

# **POLITECNICO DI TORINO**

**Corso di Laurea Magistrale**

**in Ingegneria Meccanica**

**Tesi di Laurea Magistrale**

**Valutazione dello stato di tensione nell'orma di  
contatto attraverso metodi numerici**



**Relatore**  
Prof. Carlo Rosso

**Candidato**  
Francesco Ferraro

**Ottobre - 2020**



## Indice

1. INTRODUZIONE .....	4
2. DEFINIZIONE DEL PROBLEMA DI BOUSSINESQ.....	5
3. RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI BOUSSINESQ.....	7
4. ESPRESSIONI ALGEBRICHE DEGLI INTEGRALI SU UN DOMINIO POLIGONALE 11	
4.1 PARAMETRI GEOMETRICI DEFINITI PER UN GENERICO BORDO DI UN DOMINIO POLIGONALE .....	12
4.2 VALUTAZIONE ANALITICA DI $s''$ .....	16
4.3 VALUTAZIONE ANALITICA DI $s'_g$ .....	19
4.4 VALUTAZIONE ANALITICA DI $S'_H$ .....	21
4.5 VALUTAZIONE ANALITICA DI $s''_\rho$ .....	23
4.6 VALUTAZIONE ANALITICA DI $S'_{g\rho}$ .....	24
4.7 VALUTAZIONE ANALITICA DI $S'_{H\rho}$ .....	27
5. ESPRESSIONI ALGEBRICHE PER GLI INTEGRALI DI DOMINIO (SOMMARIO).....	31
6. IMPLEMENTAZIONE .....	35
7. APPENDICE .....	36
7.1 CARICO A PRESSIONE DISTRIBUITA COSTANTE .....	36
7.2 CASO DI CONTATTO SFERA-SFERA .....	41
8. CONCLUSIONI .....	44
9. BIBLIOGRAFIA.....	44

# 1. INTRODUZIONE

La presente tesi è stata svolta in azienda, ovverosia in GeDy TrAss SRL, una start-up che si è vista riconoscere il titolo di spin-off del Politecnico di Torino, e che ha lo scopo di realizzare software per il dimensionamento statico e dinamico di ruote dentate.

Il presente lavoro punta ad estendere la soluzione classica di Boussinesq al caso di pressione distribuita secondo una legge polinomiale di ordine arbitrario su un dominio poligonale. Viene, a questo fine utilizzata una versione generalizzata del teorema di Gauss e i risultati recenti della teoria dei potenziali.

Nella stesura della presente tesi sono state utilizzate le formule risolutive della pubblicazione dei professori Rosati e Marmo “A general Approach to the Solution of Boussinesq's Problem for Polynomial Pressures Acting over Polygonal Domains”, che permette di dare una soluzione al problema di Boussinesq.

Per quanto riguarda il caso di pressione che varia linearmente, vengono derivate espressioni analitiche di spostamenti, tensioni e deformazioni in un punto arbitrario del semispazio, in funzione della funzione di carico e del vettore posizione che definisce il bordo della regione caricata.

Da questa teoria si ottengono dei tools per risolvere problemi 3D in ingegneria delle fondazioni ed in meccanica del contatto.

La soluzione al problema di Boussinesq è stata ottenuta riportando il problema originale ad un problema di valori al bordo nella teoria dei potenziali.

Gli integrali di superficie che esprimono i campi meccanici vengono trasformati nella somma di un integrale esteso al bordo della regione caricata e di un termine addizionale relazionato alla singolarità del campo da integrare. Per un dominio poligonale l'integrale al bordo è ridotto ad una somma algebrica dipendente dalla posizione dei vertici della regione caricata. Quando una singolarità entra in gioco, non solo il termine addizionale è diverso da zero, ma la controparte algebrica dell'integrale al bordo deve essere specializzata in diverse espressioni dipendenti dal tipo di singolarità che si è presentata.

La seguente tesi è organizzata come segue.

Nella sezione 2 si parte dalla definizione del problema di Boussinesq, le formule principali per la valutazione degli spostamenti, deformazioni e stress vengono espressi nella notazione tensoriale attraverso diversi integrali 2D definiti sulla regione caricata.

Nella sezione 3 viene indicata la soluzione al problema per Marmo con le espressioni algebriche degli integrali sul dominio.

La sezione 4 è relazionata alle espressioni risolutive degli integrali, alcune descritte nel dettaglio.

La sezione 5 presenta un sommario delle equazioni degli integrali utilizzati.

La sezione 6 è dedicata ad una breve spiegazione riguardante l'implementazione in Matlab.

La sezione 7 è dedicata all'appendice in cui si dimostra la validità del codice Matlab steso, attraverso un caso a pressione costante contemplato nella pubblicazione di Marmo.

La sezione 8 presenta le conclusioni.

## 2. DEFINIZIONE DEL PROBLEMA DI BOUSSINESQ

Il lavoro svolto ha riguardato il problema di Boussinesq, per il quale, si considera un semispazio lineare elastico ( $z \geq 0$ ) la cui superficie ( $z = 0$ ) è libera da tensioni. Una forza  $\mathbf{f} = (0, 0, f_z)^t$ , ortogonale alla superficie del semispazio, è applicata in un punto  $F = (x', y', 0)^t$ .

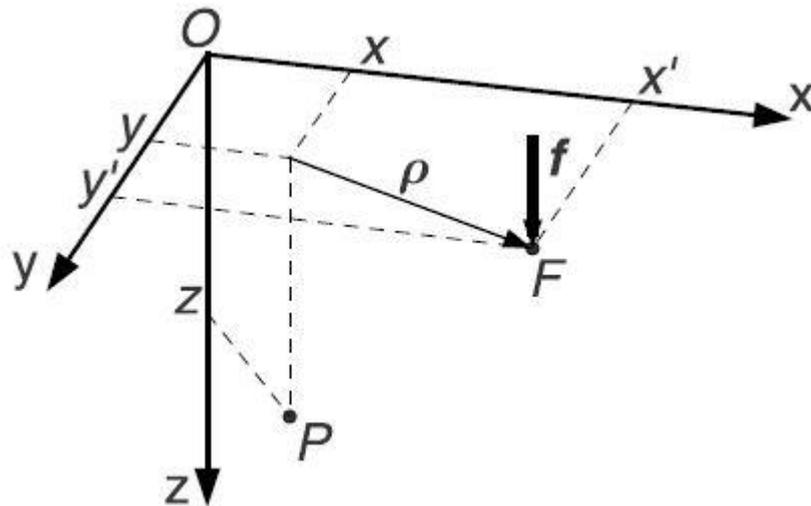


Figura 1: Forza verticale applicata alla superficie del semispazio

Dove  $P = (x, y, z)^t$  indica le coordinate di un punto arbitrario all'interno del semispazio, le deformazioni, gli spostamenti e le tensioni nel punto P si determinano grazie alla funzione potenziale:

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}, z) = z \log \left( z + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \right) - \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}$$

Dove:

$$\boldsymbol{\rho} = (x' - x, y' - y)^t$$

Gli spostamenti associati ad  $f_z$  sono:

$$\mathbf{u}_h^f(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{f_z}{4\pi G} [(1 - 2\nu)\mathbf{grad}\varphi' + z\mathbf{grad}\varphi'']$$

$$u_z^f(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{f_z}{4\pi G} [2(1 - \nu)\varphi'' - z\varphi''']$$

Dove  $\mathbf{u}_h = (u_x, u_y)^t$  è un vettore che contiene le componenti orizzontali dello spostamento. Il parametro elastico  $G$  e  $\nu$  rappresentano rispettivamente il modulo di taglio ed il rapporto di Poisson del semispazio,

$\mathbf{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)^t$  è l'operatore gradiente bidimensionale e:

$$\varphi'(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \log\left(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}\right),$$

$$\varphi''(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}},$$

$$\varphi'''(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3} = -\frac{z}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2)^{3/2}}.$$

Il tensore delle deformazioni può essere suddiviso:

$$\mathbf{E} = \left( \begin{array}{cc|c} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \hline \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} \mathbf{E}_h^f & \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_z^f \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_z^{fT} & \varepsilon_z^f \end{array} \right)$$

Dove  $(\cdot)^T$  è l'operatore trasposto. I termini sono:

$$\mathbf{E}_h^f(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{f_z}{4\pi G} [(2\nu - 1)\mathbf{H}(\varphi') - z\mathbf{H}(\varphi'')],$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_z^f(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{f_z}{4\pi G} z\mathbf{grad}\varphi''',$$

$$\varepsilon_z^f(\boldsymbol{\rho}, z) = [(1 - 2\nu)\varphi''' - z\varphi'''],$$

Dove  $\mathbf{H}(\cdot) = \mathbf{grad grad}(\cdot)$  è la matrice Hessiana di  $(\cdot)$  e  $\varphi'^v$  è la derivata quarta di  $\varphi$ .

$$\varphi'^v(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} = \frac{2z^2 - \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2)^{5/2}}.$$

Infine, il tensore degli stress può essere espresso come funzione di  $\mathbf{E}$  con la legge lineare isotropa elastica:

$$\mathbf{T} = 2G \left[ \mathbf{E} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{1} \right],$$

dove  $\mathbf{1}$  è il tensore identità tridimensionale. Infine, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_h^f(P) &= \frac{f_z}{2\pi} [2\nu \varphi''' \mathbf{I} + (2\nu - 1) \mathbf{H}(\varphi') - z \mathbf{H}(\varphi'')], \\ \boldsymbol{\tau}_z^f(P) &= \frac{f_z}{2\pi} z \mathbf{grad} \varphi''', \\ \sigma_z^f(P) &= \frac{f_z}{2\pi} (\varphi''' - z \varphi'^v), \end{aligned}$$

Dove il tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$  viene diviso come  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{T} = \left( \begin{array}{cc|c} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{T}_h^f & \boldsymbol{\tau}_z^f \\ \boldsymbol{\tau}_z^{fT} & \sigma_z^f \end{array} \right),$$

ed  $\mathbf{I}$  è il tensore identità bidimensionale.

### 3. RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI BOUSSINESQ

Il principale scopo della tesi è quello di sviluppare tools da implementare al computer per risolvere problemi 3D di geometrie arbitrarie non conformi in ingegneria geotecnica ed in meccanica del contatto.

Il lavoro svolto è stato basato sulla risoluzione del problema di Boussinesq tramite metodi numerici, mediante l'utilizzo di Matlab, sfruttando una distribuzione di pressione polinomiale, in particolare una pressione verticale distribuita linearmente su una regione  $\Omega$  del bordo del semispazio. Si considera il caso di contatto senza attrito di due corpi sotto carico verticale

dato. La regione di contatto tra i due corpi, inizialmente sconosciuta, e la distribuzione di pressione vengono trovate iterativamente. Si considera una mesh arbitraria triangolare e si interpolano i valori di pressione associati con i vertici di ogni triangolo.

In questo caso la funzione di carico è:

$$q_z(\boldsymbol{\rho}) = q_{0z} + \mathbf{q}_{1z} \cdot \boldsymbol{\rho},$$

che per un generico triangolo  $a$ , definito dai vertici  $\boldsymbol{\rho}_i^a$ , con  $i = 1, 2, 3$ , i parametri di carico corrispondenti alle pressioni nodali note  $q_z(\boldsymbol{\rho}_i^a)$  sono ottenuti rispettando le condizioni:

$$q_{0z}^a + \mathbf{q}_{1z}^a \cdot \boldsymbol{\rho}_i^a = q_z(\boldsymbol{\rho}_i^a) \quad i = 1, 2, 3.$$

L'area del triangolo è:

$$A_a = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^3 \boldsymbol{\rho}_v^a \cdot \boldsymbol{\rho}_{v+1}^{a\perp}.$$

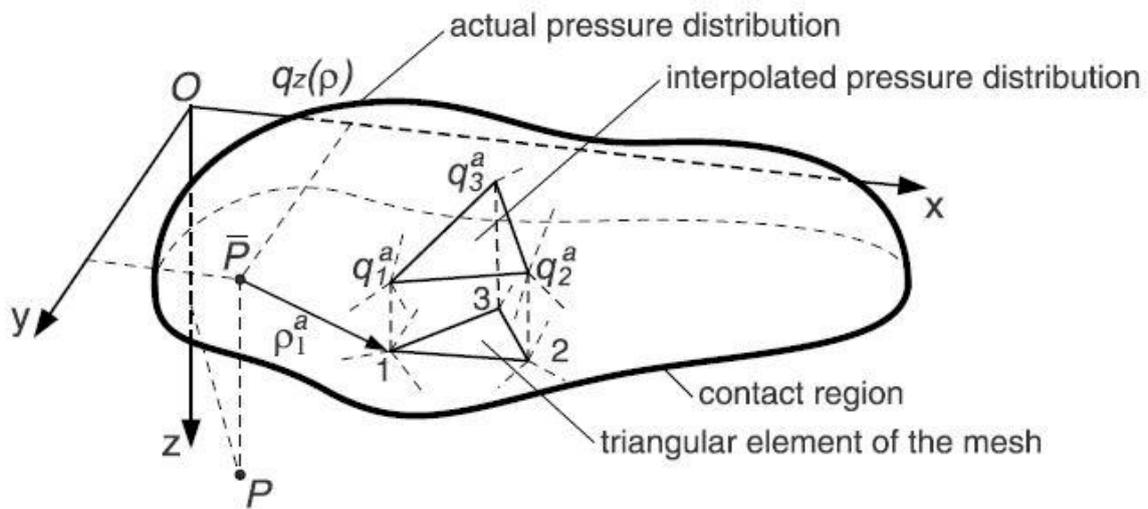


Figura 2: Interpolazione della distribuzione di pressione attraverso mesh triangolare

Questo sistema viene risolto:

$$\begin{pmatrix} q_{0z}^a \\ q_{1zx}^a \\ q_{1zy}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1x}^a & \rho_{1y}^a \\ 1 & \rho_{2x}^a & \rho_{2y}^a \\ 1 & \rho_{3x}^a & \rho_{3y}^a \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_z(\boldsymbol{\rho}_1^a) \\ q_z(\boldsymbol{\rho}_2^a) \\ q_z(\boldsymbol{\rho}_3^a) \end{bmatrix}.$$

Le equazioni risolventi sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_h^q &= \frac{1}{2\pi} \{ 2\nu [ \mathbf{I} s''' q_{0z} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{s}''') \mathbf{q}_{1z} ] + (2\nu - 1) (\mathbf{S}'_H q_{0z} + \mathbf{S}'_{H\rho} \mathbf{q}_{1z}) \\ &\quad - \mathbf{S}''_H q_{0z} - \mathbf{S}''_{H\rho} \mathbf{q}_{1z} \}, \\ \boldsymbol{\tau}_z^q &= \frac{1}{2\pi} (\mathbf{s}'''_g q_{0z} + \mathbf{S}'''_{g\rho} \mathbf{q}_{1z}), \\ \sigma_z^q &= \frac{1}{2\pi} (s''' q_{0z} + \mathbf{s}''' \cdot \mathbf{q}_{1z} - s^{iv} q_{0z} - \mathbf{s}^{iv} \cdot \mathbf{q}_{1z}). \end{aligned}$$

Si ottengono così le tensioni nei punti che compongono il dominio di interesse.

Si riportano anche le espressioni degli spostamenti, rispettivamente verticale e planare (in direzione x ed in direzione y):

$$\begin{aligned} u_z^q &= \frac{1}{4\pi G} [ 2(1 - \nu) (s'' q_{0z} + \mathbf{s}'' \cdot \mathbf{q}_{1z}) - z (s''' q_{0z} + \mathbf{s}''' \cdot \mathbf{q}_{1z}) ], \\ \mathbf{u}_h^q &= \frac{1}{4\pi G} [ (1 - 2\nu) (\mathbf{s}'_g q_{0z} + \mathbf{S}'_{g\rho} \mathbf{q}_{1z}) + \mathbf{s}''_g q_{0z} + \mathbf{S}''_{g\rho} \mathbf{q}_{1z} ]. \end{aligned}$$

Ed il tensore delle deformazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_h^q &= \frac{1}{4\pi G} [ (2\nu - 1) (\mathbf{S}'_H q_{0z} + \mathbf{S}'_{H\rho} \mathbf{q}_{1z}) - \mathbf{S}''_H q_{0z} - \mathbf{S}''_{H\rho} \mathbf{q}_{1z} ], \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_z^q &= \frac{1}{4\pi G} (\mathbf{s}'''_g q_{0z} + \mathbf{S}'''_{g\rho} \mathbf{q}_{1z}), \\ \varepsilon_h^q &= \frac{1}{4\pi G} [ (1 - 2\nu) (s''' q_{0z} + \mathbf{s}''' \cdot \mathbf{q}_{1z}) - s^{iv} q_{0z} - \mathbf{s}^{iv} \cdot \mathbf{q}_{1z} ]. \end{aligned}$$

All'interno delle equazioni precedenti ritroviamo dei termini che vengono espressi tramite degli integrali sulla regione caricata  $\Omega$ , posti:

$$\begin{aligned}
s'' &= \int_{\Omega} \varphi'' dA, & s''_{\rho} &= \int_{\Omega} \varphi'' \boldsymbol{\rho} dA, \\
s''' &= \int_{\Omega} \varphi''' dA, & s'''_{\rho} &= \int_{\Omega} \varphi''' \boldsymbol{\rho} dA, \\
s^{iv} &= \int_{\Omega} z \varphi^{iv} dA, & s^{iv}_{\rho} &= \int_{\Omega} z \varphi^{iv} \boldsymbol{\rho} dA, \\
s'_g &= \int_{\Omega} \mathbf{grad} \varphi' dA, & S'_{g\rho} &= \int_{\Omega} \mathbf{grad} \varphi' \otimes \boldsymbol{\rho} dA, \\
s''_g &= \int_{\Omega} z \mathbf{grad} \varphi'' dA, & S''_{g\rho} &= \int_{\Omega} z \mathbf{grad} \varphi'' \otimes \boldsymbol{\rho} dA, \\
s'''_g &= \int_{\Omega} z \mathbf{grad} \varphi''' dA, & S'''_{g\rho} &= \int_{\Omega} z \mathbf{grad} \varphi''' \otimes \boldsymbol{\rho} dA, \\
S'_H &= \int_{\Omega} \mathbf{H}(\varphi') dA, & S'_{H\rho} &= \int_{\Omega} \mathbf{H}(\varphi') \otimes \boldsymbol{\rho} dA, \\
S''_H &= \int_{\Omega} z \mathbf{H}(\varphi'') dA, & S''_{H\rho} &= \int_{\Omega} z \mathbf{H}(\varphi'') \otimes \boldsymbol{\rho} dA.
\end{aligned}$$

Per un dominio poligonale gli integrali sono riconducibili ad espressioni algebriche dipendenti unicamente dal vettore posizione, il quale definisce il bordo della regione caricata. A questo fine possiamo raggrupparli in sei classi, in funzione del tipo di integrando che presentano. Gli integrandi sono definiti da derivate ripetute di  $\varphi'$ , a volte con gradienti, combinate vettorialmente o tensorialmente con  $\boldsymbol{\rho}$ . Si nota come, fondamentalmente, devono essere invocate tre diverse varianti del teorema di Gauss generalizzato, richieste per le seguenti tre categorie di integrali:

$$\int_{\Omega} \varphi^n \boldsymbol{\rho}^{m \otimes} dA, \quad \int_{\Omega} \mathbf{grad} \varphi^n \otimes \boldsymbol{\rho}^{m \otimes} dA, \quad \int_{\Omega} \mathbf{H}(\varphi^n) \otimes \boldsymbol{\rho}^{m \otimes} dA.$$

Che sono, in seguito, affrontati nei casi di  $m = 1$  ed  $m = 0$ . Il calcolo algebrico degli integrali precedentemente indicati sarà presentato in seguito. Questi risultati possono essere implementati facilmente, ricordando le singularità che fanno parte di ogni espressione.

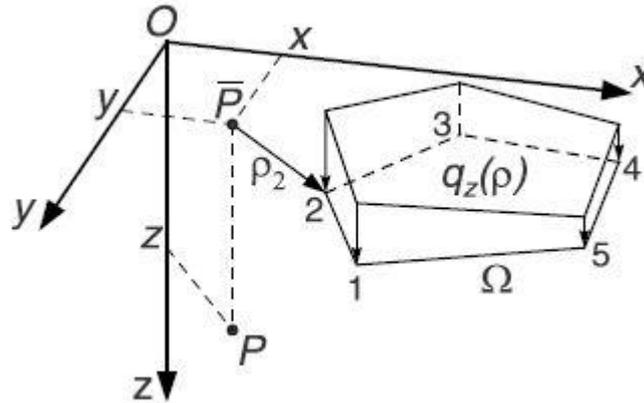


Figura 3: Pressione verticale applicata alla superficie del semispazio

## 4. ESPRESSIONI ALGEBRICHE DEGLI INTEGRALI SU UN DOMINIO POLIGONALE

In questa sezione si dimostra la trasformazione da integrali di dominio ad integrali estesi al bordo della regione caricata. Questo passaggio è basato sull'uso della versione generalizzata del teorema di Gauss (usato già per valutare gli effetti della gravità su corpi poliedrici, ed esteso a problemi di geofisica e geomeccanica).

La necessità di adottare una forma generalizzata del teorema di Gauss deriva dalla singolarità dei campi da integrare, che a turno, è associata con la singolarità della funzione  $\varphi$  e delle sue derivate quando  $z = 0$  e  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ .

A parte il suo significato teorico, questo problema è particolarmente rilevante nelle applicazioni della teoria di Boussinesq alla geomeccanica e all'analisi del contatto, poiché gli spostamenti vengono solitamente valutati Sulla superficie del semispazio ( $z = 0$ ). Si noti che il caso  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$  non può essere evitato scegliendo un adeguato sistema di riferimento poiché il vettore  $\boldsymbol{\rho}$  rappresenta effettivamente la componente orizzontale del vettore che collega il punto F, dove viene applicato il carico verticale, ed il punto P in cui vengono valutati i campi meccanici (Figura 3).

Come mostrato negli sviluppi successivi, la versione generalizzata del teorema di Gauss viene applicata per trasformare gli integrali di dominio originali nella somma degli integrali al contorno ed ulteriori quantità, dipendenti da un parametro scalare  $\alpha(\mathbf{0})$ , che rappresenta la singolarità iniziale. In realtà  $\alpha(\mathbf{0})$  è una quantità diversa da zero se e solo se il punto  $\bar{P} = (x, y, 0)^t$ , ovvero la proiezione di P sulla superficie del semispazio, appartiene al dominio  $\Omega$  di integrazione. Inoltre, quando la funzione da integrare è singolare sul bordo di  $\Omega$ , particolare attenzione deve essere posta nella valutazione degli integrali al contorno.

Questi problemi saranno discussi nel seguito con riferimento ai domini poligonali, poiché essi sono senza dubbio i più frequenti nelle applicazioni. Un'analisi ravvicinata dell'elenco degli integrali precedentemente presentati rivela che non è necessario dettagliare le derivazioni analitiche per tutti loro. In effetti, tali integrali possono essere raggruppati in sei famiglie, schematicamente denotate da integrali del genere:

$$\int_{\Omega} (\cdot) dA, \quad \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\cdot) dA, \quad \int_{\Omega} \mathbf{H}(\cdot) dA,$$

$$\int_{\Omega} (\cdot) \boldsymbol{\rho} dA, \quad \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\cdot) \otimes \boldsymbol{\rho} dA, \quad \int_{\Omega} \mathbf{H}(\cdot) \otimes \boldsymbol{\rho} dA.$$

in modo che i dettagli sul calcolo analitico saranno forniti solo per un componente rappresentativo di ciascuna famiglia, vale a dire per gli integrali  $s''$ ,  $s'_g$ ,  $S'_H$ ,  $s''_{\rho}$ ,  $S'_{g\rho}$  e  $S'_{H\rho}$ .

#### 4.1 PARAMETRI GEOMETRICI DEFINITI PER UN GENERICO BORDO DI UN DOMINIO POLIGONALE

Supponiamo che la regione caricata  $\Omega$  abbia un bordo poligonale  $\partial\Omega$ , composto da  $n$  archi e vertici, orientati in senso antiorario, vedere, ad esempio, la Figura 3. Il generico bordo  $i$ -esimo di  $\partial\Omega$  è identificato dai vertici  $i$  e  $i+1$ , dove  $i = 1, \dots, n$  e  $n+1 = 1$ ; la posizione  $(x'_i, y'_i)^t$  del vertice  $i$  è rappresentato dal vettore  $\boldsymbol{\rho}_i = (x'_i - x, y'_i - y)^t$  che rappresenta la distanza tra il vertice  $i$ -esimo di  $\Omega$  ed il punto  $\bar{P} = (x, y, 0)^t$  che rappresenta la proiezione di  $P$  sulla superficie del semispazio.

Prima di dettagliare la valutazione delle sei famiglie di integrali, è utile definire alcune quantità geometriche, necessarie per esprimere in modo conciso gli integrali al contorno, derivati dagli integrali di dominio grazie all'applicazione del teorema di Gauss generalizzato. Tali parametri sono definiti per il generico bordo del contorno poligonale  $\partial\Omega$  di  $\Omega$ .

L' $i$ -esimo bordo di  $\partial\Omega$ , avente i punti estremi definiti dai vettori posizione  $\boldsymbol{\rho}_i$  e  $\boldsymbol{\rho}_{i+1}$ , ha la seguente equazione parametrica:

$$\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) = \boldsymbol{\rho}_i + \lambda_i(\boldsymbol{\rho}_{i+1} - \boldsymbol{\rho}_i), \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1,$$

il che vale anche per l'ultimo bordo di  $\partial\Omega$ , ponendo  $\boldsymbol{\rho}_{n+1} = \boldsymbol{\rho}_1$ .

Introducendo il vettore  $\mathbf{l}_i = \boldsymbol{\rho}_{i+1} - \boldsymbol{\rho}_i$  i seguenti parametri geometrici sono associati con l'i-esimo bordo di  $\partial\Omega$

$$\begin{aligned}
a_i &= \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{l}_i = l_i^2, & \widehat{\mathbf{l}}_i &= \frac{\mathbf{l}_i}{|\mathbf{l}_i|}, \\
b_i &= \boldsymbol{\rho}_i \cdot \mathbf{l}_i, & \mathbf{P}_i &= \mathbf{I} - \widehat{\mathbf{l}}_i \otimes \widehat{\mathbf{l}}_i, \\
c_i &= \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i, & \mathbf{R}_{\rho i} &= \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp, \\
c_{i+1} &= \boldsymbol{\rho}_{i+1} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}, & \mathbf{R}_{li} &= \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp, \\
d_i &= \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + z^2, & \mathbf{R}_{0i} &= \mathbf{R}_{\rho i} - \frac{b_i}{a_i} \mathbf{R}_{li} = \mathbf{P}_i \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp, \\
d_{i+1} &= \boldsymbol{\rho}_{i+1} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1} + z^2, & \mathbb{R}_{\rho\rho i} &= \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp, \\
e_i &= c_i - \frac{b_i^2}{a_i} = \frac{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^\perp)^2}{\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{l}_i}, & \mathbb{R}_{\rho li} &= \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp + \mathbf{l}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp, \\
f_i &= d_i - \frac{b_i^2}{a_i} = \frac{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^\perp)^2}{\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{l}_i} + z^2, & \mathbb{R}_{lli} &= \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp, \\
g_i &= \boldsymbol{\rho}_{i+1} \cdot \mathbf{l}_i, & \mathbb{R}_{0i} &= \mathbb{R}_{\rho\rho i} - \frac{b_i}{a_i} \mathbb{R}_{\rho li} + \frac{b_i^2}{a_i^2} \mathbb{R}_{lli} \\
k_i &= |\boldsymbol{\rho}_{i+1}| / |\boldsymbol{\rho}_i|, & &= \mathbf{P}_i \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{P}_i \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp, \\
r_i &= \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^\perp, & \mathbb{R}_{li} &= \mathbb{R}_{\rho li} - 2 \frac{b_i}{a_i} \mathbb{R}_{lli}.
\end{aligned}$$

Dove  $(\cdot)^\perp$  indica la rotazione in senso orario del vettore  $(\cdot)$ , per esempio:

$$\boldsymbol{\rho}_i^\perp = (x'_i - x, y'_i - y)^\perp = (y'_i - y, x - x'_i).$$

Si pone:

$$\lambda_i(t_i) = t_i - \frac{b_i}{a_i}, \quad t_{0i} = \frac{b_i}{a_i} = \frac{\boldsymbol{\rho}_i \cdot \mathbf{l}_i}{l_i^2}, \quad t_{1i} = 1 + \frac{b_i}{a_i} = \frac{\boldsymbol{\rho}_{i+1} \cdot \mathbf{l}_i}{l_i^2}.$$

Così la formula di  $\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)$  può essere riscritta come:

$$\boldsymbol{\rho}[\lambda_i(t_i)] = \boldsymbol{\rho}_i + \left(t_i - \frac{b_i}{a_i}\right) \mathbf{l}_i, \quad t_{0i} \leq t_i \leq t_{1i}.$$

In accordo, le seguenti quantità, definite sui bordi di  $d\Omega$ :

$$\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) = a_i t_i^2 + e_i, \quad \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2 = a_i t_i^2 + f_i,$$

$$\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \mathbf{v}_i \mathbf{l}_i = r_i, \quad \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \mathbf{v}_i \mathbf{l}_i = \mathbf{R}_{0i} + \mathbf{R}_{li} t_i,$$

$$\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \mathbf{v}_i \mathbf{l}_i = \mathbb{R}_{0i} + \mathbb{R}_{li} t_i + \mathbb{R}_{lii} t_i^2,$$

dove:

$$\mathbf{v}_i = \frac{(\boldsymbol{\rho}_{i+1} - \boldsymbol{\rho}_i)^\perp}{|\boldsymbol{\rho}_{i+1} - \boldsymbol{\rho}_i|} = \frac{\mathbf{l}_i^\perp}{l_i},$$

è il vettore unitario rivolto verso l'esterno associato al bordo  $i$ -esimo di  $\partial\Omega$ .  
Vengono utilizzate anche le quantità:

$$L_{1i} = \log\left(\frac{\sqrt{a_i d_{i+1}} + g_i}{\sqrt{a_i d_i} + b_i}\right), \quad L_{2i} = \log(z + \sqrt{d_i}),$$

$$L_{2i+1} = \log(z + \sqrt{d_{i+1}}), \quad L_{3i} = \log\left(\frac{c_i k_i + \sqrt{c_i d_{i+1}}}{c_i + \sqrt{c_i d_i}}\right),$$

$$L_{4i} = \log\left(\frac{c_i + \sqrt{c_i d_i}}{z \sqrt{c_i}}\right), \quad L_{4i+1} = \log\left(\frac{c_{i+1} + \sqrt{c_{i+1} d_{i+1}}}{z \sqrt{c_{i+1}}}\right),$$

che richiedono un'attenzione particolare per la loro valutazione. In realtà,  $L_{1i}$  tende all'infinito quando  $z = 0$  e o  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  o  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ . Allo stesso modo, se  $z = 0$ , i logaritmi  $L_{2i}$  e  $L_{2i+1}$  tendono ad infinito quando  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ , rispettivamente. Inoltre,  $L_{4i}$  ed  $L_{4i+1}$  sono singolari quando  $z = 0$ .

Tuttavia, viene indicato in seguito che tali singolarità sono inefficaci dal punto di vista computazionale poiché i logaritmi di cui sopra sono sempre moltiplicati per una quantità che diventa nulla quando il logaritmo tende all'infinito. Essendo il logaritmo un infinito o un infinitesimale di basso ordine, il prodotto con una quantità nulla restituisce zero, così che il calcolo dei logaritmi singolari possa essere saltato.

Inoltre, definiamo le seguenti quantità:

$$A_{1i} = \arctan\left(\frac{g_i}{\sqrt{r_i^2}}\right) - \arctan\left(\frac{b_i}{\sqrt{r_i^2}}\right),$$

$$A_{2i} = \arctan\left(\frac{zg_i}{\sqrt{r_i^2 d_{i+1}}}\right) - \arctan\left(\frac{zb_i}{\sqrt{r_i^2 d_i}}\right),$$

i cui argomenti diventano singolari quando  $r_i = 0$ , cioè quando  $\boldsymbol{\rho}_i$  e  $\boldsymbol{\rho}_{i+1}$  sono paralleli o  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  o  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ . Analogamente ai logaritmi precedentemente visti, il calcolo di  $A_{1i}$  e  $A_{2i}$  non è effettivamente richiesto quando  $r_i = 0$  in quanto, nelle formule riportate nelle sottosezioni successive, vengono moltiplicati per quantità che tendono a zero quando  $r_i \rightarrow 0$ .

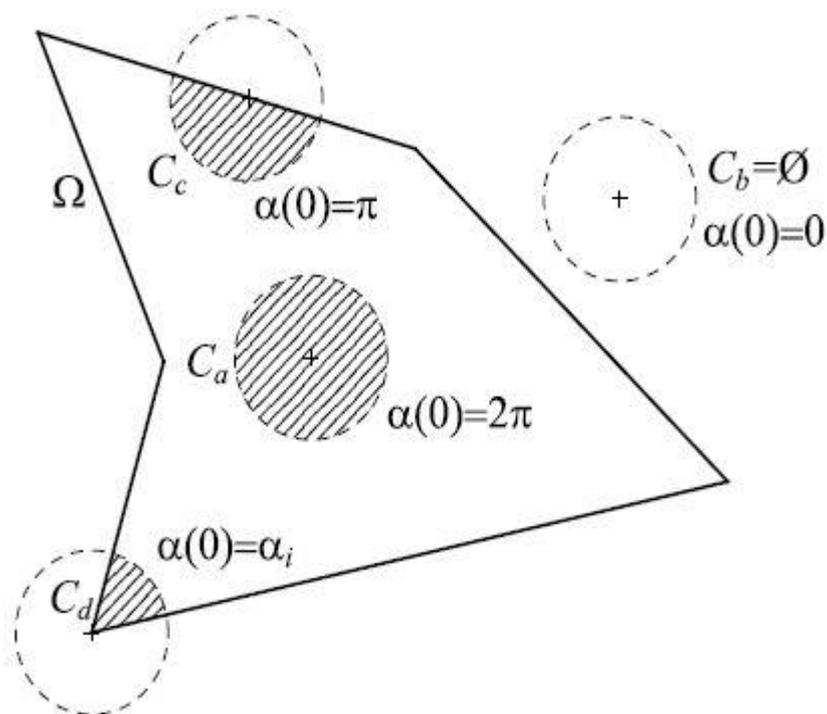


Figura 4: Interpretazione geometrica della correzione della singolarità  $\alpha(\mathbf{0})$  e valori associati corrispondenti a quattro distinte posizioni del punto di singolarità  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$  e dell'intersezione  $C$  tra  $\Omega$  e un cerchio nelle vicinanze di  $\mathbf{0}$ : (a)  $\mathbf{0}$  all'interno di  $\Omega$ ; (b)  $\mathbf{0}$  al di fuori di  $\Omega$ ; (c)  $\mathbf{0}$  su un lato di  $\Omega$ ; (d)  $\mathbf{0}$  in un vertice di  $\Omega$ .

Infine, indichiamo con  $\alpha(\mathbf{0})$  una quantità scalare che deve essere valutata se il punto  $\bar{P}$  in Figura 3 appartiene alla regione caricata  $\Omega$ , essa rappresenta la misura angolare, espressa in radianti, dell'intersezione tra  $\Omega$  ed un intorno circolare di  $\bar{P}$ , cioè la singolarità del punto  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ . Una interpretazione geometrica di  $\alpha(\mathbf{0})$  è mostrata nella Figura 4.

## 4.2 VALUTAZIONE ANALITICA DI $s''$

Dobbiamo valutare l'integrale:

$$s'' = \int_{\Omega} \varphi'' dA = \int_{\Omega} \frac{dA}{\sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}}.$$

A questo fine si considera l'identità:

$$\operatorname{div} \left[ \frac{\boldsymbol{\rho} \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right] = \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \operatorname{grad} \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \operatorname{div} \left( \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right).$$

Essendo:

$$\frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \operatorname{grad} \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}} = \varphi'',$$

è possibile esprimere l'integrale  $s''$  come:

$$s'' = \int_{\Omega} \operatorname{div} \left[ \frac{\boldsymbol{\rho} \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right] dA - \int_{\Omega} \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \operatorname{div} \left( \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right) dA.$$

Il primo integrale a secondo membro sulla destra può essere riscritto come integrale di linea, esteso al bordo  $\partial\Omega$  di  $\Omega$ , utilizzando il teorema di Gauss:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \left[ \frac{\boldsymbol{\rho} \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right] dA = \int_{\partial\Omega} \frac{\sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} ds.$$

Avendo assunto  $\partial\Omega$  come poligono di  $n$  lati, il precedente integrale può essere riscritto come somma di contributi di ogni lato:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2 \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\nu}}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} ds = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2 \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_i}}{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i)} l_i d\lambda_i = \sum_{i=1}^n I_{\tilde{p}i}^q .$$

Si può quindi valutare l'integrale  $I_{\tilde{p}i}^q$  come segue:

$$\begin{aligned} I_{\tilde{p}i}^q &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2 \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_i}}{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i)} l_i d\lambda_i = r_i \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{\sqrt{a_i t_i^2 + f_i}}{a_i t_i^2 + e_i} dt_i \\ &= \frac{r_i}{\sqrt{a_i}} \left\{ \frac{z}{\sqrt{e_i}} \arctan \left[ \frac{z\sqrt{a_i} t_i}{\sqrt{(a_i t_i^2 + f_i)e_i}} \right] + \ln \left[ a_i t_i + \sqrt{a_i(a_i t_i^2 + f_i)} \right] \right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} \\ &= \frac{r_i}{\sqrt{a_i}} \left( \frac{zA_{2i}}{\sqrt{e_i}} + L_{1i} \right) = \operatorname{sgn}(r_i) z A_{2i} + \frac{r_i}{\sqrt{a_i}} L_{1i} , \end{aligned}$$

dove:

$$A_{2i} = \left\{ \arctan \left[ \frac{z\sqrt{a_i} t_i}{\sqrt{(a_i t_i^2 + f_i)e_i}} \right] \right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \arctan \left( \frac{z g_i}{\sqrt{r_i^2 d_{i+1}}} \right) - \arctan \left( \frac{z b_i}{\sqrt{r_i^2 d_i}} \right) ,$$

e:

$$L_{1i} = \left\{ \ln \left[ a_i t_i + \sqrt{a_i(a_i t_i^2 + f_i)} \right] \right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \ln \left( \frac{\sqrt{a_i d_{i+1}} + g_i}{\sqrt{a_i d_i} + b_i} \right) .$$

*Nota 1.* Per le applicazioni numeriche è utile discutere riguardo la correttezza delle ultime tre equazioni per ogni valore di  $\boldsymbol{\rho}_i$ ,  $\boldsymbol{\rho}_{i+1}$  e  $z$ .

Ritornando alle espressioni dei parametri geometrici ( $a_i$ ,  $b_i$ , ecc...), è semplice verificare che  $a_i > 0$ ,  $c_i \geq 0$ ,  $d_i \geq 0$  e  $d_{i+1} \geq 0$ , quindi gli argomenti di tutte le radici quadre, all'interno delle tre equazioni precedenti, sono positivi.

Gli argomenti delle arcotangenti in  $A_{2i}$  tendono ad infinito quando  $r_i \rightarrow 0$ , per esempio, quando  $\boldsymbol{\rho}_i$  e  $\boldsymbol{\rho}_{i+1}$  sono paralleli o quando  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  o quando  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ .

Inoltre, quando  $z \neq 0$ , l'argomento del logaritmo di  $L_{1i}$  è sempre positivo in quanto può essere riscritto come:

$$\frac{\sqrt{a_i d_{i+1}} + g_i}{\sqrt{a_i d_i} + b_i} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{\rho}_{i+1} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1} + z^2 + \boldsymbol{\rho}_{i+1} \cdot \hat{\boldsymbol{l}}_i}}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + z^2 + \boldsymbol{\rho}_i \cdot \hat{\boldsymbol{l}}_i}} > 0,$$

dove  $\hat{\boldsymbol{l}}_i$  è il vettore unitario diretto lungo il bordo  $i$ -esimo di  $\partial\Omega$ .

Conseguentemente, il solo caso di singolarità per  $L_{1i}$  si presenta quando  $z = 0$  e o  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  o  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ .

In entrambi i casi, per esempio, quando  $r_i = 0$  o, più semplicemente, quando  $\boldsymbol{\rho}_i$  e  $\boldsymbol{\rho}_{i+1}$  sono paralleli o quando  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  o quando  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ ,  $A_{2i}$  e  $L_{1i}$  non devono essere calcolati affatto poiché l'integrando nell'equazione di  $I_{\bar{p}i}^q$  è la funzione nulla. Per rendersene conto è sufficiente valutare le espressioni dettagliate nella Tabella 1; le quali sono state ottenute considerando che:

- i. Se  $\boldsymbol{\rho}_i$  e  $\boldsymbol{\rho}_{i+1}$  sono paralleli possiamo porre  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = k_i \boldsymbol{\rho}_i$  così che si possa scrivere  $\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) = \xi_i \boldsymbol{\rho}_i$ , con  $\xi_i = 1 + \lambda_i(k_i - 1)$  e  $k_i = \frac{|\boldsymbol{\rho}_{i+1}|}{|\boldsymbol{\rho}_i|}$ .
- ii. Se  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} \neq \mathbf{0}$  si può scrivere  $\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) = \lambda_i \boldsymbol{\rho}_{i+1}$ .
- iii. Se  $\boldsymbol{\rho}_i \neq \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$  si può scrivere  $\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) = \eta_i \boldsymbol{\rho}_i$ , dove  $\eta_i = 1 - \lambda_i$ .

Tabella 1: Casi particolari

	$\boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1}$	$\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$
	$1 \leq \xi_i \leq k_i$	$0 \leq \lambda_i \leq 1$	$0 \leq \eta_i \leq 1$
$\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i)$	$c_i \xi_i^2$	$c_{i+1} \lambda_i^2$	$c_i \eta_i^2$
$\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2$	$c_i \xi_i^2 + z^2$	$c_{i+1} \lambda_i^2 + z^2$	$c_i \eta_i^2 + z^2$
$\boldsymbol{v}_i l_i = (\boldsymbol{\rho}_{i+1} - \boldsymbol{\rho}_i)^\perp$	$\boldsymbol{l}_i^\perp = (k_i - 1) \boldsymbol{\rho}_i^\perp$	$\boldsymbol{\rho}_{i+1}^\perp$	$\boldsymbol{\rho}_i^\perp$
$r_i = \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{v}_i l_i$	0	0	0

Conseguentemente, adottando nell'espressione di  $I_{\bar{p}i}^q$  i risultati della Tabella 1 si ritrova sempre  $I_{\bar{p}i}^q = 0$ ; quindi non serve valutare  $A_{2i}$  e  $L_{1i}$  quando  $r_i$  tende a zero.

Il secondo integrale a secondo membro stima la singolarità in  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$  dell'argomento dell'operatore  $\text{div} \left[ \frac{\boldsymbol{\rho} \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right]$ .

Si può quindi definire l'identità integrale:

$$\int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\rho}) \operatorname{div} \left( \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right) dA = \psi(\mathbf{0}) \alpha(\mathbf{0}),$$

dove  $\psi$  è una funzione scalare ed  $\alpha$  rappresenta la misura dell'angolo, espressa in radianti, dell'intersezione tra  $\Omega$  ed un intorno circolare del punto di singolarità  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ . Utilizzando l'ultima formula si ottiene:

$$\int_{\Omega} \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \operatorname{div} \left( \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right) dA = z \alpha(\mathbf{0}),$$

ed infine, l'integrale  $s''$  diventa:

$$s'' = \int_{\Omega} \varphi'' dA = \sum_{i=1}^{n_v} I_{\bar{p}_i}^q - z \alpha(\mathbf{0}),$$

il termine  $I_{\bar{p}_i}^q$  viene calcolato nella formula precedentemente vista, con la condizione che la sua valutazione può essere saltata quando  $r_i = 0$ .

### 4.3 VALUTAZIONE ANALITICA DI $s'_g$

La formula per la valutazione di  $s'_g$  può essere ottenuta come:

$$\begin{aligned} s'_g &= \int_{\Omega} \mathbf{grad} \varphi' dA = \int_{\Omega} \varphi' \mathbf{v} ds = \int_{\partial\Omega} \log \left[ z + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \right] \mathbf{v} ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \log \left[ z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2} \right] \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{i}_i^l, \end{aligned}$$

dove l'integrale  $\mathbf{i}_i^l$  è dato da:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_i^l &= \int_0^1 \log \left[ z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2} \right] \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i, \\ &= \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \log \left( z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right) \mathbf{l}_i^{\perp} dt_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathbf{l}_i^\perp}{\sqrt{a_i}} \left\{ z \log \left[ \sqrt{a_i(a_i t_i^2 + f_i)} + a_i t_i \right] - \sqrt{a_i} t_i \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{e_i} \left[ \arctan \left( \sqrt{\frac{a_i}{e_i}} t_i \right) - \arctan \left( \sqrt{\frac{a_i}{e_i}} \frac{t_i z}{\sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{a_i} t_i \log \left( z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right) \right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} \\
&= \frac{\mathbf{l}_i^\perp}{\sqrt{a_i}} \left[ z L_{1i} - \sqrt{a_i} + \sqrt{e_i} (A_{1i} - A_{2i}) + \frac{g_i}{\sqrt{a_i}} L_{2i+1} - \frac{b_i}{\sqrt{a_i}} L_{2i} \right],
\end{aligned}$$

con  $L_{1i}, L_{2i}, L_{2i+1}, A_{1i}, A_{2i}$  definiti nelle formule precedenti.

*Nota 2.* Seguendo quanto detto nella Nota 1, è possibile valutare l'integrale  $\mathbf{i}_i^l$  anche quando  $\boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1}$  o  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  o  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ , cioè quando gli argomenti di  $A_{1i}$  e  $A_{2i}$  diventano singolari. Inoltre, se  $z = 0$  e  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  o  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ ,  $L_{1i}$  diventa infinito. Inoltre, se  $z = 0$  e  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  ( $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ ) la quantità  $L_{2i}$  ( $L_{2i+1}$ ) tende ad essere infinita.

Tutti questi casi possono essere affrontati adottando le formule della Tabella 1; effettivamente, se  $\boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1}$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_i^l &= \int_0^1 \log \left[ z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2} \right] \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i \\
&= \int_1^{k_i} \log \left( z + \sqrt{c_i \xi_i^2 + z^2} \right) \mathbf{l}_i^\perp d\xi_i \\
&= \mathbf{l}_i^\perp \left\{ \xi_i \log \left( z + \sqrt{c_i \xi_i^2 + z^2} \right) + \frac{z}{\sqrt{c_i}} \log \left[ c_i \xi_i + \sqrt{c_i(c_i \xi_i^2 + z^2)} \right] - \xi_i \right\}_1^{k_i} \\
&= \mathbf{l}_i^\perp \left[ k_i L_{2i+1} - L_{2i} + \frac{z}{\sqrt{c_i}} \log \left( \frac{c_i k_i + \sqrt{c_i d_{i+1}}}{c_i + \sqrt{c_i d_i}} \right) - k_i + 1 \right].
\end{aligned}$$

Allo stesso modo, quando  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  o  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ , si ha

$$i_i^l = \begin{cases} \rho_{i+1}^\perp \left[ L_{2i+1} + \frac{z}{\sqrt{c_{i+1}}} \log \left( \frac{c_{i+1} + \sqrt{c_{i+1} d_{i+1}}}{z \sqrt{c_{i+1}}} \right) - 1 \right] & \text{se } \rho_i = \mathbf{0} \\ \rho_i^\perp \left[ L_{2i} + \frac{z}{\sqrt{c_i}} \log \left( \frac{c_i + \sqrt{c_i d_i}}{z \sqrt{c_i}} \right) - 1 \right] & \text{se } \rho_{i+1} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Le formule precedenti possono essere applicate anche quando  $z \rightarrow 0$  siccome  $L_{2i}$  ed  $L_{2i+1}$  sono ben definiti, mentre la valutazione del logaritmo a secondo membro può essere saltata essendo:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \log \left( \frac{1}{z} \right) = 0.$$

#### 4.4 VALUTAZIONE ANALITICA DI $S'_H$

La formula per la valutazione di  $S'_H$  è ottenuta come

$$\begin{aligned} S'_H &= \int_{\Omega} \mathbf{H}(\varphi') dA = \int_{\Omega} \mathbf{grad}[\mathbf{grad}(\varphi')] dA = \int_{\partial\Omega} \mathbf{grad}\varphi' \otimes \mathbf{v} dA \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\rho \otimes \mathbf{v} ds}{(z + \sqrt{\rho \cdot \rho + z^2}) \sqrt{\rho \cdot \rho + z^2}} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\rho(\lambda_i) \otimes \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i}{[z + \sqrt{\rho(\lambda_i) \cdot \rho(\lambda_i) + z^2}] \sqrt{\rho(\lambda_i) \cdot \rho(\lambda_i) + z^2}} = \sum_{i=1}^n I_{vqi}, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} I_{vqi} &= \int_0^1 \frac{\rho(\lambda_i) \otimes \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i}{[z + \sqrt{\rho(\lambda_i) \cdot \rho(\lambda_i) + z^2}] \sqrt{\rho(\lambda_i) \cdot \rho(\lambda_i) + z^2}} \\ &= \mathbf{R}_{0i} \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{dt_i}{\left( z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right) \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} + \mathbf{R}_{li} \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i dt_i}{\left( z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right) \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} \\ &= \mathbf{R}_{0i} \frac{A_{1i} - A_{2i}}{|r_i|} + \mathbf{R}_{li} \frac{L_{2i+1} - L_{2i}}{a_i}, \end{aligned}$$

siccome

$$\begin{aligned}
& \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{dt_i}{(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}) \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a_i e_i}} \left[ \arctan \left( \sqrt{\frac{a_i}{e_i}} t_i \right) - \arctan \left( \sqrt{\frac{a_i}{e_i}} \frac{t_i z}{\sqrt{(a_i t_i^2 + f_i)}} \right) \right]_{t_{0i}}^{t_{1i}} \\
&= \frac{A_{1i} - A_{2i}}{|r_i|}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i dt_i}{(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}) \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} &= \frac{1}{a_i} \left[ \log \left( z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right) \right]_{t_{0i}}^{t_{1i}} \\
&= \frac{L_{2i+1} - L_{2i}}{a_i}.
\end{aligned}$$

*Nota 3.* Sebbene la formula di  $I_{vqi}$  è indeterminata quando  $r_i \rightarrow 0$ , si può usare l'approccio delle Note 1 e 2 per valutare  $I_{vqi}$ . In particolare, si possono usare le formule della Tabella 1 e porre:

$$\rho(\lambda_i) \otimes \mathbf{v}_i l_i = \begin{cases} \xi \rho_i \otimes l_i^\perp = \mathbf{R}_{\rho i} \xi_i & \text{se } \rho_i \parallel \rho_{i+1}, \\ \lambda_i \rho_{i+1} \otimes \rho_{i+1}^\perp = \mathbf{R}_{li} \lambda_i & \text{se } \rho_i = \mathbf{0}, \\ -\eta_i \rho_i \otimes \rho_i^\perp = -\mathbf{R}_{li} \eta_i & \text{se } \rho_{i+1} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Allo stesso modo, quando  $\rho_i \parallel \rho_{i+1}$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}
I_{vqi} &= \int_0^1 \frac{\rho(\lambda_i) \otimes \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i}{[z + \sqrt{\rho(\lambda_i) \cdot \rho(\lambda_i) + z^2}] \sqrt{\rho(\lambda_i) \cdot \rho(\lambda_i) + z^2}} \\
&= \int_1^{k_i} \frac{\mathbf{R}_{\rho i} \xi_i d\xi_i}{(k_i - 1) \left( z + \sqrt{c_i \xi_i^2 + z^2} \right) \sqrt{c_i \xi_i^2 + z^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathbf{R}_{\rho i}}{(k_i - 1)c_i} \left[ \log \left( z + \sqrt{c_i \xi_i^2 + z^2} \right) \right]_1^{k_i} \\
&= \frac{\mathbf{R}_{\rho i}}{(k_i - 1)c_i} \log \left( \frac{z + \sqrt{c_i k_i^2 + z^2}}{z + \sqrt{c_i + z^2}} \right) \\
&= \frac{\mathbf{R}_{\rho i}}{b_i} \log \left( \frac{z + \sqrt{c_{i+1} + z^2}}{z + \sqrt{c_i + z^2}} \right).
\end{aligned}$$

Allo stesso modo, quando  $\rho_i = \mathbf{0}$  o  $\rho_{i+1} = \mathbf{0}$ , si ritrova:

$$I_{vqi} = \begin{cases} \frac{\mathbf{R}_{li}}{c_{i+1}} \log \left( \frac{z + \sqrt{c_{i+1} + z^2}}{2z} \right) & \text{se } \rho_i = \mathbf{0}, \\ \frac{\mathbf{R}_{li}}{c_i} \log \left( \frac{z + \sqrt{c_i + z^2}}{2z} \right) & \text{se } \rho_{i+1} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Deve essere enfatizzato che entrambe le soluzioni della formula precedente tendono ad infinito quando  $z \rightarrow 0$ ; tale singolarità si presenta solo sulla superficie del semispazio, ai vertici della regione caricata.

## 4.5 VALUTAZIONE ANALITICA DI $\mathbf{s}_{\rho}''$

La formula per la valutazione di  $\mathbf{s}_{\rho}''$  è ottenuta come

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{\rho}'' &= \int_{\Omega} \varphi'' \rho \, dA = \int_{\Omega} \frac{\rho \, dA}{\sqrt{\rho \cdot \rho + z^2}} = \int_{\Omega} \mathbf{grad} \sqrt{\rho \cdot \rho + z^2} \, dA \\
&= \int_{\partial\Omega} \sqrt{\rho \cdot \rho + z^2} \mathbf{v} \, ds = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \sqrt{\rho(\lambda_i) \cdot \rho(\lambda_i) + z^2} \mathbf{v}_i l_i \, d\lambda_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{i}_i^q,
\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{i}_i^q$  viene computato come

$$\mathbf{i}_i^q = \int_0^1 \sqrt{\rho(\lambda_i) \cdot \rho(\lambda_i) + z^2} \mathbf{v}_i l_i \, d\lambda_i = \int_{t_{oi}}^{t_{1i}} \mathbf{l}_i^{\perp} \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \, dt_i$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{l_i^\perp}{2} \left\{ t_i \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} + \frac{f_i}{\sqrt{a_i}} \log \left[ a_i t_i + \sqrt{a_i (a_i t_i^2 + f_i)} \right] \right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} \\
&= \frac{l_i^\perp}{2a_i} \left[ (a_i + b_i) \sqrt{d_{i+1}} - b_i \sqrt{d_i} + \sqrt{a_i} f_i L_{1i} \right].
\end{aligned}$$

*Nota 4.* La quantità  $L_{1i}$  tende ad infinito quando  $z = 0$  e o  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  o  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ . Tuttavia, in questi casi,  $f_i \rightarrow 0$  in modo che il prodotto  $f_i L_{1i} \rightarrow 0$  poiché  $L_{1i}$  è un infinito di ordine arbitrariamente basso.

## 4.6 VALUTAZIONE ANALITICA DI $\mathbf{S}'_{g\rho}$

Per la valutazione di  $\mathbf{S}'_{g\rho}$  è utile considerare l'identità:

$$\mathbf{grad}(\varphi' \boldsymbol{\rho}) = (\mathbf{grad} \varphi' \otimes \boldsymbol{\rho})^T + \varphi' \mathbf{grad} \boldsymbol{\rho} = (\mathbf{grad} \varphi' \otimes \boldsymbol{\rho})^T + \varphi' \mathbf{I},$$

così che  $\mathbf{S}'_{g\rho}$  può essere riscritto come:

$$\mathbf{S}'_{g\rho} = \int_{\Omega} \mathbf{grad} \varphi' \otimes \boldsymbol{\rho} dA = \left[ \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\varphi' \boldsymbol{\rho}) dA \right]^T - \mathbf{I} \int_{\Omega} \varphi' dA.$$

Il primo integrale del secondo membro della precedente formula viene valutato come:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbf{grad}(\varphi' \boldsymbol{\rho}) dA &= \int_{\partial\Omega} \varphi' \boldsymbol{\rho} \otimes \mathbf{v} ds = \int_{\partial\Omega} \log(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}) \boldsymbol{\rho} \otimes \mathbf{v} ds \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \log \left[ z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2} \right] \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_i^l
\end{aligned}$$

La valutazione di  $I_i^l$  viene espressa come:

$$\begin{aligned}
I_i^l &= \int_0^1 \log \left[ z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2} \right] \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i \\
&= \mathbf{R}_{0i} \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \log \left( z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right) dt_i \\
&\quad + \mathbf{R}_{li} \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \log \left( z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right) dt_i,
\end{aligned}$$

dove la formula di  $i_i^l$  può essere adottata per la valutazione del primo integrale e:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \log \left( z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right) dt_i \\
&= -\frac{1}{4a_i} \left[ a_i t_i^2 + f_i - 2z \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} - 2(a_i t_i^2 + e_i) \log \left( z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right) \right]_{t_{0i}}^{t_{1i}} \\
&= \frac{d_i - d_{i+1} + 2z(\sqrt{d_{i+1}} + \sqrt{d_i}) + 2c_{i+1}L_{2i+1} - 2c_iL_{2i}}{4a_i}.
\end{aligned}$$

Quindi, alla fine si ottiene:

$$\begin{aligned}
I_i^l &= \frac{\mathbf{R}_{0i}}{\sqrt{a_i}} \left[ zL_{1i} - \sqrt{a_i} + \sqrt{e_i}(A_{1i} - A_{2i}) + \frac{g_i}{\sqrt{a_i}}L_{2i+1} - \frac{b_i}{\sqrt{a_i}}L_{2i} \right] \\
&\quad + \frac{\mathbf{R}_{li}}{4a_i} [d_i - d_{i+1} + 2z(\sqrt{d_{i+1}} + \sqrt{d_i}) + 2c_{i+1}L_{2i+1} - 2c_iL_{2i}].
\end{aligned}$$

*Nota 5.* Come già indicato nelle Note 1 e 2, le singularità delle grandezze  $A_{1i}$ ,  $A_{2i}$ ,  $L_{1i}$ ,  $L_{2i}$  e  $L_{2i+1}$  possono presentarsi se  $\boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1}$  o  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  o  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ . Nel primo caso il fattore della quantità  $\mathbf{R}_{0i}$  nell'ultima equazione si modifica come nell'equazione di  $i_i^l$  generale; inoltre è uguale alla prima equazione di  $i_i^l$  se  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ , ed è uguale alla seconda se  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ .

*Nota 6.* La quantità  $L_{2i} \rightarrow \infty$  se  $z = 0$  e  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ . Tuttavia,  $L_{2i}$  è fattorizzato da  $c_i$ , che tende anch'esso a zero. Quindi, essendo  $L_{2i}$  un infinito di ordine

arbitrariamente basso, il prodotto  $c_i L_{2i} \rightarrow 0$  in modo che il suo calcolo possa essere saltato se  $z = 0$  e  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ . Lo stesso ragionamento può essere applicato al prodotto  $c_{i+1} L_{2i+1}$  quando  $z = 0$  e  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ .

Al fine di valutare l'integrale di  $\varphi'$  nell'equazione di  $\mathbf{S}'_{g\rho}$ , si considera l'identità:

$$\operatorname{div} \left[ \boldsymbol{\rho} \log \left( z + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \right) \right] = 2 \log \left( z + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \right) - \frac{z}{\sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}} + 1;$$

quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi' dA &= \int_{\Omega} \log \left( z + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \right) dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \left[ \boldsymbol{\rho} \log \left( z + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \right) \right] dA \\ &\quad + \frac{z}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}} dA - \frac{1}{2} \int_{\Omega} dA. \end{aligned}$$

Applicando il teorema di Gauss al primo integrale del secondo membro dell'equazione precedente, si ottiene:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \operatorname{div} \left[ \boldsymbol{\rho} \log \left( z + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \right) \right] dA \\ &= \int_{\partial\Omega} \log \left( z + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \right) \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v} ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \log \left[ z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2} \right] \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{i}_i^l, \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{i}_i^l$  viene calcolato come:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_i^l &= \int_0^1 \log \left[ z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2} \right] \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i \\ &= r_i \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \log \left( z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right) dt_i \\ &= \frac{r_i}{\sqrt{a_i}} \left[ z L_{1i} - \sqrt{a_i} + \sqrt{e_i} (A_{1i} - A_{2i}) + \frac{g_i}{\sqrt{a_i}} L_{2i+1} - \frac{b_i}{\sqrt{a_i}} L_{2i} \right], \end{aligned}$$

dove viene applicato il risultato della formula di  $i_i^l$  e le considerazioni della Nota 5.

Il secondo integrale della formula di  $\int_{\Omega} \varphi' dA$  è uguale ad  $s''$ , valutato nell'apposita sezione, mentre l'ultimo integrale è calcolato mediante la ben nota formula per la valutazione dell'area dei poligoni:

$$\int_{\Omega} dA = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i .$$

Infine, sostituendo le formule di  $s''$ , di  $\int_{\Omega} \mathbf{grad}(\varphi' \boldsymbol{\rho}) dA$ , e le ultime quattro all'interno dell'equazione di  $\mathbf{S}'_{g\rho}$  si ottiene:

$$\mathbf{S}'_{g\rho} = \sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{I}_i^{lT} - \frac{\mathbf{I}}{2} \left( i_i^l + z \mathbf{I}_{pi}^q - z^2 \alpha(\mathbf{0}) - \frac{r_i}{2} \right) \right] ,$$

dove  $\mathbf{I}_i^{lT}$  è il trasposto dell'espressione di  $\mathbf{I}_i^l$ ,  $i_i^l$  è stato valutato precedentemente, come  $\mathbf{I}_{pi}^q$ . In accordo con la Nota 1,  $\mathbf{I}_{pi}^q = 0$  se  $r_i \rightarrow 0$ .

#### 4.7 VALUTAZIONE ANALITICA DI $\mathbf{S}'_{H\rho}$

Differenziando la parte destra della formula di  $\mathbf{grad}(\varphi' \boldsymbol{\rho})$ , si ottiene la seguente identità:

$$\mathbf{H}(\varphi' \boldsymbol{\rho}) = [\mathbf{H}(\varphi') \otimes \boldsymbol{\rho}]^{T_{13}} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{grad}\varphi')^{T_{23}} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{grad}\varphi' ,$$

dove l'apice  $T_{ab}$  è usato per indicare l'operatore trasposto che scambia gli indici di posizione a e b per il tensore del terzo ordine, ad esempio  $(\mathbb{A}^{T_{13}})_{ijk} = (\mathbb{A})_{kji}$ . Conseguentemente, l'integrale  $\mathbf{S}'_{H\rho}$  può essere calcolato come:

$$\mathbf{S}'_{H\rho} = \int_{\Omega} \mathbf{H}(\varphi') \otimes \boldsymbol{\rho} dA = \left[ \int_{\Omega} \mathbf{H}(\varphi' \boldsymbol{\rho}) dA \right]^{T_{13}} - 2 \int_{\Omega} \mathbf{grad}\varphi' dA \otimes \mathbf{I} .$$

Si applica il teorema di Gauss al primo integrale della parte destra della precedente formula:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbf{H}(\varphi' \boldsymbol{\rho}) dA &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{grad}(\varphi' \boldsymbol{\rho}) \otimes \mathbf{v} ds \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho} \otimes \mathbf{v} ds}{(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}) \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}} + \mathbf{I} \otimes \int_{\partial\Omega} \log(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}) \mathbf{v} ds \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^1 \frac{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i}{(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}) \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{I} \otimes \int_0^1 \log(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}) \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{vqi} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{i}_i^l).
\end{aligned}$$

Il secondo integrale della parte destra della formula di  $\mathbf{S}'_{H\rho}$  è valutato come nella formula di  $\mathbf{s}'_g$ , quindi:

$$\mathbf{S}'_{H\rho} = \sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{vqi}^{T_{13}} - \mathbf{i}_i^l \otimes \mathbf{I}),$$

dove l'identità:

$$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{i}_i^l)^{T_{13}} = [(\mathbf{I})_{ab} (\mathbf{i}_i^l)_c]^{T_{13}} = (\mathbf{I})_{cb} (\mathbf{i}_i^l)_a = \mathbf{i}_i^l \otimes \mathbf{I}$$

è stata applicata e la simmetria di  $\mathbf{I}$  è stata sfruttata.

L'integrale  $\mathbf{i}_i^l$  è stato calcolato precedentemente con le condizioni aggiuntive definite nella Nota 2.

Inoltre,  $\mathbb{I}_{vqi}$  viene calcolato come:

$$\mathbb{I}_{vqi} = \int_0^1 \frac{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i}{(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}) \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \mathbb{R}_{\rho\rho i} - \frac{b_i}{a_i} \mathbb{R}_{\rho l i} + \frac{b_i^2}{a_i^2} \mathbb{R}_{l l i} \right) \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{dt_i}{\left[ z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right] \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} \\
&\quad + \left( \mathbb{R}_{\rho l i} - 2 \frac{b_i}{a_i} \mathbb{R}_{l l i} \right) \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i dt_i}{\left[ z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right] \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} \\
&\quad + \mathbb{R}_{l l i} \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i^2 dt_i}{\left[ z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right] \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} \\
&= \mathbb{R}_{0i} \frac{A_{1i} - A_{2i}}{|r_i|} + \mathbb{R}_{l i} \frac{L_{2i+1} - L_{2i}}{a_i} + \mathbb{R}_{l l i} \frac{\sqrt{a_i} - zL_{1i} + \sqrt{e_i}(A_{2i} - A_{1i})}{a_i^{3/2}},
\end{aligned}$$

nella quale i primi due integrali sono stati valutati precedentemente, mentre il terzo è dato da:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i^2 dt_i}{\left( z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right) \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} \\
&= \frac{1}{a_i^{3/2}} \left\{ \sqrt{a_i} t_i - z \log \left[ a_i t_i + \sqrt{a_i(a_i t_i^2 + f_i)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{f_i - z^2} \left[ \arctan \left( \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{f_i - z^2}} \frac{t_i z}{\sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} \right) - \arctan \left( \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{f_i - z^2}} t_i \right) \right] \right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} \\
&= \frac{\sqrt{a_i} - zL_{1i} + \sqrt{e_i}(A_{2i} - A_{1i})}{a_i^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Nota 7. Seguendo lo stesso approccio descritto nella Note 1,2 e 3, la formula di  $\mathbb{I}_{vqi}$  può essere opportunamente modificata quando alcuni dei suoi addendi diventano indefiniti. Specificatamente, per i risultati della Tabella 1 si può porre:

$$\rho(\lambda_i) \otimes \rho(\lambda_i) \otimes \mathbf{v}_i l_i = \begin{cases} \xi^2 \rho_i \otimes \rho_i \otimes l_i^\perp = \mathbb{R}_{\rho\rho i} \xi^2 & \text{se } \rho_i \parallel \rho_{i+1}, \\ \lambda_i^2 \rho_{i+1} \otimes \rho_{i+1} \otimes \rho_{i+1}^\perp = \mathbb{R}_{\mathbb{I}i} \lambda_i^2 & \text{se } \rho_i = \mathbf{0}, \\ -\eta_i^2 \rho_i \otimes \rho_i \otimes \rho_i^\perp = -\mathbb{R}_{\mathbb{I}i} \eta_i^2 & \text{se } \rho_{i+1} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Allo stesso modo, quando se  $\rho_i \parallel \rho_{i+1}$ ,  $\mathbb{I}_{vqi}$  diventa:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{vqi} &= \int_0^1 \frac{\rho(\lambda_i) \otimes \rho(\lambda_i) \otimes \mathbf{v}_i l_i d\lambda_i}{(z + \sqrt{\rho(\lambda_i) \cdot \rho(\lambda_i) + z^2}) \sqrt{\rho(\lambda_i) \cdot \rho(\lambda_i) + z^2}} \\ &= \int_1^{k_i} \frac{\mathbb{R}_{\rho\rho i} \xi^2 d\xi_i}{\left[ z + \sqrt{c_i \xi_i^2 + z^2} \right] \sqrt{c_i \xi_i^2 + z^2}} \\ &= \frac{\mathbb{R}_{\rho\rho i}}{c_i} \left[ \xi_i - \frac{z}{c_i} \log \left( c_i \xi_i + \sqrt{c_i (c_i \xi_i^2 + z^2)} \right) \right]_1^{k_i} \\ &= \frac{\mathbb{R}_{\rho\rho i}}{c_i} \left[ k_i - 1 - \frac{z}{c_i} \log \left( \frac{c_i k_i + \sqrt{c_i d_{i+1}}}{c_i + \sqrt{c_i d_i}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Allo stesso modo:

$$\mathbb{I}_{vqi} = \begin{cases} \left[ \frac{\mathbb{R}_{\mathbb{I}i}}{c_{i+1}} \left[ 1 - \frac{z}{c_{i+1}} \log \left( \frac{c_{i+1} + \sqrt{c_{i+1} d_{i+1}}}{z \sqrt{c_{i+1}}} \right) \right] \right] & \text{se } \rho_i = \mathbf{0}, \\ \left[ \frac{\mathbb{R}_{\mathbb{I}i}}{c_i} \left[ \frac{z}{c_i} \log \left( \frac{c_i + \sqrt{c_i d_i}}{z \sqrt{c_i}} \right) - 1 \right] \right] & \text{se } \rho_{i+1} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

La formula precedente può essere applicata anche quando  $z \rightarrow 0$  siccome la valutazione dei logaritmi sulla parte destra dell'equazione può essere saltata, come descritto nella Nota 2 e per  $\lim_{z \rightarrow 0} z \log \left( \frac{1}{z} \right) = 0$ .

## 5. ESPRESSIONI ALGEBRICHE PER GLI INTEGRALI DI DOMINIO (SOMMARIO)

Una delle principali finalità della tesi è l'implementazione tramite Matlab delle formule derivate e la loro applicazione ai problemi di meccanica del contatto e di ingegneria delle fondazioni. Per questa ragione vengono raggruppate le formule utili, in modo che possano essere, propriamente, tenute in conto le singularità che si presentano nelle espressioni. Per esempio, alcune delle seguenti formule vengono espresse come prodotto di  $z$  ed altre quantità, così che si sia naturalmente portati a considerare come nulla la quantità in questione quando  $z = 0$ , omettendo la verifica secondo cui la quantità moltiplicata per  $z$  possa essere singolare. D'altro canto, è stato provato, usando le espressioni dettagliate, precedentemente definite, che le formule che presentano  $z$  come fattore diventano in realtà zero. Si riporta così la lista delle formule richieste:

$$s'' = \sum_{i=1}^n I_{\bar{p}i}^q - z\alpha(\mathbf{0}), \quad \text{dove } I_{\bar{p}i}^q = \begin{cases} \text{sgn}(r_i)zA_{2i} + \frac{r_i}{\sqrt{a_i}}L_{1i} & \text{se } r_i \neq 0, \\ 0 & \text{se } r_i = 0, \end{cases}$$

in cui  $\text{sgn}(\cdot) = (\cdot)/|(\cdot)|$  denota la funzione segno,

$$s''' = \sum_{i=1}^n I_{\bar{p}qi} - \alpha(\mathbf{0}), \quad \text{dove } I_{\bar{p}qi} = \begin{cases} \text{sgn}(r_i)A_{2i} & \text{se } r_i \neq 0, \\ 0 & \text{se } r_i = 0, \end{cases}$$

e

$$s^{iv} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{r_i z g_i}{a_i f_i \sqrt{d_{i+1}}} - \frac{r_i z b_i}{a_i f_i \sqrt{d_i}} \right).$$

Quando  $z = 0$  e o  $\rho_i = \mathbf{0}$  o  $\rho_{i+1} = \mathbf{0}$ , il secondo o il primo addendo diventa nullo, rispettivamente, siccome il numeratore è un infinitesimo di ordine maggiore rispetto al denominatore, quindi la loro valutazione viene saltata per il bordo  $i$ -esimo. Inoltre:

$$s'_g = \sum_{i=1}^n t'_i,$$

dove

$$l_i^\perp = \begin{cases} \frac{l_i^\perp}{\sqrt{a_i}} \left[ zL_{2i} - \sqrt{a_i} + \sqrt{e_i}(A_{1i} - A_{2i}) + \frac{g_i L_{2i+1} - b_i L_{2i}}{\sqrt{a_i}} \right] & \text{se } r_i \neq 0, \\ l_i^\perp \left( k_i L_{2i+1} - L_{2i} + \frac{z}{\sqrt{c_i}} L_{3i} - k_i + 1 \right) & \text{se } \rho_i || \rho_{i+1}, \\ \rho_{i+1}^\perp \left( L_{2i+1} + \frac{z}{\sqrt{c_{i+1}}} L_{4i+1} - 1 \right) & \text{se } \rho_i = \mathbf{0}, \\ \rho_i^\perp \left( L_{2i} + \frac{z}{\sqrt{c_i}} L_{4i} - 1 \right) & \text{se } \rho_{i+1} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

La valutazione dei logaritmi  $L_{4i}$  ed  $L_{4i+1}$ , che sono singolari se  $z = 0$ , può essere saltata siccome  $zL_{4i} \rightarrow 0$  e  $zL_{4i+1} \rightarrow 0$ . Inoltre

$$s_g'' = z \sum_{i=1}^n \frac{l_i^\perp}{\sqrt{a_i}} L_{1i},$$

e

$$s_g''' = \sum_{i=1}^n \frac{z^2 l_i^\perp}{a_i f_i} \left( \frac{b_i}{\sqrt{d_i}} - \frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}} \right).$$

Inoltre:

$$S_H' = \sum_{i=1}^n \begin{cases} R_{0i} \frac{A_{1i} - A_{2i}}{|r_i|} + R_{li} \frac{L_{2i+1} - L_{2i}}{a_i} & \text{se } r_i \neq 0, \\ \frac{R_{\rho i}}{b_i} \log \left( \frac{z + \sqrt{d_{i+1}}}{z + \sqrt{d_i}} \right) & \text{se } \rho_i || \rho_{i+1}, \\ \frac{R_{li}}{c_{i+1}} \log \left( \frac{z + \sqrt{d_{i+1}}}{2z} \right) & \text{se } \rho_i = \mathbf{0}, \\ \frac{R_{li}}{c_i} \log \left( \frac{z + \sqrt{d_i}}{2z} \right) & \text{se } \rho_{i+1} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

L'integrale  $S_H'$  è singolare quando  $z = 0$  e o  $\rho_i = \mathbf{0}$  o  $\rho_{i+1} = \mathbf{0}$ . Tale singolarità è ineliminabile.

$$\mathbf{s}''_H = z \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\mathbf{R}_{0i}}{a_i f_i} \left( \frac{b_i}{\sqrt{d_i}} - \frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}} \right) + \frac{\mathbf{R}_{li}}{a_i} \left( \frac{1}{\sqrt{d_{i+1}}} - \frac{1}{\sqrt{d_i}} \right) \right],$$

e il rapporto  $z/\sqrt{d_i} (z/\sqrt{d_{i+1}})$  è posto uguale ad 1 quando  $z = 0$  e  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  ( $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ ). Risultati addizionali sono:

$$\mathbf{s}''_{\rho} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{l}_i^{\perp}}{2a_i} [(a_i + b_i)\sqrt{d_{i+1}} - b_i\sqrt{d_i} + \sqrt{a_i}f_i L_{1i}],$$

dove l'addendo  $\sqrt{a_i}f_i L_{1i}$  è settato a zero quando  $z = 0$  e o  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$  o  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ .

$$\mathbf{s}''' = \mathbf{s}''_g = z \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{l}_i^{\perp}}{\sqrt{a_i}} L_{1i},$$

$$\mathbf{s}^{iv}_{\rho} = z \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\mathbf{l}_i^{\perp}}{\sqrt{a_i}} L_{1i} - \frac{z^2 \mathbf{l}_i^{\perp}}{a_i f_i} \left( \frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}} - \frac{b_i}{\sqrt{d_i}} \right) \right],$$

$$\mathbf{s}'_{g\rho} = \sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{I}_i^{lT} - \frac{\mathbf{I}}{2} \left( i_i^l + z I_{pi}^q - z^2 \alpha(\mathbf{0}) - \frac{r_i}{2} \right) \right],$$

dove  $\mathbf{I}_i^l$  è calcolato come:

$$\mathbf{I}_i^l = \mathbf{R}_{0i} \mathbf{I}_{i1}^l + \frac{\mathbf{R}_{li}}{4a_i} \mathbf{I}_{i2}^l,$$

essendo

$$\mathbf{I}_{i1}^l = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a_i}} \left[ z L_{1i} - \sqrt{a_i} + \sqrt{e_i} (A_{1i} - A_{2i}) + \frac{g_i}{\sqrt{a_i}} L_{2i+1} - \frac{b_i}{\sqrt{a_i}} L_{2i} \right] & \text{se } r_i \neq 0, \\ k_i L_{2i+1} - L_{2i} + \frac{z}{\sqrt{c_i}} L_{3i} - k_i + 1 & \text{se } \boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1}, \\ L_{2i+1} + \frac{z}{\sqrt{c_{i+1}}} L_{4i+1} - 1 & \text{se } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}, \\ L_{2i} + \frac{z}{\sqrt{c_i}} L_{4i} - 1 & \text{se } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

e

$$I_{i2}^l = \begin{cases} d_i - d_{i+1} + 2z(\sqrt{d_{i+1}} + \sqrt{d_i}) + 2c_{i+1}L_{2i+1} - 2c_iL_{2i} & \text{se } \boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}_{i+1} \neq \mathbf{0}, \\ -d_{i+1} + 2z\sqrt{d_{i+1}} + 2c_{i+1}L_{2i+1} & \text{se } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}, \\ d_i + 2z\sqrt{d_i} - 2c_iL_{2i} & \text{se } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

L'integrale  $I_{\bar{p}i}^q$  nella formula di  $\mathbf{S}'_{g\rho}$  viene calcolato nella formula di  $s''$ , e:

$$i_i^l = \begin{cases} \frac{r_i}{\sqrt{a_i}} \left[ zL_{1i} - \sqrt{a_i} + \sqrt{e_i}(A_{1i} - A_{2i}) + \frac{g_i}{\sqrt{a_i}}L_{2i+1} - \frac{b_i}{\sqrt{a_i}}L_{2i} \right] & \text{se } r_i \neq 0, \\ 0 & \text{se } r_i = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{S}''_{g\rho} = \sum_{i=1}^n \{ \mathbf{I}_{qi}^T - \mathbf{I}[zI_{\bar{p}i}^q - z^2\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0})] \},$$

dove:

$$\mathbf{I}_{qi} = \mathbf{R}_{0i} \frac{zL_{1i}}{\sqrt{a_i}} \mathbf{R}_{li} z \frac{\sqrt{d_{i+1}} - \sqrt{d_i}}{a_i},$$

nella quale la valutazione di  $L_{1i}$  è saltata quando  $z = 0$  e l'integrale  $I_{\bar{p}i}^q$  è stato valutato precedentemente.

Altri risultati sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}''_{g\rho} &= -z\mathbf{S}''_H - \mathbf{I}z\mathbf{S}''' \\ &= z \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\mathbf{R}_{0i}z}{a_i f_i} \left( \frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}} - \frac{b_i}{\sqrt{d_i}} \right) + \frac{\mathbf{R}_{li}z}{a_i} \left( \frac{1}{\sqrt{d_i}} - \frac{1}{\sqrt{d_{i+1}}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{I} \operatorname{sgn}(r_i) A_{2i} + \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}) \right], \end{aligned}$$

nella quale l'addendo  $\mathbf{I} \operatorname{sgn}(r_i) A_{2i}$  è posto a zero se  $r_i = 0$ .

$$\mathbf{S}'_{H\rho} = \sum_{i=0}^n \mathbb{I}_{vqi}^{T_{13}} - \mathbf{s}'_g \otimes \mathbf{I},$$

dove  $\mathbb{I}_{vqi}^{T_{13}}$  è il trasposto del terzo ordine del tensore:

$$\mathbb{I}_{vqi}^{T_{13}} = \begin{cases} \mathbb{R}_{0i} \frac{A_{1i} - A_{2i}}{|r_i|} + \mathbb{R}_{li} \frac{L_{2i+1} - L_{2i}}{a_i} + \mathbb{R}_{lli} \frac{\sqrt{a_i} - zL_{1i} + \sqrt{e_i}(A_{2i} - A_{1i})}{a_i^{3/2}} & \text{se } r_i \neq 0, \\ \frac{\mathbb{R}_{\rho\rho i}}{c_i} \left( k_i - 1 - \frac{z}{c_i} L_{3i} \right) & \text{se } \boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1}, \\ \frac{\mathbb{R}_{lli}}{c_{i+1}} \left( 1 - \frac{z}{c_{i+1}} L_{4i+1} \right) & \text{se } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}, \\ \frac{\mathbb{R}_{lli}}{c_i} \left( \frac{z}{c_i} L_{4i} - 1 \right) & \text{se } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

nel quale vengono invertiti primo e terzo componente. Inoltre,  $\mathbf{s}'_g$  è stato calcolato precedentemente. La valutazione di  $L_{1i}$ ,  $L_{4i}$ , ed  $L_{4i+1}$  è saltata quando  $z = 0$  siccome  $zL_{1i} = zL_{4i} = zL_{4i+1} = 0$  in questo caso. Infine:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'_{H\rho} = & -\mathbf{s}''_g \otimes -z \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\mathbb{R}_{0i}^{T_{13}}}{a_i f_i} \left( \frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}} - \frac{b_i}{\sqrt{d_i}} \right) + \frac{\mathbb{R}_{1i}^{T_{13}}}{a_i} \left( \frac{1}{\sqrt{d_i}} - \frac{1}{\sqrt{d_{i+1}}} \right) \right. \\ & \left. + \mathbb{R}_{lli}^{T_{13}} \left( \frac{L_{1i}}{a_i^{3/2}} + \frac{b_i}{a_i^2 \sqrt{d_i}} - \frac{g_i}{a_i^2 \sqrt{d_{i+1}}} \right) \right], \end{aligned}$$

dove  $(\cdot)^{T_{13}}$  è il trasposto del terzo ordine di  $(\cdot)$  in cui il primo ed il terzo componente sono scambiati, mentre  $\mathbf{s}''_g$  è stato calcolato precedentemente.

Inoltre, se  $z = 0$  e  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ , si pone  $zb_i/\sqrt{d_i} = 0$  e  $z/\sqrt{d_i} = 1$ .

Analogamente, se  $z = 0$  e  $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ , si pone  $zg_i/\sqrt{d_{i+1}} = 0$  e  $z/\sqrt{d_{i+1}} = 1$ .

## 6. IMPLEMENTAZIONE

Allo scopo di rendere più chiara la strada percorsa si vuole dedicare un breve paragrafo alla trattazione dell'implementazione in linguaggio Matlab delle formule precedentemente definite.

Il codice verte su più cicli for annidati, precisamente quattro, il più esterno si riferisce ai punti P su cui si vuole condurre l'analisi e valutare i risultati, per cui viene preso un punto per volta e per quel punto si inizializzano gli integrali a zero.

All'interno di questo primo ciclo si presenta un secondo ciclo, fatto sui triangoli che compongono l'area caricata, in cui per ogni triangolo vengono definite con calcolo matriciale le quantità  $q_{0z}$  e  $q_{1z}$  che definiscono

l'andamento della pressione sulla regione sotto carico.

Il terzo ciclo, esterno al secondo ed interno al primo, è fatto sui segmenti che compongono il bordo della regione caricata, questo permette il calcolo delle quantità geometriche, come il vettore posizione che definisce la distanza tra P ed il bordo in questione, fondamentale per la risoluzione degli integrali; si calcolano inoltre in questo terzo ciclo tutti gli integrali, di modo che ogni punto P preso in considerazione sia confrontato con tutti i bordi che compongono il perimetro della regione caricata, e che gli integrali vengano ottenuti come somma di contributi di ogni bordo sul singolo punto.

Il quarto, ed ultimo, ciclo, esterno a secondo e terzo, viene fatto nuovamente sui triangoli ed ha la finalità di calcolare le tensioni e gli spostamenti sul singolo punto partendo dai risultati ottenuti precedentemente e considerando i contributi di tutti i triangoli.

Per ogni punto si valutano le grandezze ad ogni profondità  $z$ .

## 7. APPENDICE

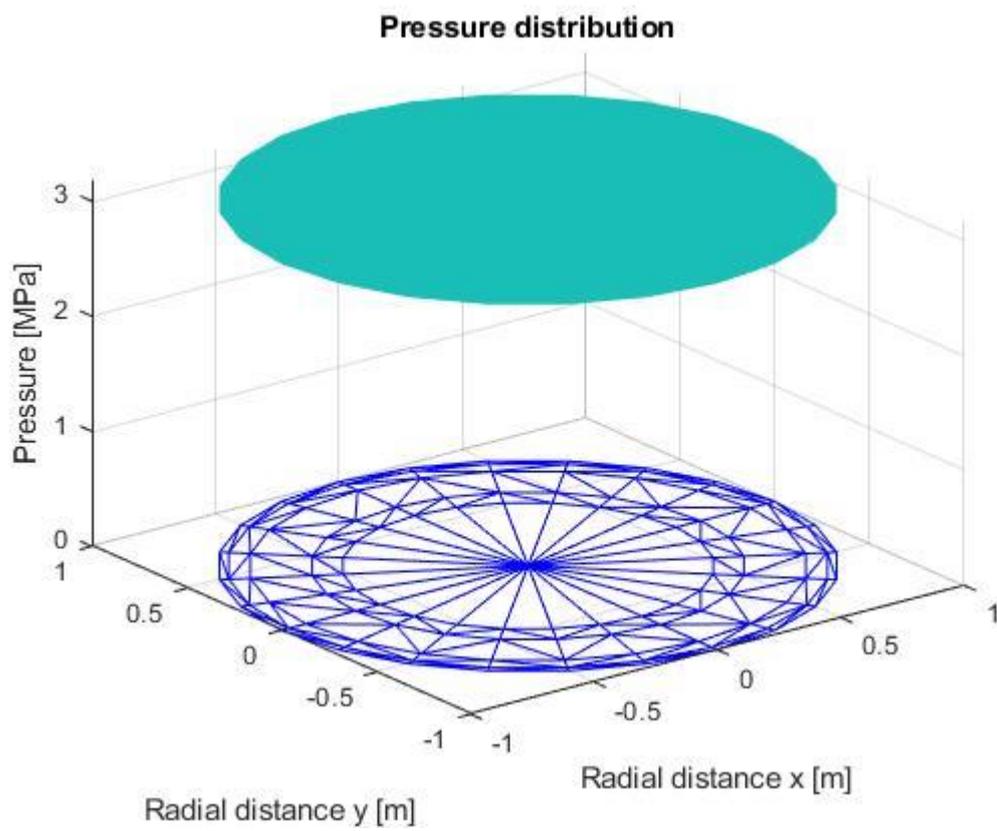
### 7.1 CARICO A PRESSIONE DISTRIBUITA COSTANTE

Il caso di carico uniformemente applicato ad una regione circolare di una superficie del semispazio è una classica soluzione usata in geomeccanica. Sulla pubblicazione dei professori Marmo e Rosati viene riportato un esempio di orma circolare di raggio  $R = 1 \text{ m}$ , uniformemente caricata sulla superficie da un carico  $F_z = 10 \text{ MN}$  (il carico distribuito ha un'intensità  $q_{0z} = F_z / \pi R^2 \approx 3.183 \text{ MPa}$ ), nel quale vengono presentate le linee iso-tensione in un dominio in cui l'asse delle ascisse è la distanza radiale dal centro dell'orma e l'asse delle ordinate è la profondità al di sotto della superficie, le tensioni prese in considerazione sono la tensione normale  $\sigma_z$  e la tensione radiale  $\sigma_r$ .

Il materiale considerato presenta un modulo di taglio  $G = 833.3 \text{ MPa}$  ed un rapporto di Poisson  $\nu = 0.2$ .

Utilizzando il programma sviluppato in azienda, a cui sono stati passati i dovuti input (distribuzione di pressione e orma di contatto), è stato paragonato il risultato del codice aziendale con l'esempio della pubblicazione dei professori Marmo e Rosati, riscontrando una soddisfacente similarità che permette di catalogare come valido il programma Matlab steso in azienda e le formule proposte.

Il caso di carico uniformemente applicato ad una regione circolare di una superficie del semispazio è una classica soluzione usata in geomeccanica. Si segue un approccio per cui viene modellato il bordo della regione caricata attraverso poligoni regolari con un arbitrario numero di lati.



*Figura 5: Distribuzione uniforme di pressione sull'orma di contatto*

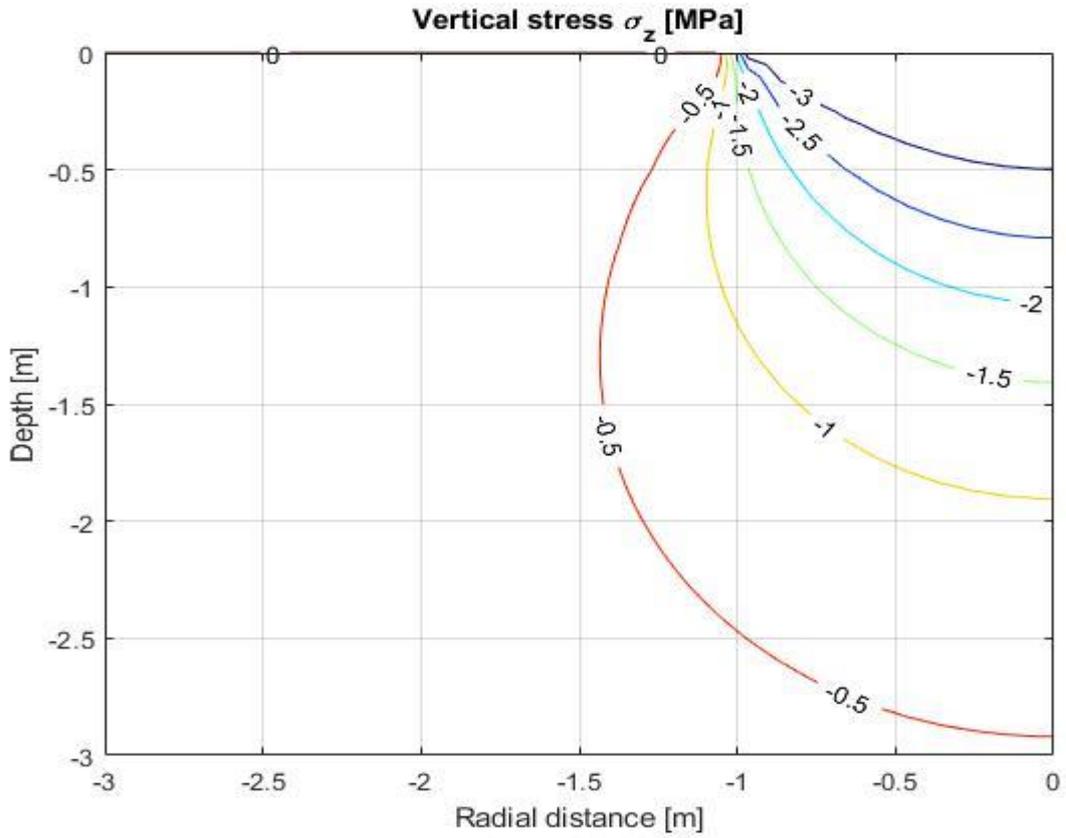


Figura 6: Tensione normale sotto l'orma di contatto, codice aziendale

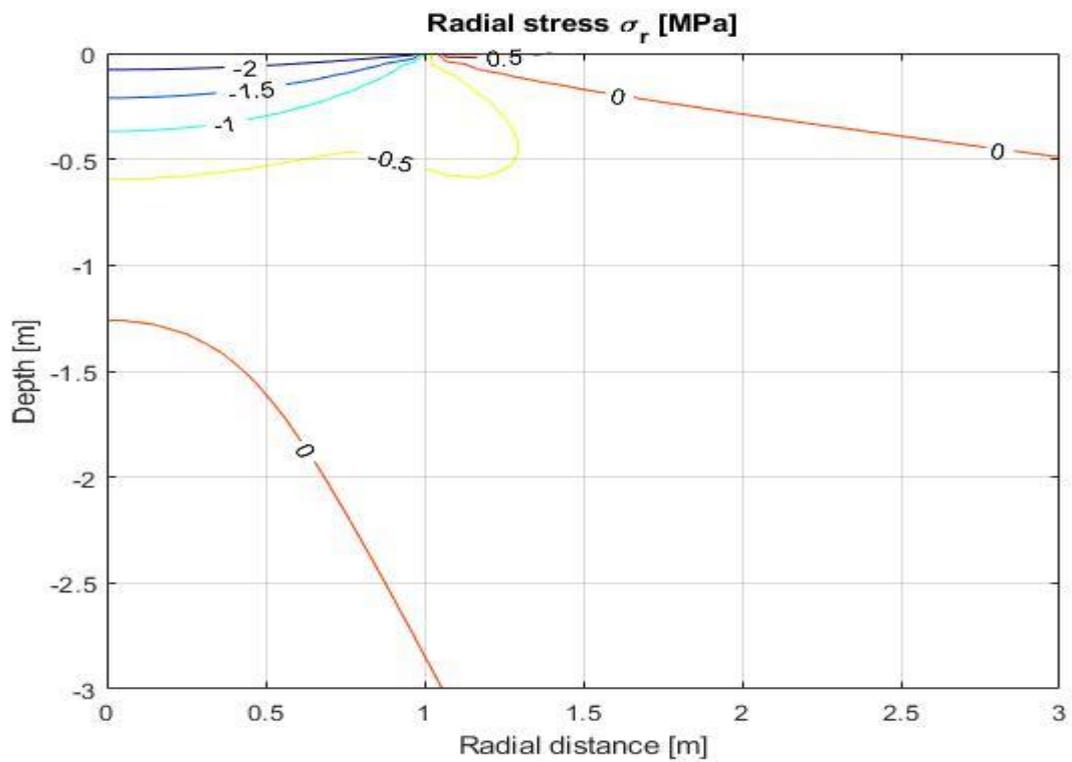


Figura 7: Tensione radiale sotto l'orma di contatto, codice aziendale

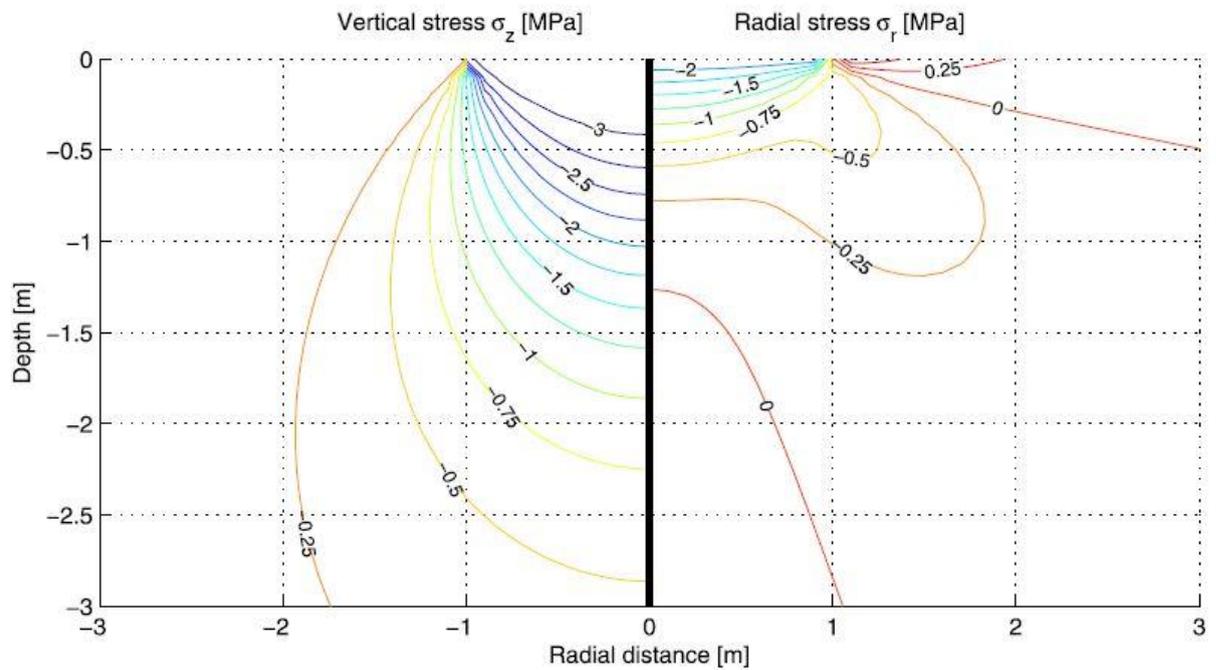


Figura 8: Stress sotto orma circolare Marmo-Rosati

La stessa similarità riscontrata nelle tensioni al di sotto dell'orma di contatto viene riscontrata negli spostamenti.

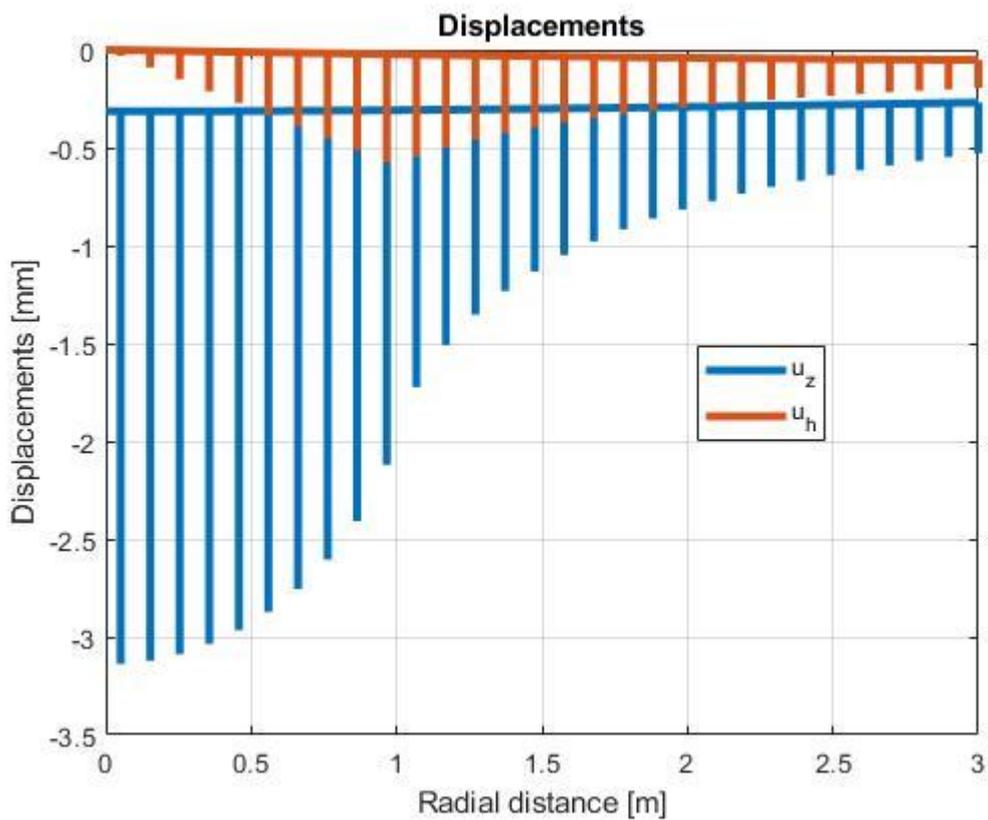


Figura 9: Spostamenti della superficie ( $z=0$ ) sotto carico uniforme circolare, codice aziendale

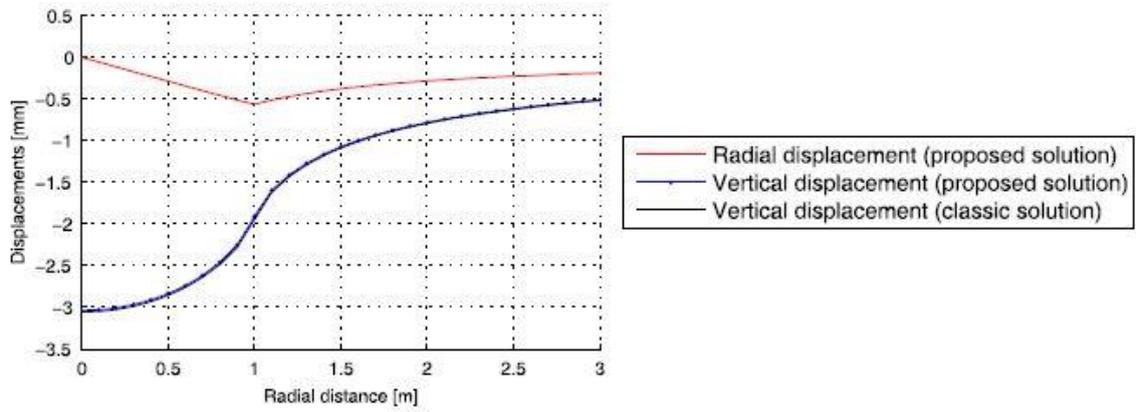


Figura 10: Spostamenti della superficie ( $z=0$ ) sotto carico uniforme circolare, Marmo Rosati

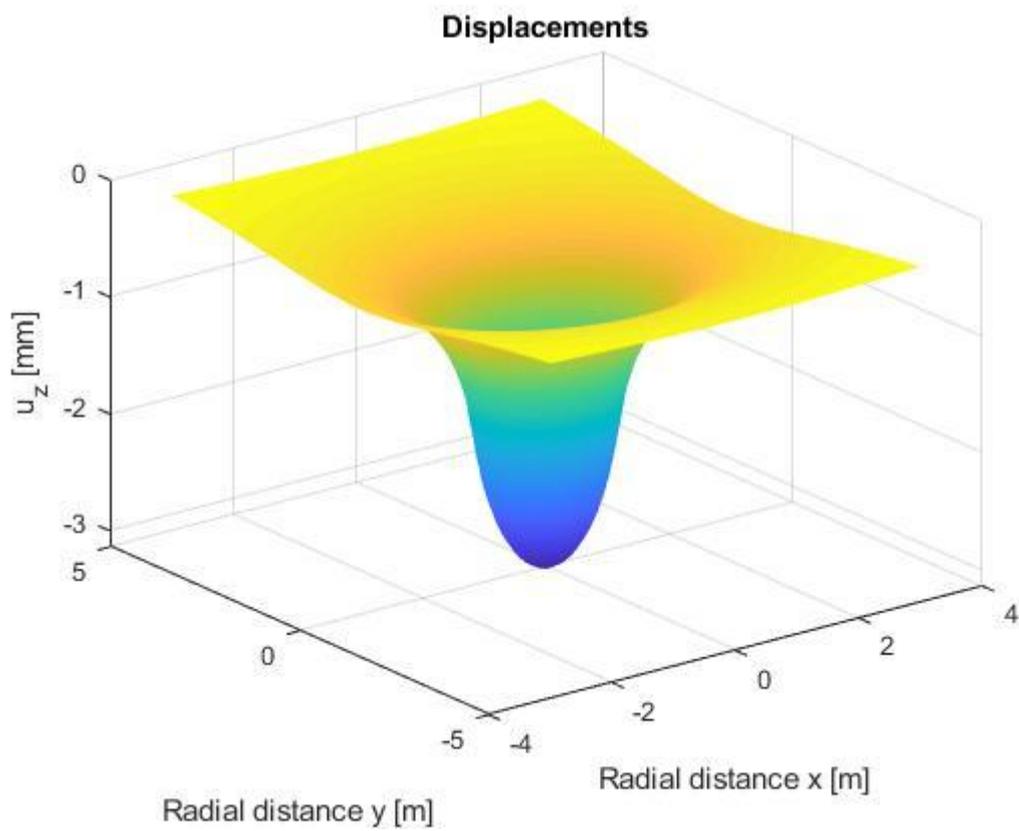


Figura 11: Spostamento 3D della superficie sotto carico uniforme circolare

## 7.2 CASO DI CONTATTO SFERA-SFERA

Si riporta anche un confronto con la teoria di Hertz, per un caso di contatto sfera-sfera, sfruttando delle formule analitiche ritrovate per quest'ultima casistica. I dati sono  $R = 0.9 \text{ m}$ ,  $E = 210000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$  e  $p_{max} = 3898 \text{ MPa}$ .

$$\sigma_z = -\frac{p_{max}}{1 + z_a^2},$$

$$\sigma_r = -p_{max} \left[ (1 + \nu)(1 - z_a \cot^{-1} z_a) - \frac{1}{2(1 + z_a^2)} \right].$$

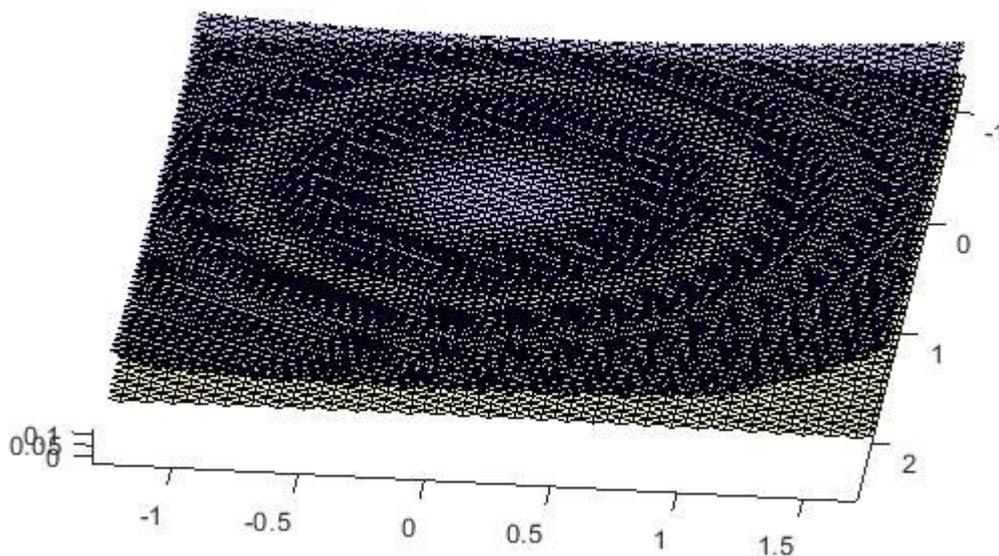


Figura 12: Sfere a contatto con triangolazione

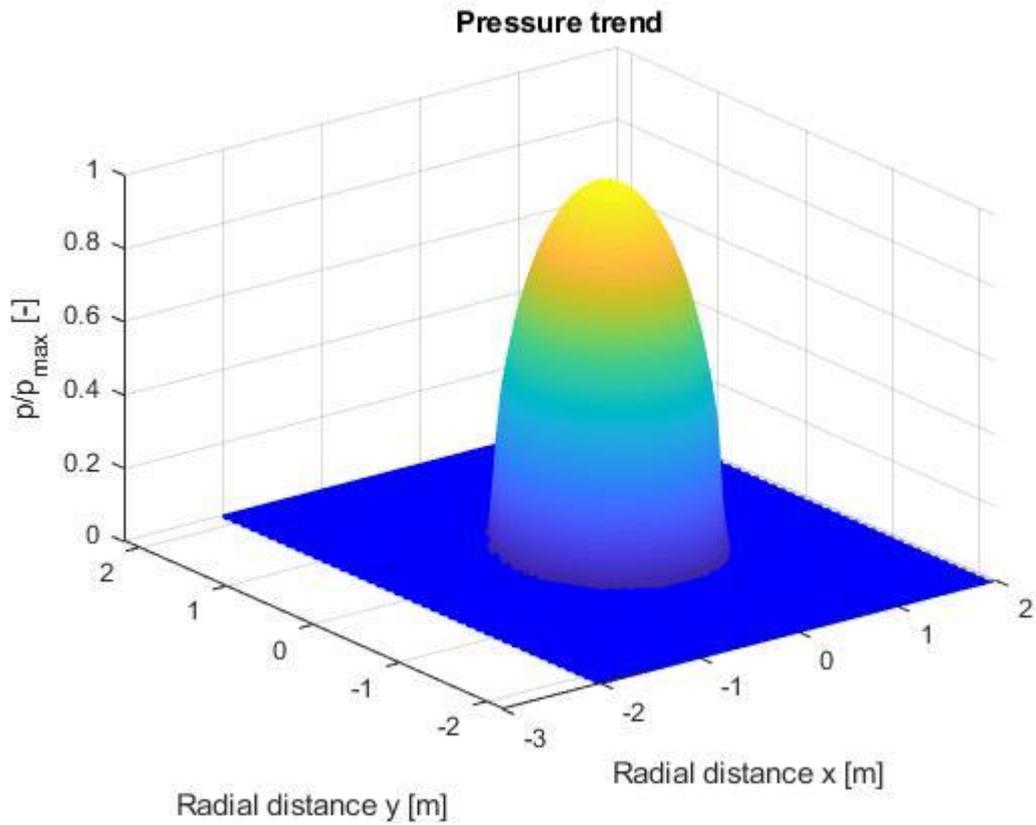


Figura 13: Andamento di pressione nell'orma di contatto tra due sfere normalizzata a  $p_{max}$

Si ritrova sulla superficie una maggiore vicinanza per i valori di  $\sigma_r$  (errore di circa 2% per  $z = 0$ ) ed una maggiore distanza per i valori di  $\sigma_z$  (errore di circa 16% per  $z = 0$ ).

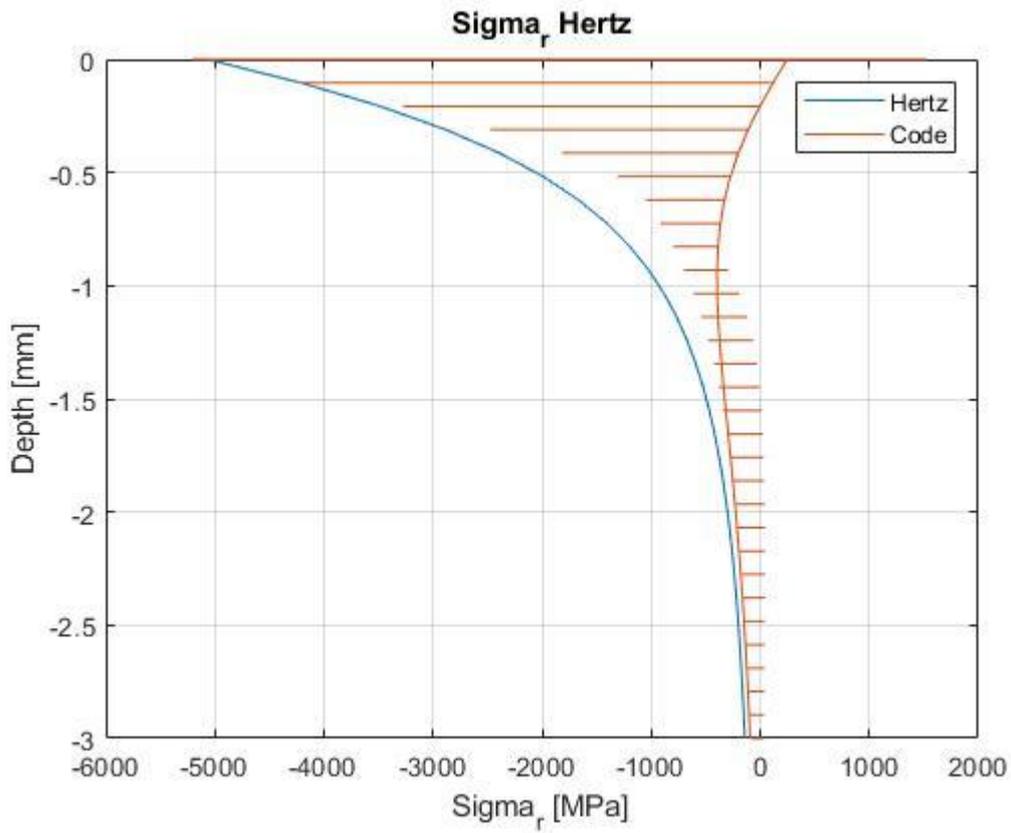


Figura 14: Confronto della tensione radiale tra il codice aziendale e la teoria di Hertz

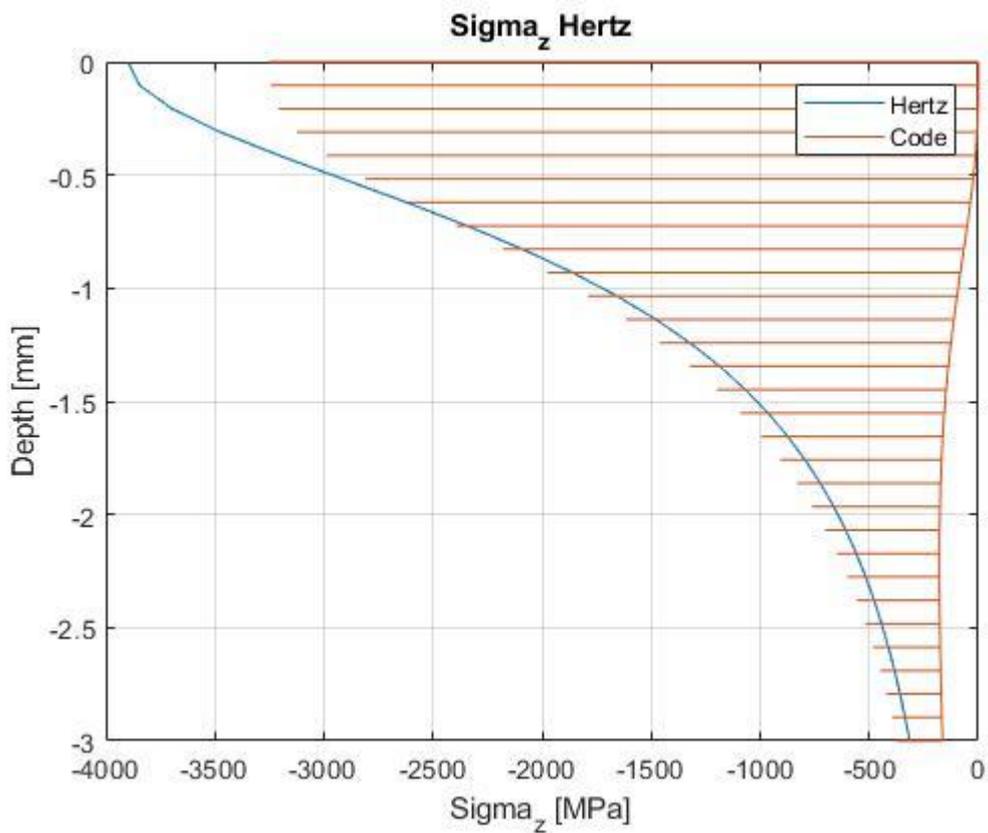


Figura 15: Confronto della tensione verticale tra il codice aziendale e la teoria di Hertz

La componente di tensione radiale presenta una singolarità, infatti l'integrale  $S'_H$  diventa singolare ai bordi della regione caricata sulla superficie del semispazio ( $z = 0$ ). Questo problema numerico caratterizza alcuni bordi poligonali, ma, nel caso particolare dell'approssimazione poligonale della circonferenza, si può evitare elegantemente aumentando il numero di punti dell'approssimazione poligonale o sfruttando una rotazione rigida del poligono rispetto al suo centro. Questo passaggio permette il calcolo di componenti di deformazioni e tensioni ovunque, evitando la singolarità dell'integrale  $S'_H$  per una regione circolare il cui bordo è approssimato da poligoni.

## 8. CONCLUSIONI

Con la presente tesi sono state utilizzate le espressioni analitiche di deformazioni, tensioni e spostamenti prodotti in un punto arbitrario di un semispazio isotropico omogeneo sotto pressione variante linearmente applicata su una regione di una superficie. Queste espressioni sono state derivate dalla pubblicazione dei professori Marmo-Rosati "A general Approach to the Solution of Boussinesq's Problem for Polynomial Pressures Acting over Polygonal Domains", l'approccio, che è basato su una versione generalizzata del teorema di Gauss e su recenti risultati della teoria dei potenziali, tiene in conto efficacemente le singolarità che caratterizzano i campi da valutare. Le formule di spostamenti, deformazioni e tensioni sono espresse come somma algebrica di quantità che dipendono esplicitamente dal vettore posizione dei vertici della regione, dalle proprietà del materiale del semispazio e dalla funzione di carico. Differentemente da soluzioni alternative presenti in letteratura, ogni campo meccanico è espresso da diverse espressioni che tengono in conto separatamente i diversi tipi di singolarità.

Tutti i termini sono stati ottenuti definendo opportunamente gli integrali al contorno, ottenuti applicando il teorema di Gauss generalizzato agli integrali di dominio originali estesi alla regione caricata. Oltre alla loro importanza teorica e pratica per i problemi affrontati nell'articolo, rappresentano un insieme di risultati di base per la risoluzione di diversi problemi.

## 9. BIBLIOGRAFIA

1. Johnson, K.L., (1985), *Contact Mechanics*, Cambridge, Cambridge University Press

2. Marmo, F., Rosati, L., (2015), A General Approach to the Solution of Boussinesq's Problem for Polynomial Acting over Polygonal Domains, *Springer Science+Business Media*, Dordrecht, Springer.