

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Tesi di laurea

**INDAGINE SPERIMENTALE E MODELLAZIONE  
FEM DELLE PROPRIETA' A ROTTURA ALLE  
BASSE TEMPERATURE DEI LEGANTI  
BITUMINOSI**



Relatore:

Prof. Orazio Baglieri

Correlatori:

Prof. Davide Dalmazzo

Dott.ssa Chiara Tozzi

Candidata:

Sofia Rizzo

## Sommario

Introduzione .....	4
1. Caratterizzazione e comportamento di materiali viscoelastici lineari .....	6
1.1. Modelli analogici .....	9
1.1.1. Modello analogico di un solido elastico lineare .....	9
1.1.2. Modello analogico di un fluido ideale .....	12
1.1.3. Modello viscoelastico lineare di Maxwell.....	14
1.1.4. Modello viscoelastico lineare di Kelvin - Voigt .....	17
1.1.5. Modello viscoelastico lineare di Burger.....	20
1.1.6. Modelli generalizzati.....	22
1.2. Principio di corrispondenza elastico – viscoelastico .....	23
1.2.1. Formulazione in pseudo deformazioni .....	23
1.2.2. Soluzione analitica dell'integrale di convoluzione .....	26
2. Modellazione di materiali viscoelastici lineari con il metodo degli elementi finiti (FEM) ...	33
2.1. Il metodo delle differenze finite.....	33
2.2. Metodo agli Elementi Finiti.....	36
2.3. Trattazione della viscoelasticità in COMSOL Multphysics .....	38
3. Indagine sperimentale .....	42
3.1. Materiali.....	43
3.1.2. Leganti bituminosi: definizione e caratterizzazione.....	43
3.1.3. Misura delle grandezze reologiche.....	47
3.1.4. Principio di sovrapposizione tempo-temperatura .....	50
3.1.5. Modello di Christensen – Anderson (CA model).....	54
3.1.6. Fenomeno dell'invecchiamento dei leganti bituminosi.....	55
3.1.7. Prove di simulazione del fenomeno di invecchiamento .....	58
3.2. Programma sperimentale.....	60
3.2.1. Test di frequency sweep.....	62
3.2.2. Prove a rottura .....	63
3.2.3. Caratterizzazione viscoelastica lineare.....	64
3.2.4. Caratterizzazione delle proprietà a rottura .....	75
3.3. Discussione dei risultati .....	77
4. Modellazione .....	79
4.1. Flusso di modellazione .....	79
4.1.1. Configurazione dell'ambiente modello .....	80
4.1.2. Costruzione della geometria.....	81
4.1.3. Specifica delle proprietà del materiale.....	82
4.1.4. Definizione delle condizioni al contorno della fisica .....	82

4.1.5. Creazione della mesh.....	87
4.2. Costruzione del modello .....	94
4.2.1. Geometria, condizioni di vincolo e di carico.....	94
4.2.4. Modellazione della viscoelasticità lineare .....	100
4.2.5. Introduzione della variabile tempo nel carico (analisi di tipo transitorio) .....	106
4.3. Discussione dei risultati.....	111
4.4. Introduzione alla definizione di un criterio di rottura energetico .....	116
4.5. I vantaggi dell'analisi FEM.....	120
Conclusioni .....	125
Bibliografia .....	127

# Introduzione

La risoluzione delle equazioni differenziali che governano i fenomeni fisici attraverso metodi di simulazione numerica agli elementi finiti (*FEM*) costituisce una metodologia di calcolo che, non soltanto consente di superare i limiti dei metodi di calcolo tradizionali, ma consente anche di studiare il comportamento di un sistema prima ancora che questo venga realizzato. La possibilità di esplorare diverse soluzioni, nonché di confrontare le performance di diversi modelli (anche tridimensionali), realizzati variando la configurazione geometrica, il materiale, o le condizioni al contorno, costituisce una della potenzialità dell'analisi *FEM* rispetto agli strumenti di calcolo analitici.

Il presente lavoro di tesi nasce dall'interesse di sviluppare uno strumento di simulazione agli elementi finiti che consenta di simulare e validare un nuovo protocollo di prova sviluppato al fine di caratterizzare il comportamento a rottura alle basse temperature dei leganti bituminosi. La complessità del problema si lega al comportamento viscoelastico del materiale che nell'ambito del presente lavoro di tesi è stato modellato mediante il modello di Maxwell generalizzato, trascurando i fenomeni di non linearità. L'analisi numerica è stata svolta parallelamente ad un'indagine sperimentale che ha avuto un duplice obiettivo: quello della valutazione degli effetti dell'invecchiamento sulle proprietà a rottura dei leganti bituminosi alle basse temperature, e quello della comparazione dei risultati ottenuti dal modello agli elementi finiti. In particolare, l'indagine sperimentale è stata svolta su due tipologie di leganti bituminosi, un bitume tradizionale e un bitume modificato con *SBS*, e si è articolata in tre fasi: nella prima i materiali sono stati sottoposti alle prove di *Rolling Thin Film Oven Test (RTFOT)* e *Pressure Ageing Vessel (PAV)* al fine di simulare gli effetti dell'invecchiamento a breve e a lungo termine; nella seconda sono state eseguite delle prove di *frequency sweep* con il *Dynamic Shear Rheometer (DSR)*, prove in regime oscillatorio a differenti frequenze di carico e differenti temperature, al fine di caratterizzare i materiali in

campo viscoelastico lineare; infine, nella terza fase sono state eseguite delle prove di torsione monotona con incremento di velocità di deformazione costante sino alla rottura del provino, al fine di determinare le proprietà a rottura dei leganti bituminosi nei tre differenti gradi di invecchiamento (materiale vergine, invecchiato al *RTFOT* e invecchiato al *PAV*). Le prove di rottura sono state eseguite secondo un nuovo protocollo di prova che prevede l'utilizzo del *DSR* con un sistema di misura a piatti paralleli di diametro 4 mm.

Infine, i risultati ottenuti dall'analisi numerica sono stati confrontati sia con quelli ottenuti sperimentalmente sia con quelli ricavati tramite il calcolo analitico. I risultati sono stati quindi discussi in modo approfondito, e mostrano come la modellazione agli elementi finiti rappresenti uno strumento efficace e vantaggioso ai fini dello sviluppo e della validazione di un efficace protocollo di caratterizzazione dei leganti bituminosi alle basse temperature tramite l'uso del *DSR*.

# 1. Caratterizzazione e comportamento di materiali viscoelastici lineari

Un materiale viscoelastico è un materiale che presenta un comportamento intermedio tra quello di un solido elastico lineare e quello di un fluido perfettamente viscoso. In altre parole, si tratta di un corpo il cui comportamento si caratterizza per la presenza di componenti di risposta elastiche e componenti di risposta viscosi che si combinano tra di loro in modo vario. Un materiale viscoelastico viene poi definito lineare se rispetta le due seguenti condizioni:

- Proporzionalità:  $R\{AI\} = AR\{I\}$
- Sovrapposizione degli effetti:  $R\{I_1 + I_2\} = R\{I_1\} + R\{I_2\}$

In cui:  $I, I_1, I_2$  sono gli input,  $R$  è la risposta e  $A$  una costante.

Si immagini, quindi, di applicare una storia tensionale  $\sigma(\tau)$  variabile nell'intervallo temporale ( $\tau_0 \leq \tau \leq +\infty$ ) ad un campione di un generico materiale e di misurarne la corrispondente storia deformativa  $\varepsilon(\tau)$ . Per un'arbitraria storia tensionale, la deformazione al generico istante di tempo  $t$  dipenderà dai valori di tensione applicati nell'intervallo di carico compreso tra  $\tau_0$  e  $t$  (Severino P.C. Marques; Guillermo J. Creus, 2012). Pertanto, è possibile scrivere:

$$\varepsilon(t) = D\{\sigma(\tau)\}_{\tau_0}^t \quad (1.1)$$

dove:

- $D$  indica il funzionale, definito come  $D: \mathcal{C}(\tau_0; t) \Rightarrow \mathbb{R}$ ;
- $\mathcal{C}(\tau_0; t)$  rappresenta l'insieme delle funzioni continue nell'intervallo  $(\tau_0; t)$ ;
- $\mathbb{R}$  rappresenta l'insieme dei numeri reali.

L'equazione indica che i valori di  $\varepsilon$  al tempo  $t$  dipendono dai valori di  $\sigma(\tau)$ , con  $\tau$  variabile nell'intervallo compreso tra  $\tau_0$  e  $t$ .

Il termine  $\tau_0$  rappresenta il generico valore iniziale, tale che:

$$\forall t < \tau_0 : \sigma(t) = 0; \varepsilon(t) = 0 \quad (1.2)$$

Analogamente, se si applica una storia deformativa  $\varepsilon(\tau)$  e si misura la corrispondente storia tensionale  $\sigma(\tau)$  nell'intervallo ( $\tau_0 \leq t \leq +\infty$ ), si può scrivere:

$$\sigma(t) = E\{\varepsilon(\tau)\}_{\tau_0}^t \quad (1.3)$$

Ad ogni classe di materiale corrisponde un diverso funzionale  $D$  (o  $E$ ).

Se si considera un materiale elastico, la deformazione al tempo  $t$  dipende dal valore della tensione applicata al medesimo istante temporale  $t$  ed il funzionale si riduce ad una funzione ordinaria:

$$\varepsilon(t) = D(\sigma(t)) \quad (1.4)$$

Se il materiale è elastico lineare si può semplificare ulteriormente:

$$\varepsilon(t) = D\sigma(t) \quad (1.5)$$

Dove  $D$  è un fattore costante, detto *deformabilità*, e rappresenta l'inverso del *modulo elastico*  $E$ .

I materiali viscoelastici invece si caratterizzano per la dipendenza della loro risposta tensionale dal processo di deformazione. Il legame costitutivo dei materiali viscoelastici presenta una struttura funzionale del tipo indicato nella (1.1) e nella (1.3).

In particolare, quando la relazione funzionale è lineare, questa può essere rappresentata, nella seguente forma:

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t D(t - \tau) d\sigma(\tau) \quad (1.6)$$

Oppure:

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t D(t - \tau) \dot{\sigma} d\tau \quad (1.7)$$

Dove  $\tau_0$  è scelto in modo che  $\forall t < \tau_0$  il materiale risulta scarico.

Inoltre,  $D(t - \tau)$  rappresenta la *funzione di creep* (o *creep compliance*).

Analogamente, è possibile scrivere la relazione inversa:

$$\sigma(t) = \int_{\tau_0}^t E(t - \tau) d\varepsilon(\tau) \quad (1.8)$$

Oppure:

$$\sigma(t) = \int_{\tau_0}^t E(t - \tau) \dot{\varepsilon} d\tau \quad (1.9)$$

dove  $E(t - \tau)$  rappresenta la *funzione di rilassamento*.

Integrando per parti la (1.6), si ottiene:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(0)} + \int_{\tau_0}^t d(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (1.10)$$

Dove:

- $d(t - \tau) = -\frac{\delta}{\delta\tau} D(t - \tau)$
- $E(0) = \frac{1}{D(t - \tau)}$

## 1.1. Modelli analogici

Il comportamento meccanico di un corpo viscoelastico lineare può essere descritto attraverso l'utilizzo di modelli analogici, dati dalla combinazione di elementi base, vale a dire molle e dissipatori. Questi elementi base rappresentano i modelli semplici che descrivono rispettivamente il comportamento di un solido elastico lineare e quello di un fluido perfettamente viscoso.

### 1.1.1. Modello analogico di un solido elastico lineare

La molla costituisce il modello analogico che descrive il comportamento di un corpo perfettamente elastico. Il comportamento di una molla è tale che, se si applica una tensione, questa risponde con una deformazione proporzionale alla tensione applicata. Il coefficiente di proporzionalità è la costante elastica della molla.

In questo caso, il legame costitutivo è rappresentato dalla legge di Hooke, secondo cui:

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t) \quad (1.1.1.1)$$

dove:

- $\sigma(t)$ : tensione normale agente all'istante di tempo  $t$ ;
- $\varepsilon(t)$ : deformazione corrispondente all'istante di tempo  $t$ ;
- $E$ : Modulo di Young.

La medesima relazione può essere scritta in termini di tensioni tangenziali:

$$\tau(t) = G \cdot \gamma(t) \quad (1.1.1.2)$$

dove:

- $\tau(t)$ : tensione tangenziale agente all'istante di tempo  $t$ ;
- $\gamma(t)$ : deformazione corrispondente all'istante di tempo  $t$ ;
- $G$ : modulo elastico tangenziale.

I due moduli sono legati tra di loro dalla seguente relazione:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (1.1.1.3)$$

Dove  $\nu$  è il coefficiente di Poisson.

Si consideri un solido elastico lineare soggetto ad una tensione normale  $\sigma_0$  che viene applicata in corrispondenza di un certo istante di tempo  $t_0$  e mantenuta costante nel tempo  $\sigma(t) = \sigma_0$ . All'applicazione istantanea di un carico, il solido elastico – lineare risponde istantaneamente con una deformazione  $\varepsilon_0$ . Inoltre, se la tensione viene mantenuta costante nel tempo, la corrispondente deformazione sarà anch'essa costante e proporzionale alla tensione applicata  $\varepsilon(t) = E \cdot \sigma_0 = \varepsilon_0$ , come mostrato in figura 1.1.1.1:

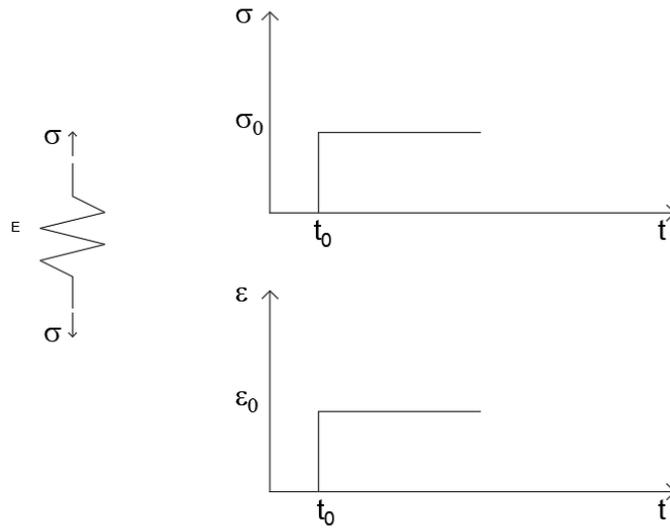


Figura 1.1.1.1 Rappresentazione della risposta deformativa sotto carico di un corpo elastico - lineare

La particolarità del solido elastico lineare è che, quale che sia il valore di tensione applicata, il rapporto tra la tensione applicata e la corrispondente deformazione restituisce il Modulo di Young, come mostrato in figura 1.1.1.2:

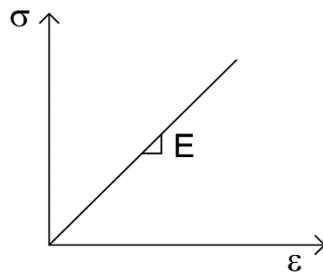


Figura 1.1.1.2 Rappresentazione dell'andamento tensione - deformazione nel caso di un solido elastico - lineare.

In formule:

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = E \quad (1.1.1.4)$$

dove:

- $\sigma_i$ : tensione in input;
- $\varepsilon_i$ : deformazione in output;
- E: Modulo di Young.

Se ad un certo istante di tempo si rimuove la tensione applicata, il solido elastico lineare restituisce istantaneamente la totalità della deformazione che aveva manifestato. In termini energetici significa che il lavoro speso per deformare il materiale viene integralmente restituito, senza alcuna dissipazione.

Il concetto è analogo in termini di tensioni tangenziali.

### 1.1.2. Modello analogico di un fluido ideale

Lo smorzatore viscoso di Newton costituisce il modello analogico che descrive il comportamento di un fluido perfettamente viscoso, detto anche fluido newtoniano o fluido ideale. Il comportamento del fluido perfettamente viscoso è tale che, se si applica una tensione tangenziale, questo risponde con un gradiente di deformazione proporzionale alla tensione applicata. La costante di proporzionalità che contraddistingue i fluidi newtoniani prende il nome di *viscosità*.

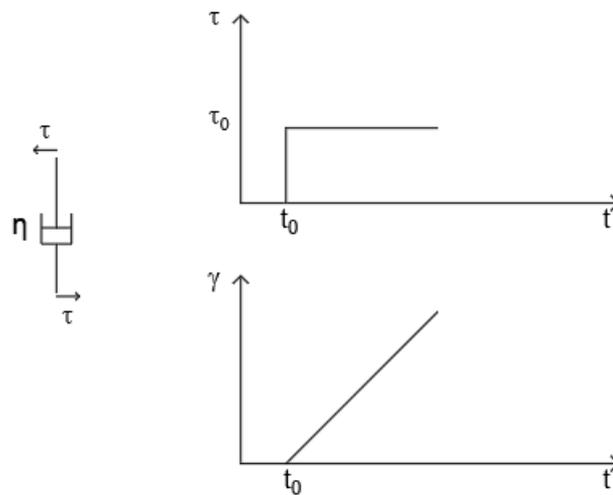
Il legame costitutivo di un fluido ideale è espresso dalla legge di Stokes, secondo cui:

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma} \quad (1.1.2.1)$$

dove:

- $\tau$ : tensione tangenziale applicata;
- $\eta$ : viscosità del materiale;
- $\dot{\gamma}$ : velocità di deformazione tangenziale.

Si consideri un fluido newtoniano soggetto ad una tensione tangenziale  $\tau_0$  che viene applicata in corrispondenza di un certo istante di tempo  $t_0$  e mantenuta costante nel tempo  $\tau(t) = \tau_0$ . Il fluido ideale risponde con un gradiente di deformazione  $\dot{\gamma} = \frac{\delta\gamma}{\delta t}$  costante, vale a dire con una deformazione  $\gamma(t)$  che cresce nel tempo con legge lineare, come mostrato in figura 1.1.2.1:



*Figura 1.1.2.1. Rappresentazione dell'andamento delle deformazioni nel tempo di un fluido viscoso.*

La particolarità del fluido newtoniano è che, quale che sia il valore di tensione applicata, il rapporto tra la tensione applicata e il corrispondente gradiente di deformazione restituisce la viscosità del materiale, come mostrato in figura:

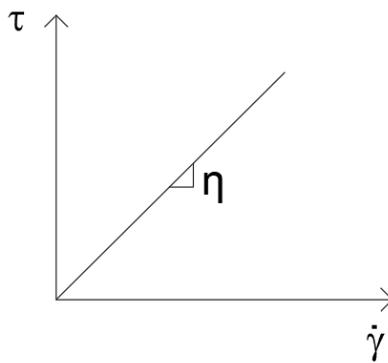


Figura 1.1.2.2. Rappresentazione dell'andamento tensione - velocità di deformazione nel caso di un fluido viscoso.

In formule:

$$\frac{\tau_1}{\dot{\gamma}_1} = \frac{\tau_2}{\dot{\gamma}_2} = \eta \quad (1.1.2.2)$$

dove:

- $\tau_i$ : tensione applicata;
- $\dot{\gamma}_i$ : gradiente di deformazione corrispondente alla tensione applicata;
- $\eta$ : viscosità del materiale.

Se ad un certo istante di tempo  $t$  si rimuove istantaneamente la tensione applicata, la deformazione che il fluido aveva manifestato non viene recuperata. In termini energetici significa che il lavoro speso per deformare il materiale viene integralmente dissipato.

Il concetto è analogo in termini di tensioni normali.

### 1.1.3. Modello viscoelastico lineare di Maxwell

Il modello viscoelastico lineare di Maxwell è costituito dalla combinazione in serie di una molla e un dissipatore. Sia  $E$  la costante elastica della molla ed  $\eta$  la costante viscosa del dissipatore.

Si immagini di applicare una tensione  $\sigma$  al sistema, come mostrato in figura 1.1.3.1:



Figura 1.1.3.1. Schema del modello analogico di Maxwell.

Data la disposizione in serie della molla e del dissipatore, per l'equilibrio sia la tensione agente sulla molla che quella agente sul dissipatore devono uguagliare la tensione imposta al sistema:

$$\sigma_{EL} = \sigma_v = \sigma \quad (1.1.3.1)$$

dove:

- $\sigma_{EL}$ : tensione agente sulla molla
- $\sigma_v$ : tensione agente sul dissipatore
- $\sigma$ : tensione applicata al sistema

Inoltre, la deformazione totale del sistema è data da:

$$\varepsilon = \varepsilon_{EL} + \varepsilon_v \quad (1.1.3.2)$$

dove:

- $\varepsilon_{EL}$ : deformazione della molla
- $\varepsilon_v$ : deformazione del dissipatore
- $\varepsilon$ : deformazione totale del sistema

Analogamente, in termini di velocità di deformazione si ha:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{EL} + \dot{\varepsilon}_v \quad (1.1.3.3)$$

Ricordando i legami costitutivi della molla e del dissipatore:

$$\varepsilon_{EL} = \frac{\sigma}{E} \quad (1.1.3.4)$$

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\sigma}{\eta} \quad (1.1.3.5)$$

Si può scrivere:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{\eta} \quad (1.1.3.6)$$

Pertanto, risolvendo l'equazione differenziale alle derivate parziali (1.1.3.6), si ottiene la soluzione del sistema.

Per esempio, si supponga di applicare al tempo  $t=0$  una tensione costante  $\sigma = \sigma_0$ .

L'equazione (1.1.3.6) diventa un'equazione differenziale del primo ordine, la cui soluzione è data da:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} \cdot t \quad (1.1.3.7)$$

Questa relazione esprime la risposta del sistema in termini deformativi per effetto dell'applicazione di una tensione  $\sigma$  costante. In particolare, si osserva che la risposta deformativa nel tempo si compone di due contributi:

- $\frac{\sigma}{E}$  rappresenta il contributo della molla che risponde istantaneamente;
- $\frac{\sigma}{\eta} \cdot t$  rappresenta il contributo del dissipatore che cresce nel tempo con legge lineare.

Se istantaneamente si rimuove il carico, il contributo deformativo della molla viene restituito istantaneamente, mentre quello del dissipatore permane e si mantiene costante; la risposta del sistema si presenta, quindi, come mostrato in figura 1.1.3.2:

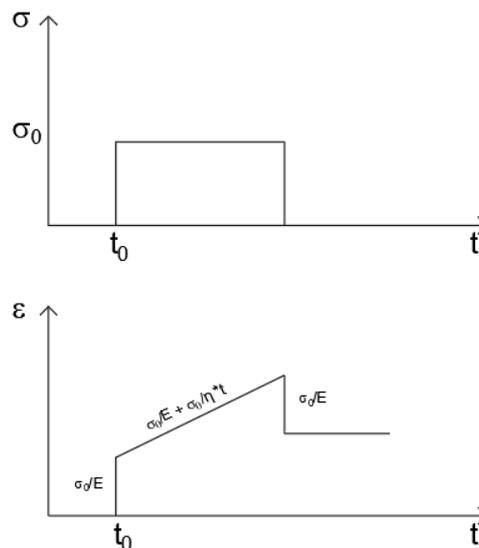


Figura 1.1.3.2. Andamento della risposta deformativa nel tempo del modello di Maxwell nelle fasi di carico e scarico.

### 1.1.4. Modello viscoelastico lineare di Kelvin - Voigt

Il modello viscoelastico lineare di Kelvin - Voigt è costituito dalla combinazione in parallelo di una molla e un dissipatore. Sia  $E$  la costante elastica della molla ed  $\eta$  la costante viscosa del dissipatore.

Si immagini di applicare una tensione  $\sigma$  al sistema, come mostrato in figura 1.1.4.1:

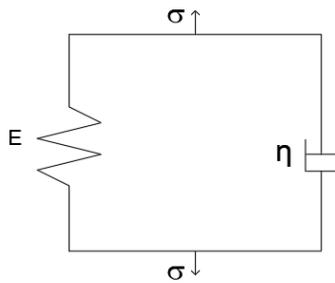


Figura 1.1.4.1 Schema del modello analogico di Kelvin - Voigt.

Data la disposizione in parallelo della molla e del dissipatore, la deformazione della molla  $\varepsilon_{EL}$  deve uguagliare la deformazione del dissipatore  $\varepsilon_v$ :

$$\varepsilon_{EL} = \varepsilon_v = \varepsilon \quad (1.1.4.1)$$

Inoltre, la tensione applicata al sistema viene ripartita tra la molla e il dissipatore:

$$\sigma = \sigma_{EL} + \sigma_v \quad (1.1.4.2)$$

dove:

- $\sigma$ : tensione applicata al sistema;
- $\sigma_{EL}$ : tensione agente sulla molla;
- $\sigma_v$ : tensione agente sul dissipatore.

Ricordando i legami costitutivi della molla e del dissipatore (1.1.3.4) e (1.1.3.5), si può scrivere:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon}; \quad (1.1.4.3)$$

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta} \cdot \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} \quad (1.1.4.4)$$

Risolvendo l'equazione differenziale alle derivate parziali, si ottiene la soluzione del sistema.

Per esempio, si supponga di applicare al tempo  $t = 0$  una tensione costante  $\sigma = \sigma_0$ .

La soluzione è data da:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) \quad (1.1.4.5)$$

dove  $\lambda = \frac{\eta}{E}$  è il tempo di ritardo.

Questa relazione esprime come varia la deformazione nel tempo per effetto dell'applicazione di una tensione  $\sigma = \sigma_0$  costante. In particolare, si osserva che, per  $t \rightarrow +\infty$ , la risposta deformativa del sistema tende asintoticamente al comportamento di un solido perfettamente elastico. In altre parole, la molla per effetto della sollecitazione applicata tende a deformarsi di una quantità pari a  $\frac{\sigma_0}{E}$ , ma la sua risposta deformativa viene smorzata e ritardata dalla presenza del dissipatore. La costante  $\lambda$ , detta *tempo di ritardo*, esprime il "ritardo" con cui il sistema raggiunge la deformazione elastica.

Se si rimuove istantaneamente il carico, la molla tende a restituire istantaneamente la deformazione, ma questa restituzione viene modulata e smorzata dalla presenza del dissipatore. Per  $t \rightarrow +\infty$ , il materiale recupera completamente la deformazione che aveva manifestato, come mostrato in figura:

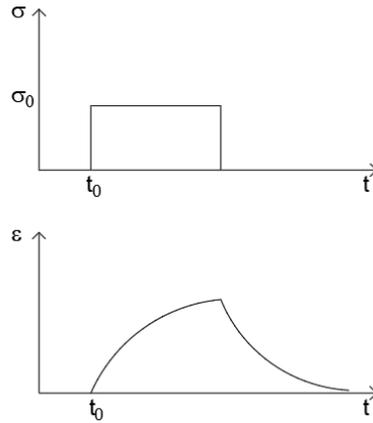


Figura 1.1.4.2. Andamento della risposta deformativa nel tempo del modello di Kelvin - Voigt nelle fasi di carico e scarico.

### 1.1.5. Modello viscoelastico lineare di Burger

Il modello viscoelastico lineare di Burger è costituito dalla combinazione in serie di un modello di Maxwell e di un modello di Kelvin – Voigt, come mostrato in figura 1.1.5.1:

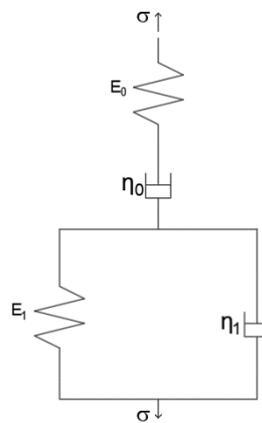


Figura 1.1.5.1. Schema del modello analogico di Burger.

La formulazione analitica della variazione di deformazione nel tempo per effetto dell'applicazione di una tensione  $\sigma$  costante è data, quindi, dalla somma della deformazione dei due modelli collegati in serie:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta_0} \cdot t + \frac{\sigma}{E_1} \left(1 - e^{-t/\lambda_1}\right) \quad (1.1.5.1)$$

dove:

- $E_0$ : costante elastica della molla del modello di Maxwell;
- $E_1$ : costante elastica della molla del modello di Kelvin - Voigt;
- $\eta_0$ : costante viscosa dello smorzatore del modello di Maxwell;
- $\lambda_1 = \frac{\eta_1}{E_1}$ : tempo di ritardo dello smorzatore del modello di Kelvin - Voigt.

Questa equazione ci dice che, se al modello di Burger si applica istantaneamente una tensione  $\sigma$  e se questa viene mantenuta costante nel tempo, la risposta deformativa del sistema è data dalla somma di tre contributi:

- $\varepsilon_E = \frac{\sigma}{E_0}$ : una deformazione elastica istantanea, che corrisponde alla risposta elastica della molla del modello di Maxwell;
- $\varepsilon_v = \frac{\sigma}{\eta_0} \cdot t$ : una deformazione viscosa, che corrisponde alla risposta del dissipatore del modello di Maxwell;
- $\varepsilon_{DE} = \frac{\sigma}{E_1} \left(1 - e^{-t/\lambda_1}\right)$ : una deformazione elastica ritardata, che corrisponde alla risposta del modello di Kelvin - Voigt.

Se si rimuove istantaneamente il carico, la deformazione elastica viene recuperata istantaneamente, la deformazione elastica ritardata viene recuperata nel tempo, mentre la deformazione viscosa permane e non viene restituita.

La figura 1.1.5.2 mostra l'andamento delle deformazioni nel tempo nelle due fasi di carico e scarico (applicazione di una tensione  $\sigma$  costante e rimozione istantanea del carico):

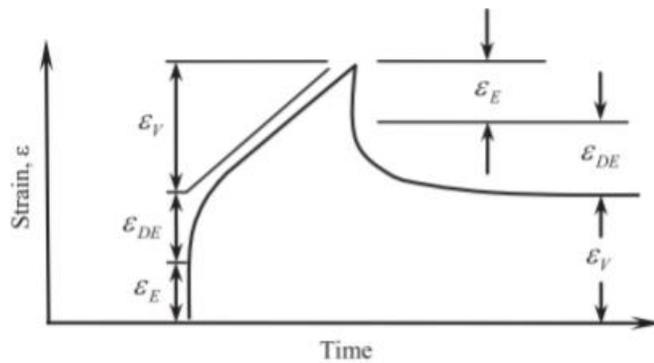


Figura 1.1.5.2. Andamento della risposta deformativa nel tempo del modello di Burger nelle fasi di carico e scarico.

### 1.1.6. Modelli generalizzati

I modelli generalizzati nascono dall'esigenza di dovere descrivere il comportamento viscoelastico di materiali come il bitume, che risulta essere molto più complesso del comportamento descritto dai modelli precedentemente illustrati. Pertanto, quando il comportamento del materiale non è descrivibile attraverso l'utilizzo dei modelli analogici semplici di Maxwell, di Kelvin – Voigt e di Burger, questi possono essere combinati tra di loro in modo vario, ottenendo un modello generalizzato. Tra i modelli generalizzati più comunemente utilizzati ci sono il modello generalizzato di Maxwell, dato dalla combinazione in parallelo di più unità semplici di Maxwell, e il modello generalizzato di Kelvin - Voigt, dato dalla combinazione in serie di più unità semplici di Kelvin – Voigt, come mostrato in figura 1.1.6.1 e 1.1.6.2:

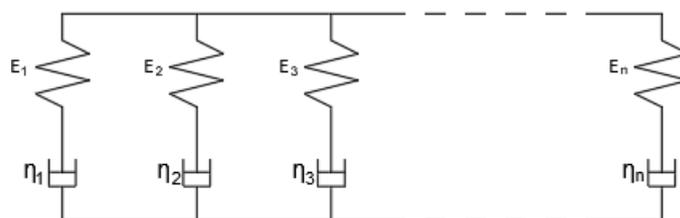


Figura 1.1.6.1. Schema del modello generalizzato di Maxwell.

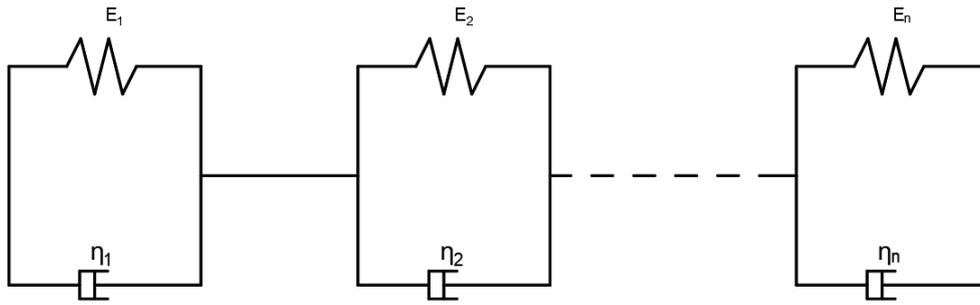


Figura 1.1.6.2 Schema del modello generalizzato di Kelvin - Voigt

In particolare, il modello generalizzato di Maxwell è stato utilizzato per la modellazione del materiale nella fase di simulazione agli elementi finiti del presente lavoro di tesi.

## 1.2. Principio di corrispondenza elastico – viscoelastico

Il principio di corrispondenza elastico – viscoelastico di Schapery consente di trattare un corpo che presenta un comportamento viscoelastico lineare, come un equivalente solido elastico, passando dalle deformazioni alle pseudo deformazioni (Pseudo Strain). (Schapery, 1999).

### 1.2.1. Formulazione in pseudo deformazioni

La definizione delle pseudo deformazioni, in accordo col principio di corrispondenza elastico – viscoelastico di Schapery, è espressa dalla seguente equazione:

$$\gamma^R(t) = \frac{\tau(t)}{G^R} \quad (1.2.1.1)$$

dove:

- $\gamma^R(t)$  : pseudo – deformazione al tempo  $t$ ;

- $\tau(t)$  : tensione di taglio viscoelastica lineare al tempo  $t$ ;
- $G^R$  : modulo tangenziale di riferimento, tipicamente assunto pari ad  $1 \text{ GPa}$ .

Le tensioni  $\tau(t)$  possono essere calcolate analiticamente mediante l'integrale di convoluzione definito nella (1.8) e formulato nell'equazione seguente in termini di tensioni tangenziali:

$$\tau(t) = \int_0^{t_R} G(t_R - \xi) \frac{\delta\gamma}{\delta\xi} \delta\xi \quad (1.2.1.2)$$

dove:

- $G(t_R - \xi)$  : funzione di rilassamento;
- $t_R$  : tempo ridotto;
- $\xi$  : variabile di integrazione.

Sostituendo l'espressione (1.2.1.2) nella (1.2.1.1) e considerando  $G^R$  pari ad  $1 \text{ GPa}$ , l'equazione (1.2.1.2.) diventa:

$$\gamma^R(t) = \int_0^{t_R} G(t_R - \xi) \frac{\delta\gamma}{\delta\xi} \delta\xi \quad (1.2.1.3)$$

Conseguentemente, nel piano *tensione – pseudo deformazione* l'equazione costitutiva del materiale viscoelastico è equivalente a quella di un materiale elastico lineare. Pertanto, in accordo con la legge di Hooke, le tensioni e le pseudo deformazioni sono legate mediante la seguente formulazione:

$$\tau(t) = C \cdot \gamma^R \quad (1.2.1.4)$$

Dove il termine  $C$  è detto *pseudo rigidezza*.

Dall'equazione (1.2.1.4) segue che, quando il materiale manifesta un comportamento viscoelastico lineare la curva che si ottiene sul piano  $\tau - \gamma$  diventa una retta sul piano  $\tau - \gamma^R$ ; eventuali deviazioni dal comportamento rettilineo sul piano  $\tau - \gamma^R$  identificano quindi la presenza di fenomeni di non-linearità o di danneggiamento.

Nel caso in cui un materiale viscoelastico viene portato a rottura tramite una prova di torsione ad incremento di velocità di deformazione costante si possono definire due diversi valori di densità di energia sul piano  $\tau - \gamma^R$ :  $w^R$  definito come l'area sottesa alla curva tensioni-pseudo deformazioni e  $w_{LVE}^R$  definito come l'area sottesa alla retta che rappresenta il comportamento del materiale se fosse viscoelastico lineare fino a rottura (Baglieri *et al.*, 2020).

In formule:

$$w^R = \int \tau(t) d\gamma^R \quad (1.2.1.5)$$

$$w_{LVE}^R = \int \tau_{LVE}(t) d\gamma^R \quad (1.2.1.6)$$

In termini fisici,  $w^R$  rappresenta la densità di energia di deformazione del materiale, mentre  $w_{LVE}^R$  rappresenta la densità di energia di deformazione che il materiale avrebbe mostrato se avesse manifestato un comportamento viscoelastico lineare fino a rottura (Baglieri *et al.*, 2020).

Al fine di quantificare la fragilità del materiale, si può definire un indice, indicato con  $I_b$ , (Baglieri *et al.*, 2020):

$$I_B = \frac{W^R}{W_{LVE}^R} \quad (1.2.1.7)$$

Il valore di  $I_b = 1$  rappresenta quindi la condizione di un materiale perfettamente fragile; le condizioni per il quale il materiale mostra questa condizione critica, in termini di carico e temperatura rappresentano le condizioni critiche del materiale.

## 1.2.2. Soluzione analitica dell'integrale di convoluzione

Al fine del calcolo delle pseudo deformazioni, bisogna determinare analiticamente le proprietà viscoelastiche lineari del materiale. La soluzione analitica dell'integrale di convoluzione, definito nella (1.2.1.2), può essere ricavata attraverso approcci differenti. In questo lavoro di tesi, è stata sviluppata tramite il metodo delle *State Variables*.

La funzione di rilassamento, non potendo essere determinata direttamente, può essere espressa tramite la teoria dei modelli analogici, attraverso il modello di Maxwell generalizzato, espresso in forma di serie di Prony:

$$G(t) = G_\infty + \sum_m G_m \cdot e^{-t/\rho_m} \quad (1.2.1.8)$$

dove:

- $G_\infty$  : modulo di rilassamento a lungo termine;
- $G_m$  e  $\rho_m$  : coefficienti di Prony.

Possono essere quindi rappresentate in forma di serie di Prony anche le componenti  $G'$  e  $G''$  del modulo complesso  $G^*$ . Il termine  $G'$  rappresenta lo *storage modulus*, mentre il termine  $G''$  il *loss modulus*.

La formulazione è la seguente:

$$G'(\omega_R) = \sum_{i=1} \frac{\omega^2 \rho_i^2 G_i}{\omega^2 \rho_i^2 + 1} \quad (1.2.1.9)$$

$$G''(\omega_R) = \sum_{i=1} \frac{\omega \rho_i G_i}{\omega^2 \rho_i^2 + 1} \quad (1.2.1.10)$$

Ricavati i coefficienti di Prony, la rappresentazione delle proprietà viscoelastiche in serie di Prony consente di ottenere tutte le proprietà del materiale.

I valori dei coefficienti di Prony  $G_m$  e  $\rho_m$  possono essere determinati mediante l'applicazione del Collocation Method. In particolare, i valori di  $\rho_m$  vengono scelti in modo da avere due valori per decade e i valori di frequenza angolare  $\omega_i$  vengono posti uguali ai termini  $\rho_{mi}$ . I coefficienti  $G_m$  vengono invece determinati attraverso il prodotto tra l'inverso della matrice  $[B]$  e il vettore  $\{G'\}$  contenente i valori dello storage modulus:

$$[G_m] = [B_m]^{-1} \cdot \{G'\} \quad (1.2.1.11)$$

$$B_{mi} = \frac{\omega_i^2 \rho_{mi}^2}{\omega_i^2 \rho_{mi}^2 + 1} \quad (1.2.1.12)$$

Sostituendo quindi l'espressione della funzione di rilassamento in serie di Prony nell'integrale di convoluzione espresso nella (1.2.1.3), questo può essere risolto applicando il metodo delle *State Variables*. Quest'ultimo costituisce un approccio alternativo al problema della determinazione della risposta strutturale in campo viscoelastico, attraverso cui è possibile determinare le deformazioni viscoelastiche al tempo  $t + \Delta t$  in funzione delle deformazioni e delle tensioni viscoelastiche al tempo  $t$ , senza la necessità di dovere memorizzare l'intera storia tensionale o deformativa.

Si sintetizza di seguito la procedura di risoluzione dell'integrale.

Il metodo delle *State Variables* consente di associare ad ogni istante temporale una variabile di stato, definita dalla seguente formulazione:

$$\psi_m^{n+1} = e^{-\Delta t_R/\rho_m} \cdot \psi_m^n + G_m \cdot \rho_m \left( \frac{\gamma^{n+1} - \gamma^n}{\Delta t_R} \right) [1 - e^{-\Delta t_R/\rho_m}]$$

dove:

- $\psi_m^{n+1}$ : variabile di stato associata all' $m$ -esimo coefficiente di Prony allo step di integrazione  $n+1$
- $\psi_m^n$ : variabile di stato associata all' $m$ -esimo coefficiente di Prony allo step di integrazione  $n$
- $t_R$ : tempo ridotto
- $\gamma^{n+1}$ : deformazione misurata al tempo corrispondente allo step di integrazione  $n+1$
- $\gamma^n$ : deformazione misurata al tempo corrispondente allo step di integrazione  $n$

Le pseudo deformazioni all'istante di tempo  $n + 1$  vengono definite come la somma delle  $m$  variabili di stato calcolate:

$$\gamma^{Rn+1} = \sum_m \psi_m^{n+1} \quad (1.2.1.14)$$

In termini generali, è possibile approssimare la funzione  $d(t - \tau)$  definita nella (1.10) con una serie esponenziale, detta serie di Dirichlet – Prony:

$$d(t - \tau) = \sum_{i=1}^n d_i e^{-\frac{(t-\tau)}{\vartheta_i}} \quad (1.2.1.15)$$

dove:  $E(0) = E(\tau_0)$

Se si introducono gli  $n$  valori:

$$q_i(t) = \int_{\tau_0}^t d_i e^{-\frac{(t-\tau)}{\vartheta_i}} \sigma(\tau) d(\tau) \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.1.16)$$

Utilizzando la regola di Leibniz si ottiene:

$$\dot{q}_i(t) + \frac{q_i(t)}{\vartheta_i} = d_i \sigma(t) \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.1.17)$$

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali lineari disaccoppiate del primo ordine.

Considerando opportune condizioni al contorno, questo sistema consente di determinare le *state variables*.

Si ottiene:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} + \sum_{i=1}^n q_i(t) \quad (1.2.1.18)$$

Questa formulazione risulta conveniente nella risoluzione numerica di problemi viscoelastici, per esempio mediante l'utilizzo del metodo degli elementi finiti.

In maniera analoga è possibile scrivere:

$$\sigma(t) = \int_{\tau_0}^t E(t - \tau) \dot{\varepsilon} d\tau \quad (1.2.1.19)$$

Espandendo in serie esponenziale:

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{t}{T_i}} \quad (1.2.1.20)$$

Introducendo le  $n$  quantità:

$$q_i(t) = \int_{\tau_0}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{T_i}} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.1.21)$$

Derivando:

$$\dot{q}_i(t) + \frac{q_i(t)}{T_i} = \dot{\varepsilon}(t) \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.1.22)$$

Combinando le quattro relazioni precedenti si ottiene:

$$\sigma(t) = E_{\infty} \cdot \varepsilon(t) + \sum_{i=1} E_i \cdot q_i(t) \quad (1.2.1.23)$$

L'equazione (1.2.1.23) può essere integrata in diversi modi:

L'utilizzo del processo semplice di Eulero, per un incremento  $\Delta t$ , fornisce il seguente algoritmo:

$$\Delta q_i(t) = - \left( \frac{q_i(t)}{\theta_i} - d_i \sigma(t) \right) \Delta t \quad (1.2.1.24)$$

$$q_i(t + \Delta t) = q_i(t) + \Delta q_i(t) \quad (1.2.1.25)$$

Un migliore risultato si ottiene scrivendo:

$$q_i(t + \Delta t) = \int_{\tau_0}^t d_i e^{-(t+\Delta t-\tau)/\vartheta_i} \sigma(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} d_i e^{-(t+\Delta t-\tau)/\vartheta_i} \sigma(\tau) d\tau \quad (1.2.1.26)$$

Il primo integrale è uguale a  $q_i e^{-\Delta t/\vartheta_i}$ ; il secondo invece si può scrivere, assumendo  $\sigma(\tau)$  costante nell'intervallo  $[t; t+\Delta t]$ , come:

$$d_i \sigma(t) e^{-(t+\Delta t)/\vartheta_i} \int_t^{t+\Delta t} e^{\tau/\vartheta_i} d\tau = d_i \vartheta_i \sigma(t) (1 - e^{-\Delta t/\vartheta_i}) \quad (1.2.1.27)$$

Da cui:

$$q_i(t + \Delta t) = e^{-\Delta t/\vartheta_i} q_i(t) + d_i \vartheta_i \sigma(t) (1 - e^{-\Delta t/\vartheta_i}) \quad (1.2.1.28)$$

## **2. Modellazione di materiali viscoelastici lineari con il metodo degli elementi finiti (FEM)**

Il Metodo degli Elementi Finiti *FEM (Finite Element Method)* è una tecnica numerica atta ad approssimare le equazioni differenziali che governano un sistema continuo con un sistema di equazioni algebriche in un numero finito di incognite (Brebbia and Connor, 1993).

Lo sviluppo dei metodi di simulazione numerica nasce dalla necessità di risolvere le equazioni differenziali alle derivate parziali *PDEs (Partial Differential Equations)* attraverso cui si formalizzano i problemi nell'ambito della meccanica del continuo. Questa tipologia di equazioni può essere risolta attraverso metodi analitici, quali quelli basati sulle Trasformate di Fourier e di Laplace, soltanto in pochi casi semplici. La complessità dei problemi reali, che può riguardare la geometria del sistema, le proprietà del materiale, le condizioni al contorno o le condizioni di vincolo, spesso non consente di trovare una soluzione analitica in forma chiusa alle equazioni differenziali che governano il problema stesso. Pertanto, la soluzione viene ricavata attraverso l'utilizzo di metodi numerici. L'idea di base è quella di introdurre delle ipotesi semplificative al sistema reale in modo da rendere il problema matematicamente trattabile. L'introduzione di queste ipotesi implica il passaggio dal sistema reale ad un modello matematico che costituisce una sorta di idealizzazione del sistema reale stesso. La soluzione che si ottiene sebbene approssimata, deve comunque fornire un risultato soddisfacente in termini di precisione (Bacchetto, 2020).

### **2.1. Il metodo delle differenze finite**

Cronologicamente il Metodo delle Differenze Finite *FDM (Finite Differences Method)* costituisce il primo metodo di simulazione numerica che è stato sviluppato. Tale metodo si

presta bene alla descrizione di problemi stazionari, vale a dire problemi le cui variabili non dipendono dal tempo, ma solo dallo spazio, governati quindi da equazioni differenziali ordinarie. Infatti, sebbene il metodo possa essere applicato anche ad equazioni differenziali alle derivate parziali, nel caso di problemi che evolvono in spazio e tempo, nascono delle complicazioni legate alla definizione della griglia di punti in corrispondenza dei quali vengono valutati i rapporti incrementali approssimanti le corrispondenti derivate. Inoltre, risulta difficilmente applicabile in tutti quei casi caratterizzati da domini complessi e geometrie irregolari.

Il *Metodo delle Differenze Finite* applica una discretizzazione delle equazioni differenziali, per le quali non è possibile trovare una soluzione analitica in forma chiusa, mantenendo inalterato il modello fisico.

Si consideri la seguente equazione differenziale ordinaria:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{du(x)}{dx} : x \in [0; L]$$

E siano le seguenti le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} u(0) &= a, & a &\in \mathbb{R} \\ u(L) &= b, & b &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Si vuole risolvere l'equazione differenziale all'interno del dominio definito. Il metodo impone che tale dominio sia limitato.

Il primo passo consiste nella discretizzazione del dominio in sottodomini. Si suddivide quindi l'intervallo  $[0; L]$  in sotto - intervalli sufficientemente piccoli, tali che la loro unione restituisca l'intervallo di partenza:

$$D = \{x_1 = 0 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = L\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} [x_i; x_{i+1}] = [0; L]$$

La discretizzazione del dominio può essere fatta in modo uniforme, discretizzando il dominio in intervalli di uguale ampiezza  $\Delta x$ , o in modo non uniforme, discretizzando il dominio in intervalli di ampiezza differente  $\Delta x_k$ .

Per semplicità di trattazione si consideri una discretizzazione di tipo uniforme:

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n$$

Ricordando la definizione di derivata di una funzione  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  come limite del rapporto incrementale, è possibile scrivere:

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

Analogamente si definisce la derivata seconda come:

$$u''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u'(x + \Delta x) - u'(x)}{\Delta x}$$

Il Metodo delle Differenze Finite considera un'approssimazione di queste due derivate. L'idea di base è quella di considerare una discretizzazione del dominio della funzione che sia sufficientemente fitta in modo che, approssimando il rapporto incrementale con una differenza finita, si ottiene:

$$u(x_k) \approx u_k$$

Dove:

- $u(x_k)$ : soluzione esatta in  $x_k$
- $u_k$ : soluzione approssimata in  $k$ .

Di seguito si riporta la formulazione dell'approssimazione alle differenze finite:

$$u'(x_k) \approx \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x}$$

Con uno sviluppo in serie di Taylor è possibile dimostrare che si tratta di un'approssimazione del primo ordine. Un'approssimazione del secondo ordine, quindi più precisa, si ottiene attraverso una differenza finita centrata:

$$u'(x_k) \approx \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2 \cdot \Delta x}$$

Inoltre, a partire dalla differenza finita in avanti definita per la derivata prima, è possibile ottenere un'approssimazione del secondo ordine della derivata seconda:

$$u''(x_k) \approx \frac{\frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta x} - \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\Delta x^2}$$

In conclusione, il Metodo delle Differenze Finite fornisce come soluzione il vettore  $\bar{u}$  contenente le soluzioni approssimate della funzione  $u(x)$  valutate in corrispondenza dei nodi della discretizzazione. La soluzione approssimata per valori interni ai sotto - intervalli di discretizzazione del dominio viene ottenuta per interpolazione lineare tra i valori estremi.

## 2.2. Metodo agli Elementi Finiti

Sebbene l'uso primigenio dell'espressione *elemento finito* sembra possa essere attribuita a *Clough* nel 1960 (Rizzi, 2003), la nascita vera e propria del metodo viene ricondotta alla formulazione di *M.J.Turner* del *Direct Stiffness Method*, che costituisce il primo approccio agli elementi finiti nel campo del continuo (Wikipedia, s.d.). Negli anni successivi, il metodo agli elementi finiti si è sviluppato e affermato rapidamente grazie alla sua immediatezza concettuale e alla notevole multidisciplinarietà di impiego che ne fanno uno strumento prezioso per la soluzione di problemi di diversa natura in aree disciplinari differenti (Rizzi, 2003). Infatti, sebbene tali tecniche furono sviluppate per problemi strutturali, in seguito sono state estese ed applicate a numerosi problemi di campo (Brebbia and Connor, 1993).

A differenza del Metodo alle Differenze Finite, il dominio di definizione del sistema continuo di cui si vuole risolvere il problema non rimane inalterato, ma viene suddiviso in elementi finiti. Questa operazione di discretizzazione è quella che consente di passare da un numero infinito di incognite del problema ad un numero finito. Infatti, detto  $D$  il dominio di definizione del sistema continuo e  $u$  il campo incognito del problema, è possibile scrivere:

$$u = u(x; y; z) \text{ con } (x; y; z) \in D$$

Una volta effettuata l'operazione di discretizzazione del dominio di definizione, è possibile individuare dei punti detti *nod*i in corrispondenza del contorno degli elementi oppure all'interno di essi. All'interno del dominio discretizzato, il campo incognito viene espresso in termini di *funzioni di forma*. Si tratta di funzioni ad andamento noto, tipicamente polinomiali. La definizione dei punti nodali risulta fondamentale in quanto la risoluzione dell'intero problema viene ricondotta alla determinazione delle incognite nodali. In altre parole, la soluzione della variabile di campo viene ricercata soltanto in corrispondenza dei nodi, passando quindi da un numero infinito di incognite nell'ambito del sistema continuo ad un numero finito di incognite nell'ambito del sistema discretizzato. La risoluzione generale del problema viene determinata approssimando all'interno di ciascun elemento, l'andamento della funzione di campo con l'andamento noto delle funzioni di forma. L'interpolazione mediante funzioni di forma viene applicata all'interno dei singoli elementi finiti e non nell'ambito dell'intero dominio di definizione. Per quanto riguarda le equazioni algebriche risolventi, queste vengono generate mediante l'impiego di un principio variazionale.

## 2.3. Trattazione della viscoelasticità in COMSOL

### Multiphysics

La parte di simulazione numerica agli elementi finiti del presente lavoro di tesi è stata svolta attraverso l'utilizzo del software COMSOL Multiphysics. Di seguito si riporta la trattazione teorica del problema viscoelastico lineare implementata nel codice di calcolo numerico utilizzato.

Per i materiali viscoelastici la tensione deviatorica  $\sigma_d$  è legata alla deformazione deviatorica  $\varepsilon_d$  in maniera non lineare e dipende dalla storia deformativa del materiale. La sua definizione in forma integrale è data dalla seguente formulazione:

$$\sigma_d = 2 \int_0^t G(t-t') \frac{\delta \varepsilon_d}{\delta t'} dt' \quad (2.3.1)$$

La funzione  $G(t)$  è detta *funzione di rilassamento* e può essere ottenuta misurando l'evoluzione delle tensioni nel tempo quando il materiale è soggetto ad una deformazione costante. La funzione di rilassamento può essere approssimata con una serie di Prony, come spiegato al paragrafo 1.2.3:

$$G(t) = G + \sum_{m=1}^N G_m \cdot e^{-t/\tau_m} \quad (2.3.2)$$

La figura mostra lo schema del modello generalizzato di Maxwell che costituisce l'interpretazione fisica di questo approccio:

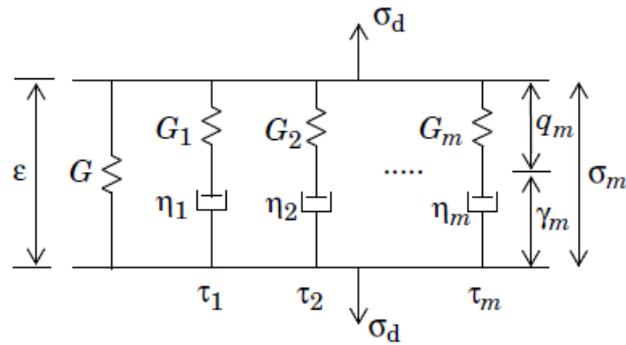


Figura 2.3.1 Schema del modello di Maxwell generalizzato

dove:

- $G$  rappresenta la rigidezza del principale ramo elastico;
- $G_m$  rappresenta la rigidezza della molla del ramo  $m$ ;
- $\tau_m$  rappresenta il tempo di rilassamento del sistema molla – dissipatore del ramo  $m$ ;
- $q_m$  rappresenta l'estensione della molla  $m$ ;
- $\gamma_m$  rappresenta l'estensione del dissipatore  $m$ .

Il modulo di taglio  $G$  del ramo elastico è chiamato *modulo di rigidezza a lungo termine* (*long-term shear modulus*) e tipicamente viene indicato col simbolo  $G_\infty$ . Questo può essere ottenuto passando al limite per  $t \rightarrow +\infty$  dell'equazione (2.3.2):

$$G_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( G + G_m \cdot e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right) = G \quad (2.3.3)$$

Il modulo di taglio istantaneo  $G_0$  è invece definito come la somma delle rigidezze dei singoli rami e può essere ottenuto passando al limite per  $t \rightarrow 0$  dell'equazione (2.3.2):

$$G_0 = \lim_{t \rightarrow 0} G(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( G + G_m \cdot e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right) = G + \sum_m G_m \quad (2.3.4)$$

Il tempo di rilassamento  $\tau_m$  è normalmente misurato nel dominio delle frequenze. La viscosità del dissipatore non è una quantità fisica ma deriva dalla rigidezza e dalle misure dei tempi di rilassamento. La viscosità del generico ramo  $m$  può essere espressa in termini del modulo di taglio e del tempo di rilassamento come:

$$\eta_m = G_m \tau_m \quad (2.3.5)$$

La tensione del generico ramo  $m$  può essere scritta sia in termini di deformazione della molla  $q_m$  sia in termini di deformazione del dissipatore  $\gamma_m$ :

$$\sigma_m = 2G_m q_m = 2\eta_m \dot{\gamma}_m = 2G_m(\varepsilon - \gamma_m) \quad (2.3.6)$$

Dove  $\varepsilon = q_m + \gamma_m$ .

Sommando le tensioni dei singoli rami si ottiene:

$$\sigma_q = \sum_m \sigma_m = \sum_m 2G_m(\varepsilon - \gamma_m) \quad (2.3.7)$$

Inoltre, la variabile  $\gamma_m$  può essere calcolata risolvendo la seguente equazione differenziale:

$$\eta_m \dot{\gamma}_m = G_m(\varepsilon - \gamma_m) \quad (2.3.8)$$

Ricordando la relazione tra viscosità e tempo di rilassamento:

$$\eta_m = G_m \tau_m \quad (2.3.9)$$

È possibile scrivere l'equazione differenziale nella seguente forma:

$$\tau_m \dot{\gamma}_m + \gamma_m = \varepsilon \quad (2.3.10)$$

La variabile di deformazione  $\gamma_m$  costituisce un grado di libertà aggiuntivo al problema. Le corrispondenti funzioni di forma vengono scelte in modo che risultino di un ordine inferiore rispetto alle funzioni di forma scelte per gli spostamenti (COMSOL Multiphysics and COMSOL, 2008).

### 3. Indagine sperimentale

In questa sezione si discute l'indagine sperimentale che è stata eseguita allo scopo di valutare gli effetti dell'invecchiamento sul comportamento a rottura alle basse temperature dei leganti bituminosi.

Il fenomeno della fessurazione termica costituisce uno dei principali meccanismi di deterioramento delle pavimentazioni flessibili e si verifica quando le tensioni indotte termicamente per effetto di un decremento di temperatura superano la resistenza a trazione del materiale (Baglieri *et al.*, 2020). La durabilità dei conglomerati bituminosi è fortemente influenzata dalle proprietà del legante, sia in relazione ai meccanismi di fessurazione termica ma anche in relazione ad altri meccanismi di deterioramento, quali la fessurazione per fatica e il fenomeno del *rutting* (Portillo and Cebon, 2013). Inoltre, il fenomeno della fessurazione termica, combinato all'azione dei volumi di traffico pesante e a condizioni climatiche avverse, quali per esempio quelle caratterizzate dall'alternarsi di cicli di gelo e disgelo, influisce negativamente sulla performance funzionale e strutturale dell'intera pavimentazione. Pertanto, l'utilizzo di bitumi caratterizzati da buone proprietà a rottura costituisce un requisito essenziale nella costruzione delle pavimentazioni in quelle regioni caratterizzate da un clima freddo (Marasteanu *et al.*, 2017).

Uno dei protocolli di prova riconosciuto a livello normativo ai fini della caratterizzazione delle proprietà a rottura alle basse temperature dei leganti bituminosi è quello della prova *Fraas* (EN 12593), basato sul sistema di qualificazione empirico. Tuttavia, la natura empirica di questa procedura fornisce risultati sperimentali poco accurati (Baglieri *et al.*, 2020).

Durante il programma di ricerca americano *SHRP* sono stati sviluppati due strumenti al fine di investigare il comportamento a rottura alle basse temperature dei leganti bituminosi: il *BBR* (*Bending Beam Rheometer*) e il *DTT* (*Direct Tension Tester*). Questi due strumenti

sono stati poi utilizzati per ottenere la temperatura minima di *PG* dei leganti bituminosi (Marasteanu *et al.*, 2017). Alcuni studi (Lu, Uhlback and Soenen, 2017) (Baglieri *et al.*, 2020) hanno invece sviluppato nuove metodologie di prova basate sull'utilizzo del *DSR* con un sistema di misura a piatti paralleli di diametro 4 mm.

### **3.1. Materiali**

L'indagine sperimentale è stata condotta su due diversi materiali, un bitume tradizionale 70/100 codificato come materiale *C* e un bitume modificato con *SBS* codificato come materiale *D*. Nel corso dell'indagine sperimentale, innanzitutto sono state eseguite le prove di invecchiamento al *RTFOT* e al *PAV* al fine di simulare sui due materiali considerati gli effetti dell'invecchiamento a breve termine e a lungo termine. L'indagine è stata condotta, quindi, sui due materiali *C* e *D* nei tre diversi gradi di invecchiamento: vergine, invecchiato al *RTFOT* e invecchiato al *PAV*.

#### **3.1.2. Leganti bituminosi: definizione e caratterizzazione**

Il bitume è un materiale idrocarburico, ottenuto come prodotto di scarto del processo di raffinazione del petrolio, mediante il quale il petrolio viene frazionato in componenti aventi peso molecolare differente (Petretto, 2012).

Da un punto di vista della composizione chimica, la struttura del bitume risulta molto complessa in quanto costituita da svariati composti caratterizzati da pesi molecolari differenti. Inoltre, le diverse aree di provenienza del greggio, nonché le metodologie di raffinazione del petrolio utilizzate nei processi produttivi, rendono la composizione chimica della sostanza fortemente aleatoria (Petretto, 2012). Tuttavia, un'interpretazione relativamente semplice della struttura chimica del bitume è quella fornita dal modello colloidale, attraverso cui il bitume viene descritto come un sistema di particelle, dette

asfalteni, disperse in un mezzo oleoso (detto matrice maltenica), costituito da oli saturi e aromatici. A queste sostanze si aggiungono, inoltre, le resine polari. Si tratta di sostanze, ancora di natura idrocarburica, che svolgono una funzione peptizzante. In altre parole, le resine polari avvolgono gli asfalteni conferendo a questi una carica superficiale e garantendo una sufficiente dispersione degli stessi all'interno della matrice maltenica. A seconda della percentuale di ogni componente, il comportamento del materiale passa da quello di un sistema *gel* a quello di un sistema *sol*. In un sistema di tipo *gel*, gli asfalteni tendono ad agglomerarsi a causa dell'inefficacia dell'azione peptizzante delle resine. Diversamente, un sistema di tipo *sol* si caratterizza per l'elevata dispersione delle particelle all'interno della fase oleosa. L'*indice di instabilità colloidale* costituisce un indice sintetico rappresentativo della composizione interna del bitume e viene definito dalla seguente formulazione:

$$Ic = \frac{A_s + S}{R + A_R}$$

dove:

- $A_s$ : quantitativo percentuale di asfalteni;
- $S$ : quantitativo percentuale di oli saturi;
- $R$ : quantitativo percentuale di resine;
- $A_R$ : quantitativo percentuale di oli aromatici.

Al crescere del valore di  $Ic$ , il comportamento tende a quello di un sistema *gel*, viceversa al decrescere del valore di  $Ic$  il comportamento tende a quello di un sistema *sol*. I rapporti quantitativi tra i diversi componenti vengono determinati attraverso metodi di frazionamento. L'analisi *SARA* (*Saturi Aromatici Resine Asfalteni*) costituisce uno dei metodi di frazionamento maggiormente utilizzati e consiste nella separazione delle componenti asfalteniche e malteniche tramite solubilità in diversi solventi.

Negli ultimi trent'anni, nella rete infrastrutturale viaria, sono stati introdotti i bitumi modificati. Questa tipologia di leganti bituminosi viene ottenuta aggiungendo ad un bitume

tradizionale un agente chimico di modifica che altera la struttura del bitume, migliorandone alcune delle caratteristiche prestazionali. Gli agenti modificanti utilizzati sono i polimeri, anch'essi sostanze di natura idrocarburica, resi disponibili dall'industria petrolchimica (Petretto, 2012). Le molecole dei polimeri sono comunemente chiamate macromolecole e in ciascuna di esse gli atomi sono legati tra di loro da legami interatomici covalenti. Lo scheletro dei polimeri è costituito da lunghe catene di atomi di carbonio. Queste lunghe molecole sono composte da unità strutturali, dette monomeri, che si ripetono in successione lungo la catena (Callister and Rethwish, 2012). I materiali polimerici sono chiamati *omopolimeri* se costituiti da catene formate da singole unità ripetitive, o *copolimeri* se composti da catene polimeriche costituite da due o più unità ripetitive chimicamente differenti (Smith, 2004). I polimeri adottati per la modifica del bitume possono essere divisi in due categorie: gli *elastomeri termoplastici*, che presentano spiccate proprietà elastiche e i *plastomeri*, caratterizzati invece da un comportamento più rigido. Alla prima categoria appartiene l'*SBS (Stirene Butadiene Stirene)*, modificante di uno dei leganti bituminosi testati nel corso dell'indagine sperimentale del presente lavoro di tesi. Si tratta di un copolimero a blocchi costituito alle due estremità da una struttura butadienica e nella parte centrale da un blocco stirenico. Pertanto, è possibile schematizzare la struttura del copolimero come costituita da due blocchi rigidi di estremità collegati mediante una catena elastica. I blocchi stirenici e quelli butadienici sono termodinamicamente incompatibili. Conseguentemente, nella fase di solidificazione del polimero, le molecole dello stirene tendono a formare dei blocchi che prendono il nome di *domini stirenici*. In particolare, durante il raffreddamento si forma un reticolo elastomerico costituito dai domini stirenici collegati tra di loro dalle catene butadieniche che conferiscono elasticità al composto. La fase di miscelazione del polimero col bitume viene eseguita allo stato fluido. In questa fase, la frazione maltenica del bitume diffonde all'interno della struttura delle catene butadieniche aumentandone il volume. Successivamente, durante il raffreddamento, si

forma il reticolo elastomerico che ingloba al suo interno anche la frazione maltenica residua che non ha reagito e gli asfalteni. Si consideri che piccole percentuali di polimero sono sufficienti a modificare il bitume. Tipicamente queste percentuali sono variabili in un range compreso tra il 3% e il 6%.

Il sistema di qualificazione tradizionale dei leganti bituminosi presenta delle limitazioni, legate soprattutto alla natura empirica delle metodologie di prova impiegate (penetrazione EN 1426, palla anello EN 1427, Fraas EN 12593) che rendono il sistema di qualificazione stesso poco adatto alla caratterizzazione prestazionale dei bitumi modificati. In quest'ottica, a seguito del programma di ricerca americano *SHRP (Strategic Highway Research Program)* sono stati definiti nuovi protocolli di prova evolvendo verso un sistema di caratterizzazione dei leganti bituminosi di tipo prestazionale e non più prescrittivo. Tuttavia, in Europa l'impiego di un sistema di qualificazione prestazionale è perlopiù ancora limitato all'ambito della ricerca. Il sistema di classificazione *SUPERPAVE (Superior Performing Asphalt Pavements)*, sviluppato nell'ambito del programma *SHRP*, supera i limiti del sistema di classificazione tradizionale basandosi sulla misura di grandezze reologiche ottenute in condizioni rappresentative di quelle a cui sarà soggetto il bitume in opera, nonché del grado di invecchiamento nelle diverse fasi costruttive. In accordo con questo sistema di classificazione, i bitumi vengono classificati in classi prestazionali. Questa metodologia di classificazione risulta inedita rispetto al sistema di classificazione tradizionale che invece, basandosi sulla misura di grandezze empiriche, categorizza i bitumi in classi di penetrazione. In merito alle classi prestazionali (*Performance Grade PG*), queste vengono identificate mediante una sigla del tipo *PGXX-YY* che indica il range di temperature identificativo del contesto climatico idoneo all'impiego del materiale. Nello specifico, i due numeri *XX* e *YY* indicati nella classe prestazionale identificano rispettivamente il limite superiore e il limite inferiore della temperatura di progetto della pavimentazione nell'ambito della quale il bitume verrà utilizzato. Inoltre, poiché le temperature massime e minime di

progetto devono essere identificate in base al sito, il territorio è suddiviso in zone climatiche alle quali viene associato un *PG* di riferimento.

Nell'ambito del sistema di classificazione tradizionale, invece, i bitumi vengono identificati mediante una sigla del tipo 70/100, individuata tramite l'esecuzione delle prove empiriche.

Nello specifico, la sigla identifica l'intervallo in cui è compreso l'affondamento dell'ago nel campione di bitume, espresso in *dmm*, misurato durante la prova di penetrazione.

### 3.1.3. Misura delle grandezze reologiche

La caratterizzazione viscoelastica lineare dei leganti bituminosi viene effettuata eseguendo delle prove reologiche sui materiali che consentono di misurare le grandezze di interesse.

Queste prove fondano le loro basi teoriche sui concetti di viscoelasticità lineare precedentemente definiti e si dividono in due gruppi:

- Prove in regime continuo;
- Prove in regime oscillatorio

Le prove in regime continuo consistono nell'applicare una forzante al sistema che viene mantenuta costante nel tempo. La forzante rappresenta la variabile indipendente e può essere una tensione, una deformazione, o un gradiente di deformazione.

La prova di creep costituisce il classico esempio di prova in regime continuo. Questa consiste nel sottoporre il materiale ad una tensione  $\tau$ , che viene applicata in un istante tempo  $t_0$  e mantenuta costante nel tempo. La risposta deformativa del materiale  $\gamma(t)$  costituisce l'output della prova. La grandezza reologica che viene ricavata dai dati sperimentali misurati durante una prova di creep è la *deformabilità*  $J(t)$ :

$$J(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau_0} \quad (3.1.3.1)$$

Si definisce la *rigidezza*  $S(t)$ :

$$S(t) = \frac{1}{J(t)} \quad (3.1.3.2)$$

Le prove in regime oscillatorio differiscono dalle prime in quanto la forzante imposta varia nel tempo, tipicamente con legge armonica. Per esempio, nel caso in cui la forzante imposta è una tensione, si ha:

$$\tau(t) = \tau_0 \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (3.1.3.3)$$

dove:

- $\tau_0$ : ampiezza di oscillazione;
- $\omega$ : pulsazione.

La corrispondente risposta deformativa è data da:

$$\gamma(t) = \gamma_0 \cdot \sin(\omega t - \delta) \quad (3.1.3.4)$$

dove:

- $\gamma_0$ : ampiezza di oscillazione;
- $\omega$ : pulsazione;
- $\delta$ : angolo di fase.

Questa espressione ci dice che la risposta deformativa  $\gamma(t)$  oscilla con la stessa frequenza della forzante ma si manifesta in ritardo rispetto a questa. L'entità di questo ritardo è

espressa dall'angolo di fase  $\delta$ . Le grandezze reologiche che vengono ricavate da questi dati sperimentali sono:

1. Norma del modulo complesso  $|G^*|$ ;
2. Angolo di fase  $\delta$ .

La norma del modulo complesso dà la misura della rigidità del materiale ed è definita come:

$$|G^*| = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \quad (3.1.3.5)$$

Il modulo complesso è una grandezza che può essere rappresentata come un vettore sul piano complesso, come mostrato in figura:

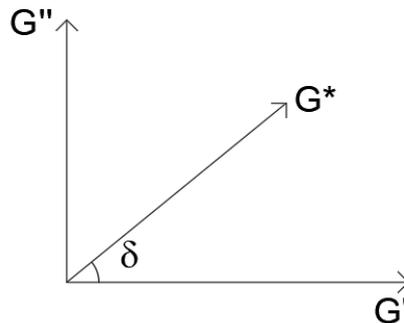


Figura 3.1.3. Rappresentazione di  $G^*$  sul piano complesso.

In formule:

$$G^* = G' + iG'' \quad (3.1.3.6)$$

dove:

- $G'$ : componente immagazzinata del modulo complesso;
- $G''$ : componente dissipativa del modulo complesso.

In formule:

$$G' = |G^*| \cdot \cos \delta \quad (3.1.3.7)$$

$$G'' = |G^*| \cdot \sin \delta \quad (3.1.3.8)$$

Da cui:

$$|G^*| = \sqrt{G'^2 + G''^2} \quad (3.1.3.9)$$

L'angolo di fase misura, invece, lo sfasamento temporale della risposta deformativa rispetto alla tensione imposta e può variare in un range compreso tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . In particolare, quando  $\delta = 0^\circ$ , la risposta deformativa è in fase rispetto alla forzante e il materiale risponde istantaneamente. Questa condizione è tipica dei materiali elastici. Coerentemente si osserva che, in questa condizione, il modulo complesso  $G^*$  coincide con la componente  $G'$ ; quando invece  $\delta = 90^\circ$  la risposta deformativa è in opposizione di fase rispetto alla forzante. Questa condizione è tipica dei materiali perfettamente viscosi. In maniera analoga si osserva che, in questa condizione, il modulo complesso  $G^*$  coincide con la componente  $G''$ .

### **3.1.4. Principio di sovrapposizione tempo-temperatura**

Il principio di sovrapposizione tempo – temperatura costituisce la base teorica su cui si fonda la costruzione delle Curve Maestre. Secondo questo principio, l'effetto che la variazione del tempo di carico produce sul comportamento del materiale viscoelastico, è lo stesso prodotto dalla variazione di temperatura.

Le Curve Maestre descrivono il comportamento del materiale in un range di tempi (o frequenze) di carico molto ampio ad una temperatura di riferimento.

La figura mostra l'andamento della Curve Maestra della norma del modulo complesso in funzione della frequenza, sul piano bilogarithmico:

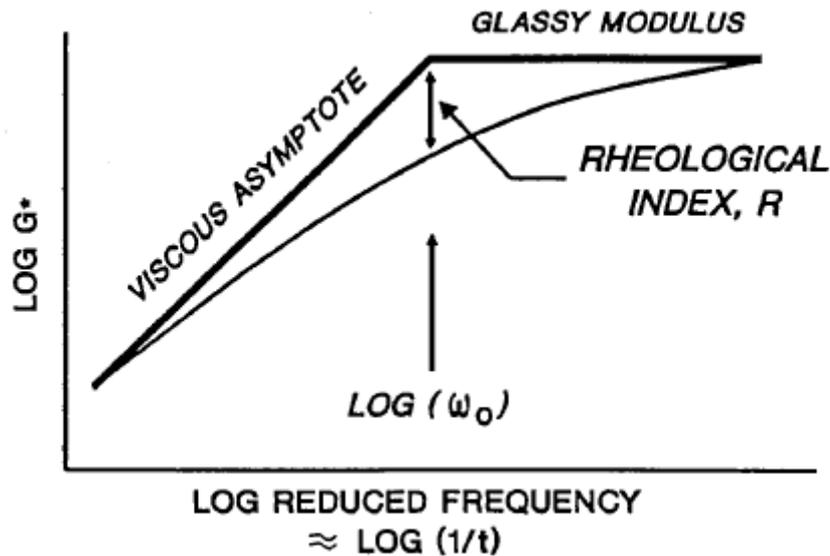


Figura 3.1.4. Andamento della curva maestra.

La curva presenta una concavità verso il basso ed è confinata da due asintoti, uno orizzontale detto *asintoto vetroso* ed uno obliquo, inclinato a 45°, detto *asintoto viscoso*. In particolare, per frequenze di carico molto basse ( $\omega \rightarrow 0$ ), la curva tende all'asintoto viscoso, mentre per frequenze di carico estremamente alte ( $\omega \rightarrow \infty$ ), la curva tende all'asintoto vetroso. Quando la curva tende all'asintoto vetroso, la risposta del materiale tende ad essere indipendente dalla variazione della frequenza di carico. La risposta del materiale tende, quindi, ad una risposta di tipo elastico. Viceversa, quando la curva tende all'asintoto obliquo, la risposta del materiale tende ad una risposta di tipo viscoso. Pertanto, l'andamento della Curva Maestra ci dice che al variare del tempo di carico si osserva sia una variazione della rigidità intrinseca del materiale, in quanto la norma del modulo complesso si riduce all'aumentare dei tempi di carico, sia una variazione del tipo di risposta, in quanto il

comportamento del materiale varia da quello di un materiale elastico a quello di un materiale viscoso, passando da tempi di carico molto bassi a tempi di carico molto alti. Se si considera l'angolo di fase  $\delta$ , quando la curva tende all'asintoto vetroso, l'angolo di fase tende a zero ( $\delta \rightarrow 0 \text{ rad}$ ), quando invece la curva tende all'asintoto viscoso, l'angolo di fase tende a  $90^\circ$  ( $\delta \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ). Un altro valore caratteristico dell'angolo di fase è quello intermedio  $\delta = \frac{\pi}{4}$  rad, che rappresenta quel valore che separa il comportamento prevalentemente elastico da quello prevalentemente viscoso. La frequenza  $\omega_c$  che corrisponde a  $\delta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$  prende il nome di frequenza di *cross - over* ed è quella rappresentativa del vertice della bilatera formata dai due asintoti.

Idealmente, una strumentazione capace di testare il materiale a temperatura costante in un campo di frequenze infinitamente esteso consentirebbe di ottenere questa curva. Chiaramente i limiti tecnologici delle macchine consentono di determinare questa curva, ad una data temperatura, soltanto all'interno di un determinato range di frequenze, che corrisponde all'intervallo di funzionamento della macchina stessa. Pertanto, per potere costruire la Curva Maestra si sfrutta il principio di equivalenza tempo – temperatura. In altre parole, testando il materiale nello stesso intervallo di frequenze ma a diverse temperature, si ottengono diversi rami della stessa Curva Maestra, traslati orizzontalmente rispetto alla posizione che questi assumerebbero se fossero stati ricavati alla medesima temperatura di riferimento.

Analiticamente il principio di sovrapposizione tempo – temperatura si esprime attraverso la seguente formula:

$$\omega_r = \omega_s \cdot a(T) \quad (3.1.4.1)$$

dove:

- $\omega_s$ : frequenza misurata;
- $\omega_r$ : frequenza ridotta;
- $a(T)$ : shift – factor.

La *frequenza misurata*  $\omega_s$  è la frequenza che, alla temperatura  $T$  di prova, ha restituito un determinato valore del modulo complesso  $G^*$ ; la *frequenza ridotta*  $\omega_r$  invece rappresenta la frequenza che, alla temperatura di riferimento  $T_0$  a cui si vuole determinare la Curva Maestra, restituisce lo stesso valore del modulo complesso  $G^*$  registrato alla temperatura di prova  $T$ .

La funzione di *shift* è quella funzione dipendente dalla temperatura che consente di associare ad ogni frequenza misurata la corrispondente frequenza ridotta.

In termini logaritmici:

$$\log(\omega_r) = \log(\omega_s) + \log a(T) \quad (3.1.4.2)$$

Sia  $T_0$  la temperatura di riferimento a cui si vuole ricavare la Curva Maestra e  $T$  la temperatura di prova:

- Se  $T = T_0$  :  $\log a(T) = 0$
- Se  $T > T_0$  :  $\log a(T) < 0$
- Se  $T < T_0$  :  $\log a(T) > 0$

Inoltre, la funzione  $a(T)$  può essere espressa analiticamente tramite la formulazione proposta da William – Landel - Ferry:

$$\log \frac{a(T)}{a(T_0)} = - \frac{C_1 \cdot (T - T_0)}{C_2 + T - T_0} \quad (3.1.4.3)$$

Dove  $c_1$  e  $c_2$  sono delle costanti che dipendono dal materiale.

### 3.1.5. Modello di Christensen – Anderson (CA model)

Il modello di Christensen – Anderson è uno dei modelli empirici che consente di descrivere analiticamente la Curva Maestra del modulo complesso. In altre parole, questo modello descrive la variazione della norma del modulo complesso e la variazione dell'angolo di fase in funzione della frequenza di carico.

Di seguito si riporta la sua formulazione:

$$|G^*(\omega)| = G_g \left[ 1 + \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^{\frac{\log 2}{R}} \right]^{\frac{-R}{\log 2}} \quad (3.1.5.1)$$

$$\delta(\omega) = \frac{90}{\left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{\frac{\log 2}{R}} \right]} \quad (3.1.5.2)$$

Si tratta di un modello a tre parametri:

- $G_g$ : rappresenta il *modulo vetroso* (o *glassy modulus*). Questo valore può essere determinato attraverso la modellazione di dati sperimentali, o alternativamente può essere assunto pari ad **1GPa** per ogni tipologia di bitume;
- $\omega_c$ : rappresenta la *frequenza di cross over*;
- $R$ : rappresenta l'*indice reologico*, dato dalla differenza tra il modulo vetroso e il modulo corrispondente alla frequenza di cross over.

Noti questi tre parametri è possibile determinare il valore del modulo complesso  $G^*$  per ogni valore della frequenza  $\omega$ .

### **3.1.6. Fenomeno dell'invecchiamento dei leganti bituminosi**

Il bitume, data la sua composizione organica, per effetto di alcuni fattori climatici e ambientali, quali l'esposizione alle elevate temperature, all'atmosfera ossidante e alle radiazioni *UV*, subisce un'alterazione delle caratteristiche meccaniche, delle proprietà reologiche, della composizione chimica e della sua microstruttura (Hofko *et al.*, 2017). L'insieme di tali cambiamenti chimico - fisici a cui il materiale è soggetto costituisce il fenomeno dell'*invecchiamento (aging)*.

In termini generali, l'invecchiamento modifica il comportamento meccanico del legante bituminoso verso un comportamento più rigido, più elastico e più fragile (Hofko *et al.*, 2020). In termini di proprietà reologiche questo si traduce in un incremento della norma del modulo complesso  $G^*$  e in un decremento dell'angolo di fase  $\delta$ , a parità di temperatura e tempo di carico. Da un punto vista della composizione chimica, invece, l'invecchiamento determina un cambiamento delle frazioni *SARA* (Saturi, Aromatici, Resine, Asfaltini) caratterizzato da un incremento della percentuale di asfaltini e da una conseguente riduzione della quantità di aromatici (Hofko *et al.*, 2017).

Poiché il bitume viene utilizzato per produrre le miscele bituminose, che trovano impiego nell'ambito delle pavimentazioni flessibili, il fenomeno dell'invecchiamento ha effetti sulle caratteristiche prestazionali a lungo termine della sovrastruttura in cui il legante bituminoso verrà poi impiegato. Infatti, l'incremento di rigidità del legante determina una riduzione della flessibilità della pavimentazione che comporta una maggiore probabilità di attivazione dei meccanismi di fessurazione (Airey, 2003).

La *suscettibilità all'invecchiamento*, intesa come la capacità del materiale di mantenere inalterate nel tempo le sue proprietà fisiche e reologiche, riveste un ruolo fondamentale nella caratterizzazione prestazionale dei leganti bituminosi proposta con il progetto *SHRP* (*Strategic Highway Research Program*) (Giavarini *et al.*, 1993).

Quando si parla di invecchiamento si fa riferimento a due fasi:

- Invecchiamento *a breve termine* o *primario*;
- Invecchiamento *a lungo termine* o *secondario*

L'espressione *invecchiamento a breve termine* si riferisce a quelle trasformazioni che il bitume subisce durante la produzione della miscela bituminosa, in particolare nella fase di miscelazione del bitume con gli aggregati, in cui il legante bituminoso deve possedere una viscosità tale da garantire la totale adesione alla superficie degli inerti, nella fase di stoccaggio e durante le fasi di trasporto e stesa della miscela stessa. L'invecchiamento a breve termine avviene a temperature relativamente elevate (> 130°C).

Per *invecchiamento a lungo termine* si intende invece l'insieme di quelle trasformazioni che il bitume subisce per effetto dell'esposizione al traffico e delle condizioni climatiche nel corso della vita in esercizio. Queste trasformazioni, quindi, si verificano anche a temperatura ambiente.

I meccanismi di invecchiamento comprendono i seguenti processi di natura chimico – fisica:

- *Ossidazione*
- *Volatilizzazione*
- *Polimerizzazione*

Il meccanismo di ossidazione è dovuto alle reazioni delle componenti del bitume con l'ossigeno atmosferico, con conseguente produzione di chetoni e solfossidi come principali gruppi funzionali, nonché di piccole quantità di anidridi e acidi carbossilici (Giavarini *et al.*, 1993). Tali reazioni di ossidazione, sebbene avvengano anche alle basse temperature, diventano significative alle alte temperature. Non è casuale, infatti, che nella fase di

invecchiamento primario, il processo di ossidazione si verifica ad una velocità maggiore rispetto alla velocità con cui si verifica nella fase di invecchiamento secondario. Inoltre, nel meccanismo di invecchiamento a lungo termine, le reazioni di ossidazione hanno luogo solo in corrispondenza della parte più superficiale della sovrastruttura flessibile (Hofko *et al.*, 2017). Da un punto di vista della struttura chimica, queste reazioni di ossidazione interessano principalmente la frazione asfaltenica (Giavarini *et al.*, 1993).

Per quanto riguarda i meccanismi di volatilizzazione, questi sono associati alla perdita delle componenti più leggere e si verificano quando il bitume viene riscaldato.

Infine, i meccanismi di polimerizzazione costituiscono dei processi reversibili di riorganizzazione della struttura interna del bitume causati dall'instaurarsi di nuovi legami intermolecolari alle alte temperature.

Le fasi di produzione e stesa della miscela sono quelle durante le quali si innescano i più rapidi meccanismi di alterazione delle proprietà di scorrimento e prestazionali del legante presente nel conglomerato. Tali meccanismi si attivano per effetto delle elevate temperature e dell'atmosfera ossidante a cui il materiale è esposto. Il processo di invecchiamento, che si verifica durante queste fasi di produzione e stesa della miscela, avviene principalmente per ossidazione, ma anche per eventuale volatilizzazione delle componenti più leggere (Giavarini *et al.*, 1993).

Dopo la posa in opera e durante tutta la fase in esercizio del manto stradale, il materiale è soggetto alle variazioni di temperatura dell'aria e all'esposizione alle radiazioni UV. L'azione combinata di questi due fattori favorisce i processi di ossidazione e polimerizzazione, che proseguono quindi anche in esercizio. In questa fase, il processo di invecchiamento a cui è soggetto il legante risulta più lento per effetto delle condizioni meno severe a cui il materiale è sottoposto. E inoltre, le alterazioni delle proprietà reologiche e prestazionali del materiale dipendono soprattutto da fattori climatici e ambientali. Si può

considerare che in tale fase l'invecchiamento sia dovuto principalmente a meccanismi di ossidazione e a processi non ossidativi di strutturazione reversibile (Giavarini *et al.*, 1993).

### **3.1.7. Prove di simulazione del fenomeno di invecchiamento**

Quando si caratterizza un bitume vergine, bisogna considerare che, a causa dei fenomeni di invecchiamento, le proprietà che si ricavano non sono rappresentative di quello che avviene in opera. Pertanto, sono state elaborate delle procedure che consentono di simulare in laboratorio i processi di invecchiamento che avvengono a breve e a lungo termine.

Le due metodologie di prova più comunemente utilizzate sono il RTFOT (Rolling Thin Film Oven Test) standardizzata dalla norma EN 12607 – 1 per la simulazione dei meccanismi di invecchiamento a breve termine e il PAV (Pressure Aging Vessel) normata dalla EN 14769 – 1 per la simulazione dei meccanismi di invecchiamento a lungo termine.

La prova RTFOT è stata sviluppata dalla *California Division of Highways* come modifica della prova TFOT (Thin Film Oven Test). Nella prova TFOT il campione, costituito da un film di bitume di spessore 3,2 mm, è posto in un contenitore piatto di diametro 140 mm. Due o più di questi contenitori vengono posizionati in una piastra rotante e posti in forno ad una temperatura di 163 °C per cinque ore. La prova TFOT è stata introdotta per la prima volta da Lewis e Welborn (1940) ed è stato poi adottata dall'ASHTO (1959) e dall'ASTM (1969). Il principale limite di questa prova è legato fatto che, per effetto dello spessore del campione, i meccanismi di invecchiamento (che avvengono principalmente per volatilizzazione) potrebbero attivarsi soltanto in corrispondenza della parte più superficiale. Pertanto, al fine di incrementare la severità dell'invecchiamento e introdurre i meccanismi di ossidazione, è stata sviluppata la prova MTFOT, nella quale si è ridotto lo spessore del materiale da 3,2 mm a 100 mm e si è incrementato il tempo di esposizione del materiale a 24 ore (Airey, 2003). Tuttavia, la più importante modifica della prova TFOT è costituita dalla prova RTFOT. La prova RTFOT consiste nel sottoporre un film di legante bituminoso

posto all'interno di un bicchiere in vetro ad una temperatura di 163°C per 75 minuti in un forno ventilato con aria. Il forno è dotato di una piastra verticale munita di fori circolari in cui vengono disposti i bicchieri in vetro contenenti il materiale. Durante la prova il materiale fluisce in corrispondenza della superficie interna dei bicchieri creando un film di 1,25 mm. La piastra ruota ad una velocità di 15 giri al minuto. Il forno è inoltre dotato di un ugello attraverso cui un getto di aria calda viene soffiato con una velocità di 4000 ml/min in ciascuno dei bicchieri posti nella piastra, in modo da investire i campioni di materiale in essi contenuti e innescare i fenomeni di ossidazione, volatilizzazione e polimerizzazione che caratterizzano l'invecchiamento a breve termine.

Per quanto riguarda invece la prova PAV, questa consiste nel porre il bitume, preventivamente trattato al RTFOT, all'interno di una cella pressurizzata con aria a 20 atm alla temperatura di 90°C, 100°C o 110°C, a seconda delle condizioni climatiche che si vogliono simulare, per 20 ore. L'azione combinata della pressione e della temperatura a cui il materiale è soggetto, accelera i fenomeni di ossidazione e polimerizzazione, simulando i fenomeni di invecchiamento a lungo termine. Dal confronto con dati "reali" di invecchiamento, si è osservato che la prova riproduce l'invecchiamento che si ha per un bitume dopo cinque anni dalla messa in opera. Da un punto di vista delle proprietà reologiche, gli effetti dell'invecchiamento sul materiale possono essere sintetizzati in un incremento della norma del modulo complesso  $|G^*|$  e in una riduzione dell'angolo di fase  $\delta$ . L'entità di questi cambiamenti dipende dalla tipologia di legante bituminoso e dalle condizioni in cui il materiale viene testato. Tipicamente alle basse frequenze (o medio- alte temperature) si osserva un incremento della norma del modulo complesso del materiale invecchiato rispetto a quello vergine. Mentre alle alte frequenze (o basse temperature) gli effetti dell'invecchiamento sul modulo complesso risultano minimi (Tauste *et al.*, 2018).

## 3.2. Programma sperimentale

Il programma sperimentale è stato suddiviso in due parti, una finalizzata alla caratterizzazione viscoelastica lineare dei materiali oggetto di studio e un'altra finalizzata alla caratterizzazione delle proprietà a rottura degli stessi. In particolare, la sezione dedicata alla caratterizzazione viscoelastica lineare dei materiali è stata condotta al *DSR (Dynamic Shear Rheometer)* mediante delle *Frequency Sweep*, prove in regime oscillatorio a differenti frequenze di carico e differenti temperature, utilizzando un sistema di misura innovativo a piatti paralleli di diametro 4 mm, che consente di ridurre e correggere gli errori strumentali nella misura. Il *DSR (Dynamic Shear Rheometer)* è uno strumento che può essere utilizzato per eseguire prove finalizzate alla caratterizzazione elastica, viscoelastica e viscosa di materiali, quali i bitumi, in un vasto range di temperature e frequenze di carico. Lo strumento consente di eseguire prove in regime continuo e prove in regime oscillatorio, sia in controllo di tensione che in controllo di deformazione. Uno dei principali vantaggi dello strumento è legato alla possibilità di potere implementare diversi sistemi di misura. Le specifiche fornite dal programma *SHRP* indicano il tipo di sistema di misura da utilizzare in funzione dei valori della norma del modulo complesso  $|G^*|$  del materiale. In particolare, all'aumentare della rigidità del materiale si tende verso l'utilizzo di sistemi caratterizzati da diametri minori. Ai fini dell'indagine sperimentale condotta nell'ambito del presente lavoro di tesi, si è utilizzato il sistema di misura a piatti paralleli di diametro 4 mm sia in fase di caratterizzazione viscoelastica lineare sia in fase di caratterizzazione delle proprietà a rottura alle basse temperature dei materiali oggetto di studio. Uno dei principali limiti del reometro, infatti, consiste nella presenza di errori strumentali nella misura, particolarmente evidenti alle basse temperature. Per cui, nelle specifiche fornite dal programma *SHRP* viene indicato di utilizzare il *BBR* quando i valori di  $|G^*|$  del materiale superano i 30 MPa. Tuttavia, lo sviluppo di un modello di correzione degli errori strumentali consente di

correggere le misure effettuate al *DSR* alle basse temperature utilizzando il sistema di piatti paralleli di 4 mm. L'angolo di deflessione  $\varphi_m$  misurato al *DSR* si compone di due contributi, quello dato dalla deformazione del campione testato  $\varphi_s$  e quello dato dalla deformazione del sistema di misura  $\varphi_t$  :

$$\varphi_m = \varphi_s + \varphi_t = \frac{M}{K_s} + \frac{M}{K_t} \quad (3.2.1)$$

dove:

- $M$ : momento torcente applicato [ $N \cdot m$ ];
- $K_s$ : rigidità torsionale del campione [ $N \cdot m/rad$ ];
- $K_t$ : rigidità torsionale dello strumento [ $N \cdot m/rad$ ]

Nelle condizioni in cui il termine  $K_s$  risulta significativamente più piccolo di  $K_t$ , il secondo termine dell'equazione (3.1) può essere trascurato. Nel caso dei leganti bituminosi questa condizione si verifica quando il campione viene testato a temperature sufficientemente alte ( $> 5 \text{ }^\circ\text{C}$ ). Alle basse temperature, invece, la rigidità del campione è comparabile a quella dello strumento, e pertanto il termine  $\varphi_t$  non può essere trascurato. Al fine di correggere i dati misurati, risulta necessario, quindi, determinare la deformabilità dello strumento  $J_t$ , definita come l'inverso della rigidità  $K_t$ . Il modello di correzione è definito dalla seguente formula, proposta da (Baglieri *et al.*, 2020):

$$\varphi_s = \varphi_m - J_t \cdot M \quad (3.2.2)$$

dove  $J_t = 0.03 \frac{rad}{N} / m$

Questa correzione va apportata manualmente alle misure eseguite al *DSR* durante le prove a rottura.

Col medesimo sistema di misura è stata poi sviluppata la sezione dedicata alla caratterizzazione delle proprietà a rottura alle basse temperature. I dettagli sperimentali vengono riassunti in tabella 3.2.1.:

MATERIALE	GRADO DI INVECCHIAMENTO	CARATTERIZZAZIONE LVE	CARATTERIZZAZIONE A ROTTURA
Bitume C	Vergine	Frequency Sweep T = 0 °C fino a -30 °C frequenze = 1- 100 rad/s	Prova a rottura con velocità di deformazione costante pari a 0.001 s-1
	RTFOT		
	PAV		
Bitume D	Vergine	Frequency Sweep T = 0 °C fino a -30 °C frequenze = 1- 100 rad/s	Prova a rottura con velocità di deformazione costante pari a 0.001 s-1
	RTFOT		
	PAV		

Tabella 3.2.1 Programma sperimentale

Di seguito viene descritta la procedura sperimentale adottata per le prove indicate nel programma sperimentale.

### 3.2.1. Test di frequency sweep

Il primo step consiste nella preparazione del campione. Si preleva una piccola quantità di materiale e la si posiziona sul piatto inferiore del sistema di misura preventivamente riscaldato alla temperatura di adesione. Si porta il piatto superiore ad un gap di 1.87 mm in modo da avere un gap superiore rispetto a quello di prova (1.75 mm) di 0.120 mm. A questo

punto viene eseguita una rasatura del materiale in eccesso. Una volta preparato il campione, si imposta una temperatura di 30°C e si abbassa la cappa. Viene quindi impostato il gap finale di 1.75 mm e si esegue la prova.

### **3.2.2. Prove a rottura**

Il primo step consiste nella preparazione del campione che viene realizzato direttamente sul piatto superiore del sistema di misura. La geometria è quello di un cilindro di altezza 5 mm e raggio 2 mm. Al fine di realizzare il campione, si costruisce un cassero utilizzando una striscia di alluminio. Questa viene arrotolata sul piatto superiore e poi resa ad esso solidale con del nastro adesivo. Dopo avere realizzato il cassero, si preleva una quantità di materiale di circa 0.1 g che viene inserita all'interno del cassero e scaldata con l'ausilio di un phon. La fase di riscaldamento ha una duplice funzione, da un lato deve consentire al materiale di prendere la forma del cassero, dall'altro il calore deve eliminare la presenza di eventuali bolle d'aria che potrebbero falsare i risultati della prova. In seguito alla fase di riscaldamento, il campione viene posizionato in congelatore per un tempo sufficiente a consentire la rimozione del cassero di alluminio. Il campione viene quindi scassero e tagliato al gap di prova. Il piatto superiore viene inserito nella macchina, precedentemente riscaldato alla temperatura di adesione e il campione condotto alla posizione di test, selezionata di 5 mm. La temperatura viene a questo punto riportata alla temperatura ambiente e viene avviato il test.

Il test si compone di tre step:

1. Fase di condizionamento: si passa dalla temperatura di 20 °C alla temperatura di 4 °C con una velocità di raffreddamento di 2 °C/min e poi dalla temperatura di 4 °C si raggiunge la temperatura di prova con una velocità di raffreddamento di 1 °C/min;

2. Fase di caratterizzazione viscoelastica lineare del campione: viene impostata una scansione di frequenza (da 1 rad/s a 100 rad/s) alla temperatura di prova (fingerprint);
3. Fase di rottura per torsione: il campione viene portato a rottura con una velocità di deformazione costante pari a 0.001 1/s.

### **3.2.3. Caratterizzazione viscoelastica lineare**

La caratterizzazione viscoelastica lineare dei materiali è stata condotta al fine di discutere gli effetti dell'invecchiamento sulle proprietà del materiale e di poterne rappresentare il comportamento sottoforma di serie di Prony. La rappresentazione del comportamento viscoelastico lineare in serie consente di implementare le proprietà nella fase successiva di modellazione. Poiché il fitting dei coefficienti di Prony si presenta estremamente sensibile al rumore strumentale, è stato effettuato un primo fitting dei dati sperimentali attraverso il modello CA (3.1.5.1) e (3.1.5.2).

I parametri del modello CA sono stati quindi ottenuti minimizzando lo scarto quadratico medio tra i valori misurati e i valori modellati. Con questa procedura di fitting sono stati inoltre determinati i valori degli shift factor alle diverse temperature di test. Sulle base di questi ultimi è stata interpolata la funzione di shift factor, in modo da ottenere una funzione che consenta di determinare i valori  $|G^*|$  e  $\delta$  per qualsiasi valore di temperatura all'interno del range di temperature misurato. Dopo avere stimato i parametri del modello, la costruzione delle curve maestre è stata eseguita traslando orizzontalmente i dati misurati alle diverse temperature in modo da ottenere la curva alla temperatura di riferimento  $T = -15^\circ\text{C}$ . Di seguito si riportano per i sei materiali testati:

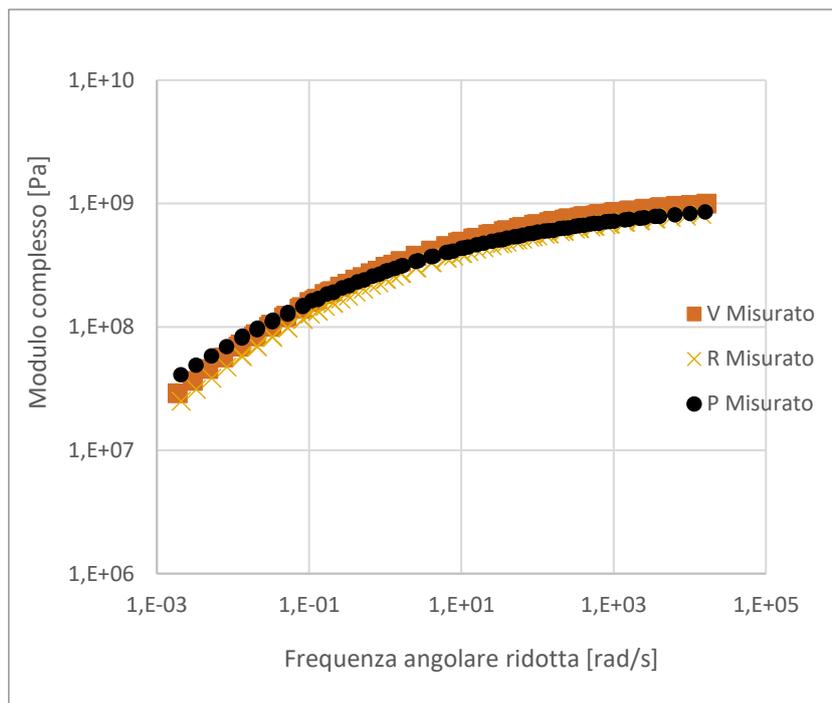


Figura 3.2.3.1 Rappresentazione delle Curve Maestre del materiale C nei tre gradi di invecchiamento

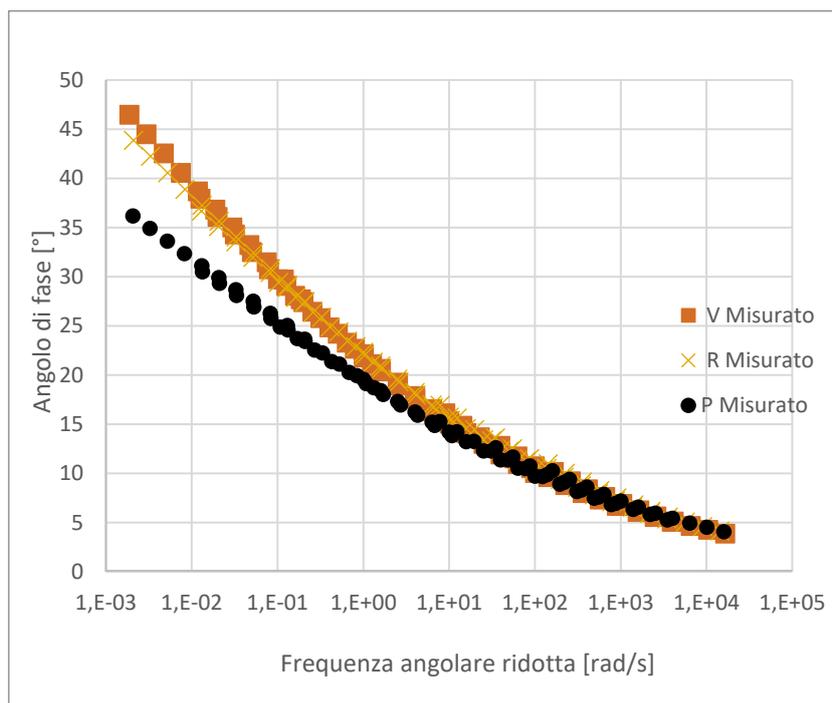


Figura 3.2.3.2 Rappresentazione dell'angolo di fase del materiale C nei tre gradi di invecchiamento

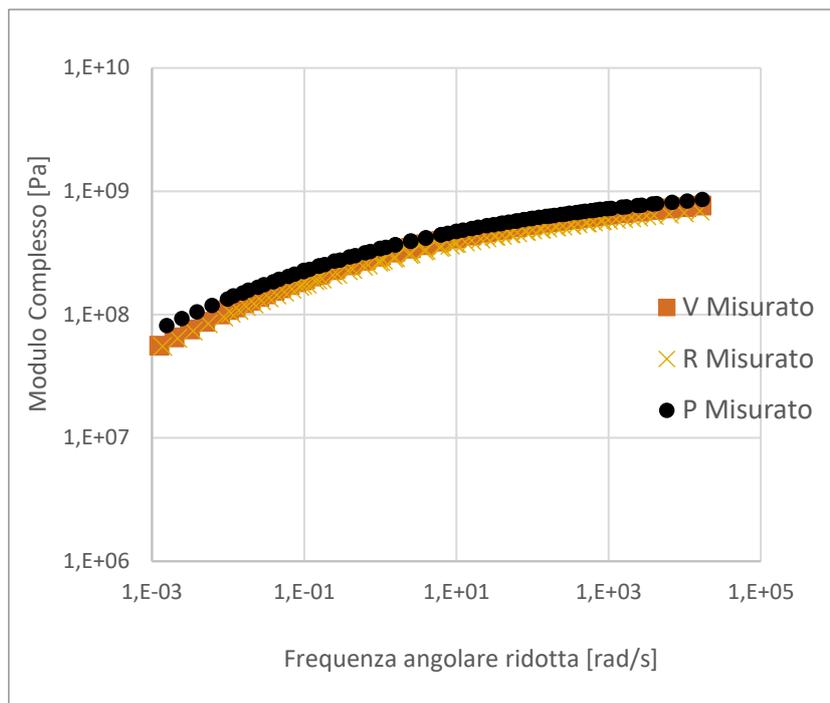


Figura 3.2.3.3 Rappresentazione delle Curve Maestre del materiale D nei tre gradi di invecchiamento

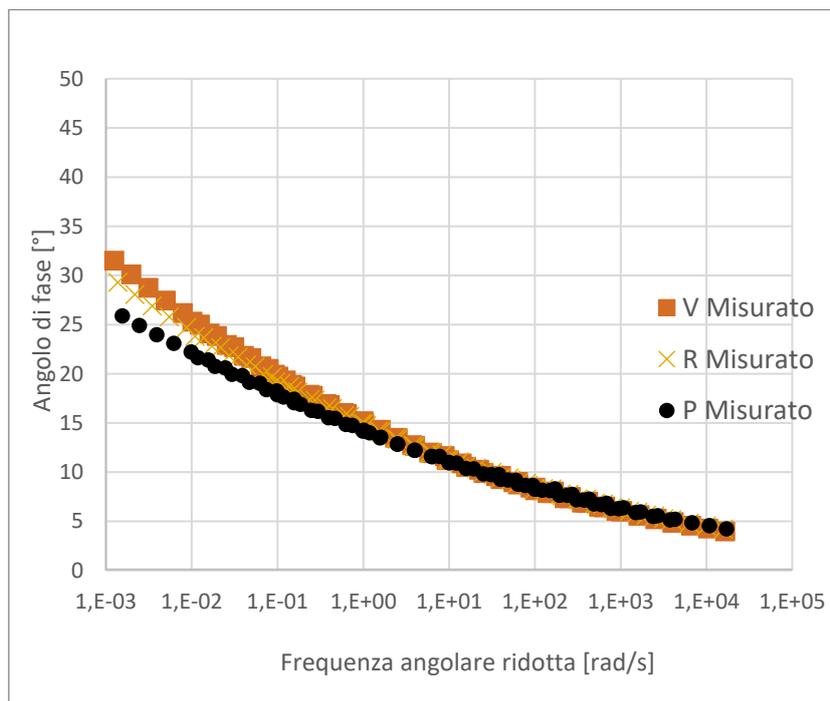


Figura 3.2.3.4 Rappresentazione dell'angolo di fase del materiale D nei tre gradi di invecchiamento

Si osserva che per bassi valori della frequenza angolare ridotta, le Curve Maestre dei due materiali C e D allo stato vergine e invecchiati al RTFOT sembrano sovrapporsi, mentre la curva relativa al materiale invecchiato al PAV, risulta più bassa. Per alti valori della frequenza angolare, invece, le tre curve tendono a convergere. Le medesime osservazioni possono essere fatte per le curve relative alla funzione angolo di fase.

Di seguito si riportano le funzioni di shift:

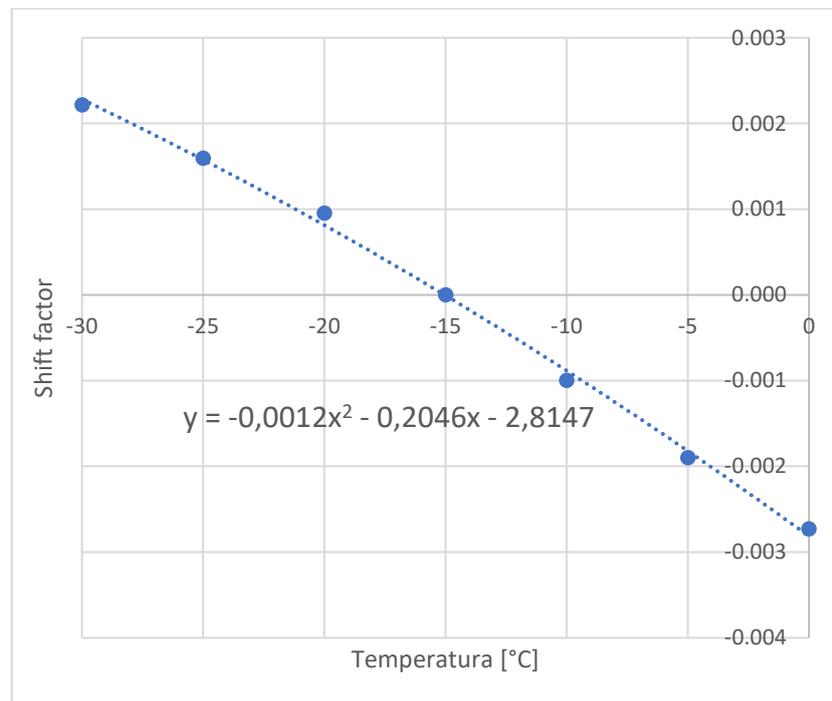


Figura 3.2.3.3-1 Rappresentazione della funzione di shift per il materiale C vergine

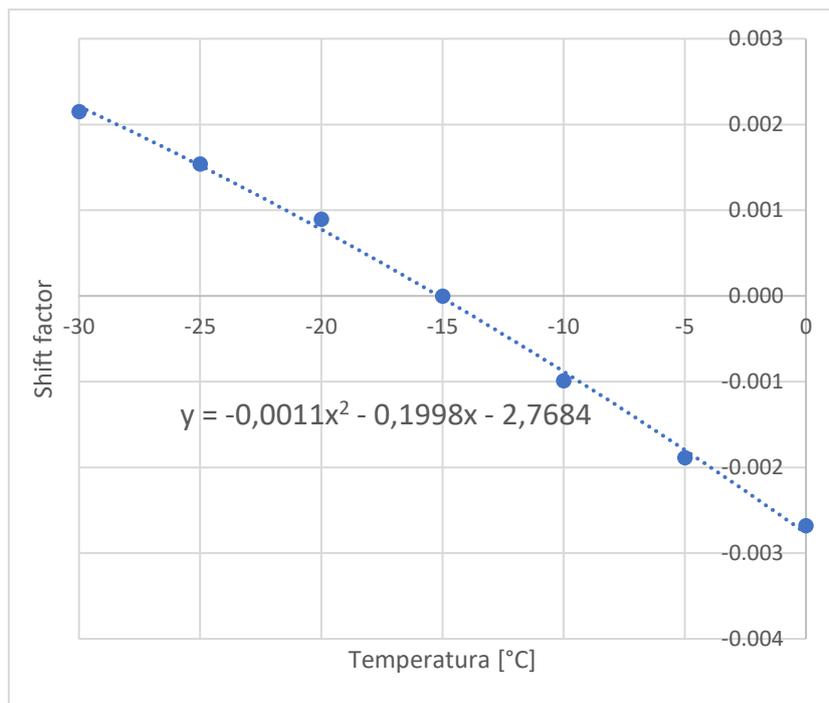


Figura 3.2.3.6 Rappresentazione della funzione di shift per il materiale C invecchiato al RTFOT

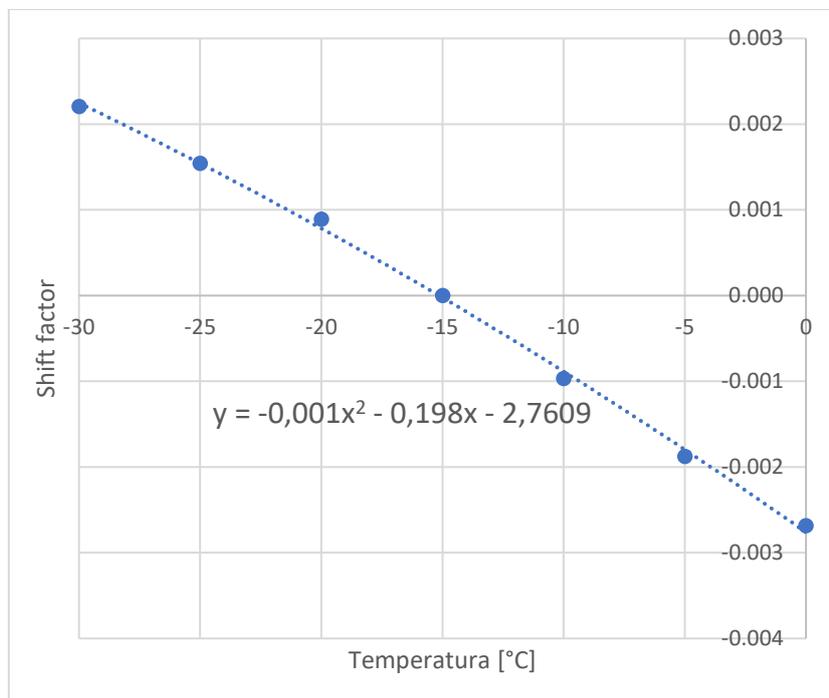


Figura 3.2.3.7 Rappresentazione della funzione di shift per il materiale C invecchiato al PAV

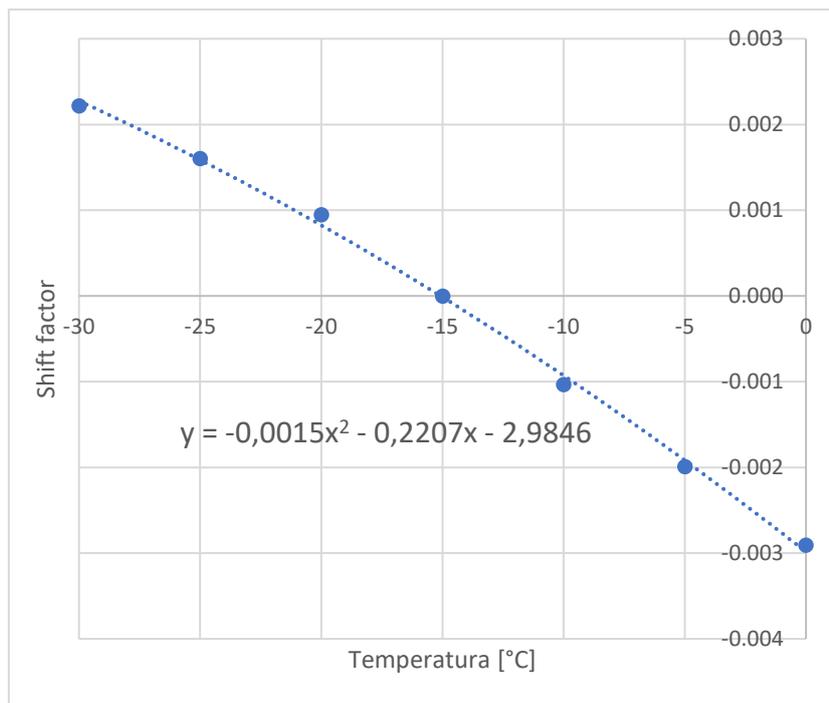


Figura 3.2.3.8 Rappresentazione della funzione di shift per il materiale D vergine

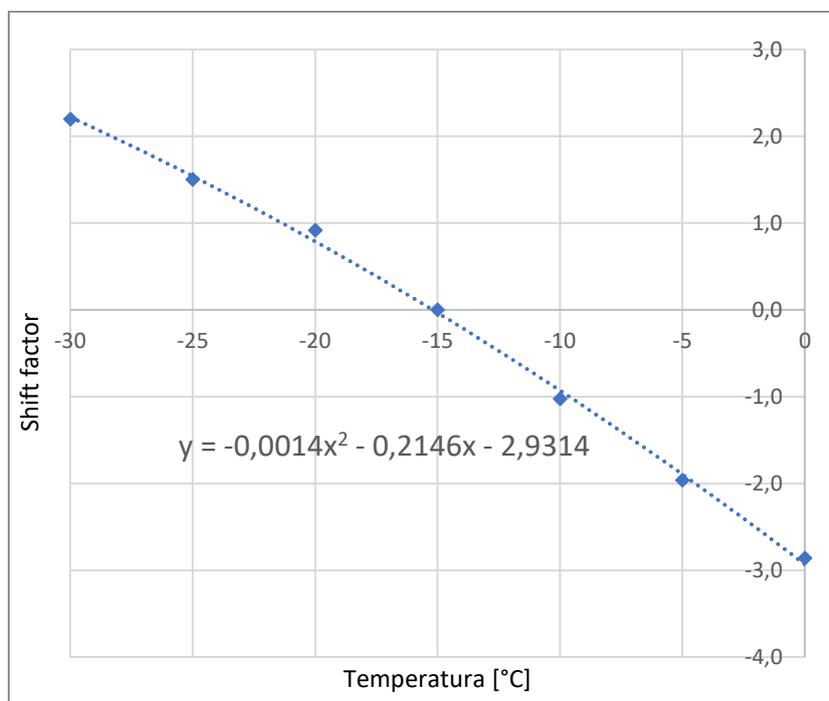


Figura 3.2.3.9 Rappresentazione della funzione di shift per il materiale D invecchiato al RTFOT

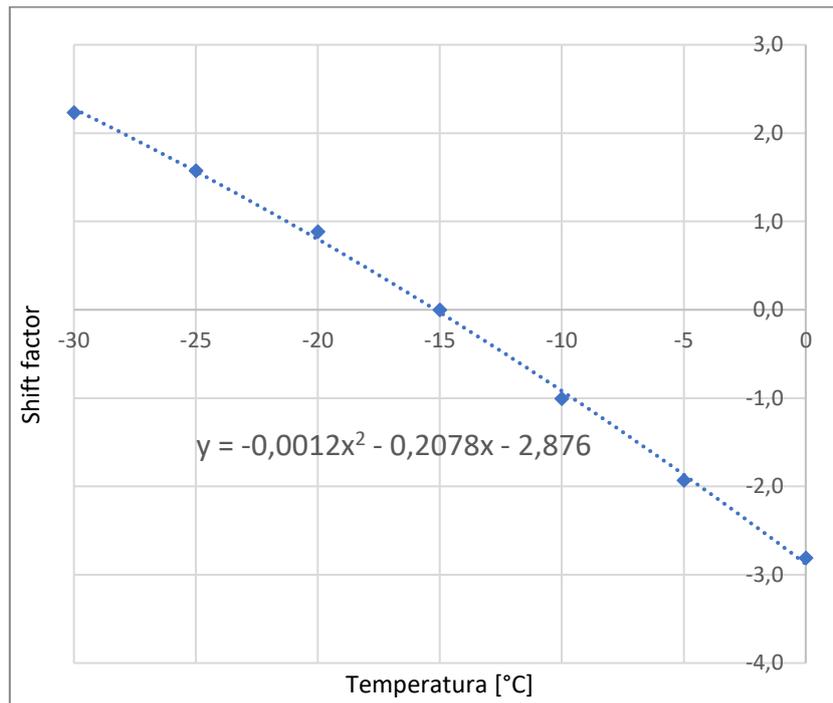


Figura 3.2.3.10 Rappresentazione della funzione di shift per il materiale D invecchiato al PAV

Tramite il modello CA, è stata inoltre determinata la temperatura di transizione vetrosa  $T_g$  per i sei materiali testati. La metodologia utilizzata consiste nell'individuazione della temperatura corrispondente al picco della curva rappresentata nel piano  $G'' - T$ , fissando il valore di frequenza ad 1 Hz:

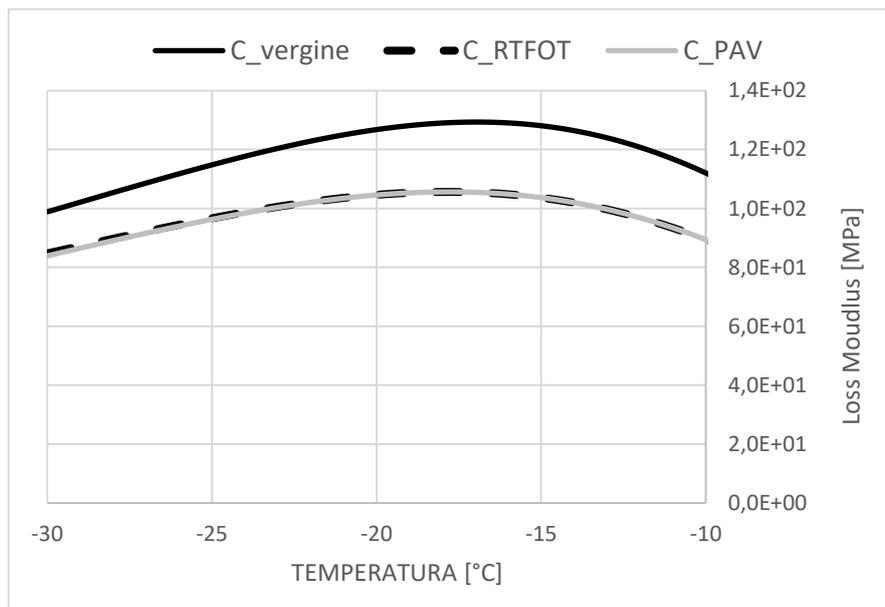


Figura 3.2.3.11 Rappresentazione del Loss Modulus in funzione della temperatura per il materiale C nei tre gradi di invecchiamento

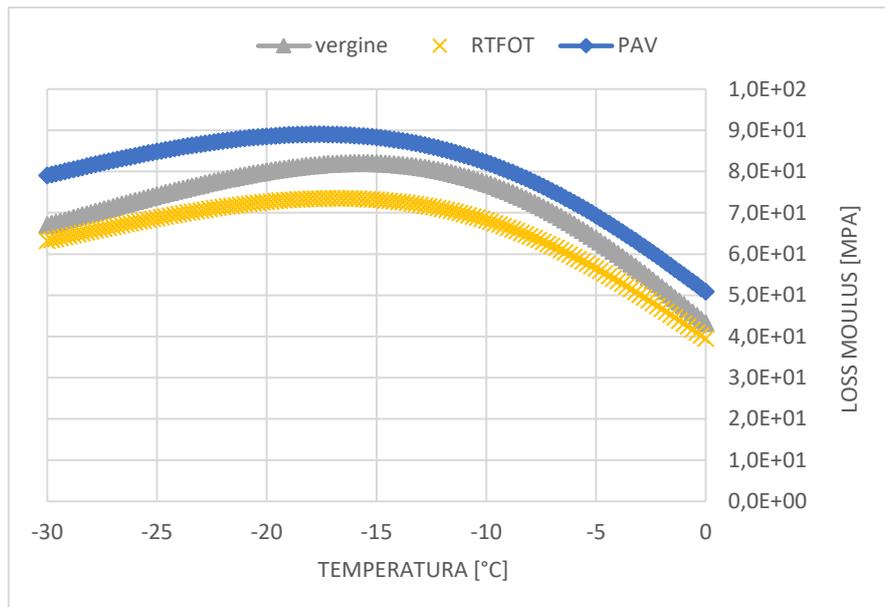


Figura 3.2.3.12 Rappresentazione del Loss Modulus in funzione della temperatura per il materiale D nei tre gradi di invecchiamento

La tabella di seguito riporta in sintesi i valori di temperatura di transizione vetrosa  $T_g$  ottenuti per i due materiali, nei tre diversi gradi di invecchiamento:

	Vergine	RTFOT	PAV
C	-17 °C	-17.8 °C	-17.8 °C
D	-15.6 °C	-16.8 °C	-17.6 °C

Tabella 3.2.3.1 Valori della temperatura di transizione vetrosa dei materiali C e D nei tre gradi di invecchiamento

Dopo avere modellato i dati tramite il modello CA, applicando il Collocation Method, sono stati ricavati i coefficienti di Prony per i due materiali testati. La procedura utilizzata è quella descritta al paragrafo 3.3.4. Di seguito si riportano i risultati:

C_Coefficienti di Prony					
Vergine		RTFOT		PAV	
$\rho_m$	$G_m$	$\rho_m$	$G_m$	$\rho_m$	$G_m$
[s]	[Pa]	[s]	[Pa]	[s]	[Pa]
2.00E-08	1.30E+07	2.00E-08	1.25E+07	2.00E-08	1.71E+07
6.00E-08	1.95E+07	6.00E-08	1.82E+07	6.00E-08	2.29E+07
2.00E-07	1.49E+07	2.00E-07	1.41E+07	2.00E-07	1.82E+07
6.00E-07	3.01E+07	6.00E-07	2.75E+07	6.00E-07	3.29E+07
2.00E-06	2.30E+07	2.00E-06	2.13E+07	2.00E-06	2.58E+07
6.00E-06	4.39E+07	6.00E-06	3.93E+07	6.00E-06	4.45E+07
2.00E-05	3.50E+07	2.00E-05	3.15E+07	2.00E-05	3.57E+07
6.00E-05	6.18E+07	6.00E-05	5.42E+07	6.00E-05	5.82E+07
2.00E-04	5.10E+07	2.00E-04	4.48E+07	2.00E-04	4.77E+07
6.00E-04	8.25E+07	6.00E-04	7.06E+07	6.00E-04	7.24E+07
2.00E-03	6.96E+07	2.00E-03	5.94E+07	2.00E-03	5.99E+07
6.00E-03	1.01E+08	6.00E-03	8.47E+07	6.00E-03	8.38E+07
2.00E-02	8.57E+07	2.00E-02	7.11E+07	2.00E-02	6.92E+07
6.00E-02	1.10E+08	6.00E-02	8.99E+07	6.00E-02	8.77E+07
2.00E-01	9.04E+07	2.00E-01	7.30E+07	2.00E-01	7.07E+07
6.00E-01	1.00E+08	6.00E-01	7.98E+07	6.00E-01	7.98E+07
2.00E+00	7.62E+07	2.00E+00	6.02E+07	2.00E+00	6.12E+07
6.00E+00	7.03E+07	6.00E+00	5.53E+07	6.00E+00	6.01E+07
2.00E+01	4.73E+07	2.00E+01	3.71E+07	2.00E+01	4.25E+07
6.00E+01	3.53E+07	6.00E+01	2.78E+07	6.00E+01	3.55E+07
2.00E+02	2.02E+07	2.00E+02	1.60E+07	2.00E+02	2.25E+07
6.00E+02	1.19E+07	6.00E+02	9.62E+06	6.00E+02	1.57E+07
2.00E+03	5.70E+06	2.00E+03	4.67E+06	2.00E+03	8.67E+06
6.00E+03	2.69E+06	6.00E+03	2.26E+06	6.00E+03	5.03E+06
2.00E+04	1.09E+06	2.00E+04	9.31E+05	2.00E+04	2.40E+06
6.00E+04	4.21E+05	6.00E+04	3.72E+05	6.00E+04	1.16E+06
2.00E+05	1.48E+05	2.00E+05	1.34E+05	2.00E+05	4.85E+05
6.00E+05	4.93E+04	6.00E+05	4.59E+04	6.00E+05	2.00E+05
2.00E+06	1.56E+04	2.00E+06	1.49E+04	2.00E+06	7.31E+04
6.00E+06	4.82E+03	6.00E+06	4.73E+03	6.00E+06	2.81E+04
2.00E+07	1.16E+03	2.00E+07	1.14E+03	2.00E+07	6.89E+03
6.00E+07	6.76E+02	6.00E+07	6.97E+02	6.00E+07	5.52E+03

Tabella 3.2.3.2 Coefficienti di Prony del materiale C

D_Coefficienti di Prony					
Vergine		RTFOT		PAV	
$\rho_m$	$G_m$	$\rho_m$	$G_m$	$\rho_m$	$G_m$
[s]	[Pa]	[s]	[Pa]	[s]	[Pa]
2.00E-08	1.63E+07	2.00E-08	1.74E+07	2.00E-08	2.53E+07
6.00E-08	2.05E+07	6.00E-08	2.13E+07	6.00E-08	2.98E+07
2.00E-07	1.65E+07	2.00E-07	1.72E+07	2.00E-07	2.43E+07
6.00E-07	2.82E+07	6.00E-07	2.86E+07	6.00E-07	3.89E+07
2.00E-06	2.21E+07	2.00E-06	2.25E+07	2.00E-06	3.07E+07
6.00E-06	3.67E+07	6.00E-06	3.62E+07	6.00E-06	4.80E+07
2.00E-05	2.93E+07	2.00E-05	2.89E+07	2.00E-05	3.83E+07
6.00E-05	4.64E+07	6.00E-05	4.46E+07	6.00E-05	5.74E+07
2.00E-04	3.75E+07	2.00E-04	3.60E+07	2.00E-04	4.62E+07
6.00E-04	5.63E+07	6.00E-04	5.27E+07	6.00E-04	6.62E+07
2.00E-03	4.59E+07	2.00E-03	4.28E+07	2.00E-03	5.34E+07
6.00E-03	6.47E+07	6.00E-03	5.91E+07	6.00E-03	7.26E+07
2.00E-02	5.28E+07	2.00E-02	4.80E+07	2.00E-02	5.85E+07
6.00E-02	6.90E+07	6.00E-02	6.18E+07	6.00E-02	7.46E+07
2.00E-01	5.58E+07	2.00E-01	4.96E+07	2.00E-01	5.95E+07
6.00E-01	6.67E+07	6.00E-01	5.88E+07	6.00E-01	7.06E+07
2.00E+00	5.24E+07	2.00E+00	4.60E+07	2.00E+00	5.51E+07
6.00E+00	5.66E+07	6.00E+00	4.97E+07	6.00E+00	6.02E+07
2.00E+01	4.24E+07	2.00E+01	3.72E+07	2.00E+01	4.53E+07
6.00E+01	4.06E+07	6.00E+01	3.60E+07	6.00E+01	4.49E+07
2.00E+02	2.83E+07	2.00E+02	2.53E+07	2.00E+02	3.21E+07
6.00E+02	2.36E+07	6.00E+02	2.16E+07	6.00E+02	2.86E+07
2.00E+03	1.50E+07	2.00E+03	1.40E+07	2.00E+03	1.91E+07
6.00E+03	1.08E+07	6.00E+03	1.04E+07	6.00E+03	1.51E+07
2.00E+04	6.13E+06	2.00E+04	6.12E+06	2.00E+04	9.24E+06
6.00E+04	3.77E+06	6.00E+04	3.96E+06	6.00E+04	6.45E+06
2.00E+05	1.89E+06	2.00E+05	2.07E+06	2.00E+05	3.56E+06
6.00E+05	1.01E+06	6.00E+05	1.17E+06	6.00E+05	2.24E+06
2.00E+06	4.32E+05	2.00E+06	5.21E+05	2.00E+06	1.03E+06
6.00E+06	2.23E+05	6.00E+06	2.98E+05	6.00E+06	6.93E+05
2.00E+07	5.14E+04	2.00E+07	6.38E+04	2.00E+07	1.23E+05
6.00E+07	6.86E+04	6.00E+07	1.06E+05	6.00E+07	3.05E+05

Tabella 3.2.3.3 Coefficienti di Prony materiale D

### 3.2.4. Caratterizzazione delle proprietà a rottura

La caratterizzazione delle proprietà a rottura alle basse temperature è stata eseguita sui materiali *C* e *D* invecchiati al *RTFOT* e al *PAV*, mentre per quanto riguarda i materiali allo stato vergine, sono stati utilizzati i risultati di prove raccolti nella banca dati del laboratorio di materiali stradali del Politecnico di Torino. L'obiettivo della caratterizzazione delle proprietà a rottura consiste nell'identificazione della temperatura critica, definita come la temperatura in corrispondenza della quale l'indice  $I_b$  risulta uguale a 0.98 (per maggiori dettagli teorici circa il significato dell'indice  $I_b$  si rimanda al paragrafo 1.2.1). A tal fine, per ciascun materiale sono state eseguite innanzitutto tre ripetizioni alla temperatura di transizione vetrosa. Dopo avere eseguito le tre ripetizioni per ciascun materiale, i dati misurati sono stati elaborati al fine di ottenere il valore dell'indice  $I_b$  calcolato come media dei valori ottenuti dalle tre prove. Per quei materiali il cui valore di  $I_b$  ottenuto è risultato diverso da 0.98 sono state eseguite altre tre ripetizioni esplorando un'ulteriore temperatura di prova, che è stata valutata di caso in caso.

Si riportano di seguito i risultati ottenuti:

Materiale	Temperatura di test	$I_b$		$I_{b\_medio}$
C_RTFO	-18 °C	Rip. 1	0.99	0.99
		Rip. 2	0.97	
		Rip. 3	1	

Materiale	Temperatura di test	$I_b$		$I_{b\_medio}$
C_RTFO	-17 °C	Rip. 1	0.96	0.95
		Rip. 2	0.98	
		Rip. 3	0.92	

Tabella 3.2.4.1 Valori di  $I_b$  ottenuti per il materiale *C* invecchiato al *RTFOT*

Il valore di temperatura critica  $T_{cr}$  nel caso del materiale *C* invecchiato al *RTFOT* è stato determinato per interpolazione lineare dei valori ottenuti alle due temperature di prova. Si ottiene un valore di  $T_{cr}$  di -17.7 °C.

Materiale	Temperatura di test	I <sub>b</sub>		I <sub>b_medio</sub>
C_PAV	-18 °C	Rip. 1	0.99	0.99
		Rip. 2	0.99	
		Rip. 3	1	

Materiale	Temperatura di test	I <sub>b</sub>		I <sub>b_medio</sub>
C_PAV	-15 °C	Rip. 1	0.96	0.95
		Rip. 2	0.97	
		Rip. 3	0.93	

Tabella 3.2.4.2 Valori di I<sub>b</sub> ottenuti per il materiale C invecchiato al PAV

Analogamente a quanto fatto nel caso precedente, il valore di temperatura critica T<sub>cr</sub> per il materiale C invecchiato al PAV è stato determinato interpolando linearmente i valori ottenuti alle due temperature di prova. Si ottiene un valore di T<sub>cr</sub> di -17.2 °C.

Materiale	Temperatura di test	I <sub>b</sub>		I <sub>b_medio</sub>
D_RTFOT	-17 °C	Rip. 1	0.98	0.98
		Rip. 2	0.98	
		Rip. 3	0.99	

Tabella 3.2.4.3 Valori di I<sub>b</sub> ottenuti per il materiale D invecchiato al RTFOT

Per il materiale D invecchiato al RTFOT si ottiene un valore di T<sub>cr</sub> di -17° C.

Materiale	Temperatura di test	I <sub>b</sub>		I <sub>b_medio</sub>
D_PAV	-17.5 °C	Rip. 1	0.99	0.99
		Rip. 2	0.99	
		Rip. 3	0.98	

Materiale	Temperatura di test	I <sub>b</sub>		I <sub>b_medio</sub>
D_PAV	-15 °C	Rip. 1	0.99	0.98
		Rip. 2	0.97	
		Rip. 3	0.99	

Tabella 3.2.4.4 Valori di I<sub>b</sub> ottenuti per il materiale D invecchiato al PAV

Per il materiale D invecchiato al PAV si ottiene un valore di T<sub>cr</sub> di -15 °C.

### 3.3. Discussione dei risultati

In questa sezione si discutono i risultati ottenuti dall'indagine sperimentale mettendo a confronto i valori di temperatura di transizione vetrosa e i valori di temperatura critica ottenuti per i due materiali nei tre gradi di invecchiamento. I risultati sono sintetizzati nei due istogrammi di seguito riportati:

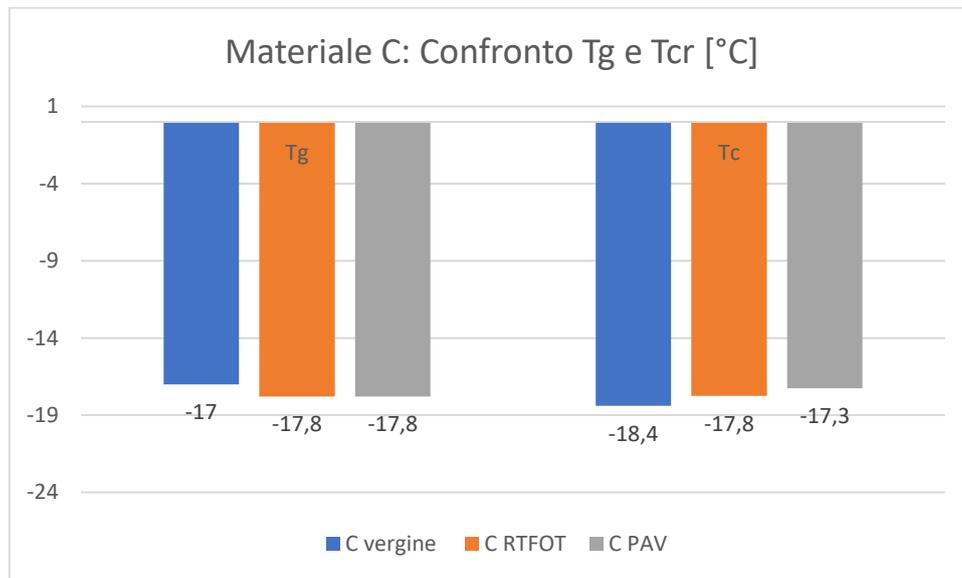


Figura 3.3.1 Confronto tra temperatura critica e temperatura di transizione vetrosa per il materiale C

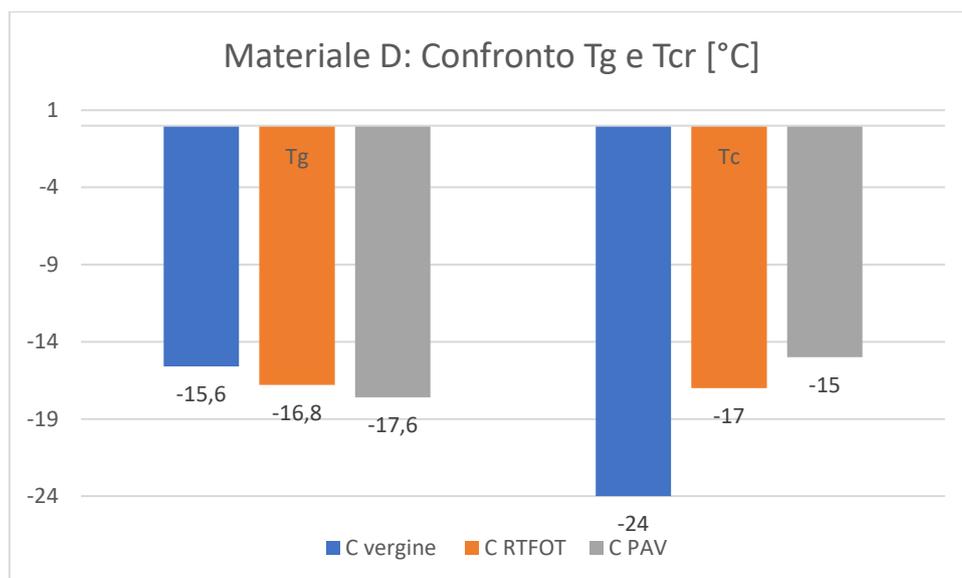


Figura 3.3.2 Confronto tra temperatura critica e temperatura di transizione vetrosa per il materiale D

La prima osservazione riguarda l'andamento al variare del grado di invecchiamento delle due temperature, quella di transizione vetrosa e quella critica. Il grafico mostra che, per entrambi i materiali *C* e *D*, all'aumentare del grado di invecchiamento la temperatura di transizione vetrosa diminuisce, mentre la temperatura critica aumenta. Da questo risultato si deduce che la temperatura di transizione vetrosa, così determinata, non sembra rappresentare un buon parametro per identificare la temperatura critica del materiale. Un'ulteriore osservazione riguarda la differenza ottenuta tra il materiale vergine e il materiale invecchiato al *RTFOT* in termini di temperatura critica: mentre nel caso del materiale *C* questa risulta inferiore ad 1 °C, nel caso del materiale *D* risulta di 7 °C. Quindi l'invecchiamento al *RTFOT* nel caso del bitume modificato con *SBS* genera un aumento significativo del valore della temperatura critica. Inoltre, confrontando i valori di temperatura critica dei due materiali invecchiati al *RTFOT* e al *PAV* si osserva che il materiale *D* presenta dei valori più alti.

## 4. Modellazione

In questa sezione si discute del processo di modellazione agli elementi finiti che è stato eseguito al fine di simulare il comportamento viscoelastico lineare del materiale durante la prova a rottura e dei risultati ottenuti dalla simulazione numerica. L'analisi è stata eseguita mediante l'utilizzo del software COMSOL Multiphysics. In particolare, attraverso la piattaforma di simulazione sono stati eseguiti tutti i passaggi del flusso di modellazione *FEM (Finite Element Method)*, dalla definizione della geometria e della fisica del problema fino alla risoluzione e alla fase di post processing dei risultati completata poi attraverso l'utilizzo del programma Microsoft Excel.

### 4.1. Flusso di modellazione

La configurazione e l'esecuzione del modello agli elementi finiti sono state eseguite mediante una sequenza di passaggi che costituiscono il *flusso di modellazione*:

- Configurazione dell'ambiente modello;
- Costruzione della geometria;
- Specifica delle proprietà del materiale;
- Definizione delle condizioni al contorno della fisica;
- Creazione della mesh;
- Esecuzione della simulazione;
- Post - elaborazione dei risultati.

L'obiettivo dell'analisi eseguita consiste nella simulazione numerica della risposta strutturale di un corpo cilindrico di raggio  $R = 2 \text{ mm}$  e altezza  $H = 5 \text{ mm}$ , soggetto ad una velocità di deformazione costante  $\dot{\gamma} = 0.001 \text{ 1/s}$  fino al raggiungimento della condizione di rottura. La complessità del problema consiste nella modellazione del comportamento del

materiale viscoelastico alle basse temperature. Nel caso specifico il problema è stato affrontato trascurando la non linearità del comportamento del materiale e simulando il comportamento dello stesso attraverso un modello di Maxwell generalizzato costituito da trentadue elementi. I risultati ottenuti dall'analisi sono stati validati ad ogni step, considerando dei modelli teorici di confronto. Nelle fasi di modellazione delle condizioni di vincolo e di carico, si è considerato un materiale elastico lineare fittizio, in modo da potere validare i risultati ottenuti con quelli teorici derivanti dal calcolo analitico basato sulla teoria della torsione del solido di De Saint Venant. Nella fase successiva di modellazione del comportamento viscoelastico lineare del materiale, invece il modello teorico di confronto è stato quello derivante dalla soluzione dell'integrale di convoluzione mediante l'applicazione del metodo delle *State Variables*.

#### **4.1.1. Configurazione dell'ambiente modello**

La configurazione dell'ambiente modello consiste nella definizione della dimensione dello spazio in cui si vuole realizzare il modello e nella scelta del tipo di studio e del tipo di fisica che si vogliono implementare. Nel caso in esame, volendo modellare un campione cilindrico sottoposto ad un carico torsionale, si è scelto di lavorare all'interno di un ambiente *3D*. Per quanto riguarda la selezione della fisica del problema, si è scelto di utilizzare l'interfaccia della *Meccanica dei Solidi*, in quanto adatta all'analisi di spostamenti, sforzi e deformazioni nell'ambito dei corpi continui. Inoltre, per quanto riguarda la scelta della tipologia di studio, nelle fasi di validazione del modello sono stati realizzati studi *Stazionari* caratterizzati dalla stazionarietà nel tempo delle variabili dipendenti, mentre nelle fasi di costruzione del modello finale di interesse sono stati realizzati studi *Transitori* in modo da introdurre nel problema la variabile *tempo*.

## 4.1.2. Costruzione della geometria

La geometria del modello realizzato consiste in un cilindro di raggio  $R = 2 \text{ mm}$  e altezza  $H = 5 \text{ mm}$ . Il cilindro è stato realizzato nell'ambiente  $3D$  facendo riferimento ad un sistema di assi cartesiani  $x, y, z$ , scelto in modo tale che l'asse  $z$  coincida con l'asse longitudinale del cilindro e gli assi  $x, y$  definiscano il piano della generica sezione trasversale dell'oggetto. In particolare, la base inferiore del cilindro è stata realizzata in corrispondenza della coordinata  $z = 0 \text{ mm}$ , mentre la base superiore in corrispondenza della coordinata  $z = 5 \text{ mm}$ . Inoltre, la generica sezione trasversale è posizionata rispetto al sistema di riferimento globale in modo tale che le coordinate  $x$  e  $y$  siano nulle in corrispondenza del baricentro della sezione stessa. La scelta di un sistema di riferimento globale di questo tipo consente di facilitare le fasi successive di estrapolazione dei dati. La figura 4.1.2.1 mostra una rappresentazione dell'oggetto realizzato:

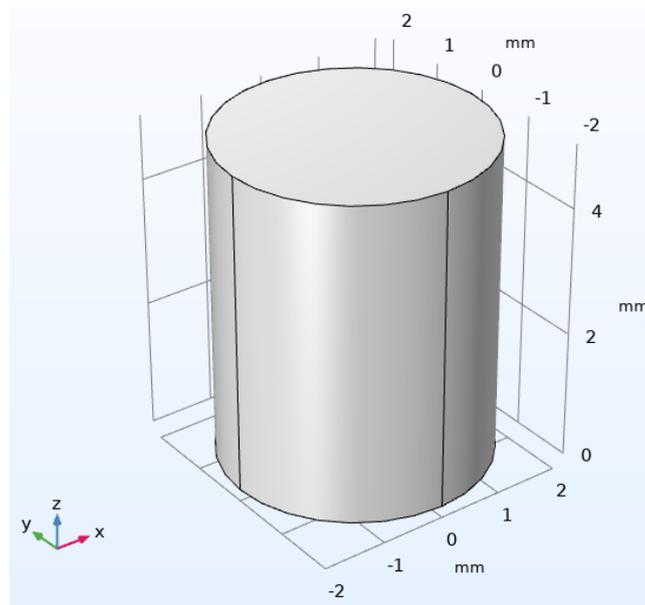


Figura 4.1.2.1 Rappresentazione della geometria del modello

### 4.1.3. Specifica delle proprietà del materiale

Il comportamento viscoelastico lineare del materiale è stato simulato attraverso un modello di Maxwell generalizzato costituito da trentadue elementi. Ai fini dell'analisi sono stati implementati i seguenti parametri:

- il valore del modulo  $G_\infty$  definito nella (2.3.3);
- i trentadue coefficienti di Prony  $G_m$  e  $\rho_m$  definiti nella (2.3.2), ricavati mediante il Collocation Method;
- il valore della temperatura di riferimento  $T_r$ ;
- l'espressione dello shift factor

### 4.1.4. Definizione delle condizioni al contorno della fisica

La definizione delle condizioni al contorno della fisica comprende la definizione delle *condizioni di vincolo* e la definizione delle *condizioni di carico*. Per quanto riguarda le condizioni di vincolo, il modello prevede l'introduzione di un vincolo fisso (incastro) in corrispondenza della base inferiore. Per quanto riguarda le condizioni di carico, sono stati implementati due diversi casi di studio: il primo corrispondente all'applicazione di un momento torcente in corrispondenza della base superiore del cilindro e il secondo corrispondente all'applicazione di una velocità di deformazione  $\dot{\gamma}$  costante. In entrambi i casi, la definizione della condizione di carico è stata semplificata attraverso la definizione di un sistema di coordinate cilindrico  $(r, \varphi, a)$  con:

- $r$ : distanza radiale;
- $\varphi$ : rotazione del generico raggio rispetto ad un raggio di riferimento;
- $a$ : distanza dalla base inferiore del cilindro.

Per quanto riguarda il caso di studio relativo all'applicazione del momento torcente in corrispondenza della base superiore del cilindro, questo è stato applicato mediante la definizione di una distribuzione di sforzi equivalente, in quanto all'interno di un ambiente modello  $3D$  non è possibile applicare carichi puntuali. In particolare, la distribuzione di sforzi equivalente che è stata applicata è quella della teoria della torsione del solido di De Saint Venant, secondo cui gli sforzi sono nulli in corrispondenza del centro della sezione circolare e crescono linearmente col raggio.

Nel caso di studio relativo all'applicazione della velocità di deformazione  $\dot{\gamma}$  costante, questa viene applicata mediante la definizione di uno spostamento prescritto in corrispondenza della base superiore del cilindro. Questo spostamento imposto viene applicato in modo che sia crescente sia lungo la direzione radiale che nel tempo. Inoltre, la condizione di vincolo fisso alla base consente di definire la condizione di spostamento nullo in corrispondenza della base stessa.

#### **4.1.4.1. Richiami sulla teoria della torsione**

Il problema della torsione delle travi a sezione circolare si inserisce nell'ambito della teoria del solido di De Saint Venant che costituisce il problema elastico di un solido cilindrico caricato in corrispondenza delle due basi. Nel caso del problema della torsione, i carichi agenti in corrispondenza delle due basi sono due momenti torcenti uguali ed opposti. Sia  $l$  la lunghezza del cilindro ed  $R$  il raggio della sezione trasversale (Carpinteri, 1993).

Si riassumono di seguito le ipotesi di base della teoria del solido di De Saint Venant:

- *Si ipotizza un materiale omogeneo, isotropo ed elastico lineare;*
- *Si suppone che le forze esterne applicate siano soltanto forze di superficie agenti in corrispondenza delle due basi. Si escludono le forze di volume e gli spostamenti imposti sul contorno;*

- *A sufficiente distanza da ciascuna base lo stato deformativo e tensionale dipende soltanto dalla risultante  $\{\mathbf{R}\}$  delle forze agenti sulla base medesima, nonché dal momento risultante  $\{\mathbf{M}\}$  delle forze rispetto al baricentro della base considerata.*

A queste tre ipotesi, si aggiunge l'ipotesi cinematica di indeformabilità delle sezioni nel loro piano, secondo cui:

- *Ogni sezione ruota rigidamente attorno all'asse longitudinale restando al contempo piana.*

Si consideri il sistema di riferimento  $x, y$  sul piano della sezione trasversale. Sia  $z$  l'asse longitudinale del cilindro.

È possibile definire il campo degli spostamenti:

$$u = -\varphi_z \cdot y \quad (4.1.4.1.1)$$

$$v = \varphi_z \cdot x \quad (4.1.4.1.2)$$

$$w = 0 \quad (4.1.4.1.3)$$

dove:

- $u$  rappresenta lo spostamento lungo  $x$  del generico punto  $P$  appartenente alla sezione trasversale;
- $v$  rappresenta lo spostamento lungo  $y$  del generico punto  $P$  appartenente alla sezione trasversale;
- $w$  rappresenta lo spostamento lungo  $z$  del generico punto  $P$  appartenente alla sezione trasversale;
- $\varphi_z$  rappresenta l'angolo di rotazione infinitesima.

Sia  $\Theta$  la rotazione relativa per unità di lunghezza. Escluse le zone terminali vicino le basi, questa quantità deve essere costante. Pertanto, si può scrivere:

$$\varphi_z = \Theta \cdot z \quad (4.1.4.1.4)$$

Sostituendo nelle equazioni che definiscono il campo degli spostamenti si ottiene:

$$u = -\Theta \cdot y \cdot z \quad (4.1.4.1.5)$$

$$v = \Theta \cdot x \cdot z \quad (4.1.4.1.6)$$

$$w = 0 \quad (4.1.4.1.7)$$

Noto il campo degli spostamenti, tramite le equazioni cinematiche, si deriva il campo deformativo:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \quad (4.1.4.1.8)$$

$$\gamma_{zx} = -\Theta y \quad (4.1.4.1.9)$$

$$\gamma_{zy} = \Theta x \quad (4.1.4.1.10)$$

Noto il campo deformativo, applicando le equazioni costitutive elastiche, si ottiene il campo tensionale:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad (4.1.4.1.11)$$

$$\tau_{zx} = -G\theta y; \quad (4.1.4.1.12)$$

$$\tau_{zy} = G\theta x; \quad (4.1.4.1.13)$$

È possibile ottenere il modulo del vettore tensione tangenziale combinando le due componenti  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$ :

$$\tau_r = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = G\theta r \quad (4.1.4.1.14)$$

Dove  $r$  rappresenta la distanza radiale del generico punto appartenente alla sezione trasversale dal centro della stessa.

Per quanto riguarda le caratteristiche della sollecitazione:

Essendo  $\sigma_z = 0$  si ottiene:

$$N = M_x = M_y = 0 \quad (4.1.4.1.15)$$

La condizione di equivalenza per il taglio secondo l'asse  $x$ :

$$T_x = \int_A \tau_{zx} dA = -G\theta \int_A y dA = -G\theta S_x = 0 \quad (4.1.4.1.16)$$

Essendo nullo il momento statico della sezione rispetto all'asse baricentrico  $x$ .

In maniera analoga, per il taglio secondo y, si può scrivere:

$$T_y = \int_A \tau_{zy} dA = -G\theta \int_A x dA = -G\theta S_y = 0 \quad (4.1.4.1.17)$$

Rimane la condizione di equivalenza relativa al momento torcente:

$$M_z = \int_A \{r\} A \{\tau_z\} dA = \int_A (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dA = G\theta \int_A r^2 dA = G\theta I_p$$

Dove  $I_p$  è il momento di inerzia polare della sezione circolare.

È possibile a questo punto formulare l'espressione dello sforzo tangenziale globale:

$$\tau_z = \frac{M_z}{I_p} \cdot r \quad (4.1.4.1.19)$$

In corrispondenza di  $r = R$  si ottiene:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{I_p} \cdot R = \frac{2 \cdot M_z}{\pi R^3} \quad (4.1.4.1.20)$$

## 4.1.5. Creazione della mesh

Ai fini della scelta della tipologia di mesh da realizzare, sono stati analizzati i risultati della simulazione numerica eseguita su un medesimo modello, variando la configurazione e la regolarità della discretizzazione dell'oggetto nonché la dimensione degli elementi. Ai fini dell'analisi è stato eseguito uno studio transitorio con applicazione di una velocità di

deformazione costante pari a  $\dot{\gamma} = 0.001$  1/s. La geometria e le condizioni di vincolo del modello considerato sono quelle descritte nei paragrafi 4.1.2 e 4.1.4. Inoltre, per semplicità si è considerato un materiale elastico lineare fittizio, per il quale sono stati definiti i valori del modulo di Young  $E$  e del coefficiente di Poisson  $\nu$ , riportati di seguito:

- $E = 10^9$  Pa
- $\nu = 0.3$

Il primo tentativo è stato quello di realizzare una mesh definita mediante una configurazione controllata dalla fisica del problema. Questa tipologia di mesh viene costruita automaticamente dal software impostando la dimensione media degli elementi attraverso cui viene realizzata la discretizzazione dell'oggetto. In particolare, definendo una dimensione media degli elementi *normale* rispetto alla dimensione del problema, si ottiene la mesh riportata in figura 4.1.5.1:

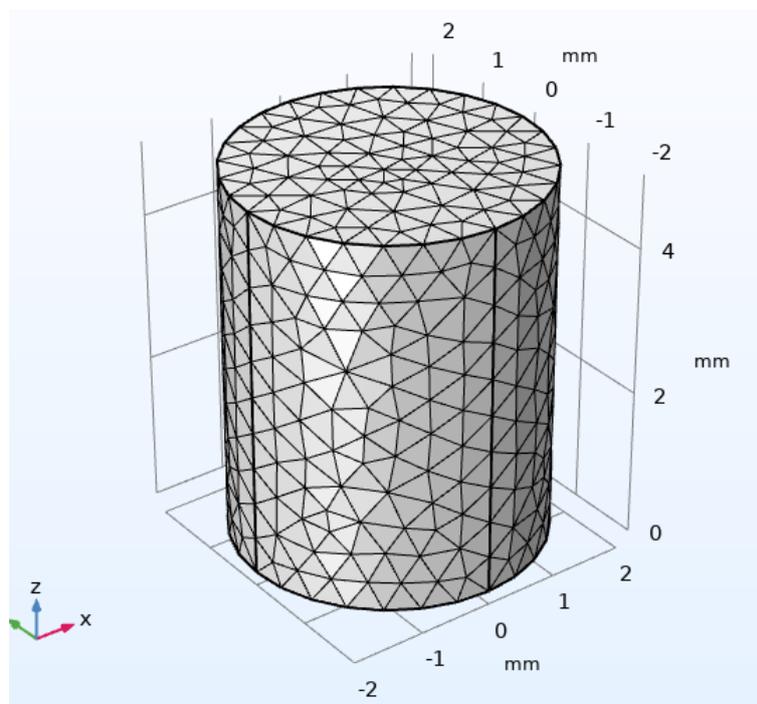


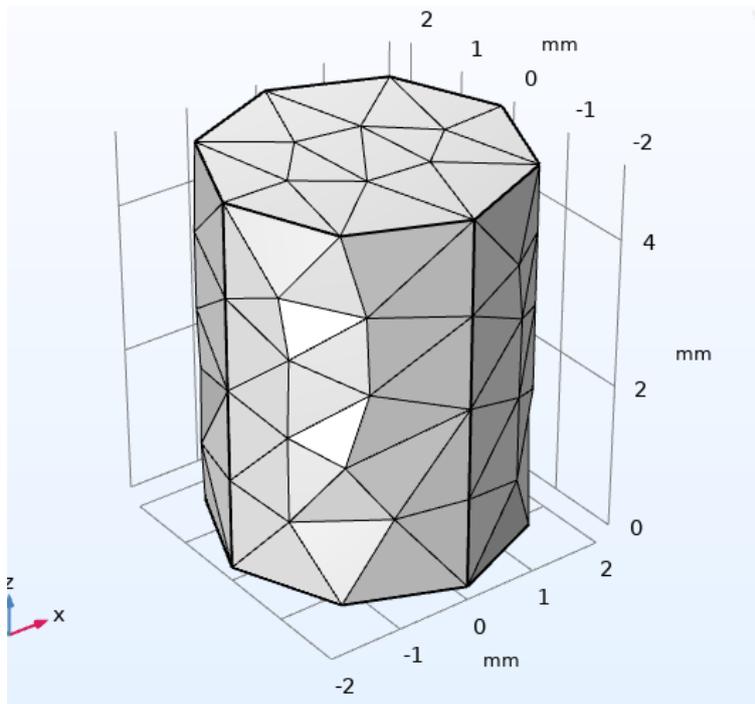
Figura 4.1.5.1 Rappresentazione della mesh controllata dalla fisica del problema con elementi di dimensione normale.

Nella tabella di seguito sono riportati i valori di tensione tangenziale massima ottenuti dall'analisi. Si è inoltre calcolato lo scostamento percentuale  $\Delta$  rispetto al valore teorico atteso in accordo con la teoria di De Saint Venant:

tempo [s]	$\gamma$ [-]	$\tau_{\text{MAX}}(t)$ _FEM [Pa]	$\tau(t)$ _TEORIA [Pa]	$\Delta$ [%]
0	0	0	0.00E+00	0
1	0.001	3.86E+05	3.85E+05	0.36%
2	0.002	7.73E+05	7.69E+05	0.49%
3	0.003	1.16E+06	1.15E+06	0.53%
4	0.004	1.55E+06	1.54E+06	0.74%
5	0.005	1.93E+06	1.92E+06	0.36%
6	0.006	2.32E+06	2.31E+06	0.53%
7	0.007	2.71E+06	2.69E+06	0.65%
8	0.008	3.09E+06	3.08E+06	0.42%
9	0.009	3.48E+06	3.46E+06	0.53%
10	0.01	3.86E+06	3.85E+06	0.36%
11	0.011	4.25E+06	4.23E+06	0.45%
12	0.012	4.64E+06	4.62E+06	0.53%
13	0.013	5.02E+06	5.00E+06	0.40%
14	0.014	5.41E+06	5.38E+06	0.47%
15	0.015	5.80E+06	5.77E+06	0.53%
16	0.016	6.18E+06	6.15E+06	0.42%
17	0.017	6.57E+06	6.54E+06	0.48%
18	0.018	6.96E+06	6.92E+06	0.53%
19	0.019	7.34E+06	7.31E+06	0.44%
20	0.02	7.73E+06	7.69E+06	0.49%

Tabella 4.1.5.1 Valori di tensione tangenziale massima ottenuti numericamente e scostamenti percentuali dal valore teorico.

Si ottiene uno scostamento medio di 0.46%. Sebbene il risultato ottenuto risulti accurato in termini di precisione, questa tipologia di mesh non risulta adatta alla modellazione di un materiale viscoelastico lineare, in quanto richiede elevati tempi di calcolo a causa dell'elevato onere computazionale dovuto alla non regolarità della struttura della discretizzazione. -Al fine di ridurre i tempi di calcolo si potrebbe pensare di aumentare la dimensione media degli elementi, mantenendo inalterata la configurazione della mesh. Implementando una dimensione degli elementi definita come *molto rada* rispetto alla dimensione del problema, si ottiene la mesh riportata in figura 4.1.5.2:



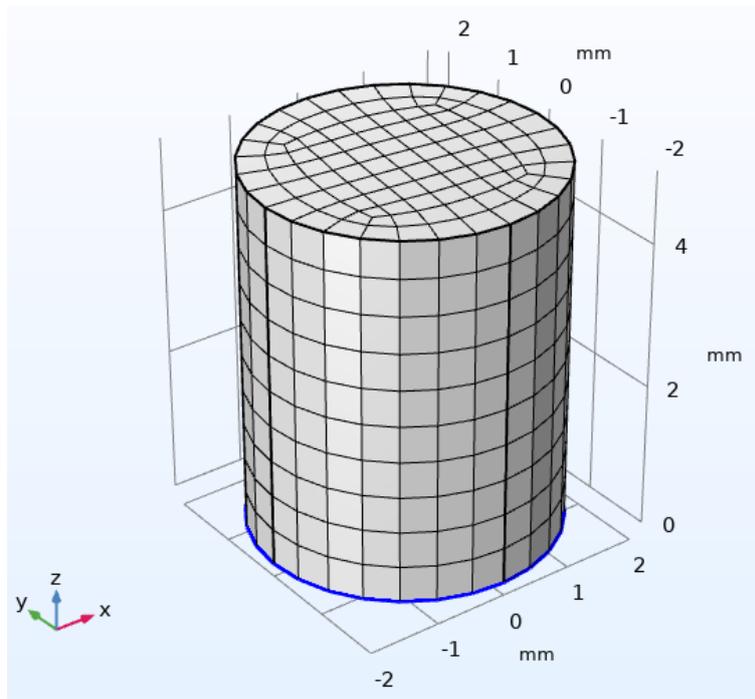
*Figura 4.1.5.2 Rappresentazione della mesh controllata dalla fisica del problema con dimensione degli elementi definita molto rada*

La tabella di seguito riporta i risultati numerici ottenuti:

tempo [s]	$\gamma$ [-]	$\tau_{MAX}(t)$ _FEM [Pa]	$\tau(t)$ _TEORIA [Pa]	$\Delta$ [%]
0	0	0	0.00E+00	0
1	0.001	4.12E+05	3.85E+05	6.65%
2	0.002	8.23E+05	7.69E+05	6.53%
3	0.003	1.24E+06	1.15E+06	6.95%
4	0.004	1.65E+06	1.54E+06	6.76%
5	0.005	2.06E+06	1.92E+06	6.65%
6	0.006	2.47E+06	2.31E+06	6.57%
7	0.007	2.88E+06	2.69E+06	6.52%
8	0.008	3.29E+06	3.08E+06	6.48%
9	0.009	3.71E+06	3.46E+06	6.70%
10	0.01	4.12E+06	3.85E+06	6.65%
11	0.011	4.53E+06	4.23E+06	6.61%
12	0.012	4.94E+06	4.62E+06	6.57%
13	0.013	5.35E+06	5.00E+06	6.54%
14	0.014	5.76E+06	5.38E+06	6.52%
15	0.015	6.18E+06	5.77E+06	6.65%
16	0.016	6.59E+06	6.15E+06	6.62%
17	0.017	7.00E+06	6.54E+06	6.59%
18	0.018	7.41E+06	6.92E+06	6.57%
19	0.019	7.82E+06	7.31E+06	6.55%
20	0.02	8.23E+06	7.69E+06	6.53%

Tabella 4.1.5.2 Valori di tensione tangenziale massima ottenuti numericamente e scostamenti percentuali dal valore teorico.

In questo caso, lo scostamento medio percentuale rispetto al valore teorico risulta pari a 6.29%. Pertanto, il risultato ottenuto non risulta soddisfacente in termini di precisione. Una soluzione alternativa al problema è quella di considerare una configurazione della mesh più regolare. Un modo per ottenere una struttura regolare della discretizzazione consiste nel creare degli elementi finiti esaedrici ottenuti attraverso un'operazione di estrusione dell'oggetto eseguita nell'intero dominio dalla base superiore a quella inferiore. La figura di seguito mostra la mesh realizzata:



*Figura 4.1.5.3 Rappresentazione della mesh estrusa*

Di seguito in tabella 4.1.5.3 si riportano i risultati numerici ottenuti dall'analisi:

tempo [s]	$\gamma$ [-]	$\tau_{\text{MAX}}(t)\text{_{FEM}}$ [Pa]	$\tau(t)\text{_{TEORIA}}$ [Pa]	$\Delta$ [%]
0	0	0	0.00E+00	0
1	0.001	3.85E+05	3.85E+05	0.01%
2	0.002	7.69E+05	7.69E+05	0.01%
3	0.003	1.15E+06	1.15E+06	0.01%
4	0.004	1.54E+06	1.54E+06	0.01%
5	0.005	1.92E+06	1.92E+06	0.01%
6	0.006	2.31E+06	2.31E+06	0.01%
7	0.007	2.69E+06	2.69E+06	0.01%
8	0.008	3.08E+06	3.08E+06	0.01%
9	0.009	3.46E+06	3.46E+06	0.01%
10	0.01	3.85E+06	3.85E+06	0.01%
11	0.011	4.23E+06	4.23E+06	0.01%
12	0.012	4.62E+06	4.62E+06	0.01%
13	0.013	5.00E+06	5.00E+06	0.01%
14	0.014	5.38E+06	5.38E+06	0.01%
15	0.015	5.77E+06	5.77E+06	0.01%
16	0.016	6.15E+06	6.15E+06	0.01%
17	0.017	6.54E+06	6.54E+06	0.01%
18	0.018	6.92E+06	6.92E+06	0.01%
19	0.019	7.31E+06	7.31E+06	0.01%
20	0.02	7.69E+06	7.69E+06	0.01%

Figura 4.1.5.3 Valori di tensione tangenziale massima ottenuti numericamente e scostamenti percentuali dal valore teorico.

In questo caso si ottiene uno scostamento percentuale medio dei valori ottenuti dalla simulazione numerica rispetto ai risultati teorici di 0.01%. Pertanto, questa tipologia di mesh non soltanto consente di ridurre notevolmente i tempi di calcolo nel caso di studio del comportamento viscoelastico lineare del materiale, ma la regolarità della discretizzazione determina una precisione del risultato migliore anche del primo tipo di mesh analizzata.

## 4.2. Costruzione del modello

La costruzione del modello finale è stata sviluppata procedendo per step, in modo da potere confrontare e valutare i risultati ottenuti in ciascuna delle fasi di costruzione del modello con quanto atteso dalla teoria. Sono stati quindi considerati i seguenti step:

- Geometria, condizioni di vincolo e di carico;
- Modellazione della viscoelasticità lineare;
- Introduzione della variabile tempo nel carico (analisi di tipo transitorio)

### 4.2.1. Geometria, condizioni di vincolo e di carico

Ai fini della verifica della definizione della geometria, delle condizioni di vincolo e di carico, si è considerato un modello semplificato, al quale è stato assegnato un materiale omogeneo, isotropo ed elastico lineare fittizio, per il quale sono stati definiti i valori del modulo di Young  $E$ , del coefficiente di Poisson  $\nu$  e della densità del materiale  $\rho$ . Su questo modello è stata eseguito uno studio stazionario caratterizzato dall'applicazione di un momento torcente costante. La tabella di seguito riporta una sintesi dei dati di input:

Geometria		
R	2	[mm]
H	5	[mm]
Materiale		
E	1.00E+09	[Pa]
$\nu$	0.3	[-]
$\rho$	1.00E+03	[kg/m <sup>3</sup> ]
Condizione di carico		
Mt	1.836	[mN*m]

Figura 4.2.1.1 Dati di input del modello

La mesh è stata definita mediante una configurazione controllata dalla fisica del problema che viene costruita automaticamente dal software, impostando la dimensione media degli

elementi come *normale* rispetto alla dimensione del problema. In particolare, la mesh realizzata si compone di 8516 elementi di volume, 1016 elementi di superficie e 96 elementi sui lati.

Ai fini della verifica, il risultato ottenuto dalla simulazione numerica è stato confrontato con quello atteso, definito dalla teoria della torsione del Solido di De Saint Venant.

Le figure 4.2.1.2 e 4.2.1.3 mostrano l'andamento del campo delle tensioni di Von Mises nell'oggetto in esame. Si osserva che l'andamento risulta coerente con quanto atteso dalla teoria. Infatti, le tensioni risultano nulle in corrispondenza dell'asse longitudinale del cilindro e crescono linearmente lungo il raggio. In particolare, la figura 4.2.1.3 mostra come, quale che sia la sezione trasversale considerata, l'andamento delle tensioni di Von Mises resta invariato.

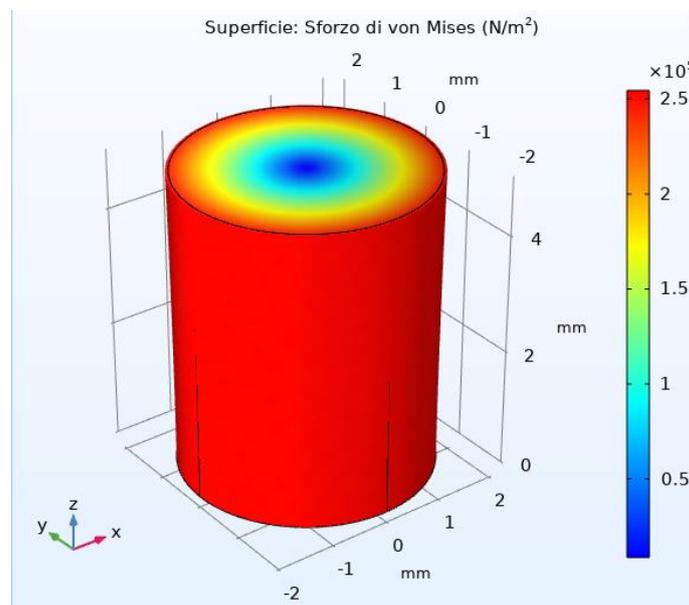


Figura 4.2.1.2 Andamento delle tensioni di Von Mises nel solido cilindrico.

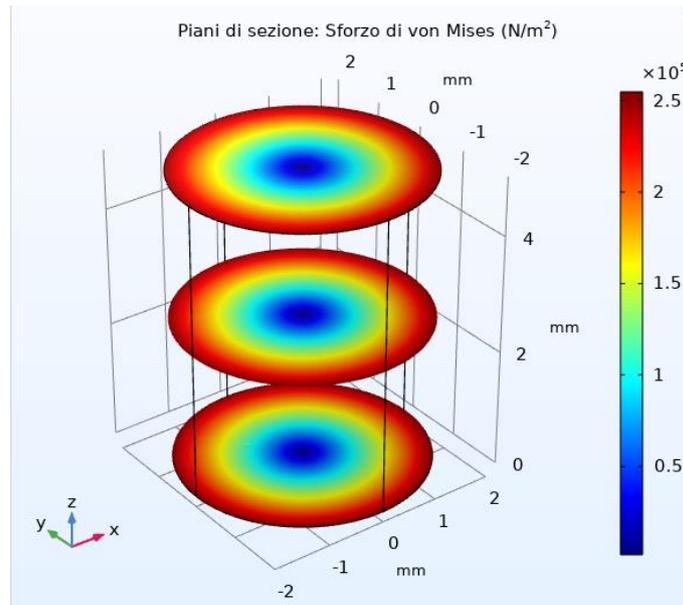


Figura 4.2.1.3 Andamento delle tensioni di Von Mises nelle sezioni orizzontali del solido.

Inoltre, si è verificato il valore numerico della tensione tangenziale massima ottenuta:

$$\sigma_{VM,max} = 2.55 \cdot 10^5 [Pa]; \quad (4.2.1.1)$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{VM,MAX}}{\sqrt{3}} = 1.47 \cdot 10^5 [Pa]; \quad (4.2.1.2)$$

Confrontando col valore atteso, in accordo con la teoria della torsione, si ottiene:

$$\tau_{max} = \frac{R \cdot M_t}{\left(\frac{\pi \cdot R^4}{2}\right)} = 1.46 \cdot 10^5 [Pa] \quad (4.2.1.3)$$

Il modello è stato inoltre verificato dal punto di vista del campo degli spostamenti.

Le figure 4.2.1.4 e 4.2.1.5 mostrano l'andamento del campo degli spostamenti nell'oggetto in esame. Si osserva che l'andamento risulta coerente con quanto atteso dalla teoria. Infatti, gli spostamenti risultano nulli in corrispondenza della base del cilindro, dove è posto un

vincolo di incastro, e crescono linearmente sia lungo l'altezza del cilindro sia lungo la direzione radiale.

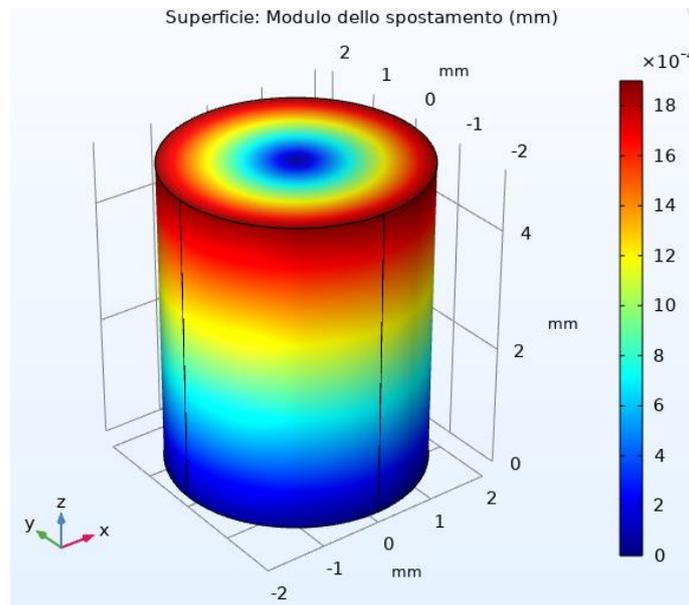


Figura 4.2.1.4 Andamento del campo degli spostamenti nel solido cilindrico.

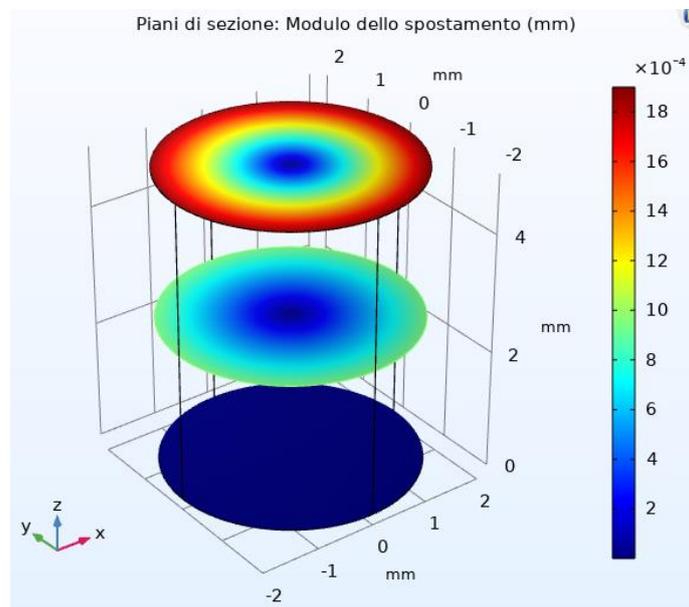


Figura 4.2.1.5 Andamento del campo degli spostamenti in tre sezioni trasversali del solido

Si è verificato il valore numerico dello spostamento massimo ottenuto:

$$s_{MAX} = 1.9 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (4.2.1.4)$$

Sia  $\gamma$  l'angolo formato tra la generica generatrice del cilindro nella configurazione iniziale e nella configurazione finale. Si può scrivere:

$$\text{tg} \gamma = \frac{s}{h} \quad (4.2.1.5)$$

dove:

- $s$ : spostamento del generico punto P posto a distanza R dall'asse longitudinale del cilindro in corrispondenza della base superiore;
- $h$ : altezza del cilindro.

Nell'ambito dei piccoli spostamenti è possibile approssimare la tangente con l'angolo.

Pertanto, la 4.2.1.5 si riduce a:

$$\gamma = \frac{s}{h} \quad (4.2.1.6)$$

Da cui:

$$\gamma = 3.8 \cdot 10^{-4} [-] \quad (4.2.1.7)$$

A questo punto si è confrontato il risultato ottenuto col valore atteso, in accordo con la teoria del solido di De Saint Venant.

Ricordando che:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 3.846 \cdot 10^8 \text{ [Pa]} \quad (4.2.1.8)$$

È possibile scrivere:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = 3.79 \cdot 10^4 \text{ [-]} \quad (4.2.1.9)$$

La differenza percentuale tra il risultato ottenuto dalla simulazione numerica e quello teorico derivante dal calcolo analitico risulta:

$$\Delta = \frac{\gamma_{FEM} - \gamma_{TH}}{\gamma_{FEM}} = 0.26 \% \quad (4.2.1.10)$$

Il risultato in termini di spostamento massimo ottenuto dalla simulazione numerica si discosta da quello teorico atteso dello 0.26%. Pertanto, il modello risulta soddisfacente.

#### 4.2.4. Modellazione della viscoelasticità lineare

Il secondo step nella fase di costruzione del modello e validazione dello stesso costituisce l'introduzione del comportamento viscoelastico lineare del materiale, modellato attraverso un modello di Maxwell generalizzato a trentadue elementi. Ai fini della validazione, si è considerata nuovamente un'analisi stazionaria, con applicazione di un momento torcente costante. I valori dei coefficienti di Prony sono stati ricavati applicando il Collocation Method, descritto al paragrafo 1.2.2, su dati ottenuti dalle frequency sweep eseguite su un bitume 70/100 vergine.

Il software COMSOL Multiphysics consente di implementare due diverse tipologie di analisi stazionaria su un materiale viscoelastico lineare:

- analisi con rigidità statica istantanea, definita come:

$$G(t \rightarrow 0) = \lim_{t \rightarrow 0} (G_{\infty} + \sum G_m \cdot e^{-t/\rho_m}) = G_{\infty} + \sum_{m=1} G_m \quad (4.2.4.1)$$

- analisi con rigidità statica a lungo termine, definita come:

$$G(t \rightarrow \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (G_{\infty} + \sum G_m \cdot e^{-t/\rho_m}) = G_{\infty} \quad (4.2.4.2)$$

I termini delle due equazioni (4.2.4.1) e (4.2.4.2) sono definiti al paragrafo 2.3.

Per potere eseguire la simulazione è necessario specificare il valore di  $E_{\infty}$  corrispondente a  $G_{\infty}$ , i valori dei trentadue coefficienti di Prony e la temperatura di riferimento. La tabella di seguito riporta una sintesi dei dati utilizzati:

Geometria			Coefficienti di Prony	
R	2	[mm]	$\rho_m$	$G_m$
H	5	[mm]	[s]	[Pa]
Materiale			2.00E-08	1.30E+07
G_inf	3.89E-39	[Pa]	6.00E-08	1.95E+07
$\nu$	0.3	[-]	2.00E-07	1.49E+07
$\rho$	1.00E+03	[kg/m <sup>3</sup> ]	6.00E-07	3.01E+07
Condizione di carico			2.00E-06	2.30E+07
Mt	1.836	[mN*m]	6.00E-06	4.39E+07
Temperatura di riferimento			2.00E-05	3.50E+07
T	258.15	[K]	6.00E-05	6.18E+07
			2.00E-04	5.10E+07
			6.00E-04	8.25E+07
			2.00E-03	6.96E+07
			6.00E-03	1.01E+08
			2.00E-02	8.57E+07
			6.00E-02	1.10E+08
			2.00E-01	9.04E+07
			6.00E-01	1.00E+08
			2.00E+00	7.62E+07
			6.00E+00	7.03E+07
			2.00E+01	4.73E+07
			6.00E+01	3.53E+07
			2.00E+02	2.02E+07
			6.00E+02	1.19E+07
			2.00E+03	5.70E+06
			6.00E+03	2.69E+06
			2.00E+04	1.09E+06
			6.00E+04	4.21E+05
			2.00E+05	1.48E+05
			6.00E+05	4.93E+04
			2.00E+06	1.56E+04
			6.00E+06	4.82E+03
			2.00E+07	1.16E+03
			6.00E+07	6.76E+02

Tabella 4.2.4.1 Dati di input.

Si osserva che l'analisi stazionaria con rigidità statica a lungo termine coincide con un'analisi stazionaria effettuata su un materiale equivalente elastico lineare, poiché l'analisi stazionaria non prevede la variabile temporale. Pertanto, si riporta la verifica soltanto per il caso dell'analisi statica con rigidità statica istantanea.

Le figure 4.2.4.1 e 4.2.4.2 mostrano l'andamento del campo delle tensioni di Von Mises nell'oggetto in esame. Si osserva che l'andamento risulta coerente con quanto atteso dalla teoria per le medesime considerazioni fatte nel caso precedente.

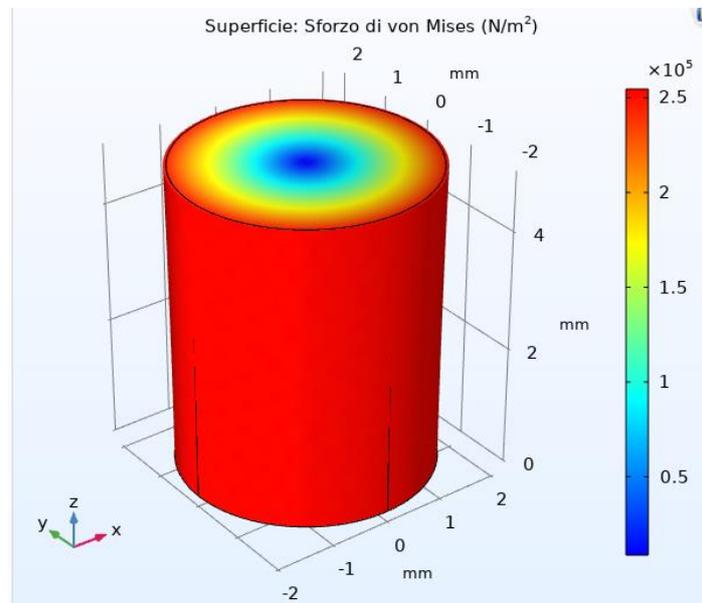


Figura 4.2.4.1 Andamento delle tensioni di Von Mises nel solido cilindrico.

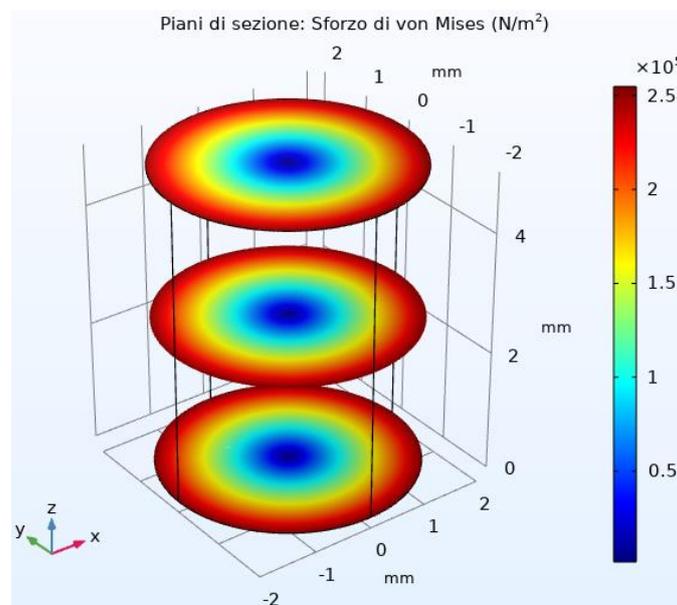


Figura 4.2.4.2 Andamento delle tensioni di Von Mises nelle sezioni trasversali del solido cilindrico.

Inoltre, si è verificato il valore numerico della tensione tangenziale massima ottenuta:

$$\sigma_{VM,max} = 2.55 \cdot 10^5 [Pa]; \quad (4.2.4.3)$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{VM,Max}}{\sqrt{3}} = 1.47 \cdot 10^5 [Pa]; \quad (4.2.4.4)$$

Confrontando col valore atteso, in accordo con la teoria della torsione, si ottiene:

$$\tau_{max} = \frac{R \cdot M_t}{\left(\frac{\pi \cdot R^4}{2}\right)} = 1.46 \cdot 10^5 [Pa] \quad (4.2.4.5)$$

Il modello è stato verificato dal punto di vista del campo degli spostamenti.

Le figure 4.2.4.3 e 4.2.4.4 mostrano l'andamento del campo degli spostamenti nell'oggetto in esame. Si osserva che l'andamento risulta coerente con quanto atteso dalla teoria per le medesime considerazioni fatte nel caso precedente.

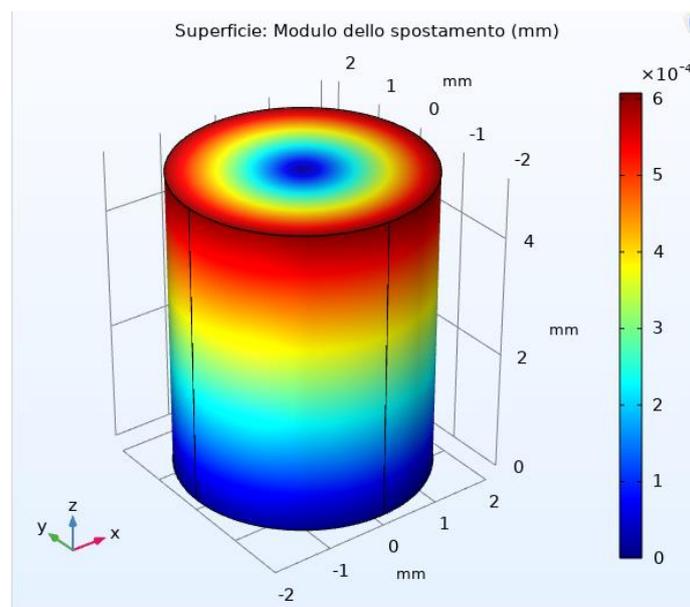


Figura 4.2.4.3 Andamento del campo degli spostamenti nel solido cilindrico.

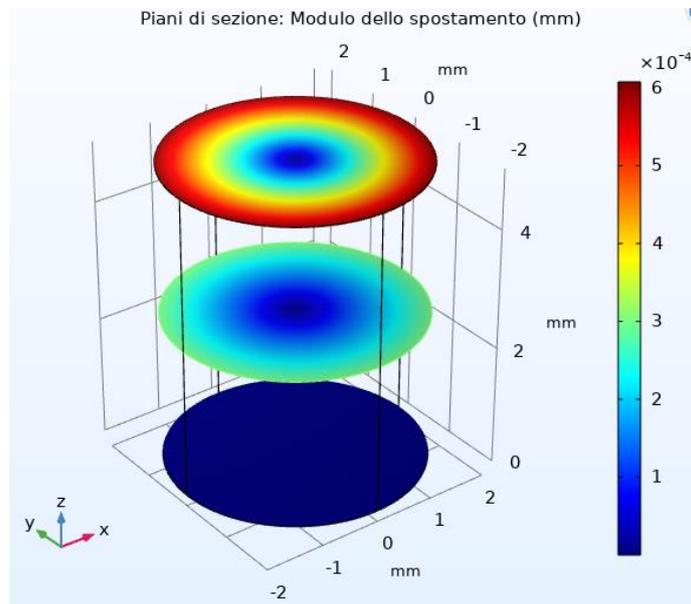


Figura 4.2.4.4 Andamento del campo degli spostamenti in tre sezioni trasversali del solido.

Inoltre, si è verificato il valore numerico dello spostamento massimo ottenuto:

$$s_{MAx} = 6.07 \cdot 10^{-4} \text{ mm} \quad (4.2.4.6)$$

Ricordando che:

$$\gamma = \frac{s}{h} \quad (4.2.4.7)$$

Si ottiene:

$$\gamma = 1.21 \cdot 10^{-4} [-] \quad (4.2.4.8)$$

A questo punto, si è confrontato il valore ottenuto con quello teorico atteso, secondo cui:

$$\gamma(t) = J(t) \cdot \tau \quad (4.2.4.9)$$

dove:

- $J(t) = J_g + \frac{t}{\eta_0} + \sum (J_m - e^{-t/t_m})$ ;
- $J_g = \frac{1}{\sum G_m}$ ;
- $\eta_0 = \sum \rho_m \cdot G_m$

Da cui si ottiene:

$$\gamma(t \rightarrow 0) = J(t \rightarrow 0) \cdot \tau = 8.31 \cdot 10^{-10} \left[ \frac{1}{Pa} \right] \cdot 1.47 \cdot 10^5 [Pa] = 1.22 \cdot 10^{-4} [-]$$

Valutando la differenza tra il risultato ottenuto dalla simulazione numerica e quello ottenuto dal calcolo analitico:

$$\Delta = \frac{\gamma_{FEM} - \gamma_{TH}}{\gamma_{FEM}} = 0.82 \% \quad (4.2.4.10)$$

Il risultato in termini di deformazione  $\gamma$  ottenuto dalla simulazione numerica si discosta da quello teorico atteso dello 0.68%. Pertanto, il modello risulta soddisfacente.

## 4.2.5. Introduzione della variabile tempo nel carico (analisi di tipo transitorio)

Dopo avere introdotto il comportamento del materiale viscoelastico lineare, è stato implementato uno *studio transitorio* in modo da potere introdurre una condizione di carico crescente nel tempo. In particolare, la condizione di carico introdotta è quella caratterizzata da una velocità di deformazione costante pari a  $\dot{\gamma} = 0.001 \frac{1}{s}$ .

Il modello di Maxwell generalizzato è stato definito utilizzando i valori dei coefficienti di Prony ricavati applicando il Collocation Method su dati ottenuti da una prova a rottura eseguita alla temperatura di  $-15 \text{ }^{\circ}\text{C}$  su un bitume 70/100 invecchiato al PAV. Inoltre, con l'introduzione della variabilità temporale del problema, al fine di ridurre l'onere computazionale e quindi il tempo di calcolo del software, rispetto ai modelli descritti precedentemente, è stata cambiata la tipologia di mesh. In questo l'utilizzo di una mesh regolare, costruita attraverso la creazione di elementi ottenuti estruendo il solido dalla base superiore alla base inferiore, ha consentito di ridurre il tempo di calcolo di circa quattro ore, mantenendo l'accuratezza della soluzione. In particolare, la mesh utilizzata si compone di 1050 elementi di volume, 490 elementi di superficie e 96 elementi sui lati. Viene quindi eseguito lo studio transitorio, impostando la restituzione dei risultati all'interno di un range temporale di 40 s con un passo di 0.25 s.

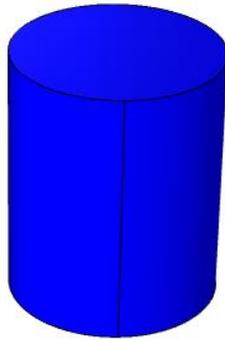
La tabella di seguito riporta una sintesi dei dati utilizzati:

Geometria		
R	2	[mm]
H	5	[mm]
Materiale		
G <sub>inf</sub>	3.89E-39	[Pa]
$\nu$	0.3	[-]
$\rho$	1000	[kg/m <sup>3</sup> ]
Condizione di carico		
d $\gamma$ /dt	0.001	[1/s]
Temperatura di riferimento		
T	258.15	[K]

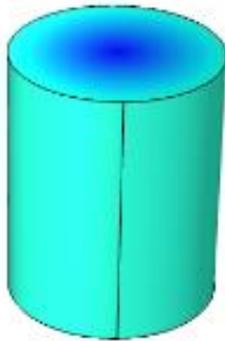
Coefficienti di Prony	
Gm [Pa]	$\rho m$ [s]
1.00E+07	2.00E-08
1.52E+07	6.00E-08
1.15E+07	2.00E-07
2.35E+07	6.00E-07
1.77E+07	2.00E-06
3.45E+07	6.00E-06
2.71E+07	2.00E-05
4.91E+07	6.00E-05
4.00E+07	2.00E-04
6.68E+07	6.00E-04
5.59E+07	2.00E-03
8.50E+07	6.00E-03
7.19E+07	2.00E-02
9.76E+07	6.00E-02
8.12E+07	2.00E-01
9.61E+07	6.00E-01
7.58E+07	2.00E+00
7.60E+07	6.00E+00
5.42E+07	2.00E+01
4.46E+07	6.00E+01
2.75E+07	2.00E+02
1.82E+07	6.00E+02
9.43E+06	2.00E+03
4.95E+06	6.00E+03
2.16E+06	2.00E+04
9.18E+05	6.00E+04
3.44E+05	2.00E+05
1.23E+05	6.00E+05
4.08E+04	2.00E+06
1.34E+04	6.00E+06
3.24E+03	2.00E+07
2.03E+03	6.00E+07

Tabella 4.2.5.1 Dati di input.

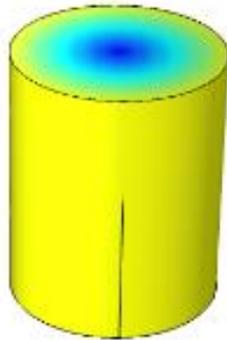
Al fine di mostrare l'evoluzione dell'andamento del campo delle tensioni, si è discretizzato l'intervallo temporale in cinque frame, in modo da ottenere l'andamento degli sforzi in cinque istanti temporali differenti inclusi all'interno dell'intervallo di analisi considerato. Il risultato è mostrato nelle figure di seguito riportate:



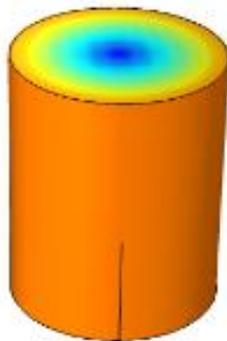
*Figura 4.2.5.1 Andamento delle tensioni di Von Mises al tempo  $t = 0$  s*



*Figura 4.2.5.2 Andamento delle tensioni di Von Mises al tempo  $t = 10$  s*



*Figura 4.2.5.3 Andamento delle tensioni di Von Mises al tempo  $t = 20$  s*



*Figura 4.2.5.4 Andamento delle tensioni di Von Mises al tempo  $t = 30$  s*

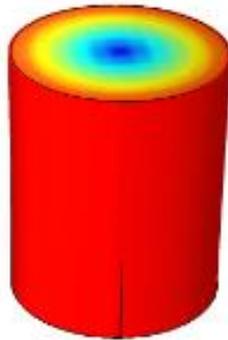


Figura 4.2.5.5 Andamento delle tensioni di Von Mises al tempo  $t = 40$  s

In termini numerici, il risultato ottenuto dalla simulazione numerica in termini di tensione tangenziale massima è stato confrontato col valore teorico ottenuto applicando il metodo delle State Variables. Il grafico di seguito riportato mostra il confronto tra i risultati ottenuti dall'analisi numerica e quelli ottenuti dal calcolo analitico:

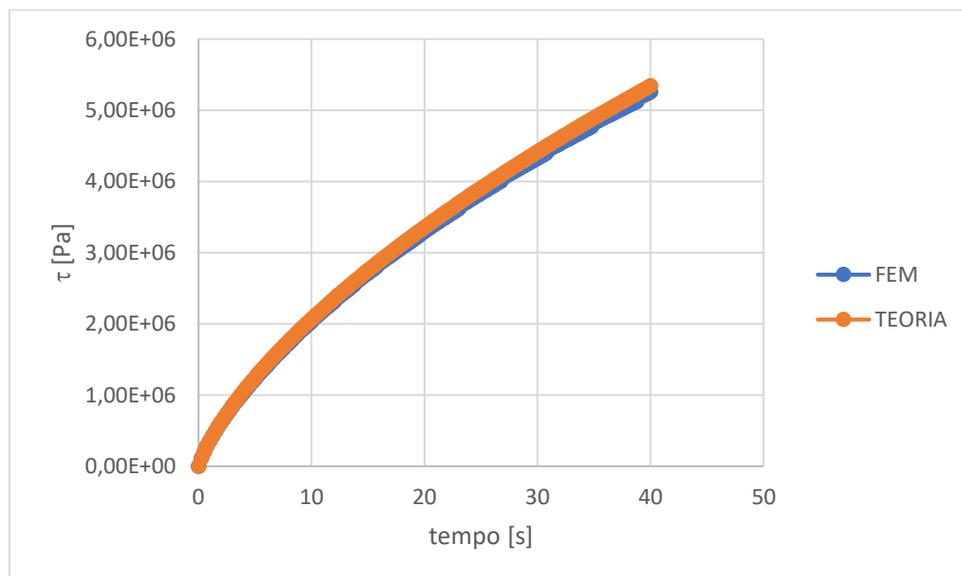


Figura 4.2.5.6 Confronto tra l'andamento nel tempo delle tensioni tangenziali ottenute numericamente e analiticamente.

Confrontando i risultati ottenuti dall'analisi agli elementi finiti con quelli ottenuti dal calcolo teorico, si ottiene una differenza percentuale media di 1.62%. Pertanto, il modello risulta soddisfacente.

### 4.3. Discussione dei risultati

Il modello realizzato è stato utilizzato per eseguire diverse simulazioni al fine di analizzare il comportamento viscoelastico lineare del materiale e confrontarlo con i risultati sperimentali ottenuti dalle prove a rottura.

In questa prima simulazione si è modellato il comportamento viscoelastico lineare del materiale C invecchiato al PAV durante una prova a rottura eseguita alla temperatura  $T = 15\text{ }^{\circ}\text{C}$ . In riferimento al flusso di modellazione descritto nei paragrafi precedenti, si riporta una sintesi delle condizioni considerate nei diversi step di costruzione del modello:

- Geometria cilindrica:  $R = 2\text{ mm}$ ;  $H = 5\text{ mm}$ ;
- Condizione di vincolo: incastro alla base;
- Condizione di carico: velocità di deformazione  $\dot{\gamma} = 0.001\text{ 1/s}$ ;
- Materiale: modello di Maxwell generalizzato a 32 parametri
- Tipologia di mesh utilizzata: estrusa
- Tipologia di studio eseguita: studio transitorio

Una prima analisi è stata effettuata in riferimento alla definizione delle proprietà del materiale. Per potere implementare un modello di Maxwell generalizzato a trentadue parametri, è necessario definire la temperatura di riferimento, la funzione degli shift factor e i valori dei trentadue coefficienti di Prony. Questi ultimi possono essere ricavati mediante l'applicazione del Collocation Method utilizzando il modello CA, fittato sui dati ottenuti

dalle prove di frequency sweep oppure sui dati del fingerprint della prova a rottura. In tabella vengono riportati i coefficienti di Prony che sono stati ottenuti nei due casi:

Coefficienti di Prony (frequency sweep)		Coefficienti di Prony (fingerprint)	
$\rho_m$	$G_m$	$\rho_m$	$G_m$
[s]	[Pa]	[s]	[Pa]
2.00E-08	1.71E+07	2.00E-08	1.00E+07
6.00E-08	2.29E+07	6.00E-08	1.52E+07
2.00E-07	1.82E+07	2.00E-07	1.15E+07
6.00E-07	3.29E+07	6.00E-07	2.35E+07
2.00E-06	2.58E+07	2.00E-06	1.77E+07
6.00E-06	4.45E+07	6.00E-06	3.45E+07
2.00E-05	3.57E+07	2.00E-05	2.71E+07
6.00E-05	5.82E+07	6.00E-05	4.91E+07
2.00E-04	4.77E+07	2.00E-04	4.00E+07
6.00E-04	7.24E+07	6.00E-04	6.68E+07
2.00E-03	5.99E+07	2.00E-03	5.59E+07
6.00E-03	8.38E+07	6.00E-03	8.50E+07
2.00E-02	6.92E+07	2.00E-02	7.19E+07
6.00E-02	8.77E+07	6.00E-02	9.76E+07
2.00E-01	7.07E+07	2.00E-01	8.12E+07
6.00E-01	7.98E+07	6.00E-01	9.61E+07
2.00E+00	6.12E+07	2.00E+00	7.58E+07
6.00E+00	6.01E+07	6.00E+00	7.60E+07
2.00E+01	4.25E+07	2.00E+01	5.42E+07
6.00E+01	3.55E+07	6.00E+01	4.46E+07
2.00E+02	2.25E+07	2.00E+02	2.75E+07
6.00E+02	1.57E+07	6.00E+02	1.82E+07
2.00E+03	8.67E+06	2.00E+03	9.43E+06
6.00E+03	5.03E+06	6.00E+03	4.95E+06
2.00E+04	2.40E+06	2.00E+04	2.16E+06
6.00E+04	1.16E+06	6.00E+04	9.18E+05
2.00E+05	4.85E+05	2.00E+05	3.44E+05
6.00E+05	2.00E+05	6.00E+05	1.23E+05
2.00E+06	7.31E+04	2.00E+06	4.08E+04
6.00E+06	2.81E+04	6.00E+06	1.34E+04
2.00E+07	6.89E+03	2.00E+07	3.24E+03
6.00E+07	5.52E+03	6.00E+07	2.03E+03

Tabella 4.3.1 Valori dei coefficienti di Prony ottenuti dalla frequency sweep e dal fingerprint della prova a rottura

Si osserva che, implementando i due diversi set di coefficienti di Prony, la simulazione numerica fornisce risultati differenti. I valori di tensione tangenziale massimi ottenuti sono

stati confrontati con i medesimi valori ricavati dal modello teorico di Maxwell mediante l'applicazione del metodo delle State Variables e con i risultati della prova a rottura. I due grafici di seguito riportati mostrano il confronto tra le tre curve:

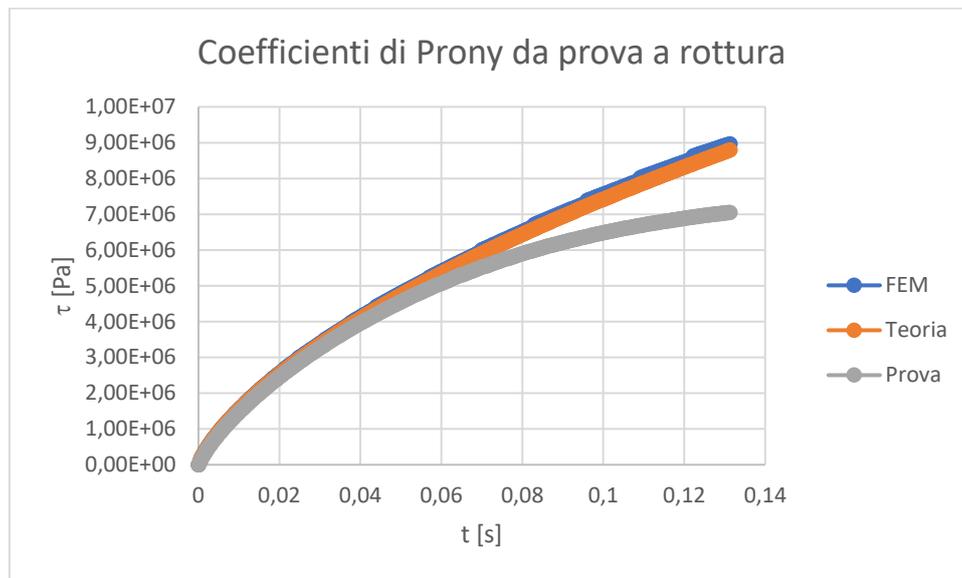


Figura 4.3.1 Confronto tra le tre curve ottenute numericamente, analiticamente e sperimentalmente.

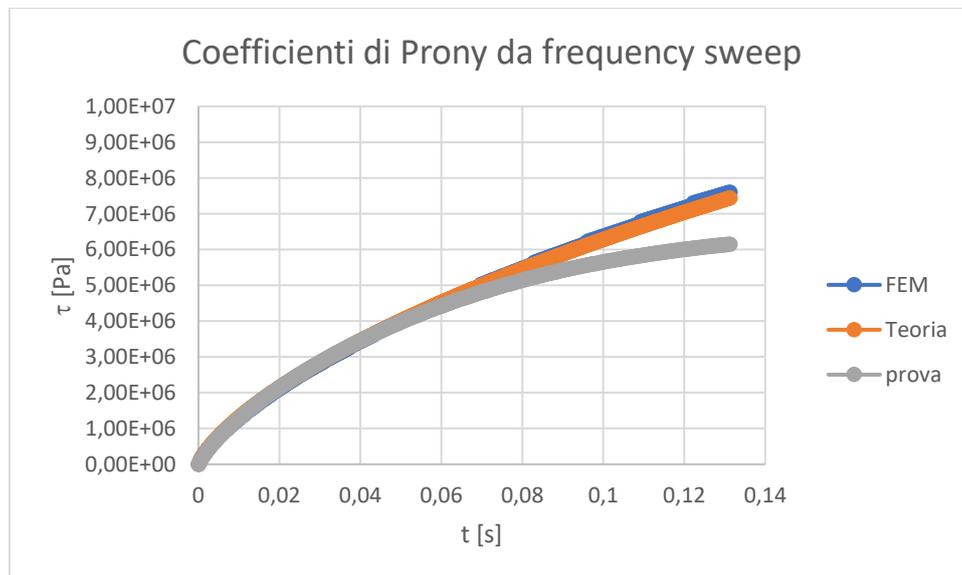


Figura 4.3.2 Confronto tra le tre curve ottenute numericamente, analiticamente e sperimentalmente.

Nel caso in cui vengono implementati i coefficienti di Prony derivanti dai dati delle frequency sweep, per potere confrontare le tre curve, bisogna correggere la curva ottenuta

dalla prova a rottura. Il coefficiente correttivo viene calcolato come la media dei rapporti alle diverse frequenze tra la norma del modulo complesso misurata nel fingerprint della prova a rottura e la norma del modulo complesso misurata nelle frequency sweep.

Inoltre, si osserva che le curve derivanti dalla simulazione agli elementi finiti e dal modello teorico di confronto si sovrappongono graficamente.

Il vantaggio di potere modellare il comportamento del materiale viscoelastico lineare utilizzando i coefficienti di Prony derivanti dai dati delle frequency sweep consiste nella possibilità di simulare per un dato materiale prove effettuate a diverse temperature, mediante l'ausilio della funzione di shift factor. In particolare, l'introduzione di questa funzione consente di simulare prove eseguite e temperature diverse rispetto alla temperatura di riferimento, senza cambiare i valori dei coefficienti di Prony.

Un esempio viene fornito dall'esecuzione della seguente analisi numerica in cui, mediante l'introduzione della funzione di shift factor, si simula il comportamento del materiale C invecchiato al PAV alla  $T = 18^{\circ}\text{C}$ . Il grafico mostra il risultato ottenuto in termini di andamento delle tensioni tangenziali nel tempo:

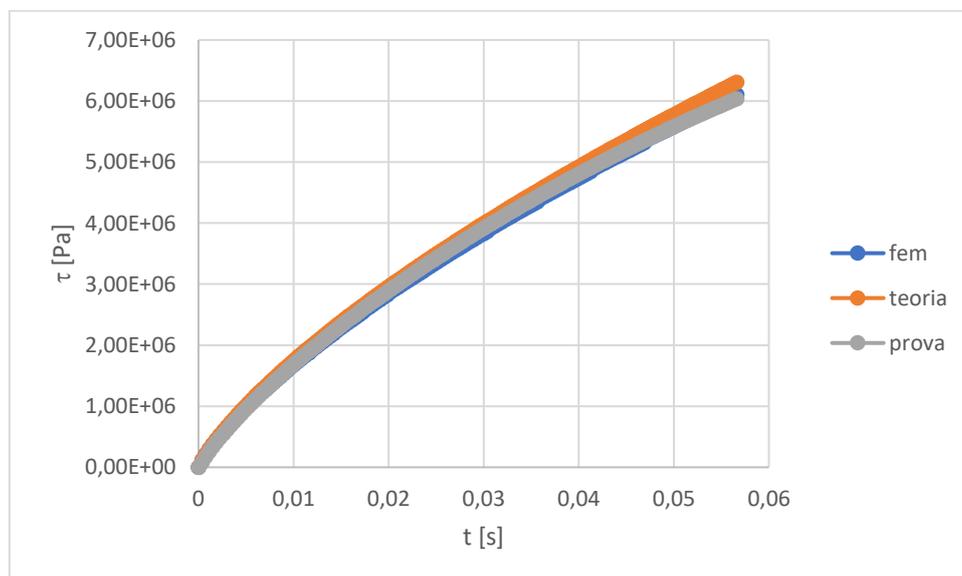
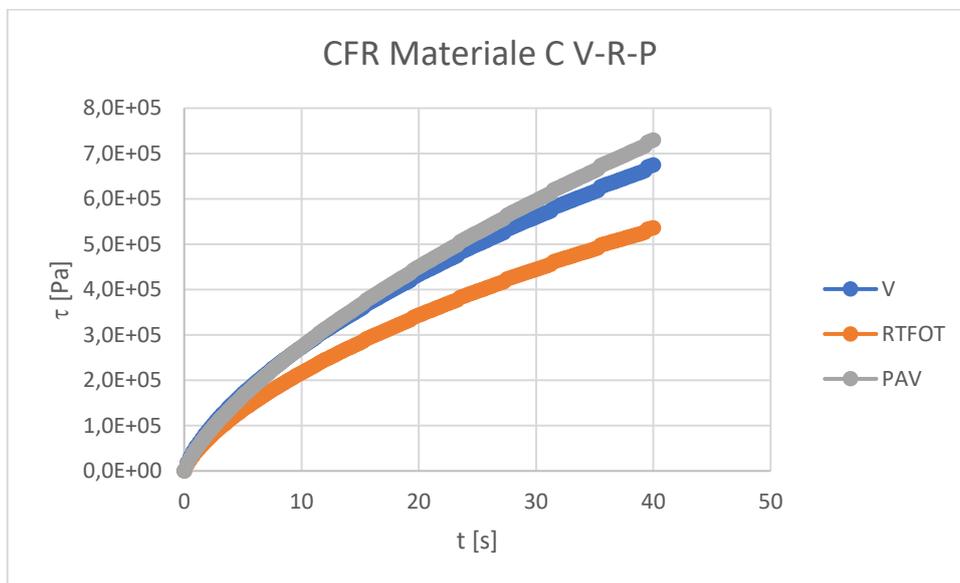
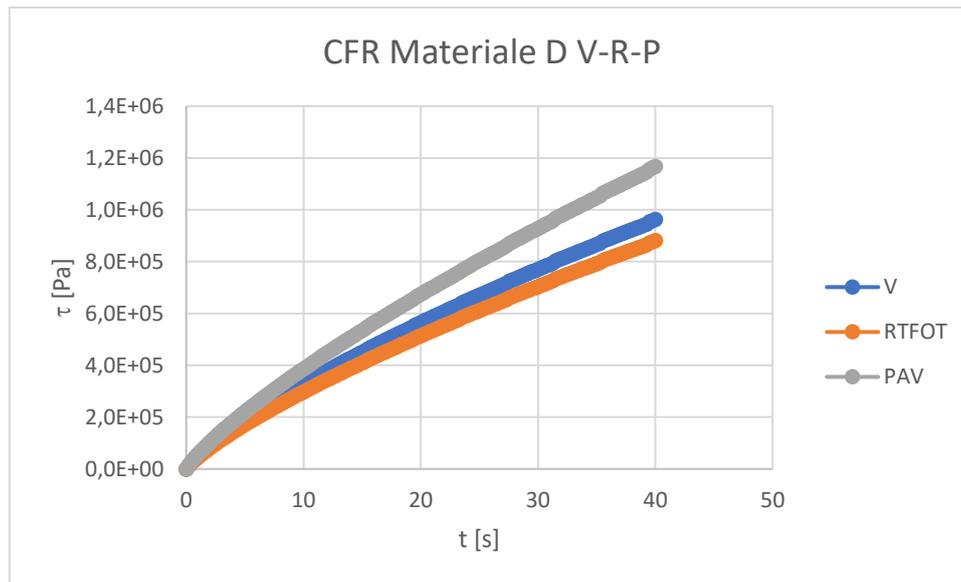


Figura 4.3.3 Confronto tra le tre curve ottenute numericamente, analiticamente e sperimentalmente.

In questo caso si osserva che non soltanto le curve ottenute dalla simulazione agli elementi finiti e quella ottenuta applicando il modello teorico si sovrappongono, ma anche la curva ottenuta dalla prova a rottura segue lo stesso andamento. Per questa prova, infatti, il valore del coefficiente  $I_b$  ottenuto risulta pari a 0.99. Questo vuol dire che durante la prova, la dissipazione di energia dovuta alla non linearità risulta trascurabile.

In analogia con quanto fatto nella sezione di indagine sperimentale, sono stati simulati gli effetti dell'invecchiamento sui due materiali considerati nel presente lavoro di tesi. In particolare, sono state eseguite delle simulazioni numeriche, per ciascuno dei due materiali nei tre diversi gradi di invecchiamento, fissando il valore di temperatura a  $T = -15 \text{ }^\circ\text{C}$  e la velocità di deformazione a  $\dot{\gamma} = 0.001 \text{ 1/s}$ . I due grafici di seguito riportano i risultati ottenuti in termini di andamento delle tensioni tangenziali nel tempo:





Quello che si osserva, che per entrambi i materiali, per i valori di temperatura e velocità di deformazione che sono stati considerati, la rigidità del materiale invecchiato al PAV risulta maggiore di quella del materiale vergine, la quale risulta maggiore di quella del materiale invecchiato al RTFOT. Questi risultati ottenuti sono coerenti con quanto mostrato nelle curve maestre.

#### 4.4. Introduzione alla definizione di un criterio di rottura energetico

In una prospettiva di sviluppo del modello realizzato, sono state inoltre eseguite delle simulazioni ai fini della definizione di un criterio di rottura adatto al caso del comportamento dei bitumi alle basse temperature. In particolare, al fine di definire un tempo di rottura in corrispondenza del quale stoppare la simulazione, si è ipotizzato di potere considerare un parametro sintetico che tenga conto contemporaneamente della tensione tangenziale a rottura  $\tau$  e della corrispondente deformazione  $\gamma$ . Questo parametro è stato identificato nella densità di energia di deformazione, indicata con  $W$  e misurata in  $J/m^3$ . Il

significato fisico di questo parametro si lega alla quantità di energia che viene accumulata dal materiale durante la prova. Inoltre, questo parametro è facilmente misurabile, in quanto rappresenta l'area sottesa alla curva tensione – deformazione, che può essere ricavata dai valori misurati durante prova. Nel caso delle prove a rottura eseguite sui leganti bituminosi alle basse temperature, si osserva che  $W$ , varia sia in funzione della temperatura di prova  $T$  che in funzione della velocità di deformazione imposta  $\dot{\gamma}$ . In quest'ottica, l'obiettivo consiste nella definizione della funzione  $W = f(T; \dot{\gamma})$  che vada ad identificare la superficie di rottura. Nell'ambito di questo lavoro di tesi, ci si è posti l'obiettivo di eseguire un primo studio di questa funzione, identificando l'andamento della funzione  $W$  prima in funzione della temperatura e poi in funzione della velocità di deformazione. A questo scopo, sono state eseguite sedici simulazioni sul materiale C invecchiato al PAV. Nelle prima otto, si è fissato il valore di temperatura a  $T = 18 \text{ }^\circ\text{C}$  e in ciascuna simulazione si è considerato un diverso valore della velocità di deformazione, esplorando un range compreso tra  $0.005 \text{ 1/s}$  e  $0.015 \text{ 1/s}$ . Nel secondo set di simulazioni, invece, si è fissato il valore di velocità di deformazione a  $\dot{\gamma} = 0.001 \text{ 1/s}$  e si è esplorato il range di temperature comprese tra  $-11 \text{ }^\circ\text{C}$  e  $-25 \text{ }^\circ\text{C}$ . I due grafici di seguito riportano i risultati ottenuti:

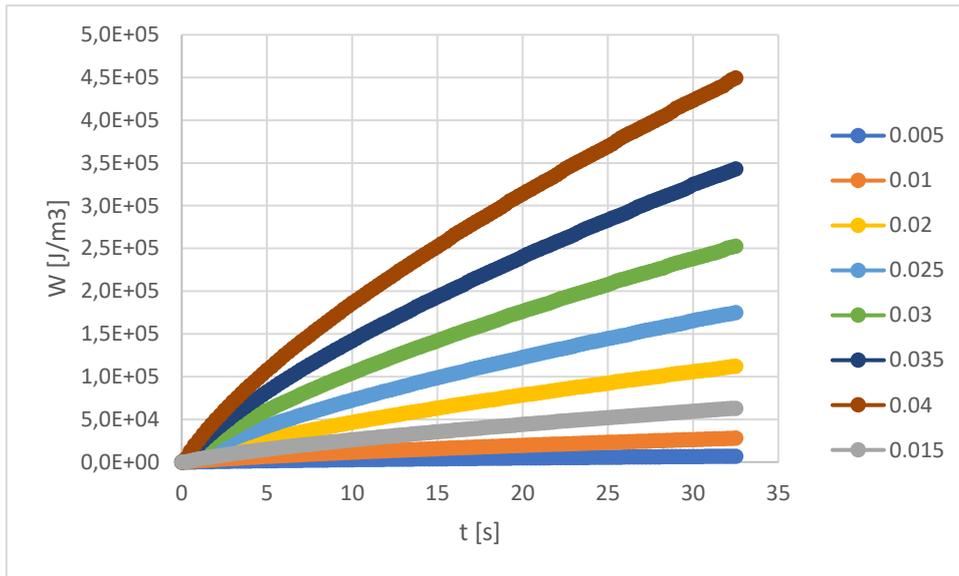


Figura 4.4.1 Andamento nel tempo della funzione densità di energia alla temperatura di 18 °C per diversi valori della velocità di deformazione

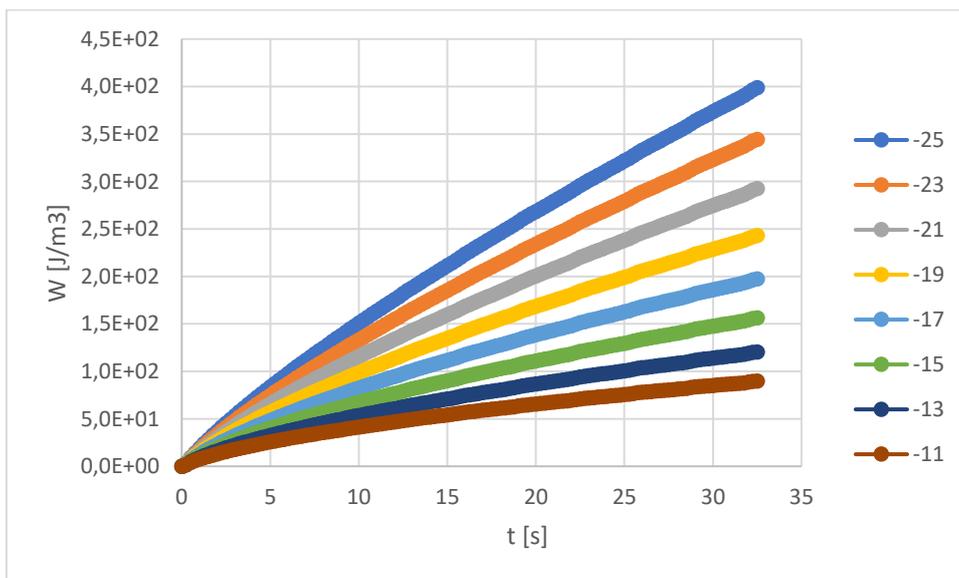


Figura 4.4.2 Andamento nel tempo della funzione densità di energia alla velocità di deformazione di 0.001 1/s per diversi valori della temperatura.

Si osserva che, nei range di temperature e velocità di deformazioni considerati, le variazioni di densità di energia di deformazione sembrano essere più sensibili alle variazioni di velocità di deformazione che alle variazioni di temperatura. Inoltre, a partire dai risultati ottenuti,

sono state costruite per punti le curve di  $W$  in funzione della temperatura e di  $W$  in funzione della velocità di deformazione. I due grafici di seguito riportano i risultati ottenuti:

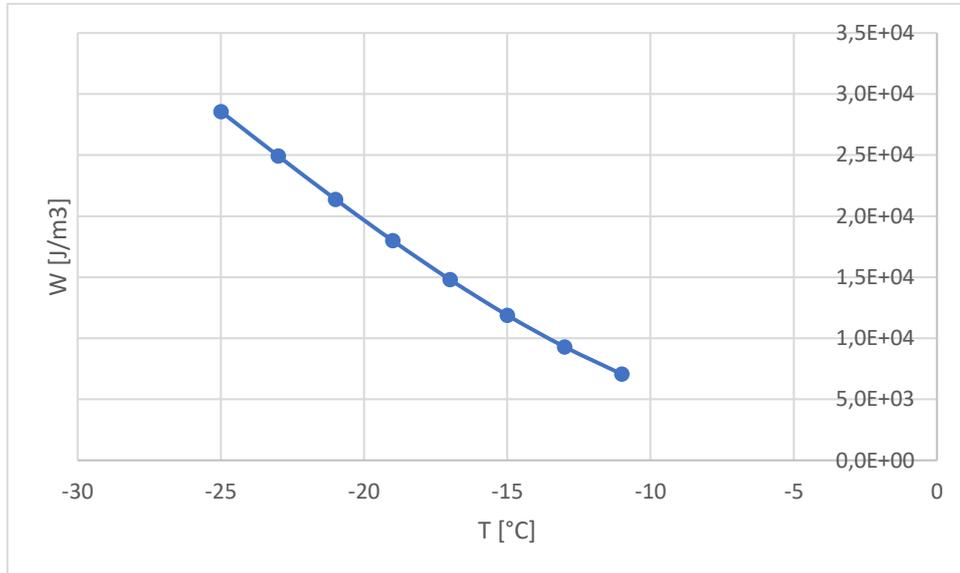


Figura 4.4.3 Andamento della densità di energia in funzione della temperatura per una velocità di deformazione di  $0.001 \text{ 1/s}$

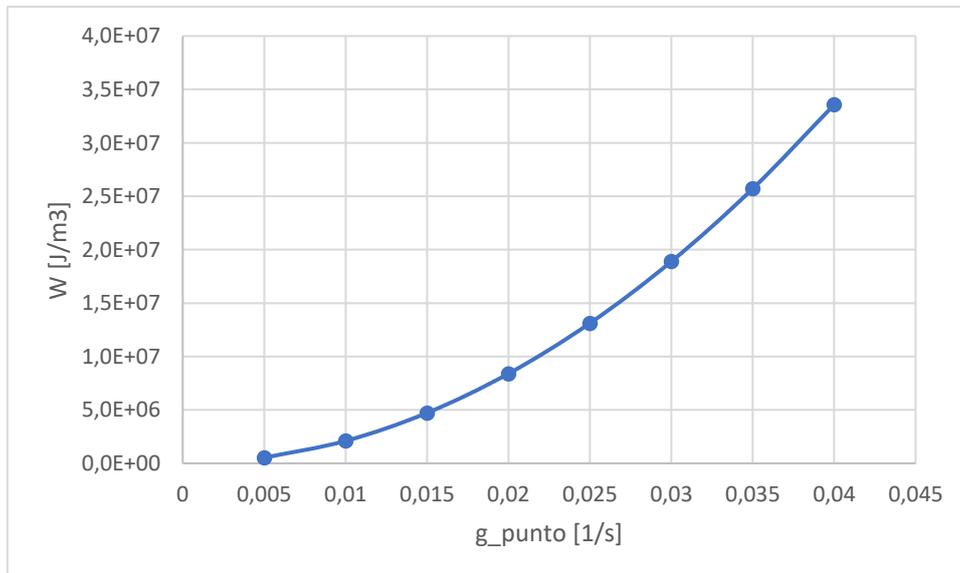


Figura 4.4.4 Andamento della densità di energia in funzione della velocità di deformazione alla temperatura di  $-18 \text{ °C}$

## 4.5. I vantaggi dell'analisi FEM

La realizzazione di un modello agli elementi finiti che consente di simulare il comportamento dei leganti bituminosi durante una prova a rottura costituisce un valore aggiunto rispetto alle potenzialità offerte da uno strumento di calcolo analitico. Un primo vantaggio dell'analisi numerica si lega alla possibilità di ottenere il campo di variabilità delle grandezze di interesse nelle tre dimensioni nello spazio nonché nella dimensione temporale. Lo strumento di simulazione numerica realizzato, infatti, consente non soltanto di fissare un punto all'interno del solido tridimensionale e analizzare nel tempo l'andamento delle variabili di interesse, ma consente anche di estrapolare delle animazioni che mostrano l'andamento della variabile selezionata nel tempo. Un altro vantaggio offerto dal modello di simulazione numerica rispetto al modello di calcolo analitico consiste nella possibilità di modificare la geometria al fine di stimare le variazioni delle tensioni tangenziali, o di qualsivoglia variabile, rispetto ai valori manifestati dal materiale nella geometria cilindrica di riferimento. Questo risulta di particolare interesse in quanto sperimentalmente non sempre si riesce a realizzare un campione perfettamente cilindrico, caratterizzato dall'altezza e dal diametro prefissati. In questo lavoro di tesi, sono state analizzate tre geometrie (codificate per semplicità come  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ ) differenti rispetto a quella cilindrica di riferimento, mostrate nelle figure 4.5.1 4.5.2. e 4.5.3, al fine di confrontare l'andamento delle tensioni tangenziali nei diversi casi. Le geometrie  $C_1$  e  $C_2$  presentano un medesimo raggio di 2 mm in corrispondenza delle due basi superiori e inferiori; la geometria  $C_3$ , invece, presenta una base superiore di raggio 2 mm e una base inferiore di raggio 2.2 mm. Inoltre, in corrispondenza della coordinata  $z = 2.5$  mm, la sezione trasversale della geometria  $C_1$  presenta un valore del raggio di 2.3 mm, la sezione trasversale della geometria  $C_3$  presenta un valore del raggio di 2.4 mm, mentre la sezione trasversale della geometria  $C_2$  presenta un valore del raggio di 1.63 mm.

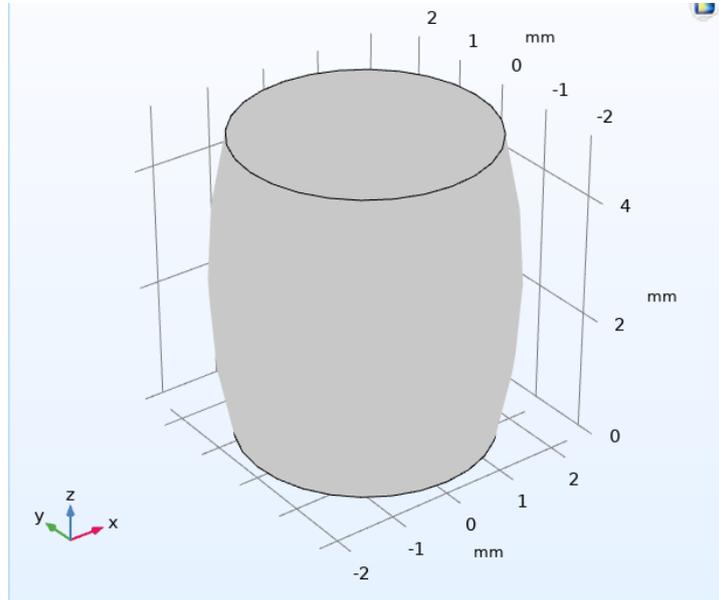


Figura 4.5.1 Rappresentazione Geometria C1

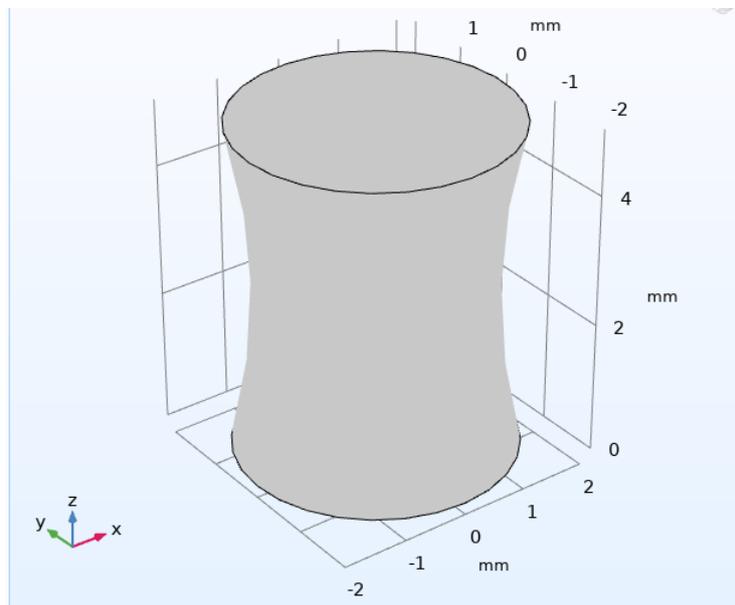


Figura 4.5.2 Rappresentazione Geometria C2

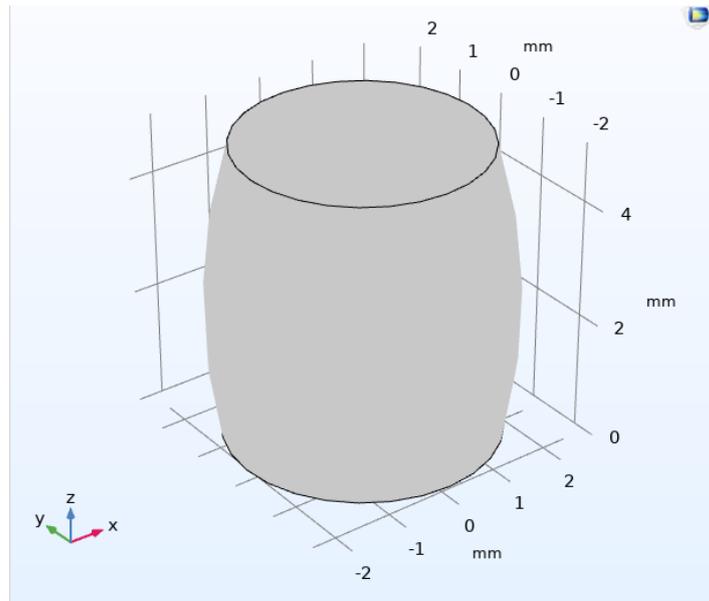


Figura 4.5.3 Rappresentazione Geometria C3

L'analisi è stata eseguita implementando uno studio transitorio con applicazione di una velocità di deformazione costante  $\dot{\gamma} = 0.001 \frac{1}{s}$  in corrispondenza della base superiore. La condizione di vincolo considerata è quella di incastro alla base. Il comportamento del materiale è stato invece modellato mediante un modellato generalizzato di Maxwell a trentadue elementi. I coefficienti di Prony che sono stati considerati sono quelli ricavati per il materiale *D* invecchiato al *PAV*, applicando il Collocation Method sui dati ricavati dalle frequency sweep.

Di seguito si riportano i risultati in termini di andamento nel tempo delle tensioni tangenziali massime nella sezione trasversale posizionata in corrispondenza della coordinata  $z = 2.5$  mm, ottenuti analizzando le tre diverse geometrie e utilizzando la geometria cilindrica come geometria di confronto:

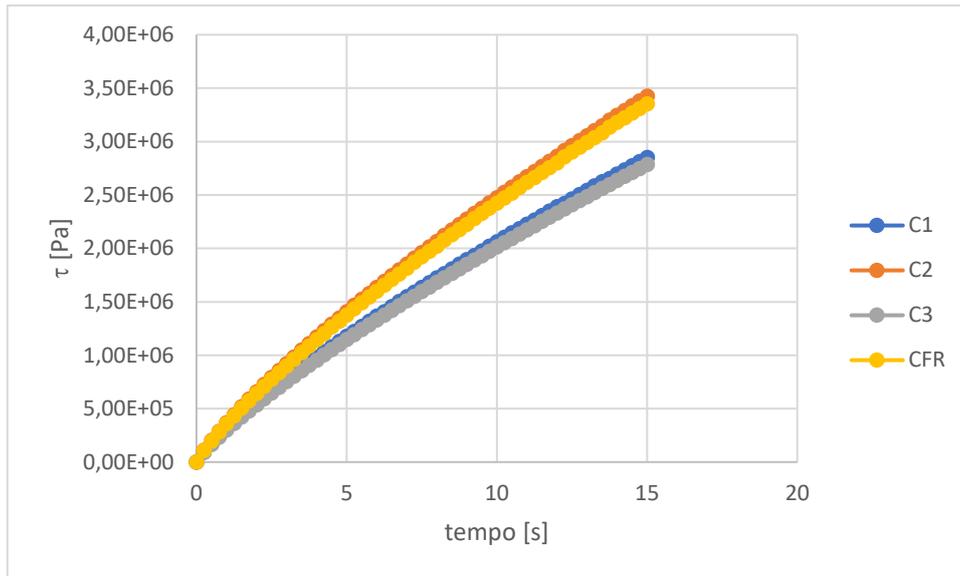


Figura 4.5.4 Confronto tra le diverse geometrie dell'andamento delle tensioni tangenziali nel tempo

Il grafico mostra l'andamento delle tensioni tangenziali nel tempo. In particolare, vengono messi a confronto i valori ottenuti per le geometrie C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub> e per la geometria di riferimento cilindrica descritta al paragrafo 4.1.2. Si osserva che, la curva relativa alla geometria C<sub>2</sub> presenta delle differenze poco significative rispetto alla geometria cilindrica di riferimento. Contrariamente, le curve relative alle geometrie C<sub>1</sub> e C<sub>3</sub>, si discostano dalla curva relativa alla geometria di riferimento e si sovrappongono tra di loro.

Si riporta, inoltre, il grafico relativo all'andamento degli spostamenti massimi lungo l'asse z valutato per le quattro geometrie considerate:

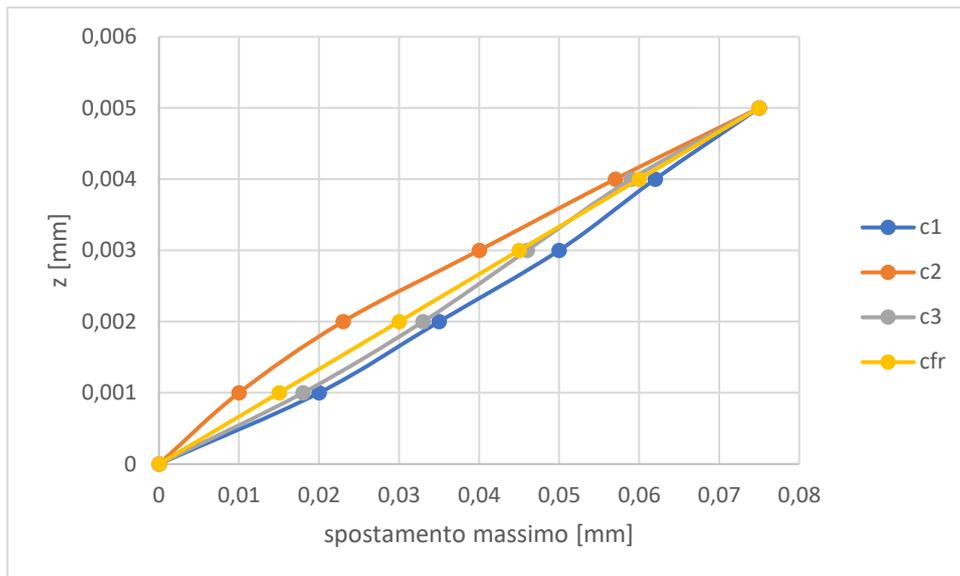


Figura 4.5.5 Confronto tra le diverse geometrie dell'andamento degli spostamenti massimi lungo l'asse  $z$ .

## Conclusioni

La caratterizzazione delle proprietà a rottura dei leganti bituminosi alle basse temperature trattata nel presente elaborato è stata svolta su un duplice fronte, quello della simulazione numerica agli elementi finiti e quello dell'indagine sperimentale.

I risultati conseguiti mediante l'indagine sperimentale hanno consentito di confrontare le proprietà a rottura alle basse temperature dei leganti bituminosi oggetto di studio del presente elaborato nei tre gradi di invecchiamento considerati. In particolare, al crescere del grado di invecchiamento, passando quindi da un materiale vergine ad un materiale invecchiato al *PAV*, è stato riscontrato un decremento della temperatura di transizione vetrosa del materiale e un aumento della temperatura critica. Conseguentemente, un primo risultato viene evidenziato dal trend opposto manifestato delle due variabili: la temperatura di transizione vetrosa sembra non essere un buon parametro ai fini della caratterizzazione a rottura alle basse temperature del materiale. Questa prima evidenza sperimentale è stata riscontrata per entrambi i materiali testati, il bitume tradizionale e il bitume modificato con *SBS*. La differenza tra il comportamento del bitume tradizionale e quello modificato viene invece osservata nel passaggio dal materiale vergine al materiale invecchiato al *RTFOT*. Infatti, sebbene in entrambi i casi l'invecchiamento produce un aumento della temperatura critica, per il materiale tradizionale l'incremento di temperatura critica dovuto all'invecchiamento al *RTFOT* è contenuto in un gradiente inferiore ad 1 °C, mentre per il materiale modificato risulta di 7 °C. Inoltre, il legante tradizionale e quello modificato hanno manifestato una diversa sensibilità alle variazioni di temperatura durante la prova a rottura. In particolare, al variare della temperatura di prova il bitume modificato con *SBS* ha manifestato variazioni dell'indice di fragilità  $I_b$  minori rispetto a quelle manifestate dal bitume tradizionale.

Per quanto riguarda invece l'analisi agli elementi finiti, il modello di simulazione numerica, realizzato mediante l'utilizzo della piattaforma di simulazione COMSOL Multiphysics, consente di simulare il comportamento viscoelastico lineare dei leganti bituminosi alle basse temperature durante una prova a rottura eseguita al *DSR*. Il modello realizzato è quello di un campione cilindrico sottoposto ad un carico torsionale con velocità di deformazione  $\dot{\gamma}$  costante. Poiché la modellazione del materiale è stata effettuata nell'ambito della viscoelasticità lineare, mediante un modello di Maxwell generalizzato, il modello realizzato non include i fenomeni di non linearità che il materiale manifesta durante l'esecuzione della prova. Pertanto, un confronto diretto tra i risultati ottenuti dall'analisi *FEM* e quelli ottenuti dall'indagine sperimentale è possibile soltanto in quei casi in cui l'indice  $I_b$  ottenuto dalla prova risulta almeno pari a 0.98. I risultati ottenuti dalla simulazione numerica agli elementi finiti sono stati inoltre confrontati con i risultati ottenuti dal calcolo analitico dell'integrale di convoluzione mediante l'applicazione del metodo delle *State Variables*. I risultati numerici si presentano quindi coerenti con quelli analitici ed eventuali differenze sono associate alla discretizzazione del dominio fatta usando gli elementi finiti. Le potenzialità dell'analisi agli elementi finiti rispetto all'applicazione del metodo di calcolo analitico sono legate sia alla possibilità di ottenere una distribuzione delle tensioni e delle deformazioni in un modello tridimensionale in funzione della variabile temporale, ma anche alla possibilità di potere modificare la geometria del modello al fine di valutare gli effetti, in termini di risposta strutturale del campione o di possibili imperfezioni geometriche nel provino.

# Bibliografia

Airey, G. D. (2003) 'State of the Art Report on Ageing Test Methods for Bituminous Pavement Materials', *International Journal of Pavement Engineering*, 4(3), pp. 165–176. doi: 10.1080/1029843042000198568.

Bacchetto, A. (2020) *Introduzione Al Metodo Degli Elementi Finiti E Alla Modellazione Fem, Www.Adepron.It.*

Baglieri, O. *et al.* (2020) 'Materials and Structures A novel methodology for the evaluation of low temperature failure properties of asphalt'.

Brebbia, C. A. and Connor, J. J. (1993) *Fondamenti del metodo degli elementi finiti*. 1993rd edn.

Callister, W. D. . and Rethwish, D. G. (2012) *Scienza e Ingegneria dei Materiali*. terza ediz. Edited by ediSES.

Carpinteri, A. (1993) *Carpinteri - Scienza delle Costruzioni - Vol 2.pdf*. seconda ed. Edited by P. E. Bologna.

COMSOL Multiphysics and COMSOL (2008) 'Structural Mechanics Module', *Manual*, p. 454. Available at: [www.comsol.de](http://www.comsol.de).

Giavarini, C. *et al.* (1993) 'Bitumen ageing : simulation and evaluation Bitumen ageing : simulation and evaluation'.

Hofko, B. *et al.* (2017) 'Effect of short-term ageing temperature on bitumen properties', *Road Materials and Pavement Design*, 18, pp. 108–117. doi: 10.1080/14680629.2017.1304268.

Hofko, B. *et al.* (2020) 'Bitumen ageing – Impact of reactive oxygen species', *Case Studies in Construction Materials*, 13, p. e00390. doi: 10.1016/j.cscm.2020.e00390.

Lu, X., Uhlback, P. and Soenen, H. (2017) 'Investigation of bitumen low temperature properties using a dynamic shear rheometer with 4 mm parallel plates', *International*

*Journal of Pavement Research and Technology*, 10(1), pp. 15–22. doi: 10.1016/j.ijprt.2016.08.010.

Marasteanu, M. *et al.* (2017) ‘Testing protocol to obtain failure properties of asphalt binders at low temperature using creep compliance and stress-controlled strength test’, *Road Materials and Pavement Design*, 18, pp. 352–367. doi: 10.1080/14680629.2017.1304246.

Petretto, F. (2012) *Le reologia dei leganti bituminosi stradali: studio delle proprietà meccaniche a seguito di processi di “aging” in laboratorio.*

Portillo, O. and Cebon, D. (2013) ‘Experimental and numerical investigation of fracture mechanics of bitumen beams’, *Engineering Fracture Mechanics*, 97(1), pp. 281–296. doi: 10.1016/j.engfracmech.2012.10.010.

Rizzi, E. (2003) ‘Nozioni fondamentali sul metodo degli elementi finiti in meccanica dei solidi’, pp. 18–20.

Schapery, R. A. (1999) ‘Nonlinear viscoelastic and viscoplastic constitutive equations with growing damage’, *International Journal of Fracture*, 97(1–4), pp. 33–66. doi: 10.1023/a:1018695329398.

Severino P.C. Marques; Guillermo J. Creus (2012) *Computational Viscoelasticity, Journal of Chemical Information and Modeling.*

Smith, F. W. (2004) *Scienza e tecnologia dei materiali.* Edited by McGraw Hill.

Tauste, R. *et al.* (2018) ‘Understanding the bitumen ageing phenomenon: A review’, *Construction and Building Materials*, 192, pp. 593–609. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2018.10.169.