

POLITECNICO DI TORINO

I Facoltà di Ingegneria

**CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA
MECCANICA**



Tesi di Laurea Specialistica

**Data-Recovery per lo studio dinamico di
sistemi vibranti simulati mediante modelli
di ordine ridotto**

Relatore

Prof. Fironi Christian Maria

Correlatore

Prof. Battiato Giuseppe

Candidato

Shantal Paci

A.A. 2019/2020

Paci

“Data-Recovery per lo studio dinamico di sistemi vibranti simulati mediante modelli di ordine ridotto”

A mio nonno Gaetano...

Sommario

Sommario	3
1. Struttura fisica	10
1.1 Motore turbofan	10
1.2 Turbina	15
1.2.1 Sollecitazioni turbina	19
1.3 Modello agli elementi finiti della pala di turbina	25
2. Dischi palettati	30
2.1 Analisi modale dei dischi palettati	31
2.2 Simmetria ciclica	32
2.2.1 Analisi modale nei dischi palettati in simmetria ciclica	40
2.3 Risposta forzata	42
2.4 Stress stiffening	45
3 Tecniche di riduzione	48
3.1 Sottostrutturazione dinamica	49
3.1.1 Metodo Component Mode Synthesis (CMS)	51
3.1.2 Riduzione modale generalizzata	55
3.2 Metodi a interfaccia fisso	56
3.2.1 Modi vincolati	56
3.2.2 Modi vibrazionali	57
3.3 Metodo di condensazione statica (Guyan reduction)	58
3.4 Metodo di Craig-Bampton	59

4	Riduzione componente prestressato	61
4.1	Riduzione componente prestressato tramite metodo di Craig-Bampton su Ansys... 61	61
4.2	Riduzione dell'intero componente in un unico superelemento	64
4.3	Riduzione in diversi superelementi	67
4.4	Riduzione in diversi superelementi (con stesso file db).....	71
4.5	Riduzione in diversi superelementi con Perturbazione Lineare.....	73
5	Analisi armonica in un componente prestressato e ridotto.....	76
5.1	Confronto Frequenze proprie del sistema.....	78
5.2	Numero di MAC.....	83
5.3	Risposta Forzata.....	87
5.3.1	Sensitivity nodi master.....	91
5.3.2	Sensitivity nodo slave.....	94
5.4	Due tipi di riduzione	95
5.4.1	Riduzione con analisi statica sul modello ridotto	96
5.4.2	Riduzione con analisi armonica su modello ridotto	99
6	Conclusioni e lavoro futuro.....	108
	Sitografia	109
	Bibliografia.....	109
	Ringraziamenti.....	111

Elenco delle figure e delle tabelle

Figura	Pag.
<i>Figura 1.1: Struttura motore Turbofan.....</i>	<i>13</i>
<i>Figura 1.2: Schema termodinamico motore Turbofan, ciclo Brayton.....</i>	<i>14</i>
<i>Figura 1.3: Diagramma pressione-volume a sinistra e diagramma temperatura entropia a destra..</i>	<i>15</i>
<i>Figura 1.4: Struttura turbina in motore Turbofan, con corrispettivo statore in alto a sinistra e rotore in alto a destra.....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 1.5: Andamento della velocità e della pressione in una turbina a reazione.....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 1.6: Diagramma deformazione-tempo in presenza del fenomeno Creep.....</i>	<i>20</i>
<i>Figura 1.7: Forza centrifuga nella palettatura di un turboespansore.....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 1.8: Forze esercitate dal fluido che causano momenti flettenti in una palettatura di un turboespansore.....</i>	<i>22</i>
<i>Figura 1.9: Direzione momenti flettenti che sollecitano la palettatura di un turboespansore.....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 1.10: Step in una progettazione dinamica.....</i>	<i>26</i>
<i>Figura 1.11: Modello di pala più disco semplificato su Ansys.....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 1.12: Pala a sinistra, sezione di disco a destra semplificati su Ansys.....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 2.1: Disco palettato.....</i>	<i>30</i>
<i>Figura 2.2: Esempio di onda stazionaria per un disco palettato con 12 settori.....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 2.3: Esempio di onda stazionaria in antifase per un disco palettato con 12 settori.....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 2.4: Forma modale della terza classe di un disco palettato con 12 settori (indice armonico $h=2$).....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 2.5: Esempio di disco palettato con 2 diametri nodali.....</i>	<i>36</i>

<i>Figura 2.6: Rappresentazione dello spostamento nel tempo di un'onda stazionaria per una struttura in simmetria ciclica.....</i>	<i>38</i>
<i>Figura 2.7: Rappresentazione schematica di un'onda rotante per una struttura in simmetria ciclica.....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 2.8: Rappresentazione dei diversi settori di un disco palettato discretizzati.....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 2.9: Diagramma di Campbell di un disco palettato.....</i>	<i>43</i>
<i>Figura 2.10: Fenomeno di Aliasing in un disco palettato.....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 3.1: Esempio di trave suddivisa in 3 elementi.....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 3.2: Esempio di trave discretizzata in cui viene applicato uno spostamento unitario in un nodo di interfaccia.....</i>	<i>57</i>
<i>Figura 3.3: Modo di vibrare di una trave discretizzata.....</i>	<i>57</i>
<i>Figura 4.1.: Nodi sezione disco + paletta su Ansys.....</i>	<i>62</i>
<i>Figura 5.1: Visualizzazione nodi master utilizzati nei calcoli iniziali.....</i>	<i>77</i>
<i>Figura 5.2: Visualizzazione nodi master utilizzati nei calcoli finali.....</i>	<i>78</i>
<i>Figura 5.3: Errore percentuale delle frequenze proprie della sezione di disco più pala tra il modello Full e il modello ridotto con il primo e il terzo metodo.....</i>	<i>80</i>
<i>Figura 5.4: Errore percentuale delle frequenze proprie della sezione di disco più pala tra il modello Full e il modello ridotto con il secondo e il quarto metodo.....</i>	<i>81</i>
<i>Figura 5.5: Errore percentuale delle frequenze proprie della sezione di disco più pala tra il modello Full e il modello ridotto con i diversi metodi.....</i>	<i>82</i>
<i>Figura 5.6: Matrice del Modal Assurance Criterion MAC tra autovalori modello full e autovalori modello ridotto.....</i>	<i>84</i>
<i>Figura 5.7: Matrice 3D del Modal Assurance Criterion MAC tra autovalori modello full e autovalori modello ridotto.....</i>	<i>85</i>
<i>Figura 5.8: Matrice del Modal Assurance Criterion MAC tra autovalori modello full.....</i>	<i>86</i>
<i>Figura 5.9: Matrice 3D del Modal Assurance Criterion MAC tra autovalori modello full.....</i>	<i>86</i>

<i>Figura 5.10: Vista frontale del modello sottoposto al modo 13.....</i>	<i>88</i>
<i>Figura 5.11: Vista laterale del modello sottoposto al modo 13.....</i>	<i>88</i>
<i>Figura 5.12: Punti di applicazione delle forze.....</i>	<i>89</i>
<i>Figura 5.13: Confronto Spostamenti immaginari dei nodi lungo le tre direzioni x,y e z del modello full e del modello ridotto ed espanso.....</i>	<i>90</i>
<i>Figura 5.14: Andamento del valore di spostamento immaginario all'aumentare del numero di modi slave di un nodo master lungo la direzione z confrontato con il valore dello spostamento di un modello full tramite analisi statica.....</i>	<i>92</i>
<i>Figura 5.15: Confronto valore spostamento immaginario di nodi master lungo z del modello ridotto con il modello full.....</i>	<i>93</i>
<i>Figura 5.16: Andamento del valore di spostamento immaginario all'aumentare del numero di modi slave di un nodo slave lungo la direzione z confrontato con il valore dello spostamento di un modello full con riduzione tramite analisi statica.....</i>	<i>95</i>
<i>Figura 5.17: Confronto spostamenti immaginari lungo z di tutti i nodi del modello ridotto ed espanso con il modello full.....</i>	<i>97</i>
<i>Figura 5.18: A sinistra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello full ottenuti tramite analisi armonica, a destra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello ridotto ed espanso ottenuto tramite riduzione con analisi statica su modello ridotto.....</i>	<i>98</i>
<i>Figura 5.19: A sinistra colormap laterale degli spostamenti immaginari di un modello full ottenuti tramite analisi armonica, a destra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello ridotto ed espanso ottenuto tramite riduzione con analisi statica su modello ridotto.....</i>	<i>98</i>
<i>Figura 5.20: Confronto degli spostamenti immaginari di tutti i gradi di libertà ottenuti da un modello full in confronto con un modello ridotto ed espanso.....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 5.21: A sinistra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello full ottenuti tramite analisi armonica, a destra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello ridotto ed espanso ottenuto tramite riduzione con analisi armonica su modello ridotto.....</i>	<i>102</i>
<i>Figura 5.22: A sinistra colormap laterale degli spostamenti immaginari di un modello full ottenuti tramite analisi armonica, a destra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello ridotto ed espanso ottenuto tramite riduzione con analisi armonica su modello ridotto.....</i>	<i>102</i>
<i>Figura 5.23: Andamento del valore di spostamento immaginario all'aumentare del numero di modi slave di un nodo slave lungo la direzione z confrontato con il valore dello spostamento di un modello full con riduzione tramite analisi armonica.....</i>	<i>103</i>

<i>Figura 5.24: Confronto valore immaginario spostamenti lungo z del modello full con quello ridotto in simmetria ciclica.....</i>	<i>104</i>
<i>Figura 5.25: A sinistra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello full ottenuti tramite analisi armonica, a destra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello ridotto ed espanso ottenuto tramite riduzione con analisi armonica su modello ridotto in simmetria ciclica.....</i>	<i>105</i>
<i>Figura 5.26: A sinistra colormap laterale degli spostamenti immaginari di un modello full ottenuti tramite analisi armonica, a destra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello ridotto ed espanso ottenuto tramite riduzione con analisi armonica su modello ridotto in simmetria ciclica.....</i>	<i>105</i>
<i>Figura 5.27: Colormap della parte reale degli spostamenti nel disco del modello full a sinistra e a destra del modello ridotto ed espanso.....</i>	<i>106</i>
<i>Figura 5.28: Confronto del valore assoluto degli spostamenti del modello full e del modello ridotto ed espanso.....</i>	<i>107</i>

Abstract

Lo studio del comportamento dinamico delle strutture è un passaggio necessario da eseguire durante la progettazione di queste, infatti, i componenti devono non solo riuscire a sostenere gli stress statici ma devono anche resistere a sollecitazioni dinamiche e vibrazioni. Ogni elemento della struttura è dotato di una massa e di una rigidità, di conseguenza avrà una frequenza naturale propria, se questo elemento è sottoposto a vibrazioni che hanno frequenza pari a quella naturale l'oggetto entra in risonanza e le ampiezze di vibrazione, se non controllate, potrebbero diventare pericolosamente danneggianti. In questa trattazione gli elementi presi in considerazione sono dei dischi palettati appartenenti a degli stadi di turbine di un motore turbofan.

Nello studio dinamico dei dischi palettati questi vengono discretizzati in un numero elevato di nodi e quindi presentano un numero di gradi di libertà elevato; per ottimizzare, quindi, i tempi e le procedure di calcolo deve essere applicato un metodo di riduzione. Lo scopo principale di questa tesi è lo studio dell'applicazione del metodo di riduzione di Craig-Bampton per eseguire un calcolo non lineare armonico su un disco di turbina palettato. Vengono descritte e testate quattro procedure di calcolo diverse applicate ad una sezione di disco prestressato dove il modello viene dapprima ridotto su Ansys APDL, successivamente viene eseguito un calcolo di risposta forzata su Matlab per poi espandere i risultati nuovamente su Ansys APDL. La procedura più funzionale viene infine adottata su tutta la struttura sfruttando la simmetria ciclica del disco palettato, ottenendo così uno studio dinamico di tutto il componente sotto esame ad un prezzo computazionale basso.

Capitolo 1

1. Struttura fisica

Negli attuali motori turbofan per aeromobili l'aria entra all'interno del motore attraverso il compressore e da qui questa viene convogliata nel combustore dove brucia miscelata assieme al carburante; il gas ottenuto, ad altissima temperatura e pressione, fa girare la turbina suddivisa in alta e bassa pressione che a sua volta trasmette il moto al compressore e al fan, una grande ventola posta davanti al motore che fornisce la maggior parte della spinta necessaria al volo dell'aereo.

1.1 Motore turbofan

Per far avanzare un aeroplano c'è bisogno di una forza che spinga, detta spinta, che si crea accelerando l'aria tra l'inizio e la fine del motore, questa viene accelerata dalla grande ventola posta nella parte anteriore del motore attraverso la quale l'aria passa in grande quantità.

I componenti del motore turbofan sono: la ventola, un'elica dal diametro ampio; i compressori di bassa e alta pressione composti da diversi stadi, che stadio dopo stadio incrementano la pressione dell'aria man mano che questa scorre al loro interno; la camera di combustione, nella quale il carburante viene miscelato con l'aria e bruciato; le turbine di

bassa e alta pressione nelle quali la pressione dei gas caldi si riduce, per azionare la ventola e i compressori, ci sono diversi stadi di turbine, di cui uno di alta pressione e gli altri di bassa pressione ed infine il sistema di scarico.

Il turbofan è un motore a reazione che usa due flussi d'aria, il flusso primario passa attraverso la combustione, mentre il flusso secondario passa solamente attraverso la ventola; il rapporto fra i due rappresenta il rapporto di diluizione o *bypass ratio*. Nei motori in cui il *bypass ratio* è elevato la maggior parte della spinta è creata dalla ventola, conseguentemente questi motori sono caratterizzati da consumi specifici non elevati e altrettanta rumorosità. Viceversa, i motori a basso rapporto di diluizione sono preferiti per applicazioni militari, poiché hanno prestazioni e velocità più elevate, a discapito naturalmente di consumi e rumorosità.

Il valore analitico della spinta della turboventola, trascurando il contributo della portata in massa del combustibile, vale:

$$F = m_a(1 + BPR)(u_e - V_o) \quad (1)$$

dove:

- m_a è la portata di flusso caldo
- u_e è la velocità media di uscita del fluido dalla camera di combustione
- V_o è pari alla velocità di volo
- BPR è il *bypass ratio*, rapporto, quindi, tra portata di flusso freddo e portata di flusso caldo

Ritornando al funzionamento del motore, il flusso primario passa in successione attraverso i compressori, il bruciatore e le turbine, prima di essere espulso posteriormente dal sistema di scarico. L'aria è compressa nei compressori di bassa ed alta pressione e può

raggiungere temperature di 450 gradi Celsius, dove la temperatura all'uscita di ogni stadio può essere calcolata così [12]:

$$T_2 = T_1 \left(1 + \frac{1}{\eta_c} \left(\beta^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right) \right); \quad (2)$$

dopodiché essa entra nel combustore, dove è iniettato e acceso il carburante. Il mix di carburante ed aria solitamente raggiunge temperature intorno ai 1700 gradi Celsius. Infine, l'energia accumulata è estratta nei 5 stadi turbina, posti immediatamente dopo la sezione di combustione. Avviene una grande caduta di pressione attraverso le turbine, che accelerano istantaneamente, i cui alberi concentrici ruotando l'uno dentro l'altro, trasmettono il moto alla ventola e ai compressori. L'aria è quindi espulsa attraverso il condotto primario, e si unisce così al flusso della ventola [1].

Il turbofan è dunque un motore *flow cycle*: l'aria viene compressa, quindi riscaldata dalla combustione, dopodiché passa attraverso le turbine che muovono i compressori e la ventola [3].

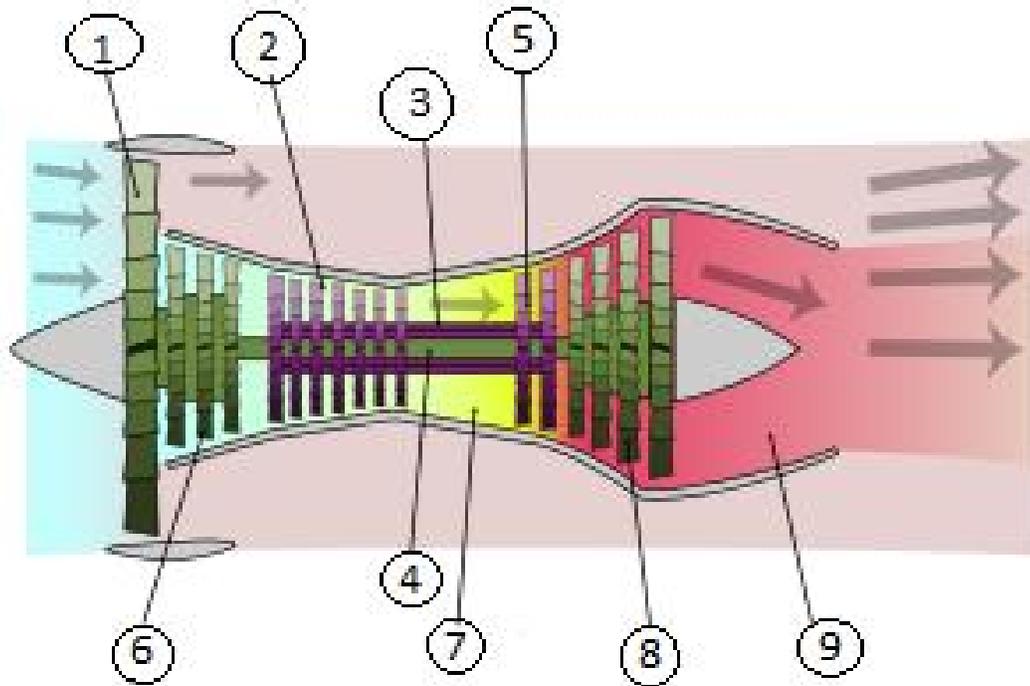


Figura 1.1: Struttura motore Turbofan

I componenti dell'immagine sopra sono:

1. Turbina: contribuisce alla spinta del motore accelerando l'aria fredda;
2. Compressore di alta pressione: in cui avviene il maggior rapporto di compressione, può arrivare fino a 30 ed è costituito solitamente da una dozzina di stadi;
3. Albero di alta pressione
4. Albero di bassa pressione
5. Turbina di alta pressione: solitamente è costituita da $\frac{3}{4}$ stadi, dove il primo è collegato all'albero di alta pressione per trasferire energia al compressore di alta pressione, la caduta di pressione di un singolo stadio di turbina è molto maggiore rispetto alla caduta di pressione all'interno di uno stadio del compressore, quindi un singolo stadio di turbina può essere utilizzato per pilotare più stadi del compressore.
6. Compressore di bassa pressione: fornisce la prima compressione del flusso

7. Camera di combustione: Attraverso gli ugelli passano grandi quantità di carburante che, assieme al volume d'aria fornito dai compressori, servono per bruciare al fine di rilasciare il calore in modo tale che l'aria venga riscaldata ed espansa. Il volume di aria che entra all'interno della camera è riscaldato dai diversi stadi di compressione e questo facilita la nebulizzazione del carburante.
8. Turbina di bassa pressione: asservisce il compressore di bassa pressione e la ventola
9. Ugello: dal quale fuoriescono i gas esausti.

Il sistema può essere schematizzato in maniera semplice dall'immagine sottostante:

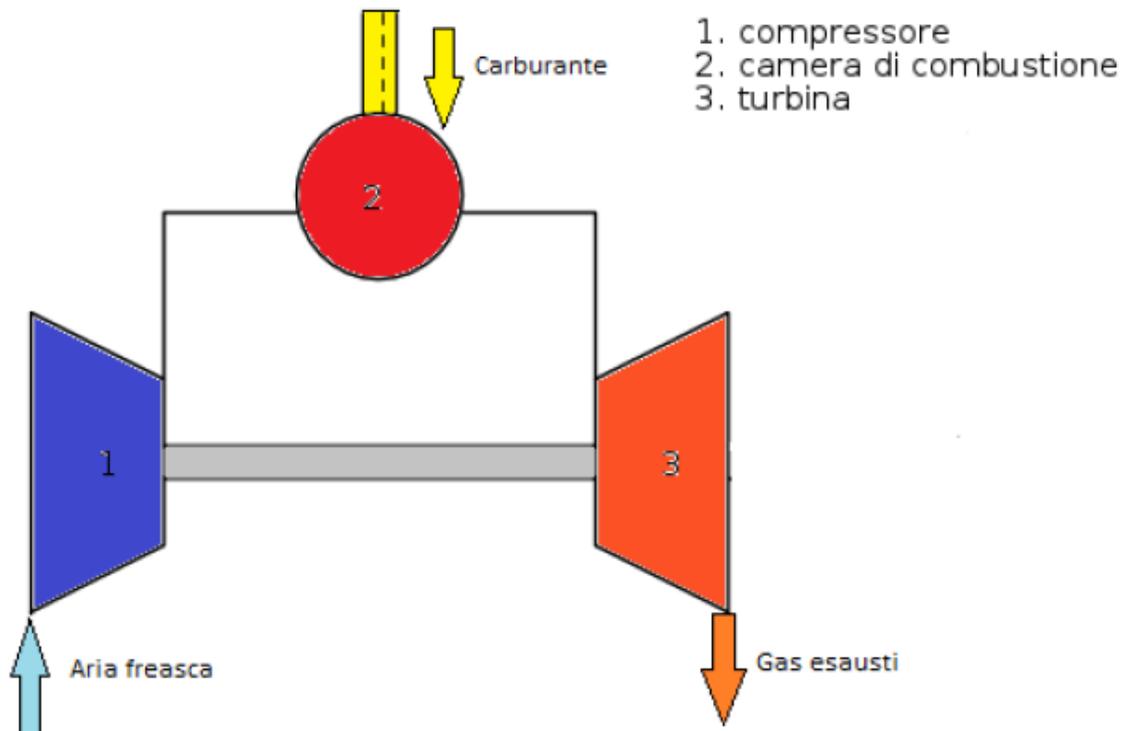


Figura 1.2: Schema termodinamico motore Turbofan, ciclo Brayton

Per quanto riguarda invece le trasformazioni subite prima dall'aria e dopo dall'unione di aria più carburante è possibile vederle nei due diagrammi:

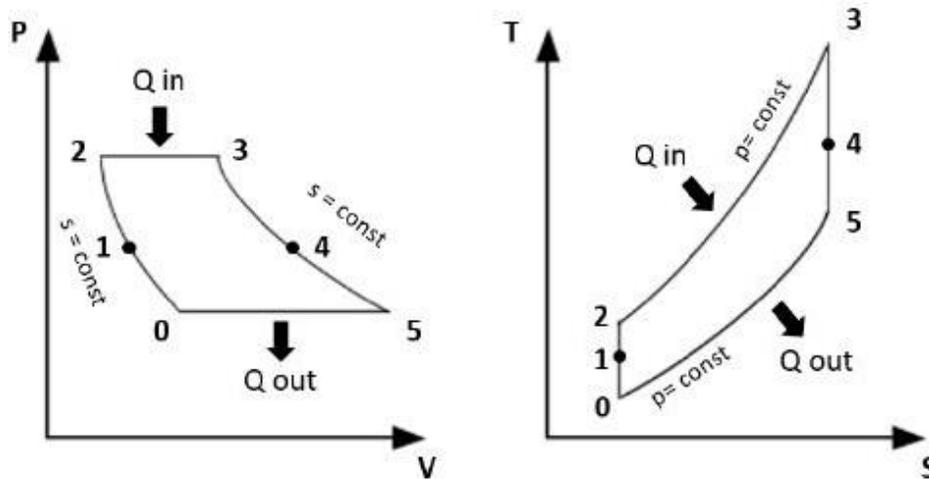


Figura 1.3: Diagramma pressione-volume a sinistra e diagramma temperatura entropia a destra

1.2 Turbina

Tra tutte le componenti elencate precedentemente del motore turbofan quella più critica è la turbina. I gas che fuoriescono dalla camera di combustione, che hanno una temperatura ed una pressione elevatissime, vengono inviate direttamente al gruppo turbina e questa fa in modo che l'energia potenziale venga convertita in lavoro.

Come funziona esattamente questo componente? La turbina è composta da due parti lo statore e il rotore, quest'ultimo ha il compito di trasformare l'energia in lavoro da trasmettere. L'aria che viene prima compressa e dopo riscaldata nella camera di combustione viene inviata dapprima nello statore, che ha il compito di accelerare e di far convergere in maniera ottimale il gas all'interno del rotore. Successivamente, il gas colpisce violentemente le pale del rotore che muovendosi trascinano gli alberi di bassa e alta pressione.

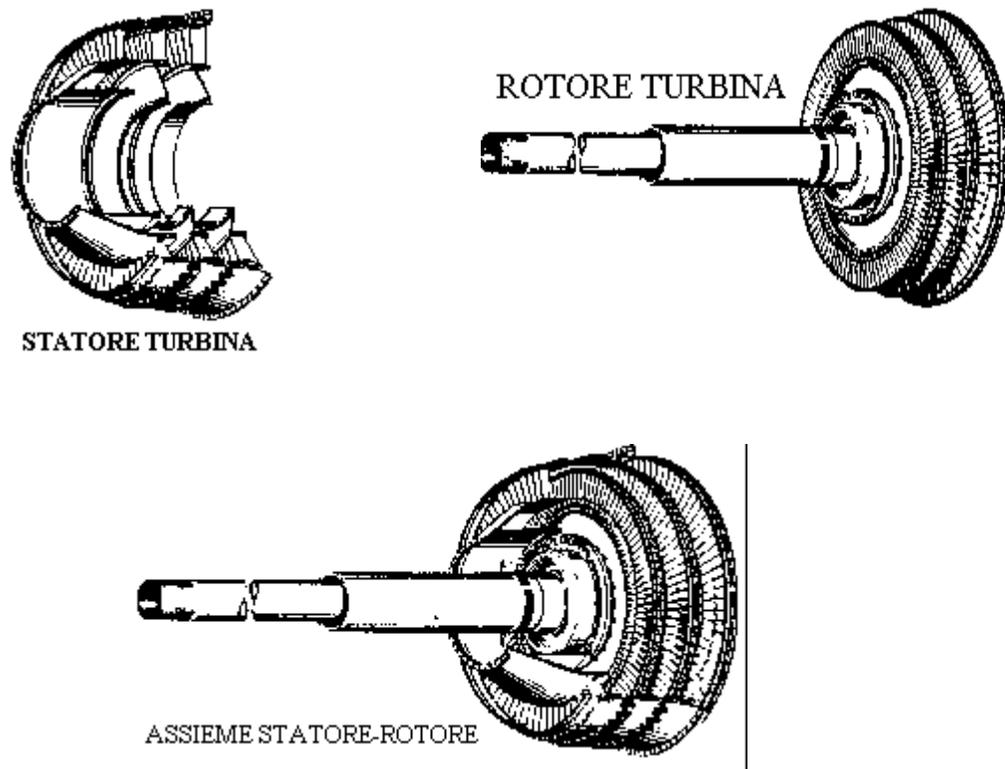


Figura 1.4: Struttura turbina in motore Turbofan, con corrispettivo statore in alto a sinistra e rotore in alto a destra.

La trasformazione di energia potenziale in energia meccanica avviene mediante l'espansione dei gas, con conseguente calo di pressione e temperatura. Nella figura sottostante è possibile vedere come è composto ogni singolo stadio, da rotore e statore, e l'andamento della pressione e della velocità del gas all'interno di ognuno di esso.

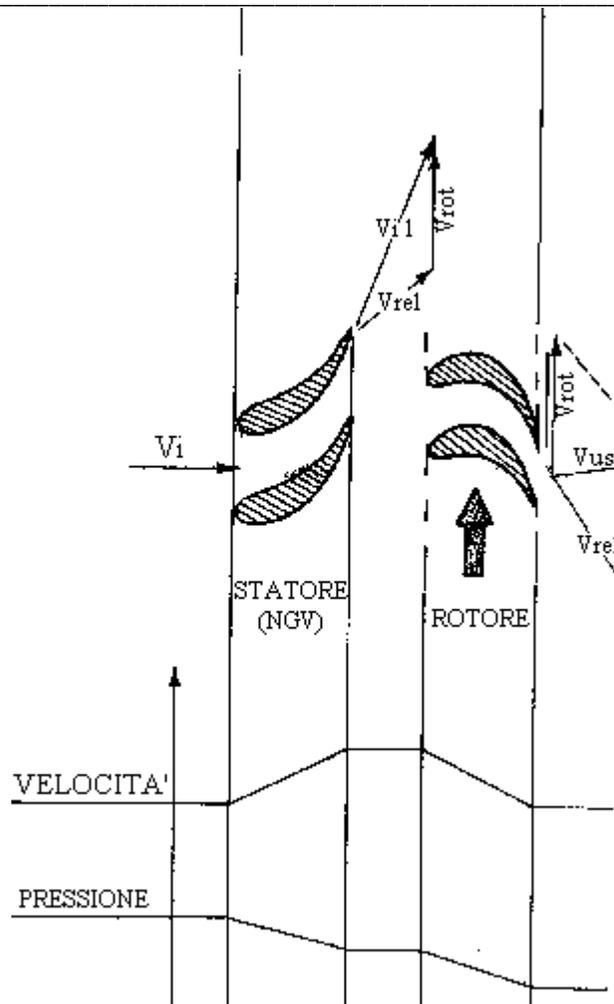


Figura 1.5: Andamento della velocità e della pressione in una turbina a reazione.

Nel disegno sopra viene descritto l'andamento della pressione all'interno di un turboespansore, quell'andamento corrisponde ad una turbina a reazione, nel momento in cui invece nel rotore la pressione si mantiene costante si tratta di una turbina ad azione, che invece di assorbire energia di pressione assorbe energia cinetica [2].

La turbina viene chiamata anche turboespansore, come suggerisce la parola stessa ha il compito di espandere l'aria, espandendo l'aria perde pressione; per quanto riguarda la velocità questa all'interno dello statore aumenta per poi diminuire nel rotore.

Una o più serie di palette fisse costituiscono lo statore, il cui profilo comporta la creazione di ugelli che direzionano i gas verso il rotore.

Il numero di stadi di una turbina dipende da tanti fattori: il numero degli alberi (in questo caso 2, uno di bassa pressione e uno di alta pressione), la relazione fra potenza richiesta e velocità di rotazione e il diametro della turbina. Per quanto riguarda invece il rendimento, uno dei parametri che maggiormente lo influenza è la velocità media di rotazione delle palette. Se si calcola un primo principio all'interno dello stadio di turbina, facendo delle approssimazioni si nota come:

$$\frac{\Delta p}{\rho} \approx \frac{c^2}{2} \quad (3)$$

Quindi con maggiori velocità si avranno minori perdite e conseguentemente rendimenti più elevati; il problema si pone con un aumento anche delle sollecitazioni, che richiedono perciò un aumento di sezione e quindi di peso.

Il primo stadio è quello più sollecitato nella turbina, e in maniera particolare lo statore in quanto si trova subito dopo l'ugello di scarico della camera di combustione, quindi, l'elevata temperatura e l'altrettanta velocità eserciteranno il loro effetto su questi elementi causando erosione e bruciatura.

Per aumentare la resistenza della turbina oltre a rivestire i componenti con materiali ceramici o cementati viene usato un sistema di raffreddamento molto sofisticato che utilizza il convogliamento dell'aria, prelevata dal compressore a valle, ed inviata nella palette del rotore e dello statore.

1.2.1 Sollecitazioni turbina

I profili delle turbine devono essere progettati e verificati in modo tale da poter resistere alle diverse sollecitazioni a cui sono sottoposti ovvero sollecitazioni di tipo: termico, centrifugo, flessionale e vibrazionale.

1. Sollecitazioni termiche:

Sperimentalmente si osserva che, se un elemento infinitesimo di materiale, termicamente isotropo, viene sottoposto ad una variazione di temperatura:

$$\Delta T = T_{in} - T_{fin} \quad (4)$$

esso subirà una dilatazione uniforme pari a:

$$\varepsilon = \alpha \Delta T \quad (5)$$

dove α indica il coefficiente di espansione termica proprio di ogni materiale.

Se l'elemento non è fissato staticamente, a questa deformazione non si associa nessun grado di tensione. Nel caso degli elementi della turbina che sono fissati e saldati invece ad uno stato di deformazione corrisponderà uno stato di tensione.

Un altro fenomeno gravoso relativo alle alte temperature dei gas che investono la turbina è lo *scorrimento viscoso* (detto anche creep), infatti il progettista deve tenere conto del fatto che pur caricando l'elemento con una sollecitazione inferiore al limite di snervamento, se questo elementino è sottoposto a temperature elevate per un determinato periodo di tempo questo subirà una deformazione plastica che aumenterà nel tempo e che diminuirà la resistenza totale del componente tutto.

Nella figura sottostante viene descritto l'andamento della deformazione nel tempo di un elemento sottoposto a scorrimento viscoso, come vediamo l'andamento non è lineare è nella fase finale la curva aumenta bruscamente la sua pendenza [4].

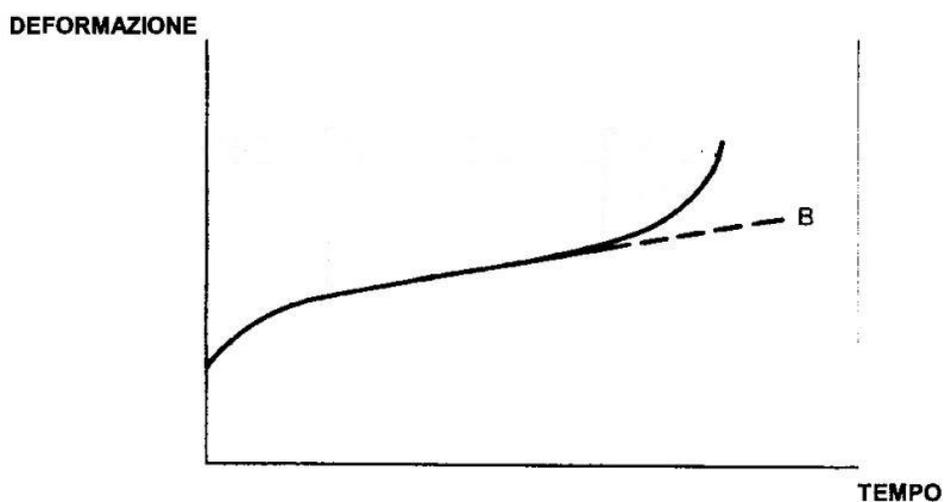


Figura 1.6: Diagramma deformazione-tempo in presenza del fenomeno Creep.

2. Sforzi centrifughi

A causa delle velocità di rotazione elevatissime, fino a 1200 giri al minuto, è doveroso considerare gli sforzi centrifughi [13].

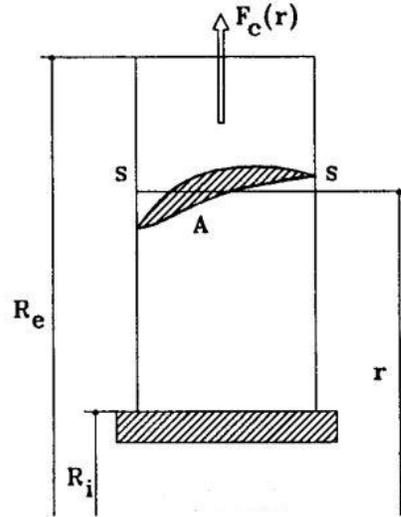


Figura 1.7: Forza centrifuga nella palettatura di un turboespansore.

Facendo riferimento alla figura, e considerando la paletta con sezione uniforme ($A=\text{cost}$), l'espressione che definisce la forza centrifuga è data da:

$$F_c(r) = \delta \cdot A \cdot (R_e - r) \cdot \omega^2 \cdot \frac{(R_e + r)}{2} = \delta \cdot \omega^2 \cdot A \cdot \frac{(R_e^2 - r^2)}{2} \quad (6)$$

dove δ indica la massa volumica del materiale.

La corrispondente tensione sarà data dall'espressione:

$$\sigma = \frac{F_c}{A} = \delta \cdot \omega^2 \cdot \frac{(R_e^2 - r^2)}{2}. \quad (7)$$

3. Sollecitazione di flessione

Il flusso di gas caldo che scorre attraverso la palettatura esercita delle forze circonferenziali che forniscono il momento motore dello stadio di turbina, e forza assiali causate dalla diminuzione di velocità assiale del gas.

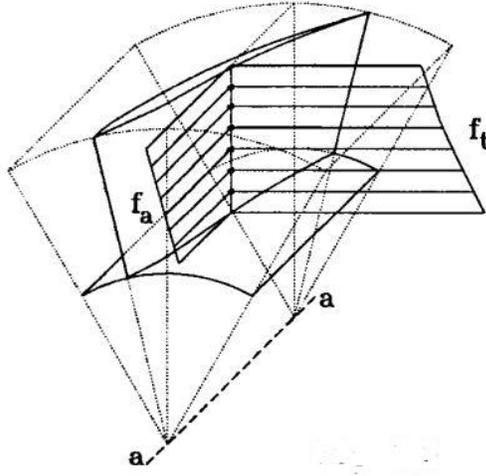


Figura 1.8: Forze esercitate dal fluido che causano momenti flettenti in una palettatura di un turboespansore.

Queste forze causano dei momenti flettenti che possono essere espressi come:

$$M_a = \int_{R_i}^{R_e} (r - R_i) \cdot f_t(r) \cdot dr \quad (8)$$

$$M_t = \int_{R_i}^{R_e} (r - R_i) \cdot f_a(r) \cdot dr \quad (9)$$

Il momento risultante sarà allora:

$$\vec{M}_f = \vec{M}_a + \vec{M}_t \quad (10)$$

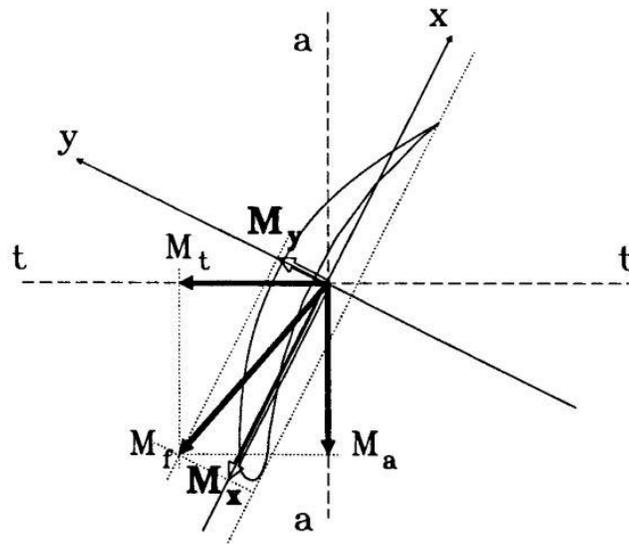


Figura 1.9: Direzione momenti flettenti che sollecitano la palettatura di un turboespansore.

4. Sollecitazioni vibrazionali

Le sollecitazioni vibrazionali nei dischi a pale di turbina possono essere suddivise in due gruppi principali, che dipendono dal loro tipo di generazione:

- Il movimento del rotore conseguente ad un errato bilanciamento che può causare eccitazioni di tipo meccanico;
- Il flusso di gas oltre a generare sollecitazioni di tipo flessionale può causare anche eccitazioni vibrazionali, che saranno quindi aerodinamiche, in quanto oltre alle forze circonferenziali costanti nel tempo coesistono delle forze distribuite in maniera non uniforme.

Questi due gruppi di eccitazione sono i principali responsabili di Fatica ad Alto numero di Cicli; dato che la turbina costituisce un componente cruciale nel funzionamento del motore turbofan, si tenderebbe ad entrare in una regione di sicurezza più ampia possibile progettando delle pale di disco molto robuste. Ma non

bisogna dimenticare che il motore turbofan oltre che ad essere affidabile deve anche essere molto efficiente e trattandosi di aeromobili l'efficienza consta anche della leggerezza, conseguentemente si deve trovare un giusto compromesso tra robustezza e leggerezza della pala del disco di turbina.

Essendo il motore turbofan costituito da una copiosa quantità di componenti ci sarà un'altrettanta quantità di velocità critiche, quindi nel momento della progettazione si deve tenere in conto che il velivolo lavorerà in condizioni di risonanza e quindi con velocità di rotazione critiche.

Per cercare di diminuire le ampiezze di risonanza si deve agire sullo smorzamento del sistema, in questo modo le ampiezze di oscillazione saranno ridotte. Finora sono stati affinati tre metodi:

- Giunto nella radice della lama: in questo punto della paletta le sollecitazioni sono molto elevate, a causa della geometria e della distribuzione delle forze. Le lame vengono collegate tramite configurazioni a forma di coda di rondine inserite negli slot del disco.
- Rivestimento della pala: viene interposto una sorta di tetto in corrispondenza della punta della lama, con questo metodo le ampiezze di vibrazione vengono smorzate dalla pala per attrito secco. Per garantire, inoltre, un'interfaccia ottimale questi componenti hanno una forma ad "S".
- Ammortizzatori sottopiattaforma: le configurazioni descritte finora influenzano negativamente l'efficienza aerodinamica delle pale, quindi per ovviare a questo problema si interviene nella sottostruttura. Viene inserito un pezzo di metallo con

una forma adatta che viene premuto contro le piattaforme della pala durante la rotazione grazie alla forza centrifuga.

1.3 Modello agli elementi finiti della pala di turbina

Il problema principale che si pone nello studio e nella progettazione di dischi palettati è quello di trovare un modello matematico che rispecchi la dinamica del problema reale. Da quanto espresso prima è inevitabile che il sistema attraversi le velocità critiche proprie e quindi si ritroverà a lavorare in risonanza. Con la Forced Response è possibile calcolare la risposta dinamica del problema, si riesce quindi a calcolare l'ampiezza di risonanza in modo da valutare se questa ampiezza è accettabile o meno.

Quindi il processo di progettazione di una pala che sia statorica o rotorica consta di tre fasi principali: progettazione, analisi e testing. Infatti, dopo aver conseguito i risultati numerici è necessario che questi vengano testati empiricamente per avere dei riscontri che nella maggior parte dei casi sono positivi, ma succede anche che questi non rispecchino fedelmente il comportamento che si presupponeva assumesse il sistema studiato.

C'è da dire che la validazione sperimentale risulta essere molto complessa poiché: le misurazioni devono essere eseguite sui componenti più critici, la risposta forzata ottenuta è influenzata dalla presenza di molti altri fenomeni, le temperature elevate di esercizio limitano l'utilizzo di alcuni sistemi di misurazione, come ad esempio gli estensimetri. Per questo motivo vengono ideati dei banchi di prova ideati ad hoc per ciascun caso.

Lo stato dell'arte riguardo la progettazione di una pala di turbina finora è arrivato in questo punto e il processo può essere schematizzato così:

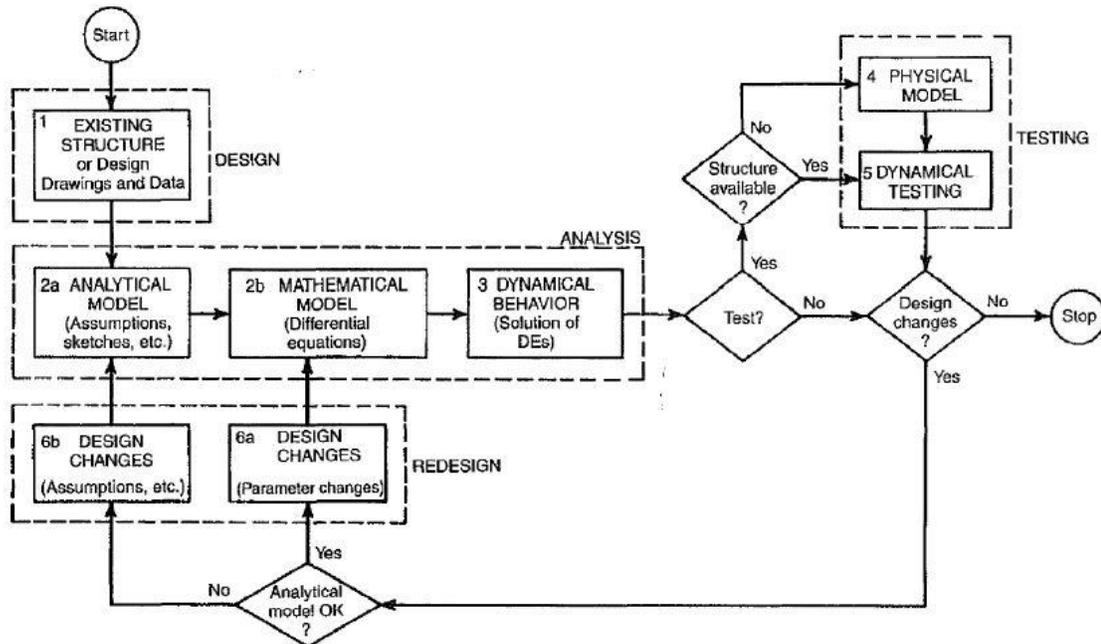


Figura 1.10: Step in una progettazione dinamica.

Nel momento in cui si vuole effettuare uno studio dinamico della turbina si viene a creare il problema che questa è costituita da moltissimi gradi di libertà e quindi entrano in gioco un numero di equazioni così elevato che risulta davvero difficile gestirlo in un calcolatore odierno.

Il primo passo verso una buona progettazione è la capacità di riuscire a ridurre il numero di equazioni che entrano in gioco e riuscire ugualmente ad ottenere dei risultati che siano affidabili e che quindi abbiamo un margine d'errore contenuto.

In questo caso preciso, nel dover progettare uno stadio di turbina è utilissimo sfruttare anzitutto la simmetria ciclica di questa ed eseguire i calcoli sulla singola porzione di disco più paletta, in questo modo il numero di equazioni si abbassa notevolmente.

Per eseguire lo studio dinamico del sistema è necessario un software che processi i vari componenti e li trasformi in matrici di massa, rigidezza e smorzamento. Lo scopo principale di questa trattazione è quello di trovare un metodo ottimizzato per poter eseguire lo studio per la progettazione di stadi di turbina, che abbiamo quindi forme e geometrie molto complesse. Quindi, non essendo l'intenzione ultima quella di studiare un vero e proprio componente, l'oggetto di studio di questa tesi sarà un modello semplificato che rispecchia parzialmente la reale struttura dei componenti che dovranno essere studiati in seguito utilizzando il metodo sviluppato. In relazione a ciò che è stato espresso finora viene di seguito illustrato l'elemento utilizzato come oggetto di studio:

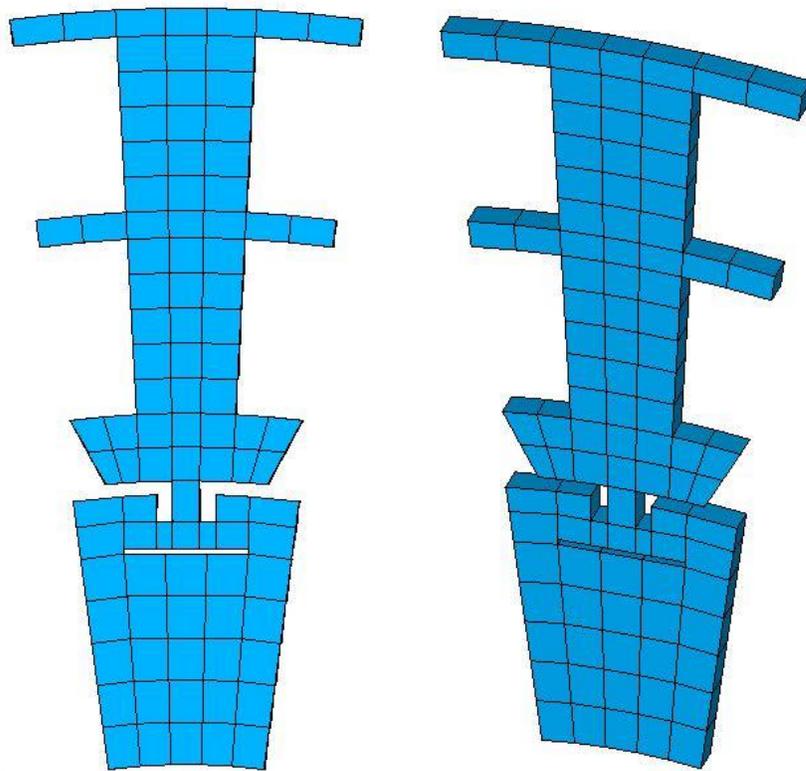


Figura 1.11: Modello di pala più disco semplificato su Ansys.

Nell'immagine a sinistra vediamo il modello completo meshato in 2d di paletta più porzione di disco, in quella a destra invece il modello 3d. Nelle due immagini sottostanti invece il modello suddiviso in paletta e disco (Disk and Blade):

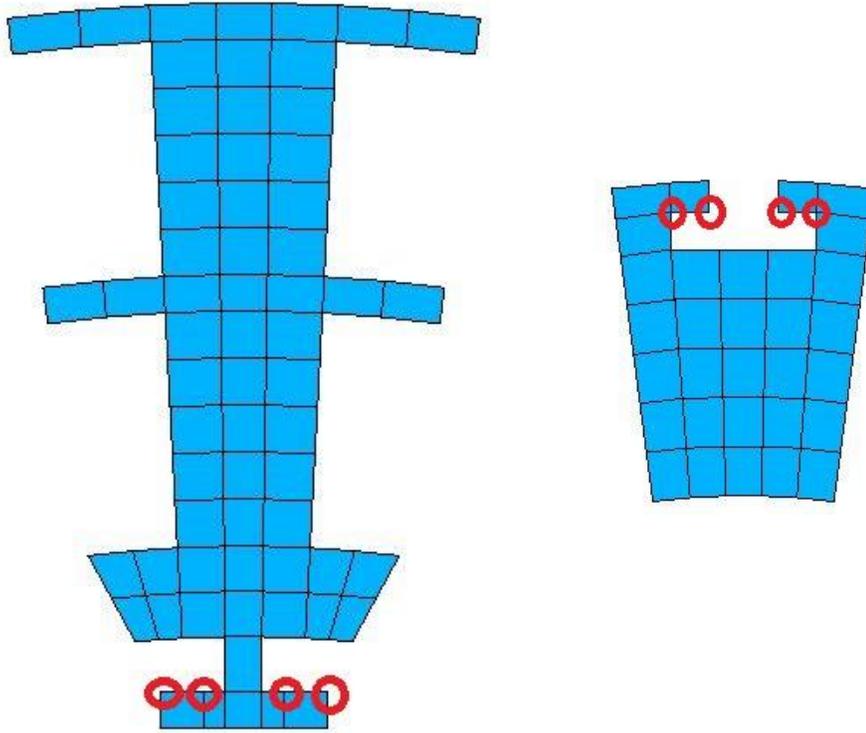


Figura 1.12: Pala a sinistra, sezione di disco a destra semplificati su Ansys.

Dall'immagine sembrerebbe che disco e paletta abbiano tanti nodi in comune, in realtà sono solo 8, 4 davanti e 4 dietro e sono cerchiati in rosso. Il modello full, quindi, è costituito da:

Numero di nodi	Numero di elementi	Numero di equazioni
296	95	840

dove gli elementi sono di tipo SOLID185 e la massa totale di tutto il modello è pari a 1,31 kg.

A primo acchito verrebbe da pensare che il numero totale di equazioni sarebbe:

$$296 \times 3 = 888 \quad (11)$$

Ma, come specificato prima, nel modello completo ci sono un totale di 16 nodi che coincidono nel momento in cui disco e pala vengono uniti.

Il numero totale di elementi, nodi e quindi equazioni non è elevato e il calcolatore impiega pochissimo tempo per riuscire a svolgere un'analisi dinamica; grazie a questo, nel trovare il metodo finale sono state lanciate tantissime simulazioni che sono state risolte in poco tempo.

Nei casi reali, invece, i modelli hanno geometrie molto più complesse e inevitabilmente hanno un numero di nodi e conseguentemente un numero di equazioni elevato.

Capitolo 2

2. Dischi palettati

In questo capitolo verranno descritti i dischi palettati, la loro proprietà di avere una simmetria ciclica, le conseguenze di questa simmetria e lo studio dinamico di questi.

Come già discusso prima i dischi palettati sono costituiti da diversi settori, formati da una parte di disco e una paletta, questi settori sono uguali l'uno con l'altro, di conseguenza è possibile studiare la dinamica di un singolo settore e poi estendere i risultati a tutto il componente.



Figura 2.1: Disco palettato.

2.1 Analisi modale dei dischi palettati

L'esecuzione di un'analisi modale necessita l'elaborazione di una matrice di rigidità K e di una matrice di massa M , e grazie a queste è possibile calcolare gli autovettori e gli autovalori del sistema sotto esame. La valutazione delle frequenze naturali e delle forme modali, quindi, viene effettuata attraverso il FEM (il modello agli elementi finiti), ovvero effettuando una discretizzazione del componente in diversi elementi in modo da trasformare un modello continuo in uno discreto, in questo modo si riescono a trovare le matrici di massa e rigidità.

L'equazione generale del moto è espressa da [14]:

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (12)$$

Dove M e K sono le corrispettive matrici di massa e rigidità, $\mathbf{f}(t)$ rappresenta il vettore delle forze esterne e $\mathbf{x}(t)$ è il vettore degli spostamenti modali del sistema. Dato n_n il numero dei gradi di libertà del sistema, le dimensioni delle matrici e dei vettori saranno rispettivamente:

$$\begin{aligned} M &\in \mathbb{R}^{3n_n \times 3n_n} & K &\in \mathbb{R}^{3n_n \times 3n_n} \\ \mathbf{x}(t) &\in \mathbb{R}^{3n_n \times 1} & \mathbf{f}(t) &\in \mathbb{R}^{3n_n \times 1} \end{aligned}$$

Le matrici di massa e rigidità appartenenti al tipo di struttura che stiamo analizzando avranno una struttura come quella descritta sotto, in quanto le equazioni saranno scritte secondo un sistema di riferimento cilindrico attorno all'asse z e saranno ordinate in modo tale che i GDL (gradi di libertà) di un settore vengano seguiti dai GDL del settore successivo:

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & & M_2 & M_1 \\ M_1 & M_0 & M_1 & \dots & M_3 & M_2 \\ M_2 & M_1 & M_0 & & M_4 & M_3 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ M_2 & M_3 & M_4 & \dots & M_0 & M_1 \\ M_1 & M_2 & M_3 & & M_1 & M_0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & & K_2 & K_1 \\ K_1 & K_0 & K_1 & \dots & K_3 & K_2 \\ K_2 & K_1 & K_0 & & K_4 & K_3 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ K_2 & K_3 & K_4 & \dots & K_0 & K_1 \\ K_1 & K_2 & K_3 & & K_1 & K_0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}$$

Dove le matrici hanno rango pari al numero dei GDL e sono matrici simmetriche, una struttura simmetrica è risultante del fatto che ogni settore è fisicamente vincolato all'altro; dal punto di vista matematico questo fenomeno è visibile dal fatto che ci siano elementi non nulli fuori dalla diagonale principale.

Per ricavare le frequenze e le forme modali proprie del sistema deve essere risolto l'autoproblema seguente:

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}_i = 0 \quad i = 1, \dots, n_s \quad (13)$$

Dove, inizialmente viene risolta l'equazione all'interno delle parentesi e si ricavano gli autovalori ω_i^2 e successivamente è possibile calcolare gli autovettori \mathbf{u}_i .

$$\mathbf{u}_i = [(\mathbf{u}_{1i})^T (\mathbf{u}_{2i})^T \dots (\mathbf{u}_{Ni})^T]^T \quad (14)$$

2.2 Simmetria ciclica

Data la struttura simmetrica la maggior parte dei modi di vibrare sono ortogonali a coppie; come accade nelle strutture assialsimmetriche che, se un modo ha la massima deflessione in un punto della struttura, la rotazione della struttura non cambia la quantità

di massa che si sta muovendo, di conseguenza non cambia il valore della frequenza; questo fenomeno, chiaramente, accade anche per strutture con simmetria ciclica.

I modi possibili di vibrare si possono dividere in tre classi, che si distinguono dal moto relativo tra i singoli settori della struttura [6]:

1. I settori della struttura ruotano tutti con la stessa fase, si sposteranno quindi tutti in egual modo, ci sarà lo stesso spostamento per ogni settore della struttura:

$$\mathbf{u}_{ni} = \mathbf{u}_{(n+1)i} \quad \forall n \quad (15)$$

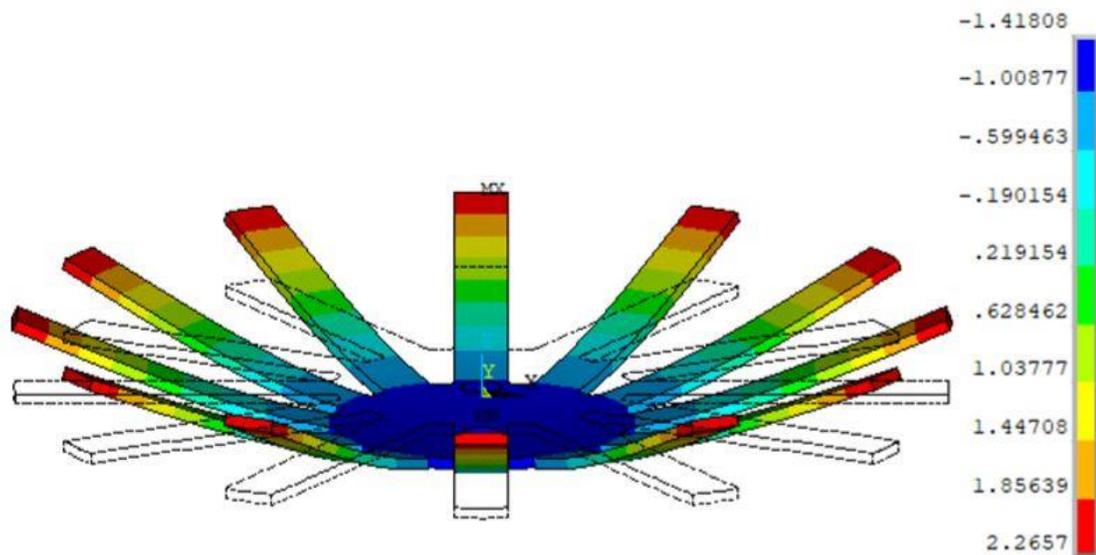


Figura 2.2: Esempio di onda stazionaria per un disco palettato con 12 settori.

E' possibile notare dall'immagine che se si ruota la forma modale di un numero qualsiasi di settori il modo rimane inalterato. Per descrivere questa forma modale è necessario un singolo autovalore e autovettore e si parla di *modo o onda stazionaria*.

2. I settori alterni vibrano nello stesso modo, ovvero ogni settore vibra in opposizione di fase del vettore precedente, quindi se lo spostamento di un settore è minimo lo spostamento del settore successivo è massimo:

$$\mathbf{u}_{ni} = -\mathbf{u}_{(n+1)i} \quad \forall n \quad (16)$$

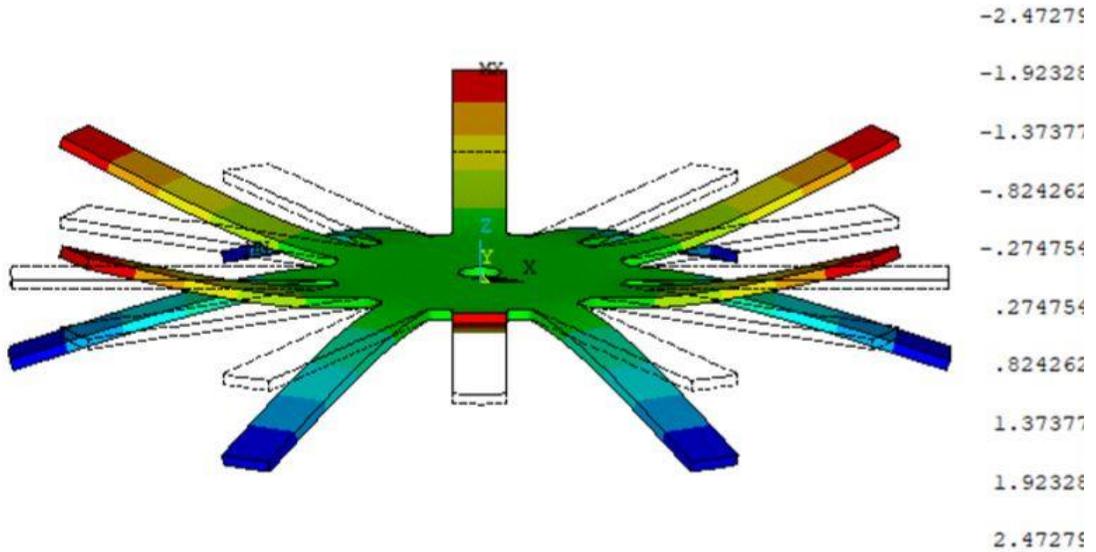


Figura 2.3: Esempio di onda stazionaria in antifase per un disco palettato con 12 settori.

La forma modale in questo caso diventerà:

$$\mathbf{u}_i = [(\mathbf{u}_{1i})^T - (\mathbf{u}_{1i})^T \dots (\mathbf{u}_{1i})^T]^T \quad (17)$$

Quindi se si vuole ruotare la forma modale di un numero pari di settori non succede nulla, se, invece, il numero di settori è dispari la nuova forma modale sarà pari a $-\mathbf{u}_i$. C'è un cambiamento di fase pari a π nella vibrazione precedente e anche in questo caso è possibile descrivere il modo con un singolo autovalore e autovettore.

3. Le forme modali che non appartengono a questi due gruppi si muovono in modo sfasato tra di loro, ciascuna di queste viene espressa da una coppia di autovettori ortogonali corrispondenti al medesimo autovalore.

$$\mathbf{u}_{ni} \neq \mathbf{u}_{(n+1)i} \quad \mathbf{u}_{ni} \neq -\mathbf{u}_{(n+1)i} \quad \forall n \quad (18)$$

La combinazione di questi determina un'onda o modo rotante.

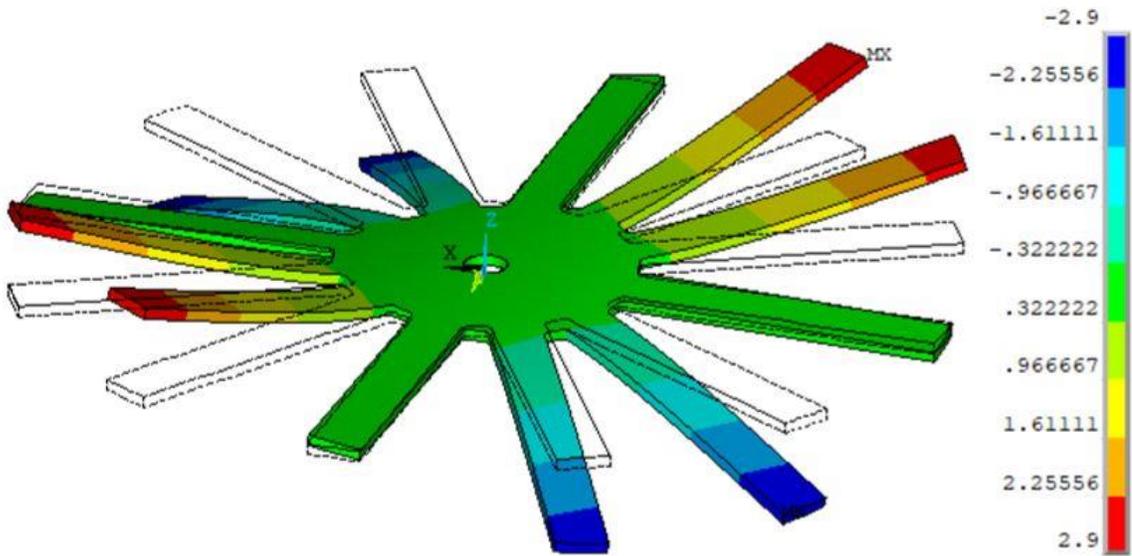


Figura 2.4: Forma modale della terza classe di un disco palettato con 12 settori
(indice armonico $h=2$).

Data la caratteristica della struttura, in cui tutti i settori sono uguali, quando la forma modale \mathbf{u}_i è ruotata di un angolo α_n si ottiene un nuovo modo dallo stesso autovalore \mathbf{u}_i' . Questo può essere espresso come combinazione lineare dell'autovettore \mathbf{u}_i e di quello ortogonale $\bar{\mathbf{u}}_i$, con $\mathbf{u}_i^T \bar{\mathbf{u}}_i = 0$:

$$\mathbf{u}_i' = c\mathbf{u}_i + s\bar{\mathbf{u}}_i \quad c, s \in \mathbb{R} \quad (19)$$

Quindi:

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = 1, \quad \bar{\mathbf{u}}_i^T \bar{\mathbf{u}}_i = 1, \quad (\mathbf{u}'_i)^T \mathbf{u}'_i = 1 \quad (20)$$

Si può dimostrare che i coefficienti c ed s posso essere scritti come $\cos(\varphi_h)$ e $-\sin(\varphi_h)$, dove φ_h è un angolo generico rispetto al quale l'autovettore \mathbf{u}_i deve ruotare per ottenere \mathbf{u}'_i .

L'angolo φ_h deve essere pari a:

$$\varphi_h = \pm \frac{2\pi}{N} h \quad (21)$$

Dove h definisce il numero di diametri nodali, ovvero indica la periodicità della forma modale della struttura, concretamente rappresenta il numero di linee modali che attraversano il centro della struttura in cui spostamenti, deformazioni e tensioni sono pari a zero.

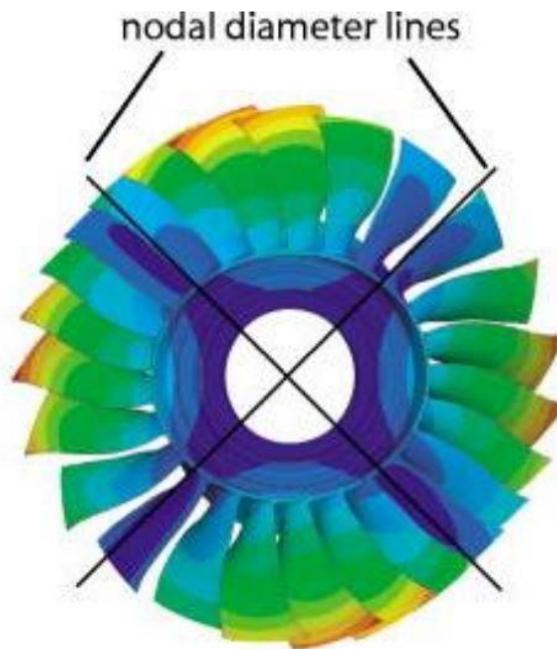


Figura 2.5: Esempio di disco palettato con 2 diametri nodali.

Naturalmente, data l'espressione precedente, si può scrivere che:

$$\bar{\mathbf{u}}'_i = -s\mathbf{u}_i + c\bar{\mathbf{u}}_i \quad c, s \in \mathbb{R} \quad (22)$$

Riscrivendo le due espressioni in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_i \\ \bar{\mathbf{u}}'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\mathbf{I}_{Nn_s} & s\mathbf{I}_{Nn_s} \\ -s\mathbf{I}_{Nn_s} & c\mathbf{I}_{Nn_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \bar{\mathbf{u}}_i \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \bar{\mathbf{u}}_i \end{Bmatrix} \quad (23)$$

dove \mathbf{I}_{Nn_s} rappresenta la matrice identità con rango pari al numero dei gradi di libertà della struttura. La matrice \mathbf{R} , definita come *matrice di rotazione*, è utilizzata per esprimere il modo di un settore quando si ha il modo di un altro settore diverso dal primo:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{(n-1)i} \\ \bar{\mathbf{u}}_{(n-1)i} \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{ni} \\ \bar{\mathbf{u}}_{ni} \end{Bmatrix} \quad \forall n \quad (24)$$

Ogni combinazione lineare di modi rappresenta un nuovo autovettore, e questo soddisfa ancora l'autoproblema. È possibile scrivere:

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{u}_i + i\bar{\mathbf{u}}_i \quad \bar{\mathbf{z}}_i = \mathbf{u}_i - i\bar{\mathbf{u}}_i \quad (25)$$

Gli autovettori della terza classe sono autovettori complessi, invece quelli delle prime due sono autovettori reali. Con i terzi entra in gioco il concetto di evoluzione temporale. La deformata operativa (ODS Operative Deflection Shape) nello spazio delle prime due, quindi di un'onda stazionaria, ad un certo istante t è espressa dalla parte reale del modo $\mathbf{u}_i e^{i\omega t}$:

$$\Re[\mathbf{u}_i e^{i\omega t}] = \Re[\mathbf{u}_i \cos(\omega t) + i\mathbf{u}_i \sin(\omega t)] = \mathbf{u}_i \cos(\omega t) \quad (26)$$

Ponendo $t = 0$ tutti i GDL omologhi di ciascun settore presentano la stessa ampiezza non nulla, a $t = \pi / (2\omega)$ tutti i GDL attraversano lo 0, tutto questo è possibile vederlo nel grafico sottostante:

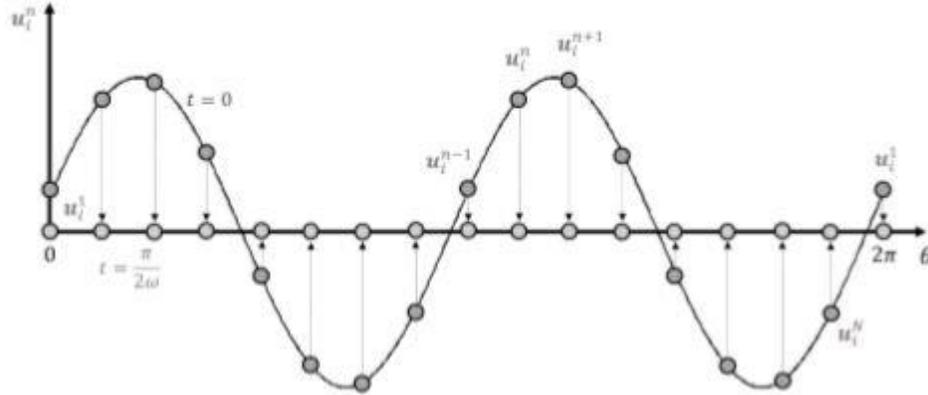


Figura 2.6: *Rappresentazione dello spostamento nel tempo di un'onda stazionaria per una struttura in simmetria ciclica.*

Negli autovettori che appartengono alla terza categoria, ovvero negli autovettori complessi \mathbf{z}_i la deformazione istantanea vale:

$$\begin{aligned} \Re[\mathbf{z}_i e^{i\omega t}] &= \Re[(\mathbf{u}_i + i\bar{\mathbf{u}}_i)(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))] \\ &= \mathbf{u}_i \cos(\omega t) - \bar{\mathbf{u}}_i \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (27)$$

Osservando l'evoluzione temporale della forma modale si nota che per $t = 0$ l'ampiezza è pari a \mathbf{u}_i , invece per $t = \varphi_h / \omega$ è pari a:

$$\Re[\mathbf{z}_i e^{i\omega t}] = \mathbf{u}_i \cos(\varphi_h) - \bar{\mathbf{u}}_i \sin(\varphi_h) \quad (28)$$

che è pari a \mathbf{u}_i' . Perciò, se si prende in considerazione un generico GDL di un generico settore, il GDL omologo del settore successivo avrà la stessa ampiezza dopo un intervallo di tempo pari a $t = \varphi_h / \omega$.

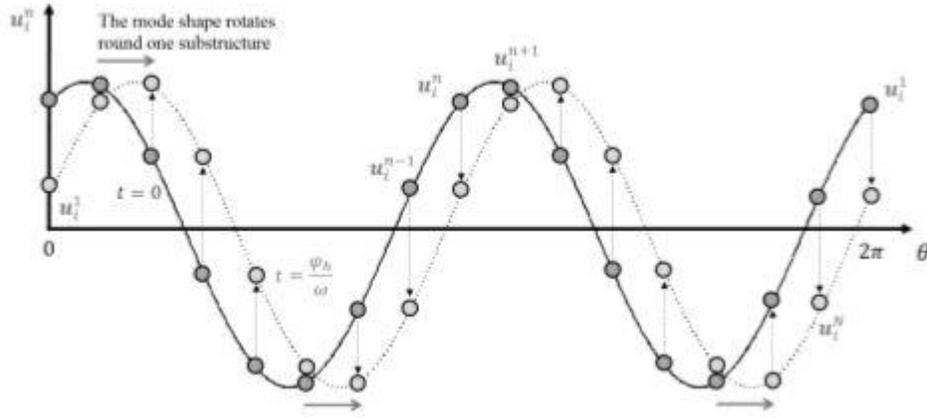


Figura 2.7: Rappresentazione schematica di un'onda rotante per una struttura in simmetria ciclica.

Quindi è possibile scrivere:

$$\mathbf{z}_{(n-1)i} = \mathbf{z}_{ni} e^{i\varphi h} \quad (29)$$

Questa espressione se viene estesa ai modi della prima e della seconda classe può essere scritta come:

$$\mathbf{u}_{(n-1)i} = \mathbf{u}_{ni} e^{i\varphi h} \quad (30)$$

L'angolo φ_h è definito come Inter-Blade Phase Angle (IBPA) e rappresenta il ritardo temporale tra settori adiacenti. Il valore h precedentemente definito è definito come:

$$\hat{h} = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{se } N \text{ è pari} \\ \frac{N-1}{2} & \text{se } N \text{ è dispari} \end{cases} \quad (31)$$

Finalmente, riassumendo:

-
1. Nella prima classe i settori vibrano in fase, di conseguenza l'IBPA sarà nullo e gli autovettori saranno reali $e^{i\varphi h} = 1$, e i diametri $h=0$.
 2. In questa classe i modi vibrano in controfase, l'IBPA= $\pm\pi$ e questo accade solo se N è pari e quindi $h = N/2$, autovettori reali con $e^{i\varphi h} = -1$.
 3. Nei modi appartenenti alla terza classe $0 < h < \hat{h}$.

2.2.1 Analisi modale nei dischi palettati in simmetria ciclica

Sfruttando la simmetria ciclica l'analisi modale viene eseguita solamente nella singola sezione di disco più paletta imponendo i vincoli di simmetria ciclica.

I gradi di libertà del componente, quindi del settore saranno:

$$\mathbf{x}_{CS} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_L \\ \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_R \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Che saranno:

- \mathbf{x}_L sono i GDL appartenenti all'interfaccia sinistra del settore, appartengono quindi esclusivamente alla porzione di disco;
- \mathbf{x}_I rappresentano i GDL che sono interni alla struttura, appartengono sia alla paletta che al disco;
- \mathbf{x}_R sono i GDL ubicati all'interfaccia destra del settore, appartengono come i primi al disco.

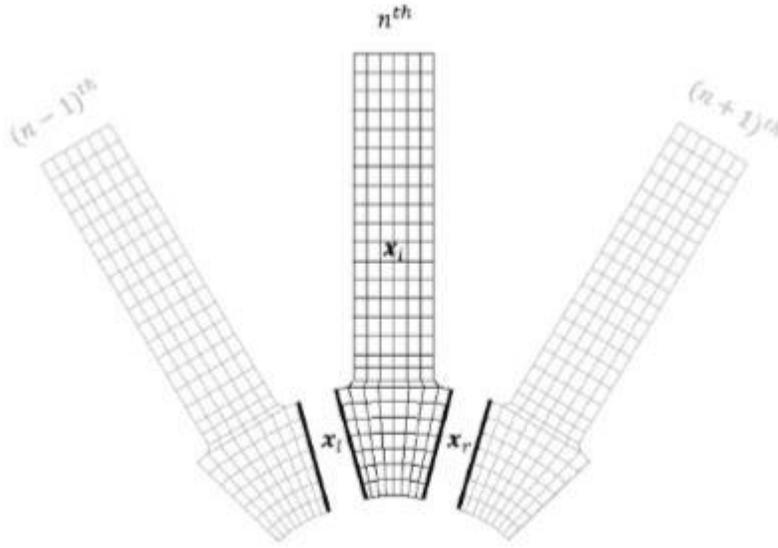


Figura 2.8: Rappresentazione dei diversi settori di un disco palettato discretizzati.

Di conseguenza in questo modo saranno suddivisi tutte le matrici e i vettori appartenenti alla struttura:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{LL} & \mathbf{M}_{LI} & \mathbf{M}_{LR} \\ \mathbf{M}_{IL} & \mathbf{M}_{II} & \mathbf{M}_{IR} \\ \mathbf{M}_{RL} & \mathbf{M}_{RI} & \mathbf{M}_{RR} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LL} & \mathbf{K}_{LI} & \mathbf{K}_{LR} \\ \mathbf{K}_{IL} & \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IR} \\ \mathbf{K}_{RL} & \mathbf{K}_{RI} & \mathbf{K}_{RR} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_{CS} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_I \\ \mathbf{f}_R \end{Bmatrix}$$

Imponendo i vincoli di simmetria quindi devono essere rispettate queste condizioni:

- Continuità: $\mathbf{x}_{R,k} = \mathbf{x}_{L,k+1}$;
- Equilibrio: $\mathbf{f}_{R,k} = -\mathbf{f}_{L,k+1}$;

Per ridurre i gradi di libertà messi in gioco e quindi le equazioni, date le considerazioni fatte per la simmetria ciclica è possibile dire che:

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_L \cdot e^{i\phi h} \quad (33)$$

dove i gradi di libertà dopo il segno uguale prenderanno in nome di gradi di libertà *indipendenti* e gli \mathbf{x}_R saranno i gradi di libertà *dipendenti*. La stessa operazione può essere eseguita sfruttando l'equazione di equilibrio:

$$\mathbf{f}_R = -\mathbf{f}_L \cdot e^{i\varphi h} \quad (34)$$

Di conseguenza il vettore degli spostamenti sarà:

$$\mathbf{x}_{CS} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_L \\ \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I}e^{i\varphi h} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_L^h \\ \mathbf{x}_I^h \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^h \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_L^h \\ \mathbf{x}_I^h \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Il problema agli autovalori diventa:

$$(\mathbf{K}^h - \omega_i^2 \mathbf{M}^h) \mathbf{z}_i^h = 0 \quad i = 1, \dots, n_s \quad (36)$$

dove le matrici di massa e rigidità sono rispettivamente:

$$\mathbf{M}^h = (\mathbf{T}^h)^T \mathbf{M} \mathbf{T}^h \quad \mathbf{K}^h = (\mathbf{T}^h)^T \mathbf{K} \mathbf{T}^h$$

Introducendo questa trasformazione i gradi di libertà diminuiscono, passando da $3(2n_L+n_I)$ a $3(n_L+n_I)$.

2.3 Risposta forzata

Durante il funzionamento di un disco palettato uno dei rischi più grandi è quello che questo inizi a vibrare e che le ampiezze di vibrazione diventino tanto grandi da causare fatica ad alto numero di cicli e conseguente rottura plastica.

Le ampiezze di vibrazione vengono ampliate quando la forzante, solitamente armonica, possiede la stessa frequenza del componente, di conseguenza questo entra in risonanza e gli spostamenti diventano incontenibili.

Per evitare che questo accada, è necessaria una scrupolosa analisi dinamica del componente, per ricavare quelle che sono le frequenze proprie. Nel momento in cui il disco palettato inizia a girare agiscono su di questo delle forze centrifughe che, dopo una serie di studi si è arrivati alla conclusione, aumentano la rigidità del componente. Di conseguenza, dato che queste forze sono direttamente proporzionali alla velocità di rotazione anche le frequenze naturali del disco dipendono direttamente dalla velocità di rotazione. Per quanto riguarda le forze eccitanti, queste possono essere dovute ad una distribuzione irregolare delle pressioni del flusso che investe le pale della turbina. Infatti, il combustore consente il passaggio del flusso di gas caldo tramite una serie di scie, che agiranno sulla turbina come una distribuzione di impulsi. Si può dire, quindi, che anche la frequenza delle forze eccitanti dipende dalla velocità di rotazione, anzi è un multiplo di questa. Si definisce *Engine Order* (EO) definito come il rapporto tra la pulsazione della forzante stessa e la velocità di rotazione del disco. Questo può essere riassunto in una relazione:

$$\omega = EO \cdot \frac{\Omega}{2\pi} \quad (37)$$

dove ω e Ω sono espressi rispettivamente in Hz e rpm (giri al minuto) e il coefficiente EO indica la periodicità dell'eccitazione sul disco di turbina. Ad esempio, se l'eccitazione è causata dalle scie dello statore dello stadio precedente, EO rappresenta il numero di palette di quello statore.

Nella fase di progettazione è molto utile quindi l'utilizzo del *diagramma di Campbell*, in particolare nello studio della risposta forzata:

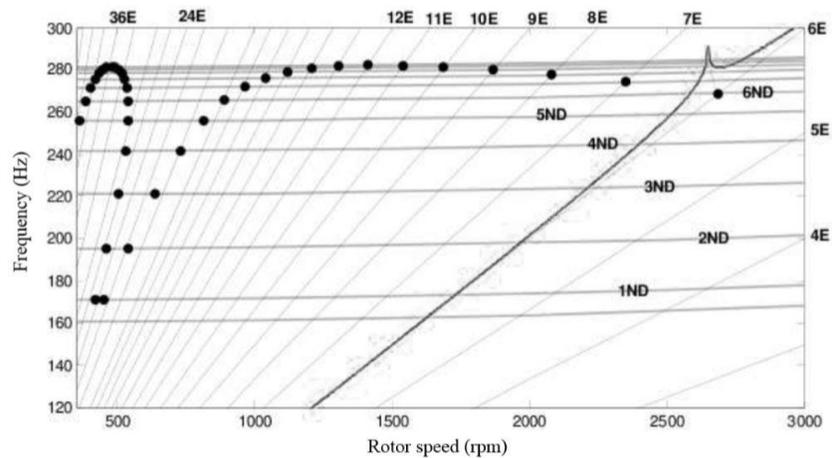


Figura 2.9: Diagramma di Campbell di un disco palettato.

In questo diagramma le frequenze naturali sono delle linee orizzontali e dipendono dalla velocità di rotazione del rotore Ω , mentre le frequenze di eccitazione EO sono delle linee rette che partono dall'origine degli assi. Solo una parte dei punti ottenuti dall'intersezione di queste due linee causa risonanza vera e propria. In generale le condizioni critiche si ripresentano quando vale:

$$EO = z \cdot N \pm h \quad \forall z \in \mathbb{N}^* \quad (38)$$

Osservando questa equazione è abbastanza intuitivo il caso in cui $z = 0$: il numero EO sarà pari al numero dei diametri modali h delle forme modali, infatti dal punto di vista fisico succede che la distribuzione della forza coincide con la forma modale, quindi se le due frequenze coincidono la risposta avrà massima ampiezza e vi sarà risonanza. Al contrario la forma modale in cui $h \neq EO$ non può essere eccitata in risonanza perché la proiezione della forza nel modo è nulla. Il caso in cui $z \neq 0$ è meno intuitivo da capire: a causa del fenomeno di Aliasing, il modo ad un dato h è eccitato in risonanza dalla forzante rotante di un dato EO. L'aliasing, o distorsione di campionamento lento, è un

fenomeno per il quale due segnali possono diventare indistinguibili una volta campionati.

In questo caso la forma della forzante rotante viene percepita in modo scorretto dalle pale della turbina e viene vista come $EO = h$.

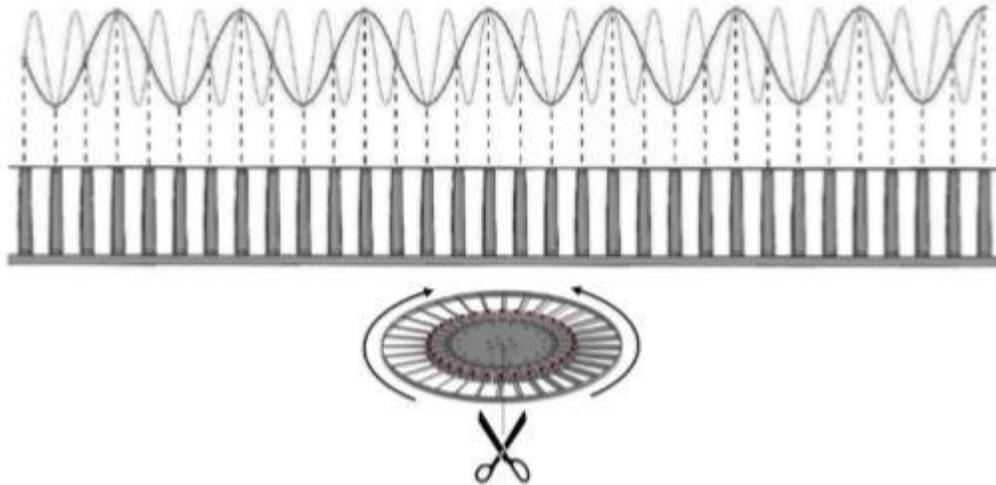


Figura 2.10: Fenomeno di Aliasing in un disco palettato.

2.4 Stress stiffening

I dischi palettati durante il loro funzionamento sono sottoposti a delle forze centrifughe che non sono per nulla trascurabili, difatti queste forze centrifughe causano la variazione del valore delle frequenze naturali [16].

Per capire il motivo intrinseco bisogna risalire al calcolo della matrice di rigidità in una struttura, infatti l'espressione per ottenere la matrice di rigidità è [15]:

$$[\mathbf{K}_i] = \int_V [B_i]^T [E_i] [B_i] dV \quad (39)$$

dove $[B_i]$ è la matrice di deformazione-spostamento basata sulle funzioni di forma e $[E_i]$ è la matrice sforzo-deformazione. Per semplicità si considera l'ipotesi che sia le deformazioni che le rotazioni siano piccole, la matrice è quindi funzione delle deformazioni e quindi degli spostamenti.

Nel momento in cui la turbina inizia a girare e successivamente raggiunge delle velocità di rotazione molto elevate la forza centrifuga causerà una deformazione della struttura, di conseguenza la matrice varierà:

$$[\bar{K}_i] = [K_i] + [S_i] \quad (40)$$

$[S_i]$ è il contributo allo stress-stiffening:

$$[S_i] = \int_V [G_i]^T [\tau_i] [G_i] dV \quad (41)$$

Dove $[G_i]$ è la matrice delle derivate delle funzioni di forma e $[\tau_i]$ è la matrice che rappresenta gli sforzi reali nel sistema cartesiano globale.

In realtà per essere precisi bisogna tenere conto anche dell'effetto dello spin-softening che diminuisce (pochissimo) il valore della matrice di rigidità, quindi in definitiva questa sarà data da:

$$[K_i^*] = [\bar{K}_i] + [K_i^r] = [K_i] + [S_i] + [K_i^r] \quad (42)$$

e quindi per il calcolo delle frequenze naturali si dovrà tenere conto di una nuova equazione:

$$(K^* - \omega_i^2 M) \mathbf{u}_i = 0 \quad i = 1, \dots, n_s \quad (43)$$

Dal punto di vista pratico, sul software Ansys viene tenuto conto eseguendo una preliminare analisi statica (specificando che si tratta di prestress) che modifica la matrice di rigidezza originale e successivamente viene eseguita l'analisi modale.

Capitolo 3

3 Tecniche di riduzione

Nel momento in cui si vuole eseguire un'analisi modale in una struttura reale il numero n_s dei gradi di libertà risulta veramente elevato e di conseguenza il numero di equazioni da risolvere causa un ritardo così elevato nell'ottenimento dei risultati che va a penalizzare tutto il processo di progettazione. Risulta necessario diminuire il numero di equazioni da risolvere, vengono così utilizzate delle tecniche di riduzione. Per cercare di ottimizzare i tempi di calcolo si è arrivati alla soluzione di suddividere il componente da studiare in sottostrutture più piccole, delle quali è più facile ricavare il comportamento dinamico. Successivamente, il modello dinamico di tutto il componente è ottenuto assemblando i modelli dinamici delle sottostrutture, questo approccio è conosciuto ai giorni nostri come *sottostrutturazione dinamica* (DS dall'inglese Dynamic Substructuring). Questo tipo di approccio innovativo introduce molti vantaggi tra cui:

- Permette la valutazione di strutture che sarebbe difficile se non impossibile studiare;
- Analizzando il sistema totale in sottostrutture è più facile individuare un problema locale, che riguarda cioè una sottostruttura e che incide su tutto il componente;

-
- Dà la possibilità di combinare delle parti modellate numericamente;
 - Nel momento in cui una singola parte viene sostituita solo questa parte deve essere rianalizzata e non tutto il componente;
 - Permette di combinare componenti che sono stati creati e analizzati da diversi autori o in diversi momenti.

3.1 Sottostrutturazione dinamica

I metodi più diffusi di sottostrutturazione dinamica combinano i concetti di riduzione del numero dei gradi di libertà analizzati e di suddivisione in sottostrutture. Dal punto di vista storico questo metodo è stato utilizzato per la prima volta nel 1960, in quel periodo risultò necessaria una sottostrutturazione a causa del potere computazionale limitato dei calcolatori, e per questo motivo prese subito larga diffusione tra il mondo dell'ingegneria e della matematica.

Le caratteristiche dinamiche di una struttura, ad esempio le pulsazioni fondamentali, sono delle caratteristiche *globali* della struttura, mentre l'analisi statica valuta comportamenti *locali* (valuta ad esempio la concentrazione degli sforzi), quindi mentre lo studio statico di un modello richiede molta precisione e cioè richiede un numero molto elevato di gradi di libertà (per studiare in dettaglio i comportamenti locali), un modello per l'analisi dinamica richiede un numero di gradi di libertà ridotto. Il problema si pone nel momento in cui, nella maggior parte dei casi è necessario che venga eseguita un'analisi statica prima dell'analisi modale in sé e per sé. Quindi, nel momento in cui deve essere eseguita un'analisi statica allora la discretizzazione del componente deve essere molto fitta, ma se si vuole eseguire un'analisi modale non è necessario che la discretizzazione sia così

fitta. Il progettista, allora, si trova davanti ad un bivio: utilizzare una mesh fine oppure utilizzare una mesh più grossolana. Un approccio elegante per cercare di ovviare a questo problema è quello di ridurre il numero dei gradi di libertà senza modificare la mesh degli elementi finiti: questo compito è affidato alle *tecniche di riduzione*. Il comportamento dinamico della struttura non viene più descritto da un numero elevato di punti lungo tutta la struttura, ma viene scelto, strategicamente, un numero limitato di punti su cui eseguire i calcoli.

I risultati del modello matematico ridotto devono avere un margine di errore che deve essere limitato rispetto ai risultati ottenibili dal modello matematico completo, ovvero:

- le frequenze naturali del modello ridotto devono discostarsi dalle frequenze naturali del modello completo entro qualche cifra;
- i termini diagonali della matrice del MAC devono essere maggiori di 0.5.

Il principio matematico alla base di tutti i metodi di riduzione è sostanzialmente lo stesso: mirano a definire una base di riduzione $[R]$, che raggruppa tutti i modi di vibrare che sono necessari per descrivere il comportamento dinamico del sistema in toto. La differenza tra i vari metodi di riduzione risiede sulla natura di questa base $[R]$ e quindi sulla natura di una matrice di trasformazione.

Tuttavia, è possibile individuare due categorie principali in cui è possibile raggruppare tutte le tecniche:

1. Metodo Component Mode Synthesis (CMS)
2. Riduzione modale generalizzata

3.1.1 Metodo Component Mode Synthesis (CMS)

Il termine modi componenti è utilizzato per indicare una base per descrivere gli spostamenti dei punti all'interno di una sottostruttura.; ad esempio gli autovettori sono solo una classe dei modi componenti [7]. Per i metodi di questa tipologia la matrice di trasformazione R viene definita come matrice component-mode e include i seguenti modi:

- *Modi vibrazionali* che tengono conto del comportamento dinamico del componente.
- *Modi statici* che descrivono l'interazione fra sottostrutture vicine.

Per riuscire a ricavare questi modi è necessario partire dal set di equazioni conservative che descrivono il comportamento dinamico lineare di un generico componente:

$$\mathbf{M}^{(c)} \ddot{\mathbf{x}}^{(c)}(t) + \mathbf{K}^{(c)} \mathbf{x}^{(c)}(t) = \mathbf{f}^{(c)}(t) \quad (44)$$

dove i termini di questa equazione sono stati descritti precedentemente.

In generale, ogni sottostruttura è connessa con una o più altre sottostrutture adiacenti da nodi di interfaccia. La figura sottostante illustra una semplice trave che è suddivisa in 3 sottostrutture:

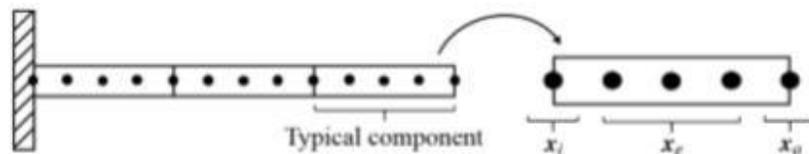


Figura 3.1: Esempio di trave suddivisa in 3 elementi.

Come vediamo dalla figura i gradi di libertà di una generica sottostruttura possono essere suddivisi in:

- Gdl di interfaccia x_i : con la lettera i vengono indicati tutti quei gradi di libertà che sono condivisi con le sottostrutture adiacenti;
- Gdl interni x_e : con la lettera e vengono indicati i gradi di libertà che non sono in comune con le sottostrutture adiacenti;
- Gdl accessori x_a : con la lettera a vengono indicati i gradi di libertà che servono per applicare delle forze esterne oppure per monitorare la risposta della sottostruttura.

I gradi di libertà di interfaccia e quelli accessori possono essere raggruppati in un unico set chiamato indicato con la lettera b :

$$\mathbf{x}_b = \{\mathbf{x}_i^T \ \mathbf{x}_a^T\}^T$$

dove il numero dei gradi di libertà sarà $n_b = n_i + n_a$.

Quindi l'equazione principale può essere scritta come:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{be} \\ \mathbf{M}_{eb} & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_b \\ \ddot{\mathbf{x}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{be} \\ \mathbf{K}_{eb} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_e \end{Bmatrix} \quad (45)$$

In generale, però, i modi interni possono essere suddivisi nella loro componente statica e dinamica:

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_e^s + \mathbf{x}_e^d \quad (46)$$

La componente statica del vettore è ottenuta ponendo uguale a zero l'accelerazione e naturalmente anche il termine \mathbf{x}_e^d :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{be} \\ \mathbf{K}_{eb} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_e^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_e \end{Bmatrix} \quad (47)$$

assumendo che non ci siano forzanti esterne ($\mathbf{f}_e = 0$):

$$\mathbf{x}_e^s = -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{eb}\mathbf{x}_b = \mathbf{\Psi}_{eb}\mathbf{x}_b \quad (48)$$

dove, quindi, la matrice $\mathbf{\Psi}_{eb}$ ha al suo interno tutti i nodi statici, cioè le deformazioni statiche dei gradi di libertà in \mathbf{x}_e risultati di spostamenti o applicazioni di forze al contorno \mathbf{x}_b .

La parte dinamica del vettore \mathbf{x}_e è approssimata da un set di modi vibrazionali ottenuti da una classica sovrapposizione modale:

$$\mathbf{x}_e^d \approx \sum_{j=1}^{n_v} \phi_{e,j} \boldsymbol{\eta}_j = \boldsymbol{\phi}_v \boldsymbol{\eta}_v \quad (49)$$

dove i modi $\phi_{e,j}$ sono ottenuti risolvendo il problema agli autovalori:

$$(\mathbf{K}_{ee} - \omega_{e,j}^2 \mathbf{M}_{ee}) \boldsymbol{\phi}_{e,j} = 0 \quad (50)$$

La riduzione del modello viene ottenuta scegliendo non tutti i possibili modi ottenibili dall'equazione, ma solo una parte di questi. Solitamente vengono utilizzati i modi con i valori di frequenza più bassi, che hanno un fattore di partecipazione modale elevato, e che quindi considerano lo spostamento di una porzione elevata di massa. Dal punto di vista pratico succede che, si lancia una preliminare analisi modale si analizzano i fattori di partecipazione e si individua l'ultima frequenza in cui il fattore è abbastanza alto. Quindi, a seguito di questa riduzione il numero di equazioni sarà pari a:

$$n_v \ll n_e$$

Sostituendo si ottiene l'equazione:

$$\mathbf{x}_e = \boldsymbol{\Psi}_{eb}\mathbf{x}_b + \boldsymbol{\phi}_v\boldsymbol{\eta}_v \quad (51)$$

Da questa espressione è possibile notare la stretta dipendenza di x_e in x_b . Per questo motivo sono definiti rispettivamente come nodi *slave* e nodi *master*. È possibile scrivere questa relazione:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_b \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} & \mathbf{0}_{bv} \\ \boldsymbol{\Psi}_{eb} & \boldsymbol{\phi}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \boldsymbol{\eta}_v \end{Bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{q} \quad (52)$$

Dove \mathbf{R} è finalmente il modo componente, o matrice di trasformazione, e \mathbf{q} è il vettore dei gradi di libertà ridotto, solitamente definito come *vettore delle coordinate generalizzate*.

Quando questo vettore viene sostituito nell'equazione generale si ottiene questa relazione:

$$\mathbf{M}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{q} = \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (53)$$

Tralasciando dei gradi di libertà è inevitabile che vengano introdotte delle approssimazioni, di conseguenza il sistema risulterà più rigido della realtà e quindi di conseguenza ci sarà un residuo espresso da \mathbf{r} . L'equazione ridotta è ottenuta ponendo il residuo uguale a 0 per i modi statici e dinamici, $\mathbf{R}^T\mathbf{r} = 0$, riferito come metodo di *Rayleigh-Ritz*. Quindi viene ottenuta questa espressione:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (54)$$

dove

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{R}^T\mathbf{M}\mathbf{R} \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{R}^T\mathbf{K}\mathbf{R} \quad \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{R}^T\mathbf{f}$$

A seguito della riduzione, il modello ridotto sarà più rigido, accade cioè lo stesso fenomeno di quando viene applicata la discretizzazione FE delle strutture, le frequenze avranno un valore più elevato.

Come detto prima, le differenze tra i diversi metodi di riduzione si basano sulla matrice di trasformazione \mathbf{R} ; in base a questo, i metodi CMS possono essere suddivisi in tre sottoclassi che dipendono dalle condizioni al contorno imposte:

- *Metodi a interfaccia fisso*: ogni singolo componente viene preso con le interfacce mantenute fisse, ovvero gli spostamenti nell'interfaccia pari a zero, $\mathbf{x}_b = 0$. Eseguendo questa operazione i modi statici non sono modellati correttamente, di conseguenza questi vengono calcolati imponendo uno spostamento unitario ad ogni interfaccia, mantenendo contemporaneamente ferme le altre interfacce.
- *Metodi a interfaccia libero*: ogni singolo componente viene preso con le interfacce mantenute libere, con vincolo pari a 0. Come accade alla sottoclasse precedente anche in questo caso le deformazioni statiche della struttura non sono descritte correttamente. Qui, invece di imporre uno spostamento, viene imposta una forza unitaria per ogni GDL all'interfaccia.
- Metodo ibrido: è una combinazione delle due sottoclassi precedenti.

3.1.2 Riduzione modale generalizzata

Questo tipo di riduzione si può utilizzare nel momento in cui il componente non è necessario che venga suddiviso in sottostrutture; in questo caso i GDL vengono ridotti tutti assieme utilizzando un gruppo di modi vibrazionali, quelli con il fattore di partecipazione

modale più elevato e quindi quelli con frequenze più basse. Le frequenze e i modi vengono calcolati risolvendo l'autoproblema:

$$(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_j = 0 \quad (55)$$

e come nel caso precedente:

$$\mathbf{x} \approx \sum_{j=1}^{n_v} \boldsymbol{\phi}_j \eta_j = \boldsymbol{\phi}_{Nnv} \boldsymbol{\eta}_v \quad (56)$$

3.2 Metodi a interfaccia fisso

Rispetto a tutti gli altri metodi di riduzione i metodi a interfaccia fisso sono quelli maggiormente utilizzati. Tra questi la Guyan reduction e la tecnica di Craig-Bampton sono implementati in diversi software di calcolo agli elementi finiti.

3.2.1 Modi vincolati

I modi statici vincolati utilizzati nei metodi di riduzione a interfaccia fisso possono essere ricavati dividendo le componenti del vettore degli spostamenti in gradi di libertà interni ed esterni, e possono essere ricavati come visto precedentemente:

$$\mathbf{x}_e = -\mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{eb} \mathbf{x}_b = \boldsymbol{\Psi}_{eb} \mathbf{x}_b \quad (57)$$

Il termine $\boldsymbol{\Psi}_{eb} = -\mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{eb}$ rappresenta la *matrice di condensazione statica*. Il vettore degli spostamenti può essere espresso come:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_b \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I}_b \\ -\mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{eb} \end{bmatrix} \mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \boldsymbol{\Psi}_{eb} \end{bmatrix} \mathbf{x}_b \quad (58)$$

Dove

$$\Psi_{Nnb} = \begin{bmatrix} I_{bb} \\ \Psi_{eb} \end{bmatrix}$$

rappresenta la matrice dei modi vincolati (*constrain-mode matrix*). Come detto prima, fisicamente questa matrice viene ottenuta applicando uno spostamento unitario ad un grado di libertà al contorno e mantenendo fissati gli altri.

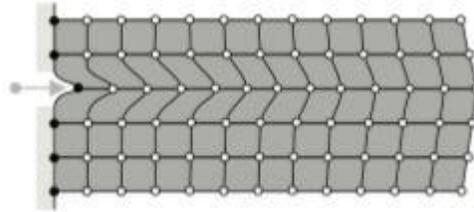


Figura 3.2: Esempio di trave discretizzata in cui viene applicato uno spostamento unitario in un nodo di interfaccia.

3.2.2 Modi vibrazionali

Per riuscire a descrivere il comportamento di un componente non bastano i modi statici, la struttura risulterebbe troppo rigida, è necessario che vengano aggiunti dei modi vibrazionali. Questi vengono calcolati risolvendo l'autoproblema:

$$(\mathbf{K}_{ee} - \omega_{e,j}^2 \mathbf{M}_{ee}) \boldsymbol{\phi}_{e,j} = 0 \quad (59)$$

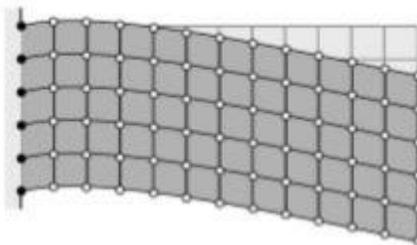


Figura 3.3: Modo di vibrare di una trave discretizzata.

Dal punto di vista pratico è veramente difficile ottenere sia i modi di condensazione statica che i modi vibrazionali; risulta quasi impossibile applicare i diversi tipi di vincoli e calcolare lo spostamento.

3.3 Metodo di condensazione statica (Guyan reduction)

Il metodo di riduzione più antico è il metodo di Guyan, proposto nel 1965 e ancora ampiamente utilizzato oggi [11]. Da come descritto dal titolo è un metodo di condensazione statica, valgono quindi tutte le considerazioni fatte nel paragrafo 3.3.1, di conseguenza gli spostamenti statici valgono:

$$\mathbf{x}_e = \boldsymbol{\Psi}_{eb}\mathbf{x}_b \quad (60)$$

In generale, gli spostamenti quindi sono:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_b \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \boldsymbol{\Psi}_{eb} \end{bmatrix} \mathbf{x}_b = \boldsymbol{\Psi}_{Nnb}\mathbf{x}_b = \mathbf{R}_G\mathbf{x}_b \quad (61)$$

Applicando la matrice di riduzione nell'equazione di equilibrio:

$$\mathbf{M}_G\ddot{\mathbf{x}}_b + \mathbf{K}_G\mathbf{x}_b = \mathbf{f}_G \quad (62)$$

dove:

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{R}_G^T \mathbf{M} \mathbf{R}_G = \mathbf{M}_{bb} - \mathbf{K}_{be} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{M}_{eb} - \mathbf{M}_{be} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{eb} + \mathbf{K}_{be} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{M}_{ee} \mathbf{K}_{ee} \mathbf{K}_{eb}$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{R}_G^T \mathbf{K} \mathbf{R}_G = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{be} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{eb}$$

Sono le matrici di massa e rigidità ridotte. Il vettore delle forze generalizzato è pari

a:

$$\mathbf{f}_G = \mathbf{R}_G^T \mathbf{f} = \mathbf{f}_b - \mathbf{K}_{be} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{f}_e$$

Come visto precedentemente, nel calcolo della matrice di riduzione le forze d'inerzia vengono trascurate, di conseguenza si trova una soluzione esatta solo nel momento in cui questo tipo di condensazione viene applicata a problemi statici. Se viene applicata a problemi di natura dinamica la soluzione trovata sarà un'approssimazione, in quanto il modello ridotto risulterà più rigido del reale. L'utilizzo di questo metodo, inoltre, permette di portarsi dietro le informazioni relative ai gradi di libertà che si trovano all'interfaccia; di conseguenza, il montaggio su altri elementi ridotti è possibile e anche molto semplice.

3.4 Metodo di Craig-Bampton

Il limite principale della Guyan reduction è il fatto che le informazioni sul modo di vibrare dinamico della struttura vengono perse, per cercare di ovviare a questo problema si utilizza la riduzione di Craig-Bampton [8][9].

Infatti, utilizzando questo metodo vengono incluse nel calcolo anche le informazioni sulla dinamica interna dei componenti ridotti, tutto ciò si ottiene ampliando la base di riduzione includendo anche modi di vibrazione dinamici.

Gli spostamenti saranno dati dall'espressione:

$$\mathbf{x}_e \approx \Psi_{ee}\mathbf{x}_b + \phi_{ek}\boldsymbol{\eta}_k \quad (63)$$

dove ϕ_{ek} il set di modi ridotto, $n_k \ll n_e$, ottenuto considerando i più bassi autovalori di tutta la matrice ϕ_{ee} . Come quanto accade nella Guyan reduction anche qui i gradi di libertà che si trovano all'interfaccia sono considerati come GDL master, le coordinate saranno quindi pari a:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_b \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} & \mathbf{0}_{bk} \\ \Psi_{eb} & \phi_{ek} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \boldsymbol{\eta}_k \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_{CB}\mathbf{x}_{CB} \quad (64)$$

dove \mathbf{R}_{CB} indica la matrice di riduzione del metodo Craig-Bampton. Applicando la base di riduzione le equazioni del moto saranno tali:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{bb} & \tilde{\mathbf{M}}_{bb} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{bb} & \mathbf{I}_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_b \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}}_k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_{kk}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \boldsymbol{\eta}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_b \\ \tilde{\mathbf{f}}_k \end{Bmatrix} \quad (65)$$

in cui:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{bb} = \mathbf{M}_{bb} - \mathbf{M}_{be} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{M}_{eb} + -\mathbf{K}_{be} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{M}_{eb} + \mathbf{K}_{be} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{M}_{ee} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{eb}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{bb} = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{be} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{eb}$$

$$\mathbf{M}_{kb} = \mathbf{M}_{bk}^t = \boldsymbol{\Phi}_{ek}^T (\mathbf{M}_{eb} - \mathbf{M}_{ee} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{eb})$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_b = \mathbf{f}_b - \mathbf{K}_{be} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{f}_e$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_k = \boldsymbol{\Phi}_{ek}^T \mathbf{f}_e$$

e, infine, $\boldsymbol{\Omega}_{kk}^2$ è una matrice diagonale che contiene al suo interno le prime n_k frequenze, quindi i primi autovalori $\omega_{e,j}^2$.

Il metodo di Craig-Bampton ha il grande vantaggio della semplicità di composizione della matrice di riduzione, infatti trascinando con sé le informazioni dei gradi di libertà all'interfaccia rende semplice l'assemblaggio tra diversi elementi all'intero di un componente agli elementi finiti. Grazie a questi proprietà tali modelli ridotti vengono definiti superelementi.

Capitolo 4

4 Riduzione componente prestressato

Il metodo Craig-Bampton è stato descritto dal punto di vista matematico nel capitolo precedente, nel momento in cui un componente viene modellato su un software agli elementi finiti, in questo caso Ansys APDL, quest'ultimo calcolerà la matrice di riduzione e con le conseguenti matrici di massa e rigidità riuscirà a ricavare le frequenze appartenenti al modello ridotto. Ma vediamo in dettaglio cosa succede.

4.1 Riduzione componente prestressato tramite metodo di Craig-Bampton su Ansys

Il modello utilizzato in questa trattazione è un modello volutamente molto semplice, lo scopo principale non è quello di riuscire a fare un'analisi su un componente specifico, ma ottimizzare un metodo che dopo possa essere applicato a dei componenti complessi. Data questa prefazione risulta logico che non sia necessario utilizzare un modello che abbia troppi gradi di libertà, ne basta uno che somigli al componente reale, ma che ne rappresenti la controparte semplificata.

Il modello agli elementi finiti utilizzato è descritto dalla *Figura 1.10* e su questo modello sono state avviate svariate simulazioni. Di seguito verrà descritto come suddividere e ridurre un componente.

Come prima cosa è necessario, naturalmente, caricare il modello su Ansys ed effettuare una discretizzazione di questo, cercando di ottenere una mesh omogenea. Avendo eseguito questa operazione il modello, quindi, sarà composto da una serie di nodi (*nodes*) che rappresenteranno i gradi di libertà del componente diviso 3(ogni nodo ha 3 gradi di libertà).

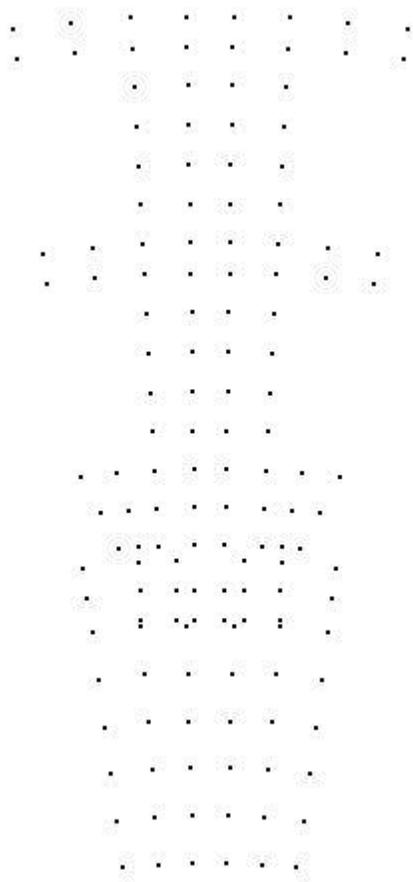


Figura 4.1.: Nodi sezione disco+paletta su Ansys.

Lo scopo principale è ridurre il numero di questi gradi di libertà, i superelementi ridotti, infatti, avranno solamente i nodi master e solo un tot di modi slave che dovranno

essere scelti a discrezione del progettista in base al grado di tolleranza che si vuole ottenere nei risultati, ad esempio le frequenze proprie del sistema ridotto saranno tanto più vicine alle frequenze del modello full quanto più nodi master o modi slave verranno inglobati nel calcolo.

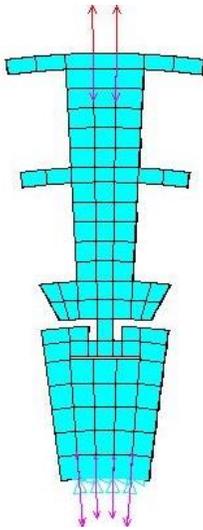
Le operazioni di creazione e utilizzo dei superelementi constano di tre passaggi principali:

1. *Generation Pass*: da come suggerisce il titolo in questo passaggio vengono generati i superelementi dal modello full. Si entra in ambiente /solu e viene lanciata un'analisi substr (*substructure*), vengono quindi creati i diversi superelementi dal modello full.
2. *Use Pass*: dopo aver creato i superelementi è necessario che questi vengano inseriti in un nuovo database (file .db) e che vengano ricollegati tra di loro. Dopo aver eseguito questa operazione è possibile, quindi, eseguire qualsivoglia analisi sul componente ridotto.
3. *Expansion Pass*: scopo principale della riduzione è quella di mettere in gioco poche equazioni nell'eseguire le diverse analisi, quindi dopo aver eseguito i calcoli è possibile espandere i risultati su tutti i nodi della struttura.

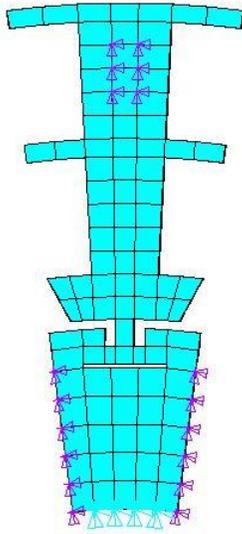
Come già accennato precedentemente i dischi palettati durante il loro funzionamento, subiscono l'applicazione di carichi continui che causano uno stress stiffening con conseguente aumento di rigidità della struttura, in poche parole sono prestressati. Per considerare questo prestress sono stati valutati diversi metodi in cui le operazioni sopra descritte verranno esplicitate dettagliatamente. Vediamo questi metodi.

4.2 Riduzione dell'intero componente in un unico superelemento

Può capitare che nella fase di progettazione di un componente non sia necessario che quest'ultimo venga suddiviso in diverse sottostrutture, ma risulta necessaria solo la diminuzione dei gradi di libertà in gioco. Quando si presenta questa particolare situazione è possibile applicare questa soluzione, il modello viene modellato e successivamente viene totalmente ridotto in un unico superelemento, questo procedimento sull'help di Ansys viene descritto come *Static Analysis Prestress*. Di seguito verranno descritte le varie fasi.

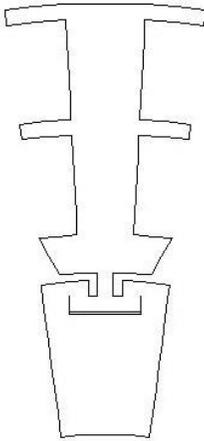


Modellazione del componente, discretizzazione, quindi il modello viene *meshato*, e applicazione dei diversi carichi di prestress e vincoli. Successivamente in questa fase deve essere eseguita un'analisi statica su tutto il componente.

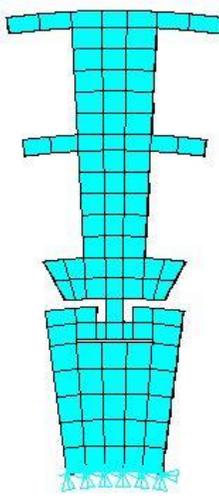


Generation Pass

Dal modello full vengono creato il superelemento: viene creato un nuovo file .db, si avvia un'analisi SUBSTR, analisi di sottostrutturazione, con prestress attivato. In questa fase è necessario definire i nodi master del componente e specificare il numero di gradi di libertà slave da utilizzare. Nei nodi master devono essere compresi i nodi in cui si dovranno applicare carichi e vincoli.

*Use pass*

Il superelemento viene inserito in un nuovo file .db, in questa fase è possibile eseguire un'analisi statica e/o dinamica del modello ridotto.

*Expansion Pass*

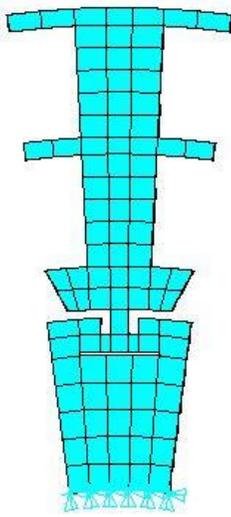
I risultati ottenuti nello Use pass possono essere espansi su tutti i gradi di libertà.

Questo metodo è molto comodo, immediato, infatti il codice è composto da pochissime righe ed inoltre occupa poco spazio in memoria; purtroppo non è possibile utilizzarlo nel caso in cui si voglia effettuare una sottostrutturazione. Quindi per ovviare a questo problema sono state adottate altre soluzioni.

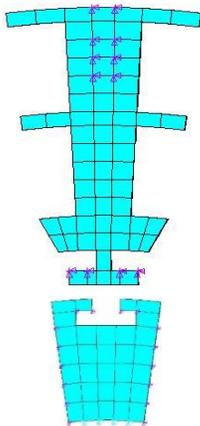
4.3 Riduzione in diversi superelementi

Nella maggior parte dei casi risulta necessario che il componente da studiare venga suddiviso in diversi superelementi e che successivamente venga ridotto.

Nel caso di disco palettato, infatti, oltre che aver suddiviso il disco in diverse sezioni, tutte uguali, sfruttando la simmetria ciclica, bisogna separare sezione di disco e paletta, creando quindi due superelementi separati. È istintivo pensare di poter applicare il carico di prestress sul modello full, effettuare un'analisi statica e successivamente creare i due superelementi. Purtroppo, questo non è possibile farlo, in quanto per poter creare un superelemento prestressato su Ansys è necessario creare un file di estensione .esav (file che viene creato da Ansys conseguentemente ad un'analisi statica) che contenga gli stessi identici elementi del superelemento prestressato. Quindi se eseguo un'analisi statica su tutto il componente, successivamente nella creazione del superelemento (nel Generation Pass) Ansys mi darà errore. Naturalmente, non è possibile applicare i carichi ed eseguire analisi statiche separatamente, perché in questo modo si perde la continuità e la congruenza tra un superelemento e un altro. Un modo elegante per aggirare il limite della necessità di avere nella directory il file .esav del superelemento è descritto sull'help di Ansys come *Substructuring Analysis Prestress*. Vediamo i diversi passaggi:

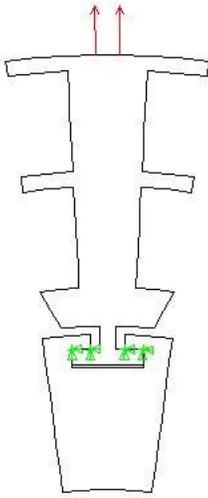


Creazione del modello, mesh di questo e inserimento dei vincoli.



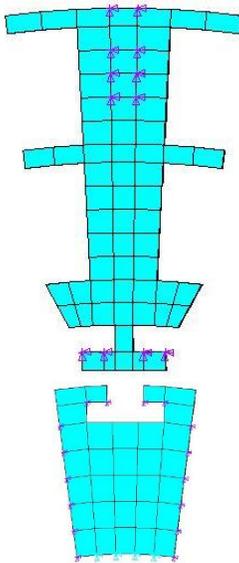
Primo Generation Pass

Dal modello full vengono creati i superelementi (un generation pass per ogni superelemento): viene creato un nuovo file .db, si avvia un'analisi SUBSTR, analisi di sottostrutturazione. In questa fase è necessario definire i nodi master del componente e specificare il numero di gradi di modislave da utilizzare. Nei nodi master devono essere compresi i nodi in cui si dovranno applicare carichi e vincoli, i nodi all'interfaccia tra i superelementi e i nodi in cui inserire il prestress.



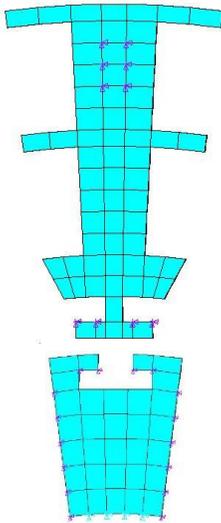
Primo Use pass

I superelementi vengono inseriti in un nuovo file .db, e con il comando cpintf, all vengono vincolati tra loro. In questa fase vengono imposti i carichi di prestress, come vediamo dall'immagine le due frecce rosse che puntano verso l'alto, che simulano la forza centrifuga. Successivamente è possibile eseguire un'analisi statica.



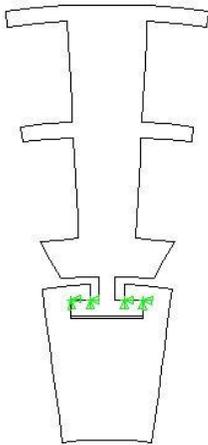
Expansion Pass

I risultati ottenuti dall'analisi precedente eseguita sui nodi master vengono in questa fase espansi su tutti i gradi di libertà della struttura. Dopo questa operazione è presente quindi il file .esav di analisi statica per ogni superelemento.



Secondo Generation Pass

Sempre dallo stesso file full vengono ricreati i due superelementi e vengono salvati in un file .db (un file per ogni superelemento), in questa fase i nodi master saranno uguali al primo generation pass, tolti i nodi master che erano serviti per applicare il prestress.



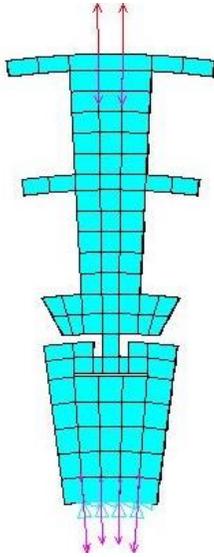
Secondo Use Pass

Vengono inseriti i superelementi in un file .db, vengono uniti utilizzando il comando `cpintf,all` e successivamente è possibile eseguire qualsivoglia analisi sul modello ridotto.

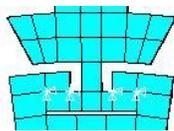
Utilizzando questo metodo è possibile, quindi, suddividere il componente in diversi superelementi, ma, da come è possibile dedurre, questo metodo è molto dispendioso a livello di tempo, di memoria e di disco; inoltre, il codice è molto prolisso, e quindi la probabilità di errore da parte dell'utente è molto elevata.

4.4 Riduzione in diversi superelementi (con stesso file db)

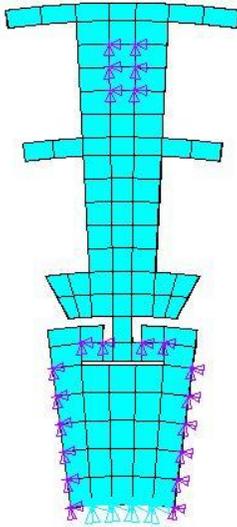
Il metodo descritto sopra permette di suddividere il componente in diversi superelementi, ma è troppo complesso e macchinoso, si è pensato, quindi, di aggirare il problema in questo modo.



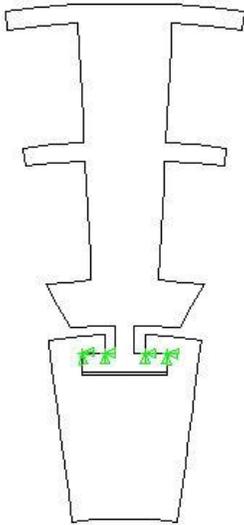
Modellazione del componente, discretizzazione, quindi il modello viene meshato e applicazione dei diversi carichi (di prestress) e vincoli. Esecuzione di un'analisi statica su tutto il componente.



Cancellazione dei vincoli fra i 2 elementi, pala e disco.

Generation Pass

Dal modello full viene creato un superelemento che dal punto di vista geometrico ingloba due parti il disco e la pala: viene creato un nuovo file .db, si avvia un'analisi SUBSTR, analisi di sottostrutturazione, con prestress attivato. In questa fase è necessario definire i nodi master del componente e specificare il numero di gradi di libertà slave da utilizzare. Nei nodi master devono essere compresi i nodi in cui si dovranno applicare carichi e vincoli e i nodi all'interfaccia.

Use Pass

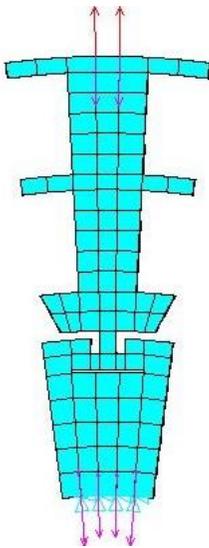
Le due parti separate, che appartengono però allo stesso superelemento, vengono inserite in un file .db, quindi ci sarà un solo elemento su Ansys, ma dal punto di vista geometrico ce ne saranno due, in quanto pala e disco sono separati.

Prima di eseguire una qualsiasi analisi, quindi, devono nuovamente essere congiunti con il comando cpintf,all. A questo punto è possibile eseguire un'analisi statica o dinamica.

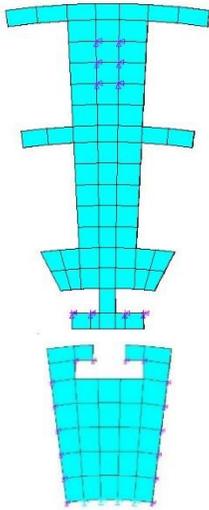
Con questo metodo è stato possibile aggirare il problema di Ansys che necessita lo stesso numero di elementi nel file .esav prestressato, l'unico problema lo si trova nei risultati, in quanto combaciano perfettamente con i risultati del primo metodo.

4.5 Riduzione in diversi superelementi con Perturbazione Lineare

Oltre che con i metodi sopra citati è possibile ottenere una riduzione di un componente prestressato su Ansys utilizzando una perturbazione lineare. In questo modo si ottengono gli stessi risultati ottenuti con il metodo Substructuring, ovvero il secondo metodo descritto, ma eseguendo meno operazioni e occupando quindi meno memoria in disco sia permanente che volatile.

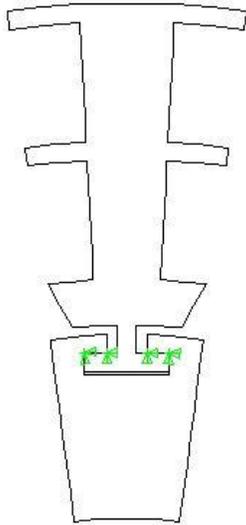


Modellazione del componente e discretizzazione, inserimento dei vincoli e dei carichi di prestress e successivamente esecuzione di un'analisi statica di tutto il modello, specificando il prestress.



Generation Pass

In questa fase viene creato un file .db per ogni superelemento, in ogni file viene eseguita un'analisi di sottostrutturazione *substr* perturbata, i vincoli tra i diversi superelementi devono essere tolti con il comando *cpdele,all* e successivamente è necessario dichiarare i nodi master e la quantità di gradi di libertà slave che bisogna tenere all'interno del calcolo.



Use Pass

I due superelementi vengono inseriti in un unico database, file .db, vengono uniti utilizzando il comando *cpintf,all* e a questo punto è possibile eseguire un'analisi statica o dinamica sul modello ridotto.

Questo metodo è il migliore rispetto ai quattro elencati in quanto ha la stessa accuratezza del secondo metodo, il metodo Substructuring e a differenza di questo necessita meno memoria e meno procedimenti da svolgere.

Dopo aver eseguito un'analisi statica o dinamica nello Use Pass del modello ridotto è possibile espandere i risultati su tutti i gradi di libertà utilizzando l'Expansion Pass, quindi ad esempio dopo aver imposto degli spostamenti nei nodi master ed avere eseguito un'analisi statica sul modello ridotto è possibile ottenere lo spostamento di tutti i nodi eseguendo questo passaggio. In questo modo i risultati saranno simili a quelli che si otterrebbero se l'analisi statica fosse stata eseguita su tutto il componente, ma le equazioni e i calcoli da eseguire messi in gioco sono di un numero di gran lunga inferiore.

La fase di espansione, naturalmente, può essere eseguita dopo qualsiasi riduzione, non è stata descritta in ogni capitolo poiché il procedimento è sempre lo stesso.

Nel capitolo successivo verranno elencati e messi a paragone i vari risultati ottenuti da questi metodi.

Capitolo 5

5 Analisi armonica in un componente prestressato e ridotto

Nel capitolo precedente sono state descritte le varie soluzioni adottate per l'applicazione del metodo di riduzione di Craig-Bampton, ognuna di queste portava all'assemblamento di una matrice di massa $[M]$, di una matrice di rigidità $[K]$ e di un vettore di forze $[F]$, e conseguentemente da queste il software riusciva a ricavare autovettori e autovalori, quindi le frequenze proprie del sistema. Prima di passare alla vera e propria analisi armonica eseguita sul componente prestressato bisogna capire quale tra i metodi descritti prima è il più adeguato, per fare questo è necessario il confronto dei risultati ottenuti dai modelli ridotti con quelli di un modello full. Per poter eseguire tutto questo sfrutteremo un mezzo potente di calcolo, ovvero Matlab, nei paragrafi successivi verranno esplicitati i vari passaggi di questa validazione dei risultati. Prima di mostrare i risultati risulta necessario specificare quali nodi master sono stati utilizzati nei calcoli, inizialmente sono stati utilizzati meno nodi master, ovvero quelli mostrati in figura:

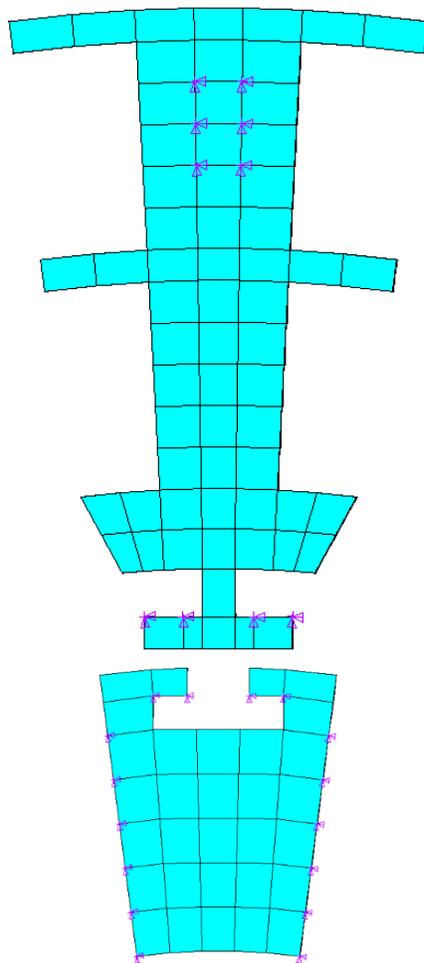


Figura 5.1: Visualizzazione nodi master utilizzati nei calcoli iniziali.

Dopo aver eseguito diverse simulazioni sono stati aggiunti altri nodi master nello shroud, ovvero in una zona dove vi era poca concentrazione di nodi master rispetto a tutto il modello, per riuscire ad avere dei risultati migliori:

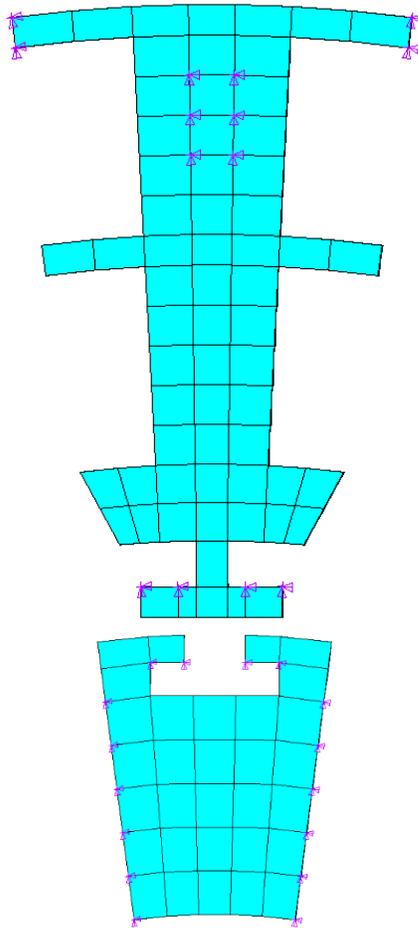


Figura 5.2: Visualizzazione nodi master utilizzati nei calcoli finali.

5.1 Confronto Frequenze proprie del sistema

Dopo aver avviato una simulazione sul modello 3d di *Figura 1.10* per ogni metodo descritto nel Capitolo 4, possiamo effettuare un confronto tra le frequenze ottenute con i vari metodi e confrontarle con le frequenze ottenute da un modello Full, un modello in cui non è stata eseguita nessuna riduzione. Dato che il modello è molto semplice e il numero dei nodi e quindi delle equazioni da risolvere non è copioso, la simulazione su un modello Full sarà semplice e al quanto immediata.

Nei grafici sottostanti è possibile visualizzare l'errore percentuale tra le frequenze ottenute dal modello Full e le frequenze ottenute dai vari metodi. Solitamente le frequenze che più interessano durante la fase di progettazione sono le prime, ovvero quelle con un fattore di partecipazione modale più elevato, per questo motivo la visualizzazione dei risultati avverrà sino al trentesimo modo.

Per poter avere un confronto coerente fra i vari metodi sono stati utilizzati in numero uguale i nodi master e modi slave, ma è doveroso notare che i vari metodi necessitano di un numero diverso di nodi master. Ad esempio, utilizzando il primo metodo, ovvero quello della riduzione di tutto il componente in un unico superelemento, non è necessario che i nodi all'interfaccia vengano dichiarati come nodi master, perché ai fini della riduzione questi, fondamentalmente, non servono a nulla; a differenza, invece, del secondo metodo di riduzione in diversi superelementi, dove sono indispensabili per poter successivamente accoppiare i due superelementi.

Dall'esecuzione di svariate prove si è notato che le frequenze ottenute con il primo metodo coincidono con le frequenze ottenute dal terzo metodo; questo non ci sorprende, in quanto il modo di ridurre le matrici di massa e rigidezza è uguale. Stesso fenomeno accade per i risultati del secondo e del quarto metodo, infatti le stesse considerazioni si possono fare anche in questo caso. Vediamo bene i grafici.

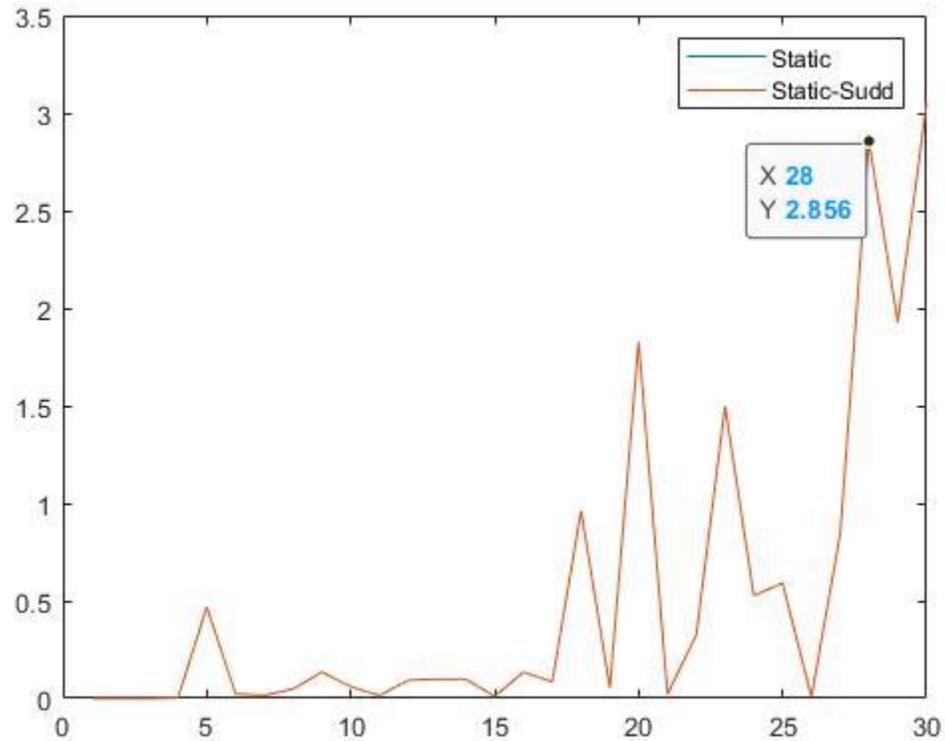


Figura 5.3: Errore percentuale delle frequenze proprie della sezione di disco più pala tra il modello Full e il modello ridotto con il primo e il terzo metodo.

Da come si evince dal grafico le frequenze ottenute con i due metodi sono completamente uguali, e se si considera accettabile un errore percentuale pari al 2% si possono prendere i primi 27 modi come modi accettabili.

È possibile notare a primo impatto il grande salto che avviene tra il 27esimo e il 28esimo modo, e lo stesso fenomeno avviene anche per i modi precedenti, probabilmente questo andamento è spiegabile dal fattore discretizzazione.

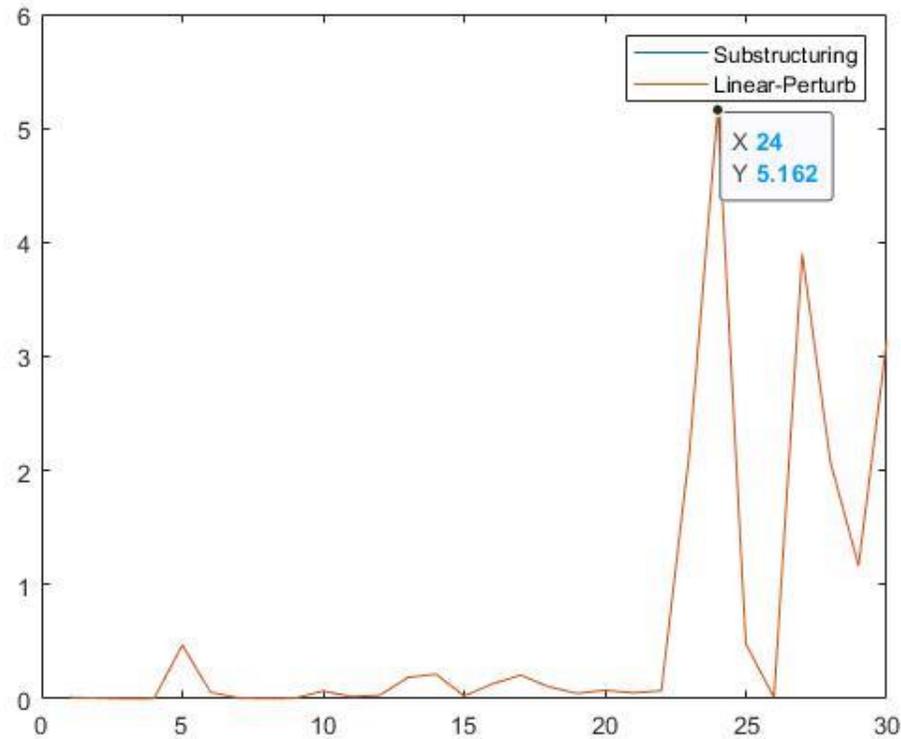


Figura 5.4: Errore percentuale delle frequenze proprie della sezione di disco più pala tra il modello Full e il modello ridotto con il secondo e il quarto metodo.

Come anticipato prima anche le frequenze ottenute con il secondo e con il quarto metodo risultano uguali e in questo caso considerando sempre lo stesso valore percentuale come valore accettabile vediamo che il 24esimo modo sfiora tale condizione.

Anche in questo caso si registrano dei salti di errore percentuale e anche in questo caso vale la considerazione fatta nel caso precedente.

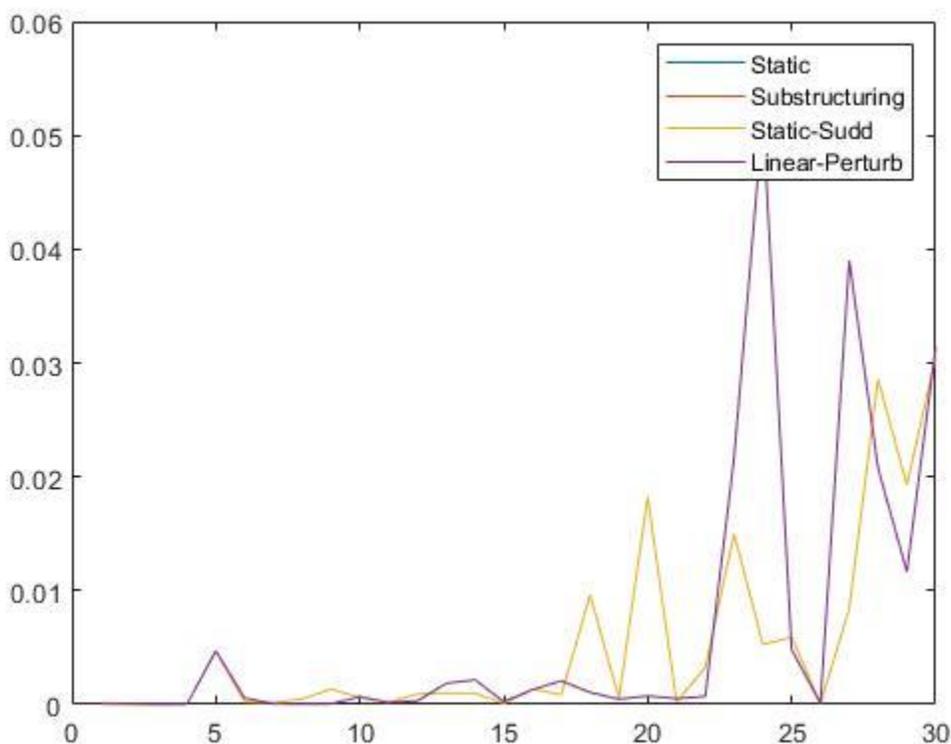


Figura 5.5: Errore percentuale delle frequenze proprie della sezione di disco più pala tra il modello Full e il modello ridotto con i diversi metodi.

In quest'ultimo grafico vediamo riassunti tutti i risultati di errore percentuale, dove è possibile denotare solamente 2 andamenti in quanto gli altri coincidono. Prima del 24esimo modo l'errore ottenuto con il secondo e con il quarto metodo è contenuto rispetto all'errore ottenuto con gli altri 2 metodi. Superato questo modo i risultati diventano instabili, ci sono dei salti tra un modo e un altro. Il fattore di partecipazione, infatti, si abbassa con l'avanzamento del numero dei modi e quindi spostamenti di massa più piccoli provocano conseguenze più sostanziali.

Nei primi modi, come già detto prima, l'errore percentuale è contenuto se si utilizza il secondo o il quarto metodo, e solitamente sono i primi modi quelli che interessano

durante la fase di progettazione. Dato che i risultati sono uguali per questi due metodi e dato che il secondo metodo rispetto al quarto è molto più macchinoso, con memoria occupata maggiore, data la creazione di diversi file in più rispetto al quarto e con un codice molto prolisso, con una probabilità maggiore, quindi, da parte dell'utente di commettere errori risulta saggio adottare come metodo definitivo il quarto, ovvero la riduzione di Craig-Bampton ottenuta tramite perturbazione lineare.

Oltre che effettuare un controllo sulle frequenze e quindi sugli autovalori è necessario che la riduzione venga validata anche tramite un controllo sugli autovettori, e per fare questo si utilizza il MAC.

5.2 Numero di MAC

Per valutare se un metodo di riduzione è valido o meno è doveroso confrontare le forme modali sull'intero vettore che le rappresenta, utilizzando il *Modal Assurance Criterion* (MAC) (*Criterio Di Affidabilità* in italiano) definito come [17]:

$$MAC_{TS} = \frac{|\{\Psi_F\}^T \{\Psi_R\}^*|^2}{(\{\Psi_F\}^T \{\Psi_F\}^*)(\{\Psi_R\}^T \{\Psi_R\}^*)}$$

dove i pedici F e R indicano i modi ottenuti dal modello Full e dal modello Ridotto. Quando due modi sono uguali, quindi coincidono, il numero di MAC è pari all'unità, altrimenti è pari a zero; quindi, valori vicini a uno ci dicono che i modi sono simili, valori prossimi, invece, allo zero ci indicano che i due modi sono differenti.

Per ottenere questo valore sono stati applicati questi passaggi:

- Il modello è stato prestressato e ridotto con Perturbazione lineare.

- E' stata eseguita un'analisi dinamica nel modello ridotto.
- E' stata eseguita una lettura degli spostamenti dei nodi master nei diversi modi.
- Infine, calcolo vero e proprio del MAC

Oltre che a calcolare il numero di MAC per ogni singolo modo è possibile raggruppare tutti i vettori modali in una matrice e ed eseguire il calcolo confrontando la matrice modale ridotta e quella non ridotta, ottenendo una matrice simmetrica. Nel grafico sottostante sono stati confrontati i primi 24 modi ottenuti dalla riduzione con perturbazione lineare, è stato utilizzato un numero di modi pari a 24 in relazione al fatto che l'errore % relativo fra frequenze ottenute dal modello full e dal modello ridotto non deve superare il 2%.

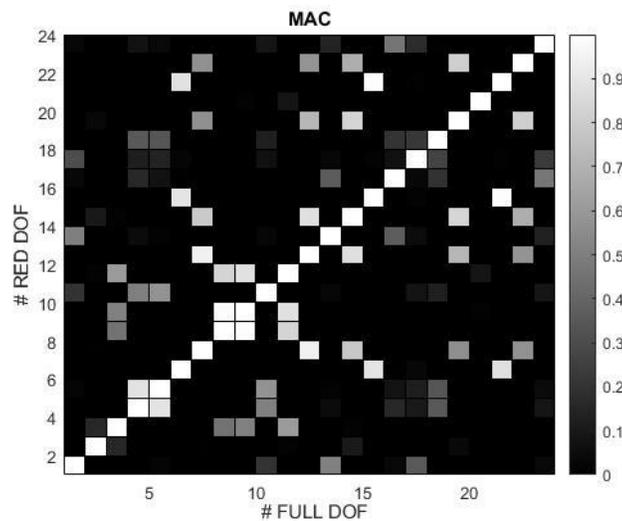


Figura 5.6: Matrice del Modal Assurance Criterion MAC tra autovalori modello full e autovalori modello ridotto.

Visibile anche in 3d:

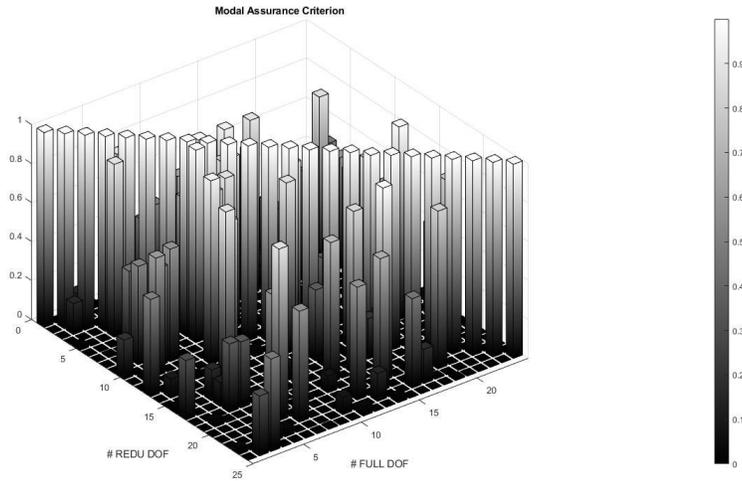


Figura 5.7: Matrice 3D del Modal Assurance Criterion MAC tra autovalori modello full e autovalori modello ridotto.

Vediamo come sono presenti dei valori elevati anche fuori dalla diagonale, questo vuol dire che i due modi hanno frequenze vicine e i modi sono molto simili. Infatti, calcolando il MAC solo sulla matrice del modello full è possibile notare che anche qui fuori dalla diagonale ci siano valori elevati:

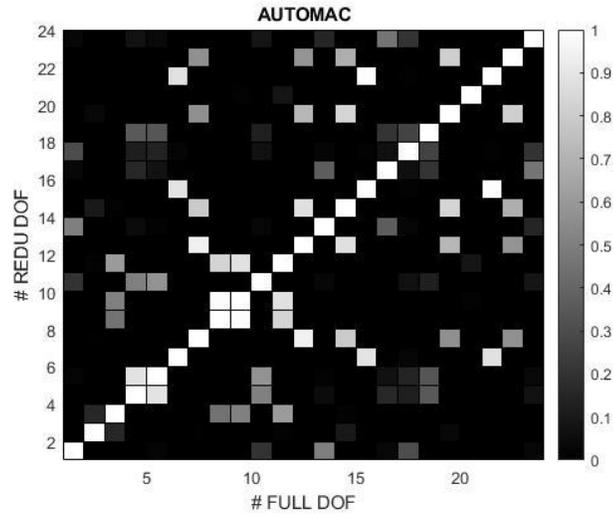


Figura 5.8: Matrice del Modal Assurance Criterion MAC tra autovalori modello full.

E in 3d:

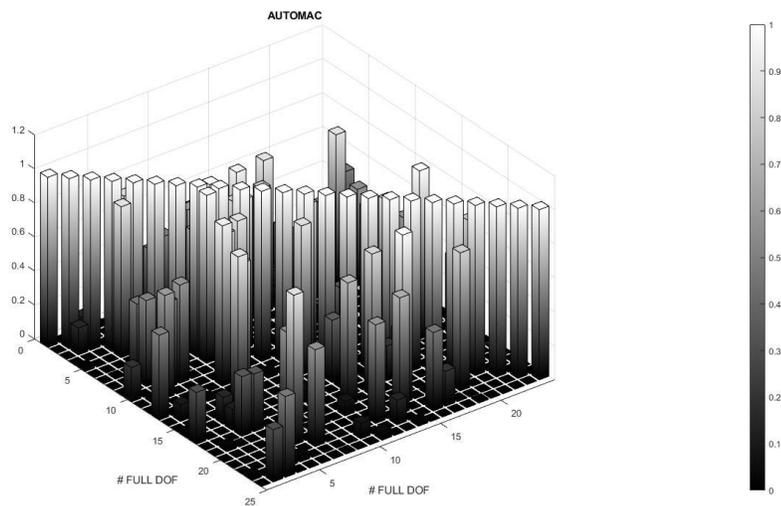


Figura 5.9: Matrice 3D del Modal Assurance Criterion MAC tra autovalori modello full.

Dato che i numeri di MAC elevati calcolati confrontando tra di loro i diversi modi ottenuti tutti con un modello Full combaciano con i numeri di MAC elevati al di fuori

dalla diagonale della matrice MAC ottenuta confrontando full-ridotti non c'è da preoccuparsi se si incontrano dei numeri di MAC maggiori di 0.5 al di fuori della diagonale.

D'altro canto, cosa più importante, si vede come i termini all'interno della diagonale siano tutti pari all'unità, il che vuol dire che dal punto di vista di autovettori la riduzione di Craig-Bampton tramite perturbazione lineare è una buona riduzione.

5.3 Risposta Forzata

Dopo aver convalidato il metodo dal punto di vista di autovalori e autovettori risulta necessaria anche la convalida dal punto di vista di ampiezze, ovvero in termini di Risposta forzata.

Sinora, per questione di comodità, tutti i vari confronti sono stati effettuati su una sezione di disco palettato, per riuscire a ricavare invece la risposta forzata il calcolo sarà eseguito prima sulla singola sezione e successivamente verrà esteso su tutto il componente, sfruttando la già discussa simmetria ciclica.

Per riuscire a valutare se il metodo è adatto o meno si confronteranno i risultati in termini di ampiezze di un modo ottenuti dal calcolo utilizzando un modello ridotto, con quelli ottenuti con un modello full.

Per riuscire a valutare meglio i risultati è stato utilizzato il tredicesimo modo, ovvero un modo abbastanza complesso con una frequenza pari a 4510,1 Hz che vediamo rappresentato nelle figure sottostanti:

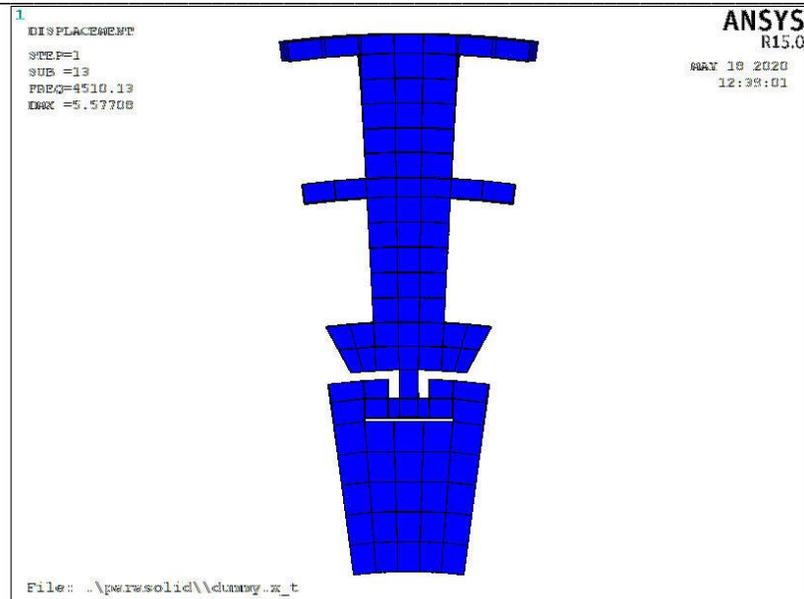


Figura 5.10: Vista frontale del modello sottoposto al modo 13.

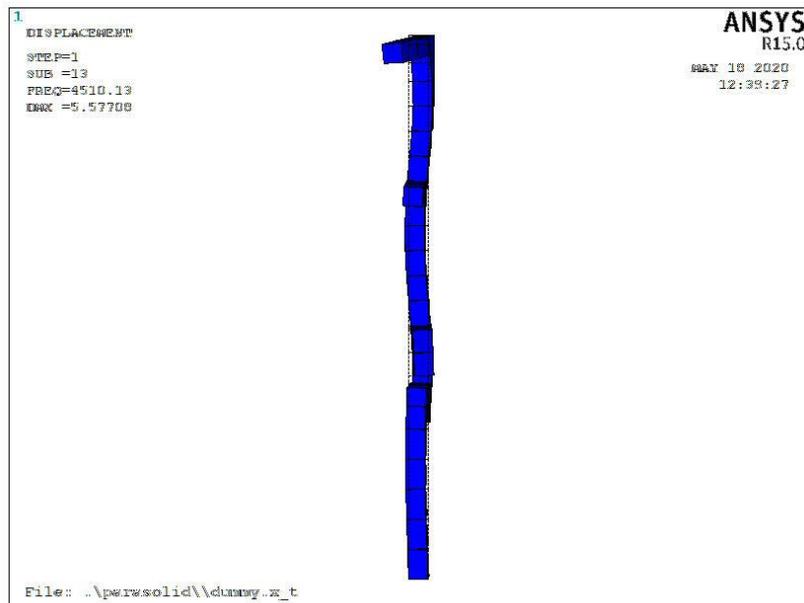


Figura 5.11: Vista laterale del modello sottoposto al modo 13.

A questo modello vengono imposte delle forze che simulano lo sforzo a cui sono sottoposti solitamente i dischi palettati, per praticità il modulo di queste forze è stato scelto pari a uno:

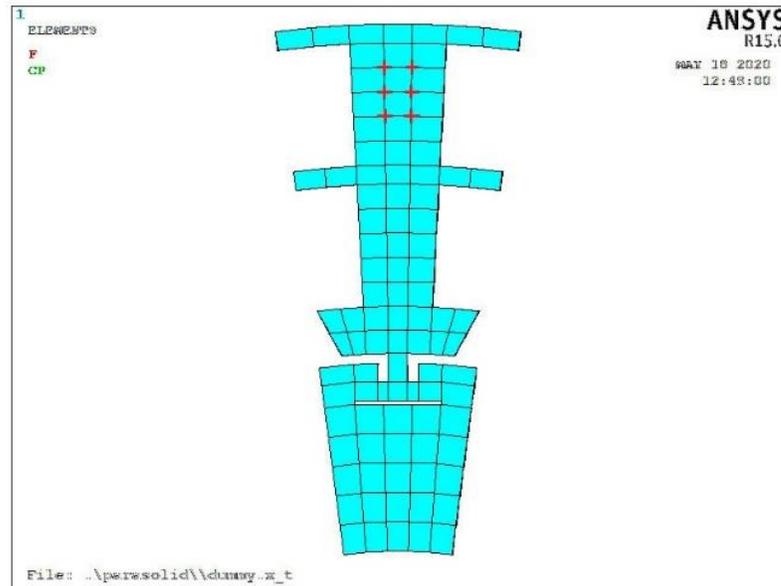


Figura 5.12: Punti di applicazione delle forze.

Nella figura i contrassegni in rosso indicano i punti di applicazione di queste forze, per quanto riguarda la direzione le forze sono entranti rispetto al foglio.

Su questo modello full è stata eseguita un'analisi armonica e sono stati ricavati e salvati gli spostamenti relativi alla frequenza di 4510,1 Hz. Successivamente, questo modello è stato ridotto, utilizzando il metodo di Perturbazione lineare spiegato prima, e sul modello ridotto è stata eseguita un'analisi armonica. Per riuscire a confrontare gli spostamenti bisogna che questi vengano presi nello stesso modo di vibrare, dato che la frequenza del tredicesimo modo dista dalle frequenze del dodicesimo e del quattordicesimo di più di 500 Hz, basta prendere il modo di vibrare che ha un valore di

frequenza simile alla frequenza del modello full. Dopo aver eseguito l'analisi è possibile eseguire un'espansione dei risultati in modo tale da ottenere gli spostamenti relativi a tutti i gradi di libertà del modello.

E' possibile eseguire queste operazioni interamente su Ansys e confrontare i risultati utilizzando uno scatter su Matlab, come vediamo nella figura sottostante:

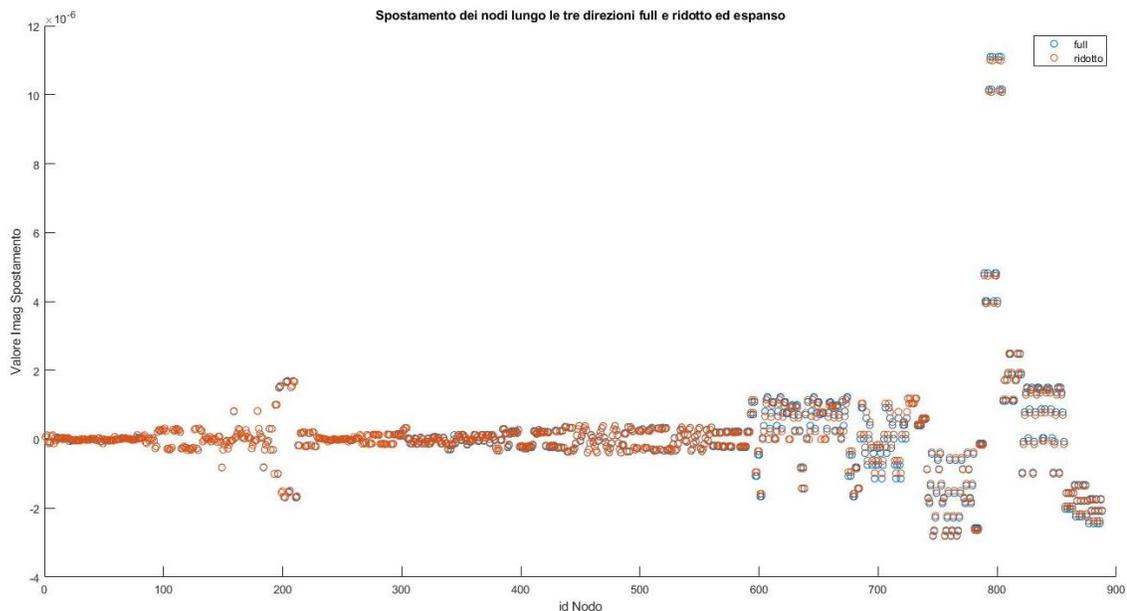


Figura 5.13: Confronto Spostamenti immaginari dei nodi lungo le tre direzioni x, y e z del modello full e del modello ridotto ed espanso.

In questo scatter sono stati plottati i valori di spostamenti immaginari di tutti i gradi di libertà e non solo di quelli in direzione z , ovvero direzione in cui si aveva maggiore partecipazione modale e direzione di applicazione delle forze. I nodi del modello sono 296, in questo scatter sono stati ordinati in ordine di direzione, quindi i primi 296 gradi di libertà coincidono con gli spostamenti in direzione x di tutti i nodi, i successivi lungo y e gli ultimi lungo z .

Purtroppo, in Ansys non è possibile eseguire tutte le operazioni, in particolare non è possibile eseguire un calcolo non lineare armonico, è possibile eseguire solo un calcolo lineare armonico. Ansys potrebbe risolvere una risposta non lineare solo integrando le equazioni nel tempo e non nel dominio delle frequenze, questo comporta un notevole dispendio di tempo e risorse di calcolo. Per questo motivo il calcolo della risposta armonica viene delegato ad uno strumento di calcolo più efficiente, Matlab.

Il procedimento consta di più passaggi ovvero: il modello viene dapprima ridotto su Ansys e le matrici di massa e rigidità e il vettore delle forze vengono salvate in 3 diversi files, questi files vengono letti e manipolati su Matlab in modo tale da poter eseguire un'analisi di risposta forzata, ovvero vengono calcolati prima gli autovalori e autovettori e successivamente con il valore di smorzamento ipotizzato, in questo caso posto pari a 0.002, viene calcolata la matrice delle ampiezze di risposta.

Queste ampiezze sono pari quindi agli spostamenti da confrontare a quelli ottenuti su Ansys del modello full. Con questo metodo vengono quindi salvati gli spostamenti relativi solamente ai nodi master del modello ridotto. La precisione dei risultati è tanto più accurata quanto vengono variati diversi aspetti.

5.3.1 Sensitivity nodi master

Un parametro che può essere variato facilmente è quello del numero di modi slave utilizzati nella riduzione, variando questo numero è possibile notare che il valore di spostamento dei gradi di libertà master tende a convergenza con il valore di spostamento ottenuto dal modello full. Dato che il modello sotto esame è composto da due superelementi bisogna variare il numero di modi slave sia per il disco che per la pala, nella figura sottostante si trovano nell'asse delle ascisse dei numeri formati da 4 cifre, le

prime due indicano il numero di modi slave utilizzati per la pala e gli altri due quelli utilizzati per la sezione di disco.

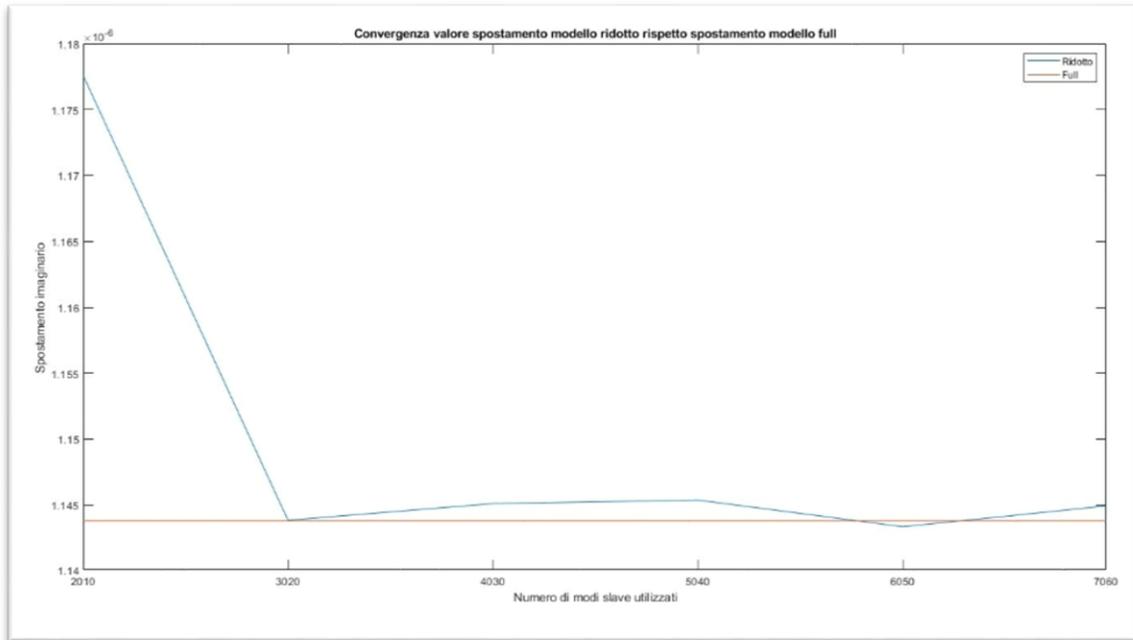


Figura 5.14: Andamento del valore di spostamento immaginario all'aumentare del numero di modi slave di un nodo master lungo la direzione z confrontato con il valore dello spostamento di un modello full tramite analisi statica.

Il valore dello spostamento ottenuto dal modello ridotto oscilla attorno al valore dello spostamento ottenuto dal modello full dopo un certo numero di modi slave utilizzati, ovvero 30 modi slave per la pala e 20 per il disco, dopo questo numero l'oscillazione del valore è davvero minima, si può dire che tende a convergenza.

La figura sopra riguarda però solo lo spostamento del nodo 14 nella direzione z, dopo essere arrivati alla conclusione che bastano un totale di cinquanta modi slave

distribuiti come detto prima è possibile confrontare tutti gli spostamenti dei nodi master.

È doveroso specificare che ciò che viene confrontato è il valore immaginario dello spostamento, poiché ci troviamo in una zona di risonanza e il valore reale oscilla attorno allo zero.

Inoltre, il modo che è stato preso in analisi sviluppa tutte le sue ampiezze di movimento lungo z , e la forza, come già detto prima, è applicata in direzione z , è logico perciò esaminare lo spostamento di tutti i nodi master lungo la direzione z .

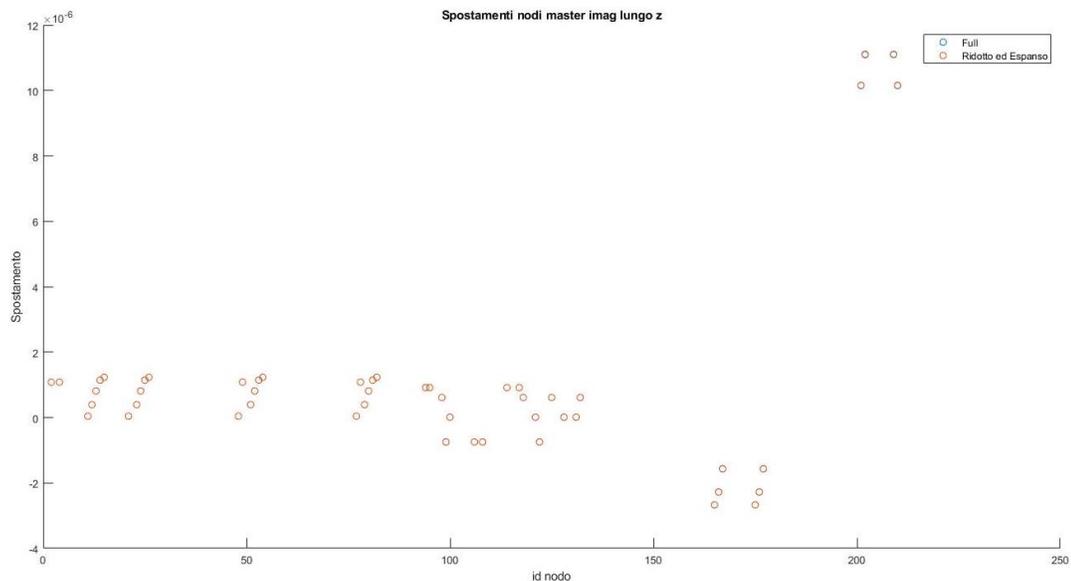


Figura 5.15: Confronto valore spostamento immaginario di nodi master lungo z del modello ridotto confrontato con il modello full.

Da questo confronto eseguito su Matlab vediamo come per ogni nodo master riusciamo a visualizzare solamente un valore, ciò significa che il valore di spostamento immaginario del modello ridotto (ottenuto da una risposta forzata calcolata su Matlab) coincide con il valore di spostamento immaginario ottenuto dalla risposta armonica eseguita su un modello full su Ansys.

5.3.2 *Sensitivity nodo slave*

Il discorso affrontato sopra deve essere fatto anche per i gradi di libertà slave della struttura, ovvero bisogna valutare l'andamento del valore di spostamento di un grado di libertà slave al variare dei modi slave utilizzati nella riduzione.

Da questo punto in poi il procedimento diventa più complesso, perché per riuscire ad ottenere gli spostamenti dei gradi libertà slave dobbiamo eseguire un'analisi, che sia di tipo statico o dinamico, sul modello ridotto e dopo espandere i risultati su tutto il modello.

Dapprima si è pensato di eseguire un calcolo di risposta forzata su Matlab, utilizzare gli autovalori ottenuti come spostamenti da imporre in un modello ridotto e successivamente eseguire un'analisi statica ed espandere.

I risultati ottenuti da questa soluzione adottata sono descritti sotto. In questa prima figura vediamo l'andamento del valore di spostamento immaginario di un grado di libertà slave ottenuto da un modello full confrontato con quello ottenuto da un modello ridotto ed espanso.

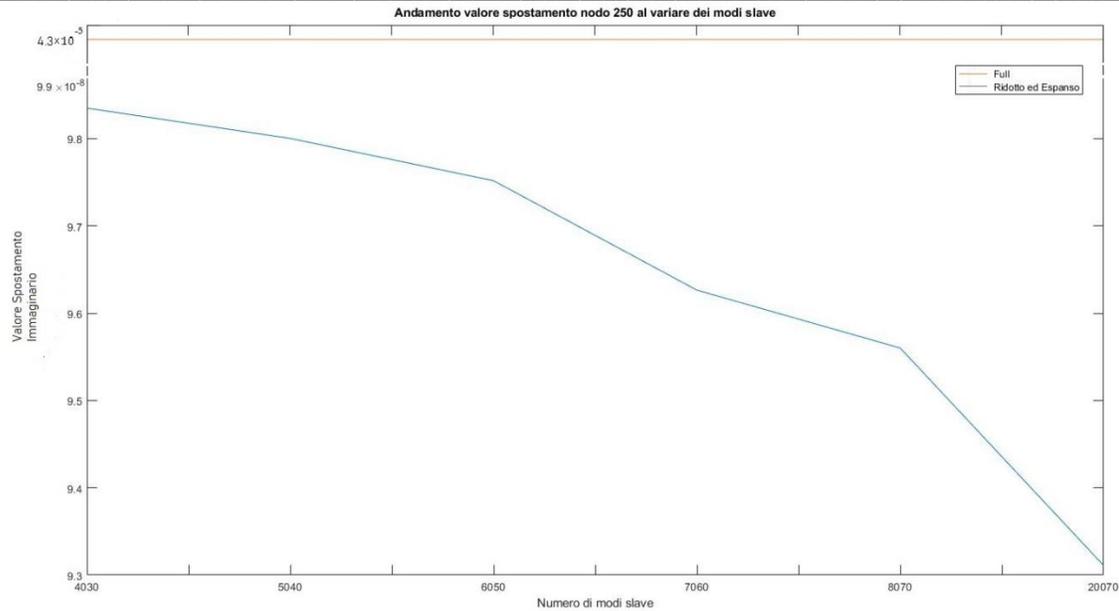


Figura 5.16: Andamento del valore di spostamento immaginario all'aumentare del numero di modi slave di un nodo slave lungo la direzione z confrontato con il valore dello spostamento di un modello full con riduzione tramite analisi statica.

Come vediamo dalla figura l'andamento è discordante con quello che ci saremmo attesi, contrariamente a quello che succede riguardo gli spostamenti dei nodi master, nei gradi di libertà slave se si aumenta il numero di modi slave gli spostamenti tendono a diventare sempre più piccoli e si allontanano, quindi, dal valore degli spostamenti del modello full.

5.4 Due tipi di riduzione

Per capire il motivo di questo fenomeno bisogna indagare sul metodo utilizzato. Nei due sotto paragrafi successivi verranno descritti due metodi di calcolo.

5.4.1 Riduzione con analisi statica sul modello ridotto

Nel momento in cui viene eseguito il calcolo di risposta forzata vengono ricavati gli spostamenti da imporre al modello ridotto, questi spostamenti partecipano nella riduzione tramite un'analisi statica, il problema infatti si cela dietro a questo. Nel momento in cui si impongono questi spostamenti e viene eseguita l'analisi statica si perdono tutte le informazioni dinamiche del sistema, e avanzando con l'utilizzo di modi slave il sistema diventa man mano più elastico, di conseguenza dato che il modello è meno rigido i gradi di libertà slave che si trovano lontani dai gradi di libertà master sentiranno sempre meno l'informazione di spostamento e quindi si sposteranno sempre meno. Possiamo quindi dire che aumentando i modi slave il gradiente di spostamento sarà sempre più elevato.

Di conseguenza il confronto del valore degli spostamenti immaginari del modello full con quelli del modello ridotto ed espanso non andrà bene, come possiamo vedere dall'immagine sottostante:

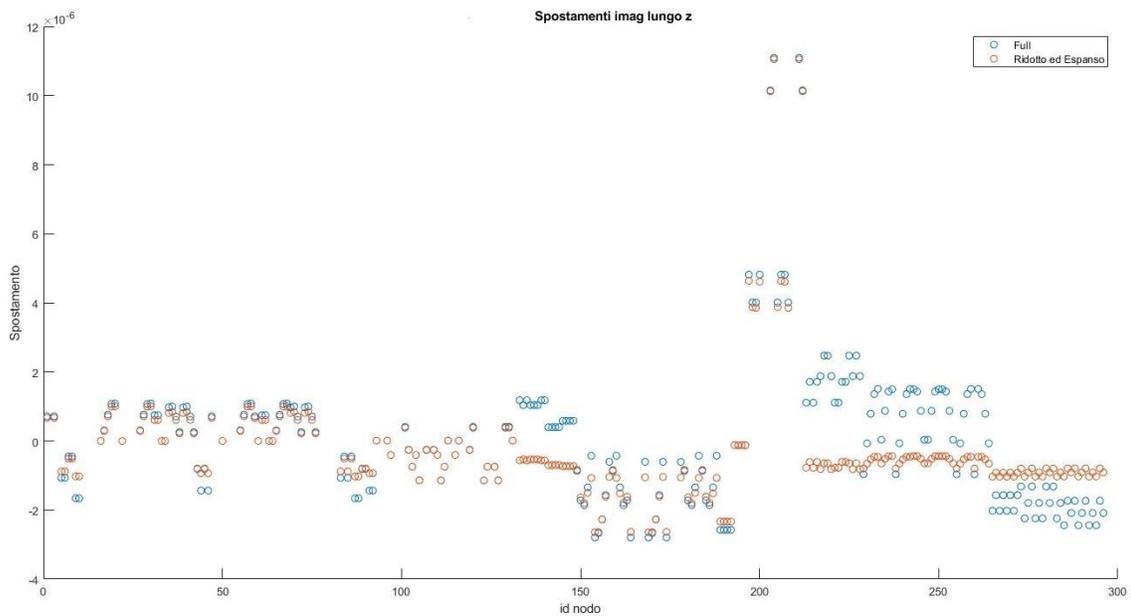


Figura 5.17: Confronto spostamenti immaginari lungo z di tutti i nodi del modello ridotto ed espanso con il modello full.

I valori dello scatter coincidono solo nei gradi di libertà master, la situazione più grave avviene dal nodo 200 in poi, che sono i nodi che appartengono alla pala. Infatti nella pala c'è una concentrazione di nodi master minore e da come vediamo dalla figura, vediamo come l'andamento della pala è sinusoidale.

E' più facile notare questa differenza di spostamenti mettendo a confronto la colormap degli spostamenti immaginari del modello full con quella del modello ridotto ed espanso:

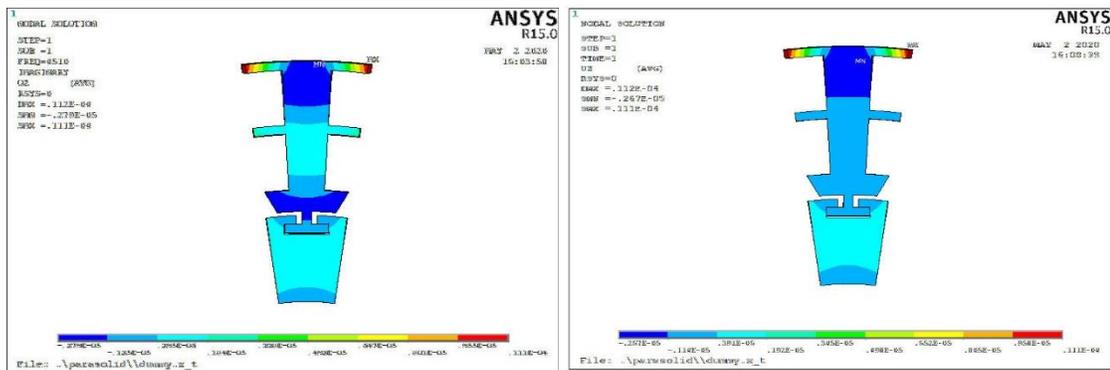


Figura 5.18: A sinistra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello full ottenuti tramite analisi armonica, a destra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello ridotto ed espanso ottenuto tramite riduzione con analisi statica su modello ridotto.

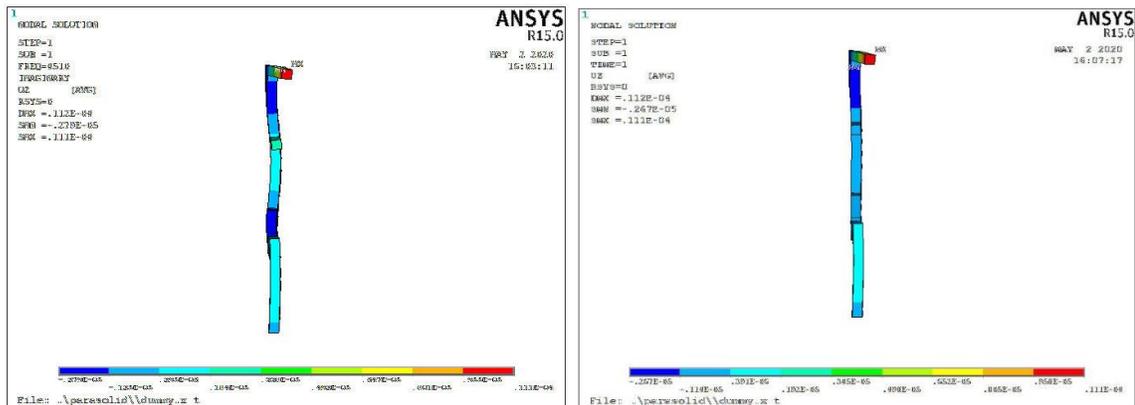


Figura 5.19: A sinistra colormap laterale degli spostamenti immaginari di un modello full ottenuti tramite analisi armonica, a destra colormap laterale degli spostamenti immaginari di un modello ridotto ed espanso ottenuto tramite riduzione con analisi statica su modello ridotto.

Come vediamo dalle immagini l'andamento della pala è diverso nei due casi, oltre che dal colore è evidente dalla forma nelle immagini di vista laterale.

Per ovviare a questo problema allora è stata adottata un'altra soluzione.

5.4.2 Riduzione con analisi armonica su modello ridotto

Il problema principale nella soluzione precedente era quello di effettuare un'analisi statica sul modello ridotto, si è pensato, quindi, sostituirla con un'analisi armonica.

Quindi le operazioni che vengono compiute possono essere riassunte in una lista:

- Riduzione del modello su Ansys in due superelementi e salvataggio file con matrici di massa e rigidezza e vettore di forze;
- Calcolo risposta forzata su Matlab tramite l'utilizzo delle matrici e del vettore;
- Estrapolazione autovettori di risonanza su Matlab da imporre dopo sul modello ridotto come spostamenti;
- Imposizione spostamenti e calcolo analisi armonica su Ansys;
- Espansione dei risultati in termini di spostamenti complessi, quindi espansione della parte reale e della parte complessa.

A queste operazioni è doveroso aggiungere le operazioni da compiere per riuscire a plottare i risultati, per riuscire quindi ad ottenere le colormap precedentemente viste.

Subito viene da pensare che basta espandere i risultati e plottare tutto tramite

Postprocessing, purtroppo utilizzando il metodo di perturbazione lineare è impossibile fare questa operazione diretta.

Se si analizza approfonditamente il codice è possibile notare che ogni qual volta viene creato un nuovo superelemento, Ansys salva geometricamente tutto il modello e in termini di informazioni di nodi e quindi successivi spostamenti etc solo il superelemento.

Nel momento in cui viene eseguita un qualsiasi tipo di analisi e successivamente i risultati vengono espansi, se l'utente cerca di plottare questi risultati tramite postprocessing riesce a plottare solo i singoli superelementi separatamente.

Nel processo di progettazione il postprocessing del modello in toto delle volte è necessario al progettista per riuscire a capire dove si concentrano maggiormente gli sforzi o gli spostamenti tramite colormap ad esempio. Quindi per superare questo limite, penalizzante, devono essere eseguite altre operazioni, da aggiungere alla lista precedente:

- Salvataggio delle informazioni di spostamento ad esempio, per ogni superelemento espanso, tramite il comando PRNSOL e tramite /OUTPUT.
- Elaborazione di questi file .txt su Matlab in modo tale da poter creare dei file .txt da dare in pasto ad Ansys come spostamenti da imporre al modello full e calcolo di un'analisi statica.

L'analisi statica può essere eseguita dapprima per gli spostamenti reali e successivamente per quelli immaginari, tramite il comando restart; in questo modo in /postprocessing è possibile visualizzare la colormap di entrambi. Ricordiamo infatti che i risultati in termini di spostamenti reali sono necessari quando si vuole eseguire un calcolo in simmetria ciclica.

5.4.2.1 Risultati

Eseguendo l'analisi armonica piuttosto che quella statica i risultati migliorano nettamente, questo è possibile vederlo sia in termini di valore di spostamento tramite scatter ma anche in termini di colormap.

Nella figura sottostante sono stati plottati gli spostamenti immaginari ottenuti tramite un modello full in confronto con quelli ottenuti tramite un modello ridotto ed espanso:

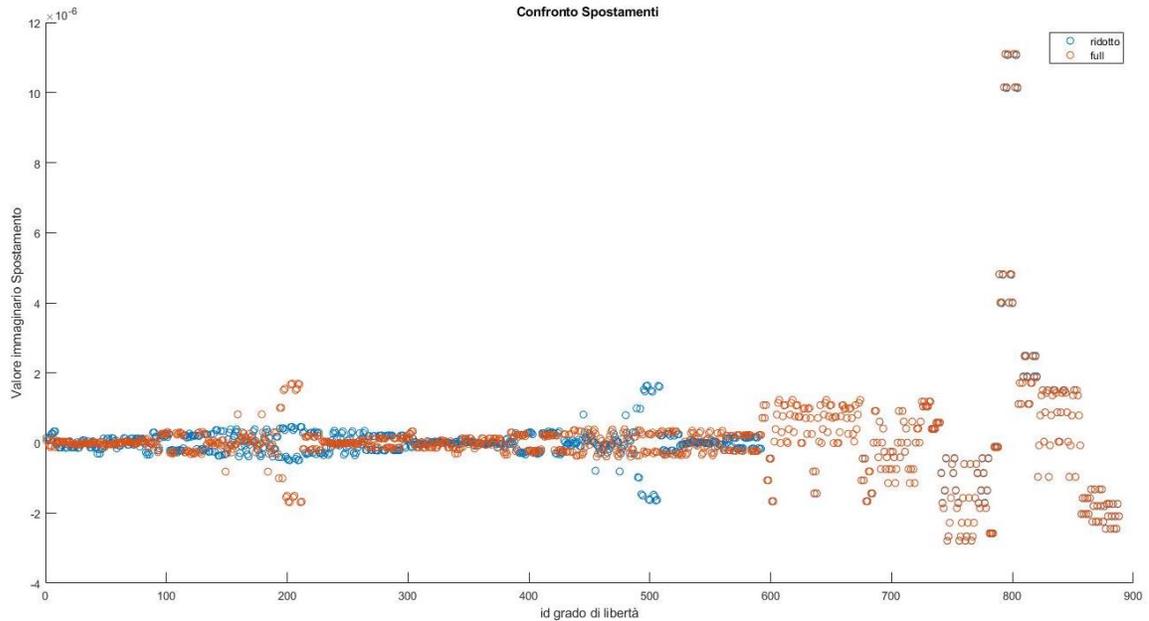


Figura 5.20: Confronto degli spostamenti immaginari di tutti i gradi di libertà ottenuti da un modello full in confronto con un modello ridotto ed espanso.

E' possibile notare, infatti, che gli spostamenti coincidono quasi completamente lungo la direzione z, e sono gli spostamenti ad ampiezza maggiore, come è giusto che sia.

Di conseguenza, le colormap e le forma che assume il modello sono molto più vicine al modello full:

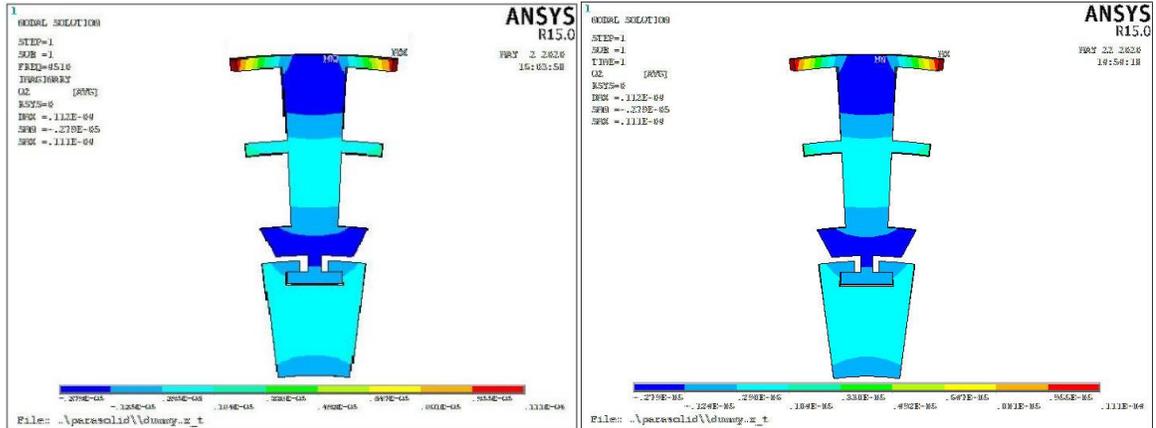


Figura 5.21: A sinistra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello full ottenuti tramite analisi armonica, a destra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello ridotto ed espanso ottenuto tramite riduzione con analisi armonica su modello ridotto.

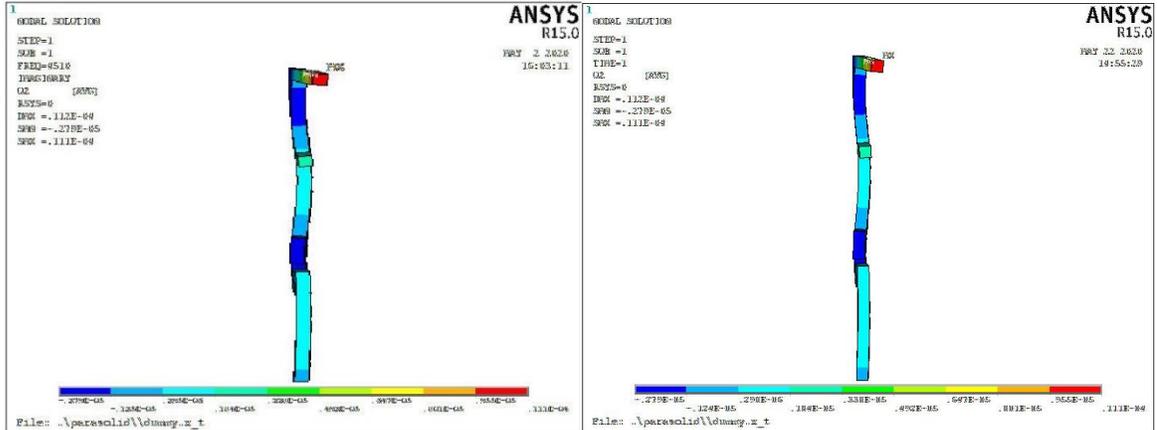


Figura 5.22: A sinistra colormap laterale degli spostamenti immaginari di un modello full ottenuti tramite analisi armonica, a destra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello ridotto ed espanso ottenuto tramite riduzione con analisi armonica su modello ridotto.

Oltre che questi risultati per capire quanto migliora nettamente la soluzione è possibile visualizzare l'andamento del valore di spostamento immaginario lungo z di un nodo slave appartenente alla pala (di preciso il nodo 250) rispetto al valore dello stesso spostamento del modello full:

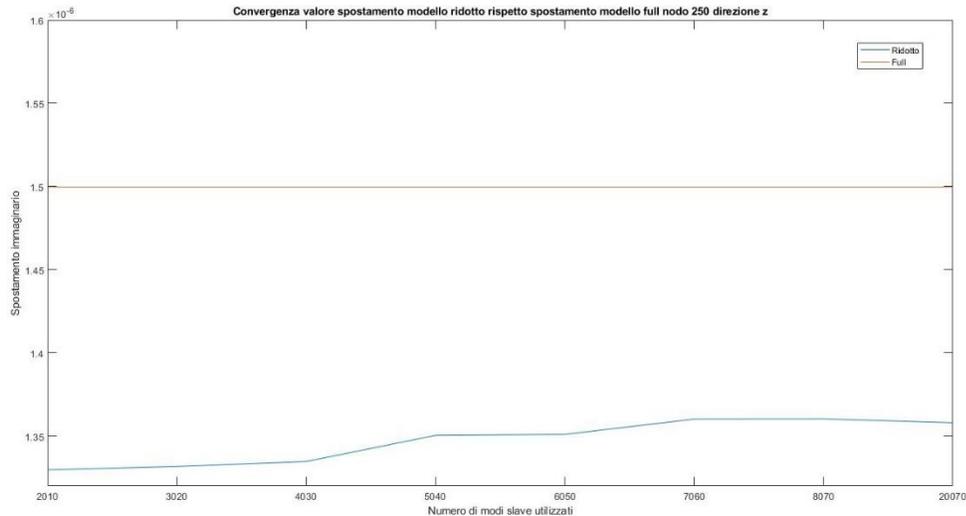


Figura 5.23: Andamento del valore di spostamento immaginario all'aumentare del numero di modi slave di un nodo slave lungo la direzione z confrontato con il valore dello spostamento di un modello full con riduzione tramite analisi armonica.

A differenza di quanto accadeva prima, qui il valore di spostamento immaginario all'aumentare del numero di modi slave utilizzati nella riduzione tende a convergenza e si avvicina al valore di spostamento ottenuto da un'analisi armonica sul modello full.

5.4.2.2 Risultati simmetria ciclica

Nei paragrafi precedenti i calcoli sono stati eseguiti su una sezione di disco palettato, nella fase di progettazione è necessario vedere cosa succede alla struttura

considerando il modello per intero. Quindi, ricordando le considerazioni esplicate nel Capitolo 3 è possibile espandere i calcoli su tutto il disco. Le operazioni eseguite sono uguali a quelle descritte prima, cambia solo che nel calcolo della risposta forzata, nel calcolo cioè degli autovalori, autovettori e delle ampiezze è stata considerata la simmetria ciclica. I risultati ottenuti in termini di valore di spostamento sono alquanto soddisfacenti come vediamo sotto:

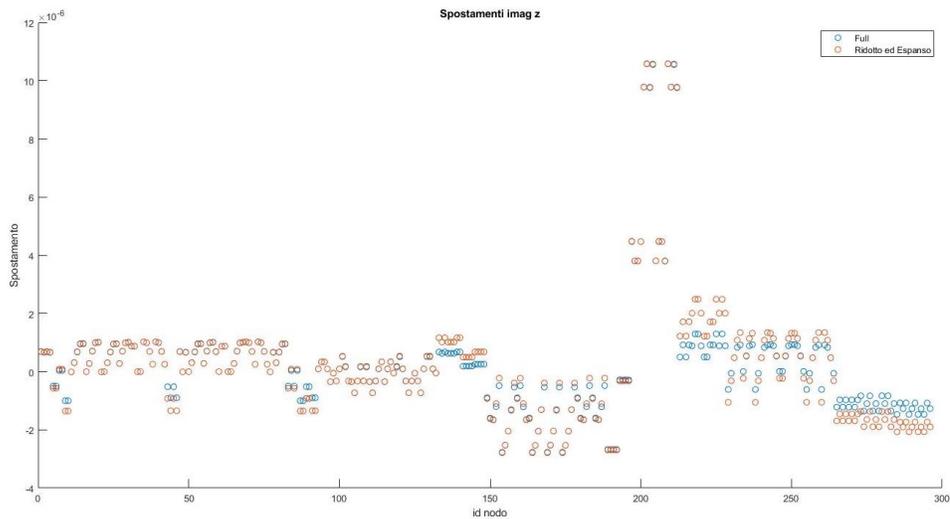


Figura 5.24: Confronto valore immaginario spostamenti lungo z del modello full con quello ridotto in simmetria ciclica.

Da questo grafico vediamo in blu il valore di spostamento immaginario lungo z dei nodi del modello full, in arancio, invece, i medesimi spostamenti dei nodi del modello ridotto e successivamente espanso. Nei nodi master gli spostamenti coincidono, dove c'è meno concentrazione di nodi master i valori si allontanano tra di loro, ma sempre in un range accettabile. Nelle figure sottostanti è illustrata la colormap degli spostamenti immaginari del modello full e del modello ridotto ed espanso:

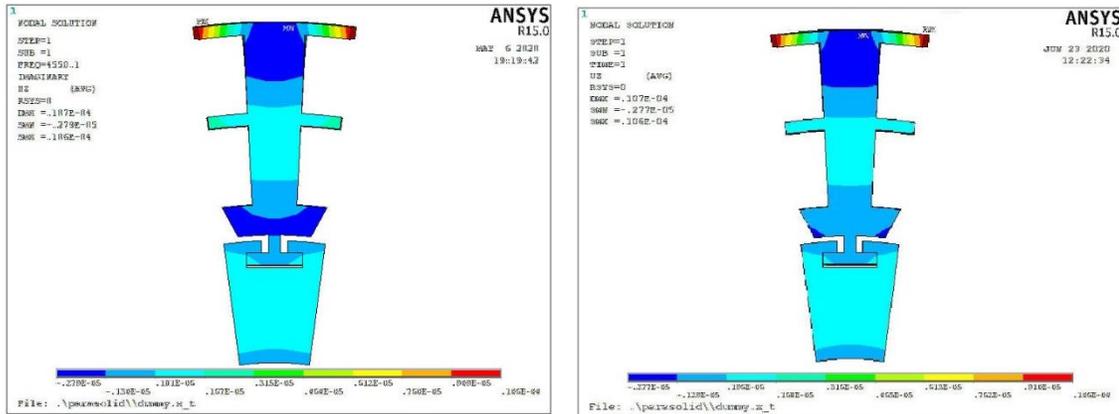


Figura 5.25: A sinistra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello full ottenuti tramite analisi armonica, a destra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello ridotto ed espanso ottenuto tramite riduzione con analisi armonica su modello ridotto in simmetria ciclica.

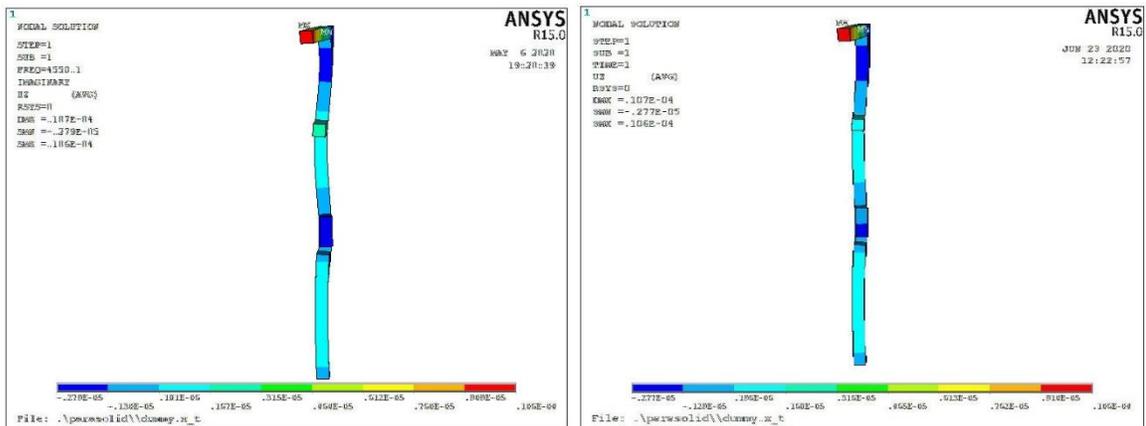


Figura 5.26: A sinistra colormap laterale degli spostamenti immaginari di un modello full ottenuti tramite analisi armonica, a destra colormap frontale degli spostamenti immaginari di un modello ridotto ed espanso ottenuto tramite riduzione con analisi armonica su modello ridotto in simmetria ciclica.

Quindi, per quel che riguarda gli spostamenti immaginari la situazione è piuttosto rosea, ma, nel momento in cui viene eseguita una riduzione e viene calcolata una risposta forzata in simmetria ciclica bisogna verificare se questi spostamenti sono anche in fase, per fare ciò bisogna confrontare la parte reale degli spostamenti tra il modello full e il modello ridotto ed espanso. Nella figura sottostante è illustrata la colormap degli spostamenti reali nel disco:

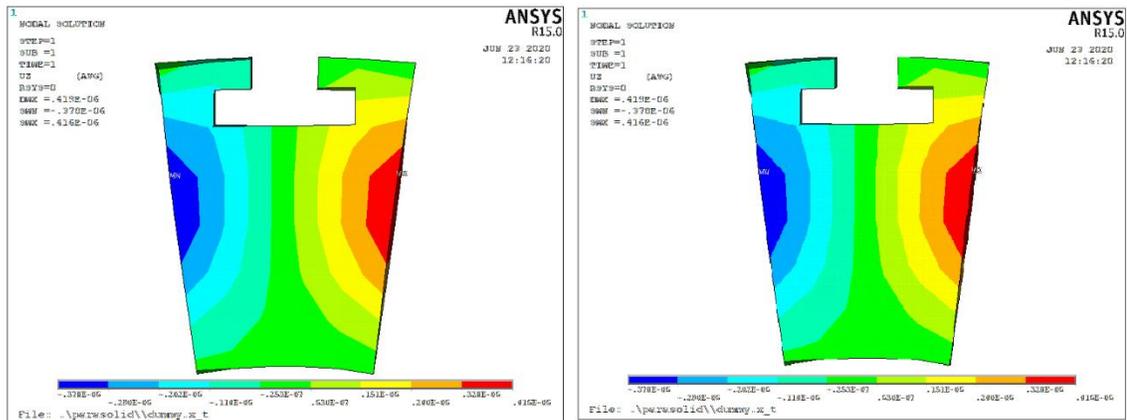


Figura 5.27: Colormap della parte reale degli spostamenti nel disco del modello full a sinistra e a destra del modello ridotto ed espanso.

Coerentemente con quanto fatto prima confrontiamo il valore degli spostamenti del modello full e del modello ridotto ed espanso:

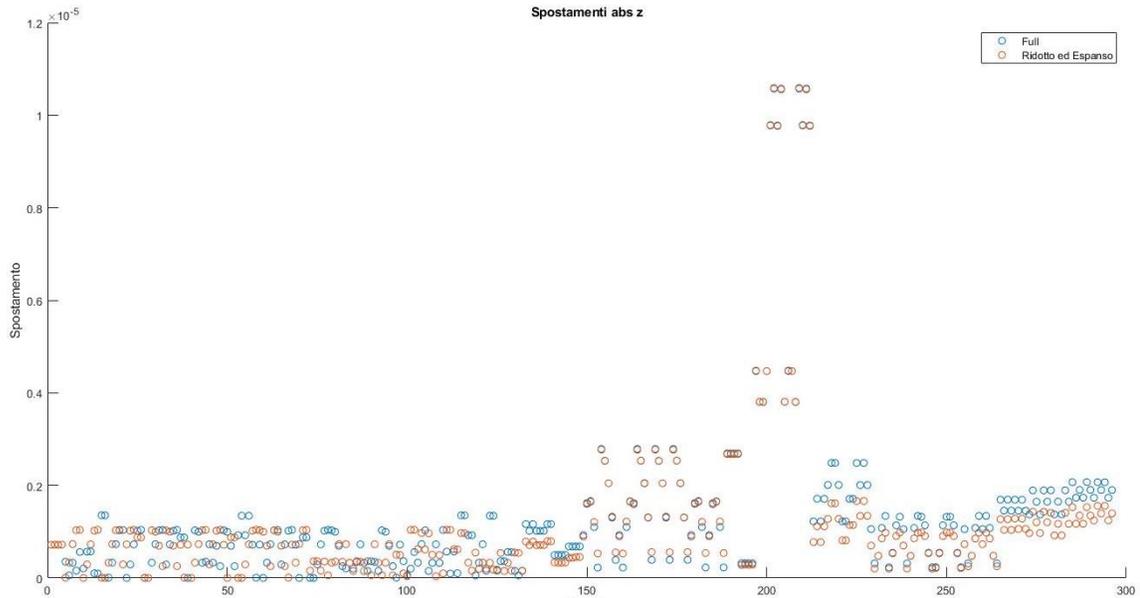


Figura 5.28: Confronto del valore assoluto degli spostamenti del modello full e del modello ridotto ed espanso.

Il valore assoluto contiene al suo interno l'informazione di parte reale e parte immaginaria del valore di spostamento, nel grafico vediamo un comportamento simile a quanto visto finora, ovvero valori vicini tra loro in una zona di maggior concentrazione di nodi master e valori che si allontanano nelle zone di meno concentrazione, ma anche in questo caso i risultati son accettabili.

Capitolo 6

6 Conclusioni e lavoro futuro

Lo scopo principale di questa tesi è stato quello di trovare e validare un metodo per poter eseguire un'analisi armonica non lineare in un modello ridotto. Come primo passo sono state confrontate quattro tipologie di metodo per poter eseguire la riduzione di un componente prestressato diviso in diversi superelementi, da questa operazione si è arrivati alla conclusione che la riduzione tramite perturbazione lineare è il metodo applicativo migliore, ovvero il metodo che restituisce autovalori e autovettori più prossimi a quelli ottenuti tramite un modello full. Dopo aver ottenuto questo risultato il passo successivo è stato quello di trovar un iter da seguire dopo aver ridotto il modello, per poter aver i risultati, in termini di spostamento ad esempio, su tutto il modello espanso, quindi su tutti i nodi della discretizzazione.

Avendo ottenuto questi risultati, come sviluppi futuri potrebbe esserci la possibilità di considerare la ricostruzione del segnale nel tempo mediante integrazione diretta nel tempo piuttosto che con una analisi armonica, in questo modo è possibile tenere conto di una risposta multiarmonica; oppure un altro punto potrebbe essere quello espandere con modelli di dimensioni più grosse e/o con più di due componenti e vedere quanto rallenta il procedimento.

Sitografia

- [1]. <https://www.youtube.com/watch?v=i4rqalr4VEM>
- [2]. <https://digilander.libero.it/andreatheone>
- [3]. <https://it.wikipedia.org/wiki/Turboventola>

Bibliografia

- [4]. G. Merckling, M. Jago. Scorrimento viscoso: termine di esercibilità di componenti sollecitati a caldo.
- [5]. 3. ANSYS® Help System, Release 12.0, 2010
- [6]. Vibrations prediction and measurement of multi-stage bladed disks with nonlinear behavior due to friction contacts / Battiato, Giuseppe. - (2017)
- [7]. Matthew Castanier, Yung-Chang Tan, Christophe Pierre. Characteristic Constraint Modes for Component Mode Synthesis. AIAA Journal, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001, 39, pp.1182-1187.
- [8]. Roy Craig, Mervyn Bampton. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. AIAA Journal, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1968, 6 (7), pp.1313-1319.
- [9]. F.Palloni. Implementazione del superelemento di Craig-Bampton in Femtools Application Framework.

-
- [10]. Tesi di Laurea Magistrale Calcolo della risposta forzata di componenti per motori aeronautici in presenza di contatti per attrito. Eleonora Caponio 2018
- [11]. Robert Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. AIAA Journal, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1965, 3 (2), pp.380.
- [12]. Andrea Emilio Catania. Appunti Turbocompressori Corso di Macchine
- [13]. Giovanni Santucci. Università degli studi di Roma "La Sapienza", "Guida alle lezioni del corso di costruzione di macchine Parte Prima".
- [14]. A.Fasana, S.Marchesiello. Meccanica delle vibrazioni
- [15]. A.Gugliotta. Elementi Finiti Parte 3.
- [16]. Dr. K. S. Shivakumar Aradhya*, Y. Lakshmi Narayana. Study of Stress-Stiffening Effect on the Dynamic Response of Fan-Disc Assembly of a Fighter Aircraft Engine.
- [17]. Criterion Miroslav, Pastora, Michal Bindaa, Tomáš Harparik. Modal Assurance Criterion 2012.

Ringraziamenti

Nell'arco di tutti questi anni passati a studiare ho avuto tanto a che fare con una miriade di variabili e costanti, non parlo solo di valori matematici, ma di tutto ciò che ha riempito le mie giornate. In questo contesto le variabili sono state in gran maggioranza, soprattutto negli ultimi tempi sono cambiati diversi aspetti della mia vita, fortunatamente ci sono state anche delle costanti che mi hanno dato una base su cui sostenermi e ripartire tutte quelle volte che credevo di non farcela.

Parlo di voi, mamma e papà, che mi avete permesso di realizzare tutto ciò, senza il vostro supporto non solo economico ma anche emotivo, non sarei mai stata capace di realizzare tutto ciò, o per lo meno non in così poco tempo. Con la stessa importanza sono grata ai miei fratelloni, anche voi siete stati di grande aiuto in questi anni ed è anche grazie a voi se oggi sono una persona così determinata.

Ringrazio chi in questo ultimo anno difficile mi è stato accanto e mi ha incoraggiata nei momenti di sconforto, ha pianto con me nei momenti bui e ha gioito nei momenti belli, spero che tu possa diventare non più una variabile ma una costante.

Ringrazio tutti i miei amici, chi conosciuti in questi anni e chi prima, che hanno reso tutto questo periodo divertente e indimenticabile, conserverò sempre dei bei ricordi.

In questo contesto accademico non posso non citare i docenti, e non ringrazio solo i migliori, ovvero coloro che mi hanno trasmesso l'amore per la scienza, ma ringrazio anche coloro che con superbia e indifferenza hanno fatto vacillare la mia autostima, grazie a loro so cosa non voglio essere da grande.

E per ultima, e non per importanza, ringrazio me stessa la vera persona che ha avuto tanta forza e ha reso possibile tutto questo. *Ad meliora et maiora semper!*