

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Gestionale

Tesi di Laurea Magistrale

**Applicazione e confronto di modelli di ottimizzazione per portafogli
di asset finanziari: media-varianza, media-VaR e media-ES**



Relatore:

Prof. Franco Varetto

Candidata:

Valeria Ambrosio

Anno Accademico 2019/2020

Sommario

Introduzione.....	5
Modello di Markowitz.....	7
1.1 Approccio media-varianza: notazioni e definizioni.....	8
1.2 Frontiera efficiente.....	9
1.3 Portafoglio ottimo.....	12
1.4 Frontiera efficiente con titolo <i>risk-free</i> : Teorema di Separazione di Tobin.....	13
1.5 Generalizzazione del modello classico.....	15
1.6 Criticità del modello classico.....	17
Modello media-VaR.....	19
2.1 Definizioni e notazioni.....	19
2.2 Frontiera efficiente.....	21
2.2.1 Ottimizzazione di portafoglio in presenza del titolo <i>risk free</i>	23
2.3 Problematiche legate all'utilizzo dei VaR.....	25
Modello media-ES.....	27
3.1 Notazioni e definizioni.....	27
3.2 Ottimizzazione di portafoglio e frontiera efficiente.....	29
3.2.1 Ottimizzazione di portafoglio in presenza del titolo <i>risk free</i>	33
3.3 Generalizzazione del modello media-ES.....	34
3.4 Conclusione.....	36
Analisi dei dati.....	38
4.1 Dati.....	38
4.2 Andamento dei prezzi.....	40
4.3 Analisi dei log-rendimenti.....	46
4.4 Stazionarietà delle serie storiche: modello di random walk.....	53
Applicazione dei modelli di ottimizzazione.....	63
5.1 Dati.....	63
5.2 Modello media-varianza.....	67
5.2.1 Frontiera efficiente in presenza del titolo <i>risk free</i>	70
5.3 Modello media-VaR.....	74
5.3.1 Frontiera efficiente in presenza del titolo <i>risk free</i>	78
5.4 Modello media-ES.....	81

5.4.1	Frontiera efficiente in presenza del titolo <i>risk free</i>	86
5.5	Costruzione del portafoglio <i>equally weighted, risk parity ed equally diversified</i> .	88
5.6	Analisi dei risultati.....	92
	Conclusioni.....	98
	Appendice: codici MATLAB.....	99
6.1	Costruzione della Frontiera Efficiente con il modello di Markowitz	99
6.1.1	Frontiera efficiente con vincoli allo <i>short-selling</i> e senza titolo <i>risk free</i>	99
6.1.2	Frontiera efficiente senza vincoli allo <i>short-selling</i> e senza titolo <i>risk free</i> .	100
6.1.3	Confronto tra FE con e senza vincolo di <i>short-selling</i> senza titolo <i>risk free</i>	101
6.1.4	Funzione per massimizzare l'indice di Sharpe	102
6.1.5	Frontiera efficiente con vincoli allo <i>short-selling</i> e con titolo <i>risk free</i>	103
6.1.6	Frontiera efficiente con vincoli allo <i>short-selling</i> e con titolo <i>risk free</i>	105
6.2	Costruzione della Frontiera Efficiente con il modello media-VaR	107
6.2.1	Funzione per il calcolo del VaR	107
6.2.2	Frontiera efficiente senza titolo <i>risk free</i>	107
6.2.3	Frontiera efficiente con titolo <i>risk free</i>	110
6.3	Costruzione della Frontiera Efficiente con il modello media-CVaR.....	112
6.3.1	Funzione per il calcolo del CVaR.....	112
6.3.2	Frontiera efficiente senza titolo <i>risk free</i>	113
6.3.3	Frontiera efficiente con titolo <i>risk free</i>	115
	Bibliografia.....	119

Introduzione

Ogni investitore si pone il problema di come allocare al meglio le proprie risorse in modo da ottimizzare al massimo il proprio rendimento: l'*asset allocation* è il processo con il quale si decide in che modo distribuire il capitale tra i diversi *asset*, per poter raggiungere le migliori *performance* possibili. In questo ambito il principale fattore di rischio è rappresentato dalla probabilità che gli strumenti finanziari, presenti nel portafoglio, ottengano un rendimento diverso da quello atteso, a causa della variabilità del mercato stesso. Il principale modello di *asset allocation* è il modello di Harry Markowitz, proposto nel 1952, che, basandosi sull'analisi storica dei prezzi dei titoli, va a calcolare il rendimento medio ottenuto in passato, e ad individuare nella volatilità dei prezzi una misura del rischio. Tale modello realizza i portafogli definiti efficienti andando a massimizzare il rendimento, fissato un certo livello di rischio, o a minimizzare il rischio, fissato il valore del rendimento. I portafogli così costruiti vanno a definire una curva (frontiera efficiente) su cui scegliere il portafoglio ottimo a seconda della particolare propensione al rischio dell'investitore. Il modello di Markowitz definì una vera e propria svolta andando a ripartire il capitale sulla base del *trade-off* tra rendimento atteso e varianza del portafoglio. Inoltre, secondo Markowitz, gli investitori sono in grado di ottimizzare i propri portafogli attraverso il principio della diversificazione: se i titoli del portafoglio risultano correlati negativamente, è possibile ottenere livelli di rischio inferiori. Nel corso del tempo, però, sono emerse alcune criticità riguardanti questo modello: non sempre è possibile paragonare il passato al futuro; i rendimenti degli *asset* finanziari non sono distribuiti sempre secondo una distribuzione Gaussiana; l'utilizzo della volatilità come misura del rischio è inadatta, in quanto non fa distinzioni tra la varianza positiva e quella negativa; la diversificazione nei portafogli risulta minima. Per superare alcune delle problematiche appena elencate, sono state introdotte misure alternative del rischio: il *Value at Risk* (VaR), che analizza quale sia la perdita massima dato un certo livello di confidenza, e l'*Expected Shortfall* (ES), che indica la perdita media a cui si va incontro ad un certo livello di confidenza. In questo elaborato di tesi, ci si propone di analizzare i punti di forza e di debolezza del modello classico, del modello media-VaR e del modello media-ES. Nei primi capitoli si effettua una panoramica circa gli aspetti teorici dei vari modelli sopracitati di *asset allocation*. Nei successivi capitoli vengono analizzate le serie storiche degli *asset* selezionati

per la costituzione del portafoglio, analizzando i *trend* e la stazionarietà dei prezzi, e studiando le statistiche descrittive dei rendimenti, in modo da poterne descrivere al meglio le funzioni di distribuzione di probabilità. Infine, vengono costruite le frontiere di portafogli efficienti per i tre modelli: con e senza vincolo alle vendite allo scoperto, investendo in soli *asset* rischiosi, e introducendo il titolo privo di rischio.

Capitolo 1

Modello di Markowitz

L'obiettivo principale di ogni investitore consiste nello scegliere un portafoglio di *asset* finanziari in cui allocare una determinata ricchezza, in modo tale da massimizzarne il rendimento, cercando di ridurre il rischio al minimo. In particolare, il rischio può essere definito come il grado di incertezza riguardante l'effettiva realizzazione dei rendimenti attesi. Sulla base di suddetto presupposto, Harry Markowitz nel 1952 formulò la propria teoria, pubblicando l'articolo "*Portfolio Selection*" (*Journal of Finance* 7, 1952 N°1 pp:77-91). Tale teoria introduce l'approccio "media-rischio" per la selezione del portafoglio, utilizzando la varianza come misura particolare del rischio, data la sua grande semplicità ed intuitività di calcolo. Il modello di Markowitz cerca di spiegare quale sia la scelta d'investimento ottimale effettuata dagli investitori razionali e avversi al rischio. Questi ultimi, infatti, attueranno la propria scelta di investimento solo dopo aver individuato i portafogli definiti "efficienti", che rappresentano le migliori combinazioni tra rischio e rendimento atteso. Il principio base di tale teoria è che, al fine di costruire un portafoglio efficiente, occorre individuare una combinazione di titoli tale da minimizzare il rischio e massimizzare il rendimento complessivo. Ciò è reso possibile grazie alla diversificazione, che riduce il rischio se i rendimenti dei titoli sono caratterizzati da una correlazione minore di uno, portando ai migliori risultati quando gli *asset* sono perfettamente correlati negativamente.

Il modello, dunque, si sviluppa in due fasi principali:

- Costruzione della cosiddetta frontiera efficiente: si individuano quei portafogli che in termini di varianza e rendimento dominano tutti gli altri (ottimi paretiani).
- Individuazione del portafoglio che trovandosi sulla frontiera efficiente, massimizza l'utilità dell'investitore. Tale fase, essendo legata alla particolare funzione di utilità del decisore, risulta essere una fase soggettiva.

Nel seguente capitolo, pertanto, ci si propone di approfondire e spiegare al meglio tale metodologia.

1.1 Approccio media-varianza: notazioni e definizioni

La selezione del portafoglio consiste nello scegliere un portafoglio “ Π ” in modo tale da ottimizzarne il rendimento, ossia il guadagno che si può ottenere investendo in esso: si cerca, dunque, di massimizzare una misura di profitto, minimizzando una misura di rischiosità. Nell’approccio classico la misura di profitto viene data dal valore atteso $E(R_{\Pi})$, mentre quella di rischio è rappresentata dalla varianza $\text{Var}(R_{\Pi}) = \sigma_{\Pi}$. Date tali premesse, un portafoglio Π_1 domina un portafoglio Π_2 se a parità di rischio possiede un rendimento più elevato, oppure se a parità di rendimento possiede un rischio più basso. Se un portafoglio non è dominato da nessun altro portafoglio, viene definito “portafoglio efficiente”, e l’insieme di tutti i portafogli efficienti costituisce la cosiddetta “frontiera efficiente”. Per la scelta del portafoglio ottimale è necessario dapprima andare a costruire la frontiera efficiente, e successivamente effettuare la scelta tra i portafogli efficienti basandosi sull’avversione al rischio del decisore, attraverso la sua funzione di utilità. [1]

Prima di procedere ad illustrare nel dettaglio il modello di Markowitz è necessario fornire alcune notazioni e definizioni.

Innanzitutto, il rendimento “ R ” di un *asset* finanziario è definito come la variazione relativa di valore nell’orizzonte temporale considerato. Dato l’intervallo temporale $[t-1, t]$, e P_t e P_{t-1} i prezzi che il titolo assume agli estremi di tale intervallo, si ha che:

$$R = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \text{ o in termini logaritmici } R = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Dato un insieme di *asset* $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ costituenti il portafoglio Π , e dati R_i e ω_i rispettivamente il rendimento ed il peso¹ dell’ i -esimo *asset* (con $i=1, \dots, n$), il valore atteso del rendimento R_{Π} è calcolato come:

$$\mu_{\Pi} = E(R_{\Pi}) = E\left(\sum_{i=1}^n \omega_i * R_i\right) = \sum_{i=1}^n \omega_i * \mu_i$$

Definendo il vettore dei pesi $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, e il vettore dei rendimenti $\Theta = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$, è possibile utilizzare una notazione matriciale più compatta:

¹ Con “peso” si intende la percentuale di capitale investita in una specifica attività.

$$\mu_{\Pi} = \Omega * \theta^T$$

Dato $\sigma_{kj} = \text{Cov}(R_k, R_j) = E[(R_k - \mu_k) * (R_j - \mu_j)]$ e $\sigma_{kk} = \text{Var}(R_k) = \sigma_k^2$, la matrice di varianza-covarianza “ Σ ” è definita nel seguente modo:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

La varianza del portafoglio è calcolata come:

$$\sigma_{\Pi}^2 = \text{Var}(R_{\Pi}) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \omega_i * R_i\right) = \sum_{k=1}^n \omega_k^2 * \sigma_k^2 + 2 \sum_{k < j=1}^n \omega_k * \omega_j * \sigma_{kj} = \Omega * \Sigma * \Omega^T$$

Si osserva che affinché si abbia $\sigma_{\Pi}^2 \geq 0$, la matrice Σ dovrà essere semidefinita positiva. [1]

Il modello di Markowitz si fonda, inoltre, su alcune assunzioni semplificative:

- I rendimenti degli *asset* finanziari seguono una funzione di distribuzione normale e sono indipendenti e identicamente distribuiti;
- Il rischio è misurato dalla deviazione standard dei rendimenti;
- Gli investitori sono individui razionali e avversi al rischio, ed i mercati sono efficienti;
- Non ci sono “*market frictions*” (ad esempio tasse, costi di transazione, divisibilità limitata degli *asset* finanziari, segmentazione di mercato ecc);
- L’orizzonte temporale è mono periodale: non ci si preoccupa di un eventuale reinvestimento della ricchezza nel periodo successivo. [2]

1.2 Frontiera efficiente

Il primo passo del modello di Markowitz consiste nella costruzione della frontiera efficiente. Per l’individuare è necessario risolvere uno dei seguenti problemi di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{cases} \max_{\omega_1, \dots, \omega_n} E(R_{\Pi}) \\ \sigma_{\Pi}^2 = \tilde{\sigma} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \min_{\omega_1, \dots, \omega_n} \sigma_{\Pi}^2 \\ E(R_{\Pi}) = \tilde{R} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{cases}$$

Scegliamo ora di risolvere il problema di minimo per determinare l'insieme di portafogli efficienti, sotto l'ipotesi che l'investitore investa tutta la propria ricchezza in *asset* rischiosi. Dato “e” il vettore colonna dei rendimenti degli n titoli, “u” il vettore colonna unità a n componenti, e “Ω” il vettore colonna delle quote, possiamo andare ad esprimere tale sistema in forma vettoriale:

$$\begin{cases} \min_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{\Pi}^2 = \frac{1}{2} \Omega^T * \Sigma * \Omega \\ \Omega^T * e = \alpha \\ \Omega^T * u = 1 \end{cases}$$

Ipotizzando che la matrice Σ sia definita positiva e sia non degenere, si vanno a definire tali quantità:

$$\begin{aligned} A &= u^T * \Sigma^{-1} * e \\ B &= e^T * \Sigma^{-1} * e \\ C &= u^T * \Sigma^{-1} * u \\ D &= B * C - A^2 \end{aligned}$$

La soluzione del sistema sarà quindi data dalla seguente espressione:

$$\Omega = \frac{\alpha * C - A}{D} * (\Sigma^{-1} * e) + \frac{B - \alpha * A}{D} * (\Sigma^{-1} * u) = F + \alpha * G$$

$$\text{Con } F = \frac{B * (\Sigma^{-1} * u) - A * (\Sigma^{-1} * e)}{D} \text{ e } G = \frac{C * (\Sigma^{-1} * e) - A * (\Sigma^{-1} * u)}{D}.$$

È possibile, inoltre, ricavare l'espressione analitica che lega la varianza del portafoglio al rendimento atteso α , ossia l'equazione della frontiera efficiente:

$$\sigma_{\Pi}^2 = F^T * \Sigma * F + \alpha * (F^T * \Sigma * G + G^T * \Sigma * F) + \alpha^2 * (G^T * \Sigma * G) = \frac{C}{D} * \alpha^2 - 2 * \frac{A}{D} * \alpha + \frac{B}{D}$$

Da tali risultati possiamo dedurre che nel piano $(\sigma^2; \alpha)$ l'equazione trovata sarà rappresentata da una parabola con asse orizzontale e concavità verso destra, mentre nel piano $(\sigma; \alpha)$ la curva sarà un'iperbole. In particolare, il portafoglio a varianza minima globale si ottiene per $\bar{\mu} = \frac{A}{C}$, e si nota come solo il tratto superiore di tale curva sarà considerato efficiente ($\mu \geq \frac{A}{C}$), mentre il tratto inferiore è inefficiente: a parità di rischio i portafogli del tratto inferiore presentano rendimenti più bassi rispetto a quelli del tratto superiore.

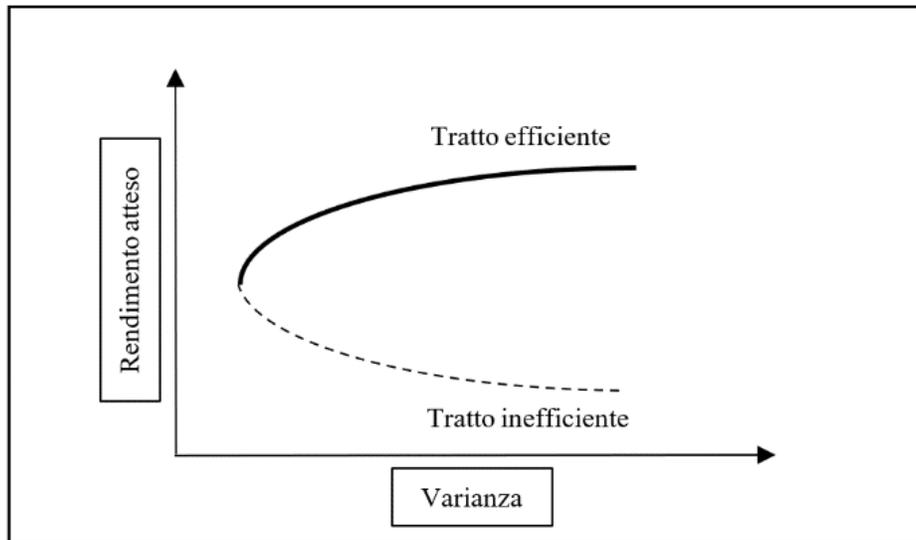


Figura 1 Frontiera efficiente nel piano Varianza-Rendimento atteso, costruita con n titoli rischiosi

Una volta individuati i portafogli che fanno parte della frontiera efficiente (FE), è possibile individuare quello che soddisfa maggiormente il profilo del singolo investitore andando a trovare il punto di tangenza tra la sua curva d'indifferenza e la frontiera efficiente. Una curva di indifferenza altro non è che la curva che va ad unire tutti i portafogli che assicurano all'investitore la stessa utilità.

Nello studio visto finora bisogna specificare che sono consentite le cosiddette vendite allo scoperto, ossia vendita di titoli che non appartengono direttamente al venditore, che verranno riacquistati in seguito. Nel caso in cui tali vendite non siano consentite è necessario introdurre un ulteriore vincolo al sistema che diverrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\omega_1, \dots, \omega_n} \sigma_{\Pi}^2 \\ E(R_{\Pi}) = \tilde{R} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \\ \omega_i \geq 0 \end{array} \right.$$

La risoluzione di tale tipo di problema richiede il teorema Karush-Kuhn-Tucker e la frontiera efficiente non possiede una forma analitica nota.

1.3 Portafoglio ottimo

Dopo aver individuato la frontiera efficiente, per determinare il portafoglio ottimo bisogna considerare la funzione di utilità attesa dell'investitore. Prendendo in considerazione una funzione di utilità quadratica, l'utilità attesa è esprimibile in funzione dei parametri media-varianza nel seguente modo:

$$U(\mu, \sigma) = \mu - \gamma * (\mu^2 + \sigma^2)$$

Dove γ è il coefficiente di avversione al rischio dell'investitore, e al crescere di tale parametro otteniamo un portafoglio che converge al titolo *risk-free*. Si può dimostrare che la compatibilità tra il criterio media-varianza e la teoria della massimizzazione dell'utilità attesa è verificata solo nel caso in cui la funzione di utilità di tutti gli investitori sia di tipo quadratico e/o nel caso in cui i rendimenti azionari siano distribuiti normalmente.

Le curve di indifferenza si ottengono ponendo $U(\mu, \sigma) = \bar{u}$: graficamente tali curve sono convesse ($\frac{\partial U}{\partial \mu} > 0$ e $\frac{\partial U}{\partial \sigma} < 0$), e le curve poste più in alto corrispondono a valori maggiori di \bar{u} . Inoltre, maggiore è γ , maggiore è la convessità.

Per trovare il portafoglio ottimo si dovrà andare a massimizzare la funzione di utilità attesa $U(\mu, \sigma)$, dunque bisogna trovare il punto di tangenza tra la frontiera efficiente e la curva di indifferenza che soddisfa il massimo valore di \bar{u} .

Supponendo che la funzione di utilità sia nella forma $u(x) = x - \frac{1}{2}\alpha * x^2$ (con $\alpha > 0$), si può dimostrare che l'utilità attesa sotto l'ipotesi $x < \frac{1}{\alpha}$ sarà pari a:

$$U = E(A_{\Pi}) - \frac{1}{2}\alpha * (E(A_{\Pi})^2 + Var(A_{\Pi}))$$

Con $A_{\Pi} = P_{\Pi} * (1 + R_{\Pi})$, dove P_{Π} è la somma investita nel portafoglio e A_{Π} è il valore futuro del portafoglio. Sostituendo e fissando un livello di utilità attesa \bar{u} si ottiene:

$$U(\mu, \sigma) = \mu - \frac{1}{2\beta} * (\sigma^2 + \mu^2) = \bar{u}$$

Con $\beta = \frac{1}{\alpha * P_{\Pi}} - 1$.

Riordinando i termini si ha che l'equazione rappresenta una circonferenza descrivibile con $\sigma^2 + (\mu - \beta)^2 = \beta^2 - 2\beta * \bar{u}$ avente centro in C (0; β) e raggio decrescente con il livello di utilità \bar{u} .

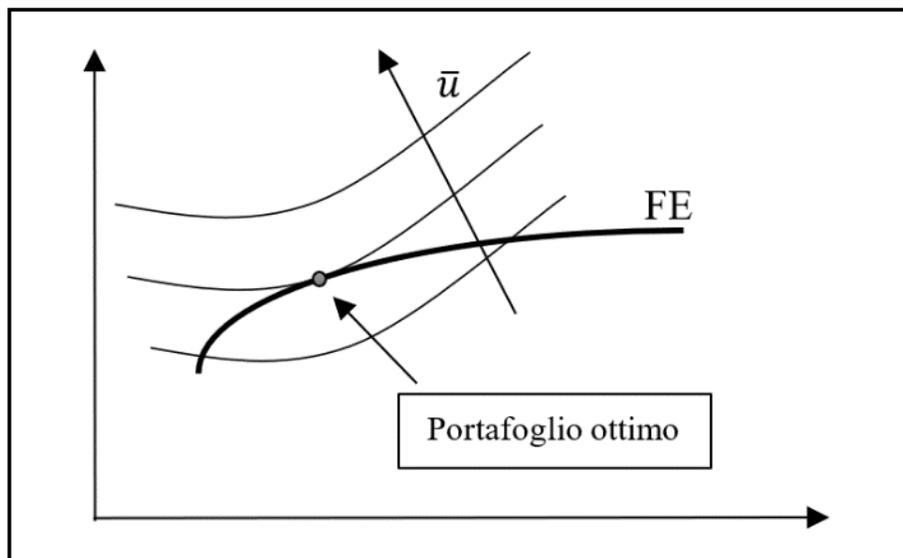


Figura 2 Punto di tangenza tra le curve di indifferenza e frontiera efficiente

La soluzione finale trovata da Markowitz sarà dunque un portafoglio costituito da n titoli che minimizza il rischio cercando di massimizzare quanto più possibile l'utilità. Ciò si ottiene grazie alla diversificazione, ossia viene sfruttata la correlazione esistente tra i titoli per far sì che il portafoglio abbia un livello di rischio più basso rispetto a quello del titolo meno rischioso. Essendo la varianza la somma di variabili casuali è intuibile come coefficienti di correlazione negativi possano dare il loro contributo nella riduzione del rischio complessivo del portafoglio. [1]

1.4 Frontiera efficiente con titolo *risk-free*: Teorema di Separazione di Tobin

Il modello di Markowitz, discusso finora, rende impossibile il confronto tra due individui con diverso grado di avversione al rischio, e ipotizza, inoltre, che tutti i titoli abbiano varianza positiva. James Tobin introduce il cosiddetto titolo *risk-free* caratterizzato da rendimento atteso " r_f " e volatilità nulla². Supponendo che il rendimento r_f sia minore del rendimento del

² James Tobin pubblicò nel 1958 l'articolo "*Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*", con il quale supera la separazione netta di Markowitz tra investitori in sole attività rischiose e investitori in soli titoli *risk-free*.

portafoglio a varianza minima della frontiera efficiente costituita da soli titoli rischiosi, è possibile combinare un generico portafoglio Π posto sulla FE con il titolo *risk-free*. I portafogli ottenuti da tale combinazione si troveranno sulla semiretta uscente dal punto rappresentante il titolo privo di rischio e passante per Π . Di tali semirette, solo quella passante per il titolo *risk-free* e tangente alla FE sarà costituita da portafogli efficienti: tale semiretta prende il nome di *Capital Market Line* (CML). Si ottiene dunque una frontiera efficiente linearizzata. Il punto di tangenza tra la FE e la CML costituirà il portafoglio rischioso ottimo.

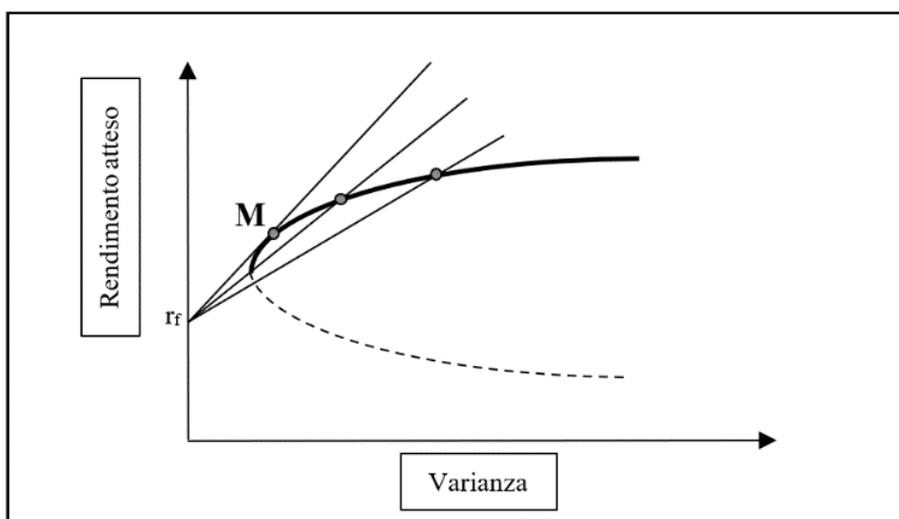


Figura 3 Frontiera efficiente costruita con n titoli rischiosi ed un titolo *risk-free* nel piano Varianza-Rendimento atteso

Indicando con $M (\sigma_M; \mu_M)$ tale punto di tangenza, l'equazione della semiretta costituita da portafogli efficienti è rappresentata da:

$$\mu = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} * \sigma$$

Risolvendo il problema dal punto di vista analitico, dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} \min_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{\Pi}^2 = \frac{1}{2} \Omega^T * \Sigma * \Omega \\ \Omega^T * e + (1 - \Omega^T * u) * r_f = \alpha \end{cases}$$

Dove la quota di composizione del titolo *risk-free* è $1 - \Omega^T * u$.

Avendo $H = B - 2A * r_f + C * r_f^2$ otterremo:

$$\Omega = \Sigma^{-1} * (e - u * r_f) * \frac{\alpha - r_f}{H}$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = \frac{(\alpha - r_f)^2}{H}$$

Si osserva che nel piano (σ, μ) si hanno due semirette di pendenza rispettivamente $+\sqrt{H}$ e $-\sqrt{H}$ uscenti dal punto di coordinate $(0, r_f)$: solo se $r_f < \frac{A}{C}$ l'intersezione con la FE si ottiene con la semiretta a pendenza $+\sqrt{H}$ e il portafoglio di tangenza è efficiente.

Per determinare le coordinate del portafoglio di tangenza M si procede con la risoluzione di un sistema avente l'equazione della frontiera efficiente dei titoli rischiosi e quella linearizzata:

$$\begin{cases} \sigma_{\Pi}^2 = \frac{C}{D} * \alpha^2 - 2 * \frac{A}{D} * \alpha + \frac{B}{D} \\ \alpha = \sqrt{H} * \sigma_{\Pi} + r_f \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mu_M = \frac{B - A * r_f}{A - C * r_f} \\ \sigma_M = \frac{\sqrt{H}}{A - C * r_f} \end{cases}$$

[1]

Introducendo il titolo *risk-free*, il processo di costruzione del portafoglio finanziario si distinguerà dunque in due fasi:

- Individuazione del portafoglio rischioso ottimo “M”: fase oggettiva che non dipende dalla propensione al rischio dell'investitore;
- Posizionamento lungo la CML: il decisore sceglie quanta parte della propria ricchezza investire nel portafoglio rischioso e quanta nel titolo privo di rischio. Quest'ultima è una fase soggettiva che dipende dal grado di propensione al rischio dell'investitore. [3]

1.5 Generalizzazione del modello classico

Il modello di Markowitz propone una soluzione partendo dal presupposto che la misura del rischio venga rappresentata dalla varianza. Tale modello può essere applicato andando a scegliere diverse misure di rischio, e può essere generalizzato nella forma:

$$\begin{cases} \min_{\Omega} risk(R_{\Pi}) \\ E(R_{\Pi}) = \bar{\mu} \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è rappresentata da un vettore Ω^* , costituito dai pesi ottimali degli *asset* finanziari all'interno del portafoglio ottimale, in corrispondenza del rendimento atteso $\bar{\mu}$. Si sottolinea che un portafoglio ottimale può essere inefficiente. [3]

La funzione $risk(R_{\Pi})$ varia a seconda della metrica che viene utilizzata (nel modello classico è rappresentata dalla varianza). Per poter definire una misura di rischio coerente, questa deve rispettare quattro assiomi.

Dato V l'insieme di variabili random, con $V \in \mathbb{R}$, la funzione ρ è una misura di rischio se rispetta i seguenti criteri:

- Monotonicità: se il titolo X ha rendimenti sempre maggiori rispetto al titolo Y , allora la misura del rischio deve far sì che investire nel titolo X sia migliore che investire nel titolo Y .

$$\text{Se } X \in V, Y \in V, Y \leq X \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) \text{ [4]}$$

- Sub-additività: il rischio riferito ad un portafoglio non è mai più elevato della somma dei rischi riferiti ai singoli titoli che lo compongono (la diversificazione di portafoglio riduce il rischio del portafoglio).

$$\text{Se } X \in V, Y \in V, X+Y \in V \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

- Omogeneità positiva: se si incrementa l'investimento in un titolo, anche la misura di rischio dovrà aumentare della stessa entità (maggiore è la ricchezza investita, maggiore è il rischio connesso all'investimento).

$$\text{Se } X \in V \text{ e } h > 0, hX \in V \Rightarrow \rho(hX) = h * \rho(X)$$

- Invarianza transizionale: se viene aggiunta una componente certa "a" (ad esempio un investimento nel titolo privo di rischio) ad una componente aleatoria "X", la misura di rischio si riduce esattamente di "a".

$$\text{Se } X \in V \text{ e } a \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + a) = \rho(X) - a. \text{ [2]}$$

Nei capitoli successivi verranno analizzati metodi che utilizzano misure del rischio diverse dalla varianza.

1.6 Criticità del modello classico

La teoria di selezione di portafoglio di Markowitz grazie alla sua intuitività è stata largamente utilizzata per decisioni finanziarie pratiche, ponendo solide basi per la *Modern Portfolio Theory* (MPT). Nonostante sia una teoria molto valida, presenta alcune problematiche da analizzare:

- Una delle più interessanti riguarda la cosiddetta *low volatility anomaly*: l'evidenza empirica ha dimostrato che ci sono casistiche in cui portafogli a bassa volatilità riescono a raggiungere rendimenti più alti rispetto a portafogli ad alta volatilità. Ciò va in assoluta contraddizione con il principio alla base della teoria di Markowitz secondo cui rendimento e rischio sono direttamente proporzionali. [2]
- La varianza risulta essere una misura inadeguata del rischio a causa della sua natura simmetrica, soprattutto se la distribuzione dei rendimenti è asimmetrica: la varianza penalizza in egual modo rendimenti posti al di sopra e al di sotto della media. Nell'ottica dell'investitore, bisognerebbe considerare pericolose le sole variazioni "negative", facendo risultare più opportuno l'uso di una misura asimmetrica del rischio. Date tali considerazioni, Harry Markowitz arrivò a sostenere che una misura più robusta del rischio, dal punto di vista teorico, fosse la "semivarianza", ossia la somma dei quadrati degli scostamenti dalla media al di sotto del valore atteso. Questa misura, nonostante presenti notevoli pregi, risulta molto problematica da calcolare. [1]
- L'assunzione di una distribuzione di rendimenti gaussiana non rispecchia molto la realtà: nella pratica i rendimenti assumono distribuzioni asimmetriche. Nonostante ciò, tale problematica è "aggirabile" in quanto la distribuzione normale risulta una buona approssimazione nel momento in cui l'*inter-trading period* è abbastanza piccolo e vengono usati rendimenti composti nel continuo.
- La varianza non riesce a cogliere gli eventi rischiosi aventi una probabilità di accadimento bassa: non tiene conto dell'esistenza delle "*fat tails*" che spesso si osservano nella distribuzione dei rendimenti finanziari.
- La metodologia media-varianza non sempre è consistente con la massimizzazione dell'utilità attesa, a meno che non si facciano assunzioni di distribuzioni normali

multivariate o ellittiche simmetriche. Se tale metodologia non risulta consistente con la massimizzazione dell'utilità si avrà che l'investitore, dato un certo rendimento atteso ed una funzione di utilità, andrà a preferire sempre il portafoglio avente la minima varianza (minimo globale). [2]

Tali problematiche hanno spinto, dunque, verso la ricerca di nuove misure del rischio per l'ottimizzazione di portafoglio, portando verso l'introduzione di misure di *downside risk* basate sui quantili. In tale categoria le più utilizzate risultano il *Value at Risk* (VaR) ed *Expected Shortfall* (ES).

Capitolo 2

Modello media-VaR

In questo capitolo viene proposto uno dei modelli alternativi all'approccio classico: il modello media-*Value at Risk*. Il VaR è definito come la peggiore perdita che ci si può attendere con una certa probabilità per un particolare livello di confidenza. Più precisamente il “(1- α) %-VaR” di un portafoglio è il massimo ammontare, che andrà perso con un livello di confidenza (1- α), in un certo periodo di tempo t . Il VaR, dunque, riesce a riassumere il rischio associato al possesso di un portafoglio all'interno di un unico numero: tale particolare caratteristica lo rende una delle misure del rischio più pratiche e comunemente utilizzate dai *risk managers*. [2]

2.1 Definizioni e notazioni

Sia $\alpha \in (0, 1)$ un livello di probabilità dato, e Ω il vettore contenente i pesi ω_i (con $i=1, \dots, n$) associati agli n *asset* finanziari costituenti il portafoglio Π (costituito da soli titoli rischiosi), allora il *Value at Risk* al livello α per il rendimento R_Π , calcolato in funzione di Ω , è definito come:

$$VaR_\alpha(R_\Pi) = -\inf\{x \mid \mathbb{P}[R_\Pi \leq x] \geq \alpha\} = -F_{R_\Pi}^{-1}(\alpha)$$

Il termine $F_{R_\Pi}^{-1}(\alpha)$ rappresenta la funzione inversa della funzione di distribuzione cumulata $F_{R_\Pi}(x) = \mathbb{P}[R_\Pi \leq x]$ di R_Π , e restituisce l' α -quantile di R_Π . Il $VaR_\alpha(R_\Pi)$, dunque, è la massima perdita che un portafoglio Π può soffrire nel 100(1- α) % di possibilità. Fissato il livello α , si può andare a minimizzare il VaR andando ad agire su Ω .

Nel caso in cui il portafoglio sia costituito da n titoli rischiosi ed un titolo *risk free* (Π'), la formula generale del VaR diviene:

$$VaR_\alpha(R_{\Pi'}) = VaR_\alpha(R_\Pi) - \omega_{rf} * \mu_{rf}$$

Bisogna sottolineare che non sempre è possibile trovare un'espressione analitica per il VaR_α di un portafoglio: è necessario fare particolari ipotesi riguardanti la funzione di distribuzione dei rendimenti. Il rendimento di portafoglio è dato da una combinazione lineare di n variabili

casuali, dunque sarebbe necessario gestire la funzione di distribuzione multivariata dei rendimenti degli *asset* finanziari, e come la distribuzione univariata è influenzata dai pesi del portafoglio. Per semplicità, si ipotizza che i rendimenti siano distribuiti secondo una funzione di distribuzione gaussiana: il vettore dei rendimenti dei titoli costituenti il portafoglio segue, quindi, una funzione di distribuzione normale multivariata, con media $\Theta = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ e matrice di varianza-covarianza Σ .

Dato, dunque, $\alpha \in (0, 1)$ e $R = \{R_1, \dots, R_n\}$, con $R \sim \mathcal{N}(\Theta, \Sigma)$ si ha $R_\Pi \sim \mathcal{N}(\mu_\Pi, \sigma_\Pi^2)$. Il VaR_α sotto tali ipotesi sarà pari a:

$$VaR_\alpha(R_\Pi) = z^{(\alpha)}\sigma_\Pi - \mu_\Pi$$

Dove $z^{(\alpha)} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$, e $\Phi(\cdot)$ è la funzione cumulata della funzione di distribuzione normale standard³.

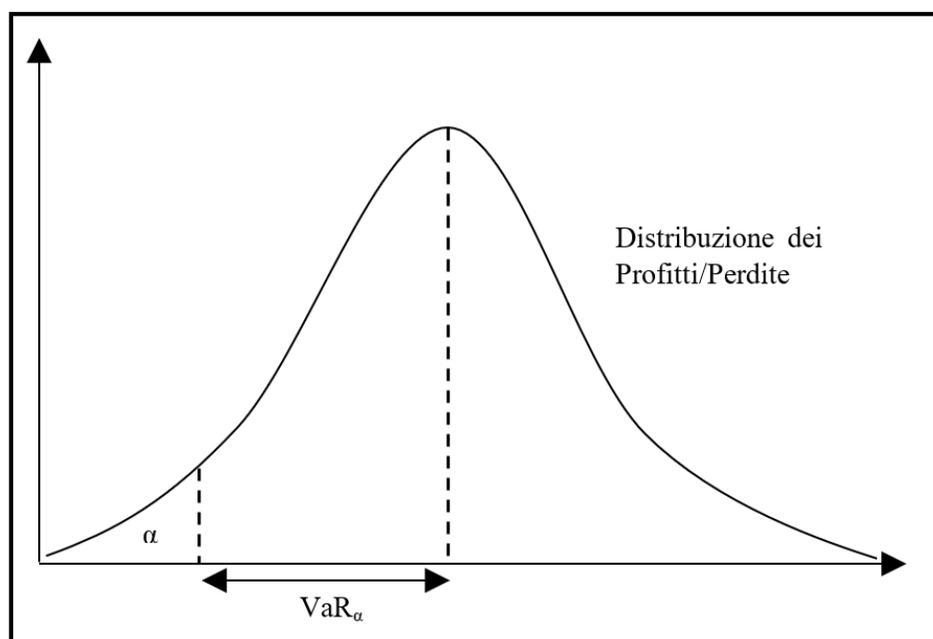


Figura 4 Rappresentazione grafica del VaR

In particolare, si assume che $\alpha \in (0, 0.5)$ in modo da ottenere valori positivi per $z^{(\alpha)}$: per alcuni valori di $z^{(\alpha)} > 0$ il problema di ottimizzazione, dato dalla minimizzazione della

³ La funzione di distribuzione della normale standard ha la seguente formula: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

misura di rischio e il mantenimento del rendimento ad un certo valore, avrà gli stessi risultati, per quanto riguarda i pesi Ω , del problema di ottimizzazione affrontato da Markowitz .

2.2 Frontiera efficiente

Il primo *step* da affrontare consiste nell'andare a costruire la frontiera di portafogli efficienti: l'insieme di tutti i portafogli che non sono dominati da nessun altro portafoglio, e che dunque rappresentano in migliore *trade-off* tra il rendimento e la misura di rischio. Così come si è visto per il modello classico, tale fase consiste nel risolvere un problema di minimo così fatto:

$$\begin{cases} \min_{\omega_1, \dots, \omega_n} VaR_\alpha(R_\Pi) \\ E(R_\Pi) = \tilde{R} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{cases}$$

Dato “e” il vettore colonna dei rendimenti degli n titoli, “u” il vettore colonna unità a n componenti, “ Ω ” il vettore colonna delle quote, e “ Σ ” la matrice varianza-covarianza, definiamo le seguenti quantità:

$$A = u^T * \Sigma^{-1} * e$$

$$B = e^T * \Sigma^{-1} * e$$

$$C = u^T * \Sigma^{-1} * u$$

$$D = B * C - A^2$$

Imponendo che $VaR_\alpha(R_\Pi) = z^{(\alpha)}\sigma_\Pi - \mu_\Pi$ con $z^{(\alpha)} > 0$, si ottiene che i punti costituenti la soluzione del problema di ottimizzazione trovati con il modello media-VaR sono:

$$B_{(\mu, VaR_\alpha)} = \left\{ (VaR_\alpha, \mu) \in R^2 \mid \left(\frac{VaR_\alpha + \mu}{z^{(\alpha)}}, \mu \right) \in B_{(\mu, \sigma)} \right\}$$

Dove $B_{(\mu, \sigma)}$ è l'insieme dei punti appartenenti al piano (σ, μ) che rappresentano la soluzione del problema di ottimizzazione nel modello classico. In tal modo si nota come i portafogli ottimali trovati con la metodologia media-VaR non sono altro che un sottoinsieme di quelli calcolati con il modello di Markowitz.

Il minimo globale si trova in corrispondenza di $\bar{\mu} = \frac{A}{C} + \sqrt{\frac{D}{A} * \frac{(z^{(\alpha)})^2}{C * (z^{(\alpha)})^2 - D} - \frac{1}{A}}$. Nel modello media-varianza, in particolare, affinché i portafogli trovati dalla soluzione del sistema siano efficienti, si deve avere $\mu \geq \frac{A}{C}$. Da tale assunto deriva che nel caso di utilizzo del VaR_α come misura del rischio, un portafoglio è da considerarsi efficiente se e solo se $z^{(\alpha)} \geq \sqrt{\frac{D}{C}}$.

Supponendo che il vettore dei rendimenti segua una funzione di distribuzione multivariata caratterizzata da media pari al vettore dei rendimenti attesi e matrice di varianza-covarianza Σ , si ha che il minimo globale per il VaR_α esiste se e solo se $\alpha < 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{D}{C}}\right)$.

La soluzione trovata per il minimo globale suggerisce, inoltre, che assumendo una distribuzione multivariata per i rendimenti degli *asset* finanziari, è possibile trovare per ogni portafoglio efficiente (μ, σ) , escluso il portafoglio rappresentante il minimo globale nel modello media-varianza, un livello α tale da farlo corrispondere al minimo globale nel modello media- VaR_α . Inoltre, per α tendente in valore a $1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{D}{C}}\right)$, si ottiene un portafoglio di minimo globale per il VaR_α , la cui varianza tende all'infinito. Date tali premesse si può affermare che ogni portafoglio efficiente (μ, VaR_α) è anche un portafoglio efficiente (μ, σ) , ma non vale l'opposto.

Andiamo ora a valutare l'impatto dell'inserimento del vincolo sul VaR per gli investitori che ragionano nell'ottica media-varianza. Si osserva, in primo luogo, che per alcuni valori di $\alpha \in (0, 1)$ il vincolo rappresentato da $\overline{\text{VaR}}_\alpha$ è minore rispetto al minimo globale per il *Value at risk* trovato in precedenza: per tali valori di α non è possibile trovare portafogli ottimali né per investitori nell'approccio media-varianza, né per investitori nell'approccio media-VaR. Assumiamo dunque che $\overline{\text{VaR}}_\alpha$ sia maggiore o uguale al minimo globale del VaR: la frontiera efficiente si restringerà ai soli punti:

$$B_{(\mu, \text{VaR}_\alpha)} \cap \{(x, y) \in R^2 \mid x \leq \overline{\text{VaR}}_\alpha\}$$

Ne deriva una restrizione della frontiera efficiente per i portafogli ottenuti nel modello classico.

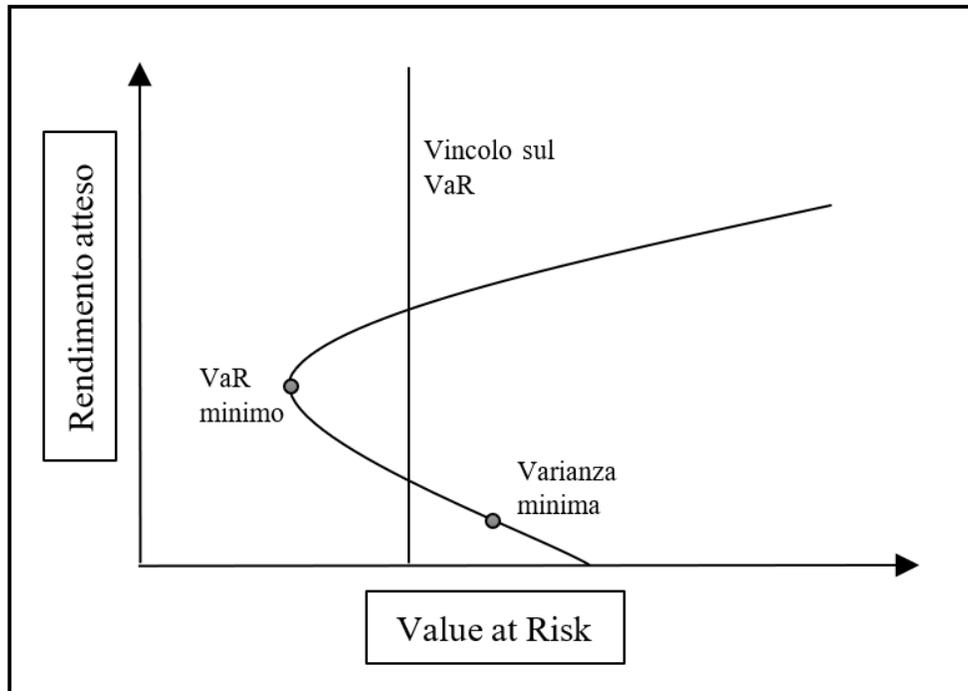


Figura 5 Frontiera efficiente nel piano Value at Risk-Rendimento atteso

Data l'introduzione di tale vincolo, si avranno due tipi di investitore:

- Investitori che hanno scelto portafogli ad alta varianza, e che sono costretti a ridurla per poter soddisfare il vincolo. Graficamente si trovano sul tratto superiore della curva rappresentante la FE, alla destra della retta verticale rappresentante il vincolo \overline{VaR}_α ;
- Investitori che hanno scelto portafogli a varianza minima, che sono costretti ad aumentarla per potersi avvicinare al vincolo sul *Value at Risk*. Graficamente tale tipo di investitore si trova nel tratto inferiore della FE, a sinistra del punto a varianza minima e a destra della retta \overline{VaR}_α .

2.2.1 Ottimizzazione di portafoglio in presenza del titolo *risk free*

I risultati visti precedentemente sono stati ottenuti andando a considerare i soli *asset* rischiosi. Introduciamo ora il titolo privo di rischio (*risk free*) caratterizzato da un rendimento certo pari a r_f .

Il problema di ottimizzazione nel modello media-VaR, ancora una volta, restituisce una soluzione che è sottoinsieme di quella del modello classico. Indicando con $B^R_{(\mu, \sigma)}$ l'insieme di punti della FE trovati nel modello media-varianza in presenza del titolo *risk free*, si ha:

$$B^R_{(\mu, VaR_\alpha)} = \left\{ (VaR_\alpha, \mu) \in R^2 \mid \left(\frac{VaR_\alpha + \mu}{z^{(\alpha)}}, \mu \right) \in B^R_{(\mu, \sigma)} \right\}$$

Con $z^{(\alpha)} > 0$.

In particolare, si ha che i portafogli della frontiera efficiente così trovata hanno:

$$VaR_\alpha = \begin{cases} \frac{\mu \left(z^{(\alpha)} - \sqrt{D(r_f)} \right) - z^{(\alpha)} * r_f}{\sqrt{D(r_f)}} & \text{per } \mu \geq r_f \\ \frac{\mu \left(-z^{(\alpha)} - \sqrt{D(r_f)} \right) + z^{(\alpha)} * r_f}{\sqrt{D(r_f)}} & \text{per } \mu < r_f \end{cases}$$

Con $D(r_f) = B - 2r_f A + r_f^2 C$. La frontiera efficiente nel piano (VaR, μ) è dunque caratterizzata da due rette con intersezione $(-r_f, r_f)$.

Si ha inoltre che per $z^{(\alpha)} > \sqrt{D(r_f)}$, i portafogli costituenti la retta descritta dalla seconda equazione sono dominati da quelli costituenti la retta della prima equazione: la FE nel modello media-VaR con titolo *risk free* è data dalla prima equazione. In particolare, un portafoglio $(\mu, VaR_\alpha)^R$ è efficiente se e solo se è $(\mu, \sigma)^R$ -efficient.

Per $z^{(\alpha)} \leq \sqrt{D(r_f)}$ entrambe le equazioni sono rappresentate graficamente da rette a pendenza negativa: descrivono una situazione in cui si potrebbe andare a ridurre ulteriormente il rischio aumentando al contempo il rendimento, dunque non può esistere alcun portafoglio efficiente.

Si può dimostrare che se $z^{(\alpha)} > \sqrt{D(r_f)}$ e $r_f < \frac{A}{C}$, allora il portafoglio di tangenza costituito dai soli titoli rischiosi $\Omega^M = \frac{1}{A - r_f C} * \Sigma^{-1}(e - r_f * u)$ è l'unico portafoglio efficiente sia nel

caso si considerino unicamente titoli rischiosi, sia nel caso si includa il titolo privo di rischio, utilizzando il modello media-VaR. [3]

I risultati ottenuti suggeriscono, dunque, che l'insieme di portafogli efficienti trovati con il modello media-VaR, sia nel caso vengano considerati i soli titoli rischiosi, sia nel caso in cui si introduca il titolo *risk free*, non è altro che un sottoinsieme della frontiera efficiente trovata con il modello media-varianza suggerito da Markowitz.

2.3 Problematiche legate all'utilizzo dei VaR

Il *Value at Risk* è uno strumento molto popolare e comunemente usato in ambito finanziario grazie alla sua capacità di sintetizzare il rischio associato ad una posizione finanziaria in un singolo numero. Nonostante il suo largo utilizzo è necessario sottolineare che il VaR presenta alcune problematiche.

Innanzitutto, il VaR non risulta essere sempre una misura coerente di rischio. Per poter essere considerata tale è necessario che rispetti i quattro assiomi fondamentali quali: monotonicità, sub-additività, omogeneità positiva, invarianza transizionale. Il *Value at Risk* non rispetta, infatti, la proprietà di sub-additività qualunque sia la distribuzione dei rendimenti: solo nel caso si ipotizzi che i rendimenti seguano una distribuzione ellittica (ad esempio la distribuzione normale), il VaR è considerata una misura coerente del rischio. La sub-additività è basata sul concetto che un portafoglio dovrebbe avere un rischio totale massimo pari alla somma dei rischi dei singoli *asset* che lo costituiscono. Nella maggioranza dei casi, il rischio di portafoglio globale può essere addirittura inferiore di questa somma, grazie alla diversificazione. La sub-additività è dunque una delle proprietà più importanti per avere una buona misura del rischio. Il VaR, non rispettandola, potrebbe portare alla costituzione di portafogli che non risultano diversificati. [2]

Il VaR, inoltre, non riesce a quantificare la grandezza delle perdite potenziali, che si possono avere nel momento in cui si verifica un evento di coda, oltre il livello di confidenza assunto. Difatti si potrebbe venire a creare un falso senso di sicurezza. Finanche un livello di confidenza del 99%, che potrebbe essere considerato alto, significa che vi è l'1%, ossia "due o tre giorni di *trading* all'anno", in cui esiste la possibilità che le perdite siano di molto

superiori rispetto a quanto prospettato dal VaR. Guardando unicamente il VaR, quindi, non si ha nessuna informazione circa la più grande perdita che si può verificare.

Il calcolo del *Value at Risk* non è sempre semplice: nel momento in cui si calcola il VaR di un portafoglio, risulta necessaria la misura e la stima non solo dei rendimenti e della volatilità dei singoli *asset*, ma anche delle correlazioni tra di essi. All'aumentare del numero di posizioni finanziarie nel portafoglio, la difficoltà nel calcolo cresce esponenzialmente.

Bisogna stare molto attenti alle ipotesi che vengono assunte e controllare che rispettino la realtà. Per semplificare i calcoli si va ad ipotizzare che la distribuzione dei rendimenti sia normale, ma ciò non è sempre verificato nella pratica, e questo porta ad effettuare una sottostima del reale rischio che si va ad assumere. [5]

Infine, si è dimostrato in questo capitolo che la selezione di portafoglio effettuata attraverso il modello media-VaR non risulta essere un reale miglioramento rispetto ai risultati ottenuti con il modello classico. La frontiera efficiente (μ , VaR) è un sottoinsieme della frontiera efficiente (μ , σ). Bisogna sottolineare che ciò è vero fintantoché la distribuzione di probabilità dei rendimenti può essere approssimata da una distribuzione Gaussiana.

Capitolo 3

Modello media-ES

Nei precedenti capitoli si è discusso ed analizzato il modello di Markowitz, che è considerato ad oggi una pietra miliare nell'ambito dell'ottimizzazione di portafogli di *asset* finanziari. Questo modello, però, presenta alcune problematiche legate alla particolare misura del rischio riguardante la detenzione di una posizione finanziaria. Tutto ciò ha portato alla ricerca di misure del rischio adeguate, che riuscissero a rispecchiare il più fedelmente possibile la realtà. Si è giunti, dunque, al considerare misure basate sui quantili della distribuzione di probabilità dei rendimenti, analizzando dapprima il *Value at Risk*, e successivamente arrivando a considerare l'*Expected Shortfall* (ES). L'ES, conosciuta anche con il nome di *Conditional-VaR* (C-VaR) o *tail-VaR*, è definita come l'aspettativa di perdite al di sopra di un certo valore soglia. Tale strumento, quindi, misura quanto possono essere grandi le perdite se il rendimento del portafoglio o *asset* detenuto dall'investitore scende al di sotto del suo "α-quantile". A differenza del VaR, dunque, l'ES riesce a fornire un numero maggiore di informazioni riguardo alla potenziale perdita che bisogna sostenere. Nel seguente capitolo viene analizzato nel dettaglio il modello media-ES, che seleziona i portafogli efficienti attuando un *trade-off* tra il rendimento ottenibile e il rischio assunto in termini di *Expected Shortfall*. Si va, poi, a confrontare il risultato ottenuto con quello del modello classico, valutandone l'efficacia.

3.1 Notazioni e definizioni

Dato il livello di probabilità $\alpha \in (0, 1)$, e il portafoglio di *asset* finanziari Π , l'*Expected Shortfall* al livello α per il rendimento R_Π è definito come:

$$ES_\alpha(R_\Pi) = -\frac{1}{\alpha} \left(E \left[R_\Pi 1_{\{R_\Pi \leq x^{(\alpha)}\}} \right] - x^{(\alpha)} (P[R_\Pi \leq x^{(\alpha)}] - \alpha) \right)$$

Con $x^{(\alpha)} = F_{R_\Pi}^{-1}(\alpha)$ si va ad indicare la funzione inversa della funzione di distribuzione cumulata $F_{R_\Pi}(x) = \mathbb{P}[R_\Pi \leq x]$ di R_Π .

L'ES $_{\alpha}$ è, quindi, il limite in termini probabilistici per quanto riguarda le perdite attese nel 100 α % dei casi peggiori. Inoltre, è possibile dimostrare che l'ES $_{\alpha}$ è una misura coerente di rischio, rispettando gli assiomi di monotonicità, sub-additività, omogeneità positiva e invarianza transizionale. Ciò la rende una misura di rischio migliore del VaR che risulta rispettare la sub-additività solo in presenza di distribuzioni ellittiche.

L'*Expected Shortfall* viene spesso confusa con la cosiddetta *Tail Conditional Expectation*, che, dato il livello di probabilità $\alpha \in (0, 1)$ e il portafoglio di *asset* finanziari Π , viene definita come:

$$TCE_{\alpha}(R_{\Pi}) = -E[R_{\Pi} | R_{\Pi} \leq x^{(\alpha)}]$$

Con $x^{(\alpha)} = F_{R_{\Pi}}^{-1}(\alpha)$.

La TCE e L'ES sono due misure differenti del rischio, e coincidono in valore solo nel caso in cui la funzione di distribuzione di probabilità dei rendimenti è continua: in tal caso $P[R_{\Pi} \leq x^{(\alpha)}] = \alpha$ facendo sì che $ES_{\alpha} = TCE_{\alpha}$. Nel caso generico, invece, il legame esistente tra l'*Expected Shortfall* e la *Tail Conditional Expectation* è espresso dalla seguente equazione:

$$ES_{\alpha}(R_{\Pi}) = TCE_{\alpha}(R_{\Pi}) + (\beta - 1)(TCE_{\alpha}(R_{\Pi}) - VaR_{\alpha}(R_{\Pi}))$$

Con $\beta = \frac{1}{\alpha}P[R_{\Pi} \leq -VaR_{\alpha}(R_{\Pi})]$ e $VaR_{\alpha}(R_{\Pi}) = -inf\{x | \mathbb{P}[R_{\Pi} \leq x] \geq \alpha\} = -F_{R_{\Pi}}^{-1}(\alpha)$.

Si assume come ipotesi semplificativa che la funzione di distribuzione di probabilità dei rendimenti sia una normale: tale tipo di funzione di distribuzione è continua, dunque è possibile calcolare l'ES come TCE. Sotto queste ipotesi, inoltre, ricordiamo che $VaR_{\alpha}(R_{\Pi}) = z^{(\alpha)}\sigma_{\Pi} - \mu_{\Pi}$. Otteniamo che:

$$ES_{\alpha} = E[R_{\Pi} | R_{\Pi} \leq VaR_{\alpha}(R_{\Pi})] = -\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha} * \sigma_{\Pi} + \mu_{\Pi}$$

Dove $\rho(\cdot)$ rappresenta la densità della funzione di distribuzione normale standard, $\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$.

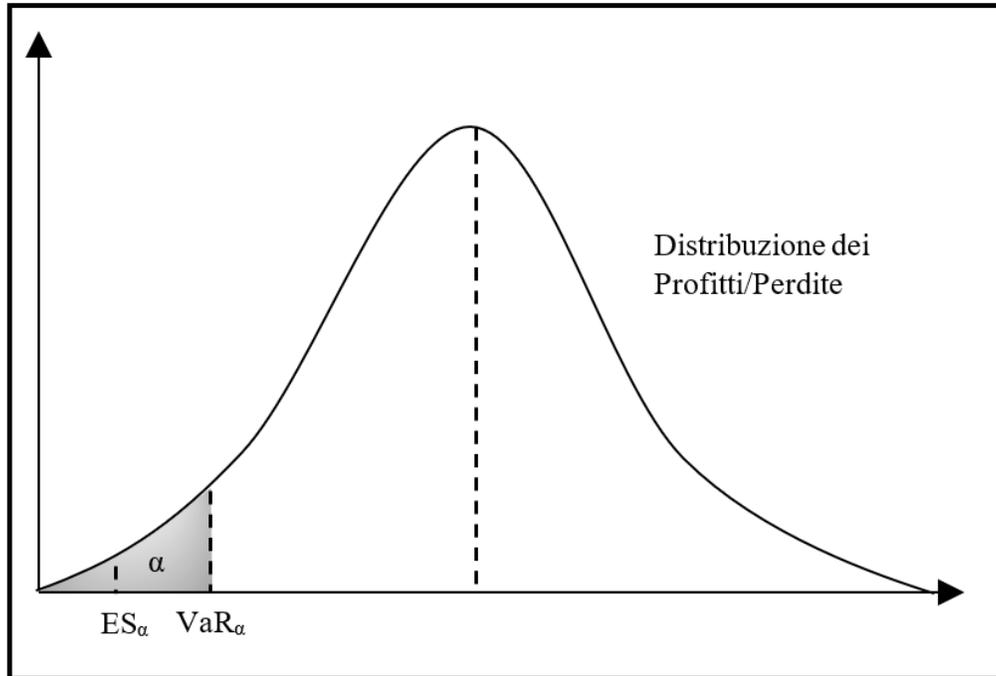


Figura 6 Rappresentazione grafica dell'Expected Shortfall

È importante soffermarsi sul risultato raggiunto: si nota che, assumendo i rendimenti distribuiti secondo una Gaussiana, sia il *Value at Risk* che l'*Expected Shortfall* sono caratterizzati interamente dalla media e dalla varianza del portafoglio. Inoltre, è possibile giungere ad una forma generale per descriverli:

$$risk(R_{\Pi}) = \gamma(\alpha) * \sigma_{\Pi} - \mu_{\Pi}$$

Dove $\gamma(\alpha)$ è una funzione del livello $\alpha \in (0, 1)$, ed è data da $z^{(\alpha)}$ per il VaR_{α} e da $\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha}$ per l' ES_{α} . Ciò resta vero unicamente grazie alla particolare funzione di distribuzione scelta.

3.2 Ottimizzazione di portafoglio e frontiera efficiente

L'approccio media-ES per la selezione di un portafoglio finanziario consiste essenzialmente nella minimizzazione del rischio del portafoglio, rappresentato dall'*Expected Shortfall*, dato un rendimento atteso fisso che deve essere raggiunto. Matematicamente tale problema di ottimizzazione di portafoglio può essere descritto attraverso il seguente sistema:

$$\begin{cases} \min_{\omega_1, \dots, \omega_n} ES_\alpha(R_\Pi) \\ E(R_\Pi) = \tilde{R} \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{cases}$$

Dove ω_i (con $i = 1, \dots, n$) rappresenta il peso dell' i -esimo *asset* all'interno del portafoglio Π .

Se si ipotizza che la distribuzione dei rendimenti è una funzione di distribuzione Gaussiana multivariata, l'*Expected Shortfall* assume la seguente forma:

$$risk(R_\Pi) = \gamma(\alpha) * \sigma_\Pi - \mu_\Pi$$

Con $\gamma(\alpha) = \frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha}$. In particolare, anche il VaR assume la medesima forma ponendo $\gamma(\alpha) = z^{(\alpha)}$, dunque sotto tali ipotesi, tutti i risultati ottenuti nel calcolo della frontiera efficiente per il *Value at Risk* possono essere applicati all'*Expected Shortfall* sostituendo $z^{(\alpha)}$ con $\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha}$.

Si assume inoltre che $\alpha \in (0, 0.5)$, in modo tale che $\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha} > 0$: il problema di ottimizzazione media-ES risulta equivalente al problema di ottimizzazione media-varianza, anche se, naturalmente, i valori minimi assunti dalle diverse funzioni di rischio saranno differenti.

Analogamente all'approccio media-VaR, considerando le quantità:

$$A = u^T * \Sigma^{-1} * e$$

$$B = e^T * \Sigma^{-1} * e$$

$$C = u^T * \Sigma^{-1} * u$$

$$D = B * C - A^2$$

La soluzione del sistema è rappresentata dal seguente insieme di punti:

$$B_{(\mu, ES_\alpha)} = \left\{ (ES_\alpha, \mu) \in R^2 \mid \left(\frac{ES_\alpha + \mu}{\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha}}, \mu \right) \in B_{(\mu, \sigma)} \right\}$$

Dove $B_{(\mu, \sigma)}$ è l'insieme dei punti appartenenti al piano (σ, μ) che rappresentano la soluzione del problema di ottimizzazione nel modello classico. Il modello media-ES $_\alpha$ genera, dunque, una soluzione che è sottoinsieme di quella del modello media-varianza.

Il portafoglio di minimo rischio globale nell'approccio media-ES esiste se e solo se

$$\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{1-\Phi(z^{(\alpha)})} > \sqrt{\frac{D}{C}}, \text{ in corrispondenza del valore } \bar{\mu} = \frac{A}{C} + \sqrt{\frac{D}{A} * \frac{\left(\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha}\right)^2}{C * \left(\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha}\right)^{-D}} - \frac{1}{A}}: \text{ la condizione}$$

$\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{1-\Phi(z^{(\alpha)})} > \sqrt{\frac{D}{C}}$ fa sì che i portafogli trovati nella risoluzione del problema di ottimizzazione siano efficienti. Da tali risultati si evince che è possibile trovare per ogni portafoglio efficiente (μ, σ) , escluso il portafoglio rappresentante il minimo globale nel modello media-varianza, un livello α tale da farlo corrispondere al minimo globale nel modello media-ES $_{\alpha}$.

La frontiera efficiente in tale modello è data, da tutti i portafogli ottimi il cui rendimento sia

$$\bar{\mu} \geq \frac{A}{C} + \sqrt{\frac{D}{A} * \frac{\left(\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha}\right)^2}{C * \left(\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha}\right)^{-D}} - \frac{1}{A}}, \text{ e inoltre si ha che ogni portafoglio efficiente } (\mu, \text{ES}_{\alpha}) \text{ è}$$

anche un portafoglio efficiente (μ, σ) , ma non vale l'opposto.

È da sottolineare che per $\alpha \in (0, 0.5)$ si ha che $\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{1-\Phi(z^{(\alpha)})} \geq z^{(\alpha)}$, dunque il *set* di portafogli efficienti $(\mu, \text{VaR}_{\alpha})$ risulta essere incluso strettamente nell'insieme di portafogli efficienti $(\mu, \text{ES}_{\alpha})$.

Riassumendo si è ottenuto attraverso tale analisi che la frontiera di portafogli efficienti nei modelli media-VaR $_{\alpha}$ e media-ES $_{\alpha}$ sono sottoinsiemi della frontiera ottenuta nel modello classico. In particolare, la frontiera del modello media-VaR $_{\alpha}$ è a sua volta sottoinsieme della frontiera dell'approccio media-ES $_{\alpha}$.

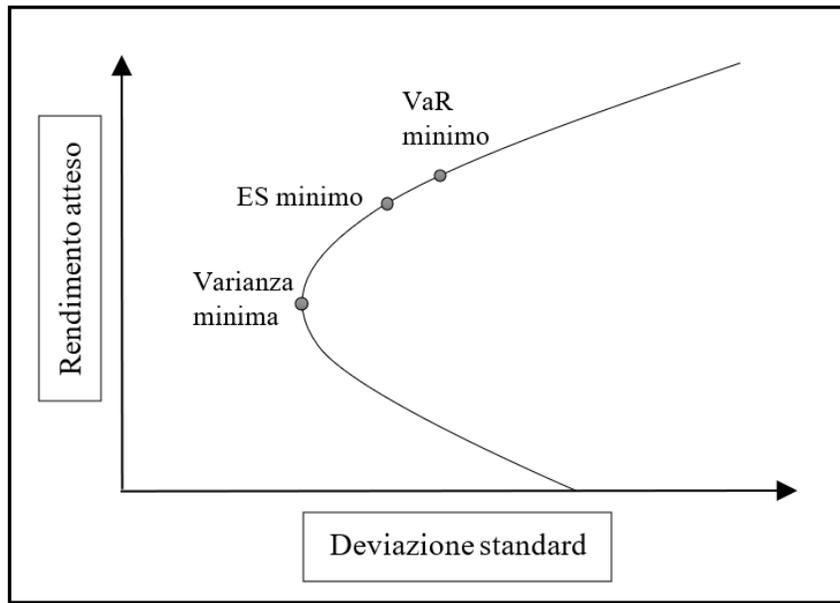


Figura 7 Frontiera efficiente del modello media-varianza con rappresentazione del portafoglio di minimo globale per varianza, VaR ed ES.

È possibile generalizzare i risultati ottenuti per il calcolo dei portafogli ottimi per la funzione $risk(R_{\Pi}) = \gamma(\alpha) * \sigma_{\Pi} - \mu_{\Pi}$: per valori decrescenti di $\gamma(\alpha)$ la curva rappresentante i portafogli ottimi nel piano rischio-rendimento atteso tende ad una retta con pendenza -1. Se $\gamma(\alpha) \leq \sqrt{\frac{D}{C}}$, allora la frontiera $(\mu, risk)$ degenera in quanto domina il contributo di μ nella funzione del rischio: ciò suggerisce che si possa aumentare infinitamente il rendimento atteso, decrementando il rischio, dunque non può esistere alcun portafoglio efficiente. Tali risultati sono descritti dalla seguente figura.

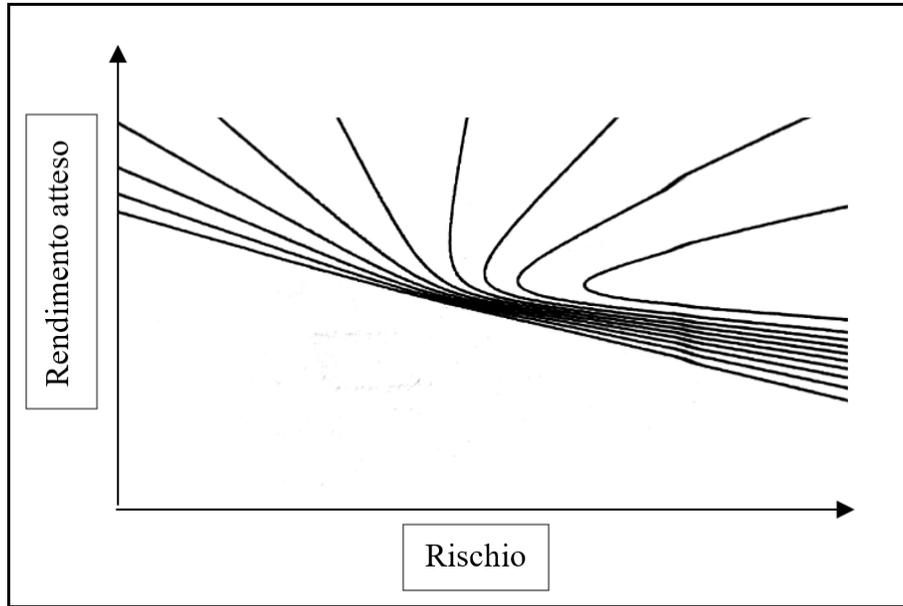


Figura 8 Frontiera efficiente per una generica funzione di rischio lineare

3.2.1 Ottimizzazione di portafoglio in presenza del titolo *risk free*

Nel precedente paragrafo, la soluzione ottenuta riguarda un mercato in cui vengono considerati i soli titoli rischiosi. Mantenendo l'ipotesi secondo cui i rendimenti fanno riferimento ad una funzione di distribuzione di probabilità normale, andiamo ad introdurre il titolo privo di rischio (*risk free*) il cui rendimento è certo ed è pari a r_f .

Il problema di ottimizzazione nel modello media-ES, come nel caso di assenza del titolo *risk free*, restituisce un *set* di punti nel piano (μ, ES_α) che è sottoinsieme di quello ottenuto applicando il modello classico. Indicando con $B_{(\mu,\sigma)}^R$ l'insieme di punti costituenti la soluzione del problema di ottimizzazione nel modello media-varianza in presenza del titolo *risk free*, si ha:

$$B_{(\mu,ES_\alpha)}^R = \left\{ (ES_\alpha, \mu) \in R^2 \mid \left(\frac{ES_\alpha + \mu}{\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha}}, \mu \right) \in B_{(\mu,\sigma)}^R \right\}$$

Con $\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha} > 0$.

Tali portafogli sono caratterizzati dai seguenti valori dell'*Expected Shortfall*:

$$ES_\alpha = \begin{cases} \frac{\mu \left(\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha} - \sqrt{D(r_f)} \right) - \frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha} * r_f}{\sqrt{D(r_f)}} & \text{per } \mu \geq r_f \\ \frac{\mu \left(-\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha} - \sqrt{D(r_f)} \right) + \frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha} * r_f}{\sqrt{D(r_f)}} & \text{per } \mu < r_f \end{cases}$$

Con $D(r_f) = B - 2r_f A + r_f^2 C$. Tale sistema descrive due rette con intersezione $(-r_f, r_f)$ nel piano (ES_α, μ) . Per $\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha} > \sqrt{D(r_f)}$, i soli portafogli costituenti la retta descritta dalla prima equazione risultano efficienti. In particolare, un portafoglio $(\mu, ES_\alpha)^R$ è efficiente se e solo se è $(\mu, \sigma)^R$ -efficient. Per $\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha} \leq \sqrt{D(r_f)}$, invece, entrambe le equazioni descrivono rette a pendenza negativa per cui non può esistere alcun portafoglio efficiente.

Si può dimostrare che se $\frac{\rho(z^{(\alpha)})}{\alpha} > \sqrt{D(r_f)}$ e $r_f < \frac{A}{C}$, allora il portafoglio di tangenza costituito dai soli titoli rischiosi, dato da $\Omega^M = \frac{1}{A - r_f C} * \Sigma^{-1}(e - r_f * u)$, è l'unico portafoglio che è efficiente sia nel caso si considerino unicamente titoli rischiosi, sia nel caso si includa il titolo privo di rischio utilizzando il modello media ES. [3]

In conclusione, i risultati ottenuti suggeriscono, dunque, che l'insieme di portafogli efficienti trovati con il modello media-ES, in presenza o assenza del titolo *risk free*, non è altro che un sottoinsieme della frontiera efficiente trovata con il modello media-varianza suggerito da Markowitz. Tale conclusione è estendibile a un qualsiasi modello media-rischio, in cui $risk(R_\Pi) = \gamma(\alpha) * \sigma_\Pi - \mu_\Pi$. Se i rendimenti sono distribuiti secondo una Gaussiana multivariata, i risultati ottenuti nel modello media-VaR o nel modello media-ES sono i medesimi e non apportano grandi miglioramenti al modello media-varianza.

3.3 Generalizzazione del modello media-ES

Finora abbiamo assunto l'ipotesi che i rendimenti potessero essere fittati da una distribuzione normale. Questo tipo di assunzione semplifica notevolmente i calcoli, ma non rispecchia

sempre la realtà pratica. Il modello media-ES si modifica nel caso in cui si considerasse che i rendimenti abbiano una generica funzione di distribuzione continua. Ricordiamo che se si considera una funzione di distribuzione continua l'ES_α coincide con TCE_α. Dato Ω, il vettore contenente i pesi ω_i degli *asset* nel portafoglio Π, e R_Π, il rendimento del portafoglio caratterizzato da una funzione di distribuzione cumulata continua, si ha che:

$$ES_{\alpha}(R_{\Pi}) = \inf \left\{ \alpha + \frac{1}{a} E[(-R_{\Pi} - a)^+] \mid a \in R \right\}$$

Ponendo $F_{\alpha}(R_{\Pi}, a) = \alpha + \frac{1}{a} E[(-R_{\Pi} - a)^+]$, si può dimostrare che:

$$\min_{\Omega} ES_{\alpha}(R_{\Pi}) = \min_{(\Omega, a)} F_{\alpha}(R_{\Pi}, a)$$

Si introduce inoltre una variabile ausiliare random $Z \geq 0$. Il problema di ottimizzazione può essere scritto come:

$$\begin{cases} \min_{(\Omega, a, Z)} \alpha + \frac{1}{a} E[Z] \\ E(R_{\Pi}) \geq \tilde{R} \\ Z \geq -R_{\Pi} - a, \\ Z \geq 0 \end{cases} \quad \text{con probabilità } 1$$

Questa formulazione permette di ottenere un programma lineare con vincoli convessi: ciò rende il modello media-ES preferibile al modello media-VaR, in quanto quest'ultimo può essere ridotto unicamente ad un problema non-convesso, con numerosi punti di minimo locali. Lo svantaggio legato a tale tipo di formulazione è che il problema risulta spesso di dimensione infinita.

Consideriamo ora una versione discreta di tale tipo di formulazione. Sia R il vettore dei rendimenti degli *asset*, dato $\xi_i \in R^n$ (oppure R^{n+1} se si considera anche il titolo *risk free*) con $i=1, \dots, N$, dove N è il numero di realizzazioni di R, e assumendo che ogni ξ_i abbia una probabilità di $\frac{1}{N}$ di manifestarsi, si ha:

$$\begin{cases} \min_{(\Omega, \alpha, z)} \alpha + \frac{1}{aN} \sum_{i=1}^N z_i \\ \Omega^T * \mu \geq \tilde{\mu} \\ z_i \geq -\Omega^T * \xi_i - \alpha, & \text{Con } i=1, \dots, N \\ z_i \geq 0 & \text{Con } i=1, \dots, N \end{cases}$$

Il problema di ottimizzazione in tale forma è lineare e di dimensione finita, e può essere risolto facilmente utilizzando un algoritmo lineare. [3]

3.4 Conclusione

L'utilizzo dell'*Expected Shortfall* come misura del rischio nel modello media-rischio introdotto da Markowitz ha portato ad alcuni interessanti risultati che vale la pena analizzare:

- Se viene assunta una distribuzione Gaussiana multivariata per i rendimenti, si ottiene che il *set* di portafogli efficienti non è altro che un sottoinsieme dell'insieme di portafogli efficienti calcolati attraverso il modello media-varianza: portafogli che sono efficienti nel modello classico possono non esserlo nel modello media-ES, ma non accade mai l'inverso. Inoltre, la frontiera efficiente può risultare vuota per valori di α che superino un certo livello soglia: ciò significa che bisogna prestare particolare attenzione nello scegliere il valore di α .
- Se si va a generalizzare il modello per una qualsiasi distribuzione, lavorando nel discreto, è possibile giungere ad un problema di tipo lineare con vincoli convessi. In questo modo si riesce a risolvere il problema di ottimizzazione di portafoglio senza dover ipotizzare una funzione di distribuzione normale per i rendimenti. Questa, infatti, è una delle più grandi limitazioni del modello basato sulla varianza o sul *Value at risk*: per la varianza è necessario che i rendimenti facciano riferimento ad una funzione di distribuzione simmetrica affinché i risultati possano essere coerenti; per il *Value at Risk* tale ipotesi è necessaria per far sì che questa misura del rischio assuma un'espressione analitica tale da permettere la risoluzione numerica del problema.

Infine, l'ES, a differenza del VaR, è una misura coerente del rischio, consente di ottenere una maggiore precisione, e riesce a catturare meglio la possibilità che accadano i cosiddetti *tail*

events, descrivendo con maggiore accuratezza il rischio associato alla detenzione di una posizione finanziaria.

Capitolo 4

Analisi dei dati

Nei precedenti capitoli si è andati ad analizzare l'approccio teorico riguardante l'ottimizzazione di un portafoglio finanziario: a partire dal modello classico, introdotto da Markowitz, si è andati ad approfondire lo studio analizzando misure di rischio alternative alla varianza. Nel seguente capitolo, invece, ci si propone di analizzare le serie storiche di dati riguardanti degli *asset* finanziari, utilizzati per la composizione di un portafoglio. In particolare, si va ad effettuare un'analisi statistica dei prezzi assunti da tali *asset* nel tempo. Tale passaggio risulta fondamentale per poter procedere, poi successivamente, all'applicazione del modello di ottimizzazione del portafoglio finanziario.

4.1 Dati

Per effettuare tale studio, sono state scelte venticinque società che sono componenti dell'indice Euro Stoxx 50: si è cercato di fare in modo che tali società appartenessero a diversi settori, in modo tale da evitare eccessive concentrazioni dei rischi. Nella seguente tabella vi è l'elenco delle imprese scelte:

Società	Settore Industriale
Air Liquide	Chimico
Allianz	Assicurazione
ASML Holding	Tecnologia
AXA	Assicurazione
Banco Santander	Banche
BASF	Chimico
Bayer	Sanità
BNP Paribas	Banche
Danone	Cibo & Bevande
Deutsche Telekom	Servizi di Comunicazione
Enel	Utenze
Iberdrola	Utenze

Intesa Sanpaolo	Banche
Kering	Dettaglio
L'Oréal	Prodotti personali e per la famiglia
LVMH Moët Hennessy	Prodotti personali e per la famiglia
Safran	Servizi e beni industriali
Sanofi	Sanità
SAP	Tecnologia
Schneider Electric	Servizi e beni industriali
Siemens	Servizi e beni industriali
Total	Petrolio & Gas
Unilever NV	Prodotti personali e per la famiglia
Vinci	Servizi per la costruzione
Volkswagen	Produttori di auto e camion

Tabella 1 Elenco società

Di tali società si è provveduto al raccoglimento delle serie storiche dei prezzi delle azioni: per ogni impresa si è andati a scaricare le quotazioni giornaliere al momento della chiusura del mercato⁴, per un periodo che va dal 1° gennaio 2015 al 31 luglio 2020, coprendo un arco temporale di circa cinque anni e mezzo⁵.

Sulla base dei dati raccolti, sono stati calcolati i log-rendimenti definiti come:

$$r = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Dove numeratore e denominatore rappresentano rispettivamente il prezzo alla chiusura di borsa all'istante t e $t-1$. Il passaggio successivo consiste nel calcolo di alcune statistiche descrittive, per la migliore comprensione circa la distribuzione dei rendimenti. È necessario, infatti, poter capire se la distribuzione dei rendimenti sia o meno approssimabile ad una

⁴ Le serie storiche di dati comprendono i valori di apertura, massimo, minimo e chiusura delle sedute di contrattazione. Si è ritenuto opportuno utilizzare i soli valori di chiusura in quanto sono i più attendibili tra le quotazioni disponibili.

⁵ Le quotazioni sono state scaricate dal sito internet "investing.com".

funzione di distribuzione normale: tale tipo di distribuzione risulta utile per una semplificazione dei calcoli per quanto concerne la costruzione della frontiera efficiente.

4.2 Andamento dei prezzi

Una volta raccolte le quotazioni delle venticinque società scelte, è stato possibile costruire dei grafici che evidenziassero l'andamento dei prezzi delle azioni nel tempo.

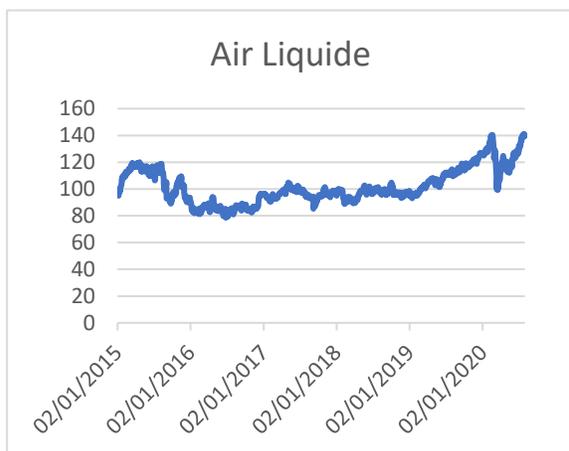


Figura 9 Andamento del prezzo delle azioni di Air Liquide

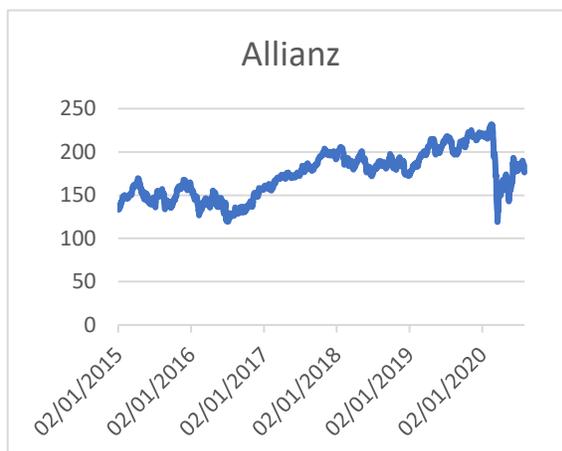


Figura 10 Andamento del prezzo delle azioni di Allianz

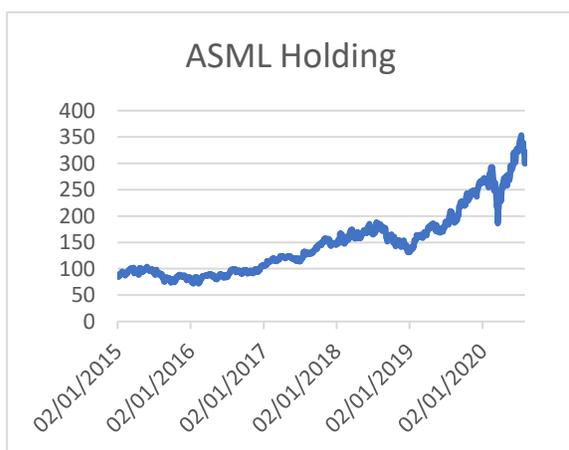


Figura 11 Andamento del prezzo delle azioni di ASML Holding



Figura 12 Andamento del prezzo delle azioni di AXA

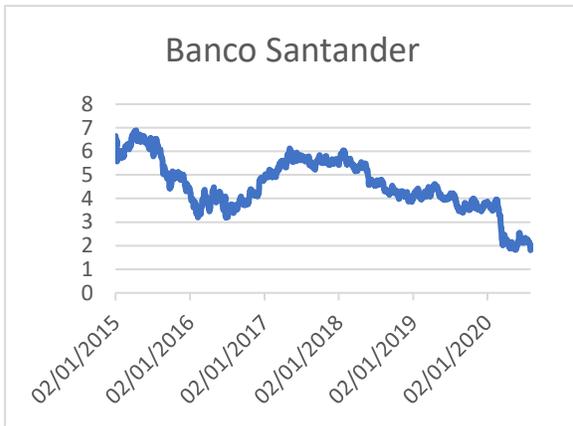


Figura 13 Andamento del prezzo delle azioni di Banco Santander

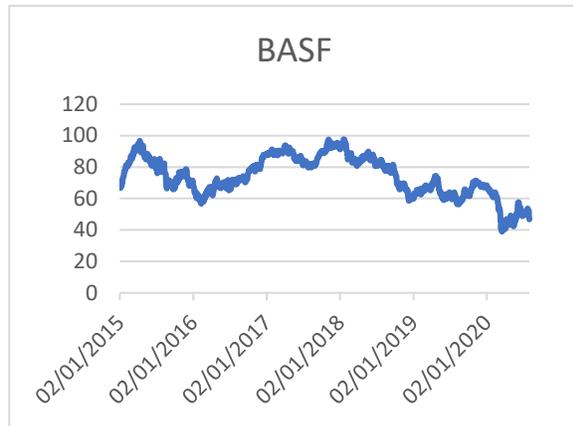


Figura 14 Andamento del prezzo delle azioni di BASF



Figura 15 Andamento del prezzo delle azioni di Bayer

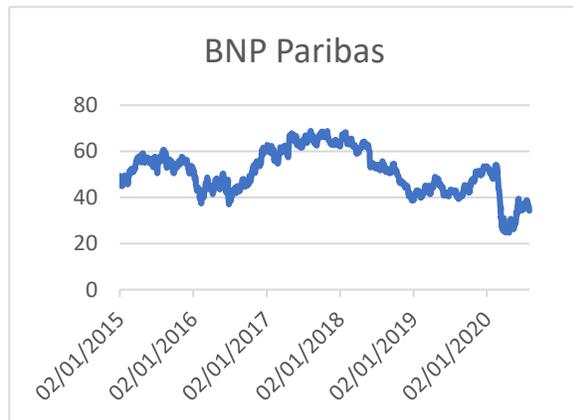


Figura 16 Andamento del prezzo delle azioni di BNP Paribas

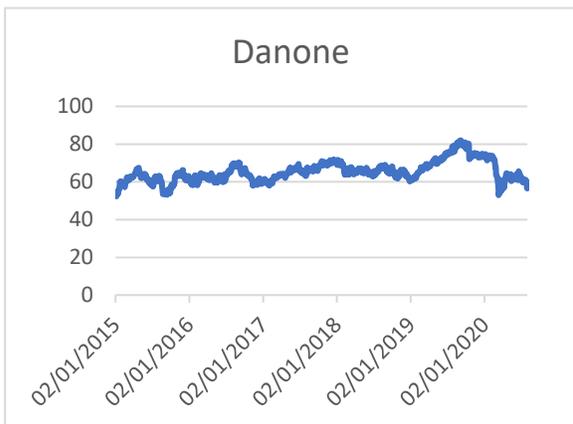


Figura 17 Andamento del prezzo delle azioni di Danone

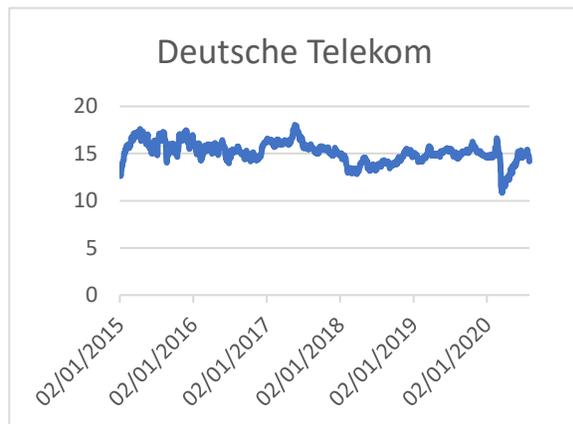


Figura 18 Andamento del prezzo delle azioni di Deutsche Telekom

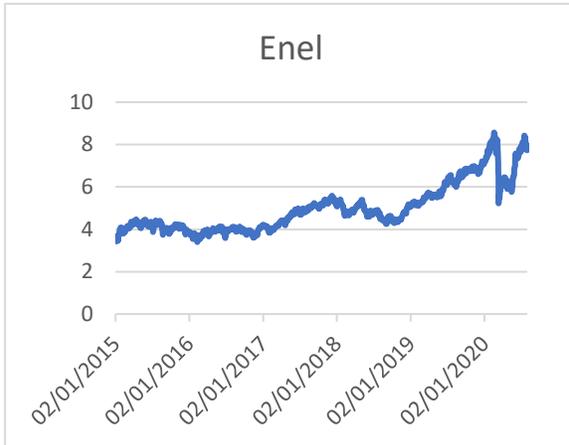


Figura 19 Andamento del prezzo delle azioni di Enel

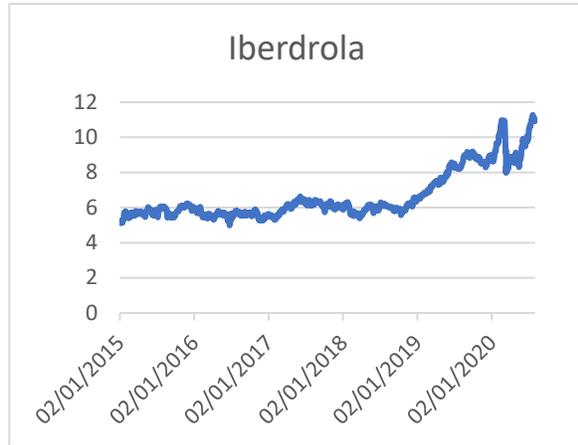


Figura 20 Andamento del prezzo delle azioni di Iberdrola

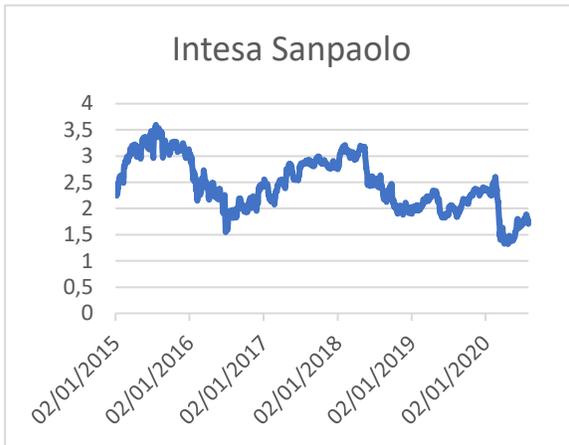


Figura 21 Andamento del prezzo delle azioni di Intesa Sanpaolo



Figura 22 Andamento del prezzo delle azioni di Kering

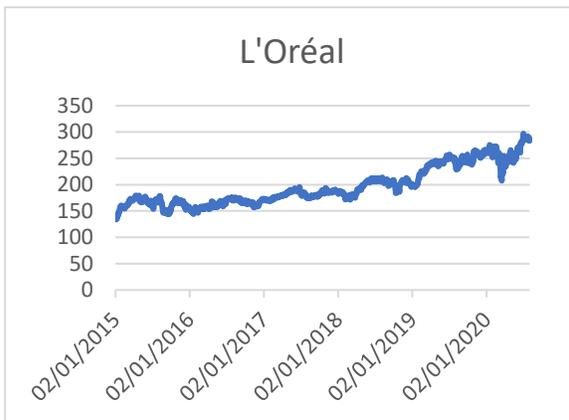


Figura 23 Andamento del prezzo delle azioni di L'Oréal

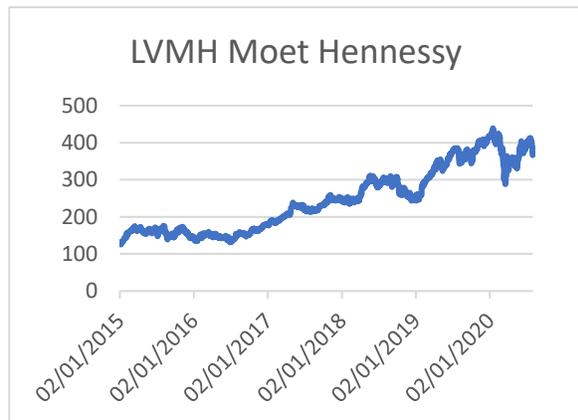


Figura 24 Andamento del prezzo delle azioni di LVMH

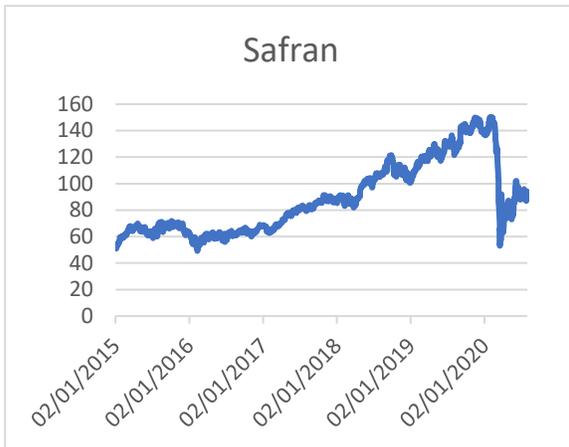


Figura 25 Andamento del prezzo delle azioni di Safran

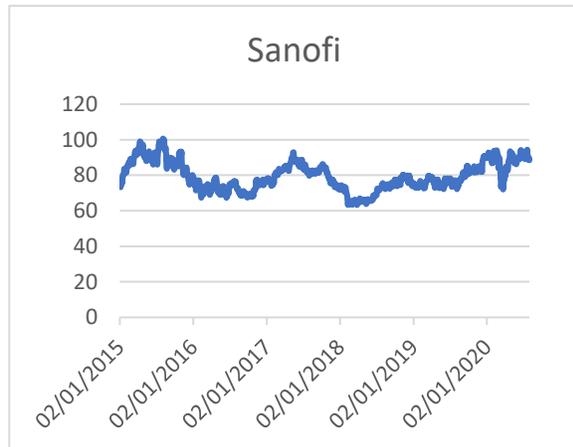


Figura 26 Andamento del prezzo delle azioni di Sanofi

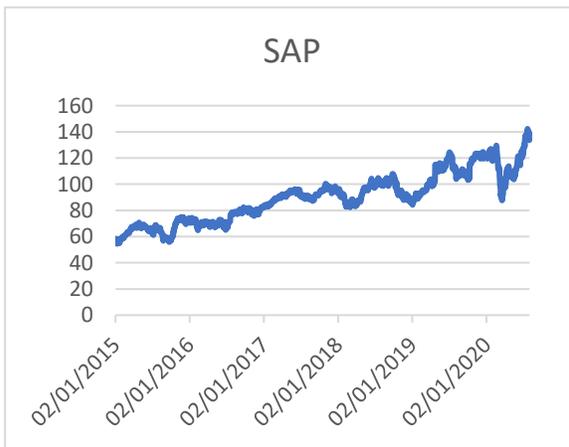


Figura 27 Andamento del prezzo delle azioni di SAP

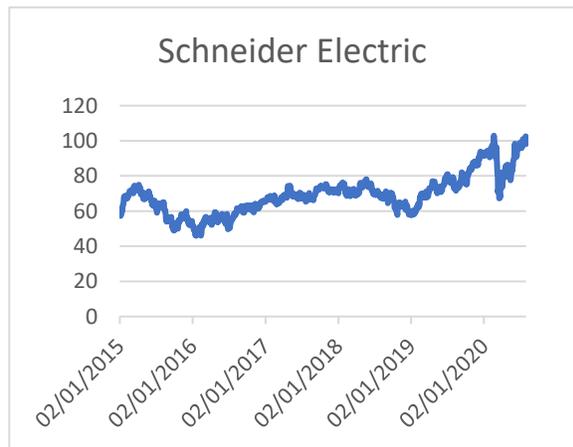


Figura 28 Andamento del prezzo delle azioni di Schneider Electric

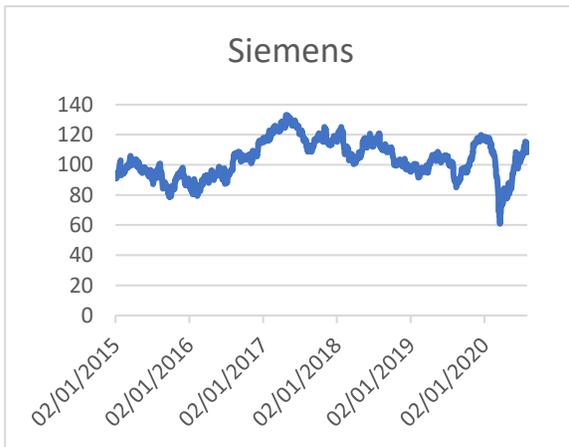


Figura 29 Andamento del prezzo delle azioni di Siemens

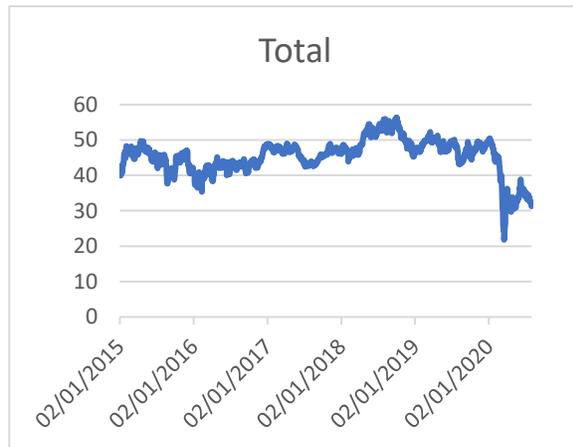


Figura 30 Andamento del prezzo delle azioni di Total

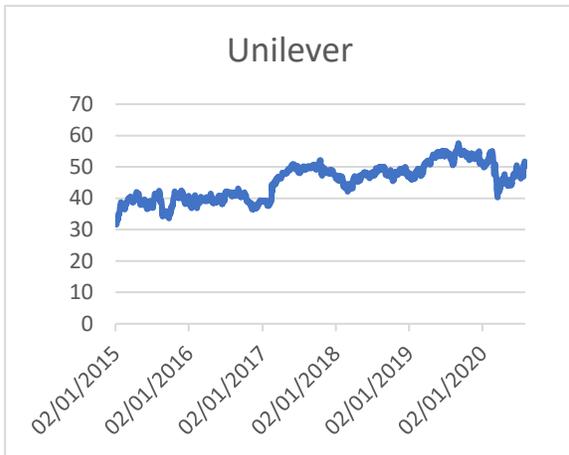


Figura 31 Andamento del prezzo delle azioni di Unilever

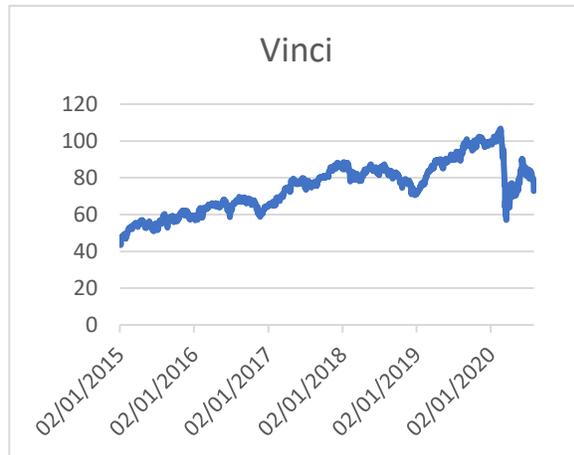


Figura 32 Andamento del prezzo delle azioni di Vinci

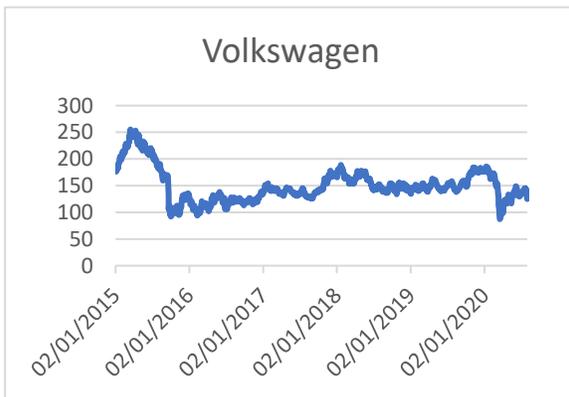


Figura 33 Andamento del prezzo delle azioni di Volkswagen

Dati tali grafici è possibile notare che per alcune società quali Danone, Deutsche Telekom, Sanofi e Volkswagen l'andamento dei prezzi risulta essere perlopiù stazionario in media. Altre imprese, invece presentano degli evidenti andamenti sistematicamente crescenti (*trend* crescenti): ASML, Enel (dal 2016 in poi), Iberdrola (a partire dal gennaio 2019), L'Oréal e LVMH. Safran, invece, pur presentando un *trend* crescente fino al gennaio 2020, ha subito un duro ribasso dei prezzi nei primi mesi di tale anno. Infine, si può evidenziare un andamento tendenzialmente decrescente delle quotazioni per società come Banco Santander, BASF, Bayer e Intesa Sanpaolo.

È da notare, inoltre, come in ogni grafico sia presente un brusco abbassamento del prezzo delle azioni in corrispondenza del mese di marzo 2020: ciò è il sintomo di grande esitazione

da parte del mercato, avvenuto per ogni società in corrispondenza della diffusione di notizie riguardanti la propagazione del virus “Covid-19” in Europa. È interessante dunque notare come un tale evento shock sia riuscito a colpire contemporaneamente più settori totalmente differenti.

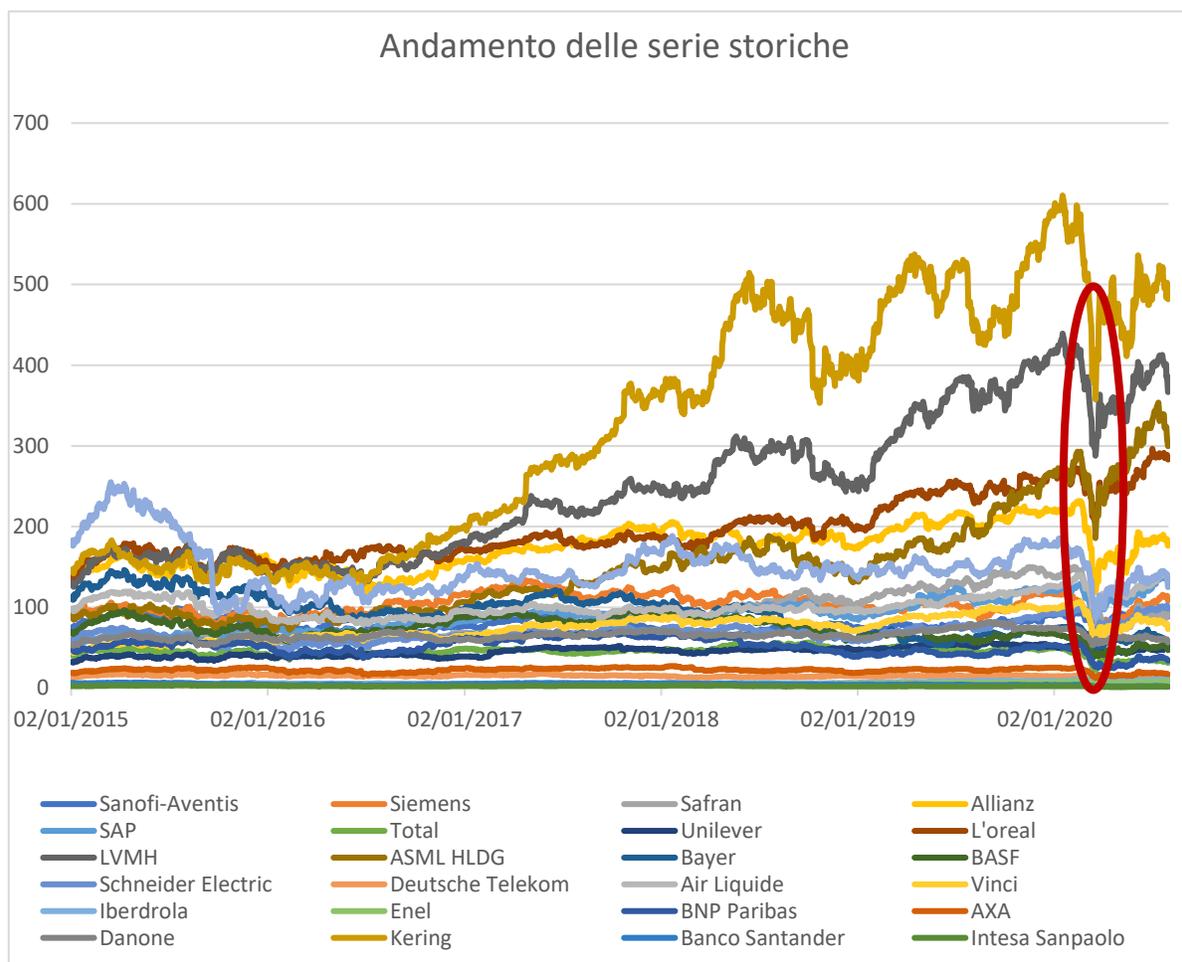


Figura 34 Andamento dei prezzi delle venticinque società prese in esame

4.3 Analisi dei log-rendimenti

Utilizzando le serie storiche dei prezzi raccolte, sono stati calcolati i log-rendimenti giornalieri per ciascuna società. Tale calcolo risulta di fondamentale importanza per poter andare ad analizzare la particolare funzione di distribuzione di probabilità che li caratterizza. Di seguito vi è la rappresentazione grafica della distribuzione di probabilità empirica, per ciascuna società.

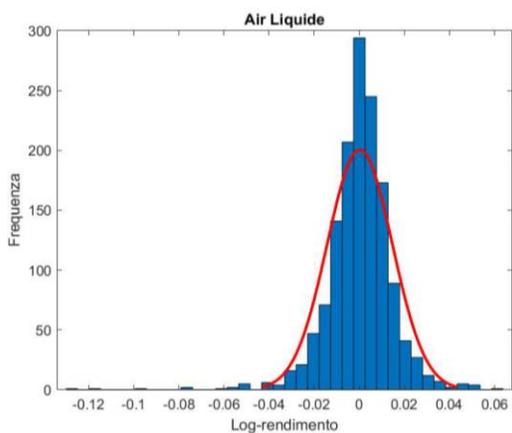


Figura 35 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Air Liquide

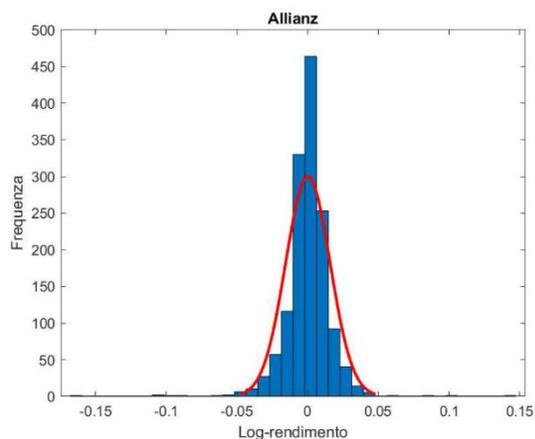


Figura 36 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Allianz

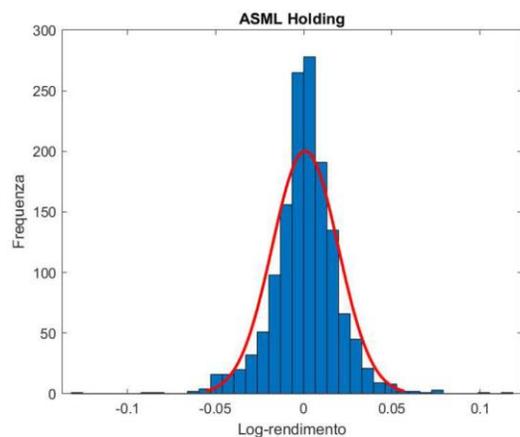


Figura 37 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di ASML Holding

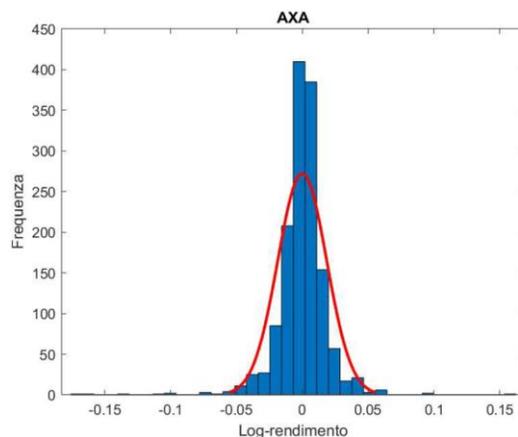


Figura 38 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di AXA

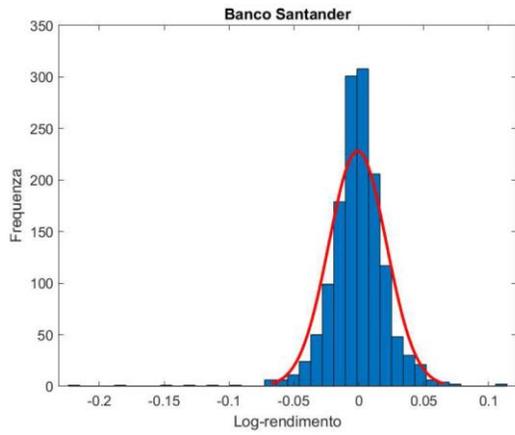


Figura 39 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Banco Santander

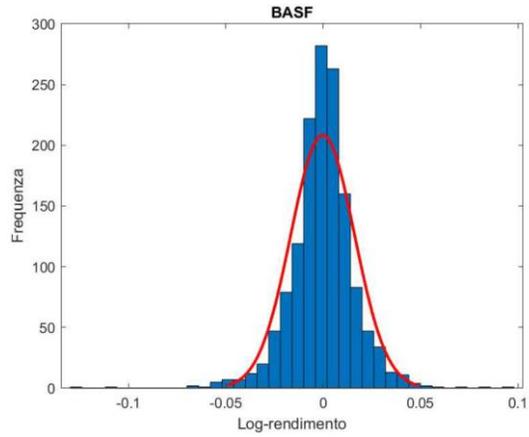


Figura 40 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di BASF

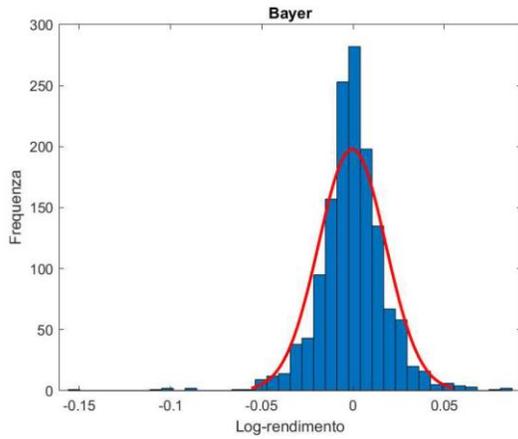


Figura 41 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Bayer

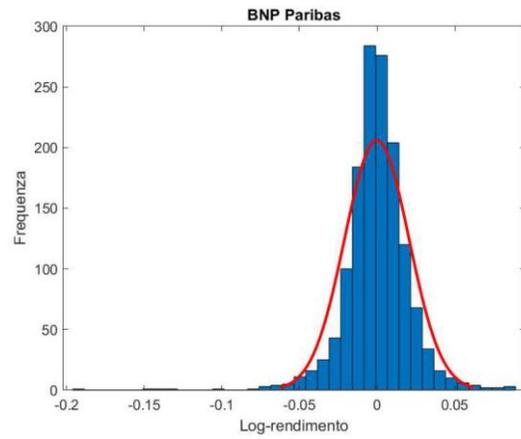


Figura 42 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di BNP Paribas

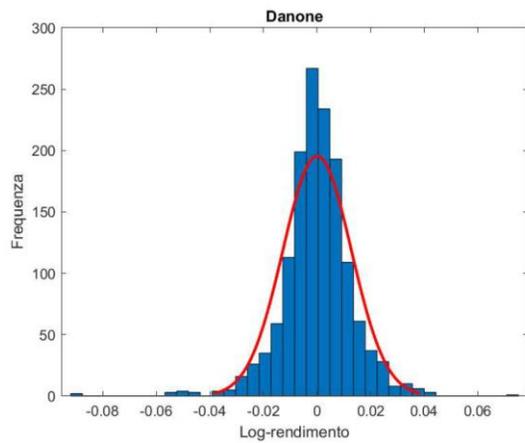


Figura 43 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Danone

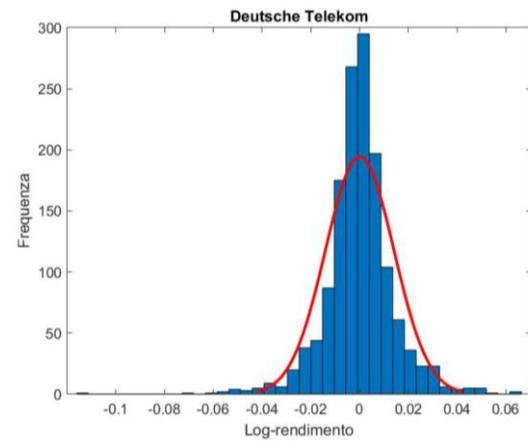


Figura 44 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Deutsche Telekom

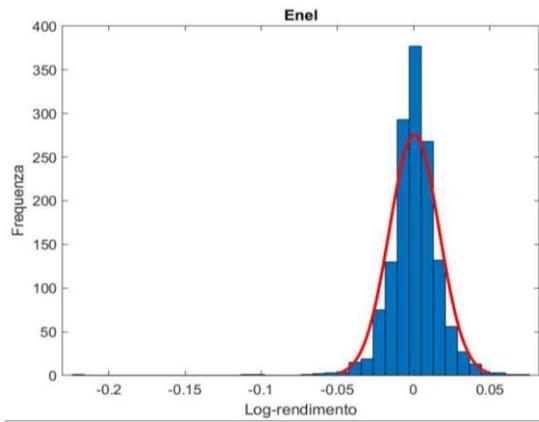


Figura 45 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Enel

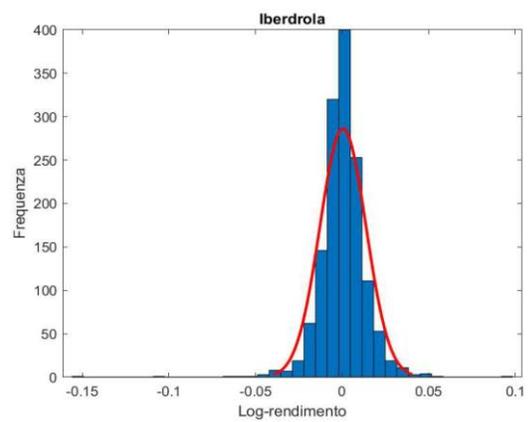


Figura 46 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Iberdrola

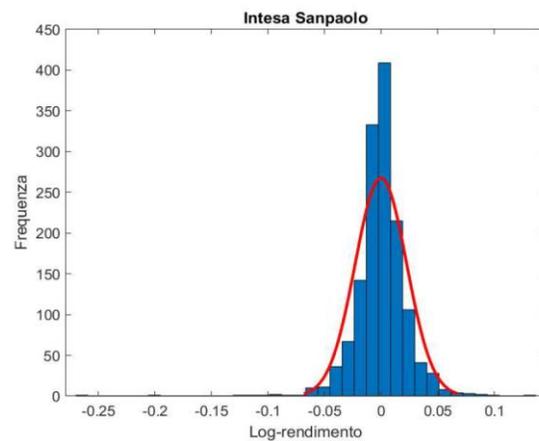


Figura 47 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Intesa Sanpaolo

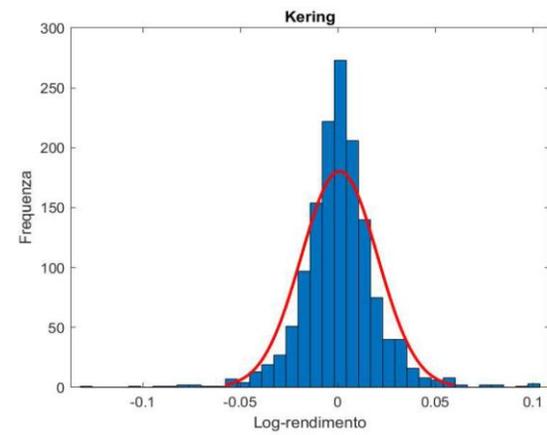


Figura 48 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Kering

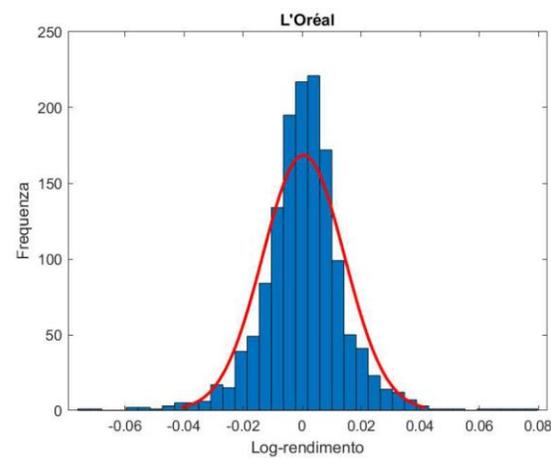


Figura 49 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di L'Oréal

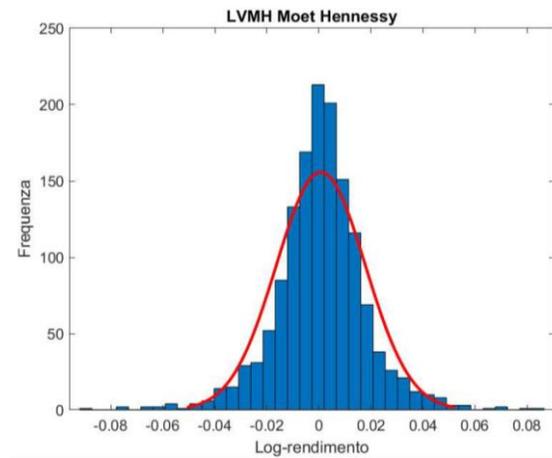


Figura 50 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di LVMH Moët Hennessy

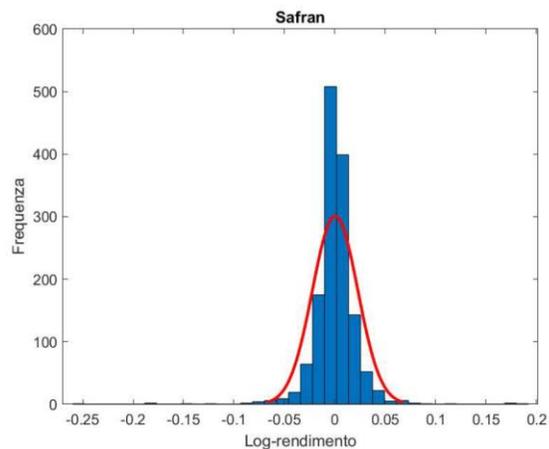


Figura 51 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Safran

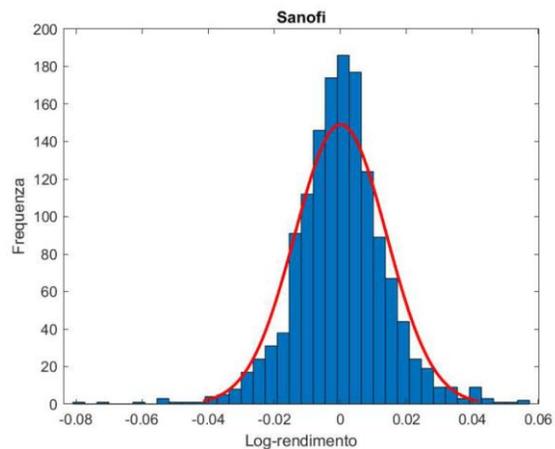


Figura 52 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Sanofi

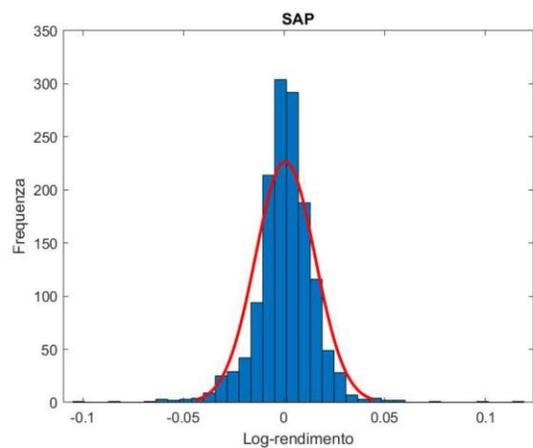


Figura 53 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di SAP

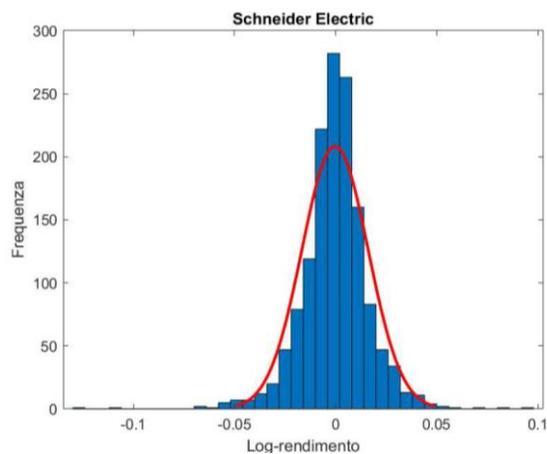


Figura 54 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Schneider Electric

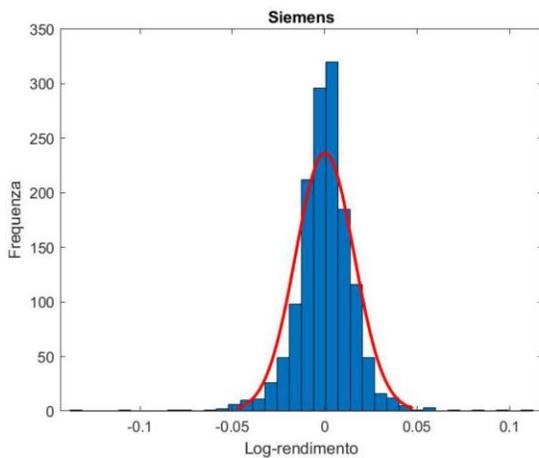


Figura 55 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Siemens

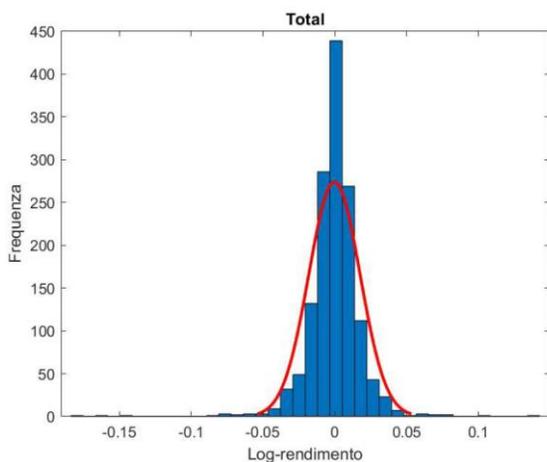


Figura 56 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Total

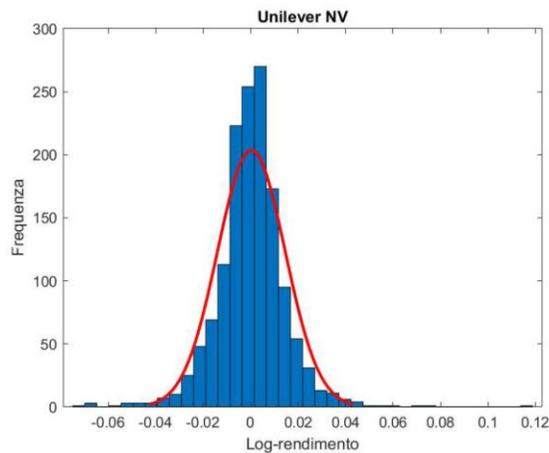


Figura 57 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Unilever NV

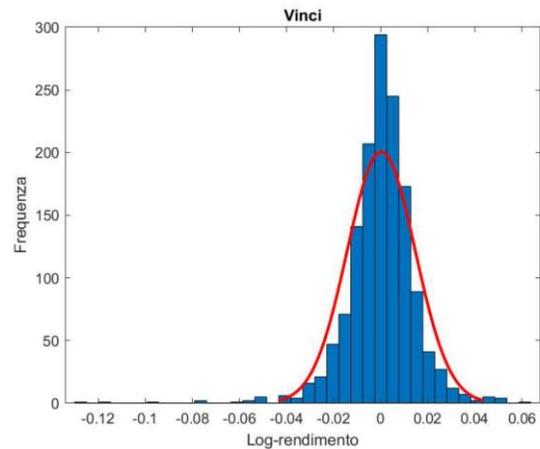


Figura 58 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Vinci

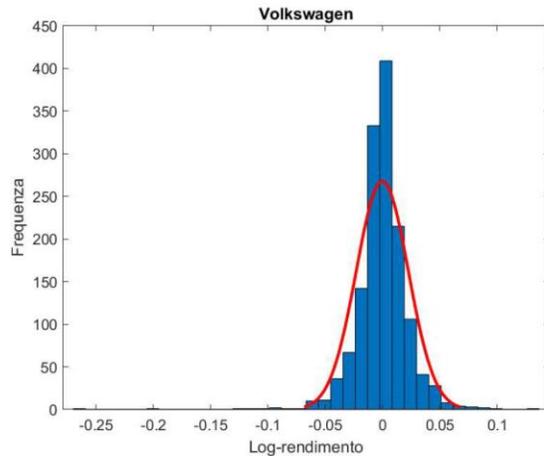


Figura 59 Istogramma delle frequenze dei log-rendimenti di Volkswagen

Ad ogni istogramma è stata sovrapposta la funzione di densità di probabilità normale avente media e deviazione standard del particolare campione preso in esame. A primo impatto le funzioni di distribuzione dei log-rendimenti sembrano essere ben descritte dalla funzione di distribuzione gaussiana. È necessario, però, andare a calcolare le principali statistiche descrittive, in particolare *skewness* e *curtosi*, per poter fornire qualche informazione aggiuntiva riguardo le funzioni di distribuzione dei log-rendimenti.

A tale scopo le statistiche descrittive sono state calcolate e raggruppate nella seguente tabella.

Società	N°	Minimo	Massimo	Media	Mediana	Varianza	S.q.m	Skewness	Curtosi
Air Liquide	1426	-12,675%	6,374%	0,024%	0,093%	0,021%	1,447%	-1,345	10,957
Allianz	1426	-16,638%	14,673%	0,018%	0,066%	0,025%	1,575%	-0,885	19,862
ASML Holding	1426	-13,114%	11,700%	0,085%	0,127%	0,035%	1,875%	-0,159	4,713
AXA	1426	-16,820%	16,166%	-0,009%	0,079%	0,035%	1,858%	-1,045	17,776
Banco Santander	1426	-22,168%	11,341%	-0,091%	-0,053%	0,049%	2,218%	-1,337	13,584
BASF	1426	-12,549%	9,798%	-0,028%	-0,006%	0,027%	1,638%	-0,480	6,179
Bayer	1426	-15,124%	8,376%	-0,049%	-0,044%	0,034%	1,839%	-0,591	6,695
BNP Paribas	1426	-19,117%	8,878%	-0,026%	-0,021%	0,043%	2,070%	-1,121	10,595
Danone	1426	-8,893%	7,427%	0,003%	0,025%	0,016%	1,280%	-0,553	5,401
Deutsche Telekom	1426	-11,267%	6,314%	0,005%	0,000%	0,020%	1,404%	-0,389	5,526
Enel	1426	-22,123%	7,251%	0,052%	0,051%	0,027%	1,630%	-2,087	26,951
Iberdrola	1426	-15,151%	9,611%	0,052%	0,070%	0,018%	1,331%	-1,210	17,963
Intesa Sanpaolo	1426	-26,059%	13,493%	-0,025%	0,000%	0,052%	2,272%	-1,481	18,628
Kering	1426	-13,142%	10,068%	0,083%	0,071%	0,038%	1,955%	-0,060	5,325
L'Oréal	1426	-7,548%	7,718%	0,051%	0,083%	0,019%	1,383%	0,010	4,235
LVMH	1426	-9,078%	8,536%	0,072%	0,095%	0,029%	1,716%	-0,091	3,011
Safran	1426	-25,973%	19,006%	0,039%	0,026%	0,051%	2,248%	-1,031	29,572

Sanofi	1426	-8,092%	5,698%	0,011%	0,000%	0,019%	1,388%	-0,150	2,777
SAP	1426	-10,179%	11,822%	0,058%	0,086%	0,022%	1,480%	-0,042	7,946
Schneider Electric	1426	-15,103%	11,344%	0,035%	0,086%	0,029%	1,708%	-0,618	9,024
Siemens	1426	-13,577%	10,939%	0,010%	0,053%	0,025%	1,588%	-0,406	9,316
Total	1426	-18,162%	13,993%	-0,021%	0,044%	0,032%	1,786%	-1,219	19,464
Unilever NV	1426	-7,436%	11,618%	0,031%	0,000%	0,020%	1,424%	0,202	6,207
Vinci	1426	-18,723%	10,794%	0,033%	0,024%	0,030%	1,725%	-1,342	19,855
Volkswagen	1426	-22,088%	17,434%	-0,027%	-0,043%	0,054%	2,330%	-1,244	15,994

Tabella 2 Statistiche descrittive

Per ogni impresa ci sono 1426 osservazioni, e i rendimenti vengono espressi in percentuale. Si nota come per alcune imprese il rendimento in media sia negativo: Volkswagen, Total, Intesa Sanpaolo, BNP Paribas, Bayer, BASF, Banco Santander e AXA. Ciò viene confermato graficamente da andamenti sistematicamente negativi dei prezzi delle azioni. Per quanto riguarda la volatilità, questa raggiunge i suoi più alti valori con Volkswagen, arrivando al valore di 0,054%, con Safran, al valore 0,051%, Intesa Sanpaolo, al valore 0,052%, PNB Paribas, al valore 0,043%, e Banco Santander, al valore 0,049%. Raggiunge invece il suo minimo con Danone, con un valore di 0,016% (graficamente le quotazioni risultano avere un andamento stazionario).

I valori di *skewness* danno informazioni riguardo l'asimmetria della distribuzione dei rendimenti: se il valore è prossimo allo zero, la distribuzione è da ritenersi simmetrica. Nel nostro caso di studio i valori di *skewness* non superano in valore assoluto 2,087, dunque le distribuzioni dei rendimenti possono essere approssimate, senza grandi errori, ad una distribuzione simmetrica. Si ha conferma di tale supposizione anche dal fatto che il valor medio e la mediana risultano essere molto simili per tutte le serie storiche delle imprese analizzate. In particolare, ASML, Kering, L'Oréal, LVMH e Sanofi presentano valori di

curtosi vicini a 3, suggerendo che tali rendimenti seguano una distribuzione approssimabile alla normale.

La curtosi indica quanto siano “spesse” le code della funzione di densità. Nel nostro caso, questo indice arriva ad assumere valori grandi per Allianz, AXA, Enel, Iberdrola, Intesa Sanpaolo, Safran, Total, Vinci e Volkswagen, suggerendoci, dunque, che tali distribuzioni abbiano le cosiddette “code grosse”. Ciò implica che se le funzioni di densità di tali rendimenti si approssimassero ad una distribuzione normale, si avrebbe una sottostima della probabilità di accadimento degli eventi nelle code.

4.4 Stazionarietà delle serie storiche: modello di random walk

Una delle domande, che ci si pone nel momento in cui si lavora con le serie storiche delle quotazioni, è se i prezzi raggiunti per un certo titolo nel mercato finanziario siano in qualche modo prevedibili. Per cercare di rispondere a tale quesito, è necessario sottolineare l'importanza del concetto di “efficienza” dei mercati finanziari. In particolare, il mercato finanziario presenta tre gradi di efficienza:

- Efficienza in forma debole: le informazioni storiche sono già incorporate nel prezzo del titolo;
- Efficienza in forma semi-forte: ad ogni nuova informazione resa di dominio pubblico, il prezzo si aggiusta in relazione all'interpretazione che il mercato dà alla notizia in maniera istantanea;
- Efficienza in forma forte: ogni informazione, anche se ancora non divulgata al pubblico, è già inclusa nel prezzo.

Nel mercato finanziario si è osservata prevalentemente un'efficienza in forma debole, che risulta sufficiente per sostenere l'inefficacia dell'analisi tecnica, e dunque l'imprevedibilità dell'andamento dei prezzi. Sulla base di tali presupposti si è sempre più diffusa la *Random Walk Theory*. La teoria del *Random Walk* si basa sul presupposto fondamentale che i prezzi dei titoli rispecchino tutte le informazioni disponibili in ogni momento: i movimenti imprevedibili dei prezzi si verificano unicamente in risposta ad informazioni nuove, che sono di per sé imprevedibili. In accordo con tale teoria, quindi, i prezzi degli *asset* finanziari sono

continuamente in equilibrio rispetto alle informazioni passate, e si muovono esclusivamente in corrispondenza di nuove informazioni rese note sul mercato, che essendo irregolari, generano un movimento aleatorio e casuale dei prezzi. [6]

Un processo viene definito *Random walk* se è dato dalla somma di variabili identicamente ed indipendentemente distribuite (i.i.d.) X_i :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Quando X_i assume come unici valori $+1$ e -1 , con $P[X = 1] = p$ e $P[X = -1] = 1 - p$, il processo prende il nome di *Bernoulli random walk*, e se $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, il processo è considerato *simple random walk*.

La *random walk* è la serie temporale non stazionaria più semplice da studiare, ed è definita come:

$$X_t = \mu + X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Dove $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, e μ è una costante (o *drift*), che può assumere valore zero. In particolare, è definito non stazionario in quanto $Var[X_t] = \sigma_\varepsilon^2 t$.

Per poter verificare, dunque, se ad un processo che si sta esaminando sia applicabile o meno il modello *Random walk*, è necessario partire dalla seguente forma:

$$X_t = \mu + \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Si va quindi ad effettuare un test per verificare se ρ sia o meno pari ad 1. Uno dei test che si basa su tale principio è il Dickey e Fuller, che viene applicato ad una trasformazione della regressione lineare scritta in precedenza:

$$\Delta X_t = \mu + (\rho - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t = \mu + \theta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

L'ipotesi nulla di tale test riguarda l'esistenza di una radice unitaria ($H_0: \theta = 0$), mentre l'ipotesi alternativa individua l'assenza della radice unitaria ($H_1: \theta < 0$).

La procedura di Dickey–Fuller fornisce un set di valori critici, sviluppati per affrontare casi di distribuzioni non standard, da andare a confrontare con i valori assunti dalla statistica t: la statistica $t = \frac{\text{coefficiente}}{\text{errore standard}}$, difatti, non può essere confrontata con i valori della *t-student*, come solitamente accade nei test di ipotesi effettuati su di un campione. L’implementazione del test consiste nel creare una semplice regressione convenzionale, verificando che la variabile X_{t-1} non sia statisticamente significativa.

Se il residuo non è un *white noise*, essendo presente la correlazione seriale, ΔX_t può essere rappresentata come un processo autoregressivo:

$$\Delta X_t = \mu + \theta X_{t-1} + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t$$

Dove “p” indica la lunghezza del lag. Il test corrispondente a tale equazione prende il nome di *Augmented Dickey–Fuller test* (ADF test). È possibile, inoltre, aggiungere a tale regressione un *trend* deterministico. [7]

Ci si propone dunque di applicare il test ADF alle serie storiche di dati raccolti, per verificare che i prezzi delle quotazioni possano essere rappresentati attraverso un modello di *random walk*. Si è scelto un livello di confidenza α del 5%, ed una lunghezza del lag tale da rispettare l’*Akaike Information Criterion* (AIC)⁶ per ogni serie storica analizzata. Di seguito sono riportati i risultati di tale test.

Air Liquide

```

Augmented Dickey-Fuller test for unit root          Number of obs   =       1425

              _____ Interpolated Dickey-Fuller _____
              Test          1% Critical    5% Critical    10% Critical
              Statistic     Value         Value         Value
-----
Z(t)          -0.877         -3.430         -2.860         -2.570
-----
MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.7953

```

Figura 60 Valori del test ADF per Air Liquide

⁶ Per trovare la *lag length* ottimale per ogni serie storica è stato utilizzato il comando “varsoc” del *software* “Stata”.

Allianz

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1423

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-2.420	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.1362

Figura 61 Valori del test ADF per Allianz

ASML Holding

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1426

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	0.261	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.9755

Figura 62 Valori del test ADF per ASML Holding

AXA

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1424

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-3.039	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0314

Figura 63 Valori del test ADF per AXA

Banco Santander

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1426

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-1.101	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.7145

Figura 64 Valori del test ADF per Banco Santander

BASF

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1425

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-1.047	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.7358

Figura 65 Valori del test ADF per BASF

Bayer

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1426

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-0.984	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.7590

Figura 66 Valori del test ADF per Bayer

BNP Paribas

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1425

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-1.553	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.5070

Figura 67 Valori del test ADF per BNP Paribas

Danone

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1426

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-2.981	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0367

Figura 68 Valori del test ADF per Danone

Deutsche Telekom

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1426

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-3.772	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0032

Figura 69 Valori del test ADF per Deutsche Telekom

Enel

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1424

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-0.873	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.7969

Figura 70 Valori del test ADF per Enel

Iberdrola

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1424

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	0.194	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.9719

Figura 71 Valori del test ADF per Iberdrola

Intesa Sanpaolo

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1426

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller		
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	-1.658	-3.430	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.4531

Figura 72 Valori del test ADF per Intesa Sanpaolo

Kering

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1424

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller		
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	-1.025	-3.430	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.7441

Figura 73 Valori del test ADF per Kering

L'Oréal

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1425

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller		
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	-0.880	-3.430	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.7946

Figura 74 Valori del test ADF per L'Oréal

LVMH Moët Hennessy

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1426

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller		
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	-0.939	-3.430	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.7748

Figura 75 Valori del test ADF per LVMH Moët Hennessy

Safran

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1424

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-1.804	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.3787

Figura 76 Valori del test ADF per Safran

Sanofi

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1426

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-2.532	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.1078

Figura 77 Valori del test ADF per Sanofi

SAP

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1425

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-0.940	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.7746

Figura 78 Valori del test ADF per SAP

Schneider Electric

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1426

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-1.265	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.6451

Figura 79 Valori del test ADF per Schneider Electric

Siemens

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1426

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-2.343	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.1585

Figura 80 Valori del test ADF per Siemens

Total

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1425

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-2.178	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.2143

Figura 81 Valori del test ADF per Total

Unilever NV

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1425

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-2.580	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0972

Figura 82 Valori del test ADF per Unilever NV

Vinci

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 1425

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-2.382	-3.430	-2.860	-2.570

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.1469

Figura 83 Valori del test ADF per Vinci

Volkswagen

Augmented Dickey-Fuller test for unit root		Number of obs = 1423	
		Interpolated Dickey-Fuller	
Test Statistic	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	-2.295	-2.860	-2.570
MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.1735			

Figura 84 Valori del test ADF per Volkswagen

Analizzando questi risultati ottenuti attraverso il software “Stata”, è possibile affermare che la maggioranza delle serie storiche prese in considerazione in tale studio risulta essere caratterizzata da una radice unitaria. Non è difatti possibile rifiutare l’ipotesi nulla H_0 con un livello di significatività pari al 5%: il campione non fornisce prove sufficienti a provocarne il rifiuto. Si osserva, infatti, che la variabile $z(t)$, rappresentante la statistica t calcolata per X_{t-1} nella regressione, assume valori meno negativi rispetto alla soglia critica di $-2,86$ per il livello di significatività α del 5%. Più semplicemente si osserva che il p -value risulta nella maggior parte dei casi maggiore di $0,05$. Questo risultato ci porta ad affermare che $\theta = 0$, e dunque vi è assenza di correlazione tra i prezzi di periodi differenti, il cui andamento viene dunque ben descritto dal modello *random walk*. Fallisce, invece, il test la Deutsche Telekom il cui p -value risulta pari a $0,32\%$: l’evidenza empirica porta ad affermare che X_{t-1} risulta statisticamente significativo nel calcolo di ΔX_t . In tal caso non è possibile affermare che il processo di generazione dei prezzi abbia radice unitaria. Infine, Danone risulta fallire il test ad un livello di significatività del 5%. Osservando il p -value si nota d’altronde che questo è pari a $3,67\%$, indicando dunque che tale test non rifiuta l’ipotesi nulla per un livello di significatività pari all’1%: abbassando il livello di significatività il test indica che Danone possiede un andamento dei prezzi descrivibile dalla *random walk theory*, ma si va ad aumentare la possibilità di incappare nell’errore del secondo tipo⁷. È di fondamentale importanza sottolineare che pur essendo utile effettuare tale tipo di test, purtroppo non fornisce una verità assoluta, portandoci talvolta a commettere degli errori di valutazione.

⁷ L’errore di secondo tipo consiste nel non rifiutare H_0 quando questa è falsa.

Capitolo 5

Applicazione dei modelli di ottimizzazione

Nei precedenti capitoli di questa tesi, a partire dal modello di ottimizzazione di Markowitz, si è andati ad analizzare, da un punto di vista prettamente teorico, le misure di rischio alternative alla varianza, che è possibile utilizzare nell'ambito dell'*asset allocation*. Nel seguente capitolo si procede, invece, all'applicazione di tali modelli di ottimizzazione ad un portafoglio costituito da venticinque *asset*, selezionati tra le componenti dell'indice Euro Stoxx 50⁸. In particolare, sono state utilizzate le serie storiche, raccolte per un periodo che va dal 1° gennaio 2015 al 31 luglio 2020, per la costruzione delle frontiere di portafogli efficienti con il modello classico, il modello media-VaR e il modello media-ES. Si sottolinea che tali dati sono stati analizzati nel precedente capitolo per poterne comprendere i *trend* dei prezzi e la funzione di distribuzione dei rendimenti. In tale analisi empirica ci si propone di evidenziare le eventuali differenze dovute all'applicazione di questi diversi modelli, al fine di valutare quale metodo riesca a far ottenere un miglior risultato.

5.1 Dati

Le venticinque società selezionate per realizzare lo studio sono: Air Liquide, Allianz, ASML Holding, AXA, Banco Santander, BASF, Bayer, BNP Paribas, Danone, Deutsche Telekom, Enel, Iberdrola, Intesa Sanpaolo, Kering, L'Oréal, LVMH Moët Hennessy, Safran, Sanofi, SAP, Schneider Electric, Siemens, Total, Unilever NV, Vinci e Volkswagen. Una volta effettuata la selezione delle società i cui *asset* avrebbero costituito il nostro portafoglio, si è proceduto con la raccolta delle serie storiche dei prezzi delle azioni. A partire da tali dati è stato possibile calcolare il log-rendimenti giornalieri, da cui ricavare il vettore dei rendimenti medi attesi e la matrice varianza-covarianza, necessari per la costruzione della frontiera efficiente.

⁸ L'Euro Stoxx 50 è un indice rappresentante le più importanti aziende presenti nell'Eurozona con una composizione aggiornata ogni anno.

Il vettore dei log-rendimenti medi è il seguente:

Società	Air Liquide	Allianz	ASML Holding	AXA	Banco Santander	BASF	Bayer	BNP Paribas
R atteso	0,024%	0,018%	0,085%	-0,009%	-0,091%	-0,028%	-0,049%	-0,026%

Società	Danone	Deutsche Telekom	Enel	Iberdrola	Intesa Sanpaolo	Kering	L'Oréal	LVMH	Safran
R atteso	0,003%	0,005%	0,052%	0,052%	-0,025%	0,083%	0,051%	0,072%	0,039%

Società	Sanofi	SAP	Schneider Electric	Siemens	Total	Unilever NV	Vinci	Volkswagen
R atteso	0,011%	0,058%	0,035%	0,010%	-0,021%	0,031%	0,033%	-0,027%

Tabella 3 Vettore dei rendimenti medi giornalieri

La matrice varianza-covarianza si presenta come una matrice triangolare, in quanto simmetrica, ed è riportata di seguito:

	Air Liquide	Allianz	ASML HLDG	AXA	Banco Santander	BASF	Bayer	BNP Paribas	Danone	Deutsche Telekom	Enel	Iberdrola	Intesa Sanpaolo
Air Liquide	0,0002093												
Allianz	0,0001440	0,0002481											
ASML HLDG	0,0001457	0,0001611	0,0003514										
AXA	0,0001534	0,0002416	0,0001626	0,0003453									
Banco Santander	0,0001745	0,0002441	0,0001875	0,0003022	0,0004918								
BASF	0,0001601	0,0001910	0,0001754	0,0002088	0,0002496	0,0002682							
Bayer	0,0001544	0,0001735	0,0001704	0,0001805	0,0002151	0,0001984	0,0003382						
BNP Paribas	0,0001671	0,0002405	0,0001761	0,0002998	0,0003800	0,0002347	0,0002048	0,0004286					
Danone	0,0001028	0,0000937	0,0000943	0,0000970	0,0001122	0,0001018	0,0001167	0,0001067	0,0001639				
Deutsche Telekom	0,0001244	0,0001429	0,0001327	0,0001518	0,0001728	0,0001453	0,0001477	0,0001601	0,0000981	0,0001971			
Enel	0,0001219	0,0001333	0,0001164	0,0001539	0,0001741	0,0001346	0,0001301	0,0001558	0,0000974	0,0001254	0,0002658		
Iberdrola	0,0001068	0,0001140	0,0000924	0,0001234	0,0001598	0,0001060	0,0001107	0,0001373	0,0000895	0,0001064	0,0001259	0,0001772	
Intesa Sanpaolo	0,0001474	0,0002047	0,0001532	0,0002617	0,0003044	0,0001975	0,0001763	0,0003027	0,0000873	0,0001413	0,0002319	0,0001067	0,0005163
Kering	0,0001583	0,0001790	0,0001833	0,0001918	0,0002151	0,0001892	0,0001762	0,0002058	0,0001082	0,0001313	0,0001252	0,0001060	0,0001649
L'Oréal	0,0001240	0,0001216	0,0001265	0,0001286	0,0001344	0,0001276	0,0001326	0,0001287	0,0001167	0,0001175	0,0001184	0,0001008	0,0001104
LVMH	0,0001577	0,0001718	0,0001876	0,0001869	0,0002101	0,0001851	0,0001821	0,0002042	0,0001137	0,0001354	0,0001288	0,0001074	0,0001659
Safran	0,0001632	0,0002278	0,0002152	0,0002507	0,0002461	0,0002115	0,0001830	0,0002739	0,0001036	0,0001574	0,0001417	0,0001219	0,0002143
Sanofi	0,0001073	0,0001081	0,0001185	0,0001134	0,0001305	0,0001089	0,0001418	0,0001180	0,0000976	0,0001059	0,0001015	0,0000866	0,0001044
SAP	0,0001282	0,0001463	0,0001662	0,0001502	0,0001688	0,0001500	0,0001400	0,0001580	0,0000966	0,0001160	0,0001112	0,0000917	0,0001341
Schneider Electric	0,0001601	0,0001889	0,0001885	0,0002104	0,0002495	0,0002001	0,0001787	0,0002347	0,0001124	0,0001330	0,0001359	0,0001170	0,0001957
Siemens	0,0001469	0,0001855	0,0001708	0,0001999	0,0002320	0,0002007	0,0001745	0,0002148	0,0000916	0,0001314	0,0001235	0,0000986	0,0001822
Total	0,0001502	0,0001908	0,0001655	0,0002119	0,0002630	0,0001931	0,0001793	0,0002363	0,0000938	0,0001422	0,0001441	0,0001160	0,0001875
Unilever	0,0001037	0,0000956	0,0000966	0,0001009	0,0001029	0,0000996	0,0001119	0,0000977	0,0001151	0,0001051	0,0001002	0,0000894	0,0000900
Vinci	0,0001499	0,0001800	0,0001632	0,0001974	0,0002139	0,0001759	0,0001693	0,0002165	0,0001162	0,0001495	0,0001462	0,0001375	0,0001764
Volkswagen	0,0001638	0,0002356	0,0002082	0,0002630	0,0003156	0,0002474	0,0002181	0,0002897	0,0001013	0,0001624	0,0001500	0,0001252	0,0002402

	Intesa Sanpaolo	Kering	L'Oréal	LVMH	Safran	Sanofi	SAP	Schneider Electric	Siemens	Total	Unilever	Vinci	Volkswagen
Air Liquide													
Allianz													
ASML HLDG													
AXA													
Banco Santander													
BASF													
Bayer													
BNP Paribas													
Danone													
Deutsche Telekom													
Enel													
Iberdrola													
Intesa Sanpaolo	0,0005163												
Kering	0,0001649	0,0003821											
L'Oréal	0,0001104	0,0001480	0,0001914										
LVMH	0,0001659	0,0002557	0,0001604	0,0002945									
Safran	0,0002143	0,0002376	0,0001468	0,0002124	0,0005053								
Sanofi	0,0001044	0,0001071	0,0001094	0,0001177	0,0001147	0,0001927							
SAP	0,0001341	0,0001606	0,0001231	0,0001559	0,0001716	0,0001012	0,0002190						
Schneider Electric	0,0001957	0,0001961	0,0001340	0,0001912	0,0002289	0,0001209	0,0001574	0,0002919					
Siemens	0,0001822	0,0001815	0,0001195	0,0001752	0,0002166	0,0001048	0,0001488	0,0002038	0,0002521				
Total	0,0001875	0,0001818	0,0001246	0,0001781	0,0002316	0,0001128	0,0001385	0,0001920	0,0001930	0,0003188			
Unilever	0,0000900	0,0001088	0,0001324	0,0001147	0,0001093	0,0000975	0,0000956	0,0001008	0,0000905	0,0000933	0,0002028		
Vinci	0,0001764	0,0001875	0,0001327	0,0001785	0,0002622	0,0001106	0,0001504	0,0001890	0,0001758	0,0001843	0,0001156	0,0002974	
Volkswagen	0,0002402	0,0002280	0,0001297	0,0002239	0,0002744	0,0001129	0,0001766	0,0002407	0,0002326	0,0002382	0,0000934	0,0002140	0,0005431

Tabella 4 Matrice di Varianza-Covarianza giornaliera

Inoltre, è possibile effettuare l'analisi delle correlazioni tra le serie storiche: il coefficiente di correlazione indica se esiste un'eventuale relazione lineare tra due variabili statistiche. Tale indice è calcolato mediante la seguente formula:

$$\rho_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 * (y_i - \bar{y})^2}}$$

L'indice, così calcolato, assume valori compresi nell'intervallo [-1; +1], ed in particolare va ad indicare correlazione perfetta positiva/negativa per valori pari a +1/-1, ed assenza di correlazione per valori pari a 0.

Nel nostro caso di studio tale matrice simmetrica è la seguente:

	Air Liquide	Allianz	ASML HLDG	AXA	Banco Santander	BASF	Bayer	BNP Paribas	Danone	Deutsche Telekom	Enel	Iberdrola	Intesa Sanpaolo
Air Liquide	1												
Allianz	0,63186	1											
ASML HLDG	0,53740	0,54558	1										
AXA	0,57072	0,82550	0,46692	1									
Banco Santander	0,54392	0,69896	0,45108	0,73325	1								
BASF	0,67558	0,74043	0,57124	0,68617	0,68728	1							
Bayer	0,58045	0,59908	0,49444	0,52812	0,52738	0,65878	1						
BNP Paribas	0,55783	0,73758	0,45380	0,77927	0,82760	0,69233	0,53796	1					
Danone	0,55501	0,46484	0,39315	0,40791	0,39516	0,48571	0,49556	0,40260	1				
Deutsche Telekom	0,61243	0,64636	0,50422	0,58182	0,55499	0,63194	0,57234	0,55099	0,54584	1			
Enel	0,51692	0,51914	0,38083	0,50786	0,48160	0,50396	0,43389	0,46144	0,46644	0,54778	1		
Iberdrola	0,55464	0,54363	0,37027	0,49870	0,54139	0,48608	0,45231	0,49805	0,52516	0,56942	0,58006	1	
Intesa Sanpaolo	0,44847	0,57208	0,35966	0,61974	0,60410	0,53071	0,42197	0,64339	0,29997	0,44283	0,62613	0,35270	1
Kering	0,55960	0,58156	0,50026	0,52795	0,49612	0,59119	0,49006	0,50860	0,43224	0,47849	0,39286	0,40749	0,37118
L'Oréal	0,61935	0,55790	0,48779	0,50041	0,43795	0,56326	0,52117	0,44935	0,65923	0,60498	0,52495	0,54746	0,35127
LVMH	0,63503	0,63558	0,58332	0,58607	0,55215	0,65869	0,57692	0,57464	0,51775	0,56187	0,46054	0,47011	0,42551
Safran	0,50173	0,64338	0,51079	0,60015	0,49363	0,57453	0,44276	0,58847	0,35998	0,49871	0,38669	0,40720	0,41960
Sanofi	0,53415	0,49458	0,45521	0,43961	0,42377	0,47892	0,55537	0,41050	0,54896	0,54363	0,44843	0,46888	0,33087
SAP	0,59892	0,62749	0,59916	0,54601	0,51422	0,61912	0,51460	0,51578	0,51005	0,55839	0,46094	0,46565	0,39884
Schneider Electric	0,64777	0,70219	0,58855	0,66280	0,65840	0,71513	0,56879	0,66357	0,51370	0,55441	0,48797	0,51437	0,50424
Siemens	0,63956	0,74160	0,57396	0,67740	0,65886	0,77175	0,59754	0,65357	0,45062	0,58957	0,47692	0,46630	0,50515
Total	0,58127	0,67859	0,49449	0,63851	0,66416	0,66031	0,54605	0,63919	0,41027	0,56720	0,49505	0,48825	0,46215
Unilever	0,50344	0,42603	0,36184	0,38110	0,32589	0,42714	0,42719	0,33121	0,63136	0,52584	0,43154	0,47141	0,27822
Vinci	0,60075	0,66279	0,50480	0,61584	0,55931	0,62282	0,53385	0,60625	0,52646	0,61739	0,52001	0,59902	0,45020
Volkswagen	0,48593	0,64182	0,47668	0,60723	0,61056	0,64835	0,50890	0,60042	0,33965	0,49652	0,39481	0,40361	0,45366

	Intesa Sanpaolo	Kering	L'Oréal	LVMH	Safran	Sanofi	SAP	Schneider Electric	Siemens	Total	Unilever	Vinci	Volkswagen
Air Liquide													
Allianz													
ASML HLDG													
AXA													
Banco Santander													
BASF													
Bayer													
BNP Paribas													
Danone													
Deutsche Telekom													
Enel													
Iberdrola													
Intesa Sanpaolo	1												
Kering	0,37118	1											
L'Oréal	0,35127	0,54750	1										
LVMH	0,42551	0,76243	0,67559	1									
Safran	0,41960	0,54075	0,47210	0,55054	1								
Sanofi	0,33087	0,39478	0,56983	0,49396	0,36739	1							
SAP	0,39884	0,55522	0,60144	0,61369	0,51569	0,49238	1						
Schneider Electric	0,50424	0,58709	0,56675	0,65212	0,59609	0,50977	0,62246	1					
Siemens	0,50515	0,58491	0,54389	0,64303	0,60683	0,47547	0,63312	0,75122	1				
Total	0,46215	0,52101	0,50428	0,58123	0,57713	0,45496	0,52432	0,62931	0,68065	1			
Unilever	0,27822	0,39074	0,67208	0,46953	0,34132	0,49318	0,45360	0,41409	0,40010	0,36699	1		
Vinci	0,45020	0,55627	0,55626	0,60325	0,67626	0,46216	0,58925	0,64163	0,64221	0,59844	0,47054	1	
Volkswagen	0,45366	0,50050	0,40232	0,55976	0,52373	0,34906	0,51205	0,60463	0,62861	0,57238	0,28133	0,53239	1

Tabella 5 Matrice delle correlazioni giornaliere

Da tale tabella si evince come ci sia alta correlazione tra la serie storica di Allianz e quelle di AXA, BASF, BNP Paribas, Schneider Electric e Siemens, tra la serie storica di AXA e quelle di Banco Santander e BNP Paribas, tra quella di Banco Santander e PNB Paribas, tra quella di BASF e quelle di Schneider Electric e Siemens, tra quella di Kering e LVMH e tra la serie storica di Schneider Electric e Siemens.

5.2 Modello media-varianza

A questo punto, avendo raccolto tutte le informazioni necessarie, è possibile procedere alla costruzione della frontiera di portafogli efficienti grazie al modello di Markowitz. Per disegnare la frontiera efficiente è stato utilizzato il software MATLAB, inserendo in input il file Excel contenente le serie storiche dei prezzi delle azioni costituenti il nostro portafoglio.

Di seguito è riportato il grafico nel caso in cui si vada ad investire unicamente in *asset* rischiosi, in presenza del vincolo di *short-selling*. In particolare, si è scelto di annualizzare la deviazione standard e i rendimenti.

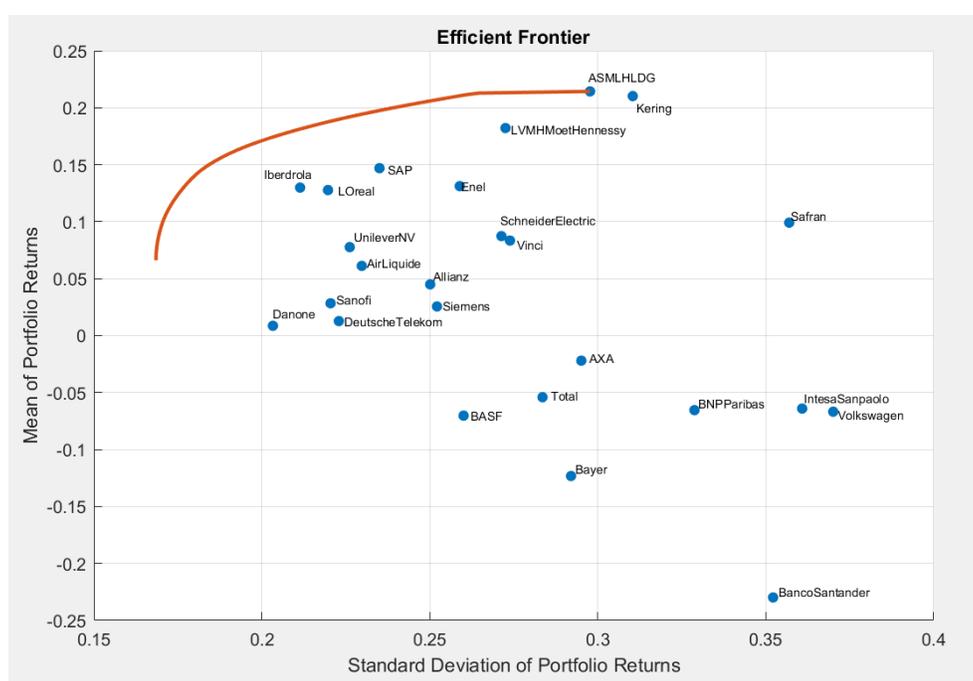


Figura 85 FE del modello di Markowitz con vincolo allo *short-selling* e in assenza del titolo privo di rischio

La frontiera efficiente in caso di assenza di *short-selling* è composta da portafogli che vanno da un rendimento minimo di 6,5974% annuo (giornaliero è pari a 0,02618%) con rischio associato descritto da una *standard deviation* di 0,16827 annua (giornaliera risulta pari a 0,01061), ad un rendimento massimo di 21,4303% annuo (0,08504% giornaliero) con deviazione standard pari a 0,298441 annua (0,01875 giornaliera). In particolare, si nota che il portafoglio che garantisce il massimo rendimento è costituito dal solo titolo di ASML Holding. Il portafoglio a minima varianza risulta così composto:

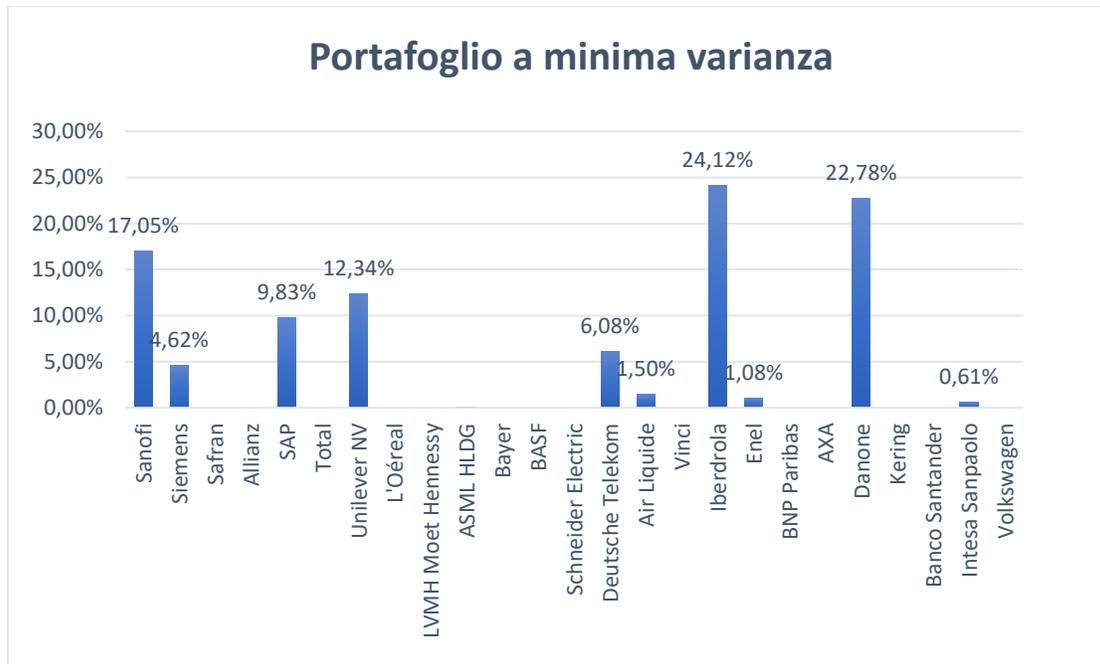


Figura 86 Composizione del portafoglio a minima varianza

Nel momento in cui si elimina il vincolo riguardante lo *short-selling*, lavorando sempre in un contesto di investimento in soli *asset* rischiosi, si ottiene:

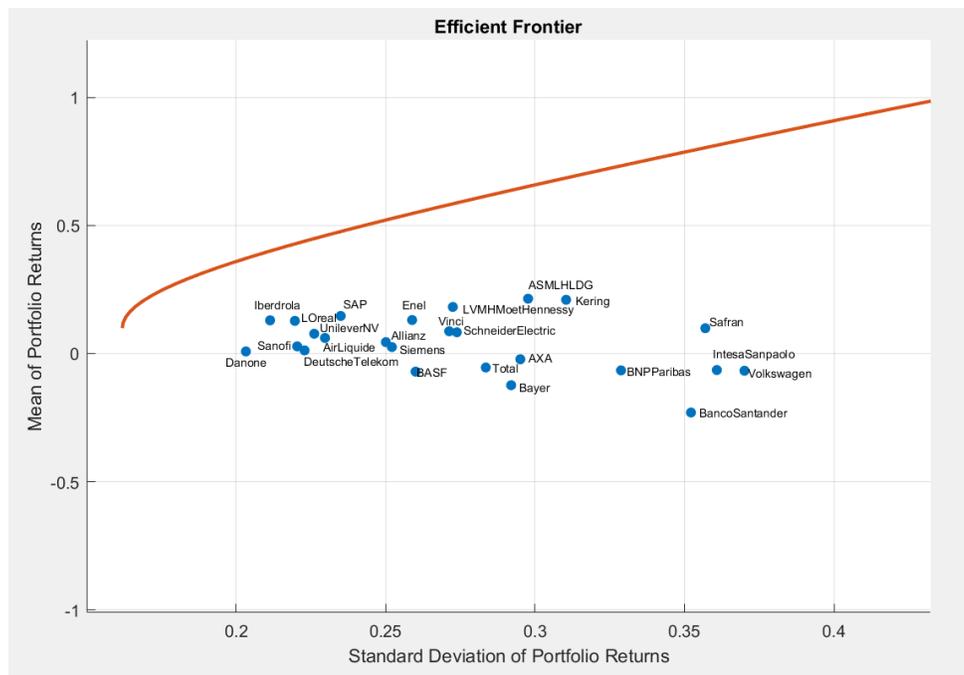


Figura 87 FE del modello di Markowitz senza vincolo allo *short-selling* e in assenza del titolo privo di rischio

In questo caso possono essere raggiunti rendimenti oltre il 100%, assumendosi un rischio molto elevato. Il portafoglio a minimo rischio è caratterizzato da un rendimento annuo di 9,9845% (0,04027% giornaliero), ed una *standard deviation* di 0,16192 annua (0,0102 giornaliera). Tale portafoglio a minimo rischio è così composto:

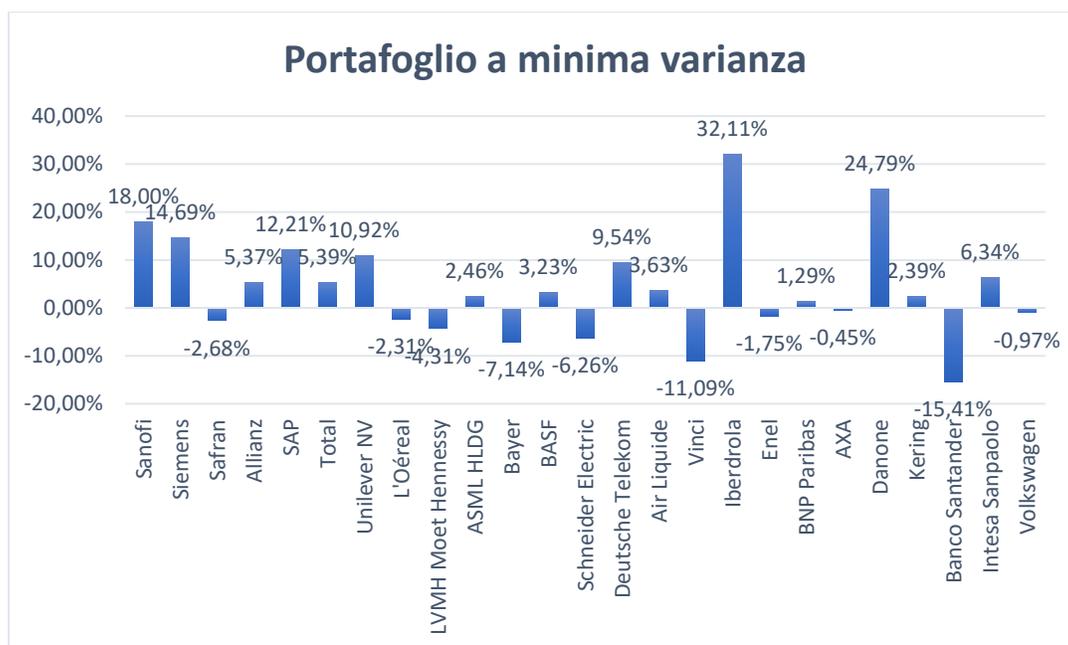


Figura 88 Composizione del portafoglio a minima varianza con shot-selling e assenza del titolo privo di rischio

È possibile effettuare un confronto tra i portafogli ottenibili in assenza ed in presenza del vincolo alle vendite allo scoperto.

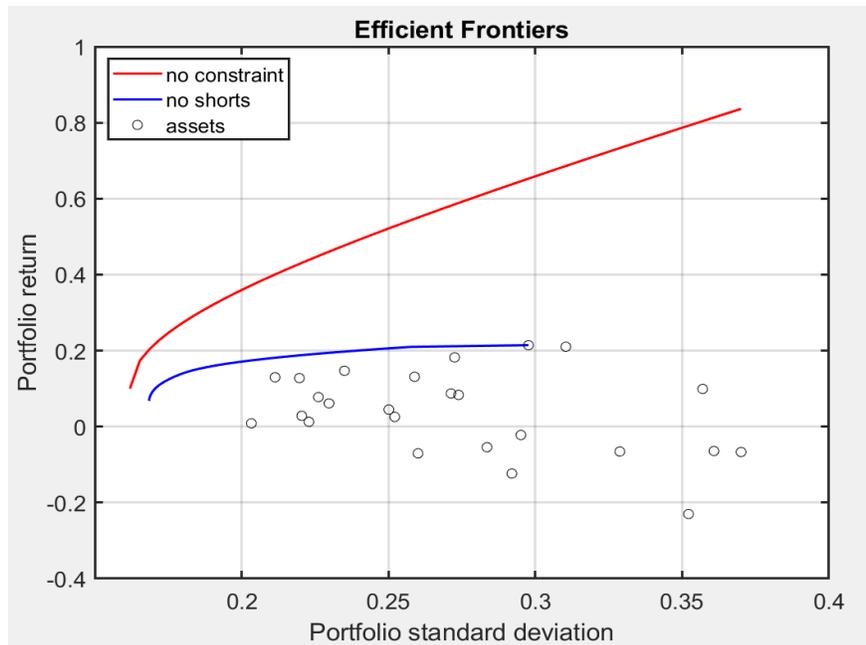


Figura 89 FE costruite con il modello di Markowitz con e senza vincolo allo short-selling, in assenza del titolo risk free

La frontiera di portafogli efficienti nel caso in cui sia permesso assumere posizioni *short* risulta spostata verso sinistra, riuscendo quindi a far ottenere dei portafogli che minimizzano ulteriormente il rischio, e raggiungendo al contempo rendimenti più elevati. È possibile affermare, dunque, che la frontiera efficiente in assenza di vendite allo scoperto è dominata dalla frontiera efficiente costruita in presenza di posizioni *short*: è possibile comporre un numero superiore di portafogli, che a parità di rischio raggiungono rendimenti più elevati rispetto a quelli ottenuti in assenza di posizioni *short*.

5.2.1 Frontiera efficiente in presenza del titolo *risk free*

Analizziamo ora il caso in cui venga introdotto nel nostro portafoglio un titolo privo di rischio, avente un rendimento annuale pari allo 0,005%⁹. In questo caso, si è scelto di porre sul medesimo grafico la frontiera efficiente costruita in assenza di tale *asset*, e la frontiera efficiente costruita in sua presenza. Si è inoltre andati a calcolare il cosiddetto portafoglio di mercato, rappresentante il punto di tangenza tra la frontiera efficiente costituita da *asset*

⁹ Il valore per il rendimento atteso del titolo privo di rischio è stato scelto in modo arbitrario, scegliendo di non operare con valori negativi per tale tipo di *asset*, e ponendo attenzione che tale valore fosse sempre minore del minimo rischio raggiungibile investendo in soli titoli rischiosi.

rischiosi e la *Capital Market Line* (CML). In particolare, l'espressione di questa retta è data da:

$$\mu = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} * \sigma$$

Il coefficiente angolare di tale retta rappresenta l'indice di Sharpe per il portafoglio di mercato. Questo indice è una misura dell'extra-rendimento, rispetto al tasso *risk free*, realizzato da un portafoglio, per unità di rischio complessivo sopportato, ed è definito dal seguente rapporto:

$$Sharpe = \frac{\mu_{\Pi} - r_f}{\sigma_{\Pi}}$$

Con Π viene indicato il generico portafoglio di cui si vuole calcolare l'indice. Più alto è il valore dell'indice, migliore è il portafoglio. [8]

Per determinare il portafoglio di tangenza tra la CML e la FE, è necessario risolvere un problema di massimizzazione vincolata così fatto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\Omega} \frac{\Omega^T e - r_f}{(\Omega^T * \Sigma * \Omega)^{\frac{1}{2}}} \\ \Omega^T * u = 1 \end{array} \right.$$

Dove “e” è il vettore colonna dei rendimenti degli n titoli costituenti il portafoglio Π , “u” è il vettore colonna unità a n componenti, e “ Ω ” il vettore colonna dei pesi.

Date tali premesse, di seguito sono riportati i grafici delle frontiere di portafogli efficienti.

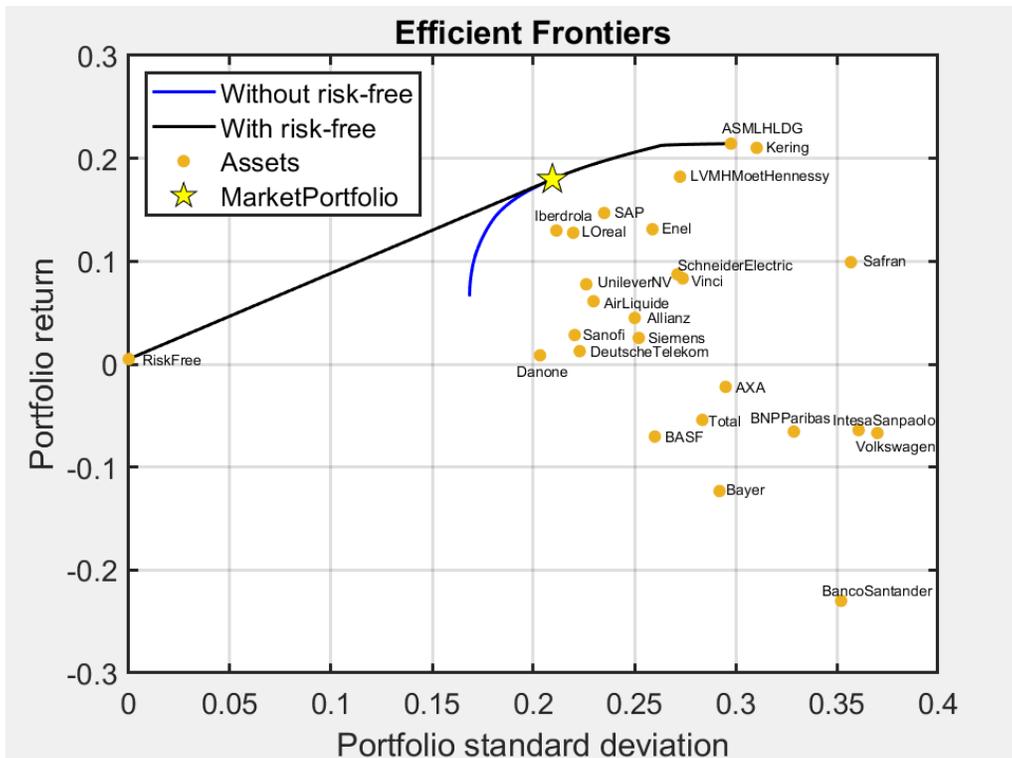


Figura 90 FE del modello di Markowitz in presenza ed assenza del titolo risk free, con vincolo allo short-selling

La frontiera efficiente nel caso in cui si investa anche nell'asset privo di rischio, risulta essere linearizzata, e domina la frontiera efficiente costituita da soli asset rischiosi fino al punto rappresentante il portafoglio di mercato. Da quel punto in poi, prosegue in maniera identica rispetto alla FE costruita in un contesto di assenza del titolo privo di rischio. Il portafoglio di mercato è caratterizzato da un rendimento di 17,9676% annuo (0,07130% giornaliero), e da una deviazione standard pari a 0,209459 annua (0,013195 giornaliera). Il portafoglio di mercato è così composto:

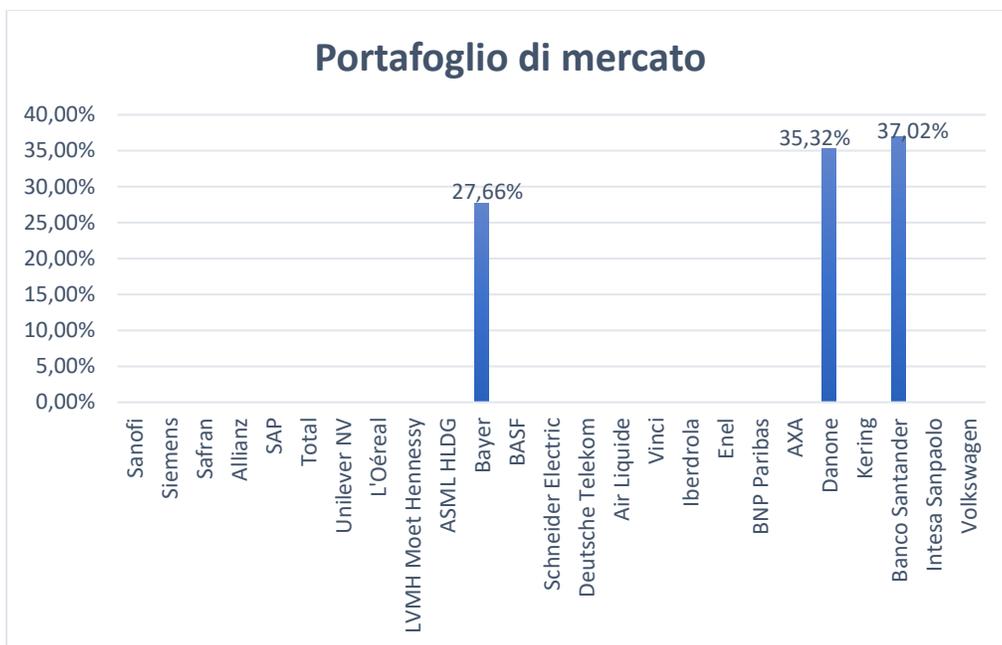


Figura 91 Composizione del Market portfolio con vincolo allo short-selling

Il portafoglio di mercato è costituito unicamente da tre titoli: ciò è dovuto al fatto che tale modello media-varianza tende a sovrastimare il peso dei titoli con alto rendimento atteso, bassa varianza e correlazione negativa, portando alla costruzione di portafogli poco diversificati.

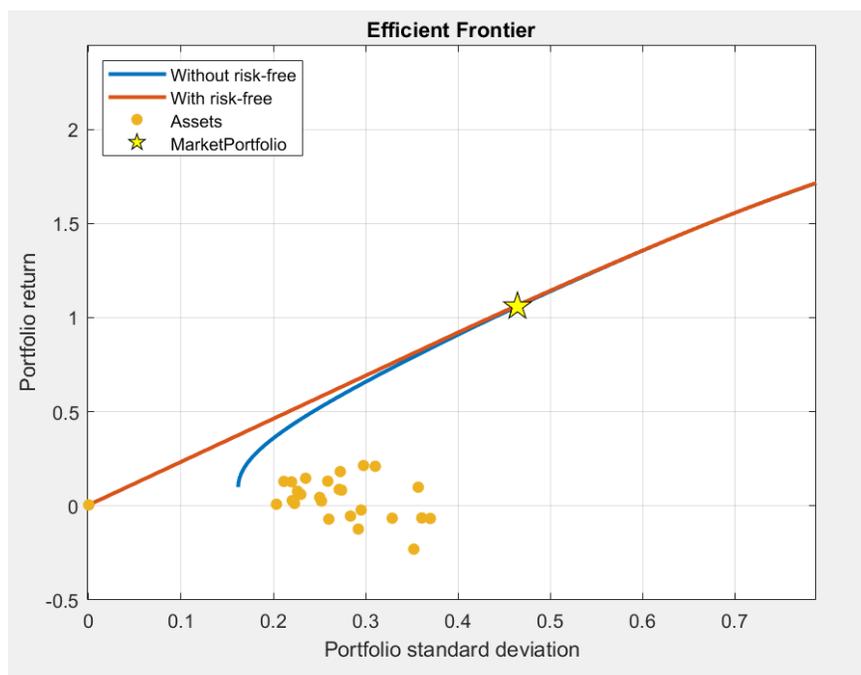


Figura 92 FE del modello di Markowitz in presenza ed assenza del titolo risk free, senza vincolo allo short-selling

Nel mercato in cui è possibile assumere posizioni *short* la FE costruita con il titolo privo di rischio domina la FE costituita da soli *asset* rischiosi, per portafogli che hanno una deviazione standard inferiore a quella del *market portfolio*. Per deviazioni standard superiori a quelle del portafoglio di mercato le due frontiere efficienti coincidono. In tale caso il portafoglio di mercato ha un rendimento annuale pari a 105,92% (0,4203% giornaliero), ed una *standard deviation* pari a 0,4644 annua (0,02925 giornaliera), e la sua composizione è data da:

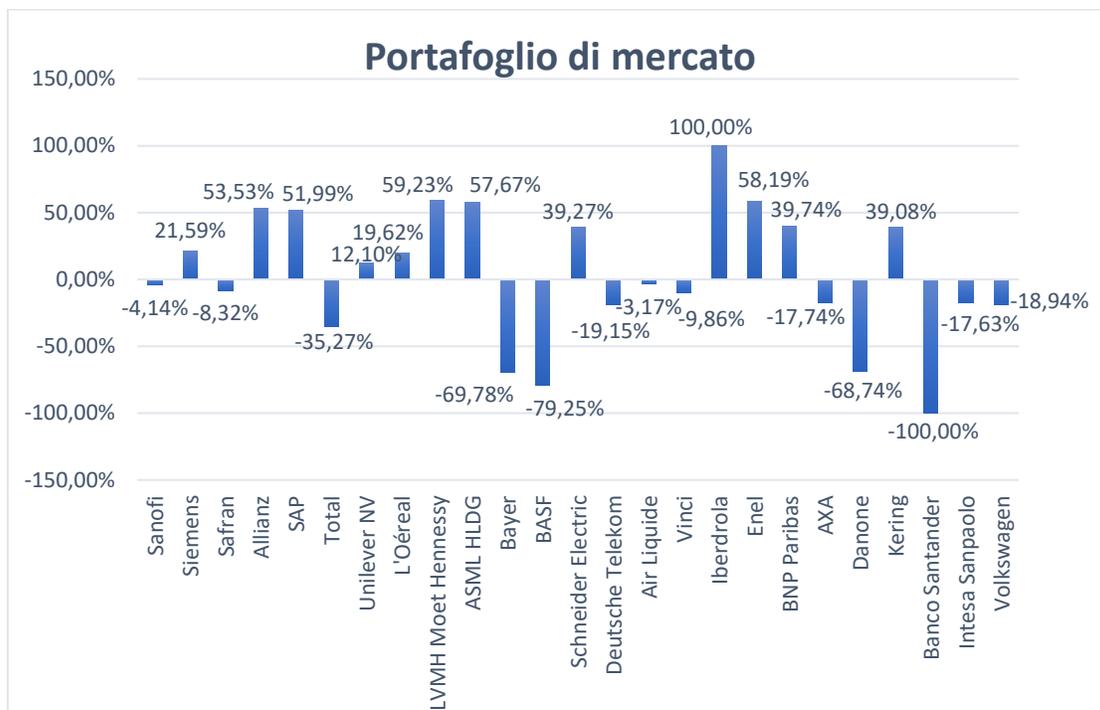


Figura 93 Composizione del portafoglio di mercato senza vincoli allo short selling

È facile notare come nel caso in cui siano ammesse le vendite allo scoperto, il portafoglio di mercato risulta ampiamente diversificato.

5.3 Modello media-VaR

Analizziamo ora il caso in cui la misura del rischio sia data dal *Value at Risk* (VaR). In questo caso è necessario scegliere un livello di confidenza alfa, pertanto si è scelto di lavorare con alfa pari a 0,5% ($\beta=0,995$). Per poter calcolare il valore del VaR, si è andati a costruire una funzione MATLAB, che, dando in input il vettore dei pesi del portafoglio, la matrice contenente i rendimenti storici degli *asset* costituenti il portafoglio e alfa, andasse ad ordinare i rendimenti del portafoglio ottenuti giorno per giorno e restituisse il VaR alla soglia

desiderata¹⁰. Nel caso in cui il portafoglio sia *equally weighted* (ogni *asset* ha lo stesso peso), si ottiene una distribuzione dei rendimenti così fatta:

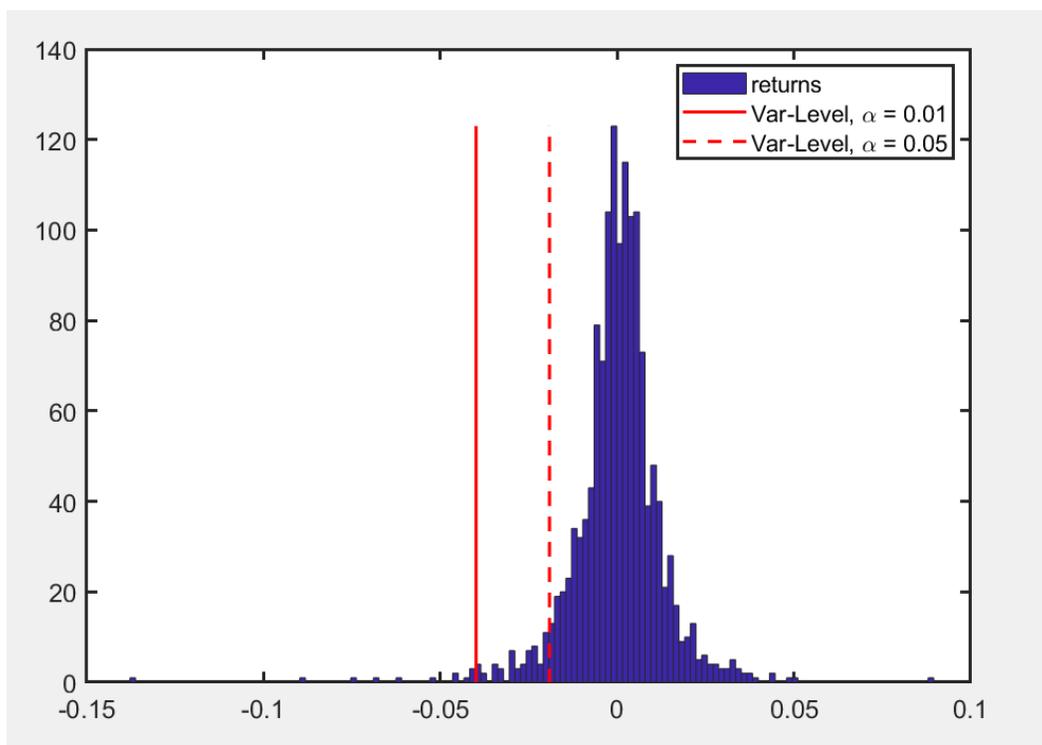


Figura 94 VaR per un portafoglio equally weighted

Per la costruzione della FE con il modello media-VaR, viene dato in input il file Excel contenente i log-rendimenti delle serie storiche, andando poi a minimizzare la funzione del VaR precedentemente creata. Nella costruzione dei grafici delle FE si è scelto di utilizzare rendimenti e deviazioni standard giornaliere.

Per $\alpha=0,005$, in assenza del titolo privo di rischio e con il vincolo allo *short-selling*, si ottengono i seguenti risultati:

¹⁰ Si ipotizza che i rendimenti di portafoglio siano equiprobabili.

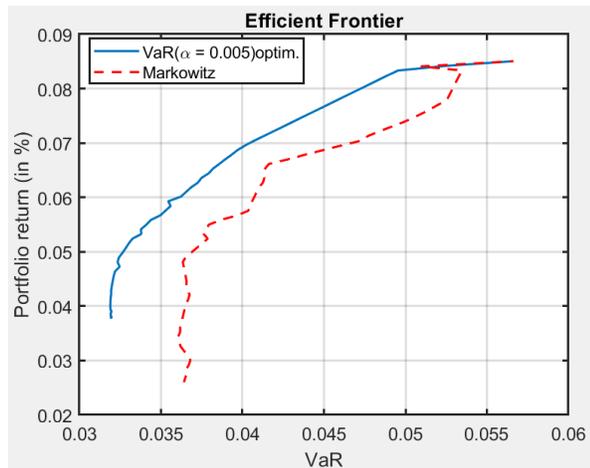


Figura 95 FE del modello media-VaR e media-varianza nel piano VaR-Rendimento, in assenza short-selling

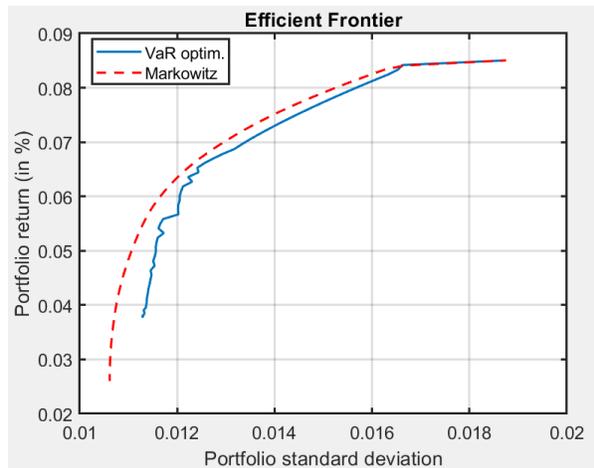


Figura 96 FE del modello media-VaR e media-varianza nel piano Deviazione Standard-Rendimento, in assenza short-selling

La frontiera efficiente, in assenza di posizioni *short*, ottenuta con il modello media-VaR è costituita da portafogli che vanno da un rendimento minimo di 0,03822% giornaliero, con deviazione standard e VaR rispettivamente di 0,0113 e 0,0320, ad un rendimento massimo di 0,08504% giornaliero, con deviazione standard di 0,0188 e VaR di 0,0566. Si nota che a parità di rendimento i portafogli ottenuti sulla FE del modello media-VaR hanno valori di *Value at Risk* minori rispetto a quelli ottenuti con il modello classico, e allo stesso tempo hanno valori maggiori di *standard deviation*. Quanto detto è vero per rendimenti inferiori a 0,08408%, mentre per rendimenti superiori a tale valore le due frontiere risultano equivalenti.

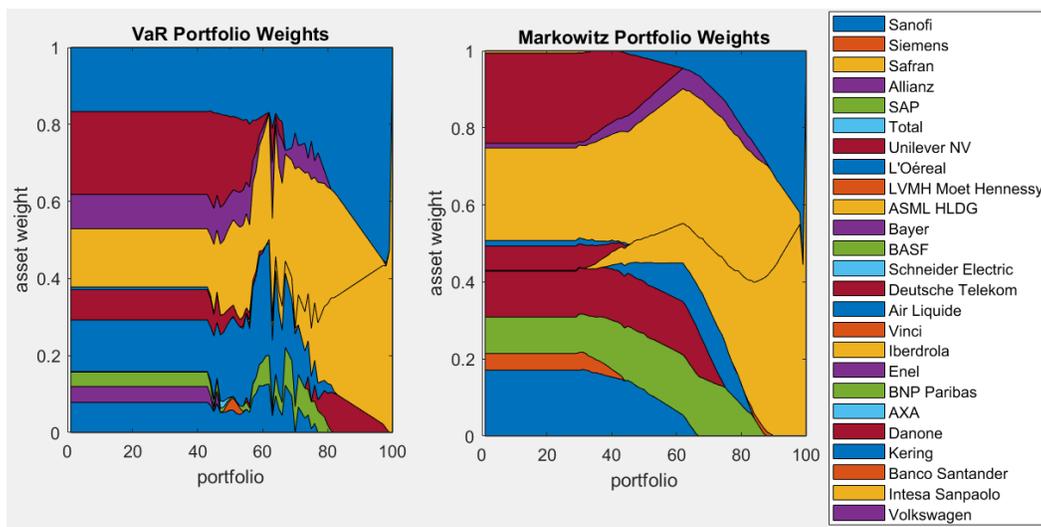


Figura 97 Composizione dei portafogli efficienti dei due modelli

La composizione dei portafogli dei due modelli risulta identica per i portafogli a rendimento più elevato, mentre è molto diversa per rendimenti più bassi: a titolo d'esempio il modello media-VaR investe molto più in Kering che in Danone, investe molto in L'Oréal, titolo che risulta assente nei portafogli del modello classico, e porta alla costituzione di portafogli con maggiore diversificazione (seppure di poco).

Infine, il portafoglio a minimo VaR risulta così composto:

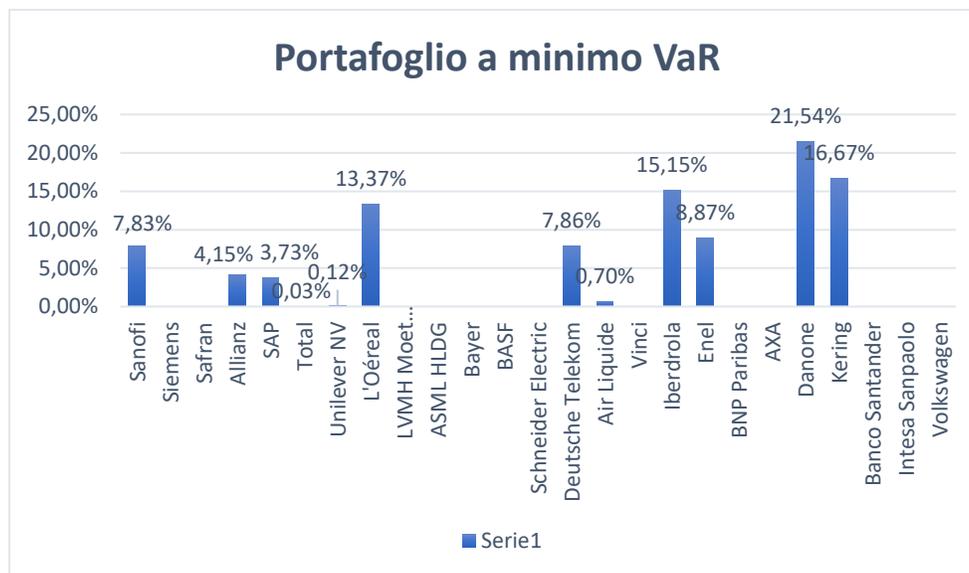


Figura 98 Costituzione del portafoglio a minimo VaR, in presenza del vincolo allo short-selling

Nel caso in cui vengano consentite le vendite allo scoperto otteniamo:

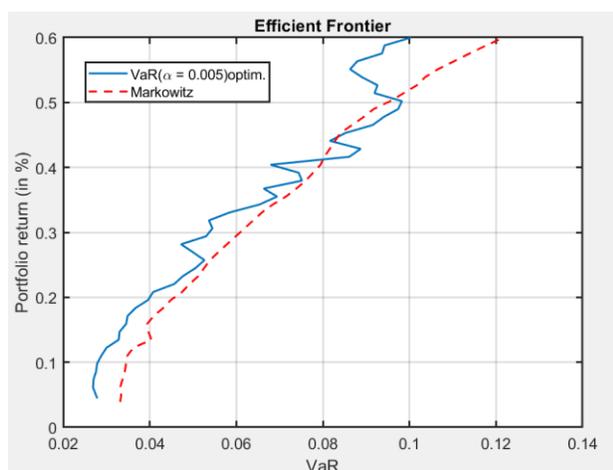


Figura 99 FE del modello media-VaR e media-varianza nel piano VaR-Rendimento

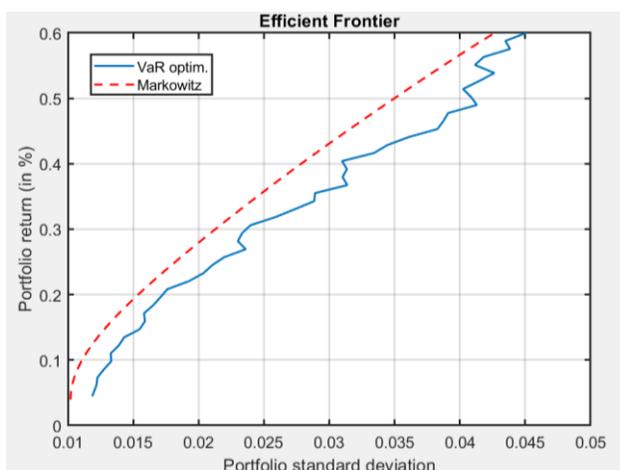


Figura 100 FE del modello media-VaR e media-varianza nel piano Deviazione Standard-Rendimento

Nel caso in cui vengano consentite posizioni *short* otteniamo una frontiera efficiente con il modello media-VaR che è sempre dominata da quella del modello di Markowitz, non intersecandovi mai (si considera il grafico a destra). Si nota inoltre come sia molto più irregolare la FE nel piano VaR-rendimento. Il portafoglio a minimo *Value at risk* è caratterizzato da un rendimento di 0,04449% giornaliero, un VaR di 0,0279 ed una deviazione standard di 0,0119: grazie alle vendite allo scoperto si riesce a minimizzare ulteriormente la misura di rischio. La composizione di tale portafoglio è:

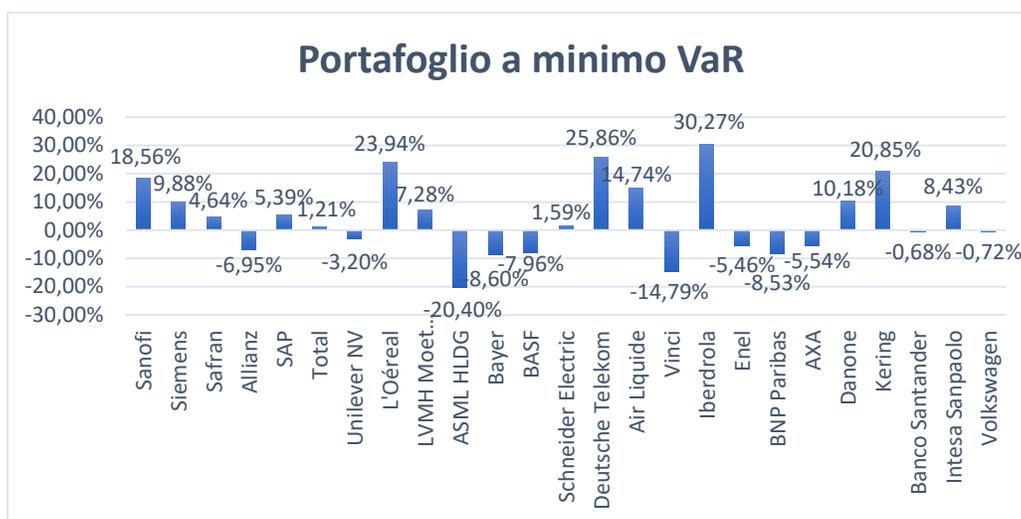


Figura 101 Composizione del portafoglio a minimo VaR in presenza di short-selling

Si evidenzia una sostanziale maggiore diversificazione rispetto al portafoglio a minimo VaR ottenuto in assenza di vendite allo scoperto, così come accadeva per il modello di Markowitz. Possiamo dunque affermare che le posizioni *short* permettono una maggiore diversificazione ed il raggiungimento di valori di rischio più bassi rispetto al caso in cui venga imposto il vincolo allo *short-selling*.

5.3.1 Frontiera efficiente in presenza del titolo *risk free*

Analizziamo ora il caso in cui venga introdotto nel portafoglio il titolo privo di rischio, con rendimento annuo di 0,005% (0,001984% giornaliero), così come è stato fatto per il modello classico. In questo caso, considerando alfa pari a 0,005, e ponendo il vincolo alle vendite allo scoperto, si ottiene:

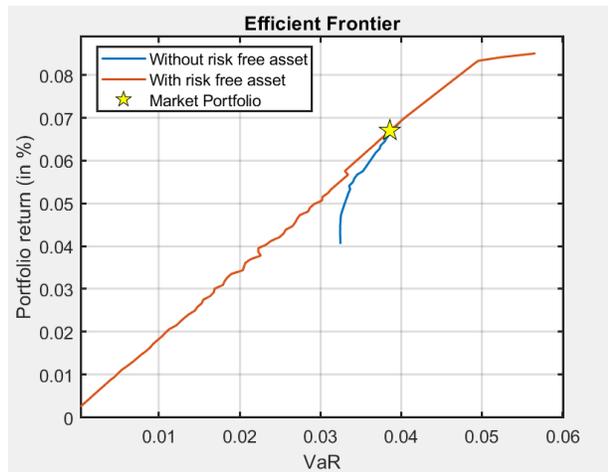


Figura 102 FE del modello media-VaR e media-varianza nel piano VaR-Rendimento, in assenza di vendite allo scoperto e presenza del titolo risk free

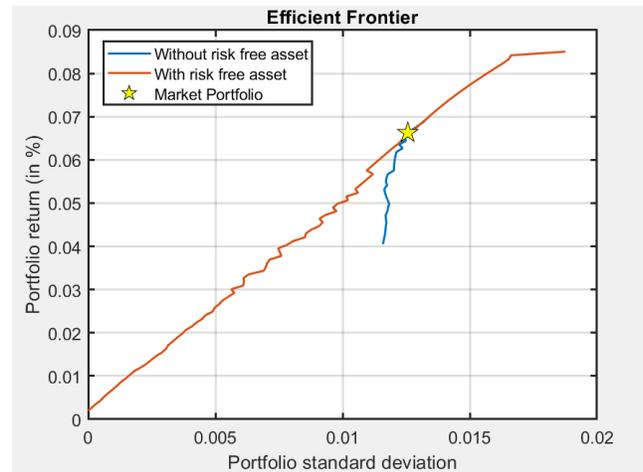


Figura 103 FE del modello media-VaR e media-varianza nel piano Deviazione Standard-Rendimento, in assenza di vendite allo scoperto e presenza del titolo risk free

Il portafoglio di mercato, inteso come punto di tangenza tra CML e FE, risulta essere caratterizzato da un rendimento pari a 0,06628%, una deviazione standard di 0,0126 e un VaR di 0,0386. Per valori delle misure del rischio inferiori a quelle del portafoglio di mercato, la FE costituita investendo anche nel titolo *risk free* domina quella ottenuta investendo in soli *asset* rischiosi, mentre per valori superiori le due FE coincidono.

La composizione di tale portafoglio è data da:

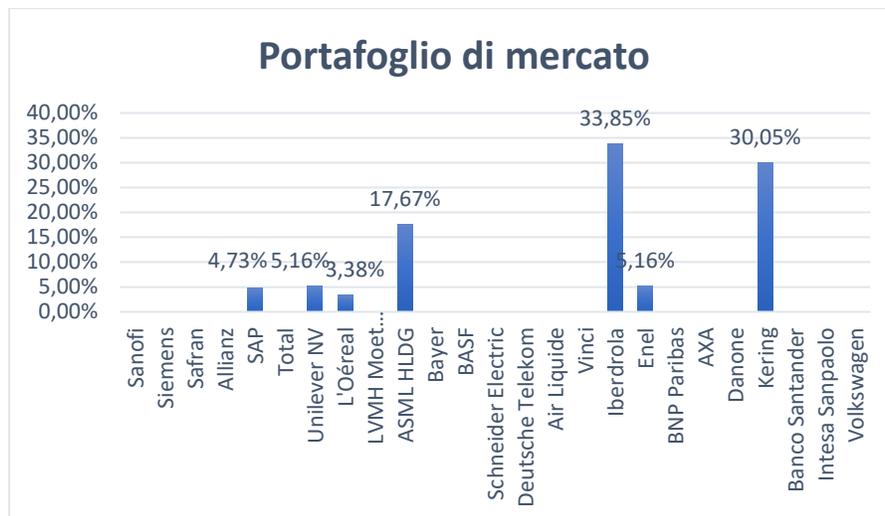


Figura 104 Composizione del portafoglio di mercato con vincolo allo short-selling

È facile notare come tale portafoglio sia molto più diversificato rispetto a quello ottenuto con il modello di Markowitz, il quale era caratterizzato dall'investimento in soli tre *asset*.

Nel caso in cui vengano consentite vendite allo scoperto si ottiene:

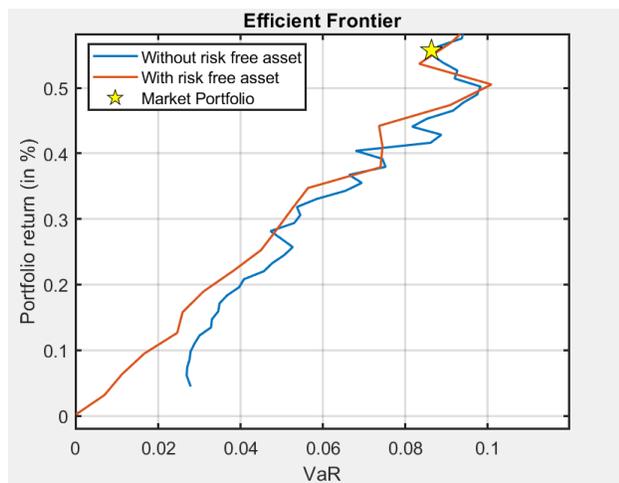


Figura 105 FE del modello *media-VaR* e *media-varianza* nel piano *VaR-Rendimento*, senza vincolo alle vendite allo scoperto e presenza del titolo *risk free*

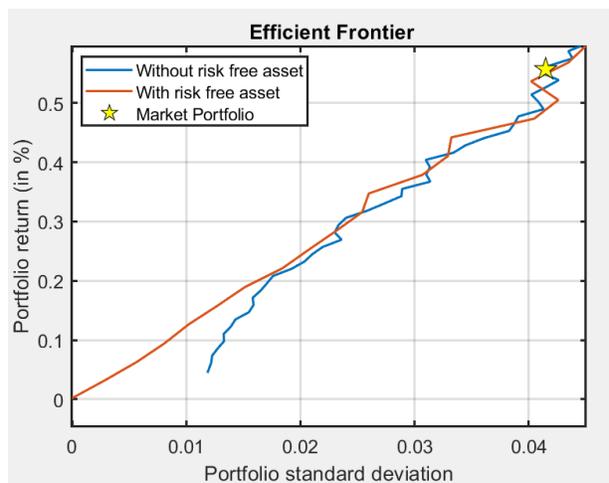


Figura 106 FE del modello *media-VaR* e *media-varianza* nel piano *Deviazione Standard-Rendimento*, senza vincolo alle vendite allo scoperto e presenza del titolo *risk free*

Le frontiere di portafogli efficienti, nel momento in cui si elimina il vincolo allo *short-selling*, risultano essere molto meno “*smoothed*” per la minimizzazione di questa particolare misura del rischio: tale grande irregolarità è dovuta al fatto che il VaR non è una misura convessa e presenta molti minimi locali, caratteristica che viene accentuata nel momento in cui si considerano le posizioni *short*. Le due curve (costruite in presenza ed assenza del titolo *risk free*) risultano essere molto vicine: nel grafico deviazione standard-rendimento, tale vicinanza si manifesta per rendimenti superiori a 0,21% circa, mentre nello spazio VaR-rendimento la si ha per rendimenti superiori a 0,28% circa. Il portafoglio di tangenza con la CML è caratterizzato invece da rendimento di 0,5571%, *standard deviation* di 0,0415 e VaR di 0,08633. La sua composizione è data da:

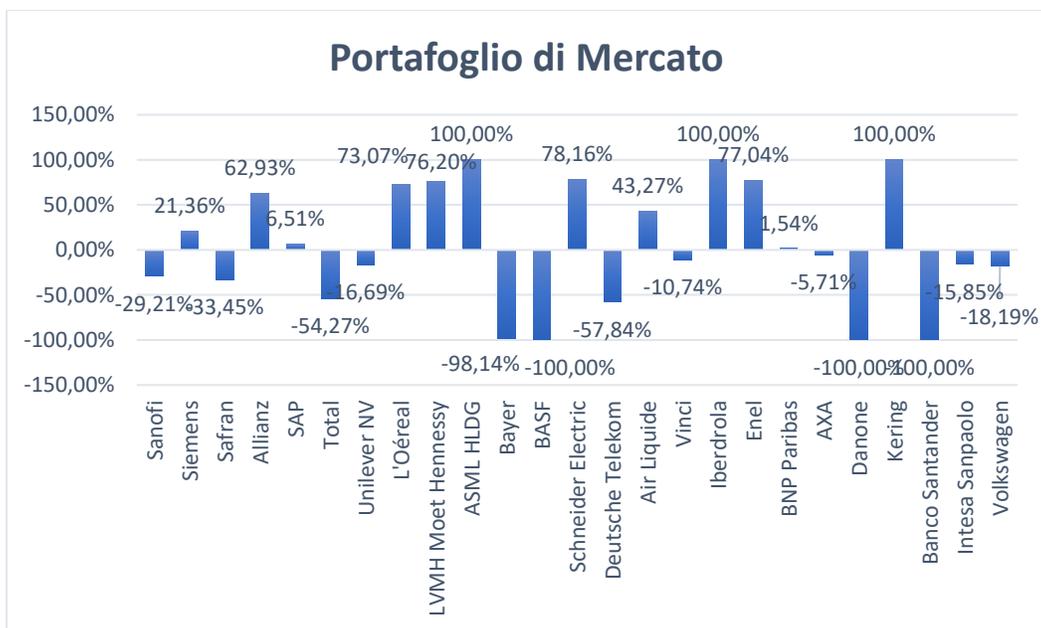


Figura 107 Composizione del portafoglio di mercato, in presenza di short-selling

5.4 Modello media-ES

Si procede con la costruzione della frontiera efficiente con il modello media-ES. Come è stato fatto per il *Value at risk*, anche per l'*Expected Shortfall* (richiamata in questo capitolo con sigle ES o CVaR) è necessario scegliere un livello di confidenza alfa, posto pari al 0,5% ($\beta=0,995$). Per poter calcolare il valore dell'ES, si è andati a costruire una funzione MATLAB, che, dando in input il vettore dei pesi del portafoglio, la matrice contenente i rendimenti storici degli *asset* costituenti il portafoglio e alfa, andasse ad ordinare i rendimenti del portafoglio ottenuti giorno per giorno e restituisse la media delle perdite attese alla soglia desiderata¹¹. Nel caso in cui il portafoglio sia *equally weighted*, si ottiene una distribuzione dei rendimenti così fatta:

¹¹ Si ipotizza che i rendimenti di portafoglio siano equiprobabili.

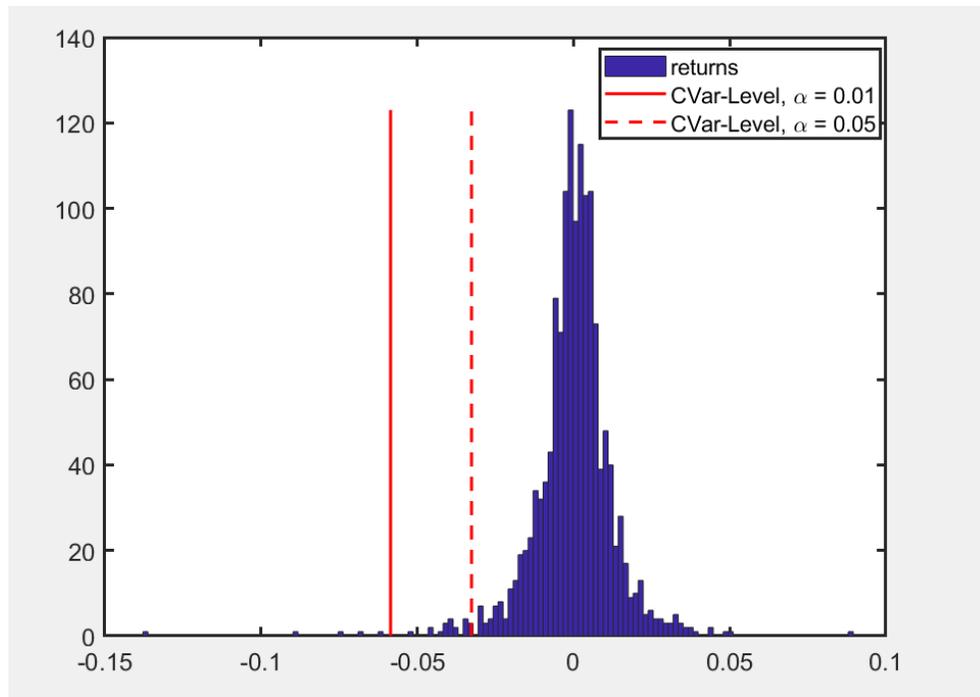


Figura 108 CVaR per un portafoglio equally weighted

Per la costruzione della FE con il modello media-ES, viene dato in input il file Excel contenente i log-rendimenti delle serie storiche, andando poi a minimizzare la funzione dell'ES precedentemente costruita. I grafici delle FE ottenuti si basano sull'utilizzo di rendimenti e deviazioni standard giornaliere.

Per $\alpha=0,005$, in assenza del titolo privo di rischio e con il vincolo allo *short-selling*, si ottengono i seguenti risultati:

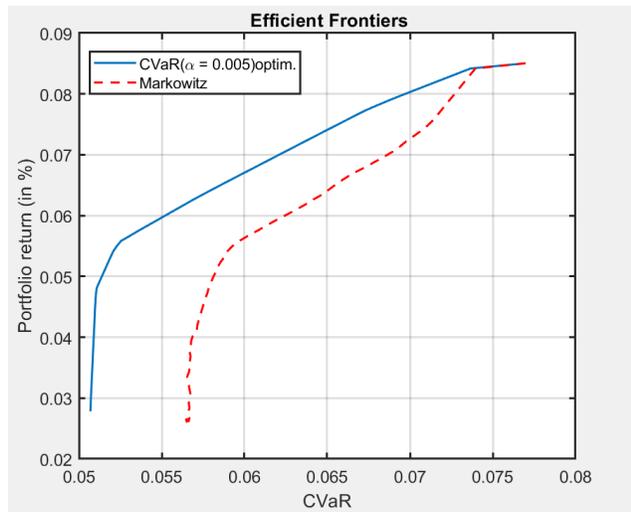


Figura 109 FE del modello media-CVaR e media-varianza nel piano CVaR-Rendimento, in assenza di vendite allo scoperto e del titolo risk free

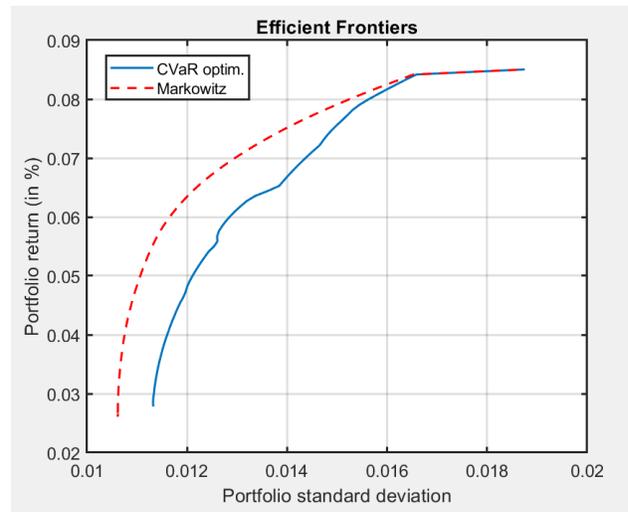


Figura 110 FE del modello media-CVaR e media-varianza nel piano Deviazione Standard-Rendimento, in assenza di vendite allo scoperto e del titolo risk free

A differenza delle frontiere ottenute con il VaR, quelle del modello media-ES (o media-CVaR) risultano molto meno irregolari, e più simili a quelle ottenute con il modello di Markowitz. La frontiera efficiente, in assenza di posizioni *short*, ottenuta con il modello media-CVaR è costituita da portafogli che vanno da un rendimento minimo di 0,02781% giornaliero, con deviazione standard e ES rispettivamente di 0,01132 e 0,0507, ad un rendimento massimo di 0,08504% giornaliero, con deviazione standard di 0,0188 e ES di 0,07699. Si nota che a parità di rendimento i portafogli ottenuti sulla FE del modello media-ES hanno valori di *Expected Shortfall* minori rispetto a quelli ottenuti con il modello classico, e allo stesso tempo hanno valori maggiori di *standard deviation*. Quanto detto è vero, per rendimenti inferiori a 0,08418% mentre per rendimenti superiori a tale valore le due frontiere risultano equivalenti (ciò accade anche per la frontiera efficiente del modello media-VaR per rendimenti maggiori di 0,08408%).

Per quanto riguarda la composizione dei portafogli si ottiene:

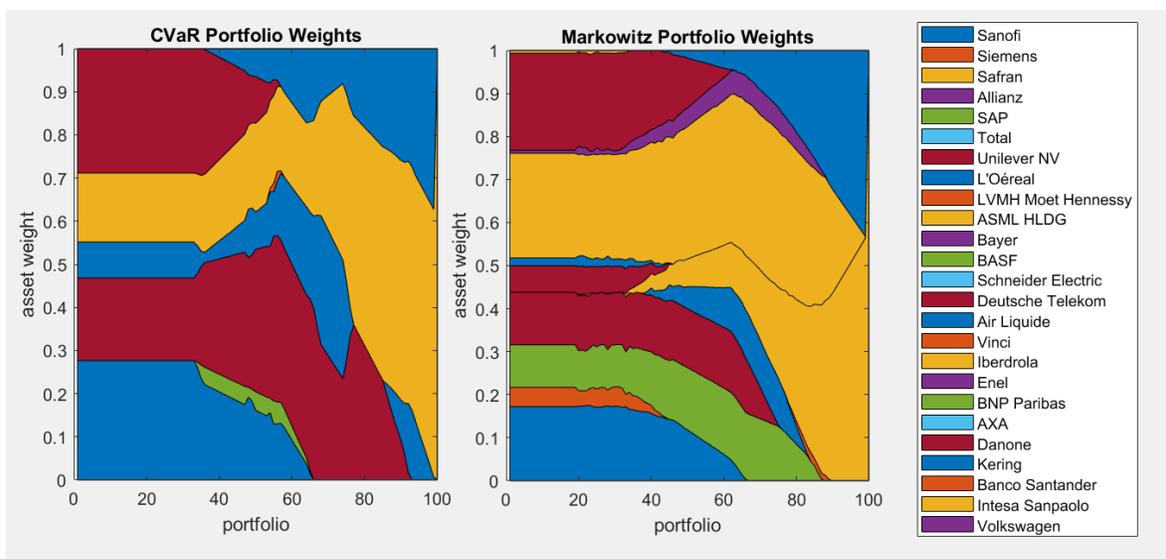


Figura 111 Composizione dei portafogli efficienti dei due modelli

La composizione dei portafogli dei due modelli risulta identica per i portafogli a rendimento più elevato, mentre per rendimenti più bassi si osserva una minore diversificazione per i portafogli del modello media-ES. *Asset* come quello di Iberdrola e SAP, in cui il modello di Markowitz risulta investire molto, sono assenti nel modello media-CVaR.

Infine, il portafoglio a minimo ES risulta così composto:

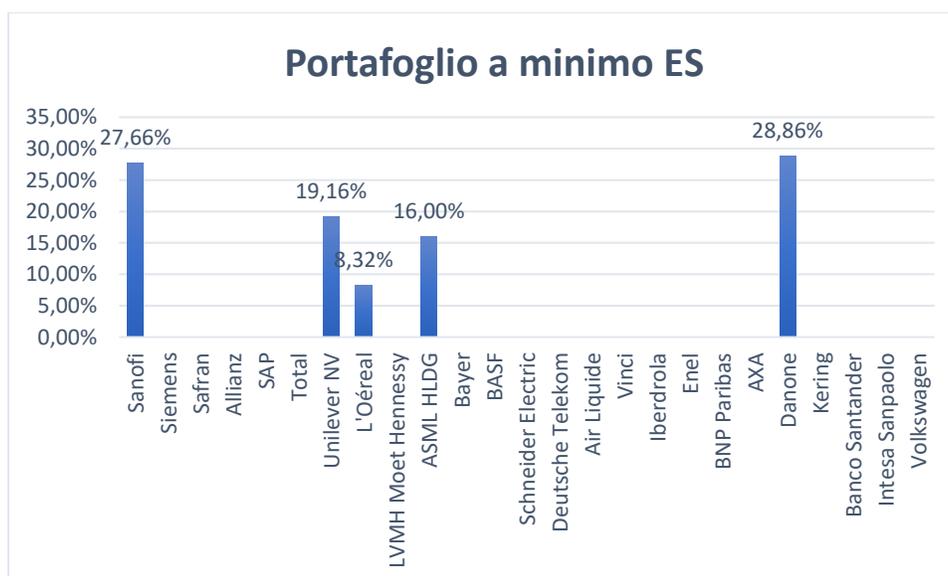


Figura 112 Costituzione del portafoglio a minimo ES, in presenza del vincolo allo short-selling

Nel caso in cui venga eliminato il vincolo alle vendite allo scoperto otteniamo:

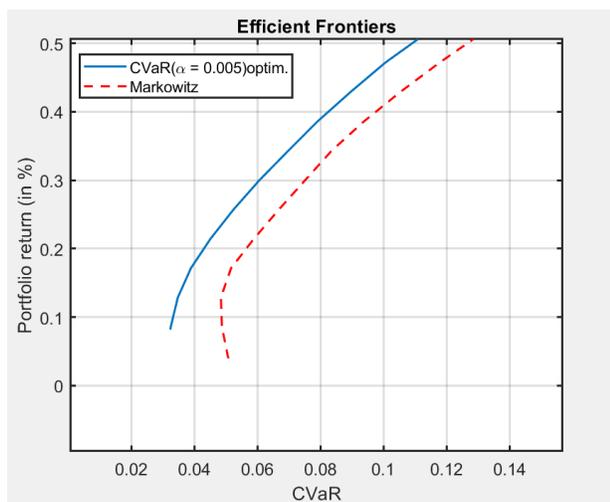


Figura 113 FE del modello media-ES e media-varianza nel piano CVaR-Rendimento, in presenza di short-selling

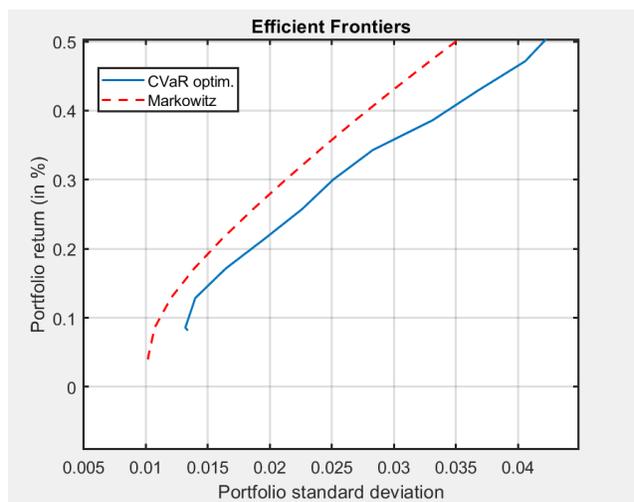


Figura 114 FE del modello media-ES e media-varianza nel piano Deviazione Standard-Rendimento, in presenza di short-selling

Nel momento in cui vengono consentite posizioni *short* otteniamo una frontiera efficiente con il modello media-ES che presenta sempre, a parità di rendimento, portafogli con maggiore deviazione standard e minore ES rispetto a quelli del modello di Markowitz: le due frontiere non si sovrappongono. Il portafoglio a minimo *Expected Shortfall* è caratterizzato da un rendimento di 0,08531% giornaliero, un CVaR di 0,0325 ed una deviazione standard di 0,0132. La composizione di tale portafoglio è:

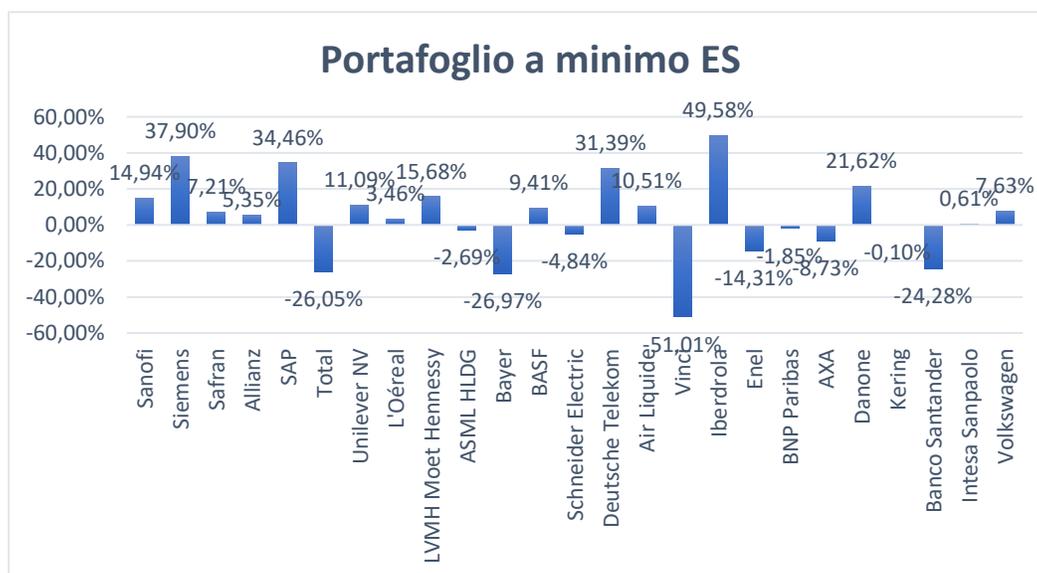


Figura 115 Composizione del portafoglio a minimo ES in presenza di short-selling

Si evidenzia una sostanziale maggiore diversificazione rispetto al portafoglio a minimo ES ottenuto in assenza di vendite allo scoperto, così come accadeva per il modello di Markowitz e il modello media-VaR.

5.4.1 Frontiera efficiente in presenza del titolo *risk free*

Analizziamo ora il caso in cui venga introdotto nel portafoglio il titolo privo di rischio, con rendimento annuo di 0,005% (0,001984% giornaliero), così come è stato fatto per i precedenti modelli. In questo caso, considerando alfa pari a 0,005, e ponendo il vincolo alle vendite allo scoperto, si ottiene:

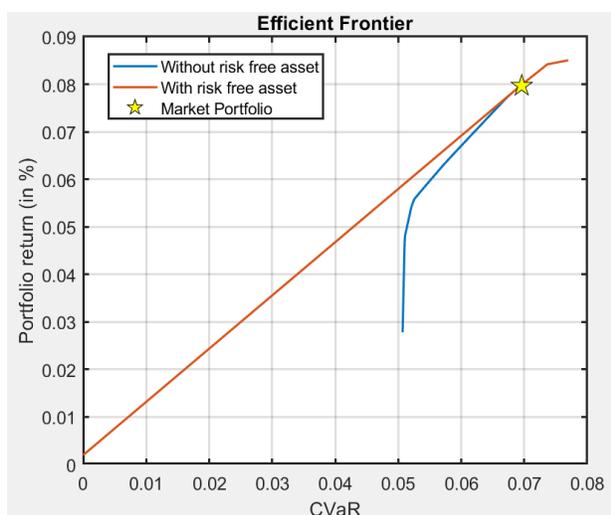


Figura 116 FE del modello media-CVaR e media-varianza nel piano CVaR-Rendimento, in assenza di vendite allo scoperto e presenza del titolo *risk free*

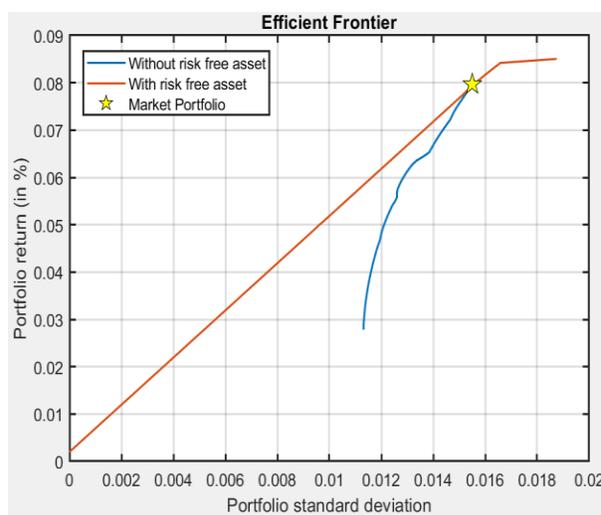


Figura 117 FE del modello media-CVaR e media-varianza nel piano Deviazione Standard-Rendimento, in assenza di vendite allo scoperto e presenza del titolo *risk free*

Il portafoglio di mercato, inteso come punto di tangenza tra CML e FE, risulta essere caratterizzato da un rendimento pari a 0,079681%, una deviazione standard di 0,0155 e un ES di 0,0696. Per valori delle misure del rischio inferiori a quelle del portafoglio di mercato, la FE costituita investendo anche nel titolo *risk free* domina quella ottenuta investendo in soli *asset* rischiosi, mentre per valori superiori le due FE coincidono.

La composizione del portafoglio di tangenza è data da:

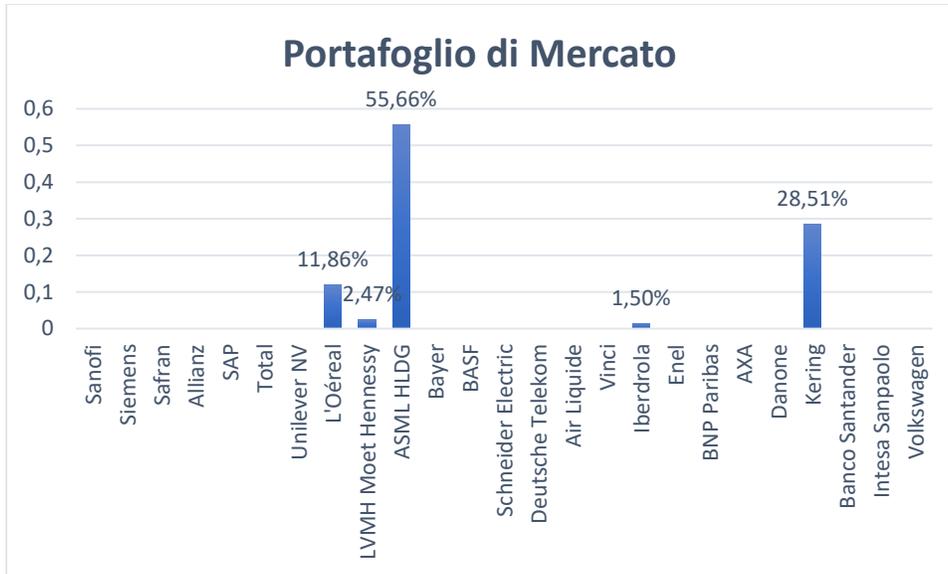


Figura 118 Composizione del portafoglio di mercato con vincolo allo short-selling

È facile notare come tale portafoglio sia meno diversificato rispetto a quello ottenuto con il modello media-VaR, e leggermente più diversificato di quello del modello media-varianza.

Nel caso in cui vengano consentite vendite allo scoperto si ottiene:

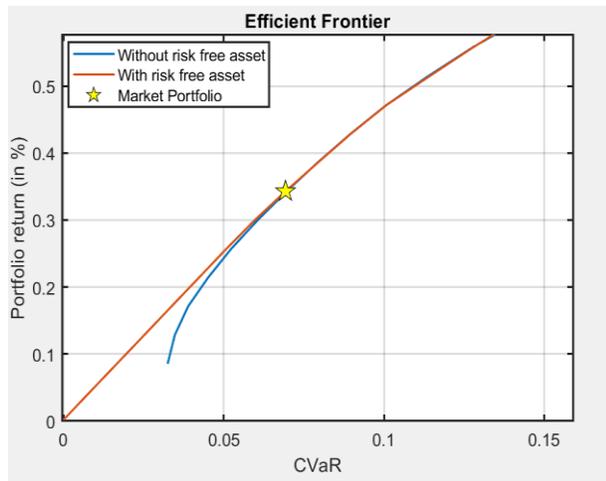


Figura 119 FE del modello media-CVaR e media-varianza nel piano CVaR-Rendimento, senza vincolo alle vendite allo scoperto e presenza del titolo risk free

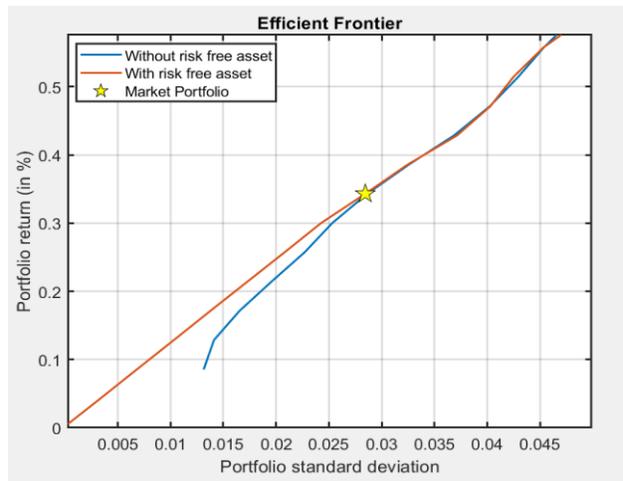


Figura 120 FE del modello media-CVaR e media-varianza nel piano Deviazione Standard-Rendimento, senza vincolo alle vendite allo scoperto e presenza del titolo risk free

Ancora una volta la curva costruita investendo nel titolo privo di rischio inizialmente domina quella ottenuta investendo in soli asset rischiosi, per poi coincidere per portafogli dal rendimento superiore a quello del portafoglio di tangenza. Il portafoglio di tangenza con la

CML, in questo caso è caratterizzato da un rendimento di 0,3429%, *standard deviation* di 0,02845 e ES di 0,06928. La sua composizione è data da:

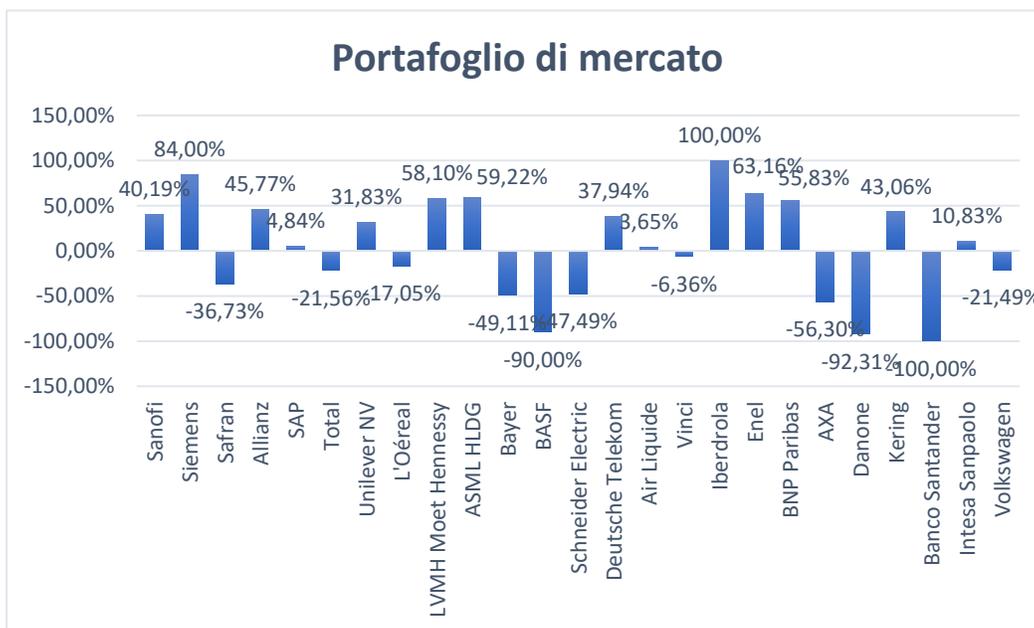


Figura 121 Composizione del portafoglio di mercato, in presenza di short-selling

Come per i modelli precedenti, anche per il modello media-ES l'eliminazione del vincolo alle posizioni *short* fa sì che possa essere raggiunta una maggiore diversificazione.

5.5 Costruzione del portafoglio *equally weighted*, *risk parity* ed *equally diversified*

Approfondiamo ulteriormente lo studio andando a costruire i portafogli *equally weighted*, *risk parity* ed *equally diversified*. L'*equally weighted portfolio* è semplicemente caratterizzato da *asset* aventi tutte il medesimo peso pari a $1/n$: nel nostro caso tale portafoglio è caratterizzato da un rendimento pari a 0,015467% giornaliero, una deviazione standard di 0,012868. Ogni *asset* ha peso pari a 4%.

Per quanto riguarda il *risk parity portfolio*, questo è caratterizzato da *asset* pesati in modo tale da contribuire in ugual modo al rischio complessivo. Innanzitutto, è necessario introdurre la seguente regressione lineare tra il rendimento pesato del j -esimo *asset* e il rendimento del portafoglio:

$$\omega_j r_j = \alpha_j + \beta_j * r_p + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, n$$

Dove α_j è il rendimento medio non legato al portafoglio, β_j è il beta del rendimento pesato del singolo *asset* rispetto a quello del portafoglio, e ε_j è il rischio diversificabile. A livello di portafoglio si ha $\sum_j \alpha_j = \sum_j \varepsilon_j = 0$ e $\sum_j \beta_j = 1$. Il valore del coefficiente che si ottiene per i minimi quadrati è $\hat{\beta}_j = \frac{\omega_j * \sigma_j * \rho_{jp}}{\sigma}$, con ρ_{jp} correlazione tra l'*asset* j e il portafoglio. Introduciamo, quindi, $\gamma_j = \omega_j * \sigma_j * \rho_{jp}$, dove $\sum_j \gamma_j = \sigma$, interpretabile come misura del contributo dell'*asset* j-esimo al rischio complessivo del portafoglio. In questo modo è possibile costruire il *risk parity portfolio*, ponendo $\gamma_j = \frac{\sigma}{n}$ per ciascun *asset*. Nel nostro caso di studio si ottiene un portafoglio caratterizzato da un rendimento pari a 0,01851% e deviazione standard di 0,012367.



Figura 122 Composizione del risk parity portfolio

Infine, possiamo andare a costruire l'*equally diversified portfolio*. Per fare ciò introduciamo un indice di diversificazione: si decompone la volatilità di portafoglio in una parte non riconducibile alla diversificazione ed una dovuta a quest'ultima. Tale decomposizione fa riferimento alle *partial covariances*, ossia le covarianze tra i residui delle regressioni dei rendimenti pesati degli *asset* rispetto al rendimento di portafoglio, viste in precedenza. La componente non dovuta alla diversificazione è data dalla somma tra le varianze individuali degli *asset* e la varianza dei residui della regressione. La parte di rischio spiegata dalla diversificazione è misurato, invece dalle *partial variances*.

La *partial covariance* è definita come la covarianza tra i residui delle regressioni i e j:

$$\sigma_{i,j \cdot r_p} = \text{cov}(\omega_i r_i - \hat{\beta}_i r_p, \omega_j r_j - \hat{\beta}_j r_p) = \omega_i \omega_j \sigma_{i,j} - \gamma_i \gamma_j$$

Da cui si ricava facilmente che $\text{cov}(\omega_i r_i, \omega_j r_j) = \gamma_i \gamma_j + \sigma_{i,j \cdot r_p}$ e $\text{var}(\omega_i r_i) = \gamma_i^2 + \sigma_{i \cdot r_p}^2$, con $\sigma_{i \cdot r_p}^2$ definita *partial variance*. Inoltre sommando le covarianze si ha:

$$\sigma^2 = \sum_{i,j} \text{cov}(\omega_i r_i, \omega_j r_j) = \sigma^2 + \sum_{i,j} \sigma_{i,j \cdot r_p}$$

Dove chiaramente $\sum_{i,j} \sigma_{i,j \cdot r_p} = 0$. Possiamo riscrivere l'equazione in questo modo:

$$\sigma = \sigma + \frac{1}{\sigma} \sum_i \sigma_{i \cdot r_p}^2 + \frac{1}{\sigma} \sum_{i,j,i \neq j} \sigma_{i,j \cdot r_p}$$

Che al livello del singolo *asset* diviene:

$$\gamma_j = \underbrace{\gamma_j + \frac{1}{\sigma} \sigma_{j \cdot r_p}^2}_{\text{Undiversified risk contribution}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma} \sum_{k,j \neq k} \sigma_{j,k \cdot r_p}}_{\text{Diversified risk contribution}}$$

La *partial variance* dell'*asset* j è cancellata dalle *partial covariances* di tutti gli altri *asset*. A livello di portafoglio l'*undiversified portfolio risk* è dato da $\sigma + \frac{1}{\sigma} \sum_i \sigma_{i \cdot r_p}^2$. Su tali basi costruiamo il *quantitative diversification index*, che misura il contributo di diversificazione dell'*asset* j:

$$QDX_j = \frac{\sigma_{j \cdot r_p}^2}{\sigma} = \frac{\omega_j^2 \sigma_j^2 (1 - \rho_j^2)}{\sigma} \quad j = 1, \dots, n$$

Possiamo riscrivere le equazioni viste precedentemente in funzione di QDX:

$$\gamma_j = \gamma_j + QDX_j + DIV_j$$

$$\sigma = \sigma + QDX + DIV$$

Con $DIV_j = \frac{1}{\sigma} \sum_{k, j \neq k} \sigma_{j,k} \cdot r_p$, $QDX = \sum_j QDX_j$ e $DIV = \sum_j DIV_j$. Inoltre, $QDX_j + DIV_j = 0$ e $QDX + DIV = 0$. Per controllare il livello di diversificazione del portafoglio, è necessario controllare le *partial covariances*.

Considerando, dunque, che il contributo di ogni *asset* alla complessiva diversificazione del portafoglio è misurato da QDX_j , è possibile costruire portafogli in cui i contributi alla diversificazione sono simili tra *asset*. Risolviamo il problema

$$\hat{\omega}_{QDX} = \arg \min_{\omega} \sum_j \left(R_j - \frac{1}{n} \right)^2$$

Con $R_j = \frac{QDX_j}{QDX}$. In questo modo si vuole fare in modo che $R_j = \frac{1}{n}$ per ogni j . E' utile usare il concetto di *effective number of bets*:

$$\mathcal{N}^{(\omega, \Sigma)} = \exp \left(- \sum_j R_j \ln(R_j) \right)$$

Se si raggiunge la *diversification parity* $\mathcal{N}^{(\omega, \Sigma)} = n$, se invece si va ad investire in un unico *asset* $\mathcal{N}^{(\omega, \Sigma)} = 1$. Tale misura dell'entropia può essere interpretata come l'effettivo numero di *asset* in cui investiamo, caratterizzati da una non correlazione per quanto riguarda il rischio. [9] Nel nostro caso tale *equally diversified portfolio* è caratterizzato da un rendimento di 0,016854% ed una deviazione standard di 0,012629.

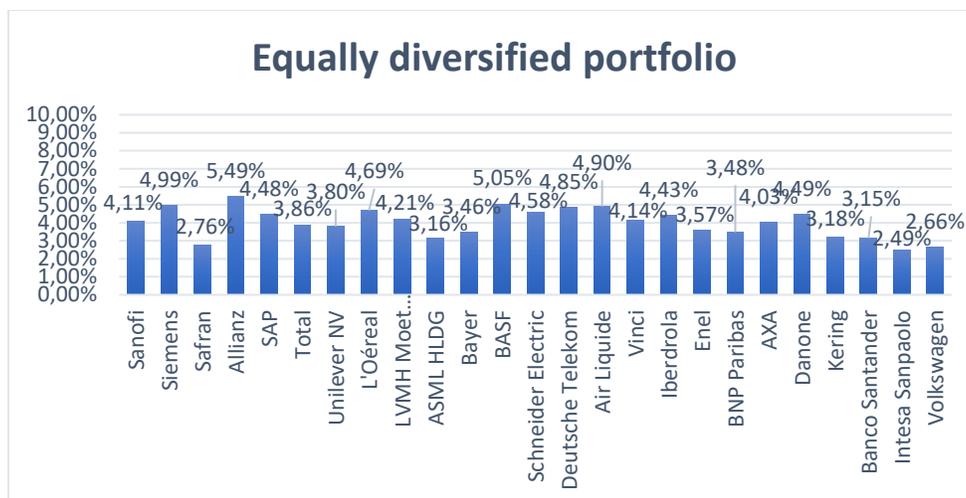


Figura 123 Composizione equally diversified portfolio

5.6 Analisi dei risultati

Ricapitolando, i portafogli principali ottenuti nei vari modelli in presenza ed assenza di vendite allo scoperto sono così composti:

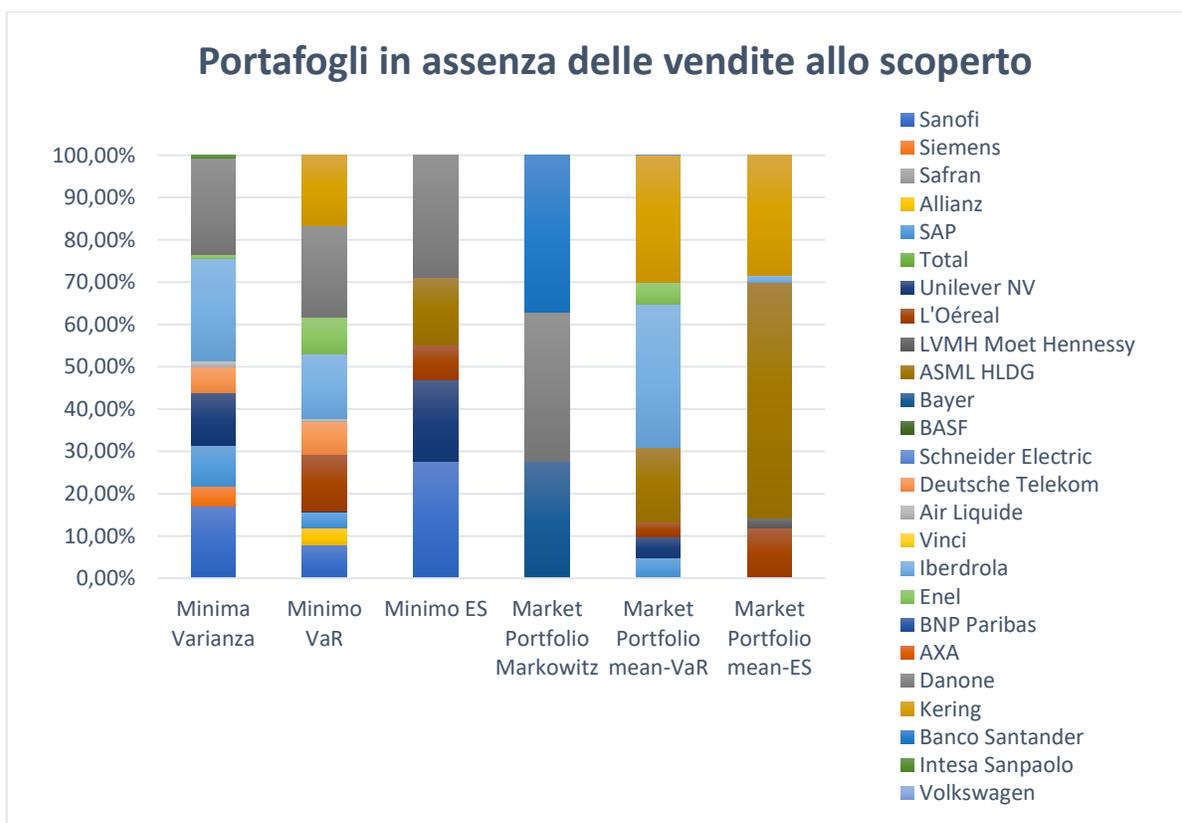


Figura 124 Composizione dei principali portafogli in assenza di vendite short



Figura 125 Composizione dei principali portafogli in presenza di vendite short

È facile notare che:

- I portafogli costituiti in presenza di vendite allo scoperto coinvolgono un numero maggiore di imprese, andando a vendere allo scoperto soprattutto i titoli di Banco Santander, Volkswagen (solo il portafoglio a minimo ES risulta comprarlo), AXA, Bayer, Vinci, BASF (acquistato solo dai portafogli a minima varianza e minimo ES) e Total (acquistato solo dai portafogli a minima varianza e minimo VaR). Le azioni di Danone e Safran risultano vendute allo scoperto in tutti i portafogli di tangenza con la CML, e sono acquistate in tutti i portafogli che minimizzano il rischio.
- In assenza delle vendite allo scoperto notiamo come i portafogli di tangenza con la CML siano caratterizzati dall'investimento in un numero inferiore di *asset* rispetto ai portafogli che minimizzano la misura del rischio. Il modello media-VaR, in

particolare, è caratterizzato dall'investimento in un numero maggiore di titoli rispetto agli altri due modelli.

- Si nota come la composizione dei portafogli vari a seconda del modello che viene utilizzato, per cui l'investimento o meno in un asset dipende molto dalla particolare misura del rischio che si intende minimizzare.

Si vuole a questo punto andare a valutare il rischio riguardante la concentrazione di investimento per i portafogli costruiti in presenza di vendite *short*. Il rischio di concentrazione è definito come la perdita potenziale di valore di un portafoglio di investimento, che si verifica nel momento in cui il prezzo di un insieme di *asset* si muove in una direzione sfavorevole rispetto a quella prevista. Per misurarlo viene utilizzato l'Herfindahl-Hirschman index (HHI), definito come:

$$HHI = \sum_{i=1}^N \frac{|\omega_i|^2}{(\sum_{i=1}^N |\omega_i|)^2}$$

Tale indice assume valori compresi tra 1 (massimo rischio di concentrazione) e 1/N (massima diversificazione). [10] Il minimo valore dell'indice viene raggiunto dal portafoglio *equally weighted*. Nel nostro caso di studio osserviamo i seguenti risultati:

Portfolio	HHI
Minima varianza	0,07552
Minimo VaR _{0,5%}	0,06376
Minimo ES _{0,5%}	0,06968
Tangente con CML, modello media-varianza	0,05962
Tangente con CML, modello media-VaR _{0,5%}	0,05692
Tangente con CML, modello media-ES _{0,5%}	0,05508
<i>Equally weighted</i>	0,04000

Tabella 6 Indice di HHI calcolato per i portafogli ottenuti con *short-selling* e per l'*equally weighted* portfolio

I valori più alti dell'indice di concentrazione sono registrati per i portafogli che minimizzano la misura del rischio, in particolare il portafoglio a minima varianza risulta avere il peggior valore dell'HHI. I portafogli di tangenza con la CML, risultano avere più bassi livelli di

concentrazione: il *market portfolio* del modello media-ES ottiene il migliore valore tra i tre, mentre il peggiore risulta quello del modello media-varianza. Si nota come, dunque, i portafogli soggetti maggiormente a tale rischio sono quelli ottenuti con il modello classico.

Andiamo, infine, a valutare la *performance* dei portafogli ottenuti con i vari modelli. Lo *Sharpe Index* è un indice molto utilizzato per misurare la *performance* di un generico portafoglio, andandone a rappresentare la misura del premio al rischio per ogni unità di rischio assunta. Più è alto il suo valore, maggiore sarà la *performance* del portafoglio, dunque ciò ci permette di effettuare confronti tra due o più portafogli.

Andiamo a condurre un'analisi più approfondita sulle *performance* dei portafogli che raggiungono il minimo valore della misura di rischio, e dei portafogli di tangenza per ogni modello, confrontandoli con l'*equally weighted, risk parity* ed *equally diversified portfolio*.

Portfolio	Rendimento	Deviazione Standard	VaR _{0,5%}	ES _{0,5%}	<i>Sharpe Index</i>
Minima varianza, senza <i>short-selling</i>	0,0262%	0,0106	0,0365	0,0566	0,0228
Minima varianza, con <i>short-selling</i>	0,0403%	0,0102	0,0333	0,0509	0,0375
Minimo VaR _{0,5%} , senza <i>short-selling</i>	0,0382%	0,0113	0,0320	0,0583	0,0321
Minimo VaR _{0,5%} , con <i>short-selling</i>	0,0445%	0,0119	0,0279	0,0548	0,0358
Minimo ES _{0,5%} , senza <i>short-selling</i>	0,0278%	0,0113	0,0377	0,0507	0,0228
Minimo ES _{0,5%} , con <i>short-selling</i>	0,0853%	0,0132	0,0325	0,0325 1	0,0631
Tangente con CML, modello media-varianza, senza <i>short-selling</i>	0,0713%	0,0132	0,0479	0,0694	0,0525
Tangente con CML, modello media-varianza, con <i>short-selling</i>	0,4203%	0,0293	0,0809	0,1030	0,1430

Tangente con CML, modello media-VaR _{0,5%} , senza <i>short-selling</i>	0,0663%	0,0126	0,0386	0,0669	0,0510
Tangente con CML, modello media-VaR _{0,5%} , con <i>short-selling</i>	0,5571%	0,0415	0,0863	0,1644	0,1338
Tangente con CML, modello media-ES _{0,5%} , senza <i>short-selling</i>	0,0797%	0,0155	0,0489	0,0696	0,0501
Tangente con CML, modello media-ES _{0,5%} , con <i>short-selling</i>	0,3429%	0,0285	0,0687	0,0693	0,1198
<i>Equally weighted</i>	0,0155%	0,0129	0,0461	0,0757	0,0105
<i>Risk Parity</i>	0,0185%	0,0124	0,0428	0,0711	0,0134
<i>Equally Diversified</i>	0,0169%	0,0126	0,0438	0,0738	0,0118

Tabella 7 Portafogli raccolti

Dall'analisi dei valori assunti dagli indici di Sharpe notiamo che:

- I valori dell'indice di Sharpe in presenza di vendite *short* sono sempre maggiori di quelli ottenuti in assenza delle stesse.
- Il valore più alto dell'indice viene raggiunto dal portafoglio di mercato nel modello di Markowitz, in presenza di vendite allo scoperto, seguito poi da quello del modello media-VaR e del modello media-ES.
- Tra i portafogli a minimo valore della rispettiva misura di rischio quello che presenta una migliore *performance*, a livello di rapporto rischio-rendimento, risulta quello del modello media-ES, in presenza di vendite allo scoperto. È necessario sottolineare che tale portafoglio riesce a raggiungere tra i più bassi valori di VaR e ES, ma la deviazione standard è la più alta tra i portafogli a minimo rischio, pur non discostandosi eccessivamente. Il valore dell'indice di Sharpe raggiunto da tale portafoglio è addirittura superiore di quello dato da portafogli di mercato in assenza di vendite *short* nei tre modelli.

- In assenza di vendite allo scoperto, i portafogli a minima varianza e a minima ES presentano il medesimo valore dell'indice, mentre risulta migliore il portafoglio a minimo VaR.
- In assenza di vendite allo scoperto il portafoglio di tangenza tra FE e CML con migliori *performance* risulta quello del modello di Markowitz, seguito da quello del modello media-VaR e media-ES (come accade nel caso di presenza delle vendite *short*).
- Tutti i portafogli ottenuti con la costruzione di frontiere efficienti nei vari modelli sono migliori (in termini di rapporto rendimento-rischio) dell'*equally weighted, risk parity* ed *equally diversified portfolio*. L'*equally weighted portfolio* ottiene il più basso valore dell'indice di Sharpe.

Conclusioni

La trattazione appena conclusasi si prefiggeva l'obiettivo di andare ad applicare ed analizzare i modelli media-varianza, media-VaR e media-ES, nell'ambito di *asset allocation*, al fine di valutarne punti di forza e di debolezza. A tale scopo si è andati a costruire un portafoglio di venticinque *asset*, scelti in modo tale da coprire quanti più settori industriali possibile. Delle serie storiche raccolte si è dapprima andati a valutare l'andamento dei prezzi, la loro stazionarietà e la funzione di distribuzione dei log-rendimenti, per poi completare lo studio costruendo le frontiere di portafogli efficienti nelle varie casistiche. Ne è risultato che il modello classico risulta portare alla costituzione di portafogli con bassa diversificazione, sovrastimando gli *asset* ad alto rendimento, bassa volatilità e correlazioni negative. Tale problematica è superata dall'utilizzo del *Value at risk* come misura del rischio: i portafogli sono maggiormente diversificati, ma le frontiere efficienti sono più irregolari a causa della presenza di molti minimi locali. Il modello media-ES, invece, presenta portafogli leggermente più diversificati rispetto al modello classico, e frontiere più regolari rispetto al modello media-VaR. Le frontiere costruite in assenza di vincoli allo *short-selling* risultano sempre dominare le frontiere ottenute in un mercato in cui non è permesso effettuare vendite allo scoperto. Si sottolinea che il modello media-VaR porta all'ottenimento di frontiere molto più irregolari in presenza di vendite *short*, rispetto che in loro assenza: gli altri due modelli presentano frontiere molto più *smoothed*. È stata inoltre effettuata una valutazione dei valori assunti dall'indice di Sharpe per i portafogli a minimo rischio e di tangenza con la *Capital Market Line* per i tre modelli. Ne è risultato che per portafogli a minimo rischio il modello media-ES in presenza di vendite allo scoperto ottiene il portafoglio con migliore *performance*, mentre in assenza di *short-selling* i portafogli, seppur diversi tra loro, raggiungono valori dell'indice di Sharpe simili. Per quanto riguarda i portafogli che massimizzano l'indice di Sharpe, si ottiene una migliore *performance*, sia in assenza che presenza di vincoli alle vendite allo scoperto, con il modello di Markowitz. Infine, si è sottolineato come portafogli costituiti da *asset* equi pesati, o che apportassero lo stesso ammontare di rischio o diversificazione, sono caratterizzati da indici ben inferiori a quelli ottenuti dai portafogli dei vari modelli.

Appendice: codici MATLAB

6.1 Costruzione della Frontiera Efficiente con il modello di Markowitz

6.1.1 Frontiera efficiente con vincoli allo *short-selling* e senza titolo *risk free*

```
close all
clear all
clc


---


%% Caricamento dati
% Il file prezzi.xls contiene tutte le quotazioni delle società prese in
considerazione dal 1° gennaio 2015 al 31 luglio 2020.
A=readtable('prezzi.xls');
date=A(:,1);      % La prima colonna contiene le date
prezzi=table2array(A(:,2:end));
dailyreturn=diff(log(prezzi));
symbol=A.Properties.VariableNames(2:end);
[T N]= size(dailyreturn);


---


%% Costituzione del portafoglio
p=Portfolio('AssetList', symbol);
p=estimateAssetMoments(p,dailyreturn);
[m, cov] = getAssetMoments(p);
m=m*252;      % Annualizzo i rendimenti e la matrice cov moltiplicando per 252
cov=cov*252;   % (trading days in un anno)


---


%% Costruzione della FE
A=[];
b=[];
Aeq=ones(1,N);
Beq=1;
ub=ones(1,N);
lb=zeros(1,N);
p=Portfolio('AssetMean',m,'AssetCovar',cov,'AInequality',A,'bInequality',b,
'AEquality',Aeq,'bEquality',Beq,'LowerBound',lb,'UpperBound',ub);
% Portafogli efficienti
pwgt=p.estimateFrontier;
pnames = cell(1,10);
for i = 1:10
    pnames{i} = sprintf('Port%d',i);
end
Blotter = dataset([pwgt},pnames],'obsnames',p.AssetList);


---


%% Creazione del grafico
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Grafico della Frontiera Efficiente');
ax = axes('Parent', tab1);
```

```

scatter(ax,sqrt(diag(cov)),m,'filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(cov))+0.0003,m,symbol,'FontSize',7);
hold on;
[risk, ret] = plotFrontier(p,100);
hold off

```

6.1.2 Frontiera efficiente senza vincoli allo *short-selling* e senza titolo *risk free*

```

close all
clear all
clc

```

%% Caricamento dati

```

% Il file prezzi.xls contiene tutte le quotazioni delle società prese in
% considerazione dal 1° gennaio 2015 al 31 luglio 2020.
A=readtable('prezzi.xls');
date=A(:,1);           % La prima colonna contiene le date
prezzi=table2array(A(:,2:end));
dailyreturn=diff(log(prezzi));
symbol=A.Properties.VariableNames(2:end);
[T N]= size(dailyreturn);

```

%% Costituzione del portafoglio

```

p=Portfolio('AssetList',symbol);
p=estimateAssetMoments(p,dailyreturn);
[m, cov] = getAssetMoments(p);
m=m*252;   % Annualizzo i rendimenti e la matrice cov moltiplicando per 252
cov=cov*252;   % (trading days in un anno)

```

%% Costruzione della FE

```

A=[];
b=[];
Aeq=ones(1,N);
Beq=1;
ub=ones(1,N);
lb=-1*ones(1,N);
p=Portfolio('AssetMean',m,'AssetCovar',cov,'AInequality',A,'bInequality',b,
'AEquality',Aeq,'bEquality',Beq,'LowerBound',lb,'UpperBound',ub);
% Portafogli efficienti
pwgt=p.estimateFrontier;
pnames = cell(1,10);
for i = 1:10
    pnames{i} = sprintf('Port%d',i);
end
Blotter = dataset([pwgt],pnames,'obsnames',p.AssetList);

```

%% Creazione del grafico

```

f = figure;

```

```

tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp, 'Title', 'Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
scatter(ax, sqrt(diag(cov)), m, 'filled');
xlabel('Risk')
ylabel('Expected Return')
text(sqrt(diag(cov))+0.0003, m, symbol, 'FontSize', 7);
hold on;
[risk, ret] = plotFrontier(p, 100);
hold off

```

6.1.3 Confronto tra FE con e senza vincolo di *short-selling* senza titolo *risk free*

```

close all
clear all
clc


---


%% Caricamento dati
% Il file prezzi.xls contiene tutte le quotazioni delle società prese in
% considerazione dal 1° gennaio 2015 al 31 luglio 2020.
[A B] = xlsread('prezzi.xls');


---


%% Definizione delle quantità di base
prices = A(1:end, 2:end);
prices(any(isnan(prices), 2), :) = [];
dates = x2mdate(A(1:end, 1));
names = B(1, 2:end);
logret = diff(log(prices));
[T N] = size(logret);
% Media e covarianza: annualizzo i rendimenti e la matrice cov moltiplicando
% per 252 (trading days in un anno)
Sigma = cov(logret)*252;
Vars = diag(Sigma);
mu = mean(logret)'*252;
% Definizione delle variabili ausiliarie
e = ones(size(mu));
a = mu'/Sigma*mu;
b = mu'/Sigma*e;
c = e'/Sigma*e;
d = a*c - b^2;
k1 = (c*mu - b)./d;
k2 = (a - b*mu)./d;


---


%% Costruzione della Frontiera Efficiente
% Nessun vincolo allo short-selling
nport = 100; % Numero di portafogli necessari per costruire la FE
% Vettore contenente le var del portafoglio, 1/c è la MinVar!
sigmaP = (1/c:(max(Vars)-1/c)/nport:max(Vars))'.^(0.5);

```

```

muP = b/c + sqrt(d./c.*(sigmaP.^2 - 1./c));
muP = real(muP);
Wu = zeros(N,nport);
for i = 1:length(muP)
    Wu(:,i) = Sigma\(muP(i)*k1 + k2);
end
% FE con vincolo allo short-selling
Aeq = [mu'; ones(1,N)];
LB = zeros(1,N);
UB = ones(1,N);
opts = optimset('Algorithm', 'interior-point-convex', 'Display','off');
b = min(mu):(max(mu) - min(mu))/nport:max(mu);
Wc = zeros(N,nport);
muC = zeros(1,N);
sigC = zeros(1,N);
for i = 1:length(b)
    beq = [b(i); 1];
    [Wc(:,i) varP] = quadprog(Sigma,[],[],[],Aeq,beq, LB,UB,UB/N,opts);
    muC(i) = Wc(:,i)'*mu;
    sigC(i) = sqrt(2*varP);
end
% Selezione della FE nel caso vincolato
muMin = muC(sigC==min(sigC));
muEff = muC(muC>=muMin);
sigEff = sigC(muC>=muMin);


---


%% Costruzione del grafico
figure(1)
plot(sigmaP,muP,'r','Linewidth', 1.5)
hold on
plot(sigEff,muEff,'b','Linewidth', 1.5)
plot(sqrt(Vars),mu,'ko')
set(gca, 'Box', 'on', 'Linewidth', 1.5, 'FontSize', 14)
xlabel('Portfolio standard deviation')
ylabel('Portfolio return')
title('Efficient Frontiers')
legend('no constraint', 'no shorts', 'assets', 'Location', 'NorthWest')
grid on

```

[11]

6.1.4 Funzione per massimizzare l'indice di Sharpe

```

function [is,r,s,i]=indice_sharpe(rp,sdp,rf)
% rp è il vettore dei rendimenti di portafoglio, sd è il vettore della
deviazione standard di portafoglio e rf è il rendimento del titolo risk free.
Questa funzione da in output is indice di sharpe, r rendimento del portafoglio

```

di mercato, s deviazione standard del portafoglio di mercato e i posizione del portafoglio di mercato nei vettori rp e sdp .

```
l=length(rp);
for j=1:l;
    isv(j)=(rp(j)-rf)/sdp(j);
end
is=max(isv);
i=find(isv==is);
r=rp(i);
s=sdp(i);
```

6.1.5 Frontiera efficiente con vincoli allo *short-selling* e con titolo *risk free*

```
close all
clear all
clc

%% Caricamento dati
% Il file prezzi.xls contiene tutte le quotazioni delle società prese in
% considerazione dal 1° gennaio 2015 al 31 luglio 2020.
A=readtable('prezzi.xls');

%% Definizione delle quantità di base
prices=table2array(A(:,2:end));
prices(any(isnan(prices),2),:)=[];
dates = A(:,1);
symbol=A.Properties.VariableNames(2:end);
symbol1=[symbol 'RiskFree'];
logret = diff(log(prices));
[T N] = size(logret);
o=zeros(N,1);
oo=zeros(1,N+1);
% Media e covarianza: annualizzo i rendimenti e la matrice cov moltiplicando
% per 252 (trading days in un anno)
Sigma = cov(logret)*252;
Sigma1=[Sigma o;oo];
Vars= diag(Sigma);
Vars1=diag(Sigma1);
mu= mean(logret) '*252;
mu1=[mu;0.005];
N1=N+1;
% Definizione delle variabili ausiliarie
e = ones(size(mu));
a = mu'/Sigma*mu;
b = mu'/Sigma*e;
c = e'/Sigma*e;
d = a*c - b^2;
```

```

k1 = (c*mu - b)./d;
k2 = (a - b*mu)./d;


---


%% Costruzione della Frontiera Efficiente
nport = 1000;
% FE con vincolo allo short-selling
Aeq = [mu'; ones(1,N)];
LB = zeros(1,N);
UB = ones(1,N);
opts = optimset('Algorithm', 'interior-point-convex', 'Display','off');
b = min(mu):(max(mu) - min(mu))/nport:max(mu);
Wc = zeros(N,nport);
muC = zeros(1,N);
sigC = zeros(1,N);
for i = 1:length(b)
    beq = [b(i); 1];
    [Wc(:,i) varP] = quadprog(Sigma,[],[],[],Aeq,beq,UB,UB/N,opts);
    muC(i) = Wc(:,i)'*mu;
    sigC(i) = sqrt(2*varP);
end
muMin = muC(sigC==min(sigC));
muEff = muC(muC>=muMin);
sigEff = sigC(muC>=muMin);
%% FE con asset risk free
Aeq = [mu1'; ones(1,N1)];
LB = zeros(1,N1);
UB = ones(1,N1);
opts = optimset('Algorithm', 'interior-point-convex', 'Display','off');
b = min(mu1):(max(mu1) - min(mu1))/nport:max(mu1);
Wc1 = zeros(N1,nport);
muC = zeros(1,N1);
sigC = zeros(1,N1);
for i = 1:length(b)
    beq = [b(i); 1];
    [Wc1(:,i) varP1] = quadprog(Sigma1,[],[],[],Aeq,beq,UB,UB/N,opts);
    muC1(i) = Wc1(:,i)'*mu1;
    sigC1(i) = sqrt(2*varP1);
end
muMin1 = muC1(sigC1==min(sigC1));
muEff1 = muC1(muC1>=muMin1);
sigEff1 = sigC1(muC1>=muMin1);


---


%% Portafoglio di mercato
% Per essere molto precisi è opportuno fare il run di tale codice
costruendo la FE con un numero elevato di portafogli.
[is,r,s,i]=indice_sharpe(muEff,sigEff,0.005);
sigmaM=s;
muM=r;

```

```

%% Costruzione del grafico
f=figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp, 'Title', 'Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
plot(sigEff,muEff,'b','Linewidth', 1.5)
hold on
plot(sigEff1,muEff1,'k','Linewidth', 1.5)
scatter(ax,sqrt(diag(Sigma1)),mu1,'filled');
plot(sigmaM,muM,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',...
      'MarkerFaceColor','y');
text(sqrt(diag(Sigma1))+0.0003,mu1,symbol1,'FontSize',7);
set(gca, 'Box', 'on', 'Linewidth', 1.5, 'FontSize', 14)
xlabel('Portfolio standard deviation')
ylabel('Portfolio return')
title('Efficient Frontiers')
legend('Without risk-free', 'With risk-free', 'Assets','MarketPortfolio',
      'Location', 'NorthWest')
grid on

```

6.1.6 Frontiera efficiente con vincoli allo *short-selling* e con titolo *risk free*

```

close all
clear all
clc

```

```

%% Caricamento dati
% Il file prezzi.xls contiene tutte le quotazioni delle società prese in
% considerazione dal 1° gennaio 2015 al 31 luglio 2020.
A=readtable('prezzi.xls');
date=A(:,1); % La prima colonna contiene le date
prezzi=table2array(A(:,2:end));
dailyreturn=diff(log(prezzi));
symbol=A.Properties.VariableNames(2:end);
[T N]= size(dailyreturn);
p=Portfolio('AssetList',symbol);
p=estimateAssetMoments(p,dailyreturn);
[m, cov] = getAssetMoments(p);
m=m*252;
cov=cov*252;

```

```

%% Costruzione della Frontiera Efficiente
% FE senza vincolo allo short-selling
A=[];
b=[];
Aeq=ones(1,N);
Beq=1;

```

```

ub=ones(1,N);
lb=-1*ones(1,N);
p=Portfolio('AssetMean',m,'AssetCovar',cov,'AInequality',A,'bInequality',b
,'AEquality',Aeq,'bEquality',Beq,'LowerBound',lb,'UpperBound',ub);
% FE con asset risk free
symbol1=[symbol,'RiskFree'];
p1=Portfolio('AssetList',symbol1);
o=zeros(N,1);
oo=zeros(1,N+1);
N1=N+1;
cov1=[cov o; oo];
m1=[m;0.005];
A=[];
b=[];
Aeq=ones(1,N1);
Beq=1;
ub=ones(1,N1);
lb=-1*ones(1,N1);
p1=Portfolio('AssetMean',m1,'AssetCovar',cov1,'AInequality',A,'bInequality
',b,'AEquality',Aeq,'bEquality',Beq,'LowerBound',lb,'UpperBound',ub);


---


%% Portafoglio di Mercato
pwgt=estimateFrontier(p,2000);
pwgt1=estimateFrontier(p1,2000);
for i=1:2000
[risk,ret]=estimatePortMoments(p,pwgt(:,i));
sigEff(i)=risk;
muEff(i)=ret;
pnames{i} = sprintf('Port%d',i);
end
for i=1:2000
[risk,ret]=estimatePortMoments(p1,pwgt1(:,i));
sigEff1(i)=risk;
muEff1(i)=ret;
end
w = dataset([pwgt},pnames], 'obsnames',p.AssetList);
% Per essere molto precisi è opportuno fare il run di tale codice
costruendo la FE con un numero elevato di portafogli.
[is,r,s,i]=indice_sharpe(muEff,sigEff,0.005);
sigmaM=s;
muM=r;


---


%% Costruzione del grafico
f = figure;
tabgp = uitabgroup(f);
tab1 = uitab(tabgp,'Title','Efficient Frontier Plot');
ax = axes('Parent', tab1);
[risk2, ret2] = plotFrontier(p,1000);

```

```

hold on;
[risk3, ret3] = plotFrontier(p1,1000);
scatter(ax,sqrt(diag(cov1)),m1,'filled');
plot(sigmaM,muM,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',...
      'MarkerFaceColor','y');
xlabel('Portfolio standard deviation')
ylabel('Portfolio return')
text(sqrt(diag(cov1))+0.0003,m1,symbol1,'FontSize',7);
legend('Without risk-free', 'With risk-free', 'Assets','MarketPortfolio',
      'Location', 'NorthWest')
grid on
hold off

```

6.2 Costruzione della Frontiera Efficiente con il modello media-VaR

6.2.1 Funzione per il calcolo del VaR

```

function y = varhist(w,r,alpha)
% Calcolo di VaR: w è un vettore (n x 1) e r and r è una matrice (T x n), con
n numero di assets e T numero di simulazioni
[T n] = size(r);
rp = sort(r*w);           % riordino dei rendimenti di portafoglio
cutoff = floor(alpha*T); % calcolo della posizione del VaR
y = rp(cutoff,1);       % calcolo il VaR

```

6.2.2 Frontiera efficiente senza titolo *risk free*

```

close all
clear all
clc


---


%% Caricamento dati
% Il file log.xls contiene i log-rendimenti degli asset
[Scen Tickers] = xlsread('log.xls');
ScenRets=Scen(:,2:end);
[T N] = size(ScenRets);
Sigma = cov(ScenRets);
mui = mean(ScenRets);


---


%% Grafico della distribuzione dei rendimenti di un portafoglio equal weighted
wn = ones(N,1)/N;
figure(1)
alpha1 = 0.01;
VaR1 = varhist(wn,ScenRets,alpha1);
alpha2 = 0.05;
VaR2 = varhist(wn,ScenRets,alpha2);
h1 = hist(ScenRets*wn,T/10);

```

```

hist(ScenRets*wn,T/10)
set(gca,'Box', 'On', 'LineWidth',1.5, 'FontSize', 12)
hold on
plot([VaR1 VaR1],[0 max(h1)],'r', 'LineWidth', 1.5)
plot([VaR2 VaR2],[0 max(h1)],'r--', 'LineWidth', 1.5)
legend('returns',['Var-Level, \alpha = ' num2str(alpha1)],['Var-Level, \alpha
= ' num2str(alpha2)])

```

```

%% Ottimizzazione
Rs = linspace(max(min(mui),0), max(mui),100); % Rendimenti target
alpha=0.005; % Livello di confidenza
UB = 1;
LB = -UB;
Short = 0; %Se Short=1, permettiamo lo short-selling
objfun=@(w) -(varhist(w,ScenRets,alpha)); % Vogliamo minimizzare il VaR.
meanvar=@(w) w'*Sigma*w; % problema di Markowitz
w0 =ones(N,1)/N; % Valore iniziale
VaR0 = varhist(w0,ScenRets,alpha);
for i = 1:length(Rs)
    R0 = Rs(i);
    A= - mean(ScenRets);
    if Short==0
        A=[A; -eye(N)];
        A=[A; eye(N)];
        b=[-R0 zeros(1,N) UB*ones(1,N)];
    elseif Short==1
        A=[A; -eye(N)];
        A=[A; eye(N)];
        b=[-R0 -LB*ones(1,N) UB*ones(1,N)];
    elseif Short~=0 || Short~=1
        error('Set Short=1 or 0')
    end
    b=b';
    Aeq= ones(1,N);
    beq= 1;
    options = optimset(optimset('fmincon'), 'Display', 'off', 'Algorithm',
'sqp');
% Ottimizzazione VaR
[w,fval,exitflag,output]=fmincon(objfun,w0,A,b,Aeq,beq,[],[],[],options);
% Ottimizzazione di Markowitz
[wm,fval,exitflag,output]=fmincon(meanvar,w0,A,b,Aeq,beq,[],[],[],options);
VaR(i) = -varhist(w,ScenRets,alpha);
VaRwm(i) = -varhist(wm,ScenRets,alpha);
SD(i) = std(ScenRets*w);
R(i) = mean(ScenRets*w);
effSig(i) = std(ScenRets*wm);

```

```

    effMu(i) = mean(ScenRets*wm) ;
    Weight(:,i) = w;
    MarkoW(:,i) = wm;
end


---


%% Grafico nel piano mu-VaR
figure(2)
hold on
plot(VaR,R*100,'LineWidth',1.5)
plot(VaRwm,effMu*100,'r--','LineWidth',1.5)
set(gca,'Box','on','LineWidth',1.5,'FontSize',12')
grid on
ylabel('Portfolio return (in %)')
title('Efficient Frontier')
legend(['VaR(\alpha = ' num2str(alpha) ')optim.'],'Markowitz')
xlabel('VaR')


---


%% Grafico nel piano mu-sd
figure(3)
plot(SD,R*100,'LineWidth',1.5)
hold on
plot(effSig,effMu*100,'r--','LineWidth',1.5)
set(gca,'Box','on','LineWidth',1.5,'FontSize',12')
grid on
ylabel('Portfolio return (in %)')
legend('VaR optim.','Markowitz')
title('Efficient Frontier')
xlabel('Portfolio standard deviation')


---


%% Grafico dei portfolio weights
figure(4)
subplot(1,2,1)
area(Weight');
title('VaR Portfolio Weights');
set(get(gcf,'Children'),'YLim',[0 1]);
xlabel('portfolio')
ylabel('asset weight')
subplot(1,2,2)
area(MarkoW');
title('Markowitz Portfolio Weights');
set(get(gcf,'Children'),'YLim',[0 1]);
xlabel('portfolio')
ylabel('asset weight')
legend('Sanofi', 'Siemens', 'Safran', 'Allianz', 'SAP', 'Total', 'Unilever
NV', 'L'Oéal', 'LVMH Moet Hennessy', 'ASML HLDG', 'Bayer', 'BASF',
'Schneider Electric', 'Deutsche Telekom', 'Air Liquide', 'Vinci', 'Iberdrola',
'Enel', 'BNP Paribas', 'AXA', 'Danone', 'Kering', 'Banco Santander', 'Intesa
Sanpaolo', 'Volkswagen')

```

6.2.3 Frontiera efficiente con titolo *risk free*

```
clear all
clc



---


%% Caricamento dati
% log.xls contiene i log-rendimenti giornalieri
[Scen Tickers] = xlsread('log.xls');
symbol=array2table(Tickers);
ScenRets=Scen(:,2:end);
[T N] = size(ScenRets);
Sigma = cov(ScenRets);
mui = mean(ScenRets);
% logrf.xlsx contiene una colonna aggiuntiva riguardante il titolo risk free
[Scen Tickers] = xlsread('logrf.xlsx');
symbol1=array2table(Tickers);
ScenRets1=Scen(:,2:end);
[T N1] = size(ScenRets1);
Sigma1 = cov(ScenRets1);
mui1 = mean(ScenRets1);
wn = ones(N,1)/N;
wn1 = ones(N1,1)/N1;



---


%% Ottimizzazione
alpha=0.005;
UB = 1;
LB = -UB;
Short=0; % Se Short=1, permettiamo lo short-selling
% Frontiera efficiente senza titolo risk free
% Target return (nel caso Short=1 si è scelto di averne 50 e non 100)
Rs = linspace(max(min(mui),0), max(mui),100);
w0 =wn; % Valore iniziale
Var0 = varhist(w0,ScenRets,alpha);
objfun=@(w) -(varhist(w,ScenRets,alpha)); % Funzione da minimizzare
for i = 1:length(Rs)
    R0 = Rs(i);
    A= - mean(ScenRets);
    if Short==0
        A=[A;-eye(N)];
        A=[A; eye(N)];
        b=[-R0 zeros(1,N) UB*ones(1,N)];
    elseif Short==1
        A=[A;-eye(N)];
        A=[A; eye(N)];
        b=[-R0 -LB*ones(1,N) UB*ones(1,N)];
    elseif Short~=0 | Short~=1
```

```

        error('Set Short=1 or 0')
    end
    b=b';
    Aeq= ones(1,N);
    beq= 1;
    options = optimset(optimset('fmincon'), 'Display', 'off', 'Algorithm',
'sqp');
    % VaR optimization
    [w,fval,exitflag,output] =fmincon(objfun,w0,A,b,Aeq,beq,[],[],[],options);
    VaR(i)= -varhist(w,ScenRets,alpha);
    SD(i)= std(ScenRets*w);
    R(i)= mean(ScenRets*w);
    Weight(:,i) = w;
end
% Frontiera efficiente con titolo risk free
Rs1 = linspace(max(min(mui1),0), max(mui1),100);
objfun=@(w) -(varhist(w,ScenRets1,alpha));
w01 =wn1;
VaR01 = varhist(w01,ScenRets1,alpha);
for i = 1:length(Rs1)
    R0= Rs1(i);
    A= - mean(ScenRets1);
    if Short==0
        A=[A;-eye(N1)];
        A=[A; eye(N1)];
        b=[-R0 zeros(1,N1) UB*ones(1,N1)];
    elseif Short==1
        A=[A;-eye(N1)];
        A=[A; eye(N1)];
        b=[-R0 -LB*ones(1,N1) UB*ones(1,N1)];
    elseif Short~=0 || Short~=1
        error('Set Short=1 or 0')
    end
    b=b';
    Aeq= ones(1,N1);
    beq= 1;
    options = optimset(optimset('fmincon'), 'Display', 'off', 'Algorithm',
'sqp');
    [w,fval,exitflag,output] =fmincon(objfun,w01,A,b,Aeq,beq,[],[],[],options);
    VaR1(i)= -varhist(w,ScenRets1,alpha);
    SD1(i)=std(ScenRets1*w);
    R1(i)=mean(ScenRets1*w);
    Weight1(:,i) = w;
end

```

```
%% Portafoglio di mercato
```

```

% Per essere molto precisi è opportuno fare il run di tale codice costruendo la
FE con un numero elevato di portafogli.
[is,r,s,i]=indice_sharpe(R,SD,0.005/252);
VaRM=VaR(i);
muM=r;
sigmaM1=s;
muM1=r;
%% Grafico nel piano mu-VaR
figure(1)
plot(VaR,R*100,'LineWidth',1.5)
hold on
plot(VaR1,R1*100,'LineWidth',1.5)
plot(VaRM,muM*100,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',...
      'MarkerFaceColor','y');
set(gca,'Box','on','LineWidth',1.5,'FontSize',12')
grid on
ylabel('Portfolio return (in %)')
title('Efficient Frontier')
legend('Without risk free asset','With risk free asset','Market Portfolio')
xlabel('VaR')


---


%% Grafico nel piano mu-sd
figure(2)
plot(SD,R*100,'LineWidth',1.5)
hold on
plot(SD1,R1*100,'LineWidth',1.5)
plot(sigmaM1,muM1*100,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',...
      'MarkerFaceColor','y');
set(gca,'Box','on','LineWidth',1.5,'FontSize',12')
grid on
ylabel('Portfolio return (in %)')
legend('Without risk free asset','With risk free asset','Market Portfolio')
title('Efficient Frontier')
xlabel('Portfolio standard deviation')

```

6.3 Costruzione della Frontiera Efficiente con il modello media-CVaR

6.3.1 Funzione per il calcolo del CVaR

```

function y = cvarhist(w,r,alpha)
% Calcolo di CVaR
% w è un vettore (n x 1) e r and r è una matrice (T x n), con n numero di
assets e T numero di simulazioni
% Author: Markus Leippold Dec 13
[T n] = size(r);
rp = sort(r*w);                                % riordino dei rendimenti di portafoglio

```

```

cutoff = floor(alpha*T);           % calcolo della posizione del VaR
y = mean(rp(1:cutoff,1));

```

[11]

6.3.2 Frontiera efficiente senza titolo *risk free*

```

close all
clear all
clc
% author: Markus Leippold Dec 13


---


%% Caricamento dati
% Il file log.xls contiene i log-rendimenti degli asset
[Scen Tickers] = xlsread('log.xls');
symbol=array2table(Tickers);
ScenRets=Scen(:,2:end);
[T N] = size(ScenRets);
Sigma = cov(ScenRets);
mui = mean(ScenRets);


---


%% Grafico della distribuzione dei rendimenti di un portafoglio equal weighted
wn = ones(N,1)/N;
figure(1)
alpha1 = 0.01;
CVaR1 = cvarhist(wn, ScenRets,alpha1);
alpha2 = 0.05;
CVaR2 = cvarhist(wn,ScenRets,alpha2);
h1 = hist(ScenRets*wn,T/10);
hist(ScenRets*wn,T/10)
set(gca, 'Box', 'On', 'LineWidth',1.5, 'FontSize', 12)
hold on
plot([CVaR1 CVaR1],[0 max(h1)],'r', 'LineWidth', 1.5)
plot([CVaR2 CVaR2],[0 max(h1)],'r--', 'LineWidth', 1.5)
legend('returns',[ 'CVar-Level, \alpha = ' num2str(alpha1)],['CVar-Level, \alpha
= ' num2str(alpha2)])


---


%% Ottimizzazione
Rs = linspace(max(min(mui),0), max(mui),100); % Rendimenti target
alpha=0.005; % Livello di confidenza
UB = 1;
LB = -UB;
Short=0; %Se Short=1, permettiamo lo short-selling
objfun=@(w) -(cvarhist(w,ScenRets,alpha)); % Vogliamo minimizzare -CVaR.
meanvar=@(w) w'*Sigma*w; % Problema di Markowitz
w0 =wn; % Valore iniziale
ES0 = cvarhist(w0,ScenRets,alpha);
for i = 1:length(Rs)

```

```

R0= Rs(i);
A= - mean(ScenRets);
if Short==0
    A=[A;-eye(N)];
    A=[A; eye(N)];
    b=[-R0 zeros(1,N) UB*ones(1,N)];
elseif Short==1
    A=[A;-eye(N)];
    A=[A; eye(N)];
    b=[-R0 -LB*ones(1,N) UB*ones(1,N)];
elseif Short~=0||Short~=1
    error('Set Short=1 or 0')
end
b=b';
Aeq= ones(1,N);
beq= 1;
options = optimset(optimset('fmincon'), 'Display', 'off', 'Algorithm',
'sqp');
% Ottimizzazione CVaR
[w,fval,exitflag,output] =fmincon(objfun,w0,A,b,Aeq,beq,[],[],[],options);
% Ottimizzazione di Markowitz
[wm,fval,exitflag,output]=fmincon(meanvar,w0,A,b,Aeq,beq,[],[],[],options);
CVaR(i) = -cvarhist(w,ScenRets,alpha);
CVaRwm(i) = -cvarhist(wm,ScenRets,alpha);
SD(i) = std(ScenRets*w);
R(i) = mean(ScenRets*w);
effSig(i) = std(ScenRets*wm);
effMu(i) = mean(ScenRets*wm) ;
Weight(:,i) = w;
MarkoW(:,i) = wm;
end


---


%% Grafico nel piano mu-CVaR
figure(2)
hold on
plot(CVaR,R*100,'LineWidth',1.5)
plot(CVaRwm,effMu*100,'r--','LineWidth',1.5)
set(gca,'Box','on','LineWidth', 1.5, 'FontSize',12')
grid on
ylabel('Portfolio return (in %)')
title('Efficient Frontier')
legend(['CVaR(\alpha = ' num2str(alpha) ')optim.'],'Markowitz')
xlabel('CVaR')


---


%% Grafico nel piano mu-sd
figure(3)
plot(SD,R*100,'LineWidth',1.5)

```

```

hold on
plot(effSig,effMu*100,'r--','LineWidth',1.5)
set(gca,'Box','on','LineWidth',1.5,'FontSize',12')
grid on
ylabel('Portfolio return (in %)')
legend('CVaR optim.','Markowitz')
title('Efficient Frontier')
xlabel('Portfolio standard deviation')

```

```

%% Grafico dei portfolio weights
figure(4)
subplot(1,2,1)
area(Weight');
title('CVaR Portfolio Weights');
set(get(gcf,'Children'),'YLim',[0 1]);
xlabel('portfolio')
ylabel('asset weight')
subplot(1,2,2)
area(MarkoW');
title('Markowitz Portfolio Weights');
set(get(gcf,'Children'),'YLim',[0 1]);
xlabel('portfolio')
ylabel('asset weight')
legend('Sanofi','Siemens','Safran','Allianz','SAP','Total','Unilever
NV','L'Oéreal','LVMH Moet Hennessy','ASML HLDG','Bayer','BASF','Schneider
Electric','Deutsche Telekom','Air Liquide','Vinci','Iberdrola','Enel','BNP
Paribas','AXA','Danone','Kering','Banco Santander','Intesa Sanpaolo',
'Volkswagen')

```

6.3.3 Frontiera efficiente con titolo *risk free*

```

clear all
clc

```

```

%% Caricamento dati
[Scen Tickers] = xlsread('log.xls'); % log.xls contiene i log-rendimenti
giornalieri
symbol=array2table(Tickers);
ScenRets=Scen(:,2:end);
[T N] = size(ScenRets);
Sigma = cov(ScenRets);
mui = mean(ScenRets);
% logrf.xlsx contiene una colonna aggiuntiva riguardante il titolo risk free
[Scen Tickers] = xlsread('logrf.xlsx');
symbol1=array2table(Tickers);
ScenRets1=Scen(:,2:end);
[T N1] = size(ScenRets1);

```

```

Sigma1= cov(ScenRets1);
mui1 = mean(ScenRets1);
wn = ones(N,1)/N;
wn1 = ones(N1,1)/N1;

```

```

%% Ottimizzazione
alpha=0.005;
UB = 1;
LB = -UB;
Short=0;          % Se Short=1, permettiamo lo short-selling
% Frontiera efficiente senza titolo risk free
% Target return (nel caso si vogliono consentire le posizioni short è
necessario avere un vettore dei rendimenti che vada oltre il "max(mui)")
Rs = linspace(max(min(mui),0), max(mui),100);
w0 = wn;          % Valore iniziale
ES0 = cvarhist(w0,ScenRets,alpha);
objfun=@(w) -(cvarhist(w,ScenRets,alpha)); % Funzione da minimizzare
for i = 1:length(Rs)
    R0= Rs(i);
    A= - mean(ScenRets);
    if Short==0
        A=[A;-eye(N)];
        A=[A; eye(N)];
        b=[-R0 zeros(1,N) UB*ones(1,N)];
    elseif Short==1
        A=[A;-eye(N)];
        A=[A; eye(N)];
        b=[-R0 -LB*ones(1,N) UB*ones(1,N)];
    elseif Short~=0||Short~=1
        error('Set Short=1 or 0')
    end
    b=b';
    Aeq= ones(1,N);
    beq= 1;
    options = optimset(optimset('fmincon'), 'Display', 'off', 'Algorithm',
'sqp' );
    [w,fval,exitflag,output]=fmincon(objfun,w0,A,b,Aeq,beq,[],[],[],options);
    CVaR(i)= -cvarhist(w,ScenRets,alpha);
    SD(i)= std(ScenRets*w);
    R(i)= mean(ScenRets*w);
    Weight(:,i) = w;
end
% Frontiera efficiente con titolo risk free
Rs1 = linspace(max(min(mui1),0), max(mui1),100);
objfun=@(w) -(cvarhist(w,ScenRets1,alpha));
w01 = wn1;

```

```

ES01 = cvarhist(w01,ScenRets1,alpha);
for i = 1:length(Rs1)
    R0= Rs1(i);
    A= - mean(ScenRets1);
    if Short==0
        A=[A;-eye(N1)];
        A=[A; eye(N1)];
        b=[-R0 zeros(1,N1) UB*ones(1,N1)];
    elseif Short==1
        A=[A;-eye(N1)];
        A=[A; eye(N1)];
        b=[-R0 -LB*ones(1,N1) UB*ones(1,N1)];
    elseif Short~=0||Short~=1
        error('Set Short=1 or 0')
    end
    b=b';
    Aeq= ones(1,N1);
    beq= 1;
    options = optimset(optimset('fmincon'), 'Display', 'off', 'Algorithm',
'sqp' );
    [w,fval,exitflag,output]=fmincon(objfun,w01,A,b,Aeq,beq,[],[],[],options);
    CVaR1(i)= -cvarhist(w,ScenRets1,alpha);
    SD1(i)=std(ScenRets1*w);
    R1(i)=mean(ScenRets1*w);
    Weight1(:,i) = w;
end

```

%% Portafoglio di mercato

% Per essere molto precisi è opportuno fare il run di tale codice costruendo la FE con un numero elevato di portafogli.

```

[is,r,s,i]=indice_sharpe(R,SD,0.005/252);
CVaRM=CVaR(i);
muM=r;
sigmaM1=s;
muM1=r;
%% Grafico nel piano mu-CVaR
figure(1)
plot(CVaR,R*100,'LineWidth',1.5)
hold on
plot(CVaR1,R1*100,'LineWidth',1.5)
plot(CVaRM,muM*100,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',...
'MarkerFaceColor','y');
set(gca,'Box','on','LineWidth', 1.5, 'FontSize',12')
grid on
ylabel('Portfolio return (in %)')
title('Efficient Frontier')

```

```

legend('Without risk free asset','With risk free asset','Market Portfolio')
xlabel('CVaR')

```

```

%% Grafico nel piano mu-sd
figure(2)
plot(SD,R*100,'LineWidth',1.5)
hold on
plot(SD1,R1*100,'LineWidth',1.5)
plot(sigmaM1,muM1*100,'p','markers',15,'MarkerEdgeColor','k',...
      'MarkerFaceColor','y');
set(gca,'Box','on','LineWidth',1.5,'FontSize',12')
grid on
ylabel('Portfolio return (in %)')
legend('Without risk free asset','With risk free asset','Market Portfolio')
title('Efficient Frontier')
xlabel('Portfolio standard deviation')

```

Bibliografia

- [1] M. Micocci e G. B. Masala, *Manuale di Matematica finanziaria*, Carocci , 2012.
- [2] C. Van Sintifiet e S. Broda, «A New Approach to Portfolio Selection: Mean-Expected Shortfall vs. Mean-Variance Portfolio Optimization,» *University of Amsterdam*, September 2014.
- [3] E. D. Giorgi, «A Note on Portfolio Selections under Various Risk Measures,» *Institute for Empirical Research in Economics*, vol. Working Paper, n. 122, August 2002.
- [4] R. Hauser, «Coherent Risk Measures,» *Oxford University*, 2009.
- [5] A. Krause, «Exploring the Limitations of Value at Risk: How Good Is It in Practice?,» *The Journal of Risk Finance* , 2003.
- [6] [Online]. Available: <https://www.startingfinance.com/approfondimenti/possibile-prevedere-mercato-random-walk/>.
- [7] P. Wang, *Financial Econometrics*, Routledge.
- [8] «Glossario finanziario - Indice di Sharpe,» [Online]. Available: <https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/indice-di-sharpe.html>.
- [9] G. Fusai, D. Mignacca, A. Nardon e B. Human, «Equally diversified or equally weighted?,» 2020.
- [10] Y.-M. Yen, «Sparse Weighted Norm Minimum Variance Portfolio,» 2013.
- [11] M. Leippold, «Portfolio Optimization,» [Online]. Available: <http://www.leippold.ch/matlab.html>.