghe e nel secondo da elementi monodirezionali.

Per il confronto sono stati presi in considerazione tre tipologie di irrigidimento *I*, *J* e *T*-type con laminazione ortotropa uguale dappertutto. Quello che si è riscontrato è che, se la dimensione trasversale degli irrigidimenti è piccola in confronto alla larghezza dello skin tra due irrigidimenti, allora PANDA fornisce risultati che sono comparabili a quelli forniti da NASTRAN. Negli altri casi entrano in gioco effetti tridimensionali che nel modello analitico non sono considerati.

Nel sesto capitolo si è posta l'attenzione sull'**instabilità torsionale dei soli irrigidimenti**. Per descrivere il problema si è fatto ricorso a relazioni di deformazione non lineare, tuttavia l'equazione risultante ottenuta minimizzando il potenziale totale viene linearizzata. Per il confronto, anche in questo caso, sono prese sotto esame le sezioni *I*, *J* e *T*-type, considerando una laminazione uguale dappertutto.

Sono state eseguite varie analisi facendo variare la scala dell'irrigidimento rispetto alla lunghezza, come anche facendo variare la forma. Si è ottenuto che PANDA e NASTRAN forniscono valori di carico critico comparabili solo in situazioni in cui la geometria risulta simmetrica, ovvero per le sezioni *I* e *T*. Per la sezione *J*, invece, i risultati risultano completamente incongruenti mostrando errori molto marcati. Si ipotizza che questa incongruenza sia insita nel campo di spostamenti utilizzato, che non permette di tenere in considerazione effetti tridimensionali che in realtà il FEM considera.

Nell'ultimo capitolo si entra nel concetto dell'**instabilità locale non lineare**.

Attraverso le teorie introdotte da Koiter, rimaneggiate e adattate al caso specifico dei pannelli irrigiditi, il programma PANDA2 riesce principalmente a fornire indicazioni, sulle tensioni massime (che permettono di individuare eventuali rotture nelle fibre o nella matrice all'interno del laminato) e il carico di popoff (ovvero il carico responsabile della separazione dell'irrigidimento dallo skin).

Il modello numerico preso in considerazione, presenta laminazione e geometrie simmet-

riche: pannello con irrigidimento *I*-type con spessori e larghezza dei segmenti simmetrici rispetto alla mezzeria del modulo di pannello. Su questo sono state eseguite due analisi: la prima con semplice carico di compressione e la seconda con una situazione di carico più complessa per simulare un comportamento non simmetrico del pannello. Analizzando i risultati, a diverse percentuali di carico applicato, si è scoperto che, nella situazione più complessa, in campo post-buckling avanzato le tensioni e i carichi ottenuti risultano molto più piccoli rispetto a quelli forniti da NASTRAN. Invece, per situazioni di carico a ridosso di quello critico le tensioni previste da modello numerico e analitico sono comparabili. Per il semplice carico di compressione, date le simmetrie in gioco, il campo di validità dei risultati PANDA2 è più esteso. Infatti, anche in campo post-buckling avanzato i risultati forniti sono congruenti con il FEM.

In **sintesi**, nonostante tutte le limitazioni riscontrate, si può affermare che il programma PANDA2 risulta un ottimo strumento per il progetto preliminare di pannelli irrigiditi. Questo però a patto di leggere i risultati ottenuti in modo critico, facendo attenzione a tutti gli aspetti, e non solo, che sono stati mostrati in questo lavoro di tesi. Naturalmente, il pannello ottenuto da questo programma, prima di passare alla successive fasi di sviluppo, va opportunamente ispezionato e integrato attraverso tecniche di analisi più sofisticate.

Terminato quanto concerne la pura analisi del programma PANDA2, si può discutere di un'idea che potrebbe essere oggetto di **lavori futuri**.

Un possibile modo per svincolarsi dalle limitazioni imposte dai modelli matematici utilizzati nel programma potrebbe essere quello di sfruttare NASTRAN come solutore. In pratica l'idea è quella di utilizzare gli stessi modelli numerici presentati nei capitoli precedenti, che forniscono gli stessi fattori di carico critico che PANDA2 utilizza, e sfruttarli per determinare il progetto di peso minimo del pannello irrigidito.

I vantaggi di un approccio del genere al problema sarebbero quelli di avere analisi che non soffrono di tutte quelle limitazioni discusse in precedenza. Tuttavia, il conseguente aspetto negativo risulta essere il costo computazionale elevato per eseguire ogni passo di iterazione.

Quest'ultimo aspetto, però, potrebbe essere compensato dal fatto che, avendo a disposizione analisi più accurate, si potrebbero adottare passi di iterazione più lunghi e quindi raggiungere il progetto di ottimo più velocemente, logicamente, in termini di numero di passi e non propriamente di tempo.

Questo programma, alla fine di tutto, va opportunamente confrontato con PANDA2 per valutarne l'effettiva efficacia.

Bibliography

- [1] Bushnell, D., "*PANDA2 - program for minimum weight design of stiffened, composite, locally buckled panels*", Computers and Structures, Vol. 25, No. 4, pp 469-605, 1987.
- [2] Bushnell, D., "*Theoretical Basis of the Panda Computer Program for Preliminary Design of Stiffened Panels Under Combined In-Plane Loads*", Computers and Structures, Vol. 27, No. 4, pp. 541-563, 1987.
- [3] Bushnell, D., "*Additional buckling solutions in PANDA2*", AIAA-99-1233, 1999.
- [4] Bushnell, D., "*Optimization of composite, stiffened, imperfect panels under combined loads for service in the postbuckling regime*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 103, pp. 43-114, 1992.
- [5] Timoshenko and Goodier, "*Theory of Elastic Stability*", second edition. McGraw-Hill, New York (1961).
- [6] Jones, R. M., "*Mechanics of Composite Materials*", McGraw-Hill Book CO., New York, 1975.
- [7] Olek Zienkiewicz Robert Taylor J.Z. Zhu, "*The Finite Element Method, volume 1: The Basis*", fifth edition, Butterworth-Heinemann, 2013.
- [8] E.Riks, "*Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 47, pp. 219-259, 1984.
- [9] Paolo Vannucci, "*Materiali compositi per impiego strutturale: Metodi di analisi e di progetto*", Doctoral, Università di Pisa, Italy, 2007.