

**POLITECNICO DI TORINO**

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA**



**TESI DI LAUREA MAGISTRALE**

**Progettazione di profili calotta in serbatoi metallici per  
l'ottimizzazione delle tensioni, della massa e dell'ingombro**

**Relatore:**

**Prof. Andrea Mura**

**Candidato:**

**Gabriele Forza**

**A.A. 2019/2020**

## ABSTRACT

Il presente elaborato nasce con lo scopo di valutare, fissato il volume, la forma più adatta per ottimizzare le tensioni, la massa e l'ingombro di un serbatoio per propellente criogenico.

In particolare, lo studio si focalizza su serbatoi cilindrici con calotte di estremità la cui forma deriva dalle curve di Cassini. Secondo R. Ryan e V. Verderaiame [0] (NASA technical paper 3326 "Systems Design Analysis Applied to Launch Vehicle Configuration", gennaio 1993): "Le chiusure dei serbatoi sono solitamente di forma ellittica, ma questa potrebbe non essere la miglior configurazione per performance e costi [...]. Le cupole cassiniane potrebbero fornire lo stesso volume di una calotta ellittica con un'altezza minore e con una minore discontinuità alla giunzione". Concretamente si andranno a studiare con un metodo analitico, la variazione della massa, dell'altezza e degli andamenti tensionali del serbatoio in funzione dei parametri di Cassini che definiscono la calotta. Stabiliti poi alcuni vincoli in modo da ridurre il numero delle soluzioni accettabili, alcune di esse verranno studiate agli elementi finiti per validare il modello analitico e studiare gli effetti di bordo sulla giunzione calotta-cilindro.

## SOMMARIO

1. Introduzione.....	4
1.1 Programma Ariane .....	4
1.2 Serbatoi criogenici .....	9
1.2.1 Funzioni del serbatoio.....	9
1.2.2 Proprietà meccaniche del materiale .....	10
1.2.3 Parete e spessore .....	12
1.2.4 Forma del serbatoio e calotte.....	14
1.2.5 Produzione.....	16
2. Calotte cassiniane .....	18
2.1 Disambiguazione delle equazioni.....	18
2.2 Dominio di interesse .....	20
2.3 Effetto dei parametri sulla geometria e valori notevoli .....	21
2.4 Metodo Analitico per il calcolo delle tensioni.....	24
2.4.1 Ipotesi del modello .....	25
2.4.2 Schema del modello.....	26
2.5 Dimensionamento del tratto cilindrico .....	29
2.6 Applicazione del modello analitico .....	30
3. Valutazioni sulla massa e sull'altezza .....	36
3.1 Premessa, dati e modello.....	36
3.2 Variazione dell'altezza del serbatoio in funzione dei parametri della calotta.....	38

3.3	Variazione della massa del serbatoio in funzione dei parametri della calotta.....	40
3.4	Selezione dei profili.....	42
4.	Analisi FEM.....	53
4.1	Caratteristiche del modello FEM.....	53
4.2	Convergenza del modello .....	57
4.3	Risultati modello FEM .....	59
4.4	Verifica dimensionale .....	74
5.	Effetti di bordo.....	78
5.1	Considerazioni sui profili cassiniani con parametro “m” unitario.....	78
5.2	Tensioni principali ed effetti di bordo.....	79
5.3	Modello di approssimazione .....	81
6.	Conclusioni .....	86
7.	bibliografia e sitografia.....	89

# 1. INTRODUZIONE

## 1.1 Programma Ariane

Con lo sviluppo delle comunicazioni e la richiesta della società e dell'industria di connessioni sempre più veloci, il numero di satelliti in orbita è in aumento negli ultimi 20 anni.

Attualmente, per quanto le fonti [1] [2] siano discordanti, risultano fra i 2000 e i 3500 satelliti attivi, questi sono utilizzati per le comunicazioni mobili, la televisione, l'osservazione dei fenomeni terrestri, la meteorologia, la geolocalizzazione e numerosissimi altri campi.



Figura 1: Ariane Launch Family (tratto da Ariespace Group [3])

Il programma Ariane nasce nel 1973 per garantire ad alcuni stati europei l'indipendenza nell'accesso allo spazio. Dagli anni 70 ad oggi si sono susseguite 5 generazioni di lanciatori della famiglia Ariane, essi hanno visto crescere progressivamente il payload massimo, l'affidabilità e la flessibilità nelle missioni.

Grazie a questa continua innovazione l'European Space Agency (ESA), responsabile del programma Ariane, è tuttora uno dei maggiori attori della scena mondiale riguardo all'esplorazione dello spazio.



*Figura 2: rappresentazione artistica Ariane 6 (fonte: ESA [4])*

L'ESA sta attualmente sviluppando la sesta generazione di lanciatori Ariane per fronteggiare l'evoluzione dei lanci commerciali e mantenere la leadership su questo mercato.

Il lancio inaugurale, inizialmente previsto per il 2020 è stato rimandato alla seconda metà del 2021 per i ritardi imputabili principalmente alla pandemia Covid19.

Rispetto al suo predecessore il progetto Ariane 6 punta a:

- Diminuire i costi e la complessità di produzione;
- Aumentare il carico utile;
- Assicurare l'affidabilità;
- Garantire una maggiore flessibilità;

Quest'ultimo punto riguarda sia le varie tipologie di missioni effettuabili (GEO, Polar/SSO, MEO e altre) sia la possibilità di trasportare oggetti di forme, dimensioni e pesi molto differenti.

Sfruttando le due configurazioni proposte per la propulsione Ariane 62 e Ariane 64 (fig.1), combinate alla vasta proposta di alloggiamenti per il payload, viene garantita una grande flessibilità sul carico utile che può andare da meno di 200 kg (cubesat e minisat) fino a 20'000 kg e oltre raggiungibili grazie alla configurazione con 4 boosters. Ovviamente il massimo payload trasportabile è vincolato dal tipo di missione da effettuare.

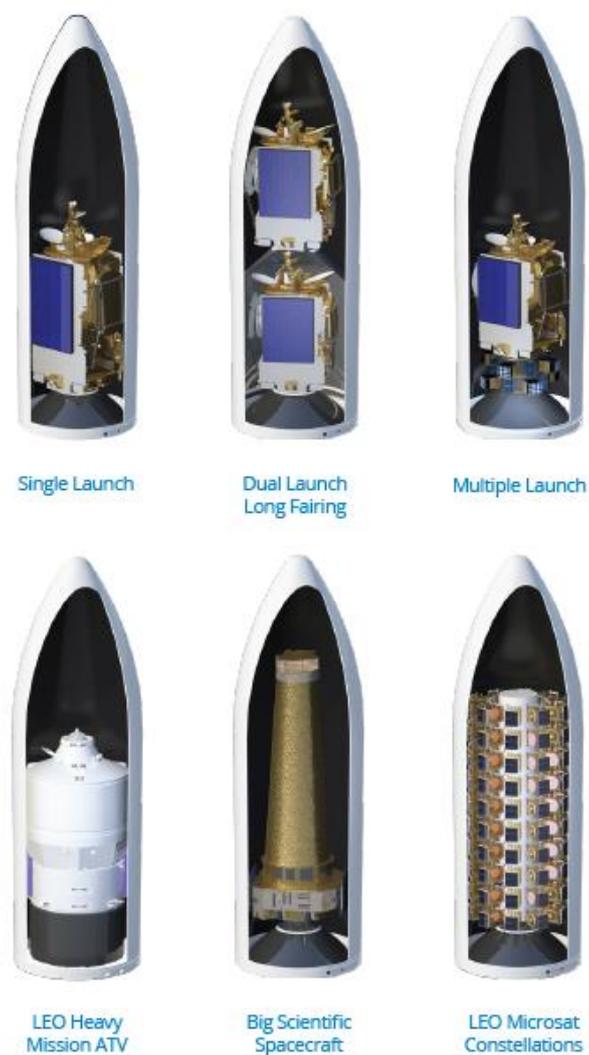


Figura 3: Ariane 6 payload fairing configurations (fonte: Arianespace brochure [5])

Per quanto riguarda la propulsione, Ariane 6 può essere equipaggiato con 2 oppure 4 boosters P120C a propellente solido (HTPB) nelle due configurazioni previste, il primo e il secondo stadio invece sfruttano combustibile criogenico liquido (idrogeno e ossigeno) per alimentare i propulsori Vulcain 2.1 (stadio inferiore) e Vinci (stadio superiore).

Un esempio di riduzione della complessità di produzione riguarda proprio i serbatoi criogenici che alimentano i propulsori.

Nell'Ariane 5 il combustibile e il comburente erano stivati all'interno dello stesso serbatoio separati da una paratoia (common bulkhead). Proprio le complicazioni progettuali legate all'isolamento termico e stagno tra i due ambienti, affidato al common bulkhead, hanno portato alla scelta di stoccare separatamente (in due serbatoi distinti per ciascuno stadio) il combustibile e il comburente, semplificando di fatto la progettazione e il processo produttivo degli stessi; per contro questa soluzione risulta più pesante e meno compatta rispetto a quella adottata su Ariane 5.

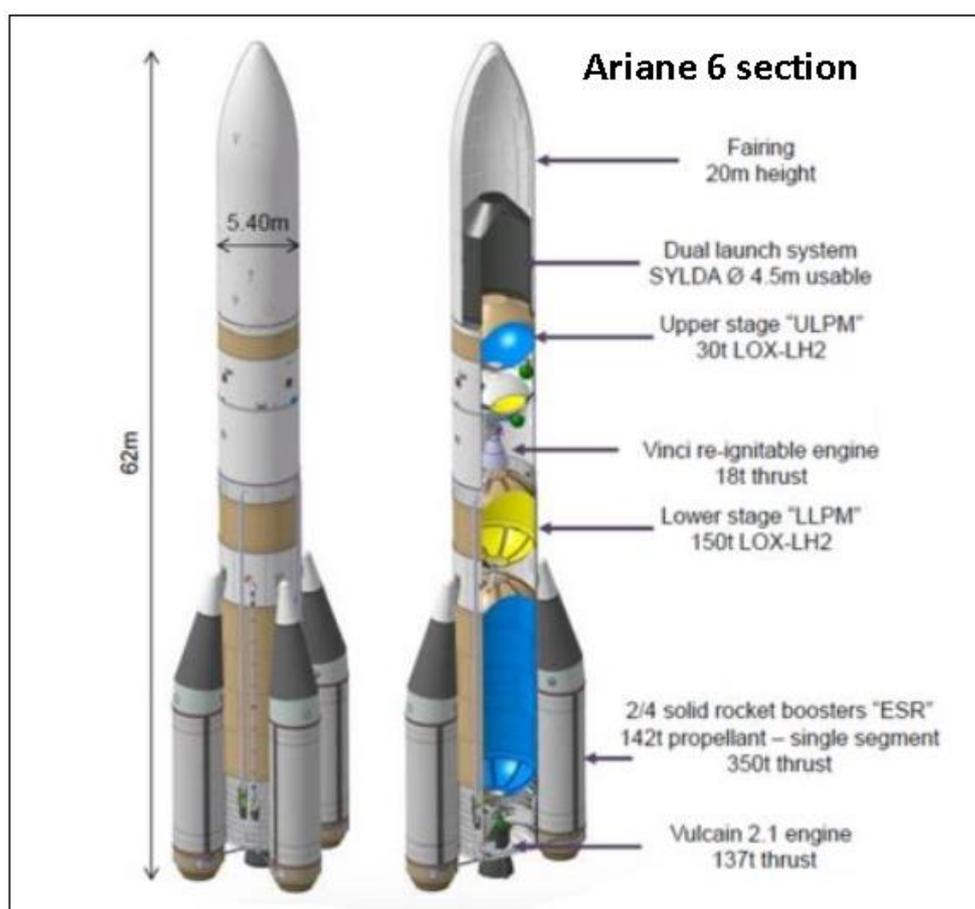


Figura 4: Ariane 6, caratteristiche principali e configurazioni (Fonte: BBC [6])

## 1.2 *Serbatoi criogenici*

All'interno di un sistema di propulsione basato su combustibili e comburenti criogenici, il serbatoio è il componente più voluminoso e verosimilmente anche il più pesante.

Salvo rarissime eccezioni esso è un solido di rotazione (assialsimmetrico) a parete sottile.

$$spessore < \frac{1}{10} \text{ Raggio}$$

I combustibili criogenici sono molto utilizzati in ambito spaziale, generalmente viene sfruttato l'idrogeno liquido (LHX) come combustibile e l'ossigeno liquido (LO2) come comburente, esistono però soluzioni diverse basate su composti e ossidi dell'azoto o su derivati dei combustibili fossili utilizzati come propellenti.

### 1.2.1 *Funzioni del serbatoio*

Il serbatoio, nonostante la relativa semplicità geometrica, risulta essere un componente complesso da progettare per via delle numerose funzioni che deve espletare:

- Carico, contenimento ed espulsione dei propellenti contenuti evitando il deterioramento, l'evaporazione o la contaminazione degli stessi;
- Supportare la pressione interna e le azioni inerziali;
- Trasmettere tutti i carichi tra gli stadi superiore e inferiore (spinta, resistenze aerodinamiche e inerzie);

- Essere provvisto di apposite strutture per limitare il fenomeno dello Sloshing e la creazione di vortici nei punti di aspirazione delle pompe che alimentano la camera di combustione;
- Garantire l'accesso per la manutenzione con aperture sufficientemente grandi da consentire l'ingresso di un operatore;
- Limitazione del flusso termico in ingresso, mantenimento delle temperature e delle pressioni richieste, evitare il fenomeno di "Boil off" dell'idrogeno;

Tabella 1: esempio di temperature criogeniche per comburente e combustibile (tratto da [7])

Serbatoio	T minima [K]	T massima [K]
LOX	85	93
LH2	20	28

Queste funzioni devono essere rispettate garantendo che la struttura sia più leggera possibile e che abbia la capacità richiesta compatibilmente con i vincoli di ingombro dello stadio (altezza e diametro).

### ***1.2.2 Proprietà meccaniche del materiale***

La scelta del materiale appare pertanto vincolata dalla resistenza specifica dello stesso la quale dovrà essere la più alta possibile in accordo con le altre proprietà del materiale richieste:

- Compatibilità con l'ambiente di lavoro, che si traduce nella resistenza alla corrosione e agli agenti contenuti (il materiale non

deve reagire con i liquidi contenuti e non essere soggetto al fenomeno di “infragilimento da idrogeno”);

- Resistenza alla frattura fragile (tenacità a frattura);
- Variabilità di duttilità e tenacità poco sensibile alle basse temperature;
- Resistenza meccanica mantenuta anche alle alte temperature (possono verificarsi durante la fase di pressurizzazione);
- Resistenza a fatica per far fronte ai cicli di carico che caratterizzano la fase di pressurizzazione;
- Fabbricabilità (deformabilità saldabilità) e mantenimento delle proprietà dopo le lavorazioni;
- Disponibilità in forma di piastre sottili anche di grandi dimensioni;

Il costo del materiale è un criterio di importanza secondaria rispetto alle sue caratteristiche meccaniche.

Viste le specifiche sopra riportate e in particolare la richiesta di resistenza specifica, la scelta del materiale ricade solitamente su leghe di alluminio o leghe di titanio; nei riferimenti consultati vengono citate le seguenti:

- Leghe di Alluminio: 2219 T8 e 2195 T8 (riferimento [7])
- Lega di Titanio: Ti-6Al-4V e Ti-13V-11Cr-3Al (riferimento [8])

L'utilizzo di materiali compositi per questa applicazione è piuttosto marginale e legato principalmente ai rinforzi delle strutture sandwich; citando il riferimento [9]:

*“Several different tank wall materials were considered. Given the low operating pressure, composite materials such as graphite-epoxy would provide only a marginal reduction in mass, at potentially great cost in money and schedule”*

### **1.2.3 Parete e spessore**

Lo spessore di parete del serbatoio è un parametro che influenza fortemente il peso dell'oggetto finale, pertanto va minimizzato compatibilmente con le richieste di resistenza meccanica e con l'effettiva producibilità.

La superficie del serbatoio è una parete sottile (alcuni decimi di millimetro) e come tale la sua progettazione meccanica può sfruttare modelli semplificati (membranali) con buona approssimazione dei risultati.

Come già anticipato nelle funzioni, la struttura del serbatoio dovrà anche trasmettere i carichi longitudinali fra gli stadi, questo compito spetta di fatto alla parete laterale del serbatoio che può assumere una delle seguenti configurazioni:

- Strutture a telaio e traverse (skin-stringers frame);
- Strutture waffle;
- Strutture a guscio monoscocca (monocoque construction);

Le prime sono le più consigliate qualora si debbano sostenere carichi molto elevati, le strutture waffle e monoscocca sono invece utilizzate quando l'entità dei carichi risulta minore; sovente queste ultime devono essere pressurizzate anche durante la fase di assemblaggio per garantire la rigidità necessaria.

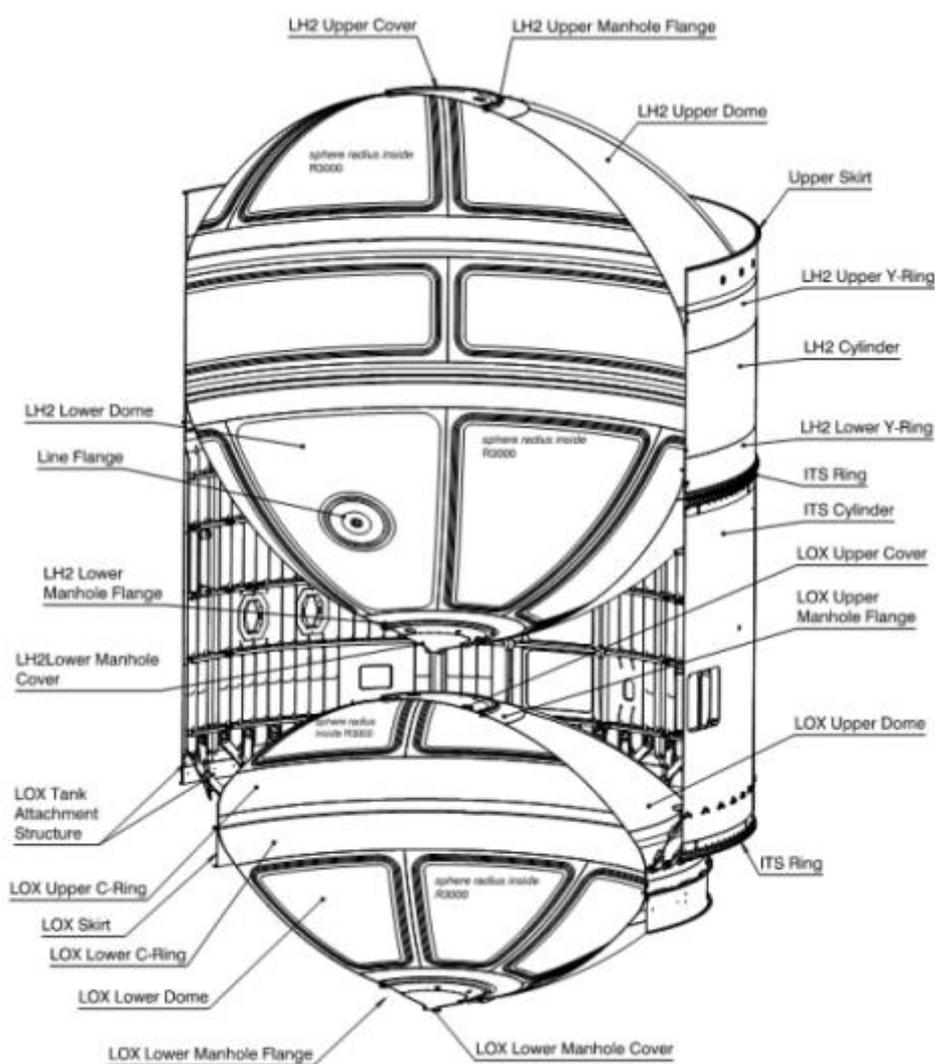


Figura 5: Ariane 6 ULPM (Upper Liquid Propulsion Model) tank section (fonte: dglr [10])

A titolo di esempio si riportano nelle figure 5 e 6 le sezioni di due serbatoi che presentano pareti con struttura skin-stringer frame, nel secondo caso viene evidenziata anche la configurazione waffle nella

parete interna del serbatoio. Si noti la presenza di componenti anti-sloshing e anti-vortex in figura 6.

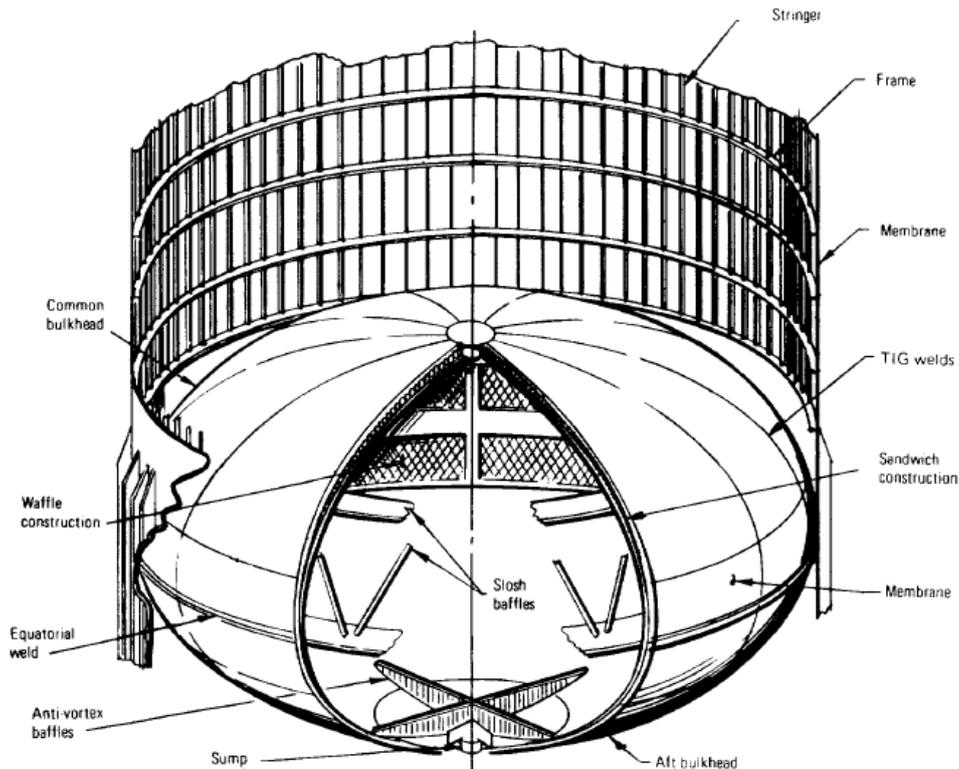


Figura 6: Sezione serbatoio LH2/LOX saturn s-II (fonte NASA [11])

### 1.2.4 Forma del serbatoio e calotte

I serbatoi più comuni per queste applicazioni sono di forma cilindrica con le estremità racchiuse da calotte emisferiche o ellittiche; si possono trovare anche studi progettuali per serbatoi di forma sferica, tuttavia questi ultimi presentano maggiori complessità nell'assemblaggio con le altre parti dello stadio e risultano piuttosto alti in relazione al volume contenuto, pertanto sono riservati ai sottosistemi più piccoli o all'ambito aeronautico [9].

Quando si trattano serbatoi per lanciatori, la richiesta di compattezza combinata alla grande capacità richiesta porta a privilegiare chiusure più basse rispetto a quella emisferica; pertanto in questo studio si considereranno serbatoi di forma cilindrica con chiusure di forma ellittica o cassiniana. Altre possibili forme di calotte sono riportate nella figura seguente.

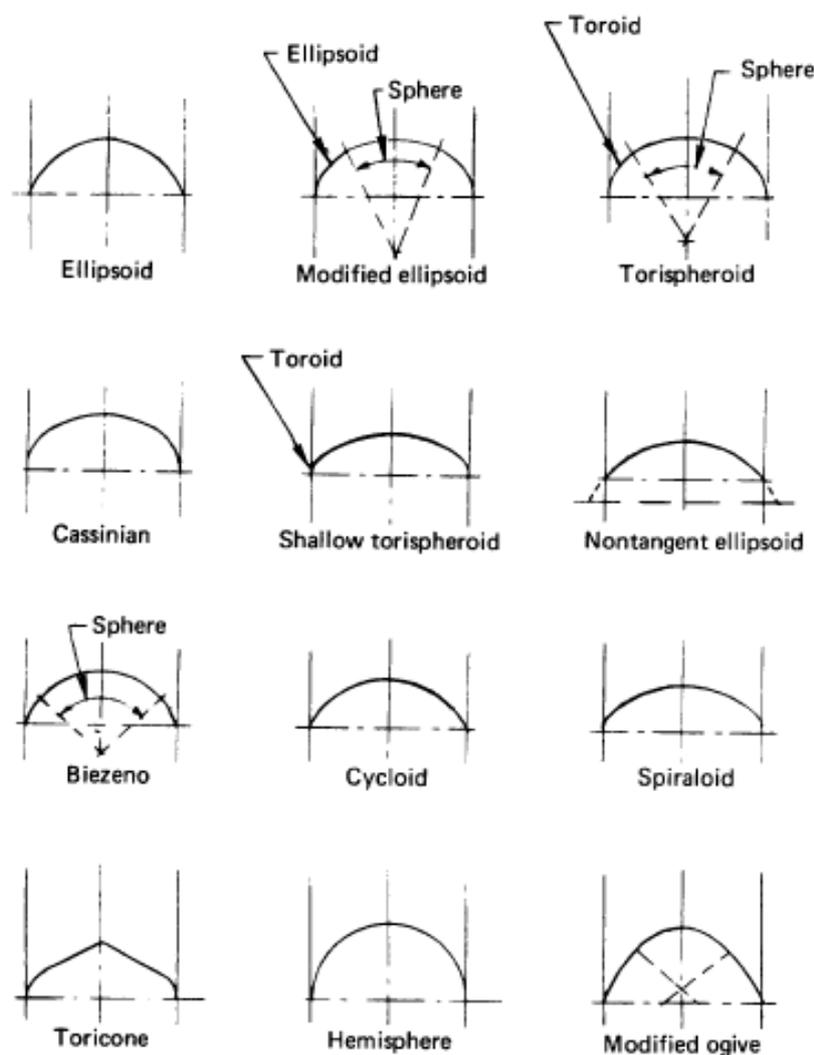


Figura 7: possibili forme per la chiusura di serbatoi cilindrici (fonte: NASA [11])

### 1.2.5 *Produzione*

La produzione del serbatoio metallico parte da piastre semilavorate di forma circolare, queste vengono deformate e successivamente rifinite alle macchine utensili per imporre lo spessore desiderato (che è diverso da quello del semilavorato di partenza); successivamente le superfici ottenute vengono saldate insieme per comporre la geometria finale.

Le calotte possono essere formate con il metodo dello spin forming; tuttavia i serbatoi più grossi necessiterebbero di semilavorati difficili da reperire sul mercato e complessi da processare con questo metodo.

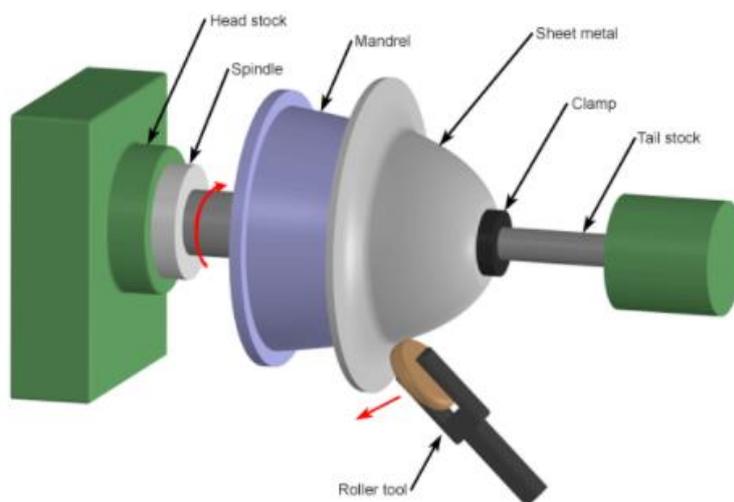


Figura 8: spin forming process (fonte: Pinterest)

Una possibile soluzione per i serbatoi più grandi consiste nel creare la calotta come composizione saldata di più superfici deformate tramite Peen Forming. Quest'ultimo è un processo di formatura tipicamente utilizzato per oggetti di grandi dimensioni con spessore trascurabile rispetto alle altre due dimensioni.

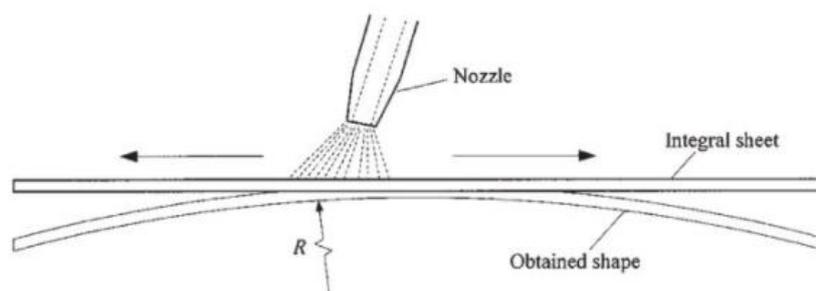


Figura 9: Peen forming process (fonte articolo scientifico [12])

Per quanto riguarda il processo di saldatura per la giunzione delle varie parti, è più indicato l'utilizzo della tecnica "Friction Stir Welding" rispetto alle tradizionali metodologie di saldatura a elettrodo, a maggior ragione per i componenti di grandi dimensioni in lega di alluminio.

## 2. CALOTTE CASSINIANE

### 2.1 Disambiguazione delle equazioni

Gli ovali di Cassini sono una famiglia di curve espresse da un polinomio di secondo ordine studiate a partire dal 1680 da Jean-Dominique Cassini (1625-1712) come modelli per le orbite dei corpi celesti.

L'equazione di Cassini propriamente detta [13] è caratterizzata dal prodotto fra le distanze di ogni punto della curva rispetto ai due fuochi fissi, esso rimane costante.

$$d_1 * d_2 = b^2 \quad (1)$$

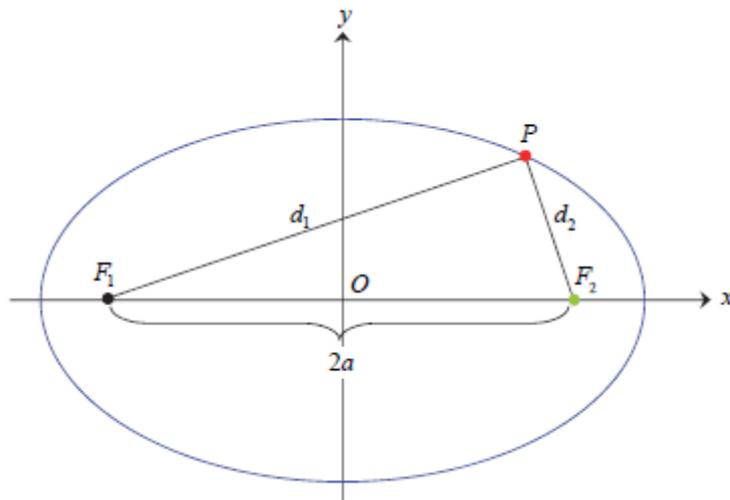


Figura 10: ovale di cassini con fuochi F1 e F2 (fonte: Articolo scientifico [13])

La condizione espressa dalla (1) si traduce nell'equazione (2) dove "a" rappresenta la distanza fra l'origine e i fuochi, e "b" è un parametro che rispetta l'equazione (1).

$$[(x - a)^2 + y^2] * [(x + a)^2 + y^2] = b^4 \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Nelle applicazioni trattate in questo elaborato la curva di Cassini (nella sua forma modificata) è utilizzata come curva piana di costruzione della calotta per il serbatoio.

Definito il raggio della giunzione cilindro-calotta, ed essendo esso funzione dei parametri "a" e "b", l'equazione potrà essere modificata solo agendo su un parametro (esattamente come nel caso ellittico), il secondo sarà automaticamente definito.

Per aumentare la libertà delle forme ottenibili con una singola equazione parametrica è stata proposta da Wilhelm Flügge e ripresa in alcuni studi legati al settore aerospaziale [14], una formulazione modificata dell'equazione di Cassini; questa equazione prevede due parametri variabili indipendentemente dal raggio e perciò aumenta considerevolmente il numero di forme ottenibili.

La nuova formulazione proposta è:

$$(x^2 + n^2y^2) + 2 * m * a^2 * (x^2 - n^2y^2) = a^4 * (1 + 2 * m) \quad (3)$$

Che in forma esplicita diventa:

$$y = \frac{a}{n} * \sqrt{m - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \sqrt{(1 + m)^2 - 4 * m * \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \quad (4)$$

Dove:

- "a" rappresenta il semiasse sulle ascisse, nonché il raggio del serbatoio alla giunzione calotta-cilindro in questa particolare applicazione;
- "m" ed "n" sono i parametri dell'equazione di Cassini (valori numerici reali indipendenti);

## 2.2 *Dominio di interesse*

Definito il semiasse maggiore la variazione dei parametri consente di generare un numero teoricamente illimitato di curve piane, tuttavia per l'applicazione in studio il campo di interesse è ristretto alle combinazioni di parametri ( $m$  e  $n$ ) che generano un singolo ovale soddisfacendo le seguenti condizioni:

- $m \geq -1/3$

L'utilizzo di valori "m" minori di quello indicato comporta la nascita di curve "a due capi" (figura 11) o di due ovali distinti e separati (figura 12).

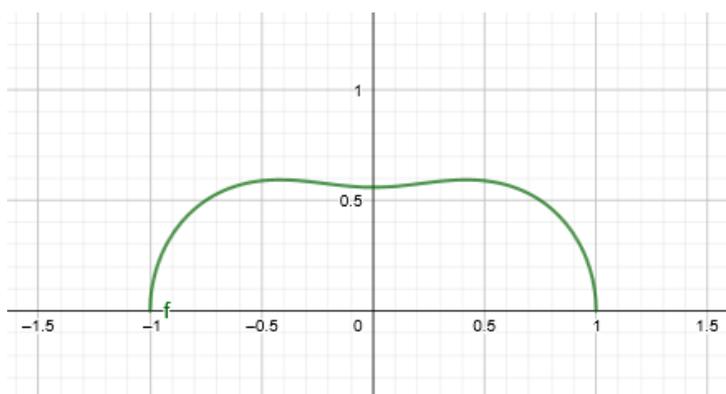


Figura 11: curva di Cassini con parametri  $n=0.8$   $m=-0.4$



Figura 12: curva di Cassini con parametri  $n=0.8$   $m=-2.8$

- $m \leq 1$

Utilizzare curve con valori di  $m$  superiori a 1 comporta il distacco della curva dall'asse delle ascisse.

- $n > 0$

I valori negativi di  $n$  consentono unicamente di disegnare la curva speculare rispetto all'asse delle ascisse, quindi sono di scarso interesse.

### ***2.3 Effetto dei parametri sulla geometria e valori notevoli***

La variazione dei parametri "m ed n" influisce sulla forma della calotta e sull'altezza del suo apice, la conseguenza naturale è che le combinazioni differenti dei parametri generino calotte con diversi volumi e con comportamento meccanico differente (tensioni e deformazioni) a parità di raggio "a" e di pressione interna.

Si studiano in prima battuta le conseguenze geometriche della variazione di un parametro considerando costante l'altro: in figura 13 viene mostrato come a parità di "n", l'aumento di "m" comporti un incremento dell'altezza della calotta; considerando invece "m" costante si nota che l'aumento del parametro "n" porta a un abbassamento progressivo della calotta (figura 14).

Non esiste un limite "matematico" superiore alla variazione di "n" tuttavia, come vedremo in seguito, ad alti valori di  $n$  corrispondono tensioni molto elevate all'apice della calotta.

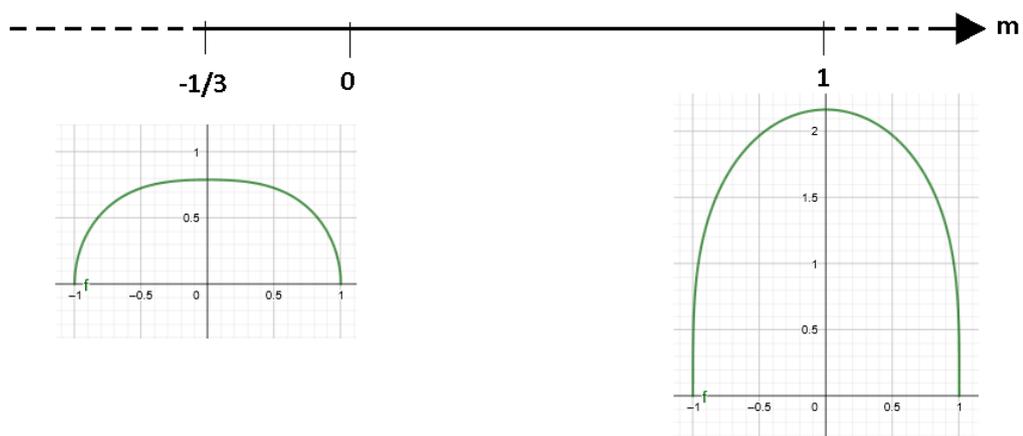


Figura 13: variazione dell'altezza in funzione di  $m$  ( $n=0.8$  costante,  $a=1$ )

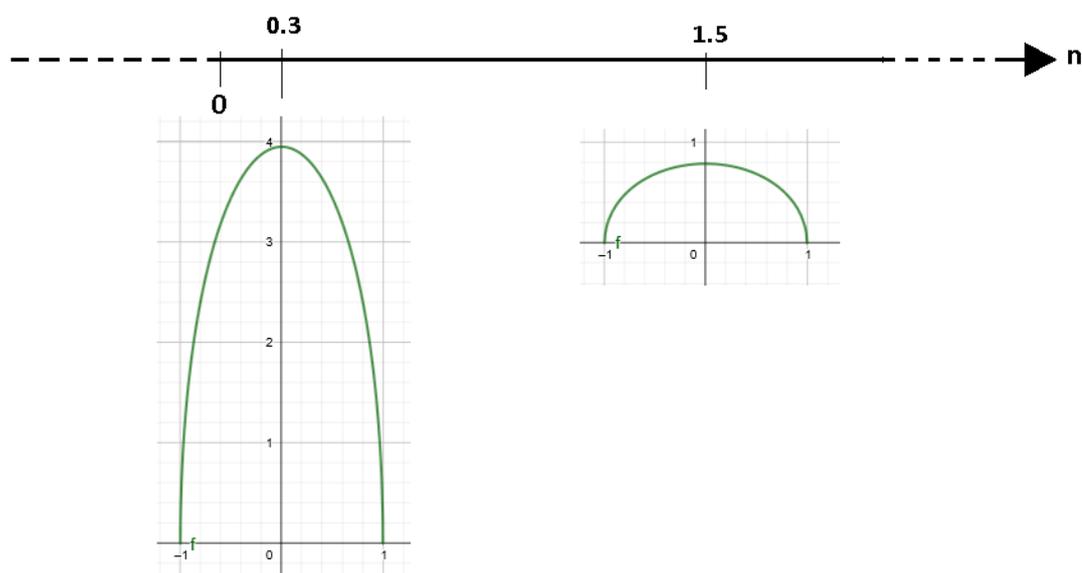


Figura 14: variazione dell'altezza in funzione di  $n$  ( $m=0.2$  costante,  $a=1$ )

Le curve di Cassini, all'interno del dominio limitato sopra definito, possiedono ancora una variabilità infinita di soluzioni matematicamente diverse; di fatto, racchiuse in questo insieme si ritrovano alcune curve più note come la semiellisse e la semicirconferenza che, in quest'ottica, non sono nient'altro che curve di Cassini con parametri "m ed n" notevoli.

Tabella 2: configurazioni notevoli delle curve di cassini

$m = -\frac{1}{3} \quad \forall n$	L'ovale di Cassini presenta un apice piatto.
$m = 0 \quad \forall n$	L'ovale di Cassini rappresenta la metà superiore di un'ellisse e il parametro $n$ scelto assume il valore del rapporto fra i semiassi dell'ellisse stessa.
$m = 1 \quad \forall n$	L'ovale di Cassini presenta all'intersezione con l'asse $x$ una curvatura sul piano meridiano nulla ( $r\varphi$ tende a infinito). Questa configurazione risulta particolarmente interessante nello studio degli effetti di bordo tra calotta e parte cilindrica del serbatoio.
$\forall m \quad n = 0$	La curva di Cassini degenera poiché $y$ tende a infinito.
$m = 0 \quad n = 1$	La curva di Cassini rappresenta una semicirconferenza.

## ***2.4 Metodo Analitico per il calcolo delle tensioni***

Nelle pagine precedenti è stata più volte citata la grande variabilità di soluzioni geometriche che le curve di cassini offrono, pertanto per arrivare a proporre alcune soluzioni progettuali che presentino delle caratteristiche di ottimo occorre effettuare alcune analisi preliminari.

Trattasi di calcoli analitici sul comportamento meccanico della calotta quando viene sottoposta ad una pressione interna, e di valutazioni sulla massa e sull'altezza di ogni soluzione proposta; questi ultimi due aspetti verranno trattati nel capitolo successivo.

Una volta definito un piccolo numero di soluzioni sarà possibile procedere con la simulazione agli elementi finiti per validare i modelli.

Il modello del guscio assialsimmetrico è utilizzato in ambito meccanico per lo studio di strutture shell, cioè con spessore di parete trascurabile rispetto alle altre dimensioni dell'oggetto, esse sono solitamente soggette a pressioni interne o esterne.

Tale modello risulta quindi particolarmente adatto a valutare in maniera semplificata il comportamento di tubi in pressione e serbatoi; a quest'ultima categoria appartengono i serbatoi criogenici per uso aerospaziale.

Il paper NASA SP-8088 [11] riporta una serie di serbatoi equipaggiati su veicoli spaziali reali, gli spessori di parete sono dell'ordine di grandezza di alcuni decimi di millimetro a fronte di diametri (forme sferiche o cilindriche) maggiori di 100mm.

### ***2.4.1 Ipotesi del modello***

Si riportano di seguito le ipotesi previste dal modello “guscio assialsimmetrico” applicato ai calcoli delle sollecitazioni:

- Assialsimmetria geometrica
- Spessore molto minore rispetto alle altre due dimensioni;
- Materiale omogeneo, isotropo con comportamento elastico;
- Carichi ed eventuali vincoli disposti in maniera assialsimmetrica;
- Andamento degli spostamenti variabile solo nel piano meridiano (in funzione di  $\varphi$ ) e comune a tutti i piani meridiani per effetto della simmetria del modello;
- Comportamento tensionale di tipo membranale; il comportamento flessionale riguarda solamente le discontinuità (ad esempio la giunzione calotta-cilindro nel serbatoio) e dà origine ai cosiddetti effetti di bordo;
- La tensione nella direzione dello spessore può essere considerata nulla, di conseguenza lo stato di tensione è piano.

Ignorare il comportamento flessionale significa escludere gli effetti di bordo dalla trattazione; questa semplificazione è molto forte nel caso trattato, perché la zona di giunzione fra il cilindro e la calotta è, nella maggior parte dei casi, caratterizzata da tensioni più elevate rispetto alle altre parti del serbatoio proprio a causa degli effetti di bordo. Per questo motivo le analisi FEM sono fondamentali per validare i risultati del modello analitico.

## 2.4.2 Schema del modello

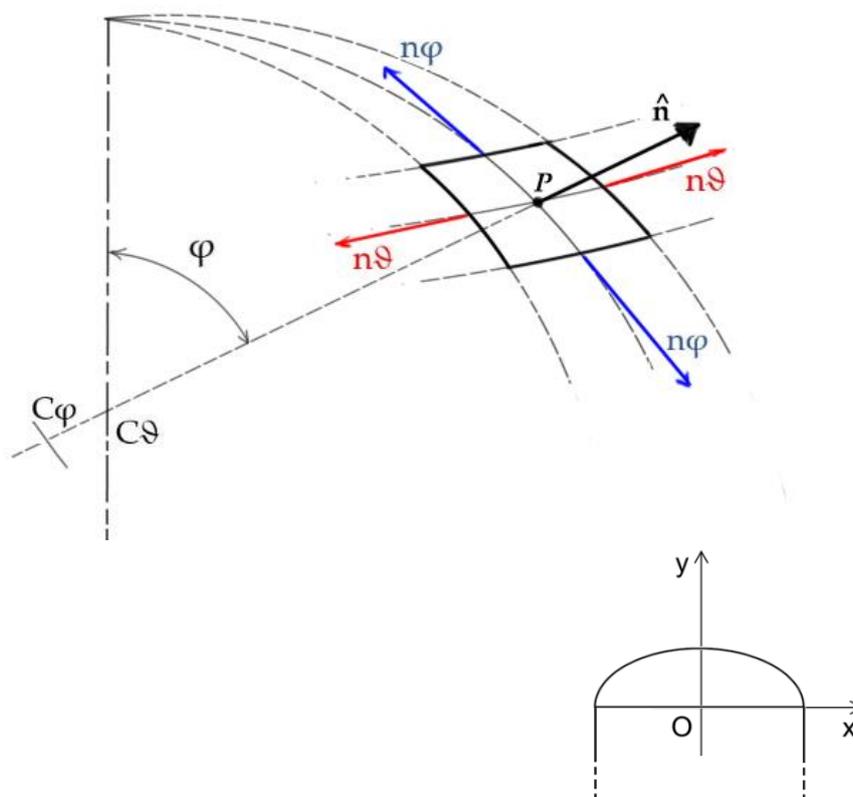


Figura 15: schema del modello e sistema di riferimento

Si consideri un punto  $P$  sulla superficie del guscio e la normale alla superficie in tale punto. Esiste un fascio di piani definito dalla retta su cui giace la normale. Le intersezioni fra la superficie del guscio e i piani appartenenti al fascio sono delle linee curve. Tra tutti i piani definiti dal fascio ne esistono due, perpendicolari fra loro, le cui intersezioni con la superficie generano le curve con il massimo e il minimo raggio di curvatura rispetto a quelle generate dalle intersezioni con gli altri piani.

I reciproci di queste due curvatures dette principali definiscono i raggi principali:  $r_\varphi$  (raggio di curvatura massimo) e  $r_\theta$  (raggio di curvatura minimo).

Il piano a cui corrisponde il raggio di curvatura massimo " $r_\varphi$ " è denominato "piano meridiano", esso contiene sempre la normale  $n$  al punto  $P$  e l'asse di simmetria; il secondo piano è definito "piano perpendicolare al piano meridiano" e ha il centro di curvatura giacente sull'asse di simmetria.

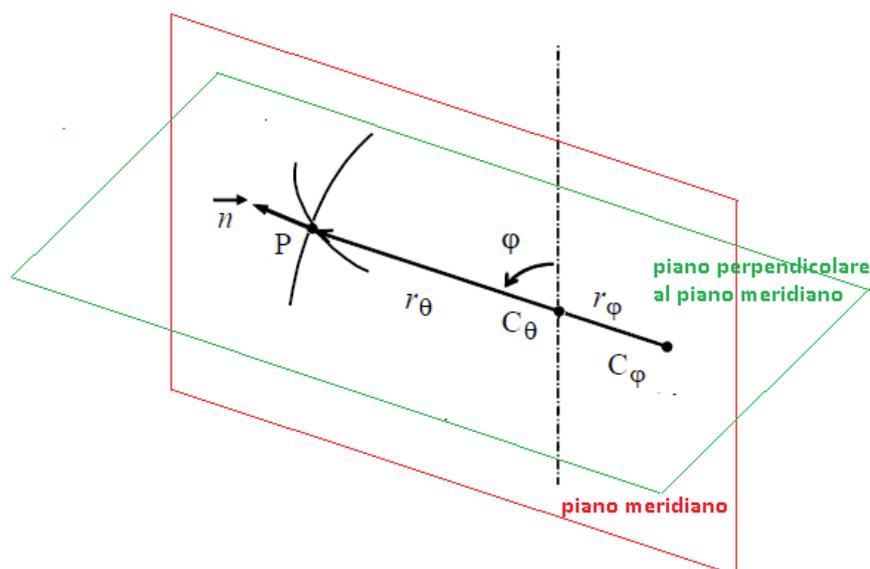


Figura 16: piani perpendicolari e raggi di curvatura principali

La trattazione richiede l'uso di un terzo piano ricavato sezionando il guscio con un piano perpendicolare al suo asse di simmetria, la curva definita in questo modo prende il nome di "parallelo".

Per effetto dell'assialsimmetria il problema (isostatico) può essere risolto scrivendo due equazioni di equilibrio; invece di utilizzare le due tensioni membranali  $\sigma_\varphi$  (agisce tangenzialmente ai meridiani) e  $\sigma_\theta$  (agisce tangenzialmente ai paralleli) conviene utilizzare i loro

prodotti per lo spessore  $n_\varphi$  e  $n_\vartheta$ , rispettivamente sforzo meridiano e sforzo meridiano-circonfrenziale.

L'equilibrio del sistema produce le seguenti equazioni:

$$\frac{n_\varphi}{r_\varphi} + \frac{n_\vartheta}{r_\vartheta} = p \quad (5)$$

$$n_\varphi = \frac{p\pi r^2 \pm P}{2\pi r * \text{sen}\varphi} \quad (6)$$

Dove  $p$  è la pressione interna al serbatoio e  $P$  è il peso del fluido contenuto nel serbatoio; trascurando quest'ultimo contributo (minoritario rispetto all'effetto della pressione) la (6) diventa:

$$n_\varphi = \frac{p * r_\vartheta}{2} \quad (7)$$

Il procedimento di calcolo prevede la discretizzazione della curva in punti, le coordinate  $x$  e  $y$  corrispondono rispettivamente al raggio  $r$  e all'altezza  $h$  della calotta nel punto considerato. È necessario effettuare il calcolo numerico della derivata prima e della derivata seconda nei punti utilizzati in quanto fondamentali per il calcolo dell'angolo  $\varphi$  e dei raggi di curvatura.

$$r_\vartheta = \frac{r}{\text{sen}\varphi} \quad (8)$$

$$r_\varphi = \frac{(1 + f'(x))^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|} \quad (9) \text{ [15]}$$

I raggi di curvatura permettono di calcolare gli sforzi seguendo le equazioni di equilibrio (5) e (7).

## 2.5 Dimensionamento del tratto cilindrico

Si definiscono i carichi e la geometria del modello:

- Pressione: uniforme su tutto il serbatoio e pari a 0.1 MPa, si trascurano il peso proprio del fluido e le azioni dinamiche in quanto non sono oggetto della progettazione preliminare.
- Raggio del serbatoio: 0.750 m.

Applicando la (5) e la (6) alla geometria cilindrica si ottengono gli sforzi:

$$\rightarrow n_{\varphi, cilindro} = 37 \text{ N/mm}$$

$$\rightarrow n_{\vartheta, cilindro} = 75 \text{ N/mm}$$

Dividendo gli sforzi per lo spessore si ottengono due tensioni che, per la geometria particolare del problema, risultano anche essere le tensioni principali; perciò si può applicare il criterio di Von Mises per il calcolo della tensione equivalente seguendo la formula:

$$\sigma_{eqVM} = \frac{1}{\sqrt{2}} * \sqrt{(\sigma_{\varphi} - \sigma_{\vartheta})^2 + \sigma_{\varphi}^2 + \sigma_{\vartheta}^2} \quad (10)$$

Supponendo uno spessore di 0.3 mm si ottengono le seguenti tensioni sul tratto cilindrico.

$$\rightarrow \sigma_{\vartheta, cilindro} = 250 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{\varphi, cilindro} = 125 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{eq, VM, cilindro} = 215.6 \text{ MPa}$$

Il materiale proposto è una lega di alluminio e le sue specifiche complete sono riportate nel capitolo 4; la tensione di snervamento è

pari a 255 MPa e si richiede un coefficiente di sicurezza a snervamento almeno pari a 1.1.

I valori ottenuti (con lo spessore ipotizzato) rispettano la condizione sullo snervamento nel tratto cilindrico, infatti:

$$\sigma_{eqVM} < \frac{Y_S}{C S_Y} = 231.8 \text{ MPa} \quad (11)$$

La tensione equivalente sul serbatoio tuttavia, potrebbe essere più alta di quella calcolata sul cilindro sia per la geometria della calotta, sia per gli effetti di bordo.

Per questo motivo, si sceglie cautelativamente di aumentare lo spessore di parete a 0.35; i valori di tensione aggiornati sulla parte cilindrica saranno i seguenti:

$$\rightarrow \sigma_{\theta, \text{cilindro}} = 214 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{\varphi, \text{cilindro}} = 107 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{eq, VM, \text{cilindro}} = 186 \text{ MPa}$$

## 2.6 *Applicazione del modello analitico*

Per limitare il numero delle soluzioni progettuali possibili sono stati scelti due criteri che si basano sul metodo analitico:

- 1) *Nelle calotte generate dalle combinazioni di "m e n" considerate, la distribuzione delle tensioni ottenuta con il calcolo analitico deve fornire tensioni equivalenti minori o al più uguali alla tensione equivalente presente sulla parte cilindrica del serbatoio.*

Questo primo criterio è stato definito affinché sia la parte cilindrica del serbatoio a imporre lo spessore di parete (e quindi il peso) nella fase di progetto e non la calotta; inoltre è realistico pensare che gli effetti di bordo alzino il valore della tensione alla giunzione oltre i valori previsti dal calcolo analitico, pertanto è opportuno evitare di considerare soluzioni che risultano già critiche con il modello analitico.

Per minimizzare il peso si potrebbero valutare soluzioni con spessori differenziati, tuttavia si è scelto di non considerare questa opzione per via delle discontinuità che potrebbero generarsi.

- 2) *Evitare per quanto possibile di adottare soluzioni che generano forti tensioni membranali di compressione ( $\sigma_{\vartheta}$ ) nei dintorni della giunzione.*

Le tensioni membranali di compressione nascono sulle sezioni parallele al piano meridiano per effetto della curvatura quando il rapporto tra i raggi di curvatura  $\frac{r_{\vartheta}}{r_{\varphi}}$  diventa maggiore di 2.

Questo fenomeno va in generale evitato o limitato per due motivi, in primo luogo causa l'aumento della tensione equivalente, inoltre la tensione membrana del cilindro in pressione non è negativa, quindi la differenza tra le tensioni di calotta e cilindro risulterebbe più marcata; questo fatto si verifica tipicamente nelle calotte molto basse come quella ellittica riportata in figura 17.

È ragionevole pensare che gli effetti di bordo saranno più elevati su soluzioni che presentano tensioni negative nei dintorni della giunzione.

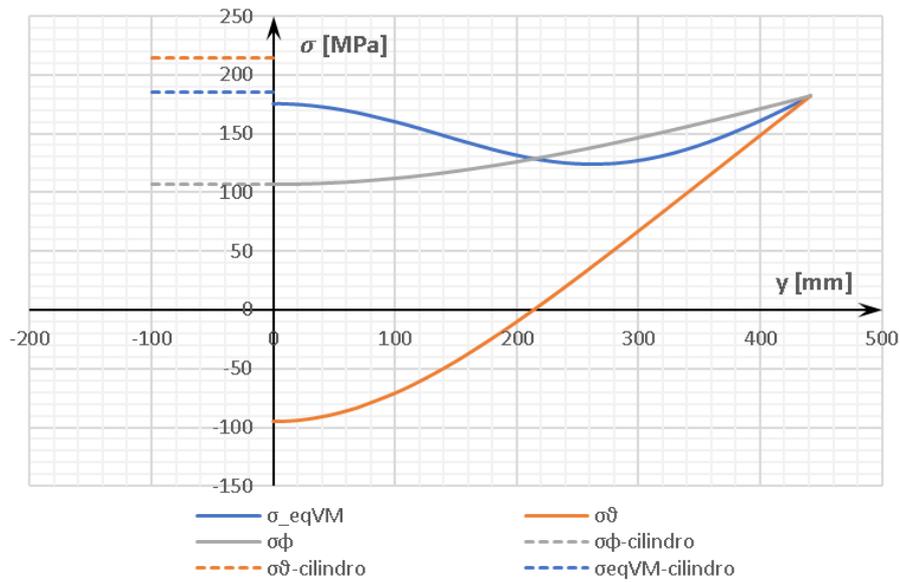


Figura 17: tensioni in funzione dell'altezza nel tratto cilindrico e nella calotta ellittica (parametri di cassini  $m=0$   $n=1.7$ )

Per la valutazione del primo criterio (tensione equivalente) è stato consultato un documento NASA [14] che tratta un caso studio sulle calotte cassiniane sottoposte a pressione interna, da esso è stata tratta la figura 18.

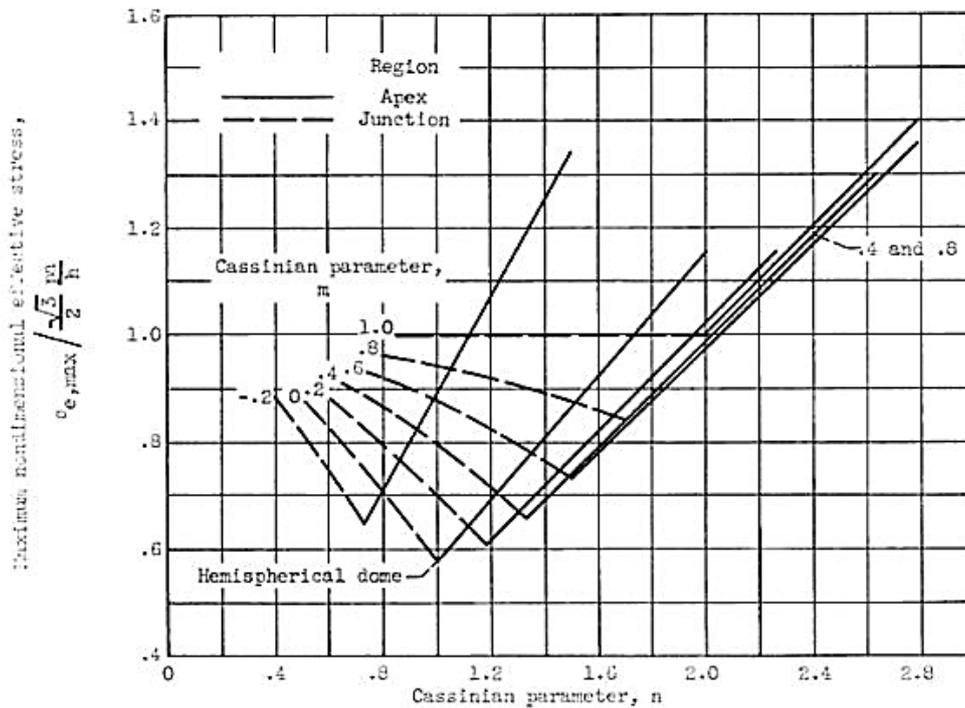


Figura 18: variazione della tensione equivalente massima sulla calotta (adimensionalizzata con la tensione equivalente del cilindro) in funzione dei parametri della calotta. (fonte NASA [14])

La figura 18 mostra come al variare dei parametri di cassini la tensione massima può trovarsi sulla giunzione o sull'apice. Volendo rispettare il primo criterio (sulla tensione massima) si può notare che i valori di "n" dovranno essere bassi, soprattutto per le calotte con "m" compreso tra -0.2 e 0.2, e in ogni caso saranno al più pari a 2.1 per i valori di "m" più elevati.

Per esaminare il fenomeno della compressione è stata analizzata la variabilità di  $\sigma_{\vartheta}$  in base ad "n" fissato il valore di "m", il risultato è visibile nella figura seguente.

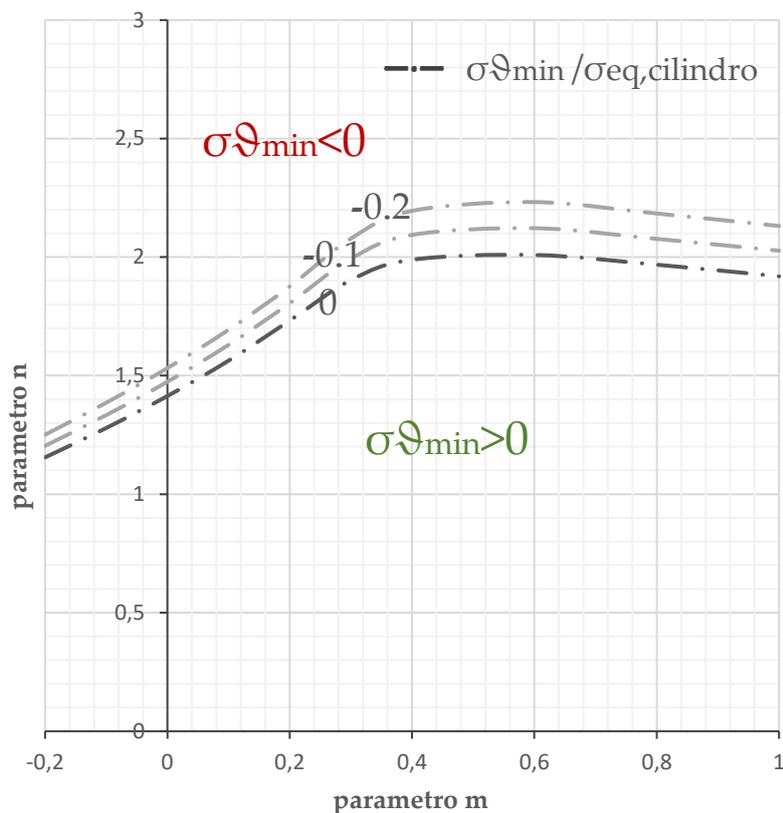


Figura 19: presenza di compressione sulla calotta in base ai parametri  $m$  ed  $n$

Il grafico in figura 19 evidenzia le combinazioni di parametri che generano compressione nella calotta senza però specificare se questa coinvolga la giunzione o sia presente in un'altra sezione lontana dalla zona critica. Nella scelta dei profili questo fatto non è da trascurare poiché la compressione alla giunzione è di gran lunga più pericolosa.

Come illustrato in figura 14, aumentare il valore di "n" implica, a parità di "m", avere una calotta più compatta in termini di altezza e, come vedremo nel capitolo successivo, anche in termini di peso. L'aumento di "n" risulta chiaramente vincolato dai risultati mostrati nelle figure 18 e 19.

Il limite sulla compressione non è da considerarsi inviolabile, ma nel caso è fondamentale individuare la zona dove si verifica la compressione, se essa si trovasse sulla giunzione è bene tenere presente che gli effetti di bordo potrebbero generare picchi di tensione elevati non previsti da questo modello analitico.

### 3. VALUTAZIONI SULLA MASSA E SULL'ALTEZZA

#### 3.1 *Premessa, dati e modello*

Le applicazioni aerospaziali, per ovvi motivi di ingombro e costi, tendono a privilegiare componentistica geometricamente compatta e leggera; i serbatoi, essendo strutture di grandi dimensioni, devono essere progettati ponendo particolare attenzione a questi criteri.

Nell'ambito dei serbatoi con calotte cassiniane questo si traduce nel valutare, a parità di spessore di parete e di capacità, quali siano le combinazioni dei parametri "m ed n" che generano soluzioni ottimali.

Le considerazioni in questo capitolo tengono conto unicamente della parete metallica del serbatoio, pertanto le valutazioni di massa e altezza escludono: isolanti, strutture waffle o altre strutture di irrigidimento, sistemi anti-vortex e anti sloshing, manhole cover e altri componenti minori del serbatoio.

Questi componenti hanno una grossa influenza sul peso e potrebbero averla anche sull'altezza, pertanto i valori che verranno calcolati non sono utili in senso assoluto, ma verranno utilizzati per confrontare i diversi profili; è ragionevole pensare che la massa di un serbatoio sia principalmente funzione della sua superficie esterna e la sua altezza dipenda principalmente dalla forma della calotta.

Il serbatoio è di forma cilindrica con le calotte alle estremità generate dalla rotazione di un semi ovale di cassini.

Dovendo consentire l'ingresso di un operatore per effettuare le ispezioni, la calotta è provvista di un foro superiore; questo foro viene chiuso con un apposito componente (manhole cover) la cui progettazione non è oggetto di questo elaborato, pertanto esso non viene incluso nei calcoli di massa, il valore di altezza specificato sarà quello che non considera il manhole cover, è comunque possibile risalire all'altezza totale della calotta dalle formule dell'equazione di cassini.

Lo schema utilizzato per i calcoli di massa e altezza è riportato nella figura sottostante.

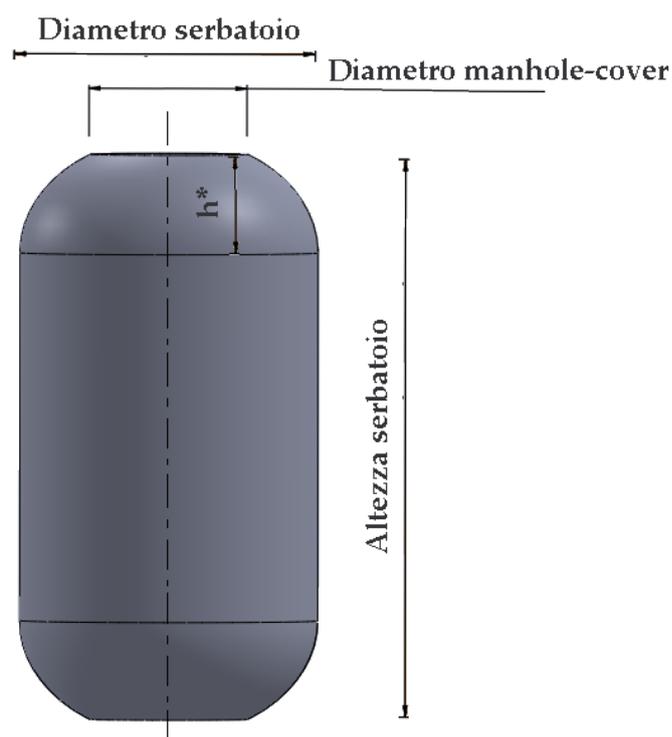


Figura 20: geometria del serbatoio senza i manhole cover

Dati:

- Spessore della parete 0.35 mm
- Diametro di ispezione 1000 mm
- Diametro parte cilindrica del serbatoio 1500mm → parametro di cassini  $a=750$  mm
- Densità del materiale 2840 kg/m<sup>3</sup>
- Capacità del serbatoio 10 m<sup>3</sup>

### ***3.2 Variazione dell'altezza del serbatoio in funzione dei parametri della calotta***

Tramite uno script *matlab* sono stati calcolati i volumi di 70 calotte cassiniane (esclusa la porzione riconducibile al manhole cover). Per sottrazione dal volume totale (10 m<sup>3</sup>), si determina l'altezza del tratto cilindrico del serbatoio, essa sommata all'altezza delle due calotte nel punto di taglio ( $h^*$ ) determina l'altezza totale del serbatoio senza i manhole cover.

Si riportano in figura 21 i risultati del calcolo.

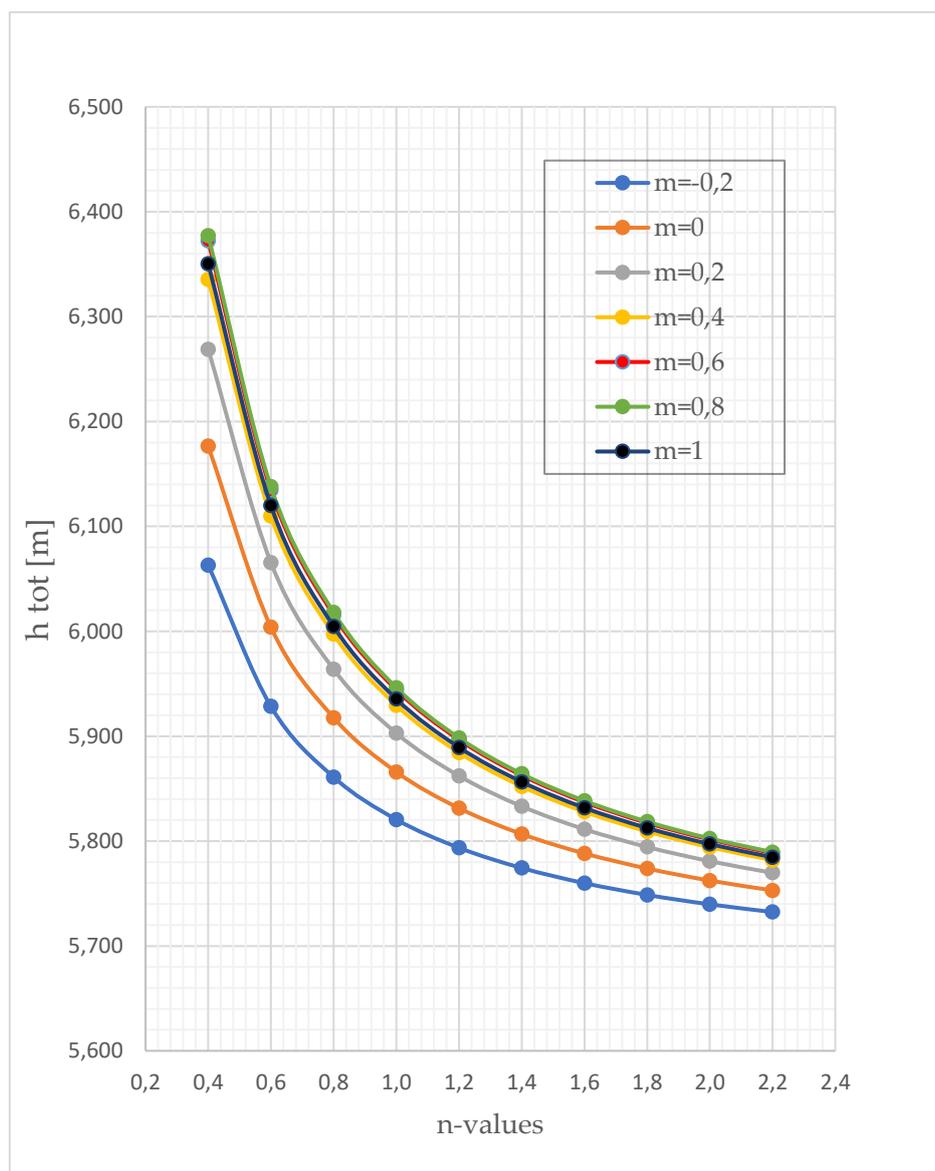


Figura 21: Altezza del serbatoio (senza manhole cover) in funzione dei parametri della calotta

Come già intuibile dalle considerazioni fatte sulle variazioni della forma della calotta, i profili più compatti sono associati a valori di “n” elevati.

A parità di valore “n” convergono in generale le soluzioni con “m” basso, fanno eccezione i profili con  $m=1$  che risultano più bassi di

quelli con  $m=0.8$ ; questa particolarità è dovuta all'elevato volume contenuto nella calotta con  $m$  unitario, di conseguenza il tratto cilindrico di serbatoio potrà essere più basso e ne beneficerà l'altezza complessiva dell'intero serbatoio.

### ***3.3 Variazione della massa del serbatoio in funzione dei parametri della calotta***

In analogia con il calcolo dell'altezza, anche per l'analisi della variazione della massa è stato utilizzato uno script *matlab*.

All'interno di questo codice di calcolo il volume di materiale (lega di alluminio) che forma il contorno del serbatoio viene calcolato per integrazione; conoscendo la densità del materiale si può quindi determinare la massa del componente.

In figura 22 si riportano i risultati di calcolo.

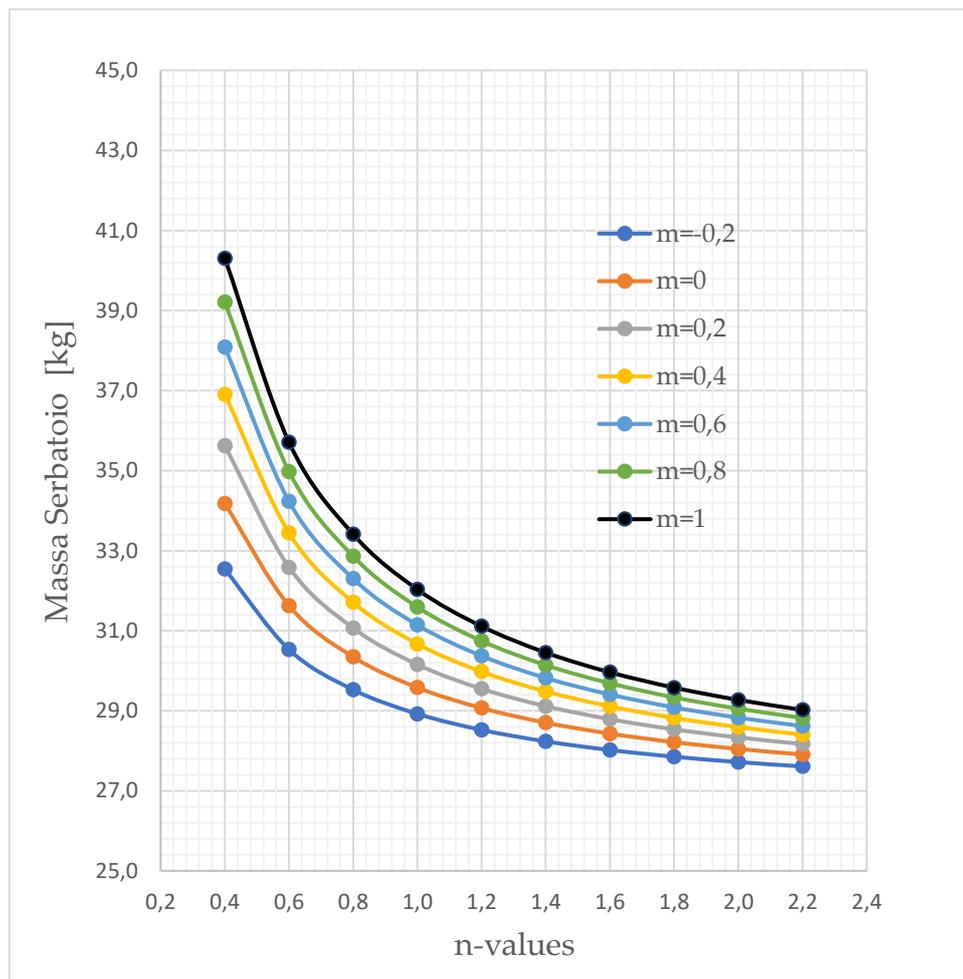


Figura 22: massa del serbatoio (senza manhole cover) in funzione dei parametri della calotta

In analogia con quanto visto per il calcolo dell'altezza, per avere un serbatoio leggero è opportuno utilizzare calotte con valori di "n" elevati e di "m" bassi, tuttavia mentre l'altezza ha una variabilità marginale (0.645 metri nel dominio di "m ed n" considerato) la massa, nello stesso dominio di valori, varia più significativamente.

Oltre al risultato presentato in figura 3, il modello mostra anche la dipendenza tra la massa del serbatoio e lo spessore della parete: essa è lineare (ad eccezione di una piccola approssimazione) per piccoli spessori (0.1-5mm).

Considerando l'applicazione in campo aerospaziale del componente è bene ricordare che il peso risparmiato nella struttura si traduce in un risparmio di carburante e/o in un maggior carico utile del vettore; alla luce di ciò i profili con parametro "m" maggiore di 0.4 (eccetto  $m=1$ ) vengono in prima battuta scartati, perché avendo il massimo valore di "n" limitato a 2 (vedi considerazioni sulle tensioni massime capitolo 2) risultano circa 1 kg più pesanti di quelli considerati.

### ***3.4 Selezione dei profili***

Combinando le considerazioni sulla massa e sull'altezza dei profili con quelle relative agli andamenti tensionali del capitolo precedente, è possibile definire un piccolo numero di soluzioni da studiare agli elementi finiti.

I calcoli mostrano come una soluzione ottimizzata in questo caso sia una soluzione di compromesso poiché l'obiettivo di minimizzazione della massa (o dell'altezza) è in contrasto con il contenimento delle tensioni.

A titolo di esempio si riportano gli andamenti di due soluzioni opposte:

- Calotta  $m=0.8$   $n=0.6$  (figura 22(a));
- Calotta  $m=-0.2$   $n=2$  (figura 22(b));

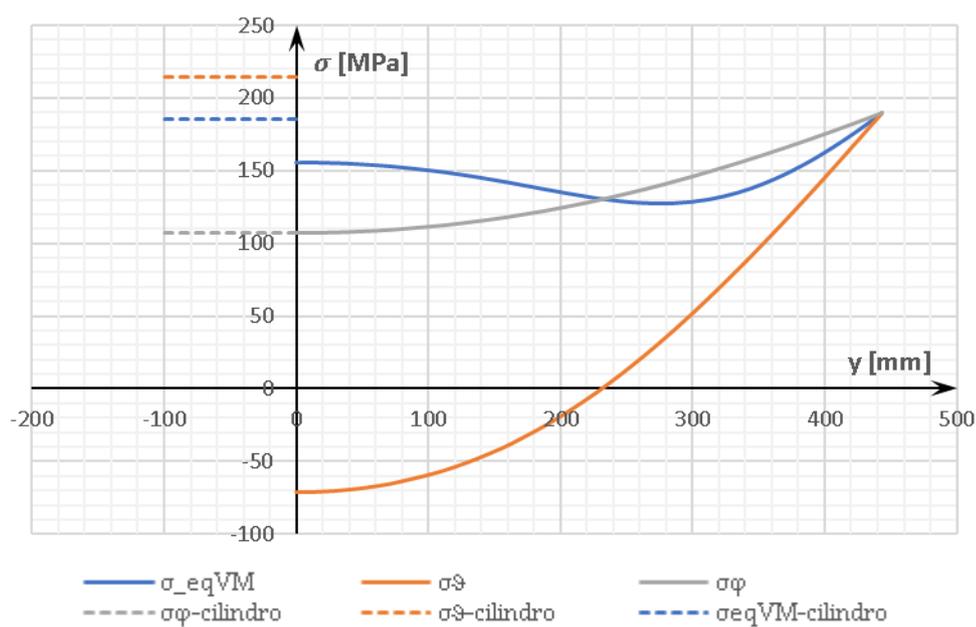
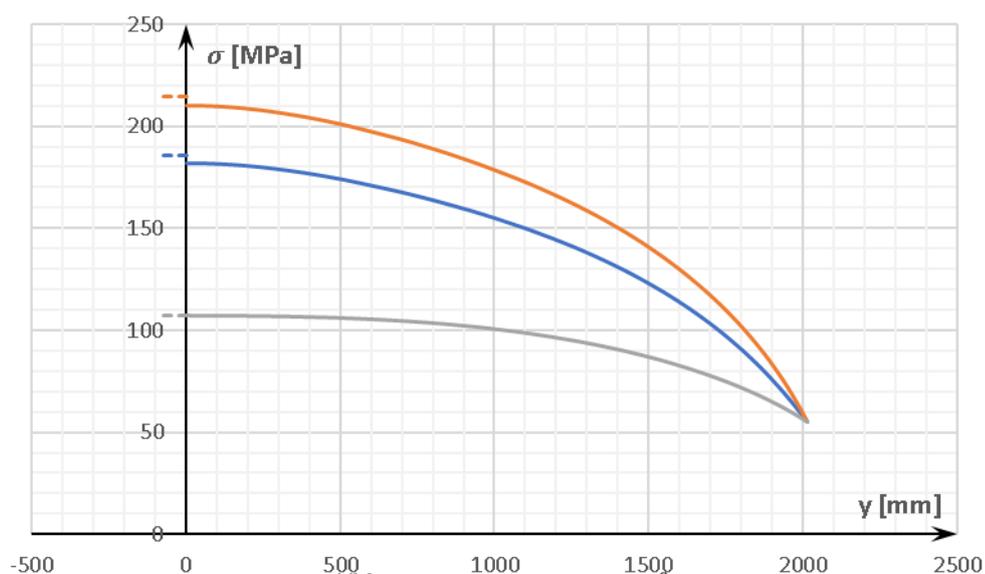


Figura 23: confronto tra due soluzioni opposte: (a) Alto, (b) Basso

Osservando l'asse delle ascisse si nota subito la differenza dimensionale delle due calotte, inoltre l'andamento tensionale (a) è molto più regolare, con tensioni simili a quelle del tratto cilindrico alla giunzione e basse all'apice.

Questo è sufficiente per dichiarare che il profilo (a) ha un comportamento tensionale migliore rispetto a (b) che inoltre presenta una tensione equivalente sull'apice maggiore di quella sul tratto cilindrico e una forte compressione alla giunzione.

Se però si guarda il peso complessivo del serbatoio in queste due configurazioni si nota che il profilo (a) pesa il 27% in più di (b).

Si individuano pertanto 7 soluzioni di compromesso che presentano una tensione equivalente minore o uguale a quella presente sul tratto cilindrico e una massa inferiore a 29.5 kg.

In alcune di esse viene privilegiata la leggerezza e pertanto presentano tensioni equivalenti elevate e compressione in alcuni punti della calotta.

**Profilo 1**

**m=-0.19**

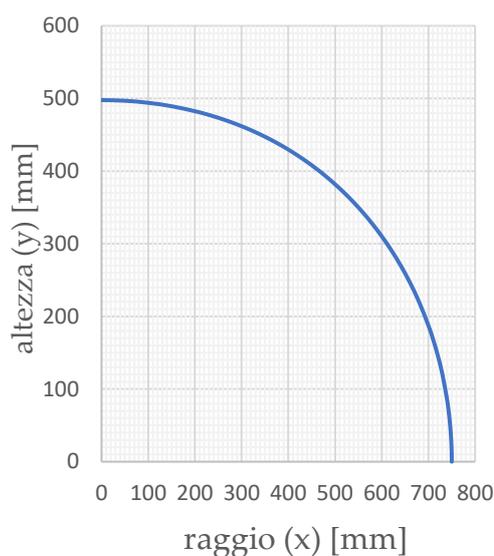
**n=1.167**

**Massa=28.6 kg**

**h=5.800m** (*altezza serbatoio*)

$\sigma_{eq,max,calotta}=185.5$  MPa

$\sigma_{\vartheta} > 0$  in tutti i punti della calotta



**Commento:** profilo molto leggero e compatto che non presenta tensioni membranali di compressione.

La tensione equivalente massima è localizzata all'apice della calotta e presenta un valore massimo prossimo a quella del cilindro.

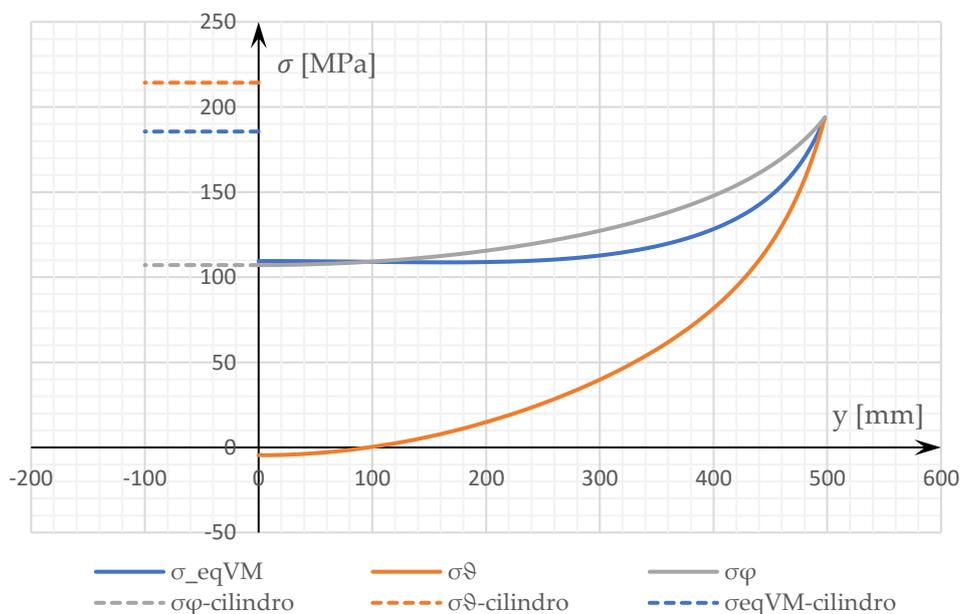


Figura 24: profilo 1, andamento analitico delle tensioni

**Profilo 2**

**m=-0.10**

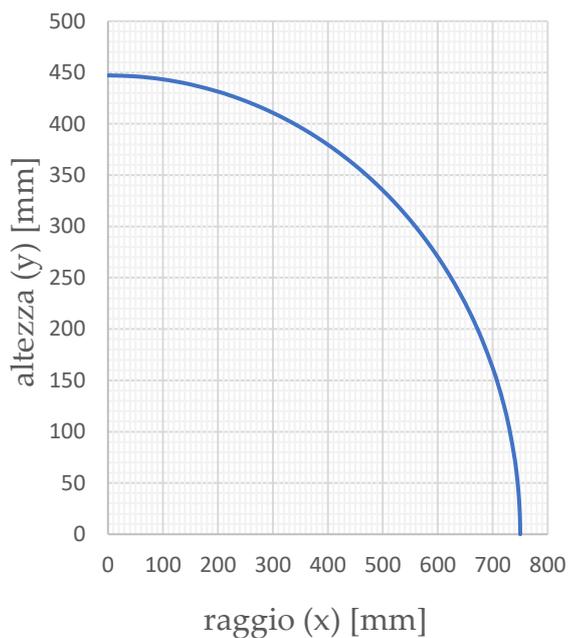
**n=1.5**

**Massa=28.3 kg**

**h=5.782 m**

$\sigma_{eq,max,calotta}=184.8 \text{ MPa}$

$\sigma_{\vartheta} < 0$  sulla giunzione



**Commento:** profilo molto leggero e molto compatto, presenta una forte compressione alla giunzione. La tensione equivalente massima è localizzata all'apice e alla giunzione ed è prossima a quella presente sul tratto cilindrico

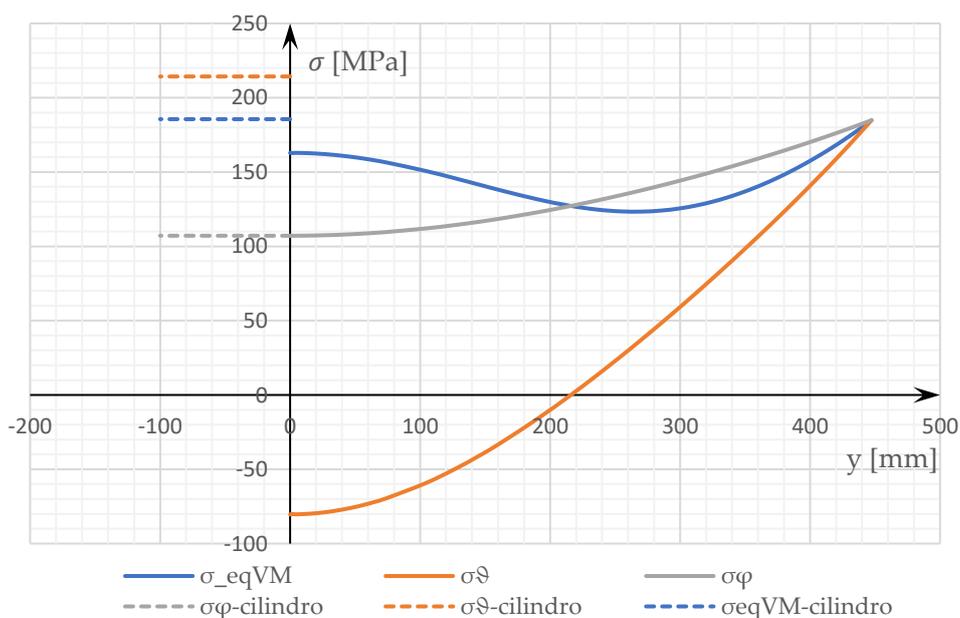


Figura 25: profilo 2, andamento analitico delle tensioni

**Profilo 3**

**m=0**

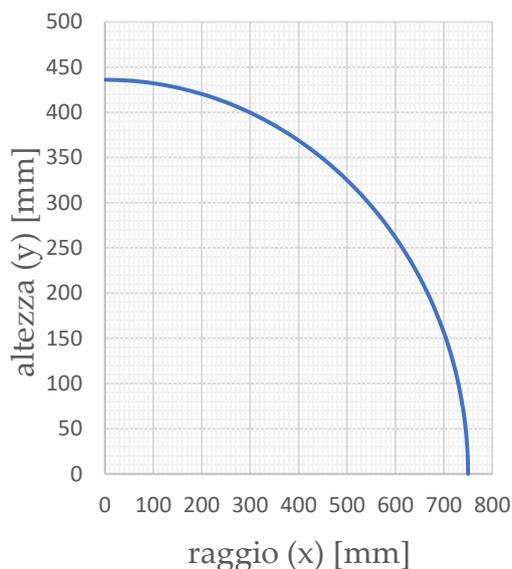
**n=1.72 (ellittico)**

**Massa=28.3 kg**

**h=5.78 m**

$\sigma_{eq,max,calotta} = 184.3 \text{ MPa}$

$\sigma_{\vartheta} < 0$  sulla giunzione



**Commento:** insieme al precedente è il profilo più leggero fra quelli analizzati. Risulta molto compatto, ma per contro presenta una forte compressione alla giunzione. La tensione equivalente massima è localizzata all'apice e alla giunzione ed è prossima a quella presente sul tratto cilindrico.

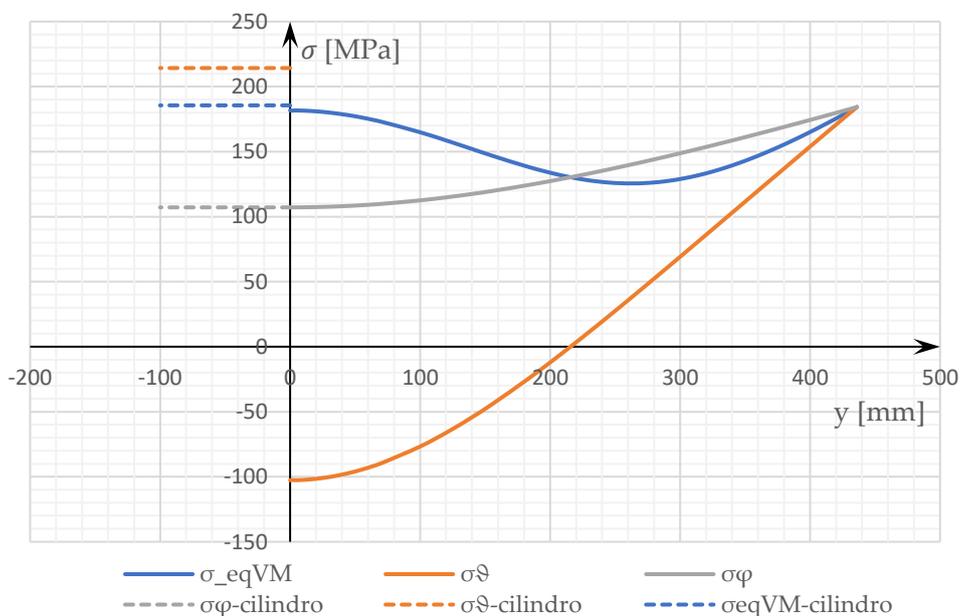


Figura 26: profilo 3, andamento analitico delle tensioni

**Profilo 4**

**m=0.2**

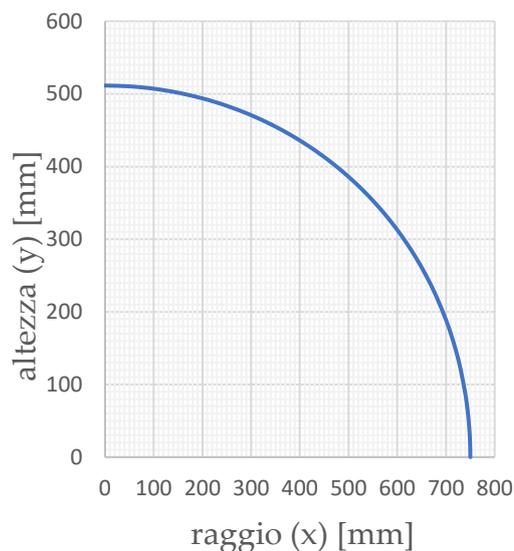
**n=1.735**

**Massa=28.6 kg**

**h=5.800 m**

$\sigma_{eq,max,calotta} = 165.0 \text{ MPa}$

$\sigma_{\vartheta} < 0$  sulla giunzione



**Commento:** profilo più pesante, non presenta però compressione in nessun punto della calotta. La tensione equivalente massima è localizzata all'apice della calotta ed è prossima a quella presente sul tratto cilindrico. La tensione alla giunzione è particolarmente contenuta.

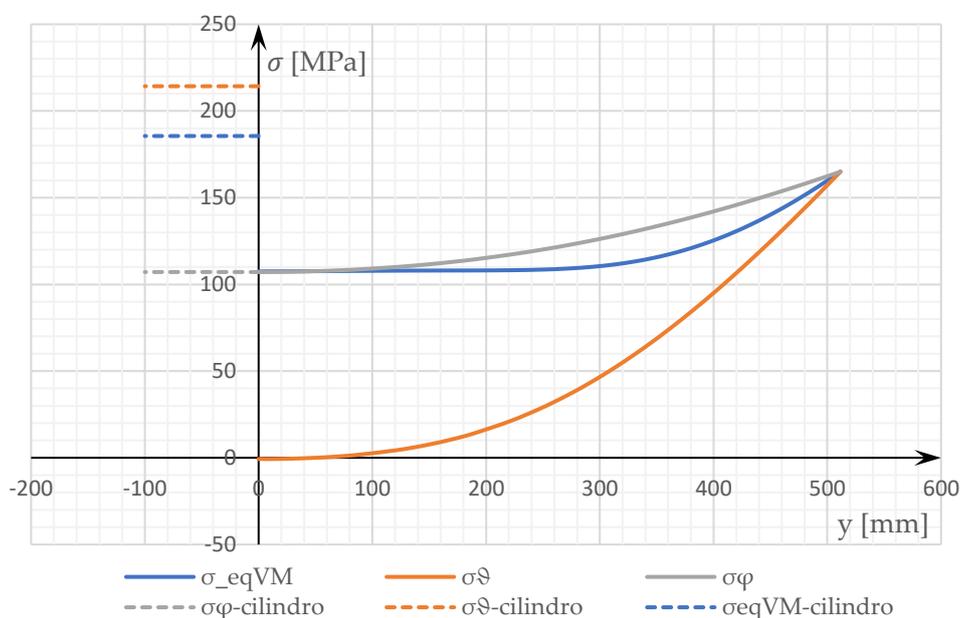


Figura 27: profilo 4, andamento analitico delle tensioni

**Profilo 5**

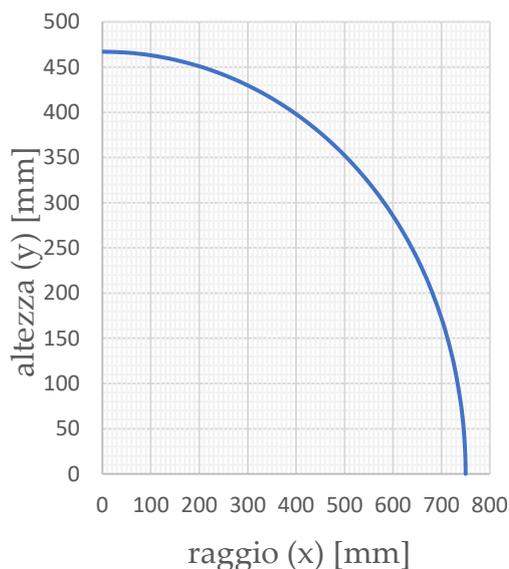
**m=0.2    n=1.9**

**Massa=28.4 kg**

**h=5.79 m**

$\sigma_{eq,max,calotta} = 180.7 \text{ MPa}$

$\sigma_{\vartheta} < 0$  sulla giunzione



**Commento:**            profilo compatto, presenta una moderata compressione alla giunzione.

La tensione equivalente massima è localizzata all'apice ed è prossima a quella presente sul tratto cilindrico.

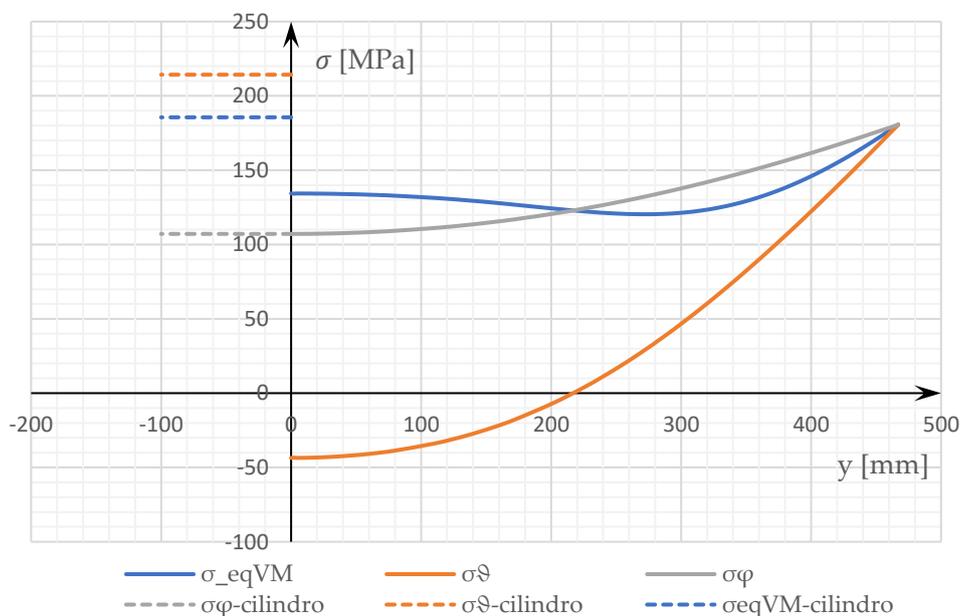


Figura 28: profilo 5, andamento analitico delle tensioni

**Profilo 6**

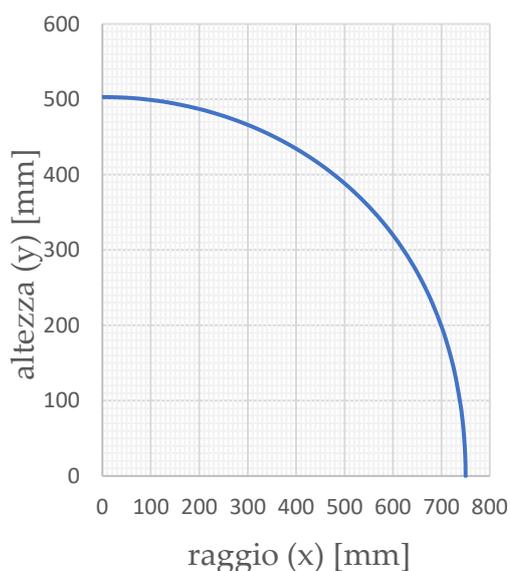
**m=0.4    n=2.0**

**Massa=28.6 kg**

**h=5.79 m**

$\sigma_{eq,max,calotta} = 182.9 \text{ MPa}$

$\sigma_{\vartheta} < 0$  lontano dalla giunzione



**Commento:** profilo più pesante dei precedenti, presenta una compressione molto piccola (quasi trascurabile) lontano dalla giunzione. La tensione equivalente massima è localizzata all'apice ed è prossima a quella presente sul tratto cilindrico.

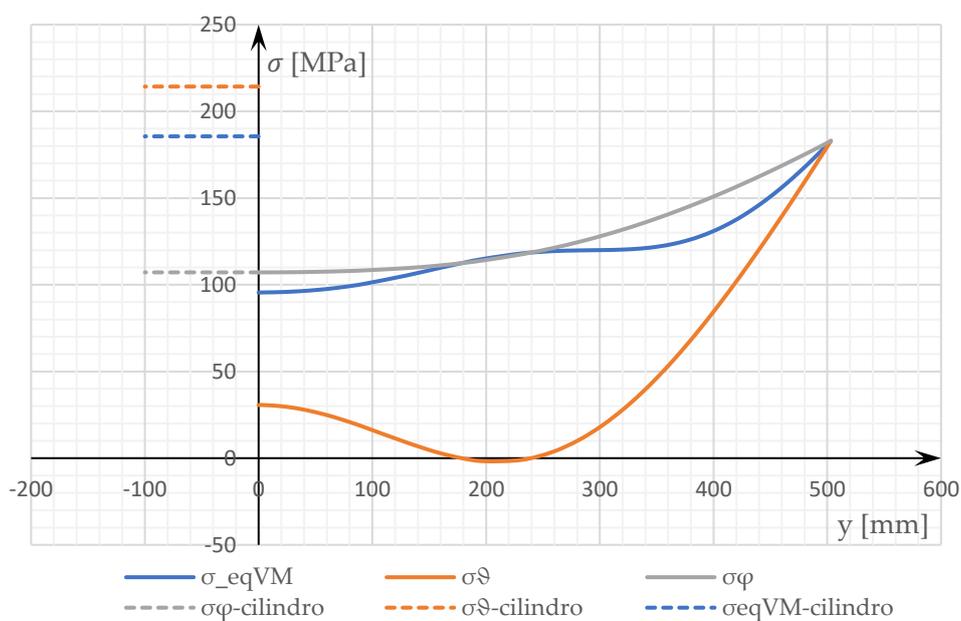


Figura 29: profilo 6, andamento analitico delle tensioni

**Profilo 7**

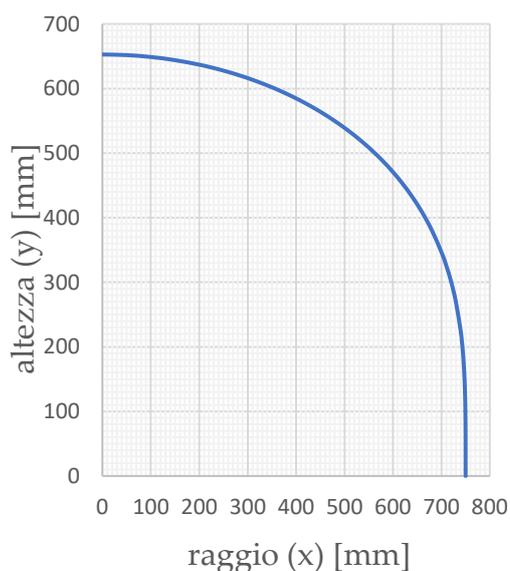
**m=1    n=1.99**

**Massa=29.3 kg**

**h=5.800 m**

$\sigma_{eq,max,calotta} = 184.6 \text{ MPa}$

$\sigma_{\vartheta} < 0$  lontano dalla giunzione



**Commento:** Profilo molto pesante, ma con le tensioni alla giunzione che sono molto simili tra parte cilindrica e calotta; la compressione risulta contenuta e lontana dalla giunzione. Queste due caratteristiche fanno presupporre effetti di bordo trascurabili.

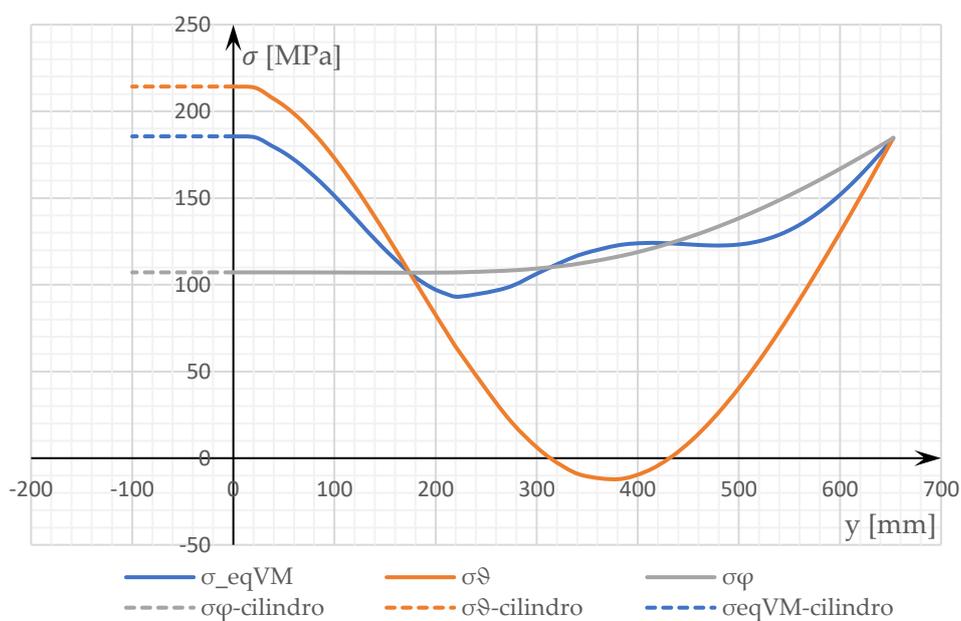


Figura 30: profilo 7, andamento analitico delle tensioni

Riassumendo:

- I profili selezionati sono tutti accomunati da un valore di tensione elevato sull'apice; come indicato dalla figura 18, per valori di  $n$  elevati la tensione massima sulla calotta sarà sull'apice.
- "h" rappresenta l'altezza della calotta senza il manhole cover pertanto non è molto rappresentativa della compattezza del serbatoio, se invece si considera l'altezza totale della calotta (leggibile dal grafico del profilo) si riscontrano maggiori distinzioni tra le soluzioni proposte; questo però presuppone che il manhole cover abbia esattamente la stessa forma del tratto superiore della calotta.
- In generale la riduzione della massa e dell'altezza sono obiettivi perseguibili contemporaneamente, essi sono in opposizione con la riduzione delle tensioni sull'apice.

I profili con "m" maggiore di 0.4 sono più pesanti, pertanto, ad eccezione del profilo 7 che sembra presentare buone caratteristiche per la riduzione degli effetti di bordo, il loro studio non viene in prima battuta esteso ai modelli FEM.

## 4. ANALISI FEM

### 4.1 *Caratteristiche del modello FEM*

Il modello di tensione piana utilizzato per le valutazioni analitiche delle calotte, non è in grado di valutare gli effetti di bordo.

Esiste una trattazione matematica basata sulla congruenza degli spostamenti all'interfaccia tra calotta e cilindro, tale condizione rispecchia il reale comportamento del serbatoio che non può avere due spostamenti diversi nello stesso punto.

La congruenza degli spostamenti all'interfaccia viene imposta matematicamente portando alla nascita di una tensione di tipo flessionale (decade localmente il modello membranale), questo fatto complica notevolmente la trattazione analitica, motivo per il quale conviene sfruttare il metodo agli elementi finiti (FEM) per studiare gli effetti di bordo.

Oltre allo studio dettagliato dell'andamento tensionale nei dintorni della giunzione, l'analisi FEM consente anche di verificare i risultati ottenuti sul modello analitico (guscio assialsimmetrico) della calotta valutandone l'affidabilità.

La simmetria dell'oggetto permette di analizzarne solo una porzione ripetibile dello stesso, successivamente vengono specchiati i risultati per ottenere il modello completo.

I software utilizzati (*Hyperworks* e *Hyperview* di Altair) consentono questa semplificazione simulando, con opportune condizioni di vincolo, la continuità dell'oggetto sulle superfici di bordo del modello.

Il serbatoio può quindi essere modellizzato come una superficie di rivoluzione sui  $90^\circ$  nella quale il comportamento del tratto cilindrico, visti gli andamenti costanti di tensioni e spostamenti, viene studiato unicamente su 150 mm; queste semplificazioni consentono di aumentare il numero di elementi della mesh sulla giunzione senza arrivare al limite imposto dal calcolatore.

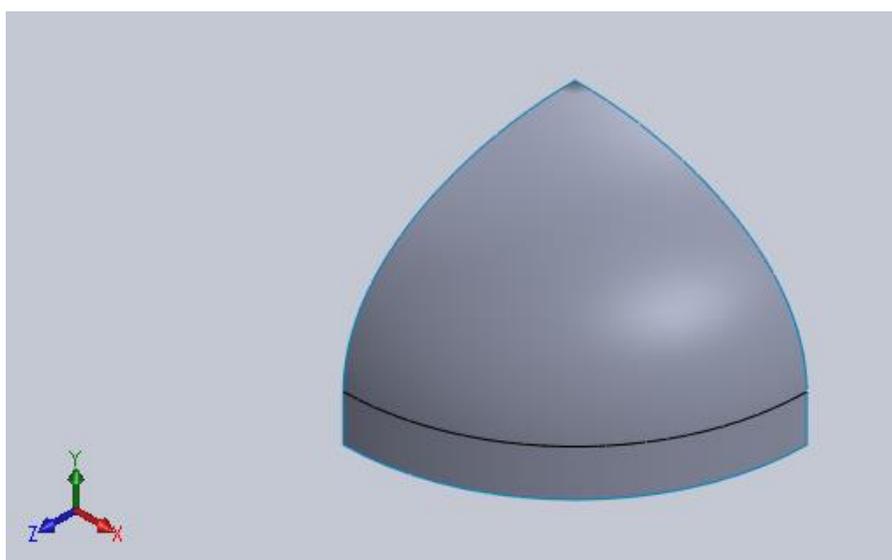


Figura 31: geometria CAD

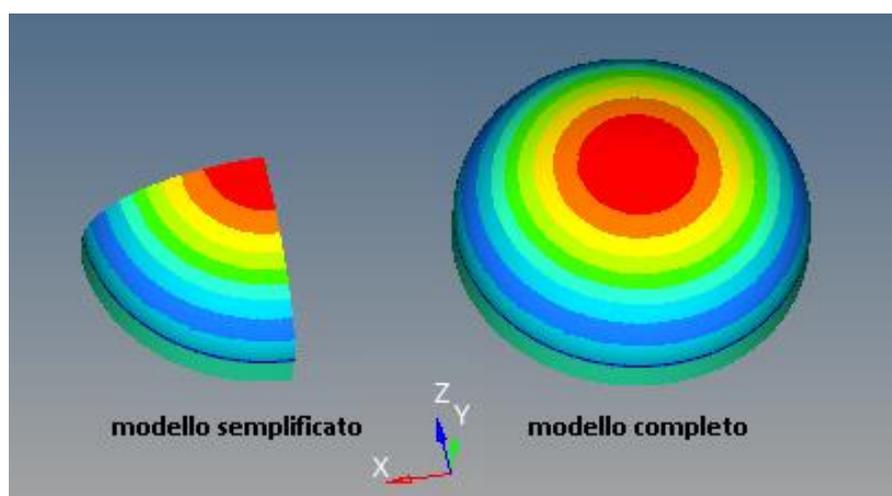


Figura 32: semplificazione del modello FEM

Importata la geometrica CAD (superficie di rotazione generata con *SolidWorks*), è necessario andare a definire in *Hyperworks* le proprietà della mesh e le condizioni al contorno:

- Tipologia degli elementi: shell (PSHELL) con spessore 0.35 mm;
- Forma: mixed (rettangolari e triangolari);
- Proprietà del materiale: lega di Alluminio 2219 T852 forgiato secondo MIL-HDBK-5;

Tabella 3: caratteristiche del materiale (fonte: TAS [16])

Modulo di Young	$E= 70330 \text{ MPa}$
Tensione di rottura	$UTS= 345 \text{ MPa}$
Tensione di snervamento	$Y_s= 255 \text{ MPa}$
Coefficiente di poisson	$\nu= 0.33$
Densità	$\rho= 2840 \text{ kg/m}^3$

- Dimensione massima dell'elemento: 10 mm con refinement 1 mm nella zona della giunzione (30 mm al di sopra e al di sotto di essa);

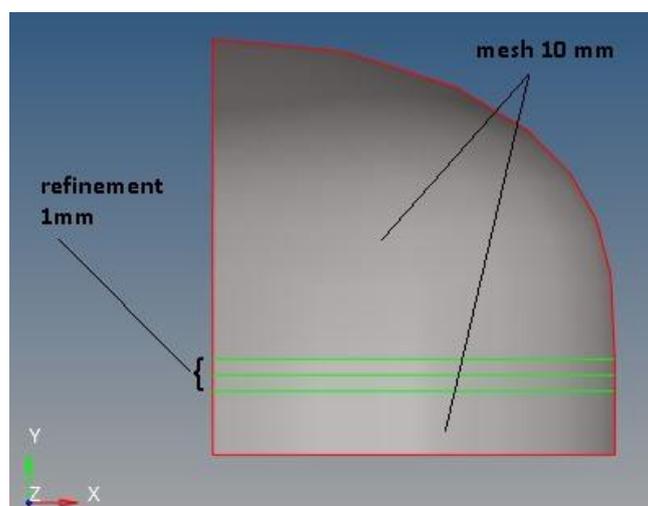


Figura 33: dimensione degli elementi della mesh

- Vincoli: si vincolano alcuni gradi di libertà su tutti nodi appartenenti ai bordi del modello CAD (essi giacciono per costruzione sui tre piani che definiscono lo spazio nel software) per simulare la simmetria sui piani YZ e XY e la prosecuzione del tratto cilindrico sul piano XZ.

Tabella 4: condizioni di vincolo

PIANO	GRADI DI LIBERTÀ VINCOLATI
XY	Spostamento: Z Rotazioni: $\vartheta_x, \vartheta_y$
YZ	Spostamento: X Rotazioni: $\vartheta_z, \vartheta_y$
XZ	Spostamento: Y Rotazioni: $\vartheta_x, \vartheta_z$

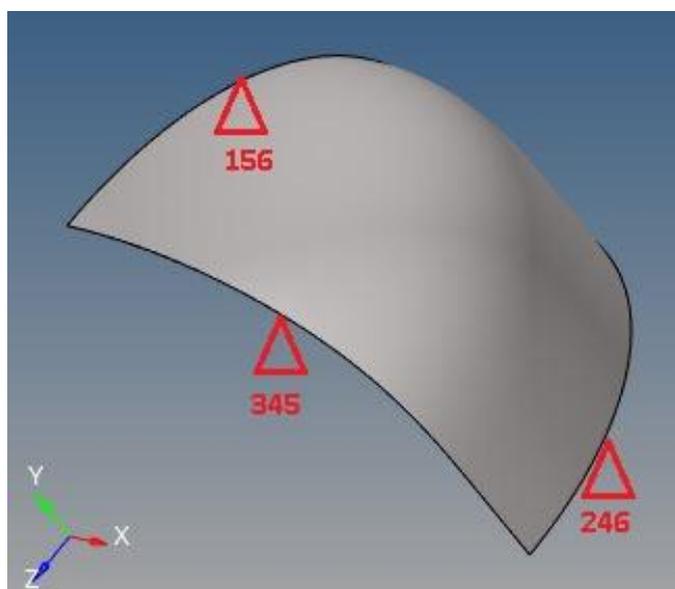


Figura 34: applicazione dei vincoli ai bordi del modello

- Carichi: pressione uniformemente applicata sulla superficie interna del modello, modulo 0.1 MPa;

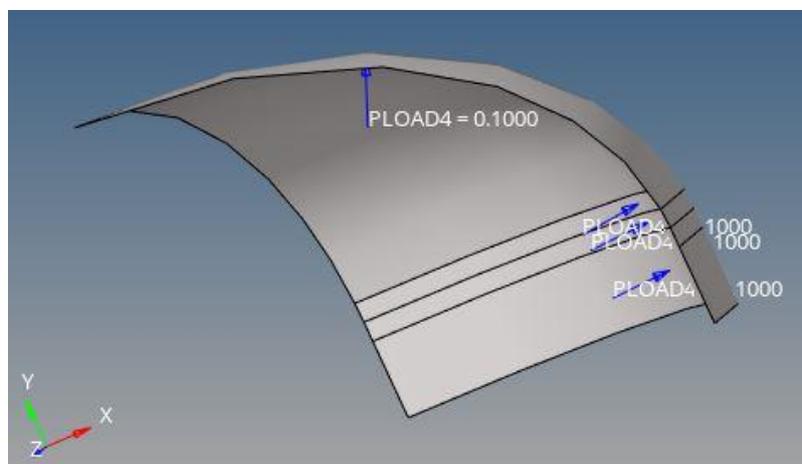


Figura 35: carichi sul modello

## 4.2 Convergenza del modello

La dimensione massima degli elementi nel calcolo FEM è stata determinata effettuando uno studio della variabilità dei risultati in funzione della dimensione massima degli elementi che compongono la mesh, questo studio prende il nome di “analisi di convergenza”.

Per valutare la convergenza dei risultati con il modello proposto è stato considerato il caso “calotta cassiniana con parametri  $m=-0.19$   $n=1.167$ ”; esso viene analizzato con il metodo FEM utilizzando mesh con dimensione massima progressivamente decrescente.

Tabella 5: dimensione massima dell'elemento e numero degli elementi nei 4 sottocasi utilizzati per lo studio di convergenza

Mesh 40mm	631 elementi
Mesh 20 mm	2552 elementi
Mesh 10 mm	10'089 elementi
Mesh 5 mm	40'356 elementi

Per una valutazione più completa della convergenza del modello vengono inclusi nei risultati anche i valori ottenuti con il calcolo analitico (capitolo 2) che non evidenzia gli effetti di bordo.

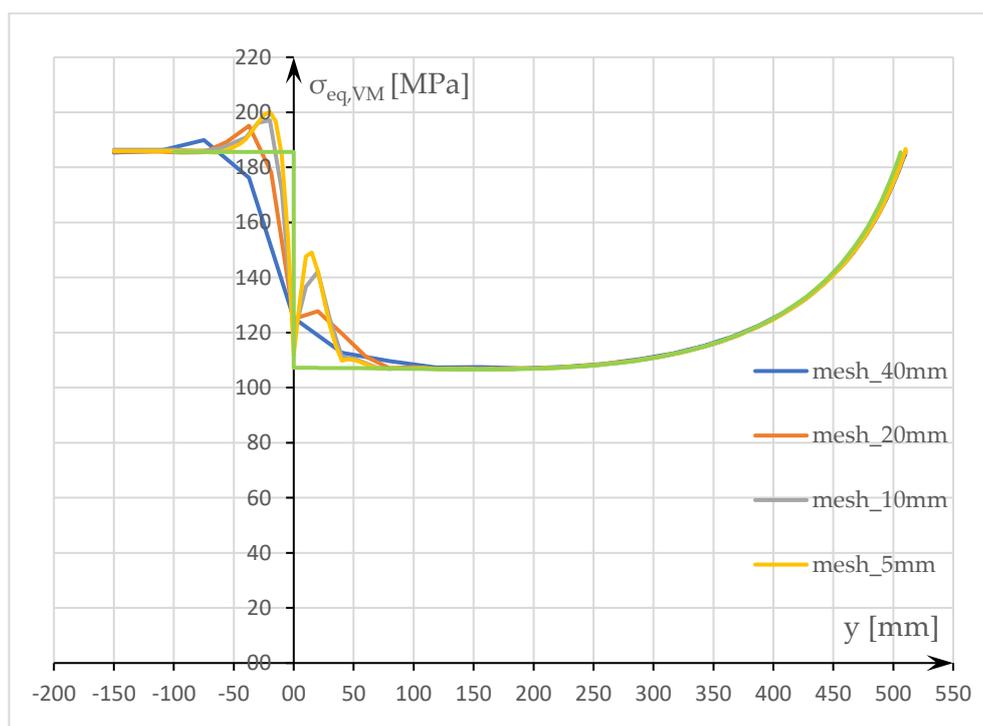


Figura 36: Andamento delle tensioni equivalenti (Von Mises) nei sottocasi analizzati per la convergenza

I risultati ottenuti evidenziano come a  $\pm 100$  mm dalla giunzione l'uso di una mesh minore di 20 mm non influenzi in modo significativo i risultati, questi inoltre rispecchiano con buona approssimazione il

risultato analitico in tutti i punti ad esclusione della zona circostante alla giunzione.

In quest'ultima zona le due mesh con elementi più fini (5 e 10 mm) presentano ancora delle differenze apprezzabili in termini tensionali, per questo motivo nelle analisi effettive viene proposto un refinement della mesh a 1 mm nella zona della giunzione (figura 33).

La scelta di utilizzare una dimensione massima degli elementi pari a 10 mm nelle restanti parti del modello risulta quindi essere un compromesso tra il numero massimo degli elementi tollerati dal calcolatore (100'000), tenendo conto del refinement, e una buona approssimazione nella zona  $\pm 100$  mm dalla giunzione; utilizzando queste specifiche sul software meshatore si ottengono, per l'oggetto in esame, modelli con un numero di elementi della mesh compreso tra 90'000-95'000.

### 4.3 Risultati modello FEM

In base alle considerazioni sulla massa e sull'altezza (capitolo 3) sono stati individuati sette profili di calotta da analizzare al FEM.

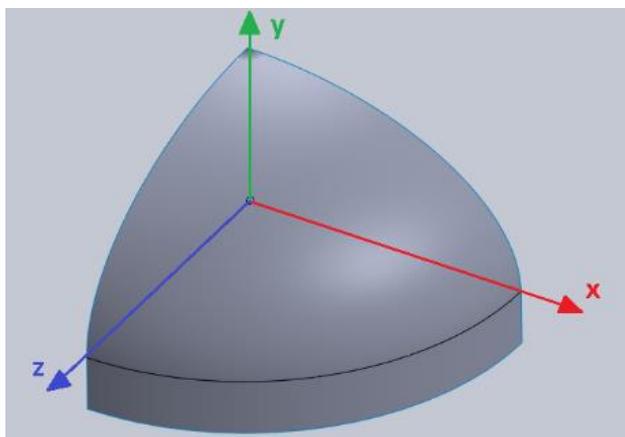


Figura 37: sistema di riferimento, origine sull'asse del modello nella sezione di giunzione

**Profilo 1** **m=-0.19** **n=1.167**

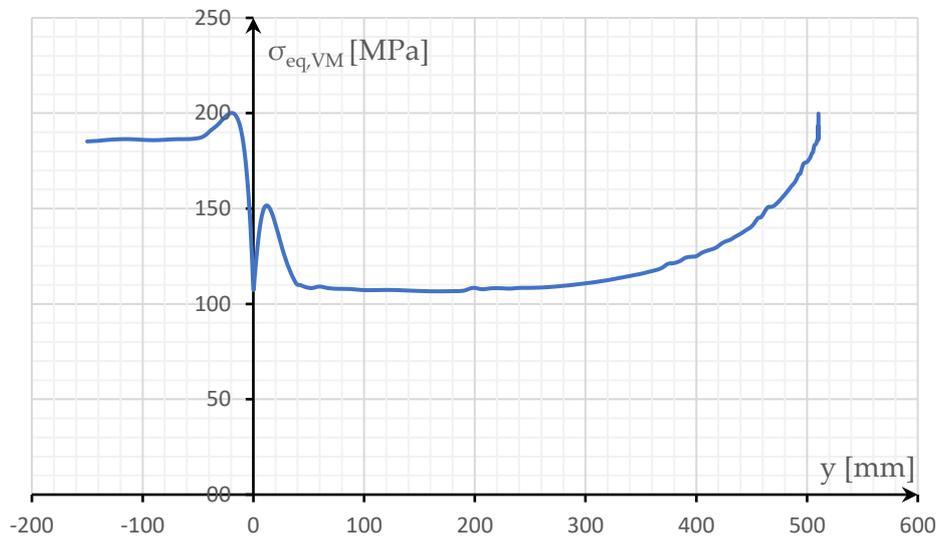


Figura 38: profilo 1, andamento della tensione equivalente (calcolo FEM)

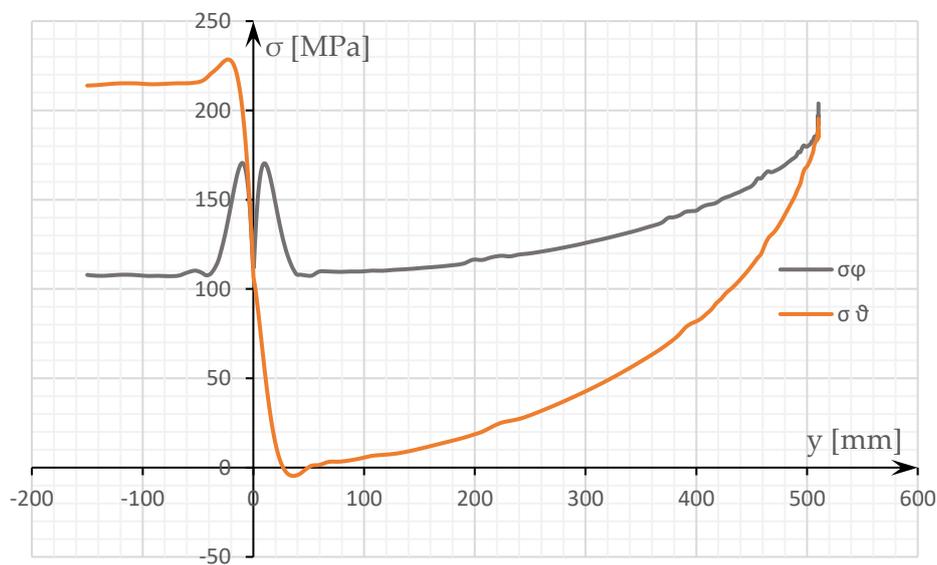
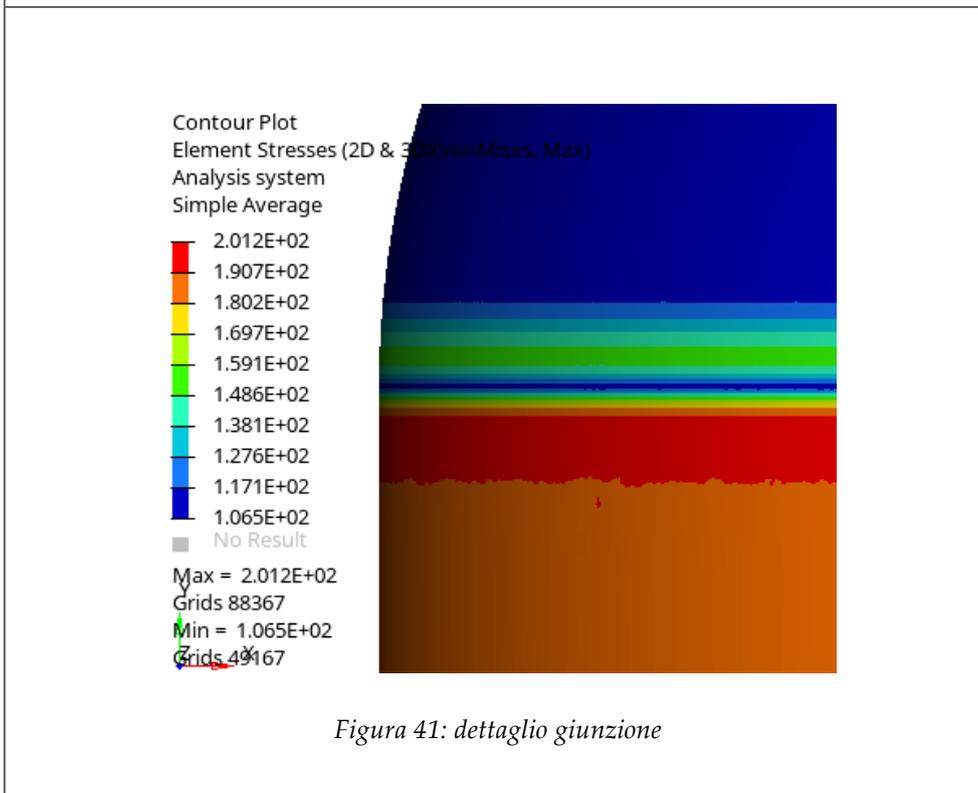
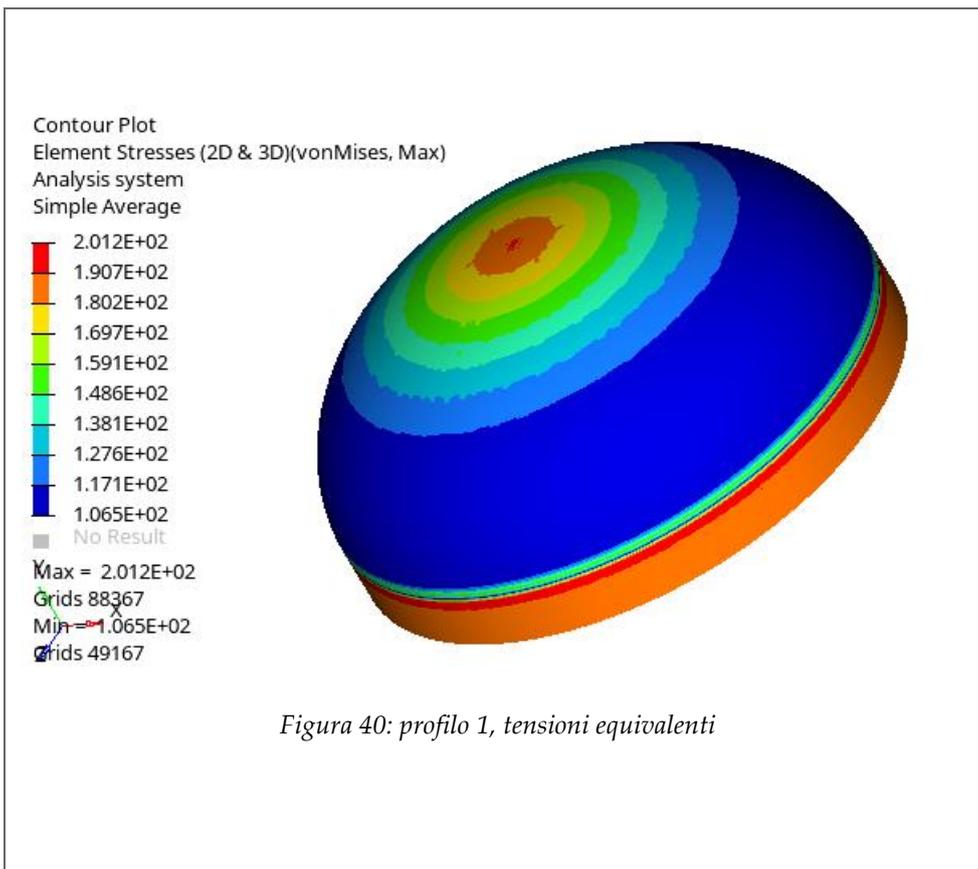


Figura 39: profilo 1, andamento delle tensioni membranali (calcolo FEM)



**Profilo 2** **m=-0.1** **n=1.5**

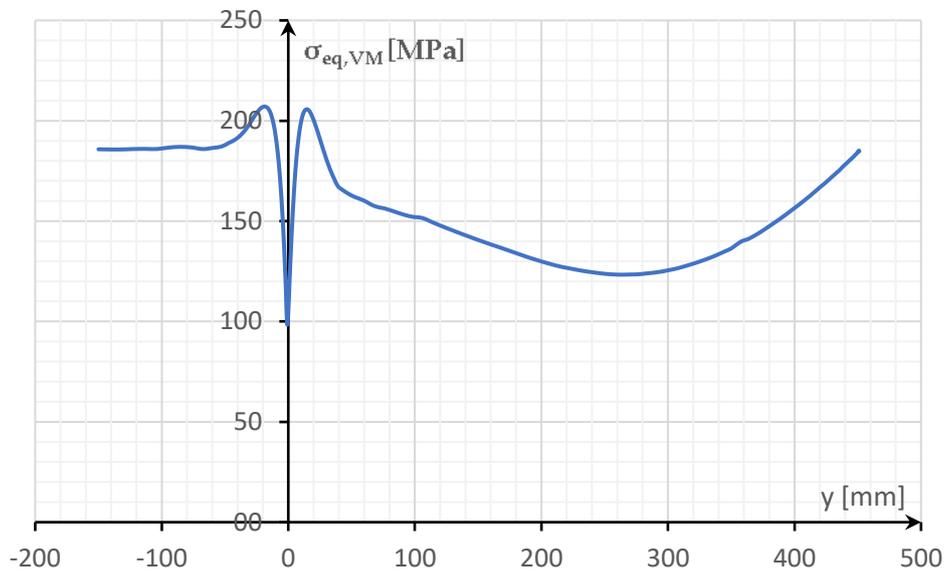


Figura 42: profilo 2, andamento della tensione equivalente (calcolo FEM)

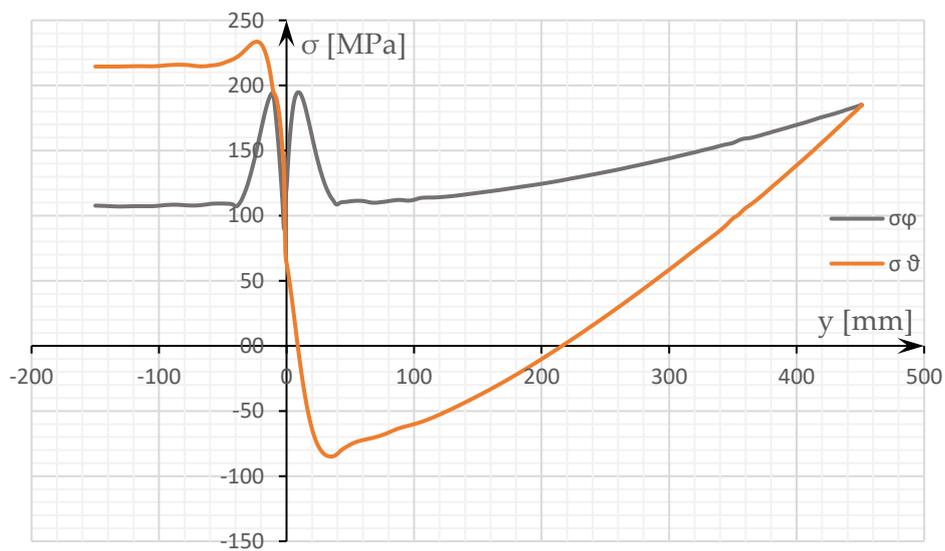
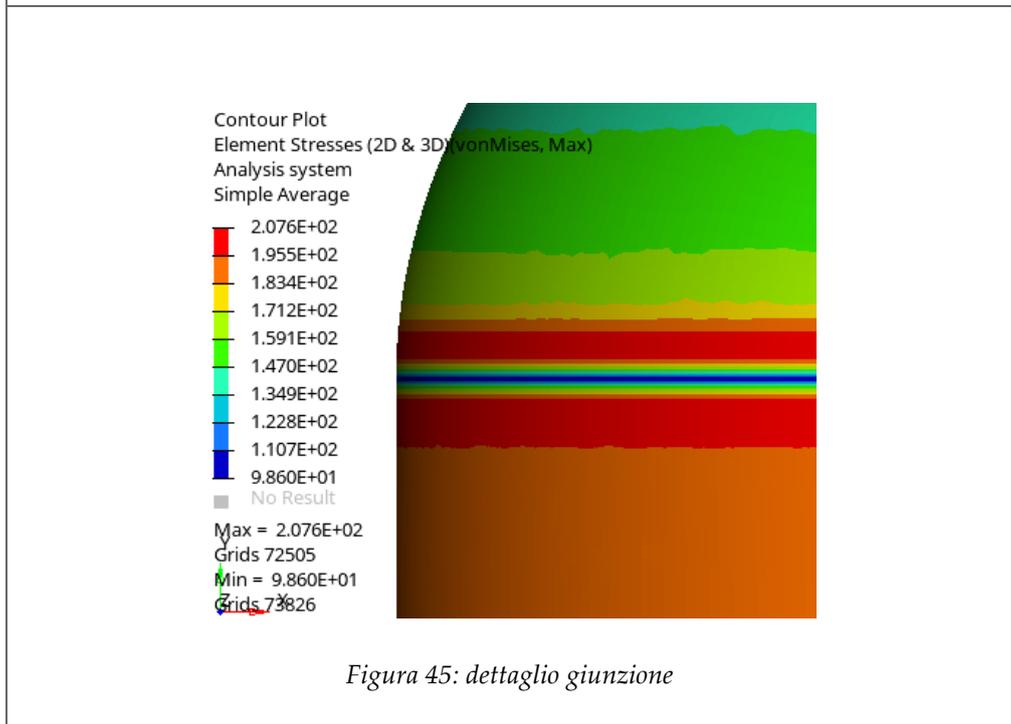
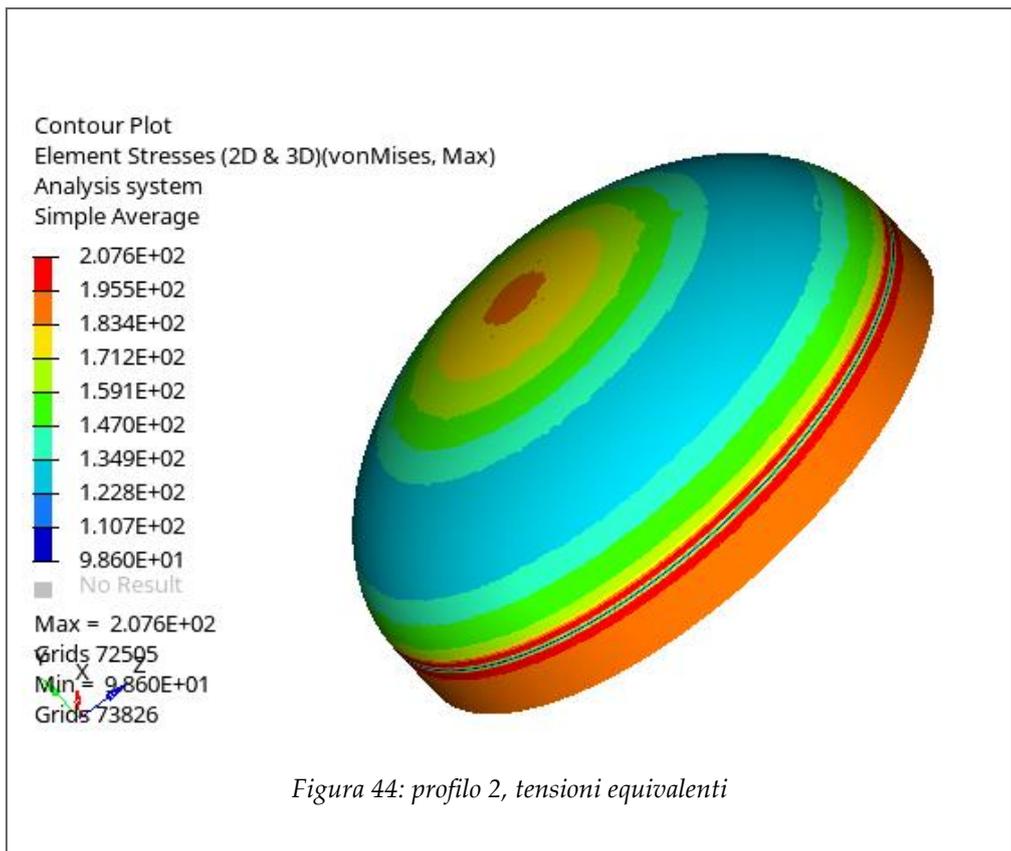


Figura 43: profilo2, andamento delle tensioni membranali (calcolo FEM)



**Profilo 3 (ellittico) m=0 n=1.72**

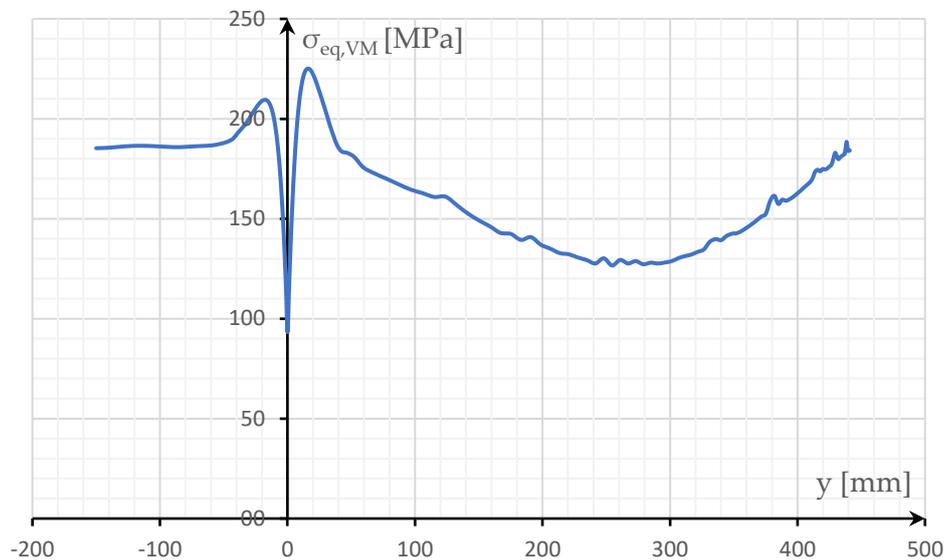


Figura 46: profilo 3, andamento della tensione equivalente (calcolo FEM)

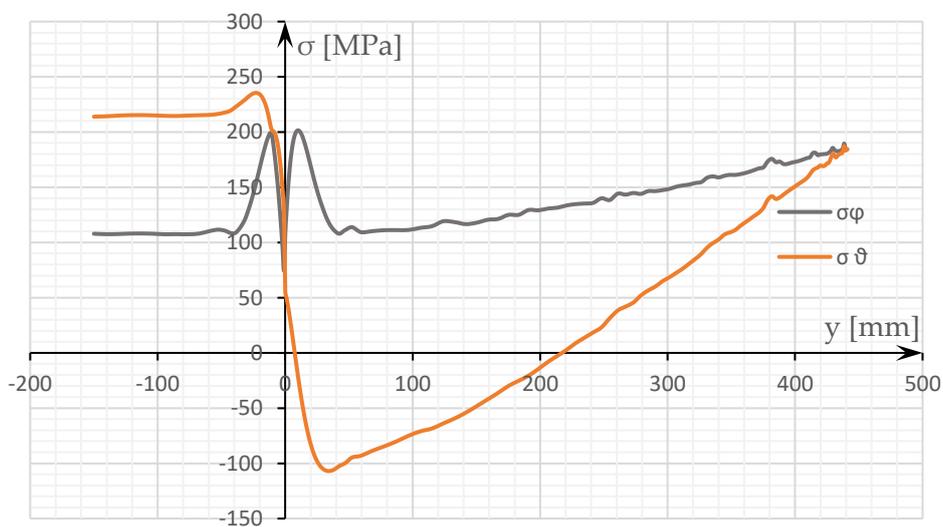


Figura 47: profilo2, andamento delle tensioni membranali (calcolo FEM)

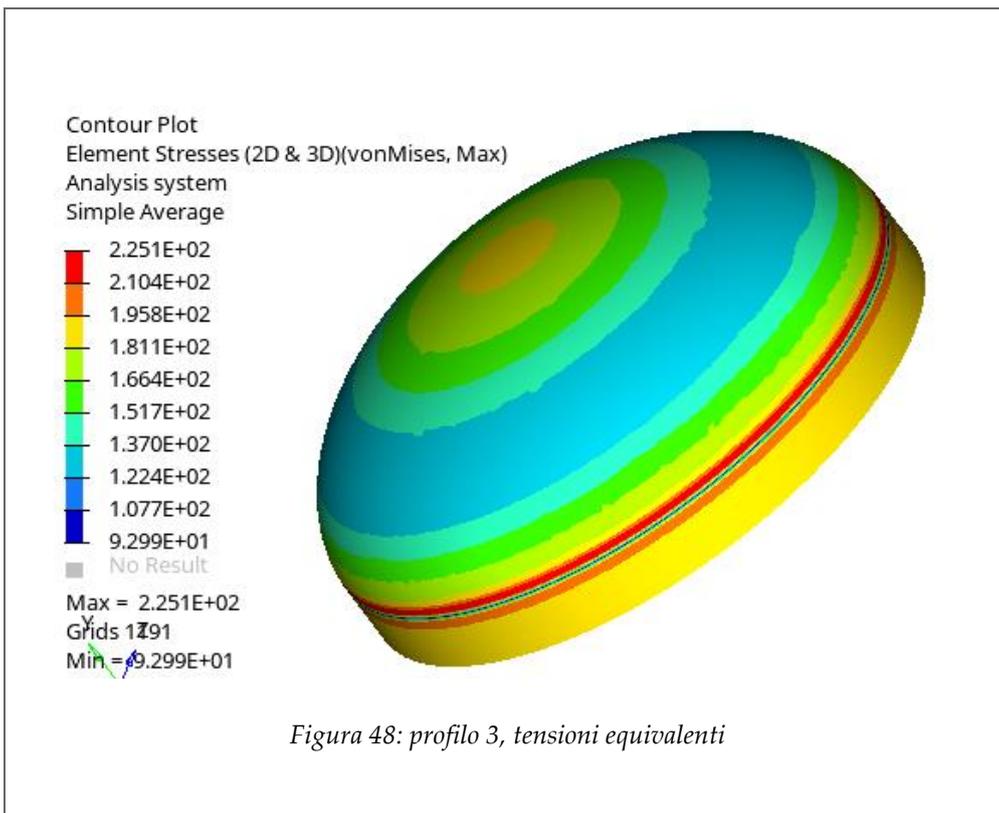


Figura 48: profilo 3, tensioni equivalenti

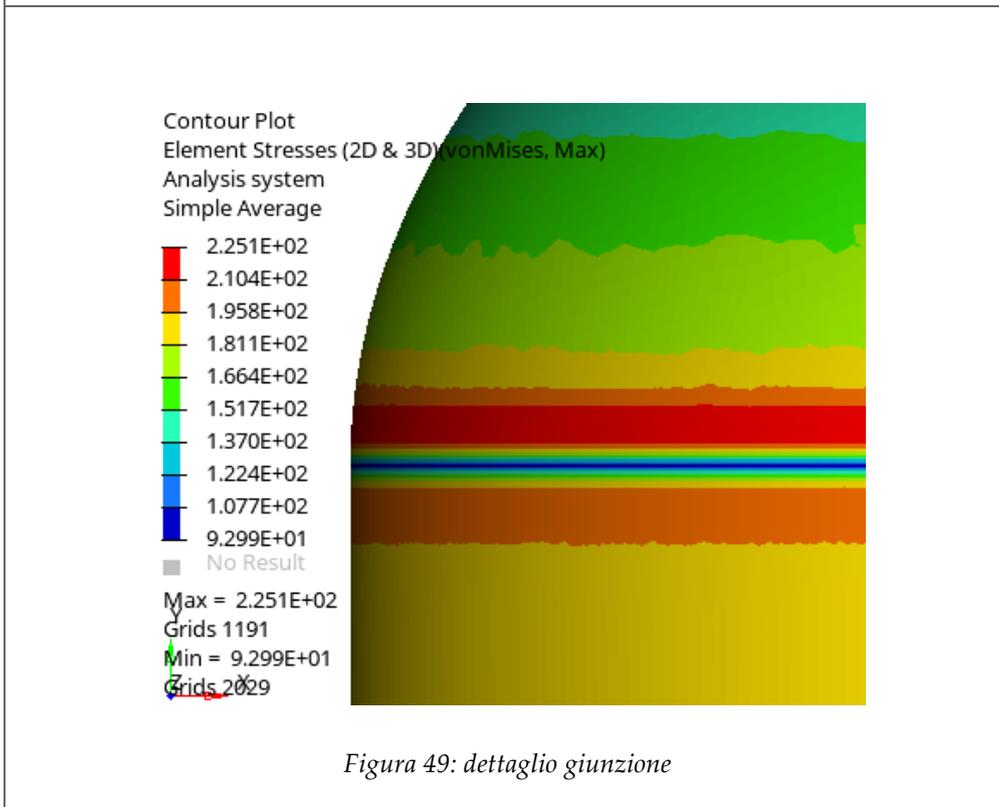


Figura 49: dettaglio giunzione

**Profilo 4** **m=0.2** **n=1.735**

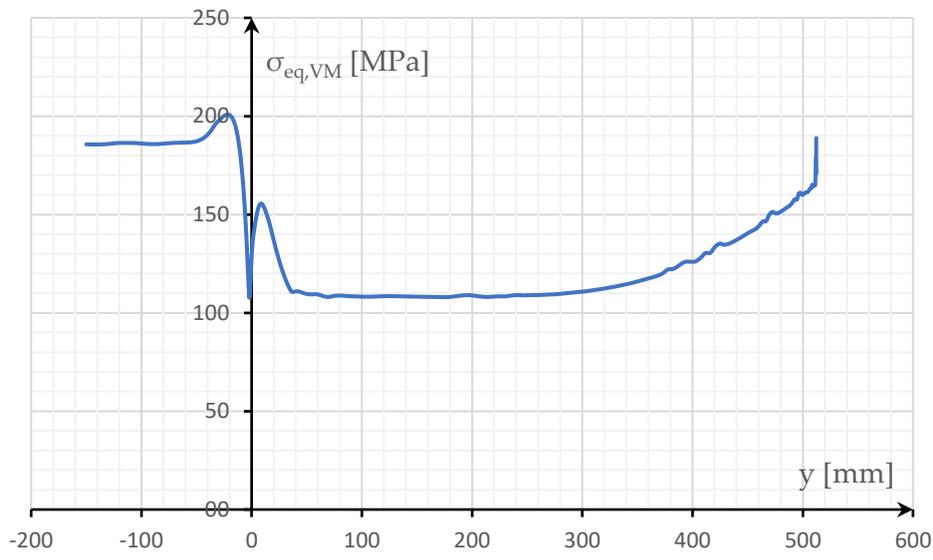


Figura 50: profilo 4, andamento della tensione equivalente (calcolo FEM)

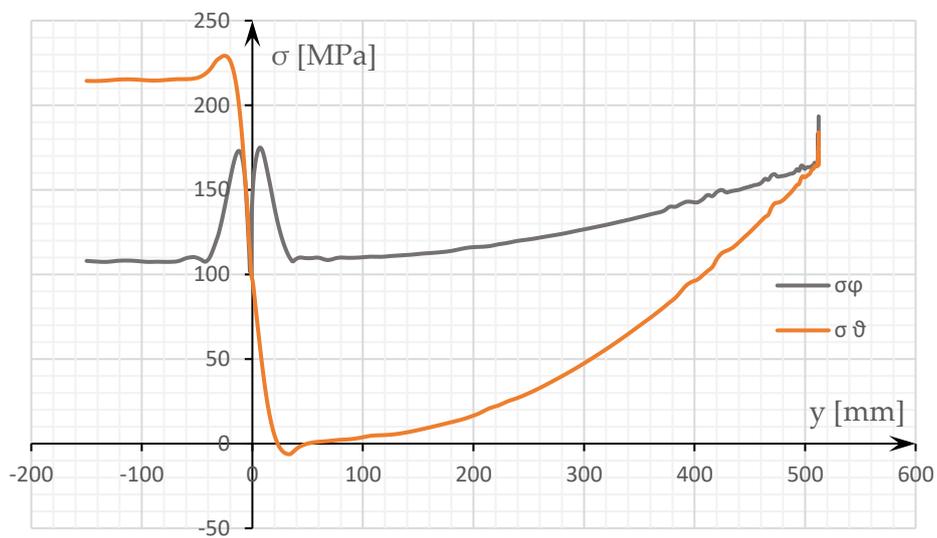


Figura 51: profilo 4, andamento delle tensioni membranali (calcolo FEM)

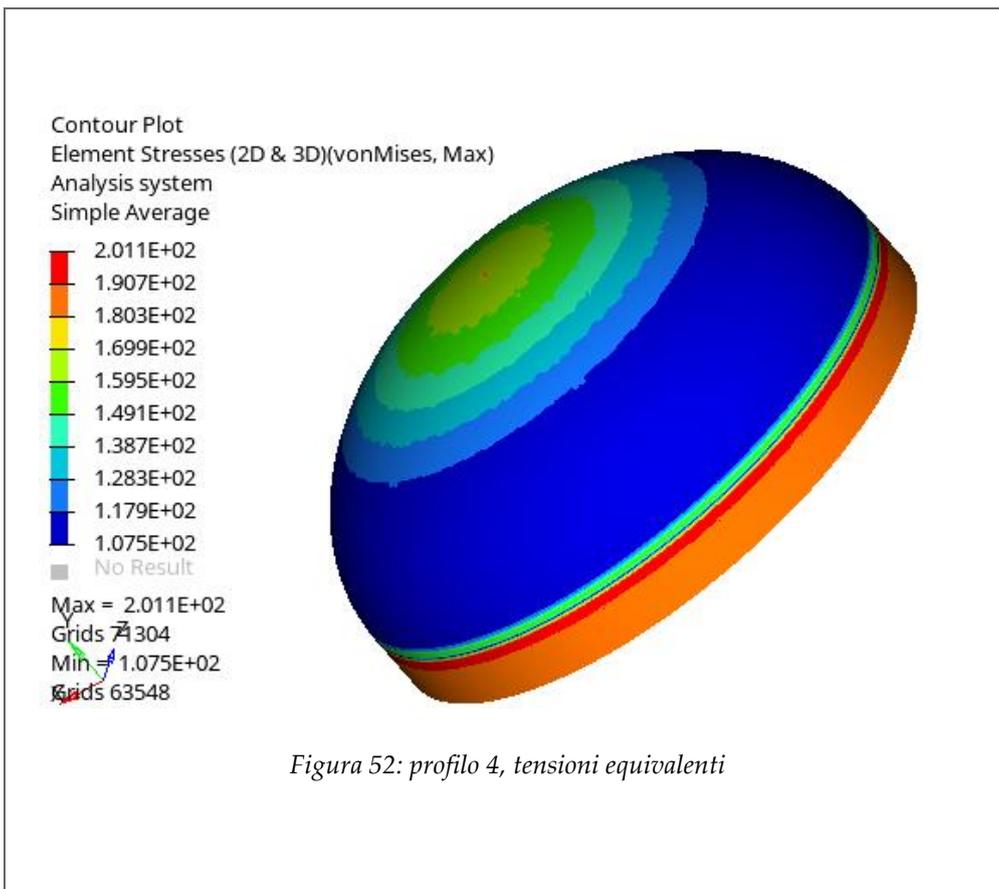


Figura 52: profilo 4, tensioni equivalenti

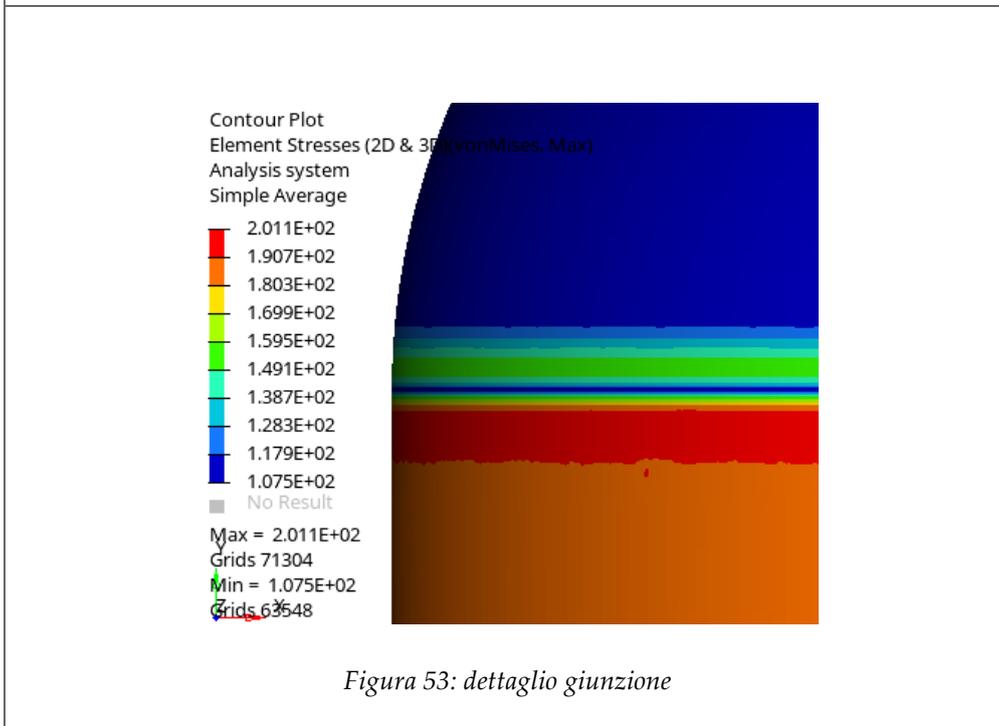


Figura 53: dettaglio giunzione

**Profilo 5** **m=0.2** **n=1.9**

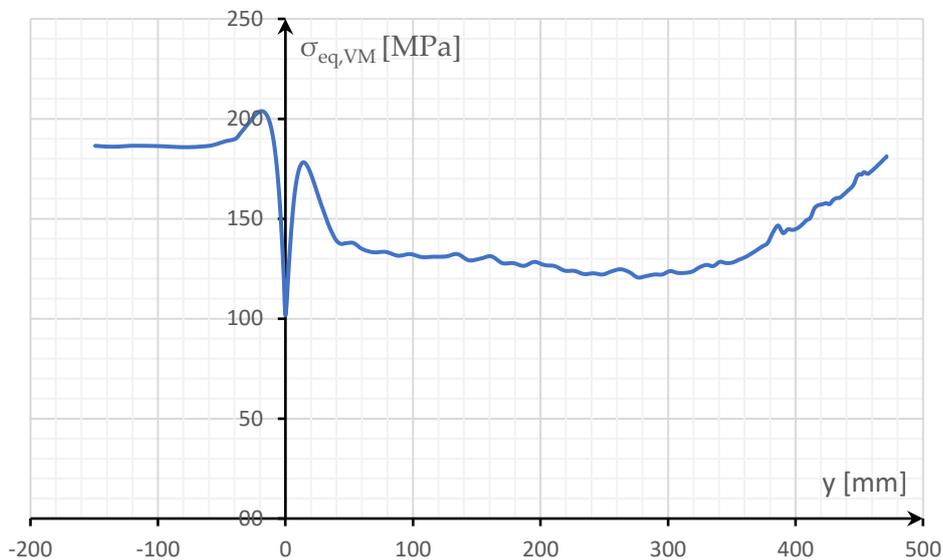


Figura 54: profilo 5, andamento della tensione equivalente (calcolo FEM)

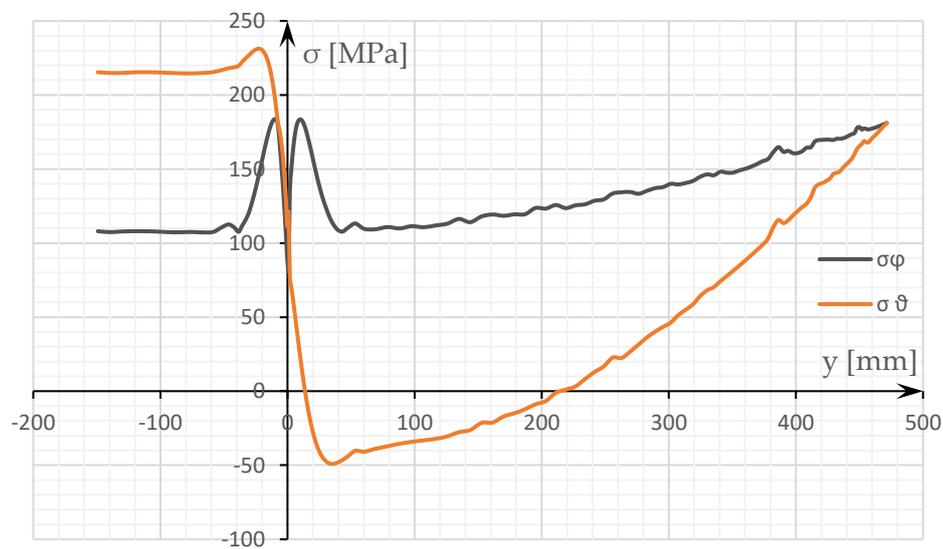
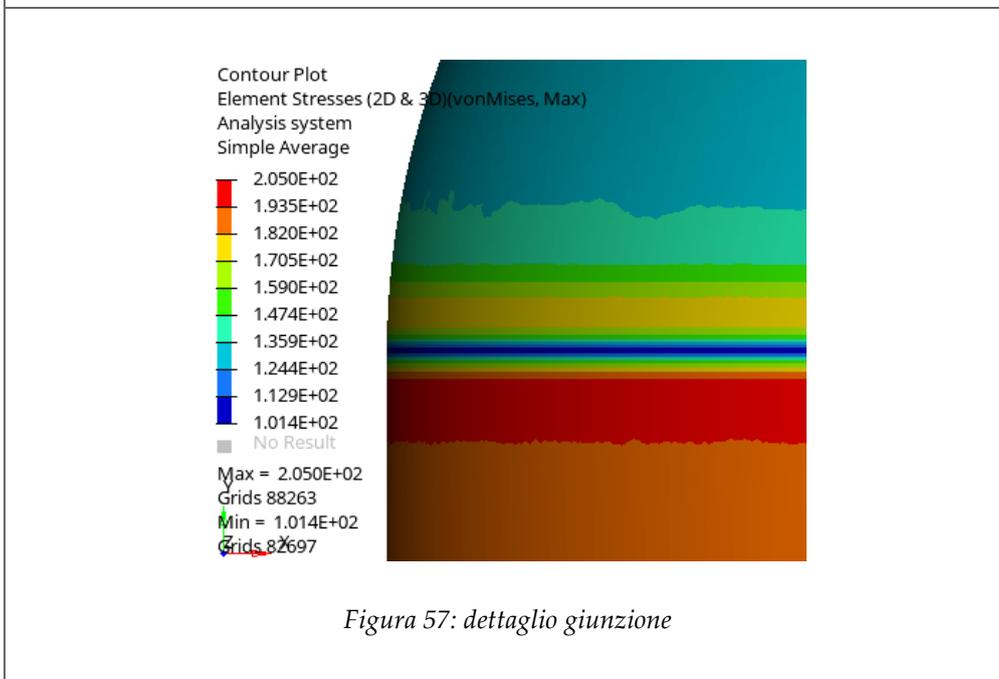
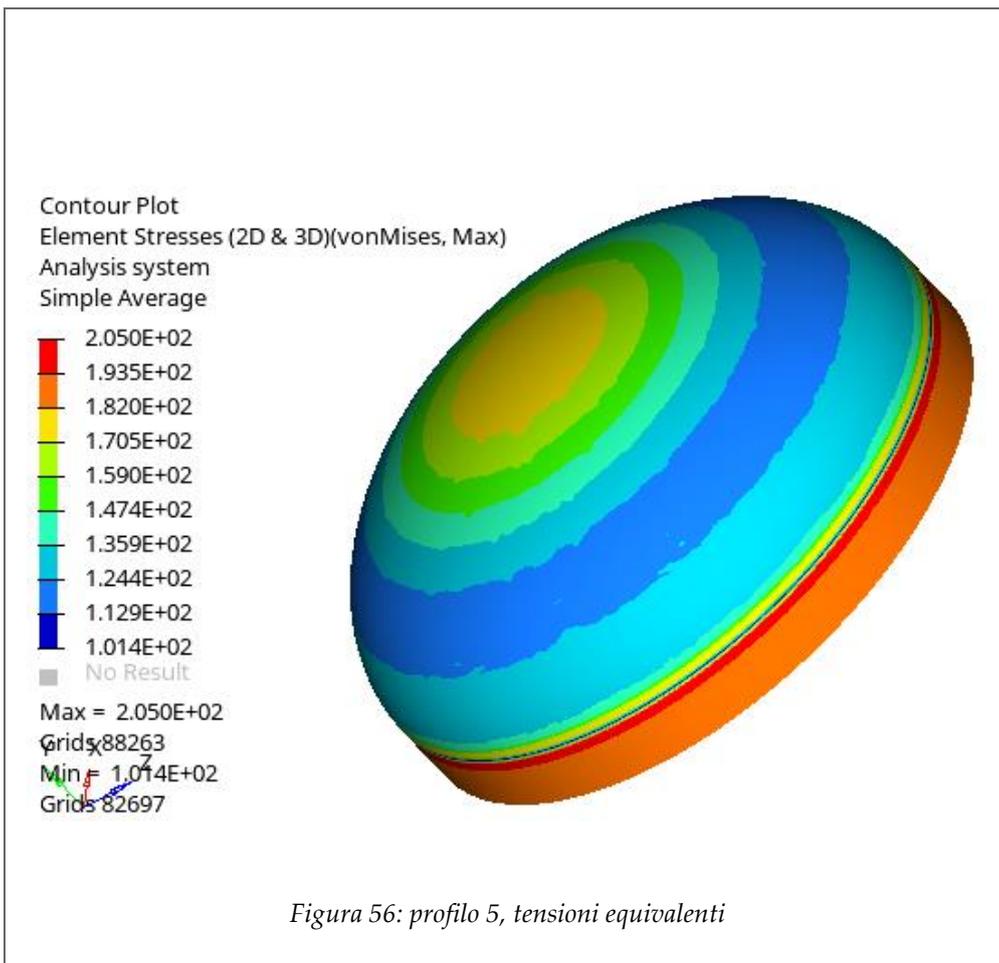
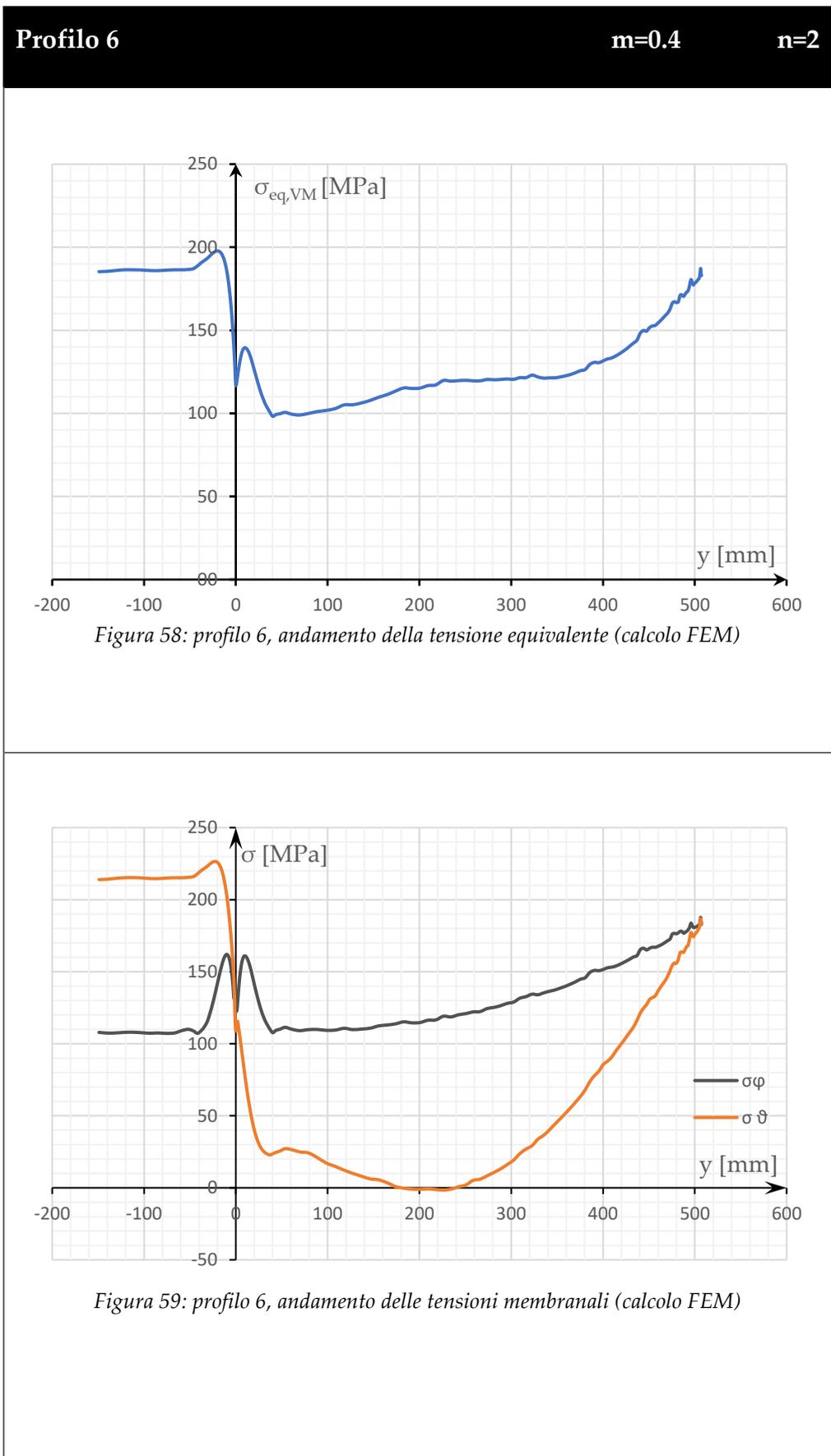


Figura 55: profilo 5, andamento delle tensioni membranali (calcolo FEM)





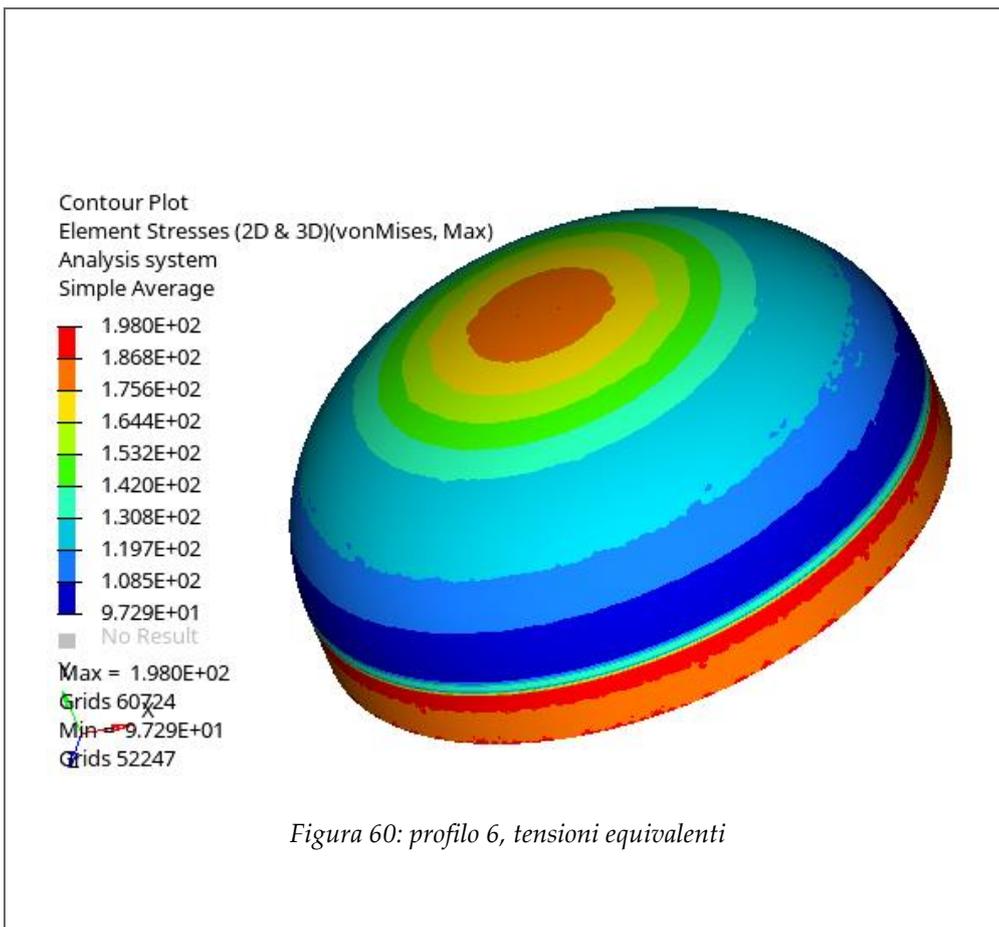


Figura 60: profilo 6, tensioni equivalenti

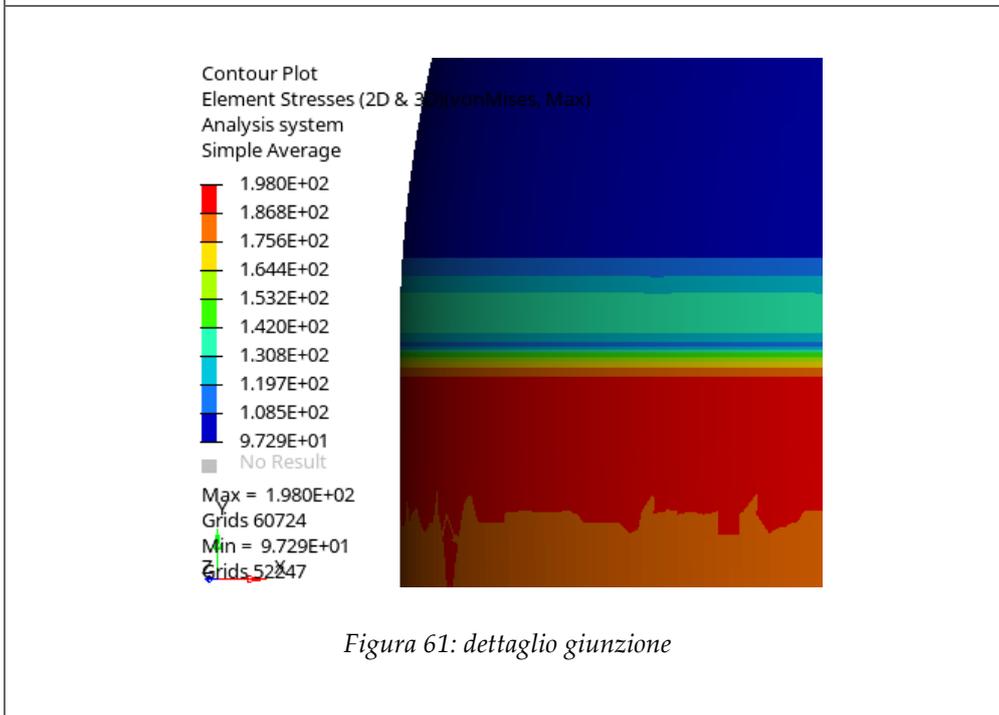


Figura 61: dettaglio giunzione

**Profilo 7** **m=1** **n=1.99**

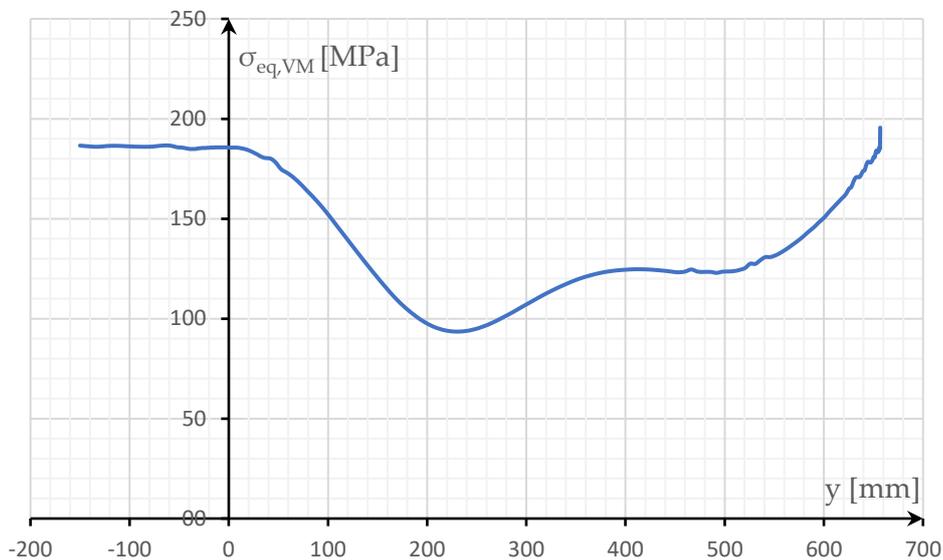


Figura 62: profilo 7, andamento della tensione equivalente (calcolo FEM)

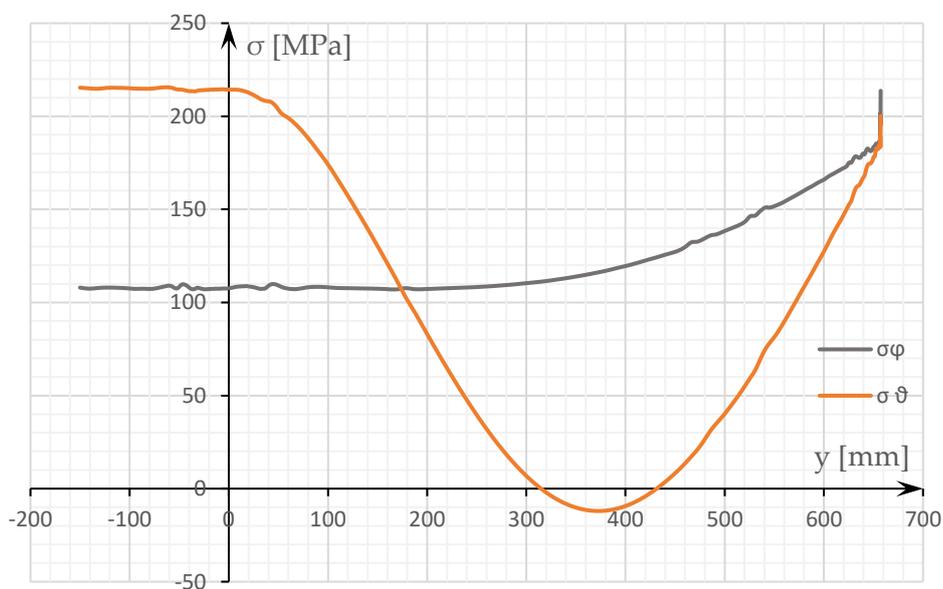


Figura 63: profilo 7, andamento delle tensioni membranali (calcolo FEM)

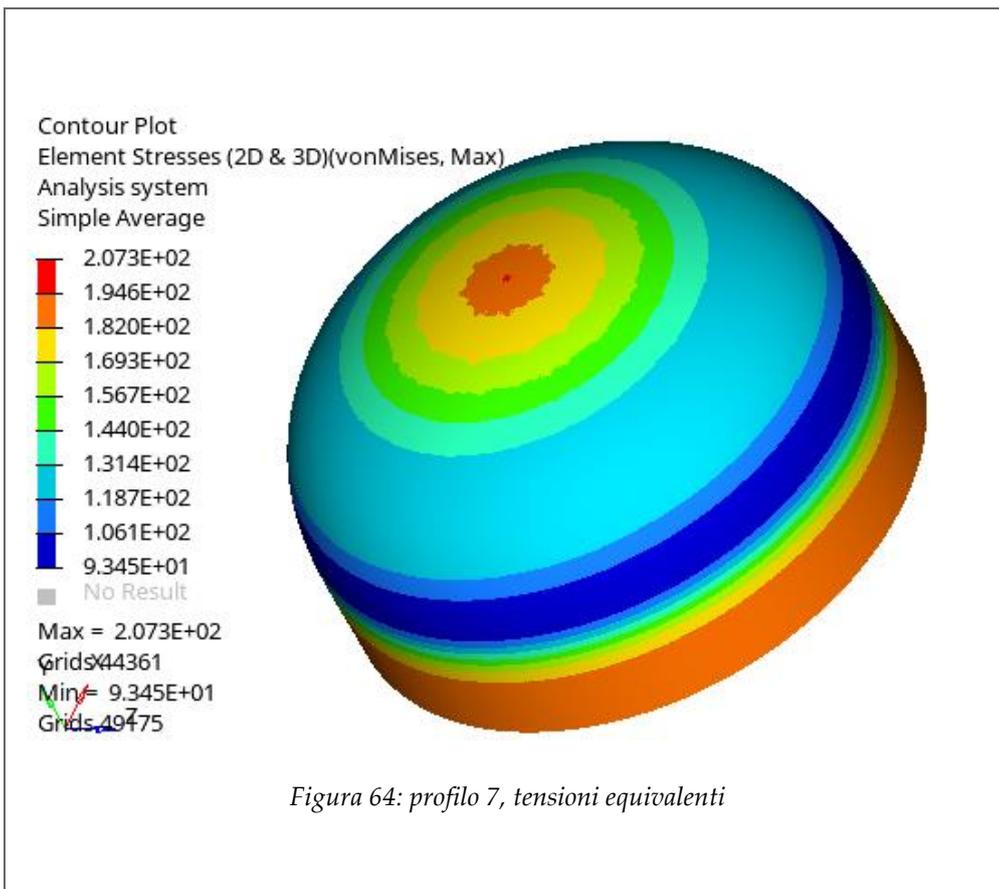


Figura 64: profilo 7, tensioni equivalenti

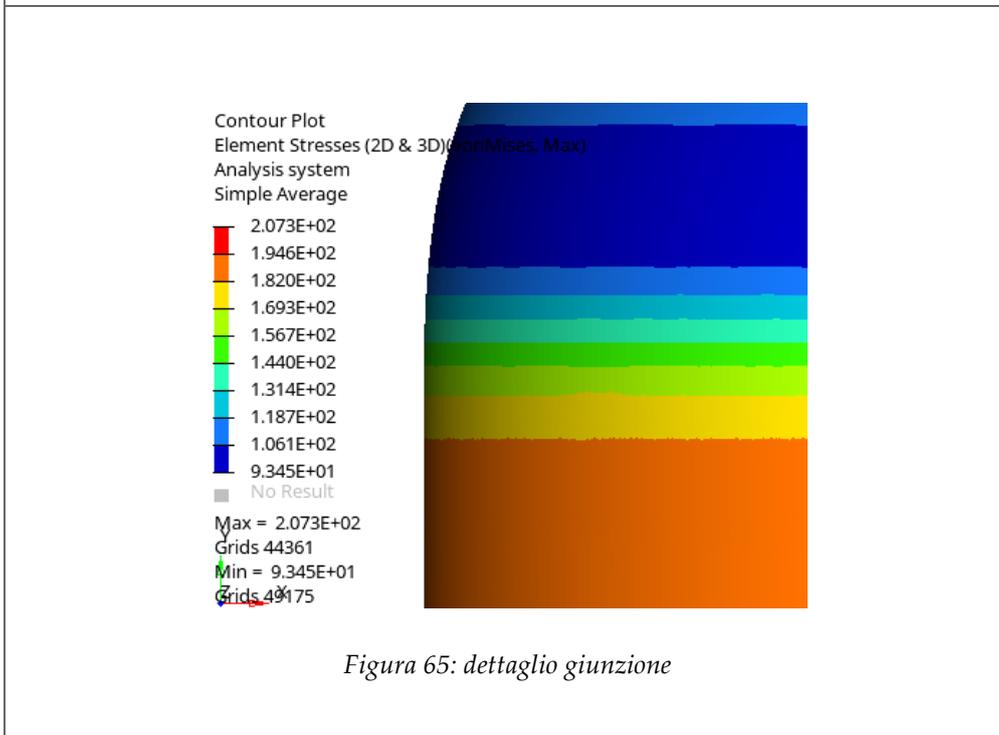


Figura 65: dettaglio giunzione

#### 4.4 Verifica dimensionale

È necessario verificare che lo spessore utilizzato (0.35 mm) sia sufficiente a garantire il rispetto del coefficiente di sicurezza a snervamento (Factor of Safety) minimo; inoltre si valuta anche il margine di sicurezza a snervamento (Margin of Safety) secondo la (12) per tutte le calotte studiate.

$$MOS_Y = \frac{Y_s}{\sigma_{eq,max} * CS_{y,min}} - 1 \quad (12)$$

$$CS_Y = \frac{Y_s}{\sigma_{eq,max}} \geq CS_{Y,min} \quad (13)$$

In aggiunta ai dati del materiale forniti in tabella 3 si riportano i coefficienti forniti da TAS [16] che vanno rispettati per validare il modello:

$$CS_{y,min} = 1.1$$

$$CS_{UTS,min} = 1.25$$

Risulterà quindi una tensione ammissibile statica a snervamento:

$$\sigma_{amm} = \frac{Y_s}{CS_{y,min}} = 231.8 \text{ MPa}$$

La seguente tabella riporta il calcolo di verifica dei serbatoi nelle 7 soluzioni analizzate agli elementi finiti.

Tabella 6: risultati calcolo di verifica agli elementi finiti

	profilo		$\sigma_{eq,max}$ [MPa]	$CS_y$	$CS_{UTS}$	$MoS_y$
1	m=-0.19	n1.167	200.1	1.27	1.72	0.16
2	m=-0.10	n1.5	207.1	1.23	1.67	0.12
3	m=0	n1.72	225.1	1.13	1.53	0.03
4	m=0.2	n1.735	200.5	1.27	1.72	0.16
5	m=0.2	n1.9	203.8	1.25	1.69	0.14
6	m=0.4	n2	197.8	1.29	1.74	0.17
7	m1	n1.99	207.3	1.23	1.66	0.12

Gli andamenti di tensione equivalente dei 7 casi analizzati presentano i valori massimi riportati in tabella 6, come è evidente nessuno di essi è maggiore del valore di tensione ammissibile statica, pertanto il coefficiente di sicurezza minimo è garantito in tutte e 7 le soluzioni proposte.

Analizzando gli andamenti grafici si possono fare delle osservazioni aggiuntive:

- Il profilo 7 non presenta evidenti effetti di bordo, tuttavia è penalizzato dalla forte tensione all'apice, la quale però non presenta un riscontro nei calcoli analitici.
- I profili 1,4 e 7 presentano un brusco innalzamento della tensione all'apice della calotta non riscontrabile negli andamenti analitici.

Questi valori caratterizzano pochi elementi della mesh, inoltre si può notare, sempre negli stessi casi, l'incongruenza delle tensioni membranali all'apice della calotta il che è inaccettabile con il modello utilizzato e quindi indice di un errore nel calcolo FEM su quei singoli elementi della mesh.

- I profili 1, 4 e 6 presentano dei margini di sicurezza più elevati, si potrebbe valutare se una riduzione dello spessore consenta comunque di rispettare il coefficiente di sicurezza richiesto, lo stesso si può affermare per il profilo 7 a patto che si escluda la tensione calcolata sull'apice;
- Gli andamenti ottenuti con il calcolo FEM coincidono con buona approssimazione a quelli ottenuti con il calcolo analitico (eccetto nella zona della giunzione), pertanto il modello analitico è considerato valido;
- Nei profili da 1 a 6 l'andamento di " $\sigma_\varphi$ " presenta un punto angoloso in corrispondenza di  $y=0$  mm. Questo nasce nel momento in cui si trasformano le tensioni principali  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  nelle due tensioni membranali  $\sigma_\varphi$  e  $\sigma_\vartheta$ ; per via della simmetria del modello le tensioni principali coincidono con quelle membranali, si noti però che la tensione principale maggiore coincide con  $\sigma_\vartheta$  nel tratto cilindrico e con  $\sigma_\varphi$  sulla calotta; il viceversa vale per la tensione principale minore (vedi figura 66).

Gli effetti di bordo influenzano il valore delle tensioni principali, ma non la loro direzione, esse rimangono agenti parallelamente e perpendicolarmente al piano meridiano come ipotizzato nel modello "guscio assialsimmetrico".

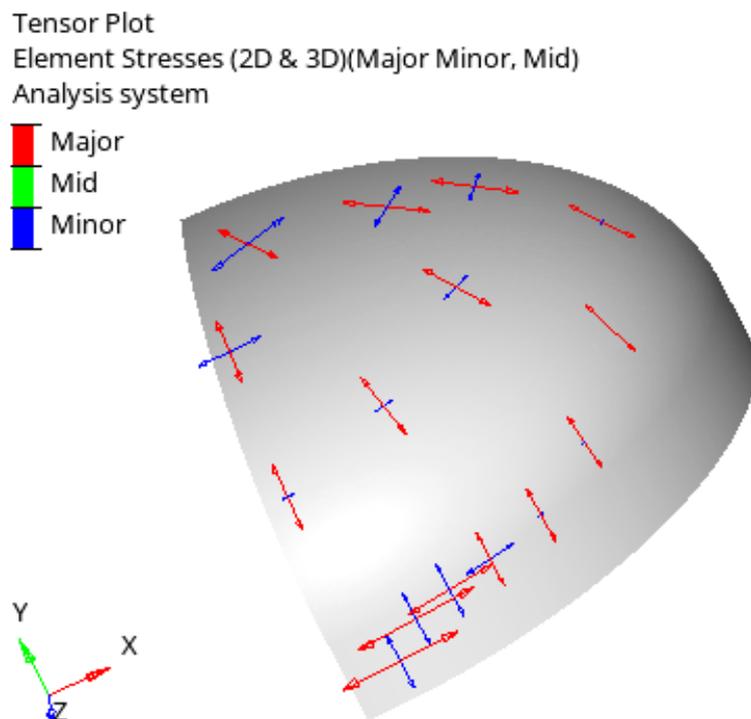


Figura 66: direzione delle tensioni principali sugli elementi

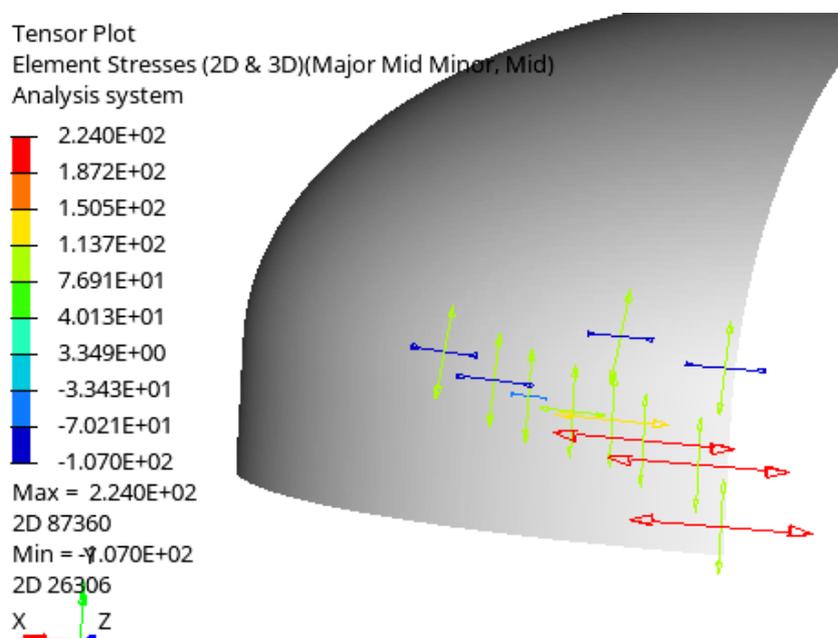


Figura 67: variazione valori delle tensioni principali vicino alla giunzione

## 5. EFFETTI DI BORDO

### 5.1 *Considerazioni sui profili cassiniani con parametro “m” unitario*

Il libro “*Design, Performance, Fabrication, and Material considerations for High-Pressure Vessels*” [8] cita al come fonte un paper dell’ASME [17] nel quale viene dichiarato che per ridurre la concentrazione delle tensioni (e quindi gli effetti di bordo), la calotta deve soddisfare sostanzialmente 3 requisiti:

1. *I raggi di curvatura non devono essere eccessivamente piccoli;*
2. *Lo spostamento (free deflection) deve essere compatibile sulla giunzione;*
3. *Evitare bruschi cambiamenti di curvatura.*

Le calotte basate su curve di cassini con parametro “m” pari a 1 sono quelle che meglio soddisfano i tre requisiti proposti dell’articolo [17]. All’interno del paper NASA [14] l’andamento delle tensioni su questi profili è ampiamente trattato; vengono riportati otto risultati FEM valutati su soluzioni differenti ( $m=1$ ,  $n$  variabile) per il calcolo delle tensioni con modello membranale e, a conferma dei requisiti citati, nessuno di questi casi presenta picchi di tensione equivalente significativi nella zona di giunzione. Al più si possono verificare concentrazioni di tensioni nella zona successiva alla giunzione qualora fosse sottoposta alla forte compressione membranale tipica dei profili con valori di “n” maggiori di 2.

L’assenza di picchi di tensione alla giunzione nel profilo 7 (analizzato in questo elaborato) e nelle analisi riportate nel paper NASA [14] non

deve indurre a pensare che non siano presenti discontinuità sulla giunzione; di fatto il modello utilizzato nei calcoli FEM è membranale quindi non permette di valutare i momenti flettenti e le forze di taglio che potrebbero essere presenti nella zona di giunzione anche in questi casi.

## 5.2 *Tensioni principali ed effetti di bordo*

Il modello membranale agli elementi finiti del serbatoio esprime gli effetti di bordo con un'intensificazione locale della tensione equivalente nella zona precedente e in quella successiva alla giunzione; quest'ultima non è sempre presente o apprezzabile.

Confrontando gli andamenti della tensione equivalente nel FEM con quelli delle due tensioni membranali nei modelli analitici delle 7 soluzioni studiate, si osserva una correlazione.

Nei risultati analitici la tensione membranale  $\sigma\varphi$  sulla giunzione è continua, questo porta ad ipotizzare che gli effetti di bordo siano influenzati principalmente (se non unicamente) dall'altra tensione membranale ( $\sigma\vartheta$ ), di fatto quest'ultima presenta discontinuità alla giunzione (il valore sulla calotta risulta diverso da quello sul cilindro) più o meno rilevanti a seconda del profilo considerato.

Si esprime questa differenza nel modello analitico come:

$$\Delta\sigma\vartheta = \sigma\vartheta_{cilindro} - \sigma\vartheta_{calotta\ alla\ giunzione} \quad (14)$$

A seconda del valore assunto dalla differenza espressa dall'equazione (14) l'andamento di tensione equivalente nell'intorno della giunzione può assumere le tre configurazioni in figura:

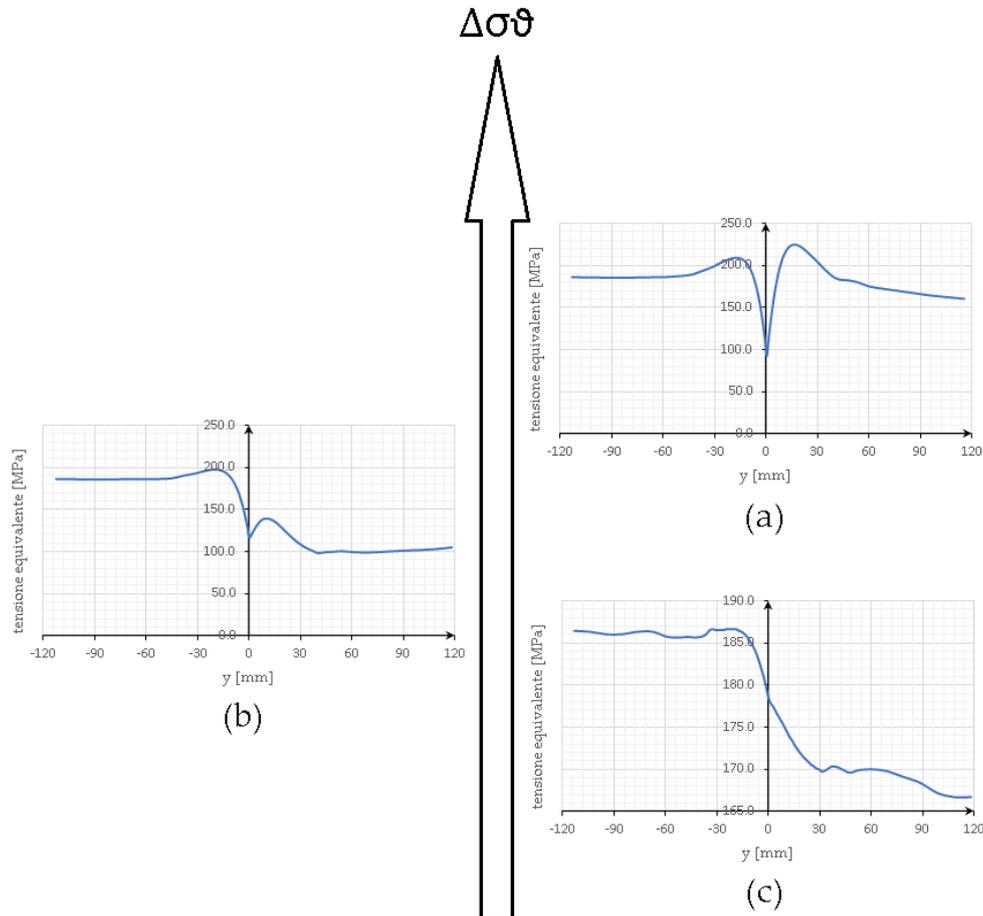


Figura 68: influenza di  $\Delta\sigma\vartheta$  sulla tensione equivalente nella zona di giunzione (effetti di bordo)

- $\Delta\sigma\vartheta$  elevato - configurazione (a): la tensione equivalente presenta due picchi significativi nella zona della giunzione, il secondo (quello sulla calotta) è più elevato del primo. Questo caso è tipico delle calotte che presentano una forte compressione alla giunzione (calotte basse). I valori di entrambi i picchi superano la tensione equivalente presente sul tratto cilindrico.

- $\Delta\sigma\vartheta$  contenuto - configurazione (b): sono presenti entrambi i picchi citati al punto precedente, ma il primo (quello sul cilindro) è più alto del secondo;
- $\Delta\sigma\vartheta$  contenuto - configurazione (c): il primo picco è molto contenuto, il secondo è nullo o trascurabile; questa soluzione è tipica dei profili meno compatti (calotta alte).

Nei casi (b) e (c) alla giunzione solo il primo picco supera il valore di tensione presente sul tratto cilindrico.

### 5.3 Modello di approssimazione

Per verificare l'ipotesi di correlazione fra la differenza di tensione membranale  $\Delta\sigma\vartheta$  e le tensioni equivalenti massime nei dintorni della giunzione sono stati analizzati al FEM altri 14 casi oltre ai 7 già citati.

Tabella 7: profili cassiniani analizzati al FEM

profilo	m	n	profilo	m	n
1	-0.2	1.167	11	0.8	2.1
2	-0.1	1.5	12	-0.2	0.73
3	0	1.72	13	-0.2	0.95
4	0.2	1.735	14	0.1	1.77
5	0.2	1.9	15	-0.1	0.63
6	0.4	2	16	-0.2	1.07
7	1	1.99	17	0.5	2.98
8	0.8	1.2	18	0.3	2.05
9	-0.2	1.48	19	0	1.38
10	0.6	2.1	20	0.2	1.79
			21	0	1.78

I nuovi valori di “m ed n” scelti non hanno una rilevanza progettuale (non servono per minimizzare le tensioni, la massa o gli ingombri del serbatoio) ma sono utili per avere una casistica sugli effetti di bordo più completa; a tal fine in due di queste configurazioni (profilo 8 e 9) il valore dello spessore è stato diminuito a 0.3 mm.

Per poter confrontare i risultati ottenuti, inclusi quelli dei modelli che presentano uno spessore inferiore, tutte le tensioni sono state adimensionalizzate rispetto alla tensione equivalente presente sul tratto cilindrico, lontano dalla giunzione, espressa secondo la (10).

$$\Delta\sigma\vartheta^* = \frac{\Delta\sigma\vartheta}{\sigma_{eq,cilindro}} \quad (15)$$

$$\sigma_{P1}^* = \frac{\sigma_{VM,max,picco\ 1}}{\sigma_{eq,cilindro}} \quad (16)$$

$$\sigma_{P2}^* = \frac{\sigma_{VM,max,picco\ 2}}{\sigma_{eq,cilindro}} \quad (17)$$

Si riportano di seguito gli andamenti della tensione massima sui due picchi dovuti agli effetti di bordo nei 21 profili analizzati in funzione della differenza di tensione membranale  $\Delta\sigma\vartheta$  che ognuno di essi presenta nel calcolo analitico.

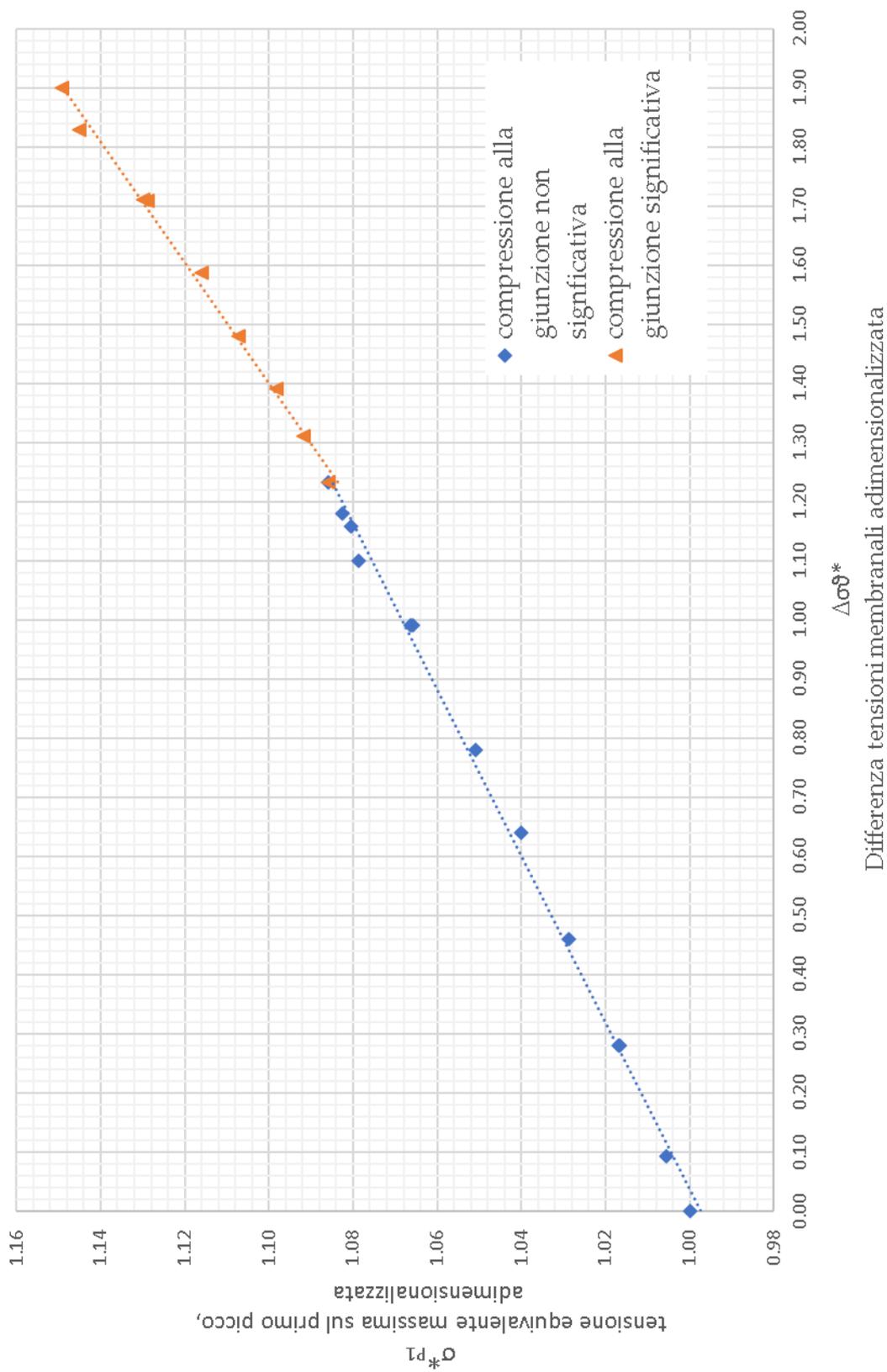


Figura 69: tensione equivalente massima sul primo picco

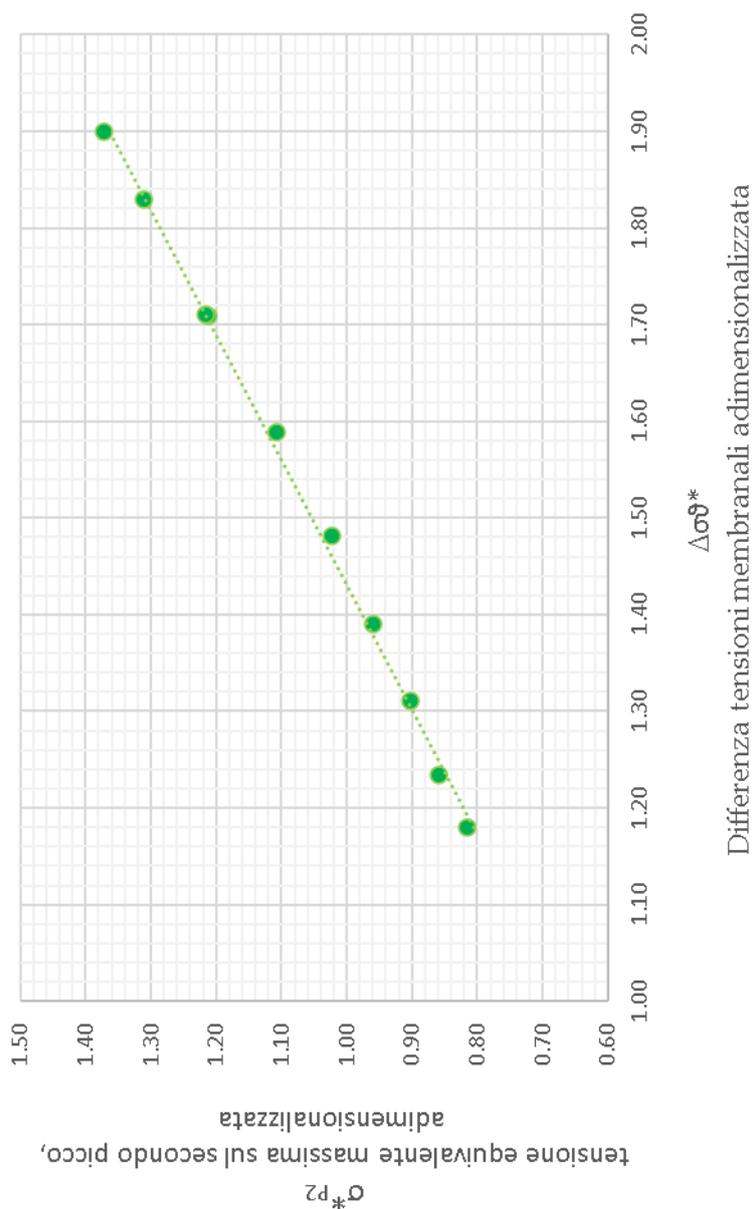


Figura 70: tensione equivalente massima sul secondo picco

Come si evince dai grafici gli andamenti possono essere approssimati con delle rette (linee di tendenza). Ciascuna di esse può essere espressa da un'equazione dove x e y sono le tensioni adimensionalizzate presenti sulle ascisse e sulle ordinate dei grafici precedenti.

Tabella 8: approssimazioni lineari

$y = 0.71 x + 0.9974$	(18) Picco 1 (compressione alla giunzione nulla o trascurabile)
$y = 0.098 x + 0.9629$	(19) Picco 1 (compressione alla giunzione NON trascurabile)
$y = 0.7725 x - 0.1053$	(20) Picco 2

Queste equazioni possono essere utilizzate in fase di progettazione preliminare per prevedere l'entità degli effetti di bordo prima di validare il modello con il calcolo agli elementi finiti.

Si è scelto di approssimare l'andamento sul primo picco utilizzando due rette (18) e (19) per distinguere i casi in cui il profilo scelto presenti o meno tensioni membranali di compressione nella zona della giunzione.

Si evidenzia in questo modo come la compressione alla giunzione sia una condizione peggiorativa sugli effetti di bordo, infatti la retta (19) ha un coefficiente angolare maggiore rispetto alla (18).

Per quanto concerne al secondo picco si è scelto di riportare solamente i dati relativi a profili dove la compressione è significativa, in tutti gli alti casi il secondo picco o non è apprezzabile, o comunque non raggiunge valori prossimi a quello della tensione equivalente sul cilindro, pertanto non è utile stimarne il valore durante le analisi preliminari. In tutti i casi trattati i picchi di tensione dovuti agli effetti di bordo sono stati rilevati nell'intervallo  $y=\pm 25$  mm dalla giunzione.

## 6. CONCLUSIONI

La progettazione del serbatoio nel rispetto di tutte le sue funzioni è un'operazione molto articolata, alla luce di quanto scritto nei capitoli precedenti si possono fare le seguenti affermazioni riguardanti la massa, l'altezza e gli andamenti tensionali in serbatoi di forma cilindrica con calotte cassiniane:

- I. Considerando lo spessore di parete costante, la minimizzazione della massa è un obiettivo in contrasto con l'ottimizzazione delle tensioni in quanto, per ridurre il peso è opportuno ridurre i raggi di curvatura delle calotte (calotte compatte), questo però genera tensioni più elevate sia all'apice sia alla giunzione della calotta.

In generale la riduzione della massa è un obiettivo concorde con la riduzione dell'altezza a patto che si considerino soluzioni di eguale spessore.

- II. Le calotte di Cassini usate come chiusura per i serbatoi cilindrici consentono di avere molte soluzioni progettuali diverse vista la flessibilità consentita dai due parametri indipendenti.

Nell'elaborato vengono proposte le soluzioni da 1 a 6 (tabella 6) che sono un compromesso tale da garantire, a parità di spessore, un'ottima leggerezza (e una minima altezza) nel rispetto del vincolo stabilito nel paragrafo 2.6 sulle tensioni massime.

Se si considerano spessori di parete inferiori a quello considerato allora possono diventare competitivi in termini di

peso anche profili meno compatti ma più vantaggiosi rispetto all'entità degli effetti di bordo (profili 7 e 11).

- III. Il modello analitico utilizzato (guscio assialsimmetrico) è adatto a fare considerazioni preliminari ed è rispecchiato con buona approssimazione dai risultati FEM eccetto per gli effetti di bordo e per i picchi di tensione all'apice; questi ultimi riguardano solitamente pochissimi elementi della mesh e solo alcune delle soluzioni analizzate, quindi potrebbero essere generati da un errore di approssimazione sul modello FEM.

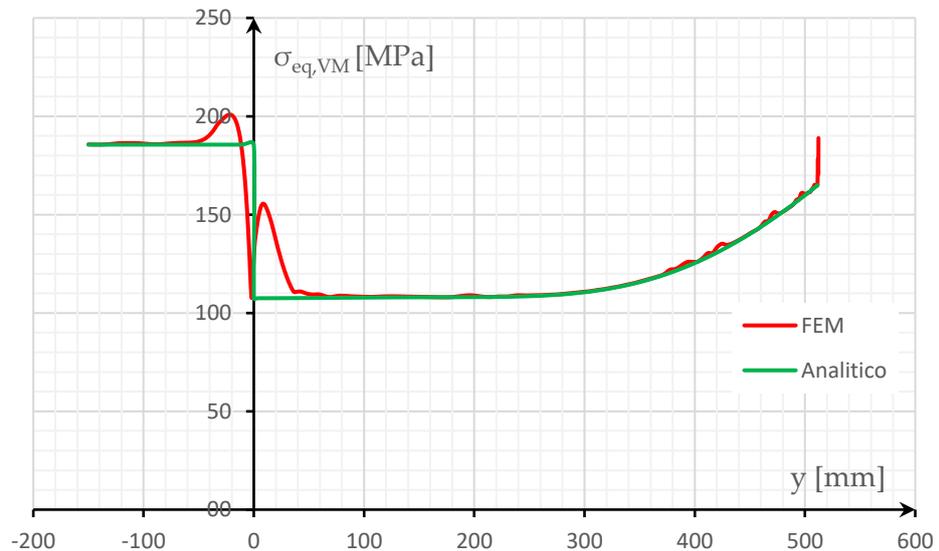


Figura 71: confronto fra il risultato analitico e risultato FEM

- IV. Per una progettazione preliminare più rapida ed efficace si può sfruttare il modello analitico per determinare unicamente le tensioni sul tratto cilindrico e sulla giunzione o sull'apice della calotta (a seconda di dove è localizzata la tensione massima); si possono poi sfruttare le funzioni rettilinee proposte nel capitolo 5.3 per stimare i picchi degli effetti di bordo.

Questi semplici calcoli analitici, combinati con gli algoritmi di calcolo di massa e altezza, permettono al progettista di definire un numero molto limitato di profili prima di passare alla fase di validazione FEM.

## 7. BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

- [0] R. Ryan, V. Verderaiame, "*Systems Design Analysis Applied to Launch Vehicle Configuration*" NASA Technical Paper 3326, Gennaio1993
- [1] La Repubblica, [https://www.repubblica.it/scienze/2015/09/11/foto/quant\\_i\\_satelliti\\_attorno\\_alla\\_terra-122666625/1/#1](https://www.repubblica.it/scienze/2015/09/11/foto/quant_i_satelliti_attorno_alla_terra-122666625/1/#1), Settembre 2020
- [2] Truenumbers, <https://www.truenumbers.it/satelliti-spazio/>, Settembre 2020
- [3] Arianespace "*Ariane 6 User's Manual Issue 1 Revision 0*", March 2018
- [4] ESA [http://www.esa.int/ESA\\_Multimedia/Keywords/System/Ariane\\_6/\(result\\_type\)/images](http://www.esa.int/ESA_Multimedia/Keywords/System/Ariane_6/(result_type)/images), Settembre 2020
- [5] Arianespace, "brochure Arian 6", Settembre 2019 [https://www.arianespace.com/wp-content/uploads/2020/06/Arianespace\\_Brochure\\_Ariane6\\_Sept2019.pdf](https://www.arianespace.com/wp-content/uploads/2020/06/Arianespace_Brochure_Ariane6_Sept2019.pdf)
- [6] BBC, <https://www.bbc.com/news/science-environment-35983735>, Settembre 2020
- [7] Allegra Giuseppe, "*Stadi superiori criogenici di lanciatori: Design e aspetti di sviluppo tecnologico per schermatura termica innovativa*", Aprile 2011, etd-03282011-150958

- [8] E.J Mills, T.J. Atterbury, L.M Cassidy, R.J. Eiber, A.R. Duffy, A.G Imgram and K. Masubuchi, "*Design, Performance, Fabbriation, and Material considerations for High-Pressure Vessels*", Battelle Memorial Institute Columbus, Ohio, March 1964 , pag.160-166
- [9] G. L. Mills, B. W. Buchholtz, "*Design, fabrication and testing of a liquid hydrogen fuel tank for a long duration aircraft*", AIP Conference Proceedings 1434, 773 (2012), doi.org/10.1063/1.4706990
- [10] J. Merino, A. Patzelt, A. Steinacher, M. Windisch, G. Heinrich, R. Forster, C. Bauer, "*Ariane 6 – tanks & structures for the new european launcher*" , MT Aerospace AG, Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2017 , DocumentID: 450255
- [11] W.A. Wagner, R.B. Keller, "*Liquid rocket metal tanks and tank components*", NASA SP-8088, May 1974, document ID: 19750004950
- [12] Pierre A.Faucheux, Frédérick P.Gosselin, Martin Lévesque, "*Simulating shot peen forming with eigenstrains*", Elsevier, doi: 10.1016, Novembre 2017
- [13] Mümtaz KARATAŞ, "*A multi foci closed curve: Cassini Oval, its properties and applications*", Agosto 2018, DOI: 10.31671
- [14] David A. Spera, Robert H. Johns, "*Theoretical elastic stress distributions in cassinian domes*", NASA Technical Note D-1741, Luglio 1963
- [15] <https://www.math24.net/curvature-radius/>, Aprile 2020
- [16] Dati forniti da Thales Alenia Space (TAS)
- [17] W. S. Read "*Cassinian Domes for Pressure Vessel Design*", ASME digital collection, Febbraio 1963, DOI:10.1115/1.3667558