

# **POLITECNICO DI TORINO**

Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Civile, orientamento Strutture

Tesi di Laurea Magistrale

**Field-Driven Optimization of an aggregated Free Form Structure**



Relatore  
Prof. Ingegnere Giuseppe Carlo Marano

Azienda  
Format Engineers LTD

Correlatore  
Senior Research Engineer Marco Pellegrino

Candidato  
Marco Salamina S255526

Anno Accademico 2019/2020



*"Attieniti alla disciplina, non lasciarla, praticala,  
perché essa è la tua vita". Proverbi 4,13  
A Mamma, Papà e Daniela*



# Indice

<b>Premessa</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>9</b>
1.1 Motivazioni, obiettivi e contributi originali . . . . .	9
1.2 Struttura della Tesi . . . . .	11
<b>2 Il Ruolo dell'Ingegnere Strutturista</b>	<b>13</b>
2.1 Architettura e Ingegneria nella storia . . . . .	13
2.2 1900, la Golden Age dell'Ingegneria Strutturale . . . . .	16
2.2.1 La Scuola di Chicago . . . . .	16
2.2.2 La Scuola Svizzera . . . . .	19
2.2.3 La Scuola Italiana . . . . .	22
2.3 La Crisi e la Rinascita dell'Ingegneria Strutturale . . . . .	27
<b>3 Space Filling Polyhedra</b>	<b>29</b>
3.1 Poliedri . . . . .	30
3.2 Legge di Eulero e di Schoefli . . . . .	31
3.3 Poliedri Platonici . . . . .	34
3.4 Solidi semiregolari o di Archimede . . . . .	35
3.5 Poliedri Composti . . . . .	36
3.6 Classi di Simmetrie, Reticoli e Domini . . . . .	39
3.7 Space Filling Polyhedra e Operazioni . . . . .	40
3.8 Sistema Morfologico . . . . .	45
3.9 Instabilità e Saddle Polyhedra . . . . .	47
3.10 Esempi di Strutture . . . . .	48
<b>4 Introduzione all'analisi</b>	<b>49</b>
4.1 Grasshopper . . . . .	50
4.2 Kangaroo 2 . . . . .	51
4.3 Wasp++ . . . . .	55
4.4 Karamba 3D . . . . .	57
<b>5 Caso Studio:</b>	<b>61</b>
5.1 Definizione della Geometria . . . . .	62
5.2 Form Finding . . . . .	64
5.3 Analisi del continuo . . . . .	67
5.3.1 I Gusci e Sandwich Model . . . . .	67
5.3.2 Analisi del modello . . . . .	72

5.3.3	Sommario . . . . .	79
5.4	Aggregazione dei poliedri . . . . .	80
5.4.1	Cubo . . . . .	82
5.4.2	Ottaedro Troncato . . . . .	85
5.4.3	Endecaedro Bisimmetrico . . . . .	87
5.5	FEA e soluzioni . . . . .	90
5.5.1	Modulo dell'azione del Vento . . . . .	91
5.5.2	Cubo . . . . .	92
5.5.3	Ottaedro Troncato . . . . .	106
5.5.4	Endecaedro Bisimmetrico . . . . .	115
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>123</b>
6.1	CAD del Nodo . . . . .	126
	<b>Bibliografia</b>	<b>131</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>135</b>

# Premessa

Questo lavoro di tesi nasce a conclusione del mio percorso di specializzazione in Strutture, in cui ho appreso la teoria e l'utilizzo di differenti tipologie di software agli elementi finiti per la progettazione ordinaria e sismica. L'obiettivo di questa tesi è mostrare le potenzialità dell'ingegneria computazionale, ossia sfruttare gli elementi finiti e la scienza delle costruzioni non per ma con l'arte, il conceptual design e il data driven per sviluppare strutture valide per qualsiasi contesto non solo ingegneristico, ma anche ambientale ed estetico. Ciò non sarebbe stato possibile senza l'opportunità concessami dal Prof. Ing. Giuseppe Carlo Marano, dall'Ing. Marco Pellegrino e da Format Engineers LTD, società inglese di ingegneria e progettisti computazionali, che ringrazio ancora infinitamente.



# Abstract

In the world of civil engineering a structure is designed to be efficient both in its various operating conditions and in its aesthetics. The first often lays down the second: the geometric organization and the shape are born as a kind of compromise between the Conceptual Design and the performance checks of the structure. Sometimes, aesthetic research seems almost an obstacle to the static and dynamic evaluation of the structure. The "Try and Error" method which we have always been accustomed to, as well as the FEM, become increasingly inadvisable both for a matter of timing, and because of the fact that to speed up the calculation process and respond promptly with the science of construction, we tend to underestimate research shape, which today is also closely linked to the aesthetic study of the territory and the energy performance of the structure itself. Similarly to BIM, the development and use of new materials and technologies have imposed a process of computational optimization of engineering processes. The use of an algorithm within an FEM environment allows the use for the calculations parameters, which both optimize machine times and predimensioning, and improve the synergy between the various workers, due to the data that can be used by everyone. Computational engineering was born in response to architecture and parametric design: the engineer is not only a technician able to understand and analyze data, but once again remains a complex figure, a mediator between society and architecture, between economics and functionality, between FEA and Conceptual Design. The computer no longer acts only as a solver, but becomes a test bench comparable to the artisan one of engineers-artists of the past such as Maillart, Nervi and Musmeci. The goal of this work at the end of my academic career is to outline a path of possibilities: to connect a historical analysis on the role and figure of the structural engineer with the possibilities of the future, guaranteeing a vision of this "new way of living the 'engineering". (Eng. Sara Andreussi, Eng. Marco Pellegrino, *Ingegneria parametrica e Computational Design nel mondo delle costruzioni*, Lo Strutturista, 12/12/2019). Within a universe of possible solutions, we focused on the use of space filling polyhedra. Polyhedra, which are fundamental geometric elements, seen not only as the meshing basic elements but as structural solutions. Drawing inspiration from the "Stuggart 21" project, an algorithm was developed using Rhino and its Grasshopper plug-in, for the parametric design of an exhibition hall. Once the geometry has been determined through the form finding, it has become the driven-field for the aggregation of the polyhedra, which have tessellated it becoming the skeleton of the structure. Three geometrical solutions were compared with different load conditions: the truncated octahedron, the cube and the bisymmetric endecahedron. The most efficient geometry was evaluated in terms of performance, mass and quantity of material. The algorithm allowed to optimize not only the typical iterations of the ULS, but also the dimensioning of the structure itself. The graphs cross sections, made by steel pipes S275, were obtained through a sort of form finding in the same time of the FEA: to obtain the best possible geometry by making the most of the mechanical strength of the pipes themselves. Behind the numbers, there is always a static intuition, that we want to recover through technology.



# Capitolo 1

## Introduzione

Nel mondo dell'ingegneria civile una struttura viene progettata per essere efficiente sia nelle sue varie condizioni di esercizio sia nella sua estetica. La prima spesso detta la seconda: l'organizzazione geometrica e la forma nascono come una specie di compromesso fra il "Conceptual Design" e le verifiche meccaniche-prestazionali della struttura. Anzi, talvolta, la ricerca estetica sembra quasi un percorso totalmente opposto alla valutazione statica e dinamica della struttura. Era la seconda metà degli anni '50 quando John Argyris applicò le prime formulazioni di M.J. Turner della Boeing sugli Elementi Finiti nel mondo dell'ingegneria civile, con l'obiettivo di valutare l'analisi elastica e strutturale di strutture complesse, semplificate mediante modelli fisici e matematici. Tuttavia, l'importanza di saper scegliere accuratamente a monte le caratteristiche di un modello è fondamentale affinché "*gli output dell'analisi non siano solo numeri ma anche risultati*". (Prof. V.I. Carbone).

Infatti, un modello per quanto possa essere il più accurato e simile alla realtà non sarà mai completo e funzionale al tempo stesso e in uno scenario di infinite possibilità, bisogna costruirlo a seconda delle specifiche richieste e necessità di calcolo.

*"Tutti i modelli sono sbagliati, ma alcuni sono utili"*. (G. Box).

Eppure una progettazione per essere ormai competitiva deve far fronte alle leggi del mercato, evitando sprechi di risorse ma anche e soprattutto di tempo. Il *Try and Error* a cui si è sempre stati abituati con il mondo degli elementi finiti diventa, così, sempre più sconsigliabile sia per una questione di tempistiche, sia perché per velocizzare il processo e per rispondere prontamente con la scienza delle costruzioni ai risultati della FEA, si tende a sottovalutare, sminuire e ignorare la ricerca della forma, che oggi è strettamente legata anche allo studio estetico del territorio e alle prestazioni energetiche della struttura stessa. Come vedremo, grazie ai progressi raggiunti per lo più nel mondo dell'architettura, analogamente al BIM inteso come rappresentazione digitale di caratteristiche fisiche e funzionali dell'oggetto, è possibile sfruttare diversi software per ottimizzare, valutare e simulare in tempo reale la struttura in termini di materiali, forma e resistenza, sostituendo i parametri cartesiani con parametri matematici in grado di variare continuamente. Il progettista, quindi, media il *Conceptual Design* e la FEA mediante la creazione di un algoritmo generale che concorre a rispondere efficacemente alle esigenze architettoniche e strutturali. Dal 2009 con le parole di Patrick Schumacher, direttore del Zaha Hadid Architects, nascono l'ingegneria e l'architettura parametrica, i quali trovano nel calcolatore non solo un solutore ma il banco prova che nel passato ingegneri "*artisti*" come Gaudì, Musmeci e tanti altri hanno usato artigianalmente.

### 1.1 Motivazioni, obiettivi e contributi originali

Come sempre è accaduto, la soluzione di un problema ingegneristico è suggerita ed emulata dall'osservazione della natura. Il favo rappresenta una delle più strabilianti soluzioni di ottimizzazione dello spazio ed efficienza. "*Ciò che non giova all'alveare non giova neppure all'ape*" sottolineava l'Imperatore Marco Aurelio ed effettivamente il favo sfrutta al massimo lo spazio disponibile per garantire la massima

raccolta del miele, a fronte della minima quantità possibile di cera per la sua costruzione garantendone comunque la dovuta robustezza. Le ragioni per cui il favo sia composto da esagoni possono essere due: la prima, l'esagono, dopo il cerchio, è il poligono che a parità di perimetro racchiude l'area maggiore e, quindi, il volume maggiore; la seconda è dovuta alla tassellazione piana dello spazio. A differenza dei cerchi che lascerebbero dei piccoli vuoti se costruiti uno a contatto con l'altro, l'esagono è il poligono più efficiente per riempire lo spazio piano. Lo stesso vale tridimensionalmente, anche per le estremità chiuse, quest'ultime hanno forma triedrica piramidale e come per il prisma esagonale gli angoli diedri sono ampi  $120^\circ$ . Come si vedrà, per riempire lo spazio attraverso la replicazione di solidi sarà necessario raggiungere l'angolo giro nella complementarietà degli angoli diedri e questa è raggiunta con gli esagoni nel minor numero possibile, ossia 3, condividendo sempre una faccia. La totalità della struttura fornisce la robustezza al nido: la cera, seppur sia un materiale capace di garantire un microclima circa costante per le finalità produttive delle api, è un materiale con caratteristiche meccaniche scadenti e non a caso le soluzioni a *nido d'ape* sono diventate vitali nel mondo dell'ingegneria dei materiali.



Fig. 1.1 - Struttura del Favo

L'obiettivo di questa tesi a conclusione del mio percorso accademico, è delineare un "percorso" storico e ingegneristico per garantire la visione dettagliata di questo "*nuovo modo di vivere l'ingegneria*". (Ing. Sara Andreussi e Ing. Marco Pellegrino, *Ingegneria parametrica e Computational Design nel mondo delle costruzioni*, Lo Strutturista, 12/12/2019).

Mediante il software Rhino e il plug-in Grasshopper viene proposta la progettazione parametrica di un padiglione che coniuga la ricerca della forma, la scienza delle aggregazioni e l'analisi strutturale all'interno di un algoritmo generale, che definisce e crea una specie di "programma nel programma" in grado di variare in tempo reale. Gli step di progettazione sono i seguenti:

- i. stabilire la migliore configurazione geometrica del padiglione attraverso Kangaroo 2, un plug-in di Grasshopper che risolve l'equilibrio elastico per strutture anche non lineari e ne valuta la minima superficie;
- ii. definire un modulo poliedrico di base, che attraverso il plug-in Wasp++ applica la scienza delle aggregazioni, replicandosi e "riempiendo" il padiglione di poliedri, che diventeranno a tutti gli effetti lo scheletro solido della struttura;
- iii. valutare le caratteristiche della sollecitazione e le deformate modali della struttura così determinata attraverso solutori FEM parametrici.

Poiché le configurazioni geometriche sono potenzialmente infinite, è importante definire le basi teoriche del problema per poter affrontare la progettazione valutando più soluzioni possibili con le rispettive

congruenze e differenze in campo tensionale oltre che geometrico. E' importante sottolineare che questo scenario non sarebbe stato possibile senza l'ingegneria computazionale, poiché l'analisi numerica avrebbe richiesto modelli specifici e inevitabilmente differenti a seconda delle considerazioni in gioco e, quindi, inconfondibili. Invece la determinazione di un unico algoritmo indipendentemente dai dati geometrici di input permette di garantire un'unica soluzione date le condizioni di vincolo e le caratteristiche meccaniche dei materiali, in modo tale da poter confrontare le soluzioni fra di loro.

## 1.2 Struttura della Tesi

Il lavoro è organizzato come segue:

Nel secondo capitolo si propone un breve excursus storico sul ruolo e la figura dell'ingegnere civile nella storia (nella sua accezione di matematico ma anche di artista), cercando di porre in evidenza tutti gli aspetti che hanno portato una professione così fondamentale nel panorama sociale e culturale dell'essere umano in crisi e quali sono le possibilità all'orizzonte.

Nel terzo capitolo viene trattata la base teorica necessaria per impostare le regole di aggregazione del caso progettuale. Nello specifico si tratta della teoria geometrica dei poliedri, della loro classificazione e delle regole per il riempimento continuativo dello spazio, detto Space Filling Polyhedra.

Nel quarto capitolo vengono introdotti e descritti i funzionamenti dei vari software che sono stati utilizzati nella fase progettuale.

Nel quinto capitolo viene descritto e analizzato il padiglione, caso di studio. Dapprima vengono presentate le condizioni di vincolo alla base della ricerca della forma. Dopodiché viene effettuata un'analisi del continuo, cioè supporre che quella sia effettivamente la struttura finale analizzandone lo stato tensionale e deformativo. Infine, applicando la scienza delle aggregazioni verrà costruito l'effettivo scheletro della struttura ed effettuata nuovamente l'analisi agli elementi finiti.

Nel sesto capitolo, a conclusione del percorso, verranno confrontate le analisi fra le tre configurazioni geometriche diverse, ricercandone analogie e differenze strutturali, estetiche ed economiche e a riguardo della migliore soluzione verranno proposte delle soluzioni di nodo.



## Capitolo 2

# Il Ruolo dell'Ingegnere Strutturista

### 2.1 Architettura e Ingegneria nella storia

Sin dagli albori l'ingegneria e l'architettura hanno rappresentato i due lati della stessa medaglia. Osservando le prime grandi costruzioni, leggendo i primi trattati è ancor oggi complesso definire dove terminasse una disciplina e dove cominciasse l'altra. Marco Vitruvio Pollione nel *De Architectura* comincia il primo libro affermando i requisiti di una struttura:

*«Tutte le costruzioni devono avere requisiti di solidità, utilità e bellezza. Avranno solidità quando le fondamenta, costruite con materiali scelti con cura e senza avarizia, poggeranno profondamente e saldamente sul terreno sottostante; utilità, quando la distribuzione dello spazio interno di ciascun edificio di qualsiasi genere sarà corretta e pratica all'uso; bellezza, infine quando l'aspetto dell'opera sarà piacevole per l'armoniosa proporzione delle parti che si ottiene con l'avveduto calcolo delle simmetrie».* [1]

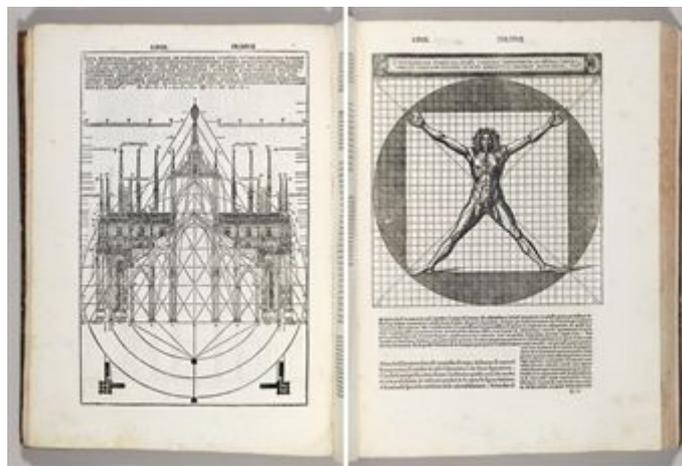


Fig. 2.1 - *De Architectura* di Marco Vitruvio Pollione

L'opera è stata una prima forma di manuale a tutti gli effetti: canoni, ricerche stilistiche, analisi storiche e culturali sullo stile e i materiali venivano accompagnate da formule e nozioni di geometria, matematica, ottica e ovviamente anatomia, madre delle proporzioni. Fino al Rinascimento, gli architetti o gli ingegneri o meglio i "costruttori", direbbe Pier Luigi Nervi, hanno preziosamente custodito e studiato questo trattato non tanto come un manuale, ma come un fondamento teorico per costruire una propria "sapienza strutturale". Infatti, la teoria serviva per arricchire e spingere questi professionisti ad andare ancora aldilà della grande esperienza che possedevano nel mondo pratico delle costruzioni. La gestione del cantiere, la profonda conoscenza dei materiali e delle tecniche costruttive erano la base su cui fondare esperimenti,

ma per lo più "intuizioni" sulla forma e la stabilità di una struttura. Pierluigi Nervi in un'intervista del 1960 alla Rai, sottolineava che la *democratizzazione* della conoscenza nel mondo delle costruzioni aveva sì reso più semplice un lavoro molto complicato, ma difficilmente avrebbe dato i mezzi per comprendere come Brunelleschi, per esempio, avesse immaginato, studiato e intuito per forma e struttura la cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze. Non a caso una delle più grandi espressioni strutturali e artistiche come il gotico non ha lasciato nella tradizione umanistica trattati per descrivere le basi teoriche. Anzi, quando nel tardo medioevo in Germania provarono a spiegare le tecniche costruttive da loro applicate, non erano del tutto consci di aver creato uno stile architettonico nuovo e distinto dal precedente. La Cattedrale di Reims, la Cattedrale di Canterbury, il Duomo di Milano sono la sublime rappresentazione di intuizioni di strutture da parte di studiosi e professionisti che procedono alla ricerca della forma ben consapevoli delle necessità funzionali delle strutture e ancora, della loro profonda conoscenza pratica delle strutture. Spingere una costruzione verso l'alto era dapprima una necessità estetica di spingersi verso il cielo, ma al tempo stesso coniugava la necessità di costruire edifici che sorreggessero enormi campanili, che fossero ben visibili da lontano per avvertire i fedeli circa il tempo e gli imprevisti, tutto questo facendo fronte ai costi dei materiali, poiché le strutture nonostante l'elevazione erano più leggere grazie alle volte a costole, che scaricavano le tensioni sui grandi pilastri.

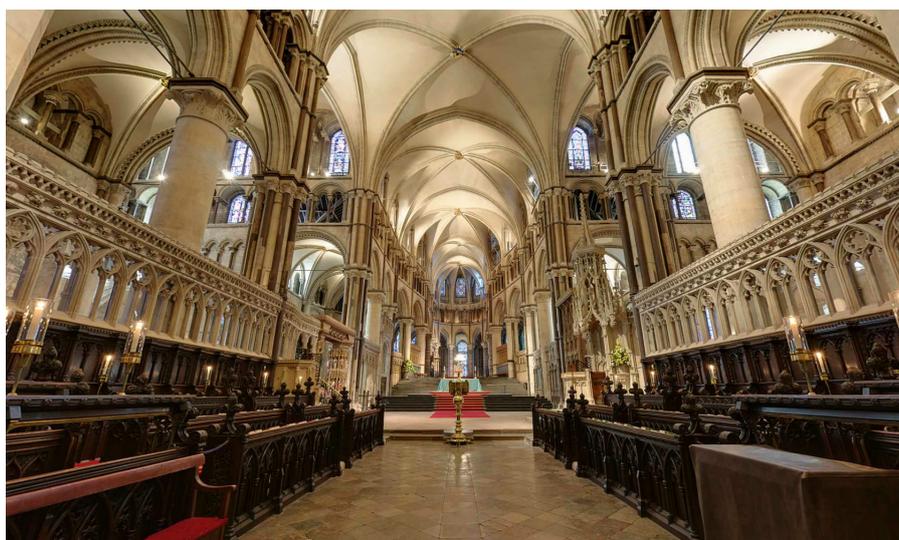


Fig. 2.2 - Le volte della Cattedrale di Canterbury

Eppure *Gotico* non assumeva lo stesso significato odierno. Leon Battista Alberti lo coniò in termine dispregiativo, per sottolineare la mancanza di identità da parte dei popoli del Nord Europa. Quest'ultimo, invece, conscio del Rinascimento alle porte, della propria identità culturale e stilistica e della loro formazione pratica e teorica, fortemente basata sullo studio del mondo classico, ispirato dal trattato vitruviano, scrive attorno al 1450 il *De re Aedificatoria*, un trattato anch'esso in dieci libri con l'obiettivo di focalizzare l'attenzione di un pubblico specialista ancora sui capisaldi di *firmitas*, *venustas* e *utilitas* ma dandogli un'accezione molto pratica, riferita alle modalità costruttive, all'uso dei materiali a seconda delle finalità della struttura proposta. Un vero primo manuale di ingegneria su cui hanno studiato altri grandi studiosi e geni del Rinascimento e del Barocco, come A. Palladio, G.L. Bernini, F. Borromini, etc. Fra questi spicca la figura di Guarino Guarini, ingegnere e matematico che basa le sue grandi strutture come la cupola della cappella della Sindone nel Duomo di Torino, la Chiesa Reale di San Lorenzo e le sue formulazioni matematiche proprio su una fase di formazione molto importante come gestore di cantieri.



Fig. 2.3 - Interno della cupola della Chiesa Reale di Torino, progettata da Guarino Guarini

Ma allora quando o dove è avvenuta la scissione, verrebbe da domandarsi. Più che scissione, il momento definitivo della separazione delle due discipline è avvenuto quando le costruzioni hanno dovuto fare realmente i conti con i costi, sia dei materiali ma soprattutto della manodopera. Col passare dei secoli, le necessità urbanistiche e stilistiche hanno avuto un grande impatto economico sulle società, fino a condurle a debiti insostenibili o addirittura a distruggerle. Le grandi costruzioni seguivano percorsi lunghissimi, venivano spesso interrotte per secoli e chi ne delineava la forma, non ne avrebbe mai visto la costruzione. Tuttavia, è da considerare che senza queste interruzioni probabilmente non esisterebbero, oggi, grandi strutture come la Torre di Pisa o la Torre della Ghirlandina a Modena. È questo il momento in cui nasce ufficialmente l'ingegneria: con l'avvento delle rivoluzioni industriali, quando studiando le proprietà, le caratteristiche dei materiali e inventandone, così, nuovi, si è cominciato a prevedere e intuire come poter rispondere strutturalmente alle necessità delle forme, spingendosi ai limiti della resistenza, ammortizzando gli elevati costi di costruzione e manutenzione.

L'Ingegnere civile e, quindi, lo strutturista, nasce come figura di connessione fra l'architettura, le necessità estetiche-funzionali e la società consumatrice. Una figura complessa, capace di coniugare tre mondi spesso completamente opposti, ossia scienza, arte e società. Nonostante il continuo progresso, fino ad oggi, nessuna macchina o materiale aveva scardinato questa figura. David P. Billington nel suo libro *The Tower and The Bridge* definisce gli ingegneri strutturisti artisti e scrive di una vera e propria arte strutturale, che sarebbe cominciata, in particolare, con la progettazione e la costruzione di due emblemi del mondo moderno: la Tour Eiffel, a Parigi, e il Ponte di Brooklyn, a New York. Sono molti i motivi che rendono queste due costruzioni i genitori di tale corrente, fra queste se ne possono identificare tre principali: in primis, ovviamente, sono i precursori dello studio e dell'utilizzo di nuovi materiali (la prima in ferro battuto, madre del secondo, ossia l'indiscusso re delle costruzioni, l'acciaio); in secundis sono la definitiva conferma della sfida dell'uomo all'altezza e alla lunghezza e, infine, a differenze delle grandi opere del passato, queste risultano a tutti gli effetti dei beni per e di proprietà della comunità. L'ingegnere, infatti, ha il compito di coniugare economia e scienza con il fine di produrre qualcosa che rappresenti la comunità in tutta la sua complessità, da chi apprezza il manufatto a chi non, senza mai far cadere il pensiero al concetto "si poteva risparmiare". La Tour Eiffel è, appunto, la prova. Si pensi allo scrittore francese Guy de Maupassant, acerrimo critico della "moderna torre di Babele", pare vi cenasse comunque all'interno quotidianamente, in quanto, a suo dire, restava ormai l'unico posto di Parigi da

dove non la si vedesse.

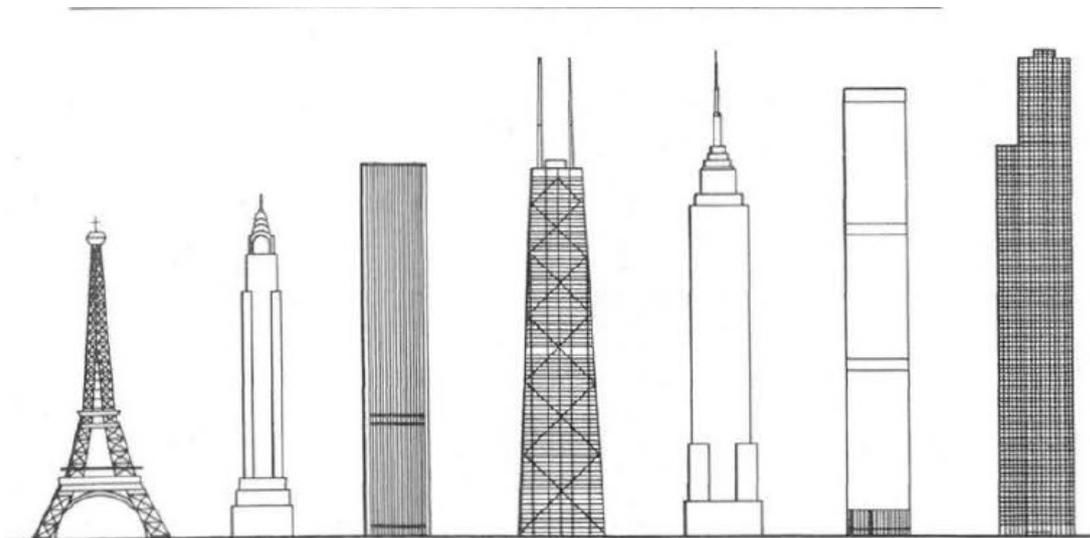


Fig. 2.4 - Tratto da *The Tower and The Bridge* di David P. Billington, compara la linea temporale degli edifici più alti al mondo e la loro forma. Da sinistra: la Tour Eiffel, Chrysler Building, Standard Oil Building, John Hancock Center, The Empire State Building, World Trade Center, The Sears Tower

## 2.2 1900, la Golden Age dell'Ingegneria Strutturale

Con l'avvento non solo del calcestruzzo, ma soprattutto dei primi trattati scritti sulla teoria di De Saint Venant e la scienza delle costruzioni, si cominciò a pensare e credere che solo chi fosse in grado di possederne il calcolo, potesse poi dettarne davvero la forma[2]. Dopo secoli si proponeva un nuovo tentativo per riunire ancora una volta scienza e arte, in questo caso nella moderna figura dell'ingegnere strutturista. È in questo periodo che, infatti, si affermano le grandi scuole del secolo scorso: la scuola di Chicago, la scuola Italiana e la scuola Svizzera.

### 2.2.1 La Scuola di Chicago

La Scuola di Chicago risponde alla crescita demografica e all'aumento esponenziale della densità di popolazione nelle grandi città americane e alle teorie estetiche dell'architetto francese Eugène Viollet le Duc, che nelle sue pubblicazioni *Entretiens (Lectures)*, scritte nel 1863 e nel 1872 e tradotte in inglese nel 1875 e 1881, propone una ripresa del Gotico per rispondere alle necessità di costruire edifici che soddisfino una grande richiesta di abitazioni, ma soprattutto di uffici. In particolare, l'idea per spingersi nuovamente in altezza, forti dell'esperienza della Tour Eiffel, era quella di costruire strutture con uno scheletro in acciaio e basate su solide fondazioni in calcestruzzo, materiale che era ancora in fase di studio e di prova. Carl Condit, storico dell'ingegneria strutturale americana, scrive che nel 1891 il secondo Leiter Building a Chicago presentava una "facciata lungo ovest che si sviluppa direttamente dal sistema strutturale retrostante, proprio come i contrafforti isolati della cattedrale gotica fungono da elementi visivi primari nella sua indissolubile unità di struttura e forma"[3]. Chicago, centro dell'economia Americana alla fine del XIX secolo, ospita nel 1893 l'esposizione universale, ma soprattutto l'influsso dei grandi cambiamenti economici e sociali. Sono molti gli storici che scrivono e paragonano lo skyline di Chicago con quello della Francia medievale: le cattedrali, simbolo della cristianità, con i grattacieli,

simbolo della potenza economica. Questi ultimi, con l'avvento dell'ascensore, diventano fondamentali: lo scheletro in acciaio permette di ridurre notevolmente la richiesta dei materiali e dei costi, ha una robustezza importante e riesce a risolvere efficacemente il rischio incendio, molto frequente al tempo. William Le Baron Jenney progetta Leiter Building e le sue 3 modifiche in altezza. David Billington scrive che seppur quest'ultimo non sia proprio un grattacielo, il suo scheletro in ghisa, ricoperto da mattoni è il segnale di questa sfida che diventerà un must per tutte le città americane. Tuttavia, i padri fondatori della prima scuola di Chicago sono storicamente l'architetto Daniel H. Burnham e l'ingegnere John Wellborn Root con la costruzione di oltre 200 edifici alti nella Down Town, ma soprattutto Louis Sullivan: Wainwright Building con i suoi 41 metri diventa il primo grattacielo, il più alto al mondo, capace di garantire ampi spazi per uffici, una circolazione interna separata per le abitazioni e una profonda estetica non solo decorativa ma anche strutturale. I primi due piani tozzi e robusti, sembrano separati dal resto della struttura ma permettono ai pilastri di estendersi in altezza quasi quanto la pianta di base. Tuttavia non tutti i pilastri sono elementi strutturali: molti visibilmente sconnessi dalla base risultano elementi stilistici e architettonici.



Fig. 2.5 - Wainwright Building

Le due guerre mondiali mandarono in declino la prima scuola: il diktat di costruire gli edifici più alti del mondo, per sottolineare la supremazia politica ed economica degli USA, diedero vita al Chrysler Building, alle Twin Towers, all'Empire State Building, ma l'altezza cancellò la ricerca della forma e la funzionalità. Quest'ultimo, soprattutto, nonostante fosse immediatamente diventato nel 1931 l'edificio più alto al mondo con i suoi 443 metri, restava una "foresta di colonne"[2]. L'altezza includeva il ridurre gli spazi per far fronte ad elementi strutturali numerosi robusti e resistenti per garantire una risposta (seppur non efficiente) nei confronti delle azioni del vento e nei confronti delle azioni gravitazionali, crescenti scendendo (gli uffici erano predisposti al vertice, in quanto valutati come carico quasi nullo), l'estetica era garantita dalle numerose finestre. Dal 1960 con la seconda scuola, Chicago vive una nuova vita e Fuzler Khan ne è il genitore più importante. La guerra fredda, l'esempio di Pierluigi Nervi in Italia, maturano la necessità di edifici che siano l'eccellenza in termini economici, tecnici e sociali. Hartford Plaza Building nel 1961 fu la sua prima soluzione: uno scheletro esterno in calcestruzzo con la funzione di sostenere i soli carichi gravitazionali mentre un nucleo centrale per ospitare l'ascensore e il vano scala funge da elemento di resistenza per le azioni laterali. Billington sottolinea che la soluzione non soddisfò del tutto il progettista: lo scheletro per evitare la riduzione degli spazi interni era comunque tozzo. Su

questo presupposto nasce il *tube in tube* e il John Hancock Center: uno scheletro esterno in acciaio, con i pilastri collegati da bracci ad X, efficientemente supporta e ripartisce i carichi verticali e gestisce con il nucleo interno le forze orizzontali senza incrementare eccessivamente le sollecitazioni e, quindi, le deformazioni, anzi ne smorza le vibrazioni.



Fig. 2.6 - Vista della facciata del John Hancock Center

L'edificio non riuscì a raggiungere l'altezza record, che raggiunse nel 1972 Sears Tower con i suoi 527 metri: i suoi 9 tubi gli permisero di raggiungere un'elevazione impensabile, aumentando gli spazi e differenziando finalmente blocchi abitazioni da blocchi uffici, diminuirono notevolmente i costi attraverso la modularità dei blocchi e furono precursori dei moderni grattacieli, fra questi l'attuale detentore del record, il Burj Khalifa di Dubai con i suoi 829 metri.

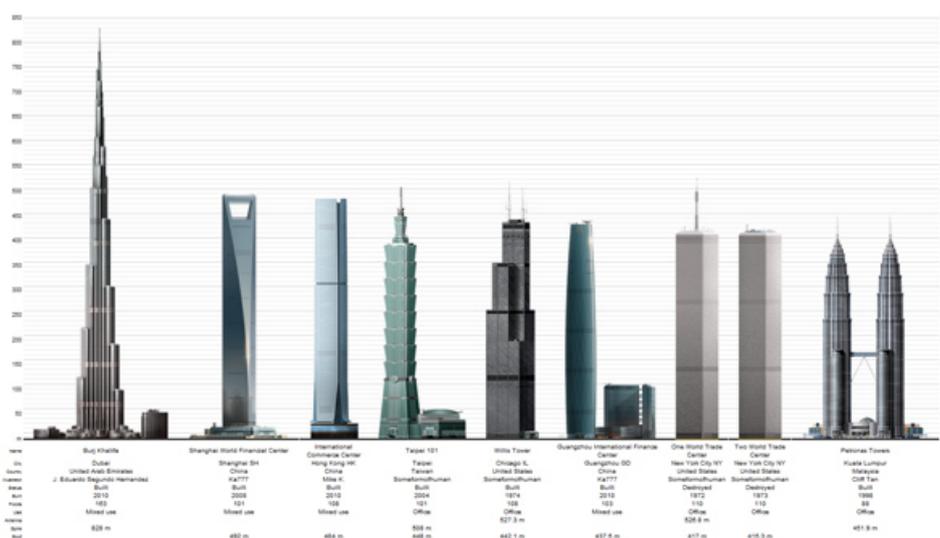


Fig. 2.7 - Linea Temporale dei record di elevazione dei grattacieli fino ai giorni nostri

### 2.2.2 La Scuola Svizzera

"La scienza tedesca e la teoria Francese trovano la loro naturale sintesi in Svizzera, l'unico posto in Europa dove entrambe le culture si incontrano senza competere come nazionalità".

Scrive, così, David P. Billington per introdurre la più grande Scuola in Europa e nel mondo ancor oggi per la progettazione di ponti. Infatti, nel 1888 fra la piena seconda rivoluzione industriale nel secondo Reich e la Francia delle teorie di Gaspard Monge e degli studi di Hennebique, che nel 1892 breveterà il sistema *Hennebique* e nel 1894 costruirà, appunto, in Svizzera, a Wiggen, il primo ponte in calcestruzzo armato, si pone lo studioso Wilhelm Ritter, che darà inizio alla scuola attraverso la riscrittura del trattato *Graphic Statics*. Sostanzialmente, Ritter espone 3 principi di progettazione:

- i. l'importanza dei calcoli e delle verifiche: cercare di dimostrare l'intuizione statica mediante e soprattutto forti semplificazioni giustificabili. Si torna sempre su quanto detto precedentemente, la profonda esperienza pratica permetteva ai grandi progettisti di semplificare, spesso in maniera incomprensibile e/o confutabile matematicamente, un senso della statica e una propria inconfutabile verifica fisica.
- ii. Il progettista è il responsabile dei processi costruttivi e dei suoi dettagli. Fino al 1900 costruttore, architetto, ingegnere erano spesso e volentieri la stessa persona.
- iii. Bisogna saper dimostrare i propri calcoli e la loro accuratezza soprattutto mediante dei test qualitativi su campioni in scala.

David P. Billington sottolinea che soprattutto l'ultimo principio fu un ritorno al passato fondamentale: la sublime e grande competenza matematica degli studiosi, tedeschi in particolare, cercava di evitare le prove pratiche, viste uno spreco di denaro. Eppure Ritter sosteneva che solo un modello pratico poteva effettivamente mostrare le dimensioni della freccia, le deformazioni ma anche il senso estetico della struttura.

La sintesi del sistema Hennebique e del sistema Ritter, fu Robert Maillart. Nel 1899 progettò Stauffacher Bridge: un ponte in stile classico dove l'impalcato è sorretto da un arco in calcestruzzo e decorato da una facciata in pietra. L'estetica era fondamentale, necessaria nelle gare per le costruzioni in Svizzera. Un sistema molto competitivo, infatti, valutava e premiava i progetti migliori in termini di estetica, appartenenza al territorio, significato sociale e tecniche costruttive; i costi non erano contemplati ma ritenuti impliciti nelle scelte dei progettisti. Una commissione valutava ed assegnava i progetti e addirittura, talvolta, proponeva premi in denaro per taluni. Questo sistema portò inevitabilmente ad una crescita esponenziale della scuola svizzera non solo in terra elvetica, ma anche nel mondo. Zuoz Bridge nel 1901 fu il primo vero ponte in calcestruzzo armato e non solo, fu anche il primo box-girder della storia.



Fig. 2.8 - Zuoz Bridge

Fu difficile da dimostrare la statica degli archi a tre cerniere per il calcestruzzo armato e la resistenza alla fessurazione, furono proprio i test sul modello in scala a convincere la commissione. In merito ai principi di Ritter, egli non volle utilizzare modelli e formule altrui, trovava assurdo non fare da sè dei calcoli da testare direttamente su un modello pratico. Volle dimostrare le strutture e la statica partendo dai materiali, dalle pratiche costruttive: è così che nasce il concetto del *centro di taglio*. Per di più per quasi tutta la sua carriera chiede che venga prodotto un codice, il quale più che essere basato su formule matematiche, deve esserlo su prove empiriche dettate da una profonda conoscenza pratica dell'ingegneria. Sullo stesso modello progetta anche Tavanasa Bridge nel 1905 e Salginatobel Bridge nel 1929. Nel 1936, sull'esperienza del calcestruzzo armato precompresso e le teorie della cerniera plastica di Freyssinet progetta Vessy Bridge: *l'impalcato alleggerito e le sue travi di forma parabolica trasferiscono i carichi ai piloni seguendo l'andamento del diagramma del taglio* [2]. Le tre cerniere vengono nuovamente criticate dal mondo accademico, ma Maillart ne giustifica questa volta il calcolo dimostrando che le cerniere assorbono le vibrazioni del ponte.

Sigfrid Ghiedion scrive: *“nelle mani di un grande ingegnere, tutto diventa arte”*[4].



*Fig. 2.9 - Scheletro del Vessy Bridge*



*Fig. 2.10 - Vessy Bridge*

L'importanza estetica prende anche le parti strutturali: dai capitelli delle pile nascono i *solai a fungo*. L'arco permette di avere una struttura a compressione e il capitello a fungo dimostra proprio l'andamento delle tensioni e come esse si scarichino sul pilastro. In una lettera per la Società Svizzera degli

Ingegneri e Architetti del 1937 Maillart scrive:

*"non è solo il desiderio della bellezza che fa vedere le strutture come un tutto unico e non come singole parti, ma questo modo di vedere porta vantaggi economici. I solai a fungo possono essere un esempio. Vi sono molte teorie eleganti per solette su punti di supporto, tuttavia trattare le solette da sole non porta a buoni risultati economici, che invece si possono ottenere solo se si esamina tutta la struttura insieme: soletta, colonne e capitelli. Questo presenta particolari difficoltà di calcolo che si possono superare solo con modelli di studio e misure sulle strutture complete: questa è la differenza essenziale tra il mio metodo di calcolo delle solette e quelli esposti in molti regolamenti. L'ingegnere deve liberarsi delle usuali forme della tradizione, nate per vecchi materiali e deve cercare la forma ottimale per un utilizzo completo delle risorse dei nuovi materiali. Forse questo porterà, come è avvenuto per gli aeroplani e le automobili, ad una simile bellezza con un nuovo stile derivato dalle proprietà dei materiali".*



Fig. 2.11 - Solaio a fungo

Come già affermato, la scuola svizzera non si soffermò soltanto in suolo elvetico. In America Othmar Amman rivoluziona la storia e lo skyline americano. Dipendente di Gustav Lindenthal vince il premio dalla Società Americana degli Ingegneri Civili per il suo paper su Hell Gate Bridge, prodotto appunto dall'ufficio di Lindenthal. Nel 1923 lascia l'ufficio per mettersi in proprio e forte della sua formazione in Svizzera proprio da parte di Ritter nel 1931 progetta il ponte George Washington. Le Corbusier scrive nel libro *Quando le cattedrali erano bianche* che il Ponte George Washington è il più bello al mondo.

*"Fatto di cavi e travi d'acciaio, splende all'orizzonte come un arco rovesciato. [...] È l'unico luogo di grazia in una città disordinata. [...] Quando la tua auto sale sulla rampa le due torri si alzano così in alto da portarti alla felicità; la loro struttura è così pura, risoluta, regolare che qui, in definitiva, l'architettura d'acciaio sembra sorridere"*[5].



Fig. 2.12 - George Washington Bridge

Arte e scienza si coniugarono, infatti, in un capolavoro estetico. Seppur privo di decorazioni o scelte stilistiche particolari, è proprio la linearità, la forma del ponte sospeso totalmente in acciaio a stupire il mondo americano e non solo. Oltre le quattro funi principali e le travi principali, anche le torri, che da progetto erano state pensate in calcestruzzo armato e ricoperte di granito (Amman criticava fortemente l'estetica delle Torri del Ponte di Brooklyn), a causa della grande crisi, rimasero in acciaio, senza alcun rivestimento. Fu un gran successo che permise di sfruttare al massimo la resistenza dell'acciaio, raggiungendo la luce record di 1450 m, consegnando alla storia un ponte, dai piloni alle funi, totalmente realizzato in acciaio leggero, ma capace di gestire fino al 2007 con le sue 14 corsie (6 furono installate in seguito al di sotto del ponte) la più grande capacità veicolare al mondo.

### 2.2.3 La Scuola Italiana

Infine, la scuola italiana: figlia di Arturo Danusso e Gustavo Colonnetti, trova in Pier Luigi Nervi, l'emblema a tutti gli effetti. Le Corbusier, che osservò Nervi progettare il palazzo dell'UNESCO a Parigi, ha detto di lui:

*“Veder Nervi collocare uno scheletro di calcestruzzo in una struttura è una magnifica lezione. Non vi mette mai nulla di volgare. Che eleganza! Non si definisce architetto, ma è migliore di quasi tutti noi”*[6].

Maestro della snellezza e delle volte, Nervi reinterpreta il contesto ingegneristico e architettonico della storia d'Italia, mediante scelte di forma semplici per semplificare, appunto, il calcolo stesso. Ma come egli stesso sottolinea in molte interviste, la sua raffinata spinta estetica nasce da una profonda formazione come costruttore e, pertanto, curatore dei processi produttivi. Il *sistema Hennebique* rende il calcestruzzo il materiale più utilizzato e adorato in Italia: è facile da produrre, non ha forma propria e l'Italia è ricca dei materiali costituenti. Infatti, come racconta l'ing. Tullia Iori nel ventiduesimo episodio di *Art Night* per Rai 5, nel 1911 il giorno dopo la sua laurea presso Alma Mater Studiorum, Pier Luigi Nervi comincia la sua carriera come costruttore: prima per l'ampliamento del teatro giardino Alhambra da parte di Adolfo Coppedè a Firenze e poi per il Ponte Risorgimento a Roma da parte di Giovanni Antonio Porcheddu "il Re del cemento armato", secondo Re Vittorio Emanuele II.



Fig. 2.13 - Foto storica del Ponte Risorgimento

Queste due costruzioni distinsero sin da subito Nervi dal panorama europeo e italiano dell'ingegneria nella ricerca della forma. Infatti, in tutte le sue interviste, Nervi ha sempre disprezzato lo stadio del gioco della pelota e tutte le successive forme di decorazione incompatibili con la struttura. La tecnologia, infatti, portava a strutture sempre più grandi, imponenti e difficilmente nascondibili, a suo dire, da fregi e stucchi. Secondo il suo punto di vista, l'architetto in primis doveva ben saperne di materiali e tecniche costruttive, alla pari di un ingegnere, per esigere che si oltrepassassero certi limiti, spesso incompatibili con le formule. E su quest'ultime entra in ballo il Ponte Risorgimento: gli studiosi tedeschi criticarono aspramente il sistema Hennebique e il ponte, vista l'impossibilità, al tempo, di dimostrare la stabilità del cemento armato attraverso una teoria strutturale.

Scrivendo Nervi nel 1933 in un articolo su "Quadrante":

*"Non si possono fare regole se non di larghissima massima, e perciò l'opera dell'ingegnere ha sempre qualche cosa di assolutamente personale, frutto più dell'intuito che dell'anonimo ragionamento... Troppo spesso si confonde l'ingegneria con i procedimenti matematici di calcolo che le sono propri e la espressione buon calcolatore o buon matematico è molte volte, e non solo da profani, confusa con quella di buon ingegnere".*

Dello stesso avviso è Arturo Danusso, che crede fortemente nella sperimentazione su modelli in scala, soprattutto per studiare le caratteristiche meccaniche e fisiche di un materiale non omogeneo, sebbene il problema dei rapporti fra azioni agenti sul modello e azioni agenti sull'opera fosse non poco complicato. Tale problema era già noto a Vitruvio che ne scrisse all'interno dell'episodio di Callia, architetto greco e inventore di un prototipo di macchina d'assedio delle torri, che non riuscirono mai a replicare nella realtà. Tuttavia, è con le tecniche e le conoscenze del XX secolo che nasce la modellazione strutturale che viene usata nei calcolatori: capire nel piccolo come avvengono i fenomeni ed estenderli nel reale, note le relazioni che le legano. Danusso e Nervi lavorarono insieme nel 1935 per dimostrare il progetto della copertura delle aviorimesse di Orvieto. La forte iperstaticità impediva il calcolo analitico, mentre la sperimentazione permetteva di *misurare* gli effetti. Esaminarono caratteristiche della sollecitazione per via del peso proprio con dei pesi tarati ed agganciati e dei cicli di carico per misurare le azioni orizzontali del vento.

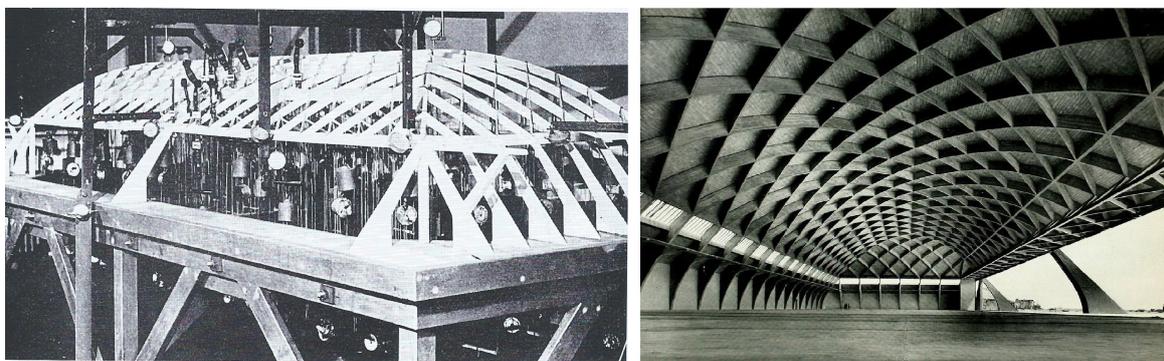


Fig. 2.14 - Modello strutturale dell'Aviorimessa di Orvieto e la sua copertura

Da questa impostazione nascono anche gli studi sulle grandi costruzioni. Lo stadio Artemio Franchi di Firenze viene costruito dopo uno studio pratico sulle masse in movimento. Dal 1936, Tullia Iori precisa, servirà anche per studiare nuovi materiali. L'Italia, infatti, ha invaso l'Etiopia e la Società delle Nazioni vieta all'Italia l'acquisto di acciaio dall'estero, limitando le opere in cemento armato. E' così che nasce il *Sistema Nervi*: per primo egli crea il ferro-cemento, una variante proporzionale del cemento armato, assembla reti metalliche da pollaio per uno spessore di circa 2,5 cm, dopo di che viene ricoperto da un lato con calcestruzzo *finché non affiora dall'altro lato*. (Tullia Iori, *Art Night*, episodio 22, 13 Marzo 2020). Un materiale di 3 cm, che non resiste per massa ma appunto per forma, risultando perfetto per le cupole. Inoltre, sfruttando la prefabbricazione degli elementi, nota dalle esperienze di Freyssinet, brevetta la prefabbricazione strutturale: le strutture sono composte da pezzi che vengono prodotti in officina e

montati in situ.



*Fig. 2.15 - Palazzetto dello Sport di Roma per i giochi Olimpici del 1960*

E' sul Sistema Nervi che si basa la cupola del Palazzetto dello Sport al Flaminio: 1620 pezzi alleggeriti compongono una cupola di 60 metri di diametro, superando i 54.5 m del Pantheon, da cui trae ispirazione, per il sistema a 2 vie della nervatura. Sistema che aveva studiato dalla cupola di Brunelleschi a Firenze e dalla Cupola di San Lorenzo di Guarino Guarini. All'interno il solaio è a nervatura isostatica: facile, economico e rapido da costruire attraverso il Sistema Nervi. Quest'ultimo, possiede anche un fattore non poco rilevante, le maestranze. Nervi non è soltanto un ingegnere, ma soprattutto un costruttore e proprietario di un'azienda edilizia che vanta, quindi, maestranze specializzate nei processi e nelle tecniche costruttive che abitano nel suo background. Ciò favorì anche la velocità di costruzione, che trova la massima espressione il Palazzo del Lavoro a Torino: una struttura quadrata di lunghezza 160 metri sorretta da 16 pilastri che si estendono in alto a raggiera, ricordando un po' il solaio a fungo di Maillart. Ogni pilastro sorregge  $1600\text{ m}^2$  di solaio, e ciò permise di costruire la struttura  $40000\text{ m}^2$  di solaio, un pilastro alla volta, con la struttura terminata in soli 9 mesi.



*Fig. 2.16 - Palazzo del Lavoro, Torino*

Infine, è impossibile non trattare il tema degli edifici alti. Anche Nervi si dedica a modelli e alla progettazione dei grattacieli. Il Grattacielo Pirelli a Milano in cemento armato è ispirato alla struttura della diga, che risponde con la massa e la robustezza all'azione orizzontale del vento. La sobrietà dell'edificio gli permise di vincere numerosi premi e di essere ambito da molti paesi stranieri, che desideravano ottenere una sua struttura. Fra questi si ricordano: il Palazzo Unesco a Parigi, la Sala delle udienze in Vaticano, la Cattedrale di San Francisco, giusto per citarne alcune.

*"La Tecnica ha tante possibilità, infinite possibilità, ma le deve mettere al servizio e non come finalità, ma come mezzo nel campo dell'architettura per raggiungere delle conclusioni, che soddisfino le loro funzionalità, che nel limite della loro funzione siano economiche e che creino un ambiente serio. L'unica finalità per me è un ambiente serio che serva di educazione degli uomini".*



Fig. 2.17 - Grattacielo Pirelli, Milano

Il boom economico fu il trampolino di lancio per la scuola italiana nel mondo e i migliori ingegneri al mondo erano appunto italiani. Nel 1961 insieme al palazzo del Lavoro, il Palazzo a Vela divenne un altro importante simbolo della città di Torino: costruito per le celebrazioni del centenario dall'unità di Italia, fu progettato da Franco Levi che con maestria ancorò la volta alta 23 metri in soli tre punti di appoggio. Si pensi anche a Riccardo Morandi e l'invenzione dei ponti strallati (in realtà un primo esempio teorico è datato 1551 da parte di Fausto Veranzio). In Venezuela, il Ponte Maracaibo con lo schema di distribuzione delle forze ad arpa (cioè dove la strallatura è omogenea per garantire lo sforzo di compressione nell'impalcato e la stabilità della torre principale), era lungo ben 9000m.



Fig. 2.18 - Ponte Maracaibo, Venezuela

Tanti ingegneri ma al tempo stesso scienziati ed artisti, capaci di intuire la stabilità strutturale. In questo panorama spicca, infine, anche il padre dell'odierno *Form Finding* Sergio Musmeci. Il *Form Finding* è la ricerca della massima efficienza della forma sfruttando al massimo le caratteristiche meccaniche del materiale. Musmeci, che aveva lavorato nello studio di Nervi, cercò nella sua breve carriera di determinare forme non attraverso la verifica degli elementi per la scienza delle costruzioni, ma appunto attraverso lo studio di modelli in scala, in grado di mostrare le caratteristiche della sollecitazione. Dapprima si ispirò ai metodi utilizzati in Catalogna da Antoni Gaudì, lo studio della catenaria mediante modelli matematici e fisici (sono ben note le reti di Gaudì, con i nodi collegati a dei pesi per simulare la resistenza flessionale e il comportamento membranale, uno specchio ribaltava e mostrava l'andamento delle deformazioni).



Fig. 2.19 - Modelli di Membrane di Antoni Gaudì

Così studiò l'arco limite di Nepero, ossia quella luce ultima per la progettazione di una catenaria. Nel 1959 Sergio Musmeci studiò la migliore stabilità per il Ponte di Tordiquinto attraverso un esperimento. Un manufatto in fil di ferro veniva immerso in una soluzione di sapone, in modo tale da creare un film attorno a tutta la struttura. Lo stesso Musmeci racconta in un'intervista a Charles Kahn nel 1978 che i tratti che univano la sovrastruttura con la sottostruttura furono sostituiti da fili di cotone, *che venivano messi in tensione dalla stessa superficie della soluzione di sapone*. Così, il ponte fu sostenuto da pile a forma di v, che garantiva una struttura soggetta puramente a compressione, con la minima sezione immersa in acqua e la massima collaborazione fra le nervature.

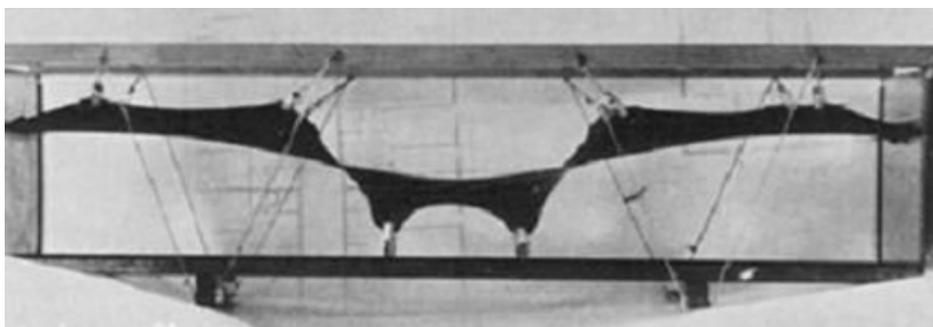


Fig. 2.20 - Modello in scala del Ponte sul Basento

Il Ponte sul Basento rappresenta probabilmente il più bel ponte al mondo. Costruito attraverso esperimenti prima con la gomma (che se tirata al massimo simula l'andamento uniforme delle tensioni), poi con un modello in scala, egli progettò e costruì un ponte soggetto puramente a compressione, il che gli

permise di avere una struttura non tozza ma sottile e abbastanza robusta non per massa ma per forma. Le sue particolari curve e la sua geometria furono realizzate coniugando i saperi ingegneristici e le caseruoole, utilizzate per la costruzione delle imbarcazioni.

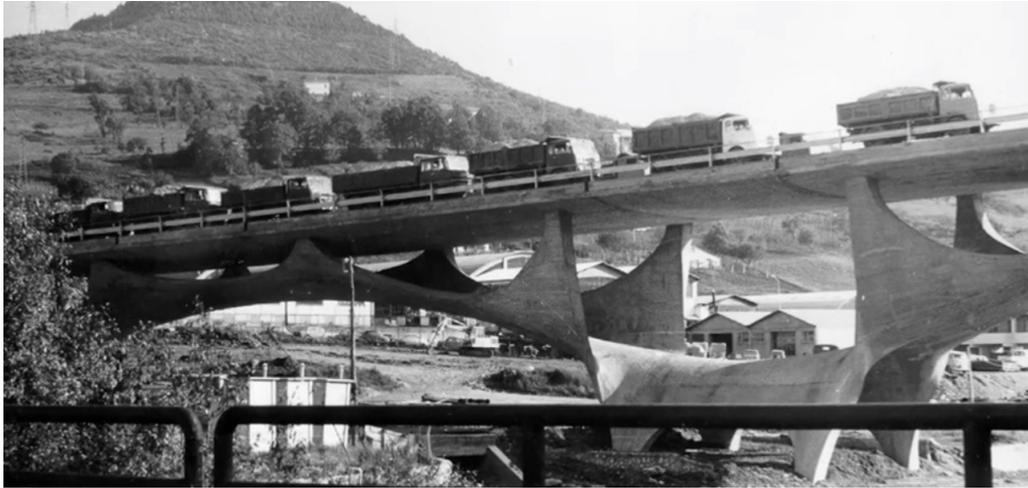


Fig. 2.21 - Ponte sul Basento, Potenza, durante il collaudo

"Un bravo ingegnere strutturista non calcola da forme assegnate, ma assegna forme". (Sergio Musmeci)

### 2.3 La Crisi e la Rinascita dell'Ingegneria Strutturale

L'avvento del calcolatore ha permesso, usando un termine di Nervi, di *democratizzare* l'intuito strutturale. La prima prova tangibile delle potenzialità degli elementi finiti fu proprio con Pierluigi Nervi. Nel 1967 Nervi fu incaricato della progettazione della cattedrale di San Francisco: la cupola doveva essere costituita da paraboloidi iperbolici, disposti a croce greca. Nervi, che era a capo dell'ISMES (*Istituto Sperimentale Modelli e Strutture*), valutò la stabilità mediante un modello in scala. I risultati, vennero controllati dalla Robinson e Associates attraverso un software FEM chiamato STRESS che valutò tutta la struttura in un modello soggetto a carichi verticali, combinati con i carichi variabili del vento e sismici. I risultati confermarono gli studi di Nervi, la struttura era perfettamente stabile e le deformazioni dell'ordine di 2 cm. Il calcolatore si dimostrò efficace, rapido e dai costi molto contenuti.



Fig. 2.22 - Cupola della Cattedrale di San Francisco

Lo stesso accadde a Sydney per la costruzione dell'Opera House: l'iperstaticità e la mole di dati in gioco erano ingovernabili attraverso i modelli in scala, il calcolatore riuscì a garantirne la soluzione e la stabilità.

Fu così che l'intuizione strutturale cominciò a perdersi per far fronte all'economica e rapida soluzione

informatica proposta dalle moderne università americane. Eppure, nato come supporto e strumento di semplificazione, il computer non è stato un apparecchio semplice da gestire per molti versi, soprattutto in Italia. Il costo e la mancanza di teoria non hanno reso facile l'apprendimento del suo utilizzo: infatti, non tutte le università del tempo lo possedevano, spesso erano inaccessibili agli studenti e le tempistiche non erano sicuramente quelle che si possono immaginare oggi giorno. Ci volevano giorni, per ottenere pile e pile di fogli di risultati, che andavano comunque analizzati e compresi. Una certa accelerazione è stata dettata dai settori meccanici dell'automotive e dell'aeronautica, che trovarono nel calcolatore uno sviluppo di ricerca anche per il disegno assistito. Tuttavia, dinanzi alle nuove esigenze di una società sempre più globale, veloce e complessa, sia economicamente che culturalmente, l'ingegnere in generale ha sopperito e perso la sua creatività. E non solo. Negli Stati Uniti è quasi considerato alla pari di un tecnico, una figura in grado di leggere e interpretare dei risultati numerici per proporre soluzioni. La struttura, soprattutto, viene concepita affinché risponda ai canoni dei software utilizzati, alla velocità di calcolo e replicazione, riducendo i costi per sopperire la crescita esponenziale di quelli di cantiere e delle licenze stesse. L'ambiente social ha aumentato ancor più le difficoltà. Francesco Lipari, fondatore di OFL Architecture, scrive nel libro di Arturo Tedeschi *AAD* che dal *mondo social* ne verranno fuori due società: la prima una società dall'*alta comunicazione*, che non vedrà più confini territoriali e geografici[7]; la seconda una società dalla *bassa comunicazione*, che dovrà far fronte *alla perdita della memoria per una storia tecnologicamente obsoleta*[7], nel continuo odi et amo fra recuperare e salvare la propria identità. In questa notte buia per l'ingegneria a darsi forza è stata l'architettura, che ha cercato di riunificare, un'altra volta, creatività e intuito statico. Con quasi 10 anni di ricerca continua, ad una velocità imparagonabile rispetto al passato, l'architettura ha cercato di sfruttare la possibilità di lavorare definitivamente nelle tre dimensioni, per produrre software e modelli virtuali capaci di reinterpretare i modelli strutturali del passato. Non si sono accontentati della forma, hanno realizzato software in grado di proporre laboratori fisici virtuali, in cui il progettista lavora e sperimenta ancora ottimizzando i materiali, le tecniche costruttive, la ricerca della forma e la verifica strutturale, coniugando nuovamente i sempreverdi canoni del passato, scienza, arte e società, con una nuova attenzione anche verso la green economy e l'energia. Sono nati così il BIM, Rhino e Grasshopper, migliaia di tools e plug-in opensource e privati, con l'unico obiettivo di garantire un unico ambiente di lavoro per le numerose specializzazioni di oggi giorno. Tutto questo percorso finora trattato ha dimostrato principalmente una considerazione: l'ingegnere è una figura complessa che indipendentemente dalle capacità, dagli obiettivi e dal ruolo nella società, si dimostra sempre capace di comprendere la realtà e il proprio tempo, trovando costantemente un posto fondamentale in questi ultimi. L'ingegneria computazionale può essere la stella polare in questa notte buia: essa non solo guida, ma è fissa nel tempo a sottolineare la storia e l'importanza di una delle professioni più belle al mondo.

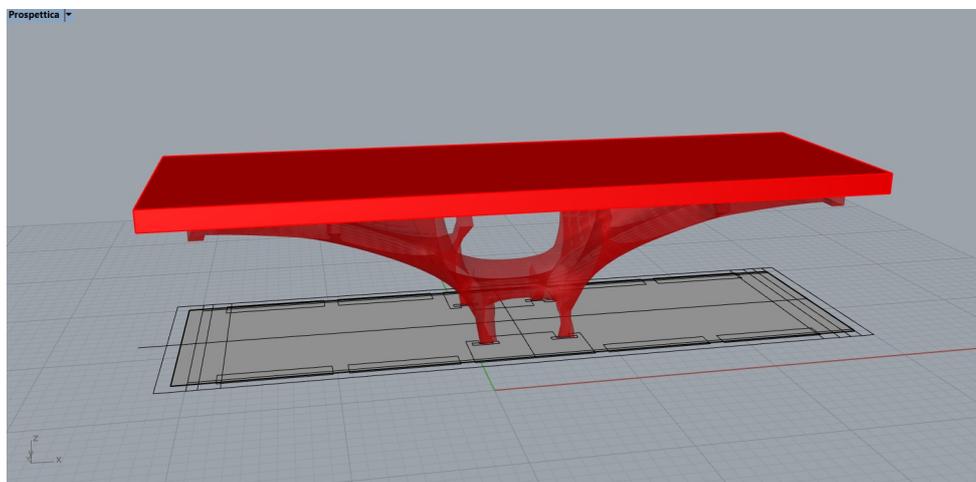


Fig. 2.23 - Modello personale del Ponte Sul Basento prodotto su Grasshopper mediante Kangaroo

## Capitolo 3

# Space Filling Polyhedra

*"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non si impara a intender la lingua e conoscere i caratteri né i quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola, senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto". (Galileo Galilei, Saggiatore).*

Il termine *tassellazione* deriva da *tassello* l'elemento principe del mosaico. Sin dagli albori dell'umanità l'osservazione della natura e delle sue forme, si pensi ancora al favo, alla ragnatela oppure alla struttura dell'ananas o persino alle forme di rottura del terreno in siccità, ha ispirato l'uomo ad emulare queste strutture per fini pratici ed estetici. I reperti archeologici delle città di Ur e Uruk dimostrano che nel 3000 a.C. i Sumeri usavano coni di argilla per proteggere i mattoni dalle intemperie e per favorire un senso estetico, davano loro disposizioni geometriche precise. L'apice di questa estetica primordiale fu raggiunta durante il periodo ellenico: a Pella, la città di Alessandro Magno, vennero usati ciottoli sulla pavimentazione per renderla impermeabile e resistente all'usura e, per *unire l'utile al dilettevole*, venivano rappresentate scene di caccia. Furono i Romani, però, ad inventare il concetto moderno di mosaico: la religione cristiana favorì espressioni di carattere puramente estetico ma le altre religioni di tipo iconoclastiche, ebraismo e islam in particolare, favorirono un interesse di carattere geometrico, predestinando ad uno studio matematico. Infatti, la tassellazione del piano e dello spazio non è basata solo su posizioni definite, ma anche e soprattutto sulle infinite possibilità casuali. E' su questo concetto che si basa buona parte della scienza moderna: dall'atomismo alle strutture cristallografiche dei materiali, dalla trasmissione delle onde e dei segnali all'uso dei pixel e dei filtri di colorazione.

Alla fine del 1800 si pensava che l'universo fosse costituito dall'etere, una sostanza rarefatta e imponderabile che vibrando permettesse la propagazione della luce. Lord Kelvin cercò di ipotizzarne l'isotropia: cercò la forma di un elemento base che replicandosi riuscisse a riempirlo completamente, senza lasciare vuoti e garantendone la condizione di minima superficie, ossia che abbia curvatura nulla. Egli, allora, propose un poliedro: il tetraedro troncato ma con le superfici di separazione, appunto, a curvatura nulla. Numericamente tale problema si traduce nel rapporto tra il volume e la superficie ma per far sì che sia adimensionale, si eleva il volume al quadrato e la superficie al cubo, in modo tale che entrambe raggiungano come ordine di potenza il minimo comune multiplo delle due dimensionalità. Questo rapporto è detto *isoperimetrico* e per la sfera risulta pari a 1:

$$\frac{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}{\left(\frac{S}{4\pi}\right)^3} = \frac{36\pi V^2}{S^3} = 1$$

Il cubo ha rapporto pari a  $\frac{\pi}{6}$ , l'ottaedro troncato di Kelvin invece 0.75 e, poiché il cerchio non riesce a riempire lo spazio senza lasciare vuoti, risultò il migliore dei poliedri fino al 1994, quando Weaire e Phelan trovarono due solidi capaci di avere un rapporto isoperimetrico pari a 0.76 e a riempire interamente lo spazio.

Possedere le regole geometriche e le profonde caratteristiche dei materiali (in tale capitolo si farà particolare riferimento alle nozioni cristallografiche della metallurgia), significa governare le caratteristiche della sollecitazione e spingersi il più possibile nella ricerca della forma. E lo space filling polyhedra è una soluzione affascinante. La prova: il centro acquatico di Pechino, una struttura composta proprio dai solidi di Weaire e Phelan.



Fig. 3.1 - Centro acquatico di Pechino. Lo space filling ha permesso di risparmiare sui costi e di scegliere come materiale l'Etilene TetrafluoroEtilene

### 3.1 Poliedri

I poliedri sono probabilmente i solidi geometrici più trattati e analizzati nella storia della matematica. La loro apparente semplice struttura, ottenuta dalla relazione degli elementi primari e l'apparente semplice replicazione per la costruzione di strutture di vario genere, affascinò in maniera teorica e pratica l'uomo. Gli egizi sfruttarono il tetraedro per produrre le Piramidi, Platone e Archimede ne studiarono le forme e ancor oggi alcuni di essi sono noti come poliedri Platonici e poliedri di Archimede. Numerosi pittori li utilizzarono come espediente pittorico, ad esempio Paolo Uccello rappresentò il dodecaedro stellato sul pavimento della Basilica di San Marco a Venezia. Le prime vere trattazioni geometriche sono di Piero della Francesca nel *Libellus de quinque corporibus regularibus*, Leonardo Da Vinci nel *De Divina Proportione* e Keplero nel *Harmonicis Mundi*, i quali li studiarono, ne individuarono altri e furono di ispirazione nel futuro per oggetti quotidiani (il pallone da calcio per esempio è un icosaedro troncato), o ancora per le grandi costruzioni, come la sfera di Disneyworld.

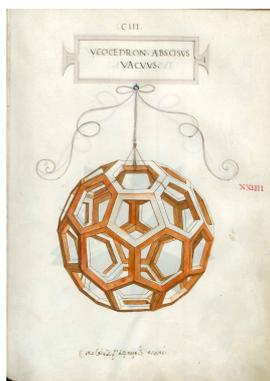


Fig. 3.01 - De Divina Proportione di Leonardo Da Vinci

Nonostante tutto ciò, sia in matematica che nella teoria dei grafi, non esiste una vera definizione univoca di poliedro. In generale si asserisce che il poliedro è un solido costituito da poligoni in grado di delimitare una zona solida dello spazio. Fra le altre definizioni si trovano per lo più considerazioni geometriche sulle caratteristiche che vanno valutate mediante i concetti di dimensionalità, valenza ed estensione.

Il primo tratta i gradi di libertà di un corpo, i quali dipendono proprio dallo spazio in cui è confinato il corpo. Arthur L. Loeb nel libro *Space Structures* prende l'esempio di un punto: se questi fosse all'interno di un cubo, potrebbe muoversi secondo uno dei tre vettori della terna cartesiana, quindi, i gradi di libertà sono 3; se invece, fosse all'interno di una superficie, i gradi di libertà sarebbero 2. *Nulla di nuovo sotto il sole* (V.I. Carbone), i gradi di libertà dipendono dalle dimensioni dello spazio. Ma non solo, infatti, le regole di traslazione e di interazione fra gli elementi non sono arbitrarie: un punto su una linea possiede un grado di libertà, che è lo stesso della linea, ma quando quest'ultima interseca un'altra linea, le traslazioni disponibili sono nulle e i suoi gradi di libertà sono, appunto, 0. Pertanto, in generale una struttura tridimensionale è costituita dall'interazione dei seguenti elementi: i vertici (elementi a 0D), gli spigoli (elementi a 1D), le facce (elementi a 2D) e infine, le celle (elementi a 3D). Dal postulato di chiusura si asserisce, inoltre, che in un sistema chiuso, come lo sono i poliedri, un numero finito di spigoli è unito ad un numero finito di vertici, un numero finito di celle è unito ad un numero finito di facce. Precisamente, una faccia separa due sole celle, almeno due facce si incontrano in un solo spigolo e quest'ultimo connette soltanto due vertici creando un grafo (il grafo è proprio un circuito chiuso costituito dai soli vertici e spigoli, quindi, privo di celle e facce). Il numero minimo di relazioni, quindi, è due. Per esempio, il triangolo è sia un grafo che un *diedro* trigonale, ossia una struttura costituita da 3 relazioni indipendenti: 3 vertici, 3 spigoli e 2 facce (una avanti e una dietro, a seconda di dove lo si osserva). Due vertici che vengono racchiusi da due spigoli sono, quindi, un diedro digonale e un poliedro non è altro che l'unione di più diedri.

Quando le interazioni avvengono fra elementi di differente dimensionalità si parla di valenza (la stessa delle combinazioni fra atomi, solo che qui ne si valuta il significato matematico) e, le valenze dei vari elementi finora trattati possono essere, così, riassunte in forma tabellare:

Elemento	Valenza del Vertice	Valenza dello spigolo	Valenza della faccia	Valenza della Cella
Vertice	-	r	p	q
Spigolo	2	-	s=2	s=2
Faccia	n	n	-	2
Cella	m	l	k	-

Tab. 3.1 - Valenze dei poliedri, tratta da *Space Structures* di Arthur L. Loeb

Infine, ci sarebbe l'estensione, ma riguarda i ben noti concetti di misura, lunghezza, area e volume.

### 3.2 Legge di Eulero e di Schoeffli

La valenza e la dimensionalità degli elementi servirono a Leonhard Eulero per trattare il problema topologico della costruzione dei poliedri. Infatti, dato un poliedro chiamando V il numero di vertici, E il numero di spigoli, F il numero di facce e C il numero di celle, l'equazione di generazione è la seguente:

$$V - E + F - C = 0 \quad [3.1]$$

Per il postulato di chiusura, inoltre, si può dimostrare che un poliedro divide lo spazio in due celle: una all'interno del poliedro e la seconda altro non è che lo spazio esterno ad esso. C, pertanto, per elementi che non vadano oltre la terza dimensione è sempre pari a 2, e permette di semplificare l'equazione, così:

$$V - E + F = 2 \quad [3.2]$$

Esistono diverse strategie e modalità per dimostrare tale relazione. Tutte o buona parte, si basano nel dimostrare che se tale vale per un numero di vertici  $V$ , per induzione matematica varrà anche per  $V+1$  vertici. Fra le più note vi è la dimostrazione di Chauchy che per rilevanza storica viene esposta in seguito. Si proietta il poliedro da un punto molto vicino ad una sua faccia: all'interno della faccia proiettata si proiettano tutti i vertici e gli spigoli del poliedro. Questa procedura permette di avere un diagramma di Schlegel, ossia un grafo orientato, quindi cavo, a cui viene estratta una faccia per deformarlo fino ad estenderlo tutto in un piano.

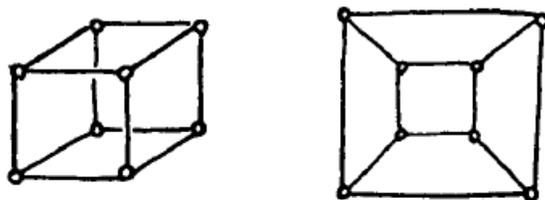


Fig. 3.02 - Diagramma di Schlegel del grafo del cubo

Nel diagramma il numero di spigoli e vertici non è cambiato, mentre è diminuito il numero di facce. L'equazione è, quindi:

$$V - E + F = 1 \quad [3.3]$$

A questo punto, per ogni faccia avente più di tre lati si pone una diagonale che collega due vertici non direttamente collegati.

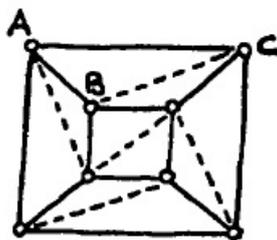


Fig. 3.03 - Generazione delle diagonali sul diagramma

L'equazione continua a non variare: il numero di vertici è pari e per ogni nuova faccia vi è sempre un nuovo spigolo. Si procede fino a quando il grafo non è composto interamente solo da triangoli. Si procede, in ordine, ad eliminare prima gli spigoli di triangoli che hanno un lato sul contorno: del triangolo ABC si elimina la faccia contenuta e lo spigolo AC. Quest'operazione non fa variare l'equazione. Dopo di che procede nell'eliminare triangoli aventi due lati sul contorno: del triangolo DEF si eliminano i lati DF e FE e, pertanto, il vertice F.

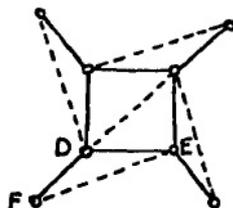


Fig. 3.03 - Eliminazione degli spigoli dal diagramma

Diminuiscono così contemporaneamente  $V$  di 1,  $E$  di 2 e  $F$  di 1, l'equazione ancora non cambia. Con-

tinuando con le operazioni si otterrà un solo triangolo, costituito da 3 spigoli, 3 vertici e una faccia. L'equazione risulta così:

$$V - E + F = 3 - 3 + 1 = 1 \quad [3.4]$$

Sembrirebbe non garantire l'equilibrio, ma si ricorda che in partenza, a causa dell'estrazione di una faccia l'equazione era diventata, proprio

$$V - E + F = 1 \quad [3.5]$$

quindi, CVD l'equilibrio è garantito.

Un'altra possibile dimostrazione viene proposta da Arthur L. Loeb, soprattutto per dare una visione più "pratica" del problema e rimandare anche all'utilizzo di questa relazione per le operazioni fra poliedri.



Fig. 3.04 - Il grafo di un tetraedro e di due tetraedri accoppiati

Si prenda un tetraedro e la relazione di Eulero per esso è la seguente:

$$4 - 6 + 4 - 2 = 0$$

Si ponga, ora, su una faccia un altro tetraedro e si modifichino i parametri per tenere conto dei cambiamenti:

$$V' = V + 1;$$

$$E' = E + 3;$$

$$F' = F + 3;$$

$$C' = C + 1.$$

L'equilibrio non cambia:

$$V' - E' + F' + C' = (V - E + F - C) + (1 - 3 + 3 - 1) = 0$$

Si provi ad eliminare la faccia in comune:  $V'$  ed  $E'$  restano inalterati, mentre variano  $F' = F + 2$  e  $C' = C + 2$ . La relazione nuovamente resta inalterata.

Quindi, si può generalizzare che la relazione è valida per qualsiasi poliedro in grado di essere trasformato in una serie di sotto-tetraedri per cui il vertice addizionale è connesso da  $m$  spigoli,  $m$  vertici di un poliedro, dove  $m$  era la valenza espressa nella tabella 3.1. Per gli altri parametri, ci si rifà proprio alle rispettive valenze, per cui l'equazione diventa:

$$m - l + k = 2$$

Per via della suddivisione, si modifichino i parametri:

$$\Delta V = 1; \Delta E = m; \Delta F = l; \Delta C = k - 1.$$

Da questa trasformazione, come volevasi dimostrare, l'equilibrio non cambia:

$$\Delta(V - E + F - C) = 1 - m + l - k + 1 = 0$$

Infine, è possibile generalizzare ancora la relazione di Eulero valutando la multidimensionalità dello spazio attraverso la formula di Ludwig Schläfli, suo discepolo:

$$\sum_{i=0}^j (-1)^i N_i = 1 + (-1)^j \quad [3.6]$$

dove  $N_i$  indica il numero di elementi che hanno la stessa dimensionalità, quindi,  $N_0$  sono vertici,  $N_1$  sono spigoli, etc. L'esponente  $j$  indica la dimensionalità dello spazio che si sta valutando e, infatti, ponendolo pari a 3, si riottiene l'equazione di Eulero.

### 3.3 Poliedri Platonici

La prima classe di poliedri, che viene trattata, è quella dei solidi platonici, ossia poliedri regolari e convessi.

Si parta dalla condizione di convessità: anch'essa, come in precedenza, non gode di una definizione univoca. La più generale asserisce che un solido è convesso se il segmento che unisce ogni coppia di punti è interamente contenuto nel solido.

Per la regolarità, invece, la definizione asserisce una serie di condizioni:

- i. tutte le facce sono poligoni regolari;
- ii. tutte le facce sono uguali fra di loro;
- iii. tutte le figure al vertice sono uguali fra di loro;
- iv. tutte le figure al vertice sono il bordo di poligoni regolari.

Si può dimostrare che tali sono in realtà ridondanti: sono sufficienti 3 condizioni per garantire la validità della quarta. Ma non basta. Si ricordi dalla geometria euclidea che un poligono regolare gode della proprietà di essere inscritto e circoscritto da circonferenze concentriche. Analogamente, per i poliedri: un poliedro è regolare se e solo se esistono tre sfere concentriche tali che:

- una passa per tutti i vertici (circosfera);
- una è tangente a tutti gli spigoli (intersfera);
- una è tangente a tutte le facce (insfera).

*Il centro delle tre sfere è il centro del poliedro* [8].

I solidi platonici sono soltanto 5 e anche quest'affermazione è dimostrabile. Infatti, si associa per ogni poliedro regolare una coppia di numeri interi  $(p,q)$ , detta simbolo di Schläfli, dove  $p$  è il numero dei spigoli di ogni faccia e  $q$ , invece, è la valenza di ogni vertice verso le facce. Per esempio, il cubo ha  $(p,q)$  pari a  $(4,3)$ . Il Teorema sulla somma delle facce di un angoloide afferma che gli angoli del poligono devono avere somma inferiore a  $2\pi$ :

$$\frac{(p-2)\pi}{p} < 2\pi \quad [3.7]$$

Lo stesso varrà per gli angoli delle facce che si incontrano in un vertice:

$$\frac{q(p-2)\pi}{p} < 2\pi \quad [3.8]$$

Dividendo tutto per  $2\pi q$  si ottiene:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{p} < \frac{1}{q} \quad [3.9]$$

cioè:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

Affinché  $p$  e  $q$  siano interi e l'equazione sia soddisfatta è necessario che uno sia uguale a 3 e l'altro assuma valori inferiori o uguali a 5. Le possibili coppie di  $(p,q)$  risultano:  $(3,3)$ ,  $(3,4)$ ,  $(3,5)$ ,  $(4,3)$ ,  $(5,3)$ . Seguendo i parametri di Schläfli, i solidi platonici costruibili sono, appunto, cinque; sono riassunti nella tabella 3.2 e mostrati in figura 3.02:

Solidi Platonici	$p$	$q$	$E$	$F$	$V$
Tetraedro	3	3	6	4	4
Cubo	4	3	12	6	8
Ottaedro	3	4	12	8	6
Icosaedro	3	5	30	20	12
Dodecaedro	5	3	30	12	20

Tab. 3.2 - Caratteristiche dei solidi platonici, tratta da *Space Structure* di Arthur L. Loeb

Dalla tabella si può notare, inoltre, che non casualmente alcuni solidi sembrano numericamente simili o opposti ad altri poliedri. Questa caratteristica è una proprietà chiamata *dualità*. Il centro di ogni faccia di un poliedro viene unito perpendicolarmente da nuovi spigoli ai centri delle facce più vicine, in modo tale che i nuovi spigoli intersechino perpendicolarmente gli spigoli del poliedro di partenza e generino un nuovo solido, che è, appunto, definito duale. Quindi, il numero di spigoli resta lo stesso ma si inverte il numero di vertici e il numero di facce. Infatti, l'ottaedro è il duale del cubo e viceversa: entrambi hanno 12 spigoli, il cubo possiede, però, 8 vertici e 6 facce mentre l'ottaedro possiede 6 vertici e 8 facce. Analogamente vale per il dodecaedro e l'icosaedro. Eccezione è il tetraedro: possedendo eguale numero di facce e di vertici è l'unico poliedro regolare ad essere duale di se stesso.



Fig. 3.02 - I 5 Solidi Platonici

### 3.4 Solidi semiregolari o di Archimede

Una seconda classe di poliedri è rappresentata dai solidi semiregolari o anche detti di Archimede che fu, secondo Pappo da Alessandria, il primo a studiarli, sebbene le testimonianze a tal riguardo siano andate perdute. A differenza dei solidi platonici questi, sebbene siano ancora convessi, non rispettano tutte le stringenti ipotesi di regolarità. Sono ancora costituiti da poligoni regolari, che non sono necessariamente eguali fra di loro. Lo stesso vale per le sfere: continuano ad esistere la circosfera e l'intersfera ma non è più costruibile l'insfera. Ecco perché sono chiamati semiregolari.

I tredici poliedri di Archimede sono, così, costituiti da combinazioni di triangoli, quadrati, pentagoni, esagoni, ottagoni e dodecagoni. Non esiste, tuttavia, un poliedro in grado di combinare tutti questi poligoni insieme: essi vengono ripetuti e combinati massimo tre alla volta. Possono essere anche oggetto di operazioni fra i solidi platonici come il troncamento, che verrà illustrato fra qualche paragrafo. Sono riportati nella seguente figura.

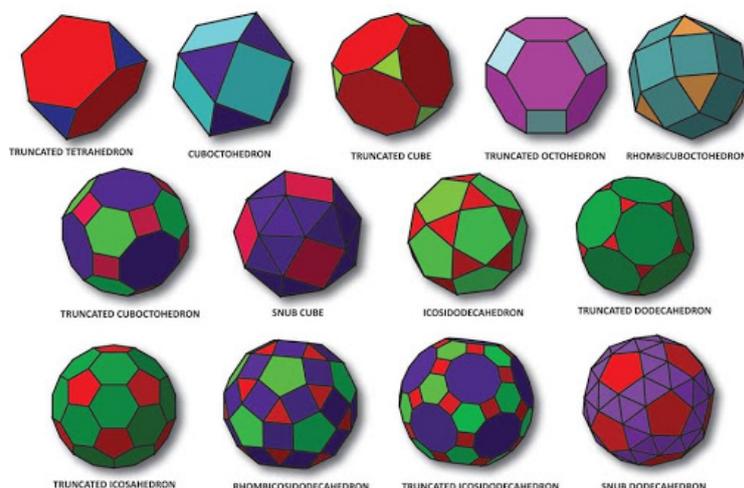


Fig. 3.03 - I 13 Solidi di Archimede

Anche i solidi di Archimede godono di dualità ma è importante sottolineare, senza entrare troppo nel merito, che nessuno dei duali è costituito da poligoni regolari, qui la dualità si basa per lo più sulla congruità delle facce. Fra questi troviamo i solidi di Catalan, che verranno descritti nel prossimo paragrafo. Infine, per completezza bisogna menzionare anche l'infinita categoria dei prismi e degli antiprismi (le facce laterali sono dei triangoli) che sono, comunque, poliedri aventi due facce identiche e parallele fra di loro. Essi appartengono a tale classe, poiché costituiti da poligoni di base regolari ma non rispettano tutte le condizioni di regolarità dei poliedri. In più per i prismi, vi è un'ulteriore condizione, ossia che siano retti (costituiti da facce regolari). L'unico prisma regolare, così, è il cubo, che è stato già nominato nel paragrafo precedente.

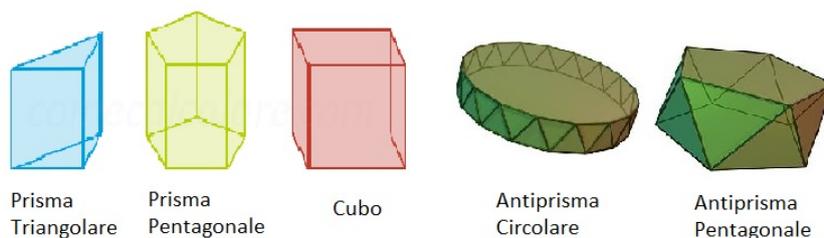


Fig. 3.05 - Prismi e antiprismi

### 3.5 Poliedri Composti

Prima di passare alle proprietà e alla descrizione delle operazioni, è necessario concludere una "lista" delle geometrie possibili, anche per poter fare delle valutazioni estetiche per la costruzione del caso di studio. Si definiscono poliedri composti tutti coloro che provengono dall'unione di poliedri distinti. A tale categoria appartengono i 13 solidi di Catalan: essendo duali dei solidi di Archimede, che hanno vertici uniformi, essi hanno facce uniformi e valenza dei vertici invertita. Ma com'è stato anticipato, le facce non sono poligoni regolari, (predominante è la presenza del rombo e del pentagono).

Fra questi troviamo il dodecaedro rombico: nato dall'interazione fra gli spigoli del cubo e dell'ottaedro (suo duale) che, bisecando gli angoli retti, creano gli spigoli di un nuovo poliedro da 14 vertici, pari appunto alla somma dei vertici dei due poliedri.

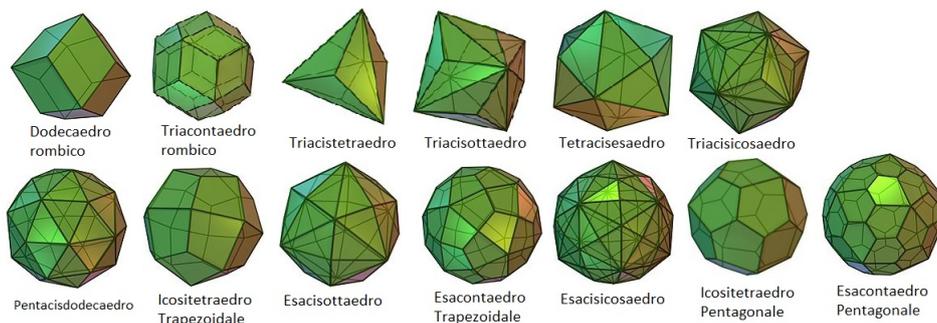
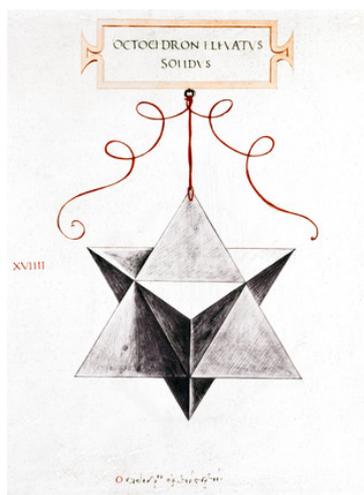


Fig. 3.05 - I 13 solidi di Catelan

Tuttavia, non è detto che i solidi composti non siano regolari: disponendo due tetraedri simmetricamente rispetto al baricentro comune si ottiene un ottaedro stellato autoduale e regolare, formato da 8 facce triangolari. E' interessante notare che esso può essere ottenuto anche dall'unione di un ottaedro come nucleo e 8 ottaedri disposti sulle facce che formano un solido regolare, il cui involuppo convesso è proprio il cubo. Questo solido è chiamato *Stella Octangula*, nome che fu Keplero a darle all'interno del suo libro *Harmonices Mundi*, anche se già Da Vinci l'aveva disegnata e chiamata *Octaedron Elevatum*.

Fig. 3.06 - Stella Octangula rappresentata da Da Vinci nel *De Divine Proportione*

Keplero studiò anche altri solidi stellati, in particolare quattro, che sono chiamati poliedri di Keplero-Poinsot: composti da poliedri che intersecano un numero pari di facce che si incontrano in uno stesso punto, risultano regolari, perché costituiti da poligoni piani regolari, ma non convessi, poiché queste interpenetrazioni provocano la presenza di piccole regioni concave.

Nella tabella 3.03, infine, sono riportati i dati di vertici, facce e spigoli per dimostrare, come affermato nel paragrafo 3.2, la dualità mutua a coppia di questi 4 poliedri.

Poliedro	V	E	F
Grande Dodecaedro	12	30	12
Piccolo Dodecaedro Stellato	12	30	12
Grande Dodecaedro Stellato	20	30	12
Grande Icosaedro	12	30	20

Tab. 3.03 - Dati dei 4 Poliedri di Keplero-Poinsot estratta da Wikipedia

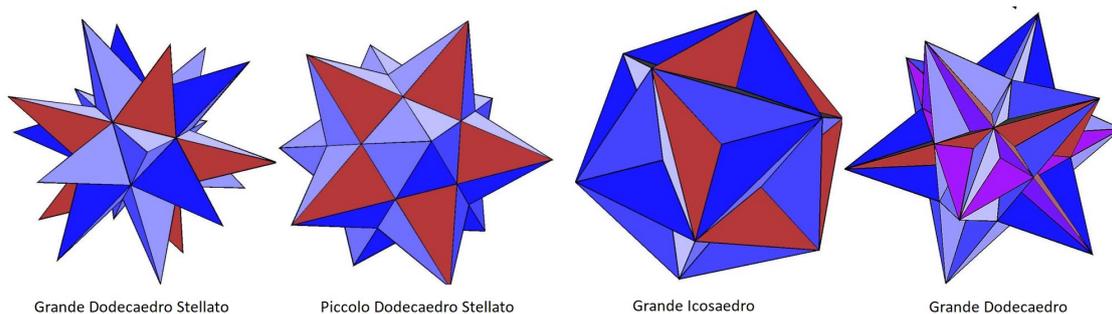


Fig. 3.07 - I 4 Poliedri di Keplero-Poinsot

Infine, nelle infinite possibilità di composizione fra poligoni regolari, vi sono i 92 poliedri di Jhonson. Non sono nè solidi uniformi nè regolari ma costituiscono un importante inventario che non può non essere citato. La Stella Octangula, infatti può essere riprodotta anche da un ottaedro sulle cui facce vi sono piramidi triangolari.

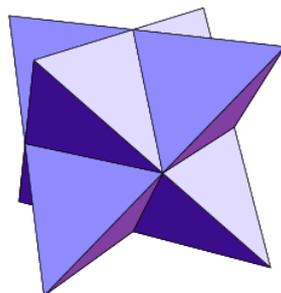


Fig. 3.07 - Stella Octangula di Johnson

La figura 3.07 è uno dei possibili *Ottaedri aumentati* di Johnson che con questa geometria non gode delle stesse proprietà e simmetrie della Stella Octangula di Keplero, pur restando comunque un poliedro convesso. E' interessante notare che emulando ancora poligoni elementari, spesso equilateri, si possano ottenere solidi e, quindi, strutture completamente differenti da quelle descritte nei due paragrafi precedenti. In figura vengono riportati degli esempi, ma anche per ricollegarsi al primo paragrafo, è importante sottolineare come la piramide a base quadrata sia un esempio, il più semplice, dei poliedri di Johnson.

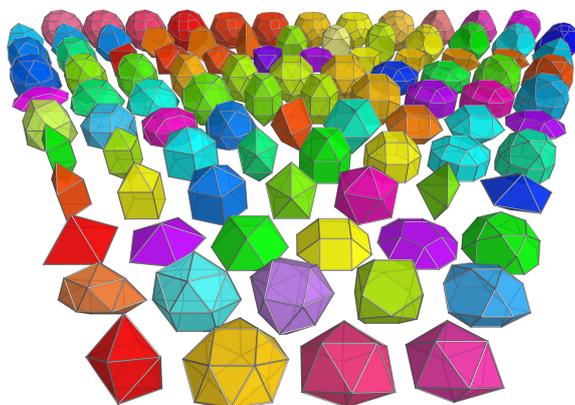


Fig. 3.08 - Solidi di Johnson

### 3.6 Classi di Simmetrie, Reticoli e Domini

A questo punto è importante comprendere le regole per le operazioni di traslazione e ripetizione di un poliedro per riempire totalmente spazio. Per farlo è possibile evitare lo studio di ogni singolo poliedro e, ci si può arrivare per analogia con la cristallografia. Si divida lo spazio in regioni mutualmente congruenti: questi possono essere parallelogrammi equilateri e/o equiangoli oppure semplicemente poligoni che in 3D permettano di imporre quelle condizioni di valenza richieste dai poliedri.

In generale si parla di reticoli, ossia matrici di punti che hanno le stesse caratteristiche e orientazione, traslabili nello spazio. Quindi, un reticolo è potenzialmente infinitamente esteso. Questi punti possono essere i centri o i vertici di domini, celle, di elementi riempitori dello spazio, scelti a seconda dei sistemi di simmetrie per ripeterli oppure delle caratteristiche geometriche specifiche. Si parta dal caso bidimensionale: in matematica una possibilità sono i domini di Dirichlet. Essi consistono nel determinare il luogo dei punti equidistanti da due punti dati e tale luogo è la perpendicolare al segmento che unisce i due punti. In questa maniera si divide lo spazio in due regioni, i cui punti risultano i più vicini ad uno dei due punti dati. I domini di Dirichlet sono utilizzati per valutare i "punti vicini più vicini"[9], ossia quei punti che condividono un bordo del dominio di Dirichlet. Affinché un poligono sia un dominio di Dirichlet deve rispettare le seguenti condizioni:

- i. i vertici appartengono ad un cerchio comune;
- ii. la valenza degli spigoli può avere valore 3, 4, 6;
- iii. se è un esagono, gli spigoli opposti dovranno essere paralleli e di egual lunghezza.

Ovviamente prima di passare allo spazio tridimensionale bisogna sottolineare che *tutti i domini di Dirichlet riempiono lo spazio, ma non tutti i poligoni che riempiono lo spazio sono poligoni di Dirichlet* [9].

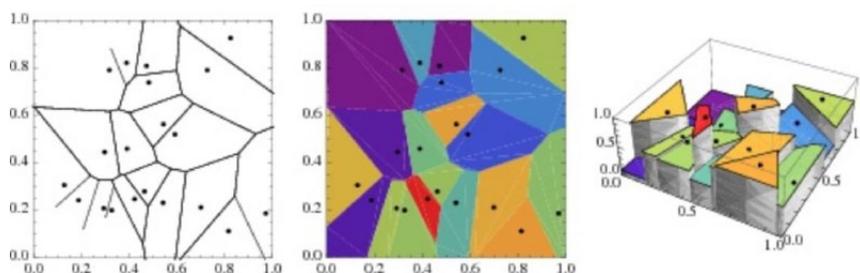


Fig. 3.09 - Processo di Meshing mediante il dominio di Dirichlet

Nello spazio 3D i domini sono, quindi, celle: volumi unitari costituiti da 3 vettori generatori e un punto del reticolo. Poiché i vettori possono essere differenti, le forme possono essere differenti e complesse ma il fatto che via sia una cella unitaria, permette di affrontare tale problema garantendo le stesse proprietà. Quando i punti del reticolo sono posti sui vertici della cella si parla di *cella primitiva di Wigner-Seitz* e tali punti sono chiamati *siti del reticolo*. Essa, come i solidi regolari, gode di un gruppo finito di simmetrie: rotazione, riflessione, identità, traslazione e rotazione, i quali permettono di replicarla e riempire lo spazio. Noti i tre vettori non complanari, è possibile classificare le 7 classi di simmetria e di conseguenza i 14 reticoli di Bravais. Il sistema cubico è la classe di simmetria principale e, poiché la maggior parte dei poligoni regolari e semiregolari sono inscrivibili e costruibili mediante il cubo e le sue simmetrie, è l'unico schema su cui vale la pena soffermarsi per comprendere il seguito di questo percorso. Esso prevede come cella primitiva unitaria, appunto, il cubo e, pertanto, gode di:

- 3 assi di simmetria di ordine 4 (assi che passano per i centri delle coppie di facce opposte);
  - 4 assi di simmetria di ordine 3 (ossia assi che collegano le coppie di vertici opposti);
  - 6 assi di simmetria di ordine 2 (ossia che passano per i punti medi delle coppie di spigoli opposti).
- Risulta il sistema col maggiore numero di simmetria non solo perché è il solido regolare per eccellenza e capace di riempire da solo tutto lo spazio infinito, ma anche per via dei suoi angoli diedrali tutti retti, come si vedrà nel prossimo paragrafo.

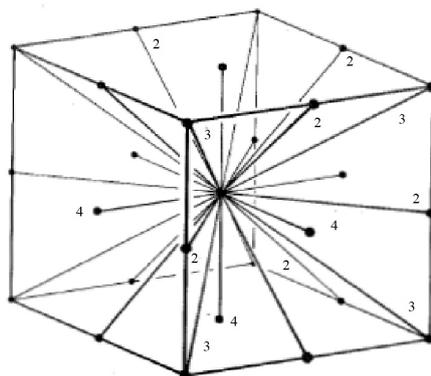


Fig. 3.10 - Simmetrie del Cubo

Aggiungendo un ulteriore punto alla cella, si possono ottenere 2 diversi reticoli di Bravais: se esso è posto al centro del cubo, si parla di reticolo a corpo centrato (CCC), invece, se è posto al centro di ogni faccia della cella, si parla di reticolo a facce centrate (FCC).

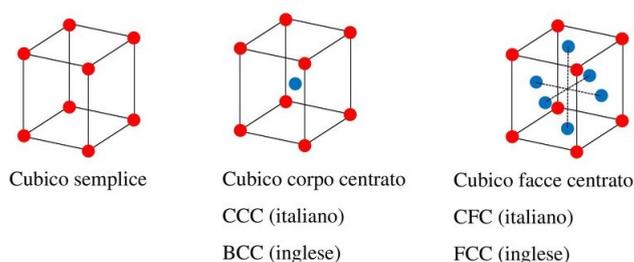


Fig. 3.11 - 3 Sistemi cubici

Se gli atomi, o comunque le sfere, non erano in grado di riempire tutto lo spazio, non vale lo stesso per i poliedri: a seconda delle proprie simmetrie e delle proprie caratteristiche essi, occupando i vertici dello schema, riusciranno a riempire lo spazio senza lasciare vuoti. Ecco l'importanza della dualità: due poliedri differenti geometricamente godono e si trasmettono le stesse simmetrie.

### 3.7 Space Filling Polyhedra e Operazioni

"Con un inventario finito di poliedri fra le mani, quali e quanti possono essere collegati per riempire lo spazio?" [10]

Come per i domini e le celle, un poliedro le cui repliche possono occupare tutto lo spazio circostante senza lasciare vuoti è chiamato *Space Filler*. Il cubo, oltre ad essere una cella è uno dei solidi platonici, l'unico in grado di riempire totalmente lo spazio creando una struttura regolare (in fondo è se stesso, semplicemente più grande). Ma le simmetrie non sono l'unica condizione, anzi come sottolinea Peter Pearce in *Structure in Nature is a Strategy for Design*, talvolta sono un impedimento: l'icosaedro è il poliedro più simmetrico di tutti gli esistenti e per questo non idoneo ad essere uno space filler. L'ottaedro è il duale del cubo e, in quanto tale, gode delle stesse simmetrie di quest'ultimo. Tuttavia, non è uno space filler, nessuno dei restanti solidi platonici lo è. Il perché riguarda una condizione necessaria sull'esplementarietà dell'angolo diedro. Quest'ultimo viene definito come l'angolo fra due facce aventi per origine lo stesso spigolo. Affinché un poliedro sia uno space filler, la somma degli angoli diedri che si incontrano in uno spigolo comune deve misurare  $360^\circ$ . Ecco perché un ottaedro non è da solo uno space filler: il suo angolo diedro misura  $109^\circ 28'$  e non gli permette, sommando, di raggiungere l'angolo giro.

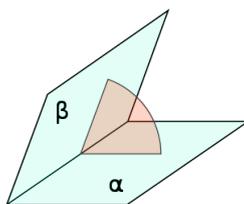


Fig. 3.12 - Concetto di angolo diedro, estratto da Wikipedia

Quindi, escludendo il cubo, il prisma triangolare ed esagonale, tutti i restanti poliedri regolari, buona parte dei semiregolari e composti possono riempire lo spazio se prima combinati con altri poliedri, formando così un sistema multiplo di space filling. Restando sempre sull'ottaedro: il suo sistema multiplo di space filling può essere determinato combinandolo con il tetraedro, infatti, sommando due tetraedri il cui angolo diedro è  $70^{\circ}32'$  con l'angolo diedro dell'ottaedro si ottiene proprio  $360^{\circ}$ .

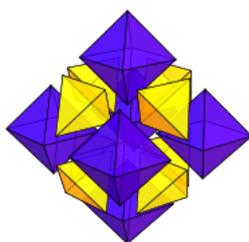


Fig. 3.13 - Space Filling ottenuto mediante 2 tetraedri e un ottaedro. Estratta da Wikipedia

Tale esempio mostra anche un'altra condizione, ancora più stringente: *i poliedri che si combinano fra di loro devono avere facce parallele corrispondenti in comune* [10]. Essa, assieme alle simmetrie esclude 7 dei 13 poliedri di Archimede. Tuttavia, se si aggiungono i prismi, ritenuti comunque solidi semiregolari vista la congruenza dei vertici, si ottiene un gran numero di possibilità per riempire lo spazio con i soli poliedri regolari e semiregolari.

I sistemi multipli si possono anche classificare. Quando il sistema è costituito da un solo poliedro è detto *unario*, da due poliedri è detto *binario*, altrimenti ternario e quaternario. Fra i sistemi unari più interessanti si trovano sicuramente il cubo, il dodecaedro rombico e l'ottaedro troncato.

Il Dodecaedro rombico appartiene ai 13 solidi di Catelan, quindi, il duale di un solido di Archimede, ossia il cubottaedro. Pur non essendo un poliedro regolare, è uno dei pochi ad avere gli spigoli della stessa lunghezza. Il motivo è dovuto dalle modalità di costruzione, fra le possibili esso è costituito da un cubo che viene sezionato in 6 piramidi a base quadrata, ruotate di  $180^{\circ}$ . Come si comprende dalla figura 3.14, il dodecaedro riempie lo spazio secondo lo schema cubico a facce centrate, quindi, un dominio di Dirichlet.

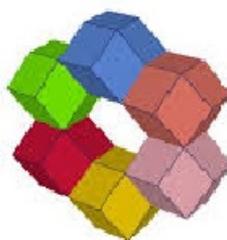


Fig. 3.14 - Space Filling ottenuto dal dodecaedro rombico

Il suo duale è il cubottaedro, un cubo al quale sono state troncate sei cuspidi ottenendo così 6 facce quadrate e 8 facce triangolari. Il troncamento è un'operazione che consiste nell'eliminazione di una porzione di poliedro detta cuspide, partendo da un vertice che determina una piramide, i cui spigoli di base sono la valenza del vertice stesso nei confronti degli spigoli. In questo caso la valenza è tre. Seppur semiregolare e gode delle stesse simmetrie del dodecaedro rombico non è uno space filler: lo diventa se combinato con un ottaedro, seguendo lo schema cubico a corpo centrato, come si nota dalla figura 3.15.

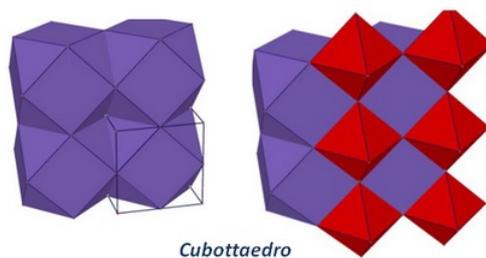


Fig. 3.15 - Space Filling ottenuto dal cubottaedro e l'ottaedro

Un'altra soluzione proposta da Peter Pearce è il solido di Jhonson *ortobicupola triangolare*. Apparentemente è un cubottaedro, contiene un esagono regolare nell'equatore, ma oltre a godere di meno simmetrie, la costruzione è differente: le due cupole triangolari sono sorrette da una coppia di quadrati, mentre l'ottaedro è fatto in modo tale che i quadrati poggino sui triangoli e viceversa. Il duale di tale solido è anch'esso un poliedro simile al dodecaedro rombico, che quindi riempie lo spazio da solo.

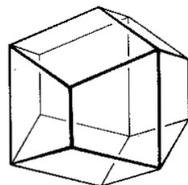


Fig. 3.16 - Ortobicupola Triangolare

Anche il dodecaedro rombico può essere troncato ed esistono 3 varianti di spacefilling a seconda della tipologia: se si tronca in modo tale da ottenere 12 esagoni e 6 quadrati, per riempire lo spazio si dovrà combinare questo solido con il cubo; se si tronca per ottenere 12 esagoni e 8 triangoli equilateri, si dovrà combinare quest'ultimo con il tetraedro altrimenti troncando tutti i vertici e ottenendo 12 ottagoni, 6 quadrati e 8 triangoli, per riempire lo spazio bisognerà combinare questo solido sia con il cubo che con il tetraedro.

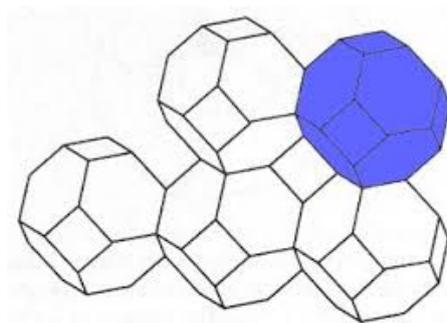


Fig. 3.17 - Space Filling ottenuto dal dodecaedro rombico tronco e il cubo

L'ottaedro troncato è anch'esso un solido di Archimede con gli spigoli mutualmente equivalenti e, quindi, da solo riempie lo spazio. Una spiegazione è data anche dal suo metodo costitutivo: preso un cubo, si uniscono tutti i punti medi degli spigoli. Si ottiene così un poliedro irregolare costituito da una faccia esagonale, 3 facce triangolari e tre facce pentagonali. Unendo 8 cubi e combinando le facce pentagonali, si ottiene un unico cubo a corpo centrato che costituisce internamente un ottaedro troncato. Le parti escluse, non sono altro che le parti mancanti di altri ottaedri troncati, che riempiono lo spazio secondo lo schema, appunto, di cubo a corpo centrato.

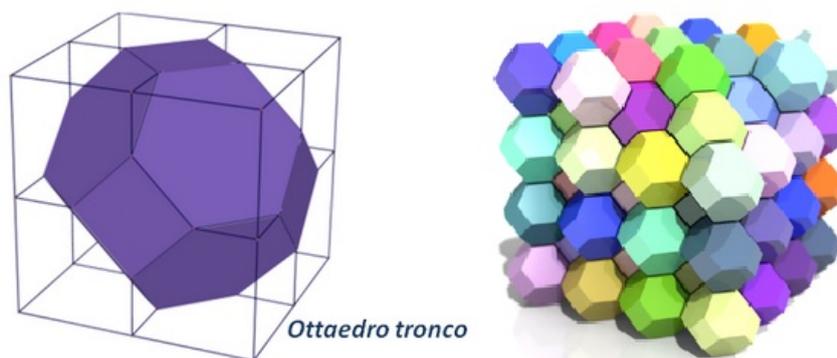


Fig. 3.18 - Space Filling ottenuto dal tetraedro troncato

Ma non solo poliedri regolari o semiregolari. Anche irregolari. E' il caso dell'*Endeceaedro bisimmetrico* che verrà utilizzato all'interno del caso di studio. E' stato definito da Guy Inchbald nel 1996 sul numero 80 de *The Mathematical Gazette*. E' composto da 2 rombi, un quadrato, 4 triangoli isosceli retti e 4 facce rombiche distorte. Accoppiando le facce quadrate secondo un piano di simmetria e, le facce triangolari secondo un altro piano, è possibile creare, come mostrato nella figura 3.19, un'unità a *a forma di barchetta esagonale* che traslata nello spazio riesce ad essere uno space filler secondo lo schema di cubo a corpo centrato.

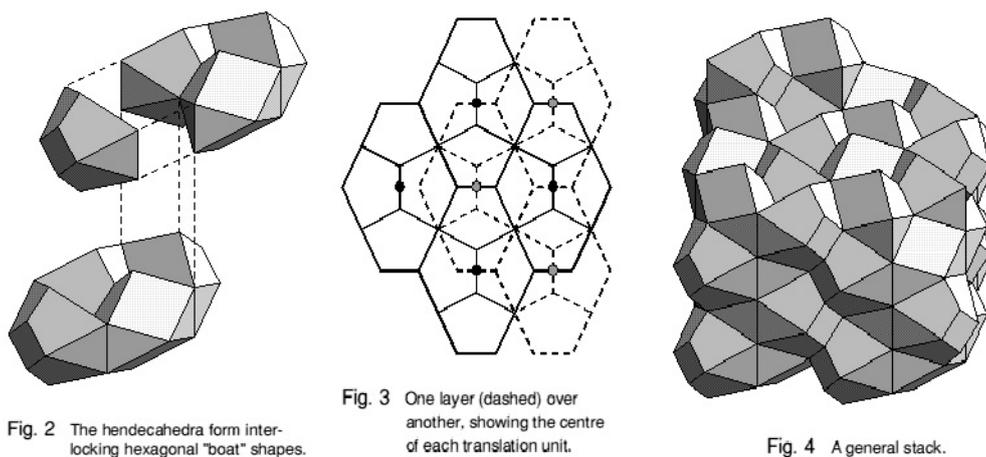


Fig. 2 The hendecahedra form interlocking hexagonal "boat" shapes.

Fig. 3 One layer (dashed) over another, showing the centre of each translation unit.

Fig. 4 A general stack.

Fig. 3.19 - Space Filling ottenuto dall'endeceaedro bisimmetrico

Riepilogando, il sistema è il seguente: definito un poliedro come modulo fondamentale e note le sue caratteristiche (simmetrie, operazioni e regole di aggregazione), viene diviso lo spazio in un reticolo, probabilmente lo schema cubico a corpo centrato o a facce centrate. A questo punto, i poliedri occupano i centri aggregandosi fra di loro senza lasciare spazi vuoti. Ecco, così, ottenuto uno Space Filling Polyhedra.



*Fig. 3.20 - Synergia at Night, esempio di struttura mediante Space Filling di endecaedri bisimmetrici*

### 3.8 Sistema Morfologico

Prima di concludere il capitolo, acclarata la teoria alla base dei poliedri e delle loro operazioni per riempire lo spazio, è importante ricercare un sistema morfologico di notazione che identifichi e classifichi la direzione di space filling. Per fare ciò, ci si rifà ancora alla cristallografia metallurgica, in particolare, si può dimostrare che le dimensioni potenzialmente infinite del cristallo necessitano di uno studio della densità per individuare la direzione di massimo impaccamento, ossia la direzione per la quale un piano è interessato dal maggior numero di atomi. Avere questa informazione permette di valutare le caratteristiche meccaniche del metallo, valutando l'andamento delle dislocazioni e del flusso plastico, quando il metallo sarà soggetto a taglio. Per i poliedri vale la stessa cosa, valutare la densità permette di definire l'andamento delle aggregazioni, le caratteristiche geometriche e, si vedrà, anche di montaggio. Per farlo, quindi, si possono utilizzare gli *indici di Miller*, ossia dei vettori all'interno di un piano cartesiano. Si prenda un sistema di ottanti attorno ad un centro di traslazione e rotazione. Potremo identificare la direzione di un ottante, ad esempio, mediante le coordinate  $x,y,z$  degli spigoli collegati al centro. Nel caso di versori, essi verranno identificati rispettivamente con la seguente dicitura:  $[100]$ ,  $[010]$ ,  $[001]$ . Un'alternativa può essere indicare le coordinate  $x,y,z$  dei vertici opposti delle facce dell'ottante che si incontrano nel centro. In questo caso, supponendo sempre dei versori, essi sarebbero le diagonali stesse delle facce del cubo e si potrebbero esprimere, analogamente al caso precedente come:  $[110]$ ,  $[101]$  e  $[011]$ . E' immediata anche la conoscenza della lunghezza dello spigolo, essendo la diagonale di un quadrato. Infine, è possibile esprimere la direzione secondo la diagonale del cubo e, quindi, mediante il solo indice  $[111]$ , che ne permette di sapere immediatamente la lunghezza dello spigolo.

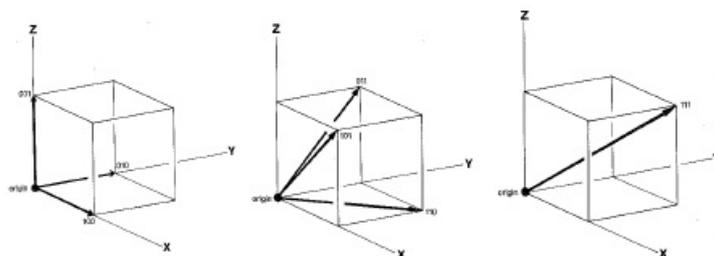


Fig. 3.21 - Indici di Miller per il sistema cubico. Estratto da *Structure in Nature Strategy for Design* di Peter Pearce

L'utilizzo delle parentesi quadre non è casuale, permette di differenziarsi dai piani reticolari citati precedentemente, i quali sono ortogonali a tali direzioni e ne seguono la stessa logica di scrittura. Peter Pearce, ancora, afferma che tale notazione può essere non solo utilizzata sfruttando un sistema morfologico di riferimento cubico, ma anche attraverso l'utilizzo di uno strumento concreto, brevettato e noto come *Nodo Universale*. Sfruttando le possibili simmetrie del sistema morfologico utilizzato (cubico, ottaedrico, tetraedrico, etc.) è possibile identificare tutte le direzioni possibili degli spigoli a partire da quel vertice. Nel caso del cubo esso possiede così 26 direzioni, che differiscono in termini di indice di Miller semplicemente per rotazione e traslazione, cioè variando esclusivamente il segno dei membri. La figura 3.22 mostra la classificazione di alcuni poliedri attraverso questo sistema. Si prenda il primo caso, il tetraedro: stabilito un vertice come un nodo universale, la direzione degli spigoli può essere specificata attraverso gli indici di Miller nel sistema morfologico cubico. Essi, seguendo le diagonali delle facce di un cubo, possono essere espressi mediante 3 vettori  $[110]$  (si utilizza una sola direzione in quanto, nota essa, è immediatamente nota la direzione degli altri due vettori, noto il sistema morfologico). Lo stesso vale per tutti i restanti vertici che rappresentano un sottoinsieme del nodo universale, ruotando semplicemente il sistema, ossia variando il segno dei parametri dell'indice. La notazione delle direzioni utilizzata è proprio quella degli *indici di Miller*.

Cubic System	Diagram	Branch Directions at Node				Total Number of Nodes	Numbers of Branches			Total Number of Branches		Faces		Included Angles	Face Plane Directions			Relative Volume
		[100]	[110]	[111]	Overall Coord.		[100]	[110]	[111]	Tot.	Ea.	Type	Symmetry		[100]	[110]	[111]	
		A	$A\sqrt{2}$	$A\sqrt{3}$			A	$A\sqrt{2}$	$A\sqrt{3}$									
		1	3	3	3	4	6	6	6	4	4	Triangle	3-fold	60°		4	1	
		2	3	3	3	6	12	12	12	6	6	Square	4-fold	90°	6		3	
		3	4	4	4	6	12	12	12	8	8	Triangle	3-fold	60°		8	4	
		4	3	3	3	12	18	18	18	8	4	Triangle Hexagon	3-fold 6-fold	60° 120°		4 4	23	
		6	4	4	4	12	24	24	24	14	8	Triangle Square	3-fold 4-fold	60° 90°	6	8	23	
		6	3	3	3	24	30	36	36	14	6	Hexagon Square	6-fold 4-fold	120° 90°	6	8	98	
		7	1	2	3	24	12	24	36	14	6	Triangle Octagon	3-fold 4-fold	60° 135°	6	8	168	
		8	2	2	4	24	24	24	48	26	6	Square Triangle Rectangle	4-fold 3-fold 2-fold	90° 60° 90°	6 8 12	8	138	
		9	1	2	3	48	24	48	72	26	8	Octagon Hexagon Rectangle	4-fold 6-fold 2-fold	135° 120° 90°	6 8 12	8	448	
		10	3	1	3	16	16	4	24	10	2	Octagon Square Rectangle	4-fold 4-fold 2-fold	135° 90° 90°	2 4 4		68	
		11	1	2	3	8	8	4	12	6	2	Square Rectangle	4-fold 2-fold	90° 90°				
Hexagonal System		1	2	1	3	6	3	6	9	5	2	Triangle Rectangle	3-fold 2-fold	60° 90°		3	2	
		2	2	1	3	12	12	6	18	8	2	Hexagon Rectangle	6-fold 2-fold	120° 90°		6	2	

Fig. 3.22 - Classificazione dei poliedri nel sistema morfologico cubico. Estratto da *Structure in Nature Strategy for Design* di Peter Pearce

### 3.9 Instabilità e Saddle Polyhedra

Lo space filling è un procedimento non solo con finalità praticamente strutturali (progettare strutture che siano composte da poliedri), ma anche alla base del processo di meshing che viene usato in ogni modello virtuale agli elementi finiti. Quindi, la conclusione di questo capitolo ha una doppia chiave di lettura: reale e virtuale, come si comprenderà anche dal caso studio. Garantendo l'equilibrio delle forze, i poliedri convessi godranno probabilmente di stabilità globale, tuttavia, a causa delle facce piane saranno al tempo stesso soggetti a fenomeni di instabilità locale, in quanto non è in grado di garantire la dovuta resistenza ai carichi perpendicolari alle facce. Dalla scienza delle costruzioni è ben nota la soluzione: l'uso di frames spaziali. Peter Pearce propone, in particolare due soluzioni:

- i. ridurre le facce piane, a scapito di frames spaziali aumentandone, così, anche lo spessore (la resistenza è proporzionale allo spessore della faccia);
- ii. sfruttare efficientemente i frames spaziali per *triangolare* nello spazio queste facce, in modo tale da avere superfici non solo convesse ma anche concave.

La seconda soluzione è di gran lunga preferibile alla prima, non solo perché riduce il quantitativo di materiale, ma la struttura si comporta analogamente ad una cupola. In tal caso, infatti, aumentare eccessivamente l'utilizzo di travi reticolari può non portare benefici: i vertici inducono ad una resistenza a compressione, anche nei confronti dei carichi concentrati, maggiore rispetto a quella a flessione, ma aumentarne il numero significa ridurne l'efficacia e garantire nuovamente una condizione di planarità che favorisce più la resistenza al momento flettente.

Quanto affermato è alla base della creazione dei *saddle polyhedra* ma anche del form finding, valutare una geometria in grado di rispondere da sé all'equilibrio tensionale. Negli elementi finiti questo si può tradurre come *dynamic relaxation method*: definita sommariamente una geometria mediante un mesh, appunto lo space filling di una superficie o di uno spazio, i nodi del mesh sono considerati delle masse concentrate, soggette, quindi, a tutte le forze. Come si vedrà in seguito, si otterranno così membrane a minima superficie, che implica più sostenibilità non solo economica, ma anche tecnica.

I Saddle Polyhedra collegano direttamente i poliedri di Weaire-Phelan trattati all'inizio del capitolo, con questi concetti di efficienza e minimizzazione: le facce vengono distorte affinché la curvatura positiva esattamente uguale a quella negativa permettano la minimizzazione dell'energia potenziale. Ciò garantisce la creazione di una struttura molto sottile e al tempo stesso molto resistente a compressione e trazione, riducendo o eliminando del tutto i problemi di instabilità locale.

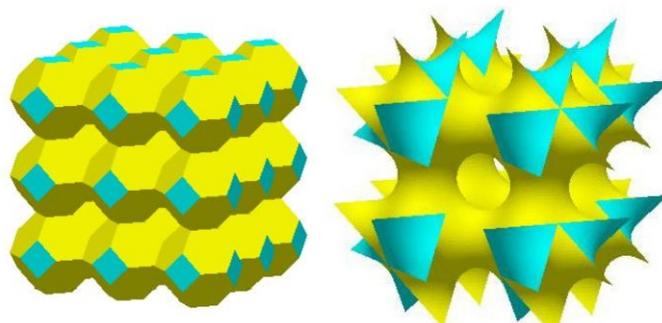


Fig. 3.23 - Esempio di Space Filling Saddle Polyhedra

### 3.10 Esempi di Strutture

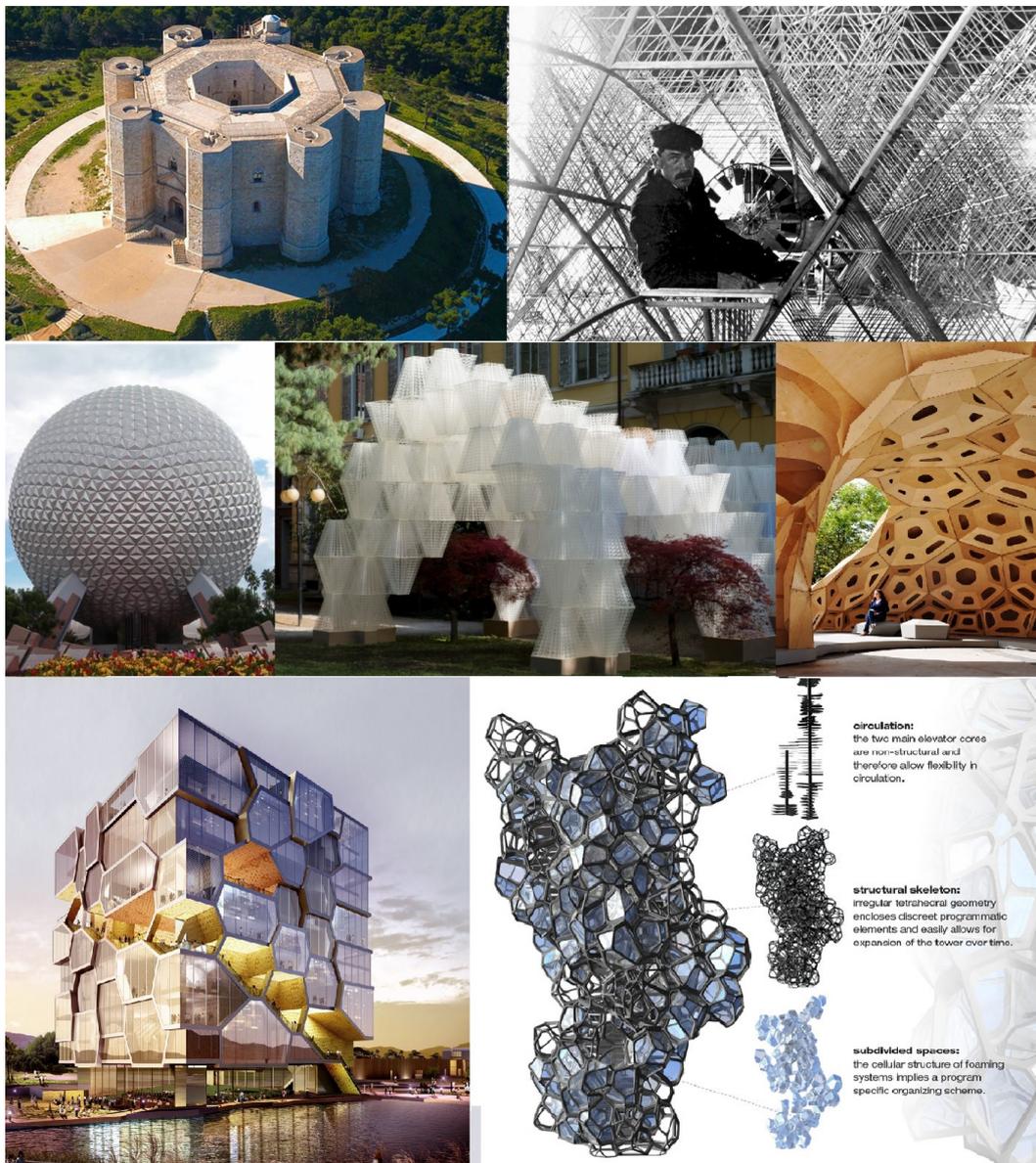


Fig. 3.24 - In ordine: Castel del Monte, Andria; AEA Cygnet, aeromobile di Alexander Bell; EPCOT al Walt Disney World Resort, Florida; Conifera a Milano, di Arthur Mamou-Mani e Format Engineers LTD; ICD/ITKE Pavillion progetto per Stoccarda; UN Memorial, Chungju, South Korea, progetto di ACME; Voronoi Skyscraper, progetto di Geoffrey Braiman e David Beil

## Capitolo 4

# Introduzione all'analisi

Negli ultimi vent'anni l'architettura ha compiuto passi da gigante. La sperimentazione e l'utilizzo nel mondo delle costruzioni di nuovi materiali, soprattutto polimerici, hanno indotto alla necessità di sviluppare e possedere strumenti CAD 3D sempre più potenti e più interattivi per poter occuparsi di free form. In particolare, in contemporanea con la nascita del BIM, si è cercato una metodologia e una piattaforma dall'interfaccia agevole dove ingegneri, architetti e professionisti dei diversi settori delle costruzioni potessero lavorare insieme, scambiandosi comunicazioni e informazioni. Mario Sassone e Alberto Pugnale, del Dipartimento di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Torino, fanno notare nell'articolo *Evolutionary Structural Optimization in Shells Design* che nelle strutture free form, non è sempre possibile in generale descrivere l'architettura in termini geometrici e la soluzione può essere o sostituire in partenza la superficie con un mesh oppure sfruttare un'approssimazione: *Non Uniform Rational B-Splines*. Le NURBS sono una categoria di curve e superfici parametriche, descritte da una serie finita di numeri in codice che permettono di controllarne globalmente e localmente tutte le condizioni al contorno non solo geometriche. L'operazione, quindi, non è più definire una geometria ben specifica ma un algoritmo ben impostato, che possa essere implementato per ottimizzare di volta in volta le operazioni, evitando le ripetizioni manuali. *Un algoritmo generativo*. È importante comprendere questa condizione: la presenza di parametri dinamici in codice non impone più alcun limite operativo: *l'algoritmo non comprende l'entità rappresentata dal codice, il "significato" del codice* [11].

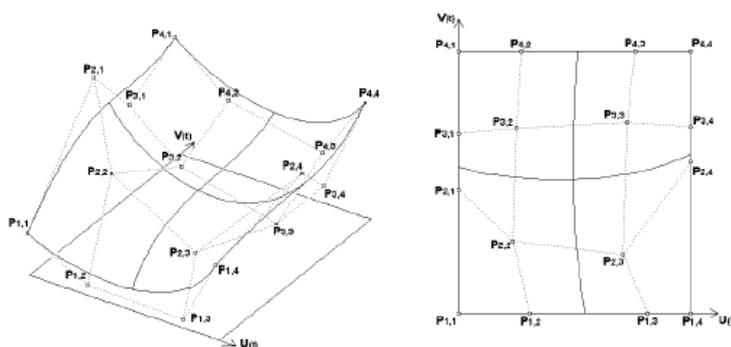


Fig. 4.1 - Dominio e punti di controllo di una superficie NURBS. Estratta dal Paper *Evolutionary Structural Optimization in Shells Design* di Mario Sassone e Alberto Pugnale.

L'obiettivo, così, è quello di avere un'interoperabilità diretta addirittura su un unico file, essendo i dati di input dei codici scritti in un linguaggio informatico comune.

Si possono identificare tre step di progettazione:

- i. definire i parametri della forma della NURBS;
- ii. definire su tali parametri un modello strutturale FEM;
- iii. ottenere in maniera efficiente la codifica in termini di output grafici (*visual editing*) e in termini di

caratteristiche della sollecitazione ottenute dalla FEA.

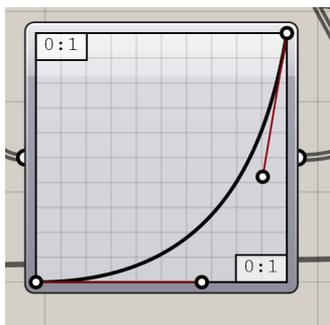


Fig. 4.2 - Graph Mapper, componente di Grasshopper per il controllo grafico delle funzioni e delle NURBS

All'interno di un vasto panorama di software per la modellazione un posto speciale lo occupa *Rhino*, prodotto dalla Robert McNeel e Associates: nato come open source, grazie al suo plug-in Grasshopper è riuscito a raccogliere attorno a sè centinaia di tools e di altri plug-in che trasformano non solo Rhino, ma il calcolatore in sè, come un laboratorio fisico e progettuale in cui il progettista controlla e studia in tempo reale le evoluzioni del suo prodotto, ottimizzando il tempo e la mole dei dati permettendone, inoltre, l'esportazione in numerosi formati di file.

Il caso studio di questa tesi è stato prodotto, appunto, attraverso Grasshopper e Rhino 6, ma prima di entrarne nel merito, è necessario introdurre brevemente i plug-in utilizzati per la progettazione.

## 4.1 Grasshopper

Grasshopper è una piattaforma di sviluppo per la programmazione visuale all'interno di Rhino, ossia consente di generare forme sfruttando funzioni matematiche, strutture algebriche che compongono uno *script* molto semplificato nel linguaggio, una specie di programma nel programma. All'interno dello spazio di lavoro del modello tridimensionale, detto *canvas*, il progettista definisce i parametri e genera diagrammi a nodi in grado di risolvere e descrivere le relazioni matematiche e geometriche, senza la necessità di conoscere un linguaggio informatico vero e proprio: mediante interruttori e pannelli visuali, egli collega come in un sistema elettrico le varie parti dell'algoritmo che cominciano a comunicare fra di loro, scambiandosi i dati. Ecco perché è fondamentale la corrispondenza dei parametri in codice. Ad ogni iterazione sono disponibili immediatamente le informazioni, che vengono utilizzate di volta in volta per ottimizzare l'algoritmo, che nel frattempo viene nuovamente implementato. In un colpo, si definiscono i parametri geometri e gli input FEM, in termini di mesh, nodi e linee. Ecco il motivo per cui è importante visualizzare: la progettazione è step by step, non alla fine della costruzione di un modello, è necessario un riscontro immediato. Non tutte le operazioni vengono fatte direttamente da Grasshopper, ma l'interoperabilità diretta e i parametri in codice permettono di utilizzare altri software direttamente su Grasshopper che diventa, non solo il luogo di scrittura e operazione, ma anche di raccolta dati. Essendo scritto in linguaggio Python, ha facilitato un ampio sviluppo esterno di tools e plug-in a seconda delle specifiche necessità operative.



Fig. 4.3 - Header di Grasshopper, con tutti gli applicativi esterni utilizzabili

Per comprendere meglio la logica, segue un esempio elementare: per definire un punto nello spazio è necessario conoscerne le sue coordinate cartesiane. La stessa cosa avviene in Grasshopper: per costruire un punto, il componente *Point* chiede degli *slider*, vettori dinamici, per definire, appunto, X,Y,Z. A questo punto si segue il diagramma di flusso dello scripting: si desidera una linea? Basta connettere i componenti o il componente punto (esso può essere anche una lista di punti noti e/o disegnati manualmente su Rhino; è importante comprendere che si lavora con dati, non con entità specifiche) al componente *line*. L'iterazione, opera la decodifica che manda a video il risultato.

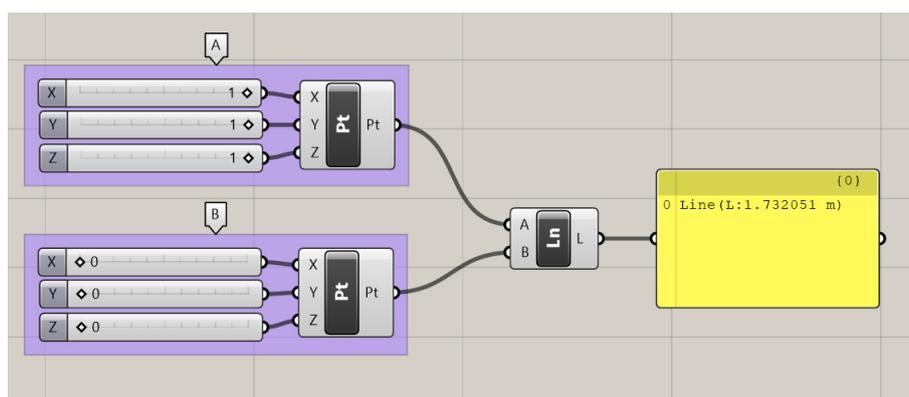


Fig. 4.4 - Scripting di una linea su Grasshopper. Il Panel, permette prima ancora di visualizzare a video, di decodificare e interpretare l'informazione di output del componente.

Grasshopper, in quanto algoritmo generativo è in continua evoluzione e modifica interna, ma soprattutto esterna: esistono centinaia di tools prodotti da esperti e/o appassionati del settore. Nel caso seguente si è utilizzato in particolare 3 tools: Kangaroo 2, responsabile della ricerca della forma, Wasp++ costruttore della forma attraverso le aggregazioni e, infine, Karamba 3D per l'analisi agli elementi finiti direttamente su Grasshopper.

## 4.2 Kangaroo 2

Il Form Finding, come introdotto nel capitolo 2, è la ricerca di una relazione fra la forma geometrica, i materiali usati e la struttura nel suo comportamento elastico. In ingegneria questo si traduce in una catenaria, ossia una curva matematica soggetta esclusivamente a stati di trazione o compressione e, non a momento flettente. L'assenza di quest'ultimo permette di progettare strutture che non possiedono la sezione parzializzata, quindi, una sezione duttile, molto resistente e allo stesso tempo molto sottile. La forma in una catenaria non è solo una questione geometrica, ma una delle soluzioni necessarie per il problema statico. Dalla scienza delle costruzioni, infatti, si prenda il sistema matriciale del problema statico per una trave curvilinea noto il carico applicato:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{1}{r} & 0 \\ -\frac{1}{r} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [4.1]$$

Supponendo il problema matematico di una catenaria, quindi, il momento e il taglio sono nulli,  $M=T=0$  e, ovviamente anche il momento agente esterno è nullo,  $m=0$ .

Il sistema diventa il seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial s} + p = 0 \\ -\frac{1}{r} \cdot N + q = 0 \end{cases} \quad [4.2]$$

Se l'incognita fosse stata soltanto la reazione assiale  $N$ , il problema sarebbe irrisolvibile in quanto non rispetta il principio di unicità della soluzione di Kirchoff. Ma le incognite sono appunto due:  $N$  e la forma, che cambia in base all'applicazione del carico e con esso anche la curva delle pressioni.

Kangaroo, quindi, non è un solutore FEM ma un "laboratorio fisico" (Arturo Tedeschi) dove si può simulare il comportamento elastico delle strutture dovute al peso proprio mediante l'analogia con sistemi di funi o di membrane. Ogni elemento è considerato, così, un sistema di *particles*, ossia masse concentrate, soggette a forze e connesse fra di loro attraverso delle molle. Kangaroo risolve semplicemente la legge di Hooke,  $F = kx$  e, ne garantisce l'equilibrio restituendo la forma incognita.



Fig. 4.5 - Header di Kangaroo 2 in Grasshopper

Il diagramma di flusso dell'algoritmo è il seguente:

1. Discretizzare la geometria in punti e linee, ogni punto rappresenterà una particle, ogni linea rappresenterà una molla;
2. Definire un fattore di carico, che fungerà da forza esterna nell'equazione e servirà a elevare o deprimere la struttura;
3. Definire dei punti di ancoraggio;
4. Unire tutti i dati nel componente *Solver* per ottenere la soluzione in termini di dati e a video.

Un esempio esplicativo abbastanza semplice è tratto da un webinar dell'arch. Arturo Tedeschi per Kangaroo 0.99:

si supponga una fune lunga 80 cm, di rigidezza  $2 \frac{N}{cm^2}$  e una forza di 100 N. Dalla legge di Hooke l'elongazione sarà pari a:  $x = \frac{F}{K} = 50cm$ .

In termini parametrici esso si traduce: disegnato un punto su Rhino e dato come input in Grasshopper, si costruisce una linea mediante l'informazione sulla lunghezza. Determinato il dato della linea, esso viene inserito nel componente *Springs*, di cui viene stabilita la rigidezza. Il componente *UForce* permette di definire una forza agente sulla massa, secondo un vettore di modulo -100 lungo l'asse z. Il componente *End*, permette di ottenere la lista dei punti definiti sulla linea, per imporne ad uno la forza e all'altro la condizione al contorno di ancoraggio del problema. Uniti tutti nel solutore, munito anche di *boolean toggle*, ossia un'interruttore logico per far partire l'analisi, ne si richiede come output la geometria, che risulta 80 cm, come mostra il pannello della figura 4.6, in quanto l'analisi non è ancora stata attivata.

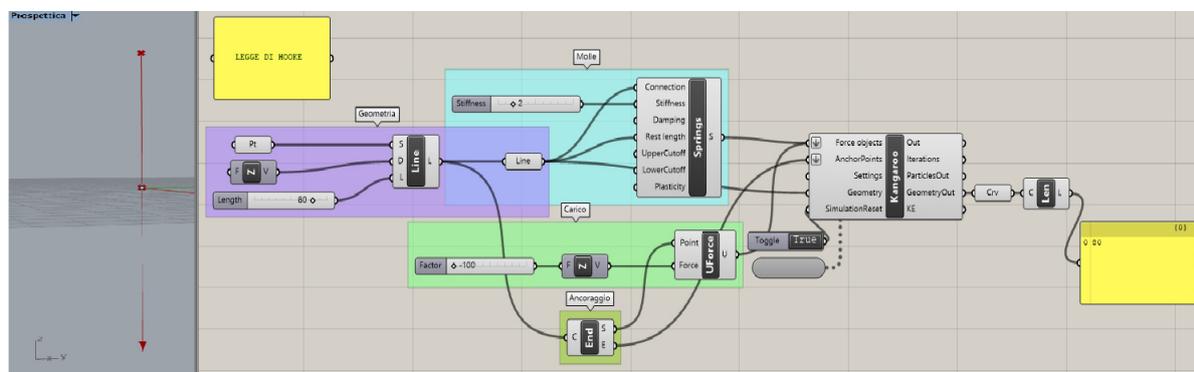


Fig. 4.6 - Visual Editing della Legge di Hooke applicata su una fune, prodotta su Grasshopper

Interrogando il solver Kangaroo in Grasshopper, nel pannello viene mostrata la soluzione che itera mano mano che non raggiunga un valore definitivo pari, appunto, a 130 cm, dato dalla somma con la lunghezza

iniziale.

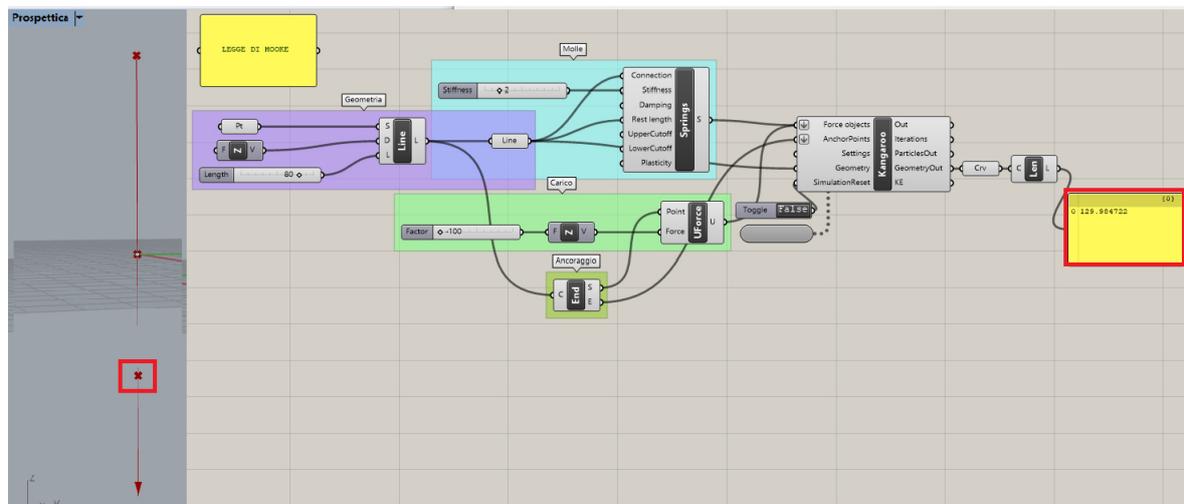


Fig. 4.7 - Visual Editing del risultato della Legge di Hooke applicata su una fune, prodotta su Grasshopper

Ma non è tutto. Una considerazione importante che è già stata fatta per i Saddle Polyhedra è la ricerca della minima superficie, cuore del form finding e, che in Kangaroo è possibile. Infatti, l'interruttore dei dati di input chiede per le linee e, quindi per le molle, la lunghezza, ossia la sua elongazione o meglio la minima lunghezza della molla quando è compressa. Ponendo un valore decimale fra 0 e 1, Kangaroo è in grado di risolvere, così, un problema di minima superficie, come è possibile notare nel caso seguente.

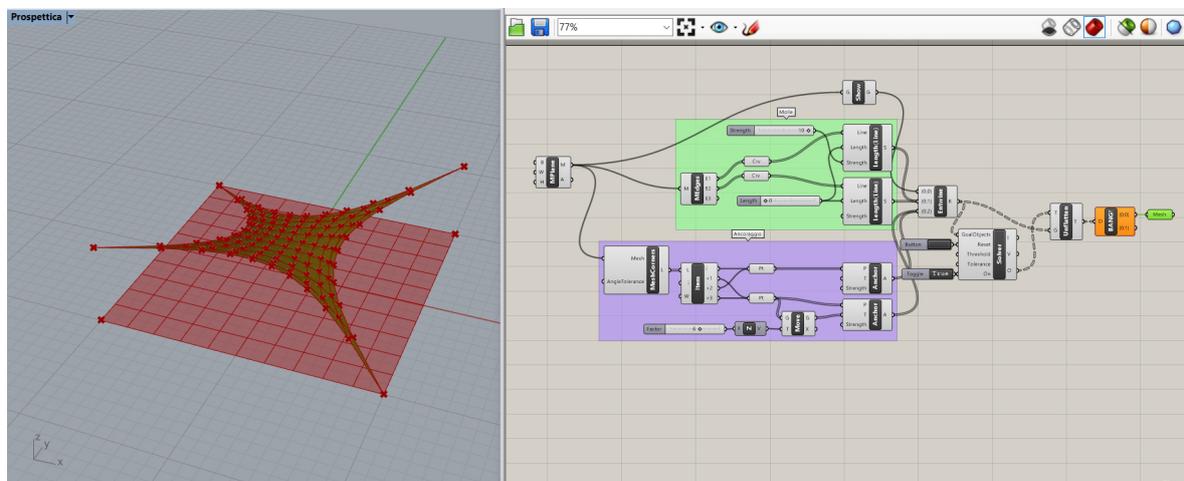


Fig. 4.8 - Visual Editing di un modello di Minima Superficie

Infine, un ultimo inciso sulla rigidità e sull'utilizzo del mesh: variare rigidità, quindi  $\frac{EA}{L}$  e, l'elemento di mesh (solitamente a 4 nodi) significa per le membrane valutare la continuità delle proprietà dell'elemento. Applicando una forza verso il basso partendo da un mesh, è possibile visualizzare e analizzare il comportamento di una rete. L'utilizzo di un elemento di discretizzazione a 3 nodi, permette di giustificare al solutore una sorta di rigidità flessionale che, seppur non serva ai fini dell'equilibrio, gli permette di trovare una forma più simile alla realtà. L'output mostrato dalla figura 4.9 ricorda le reti utilizzate da Gaudì per i suoi studi.

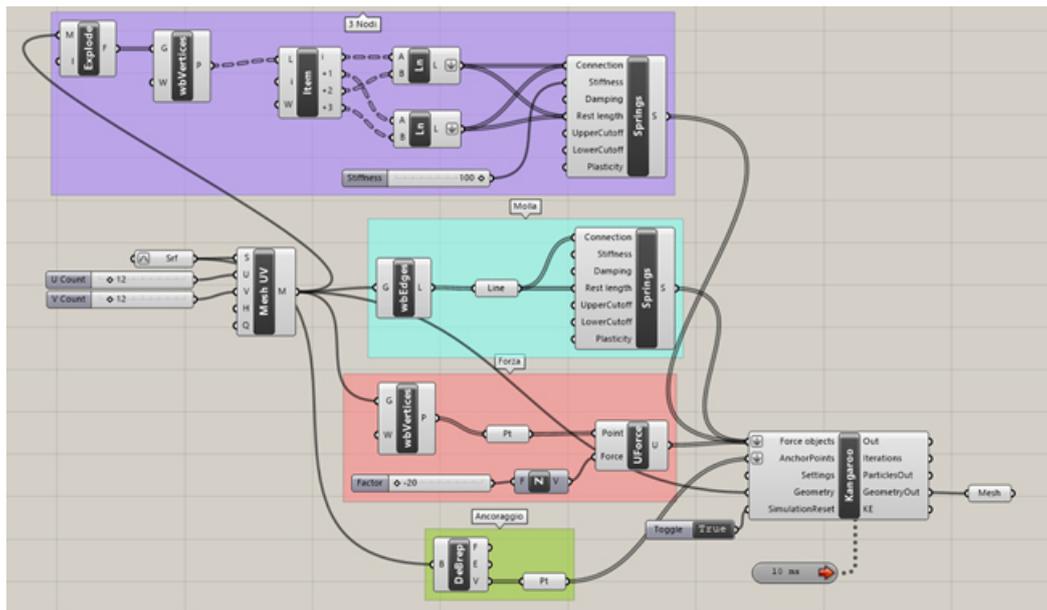


Fig. 4.9 - Scripting del form finding di un mesh con elemento a quattro nodi

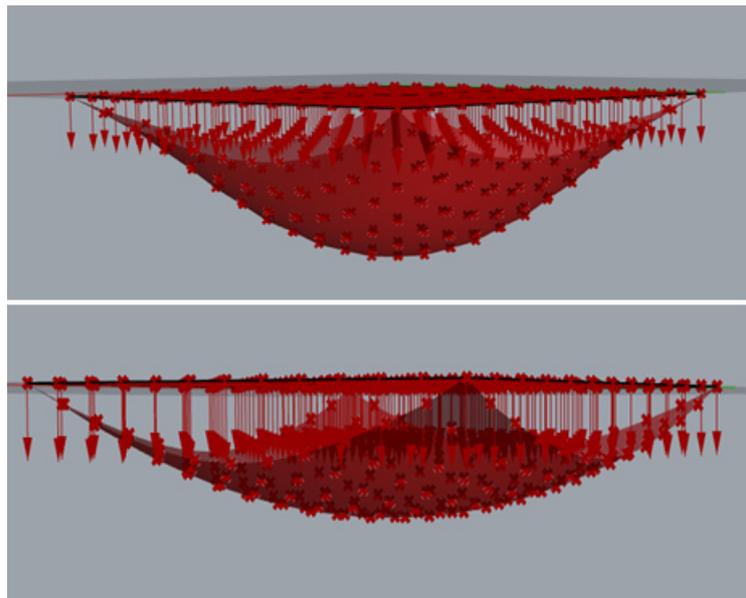


Fig. 4.10 - Visual Editing di membrane differenti per discretizzazione

## 4.3 Wasp++

Wasp++ è un set specifico di componenti per Grasshopper per la creazione di moduli ripetitivi di aggregazione, sviluppato dal ricercatore Italiano Andrea Rossi (che ringrazio per la disponibilità dimostrata nei miei confronti). Attraverso le componenti l'utente è in grado di gestire e controllare in maniera deterministica l'aggregazione dei moduli: è possibile, infatti, o l'aggregazione stocastica (ossia la replicazione random del modulo nello spazio) oppure la creazione di *campi guidati di aggregazione*, ossia il software valuta tutti i punti di tale campo e ne determina i valori massimi testando tutte le differenti possibilità di riempimento.

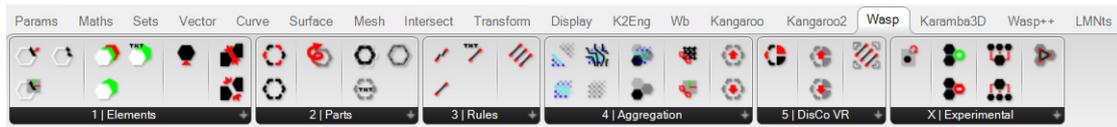


Fig. 4.11 - Header di Wasp in Grasshopper

Il diagramma di flusso per l'algoritmo è il seguente:

- i. Definire la geometria (anche sullo stesso Rhino) del/i modulo;
- ii. Stabilire sulle facce dei moduli i centri e le direzioni che serviranno per determinare l'orientazione dei piani, che verranno usati per l'aggregazione (come già visto anche nel capitolo 3);
- iii. Stabilire le regole di aggregazione (è fondamentale, quindi, avere un preciso ordine di numerazione dei centri e delle direzioni);
- iv. Definire un'aggregazione stocastica oppure una curva o una superficie su cui determinare il campo;
- v. Infine, variare il numero di repliche a seconda delle necessità di aggregazione mentre il software ripete iterativamente le sue funzioni interne.

Anche qui, si propone un esempio esplicativo tratto dai tutorial di Andrea Rossi: costruito un prisma esagonale, si definiscono i centri e le orientazioni dei piani non su tutte le facce laterali ma a facce alternate, come mostrato in figura 4.12.

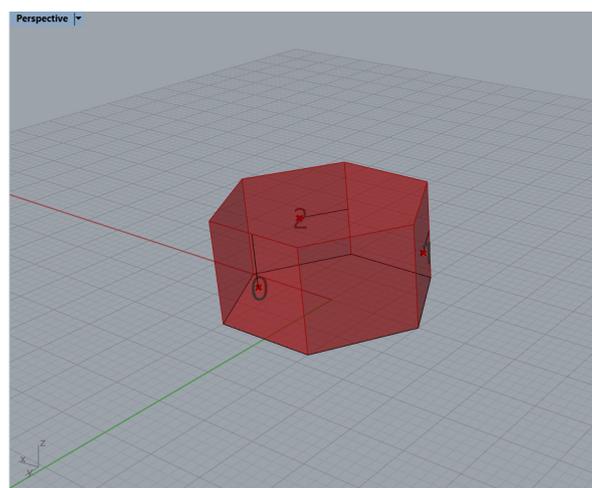


Fig. 4.12 - Visual Editing di un prisma esagonale

A questo punto si ha possessione di tutte le proprietà di una *wasp part* e si può procedere con l'aggregazione stocastica: definito un generatore di regole casuali *rules generator*, queste vengono collegate al solutore, *Wasp Stochastic Aggregation* e, attraverso uno slider è possibile variare il numero di repliche, fino alle proprie necessità, oppure fino a quando un warning avviserà che le possibilità di replica sono terminate.



## 4.4 Karamba 3D

Ultimo tool su cui soffermarsi e che sarà fondamentale per le conclusioni e le analisi del caso studio di questa tesi è Karamba 3D, prodotto dalla Clemens Preisinger in cooperazione con Bollinger und Grohmann ZT GmbH (che ringrazio per la licenza temporanea). Karamba 3D è un solutore FEM parametrico, ossia capace di comprendere il linguaggio del codice di input, di processare i dati mediante FEA, ottimizzando il tempo di calcolo e le operazioni e, di decodificare il codice per rendere accessibili le informazioni e il contenuto. Non solo, permette di ottimizzare anche processi di intuizione strutturale e di predimensionamento: *optimize cross section*, per esempio, permette di far valutare al solutore, definita una famiglia di possibili sezioni trasversali e di materiali e, stabilite le condizioni al contorno della richiesta (massimo spostamento o massima utilizzazione), la migliore sezione strutturale costante e/o variabile per la struttura in progetto.



Fig. 4.15 - Header di Karamba 3D in Grasshopper

Il diagramma di flusso per l'algoritmo è il seguente:

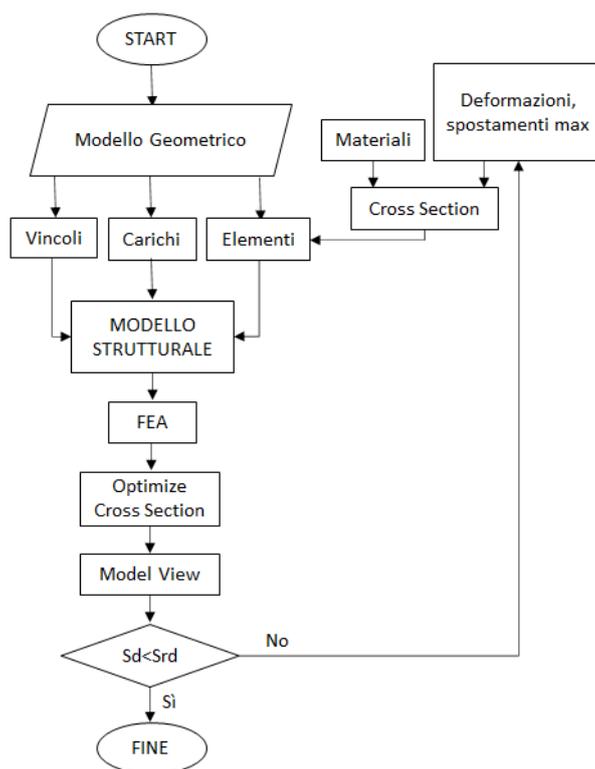


Fig. 4.16 - Diagramma di Flusso di Karamba 3D

dato come input il modello geometrico, i dati vengono condivisi con le componenti di Karamba 3D per costruire il modello strutturale. Per definire gli elementi si utilizzano:

*LineToBeam* permette di trasformare le linee in elementi monodimensionali, travi, soggetti alle forze assiali, di taglio e momento flettente;

*MeshToShell*, invece, permette di trasformare il mesh in elementi bidimensionali triangolari con 6 gradi

di libertà per nodo.



Fig. 4.17 - Componenti LineToBeam e MeshToShell

Il componente *cross section* permette di scegliere da una tendina interattiva una famiglia di sezioni trasversali e di specificare numericamente alla voce *height* una lista o uno specifico spessore. Esso è fondamentale per dare significato fisico all'analisi, influenzando sulle sollecitazioni e le masse. Ad esso è connesso il componente *MatSelect* che permette di scegliere una famiglia di materiali (fra calcestruzzo, acciaio, legno e alluminio) e nello specifico la tipologia. Assegnare una lista di sezioni trasversali permette di utilizzare a seguito della FEA, come già predetto, *optimize cross section*, un componente che dalla lista resa disponibile al solutore seleziona dopo varie iterazioni la migliore sezione trasversale.

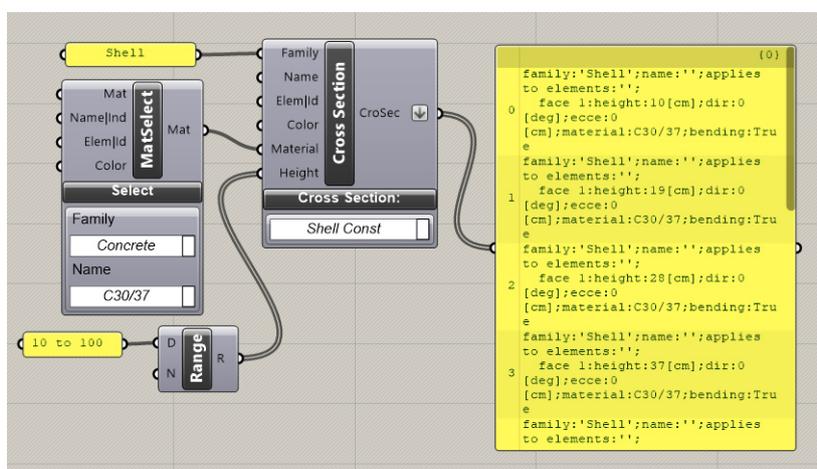


Fig. 4.18 - Componenti Cross Section e MatSelect ed esempio di lista di sezioni trasversali per gusci in calcestruzzo C30/37 con altezza nel range da 10 a 100 cm

Per assegnare i vincoli è necessario l'impiego del componente *support*, che richiede i punti provenienti dal modello geometrico, ai quali dovranno essere imposti gli spostamenti e le rotazioni impedite.



Fig. 4.19 - Componente Support

I carichi vengono definiti mediante il componente *Loads* che permette di poter selezionare da una finestra interattiva la tipologia (costante o variabile, gravitazionale, uniforme o concentrato). Per i carichi puntuali è necessario definire, inoltre, i nodi in cui vengono applicati, altrimenti il componente può essere collegato direttamente all'*assemble* che raccogliendo tutti i dati precedenti costruisce il modello strutturale pronto per la FEA, che comincia con il componente *analyze*. I risultati ingegneristici possono essere letti mediante i pannelli, interrogando il canvas oppure attraverso le componenti di visualizzazione, i quali permettono di ottenere a video i risultati come le reazioni, le deformazioni, lo spostamento massimo e l'utilizzazione, ossia il rapporto fra la forza agente e la tensione di snervamento del materiale (qualora il rapporto fosse superiore all'unità significa che l'elemento analizzato ha superato la tensione di snervamento).

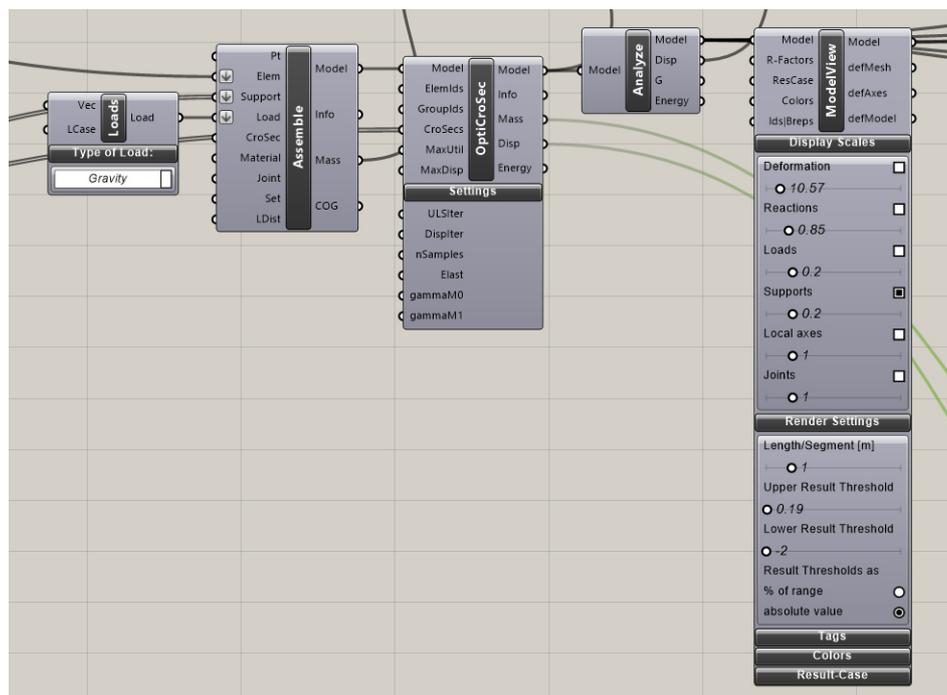


Fig. 4.20 - Componenti *Loads*, *Assemble*, *OptimizeCrossSection* e *Model View*

A questo punto, si potranno verificare le sezioni in questione, riproponendo nuove iterazioni e, qualora siano necessarie, anche nuove modifiche senza dover ricominciare da capo, come sarebbe accaduto con un qualsiasi altro software di calcolo FEM.

In conclusione, senza entrare nel merito e visto l'header rappresentato in figura 4.3, viene elencato l'utilizzo dei seguenti tool, utilizzati all'interno del caso studio:

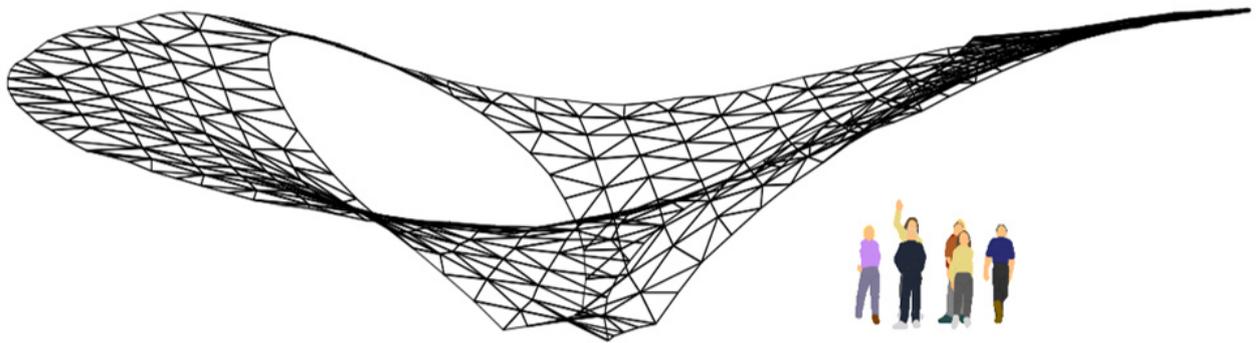
- *Weaverbird*, un potente discretizzatore di punti e linee;
- *mesh edit*, un tool per effettuare più operazioni sui mesh e fra mesh.



## Capitolo 5

### Caso Studio:

Quanto espresso finora dovrà essere utilizzato come base teorica per l'algoritmo generativo del progetto e la sua analisi strutturale. Sebbene si sia affermato che non è importante stabilire una determinata geometria di partenza, essa sarà necessaria per poter ridurre l'ampia libertà di scelta delle configurazioni possibili della struttura e focalizzarsi sulla risposta strutturale. Dopo averne definito il codice della geometria, si faranno più FEA: si valuterà dapprima la risposta strutturale della sola struttura ipotizzata isotropa, omogenea, continua e totalmente in calcestruzzo; successivamente si valuterà la risposta determinata dallo scheletro dovuto all'aggregazione dei poliedri, quindi, in acciaio. L'algoritmo permetterà di ottimizzare lo studio delle caratteristiche della sollecitazione sia al variare della topologia del poliedro, sia al variare dei parametri come materiale e dimensioni della struttura, evitando di ricostruire più volte il modello, le ripetizioni e le ridondanze che in queste circostanze rischierebbero di comportare soltanto errori accidentali.



*Fig. 5.01 - Struttura del caso studio*

## 5.1 Definizione della Geometria

Il punto di partenza è naturalmente definire la geometria della struttura. Il modello è ispirato al progetto della stazione metropolitana della città di Stoccarda per il 2023 "Stuttgart 21", tuttavia, l'estensione e la geometria sono state rimaneggiate per produrre uno studio e dei contenuti originali, supponendo di avere dinanzi una struttura più simile ad un padiglione artistico e/o fieristico.



Fig. 5.02 - Progetto della stazione metropolitana di Stoccarda, Stuttgart 21

Per ridurre le infinite e possibili configurazioni geometriche si è stabilita una geometria di pianta ben precisa, per valutare in seguito le caratteristiche di sollecitazione al variare più dell'elevazione nel processo di form finding. Si è supposto, quindi, una superficie ellissoidica, al cui interno sono stati disegnati due curve ellittiche, che rappresenteranno i fori e i cui archi interni ospiteranno il luogo dei punti d'ancoraggio della struttura. L'asse maggiore dell'ellisse misura 28 m, mentre l'asse minore è in onore di Sergio Musmeci è stato posto pari a 7 volte il numero di Nepero, quindi, pari a 19.0279727 m.

Impostato su Rhino 6 uno spazio di lavoro in oggetti grandi, con unità di misura i metri, tutte queste geometrie sono state disegnate direttamente e assegnate successivamente su Grasshopper come input per le operazioni, cliccando con il tasto destro del mouse sul componente e scegliendo la voce *set one ...* per un elemento, *set multiple...* per assegnare più elementi.

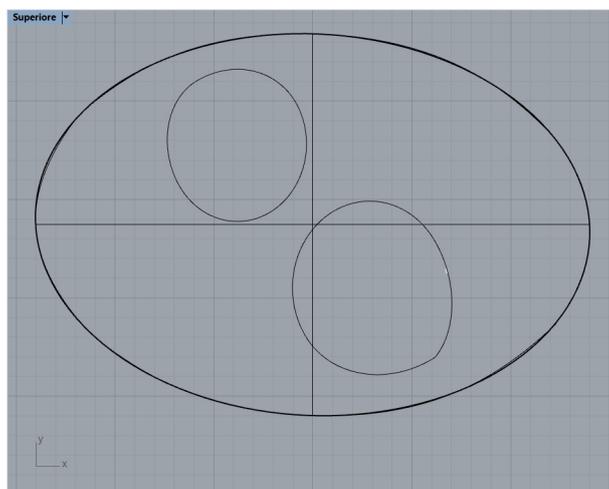


Fig. 5.03 - Vista Superiore del disegno delle curve su Rhino

Assegnata la superficie dell'ellisse al componente *Surface* essa viene interpretata come l'area totale interna all'ellisse. Per eliminarne i fori è necessario effettuare le seguenti operazioni. Innanzitutto, intendere la superficie come una BREP (Boundary REPresentations), cioè una rappresentazione locale che collega facce, vertici e bordi e, decostruirla. Il componente *Deconstruct BREP* permette di dare in input una lista di BREPS e restituire separatamente in output le singole caratteristiche. Si scelgono i bordi, che uniti alle curve ellittiche assegnate da Rhino, fungono come i tre dati di input del componente *Boundary Surface*, che in output restituisce l'unica superficie desiderata, compresa fra gli spigoli, o meglio le curve, disegnate su Rhino. La freccetta verso il basso ai dati di input indica un *Flatten*. Bisogna immaginare che Grasshopper sia un come un *albero* che ramifica con i suoi dati. Tali dati possono essere duplici e multipli, provocando un problema non solo di comprensione del codice, ma anche delle operazioni. Per evitare tale problema, è possibile usare il *flatten*, che come dice la parola stessa, scarta le duplicazioni di dati, restituendo un unico ramo di dati. Infine *Mesh Breps* permette di discretizzare la superficie mediante un mesh, che sarà il dato di input per Kangaroo e Wasp prima, Karamba poi. Il componente *mesh* finale, mostrato in figura 5.04 serve solo per garantire ordine nel canvas, raccogliendo ordinatamente la lista risultante in un componente separato.

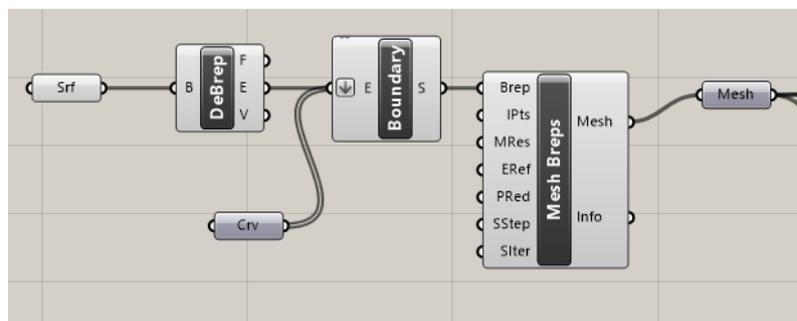


Fig. 5.04 - Scripting della base su Grasshopper

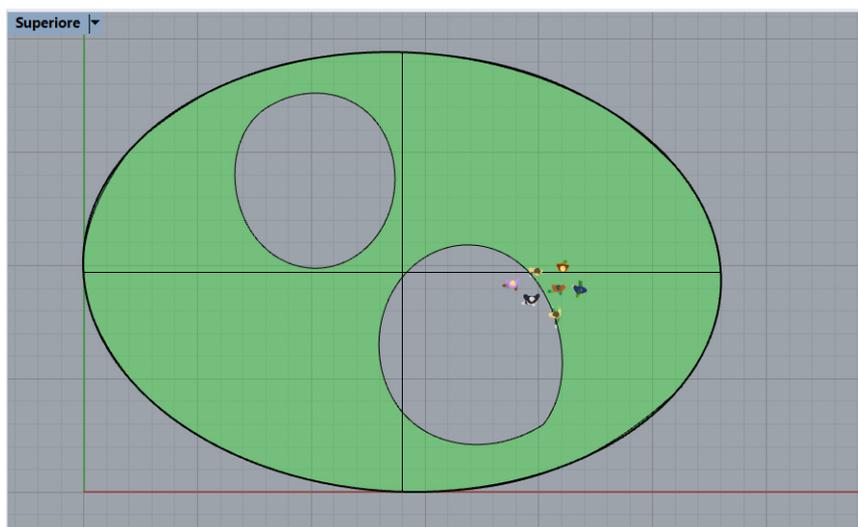


Fig. 5.05 - Vista superiore di quanto editato

## 5.2 Form Finding

A questo punto è possibile dedicarsi alla ricerca della forma. Ricordando il diagramma di flusso di Kangaroo 2, dal mesh di input bisogna generare i particles e le molle.

I primi sono stati ottenuti attraverso il componente *Weaverbird's Vertices Component*, che restituisce, infatti, i punti rappresentativi del mesh. Fra questi si desidera che quelli lungo gli archi interni fungano da ancoraggi al suolo, mentre quelli lungo gli archi esterni della pianta ellittica fungano da ancoraggi in aria all'altezza desiderata. Per ottenere ciò, sono stati disegnati dapprima 4 archi interpolanti lungo il bordo esterno della pianta ellittica e due parallelogrammi nei pressi degli archi interni dei fori. Tutte le geometrie sono state assegnate alle componenti curve su Grasshopper. Per gli ancoraggi al suolo, si desidera che essi siano i punti appartenenti alle ellissi e interni ai due parallelogrammi. Il componente *Point in Curves* svolge questo compito: dati come input la popolazione di punti del mesh e i parallelogrammi, restituisce come output le relazioni, gli indici e le coordinate dei punti. Servono le relazioni, ossia la lista dei punti di partenza viene sostituita da una lista di numeri: 0 se i punti sono esterni, 1 se i punti sono coincidenti e 2 se i punti sono interni. Questo permette di sapere in codice quali punti hanno le seguenti condizioni. Quest'ultime inserite come dati di input insieme alla lista della popolazione all'interno del componente *Cull Pattern*, restituisce la lista completa dei soli punti desiderati, che fungono ancora da input del componente *Anchor*. Per i punti esterni, il procedimento è diverso. Il componente *Curve Closest Point* permette di ottenere in output, dati i due archi al perigeo e la rispettiva popolazione di punti, la lista dei punti, dei parametri e soprattutto delle rispettive distanza dalle curve interpolanti. Si desidera che vengano selezionati soltanto quelli il più vicino possibile, operazione che viene descritta dal componente *Smaller Than*, che richiede in input la lista dei dati da trattare e il valore limite di cui si richiede il minore o minore uguale. L'output associato nuovamente al *Cull Pattern* permette di ottenere la lista dei valori desiderati, che diventano input nuovamente di un componente *Anchor*. Questa volta, però, è *AnchorXYZ*, cioè un componente di ancoraggio che richiede in input dei boolean toggle per le direzioni lungo le quali si desidera che gli spostamenti siano impediti. Nel caso seguente, quindi, X e Y. Il processo viene ripetuto in toto per i restanti due archi ellittici.

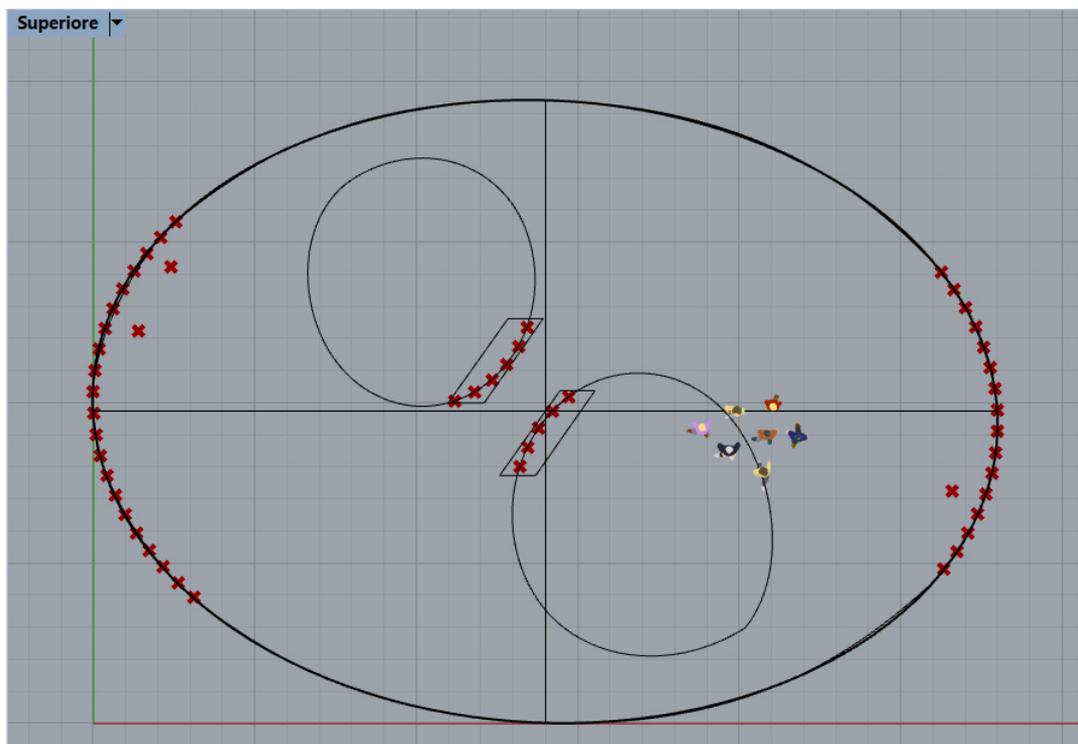


Fig. 5.06 - Vista superiore di quanto editato e disegnato

Le molle, invece, che rappresentano le linee sono state ottenute attraverso il componente *EdgeLengths*, il corrispettivo di *springs* del paragrafo 4.2 questa volta per Kangaroo 2. In input richiede il mesh, eventualmente la rigidezza e la lunghezza (da cui valutare a minima superficie), in output restituisce la lista delle molle per il solutore.

Ultimo dato, il carico. Il componente *Load* permette di assegnare una forza, qui pari a 0.002 N e definita dal vettore in direzione z, a tutti i punti desiderati, nel caso seguente tutti i punti rappresentativi del mesh. Tutte queste informazioni, raggruppate nel componente *Entwine*, che permette di ordinare il flusso di dati, si assegnano al componente *Solver*, che fa partire le iterazioni e restituisce come output il modello geometrico finale della struttura, la migliore forma possibile.

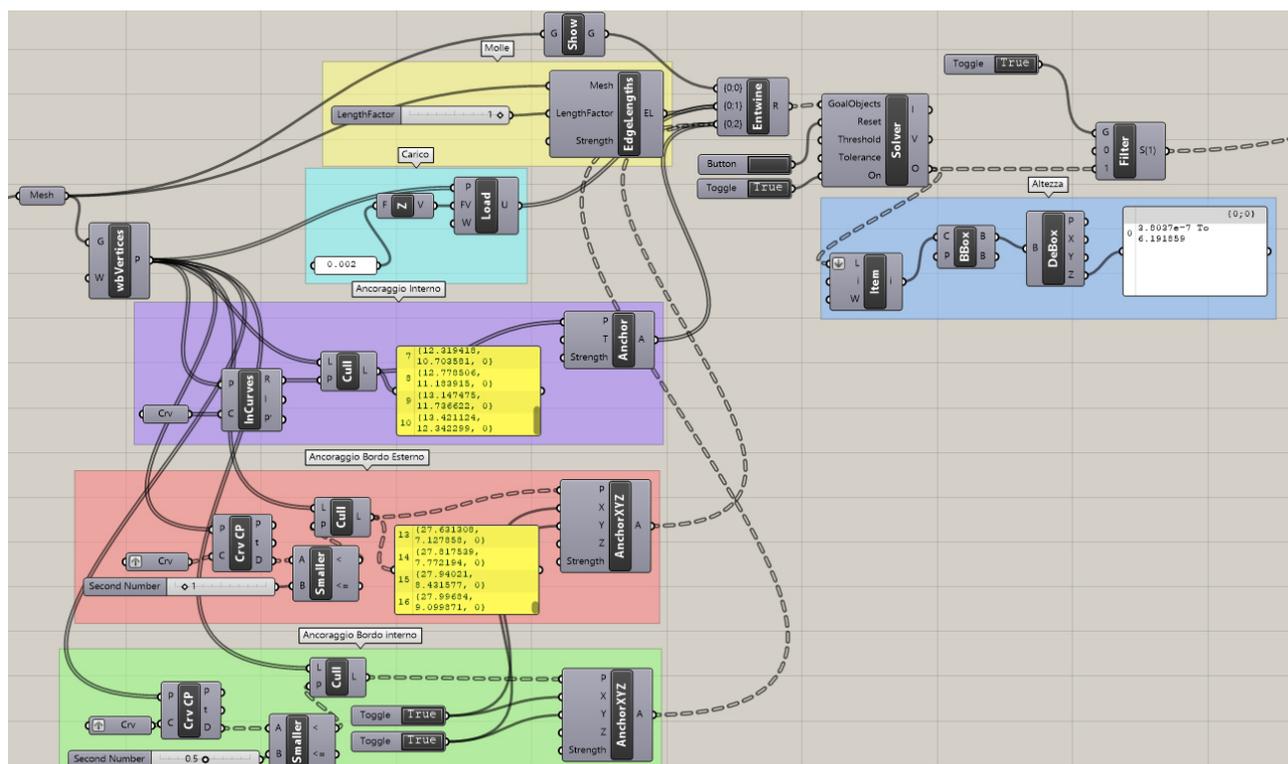


Fig. 5.07 - Scripting di Kangaroo 2 su Grasshopper

Infine, nella figura 5.07 è possibile apprezzare alcune considerazioni:

- i pannelli, che saranno molto utilizzati durante tutta la progettazione, permettono di avere una visione continua delle iterazioni, per fare le valutazioni step by step, come affermato precedentemente;
- le operazioni di misura possono essere eseguite anch'esse in codice, infatti, costruendo un box attraverso il componente *BoundingBox* attorno alla geometria appena ottenuta definita dai punti di output, opportunamente raccolti con *List Item*, permette di determinare da pannello il valore di un lato del box decostruendo una delle dimensioni mediante il componente *Deconstruct BoundingBox*, in questo caso l'altezza è pari a circa 6 m;
- è necessario sempre preservare e avere premura dei tempi di calcolo, per non mandare in crash il software. Pertanto, è necessario utilizzare alcuni componenti, per esempio *Filter*, per far sì che le successive operazioni e iterazioni avvengano se e solo se concluse le precedenti; per farlo si collegano in input a tale componente dei boolean toggle.

In seguito, le figure 5.08 e 5.09 mostrano l'evoluzione del processo iterativo del solver di Kangaroo 2 per arrivare alla soluzione.

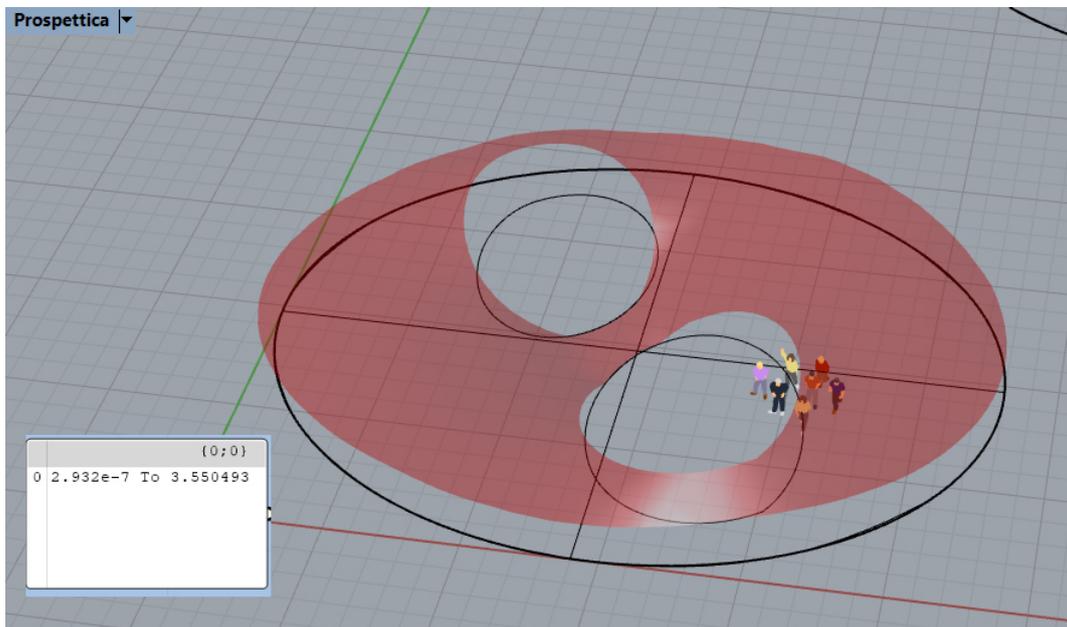


Fig. 5.08 - Vista prospettica dell'evoluzione del modello geometrico

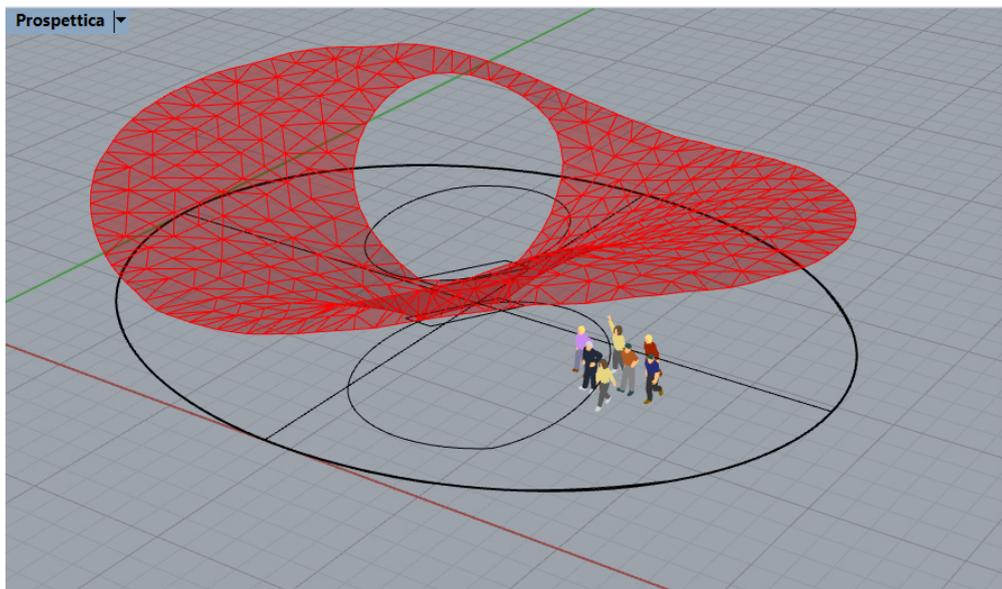


Fig. 5.09 - Vista prospettica del modello geometrico

Si è pronti finalmente per la FEA.

## 5.3 Analisi del continuo

Prima di procedere con l'aggregazione dei poliedri è necessario ottenere non solo un primo riscontro sul modello, ma anche una sua valutazione strutturale, analizzando qualitativamente le caratteristiche della sollecitazione, di cui successivamente si cercheranno analogie e differenze con quelle riferite alle varie strutture costituite da poliedri. A tal fine, data la non necessità di entrare nel dettaglio quantitativo delle azioni interne, considerando che l'unica forza esterna agente è il peso proprio e che non è la struttura finale, si è deciso di effettuare la FEA sfruttando il mesh sia come elemento geometrico, sia come elemento FEM, quindi, studiando la struttura come una serie di gusci connessi tra di loro.

### 5.3.1 I Gusci e Sandwich Model

I *gusci* sono solidi tridimensionali delimitati da due superfici curve molto vicine tra di loro. Il luogo dei punti equidistanti dalle due superfici viene chiamato *piano medio* e il segmento perpendicolare è lo *spessore*  $h$ . Quest'ultimo permette di differenziare e classificare tali strutture: viene definito *guscio sottile* quando il massimo fra il rapporto dello spessore e il raggio di curvatura minimo e il rapporto dello spessore  $e$ , la dimensione minima della superficie è almeno un'ordine di grandezza minore dell'unità:

$$\max\left(\frac{h}{R_{min}}, \frac{h}{L_{min}}\right) \leq \frac{1}{20} \quad [5.1]$$

con  $R_{min}$  il raggio di curvatura minimo e  $L_{min}$  la dimensione minima sulla superficie media; viene definito *moderatamente spesso* se rispetta, invece, la seguente relazione:

$$\max\left(\frac{h}{R_{min}}, \frac{h}{L_{min}}\right) \leq \frac{1}{10} \quad [5.2]$$

altrimenti è definito *spesso*.

Il comportamento di un guscio può essere studiato attraverso le teorie dell'elasticità piana in termini di congruenza, equilibrio e legame costitutivo. Per farlo è necessaria una semplificazione, ossia ridurre l'analisi dal solido al suo piano medio, passando così da un elemento tridimensionale ad uno bidimensionale. Alla base di questa possibilità, vi sono le quattro ipotesi di Kirchoff per il *guscio sottile*:

- i. lo spessore essendo molto più piccolo del raggio di curvatura permette di trascurare le deformazioni trasversali taglianti  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$ ;
- ii. le sezioni piane normali alla superficie media restano piane a deformazione avvenuta;
- iii. lo sforzo normale  $\sigma_x$  è trascurabile;
- iv. gli spostamenti lungo lo spessore sono molto piccoli e, quindi, la deformazione lungo la normale è nulla  $\epsilon_n = 0$ .

Tali ipotesi valgono anche per i gusci moderatamente spessi, ad eccezione della deformazione tagliante trasversale, che secondo la FSDT, la *Teoria del primo ordine*, non può essere trascurata, in quanto i segmenti rettilinei e normali al piano medio, a deformazione avvenuta, restano rettilinei ma non necessariamente normali.

Il guscio essendo bidimensionale, reagisce sia per forma (stato membranale contenuto nel piano e tangente alla superficie media, come una lastra) che per massa (stato flessionale e ortogonale al piano, come una trave). Per risolvere le equazioni indefinite che governano il problema elastico è necessario che quest'ultimo venga, quindi, disaccoppiato e linearizzato. Si prenda un concio infinitesimo, riferito al piano medio, sottoposto a qualsivoglia carico e il cui sistema di riferimento locale sia consistente con quello globale. Dall'analisi elastica lineare esso risulta soggetto alle seguenti azioni interne:

- 3 componenti membranali,  $n_x, n_y$  e  $n_{xy} = n_{yx}$ , [kN/m];
- 2 momenti flettenti,  $m_x, m_y$  e il momento torcente  $m_{xy} = m_{yx}$ , [kNm/m];
- 2 componenti di taglio fuori dal piano,  $t_x, t_y$ , [kN/m].

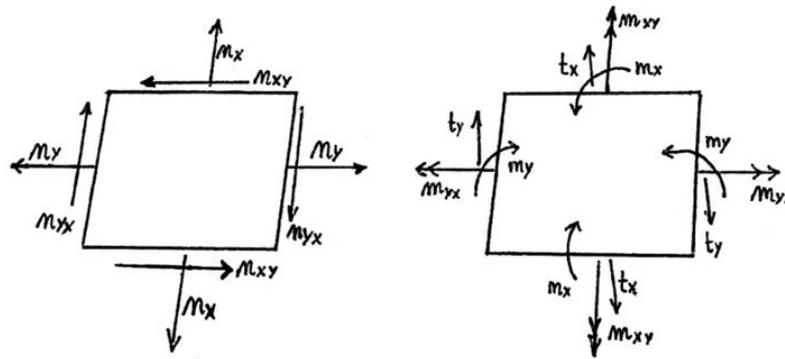


Fig. 5.10 - Azioni interne del guscio

Le unità di misura riportate servono a ricordare che, per via della semplificazione fatta, tali componenti sono le risultanti definite su unità di lunghezza secondo i criteri dell'equivalenza statica. Per ottenere, quindi, le forze e le coppie è necessario integrare lungo lo spessore. Senza entrare nel merito della risoluzione delle equazioni indefinite, è chiaro che per far fronte a tali azioni e progettare un guscio in calcestruzzo armato è necessario dover tener conto di tre livelli differenti di armatura:  $A_{sx}$ ,  $A_{sy}$  e  $A_{sw}$ , quest'ultima resistente al taglio, tutte ancora definite su unità di lunghezza. Non è proprio agevole il calcolo e la progettazione dei gusci.

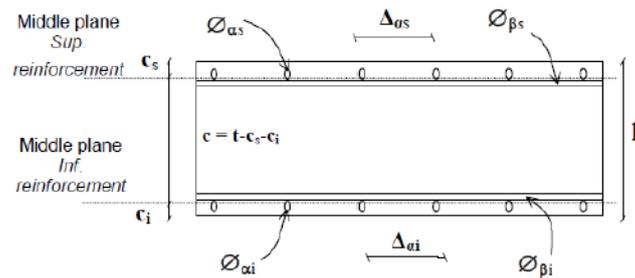


Fig. 5.11 - Esempio di armatura in un guscio

In generale per analizzare e progettare un guscio in calcestruzzo, bisogna dapprima valutarne lo stato fessurativo. Dalle azioni interne possono essere ricavate le tensioni  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  come segue:

$$\begin{aligned} - \sigma_x &= \frac{n_x}{h} + \frac{12m_x}{h^3} \cdot z; \\ - \sigma_y &= \frac{n_y}{h} + \frac{12m_y}{h^3} \cdot z; \\ - \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\frac{n_{xy}}{h} + \frac{12m_{xy}}{h^3} \cdot z \quad [5.3]. \end{aligned}$$

A questo punto, dalla teoria dei *cerchi di Mohr* è possibile definire le tensioni principali:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad [5.4]$$

ovviamente con  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

In particolare,  $\sigma_1$ , essendo il maggiore, può rappresentare o l'unica tensione positiva o la più grande di tutte le tensioni positive e pertanto, per valutare lo stato fessurativo è sufficiente confrontare tale tensione con la massima tensione a trazione del calcestruzzo, il cui valore secondo l'EC2 è determinabile mediante la seguente formula:

$$f_{ctm} = 0.3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad [5.5]$$

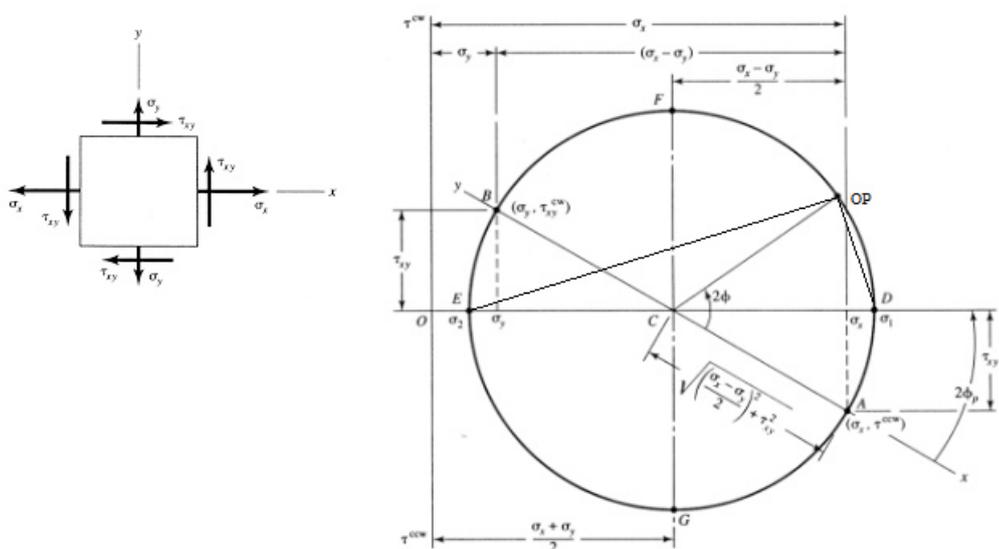


Fig. 5.12 - Teoria dei cerchi di Mohr

Se la tensione principale risulta minore, la sezione non è fessurata e si può procedere alla verifica di resistenza attraverso uno dei criteri, solitamente Von Mises. Se, però, risulta maggiore, la sezione del guscio è fessurata e bisognerà procedere alla verifica e alla progettazione dell'armatura mediante una teoria operativa nota come *Sandwich Model*.

(Va precisato che molti manuali specialistici consigliano di utilizzare questa teoria qualora si riscontrasse già una  $\sigma_1$  positiva, in quanto il calcestruzzo è un materiale che non permette di fare affidamento su un qualsiasi valore di resistenza a trazione, seppur esso sia molto piccolo; non a caso si garantisce sempre un livello minimo di armatura a priori).

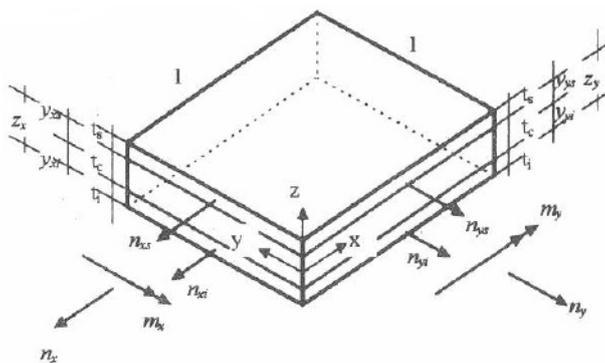


Fig. 5.13 - Sandwich Model

Il presupposto del sandwich model deriva dall'analogia con la trave: si divide il guscio in 3 layer differenti, i due più esterni si occupano di resistere alle componenti membranali e flessionali, quindi, ospiteranno i livelli di armatura  $A_{sx}, A_{sy}$ , mentre il layer centrale reagisce soltanto allo sforzo di taglio, lavorando come una trave e, ospiterà l'armatura  $A_{sw}$ . Se per quest'ultimo la verifica e la progettazione è più semplice, in quanto il meccanismo di resistenza è ancora quello a traliccio e si provvede, quindi, con la verifica del corrente teso e del puntone compresso; per i layer esterni il discorso si complica e l'approccio varia a seconda che sia stata definita la necessità di possedere o meno l'armatura trasversale.

Per completezza, si valuta quest'ultimo caso, che differisce per la presenza dell'angolo d'inclinazione  $\theta$  dei puntone compressi. Le azioni interne ad ogni layer possono essere calcolate come segue:

$$\begin{aligned}
 -n_{sdx,sup} &= n_x \frac{z-y_{sup}}{z} + \frac{m_x}{z} + \frac{1}{2} \frac{t_x^2}{t_0^2} \cot g \theta; \\
 -n_{sdx,inf} &= n_x \frac{z-y_{inf}}{z} - \frac{m_x}{z} + \frac{1}{2} \frac{t_x^2}{t_0^2} \cot g \theta; \\
 -n_{sdy,sup} &= n_y \frac{z-y_{sup}}{z} + \frac{m_y}{z} + \frac{1}{2} \frac{t_y^2}{t_0^2} \cot g \theta; \\
 -n_{sdy,inf} &= n_y \frac{z-y_{inf}}{z} - \frac{m_y}{z} + \frac{1}{2} \frac{t_y^2}{t_0^2} \cot g \theta; \\
 -v_{sd,sup} &= n_{xy} \frac{z-y_{sup}}{z} - \frac{m_{xy}}{z} + \frac{1}{2} \frac{t_x t_y}{t_0^2} \cot g \theta; \\
 -v_{sd,inf} &= n_{xy} \frac{z-y_{inf}}{z} + \frac{m_{xy}}{z} + \frac{1}{2} \frac{t_x t_y}{t_0^2} \cot g \theta \quad [5.6];
 \end{aligned}$$

con  $z$  pari alla la distanza dei livelli di armatura e  $y$ , la distanza della specifica armatura dal centroide del guscio.

Ora, si prenda un layer in particolare e lo si tagli con un piano parallelo alla direzione del campo di compressione a rottura, ossia di un'inclinazione a partire da quella dei puntoni compressi, variata di un  $\Delta\theta$  fra i  $-20^\circ$  e  $20^\circ$  (più è grande tale variazione, più ampie saranno le fessure in servizio).

L'equilibrio alla traslazione secondo l'asse  $x$  delle forze mostrate nella fig. 5.14 risulta:

$$n_{Rdx} = n_{sdx} + v_{sd} \cot g \theta = A_{sx} \sigma_{sx} \quad [5.7]$$

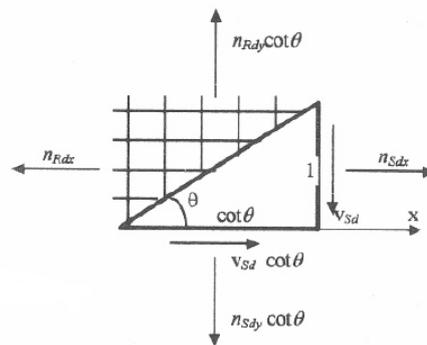


Fig. 5.14 - Concio di layer sezionato e relative forze agenti

Lo stesso layer venga sezionato, questa volta, da un piano ortogonale alla direzione del campo a compressione a rottura:

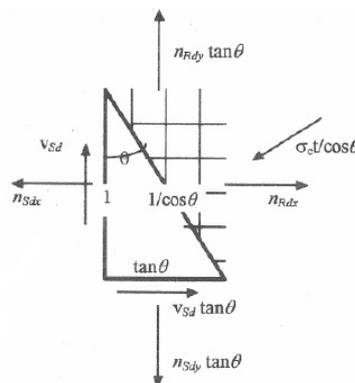


Fig. 5.15 - Concio di layer sezionato e relative forze agenti

L'equilibrio alla traslazione in direzione x della fig. 5.15 risulta:

$$-\frac{\sigma_c t}{\cos\theta} \cos\theta + n_{Rdx} - n_{sdx} + v_{sd} t g\theta = 0 \quad [5.8]$$

Sostituendo il valore di  $n_{Rdx}$ , determinato nell'equazione 5.7, nell'ultima relazione 5.8, si ottiene:

$$\sigma_c t = v_{sd} \cot\theta + v_{sd} t g\theta \quad [5.9]$$

Analogamente può essere fatto con la direzione y.

Ricordando la relazione trigonometrica che lega la somma di tangente e cotangente al prodotto di seno e coseno, la relazione può essere riscritta e la verifica diventa la seguente:

$$\sigma_c = \frac{v_{sd}}{t \sin\theta \cos\theta} < f_{cd2} \quad [5.10]$$

dove  $f_{cd2}$ , resistenza di progetto del calcestruzzo, rifacendosi all'EC2 e alla proposta di *Carbone et al., 2000* è pari a:

$$f_{cd2} = v_1 f_{cd} (1 - 0.032 |\Delta\theta|) \quad [5.11]$$

con  $v_1 = 0.6(1 - \frac{f_{ck}}{250})$  e  $f_{cd} = 0.85 \cdot \frac{f_{ck}}{1.5}$ .

### 5.3.2 Analisi del modello

Il modello geometrico è, così, formato da una serie di gusci. Facendo riferimento a quanto espresso nel capitolo 4, è necessario trasferire i dati dal modello geometrico al modello strutturale, affinché il processo di meshing possa essere interpretato e operato in ottica FEM. Per prima cosa è necessario stabilire una tipologia di materiale: data la natura qualitativa dell'analisi si è deciso il calcestruzzo C30/37 che è stato imposto mediante il componente *MatSelect*. Questo è stato opportunamente connesso al componente *Cross Section*, in cui è stato selezionato *Shell Var*, che permette al solutore di produrre un'analisi in grado di rispondere anche ottimizzando la sezione trasversale non necessariamente costante. Variabile, efficiente e che sia resistente. Essendo il guscio un elemento bidimensionale, l'unico parametro variabile nella definizione di cross section è l'altezza: il componente *range* ha permesso di definire mediante un panel un intervallo operativo, in questo caso da 10 a 100 cm. Questa procedura ha creato, così, una famiglia di sezioni trasversali, una lista di dati da assegnare finalmente al guscio FEM. Ma prima bisogna ricordarsi che è un algoritmo, un codice iterativo e che dalle iterazioni dovrà determinare la migliore soluzione: il componente *list item* permette di assegnare in partenza una scelta tentativo, la prima. Il primo tentativo, quindi, è un guscio in calcestruzzo C30/37 di altezza 10 cm. Esso viene opportunamente connesso al componente *MeshToShell* e identificato dall'ID S. E' ufficiale il passaggio FEM.

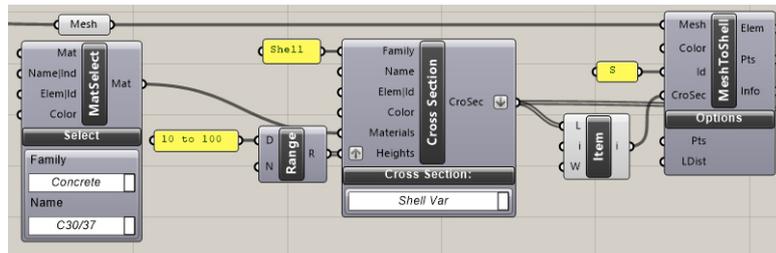


Fig. 5.16 - Scripting del passaggio dal mesh geometrica a quello FEM

Per definire i vincoli, si potrebbero sfruttare i punti già noti e usati nella creazione del modello geometrico, ma non è la scelta consigliata. Il funzionamento di questa tipologia di software si basa soprattutto su una solida definizione di tolleranza, necessaria per determinare un dominio operativo privo di dimensioni, ma pieno di dati codificati. Per tanto dall'output del comando *MeshToShell* è possibile utilizzare la voce *points*: questi rispettano la tolleranza necessaria ad appartenere sicuramente al mesh FEM. Si desiderano quelli a terra, quindi, *DeConstructPoints* prima, *SmallThen* e *Cull Pattern* dopo, permettono di scartare dalla lista totale dei punti tutti quelli superiori ad un certo valore della componente zeta, che ancora per la tolleranza è fissata a 0.05 m. Supponendo vi siano delle fondazioni su cui poggia la struttura, i vincoli sono stati identificati come incastri perfetti. Definito il carico solo gravitazionale attraverso il componente *Load*, si collegano gli output rispettivamente *Element*, *Support* e *Load* al componente *Assemble*. Un primo riscontro può essere utile, si possiede a tutti gli effetti il modello strutturale.

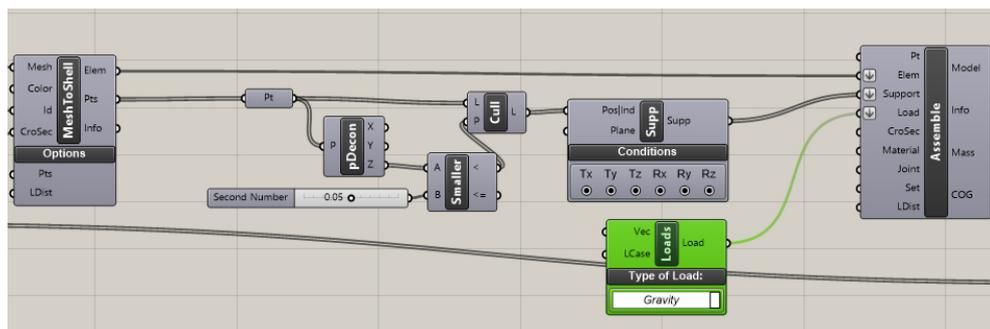


Fig. 5.17 - Scripting della definizione del modello strutturale

Una possibilità è valutare, ad esempio, la massa: un panel viene collegato all'output *mass* e si riesce a conoscere i chili in conto nella prima possibile soluzione della FEA, un dato importante anche per il futuro per capire se l'ottimizzatore stia effettivamente operando. La prima soluzione computa 86178 kg con un guscio di spessore 10 cm. E' proprio l'ottimizzazione lo step successivo: collegando la voce *model* output dell'*assemble* con il rispettivo input di *OptimizeCrossSection*, il solutore determina la migliore soluzione per la sezione trasversale variabile lungo tutto il padiglione. Anche qui, interrogando l'output con un panel si nota che la massa è, appunto, differente ed è pari a 115577 kg. Il massimo spostamento della struttura è visualizzabile alla voce *disp* ed è pari a 24 cm, circa il 4% dell'altezza totale, esteticamente non il massimo seppur risulti inferiore al valore limite di 1/250 della luce, come prescritto dalle norme. Se fosse necessario, si potrebbe impostare un limite massimo per l'abbassamento come input stesso dell'ottimizzatore: il solutore itererebbe da capo le possibili sezioni trasversali in grado di garantire la stabilità e il massimo spostamento appena richiesto. Tuttavia, non è importante in quest'analisi qualitativa. Un panel può essere utilizzato anche alla voce *model*, per ottenere tutte le informazioni alla base del modello. Si può procedere la FEA con il componente *Analyze*.

Bisogna occuparsi anche del visual editing: il componente *ModelView* associato a *ShellView* permette di scegliere le soluzioni da mostrare su Rhino impostando la scala grafica per la visualizzazione delle reazioni o delle deformate, eventuali tag per riconoscere i nodi, i nomi degli elementi o delle famiglie delle sezioni trasversali e, infine, imporre i limiti operativi, ad esempio i limiti di resistenza a trazione e compressione per la visualizzazione delle tensioni principali, i quali possono essere sfruttati dal componente *TagAsList* per creare una legenda per la colorazione del mesh.

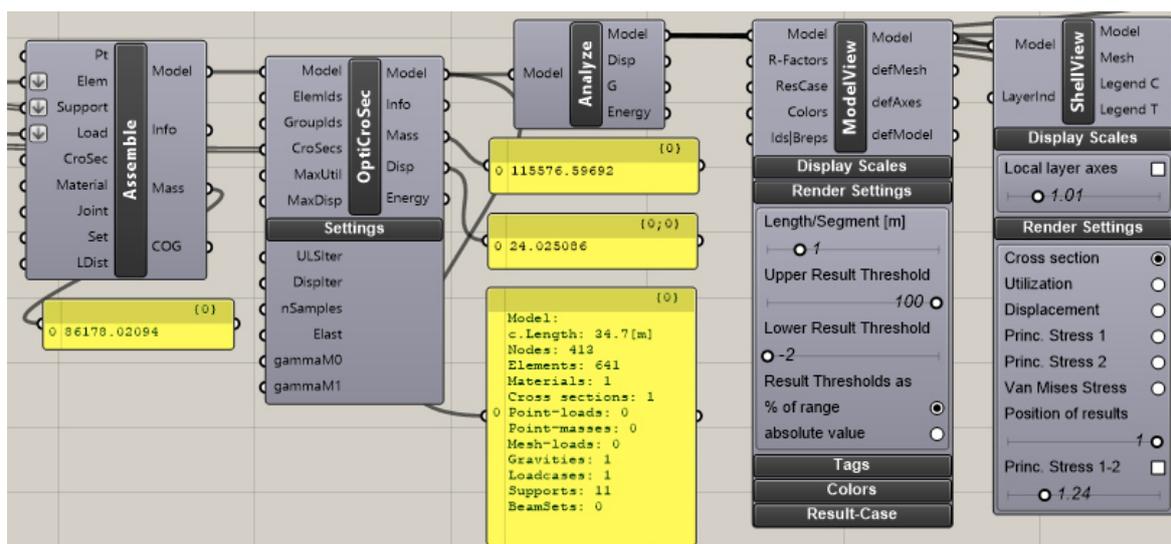


Fig. 5.18 - Scripting della FEA

Nella figura 5.19 è possibile apprezzare l'andamento della sezione trasversale lungo la struttura. Come si poteva immaginare le sezioni più sottili riguardano i gusci lontani dai vincoli a terra, dove le reazioni sono quantitativamente importanti e, dai fori, poiché la discontinuità della superficie provocherà sicuramente una concentrazione delle tensioni soprattutto lungo i bordi del foro destro, leggermente più esteso. Il solutore ha sfruttato tutto il dominio operativo, come mostrato dal *TagasList* le sezioni vanno da un'altezza di 10 a 100 cm, senza oltrepassare quest'ultimo valore limite. Nella struttura si utilizzano, così, gusci sottili e gusci moderatamente spessi, per cui sono valide le ipotesi di Kirchoff per le azioni interne. L'utilizzo del form finding, in teoria, dovrebbe aver permesso di ottenere una struttura la cui sezione reagisce interamente solo a trazione o a compressione (meglio la seconda, trattandosi di calcestruzzo). Quindi, basterebbe valutare, anche dallo stesso *shellview*, l'andamento della  $\sigma_1$  per l'eventuale superamento della tensione di fessurazione e la voce *utilization* per avere in linea di massima l'andamento della resistenza a compressione dei gusci. L'*utilization* è il rapporto fra la forza agente e la tensione di

snervamento ma trattandosi di un materiale fragile, non è applicabile. Se il rapporto risultasse maggiore di 1 implicherebbe l'instabilità e la rottura del guscio.

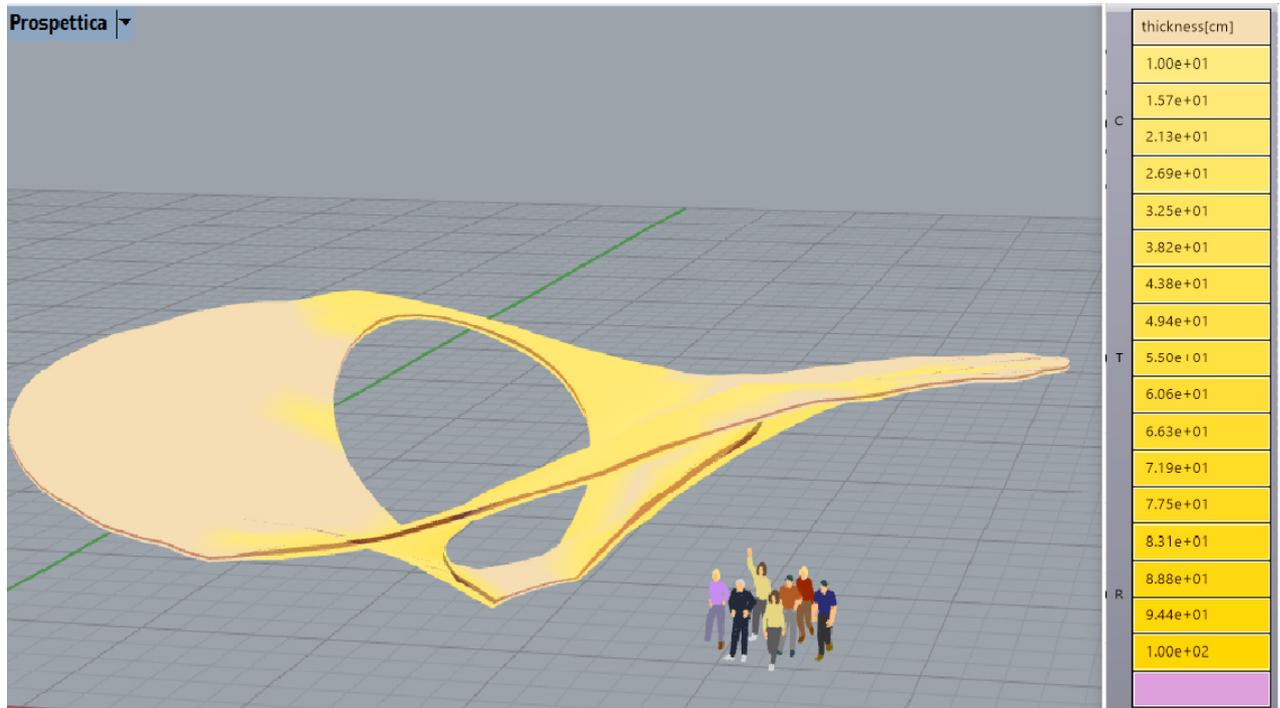


Fig. 5.19 - Andamento dell'altezza della sezione trasversale

Purtroppo, non è questo il caso: nonostante il form finding, la sezione parzializza reagendo anche a flessione, è necessario il sandwich model per valutare ed eventualmente progettare la struttura. L'andamento delle sezioni trasversali ne era già un sentore, ma ancor di più le operazioni stesse di form finding. Ricordando il paragrafo 5.2, si era stabilito l'utilizzo di ancoraggi fittizi lungo i bordi dell'ellisse esterno per contrastare qualsiasi operazione del solutore che non fosse lungo l'asse z. Questi vincoli, sebbene non vengano propriamente utilizzati dal solutore FEM, restano parte del codice rappresentando delle condizioni a riguardo delle reazioni interne che il mesh geometrico prima e ora strutturale deve comunque aspettarsi nelle zone indicate. E' necessario un processo di scripting aggiuntivo per valutare l'andamento delle tensioni nei due layer più esterni, chiamati in codice 1 e -1. (Un bug, impedisce di utilizzare la voce *layerind* presente nell'input di *Shellview*).

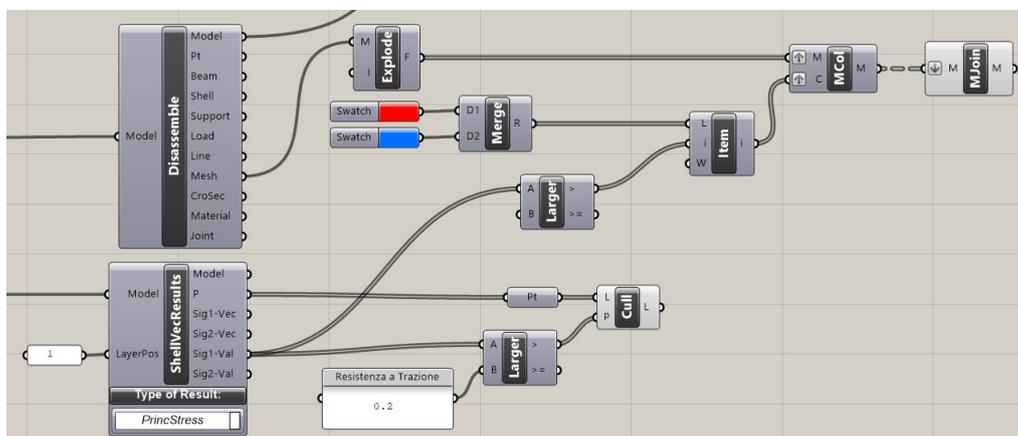


Fig. 5.20 - Scripting per il visual editing del layer superiore

Il componente *ShellVecResults* permette di ottenere le tensioni e le forze principali riferite al load case definito nel Model view. Collegando l'input *model* alla voce di output del componente *Analyze* e indicando di quale layer ci si voglia occupare, si parta pure dal superiore ossia 1, si ottiene la lista dei dati desiderati. Selezionate le tensioni principali è possibile visualizzare da panel o su Rhino sia le componenti vettoriali sia il modulo di  $\sigma_1$  e di  $\sigma_2$ . Per mostrarle a video sono necessarie le seguenti operazioni. Innanzitutto bisogna recuperare il mesh e per farlo si utilizza il componente *Disassemble* che fra gli output restituisce appunto questa voce che va collegata al componente *explode* per concentrarsi sulla colorazione delle facce triangolari. *Mesh Colours* permette di associare un colore o una lista di colori alle facce, per crearli si usa il componente *swatch*, che definisce il colore a partire dal suo vettore raster. Si è deciso, rosso (255,0,0) per la facce in compressione e blu elettrico (0,111,255) per le facce in trazione. Uniti attraverso il componente *Merge* sono stati inseriti nella lista assieme a tutte le  $\sigma_1$  maggiori di zero. Infine, *MeshJoin* permette di riunire le facce fra di loro per mostrarle a video.

Ma non solo, è possibile visualizzare anche tutti i punti che risultano superiori alla tensione massima di trazione. Attraverso *Larger Than*, data in input la lista delle  $\sigma_1$  e il valore della massima tensione di trazione del calcestruzzo in  $KN/cm^2$  (dalla formula riportata nel paragrafo precedente la  $f_{ctm}$  per il calcestruzzo C30/37 è pari a 2MPa, quindi  $0.2 KN/cm^2$ ) è possibile visualizzarli attraverso il *cull pattern*.

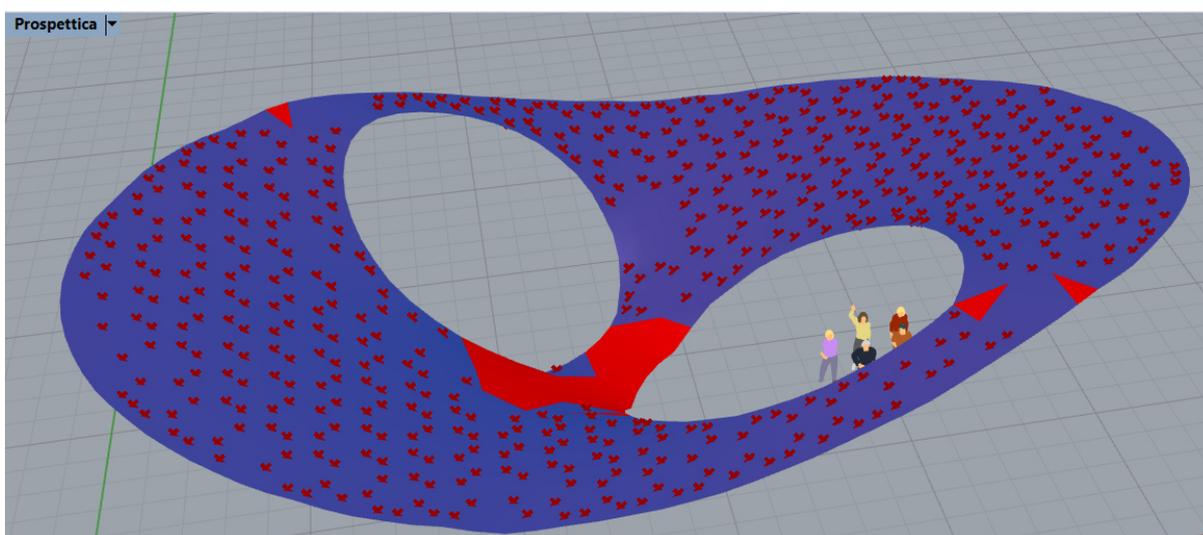


Fig. 5.21 - Andamento della  $\sigma_1$  nel layer superiore: rosso di compressione, blu di trazione

Come si poteva già immaginare, la  $\sigma_1$  nella maggioranza dei casi è positiva e risulta ben superiore all'inniqua massima resistenza a trazione del calcestruzzo. E' necessario disporre l'armatura e i livelli  $A_{sx}$  e  $A_{sy}$  devono seguire le direzioni delle  $\sigma$  principali.

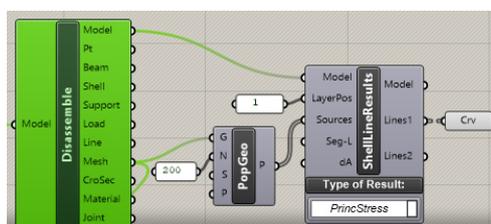


Fig. 5.22 - Script per il visual editing dell'andamento delle  $\sigma$

E' possibile visualizzare anche quest'ultime utilizzando il componente *ShellLineResults*: esso riceve in input il modello disassemblato precedentemente, il numero del layer di cui si desidera visualizzare le tensioni, qui ancora il primo e, in *sources* una lista di punti o di linee interni o che intersechino il guscio per individuare il flusso delle tensioni (e non solo, il componente permette di visualizzare anche il flusso

delle forze e dei momenti oppure le isolinee). Il componente *PopulateGeometry* è, quindi, una possibilità, ricevendo in input la geometria (il mesh del modello disassemblato) esso determina un numero random di punti all'interno. A questo punto, collegando in output *curve* a *Lines1* o *Lines2* si può visualizzare l'andamento delle  $\sigma$ .

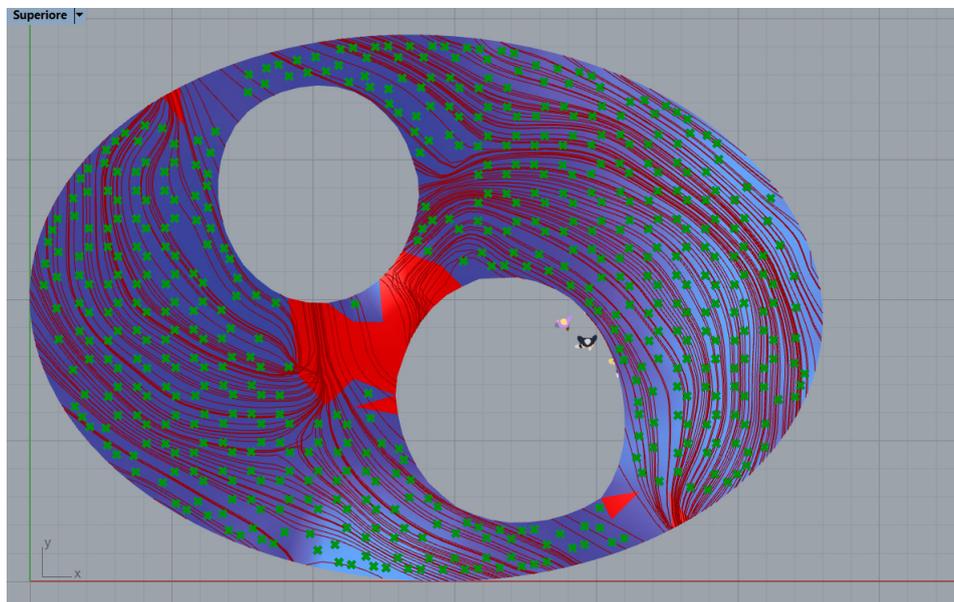


Fig. 5.23 - Vista superiore delle direzioni della  $\sigma_1$

Nella figura 5.23 è possibile apprezzare l'andamento delle  $\sigma_1$ , in rosso. Essendo parte di uno stato tensionale piano, trascurabile o nullo sulle  $z$ , esse seguono la forma della superficie, parallelamente ai vincoli sia reali che fittizi, come si può ancora una volta osservare. Ortogonalmente ci si attende l'andamento delle  $\sigma_2$  che attraverseranno la superficie interna, collegando i vincoli da una parte all'altra della superficie. Conoscere le giaciture principali permette di sapere l'angolo di orientazione delle  $\sigma_1$  rispetto all'asse delle  $x$  e, quindi, delle  $\sigma_2$ , di determinare la  $\tau_{max}$  e, infine, di utilizzare i criteri di resistenza.

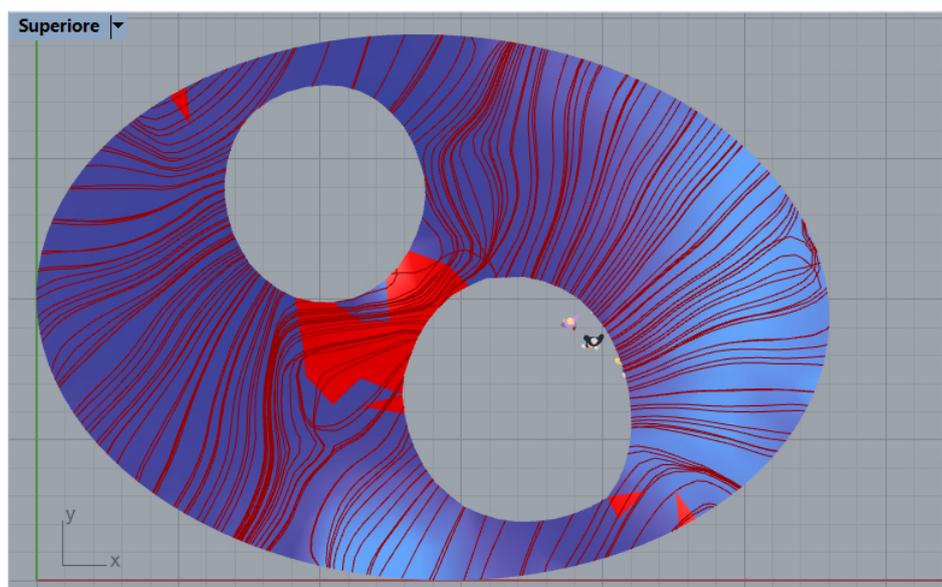


Fig. 5.24 - Vista superiore delle direzioni della  $\sigma_2$

Nella figura 5.24 è possibile apprezzare non solo l'andamento delle  $\sigma_2$ , ma anche l'ovvia inesistenza di

valori delle  $\sigma_1$  che risultino inferiori alla resistenza a compressione del calcestruzzo  $f_{cd}$ , che dalle formule del paragrafo precedente per un calcestruzzo C30/37 è pari a 17 MPa, quindi, per l'algoritmo  $-1.7 \text{ kN/cm}^2$ . Per valutare realmente la resistenza a compressione del primo layer e, quindi, la stabilità della volta, bisogna valutare il modulo la  $\sigma_2$  lungo la struttura.

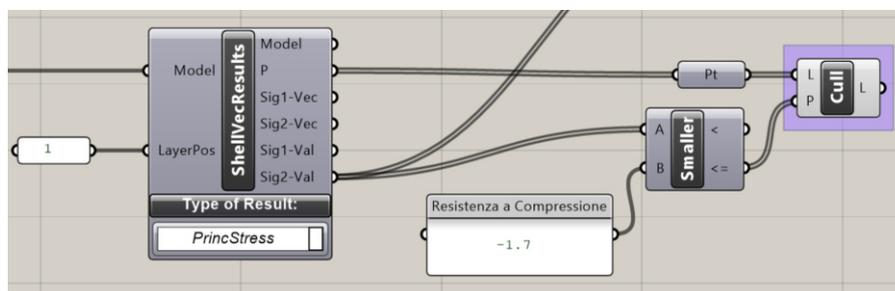


Fig. 5.25 - Script per il visual editing dell'andamento delle  $\sigma_2$

Si può già fare una previsione sfruttando i cerchi di Mohr: poichè la struttura reagisce molto più a trazione, che a compressione, ci si aspetta valori molto negativi e, quindi, probabilmente inferiori alla resistenza soltanto nelle porzioni di mesh dove la  $\sigma_1$  è già negativa.

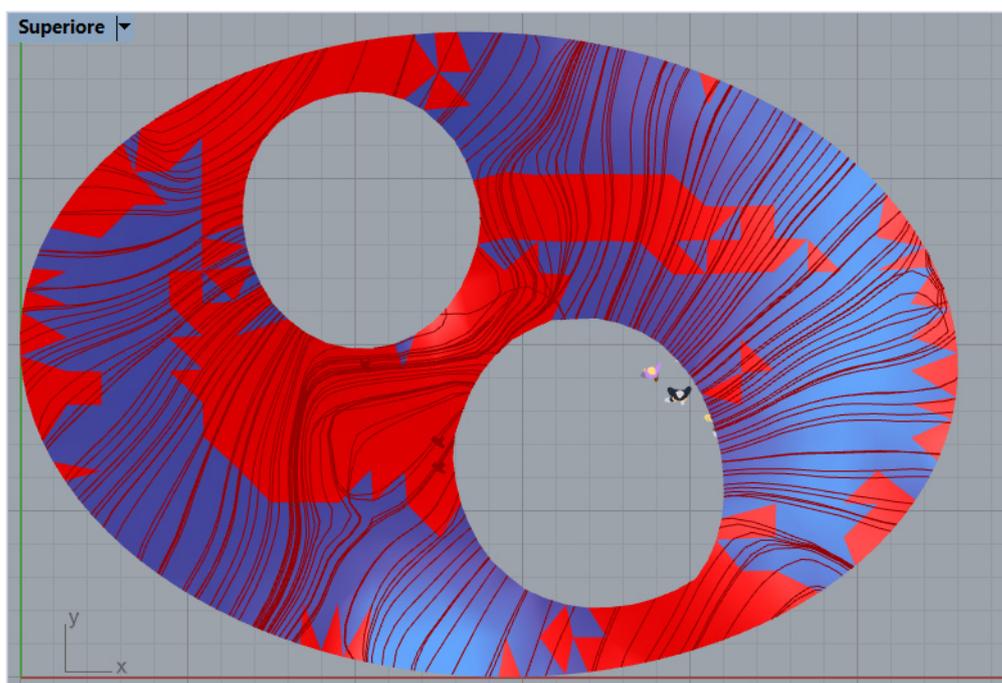


Fig. 5.26 - Andamento della  $\sigma_2$  nel layer superiore: rosso di compressione, blu di trazione

Come si può osservare nella figura 5.26 la  $\sigma_2$  resta ancora per buona parte positiva, quindi, in trazione e le direzioni sono ovviamente invariate. Inoltre, come previsto i punti in cui le tensioni risultano inferiori al valore di  $f_{cd}$  sono soltanto tre, nelle porzioni di mesh precedentemente negative. La struttura non è considerabile stabile. Ci si potrebbe domandare: ma se l'ottimizzatore non ha funzionato, ci si ritrova in un caso di *try and error* e la logica di quanto fatto finora è paragonabile a quella di un qualsiasi software agli elementi finiti. Non è così. La struttura in questa fase qualitativa, data la non necessità progettuale, risulta in puro calcestruzzo, priva totalmente di armatura (solitamente nei classici software agli elementi finiti si tiene conto preliminarmente dell'armatura mediante il valore del modulo di Young). Quindi, se si ponesse sin da subito la scelta di disporre l'armatura, l'ottimizzatore garantirebbe la soluzione più conveniente e che garantisca ovviamente la stabilità. Ecco la prova tangibile del diagramma di flusso della

figura 4.16.

Analogamente a tutte le operazioni attuate per il layer superiore, 1, esse sono facilmente replicabili per il layer inferiore, -1. Ancora una volta si dimostra come l'algoritmo permetta di costruire un codice replicabile, privo di errori accidentali per operazioni simili e/o differenti geometrie.

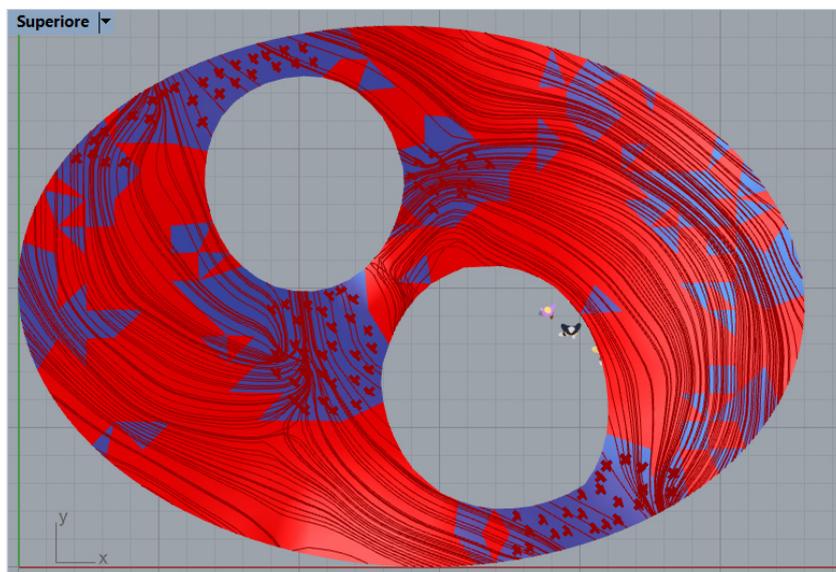


Fig. 5.27 - Andamento della  $\sigma_1$  nel layer inferiore: rosso di compressione, blu di trazione

La figura 5.27 mette in evidenza il valore della  $\sigma_1$  lungo il layer inferiore. Come ci si poteva aspettare, esso sarà molto più a compressione del layer superiore: dal momento che si comporta come una trave per il sandwich model, il layer inferiore nelle zone lontane dagli appoggi ospiterà la compressione della sezione, mentre il layer superiore ospiterà la trazione. Non a caso, la figura 5.27 e la figura 5.25 risultano l'una l'inversa dell'altra, come volevasi dimostrare. Ancora, in figura è possibile individuare i punti in cui le tensioni superano il valore della resistenza alla trazione del calcestruzzo e mostrano nuovamente le direzioni principali della  $\sigma_1$ , che è invariato in quanto è invariato lo stato tensionale di ogni elemento analizzato dal calcolatore.

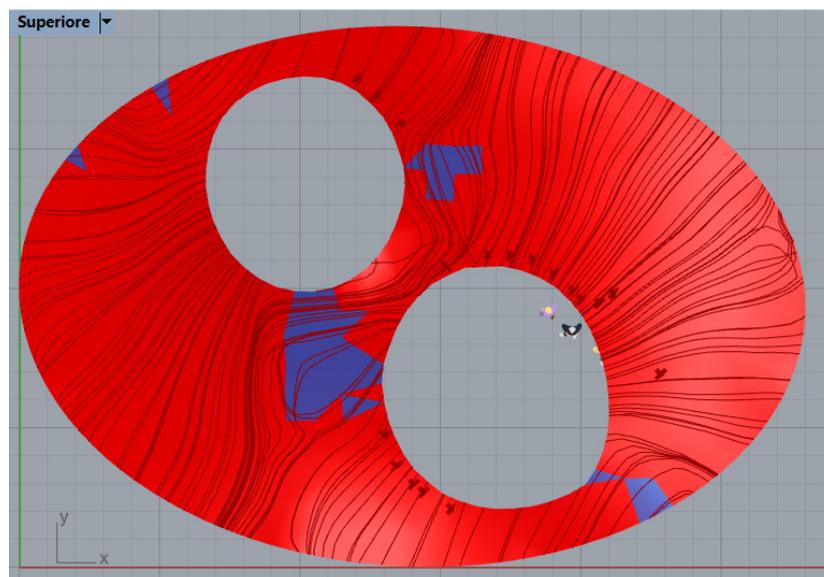


Fig. 5.27 - Andamento della  $\sigma_2$  nel layer inferiore: rosso di compressione, blu di trazione

Infine, la figura 5.28 permette di apprezzare l'andamento della  $\sigma_2$  lungo la struttura. Come si era previsto, essa reagisce quasi del tutto a compressione, fungendo da perfetto inverso della figura 5.23. In generale, è davvero fondamentale porre qui le valutazioni sulla resistenza a compressione per stabilire la staticità della struttura. I punti segnalati sono quelli per cui la  $\sigma_2$  è inferiore a  $f_{cd}$ , numericamente molto pochi considerando le dimensioni della struttura e il fatto che sia solamente in calcestruzzo. Come si era precedentemente previsto, le tensioni si concentrano lungo i bordi dei fori, vista la discontinuità della superficie e del materiale, in particolar modo lungo i bordi del foro destro che, si ripete, è leggermente più esteso. Le direzioni delle  $\sigma_2$  anche qui non variano.

### 5.3.3 Sommario

Calcestruzzo	E [MPa]	G [MPa]	fcd [Mpa]	fctm [MPa]
C30/37	33000	13750	-17	2

Tab. 5.1 - Sommario delle caratteristiche del calcestruzzo per l'analisi del continuo

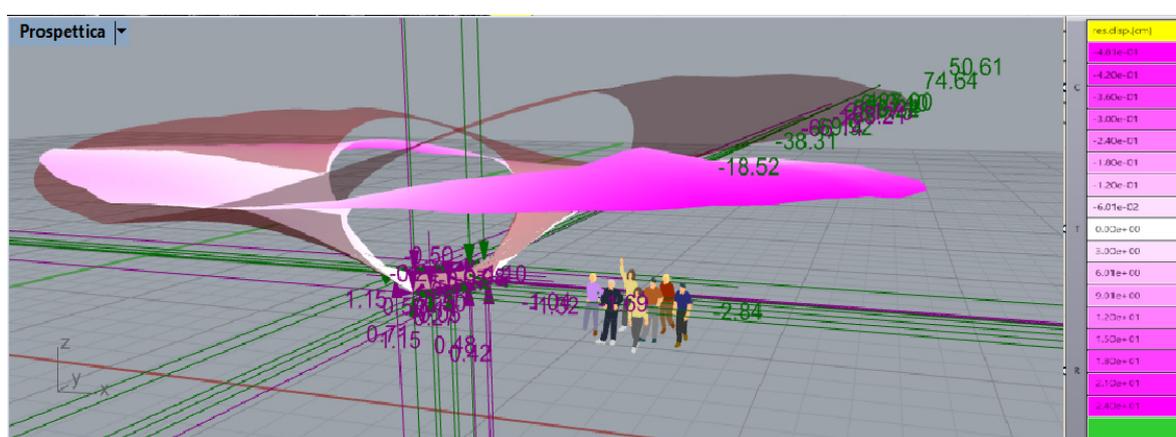


Fig. 5.28 - Andamento dell'abbassamento nella struttura e reazioni agli appoggi

Concludendo non solo quest'analisi del continuo, ma questa prima parte di progettazione è ben evidente l'efficienza e l'ottimizzazione garantita da questa logica. Attraverso una rigorosa conoscenza dei mezzi tecnologici e della scienza delle costruzioni, si è in grado di effettuare efficacemente un processo di form finding, definendo una struttura, la quale, stabilite delle condizioni al contorno, risulta molto probabilmente la migliore per forma, stabilità, costo ed esteticamente bella.

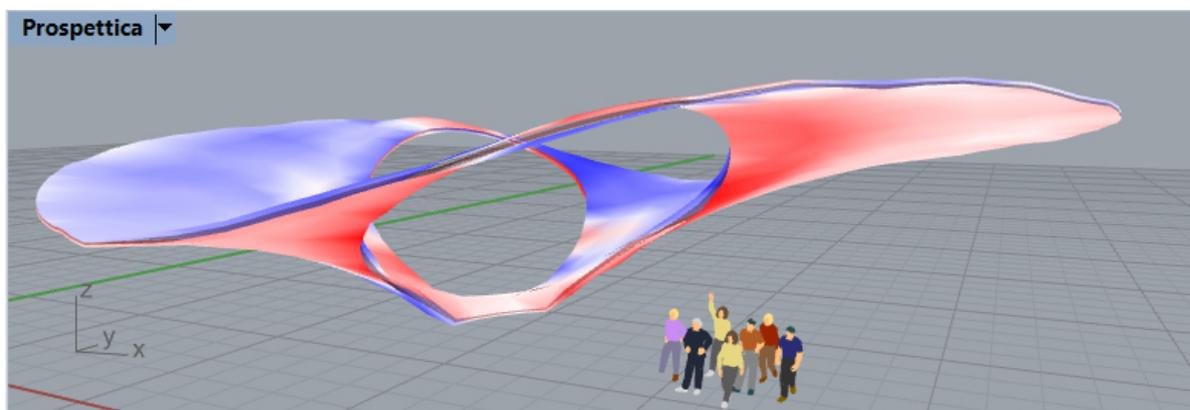


Fig. 5.29 - Andamento delle forze interne nella struttura

## 5.4 Aggregazione dei poliedri

Prima di passare alla costruzione delle differenti tipologie di strutture, è necessario soffermarsi su una parte dell'algoritmo comune, che riguarda le regole, in parte note dal capitolo 3, per cui il poliedro dovrà aggregarsi lungo il modello geometrico finora costruito e non stocasticamente nello spazio. In termini tecnici, è necessario costruire un *campo guida*, ossia un reticolo in una porzione di spazio per cui noti gli indici di Miller di un poliedro è possibile posizionarlo in un punto specifico del campo. Quindi, nota la superficie della struttura, essa funge da condizione al contorno del campo, i bordi risultano i limiti spaziali del reticolo e il software determina iterando continuamente una serie di valori massimi e minimi a seconda della possibile distanza del poliedro dai punti della superficie. Determinato il punto massimo posiziona il poliedro e conoscendone le sue specifiche regole di aggregazione, itera valutando il secondo valore massimo dove poter connettergli il successivo poliedro e così via, fino a quando non si esaurisce il numero desiderato di poliedri, o fino a quando il campo non risulta definitivamente riempito.

Per definire i limiti del campo si utilizza il componente *Bounding Box*, che inscrive la superficie (l'output del solver di Kangaroo 2, descritto nel paragrafo 5.2) all'interno di un cubo. Per garantire maggiore tolleranza operativa al software soltanto in direzione z è necessario scalare in maniera non uniforme il box. Per farlo si utilizza *Scale NU* che riceve in input il box, il centro del box rintracciabile mediante il componente *Volume* e il valore di scala da applicare in direzione z, modificabile con uno slider e qui posto pari a 2. A questo punto si può costruire il reticolo, attraverso il componente *Wasp Field Points*, infatti, in input chiede i limiti del reticolo, ossia il cubo scalato non uniformemente e la *Resolution* che altro non è che la distanza delle linee del reticolo (di default pari a 11, ma nel caso seguente è stato posto pari a 1.5, per un totale di 2520 punti).

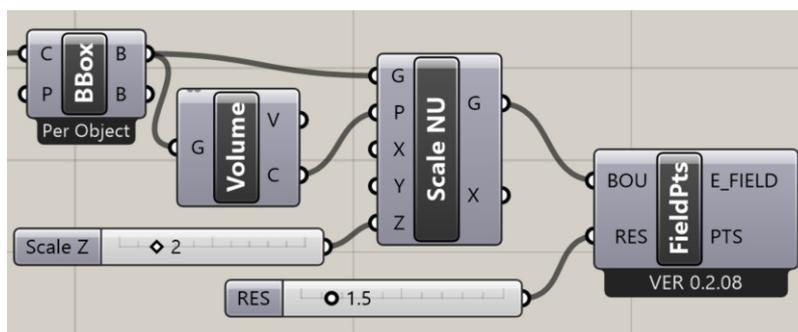


Fig. 5.30 - Script dell'intero reticolo

E' necessario separare i punti del reticolo che sono al di sopra e al di sotto della superficie della struttura. Innanzitutto si utilizza il componente *Pull Point*, che riceve in input il mesh della superficie come geometria e l'output *points* del componente per la costruzione del campo, per determinare i punti del reticolo sulla superficie. Poi, decostruendo sia quest'ultimi sia i punti del reticolo, si confrontano le rispettive componenti z e, collegando l'output di *smaller than* a *Dispatch* è possibile separare da tutta la lista dei punti del reticolo, i punti superiori (1179) e inferiori (1341) alla superficie.

L'obiettivo è far comprendere al software i valori massimi e minimi delle distanze per le varie iterazioni, cercando di avere come condizione base che i poliedri *crescano* al di sopra della superficie. *Pull Point* ha già calcolato anche le distanze, quindi, è possibile utilizzare nuovamente un *Dispatch* utilizzando la lista delle 2520 distanze e ancora l'output di *smaller than*. Collegando le 1341 distanze inferiori a *Repeat Data* è possibile imporre che esse valgano tutte 0. Questo per motivi di programmazione: i dati sono sempre parte di un codice informatico e, quindi, il software non analizzerà di volta in volta il valore numerico della distanza, ma gli operatori logici vero e falso, cioè 1 e 0. Lo stesso sarà per i valori massimi e minimi: essi dovranno essere rimodulati in modo tale che risultino dei numeri frazionari compresi fra 1, il massimo, 0 il minimo. Per far ciò si utilizza il componente *ReMap Numbers*: in input prende le 1179 distanze del *Dispatch* per i punti superiori alla superficie, in *sources* i valori massimi e minimi di tale

lista, definiti attraverso il componente *Bounds* e, infine, in  $T$  viene definito l'intervallo finale, da 1 a 0. E' inverso in quanto le operazioni logiche sono state fatte in relazione ai punti inferiori alla superficie, pertanto, il solutore valuterà la distanza: è inferiore alla superficie? Vero, 1 e il valore deve essere 0. Qualora falso, 0, il valore potrà andare da un massimo di 1 ad un minimo di 0. Le distanze maneggiate sono così l'output che viene collegato al componente *Graph Mapper*, che permette di costruire una funzione che definisca come rimodulare nell'intervallo stabilito i valori di input. Per comodità è stato utilizzato un grafico *Bezier*: la funzione è descritta da un ramo parabolico, che permette di sfruttare omogeneamente tutto l'intervallo.

Tutti i dati possono finalmente essere raccolti nel componente *Weave* che chiede in input la logica esposta poc'anzi per le voci 0 e 1 e, in  $P$  l'output nuovamente di *smaller than*. E' finalmente definibile il campo: *Wasp Field* riceve in input il reticolo, i valori output di *Weave* e un nome identificativo, *Padiglione*.

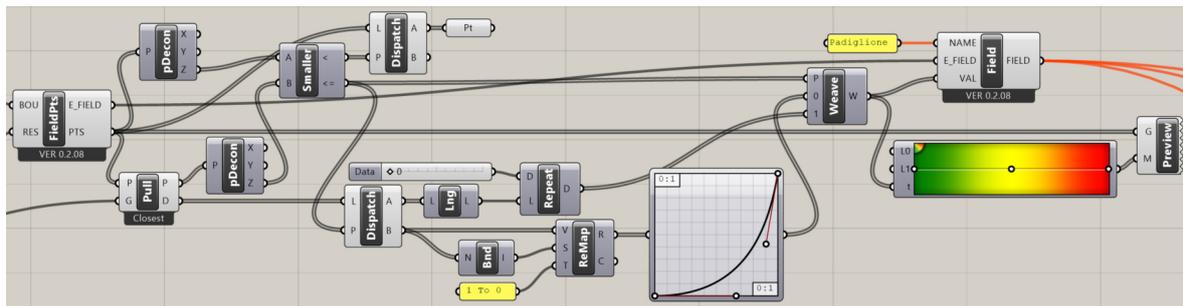


Fig. 5.31 - Script del campo guida

E' possibile avere un riscontro su Rhino: collegando i valori di output di *Weave* con i parametri input di *Gradient* e quest'ultimi a loro volta con *Custom Preview*, è possibile apprezzare con diverse colorazioni i punti del reticolo in base alla distanza dalla superficie. In figura 5.32 è possibile apprezzare quanto detto: in verde i punti di valore 0 o circa pari a 0, in giallo e rosso i valori dei punti man mano più vicini alla superficie.

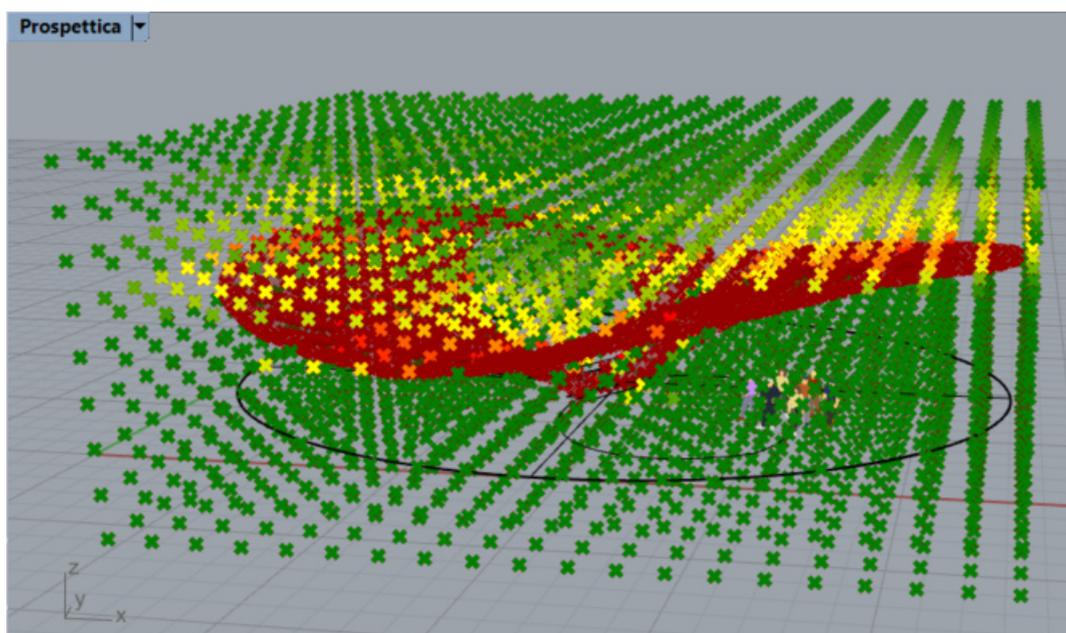


Fig. 5.32 - Visual Editing del campo

Si è pronti per le differenti tipologie di aggregazione. In particolare ci si soffermerà su tre strutture:

una prodotta dal cubo, un'altra dall'endecaedro bisimmetrico e, infine, dall'ottaedro troncato. Tutti e tre questi poliedri, ricordando il capitolo 3, sono space filler. Per far sì che le analisi strutturali abbiano un senso, ossia che le tre differenti strutture siano in qualche modo paragonabili, si è deciso di garantire un'estensione simile: il cubo è unitario, l'endecaedro possiede buona parte dei lati circa pari all'unità e l'ottaedro troncato è stato costruito collegando i punti medi degli spigoli di un cubo unitario in grado di inscrivere.

### 5.4.1 Cubo

Il primo poliedro, il più semplice per produzione grafica e logica è sicuramente il cubo. Sebbene Wasp, con i suoi checks interni sia strutturato e scritto per geometrie complesse, è sicuramente idoneo all'obiettivo proposto. I primi step riprendono i concetti già espressi nel paragrafo 4.3: disegnato il solido direttamente su Rhino, esso è stato assegnato al componente *geometry*. Le aggregazioni avverranno per direzione, quindi è necessario definire il centro di ogni faccia che diventerà comune e la direzione di aggregazione, espressa da delle curve partenti proprio da tali centri. Ricordando che l'ordine di assegnazione dei centri e delle direzioni è fondamentale e deve essere identico per le due differenti tipologie di componenti, si è deciso di separare l'assegnazione di quelle delle facce laterali da quelle delle facce superiore e inferiore. In questo modo, definiti due componenti *Wasp Connection From Direction* i rispettivi dati di output sono stati raccolti successivamente attraverso il componente *Merge*. La struttura finale sarà un grafo, quindi, è necessario prevedere il modo in cui dovranno essere assegnati i dati degli spigoli per far sì che possano diventare successivamente elementi monodimensionali FEM. Wasp viene incontrato attraverso la definizione degli *attributi*, cioè caratteristiche geometriche che il modulo possiede e che dovrà continuare a possedere man mano che *cresce* lungo il campo. Pertanto, attraverso il componente *Brep Edges* si è esplosa il solido in una serie di linee e gli spigoli esterni, rappresentati dal dato output *Ei*, *Interior as List*, è diventato l'input di *Wasp Attribute*. Si è così definita una *Wasp Basic Part*: definito un nome, connessa la lista delle connessioni, stabilita la geometria e i suoi attributi, si possiede il modulo e si è pronti all'aggregazione.

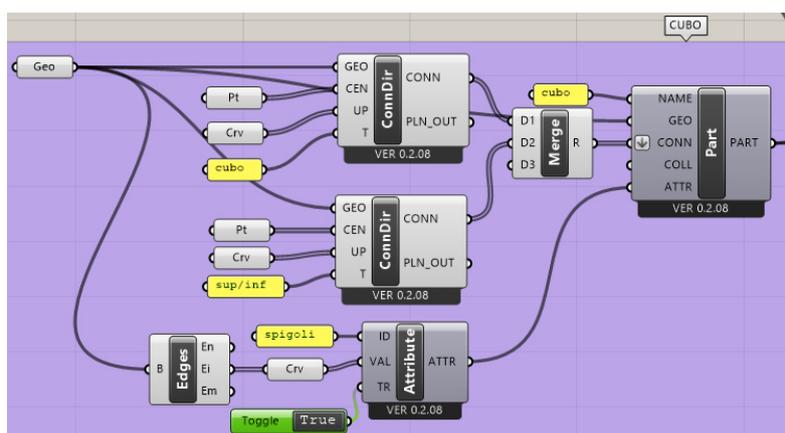


Fig. 5.33 - Scripting della creazione di una Wasp Basic Part

A questo punto, avendo definito anche il campo, che esclude così l'aggregazione stocastica, si definisce il componente *Wasp Field Driven Aggregation*. Esso richiede come dato di input:

- i. la wasp basic part già definita;
- ii. il numero di poliedri da aggregare (la comodità di avere un software parametrico e basato sul visual editing, permette di costruire dinamicamente la struttura, variando a tentativo il numero desiderato di poliedri);
- iii. le regole di aggregazione (essendo un solido regolare, per non dire perfetto, è sufficiente usare un

generatore random di regole, dato che le facce del cubo sono sempre le stesse);

iv. infine, un *button* per resettare o ricominciare l'aggregazione, qualora fosse necessario.

Nella progettazione sono state utilizzate una serie di soluzioni intermedie fino a giungere al numero finale di 4000 poliedri. E' possibile visualizzare anche la distanza fra i cubi e il mesh di partenza. Si collega il dato output *Part Out* al componente *Wasp Get Part Geometry* che definisce la lista dei cubi aggregati. Da tale lista di volumi mesh è possibile ricercare i centri, attraverso il componente *Volume* che riceve in input la geometria e restituisce in output la lista appunti dei centri. Quest'ultima viene utilizzata da *Mesh Closest Point* che, associata al mesh del padiglione, ricerca i punti più vicini a quest'ultimo. Collegati i punti così ottenuti e i centri dei vari volumi al componente *Distance*, si ottiene la lista delle rispettive distanze. Il visual editing di tale lista è simile ai casi già mostrati precedentemente: il componente *Bounds* permette di ottenere il valore minimo e massimo di distanza in un unico dato output, che collegato a *Deconstruct Domain*, lo restituisce in due dati differenti ad utilizzare nel *gradient* alle voci L0 e L1, mentre i parametri t rappresenteranno la lista di tutte le distanze. Con *Costum Preview* collegando l'output del *gradient* e il *Wasp Get Part Geometry* si ottiene la colorazione dei cubi in funzione della distanza: in verde i più vicini al mesh, in giallo i transitori fino ad arrivare al rosso che risultano i più lontani.

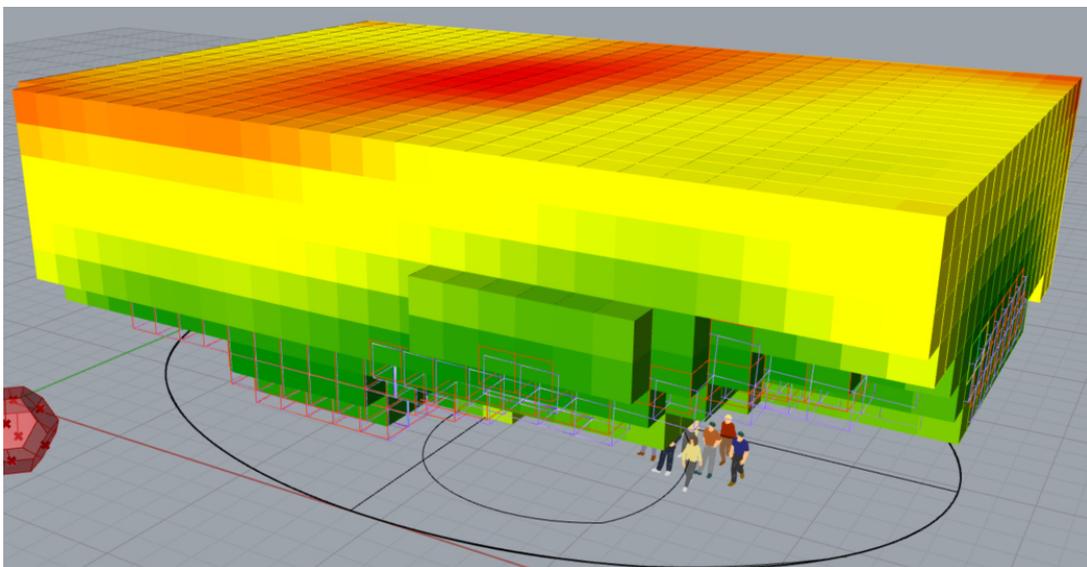


Fig. 5.34 - Visual Editing della struttura con la colorazione in funzione della distanza

Tuttavia, l'interesse è esclusivamente rivolto agli spigoli, essendo la struttura un grafo. Ecco l'utilità di avere degli attributi: il componente *Wasp Get Attribute by Name* permette di ottenere la lista degli attributi, direttamente dai dati output del componente di aggregazione indicando l'ID che era stato precedentemente assegnato nella definizione dell'attributo, nel caso seguente era stata utilizzata la voce *spigoli*. Per eliminare non i cubi, ma gli attributi dei cubi distanti oltre un certo valore limite dal mesh del padiglione, si utilizza ancora il *cull pattern* associato a *smaller than*. Però, la lista degli attributi in questo momento contiene anche molti dati ripetitivi, 48000 spigoli per esattezza. Per *depurarla* si può utilizzare il componente *Param Viewer*: ricevendo la lista in input, restituisce in output dei dati strutturati, ossia 4000 *branches* (spigoli), 12 per ogni cubo aggregato in una parte dello spazio. L'output è la lista necessaria per il *cull pattern*, che identifica come idonei alla condizione di distanza tutti quelli con il rispettivo centro non oltre il metro di distanza, quindi, solo 677 cubi su 4000 aggregati. Per ottenere un'unica geometria il passaggio finale è utilizzare il componente *Tree Branch*: esso in input riceve il *Data Tree* dei 48000 attributi e il *Data Tree* dell'output del *cull pattern*, in output restituisce una lista unica di dati, che attraverso il *Flatten*, viene riconosciuta come una lista di spigoli, curve di un'unica geometria, la struttura.

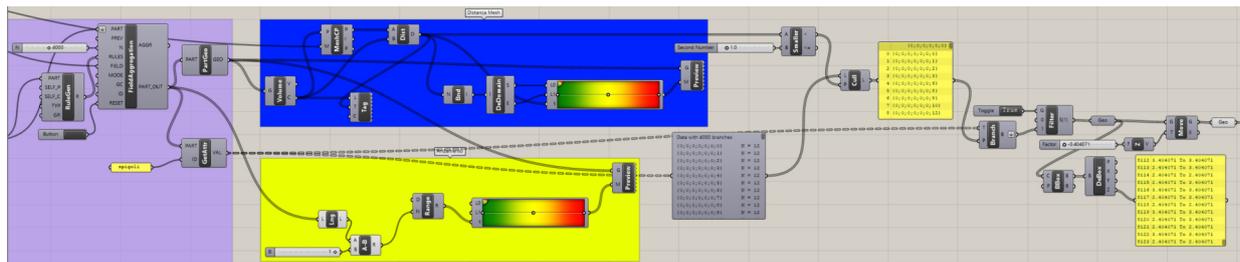


Fig. 5.35 - Scripting della struttura ottenuta da cubi aggregati

E' possibile misurarla: costruendo nuovamente un *Bounding Box* e decostruendolo per ottenere la lista delle coordinate z, si scopre che la struttura è alta 6.4 metri, ma non poggia direttamente al suolo per 40 cm. La soluzione potrebbe essere ricominciare l'aggregazione e impostarne specificatamente un valore di partenza, ma la più semplice è utilizzare *Move* per spostare tutta la geometria ottenuta lungo un asse, z, del valore desiderato: ossia -0.404071. Ora si è ottenuta definitivamente la struttura finale.

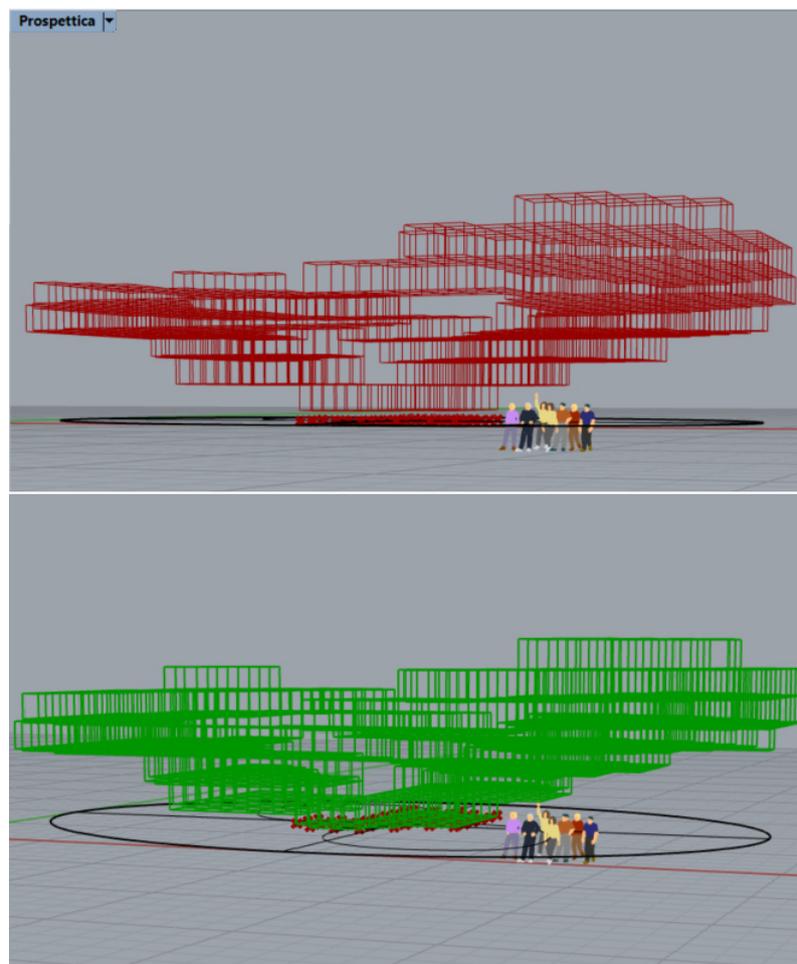


Fig. 5.36 - Visual Editing della Struttura finale, prima e dopo la traslazione lungo l'asse z

### 5.4.2 Ottaedro Troncato

L'algoritmo appena costruito è immediatamente riutilizzabile anche per altre soluzioni geometriche, con le dovute piccole modifiche nelle regole di aggregazione. Il secondo poliedro è, appunto, l'ottaedro troncato: per far sì che le dimensioni siano paragonabili a quelle del cubo precedente, esso è stato disegnato su Rhino proprio a partire da quest'ultimo, com'è possibile osservare nella figura 5.37.

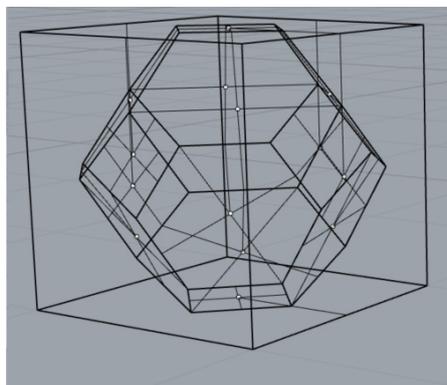


Fig. 5.37 - Visual Editing dell'ottaedro troncato

Quindi, assegnati nello stesso ordine i punti e le curve, si è ottenuta, identicamente al caso precedente, la *Wasp Basic Part* il cui nome è stato indicato con la lettera O. Quest'ultima è fondamentale per la descrizione delle regole, che questa volta non sono più casuali, ma espresse attraverso il componente *Wasp Rule From Text*, il quale riesce a codificare la stringa di testo in un dato di input. In particolare, si desidera che l'aggregazione avvenga unendo le rispettive facce opposte del poliedro: la faccia quadrata col punto di assegnazione numero 0, dovrà aggregarsi con la rispettiva quadrata col punto di assegnazione numero 6 (ossia la sua opposta in basso) e viceversa. Analogamente vale anche per tutte le restanti 6 facce esagonali. La figura 5.38 ripropone lo script utilizzato precedente con le due differenze appena descritte.

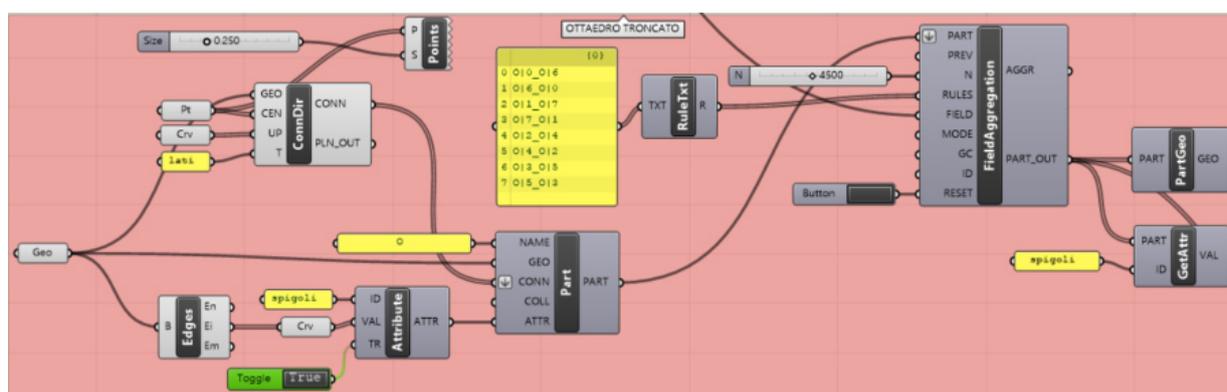


Fig. 5.38 - Scripting dell'aggregazione dell'ottaedro troncato

A questo punto, riutilizzando il componente *Wasp Field Driven Aggregation* è possibile procedere con l'aggregazione dell'ottaedro troncato. Nella progettazione sono state utilizzate una serie di soluzioni intermedie fino a giungere al numero finale di 4500 poliedri che determinano la struttura finale.

Da questo momento in poi, l'algoritmo non prevede alcuna differenza dal precedente, quindi, è possibile ottenere il visual editing dei poliedri in relazione alla loro distanza dal mesh del padiglione e provvedere all'eliminazione degli attributi distanti oltre la soglia limite dal padiglione.

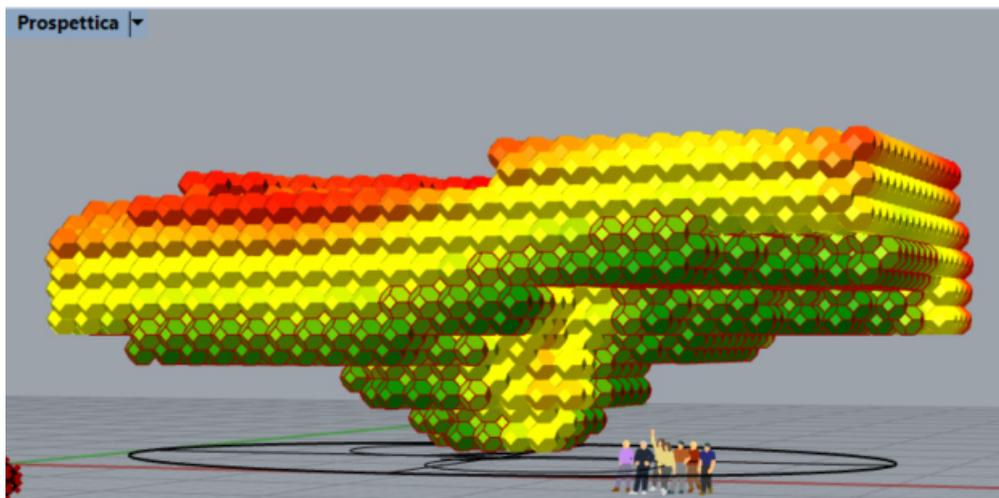


Fig. 5.39 - Visual Editing della struttura con la colorazione in funzione della distanza

E' possibile misurare la nuova struttura nuovamente mediante l'utilizzo del *Bounding Box*, determinarne così l'altezza e se eventualmente necessari di una traslazione. L'altezza della seconda struttura è pari a 8.4 m e risulta sollevata dal suolo di 30 cm. Analogamente al caso precedente, traslando la struttura lungo l'asse z mediante il componente *Move*, si ottiene il modello geometrico definitivo anche della seconda struttura.

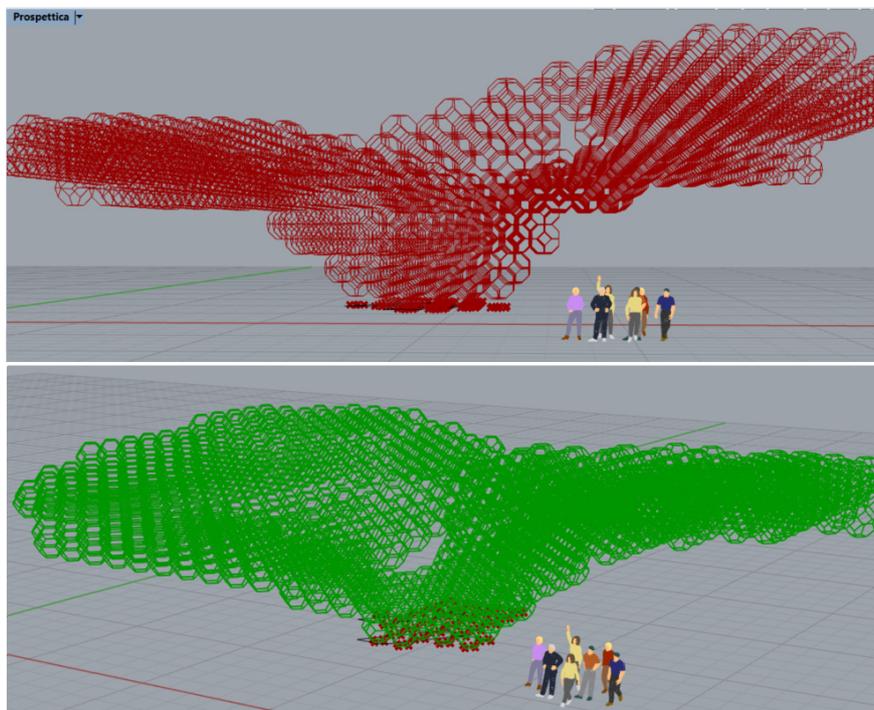


Fig. 5.40 - Visual Editing della Struttura finale, prima e dopo la traslazione lungo l'asse z

### 5.4.3 Endecaedro Bisimmetrico

L'ultimo caso riguarda l'utilizzo dell'endecaedro bisimmetrico, il più difficile sia da riprodurre geometricamente su Rhino, sia da valutare in termini di regole di aggregazione. Dal *The Mathematical Gazette* 80 del Novembre 1996 è stato preso l'articolo "Five Space-Filling Polyhedra" di G. Inchbald per la progettazione dell'endecaedro bisimmetrico su Rhino. In particolare, dall'appendice B, è stata estratta la lista delle coordinate per riprodurre, appunto, la geometria desiderata.

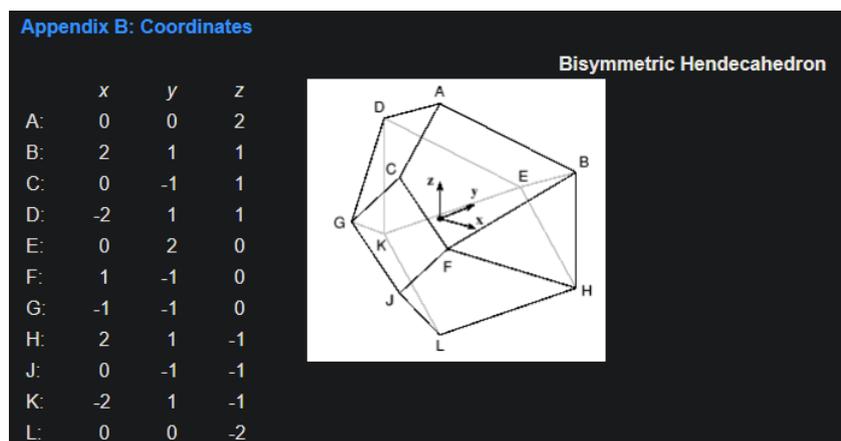


Fig. 5.41 - Lista delle coordinate dell'endecaedro bisimmetrico estratto dall'appendice B, dell'articolo "Five Space-Filling Polyhedra" di G. Inchbald

Per le regole di aggregazione, facendo riferimento a quanto già espresso nel paragrafo 3.7, è necessario per prima cosa riprodurre la *barchetta*, che risulta il reale modulo di aggregazione nello spazio. Per crearla è necessario che dapprima le aggregazioni avvengano sui piani YZ e XZ, collegando rispettivamente le facce triangolari adiacenti, dopo aver ruotato per quattro volte i poliedri di  $90^\circ$  dalla posizione di partenza. Ecco ottenuta la forma desiderata. Le ulteriori aggregazioni su tali piani, avverranno collegando le 4 facce quadrate disponibili della barchetta. Infine, per ottenere le aggregazioni sul piano XY, è necessario collegare le facce romboidali superiori della barchette di sotto, con le facce inferiori delle barchette al di sopra, disposte, così quasi a scacchiera, come mostrato nella figura seguente.

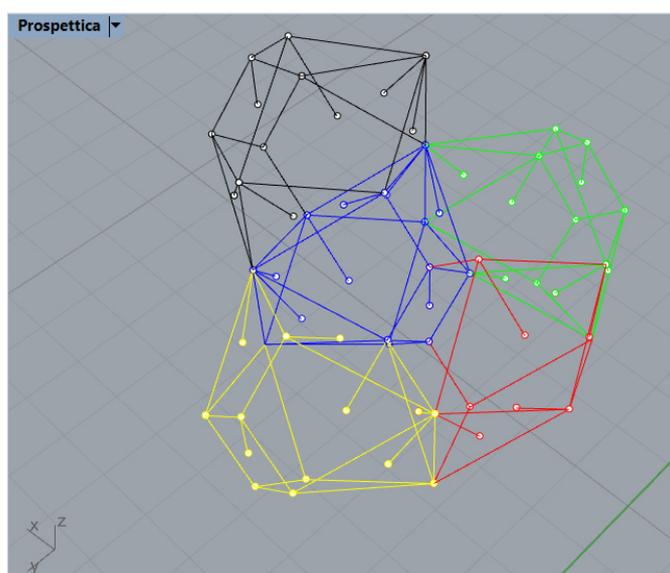


Fig. 5.42 - Disegno della barchetta su Rhino ed esempio di aggregazione su XY

In termini di algoritmo quanto espresso si traduce nella descrizione delle regole sotto forma di testo. Analogamente al caso dell'ottaedro troncato, quest'ultime verranno espresse attraverso il componente *Wasp Rule From Text*: assegnati i centri e le direzioni nella stessa identica maniera e in senso orario, si desidera che la faccia triangolare con centro 1 si colleghi alla faccia con centro 5 del successivo poliedro e viceversa; lo stesso dovrà valere per la faccia triangolare con centro 3 e quella con centro 6 e, viceversa; in questa maniera il calcolatore riuscirà sempre a costruire la *barchetta*. Allo stesso modo varrà per le aggregazioni sulla faccia quadrata con centro 2, che si collegherà alla faccia quadrata con centro 2 del successivo poliedro e le aggregazioni lungo z, dove la faccia romboidale con centro 0 si collegherà alla faccia romboidale con centro 4 e viceversa. Quanto espresso viene riportato nel *Panel* di figura 5.43, dove le facce vengono nominate *E*, in quanto esso è il nome dato alla *Wasp Basic Part*.

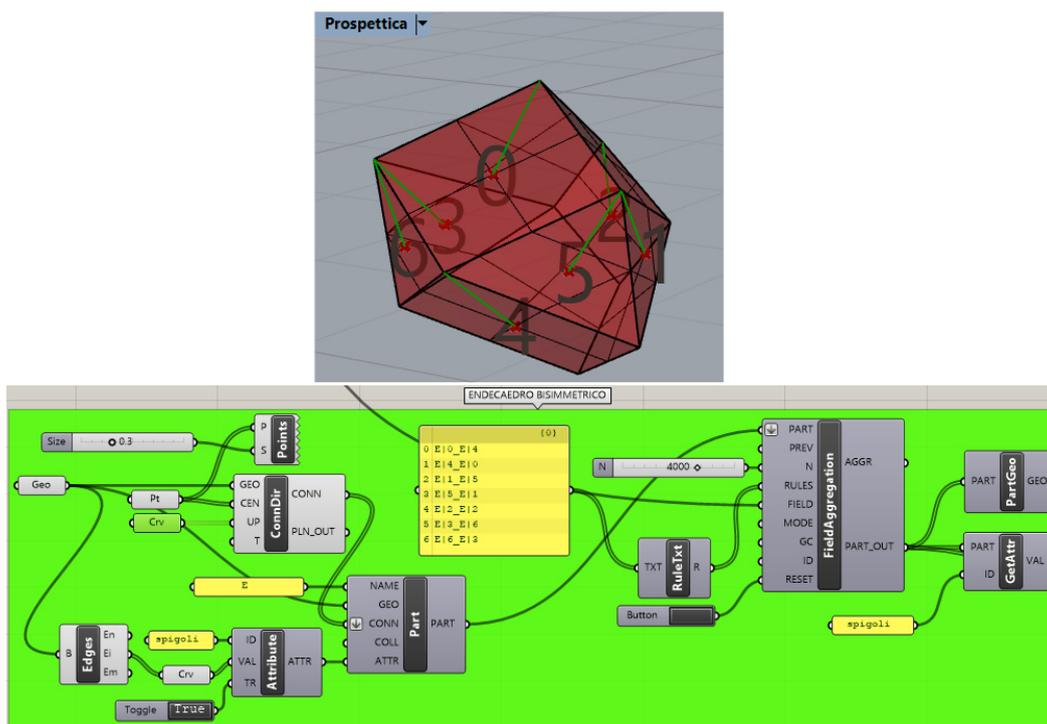


Fig. 5.43 - Visual Editing e Scripting delle aggregazioni dell'endecaedro bisimmetrico

Come mostrato dallo scripting precedente, senza ulteriori variazioni rispetto all'algoritmo precedente, definito un numero di poliedri desiderato, qui 4000, ottenuto dopo una serie di tentativi dinamici, si ottiene l'aggregazione della terza struttura.

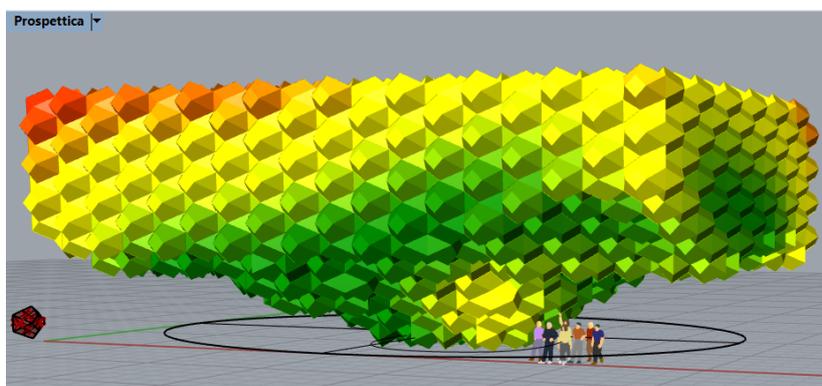


Fig. 5.44 - Visual Editing della struttura con la colorazione in funzione della distanza

Per la terza e ultima volta, è possibile misurare la struttura mediante l'utilizzo del *Bounding Box*. L'altezza è pari a 7.5 m e risulta interrata di 56 cm, quindi, a differenza dei casi precedenti, una volta depurati i poliedri, i cui centri sono distanti oltre un metro dal mesh del padiglione, è necessario traslare la struttura di +0.56m lungo l'asse z. Si ottiene il modello geometrico definitivo anche della terza e ultima struttura.

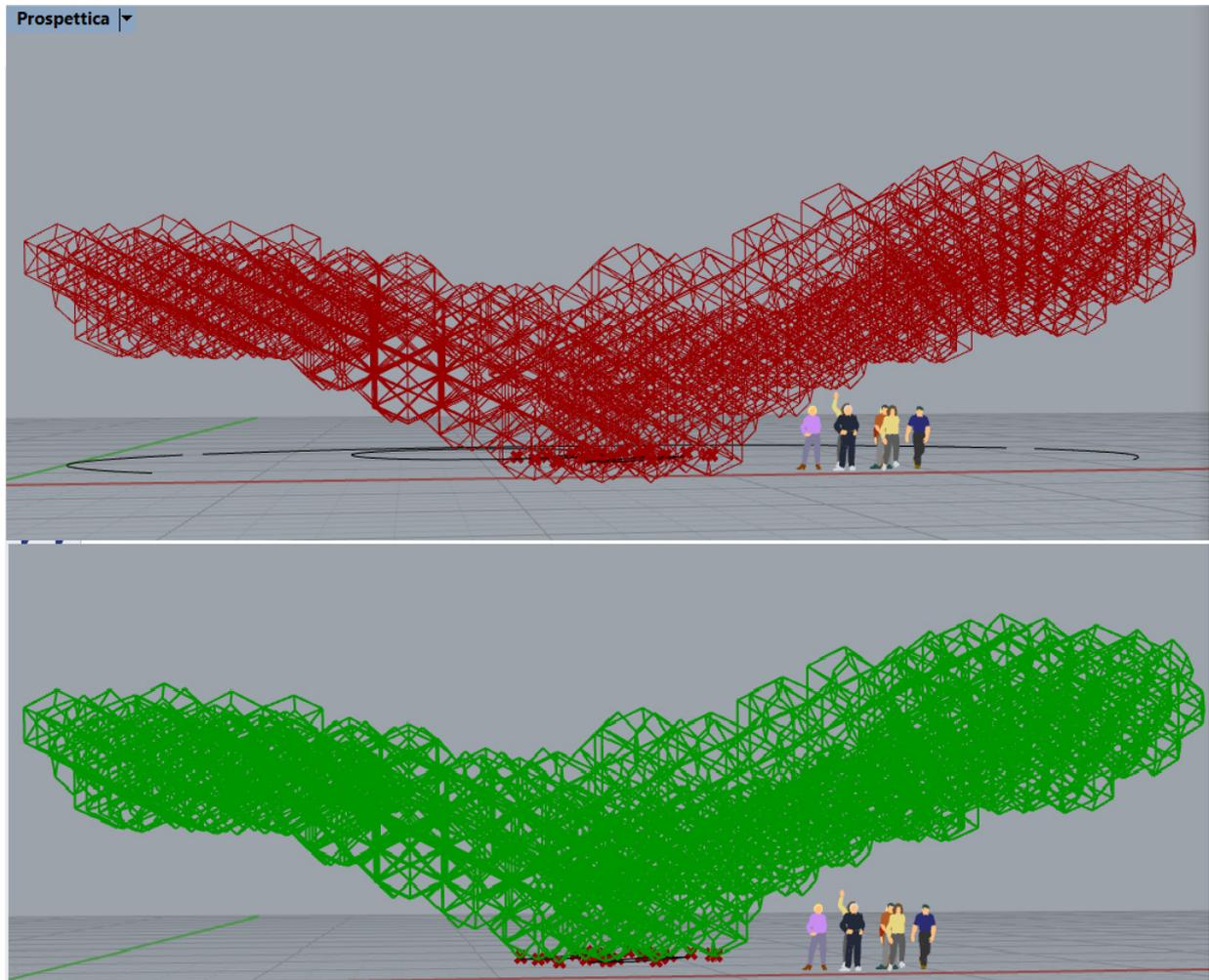


Fig. 5.45 - Visual Editing della Struttura finale, prima e dopo la traslazione lungo l'asse z



zero, per far comprendere al solutore la necessità di valutare la combinazione dei carichi vento più peso proprio); infine, la direzione del vettore (ossia lungo l'asse  $\pm y$ , sia lungo l'asse  $\pm x$ ) e il modulo della forza. I carichi così definiti, vengono collegati a loro volta in un altro componente *Load*, il quale impostato il *Flatten* per la combinazione, completerà gli input del componente *Assemble*. Può partire ufficialmente la FEA con il componente *Analyze*.

### 5.5.1 Modulo dell'azione del Vento

Bisogna ricordare che il manufatto è pensato e progettato come un padiglione fieristico, quindi, il suo posizionamento sarà per lo più in aree interne di edifici o atri comunque racchiusi, quindi, non soggetti a interessanti azioni del vento o della neve. Tuttavia, vista la natura sperimentale dell'analisi e l'obiettivo di mettere in luce le potenzialità del calcolatore, si è pensato di quantificare questo modulo, in teoria minimo, con la peggiore delle azioni orizzontali possibili per la struttura secondo l'Eurocodice I per le sezioni cilindriche circolari. Innanzitutto, Per far ciò è necessario scegliere come categoria di terreno la peggiore, ossia la II. La velocità base del vento è, così, definita nel EN1991-1-4 §4.2(2)P come il prodotto:

$$v_b = c_{dir} \cdot c_{season} \cdot v_{b,0} \quad [5.12]$$

ove  $c_{dir}$  e  $c_{season}$  rappresentano dei coefficienti correttivi in funzione rispettivamente della direzione del vento e del periodo dell'anno, ma generalmente vengono presi pari ad 1;  $v_{b,0}$ , invece, rappresenta il valore fondamentale base del vento, indicato dall'Eurocodice I in funzione dell'area geografica e della categoria di terreno, scelto anche qui un valore mediamente alto, pari a 27 m/s. Così, il valore della velocità base del vento è proprio 27 m/s. Per la EN1991-1-4 §4.5(1) la pressione basica  $q_b$  corrisponde al prodotto fra metà della velocità base e la densità dell'aria, pari a  $1.25 \text{ kg/m}^3$ , quindi, il valore finale è uguale a  $0.456 \text{ KN/m}^2$ . Per quantificare il picco di tale pressione, è necessario utilizzare l'equazione 4.8 dell'EN1991-1-4:

$$q_p(z_e) = (1 + l_v(z_e)) \cdot (1/2) \rho v_m(z_e)^2 \quad [5.13]$$

ove  $l_v(z_e)$  è un coefficiente rappresentativo dell'intensità della turbolenza relativo all'altezza massima della struttura ed essendo  $z_{min}$  pari a 2m, per la EN1991-1-4 Table 4.1 in riferimento alla categoria di terreno scelta, in accordo con l'equazione 4.7 dell'EN1991-1-4 viene calcolato come segue nel caso di  $z_e \geq z_{min}$ :

$$l_v(z_e) = k_l / [c_0(z_e) \cdot \ln(z_e/z_0)] \quad [5.14]$$

con  $k_l$  in accordo con EN1991-1-4 §4.4(1) pari a 1 e l'altezza massima dal terreno, pari almeno 6.5m,  $l_v(z_e)$  è pari a 0.2054.

$v_m(z_e)$  rappresenta la velocità media del vento ed è pari secondo l'equazione 4.3 dell'EN1991-1-4:

$$v_m(z_e) = c_r(z_e) \cdot c_0(z_e) \cdot v_b \quad [5.15]$$

ove  $c_0(z_e)$  è il fattore orografico del terreno, il cui valore è generalmente 1,  $c_r(z_e)$  è la rugosità del terreno, determinata dall'equazione 4.4 dell'EN 1991-1-4 per  $z_e \geq z_{min}$ :

$$c_r(z_e) = k_r \cdot \ln(z_e/z_0) = 0.9248 \quad [5.16]$$

con  $k_r = 0.19 \cdot (z_0/z_{0,II})^{0.07}$  e pari a 0.19. Quindi,  $v_m(z_e)$  è pari a 24.97 m/s e il picco della pressione del vento  $q_p(z_e)$  pari a  $0.95 \text{ kN/m}^2$ . Per stimare, infine, la forza  $F_w$  da applicare ad ogni nodo, in accordo con EN1991-1-4 §5.3 si utilizza la seguente relazione:

$$F_w = c_s \cdot c_d \cdot c_f \cdot q_p(z_e) \cdot A_{ref} \quad [5.17]$$

ove il prodotto  $c_s$  e  $c_d$  rappresenta il fattore strutturale, che tiene conto degli effetti dinamici delle vibrazioni e, considerato generalmente pari a 1;  $c_f$  è il coefficiente della forza per cilindri finiti ed è dato, secondo EN1991-1-4 §7.9.2(1) dalla relazione:

$$c_f = c_{f,0} \cdot \psi_{\lambda} \quad [5.18]$$



La figura 5.47 mostra un primo tentativo di FEA e di ottimizzazione. Come si evince, è stato impostato un valore massimo di utilizzazione pari al 95%, per un numero di 20 iterazioni per 10 punti campione. Il primo riscontro del corretto lavoro del solutore, si ricorda dai paragrafi 4.4 e 5.3, è sulla massa: confrontando la massa output del componente *Assemble* e quella del componente *Optimize Cross Section* si nota che non sono, appunto, uguali. La prima, pari a 3687.91 kg, proviene dalla sezione trasversale tentativo 21.3x2.3 mm del *list item*, valida per tutte le travi della struttura. La seconda è quella proveniente dall'ottimizzazione, pari a 8025.89 kg. Per visualizzare a questo punto l'utilizzazione bisogna o sfruttare il visual editing, quindi, utilizzando i componenti *Model View* prima e *Beam View* dopo, come nel caso dell'analisi del continuo, oppure attraverso il componente *Utilization*, più adatto se si vogliono ottenere i valori numerici di ogni trave da trasferire su software esterni, come Excel. Interrogando l'omonima voce output dell'*Utilization*, attraverso il componente *Bounds* è possibile sapere il minore e il massimo valore della lista delle utilizzazioni delle travi della struttura. Come mostrato dal *panel* collegato, i valori limite sono 0.0049 e 1.22. Quest'ultimo è il dato più importante ricercato: ricordando il paragrafo 5.3, quando l'utilizzazione supera l'unità, essendo il rapporto fra la forza agente e lo snervamento, significa che l'elemento e, quindi, la struttura ha superato il limite elastico, non è garantito lo SLU, non è garantita la stabilità. Questo significa che data l'elevata mole di dati, geometrici e non, utilizzare soltanto 20 iterazioni per 10 punti campione su 1414 nodi totali non è sufficiente. E' qui che si comprende ancor più la potenza del parametricismo: modificando tali *sliders* e impostando ad esempio 30 iterazioni per 20 punti campione, il diagramma di flusso, il modello geometrico e quello strutturale non cambiano, le iterazioni ricominciano immediatamente e al solo costo del tempo macchina per i calcoli, si riottiene una soluzione. E' questa l'efficienza desiderata: ottimizzare sia le fasi di progetto e di calcolo, sfruttando il *conceptual design* di chi ha realizzato l'algoritmo.

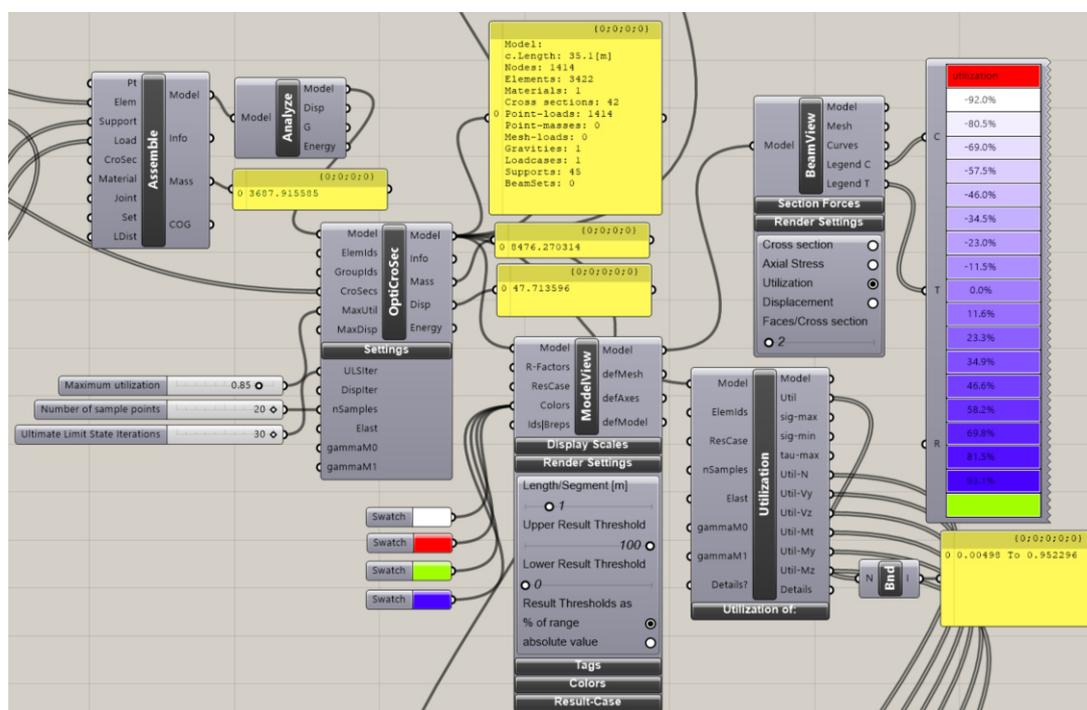


Fig. 5.48 - Scripting finale per la FEA e il Visual Editing delle soluzioni della struttura dovuta all'aggregazione del cubo

La figura 5.48 mostra lo scripting finale e funzionante della struttura: la massa dell'assemble non è cambiata, resta quella di primo tentativo. La massa finale è leggermente aumentata, 8476.27 kg ma si è raggiunta l'utilizzazione del 95%, una progettazione quasi perfetta. L'abbassamento massimo dovuto alla combinazione dei carichi è anch'essa migliorata, 47.7 cm, pari a circa il 7.5% dell'altezza totale, una

richiesta un po' troppo esosa sul lato estetico, considerando che data la presenza di 45 supporti alla base, tali abbassamenti saranno concentrati in cima alla struttura sulle estremità delle "mensole".

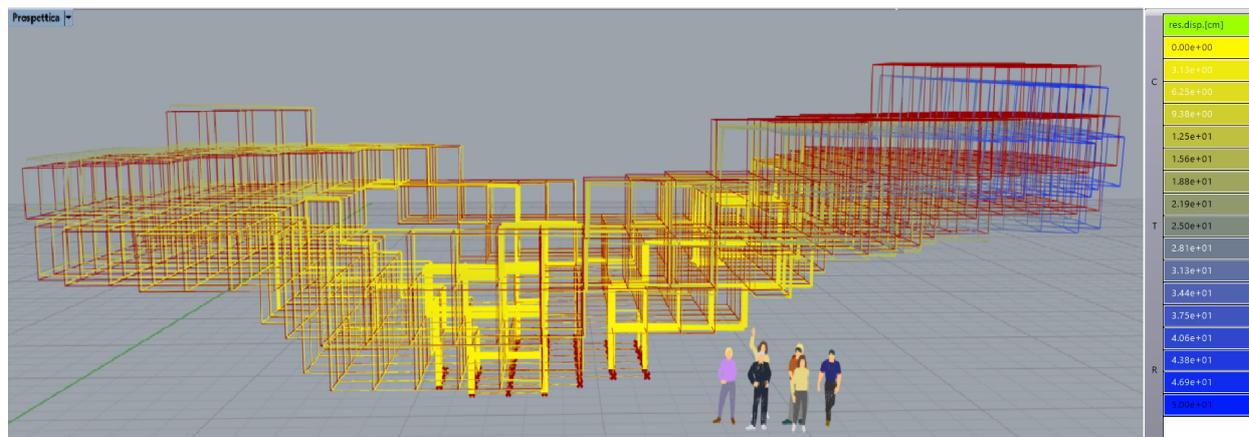


Fig. 5.49 - Visual Editing degli spostamenti della struttura dovuta all'aggregazione del cubo

Infatti, come mostra la figura 5.49 nel caso di combinazione del vento lungo l'asse +x e il peso proprio, l'abbassamento maggiore si ha sul lato destro, dove lo "sbalzo" è maggiore e raggiunge, appunto, il picco di 47.7 cm. Sul lato sinistro, a causa della resistenza dei vincoli alla base a tale deformazione, la struttura subisce un *innalzamento* di circa la metà dello spostamento massimo, ergo 25 cm. L'andamento, tuttavia, era già ben noto: la struttura, come volevasi dimostrare, segue la deformazione già mostrata nella figura 5.28 del caso dell'analisi nel continuo. E non solo: lo spessore delle linee di colorazione non è frutto di una questione di visual editing, indica l'andamento delle sezioni trasversali. La struttura, quindi, presenta nella maggior parte una famiglia di tubi dal diametro piccolo, concentrando i tubi più spessi e grandi alla base, dove le reazioni sono importanti. Analizzando nel dettaglio, sembra che il solutore abbia voluto che i cubi centrali presentassero almeno un tubo dal diametro e spessore elevato per garantire adeguata rigidità alla micro e macrostruttura, mentre un tubo intermedio o di pari dimensioni per collegare tale cubo al suo successivo e garantire una certa continuità nella distribuzione delle forze. E' interessante osservare l'andamento dell'utilizzazione in merito a tali sezioni trasversali, come mostrato nella figura 5.50.

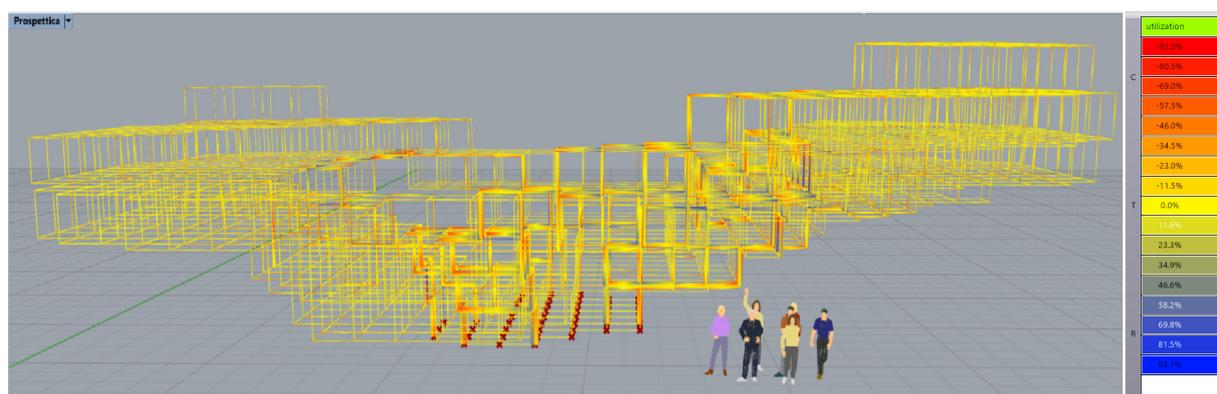


Fig. 5.50 - Visual Editing dell'utilization delle travi lungo la struttura dovuta all'aggregazione del cubo

Come nel caso continuo, la struttura nella maggior parte dei suoi elementi risulta debolmente carica: quantitativamente i carichi applicati non sono eccessivi. In termini di forze orizzontali agenti su ogni nodo è stato applicato il già noto valore di 0.038 kN del paragrafo 5.5.1, il quale moltiplicato per la valenza degli spigoli al nodo, ossia 6, da un totale di 0.228 kN per trave. Lo schema statico, in particolare, è assimilabile a quello di due grandi mensole poggiate su una serie di "colonne": la non simmetria provoca con

i carichi gravitazionali un momento flettente globale, che viene contrastato dalle reazioni dei supporti. Dovendo sopportare più cubi, quindi più materiale, le "colonne" di destra sono soggette maggiormente a compressione, mentre quelle di sinistra a trazione.

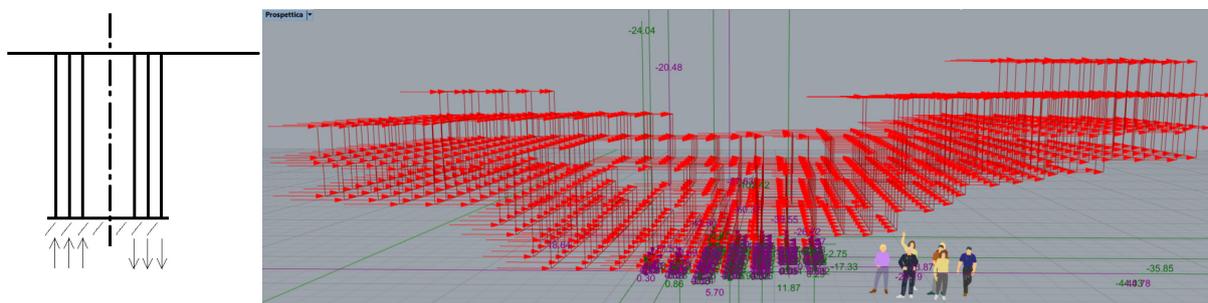


Fig. 5.51 - Visual Editing delle reazioni e delle forze della struttura dovuta all'aggregazione del cubo

Tuttavia, ciò è visibile solo dalle reazioni vincolari e non dall'utilizzazione: il momento di primo e second' ordine locale, infatti, non rendono le sezioni interamente agenti, le parzializzano ed ecco spiegato il motivo della discontinuità dei colori dell'utilizzazione. Se la struttura fosse stato uno schema pendolare, ossia caratterizzata da cerniere interne e non incastri interni, si rispetterebbe quasi del tutto l'andamento delle tensioni del caso continuo, con uno stato di compressione per le travi reticolari alla base e uno stato di trazione per le travi superiori. Ma non è così, anche in queste ultime le sezioni parzializzano, ad eccezione di alcuni elementi poco dopo le colonne di destra, dove l'azione della forza orizzontale considerata provoca stati di trazione interamente reagenti. La discontinuità dei grafi dovuta ai fori provoca lungo i bordi una concentrazione delle tensioni, come nel caso continuo e come si può osservare meglio nella figura 5.52.

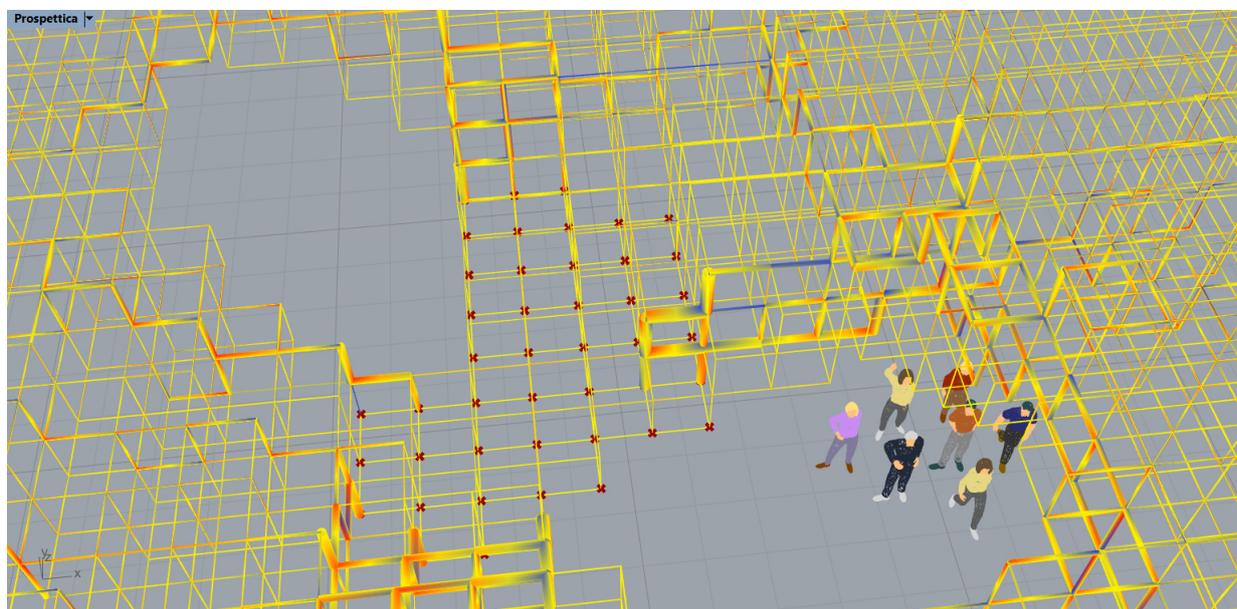


Fig. 5.52 - Visual Editing dell'utilization degli spigoli dei fori della struttura dovuta all'aggregazione del cubo

E' possibile andare oltre il visual editing, il componente *Utilization* permette di ottenere in output l'intera lista dei dati di utilizzazione nel dettaglio per ogni elemento. Non solo, è possibile utilizzare e visualizzare anche la lista dei dati di incidenza delle caratteristiche della sollecitazione su tale valore, che altro non è che  $\sigma_{max}$  rapportato alla tensione di snervamento. Non c'è bisogno di calcolare da sè tale valore,

come sarebbe accaduto per qualsiasi software FEM, in output è disponibile anche la lista dati  $\sigma_{max}$  e la  $\sigma_{min}$  calcolate, appunto, dall'equazione di Navier:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \pm \frac{M_z}{I_z}$$

e utilizzate dal solutore per le varie iterazioni di progettazione. E' interessante maneggiare i dati, sia per confermare l'andamento mostrato dal visual editing sia per essere certi che tali numeri siano effettivamente dei risultati.

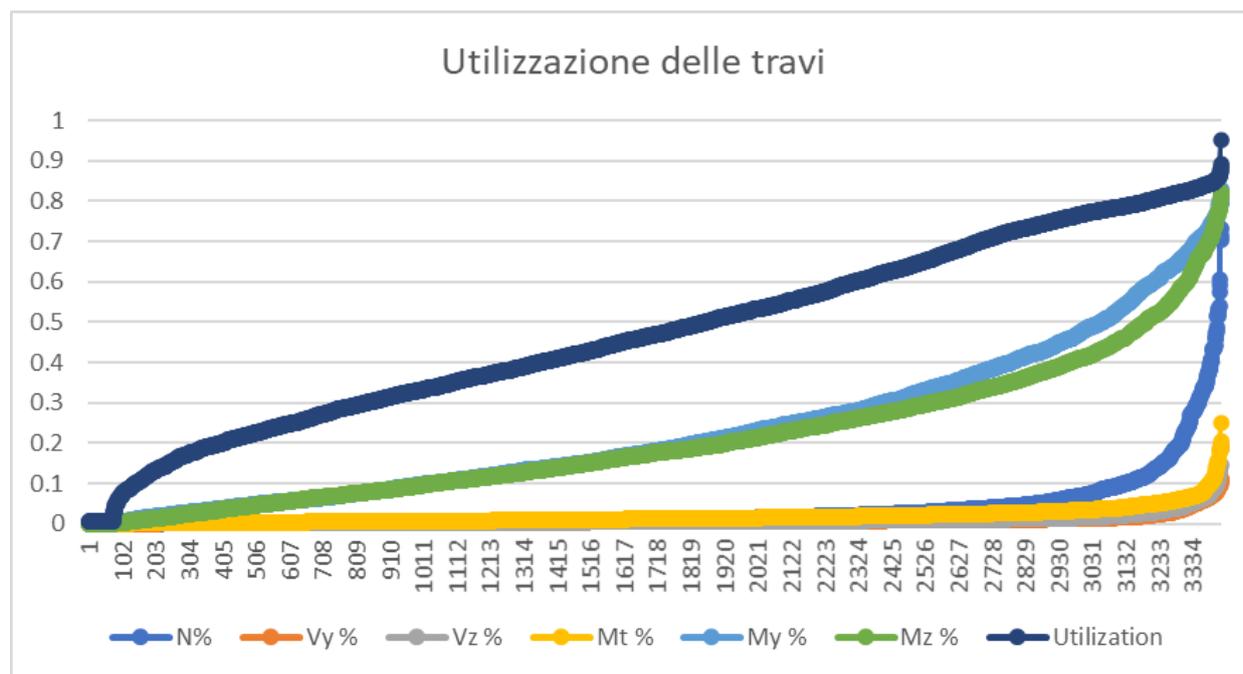


Fig. 5.53 - Grafico dell'andamento dell'utilizzazione e incidenza delle caratteristiche della sollecitazione

La figura 5.53 mostra l'andamento dell'utilizzazione in ordine crescente. Per evitare di mal interpretare il grafico bisogna puntualizzare l'obiettivo: non è importante cercare di comprendere una certa tendenza dell'utilizzazione, quanto piuttosto constatare effettivamente quanti elementi oltrepassano una certa soglia di utilizzazione, quindi, quanti elementi risultano reagenti e carichi. Analogamente vale per le incidenze delle caratteristiche della sollecitazione: esse non vanno interpretate come la specifica percentuale utilizzata nell'equazione di Navier per ottenere quel valore di tensione e, quindi, quel valore di utilizzazione, ma nell'ottica del capire quanti elementi sono soggetti maggiormente a momento flettente o allo sforzo assiale. Questo dato è interessante anche nell'ottica di prevedere e intuire quanto possa essere importante la valutazione dei casi di instabilità locale. Il grafico conferma quanto scritto poc'anzi: quasi la metà degli elementi non raggiunge il 50% della propria resistenza, risultando di conseguenza poco reagente, in quanto poco carico. Un centinaio addirittura sono completamente scarichi. Nel dettaglio, lo si osserva anche dalle incidenze: sono poco più di 500 gli elementi soggetti prevalentemente a momento flettente ( $M_y, M_z$ ) e ancor meno a sforzo normale. L'andamento del primo conferma la parzializzazione delle sezioni reagenti; il picco del secondo, invece, pari al 0.79, fa comprendere che non è banale la possibilità di buckling in questa struttura (si vedrà, che il solutore ne ha ben tenuto conto all'interno delle varie iterazioni). Quanto detto si evince anche dalla figura 5.54 che mostra l'andamento della  $\sigma_{max}$ , parametro che costituisce l'utilizzazione. Sebbene possa risultare lapalissiana la congruenza dei due grafici, è importante in questa fase di studio escludere del tutto eventuali incomprensioni. Oltre un centinaio di elementi trave risultano effettivamente scarichi, il picco pari a 263 MPa, è inferiore al valore limite di 275 MPa, per circa, appunto, il 95%.

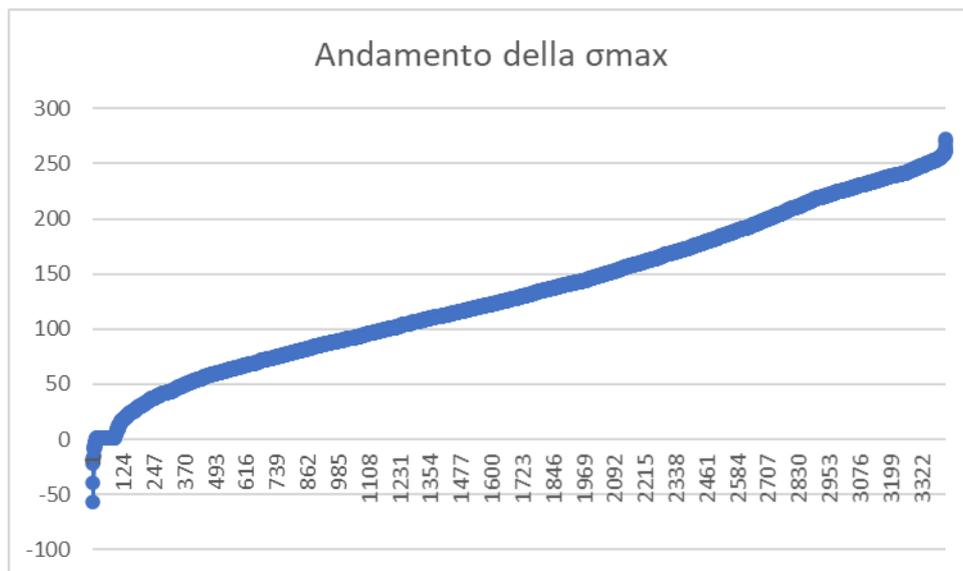


Fig. 5.54 - Grafico dell'andamento della  $\sigma_{max}$

Lo stesso processo di analisi dei risultati può essere fatto per le caratteristiche della sollecitazione. Il componente di Karamba 3D *Beam Forces* permette di ottenere la lista complete delle 6844 azioni agenti. Si ricorda, che esse sono il doppio del numero delle travi, in quanto sono riferite ai due nodi. I dati sono visibili attraverso dei *panel* o comunque estrapolandoli.

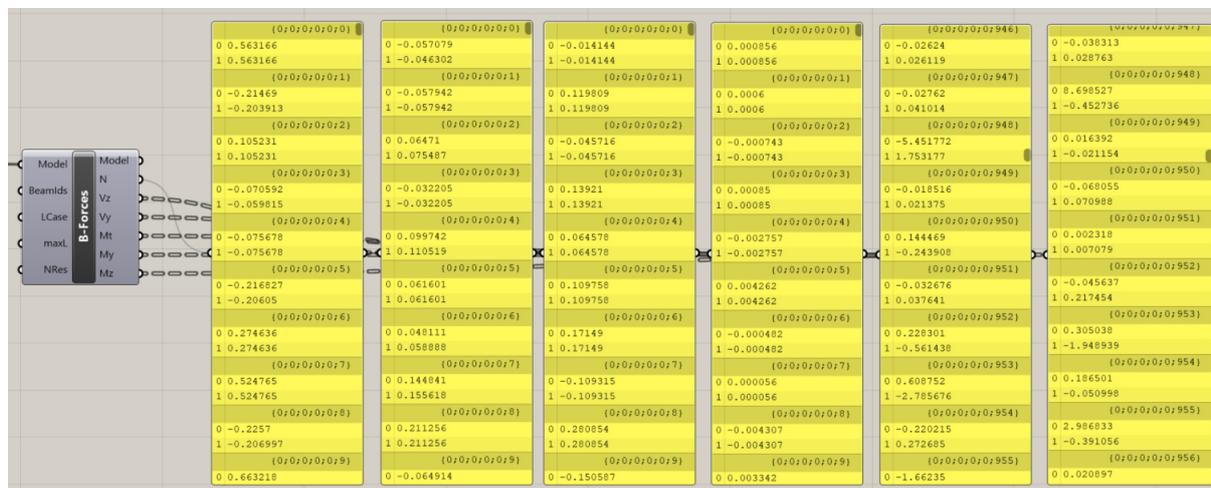


Fig. 5.55 - Scripting per ottenere le liste delle caratteristiche della sollecitazione

In seguito, vengono proposti i sei grafici riguardo tutte le caratteristiche della sollecitazione agenti sulle 3422 travi. La modalità di interpretazione è analoga ai grafici precedenti: non è importante rintracciare un preciso andamento delle azioni, ma comprendere quanti elementi sono soggetti alle specifiche.

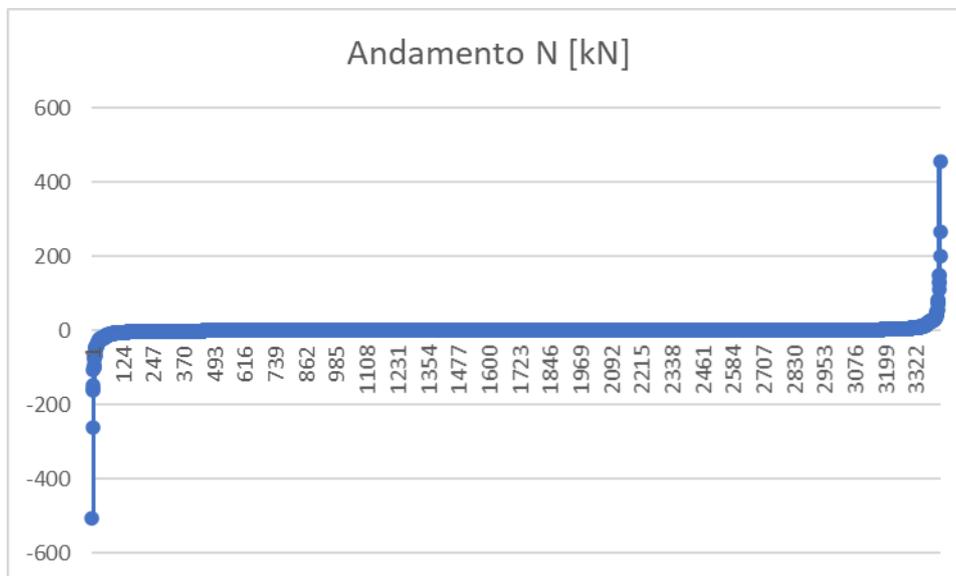


Fig. 5.56 - Grafico dell'andamento della forza Assiale

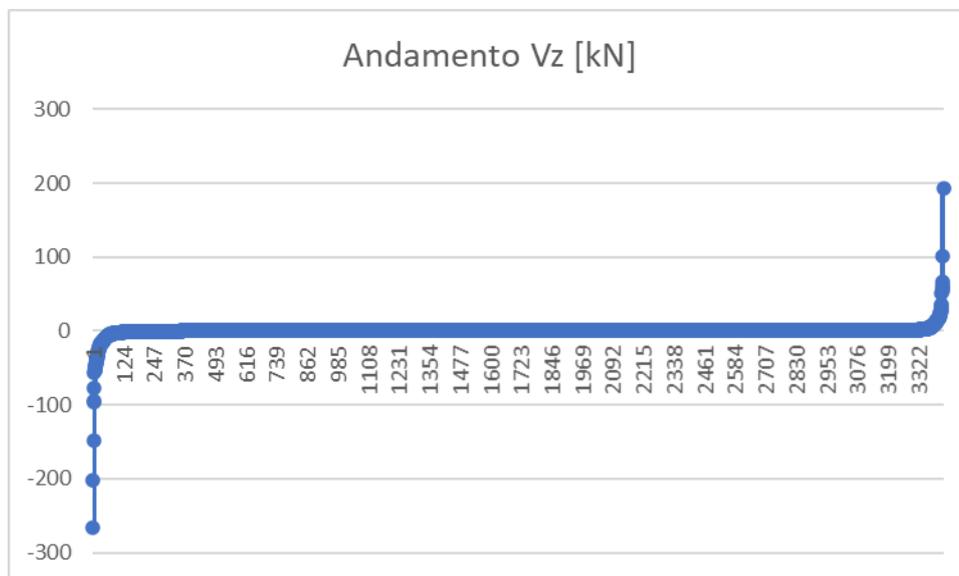


Fig. 5.58 - Grafico dell'andamento della forza di taglio Vy

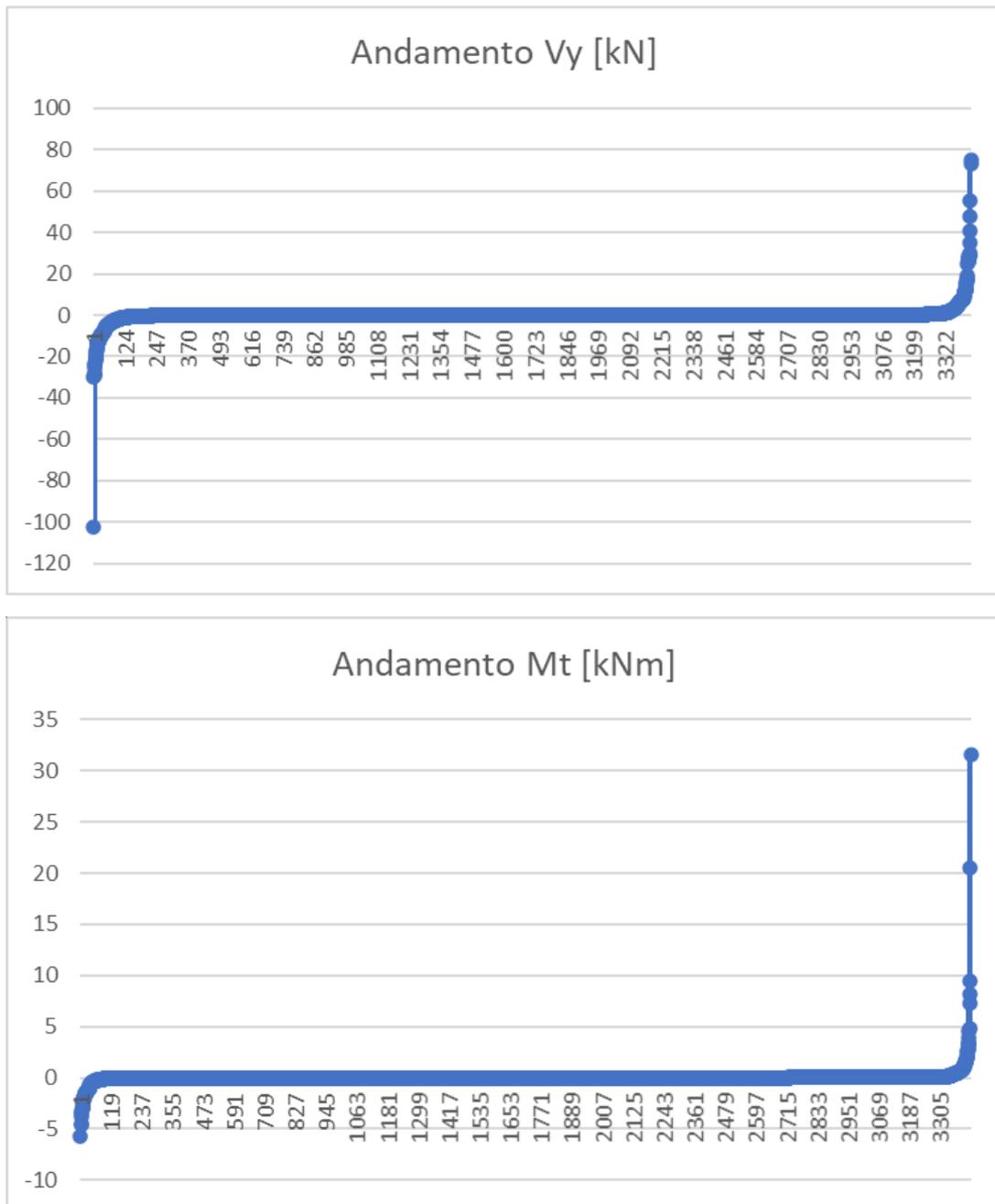


Fig. 5.59 - Grafico dell'andamento della forza di taglio Vy e del momento torcente

..

..

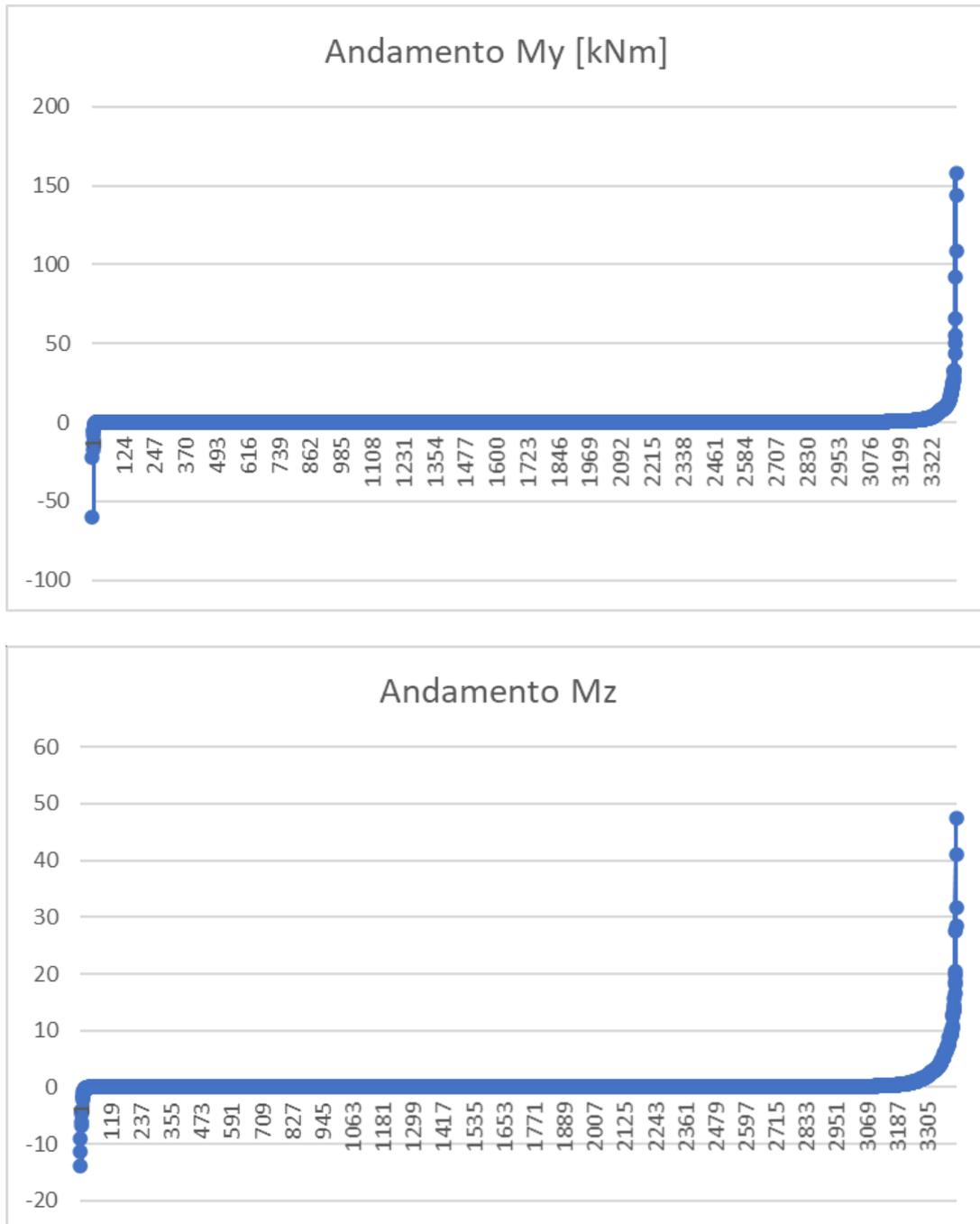


Fig. 5.60 - Grafico dell'andamento del momento My e del momento Mz

Le dimensioni degli elementi escludono in generale la possibilità di buckling globale. Tuttavia, questo non è da confondere con la possibilità di instabilità a carico di punta locale. Attraverso Grasshopper è possibile controllare le indicazioni del solutore a riguardo, appunto, degli effetti del second'ordine locale. Per prima cosa è necessario disassemblare il modello, collegando l'output di *analyze* con l'omonimo componente. Dopo di che, bisogna collegare la voce *Beam* con *Disassemble Element*: ricercando le componenti output riguardanti gli effetti del second'ordine, si trova la voce *Buckling*. Essa restituisce all'utente una lista di veri o falsi: la prima condizione significa che l'ottimizzatore di sezioni trasversali ne ha tenuto conto scegliendo queste ultime e rispettando il valore limite; la seconda invece può implicare a sua volta due conseguenze. La prima è che l'ottimizzazione non è riuscita a garantire la stabilità locale, per motivi geometrici o di iterazione; al contrario l'altra è che sia stata volutamente ignorata come condizione di progettazione. Può essere utile per simulare gli elementi snelli che si vogliono pretendere nella realtà, ma è una condizione molto particolare viste le finalità numeriche delle analisi. Ancora, fra le altre voci di output è possibile constatare per tutte le travi le lunghezze di buckling, in direzione y, z e anche per il caso di buckling torsionale. Infine, ultima voce riguarda le azioni assiali che inducono effetti di second'ordine. Nel caso seguente, collegando un panel si otterrebbe coerentemente una lista di 3422 zeri.

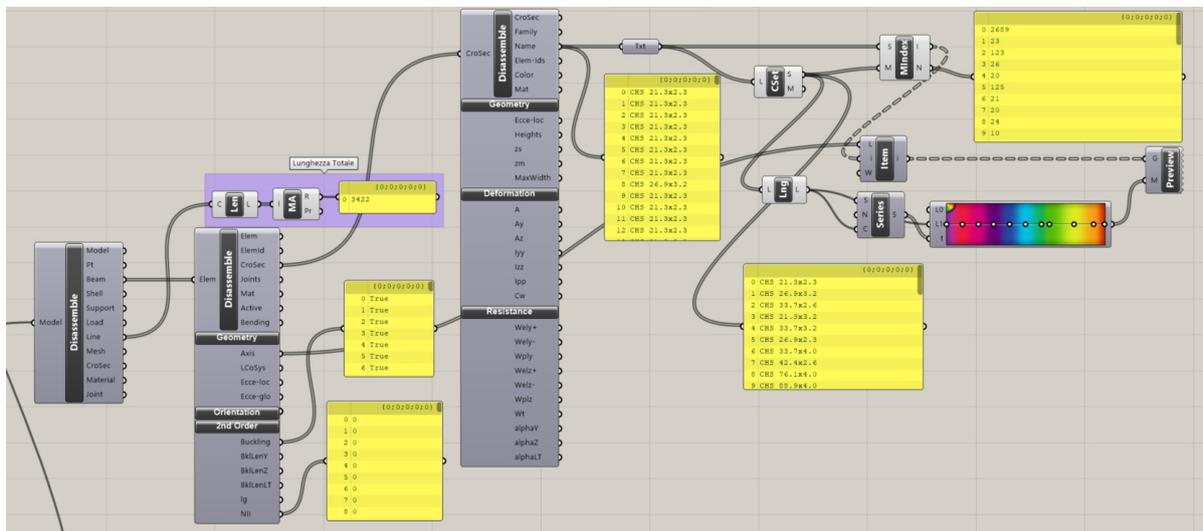


Fig. 5.61 - Scripting per la determinazione della lunghezza totale, della lista delle sezioni trasversali usate e del suo visual editing per la struttura dovuta all'aggregazione del cubo

*Disassemble Element* è utile anche per determinare la lunghezza di materiale totale per la costruzione della struttura e nello specifico la lista delle sezioni trasversali utilizzate. La prima informazione, lapalissiana per il caso seguente, è determinata collegando la voce output del *Disassemble Model Line* con il componente *length*, che restituisce data una lista di curve, una lista delle loro rispettive lunghezze. Collegando tale lista con il componente *Mass Addition* alla voce *Result* è possibile ottenere la lunghezza totale, quindi, la quantità di materiale usata per la costruzione di questa struttura. Ovviamente quest'informazione è importante per i casi successivi, non per il caso seguente, poiché essendo dei cubi i cui spigoli sono lunghi un metro, la lunghezza totale sarà pari al numero degli elementi, 3422 m. Per determinare la lista delle sezioni trasversali, invece, è necessario collegare la voce output *Cross Section* con il componente *Disassemble Cross Section*. Questo è molto utile: non solo permette di ottenere i nomi delle sezioni trasversali, ma anche di avere tutte le informazioni geometriche locali (eccentricità, altezze, centri di gravità, spessori), ma anche area, area di taglio, tutte le inerzie e da essi tutti i rispettivi momenti di resistenza. Ora collegando il componente *text* alla voce output *name* si ottiene il vettore delle stringhe contenenti il nome delle sezioni trasversali utilizzate per il 3422 elementi. Per filtrare la lista e ordinarla per il numero di sezioni trasversali differenti si può utilizzare il componente *create set*, che da una lista

input restituisce i gruppi distinti in essa contenuti come output. Per sapere il numero degli elementi per ogni gruppo si può utilizzare il componente *Member index*, collegando in input il componente *text* e la lista dei gruppi appena ottenuti. Interrogando la voce output *Count*, si può ottenere in un panel il numero di elementi per ogni specifico gruppo di sezione trasversale. La figura 5.62 mostra l'istogramma delle sezioni utilizzate. Va specificato che per motivi visivi, la prima sezione trasversale CHS 21.3x2.3 computa 2689 elementi, come d'altronde mostrato nel *panel* della figura 5.61.



Fig. 5.62 - Istogramma delle sezioni trasversali utilizzate

E' possibile sfruttare anche il visual editing per osservare sulla struttura stessa l'andamento delle sezioni trasversali. Collegando la lista output dei 42 gruppi al componente *length* è possibile impostare il *gradient*: infatti, collegandolo a sua volta con il componente *series*, viene creata una serie di 42 parametri da utilizzare come input, appunto, del *gradient*. Il limite superiore può essere scritto come testo nel panel, impostato come espressione scrivendo appunto 42, oppure collegando nuovamente il dato di *length*. Per mostrare a video il risultato, a questo punto basta collegare l'output di *gradient* con *custom preview* alla voce *material*. La voce *Geometry*, invece, riceve in input *list item*, che a sua volta aveva creato una lista di 3422 elementi, ottenuta dagli indici del componente *member index*, utilizzato precedentemente e la voce *axis*, output del componente *Disassemble Element*. Nella figura 5.63 si può constatare la posizione e le differenti sezioni trasversali nella struttura attraverso la colorazione impostata.

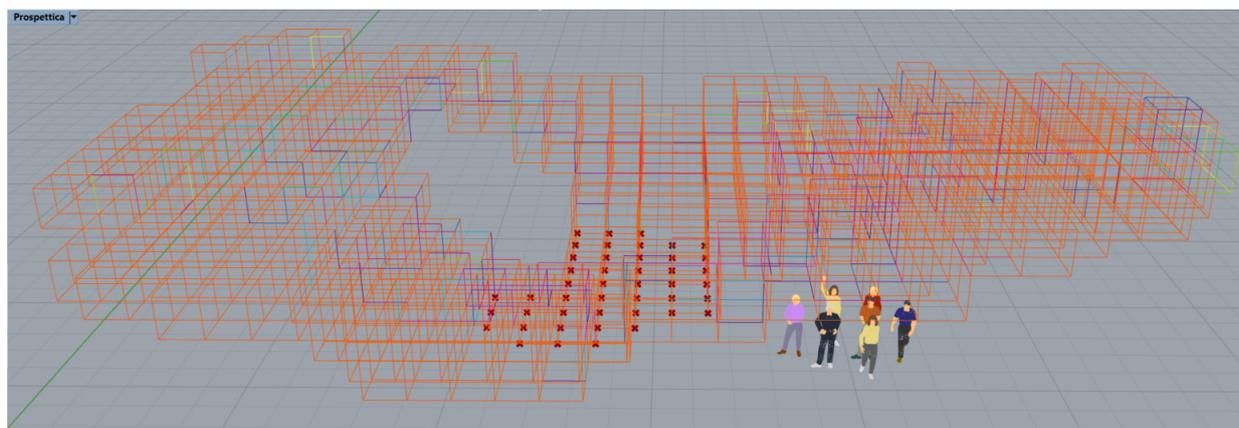


Fig. 5.63 - Visual Editing della sezioni trasversali nella struttura finale dovuta all'aggregazione del cubo

Note la massa, la rigidezza e tutte le azioni agenti, ultima considerazione riguarda l'analisi modale. È interessante conoscere la frequenza e il periodo principale della struttura per comprenderne il tipo di comportamento dinamico, visibile attraverso il visual editing delle deformate modali. Questa tipologia di dati viene estratta dal componente *Natural Vibrations*: in input riceve il modello costruito dall'ottimizzatore e il numero di modi di cui si vuole ottenere tutte le informazioni; in output, pertanto, restituisce la lista delle frequenze del numero di modi selezionato, la lista delle masse partecipanti ad ogni modo e da esse il coefficiente di partecipazione modale determinato dalla formula:

$$g_i = \frac{\sum_k m_k \psi_k^{(i)}}{\sum_k m_k \psi_k^{(i)2}} \quad [5.19]$$

Per ottenere i periodi propri, più semplici da utilizzare negli spettrogrammi di risposta per eventuali analisi dinamiche o per comprendere più semplicemente il comportamento della struttura, è sufficiente collegare la lista delle frequenze con il componente *division* che, facendone il reciproco, restituisce in output la lista desiderata. La struttura ha un periodo fondamentale di 1.36 s. Lo spettrogramma è specifico di un territorio, dipende dalle sue caratteristiche geotecniche. Tuttavia, in generale un periodo oltre il secondo si ritrova sul lato destro della curva, dove le accelerazioni e, quindi, le azioni sismiche sono minori a fronte di una grande risposta deformativa. La struttura è flessibile, come nei casi dei grattacieli o dei grandi ponti, la massa totale è molto più grande della rigidezza globale, il cui rapporto è, appunto, il periodo.

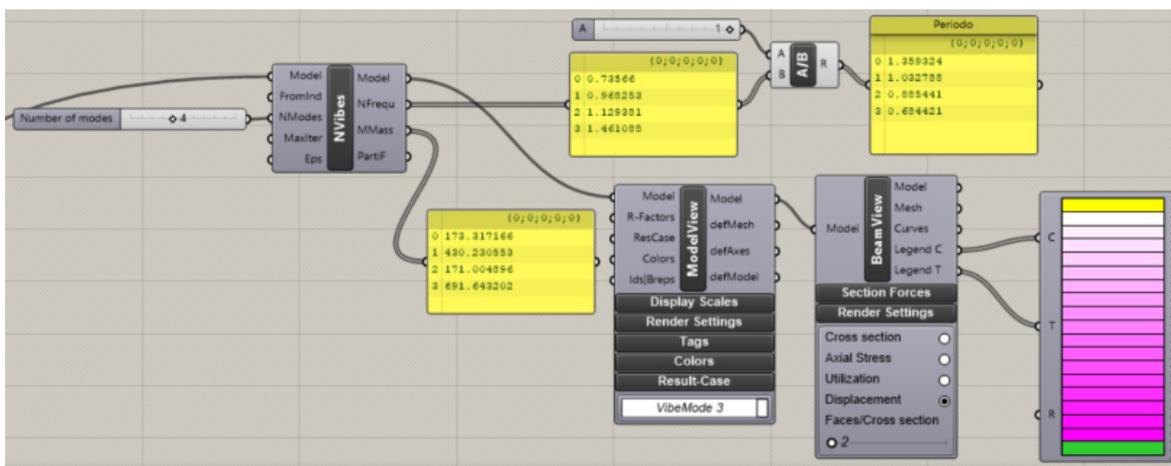


Fig. 5.64 - Scripting dell'analisi modale della struttura dovuta all'aggregazione del cubo

Per il visual editing delle deformate modali il procedimento è simile al caso statico: è necessario utilizzare e collegare i componenti *Model View* e *Beam View*, in cui settare le impostazioni di visualizzazione e la scelta di cosa mostrare a video, con *Legend* per ottenere la legenda di ciò che viene visualizzato. Vista la non necessità di una progettazione con la gerarchia delle resistenze, a titolo più illustrativo, vengono proposte le deformate modali dei soli primi tre modi di vibrare. La struttura, essendo più rigida sul lato y, mostra la prima direzione di deformazione lungo l'asse x, come ci si poteva aspettare. Il secondo modo di vibrare è lungo l'asse y e il terzo è un modo torsionale. Il solutore ha posto le condizioni anche per una buona progettazione dinamica.

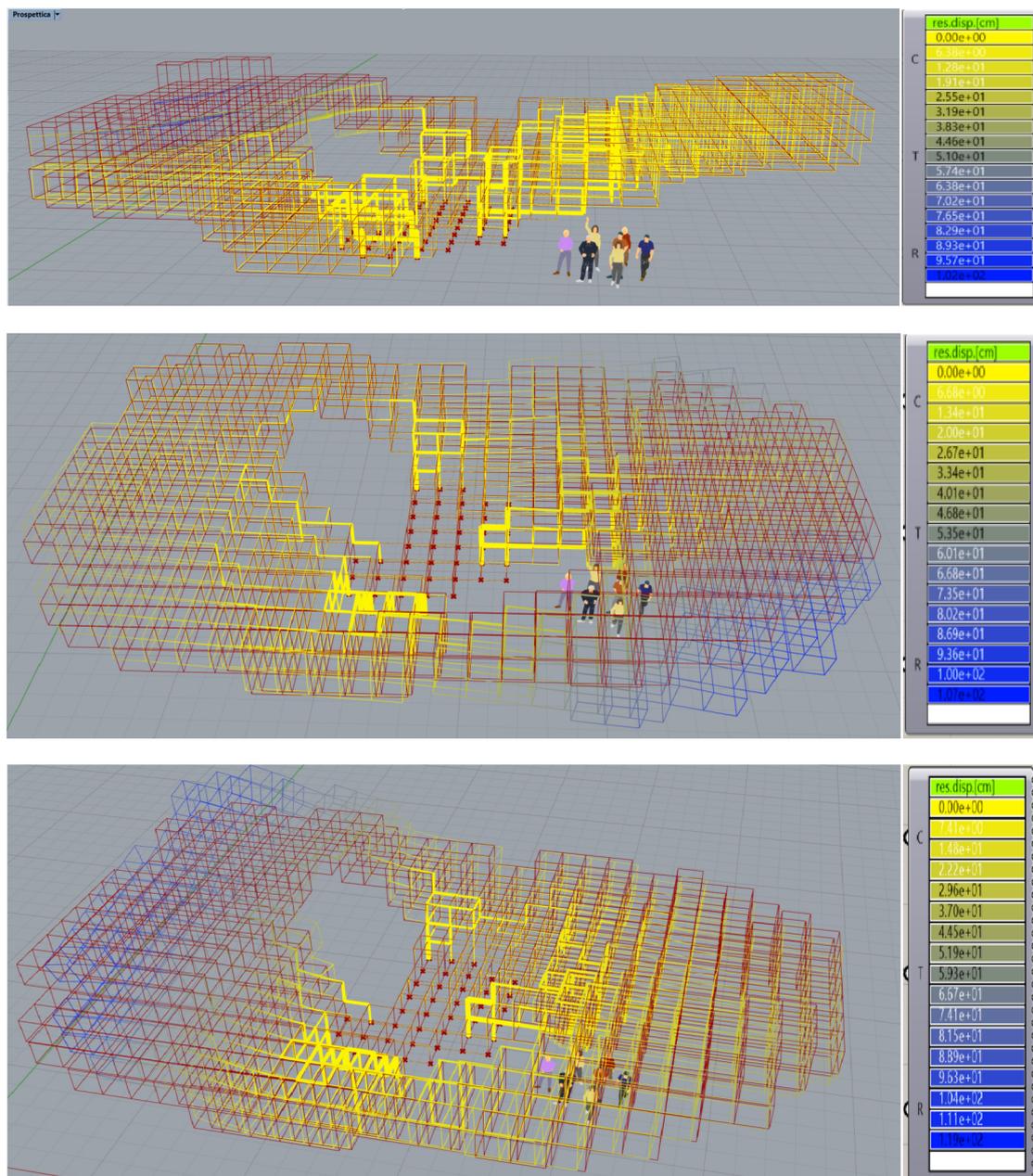


Fig. 5.65 - Visual editing delle prime tre deformate modali della struttura dovuta all'aggiungimento del cubo

L'algoritmo proposto è perfettamente funzionante e unico anche per le analisi della struttura variando la direzione dell'azione orizzontale oppure valutando gli effetti dovuti non alla combinazione, ma all'applicazione di una sola tipologia di forza, solo peso proprio e solo vento. I dati ottenuti, pertanto, non verranno riportati in questo paragrafo in termini di visual editing ma tabularmente nelle conclusioni finali.

### 5.5.3 Ottaedro Troncato

La seconda struttura da analizzare è quella determinata dall'aggregazione dell'ottaedro troncato. Senza rientrare nei meriti dell'algoritmo, che non varia, è possibile analizzare direttamente i risultati ottenuti dalla FEA e dal componente *Optimize Cross Section*. Rifocalizzando l'attenzione sul caso di carico dovuto alla combinazione del peso proprio e della forza orizzontale su tutti i nodi in direzione +x, il primo riscontro è sulla massa: osservando lo script, l'omonimo output del componente *Assemble* basato sulla sezione trasversale di primo tentativo è di 8244 kg, mentre la massa totale output dell'ottimizzatore è pari a 28184.6 kg. Sembrerebbero troppi, ma la soluzione ottenuta dalle 30 iterazioni per 20 punti campione, permette di sfruttare il 95% circa della resistenza del materiale, sempre l'acciaio S275 e, allo stesso tempo garantire un abbassamento massimo di solo 23 cm, circa il 2.88% dell'altezza totale, pari a 8m, e ben lontana dai 47 cm del caso precedente. Una spiegazione a tale netta differenza è dovuta da due fattori: il primo geometrico mentre il secondo strutturale. Ricordando sia il favo dell'introduzione che il problema di Lord Kelvin, l'utilizzo di un poliedro a facce esagonali permette effettivamente di occupare più efficientemente lo spazio, rispetto al cubo. Le dimensioni sono perfettamente confrontabili, seppur l'ottaedro sia leggermente più piccolo, ma la reale differenza è dovuta, appunto, al rapporto superficie/volume, già affrontato nei capitoli precedenti. Strutturalmente, però, c'è anche da sottolineare che tale struttura, proprio per la tipologia di poliedro utilizzato, garantisce un numero di vincoli di gran lunga maggiore, 112, oltre il doppio del caso precedente. Pertanto, è questa maggiore rigidità ad assicurare una migliore capacità di risposta sia in termini di SLE che estetici della richiesta strutturale.

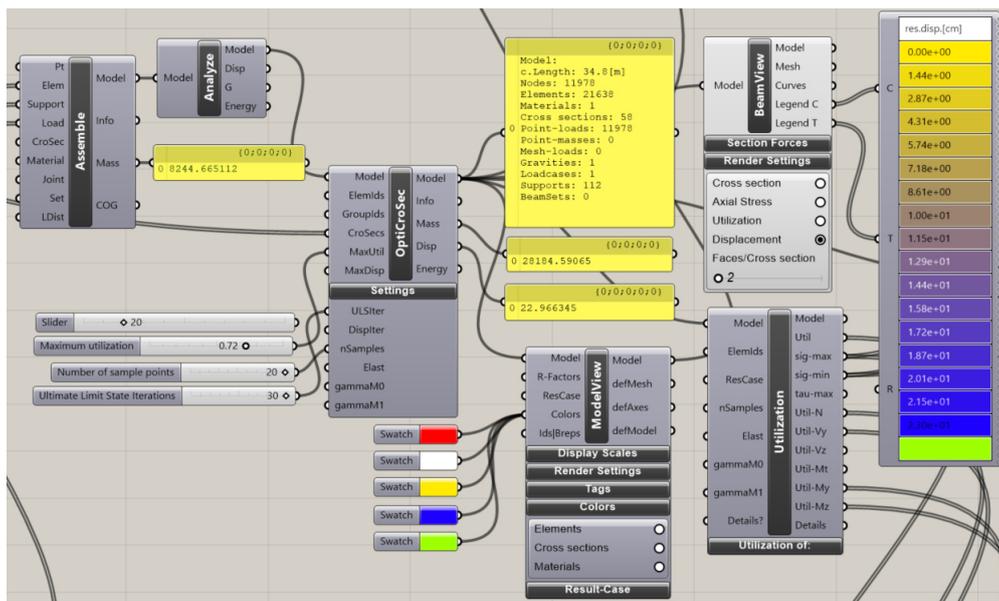


Fig. 5.66 - Scripting finale per la FEA e il Visual editing delle soluzioni della struttura dovuta all'aggregazione dell'ottaedro troncato

Come per il caso precedente, l'abbassamento maggiore è posizionato sul lato destro della struttura, essendo lo sbalzo non solo maggiore, ma anche più alto del caso precedente. Il lato sinistro, in risposta subisce un leggero *innalzamento* pari ancora a circa la metà, poco più di una decina di centimetri. La deformazione è dovuta alla scelta delle sezioni trasversali: come nel caso precedente, l'ottimizzatore ha prediletto una configurazione per cui il poliedro è costituito da tubi dal diametro e spessore più grandi utilizzati per garantire adeguata rigidità sia alla micro che alla macrostruttura. Tuttavia, essendo composta da più spigoli, questa volta il numero di queste ultime sono inevitabilmente maggiori, dal momento che anche il numero di possibilità di aggregazioni è aumentato, quindi, necessita di più tubi che garantiscano una certa continuità nella distribuzione delle azioni interne. A differenza del caso precedente, tuttavia, le sezioni trasversali più spesse sono poste nella maggioranza lungo tutti i bordi esterni degli ottaedri nella

parte centrale e lungo i bordi dei fori, dove ci si aspettano di conseguenza una concentrazione importante delle tensioni.

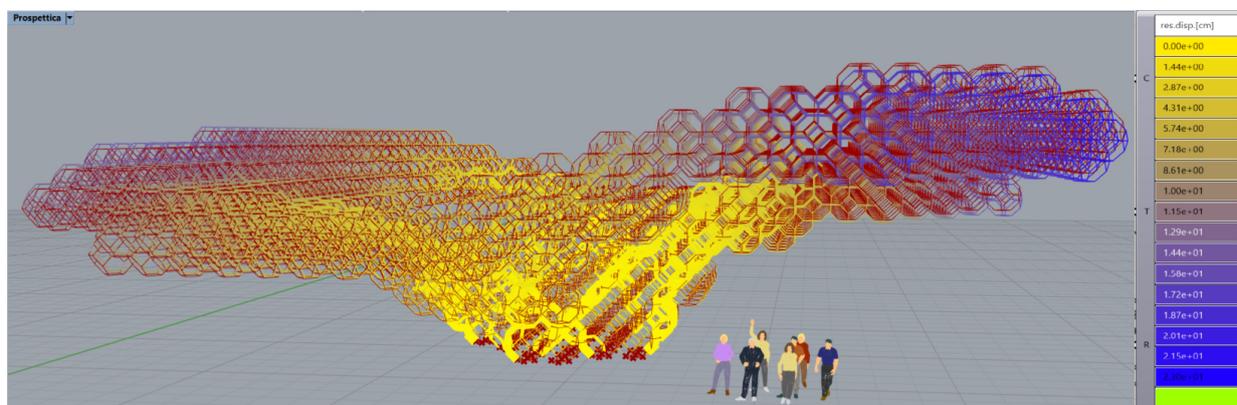


Fig. 5.67 - Visual editing degli spostamenti della struttura dovuta all'aggregazione dell'ottaedro troncato

Anche questa struttura risulta nella maggior parte dei suoi elementi debolmente carica: all'aumento della massa vi è comunque un netto aumento anche del numero delle travi, 21638, che gestiscono il peso proprio, mentre essendo la valenza degli spigoli al nodo pari a 4, la forza orizzontale applicata è il prodotto di tale numero per 0.038 kN, quindi pari a 0.152 kN, minore rispetto al caso precedente. Lo schema statico base è ancora assimilabile a delle *colonne* su cui sono poggiate le due *mensole* rappresentanti il semiasse dell'ellisse di base: le reazioni vincolari, infatti, si contrappongono nuovamente fra compressione a destra, trazione a sinistra. Andrebbe valutato l'effetto dell'inclinazione delle travi, ma queste aiutano a diminuire le tensioni lungo la struttura, come le travi reticolari e, sarebbero più incidenti sugli effetti del second'ordine, che saranno escludibili sia globalmente che localmente in questo caso, dal momento che le dimensioni delle travi sono più piccole delle precedenti. La presenza del momento flettente, con un'incidenza maggiore rispetto allo sforzo assiale, parzializza ancora le sezioni e le tensioni, come volevasi dimostrare, si concentrano nuovamente proprio lungo i *bordi* dei fori, vista la discontinuità dei grafi e del materiale. Le concentrazioni di tensioni di trazione sul lato destro, come mostrato nella figura 5.68 sono giustificabili anche nel caso seguente per la direzione dell'azione orizzontale considerata, ma per ancor più per le dimensioni geometriche, ancor più sporgenti dato l'incremento dell'altezza.

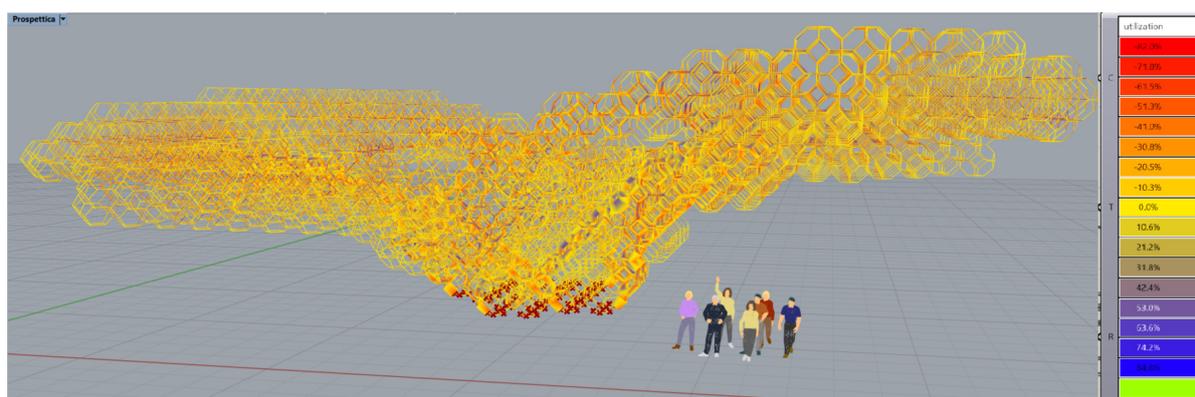


Fig. 5.68 - Visual editing dell'utilization delle travi lungo la struttura dovuta all'aggregazione dell'ottaedro troncato

Sfruttando il componente *utilization* è possibile ottenere anche per il caso seguente le liste dei dati, per poter verificare effettivamente l'andamento e, quindi, il calcolo della  $\sigma_{max}$  attraverso l'equazione di Navier. Si constaterà che il visual editing è una soluzione sempre preferibile, man mano che ci si con-

vincerà della potenza del parametricismo. Con l'aumento della complessità delle strutture, ma soprattutto con l'aumento del numero di travi è particolarmente difficile poter pensare di controllare una per una le tensioni agenti. E' in fondo anche il presupposto di un buon algoritmo: cercare di educare il computer a saper fare efficacemente ciò che il progettista desidera, soprattutto quando diventa più difficile per l'essere umano agire.

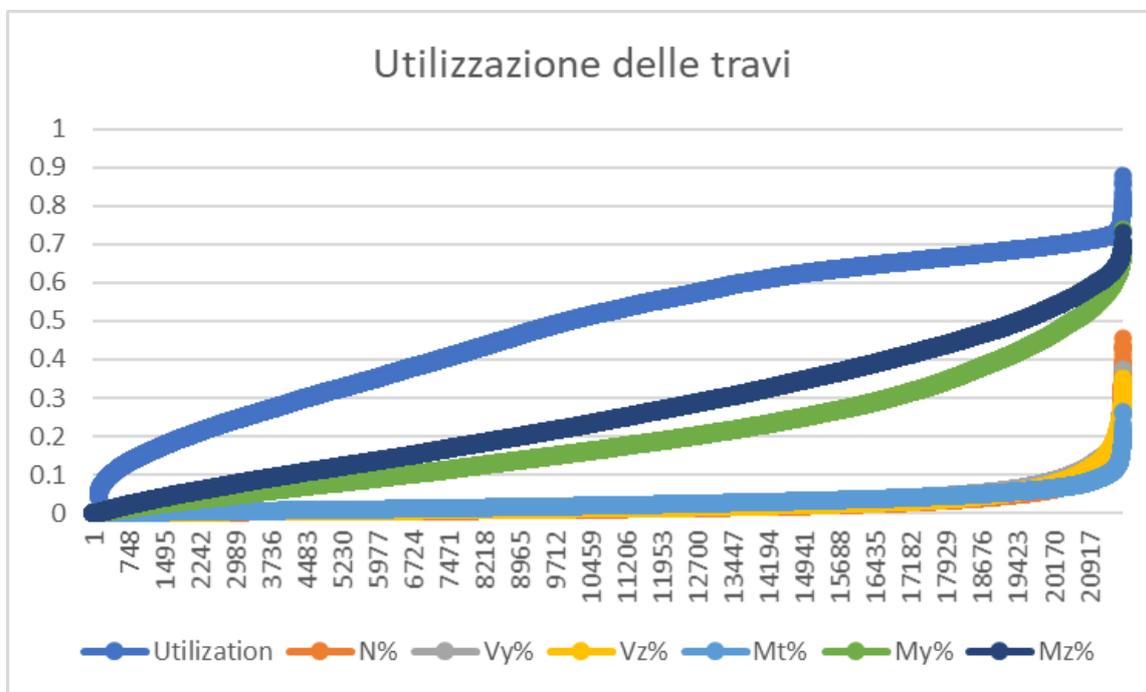


Fig. 5.69 - Grafico dell'andamento dell'utilizzazione e incidenza delle caratteristiche della sollecitazione

La figura 5.69 mostra l'andamento dell'utilizzazione in ordine crescente per le 21638 travi. Con gli stessi presupposti di interpretazione del caso dei cubi, si può constatare che per oltre la metà degli elementi, ben 10000 non utilizzano più del 50% della propria resistenza, confermando l'ipotesi di carichi non eccessivi e di elementi poco reagenti. Per di più, l'aumento del peso proprio, appunto, non provoca un aumento dell'incidenza dello sforzo assiale, il picco è 0.46, quindi, anch'esso meno del 50% e meno del caso precedente. A causa della non simmetria aumenta, invece, l'incidenza del momento flettente, il cui picco è pari a 0.74 e raggiunge oltre il 50% dell'incidenza per quasi 4000 elementi, circa il 19% della struttura. Comunque, il momento flettente interessa buona parte di tutte le travi, confermando la parzializzazione delle sezioni reagenti. Inoltre, proprio per la bassa incidenza dello sforzo assiale, si riducono i casi di pressoflessione e si conferma la riduzione della probabilità di instabilità globali e soprattutto locali. Infatti, interrogando anche qui il componente *Disassemble Element* alla voce *buckling*, si può constatare che la lista dei dati mostra la voce *True* per tutti gli elementi, cioè l'ottimizzatore ha valutato e scelto le sezioni affinché non vi fossero instabilità locali, dovuta anche al fatto che la lunghezza libera di inflessione in direzione y, z e torsionale è circa 35 cm.

Coerentemente a quanto espresso vi è l'andamento della  $\sigma_{max}$  mostrata nella figura 5.70: la tensione massima non oltrepassa i 150 MPa (circa la metà della resistenza totale) per oltre la metà delle travi, mentre il picco raggiunge i 260 MPa, proprio il 95% della resistenza totale. Si potrebbe pensare che gli elementi a compressione siano meno di 500 e che la compressione non vada oltre i 100MPa, va precisato che i valori minimi a compressione sono determinati e presenti nella lista della  $\sigma_{min}$ . Non si spiegherebbe altrimenti la parzializzazione e la necessità di dover escludere le instabilità al carico di punta. Il picco a compressione è circa pari a quello di trazione. Osservandone l'andamento, si conferma il visual editing della figura 5.68 che nella legenda indicava come più alta e tendente la compressione rispetto alla trazione.

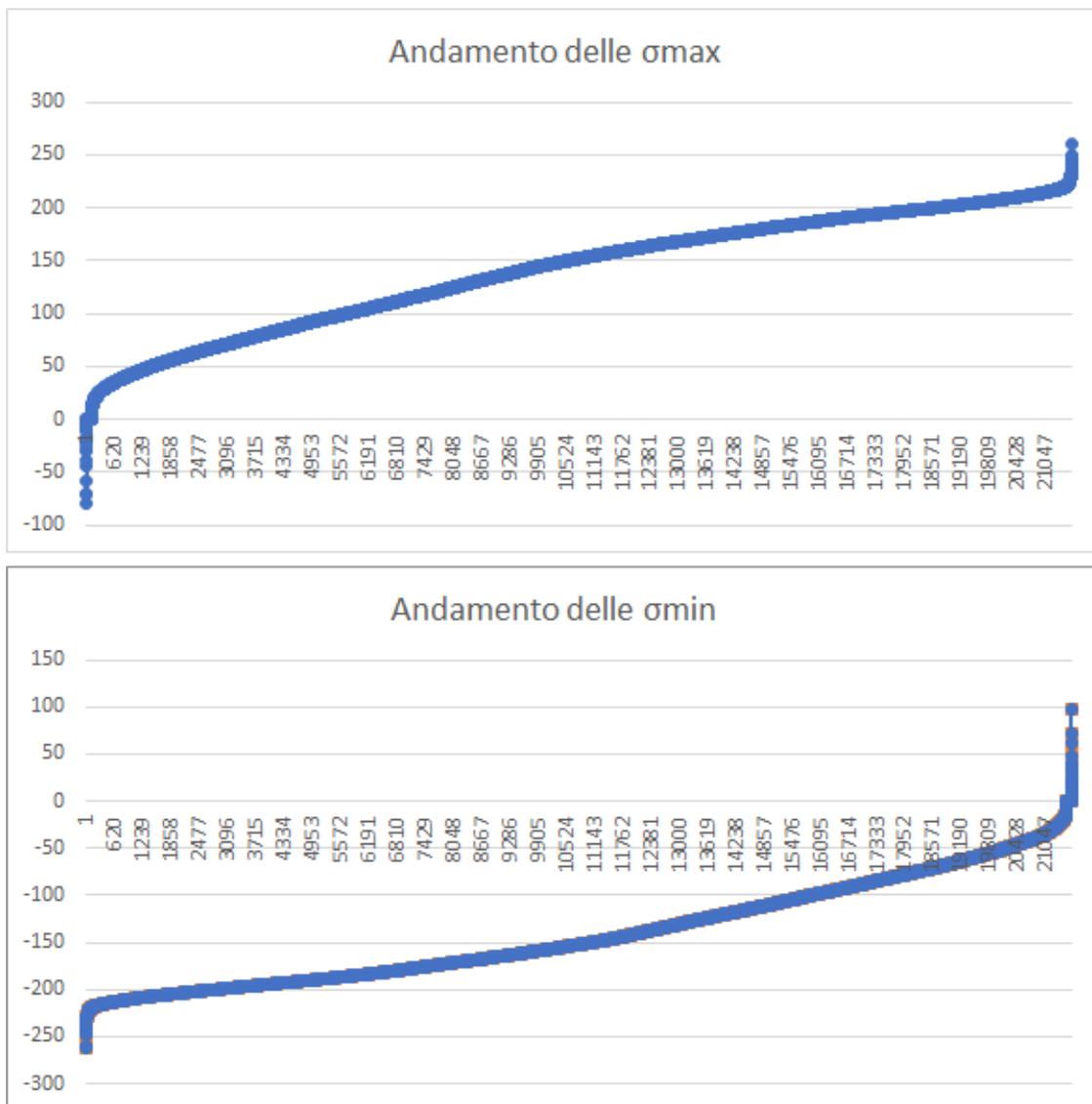


Fig. 5.70 - Grafico dell'andamento della  $\sigma_{max}$  e della  $\sigma_{min}$

Per determinare i valori delle tensioni, il solutore ha applicato l'equazione di Navier note le caratteristiche della sollecitazione e queste ultime, analogamente al caso precedente, vengono riportate in seguito per poter essere utilizzate o verificate.

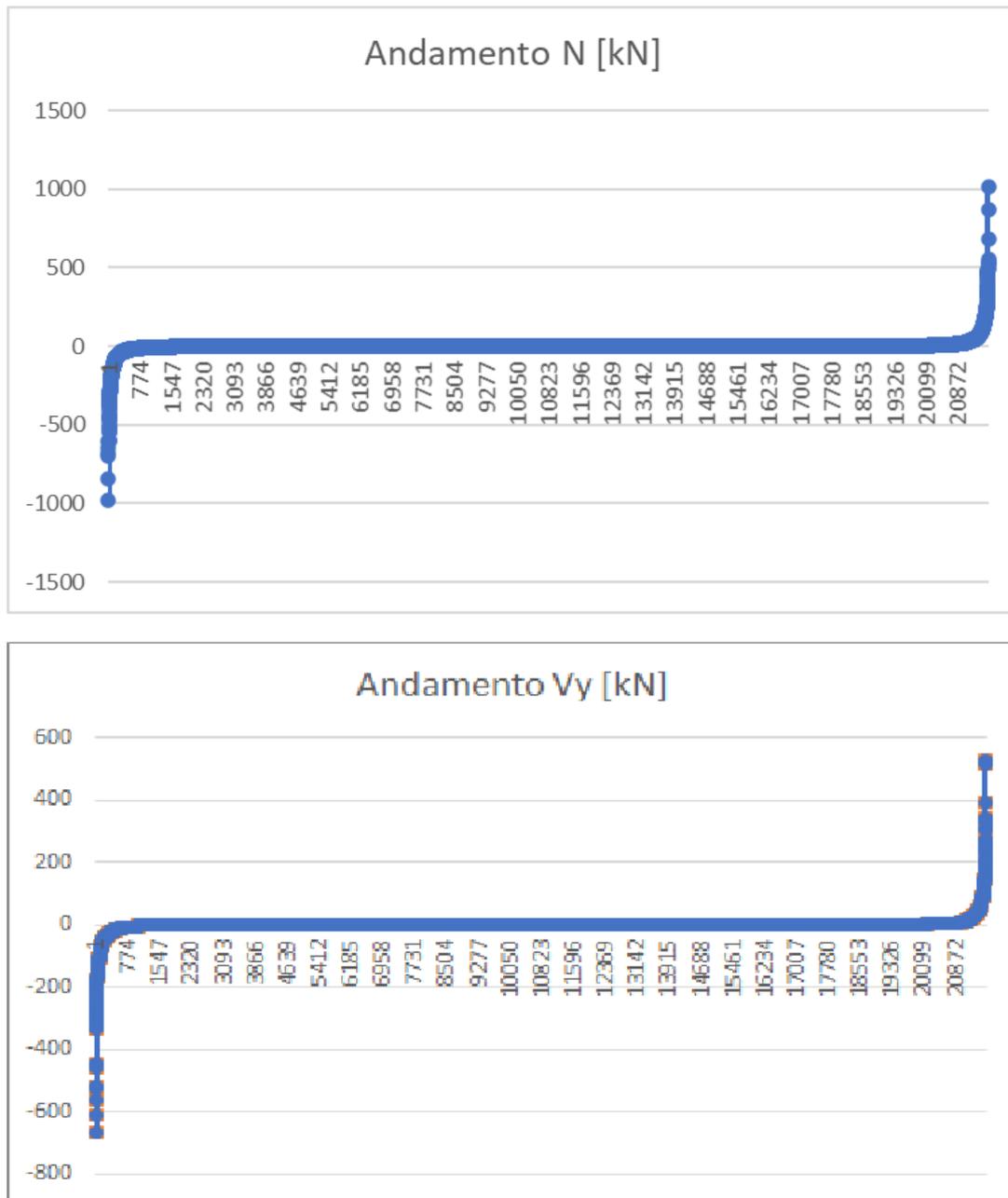


Fig. 5.71 - Grafico dell'andamento della forza assiale

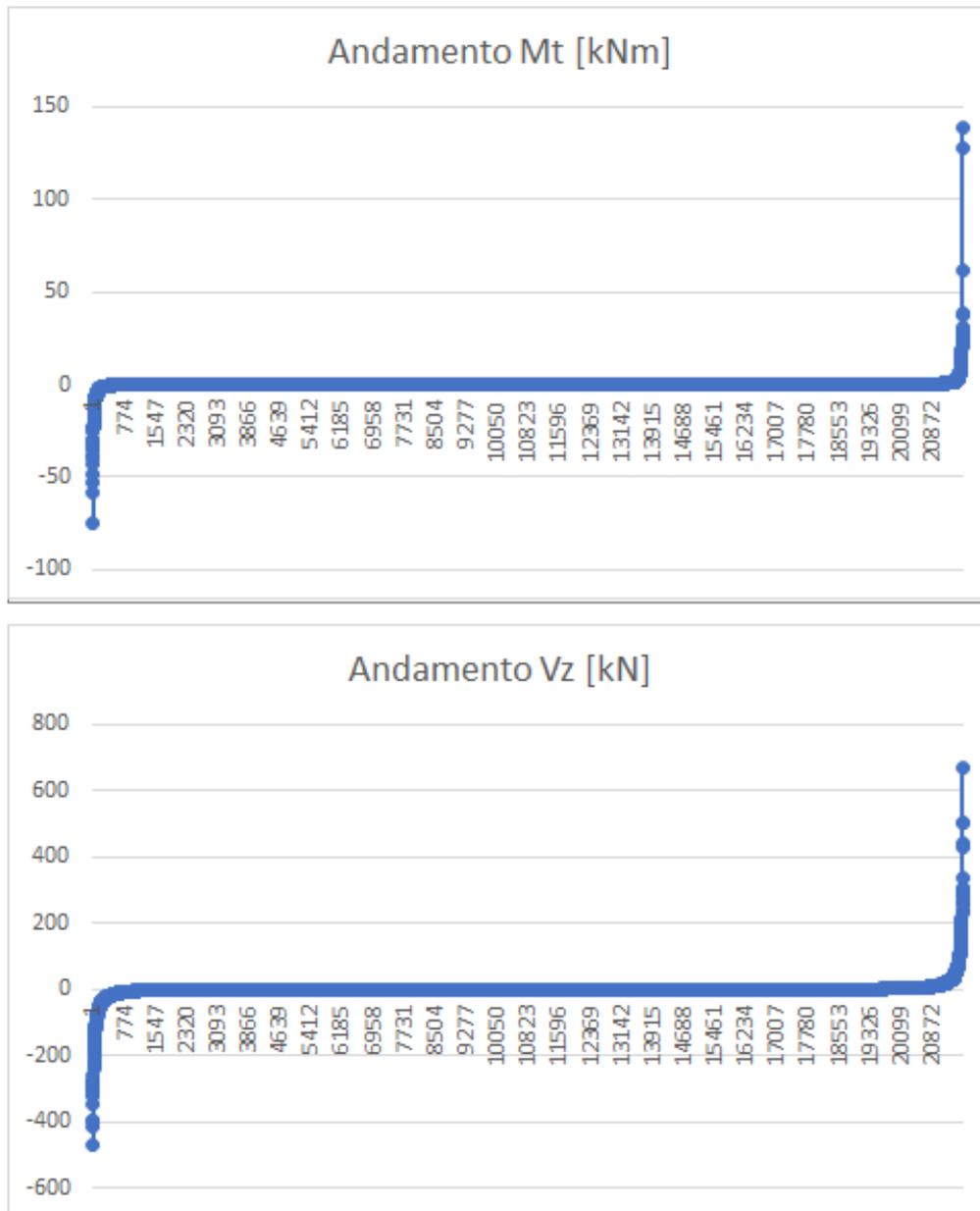


Fig. 5.72 - Grafico dell'andamento della forza di taglio Vz e del momento torcente

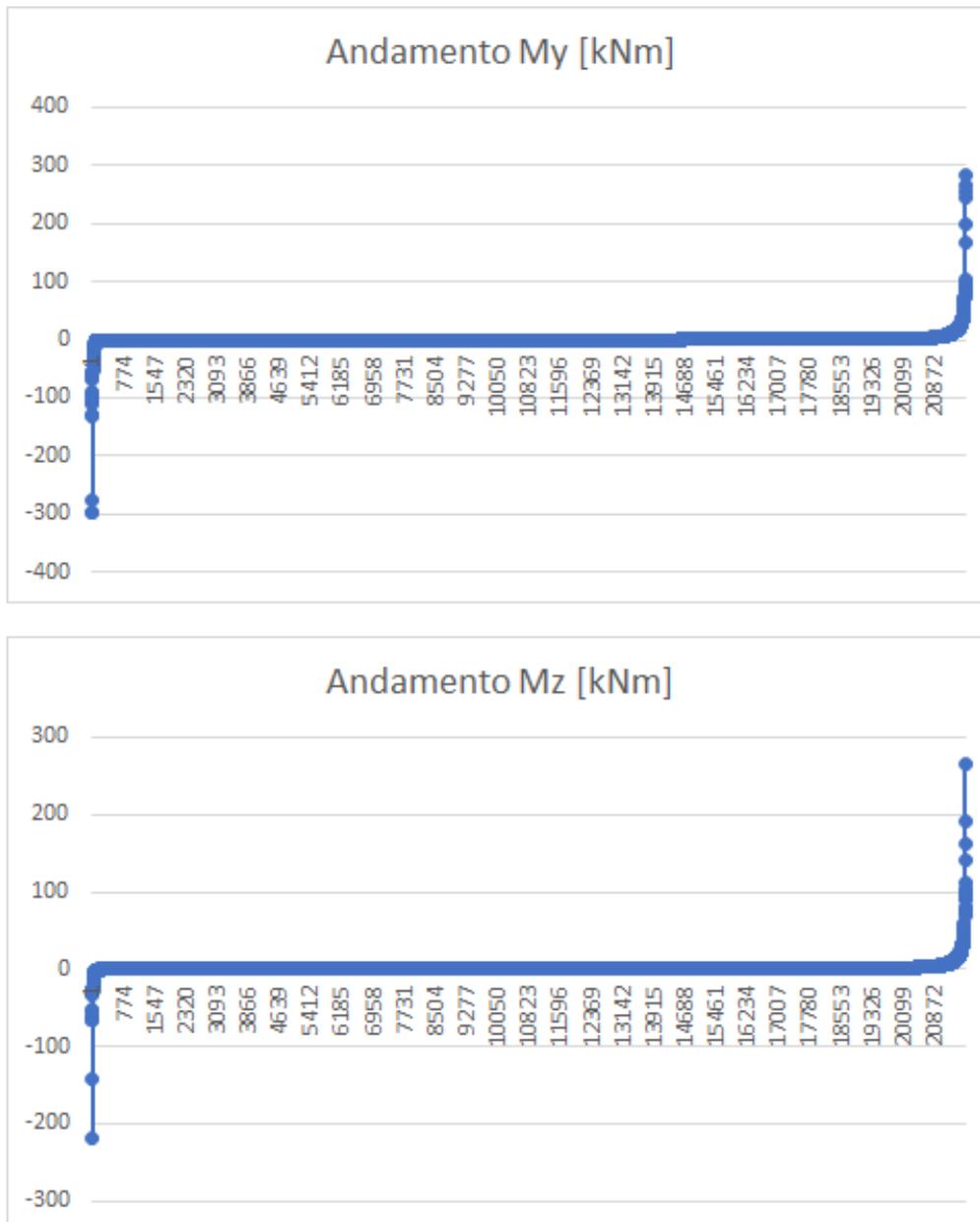


Fig. 5.73 - Grafico dell'andamento dei momenti  $M_y$  e  $M_z$

Ora disassemblando il modello è possibile nuovamente avere informazioni più specifiche nei confronti della lunghezza totale del materiale e delle sezioni trasversali. Senza fare riferimenti all'algoritmo, che resta invariato rispetto al caso precedente, la lunghezza totale è 7650 m, il doppio del caso del cubo, ma non eccessivo se si considera che il numero di elementi di quest'ultimo è 6 volte inferiore. Per quanto riguarda le 58 sezioni trasversali utilizzate, la figura 5.74 mostra l'istogramma come per il caso del cubo. In particolare, si precisano tre sezioni in quanto oltrepassano l'indice visivo della legenda:

i. il CHS 21.3x2.3 computa 12958 travi;

ii. il CHS 33.7x2.6 computa 1505 travi;

iii. il CHS 26.9x2.3 computa 1270 travi;

Inoltre, sfruttando le stesse impostazioni del *gradient* utilizzato nel caso precedente, è possibile ottenere il visual editing dell'andamento delle sezioni trasversali sulla struttura.

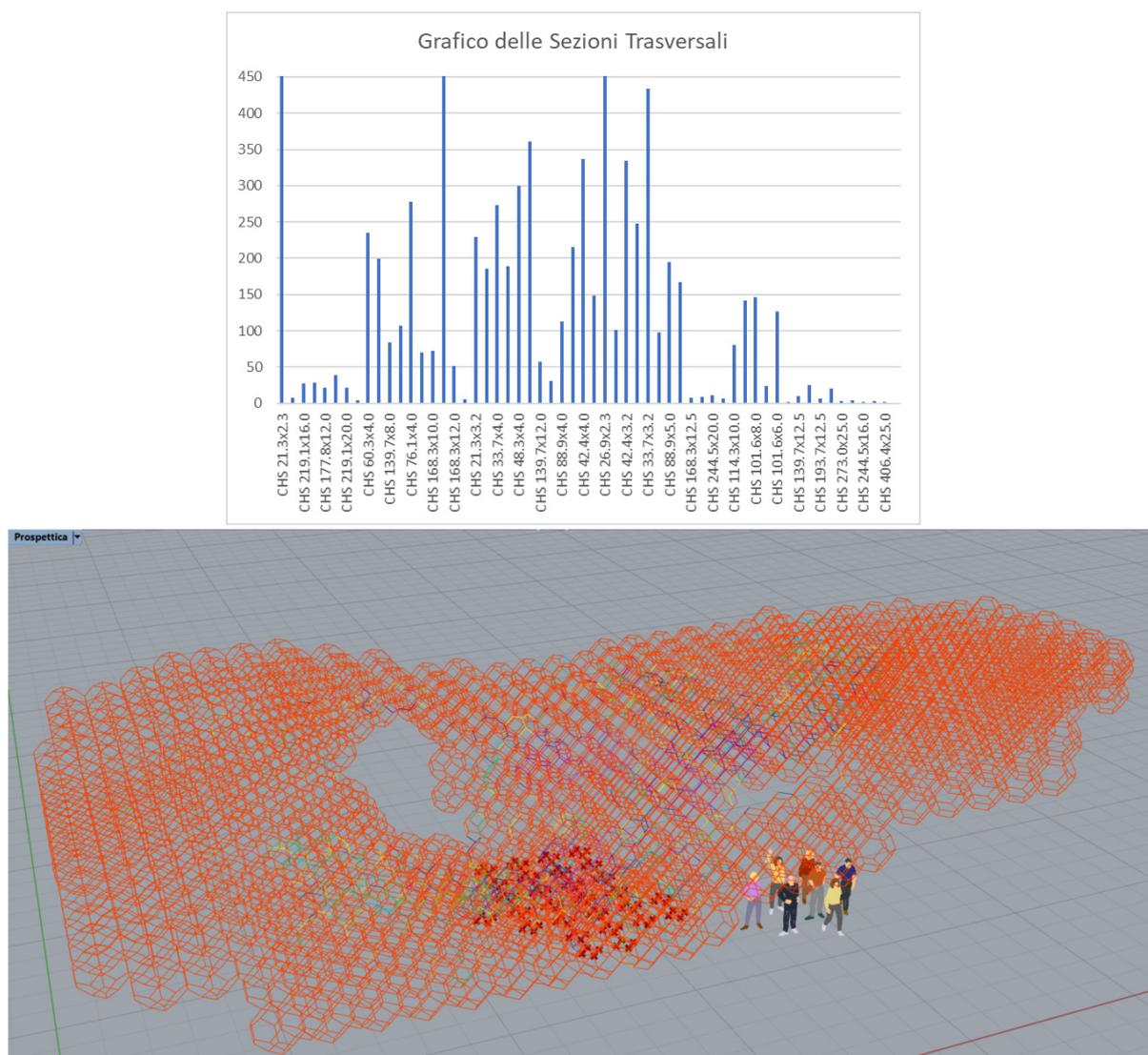


Fig. 5.74 - Istogramma delle sezioni trasversali utilizzate e Visual Editing delle sezioni trasversali nella struttura finale dovuta all'aggregazione dell'ottaedro troncato

Infine, note la massa, la rigidezza e le azioni agenti si può ottenere i risultati dell'analisi modale. La struttura ha una frequenza pari a 1.1 Hz e, quindi, un periodo fondamentale di 0.91 s. Date le dimensioni, la rigidezza è molto simile a quella di un edificio in cemento armato, dove il periodo fondamentale è solitamente circa pari a 0.1 moltiplicato per il numero di piani. Quindi, la massa non è smisuratamente

più grande della rigidezza, è un rapporto adeguatamente bilanciato. La prima massa modale partecipante resta circa il 3% della totale, pari a 824 kg. Le condizioni generali, quindi, non cambiano e come mostra la figura 5.75, le deformate modali cambiano quantitativamente, mentre le direzioni restano invariate.

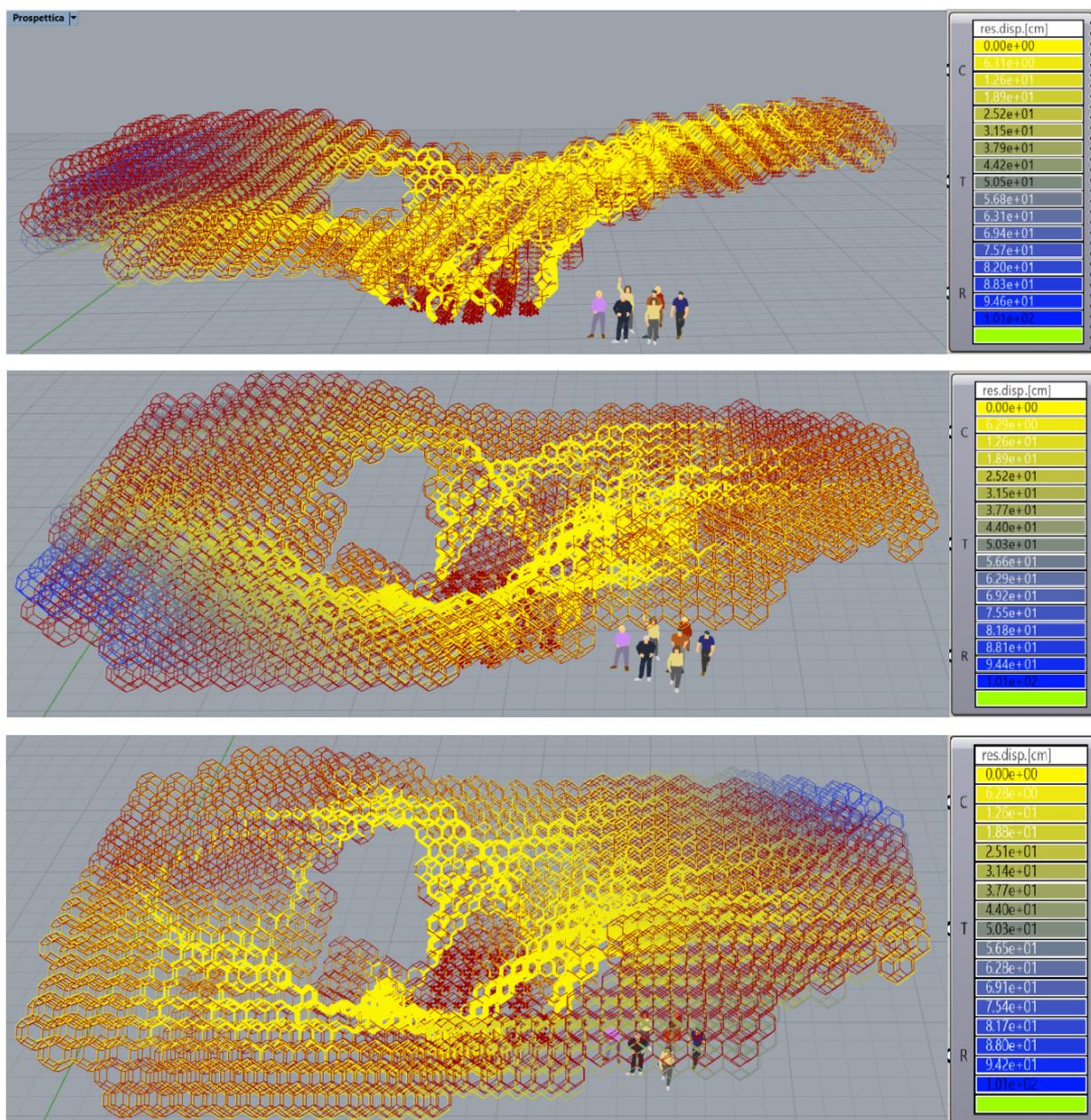


Fig. 5.75 - Visual Editing delle prime tre deformate modali della struttura dovuta all'aggiungimento dell'ottaedro troncato

### 5.5.4 Endecaedro Bisimmetrico

Terza e ultima struttura da analizzare è quella determinata dall'aggregazione dell'endecaedro bisimmetrico. Come per il caso precedente, l'algoritmo ancora una volta non varia; è possibile focalizzare l'attenzione direttamente sui risultati ottenuti dalla FEA e dal componente *Optimize Cross Section* nel caso di carico nuovamente dovuto alla combinazione del peso proprio e della forza orizzontale in direzione +x. Il primo check resta sempre il controllo della massa: la prima, relativa all'utilizzo della sezione trasversale tentativo per tutte le travi, produce un output pari a 6637 kg, già questa circa due volte quella del cubo; la seconda, invece, ottenuta dall'ottimizzatore, è differente e pari a 14320 kg, quasi la metà del caso dell'ottaedro e non più il doppio del caso dei cubi. Questa volta non vi sono giustificazioni strutturali, la motivazione è totalmente geometrica: l'endecaedro si candida ad essere il miglior poliedro tra i tre space filler, in quanto con le stesse dimensioni dei precedenti, occupa meglio lo spazio, garantisce un abbassamento massimo di soli 18 cm, cioè il 2.57% dell'altezza totale pari a circa 7 m e, uno sfruttamento del 98% della resistenza meccanica dell'acciaio S275. Tutto ciò con un numero di vincoli addirittura minore dei casi precedenti, 22, che, come si vedrà, rendono anche la struttura più rigida delle precedenti. L'andamento della deformata resta invariato: l'abbassamento maggiore è sempre localizzato nell'estremità destra della struttura per via della maggiore lunghezza dello sbalzo e a cui risponde un innalzamento nell'estremità opposta di un valore comunque sotto la decina di cm. La figura 5.76 mostra già l'andamento anche delle sezioni trasversali: simile ad un albero, partendo dai vincoli di base, le sezioni maggiori si estendono proprio come rami partendo dai bordi esterni della struttura e localizzandosi principalmente lungo i bordi dei fori interni, dove ci si aspettano le concentrazioni delle forze e delle tensioni. Come nei casi precedenti, l'ottimizzatore propone 47 famiglie di sezioni trasversali per garantire adeguata rigidità alla micro e alla macro struttura, sfruttando il minor numero possibile di grandi sezioni.

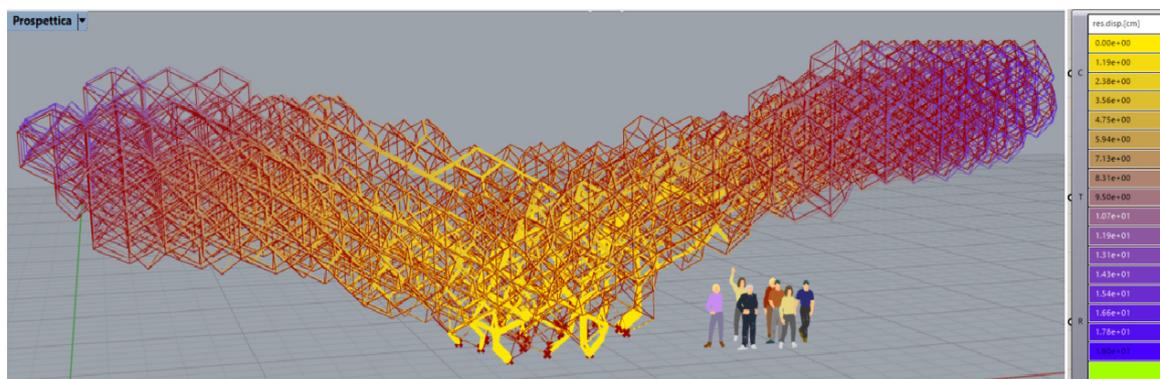


Fig. 5.76 - Visual Editing degli spostamenti della struttura dovuta all'aggregazione dell'endecaedro bisimmetrico

E' necessario soffermarsi ancora sull'utilization: come le precedenti la struttura è nella maggior parte scarica, la quantità di materiale è diminuita rispetto all'ottaedro ma in compenso è aumentata la forza orizzontale, il cui valore è stato moltiplicato per la varianza degli spigoli al nodo, pari a 8 per i casi più sfavorevoli, quindi, per un totale di 0.304 kN per nodo. Nonostante le diverse inclinazioni dei grafi, lo schema statico di base non sembra essere cambiato: i vincoli di base delle *colonne* di destra restano a trazione per far fronte ad un numero maggiore di tubi (sebbene questa volta in elevazione non siano molto differenti le disposizioni delle barchette di endecaedri lungo le mensole) rispetto a sinistra, dove sono di compressione. Le colonne di destra, quindi, potrebbero essere soggette a fenomeno di Buckling, ma le lunghezze libere di inflessione sono nuovamente piccole per provocare un problema di instabilità. La presenza predominante del momento flettente provoca nuovamente la parzializzazione delle sezioni: la figura 5.77, infatti, mette in evidenza tale caratteristica e mostra, come volevasi dimostrare, che le concentrazioni delle tensioni sono localizzate proprio lungo le sezioni trasversali maggiori. In particolare, è possibile notare questa volta che le maggiori tensioni di trazione sono localizzate sui *rami* di destra, dove

l'abbassamento è maggiore e in direzione della forza orizzontale, molto più similmente al caso dei cubi, nonostante un raffittimento delle travi reticolari.

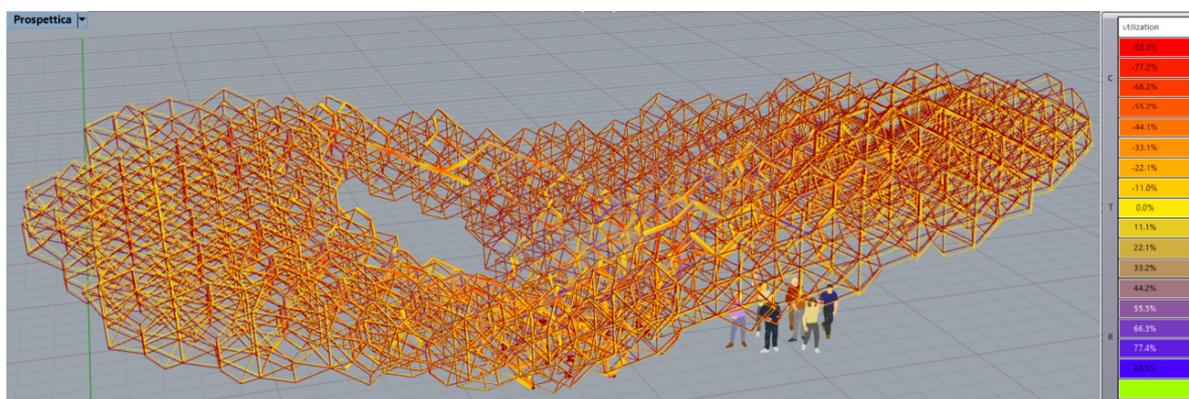


Fig. 5.77 - Visual Editing dell'utilization delle travi lungo struttura dovuta all'aggregazione dell'endecaedro bisimmetrico

Il componente *Utilization* permette nuovamente di visualizzare e maneggiare le liste dei dati dell'utilization globale, delle incidenze su di essa delle caratteristiche della sollecitazione, oltre la determinazione della  $\sigma_{max}$  e della  $\sigma_{min}$  attraverso l'equazione di Navier. E' possibile, così, confermare nello specifico le osservazioni finora riportate attraverso il visual editing. La figura 5.78 mostra l'andamento dell'utilizzazione e, quindi, delle tensioni sul numero di elementi. Si dimostra che questa volta quasi il 70% degli elementi non raggiunge il 50% della propria resistenza meccanica: tutti quelli reagenti sono tutti soggetti a momento flettente, solo circa la metà sono pressoinflessi. Il picco del momento flettente, 0.77, risulta maggiore rispetto a quello dello sforzo normale, 0.75, a testimonianza della maggiore influenza del primo rispetto al secondo nel contesto globale e della corretta osservazione sulla parzializzazione delle sezioni.

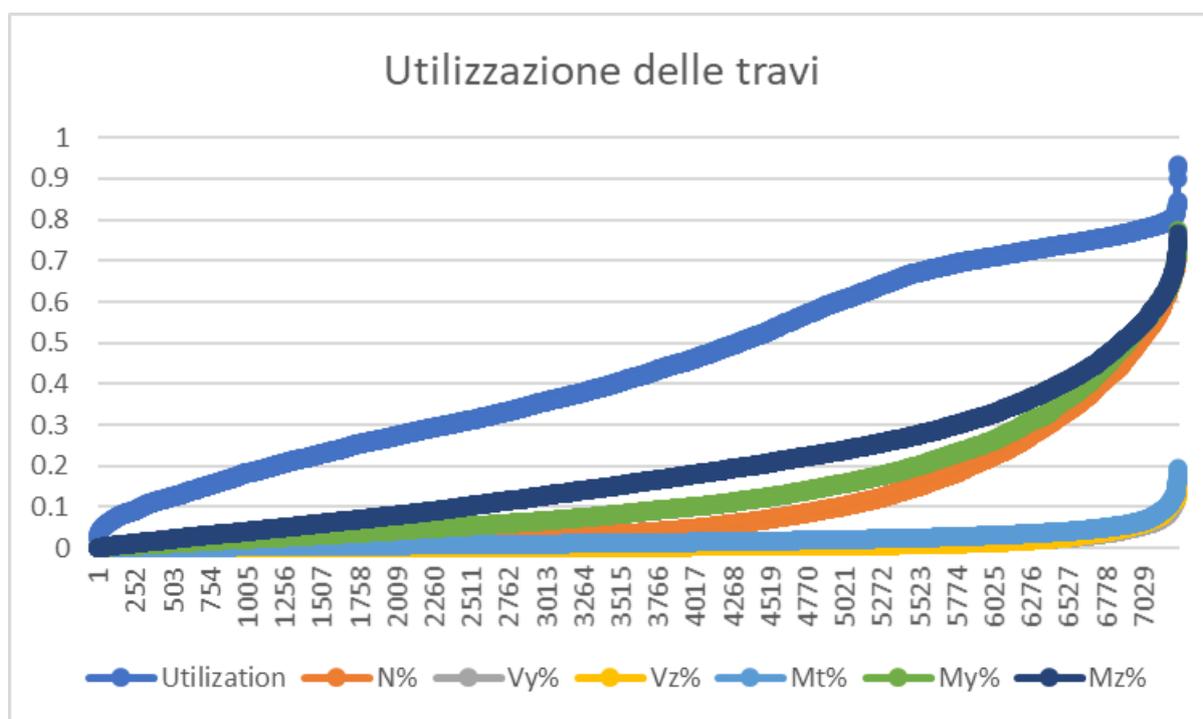


Fig. 5.78 - Grafico dell'andamento dell'utilizzazione e incidenza delle caratteristiche della sollecitazione

Coerente a quest'ultimo grafico è la figura 5.79 che mostra l'andamento della  $\sigma_{max}$  e della  $\sigma_{min}$ : come si evince, oltre il 70% delle travi non è soggetto ad oltre 150 MPa (sempre circa metà dei 275 MPa della resistenza meccanica), mentre sia il picco massimo a trazione che a compressione raggiungono i 270 MPa, appunto il 98% circa della resistenza allo SLU. Inoltre, visualizzando il numero totale di elementi soggetti solo a trazione e solo a compressione nei due grafici, si può notare che circa coincide, confermando ancora una volta la parzializzazione delle sezioni agenti e, quindi, l'andamento della voce *utilization* all'interno del visual editing governato dal componente *Beam View*.

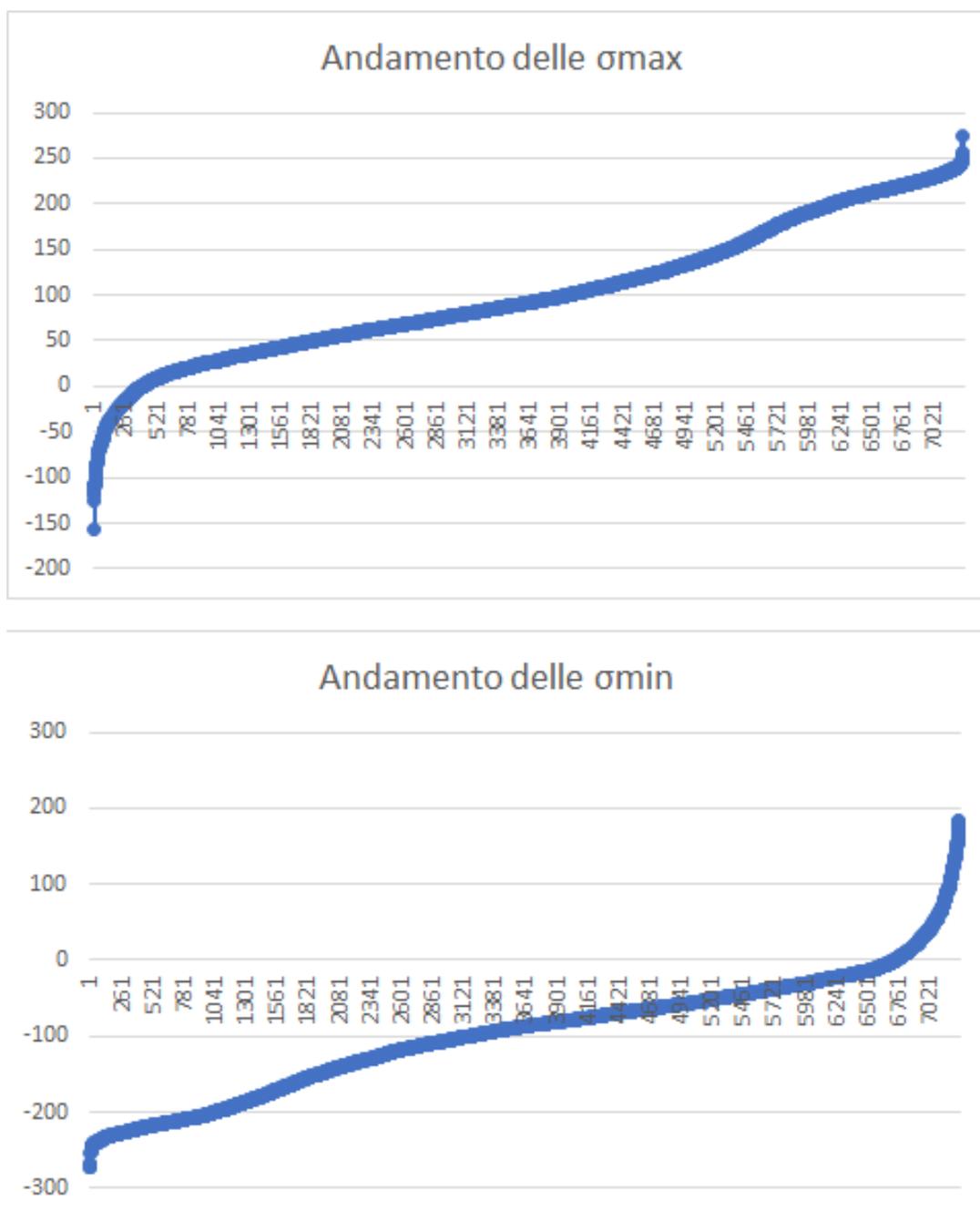


Fig. 5.79 - Grafico dell'andamento della  $\sigma_{max}$  e della  $\sigma_{min}$

In seguito, come per i casi precedenti vengono posti i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione utilizzati dal solutore per determinare le tensioni attraverso l'equazione di Navier. Essi risultano coerenti

ti a quanto finora riportato. Ma prima, un breve inciso sull'instabilità al carico di punta: interrogando nuovamente il componente *Disassemble Element* è possibile sapere se l'ottimizzatore ha prodotto la soluzione tenendone conto per tutti gli elementi. La risposta è affermativa e, a favore di ciò, si possono maneggiare e visualizzare le liste delle lunghezze libere di inflessione in direzione y, z e torsionale: a differenza dei casi precedenti, le dimensioni delle travi cambiano, non sono uguali fra di loro e coerentemente anche le lunghezze libere di inflessione sono differenti. La voce *III*, infatti, dimostra l'assenza di azioni che inducono effetti del second'ordine.

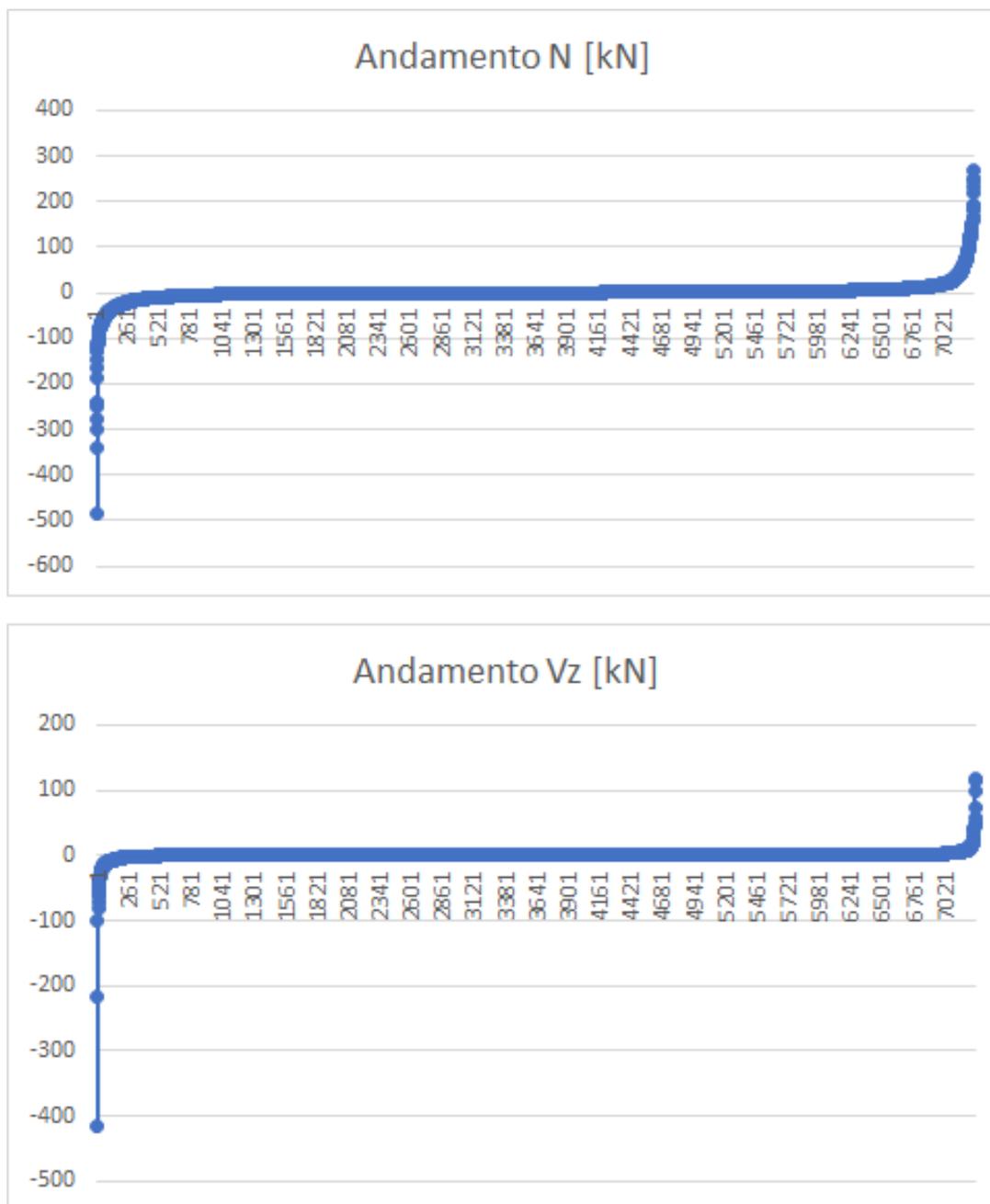


Fig. 5.80 - Grafico dell'andamento della forza di assiale e della forza di taglio  $V_y$

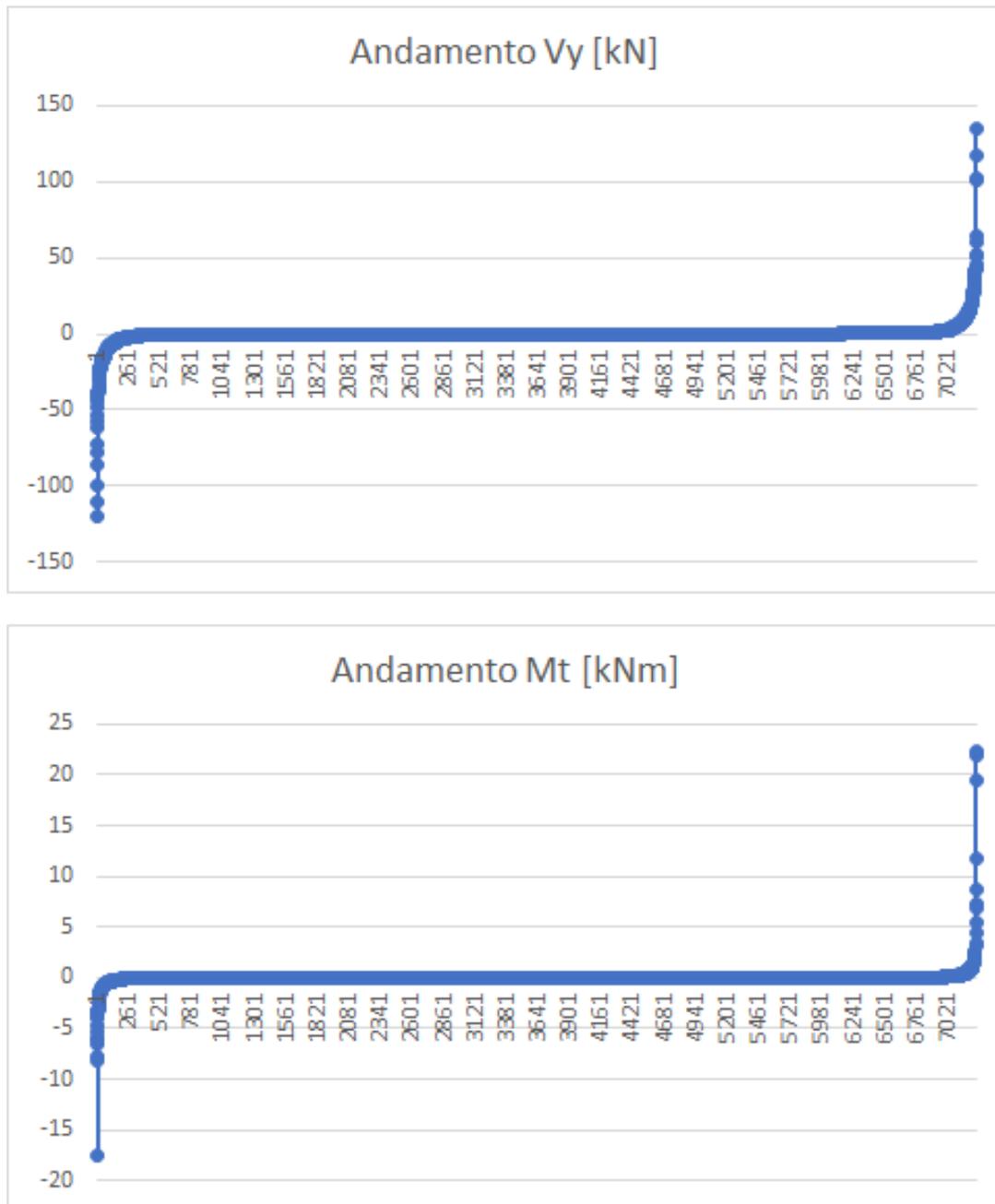


Fig. 5.81 - Grafico dell'andamento della forza di taglio  $V_y$  e del momento torcente

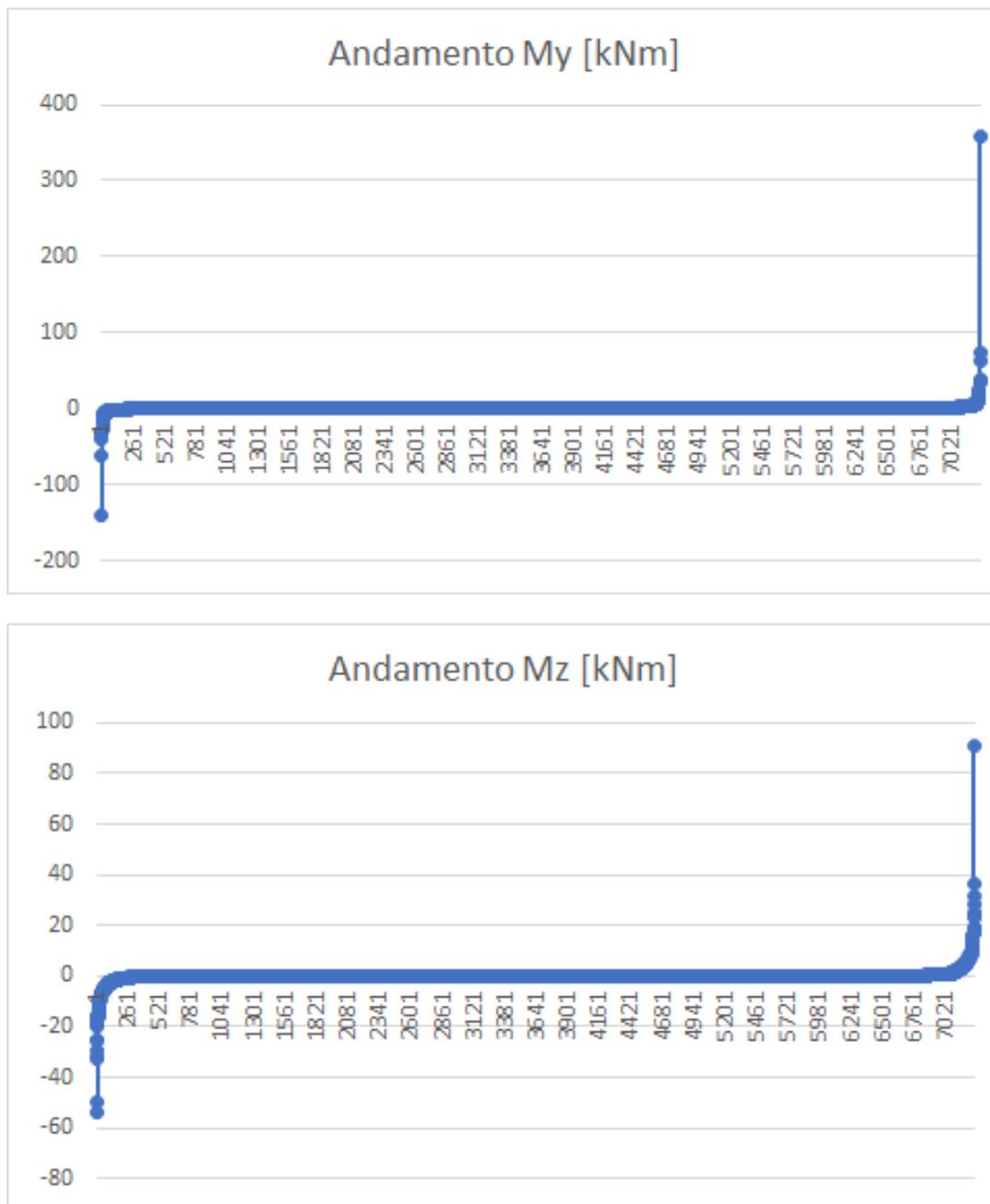


Fig. 5.82 - Grafico dell'andamento del momento My e Mz

Disassemblando il modello strutturale è possibile avere informazioni anche in questo caso nei confronti della lunghezza totale del materiale utilizzato e delle sezioni trasversali computate. La prima è pari a 6158.84 m, meno del caso precedente e poco meno della metà del caso dei cubi. La seconda invece è riportata nella figura 5.82: l'istogramma riporta le 47 sezioni trasversali per i 7267 elementi. Per questioni di visibilità, per quanto riguarda la famiglia CHS 21.3x2.3 il valore reale di elementi è 5177. Nella stessa figura viene riportato anche il rispettivo visual editing.

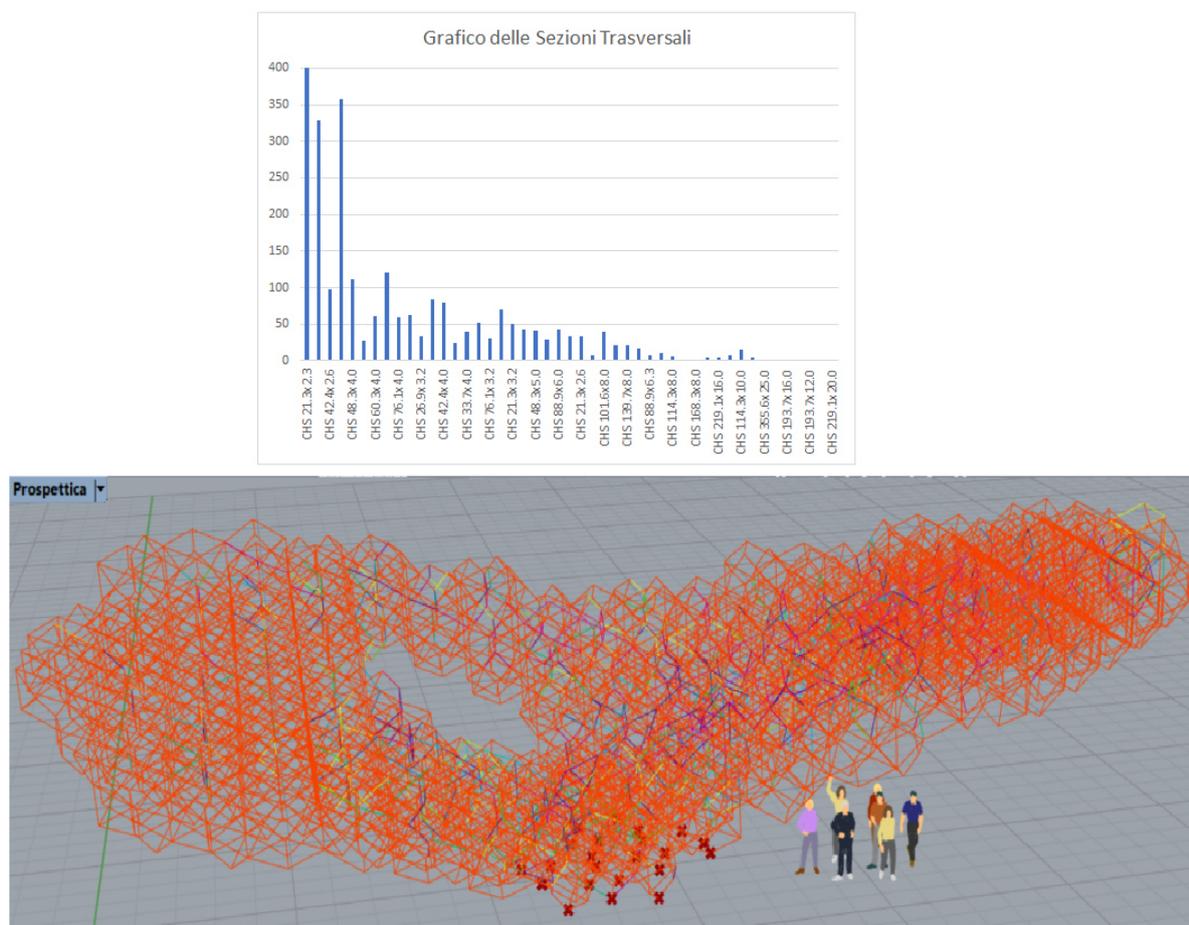


Fig. 5.83 - Istogramma delle sezioni trasversali utilizzate e Visual Editing delle sezioni trasversali nella struttura finale dovuta all'aggregazione dell'endecaedro bisimmetrico

A conclusione dell'intero capitolo, infine, vengono riportate le deformate modali dell'ultima struttura. Come già riportato, la struttura nonostante un numero di vincoli inferiore, grazie alle sue proprietà geometriche, è molto più rigida delle precedenti. La frequenza principale è pari a 1.82 Hz, quindi, il periodo fondamentale è 0.55 s. La massa modale partecipante al primo modo di vibrare resta circa il 3%, ossia 519 kg. L'andamento delle deformate non cambia: il primo modo si muove lungo y, il secondo si muove lungo x e il terzo è torcente, come riportato nella figura 5.84.

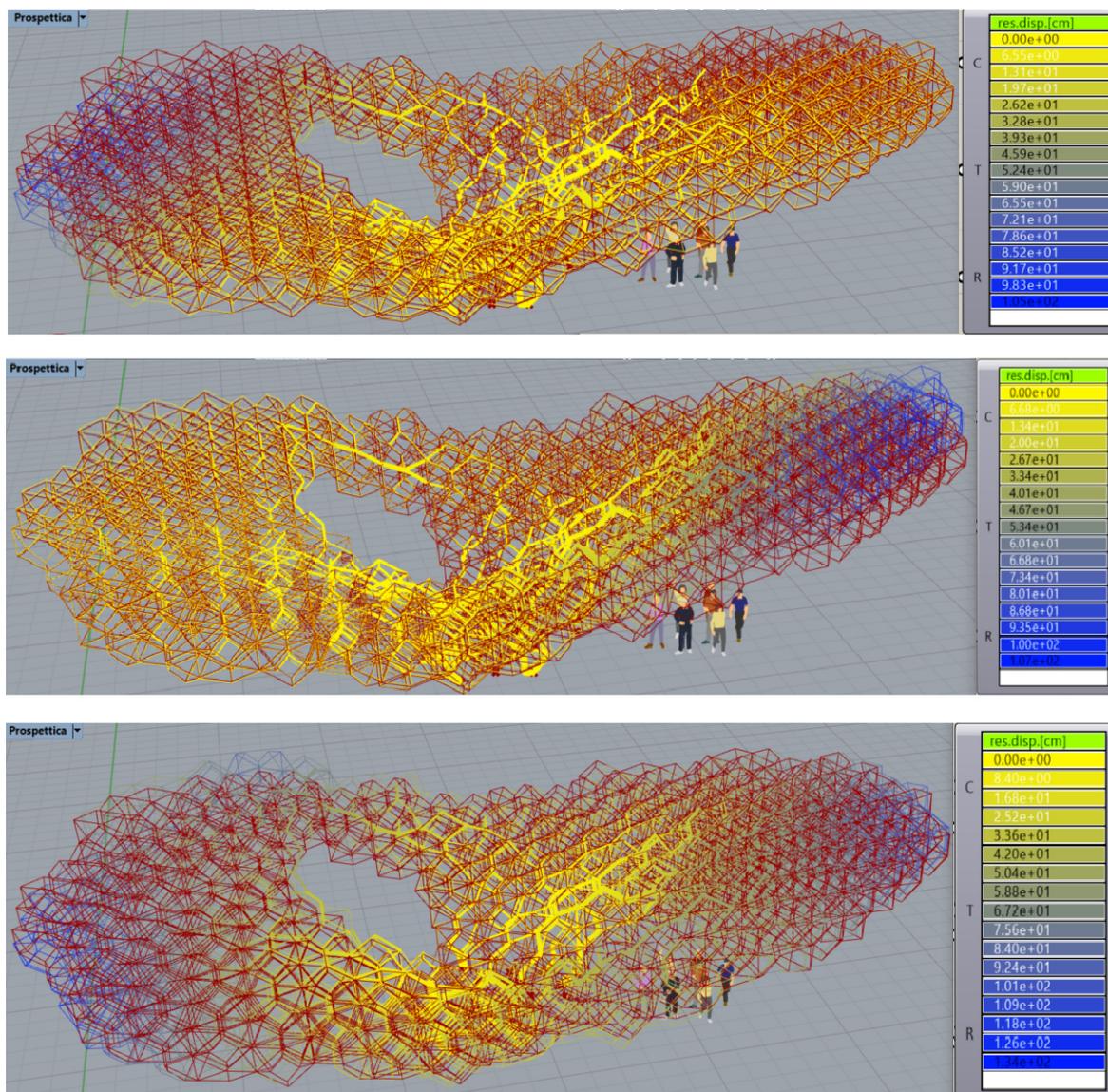
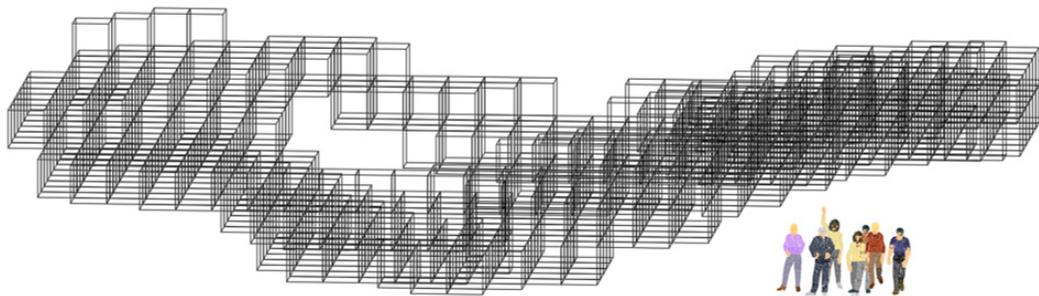


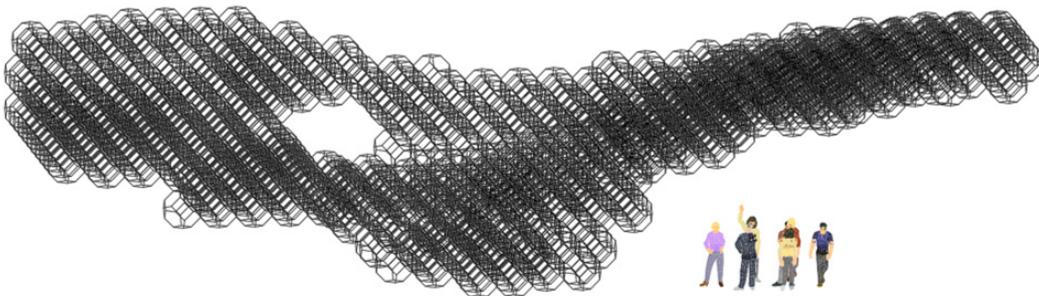
Fig. 5.84 - Visual Editing delle prime tre deformate modali della struttura dovuta all'aggiungimento dell'endecaedro bisimmetrico

## Capitolo 6

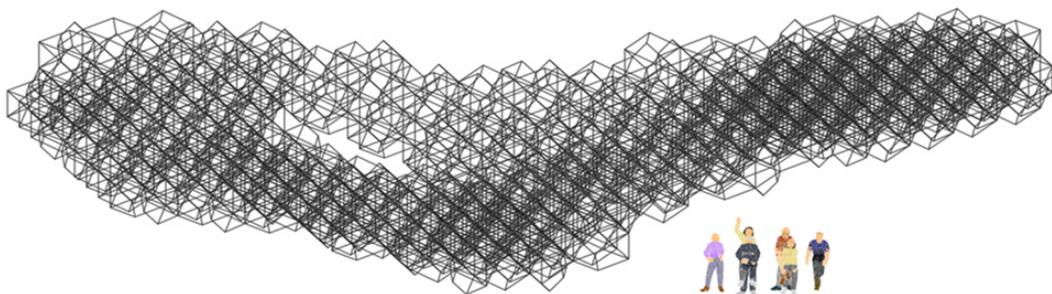
# Conclusioni



*Fig. 6.1 - Struttura dovuta all'aggregazione del cubo*



*Fig. 6.2 - Struttura dovuta all'aggregazione dell'ottaedro troncato*



*Fig. 6.3 - Struttura dovuta all'aggregazione dell'endecaedro bisimmetrico*

In conclusione a tale percorso è necessario confrontare tutti i dati e determinare la migliore struttura, sebbene sia già noto il possibile candidato dal paragrafo 5.5.4. L'algoritmo, si è visto, può essere riutilizzato senza alcun tipo di variazione per valutare tutte le possibili combinazioni di carico e le rispettive risposte strutturali. Vengono proposte in seguito delle tabelle riassuntive, che contengono tutti i dati necessari, estrapolati dai vari componenti delle diverse FEA.

Il primo caso riguarda il solo peso proprio. Poiché si è notato che l'*optimize cross section* accettava e proponeva spostamenti probabilmente molto dispendiosi in termini estetici e di SLE, si è deciso di eseguire due tipologie di analisi differenti: nel primo caso, appunto, valutare il massimo sfruttamento della resistenza (massimizzando, così, la richiesta di SLU); nel secondo imponendo un valore di massimo spostamento, affinché risultasse una condizione più stringente per tutti in termini di SLE. Come si poteva immaginare, anche nel caso del solo peso proprio agente la migliore soluzione è la struttura prodotta dall'endecaedro bisimmetrico. Nel primo caso è l'unica a garantire il 99% allo SLU e un abbassamento massimo non superiore ai 25 cm; nel secondo (condizione non molto lontana dal risultato già ottenuto) ha confermato la migliore risposta strutturale con una richiesta del 85% sempre in termini di resistenza. Inoltre, nonostante in termini di metri di materiale il cubo sembri la soluzione meno costosa, valutando anche il numero di vincoli necessari al suolo, anche in termini di costi probabilmente l'endecaedro bisimmetrico è il migliore candidato.

PESO PROPRIO												
Max Utilization												
Poliedri	N° Nodi	N° Elementi	Lunghezza	Altezza	N° Supports	N° Cross Sections	Displacement	SLE	SLU	Mass	Freqrif	Trif
Cubo	1414	3422	3422 m	6.4 m	45	30	62 cm	0.010 %	0.99 %	4823 kg	0.52 Hz	1.93 s
Ottaedro	11978	21638	7650 m	8 m	112	29	59 cm	0.007 %	0.99 %	9896 kg	0.41 Hz	2.53 s
Endecaedro	2733	7261	6153 m	7 m	22	23	32 cm	0.005 %	0.99 %	7131 kg	0.94 Hz	1.06 s
Same Displacement												
Poliedri	N° Nodi	N° Elementi	Lunghezza	Altezza	N° Supports	N° Cross Sections	Displacement	SLE	SLU	Mass	Freqrif	Trif
Cubo	1414	3422	3422 m	6.4 m	45	45	18 cm	0.003 %	0.5 %	7710 kg	0.82 Hz	1.23 s
Ottaedro	11978	21638	7650 m	8 m	112	41	19 cm	0.002 %	0.55 %	14800 kg	0.58 Hz	1.72 s
Endecaedro	2733	7261	6153 m	7 m	22	31	20 cm	0.003 %	0.85 %	7966 kg	1.2 Hz	0.83 s

Tab. 6.1 - Caratteristiche delle strutture, valutando il solo peso proprio

Dall'analisi delle sole azioni orizzontali come forze agenti, si è deciso di scartare una soluzione che richiedesse il più piccolo spostamento, in quanto dopo i primi tentativi nei confronti di una specifica direzione, si è notato che per taluni poliedri gli spostamenti erano già troppo piccoli e probabilmente la soluzione ottenuta dal solutore rispecchiava davvero l'ottimizzazione eccelsa delle richieste sia dello SLU che dello SLE. La tabella 6.2 mostra le quattro differenti FEA, svolte a seconda della direzione della forza orizzontale. Questa volta è molto difficile stabilire quale poliedro sia migliore fra l'ottaedro troncato e l'endecaedro bisimmetrico, almeno in termini strutturali. Infatti, entrambe le strutture garantiscono il minor spostamento possibile a fronte di una altissima capacità in termini di resistenza del materiale (che si assesta attorno al 98%, condizione impensabile calcolando da sé). La soluzione dovuta all'aggregazione dell'ottaedro, tuttavia, è meno rigida rispetto al caso dell'endecaedro, nonostante i ben 112 vincoli al suolo contrastati dagli appena 22 della seconda soluzione. In termini di costi, sebbene il cubo resti sempre la migliore soluzione in termini di quantità di materiale, considerando i vincoli, il numero di sezioni trasversali differenti e le necessità strutturali finora esposte, probabilmente ancora una volta il miglior poliedro space filler resta l'endecaedro bisimmetrico.

VENTO (Y)												
Max Utilization												
Poliedri	N° Nodi	N° Elementi	Lunghezza	Altezza	N° Supports	N° Cross Sections	Displacement	SLE	SLU	Mass	Freqrif	Trif
Cubo	1414	3422	3422 m	6.4 m	45	46	24 cm	0.004 %	0.99 %	8808 kg	0.6 Hz	1.67 s
Ottaedro	11978	21638	7650 m	8 m	112	59	13 cm	0.002 %	0.97 %	31611 kg	0.97 Hz	1.03 s
Endecaedro	2733	7261	6153 m	7 m	22	45	11.4 cm	0.002 %	0.98 %	14878 kg	1.5 Hz	0.67 s
VENTO (-Y)												
Max Utilization												
Poliedri	N° Nodi	N° Elementi	Lunghezza	Altezza	N° Supports	N° Cross Sections	Displacement	SLE	SLU	Mass	Freqrif	Trif
Cubo	1414	3422	3422 m	6.4 m	45	47	23 cm	0.004 %	0.97 %	9023 kg	0.6 Hz	1.67 s
Ottaedro	11978	21638	7650 m	8 m	112	59	13 cm	0.002 %	0.92 %	31607 kg	0.97 Hz	1.03 s
Endecaedro	2733	7261	6153 m	7 m	22	44	11.5 cm	0.002 %	0.97 %	14921 kg	1.5 Hz	0.65 s
VENTO (X)												
Max Utilization												
Poliedri	N° Nodi	N° Elementi	Lunghezza	Altezza	N° Supports	N° Cross Sections	Displacement	SLE	SLU	Mass	Freqrif	Trif
Cubo	1414	3422	3422 m	6.4 m	45	48	43 cm	0.007 %	0.95 %	8224 kg	0.82 Hz	1.22 s
Ottaedro	11978	21638	7650 m	8 m	112	61	21 cm	0.003 %	0.99 %	26849 kg	1.23 Hz	0.81 s
Endecaedro	2733	7261	6153 m	7 m	22	45	18 cm	0.003 %	0.98 %	14165 kg	1.8 Hz	0.56 s
VENTO (-X)												
Max Utilization												
Poliedri	N° Nodi	N° Elementi	Lunghezza	Altezza	N° Supports	N° Cross Sections	Displacement	SLE	SLU	Mass	Freqrif	Trif
Cubo	1414	3422	3422 m	6.4 m	45	44	44 cm	0.007 %	0.93 %	8018 kg	0.81 Hz	1.23 s
Ottaedro	11978	21638	7650 m	8 m	112	61	21 cm	0.003 %	0.96 %	26875 kg	1.2 Hz	0.83 s
Endecaedro	2733	7261	6153 m	7 m	45	45	18 cm	0.003 %	0.98 %	14182 kg	1.83 Hz	0.54 s

Tab. 6.2 - Caratteristiche delle strutture, valutando agente la sola azione orizzontale in tutte le quattro direzioni possibili

Terza e ultima tabella, la 6.3 mostra in dettaglio i risultati della FEA riguardo la combinazione dei carichi agenti. La peggiore è quella in direzione  $\pm x$ , in quanto il vento maggiore le reazioni dovute al peso proprio lungo il lato meno rigido della struttura. Le azioni lungo la direzione  $+x$ , sono più importanti (motivo per cui sono state trattate nel capitolo 5) a causa dei bracci e delle condizioni geometriche delle tre soluzioni (solo l'endecaedro, vedeva il lato destro della stessa elevazione circa del lato sinistro). Non a caso lungo la direzione  $\pm y$  le soluzioni sono più o meno simili in termini di capacità di resistenza e spostamenti massimo. Tale condizione è evidenziata anche da un numero simile di famiglie di sezioni trasversali utilizzate, che rendono la rigidezza anche confrontabile. Tuttavia, in direzione  $x$ , le cose cambiano drasticamente. Gli spostamenti massimi aumentano per tutte e tre le soluzioni, diminuisce la capacità allo SLU (nel caso dell'ottaedro si raggiunge addirittura un -10%) e a differenza della struttura determinata dall'aggregazione del cubo che diventa più flessibile, le restanti, come nei casi di carico precedenti, diventano più rigide (in realtà, il periodo dipendendo dal rapporto massa su rigidezza diminuisce in quanto diminuisce la massa delle due soluzioni strutturali). La scelta, come sempre, necessita una valutazione economica e sebbene in termini di materiale e massa totale il cubo resta la soluzione migliore, tenendo conto di quanto scritto finora, si conferma l'endecaedro bisimmetrico la migliore soluzione possibile, in termini geometrici, economici, strutturali e, perché no, anche estetici. Si sarebbe potuto tener conto anche del tempo macchina necessario al processamento delle varie soluzioni. Nella maggior parte dei casi, si è cercato di utilizzare e garantire lo stesso numero di iterazioni per lo stesso numero di punti campione, rispettivamente 30, 20. Ma purtroppo non tutte sono riuscite a garantire la stabilità in tale campione, soprattutto per il caso dell'ottaedro bisimmetrico che in termini quantitativi era il più denso di elementi, richiedendo un tempo di calcolo maggiore (si tratta sempre dell'ordine di uno, due minuti).

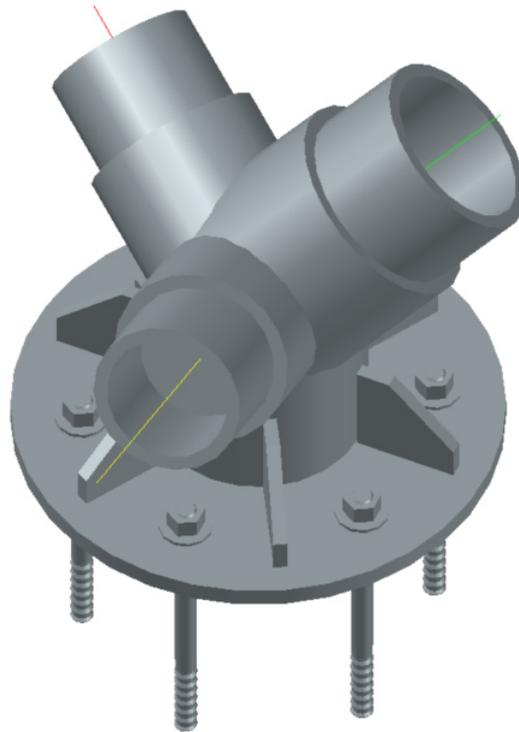
VENTO (Y) + PESO PROPRIO												
Max Utilization												
Poliedri	N° Nodi	N° Elementi	Lunghezza	Altezza	N° Supports	N° Cross Sections	Displacement	SLE	SLU	Mass	Freqrif	Trif
Cubo	1414	3422	3422 m	6.4 m	45	46	29 cm	0.005 %	0.98 %	8715 kg	0.51 Hz	1.95 s
Ottaedro	11978	21638	7650 m	8 m	112	58	19 cm	0.002 %	0.98 %	32473 kg	0.87 Hz	1.15 s
Endecaedro	2733	7261	6153 m	7 m	22	47	12 cm	0.002 %	0.98 %	15334 kg	1.57 Hz	0.6 s
VENTO (-Y) + PESO PROPRIO												
Max Utilization												
Poliedri	N° Nodi	N° Elementi	Lunghezza	Altezza	N° Supports	N° Cross Sections	Displacement	SLE	SLU	Mass	Freqrif	Trif
Cubo	1414	3422	3422 m	6.4 m	45	47	30 cm	0.005 %	0.98 %	9650 kg	0.84 Hz	1.19 s
Ottaedro	11978	21638	7650 m	8 m	112	61	10 cm	0.001 %	0.98 %	31656 kg	0.96 Hz	1.04 s
Endecaedro	2733	7261	6153 m	7 m	22	46	12 cm	0.002 %	0.97 %	14658 kg	1.54 Hz	0.67 s
VENTO (X) + PESO PROPRIO												
Max Utilization												
Poliedri	N° Nodi	N° Elementi	Lunghezza	Altezza	N° Supports	N° Cross Sections	Displacement	SLE	SLU	Mass	Freqrif	Trif
Cubo	1414	3422	3422 m	6.4 m	45	42	48 cm	0.008 %	0.95 %	8476 kg	0.74 Hz	1.35 s
Ottaedro	11978	21638	7650 m	8 m	112	61	23 cm	0.003 %	0.9 %	28185 kg	1.1 Hz	0.91 s
Endecaedro	2733	7261	6153 m	7 m	22	48	18 cm	0.003 %	0.98 %	14321 kg	1.81 Hz	0.55 s
VENTO (-X) + PESO PROPRIO												
Max Utilization												
Poliedri	N° Nodi	N° Elementi	Lunghezza	Altezza	N° Supports	N° Cross Sections	Displacement	SLE	SLU	Mass	Freqrif	Trif
Cubo	1414	3422	3422 m	6.4 m	45	43	36 cm	0.006 %	0.97 %	7996 kg	0.59 Hz	1.7 s
Ottaedro	11978	21638	7650 m	8 m	112	59	24 cm	0.003 %	0.97 %	27436 kg	1.43 Hz	0.7 s
Endecaedro	2733	7261	6153 m	7 m	22	46	20 cm	0.003 %	0.96 %	13684 kg	1.6 Hz	0.62 s

Tab. 6.3 - Caratteristiche delle tre strutture, valutando la combinazione dell'azione orizzontale in tutte le quattro direzioni possibili e il peso proprio

Prima di concludere, acclarato che la soluzione migliore è la struttura dovuta all'aggregazione delle *barchette* dell'endecaedro bisimmetrico, è importante soffermarsi sui nodi di giunzione fra i vari tubi. L'utilizzo delle sezioni trasversali differenti rende la verifica più che complessa, rognosa. E' interessante, pertanto, proporre qualitativamente delle soluzioni, che tengano conto ancora dei canoni strutturali, ma anche estetici e soprattutto economici. Nel paragrafo successivo sono proposti gli elaborati grafici delle due tipologie di soluzione di nodo, relative alle sezioni trasversali determinate dal caso di carico dovuto alla combinazione dell'azione orizzontale +x e del peso proprio.

## 6.1 CAD del Nodo

Con sezioni trasversali, talvolta, molto differenti tra di loro all'interno della stessa microstruttura e diametri elevati, pensare ad una soluzione che contempra piastre e/o elementi d'unione simili è abbastanza scomodo, soprattutto se si pensa al possibile montaggio delle parti della struttura. La soluzione di nodo proposta è il *cast node*: un elemento di giunzione solitamente in acciaio fuso, le cui qualità e caratteristiche vengono scelte a seconda dell'ambiente esterno alla struttura e della tipologia di tubi utilizzati per evitare la corrosione. Viene prodotto direttamente in officina garantendo costi mantenuti e praticità, dal momento che in questo modo si prevede in situ uno specifico ordine di montaggio a seconda degli elementi. In termini estetici sono perfetti: le sezioni trasversali nella loro diversità, (a differenza di quanto riportato nell'ultimo paragrafo del capitolo 5, in un'ulteriore fase progettuale, qui trascurata, verrebbero quantomeno mediate le grandi differenze di diametro fra i vari tubi), si comportano davvero come i rami di un albero, con i tubi dalle dimensioni maggiori che sostengono e permettono l'estensione oltre che l'elevazione della struttura. In termini strutturali, sicuramente è necessario che siano adeguatamente progettati e verificati, ma risultano una scelta interessante anche perché già in una fase preliminare di intuizione statica, è possibile pensare all'eventuale eccentricità dei bracci per garantire, così, un'adeguata risposta delle travi al momento secondario e alle forze di taglio. Il punto fondamentale è, quindi, determinare in che modo il *cast node* si collega alle travi. Escludendo a priori la saldatura, che impedirebbe a tale padiglione fieristico di essere una struttura montabile-smontabile, le due soluzioni più appetibili sono: la filettatura e la bullonatura.



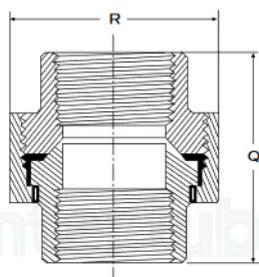
*Fig. 6.4 - Elaborazione CAD di un vincolo al suolo della struttura, dovuta all'aggregazione dell'endecaedro bisimmetrico, nella soluzione di giunzione per filettatura*

La prima è probabilmente la soluzione meno economica, ma la più comoda in termini di montaggio. Le dimensioni dei tubi, non superano i 35 cm di diametro, risultando facili da maneggiare. Inoltre, per favorire ancor più la praticità del montaggio è stato previsto l'utilizzo di giunti a tre pezzi femmina-femmina nella mezzera delle travi, impedendo in questo modo che il montaggio di un nodo implichi lo smontaggio del nodo opposto.



*Fig. 6.5 - Fotografie personali di un giunto tre pezzi e delle sue parti costituenti*

Tuttavia, questi giunti limitano l'applicazione della filettatura: essi rispettano la norma *ANSI B16.11*, come mostrato nella figura 6.6 e non vengono utilizzati solitamente per tubi, le cui dimensioni superano i 4", cosa che invece accade nel caso seguente. Il fatto che non siano presenti nella lista, non vuol dire che non possano essere utilizzati, ma che le dimensioni delle parti e, quindi i costi, variano non in maniera standard, a seconda del produttore e della commessa. La soluzione diventa in quel caso ancora meno economica.



### GIUNTO TRE PEZZI FEMMINA-FEMMINA

ANSI B16.11  
3000 - 6000 LBS

### FEMALE-FEMALE UNIONS

ANSI B16.11  
3000 - 6000 LBS

Diam. nominale ND	3000				6000			
	Q <sup>(1)</sup>		R <sup>(1)</sup>		Q <sup>(1)</sup>		R <sup>(1)</sup>	
	mm	inches	mm	inches	mm	inches	mm	inches
1/4"	42.5	1.67	36.0	1.42	54.0	2.13	46.0	1.81
3/8"	47.5	1.87	41.0	1.62	57.0	2.25	51.0	2.00
1/2"	52.0	2.05	46.0	1.81	69.0	2.72	60.0	2.36
3/4"	57.0	2.25	56.0	2.20	72.0	2.84	72.0	2.84
1"	63.0	2.48	65.0	2.56	80.0	3.15	80.0	3.15
1 1/4"	68.0	2.76	80.0	3.07	89.0	3.50	94.0	3.70
1 1/2"	78.0	3.07	88.0	3.39	108.0	4.25	100.0	3.94
2"	91.0	3.50	105.0	4.06	114.0	4.49	122.0	4.80
2 1/2"	120.0	4.49	122.0	4.80	130.0	5.13	144.0	5.67
3"	140.0	5.12	144.0	5.67	150.0	5.91	180.0	7.09
4"	148.0	5.91	200.0	7.09				

<sup>(1)</sup> Le dimensioni non elencate nell'ANSI B 16.11-1980 e BS 3799-1974 possono variare a seconda del produttore.  
Dimensions not listed in ANSI B 16.11-1980 and BS 3799-1974 may vary according to the manufacturer.

Nota: i dati tecnici su questo catalogo sono indicativi e non impegnativi / Note: the technical data reported in this catalogue is proximate and not binding.

Data di emissione: 2014 Revisione: 01 / Date of issue: 2014 Revision: 01

Copyright © Intertubi S.p.a. Tutti i diritti sono riservati / Copyright © Intertubi S.p.a. All rights reserved

Fig. 6.6 - Tabella ANSI B16.11 per giunto tre pezzi femmina femmina, estratta dal sito di Intertubi S.p.a

Strutturalmente la soluzione proposta è molto valida: sebbene la filettatura riduca l'area reagente, si evitano fori, con conseguenti concentrazioni di tensioni e valutazioni sul pitting e sulla galvanizzazione. La figura 6.4, mostra anche una piastra di fondazione tipo: per l'ancoraggio al suolo possono essere utilizzati dei tirafondi tipo Hilti oppure degli ancoranti ad alte prestazioni FHA-B o FHA-H a seconda della tipologia di base su cui poggia la struttura. Le prime sono già più che sufficienti: i carichi agenti non sono elevati, pertanto, risultano in grado di trasferire le azioni di trazione, compressione e taglio alla base, ma necessitano di un getto di calcestruzzo, per essere adeguatamente annegate all'interno (le grandi fiere prevedono solitamente la progettazione della pavimentazione ad ogni nuovo evento, si pensi all'Oktoberfest a Monaco di Baviera). La seconda, più costosa in quanto più idonea per prestazioni elevate, come i carichi sismici, è semplice da fissare, mediante avvitatori muniti di chiave dinamometrica.



*Fig. 6.7 - A sinistra Ancoranti ad Alte Prestazioni Hilti, a destra esempio di tirafondi all'interno della rete elettrosaldata prima del getto di calcestruzzo*

La seconda soluzione, invece, è riprodotta nella figura 6.8 e rappresenta un nodo tipo: indipendentemente dal diametro degli elementi è la più economica da prevedere e utilizzare. Permette di astenersi dal giunto tre pezzi o eventuali manicotti destra/sinistra e di salvaguardare abbondantemente l'area reagente dei tubi. Tuttavia, necessita di adeguata progettazione: bisogna verificare il numero dei bulloni a seconda delle azioni taglianti e con essi la rispettiva resistenza. Inoltre, è necessario valutare la galvanizzazione, soprattutto in caso di ambienti aperti e a contatto con l'acqua.



*Fig. 6.8 - Elaborazione CAD di un nodo tipo della struttura, dovuta all'aggregazione dell'endecaedro bisimmetrico, nella soluzione di giunzione con bullonatura*

La progettazione del caso studio volge così al termine, come d'altronde anche il percorso intrapreso, metafora del mio personale percorso accademico. Non è semplice dimostrare l'oceano di opportunità che la tecnologia ci offre. Il computer non è un'alternativa all'ingegnere, ma un sottoposto a cui insegnare la progettazione, per spingersi al massimo nei confronti strutturali e soprattutto estetici. Qualcuno ha detto: «*La vita comincia dove finisce la tua comfort zone*», è l'augurio che rivolgo a me, ma che rivolgo a chiunque abbia l'onore di svolgere questa nobile professione, che non è un semplice mestiere ma quasi una missione, coniugare efficacemente Scienza, Arte e Società.

# Bibliografia

## *Il Ruolo dell'Ingegnere Strutturista:*

- [1] *De Architectura*, Marco Vitruvio Pollione, Edizioni Studio Tesi, 2008;
  - [2] *The Tower and the Bridge: The New Art of Structural Engineering*, David P. Billington, Princeton Univ Pr., 1985;
  - [3] *The Chicago School of Architecture: A History of Commercial and Public Building in the Chicago Area, 1875-1925*, Carl. W. Condit, University of Chicago Press, 1964;
  - *Maillart's Practices for Structural Design*, Denis Zastavni, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 2012;
  - [4] *Space, time and architecture: the growth of a new tradition*, Sigfried Giedion, Harvard University Press, 1967;
  - [5] *Quand les cathédrales étaient blanches: voyage au pays des timides*, Le Corbusier, Editions Denoël, 1983;
  - [6] *Un creatore del nostro tempo*, O. Ernes Hauser, Selezione dal Reader's Digest, aprile 1964;
  - *Pier Luigi Nervi e l'architettura strutturale*, Lucio Valerio, Barbera Piero, Ostilio Rossi, Paolo Desideri e Giorgio Muratore, Dipartimento di Architettura e progetto Sapienza Università di Roma, EdilStampa srl, 2011;
  - *Capolavori in miniatura, Pier Luigi Nervi la modellazione strutturale*, Gabriele Neri, Mendrisio Academy Press, 2014;
  - *Scienza o arte del costruire? Caratteristiche e possibilità del cemento armato*, Pier Luigi Nervi, Edizioni della Bussola, 1945;
  - *El lenguaje Arquitectónico*, Pier Luigi Nervi, Ed. Ministerio dell'Educazione-Università di Buenos Aires, 1951.
  - *Costruire correttamente: caratteristiche e possibilità delle strutture cementizie armate*, Pier Luigi Nervi, Hoepli, Milano 1955 (II ed. rivista e ampliata, Milano 1965);
  - *Aesthetics and Technology in Building: The Charles Eliot Norton Lectures (1961-1962)*, Pier Luigi Nervi, traduzione dall'italiano di R. Einaudi, Harvard University Press, 1965;
  - [7] *AAD, Algorithms-aided design: parametric strategies using Grasshopper*, Arturo Tedeschi, Le Pen-seur Publisher, 2014;
- sitologia:*
- Enciclopedia Treccani, *Il Gotico*, <https://www.treccani.it/vocabolario/gotico/>
- Documentari:*
- *Art Night, episodio 22*, 13 Marzo 2020 - Alessio Aversa introduce: *Incontri con Pier Luigi Nervi* a cura di Gustavo Favero, con Tullia Iori, Rai 5.
  - *La Ricerca della Forma. Il genio di Sergio Musmeci*, effenove slrs, 2020.

**Space Filling Polyhedra:**

- *Il Saggiatore*, Galileo Galilei, Feltrinelli, 2015;
  - [8] *Forme simmetria topologia*, Maria Dedò, Zanichelli, 2000;
  - [9] *Space Structures*, Arthur L. Loeb, Birkhäuser Boston; 1st Edition (November 1, 1991);
  - [10] *Structure in Nature is a Strategy for Design*, Peter Pearce, MIT Press, 1978;
- sitologia:
- Problema di Lord Kelvin, <http://www.bitman.name/math/article/1749>;
  - Wikipedia : SolidiPlatonici, [https://it.wikipedia.org/wiki/Solido\\_platonico](https://it.wikipedia.org/wiki/Solido_platonico);
  - Wikipedia : SolidiArchimede, [https://it.wikipedia.org/wiki/Solido\\_archimedeo](https://it.wikipedia.org/wiki/Solido_archimedeo);
  - Wikipedia : SolidiCatalan, [https://it.wikipedia.org/wiki/Solido\\_aicatalan](https://it.wikipedia.org/wiki/Solido_aicatalan);
  - Wikipedia : PoliedriKeplero – Poinot, [https://it.wikipedia.org/wiki/Poliedro\\_aikeplero\\_Poinot](https://it.wikipedia.org/wiki/Poliedro_aikeplero_Poinot);
  - Wikipedia : StellaOctangula, [https://it.wikipedia.org/wiki/Stella\\_octangula](https://it.wikipedia.org/wiki/Stella_octangula);
  - Wikipedia : SolidiJohnson, [https://it.wikipedia.org/wiki/Solido\\_aijohnson](https://it.wikipedia.org/wiki/Solido_aijohnson);
  - Wikipedia : Tassellazione dello spazio, [https://it.wikipedia.org/wiki/Tassellazione\\_dello\\_spazio](https://it.wikipedia.org/wiki/Tassellazione_dello_spazio);
  - Wikipedia : Strutture di Weaire – Phelan, [https://it.wikipedia.org/wiki/Struttura\\_aieweaire\\_Phelan](https://it.wikipedia.org/wiki/Struttura_aieweaire_Phelan) – [http://www.labfrancoconti.it/public/lab\\_onti/LAB/DOCUMENTAZIONE/08](http://www.labfrancoconti.it/public/lab_onti/LAB/DOCUMENTAZIONE/08)
  - *Le tassellazioni dello spazio.pdf*;
  - *Five Space-Filling Polyhedra*, [http://www.steelpillow.com/polyhedra/five\\_s/f/five.html](http://www.steelpillow.com/polyhedra/five_s/f/five.html).

**Introduzione all'analisi:**

- [11] *Evolutionary Structural Optimization in Shells Design*, Mario Sassone e Alberto Pugnale, Department of Structural and Geotechnical Engineering Politecnico di Torino, 2007;
- *AAD, Algorithms-aided design: parametric strategies using Grasshopper*, Arturo Tedeschi, Le Penseur Publisher, 2014;

- Appunti di Scienza delle Costruzioni II, Prof. Giuseppe Andrea Ferro;

sitologia:

- Wikipedia, NURBS: <https://it.wikipedia.org/wiki/NURBS>;
- Grasshopper: <https://www.rhino3d.com/it/6/new/grasshopper>;
- Karamba 3D: <https://www.karamba3d.com/>;

Video:

- Arturo Tedeschi, <https://www.youtube.com/watch?v=lgf8QlssdrQ&t=4948s>;
- Andrea Rossi, <https://www.youtube.com/watch?v=IqH2xHw4Y4&t=800s>;
- Marco Pellegrino, [https://www.facebook.com/watch/live/?v=248161886426534&ref=watch\\_permalink](https://www.facebook.com/watch/live/?v=248161886426534&ref=watch_permalink).

**Caso Studio:**

- Appunti di *Bridges Design*, Prof. Luca Giordano;
- *Five Space-Filling Polyhedra* Appendix B, G. Inghald, Cambridge University Press, 2016;
- *EN 1992-1-1: Eurocode 2*;
- *EN 1993-1-1: Eurocode 3*;

sitologia:

- Stuttgart 21, <https://www.railwaypro.com/wp/stuttgart-21-railway-station-project-costs-surpass-eur-8-billion/>

Video:

- Andrea Rossi, [https://www.youtube.com/watch?v=bJOzr1O\\_bbg&t=645s](https://www.youtube.com/watch?v=bJOzr1O_bbg&t=645s).

**Conclusioni:**

*sitologia:*

- <https://www.castconnex.com/blog/how-to-specify-cast-steel-tree-nodes>;
- ANSI B16.11, <http://www.intertubi.it/files/File/raccfil.pdf>;
- Ancoranti, <https://www.fischeritalia.it/>;
- Tirafondi, <https://www.hilti.it>.

**Strumenti:**

- Scrittura: Text Studio;
  - Progettazione: Rhinoceros 6;
  - Aggregazione: Wasp, Wasp++;
  - Calcolo FEM: Karamba 3D;
  - Gestione e creazione grafici: Excel 2018;
  - Elaborazione Grafica: Autodesk AUTOCAD 2018;
- Dei quali posseduta regolare licenza.



# Ringraziamenti