

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale

in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Analisi numerica di corner flow
supersonici con schema central-upwind



Relatori
prof. Michele Ferlauto
prof. Roberto Marsilio

Candidato
Tommaso Pellegrini

Anno Accademico 2019/2020

Indice

1	Introduzione	3
2	Corner Flows	6
2.1	Riflessione di onde piane	7
2.2	Stato dell'arte e configurazioni tipiche	13
3	Schema numerico e discretizzazione	21
3.1	Proprietà generali degli schemi numerici e schema di Lax-Friedrichs	22
3.2	Schema di Godunov e schemi centrali-upwind	28
4	Software utilizzati	36
4.1	OpenFOAM	36
4.2	Dizionari, utilities e geometria del dominio	38
4.2.1	Utility <i>blockMesh</i>	40
4.3	Il solutore <i>rhoCentralFoam</i>	42
4.3.1	Termini convettivi	44
4.3.2	Termini gradiente	46
4.3.3	Termini Laplaciani	46
4.3.4	Algoritmo risolutivo	47
4.4	ParaView	48
5	Metodologia e risultati	50
5.1	Definizione del dominio di calcolo e condizioni al contorno . . .	50
5.2	Griglia computazionale	51
5.3	Grid refinement	54
5.4	Verifica della griglia computazionale	56
5.4.1	Test 1: confronto con dati sperimentali	57
5.4.2	Test 2: self-similarità della soluzione	61
5.5	Risultati	64
5.5.1	Caso 1: $M = 7, \theta = 10^\circ$	65
5.5.2	Caso 2: $M = 10, \theta = 16^\circ$	67
5.5.3	Caso 3: $M = 6, \theta = 15^\circ$	71

Capitolo 1

Introduzione

Tra le numerose sfide che il mondo dell'ingegneria aeronautica si propone di affrontare nel futuro prossimo vi è sicuramente quella di rendere il volo supersonico una tecnologia ampiamente diffusa ed economicamente redditizia.

Nel settore del trasporto civile, per esempio, il fallimento del programma Concorde ha lasciato scoperta per vent'anni una porzione di mercato solo marginalmente esplorata finora, suscitando l'interesse per lo sviluppo di un velivolo supersonico di linea più efficiente e silenzioso, che sia in grado di competere con l'offerta tradizionale del settore.

In questo scenario si inquadrano progetti come quello frutto di una partnership tra NASA e Lockheed Martin per la realizzazione di un velivolo certificabile per il volo supersonico sulla terra ferma, l'X-59, che apra la strada ad una nuova generazione di velivoli da trasporto passeggeri.¹

Nel campo spaziale, invece, la ricerca di una tecnologia che riduca i costi operativi ha portato a investimenti nel settore del volo ipersonico, nel tentativo di sviluppare vettori Single Stage To Orbit riutilizzabili.

Un esempio di tale interesse è il progetto europeo SKYLON, che mira alla realizzazione di uno spaziplano in grado di raggiungere la Low Earth Orbit decollando ed atterrando su pista, che sfrutta un sistema propulsivo ibrido del tipo air breathing rocket.²

Dato l'attuale livello tecnologico, il progresso in entrambi questi settori necessita tuttavia di una migliore comprensione di come flussi ad alta velocità interagiscano con geometrie complesse al fine di soddisfare un requisito imprescindibile: una migliore efficienza complessiva che si traduca sia nell'effettiva

¹Ulteriori informazioni sul progetto sono disponibili consultando il sito <https://www.nasa.gov/specials/X59/index.html>

²I dettagli sugli sviluppi del programma sono reperibili in "Progress on SKYLON and SABRE", Hampsell Mark, *Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC*, Vol. 11, 2013

possibilità di realizzazione di questi progetti sia in minori costi operativi per futuri design.

All'interno di questo quadro si colloca lo studio del *corner flow*, ovvero il flusso supersonico che si sviluppa nelle regioni a ridosso di due superfici, tipicamente piane, che si intersecano.

Gli interessi applicativi dello studio di questo fenomeno complesso sono molteplici, e trovano spazio in svariati campi: dal design della geometria nelle giunzioni ala-fusoliera all'analisi, come nel caso di questa tesi, del funzionamento di prese d'aria supersoniche a scatola.

In quest'ultimo caso, il *corner flow* ha un'influenza potenzialmente non trascurabile sulle prestazioni del componente e dell'intero sistema propulsivo: l'interazione tridimensionale (mutua e con lo strato limite) delle onde d'urto generate dalla geometria della presa, la dipendenza della topologia del fenomeno da molteplici fattori, la generazione di strutture vorticose dalla configurazione e dall'estensione molto variabili; tutti questi elementi rendono il *corner flow* degno di analisi approfondita.

L'approccio scelto in questa tesi è quello numerico.

In particolare si è sviluppato un modello tridimensionale ed instazionario del fenomeno, prestando particolare attenzione al design di una griglia di calcolo adeguata e alla scelta di condizioni al contorno utili allo studio mirato delle strutture vorticose tipiche di questo flusso.

Il lavoro si è concentrato sulla soluzione delle equazioni di Eulero per flusso non viscoso per alcune combinazioni specifiche di geometria del dominio e condizioni al contorno, già oggetto di ricerca in studi precedenti. In questo modo è stato possibile confrontare direttamente i risultati ottenuti con quelli sia sperimentali che numerici presenti in letteratura.

Le sfide che un approccio di questo tipo propone sono molteplici, e sono di fatto saldamente collegate alla triplice natura di uno studio che coinvolge la fluidodinamica computazionale.

La base dello studio, nonché il fine nel caso di un progetto di ricerca, è la comprensione della fisica di un certo fenomeno, che va affrontata con strumenti teorici adeguati. Nel caso di questo studio, questi corrispondono alla conoscenza dei fenomeni propri della gasdinamica per flussi compressibili, ed in particolare l'interazione tridimensionale delle onde d'urto.

Dovendo tuttavia discretizzare le equazioni differenziali che descrivono i fenomeni fisici appena citati, la conoscenza e la comprensione delle caratteristiche degli schemi numerici utilizzati rappresentano un secondo strumento fondamentale.

Infine, l'implementazione dello schema numerico selezionato, costituisce un

terzo filtro, quello computazionale, tramite il quale osservare i risultati ottenuti. La conoscenza degli algoritmi utilizzati nella soluzione delle equazioni discretizzate rappresenta perciò un terzo requisito.

L'organizzazione di quanto segue cerca di rimarcare il concetto dei tre piani su cui si è mossa l'analisi dal punto di vista numerico del fenomeno del corner flow. Questa tesi è pertanto così strutturata: nel secondo capitolo, dopo un'introduzione teorica sui concetti basilari necessari alla comprensione della natura fisica del fenomeno oggetto di studio, vengono presentati lo stato dell'arte ed alcuni risultati notevoli ottenuti in studi precedenti.

Il terzo capitolo introduce lo schema numerico utilizzato nella discretizzazione e nella soluzione delle equazioni di Eulero, offrendo alcune informazioni necessarie a giustificare la scelta di tale schema numerico.

Il quarto capitolo riporta una rapida spiegazione del funzionamento del software utilizzato per la definizione del modello e la soluzione delle equazioni, insieme ad una descrizione più specifica del solutore utilizzato.

Il capitolo seguente rappresenta il nocciolo di quanto svolto durante questa tesi. Viene perciò descritto il metodo utilizzato nella definizione del dominio e della griglia computazionale, le verifiche preliminari operate su di essa ed una analisi dei risultati ottenuti, comparati a quelli riportati in letteratura.

Infine, il sesto ed ultimo capitolo si occupa di trarre delle conclusioni su quanto osservato, e di fornire spunti per un'eventuale proseguimento del lavoro su questo argomento.

Capitolo 2

Corner Flows

Con il termine *Corner Flow* si intende generalmente il flusso supersonico che interessa la regione a ridosso di due superfici, tipicamente piane, che si intersecano.

I corner flow studiati interessano la regione in prossimità di due rampe piane. La geometria di questo problema è definita per mezzo di una serie di angoli; in particolare ν è l'angolo diedro tra le due rampe; χ_1, χ_2 l'angolo di *sweep* delle rampe A e B; θ_1, θ_2 l'angolo di rampa A e B, preso in direzione perpendicolare al bordo d'attacco di ciascuna rampa.

Ciascuno di questi parametri geometrici influenza la configurazione della soluzione, generando un'ampia gamma di casistiche. Questa tesi si concentra pertanto su un caso meno generale, scegliendo i seguenti vincoli geometrici:

- $\nu = 90^\circ$;
- $\chi_1 = \chi_2 = 0$;
- $\theta_1 = \theta_2 = \theta$;

Le configurazioni così ottenute sono perciò simmetriche rispetto al piano di bisezione del corner, e l'unica variabile dal punto di vista geometrico è l'angolo di rampa θ . Una schematizzazione della geometria è riportata in Figura 2.1. L'altra variabile di interesse nel determinare il tipo di soluzione è il numero di Mach M .

Fissata la geometria, la variazione del numero di Mach comporta la nascita di onde d'urto piane a partire dal bordo d'attacco di ciascuna delle rampe e, in prossimità del corner, l'evoluzione di complicate strutture di riflessioni d'urto tridimensionali. Questo capitolo presenterà brevemente un'analogia con il caso bidimensionale per facilitare la comprensione della natura del fenomeno e illustrare alcuni degli strumenti chiave nell'analisi delle varie configurazioni possibili nei corner flow, per poi mostrare alcune configurazioni tipiche del

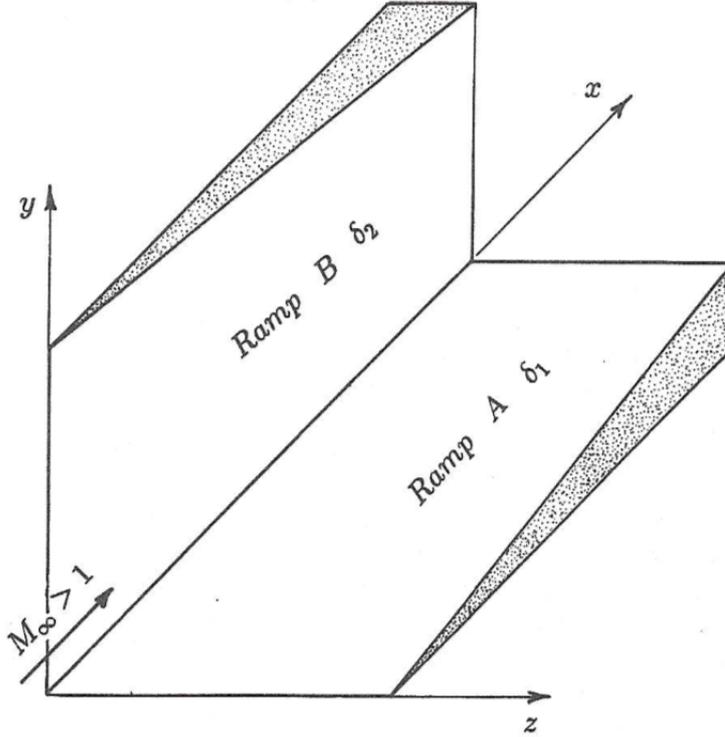


Figura 2.1: Schematizzazione della geometria studiata

problema oggetto di studi precedenti. Si concluderà infine proponendo un confronto tra le varie tecniche computazionali utilizzate in alcune fonti citate ed alcune differenze nei risultati lì ottenuti.

2.1 Riflessione di onde piane

Il problema della geometria di onde d'urto piane oblique nel caso di flusso non viscoso, comprimibile è descritto completamente dall'applicazione delle equazioni di conservazione della massa, quantità di moto ed energia in forma integrale nelle ipotesi di Eulero. In assenza di forze di volume e di fonti di calore, applicate ad un volume di controllo V con $\partial V = \mathbf{S}$, esse risultano:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\mathbf{S}} \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.1)$$

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} dV + \int_{\mathbf{S}} (\rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{U} + \int_{\mathbf{S}} p d\mathbf{S} = 0 \quad (2.2)$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{U^2}{2} \right) \right] dV + \int_{\mathbf{S}} \rho \left(e + \frac{U^2}{2} \right) \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\mathbf{S}} p \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.3)$$

dove \mathbf{U} è il vettore velocità, ρ la densità, p la pressione statica, e l'energia interna per unità di massa.

Se si considera un caso bidimensionale, utilizzando un volume di controllo appropriato, il risultato di tale procedimento è un set di equazioni che descrive il rapporto tra le grandezze a monte e a valle dell'urto.

In particolare, nel caso stazionario, considerando un gas perfetto, sia u la componente di velocità perpendicolare all'urto obliquo, w la componente tangenziale, tali che $U^2 = u^2 + w^2$ e $h = e + p/\rho$ l'entalpia; applicando le equazioni di conservazione ed individuando con il pedice 1 la regione a monte dell'urto e con il pedice 2 la regione a valle, si ottiene:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2.4)$$

$$w_1 = w_2 \quad (2.5)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (2.6)$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (2.7)$$

Si può notare dalla 2.5 e 2.4 come la componente di velocità tangenziale all'urto risulti inalterata, mentre quella normale, per soddisfare il secondo principio della termodinamica, può solo diminuire, il che risulta in una deflessione della corrente.

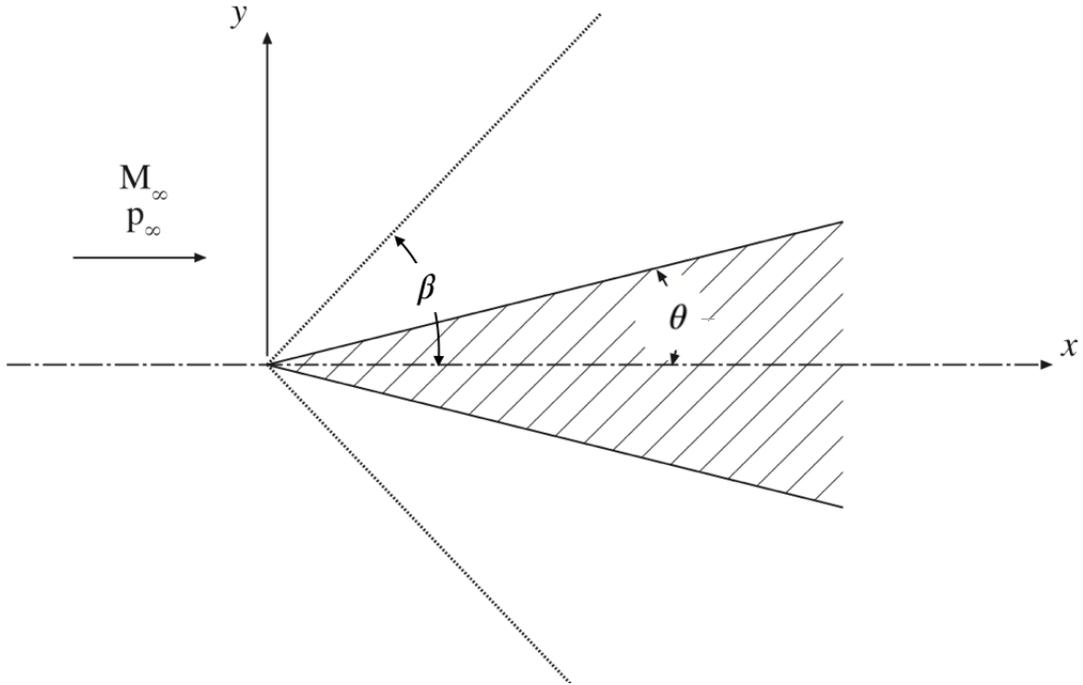


Figura 2.2: Schematizzazione dell'urto obliquo

Nel caso di una corrente supersonica che incida su una rampa piana di inclinazione θ , si sviluppa una soluzione del tipo riportato in Figura 2.2.

In questo caso la condizione di tangenza a parete impone una deflessione della corrente dello stesso angolo di rampa θ , e di conseguenza un angolo dell'urto obliquo β rispetto alla direzione della corrente a monte che è legato alle variabili M_1 e θ dalla seguente relazione:

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + 2 \cos 2\beta + 2)} \right] \quad (2.8)$$

La relazione tra il numero di Mach relativo alla componente di velocità u normale all'urto, M_n , tra monte e valle dell'urto si ottiene tramite le relazioni dell'urto retto:

$$M_{n2}^2 = \frac{M_{n1}^2 + [2/(\gamma - 1)]}{[2\gamma/(\gamma - 1)]M_{n1}^2 - 1} \quad (2.9)$$

con $M_{n1} = M_1 \sin \beta$, $M_{n2} = M_2 \sin(\beta - \theta)$. Il rapporto tra le grandezze statiche a monte e valle si ottengono analogamente:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_{n1}^2}{(\gamma - 1)M_{n1}^2 + 2} \quad (2.10)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_{n1}^2 - 1) \quad (2.11)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \quad (2.12)$$

La relazione 2.8 è raffigurata in Figura 2.3.

Si può notare che, fissato un valore di M_1 , esiste un valore massimo di rampa θ_{max} per il quale esiste soluzione per l'urto obliquo.

Inoltre, fissato M_1 e θ esistono due soluzioni possibili, che determinano un *urto debole* o un *urto forte*, a cui competono valori di M_2 rispettivamente supersonici e subsonici. La prima soluzione è "la più diffusa in natura, ed è solitamente quella che si osserva" [1].

Infine, il legame tra M_1 , M_2 , la geometria del problema e il rapporto tra le grandezze statiche in 1 e 2, sancisce che, a parità di condizioni a monte, a deflessione maggiore corrisponde una più drastica variazione di pressione, temperatura, densità ed energia cinetica, e quindi maggiori fenomeni dissipativi. A questo consegue quindi anche una variazione di entropia del flusso.

A parità di deflessione imposta, valori più elevati di M_1 causano un effetto analogo.

L'intersezione di un'onda d'urto obliqua con una superficie solida, un piano di simmetria o un'altra onda piana genera un fenomeno di riflessione. Questo avviene se la deflessione a valle del primo urto "non è compatibile con le condizioni al contorno in quella regione" [1]. Di conseguenza, viene generato un

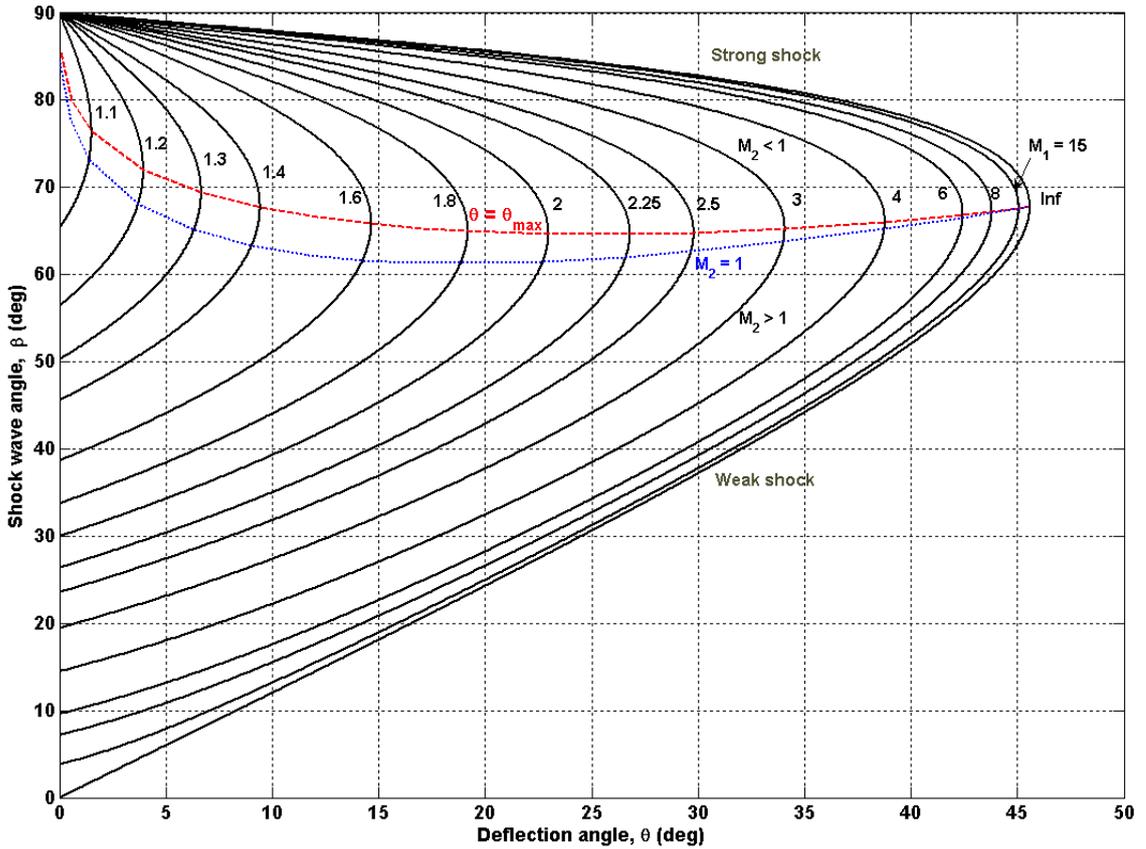


Figura 2.3: Relazione tra angolo di rampa e angolo assunto dall'urto obliquo

secondo urto, che deflette nuovamente la corrente per soddisfare le condizioni al contorno.

La riflessione, nel caso bidimensionale, può essere tuttavia di due tipi: una *riflessione regolare* (RR) che sviluppa un urto obliquo riflesso (r) nel punto di contatto tra l'urto incidente (i) e la superficie con cui entra a contatto (vedi 2.4a); oppure una *riflessione irregolare* (IR) che sviluppa un *Mach stem* (m), un tratto di urto retto che si dirama dal punto triplo (Pt) verso la superficie su cui incide l'urto. Nel caso bidimensionale il Mach stem si raccorda agli urti i ed r raggiungendo il punto triplo tramite un tratto curvo; questa riflessione irregolare prende il nome di *riflessione di Mach* (vedi 2.4b)¹.

I fenomeni di interazione tra le onde d'urto possono essere convenientemente analizzati con l'utilizzo del diagramma pressione-deflessione, il luogo di tutti i possibili valori di pressione a valle di un urto in funzione della deflessione imposta per un certo set di condizioni a monte.

¹Le immagini 2.4a-2.6 sono state adattate da [1]

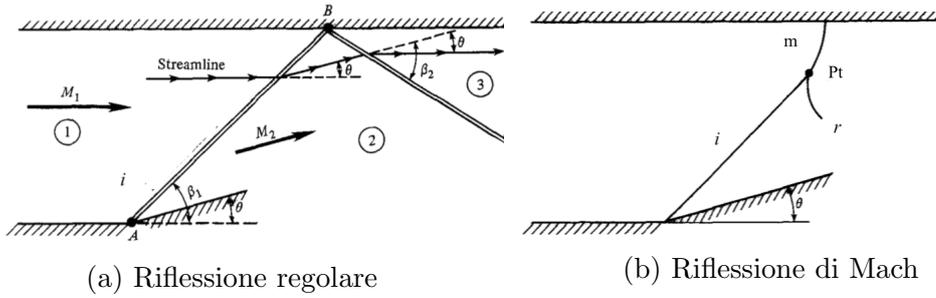


Figura 2.5: Esempio di diagramma pressione-deflessione

Un esempio di questi grafici è riportato in Figura 2.5. Analizzando il modo in cui i diagrammi relativi a due urti intersecanti interagiscono si può valutare la natura nella riflessione, e trarne considerazioni sul legame tra il tipo di riflessione e le condizioni a valle delle onde d'urto.

Il caso di riflessione conseguente l'intersezione di due onde d'urto di famiglie opposte è particolarmente interessante per alcune analogie con il corner flow.

Esso è schematizzato in Figura 2.6. L'interazione di due urti di intensità diversa, oltre a generare urti riflessi differenti che indirizzano la corrente nella direzione imposta dalle condizioni al contorno, genera anche due regioni distinte a valle del sistema di urti (4 e 4') in cui i vettori velocità sono paralleli tra loro e soddisfano le condizioni di tangenza, ma di modulo diverso.

Le particelle fluide che attraversano le zone 2 e 4' subiscono fenomeni dissipativi di intensità differente rispetto a quelle che attraversano le zone 3 e 4. Esiste pertanto una *superficie di contatto* o *slip line* che divide due regioni a differente entropia ed energia cinetica.

Il diagramma in Figura 2.5 può essere riferito alla Figura 2.6. I punti 2 e 3,

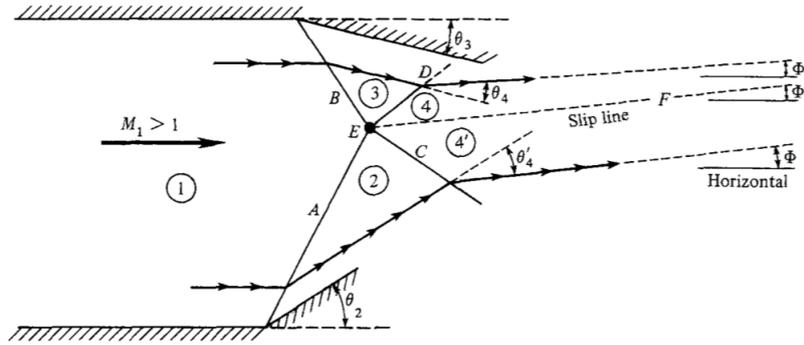


Figura 2.6: Esempio di riflessione regolare

indicati sul diagramma centrato sull'asse p relativo alla corrente a monte a M_1 , indicano la pressione della corrente nelle zone 2 e 3 che ha subito deflessione θ_2 e θ_3 attraverso gli urti incidenti A e B. Su questi punti sono centrati i diagrammi relativi al salto di pressione ottenuto attraverso gli urti riflessi C e D. Poiché le condizioni al contorno impongono una deflessione a valle del sistema di urti di θ_3 , in corrispondenza di questo valore le curve relative alle correnti a M_2 e M_3 si intersecano e danno il valore di pressione *statica* nelle zone 4 e 4'. Il valore di θ che corrisponde ai punti 4 e 4' indica la deflessione della corrente a valle del sistema di urti rispetto alla direzione che aveva a monte. Poiché gli urti che interessano le correnti a M_2 e M_3 sono di intensità differente, come è differente l'estensione dei diagrammi pressione-deflessione che li rappresenta, si può prevedere la formazione di slip lines.

Il **Teorema di Crocco** può fornire ulteriori strumenti per la comprensione di quanto accade in una regione di flusso in cui sono presenti superfici di contatto, attraverso le quali vi è una variazione di entropia. Questo teorema mette in relazione le proprietà cinematiche e quelle termodinamiche di un flusso, e nel caso di flusso comprimibile e non viscoso prende la forma:

$$T\nabla s = \nabla h_o - \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \quad (2.13)$$

dove s è l'entropia e $h_o = h + U^2/2$ è l'entalpia totale.

L'equazione 2.13 indica che, ogni qualvolta un flusso, anche stazionario, presenti un gradiente di entalpia totale o di entropia, esso sarà *rotazionale* e verrà dunque generata della *vorticità*. Questo accade nel caso di riflessione regolare tra due urti di intensità differente o nel caso di riflessione irregolare di un urto, con slip lines che si diramano dai punti tripli di tale configurazione.

Un ultimo strumento necessario alla comprensione delle differenti configurazioni del corner flow è la definizione di criteri per la transizione da una riflessione regolare ad una irregolare. Questi sono stati studiati e validati in studi analitici, numerici e sperimentali, tra cui [2, 3, 4, 5].

Il primo criterio è detto **detachment criterion** (o criterio del distacco). Esso è collegato alla natura della relazione 2.8, esemplificata nel grafico 2.3: qualora a valle dell'urto incidente sia imposta una deflessione $\theta_D = \theta_{max}$ relativa alla corrente a M_2 , si raggiunge la condizione oltre la quale non esiste soluzione per un urto obliquo, e di conseguenza in prossimità del punto di riflessione si formerà un tratto di urto retto (m) e una riflessione irregolare.

Il secondo criterio è il **sonic criterion** (o criterio sonico). Si osserva un valore limite per la riflessione regolare qualora la corrente a valle dell'urto riflesso abbia $M_3 = 1$, corrispondente a deflessione θ_S .

E' interessante notare che i valori di deflessione limite θ_D e θ_S che competono ai due criteri riportati "differiscono di poche frazioni di grado, per cui spesso è praticamente impossibile distinguerli" [6].

Un terzo criterio è quello dell' **equilibrio meccanico** o **di von Neumann**: esso è valido solo per $M > M_* = 2.2$; la deflessione limite corrispondente θ_N è quella che termina un valore della pressione a valle dell'urto riflesso r pari a quella a valle dell'urto incidente i . [si veda 6]

Nel range $\theta_N < \theta < \theta_D$ per $M > M_*$ tanto la riflessione regolare quanto quella irregolare sono possibili. I risultati sperimentali e numerici in [3] mostrano inoltre un fenomeno di isteresi nella transizione da RR a IR.

2.2 Stato dell'arte e configurazioni tipiche

Lo studio numerico dei corner flow supersonici ha svolto un ruolo cruciale nella comprensione del fenomeno e delle dinamiche di formazione di sistemi tridimensionali di urti. In [7] viene riportato un breve resoconto dei più significativi risultati ottenuti in questo campo dagli anni '60 ad oggi.

Ad oggi, tramite l'analisi numerica, è stato possibile riconoscere alcuni pattern nella formazione di riflessioni irregolari di urti e vi è buon accordo tra i risultati provenienti da studi diversi.

In generale, inoltre, vi è buon accordo anche tra risultati numerici e sperimentali, per esempio quelli ottenuti in [8],[9] e, in una certa misura, in [10]. In luce di ciò alcune caratteristiche di questo particolare flusso sono ormai date per assodate in letteratura.

Il corner flow supersonico e inviscido ha sviluppo conico; la visualizzazione degli urti che si formano nel piano ortogonale alla direzione di sviluppo principale

del fenomeno (l'asse x in Figura 2.1), detto anche di *cross flow*, permette di osservare un campo di moto caratterizzato da tre zone, descritte per la prima volta da *Charwat e Redekeopp* in [10]: la prima occupata da flusso indisturbato; la seconda caratterizzata da flusso essenzialmente bidimensionale, la terza occupata da flusso tridimensionale vero e proprio a sviluppo conico, che presenta molteplici discontinuità.

L'analisi per via numerica e sperimentale mostra una chiara evoluzione del fenomeno, che presenta, all'aumentare dell'intensità degli urti piani con il crescere del valore M_1 o dell'angolo di rampa θ , il passaggio dalla riflessione regolare RR a vari tipi di riflessione irregolare chiamati *Von Neumann Reflection* (VNR), *Single Mach Reflection* (SMR), *Transitional Mach Reflection* (TMR), *Double Mach Reflection* (DMR), *Multi-shock Mach Reflection* (MsMR).

Queste configurazioni tipiche del flusso inviscido, tridimensionale e stazionario, presentano caratteristiche inedite rispetto al caso bidimensionale stazionario, dove è presente solo la riflessione di Mach.

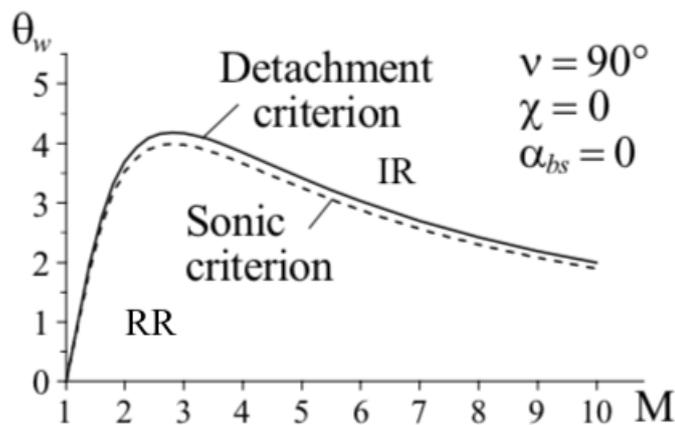
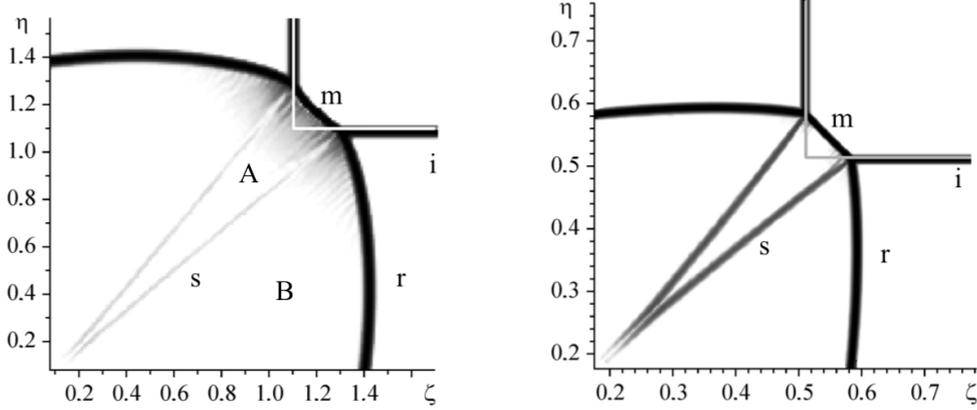


Figura 2.7: Transizione da RR a IR in funzione di intensità della corrente e angolo di rampa, riportato in [2]

Per valori di θ o di M_1 moderati la riflessione è del tipo regolare: nella configurazione geometrica simmetrica, entrambi gli urti hanno uguale intensità e pertanto non vi sarà la presenza di slip lines.

Goonko et al. in [2] introducono, accanto allo studio numerico, uno studio analitico basato sui diagrammi pressione-deflessione degli urti incidenti e riflessi, che permette di individuare alcuni di criteri di transizione tra le varie configurazioni possibili. La transizione da riflessione regolare a irregolare è stata studiata utilizzando i criteri illustrati in sezione 2.1. Il risultato è riportato in Figura 2.7. Gli autori notano che il criterio di von Neumann, applicabile al

caso di riflessione di Mach in due dimensioni, non rappresenta un criterio di transizione nel caso tridimensionale, poiché il numero di Mach relativo alla componente di velocità normale al Mach Stem non supera mai il valore limite per l'applicabilità del criterio $M_* = 2.2$, nemmeno nell'ipotesi $M \rightarrow \infty$.



(a) VNR per $M = 1.5$, $\theta = 5^\circ$, in coordinate coniche (b) SMR per $M = 3$, $\theta = 10^\circ$, in coordinate coniche

Appena superata la condizione limite per la riflessione irregolare, la soluzione si presenta nella configurazione VNR. Essa mostra un Mach stem di estensione ridotta e urti riflessi marcatamente convessi. Compaiono inoltre due superfici di contatto (s), che dai punti tripli diramano verso il corner. Le slip lines denotano il confine tra la regione occupata dal flusso ad entropia maggiore (A) che ha attraversato esclusivamente il Mach stem, più dissipativo, e regioni ad entropia minore (B). La configurazione è riportata in Figura 2.8a, tratta da [5].

Incrementando l'intensità degli urti, si passa ad una configurazione del tipo SMR, riportata in 2.8b. Tracciando la polare relativa a questo caso, *Goonko et al.* osservano che questo tipo di soluzione presenta le stesse caratteristiche del caso bidimensionale.

In Figura 2.9 è presentata la sovrapposizione dei diagrammi pressione (adimensionata)-deflessione relativi agli shock incidenti e riflessi di Figura 2.8b. Si può notare come il punto triplo P_t giaccia sulla polare dell'urto riflesso al di sopra del punto P_s corrispondente a condizioni soniche a valle dell'urto riflesso. Le condizioni sono quindi consistenti con la riflessione di Mach nel caso bidimensionale [4].

La topologia del sistema d'urti nella configurazione SMR è decisamente affine a

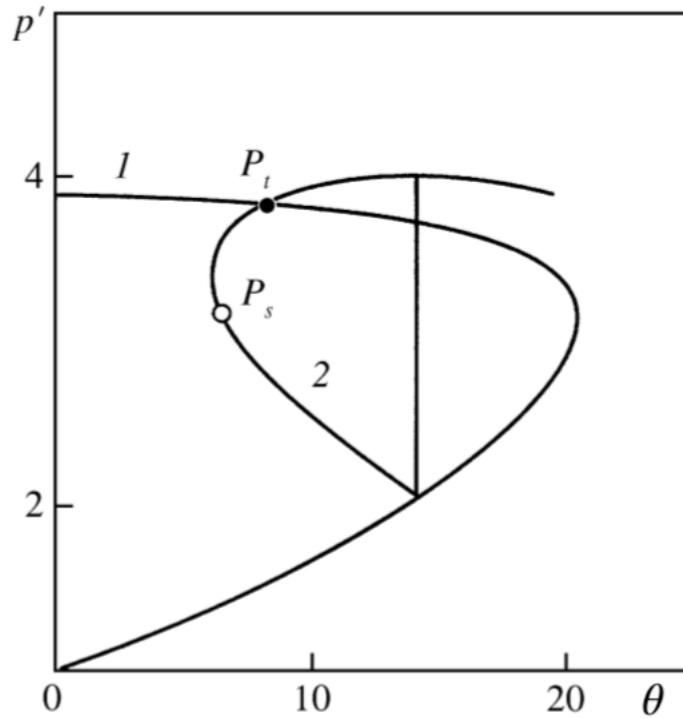


Figura 2.9: Polari per il caso SMR con $M = 3, \theta = 10^\circ$; 1 e 2 - urto incidente e riflesso

quanto osservato sperimentalmente nello studio del corner flow in approssimazione inviscida da *West e Korkegi* in [8], riportato in Figura 2.10, e confermata negli studi numerici di *Marsilio* [11], *Kutler* [12] e *Shankar, Anderson e Kutler* [13].

L'incrementare ulteriore dell'intensità degli urti porta ad una configurazione del tipo TMR. In questo caso, una regione a valle del punto triplo presenta corrente trasversale supersonica. Sulla polare si potrà perciò osservare il punto triplo al di sotto del punto P_s .

La configurazione TMR presenta urti riflessi concavi e una deformazione delle slip lines. Esse, procedendo verso il corner, si avvolgono in spirali controrotanti.

Un'interpretazione di questo fenomeno è fornita in [11] e si rifà al Teorema di Crocco illustrato in sezione 2.1. Poiché al crescere dell'intensità della corrente, cresce anche il divario di intensità tra i fenomeni dissipativi causati dal Mach stem e dagli urti incidenti ed riflessi, cresce di conseguenza il gradiente di entropia attraverso le superfici di contatto. Questo comporta un'intensificazione della vorticità indotta nel flusso e la conseguente deformazione delle slip lines. Segue una configurazione del tipo DMR, caratterizzata dalle stesse strutture vorticosi tipiche della TMR, ma anche dalla presenza di una seconda coppia di punti tripli (P_{t1}), una seconda riflessione di Mach che si dirama fino a parete

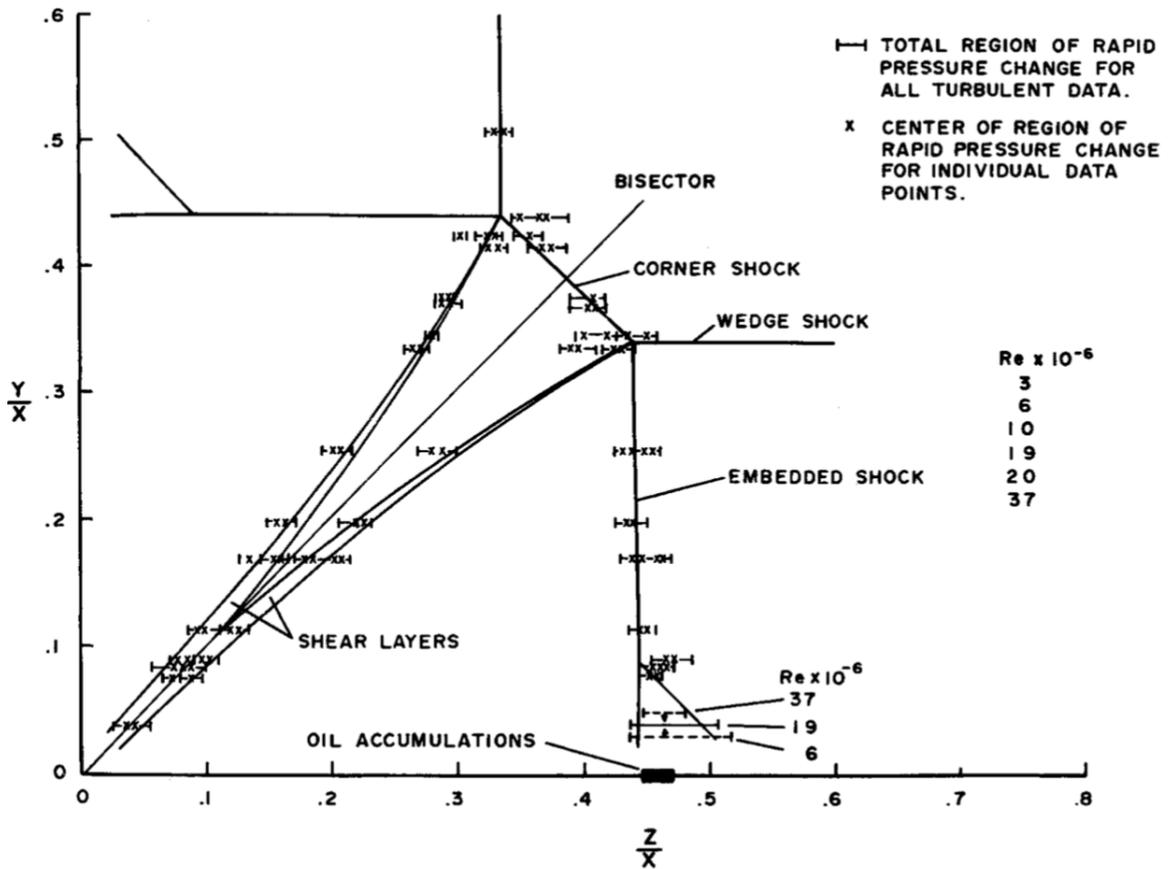


Figura 2.10: Risultati sperimentali per configurazione SMR, $M = 3$, $\theta = 9.5^\circ$

(m_1) e un nuovo urto riflesso (rr). Aumentando ancora l'intensità degli urti si ottengono multiple riflessioni di Mach, tipiche della configurazione MsMR. Un esempio tratto da [14] di queste configurazioni è riportato in Figura 2.11. E' significativo notare che al crescere dell'intensità della corrente, l'estensione delle strutture vorticose dovute all'avvolgimento delle superfici di contatto aumenta considerevolmente, fino ad avere dimensione tale da deformare il tratto di urto m , che devia dalla sua configurazione piana tipica del TMR.

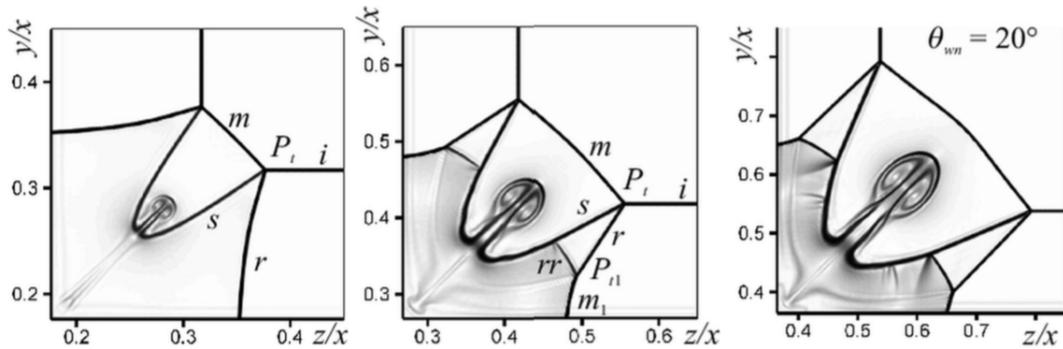


Figura 2.11: TMR: $M = 6$, $\theta = 10^\circ$ (sinistra); DMT: $M = 6$, $\theta = 15^\circ$ (centro); MsMR: $M = 6$, $\theta = 20^\circ$ (destra)

Sebbene la progressione di queste successive configurazioni sia stata validata in vari studi utilizzando differenti formulazioni del problema e differenti schemi numerici, è interessante notare che in generale non vi è accordo sui risultati ottenuti riguardo il comportamento delle superfici di contatto. In analogia con quanto osservato nel caso bidimensionale, è possibile che questo sia legato alla convergenza della soluzione delle equazioni di Eulero in campo comprimibile e in presenza di superfici di contatto, in rapporto al tipo di formulazione del problema [si veda 15].

Marsilio in [11] osserva un'instabilità della simmetria delle strutture vorticosi tipiche delle configurazioni TMR, DMR, MsMR. In particolare, nota che due soluzioni speculari e asimmetriche rispetto alla bisettrice del corner sono possibili, in cui una delle due strutture vorticosi ha dimensione preponderante rispetto all'altra.

I risultati proposti in Figura 2.12 sono stati ottenuti utilizzando uno schema ai volumi finiti, marciando nello spazio in modo da sfruttare l'iperbolicità delle equazioni di Eulero tridimensionale stazionario in campo supersonico, utilizzando una tecnica del tipo *flux-difference splitting*.

Lo schema è del secondo ordine grazie all'applicazione delle tecniche ENO (*Essentially Non-Oscillatory*) che permettono di ridurre considerevolmente errori di dispersione e oscillazioni indesiderate a ridosso delle discontinuità; queste si basano sull'interpolazione delle variabili di interesse tramite funzioni polinomiali e nello scegliere per ciascuna cella computazionale un dominio di dipendenza numerica che garantisca a tali funzioni polinomiali la maggior regolarità possibile. [si veda 16]

La griglia computazionale utilizzata presenta nel piano trasversale 100 x 100 celle di calcolo.

Risultati analoghi sono stati osservati da *Degrez e Spazzini*, in [17], utilizzando un solutore di Roe per risolvere le equazioni di Eulero in coordinate coniche.

Goonko et al. in [4] risolvono le equazioni di Eulero stazionario tridimensionali tramite avanzamento di una variabile temporale fittizia, con uno schema del tipo TVD (*Total Variation Diminishing*) con interpolazione dei flussi all'interfaccia tra le celle tramite un'approssimazione al terzo ordine di accuratezza. Le tecniche TVD consistono nel garantire la condizione di *monotonicità* della soluzione numerica, tramite l'uso di funzioni non lineari dette *limiters* o limitatori, al fine di evitare l'insorgere di oscillazioni di natura numerica a ridosso delle discontinuità. [si veda 18, 19]

La griglia utilizzata nel piano trasversale arriva fino a 300 x 300 celle. Gli autori non osservano alcuna asimmetria nelle strutture vorticosi una volta raggiunta

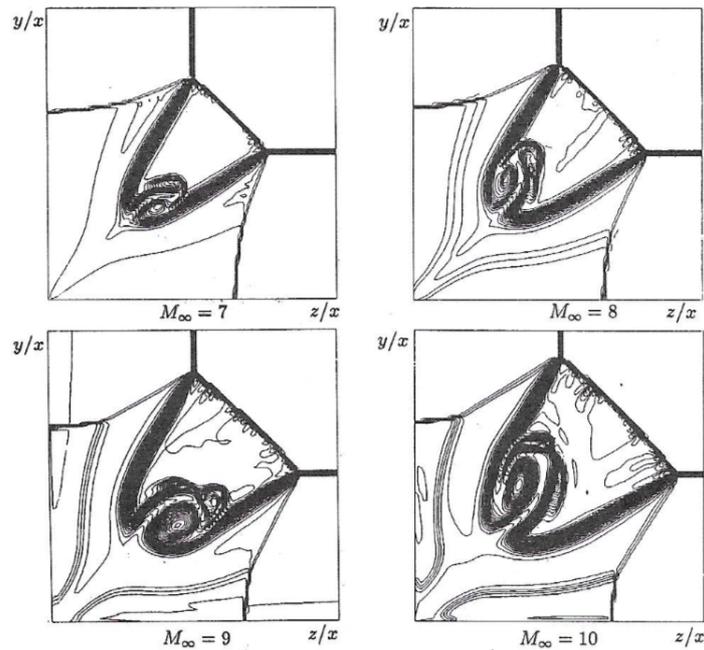


Figura 2.12: Soluzione stabile asimmetrica per le superfici di contatto; contour per l'entropia calcolati in [11]; $\theta = 10^\circ$, $M = 7 - 10$

convergenza.

Gli stessi, in [5], risolvono le equazioni di Eulero in ipotesi di instazionarietà, formulandole in un sistema di coordinate coniche, con uno schema ai volumi finiti. Viene utilizzata una griglia di calcolo a sviluppo conico con dimensioni nel piano trasversale fino a 300×300 celle.

I flussi attraverso le facce laterali sono valutati risolvendo un problema di Riemann e viene raggiunto un ordine di accuratezza cinque grazie all'utilizzo di tecniche WENO (*Weighted Essentially Non-Oscillatory*); a differenza delle tecniche ENO, queste prevedono che la ricostruzione delle variabili di cella avvenga attraverso una somma pesata dei risultati ottenuti da tutti i possibili domini di dipendenza numerica per la cella di interesse. I coefficienti di questa somma sono valutati in base alla regolarità dei vari polinomi interpolanti su ciascun dominio di calcolo associato.[16]

In questo caso, gli autori osservano, esaurito il transitorio, la formazione di strutture vorticosi asimmetriche rispetto alla bisettrice del corner, illustrate in Figura 2.13.

In questo contesto, è lecito ipotizzare una certa dipendenza della soluzione dalla formulazione del problema in oggetto; è inoltre evidente che siano necessarie analisi più approfondite riguardo la stabilità della soluzione simmetrica per quanto riguarda le superfici di contatto. Questa tesi si propone dunque di esplorare questa criticità per mezzo di una combinazione di formulazione delle

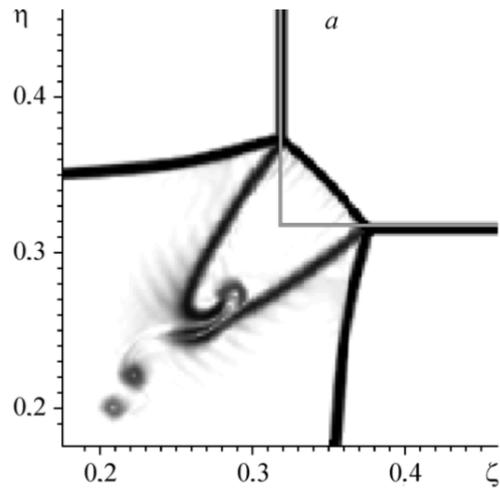


Figura 2.13: Soluzione stabile asimmetrica per le superfici di contatto; contour per l'entropia calcolato in [5]; $\theta = 10^\circ$, $M = 6$

equazioni di Eulero e di discretizzazione differente da quelle presentate nelle fonti citate finora e di compararne i risultati ottenuti.

Capitolo 3

Schema numerico e discretizzazione

La ricerca di una soluzione numerica al sistema di equazioni differenziali che descrive l'evoluzione di un flusso comporta l'imprescindibile e fondamentale passo della discretizzazione del problema. A questo segue la scelta di uno schema numerico che sia in grado di rappresentare fedelmente la natura fisica del problema studiato, a cui si deve però abbinare un'efficiente implementazione dal punto di vista computazionale, in modo da garantire un buon compromesso tra qualità della soluzione e sfruttamento delle risorse computazionali disponibili. Proprio in virtù di questi molteplici fattori da considerare, ad oggi esiste un'ampia gamma di strategie e di famiglie di schemi numerici e algoritmi in grado di fornire soluzioni a flussi di varia natura, in cui ciascuna delle possibilità offre punti di forza e debolezze rispetto alle altre.

La scelta dello schema numerico utilizzato deve perciò essere fatta tenendo a mente tanto le caratteristiche intrinseche del sistema di equazioni da modellare, quanto quelle dello schema utilizzato e l'influenza che queste ultime possono avere sulla soluzione ottenuta.

Ne consegue che, nel presentare i risultati ottenuti con un'analisi numerica, non si possa fare a meno di sottolineare le peculiarità dello schema numerico utilizzato; questo capitolo, dunque, presenterà lo schema numerico utilizzato nello studio presente dei corner flow, introducendo alcuni concetti fondamentali relativi agli schemi numerici in generale, per poi focalizzarsi sulla famiglia di schemi centrali alla quale lo schema utilizzato- lo schema di **Kurganov e Tadmior** (KT)- appartiene.

3.1 Proprietà generali degli schemi numerici e schema di Lax-Friedrichs

La costruzione di uno schema numerico funzionale non può prescindere dal soddisfare tre requisiti fondamentali di schema numerico e soluzione numerica: queste sono tre condizioni chiamate di *consistenza*, di *stabilità* e di *convergenza*. Hirsch in [19], fornisce un'esaustiva esposizione di questi concetti, che vengono qui brevemente riassunti.

La condizione di **consistenza** riguarda lo schema numerico e punta a garantire che la formulazione del problema discretizzato ricalchi il fenomeno fisico che prova a raffigurare.

Ovviamente, nel passare da una formulazione continua ad una discreta e finita di un qualsiasi problema differenziale, si compierà un'approssimazione che comporta un certo errore. L'equazione differenziale di partenza, con soluzione analitica esatta \tilde{u} , viene infatti discretizzata sostituendo i vari operatori differenziali con l'introduzione dello schema numerico scelto e di un passo di discretizzazione spaziale e temporale.

L'equazione così ottenuta, tuttavia, non coincide precisamente con l'equazione di partenza, ma anzi differirà da essa per quello che è detto **errore di troncamento** ϵ_T . L'errore di troncamento, o residuo, può essere interpretato come la somma di tutti i termini appartenenti allo sviluppo in serie di Taylor "scartati" nel rappresentare in termini discreti una funzione continua: esso avrà una certa dipendenza tanto dal passo spaziale quanto dal passo temporale, e il grado di dipendenza da questi ultimi del termine più rilevante che costituisce ϵ_T indica l'ordine di accuratezza dello schema numerico.

E' fondamentale notare che la soluzione numerica esatta \bar{u} all'equazione discretizzata, non è soluzione dell'equazione differenziale originale, ma è soluzione di un'equazione differenziale associata che comprende anche l'errore di troncamento e la sua dipendenza da spazio e tempo.

Uno schema numerico si dice consistente se, al decrescere dell'influenza dell'errore causato dall'operazione di discretizzazione, ovvero il residuo, la soluzione numerica esatta \bar{u} tende alla soluzione analitica esatta \tilde{u} . Questa condizione è pertanto verificata se, al tendere a zero del passo di discretizzazione spaziale e del passo temporale, lo schema numerico coincide con l'equazione differenziale che modella:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} \epsilon_T = 0$$

La condizione di **stabilità** riguarda invece la soluzione numerica e mira a

contenere gli errori prodotti durante la soluzione dell'equazione differenziale associata per mezzo dell'aritmetica finita propria dei calcolatori.

Nella soluzione dell'equazione associata, infatti, la macchina utilizzata per il calcolo introdurrà degli **errori di round-off**, che faranno sì che la soluzione numerica ottenuta u differisca dalla soluzione numerica esatta \bar{u} . Qualora questi errori, col progredire del calcolo, vadano a sommarsi indefinitamente, il valore della soluzione numerica cresce di conseguenza indefinitamente; se viceversa questi errori si mantengono contenuti, la soluzione tende ad un valore asintotico e si dice stabile.

Una modalità di analisi di stabilità molto diffusa è stata introdotta da von Neumann e si basa su uno sviluppo in serie di Fourier finita dell'errore dovuto al round-off o a errore nei dati iniziali. L'imposizione di condizioni al contorno periodiche permette di svincolare l'analisi di stabilità dalle singole condizioni al contorno applicate nei vari casi.

Un'analisi di questo tipo permette di valutare due tipi di errore, che fanno differire la soluzione numerica da quella numerica esatta: l'errore di diffusione, che riguarda l'ampiezza delle armoniche costituenti l'errore, e l'errore di dispersione, che riguarda la fase di quelle armoniche.

Se si denota con V^n l'ampiezza dell' i -esima armonica al livello temporale n , e con V^{n+1} quella al livello temporale $n + 1$, la condizione di stabilità impone

$$|G| = \left| \frac{V^{n+1}}{V^n} \right| \leq 1$$

dove G è detto fattore di amplificazione. L'analisi di stabilità di von Neumann fornisce inoltre una modalità diretta ed immediata per giudicare non solo se uno schema numerico sia stabile o meno, ma anche se esistono condizioni di stabilità e quali esse siano.

Studiando la dipendenza di G dal passo di discretizzazione temporale e spaziale è infatti possibile valutare se la stabilità è di tipo condizionato o incondizionato: nel primo caso una certa combinazione di Δx , Δt fornisce un valore limite per garantire la stabilità della soluzione.

Questa combinazione è detta numero di Courant o **CFL**, ed il suo significato è strettamente legato alla natura fisica dei fenomeni che la fluidodinamica computazionale studia: la condizione CFL serve infatti a garantire che per ciascun passo di integrazione, le dimensioni della mesh di calcolo siano adeguate a "catturare" le informazioni propagate dagli altri punti del dominio.

In altre parole, il dominio di dipendenza numerica deve contenere il dominio di dipendenza fisica, come esemplificato in Figura (3.1).

La condizione di **convergenza** riguarda la soluzione numerica e garantisce,

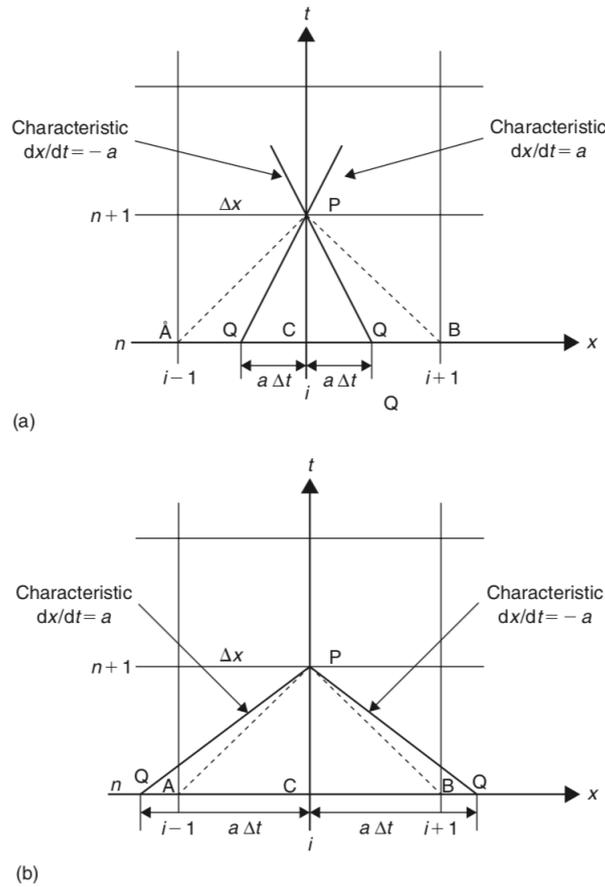


Figura 3.1: a) Il dominio di dipendenza fisico è contenuto da quello numerico, soluzione stabile; b) il dominio di dipendenza fisico non è contenuto da quello numerico, soluzione instabile

se verificata, che questa sia un'attendibile rappresentazione di ciò che accade a livello fisico. Essa richiede che, quando passo di discretizzazione spaziale e temporale tendono a zero, la differenza tra la soluzione analitica esatta \tilde{u} e quella calcolata u tenda a zero.

Il **Teorema dell'equivalenza di Lax** sancisce che uno schema consistente e stabile soddisfa automaticamente la condizione di convergenza; pertanto nel costruire uno schema numerico è necessario preoccuparsi solo delle prime due delle tre condizioni elencate.

I tre concetti finora introdotti permettono di apprezzare alcune delle caratteristiche dello schema centrale di **Lax-Friedrichs** (LxF), da considerare il capostipite della famiglia di schemi numerici a cui appartiene lo schema di Kurganov-Tadmior utilizzato nello svolgimento di questa tesi. Poiché l'interesse principale di questa sezione è valutare l'accuratezza spaziale di vari schemi numerici, tutti gli esempi riportati riguarderanno schemi **espliciti**, ovvero schemi nei quali l'integrazione nel tempo avviene utilizzando esclusivamente le informazioni relative al livello temporale immediatamente precedente a quello

calcolato.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

L'equazione differenziale (3.1) descrive un fenomeno monodimensionale puramente convettivo caratterizzato da propagazione ondosa con velocità costante a .

La discretizzazione di questa equazione può essere affrontata seguendo varie filosofie; una possibilità è quella di utilizzare schemi di tipo *upwind*. Un esempio è riportato nell'espressione (3.2), che rappresenta uno schema *upwind* dall'ordine di accuratezza uno, detto *first order upwind* o FOU. In questa espressione il pedice i indica l' i -esimo elemento del dominio di calcolo discretizzato, $i - 1$ quello immediatamente adiacente, mentre gli apici rappresentano gli n -esimi livelli temporali.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{a}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) = 0 \quad (3.2)$$

Uno schema come FOU presenta dei vantaggi significativi, primo fra tutti che se $a > 0$ lo schema numerico imita il fenomeno fisico e utilizza esclusivamente le informazioni provenienti da "sopra vento" per valutare l'evoluzione delle grandezze nell' i -esimo elemento. L'analisi di stabilità di von Neumann di questo schema dimostra che esso è condizionatamente stabile, ovvero solo se

$$0 \leq CFL = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Tuttavia, un'analisi dell'errore di troncamento porta alla conclusione che lo schema sia solo di primo ordine di accuratezza. Infatti esso è della forma indicata in equazione (3.3).

$$\epsilon_T = \frac{a\Delta x}{2} \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial^2 x} + O(\Delta x^2, \Delta t^2) = O(\Delta x, \Delta t) \quad (3.3)$$

Cosa ancora più importante, si può osservare che l'errore di troncamento, che a tutti gli effetti rappresenta uno dei termini dell'equazione differenziale associata con soluzione numerica esatta \bar{u} , è proporzionale ad una derivata seconda nello spazio. Questo significa che il termine che moltiplica la derivata in (3.3) ha sulla soluzione lo stesso effetto diffusivo che avrebbe una viscosità, senza che questa sia esplicitamente presente nell'equazione modello (3.1). Il termine viene perciò definito **viscosità numerica**, ed ha un'importanza cruciale nello studio numerico delle equazioni convettive:

$$\nu_{num} = \frac{a\Delta x}{2} \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)$$

Il fatto che l'errore di troncamento comprenda un termine diffusivo è in pieno accordo con la condizione di stabilità per lo schema FOU: se ν_{num} ha valore positivo tende a smorzare l'evoluzione della soluzione, viceversa se negativo tende ad amplificarla. Infatti, se si impone $\nu_{num} > 0$ si ottiene la condizione CFL per lo schema upwind di ordine di accuratezza uno.

Uno schema del tipo *centrale*, a differenza di quello upwind, offre invece un'ordine di accuratezza due. Esso prende la forma:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = 0 \quad (3.4)$$

L'analisi dell'errore di troncamento dimostra infatti che:

$$\epsilon_T = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) + a \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} \right) + O(\Delta x^4, \Delta t^2) = O(\Delta x^2, \Delta t) \quad (3.5)$$

L'analisi della stabilità di von Neumann rivela però che lo schema centrale di ordine di accuratezza due con marcia in avanti nel tempo è incondizionatamente instabile; il modulo del fattore di amplificazione $|G|$ è sempre maggiore di uno, indipendentemente dalla scelta del passo di discretizzazione spaziale o temporale. Lo schema dunque, per il teorema dell'equivalenza di Lax, non fornirà mai una soluzione convergente.

Lo schema di **Lax-Friedrichs** (LxF) stabilizza lo schema centrale illustrato nell'espressione (3.4). Esso sostituisce al termine u_i^n la media aritmetica tra i valori u_{i+1}^n e u_{i-1}^n appartenenti agli elementi immediatamente contigui all'elemento i . Il risultato è l'espressione riportata in (3.6):

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = 0 \quad (3.6)$$

L'analisi di stabilità indica che questo schema è condizionatamente stabile, con condizione $|CFL| \leq 1$. L'analisi di consistenza indica tuttavia la perdita di un ordine di accuratezza nello spazio rispetto allo schema centrale instabile, con l'errore di troncamento $\epsilon_T = O(\Delta x, \Delta t)$. Dunque, compare nuovamente l'influenza della viscosità numerica, responsabile della stabilizzazione della soluzione. Inoltre questo effetto è tanto più rilevante quanto più piccolo è il passo di integrazione temporale.

I limiti imposti dall'ordine di accuratezza e dalla presenza di viscosità numerica sono particolarmente gravi nello studio di flussi che presentano elevati

gradienti o persino discontinuità, come i flussi supersonici studiati in questa tesi. La presenza di viscosità numerica tende infatti a distribuire la discontinuità che rappresenta un'onda d'urto su una porzione ampia del dominio, fornendo quindi una soluzione numerica inadeguata a rappresentare il fenomeno fisico studiato.

Un esempio di questo è raffigurato nelle Figure (3.2)-(3.5); esse rappresentano la soluzione numerica per il numero di Mach ottenuta con diversi schemi numerici per un flusso di Eulero bidimensionale e supersonico ($M = 3$) che attraversa un condotto in cui è presente una rampa piana.

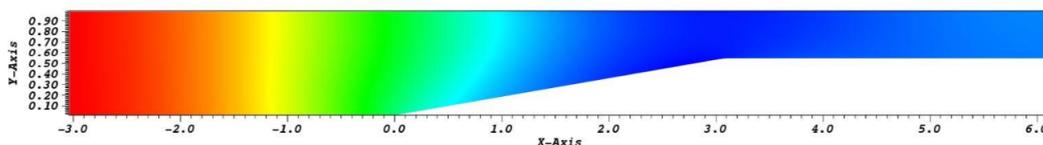


Figura 3.2: Soluzione con schema LxF, CFL=0.1. ν_{num} molto elevata

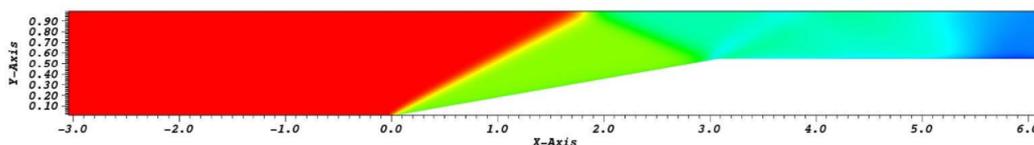


Figura 3.3: Soluzione con schema FOU, CFL=0.1.

La soluzione attesa è quella rappresentata in Figura (3.4), con lo sviluppo di un treno di onde oblique riflesse e un ventaglio di espansione alla fine della rampa. Come si può notare nel caso dello schema di Lax-Friedrichs, la diffusione operata dalla viscosità numerica altera radicalmente la natura del fenomeno rappresentato. E' possibile anche notare la dipendenza della viscosità numerica dal passo di discretizzazione temporale, direttamente proporzionale al numero CFL. La soluzione proposta in Figura (3.5), pur ottenuta con lo schema di Lax-Friedrichs, è molto più vicina alla soluzione analitica rispetto alla soluzione di Figura (3.2).

D'altra parte, l'unico schema di ordine di accuratezza due tra quelli mostrati, offre una soluzione dalla qualità decisamente migliore, oltre che in linea con quanto atteso dallo studio analitico della riflessione di urti obliqui. Risulta dunque evidente la necessità di schemi di ordine superiore al primo per lo studio dei fenomeni che presentano forti gradienti e discontinuità, come i sistemi di urti tridimensionali. La necessità di ordini di accuratezza superiori ha pertanto stimolato l'ampliamento delle famiglie di schemi upwind e centrali. Due

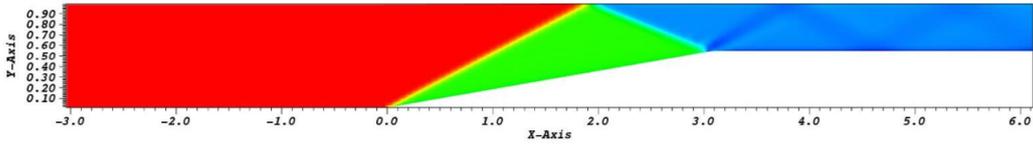


Figura 3.4: Soluzione con schema di tipo upwind, ordine di accuratezza 2

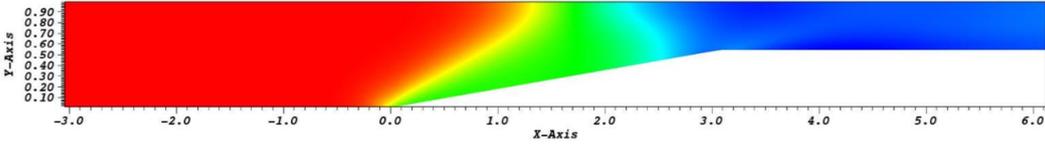


Figura 3.5: Soluzione con schema LxF, $CFL \gg 0.1$. ν_{num} ridotta notevolmente

di questi ultimi, gli schemi di Nessyahu-Tadmor e di Kurganov-Tadmor sono necessari alla comprensione del funzionamento del solutore utilizzato nello svolgimento di questa tesi, e saranno perciò presentati nella prossima sezione.

3.2 Schema di Godunov e schemi centrali-upwind

Uno schema di ordine di accuratezza nello spazio superiore a uno trascura solo termini con dipendenza dalla discretizzazione spaziale più che lineare. Questi termini vanno a contribuire all'errore di troncamento, ed influenzano la forma della soluzione numerica esatta che lo schema è in grado di produrre. Essi tuttavia, essendo il prodotto di un'espansione in serie di Taylor, hanno minor rilevanza man mano che aumenta il loro grado di dipendenza da Δx ; poiché l'ordine di accuratezza spaziale di questi schemi è almeno due, gli effetti diffusivi relativi alla viscosità numerica, illustrati in sezione 3.1, vengono fortemente attenuati, e lo schema risulta avere una risoluzione maggiore rispetto alla controparte di ordine uno.

L'approccio alla formulazione di uno schema ad alta risoluzione può seguire varie strade; un modo per garantire una soluzione più precisa è quello di garantire che lo schema numerico "obbedisca" alla fisica del problema, come nel caso già citato degli schemi upwind.

Una famiglia di schemi ad alta risoluzione molto utilizzata sfrutta la filosofia introdotta dallo **schema di Godunov**. Questa consiste nell'attribuire a ciascun elemento discreto del dominio di calcolo un'approssimazione locale a valore costante di tutte le grandezze fluidodinamiche di interesse, valutarne l'evoluzione temporale e ricomporre la soluzione globale per l'intero flusso.

Se si considera l'elemento monodimensionale discreto i , centrato sul punto x_i ,

l'assunzione di Godunov fa sì che esista in generale una discontinuità tra il valore della grandezza u_i costante e la grandezza u_{i+1} dell'elemento $i + 1$ centrato in x_{i+1} , adiacente ad esso.

La presenza di una discontinuità tra grandezze fluidodinamiche fa sì che il problema sia analogo al problema del *tubo d'urto* o *problema di Riemann*. Questo consiste in un problema ai valori iniziali che rappresenta tipicamente l'evoluzione di una singola discontinuità nata per coalescenza di onde di compressione e di un ventaglio di onde di espansione, e ha soluzione analitica esatta.

La soluzione del problema di Riemann è tuttavia quantomeno articolata, poiché sfrutta il metodo delle linee caratteristiche. Esso prevede cioè che per ciascuna discontinuità sia valutata la geometria dei fronti d'onda che le superfici caratteristiche rappresentano, ricavando dunque gli autovalori della matrice Jacobiana del sistema di equazioni iperboliche che descrivono il moto convettivo, e che siano risolte le equazioni di compatibilità, che specificano le grandezze che assumono valore costante lungo queste superfici caratteristiche, per poi ricostruire le grandezze fondamentali.

L'individuazione delle superfici caratteristiche permette una scomposizione del dominio in più zone, entro ciascuna delle quali vigono condizioni particolari. La determinazione iterativa di tali condizioni dopo un certo passo temporale Δt , scelto in maniera congruente con la condizione CFL, permette allo schema di Godunov, risolvendo una serie di problemi di Riemann in successione, di fornire soluzioni numeriche di buona qualità.

Tuttavia non è difficile intuire che una procedura di questo tipo, specie nel caso tridimensionale, possa risultare alquanto complicata ed onerosa a livello computazionale, poiché nel caso delle equazioni di Eulero risolve sistemi non lineari. Non va nemmeno trascurato il fatto che, tanto più complessa ed articolata risulta l'algebra risolta dal calcolatore, tanto è più probabile che gli errori di round-off abbiano un peso significativo. Per questa ragione sono stati sviluppati una serie di solutori approssimati al problema di Riemann, per esempio quello di *Roe*, dotato di alcune proprietà presentate in [20].

Questi risolvono un problema semplificato tramite linearizzazione, ma preservano le caratteristiche fondamentali di un solutore di Riemann: valutazione di autovalori e autovettori della matrice Jacobiana, soluzione delle equazioni di compatibilità, ricostruzione delle grandezze utili.

Gli schemi centrali di ordine superiore seguono una filosofia radicalmente diversa. Anziché valutare un problema di Riemann per ciascuna interfaccia tra due elementi che presenti una discontinuità, gli schemi di questo tipo prevedono un'integrazione su tutto il volume interessato dal ventaglio di onde di Riemann, senza dover valutare informazioni specifiche sulle onde in questione.

Di particolare interesse sono gli schemi detti *central-upwind*, che pur mantenendo una formulazione di tipo centrale, garantiscono un'alta risoluzione rispettando la natura fisica del problema, attingendo alle informazioni necessarie all'integrazione per ciascun punto dal suo dominio di influenza. Uno schema di questo tipo viene presentato da **Nessyahu e Tadmor** in [21]. Gli autori presentano un'estensione ad ordine due di accuratezza nello spazio dello schema di Lax-Friedrichs, presentato in equazione (3.6), in modo da conservarne la qualità che maggiormente lo distingue dallo schema di Godunov: la semplicità. Tuttavia, come illustrato in sezione 3.1, lo schema di Lax-Friedrichs perde accuratezza a causa della presenza di un'elevata viscosità numerica. Per garantire un ordine di accuratezza due, i valori assunti costanti per ciascun elemento da Godunov, vengono approssimati a funzioni lineari con schemi interpolanti del tipo MUSCL, introdotti da Van Leer in [22]. L'equazione (3.1) può essere espressa più in generale con l'equazione (3.7), che esprime una legge di conservazione monodimensionale:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0 \quad (3.7)$$

Lo schema di Lax-Friedrichs che dà una soluzione approssimata all'equazione (3.7), rielaborato per una griglia di calcolo di tipo *staggered*, ovvero una griglia nella quale, per ciascun elemento discreto, non tutte le variabili di interesse sono attribuite allo stesso nodo (e non sono quindi *colocate*), prende la forma:

$$u_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2}[u_j^n + u_{j+1}^n] - \lambda[f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)] \quad (3.8)$$

con $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

La costruzione dello schema di Nessyahu-Tadmor a partire da questa equazione segue tre passaggi.

Per prima cosa, a partire dai valori costanti per ogni cella utilizzati nello schema di Godunov, si ricostruisce un'approssimazione lineare, della forma:

$$L_j(x, t) = u_j(t) + (x - x_j) \frac{1}{\Delta x} u'_j; \quad x_{j-1/2} \leq x \leq x_{j+1/2} \quad (3.9)$$

dove il termine $\frac{1}{\Delta x} u'_j$ è detto vettore di derivata numerica, e garantisce il secondo ordine di accuratezza spaziale se soddisfa la condizione:

$$\frac{1}{\Delta x} u'_j = \frac{\partial}{\partial x} u(x = x_j, t) + O(\Delta x) \quad (3.10)$$

Poi, si valuta l'evoluzione temporale dell'approssimazione lineare, il che equivale a risolvere una successione di problemi di Riemann generalizzati indipendenti

l'uno dagli altri.

Infine, il risultato ottenuto viene nuovamente approssimato a valore costante ottenuto come media di cella:

$$u_{j+1/2}(t + \Delta t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(y, t + \Delta t) dy, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1} \quad (3.11)$$

il che applicato all'equazione (3.7) nell'ipotesi introdotta dalla (3.9) porta a:

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}(t + \Delta t) = & \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} L_j(x, t) dx + \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} L_{j+1}(x, t) dx \right] \\ & - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{\tau=t}^{t+\Delta t} f(u(x_{j+1}, \tau)) d\tau - \int_{\tau=t}^{t+\Delta t} f(u(x_j, \tau)) d\tau \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Il primi due integrali a destra dell'uguale nella (3.12), vista l'interpolazione lineare (3.9) possono essere valutati in maniera esatta. Inoltre gli autori notano che se viene rispettata la condizione CFL

$$\lambda \cdot \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} \rho(A(u(x, t))) < \frac{1}{2} \quad (3.13)$$

i termini di flusso negli ultimi due integrandi sono funzioni regolari di τ e possono essere integrati con la regola del punto medio, commettendo un'errore dell'ordine $O(\Delta t^3)$. Nell'espressione (3.13) il termine $\max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} \rho(A(u(x, t)))$ indica il massimo degli autovalori del sistema di leggi di conservazione nell'intervallo $x_j \leq x \leq x_{j+1}$, e quindi la massima velocità locale di propagazione delle informazioni.

Si giunge pertanto alla formulazione (3.14):

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}(t + \Delta t) = & \frac{1}{2} [u_j(t) + u_{j+1}(t)] + \frac{1}{8} [u'_j + u'_{j+1}] \\ & - \lambda [f(u(x_{j+1}, t + \frac{\Delta t}{2})) - f(u(x_j, t + \frac{\Delta t}{2}))] \end{aligned} \quad (3.14)$$

dove i termini al livello temporale $(t + \frac{\Delta t}{2})$, necessari per l'integrazione con la regola del punto medio, possono essere valutati in un passaggio predittivo che sfrutta un'espansione in serie di Taylor e l'equazione (3.7)

$$u_j(t + \frac{\Delta t}{2}) = u_j(t) - \frac{1}{2} \lambda f'_j \quad (3.15)$$

Nell'equazione (3.15) il termine $\lambda f'_j$ contiene l'approssimazione della derivata numerica del termine di flusso:

$$\frac{1}{\Delta x} f'_j = \frac{\partial}{\partial x} f(u(x = x_j, t)) + O(\Delta x)$$

che analogamente alla derivata numerica della grandezza u , va scelto in maniera da preservare un ordine di accuratezza elevato e da prevenire oscillazioni di tipo numerico a ridosso delle discontinuità.

La scelta di queste derivate viene fatta dagli autori in modo da garantire le proprietà TVD introdotte in sezione 2.2. Il *limiter* utilizzato, comunemente chiamato *MinMod* o MM, prende la forma

$$MM(x, y) = \frac{1}{2}[sgn(x) + sgn(y)] \cdot \min(|x|, |y|) \quad (3.16)$$

e può essere esteso a funzione di più di due termini. Gli autori consigliano pertanto che la scelta delle derivate numeriche avvenga nel seguente modo:

$$u'_j = MM\{\alpha\Delta u_{j+1/2}, \frac{1}{2}(u_{j+1} - u_{j-1}), \alpha\Delta u_{j-1/2}\} \quad (3.17)$$

con $1 \leq \alpha \leq 4$ per rispettare la condizione CFL. I termini $\Delta u_{j\pm 1/2}$ indicano la discontinuità della grandezza u all'interfaccia tra due celle adiacenti.

La derivata numerica dei flussi può invece essere valutata sfruttando la matrice Jacobiana per il sistema di leggi di conservazione, o alternativamente con

$$f'_j = MM\{\alpha\Delta f_{j+1/2}, \frac{1}{2}(f_{j+1} - f_{j-1}), \alpha\Delta f_{j-1/2}\} \quad (3.18)$$

evitando dunque il calcolo della matrice Jacobiana (*Jacobian Free Form* o JFF). Inoltre, forniscono anche l'espressione per il loro schema applicato a una griglia *non-staggered*, in cui le variabili sono collocate ai centri di cella:

$$u_j(t + \Delta t) = \frac{1}{2}[u_{j+1}(t) + u_{j-1}(t)] + \frac{1}{4}[u'_{j-1} - u'_{j+1}] - \frac{\lambda}{2}[f(u_{j+1}(t + \frac{\Delta t}{2})) - f(u_{j-1}(t + \frac{\Delta t}{2}))] \quad (3.19)$$

con step predittivo

$$u_i(t + \Delta t) = u_j(t) - \frac{1}{2}\lambda f'_j \quad (3.20)$$

Gli autori notano che la scelta delle derivate numeriche $\frac{1}{\Delta x}u'_j = \frac{1}{\Delta x}f'_j = 0$ riconduce esattamente allo schema di Lax-Friedrichs. A differenza di quest'ultimo, tuttavia, lo schema di Nessyahu-Tadmor, oltre ad ottenere un'ordine di accuratezza due pur conservando la semplicità di uno schema che non necessita di un solutore approssimato per il problema di Riemann, riduce l'influenza della viscosità numerica fino all'ordine $O(\Delta x^2/\Delta t)$, rendendolo quindi più adeguato alla soluzione di flussi che presentano discontinuità.

Kurganov e Tadmor in [23], presentano uno schema centrale che rielabora

lo schema di Nessyahu-Tadmor eliminando la dipendenza della viscosità numerica dal passo temporale, e quindi risolvendo il problema di una viscosità numerica crescente al diminuire del passo temporale.

Per fare questo, lo schema di **Kurganov-Tadmor** utilizza, oltre all'approssimazione lineare introdotta in [21], informazioni aggiuntive sulle velocità locali di propagazione delle perturbazioni.

Nel dettaglio, gli autori partono da un'approssimazione lineare dei valori di cella al livello temporale t^n .

Successivamente stimano la velocità di propagazione locale all'interfaccia tra le celle $x_{j+1/2}$, denotando il valore massimo con

$$a_{j+1/2}^n = \max \rho \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u) \right) \quad (3.21)$$

L'espressione in (3.21) va valutata tra $u_{j+1/2}^+ = u_{j+1}^n - \frac{\Delta x}{2}(u_x)_{j+1}^n$ e $u_{j+1/2}^- = u_j^n + \frac{\Delta x}{2}(u_x)_j^n$, ovvero i valori di u all'interfaccia $x_{j+1/2}$ presi per la cella sinistra e destra. Si noti che queste velocità di propagazione sono strettamente legate alla condizione CFL presentata nell'equazione (3.13).

Note le massime velocità locali di propagazione si possono ridefinire i volumi di controllo, e integrare per ciascun passo temporale negli intervalli $[x_{j+1/2,l}^n, x_{j+1/2,r}^n] \times [t^n, t^{n+1}]$. Visto che la velocità di propagazione è finita, i punti

$$x_{j+1/2,l}^n = x_{j+1/2} - a_{j+1/2}^n \Delta t$$

$$x_{j+1/2,r}^n = x_{j+1/2} + a_{j+1/2}^n \Delta t$$

separano le regioni in cui la soluzione è perturbata, di ampiezza $2a_{j+1/2}^n \Delta t$, da quelle in cui le informazioni non sono ancora propagate, che possono essere trattate diversamente.

Se si integra nel volume interessato dal ventaglio di Riemann, e si esegue una media sulla cella di estensione $\Delta x_{j+1/2} = x_{j+1/2,r}^n - x_{j+1/2,l}^n$ si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_{j+1/2}} \int_{x_{j+1/2,l}^n}^{x_{j+1/2,r}^n} u(\zeta, t^{n+1}) d\zeta = \\ & \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} + \frac{\Delta x - a_{j+1/2}^n \Delta t}{4} ((u_x)_j^n - (u_x)_{j+1}^n) \\ & - \frac{1}{2a_{j+1/2}^n \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(u(x_{j+1/2,r}^n, \tau)) - f(u(x_{j+1/2,l}^n, \tau))] d\tau \end{aligned} \quad (3.22)$$

Analogamente per la regione non interessata dal ventaglio di Riemann, di

estensione $\Delta x_j = x_{j+1/2,l}^n - x_{j-1/2,r}^n = \Delta x - \Delta t(a_{j-1/2}^n + a_{j+1/2}^n)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2,r}^n}^{x_{j+1/2,l}^n} u(\zeta, t^{n+1}) d\zeta = \\ & u_j^n + \frac{\Delta t}{4} (a_{j-1/2}^n - a_{j+1/2}^n) (u_x)_j^n \\ & - \frac{1}{\Delta x_j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(u(x_{j+1/2,l}^n, \tau)) - f(u(x_{j-1/2,r}^n, \tau))] d\tau \end{aligned} \quad (3.23)$$

Integrando i termini di flusso a destra dell'uguale nelle (3.22) e (3.23) con la regola del punto medio (ottenuto con uno step predittivo che sfrutta un'espansione in serie di Taylor, come in (3.15) per lo schema NT) si ottengono le medie di cella per t^{n+1} , denotate con w_j^{n+1} per indicare quella relativa alla regione non interessata dal ventaglio di Riemann originatosi in $x_{j+1/2}$, e $w_{j+1/2}^{n+1}$ per l'altra.

$$\begin{aligned} w_j^{n+1} = & u_j^n + \frac{\Delta t}{2} (a_{j-1/2}^n - a_{j+1/2}^n) (u_x)_j^n \\ & - \frac{\lambda}{1 - \lambda(a_{j-1/2}^n + a_{j+1/2}^n)} [f(u_{j+1/2,l}^{n+1/2}) - f(u_{j-1/2,r}^{n+1/2})] \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} w_{j+1/2}^{n+1} = & \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} + \frac{\Delta x - a_{j+1/2}^n \Delta t}{4} ((u_x)_j^n - (u_x)_{j+1}^n) \\ & - \frac{1}{2a_{j+1/2}^n} [f(u_{j+1/2,r}^{n+1/2}) - f(u_{j+1/2,l}^{n+1/2})] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Infine, si riproiettano le medie di cella non uniformi ottenuti sulla griglia originaria, passando per un'approssimazione lineare delle grandezze $w_{j+1/2}^{n+1}$ nella regione interessata dal ventaglio di Riemann ed un'operazione di media. La doppia operazione è necessaria per mantenere ordine di accuratezza due nello spazio, ma non è necessaria per le soluzioni w_j^{n+1} .

Lo schema di Kurganov-Tadmor assume perciò la seguente forma:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & \lambda a_{j-1/2}^n w_{j-1/2}^{n+1} + [1 - \lambda(a_{j-1/2}^n + a_{j+1/2}^n)] w_j^{n+1} \\ & + \lambda a_{j+1/2}^n w_{j+1/2}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2} [(\lambda a_{j-1/2}^n)^2 (u_x)_{j-1/2}^{n+1} - (\lambda a_{j+1/2}^n)^2 (u_x)_{j+1/2}^{n+1}] \end{aligned} \quad (3.26)$$

dove le derivate spaziali all'interfaccia tra due celle sono approssimate in modo da garantire le proprietà TVD allo schema:

$$(u_x)_{j+1/2}^{n+1} = \frac{2}{\Delta x} \cdot MM \left(\frac{w_{j+1}^{n+1} - w_{j+1/2}^{n+1}}{1 + \lambda(a_{j+1/2}^n - a_{j+3/2}^n)}, \frac{w_{j+1/2}^{n+1} - w_j^{n+1}}{1 + \lambda(a_{j+1/2}^n - a_{j-1/2}^n)} \right) \quad (3.27)$$

Lo schema così ottenuto è stato implementato in un solutore per il software

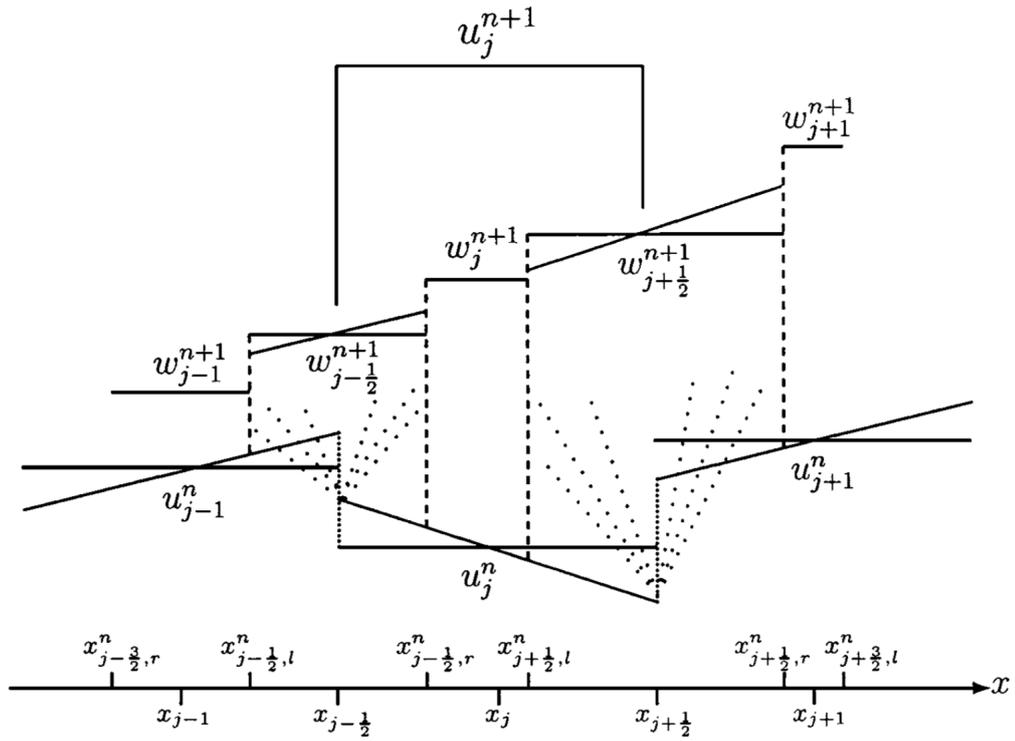


Figura 3.6: Schematizzazione della scomposizione del dominio per lo schema KT

OpenFOAM chiamato *rhoCentralFoam* da *Greenshields et al.*, presentato in [24]. Il prossimo capitolo presenterà i software utilizzati nell'analisi numerica del fenomeno descritto nel capitolo 1, le *utilities* e il solutore basato sullo schema di Kurganov-Tadmor.

Capitolo 4

Software utilizzati

4.1 OpenFOAM

OpenFOAM (Open source Field Operation And Manipulation) è un software open source distribuito gratuitamente da *OpenCFD Ltd* a partire dal 2004. Esso è costituito da librerie in linguaggio C++ volte allo sviluppo di eseguibili, dette *applicazioni*, per la soluzione numerica di problemi della meccanica del continuo, in particolare problemi fluidodinamici, secondo l'approccio delle tecniche ai volumi finiti.

L'idea da cui discende è stata presentata *Weller, Tabor et al.* in [25], e sfrutta le tecniche di programmazione *object-oriented* (OOP) proprie del linguaggio C++. I principali vantaggi che queste offrono sono legate ad alcuni concetti introdotti da *Bjarne Stroustrup*, ideatore di questo linguaggio.

Il primo di questi è l'**astrazione**, ovvero la possibilità di rappresentare costrutti concettuali nel programma che possono essere utilizzati senza che l'utente debba necessariamente manipolare il codice nella sua completezza. In FOAM questo si traduce nella creazione di *classi*, ovvero tipi di dati astratti che condividono certi attributi e funzioni, che permettono la rappresentazione di operatori e oggetti matematici, nascondendone l'implementazione numerica tramite *incapsulamento*, ovvero la possibilità che offre C++ di collegare strettamente, all'interno di una classe, dati e funzioni che li manipolano, definendo così gli *oggetti*.

L'**ereditarietà** è invece la capacità di estendere attributi e funzioni da un oggetto ad un altro. In questo modo è possibile attribuire a classi preesistenti nuovi attributi e comportamenti senza modificare le classi originarie.

Il **polimorfismo** è l'abilità di far relazionare tra loro classi anche quando esse, alla base, sono state codificate in maniera differente. In FOAM questo è possibile anche grazie alla capacità del C++ di implementare l'**overloading delle**

funzioni: la stessa funzione può ricevere come argomento oggetti di natura differente. In questo modo è possibile mantenere, al livello più alto del codice, una struttura che ricordi fedelmente la notazione matematica, facilmente leggibile.

Poiché i fenomeni propri della fluidodinamica possono essere descritti utilizzando tensori di ordine due o inferiore (scalari, vettori e matrici), FOAM comprende alcune classi base volte a rappresentare questi concetti matematici, e due tipi di classi per rappresentare le operazioni differenziali da operare su di essi. Tutti i possibili operatori differenziali sono implementati, $\partial/\partial t$, $\nabla \cdot$, $\nabla \times$ con l'aggiunta dell'operatore Laplaciano implementato indipendentemente piuttosto che come $\nabla(\nabla \cdot (.))$, in modo che all'utente non resti che la scelta al livello più alto degli schemi per calcolare le derivate, che possono essere valutati e testati indipendentemente dal codice per i quali debbano essere utilizzati.

Il software OpenFOAM viene distribuito con un'ampia collezione di applicazioni già realizzate che rientrano in due categorie: i *solutori*, che risolvono problemi specifici della fluidodinamica, e le *utilities*, utilizzati per la manipolazione dei dati.¹ Inoltre è dotato di funzionalità per il pre- e post-processing dei dati, ed è interfacciabile con gli altri software maggiormente utilizzati tra quelli in commercio. La struttura schematizzata del funzionamento di OpenFOAM è presentata in Figura (4.1).

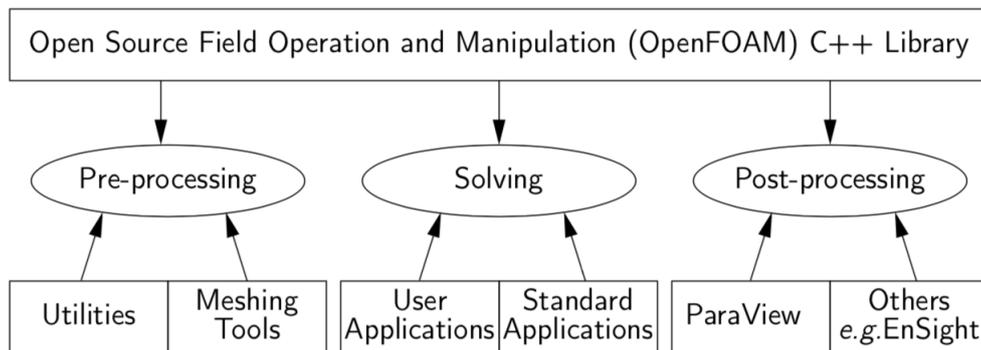


Figura 4.1: Riassunto della struttura di OpenFOAM

Ciascun caso di studio in OpenFOAM è organizzato in una directory che deve contenere i file essenziali per poter lanciare l'applicazione d'interesse. In particolare questi consistono in:

- la directory *system*, necessaria per definire i parametri associati alla procedura con cui avviene la soluzione; questa a sua volta deve contenere necessariamente tre files:

¹Quanto segue è illustrato in "OpenFOAM User Guide" reperibile presso <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide/>

- il file *controlDict*, che fissa i parametri di controllo per ciascuna simulazione, quali passo di discretizzazione temporale, durata della simulazione, parametri per l'output di dati di interesse.
 - il file *fvSchemes*, che definisce quali schemi utilizzare durante la soluzione per l'approssimazione dei vari operatori differenziali.
 - il file *fvSolution*, che fissa i parametri necessari alla soluzione delle equazioni e le tolleranze accettabili per ciascuna grandezza.
- la directory *constant* che contiene i file relativi alle proprietà e i modelli fisici che si intende utilizzare e la subdirectory *polyMesh*, che contiene la descrizione della mesh di calcolo, che verrà illustrata in maggior dettaglio in sezione 4.2;
 - le *'time'* directories che contengono i dati relativi a determinati campi relativi ai vari livelli temporali.

La struttura tipo di un caso di studio è riportata in Figura 4.2.

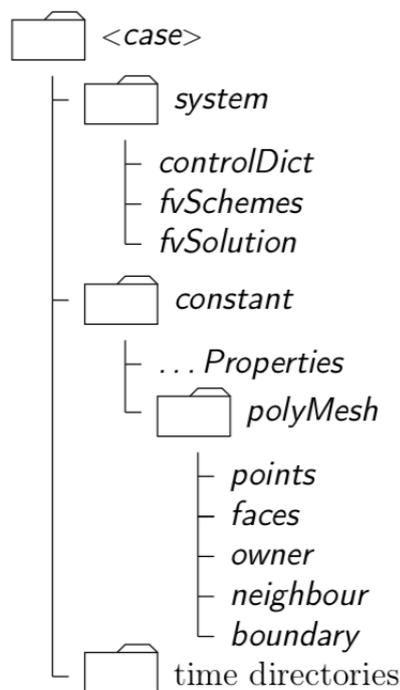


Figura 4.2: Struttura tipica di un caso di studio

4.2 Dizionari, utilities e geometria del dominio

Per specificare dati di interesse, OpenFOAM utilizza entità chiamate *dictionaries*, che permettono l'organizzazione in maniera logica, ordinata e gerarchica

dei dati necessari alle utilities per la manipolazione dei dati. All'interno di ciascun dizionario, ciascun dato è preceduto da una *keyword*, che ne permette l'identificazione.

Gestendo le entrate dei vari dizionari, l'utente può controllare l'operato delle utilities corrispondenti; per esempio, modificando le entrate del file *decomposeParDict*, è stato possibile, durante lo svolgimento di questa tesi, regolare le impostazioni dell'utility *decomposePar*, che opera una scomposizione del dominio di calcolo e dei campi scalari e vettoriali finalizzata al calcolo distribuito. Un altro dizionario che è stato frequentemente manipolato nello svolgimento di questa tesi è il *blockMeshDict*, che fa riferimento all'utility *blockMesh*.

blockMesh è un'applicazione che permette la costruzione di una mesh di calcolo composta da blocchi esaedrici. Attingendo ai dati inseriti nel *blockMeshDict*, compila una serie di file composti essenzialmente da liste di enti geometrici che, nel complesso, descrivono completamente la topologia del dominio di calcolo. Questi file sono collocati nella directory *polyMesh*, all'interno della directory costituente il caso di studio.

La geometria del dominio è descritta in OpenFOAM per mezzo di oggetti che devono soddisfare determinati requisiti:

1. **punti**: un punto è una posizione nello spazio tridimensionale, definito da un vettore posizione le cui componenti sono espresse in metri. I punti sono salvati in una lista ordinata nel file *points*, e sono identificati in base alla loro posizione nella lista (a ciascun punto viene dunque assegnato un *label*, pari alla sua posizione nella lista). Tutti i punti devono appartenere ad almeno una faccia e non possono esistere due punti distinti nella stessa posizione.
2. **facce**: una faccia è una lista ordinata di punti, identificati tramite il proprio label, e ordinati in modo da passare, sempre nello stesso verso orario o antiorario, da un punto a quello contiguo. Il vettore normale alla faccia è orientato secondo la regola della mano destra seguendo l'ordine dei punti. Anche le facce sono salvate in una lista ordinata nel file *faces*, e ad ognuna viene assegnato un label corrispondente alla sua posizione nella lista. Esistono due tipi di facce: **facce interne** che collegano esclusivamente due celle adiacenti, e **facce al contorno** (*Boundary faces*) che appartengono ad una sola cella poiché coincidono con il contorno del dominio. Le facce non devono essere necessariamente piane, ma devono essere convesse.
3. **celle**: una cella è una lista di facce. Le celle devono essere *contigue*, ovvero devono ricoprire tutto il dominio, senza alcuna sovrapposizione;

convesse, ovvero ciascuna cella deve contenere il proprio centro; *chiuse* dal punto di vista geometrico (la somma di tutti i vettori-area relativi alle facce di una cella devono ammontare allo zero di macchina) e topologico (ogni spigolo di una cella deve essere condiviso esclusivamente da due facce). La geometria delle celle può essere qualsiasi purché siano rispettate queste condizioni;

4. **contorno**: la geometria del contorno del dominio è definita in una lista nel file *boundary*. La lista è costituita da un elenco di *patches*, composte da facce necessariamente non interne elencate tramite il loro label, descritte con un nome identificativo scelto dall'utente, il numero di facce che le compone e il label della prima faccia della patch. Il contorno deve essere chiuso dal punto di vista geometrico.

Nella directory *polyMesh* compaiono infine due file, chiamati *owner* e *neighbour*, che permettono di definire la posizione relativa delle varie celle, e quali facce le mettano in comunicazione, specificando dunque la *connettività*.

4.2.1 Utility *blockMesh*

L'utility usata per la costruzione della mesh di calcolo in questa tesi, *blockMesh*, come anticipato, permette la costruzione di griglie composte da più blocchi esaedrici, per i quali si specifica il numero di celle per ciascuna delle tre direzioni del sistema di coordinate locali.

Ogni blocco è definito tramite una lista di otto vertici, che rappresentano i vertici dell'esaedro che lo costituisce.

L'utility permette la definizione della geometria degli spigoli di ciascun blocco, che possono essere linee rette, archi di cerchio o spline.

Il sistema di coordinate locali deve essere destrorso ed è definito tramite l'ordine con il quali sono elencati i punti che costituiscono i vertici di ciascun blocco: in particolare l'asse x_1 è orientato nella direzione che si segue spostandosi dal vertice in posizione 0 a quello in posizione 1; l'asse x_2 spostandosi dal vertice 2 al vertice 3; x_3 è scelto per completare la terna destrorsa e i vertici 0,1,2,3 individuano il piano $x_3 = 0$.

Tutte queste specifiche sono definite mediante la scrittura del file *blockMeshDict*, un dizionario contenente obbligatoriamente entrate corrispondenti alle *keywords* necessarie per definire fattori di scala, vertici, geometria degli spigoli, numero dei blocchi, contorno ed eventuali patches da comporre tra loro.

Per prima cosa si sceglie un'eventuale fattore di scala, per mezzo della *keyword*

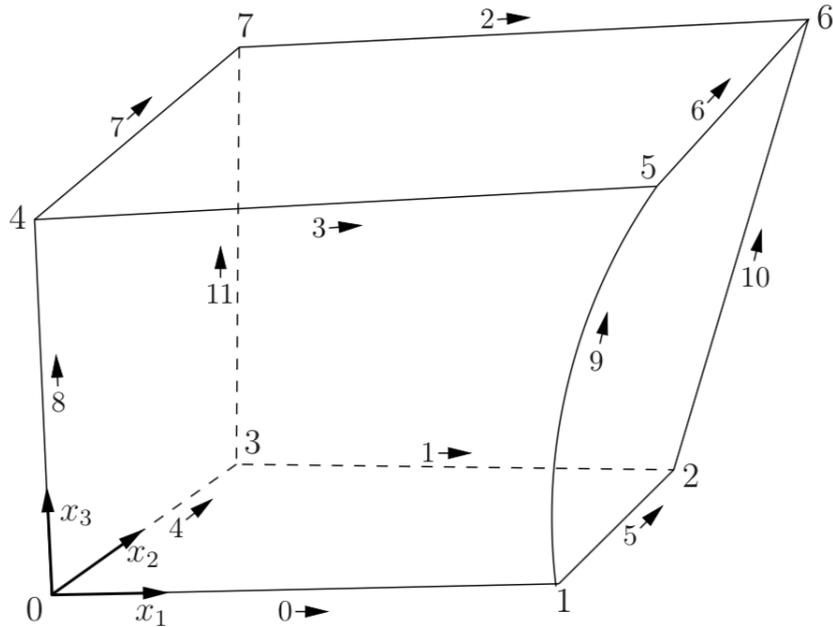


Figura 4.3: Esempio di blocco esaedrico realizzabile con *blockMesh*

”convertToMeters”.

Successivamente si compila una lista di vertici, tramite la *keyword* ”vertices”. Ciascun vertice viene definito con un vettore posizione, e la sua posizione nella lista gli attribuisce un label con cui viene identificato successivamente, a partire dal label 0.

Si descrivono poi i blocchi, in una lista preceduta dalla *keyword* ”blocks”. La descrizione di ciascun blocco prevede un’entrata per la geometria, che per *blockMesh* è sempre esaedrica, seguita dalla lista degli otto vertici che lo delimitano. Si specificano poi il numero di celle lungo ciascuna delle tre direzioni del sistema di coordinate locali. Da ultimo si definisce il *grading*: lungo ciascuna delle tre direzioni è possibile specificare il rapporto di espansione tra l’ultima e la prima cella del blocco (*simpleGrading*) oppure il rapporto tra i singoli spigoli (*edgeGrading*). A partire dalla versione 2.4 di *OpenFoam* è possibile utilizzare lo strumento del *multiGrading*, che permette di suddividere, lungo le tre direzioni di riferimento, il blocco in zone, individuate tramite estensione percentuale, attribuendo a ciascuna zona una percentuale delle celle totali e definendo per ciascuna un rapporto di espansione.

E’ possibile inoltre definire la geometria degli spigoli di ciascun blocco, in una lista preceduta da *keyword* ”edges”. Per ciascuna delle entrate si specifica la geometria desiderata, i due vertici che interessa ed eventuali punti di interpolazione.

La lista seguente riguarda il contorno del dominio, preceduta dalla *keyword*

”boundary”. La lista è composta da entrate rappresentanti le varie *patches*, identificate tramite un nome scelto dall’utente, il tipo di condizione generica, alla quale vengono poi attribuite certe caratteristiche, o geometrica e una lista di facce che le compongono. Le facce sono specificate tramite una lista di vertici, ordinata in modo che il vettore normale, stabilito con la regola della mano destra, punti verso l’esterno del dominio.

Infine è possibile compilare una lista di *patches* da comporre tra loro, tramite *keyword* ”mergePatchPairs”. Questa lista è composta da coppie di *patches*, dette ”master” e ”slave”, che vengono combinate tra loro nel caso ve ne sia la necessità.

Usufruire di questa funzionalità non è tutta via obbligatorio, poiché nel caso di più blocchi definiti tramite lo stesso set di vertici, il software è in grado di riconoscere automaticamente le *patches* corrispondenti alle facce in comune tra due blocchi e di connetterle (*faceMatching*).

La scelta di questo tipo di utility per la generazione della mesh è vantaggiosa da diversi punti di vista.

In primo luogo il suo utilizzo è relativamente semplice e diretto, tramite la scrittura del *blockMeshDict*, organizzato in maniera gerarchica e semplice da consultare.

La geometria del problema studiato, poi, è facilmente replicabile con una griglia di calcolo divisa in blocchi esaedrici, senza necessità di strumenti più complessi.

La geometria delle singole celle, anch’esse esaedriche, ha permesso la generazione di una griglia simmetrica rispetto alla bisettrice del corner, requisito essenziale nello studio delle strutture vorticosi illustrate nel capitolo 1, in modo da evitare che un’eventuale asimmetria nella mesh potesse dare forzatamente origine a soluzioni asimmetriche.

Da ultimo, nonostante la semplicità, l’utility permette una certa flessibilità nella definizione dei rapporti di espansione delle celle, permettendo di ottimizzare la distribuzione delle celle all’interno di ciascun blocco esaedrico.

4.3 Il solutore *rhoCentralFoam*

Lo schema numerico di Kurganov e Tadmor, presentato nel capitolo 2, è stato implementato in [24] per un solutore specifico per flussi ad alta velocità, nel contesto della tecnica dei volumi finiti, per griglie di calcolo a celle poliedriche e variabili collocate.

La scelta di questo contesto è ampiamente giustificata dalla popolarità degli

schemi ai volumi finiti nelle applicazioni industriali, poiché permettono la soluzione di flussi complessi in maniera efficiente, e della scelta di collocare le variabili, che permette una maggiore flessibilità nella definizione della geometria del dominio di calcolo.

La scelta dello schema numerico, invece, come sottolineato in sezione 3.2, è dovuta alla capacità dello schema di Kurganov e Tadmor di garantire una buona risoluzione delle discontinuità presenti nei flussi supersonici pur mantenendo una certa semplicità, poiché conserva le caratteristiche di uno schema upwind senza necessità della soluzione di un problema di Riemann.

Per la formulazione ai volumi finiti, le leggi di conservazione vengono scritte per il caso generale di flusso viscoso, in forma differenziale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\rho) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{U}) + \nabla \cdot [\mathbf{U}(\rho\mathbf{U})] + \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot [\mathbf{U}(\rho E)] + \nabla \cdot (\mathbf{U}p) + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{U}) + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (4.3)$$

dove ρ è la densità, \mathbf{U} il vettore velocità, p la pressione, $E = e + |\mathbf{U}|^2/2$ l'energia totale per unità di massa, \mathbf{j} il flusso di calore, \mathbf{T} il tensore degli sforzi viscosi. Nel caso di $\mathbf{T} = 0$ e $\mathbf{j} = 0$ le equazioni (4.1)-(4.3) si riducono alle equazioni di Eulero presentate nel capitolo 1. Il tensore \mathbf{T} è descritto dalla legge di Newton:

$$\mathbf{T} = -2\mu dev(\mathbf{D}) \quad (4.4)$$

con μ viscosità dinamica, $\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{U} + (\nabla\mathbf{U})^T]$ tensore velocità di deformazione. Il termine di flusso di calore è invece descritto dall'equazione di Fourier:

$$\mathbf{j} = -k\nabla T \quad (4.5)$$

con T temperatura e k conduttività.

A chiudere il sistema di equazioni la legge dei gas perfetti $p = \rho RT$, dove R è la costante del gas, e la definizione dell'energia interna per unità di massa $e = c_v T = (\gamma - 1)RT$, con γ rapporto tra i calori specifici a pressione e volume costante.

Il solutore è compatibile con griglie caratterizzate da celle poliedriche con un numero di facce e vertici arbitrario.

La connettività tra le celle è definita in modo da essere svincolata dal sistema di coordinate globale, di conseguenza l'unica affermazione generale sempre verificata è che una faccia può appartenere esclusivamente o a due celle contigue

(faccia interna) o ad una cella sola (faccia al contorno). A ciascuna faccia è pertanto attribuita una cella *owner* ed una *neighbour*, in maniera del tutto analoga a quanto descritto in generale per il funzionamento di OpenFOAM. Inoltre, a ciascuna faccia è associato un vettore-area \mathbf{S}_f , normale ad essa e puntato all'esterno della cella *owner*, di modulo pari all'estensione della faccia in questione. Le variabili di pertinenza alla cella sono collocate nel centro P . Infine sono definiti il vettore \mathbf{d} , che connette il centro P al centro della cella attigua N , e il vettore \mathbf{d}_{fN} che connette il centro della faccia f al centro della cella N . Un esempio generalizzato di quanto descritto è raffigurato in figura 4.4 Le equazioni di Navier-Stokes (4.1)-(4.3) vengono espresse in forma inte-

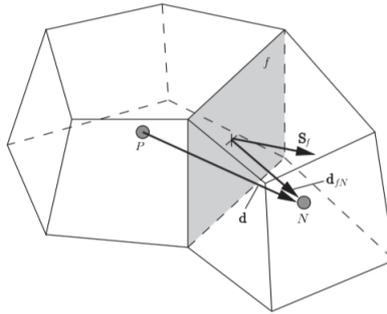


Figura 4.4: Discretizzazione ai volumi finiti

grale su un volume V rappresentante l'estensione di una generica cella. L'applicazione del teorema di Gauss generalizzato permette di tradurre i termini divergenza e gradiente in integrali di superficie applicati al contorno della singola cella, denotato da S .

La soluzione degli integrali richiede la conoscenza dei termini di flusso all'interfaccia tra due celle, ma poiché le variabili sono collocate ai centri di cella P , questi vengono interpolati per mezzo dello schema di Kurganov e Tadmor o di schemi analoghi.

I vari termini che costituiscono gli integrali risultanti sono dunque valutati tramite approssimazione con una somma discreta e finita. Nella descrizione che segue, \mathbf{F} rappresenta un generale campo tensoriale di qualsiasi ordine, ed i pedici P o f indicano la sua interpolazione ai centri di cella o alle facce.

4.3.1 Termini convettivi

I termini convettivi presenti nelle equazioni di Navier-Stokes sono valutati tramite integrazione e linearizzazione, sfruttando il teorema di Gauss.

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{UF}) dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{UF}) \simeq \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f \mathbf{F}_f = \sum_f \phi_f \mathbf{F}_f \quad (4.6)$$

dove \sum_f indica la somma su tutte le facce della cella e $\phi_f = \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f$ il flusso volumetrico, ovvero il volume di fluido che attraversa la faccia ogni secondo. Poiché il solutore è applicato a flussi compressibili, l'interpolazione dei valori \mathbf{F}_f e \mathbf{U}_f deve tener conto non solo del trasporto delle grandezze operato dal flusso, ma anche dei fenomeni di propagazione di informazioni lungo le linee caratteristiche. La procedura di interpolazione è divisa lungo due direzioni, dette f_+ e f_- , che corrispondono a flusso in uscita ed entrata attraverso la faccia della cella su cui si sta svolgendo l'integrazione, e corrispondenti alle direzioni positiva e negativa lungo cui è orientato il vettore-area \mathbf{S}_f . Il termine convettivo viene perciò valutato d'accordo con l'equazione (4.7)

$$\sum_f \phi_f \mathbf{F}_f = \sum_f [\alpha \phi_{f_+} \mathbf{F}_{f_+} + (1 - \alpha) \phi_{f_-} \mathbf{F}_{f_-} + \omega_f (\mathbf{F}_{f_-} - \mathbf{F}_{f_+})] \quad (4.7)$$

I primi due termini dell'equazione (4.7) sono i flussi all'interfaccia valutati nelle direzioni f_+ e f_- . Il terzo termine è richiesto solo nei casi in cui il termine convettivo è coinvolto in una derivata sostanziale, ovvero quando il campo \mathbf{F} compare anche con derivata rispetto al tempo, e costituisce un termine diffusivo aggiuntivo, costruito utilizzando il flusso volumetrico ω_f , che si basa sulla massima velocità di propagazione di eventuali discontinuità presenti all'interfaccia tra due celle.

Nei primi due termini il contributo dei termini valutati lungo f_+ e f_- viene pesato tramite il coefficiente α : il valore può essere definito pari a 0.5 per uno schema *centrale* analogo a quello di Kurganov e Tadmor (KT); altrimenti può essere data maggior rilevanza ai termini sopravento, ottenendo uno schema *central upwind*. In quest'ultimo caso, una possibilità è quella di valutare i flussi volumetrici basandosi sulla velocità di propagazione locale dei disturbi lungo le due direzioni, ottenendo

$$\begin{aligned} \psi_{f_+} &= \max(c_{f_+} |\mathbf{S}_f| + \phi_{f_+}, c_{f_-} |\mathbf{S}_f| + \phi_{f_-}, 0) \\ \psi_{f_-} &= \max(c_{f_+} |\mathbf{S}_f| - \phi_{f_+}, c_{f_-} |\mathbf{S}_f| - \phi_{f_-}, 0) \end{aligned} \quad (4.8)$$

dove $c_{f_\pm} = \sqrt{\gamma RT_{f_\pm}}$ sono le velocità del suono all'interfaccia, nelle due direzioni. Il coefficiente α così ottenuto riproduce lo schema di **Kurganov, Noelle e Petrova**, (KNP) proposto in [26], e vale

$$\alpha_{KNP} = \frac{\psi_{f_+}}{\psi_{f_+} + \psi_{f_-}} \quad (4.9)$$

Il termine relativo alle grandezze che compaiono nelle derivate sostanziali, ω_f , viene valutato tenendo conto delle velocità di propagazione locali dei disturbi:

$$\begin{aligned}\omega_{f,KT} &= \alpha \max(\psi_{f+}, \psi_{f-}) \\ \omega_{f,KNP} &= \alpha(1 - \alpha)(\psi_{f+} + \psi_{f-})\end{aligned}\tag{4.10}$$

Per mantenere un ordine di accuratezza elevato e garantire le proprietà TVD allo schema, la procedura di interpolazione usufruisce di un limitatore (MinMod o vanLeer) funzione del parametro r , così definito:

$$r = 2 \frac{\mathbf{d} \cdot (\nabla \mathbf{F})_P}{(\nabla_{\mathbf{d}} \mathbf{F})_f} - 1\tag{4.11}$$

dove $(\nabla \mathbf{F})_P$ indica il gradiente del campo valutato al centro di cella P , mentre $(\nabla_{\mathbf{d}} \mathbf{F})_f$ indica la componente del gradiente normale alla faccia, scalato con $|\mathbf{d}|$.

4.3.2 Termini gradiente

La discretizzazione dei termini gradiente è data dall'equazione (4.12):

$$\int_V \nabla \mathbf{F} dV = \int_S d\mathbf{S} \mathbf{F} \simeq \sum_f \mathbf{S}_f \mathbf{F}_f\tag{4.12}$$

Per flussi comprimibili, l'interpolazione avviene nuovamente lungo le direzioni f_+ e f_- :

$$\sum_f \mathbf{S}_f \mathbf{F}_f = \sum_f [\alpha \mathbf{S}_f \mathbf{F}_{f_+} + (1 - \alpha) \mathbf{S}_f \mathbf{F}_{f_-}]\tag{4.13}$$

e prevede l'utilizzo di limitatori analoghi a quelli utilizzati per i termini convettivi.

4.3.3 Termini Laplaciani

Nel caso compaiano termini Laplaciani con coefficiente diffusivo Γ la discretizzazione avviene nel seguente modo:

$$\int_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \mathbf{F}) dV = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\Gamma \nabla \mathbf{F} \simeq \sum_f \Gamma_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{F})_f)\tag{4.14}$$

dove Γ_f è solitamente valutato per interpolazione lineare dal centro cella. Poiché, in generale, per una cella poliedrica non è detto che il vettore \mathbf{d} ed il vettore-area \mathbf{S}_d siano paralleli, l'ultimo termine della (4.14) viene valutato

tramite una scomposizione in due termini, uno che tiene conto della componente ortogonale del gradiente tra i centri delle due celle contigue, e uno non ortogonale che utilizza il termine gradiente completo valutato all'interfaccia.

$$\Gamma_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{F})_f = A(\mathbf{F}_N - \mathbf{F}_P + \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{F})_f) \quad (4.15)$$

con $A = |\mathbf{S}_f|^2 / (\mathbf{S}_f \cdot \mathbf{d})$, mentre $\mathbf{a} = \mathbf{S}_f - Ad$.

4.3.4 Algoritmo risolutivo

Al fine di garantire risultati accurati in tempi computazionali relativamente brevi, gli autori prevedono per il caso viscoso un duplice passaggio che prevede la soluzione delle equazioni per il flusso non viscoso ed un successivo step correttivo.

Per il caso inviscido, le equazioni di Eulero vengono risolte in maniera iterativa, ricostruendo le grandezze fondamentali a partire dalla densità ρ . Dapprima vengono interpolate le grandezze all'interfaccia nelle direzioni f_+ e f_- , partendo dalla conoscenza di queste all'istante temporale precedente.

In particolare, sono interpolati direttamente solo i valori di ρ , $\hat{\mathbf{U}} = \rho \mathbf{U}$ e T , piuttosto che $\hat{E} = \rho E$, al fine di garantire il comportamento limitato di T . Gli autori osservano infatti che, ricostruendo il campo della temperatura secondo la definizione:

$$T = \frac{1}{c_v} \left(\frac{\hat{E}}{\rho} - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} \right) \quad (4.16)$$

esiste la possibilità che il valore di T scenda al di sotto dello zero, compromettendo la soluzione. Le grandezze p , U , c e ϕ all'interfaccia non vengono interpolate direttamente ma vengono valutate a partire dalle altre tre.

Oltre a queste sono anche valutati i flussi volumetrici associati alle velocità di propagazione locali delle informazioni, definiti in (4.8), necessari per calcolare i termini ϕ_f .

Dopo aver aggiornato il livello temporale vengono calcolati i termini divergenza discretizzati presenti nelle tre equazioni di Eulero, che vengono risolte. Vengono infine aggiornate le variabili primitive a partire da ρ .

Nel caso il flusso sia viscoso, a questo segue uno step correttivo, che risolve un'equazione diffusiva in maniera implicita a partire dal risultato appena ottenuto sia per la quantità di moto che per l'energia. A questo segue un ultimo aggiornamento delle variabili ricostruite.

La scomposizione del problema in due step permette così da un lato rapidità nella soluzione delle equazioni di Eulero, e dall'altro rinforza la stabilità dello schema grazie all'utilizzo di uno step correttivo implicito.

4.4 ParaView

Per la visualizzazione e l'analisi dei risultati è stato utilizzato il software open-source ParaView.²

ParaView è uno strumento in grado di manipolare grandi dataset, ed è dotato di un'interfaccia grafica progettata per facilitare l'utente nel creare *pipelines* per l'applicazione, in successione arbitraria, dei filtri necessari alla manipolazione e all'analisi dei dati.

Per ciascun modulo aggiunto al *pipeline*, visualizzabile nell'apposito *Pipeline Browser*, è possibile definire le proprietà del modulo e i parametri desiderati nella sua visualizzazione.

Il processo di visualizzazione consiste nel convertire dati non rielaborati in immagini con l'obiettivo di facilitarne l'interpretazione.

Per fare questo, ParaView utilizza il modello VTK (*Visualization Toolkit*), basato su un paradigma detto di *data-flow*.

I dati "scorrono" attraverso il pipeline e vengono rielaborati in ciascun modulo da un algoritmo.

I più comuni fra questi rientrano nella categoria *filters*, filtri, e permettono la manipolazione dei dati visualizzati dal punto di vista geometrico (*clipping, slicing* etc.), con selezione di determinate porzioni del dataset, con il tracciamento di superfici a valore costante di determinate variabili (*contour*), con l'estrapolazione di dati in prossimità di determinati luoghi di punti (*plot over line*) o il calcolo di grandezze derivate.

L'organizzazione del lavoro secondo pipeline permette di poter modificare individualmente i parametri dei singoli moduli, e che questi cambiamenti automaticamente siano rielaborati da tutti i moduli "a valle", che attingono dati dal modulo modificato, rendendo il software molto flessibile ed intuitivo all'utilizzo.

Inoltre, interi blocchi di moduli possono essere applicati ad una diversa sorgente (il dataset iniziale) semplicemente cambiando l'input del primo di tali moduli e selezionando una nuova sorgente da un pipeline parallelo.

Un altro strumento molto utile per l'estrazione di dati è la possibilità di visualizzare i dati relativi ad una certa selezione in forma tabulata. La visualizzazione in parallelo del render e dei dati tabulati dello stesso dataset permette la selezione simultanea dei dati corrispondenti alle righe della tabella.

²Quanto segue è illustrato in "ParaView Guide-5.8.0" reperibile presso <https://www.paraview.org>

Questa feature è stata frequentemente utilizzata durante lo svolgimento di questa tesi per l'esportazione di dati in file di testo, in modo da poterli rielaborare ulteriormente.

Capitolo 5

Metodologia e risultati

5.1 Definizione del dominio di calcolo e condizioni al contorno

In primo luogo è stata definita la geometria del dominio di calcolo.

Al fine di garantire che le condizioni al contorno non influenzassero la soluzione nella regione in cui si sviluppa il corner flow, il dominio di calcolo è stato mantenuto piuttosto ampio. La scelta è ricaduta dunque su un volume tridimensionale di estensione $1.2 \times 1.2 \times 1.2$ metri, che garantisca una distanza appropriata, anche nel punto di massima estensione trasversale del flusso conico, tra il contorno del dominio e la zona d'interesse per lo studio.

La geometria necessaria allo sviluppo del corner flow, ovvero le due rampe piane intersecanti descritte nel capitolo 1, imitanti la geometria di una presa a scatola, è stata ottenuta definendo sul *blockMeshDict* le coordinate degli otto punti definiti l'esaedro che costituisce il dominio, parametrizzate con l'angolo di rampa θ . Specificando i punti interpolanti per tre coppie di vertici, la coppia di rampe è stata posizionata in corrispondenza dell'ascissa $x = 0$, a una distanza di 0.2 m dalla superficie frontale del dominio.

Al fine di svincolare il più possibile i risultati dalle condizioni al contorno sulle superfici superiore e destra delimitanti il dominio, queste sono state definite come superfici di simmetria.

Le superfici sinistra e inferiore, corrispondenti alle rampe, sono state definite in modo da garantire a parete le condizioni tipiche del flusso non viscoso: è stato pertanto imposto un gradiente nullo per le grandezze pressione e temperatura, e condizione di tangenza per quanto riguarda la velocità.

Alla superficie frontale, corrispondente a quella di ingresso del flusso, sono stati fissati i valori di pressione, temperatura e velocità valutati definendo il numero di Mach desiderato nella simulazione ed ottenuti a partire da pressione totale e

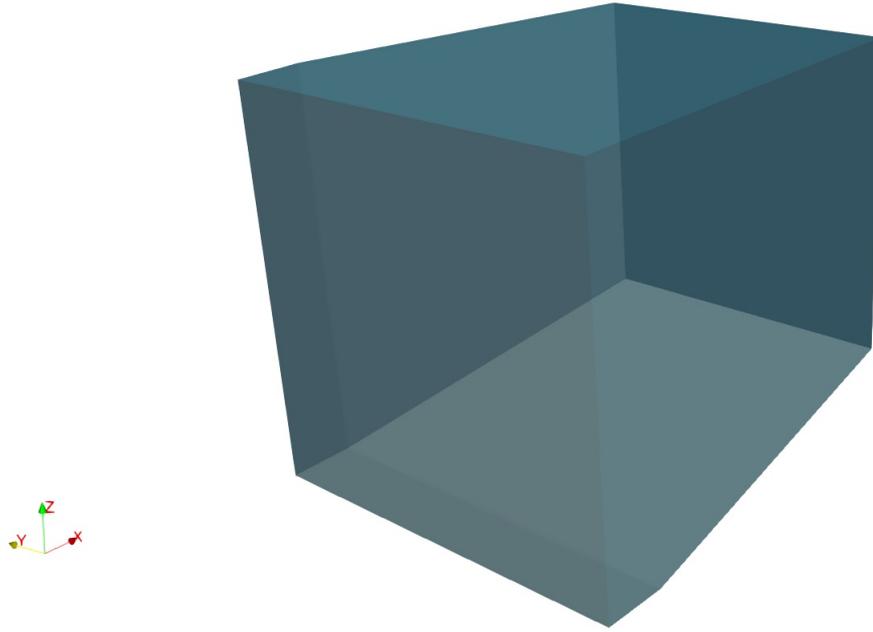


Figura 5.1: Esempio della geometria del dominio

temperatura totale di riferimento tramite le relazioni del flusso comprimibile:

$$\begin{aligned}
 p_{ref} &= 101325 \text{ Pa}; \quad T_{ref} = 288 \text{ K} \\
 p &= \frac{p_{ref}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{3.5}} \\
 T &= \frac{T_{ref}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \\
 a &= \sqrt{\gamma R T} \\
 |U| &= \frac{a}{M}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Alla superficie posteriore, corrispondente alla sezione di uscita, è stato imposto gradiente nullo a tutte le grandezze.

5.2 Griglia computazionale

La griglia computazionale è stata definita tenendo a mente molteplici fattori. Innanzi tutto, essendo questo studio volto a valutare la simmetria delle strutture vorticosi descritte nel capitolo 1, si è dimostrato necessario garantire la simmetria della griglia computazionale rispetto alla bisettrice del corner. Difatti nel caso in cui la griglia di calcolo non fosse tale, eventuali risultati comprendenti asimmetrie nel flusso potrebbero essere dovuti ad asimmetrie

intrinseche della griglia. Di qui la scelta di una griglia simmetrica, strutturata, composta da esaedri e dell'utility blockMesh.

In secondo luogo, dato che lo sviluppo del corner flow non viscoso è conico, è risultato opportuno definire una regione di calcolo che assecondasse tale sviluppo, in maniera che, distribuendo opportunamente i punti del dominio in questa regione, si potesse incrementare la definizione della soluzione senza dover necessariamente incrementare proporzionalmente il numero dei punti complessivi del dominio.

Il risultato di questa ottimizzazione, possibile grazie alla conoscenza della topologia generale del fenomeno, è stato la suddivisione del dominio in più blocchi, con diversa distribuzione di punti.

Un primo blocco (1) ricopre la zona di flusso indisturbato, all'interno della quale la corrente resta uniforme e non riceve alcun segnale di disturbo proveniente dalla regione a ridosso del corner. Di conseguenza questa regione può essere trattata con un numero di punti molto basso, senza che la soluzione ne risenta.

Due blocchi identici (2) ricoprono le zone di sviluppo degli urti piani, all'interno della quale la soluzione è dettata dalla soluzione delle equazioni di Rankine-Hugoniot. Per una buona risoluzione dell'urto che divide questa regione dalla zona indisturbata è necessario un maggior numero di punti, ma data la geometria del problema, l'onda d'urto formata è piana, e pertanto è necessario un infittimento della regione in una sola delle due direzioni trasversali.

Da ultimo, un blocco con meshatura più fine (3) va a ricoprire la zona di sviluppo del corner flow.

Tra le molteplici possibilità nella definizione della geometria del blocco (3), la scelta è ricaduta su una geometria esaedrica, aderente alle pareti, parametrizzata per mezzo di due valori $k_1 = 0.1$ e k_2 , che misurano l'estensione delle facce anteriore e posteriore rispetto a quelle dell'intero dominio.

La scelta del parametro k_1 è frutto di un compromesso tra conicità della griglia e dimensione minima delle celle computazionali, collegate dalla condizione CFL al passo temporale.

Questa soluzione rappresenta un buon compromesso tra vari aspetti importanti nella definizione di una griglia computazionale: è relativamente semplice da definire, presenta celle esaedriche regolari che limitano l'introduzione di errori nella valutazione dei flussi e mantiene una buona definizione per tutta l'estensione longitudinale del fenomeno poiché ne segue lo sviluppo conico.

Tuttavia, per poter definire in maniera ottimale la geometria del blocco (3) è necessaria la conoscenza della topologia del fenomeno. Di conseguenza, a ciascuno dei risultati proposti, sono precedute run preliminari dedicate alla

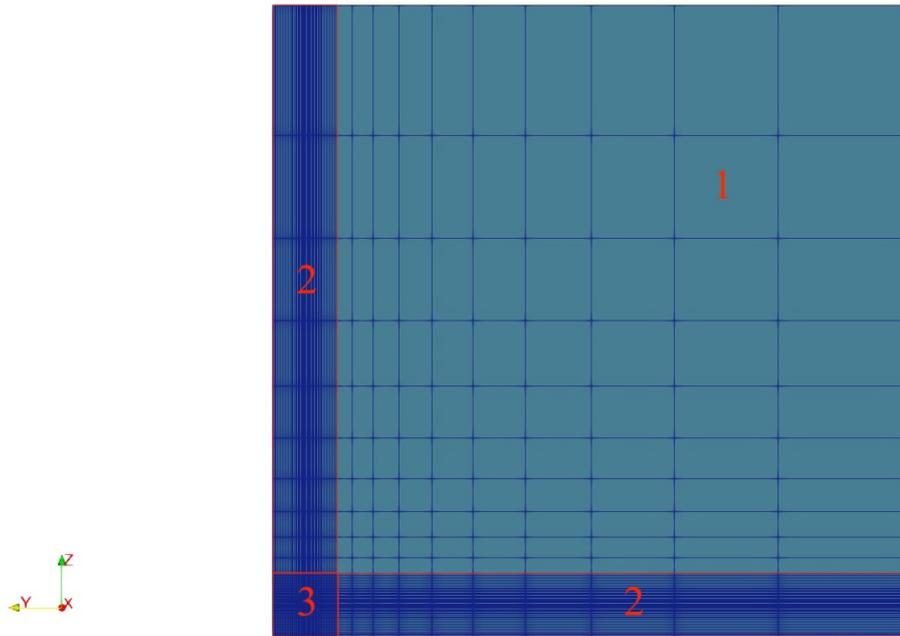


Figura 5.2: Suddivisione in blocchi del dominio di calcolo

valutazione dell'estensione massima del corner flow in relazione a geometria ed intensità della corrente.

La discretizzazione lungo l'asse longitudinale è stata scelta in modo da garantire che nella condizione più restrittiva, ovvero all'ingresso del blocco (3), l'aspect ratio delle celle computazionali non eccedesse il valore di 10, in modo da limitare errori numerici dovuti ad una eccessiva dilatazione delle celle computazionale in una direzione rispetto alle altre due.

Un ulteriore passaggio di ottimizzazione è consistito nella distribuzione delle celle all'interno del blocco(3). Utilizzando gli strumenti disponibili all'interno dell'utility *blockMesh*, in particolare il multiGrading, è stato possibile infittire ulteriormente la regione occupata dalle strutture vorticose, diminuendo il numero di celle destinate alla zona (3a) di Figura 5.3 e distribuendole ai blocchi (3b) e (3c), i quali sono stati graduati in modo da aumentare ulteriormente il dettaglio nella zona di interesse.

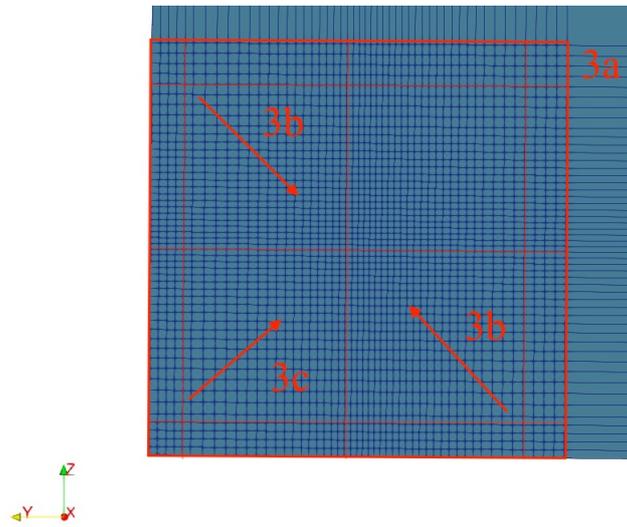


Figura 5.3: Esempio di stretching applicato al blocco (3)

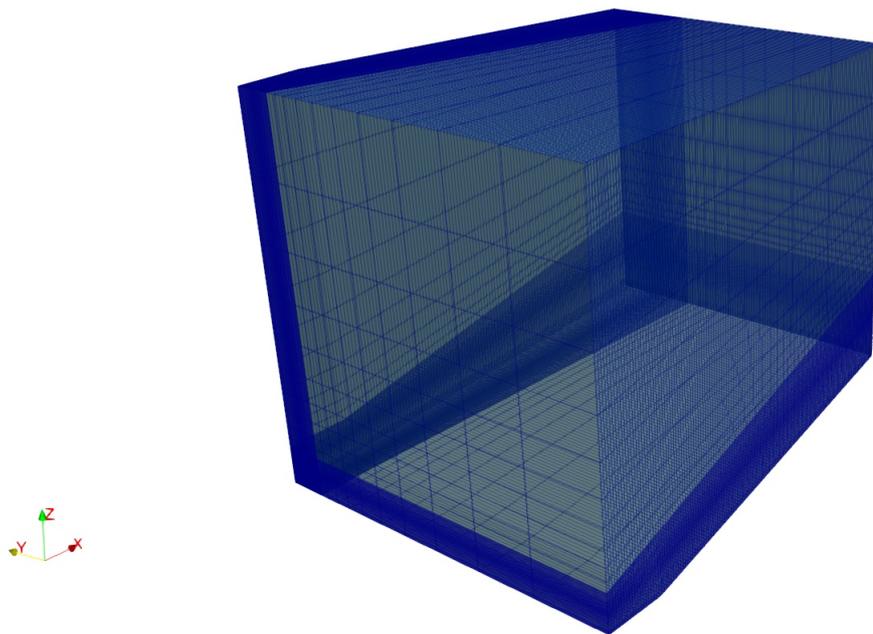


Figura 5.4: Sviluppo tridimensionale della griglia di calcolo

5.3 Grid refinement

E' stato condotto uno studio di grid refinement, volto a valutare l'indipendenza della soluzione dalla griglia di calcolo oltre un certo valore di celle computazionali.

E' stata scelta la combinazione di numero di Mach e angolo di rampa $M = 6, \theta = 10^\circ$, corrispondente ad una configurazione che in [11] viene riportata

come simmetrica e stabile, in modo da avere da un adeguato termine di paragone.

La configurazione ottenuta è del tipo *Transitional Mach Reflection*, e presenta l'avvolgimento delle superfici di contatto che diramano dai punti tripli.

Il calcolo della soluzione stazionaria a convergenza è stato eseguito su cinque griglie differenti, parametrizzate nello stesso modo ma con differente numero di punti nel piano trasversale del blocco (3). In particolare sono state utilizzate griglie 50x50, 100x100 (Figure 5.5a-5.5b), 150x150 (Figure 5.6a-5.6b), 175x175 (Figure 5.7a-5.7b), 200x200 (Figure 5.8a-5.8b).

I risultati proposti raffigurano contour di densità ed entropia per lo stesso range di valori, diagrammati in coordinate coniche.

Si può notare come, in tutti i casi proposti, vi è buona coincidenza nella posizione degli urti incidenti, riflessi e di Mach : all'infittire della griglia computazionale migliora la precisione nel descrivere le discontinuità. Nel caso relativo alle griglie 3 e 4 essa viene catturata con 2-3 celle.

La definizione delle superfici di contatto risente molto di più delle dimensioni delle celle computazionali.

Nel caso della griglia 1, l'avvolgimento delle superfici di contatto non è distinguibile affatto. Nel passaggio dalla configurazione 2 alla 4, migliora la definizione delle strutture vorticosi e non vi sono sostanziali variazioni tra la configurazione con 175x175 celle nel piano di cross-flow e quella con 200x200 celle.

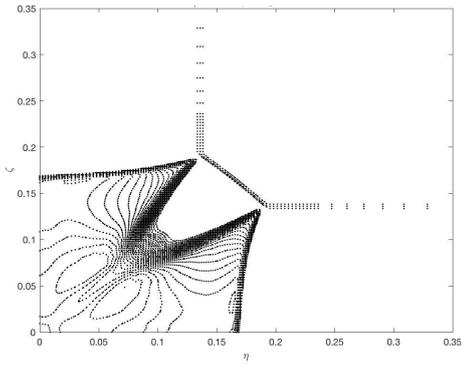
Inoltre è stata valutata la variazione delle grandezze relative ai punti di un segmento congiungente i punti $A = (\eta = 0.15, \zeta = 0)$ e $B = (\eta = 0, \zeta = 0.15)$ in prossimità della sezione di uscita a $x = 1 m$ al variare del numero di celle nel piano di cross-flow.

La Figura 5.9 mostra la variazione lungo l'estensione del segmento r della temperatura adimensionata con il valore relativo alla corrente indisturbata, parametrizzato con il numero di celle nel piano di cross-flow.

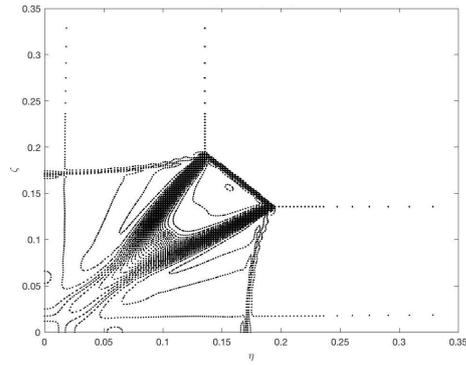
Si può notare come, all'aumentare del numero di celle computazionali, i valori relativi alle varie curve tendano a sovrapporsi.

Nel caso delle curve relative alle griglie a 175x175 e 200x200 i valori sono praticamente coincidenti.

Data questa tendenza, è stato selezionato come numero di celle nel piano di cross-flow 200x200.

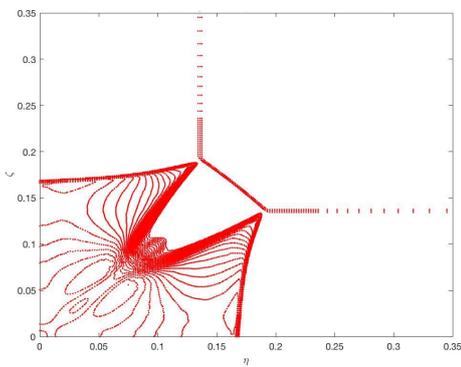


(a) Contour di densità

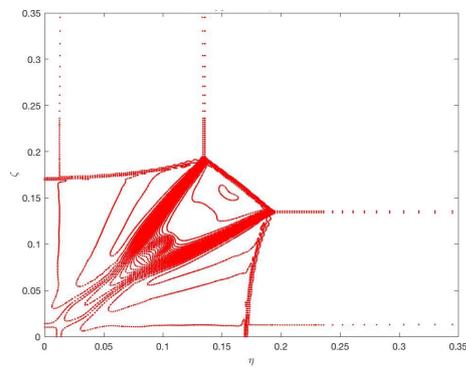


(b) Contour di entropia

Figura 5.5: Griglia computazionale 1: 100x100 nel piano di cross-flow

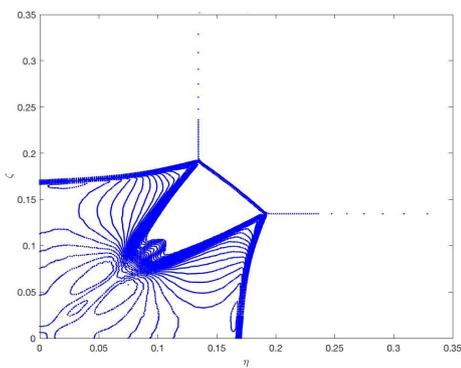


(a) Contour di densità

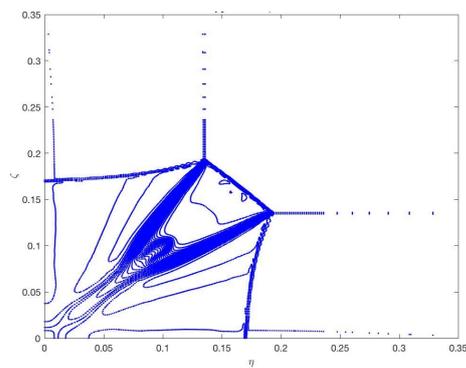


(b) Contour di entropia

Figura 5.6: Griglia computazionale 2: 150x150 nel piano di cross-flow



(a) Contour di densità



(b) Contour di entropia

Figura 5.7: Griglia computazionale 3: 175x175 nel piano di cross-flow

5.4 Verifica della griglia computazionale

L'adeguatezza della griglia e del solutore è stata verificata tramite una serie di test volti a valutare, oltre che qualitativamente anche quantitativamente i risultati ottenuti. Uno di questi è stato svolto per valutare l'adeguatezza della

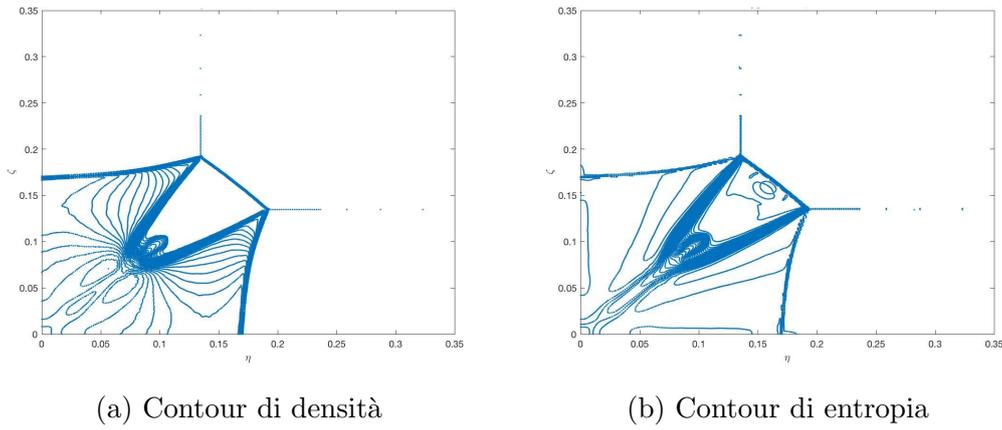


Figura 5.8: Griglia computazionale 4: 200x200 nel piano di cross-flow

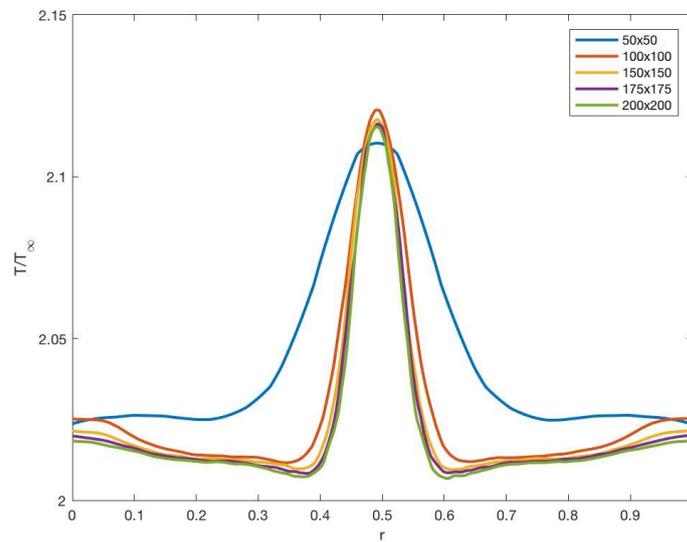


Figura 5.9: Dipendenza dei valori di temperatura dalla griglia

griglia nel ritrarre una soluzione self-similare, il secondo raffronta direttamente la soluzione ottenuta in un caso specifico con dati sperimentali e numerici presenti in letteratura.

5.4.1 Test 1: confronto con dati sperimentali

La geometria del dominio e le condizioni al contorno sono state modificate in modo da riprodurre numericamente l'esperimento presentato in [8], con corrente a $M = 3$ e angolo di rampa $\theta = 9.5^\circ$.

Sono stati presi come riferimento questi dati empirici perché l'esperimento è stato condotto ad alti numeri di Reynolds, in un range di valori del quale il flusso di Eulero costituisce una buona approssimazione.

I risultati comparati sono presentati nelle Figure 5.10 - 5.11.

Nei grafici presentati viene riportato il valore della pressione statica a parete adimensionata rispetto alla pressione presente nella zona interessata esclusivamente dall'urto piano, p_w .

Il pattern di pressione a parete è consistente con la topologia del fenomeno

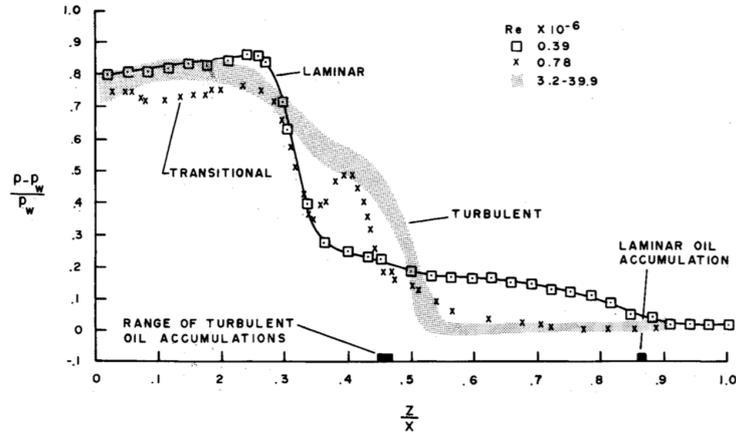


Figura 5.10: Risultati sperimentali da *West e Korkegi*

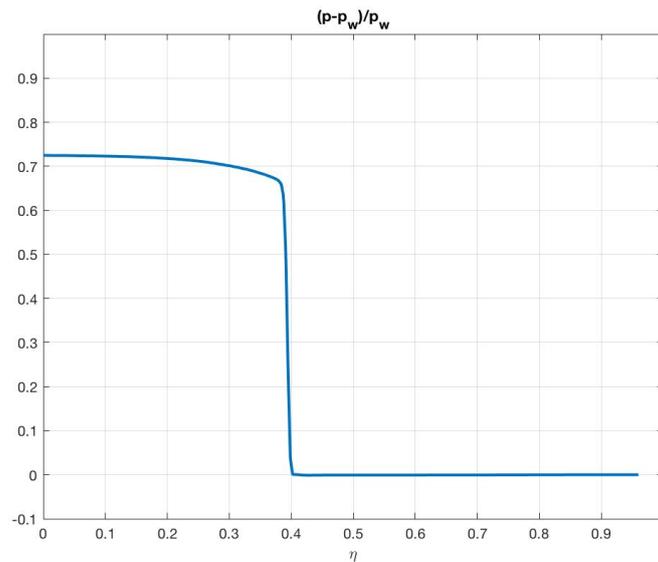
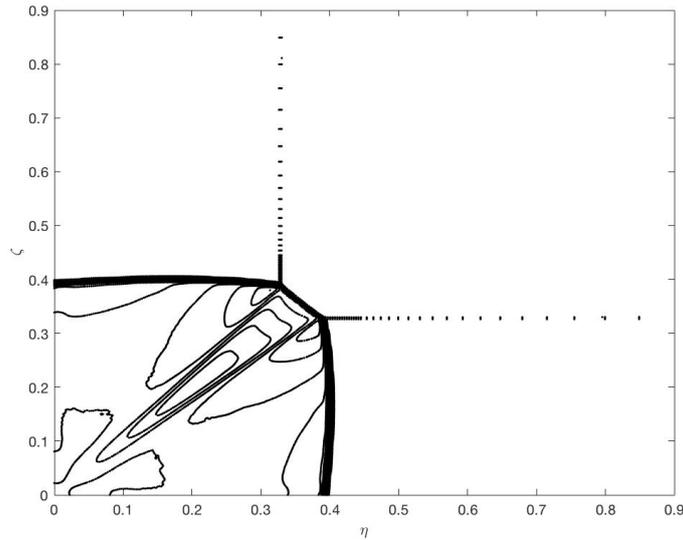


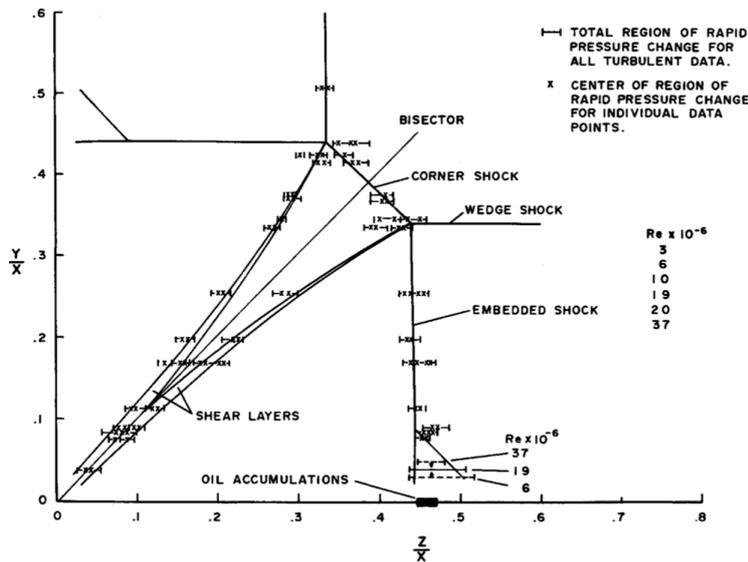
Figura 5.11: Risultati numerici ottenuti in coordinate coniche

osservato, riportato in Figura 5.12a: la riflessione delle onde piane è irregolare del tipo *Von Neumann Reflection*, con la formazione di slip lines dirette verso il corner. In prossimità di quest'ultimo vi è il massimo di pressione, che decade in maniera discontinua in prossimità dell'urto riflesso.

L'accordo tra i risultati sperimentali e quelli numerici proposti è soddisfacente, considerando il numero di punti di discretizzazione utilizzati ed il margine d'errore stimato dagli autori dello studio sperimentale, pari al 5%.



(a) Riflessione di Von Neumann da analisi numerica, contour di densità



(b) Riflessione di Von Neumann da dati sperimentali, *West e Korkegi*

Figura 5.12: Confronto con dati da [8]

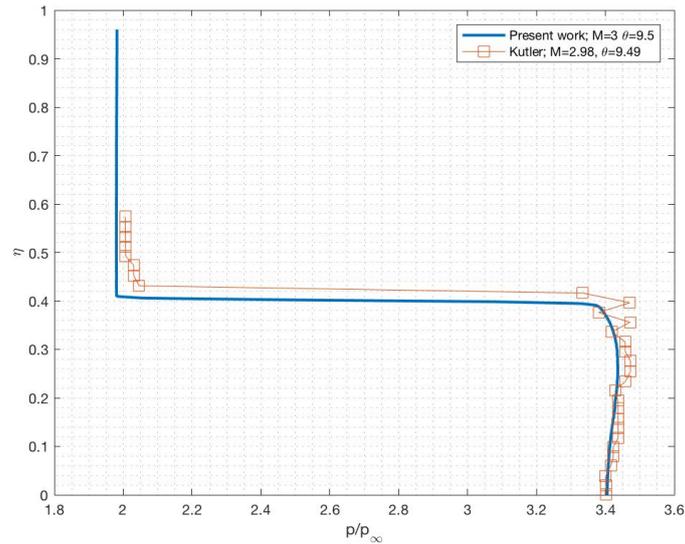
La discrepanza principale con quanto riportato in Figura 5.10 è dovuta agli effetti dell'interazione tra onda d'urto e lo strato limite, del tutto assenti nel caso della risoluzione numerica delle equazioni di Eulero.

Se comparati con i risultati numerici ottenuti da altri autori in condizioni di corrente all'ingresso e angolo di rampa molto simili, i risultati ottenuti risultano ulteriormente validi.

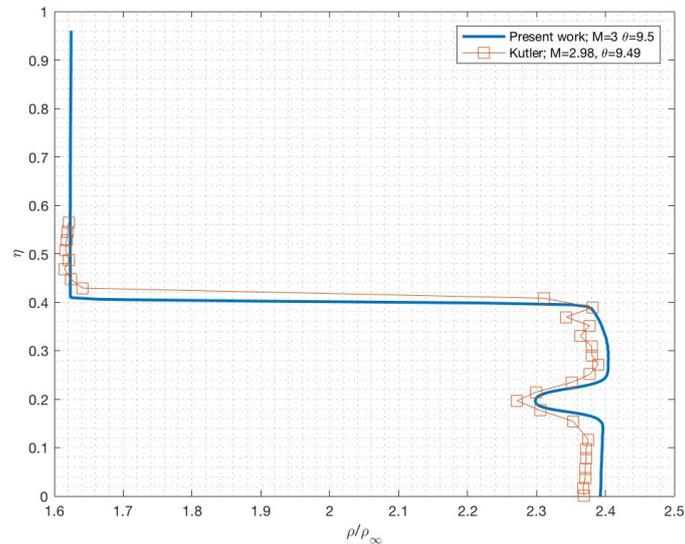
In figura 5.13b sono riportati i risultati presentati in [12], che a sua volta riproduce le condizioni imposte nelle prove sperimentali in [8]: il riscontro è positivo

a livello qualitativo e quantitativo. In particolare si noti l'accordo nella posizione della discontinuità corrispondente all'urto riflesso e del minimo locale nel profilo della densità normalizzata, dovuta alla presenza delle slip lines. Inoltre, l'utilizzo di uno schema numerico con proprietà TVD garantisce l'assenza di errori di dispersione e le conseguenti indesiderate oscillazioni a ridosso delle discontinuità, riscontrate invece in [12].

Il confronto con i risultati proposti in [11], [13] ha fornito ulteriori conferme



(a) Risultati numerici, Kutler, $\zeta = 0.196$



(b) Risultati numerici ottenuti

Figura 5.13: Confronto con dati da [12]

dell'adeguatezza del modello utilizzato.

5.4.2 Test 2: self-similarità della soluzione

L'adeguatezza della griglia di calcolo nel risolvere equazioni self-similiari in coordinate coniche è stata testata in maniera visiva, sovrapponendo la soluzione ottenuta a due diversi valori di coordinata longitudinale, opportunamente riscalata in coordinate coniche, per verificare la coerenza della topologia del fenomeno con quanto atteso.

I risultati proposti sono riportati per il caso $M = 6, \theta = 15^\circ$ (Double Mach Reflection) ottenuti su una griglia computazionale di circa 8 milioni di punti. Nelle Figure 5.14 - 5.15 sono riportati, sovrapposti, i contour di pressione e densità per la soluzione ottenuta ad ascissa $x = 0.8 m$ e $x = 1 m$, in coordinate coniche. La topologia degli urti incidenti e riflessi, delle strutture di

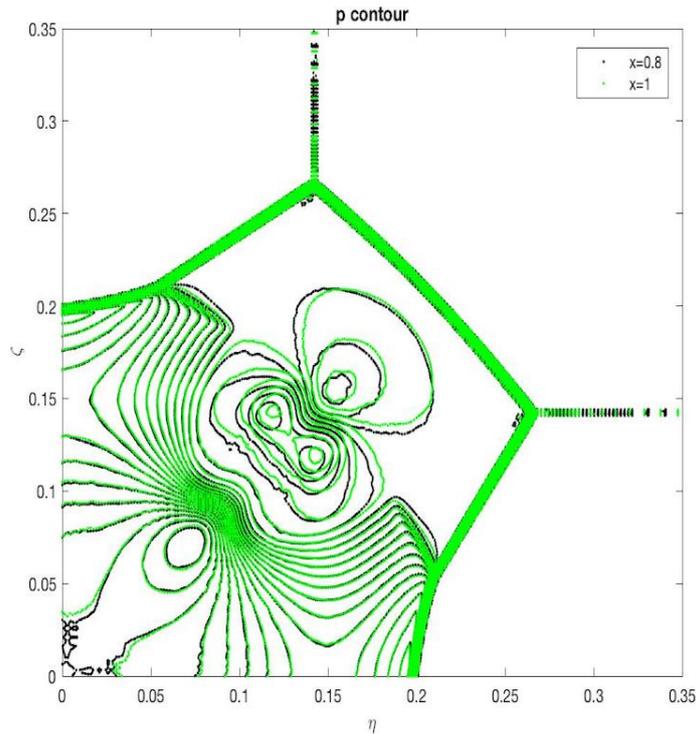


Figura 5.14: Contour di pressione per $x = 0.8m$ (nero) e $x = 1m$ (verde)

Mach primarie e secondarie e delle strutture vorticose si mantiene pressoché invariata al variare della coordinata di sviluppo longitudinale, a riprova della self-similarità della soluzione ottenuta.

In secondo luogo sono stati estrapolati i dati relativi alle celle in prossimità di punti giacenti su una retta a soluzione costante, indipendente dalla coordinata di sviluppo longitudinale.

Le coordinate coniche corrispondenti al luogo di questi punti sono riportate in Figura 5.16. Le Figure seguenti riportano l'errore nella self-similarità della

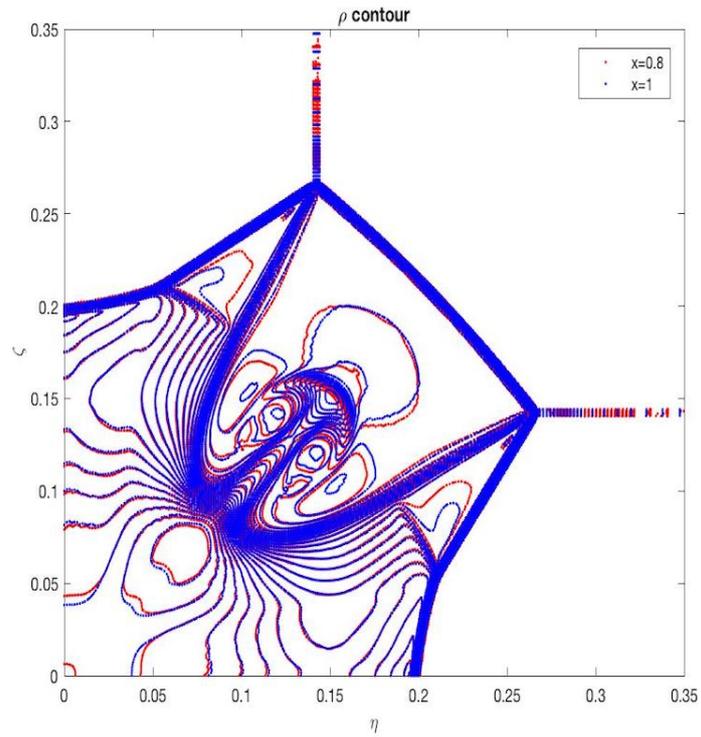


Figura 5.15: Contour di densità per $x = 0.8m$ (rosso) e $x = 1m$ (blu)

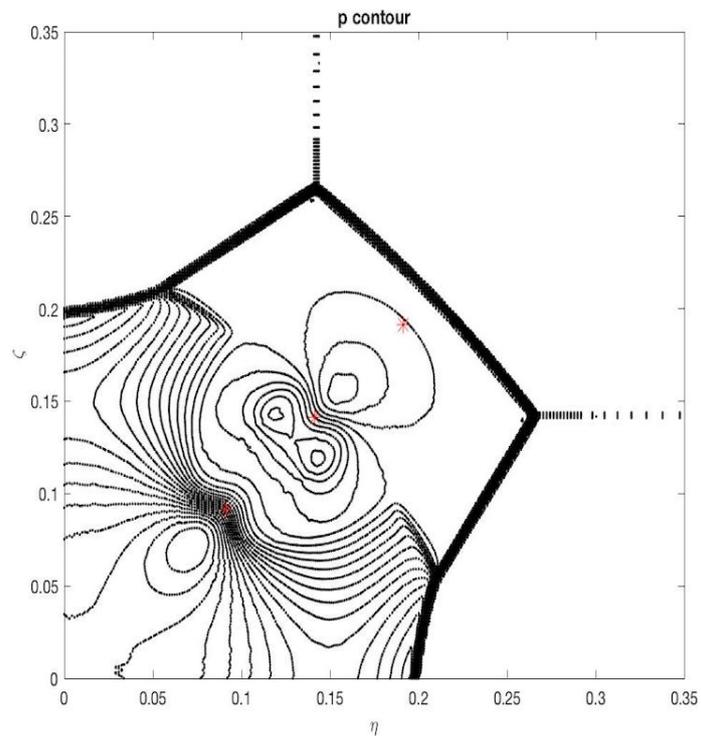


Figura 5.16: Posizione delle rette a soluzione costante per la verifica di self-similarità

soluzione valutato come variazione delle grandezze p, T, ρ rispetto al valore di riferimento corrispondente alla sezione di uscita.

Con l'eccezione di $\zeta = \eta = 0.4$, la variazione percentuale a partire da un valore di x dal valore di circa $0.3 m$ si riduce a meno del 5% e la soluzione converge rapidamente al valore di riferimento.

La zona in prossimità del punto di massimo avvolgimento delle superfici di contatto si dimostra più critica, con un errore limitato solo in prossimità del tratto terminale del dominio di calcolo.

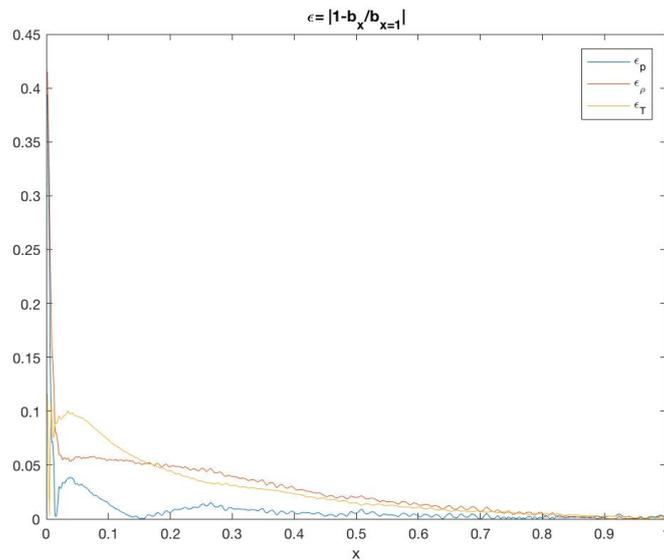
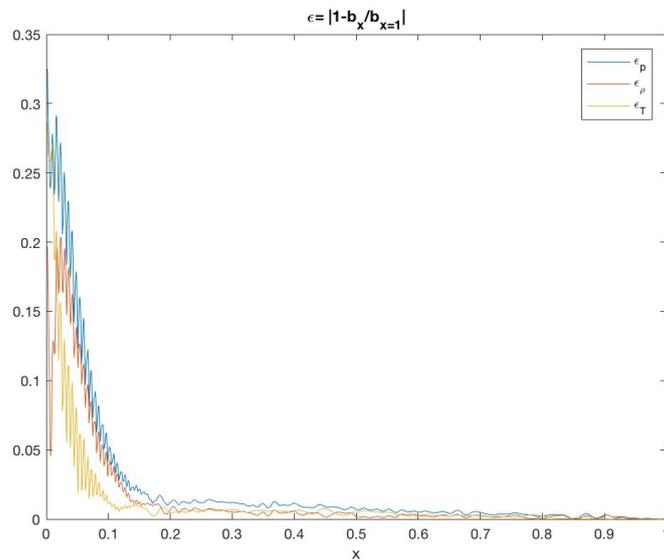
(a) $\zeta = \eta = 0.0912$ (b) $\zeta = \eta = 0.1912$

Figura 5.17: Errore nella self-similarità

5.5 Risultati

Di seguito sono riportati i risultati relativi a tre casi di studio, selezionati per due motivi: in primo luogo ritraggono tre configurazioni del pattern di onde d'urto differenti, in particolare le riflessioni irregolari del tipo *Transitional Mach Reflection*, *Double Mach Reflection* e *Multiple Shock Mach Reflection*. Inoltre rientrano tra le soluzioni che alcuni studi in letteratura riportano come asimmetriche, ed offrono di conseguenza un buon metro di paragone.

5.5.1 Caso 1: $M = 7, \theta = 10^\circ$

Il primo caso di studio presenta una configurazione degli urti riflessi ed incidenti corrispondente ad una riflessione irregolare del tipo *Transitional Mach Reflection*.

La soluzione è stata ottenuta imponendo come condizione al contorno all'ingresso corrente diretta lungo l'asse longitudinale e uniforme a $M_\infty = 7$, dunque con $U_x = 725.0865 \text{ m/s}$; $U_y = U_z = 0$; $p_\infty = 24.4756 \text{ Pa}$; $T_\infty = 26.667 \text{ K}$.

La topologia del sistema di urti assume le caratteristiche attese, validate dal confronto con i dati numerici ottenuti in [11], a $t = 0.003 \text{ s}$.

La simulazione è stata protratta sino a $t = 0.07 \text{ s}$ e per il 95% della durata di questa, non vi è alcuna variazione nella posizione degli urti incidenti, riflessi o delle superfici di contatto.

Il risultato di tale simulazione è riportato nelle Figure 5.18a-5.19b. Si può distinguere il tipico avvolgimento delle superfici di contatto e la coppia di regioni a bassa pressione corrispondente ai vortici simmetrici che si sviluppano a partire dai punti tripli.

E' riportato inoltre l'andamento della pressione a parete, adimensionata con il valore pertinente alla regione interessata esclusivamente dall'urto piano, p_w .

E' possibile notare come, dal picco di pressione in prossimità del corner, il valore diminuisca fino a $\eta = 0.12$, in prossimità di una zona a pressione leggermente maggiore. Di là, attraverso l'urto riflesso, il valore del parametro raggiunge lo zero.

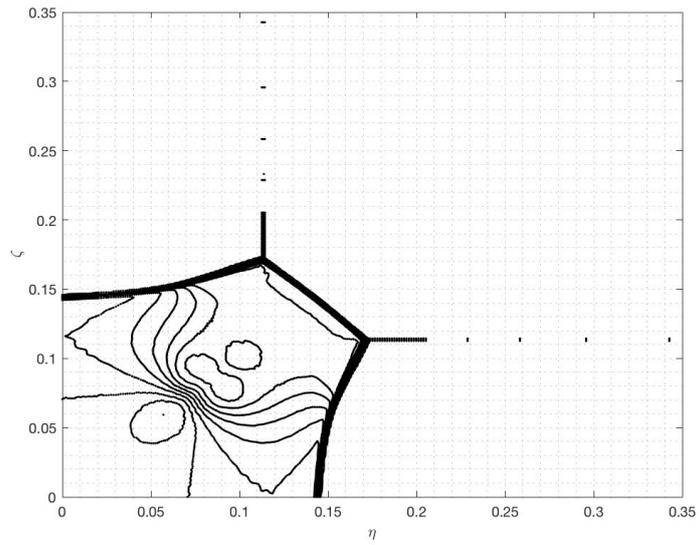
La soluzione appare simmetrica nel suo sviluppo.

Un'ulteriore conferma di ciò proviene dal tracciamento delle variabili adimensionate con il rispettivo valore riferito alla corrente indisturbata, per alcune coppie di punti disposti in maniera simmetrica rispetto alla bisettrice del corner (Tabella 5.1).

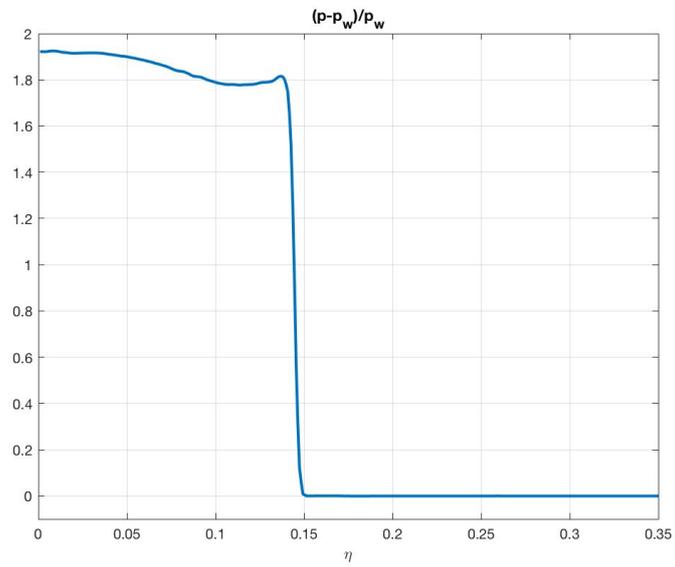
Come esempio è riportata l'evoluzione della pressione normalizzata con il valore di pressione statica della corrente indisturbata (Figura 5.30b). Da ultimo è stato valutata la differenza tra le forze agenti sulle due rampe agenti. Questo è stato fatto tramite il parametro adimensionato $\Delta F = \frac{1}{2} \frac{F_Y - F_Z}{F_Y + F_Z}$, analogo al parametro presentato in [11] e [17].

Il parametro si mantiene prossimo allo zero durante tutto lo svolgimento della simulazione, a riprova della simmetria della soluzione.

Il risultato ottenuto in [11], tuttavia indica una chiara asimmetria nella soluzione.



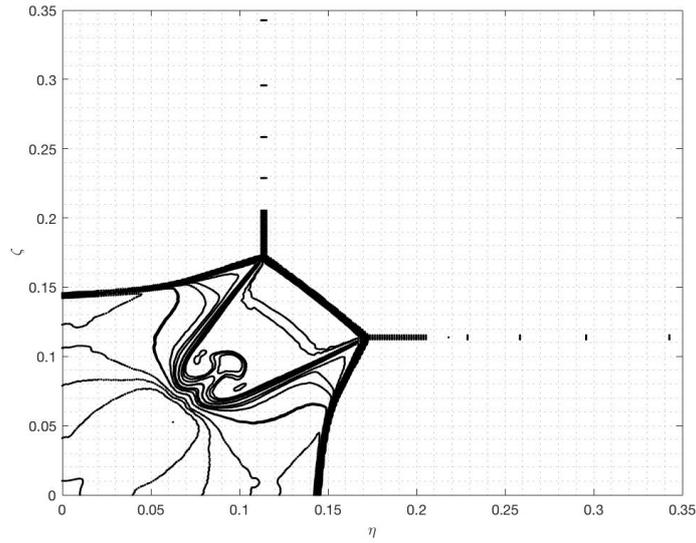
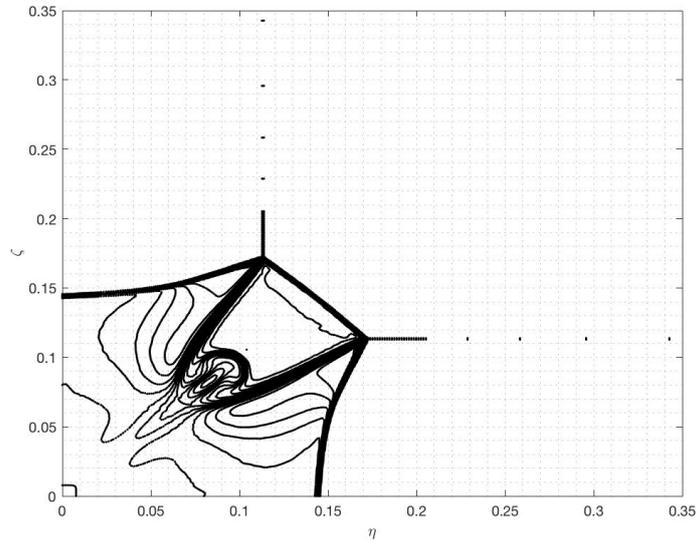
(a) Contour di pressione; $M = 7, \theta = 10^\circ$



(b) Pressione adimensionata a parete; $M = 7, \theta = 10^\circ$

Point #	η	ζ
1	0.25	0.35
2	0.35	0.25
3	0.06	0.05
4	0.05	0.06
5	0.08	0.1
6	0.1	0.08
7	0.14	0.12
8	0.12	0.14

Tabella 5.1: Posizione dei punti monitorati

(a) Contour di densità; $M = 7, \theta = 10^\circ$ (b) Contour di temperatura; $M = 7, \theta = 10^\circ$

Il risultato li ottenuto è riportato in Figura 5.33 come contour di entropia, affiancato al risultato ottenuto con i calcoli appena illustrati.

Per quanto vi sia un accordo a livello qualitativo tra i due risultati sulla geometria degli urti e sulla loro configurazione, la soluzione relativa alle superfici di contatto è inequivocabilmente differente.

5.5.2 Caso 2: $M = 10, \theta = 16^\circ$

Il secondo caso di studio è stato scelto in base ai risultati riportati in [11].

La configurazione con corrente a $M = 10, \theta = 16^\circ$ è li riportata come set di

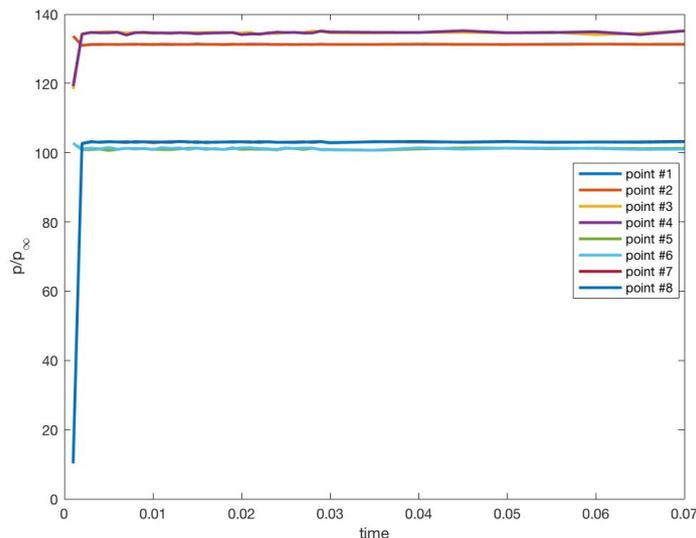


Figura 5.20: Convergenza dei valori di pressione per i punti in tab. 5.1; $M = 7$, $\theta = 10^\circ$

condizioni al contorno in grado di garantire la massima asimmetria della soluzione; analogamente a quanto fatto nel primo caso di studio, una volta definite temperatura e pressione totali di riferimento, fissato il numero di Mach della corrente indisturbata sono state ricavate le grandezze statiche e il modulo della velocità, necessarie alla definizione delle condizioni al contorno all'ingresso del dominio.

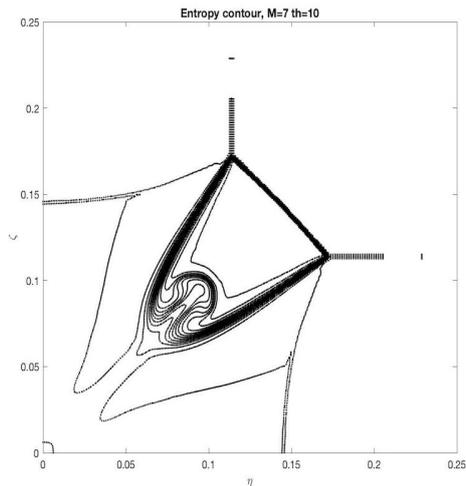
La soluzione è stata calcolata sino al raggiungimento della condizione di stazionarietà.

Come per il caso precedente sono stati tracciati i contour relativi alle grandezze fondamentali, proposti in coordinate coniche.

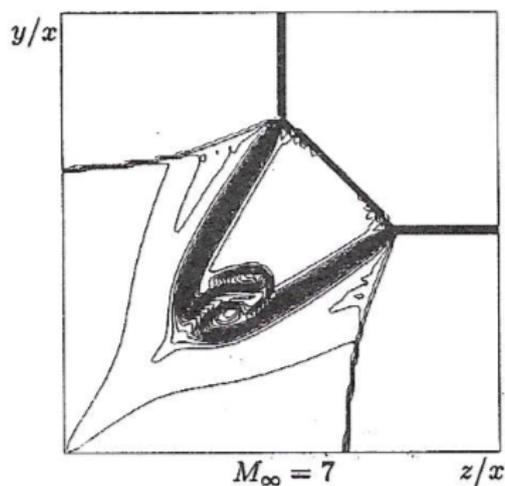
Il pattern di onde d'urto mostra una configurazione simile alla *Double Mach Reflection*, in cui però compare, in prossimità delle coordinate ($\eta = 0.09$, $\zeta = 0$) (e simmetricamente ($\eta = 0$, $\zeta = 0.09$)) una regione ad intenso gradiente delle grandezze fondamentali.

Osservando l'andamento della pressione a parete, si può notare come questa decresca rapidamente sino ad un minimo locale proprio in prossimità di quel punto, per poi aumentare sino al raggiungimento della discontinuità costituita dall'urto riflesso, in prossimità di ($\eta = 0.14$, $\zeta = 0$).

L'incrementare progressivo dell'intensità degli urti porterebbe a sviluppare una nuova discontinuità in luogo della zona a forte gradiente evidenziata poco sopra, portando la soluzione alla tipica configurazione *Multi-Shock Mach Reflection*.



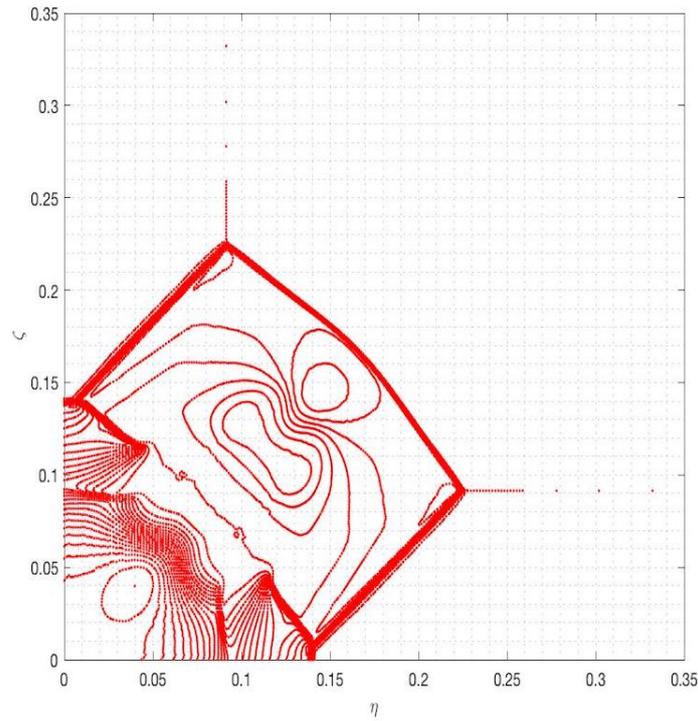
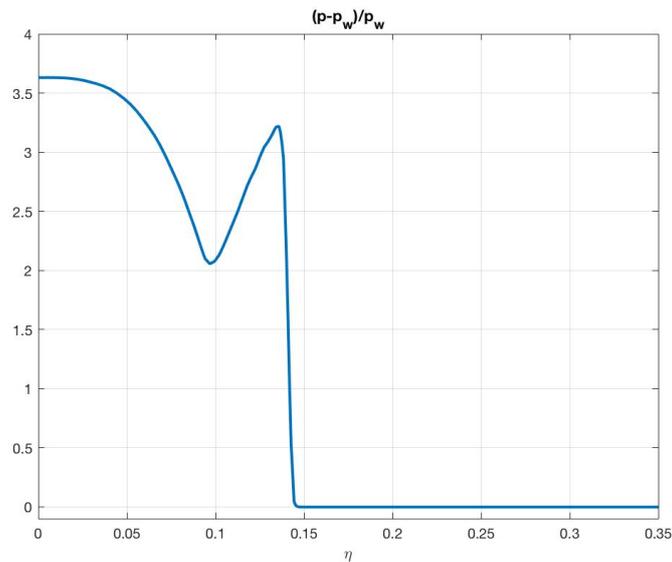
(a) Risultati ottenuti: contour di entropia

(b) *Marsilio*: contour di entropiaFigura 5.21: Risultati comparati, $M = 7, \theta = 10^\circ$

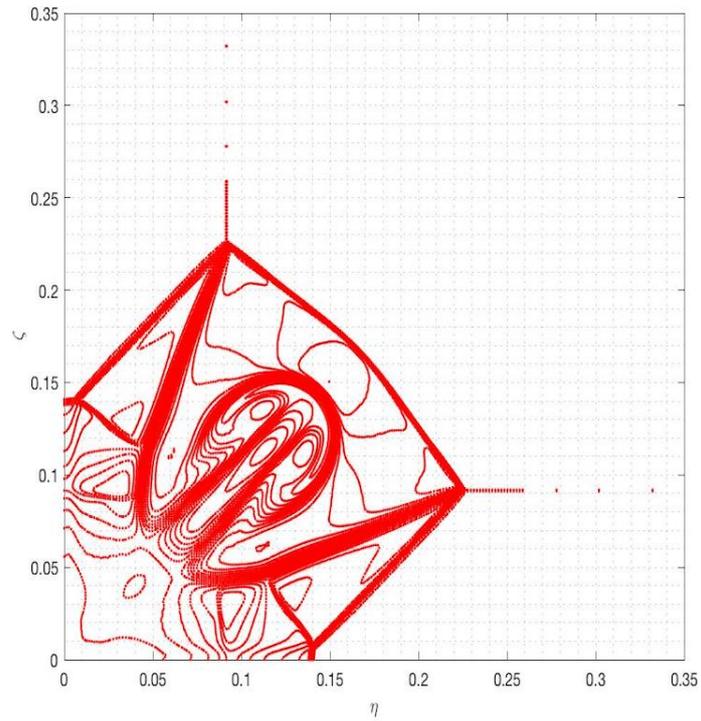
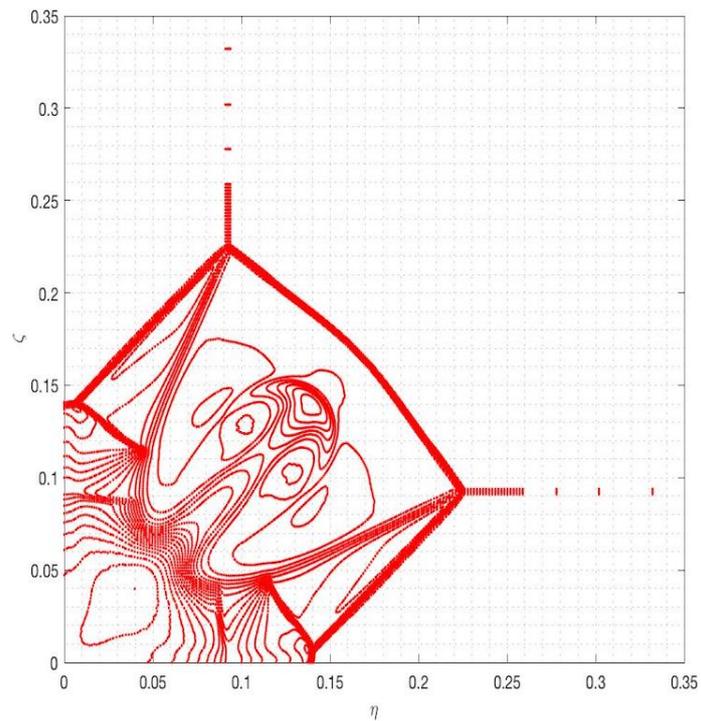
Come per il caso precedente la simmetria della soluzione è stata monitorata tramite l'analisi delle forze a parete e dei valori assunti dalle grandezze fondamentali in prossimità di alcune coppie di punti, rappresentativi delle regioni del flusso a cui appartengono, scelti in modo da essere simmetrici rispetto alla bisettrice del corner (Tabella 5.2).

Come esempio è riportata l'evoluzione della densità, riportata in Figura 5.24. Non è possibile notare alcuna asimmetria sostanziale nella soluzione. Analogamente l'analisi del coefficiente $\Delta F = \frac{1}{2} \frac{F_Y - F_Z}{F_Y + F_Z}$, ha portato a simili conclusioni.

Nuovamente i risultati sono confrontati con quanto riportato in [11] e [17]. La Figura 5.25 mostra la soluzione ottenuta da *Marsilio* delineata come contour di pressione. Se confrontata con la Figura 5.22a è facile notare una sostanziale

(a) Contour di pressione; $M = 10, \theta = 16^\circ$ (b) Pressione adimensionata a parete; $M = 10, \theta = 16^\circ$

differenza nella reciproca dimensione dei vortici costituiti dagli avvolgimenti delle slip lines. La dimensione preponderante di uno dei due nella soluzione asimmetrica, può persino portare, con l'intensificarsi della corrente, alla deformazione del sistema di urti. [nuovamente, si veda 11].

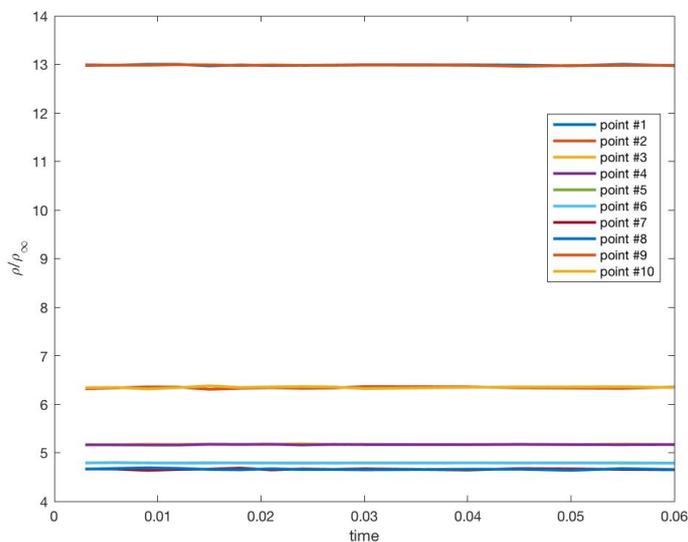
(a) Contour di temperatura; $M = 10, \theta = 16^\circ$ (b) Contour di densità; $M = 10, \theta = 16^\circ$

5.5.3 Caso 3: $M = 6, \theta = 15^\circ$

Data la possibilità di confronto dei risultati con quelli proposti in [4],[2],[5] è stato eseguito uno studio specifico sulla configurazione a $M = 6, \theta = 15^\circ$.

Point #	η	ζ
1	0.05	0.03
2	0.03	0.05
3	0.1	0.05
4	0.05	0.1
5	0.15	0.07
6	0.07	0.15
7	0.12	0.1
8	0.1	0.12
9	0.15	0.12
10	0.12	0.15

Tabella 5.2: Posizione dei punti monitorati

Figura 5.24: Evoluzione temporale della densità normalizzata per i punti riportati in tab. 5.2; $M = 10$, $\theta = 16^\circ$

Al fine di testare la stabilità della soluzione simmetrica nel caso trattato, la soluzione è stata calcolata a partire da una configurazione gravemente perturbata, ottenuta imponendo all'ingresso una deviazione della corrente pari a 10° , dunque con componente lungo l'asse y non nulla .

Data la corrente fortemente asimmetrica rispetto alla bisettrice del corner, la soluzione si sviluppa con uno dei due avvolgimenti delle superfici di contatto di dimensione preponderante rispetto all'altra, ed il sistema di urti che soddisfa, per le due rampe, angoli di deflessione differenti.

Dopo aver ottenuto lo sviluppo completo della soluzione forzatamente asimmetrica, la corrente in ingresso è stata riportata parallela all'asse longitudinale ed è stata valutata la soluzione a convergenza.

Le Figure 5.26 riportano l'evoluzione della soluzione ottenuta, delineata da

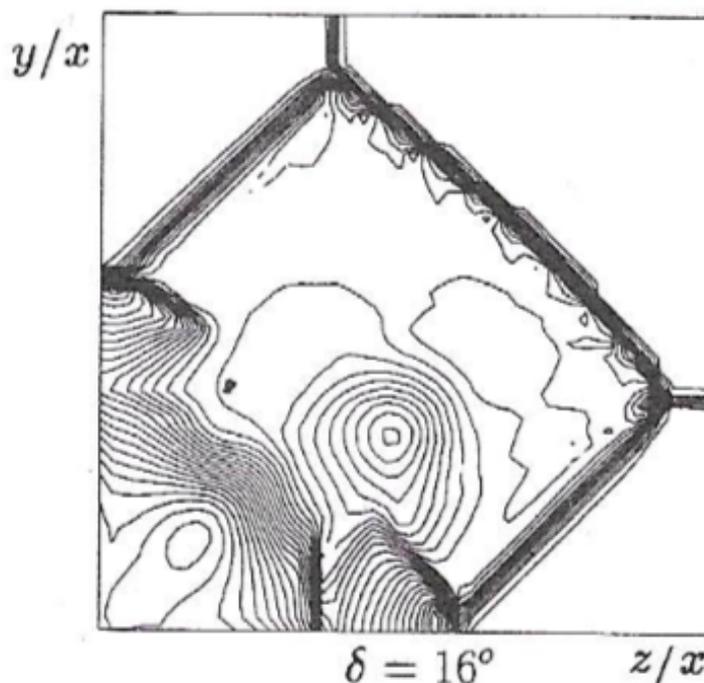


Figura 5.25: Contour di pressione, *Marsilio*, $M = 10, \theta = 16^\circ$

contour di densità. Si può notare come, dopo un breve transitorio, la soluzione si stabilizzi in una configurazione simmetrica, con la coppia di avvolgimenti delle superfici di contatto disposte in maniera simmetrica rispetto alla bisettrice del corner a formare le strutture vorticoso contro-rotanti.

Le strutture compaiono a $t = 2ms$ in prossimità delle coordinate coniche $\eta = 0.25, \zeta = 0.12$ e si stabilizzano successivamente in posizione simmetrica.

Di seguito sono riportati i contour di temperatura e di pressione per la soluzione stazionaria; quest'ultimo è affiancato al diagramma di pressione a parete, come per gli altri casi di studio.

Si può notare l'intensificarsi del fenomeno illustrato per il caso a $M = 7, \theta = 10^\circ$: dal massimo a ridosso del corner la pressione diminuisce sino ad un minimo locale in prossimità di $\eta = 0.15$, aumenta nella regione inclusa dalla discontinuità per poi adeguarsi al valore p_w . La simmetria della soluzione è stata verificata da un lato tracciando l'evoluzione temporale delle variabili adimensionate rispetto alle grandezze della corrente indisturbata a monte in corrispondenza quattro coppie di punti, le cui coordinate coniche sono riportate in tabella 5.3, ciascuna simmetrica rispetto alla bisettrice del corner; dall'altro tracciando l'evoluzione delle grandezze lungo due rette a soluzione costante passanti per i punti A e B ($\eta = 0.1212, \zeta = 0.1412$ e $\eta = 0.1412, \zeta = 0.1214$), (Figura 5.31).

Inoltre è stata tracciata l'evoluzione temporale delle grandezze fondamentali

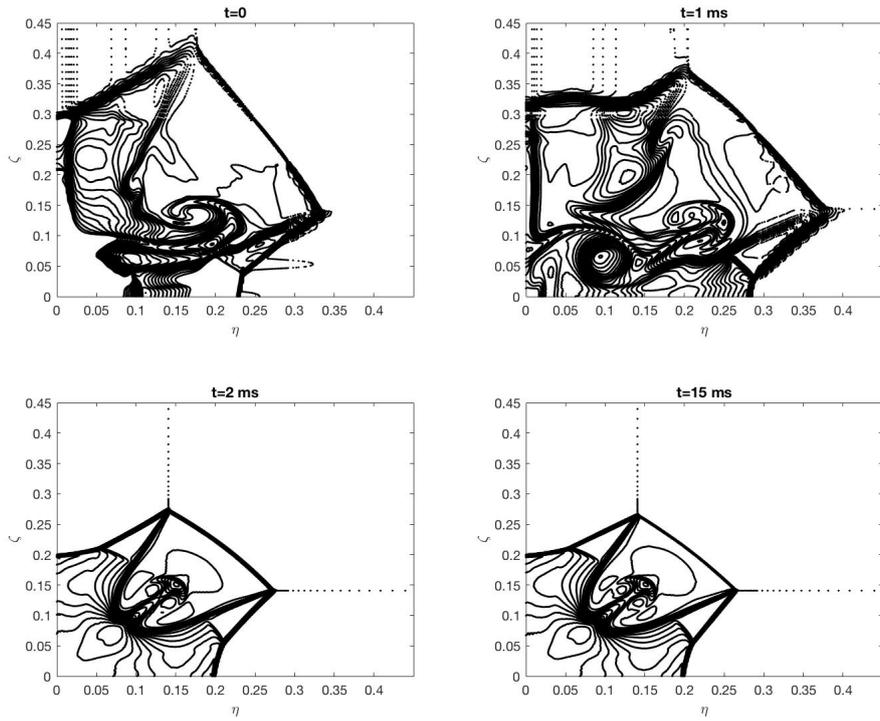


Figura 5.26: Evoluzione temporale della soluzione, contour di densità; $M = 6$, $\theta = 15^\circ$

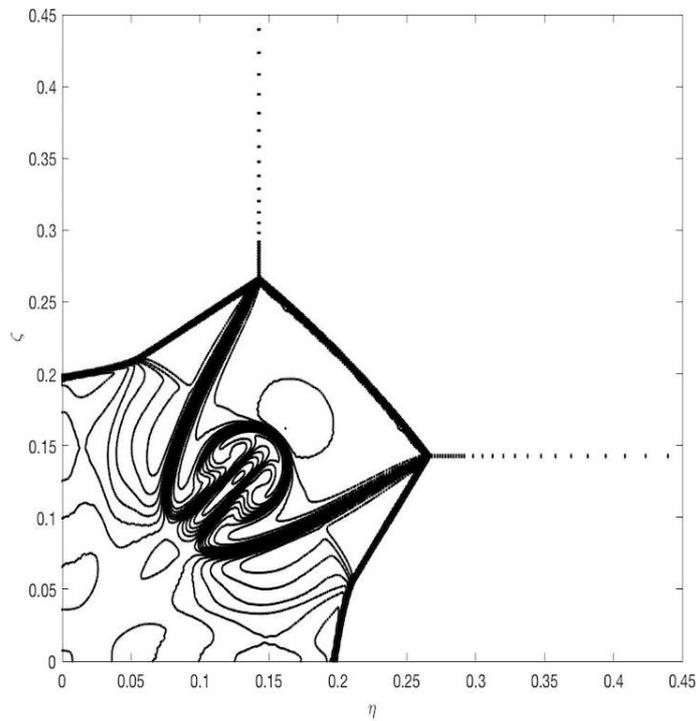
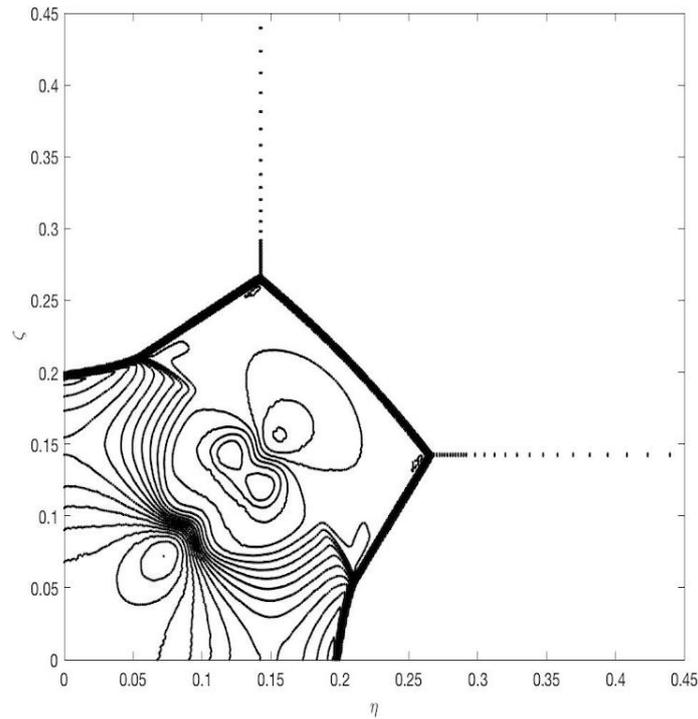
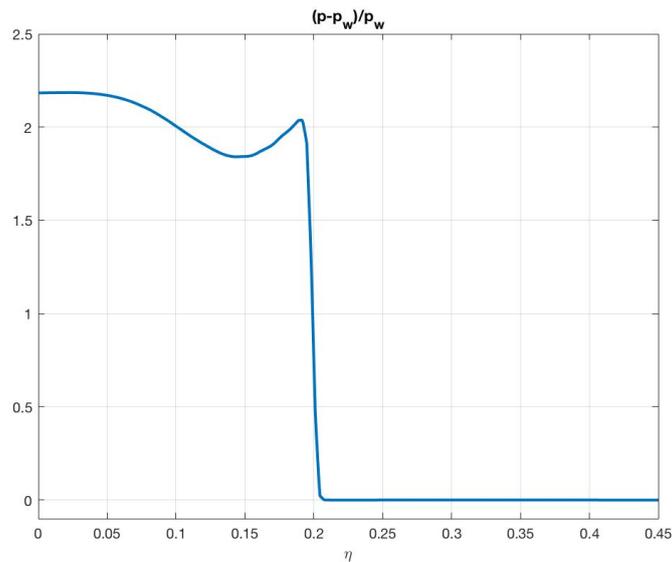


Figura 5.27: Contour di temperatura; $M = 6$, $\theta = 15^\circ$

(a) Contour di pressione; $M = 6, \theta = 15^\circ$ 

(b) Pressione a parete adimensionata

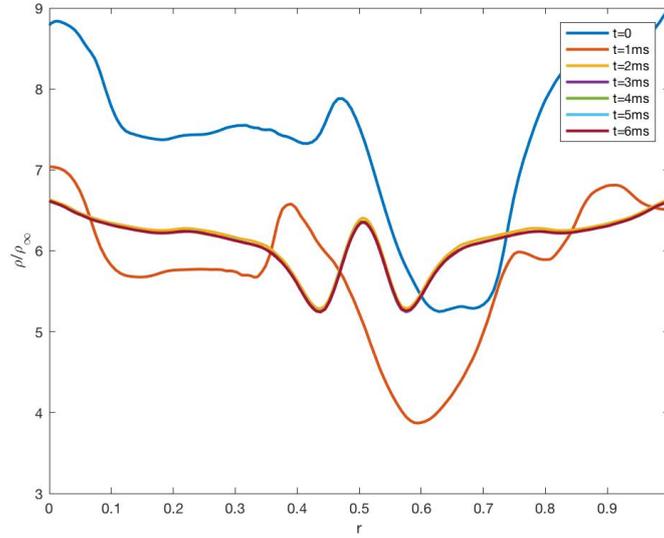
lungo un segmento, r , che connette i punti a coordinate coniche $\eta = 0, \zeta = 0.18$ e $\eta = 0.18, \zeta = 0$, attraversando da parete a parete la zona di sviluppo del corner flow.

A partire da $t = 3ms$ le soluzioni si sovrappongono, con distribuzione dei valori simmetrica rispetto alla bisettrice. Un esempio è riportato in Figura 5.29.

Infine è stata valutata l'evoluzione temporale delle forze di pressione agenti

Point #	η	ζ
1	0.05	0.1
2	0.1	0.05
3	0.05	0.15
4	0.15	0.05
5	0.22	0.1
6	0.1	0.22
7	0.2	0.15
8	0.15	0.2

Tabella 5.3: Posizione dei punti monitorati

Figura 5.29: Distribuzione della densità lungo il traverso r , parametrizzato con il tempo

sulle pareti delle rampe (Figura 5.32).

Non è stato possibile riscontrare alcuna asimmetria nella soluzione. Il confronto con i dati proposti in [2] e [4] corrobora il risultato ottenuto, con una topologia dell'urto in preciso accordo con quanto osservato.

In Figura 5.33 sono riportati, a confronto, le topologie del fenomeno ottenute risolvendo due set di equazioni differenti. Nel primo caso sono state risolte le equazioni di Eulero tridimensionali ed instazionarie, descritte nel capitolo 2 dalle equazioni (2.1)-(2.3).

Nel secondo caso, vista la self-similarità conica del corner flow, queste sono state formulate in coordinate coniche e prendono la forma compatta:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \zeta} + 2E = 0 \quad (5.2)$$

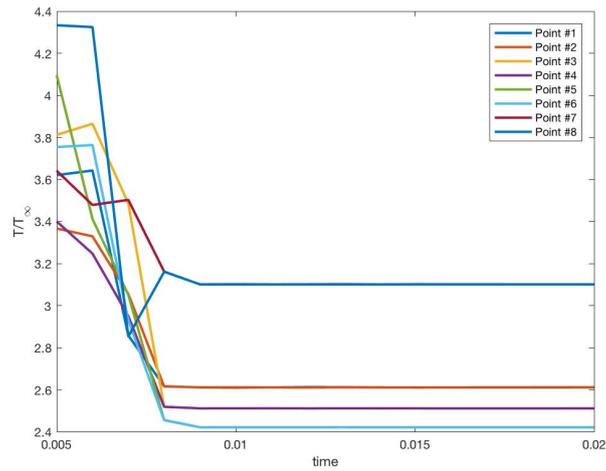
con $\tau = t/x, \eta = y/x, \zeta = z/x$ e $(\partial/\partial x)_{\tau, \eta, \zeta} = 0$. e

$$Q = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \\ \rho \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \rho u \bar{v} \\ \rho v \bar{v} + p \\ \rho w \bar{v} \\ (e + p) \bar{v} \\ \rho \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} \rho u \bar{w} \\ \rho v \bar{w} \\ \rho w \bar{w} + p \\ (e + p) \bar{w} \\ \rho \bar{w} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ (e + p) u \\ \rho u \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

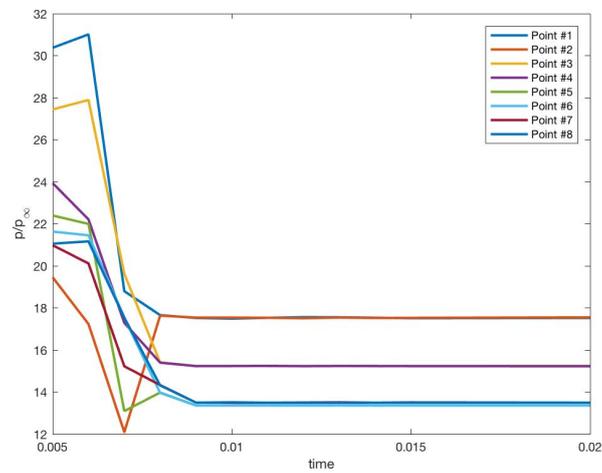
con u, v, w componenti cartesiane della velocità, $\bar{v} = v - \eta u, \bar{w} = w - \zeta u$.

Il confronto con la Figura 5.33a da buoni risultati, sia per la configurazione della riflessione degli urti, sia per la loro estensione e posizione. L'avvolgimento delle superfici di contatto si mostra simmetrico e di estensione compatibile con quanto osservato utilizzando lo schema central-upwind.

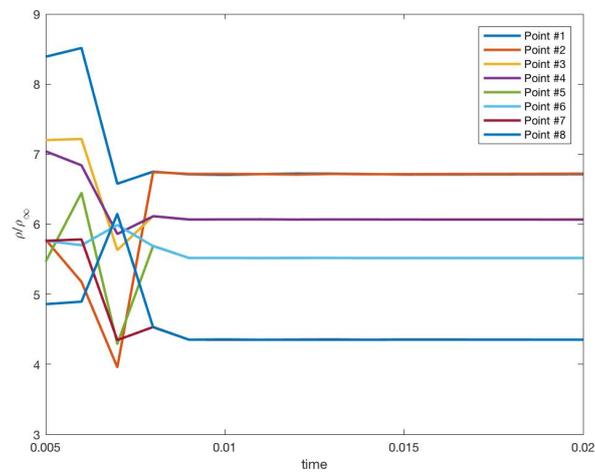
Viceversa, il confronto con 5.33b, presenta una notevole differenza nella struttura assunta dalle superfici di contatto.



(a) Evoluzione temporale della densità per i punti riportati in tab. 5.3



(b) Evoluzione temporale della densità per i punti riportati in tab. 5.3



(c) Evoluzione temporale della densità per i punti riportati in tab. 5.3

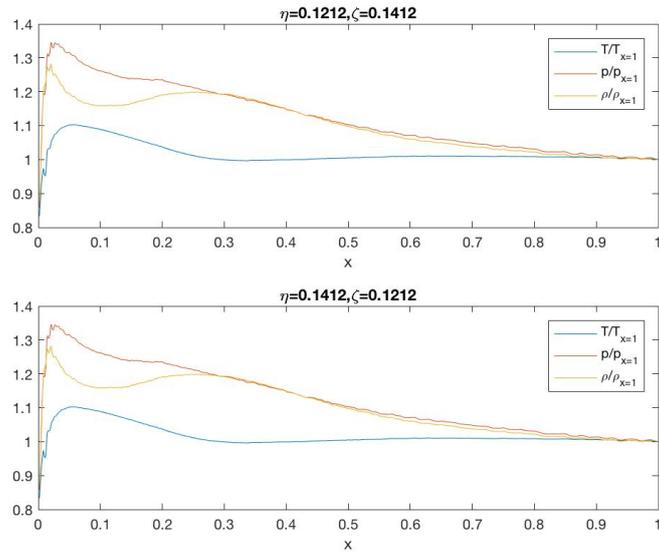


Figura 5.31: Confronto tra le grandezze normalizzate: evoluzione lungo retta a soluzione conica costante; $t = 0.015$

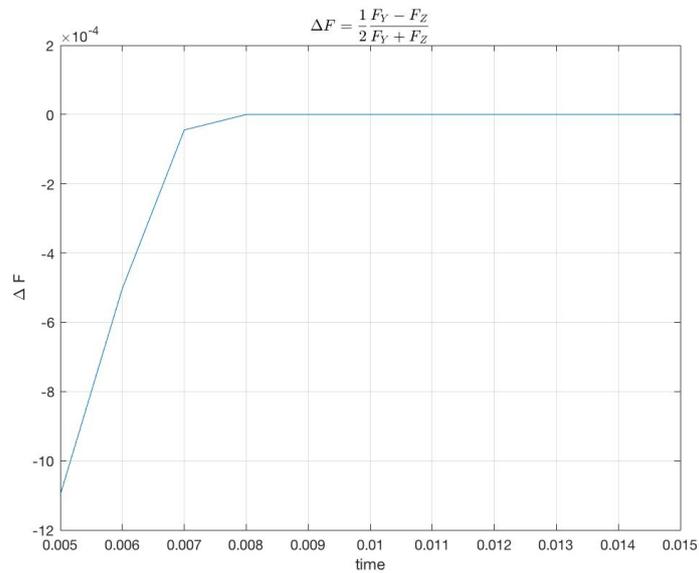
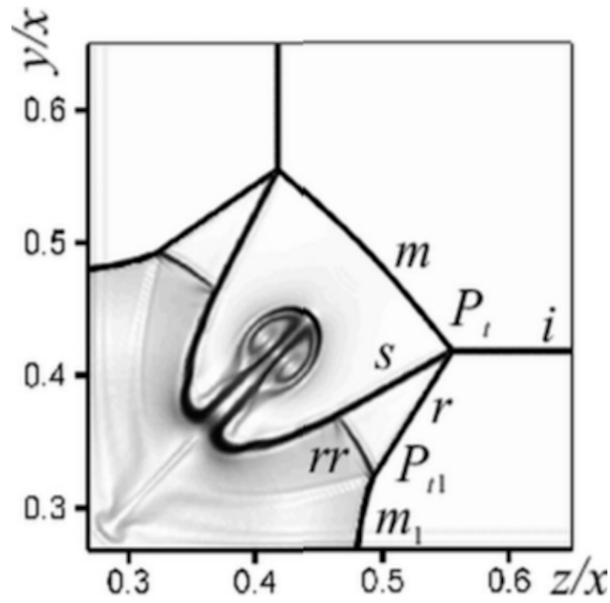
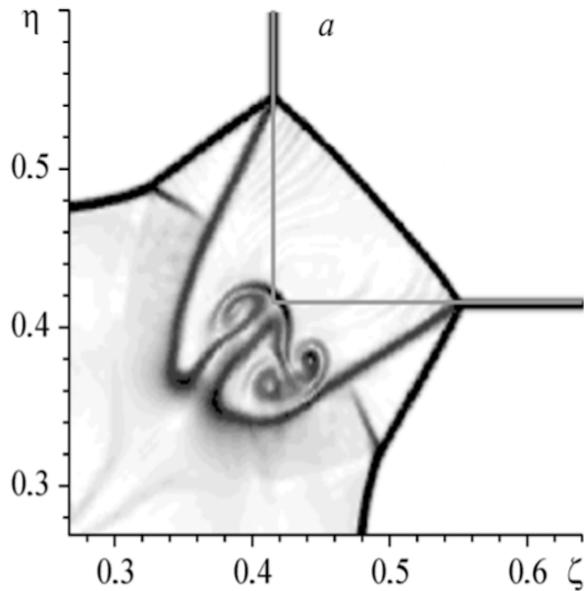


Figura 5.32: Evoluzione nel tempo delle forze a parete; $M = 6, \theta = 15^\circ$



(a) Soluzione numerica delle equazioni di Eulero instazionarie in sistema di coordinate cartesiane tridimensionali, [2]



(b) Soluzione numerica delle equazioni di Eulero instazionarie in sistema di coordinate coniche, [5]

Figura 5.33: Risultati ottenuti da *Goonko et al.* per il caso $M = 6, \theta = 15^\circ$, con tecniche computazionali differenti

Capitolo 6

Conclusioni

I corner flow non viscosi generati da una corrente supersonica incidente su un sistema di rampe piane intersecanti sono stati studiati per mezzo di uno schema numerico centrale-upwind.

Le equazioni di Eulero, tridimensionali ed instazionarie sono state risolte utilizzando lo schema di Kurganov e Tadmor, implementato in un solutore per il software OpenFOAM.

La geometria del sistema è stata mantenuta simmetrica rispetto al piano di bisezione del corner, e gli angoli di sweep e diedro relativi al sistema di rampe è stato mantenuto nullo.

Il dominio computazionale è stato definito in modo da escludere potenziali influenze delle condizioni al contorno sulla soluzione.

Le condizioni al contorno applicate sono state valutate analogamente.

Una griglia computazionale ottimizzata è stata realizzata tramite una suddivisione in blocchi del dominio ed un'opportuna parametrizzazione della geometria di questi.

La conoscenza della topologia generale del fenomeno ha permesso di attribuire in maniera differente per ciascun blocco numero di celle computazionali e gradazione nelle dimensioni delle stesse, al fine di massimizzare la risoluzione nelle zone di maggior interesse del flusso.

E' stato condotto uno studio di grid refinement, volto a selezionare il numero ottimale di celle computazionali, stabilito come limite oltre il quale la soluzione risulta indipendente dal numero di punti della griglia, ed è stato definito il numero di celle congruentemente.

L'accuratezza della griglia nel descrivere una soluzione self-similare in coordinate coniche, peculiarità della soluzione del corner flow non viscoso, è stata verificata con due approcci differenti ed ha dato esiti positivi.

L'apparato griglia-solutore è stato validato tramite il confronto diretto con dati sperimentali e numerici presenti in letteratura relativi ad un caso di studio

specifico. I risultati comparati hanno dato esito soddisfacente.

Sono stati selezionati tre casi di studio per una ricerca focalizzata sull'esistenza di soluzioni stabili ed asimmetriche rispetto alla bisettrice del corner nella configurazione assunta dai tipici avvolgimenti contro-rotanti che le superfici di contatto formano in questo particolare flusso.

Il confronto con i dati provenienti da studi precedenti ha dato un buon riscontro per quanto riguarda la topologia generale del fenomeno.

Lo schema numerico centrale-upwind utilizzato si è dimostrato adeguato allo sviluppo di soluzioni comprendenti complicati sistemi tridimensionali di riflessione di onde d'urto.

Non è stato tuttavia possibile riscontrare alcun tipo di soluzione asimmetrica stabile nello sviluppo delle strutture vorticose, contrariamente a quanto fatto in alcuni studi presenti in letteratura.

La simmetria delle soluzioni ottenute è stata verificata valutando la differenza tra le forze di pressione agenti sulle due rampe e monitorando le variabili di interesse in varie regioni del dominio simmetriche rispetto al piano di bisezione del corner.

Le possibili ragioni di tale mancata osservazione sono molteplici, e necessitano sicuramente di ulteriori studi.

Una delle possibilità è che la soluzione asimmetrica ricercata sia una soluzione particolare riconducibile alla natura delle equazioni risolte.

Tra gli studi presenti in letteratura consultati, infatti, nessuno di quelli in cui è stato risolto il sistema di equazioni utilizzato in questa tesi (Eulero tridimensionale, non stazionario), ha presentato risultati che comprendessero soluzioni asimmetriche.

Viceversa, la soluzione delle equazioni di Eulero in coordinate coniche, o tramite tecnica space-marching, ha fornito soluzioni asimmetriche.

Una seconda possibilità, evidenziata anche in [11] e [17], è che lo schema numerico utilizzato sia troppo diffusivo.

L'effetto della viscosità numerica introdotta dallo schema di ordine di accuratezza due nello spazio potrebbe essere sufficiente a stabilizzare la soluzione simmetrica anche oltre le sue effettive condizioni limite di esistenza.

L'applicazione di schemi centrali-upwind di ordine superiore a quello impiegato potrebbe, in futuri studi, escludere o confermare questa possibilità.

Bibliografia

- [1] John D. Anderson. *Modern Compressible Flow with historical perspective*. Mc Graw Hill, 2003.
- [2] Y. Goonko, Alexey Kudryavtsev e R. Rakhimov. “Supersonic Inviscid Flows With Three-Dimensional Interaction of Shock Waves in Corners Formed by Intersecting Wedges”. In: (lug. 2002), p. 8.
- [3] M. S. Ivanov et al. “Transition between regular and Mach reflection of shock waves: new numerical and experimental results”. In: *Shock Waves* 11.3 (2001), pp. 199–207.
- [4] Yu.P. Gun’ko, Alexey Kudryavtsev e R.D. Rakhimov. “Supersonic Inviscid Corner Flows with Regular and Irregular Shock Interaction”. In: *Fluid Dynamics* 39 (mar. 2004).
- [5] Yu. P. Goonko e A. N. Kudryavtsev. “Numerical modelling of free interaction of shock waves in corner flows”. In: *Thermophysics and Aeromechanics* 13.2 (2006), pp. 221–237.
- [6] G. Ben-Dor. *Shock Wave Reflection Phenomena*. Springer, 1992.
- [7] P. Naidoo e Beric Skews. “Supersonic viscous corner flows”. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* 226 (ago. 2012), pp. 950–965.
- [8] John E. West e Robert H. Korkegi. “Supersonic Interaction in the Corner of Intersecting Wedges at High Reynolds Numbers”. In: *AIAA Journal* 10.5 (1972), pp. 652–656.
- [9] Ralph D. Watson e Leonard M. Weinstein. “A Study of Hypersonic Corner Flow Interactions”. In: *AIAA Journal* 9.7 (1971), pp. 1280–1286.
- [10] Charwat A. F. e Redekeopp L. G. “Supersonic interference flow along the corner of intersecting wedges.” In: *AIAA Journal* 5.3 (1967), pp. 480–488.
- [11] Marsilio R. “Vortical Solutions in Supersonic Corner Flows”. In: *AIAA Journal* 31.9 (set. 1993).

-
- [12] P. Kutler. “Numerical solution for the inviscid supersonic flow in the corner formed by two intersecting wedges”. In: *6th Fluid and Plasma Dynamics Conference*.
- [13] V. Shankar, D. Anderson e P. Kutler. “Numerical solutions for supersonic corner flow”. In: *Journal of Computational Physics* 17.2 (1975), pp. 160–180.
- [14] Y. Goonko, Alexey Kudryavtsev e A. Chpoun. “3D interaction of shock waves in corner flow”. In: (gen. 2005).
- [15] Ravi Samtaney e D. I. Pullin. “On initial-value and self-similar solutions of the compressible Euler equations”. In: *Physics of Fluids* 8.10 (1996), pp. 2650–2655.
- [16] Y.-T. Zhang e C.-W. Shu. “Chapter 5 - ENO and WENO Schemes”. In: *Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems*. A cura di Rémi Abgrall e Chi-Wang Shu. Vol. 17. Handbook of Numerical Analysis. Elsevier, 2016, pp. 103–122.
- [17] G. Degrez et al. “Asymmetric vortical solutions in supersonic corners: Steady 3-d space-marching versus time-dependent conical results”. In: *AIAA 27th Fluid Dynamics Conference*. 1993.
- [18] J.D. Anderson. *Computational Fluid Dynamics*. Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications. McGraw-Hill Education, 1995.
- [19] Charles Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Elsevier, 2007.
- [20] Philip Roe. “Approximate Riemann Solvers, Parameter Vector, and Difference Schemes”. In: *Journal of Computational Physics* 43 (ott. 1981), pp. 357–372.
- [21] Haim Nessyahu e Eitan Tadmor. “Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws”. In: *Journal of Computational Physics* 87.2 (1990), pp. 408–463.
- [22] Bram van Leer. “Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second-order Sequel to Godunov’s Method”. In: *Journal of Computational Physics* 32 (lug. 1979), pp. 101–136.
- [23] Alexander Kurganov e Eitan Tadmor. “New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection–Diffusion Equations”. In: *Journal of Computational Physics* 160.1 (2000), pp. 241–282.

- [24] Christopher J. Greenshields et al. “Implementation of semi-discrete, non-staggered central schemes in a colocated, polyhedral, finite volume framework, for high-speed viscous flows”. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 63.1 (2010), pp. 1–21.
- [25] H.G. Weller et al. “A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques”. In: *Computers in Physics* 12.6 (1998).
- [26] Alexander Kurganov, Sebastian Noelle e Guergana Petrova. “Semidiscrete Central-Upwind Schemes for Hyperbolic Conservation Laws and Hamilton-Jacobi Equations”. In: *J. Comput. Phys. SIAM J. Sci. Comput* 23 (gen. 2000), pp. 707–740.

Ringraziamenti

Alla vigilia di un traguardo tanto importante non posso che ringraziare di cuore le persone che mi hanno accompagnato lungo questo percorso.

Un primo, immancabile ringraziamento va ai miei genitori, che hanno sempre creduto in me, motivandomi nel perseguire questo obiettivo. Grazie mamma, grazie papà.

Un ringraziamento speciale va anche ad Emma, che volente o meno, causa le circostanze imprevedibili della vita, ha vissuto l'intero sviluppo di questo elaborato, offrendomi tutto quello che una persona possa desiderare per sentirsi felice anche in periodi di stress.

Grazie agli amici storici e recenti, che hanno reso l'esperienza di Torino indimenticabile: grazie a Ludovico e Francesco per gli interminabili venerdì sera passati insieme, grazie a Nora ed Ivan per avermi accolto nei momenti di difficoltà.

Infine, ma non ultimi per importanza, grazie agli amici del VII Rugby, che a partire dal primo giorno mi hanno fatto sentire in famiglia.