

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

## CONFIGURAZIONI DI SANDWICH INNOVATIVE PER L'ASSORBIMENTO DI CARICHI IMPULSIVI

CANDIDATO

FRANCESCO GUGLIELMI

RELATORI

Prof. ENRICO CESTINO  
Prof. GIACOMO FRULLA

Anno Accademico 2020/2021

*Alla mia famiglia e  
a chi ha condiviso  
con me questi anni*

---

# Indice

<b>Sommario</b>	<b>12</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>14</b>
<b>2 Impatto con l'acqua di una piastra piatta</b>	<b>17</b>
2.1 Impatto di un flat-bottom rigido . . . . .	18
2.2 Impatto di un flat-bottom elastico . . . . .	19
2.3 Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua . . . . .	21
2.3.1 Soluzione del modello matematico con il Metodo di Galerkin .	22
2.3.2 Confronto con modello FEM . . . . .	33
2.3.3 Confronto con modello FEM 2D . . . . .	39
2.3.4 Effetto dello smorzamento . . . . .	42
<b>3 Confronto dei risultati ottenuti numericamente con quelli ottenuti dal software LS-DYNA e altre formulazioni</b>	<b>45</b>
3.1 Il software LS-DYNA . . . . .	45
3.2 Simulazione con il software LS-DYNA . . . . .	46
3.3 Formulazione "Cestino-Frulla" . . . . .	48
3.4 Confronto dei risultati . . . . .	49
<b>4 Travi su fondazione elastica</b>	<b>51</b>
4.1 Trave su Winkler Foundation . . . . .	51
4.2 Risultati della trave su fondazione di Winkler . . . . .	53
4.2.1 Soluzione Analitica . . . . .	54
4.2.2 Soluzione FEM . . . . .	57
4.2.3 Variazione dei risultati al variare del modulo della fondazione k	59
4.3 Trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale . .	61
4.3.1 Soluzione Analitica . . . . .	61
4.3.2 Soluzione FEM . . . . .	64
4.3.3 Variazione dei risultati al variare del carico assiale N . . . . .	66
4.4 Confronto tra le travi su fondazione elastica con e senza carico assiale	68

<b>5</b>	<b>Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua</b>	<b>70</b>
5.1	Piastra su fondazione elastica che impatta con l'acqua . . . . .	70
5.1.1	Soluzione numerica del modello matematico . . . . .	71
5.1.2	Confronto con modello FEM . . . . .	77
5.2	Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua . . . . .	83
5.2.1	Soluzione numerica del modello matematico . . . . .	83
5.2.2	Confronto con modello FEM . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Pannello Sandwich in configurazione innovativa che impatta con l'acqua</b>	<b>95</b>
6.1	Pannello sandwich convenzionale . . . . .	95
6.2	Pannello sandwich innovativo . . . . .	100
	<b>Conclusioni</b>	<b>104</b>
<b>A</b>	<b>Risoluzione dell'equazione dinamica di una trave con il metodo di Galerkin</b>	<b>105</b>
A.1	Soluzione generale . . . . .	105
A.1.1	Soluzione per la trave semplicemente appoggiata . . . . .	106
A.2	Metodo di Galerkin . . . . .	108
	<b>Bibliografia</b>	<b>109</b>

---

## Elenco delle figure

1.1	Esempio di un'imbarcazione in planata . . . . .	14
1.2	Atterraggio del Savoia-Marchetti S-55 . . . . .	15
1.3	Ammaraggio del volo US Airways 1549 nel fiume Hudson . . . . .	16
2.1	Risultati sperimentali della pressione massima dovuta all'impatto di un flat-bottom rigido ottenuti da Chuang [4] . . . . .	18
2.2	Pressione di impatto in funzione del tempo con velocità di impatto di 1.9 m/s e T di 0.0039 s . . . . .	20
2.3	Modello di piastra usata durante le analisi . . . . .	21
2.4	Schematizzazione della trave usata durante le analisi [1] . . . . .	22
2.5	Spostamento in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	24
2.6	Velocità in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	24
2.7	Accelerazione in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	25
2.8	Pressione di iterazione in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	25
2.9	Pressione totale in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	26
2.10	Spostamento in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	26
2.11	Velocità in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	27
2.12	Accelerazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	27
2.13	Pressione di iterazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	28
2.14	Pressione totale in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	28
2.15	Spostamento in mezzeria al variare della velocità di impatto per la Piastra 1 e la Piastra 2 . . . . .	29
2.16	Spostamento in mezzeria al variare della velocità di impatto per la Piastra 3 e la Piastra 4 . . . . .	29

## ELENCO DELLE FIGURE

---

2.17	Pressione totale massima in mezzeria al variare della velocità di impatto per la Piastra 1 e la Piastra 2 . . . . .	30
2.18	Pressione totale massima in mezzeria al variare della velocità di impatto per la Piastra 3 e la Piastra 4 . . . . .	30
2.19	Confronto tra la pressione totale massima in mezzeria e la pressione rigida massima al variare della velocità di impatto per la piastra 1 . .	31
2.20	Confronto tra la pressione totale massima in mezzeria e la pressione rigida massima al variare della velocità di impatto per la piastra 2 . .	31
2.21	Confronto tra la pressione totale massima in mezzeria e la pressione rigida massima al variare della velocità di impatto per la piastra 3 . .	32
2.22	Confronto tra la pressione totale massima in mezzeria e la pressione rigida massima al variare della velocità di impatto per la piastra 4 . .	32
2.23	Modellizzazione della Piastra 1 sul software Patran . . . . .	33
2.24	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dello spostamento in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . .	34
2.25	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della velocità in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	34
2.26	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dell'accelerazione in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . .	35
2.27	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione d'iterazione in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	35
2.28	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione totale in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s .	36
2.29	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dello spostamento in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . .	36
2.30	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della velocità in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	37
2.31	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dell'accelerazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . .	37
2.32	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione d'iterazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	38
2.33	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione totale in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s .	38
2.34	Modellizzazione 2D della "Piastra 3" sul software PATRAN . . . . .	39
2.35	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM 2D dello spostamento in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	40
2.36	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM 2D della velocità in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	40

## ELENCO DELLE FIGURE

---

2.37	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM 2D dell'accelerazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	41
2.38	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM 2D della pressione di iterazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	41
2.39	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM 2D della pressione totale in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	42
2.40	Spostamento in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s al variare di $\zeta$ . . . . .	43
2.41	Accelerazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s al variare di $\zeta$ . . . . .	44
2.42	Pressione totale in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s al variare di $\zeta$ . . . . .	44
3.1	Modellizzazione della "Piastra 3" sul software LS-DYNA . . . . .	46
3.2	Modellizzazione dello strato d'aria e dell'acqua sul software LS-DYNA . . . . .	47
3.3	Distribuzione della pressione totale ottenuta dalle simulazioni LS-DYNA per la "Piastra 3" e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	47
3.4	Pressione massima in mezzeria in funzione del tempo ottenuta dalle simulazioni LS-DYNA per la "Piastra 3" e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	47
3.5	Distribuzione della pressione totale ottenuta dalle simulazioni LS-DYNA per la "Piastra 3" e con velocità di impatto di 3 m/s . . . . .	48
3.6	Pressione massima in mezzeria in funzione del tempo ottenuta dalle simulazioni LS-DYNA per la "Piastra 3" e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	48
3.7	Confronto della pressione massima totale ottenuta dalla soluzione numerica del modello matematico, dalle simulazione LS-DYNA e dalla formulazione "Cestino-Frulla" . . . . .	49
3.8	Distribuzione di pressione sulla piastra 3 ottenuta dal software LS-DYNA . . . . .	50
4.1	Fondazione di Winkler sottoposta ad un carico di pressione uniforme [2] . . . . .	51
4.2	Trave su fondazione di Winkler [2] . . . . .	52
4.3	Reazione della fondazione di Winkler [2] . . . . .	52
4.4	Forze che agiscono sul concio elementare [2] . . . . .	52
4.5	Trave su fondazione elastica soggetta a carico distribuito [8] . . . . .	53
4.6	Sezione rettangolare della trave . . . . .	54
4.7	Spostamento verticale ottenuto dalla soluzione analitica per la trave su fondazione di Winkler . . . . .	55

## ELENCO DELLE FIGURE

---

4.8	Rotazione ottenuta dalla soluzione analitica per la trave su fondazione di Winkler . . . . .	55
4.9	Diagramma di Taglio ottenuto dalla soluzione analitica per la trave su fondazione di Winkler . . . . .	56
4.10	Diagramma di Momento ottenuto dalla soluzione analitica per la trave su fondazione di Winkler . . . . .	56
4.11	Confronto dello spostamento verticale ottenuto dalla soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione di Winkler . . . . .	57
4.12	Confronto della rotazione ottenuta dalla soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione di Winkler . . . . .	58
4.13	Confronto del diagramma di Taglio ottenuto dalla soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione di Winkler . . . . .	58
4.14	Confronto del diagramma di Momento ottenuto dalla soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione di Winkler . . . . .	59
4.15	Spostamento per la trave su fondazione di Winkler al variare di $k$ . . . . .	59
4.16	Rotazione per la trave su fondazione di Winkler al variare di $k$ . . . . .	60
4.17	Diagramma di Taglio per la trave su fondazione di Winkler al variare di $k$ . . . . .	60
4.18	Diagramma di Momento per la trave su fondazione di Winkler al variare di $k$ . . . . .	61
4.19	Trave su fondazione elastica con la presenza di un carico assiale [8] . . . . .	61
4.20	Spostamento verticale per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale . . . . .	62
4.21	Rotazione per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale . . . . .	62
4.22	Diagramma di Taglio per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale . . . . .	63
4.23	Diagramma di Momento per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale . . . . .	63
4.24	Confronto dello Spostamento verticale ottenuto per soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale . . . . .	64
4.25	Confronto della Rotazione ottenuta per soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale . . . . .	64
4.26	Confronto del Diagramma di Taglio ottenuto per soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale . . . . .	65
4.27	Confronto del Diagramma di Momento ottenuto per soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale . . . . .	65

## ELENCO DELLE FIGURE

---

4.28	Spostamento al variare del carico assiale per una trave su fondazione elastica . . . . .	66
4.29	Rotazione al variare del carico assiale per una trave su fondazione elastica . . . . .	66
4.30	Diagramma di taglio al variare del carico assiale per una trave su fondazione elastica . . . . .	67
4.31	Diagramma di momento al variare del carico assiale per una trave su fondazione elastica . . . . .	67
4.32	Confronto dello spostamento tra la trave con carico assiale e quella senza . . . . .	68
4.33	Confronto della rotazione tra la trave con carico assiale e quella senza . . . . .	68
4.34	Confronto del diagramma di taglio tra la trave con carico assiale e quella senza . . . . .	69
4.35	Confronto del diagramma di momento tra la trave con carico assiale e quella senza . . . . .	69
5.1	Spostamento in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica al variare della rigidezza $k$ e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	72
5.2	velocità in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica al variare della rigidezza $k$ e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	72
5.3	Accelerazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica al variare della rigidezza $k$ e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	73
5.4	Pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica al variare della rigidezza $k$ e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	73
5.5	Pressione totale in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica al variare della rigidezza $k$ e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	74
5.6	Spostamento in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica al variare della rigidezza $k$ e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	74
5.7	velocità in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica al variare della rigidezza $k$ e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	75
5.8	Accelerazione in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica al variare della rigidezza $k$ e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	75
5.9	Pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica al variare della rigidezza $k$ e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	76
5.10	Pressione totale in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica al variare della rigidezza $k$ e con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	76
5.11	Modellizzazione della piastra 1 su fondazione elastica sul software Patran . . . . .	77
5.12	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dello spostamento in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 \text{ N/m}^2$ e con velocità di impatto di 1.9 m/s . . . . .	78

## ELENCO DELLE FIGURE

---

5.13	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della velocità in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	78
5.14	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dell'accelerazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	79
5.15	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	79
5.16	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione totale in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	80
5.17	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dello spostamento in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	80
5.18	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della velocità in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	81
5.19	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dell'accelerazione in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	81
5.20	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	82
5.21	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione totale in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	82
5.22	Spostamento in mezzeria per la piastra 1 al variare del carico assiale $N$ , su fondazione elastica con rigidezza $4000000 N/m^2$ e velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	84
5.23	Velocità in mezzeria per la piastra 1 al variare del carico assiale $N$ , su fondazione elastica con rigidezza $4000000 N/m^2$ e velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	84
5.24	Accelerazione in mezzeria per la piastra 1 al variare del carico assiale $N$ , su fondazione elastica con rigidezza $4000000 N/m^2$ e velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	85
5.25	Pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 1 al variare del carico assiale $N$ , su fondazione elastica con rigidezza $4000000 N/m^2$ e velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	85
5.26	Pressione totale in mezzeria per la piastra 1 al variare del carico assiale $N$ , su fondazione elastica con rigidezza $4000000 N/m^2$ e velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	86

5.27	Spostamento in mezzeria per la piastra 3 al variare del carico assiale $N$ , su fondazione elastica con rigidezza $4000000 N/m^2$ e velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	86
5.28	Velocità in mezzeria per la piastra 3 al variare del carico assiale $N$ , su fondazione elastica con rigidezza $4000000 N/m^2$ e velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	87
5.29	Accelerazione in mezzeria per la piastra 3 al variare del carico assiale $N$ , su fondazione elastica con rigidezza $4000000 N/m^2$ e velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	87
5.30	Pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 3 al variare del carico assiale $N$ , su fondazione elastica con rigidezza $4000000 N/m^2$ e velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	88
5.31	Pressione totale in mezzeria per la piastra 3 al variare del carico assiale $N$ , su fondazione elastica con rigidezza $4000000 N/m^2$ e velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	88
5.32	Modellizzazione della Piastra 3, su fondazione elastica e soggetta a carico assiale, sul software Patran . . . . .	89
5.33	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dello spostamento in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ , sottoposta a carico assiale $N = 150000 N$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	90
5.34	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della velocità in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ , sottoposta a carico assiale $N = 150000 N$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	90
5.35	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dell'accelerazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ , sottoposta a carico assiale $N = 150000 N$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	91
5.36	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ , sottoposta a carico assiale $N = 150000 N$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	91
5.37	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione totale in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ , sottoposta a carico assiale $N = 150000 N$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	92
5.38	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dello spostamento in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ , sottoposta a carico assiale $N = 150000 N$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	92

## ELENCO DELLE FIGURE

---

5.39	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della velocità in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ , sottoposta a carico assiale $N = 150000 N$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	93
5.40	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dell'accelerazione in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ , sottoposta a carico assiale $N = 150000 N$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	93
5.41	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ , sottoposta a carico assiale $N = 150000 N$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	94
5.42	Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione totale in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di $4000000 N/m^2$ , sottoposta a carico assiale $N = 150000 N$ e con velocità di impatto di $1.9 m/s$ . . . . .	94
6.1	Schematizzazione del pannello sandwich preso in esame . . . . .	96
6.2	Modellizzazione 2D del pannello sandwich convenzionale sul software PATRAN . . . . .	97
6.3	Modellizzazione 3D del pannello sandwich convenzionale sul software PATRAN . . . . .	97
6.4	Confronto dello spostamento in mezzeria tra il modello 2D e il modello 3D del pannello sandwich convenzionale ottenuto dall'analisi FEM con il software PATRAN con una velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	98
6.5	Confronto dell'accelerazione in mezzeria tra il modello 2D e il modello 3D del pannello sandwich convenzionale ottenuta dall'analisi FEM con il software PATRAN con una velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	98
6.6	Confronto della pressione di iterazione in mezzeria tra il modello 2D e il modello 3D del pannello sandwich convenzionale ottenuta dall'analisi FEM con il software PATRAN con una velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	99
6.7	Confronto della pressione totale in mezzeria tra il modello 2D e il modello 3D del pannello sandwich convenzionale ottenuta dall'analisi FEM con il software PATRAN con una velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	99
6.8	Schematizzazione della configurazione innovativa del pannello sandwich	100
6.9	Modellizzazione 2D del sandwich in configurazione innovativa sul software PATRAN . . . . .	101
6.10	Spostamento in mezzeria al variare dell'altezza del core ottenuto dall'analisi FEM con velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	101
6.11	Accelerazione in mezzeria al variare dell'altezza del core ottenuta dall'analisi FEM con velocità di impatto di $1.5 m/s$ . . . . .	102

## ELENCO DELLE FIGURE

---

6.12	Pressione di iterazione in mezzeria al variare dell'altezza del core ottenuta dall'analisi FEM con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	102
6.13	pressione totale in mezzeria al variare dell'altezza del core ottenuta dall'analisi FEM con velocità di impatto di 1.5 m/s . . . . .	103
6.14	Variazione della pressione totale massima del sandwich in configura- zione innovativa al variare dell'altezza del core . . . . .	103
A.1	Schematizzazione di una trave semplicemente appoggiata [6] . . . . .	106

---

## Elenco delle tabelle

2.1	Dimensioni e proprietà delle quattro piastre analizzate . . . . .	21
5.1	Dimensioni e proprietà della piastra 1 e della piastra 3 . . . . .	71
6.1	Caratteristiche geometriche e fisiche del pannello sandwich convenzionale analizzato . . . . .	95

---

# Sommario

Lo scopo della seguente tesi è stato quello di realizzare delle strutture non convenzionali al fine di ottimizzare l'assorbimento di carichi impulsivi. Il primo step per arrivare alla configurazione finale è stato quello di costruire dei modelli matematici e dei modelli FEM per simulare l'impatto di piastre piatte con l'acqua e verificare che, a seguito dell'impatto con l'acqua, il carico assorbito da una struttura flessibile è minore rispetto alla medesima se considerata rigida. Dopo aver validato i modelli con delle simulazioni effettuate con il software LS DYNA, le piastre sono state testate aggiungendo delle patch di materiale a rigidità variabile e un carico assiale al fine di verificare l'effetto della flessibilità sul carico assorbito. Per concludere sono state effettuate delle analisi FEM sulla configurazione finale, ossia un pannello sandwich con delle patch innovative incluse tra gli skin in maniera tale da aumentare la flessibilità e ridurre il carico assorbito.

---

# Capitolo 1

## Introduzione

In molte applicazioni navali e aeronautiche le strutture sono soggette a carichi impulsivi i quali giocano un ruolo fondamentale nella loro progettazione.

Tra i carichi impulsivi di maggiore importanza troviamo quello dovuto all'impatto con l'acqua, il quale è molto importante nella progettazione strutturale di navi, barche e idrovolanti.

Per quanto riguarda il settore navale, un esempio concreto è quello delle barche di tipo "planning"[7]. A basse velocità questo tipo barche agisce come uno "scafo dislocante", ossia che la forza di galleggiamento è la principale forza di sostegno per il supporto dell'imbarcazione. A velocità elevate viene invece generata una forza di sollevamento che mantiene il suo peso attraverso la pressione idrodinamica dell'acqua. Per generare una potenza di sollevamento sufficiente bisogna avere velocità elevate rispetto alle dimensioni dell'imbarcazione e configurazione dello scafo adeguate. Durante la planata lo scafo ha un angolo di assetto di qualche grado sulla prua, il quale favorisce la nascita di un'elevata pressione sul fondo di questo e solleva la barca, in questo modo si riduce la superficie di contatto con l'acqua e di conseguenza la resistenza generata da questa.



Figura 1.1: *Esempio di un'imbarcazione in planata*

---

Le strutture plananti sono utilizzate soprattutto per le imbarcazioni da diporto, come moto d'acqua o yacht da pesca, ma hanno anche applicazioni per quanto riguarda l'approvvigionamento per l'industria petrolifera, dato che molte piattaforme petrolifere si trovano al largo delle coste, e per scopi militari.

In tutte queste applicazioni, tranne per le imbarcazioni da diporto dove la legge impone dei limiti di velocità, l'aumento di velocità è di fondamentale importanza, soprattutto per l'approvvigionamento dell'industria petrolifera, dove un rifornimento veloce via mare porterebbe limitare l'uso degli elicotteri e ridurre notevolmente i costi. L'aumento di velocità però, oltre ai limiti tecnologici presenta soprattutto limiti strutturali, infatti all'aumentare della velocità i carichi di impatto diventano molto elevati ed oltre a creare fastidio per i passeggeri dell'imbarcazione potrebbero portare al danneggiamento della struttura.

Come detto in precedenza, un'altra applicazione in cui l'assorbimento dei carichi generati dall'impatto con l'acqua è importante sono gli idrovolanti, velivoli in grado di decollare e atterrare sull'acqua.



Figura 1.2: *Atterraggio del Savoia-Marchetti S-55*

Per quanto riguarda questa categoria di velivoli, la normativa CS-23 impone dei carichi di pressione a cui la struttura deve resistere durante l'atterraggio.

Per il calcolo della pressione minima sopportabile dalla struttura vengono stabiliti prima dei fattori di carico specificati nella CS 23.527, dati dal rapporto della reazione dell'acqua e del peso del velivolo, e una pressione sulla chiglia specificata nella CS 23.537.

La pressione di chiglia definita dalla normativa è la seguente:

$$P_k = \frac{C_2 K_2 V_{s1}^2}{\tan \beta_k} \quad (1.1)$$

---

Dove:

- $C_2 = 0.00213$ ;
- $K_2 =$  coefficiente che dipende dal peso dello scafo;
- $V_{s1} =$  velocità di stallo dell'idrovolante;
- $\beta_k =$  angolo di dead rise alla chiglia.

In condizioni di elevate velocità di impatto, di mare mosso e per angoli di dead rise molto bassi, le pressioni che agiscono sulla struttura sono molto elevate, a tal proposito in fase di progettazione si stanno studiando delle configurazioni tali da ridurre questi carichi.

Un altro esempio in campo aeronautico è quello dell'ammarraggio delle fusoliere in caso di emergenza. Statisticamente la maggior parte degli ammaraggi vanno a buon fine, ma in situazioni di elevata emergenza, dove non si ha più il controllo del velivolo, e in situazioni di forte vento e con mare mosso, le velocità di impatto potrebbero essere così elevate da causare danni ai passeggeri e addirittura alla struttura. Inoltre, tutti i velivoli devono essere certificati all'ammarraggio secondo la normativa CS 25.801.



Figura 1.3: Ammaraggio del volo US Airways 1549 nel fiume Hudson

Da tutte le considerazioni precedenti si evince l'importanza di sviluppare nuove tecnologie al fine di ridurre i carichi impulsivi assorbiti dalla struttura, e lo scopo di questa tesi è proprio quello di andare a sviluppare una struttura non convenzionale che, sfruttando un'elevata flessibilità, vada ad ottimizzare l'assorbimento di questi carichi.

---

## Capitolo 2

# Impatto con l'acqua di una piastra piatta

Nel seguente capitolo viene ricavato un modello matematico usato per simulare l'impatto con l'acqua, in varie condizioni di velocità di impatto, di quattro piastre con pesi e dimensioni diversi. Inoltre, i risultati ottenuti dalla risoluzione di questo modello saranno poi confrontati con quelli ottenuti da analisi FEM effettuate con i software PATRAN e NASTRAN.

Per un corpo con angolo di dead rise diverso da zero, la pressione massima che si genera all'impatto con l'acqua è espressa dalla seguente formula ricavata da Von Karman [10]:

$$P_{max} = \frac{1}{2}\rho V_0^2 \pi \frac{1}{\tan(\beta)} \quad (2.1)$$

Dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $V_0$  è la velocità di impatto con l'acqua e  $\beta$  è l'angolo di dead rise nullo.

La seguente formula fornisce risultati soddisfacenti se confrontata con le prove sperimentali, ma non può essere usata per l'impatto di corpi a fondo piatto, perché in caso di angolo di dead rise nullo darebbe risultato pari ad infinito.

Nel caso di fluido compressibile, assenza di aria intrappolata tra l'acqua e il corpo, e angolo di dead rise nullo (corpo a fondo piatto), Von Karman esprime la pressione massima generata dall'impatto come segue:

$$P_{max} = \rho c V_0 \quad (2.2)$$

Dove  $c$  è la velocità del suono nel fluido.

Questa relazione non da risultati soddisfacenti confrontata con le prove sperimentali, questo perché non tiene conto della presenza di aria tra il corpo e il fluido e anche perché non tiene conto dell'elasticità della piastra. Infatti le deformazioni che subisce la piastra durante l'impatto, fanno nascere una pressione contraria a quella generata durante l'impatto che va a diminuire la pressione totale assorbita.

## 2.1 Impatto di un flat-bottom rigido

Nel 1970 Chuang [4] ha effettuato delle prove sperimentali di impatto con acqua di una piastra con due lati appoggiati e due lati liberi. La piastra presa in esame era realizzata in Acciaio HY-80, quindi con modulo elastico  $E = 207GPa$  e densità di  $7746Kg/m^3$ , mentre le dimensioni erano le seguenti:

$a = 0.508 m$  "lunghezza lato libero";

$b = 0.673 m$  "lunghezza lato vincolato";

$h = 0.0127 m$  "spessore della piastra";

Durante la prova è stata scelta una piastra con uno spessore abbastanza elevato in maniera tale da avere deformazioni molto piccole e considerare il corpo come rigido. Dalle prove sperimentali si ricava che la pressione massima per un flat-bottom rigido è data dalla seguente relazione:

$$P_{max} = 0.68V_0^2 \quad (2.3)$$

Con  $V_0$  espressa in  $\frac{ft}{s}$  e  $P_{max}$  in  $\frac{lbf}{in^2}$ .

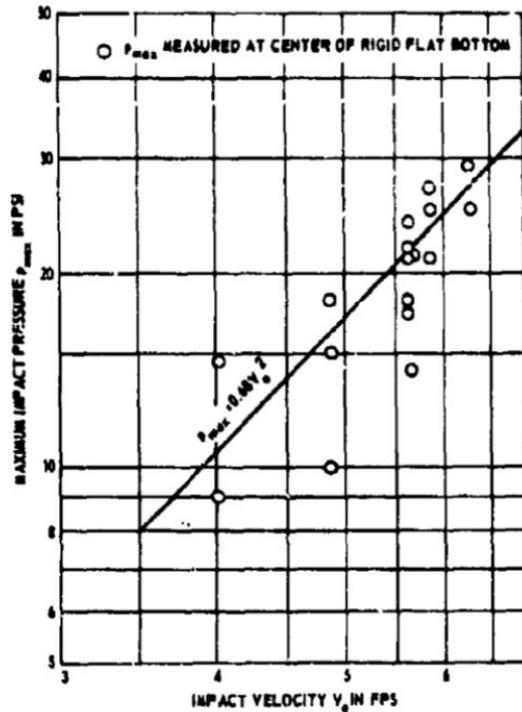


Figura 2.1: Risultati sperimentali della pressione massima dovuta all'impatto di un flat-bottom rigido ottenuti da Chuang [4]

La pressione massima calcolata durante la prova sperimentale è minore rispetto a quella data dalla relazione (2.2), questo perché nella realtà, tra il flat-bottom e

l'acqua, è presente dell'aria che deforma l'acqua prima dell'impatto e causa una riduzione della pressione massima.

Dalle prove sperimentali si evince anche che durante l'impatto il primo impulso avviene quando l'aria è intrappolata tra il corpo e l'acqua. Inoltre, la pressione calcolata all'estremità della piastra non è molto diversa da quella calcolata al centro, questo perché l'aria intrappolata fa sì che il carico di impatto sia distribuito in maniera uniforme su tutta la piastra.

## 2.2 Impatto di un flat-bottom elastico

In [4] Chuang ricava un modello matematico che tiene conto della flessibilità della piastra.

Considerando un flat-bottom elastico, abbiamo che la pressione totale  $p_t$  che si ha su questo durante l'impatto con l'acqua può essere suddivisa in due tipi di pressione:

$$p_t = p_r - p_i \quad (2.4)$$

Dove  $p_r$  è la pressione rigida, ossia la pressione d'impatto che si avrebbe nel caso in cui il flat bottom fosse rigido, e  $p_i$  è la pressione di iterazione, ossia la pressione causata dall'iterazione tra le vibrazione della superficie del corpo deformabile e il fluido che gli sta intorno, con o senza aria.

La pressione di iterazione può essere scritta come segue:

$$p_i = m_{zz}\ddot{w} + c_{zz}\dot{w} + k_{zz}w \quad (2.5)$$

Dove  $c_{zz}$  e  $k_{zz}$  sono rispettivamente la costante di smorzamento e la costante elastica del fluido, e  $m_{zz}$  è l'added mass, ossia la massa di fluido che il corpo sposta durante l'impatto.

L'equazione del moto di una piastra soggetta ad un carico dinamico è la seguente:

$$m_s\ddot{w} + c_p\dot{w} + D\nabla^4 w = p_t \quad (2.6)$$

Dove  $D$  è la rigidezza flessionale della piastra e  $m_s$  e  $c_p$  sono rispettivamente la massa per unità di superficie, e la costante di smorzamento della struttura.

Combinando le equazioni (2.4), (2.5) e (2.6), trascurando  $k_{zz}$  perché molto piccolo e scrivendo  $c_v = c_p + c_{zz}$ , otteniamo il modello matematico di nostro interesse:

$$(m_s + m_{zz})\ddot{w} + c_v\dot{w} + D\nabla^4 w = p_r(t) \quad (2.7)$$

Dai risultati sperimentali si ricava che la pressione di impatto è data dalla seguente relazione:

$$p_r(t) = 2P_{max}e^{-1.4\frac{t}{T}} \sin\left(\pi\frac{t}{T}\right) \quad (2.8)$$

## 2. Impatto di un flat-bottom elastico

---

Dove  $P_{max}$  è data dalla (2.3) e  $T$  è la durata del primo impulso positivo della pressione di impatto, dato dalla seguente relazione:

$$T = \frac{4L}{c_{air}} \quad (2.9)$$

Dove  $L$  è metà della larghezza della trave.

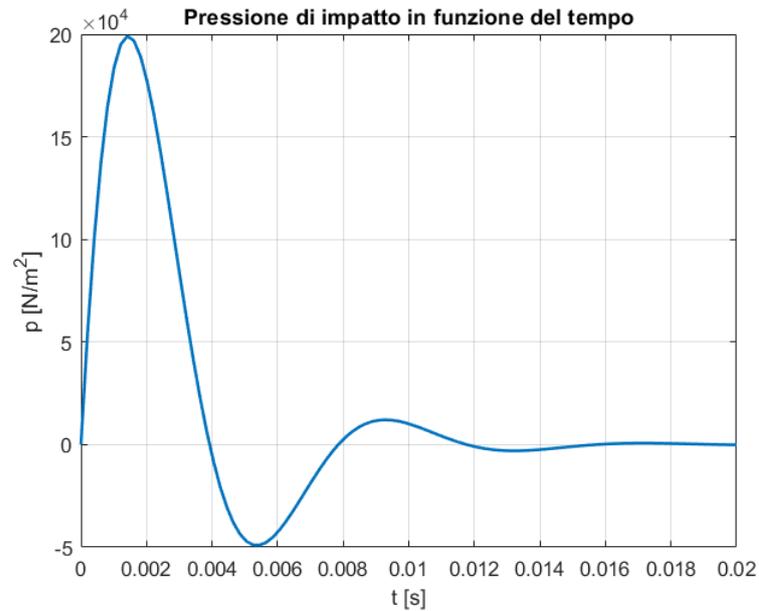


Figura 2.2: Pressione di impatto in funzione del tempo con velocità di impatto di 1.9 m/s e  $T$  di 0.0039 s

## 2.3 Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

In questa sezione verranno illustrati i risultati ottenuti dalla soluzione numerica del modello matematico. Questi risultati saranno poi validati attraverso il confronto con dei modelli FEM ottenuti utilizzando i software PATRAN e NASTRAN.

Le piastre analizzate sono le seguenti:

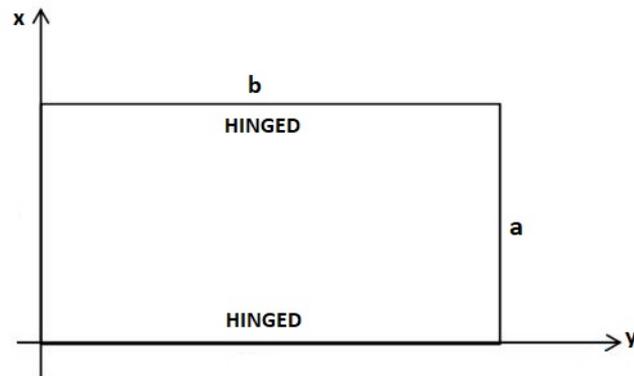


Figura 2.3: Modello di piastra usata durante le analisi

	a [m]	b [m]	h [m]	Peso [Kg]	E [GPa]	$\nu$
Piastra 1	0.40005	0.66675	0.00635	13.11	207	0.3
Piastra 2	0.40005	0.66675	0.00635	37	207	0.3
Piastra 3	0.508	0.673	0.00635	16.31	207	0.3
Piastra 4	0.508	0.673	0.00635	37	207	0.3

Tabella 2.1: Dimensioni e proprietà delle quattro piastre analizzate

Tutte le piastre sono di acciaio HY-80, materiale con una densità di  $7746 \text{Kg}/\text{m}^3$ , ciononostante la piastra 2 e la piastra 4 presentano una massa aggiuntiva per tener conto della presenza di: sensori di pressione, di accelerazione e di guide presenti in un eventuale prova sperimentale.

Dato che durante le analisi si considerano piastre semplicemente appoggiate possiamo considerare l'analogia con la trave, e anziché risolvere numericamente l'equazione dinamica della piastra (2.6), si risolve quella della trave ponendo  $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$ , dove  $E$  è il modulo di Young e  $\nu$  il coefficiente di Poisson del materiale della struttura. Considereremo quindi una trave semplicemente appoggiata di lunghezza  $l = a$ , di sezione rettangolare con larghezza  $b$  e altezza  $h$ , soggetta ad un carico distribuito pari a  $q = p_r b$ . L'equazione considerata, trascurando lo smorzamento, è dunque la seguente:

$$(m_s + m_{zz})\ddot{w}(t) + E^*I \frac{d^4w}{dx^4} = p_r(t)b \quad (2.10)$$

Dove  $I$  è il momento di inerzia della struttura e  $m_s$  e  $m_{zz}$  sono rispettivamente la massa della struttura e l'added mass per unità di lunghezza, espresse dalle relazioni seguenti:

$$m_s = \rho_s b h \quad (2.11)$$

$$m_{zz} = \frac{\pi}{2} \rho_w L^2 \quad (2.12)$$

Con  $\rho$  densità del materiale della struttura e  $\rho_w$  densità dell'acqua.

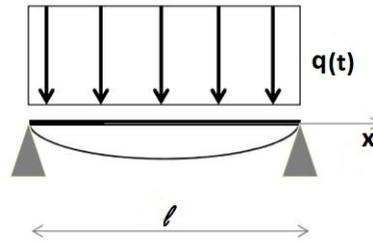


Figura 2.4: Schematizzazione della trave usata durante le analisi [1]

### 2.3.1 Soluzione del modello matematico con il Metodo di Galerkin

L'equazione differenziale (2.10) è stata risolta utilizzando il metodo di Galerkin approfondito nell'Appendice A.

La soluzione della (2.10) può essere scritta come:

$$w(x, t) = Y(t)\phi(x) \quad (2.13)$$

$\phi(x)$  è la funzione di forma. Considerando un solo modo di vibrare e ricordando che stiamo considerando delle travi semplicemente appoggiate la funzione di forma utilizzata è la seguente:

$$\phi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (2.14)$$

Sostituendo la (2.13) e la (2.14) nella (2.10) e applicando il metodo di Galerkin otteniamo:

$$A(m_s + m_{zz})Y''(t) + BEIY(t) = Cp_r(t)b \quad (2.15)$$

Con:

$$A = \int_0^l \phi(x)\phi(x)dx$$

$$B = \int_0^l \phi''''(x)\phi(x)dx$$

$$C = \int_0^l \phi(x)dx$$

Risolvendo la (2.15), imponendo come condizioni iniziali quelle di spostamento e velocità nulli, con la funzione "ode45" di Matlab, si ricavano spostamento, velocità, accelerazione e pressione totale in mezzeria e in funzione del tempo:

- Spostamento:

$$w\left(\frac{l}{2}, t\right) = Y(t)\phi\left(\frac{l}{2}\right)$$

- Velocità:

$$w'\left(\frac{l}{2}, t\right) = Y'(t)\phi\left(\frac{l}{2}\right)$$

- Accelerazione:

$$w''\left(\frac{l}{2}, t\right) = Y''(t)\phi\left(\frac{l}{2}\right)$$

- Pressione di iterazione:

$$P_i\left(\frac{l}{2}, t\right) = \left(w''\left(\frac{l}{2}, t\right) m_{zz}\right) / b$$

- Pressione totale:

$$P_{max}\left(\frac{l}{2}, t\right) = p_r\left(\frac{l}{2}, t\right) - \left(w''\left(\frac{l}{2}, t\right) m_{zz}\right) / b$$

I risultati ottenuti per la "Piastra 1" e la "Piastra 3" con velocità di impatto  $V_0 = 1.9 \text{ m/s}$  sono i seguenti:

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

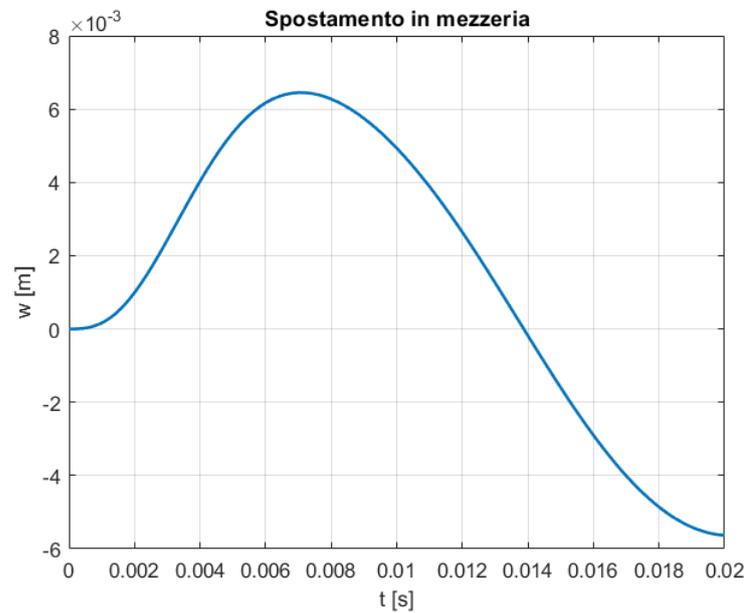


Figura 2.5: *Spostamento in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s*

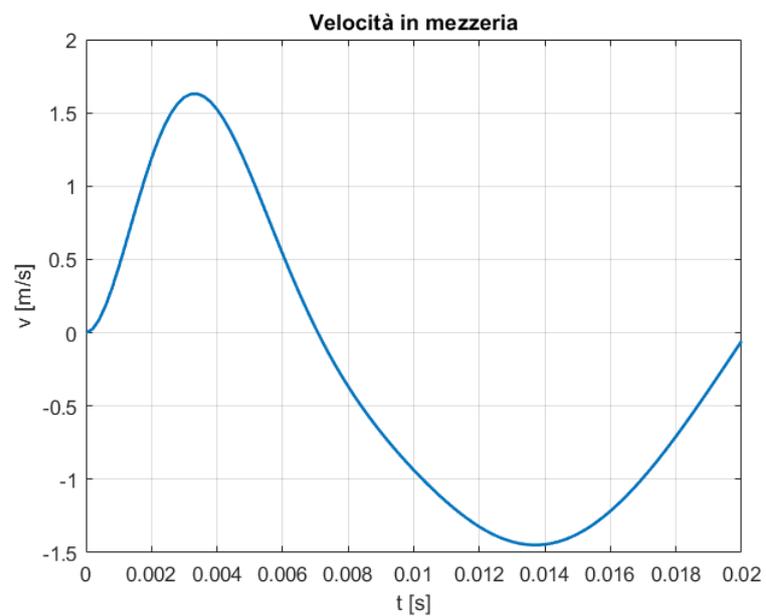


Figura 2.6: *Velocità in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s*

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

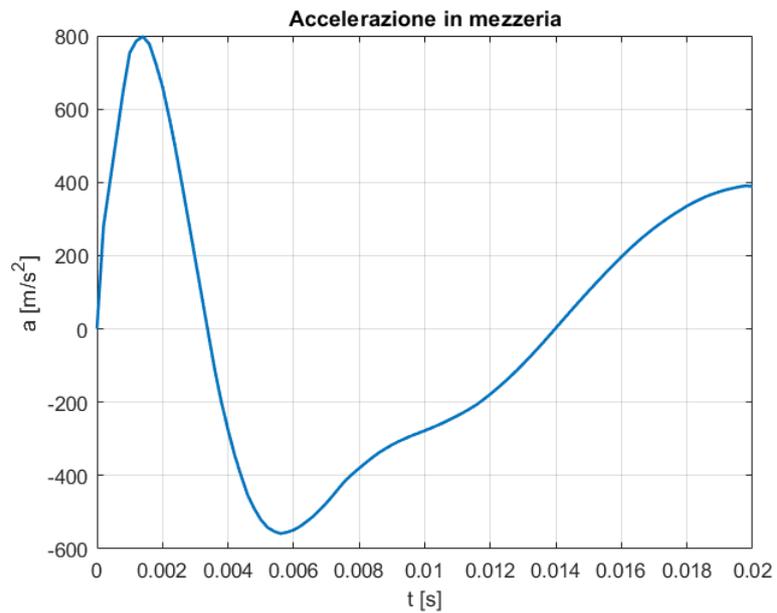


Figura 2.7: Accelerazione in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s

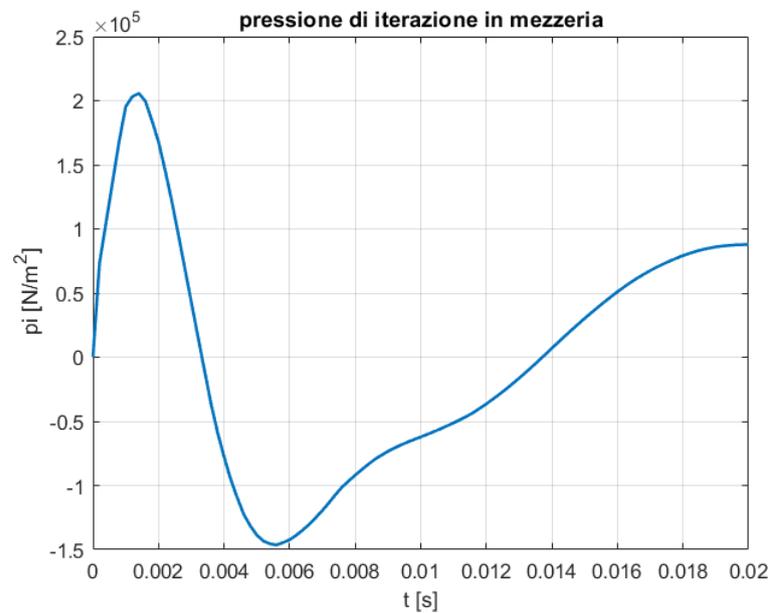


Figura 2.8: Pressione di iterazione in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

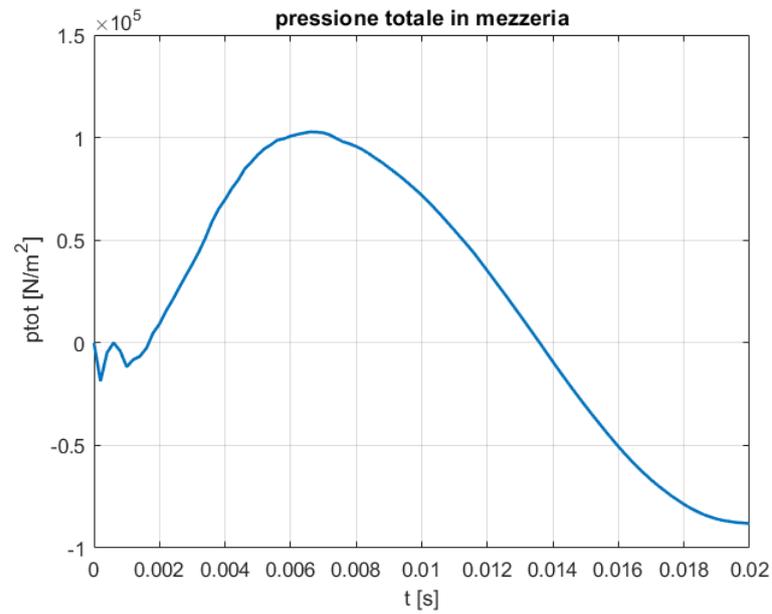


Figura 2.9: Pressione totale in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s

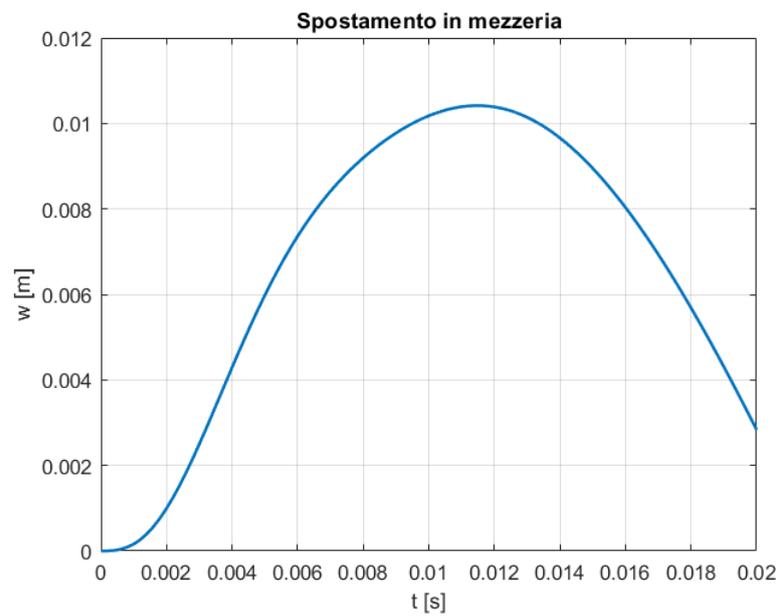


Figura 2.10: Spostamento in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

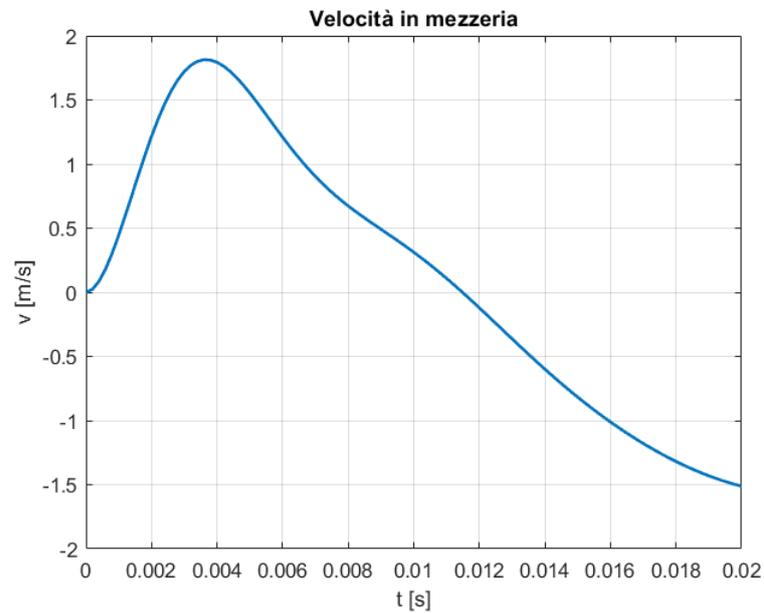


Figura 2.11: *Velocità in mezzera della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s*

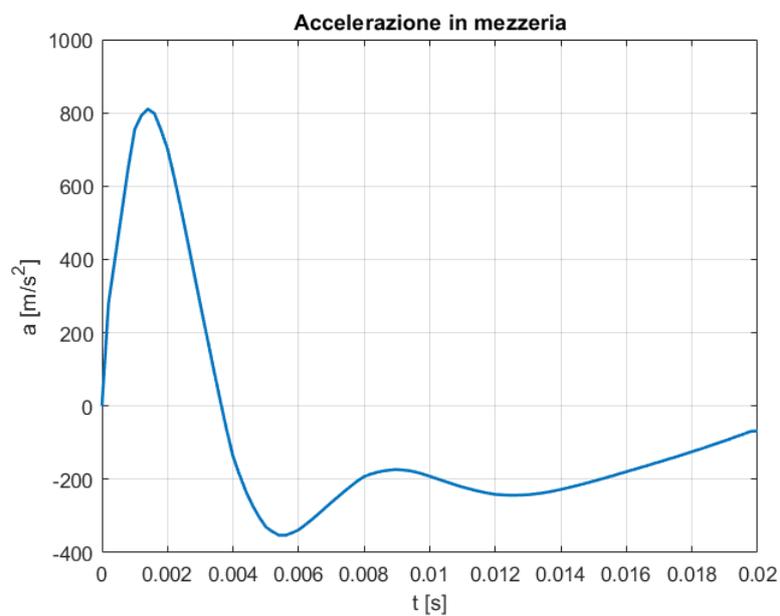


Figura 2.12: *Accelerazione in mezzera della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s*

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

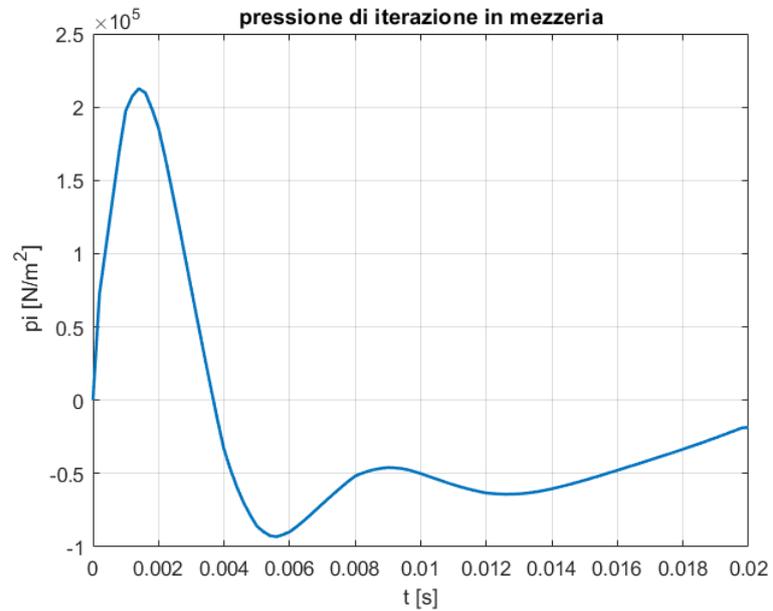


Figura 2.13: Pressione di iterazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

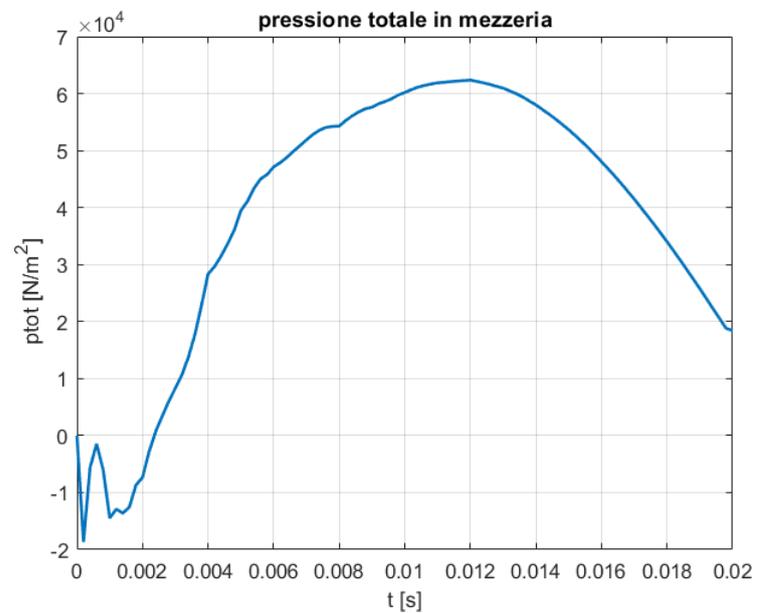


Figura 2.14: Pressione totale in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

Vengono presentati ora lo spostamento massimo in mezzeria e la pressione totale in mezzeria massima per ogni piastra al variare della velocità di impatto  $V_0$ .

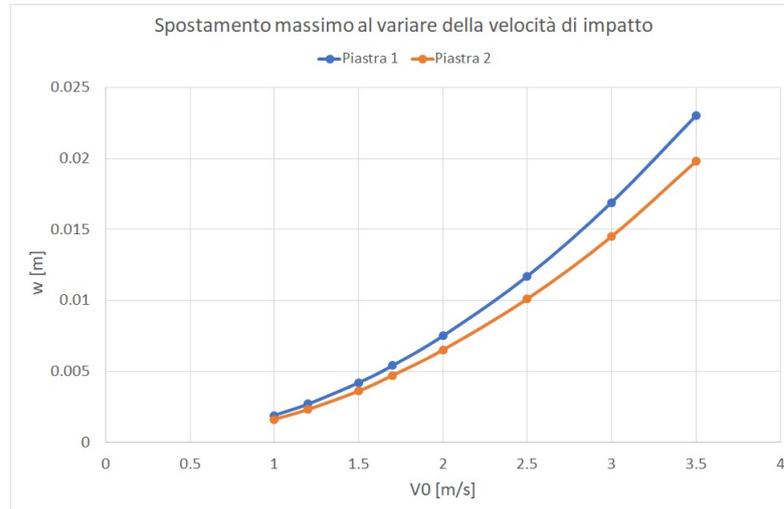


Figura 2.15: *Spostamento in mezzeria al variare della velocità di impatto per la Piastra 1 e la Piastra 2*

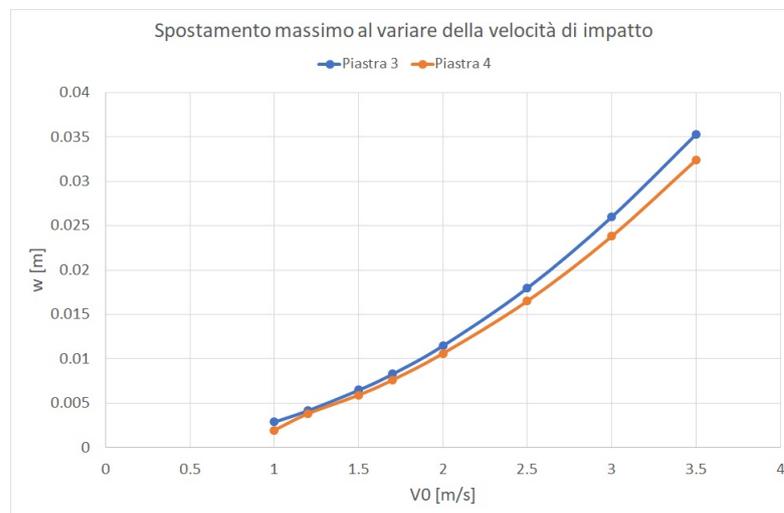


Figura 2.16: *Spostamento in mezzeria al variare della velocità di impatto per la Piastra 3 e la Piastra 4*

Dai due grafici precedenti si nota che le Piastre 2 e 4 hanno spostamenti minori rispetto alle piastre 1 e 3, questo è dovuto alla massa maggiore e quindi ad un termine inerziale maggiore.

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

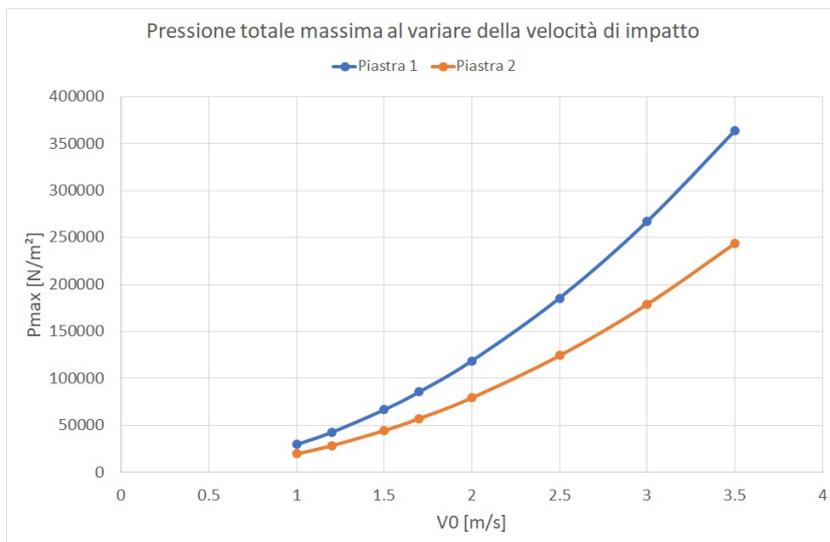


Figura 2.17: *Pressione totale massima in mezzeria al variare della velocità di impatto per la Piastra 1 e la Piastra 2*

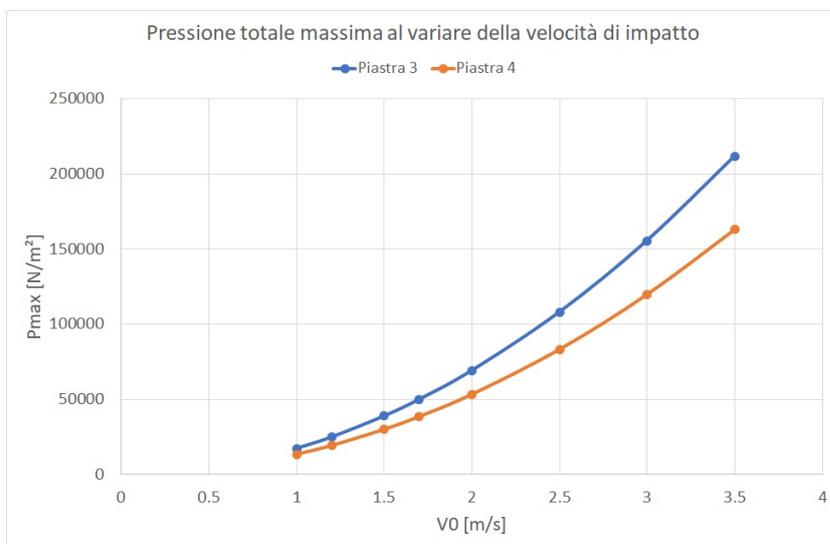


Figura 2.18: *Pressione totale massima in mezzeria al variare della velocità di impatto per la Piastra 3 e la Piastra 4*

Per quanto riguarda la pressione massima notiamo che è più elevata per la Piastra 1 e la Piastra 3 rispetto alle Piastre 2 e 4.

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

Si presenta anche il confronto tra la pressione totale massima in mezzeria e la pressione rigida massima per ogni piastra. Come detto in precedenza la pressione totale per una piastra flessibile è minore rispetto a quella rigida.

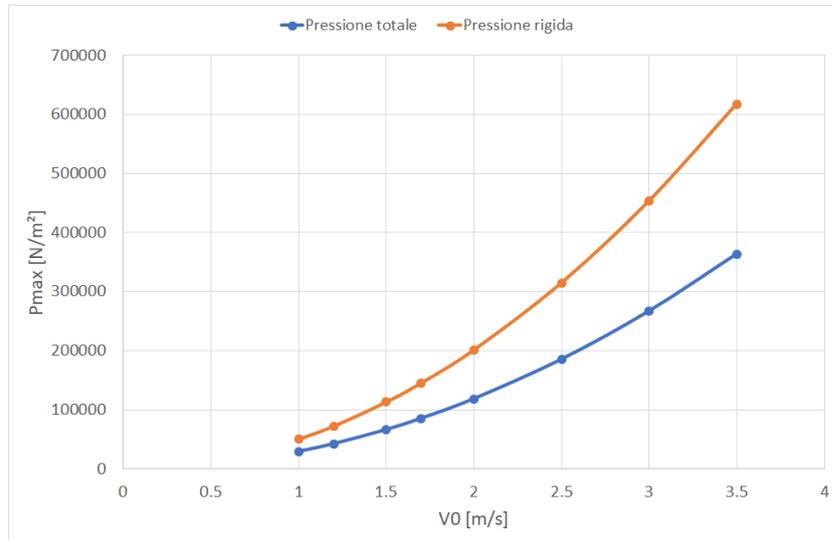


Figura 2.19: Confronto tra la pressione totale massima in mezzeria e la pressione rigida massima al variare della velocità di impatto per la piastra 1

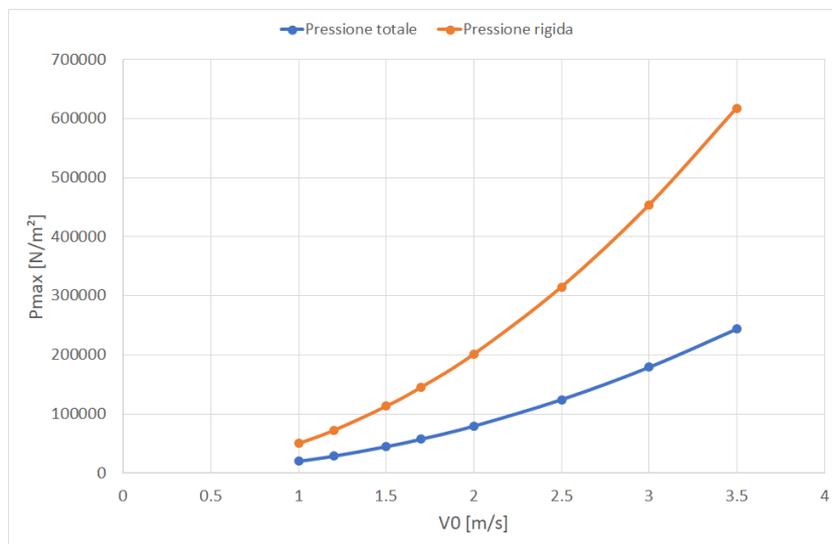


Figura 2.20: Confronto tra la pressione totale massima in mezzeria e la pressione rigida massima al variare della velocità di impatto per la piastra 2

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

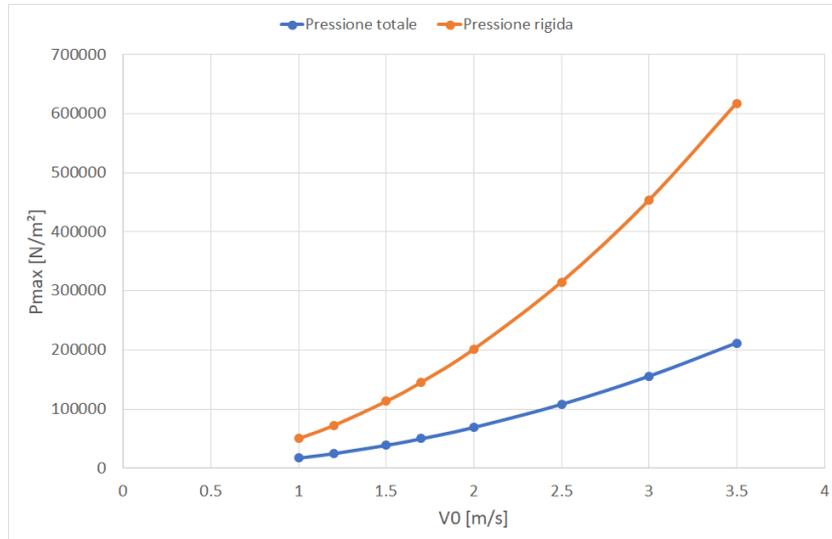


Figura 2.21: Confronto tra la pressione totale massima in mezzeria e la pressione rigida massima al variare della velocità di impatto per la piastra 3

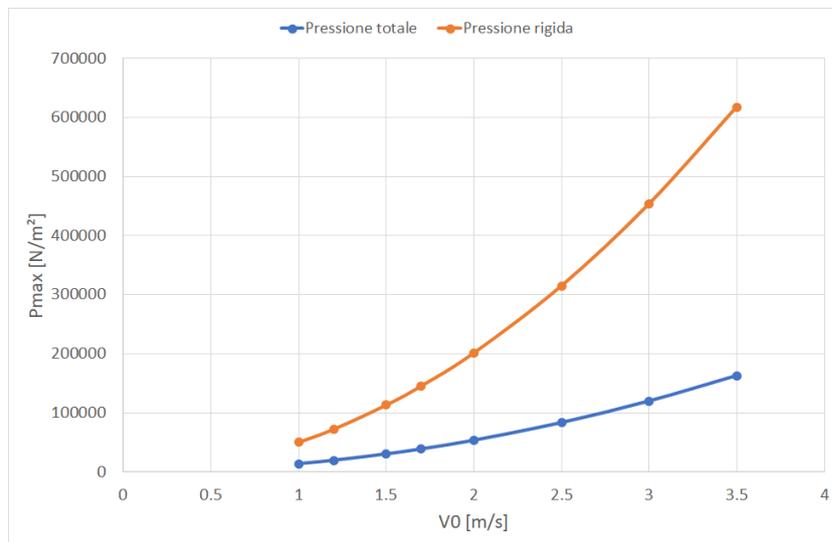


Figura 2.22: Confronto tra la pressione totale massima in mezzeria e la pressione rigida massima al variare della velocità di impatto per la piastra 4

### 2.3.2 Confronto con modello FEM

Per validare la soluzione numerica del modello matematico si sono confrontati i risultati ottenuti con il software MATLAB con quelli ottenuti utilizzando un modello FEM risolto con i software PATRAN e NASTRAN.

Come per il modello numerico anche in quello FEM si è modellizzata la piastra come una trave:

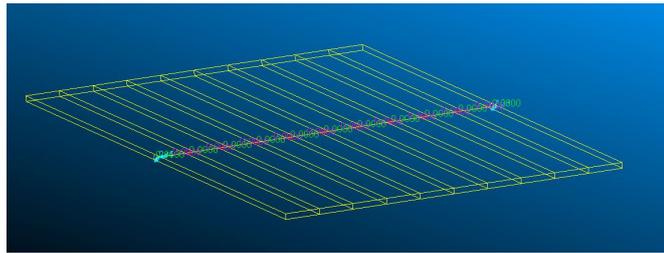


Figura 2.23: Modellizzazione della Piastra 1 sul software Patran

Le proprietà assegnate alle piastre sul software Patran tengono conto della correzione del modulo di Young e della presenza della massa aggiuntiva dovuta all'added mass:

$$E_{patran} = E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}$$
$$\rho_{patran} = (m_s + m_{zz})/A$$

Dove  $E$  è il modulo di Young del materiale,  $m_s$  e  $m_{zz}$  sono la massa della struttura e l'added mass per unità di lunghezza e  $A$  è l'area della sezione della trave.

I risultati ottenuti dal modello FEM, come si può vedere dalle figure successive, sono molto simili a quelli ottenuti dalla soluzione numerica, a meno di oscillazioni dovute al fatto che nella soluzione numerica con Matlab si è considerato un solo modo di vibrare.

I risultati ottenuti per la "Piastra 1" e la "Piastra 3" con velocità di impatto  $V_0 = 1.9 \text{ m/s}$  sono i seguenti:

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

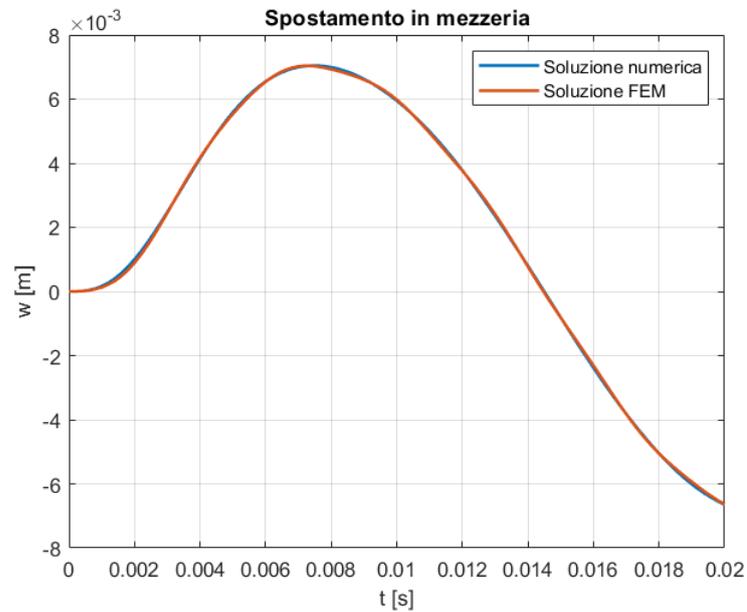


Figura 2.24: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dello spostamento in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s

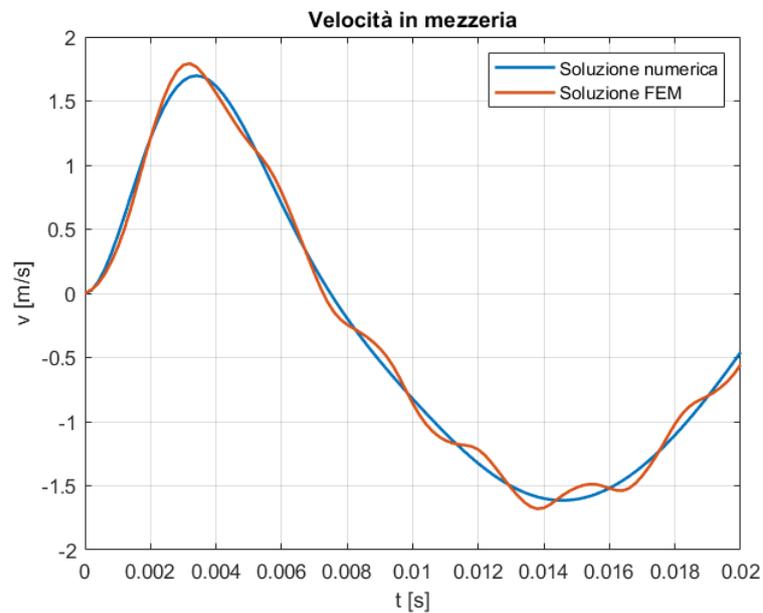


Figura 2.25: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della velocità in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

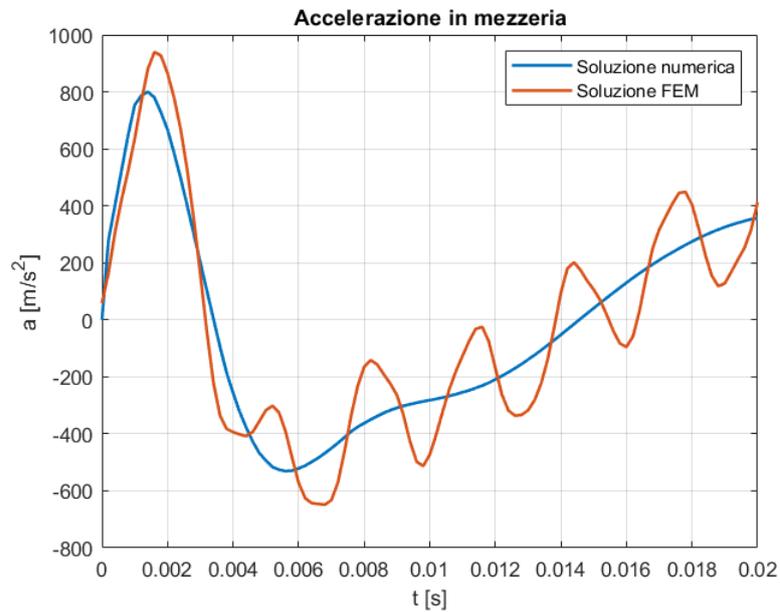


Figura 2.26: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dell'accelerazione in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s

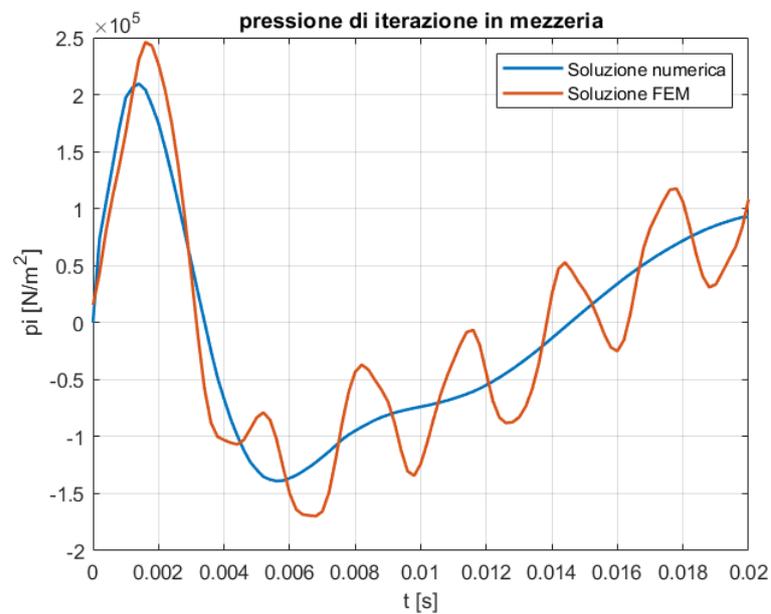


Figura 2.27: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione d'iterazione in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

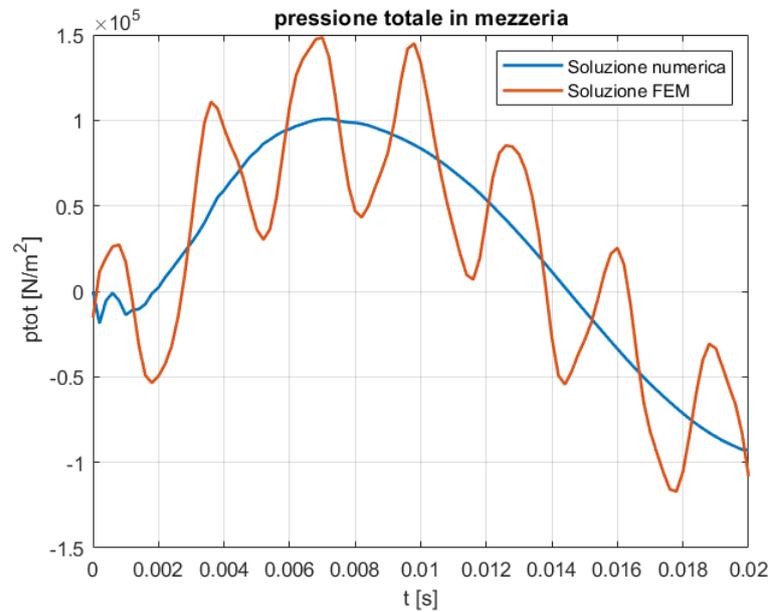


Figura 2.28: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione totale in mezzeria della piastra 1 con velocità di impatto di 1.9 m/s

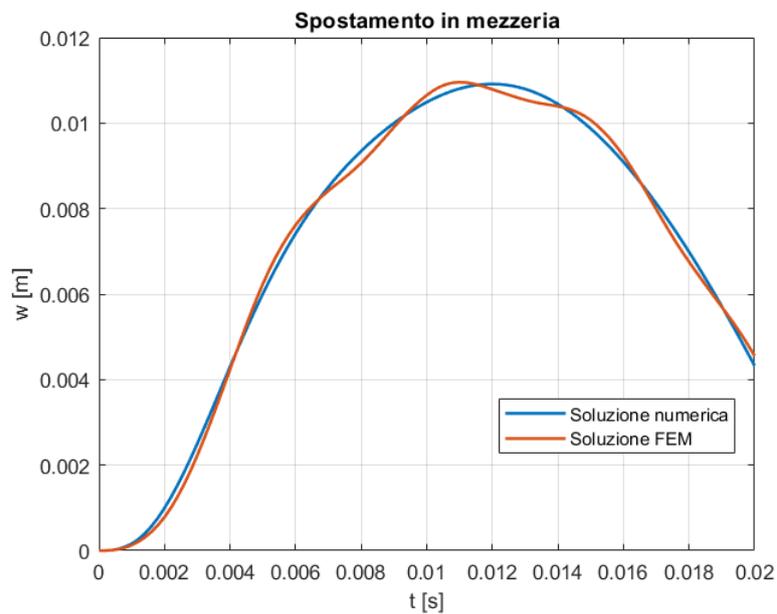


Figura 2.29: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dello spostamento in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

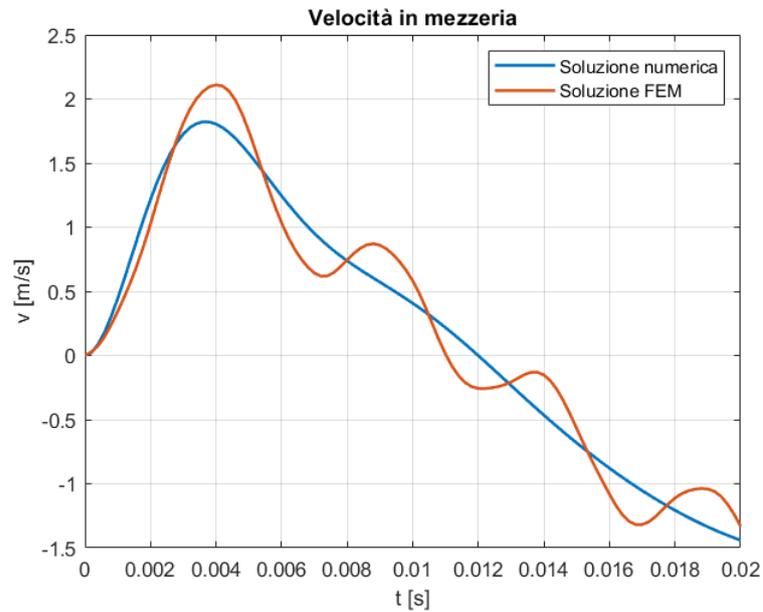


Figura 2.30: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della velocità in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

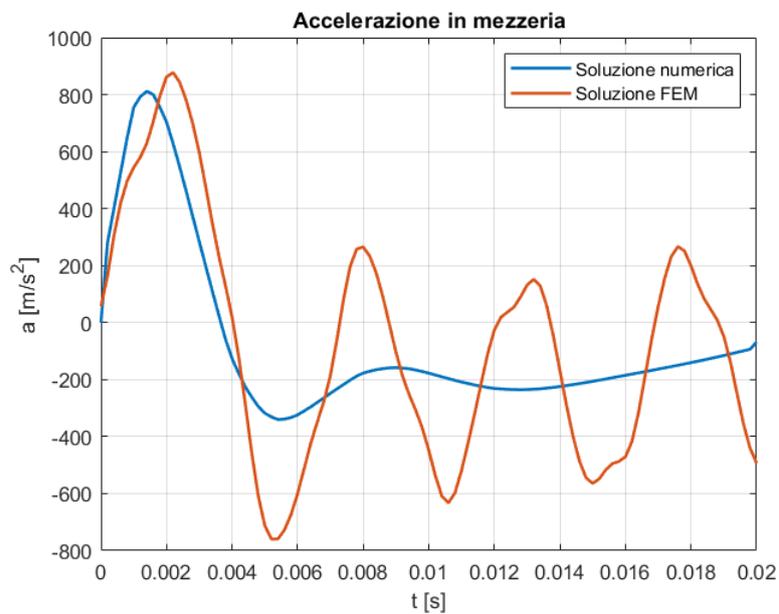


Figura 2.31: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dell'accelerazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

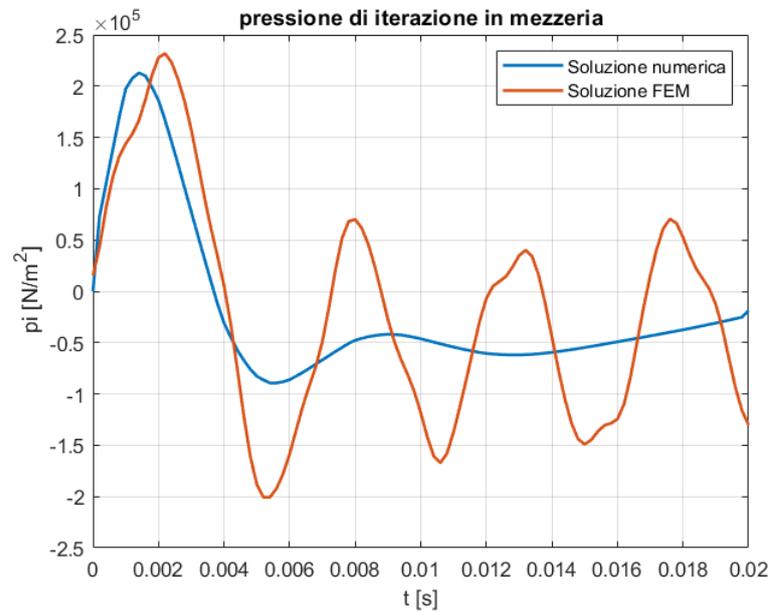


Figura 2.32: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione d'iterazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

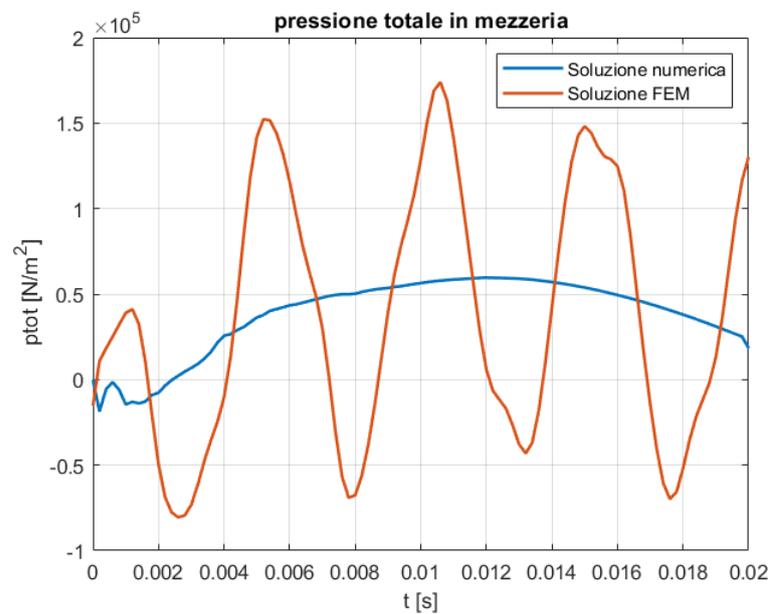


Figura 2.33: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione totale in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

### 2.3.3 Confronto con modello FEM 2D

Per avere una verifica della validità del modello matematico appena costruito, dove la piastra è stata analizzata sfruttando l'analogia con la trave, i risultati ottenuti dalla soluzione numerica con il metodo di Galerkin sono stati confrontati con un modello FEM 2D realizzato con i software PATRAN e NASTRAN.

Il modello 2D è stato realizzato con elementi shell e come nel caso precedente le proprietà assegnate alla piastra tengono conto della massa aggiuntiva dovuta alla presenza dell'acqua.

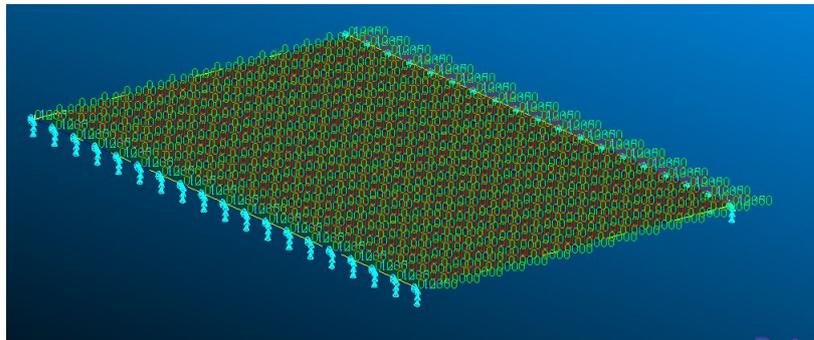


Figura 2.34: Modellizzazione 2D della "Piastra 3" sul software PATRAN

La piastra è semplicemente appoggiata su due lati e i risultati sono stati ottenuti attraverso un'analisi dinamica imponendo gli spostamenti e le velocità iniziali nulli. Come si vede dalle figure successive, i risultati ottenuti sono molto simili a quelli ottenuti dalla risoluzione numerica del modello matematico costruito sfruttando l'analogia con la trave. Ovviamente i risultati non sono identici anche perché nella risoluzione numerica si è considerato un solo modo di vibrare.

I risultati ottenuti per la "piastra 3" con una velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$  sono i seguenti:

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

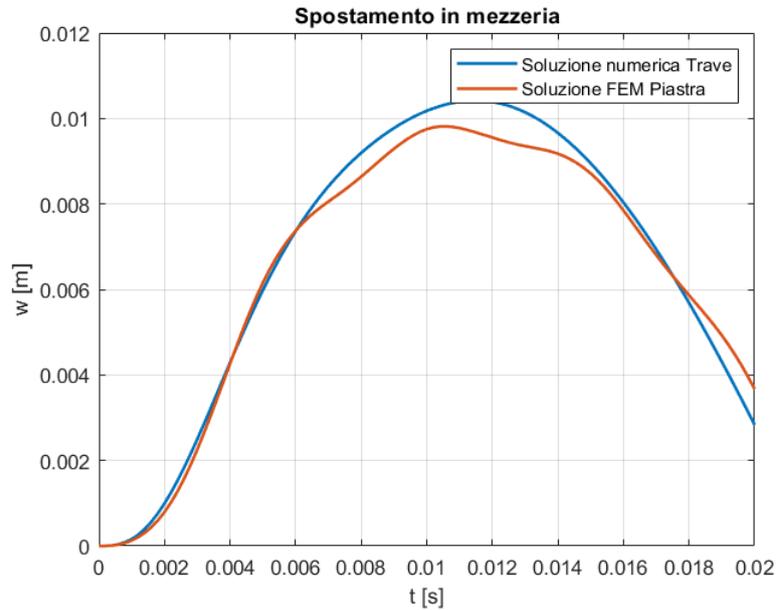


Figura 2.35: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM 2D dello spostamento in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

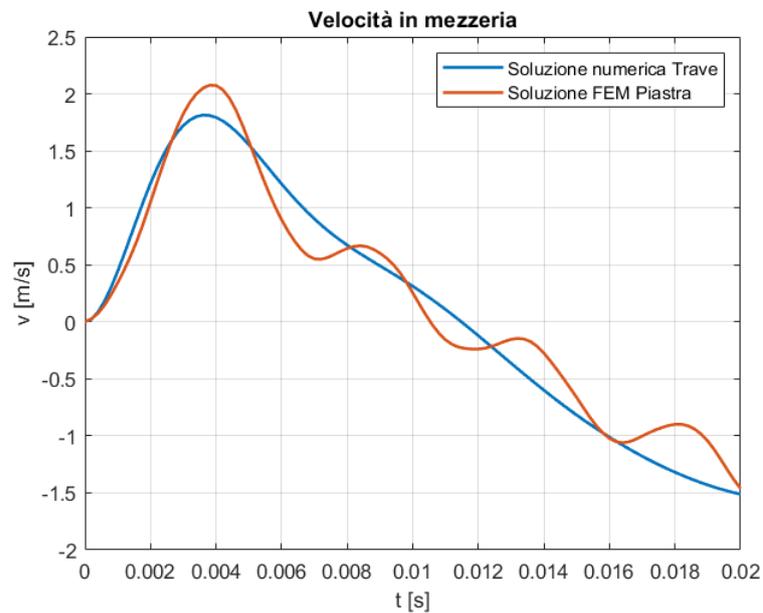


Figura 2.36: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM 2D della velocità in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

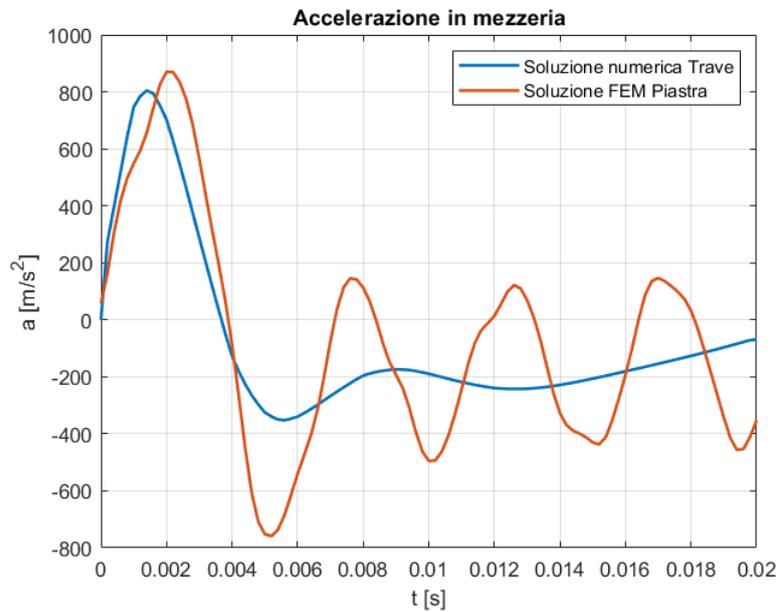


Figura 2.37: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM 2D dell'accelerazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

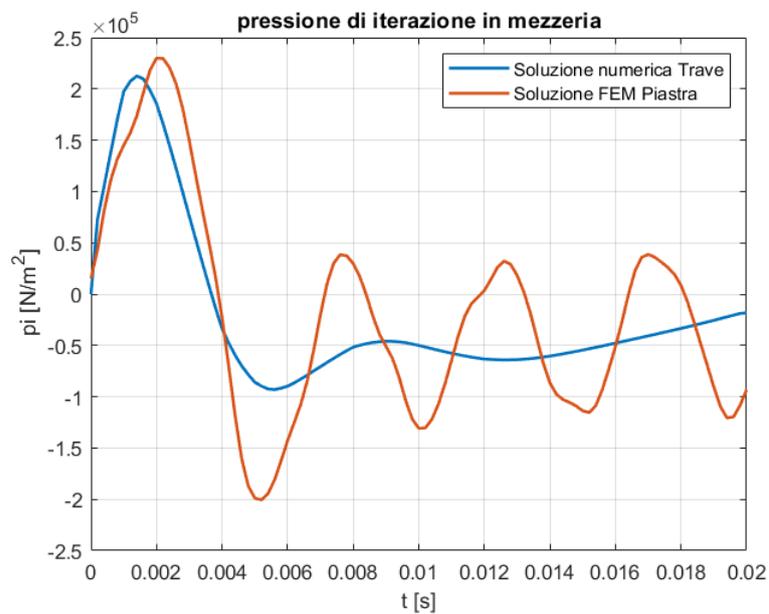


Figura 2.38: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM 2D della pressione di iterazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

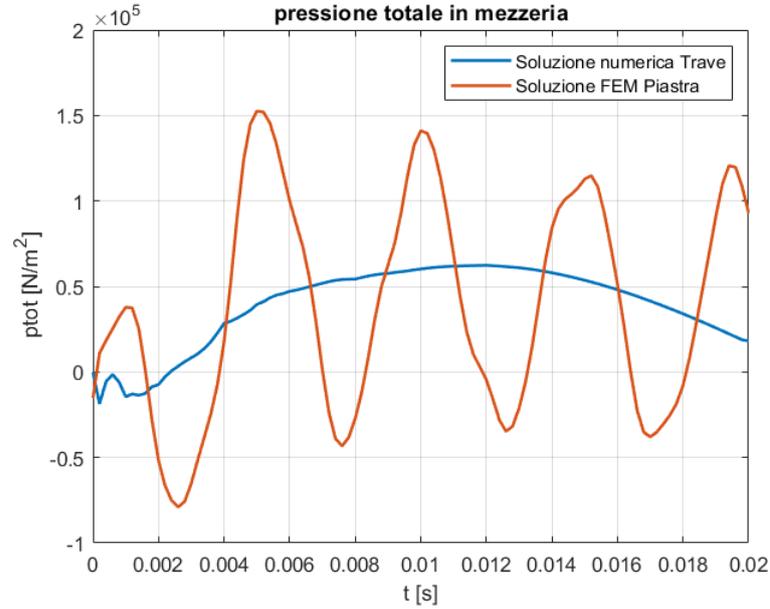


Figura 2.39: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM 2D della pressione totale in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s

### 2.3.4 Effetto dello smorzamento

Nel modello matematico realizzato è stato trascurato lo smorzamento, questo perché, come dimostrato da Chuang nel suo paper [4] e come dimostreremo in questa sotto-sezione, il suo effetto non varia i risultati ottenuti in maniera significativa.

Considerando lo smorzamento  $c_v$ , descritto in precedenza come somma dello smorzamento della struttura  $c_s$  e dello smorzamento del fluido  $c_{zz}$ , possiamo riscrivere la (2.10) come segue:

$$(m_s + m_{zz})\ddot{w}(t) + c_v\dot{w} + E^*I \frac{d^4w}{dx^4} = p_r(t)b \quad (2.16)$$

Dalla reference [4] ricaviamo il valore di  $\zeta = c_v/c_{cr} = 0.057$ , dove  $c_{cr}$  è il coefficiente di smorzamento critico della struttura.

Dato che, avendo sfruttato l'analogia con la trave, il nostro problema consiste in una trave semplicemente appoggiata e soggetta a carico distribuito la sua deflessione in mezzeria sarà espressa dalla seguente relazione:

$$w = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \quad (2.17)$$

Da cui possiamo ricavare la sua rigidezza data da:

$$\frac{q}{w} = k_s = \frac{384 EI}{5 l^4} \quad (2.18)$$

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

e calcolare così lo smorzamento critico:

$$c_{cr} = 2 \sqrt{k_s m_s} \quad (2.19)$$

Dove  $m_s$  è la massa per unità di lunghezza della struttura.

Avendo il valore dello smorzamento adimensionale  $\zeta$  e del coefficiente di smorzamento critico della struttura possiamo risolvere la (2.16) con il metodo di Galerkin come fatto in precedenza.

Dai grafici che verranno mostrati in seguito si dimostra che lo smorzamento non causa variazioni significative, per questo durante le analisi successive verrà trascurato.

I risultati ottenuti per la "Piastra 3", con velocità di impatto di  $1.9\text{ m/s}$  sono i seguenti:

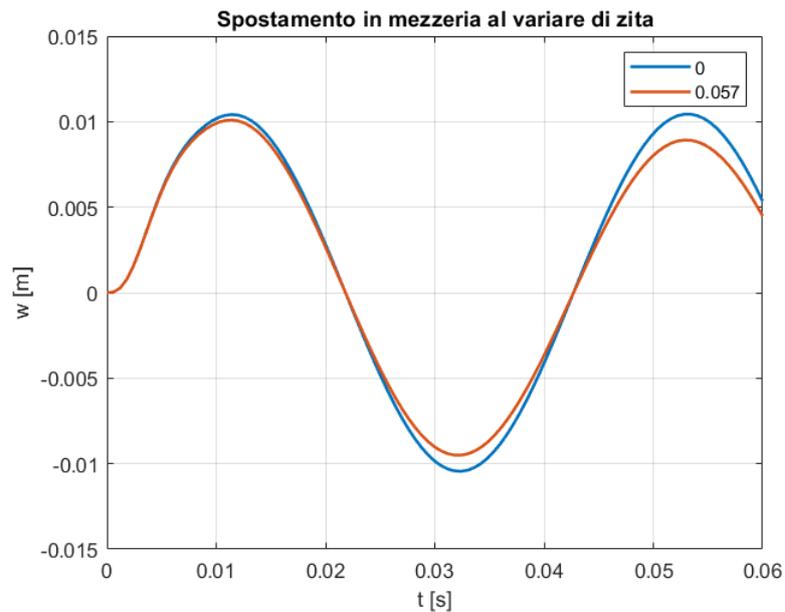


Figura 2.40: Spostamento in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di  $1.9\text{ m/s}$  al variare di  $\zeta$

## 2. Soluzione del modello matematico di una piastra che impatta con l'acqua

---

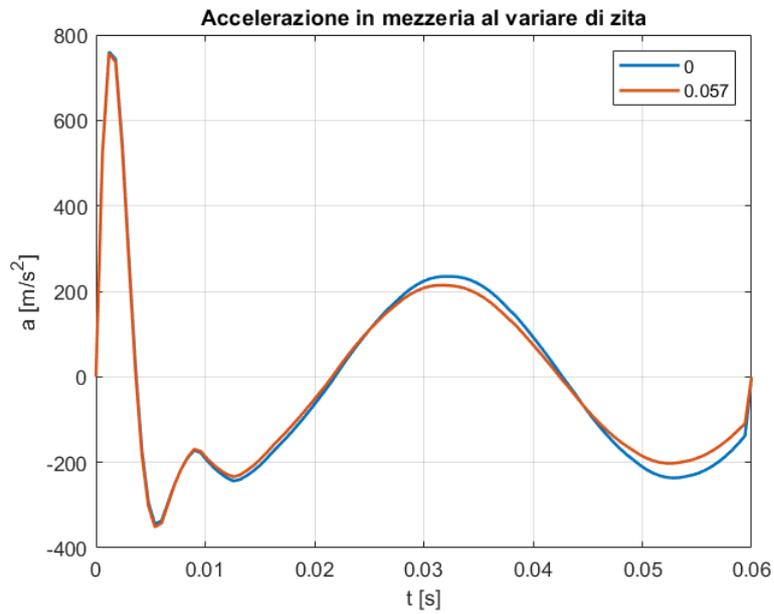


Figura 2.41: Accelerazione in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s al variare di  $\zeta$

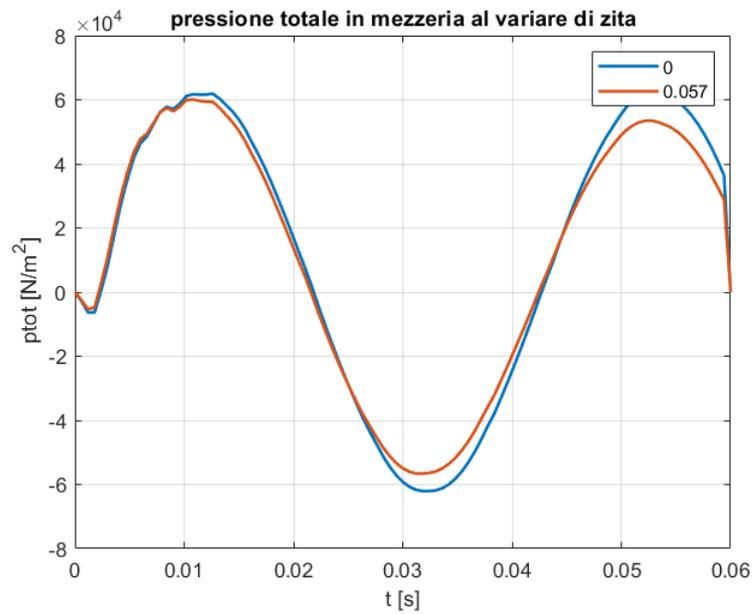


Figura 2.42: Pressione totale in mezzeria della piastra 3 con velocità di impatto di 1.9 m/s al variare di  $\zeta$

---

## Capitolo 3

# Confronto dei risultati ottenuti numericamente con quelli ottenuti dal software LS-DYNA e altre formulazioni

In questo capitolo, dopo una breve introduzione su cosa è il software LS-DYNA, i risultati ottenuti dalla risoluzione numerica della formulazione matematica descritta nel capitolo precedente, saranno confrontati con quelli ottenuti dalle simulazioni effettuate utilizzando il software LS-DYNA e dalla formulazione "Cestino-Frulla".

### 3.1 Il software LS-DYNA

LS-DYNA [9] è un software multi-fisico per simulazioni implicite ed esplicite in cui sono simulati fenomeni complessi. In particolare questo software permette di studiare il comportamento strutturale e l'iterazione di diversi componenti con altri sottosistemi come fluidi, campi magnetici, campi elettrici ecc.

Lo sviluppo del software è iniziato nel 1974 dal progetto "DYNA3D" a cura del Dr. John O.Hollquist per lo studio del sistema di armamenti del bombardiere nucleare B77. Nel 1979, al seguito di questi studi, viste le grandi capacità del software e la sua utilità in molti settori, venne rilasciata la prima edizione commerciale.

Ad oggi, anche grazie alla collaborazione di diversi investitori, il software è stato aggiornato, e date le sue innumerevoli potenzialità è utilizzato in vari campi di applicazione (aerospaziale, automotive, ecc) ed ha le seguenti capacità:

- Analisi 2D e 3D;
- Dinamica non lineare;
- Dinamica di corpo rigido;
- Simulazione quasi-statiche;

- Analisi modali;
- Statica lineare;
- Analisi termiche;
- Analisi Fluidodinamiche;
- Dinamica di accoppiamento multicorpo;
- Analisi dei difetti;
- ecc..

## 3.2 Simulazione con il software LS-DYNA

Le simulazioni con il software "LS-DYNA" sono state effettuate su quella che nei capitoli precedenti è stata definita come "Piastra 3" per due diverse velocità di impatto,  $1.5\text{ m/s}$  e  $3\text{ m/s}$ .

Nelle analisi su LS-DYNA la piastra è stata modellizzata con elementi shell, e sono state create delle flange rigide agli estremi per simulare gli appoggi. Inoltre, sul fondo di questa sono presenti cinque sensori per il calcolo degli spostamenti e delle pressioni.

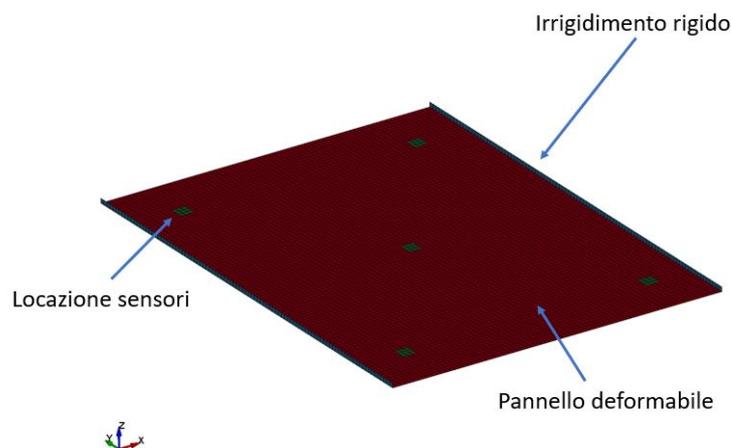


Figura 3.1: Modellizzazione della "Piastra 3" sul software LS-DYNA

Per quanto riguarda l'acqua, questa è stata modellizzata con il metodo "ALE" [3], inoltre, per simulare correttamente la realtà, tra la piastra e l'acqua è stato inserito uno strato d'aria, anch'esso modellizzato con il metodo "ALE".

Le analisi sono state effettuate utilizzando due tipi di mesh differenti per il fluido, la prima uniforme, mentre la seconda più fitta nella zona di congiunzione tra acqua e aria.

### 3. Simulazione con il software LS-DYNA

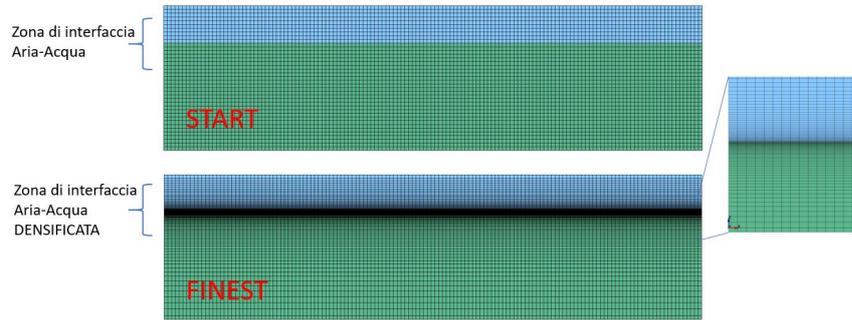


Figura 3.2: Modellizzazione dello strato d'aria e dell'acqua sul software LS-DYNA

I risultati ottenuti dalla simulazione LS-DYNA sono i seguenti:

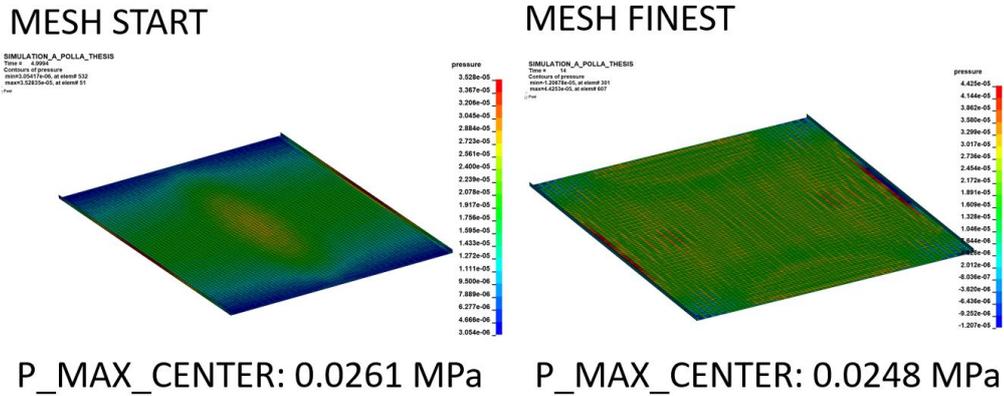


Figura 3.3: Distribuzione della pressione totale ottenuta dalle simulazioni LS-DYNA per la "Piastra 3" e con velocità di impatto di 1.5 m/s

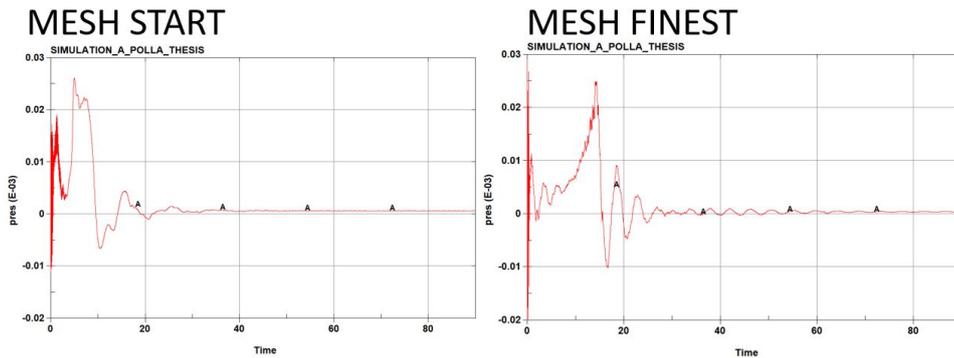


Figura 3.4: Pressione massima in mezzeria in funzione del tempo ottenuta dalle simulazioni LS-DYNA per la "Piastra 3" e con velocità di impatto di 1.5 m/s

### 3. Formulazione "Cestino-Frulla"

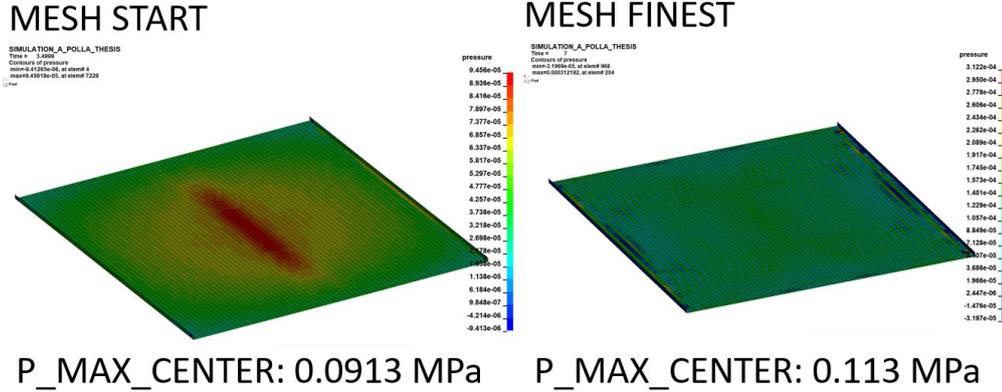


Figura 3.5: Distribuzione della pressione totale ottenuta dalle simulazioni LS-DYNA per la "Piastra 3" e con velocità di impatto di 3 m/s

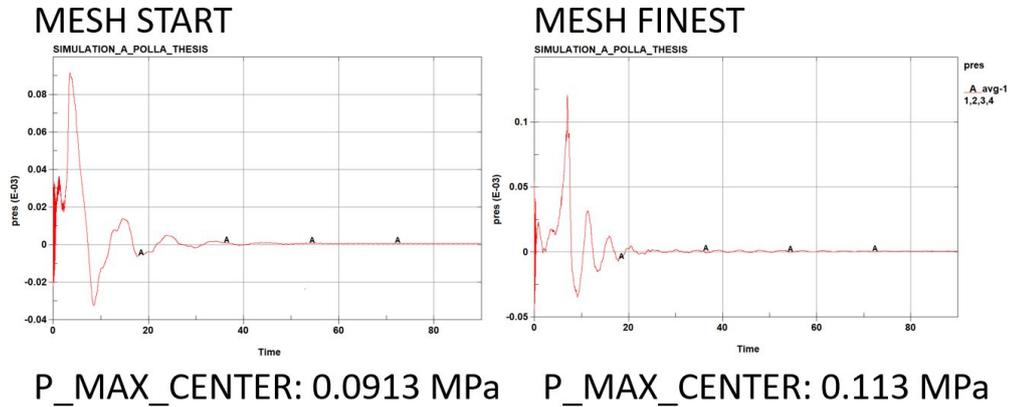


Figura 3.6: Pressione massima in mezzeria in funzione del tempo ottenuta dalle simulazioni LS-DYNA per la "Piastra 3" e con velocità di impatto di 1.5 m/s

### 3.3 Formulazione "Cestino-Frulla"

Per la determinazione della pressione massima a seguito dell'impatto con l'acqua di una piastra piatta, realizzata con materiale isotropo e semplicemente appoggiata sui due lati è stata sviluppata la seguente formulazione [5]

$$P_{max} = 2.589 \sqrt{\left(\frac{1}{2} \rho_w V_0^2\right)} \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h^3}{a^3}} \quad (3.1)$$

Dove, come nei capitoli precedenti,  $V_0$  è la velocità di impatto con l'acqua,  $\rho_w$  è la densità dell'acqua,  $E$  è il modulo di Young del materiale,  $h$  è lo spessore della piastra e  $a$  è la lunghezza del lato libero della piastra.

### 3.4 Confronto dei risultati

Vengono mostrati ora dei grafici che confrontano i risultati di pressione massima ottenuti dalla risoluzione numerica del modello matematico, dalle analisi LS-DYNA e dalla formulazione "Cestino-Frulla".

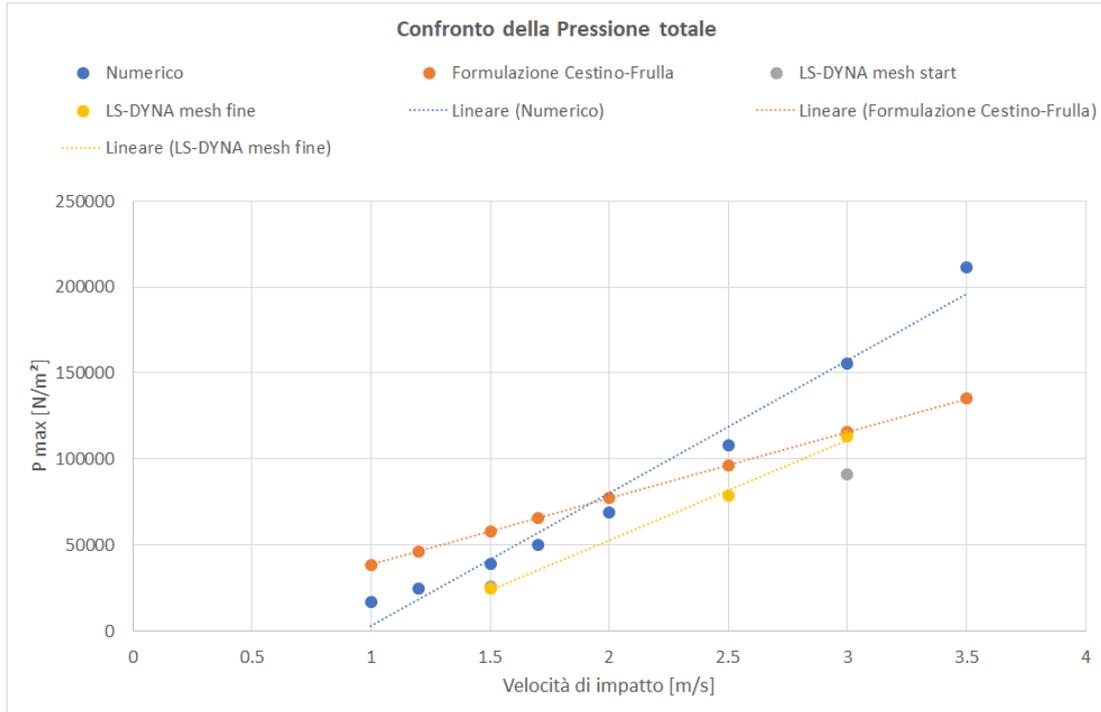


Figura 3.7: Confronto della pressione massima totale ottenuta dalla soluzione numerica del modello matematico, dalle simulazione LS-DYNA e dalla formulazione "Cestino-Frulla"

Come si può notare del grafico i risultati ottenuti dai tre metodi, soprattutto per velocità fino ai 2.5  $m/s$  sono abbastanza coincidenti e quindi i modelli sviluppati in precedenza, anche in seguito ai confronti FEM e ai risultati di Chuang nel 1970, possono essere considerati validi.

La variazione dei risultati ottenuti dalla risoluzione del modello matematico e da quelli ottenuti tramite le simulazioni effettuate con LS-DYNA sono dovute principalmente alla distribuzione di pressione che nel modello matematico è stata considerata distribuita in maniera uniforme sulla piastra, mentre nel modello LS-DYNA, come nella realtà, presenta un picco al centro e diminuisce verso gli estremi, come mostrato nella figura successiva:

### 3. Confronto dei risultati

---

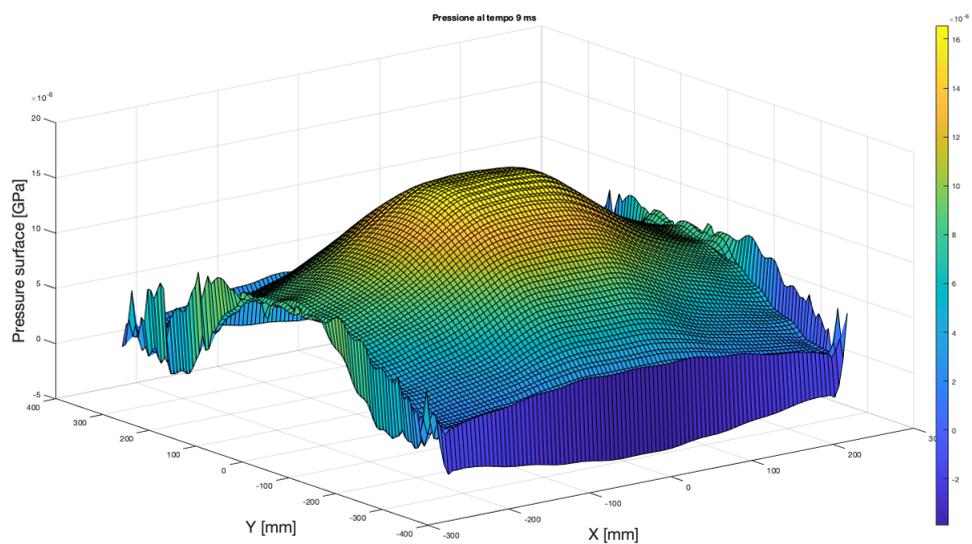


Figura 3.8: *Distribuzione di pressione sulla piastra 3 ottenuta dal software LS-DYNA*

---

## Capitolo 4

### Travi su fondazione elastica

In questo capitolo, dato che la configurazione innovativa del sandwich prevede l'utilizzo di molle o smorzatori, verranno descritti alcuni modelli di travi su fondazione elastica, in particolare verranno trattati casi in cui le travi sono poggiate su fondazioni alla Winkler, con e senza l'applicazione di un carico assiale.

Dopo aver ricavato le equazione del governo delle travi, queste saranno applicate ad una trave esempio e i risultati ottenuti dalla soluzione analitica verranno poi confrontati con i risultati ottenuti tramite modelli FEM.

#### 4.1 Trave su Winkler Foundation

Il modello di Winkler è un modello ad un parametro, in questo caso si suppone che lo spostamento di ogni punto è proporzionale alla pressione in quel punto e non dipende dalla pressione nei punti adiacenti. La fondazione di Winkler viene interpretata come un insieme di molle verticali tutte indipendenti tra di loro.

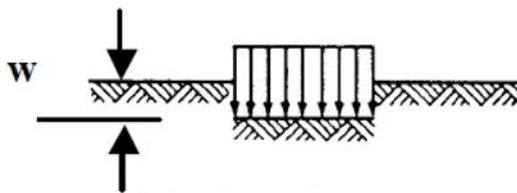


Figura 4.1: *Fondazione di Winkler sottoposta ad un carico di pressione uniforme [2]*

La relazione lineare che c'è tra pressione e spostamento in ogni punto è le seguente:

$$p = k_0 w \tag{4.1}$$

Dove  $w$  è lo spostamento e  $k_0$  il modulo della fondazione espresso in  $N/m^3$ .

#### 4. Trave su Winkler Foundation

---

Per quanto riguarda le travi con una larghezza "b" la (4.1) diventa:

$$p = kw = k_0bw \quad (4.2)$$

Con  $k$  espresso in  $N/m^2$ .

Per quanto riguarda l'equazione del governo della trave su fondazione di Winkler consideriamo il seguente caso:

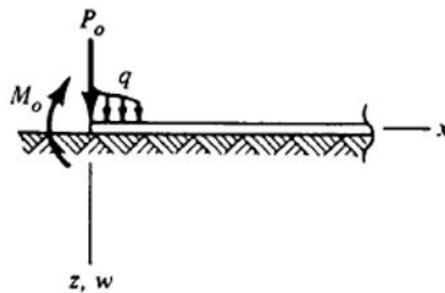


Figura 4.2: Trave su fondazione di Winkler [2]

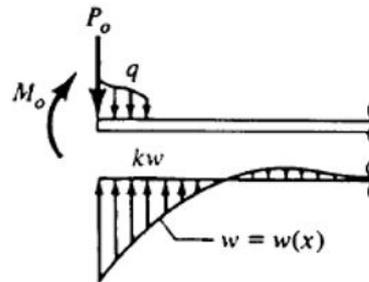


Figura 4.3: Reazione della fondazione di Winkler [2]

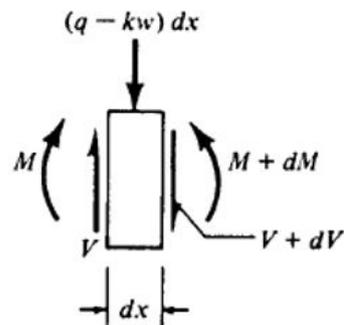


Figura 4.4: Forze che agiscono sul concio elementare [2]

Dall'equilibrio del concio elementare otteniamo :

$$dV = (-q + kw)dx \quad (4.3)$$

$$dM = Vdx \quad (4.4)$$

Dove  $V$  è il taglio,  $M$  il momento flettente,  $k$  il modulo della fondazione di Winkler espresso in  $N/m^2$ ,  $w$  lo spostamento e  $q$  il carico distribuito che agisce sulla trave. Aggiungendo a queste la relazione della linea elastica  $M = -EI \frac{d^2w}{dx^2}$  otteniamo l'equazione del governo per la trave su fondazione elastica:

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} + kw = q \quad (4.5)$$

Dove  $E$  ed  $I$  sono rispettivamente il Modulo di Young del materiale con cui è fatta la trave e il momento d'inerzia della trave.

Introducendo il parametro  $\beta = \left[\frac{k}{4EI}\right]^{\frac{1}{4}}$ , la soluzione della (4.5) è:

$$w = e^{\beta x}(C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)) + e^{-\beta x}(C_3 \sin(\beta x) + C_4 \cos(\beta x)) + w(q) \quad (4.6)$$

Dove  $C_1, C_2, C_3, C_4$  sono costanti di integrazione che dipendono dalle condizioni al contorno e  $w(q)$  è una soluzione particolare che dipende dal carico distribuito  $q$ .

## 4.2 Risultati della trave su fondazione di Winkler

Per l'applicazione ad un caso reale delle relazioni viste in precedenza si è scelta una trave appoggiata, con sezione rettangolare, su cui è applicato un carico distribuito:

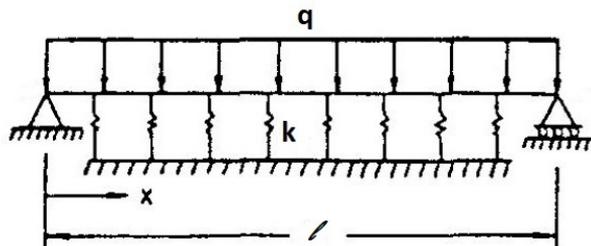


Figura 4.5: Trave su fondazione elastica soggetta a carico distribuito [8]

I dati utilizzati per il caso in esame sono i seguenti:

- Lunghezza della trave:  $l = 10 \text{ m}$
- Larghezza della sezione della trave:  $b = 0.4 \text{ m}$
- Altezza della sezione della trave:  $h = 0.6 \text{ m}$
- Intensità del carico distribuito:  $q = 300 \text{ kN/m}$
- Modulo della fondazione elastica:  $k = 4000 \text{ kN/m}^2$
- Modulo di Young del materiale (Alluminio):  $E = 73000000 \text{ kN/m}^2$
- Momento di inerzia della sezione:  $I = 0.0072 \text{ m}^4$

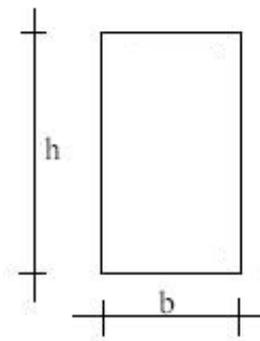


Figura 4.6: Sezione rettangolare della trave

### 4.2.1 Soluzione Analitica

La soluzione analitica è stata ottenuta risolvendo l'equazione differenziale (4.5):

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = q$$

Questa equazione differenziale del quarto ordine è stata risolta utilizzando il software MATLAB imponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} w(0) &= 0; & -EI \frac{d^2 w}{dx^2}(0) &= 0; \\ w(l) &= 0; & -EI \frac{d^2 w}{dx^2}(l) &= 0; \end{aligned}$$

#### 4. Risultati della trave su fondazione di Winkler

---

I risultati ottenuti sono i seguenti:

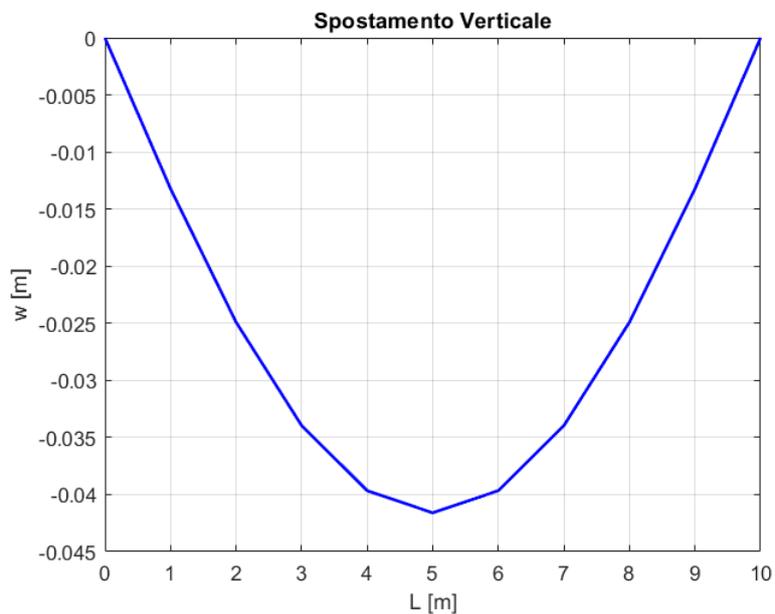


Figura 4.7: *Spostamento verticale ottenuto dalla soluzione analitica per la trave su fondazione di Winkler*

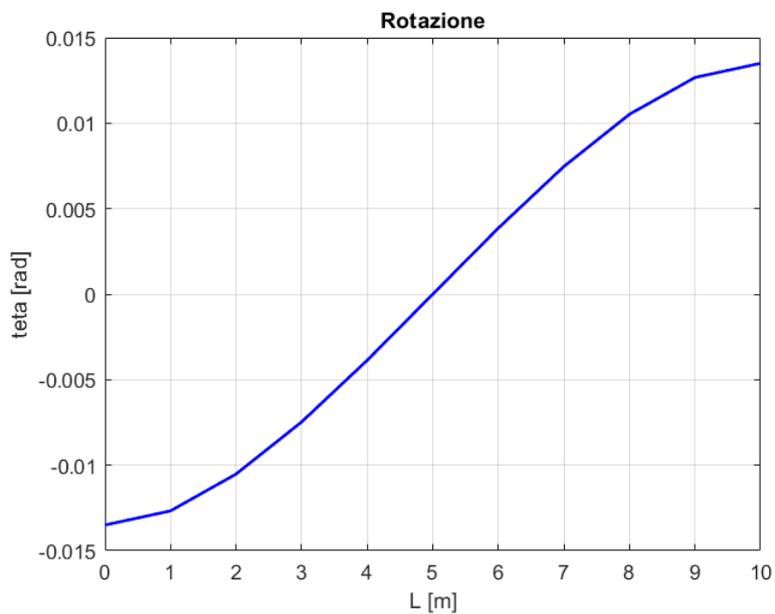


Figura 4.8: *Rotazione ottenuta dalla soluzione analitica per la trave su fondazione di Winkler*

#### 4. Risultati della trave su fondazione di Winkler

---

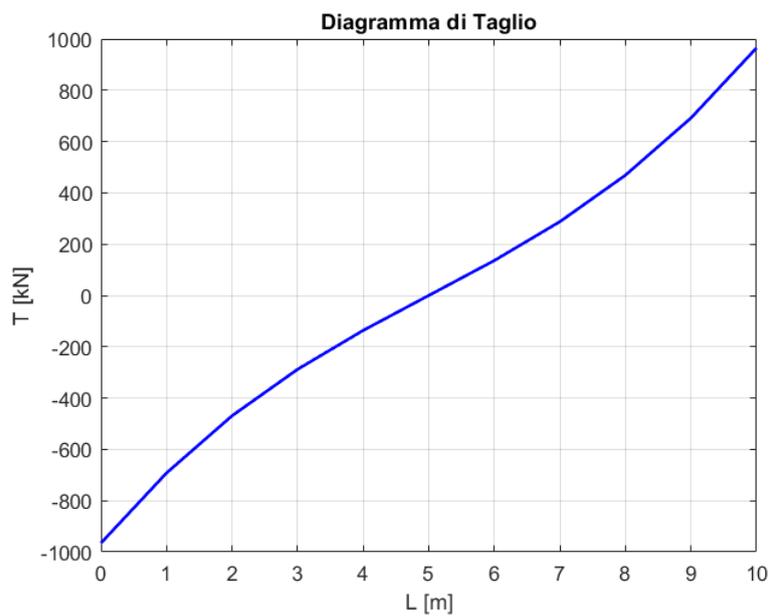


Figura 4.9: Diagramma di Taglio ottenuto dalla soluzione analitica per la trave su fondazione di Winkler

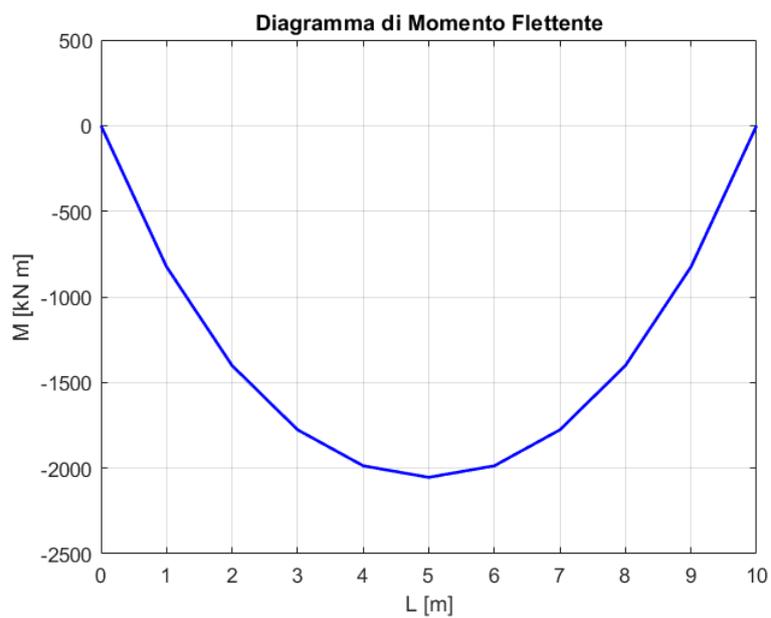


Figura 4.10: Diagramma di Momento ottenuto dalla soluzione analitica per la trave su fondazione di Winkler

### 4.2.2 Soluzione FEM

Per la soluzione FEM si è scelto di dividere la trave in dieci elementi e modellizzare la fondazione elastica con delle molle di rigidezza  $k_m$ . Le molle sono equidistanti e posizionate ogni metro lungo la trave.

La forza applicata dalla molla sulla trave è la seguente:

$$f = k_m w \quad (4.7)$$

Il carico distribuito che ogni molla applicherebbe su un tratto di trave lungo "u" è :

$$p = \frac{k_m w}{u} \quad (4.8)$$

Confrontando questa con la (4.2) e avendo supposto che le molle sono tutte equidistanti e poste ad un metro di distanza l'una dall'altra ( $u = 1 \text{ m}$ ) otteniamo  $k_m = 4000 \text{ kN/m}$ .

Per l'Analisi FEM è stato utilizzato il software PATRAN, e i risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli ottenuti dalla risoluzione dell'equazione differenziale (4.5). Come si può vedere dai grafici seguenti i risultati sono praticamente coincidenti.

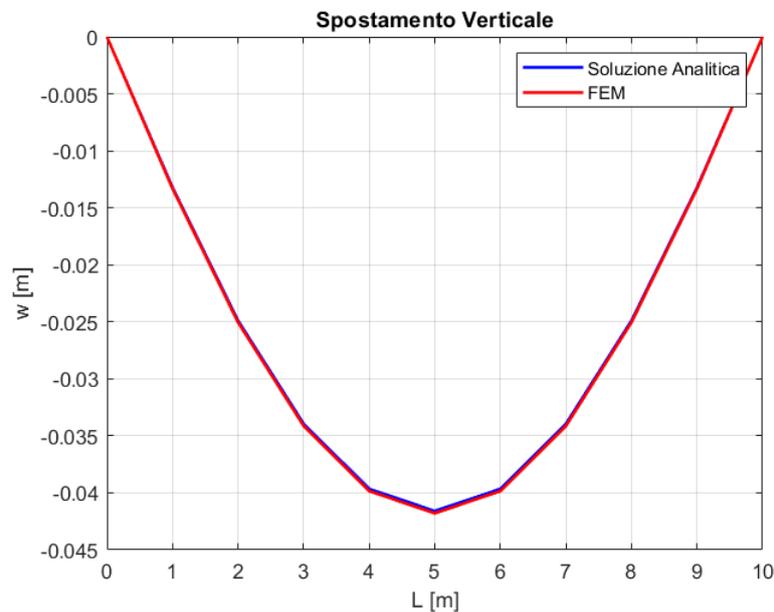


Figura 4.11: Confronto dello spostamento verticale ottenuto dalla soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione di Winkler

#### 4. Risultati della trave su fondazione di Winkler

---

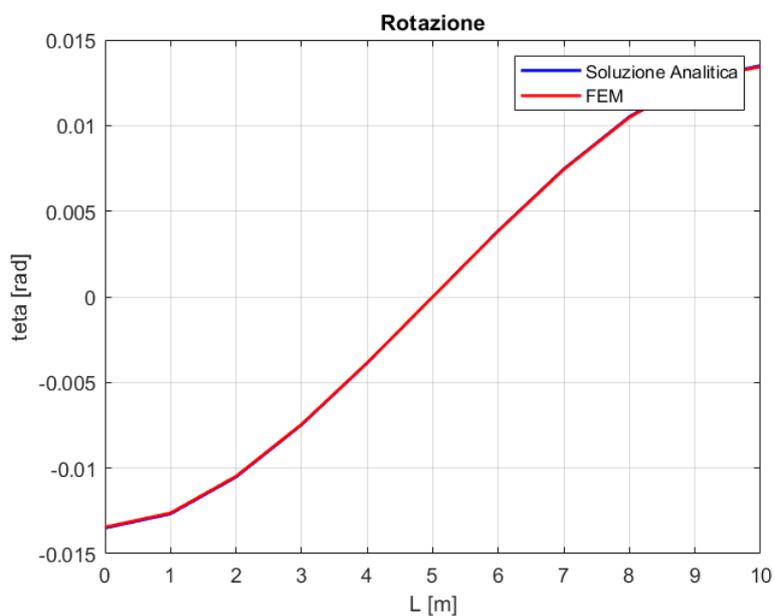


Figura 4.12: Confronto della rotazione ottenuta dalla soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione di Winkler

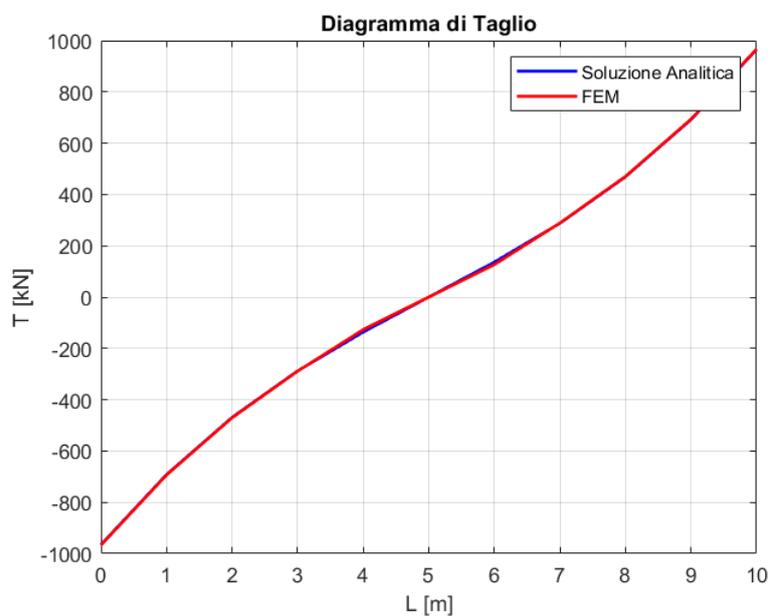


Figura 4.13: Confronto del diagramma di Taglio ottenuto dalla soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione di Winkler

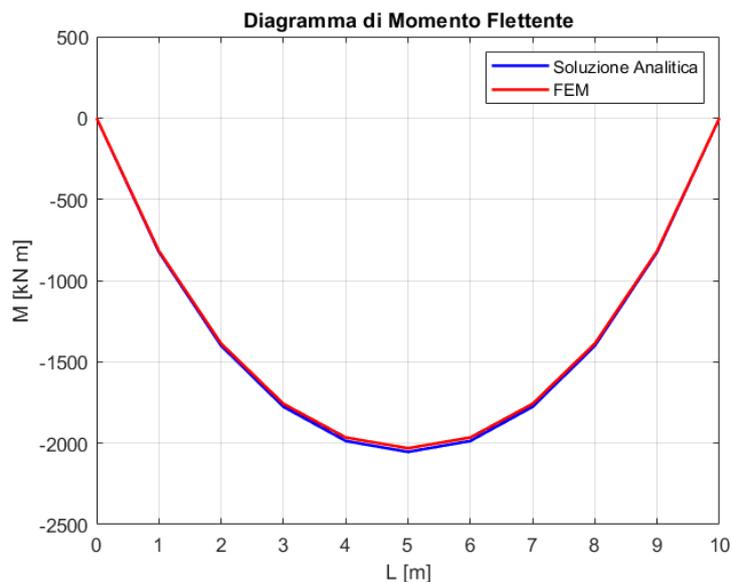


Figura 4.14: Confronto del diagramma di Momento ottenuto dalla soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione di Winkler

#### 4.2.3 Variazione dei risultati al variare del modulo della fondazione $k$

Si riportano ora i diagrammi di spostamento, rotazione, taglio e momento flettente al variare di  $k$ .

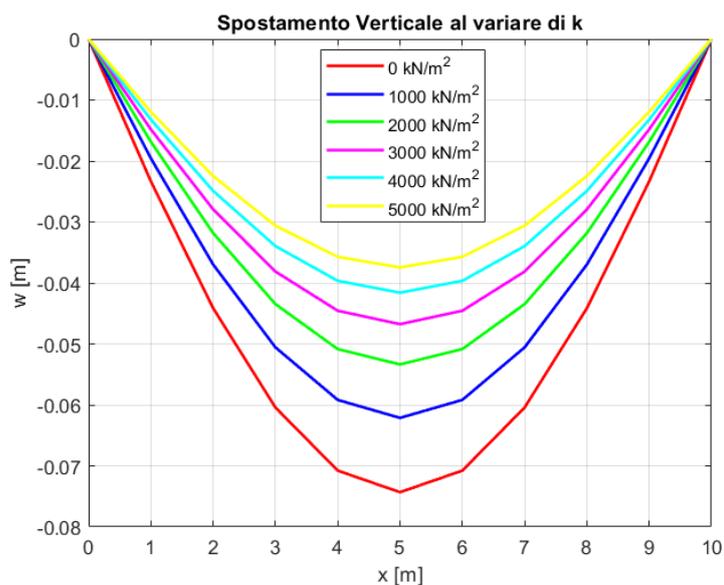


Figura 4.15: Spostamento per la trave su fondazione di Winkler al variare di  $k$

#### 4. Risultati della trave su fondazione di Winkler

---

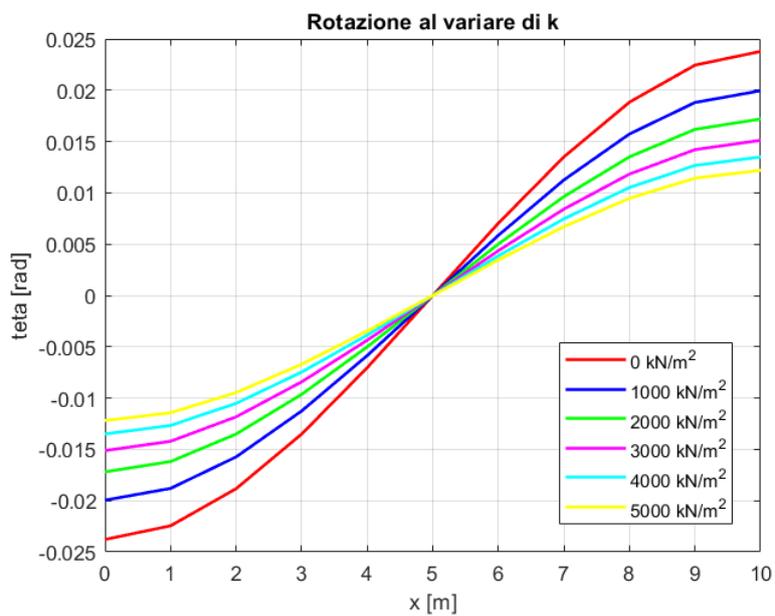


Figura 4.16: Rotazione per la trave su fondazione di Winkler al variare di  $k$

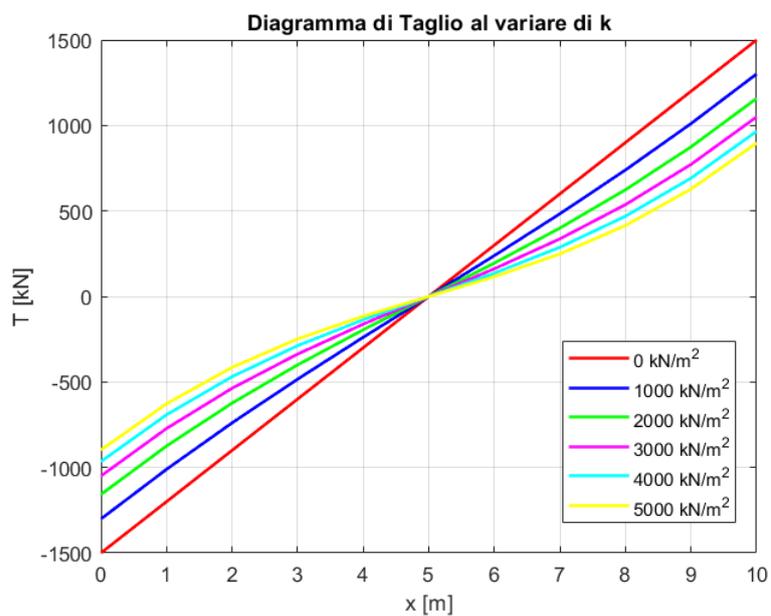


Figura 4.17: Diagramma di Taglio per la trave su fondazione di Winkler al variare di  $k$

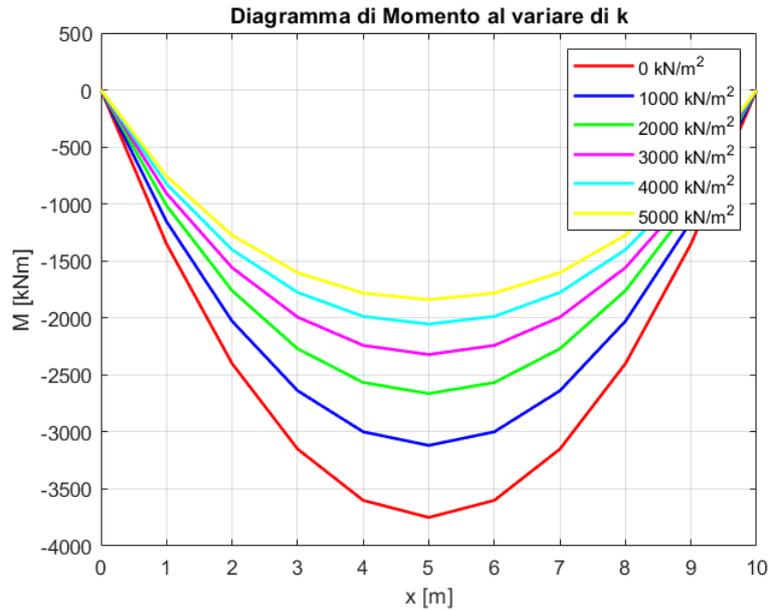


Figura 4.18: Diagramma di Momento per la trave su fondazione di Winkler al variare di  $k$

### 4.3 Trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale

In questa sezione si va a studiare la stessa trave vista nella sezione 4.1 ma con l'applicazione di un carico assiale  $N = 8000 \text{ kN}$ :

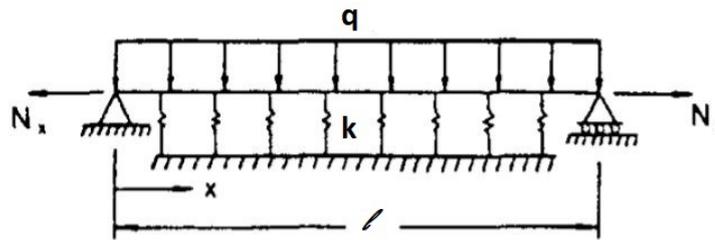


Figura 4.19: Trave su fondazione elastica con la presenza di un carico assiale [8]

L'equazione del governo per la trave in figura precedente è la seguente:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + N \frac{d^2 w}{dx^2} + kw = q \quad (4.9)$$

#### 4.3.1 Soluzione Analitica

La soluzione analitica della (4.9) è stata ottenuta utilizzando il software Matlab e con le stesse condizioni al contorno descritte nella sub-section 4.2.1. I risultati

#### 4. Trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale

---

ottenuti sono i seguenti:

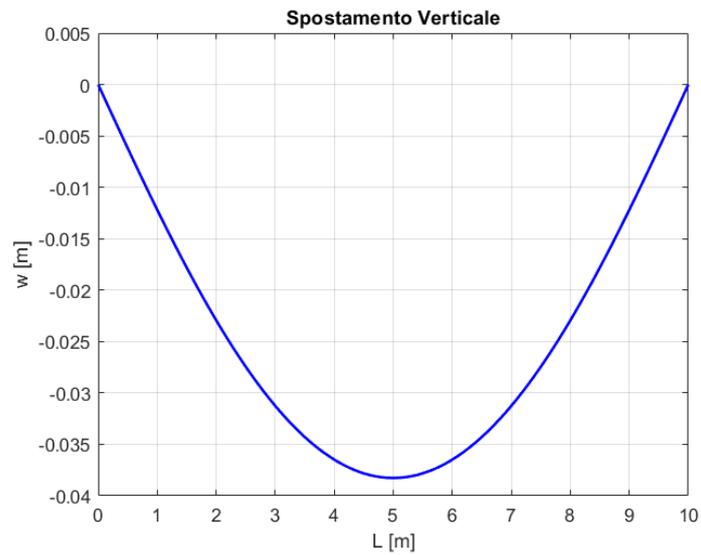


Figura 4.20: *Spostamento verticale per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale*

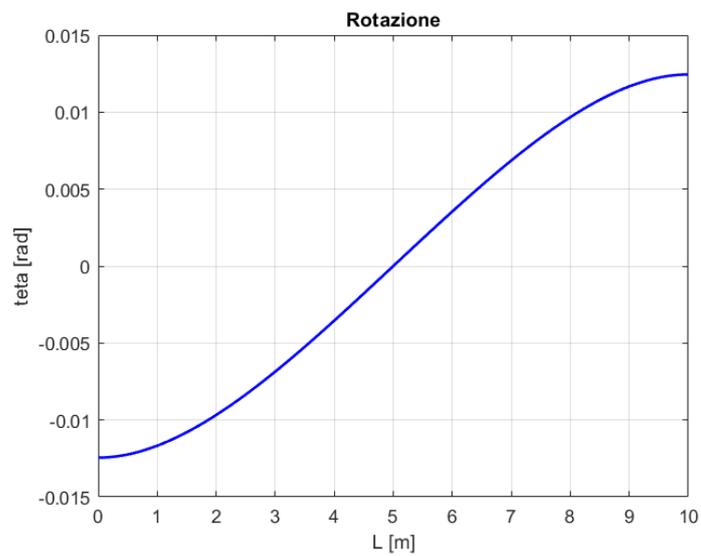


Figura 4.21: *Rotazione per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale*

#### 4. Trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale

---

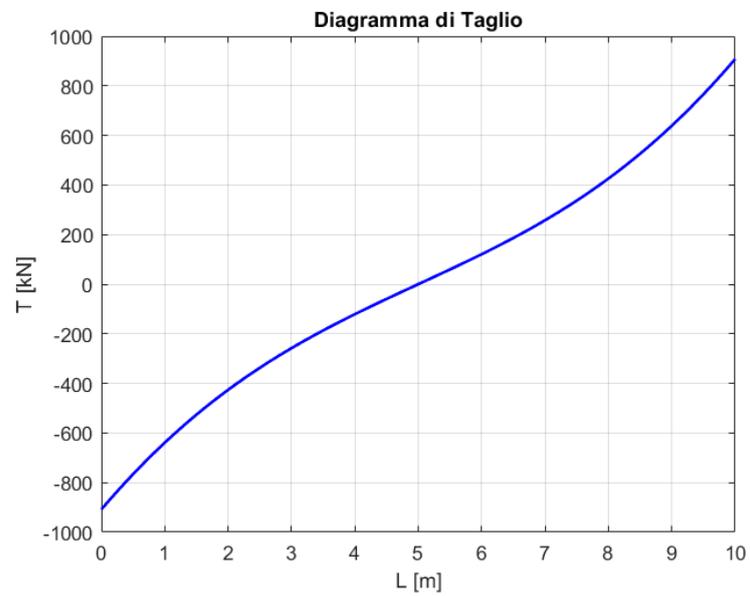


Figura 4.22: *Diagramma di Taglio per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale*

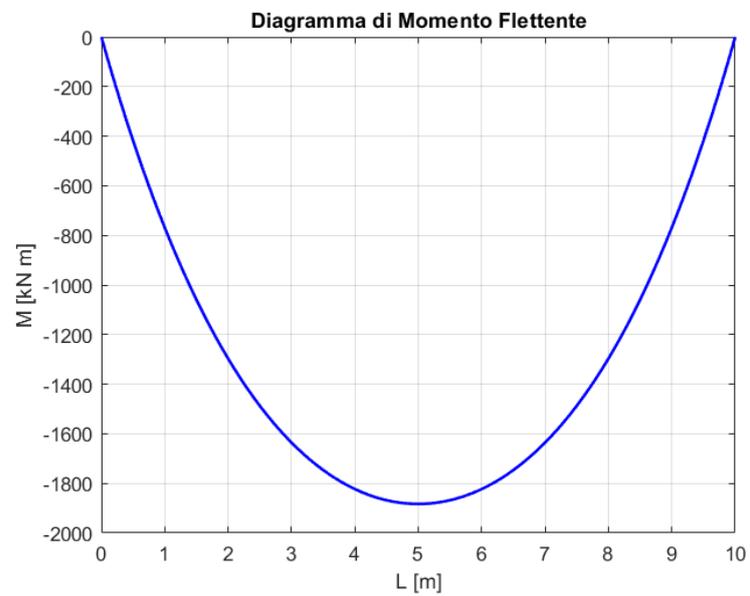


Figura 4.23: *Diagramma di Momento per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale*

### 4.3.2 Soluzione FEM

Come nel caso precedente i risultati ottenuti analiticamente sono stati confrontati con i risultati ottenuti da una soluzione FEM. In questo caso la trave è stata suddivisa in 100 elementi ed è stata posizionata una molla ogni 10 cm (100 molle totali), di intensità 400 kN/m. I risultati ottenuti sono stati i seguenti:

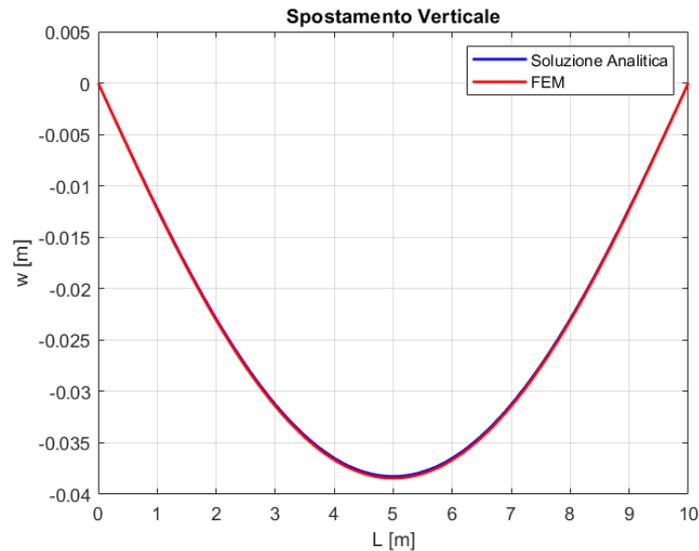


Figura 4.24: Confronto dello Spostamento verticale ottenuto per soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale

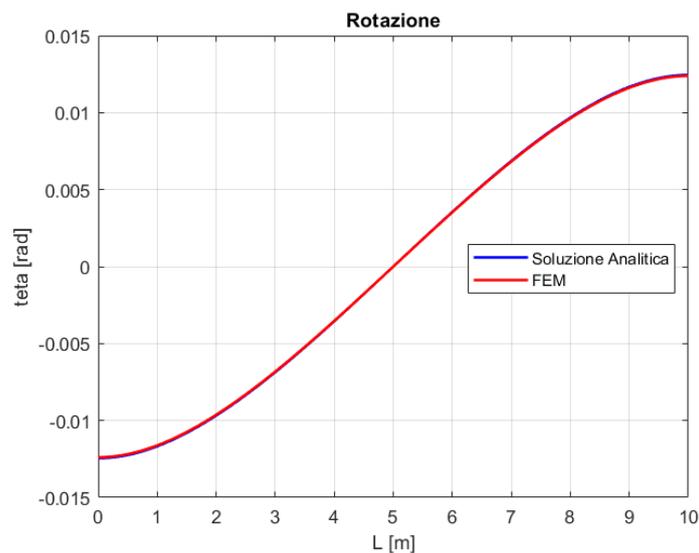


Figura 4.25: Confronto della Rotazione ottenuta per soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale

#### 4. Trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale

---

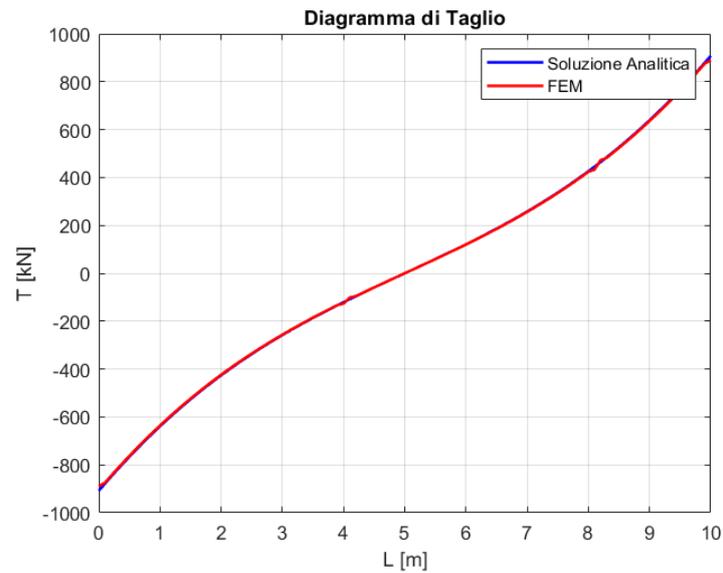


Figura 4.26: Confronto del Diagramma di Taglio ottenuto per soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale

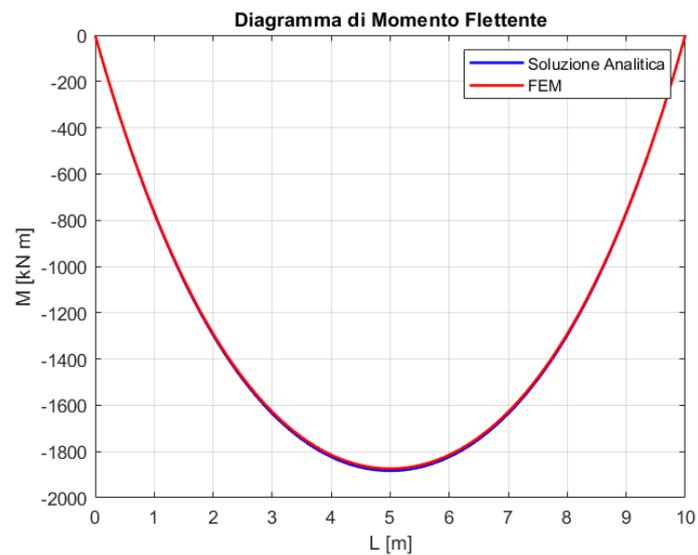


Figura 4.27: Confronto del Diagramma di Momento ottenuto per soluzione analitica e dall'analisi FEM per la trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale

### 4.3.3 Variazione dei risultati al variare del carico assiale N

Si riportano ora i grafici di spostamento, rotazione, momento e taglio della trave su fondazione elastica al variare del carico assiale N:

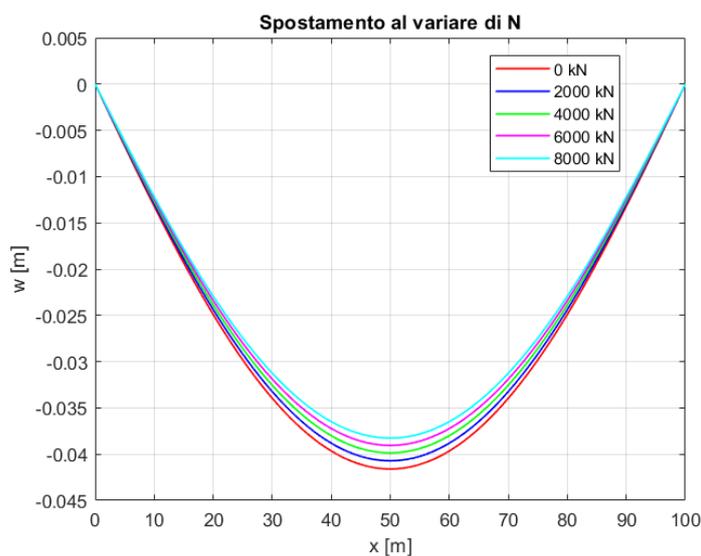


Figura 4.28: Spostamento al variare del carico assiale per una trave su fondazione elastica

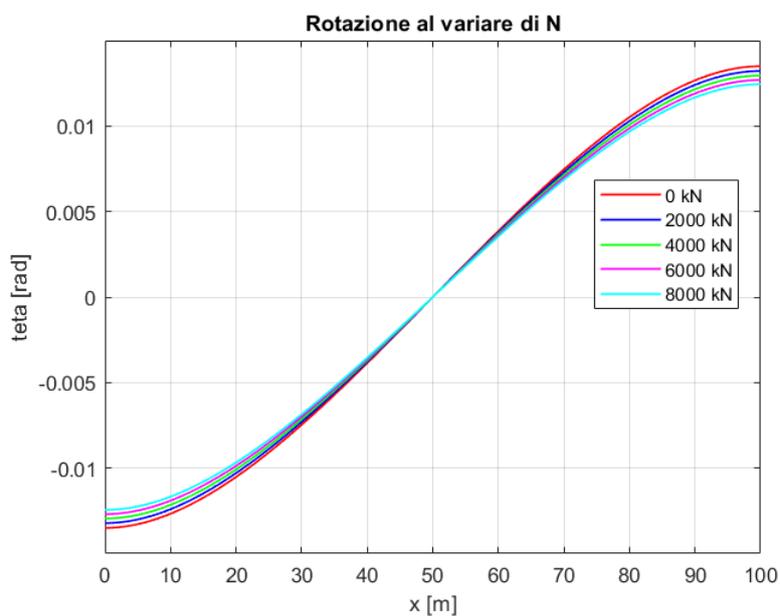


Figura 4.29: Rotazione al variare del carico assiale per una trave su fondazione elastica

#### 4. Trave su fondazione elastica con l'applicazione di un carico assiale

---

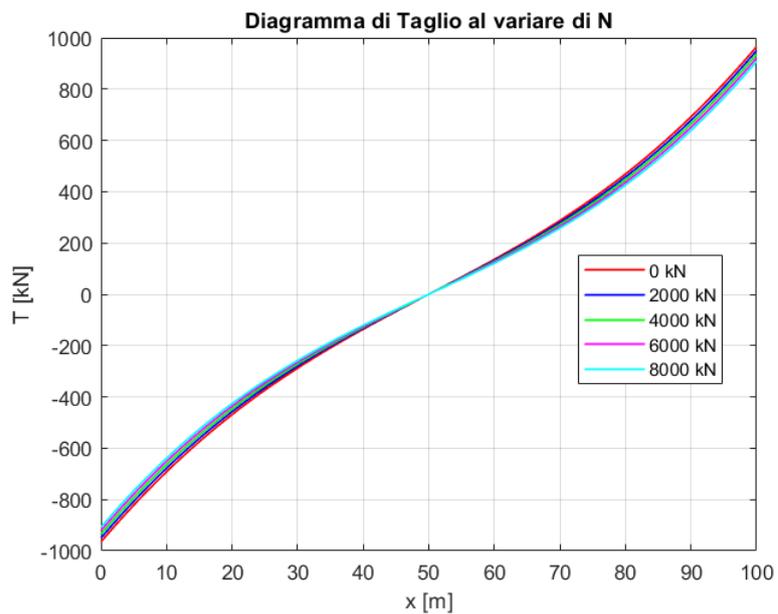


Figura 4.30: Diagramma di taglio al variare del carico assiale per una trave su fondazione elastica

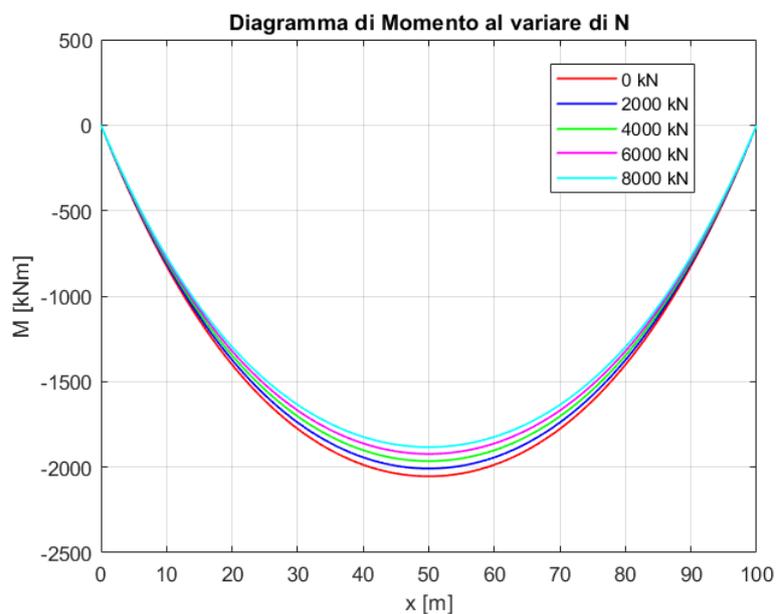


Figura 4.31: Diagramma di momento al variare del carico assiale per una trave su fondazione elastica

## 4.4 Confronto tra le travi su fondazione elastica con e senza carico assiale

In questa sezione verrà mostrato il confronto tra le due travi studiate in precedenza:

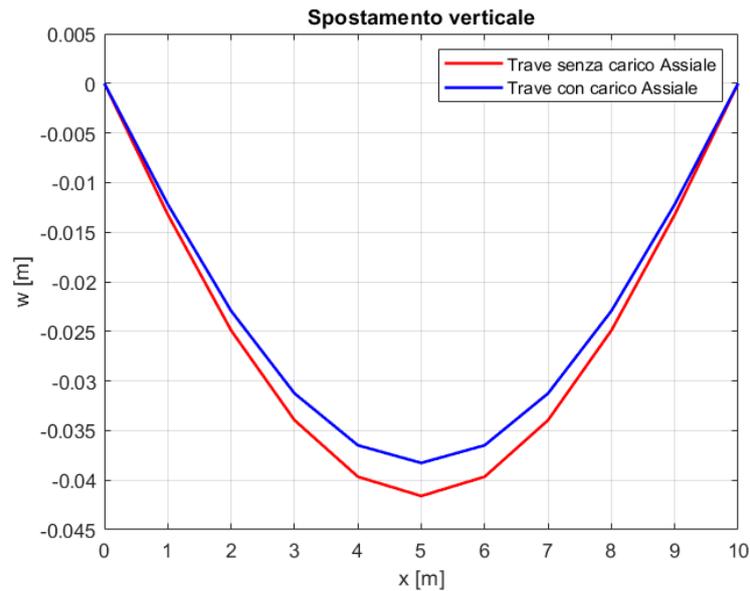


Figura 4.32: Confronto dello spostamento tra la trave con carico assiale e quella senza

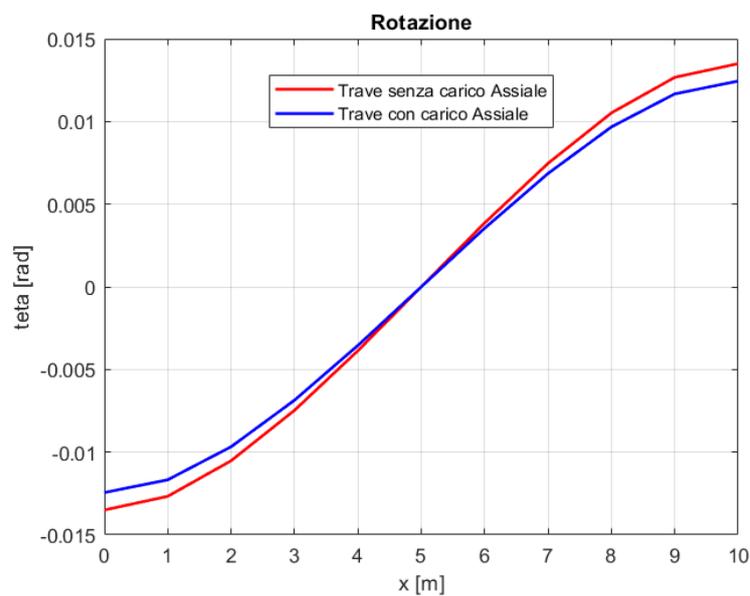


Figura 4.33: Confronto della rotazione tra la trave con carico assiale e quella senza

#### 4. Confronto tra le travi su fondazione elastica con e senza carico assiale

---

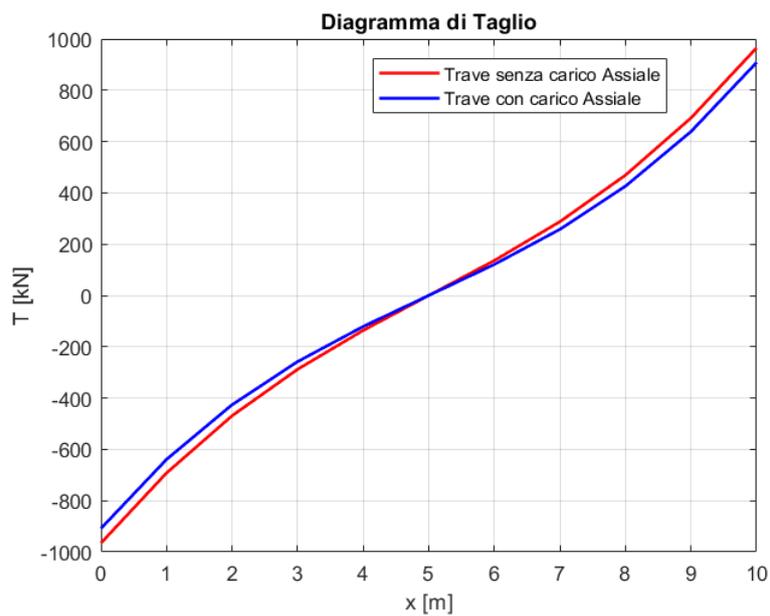


Figura 4.34: Confronto del diagramma di taglio tra la trave con carico assiale e quella senza

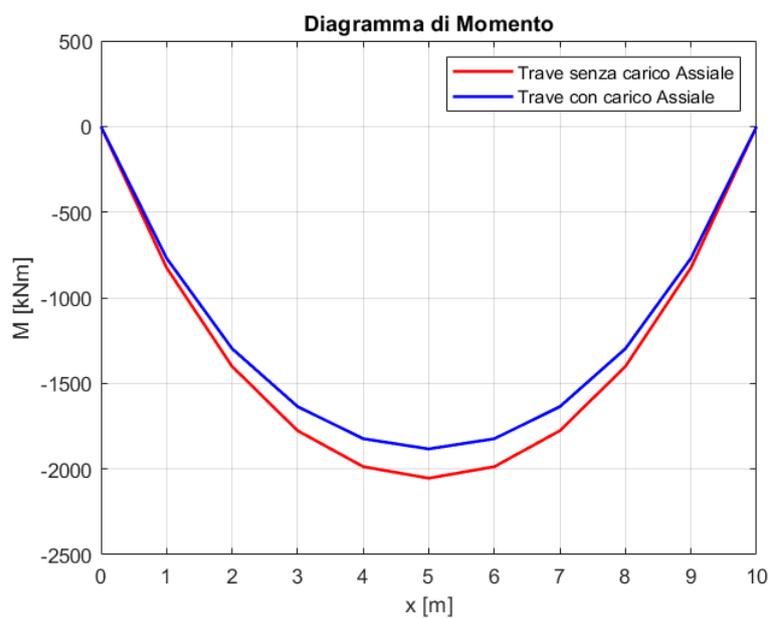


Figura 4.35: Confronto del diagramma di momento tra la trave con carico assiale e quella senza

---

## Capitolo 5

# Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua

Come detto in precedenza, la configurazione innovativa che si sta andando a realizzare prevede l'utilizzo di molle o smorzatori, a tal proposito, sfruttando i modelli di Winkler del capitolo precedente, verranno ricavati dei modelli matematici per simulare l'impatto con l'acqua di piastre piatte su fondazione elastica e soggette a carichi assiali al fine di valutare la variazione di pressione assorbita al variare della flessibilità. I risultati ottenuti risolvendo il modello matematico in maniera numerica saranno poi validati confrontandoli con i risultati ottenuti dalla risoluzione di modelli FEM realizzati con PATRAN e NASTRAN.

### 5.1 Piastra su fondazione elastica che impatta con l'acqua

Come nel capitolo 2, le piastre che verranno analizzate avranno due lati appoggiati e due lati liberi, per questo anche in questo caso si può sfruttare l'analogia con la trave e costruire il modello matematico considerando una trave con un materiale avente modulo elastico  $E^* = E/(1 - \nu^2)$ .

Le piastre che verranno analizzate nel seguente capitolo sono la "Piastra 1" e la "Piastra 3" del capitolo 2.

Il modello matematico di una trave su fondazione elastica che impatta con l'acqua è il seguente:

$$(m_s + m_{zz})\ddot{w}(x, t) + E^* I \frac{d^4 w}{dx^4} + kw(x, t) = p_r(t)b \quad (5.1)$$

	a [m]	b [m]	h [m]	Peso [Kg]	E [GPa]	$\nu$
Piastra 1	0.40005	0.66675	0.00635	13.11	207	0.3
Piastra 3	0.508	0.673	0.00635	16.31	207	0.3

Tabella 5.1: Dimensioni e proprietà della piastra 1 e della piastra 3

Dove  $m_s$  e  $m_{zz}$  sono rispettivamente la massa della struttura e l'added mass per unità di lunghezza, date dalle relazioni (2.11) e (2.12),  $k$  è il modulo della fondazione elastica espresso in  $kg/m^2$  e  $p_r(t)$  è la pressione rigida data dalla (2.8).

### 5.1.1 Soluzione numerica del modello matematico

Per la soluzione numerica della (5.1) si è utilizzato il metodo di Galerkin. La soluzione dell'equazione viene scritta come  $w(x, t) = Y(t)\phi(x)$ , dove  $\phi(x)$  è la funzione di forma. Anche in questo caso si considera solo il primo modo di vibrare e quindi  $\phi(x)$  è data dalla (2.14).

Sostituendo tutto nella (5.1) e applicando il metodo di Galerkin otteniamo:

$$A(m_s + m_{zz})Y''(t) + DkY(t) + BEIY(t) = Cp_r(t)b \quad (5.2)$$

Dove i coefficienti  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono gli stessi del capitolo 2, mentre  $D$  è dato dalla seguente relazione:

$$D = \int_0^l \phi(x)\phi(x)dx$$

Risolvendo la (5.1) utilizzando la funzione "ode 45" di Matlab, avendo imposto come condizioni iniziali quelle di spostamento e velocità nulli, otteniamo i valori di spostamento, velocità, accelerazione, pressione di iterazione e pressione totale in mezzera al variare del tempo.

Dai risultati, che saranno mostrati nelle pagine seguenti, si vede che all'aumentare della rigidezza  $k$  lo spostamento in mezzera e l'accelerazione diminuiscono. Al diminuire dell'accelerazione corrisponde una diminuzione della pressione di iterazione e quindi un aumento della pressione totale.

I risultati ottenuti dalla soluzione numerica per la "Piastra 1" e la "Piastra 3" con una velocità di impatto di  $V_0 = 1.5 m/s$  e al variare della rigidezza  $k$  sono i seguenti:

## 5. Piastra su fondazione elastica che impatta con l'acqua

---

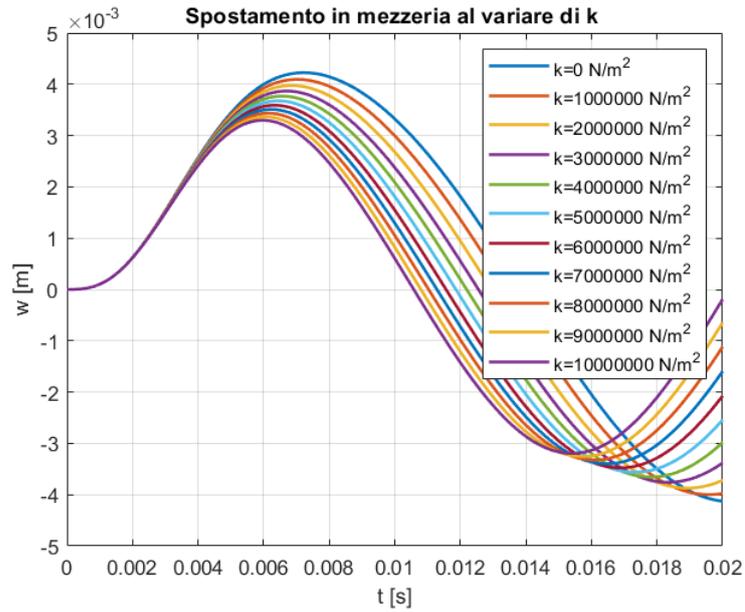


Figura 5.1: Spostamento in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica al variare della rigidezza  $k$  e con velocità di impatto di 1.5 m/s

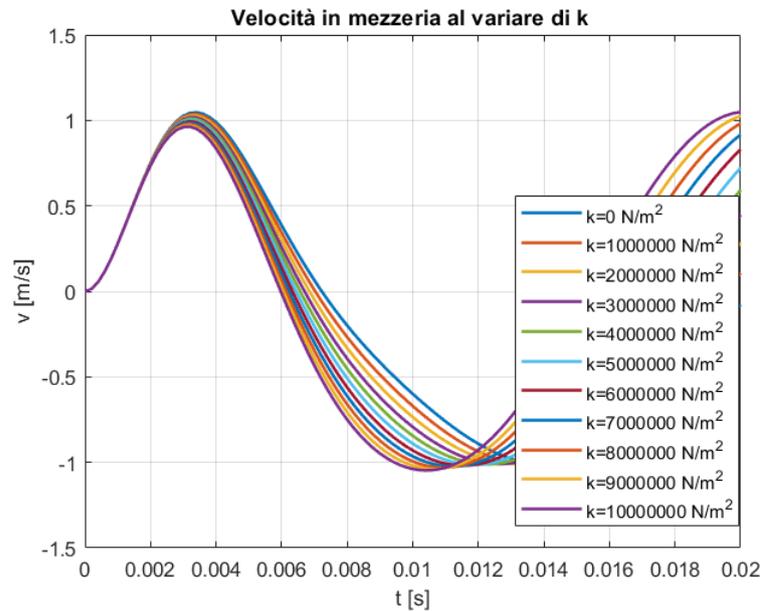


Figura 5.2: velocità in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica al variare della rigidezza  $k$  e con velocità di impatto di 1.5 m/s

## 5. Piastra su fondazione elastica che impatta con l'acqua

---

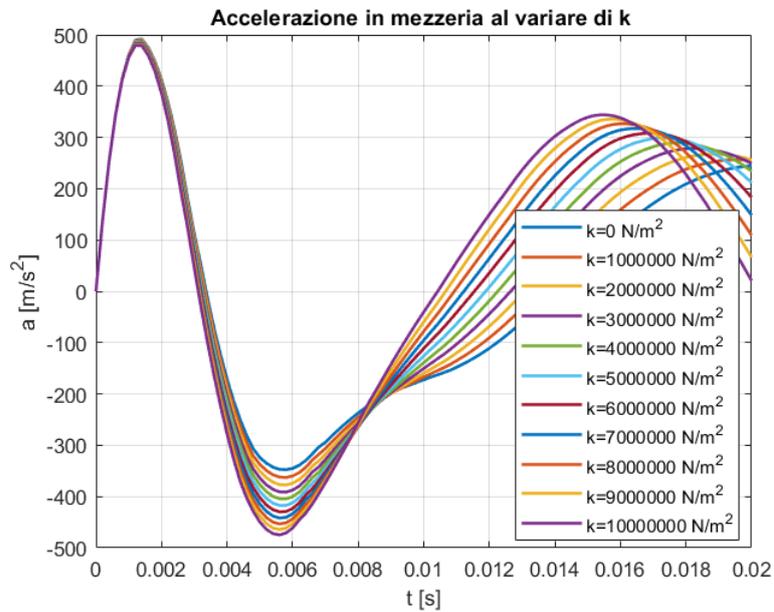


Figura 5.3: Accelerazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica al variare della rigidezza  $k$  e con velocità di impatto di 1.5 m/s

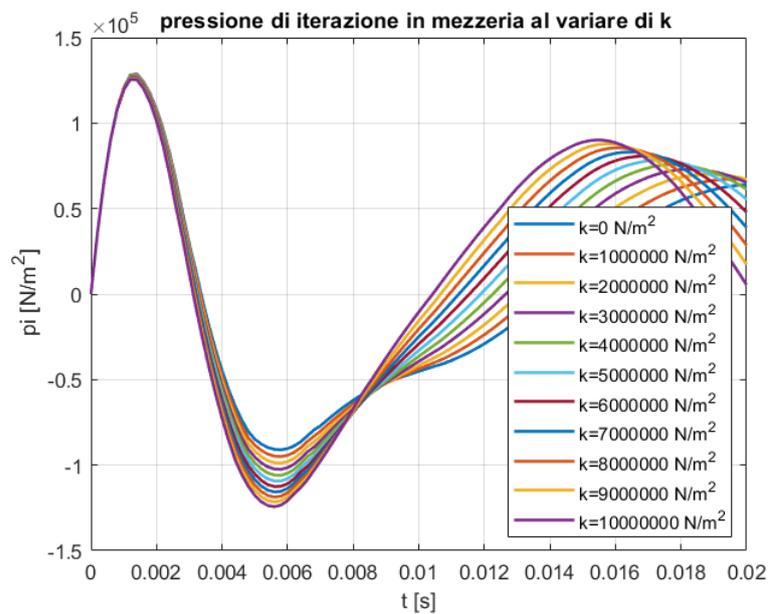


Figura 5.4: Pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica al variare della rigidezza  $k$  e con velocità di impatto di 1.5 m/s

## 5. Piastra su fondazione elastica che impatta con l'acqua

---

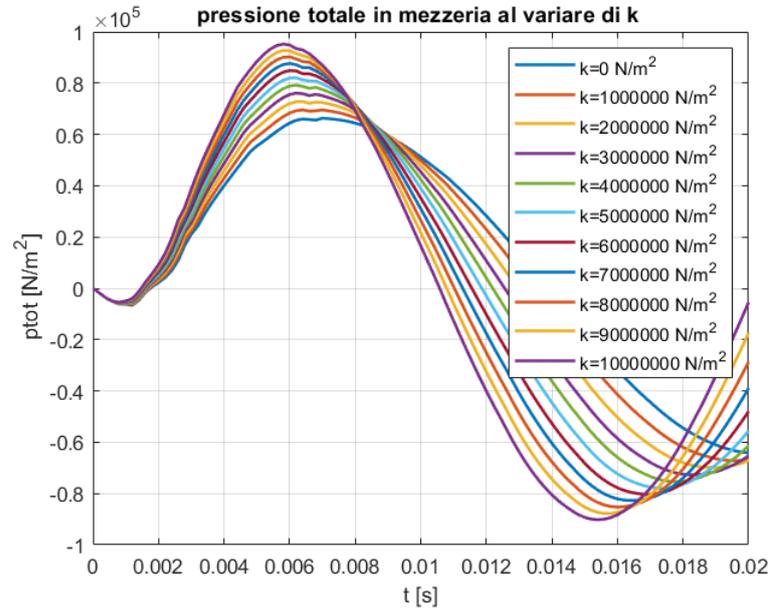


Figura 5.5: Pressione totale in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica al variare della rigidità  $k$  e con velocità di impatto di  $1.5 \text{ m/s}$

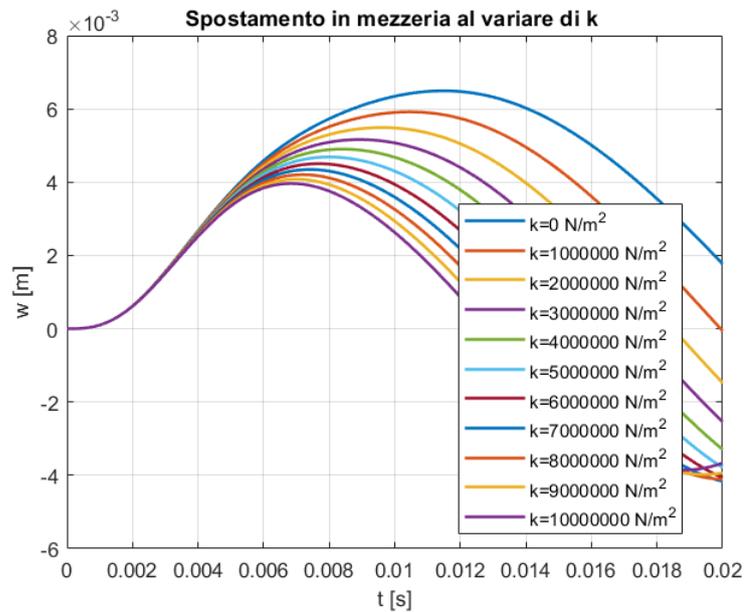


Figura 5.6: Spostamento in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica al variare della rigidità  $k$  e con velocità di impatto di  $1.5 \text{ m/s}$

## 5. Piastra su fondazione elastica che impatta con l'acqua

---

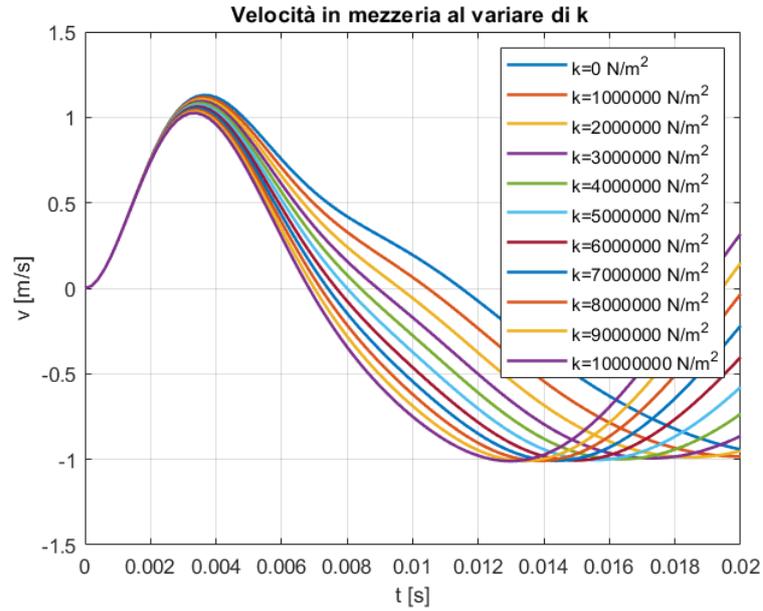


Figura 5.7: velocità in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica al variare della rigidità  $k$  e con velocità di impatto di 1.5 m/s

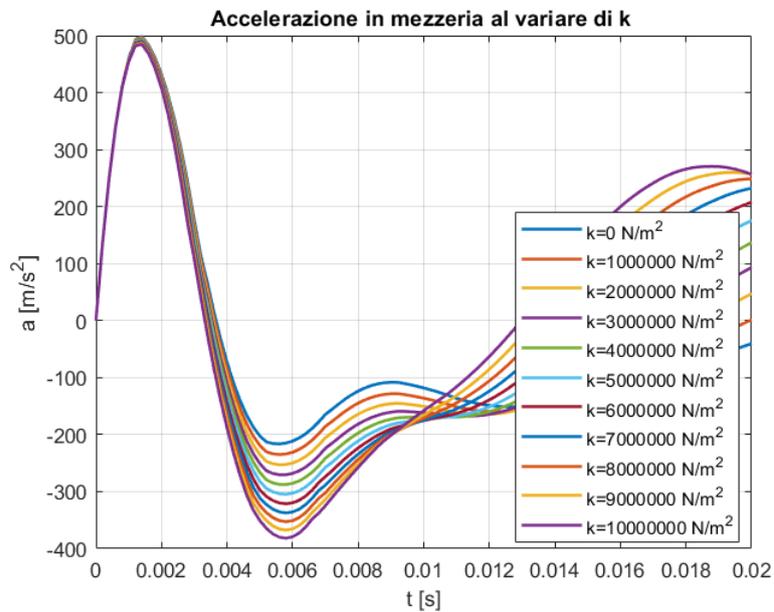


Figura 5.8: Accelerazione in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica al variare della rigidità  $k$  e con velocità di impatto di 1.5 m/s

## 5. Piastra su fondazione elastica che impatta con l'acqua

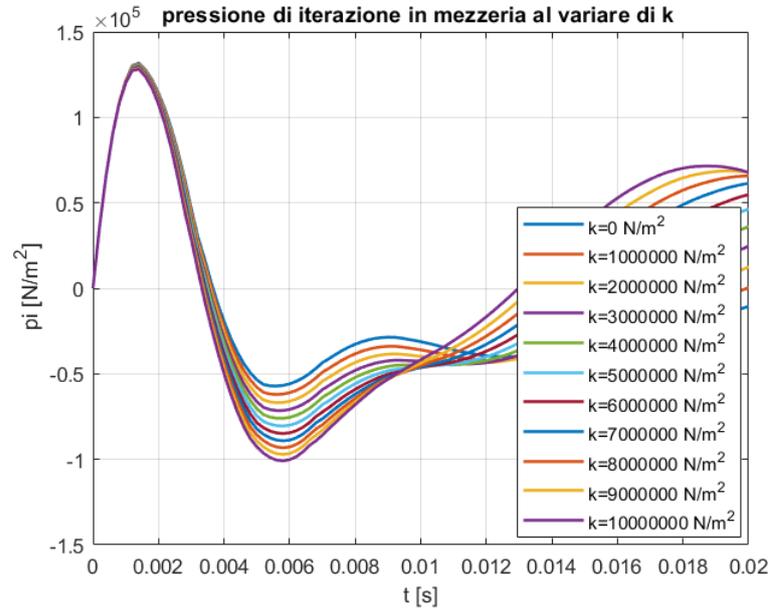


Figura 5.9: Pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica al variare della rigidezza  $k$  e con velocità di impatto di 1.5 m/s

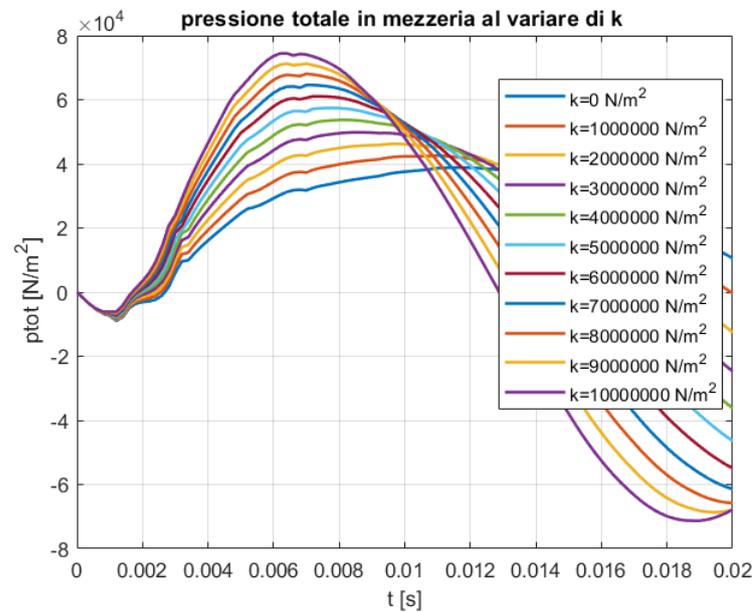


Figura 5.10: Pressione totale in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica al variare della rigidezza  $k$  e con velocità di impatto di 1.5 m/s

### 5.1.2 Confronto con modello FEM

Per validare il modello numerico i risultati ottenuti per la "Piastra 1" e la "Piastra 3" sono stati confrontati con i risultati ottenuti dalla soluzione di un modello FEM realizzato con i software PATRAN e NASTRAN.

Per coerenza con il modello numerico anche in quello FEM la piastra è stata modellizzata come una trave.

Come nel capitolo precedente nell'assegnare le proprietà si è tenuto conto della correzione del modulo elastico e della massa aggiuntiva dovuta all'added mass:

$$E_{patran} = E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

$$\rho_{patran} = (m_s + m_{zz})/A$$

Per quanto riguarda la fondazione elastica, questa è stata modellizzata come dieci molle equidistanti. La rigidezza di queste molle, per i ragionamenti fatti nel capitolo 4, è espressa come segue:

$$k_{patran} = kf$$

Dove  $k$  è la rigidezza della fondazione elastica espressa in  $N/m^2$  e  $f$  è la distanza tra le molle.

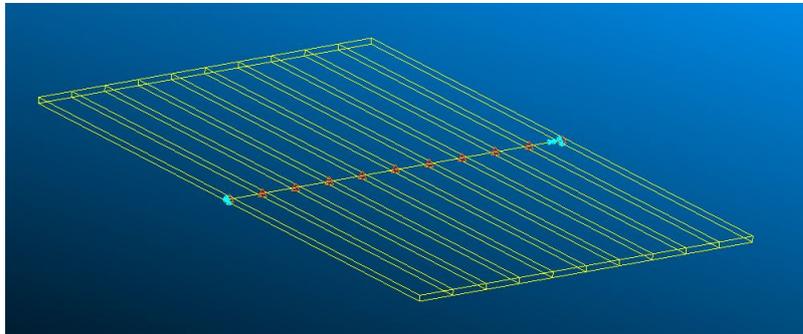


Figura 5.11: Modellizzazione della piastra 1 su fondazione elastica sul software Patran

Come si vede dalle figure seguenti, i risultati ottenuti dalla soluzione FEM sono molto simili a quelli ottenuti dalla soluzione numerica con il software Matlab, a meno di oscillazioni dovute al fatto che nella soluzione numerica si è considerato solo il primo modo di vibrare.

I risultati ottenuti dal modello FEM per la "Piastra 1" e la "Piastra 3" su una fondazione elastica con rigidezza  $k = 4000000 N/m^2$  e velocità di impatto  $1.9 m/s$  sono i seguenti:

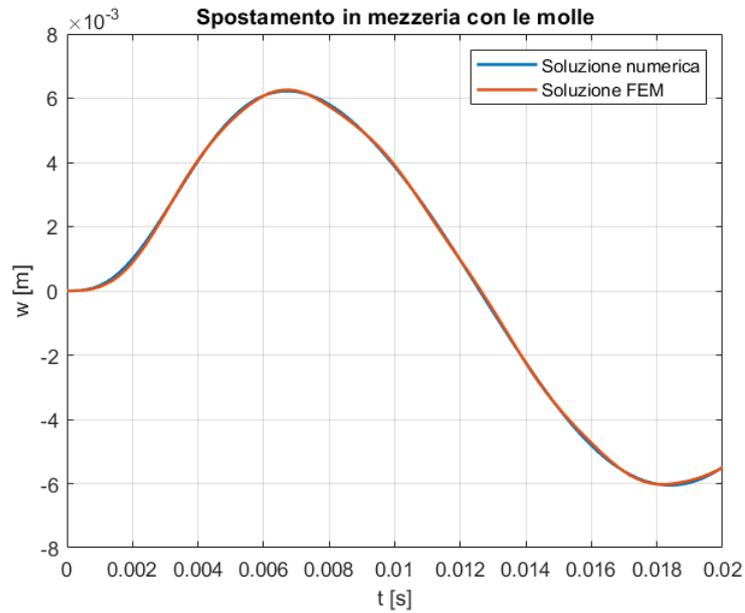


Figura 5.12: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dello spostamento in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

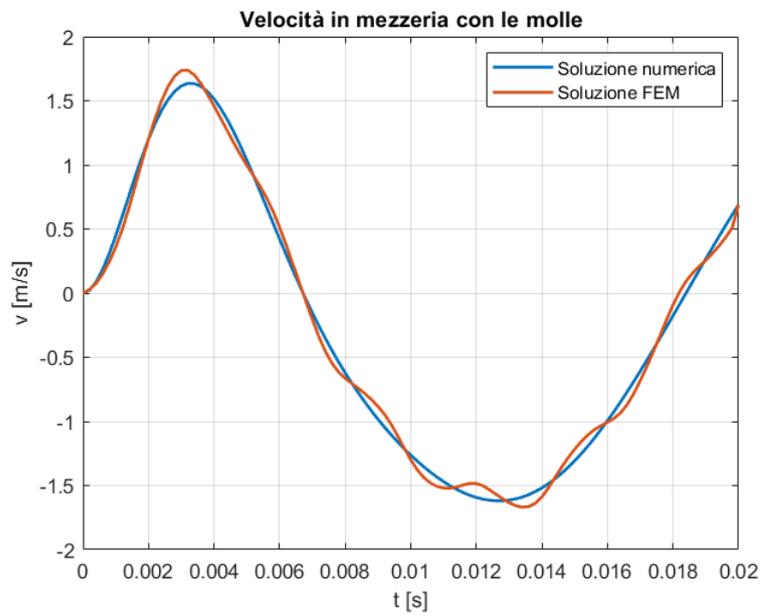


Figura 5.13: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della velocità in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

## 5. Piastra su fondazione elastica che impatta con l'acqua

---

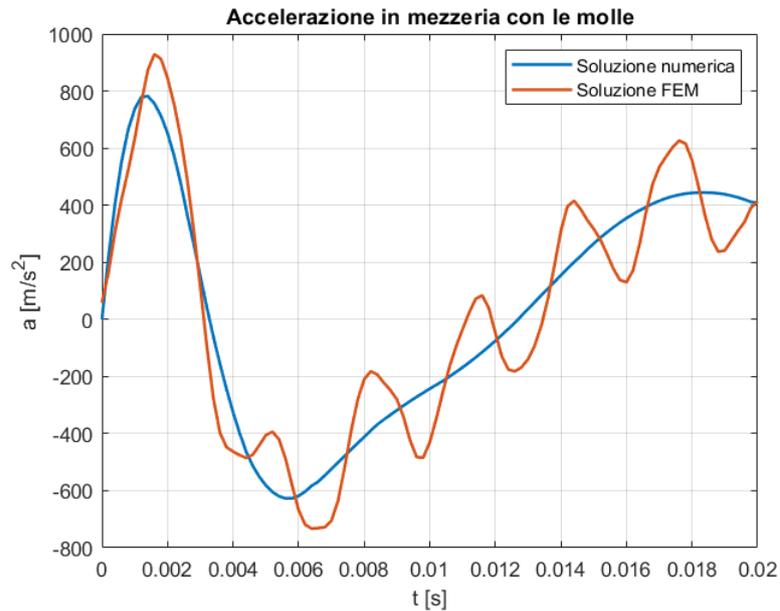


Figura 5.14: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dell'accelerazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

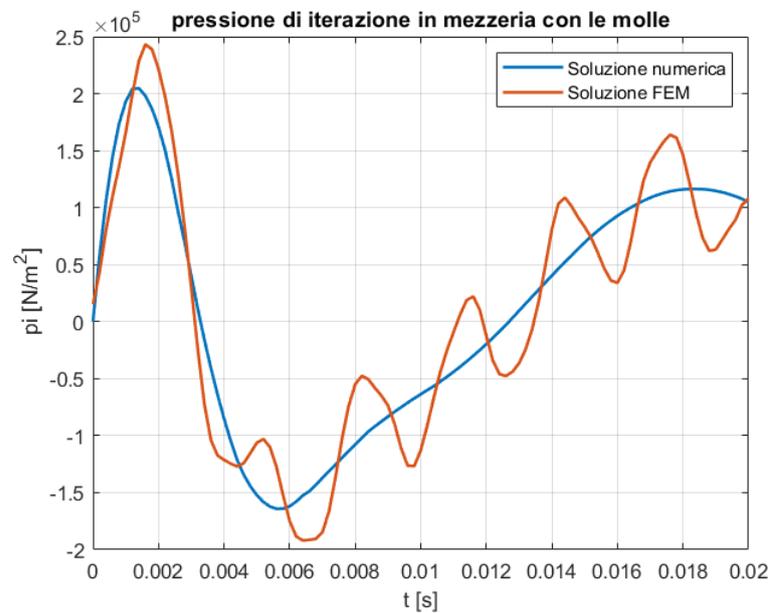


Figura 5.15: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

## 5. Piastra su fondazione elastica che impatta con l'acqua

---

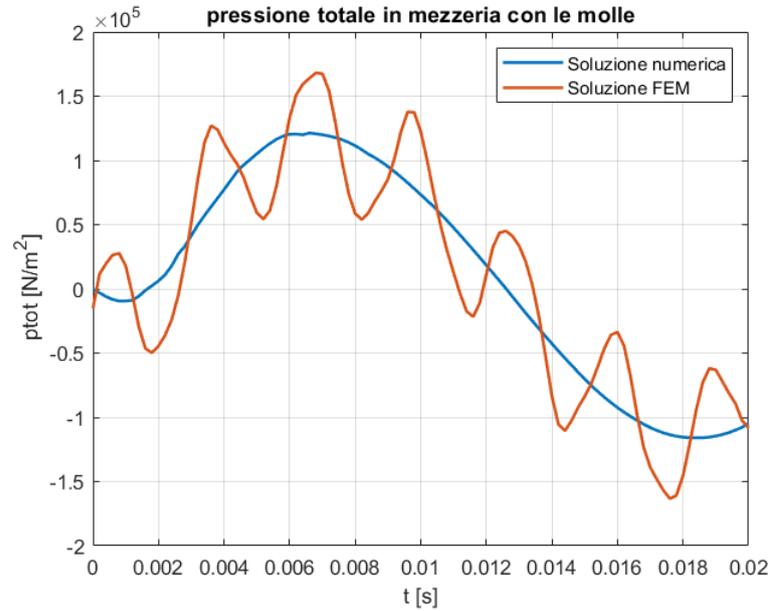


Figura 5.16: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione totale in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 N/m^2$  e con velocità di impatto di  $1.9 m/s$

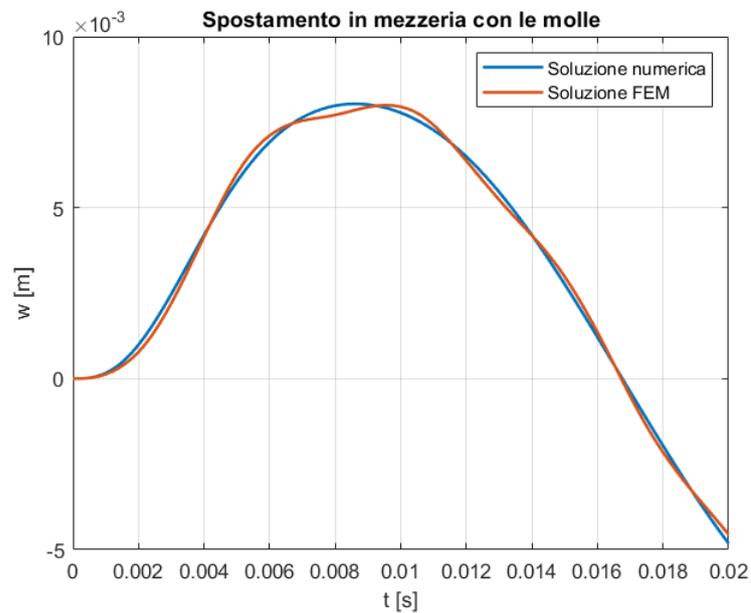


Figura 5.17: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dello spostamento in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 N/m^2$  e con velocità di impatto di  $1.9 m/s$

## 5. Piastra su fondazione elastica che impatta con l'acqua

---

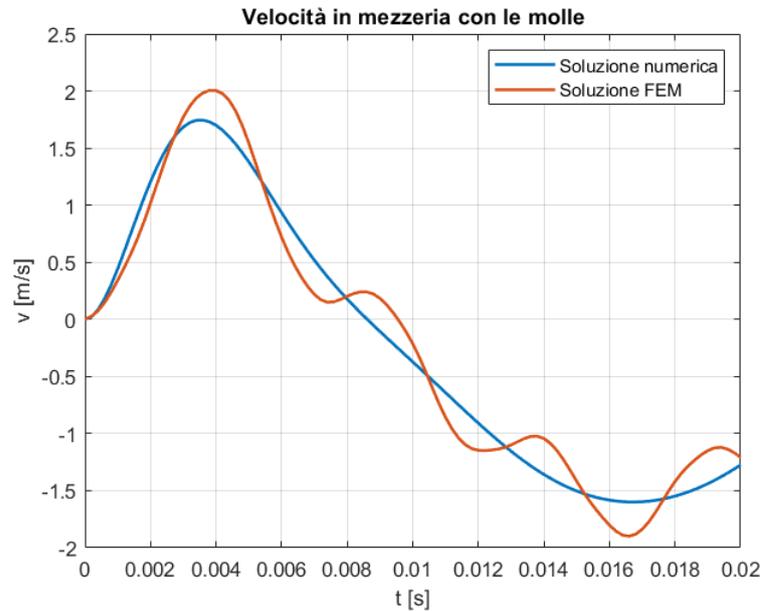


Figura 5.18: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della velocità in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

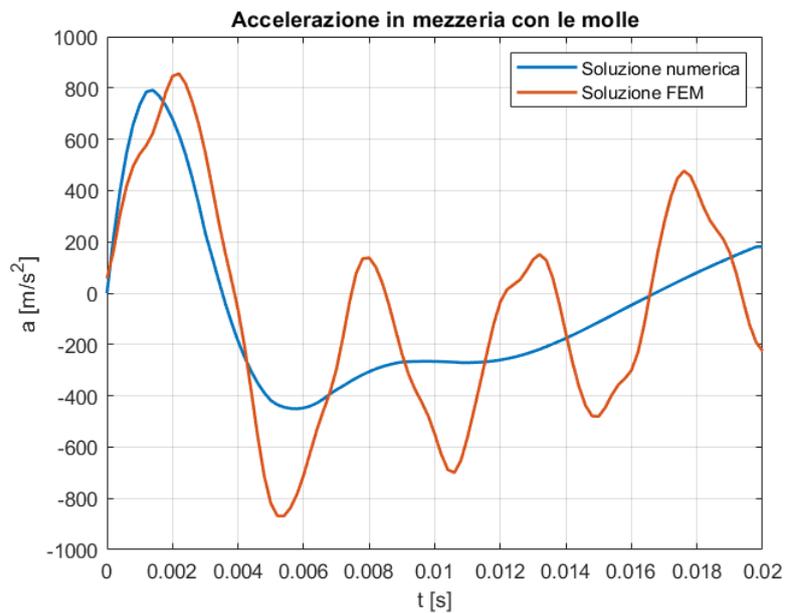


Figura 5.19: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dell'accelerazione in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

## 5. Piastra su fondazione elastica che impatta con l'acqua

---

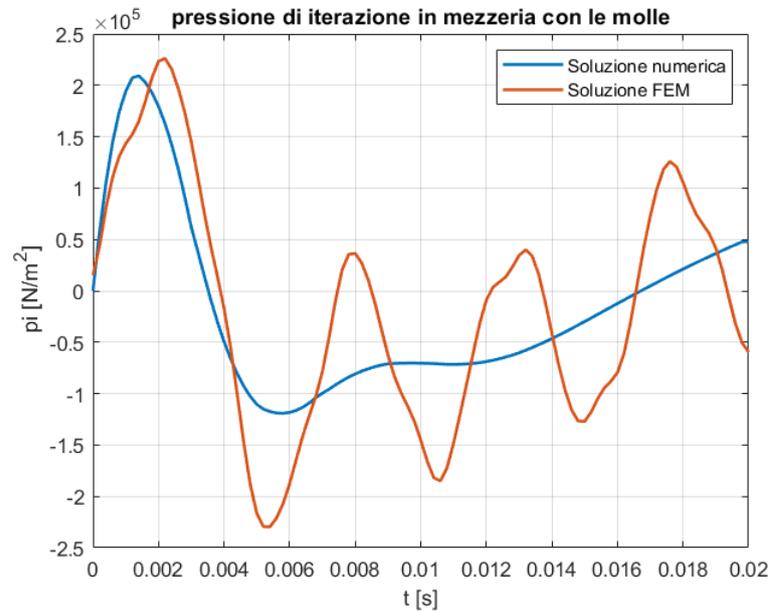


Figura 5.20: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 N/m^2$  e con velocità di impatto di  $1.9 m/s$

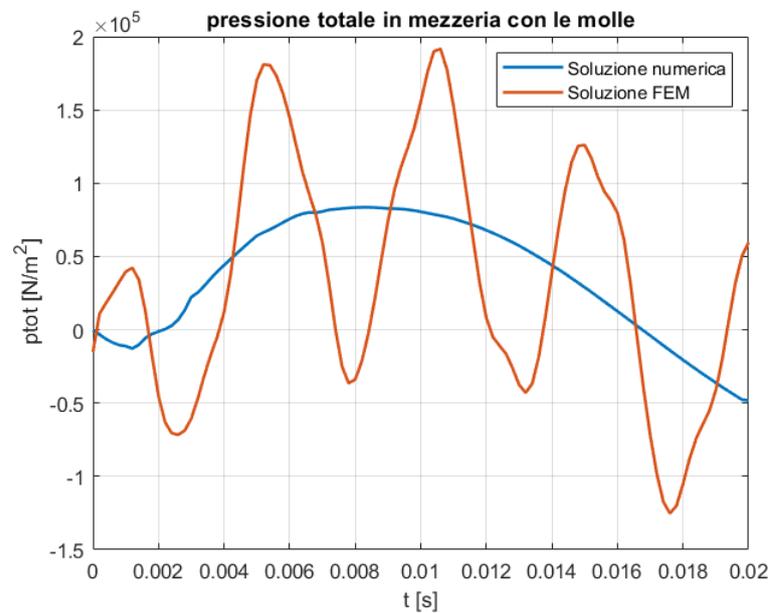


Figura 5.21: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione totale in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 N/m^2$  e con velocità di impatto di  $1.9 m/s$

## 5.2 Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua

Anche in questo caso le piastre analizzate hanno due lati semplicemente appoggiati e due liberi, per questo, anche in questo caso, verrà sfruttata l'analogia con la trave effettuando la correzione al modulo elastico.

Il modello matematico per una trave su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua è il seguente:

$$(m_s + m_{zz})\ddot{w}(x, t) + E^*I \frac{d^4w}{dx^4} + kw(x, t) + N \frac{d^2w}{dx^2} = p_r(t)b \quad (5.3)$$

Dove  $N$  è il carico assiale espresso in N.

Come nel caso precedente le analisi saranno effettuate sulla "Piastra 1" e la "Piastra 3" le cui misure e proprietà sono nella tabella (5.1).

### 5.2.1 Soluzione numerica del modello matematico

La soluzione numerica della (5.3) è stata ottenuta applicando il metodo di Galerkin considerando solo il primo modo di vibrare.

Applicando il metodo di Galerkin, in base ai ragionamenti dei capitoli precedenti, la (5.3) può essere scritta come:

$$A(m_s + m_{zz})Y''(t) + DkY(t) + BEIY(t) + GNY(t) = Cp_r(t)b \quad (5.4)$$

Dove i coefficienti  $A, B, C$  e  $D$  sono quelli descritti in precedenza, mentre il coefficiente  $G$  è dato dalla seguente relazione:

$$G = \int_0^l \phi''(x)\phi(x)dx$$

Risolvendo la (5.4) utilizzando la funzione "ode 45" di Matlab, imponendo come condizioni iniziali ( $t=0$ ) quelle di spostamento e velocità nulli, otteniamo i valori di spostamento, velocità, accelerazione, pressione di iterazione e pressione totale in mezz'ora al variare del tempo.

Come si vede dai grafici seguenti, sia per la piastra 1 che per la piastra 3, all'aumentare del carico assiale diminuiscono lo spostamento e l'accelerazione che fanno diminuire la pressione di iterazione, di conseguenza vediamo che la pressione totale aumenta.

I risultati ottenuti dalla soluzione per la "piastra 1" e la "piastra 3" con velocità di impatto  $V_0 = 1.5 \text{ m/s}$ ,  $k = 4000000 \text{ N/m}^2$  e al variare del carico assiale  $N$  sono i seguenti:

5. Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua

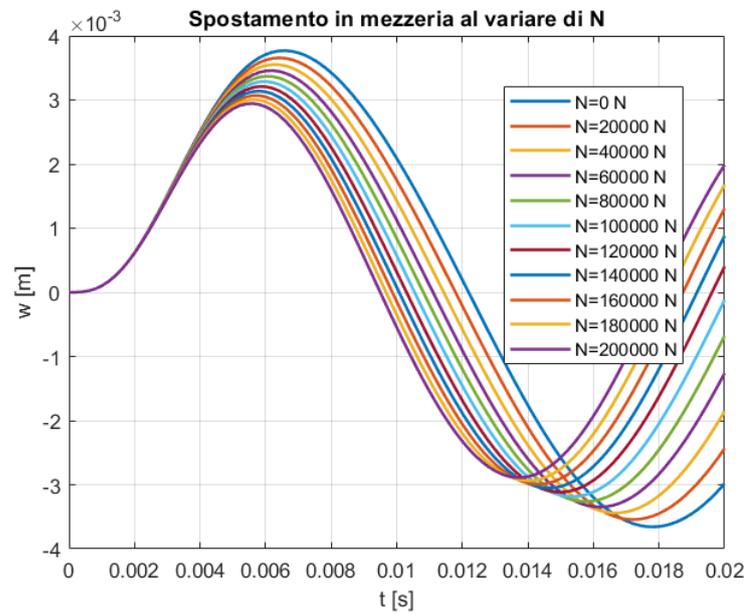


Figura 5.22: Spostamento in mezzeria per la piastra 1 al variare del carico assiale  $N$ , su fondazione elastica con rigidezza  $4000000 \text{ N/m}^2$  e velocità di impatto di  $1.5 \text{ m/s}$

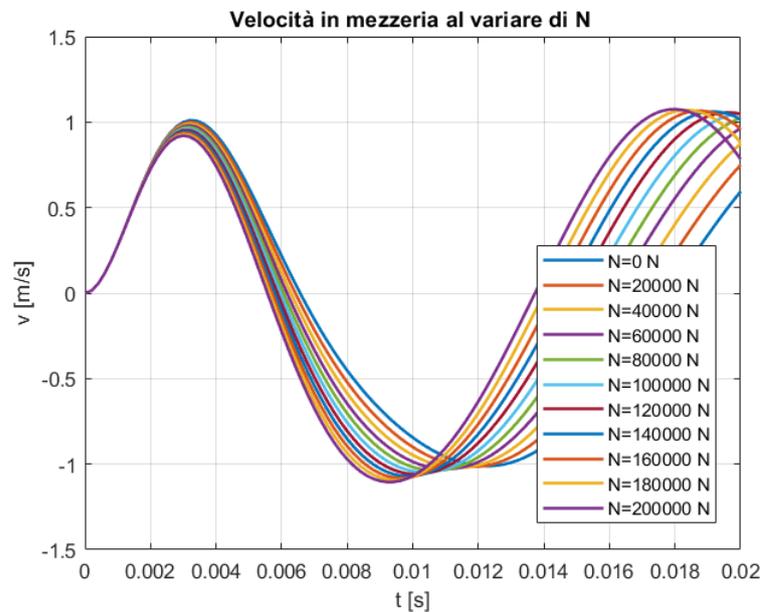


Figura 5.23: Velocità in mezzeria per la piastra 1 al variare del carico assiale  $N$ , su fondazione elastica con rigidezza  $4000000 \text{ N/m}^2$  e velocità di impatto di  $1.5 \text{ m/s}$

5. Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua

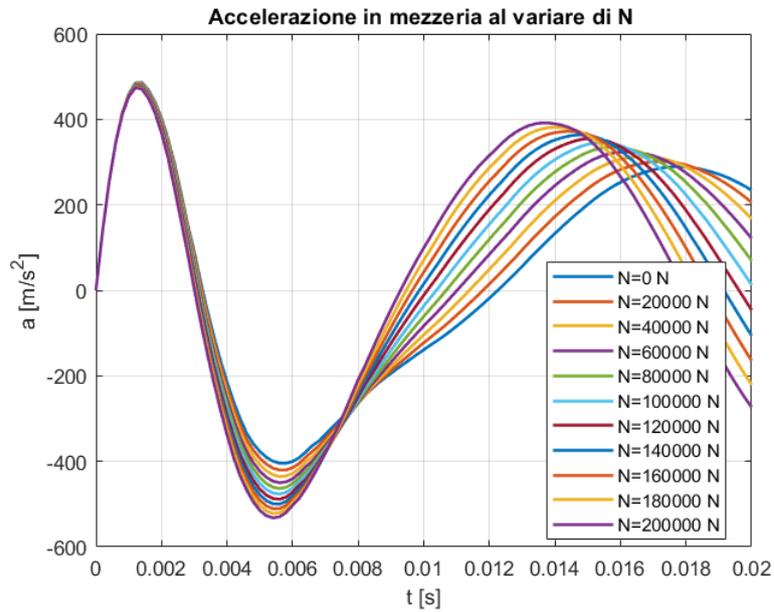


Figura 5.24: Accelerazione in mezzeria per la piastra 1 al variare del carico assiale  $N$ , su fondazione elastica con rigidezza  $4000000 \text{ N/m}^2$  e velocità di impatto di  $1.5 \text{ m/s}$

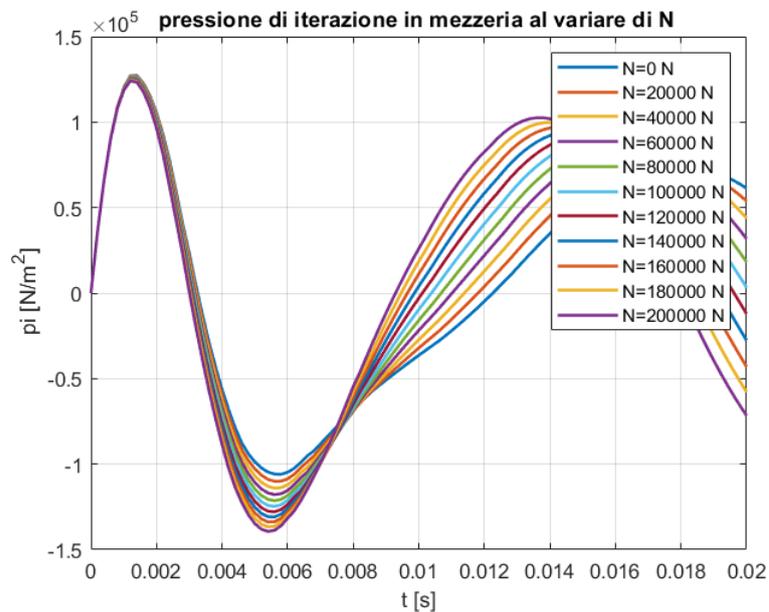


Figura 5.25: Pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 1 al variare del carico assiale  $N$ , su fondazione elastica con rigidezza  $4000000 \text{ N/m}^2$  e velocità di impatto di  $1.5 \text{ m/s}$

5. Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua

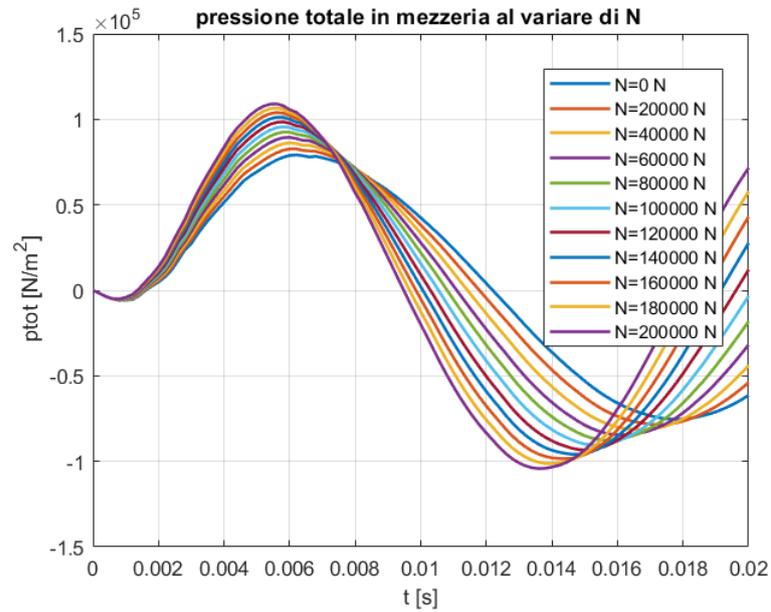


Figura 5.26: Pressione totale in mezzeria per la piastra 1 al variare del carico assiale  $N$ , su fondazione elastica con rigidezza  $4000000 \text{ N/m}^2$  e velocità di impatto di  $1.5 \text{ m/s}$

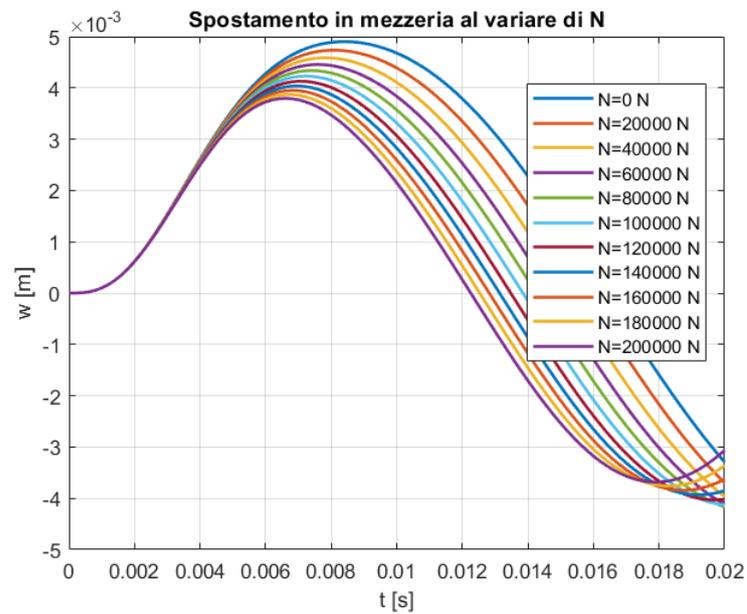


Figura 5.27: Spostamento in mezzeria per la piastra 3 al variare del carico assiale  $N$ , su fondazione elastica con rigidezza  $4000000 \text{ N/m}^2$  e velocità di impatto di  $1.5 \text{ m/s}$

5. Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua

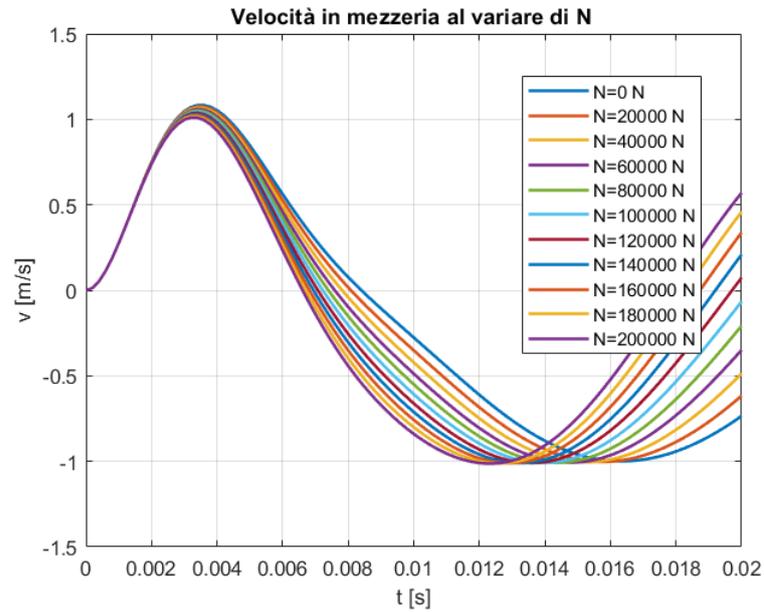


Figura 5.28: Velocità in mezzeria per la piastra 3 al variare del carico assiale  $N$ , su fondazione elastica con rigidezza  $4000000 \text{ N/m}^2$  e velocità di impatto di  $1.5 \text{ m/s}$

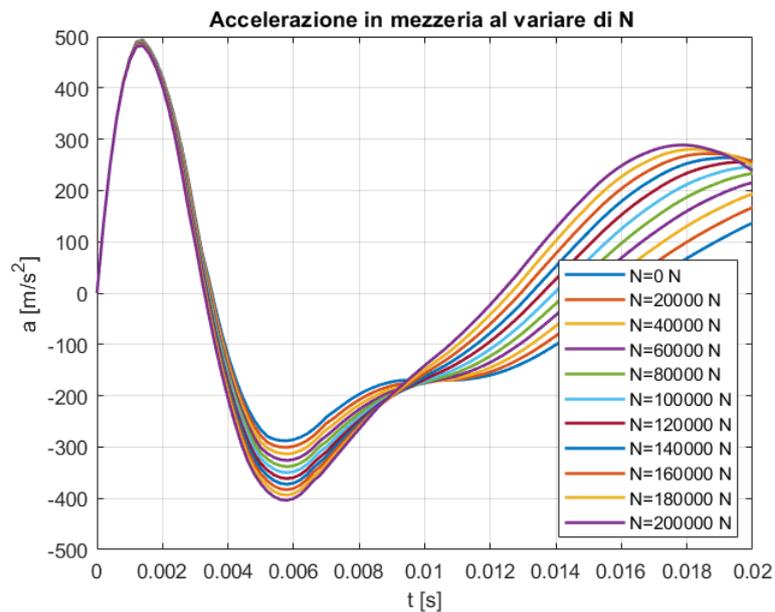


Figura 5.29: Accelerazione in mezzeria per la piastra 3 al variare del carico assiale  $N$ , su fondazione elastica con rigidezza  $4000000 \text{ N/m}^2$  e velocità di impatto di  $1.5 \text{ m/s}$

5. Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua

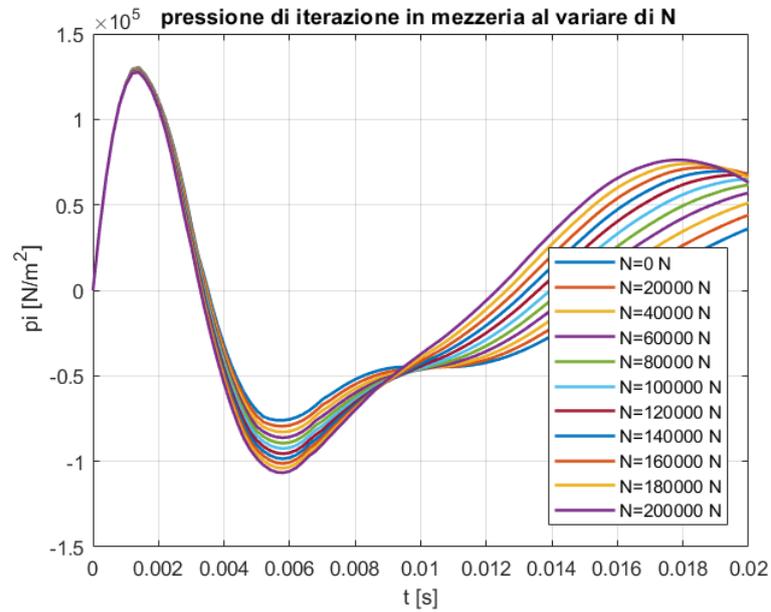


Figura 5.30: Pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 3 al variare del carico assiale  $N$ , su fondazione elastica con rigidezza  $4000000 \text{ N/m}^2$  e velocità di impatto di  $1.5 \text{ m/s}$

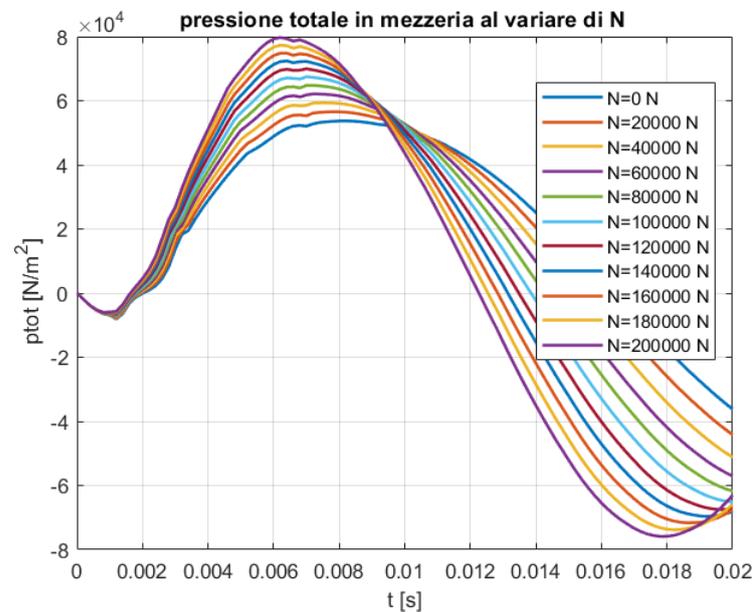


Figura 5.31: Pressione totale in mezzeria per la piastra 3 al variare del carico assiale  $N$ , su fondazione elastica con rigidezza  $4000000 \text{ N/m}^2$  e velocità di impatto di  $1.5 \text{ m/s}$

### 5.2.2 Confronto con modello FEM

Anche in questo caso la soluzione numerica del modello matematico è stata confrontata con un modello FEM.

Il modello FEM è stato fatto sia per la "piastra 1" che per la "piastra 3", ed è stato fatto considerando una fondazione elastica  $k = 4000000 \text{ N/m}^2$ , un carico assiale  $N = 150000 \text{ N}$  e una velocità d'impatto  $V_0 = 1.9 \text{ m/s}$ .

Anche in questo caso la fondazione elastica è stata modellizzata come dieci molle equidistanti e le proprietà del materiale sono state assegnate tenendo conto dell'added mass come descritto nella sotto-sezione 5.1.2.

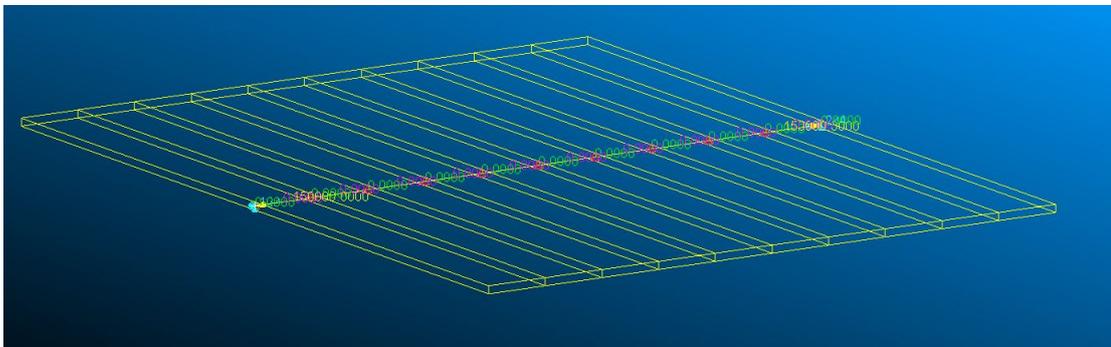


Figura 5.32: Modellizzazione della Piastra 3, su fondazione elastica e soggetta a carico assiale, sul software Patran

Il modello FEM è stato risolto attraverso un'analisi dinamica non lineare imponendo come condizioni iniziali quelle di velocità e spostamento nulli.

Come si vede dalle figure successive, i risultati ottenuti dai due modelli sono molto simili a meno di oscillazioni dovute al fatto che nella soluzione numerica con il metodo di Galerkin si è considerato solo il primo modo di vibrare.

I risultati ottenuti per la "Piastra 1" e la "Piastra 3" sono i seguenti:

5. Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua

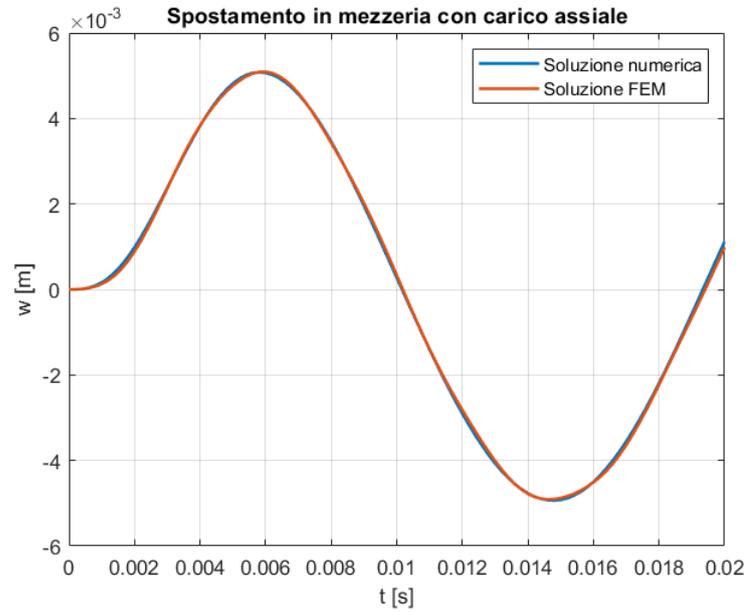


Figura 5.33: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dello spostamento in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$ , sottoposta a carico assiale  $N = 150000 \text{ N}$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

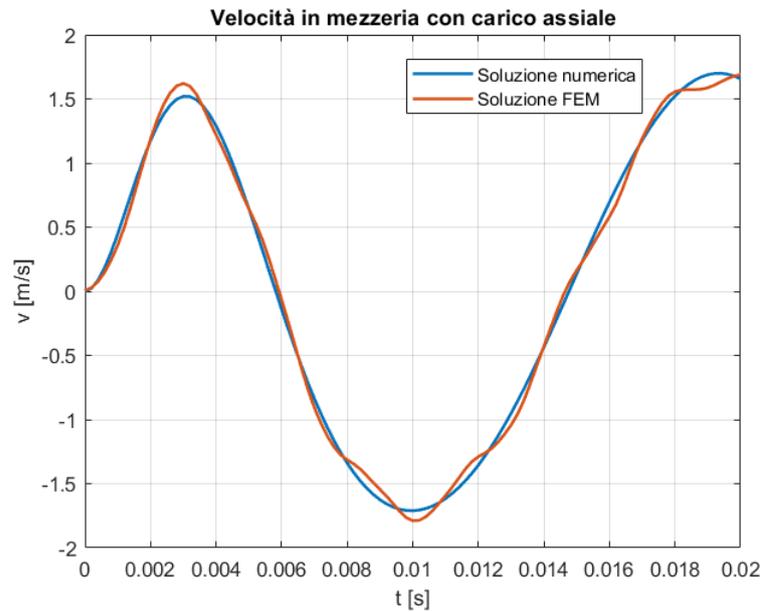


Figura 5.34: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della velocità in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$ , sottoposta a carico assiale  $N = 150000 \text{ N}$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

5. Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua

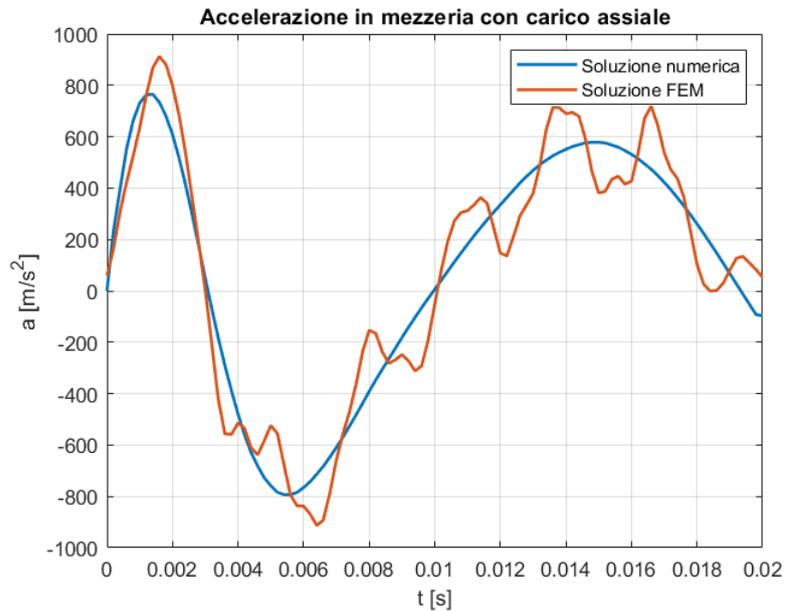


Figura 5.35: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dell'accelerazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$ , sottoposta a carico assiale  $N = 150000 \text{ N}$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

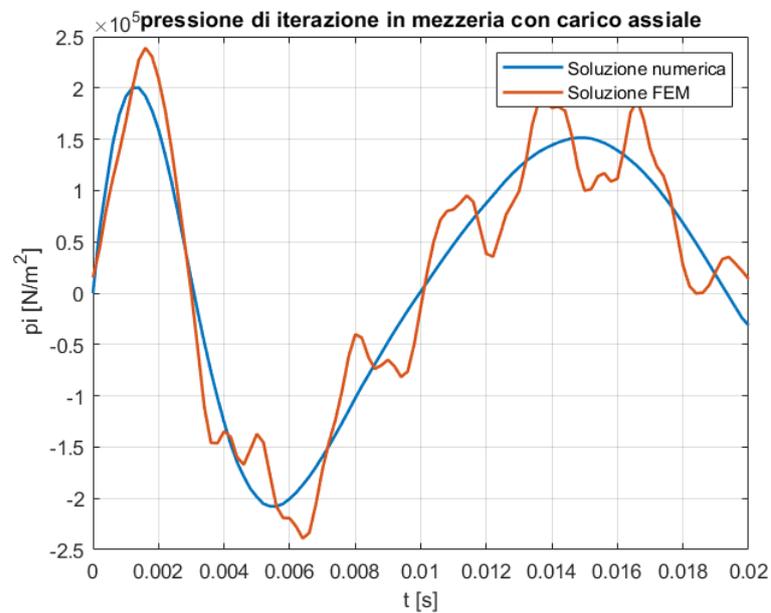


Figura 5.36: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$ , sottoposta a carico assiale  $N = 150000 \text{ N}$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

5. Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua

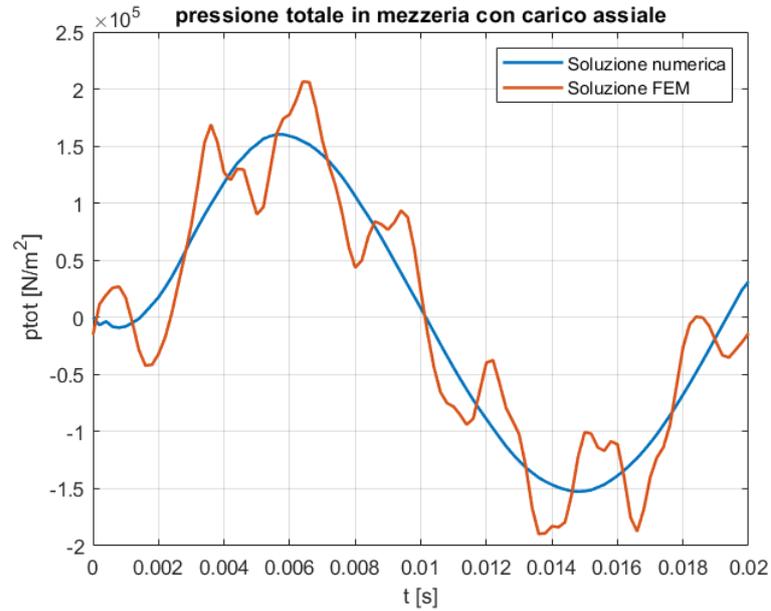


Figura 5.37: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione totale in mezzeria per la piastra 1 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 N/m^2$ , sottoposta a carico assiale  $N = 150000 N$  e con velocità di impatto di  $1.9 m/s$

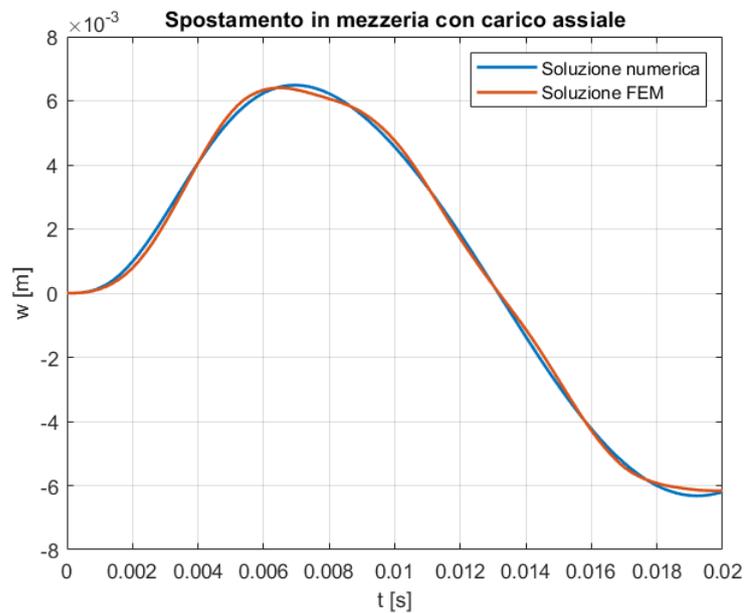


Figura 5.38: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dello spostamento in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 N/m^2$ , sottoposta a carico assiale  $N = 150000 N$  e con velocità di impatto di  $1.9 m/s$

5. Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua

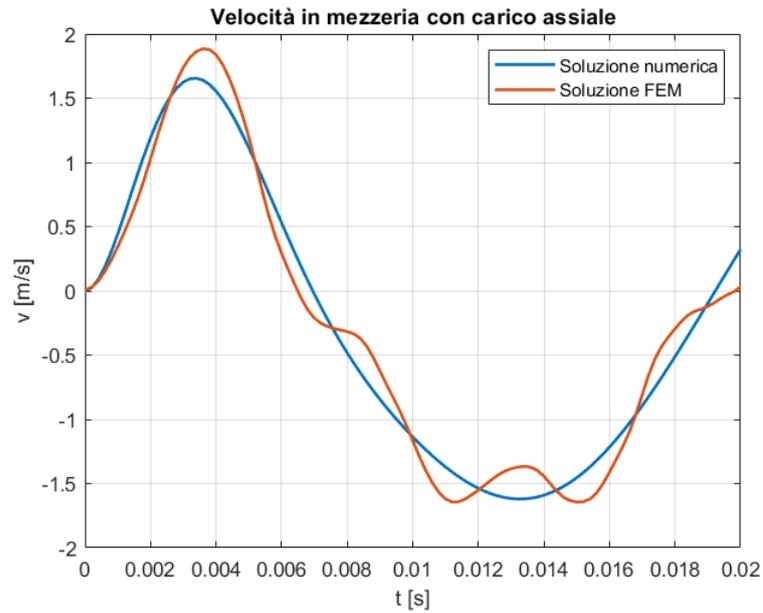


Figura 5.39: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della velocità in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$ , sottoposta a carico assiale  $N = 150000 \text{ N}$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

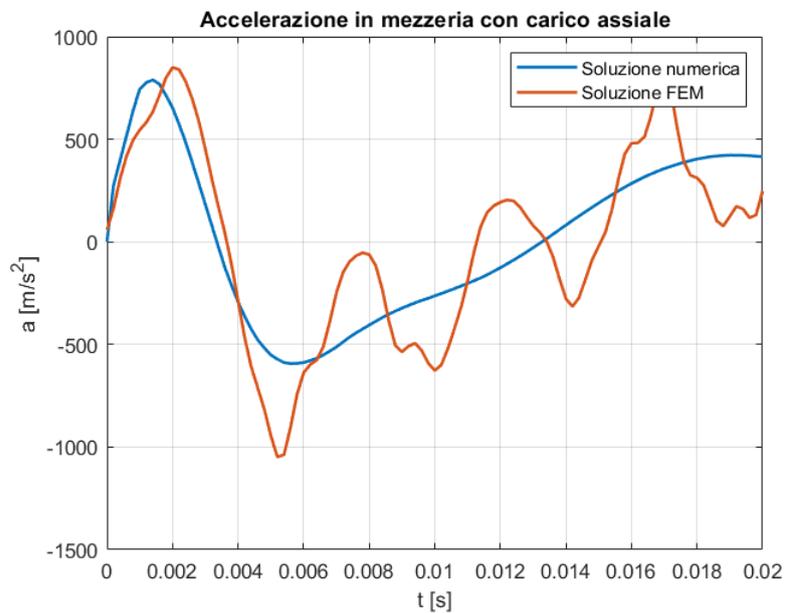


Figura 5.40: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM dell'accelerazione in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$ , sottoposta a carico assiale  $N = 150000 \text{ N}$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

5. Piastra su fondazione elastica e soggetta a carico assiale che impatta con l'acqua

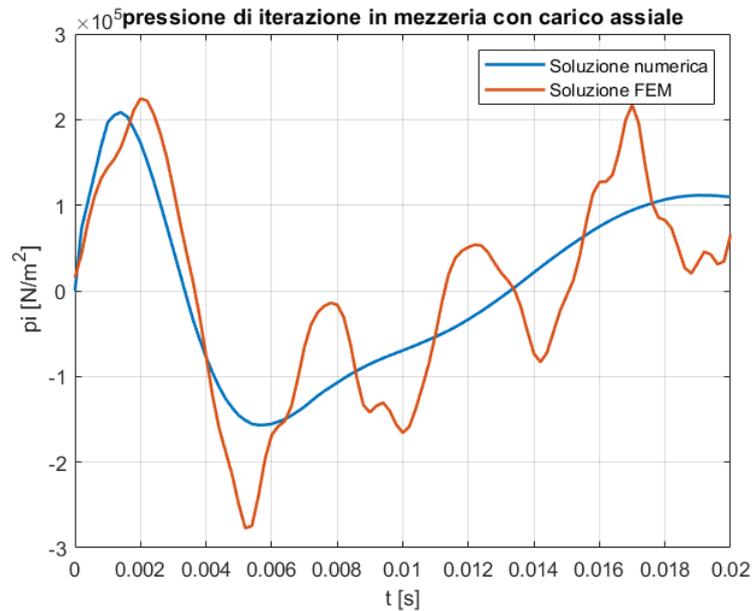


Figura 5.41: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione di iterazione in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$ , sottoposta a carico assiale  $N = 150000 \text{ N}$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

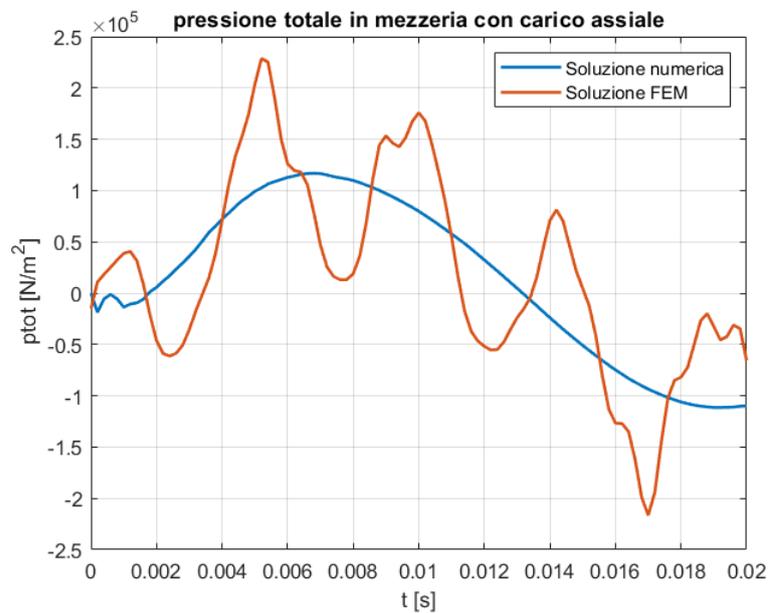


Figura 5.42: Confronto tra la soluzione numerica e quella FEM della pressione totale in mezzeria per la piastra 3 su fondazione elastica con rigidezza di  $4000000 \text{ N/m}^2$ , sottoposta a carico assiale  $N = 150000 \text{ N}$  e con velocità di impatto di  $1.9 \text{ m/s}$

---

## Capitolo 6

# Pannello Sandwich in configurazione innovativa che impatta con l'acqua

In questo capitolo verranno illustrati i risultati ottenuti da analisi FEM fatte con i software PATRAN e NASTRAN per simulare l'impatto con l'acqua di un pannello sandwich convenzionale prima, e in configurazione innovativa poi.

### 6.1 Pannello sandwich convenzionale

Prima di andare a descrivere e a studiare la configurazione innovativa, viene studiata la risposta di un pannello sandwich convenzionale in seguito all'impatto con l'acqua. Il sandwich preso in considerazione è semplicemente appoggiato sui due lati lunghi (b), ha le skin di acciaio e il core in balsa. Le caratteristiche fisiche e geometriche sono riportate nella tabella in seguito:

a [m]	0.508
b [m]	0.673
h [m]	0.017
$h_{skin}$ [m]	0.001
$h_{core}$ [m]	0.015
$E_{skin}$ [Gpa]	207
$\rho_{skin}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7746
$E_{core}$ [Gpa]	3
$\rho_{core}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	160

Tabella 6.1: *Caratteristiche geometriche e fisiche del pannello sandwich convenzionale analizzato*

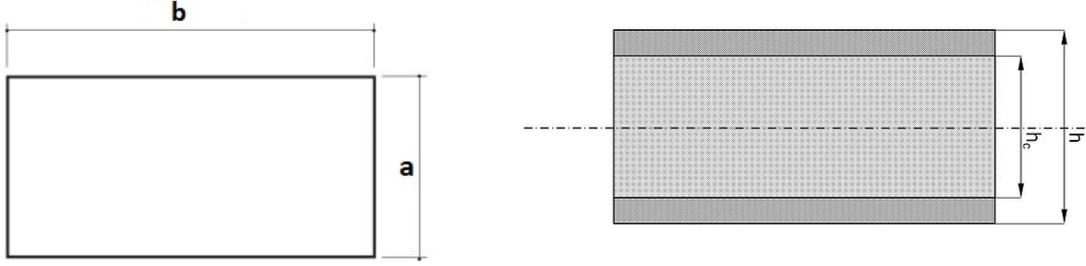


Figura 6.1: Schematizzazione del pannello sandwich preso in esame

L'impatto con l'acqua del pannello sandwich appena descritto è stato simulato attraverso delle analisi FEM effettuate con i software PATRAN e NASTRAN. La modellizzazione sui software è stata fatta, come nei capitoli precedenti, tenendo conto della massa aggiuntiva dovuta alla presenza dell'acqua durante l'impatto. Questa massa aggiuntiva è stata definita in precedenza come added mass ed è data dalla relazione (2.12).

Il peso dell'added mass, pari a  $177 \text{ Kg/m}$  è stato distribuito sulle skin e sul core come segue:

$$\begin{aligned}
 \text{Peso}_{skin} &= \rho_{skin} \cdot \text{Volume}_{skin} = 2.64 \text{ Kg} \\
 \text{Peso}_{core} &= \rho_{core} \cdot \text{Volume}_{core} = 0.82 \text{ Kg} \\
 \text{Peso}_{sandwich} &= 2\text{Peso}_{skin} + \text{Peso}_{core} = 6.11 \text{ Kg} \\
 \% \text{Peso}_{skin} &= \frac{\text{Peso}_{skin}}{\text{Peso}_{totale}} = 0.4329\% \\
 \% \text{Peso}_{core} &= \frac{\text{Peso}_{core}}{\text{Peso}_{totale}} = 0.1341\% \\
 M_{zz_{skin}} &= M_{zz} \cdot \% \text{Peso}_{skin} = 77 \text{ Kg/m} \\
 M_{zz_{core}} &= M_{zz} \cdot \% \text{Peso}_{core} = 23.85 \text{ Kg/m}
 \end{aligned}$$

La densità del materiale del core e delle skin che è stata assegnata ai rispettivi materiali sul software PATRAN è quindi la seguente:

$$\begin{aligned}
 \rho_{patran_{skin}} &= \rho_{skin} + M_{zz_{skin}}/A_{skin} = 122163 \text{ Kg/m}^3 \\
 \rho_{patran_{core}} &= \rho_{core} + M_{zz_{core}}/A_{core} = 2523 \text{ Kg/m}^3
 \end{aligned}$$

Dove  $A_{skin}$  e  $A_{core}$  sono rispettivamente le aree delle sezioni di skin e core espresse dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 A_{skin} &= b \cdot h_{skin} \\
 A_{core} &= b \cdot h_{core}
 \end{aligned}$$

## 6. Pannello sandwich convenzionale

---

Sul software PATRAN, per il pannello sandwich convenzionale, è stato creato sia un modello 2D, utilizzando solo elementi shell e assegnando come materiali dei laminati con gli spessori del sandwich, sia un modello 3D, in cui le skin sono state modellizzate con elementi shell mentre il core con elementi 3D Hex8:

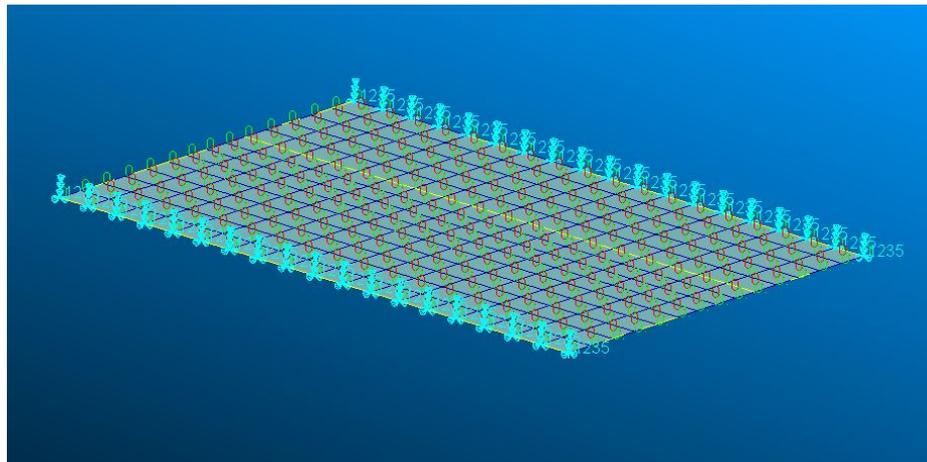


Figura 6.2: Modellizzazione 2D del pannello sandwich convenzionale sul software PATRAN

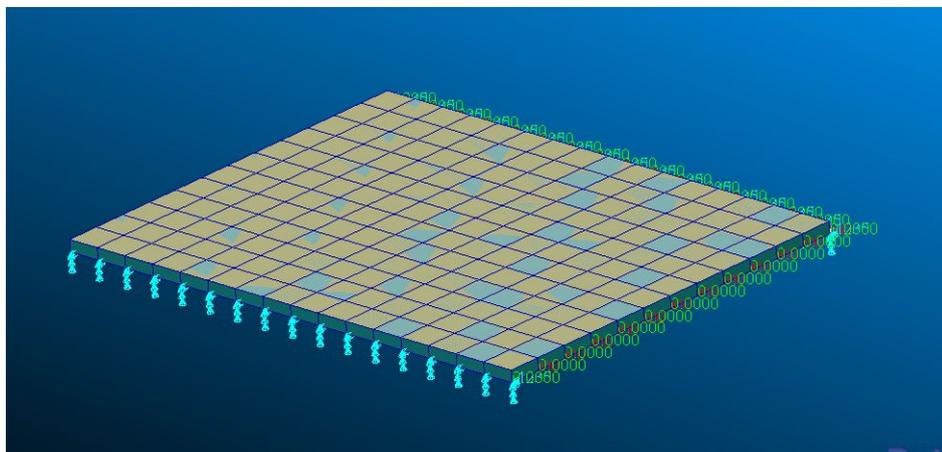


Figura 6.3: Modellizzazione 3D del pannello sandwich convenzionale sul software PATRAN

Per entrambi i casi è stata effettuata un'analisi dinamica imponendo come condizioni iniziali quelle di spostamento e velocità nulli, inoltre, è stato applicato un carico di pressione espresso dalla (2.8), con una velocità di impatto pari a  $1.5\text{m/s}$ . I risultati di spostamento, accelerazione, pressione di iterazione e pressione totale in mezzeria per i due casi sono i seguenti:

## 6. Pannello sandwich convenzionale

---

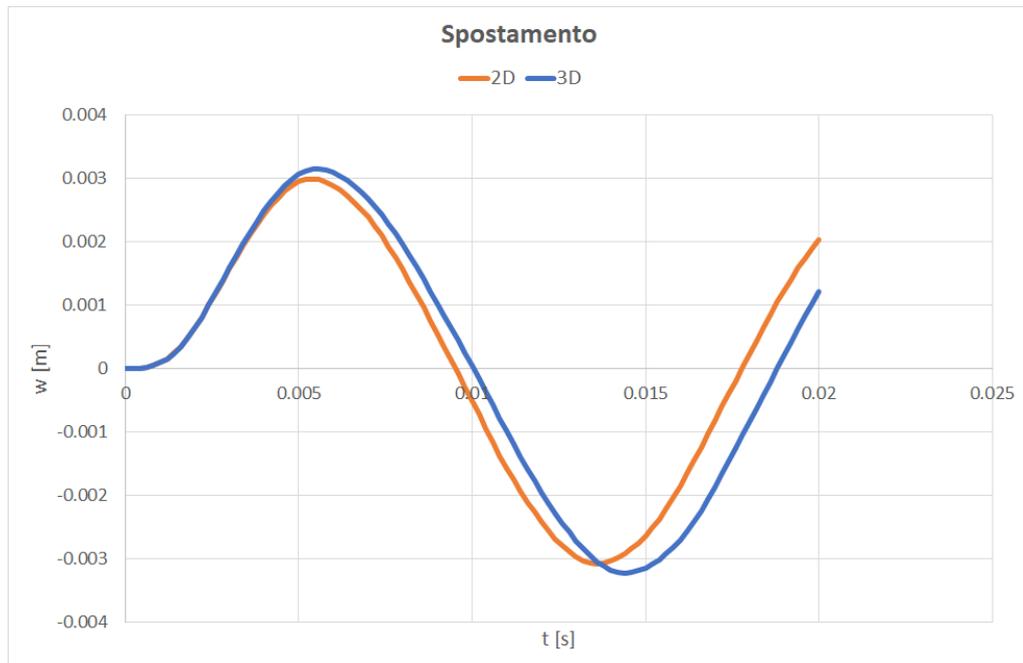


Figura 6.4: Confronto dello spostamento in mezzeria tra il modello 2D e il modello 3D del pannello sandwich convenzionale ottenuto dall'analisi FEM con il software PATRAN con una velocità di impatto di 1.5 m/s

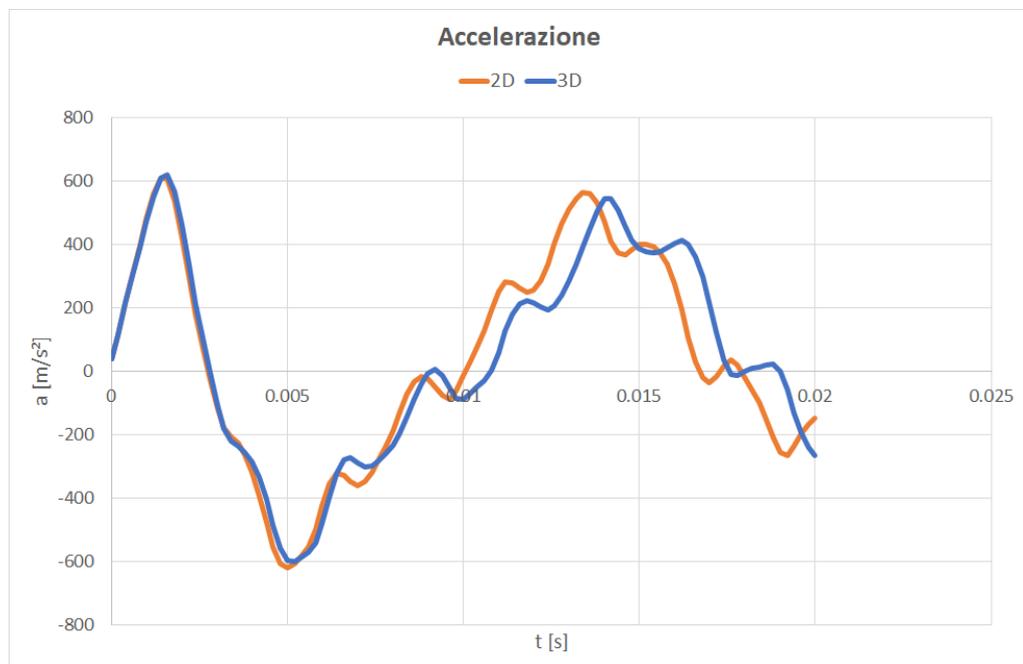


Figura 6.5: Confronto dell'accelerazione in mezzeria tra il modello 2D e il modello 3D del pannello sandwich convenzionale ottenuta dall'analisi FEM con il software PATRAN con una velocità di impatto di 1.5 m/s

## 6. Pannello sandwich convenzionale

---

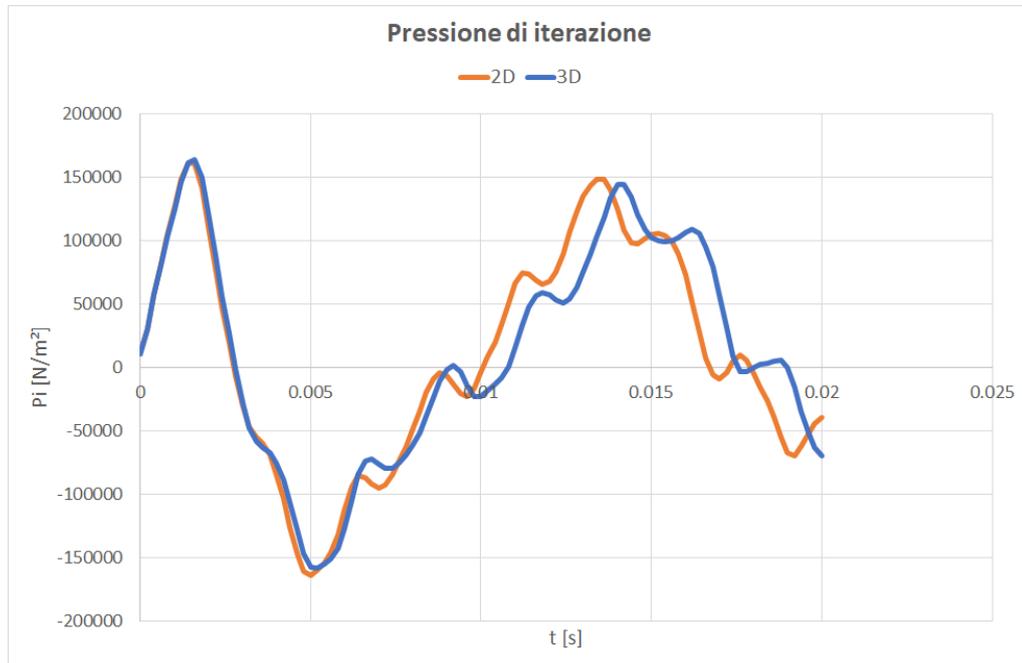


Figura 6.6: Confronto della pressione di iterazione in mezzeria tra il modello 2D e il modello 3D del pannello sandwich convenzionale ottenuta dall'analisi FEM con il software PATRAN con una velocità di impatto di 1.5 m/s

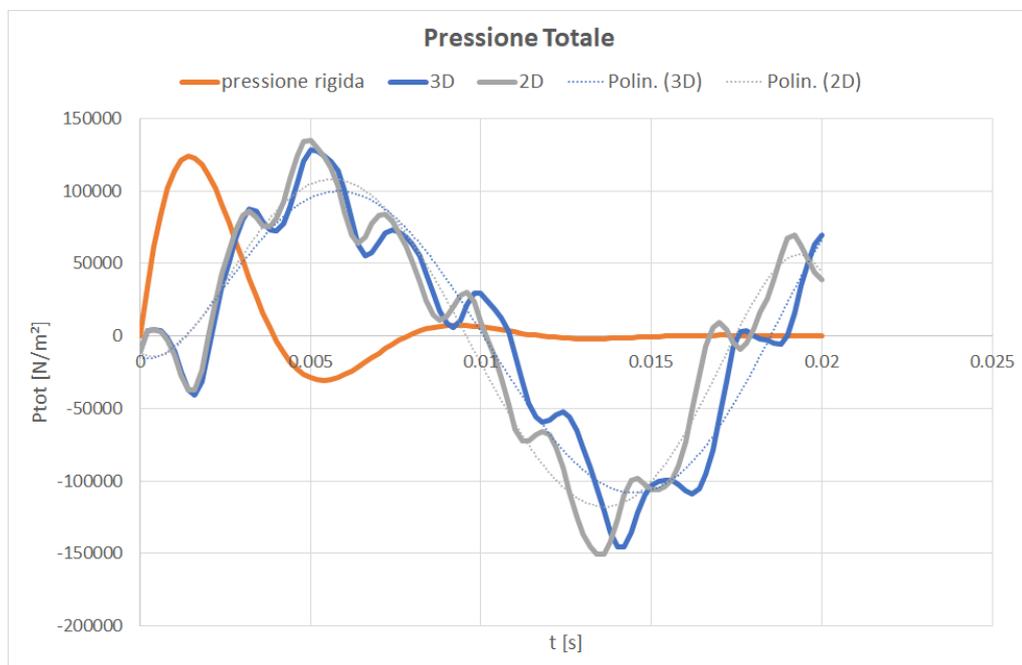


Figura 6.7: Confronto della pressione totale in mezzeria tra il modello 2D e il modello 3D del pannello sandwich convenzionale ottenuta dall'analisi FEM con il software PATRAN con una velocità di impatto di 1.5 m/s

Dai grafici delle pagine precedenti si vede che, nonostante lo spessore elevato del pannello sandwich, l'approssimazione del sandwich con elementi shell da risultati abbastanza soddisfacenti se confrontata con il modello 3D, e anche che, data la deflessione del pannello sandwich, la pressione totale che il pannello vede è minore di quella rigida, confermando le considerazioni dei capitoli precedenti.

Dato che i risultati ottenuti dal modello 2D sono accettabili le analisi successive, sulla configurazione innovativa del pannello sandwich, saranno effettuate su modelli 2D.

### 6.2 Pannello sandwich innovativo

Come detto e dimostrato nei capitoli precedenti, la pressione assorbita da un corpo piatto che impatta con l'acqua diminuisce all'aumentare della flessibilità di questo. A tal proposito si è pensato di realizzare una configurazione innovativa dove, con l'applicazione di eventuali molle o smorzatori installati tra le due skin, in una zona delimitata del pannello, si vada a diminuire la distanza tra le due skin e quindi la rigidità locale del sandwich.

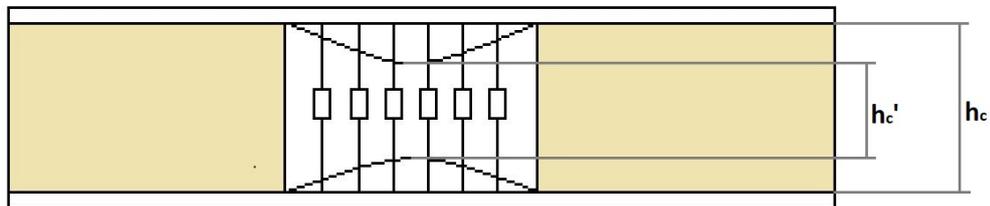


Figura 6.8: Schematizzazione della configurazione innovativa del pannello sandwich

Per analizzare, in maniera preliminare, il comportamento di questa nuova configurazione si è realizzato un modello PATRAN dove in una zona centrale di  $200mm \cdot 673mm$  del pannello sandwich, con le caratteristiche della tabella 6.1, si è diminuito lo spessore del core:

## 6. Pannello sandwich innovativo

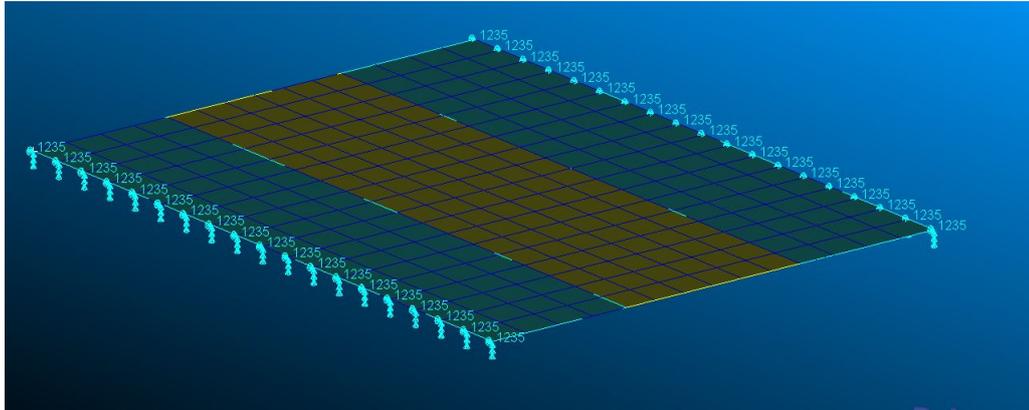


Figura 6.9: Modellizzazione 2D del sandwich in configurazione innovativa sul software PATRAN

La zona centrale evidenziata in giallo, della figura precedente, rappresenta la zona in cui la rigidità locale del pannello sandwich è stata ridotta.

Anche in questo caso nella modellizzazione sul software PATRAN si è tenuto conto dell'added mass che è stata distribuita come descritto in precedenza. Il pannello è semplicemente appoggiato su due lati, sono state imposte come condizioni iniziali quelle di spostamento e velocità nulli ed è stato applicato un carico di pressione dato dalla (2.8) con una velocità di impatto di 1.5 m/s.

Le analisi sono state effettuate con 3 differenti valori dello spessore del core: 13 mm, 10 mm e 8 mm. I risultati ottenuti per lo spostamento, l'accelerazione, la pressione di iterazione e la pressione massima in mezzeria sono i seguenti:

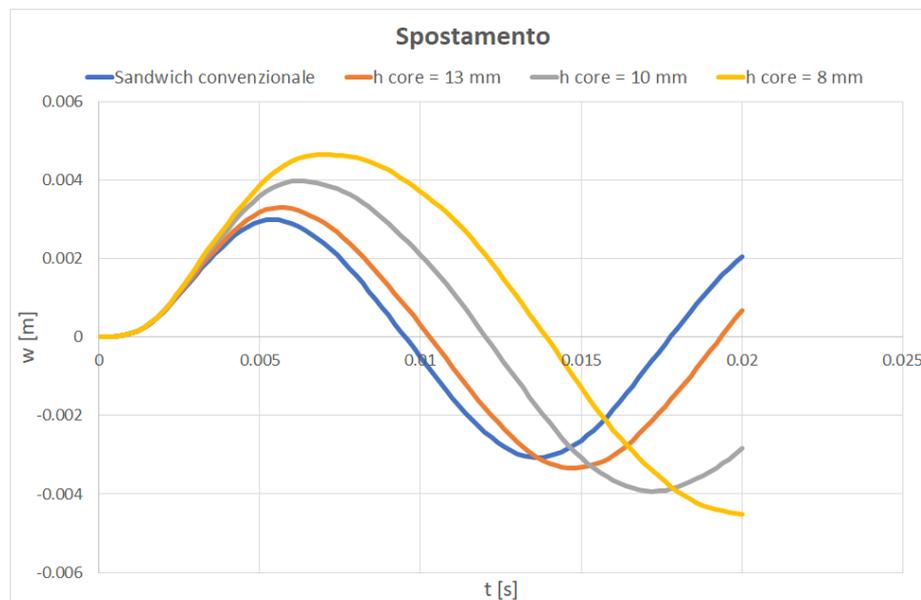


Figura 6.10: Spostamento in mezzeria al variare dell'altezza del core ottenuto dall'analisi FEM con velocità di impatto di 1.5 m/s

## 6. Pannello sandwich innovativo

---

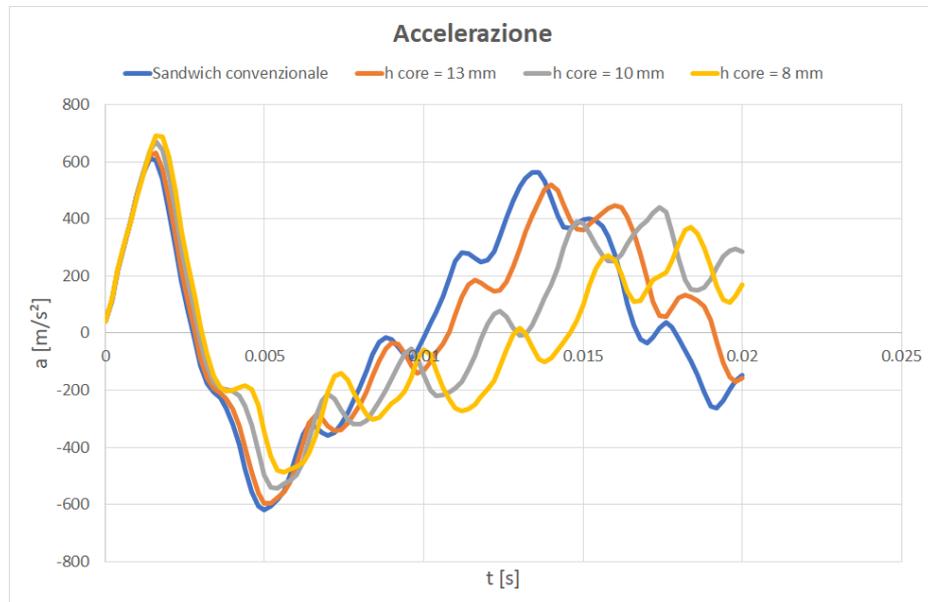


Figura 6.11: Accelerazione in mezzeria al variare dell'altezza del core ottenuta dall'analisi FEM con velocità di impatto di 1.5 m/s

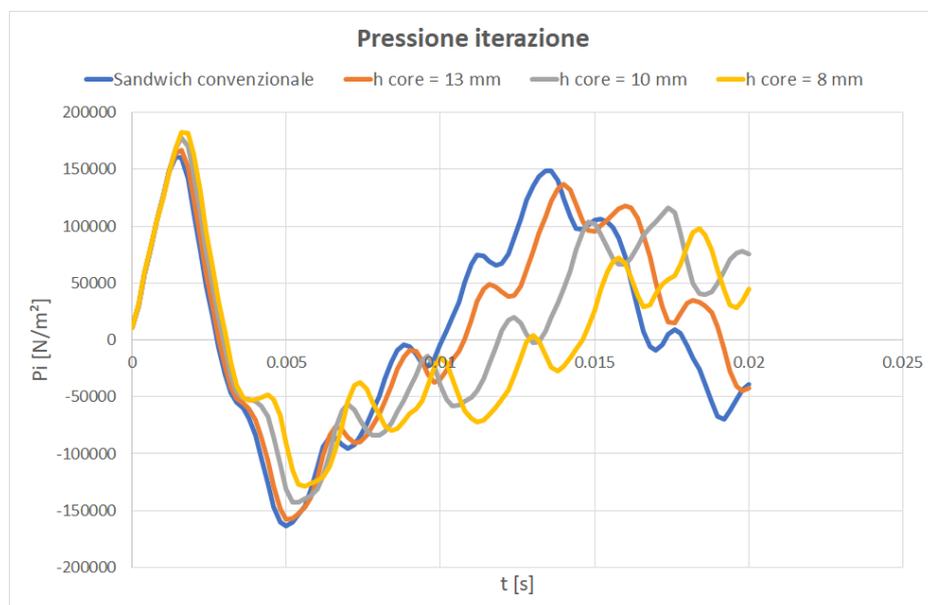


Figura 6.12: Pressione di iterazione in mezzeria al variare dell'altezza del core ottenuta dall'analisi FEM con velocità di impatto di 1.5 m/s

## 6. Pannello sandwich innovativo

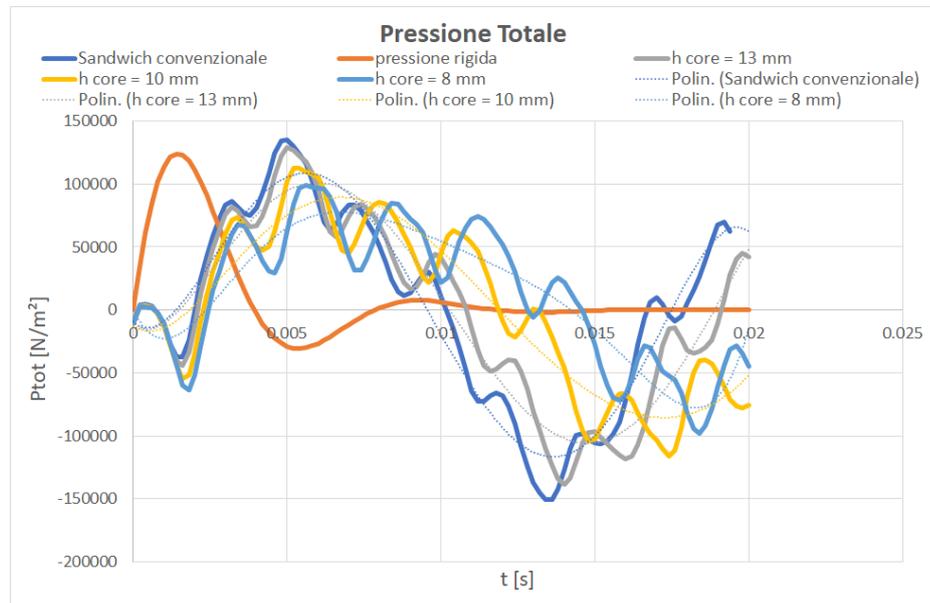


Figura 6.13: *pressione totale in mezzeria al variare dell'altezza del core ottenuta dall'analisi FEM con velocità di impatto di 1.5 m/s*

Come si vede dai grafici precedenti l'altezza del core influisce in maniera non trascurabile sulla rigidità del pannello sandwich, infatti, come si può vedere dalla (Fig.6.11), al diminuire della distanza tra le due skin la flessibilità del pannello sandwich aumenta e la pressione totale che assorbe il pannello diminuisce.

Per concludere viene mostrato un grafico in cui si nota meglio la diminuzione della pressione totale al diminuire dell'altezza del core.

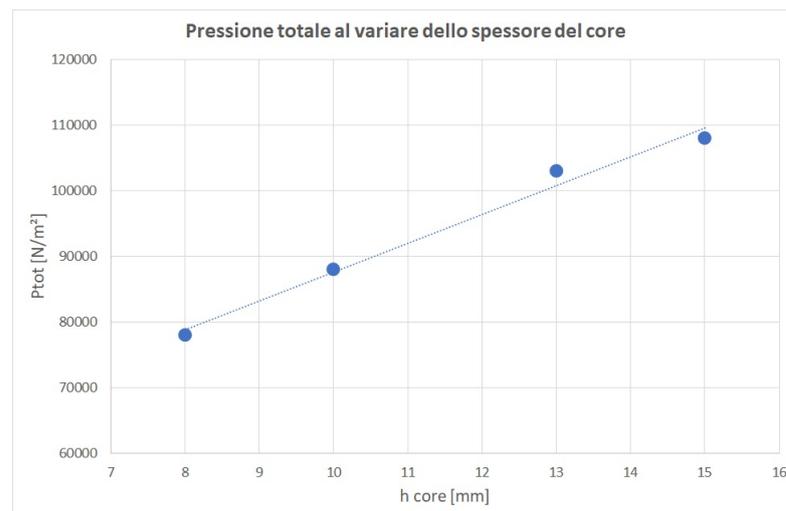


Figura 6.14: *Variazione della pressione totale massima del sandwich in configurazione innovativa al variare dell'altezza del core*

---

## Conclusioni

Con il presente studio si sono costruiti dei modelli matematici in grado di studiare il comportamento di piastre piatte a seguito dell'impatto con l'acqua. I modelli matematici sono stati risolti in maniera numerica utilizzando il metodo di Galerkin, e i risultati ottenuti sono stati validati attraverso analisi FEM effettuate con i software PATRAN e NASTRAN e simulazioni di impatto effettuate con il software LS-DYNA. Nonostante il modello matematico sia stato costruito sfruttando l'analogia della trave, i risultati ottenuti dalla risoluzione di questo sono risultati molto simili a quelli ottenuti da analisi FEM su modelli 2D. Con il seguente modello matematico sono state analizzate quattro piastre a velocità di impatto differenti, e dalle analisi svolte si è dimostrato che, nel caso di piastre flessibili, la pressione totale assorbita sia minore al caso in cui queste vengano considerate rigide.

In seguito, le stesse piastre sono state analizzate con l'aggiunta di una fondazione elastica e di un carico assiale applicato agli estremi. Anche in questo caso è stato costruito un modello matematico risolto numericamente con il metodo di Galerkin, e i risultati ottenuti sono stati nuovamente confrontati e validati attraverso delle analisi FEM effettuate con i software PATRAN e NASTRAN. Le analisi sono state svolte al variare della rigidità della fondazione elastica e del carico assiale applicato, al fine di verificare che la variazione della flessibilità influisse sul carico totale assorbito.

Per concludere è stato realizzato un pannello sandwich in configurazione innovativa. Questa configurazione consiste nell'andare ad inserire delle patch di materiale innovativo tra le due skin in maniera tale da andare a ridurre la rigidità locale del pannello.

Le analisi sul pannello sandwich, convenzionale e in configurazione innovativa, sono state effettuate con i software PATRAN e NASTRAN attraverso la costruzione di modelli 2D. I risultati ottenuti da queste analisi hanno dimostrato che al diminuire della rigidità in una zona locale, aumenta la deflessione e diminuisce la pressione totale assorbita dalla struttura. Dalla struttura realizzata, con il core spesso 8 mm, si è ottenuta una riduzione della pressione assorbita del 30 % rispetto alla struttura convenzionale.

---

## Appendice A

# Risoluzione dell'equazione dinamica di una trave con il metodo di Galerkin

Nel seguente appendice verranno descritti dei metodi di risoluzione per l'equazione dinamica di una trave [6].

L'equazione del governo per una trave soggetta ad un carico dinamico è la seguente:

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} + EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x, t) \quad (\text{A.1})$$

Dove  $M$  è la massa per unità di lunghezza,  $w$  lo spostamento verticale,  $E$  il modulo di Young del materiale,  $I$  il momento di inerzia della sezione e  $q(t)$  il carico distribuito in funzione del tempo.

### A.1 Soluzione generale

Per trattare la soluzione della (A.1) consideriamo per semplicità un caso senza carico e quindi  $q(x, t) = 0$ . Ponendo  $a = \frac{EI}{m}$  la (A.1) diventa:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + a^4 \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad (\text{A.2})$$

La soluzione dell'equazione precedente può essere ottenuta dalla separazione in due variabili:

$$w(x, t) = X(x)Y(t) \quad (\text{A.3})$$

Sostituendo nell'equazione del governo otteniamo:

$$\frac{X''''}{X} = -\frac{1}{a^4} \frac{\ddot{Y}}{Y} \quad (\text{A.4})$$

## 1. Soluzione generale

---

Avendo separato la dipendenza da  $x$  e da  $t$  attraverso un'uguaglianza, entrambi i lati dell'equazione precedente sono uguali ad una costante chiamata  $\alpha^4$ :

$$X'''' - \alpha^4 X = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\ddot{Y} + a^4 \alpha^4 Y = 0 \quad (\text{A.6})$$

Ponendo  $\omega = \alpha^2 a^2 = (\alpha l)^2 \sqrt{\frac{EI}{MI^4}}$  la soluzione generale per l'equazione nel dominio del tempo è la seguente:

$$Y(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (\text{A.7})$$

Mentre per  $\alpha = 0$  la (A.5) ammette una soluzione nella seguente forma:

$$X(x) = e^{\lambda x}$$

Che sostituita nella (A.5) diventa:

$$\lambda^4 - \alpha^4 \quad (\text{A.8})$$

Che ha una soluzione di questo tipo:

$$C_1 e^{i\alpha x} + C_2 e^{-i\alpha x} + C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x} \quad (\text{A.9})$$

Riscrivendo le funzioni esponenziali come funzioni di seni e coseni trigonometrici ed iperbolici diventa:

$$X(x) = D_1 \sin(\alpha x) + D_2 \cos(\alpha x) + D_3 \sinh(\alpha x) + D_4 \cosh(\alpha x) \quad (\text{A.10})$$

per la risoluzione del seguente sistema, le costanti  $A$  e  $B$  della (A.7) vengono determinate dalle condizioni iniziali di velocità e spostamento, mentre per quanto riguarda le costanti  $D_i$  o  $C_i$ , queste vengono determinate dalle condizioni al contorno imposte agli estremi della trave.

### A.1.1 Soluzione per la trave semplicemente appoggiata

Consideriamo ora la trave semplicemente appoggiata:



Figura A.1: Schematizzazione di una trave semplicemente appoggiata [6]

Per la seguente trave le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$X(0) = X''(0) = X(l) = X''(l) = 0$$

Sostituendo le prime due nell'equazione (A.10) otteniamo:

$$\begin{aligned} D_2 + D_4 &= 0 \\ \alpha^4(-D_2 + D_4) &= 0 \end{aligned}$$

Dato che  $\alpha$  non può essere nulla otteniamo  $D_2 = D_4 = 0$  e quindi la (A.5) diventa:

$$X(x) = D_1 \sin(\alpha x) + D_3 \sinh(\alpha x) \quad (\text{A.11})$$

Usando le ultime due condizioni al contorno si ricava un set di equazioni algebriche omogenee in  $D_3$  e  $D_1$ :

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha l) & \sinh(\alpha l) \\ -\sin(\alpha l) & \sinh(\alpha l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Per ottenere una soluzione non banale il determinante della matrice dei coefficienti deve essere pari a zero:

$$2\sin(\alpha l)\sinh(\alpha l) = 0$$

Dato che  $\alpha$  non può essere pari a zero, l'unico modo per avere il determinante nullo è avere  $\sin(\alpha l) = 0$  e lo si ha per una combinazione infinita di valori:

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{l} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

La frequenza sarà quindi:

$$\omega_i = \alpha_i^4 a^4 = \frac{EI\alpha_i^4}{M} = (i\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{Ml^4}} \quad (\text{A.13})$$

Ad ogni frequenza naturale  $i$ -esima è associato una determinata forma di deformazione, che è chiamata funzione di forma.

Per determinare le funzioni di forma è necessario calcolare il valore di  $X(x)_i$  per ogni valore di  $\alpha_i$ . Il valore di  $X(x)_i$  viene calcolato andando a sostituire nella (A.12) i valori di  $\alpha_i$  in maniera tale da calcolare tutti i valori delle costanti  $D_1$  e  $D_3$  che possono essere scritte come  $D_{1i}$  e  $D_{3i}$ . Utilizzando la prima delle (A.12) e sapendo che  $\sinh(\alpha_i l) \neq 0$  otteniamo  $D_{3i} = 0$ , possiamo quindi scrivere:

$$X_i = D_{1i} \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \quad (\text{A.14})$$

Dove il valore di  $D_{1i}$  può essere qualsiasi, scegliendo ad esempio  $D_{1i} = 1$  otteniamo:

$$\phi(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (\text{A.15})$$

## A.2 Metodo di Galerkin

Per risolvere l'equazione dinamica di una trave con il metodo di Galerkin, l'incognita, nel nostro caso la deflessione verticale della trave, viene espressa come la somma delle funzioni di forma moltiplicate per un parametro specifico:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^n \xi_j(t) \phi_j(x) \quad (\text{A.16})$$

Le funzioni di forma  $\phi_j(x)$  devono essere scelte in maniera appropriata:

1. Devono rispettare le condizioni al contorno;
2. Tutte le funzione devono essere differenziabili q-volte e almeno una di queste deve avere la derivata q-esima diversa da zero;
3. Le funzioni devono essere linearmente indipendenti;
4. Costituiscono un insieme completo di funzioni.

Avendo imposto come soluzione dell'equazione una soluzione approssimata la risoluzione porterà sicuramente ad un errore, che se consideriamo l'equazione della trave dinamica (A.1) sarà:

$$M \frac{d^2 w_a}{dt^2} + EI \frac{d^4 w_a}{dx^4} - q(x, t) = E(x, t) \quad (\text{A.17})$$

Per ridurre questo errore vengono scelte delle funzioni dette "funzioni peso" tali che se moltiplicate per l'errore diano integrale nullo. Nel metodo di Galerkin queste funzioni sono le funzioni approssimanti e quindi le funzioni di forma. Andando ad imporre quindi l'ortogonalità tra le funzioni approssimanti e l'errore si ottiene:

$$\int_0^l \phi_j(x) E(x, t) dx = 0 \quad (\text{A.18})$$

Sostituendo tutto nella (A.1) si ottiene un sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$M \xi(\ddot{t})_j \int_0^l \phi_j(x) \phi_j(x) dx + EI \xi(t)_j \int_0^l \phi_j'''' \phi(x) dx - \int_0^l q(x, t) \phi(x) dx = 0 \quad (\text{A.19})$$

---

# Bibliografia

- [1] <http://oldwww.unibas.it/utenti/vona/dati/lezione> *Universita' degli studi della Basilicata*.
- [2] [https://www.mae.ust.hk/meqpsun/notes/chapter4\(202\).pdf](https://www.mae.ust.hk/meqpsun/notes/chapter4(202).pdf). *The Hong Kong university of science and technology*.
- [3] Nicolas Aquelet. Ale adaptive mesh refinement in ls-dyna®. In *12th International LS-DYNA Users Conference*, 2012.
- [4] Shen-Lun Chuang. Investigation of impact of rigid and elastic bodies with water. Technical report, DAVID W TAYLOR NAVAL SHIP RESEARCH AND DEVELOPMENT CENTER BETHESDA MD, 1970.
- [5] E. Cestino G. Frulla. Equivalent material identification for complete similarity in scaled-model tests. *AIDAA XXV International Congress*, pages 323–331, 2019.
- [6] Dewey H Hodges and G Alvin Pierce. *Introduction to structural dynamics and aeroelasticity*, volume 15. cambridge university press, 2011.
- [7] William S Vorus LFL and Richard A Royce SM. Wave impact reduction of planing boats. *Architecture*, pages 1–14, 2000.
- [8] Zissimos P Mourelatos and Michael G Parsons. A finite element analysis of beams on elastic foundation including shear and axial effects. *Computers & structures*, 27(3):323–331, 1987.
- [9] Alessandro Polla. Progetto strutturale ed analisi di impatto con l'acqua di un motoscafo elettrico da competizione in materiale composito ad alte velocita' di navigazione. *Politecnico di Torino*, 2020.
- [10] Th Von Karman. The impact on seaplane floats during landing. *National Advisory Committee on Aeronautics*, 1929.